第6章 信号与系统的时域和频域特性

Time and Frequency
Characterization of Signals and
Systems

本章主要向客

- 傅里叶变换的模与相位表示。
- · LTI系统的幅频特性与相频特性,系统的失真。
- 系统的无失真传输条件。
- 理想滤波器的频域、时域特性及其不可实现性。
- · 一阶系统的分析方法, Bode图。

6.0 引言

- 在前面的讨论中, 我们看到
 - 在时域, 系统的特性由 h(t)或 h[n] 描述;
 - 在频域, 系统的特性由 $H(j\omega)$ 或 $H(e^{j\omega})$ 描述;
- 在LTI系统分析中,由于时域中的微分(差分) 方程和卷积运算在频域都变成了代数运算,所以 利用频域分析往往特别方便。
- 系统的时域特性与频域特性是相互制约的。在进行系统的分析与设计时,要权衡考虑系统的时域与频域特性。
- 本章的基本内容旨在建立对系统的时域和频域特 性进行综合分析的思想和方法。

· 6.1 傳里叶变换的模和相位表示 The Magnitude-Phase Representation of the Fourier Transform

The Magnitude-Phase Representation of the Fourier Transform

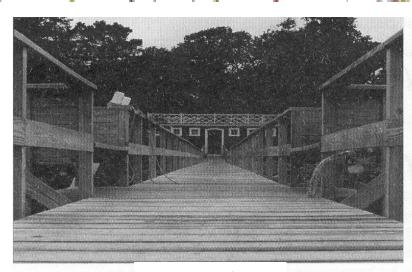
• 连续时间傅里叶变换的模-相表示:

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)}$$

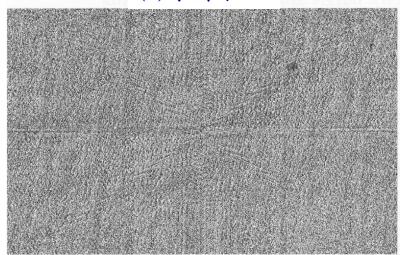
• 离散时间傅里叶变换的模-相表示:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})}$$

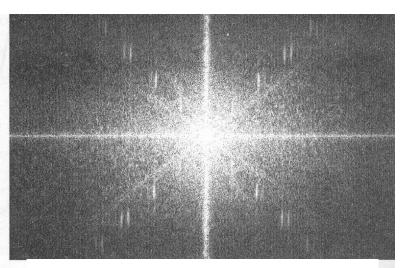
- 因此,导致信号失真的原因有两种:
 - 幅度失真: 由于频谱的模改变而引起的失真。
 - -相位失真:由于频谱的相位改变引起的失真。
- 在工程实际中,不同的应用场合,对幅度失真和相位失真有不同的敏感程度,也会有不同的技术指标要求。



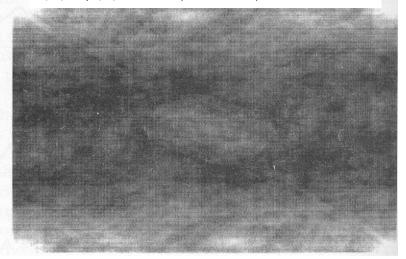
(a)原图像



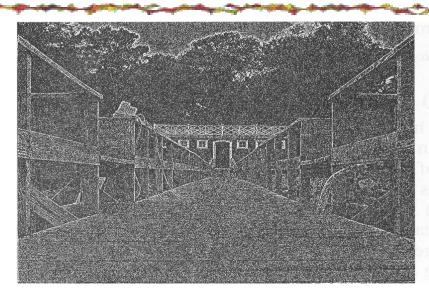
(c)图(a)的二维傅立叶变换的相位



(b)图(a)的二维傅立叶变换的模



(d)傅立叶变换的模与(b)相同,而相位为零

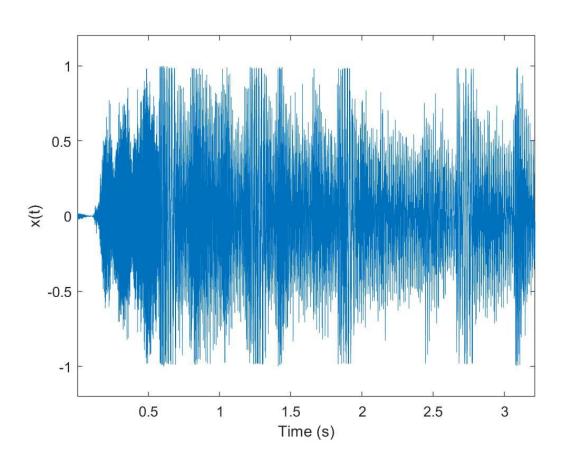




(e)傅立叶变换的模为1,相位与(c)相同 (f)相位与(c)同,模为图(g)的傅立叶变换的模

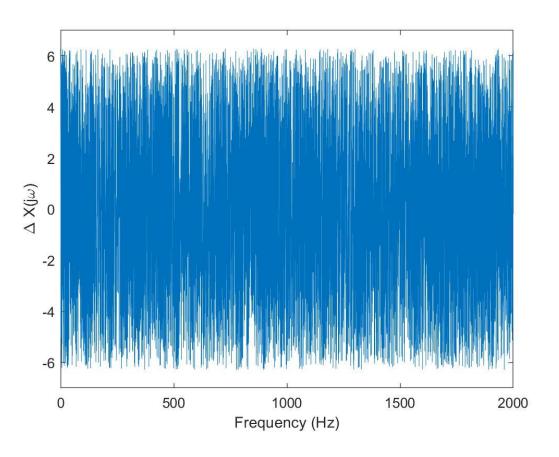


(g)另一幅灰度图像



原始音频



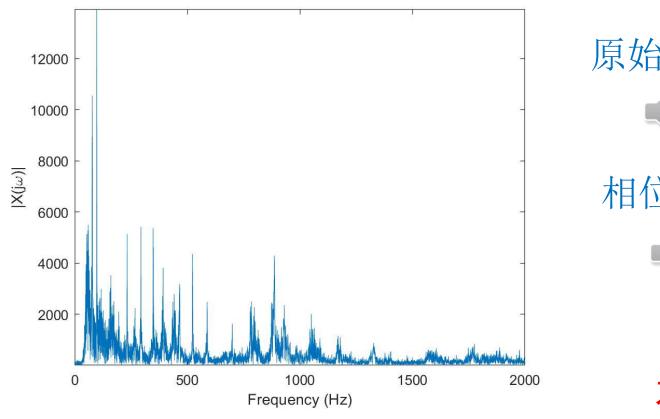


原始音频



幅度为100





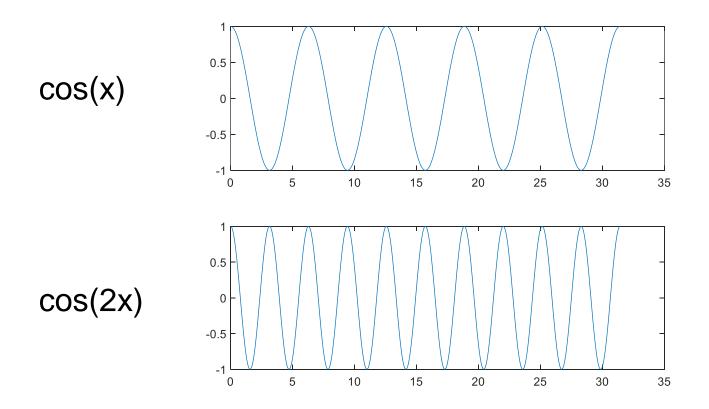
原始音频



相位为0



为什么?

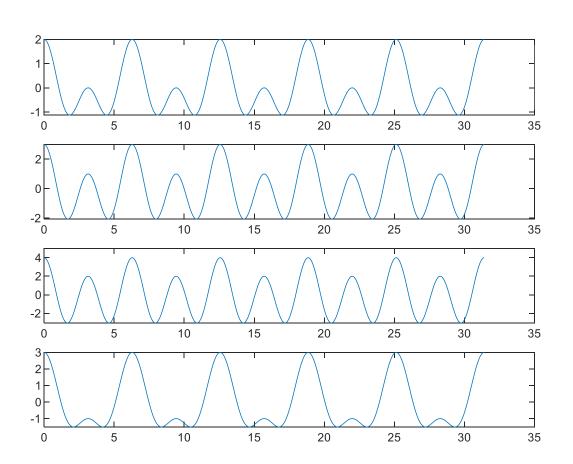


$$cos(x) + cos(2x)$$

$$cos(x) + 2*cos(2x)$$

$$cos(x) + 3*cos(2x)$$

$$2*\cos(x) + \cos(2x)$$

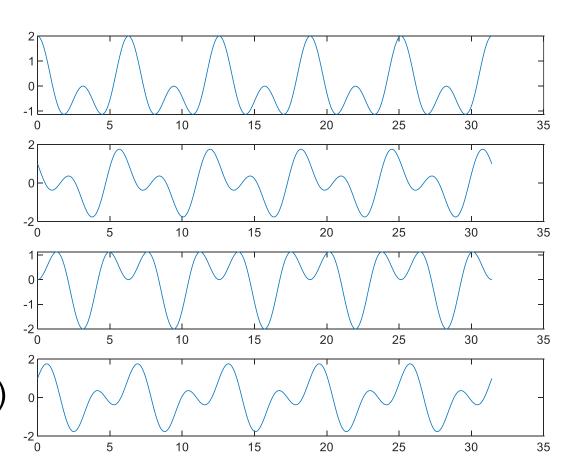


$$cos(x) + cos(2x)$$

$$cos(x) + cos(2x+\pi/2)$$

$$cos(x) + cos(2x + \pi)$$

$$\cos(x) + \cos(2x + 3\pi/2)$$



· 6.2 LTI系统频率响应的模和相位表示 The Magnitude-Phase Representation of the Frequency Response of LTI Systems

The Magnitude-Phase Representation of the Frequency Response of LTI Systems

- · LTI系统对输入信号所起的作用包括两个方面:
 - 改变输入信号各频率分量的幅度;
 - 改变输入信号各频率分量的相对相位。

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$
$$|Y(j\omega)| = |X(j\omega)||H(j\omega)|$$
$$\angle Y(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle X(j\omega)$$

- 一. 线性与非线性相位
- · 信号在传输过程中,相位特性或幅度特性发生改变都可能引起信号波形的改变,即发生失真。
- 当相位特性仅仅是产生一个线性相移时,只引起信号在时间上的平移。如连续时间LTI系统:

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \quad \text{II} \quad y(t) = x(t - t_0)$$

- 此时信号波形不改变,只是发生时间上的延迟,因此未丢失信号所携带的任何信息。
- 如果系统的相位特性是非线性的,由于不同频率 分量所产生的时移不同,叠加起来会变成一个与 原来信号很不相同的信号波形。

- 二. 信号的无失真传输条件
 - 一如果系统响应与输入信号满足下列条件,可视 为在传输中未发生失真:

$$y(t) = kx(t - t_0) y[n] = kx(n - n_0)$$

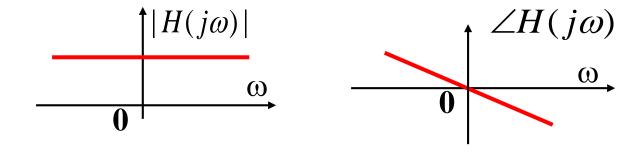
- 这就要求系统的频率特性为

$$H(j\omega) = ke^{-j\omega t_0}$$
 $H(e^{j\omega}) = ke^{-j\omega n_0}$

$$h(t) = k\delta(t - t_0), h[n] = k\delta(n - n_0)$$
 — 时域表征

$$H(j\omega) = ke^{-j\omega t_0}, H(e^{j\omega}) = ke^{-j\omega n_0}$$
 ——频域表征

$$|H(j\omega)| = k, \angle H(j\omega) = -\omega t_0$$



- 如果一个系统的幅频特性是一个常数, 称这种系统为全通系统。
- 通常,系统若在被传输信号的带宽范围内满足不失 真条件,则认为该系统对此信号是不失真系统。

- 三. 群时延 (Group Delay)
- 系统的相位特性表明了信号的各个频率分量在通过系统时,系统对它所产生的附加相移。
- 对线性相位系统,相位特性的斜率就是该频率分量在时域产生的时延。
- 对非线性相位系统, 定义群时延为

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \angle H(j\omega)$$

群时延代表了在一个很窄的频带或很少的一组 频率上信号所受到的有效公共延时。

• 考察一个中心频率为 $\omega = \omega_0$ 的窄带输入信号,一个非线性相位的系统在此窄带范围内,可将其相位的变化近似看成线性的。因此,

$$\angle H(j\omega) \approx -\phi - \omega\alpha$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) | H(j\omega) | e^{-j\phi} e^{-j\omega\alpha}$$

该系统对窄带输入信号产生的近似效果就是:

- 1. 由 $|H(j\omega)|$ 引起的幅度成形;
- 2. 对应系统在 ω_0 的恒定相位 ϕ 的因子 $e^{-j\phi}$ 的影响;
- 3. 对应系统在窄带内的近似线性相位 $\omega \alpha$ 所产生的时延 α 。该时延就是系统在 $\omega = \omega_0$ 的群时延。

- · 四. 对数模与Bode图
- · 在工程应用中,往往采用对数模及对数频率(或称为 Bode图)来描述系统的频率特性。

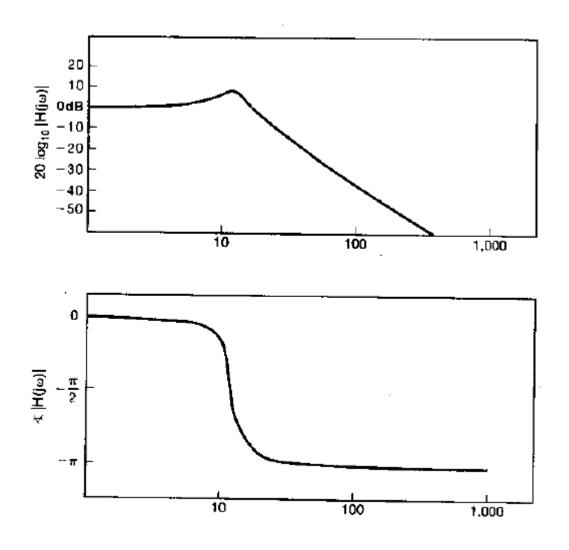
$$20\log_{10}|H(j\omega)| \sim \log_{10}\omega$$

该对数模单位:分贝(dB) (decibels)

- 这可以给频率特性的表示带来一些方便,因为:
 - 可以将模特性的相乘关系变为相加关系;
 - 对数坐标可以展示更宽范围的频率特性,并使低频 端更详细而高频端相对粗略;
 - 对连续时间系统,可以方便地建立模特性和相位 特性的直线型渐近线。

Bode Plots (波特曼)

- Bode plots
 - Plots of $20\log_{10}|H(j|\omega)|$ and $\phi(j|\omega)$ versus $\log_{10}(\omega)$
- Decibels (dB)
 - $-20\log_{10}(.)$
- 0dB ----- 1 (magnitude)
- 20dB ---- 10 (magnitude)
- -20dB ---- 0.1 (magnitude)

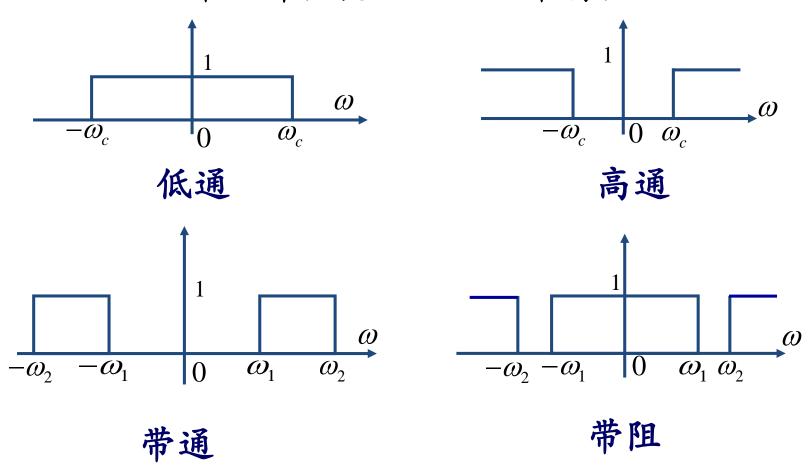


A typical Bode plot (ω is plotted using a logarithmic scale)

· 6.3 理想频率这样性滤波器
The Ideal Frequency-Selective Filters

6.3 理想频率这样性滤波器 The Ideal Frequency-Selective Filters

• 一. 理想频率选择性滤波器的频率特性

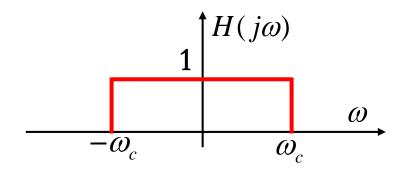


连续时间理想频率选择性滤波器的频率特性

• 二. 理想滤波器的时域特性

以理想低通滤波器为例

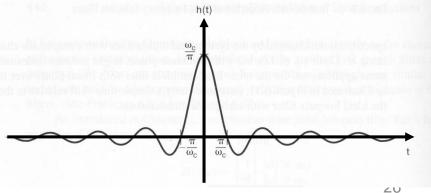
$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega$$



连续时间理想低通滤波器

由傅里叶变换可得:

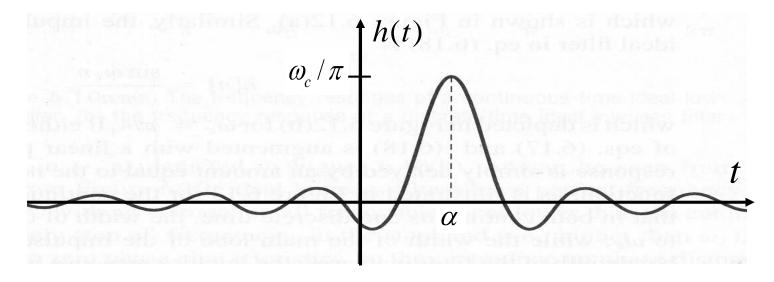
$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega$$
$$= \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{Sa}(\omega_c t)$$



• 如果理想低通滤波器具有线性相位特性

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\alpha\omega}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

$$\mathbf{N} \quad h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{Sa} \left[\omega_c(t - \alpha) \right] = \frac{\sin \omega_c(t - \alpha)}{\pi(t - \alpha)}$$



• 理想低通滤波器的单位阶跃响应

$$s(t) = h(t) * u(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{\omega_{c}}{\pi} \frac{\sin \omega_{c} \tau}{\omega_{c} \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_{c} t} \frac{\sin x}{x} dx$$

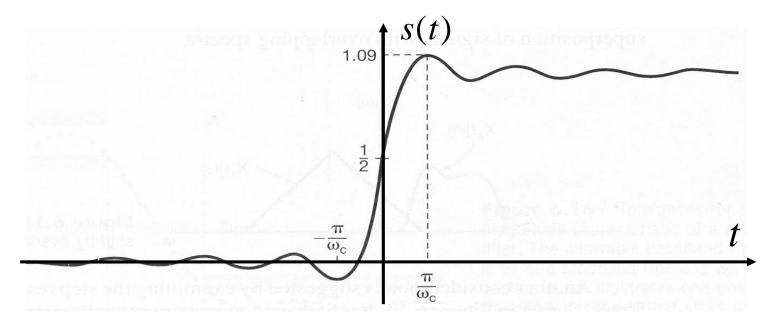
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\omega_{c}t} \frac{\sin x}{x} dx$$

令
$$\int_0^x \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \operatorname{Si}(x) - \mathbf{E} 弦积分$$

由于

$$x \to \infty$$
, $\operatorname{Si}(x) \to \frac{\pi}{2}$; $x \to -\infty$, $\operatorname{Si}(x) \to -\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{Si}(0) = 0$

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{Si}(0) - \operatorname{Si}(-\infty) \right] + \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}(\omega_c t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}(\omega_c t)$$



- 理想滤波器是非因果系统。因而是物理不可实现的。
- 尽管从频域滤波的角度看,理想滤波器的频率特性是最佳的。但它们的时域特性并不是最佳的,h(t)存在振荡。
- 在工程应用中,当要设计一个滤波器时,必须对时域特性和频域特性作出恰当的折中。

· 6.4 旅理想滤波器

6.4 旅理想滤波器

• 为什么需要设计非理想滤波器

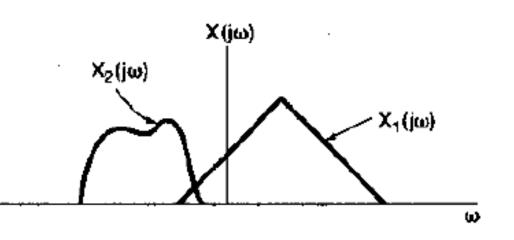


图 6.15 稍像有些重叠的两个频谱

- ▶用滤波器分离两个信号时, 频谱不是完全分隔开的
- ▶理想低通滤波器阶跃响应 有超量和振荡现象
- ▶理想低通滤波器是非因果, 无法完成实时滤波

Features in Frequency Domain

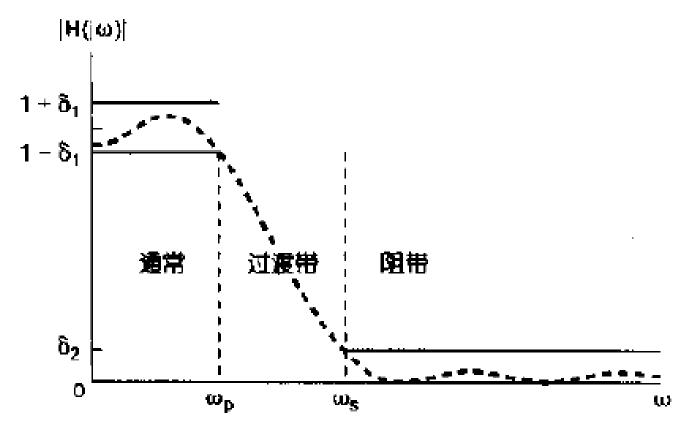


图 6.16 低通滤波器模特性的容限。可容许的通带波纹是 δ_1 ,阻带波纹是 δ_2 。图中虚线指出一种可能的频率响应模特性,它们位于所给容限之内

Features in Time Domain

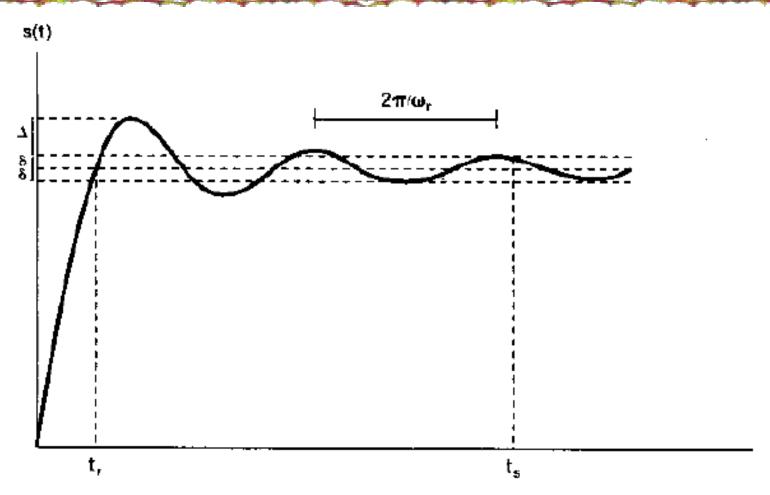
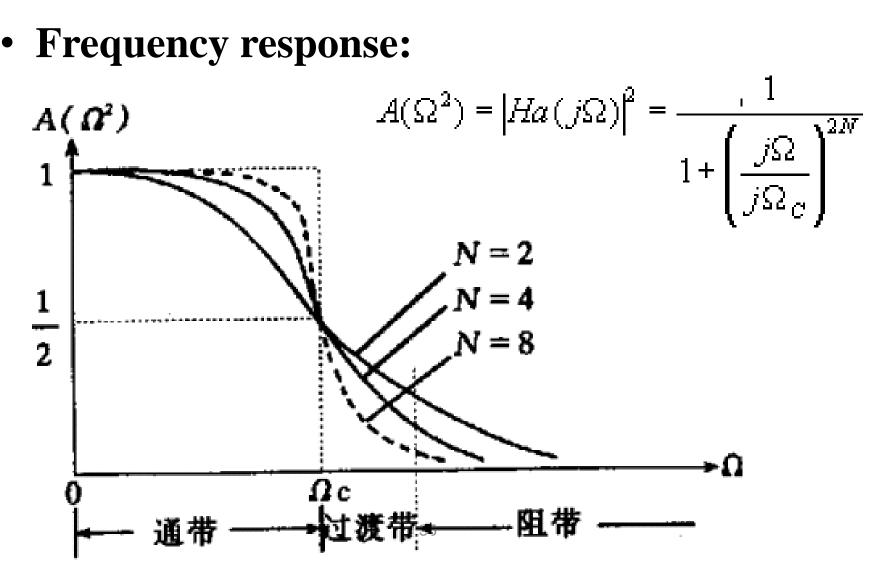


图 6.17 一个连续时间低通滤波器的阶跃响应,图中指出上升时间 t_r ,超量 Δ ,振荡频率 ω_r 和建立时间 t_s , t_s 即阶跃响应位于其终值 $\pm \delta$ 内所需要的时间

Butterworth Filter

• Frequency response:

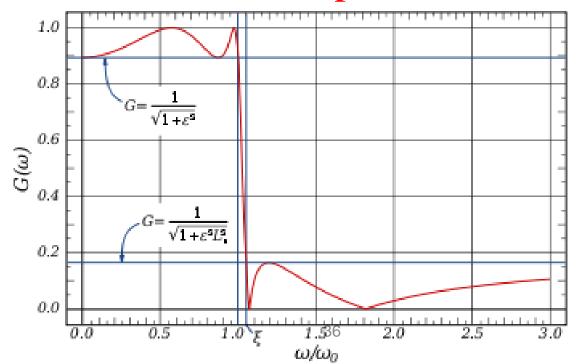


Elliptic filter

• Frequency response:

$$G_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 R_n^2(\xi, \omega/\omega_0)}}$$

• **Rn** is the *n*th-order elliptic rational function

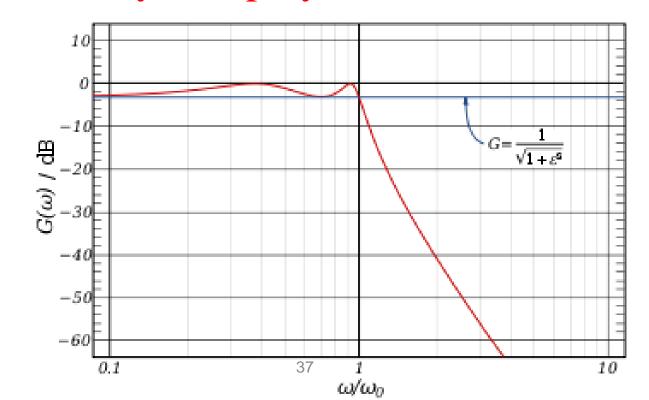


Chebyshev filter-I

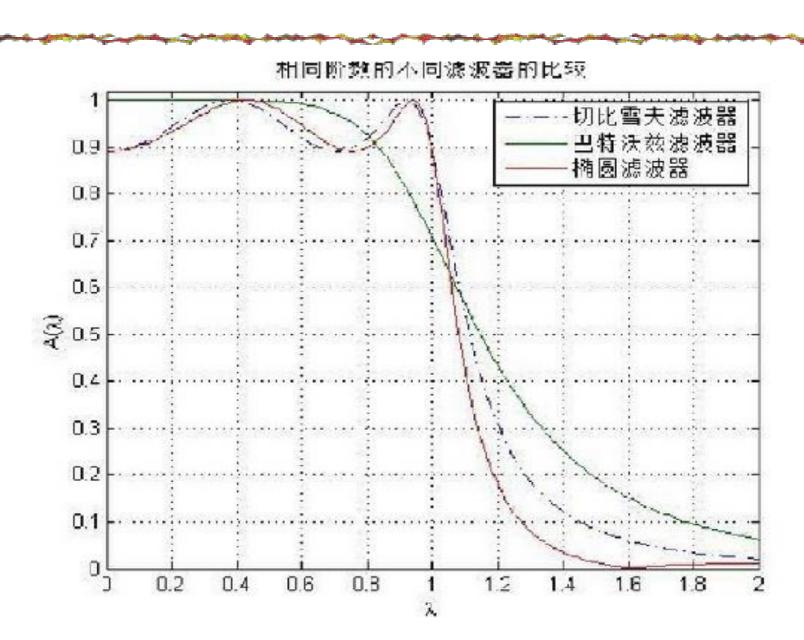
Frequency response:

$$G_n(\omega) = |H_n(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}}$$

Tn is a Chebyshev polynomial of n-th order.



Comparisons



Comparisons

- · Butterworth filter: 巴特沃兹滤波器
 - -单调下降的幅度特性,过渡带最宽;
- Elliptic filter: 椭圆滤波器
 - 过渡带最窄,通带和阻带都是等波纹特性;
- · Chebyshev filter: 切比雪夫滤波器
 - 过渡带介于上述两者之间, I型通带内等波纹, 过渡带和阻带单调下降。

Summary of Non-ideal Filters

- 实际滤波器由于电路实现的限制,只能在某些方面(通带特性、阻带特性、衰减特性、相位特性等)逼近理想滤波器:
- (1) 从幅频特性上看,具有相同阶数的各类滤波器中,衰减特性依次为椭圆、切比雪夫、巴特沃斯;通带波纹依次为巴特沃斯、切比雪夫、椭圆;巴特沃斯滤波器具有"最平幅度"特性。
- (2) 同一种滤波器如巴特沃斯, 阶数增加, 衰减特性改善, 相应的实现电路变得复杂。
- (3) 巴特沃斯、切比雪夫、椭圆滤波器是从滤波器的幅频 特性上考虑的;如果从相位特性考虑,最差的是椭圆滤波 器,切比雪夫滤波器次之,巴特沃斯滤波器较好。

· 6.5 一阶连续时间系统 First-Order Continuous-Time Systems

First-Order Continuous-Time Systems

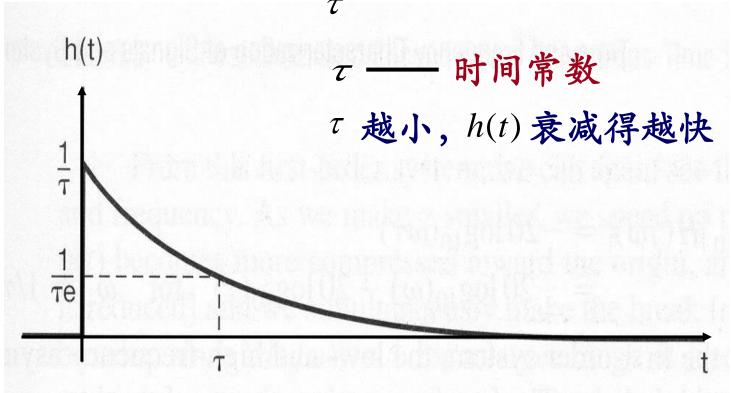
模型:
$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$$

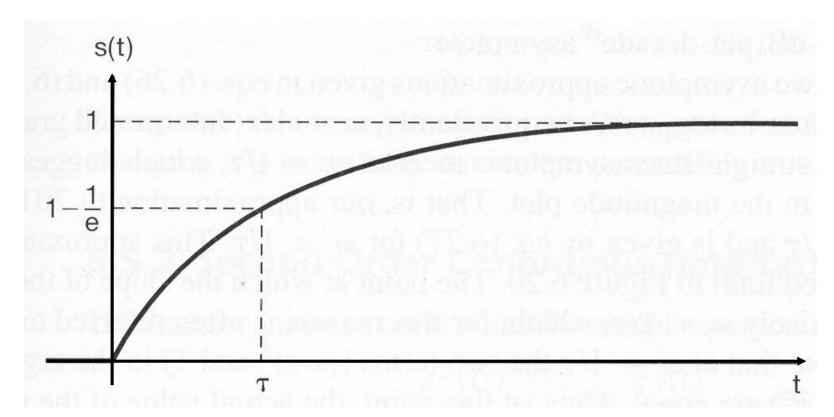
$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$$

1. 时域特性:

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$



$$s(t) = h(t) * u(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})u(t)$$



可以看出: τ 越小, s(t)上升得越快

2. 一阶系统的Bode图:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$$

$$20\log_{10}|H(j\omega)| = -10\log_{10}[1+(\omega\tau)^2]$$

当
$$\omega \tau << 1$$
即 $\omega << \frac{1}{\tau}$ 时 $20\log_{10} |H(j\omega)| \approx 0$ dB

为对数频率特性的低频渐近线方程,与横坐标轴重合

当
$$\omega \tau >> 1 即 \omega >> \frac{1}{\tau}$$
 时

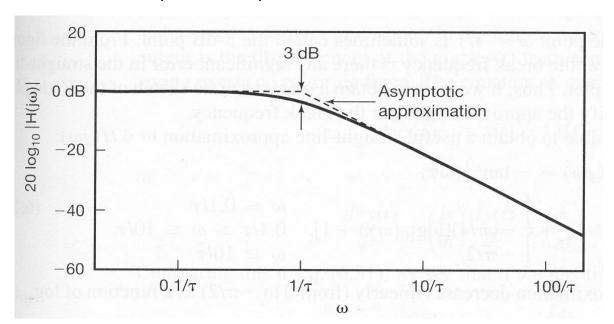
$$20\log_{10}|H(j\omega)| \approx -20\log_{10}\omega\tau = -20\log_{10}\omega - 20\log_{10}\tau$$

高频渐近线方程式,它与低频渐近线交于 $\omega=1/\tau$ 处。

高频渐近线是一条直线,斜率为每10倍频程-20dB。可见,一阶系统的Bode图有两条直线型渐近线。 $\omega=1/\tau$ 称为折断频率。

当 $\omega=1/\tau$ 时,准确的对数模为

$$20\log_{10}|H(j\omega)| = -10\log_{10} 2 \approx -3 \,\mathrm{dB}$$



相频特性:

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

若

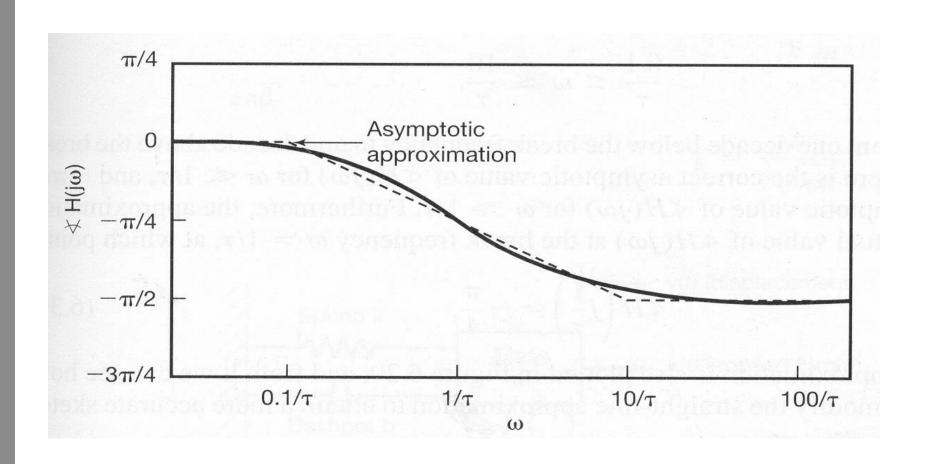
$$\omega << 1/\tau, \angle H(j\omega) = 0$$

$$\omega >> 1/\tau, \angle H(j\omega) \approx -90^{\circ}$$

$$\omega = 1/\tau, \angle H(j\omega) \approx -45^{\circ}$$

将其折线化可得相位特性的直线型渐近线:

$$\angle H(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq 0.1/\tau \\ -\frac{\pi}{4} [\log_{10} \omega \tau + 1], & \frac{0.1}{\tau} \leq \omega \leq \frac{10}{\tau} \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega \geq 10/\tau \end{cases}$$



牵章小结

- 从傅里叶变换的模和相位表示出发,研究 了信号在传输中发生失真的原因和失真的 种类。建立了信号传输的不失真条件。
- 介绍了理想频率选择性滤波器的频率特性和时域特性,理想滤波器的不可实现性
- · 讨论了连续时间一阶系统的时域和频域特性的分析方法,及连续时间一阶系统Bode 图的绘制。