# 第一章 信号与系统

Signals & Systems

# 基本内容

- 信号的描述——连续、离散、能量、功率
- 信号的自变量变换——时移、时间反转、尺度变换、周期信号、奇/偶信号
- 基本信号——复指数、正弦、冲激、阶跃
- 系统及其数学模型——微分/差分方程、方框图
- 系统的性质——记忆、可逆、因果、稳定、线性、时不变

- **1.1 连续时间与离散时间信号**
  **（Continuous-Time and Discrete-Time Signals）**

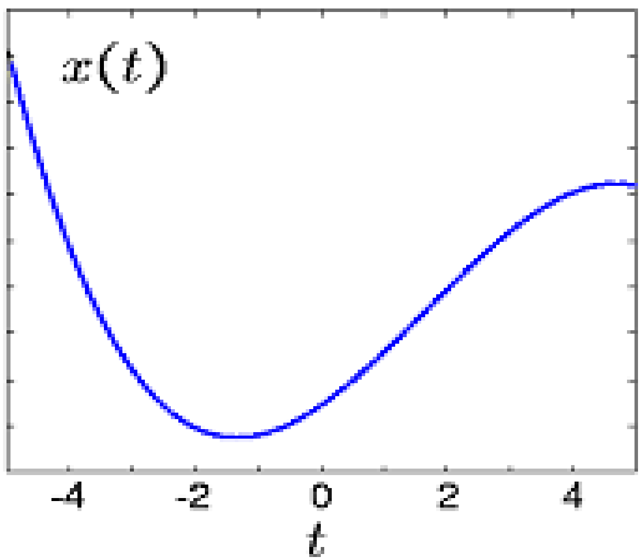
# 1.1 连续时间与离散时间信号
# (Continuous-Time and Discrete-Time Signals)

- 一、信号的分类：
- 确知信号与随机信号
  - 确知信号可以表示成一个或几个自变量的函数。作为信号分析的基础，本课程只研究单一自变量的确知信号，且一般假定该自变量为时间。
- 连续时间信号与离散时间信号
  - 连续时间信号在离散时刻点上的样本可以构成一个离散时间信号

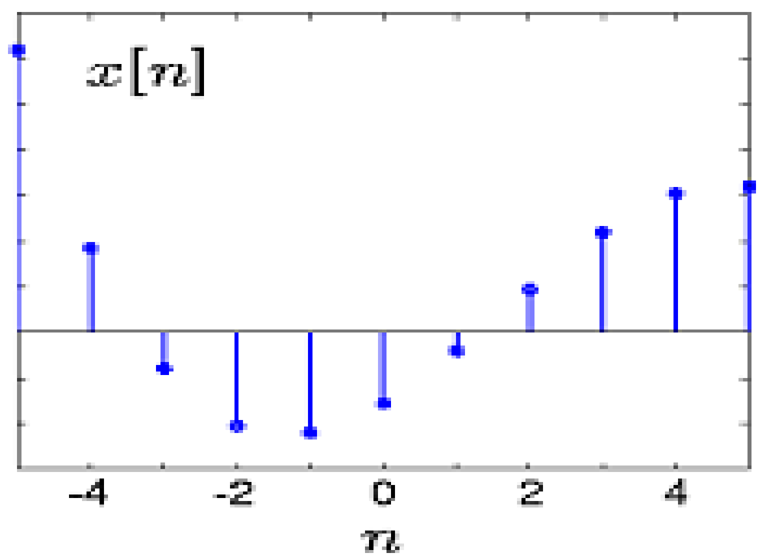
# 1.1 连续时间与离散时间信号

- 信号的描述：
  - 连续时间信号 $x(t)$
  - 离散时间信号 $x[n]$

连续时间信号的例子：




离散时间信号的例子：



# 1.1 连续时间与离散时间信号

- 二.信号的能量与功率:
- 连续时间信号在$[t_1,t_2]$区间的能量定义为:

$$E=\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2\,dt$$

- 连续时间信号在$[t_1,t_2]$区间的平均功率定义为:

$$P=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^2\,dt$$

# 1.1 连续时间与离散时间信号

- 离散时间信号在$[n_1, n_2]$区间的能量定义为

$$E = \sum_{n=n_1}^{n_2} \left| x[n] \right|^2$$

- 离散时间信号在$[n_1, n_2]$区间的平均功率为

$$P = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} \left| x[n] \right|^2$$

- 在无限区间上也可以定义信号的总能量

# 1.1 连续时间与离散时间信号

– 连续时间情况下：

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left|x(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\right|^2 dt$$

– 离散时间情况下：

$$E_\infty = \lim_{N\to\infty}\sum_{-N}^{N}\left|x[n]\right|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|^2$$

– 在无限区间内的平均功率可定义为：

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|x(t)\right|^2 dt$$

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N}\left|x[n]\right|^2$$

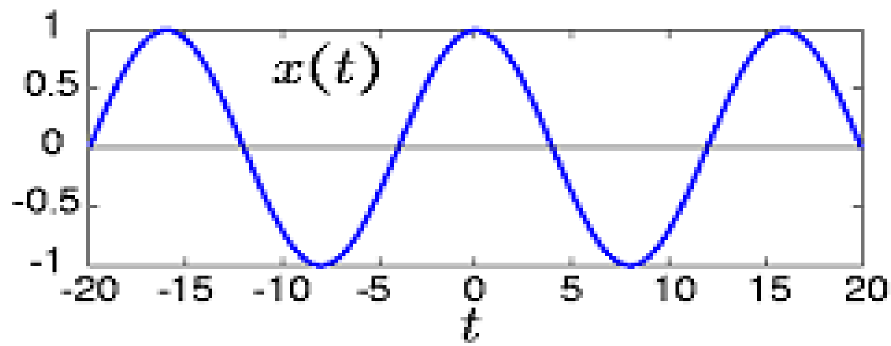
# 1.1 连续时间与离散时间信号

- 三类重要信号：
  1. 能量受限信号——信号具有有限的总能量，即：
  $$E_\infty < \infty, \quad P_\infty = 0$$
  2. 功率受限信号——信号有无限的总能量，但平均功率有限。即：
  $$E_\infty = \infty, \quad 0 < P_\infty < \infty$$
  3. 信号的总能量和平均功率都是无限的。即：
  $$E_\infty = \infty, \quad P_\infty = \infty$$

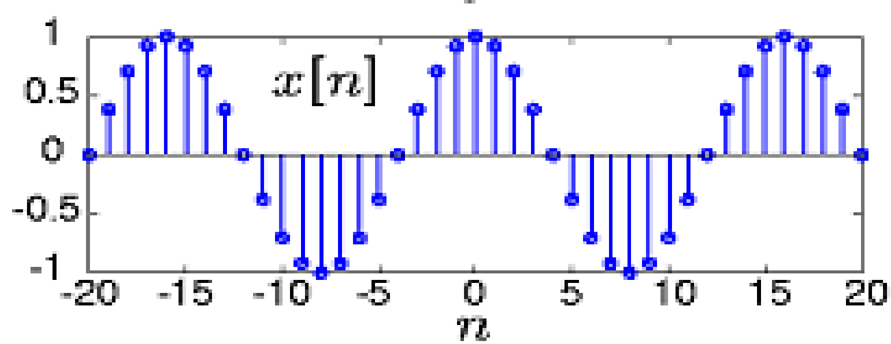
# 1.1 连续时间与离散时间信号

- 三. 周期信号与非周期信号：
- 如果信号是周期信号，则 $x(t+T)=x(t)$，$T$ 为正实数，或 $x[n+N]=x[n]$，$N$ 为正整数

连续时间周期信号




离散时间周期信号



# 1.1 连续时间与离散时间信号

- 这种信号是功率受限信号 (**why?**)，通常用它的平均功率来表征

$$P_\infty = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\, dt \quad \text{（以}T\text{为周期）}$$

$$P_\infty = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 \quad \text{（以}N\text{为周期）}$$

- 如果信号是非周期的，且能量有限则称为能量受限信号。

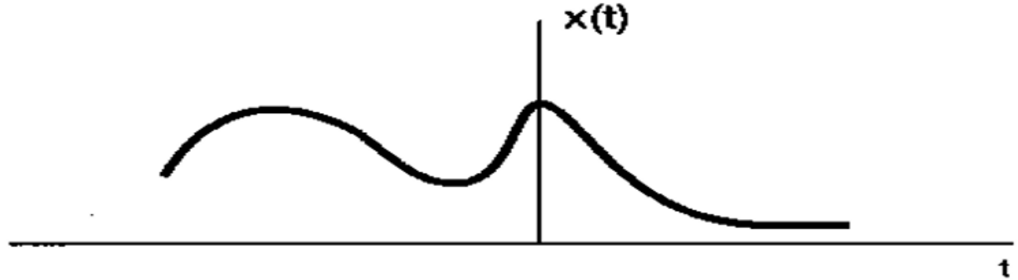
- **1.2 自变量变换 (Transformations of Independent Variable)**

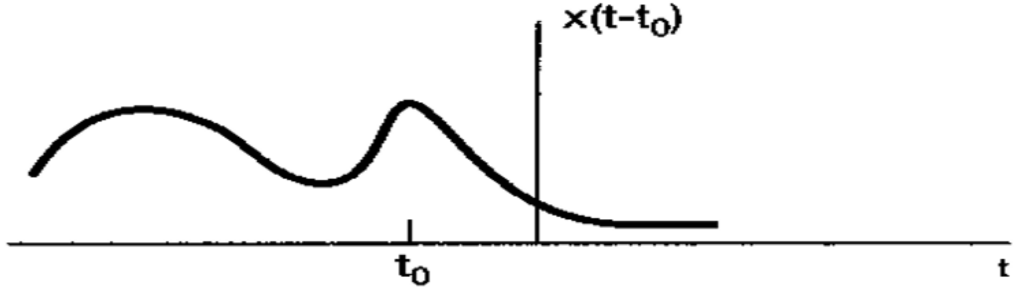
# 1.2 自变量变换
# (Transformations of the Independent Variable)

- **1. 时移变换 (Shift of Signals)**

$x(t) \longrightarrow x(t-t_0)$ 当 $t_0>0$ 时，信号向右平移 $t_0$

$t_0<0$ 时，信号向左平移 $|t_0|$



# 1.2 自变量变换
# (Transformations of the Independent Variable)

- **1. 时移变换 (Shift of Signals)**

$x(t) \longrightarrow x(t-t_0)$ 当 $t_0 > 0$ 时，信号向右平移 $t_0$

$t_0 < 0$ 时，信号向左平移 $|t_0|$

$x[n] \longrightarrow x[n-n_0]$ 当 $n_0 > 0$ 时，信号向右平移 $n_0$

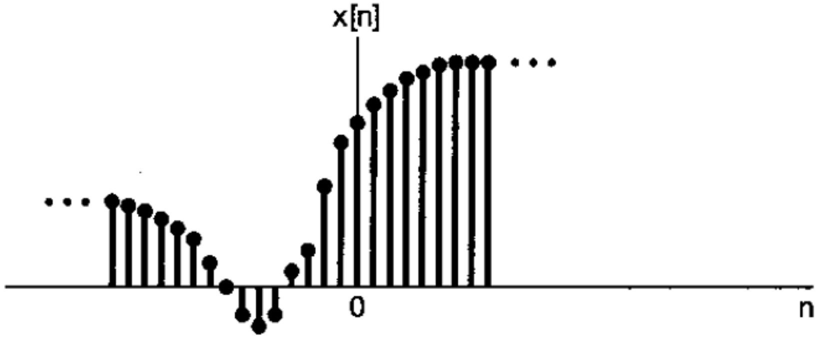
$n_0 < 0$ 时，信号向左平移 $|n_0|$

# 1.2 自变量变换

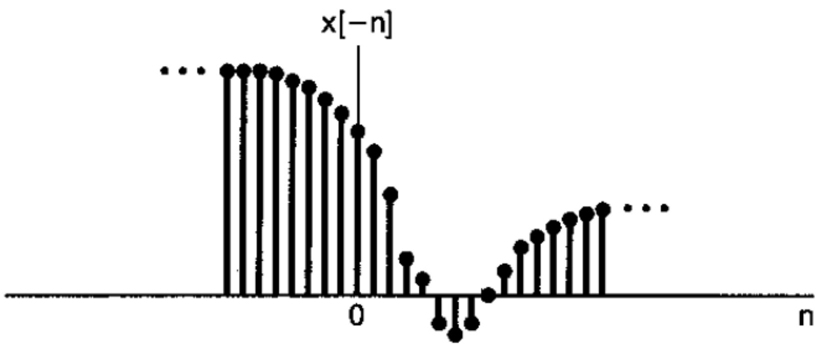
- **2. 反转变换 (Reflection of Signals)**

$x(t) \rightarrow x(-t)$ 信号以 $t=0$ 为轴呈镜像对称。

$x[n] \rightarrow x[-n]$ 与连续时间的情况相同。




(a)



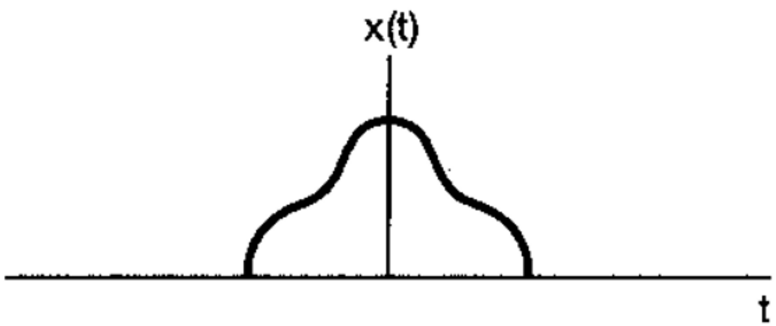
# 1.2 自变量变换

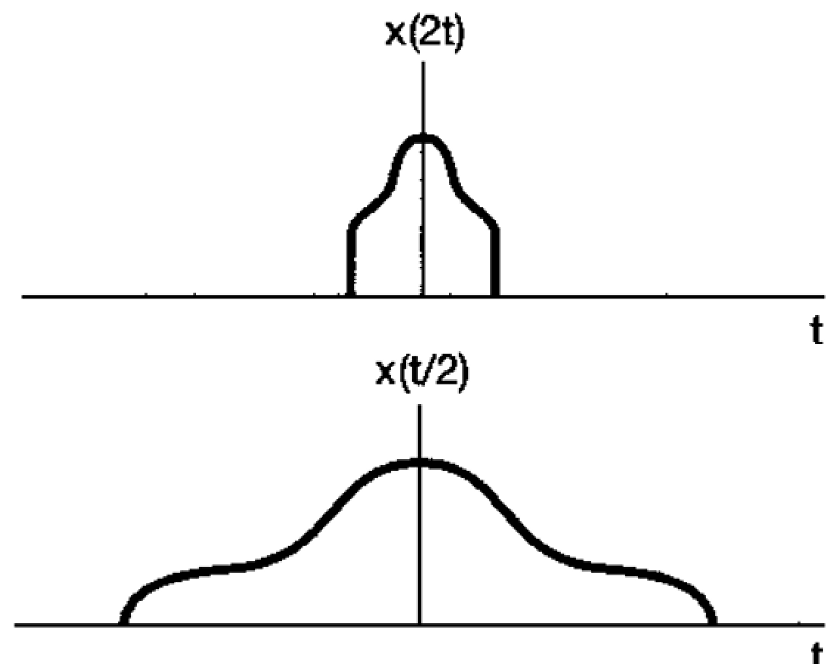
- **3. 尺度变换 (Time Scaling)**

$$x(t) \rightarrow x(at)$$

$a>1$ **时，** $x(at)$**是将** $x(t)$**在时间上压缩*a*倍，**

$0<a<1$ **时,** $x(at)$**是将** $x(t)$ **在时间上扩展1/*a*倍。**



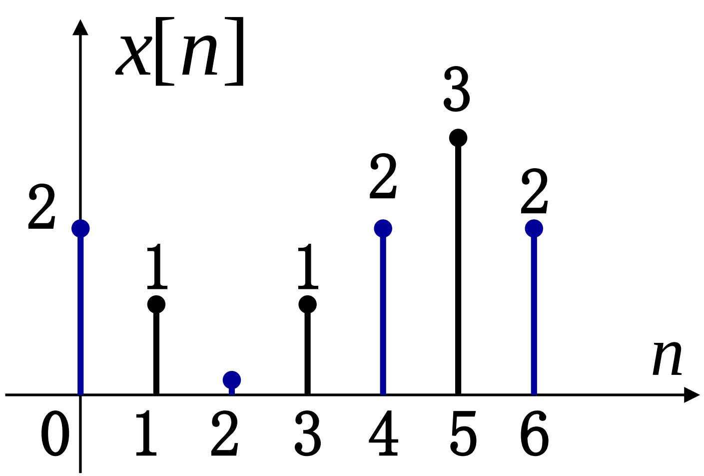
# 1.2 自变量变换

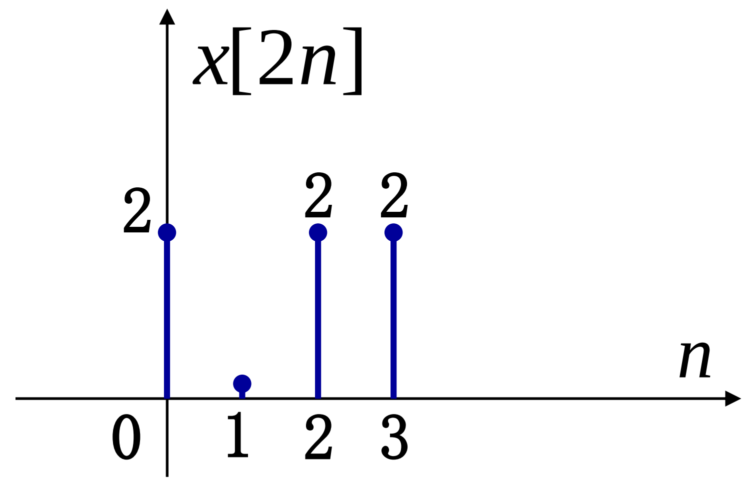
- 离散时间信号?

# 1.2 自变量变换

- 信号抽取（decimation）

例如：$x[n] \longrightarrow x[2n]$



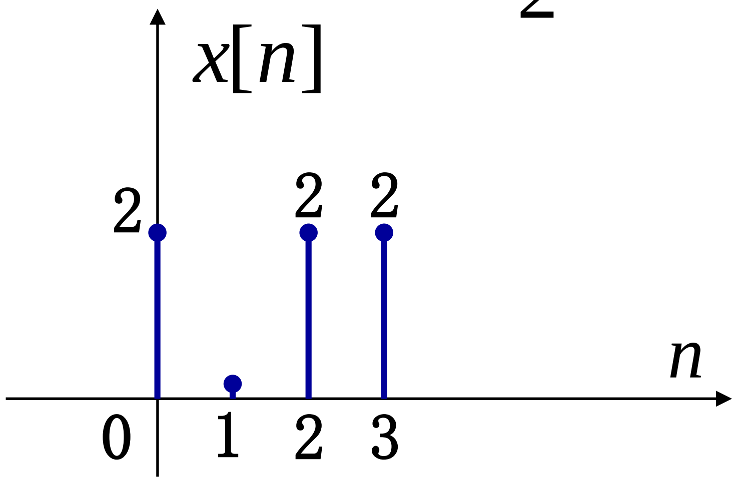



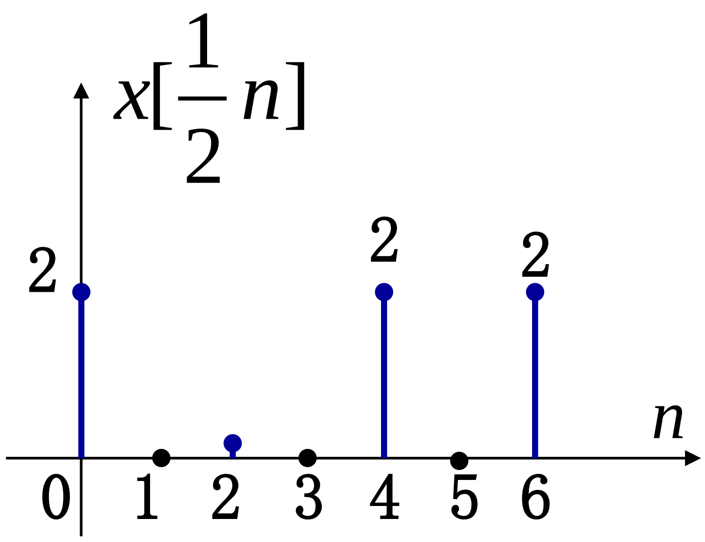

– $x[2n]$ 是从 $x[n]$ 中依次抽出自变量取偶数时的各点而构成的

# 1.2 自变量变换

- 信号插值（interpolation）

例如：$x[n] \longrightarrow x[\frac{1}{2}n]$



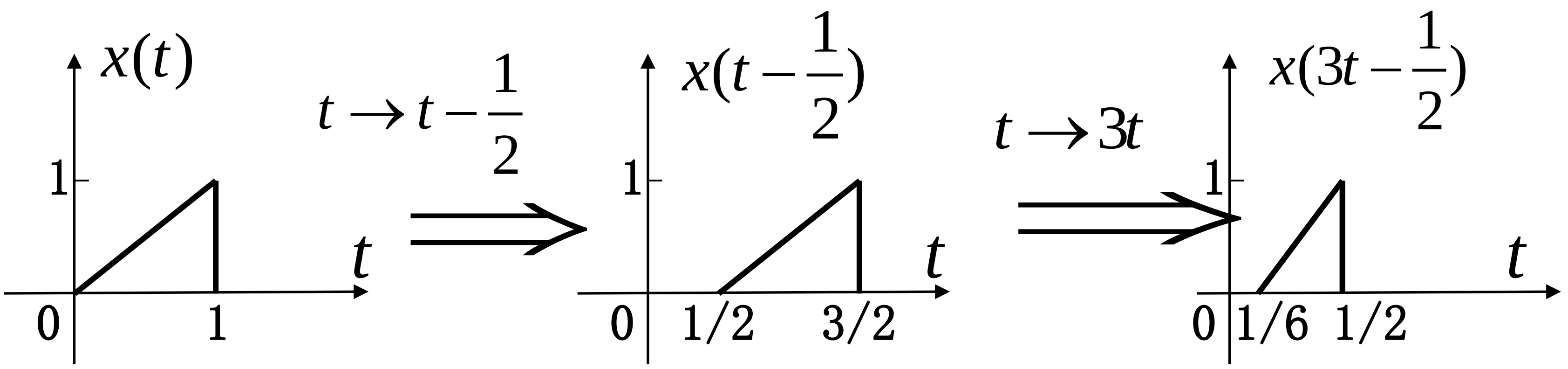

– 在已有信号中插入信号点，以增加数据量

– 插入什么数据？

# 1.2 自变量变换

综合示例：　由 $x(t) \Rightarrow x(3t-\frac{1}{2})$

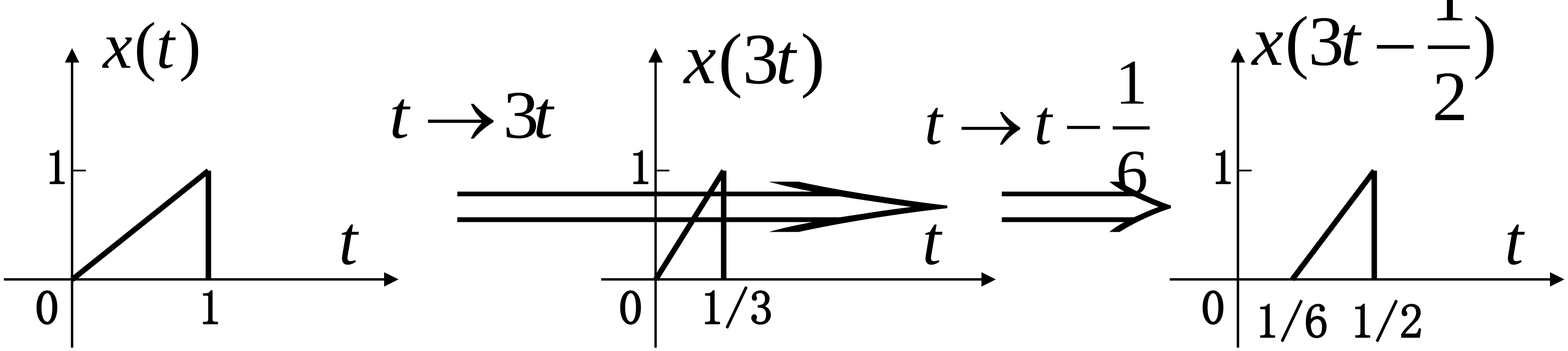
做法一：　$x(t) \rightarrow x(t-\frac{1}{2}) \rightarrow x(3t-\frac{1}{2})$



# 1.2 自变量变换

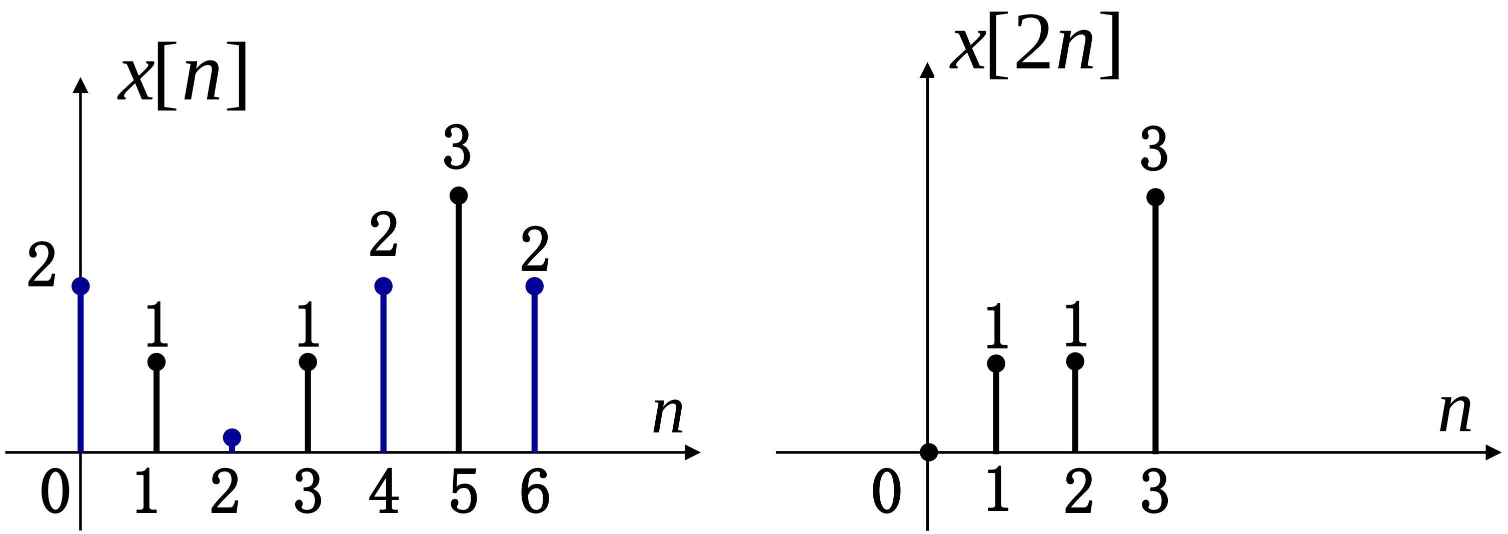
综合示例：　由 $x(t) \Rightarrow x(3t-\frac{1}{2})$

做法二：$x(t) \rightarrow x(3t) \rightarrow x(3t-\frac{1}{2})$



# 1.2 自变量变换

综合示例：　　由 $x[n] \longrightarrow x[2n-1]$



# 1.2 自变量变换

- 二. 周期信号：

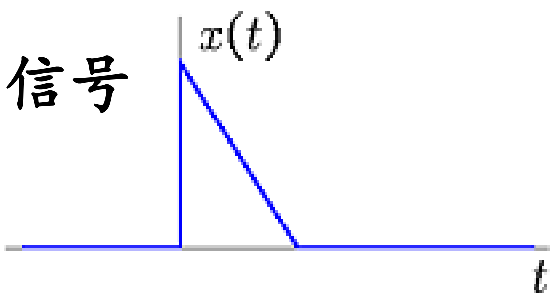
$$x(t+T)=x(t) \qquad x[n+N]=x[n]$$

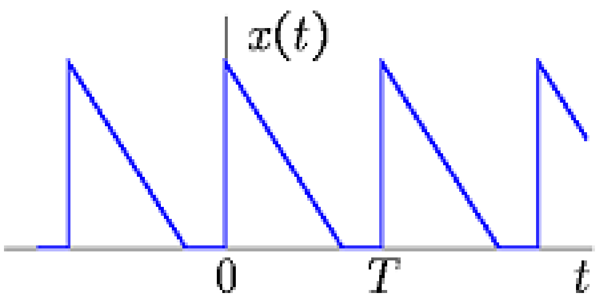
满足此关系的正实数（正整数）中最小的一个，称为信号的**基波周期** $T_0(N_0)$

– $x(t)=c$ 可视为周期信号，但它的基波周期没有确定的定义

– $x[n]=c$ 可以视为周期信号，基波周期 $N_0=1$

非周期信号




周期信号

# 1.2 自变量变换

- 二. 奇信号与偶信号 (Odd Signals and Even Signals)

对实信号而言：

如果有 $$x(-t) = x(t)$$ $$x[-n] = x[n]$$ 则称该信号是偶信号

（镜像偶对称）

如果有 $$x(-t) = -x(t)$$ $$x[-n] = -x[n]$$ 则称该信号为奇信号

（镜像奇对称）

# 1.2 自变量变换

- 二. 奇信号与偶信号 (Odd Signals and Even Signals)

对复信号而言：

如果有
$$x(t) = x^*(-t)$$
$$x[n] = x^*[-n]$$
则称该信号为共轭偶信号

如果有
$$x(t) = -x^*(-t)$$
$$x[n] = -x^*[-n]$$
则称为共轭奇信号

# 1.2 自变量变换

**任何信号都能分解成一个偶信号与一个奇信号之和**

- 对实信号有：

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$ 其中

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \qquad x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$ 其中

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \qquad x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n])$$

# 1.2 自变量变换

**任何信号都能分解成一个偶信号与一个奇信号之和**

对复信号有：

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$ 其中：

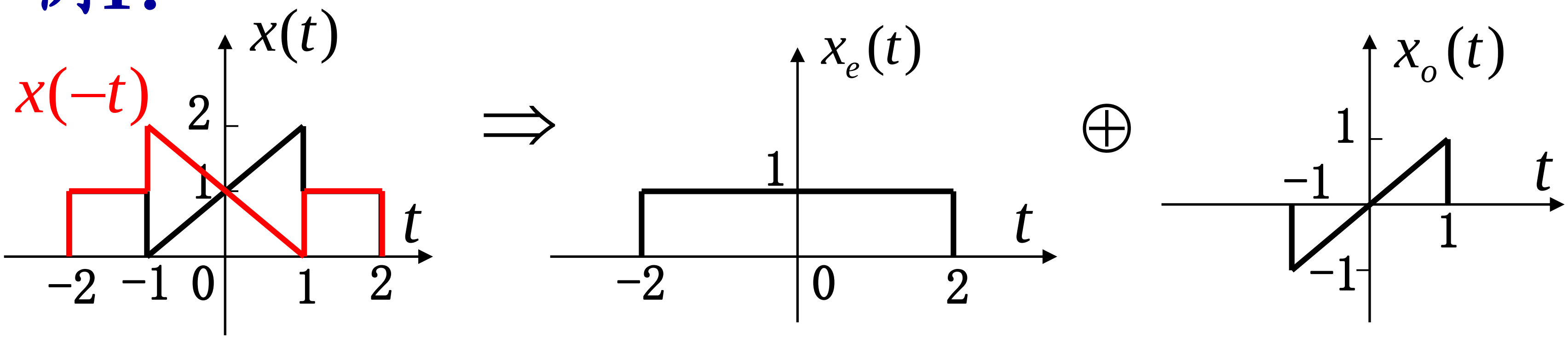
$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x^*(-t)] \qquad x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x^*(-t)]$$

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$ 其中：

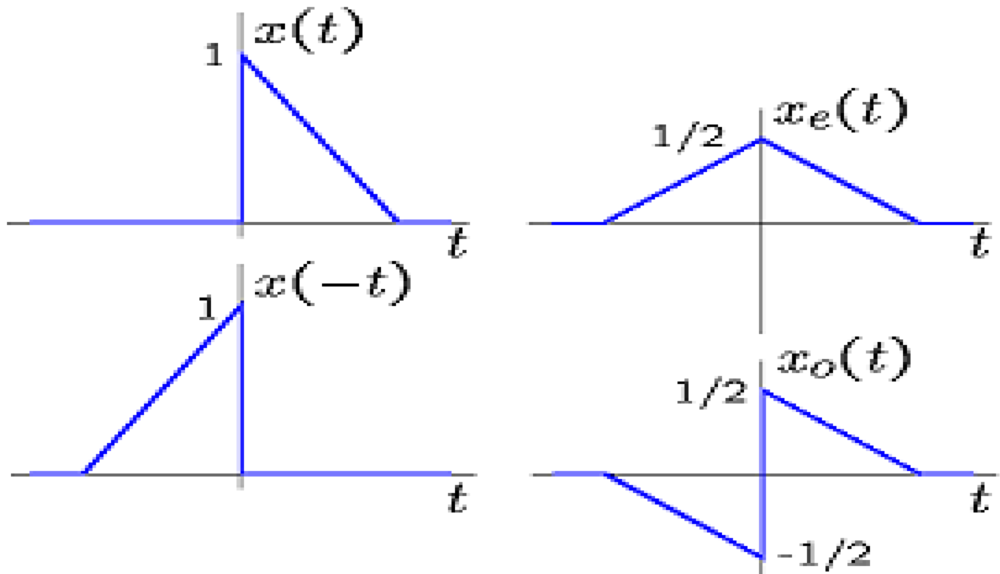
$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) \qquad x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$$

# 1.2 自变量变换

**例1:**




**例2.**



- **1.3 复指数信号与正弦信号 (Exponential and Sinusoidal Signals )**

# 1.3 复指数信号与正弦信号

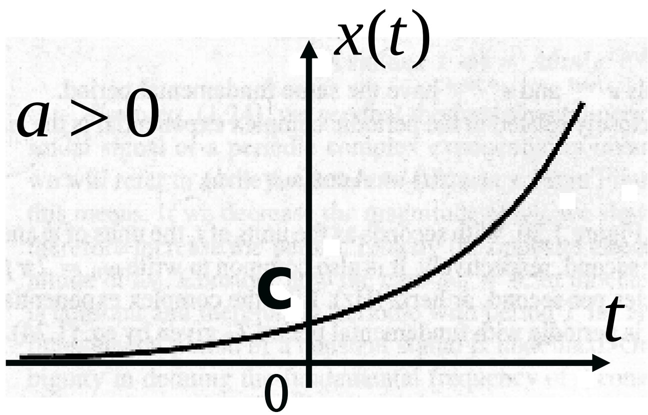
**(Exponential and Sinusoidal Signals )**

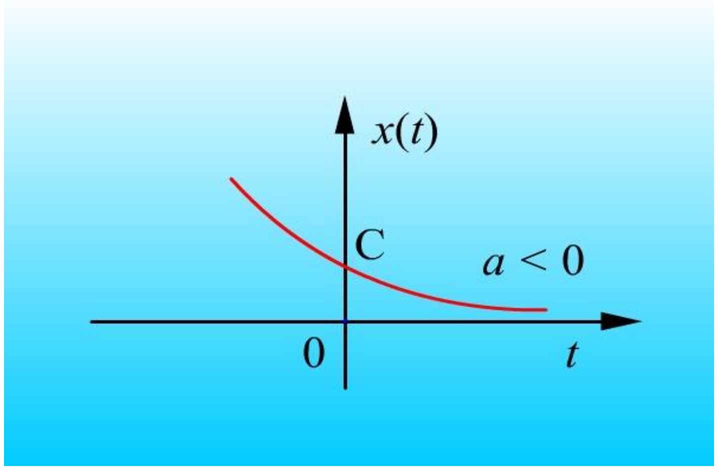
- 一. 连续时间复指数信号与正弦信号

$x(t)=Ce^{at}$ 其中 **$C, a$** 为复数

**1. 实指数信号： $C$，$a$为实数**

$a>0$ 呈单调指数上升。 $a<0$ 呈单调指数下降。




$a=0, x(t)=C$ 是常数。

# 1.3 复指数信号与正弦信号

**2. 周期性复指数信号与正弦信号:**

$a = j\omega_0$ ，不失一般性取 $C=1$

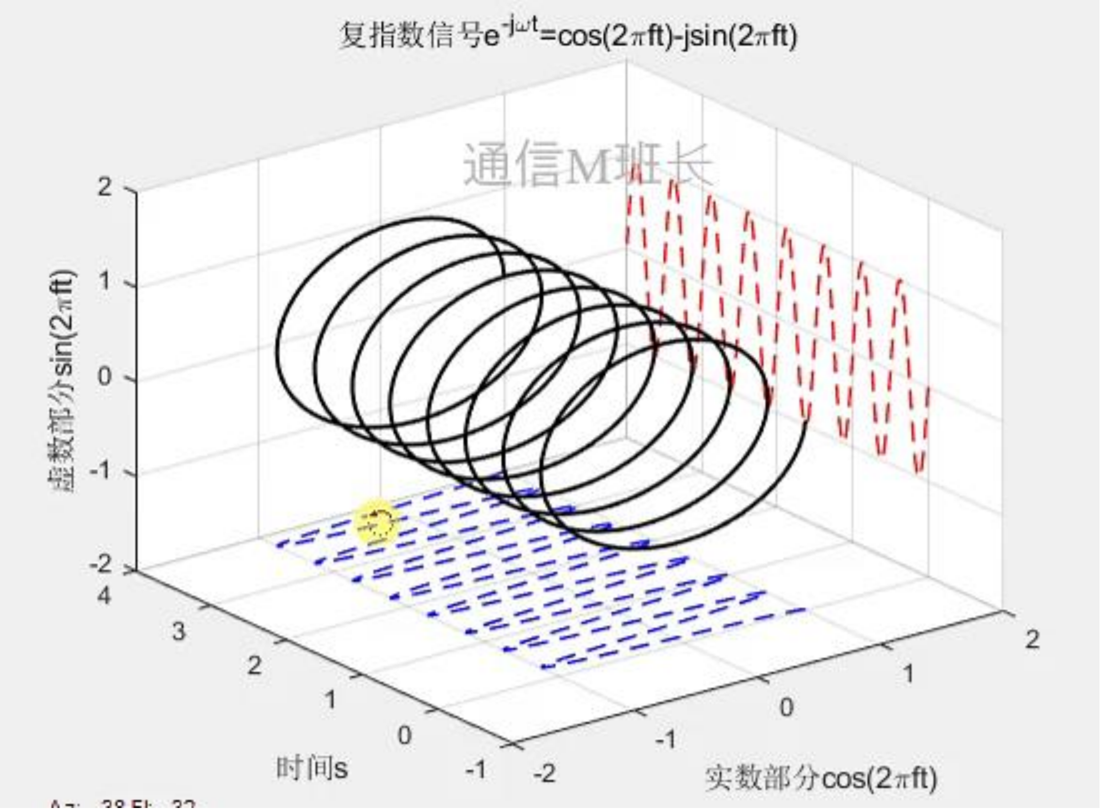
$x(t)=e^{j\omega_0 t}=\cos\omega_0 t+j\sin\omega_0 t$ 实部与虚部都是正弦信号。

$x(t)$ 显然是周期的，其基波周期为：$T_0=\dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$

如何画出一个复指数信号?

# 1.3 复指数信号与正弦信号

## 周期性复指数信号示意图



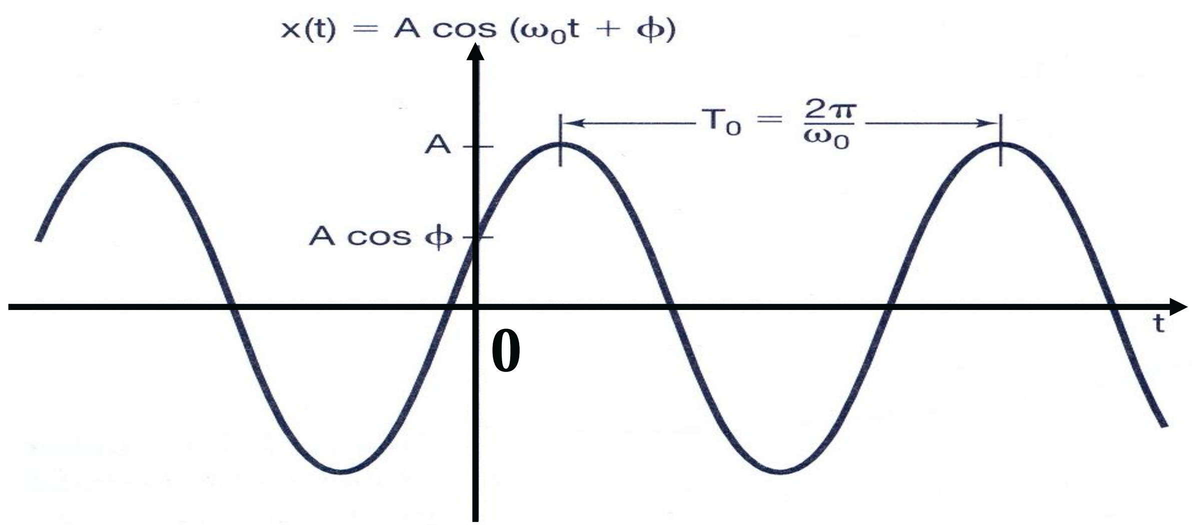
# 1.3 复指数信号与正弦信号

一般情况下的正弦信号：

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}$$

其基波周期为 $T_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$，基波频率为 $\omega_0$，当 $\omega_0 = 0$ 时

通常称为直流信号。



# 1.3 复指数信号与正弦信号

对 $x(t)=e^{j\omega_0 t}$ 而言，它在一个周期内的能量是

$$E_T=\int_0^{T_0}\left|e^{j\omega_0 t}\right|^2 dt=\int_0^{T_0}1\cdot dt=T_0$$

它的平均功率为：$P_T=1$

# 1.3 复指数信号与正弦信号

- 3. 成谐波关系的复指数信号集:

$$\phi_k(t)=\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\},\quad k=0,\pm 1,\pm 2\cdots\cdots$$

  - 该信号集中的每个信号都是周期的，它们的频率分别为 $k\omega_0$，都是$\omega_0$的整数倍，因而称它们是成谐波关系的。
  - 信号集中信号的基波频率为 $\omega_0$，基波周期为 $T_0$，各次谐波的周期分别为 $T_k=2\pi/|k\omega_0|$，它们的公共周期是 $T_0=2\pi/|\omega_0|$。
  - 当k取任何整数时，该信号集中的每个信号都是彼此不等的。只有该信号集中的所有信号才能构成一个完备的正交函数集。

# 1.3 复指数信号与正弦信号

- **4. 一般复指数信号:**

  $x(t)=Ce^{at}$ 其中 C, a为复数

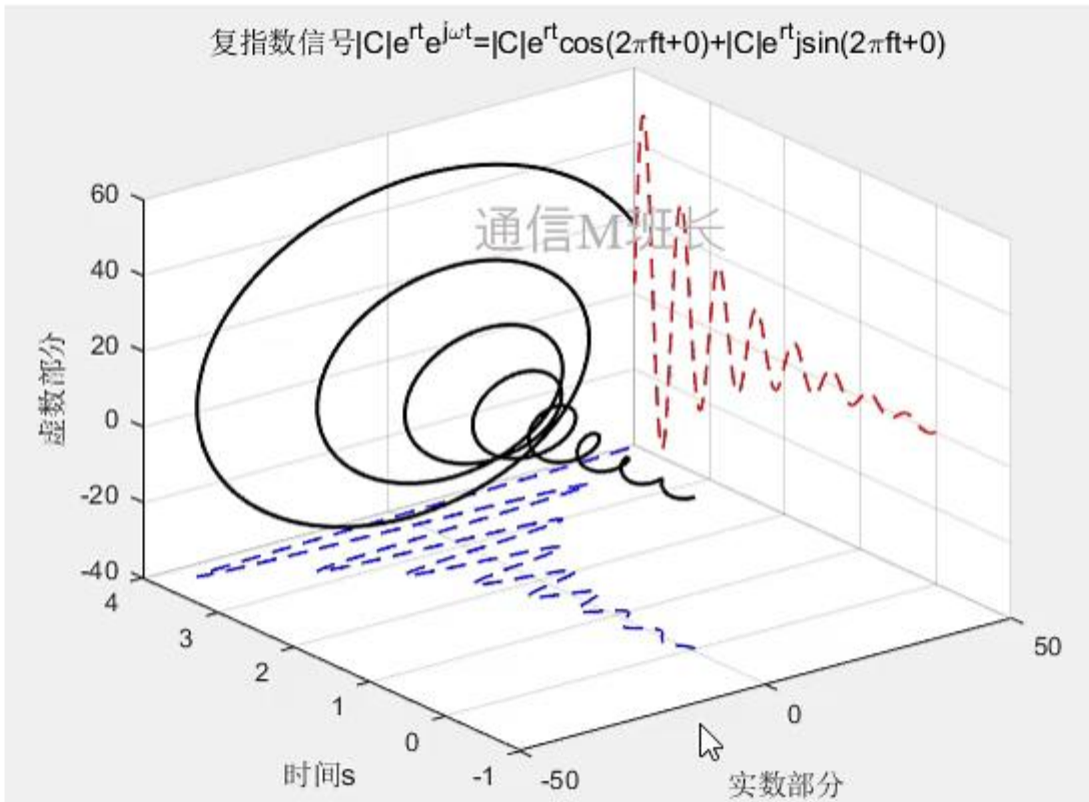
  令 $C=|C|e^{j\theta}$, $a=r+j\omega_0$ 则

  $$x(t)=|C|e^{j\theta}e^{rt}e^{j\omega_0 t}=|C|e^{rt}e^{j(\omega_0 t+\theta)}$$

  – 该信号可看成是振幅按实指数信号规律变化的周期性复指数信号。它的实部与虚部都是振幅呈实指数规律变化的正弦振荡。

# 1.3 复指数信号与正弦信号

- 一般复指数信号示意图

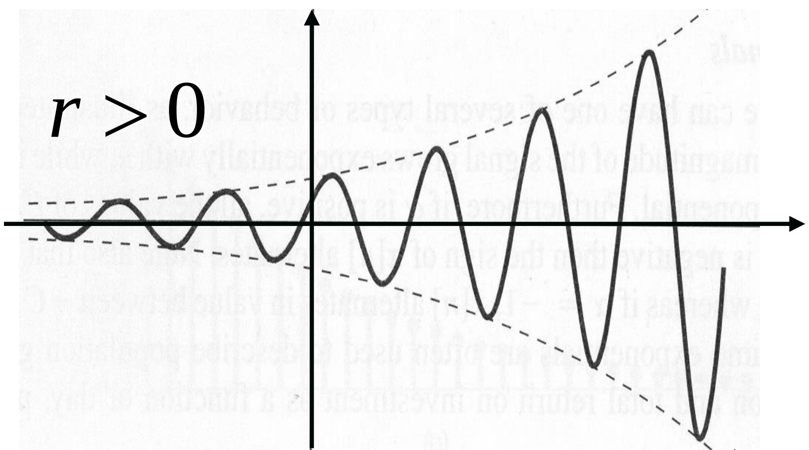


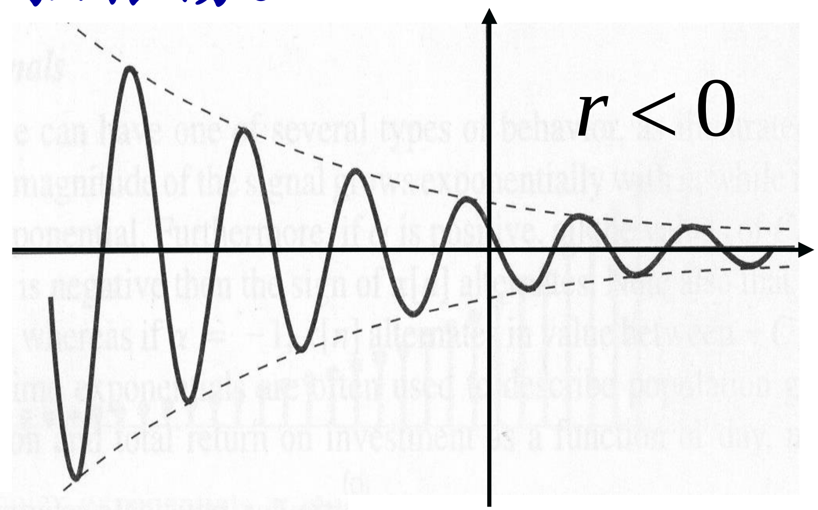
# 1.3 复指数信号与正弦信号

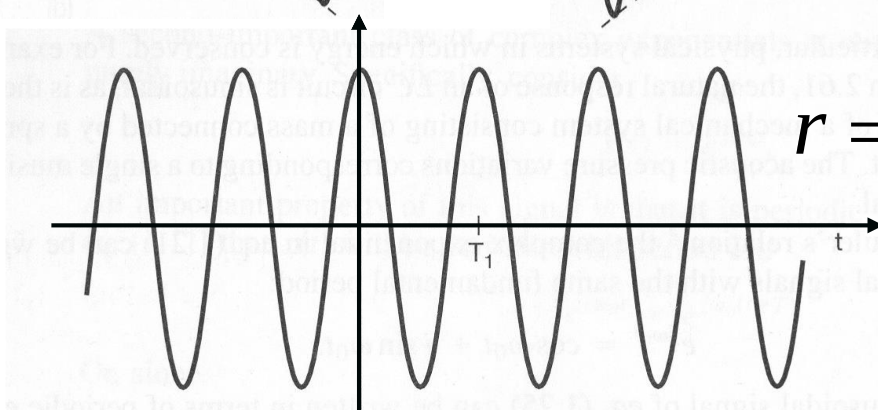
当 $r>0$ 时，是指数增长的正弦振荡。

$r<0$ 时，是指数衰减的正弦振荡。

$r=0$ 时，是等幅的正弦振荡。



# 1.3 复指数信号与正弦信号

- 二. 离散时间复指数信号与正弦信号

$x[n] = C\alpha^n \quad C, \alpha$ 一般为复数

1. 实指数信号： $C, \alpha$ 均为实数

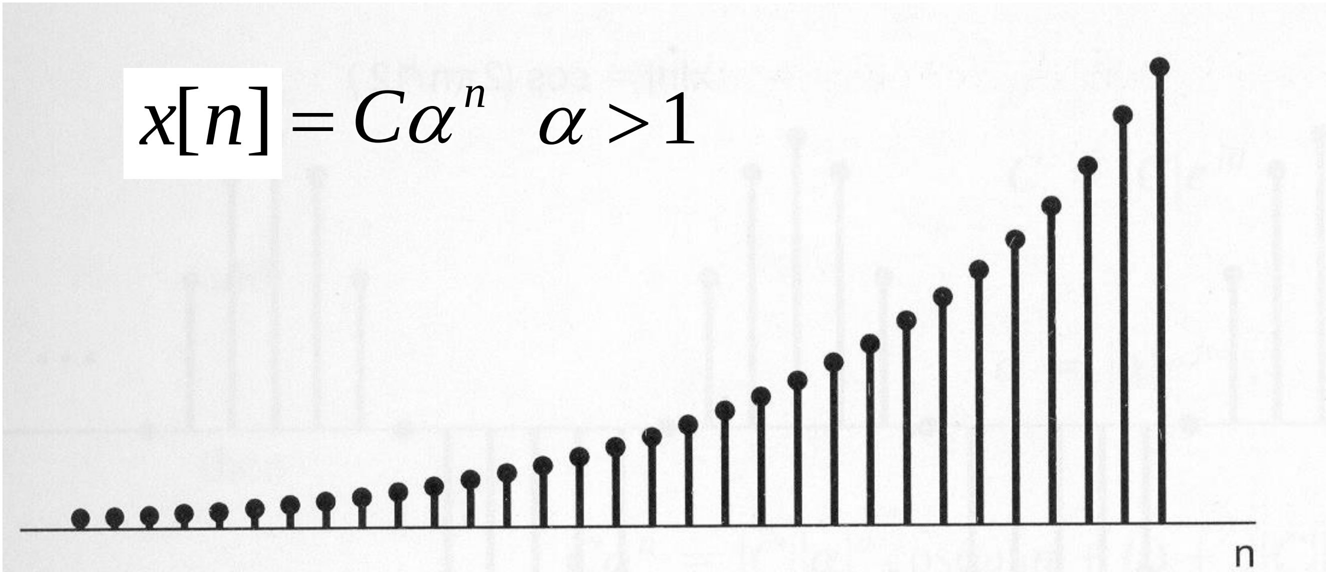
$x[n] = C\alpha^n$ 　当 $\alpha > 1$ 时，呈单调指数增长

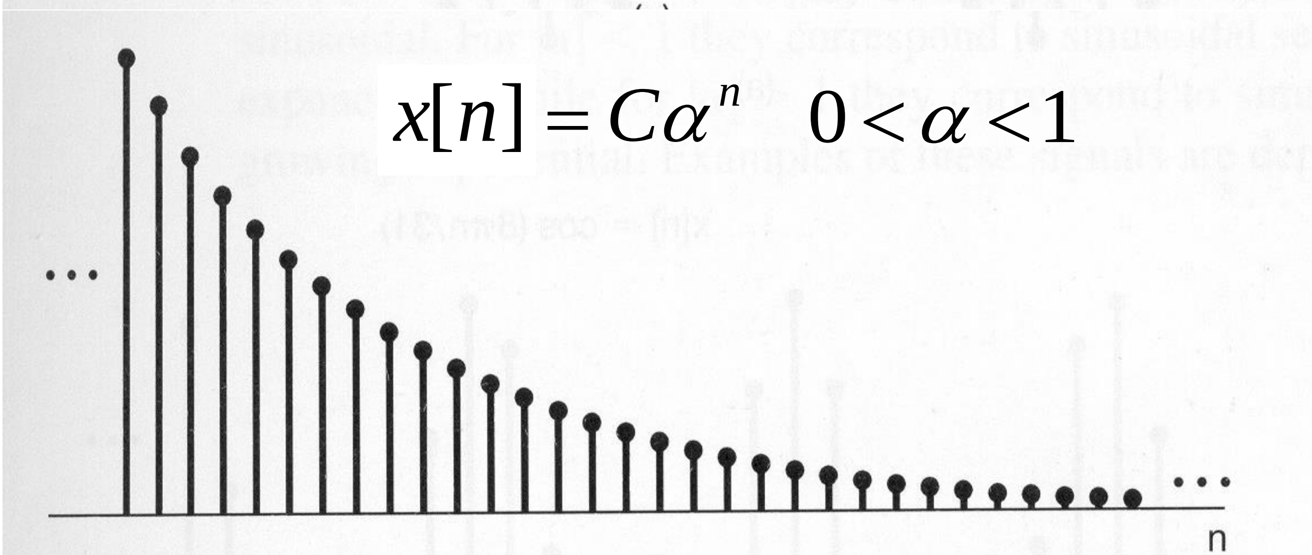
$0 < \alpha < 1$ 时，呈单调指数衰减

$-1 < \alpha < 0$ 时，呈摆动指数衰减

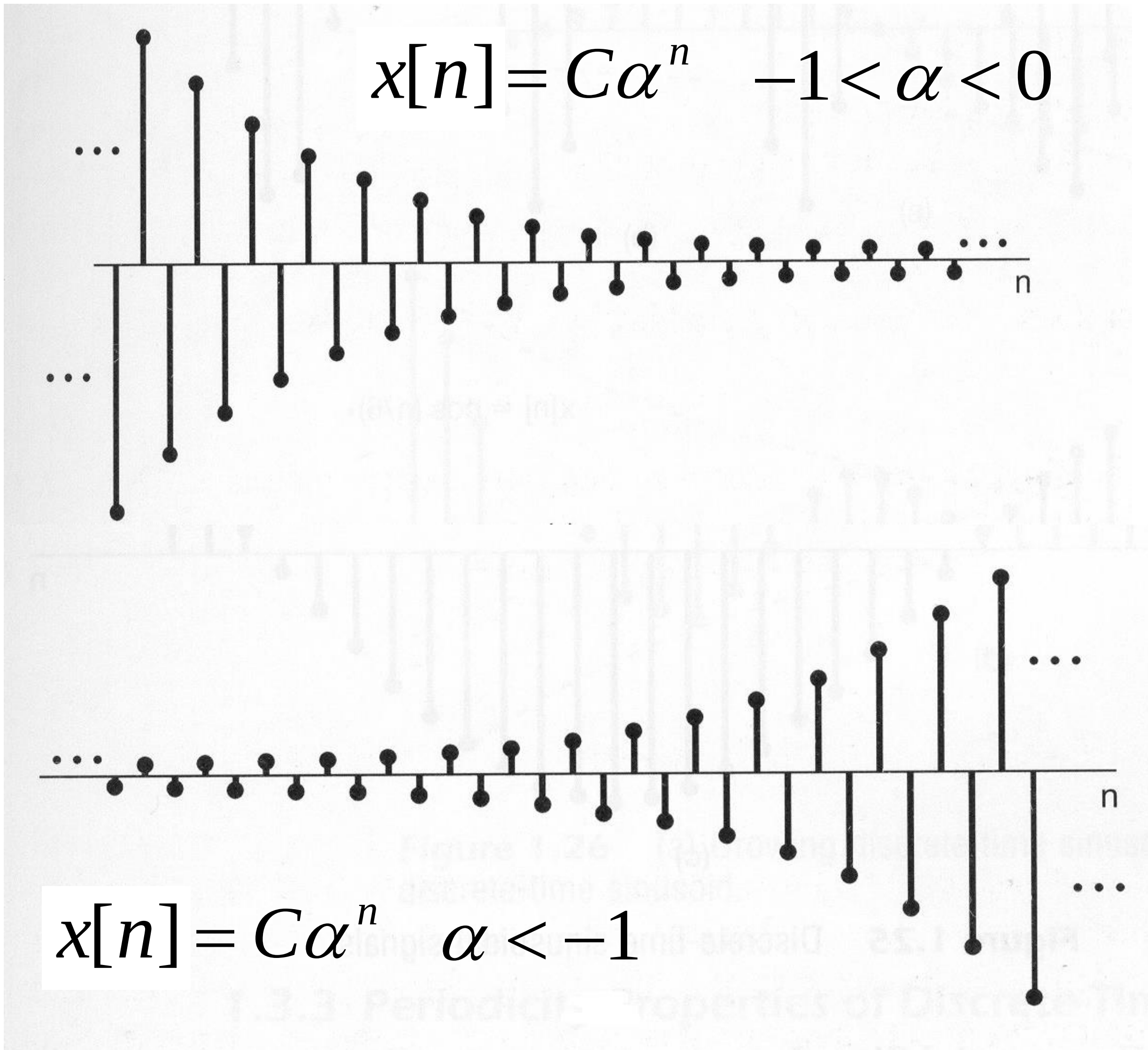
$\alpha < -1$ 时，呈摆动指数增长

# 1.3 复指数信号与正弦信号



# 1.3 复指数信号与正弦信号

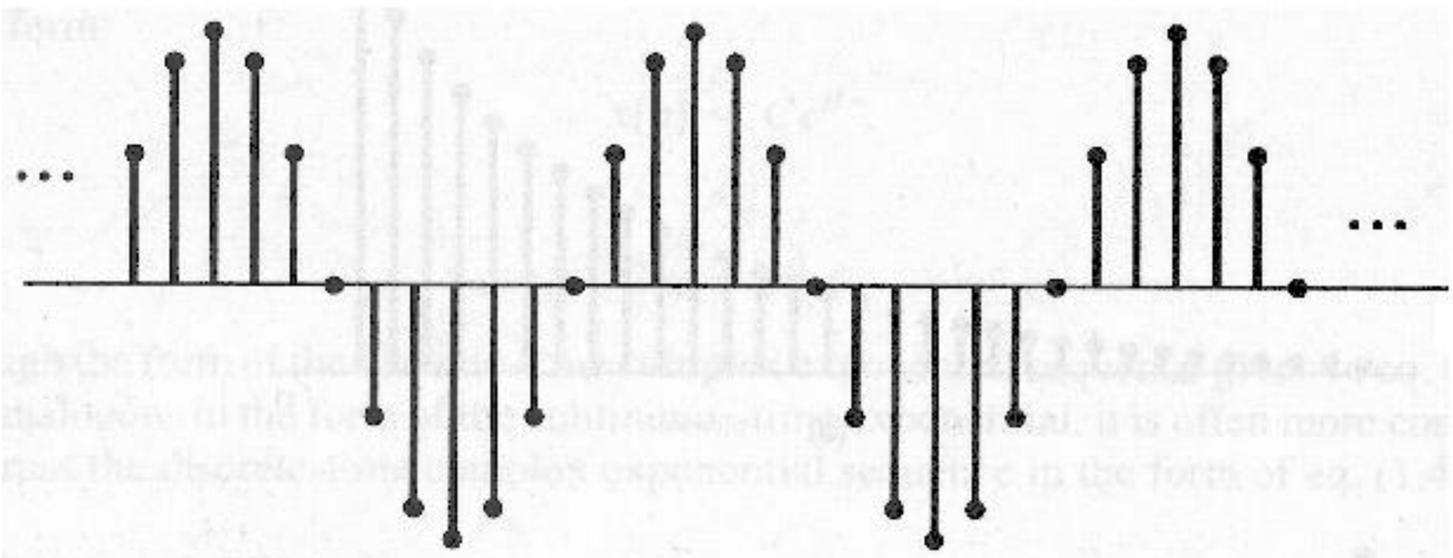


# 1.3 复指数信号与正弦信号

## 2. 正弦信号:

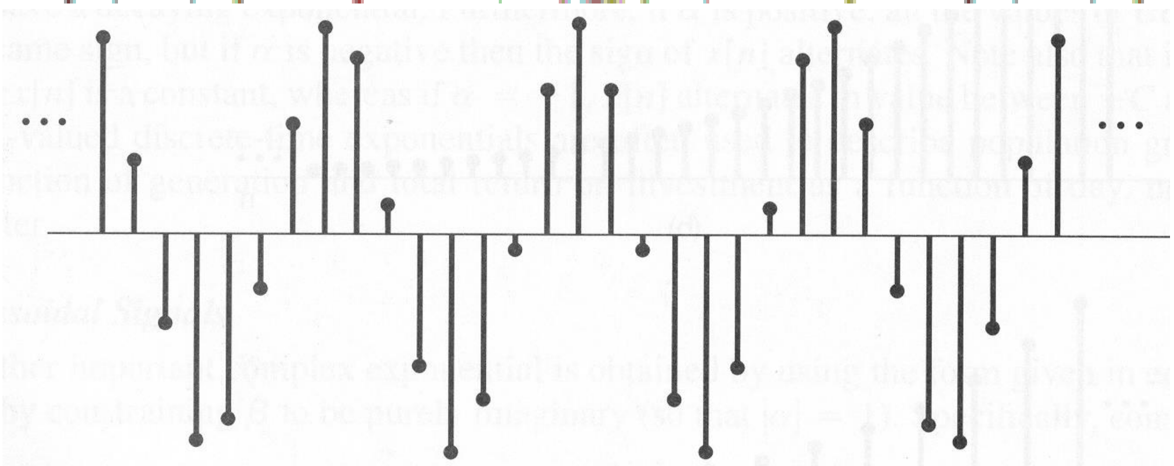
$x[n]=e^{j\omega_0 n}$ 其中 $\omega_0$ 为实数。

$$x[n]=e^{j\omega_0 n}=\cos\omega_0 n+j\sin\omega_0 n$$

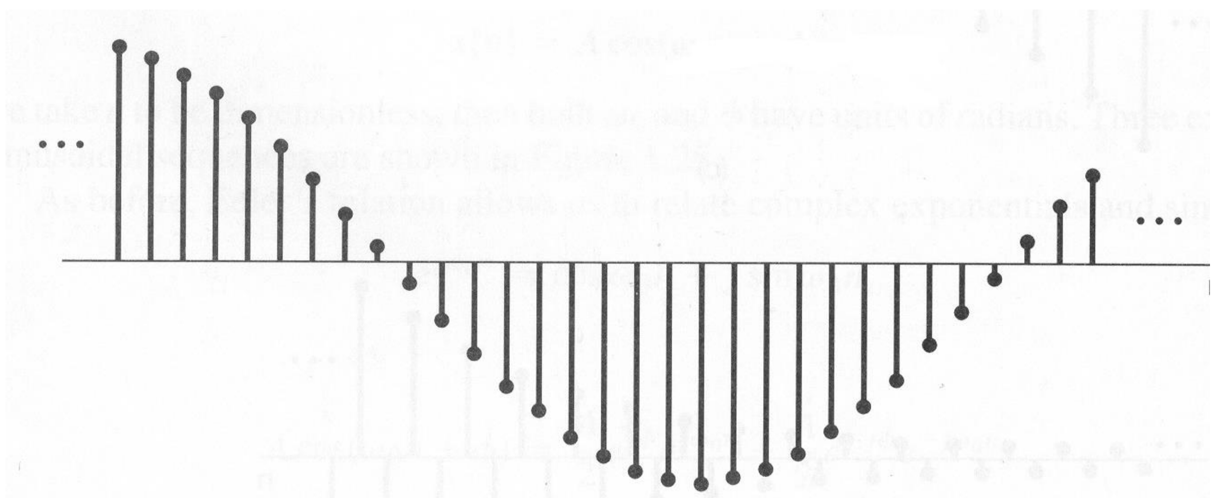



$$x[n]=\cos(2\pi n/12)$$

# 1.3 复指数信号与正弦信号



$$x[n] = \cos(8\pi n/31)$$



$$x[n] = \cos(n/6)$$

# 1.3 复指数信号与正弦信号

– 离散时间信号的频率表示为$\omega_0$，其量纲是弧度。

– 离散时间正弦信号不一定是周期的 **(Why?)**，这是与连续时间正弦信号的重大区别。

- **3. 一般复指数信号:**

$$x[n] = C\alpha^n \quad \text{令} \; C = |C|e^{j\theta} \quad \alpha = |\alpha|e^{j\omega_0} \; \text{则}$$

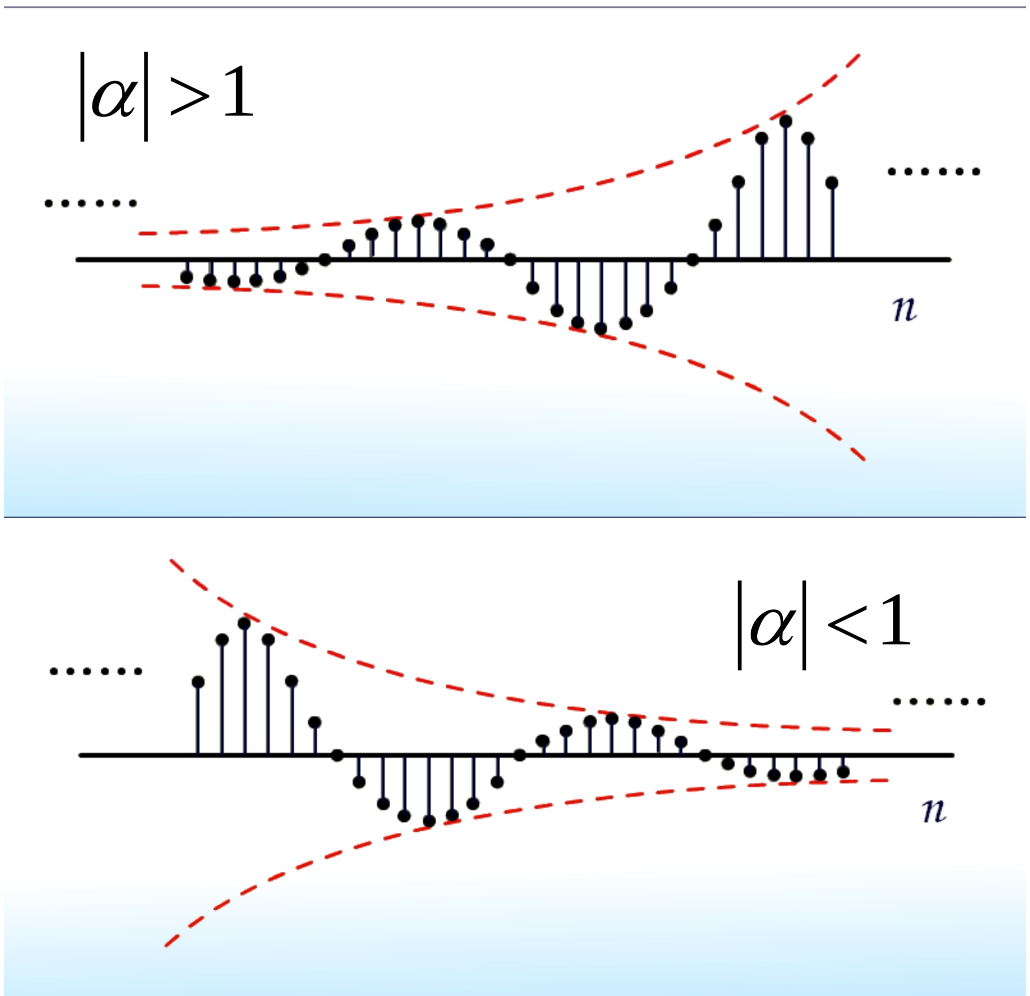
$$x[n] = |C||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n+\theta)}$$

$$= |C|\cdot|\alpha|^n \cdot[\cos(\omega_0 n+\theta) + j\sin(\omega_0 n+\theta)]$$

其实部与虚部都是幅度按实指数规律变化的正弦序列。

# 1.3 复指数信号与正弦信号

当 $|\alpha|>1$时幅度呈指数增长，$|\alpha|<1$时幅度呈指数衰减。



# 1.3 复指数信号与正弦信号

- 三. 离散时间复指数序列的周期性
  - 离散时间复指数序列 $x[n]=e^{j\omega_0 n}$ 不一定是周期性的，要具有周期性，必须具备一定条件。

设 $x[n+N]=x[n]$ 则有：

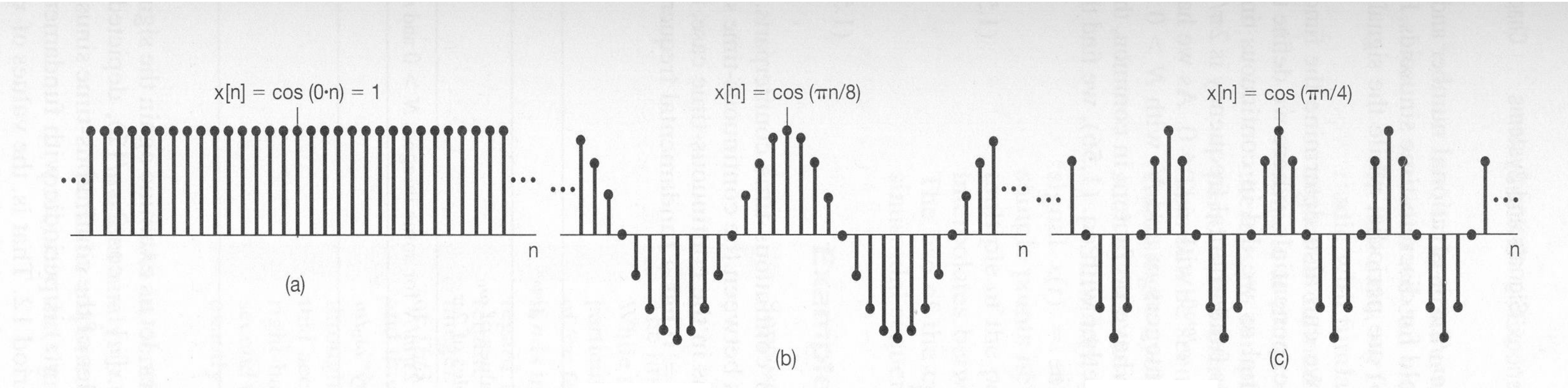
$$e^{j\omega_0(n+N)}=e^{j\omega_0 n}\cdot e^{j\omega_0 N}=e^{j\omega_0 n} \quad \therefore e^{j\omega_0 N}=1$$

即 $\omega_0 N=2\pi m$ 于是有 $\boxed{\dfrac{\omega_0}{2\pi}=\dfrac{m}{N}}$ 即 $\boxed{\omega_0=\dfrac{2m}{N}\pi}$

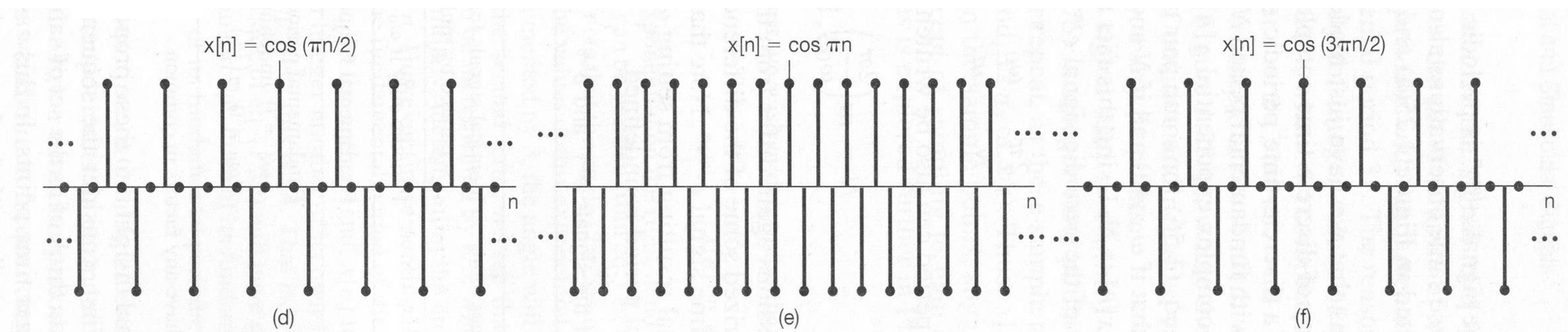
表明只有在 $\omega_0$ 是 $2\pi$ 的有理数倍时，

$e^{j\omega_0 n}$ 才具有周期性。

# 1.3 复指数信号与正弦信号

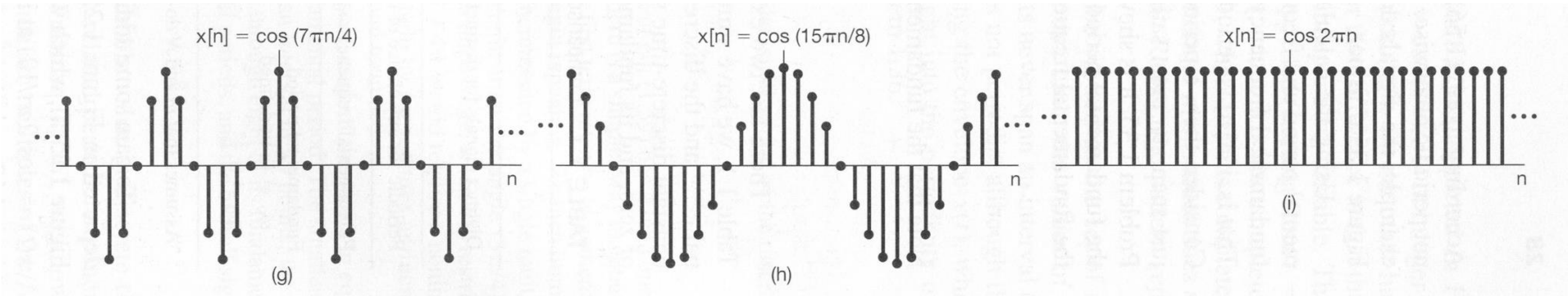



$x[n]=\cos(0\cdot n)=1$ $x[n]=\cos(\pi n/8)$ $x[n]=\cos(\pi n/4)$




$x[n]=\cos(\pi n/2)$ $x[n]=\cos(\pi n)$ $x[n]=\cos(3\pi n/2)$

# 1.3 复指数信号与正弦信号




$x[n] = \cos(7\pi n/4)$ $\quad x[n] = \cos(15\pi n/8)$ $\quad x[n] = \cos(2\pi n)$

# 1.3 复指数信号与正弦信号

- 对 $x(t)=e^{j\omega_0 t}$，当$\omega_0\uparrow$时，对应的信号振荡频率越来越高不会发生逆转。
- 而对 $e^{j\omega_0 n}$，当 $\omega_0\uparrow$ 时，只要是$\omega_0$ 变化$2\pi$ 的范围，如 $\omega_k=\omega_0+2\pi k$，则由于 $e^{j2\pi kn}=1$，总是会有 $e^{j\omega_k n}=e^{j\omega_0 n}$。这表明：当 $\omega_0$ 变化时，并非所有的 $e^{j\omega_0 n}$ 都是互相独立的。离散时间信号的有效频率范围只有 $2\pi$ 区间。其中 $\omega=0$，$\omega=2\pi k$ 处都对应最低频率；$\omega=\pi$ 或 $\omega=2\pi k+\pi$ 处都对应最高频率。

# 1.3 复指数信号与正弦信号

在满足周期性要求的情况下，总能找到互为质数的两个正整数 **m, N** 使得:

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \qquad \text{（}m\text{与}N\text{无公因子）}$$

此时 $N = \frac{2\pi}{\omega_0} m$ 即为该信号的周期, 也称为**基波周期**, 因此该信号的**基波频率**为 $\omega = \frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{m}$

# 1.3 复指数信号与正弦信号

- 离散时间周期性复指数信号也可以构成一个成谐波关系的信号集

$$\phi_k[n] = \left\{ e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right\} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots\cdots$$

该信号集中的每一个信号都是以$N$为周期的，$N$是它们的基波周期

$k=0$称为直流分量，$k=1$称为基波分量。

$k=2$称为二次谐波分量等等。

每个谐波分量的频率都是$\frac{2\pi}{N}$的整数倍。

# 1.3 复指数信号与正弦信号

- 注意：与连续时间情况不同，该信号集中的所有信号并不是全部独立的。

显然有： $\phi_{k+N}[n]=\phi_k[n]$

即：该信号集中只有$N$个信号是独立的。即当$k$取相连的$N$个整数时所对应的各个谐波才是彼此独立的。因此，由$N$个独立的谐波分量就能构成一个完备的正交函数集。

# 1.3 复指数信号与正弦信号

## 信号 $e^{j\omega_0 t}$ 和 $e^{j\omega_0 n}$ 的比较

- $\omega_0$ 不同，信号不同
- 对任何 $\omega_0$ 信号都是周期的
- 基波频率 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$
- 基波周期：$T_0$

- 频差 $2\pi$ 的整数倍时，信号相同
- 仅当 $\dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{N}{m}$ 时，

  信号是周期的
- 基波频率 $\omega_0 / m$
- 基波周期：$N$

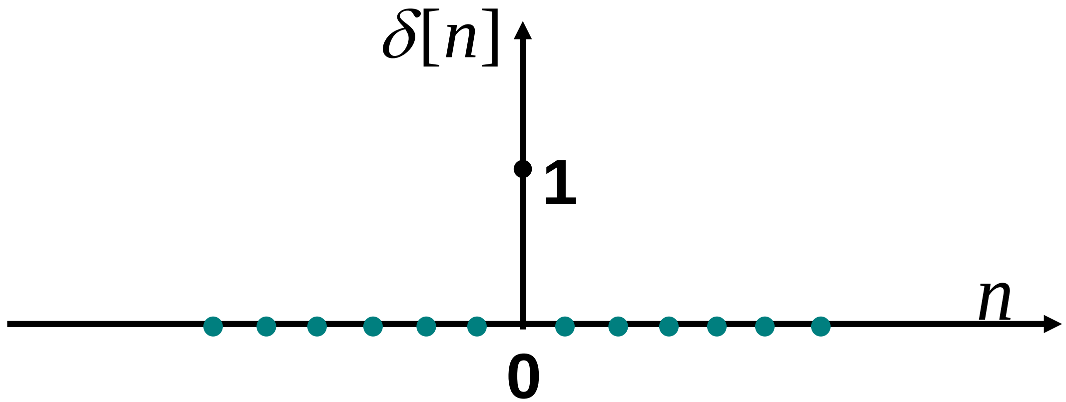

53

- **1.4 单位冲激与单位阶跃函数**
  **(The Unit Impulse and Unit Step Functions)**

# 1.4 单位冲激与单位阶跃函数
## (The Unit Impulse and Unit Step Functions)

- 一. 离散时间单位脉冲与单位阶跃序列
- 1. 单位脉冲 $\delta[n]$:

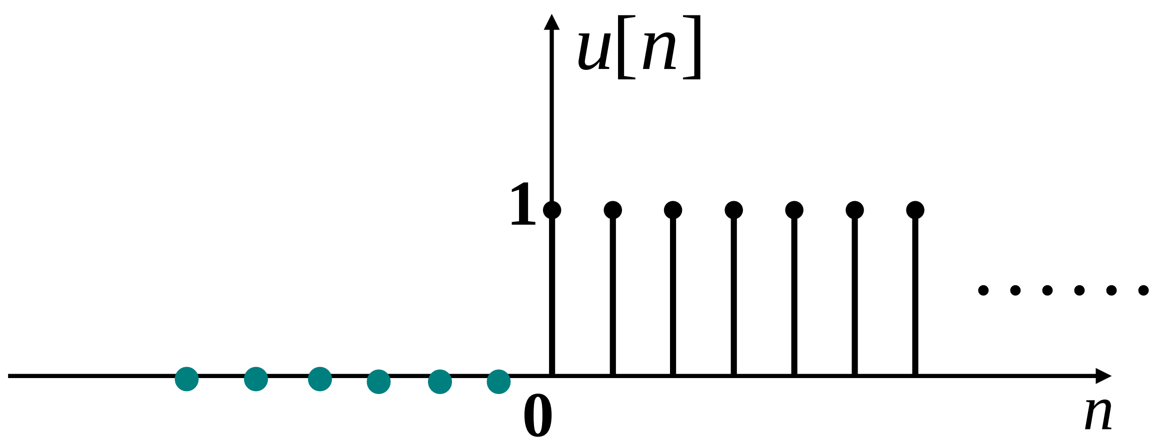
定义 $$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$



# 1.4 单位冲激与单位阶跃函数

- **2. 单位阶跃** $u[n]$**:**

定义 $u[n]=\begin{cases}1\ , & n\geq 0\\ 0\ , & n<0\end{cases}$

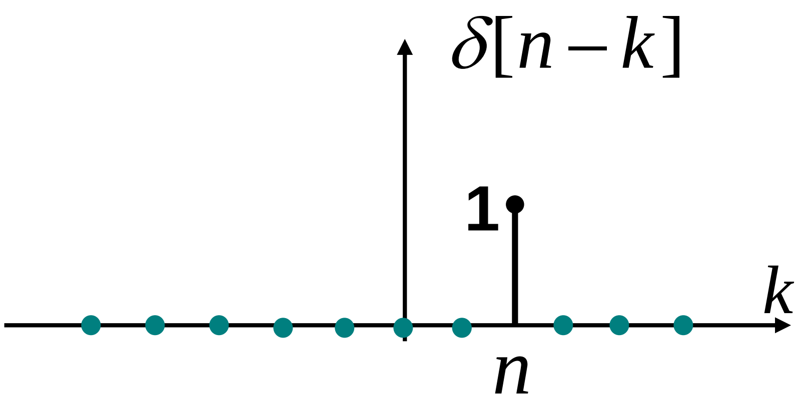


# 1.4 单位冲激与单位阶跃函数

$\delta[n]$ 与 $u[n]$ 之间的关系：

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$$ —— 一次差分

$$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$



# 1.4 单位冲激与单位阶跃函数

$\delta[n]$具有提取信号$x[n]$中某一点的样值的作用。

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

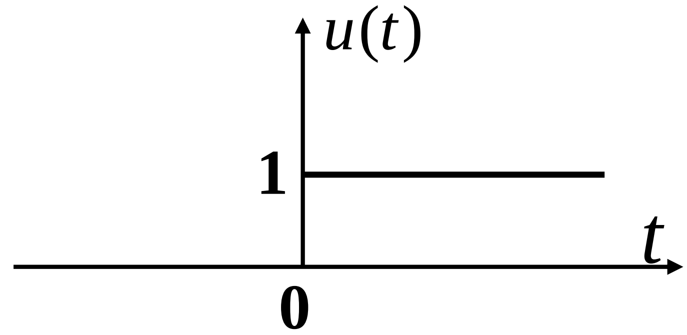
$$x[n]\delta[n-m] = x[m]\delta[n-m]$$

# 1.4 单位冲激与单位阶跃函数

- 二. 连续时间单位阶跃与单位冲激函数

**1. 单位阶跃函数 $u(t)$**

定义：$u(t)=\begin{cases}1, & t>0 \\ 0, & t<0\end{cases}$



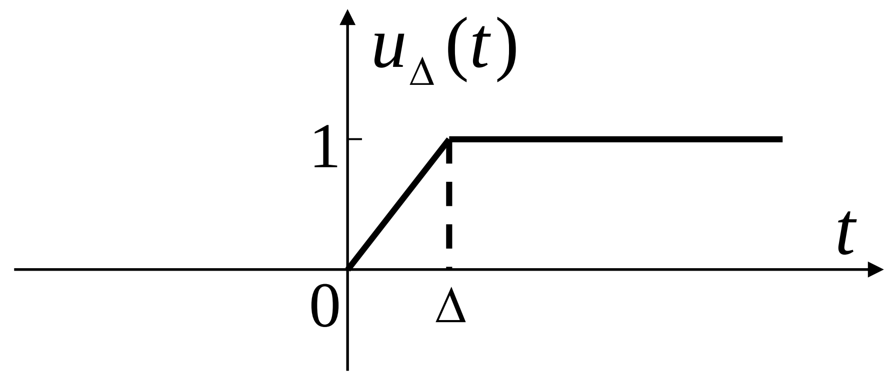

**2. 单位冲激函数 $\delta(t)$**

定义： $\delta(t)=\dfrac{du(t)}{dt}$ $\qquad u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$

定义的不严密性，由于 $u(t)$ 在 $t=0$ 不连续，因而在该处不可导。

# 1.4 单位冲激与单位阶跃函数

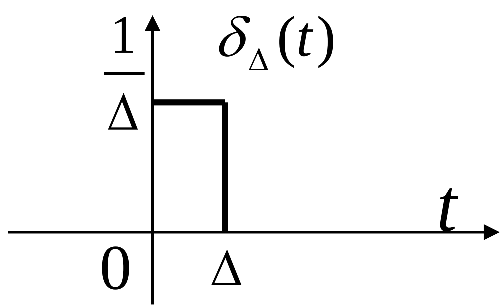
定义 $u_\Delta(t)$ 如图所示:




显然当 $\Delta \longrightarrow 0$ 时

$$u_\Delta(t) \longrightarrow u(t)$$

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}$$

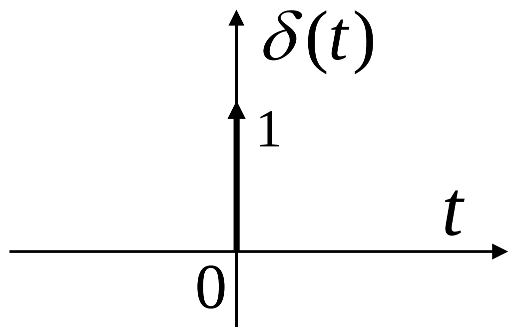


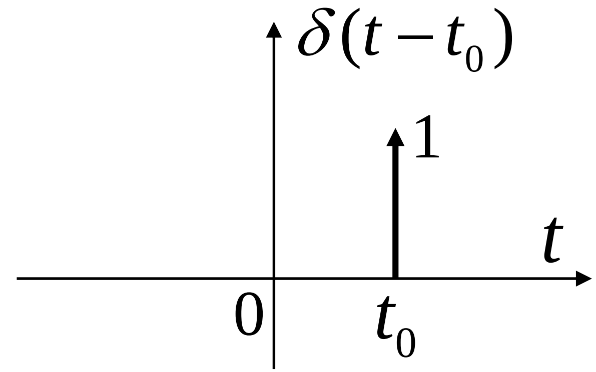

可认为 $\lim\limits_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) = \delta(t)$

即 $\delta(t)$ 可视为一个面积始终为1的矩形，当其宽度趋于零时的极限。

# 1.4 单位冲激与单位阶跃函数

$\delta(t)$ 表示为




矩形面积称为冲激强度。

显然有：$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau$$

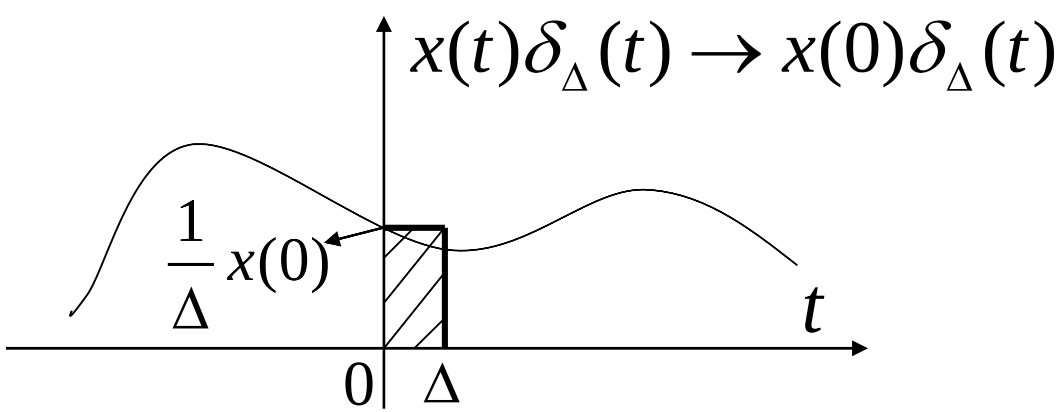
# 1.4 单位冲激与单位阶跃函数

$\delta(t)$ 也具有提取连续时间信号样本的作用。

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

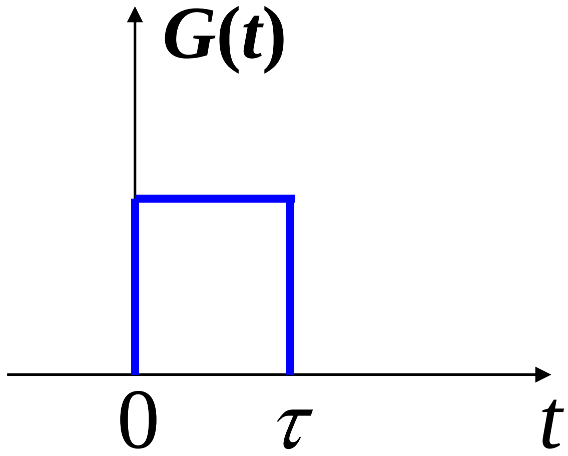
$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\lim_{\Delta \to 0} x(t)\delta_\Delta(t) = x(0)\delta(t)$$

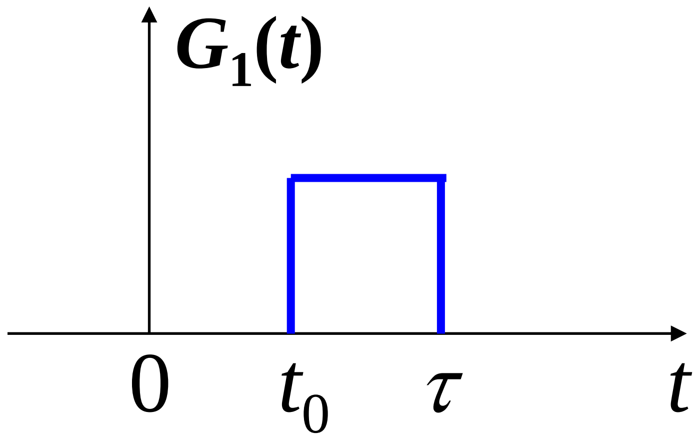


# 1.4 单位冲激与单位阶跃函数

用阶跃表示矩形脉冲




$$G(t) = u(t) - u(t-\tau)$$




$$G_1(t) = u(t-t_0) - u(t-\tau)$$

- **1.5 连续时间与离散时间系统**
  **(Continuous-Time and Discrete-Time Systems)**

# 1.5 连续时间与离散时间系统
# (Continuous-Time and Discrete-Time Systems)

- 一. 系统

连续时间系统:

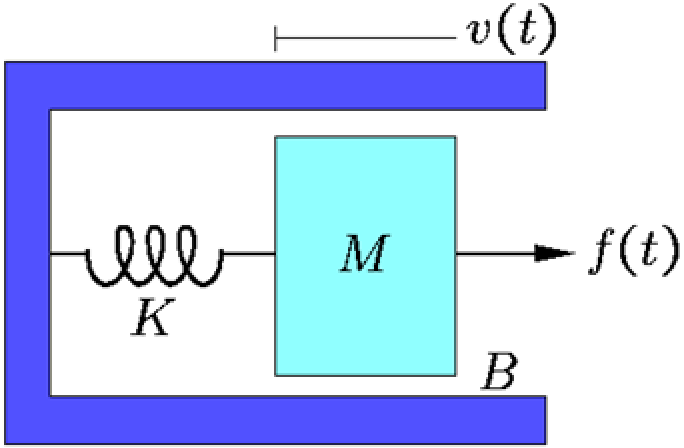
输入信号与输出响应都是连续时间信号的系统。


离散时间系统:

输入信号与输出响应都是离散时间信号的系统。

# 1.5 连续时间与离散时间系统

- 系统分析的基本思想：
  - 根据工程实际应用，对系统建立数学模型。通常表现为描述输入—输出关系的方程。
  - 建立求解这些数学模型的方法。
- 机械系统例子：求外力$f(t)$作用下的速度$v(t)$

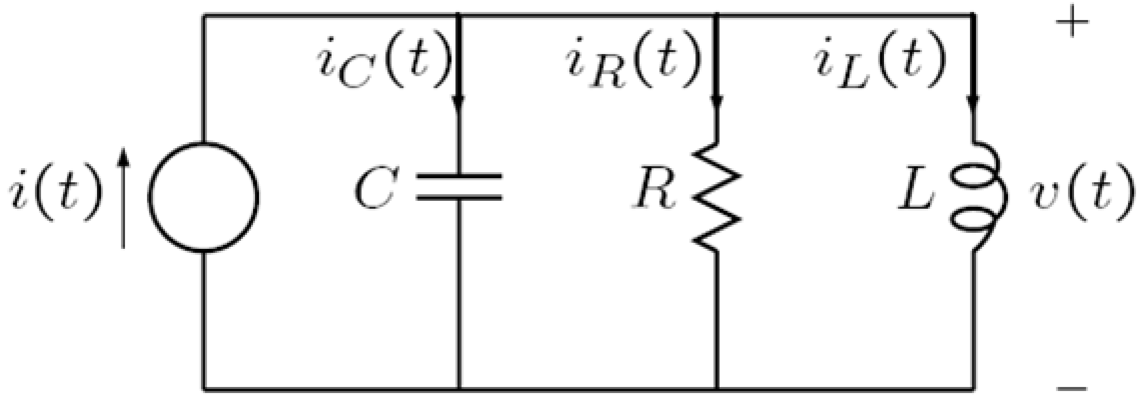



**M**：质量，$v(t)$：速度
**B**：阻力系数
**K**：弹性系数，$f(t)$：外力
则描述系统的方程为一线性常系数微分方程：

$$f(t) = M\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + Bv(t) + K\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau$$

# 1.5 连续时间与离散时间系统

- 电路系统例子：电流源$i(t)$作用下的电压$v(t)$




由基尔霍夫电流定律得到描述系统的线性常系数微分方程：

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\mathrm{d}\tau$$

# 1.5 连续时间与离散时间系统

- 机械系统与电路系统具有相似的动态特性：

$$
\begin{aligned}
f(t) &= M\frac{dv(t)}{dt} + Bv(t) + K\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\,d\tau, \\
i(t) &= C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}
$$

- 结论：虽然连续系统的具体内容各不相同，但描述各系统的数学模型都是微分方程，因此在系统分析中，常抽去系统的物理含义，而作为一般意义下的系统来研究，以便于揭示系统的一般特性。

# 1.5 连续时间与离散时间系统

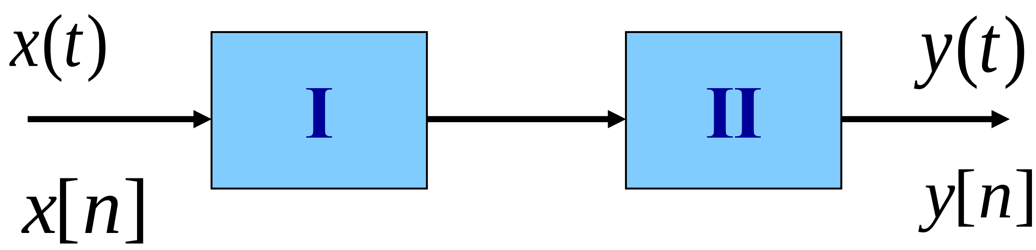
- 作为基础课程，本课程的研究对象——**LTI（Linear Time-Invariant Systems）**系统具有以下两点重要特性:
  1. 对其性质、结构和行为能做出比较透彻的描述和分析，即具有**可行性**；
  2. 很多工程实际中的系统都能够利用这类系统的方法建模，即具有**普遍性**。

# 1.5 连续时间与离散时间系统

- **二. 系统的互联（Interconnection of Systems）**
  - 现实中的系统是各式各样的，其复杂程度也大相径庭。但许多系统都可以分解为若干个简单系统的组合。
  - 这一思想对系统分析和系统综合十分重要。
    - 可以通过对简单系统（子系统）的分析并通过子系统互联而达到分析复杂系统的目的。
    - 也可以通过将若干个简单子系统互联起来而实现一个相对复杂的系统。

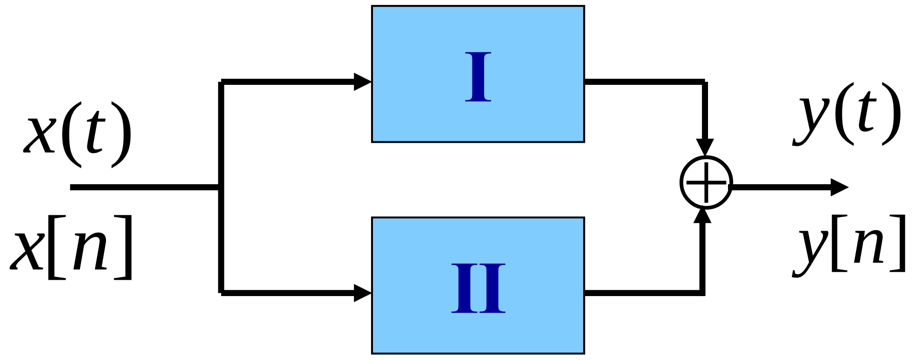
# 1.5 连续时间与离散时间系统

## 1. 级联 (cascade interconnection)



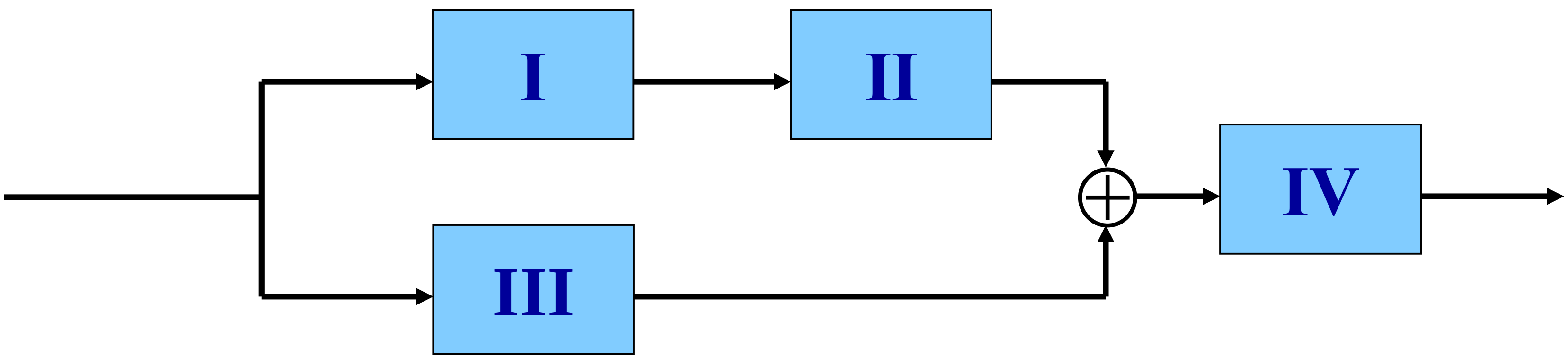

（方框图）

## 2. 并联 ( parallel interconnection )

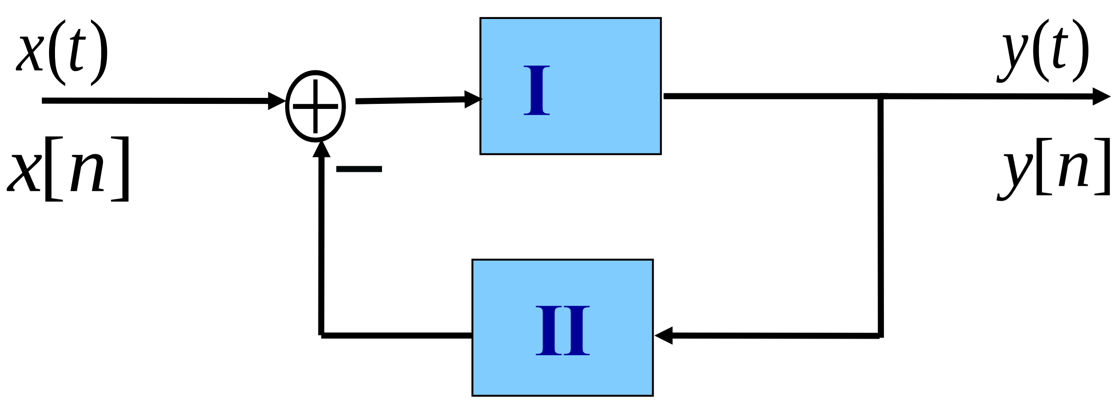


# 1.5 连续时间与离散时间系统

工程实际中也经常将级联、并联混合使用，如：




**3. 反馈联结 ( feedback interconnection )**



- **1.6 系统的基本性质**
  **(Basic System Properties)**

# 1.6 系统的基本性质
## (Basic System Properties)

- 一. 记忆系统与无记忆系统（ Systems with and without Memory）
  - 在任何时刻，系统的输出只与当前时刻的输入有关，而与该时刻以外的输入无关，则称该系统是无记忆系统（memoryless system, or system without memory）。否则就是记忆系统，即（memory system, or system with memory )。

# 1.6 系统的基本性质

例如：

$$y(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau \text{（电容）} \qquad y(t)=x(t-1)$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k] \text{（累加器）}$$

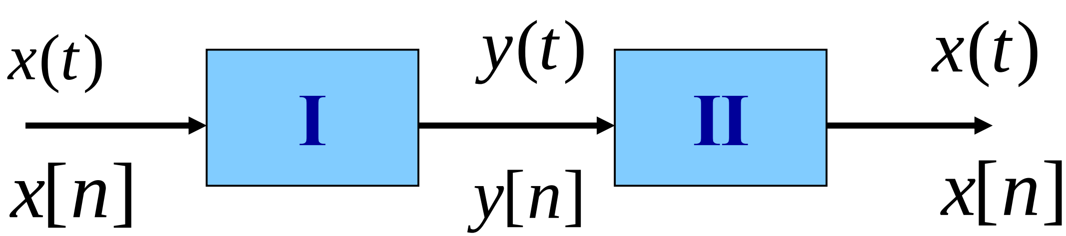
$$y[n]=x[n]-x[n-1] \text{（差分器）}$$ 是记忆系统。

无记忆系统特例——恒等系统 ( identity system )：

任何时刻系统的输出响应与输入信号都相同，即有 $y(t)=x(t)$，或 $y[n]=x[n]$。

# 1.6 系统的基本性质

- 二. 可逆性与逆系统（Invertibility and Inverse Systems）
  - 如果一个系统对任何不同的输入都能产生不同的输出，即**输入与输出是一一对应**的，则称该系统是**可逆系统**( invertible systems )。反之，称为不可逆系统( noninvertible systems )。
  - 如果一个可逆系统与另一个系统级联后构成一个恒等系统，则称后者是前者的**逆系统**( **inverse system** )。



# 1.6 系统的基本性质

例如：$y(t)=\frac{1}{2}x(t)$是可逆系统，其逆系统是：

$$y(t)=2x(t)$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$ 是可逆系统，其逆系统是：

$$y[n]=x[n]-x[n-1]$$

$y(t)=x^2(t)$是不可逆系统，因为有两个不同的输入$x(t)$和$-x(t)$能产生相同的输出。

# 1.6 系统的基本性质

$y[n]=x[n]x[n-1]$是不可逆的，因为输入$\delta[n]$时，$y[n]=0$；输入$\delta[n-1]$时，$y[n]=0$。

$y[n]=x[2n]$是不可逆系统，因为无法从 $x[2n]$ 还原为 $x[n]$。

$y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$ 不可逆

$y(t)=0$ 也是不可逆系统。

# 1.6 系统的基本性质

- 三. 因果性 (Causality)
  - 如果一个系统在任何时刻的输出只与当前时刻的输入以及该时刻以前的输入有关，而和该时刻以后的输入无关就称该系统是因果的（causal）。否则就是非因果的（noncausal）。
  - 一般说来，非因果系统是物理不可实现的。这体现了因果性对系统实现的重要性。
  - 但对非实时处理信号的离散时间系统，或信号的自变量并不具有时间概念的情况，因果性并不一定成为系统能否物理实现的先决条件。

# 1.6 系统的基本性质

- 例如在图像处理中，自变量是图像中各点的坐标位置，而不代表时间。对某些数据处理系统，如股市分析、经济预测等，实际上是以足够的延时来换取非因果性的实现。

例子:

$y[n]=x[-n]\ \because n<0$ 时 $y[n]$ 决定于以后时刻的输入。

$y[n]=x[n]-x[n+1]$； $y(t)=x(2t)$ 是非因果系统。

$y[n]=x[n]-x[n-1]$ $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ 是因果系统。

# 1.6 系统的基本性质

- 四. 稳定性 ( Stability )
  - 一个系统当输入有界时，产生的输出也是有界的，则该系统是稳定系统（stable system）。否则，就是不稳定系统（unstable system）。

例：$y[n]=x[n-1]$ 是稳定系统。

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k],$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau,\quad y(t)=tx(t)$$

不稳定系统。

工程实际中总希望所设计的系统是稳定的。因此稳定性对系统来说是非常重要的。

# 1.6 系统的基本性质

- 五. 时不变性 ( Time-Invariance )
  - 如果一个系统当输入信号有一个时移时，输出响应也产生同样的时移。除此之外，输出响应无任何其它变化，则称该系统是时不变的（time-invariant）。否则就是时变的（time-varying）。

即：若 $x(t) \to y(t), \quad x(t-t_0) \to y(t-t_0)$

则系统是时不变的。

# 1.6 系统的基本性质

检验一个系统时不变性的步骤:

1. 令输入为 $x_1(t)$，根据系统的描述，确定此时的输出 $y_1(t)$。

2. 将输入信号变为 $x_2(t)$，再根据系统的描述确定输出 $y_2(t)$。

3. 令 $x_2(t) = x_1(t - t_0)$，根据自变量变换，检验 $y_1(t - t_0)$ 是否等于 $y_2(t)$。

# 1.6 系统的基本性质

例： $y[n]=(n+1)x[n]$

当 $x[n]=x_1[n]$时， $y_1[n]=(n+1)x_1[n]$

当 $x[n]=x_2[n]$ 时， $y_2[n]=(n+1)x_2[n]$

令 $x_2[n]=x_1[n-n_0]$，则有：

$$y_2[n]=(n+1)x_1[n-n_0]$$

由于 $y_1[n-n_0]=(n-n_0+1)x_1[n-n_0]\neq y_2[n]$

$\therefore$ 系统是时变的。


84

# 1.6 系统的基本性质

例： $y(t)=x(-t)$

当 $x(t)=x_1(t)$ 时， $y_1(t)=x_1(-t)$

当 $x(t)=x_2(t)$ 时， $y_2(t)=x_2(-t)$

令 $x_2(t)=x_1(t-t_0)$ 则有： $y_2(t)=x_1(-t-t_0)$

而 $y_1(t-t_0)=x_1[-(t-t_0)]=x_1(t_0-t)\neq y_2(t)$

$\therefore$ 该系统是时变的。

# 1.6 系统的基本性质

- 六. 线性（Linearity）

若 $x_1(t) \to y_1(t) \qquad x_2(t) \to y_2(t)$

$ax_1(t)+bx_2(t) \to ay_1(t)+by_2(t)$ 其中**a, b**是常数（包括复数），满足此关系的系统是线性的。

线性包含两个含义:

$x_1(t)+x_2(t) \to y_1(t)+y_2(t)$ （可加性）

$ax_1(t) \to ay_1(t)$ （齐次性）

# 1.6 系统的基本性质

例如： $y(t)=\mathrm{Re}\{x(t)\}$，满足可加性，但不满足齐次性。当 $a=j$ 时其实部与虚部调换。

$$y(t)=\frac{1}{x(t)}[x'(t)]^2$$ 满足齐次性但不满足可加性。

因为，若输入为 $x_1(t)+x_2(t)$ 则

$$y_3(t)=\frac{1}{x_1(t)+x_2(t)}[(x_1(t)+x_2(t))']^2$$

$$=\frac{[x_1{}'(t)+x_2{}'(t)]^2}{x_1(t)+x_2(t)}\neq\frac{[x_1{}'(t)]^2}{x_1(t)}+\frac{[x_2{}'(t)]^2}{x_2(t)}$$

# 1.6 系统的基本性质

- 如果一个系统是线性的，当我们能够把输入信号**分解成若干个简单信号的线性组合**时，只要能得到该系统对每一个简单信号所产生的响应，就可以很方便地根据线性特性，通过线性组合而得到系统对原输入信号的响应。即:

若 $x(t)=\sum_k a_k x_k(t)$，且 $x_k(t) \rightarrow y_k(t)$

$\downarrow$

则 $y(t)=\sum_k a_k y_k(t)$

这一思想是信号与系统分析理论和方法建立的基础。

# 1.6 系统的基本性质

例： $y(t)=x(t)+2$

忽略(状态)2时的输出

零状态响应

零输入响应

输入x(t) = 0时的输出

该系统既不满足齐次性，也不满足可加性，但当考查输入的增量与输出的增量之间的关系时，有

$$\Delta y(t)=y_1(t)-y_2(t)=x_1(t)-x_2(t)=\Delta x(t)$$

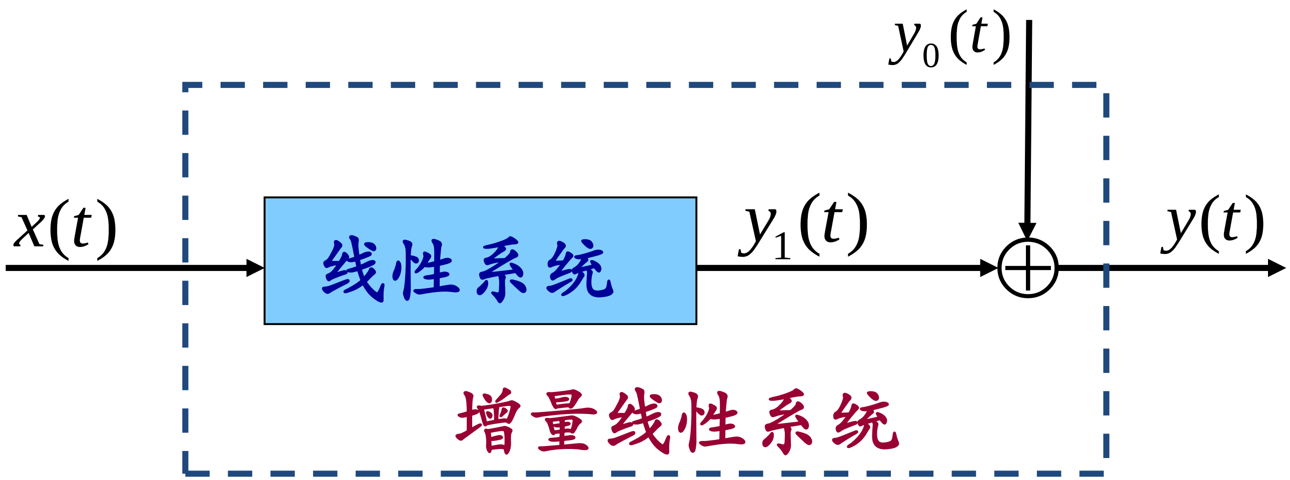
可见输入的增量与输出的增量之间是满足线性关系的，它是一个增量线性系统。

# 1.6 系统的基本性质

- 根据线性系统的齐次性，可得出：线性系统当输入为零（即没有输入）时，系统的输出响应为零（即没有输出响应）。这就是所谓线性系统的零输入—零输出特性。
- 在工程实际中，有一类系统并不满足线性系统的要求。但是这类系统的输出响应的增量与输入信号的增量之间满足线性特性。这类系统称为增量线性系统（incrementally linear systems)。

# 1.6 系统的基本性质

任何增量线性系统都可以等效为一个线性系统再加上一部分与输入无关的响应。




$y_0(t)$一般对应于施加$x(t)$之前系统的初始状态。

# 1.6 系统的基本性质

- 当增量线性系统的 $y_0(t)=0$ 时，$y(t)=y_1(t)$。此时系统的输出响应完全由 $y_1(t)$ 决定。此时系统处于零初始状态，故将 $y_1(t)$ 称为系统的零状态响应（零状态线性）。
- 增量线性系统当 $x(t)=0$ 时，有 $y_1(t)=0$, $y(t)=y_0(t)$，因此将 $y_0(t)$称为系统的零输入响应（零输入线性）。
- 可见，增量线性系统的响应包括零输入响应和零状态响应两部分。

# 本章小结

- 建立了信号与系统的数学描述方法。
- 讨论了信号自变量变换对信号的影响。
- 介绍了作为信号分析基础的基本信号：复指数信号、正弦信号、单位冲激与单位阶跃信号。
- 讨论了离散时间正弦信号的周期性问题。
- 定义并讨论了系统的六大基本特性及系统的互连。讨论了增量线性系统及其等效方法。

# 本章小结

- 由于在工程实际中，相当广泛的系统其数学模型都可以用线性时不变（LTI）系统来描述，而且基于线性和时不变性，为系统分析建立一套完整的、普遍适用的方法提供了可能，因此，线性时不变系统将成为本课程所研究的对象。