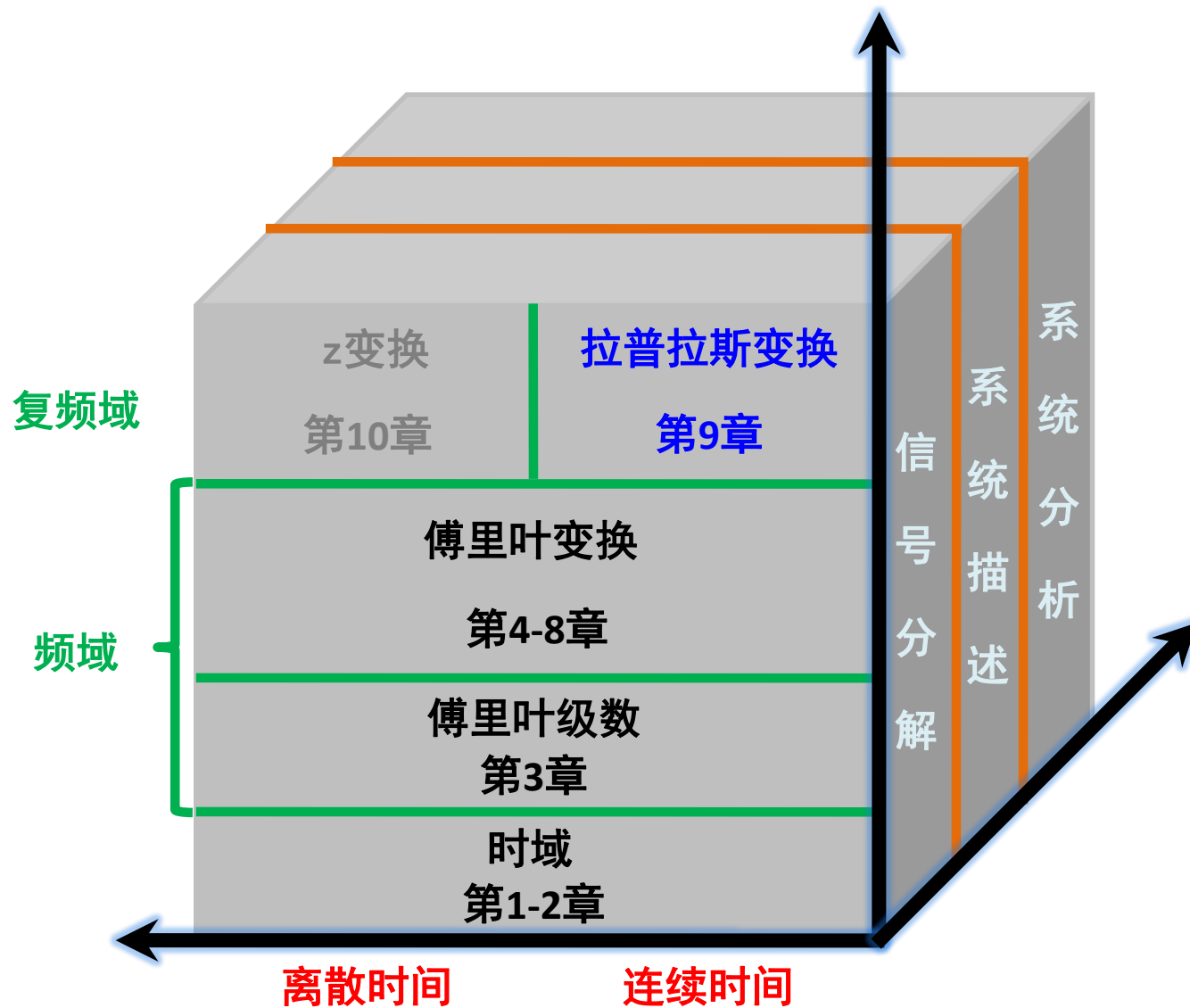

第9章 拉普拉斯变换

The Laplace Transform

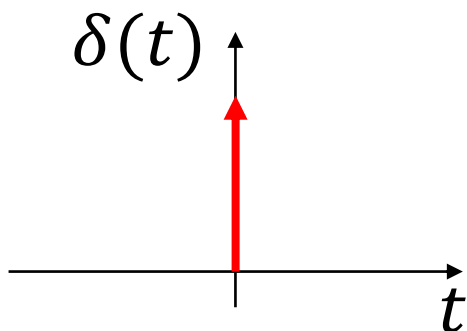


信号与系统 知识体系三维结构

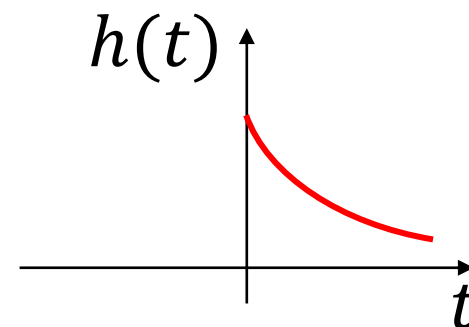
回顾：基本信号分解

基本信号分解——信号与系统分析的**基础**

单位冲激



单位冲激响应



$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$
$$= x(t) * h(t)$$

卷积积分

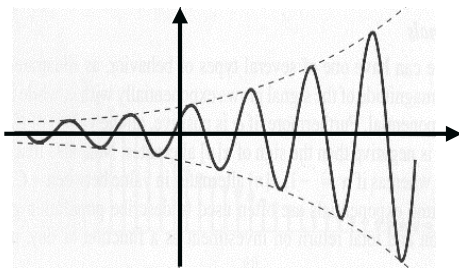
计算繁琐！

LTI系统对复指数信号的响应

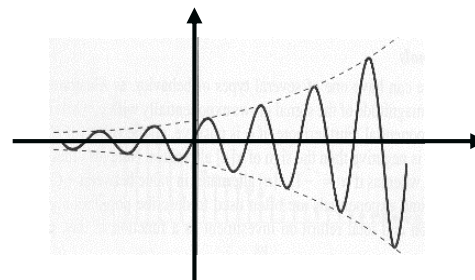
基本信号分解——信号与系统分析的**基础**

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

复指数信号 e^{st}



系统响应 $H(s)e^{st}$



LTI

$$y(t) = e^{st} * h(t) = h(t) * e^{st} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau e^{st} = H(s) e^{st}$$

与时间 t 无关

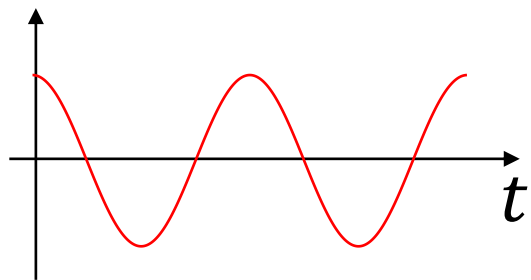
线性加权!

LTI系统对复指数信号的响应

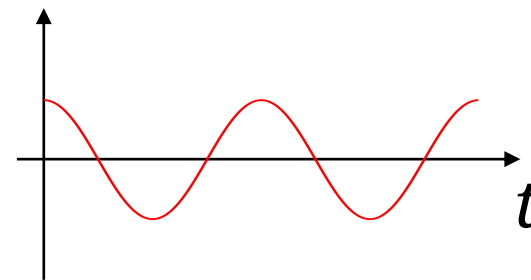
$s = j\omega$ 时——傅里叶变换

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

复指数信号 $e^{j\omega t}$



系统响应 $H(j\omega)e^{j\omega t}$



$$x(t) = \sum_k a_k e^{j\omega_k t}$$

线性组合

$$y(t) = \sum_k H(j\omega_k) a_k e^{j\omega_k t}$$

线性组合

$s = \sigma + j\omega$ 时——拉普拉斯变换

9.0 引言

- 傅里叶变换是以复指数函数的特例 $e^{j\omega t}$ 和 $e^{j\omega n}$ 为基底分解信号的。
若采用更一般的复指数函数 e^{st} 和 z^n 为基底对信号进行分解，则分别获得拉普拉斯变换和 z 变换。
- 通过本章及下一章，会看到拉普拉斯变换和 z 变换不仅能解决用傅里叶分析方法可以解决的信号与系统分析问题，而且还能用于傅里叶分析方法不适用的许多方面。

9.1 拉普拉斯变换

9.1 拉普拉斯变换

一. 双边拉普拉斯变换的定义:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

称为 $x(t)$ 的**双边拉普拉斯变换**，其中 $s = \sigma + j\omega$ 。

若 $\sigma = 0$ ， $s = j\omega$ 则有： $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ ，这就是 $x(t)$ 的傅里叶变换。

表明：连续时间傅里叶变换是双边拉普拉斯变换在 $\sigma = 0$ 或是在 $j\omega$ 轴上的特例，

即 $X(s)|_{s=j\omega} = X(j\omega)$ 。

9.1 拉普拉斯变换

由于

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t}dt = \mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}]$$

所以 $x(t)$ 的拉普拉斯变换就是 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换。

例1. $x(t) = e^{-at}u(t)$

例2. $x(t) = -e^{-at}u(-t)$

9.1 拉普拉斯变换

例1. $x(t) = e^{-at}u(t)$

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a}$$

在 $\text{Re}[s] > -a$ 时，积分收敛。

当 $a = 0$ 时， $x(t) = e^{-at}u(t) = u(t)$ ，可知

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}, \quad \text{Re}[s] > 0$$

当 $a > 0$ 时，拉普拉斯变换收敛的区域包括了 $\sigma = 0$ （即 $j\omega$ 轴）， $x(t)$ 的傅里叶变换存在：

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega} \quad (a > 0)$$

9.1 拉普拉斯变换

例2. $x(t) = -e^{-at}u(-t)$

$$X(s) = -\int_{-\infty}^0 e^{-at} e^{-st} dt = -\int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}[s] < -a$$

与例1比较，区别仅在于积分收敛条件不同。

- 由以上例子，可以看出：
 1. 不同的信号可能会有完全相同的拉普拉斯变换表达式，只是它们的收敛域不同。拉普拉斯变换的表达式只有连同相应的收敛域，才能和信号建立一一对应的关系。

9.1 拉普拉斯变换

2. 并非 s 平面上的任何复数都能使拉普拉斯变换收敛，也不是任何信号的拉普拉斯变换都存在。
3. 使拉普拉斯变换收敛的复数 s 的集合，称为拉普拉斯变换的收敛域 (Region of Convergence, ROC)。拉普拉斯变换的收敛域对拉普拉斯变换是非常重要的概念。

9.1 拉普拉斯变换

二. 拉普拉斯变换的ROC及零极点图:

若 $X(s)$ 是有理函数

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = M \frac{\prod_i (s - \beta_i)}{\prod_i (s - \alpha_i)}$$

- 分子多项式的根称为**零点**，分母多项式的根称为**极点**。
- 将 $X(s)$ 的全部零点和极点表示在 s 平面上，就构成了**零极点图**。零极点图及其收敛域可以表示一个 $X(s)$ ，最多与真实的 $X(s)$ 相差一个常数因子 M 。

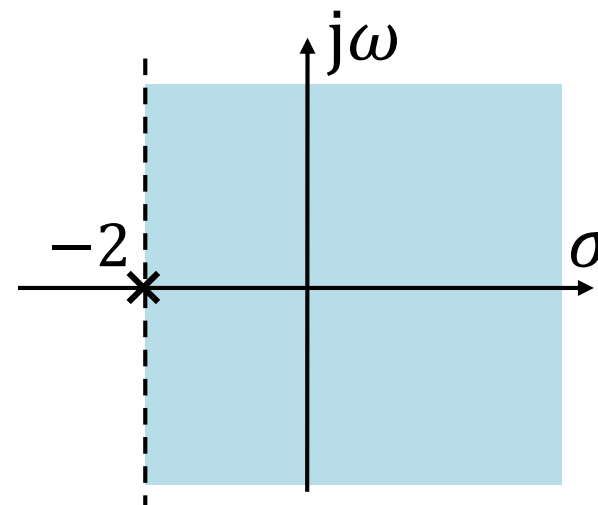
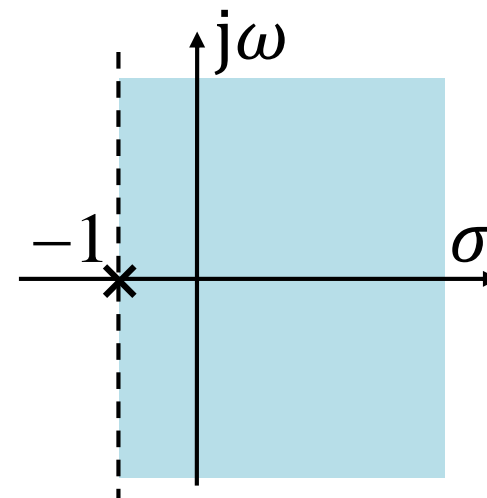
9.1 拉普拉斯变换

例3. $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-t}e^{-st}dt + \int_0^{\infty} e^{-2t}e^{-st}dt$$

$$\therefore e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}[s] > -1$$

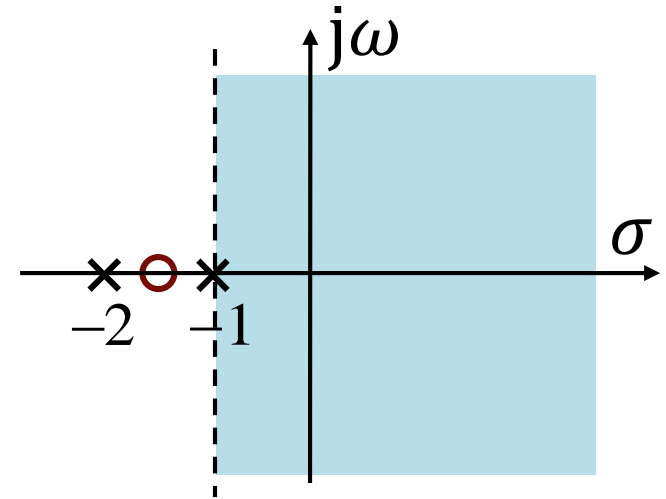
$$e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2}, \quad \text{Re}[s] > -2$$



9.1 拉普拉斯变换

$$\therefore X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+3}{s^2+3s+2},$$

$$\text{Re}[s] > -1$$



可见：拉普拉斯变换的收敛域是各个收敛域的公共部分。ROC总是以平行于 $j\omega$ 轴的直线作为边界的，ROC的边界总是与 $X(s)$ 的分母的根相对应。

9.2 拉普拉斯变换的收敛域

9.2 拉普拉斯变换的收敛域

- 熟悉关于拉普拉斯变换ROC的性质能使我们深入理解 $X(s)$ 及其与 $x(t)$ 时域特性的联系。
- ROC的性质可归纳如下：
 - 1. ROC是 s 平面上平行于 $j\omega$ 轴的带形区域。
 - 2. 有理拉普拉斯变换在其ROC内无任何极点。
 - 3. 绝对可积的时限信号其ROC是整个 s 平面。

9.2 拉普拉斯变换的收敛域

- 4. 右边信号的ROC位于s平面内一条平行于j ω 轴的直线的右边。

若 $x(t)$ 是右边信号，非零区间起点 $T \leq t < \infty$ ， σ_0 在ROC内，则 $x(t)e^{-\sigma_0 t}$ 绝对可积，即：

$$\int_T^{\infty} |x(t)e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty$$

对 $\forall \sigma_1 > \sigma_0$ ：

$$\begin{aligned} \int_T^{\infty} |x(t)e^{-\sigma_1 t}| dt &= \int_T^{\infty} |x(t)e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t}| dt \\ &\leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T} \int_T^{\infty} |x(t)e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty \end{aligned}$$

表明 σ_1 也在收敛域内。

9.2 拉普拉斯变换的收敛域

- 5. 左边信号的ROC位于s平面内一条平行于j ω 轴的直线的左边。

若 $x(t)$ 是左边信号，非零区间为 $(-\infty, T]$ ， σ_0 在ROC内，则对 $\forall \sigma_1 < \sigma_0$ ：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^T |x(t)e^{-\sigma_1 t}| dt &= \int_{-\infty}^T |x(t)e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t}| dt \\ &\leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T} \int_{-\infty}^T |x(t)e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty\end{aligned}$$

表明 σ_1 也在收敛域内。

9.2 拉普拉斯变换的收敛域

- 6. 双边信号的ROC如果存在，一定是 s 平面内平行于 $j\omega$ 轴的带形区域。
- 7. 当 $X(s)$ 是有理函数时，其ROC总是由 $X(s)$ 的极点分割的。ROC必然满足下列规律：
 - 右边信号的ROC一定位于 $X(s)$ 最右边极点的右边。
 - 左边信号的ROC一定位于 $X(s)$ 最左边极点的左边。
 - 双边信号的ROC可以是任意两相邻极点之间的带形区域。

9.2 拉普拉斯变换的收敛域

例1. $x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 < t < T \\ 0, & \text{其它 } t \end{cases}$

例2. $x(t) = e^{-b|t|}$

例3. $X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$

9.2 拉普拉斯变换的收敛域

例1. $x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 < t < T \\ 0, & \text{其它 } t \end{cases}$

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^T e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a} [1 - e^{-(s+a)T}]$$

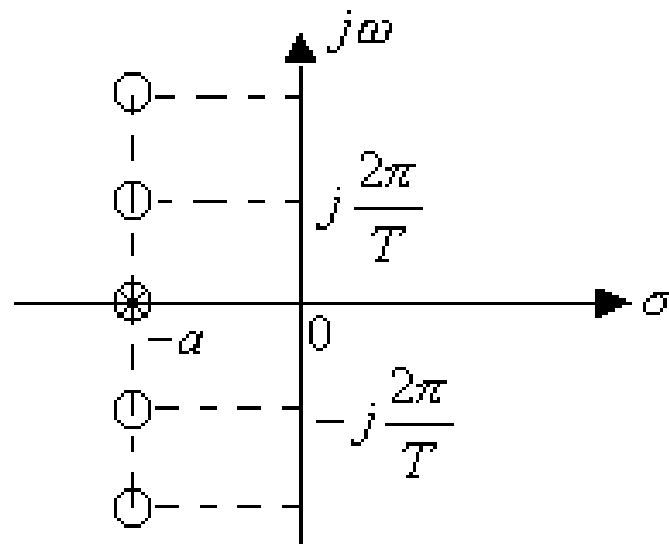
$X(s)$ 有极点 $s = -a$

考查零点, 令 $e^{-(s+a)T} = 1$

得 $s = -a + j2\pi k / T$ (k 为整数)

因此 $X(s)$ 在 $s = -a$ 也有一阶零点,

由于零极点相抵消, 致使在整个 s 平面上无极点。



9.2 拉普拉斯变换的收敛域

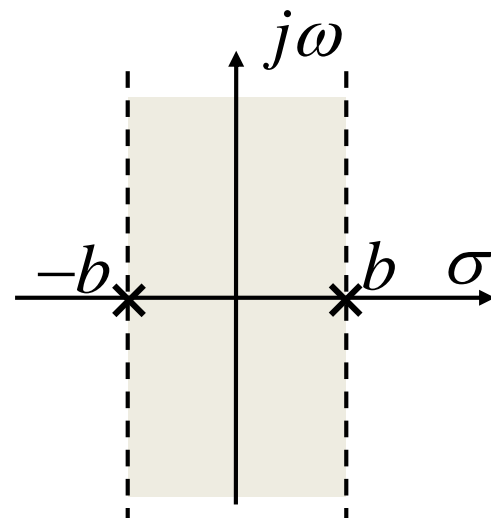
例2. $x(t) = e^{-b|t|}$

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t)$$

$$e^{-bt}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+b}, \quad \text{Re}[s] > -b$$

$$e^{bt}u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s-b}, \quad \text{Re}[s] < +b$$

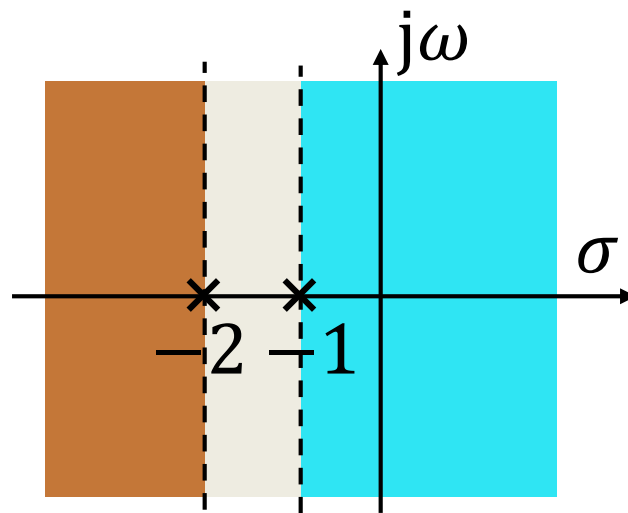
当 $b > 0$ 时, 上述ROC有公共部分,



9.2 拉普拉斯变换的收敛域

例3.

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \\ &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$



可以形成三种 ROC:

1) ROC: $\text{Re}[s] > -1$

此时 $x(t)$ 是右边信号。

2) ROC: $\text{Re}[s] < -2$

此时 $x(t)$ 是左边信号。

3) ROC: $-2 < \text{Re}[s] < -1$

此时 $x(t)$ 是双边信号。

9.3 拉普拉斯反变换

9.3 拉普拉斯反变换

一. 定义:

由
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

若 $s = \sigma + j\omega$ 在ROC内, 则有:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}]$$

$$\therefore x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{\sigma t} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) e^{st} d\omega$$

9.3 拉普拉斯反变换

由 $s = \sigma + j\omega$ 得 $ds = j d\omega$

当 ω 从 $-\infty \rightarrow +\infty$ 时, s 从 $\sigma - j\infty \rightarrow \sigma + j\infty$

$$\therefore x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

—— $X(s)$ 的反变换

拉普拉斯反变换表明:

$x(t)$ 可以被分解成复振幅为 $\frac{1}{2\pi j} X(s) ds$ 的复指数信号 e^{st} 的线性组合。

9.3 拉普拉斯反变换

二. 求拉普拉斯反变换的部分分式展开法:

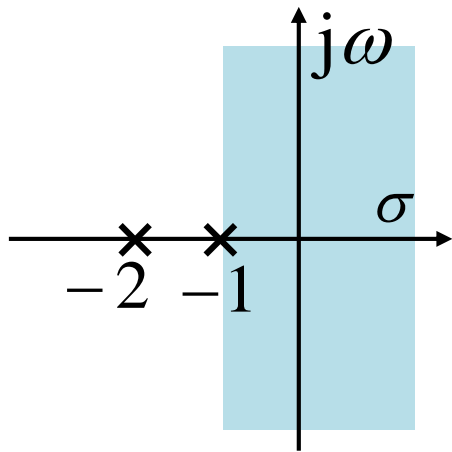
1. 将 $X(s)$ 展开为部分分式;
2. 根据 $X(s)$ 的ROC, 确定每一项的ROC;
3. 利用常用信号变换对与拉普拉斯变换性质, 对每一项进行反变换。

例1. 对以下拉普拉斯变换表达式, 确定其可能的收敛域及对应信号。

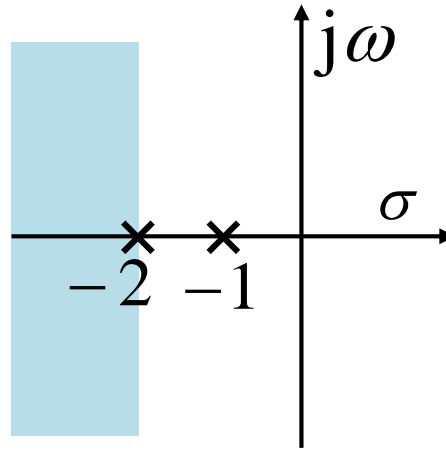
$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

分析: 该变换的极点为 $s_1 = -1$, $s_2 = -2$

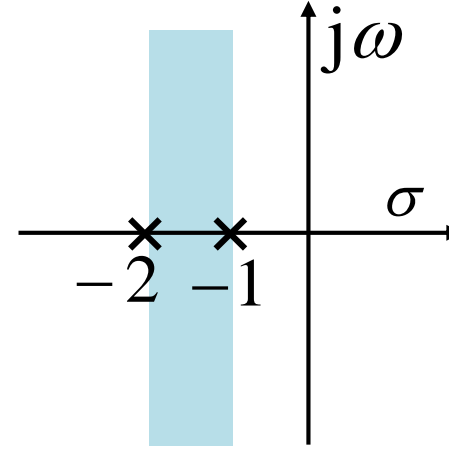
9.3 拉普拉斯反变换



右边信号



左边信号



双边信号

假设 ROC: $-2 < \text{Re}[s] < -1$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

❖ Some useful Laplace transform pairs (Summary)

$\mathcal{S}(t)$	\leftrightarrow	1	$\text{Re}[s] > -\infty$
$\mathcal{S}'(t)$	\leftrightarrow	s	$\text{Re}[s] > -\infty$
$e^{s_0 t} u(t)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{s - s_0}$	$\text{Re}[s] > \text{Re}[s_0]$
$e^{\alpha t} u(t)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{s - \alpha}$	$\text{Re}[s] > \alpha$
$e^{-\alpha t} u(t)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\text{Re}[s] > -\alpha$
$e^{j\beta t} u(t)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{s - j\beta}$	$\text{Re}[s] > 0$
$e^{-j\beta t} u(t)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{s + j\beta}$	$\text{Re}[s] > 0$
$u(t)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}[s] > 0$

9.3 拉普拉斯反变换

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \quad -2 < \operatorname{Re}[s] < -1$$

$$\frac{1}{s+1} \rightarrow \text{ROC} : \operatorname{Re}[s] < -1 \leftrightarrow -e^{-t}u(-t)$$

$$\frac{1}{s+2} \rightarrow \text{ROC} : \operatorname{Re}[s] > -2 \leftrightarrow e^{-2t}u(t)$$

$$\therefore x(t) = -e^{-2t}u(t) - e^{-t}u(-t)$$

9.4 由零极点图对傅里叶变换几何求值

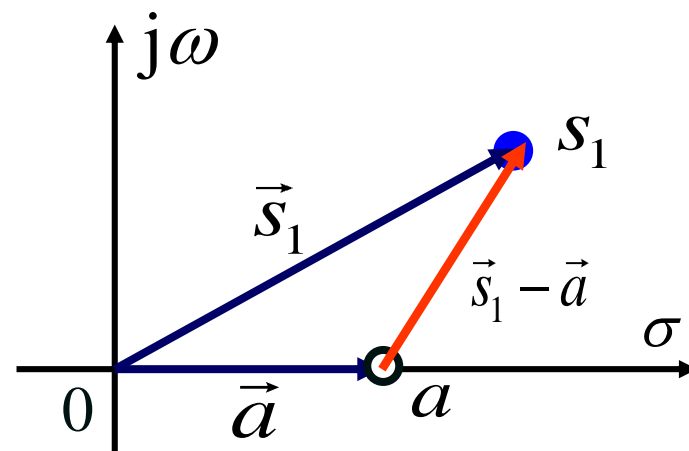
9.4 由零极点图对傅里叶变换几何求值

- 可以用零极点图表示 $X(s)$ 的特征，则 $j\omega$ 轴上的 $X(s)$ （若收敛）就是 $X(j\omega)$ 。以此为基础可以用几何求值的方法从零极点图求得 $X(j\omega)$ 的特性。这在定性分析系统频率特性时有很大用处。

1. 单零点情况： $X(s) = s - a$

零点 $s = a$ ，要求出 $s = s_1$ 时的 $X(s_1)$ ，可以作两个矢量 \vec{s}_1 和 \vec{a} ，则 $X(s_1) = \vec{s}_1 - \vec{a}$ 。

矢量 $\vec{s}_1 - \vec{a}$ 称为**零点矢量**，它的长度 $|\vec{s}_1 - \vec{a}|$ 表示 $|X(s_1)|$ ，其幅角即为 $\angle X(s_1)$ 。



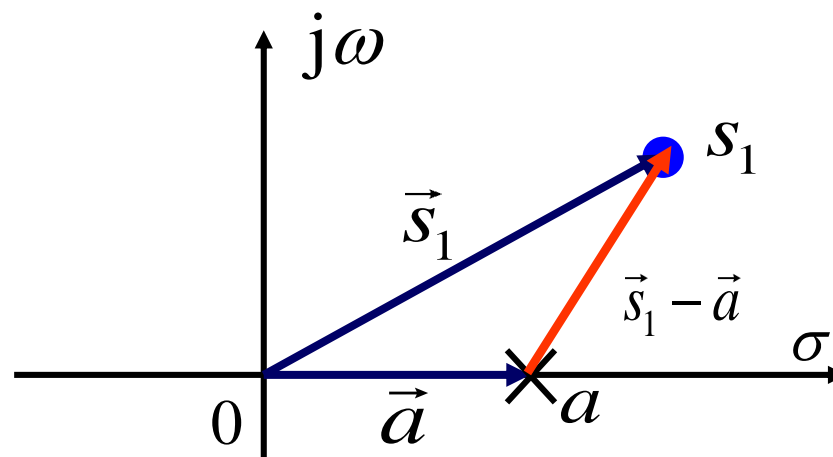
9.4 由零极点图对傅里叶变换几何求值

2. 单极点情况:

$$X(s) = \frac{1}{s-a}, \text{ 极点 } s=a$$

$$|X(s_1)| = \frac{1}{|\vec{s}_1 - \vec{a}|}$$

$$\angle X(s_1) = -\angle(\vec{s}_1 - \vec{a})$$



直接由极点向 s_1 点作矢量（称为**极点矢量**）， $|X(s_1)|$ 为该矢量长度的倒数， $\angle X(s_1)$ 为该矢量幅角的负值。

9.4 由零极点图对傅里叶变换几何求值

3. 一般情况：对有理函数形式的 $X(s)$

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = M \frac{\prod_{i=1}^R (s - \beta_i)}{\prod_{j=1}^P (s - \alpha_j)}$$

因此有：

$$|X(s_1)| = |M| \frac{\prod_{i=1}^R |\vec{s}_1 - \vec{\beta}_i|}{\prod_{j=1}^P |\vec{s}_1 - \vec{\alpha}_j|}$$

$$\angle X(s_1) = \sum_{i=1}^R \angle(\vec{s}_1 - \vec{\beta}_i) - \sum_{j=1}^P \angle(\vec{s}_1 - \vec{\alpha}_j)$$

9.4 由零极点图对傅里叶变换几何求值

- 即：从所有零点向 s_1 点作零点矢量，从所有极点向 s_1 点作极点矢量。所有零点矢量的长度之积除以所有极点矢量的长度之积即为 $|X(s_1)|$ 。所有零点矢量的幅角之和减去所有极点矢量的幅角之和即为 $\angle X(s_1)$ 。
- 当 s_1 取为 $j\omega$ 轴上的点时，即为傅里叶变换的几何求值。考查 s_1 在 $j\omega$ 轴上移动时所有零、极点矢量的长度和幅角的变化，即可得出 $X(j\omega)$ 的幅频特性和相频特性。

9.4 由零极点图对傅里叶变换几何求值

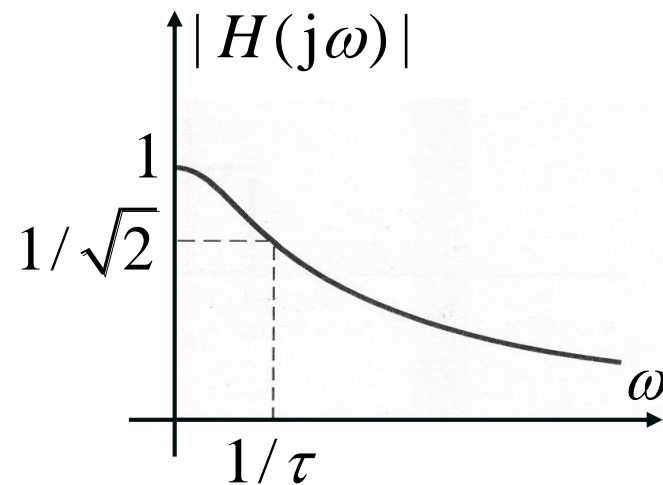
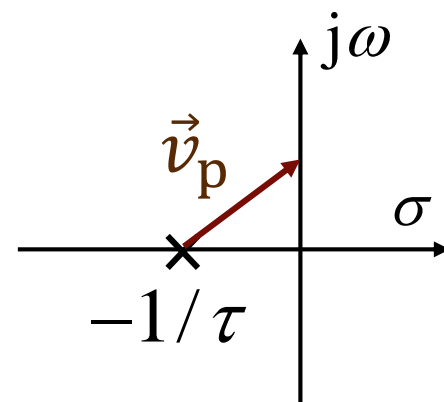
例1. 一阶因果LTI系统:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t),$$

$$H(s) = \frac{1/\tau}{s + (1/\tau)}, \quad \text{Re}[s] > -\frac{1}{\tau}$$

随着 $|\omega| \uparrow$, $|H(j\omega)|$ 单调下降, $|\omega| = 1/\tau$ 时, 下降到最大值的 $1/\sqrt{2}$ 。最大值在 $\omega = 0$ 时取得。

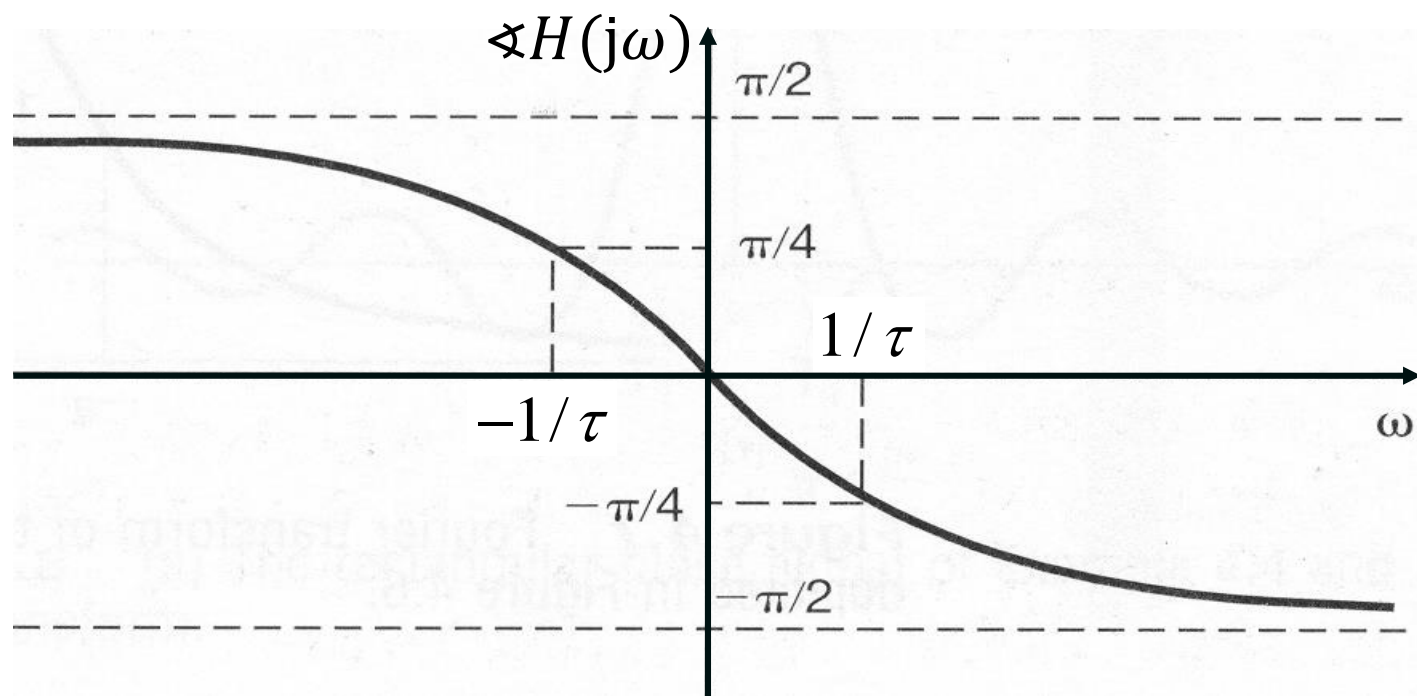
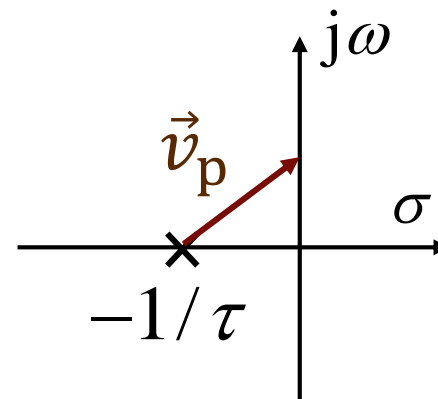


9.4 由零极点图对傅里叶变换几何求值

相位特性：当 $\omega = 0$ 时， $\angle H(j\omega) = 0$

随着 $\omega \uparrow$ ， $\angle H(j\omega)$ 趋向于 $-\pi/2$ 。

$\omega \downarrow$ ，则 $\angle H(j\omega)$ 趋向于 $\pi/2$ 。



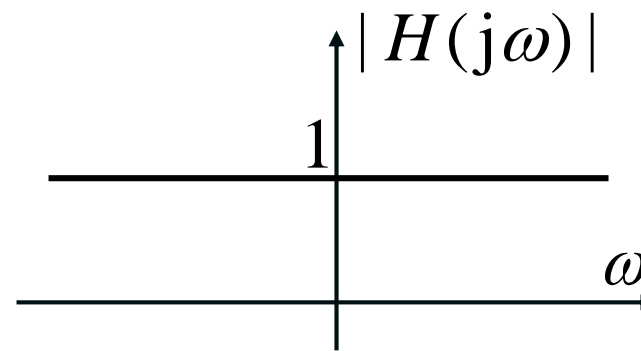
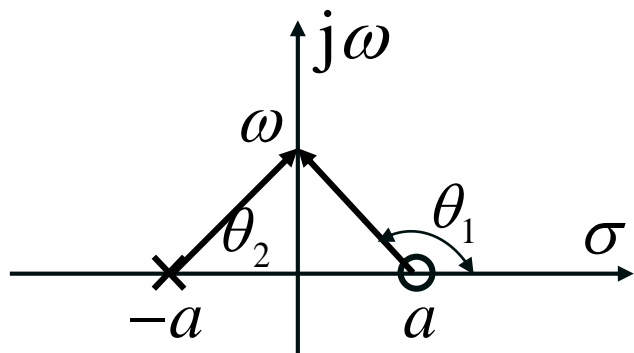
9.4 由零极点图对傅里叶变换几何求值

例2. 全通系统:

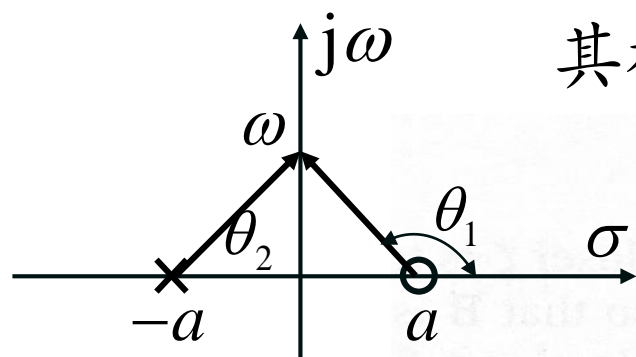
考查零极点对称分布的系统

$$H(s) = \frac{s-a}{s+a} \quad (\text{一阶全通系统})$$

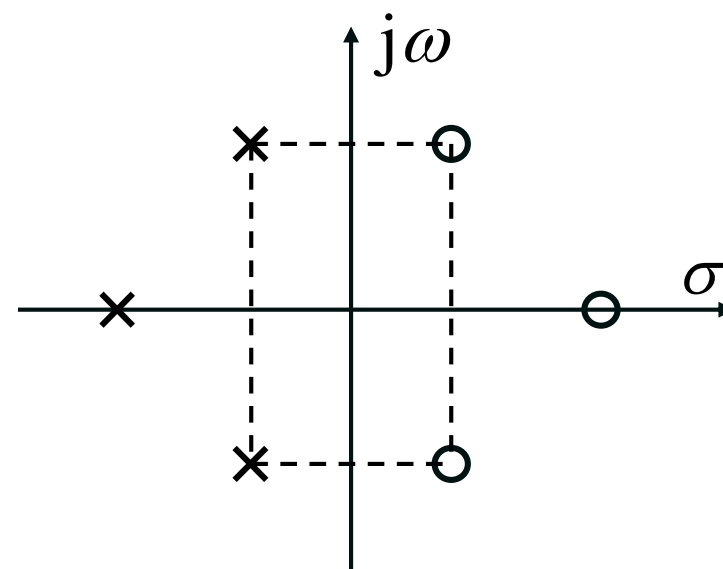
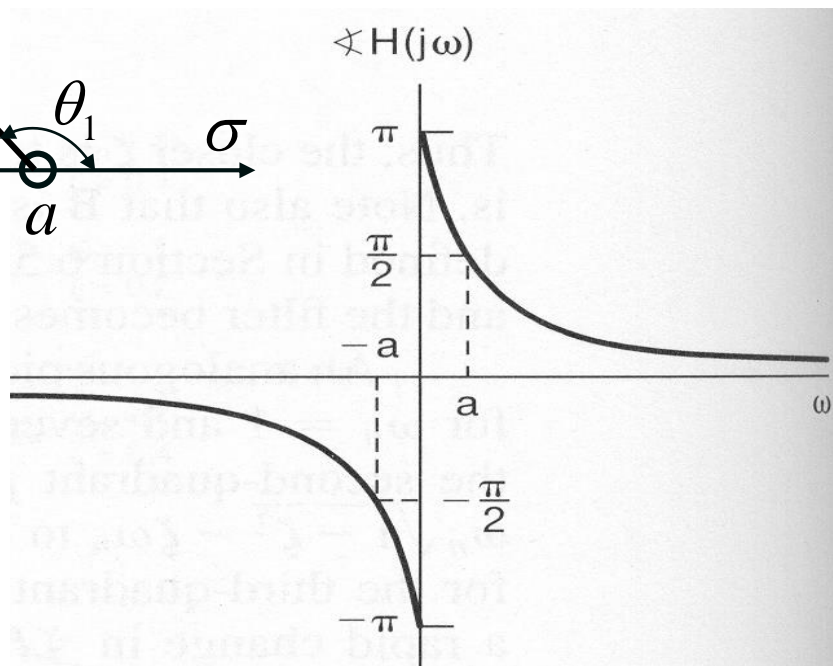
该系统的 $|H(j\omega)|$ 在任何时候都等于1，所以称为**全通系统**。



9.4 由零极点图对傅里叶变换几何求值



其相位特性 $\angle H(j\omega) = (\pi - \theta_2) - \theta_1 = \pi - 2\theta_1$



三阶全通系统

全通系统的零点和极点分布关于 $j\omega$ 轴对称。

全通系统被广泛用于对系统进行相位均衡。

9.5 拉普拉斯变换的性质

9.5 拉普拉斯变换的性质

- 拉普拉斯变换具有很多与傅里叶变换相似的重要性质，主要不同是这里需要考虑ROC。

1. 线性：

$$\text{若 } x_1(t) \leftrightarrow X_1(s), \quad \text{ROC} : R_1$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s), \quad \text{ROC} : R_2$$

$$\text{则 } ax_1(t) + bx_2(t) \leftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s)$$

$$\text{ROC至少是 } R_1 \cap R_2$$

9.5 拉普拉斯变换的性质

例.

$$x_1(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t) \quad x_2(t) = -e^{-t}u(t)$$

$$X_1(s) = 1 + \frac{1}{s+1} = \frac{s+2}{s+1}, \quad \text{ROC } R_1 : \sigma > -1$$

$$X_2(s) = \frac{-1}{s+1}, \quad \text{ROC } R_2 : \sigma > -1$$

$$\text{而 } x_1(t) + x_2(t) = \delta(t) \leftrightarrow 1$$

ROC扩大为整个 s 平面，原因是出现了零极点相抵消的现象。

当 R_1 与 R_2 无交集时，表明 $X(s)$ 不存在。

Example.

Laplace Transform for Unilateral sinusoidal and cosine functions based on

$$e^{j\beta t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - j\beta} \quad \text{Re}[s] > 0$$

$$u(t) \cos \omega t$$



$$f(t) = u(t) \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$



$$F(s) = \left(\frac{1}{s + j\omega} + \frac{1}{s - j\omega} \right) \frac{1}{2}$$
$$= \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$u(t) \sin \omega t$$



$$f(t) = u(t) \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$



$$F(s) = \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) \frac{1}{2j}$$
$$= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

9.5 拉普拉斯变换的性质

2. 时移性质:

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, ROC: R

则 $x(t - t_0) \leftrightarrow X(s)e^{-st_0}$, ROC 不变

9.5 拉氏变换的性质

已知 $f(t) = tu(t-1)$, 求 $F(s)$

已知 $f(t) = \sqrt{2} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)u(t)$, 求 $F(s)$ 。

9.5 拉普拉斯变换的性质

3. s 域平移:

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, ROC: R 则

$$x(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow X(s - s_0), \text{ ROC: } R + \text{Re}[s_0]$$

表明 $X(s - s_0)$ 的ROC是将 $X(s)$ 的ROC平移了一个 $\text{Re}[s_0]$ 。

9.5 拉普拉斯变换的性质

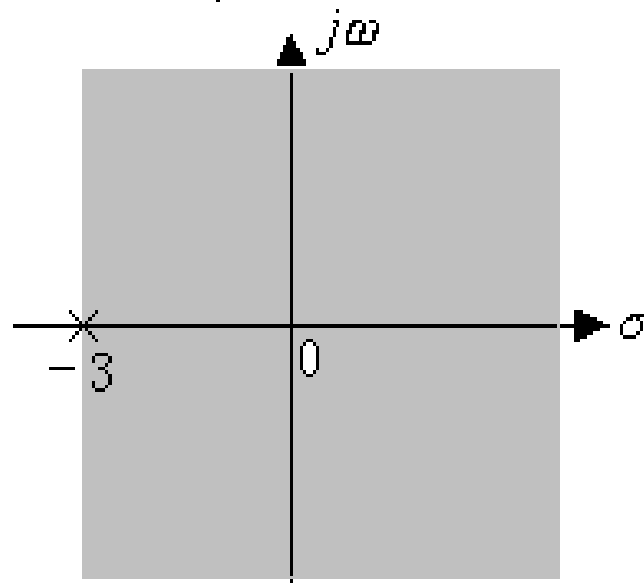
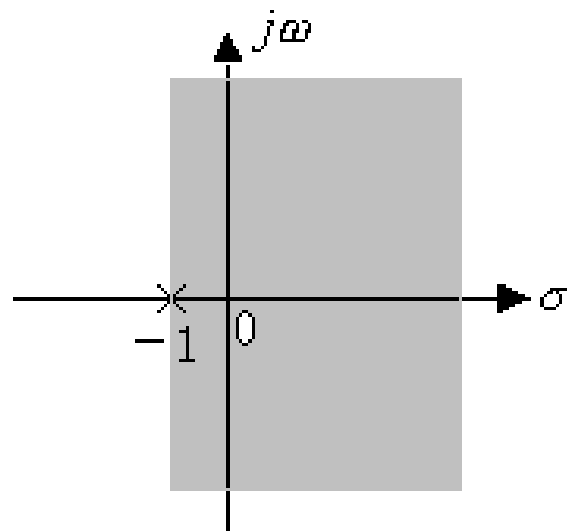
例. $x(t) = e^{-t}u(t),$

$$X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \sigma > -1$$

$$x(t) \cdot e^{-2t} = e^{-3t}u(t)$$

$$X(s+2) = \frac{1}{s+3}$$

显然 ROC: $\text{Re}[s] > -3$



Example: Determine the Laplace Transform of the attenuated sinusoidal function $e^{-\alpha t} \sin(\beta t)u(t)$

Based on

$$\sin(\beta t)u(t) \leftrightarrow F(s) = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}, \text{Re}[s] > 0$$

$$\text{Let } f(t) = \sin(\beta t)u(t)$$

$$\therefore \sin(\beta t)u(t) \leftrightarrow F(s) = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}, \text{Re}[s] > 0$$

\therefore According to the property of shifting in the s-domain

$$e^{-\alpha t} \sin(\beta t)u(t) \leftrightarrow F(s + \alpha) = \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

$$\text{Re}[s] > \sigma_0 + \sigma_\alpha = 0 - \alpha = -\alpha$$

9.5 拉普拉斯变换的性质

4. 时域尺度变换:

$$\text{若 } x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \text{ROC: } R$$

$$\text{则 } x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{ROC: } aR$$

当 $s \in R$ 时 $X(s)$ 收敛, $s/a \in R$ 时 $X(\frac{s}{a})$ 收敛。

可见: 若信号在时域尺度变换, 其拉普拉斯变换的ROC在 s 平面上作相反的尺度变换。

$$\text{特例 } x(-t) \leftrightarrow X(-s), \quad \text{ROC: } -R$$

9.5 拉普拉斯变换的性质

例.

$$x(t) = e^{-t}u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}[s] > -1$$

求 $x(t/2) = e^{-t/2}u(t)$ 的拉普拉斯变换 $X'(s)$ 及其ROC。

分析:

$$X'(s) = 2X(2s) = \frac{2}{2s+1} = \frac{1}{s+1/2},$$

$$\text{ROC: } \text{Re}[s] > -1/2$$

9.5 拉普拉斯变换的性质

5. 共轭对称性:

若 $x(t) \leftrightarrow X(s)$, ROC: R 则

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(s^*), \text{ ROC: } R$$

当 $x(t)$ 为实信号时, 有: $x^*(t) = x(t)$

$$\therefore X^*(s^*) = X(s) \text{ 或 } X^*(s) = X(s^*)$$

因此, 如果 $x(t)$ 是实信号, 且 $X(s)$ 在 s_0 有极点 (或零点), 则 $X(s)$ 一定在 s_0^* 也有极点 (或零点)。即实信号的拉普拉斯变换其复数零、极点必共轭成对出现。

9.5 拉普拉斯变换的性质

6. 卷积性质:

若

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(s), \quad \text{ROC} : R_1$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s), \quad \text{ROC} : R_2 \quad \text{则}$$

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s) \quad \text{ROC: 包括 } R_1 \cap R_2$$

ROC扩大的例子.

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{ROC } R_1 : \sigma > -1$$

$$X_2(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}, \quad \text{ROC } R_2 : \sigma > -2$$

$$\text{则: } R_1 \cap R_2 = \sigma > -1$$

9.5 拉普拉斯变换的性质

$$X_1(s)X_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}, \quad \sigma > -2, \quad \text{ROC 扩大}$$

原因是 $X_1(s)$ 与 $X_2(s)$ 相乘时，发生了零极点相抵消的现象。当被抵消的极点恰好在ROC的边界上时，就会使收敛域扩大。

7. 时域微分:

若

$$x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \text{ROC: } R$$

则

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s), \quad \text{ROC 包括 } R, \text{ 有可能扩大。}$$

9.5 拉普拉斯变换的性质

8. s 域微分:

$$\text{若 } x(t) \leftrightarrow X(s), \quad \text{ROC: } R$$

$$\text{则 } -tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}, \quad \text{ROC: } R$$

例. $X(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \quad \text{ROC: } \sigma > -a \quad \text{求 } x(t)$

分析:

$$\because \frac{1}{(s+a)^2} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+a} \right)$$

$$\therefore x(t) = te^{-at}u(t)$$

Example. Determine the Laplace Transform of $\frac{\sin(t)}{t} u(t)$

$$\sin(\beta t) u(t) \leftrightarrow F(s) = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}, \operatorname{Re}[s] > 0$$

$$\therefore \sin t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2 + 1}$$

\therefore According to the property of differentiation in the s-domain,

$$L\left[\frac{\sin(t)}{t} u(t)\right] = \int_s^\infty \frac{1}{\eta^2 + 1} d\eta = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan\left(\frac{1}{s}\right)$$

9.5 拉普拉斯变换的性质

9. 时域积分:

$$\text{若 } x(t) \leftrightarrow X(s) \quad \text{ROC: } R$$

$$\text{则 } \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s)$$

$$\text{ROC: 包括 } R \cap (\text{Re}[s] > 0)$$

这是因为

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t)$$

Example: Suppose $L[u(t)] = \frac{1}{s}$

Determine the LT of $t^n u(t)$ using the integral of unit step function.

$$\because \int_0^t u(x) dx = tu(t)$$

$$\left(\int_0^t\right)^2 u(x) dx = \int_0^t xu(x) dx = \frac{1}{2} t^2 u(t)$$

$$\left(\int_0^t\right)^3 u(x) dx = \int_0^t \frac{1}{2} x^2 u(x) dx = \frac{1}{3 \times 2} t^3 u(t) \quad \dots$$

$$\left(\int_0^t\right)^n u(x) dx = \frac{1}{n!} t^n u(t)$$

According to the property of integration in the Time Domain,

$$L[u(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\text{So, } L\left[\frac{t^n}{n!} u(t)\right] = L\left[\left(\int_0^t\right)^n u(x) dx\right] = \frac{1}{s^{n+1}}$$

$$\therefore t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

9.5 拉普拉斯变换的性质

10. 初值与终值定理:

如果 $x(t)$ 是因果信号, 且在 $t = 0$ 不包含奇异函数, 则

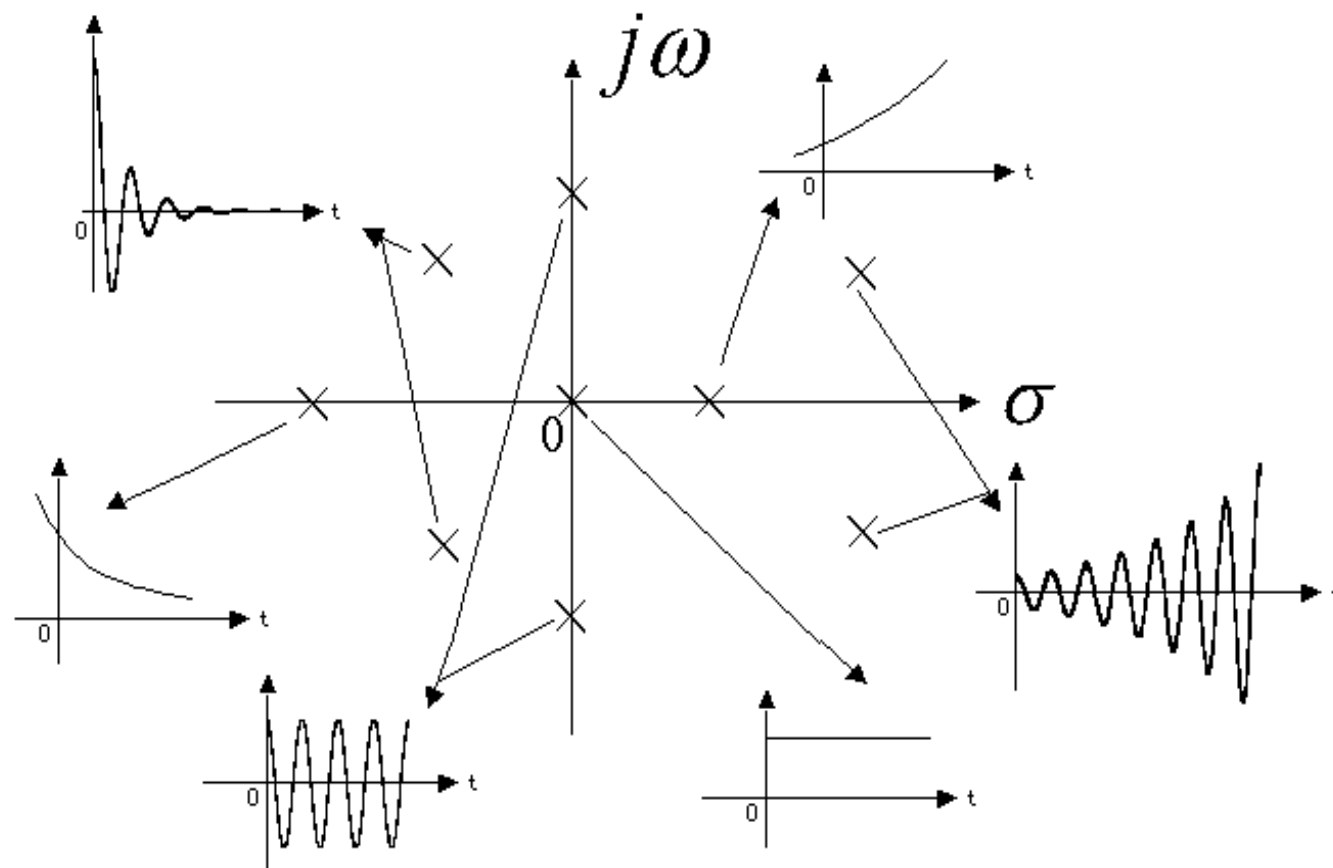
$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad \text{—— 初值定理}$$

如果 $x(t)$ 是因果信号, 且在 $t = 0$ 不包含奇异函数, $X(s)$ 除了在 $s = 0$ 可以有单阶极点外, 其余极点均在 s 平面的左半边, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad \text{—— 终值定理}$$

9.5 拉普拉斯变换的性质

极点在 s 平面的分布与信号终值的关系



9.6 常用拉氏变换对

Some Laplace Transform Pairs

(教材P442 表9.2)



• 9.7 用拉氏变换分析与表征LTI系统

Analysis and Characterization of LTI Systems Using the Laplace Transform

9.7 用拉普拉斯变换分析与表征LTI系统

一. 系统函数的概念:

- 以卷积特性为基础，可建立LTI系统的拉普拉斯变换分析方法，即

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

其中 $H(s)$ 是 $h(t)$ 的拉普拉斯变换，称为系统函数或转移函数、传递函数。

- 如果 $X(s)$ 、 $H(s)$ 和 $Y(s)$ 的ROC包括 $j\omega$ 轴，以 $s = j\omega$ 代入，即有

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

9.7 用拉普拉斯变换分析与表征LTI系统

- 这些方法成立的本质原因在于复指数函数是一切LTI系统的特征函数。
 - 当以 $e^{j\omega t}$ 为基底分解信号时，LTI系统对输入信号的响应就是 $X(j\omega)H(j\omega)$ 。
 - 而以 e^{st} 为基底分解信号时，系统的输出响应就是 $X(s)H(s)$ 。
 - $H(s)$ 连同相应的ROC也能完全描述一个LTI系统。系统的许多重要特性在 $H(s)$ 及其ROC中一定有具体的体现。

9.7 用拉普拉斯变换分析与表征LTI系统

二. 用系统函数表征LTI系统:

- 1. **因果性**: 如果 $t < 0$ 时 $h(t) = 0$, 则系统是**因果**的。如果 $t > 0$ 时 $h(t) = 0$, 则系统是**反因果**的。
- **因果系统**的 $h(t)$ 是右边信号, 其 $H(s)$ 的ROC必是**最右边极点的右边**; 当 $H(s)$ 是**有理函数**时, **逆命题成立**。
- **反因果系统**的 $h(t)$ 是左边信号, $H(s)$ 的ROC必是**最左边极点的左边**; 当 $H(s)$ 是**有理函数**时, **逆命题成立**。
- 例1.

$$h(t) = e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}, \text{Re}[s] > -1$$

9.7 用拉普拉斯变换分析与表征LTI系统

$$h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1) \leftrightarrow \frac{e^s}{s+1}, \quad \text{Re}[s] > -1$$

$$h(t) = e^{-|t|} \leftrightarrow \frac{-2}{s^2 - 1}, \quad -1 < \text{Re}[s] < 1$$

$$h(t) = e^t u(-t) \leftrightarrow \frac{-1}{s-1}, \quad \text{Re}[s] < 1$$

- 2. 稳定性: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$
- LTI系统稳定的充要条件是其 $H(s)$ 收敛域包括 $j\omega$ 轴。
- 因果稳定系统的 $H(s)$ 收敛域为包括 $j\omega$ 轴的 s 右半平面。

9.7 用拉普拉斯变换分析与表征LTI系统

例2. 某系统的 $h(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$, 由ROC判断其稳定性。

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+3}{s^2+3s+2},$$

$$\text{ROC: } \text{Re}[s] > -1$$

该ROC包括 $j\omega$ 轴, 因此系统是稳定的。

由于该系统也是因果的, 因此ROC为包括 $j\omega$ 轴的 s 右半平面。

9.7 用拉普拉斯变换分析与表征LTI系统

三. 由线性常系数微分方程描述的LTI系统:

如果由线性常系数微分方程描述的系统满足初始松弛条件, 则系统是因果LTI的, 其 $H(s)$ 的ROC必是最右边极点的右边。

对

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

两边进行拉普拉斯变换, 可得

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad (\text{有理函数})$$

系统的单位冲激响应 $h(t)$ 可由 $H(s)$ 反变换获得。

9.7 用拉普拉斯变换分析与表征LTI系统

练习：如图所示的LTI系统，已知下列情况：

$$X(s) = \frac{s+2}{s-2}, \quad x(t) = 0, t > 0$$

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

(a) 求 $H(s)$ 和它的收敛域。

(b) 求 $h(t)$ 。

(c) 若输入为 $x(t) = e^{3t}, -\infty < t < +\infty$

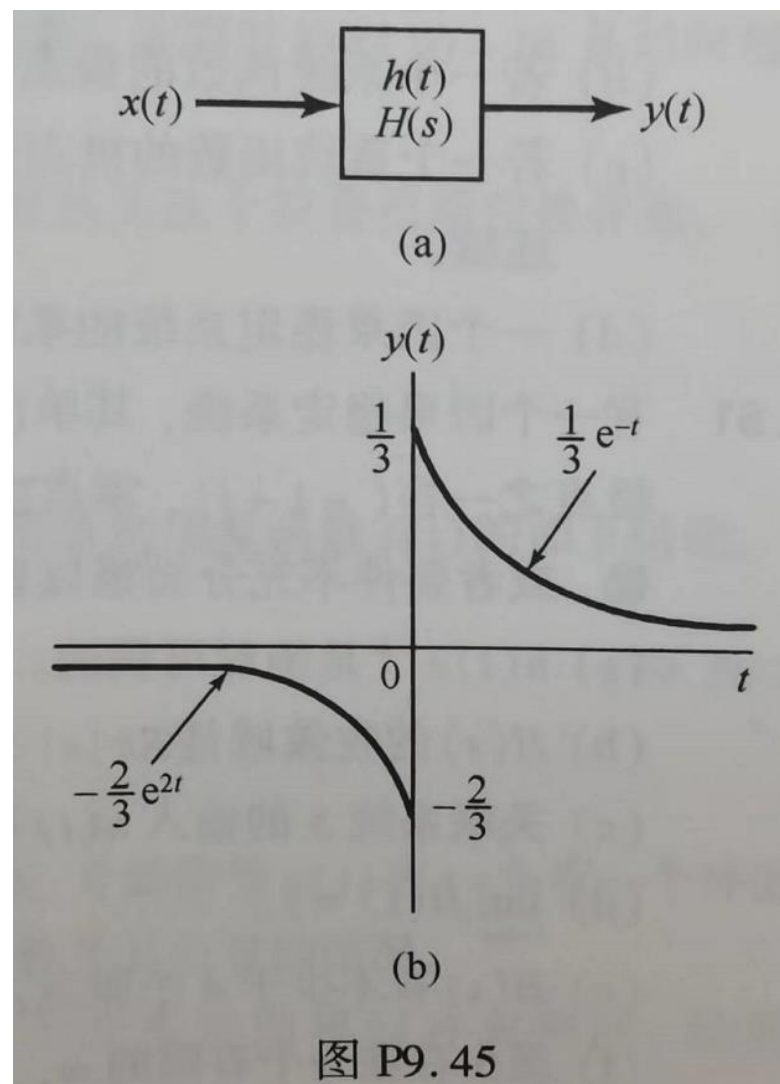
利用(a)中求得的系统函数 $H(s)$ ，求出 $y(t)$ 。

(教材习题9.45)

解：

$$(a) Y(s) = \frac{2/3}{s-2} + \frac{1/3}{s+1} = \frac{s}{(s-2)(s+1)}$$

ROC为 $-1 < \text{Re}[s] < 2$ 。



9.7 用拉普拉斯变换分析与表征LTI系统

同时 $x(t)$ 是左边信号，其ROC为 $\text{Re}[s] < 2$ 。

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{(s+2)(s+1)}$$

根据 $Y(s)$ 的ROC是 $X(s)$ 与 $H(s)$ 的ROC的交集可知， $H(s)$ 的ROC为 $\text{Re}[s] > -1$ 。

(b)

$$H(s) = \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1} \Rightarrow h(t) = 2e^{-2t}u(t) - e^{-t}u(t)$$

(c)

$$y(t) = H(3)e^{3t} = \frac{3}{20}e^{3t}$$

9.7 用拉普拉斯变换分析与表征LTI系统

- 对于典型的可实现滤波器，往往先给定频率响应模特性，再利用拉普拉斯变换确定系统函数。

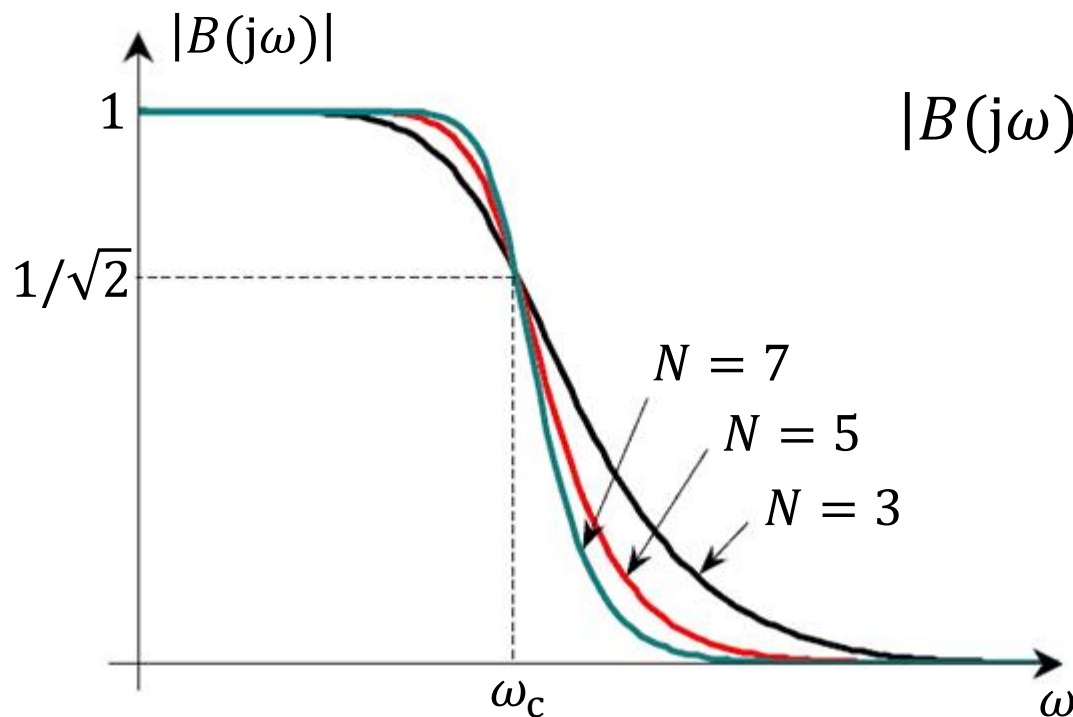
巴特沃斯（ Butterworth ） 滤波器设计:

- 通常巴特沃斯滤波器的特性由频率响应的模平方函数给出。对 N 阶巴特沃斯低通滤波器有：

$$|B(j\omega)|^2 = B(j\omega)B^*(j\omega) = \frac{1}{1 + (j\omega/j\omega_c)^{2N}}$$

9.7 用拉普拉斯变换分析与表征LTI系统

- 巴特沃斯低通滤波器幅频特性具有以下特点：
 - 在 $\omega = 0$ 处，前 $2N - 1$ 阶导数为零，具有最大平坦性；
 - 在通带、阻带内单调下降；
 - 在 $\omega = \omega_c$ 处，幅度降为最大值的 $1/\sqrt{2}$ 。



$$|B(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\omega/j\omega_c)^{2N}}$$

9.7 用拉普拉斯变换分析与表征LTI系统

- 如何确定 $B(j\omega)$?

$$|B(j\omega)|^2 = B(j\omega)B^*(j\omega) = \frac{1}{1 + (j\omega/j\omega_c)^{2N}}$$

- 先根据系统特性确定系统函数 $B(s)$
- 巴特沃斯滤波器的冲激响应应该是实信号,

$$\therefore B^*(j\omega) = B(-j\omega)$$

将 $|B(j\omega)|^2$ 函数拓展到整个 s 平面有:

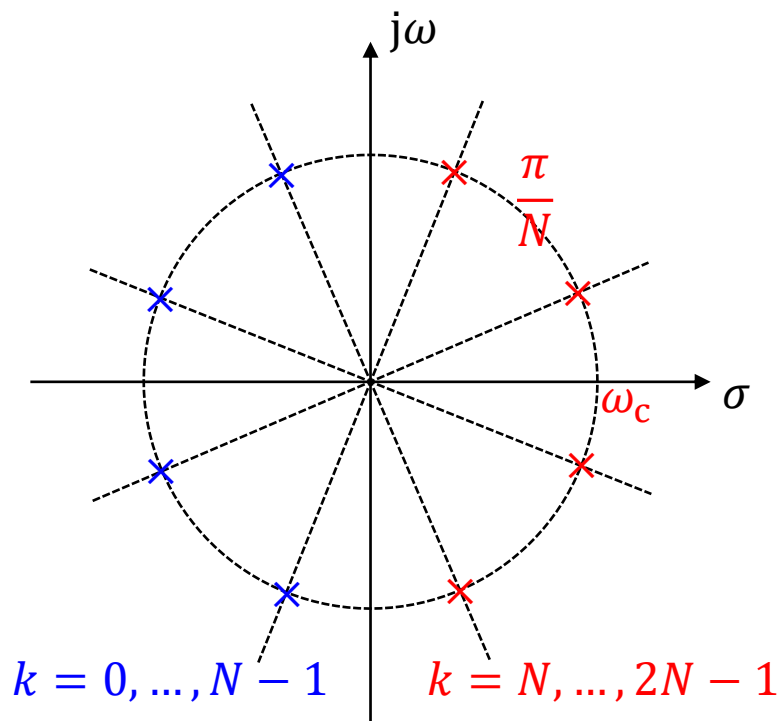
$$B(s)B(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\omega_c)^{2N}}$$

共有 $2N$ 个极点:

$$s_k = |s_k|e^{j\angle s_k} = \omega_c \exp\left(j\left(\frac{\pi(2k+1)}{2N} + \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (k = 0, 1, \dots, 2N-1)$$

9.7 用拉普拉斯变换分析与表征LTI系统

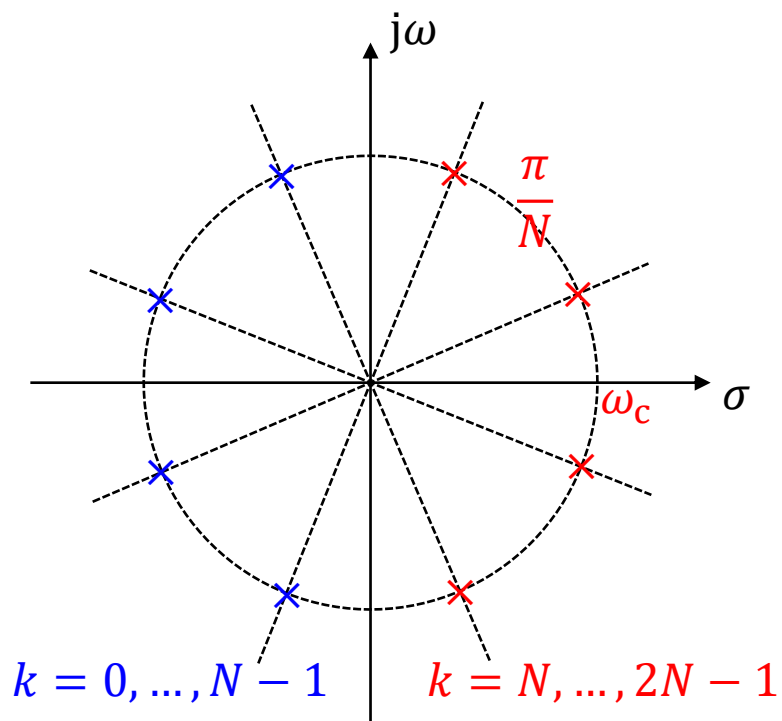
$$s_k = |s_k| e^{j\angle s_k} = \omega_c \exp\left(j\left(\frac{\pi(2k+1)}{2N} + \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (k = 0, 1, \dots, 2N-1)$$



- 极点分布特征：
 - $2N$ 个极点等间隔分布于半径为 ω_c 的圆周上；
 - 相邻两极点之间的角度差为 π/N ；
 - $j\omega$ 轴上不会有极点；
 - 极点分布关于原点对称。

9.7 用拉普拉斯变换分析与表征LTI系统

- $B(s)$ 与 $B(-s)$ 极点成对出现。
 - 哪些极点应属于 $B(s)$?
- 要实现的滤波器应该是因果稳定系统，因此 $B(s)$ 的极点是位于 s 左半平面的 N 个极点（为什么？🧐）。



- 注意 $B(0) = 1$
- 据此， N 阶巴特沃斯低通滤波器的系统函数为：

$$B(s) = \frac{\omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (s - s_k)}$$

- 其中，实数极点若存在则为 $-\omega_c$ ，非实数的极点共轭成对。

9.7 用拉普拉斯变换分析与表征LTI系统

- 分母中非实数共轭极点合并表达:

$$(s - s_k)(s - s_{N-1-k}) = (s - s_k)(s - s_k^*) = s^2 - 2s\text{Re}[s_k] + \omega_c^2$$

- 若 $N = 1$,

$$B(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

- 若 $N > 1$ 为偶数,

$$B(s) = \frac{\omega_c^N}{\prod_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (s^2 + 2\omega_c s \sin \frac{\pi(2k+1)}{2N} + \omega_c^2)}$$

- 若 $N > 1$ 为奇数,

$$B(s) = \frac{\omega_c^N}{(s + \omega_c) \prod_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} (s^2 + 2\omega_c s \sin \frac{\pi(2k+1)}{2N} + \omega_c^2)}$$

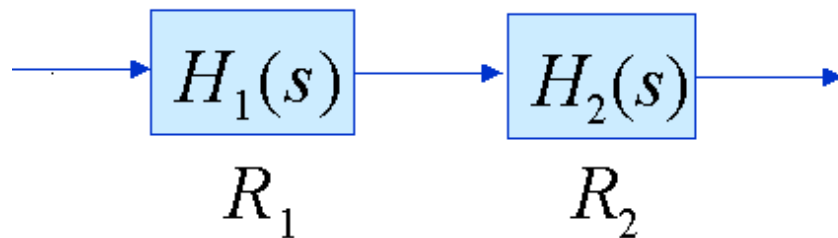
- 获得系统函数 $B(s)$ 后, $B(s)|_{s=j\omega}$ 即为其频率响应, 而单位冲激响应与对应的微分方程也可方便获得。

9.8 系统函数的代数属性与方框图表示

9.8 系统函数的代数属性与方框图表示

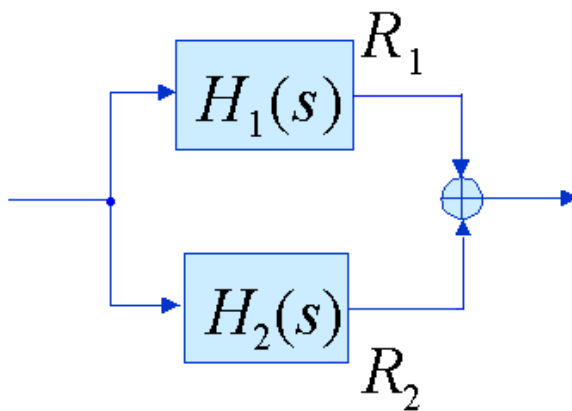
系统互联时的系统函数:

1. 级联:



$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \quad \text{ROC: 包括 } R_1 \cap R_2$$

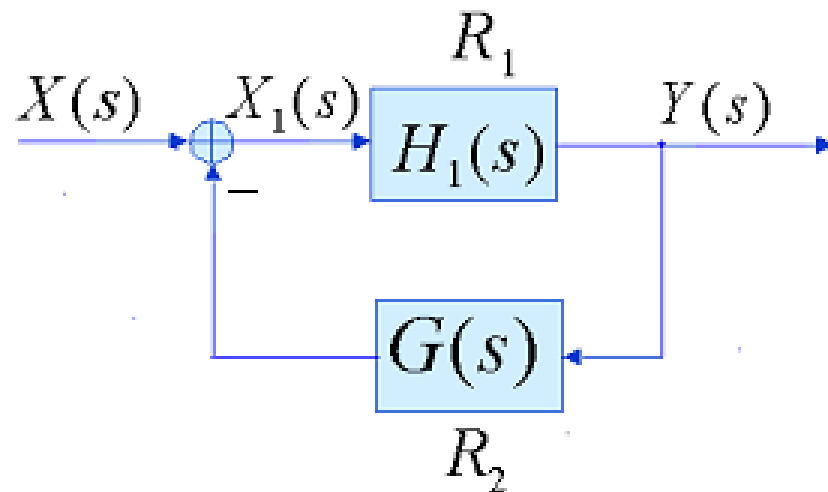
2. 并联:



$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) \quad \text{ROC: 包括 } R_1 \cap R_2$$

9.8 系统函数的代数属性与方框图表示

3. 反馈联结：



$$X_1(s) = X(s) - G(s)Y(s)$$

$$Y(s) = X_1(s)H_1(s) = [X(s) - G(s)Y(s)]H_1(s)$$

$$\therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + G(s)H_1(s)}, \quad \text{ROC: 包括 } R_1 \cap R_2$$

9.8 系统函数的代数属性与方框图表示

微分方程和有理系统函数描述的因果LTI系统方框图：

- 例1. 考虑因果LTI系统

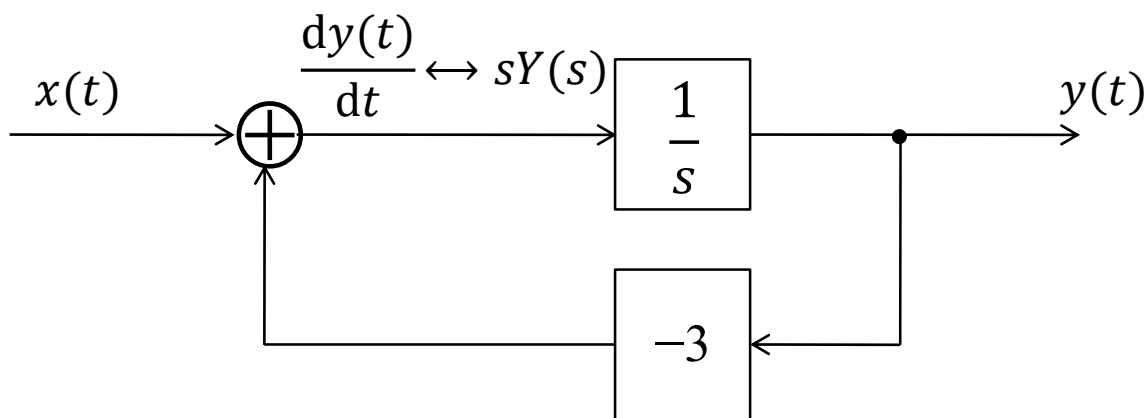
为什么将微分方程和有理系统函数描述的因果LTI系统放在一起考虑？



$$H(s) = \frac{1}{s + 3}$$

即

$$sY(s) + 3Y(s) = X(s) \quad \text{或} \quad \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$



$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= x(t) - 3y(t) \\ \updownarrow \\ sY(s) &= X(s) - 3Y(s) \end{aligned}$$

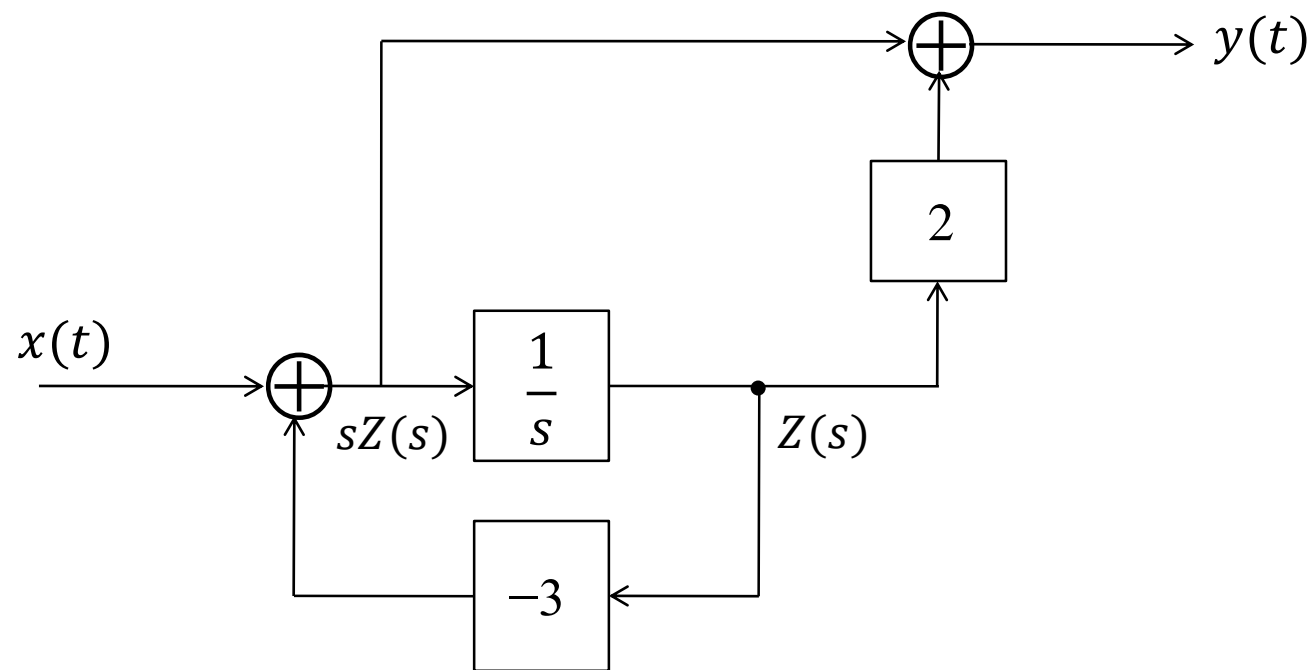
直接型表示

- 例2. 考虑因果LTI系统

$$H(s) = \frac{s+2}{s+3} \quad \text{即} \quad Y(s) = \frac{s+2}{s+3} X(s)$$

令

$$Z(s) = \frac{1}{s+3} X(s) \quad \text{则} \quad Y(s) = sZ(s) + 2Z(s)$$



- 例3. 考虑二阶因果LTI系统

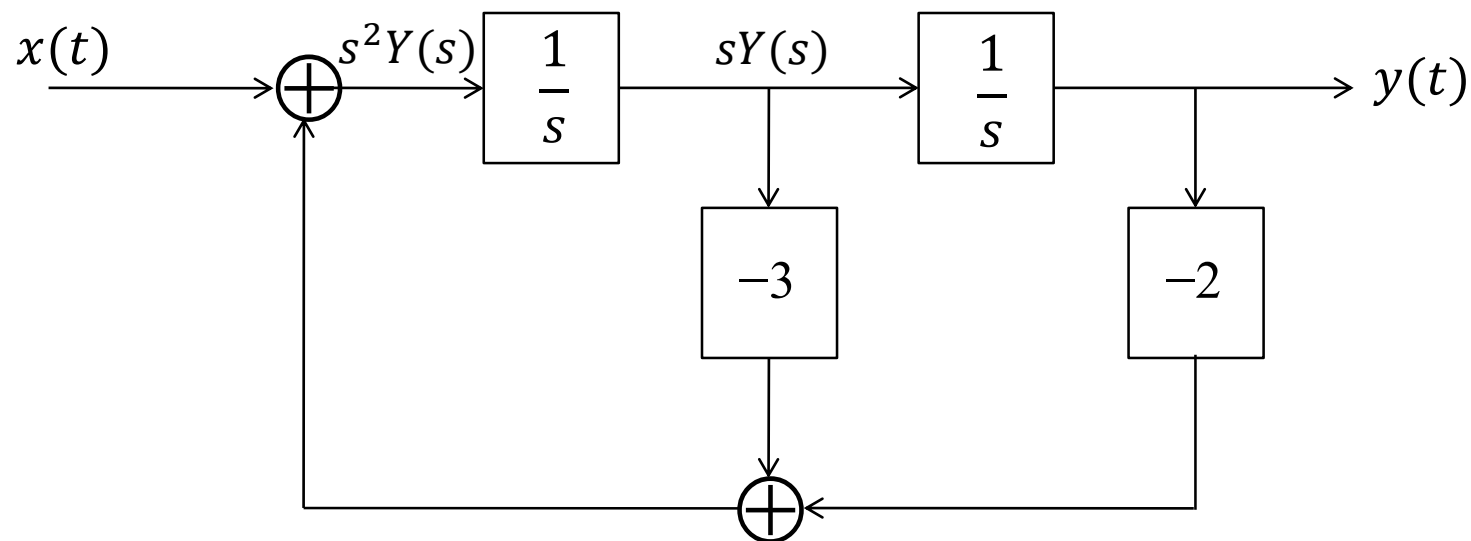
即

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$s^2 Y(s) = X(s) - 3sY(s) - 2Y(s)$$

或

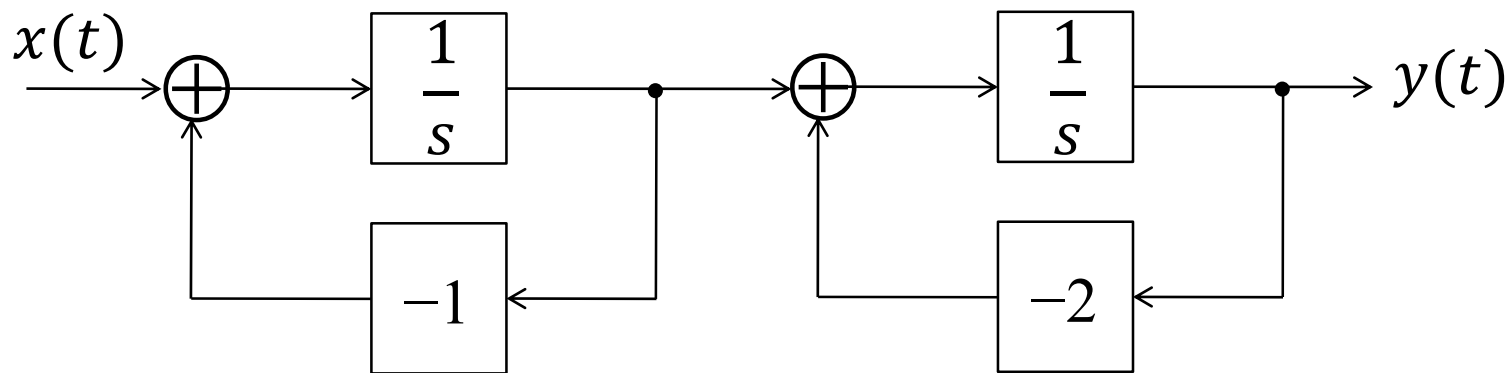
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = x(t) - 3 \frac{dy}{dt} - 2y(t)$$



9.8 系统函数的代数属性与方框图表示

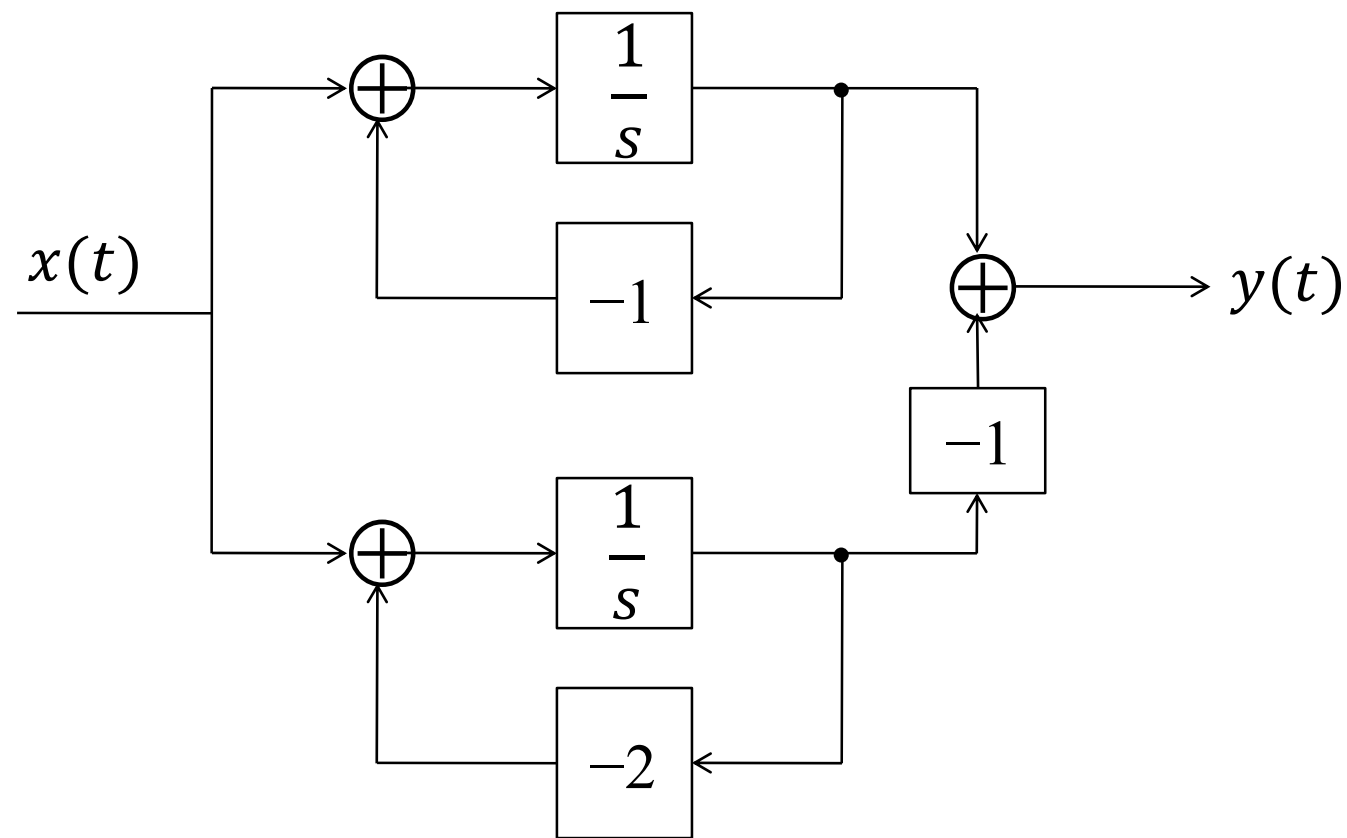
第二种实现方式：级联型表示

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2}$$



第三种实现方式：并联型表示

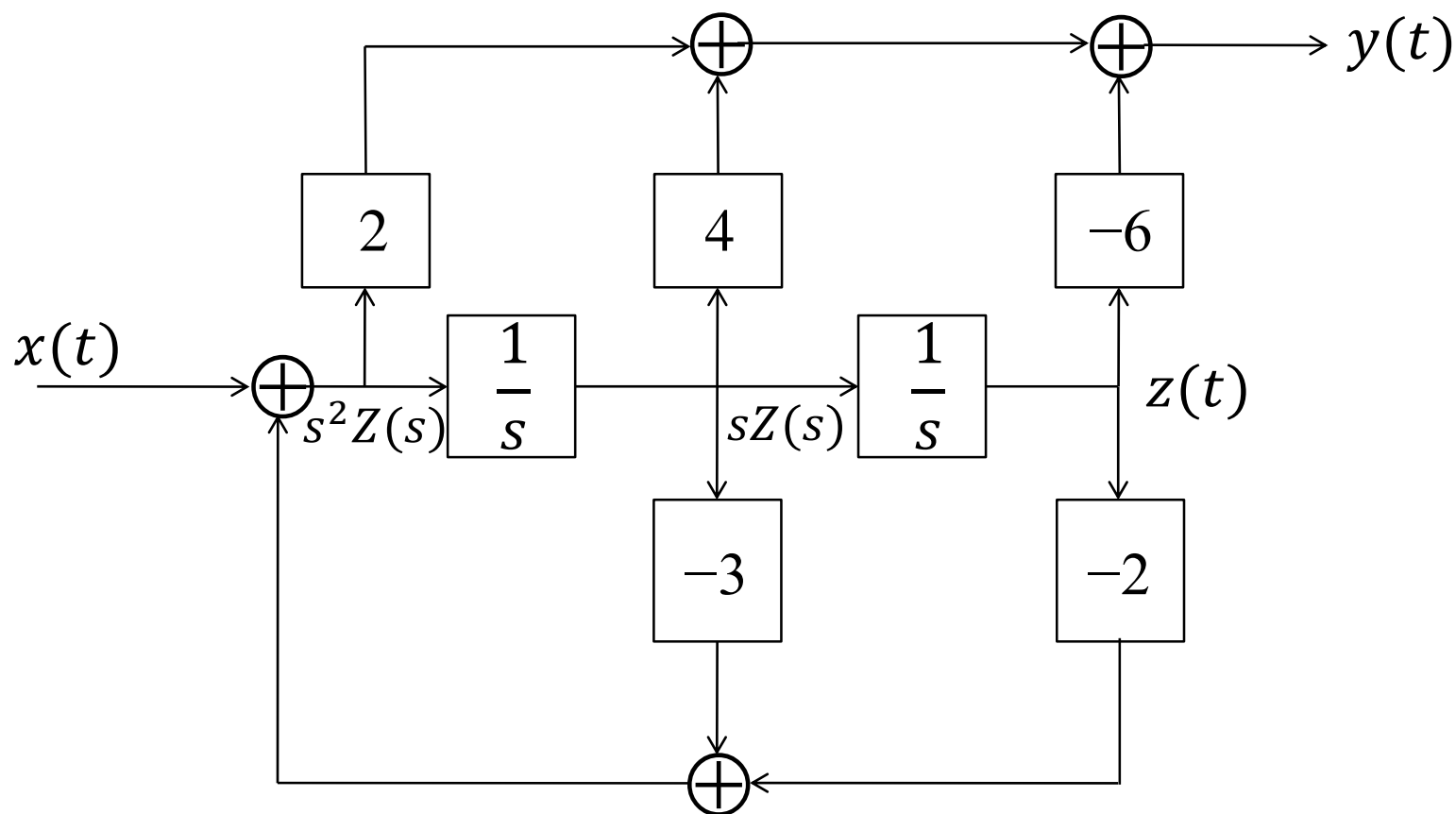
$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$



- 例4. 考虑因果LTI系统

$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \cdot (2s^2 + 4s - 6)$$

令 $Z(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} X(s)$ 则 $Y(s) = (2s^2 + 4s - 6)Z(s)$



9.8 系统函数的代数属性与方框图表示

其他实现方式:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2} \\ &= \left(\frac{2(s-1)}{s+2} \right) \left(\frac{s+3}{s+1} \right) \\ &= 2 + \frac{6}{s+2} - \frac{8}{s+1} \\ &= \left(\frac{2(s+3)}{s+2} \right) \left(\frac{s-1}{s+1} \right) \end{aligned}$$

思考: N 阶巴特沃斯低通滤波器方框图如何设计?

9.9 单边拉普拉斯变换

9.9 单边拉普拉斯变换

- 单边拉普拉斯变换对分析具有非零初始条件，由线性常系数微分方程描述的因果系统具有重要意义。

一.定义:

$$\chi(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

即单边拉普拉斯变换是仅考虑 0^- 之后部分信号的双边拉普拉斯变换。

显然，因果信号的双边拉普拉斯变换和单边拉普拉斯变换完全相同。

9.9 单边拉普拉斯变换

- 单边拉普拉斯变换的ROC位于最右边极点右边。
- 由于单边拉普拉斯变换不存在类似双边拉普拉斯变换中与ROC相关的多义性，一般不再强调其ROC。
- 单边拉普拉斯变换的反变换与同ROC的双边拉普拉斯变换的反变换相同：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \chi(s) e^{st} ds$$

注意：单边拉普拉斯反变换仅给出信号在 0^- 后的取值。

9.9 单边拉普拉斯变换

例1. $x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$

双边拉普拉斯变换:

$$X(s) = \frac{1}{s+a} e^s, \quad \operatorname{Re}[s] > -a$$

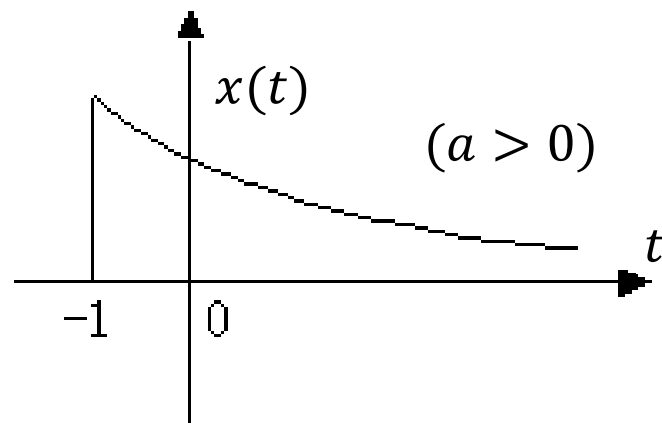
单边拉普拉斯变换:

$$\chi(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-a(t+1)} e^{-st} dt = e^{-a} \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a} e^{-a}$$

$X(s)$ 与 $\chi(s)$ 不同, 是因为 $x(t)$ 在 $t < 0$ 的部分对 $X(s)$ 有作用, 而对 $\chi(s)$ 没有任何作用所致。

$\chi(s)$ 是下式的双边拉普拉斯变换:

$$\hat{x}(t) = e^{-a(t+1)}u(t) = e^{-a} \cdot e^{-at}u(t)$$



$$\operatorname{Re}[s] > -a$$

9.9 单边拉普拉斯变换

例2. 给定以下单边拉普拉斯变换，计算对应的时域信号 $x(t)$ ：

$$\chi(s) = \frac{s^2 - 3}{s + 2}$$

尽管未给出ROC，可知其ROC必为 $\text{Re}[s] > -2$

$$\chi(s) = s - 2 + \frac{1}{s + 2}$$

$$\therefore x(t) = u_1(t) - 2\delta(t) + e^{-2t}u(t), \quad t > 0^-$$

9.9 单边拉普拉斯变换

二. 单边拉普拉斯变换的性质:

由于单边拉普拉斯变换是特殊的双边拉普拉斯变换, 因此其大部分性质与双边拉普拉斯变换相同, 但也有一些区别。

时域微分

若 $x(t) \leftrightarrow \chi(s)$, 则 $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow s\chi(s) - x(0^-)$

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = s\chi(s) - x(0^-)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2 \chi(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

9.9 单边拉普拉斯变换

三. 利用单边拉普拉斯变换求解微分方程:

单边拉普拉斯变换特别适合于求解具有**非零初始条件**的线性常系数微分方程（增量线性系统）。

例. 某LTI系统由以下微分方程描述

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t), \quad x(t) = 2u(t),$$

$$y(0^-) = 3, \quad y'(0^-) = -5, \quad \text{求响应 } y(t)。$$

解：对方程两边做单边拉普拉斯变换：

$$[s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)] + 3[sY(s) - y(0^-)] + 2Y(s) = \chi(s)$$

9.9 单边拉普拉斯变换

$$[s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)] + 3[sY(s) - y(0^-)] + 2Y(s) = \chi(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{y(0^-)(s+3)}{s^2+3s+2} + \frac{y'(0^-)}{s^2+3s+2}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\frac{\chi(s)}{s^2+3s+2}}_{\text{零状态响应}}$$

代入 $y(0^-) = 3$, $y'(0^-) = -5$, $\chi(s) = \frac{2}{s}$, 可得:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \underbrace{\left(\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \right)}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \right)}_{\text{零状态响应}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{强迫响应}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \right)}_{\text{自然响应}} \end{aligned}$$

9.9 单边拉普拉斯变换

$$\begin{aligned} Y(s) &= \underbrace{\left(\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \right)}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \right)}_{\text{零状态响应}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{强迫响应}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \right)}_{\text{自然响应}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore y(t) &= \underbrace{(e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{(1 - 2e^{-t} + e^{-2t})u(t)}_{\text{零状态响应}} \\ &= \underbrace{u(t)}_{\text{强迫响应}} + \underbrace{(-e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)}_{\text{自然响应}} \\ &= (1 - e^{-t} + 3e^{-2t})u(t) \quad (t > 0^-) \end{aligned}$$

本章小结

- 拉普拉斯变换是傅里叶变换的推广，对LTI系统分析特别有用，特别是可用于分析系统的稳定性。
- 双边拉普拉斯变换的表达式与其收敛域（ROC）联合才具有与信号的一一对应关系。
- 作为拉普拉斯变换的几何表示，零极点图对分析系统特性具有重要意义。
- 拉普拉斯变换可将微分方程转换为代数方程，从而为对应的系统分析（包括方框图表示）带来方便。
- 单边拉普拉斯变换特别适用于分析具有非零初始条件的线性常系数微分方程（增量线性系统）。

连续时间信号与系统的复频域分析——拉普拉斯变换

信号分解	$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$ $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (\text{双边})$ $X(s) = \int_{0-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (\text{单边})$
系统描述	1) $H(s)$ 2) 零极点图 3) 方框图 4) 微分方程
系统分析	(双边) 拉普拉斯变换: $Y(s) = X(s)H(s)$
	单边拉普拉斯变换: 增量线性系统