



中山大學

SUN YAT-SEN UNIVERSITY

《图论及其应用》 2024

潘嵘

计算机学院

粤港澳（国家）应用数学中心

致谢姚正安教授

张赞波教授

第一章 图的基本概念

本次课主要内容

图的概念与图论模型

(一)、图论课程简介

(二)、图的定义与图论模型

(三)、图的同构



(一) 图论课程简介

1、研究对象


图论是研究点与线组成的“图形”问题的一门科学。
属于应用数学分支.

2、发展历史

图论起源于18世纪的1736年，标志事件是“哥尼斯堡七桥问题”。

数学家欧拉被称为“图论之父”。

20世纪30年代出版第一本图论著作。




目前，图论已形成很多分支：如随机图论、网络图论、代数图论、拓扑图论、极值图论等。

3、应用状况

图论的应用已经涵盖了人类学、计算机科学、化学、环境保护、非线性物理、心理学、社会学、交通管理、电信以及数学本身等。

4、教学安排

主要介绍图的一些基本概念、基本理论和图论的典型应用。



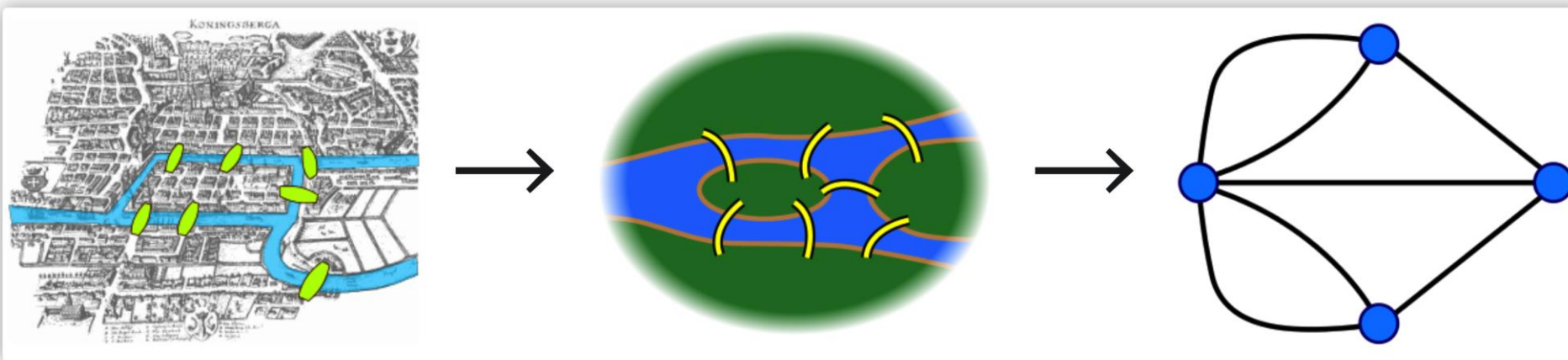
序号	主要教学内容
1	图论简介, 图的基本定义与概念、图同构, 握手定理、度序列
2	子图概念及应用, 图运算, 图的代数表示, 最短路径算法
3	树的基本性质与结构, 最优生成树、二叉树等典型树及其应用
4	图的连通性, 连通度的概念与性质, 割边, 割点, 块, Whitney定理, Menger定理, 网络流
5	欧拉图, Fleury算法, Hierholzer算法, 中国邮路问题
6	Hamiltonian图及其性质, 旅行商问题
7	图的匹配与独立集
8	平面图, 平面图概念、性质、判定
9	图的着色, 边(点)着色概念, 边(点)色数, 边(点)着色应用

参考教材：《图论及其应用》

作者：张先迪、李正良

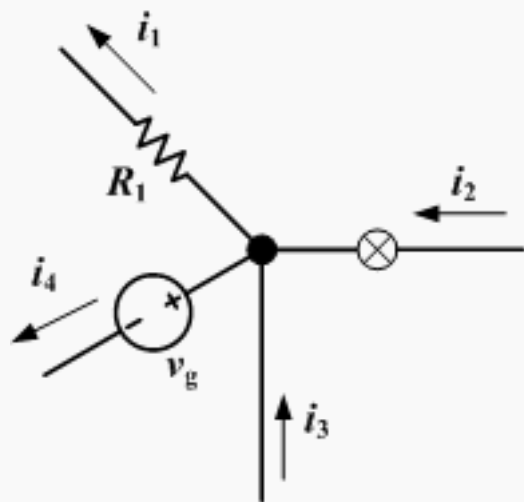
应用实例：柯尼斯堡七桥问题

柯尼斯堡七桥问题（Seven Bridges of Königsberg）是图论中的著名问题。这个问题是基于一个现实生活中的事例：当时东普鲁士柯尼斯堡（今日俄罗斯加里宁格勒）市区跨普列戈利亚河两岸，河中心有两个小岛。小岛与河的两岸有七条桥连接。在所有桥都只能走一遍的前提下，如何才能把这个地方所有的桥都走遍？

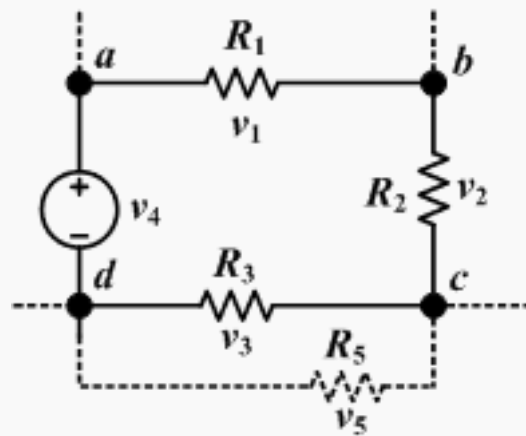


欧拉把问题的实质归于一笔画问题，即判断一个图是否能够遍历完所有的边而没有重复

应用实例：基尔霍夫电路定律



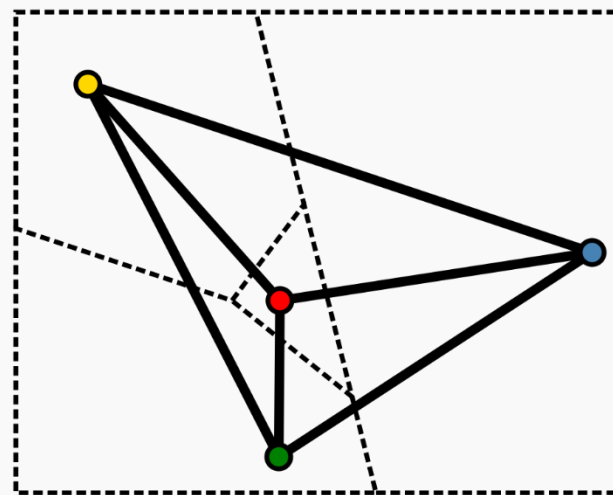
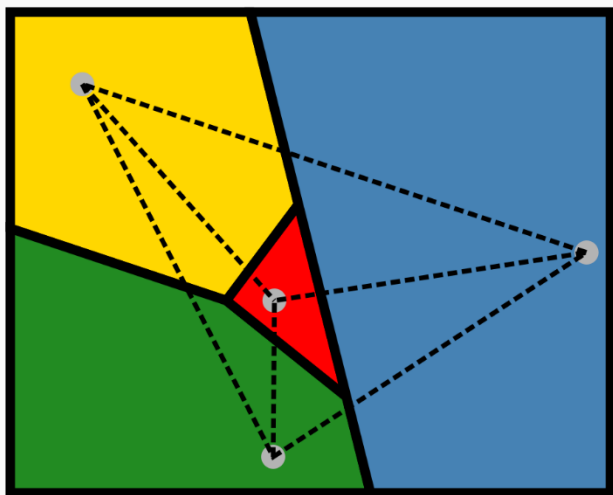
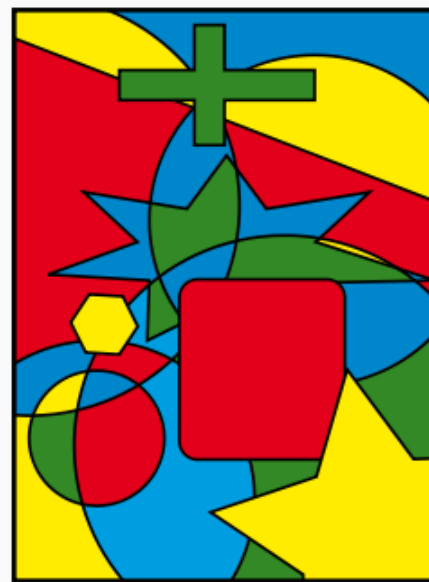
所有进入节点的电流的总和等于所有离开这节点的电流的总和。对于本图案例， $i_1 + i_4 = i_2 + i_3$ 。



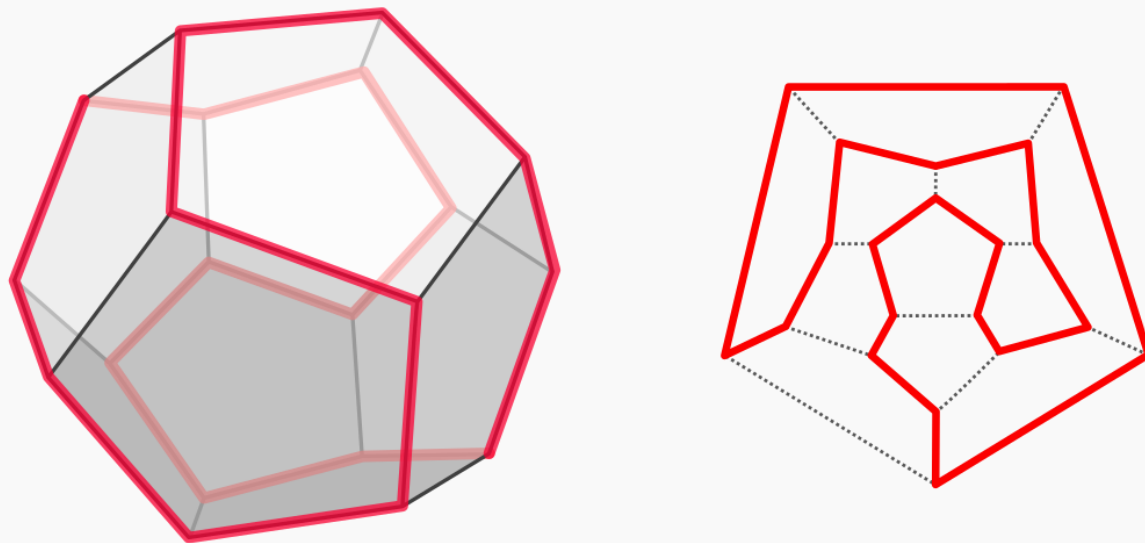
沿着闭合回路所有元件两端的电压的代数和等于零。对于本图案例， $v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 0$ 。

应用实例：四色定理

“是否只用四种颜色就能为所有地图染色?”的问题最早是由南非数学家法兰西斯·古德里(Francis Guthrie)在1852年提出的, 被称为“**四色问题**”或“**四色猜想**”。人们发现, 要证明宽松一点的“五色定理”(即“只用五种颜色就能为所有地图染色”)很容易, 但四色问题却出人意料地异常困难。曾经有许多人发表四色问题的证明或反例, 但都被证实是错误的。



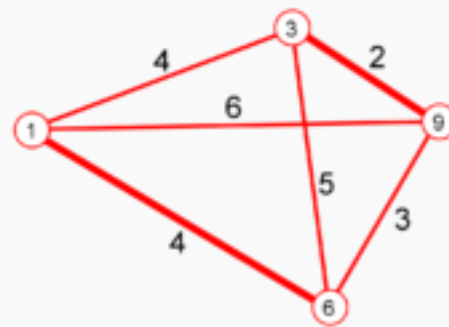
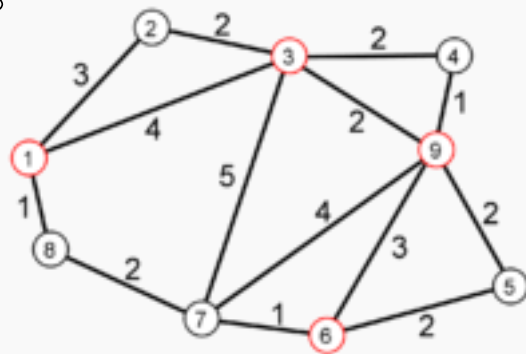
应用实例：哈密顿绕行世界问题



Icosian Game（二十面体游戏、绕行世界问题）是威廉·罗恩·汉密尔顿（William Rowan Hamilton）在1857年发明的数学游戏。游戏的目标是沿着十二面体的边缘找到一个哈密顿圆，这样每个顶点都被访问一次，并且终点与起点相同。该拼板玩具以在十二面体图的节点处具有孔的钉板形式在商业上发行，随后以多种形式在欧洲销售。

应用实例：中国邮递员问题

- 中国邮递员问题(Chinese Postman Problem, CPP)是从邮局出发，走遍邮区的所有街道至少一次再回到邮局，走什么路由才能使总的路程最短？
- 此问题是图遍历问题的一种。
 - 无向图的中国邮路问题是容易解决的，是P问题；
 - 而有向图的中国邮路问题是NP完全问题。
- 中国邮递员问题由管梅谷教授在1960年提出，而美国国家标准和技术研究院（NIST）的 Alan Goldman 首先将此问题命名为中国邮路问题。



应用实例：航路规划

- 飞机从起飞机场到目标机场的最优飞行路径规划。

广州至洛杉矶航路示例。

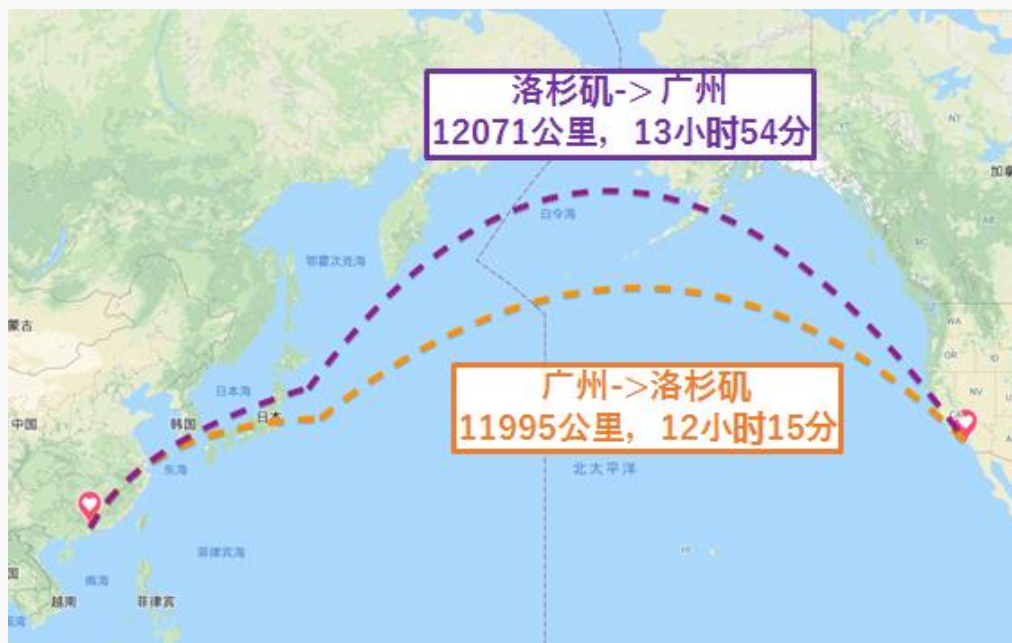
规模：节点13万个，边数101万条，高度20多层。

复杂性：航路受到地球自转和高空西风带影响。

- 航空运输业的核心技术

- 航路网络

- 全球航路图节点数达到60亿，边数达到400亿
- 带随机/分支扰动



应用场景 研发工作

应用场景1：航路规划（与南航合作）

- 航路网络建模

- 以多权值和随机/分支扰动的大规模动态图为航路网络建模。

$G = (V, E, (W_1, W_2, W_3, W_4))$ 表示航路图， A 表示飞机状态。 $W_i: (A, E, t) \rightarrow R^+$ 表示随着飞机状态变化和时间 t 变化网络的边权值函数。其中， $i = 1, 2, 3, 4$ 时分别表示飞行距离、时间、油耗、成本。 W_i 进一步分解为

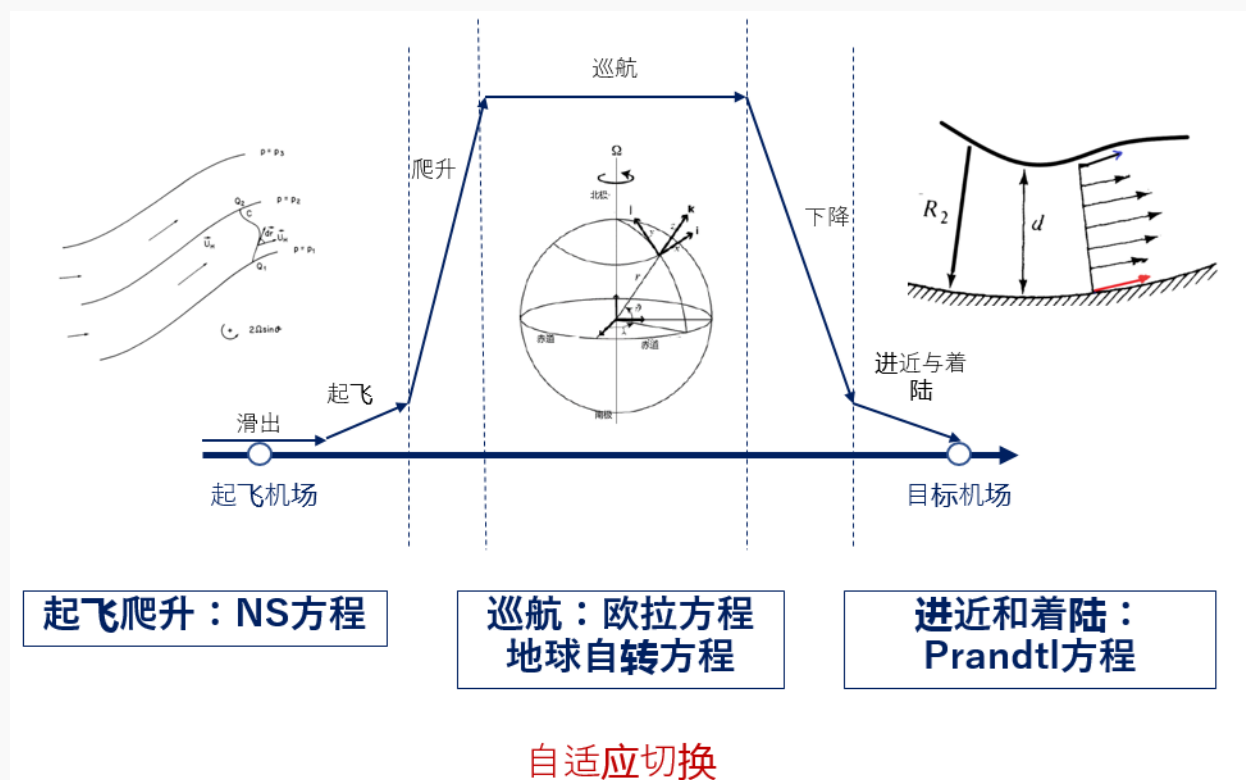
$$W_i(A, E, t) = W'_i(A, E, t) + W''_i(A, E, t)。$$

其中 W'_i 由基于动力学行为的模型，依照飞机状态、 t 时的风温数据等条件算出的权重， W''_i 则是一个随机扰动。

应用场景1：航路规划

• 航路网络建模

- 综合动力学领域知识，建立飞机飞行行为动力学模型。
- 分为起飞爬升、巡航和进近着陆三个阶段分别建立不同的模型。



应用场景1：航路规划

• 航路规划求解

- 计算最短距离（最少时间、油耗、成本）的航路，转化为**多约束规则下的多目标优化问题求解**。

约束条件1： (1) 瞬时速度为 $\frac{dX}{dt} = \{u_1(t), u_2(t), u_3(t)\} \triangleq U$;

(2) 对瞬时速度记为 $U = \vec{u} + u_p$: \vec{u} 为飞行速度; u_p 为扰动速度;

约束条件2： 飞机爬升阶段瞬时速度 U 满足如下的约束（Navier-Stokes方程）

$$(1) \begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_X \cdot (\rho U) = 0, \\ \partial_t(\rho U) + \nabla_X \cdot (\rho U \times U) - \mu \Delta U + \nabla_X P = \rho F. \end{cases}$$

飞机巡航阶段瞬时速度 U 近似满足 Euler 方程

$$(2) \begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_X \cdot (\rho U) = 0, \\ \partial_t(\rho U) + \nabla_X \cdot (\rho U \times U) + \nabla_X P = \rho F. \end{cases}$$

飞机降落阶段瞬时速度 U 满足如下的约束（边界层 Prandtl 方程）

$$(3) \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u_1) + \partial_y(\rho u_2) = 0, \\ \partial_t(\rho u_1) + \rho u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \rho u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \partial_x P - \mu \partial_{yy}^2 u_1 = \rho F. \end{cases}$$

飞行通告约束条件（长期、临时），导航信息约束条件，飞机性能约束条件等

应用场景1：航路规划

- 核心算法支撑：

- 最短路径
- 图划分

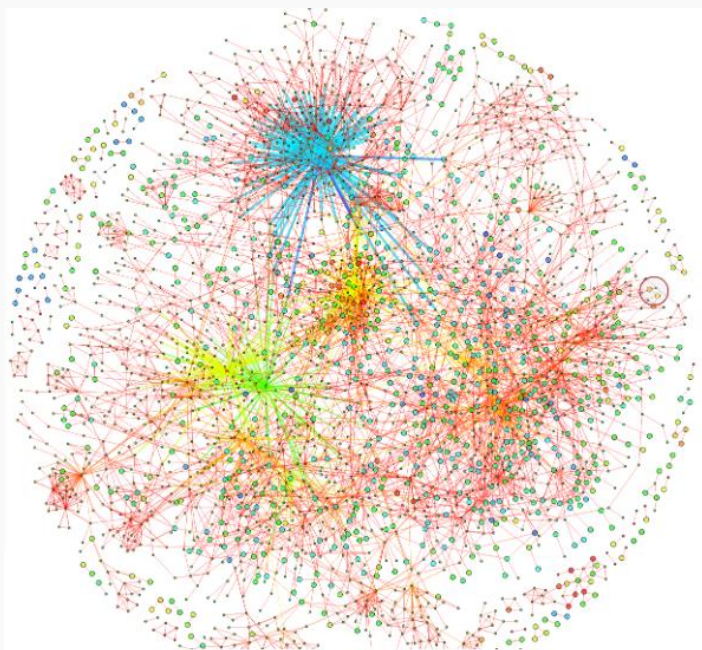
- 目标：

- 提出航路规划问题的解决方案；
- 实现技术自主的航路规划计算机系统；
- 指标：实现基于E级计算的随机扰动和分支扰动下大规模动态图的分布式计算，在总体规模不低于10000个节点，峰值计算性能不低于 50PFlops的高性能图计算支撑环境上，提供图计算工具集与支撑环境，实现问题的求解。

应用场景2：轨道交通网规划（与中建普联合作）

- 轨道交通网络建模与规划求解

- 以带多种权值的大规模动态图建模，运用图划分等技术融合异构网络。



- 转化为组合结构的最优化求解。

设 x_i , $1 \leq i \leq n$ 是候选的站点选址的顶点, F_1, F_2, \dots, F_m 为顶点集, 代表各类不同的配套设施,

记 $F_i = \{f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{is_i}\}$, 其中 $|F_i| = s_i$, 则地铁站优化选址可以形式化表示为:

$$\min \sum_{x_i=1} cost(x_i, f_{jt}),$$

$$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m,$$

对于每一个 j , $1 \leq t \leq s_j$,

$$\text{s.t. } \sum x_i = k, x_i \in \{0,1\}, 1 \leq i \leq n.$$

应用场景2：轨道交通网规划

- 核心算法支撑：

- 图划分
- 连通分支

- 目标：

- 为地铁路线规划问题合理建模和设计最优规划的计算方案；
- 实现地铁路线规划系统。
- 完成计算机仿真模拟系统。
- 达到如下指标：处理图数据规模达 TB 级别；至少在 3 个城市的 8 条地铁线路上进行设计与验证。

应用场景3：智慧交通

- 深中通道施工与规划
 - 安全施工网络交通流模型
 - 智慧传感网络建构
 - 智慧交通异构网络的融合与集成

交通流模型

$$\dot{x}_{n+1}(t+T) = \alpha[\dot{x}_n(t) - \dot{x}_{n+1}(t)]$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = g(x, t)$$

$$\rho(0, x) = h(x)$$



- 应用场景4：南方电网
- 应用场景5：中山佛山住建网……

(二)、图的定义与图论模型

1、图的定义

一个图是一个序偶 $\langle V, E \rangle$ ，记为 $G = (V, E)$ ，其中：

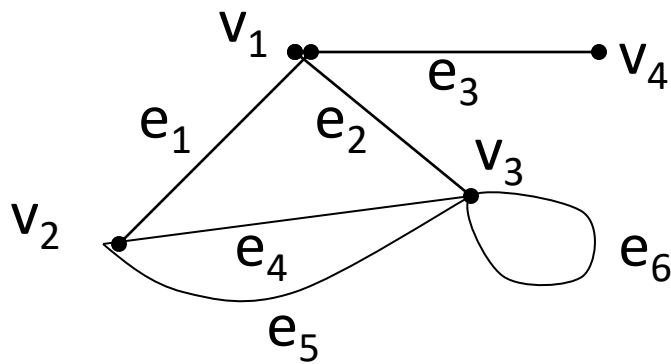
- (1) V 是一个有限的非空集合，称为顶点集合，其元素称为顶点或点。用 $|V|$ 表示顶点数；
- (2) E 是由 V 中的点组成的无序对构成的集合，称为边集，其元素称为边，且同一点对在 E 中可以重复出现多次。用 $|E|$ 表示边数。

图可以用图形表示： V 中的元素用平面上一个黑点表示， E 中的元素用一条连接 V 中相应点对的任意形状的线表示。

例1、设图 $G = \langle V, E \rangle$ 。这里 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$,

$e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_1, v_3)$, $e_3 = (v_1, v_4)$,
 $e_4 = (v_2, v_3)$, $e_5 = (v_3, v_2)$, $e_6 = (v_3, v_3)$ 。



图的相关概念：

有限图：顶点集和边集都有限的图称为有限图；

平凡图：只有一个顶点的图称为平凡图；

空图：边集为空的图称为空图；

n 阶图：顶点数为 n 的图称为 n 阶图；

(n, m) 图：顶点数为 n ,边数为 m 的图称为 (n, m) 图；

边的重数：连接两个相同顶点的边的条数称为边的重数；

重数大于1的边称为重边；

环：端点重合为一点的边称为环；

简单图：无环无重边的图称为简单图；其余的图称为复合图；

顶点 u 与 v 相邻接：顶点 u 与 v 间有边相连接；其中 u 与 v 称为该边的两个端点；

顶点 u 与边 e 相关联：顶点 u 是边 e 的端点；

边 e_1 与边 e_2 相邻接：边 e_1 与边 e_2 有公共端点；

2、图论模型

为了抽象和简化现实世界，常建立数学模型。图是关系的数学表示，为了深刻理解事物之间的联系，图是常用的数学模型。

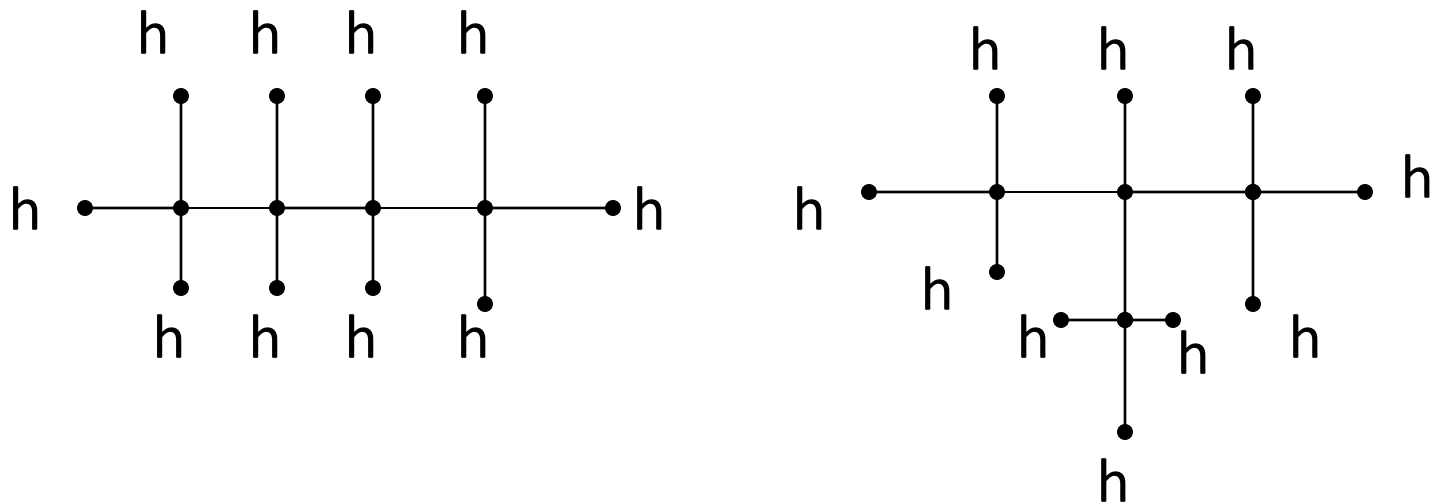
(1) 化学中的图论模型

19世纪，化学家凯莱用图论研究简单烃——即碳氢化合物

用点抽象分子式中的碳原子和氢原子，用边抽象原子间的化学键。

通过这样的建模，能很好研究简单烃的同分异构现象.

例如： C_4H_{10} 的两种同分异构结构图模型为：

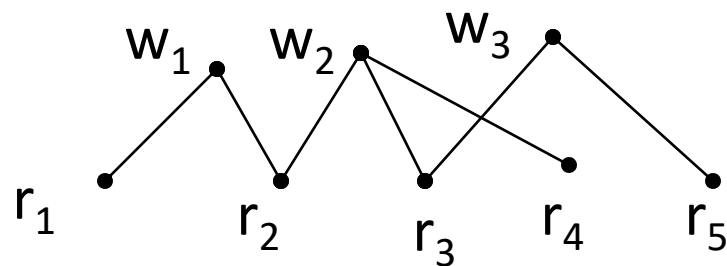


(2) 商业中的图论模型

商业中，经常用图来对仓库和零售店进行建模

例如：令 $V=\{w_1, w_2, w_3, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$ 代表3个仓库和5个零售点

$E=\{w_1r_1, w_1r_2, w_2r_2, w_2r_3, w_2r_4, w_3r_3, w_3r_5\}$ 代表每个仓库和每个零售店间的关联。则图模型图形为：



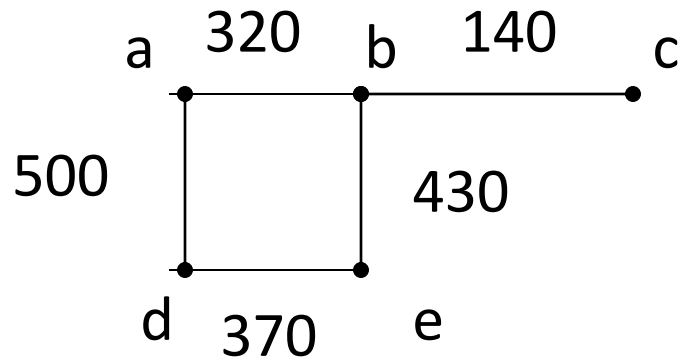
(3) 最短航线问题

用点表示城市，两点连线当且仅当两城市有航线。为了求出两城市间最短航线，需要在线的旁边注明距离值。

例如：令 $V=\{a, b, c, d, e\}$ 代表5个城市}

$E=\{a b, a d, b c, b e, d e\}$ 代表城市间的直达航线

则航线图的图形为：



请求出从d到c的最短路

(4) 任务分配问题

有一个旅行团要组织一批人去旅游，其中一些人是朋友。他们要乘坐公共汽车去，而车上的位子成对的。因此，为了让大家的旅途更愉快，旅行团负责人需要将成对的朋友安排在一起。给出一种安排方案。

该问题可以建立一个图论模型来解决：旅行团的人抽象为图的顶点，两个顶点连线，当且仅当两个顶点代表的人是朋友。

问题归结于在模型图中求所谓的“匹配”，关于图的匹配将在第五章介绍。

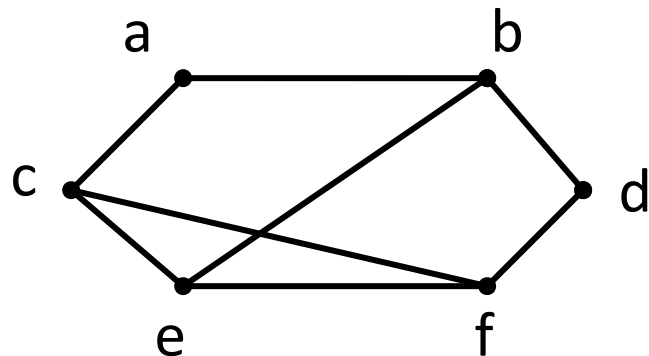
(5) 考试时间安排问题

一个教授需要对期末考试时间进行安排，使得学生们不会有相互冲突的考试。如何解决？

该问题可以建立一个图论模型来解决：待考的课程可抽象为图的顶点，连接两个顶点的边表示至少有一个学生同时选择了这两门课程。

问题归结于在模型图中求所谓的“顶点着色方案”问题，该问题将在第七章讨论。

例如：有a, b, c, d, e, f 六门课程。按照上面方法建立的模型图如下：



一种可行的安排方案为：第一时间：a, d, e; 第二时间：b, f；最后：c.

另一种可行的安排方案为：第一时间：a, e; 第二时间：c, d；最后：b, f.

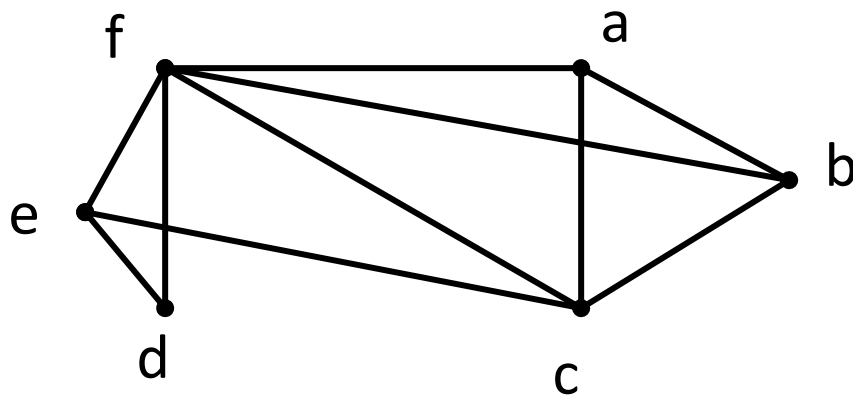
(6) 旅行售货员问题

一电脑代理商要从她所在城市出发，乘飞机去六个城市，然后回到出发点，如果要求每个城市只经历一次，能否办到？给出行走方案。

该问题可以建立一个图论模型来解决：城市抽象为图的顶点，边代表城市间的直达航线。

问题归结为在模型图中寻求所谓的“哈密尔顿圈”问题。将在第四章介绍。

例如：如果模型图如下：

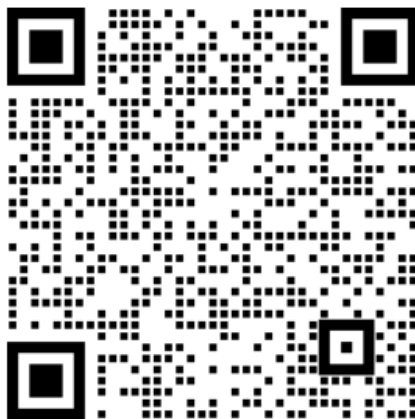


可行方案: (1) h, d, e, c, b, a, h (2) h, d, e, c, a, b, h



图论及其应用@2024, 潘嵘

此群是企业内部群聊, 仅企业成员可扫码加入



该二维码7天内(3月15日前)有效

(三)、图的同构

在图论中，一个很值得研究的问题是如何比较两个图的异同，这就是图的同构问题。

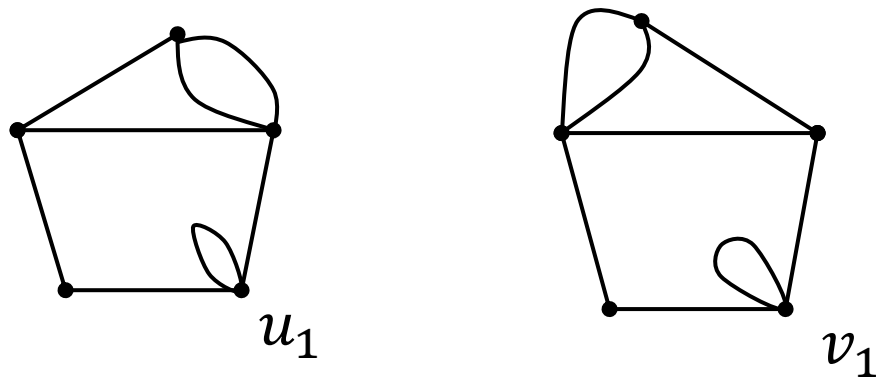
定义：设有两个图 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ ，若在其顶点集合间存在双射，使得边之间存在如下关系：设 $u_1 \leftrightarrow u_2, v_1 \leftrightarrow v_2, u_1, v_1 \in V_1, u_2, v_2 \in V_2; u_1 v_1 \in E_1$ 当且仅当 $u_2 v_2 \in E_2$ ，且 $u_1 v_1$ 与 $u_2 v_2$ 的重数相同。称 G_1 与 G_2 同构，记为： $G_1 \cong G_2$ 。

由定义可以得到图同构的几个必要条件：

(1) 顶点数相同；(2) 边数相同；(3) 关联边数相同的顶点个数相同。

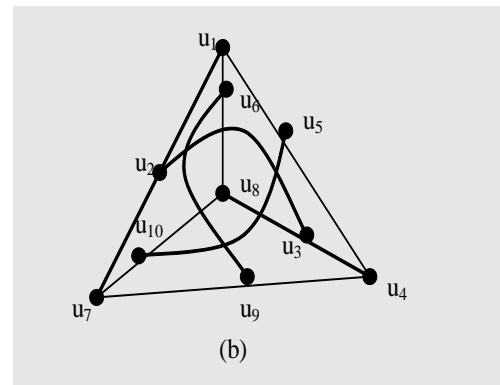
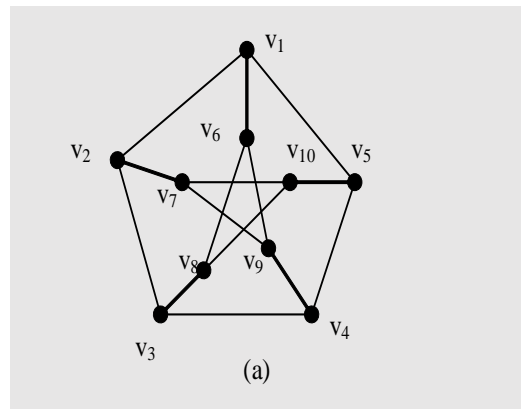
判定图的同构是很困难的，属于NP完全问题。对于规模不大的两个图，判定其是否同构，可以采用观察加推证的方法。

例2 证明下面两图不同构。



证明： u_1 的两个邻接点与 v_1 的两个邻接点状况不同。所以，两图不同构。

例3 证明下面两图同构。



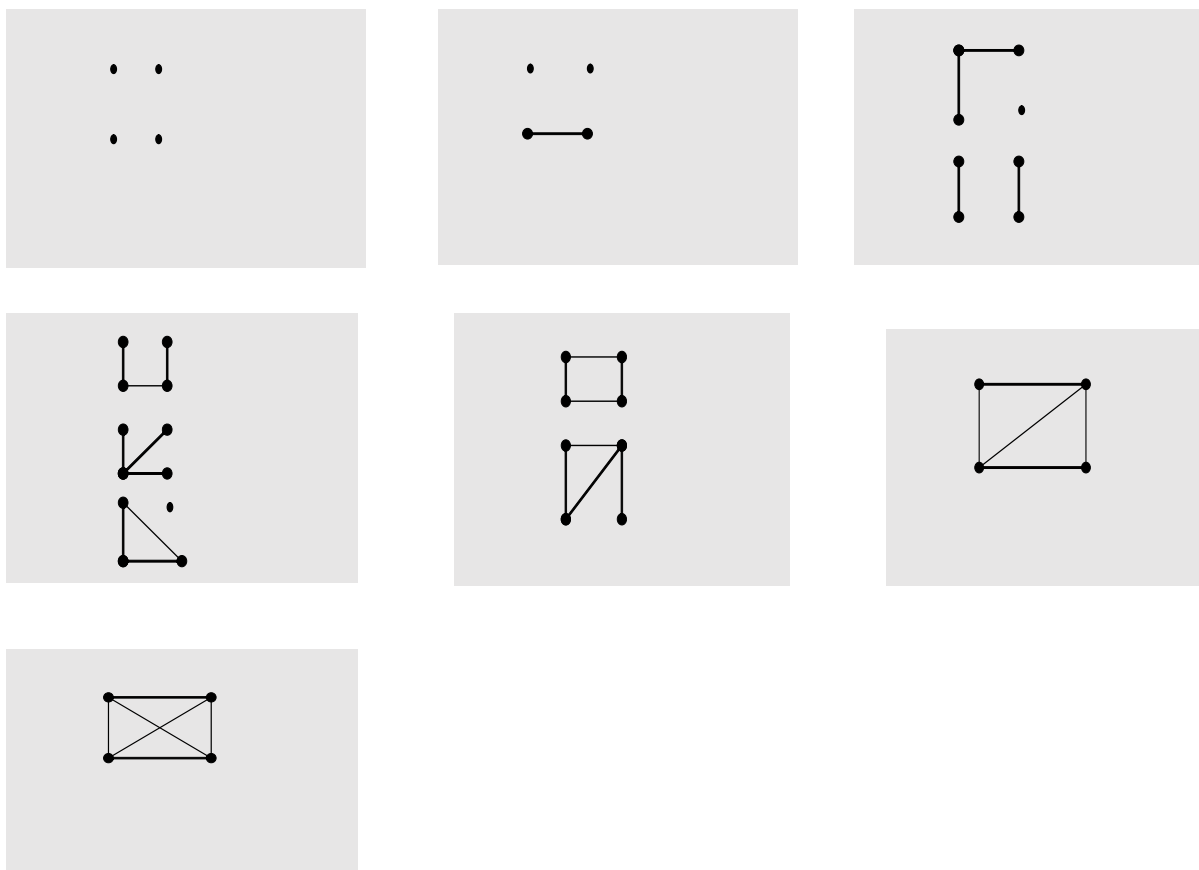
证明:作映射 $f: v_i \leftrightarrow u_i$ ($i = 1, 2 \dots 10$),

容易证明, 对 $\forall v_i v_j \in E(a), \exists f(v_i v_j) = u_i u_j \in E(b) (1 \leq i \leq 10, 1 \leq j \leq 10)$.

由图的同构定义知, 图(a)与(b)是同构的。

例4 指出4个顶点的非同构的所有简单图。

分析：四个顶点的简单图最少边数为0，最多边数为6，所以可按边数进行枚举。



Thank You !