数 理 逻 辑

— 思想与方法

李 娜 编著

南开大学

吴 向 军

2024年8月

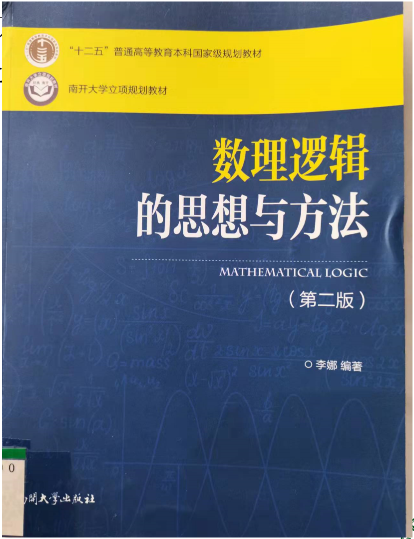
目录

教材和参考书

主讲教材：《数理逻辑的思想与方法》(“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材、南开大学立项规划教材)，李娜编著，南开大学出版社，2016.4

教材和参考书

主讲教材：《数理逻辑的思想与
本科国家级规划教材、南开大学立
开大学出版社，2016.4



教材和参考书

主讲教材：《数理逻辑的思想与方法》(“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材、南开大学立项规划教材)，李娜编著，南开大学出版社，2016.4

辅助书籍：参考书1、2和3，英文术语参考书籍10。

参考书

(1). 面向计算机科学的数理逻辑(普通高等教育“九五”国家级重点教材，中国科学院研究生教学丛书)，陆钟万著，科学出版社，2004。

全书的教学视频：

https://www.bilibili.com/video/BV1Bx411D79N/

教材和参考书

参考书

(2). 数理逻辑教程，陈慕泽著，上海人民出版社，2002.3

教材和参考书

参考书

(2). 数理逻辑教程，陈慕泽著，上海人民出版社，2002.3

(3). 数理逻辑，孙明湘著，中南大学出版社，2004.8

教材和参考书

参考书

(2). 数理逻辑教程，陈慕泽著，上海人民出版社，2002.3

(3). 数理逻辑，孙明湘著，中南大学出版社，2004.8

(4). 数理逻辑，孙希文编著，高等教育出版社，2019.11，研究生和博士生教材

教材和参考书

参考书

(2). 数理逻辑教程，陈慕泽著，上海人民出版社，2002.3

(3). 数理逻辑，孙明湘著，中南大学出版社，2004.8

(4). 数理逻辑，孙希文编著，高等教育出版社，2019.11，研究生和博士生教材

(5). 数理逻辑(新编21世纪哲学系列教材)，余俊伟、赵晓玉、裘江杰、张立英著，中国人民大学出版社，2020.8

教材和参考书

参考书

(2). 数理逻辑教程，陈慕泽著，上海人民出版社，2002.3

(3). 数理逻辑，孙明湘著，中南大学出版社，2004.8

(4). 数理逻辑，孙希文编著，高等教育出版社，2019.11，研究生和博士生教材

(5). 数理逻辑(新编21世纪哲学系列教材)，余俊伟、赵晓玉、裘江杰、张立英著，中国人民大学出版社，2020.8

(6). 数理逻辑引论，朱梧槚，肖奚安编著，大连理工大学出版社，2008.3

教材和参考书

参考书

(7). 数理逻辑 – 基本原理与形式演算，李未著，科学出版社，2008.9

教材和参考书

参考书

(7). 数理逻辑 – 基本原理与形式演算，李未著，科学出版社，2008.9

(8). 数理逻辑，毕富生著，高等教育出版社，2004.1

教材和参考书

参考书

(7). 数理逻辑 – 基本原理与形式演算，李未著，科学出版社，2008.9

(8). 数理逻辑，毕富生著，高等教育出版社，2004.1

(9). 数理逻辑入门，[美]Raymond M. Smullyan著，刘新文、张瑜、荣华夏、闫佳亮、张立英译，中国社会科学院哲学研究所、北京大学哲学系等

教材和参考书

参考书

(7). 数理逻辑 – 基本原理与形式演算，李未著，科学出版社，2008.9

(8). 数理逻辑，毕富生著，高等教育出版社，2004.1

(9). 数理逻辑入门，[美]Raymond M. Smullyan著，刘新文、张瑜、荣华夏、闫佳亮、张立英译，中国社会科学院哲学研究所、北京大学哲学系等

(10). Logic in Computer Science (eBook)，Michael Huth，Mark Ryan，Cambridge University Press，2004

目录

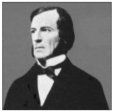
课程的认识

逻辑代数时期

- 数理逻辑创始人——莱布尼兹
  - 首先使用“数理逻辑”这个术语
  - 主导思想：理性演算，普遍语言
  - 理想：推理归结为符号计算

Gottfried W. Leibniz
1646-1716

- 逻辑代数——布尔
  - 《逻辑的数学分析:论演绎推理的演算法》(1847年发表)
  - 首次应用数学(代数)方法研究逻辑,发明了布尔代数(逻辑代数,命题代数,布尔逻辑)



George Boole
(1815-1864)

课程的认识

逻辑代数时期

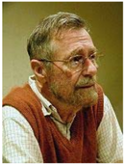
❖ 数

❖ 逻

2015/11/3

戴克斯特拉（Dijkstra）

❖ Edsger Wybe Dijkstra (1930-2002)



- 最伟大的计算机科学家(之一?)
- 成就很多，如图论中的**Dijkstra最短路径算法**
- “搞了这么多年软件，错误不知犯了多少，现在觉悟了。我想，假如我早年在数理逻辑上好好下点功夫的话，我就不会犯这么多的错误，不少东西逻辑学家早就说了，可我不知道。要是我能年轻二十岁的话，就要回去学逻辑。”

2015/11/3 Introduction To CS--Xiaofeng Gao 6

课程的认识


逻辑代数时期
数
逻
2015/11/3
戴克斯特拉（Dijkstra）
Ed
2015/11/3
为什么好多研究逻辑学的是数学家还是哲学家
我来答
分享
举报
1个回答
liuhui244
2017-05-15 · TA获得超过202个赞
因为他们都有一个共同的特质，就是需要强大的逻辑辩证能力。
你学习了高等数学，甚至更复杂的数学就知道，一个证明题是需要很多次的推导，转换，其中就涉及到了能不能转的问题，有些条件非常相似，但是结果相差万里。一旦丝毫出错，最后将会得出一个完全没有意义的结论。所以数学是一个非常需要逻辑严谨的学科。（我说的不是高中那种有答案去解题的那种数学题目）
同样，哲学也是一样，从一个基本点出发，然后利用已有的规则进行推导，思考，最终期望解决一个特定的问题，或者一个普世的价值。

课程的认识

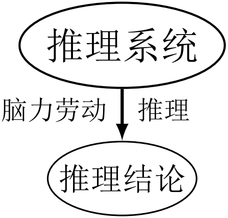
教材“自序”中的语句：我对数理逻辑。。。有所认识，特别是对数理逻辑的奠基者莱布尼茨的梦想 – 使所有推理都归结为计算。

我们要造成这样的一个结果，使所有的推理错误都只成为计算的错误，这样当争论发生的时候，两个哲学家同两个计算家一样用不着辩论，只要把笔拿在手里，并且在计算器前坐下，两人异口同声地说：让我们来计算一下吧！

课程的认识

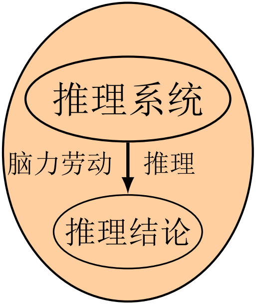
推理系统

课程的认识

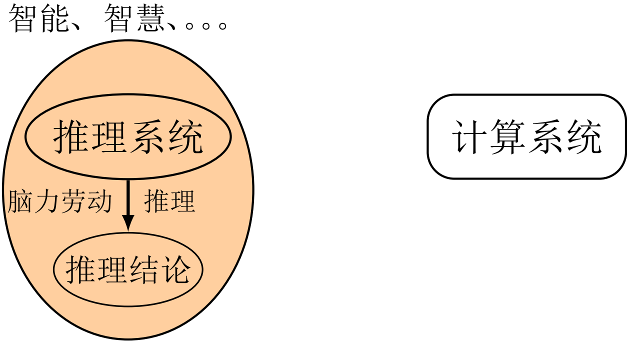


课程的认识

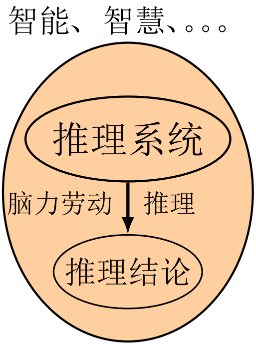
智能、智慧、。。。

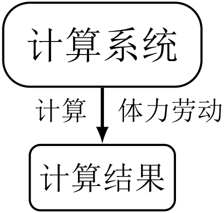


课程的认识



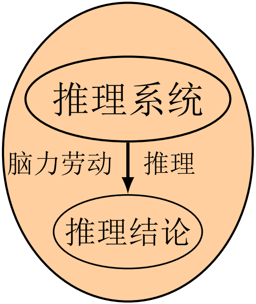
课程的认识



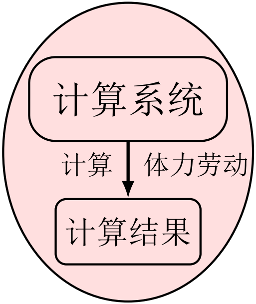


课程的认识

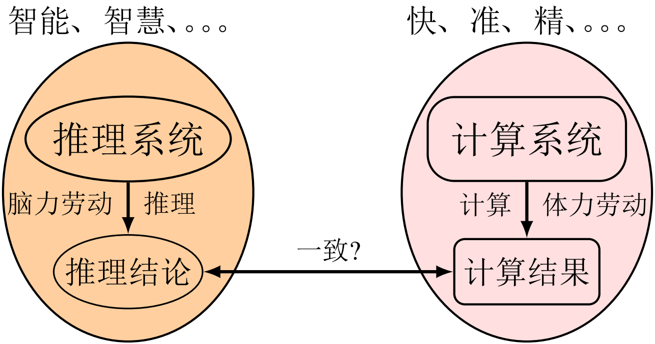
智能、智慧、。。。



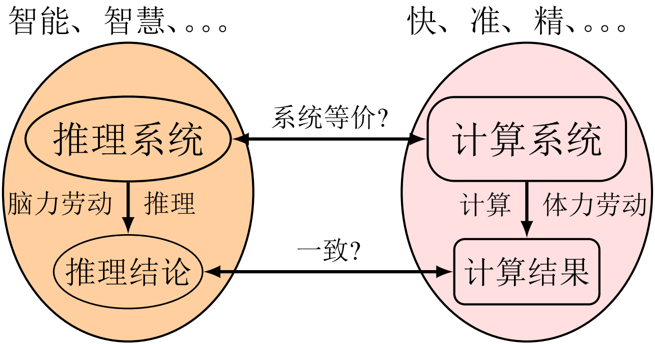
快、准、精、。。。



课程的认识



课程的认识



目录

简单命题和复合命题

定义 (命题)

- 一个具有明确真假值的陈述句，称为命题。
- 其意为真的命题叫真命题，否则，叫假命题。

例如：

- 雪是白的
- 血是白的
- 7是偶数
- 你来吗？
- 广州是广东省的省会
- 鸵鸟是鸟
- 今天真冷！
- $x > 5$
- 地球是平的
- 中国人民是勤劳勇敢的人民

简单命题和复合命题

定义 (复合命题)

- 不含其他命题的命题，称为原子命题(不可分解性)。
- 命题中至少包含一个其他命题，则称之为复合命题，其所含的命题为子命题(支命题)。

在逻辑中，一般用符号$p, q, r, \ldots,$ 或p_1, p_2, p_3等来表示原子命题。

简单命题和复合命题

如：张三不仅认真学习，而且其学习方法很独特。

p：张三认真学习 q：张三的学习方法很独特

注意

复合命题可以用很严格的递归定义来定义，子命题也可以是复合命题。

简单命题和复合命题

定义 (联结词)

把若干个子命题联结起来构成一个复合命题的词语，称为逻辑联结词，简称联结词。

- 在中文中，和，或，不仅...而且...，要么...要么...等
- 在英文中，and，or，if...then...，when...等
- 在C/C++中，&&，||

在逻辑中，常见的联结词有：否定词($\neg$)，合取词($\wedge$)，析取词($\vee$)，蕴涵词($\rightarrow$)和等值词($\leftrightarrow$)等。

基本联结词

(1) 否定词(¬，‘非’)

假设：p是命题，$\neg p$的真值表如下所示。

p	$\neg p$
T	F
F	T

有的书籍不认为否定词是联结词，有的书籍定义它为“一元联结词”。

比如：张三不是三好学生。

p：张三是三好学生。　　$\neg p$：张三不是三好学生。

基本联结词

(2) 合取词($\wedge$，‘与’)

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

假设：p和q是命题，$p \wedge q$的真值表如右所示。

如：张三不仅认真学习，而且其学习方法很独特。

- p：张三认真学习　　q：张三的学习方法很独特
- $p \wedge q$：张三认真学习，且学习方法很独特。

基本联结词

(3) 析取词(∨，‘或’)

假设：p和q是命题，$p \vee q$的真值表如右所示。

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

如：张三认真学习，或其学习方法很独特。

p：张三认真学习

q：张三的学习方法很独特

$p \vee q$：张三认真学习，或其学习方法很独特。

基本联结词

(4) 蕴涵词(→)

定义

假设：p和q是命题。命题“若p为真，则q为真”，称为p蕴涵q，记为：$p \to q$，$\to$为蕴涵联结词。

假设：p和q是命题，$p \to q$的真值表如右所示。

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

基本联结词

(4) 蕴涵词($\rightarrow$)

陆钟万教授用下面语句来说明蕴涵的含义：

如果$x > 3$，则$x^2 > 9$。

基本联结词

(4) 蕴涵词($\rightarrow$)

陆钟万教授用下面语句来说明蕴涵的含义：

如果$x > 3$，则$x^2 > 9$。

x	$p: x > 3$	$q: x^2 > 9$	$p \rightarrow q$
4	T	T	T

基本联结词

(4) 蕴涵词($\to$)

陆钟万教授用下面语句来说明蕴涵的含义：

如果$x > 3$，则$x^2 > 9$。

x	$p : x > 3$	$q : x^2 > 9$	$p \to q$
4	T	T	T
-4	F	T	T

基本联结词

(4) 蕴涵词(→)

陆钟万教授用下面语句来说明蕴涵的含义：

如果$x > 3$，则$x^2 > 9$。

x	$p : x > 3$	$q : x^2 > 9$	$p \to q$
4	T	T	T
-4	F	T	T
-2	F	F	T
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

基本联结词

(4) 蕴涵词($\rightarrow$)

陆钟万教授用下面语句来说明蕴涵的含义：

如果$x > 3$，则$x^2 > 9$。

x	$p : x > 3$	$q : x^2 > 9$	$p \rightarrow q$
4	T	T	T
-4	F	T	T
-2	F	F	T
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

他说：找不到“p为真，q为假”的情形。所以，“$p \rightarrow q$”永远为真。

基本联结词

(4) 蕴涵词($\to$)

陆钟万教授用下面语句来说明蕴涵的含义：

如果$x > 3$，则$x^2 > 9$。

x	$p: x > 3$	$q: x^2 > 9$	$p \to q$
4	T	T	T
-4	F	T	T
-2	F	F	T
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

讨论

严格来说，该例子是有问题的。什么问题？

基本联结词 不作课堂讲解

(4) 蕴涵词($\rightarrow$)

蕴涵逻辑的应用，学生自己体悟，但可私下交流，也可根据情况来讨论。

假设程序中有下面if语句。

```
if (p()) q();
```

- p()恒为真，q()的正确性决定程序的正确性；
- p()恒为假，不论q()是否正确，都不影响程序的正确性。在此情况下，该程序是正确的，并不表示q()也是正确的。

基本联结词 不作课堂讲解

假设程序中有语句：$S_1, S_2, \ldots, S_n$。思考下面描述。

- 若每条语句都正确，则该程序是正确的。
- 若该程序是正确的，则程序中的每条语句都是正确的。

基本联结词 不作课堂讲解

(4) 蕴涵词($\to$)

- 选举语言

  假设参选“班主任”，说：若我选上，你们分数都在80分以上。

  若我没选上，得70分的学生能指责我“说假话”？为什么？

- 诚实的说谎者

  电影《私人订制》中蕴涵逻辑的应用，见1时52分的采访画面。怕被检验：$p \to q$。

基本联结词 不作课堂讲解

(4) 蕴涵词($\rightarrow$)

- 理智的说谎者

  电视剧《宰相刘罗锅》中有下面剧情(约29秒处)。

  。。。

  刘墉：大个的，我能可着江宁城方圆二十里只写一个字。

  乾隆：好，那你就给朕写一个。。。

  刘墉：那万岁，您得赐给臣一个能写这么大个字的笔。

  。。。

  不怕被检验：$p \rightarrow q$。

其他联结词

(1) 异或(∇)

假设：p和q是命题，$p\nabla q$的真值表如右所示。

p	q	$p\nabla q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

异或的表达式形式：

$$p\nabla q \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

其他联结词

(1) 异或(∇)

假设：p和q是命题，$p\nabla q$的真值表如右所示。

p	q	$p\nabla q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

异或的表达式形式：

$$p\nabla q \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

异或联结词表达互斥含义，二者只能有一个为真。析取词则不然。

其他联结词

(1) 异或(∇)

如：我明天要么去上海，要么去北京。

p：我明天去上海

q：我明天去北京

$p \vee q$和$p \nabla q$的含义对应关系如右表所示。

p	q	$p \vee q$	$p \nabla q$
T	T	T	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

其他联结词

(1) 异或(∇)

如：我明天要么去上海，要么去北京。

p：我明天去上海

q：我明天去北京

$p \vee q$和$p \nabla q$的含义对应关系如右表所示。

p	q	$p \vee q$	$p \nabla q$
T	T	T	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

- 在数字电路中，用‘$\oplus$’表示异或：$x \oplus y = \bar{x}y + x\bar{y}$；
- 在C/C++语言中，用‘^’表示异或：$1 \,\hat{}\, 0 = 1$。

其他联结词

(2) 等值词($\leftrightarrow$)

假设：p和q是命题，$p \leftrightarrow q$的真值表如右所示。

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

等值词的表达式形式：

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

p 当且仅当 q

讨论

实际上，等值词是“同或”：$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$。

联结词真值表的总结

联结词的真值表汇总如下所示。

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \nabla q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	T	F	T

$$p \nabla q \equiv \neg(p \leftrightarrow q)?$$

所有联结词

假设：p和q是命题。由于p和q有4种组合，它共有16种不用的结果，暂用$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{15}$来表示。命题$p$和$q$联结在一起的所有可能结果如下表所示。

p	q	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T

若$\mathrm{F} \mapsto 0$和$\mathrm{T} \mapsto 1$，则，

$$0000 \mapsto 0，0001 \mapsto 1，\ldots，1111 \mapsto 15$$

所有联结词

假设：p和q是命题。由于p和q有4种组合，它共有16种不用的结果，暂用$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{15}$来表示。命题$p$和$q$联结在一起的所有可能结果如下表所示。

p	q	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T

由上表可知：$f_3 \equiv \neg p$，$f_8 \equiv p \wedge q$，$f_{14} \equiv p \vee q$，$f_{11} \equiv p \rightarrow q$。

所有联结词

假设：p和q是命题。由于p和q有4种组合，它共有16种不用的结果，暂用$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{15}$来表示。命题$p$和$q$联结在一起的所有可能结果如下表所示。

p	q	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T

由上表可知：$f_3 \equiv \neg p$，$f_8 \equiv p \wedge q$，$f_{14} \equiv p \vee q$，$f_{11} \equiv p \rightarrow q$。

所有联结词

假设：p和q是命题。由于p和q有4种组合，它共有16种不用的结果，暂用$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{15}$来表示。命题$p$和$q$联结在一起的所有可能结果如下表所示。

p	q	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T

由上表可知：$f_3 \equiv \neg p$，$f_8 \equiv p \wedge q$，$f_{14} \equiv p \vee q$，$f_{11} \equiv p \rightarrow q$。
特别地，$f_0 \equiv \mathrm{F}$，$f_{15} \equiv \mathrm{T}$。

所有联结词

假设：p和q是命题。由于p和q有4种组合，它共有16种不用的结果，暂用$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{15}$来表示。命题$p$和$q$联结在一起的所有可能结果如下表所示。

p	q	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T

讨论

$\forall i \in \{0, 1, \ldots, 15\}$，$f_i$都可用$\{\neg, \wedge, \vee\}$来表达。

联结词的完备集

定义

- 假设：S是联结词集合。若任何合式公式都可用集合S中的联结词来表示或等值表示，则称联结词集合S为联结词的完备集。
- 假设：S是联结词完备集。若$\forall c \in S$，都有：$S - \{c\}$不是联结词完备集，则联结词完备集S是最小完备集。

联结词的完备集

定理

$\{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集。

证明

假设命题p和q之间的所有联结词为：$f_0, f_1, \ldots, f_{15}$。可用穷举方法来证明：所有这些联结词都可用$\{\neg, \wedge, \vee\}$来表达。

$$f_0 = p \wedge (\neg p) \qquad f_1 = (\neg p) \wedge (\neg q)$$

$$\cdots$$

$$f_{15} = p \vee (\neg p)$$

所以，$\{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集。

联结词的完备集

定理

$\{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集。

证明

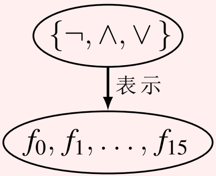
假设命题p和q之间的所有联结词为：$f_0, f_1, \ldots, f_{15}$。可用穷举方法来证明：所有这些联结词都可用$\{\neg, \wedge, \vee\}$来表达。

$$f_0 = p \wedge (\neg p) \qquad f_1 = (\neg p) \wedge (\neg q)$$

$$\ldots$$

$$f_{15} = p \vee (\neg p)$$

所以，$\{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集。



联结词的完备集

定理

$\{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集。

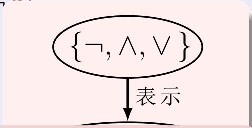
证明

假设命题p和q之间的所有联结词为：$f_0, f_1, \ldots, f_{15}$。可用穷举方法来证明：所有这些联结词都可用$\{\neg, \wedge, \vee\}$来表达。

$$f_0 = p \wedge (\neg p) \qquad f_1 = (\neg p) \wedge (\neg q)$$

$$\ldots$$

$$f_{15} = p \vee (\neg p)$$



思考

$\{\neg, \wedge, \vee\}$是最小完备集？

联结词的完备集

定理

$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \vee\}$和$\{\neg, \rightarrow\}$都是联结词完备集。

证明

对每个联结词集合来分别证明。

联结词的完备集

定理

$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \vee\}$和$\{\neg, \to\}$

$$\begin{tikzcd} \{\neg, \wedge\} \arrow[dr] & \\ & \{\neg, \wedge, \vee\} \end{tikzcd}$$

证明

对每个联结词集合来分别证明。

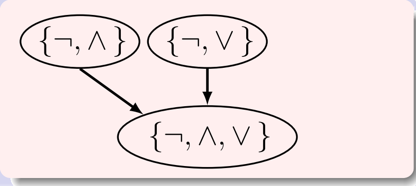
- 联结词集合$\{\neg, \wedge\}$

$$p \vee q \equiv \neg(\neg(p \vee q)) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

联结词的完备集

定理

$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \vee\}$和$\{\neg, \to\}$



证明

对每个联结词集合来分别证明。

- 联结词集合$\{\neg, \wedge\}$

$$p \vee q \equiv \neg(\neg(p \vee q)) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

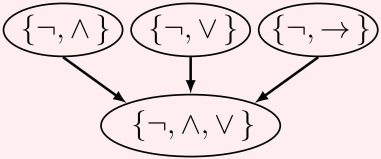
- 联结词集合$\{\neg, \vee\}$

$$p \wedge q \equiv \neg(\neg(p \wedge q)) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$$

联结词的完备集

定理

$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \vee\}$和$\{\neg, \to\}$



证明

对每个联结词集合来分别证明。

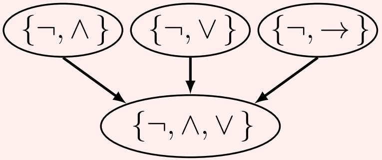
- 联结词集合$\{\neg, \to\}$，

$$p \vee q \equiv \neg p \to q \qquad p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \to \neg q)$$

联结词的完备集

定理

$\{\neg,\wedge\}$、$\{\neg,\vee\}$和$\{\neg,\rightarrow\}$



证明

对每个联结词集合来分别证明。

- 联结词集合$\{\neg,\rightarrow\}$，

$$p\vee q\equiv\neg p\rightarrow q \qquad p\wedge q\equiv\neg(\neg p\vee\neg q)\equiv\neg(p\rightarrow\neg q)$$

结论

由此可知：$\{\neg,\wedge,\vee\}$不是最小完备集。

联结词完备集的应用

在有些书或课程中，如：数字电路与逻辑设计等。

- 用联结词‘¬’和‘∧’定义为‘↑’，称为：与非联结词(与非门)。

$$p \uparrow q = \neg(p \wedge q) \qquad p \uparrow q = \overline{p \wedge q}$$

- 用联结词‘¬’和‘∨’定义为‘↓’，称为：或非联结词(或非门)。

$$p \downarrow q = \neg(p \vee q) \qquad p \downarrow q = \overline{p \vee q}$$

联结词完备集的应用

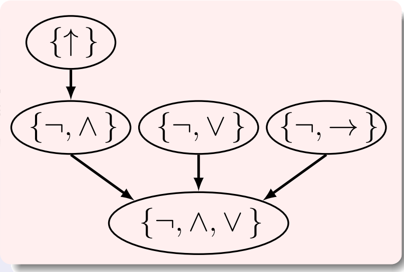
定理

$\{\uparrow\}$和$\{\downarrow\}$都是联结词完备集。

联结词完备集的应用

定理

$\{\uparrow\}$和$\{\downarrow\}$都是联结词完备集



证明

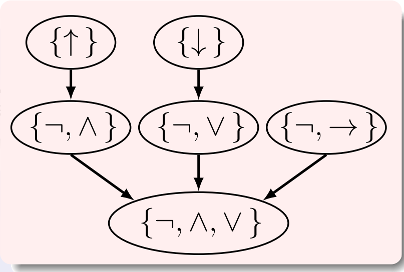
$$\neg p \equiv p \uparrow p$$

$$p \wedge q \equiv \neg(\neg(p \wedge q)) \equiv \neg(p \uparrow q) \equiv (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$$

联结词完备集的应用

定理

$\{\uparrow\}$和$\{\downarrow\}$都是联结词完备集

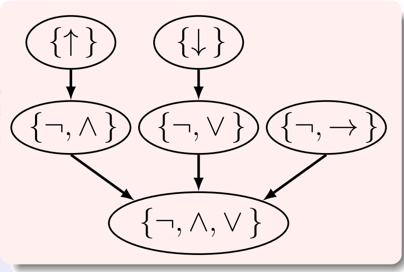


证明

$$\neg p \equiv p \uparrow p$$

$$p \wedge q \equiv \neg(\neg(p \wedge q)) \equiv \neg(p \uparrow q) \equiv (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$$

联结词完备集的应用



定理

$\{\uparrow\}$和$\{\downarrow\}$都是联结词完备集

证明

$$\neg p \equiv p \uparrow p$$

$$p \wedge q \equiv \neg(\neg(p \wedge q)) \equiv \neg(p \uparrow q) \equiv (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$$

$$\neg p \equiv p \downarrow p$$

$$p \vee q \equiv \neg(\neg(p \vee q)) \equiv \neg(p \downarrow q) \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

完备集的思考 不作课堂讲解

假设把‘元’的纸币种类看成集合S。

- $S_1 = \{1\}$
  一个币种，造币方便，生活不方便；
- $S_2 = \{2, 3\}$
  二个币种，造币方便，生活也还行；

$$
\begin{array}{lll}
1 : 3 - 2 & 2 : 2 & 3 : 3 \\
4 : 2 + 2 & 5 : 2 + 3 & 6 : 3 + 3\ (2 + 2 + 2) \\
7 : 2 + 2 + 3 & 8 : 2 + \textcolor{red}{6} & 9 : 3 + \textcolor{red}{6}
\end{array}
$$

完备集的思考 不作课堂讲解

假设把'元'的纸币种类看成集合S。

- $S_9 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
  太多币种，造币不便，生活很方便；
- $S_3 = \{1, 2, 5\}$
  三个币种，造币也不难，生活也方便。

完备集的思考 不作课堂讲解

假设把‘元’的纸币种类看成集合S。

- $S_9 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
  太多币种，造币不便，生活很方便；
- $S_3 = \{1, 2, 5\}$
  三个币种，造币也不难，生活也方便。

思考

$S_1 = \{2\}$或$\{3\}$? $S_2 = \{1, 3\}$?

我国纸币币种为$\{1, 2, 5\}$, 能否给一个自己的理解?

完备集的思考 不作课堂讲解

- C/C++语言的运算和语句种类：+，-，*，/，赋值，分支，循环，...

  -(一元运算)，++，--，

  (cond ? v1 : v2)，switch，函数，过程，&(引用)，

  return，...

- CPU的指令集：mov，neg，add，sub，mul，imul，div，idiv，...

完备集的思考 不作课堂讲解

- 在数字电路课程中，可用“与非”，或“或非”门来实现各种电路。这样，器件单一，但需进行各种变形。

思考

- 设计C/C++语言运算符或控制结构时，需要考虑它们的完备集，还是最小完备集？C语言语句越来越多的原因是什么？
- 设计CPU指令集时，考虑指令的完备集，还是最小完备集？
- 设计数字电路时，用门器件的最小完备集来搭建电路的优缺点。

目录

命题公式

命题公式的基本符号

- 原子命题： $p, q, r, \ldots$
- 一元联结词： $\neg$
- 二元联结词： $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 括号： $(,\ )$

命题公式

命题公式的递归定义。

- 原子命题是命题公式；
- A是命题公式，(A)和$\neg A$是命题公式；
- A和B是命题公式，$A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B$和$A \leftrightarrow B$都是命题公式。

命题公式

几个命题公式的例子。

- “p或者非q”的命题公式：$p \vee \neg q$
- “如果非q，则非p”的命题公式：$\neg q \to \neg p$
- “p且q，当且仅当，q且p”的命题公式：$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

命题公式

几个命题公式的例子。

- 张三是三好生，当且仅当，张三是思想品德好，学习好，身体好。

  令 p：张三是三好生

  q_1：张三思想品德好

  q_2：张三学习好

  q_3：张三身体好

  所以，该命题的公式形式为：$p \leftrightarrow (q_1 \wedge q_2 \wedge q_3)$。

命题公式

为方便表达，有下面约定：

- 命题公式中的最外层括号可省略：$(\alpha) \longmapsto \alpha$
- 连续出现同一联结词$\vee$，$\wedge$和$\rightarrow$，则采用“右结合”。如：

$$p \wedge q \wedge r \wedge t \longmapsto p \wedge (q \wedge (r \wedge t))$$

$$p \vee q \vee r \vee t \longmapsto p \vee (q \vee (r \vee t))$$

$$p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow t \longmapsto p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow t))$$

- 联结词优先级“由高到低”的次序为：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$。

命题公式与真值表

1)、命题公式 $\Longrightarrow$ 真值表

步骤：

- 确定命题公式中原子命题及其个数，列出所有原子命题的所有真值；
- 根据联结词的优先级，由简到繁求出命题公式中所有子公式的真值。

命题公式与真值表 命题公式 $\Longrightarrow$ 真值表

(1) 求命题公式$(p \to (\neg q)) \to (q \vee (\neg p))$的真值表。

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to (\neg q)$	$q \vee (\neg p)$	$(p \to (\neg q)) \to (q \vee (\neg p))$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

命题公式与真值表 命题公式 $\Longrightarrow$ 真值表

(2) 求命题公式$\alpha : p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$的真值表。

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	α
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

命题公式与真值表

2)、真值表 $\Longrightarrow$ 命题公式

(1) 用真值表最后一列中的‘真’写命题公式的析取式

任意原子命题p取‘真’，写成p，否则，写成$\neg p$。

p	q	α	
T	T	F	
T	F	T	$\leftarrow p \wedge \neg q$
F	T	F	
F	F	T	$\leftarrow \neg p \wedge \neg q$

把这两行真值所对应的子公式用‘或’联结词可得：

$$\alpha \equiv \underline{(p \wedge \neg q)} \vee \underline{(\neg p \wedge \neg q)}$$

命题公式与真值表

真值表 $\Longrightarrow$ 命题公式

(2) 用真值表最后一列中的'假'写命题公式的合取式

任意原子命题p取'真'，写成$\neg p$，否则，写成p。

p	q	α	
T	T	F	$\leftarrow \neg p \vee \neg q$
T	F	T	
F	T	F	$\leftarrow p \vee \neg q$
F	F	T	

把这两行假值所对应的子公式用'与'联结词可得：

$$\alpha \equiv \underline{(\neg p \vee \neg q)} \wedge \underline{(p \vee \neg q)}$$

命题公式与真值表

真值表 $\Longrightarrow$ 命题公式

p	q	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T

$$f_1 \equiv (\neg p \wedge \neg q) \equiv \underline{(\neg p \vee \neg q)} \wedge \underline{(\neg p \vee q)} \wedge \underline{(p \vee \neg q)}$$

其它真值函数f_i也可同样直接写出来。

重言式

定义

假设：α是命题公式，其含有n个原子命题。

- 所有原子命题的所有取值都使α为'真'，称α为永真式(重言式)；
- 所有原子命题的所有取值都使α为'假'，称α为永假式(不可满足式)；
- 存在原子命题的取值，使α为'真'，也存在原子命题的取值，使公式α为'假'，称α为可满足式。

重言式

重言式和永假式之间的关系

- 命题公式是重言式，当且仅当，其否定是永假式;
- 命题公式是永假式，当且仅当，其否定是永真式;
- 。。。

重言式的作用

利用重言式有以下二个作用：

- 判定推理形式是否正确；
- 判定二个命题公式是否等值。

重言式的作用

例：若p，则q；所以，若非q，则非p。

该推理为“假言易位”推理(逆否命题)，该推理的命题公式为：

$$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

该推理的命题公式是永真式，所以，该推理正确。

重言式的作用

例：若p，则q；非p；则非q。

该推理所对应的命题公式为：

$$((p \to q) \wedge \neg p) \to \neg q$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \neg p$	$((p \to q) \wedge \neg p) \to \neg q$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T	T

由于该推理的命题公式不是永真式，所以，该推理不正确。

重言式的作用

例：要么p，要么q；p；则非q。

该推理所对应的命题公式为：

$$\alpha : (\beta \wedge p) \to \neg q \qquad \beta : (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	β	$\beta \wedge p$	α
T	T	F	F	F	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	F	T
F	F	T	T	F	F	F	F	T

该推理的命题公式是永真式，所以，该推理正确。

推理：p和q中仅有一个为真，p为真，则q为假(即$\neg q$为真)。

重言式的作用

例：$\alpha:(\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$，$\beta:p\leftrightarrow q$；判断$\alpha$和$\beta$是否等值。

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\vee q$	$p\vee\neg q$	α	β	$\alpha\leftrightarrow\beta$
T	T	F	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T

由于$\alpha\leftrightarrow\beta$是永真式，所以，$\alpha$和$\beta$是等值的。

重言式的作用

等值关系‘$\leftrightarrow$’是等价关系，即：

- 自反性：任意公式α，都有$\alpha \leftrightarrow \alpha$；
- 对称性：若$\alpha \leftrightarrow \beta$，则$\beta \leftrightarrow \alpha$；
- 传递性：若$\alpha \leftrightarrow \beta$和$\beta \leftrightarrow \gamma$，则$\alpha \leftrightarrow \gamma$。

重言式的作用

- $\alpha_1 : (p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
- $\alpha_2 : (p \to q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
- $\alpha_3 : (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$
- $\alpha_4 : (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
- $\alpha_5 : (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p)$
- $\cdots$

重言式的判断方法

- 简化真值表方法(赋值归谬法)

  此法主要适用于主联结词为‘$\to$’的命题公式，因为蕴涵式“$p \to q$”，仅有一种情形为‘假’，即：$p \mapsto T$ 和$q \mapsto F$。

  其本质是反证法。

- 真值树方法

  此法本质上也是反证法，只是表达形式不同而已。相对来说，比较直观，判断过程不会遗漏某种情形，还能利用一些规则剪枝一些不必要的推理。

重言式的判断方法 简化真值表法

1、简化真值表方法，也称赋值归谬法。

假设：该命题公式不是重言式，即：存在使之为‘假’的一组真值赋值。

- 确定使之为‘假’的一组赋值；
- 若产生矛盾，则该公式不可能为‘假’，即其为永真式(重言式)；
- 若不产生矛盾，则找出使之为‘假’的赋值，即找反例方法。

重言式的判断方法 简化真值表法

用简化真值表方法判定：$p \to p \vee p$是否为重言式。

$$p \to p \vee p$$

重言式的判断方法 简化真值表法

用简化真值表方法判定：$p \to p \vee p$是否为重言式。

(1) $p \to p \vee p$ 假设：值为‘假’

重言式的判断方法 简化真值表法

用简化真值表方法判定：$p \to p \vee p$是否为重言式。

	$p \to p \vee p$	
(1)		假设：值为‘假’
(2)	$\overline{T}$ $\quad\quad$ $\overline{F}$	(1)和‘→’定义

重言式的判断方法 简化真值表法

用简化真值表方法判定：$p \rightarrow p \vee p$是否为重言式。

	p	$\rightarrow$	p	$\vee$	p	
(1)						假设：值为‘假’
(2)	$\overline{T}$			$\overline{F}$		(1)和‘→’定义
(3)			$\overline{F}$		$\overline{F}$	(2)和‘∨’定义

重言式的判断方法 简化真值表法

用简化真值表方法判定：$p \to p \vee p$是否为重言式。

(1)	$p \to p \vee p$	假设：值为'假'
(2)	$\overline{T}\qquad\overline{\quad F\quad}$	(1)和'→'定义
(3)	$\qquad\overline{F}\quad\overline{F}$	(2)和'∨'定义

推理过程中得到：p有二个不同值，矛盾。

所以，该式为重言式。

重言式的判断方法 简化真值表法

用简化真值表方法判定：$p \lor q \to q \lor p$为重言式。

	p	$\lor$	q	$\to$	q	$\lor$	p	
(1)								假设：值为‘假’
(2)		$\overline{T}$				$\overline{F}$		(1)和‘$\to$’定义
(3)					$\overline{F}$		$\overline{F}$	(2)和‘$\lor$’定义
(4)	$\overline{T}$							(3)q为‘假’和‘$\lor$’定义

推理过程中得到：p有二个不同值，矛盾。

所以，该式为重言式。

重言式的判断方法 简化真值表法

用简化真值表方法判定：$p \vee q \rightarrow q \vee p$为重言式。

$$
\begin{array}{ccccccc}
p & \vee & q & \rightarrow & q & \vee & p \\
\hline
 & T & & & & F & \\
 & & & & F & & F \\
\hline
 & F & & & & &
\end{array}
$$

假设：值为‘假’

(1)和‘→’定义

(2)和‘∨’定义

(3)p和q为‘假’和‘∨’定义

重言式的判断方法　简化真值表法

用简化真值表方法判定：$p \vee q \rightarrow q \vee p$为重言式。

$$\begin{array}{ccccccc}
p & \vee & q & \rightarrow & q & \vee & p \\
 & \overline{T} & & & & \overline{F} & \\
 & & & & \overline{F} & & \overline{F} \\
 & \overline{F} & & & & &
\end{array}$$

假设：值为‘假’

(1)和‘$\rightarrow$’定义

(2)和‘$\vee$’定义

(3)p和q为‘假’和‘$\vee$’定义

重言式的判断方法 简化真值表法

用简化真值表方法判定：$p \vee q \rightarrow q \vee p$为重言式。

$p \vee q$	$\rightarrow$	$q \vee p$	
			假设：值为'假'
T		F	(1)和'$\rightarrow$'定义
		$F \quad F$	(2)和'$\vee$'定义
F			(3)p和q为'假'和'$\vee$'定义

推理过程中得到：$p \vee q$有二个不同值，矛盾。
所以，该式为重言式。

重言式的判断方法 简化真值表法

用简化真值表方法判定：$(p \to q) \wedge \neg p \to \neg q$是否为重言式。

(1)	$(p \to q)$	$\wedge \neg p$	$\to \neg q$	假设：值为‘假’
(2)	$\overline{T}$		$\overline{F}$	(1)和‘$\to$’定义
(3)	$\overline{T}$	$\overline{T}$	$\overline{T}$	(2)、‘$\vee$’和‘$\neg$’定义
(4)		$\overline{F}$		(3)、p和q为‘假’和‘$\vee$’定义

推理过程中不产生矛盾，即：当‘$p \mapsto F$’和‘$q \mapsto T$’时，使该式为‘假’。所以，其不是重言式。

重言式的判断方法 简化真值表法

用简化真值表方法判定：$p \to (p \wedge p)$为重言式。

	p	$\to$	$(p \wedge p)$	
(1)				假设：值为‘假’
(2)	T		F	(1)和‘$\to$’定义
(3)			T	(2)和‘$\wedge$’定义

推理过程中得到：$p \wedge p$有二个不同值，矛盾。

所以，该式为重言式。

重言式的判断方法 简化真值表法

假设：该命题公式不是重言式，即：存在使之为‘假’的一组真值赋值。

- 确定使之为‘假’的一组赋值；
- 若产生矛盾，则该公式不可能为‘假’，即其为永真式(重言式)；
- 若不产生矛盾，则找出使之为‘假’的赋值，即找反例方法。

重言式的判断方法 真值树法

2、真值树方法

对给定的命题公式构成一颗真值树(或称“与或树”)。在构造过程中，利用一些规则进行剪枝或优化等等。

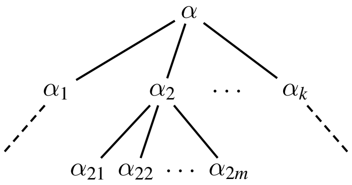
重言式的判断方法　真值树法

2、真值树方法

对给定的命题公式构成一颗真值树(或称“与或树”)。在构造过程中，利用一些规则进行剪枝或优化等等。

假设当前公式为α。若使之为‘真’的子公式有$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$，则$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$为其子结点，如右图所示。

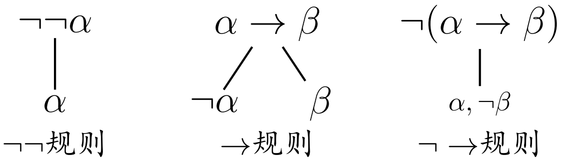
对每个子公式，用同样方法递归地生成。



重言式的判断方法 真值树法

真值树生成新枝的规则。

- $\neg\neg$规则：$\neg\neg\alpha$的子结点为$\neg\neg\alpha$；
- $\rightarrow$规则：$\alpha \rightarrow \beta$的二个子结点为$\neg\alpha$和β；
- $\neg\rightarrow$规则：$\neg(\alpha \rightarrow \beta)$的子结点为$\alpha$和$\neg\beta$。



重言式的判断方法 真值树法

例：构造$\alpha \to \neg(\neg\neg\beta \to \alpha)$的真值树。

$$\alpha \to \neg(\neg\neg\beta \to \alpha)$$

$\neg\alpha$ $\quad$ $\neg(\neg\neg\beta \to \alpha)$ $\quad$ $\to$规则

$\neg\neg\beta, \neg\alpha$ $\quad$ $\neg\to$规则

β $\quad$ $\neg\neg$规则

重言式的判断方法　真值树法

定义

假设：T_1在真值树T的一个分支。若T_1中同时出现β和$\neg\beta$，则称T_1是封闭(矛盾)的。

右下图是一个封闭分支的示意图，封闭的分支是可以剪枝的。

$$\begin{array}{cc}
\alpha & \alpha \\
\vdots & \vdots \\
\beta & \beta, \neg\beta \\
\vdots & \\
\neg\beta &
\end{array}$$

定理

若命题公式α的真值树所有的分支都是封闭的，则该真值树为其反驳。

重言式的判断方法 真值树法

例：用真值树方法证明：$p \to p$是重言式。

反证法：构造$\neg(p \to p)$的一个反驳。

$$
\begin{array}{c}
\neg(p \to p) \\
| \\
p, \neg p \\
\times
\end{array}
$$

所以，$p \to p$是重言式。

重言式的判断方法 真值树法

用真值树方法证明：α是重言式。

$$\alpha: (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

$$\neg((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$$

反证法：构造¬α的一个反驳。

重言式的判断方法 真值树法

用真值树方法证明：α是重言式。

$$\alpha: (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

反证法：构造$\neg\alpha$的一个反驳。

$$\neg((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$$
$$|$$
$$q \to r, \neg((p \to q) \to (p \to r))$$

重言式的判断方法 真值树法

用真值树方法证明：α是重言式。

$$\alpha: (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

反证法：构造$\neg\alpha$的一个反驳。

$$\neg((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$$
$$|$$
$$q \to r, \underline{\neg((p \to q) \to (p \to r))}$$
$$|$$
$$p \to q, \neg(p \to r)$$

重言式的判断方法 真值树法

用真值树方法证明：α是重言式。

$$\alpha: (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

反证法：构造$\neg\alpha$的一个反驳。

$$\neg((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$$

$$|$$

$$q \to r, \underline{\neg((p \to q) \to (p \to r))}$$

$$|$$

$$p \to q, \underline{\neg(p \to r)}$$

$$|$$

$$p, \neg r$$

重言式的判断方法 真值树法

用真值树方法证明：α是重言式。

$$\alpha : (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

反证法：构造$\neg\alpha$的一个反驳。

$$\neg((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$$

$$q \to r, \neg((p \to q) \to (p \to r))$$

$$p \to q, \neg(p \to r)$$

$$p, \neg r$$

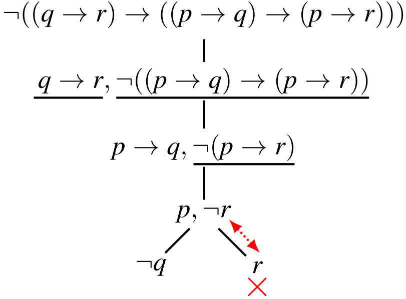
$$\neg q \qquad\qquad r$$

重言式的判断方法 真值树法

用真值树方法证明：α是重言式。

$$\alpha : (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

反证法：构造$\neg\alpha$的一个反驳。

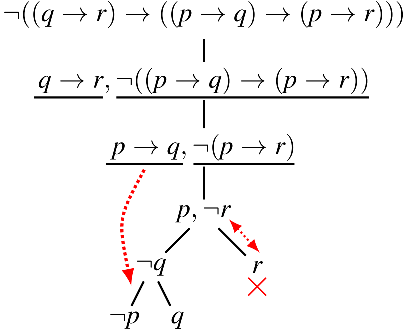


重言式的判断方法 真值树法

用真值树方法证明：α是重言式。

$$\alpha: (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

反证法：构造$\neg\alpha$的一个反驳。

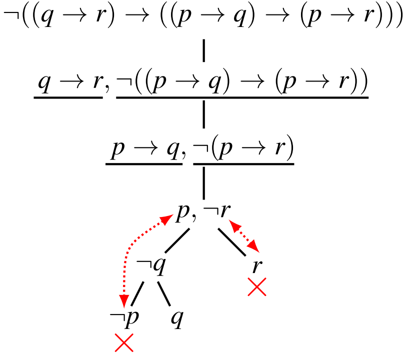


重言式的判断方法 真值树法

用真值树方法证明：α是重言式。

$$\alpha: (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

反证法：构造$\neg\alpha$的一个反驳。



重言式的判断方法 真值树法

用真值树方法证明：α是重言式。

$$\alpha : (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

反证法：构造$\neg\alpha$的一个反驳。

$$\neg((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$$

$$q \to r, \neg((p \to q) \to (p \to r))$$

$$p \to q, \neg(p \to r)$$

$$p, \neg r$$

$$\neg q \qquad r$$

$$\neg p \qquad q$$

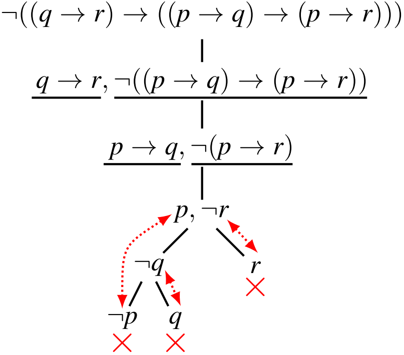
重言式的判断方法 真值树法

用真值树方法证明：α是重言式。

$$\alpha: (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

反证法：构造$\neg\alpha$的一个反驳。

所以，α是重言式。



重言式的判断方法 真值树法

其它一些规则。

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \alpha \vee \beta \\ \vdots \\ \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \qquad\quad \beta \end{array}$$

$\vee$规则

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \alpha \wedge \beta \\ \vdots \\ | \\ \alpha, \beta \end{array}$$

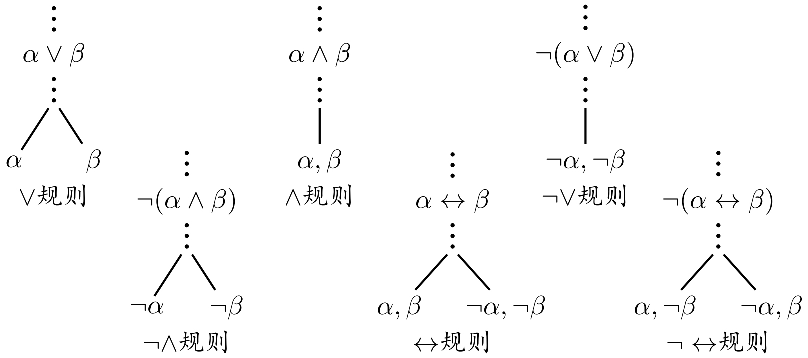
$\wedge$规则

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg(\alpha \vee \beta) \\ \vdots \\ | \\ \neg\alpha, \neg\beta \end{array}$$

$\neg\vee$规则

重言式的判断方法 真值树法

其它一些规则。



重言式的判断方法 真值树法

用真值树法判定: $p \to (p \land (p \to q))$是否是重言式。

反证法：构造$\neg(p \to (p \land (p \to q)))$的一个真值树。

$$
\begin{array}{c}
\neg(p \to (p \land (p \to q))) \\
| \\
p, \neg(p \land (p \to q)) \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
\neg p & \neg(p \to q) \\
\times & | \\
 & p, \neg q
\end{array}
\end{array}
$$

所以，$p \to (p \land (p \to q))$不是重言式。

目录

范式 析取项和合取范式

定义

- 由命题常量，命题变元，或它们的否定用析取联结词‘$\vee$’联结而成的析取式称为简单析取。也有称为析取项。
- 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是析取项，则$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$是合取范式。

范式 析取项和合取范式

析取项：$p \vee q$，$p \vee \neg q$，$1 \vee \neg p \vee q$，$\neg 0 \vee \neg p \vee q$，$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$等。

合取范式：

$$\underline{(p \vee q)} \wedge \underline{(p \vee \neg q)}$$

范式 析取项和合取范式

析取项：$p \vee q$，$p \vee \neg q$，$1 \vee \neg p \vee q$，$\neg 0 \vee \neg p \vee q$，$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$等。

合取范式：

$$\underline{(p \vee q)} \wedge \underline{(p \vee \neg q)}$$

$$\underline{(1 \vee \neg p \vee q)} \wedge \underline{(\neg 0 \vee \neg p \vee q)} \wedge \underline{(\neg p \vee \neg q \vee \neg r)}$$

范式 析取项和合取范式

析取项：$p \vee q$，$p \vee \neg q$，$1 \vee \neg p \vee q$，$\neg 0 \vee \neg p \vee q$，$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$等。

合取范式：

$$\underline{(p \vee q)} \wedge \underline{(p \vee \neg q)}$$

$$\underline{(1 \vee \neg p \vee q)} \wedge \underline{(\neg 0 \vee \neg p \vee q)} \wedge \underline{(\neg p \vee \neg q \vee \neg r)}$$

一个简单析取中含用同一命题及其否定，比如：$\cdots \vee p \vee \cdots \vee \neg p \vee \cdots$等，则它一定是重言式(永真式)。

范式 合取项和析取范式

定义

- 由命题常量，命题变元，或它们的否定用合取联结词‘$\wedge$’联结而成的合取式称为简单合取。也有称为合取项。
- 若$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$是合取项，则$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_m$是析取范式。

范式 合取项和析取范式

合取项：$p \wedge q$，$p \wedge \neg q$，$0 \wedge \neg p \wedge q$，$\neg 1 \wedge \neg p \wedge q$，$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$等。

析取范式：

$$\underline{(p \wedge q)} \vee \underline{(p \wedge \neg q)} \vee \underline{(0 \wedge \neg p \wedge q)}$$

范式 合取项和析取范式

合取项：$p \wedge q$，$p \wedge \neg q$，$0 \wedge \neg p \wedge q$，$\neg 1 \wedge \neg p \wedge q$，$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$等。

析取范式：

$$\underline{(p \wedge q)} \vee \underline{(p \wedge \neg q)} \vee \underline{(0 \wedge \neg p \wedge q)}$$

范式 合取项和析取范式

合取项：$p \wedge q$，$p \wedge \neg q$，$0 \wedge \neg p \wedge q$，$\neg 1 \wedge \neg p \wedge q$，$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$等。

析取范式：

$$\underline{(p \wedge q)} \vee \underline{(p \wedge \neg q)} \vee \underline{(0 \wedge \neg p \wedge q)}$$
$$\underline{(\neg 1 \wedge \neg p \wedge q)} \vee \underline{(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)}$$

范式 合取项和析取范式

合取项：$p \wedge q$，$p \wedge \neg q$，$0 \wedge \neg p \wedge q$，$\neg 1 \wedge \neg p \wedge q$，$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$等。

析取范式：

$$\underline{(p \wedge q)} \vee \underline{(p \wedge \neg q)} \vee \underline{(0 \wedge \neg p \wedge q)}$$
$$\underline{(\neg 1 \wedge \neg p \wedge q)} \vee \underline{(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)}$$

一个简单合取中含同一命题及其否定，比如：$\cdots \wedge p \wedge \cdots \wedge \neg p \wedge \cdots$等，则它一定是不可满足的(永假式)。

范式 合取项和析取范式

合取项：$p \wedge q$，$p \wedge \neg q$，$0 \wedge \neg p \wedge q$，$\neg 1 \wedge \neg p \wedge q$，$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$等。

析取范式：

$$\underline{(p \wedge q)} \vee \underline{(p \wedge \neg q)} \vee \underline{(0 \wedge \neg p \wedge q)}$$
$$\underline{(\neg 1 \wedge \neg p \wedge q)} \vee \underline{(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)}$$

一个简单合取中含同一命题及其否定，比如：$\cdots \wedge$

思考

单个命题常量，命题变元及其否定，如：0，1，p，$\neg 1$，$\neg q$等，是析取项，还是合取项，或二者都是？

范式

定理 (范式存在定理)

任意一个命题公式都有与之等值的合取范式和析取范式。

范式 求范式的方法

命题公式可按下面步骤把它转变成与之等值的合取范式和析取范式。

- 消去蕴涵‘→’和等价联结词‘↔’

$$\alpha \to \beta \longmapsto \neg\alpha \vee \beta$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta \longmapsto (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

范式 求范式的方法

命题公式可按下面步骤把它转变成与之等值的合取范式和析取范式。

- 消去蕴涵‘$\rightarrow$’和等价联结词‘$\leftrightarrow$’

$$\alpha \rightarrow \beta \longmapsto \neg\alpha \vee \beta$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta \longmapsto (\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

- 消去或内移否定‘$\neg$’

$$\neg\neg\alpha \longmapsto \alpha \qquad \neg(\alpha \wedge \beta) \longmapsto \neg\alpha \vee \neg\beta$$

$$\neg(\alpha \vee \beta) \longmapsto \neg\alpha \wedge \neg\beta$$

范式 求范式的方法

命题公式可按下面步骤把它转变成与之等值的合取范式和析取范式。

- 利用结合律调整联结词的次序

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \longmapsto \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \longmapsto \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$$

范式 求范式的方法

命题公式可按下面步骤把它转变成与之等值的合取范式和析取范式。

- 利用结合律调整联结词的次序

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \longmapsto \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \longmapsto \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$$

- 用分配律来展开(必要时)

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \longmapsto (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \longmapsto (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

范式 求范式的方法

求$(p \to (q \to r)) \to (p \land q \to r)$的合取范式和析取范式。

$$
\begin{aligned}
& (p \to (q \to r)) \to (p \land q \to r) \\
\equiv\ & \neg(p \to (q \to r)) \lor \neg(p \land q) \lor r && (\text{消去} \to) \\
\equiv\ & \neg(\neg p \lor (\neg q \lor r)) \lor \neg p \lor \neg q \lor r && (\text{内移} \neg) \\
\equiv\ & (\neg\neg p \land \neg(\neg q \lor r)) \lor \neg p \lor \neg q \lor r && (\text{内移} \neg) \\
\equiv\ & (\neg\neg p \land (\neg\neg q \land \neg r)) \lor \neg p \lor \neg q \lor r && (\text{内移} \neg) \\
\equiv\ & (p \land q \land \neg r) \lor (\neg p) \lor (\neg q) \lor r && (\text{消去} \neg\neg)
\end{aligned}
$$

范式 求范式的方法

求$(p \to (q \to r)) \to (p \wedge q \to r)$的合取范式和析取范式。

$$
\begin{aligned}
& (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r) \\
\equiv\ & (p \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge \\
& (\neg r \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \qquad\qquad (\text{分配律})
\end{aligned}
$$

范式 求范式的方法

求$p \leftrightarrow (p \wedge q)$的合取范式和析取范式。

$$
\begin{aligned}
& p \leftrightarrow (p \wedge q) \\
\equiv\ & (p \wedge (p \wedge q)) \vee (\neg p \wedge \neg(p \wedge q)) && (\text{消去} \leftrightarrow) \\
\equiv\ & (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge (\neg p \vee \neg q)) && (\text{内移}\neg) \\
\equiv\ & (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && (\text{分配律}) \\
\equiv\ & (p \wedge q) \vee (\neg p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && (\text{等幂律})
\end{aligned}
$$

范式 求范式的方法

求$p \leftrightarrow (p \wedge q)$的合取范式和析取范式。

$$
\begin{aligned}
& (p \wedge q) \vee (\neg p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
\equiv\ & ((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p)) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(分配律)} \\
\equiv\ & (T \wedge (q \vee \neg p)) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
\equiv\ & (q \vee \neg p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
\equiv\ & (q \vee \neg p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p \vee \neg q) && \text{(分配律)}
\end{aligned}
$$

优范式 主析取范式和主合取范式

计算机科学中，称为主析取范式和主合取范式。

定义

假设命题公式α中有k个原子命题：$p_1, p_2, \ldots, p_k$。

- 称p_i或$\neg p_i$为命题p_i的文字，通常用l_i表示
- 主析取项β：$l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_k$
- 主合取项γ：$l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_k$

优范式 主析取范式和主合取范式

定义

假设命题公式α中有k个命题：$p_1, p_2, \ldots, p_k$，β_i是主析取项，γ_j是主合取项。

- 主析取项范式：$\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \ldots \vee \gamma_m$
- 主合取项范式：$\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \ldots \wedge \beta_n$

优范式 主析取范式和主合取范式

求命题公式主合(析)取范式的过程：

命题公式 $\overset{求}{\Longrightarrow}$ 合(析)取范式 $\overset{求}{\Longrightarrow}$ 主合(析)取范式

“合(析)取范式 $\overset{求}{\Longrightarrow}$ 主合(析)取范式”的步骤：

- 按指定原子命题次序对每个合(析)取项中的文字进行排序；
  若按命题p, q, r的次序，则‘$r \wedge \neg p \wedge q$’就应改为‘$\neg p \wedge q \wedge r$’。

优范式 主析取范式和主合取范式

"合(析)取范式 $\overset{\text{求}}{\Longrightarrow}$ 主合(析)取范式"的步骤：

- 消去一些项或文字；

$$\alpha \wedge \alpha \longmapsto \alpha \quad \alpha \vee \alpha \longmapsto \alpha \quad \alpha \wedge \neg\alpha \longmapsto F \quad \alpha \vee \neg\alpha \longmapsto T$$

$$\alpha \wedge T \longmapsto \alpha \quad \alpha \vee F \longmapsto \alpha \quad \alpha \wedge F \longmapsto F \quad \alpha \vee T \longmapsto T$$

优范式 主析取范式和主合取范式

"合(析)取范式 $\stackrel{求}{\Longrightarrow}$ 主合(析)取范式"的步骤：

- 消去一些项或文字；

$$\alpha \wedge \alpha \longmapsto \alpha \quad \alpha \vee \alpha \longmapsto \alpha \quad \alpha \wedge \neg\alpha \longmapsto F \quad \alpha \vee \neg\alpha \longmapsto T$$

$$\alpha \wedge T \longmapsto \alpha \quad \alpha \vee F \longmapsto \alpha \quad \alpha \wedge F \longmapsto F \quad \alpha \vee T \longmapsto T$$

- 在每个合(析)取项中，补齐所有原子命题的文字。

  假设有命题p, q, r。对'$\neg p \wedge r$'进行变化。

$$\neg p \wedge r \longmapsto (\neg p \wedge \underline{q} \wedge r) \vee (\neg p \wedge \underline{\neg q} \wedge r)$$

优范式 主析取范式和主合取范式

求$p \wedge (p \to q) \to r$的主合取范式和主析取范式。

$$
\begin{aligned}
p \wedge (p \to q) \to r &\equiv \neg(p \wedge (\neg p \vee q)) \vee r \\
&\equiv \neg(p \wedge q) \vee r \\
&\equiv \neg p \vee \neg q \vee r \qquad (\text{主合取范式})
\end{aligned}
$$

优范式 主析取范式和主合取范式

求$p \wedge (p \to q) \to r$的主合取范式和主析取范式。

$$
\begin{aligned}
& p \wedge (p \to q) \to r \\
\equiv\ & \cdots \\
\equiv\ & \underline{(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee \underline{(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee \\
& \underline{(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)}
\end{aligned}
$$

优范式 主析取范式和主合取范式

求$p \wedge (p \to q) \to r$的主合取范式和主析取范式。

$$p \wedge (p \to q) \to r$$

$$\equiv \cdots$$

$$\equiv \underline{(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee \underline{(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee$$

$$\underline{(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)}$$

优范式 主析取范式和主合取范式

求$p \wedge (p \to q) \to r$的主合取范式和主析取范式。

$p \wedge (p \to q) \to r$

$\equiv \cdots$

$\equiv \underline{(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee \underline{(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee$

$\underline{(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)}$

$\equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)$

优范式 主析取范式和主合取范式

求$p \wedge (p \to q) \to r$的主合取范式和主析取范式。

$$p \wedge (p \to q) \to r$$

$$\equiv \cdots$$

$$\equiv \underline{(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee \underline{(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee$$

$$\underline{(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)}$$

$$\equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)$$

$$\equiv (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

优范式 主析取范式和主合取范式

求$p \wedge (p \to q) \to r$的主合取范式和主析取范式。

$$p \wedge (p \to q) \to r$$

$$\equiv \cdots$$

$$\equiv \underline{(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee \underline{(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee$$
$$\underline{(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)}$$

$$\equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)$$

$$\equiv (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$
$$\vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

优范式 主析取范式和主合取范式

求$p \wedge (p \to q) \to r$的主合取范式和主析取范式。

$$
\begin{aligned}
& p \wedge (p \to q) \to r \\
\equiv\ & \cdots \\
\equiv\ & \underline{(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee \underline{(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee \\
& \underline{(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)} \\
\equiv\ & (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r) \\
\equiv\ & (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
& \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \\
& \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)
\end{aligned}
$$

优范式 主析取范式和主合取范式

求$p \wedge (p \to q) \to r$的主合取范式和主析取范式。

$p \wedge (p \to q) \to r$

$\equiv \cdots$

$\equiv \underline{(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee \underline{(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee$

$\underline{(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)}$

$\equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)$

$\equiv (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

$\vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\cancel{\vee (p \wedge \neg q \wedge r)} \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

优范式 主析取范式和主合取范式

求$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow r$的主合取范式和主析取范式。

$$
\begin{aligned}
& p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow r \\
\equiv\ & \cdots \\
\equiv\ & \underline{(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee \underline{(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee \\
& \underline{(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)} \\
\equiv\ & (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r) \\
\equiv\ & (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
& \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \\
& \cancel{\vee (p \wedge \neg q \wedge r)} \cancel{\vee (\neg p \wedge q \wedge r)} \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)
\end{aligned}
$$

优范式 主析取范式和主合取范式

求$p \wedge (p \to q) \to r$的主合取范式和主析取范式。

$$
\begin{aligned}
& p \wedge (p \to q) \to r \\
\equiv\ & \cdots \\
\equiv\ & \underline{(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee \underline{(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee \\
& \underline{(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)} \\
\equiv\ & (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r) \\
\equiv\ & (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
& \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \\
& \cancel{\vee (p \wedge \neg q \wedge r)} \cancel{\vee (\neg p \wedge q \wedge r)} \cancel{\vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)}
\end{aligned}
$$

优范式 主析取范式和主合取范式

求$p \wedge (p \to q) \to r$的主合取范式和主析取范式。

$p \wedge (p \to q) \to r$

$\equiv \cdots$

$\equiv \underline{(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee \underline{(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} \vee$
$\underline{(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)}$

$\equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)$

$\equiv (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
$\vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$ (主析取范式)

优范式 主析取范式和主合取范式

排课要求：

外语老师：周一或周三　数学老师：周一或周二

法学老师：周二或周四　美学老师：周三或周五

体育老师：周四或周五

规定：每位老师每周仅上一次课，问：存在满足所有老师要求的排课？

优范式 主析取范式和主合取范式

使用下面命题变元：

- 外语老师：p_1 – 周一上课，p_3 – 周三上课。
  $\alpha_1 - (p_1 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_3)$
- 数学老师：q_1 – 周一上课，q_2 – 周二上课。
  $\alpha_2 - (q_1 \wedge \neg q_2) \vee (\neg q_1 \wedge q_2)$

优范式 主析取范式和主合取范式

使用下面命题变元：

- 外语老师：p_1 – 周一上课，p_3 – 周三上课。
  $\alpha_1 - (p_1 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_3)$
- 数学老师：q_1 – 周一上课，q_2 – 周二上课。
  $\alpha_2 - (q_1 \wedge \neg q_2) \vee (\neg q_1 \wedge q_2)$
- 法学老师：r_2 – 周二上课，r_4 – 周四上课。
  $\alpha_3 - (r_2 \wedge \neg r_4) \vee (\neg r_2 \wedge r_4)$

优范式 主析取范式和主合取范式

使用下面命题变元：

- 美学老师：s_3 – 周三上课，s_5 – 周五上课。
  $\alpha_4 - (s_3 \wedge \neg s_5) \vee (\neg s_3 \wedge s_5)$
- 体育老师：t_4 – 周四上课，t_5 – 周五上课。
  $\alpha_5 - (t_4 \wedge \neg t_5) \vee (\neg t_4 \wedge t_5)$

优范式 主析取范式和主合取范式

使用下面命题变元：

- 美学老师：s_3 – 周三上课，s_5 – 周五上课。

  $\alpha_4 - (s_3 \wedge \neg s_5) \vee (\neg s_3 \wedge s_5)$

- 体育老师：t_4 – 周四上课，t_5 – 周五上课。

  $\alpha_5 - (t_4 \wedge \neg t_5) \vee (\neg t_4 \wedge t_5)$

老师要求：$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5$

排课要求：$\neg(p_1 \wedge q_1)$，$\neg(q_2 \wedge r_2)$，$\neg(p_3 \wedge s_3)$，$\neg(r_4 \wedge t_4)$，$\neg(s_5 \wedge t_5)$

优范式 主析取范式和主合取范式

老师要求：$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5$

排课要求：$\neg(p_1 \wedge q_1)$，$\neg(q_2 \wedge r_2)$，$\neg(p_3 \wedge s_3)$，$\neg(r_4 \wedge t_4)$，
$\neg(s_5 \wedge t_5)$

满足所有要求的排课表达式：

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5 \wedge$$
$$\neg(p_1 \wedge q_1) \wedge \neg(q_2 \wedge r_2) \wedge \neg(p_3 \wedge s_3) \wedge \neg(r_4 \wedge t_4) \wedge \neg(s_5 \wedge t_5)$$

整理该公式可得：

$$(p_1 \wedge \neg p_3 \wedge \neg q_1 \wedge q_2 \wedge \neg r_2 \wedge r_4 \wedge s_3 \wedge \neg s_5 \wedge \neg t_4 \wedge t_5) \vee$$
$$(\neg p_1 \wedge p_3 \wedge q_1 \wedge \neg q_2 \wedge r_2 \wedge \neg r_4 \wedge \neg s_3 \wedge s_5 \wedge t_4 \wedge \neg t_5)$$

否定式

给定命题公式α，求其否定式$\neg\alpha(\alpha^-)$的方法：

- 消去$\to$和$\leftrightarrow$，使之仅含$\neg, \wedge, \vee$
- $T \longleftrightarrow F$，$\neg p \longleftrightarrow p$，$\wedge \longleftrightarrow \vee$

例：求$\alpha : (p \vee q) \wedge r \wedge (q \vee \neg r)$的否定式。

$$\neg\alpha \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r \vee (\neg q \wedge r)$$

否定式

例：求$\alpha : ((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$的否定式。

$$\alpha : ((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p \equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee \neg p$$

$$\neg\alpha \equiv \neg((p \wedge \neg q) \vee q) \wedge p$$

对偶式

给定命题公式α，求其对偶式α^*的方法：

- 消去$\rightarrow$和$\leftrightarrow$，使之仅含$\neg, \wedge, \vee$
- $T \longleftrightarrow F$，$\wedge \longleftrightarrow \vee$

求$\alpha : ((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$的对偶式。

1) 消去'$\rightarrow$'

$$\alpha : \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee p$$

2) $\wedge \longleftrightarrow \vee$

$$\alpha^* : \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \wedge p$$

对偶式

定理

- 若$\alpha \leftrightarrow \beta$，则$\alpha^* \leftrightarrow \beta^*$。
- 若$\alpha \rightarrow \beta$，则$\beta^* \rightarrow \alpha^*$。