第四章 连续时间傅里叶变换

The Continuous time Fourier Transform

奉章的主要向客

- 连续时间傅里叶变换;
- 傅里叶级数与傅里叶变换之间的关系;
- 傅里叶变换的性质;
- 系统的频率响应及系统的频域分析。

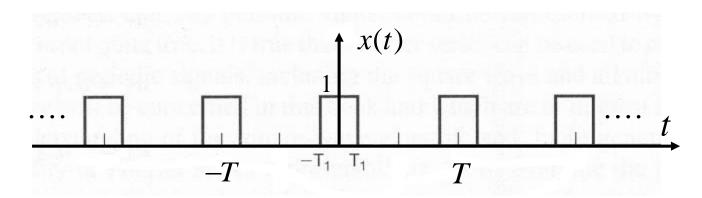
4.0 引言

- 在工程应用中有相当广泛的信号是非周期信号
- 非周期信号能否进行信号分解获得其频谱表示?
- 线性时不变系统对非周期信号的响应如何求得?
- 周期信号在基波周期趋于无穷大时将演变成非周期信号
- 反之,非周期信号进行周期性延拓能得到周期信号
- 利用上述关系,得到非周期信号的频域表示方法

• 4.1 旅周期信号的表示—连续时间傅里叶变换 (Representation of Aperiodic Signals: The Continuous-Time Fourier Transform)

(Representation of Aperiodic Signals: The Continuous-Time Fourier Transform)

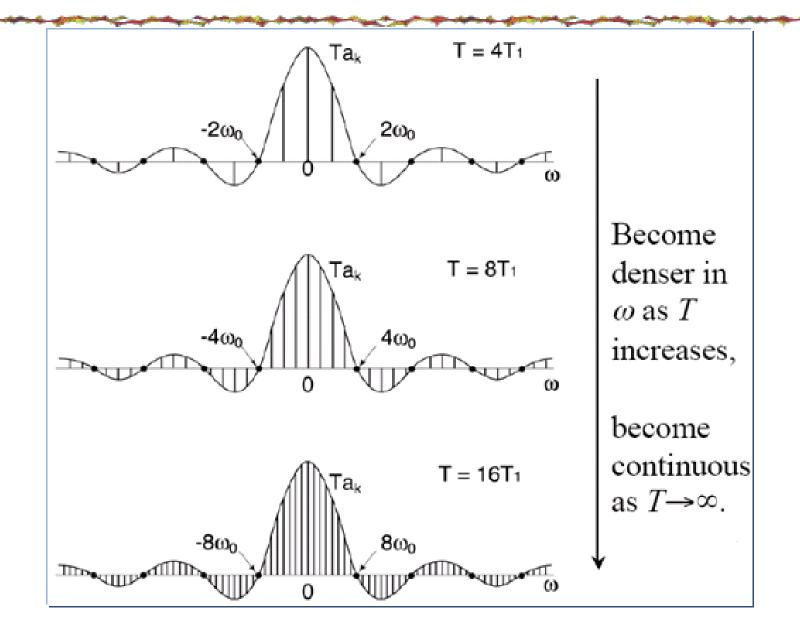
- 一. 从傅里叶级数到傅里叶变换
 - 周期方波在基波周期趋于无穷时的变化



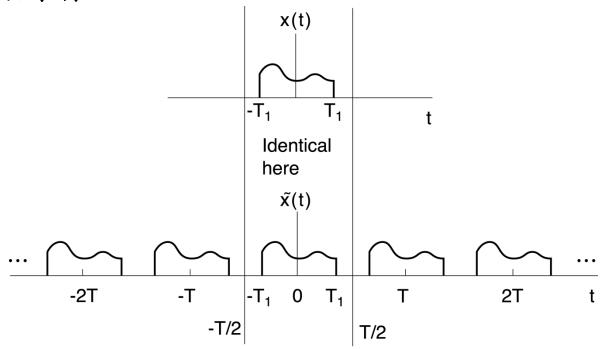
$$a_k = \frac{2T_1}{T} \operatorname{Sa}(k\pi \frac{2T_1}{T}) = \frac{2T_1}{T} \operatorname{Sa}(k\omega_0 T_1) \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$\Rightarrow Ta_k = 2T_1 \operatorname{Sa}(\omega T_1) \Big|_{\omega = k\omega_0}$$

以ω₀为周期对抽样函数采样



连续时间非周期信号傅里叶变换的推导——非周期信号的周期化



 $\tilde{x}(t)$ 以T为周期,在[-T/2,T/2]内与x(t)相等。

当 $T \to \infty$ 时,在($-\infty$, ∞)内 $\tilde{x}(t) = x(t)$

- 通过 $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶级数在 $T \rightarrow \infty$ 时的极限情况推导 x(t)的频谱表示:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

定义:
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$
 $\Rightarrow a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$

因此, 在[-T/2, T/2]内有:

$$x(t) = \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

令 $\omega = k\omega_0$, 当 $T \to \infty$ 时, $\omega_0 \to 0$, $\sum f(k\omega_0)\omega_0 \to \int f(\omega)d\omega$, 所以:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- 因此,我们得到傅里叶变换对:

傅里叶变换(傅里叶积分):

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

分析公式

(获得<math>x(t)的频谱)

傅里叶反变换:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$
 综合公式 (ejwt的线性组合)

- 周期信号的傅里叶级数的系数为其一个周期内信号傅 里叶变换的等间隔采样:

$$\begin{cases} x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \\ \tilde{x}(t) \leftrightarrow a_k \end{cases} \Rightarrow a_k = \frac{1}{T} X(j\omega) \Big|_{\omega = k\omega_0}$$

- 二. 傅里叶变换的收敛
 - 既然傅里叶变换是从周期信号的傅里叶级数引出的,傅里叶变换的收敛问题就应该和傅里叶级数的收敛相一致。
 - 也有对应的两组条件:
 - -1. 平方可积条件:

若
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$
 则 $X(j\omega)$ 存在。

这表明能量有限的信号其傅里叶变换一定存在。

- 2. Dirichlet条件:
 - a. 绝对可积条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$
 - b. 在任何有限区间内,x(t)只有有限个极值点,且极值有限。
 - c. 在任何有限区间内,x(t) 只有有限个间断点,且在这些间断点上,函数值有限。

Dirichlet条件保证在间断点之外x(t)等于 $X(j\omega)$ 的反变换;而在间断点上, $X(j\omega)$ 的反变换等于x(t)间断点两边值的平均值。

- 两组条件并不完全等价。它们都是傅里叶变换存在的充分条件。
- 和周期信号的情况一样,当x(t)的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 存在时,其反变换在间断点附近会产生Gibbs 现象。

• 三. 常见信号的傅里叶变换:

1.
$$x(t) = e^{-at}u(t)$$
, $a > 0$

2.
$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

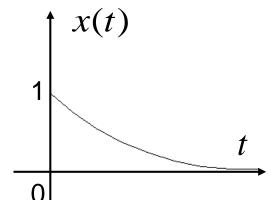
$$3. x(t) = \delta(t)$$

4. 矩形脉冲:
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

• 三. 常见信号的傅里叶变换:

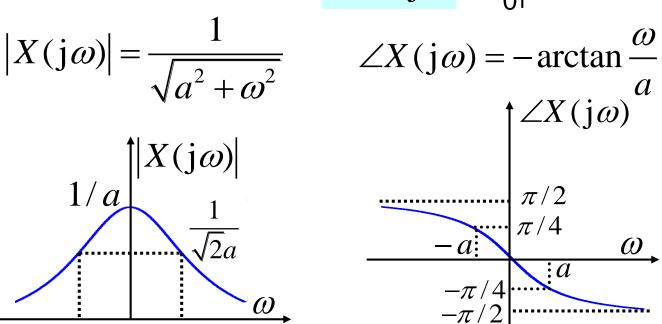
1.
$$x(t) = e^{-at}u(t)$$
, $a > 0$

$$X(j\omega) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega}$$



$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

$$\frac{1/a}{\sqrt{2}a} \frac{|X(j\omega)|}{\sqrt{2}a}$$



2.
$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

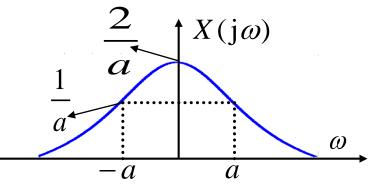
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

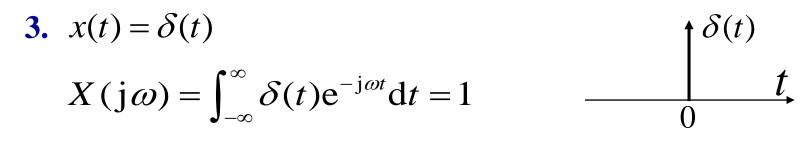
$$= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

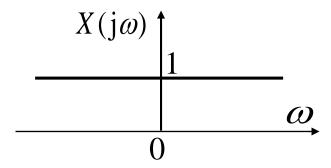
对此例有
$$|X(j\omega)| = X(j\omega)$$
 $\angle X(j\omega) = 0$

$$\angle X(j\omega) = 0$$

结论:实偶信号的傅里叶变换是 实偶函数。此时可以用一幅图表 示信号的频谱。

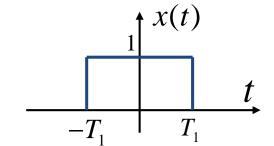






这表明 $\delta(t)$ 中包括了所有的频率成分,且所有频率分量的幅度、相位都相同。因此,系统的单位冲激响应 h(t)才能完全描述一个LTI系统的特性, $\delta(t)$ 才在信号与系统分析中具有如此重要的意义。

4. 矩形脉冲:
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$



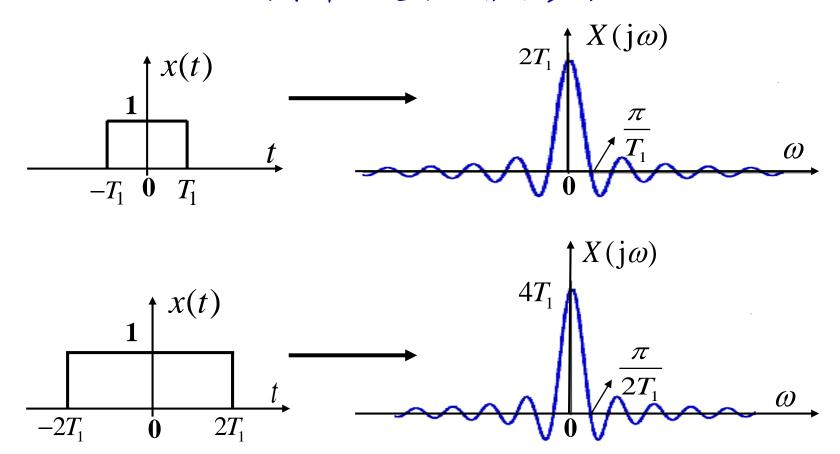
$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \frac{2\sin \omega T_1}{\omega} = \frac{2T_1 \sin \omega T_1}{\omega T_1}$$

$$= 2T_1 \operatorname{Sa}(\omega T_1) = 2T_1 \operatorname{sinc}(\frac{\omega T_1}{\pi})$$

显然,将 $X(j\omega)$ 中的 ω 代之以 $k\omega_0$ 再乘以 $\frac{1}{T}$,即是相应 周期信号的频谱

$$a_k = \frac{2T_1}{T} \operatorname{Sa}(k\omega_0 T_1)$$

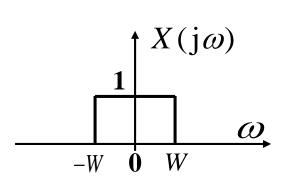
 $X(j\omega) = 2T_1 \operatorname{Sa}(\omega T_1)$ 不同脉冲宽度对频谱的影响

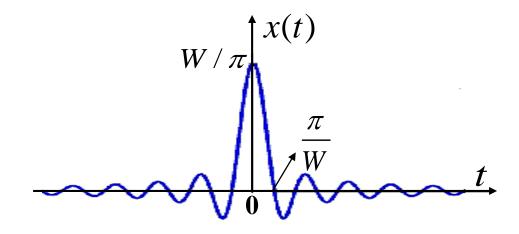


可见, 信号宽度在时域和频域之间有一种相反的关系。

5.
$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, |\omega| < W & (理想低通滤波器) \\ 0, |\omega| > W &$$
 计算其时域信号表示

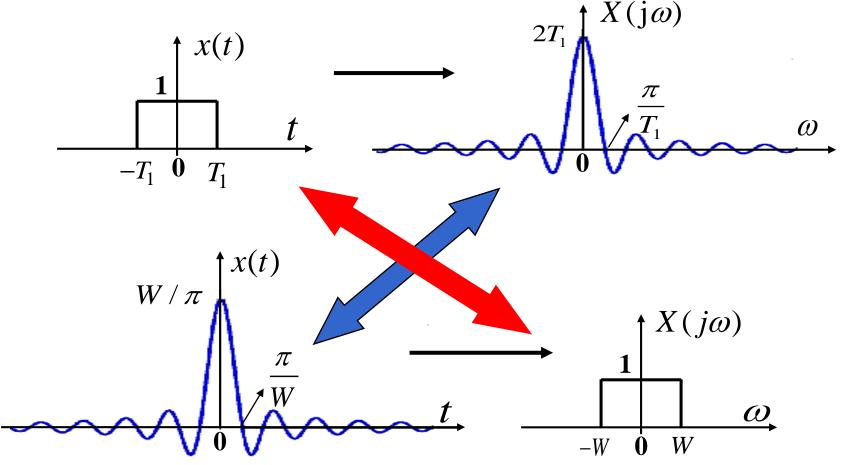
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \operatorname{Sa}(Wt) = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}(\frac{Wt}{\pi})$$





与矩形脉冲情况对比,可以发现信号在时域和频域之间存在 一种对偶关系。

对偶关系可表示如下:



如果 $W \to \infty$, 则 x(t) 将趋于一个冲激,反之,如果 $T_1 \to \infty$,则 $X(j\omega)$ 将趋于一个冲激。

6. 若
$$x(t) = 1$$
 则有 $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

因为
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

所以

$$\delta(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} 1$$

$$1 \stackrel{F}{\longleftrightarrow} 2\pi \delta(\omega)$$

• 4.2 周期信号的傅里叶变换 The Fourier Transformation of Periodic Signals

4.2 周期信号的傅里叶变换 The Fourier Transformation of Periodic Signals

- 非周期信号与周期信号的统一数学描述?
- · 周期信号不满足傅里叶变换的 Dirichlet条件(哪一条?),因而不能直接从定义出发
- 考查 $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega \omega_0)$ 所对应的信号

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

这表明周期性复指数信号的频谱是一个冲激。

若
$$x(t) = e^{jk\omega_0 t}$$
 则 $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$

于是对于表示为傅里叶级数的周期信号

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

就有
$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

———周期信号的傅里叶变换表示

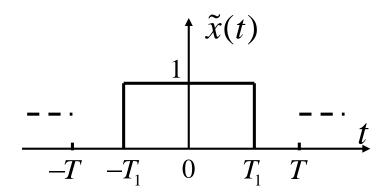
这表明:周期信号的傅里叶变换由一系列冲激组成,每一个冲激分别位于信号的各次谐波的频率处,其冲激强度为对应的傅里叶级数系数 a_k 的 2π 倍。

例1: 求 $x(t) = \sin \omega_0 t$ 的傅里叶变换

例2: 求 $x(t) = \cos \omega_0 t$ 的傅里叶变换

例3:
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

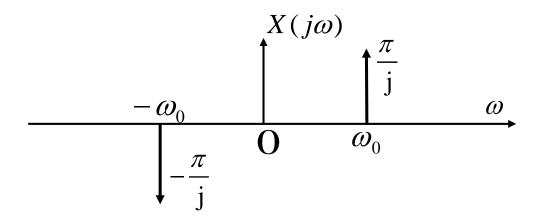
例4. 周期性矩形脉冲



例1: 求 $x(t) = \sin \omega_0 t$ 的傅里叶变换

$$x(t) = \sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}]$$

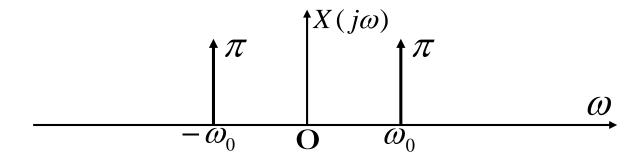
$$X(j\omega) = \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$



例2: 求 $x(t) = \cos \omega_0 t$ 的傅里叶变换

$$x(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$$

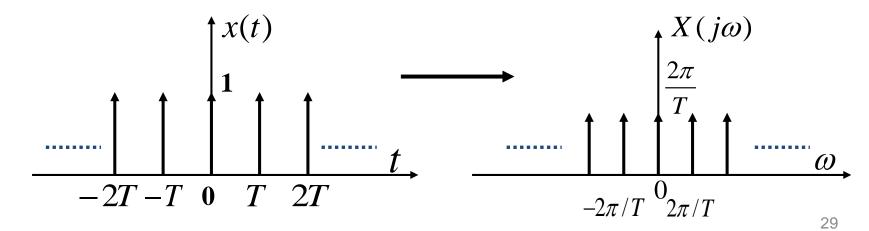
$$X(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



例3:
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$
 — 均匀冲激串

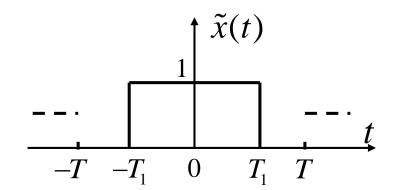
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T}$$

$$\therefore X(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T}k)$$

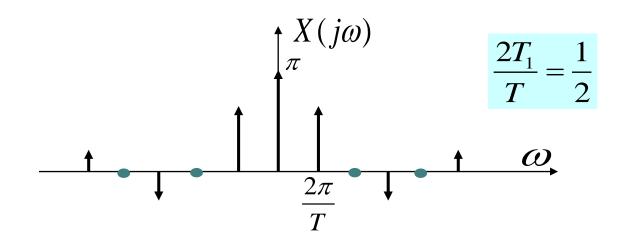


例4. 周期性矩形脉冲

$$a_k = \frac{2T_1}{T} \operatorname{Sa}(\pi k \frac{2T_1}{T})$$



$$X(j\omega) = \frac{4\pi T_1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Sa}(\pi k \frac{2T_1}{T}) \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T})$$



· 4.3 连续时间傅里叶变换的性质 Properties of the Continuous-Time Fourier Transform

Properties of the Continuous-Time Fourier Transform

- 掌握傅里叶变换的性质,有助于深入理解信号时域特性与频域特性之间的关系,某些情况下可以简化傅里叶变换对的计算。
 - 1. 线性: Linearity

$$ilde{x}(t) \leftrightarrow X(j\omega), \quad y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$$

则
$$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

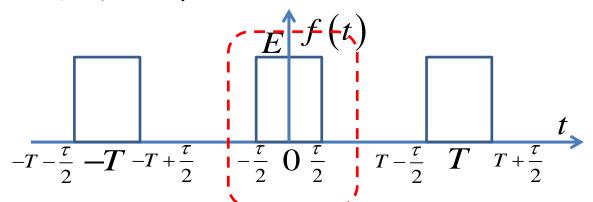
2. 时移: Time Shifting

若
$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$
 则 $x(t-t_0) \leftrightarrow X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$ 证明:

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega(t+t_0)} dt$$
$$= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

这表明信号的时移只影响它的相频特性,其相频特性会增加一个线性相移。

• 例: 计算三个矩形方波组成的信号的频谱



• 解:

$$F_0(j\omega) = E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$f(t) = f_0(t) + f_0(t+T) + f_0(t-T)$$

$$F(j\omega) = F_0(j\omega)(1 + e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})$$

$$= F_0(j\omega)(1 + 2\cos\omega T)$$

$$= E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})(1 + 2\cos\omega T)$$

3. 共轭及共轭对称性:

Conjugation and Conjugate Symmetry

若
$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$
 则 $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega)$

证明: 由
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$
 可得

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt$$

所以
$$X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathbb{F} \qquad x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-j\omega)$$

- 若x(t)是实信号,即 $x(t) = x^*(t)$
 - 于是有: $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$ 频谱为共轭偶函数
- ・若 $X(j\omega) = \text{Re}[X(j\omega)] + j\text{Im}[X(j\omega)]$ 则可得 $\text{Re}[X(j\omega)] = \text{Re}[X(-j\omega)]$ 实部是偶函数 $\text{Im}[X(j\omega)] = -\text{Im}[X(-j\omega)]$ 虚部是奇函数

即: 模是偶函数, 相位是奇函数

•如果 x(t) = x(-t) 即信号是偶函数。则

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-j\omega t} dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{j\omega \tau} d\tau = X(-j\omega)$$

表明: 偶信号的傅里叶变换是偶函数。

对于实偶信号x(t), 又因为 $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$

所以
$$X(j\omega) = X^*(j\omega)$$

表明 $X(j\omega)$ 是实函数。

$$X(j\omega) = -X(-j\omega)$$
 表明 $X(j\omega)$ 是奇函数

对于实奇信号x(t), 又因为 $X(-j\omega) = X^*(j\omega)$

故
$$X(j\omega) = -X^*(j\omega)$$
 表明 $X(j\omega)$ 是虚函数

• 若实信号 $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ 则有:

$$X(j\omega) = X_e(j\omega) + jX_o(j\omega)$$

$$x_e(t) \leftrightarrow X_e(j\omega)$$
 $x_o(t) \leftrightarrow jX_o(j\omega)$

例: u(t)的频谱:

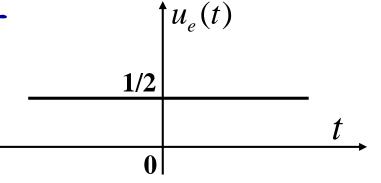
将u(t) 分解为偶部和奇部有

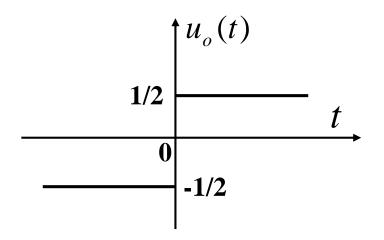
$$u(t) = u_e(t) + u_o(t)$$

$$u_{e}(t) = 1/2$$

$$u_o(t) = \operatorname{Sgn}(t) / 2$$

$$\operatorname{Sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$





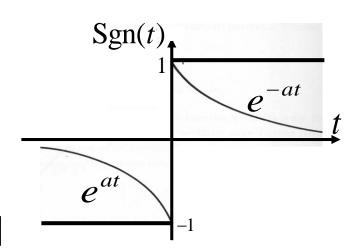
$$u_e(t) \longleftrightarrow \pi \delta(\omega)$$

$$\operatorname{Sgn}(t) = \lim_{a \to 0} [e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)]$$

$$\mathcal{F}\{\operatorname{Sgn}(t)\} = \lim_{a \to 0} \left[\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} \right]$$

$$= \lim_{a \to 0} \frac{-j2\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{2}{i\omega}$$

$$\therefore u_o(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega}$$



$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

4. 时域微分与积分: Differentiation and Integration

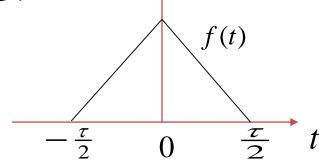
(可将微分运算转变为代数运算)

$$(将 x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega 两边对t 微分即得该性质)$$

应用举例

• 例: 求三角信号的傅里叶变换

$$f(t) = \begin{cases} E(1 - \frac{2}{\tau} |t|) & (|t| < \frac{\tau}{2}) \\ 0 & (|t| > \frac{\tau}{2}) \end{cases}$$



• 解:

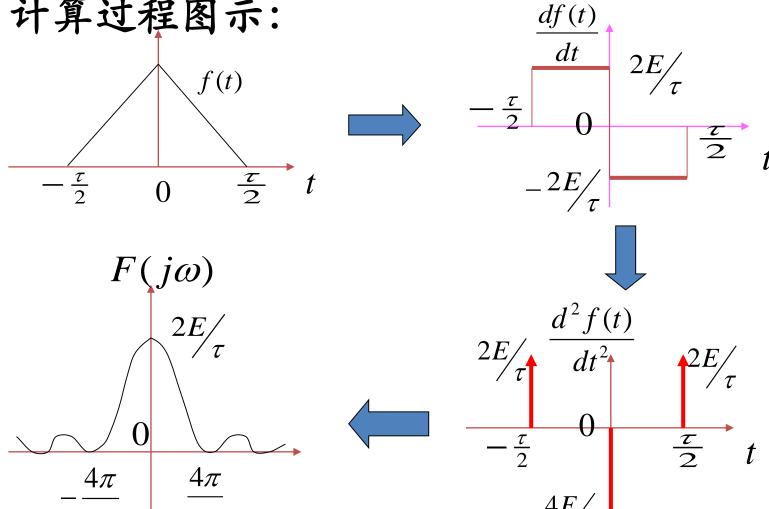
$$y(t) = f''(t) = \frac{2E}{\tau} \left[\delta(t + \frac{\tau}{2}) + \delta(t - \frac{\tau}{2}) - 2\delta(t) \right]$$

$$Y(j\omega) = \frac{2E}{\tau} (e^{j\omega_{\frac{\tau}{2}}} + e^{-j\omega_{\frac{\tau}{2}}} - 2) = -\frac{8E}{\tau} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) = -\frac{\omega^2 E\tau}{2} Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

$$F(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{(j\omega)^2} = \frac{E\tau}{2} Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

应用举例

• 计算过程图示:



$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$$
 (时域积分特性)

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau\right] e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

$$= \left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\delta(\omega)\right] \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau} \mathrm{d}\tau$$

$$= \left[\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)\right] X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

5.时域和频域的尺度变换: Scaling

若
$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$
 则 $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X(j\frac{\omega}{a})$

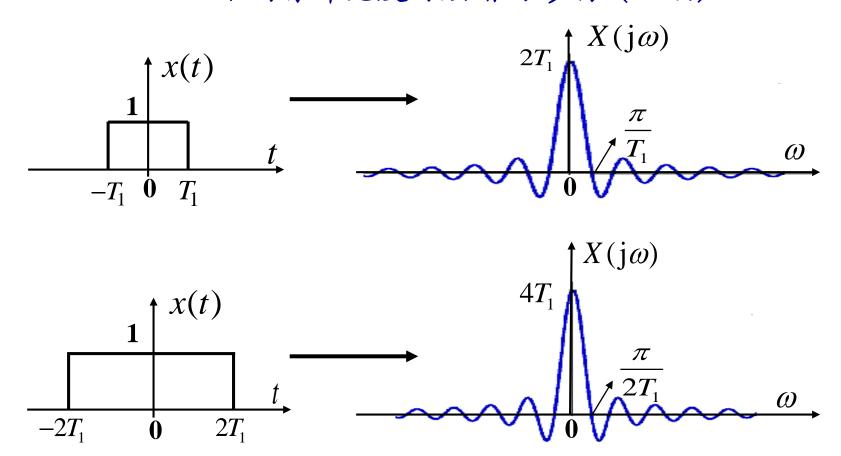
证明:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$
$$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} X(\frac{j\omega}{a})$$

当 a = -1 时,有 $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$

尺度变换特性表明:信号如果在时域扩展 a 倍,则其带宽相应压缩 a 倍,反之亦然。

 $X(j\omega) = 2T_1 \operatorname{Sa}(\omega T_1)$ 不同脉冲宽度对频谱的影响(回顾)



时域扩展, 频域压缩

6.对偶性: Duality

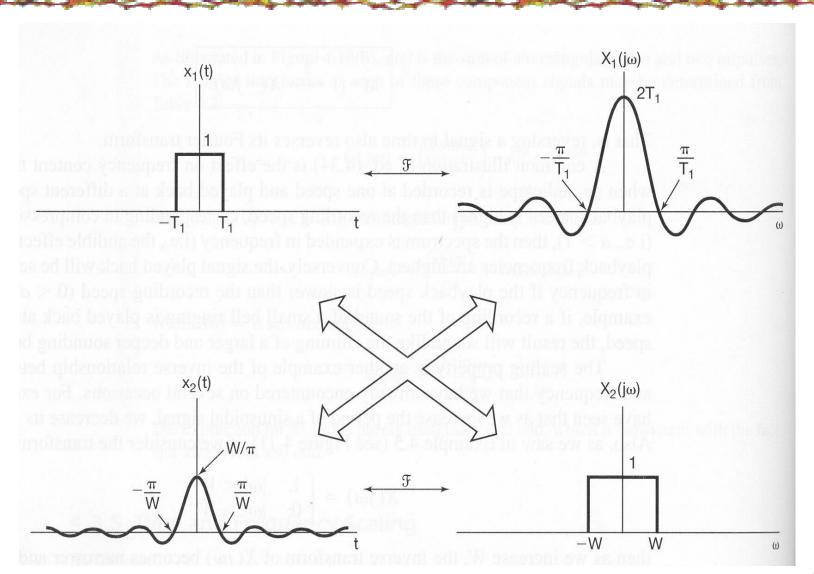
若
$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$
 则 $X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

证明:
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$2\pi x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jt)e^{j\omega t} dt$$

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jt) e^{-j\omega t} dt$$

$$\therefore X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$



也可由 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ 得到证明。

$$X(jt) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x (-\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

由对偶性可以方便地将时域的某些特性对偶到频域

例如: 设 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, 有对偶关系 $X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

利用时移特性有 $X[j(t-t_0)] \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)e^{-j\omega t_0}$

再次对偶有 $2\pi x(-t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi X[j(-\omega-\omega_0)]$

根据 $x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$ 得

 $x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X[j(\omega-\omega_0)]$ 这就是频移特性

频域微分特性

由
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$
 得
$$\frac{d}{d\omega}X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t}dt$$

所以
$$-jtx(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}X(j\omega)$$

该特性也可由对偶性从时域微分特性得出

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

$$X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

对
$$X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

利用时域微分特性有
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(\mathrm{j}t)\leftrightarrow 2\pi\mathrm{j}\omega x(-\omega)$$

再次对偶得
$$2\pi jtx(-t) \leftrightarrow 2\pi \frac{d}{d\omega} X(-j\omega)$$

由
$$x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$$
 有

$$-jtx(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega}X(j\omega)$$

频域微分特性

- **例**: 已知 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$,求(t-2) f(t)的傅里叶变换
- 解:

$$(t-2) f(t)$$

$$= tf(t) - 2f(t) \rightarrow j\frac{dF(\omega)}{d(\omega)} - 2F(\omega)$$

由时域积分特性、可对偶出频域积分特性

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$
 $X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

利用时域积分特性

$$\int_{-\infty}^{t} X(j\tau) d\tau \leftrightarrow \left[\frac{2\pi x(-\omega)}{j\omega} + 2\pi^{2} x(0)\delta(\omega) \right]$$

再次对偶
$$2\pi \left[\frac{x(-t)}{jt} + \pi x(0)\delta(t)\right] \leftrightarrow 2\pi \int_{-\infty}^{-\omega} X(j\tau) d\tau$$

由
$$x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$$
 有

$$\frac{x(t)}{-it} + \pi x(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(j\tau)d\tau$$
 频域积分特性

7. Parseval 定理:

若
$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$
 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

证明:
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) X^*(j\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t) dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

这表明:信号的能量既可以在时域求得,也可以在频域求得。由于 $|X(j\omega)|^2$ 表示了信号能量在频域的分布,因而称其为"能量谱密度"函数。

The Convolution Property

• 一.卷积特性:

若
$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$
 $h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$ 则 $x(t) * h(t) \leftrightarrow X(j\omega)H(j\omega)$

- 由于卷积特性的存在,使对LTI系统在频域进行分析成为可能。
- -本质上,卷积特性的成立正是因为复指数信号 $e^{j\omega t}$ 是一切LTI系统的特征函数, $H(j\omega)$ 则是对应的特征值。

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

由
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

可将 x(t) 视为复指数分量 $e^{j\omega t}$ 的线性组合,每个 $e^{j\omega t}$ 通过LTI系统时都要受到系统对应的特征值 $H(j\omega)$ 的加权。故:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

所以
$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

- LTI系统的单位冲激响应h(t)与频率响应 $H(j\omega)$ 一一对应,因而LTI系统可以由其频率响应完全表征。
- 并非任何系统的频率响应都存在。
- 用频率响应表征系统时,一般都限于对稳定系统。
 - -稳定性保证了h(t)的绝对可积,结合Dirichlet的另外两个条件(实际系统一般满足),则频率响应必然存在。

- · 二. LTI系统的频域分析法:
 - 根据卷积特性,可以对LTI系统进行频域分析, 其过程为:
 - 1. 由 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$
 - 2. 根据系统的描述, 求出 $H(j\omega)$
 - 3. $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$
 - **4.** $y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(j\omega)]$

The Multiplication Property

若
$$s(t) \leftrightarrow S(j\omega)$$
 $p(t) \leftrightarrow P(j\omega)$ 则 $s(t)p(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}S(j\omega)*P(j\omega)$

利用对偶性可以从卷积性质得出相乘性质

$$s(t) \leftrightarrow S(j\omega)$$
 $p(t) \leftrightarrow P(j\omega)$

$$S(jt) \leftrightarrow 2\pi s(-\omega)$$
 $P(jt) \leftrightarrow 2\pi p(-\omega)$

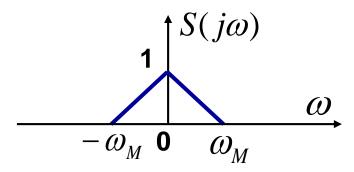
$$S(jt) * P(jt) \leftrightarrow 4\pi^2 s(-\omega) p(-\omega)$$

$$4\pi^2 s(-t) p(-t) \leftrightarrow 2\pi S(-j\omega) * P(-j\omega)$$

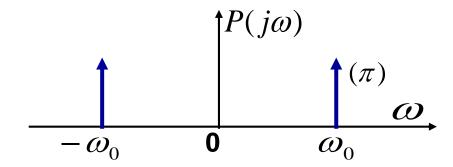
$$\therefore s(t)p(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}S(j\omega) * P(j\omega)$$

· 例: 已知信号S(t)的频谱如图所示,

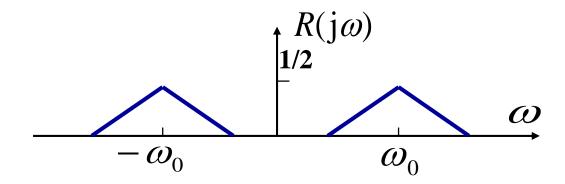
求 $r(t) = s(t) \cos \omega_0 t$ 的频谱



$$p(t) = \cos \omega_0 t \quad \leftrightarrow \quad P(j\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



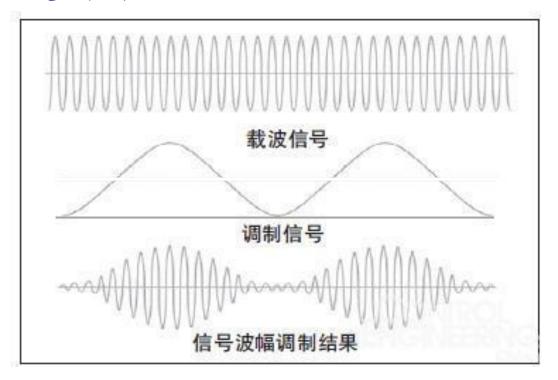
$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$
$$= \frac{1}{2} S[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} S[j(\omega + \omega_0)]$$



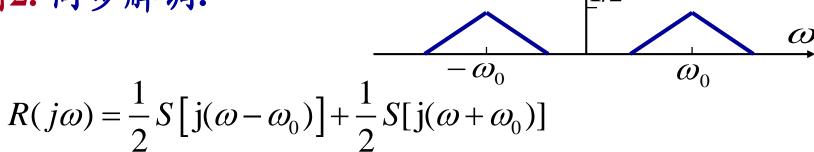
某一信号与正弦信号相乘,等效于在频域将该信号的频谱进行搬移——正弦幅度调制

两个信号在时域相乘,可以看成是由一个信号控制另一个信号的幅度,这就是幅度调制。其中一个信号称为载波,另一个是调制信号。

正弦幅度调制:

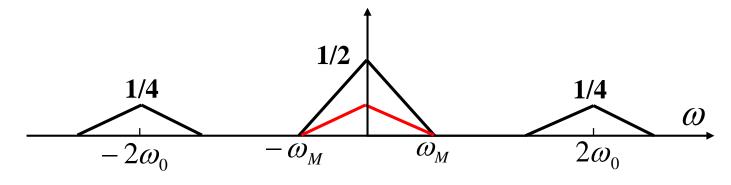


例2. 同步解调:



$$r(t)\cos\omega_{0}t \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}R(j\omega)*\pi[\delta(\omega-\omega_{0})+\delta(\omega+\omega_{0})]$$

$$= \frac{1}{2}S(j\omega)+\frac{1}{4}S[j(\omega-2\omega_{0})]+\frac{1}{4}S[j(\omega+2\omega_{0})]$$

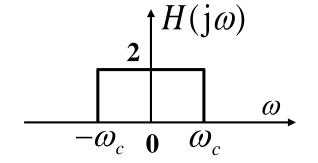


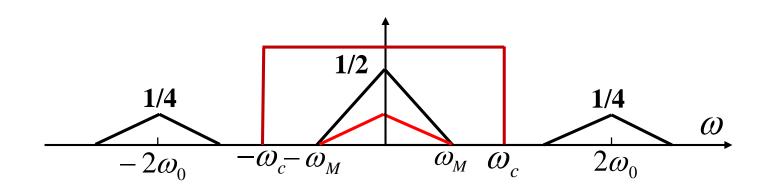
 $R(j\omega)$

此时,用一个频率特性为 $H(j\omega)$ 的理想低通滤波

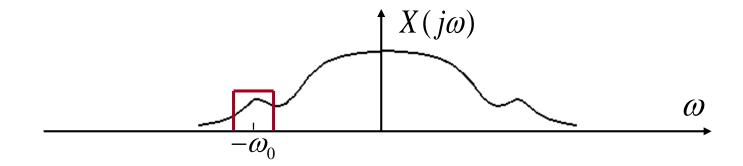
器即可从 r(t) 恢复出 s(t)。

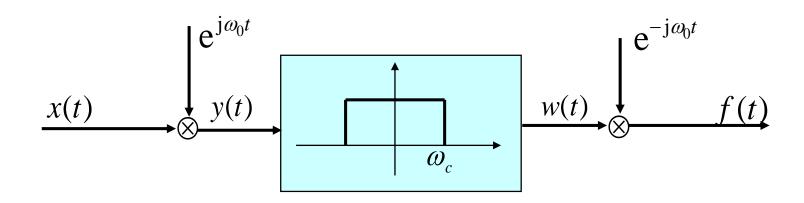
只要 $\omega_{M} < \omega_{c} < 2\omega_{0} - \omega_{M}$ 即可。

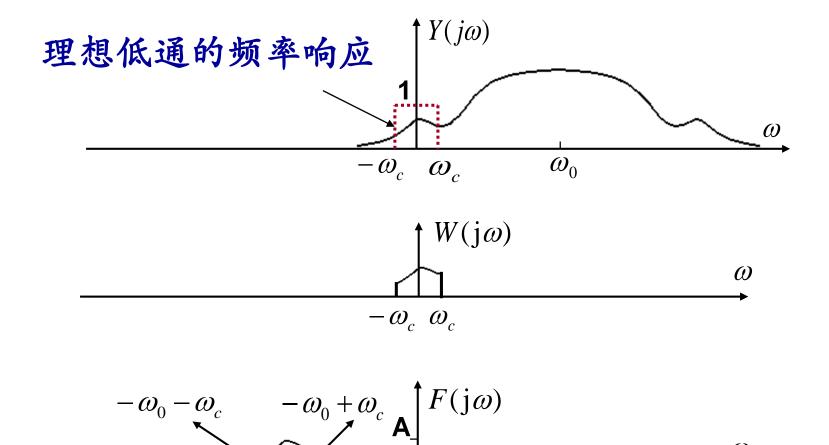




例4. 中心频率可变的带通滤波器:

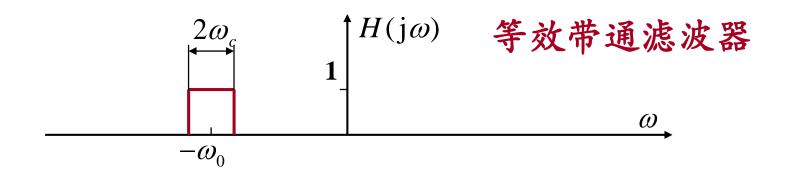




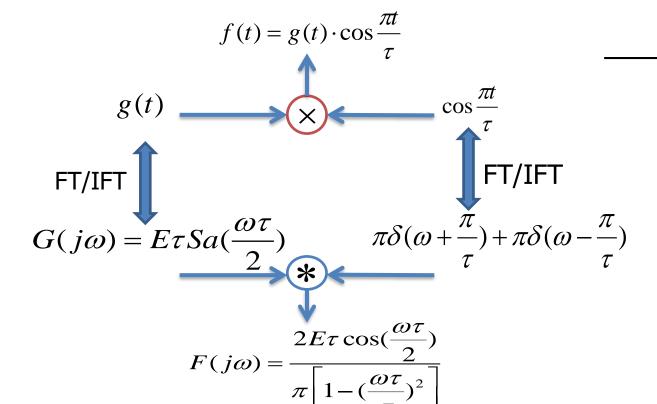


 ω

整个系统相当于一个中心频率为 ω_0 的带通滤波器,改变 ω_0 即可实现中心频率的改变。



- 例: Determine the spectrum of $f(t) = E \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \left[u(t + \frac{\tau}{2}) u(t \frac{\tau}{2})\right]$ 解: $\Rightarrow g(t) = E\left[u(t + \frac{\tau}{2}) u(t \frac{\tau}{2})\right]$



• 4.6 傅里叶变换的性质与傅里叶变换对列表(自学)

• 4.7 由线性常系数微分方程表征的系统

Systems Characterized by Linear Constant-Coefficient Differential Equations

4.7 由线性常系数微分方程表征的系统

Systems Characterized by Linear Constant-Coefficient Differential Equations

· 对于由线性常系数微分方程描述的LTI系统:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\mathrm{d}^k y(t)}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{\mathrm{d}^k x(t)}{\mathrm{d}t^k}$$

如何计算其频率响应 $H(j\omega)$?

对方程两边进行傅里叶变换有:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

由于
$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

4.7 由线性常系数微分方程表征的系统

$$\therefore H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

- 可见由线性常系数微分方程描述的LTI系统其频率特性是一个有理函数。
- · 当需要求得线性常系数微分方程描述的LTI系统的h(t)时,往往是由 $H(j\omega)$ 做反变换得到。
- 对有理函数求傅里叶反变换通常采用部分分式展 开和利用常用变换对进行。

4.7 由线性常系数微分方程表征的系统

例: 求下列系统的单位冲激响应

$$\frac{d^{2}y(t)}{dt^{2}} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 3}{(j\omega)^{2} + 6(j\omega) + 8} = \frac{j\omega + 3}{(4 + j\omega)(2 + j\omega)}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2 + j\omega} + \frac{1}{4 + j\omega} \right]$$

$$h(t) = \frac{1}{2} \left[e^{-2t} + e^{-4t} \right] u(t)$$

可见,对由微分方程所描述的系统通过求频率响

应可以方便地求出其单位冲激响应。

奉章小结

- · 连续时间傅里叶变换建立了将连续时间信号(包括周期、非周期信号)分解为复指数信号分量的线性组合的方法。
- 傅里叶变换的性质揭示了信号时域特性与频域特性的关系。
- · 卷积特性是LTI系统频域分析方法的理论基础,稳 定的LTI系统可以通过其频率响应来描述。
- 相乘特性是通信和信号传输领域各种调制解调技术的理论基础。
- 线性常系数微分方程描述的LTI系统频率响应是 一个有理函数,并且计算方便。