人工智能：搜索技术 II

饶洋辉
计算机学院,
中山大学
raoyangh@mail.sysu.edu.cn
http://cse.sysu.edu.cn/node/2471

课件来源：中山大学刘咏梅教授；北京大学王文敏教授；浙江大学吴飞教授；多伦多大学Sheila McIlraith教授等

启发式搜索

- A*搜索
- A*的性质
- 如何构造启发式函数
- 练习

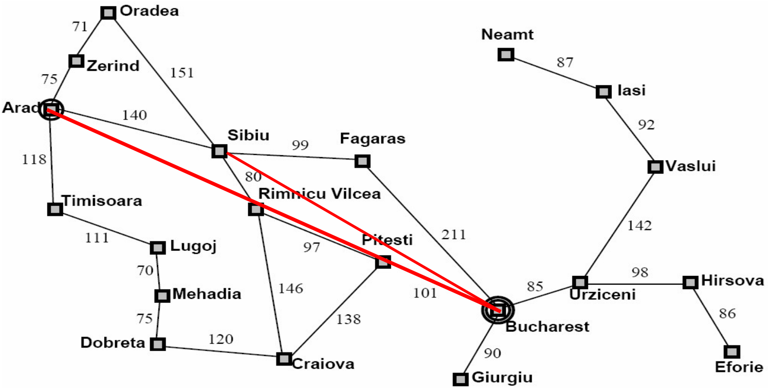
动机

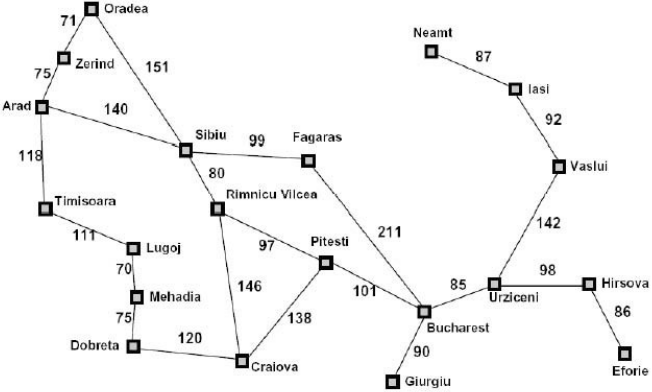
- 在盲目搜索中，我们没有考虑边界上的节点哪一个更具有“前景” (promising)
- 例如在一致代价搜索时，我们总是扩展从初始状态到达当前状态的成本最小的那条路径，却没有考虑过从当前状态点沿着当前路径到达目标路径的成本
- 但是，在许多情况下，我们可以有额外的知识来衡量当前节点，例如可以知道当前节点到达目标节点的成本

启发式搜索

- 对于一个具体问题，构造专用于该领域的启发式函数 $h(n)$, 该函数用于估计从节点n到达目标节点的成本
- 要求对于所有满足目标条件的节点n，$h(n) = 0$
- 在不同的问题领域中，对上述的成本的估计有不同的方法。即，启发式函数是随领域不同而不同的

启发式函数示例: 直线距离（欧氏距离）





Straight−line distance to Bucharest

Arad	366
Bucharest	0
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	178
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	98
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374

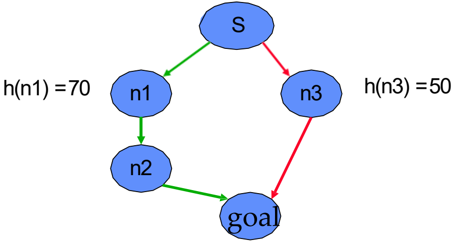
贪婪最佳优先搜索(Greedy BFS)

- 利用启发式函数$h(n)$ 来对边界上的节点进行排序
- 我们贪婪地希望找到成本最低的解
- 但是，这种做法忽略了从初始状态到达节点n的成本
- 因此这种做法可能“误入歧途”，选择了离初始状态很远（成本很高），但根据$h(n)$看起来离目标状态很近的节点

→ step cost = 10

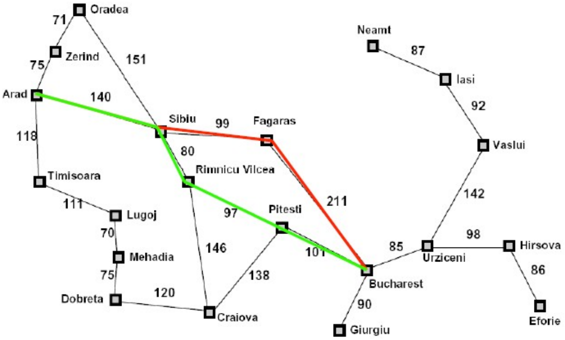
→ step cost = 100

[S]
[n3,n1]
[Goal, n1]



因此Greedy BFS 既不是完备的，也不是最优的。

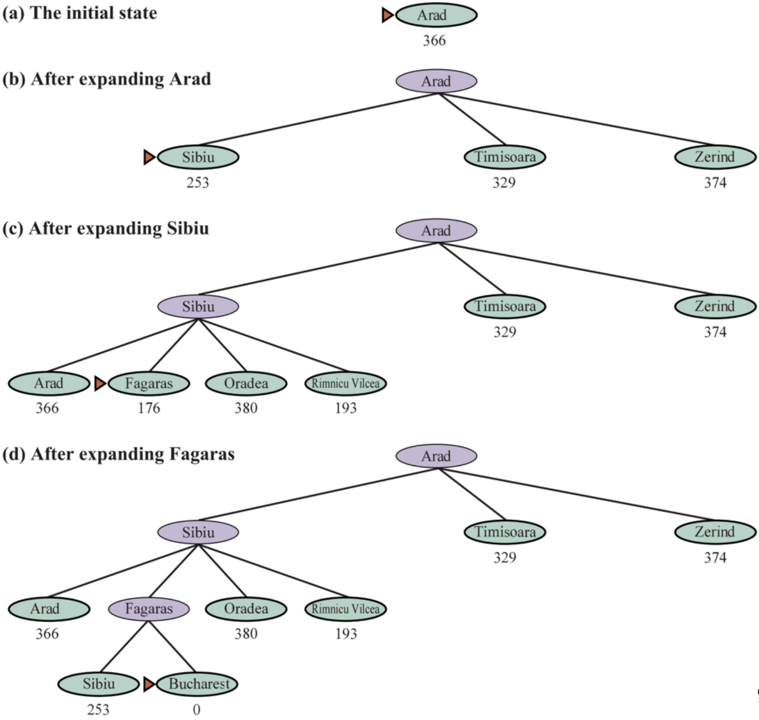
示例



Straight−line distance to Bucharest

Arad	366
Bucharest	0
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	178
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	98
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374

Arad-Sibiu-RV-Pitesli-Bucharest:
$140 + 80 + 97 + 101 = 140 + 278 = 418$
Arad-Sibiu-Fagaras-Bucharest: $140 + 99 + 211 = 140 + 310 = 450$


(a) The initial state
Arad
366
(b) After expanding Arad
Arad
Sibiu
253
Timisoara
329
Zerind
374
(c) After expanding Sibiu
Arad
Sibiu
Timisoara
329
Zerind
374
Arad
366
Fagaras
176
Oradea
380
Rimnicu Vilcea
193
(d) After expanding Fagaras
Arad
Sibiu
Timisoara
329
Zerind
374
Arad
366
Fagaras
Oradea
380
Rimnicu Vilcea
193
Sibiu
253
Bucharest
0

贪婪最佳优先搜索(Greedy BFS)

贪婪最佳优先搜索：评价函数 $f(n)$ = 启发式函数 $h(n)$

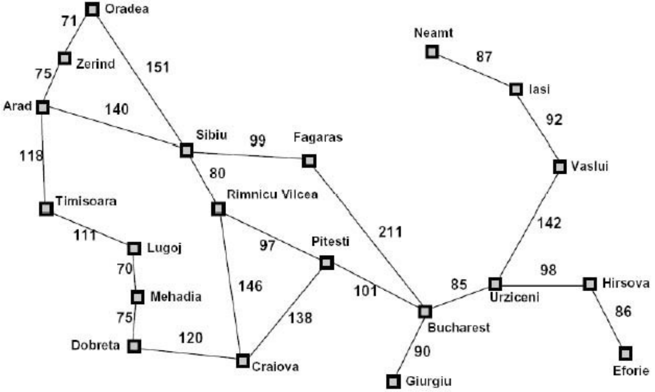
辅助信息	所求解问题之外、与所求解问题相关的特定信息或知识	
评价函数（evaluation function）$f(n)$	从当前节点n出发，根据评价函数来选择后继节点。	下一个节点是谁?
启发式函数（heuristic function）$h(n)$	计算从节点n到目标节点之间所形成路径的最小代价值，这里将两点之间的直线距离作为启发式函数。	完成任务还需要多少代价?

A*搜索

- A*搜索：评价函数$f(n) = g(n) + h(n)$
- $g(n)$是从初始节点到达节点n的路径成本
- $h(n)$是从n节点到达目标节点的成本的启发式估计值
- 因此，$f(n)$是经过节点n从初始节点到达目标节点的路径成本的估计值
- 利用节点对应的$f(n)$值来对边界上的节点进行排序

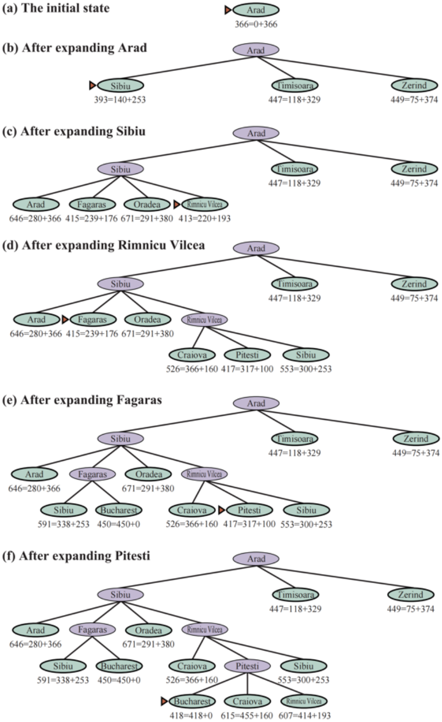
$$\underbrace{f(n)}_{\text{评价函数}} = \underbrace{g(n)}_{\substack{\text{起始节点到节点}n\text{代价} \\ \text{（当前最小代价）}}} + \underbrace{h(n)}_{\substack{\text{节点}n\text{到目标节点代价} \\ \text{（后续估计最小代价）}}}$$

示例



Straight−line distance to Bucharest	
Arad	366
Bucharest	0
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	178
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	98
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374

Arad-Sibiu-RV-Pitesli-Bucharest: 418


(a) The initial state
Arad
366=0+366
(b) After expanding Arad
Arad
Sibiu
393=140+253
Timisoara
447=118+329
Zerind
449=75+374
(c) After expanding Sibiu
Arad
Sibiu
Timisoara
447=118+329
Zerind
449=75+374
Arad
646=280+366
Fagaras
415=239+176
Oradea
671=291+380
Rimnicu Vilcea
413=220+193
(d) After expanding Rimnicu Vilcea
Arad
Sibiu
Timisoara
447=118+329
Zerind
449=75+374
Arad
646=280+366
Fagaras
415=239+176
Oradea
671=291+380
Rimnicu Vilcea
Craiova
526=366+160
Pitesti
417=317+100
Sibiu
553=300+253
(e) After expanding Fagaras
Arad
Sibiu
Timisoara
447=118+329
Zerind
449=75+374
Arad
646=280+366
Fagaras
Oradea
671=291+380
Rimnicu Vilcea
Sibiu
591=338+253
Bucharest
450=450+0
Craiova
526=366+160
Pitesti
417=317+100
Sibiu
553=300+253
(f) After expanding Pitesti
Arad
Sibiu
Timisoara
447=118+329
Zerind
449=75+374
Arad
646=280+366
Fagaras
Oradea
671=291+380
Rimnicu Vilcea
Sibiu
591=338+253
Bucharest
450=450+0
Craiova
526=366+160
Pitesti
Sibiu
553=300+253
Bucharest
418=418+0
Craiova
615=455+160
Rimnicu Vilcea
607=414+193

$h(n)$的条件：可采纳性

- 假设$c(n_1 \to n_2) \geq s > 0$。每个状态转移（每条边）的成本是非负的，而且不能无穷地小

- 假设$h^*(n)$ 是从节点n到目标节点的最优路径的成本（当节点n到目标节点不连通时，$h^*(n) = \infty$）

- 当对于所有节点n，满足$h(n) \leq h^*(n)$，$h(n)$是可采纳的

- 所以，可采纳的启发式函数低估了当前节点到达目标节点的成本，使得实际成本最小的最优路径能够被选上

- 因此，对于任何目标节点g，$h(g) = 0$

一致性 (单调性)

对于任意节点n_1和n_2，若

$$h(n_1) \le c(n_1 \to n_2) + h(n_2)$$

则$h(n)$具有一致性/单调性

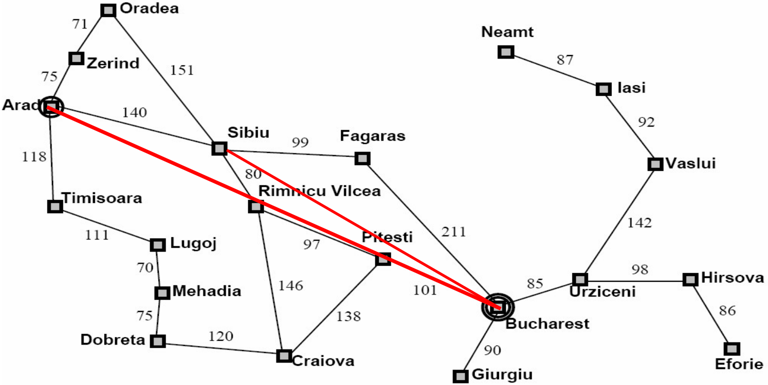
满足一致性的启发式函数也一定满足可采纳性（证明如下）

Case 1: 从节点n没有路径到达目标节点，则可采纳性一定成立

Case 2: 假设$n = n_1 \to n_2 \to \ldots \to n_k$ 是从节点n到目标节点的一条最优路径。可以使用数学归纳法证明对于所有的i，$h(n_i) \le h^*(n_i)$

大部分的可采纳的启发式函数也满足一致性/单调性

示例：直线距离

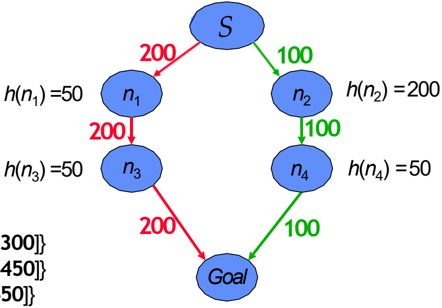


Oradea
71
Neamt
Zerind
87
151
75
Iasi
Arad
140
92
Sibiu
99
Fagaras
118
Vaslui
80
Rimnicu Vilcea
Timisoara
142
211
111
Lugoj
97
Pitesti
70
98
Hirsova
146
85
Urziceni
Mehadia
101
86
75
138
Bucharest
Dobreta
120
90
Craiova
Eforie
Giurgiu

示例1：可采纳但不具备单调性的启发式函数

因为$h(n_2) > c(n_2 \rightarrow n_4) + h(n_4)$，下面的启发式函数不是单调的，但是却是可采纳的

→ step cost = 200
→ step cost = 100



$g(n) + h(n) = f(n)$

{S} → {n_1 [200+50=**250**], n_2 [200+100=**300**]}
→ {n_2 [100+200=**300**], n_3 [400+50=**450**]}
→ {n_4 [200+50=**250**], n_3 [400+50=**450**]}
→ {*Goal* [300+0=**300**], n_3 [400+50=**450**]}

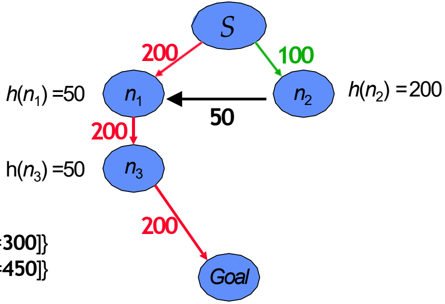
$S \nearrow n_1$

$S \rightarrow n_2 \rightarrow n_4 \rightarrow$ *Goal*。虽然确实可以找到最优路径，但是在搜索过程中错误地忽略了n_2而去扩展n_1

示例2：可采纳但不具备单调性的启发式函数

因为$h(n_2) > c(n_2 \rightarrow n_1) + h(n_1)$，下面的启发式函数不是单调的，但是却是可采纳的

→ step cost = 200
→ step cost = 100
→ step cost = 50



$g(n) + h(n) = f(n)$

{S} → {n_1 [200+50=**250**], n_2 [200+100=**300**]}
→ {n_2 [100+200=**300**], n_3 [400+50=**450**]}
→ {n_3 [400+50=**450**]}
→ {*Goal* [600+0=**600**]}

采用环检测：$S \rightarrow n_1 \rightarrow n_3 \rightarrow Goal$

n_2

最优路径：$S \rightarrow n_2 \rightarrow n_1 \rightarrow n_3 \rightarrow Goal$

时间和空间复杂度

$h(n) = 0$时，对于任何n这个启发式函数都是单调的。A$*$搜索会变成一致代价搜索

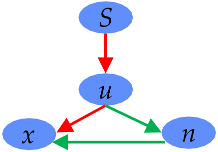
因此一致代价的时间/空间复杂度的下界也适用于A*搜索。即，A*搜索仍可能是指数复杂度，除非我们能才找到好的h函数

可采纳性意味着最优性

- 假设最优解的成本是C^*
- 最优解一定会在所有成本大于C^*的路径之前被扩展到
- 成本≤ C^*的路径的数量是有限的
- 因此最终可以检测到最优解

可采纳性意味着最优性

最优解一定会在所有成本大于C^*的路径之前被扩展到



$$p = S \rightarrow u \rightarrow x$$
$$p^* = S \rightarrow u \rightarrow n \rightarrow x$$

证明:

- 假设p^*是一个最优解的路径；p是一条满足$c(p) > c(p^*)$的路径，而且路径p在p^*之前被扩展
- 那么扩展到路径p时，肯定会有一个p^*上的节点n处在边界上(前提?)
- 因为p在p^*之前被扩展，则对于p路径上的最后那个节点（假设为目标节点）x：$f(x) \le f(n)$
- 因此
  $c(p) = f(x) \le f(n) = g(n) + h(n) \le g(n) + h^*(n) = c(p^*)$
- 和$c(p) > c(p^*)$相矛盾

环检测的影响

- 如果启发式函数只有可采纳性，不一定能在使用了环检测之后仍保持最优性
- 为了解决这个问题，必须对于之前遍历过的节点，记录其扩展路径的成本。这样的话，若出现到达已遍历过节点但成本更低的路径，则需重新扩展而不能剪枝
- 但是，启发式函数的单调性可以保证我们在第一次遍历到一个节点时，就是沿着到这个节点的最优路径扩展的
- 因此，只要启发式函数具备单调性，就能在进行环检测之后仍然保持最优性

单调的启发式函数

命题1：一条路径上的节点的f函数值是非递减的

证明:

$$f(n_1) = g(n_1) + h(n_1)$$
$$f(n_2) = g(n_2) + h(n_2) = g(n_1) + c(n_1 \rightarrow n_2) + h(n_2)$$
$$h(n_1) \leq c(n_1 \rightarrow n_2) + h(n_2)$$

单调的启发式函数

命题2： 如果节点n_2在节点n_1之后被扩展，则有

$$f(n_1) \le f(n_2)$$

证明:

有以下两种情况:

- 当n_1被扩展，n_2还在边界上。由于n_2在n_1之后扩展，说明$f(n_1) \le f(n_2)$
- 当n_1被扩展，n_2的祖先节点n_3在边界上，则$f(n_1) \le f(n_3)$。再根据命题1，$f(n_1) \le f(n_3) \le f(n_2)$

单调的启发式函数

命题3：A*搜索第一次扩展到某个状态，就是沿着最小成本的路径进行扩展的

证明:

假设路径$p = n_1 \rightarrow n_2 \ldots \rightarrow n_k = n$是第一条被发现的到达$n$的路径

假设路径$p_j = m_1 \rightarrow m_2 \ldots \rightarrow m_j = n$是第二条被发现的到达$n$的路径

假设$c(p)$是通过p路径到达n节点的成本

假设$c(p_j)$是通过p_j路径到达n节点的成本

根据命题2，$c(p) + h(n) \leq c(p_j) + h(n)$

因此 $c(p) \leq c(p_j)$

IDA*

A*搜索和宽度优先搜索或一致代价搜索一样，也存在潜在的空间复杂度过大的问题。

IDA*（迭代加深的A*搜索）：用于解决空间复杂度过大的问题，它类似于迭代加深算法，但是IDA*用于划定界限的不是深度，而是f值，即（$g+h$）。

在每次迭代时，IDA*划定的界限是 f 值超过上次迭代的界限最少的节点的f值。

A*搜索：总结

- 定义一个评价函数为$f(n) = g(n) + h(n)$
- 我们使用$f(n)$函数来对边界上的节点进行排序。
- 可采纳性：$h(n) \leq h^*(n)$
- 单调性：对于任意节点$n1$和$n2$：
$$h(n_1) \leq c(n_1 \rightarrow n_2) + h(n_2)$$
- 启发式函数具有单调性说明其也具有可采纳性。
- 启发式函数具有可采纳性说明其也具有最优性 (无环检测)。
- 只要启发式函数是单调的，就能在进行环检测之后仍然保持最优性。
- A*搜索具有指数级的空间复杂度。

构建启发式函数：松弛问题

通过考虑一个比较简单的问题，并将 $h(n)$设置为简单问题中到达目标的成本

8数码问题：当满足下面条件时，可以把方块A移动到B位置

- A方块与B位置相邻（上/下/左/右相邻）
- B位置是空的

可以放松一些条件使得问题变简单

1. 只要方块A和B位置相邻就可以把A移动到B（不考虑B是否为空的）
2. 只要B位置为空的，就可以把A移动到B（忽略相邻的条件）
3. 任何情况下都可以把A移动到B（忽略两个条件）

构建启发式函数：松弛问题

#3 可以推导出“不在目标位置方块数”(misplaced)的启发式函数

$$h(n) = \text{当前状态与目标状态位置不同的方块数}$$

可采纳性：对于没有在目标位置上的方块，我们需要至少一次动作才能把其移动到目标位置，这个动作的成本大于等于1。

单调性：任何动作都最多只能消除一个不在目标状态上的方块，因此对于任何8数码的状态$h(n1) - h(n2) \leq 1 \leq c(n1 \rightarrow n2)$

#1 可以推导出“曼哈顿距离”(Manhattan)的启发式函数

$$h(n) = \text{所有方块到达其目标位置的曼哈顿距离之和}$$

可采纳性：对于每个不在目标位置的方块，都需要至少d个动作才能到达目标位置，其中d是该方块初始位置到目标位置的曼哈顿距离。不同的两个不在目标位置的方块，它们的这些动作是不同的。

单调性：任何动作最多能使一个不在目标位置的方块的曼哈顿距离减少1，因此$h(n1) - h(n2) \leq 1 \leq c(n1 \rightarrow n2)$

构建启发式函数：松弛问题

定理：在松弛问题中，到达某个节点的最优成本是原始问题中到达该节点的可采纳的启发式函数值

证明：

- 若P是一个初始问题，设P_j是问题P的松弛问题
- 那么 $Sol(P) \subseteq Sol(P_j)$，$Sol(P)$表示问题$P$的解节点集
- 于是$mincost\left(Sol(P_j)\right) \leq mincost\left(Sol(P)\right)$，$mincost(S)$表示到达节点集$S$中的节点的最小成本
- 因此 $h(n) \leq h^*(n)$

比较两种启发式函数

定义：假如启发式函数h1和h2都是可采纳的，并且对于除了目标节点之外的其他节点，都有$h1(n) \leq h2(n)$，我们称h2函数**支配**了h1函数（或者h2函数比h1含有更多信息）

定理：假如h2函数**支配**了h1函数，那么在使用A*算法时，使用h2函数扩展的节点，使用h1函数也会扩展到。

Depth	IDS	A*(Misplaced) h1	A*(Manhattan) h2
10	47,127	93	39
14	3,473,941	539	113
24	---	39,135	1,641

使用带环检测的A*算法解决8数码问题

采用Manhattan启发式函数，用带环检测的A*搜索初始状态和目标状态如下图所示的8数码问题，画出搜索图，图中标明所有节点的*f*, *g*, *h*值

初始：

2	8	3
1	6	4
7		5

目标：

1	2	3
8		4
7	6	5

积木世界规划

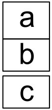
现有积木若干，积木可以放在桌子上，也可以放在另一块积木上面。有两种操作：

① move(x, y)：把积木x放到积木y上面。前提是积木x和y上面都没有其他积木。

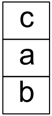
② moveToTable(x)：把积木x放到桌子上，前提是积木x上面无其他积木，且积木x不在桌子上。

设计本问题的一个启发式函数h(n)，满足$h(n) \le h^*(n)$，然后用A*搜索初始状态和目标状态如下图所示的规划问题：

初始：



目标：



积木世界规划

- 积木处于其目标位置：以该积木为顶的塔出现在目标状态中
- 启发式函数：令h(n)为状态n中不在目标状态的积木数
- 可采纳性：对于每个不在目标位置的积木，需要至少1步动作来使得其到达目标位置。每块不在目标位置的积木要移动到目标位置的动作都不相同（即不存在一个动作使得两块积木同时到达目标位置的情况）
- 单调性：任何动作最多都只能消除一个不在目标位置的积木

积木世界规划

- 是否可以设计一个更好的具有可采纳性的启发式函数?
- （考虑下面的策略）
- 当积木x已经处于其目标位置，我们说x是一个good tower
- 如果当前状态下采取某一个动作可以创建一个good tower，则进行该动作；
- 否则，把一个积木移到桌上，但要确保移动的这个积木不是good tower

滑动积木游戏

- 一个盒子中有七个格子，里面放了黑色，白色两种木块；
- 三个黑色在左边，三个白色在右边，最右边一个格子空着；
- 一个木块移入相邻空格，耗散值（成本）为1；
- 一个木块相邻一个或两个其他木块跳入空格，耗散值（成本）为跳过的木块数；
- 游戏中将所有白色木块跳到黑色木块左边为成功。

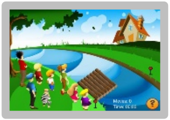
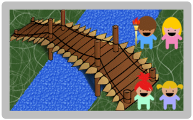
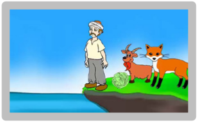
滑动积木游戏

- 令$h(n)$为每个白色木块前的黑色木块数目和
- $EX \rightarrow XE, EXY \rightarrow YXE, EXYZ \rightarrow ZXYE$
- 每个代价为1的动作使$h(n)$至多下降1
- 每个代价为2的动作使$h(n)$至多下降2
- 因此$h(n)$是单调的

传教士和野蛮人的问题

- 有N个传教士和N个野蛮人在河的左岸
- 有一艘可以载K个人的小船
- 寻求一种可以把所有人运到河的右岸的方法
- 并且要求无论何时何地 (在河的任意岸或在小船上):

  传教士的人数 ≥ 野蛮人的人数 或 传教士的人数 = 0
- 类似的渡河难题:

吃醋丈夫；火炬过桥；狐狸、鹅与豆袋难题；船夫与羊、狼和白菜问题

形式化传教士和野蛮人的问题

- 状态 (M, C, B) 表示：M – 左岸的传教士的人数，C – 左岸的野蛮人的人数，B = 1表示小船在河的左岸
- 动作 (m, c) 表示：m – 小船上的传教士的人数，c – 小船上的野蛮人的人数
- 前提条件：传教士的人数和野蛮人的人数满足题目中的约束
- 动作的效果

$$(\mathrm{M},\ \mathrm{C},\ 1) \rightarrow (m, c) \rightarrow (M-m, C-c, 0)$$

$$(\mathrm{M},\ \mathrm{C},\ 0) \rightarrow (m, c) \rightarrow (M+m, C+c, 1)$$

对于K ≤ 3时的启发式函数

$h1(n) = M + C$的启发式函数是可采纳的吗?

不是，考虑状态(1, 1, 1)时，

$h1(n) = 2$，但$h^*(n) = 1$

假设$h(n) = M + C - 2B$

单调性:

$$(\mathrm{M},\ \mathrm{C},\ 1) \rightarrow (m, c) \rightarrow (M - m, C - c, 0)$$

$$h(n_1) - h(n_2) = m + c - 2 \leq K - 2 \leq 1$$

$$(\mathrm{M},\ \mathrm{C},\ 0) \rightarrow (m, c) \rightarrow (M + m, C + c, 1)$$

$$h(n_1) - h(n_2) = 2 - (m + c) \leq 1, since\, m + c \geq 1$$

直接证明可采纳性

当 B = 1，

在最好的情形下,我们在最后一步把3个人送到河的右岸

在此之前，我们可以把三个人送到右岸，再由一个人把船摆渡到左岸。因此，每次来回都只能渡2个人过河，

因此，我们需要$\geq 2\lceil\frac{M+C-3}{2}\rceil+1 \geq M+C-2$个动作

当 B = 0，

我们需要一个人将船摆渡到左岸，这样就形成了B = 1的情形。现在我们需要把M + C + 1的人摆渡到右岸

因此，我们总共需要≥ M + C + 1 - 2 + 1 = M + C个动作

练习

利用带环检测的A*搜索解决$N = 5, K = 3$的传教士和野蛮人的问题