第三章 周期信号的傅里叶级数表示

Fourier Series Representation of Periodic Signals

本章内容

- 周期信号的频域分析
  - 连续时间周期信号
  - 离散时间周期信号
  - 傅里叶级数的收敛
- LTI系统的频域分析
- 滤波器实例
  - 连续时间滤波器
  - 离散时间滤波器

3.1 引言
Introduction

- 从分解信号的角度出发，基本信号单元必须满足两个要求：
  - 本身简单，且LTI系统对它的响应能简便得到
  - 具有普遍性，能够用以构成相当广泛的信号

- 信号与LTI系统的傅里叶级数分析方法基础：
  - 周期信号可以分解为复指数信号的线性组合
  - LTI系统对复指数信号的响应具有特殊的简单形式

- **3.2 LTI系统对复指数信号的响应**
  The Response of LTI Systems to Complex Exponentials

3.2 LTI系统对复指数信号的响应

The Response of LTI Systems to Complex Exponentials

❖ **考查LTI系统对复指数信号 e^{st} 和 z^n 的响应**

$$e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = H(s)e^{st}$$

$$z^{n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{(n-k)}h[k] = z^{n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = H(z)z^{n}$$

3.2 LTI系统对复指数信号的响应

- **特征函数** **(Eigenfunction)**——如果系统对某一信号的响应是该信号乘以一个常数，则称该信号是这个系统的**特征函数**。
  - 系统对该信号加权的常数称为系统与特征函数相对应的**特征值**。
  - 复指数函数 e^{st} 、z^{n} 是一切LTI系统的特征函数。$H(s)$ 、$H(z)$ 分别是LTI系统与复指数信号相对应的特征值。

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-st}dt$$

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]z^{-n}$$

3.2 LTI系统对复指数信号的响应

- 对时域的任何一个信号 $x(t)$ 或者 $x[n]$,若能将其表示为下列形式:

$$x(t)=\sum_k a_k e^{s_k t} \qquad x[n]=\sum_k a_k z_k^n$$

利用LTI系统的齐次性与叠加性，由于

$$e^{s_k t}\to H(s_k)e^{s_k t} \qquad z_k^n \to H(z_k)z_k^n$$

则有

$$x(t)=\sum_k a_k e^{s_k t} \longrightarrow y(t)=\sum_k a_k H(s_k)e^{s_k t}$$

$$x[n]=\sum_k a_k z_k^n \longrightarrow y[n]=\sum_k a_k H(z_k)z_k^n$$

究竟有多大范围的信号可以用复指数信号的线性组合来表示?

• 3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

Fourier Series Representation of Continuous-Time Periodic Signals

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示
Fourier Series Representation of Continuous-Time Periodic Signals

- **一. 连续时间傅里叶级数**

- 成谐波关系的复指数信号集: $\Phi_k(t)=\{e^{jk\omega_0 t}\}\ \ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，其中每个信号都是以 $\dfrac{2\pi}{|k\omega_0|}$ 为周期的，它们的公共周期为 $\dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$，且该集合中所有的信号都是彼此独立的。

- 这些信号的线性组合

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t},\quad k=0,\pm1,\pm2\cdots$$

显然也是以 $\dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$ 为周期的。该级数就是**傅里叶级数**, a_k 称为傅立叶级数的系数。

- 这表明用傅里叶级数可以表示连续时间周期信号。实际上，有相当广泛的一类连续时间周期信号可以表示为傅里叶级数。

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

- 例1: $x(t)=\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$

  该傅里叶级数的系数为 $a_{\pm 1}=\frac{1}{2}$

- 例2: $x(t)=\cos\omega_0 t+2\cos 3\omega_0 t$

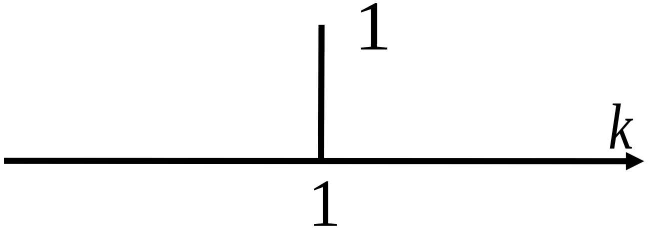
  $$=\frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}]+e^{j3\omega_0 t}+e^{-j3\omega_0 t}$$

  该傅里叶级数的系数为 $a_{\pm 1}=\frac{1}{2}, a_{\pm 3}=1.$

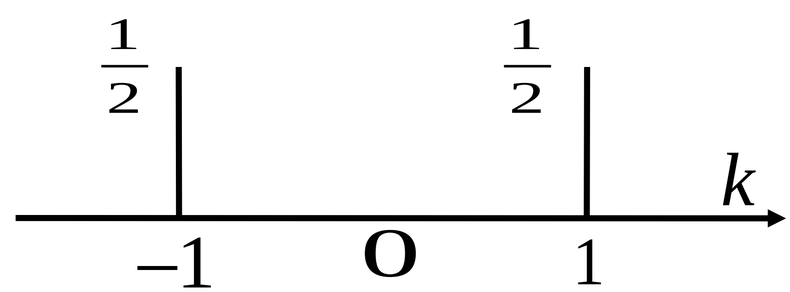
3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

- **二.频谱（Spectral）的概念**
- 在傅里叶级数中，各个信号分量（谐波分量） 间的区别仅仅是系数和频率不同。因此，可以用线段来表示分量的系数，用线段的位置表示相应的频率。

分量 $e^{j\omega_0 t}$ 可表示为



$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$ 表示为

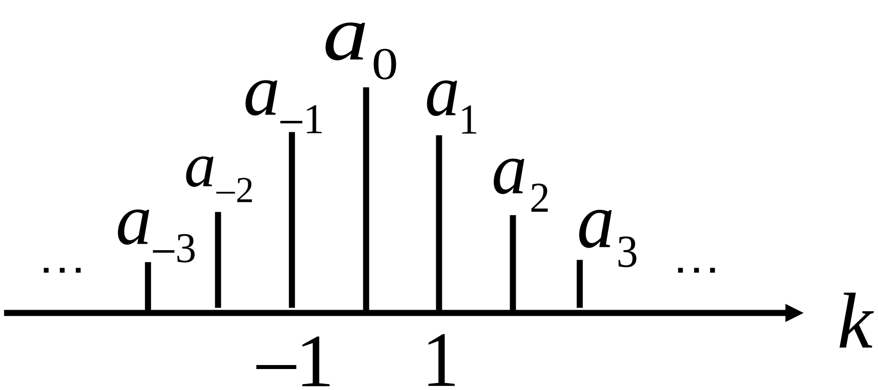


3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

- 傅里叶级数

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

可以表示为



这样绘出的图称为**频谱图**。这种表示信号的方法称为**频域表示法**。

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

- 三.傅里叶级数的其它形式
- 若 $x(t)$ 是实信号,则有 $x(t)=x^*(t)$ ，从而

$$x^*(t)=\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}\right]^*=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k^* e^{-jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

k以-k代替　　　　$x(t)$

$$\therefore a_k=a_{-k}^*$$

- 若令 $a_k=A_k e^{j\theta_k}$，则 $a_{-k}=A_k e^{-j\theta_k}$ ，因此 a_0 为实数，而 a_k 的模关于 k 偶对称，幅角关于 k 奇对称。

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}=a_0+\sum_{k=-\infty}^{-1}a_k e^{jk\omega_0 t}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_{-k}e^{-jk\omega_0 t}+a_k e^{jk\omega_0 t})$$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k e^{-jk\omega_0 t}e^{-j\theta_k}+A_k e^{jk\omega_0 t}e^{j\theta_k})$$

$$=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(k\omega_0 t+\theta_k)$$

——傅里叶级数的三角函数表示式

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

- 若令$a_k = B_k + jC_k$，则 $a_{-k} = B_k - jC_k$，即a_k的实部关于k偶对称，虚部关于 k 奇对称。

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_{-k}e^{-jk\omega_0 t} + a_k e^{jk\omega_0 t})$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(B_k + jC_k)e^{jk\omega_0 t} + (B_k - jC_k)e^{-jk\omega_0 t}\right]$$

$$= a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k \cos k\omega_0 t - C_k \sin k\omega_0 t\right]$$

——傅里叶级数的另一种三角函数表示式

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

- 四.连续时间傅里叶级数系数

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

其中 $$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt$$

为信号在一个周期的平均值，通常称直流分量。

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

- 推导:
- 如果周期信号 $x(t)$ 可以表示为傅里叶级数

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}, \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

则有

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}$$

对两边同时在一个周期内积分，有

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt$$

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \int_0^T \cos(k-n)\omega_0 t dt + j\int_0^T \sin(k-n)\omega_0 t dt$$

$$= \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T, & k = n \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = a_n T$$

即

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

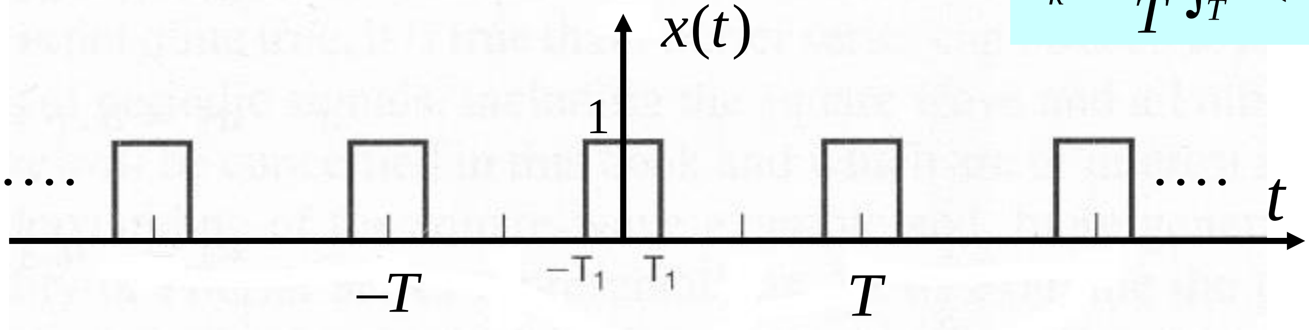
积分区间的起止不影响结果

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

- 五.周期性矩形脉冲信号的频谱

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

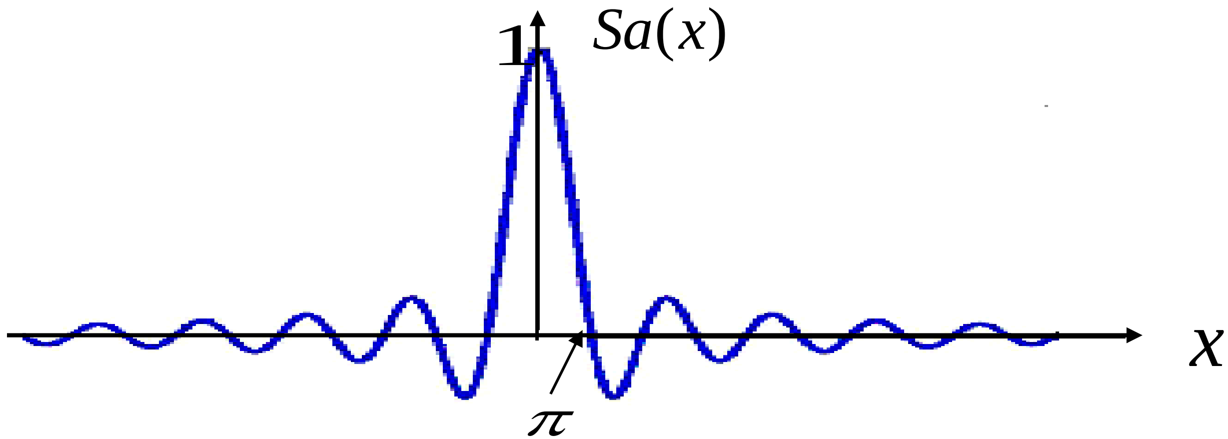


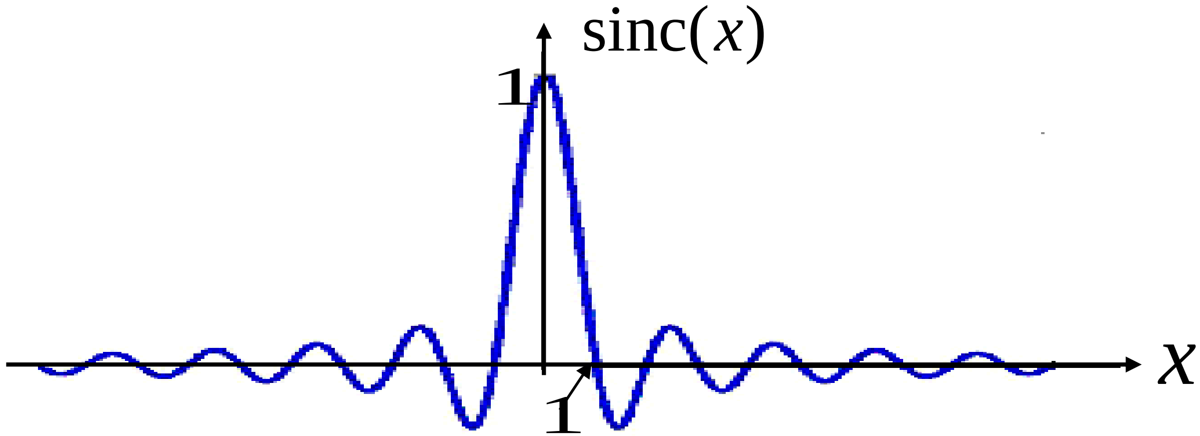
$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

$$= \frac{2T_1}{T}\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T_1} = \frac{2T_1}{T}\mathrm{Sa}(k\pi\frac{2T_1}{T})$$

抽样信号 $\mathrm{Sa}(x) = \dfrac{\sin x}{x}$，类似函数有 $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

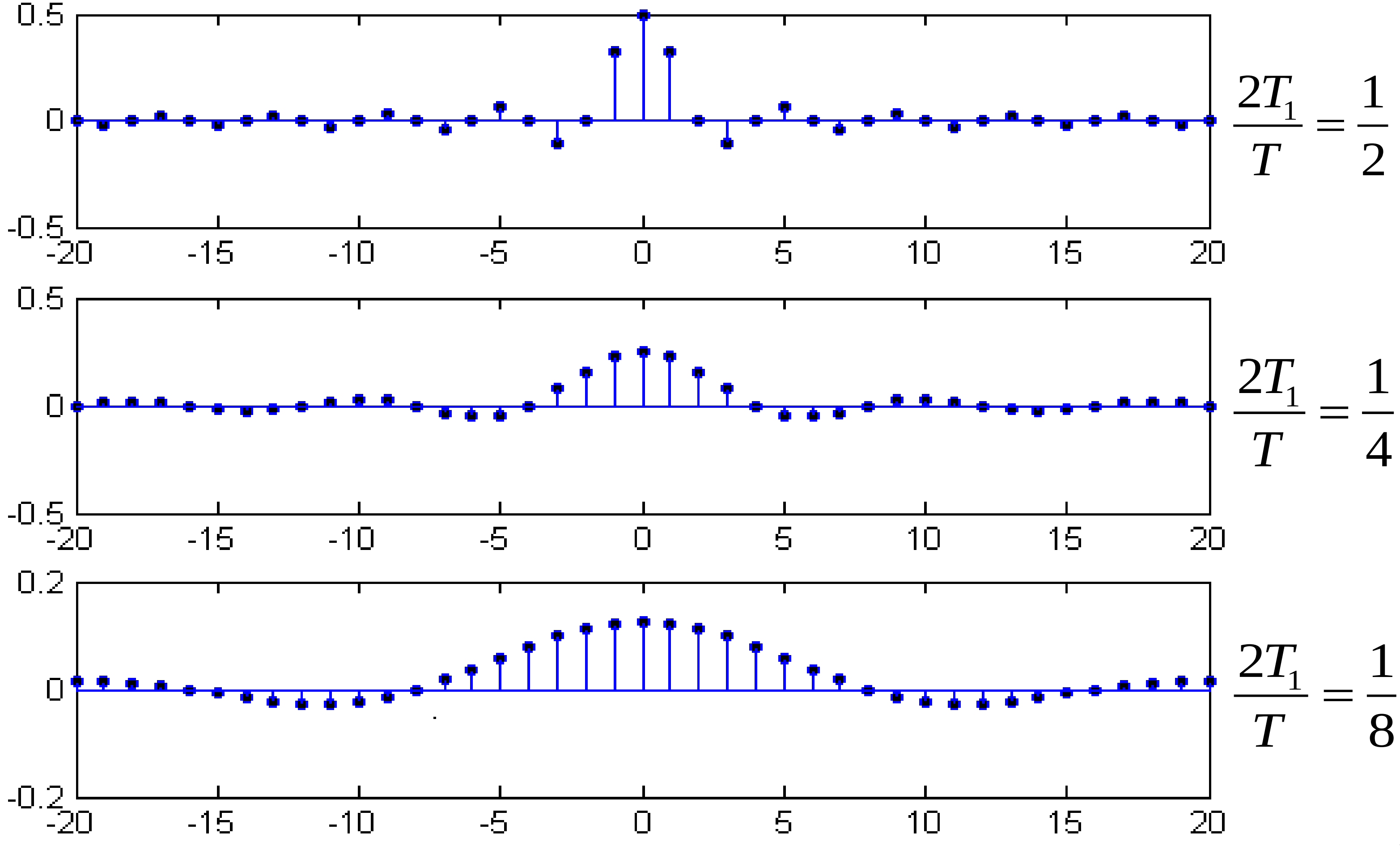




根据 a_k 可绘出 $x(t)$ 的频谱图。 $\dfrac{2T_1}{T}$ 称为**占空比**

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

$$a_k = \frac{2T_1}{T}\mathrm{Sa}(k\pi\frac{2T_1}{T})$$



- **3.4 连续时间傅里叶级数的收敛 Convergence of the Fourier series**

3.4 连续时间傅里叶级数的收敛
Convergence of the Fourier series

- **一. 傅里叶级数是对信号的最佳近似**
- 若 $x(t)$ 以 T 为周期，用有限项级数

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

近似 $x(t)$ 时，定义误差

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t)$$

误差在一个周期内的能量为

$$E_N = \int_T \left| e_N(t) \right|^2 dt$$

问题：**a_k取何值时E_N最小？**

3.4 连续时间傅里叶级数的收敛

- 要使E_N最小，应有

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

——— 傅里叶级数的系数

- 结论：在误差能量最小的准则下，傅里叶级数是对周期信号的最佳近似。

3.4 连续时间傅里叶级数的收敛

- 二. 傅里叶级数的收敛
- 傅里叶级数收敛的两层含义:
  - a_k 是否存在?
  - 级数是否收敛于 $x(t)$?
- 两组条件:

  – 1. 平方可积条件:

  如果 $\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$，则 a_k 必存在。

  此时 $x(t)$ 与其傅里叶级数表示之间没有能量上的区别。

3.4 连续时间傅里叶级数的收敛

– 2. **Dirichlet条件**：

(1) $\int_T |x(t)|dt < \infty$ ，即 $x(t)$ 在任何周期内信号**绝对可积**。

$$|a_k| \le \frac{1}{T}\int_T \left|x(t)e^{-jk\omega_0 t}\right| dt = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|dt < \infty$$

(2) 在任何有限区间内，只有**有限个极值点**，且极值为**有限值**。

(3) 在任何有限区间内，只有**有限个间断点**，且在这些间断点上，**函数值有限**。

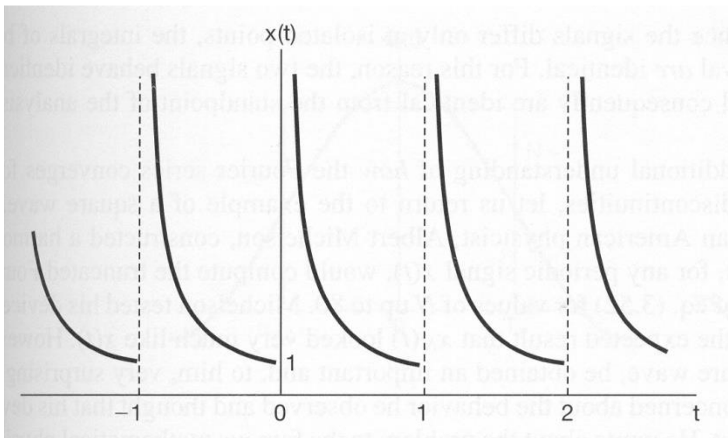
3.4 连续时间傅里叶级数的收敛

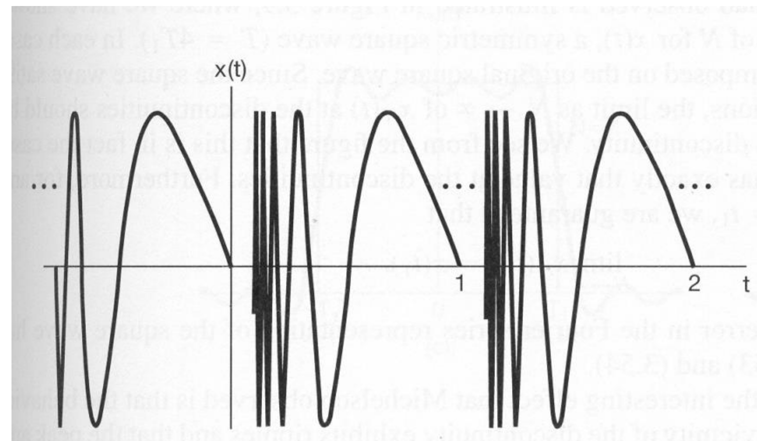
– Dirichlet条件保证在间断点之外$x(t)$等于它的傅里叶级数；而在间断点上，该无穷级数收敛于间断点两边值的平均值。

- 两组条件并不完全等价。它们都是傅里叶级数收敛的充分条件。
- 相当广泛的信号都能满足这两组条件中的一组，因而用傅里叶级数表示周期信号具有相当的普遍适用性。

3.4 连续时间傅里叶级数的收敛

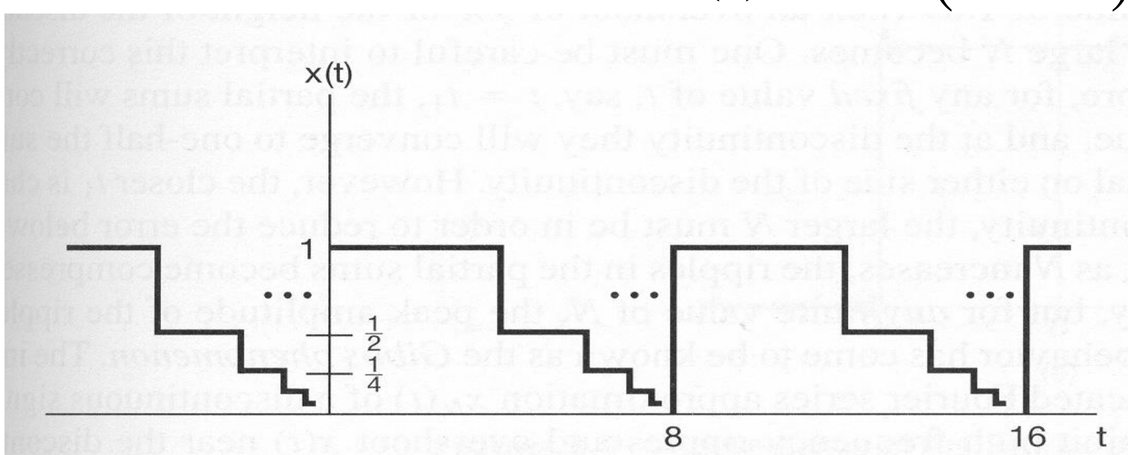
- 几个不满足Dirichlet条件的信号





$x(t) = 1/t,\ 0<t\le 1$，周期为1.

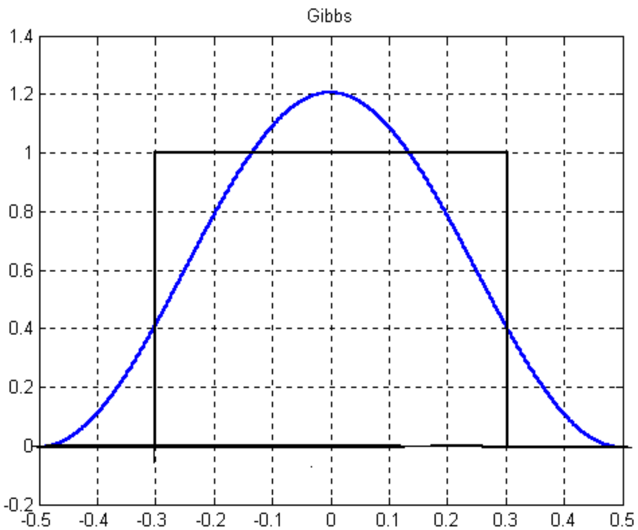
$$x(t)=\sin\left(2\pi/t\right),0<t\le 1$$

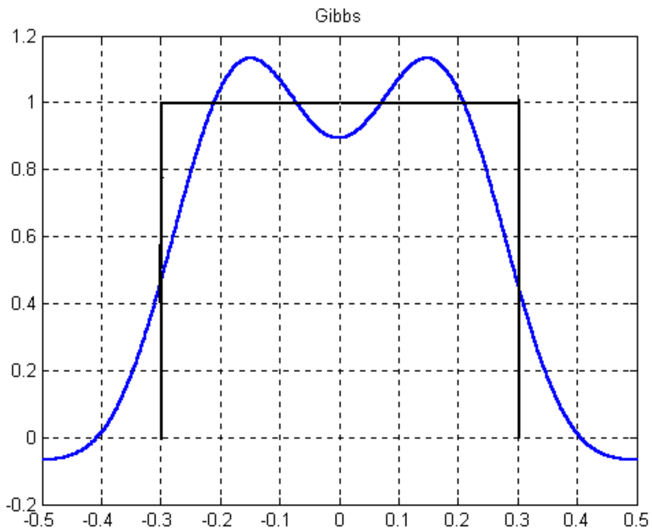


3.4 连续时间傅里叶级数的收敛

- **三. Gibbs现象**
- 满足 Dirichlet条件的信号，其傅里叶级数是如何收敛于 $x(t)$ 的。特别当 $x(t)$ 具有间断点时，在间断点附近，如何收敛于 $x(t)$？

$N=1$

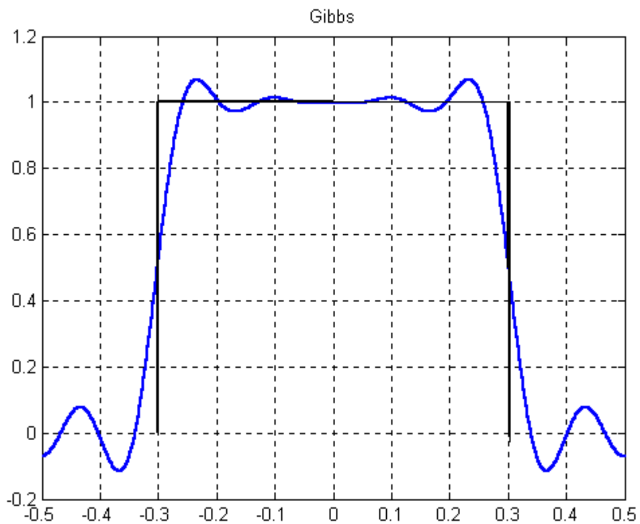


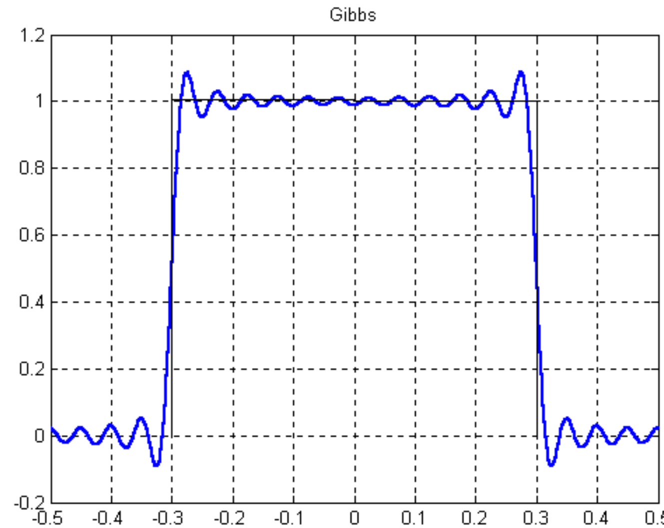


$N=3$

3.4 连续时间傅里叶级数的收敛

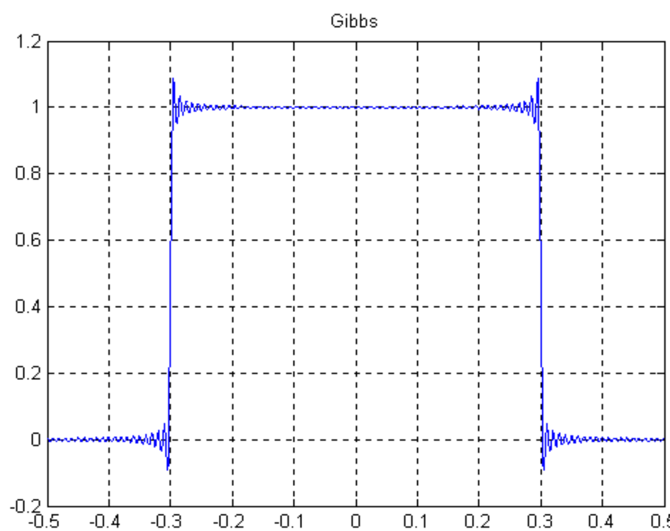
$N=7$





$N=19$

$N=100$



3.4 连续时间傅里叶级数的收敛

- Gibbs现象表明：
  - 用有限项傅里叶级数表示有间断点的信号时，在间断点附近不可避免的会出现振荡和超量。超量的幅度不会随所取项数的增加而减小。只是随着项数的增多，振荡频率变高，并向间断点处压缩，从而使它所占有的能量减少。

- **3.6 离散时间周期信号的傅里叶级数表示**
  (Fourier Series Representation of Discrete-Time Periodic Signals)

3.6 离散时间周期信号的傅里叶级数表示

(Fourier Series Representation of Discrete-Time Periodic Signals)

- **一. 离散时间傅里叶级数**
- 考察成谐波关系的复指数信号集：$\Phi_k[n]=\{e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\}$
  该信号集中每一个信号都以 N 为周期，且该集合中只有 N 个信号是彼此独立的。
  将这 N 个独立信号线性组合起来，

$$\boxed{x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

表示一个以 N 为周期的序列。这个级数就称为**离散时间傅里叶级数**，其中 a_k 则为傅里叶级数的系数。

3.6 离散时间周期信号的傅里叶级数表示

- 二. 傅里叶级数系数的确定

给 $x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 两边同乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$，得:

$$x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

显然 $x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$ 仍是以 N 为周期的，对两边求和

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}=\sum_{n=\langle N\rangle}\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

3.6 离散时间周期信号的傅里叶级数表示

$$\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} = \sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

而 $$\sum_{n=<N>} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = \frac{1-e^{j(k-r)\cdot 2\pi}}{1-e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}}} = \begin{cases} 0, & k \neq r \\ N, & k = r \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{n=<N>} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} = Na_r$$

即 $$a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$$

或 $$\boxed{a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

3.6 离散时间周期信号的傅里叶级数表示

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

显然上式满足 $a_{k+N} = a_k$，即a_k 也是以 N 为周期的，或者说 a_k中只有 N 个是独立的。

对实信号同样有： $a_k^* = a_{-k}$

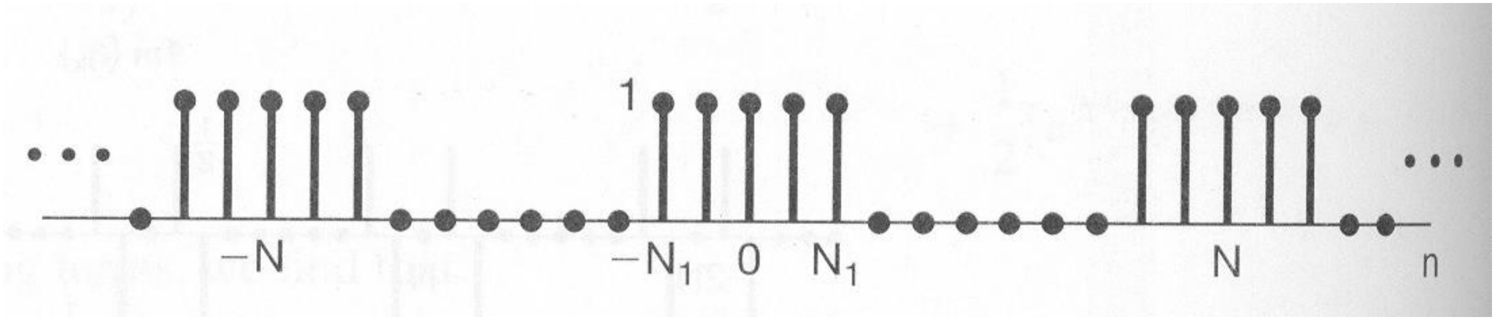
$$|a_k| = |a_{-k}| \qquad \measuredangle a_k = -\measuredangle a_{-k}$$

$$\mathrm{Re}[a_k] = \mathrm{Re}[a_{-k}] \qquad \mathrm{Im}[a_k] = -\mathrm{Im}[a_{-k}]$$

3.6 离散时间周期信号的傅里叶级数表示

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- **三. 周期性方波序列的频谱**
  - 周期信号$x[n]$的傅里叶级数系数a_k也称为$x[n]$的**频谱系数**。



$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{N}\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kN_1}-e^{-j\frac{2\pi}{N}(N_1+1)k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

3.6 离散时间周期信号的傅里叶级数表示

$$a_k = \frac{1}{N}\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kN_1} - e^{-j\frac{2\pi}{N}(N_1+1)k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

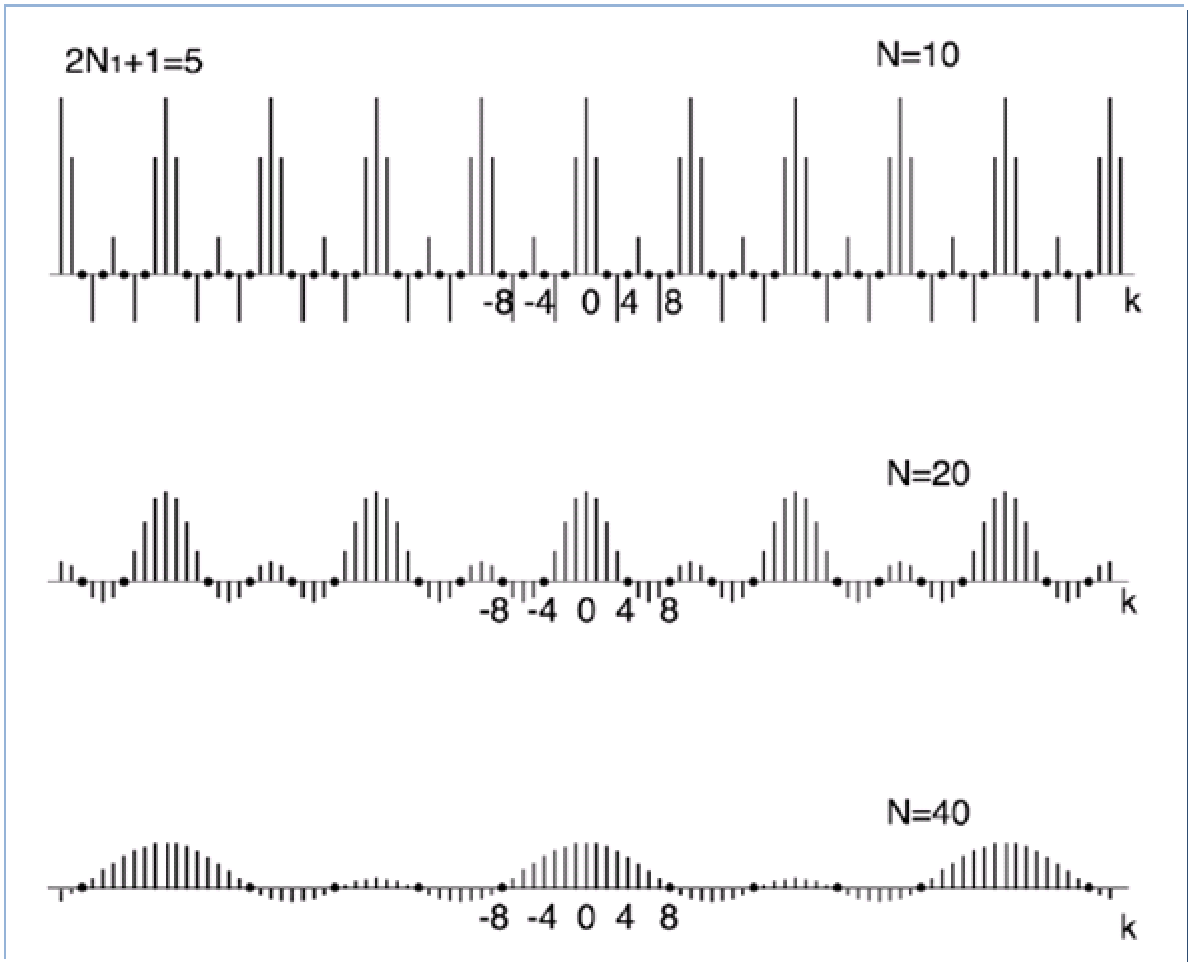
$$a_k = \frac{1}{N}\frac{e^{-j\frac{\pi}{N}k}}{e^{-j\frac{\pi}{N}k}} \cdot \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}k(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{j\frac{\pi}{N}k} - e^{-j\frac{\pi}{N}k}}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{\sin\frac{\pi}{N}k(2N_1+1)}{\sin\frac{\pi}{N}k} \qquad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \cdots$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{2N_1+1}{N} \qquad k = rN \text{ 时}$$

3.6 离散时间周期信号的傅里叶级数表示

周期性方波序列的频谱



3.6 离散时间周期信号的傅里叶级数表示

- 三. 离散时间傅里叶级数的收敛
  - 离散时间傅里叶级数是一个有限项的级数，确定a_k的关系式也是有限项的和式，因而不存在收敛问题，也不会产生Gibbs现象。

- **3.8 傅里叶级数与LTI系统 (Fourier Series and LTI Systems)**

3.8 傅里叶级数与LTI系统 (Fourier Series and LTI Systems)

- LTI系统对复指数信号所起的作用只是给输入信号加权了一个相应的特征值。

对连续时间系统 $H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-st}dt$

对离散时间系统 $H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]z^{-n}$

$H(s)$、 $H(z)$ 被称为系统的系统函数。

3.8 傅里叶级数与LTI系统

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-st}dt$$

如果 $s=j\omega$ 则 $H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$

$H(j\omega)$ 被称为连续时间LTI系统的**频率响应**

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]z^{-n}$$

如果 $z=e^{j\omega}$ 则 $H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-j\omega n}$

$H(e^{j\omega})$ 称为离散时间LTI系统的**频率响应**

$H(e^{j\omega})$ 对 ω 而言，是以 2π 为周期的。

3.8 傅里叶级数与LTI系统

如果一个LTI系统输入周期性信号 $x(t)$ 或 $x[n]$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \Rightarrow y[n]=\sum_{k=<N>}a_k H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- LTI系统对周期信号的响应仍是一个周期信号;
- LTI系统频率响应的意义在于对各个谐波频率的信号分量进行不同的加权处理。

3.8 傅里叶级数与LTI系统

例：某离散时间LTI系统，$h[n]=\alpha^n u[n], \quad -1<\alpha<1$

输入为 $x[n]=\cos(\frac{2\pi}{N}n)$，求输出 $y[n]$。

分析：

$$x[n]=\frac{1}{2}(e^{j\frac{2\pi}{N}n}+e^{-j\frac{2\pi}{N}n})$$

即：$a_1=a_{-1}=\frac{1}{2}$

$$H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad =\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

3.8 傅里叶级数与LTI系统

$$H\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$\therefore \quad H(e^{j\frac{2\pi}{N}})=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}} \quad H(e^{-j\frac{2\pi}{N}})=\frac{1}{1-\alpha e^{j\frac{2\pi}{N}}}$$

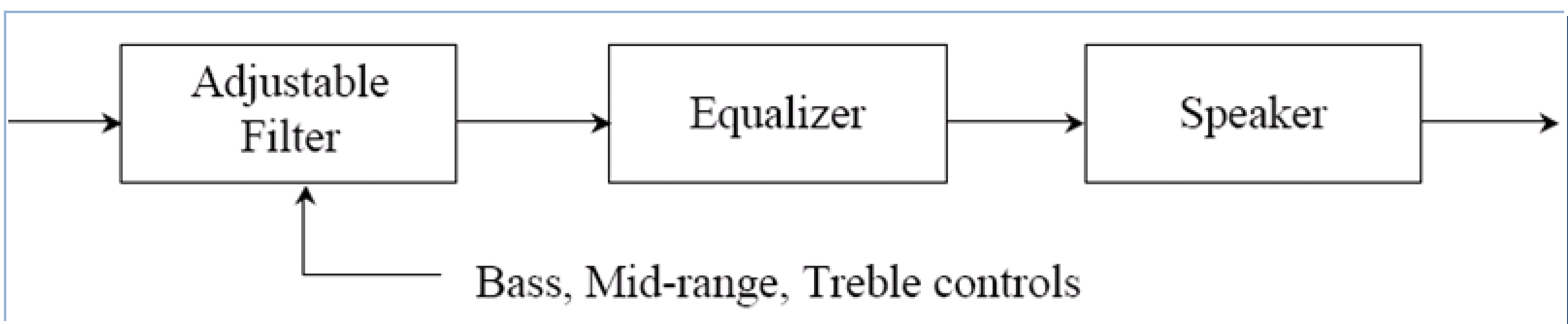
$$\therefore \quad y[n]=\sum_{k=\pm 1} a_k H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}}e^{j\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\alpha e^{j\frac{2\pi}{N}}}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

- **3.9 濾波 (Filtering)**

3.9 滤波 (Filtering)

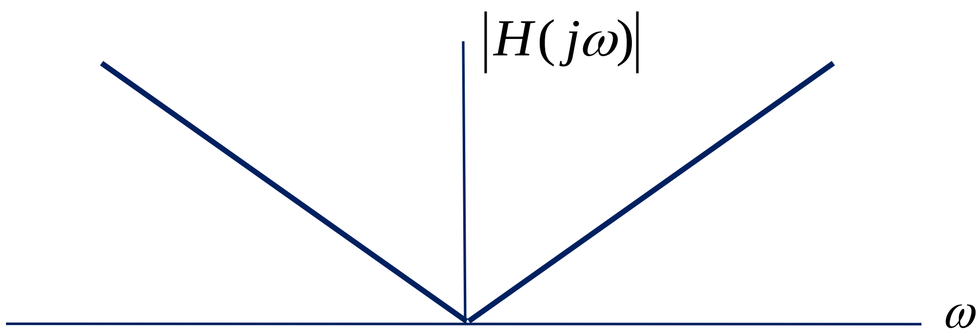
- 滤波：改变信号中各频率分量的相对大小或消除某些频率分量的过程。
  - 频率成形滤波器：改变信号频谱形状的滤波器。
  - 频率选择性滤波器：基本上无失真地通过某些频率，而显著地衰减或消除另一些频率的滤波器。
- 频率成形滤波器例1：音频系统



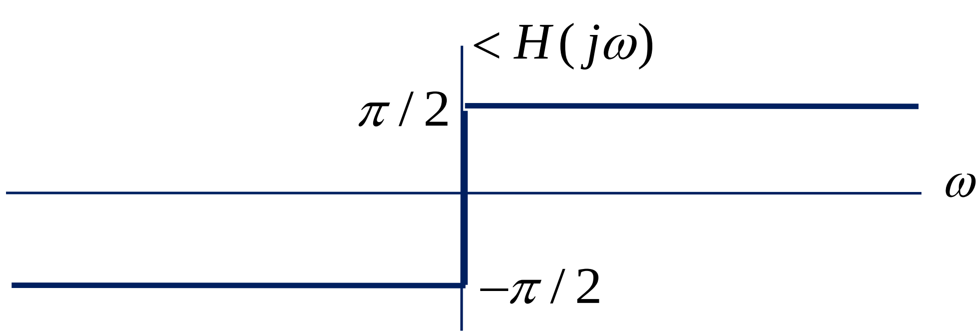
3.9 滤波 (Filtering)

- 频率成形滤波器例2：微分器

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}u_1(t)e^{-j\omega t}dt = j\omega$$



幅度特性



相位特性

3.9 滤波 (Filtering)

利用微分器进行图像边缘增强:

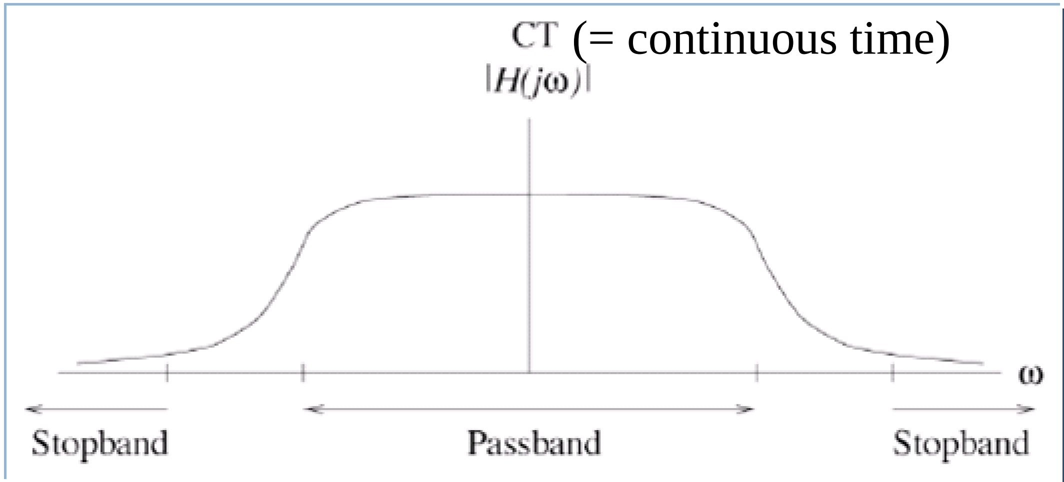
原图像

二维微分器响应

3.9 滤波 (Filtering)

- 频率选择性滤波器：
  - 低通滤波器：通过低频分量，衰减或阻止高频分量。

LPF: Lowpass filter

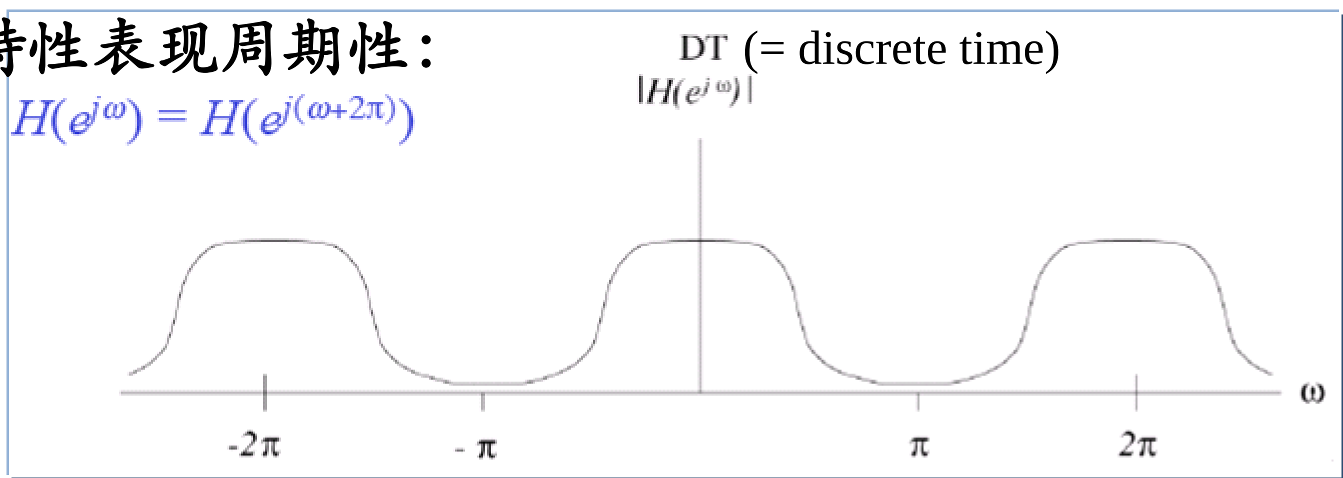


原始音频

低通滤波

离散时间系统频响特性表现周期性：

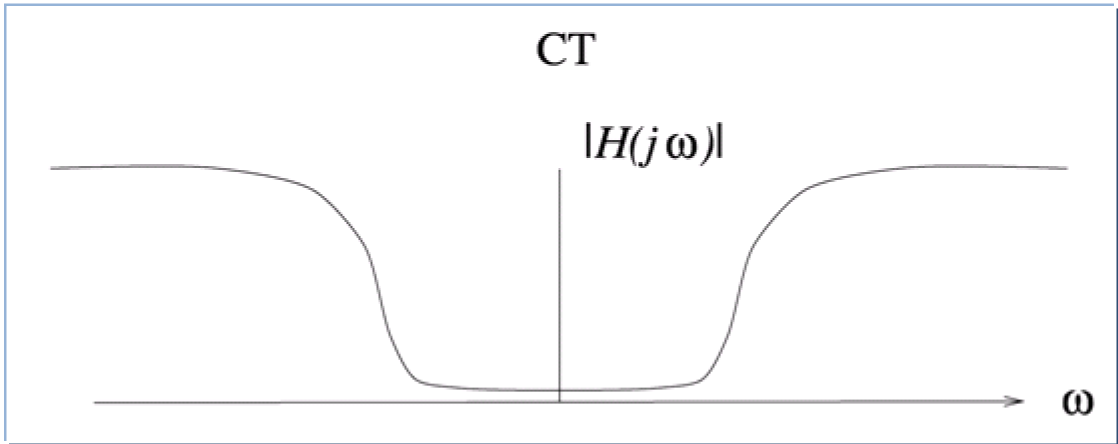
$$H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2\pi)})$$



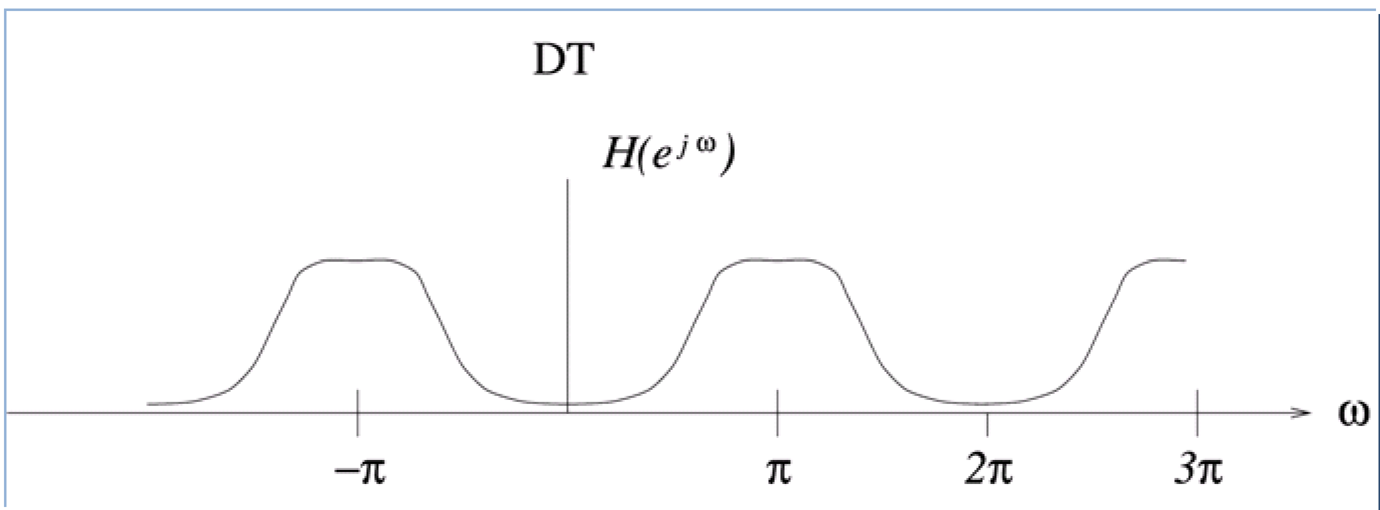
3.9 滤波 (Filtering)

– 高通滤波器：通过高频而衰减或阻止低频。

HPF: Highpass filter



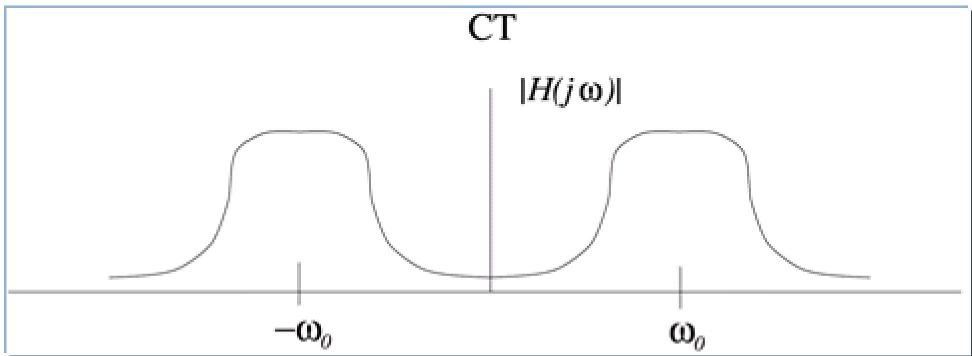
原始音频

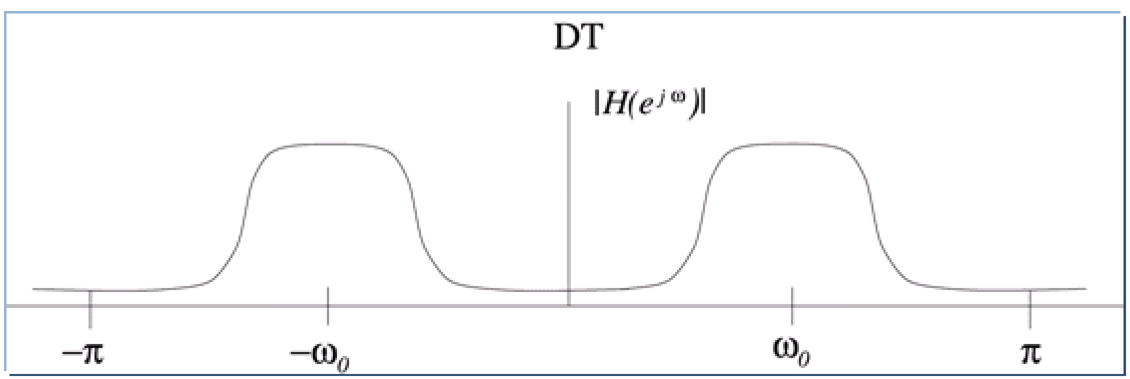


高通滤波

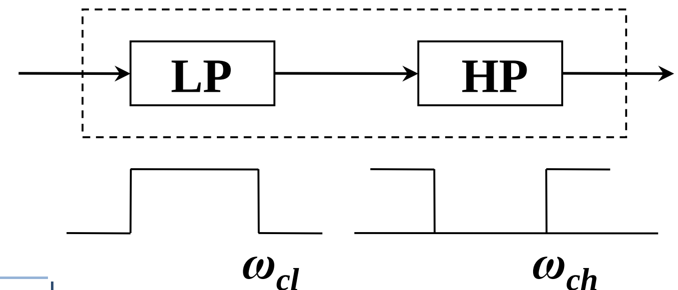
3.9 滤波 (Filtering)

– 带通滤波器：通过一频带范围，衰减或阻止这一频带之外的频率分量。





BPF:
Bandpass filter

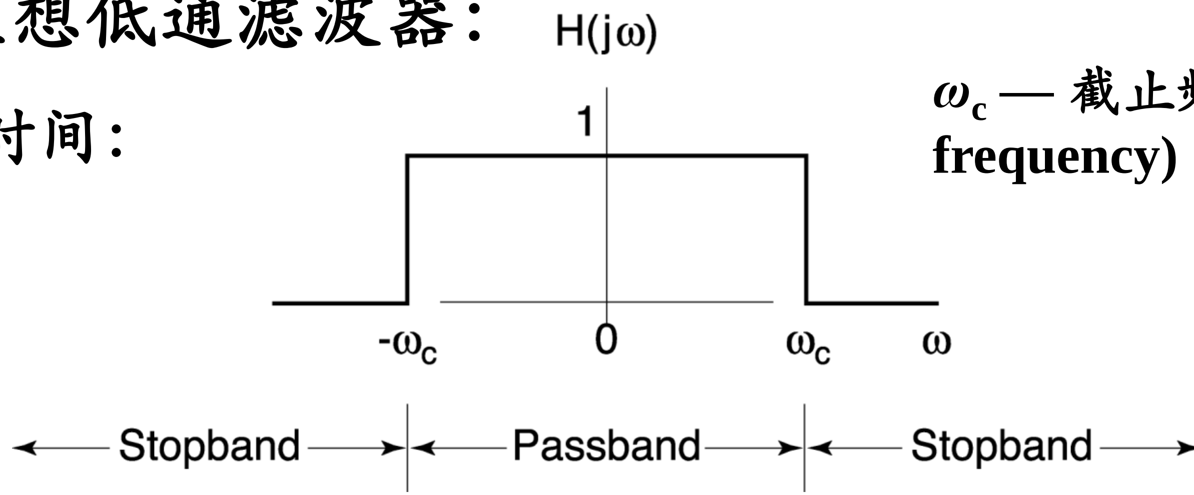


BPF if $\omega_{cl} > \omega_{ch}$

3.9 滤波 (Filtering)

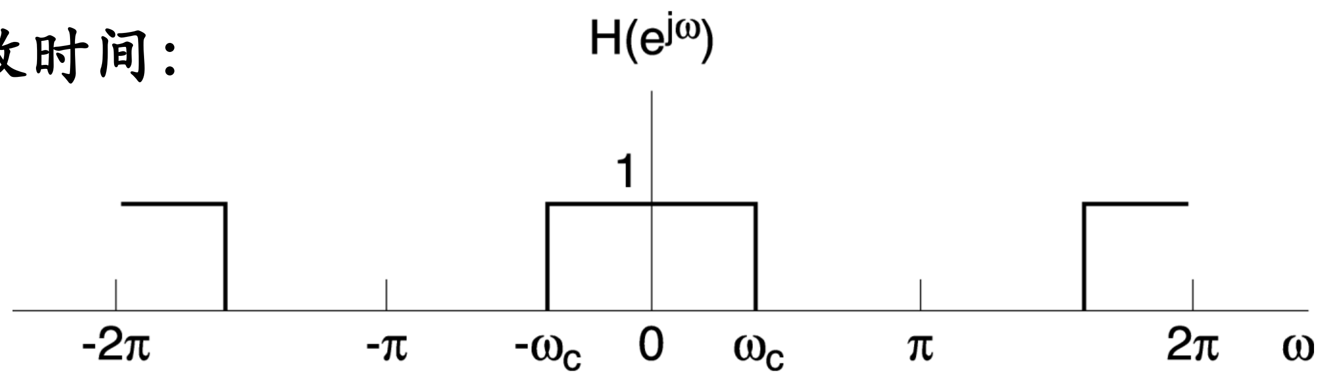
- 理想频率选择性滤波器滤波器：无失真通过指定频率而完全阻止其他频率。
  - 理想低通滤波器：

连续时间:



ω_c — 截止频率(cutoff frequency)

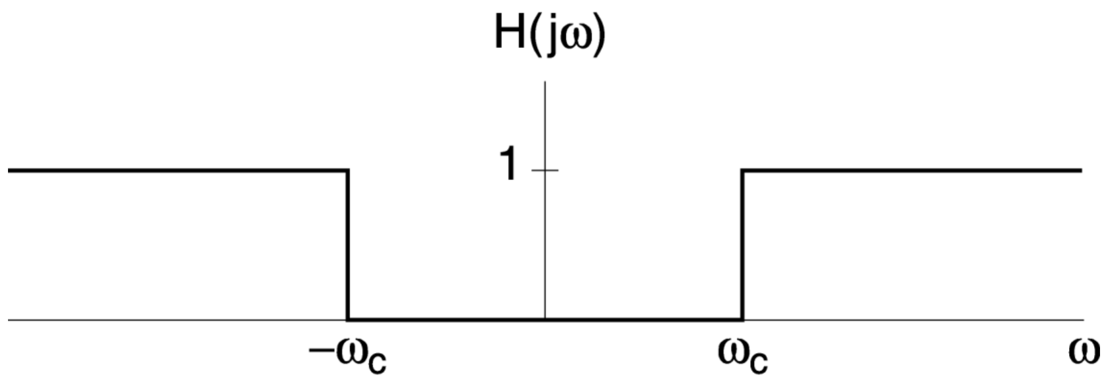
离散时间:



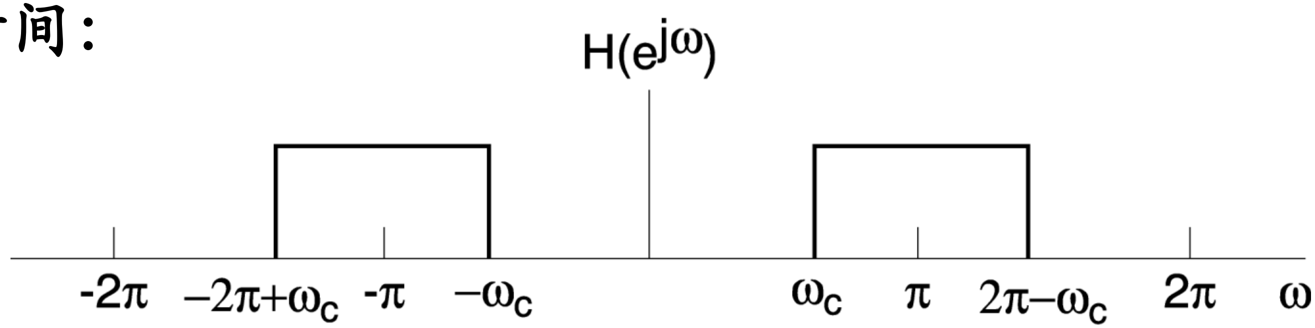
3.9 滤波 (Filtering)

– 理想高通滤波器:

连续时间:



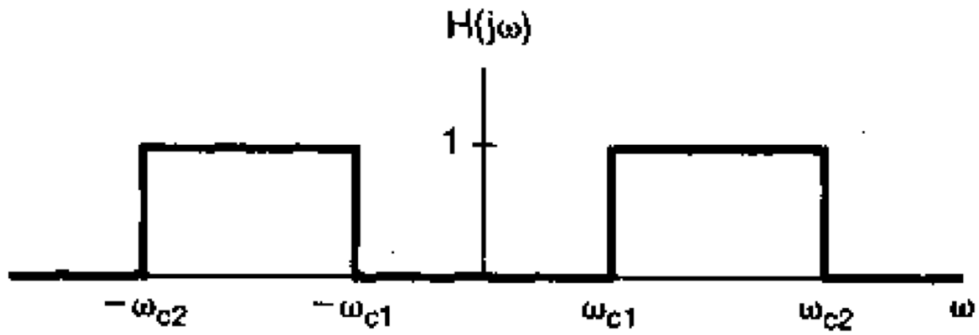
离散时间:



3.9 滤波 (Filtering)

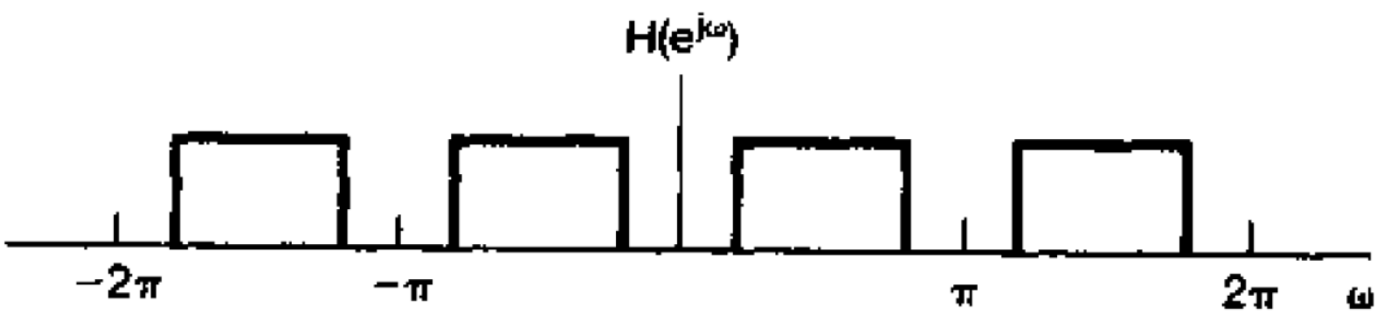
– 理想带通滤波器:

连续时间:



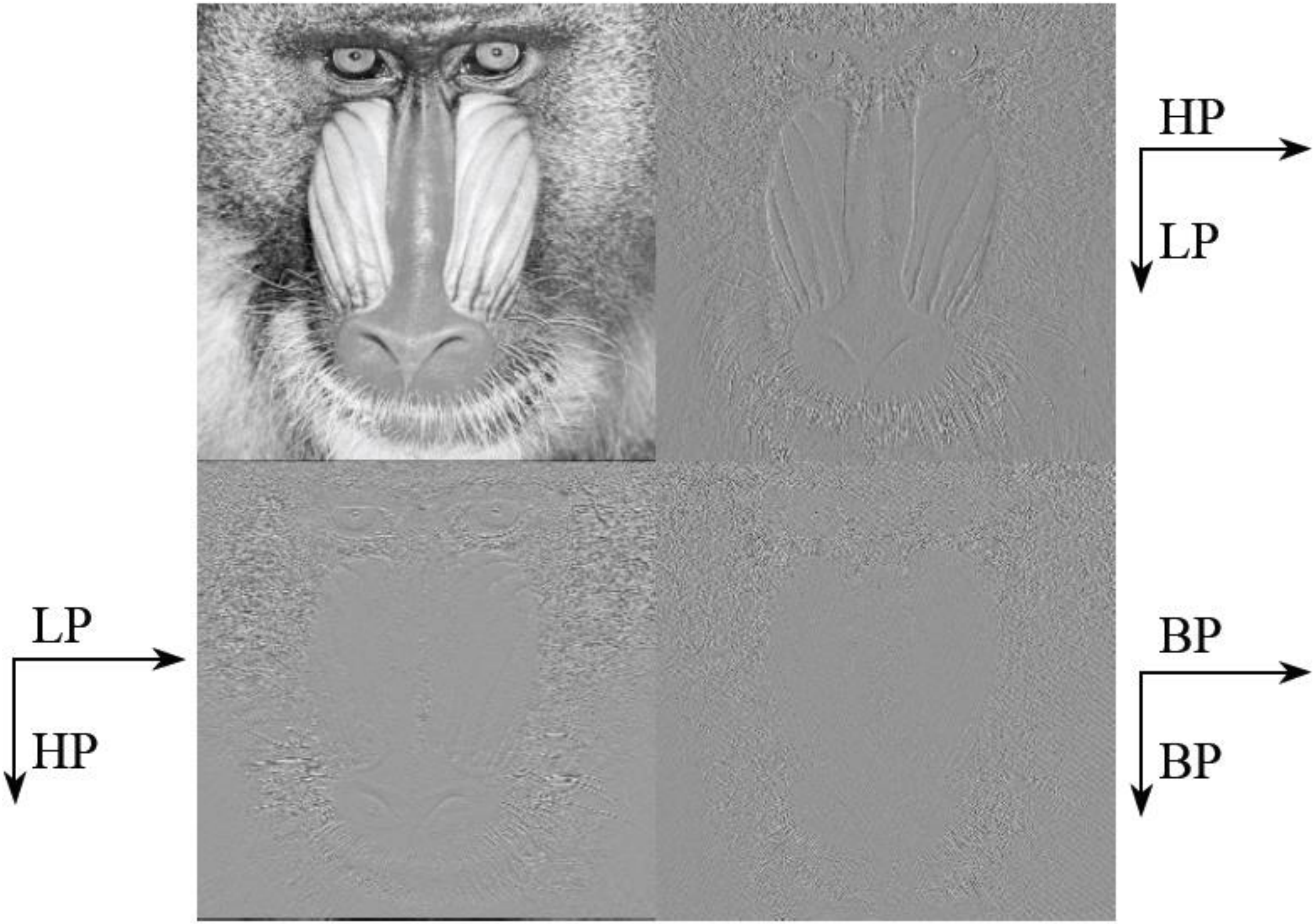
下截止频率 lower cut-off　上截止频率 upper cut-off

离散时间:



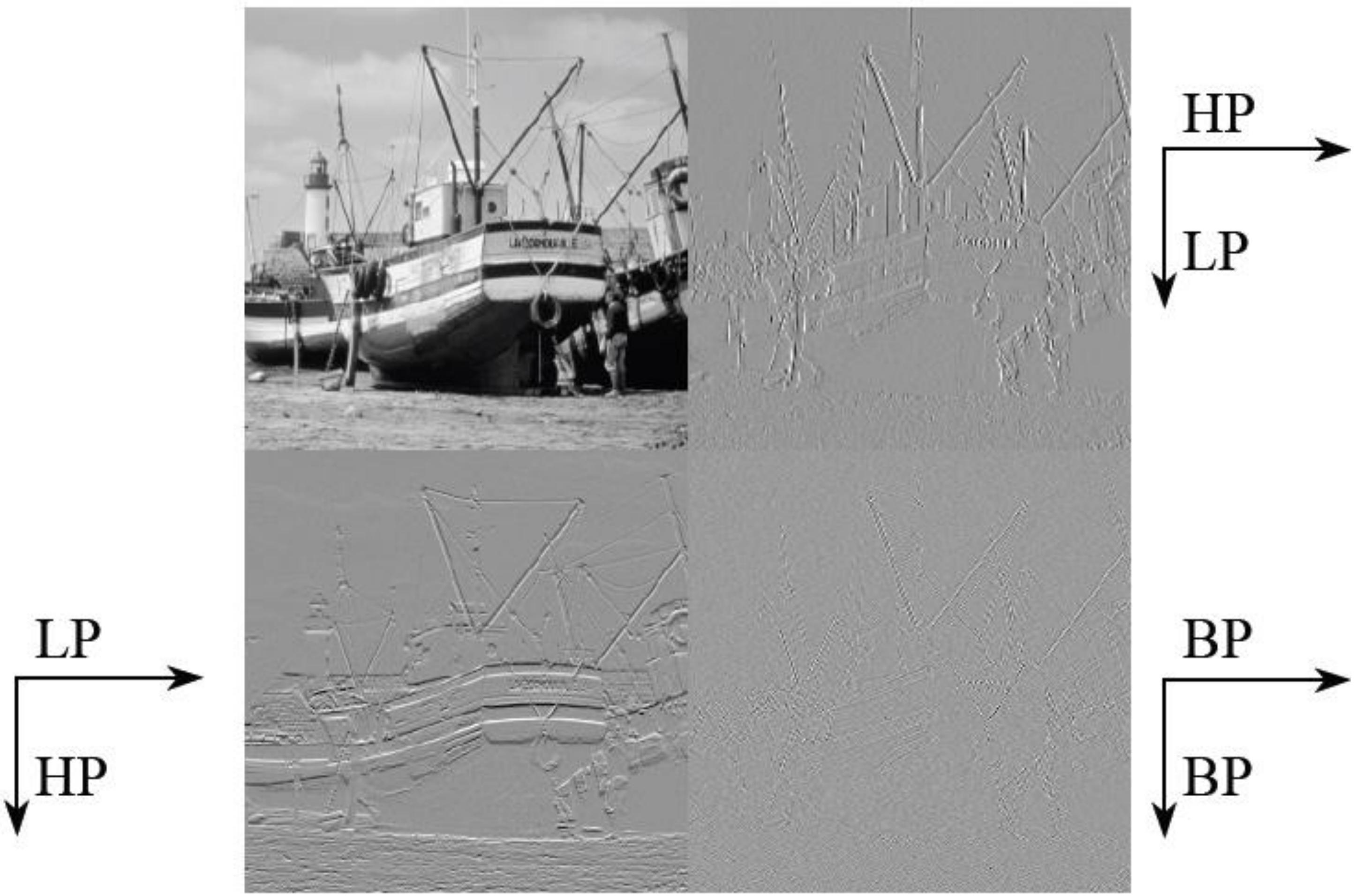
3.9 滤波 (Filtering)

Demo: Apply different filters to two-dimensional image signals.



3.9 滤波 (Filtering)

Demo: Apply different filters to two-dimensional image signals.



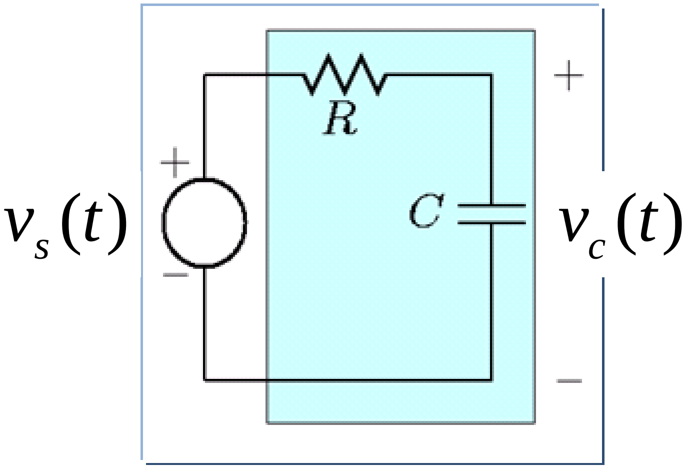
Note: To really understand these examples, we need to understand frequency contents of aperiodic signals ⇒ the Fourier Transform

- **3.10 微分方程描述的连续时间滤波器举例**
(Examples of Continuous-Time Filters Described by Differential Equations)

3.10 微分方程描述的连续时间滤波器举例

(Examples of Continuous-Time Filters Described by Differential Equations)

- 一. 简单RC低通滤波器
  - 图中电路输入$v_s(t)$与输出$v_c(t)$之间关系可用微分方程描述：



$$RC\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t}+v_c(t)=v_s(t)$$

频率响应$H(\mathrm{j}\omega)=$？

设系统初始松弛，则为一LTI系统，输入$v_s(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$将产生输出$v_c(t)=H(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，因此：

$$RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]+H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$\Rightarrow H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+RC\mathrm{j}\omega}$$

3.10 微分方程描述的连续时间滤波器举例

- 或先求解$h(t)$再计算$H(\mathrm{j}\omega)$。

1. 齐次解：特征方程为

$$RC\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{RC}$$

2. 特解：$t > 0$时$\delta(t) = 0$，故特解为0。

3. 完全解：

$$h(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}, t > 0$$

4. 确定未知系数A：初始条件在起始状态基础上利用冲激函数匹配法确定

$$RC\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t} + v_c(t) = \delta(t)$$

3.10 微分方程描述的连续时间滤波器举例

$$RC\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t}+v_c(t)=\delta(t)$$

在 $0_- < t < 0_+$ 区间设：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t}=a\delta(t)+b\Delta u(t)\\ v_c(t)=a\Delta u(t)\end{cases}$$

代入方程左端得：

$$RCa\delta(t)+(RCb+a)\Delta u(t)=\delta(t)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{RC}\\ b=-\dfrac{1}{(RC)^2}\end{cases}\quad\left.\begin{array}{l}\Rightarrow h(0_+)=h(0_-)+a=a=\dfrac{1}{RC}\\ h(t)=A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}},t>0\end{array}\right\}\Rightarrow A=\frac{1}{RC}$$

3.10 微分方程描述的连续时间滤波器举例

单位冲激响应为:

$$h(t)=\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

频率响应为:

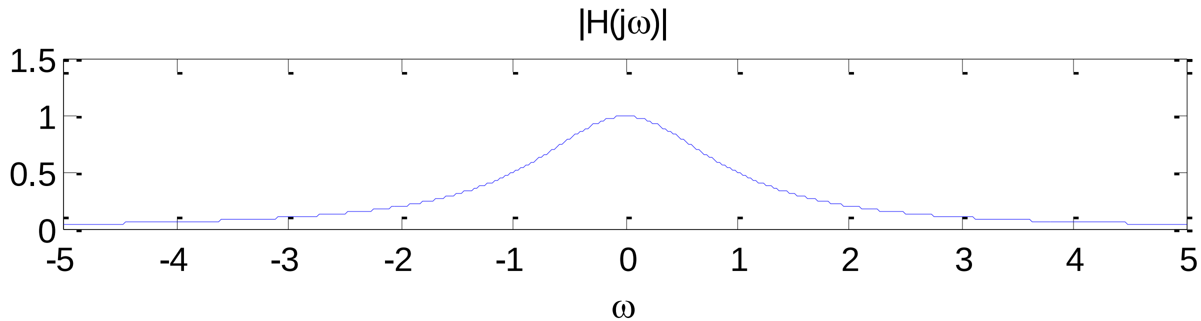
$$H(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}u(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

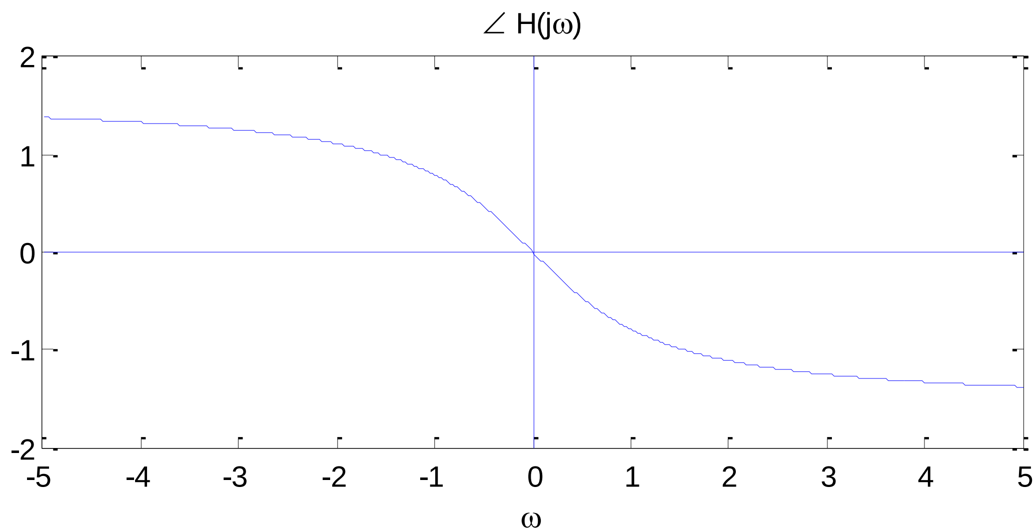
$$=\frac{1}{RC}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\;=\frac{-1}{1+RC\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-(\frac{1}{RC}+\mathrm{j}\omega)t}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{1+RC\mathrm{j}\omega}$$

3.10 微分方程描述的连续时间滤波器举例

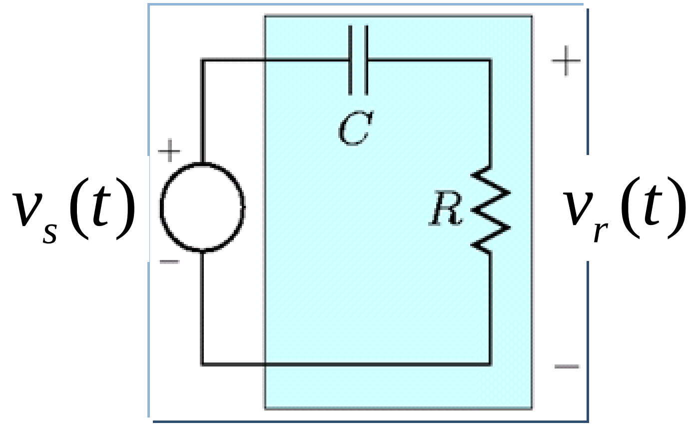
$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+RC\mathrm{j}\omega}\Rightarrow\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}},\angle H(\mathrm{j}\omega)=-\arctan(RC\omega)$$





3.10 微分方程描述的连续时间滤波器举例

- 二. 简单RC高通滤波器
  - 图中电路输入$v_s(t)$与输出$v_r(t)$之间关系可用微分方程描述：



$$RC\frac{\mathrm{d}v_r(t)}{\mathrm{d}t}+v_r(t)=RC\frac{\mathrm{d}v_s(t)}{\mathrm{d}t}$$

频率响应$G(\mathrm{j}\omega)$ = ?

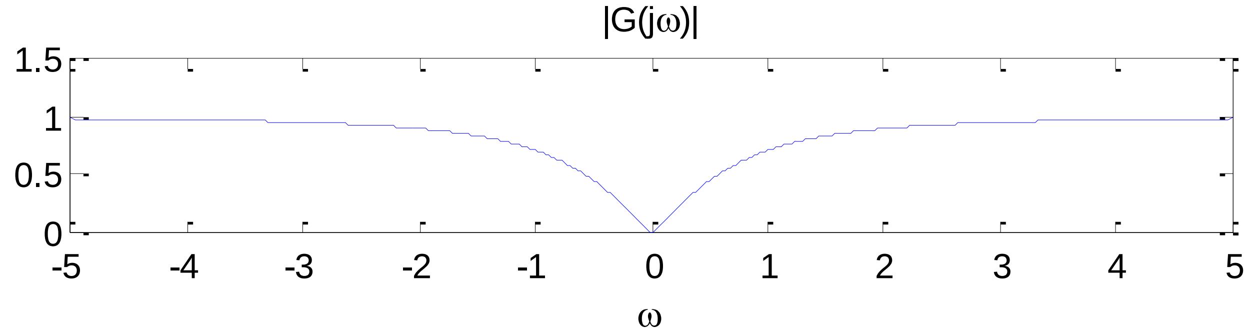
可以采用类似前面简单RC低通滤波器的分析方法（频域、时域）。

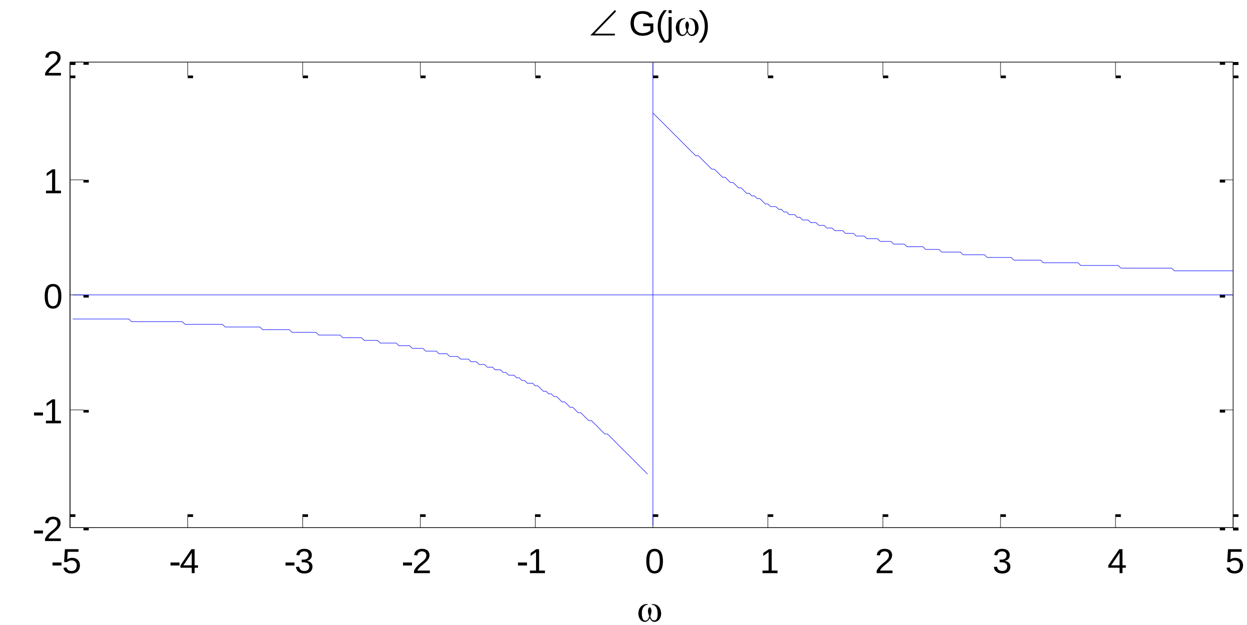
此处注意到$H(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + G(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，易得：

$$G(\mathrm{j}\omega)=1-H(\mathrm{j}\omega)=1-\frac{1}{1+RC\mathrm{j}\omega}=\frac{RC\mathrm{j}\omega}{1+RC\mathrm{j}\omega}$$

3.10 微分方程描述的连续时间滤波器举例

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{RC\mathrm{j}\omega}{1+RC\mathrm{j}\omega}\Rightarrow\left|G(\mathrm{j}\omega)\right|=\frac{RC\,|\,\omega\,|}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}},\angle G(\mathrm{j}\omega)=\arctan(\frac{1}{RC\omega})$$





3.10 差分方程描述的离散时间滤波器举例

(Examples of Discrete-Time Filters Described by Difference Equations)

- 一. 一阶递归离散时间滤波器
  - 对于由一阶差分方程描述的LTI系统

$$y[n]-ay[n-1]=x[n]$$

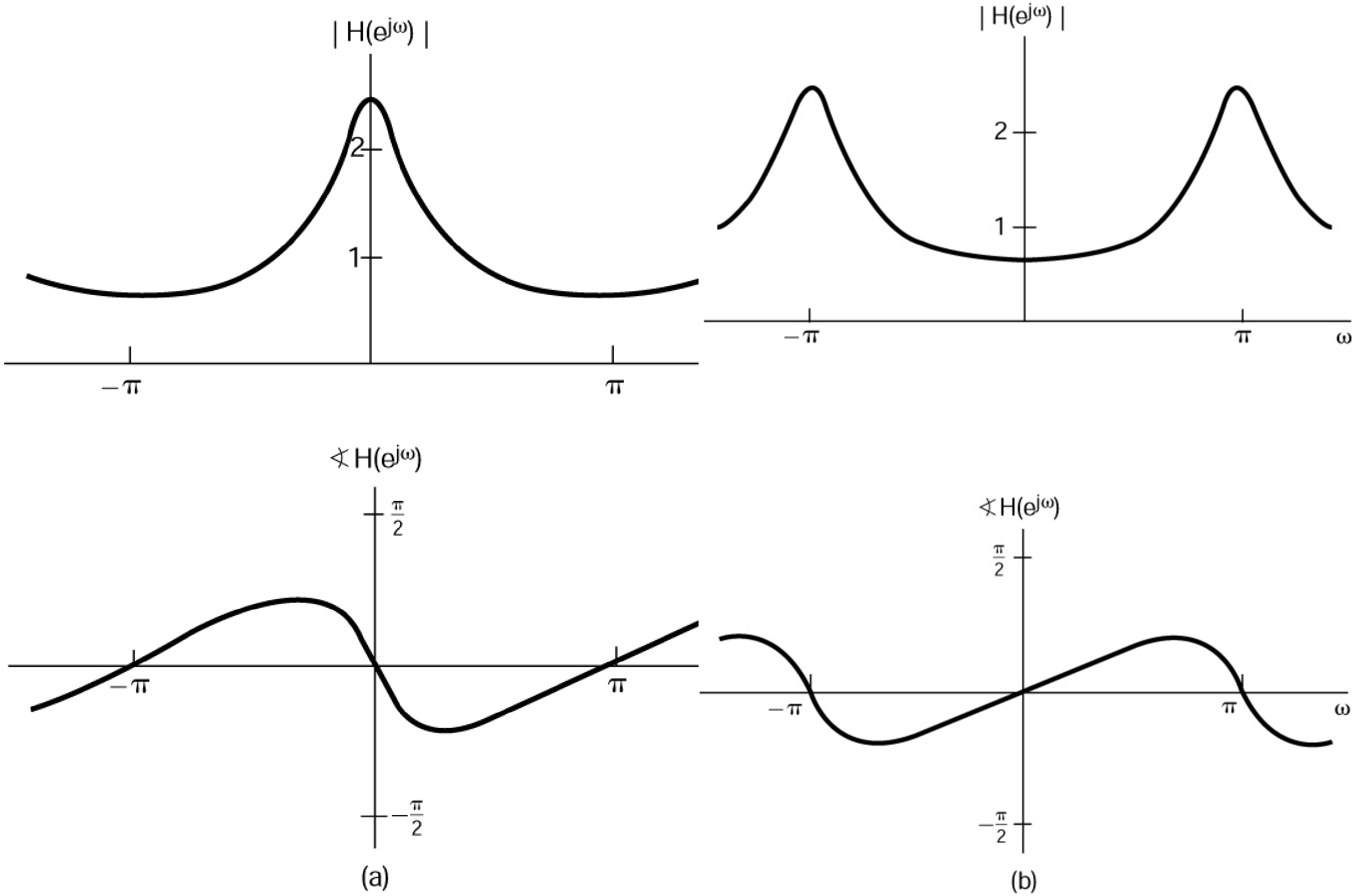
频率响应$H(e^{j\omega})=?$

输入$x[n]=e^{j\omega n}$将产生输出$y[n]=H(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}$，因此:

$$H(e^{j\omega})e^{j\omega n}-aH(e^{j\omega})e^{j\omega(n-1)}=e^{j\omega n}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

3.10 差分方程描述的离散时间滤波器举例



a=0.6

a=-0.6

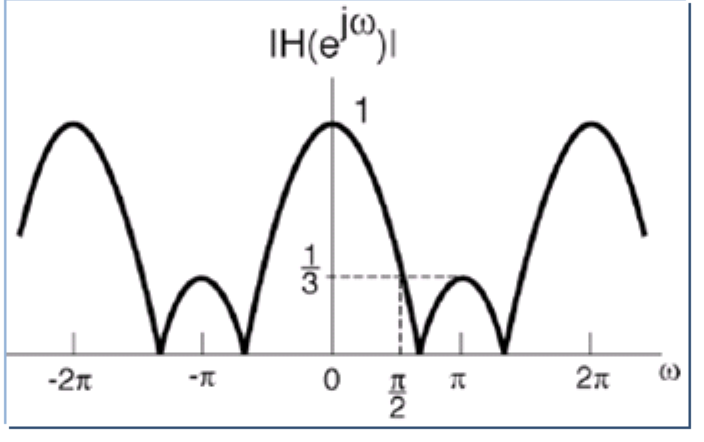
3.10 差分方程描述的离散时间滤波器举例

- 二. 非递归离散时间滤波器
  - 移动均值滤波器

$$y[n]=\frac{1}{3}[x[n-1]+x[n]+x[n+1]]$$ (三点移动均值滤波器)

$$\Rightarrow h[n]=\frac{1}{3}[\delta[n-1]+\delta[n]+\delta[n+1]]$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-j\omega n}=\frac{1}{3}[e^{-j\omega}+1+e^{j\omega}]=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\omega$$



3.10 差分方程描述的离散时间滤波器举例

$N+M+1$点移动均值滤波器:

$$y[n]=\frac{1}{N+M+1}\sum_{k=-N}^{M}x[n-k]\ \Rightarrow h[n]=\frac{1}{N+M+1}\sum_{k=-N}^{M}\delta[n-k]$$

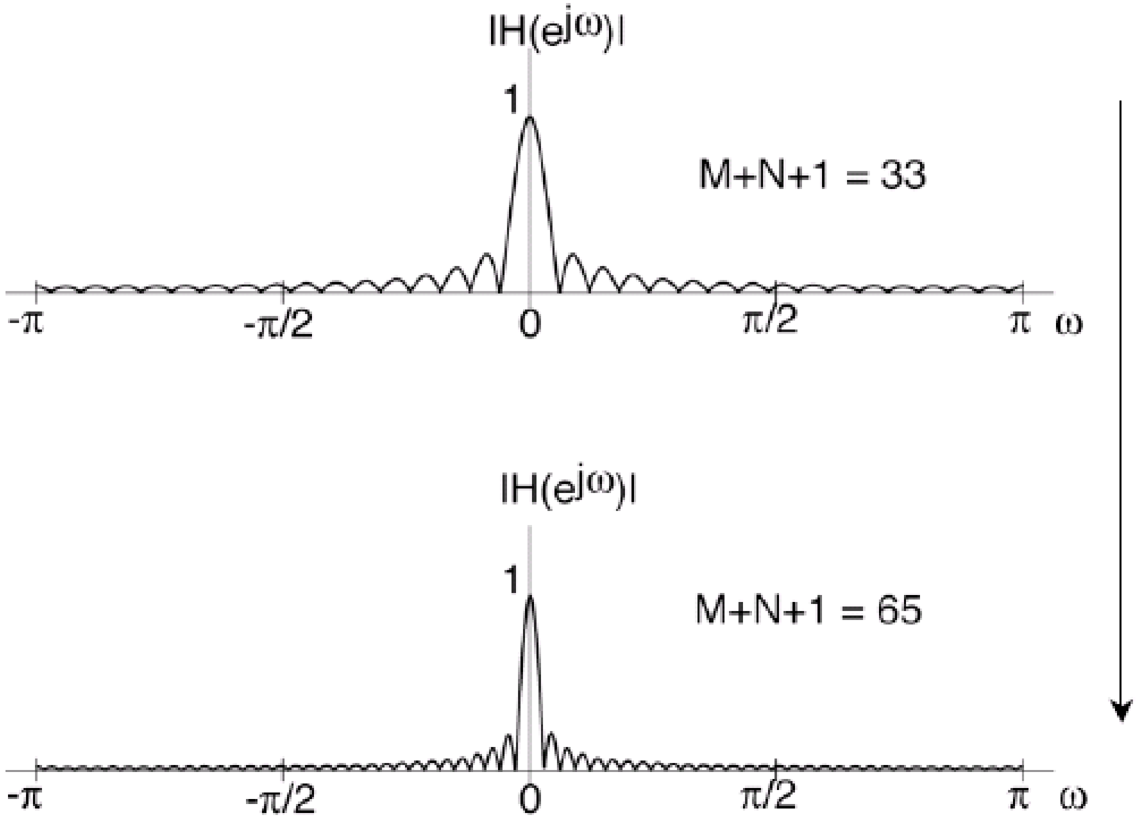
$$\Rightarrow H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\frac{1}{N+M+1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-N}^{M}\delta[n-k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

$$=\frac{1}{N+M+1}\sum_{k=-N}^{M}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n-k]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

$$=\frac{1}{N+M+1}\sum_{k=-N}^{M}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega k}$$

$$=\frac{1}{N+M+1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega[(N-M)/2]}\frac{\sin[\omega(N+M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}$$

3.10 差分方程描述的离散时间滤波器举例



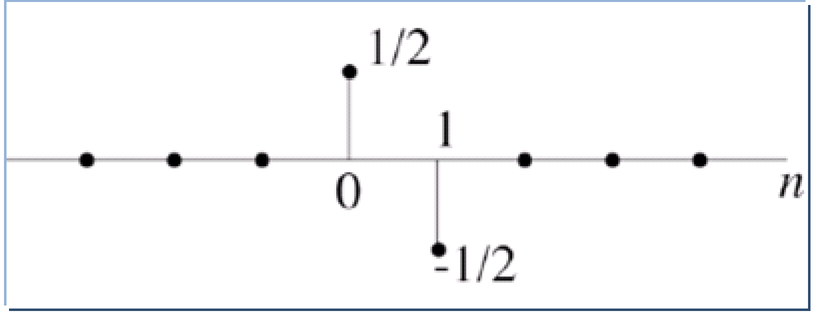
Rolls off at lower ω as M+N+1 increases

3.10 差分方程描述的离散时间滤波器举例

– 输入信号差分对应的高通滤波器

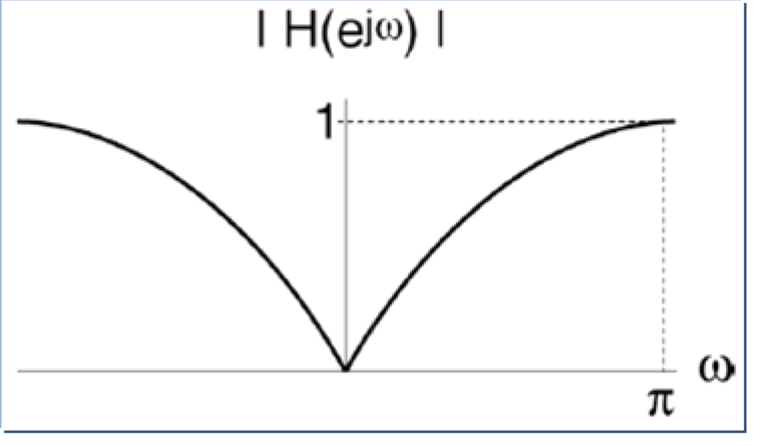
$$y[n]=\frac{1}{2}[x[n]-x[n-1]]$$

$$h[n]=\frac{1}{2}[\delta[n]-\delta[n-1]]$$



$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-j\omega n}=\frac{1}{2}(1-e^{-j\omega})=je^{-j\omega/2}\sin(\omega/2)$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=\left|\sin(\omega/2)\right|$$



本章小结

- 复指数函数是一切LTI系统的特征函数，对应的特征值则被称为系统函数，体现了系统特性。
- 建立了用傅里叶级数表示周期信号的方法，实现了对周期信号的频域分解。
- 以周期性矩形脉冲信号为典型例子，研究了连续时间周期信号和离散时间周期信号的频谱特点及信号参量改变对频谱的影响。
- 连续时间傅氏级数和离散时间傅氏级数的基本思想与讨论方法完全类似，其重大区别在于连续情况下频谱无限扩展，而在离散情况下频谱则表现为周期性。
- 在对信号分析的基础上，研究了LTI系统的频率响应及LTI系统对周期信号的响应。