数 理 逻 辑

— 思想与方法

李 娜 编著

南开大学

吴 向 军

2023 年 6 月

目录

形式系统

定义 (公理系统)

- 无需证明的命题(或公式)为公理;
- 从公理出发, 用演绎规则推导出定理的演绎体系, 称为公理系统。

形式系统

定义 (公理系统)

- 无需证明的命题(或公式)为公理;
- 从公理出发，用演绎规则推导出定理的演绎体系，称为公理系统。

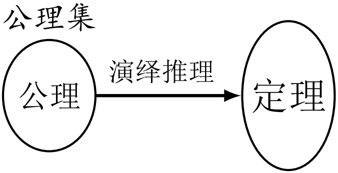
皮亚诺公理

1、0是自然数;
2、每一个确定的自然数a，都有一个确定的后继数a'，a' 也是自然数（一个数的后继数就是紧接在这个数后面的数，例如，0的后继数是1，1的后继数是2等等）；
3、0不是任何自然数的后继数;
4、如果b、c的后继数都是自然数a，那么b=c;
5、任意关于自然数的命题，如果证明了它对自然数0是对的，又假定它对自然数n为真时，可以证明它对n' 也真，那么，命题对所有自然数都真。（这条公理也叫归纳公理，保证了数学归纳法的正确性）

形式系统

定义 (公理系统)

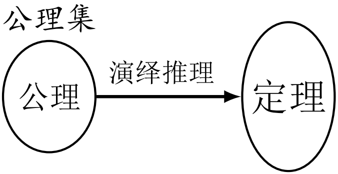
- 无需证明的命题(或公式)为公理;
- 从公理出发，用演绎规则推导出定理的演绎体系，称为公理系统。



形式系统

定义 (公理系统)

- 无需证明的命题(或公式)为公理；
- 从公理出发，用演绎规则推导出定理的演绎体系，称为公理系统。



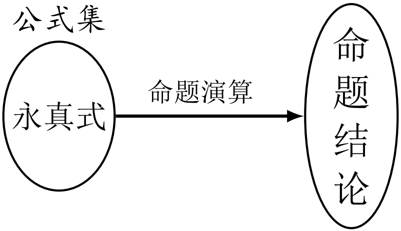
欧几里得公理

1、任意两个点可以通过一条直线连接。
2、任意线段能无限延伸成一条直线。
3、给定任意线段，可以以其一个端点作为圆心，该线段作为半径作一个圆。
4、所有直角都全等。
5、**若两条直线都与第三条直线相交，并且在同一边的内角之和小于两个直角，则这两条直线在这一边必定相交。**

形式系统

定义 (命题演算)

- 命题逻辑中的重言式(永真式)为公理;
- 用永真式来进行逻辑演算的系统，称为命题演算(系统)。



形式系统

- 符号：系统在所用的各种字母；
- 公式(语句)：按一定规则用符号所形成的符号串；
- 公理：系统推理的起点(或已知条件)；
- 推理规则：演绎的根据，它规定把若干公式推理出另一个公式。

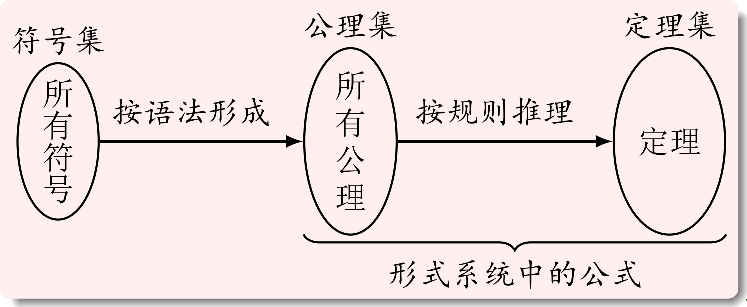
用公理和推理规则推导出的公式，称为形式系统的定理。

形式系统

- 符号：系统在所用的各种字母；
- 公式(语句)：按一定规则用符号所形成的符号串；
- 公理：系统推理的起点(或已知条件)；
- 推理规则：演绎的根据，它规定把若干公式推理出另一个

用公理

定理。



目录

命题语言的符号

- 命题常量：T, F
- 命题变量：p, q, r, $\ldots$
- 联结词：$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$(相当于运算符)
- 括号：(,)，改变联结次序(相当于改变运算次序)

$$L_0 = \{T, F, p, q, r, \ldots, (,), \neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$$

C/C++语言的类似描述：

- 常量：0，1，3.14159，true，false，'T'，"World"，$\cdots$
- 变量：i，j，x，y，$\cdots$
- 联结词：+，-，*，/，各种保留字
- 括号：(,), {, }, [,], $\cdots$

命题语言公式的形成规则

- 命题常量和变量是公式：T, F, p, q, $\ldots$
- A是公式，(A)和$\neg A$是命题公式；
- A和B是公式，$A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B$和$A \leftrightarrow B$都是公式。

通常称为合式公式Wff(符合组成规则的符号串)。

命题语言公式的形成规则

- 命题常量和变量是公式：T, F, p, q, $\ldots$
- A是公式，(A)和$\neg A$是命题公式；
- A和B是公式，$A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B$和$A \leftrightarrow B$都是公式。

通常称为合式公式Wff(符合组成规则的符号串)。
例如：p, q, r是命题公式。

- p, q, r, (p), (q), (r)，$\cdots$
- $\neg p, \neg q, \neg r, \neg(\neg r)$，$\ldots$
- $(p \wedge \neg q), (\neg q \vee r), ((p \vee q) \rightarrow (\neg q))$，$(p \leftrightarrow (q \wedge r))$，$\ldots$

命题语言公式的形成规则

- 命题常量和变量是公式：T, F, p, q, ...
- A是公式，(A)和$\neg A$是命题公式；
- A和B是公式，$A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B$和$A \leftrightarrow B$都是公式。

通常称为合式公式Wff(符合组成规则的符号串)。

$$L_0 = \{T,\ F,\ p,\ q,\ r,\ \ldots,\ (,\ ),\ \neg,\ \vee,\ \wedge,\ \rightarrow\}$$

$$W_0 = \{w : w\text{是}L_0\text{的合式公式}\}$$

命题语言公式的形成规则

定义 (公式的复杂度)

假设有公式α，用$deg(\alpha)$表示其复杂度。$deg(\alpha)$的递归定义如下：

- 若$\alpha = x$，则$deg(\alpha) = 0$，其中x是命题常量(T,F)或命题变元；
- 若$\alpha = \neg\beta$，则$deg(\alpha) = 1 + deg(\beta)$；
- 若$\alpha = \beta\ OP\ \gamma$，则$deg(\alpha) = 2 + deg(\beta) + deg(\gamma)$，其中：$OP \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$。

命题语言公式的形成规则

假设：$\alpha = \neg T \vee (p \wedge \neg q)$。$deg(\alpha) =?$

$$\begin{aligned} deg(\alpha) &= 2 + deg(\neg T) + deg(p \wedge \neg q) \\ &= 2 + 1 + deg(T) + 2 + deg(p) + deg(\neg q) \\ &= 2 + 1 + 0 + 2 + 0 + 1 + deg(q) \\ &= 2 + 1 + 0 + 2 + 0 + 1 + 0 = 6 \end{aligned}$$

命题语言公式的形成规则

引理

公式集S是W_0的充要条件是(“$S = W_0$”的充要条件):

- 若α是原子公式，则$\alpha \in S$;
- 若$\alpha, \beta \in S$，则$\neg\alpha \in S$，$(\alpha \vee \beta) \in S$。

命题语言公式的形成规则

引理

公式集S是W_0的充要条件是("$S = W_0$"的充要条件):

- 若α是原子公式，则$\alpha \in S$;
- 若$\alpha, \beta \in S$，则$\neg\alpha \in S$，$(\alpha \vee \beta) \in S$。

证明

1、$S \subseteq W_0$

由W_0的形成规则可得。

命题语言公式的形成规则

引理

公式集S是W_0的充要条件是(“$S = W_0$”的充要条件):

- 若α是原子公式，则$\alpha \in S$;
- 若$\alpha, \beta \in S$，则$\neg\alpha \in S$，$(\alpha \vee \beta) \in S$。

证明

1、$S \subseteq W_0$

由W_0的形成规则可得。

2、$W_0 \subseteq S$。任取公式$\alpha \in W_0$，按公式复杂度$deg(\alpha)$用强数学归纳法来证明。

2.1、$deg(\alpha) = 0$，即：α是命题常量或命题变元。所以，$\alpha \in S$。

命题语言公式的形成规则

引理

公式集S是W_0的充要条件是(“$S = W_0$”的充要条件):

- 若α是原子公式，则$\alpha \in S$;
- 若$\alpha, \beta \in S$，则$\neg\alpha \in S$，$(\alpha \vee \beta) \in S$。

证明

2.2、假设：$deg(\alpha) < m$时，结论成立。证明：$deg(\alpha) = m$时，结论也成立。

命题语言公式的形成规则

引理

公式集S是W_0的充要条件是("$S = W_0$"的充要条件):

- 若α是原子公式，则$\alpha \in S$;
- 若$\alpha, \beta \in S$，则$\neg\alpha \in S$，$(\alpha \vee \beta) \in S$。

证明

2.2、假设：$deg(\alpha) < m$时，结论成立。证明：$deg(\alpha) = m$时，结论也成立。

(a) $\alpha = \neg\beta$。由公式复杂度的定义可得：$deg(\beta) = m - 1 < m$。由归纳假设可知：$\beta \in S$。由公式集S的形成规则可知：$\neg\beta \in S$，即：$\alpha \in S$。

命题语言公式的形成规则

引理

公式集S是W_0的充要条件是("$S = W_0$"的充要条件):

- 若α是原子公式，则$\alpha \in S$;
- 若$\alpha, \beta \in S$，则$\neg\alpha \in S$，$(\alpha \vee \beta) \in S$。

证明

2.2、假设：$deg(\alpha) < m$时，结论成立。证明：$deg(\alpha) = m$时，结论也成立。

(b) $\alpha = \beta \vee \gamma$。由公式复杂度的定义可得：$deg(\beta) < m$和$deg(\gamma) < m$。由归纳假设可知：$\beta \in S$和$\gamma \in S$。由公式集$S$的形成规则可知：$\beta \vee \gamma \in S$，即：$\alpha \in S$。

命题语言公式的形成规则

引理

公式集S是W_0的充要条件是("$S = W_0$"的充要条件):

- 若α是原子公式，则$\alpha \in S$;
- 若$\alpha, \beta \in S$，则$\neg\alpha \in S$，$(\alpha \vee \beta) \in S$。

证明

2.2、假设：$deg(\alpha) < m$时，结论成立。证明：$deg(\alpha) = m$时，结论也成立。

所以，$\forall\alpha \in W_0$，都有：$\alpha \in S$，即：$W_0 \subseteq S$。

命题语言公式的形成规则

引理

公式集S是W_0的充要条件是("$S = W_0$"的充要条件):

- 若α是原子公式，则$\alpha \in S$;
- 若$\alpha, \beta \in S$，则$\neg\alpha \in S$，$(\alpha \vee \beta) \in S$。

证明

2.2、假设：$deg(\alpha) < m$时，结论成立。证明：$deg(\alpha) = m$时，结论也成立。

所以，$\forall\alpha \in W_0$，都有：$\alpha \in S$，即：$W_0 \subseteq S$。

所以，$S = W_0$。

目录

演绎基础

1、公理模式

- 重言律A_1：$\alpha \vee \alpha \rightarrow \alpha$
- 析取引入律A_2：$\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
- 析取交换律A_3：$\alpha \vee \beta \rightarrow \beta \vee \alpha$
- 析取附加律A_4：$(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \vee \gamma))$

演绎基础

2、推理规则

$$(\alpha \to \beta) \wedge \alpha \xrightarrow{\text{推导}} \beta$$

假言推理规则(MP规则)。

命题演算

定义 (证明)

假设公理集$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$，一个公式序列$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$。若每个$\beta_s$，$s \in \{1, 2, \ldots n\}$，都有：

- $\beta_s \in A$，或
- β_i和β_j运用MP规则得到β_s，其中：$i, j < s$。

则称公式序列$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$为公式$\beta$的一个证明。

命题演算

定义 (公式的证明)

假设公理集$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$和待证明的结论$\beta$。若存在公式序列$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n (= \beta)$，则称公式序列$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$为$\beta$的一个证明，$\beta$是本系统的定理。

记为：$\vdash_0 \beta$，或$\vdash \beta$。

公式的演绎

定义 (公式的演绎)

假设Φ是一个公式集，α是一个公式。若存在一个有限公式序列：$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\ (= \alpha)$。$\beta_i$是公理、或由前面两个公式用$MP$规则所得，则称公式$\alpha$可由公式集$\Phi$演绎(推导)，记为：$\Phi \vdash \alpha$。

公式的演绎

PC系统的几个定理。

- $\vdash (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ 三段论原则
- $\vdash \alpha \to \alpha$ 同一原则
- $\vdash \neg\alpha \vee \alpha$ 排中律
- $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$ 排中律
- $\ldots$

定理证明的示例

证明：$\vdash (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$。

$A_1 : \alpha \vee \alpha \to \alpha$

$A_2 : \alpha \to \alpha \vee \beta$

$A_3 : \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$

$A_4 : (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \gamma))$

证明：

(1) $(\beta \to \gamma) \to ((\neg\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \vee \gamma))$ (A_4)

(2) $(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ ((1)和$\to$的定义)

定理证明的示例

$A_1 : \alpha \vee \alpha \to \alpha$

$A_2 : \alpha \to \alpha \vee \beta$

$A_3 : \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$

$A_4 : (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \gamma))$

证明：$\vdash \alpha \to \alpha$。

定理证明的示例

$A_1: \alpha \vee \alpha \to \alpha$

$A_2: \alpha \to \alpha \vee \beta$

$A_3: \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$

$A_4: (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \gamma))$

证明：$\vdash \alpha \to \alpha$。

证明：

(1) $((\alpha \vee \alpha) \to \alpha) \to ((\alpha \to (\alpha \vee \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$

(定理1, $\alpha \vee \alpha \mapsto \beta, \alpha \mapsto \gamma$)

定理证明的示例

$A_1: \alpha \vee \alpha \to \alpha$

$A_2: \alpha \to \alpha \vee \beta$

$A_3: \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$

$A_4: (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \gamma))$

证明：$\vdash \alpha \to \alpha$。

证明：

(1) $((\alpha \vee \alpha) \to \alpha) \to ((\alpha \to (\alpha \vee \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$

(定理1, $\alpha \vee \alpha \mapsto \beta, \alpha \mapsto \gamma$)

(2) $(\alpha \vee \alpha) \to \alpha$ (A_1)

定理证明的示例

$A_1 : \alpha \vee \alpha \to \alpha$

$A_2 : \alpha \to \alpha \vee \beta$

$A_3 : \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$

$A_4 : (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \gamma))$

证明：$\vdash \alpha \to \alpha$。

证明：

(1) $((\alpha \vee \alpha) \to \alpha) \to ((\alpha \to (\alpha \vee \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$

(定理1, $\alpha \vee \alpha \mapsto \beta, \alpha \mapsto \gamma$)

(2) $(\alpha \vee \alpha) \to \alpha$ (A_1)

(3) $(\alpha \to (\alpha \vee \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$ ((1), (2), MP)

定理证明的示例

$A_1 : \alpha \vee \alpha \to \alpha$

$A_2 : \alpha \to \alpha \vee \beta$

$A_3 : \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$

$A_4 : (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \gamma))$

证明：$\vdash \alpha \to \alpha$。

证明：

(1) $((\alpha \vee \alpha) \to \alpha) \to ((\alpha \to (\alpha \vee \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$

(定理1, $\alpha \vee \alpha \mapsto \beta, \alpha \mapsto \gamma$)

(2) $(\alpha \vee \alpha) \to \alpha$ (A_1)

(3) $(\alpha \to (\alpha \vee \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$ ((1), (2), MP)

(4) $\alpha \to (\alpha \vee \alpha)$ $(A_2, \beta \mapsto \alpha)$

定理证明的示例

$A_1 : \alpha \vee \alpha \to \alpha$

$A_2 : \alpha \to \alpha \vee \beta$

$A_3 : \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$

$A_4 : (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \gamma))$

证明：$\vdash \alpha \to \alpha$。

证明：

(1) $((\alpha \vee \alpha) \to \alpha) \to ((\alpha \to (\alpha \vee \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$

(定理1, $\alpha \vee \alpha \mapsto \beta, \alpha \mapsto \gamma$)

(2) $(\alpha \vee \alpha) \to \alpha$ (A_1)

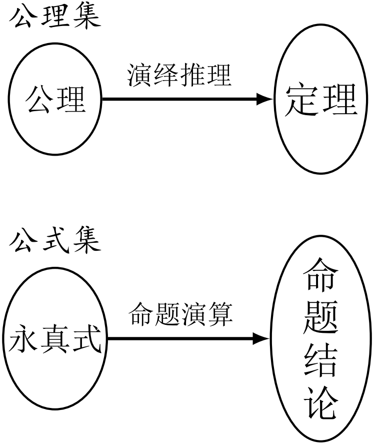
(3) $(\alpha \to (\alpha \vee \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$ ((1), (2), MP)

(4) $\alpha \to (\alpha \vee \alpha)$ (A_2, $\beta \mapsto \alpha$)

(5) $\alpha \to \alpha$ ((3), (4), MP)

目录

自然推理系统



自然推理系统

下面介绍命题自然推理系统FPC。假设在公式集$\Phi = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$可推出出公式$\alpha$，即：$\Phi \vdash \alpha$。下面的演绎定理成立：

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \vdash \alpha$ 当且仅当 $\vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to \alpha$

自然推理系统不从公理出发，它从假设开始，用推理规则进行推理的演绎系统。该系统的公理集为“空”。

FPC的推理规则

推理规则：结构规则和逻辑联结词规则。

1、结构规则

- Hyp(Hypothesis – 假设引入规则)：按需要随时引入一个假设。

$$\begin{array}{|l} \quad\vdots \\ \begin{array}{|l} \alpha \\ \vdots \end{array} \end{array}$$

Hyp

FPC的推理规则

推理规则：结构规则和逻辑联结词规则。

1、结构规则

- Rep(Repeat – 重复规则)：同一公式(包括假设)可重复运用。

$$\left|\begin{array}{l}\vdots\\ \alpha\\ \vdots\\ \alpha\\ \vdots\end{array}\right.$$

Rep

FPC的推理规则

推理规则：结构规则和逻辑联结词规则。

1、结构规则

- Reit(Reiterate – 重述规则)：同一公式(包括假设)可在随后的假设下重复运用。

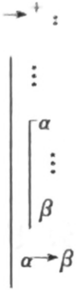
$$
\begin{array}{|l}
\vdots \\
\alpha \\
\vdots \\
\begin{array}{|l}
\beta \\
\vdots \\
\alpha
\end{array}
\end{array}
$$

Reit

FPC的推理规则

2、逻辑联结词规则

(1) $\rightarrow^{+}$：在α的假设下可得到β，则$\alpha \rightarrow \beta$；

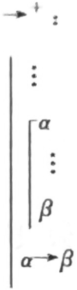


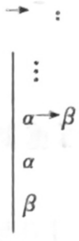
FPC的推理规则

2、逻辑联结词规则

(1) $\rightarrow^{+}$：在α的假设下可得到β，则$\alpha \rightarrow \beta$；

(2) $\rightarrow^{-}$：若α和$\alpha \rightarrow \beta$，则可得到β；





FPC的推理规则

2、逻辑联结词规则

(3) $\vee^{+}$：从α可推出$\alpha\vee\beta$，或$\beta\vee\alpha$；

$\vee^{+}$：

$$
\begin{array}{|l} \vdots \\ \alpha \\ \alpha\vee\beta \end{array}
\quad \text{或} \quad
\begin{array}{|l} \vdots \\ \alpha \\ \beta\vee\alpha \end{array}
$$

FPC的推理规则

2、逻辑联结词规则

(3) $\vee^{+}$：从α可推出$\alpha\vee\beta$，或$\beta\vee\alpha$；

(4) $\vee^{-}$：从$\alpha\vee\beta$，$\alpha\rightarrow\gamma$，$\beta\rightarrow\gamma$可推出γ；

$\vee^{+}$：

$$
\begin{array}{|l}
\vdots \\
\alpha \\
\alpha\vee\beta
\end{array}
\quad \text{或} \quad
\begin{array}{|l}
\vdots \\
\alpha \\
\beta\vee\alpha
\end{array}
$$

$\vee^{-}$：

$$
\begin{array}{|l}
\vdots \\
\alpha\rightarrow\gamma \\
\beta\rightarrow\gamma \\
\alpha\vee\beta \\
\gamma
\end{array}
$$

FPC的推理规则

2、逻辑联结词规则

(5) $\wedge^{+}$：从α和β可推出$\alpha \wedge \beta$；

$\wedge^{+}$：

$$\begin{array}{|l} \vdots \\ \alpha \\ \beta \\ \alpha \wedge \beta \end{array}$$

FPC的推理规则

2、逻辑联结词规则

(5) $\wedge^{+}$：从α和β可推出$\alpha\wedge\beta$；

(6) $\wedge^{-}$：从$\alpha\wedge\beta$可推出α和β；

$\wedge^{+}$：

$$\begin{array}{|l} \vdots \\ \alpha \\ \beta \\ \alpha\wedge\beta \end{array}$$

$\wedge^{-}$：

$$\begin{array}{|l} \vdots \\ \alpha\wedge\beta \\ \alpha \end{array} \quad \text{或} \quad \begin{array}{|l} \vdots \\ \alpha\wedge\beta \\ \beta \end{array}$$

FPC的推理规则

2、逻辑联结词规则

(7) $\leftrightarrow^{+}$：从$\alpha \to \beta$和$\beta \to \alpha$可推出$\alpha \leftrightarrow \beta$；

$\leftrightarrow^{+}$：

$$
\begin{array}{|l}
\vdots \\
\alpha \to \beta \\
\beta \to \alpha \\
\alpha \leftrightarrow \beta
\end{array}
$$

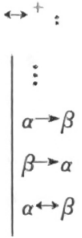
FPC的推理规则

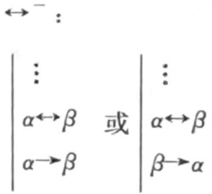
2、逻辑联结词规则

(7) $\leftrightarrow^{+}$：从$\alpha \to \beta$和$\beta \to \alpha$可推出$\alpha \leftrightarrow \beta$；

(8) $\leftrightarrow^{-}$：从$\alpha \leftrightarrow \beta$可推出$\alpha \to \beta$和$\beta \to \alpha$；

从$\alpha \leftrightarrow \beta$和$\alpha$可推出$\beta$，从$\alpha \leftrightarrow \beta$和$\beta$可推出$\alpha$；





FPC的推理规则

2、逻辑联结词规则

(9) $\neg$：若在$\neg\alpha$假设下可得到β和$\neg\beta$，则α。

$\neg$（反消）：

$$\begin{array}{|l} \vdots \\ \begin{array}{|l} \neg\alpha \\ \vdots \\ \beta \\ \neg\beta \end{array} \\ \alpha \end{array}$$

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash \alpha \vee \alpha \to \alpha$。

证明

1	$\alpha \vee \alpha$	Hyp

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash \alpha \vee \alpha \to \alpha$。

证明

1	$\alpha \vee \alpha$	Hyp
2	α	Hyp

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash \alpha \vee \alpha \rightarrow \alpha$。

证明

1	$\alpha \vee \alpha$	Hyp
2	α	Hyp
3	α	2, Rep

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash \alpha \vee \alpha \to \alpha$。

证明

1	$\alpha \vee \alpha$	Hyp
2	α	Hyp
3	α	2, Rep
4	$\alpha \to \alpha$	2, 3, $\to^{+}$

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash \alpha \vee \alpha \to \alpha$。

证明

1	$\alpha \vee \alpha$	Hyp
2	α	Hyp
3	α	2, Rep
4	$\alpha \to \alpha$	2, 3, $\to^+$
5	$\alpha \to \alpha$	4, Rep

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash \alpha \vee \alpha \rightarrow \alpha$。

证明

1	$\alpha \vee \alpha$	Hyp
2	α	Hyp
3	α	2, Rep
4	$\alpha \rightarrow \alpha$	$2, 3, \rightarrow^{+}$
5	$\alpha \rightarrow \alpha$	4, Rep
6	α	$4, 5, 1, \vee^{-}$

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash \alpha \vee \alpha \to \alpha$。

证明

1	$\alpha \vee \alpha$	Hyp
2	α	Hyp
3	α	2, Rep
4	$\alpha \to \alpha$	$2, 3, \to^+$
5	$\alpha \to \alpha$	4, Rep
6	α	$4, 5, 1, \vee^-$
7	$\alpha \vee \alpha \to \alpha$	$1, 6, \to^+$

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$。

证明

1	$\alpha \vee \beta$	Hyp

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \beta \vee \alpha$。

证明

1	$\alpha \vee \beta$	Hyp
2	α	Hyp

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \beta \vee \alpha$。

证明

1	$\alpha \vee \beta$	Hyp
2	α	Hyp
3	$\beta \vee \alpha$	2, $\vee^+$

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$。

证明

1	$\alpha \vee \beta$	Hyp
2	α	Hyp
3	$\beta \vee \alpha$	$2, \vee^+$
4	$\alpha \to \beta \vee \alpha$	$2, 3, \to^+$

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \beta \vee \alpha$。

证明

1	$\alpha \vee \beta$	Hyp
2	α	Hyp
3	$\beta \vee \alpha$	$2, \vee^{+}$
4	$\alpha \rightarrow \beta \vee \alpha$	$2, 3, \rightarrow^{+}$
5	β	Hyp

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$。

证明

1	$\alpha \vee \beta$	Hyp
2	α	Hyp
3	$\beta \vee \alpha$	$2, \vee^{+}$
4	$\alpha \to \beta \vee \alpha$	$2, 3, \to^{+}$
5	β	Hyp
6	$\beta \vee \alpha$	$5, \vee^{+}$

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$。

证明

1	$\alpha \vee \beta$	Hyp
2	$\quad\alpha$	Hyp
3	$\quad\beta \vee \alpha$	$2, \vee^+$
4	$\alpha \to \beta \vee \alpha$	$2, 3, \to^+$
5	$\quad\beta$	Hyp
6	$\quad\beta \vee \alpha$	$5, \vee^+$
7	$\beta \to \beta \vee \alpha$	$5, 6, \to^+$

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \beta \vee \alpha$。

证明

1	$\alpha \vee \beta$	Hyp
2	$\quad\alpha$	Hyp
3	$\quad\beta \vee \alpha$	$2, \vee^+$
4	$\alpha \rightarrow \beta \vee \alpha$	$2, 3, \rightarrow^+$
5	$\quad\beta$	Hyp
6	$\quad\beta \vee \alpha$	$5, \vee^+$
7	$\beta \rightarrow \beta \vee \alpha$	$5, 6, \rightarrow^+$
8	$\beta \vee \alpha$	$4, 7, \vee^-$

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$。

证明

1	$\alpha \vee \beta$	Hyp
2	α	Hyp
3	$\beta \vee \alpha$	$2, \vee^+$
4	$\alpha \to \beta \vee \alpha$	$2, 3, \to^+$
5	β	Hyp
6	$\beta \vee \alpha$	$5, \vee^+$
7	$\beta \to \beta \vee \alpha$	$5, 6, \to^+$
8	$\beta \vee \alpha$	$4, 7, \vee^-$
9	$\alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$	$1, 8, \to^+$

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \alpha \vee \gamma)$。

证明

1	$\beta \to \gamma$	Hyp

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \alpha \vee \gamma)$。

证明

1	$\beta \to \gamma$	Hyp
2	$\alpha \vee \beta$	Hyp

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \alpha \vee \gamma)$。

证明

1	$\beta \to \gamma$	Hyp
2	$\alpha \vee \beta$	Hyp
3	α	Hyp

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \alpha \vee \gamma)$。

证明

1	$\beta \to \gamma$	Hyp
2	$\alpha \vee \beta$	Hyp
3	α	Hyp
4	$\alpha \vee \gamma$	$3, \vee^+$

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \alpha \vee \gamma)$。

证明

1	$\beta \to \gamma$	Hyp
2	$\quad \alpha \vee \beta$	Hyp
3	$\quad\quad \alpha$	Hyp
4	$\quad\quad \alpha \vee \gamma$	$3, \vee^+$
5	$\quad \alpha \to \alpha \vee \gamma$	$3, 4, \to^+$

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \alpha \vee \gamma)$。

证明

1	$\beta \to \gamma$	Hyp
2	$\alpha \vee \beta$	Hyp
3	α	Hyp
4	$\alpha \vee \gamma$	$3, \vee^+$
5	$\alpha \to \alpha \vee \gamma$	$3, 4, \to^+$
6	β	Hyp

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \alpha \vee \gamma)$。

证明

1	$\beta \to \gamma$	Hyp
2	$\quad \alpha \vee \beta$	Hyp
3	$\quad\quad \alpha$	Hyp
4	$\quad\quad \alpha \vee \gamma$	$3, \vee^+$
5	$\quad \alpha \to \alpha \vee \gamma$	$3, 4, \to^+$
6	$\quad\quad \beta$	Hyp
7	$\quad\quad \beta \to \gamma$	1, Reit

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \alpha \vee \gamma)$。

证明

1	$\beta \to \gamma$	Hyp
2	$\alpha \vee \beta$	Hyp
3	α	Hyp
4	$\alpha \vee \gamma$	$3, \vee^+$
5	$\alpha \to \alpha \vee \gamma$	$3, 4, \to^+$
6	β	Hyp
7	$\beta \to \gamma$	1, Reit
8	γ	$6, 7, \to^-$

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \alpha \vee \gamma)$。

证明

1	$\beta \to \gamma$	Hyp
2	$\quad \alpha \vee \beta$	Hyp
3	$\quad\quad \alpha$	Hyp
4	$\quad\quad \alpha \vee \gamma$	$3, \vee^+$
5	$\quad \alpha \to \alpha \vee \gamma$	$3, 4, \to^+$
6	$\quad\quad \beta$	Hyp
7	$\quad\quad \beta \to \gamma$	1, Reit
8	$\quad\quad \gamma$	$6, 7, \to^-$
9	$\quad\quad \alpha \vee \gamma$	$8, \vee^+$

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \alpha \vee \gamma)$。

证明

1	$\beta \to \gamma$	Hyp
2	$\alpha \vee \beta$	Hyp
3	α	Hyp
4	$\alpha \vee \gamma$	$3, \vee^+$
5	$\alpha \to \alpha \vee \gamma$	$3, 4, \to^+$
6	β	Hyp
7	$\beta \to \gamma$	1, Reit
8	γ	$6, 7, \to^-$
9	$\alpha \vee \gamma$	$8, \vee^+$
10	$\beta \to \alpha \vee \gamma$	$6, 9, \to^+$

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \alpha \vee \gamma)$。

证明

1	$\beta \to \gamma$	Hyp
2	$\quad \alpha \vee \beta$	Hyp
3	$\quad\quad \alpha$	Hyp
4	$\quad\quad \alpha \vee \gamma$	$3, \vee^+$
5	$\quad \alpha \to \alpha \vee \gamma$	$3, 4, \to^+$
6	$\quad\quad \beta$	Hyp
7	$\quad\quad \beta \to \gamma$	1, Reit
8	$\quad\quad \gamma$	$6, 7, \to^-$
9	$\quad\quad \alpha \vee \gamma$	$8, \vee^+$
10	$\quad \beta \to \alpha \vee \gamma$	$6, 9, \to^+$
11	$\quad \alpha \vee \gamma$	$2, 5, 10, \vee^-$

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \alpha \vee \gamma)$。

证明

1	$\beta \to \gamma$	Hyp
2	$\alpha \vee \beta$	Hyp
3	α	Hyp
4	$\alpha \vee \gamma$	$3, \vee^+$
5	$\alpha \to \alpha \vee \gamma$	$3, 4, \to^+$
6	β	Hyp
7	$\beta \to \gamma$	1, Reit
8	γ	$6, 7, \to^-$
9	$\alpha \vee \gamma$	$8, \vee^+$
10	$\beta \to \alpha \vee \gamma$	$6, 9, \to^+$
11	$\alpha \vee \gamma$	$2, 5, 10, \vee^-$
12	$\alpha \vee \beta \to \alpha \vee \gamma$	$2, 11, \to^+$

FPC的证明示例

在FPC中，证明：$\vdash (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \alpha \vee \gamma)$。

证明

1	$\beta \to \gamma$	Hyp
2	$\alpha \vee \beta$	Hyp
3	α	Hyp
4	$\alpha \vee \gamma$	$3, \vee^+$
5	$\alpha \to \alpha \vee \gamma$	$3, 4, \to^+$
6	β	Hyp
7	$\beta \to \gamma$	1, Reit
8	γ	$6, 7, \to^-$
9	$\alpha \vee \gamma$	$8, \vee^+$
10	$\beta \to \alpha \vee \gamma$	$6, 9, \to^+$
11	$\alpha \vee \gamma$	$2, 5, 10, \vee^-$
12	$\alpha \vee \beta \to \alpha \vee \gamma$	$2, 11, \to^+$
13	$(\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \alpha \vee \gamma)$	$1, 12, \to^+$

目录

可证公式

证明：$\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$。

证明

1	$\alpha \to \beta$	Hyp

可证公式

证明：$\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$。

证明

1	$\alpha \to \beta$	Hyp
2	$\beta \to \gamma$	Hyp

可证公式

证明：$\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$。

证明

1	$\alpha \to \beta$	Hyp
2	$\beta \to \gamma$	Hyp
3	α	Hyp

可证公式

证明：$\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$。

证明

1	$\alpha \to \beta$	Hyp
2	$\beta \to \gamma$	Hyp
3	α	Hyp
4	$\alpha \to \beta$	1, Reit

可证公式

证明：$\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$。

证明

1	$\alpha \to \beta$	Hyp
2	$\beta \to \gamma$	Hyp
3	α	Hyp
4	$\alpha \to \beta$	1, Reit
5	β	$\to^-$

可证公式

证明：$\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$。
证明

1	$\alpha \to \beta$	Hyp
2	$\beta \to \gamma$	Hyp
3	α	Hyp
4	$\alpha \to \beta$	1, Reit
5	β	$\to^-$
6	$\beta \to \gamma$	2,Reit

可证公式

证明：$\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$。

证明

1	$\alpha \to \beta$	Hyp
2	$\beta \to \gamma$	Hyp
3	α	Hyp
4	$\alpha \to \beta$	1, Reit
5	β	$\to^-$
6	$\beta \to \gamma$	2,Reit
7	γ	5, 6, $\to^-$

可证公式

证明：$\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$。

证明

1	$\alpha \to \beta$	Hyp
2	$\beta \to \gamma$	Hyp
3	α	Hyp
4	$\alpha \to \beta$	1, Reit
5	β	$\to^-$
6	$\beta \to \gamma$	2,Reit
7	γ	$5, 6, \to^-$
8	$\alpha \to \gamma$	$3, 7, \to^+$

可证公式

证明：$\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$。

证明

1	$\alpha \to \beta$	Hyp
2	$\beta \to \gamma$	Hyp
3	α	Hyp
4	$\alpha \to \beta$	1, Reit
5	β	$\to^-$
6	$\beta \to \gamma$	2,Reit
7	γ	$5, 6, \to^-$
8	$\alpha \to \gamma$	$3, 7, \to^+$
9	$(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$	$2, 8, \to^+$

可证公式

证明：$\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$。

证明

1	$\alpha \to \beta$	Hyp
2	$\beta \to \gamma$	Hyp
3	α	Hyp
4	$\alpha \to \beta$	1, Reit
5	β	$\to^-$
6	$\beta \to \gamma$	2,Reit
7	γ	$5, 6, \to^-$
8	$\alpha \to \gamma$	$3, 7, \to^+$
9	$(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$	$2, 8, \to^+$
10	$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$	$1, 9, \to^+$

可证公式

证明：$\vdash \neg\alpha \vee \alpha$。

证明

1	$\neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	Hyp

可证公式

证明：$\vdash \neg\alpha \vee \alpha$。

证明

1	$\neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	Hyp
2	$\neg\alpha$	Hyp

可证公式

证明：$\vdash \neg\alpha \vee \alpha$。

证明

1	$\neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	Hyp
2	$\neg\alpha$	Hyp
3	$\neg\alpha \vee \alpha$	$2, \vee^{+}$

可证公式

证明：$\vdash \neg\alpha \vee \alpha$。

证明

1	$\neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	Hyp
2	$\neg\alpha$	Hyp
3	$\neg\alpha \vee \alpha$	2, $\vee^+$
4	$\neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	1, Reit

可证公式

证明：$\vdash \neg\alpha \vee \alpha$。

证明

1	$\neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	Hyp
2	$\quad \neg\alpha$	Hyp
3	$\quad \neg\alpha \vee \alpha$	$2, \vee^+$
4	$\quad \neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	1, Reit
5	α	$2, 3, 4, \neg$

可证公式

证明：$\vdash \neg\alpha \vee \alpha$。

证明

1	$\neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	Hyp
2	$\quad\neg\alpha$	Hyp
3	$\quad\neg\alpha \vee \alpha$	$2, \vee^+$
4	$\quad\neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	1, Reit
5	α	$2, 3, 4, \neg$
6	$\neg\alpha \vee \alpha$	$5, \vee^+$

可证公式

证明：$\vdash \neg\alpha \vee \alpha$。

证明

1	$\neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	Hyp
2	$\quad \neg\alpha$	Hyp
3	$\quad \neg\alpha \vee \alpha$	$2, \vee^{+}$
4	$\quad \neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	1, Reit
5	α	$2, 3, 4, \neg$
6	$\neg\alpha \vee \alpha$	$5, \vee^{+}$
7	$\neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	1, Reit

可证公式

证明：$\vdash \neg\alpha \vee \alpha$。

证明

1	$\neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	Hyp
2	$\quad\neg\alpha$	Hyp
3	$\quad\neg\alpha \vee \alpha$	$2, \vee^{+}$
4	$\quad\neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	1, Reit
5	α	$2, 3, 4, \neg$
6	$\neg\alpha \vee \alpha$	$5, \vee^{+}$
7	$\neg(\neg\alpha \vee \alpha)$	1, Reit
8	$\neg\alpha \vee \alpha$	$1, 6, 7, \neg$

可证公式

证明：$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$。

证明

1	α	Hyp

可证公式

证明：$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$。

证明

1	α	Hyp
2	$\neg\neg\neg\alpha$	Hyp

可证公式

证明：$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$。

证明

1	α	Hyp
2	$\neg\neg\neg\alpha$	Hyp
3	$\neg\neg\alpha$	Hyp

可证公式

证明：$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$。

证明

1	α	Hyp
2	$\neg\neg\neg\alpha$	Hyp
3	$\neg\neg\alpha$	Hyp
4	$\neg\neg\neg\alpha$	2, Reit

可证公式

证明：$\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$。

证明

1	α	Hyp
2	$\neg\neg\neg\alpha$	Hyp
3	$\neg\neg\alpha$	Hyp
4	$\neg\neg\neg\alpha$	2, Reit
5	$\neg\neg\alpha$	3, Rep

可证公式

证明：$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$。

证明

1	α	Hyp
2	$\neg\neg\neg\alpha$	Hyp
3	$\neg\neg\alpha$	Hyp
4	$\neg\neg\neg\alpha$	2, Reit
5	$\neg\neg\alpha$	3, Rep
6	$\neg\alpha$	$3, 4, 5, \neg$

可证公式

证明：$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$。

证明

1	α	Hyp
2	$\neg\neg\neg\alpha$	Hyp
3	$\neg\neg\alpha$	Hyp
4	$\neg\neg\neg\alpha$	2, Reit
5	$\neg\neg\alpha$	3, Rep
6	$\neg\alpha$	$3, 4, 5, \neg$
7	α	1, Reit

可证公式

证明：$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$。

证明

1	α	Hyp
2	$\neg\neg\neg\alpha$	Hyp
3	$\neg\neg\alpha$	Hyp
4	$\neg\neg\neg\alpha$	2, Reit
5	$\neg\neg\alpha$	3, Rep
6	$\neg\alpha$	3, 4, 5, $\neg$
7	α	1, Reit
8	$\neg\neg\alpha$	2, 6, 7, $\neg$

可证公式

证明：$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$。

证明

1	α	Hyp
2	$\neg\neg\neg\alpha$	Hyp
3	$\neg\neg\alpha$	Hyp
4	$\neg\neg\neg\alpha$	2, Reit
5	$\neg\neg\alpha$	3, Rep
6	$\neg\alpha$	$3, 4, 5, \neg$
7	α	1, Reit
8	$\neg\neg\alpha$	$2, 6, 7, \neg$
9	$\alpha \to \neg\neg\alpha$	$1, 8, \to^{+}$

目录

命题的语义

在前面，我们是把自然语言的句子符号化，现在是研究命题公式是否具有某种物理含义或直观含义。

命题的语义

在前面，我们是把自然语言的句子符号化，现在是研究命题公式是否具有某种物理含义或直观含义。

例：$\underline{\underline{(p \to q)} \land p} \to q$。

命题的语义

在前面，我们是把自然语言的句子符号化，现在是研究命题公式是否具有某种物理含义或直观含义。

例：$\underline{\underline{(p \to q)} \land p} \to q$。

该公式可解释为下面的句子：

- p：天下雨，q：地面潮湿。

  若天下雨，则地面潮湿。天下雨了，所以，地面潮湿。

命题的语义

在前面，我们是把自然语言的句子符号化，现在是研究命题公式是否具有某种物理含义或直观含义。

例：$\underline{\underline{(p \to q)} \land p} \to q$。

该公式可解释为下面的句子：

- p：有钱，q：鬼推磨。
  有钱能使鬼推磨。我有钱，所以，我能使鬼推磨。
- 。。。

命题的语义

在前面，我们是把自然语言的句子符号化，现在是研究命题公式是否具有某种物理含义或直观含义。

例：$\underline{\underline{(p \to q)} \wedge p} \to q$。

命题语义学就是对命题逻辑中所使用的符号给出某种解释(真值赋值)，从而使命题公式有一个真值。

命题的语义

假设：$A=\{0,1\}$，其中，$0\mapsto$ 假，$1\mapsto$ 真。

- 一元联结词$\neg$

$$\neg : A \to A \qquad \neg(x) = 1 - x,\ \forall x \in A$$

命题的语义

假设：$A = \{0, 1\}$，其中，$0 \mapsto$ 假，$1 \mapsto$ 真。

- 二元联结词$\vee$

$$\vee : A \times A \to A \qquad \vee(x, y) = max(x, y), \ \forall x, y \in A$$

x	y	$\vee(x,y)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

命题的语义

对其它二元联结词($\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$)也给出类似的函数定义。
假设：用符号‘*’代表上面任何一个二元联结词$*$：

$$* : A \times A \rightarrow A$$

每个二元联结词的运算规则定义如下：

x	y	$x * y$		
		$\wedge$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	1	0
0	0	0	1	1

命题的语义

定义 (真值赋值)

真值赋值σ是对每个公式α指派一个真值的映射$\sigma(\alpha)$，即：$\sigma : W \to \{0, 1\}$，且满足以下条件：

- 对命题常量T和F：$\sigma(T) = 1, \sigma(F) = 0$;
- 对每个命题变项$p : \sigma(p) \in \{0, 1\}$;
- 对每个否定公式$\neg\beta : \sigma(\neg\beta) = 1 - \sigma(\beta)$;
- 对析取式$\alpha \vee \beta : \sigma(\alpha \vee \beta) = \max(\sigma(\alpha), \sigma(\beta))$。

命题的语义

由真值赋值的定义可知：

$$\sigma(\neg\beta) = \neg\sigma(\beta) = 1 - \sigma(\beta)$$

$$\sigma(\alpha \vee \beta) = \sigma(\alpha) \vee \sigma(\beta) \qquad \sigma(\alpha \wedge \beta) = \sigma(\alpha) \wedge \sigma(\beta)$$

$$\sigma(\alpha \to \beta) = \sigma(\alpha) \to \sigma(\beta) \qquad \sigma(\alpha \leftrightarrow \beta) = \sigma(\alpha) \leftrightarrow \sigma(\beta)$$

由真值赋值的定义可得下面真值表。

x	y	$x * y$			
		$\vee$	$\wedge$	$\to$	$\leftrightarrow$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

命题的语义

由真值赋值的定义可知：在真值赋值σ下，可计算W_0中每个公式α的真值，其中有：

$$\sigma(\neg\alpha) = 1 \quad \text{当且仅当} \quad \sigma(\alpha) = 0$$

$$\sigma(\alpha \vee \beta) = 0 \quad \text{当且仅当} \quad \sigma(\alpha) = \sigma(\beta) = 0$$

$$\sigma(\alpha \wedge \beta) = 1 \quad \text{当且仅当} \quad \sigma(\alpha) = \sigma(\beta) = 1$$

$$\sigma(\alpha \rightarrow \beta) = 0 \quad \text{当且仅当} \quad \sigma(\alpha) = 1,\ \sigma(\beta) = 0$$

$$\sigma(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 \quad \text{当且仅当} \quad \sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$$

命题的语义

例：命题公式$\alpha: p \vee q \to q \vee p$，$\sigma$是任意一个真值赋值。则$\sigma(\alpha) = 1$。

解：假设$\sigma(\alpha) \neq 1$，即：$\sigma(\alpha) = 0$。则，

$$\sigma(p \vee q \to q \vee p) = 0$$

$$\sigma(p \vee q) = 1 \tag{1}$$

$$\sigma(q \vee p) = 0 \tag{2}$$

由式(2)可知：$\sigma(q) = \sigma(p) = 0$。

由真值赋值σ的定义可得：$\sigma(p \vee q) = 0$。因此，它与式(1)矛盾。所以，$\sigma(\alpha) = 1$。

重言式和重言后承

定义 (真值赋值满足公式集)

Φ是一个公式集，σ是一个真值赋值。若$\sigma(\phi_i)=1,\ \forall\phi_i\in\Phi$，则称真值赋值$\sigma$满足$\Phi$，记为：$\sigma\models\Phi$。

特别地，$\Phi=\{\phi\}$，称真值赋值σ满足ϕ，记为：$\sigma\models\phi$。

定义 (重言式)

α是一个命题公式。若对任意真值赋值σ，都有：$\sigma\models\alpha$，即：$\sigma(\alpha)=1$，则称命题公式α为重言式。

重言式和重言后承

定义 (重言后承)

Φ是一个命题公式集，α是一个命题公式。对任意真值赋值σ，若$\sigma \models \Phi$，都有：$\sigma \models \alpha$，则称命题公式α是公式集Φ的重言后承，记为：$\Phi \models \alpha$。

- 当$\Phi = \{\phi\}$，记为：$\phi \models \alpha$；
- 当$\Phi = \emptyset$，记为：$\models \alpha$。

重言式和重言后承

由此可得：

- 若$\alpha \in \Phi$，则$\Phi \models \alpha$;
- α是重言式，当且仅当，$\emptyset \models \alpha$，当且仅当，$\models \alpha$;
- 若$\models \alpha$，则$\Phi \models \alpha$，即：重言式是任意公式集Φ的重言后承。

重言式和重言后承

证明：$\alpha \models \alpha \vee \beta$，$\neg\alpha \models \alpha \to \beta$。

证明：任取一个真值赋值σ。

(1) 若$\sigma(\alpha) = 1$，则

$$\sigma(\alpha \vee \beta) = \max(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = \max(1, \sigma(\beta)) = 1$$

重言式和重言后承

证明：$\alpha \models \alpha \vee \beta$，$\neg\alpha \models \alpha \to \beta$。

证明：任取一个真值赋值σ。

(1) 若$\sigma(\alpha) = 1$，则

$$\sigma(\alpha \vee \beta) = \max(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = \max(1, \sigma(\beta)) = 1$$

(2) 若$\sigma(\neg\alpha) = 1$，则

$$\begin{aligned}\sigma(\neg\alpha) = 1 &\Longrightarrow 1 - \sigma(\alpha) = 1 \\ &\Longrightarrow \sigma(\alpha) = 0\end{aligned}$$

重言式和重言后承

证明：$\alpha \models \alpha \vee \beta$，$\neg\alpha \models \alpha \to \beta$。

证明：任取一个真值赋值σ。

(1) 若$\sigma(\alpha) = 1$，则

$$\sigma(\alpha \vee \beta) = \max(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = \max(1, \sigma(\beta)) = 1$$

(2) 若$\sigma(\neg\alpha) = 1$，则

$$\begin{aligned} \sigma(\neg\alpha) = 1 &\Longrightarrow 1 - \sigma(\alpha) = 1 \\ &\Longrightarrow \sigma(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

所以，有：

$$\sigma(\alpha \to \beta) = \sigma(\alpha) \to \sigma(\beta) = 0 \to \sigma(\beta) = 1$$

重言式和重言后承

证明：若$\Phi \models \alpha$，$\Phi \models \alpha \to \beta$，则$\Phi \models \beta$。

证明：任取一个真值赋值σ，使得：$\sigma \models \Phi$。

由已知条件可知：$\sigma(\alpha) = 1$和$\sigma(\alpha \to \beta) = 1$。

$$
\begin{aligned}
\sigma(\alpha \to \beta) = 1 &\Longrightarrow \sigma(\alpha) \to \sigma(\beta) = 1 \\
&\Longrightarrow 1 \to \sigma(\beta) = 1 \qquad (\because \sigma(\alpha) = 1) \\
&\Longrightarrow \sigma(\beta) = 1
\end{aligned}
$$

所以，有：$\sigma(\beta) = 1$。

故，当$\sigma \models \Phi$时，有：$\sigma(\beta) = 1$，即：$\Phi \models \beta$。

重言式和重言后承

定义 (重言等值)

α和β是命题公式。若α和β互为重言后承，即：对任意真值赋值σ，都有$\sigma(\alpha)=\sigma(\beta)$，则称命题公式$\alpha$和 β是重言等值。

α和β互为重言后承，$\alpha \models \beta$和$\beta \models \alpha$。

重言式和重言后承

证明：$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \models \alpha$，当且仅当，$\models \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$。

证明

只需证：$\not\models \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$，当且仅当，$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \not\models \alpha$。

$$
\begin{aligned}
& \not\models \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha \\
\iff & \sigma(\alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha) = 0
\end{aligned}
$$

重言式和重言后承

证明：$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \models \alpha$，当且仅当，$\models \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$。

证明

只需证：$\not\models \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$，当且仅当，

$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \not\models \alpha$。

$$
\begin{aligned}
& \not\models \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha \\
\Longleftrightarrow\ & \sigma(\alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \sigma(\alpha_1) = 1,\ \sigma(\alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha) = 0
\end{aligned}
$$

重言式和重言后承

证明：$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \models \alpha$，当且仅当，$\models \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$。

证明

只需证：$\not\models \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$，当且仅当，

$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \not\models \alpha$。

$$
\begin{aligned}
& \not\models \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha \\
\Longleftrightarrow\ & \sigma(\alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \sigma(\alpha_1) = 1,\ \sigma(\alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \sigma(\alpha_1) = \sigma(\alpha_2) = 1,\ \sigma(\alpha_3 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha) = 0
\end{aligned}
$$

重言式和重言后承

证明：$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \models \alpha$，当且仅当，$\models \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$。

证明

只需证：$\not\models \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$，当且仅当，$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \not\models \alpha$。

$$
\begin{aligned}
& \not\models \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha \\
\Longleftrightarrow\ & \sigma(\alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \sigma(\alpha_1) = 1,\ \sigma(\alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \sigma(\alpha_1) = \sigma(\alpha_2) = 1,\ \sigma(\alpha_3 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \cdots \\
\Longleftrightarrow\ & \sigma(\alpha_1) = \sigma(\alpha_2) = \sigma(\alpha_3) = \cdots = \sigma(\alpha_n) = 1,\ \sigma(\alpha) = 0
\end{aligned}
$$

重言式和重言后承

证明：$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \models \alpha$，当且仅当，$\models \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$。

证明

只需证：$\not\models \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha$，当且仅当，$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \not\models \alpha$。

$$
\begin{aligned}
& \not\models \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha \\
\iff & \sigma(\alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha) = 0 \\
\iff & \sigma(\alpha_1) = 1,\ \sigma(\alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha) = 0 \\
\iff & \sigma(\alpha_1) = \sigma(\alpha_2) = 1,\ \sigma(\alpha_3 \to \cdots \to \alpha_n \to \alpha) = 0 \\
\iff & \cdots \\
\iff & \sigma(\alpha_1) = \sigma(\alpha_2) = \sigma(\alpha_3) = \cdots = \sigma(\alpha_n) = 1,\ \sigma(\alpha) = 0 \\
\iff & \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \not\models \alpha
\end{aligned}
$$

重言式和重言后承

证明：$\Phi, \alpha \models \beta$，当且仅当，$\Phi \models \alpha \rightarrow \beta$。

证明

任取一个真值赋值σ。

重言式和重言后承

证明：$\Phi, \alpha \models \beta$，当且仅当，$\Phi \models \alpha \to \beta$。

证明

任取一个真值赋值σ。

(1) $\Phi, \alpha \models \beta$

由真值赋值定义可知：$\sigma \models \Phi$，$\sigma(\alpha) = 1$和$\sigma(\beta) = 1$。

$$\sigma(\alpha \to \beta) = \sigma(\alpha) \to \sigma(\beta) = 1 \to 1 = 1$$

所以，有：$\Phi \models \alpha \to \beta$。

重言式和重言后承

证明：$\Phi, \alpha \models \beta$，当且仅当，$\Phi \models \alpha \to \beta$。

证明

任取一个真值赋值σ。

(2) $\Phi \models \alpha \to \beta$

由真值赋值定义可知：$\sigma \models \Phi$，$\sigma(\alpha \to \beta) = 1$。

重言式和重言后承

证明：$\Phi, \alpha \models \beta$，当且仅当，$\Phi \models \alpha \to \beta$。

证明

任取一个真值赋值σ。

(2) $\Phi \models \alpha \to \beta$

由真值赋值定义可知：$\sigma \models \Phi$，$\sigma(\alpha \to \beta) = 1$。

假设：$\sigma(\alpha) = 1$。

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha \to \beta) = 1 &\Longrightarrow \sigma(\alpha) \to \sigma(\beta) = 1 \\ &\Longrightarrow 1 \to \sigma(\beta) = 1 \qquad\qquad (\because \sigma(\alpha) = 1) \\ &\Longrightarrow \sigma(\beta) = 1 \end{aligned}$$

重言式和重言后承

证明：$\Phi, \alpha \models \beta$，当且仅当，$\Phi \models \alpha \to \beta$。

证明

任取一个真值赋值σ。

(2) $\Phi \models \alpha \to \beta$

由真值赋值定义可知：$\sigma \models \Phi$，$\sigma(\alpha \to \beta) = 1$。

假设：$\sigma(\alpha) = 1$。

$$
\begin{aligned}
\sigma(\alpha \to \beta) = 1 &\Longrightarrow \sigma(\alpha) \to \sigma(\beta) = 1 \\
&\Longrightarrow 1 \to \sigma(\beta) = 1 \qquad\qquad (\because \sigma(\alpha) = 1) \\
&\Longrightarrow \sigma(\beta) = 1
\end{aligned}
$$

由$\sigma \models \Phi$和$\sigma(\alpha) = 1$可得：$\sigma(\beta) = 1$，即：$\Phi, \alpha \models \beta$。

重言式和重言后承

证明：对任意命题公式α和β。

- $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \models \beta$。
- α和β重言等值，当且仅当，$(\alpha \leftrightarrow \beta)$是重言式。

重言式和重言后承

下面描述系统的二个重要概念：**可靠性**和**完备性**。

- 如果一个系统可证的公式都是重言式，则该系统是**可靠**的。也就是说，若$\vdash \alpha$，则$\models \alpha$。
- 若公式是重言式都是可证明的，则该系统是**完全**的(完备的)。也就是说，若$\models \alpha$，则$\vdash \alpha$。

重言式和重言后承

若系统是可靠的和完全的，则“推理是否正确”是可判定的。

- 正确推理所得到的蕴涵式在系统中都是可证公式；
- 若蕴涵式在系统中不可证，则推理一定不正确。

重言式和重言后承

系统是协调的含义：不存在公式α，使得：

$$\vdash \alpha, \neg\alpha$$

重言式和重言后承

系统是协调的含义：不存在公式α，使得：

$$\vdash \alpha, \neg\alpha$$

$\alpha \models \beta$和$\alpha \vdash \beta$中关系$\models$和$\vdash$的差异：

- $\models$是语义的，表示公式α和β之间的真假关系，与演绎系统中的公理和推理规则无关；

重言式和重言后承

系统是协调的含义：不存在公式α，使得：

$$\vdash \alpha, \neg\alpha$$

$\alpha \models \beta$和$\alpha \vdash \beta$中关系$\models$和$\vdash$的差异：

- $\models$是语义的，表示公式α和β之间的真假关系，与演绎系统中的公理和推理规则无关；
- $\vdash$是语法的，表示利用演绎系统中的公理和推理规则，由α能推导出β，与公式赋值及其真假无关。