# 第二章 线性时不变系统

Linear Time-Invariant Systems

# 本章的基本内容

- 信号的时域分解—用$\delta[n]$表示离散时间信号；用$\delta(t)$表示连续时间信号。
- LTI系统的时域分析—卷积和与卷积积分。
- LTI系统的性质。
- LTI系统的微分方程及差分方程表示。
- LTI系统的框图结构表示。
- 奇异函数。

# 引言

- 由于LTI系统满足齐次性和可加性，并且具有时不变性的特点，因而为建立信号与系统分析的理论与方法奠定了基础。
  - 基本思想：如果能把任意输入信号分解成基本信号的线性组合，那么只要得到了LTI系统对基本信号的响应，就可以利用系统的线性特性，将系统对任意输入信号产生的响应表示成系统对基本信号的响应的线性组合。

$$x(t)=\sum_i a_i x_i(t)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

则 $$y(t)=\sum_i a_i y_i(t)$$

# 引言

- 问题的实质：
  1. 研究信号的分解：即以什么样的信号作为构成任意信号的基本信号单元，如何用基本信号单元的线性组合来构成任意信号；
  2. 如何得到LTI系统对基本单元信号的响应。
- 作为基本单元的信号应满足以下要求：
  1. 本身尽可能简单，并且用它的线性组合能够表示（构成）尽可能广泛的其它信号；
  2. LTI系统对这种信号的响应易于求得。
- 分析方法：信号分解可以在时域进行，也可以在频域或变换域进行，相应地就产生了对LTI系统的时域分析法、频域分析法和变换域分析法。

- **2.1 离散时间LTI系统：卷积和**
  **(Discrete-Time LTI Systems: The Convolution Sum)**

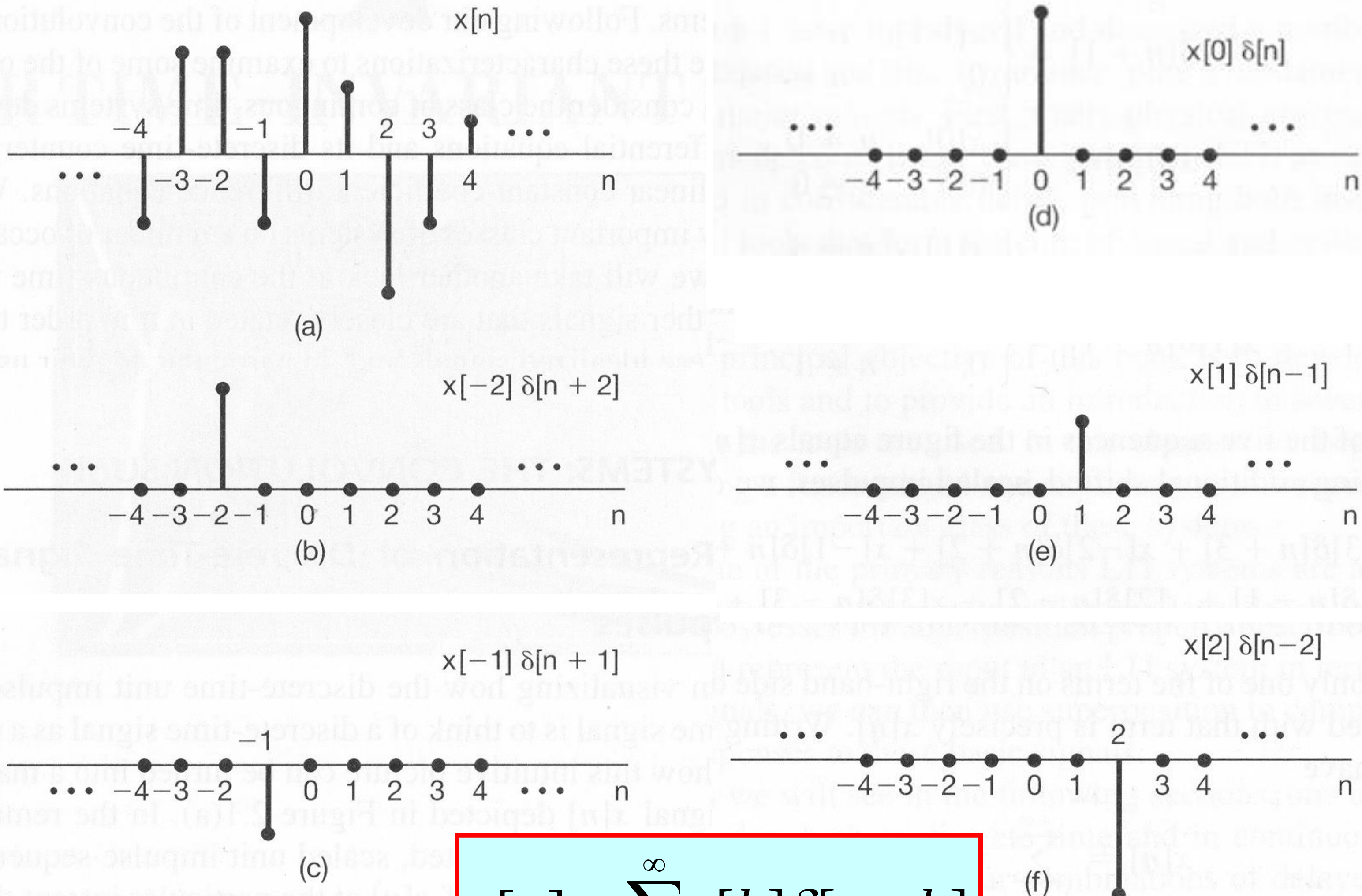
# 2.1 离散时间LTI系统：卷积和
## (Discrete-Time LTI Systems: The Convolution Sum)

- 一. 用单位脉冲表示离散时间信号：
  - 离散时间信号中,最简单的是$\delta[n]$,我们已经看到可以由它的线性组合构成$u[n]$，即：

$$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$

  - 对任何离散时间信号 $x[n]$,如果每次从其中取出一个点，就可以将信号拆开来，每次取出的一个点都可以表示为不同加权、不同位置的单位脉冲。

# 2.1 离散时间LTI系统：卷积和




$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]$$

# 2.1 离散时间LTI系统：卷积和

- 表明：任何离散时间信号都可以被分解成移位加权的单位脉冲信号的线性组合。

- 二. 卷积和（Convolution Sum）
  - 如果一个线性系统对 $\delta[n-k]$ 的响应是 $h_k[n]$，由线性特性就有系统对任何输入 $x[n]$ 的响应为：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h_k[n]$$

  - 若系统具有时不变性，即 $\delta[n-k]\rightarrow h[n-k]$ 则：

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=x[n]*h[n]$$

# 2.1 离散时间LTI系统：卷积和

- 这种求得系统响应的运算关系称为**卷积和**（**convolution sum**）。
- 这表明：只要得到了LTI系统对 $\delta[n]$ 的响应 $h[n]$——**单位脉冲响应**(**impulse response**)，就可以得到LTI系统对任何输入信号 $x[n]$ 的响应：

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n]}$$

- **一个LTI系统可以完全由它的单位脉冲响应来表征。**

# 2.1 离散时间LTI系统：卷积和

Unit impulse response

$\delta[n] \longrightarrow$ SYSTEM $\longrightarrow h[n]$

Time invariant

$\delta[n-k] \longrightarrow$ SYSTEM $\longrightarrow h[n-k]$

Homogeneity

$x[k]\delta[n-k] \longrightarrow$ SYSTEM $\longrightarrow x[k]h[n-k]$

Additivity

$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]} \longrightarrow$ SYSTEM $\longrightarrow \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}$

$x[n]$ $\qquad$ $y[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

# 2.1 离散时间LTI系统：卷积和

- 三. 卷积和的计算：按定义计算、图解法、对位相乘求和法

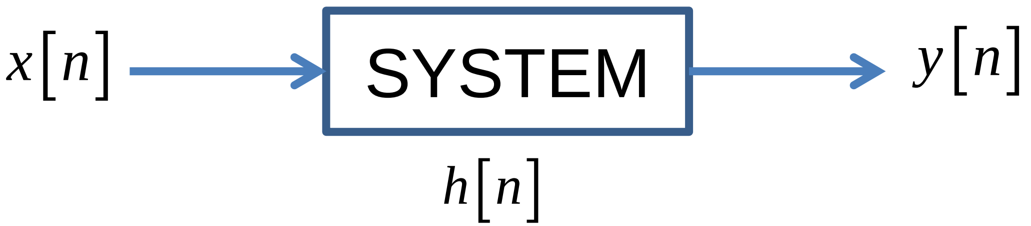
$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

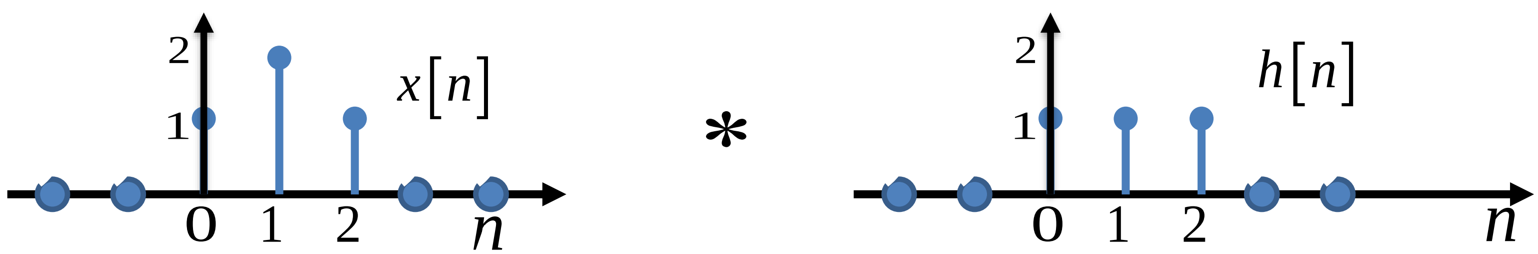
  - 图解法运算过程：
    将一个信号 $x[k]$ 不动，另一个信号经反转后成为 $h[-k]$，再随参变量**n**移位。在每个**n**值的情况下，将 $x[k]$ 与 $h[n-k]$ 对应点相乘，再把乘积的各点值累加，即得到在各时刻**n**的卷积和：$x[n]*h[n]$。

# 2.1 离散时间LTI系统：卷积和

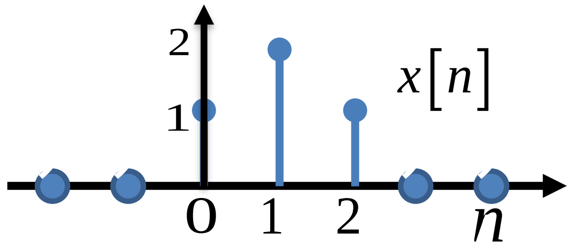
**例1：**

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

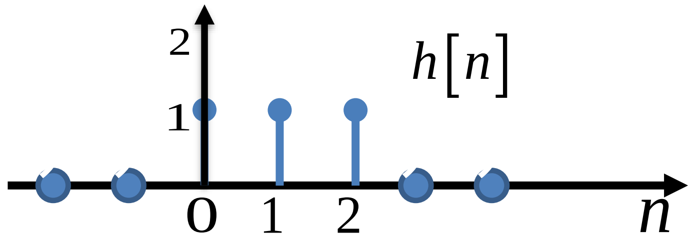


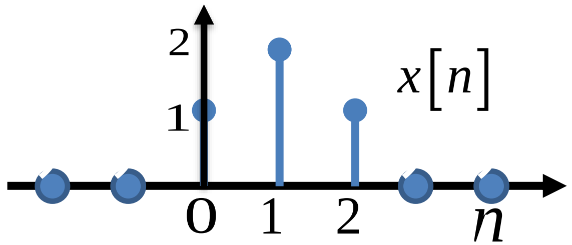
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$



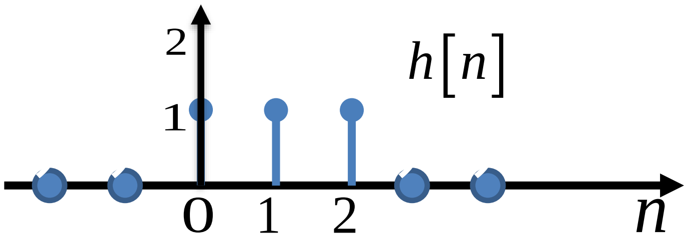

*



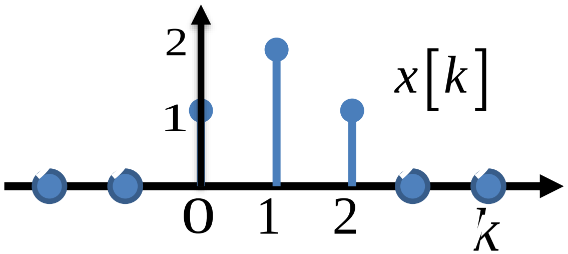
$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k]$$



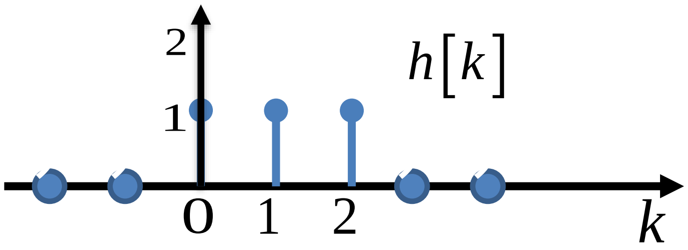

$*$



$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k]$$

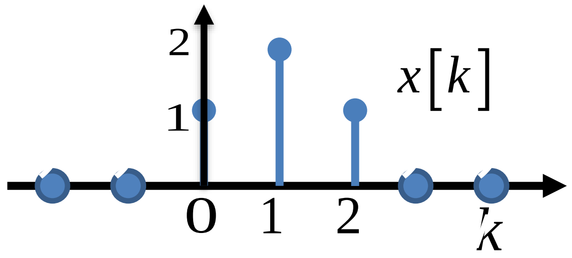



$*$

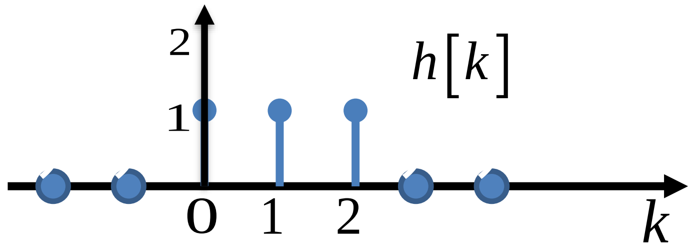


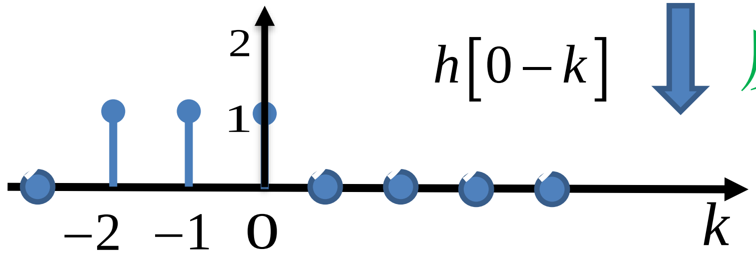

变量代换

$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k]$$



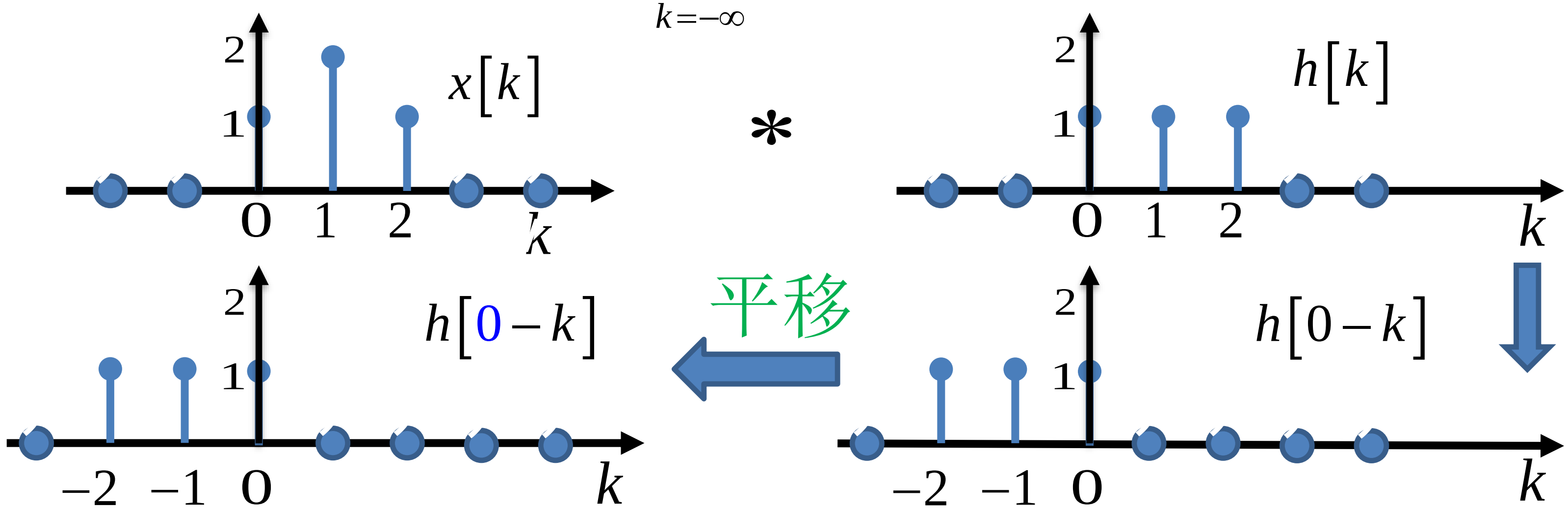

*



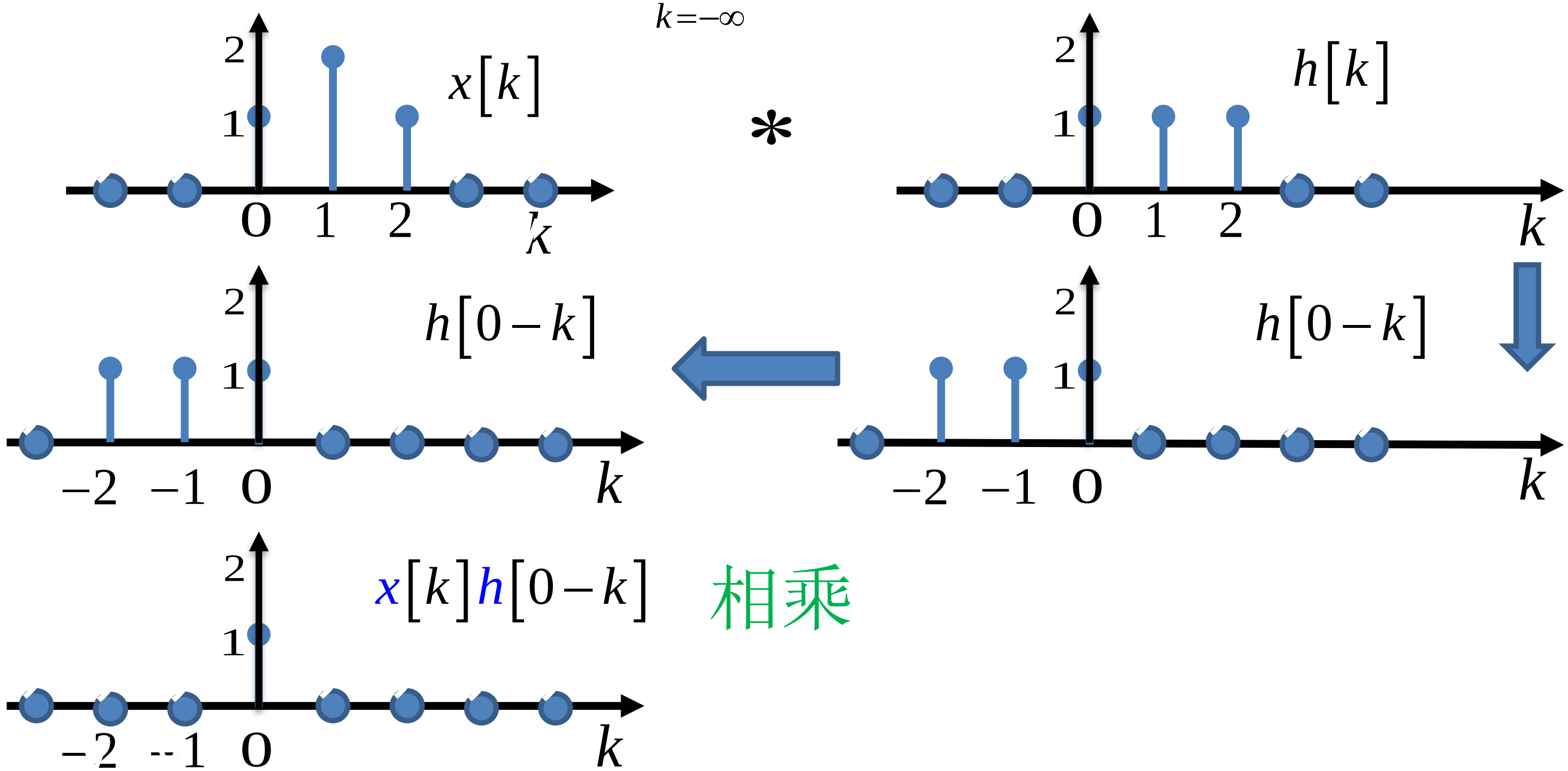




反折

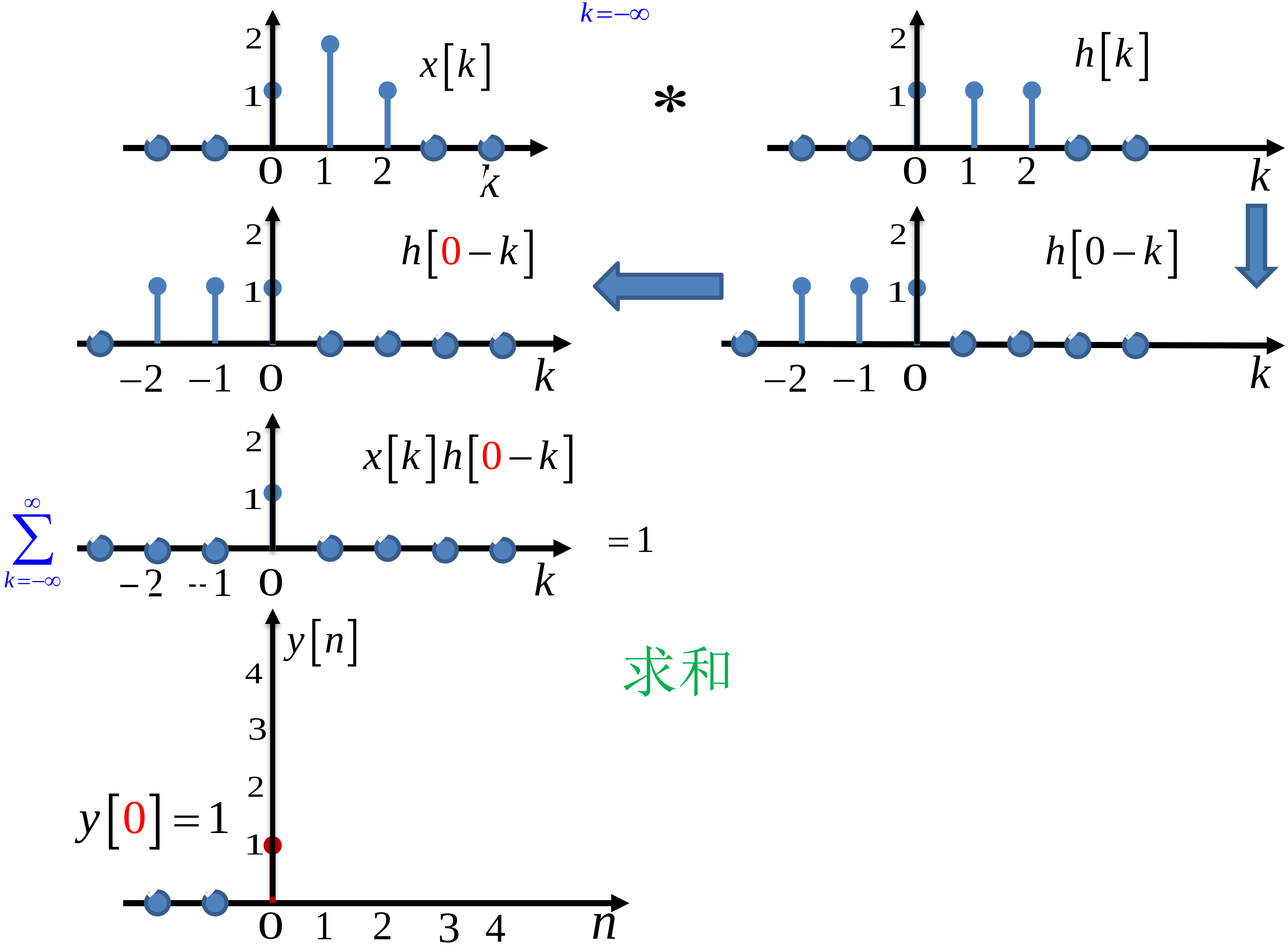
$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k]$$



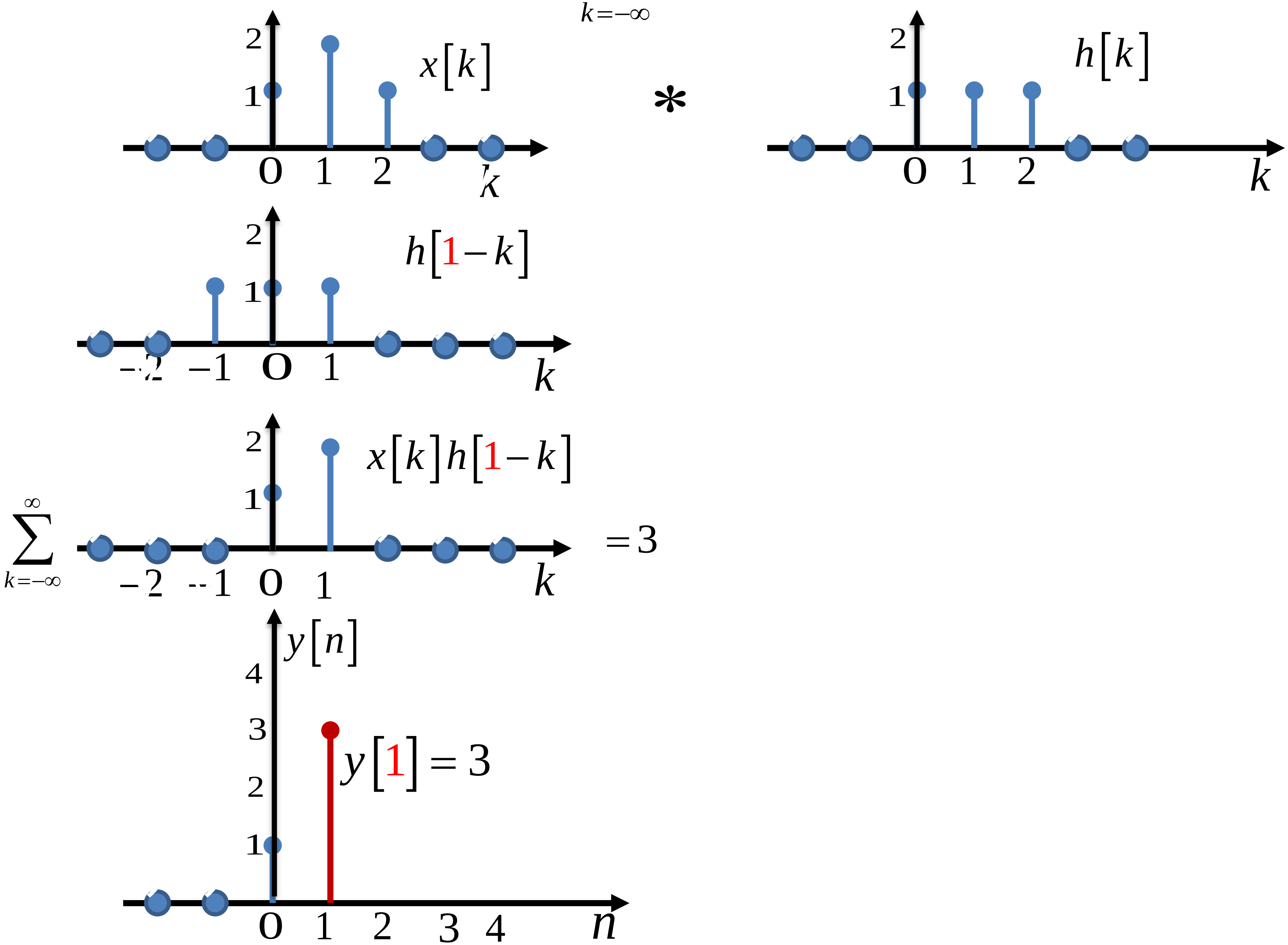
$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k]$$



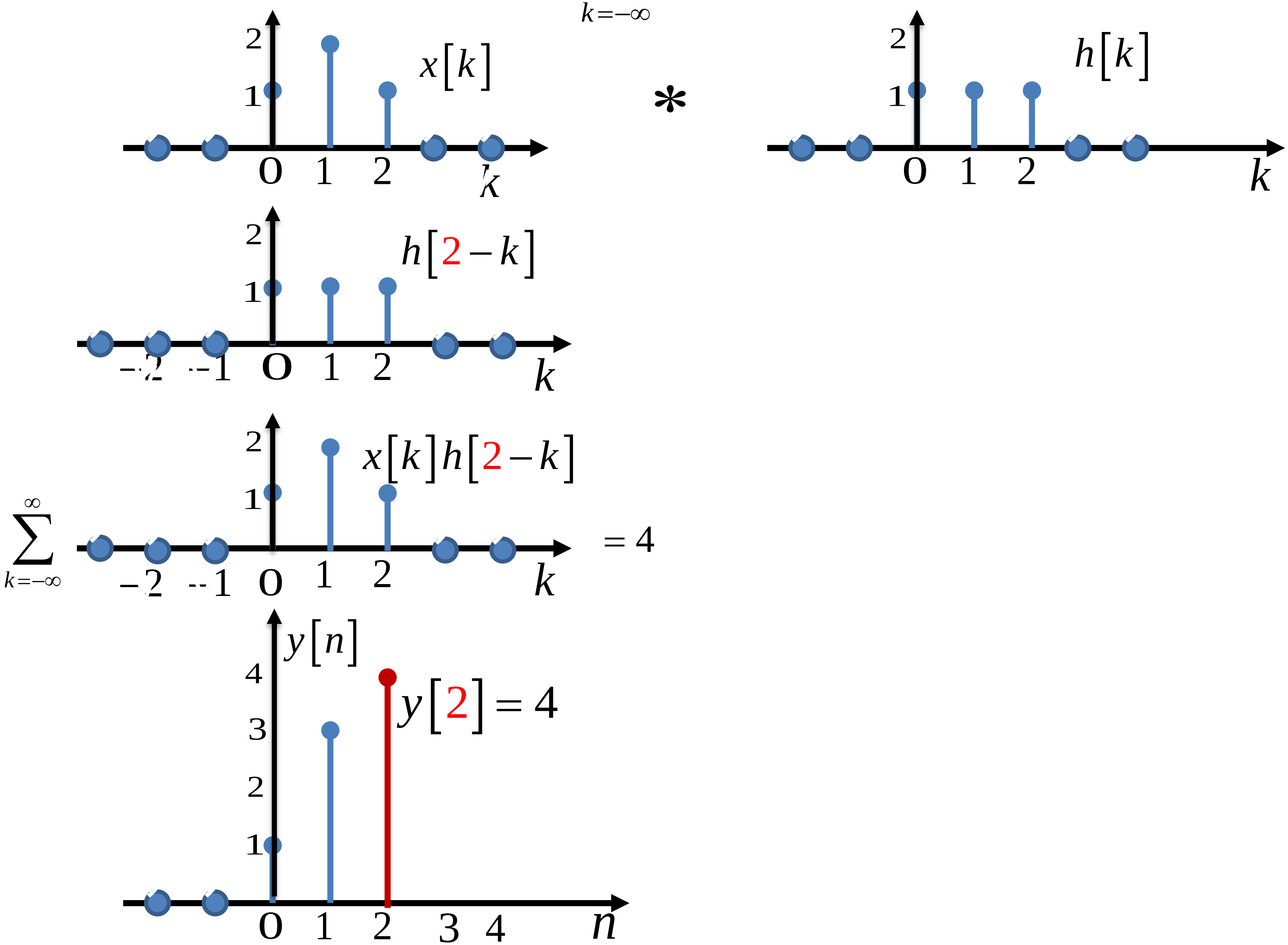
$$y[0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[0-k]$$



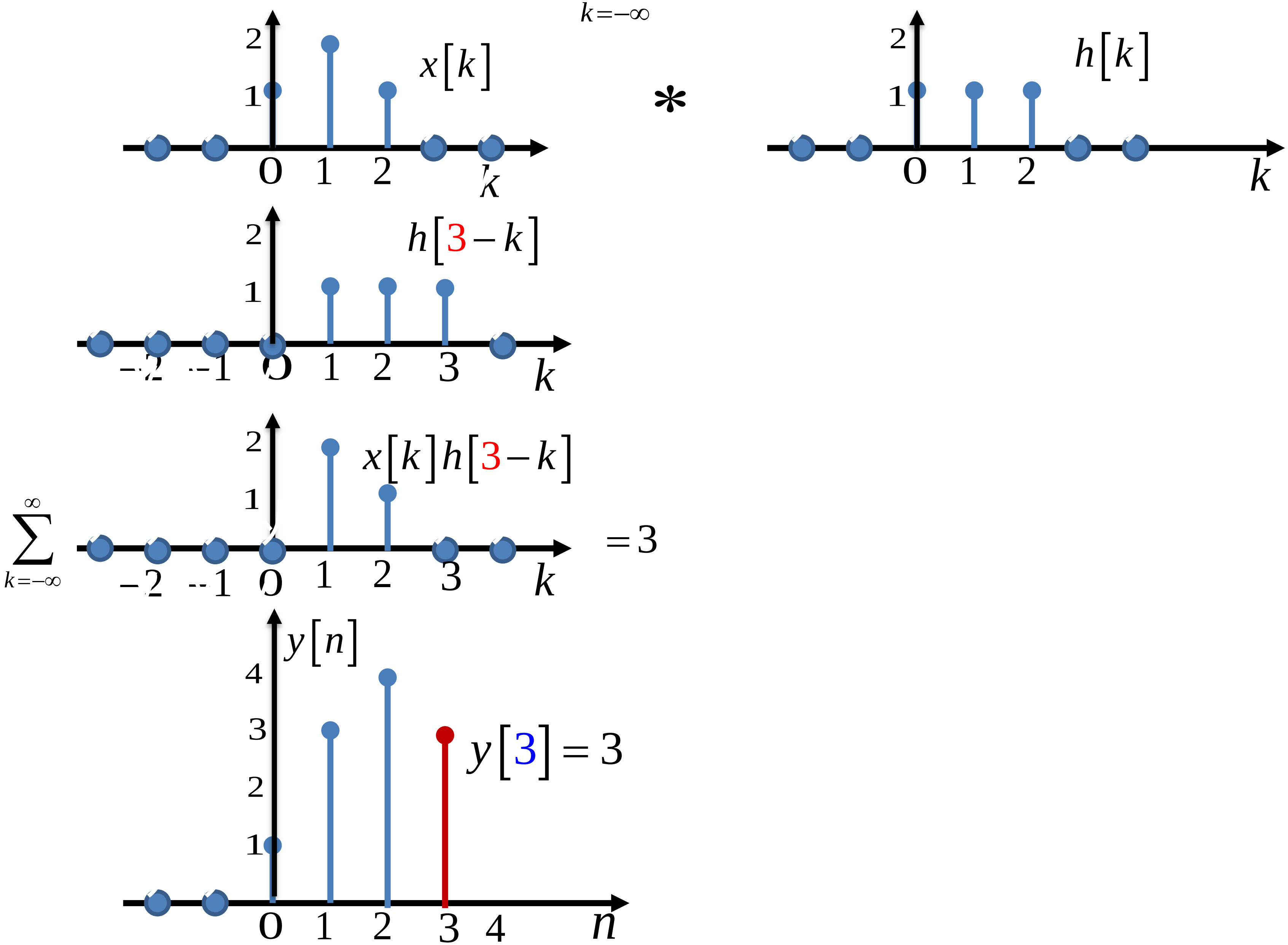
$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k]$$



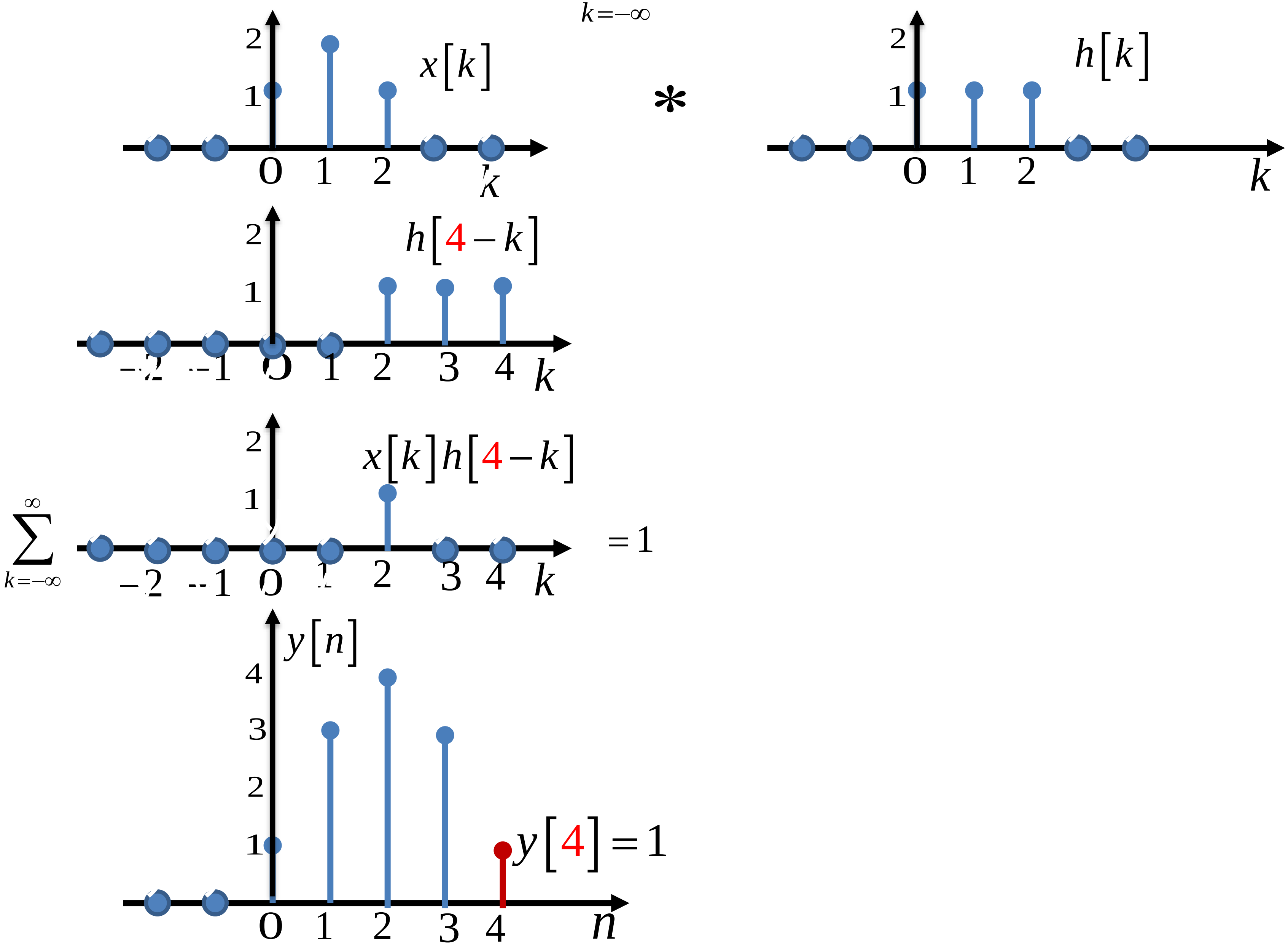
$$y[2]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k]$$



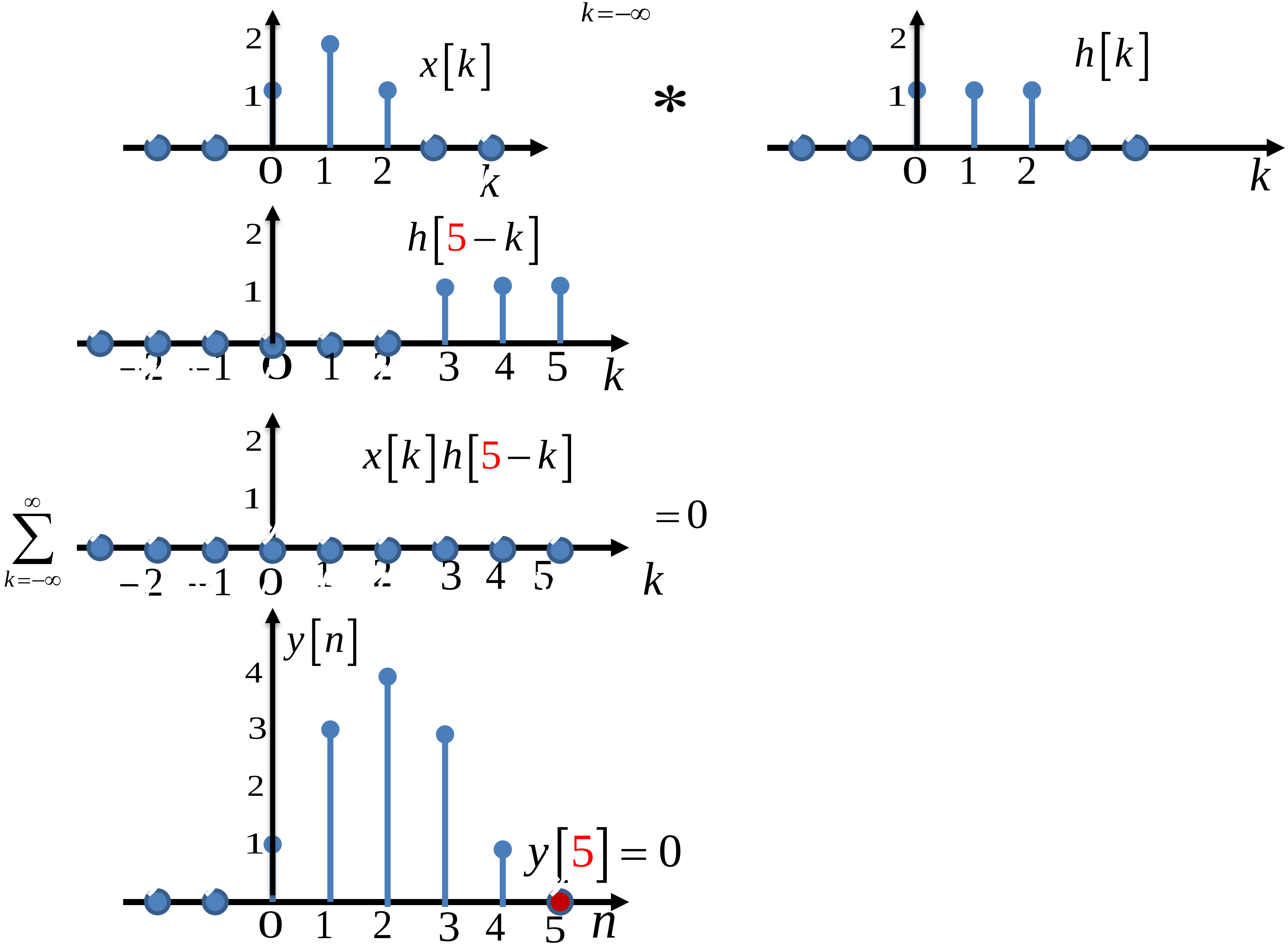
$$y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[3-k]$$



$$y[4]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[4-k]$$



$$y[5] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[5-k]$$



# 2.1 离散时间LTI系统：卷积和

– 图解法求卷积和步骤：

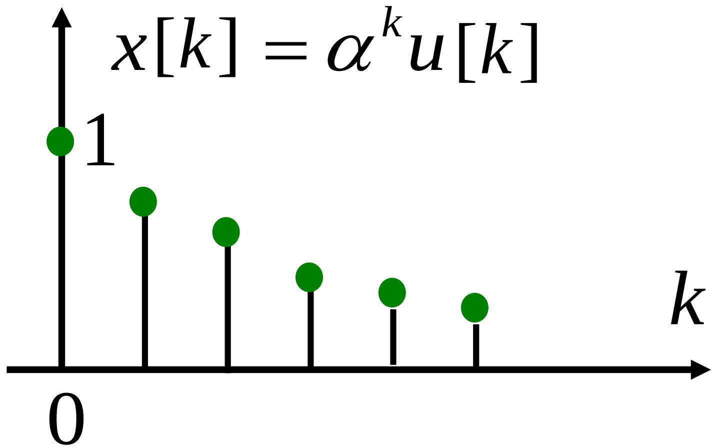
1. 变量置换：将$x[n]$，$h[n]$变为$x[k]$，$h[k]$，以$k$为求和变量；
2. 反褶：将$h[k]$变为$h[-k]$;
3. 平移：将$h[-k]$平移$n$，变为$h[-[k-n]]$;
4. 相乘：将$x[k]$和$h[n-k]$相乘;
5. 求和：对乘积$x[k]h[n-k]$在$k$上取和。

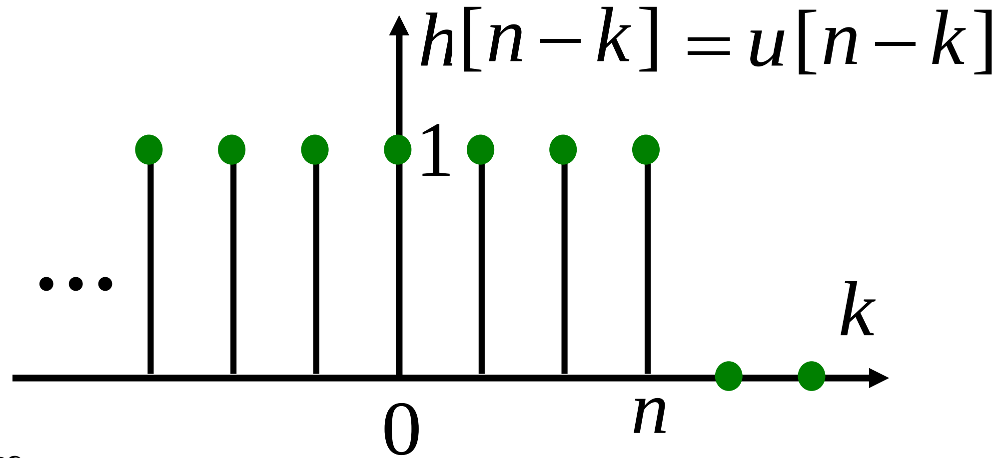
– 通过图形帮助确定反转移位信号的区间表示，对于确定卷积和计算的区段及各区段求和的上下限是很有用的。

# 2.1 离散时间LTI系统：卷积和

**例2：** $x[n]=\alpha^n u[n]$ $\quad 0<\alpha<1 \quad$ $h[n]=u[n]$

求$y[n]=x[n]*h[n]$




$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

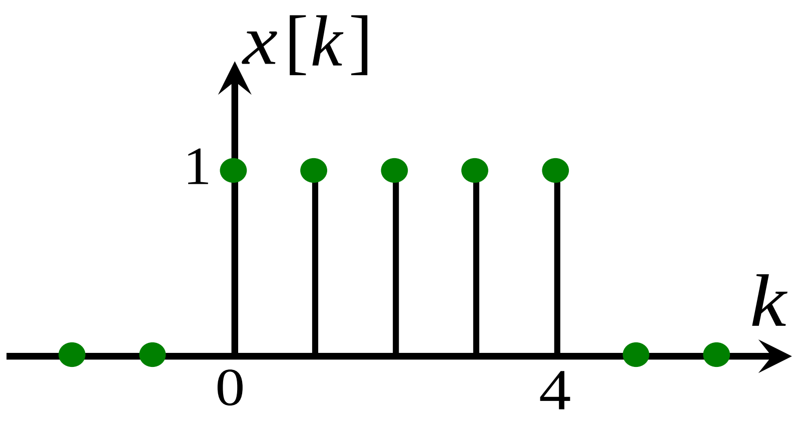
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^k u[k]u[n-k]=\sum_{k=0}^{n}\alpha^k=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u[n]$$

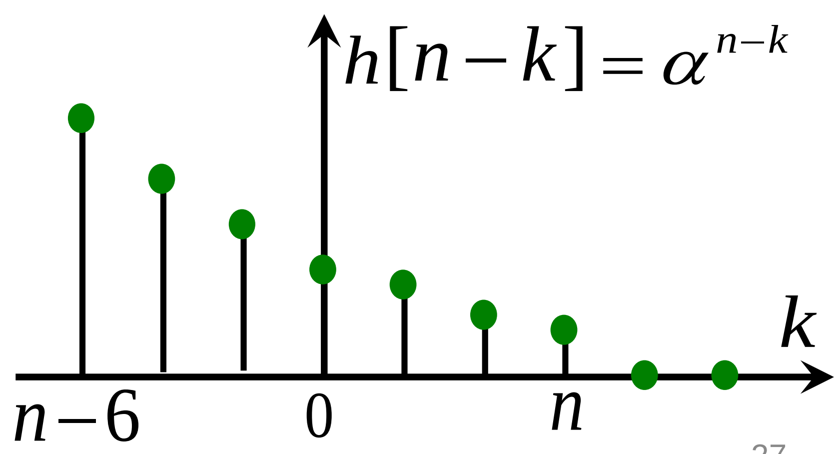
# 2.1 离散时间LTI系统：卷积和

**例3：**

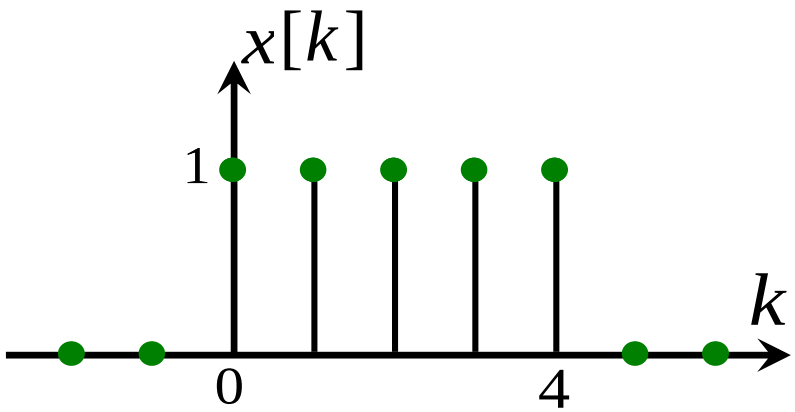
$$x[n]=\begin{cases}1 & 0\le n\le 4\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

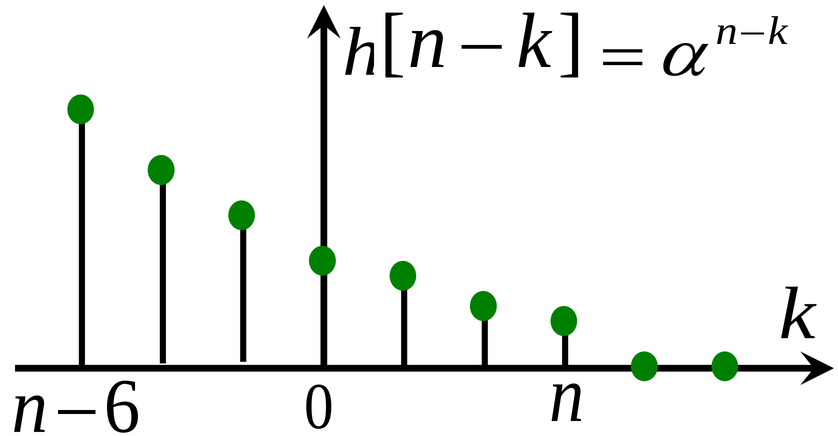
$$h[n]=\begin{cases}\alpha^n & 0\le n\le 6\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\qquad(\alpha>1)$$



# 2.1 离散时间LTI系统：卷积和



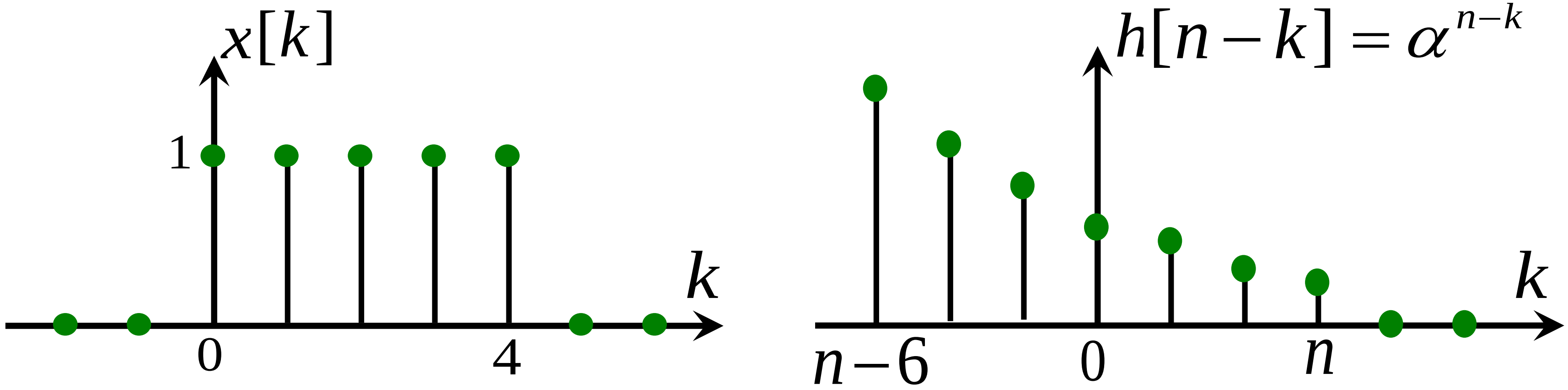




① $n<0$ 时，　　$y[n]=0$

② $0\le n\le 4$ 时，　　$y[n]=\sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}=\alpha^{n}\sum_{k=0}^{n}\alpha^{-k}$

$$=\alpha^{n}\cdot\frac{1-\alpha^{-(n+1)}}{1-\alpha^{-1}}=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

# 2.1 离散时间LTI系统：卷积和




③ $4<n\le 6$ 时， $$y[n]=\sum_{k=0}^{4}\alpha^{n-k}=\alpha^{n}\cdot\frac{1-\alpha^{-5}}{1-\alpha^{-1}}$$

$$=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

④ $6<n\le 10$ 时， $$y[n]=\sum_{k=n-6}^{4}\alpha^{n-k}=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}$$

⑤ $n>10$ 时， $$y[n]=0$$

# 2.1 离散时间LTI系统：卷积和

– **对位相乘求和法**：将序列$x[n]$与$h[n]$以各自$n$的最高值按右端对齐，然后把逐个样值对应相乘但不进位，最后把同一列上的乘积值对位求和得到卷积和序列。

例： $x[n]=\{2,\underset{\uparrow}{1},4,1\}$ , $h[n]=\{\underset{\uparrow}{3},1,5\}$

解：

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 2 & 1 & 4 & 1 \\
 & & & 3 & 1 & 5 \\
\hline
 & & 10 & 5 & 20 & 5 \\
 & 2 & 1 & 4 & 1 & \\
6 & 3 & 12 & 3 & & \\
\hline
6 & \underset{\uparrow}{5} & 23 & 12 & 21 & 5
\end{array}
$$

$$x[n]*h[n]=\{6\ \underset{\uparrow}{5}\ 23\ 12\ 21\ 5\}$$

**优点**：计算非常简单。

**缺点**：①只适用于两个有限长序列的卷积和；
②一般情况下，无法写出$y[n]$的封闭表达式。

- **2.2 连续时间LTI系统：卷积积分**
  **(Continuous-Time LTI Systems: The Convolution Integral)**

# 2.2 连续时间LTI系统：卷积积分
## (Continuous-Time LTI Systems: The Convolution Integral)

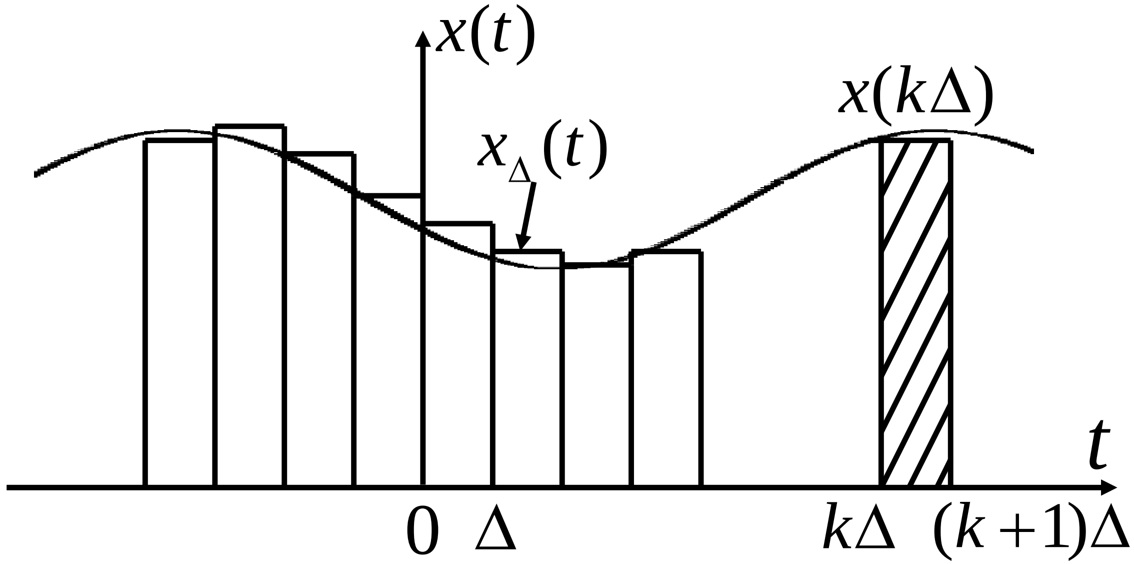
- 一. 用冲激信号表示连续时间信号：
  - 与离散时间信号分解的思想相一致，连续时间信号应该也可以分解成一系列移位加权的单位冲激信号的线性组合。至少单位阶跃与单位冲激之间有这种关系：

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau$$

  - 对一般信号 $x(t)$，可以将其分成很多 $\Delta$ 宽度的区段，用一个阶梯信号 $x_\Delta(t)$ 近似表示 $x(t)$。当 $\Delta\to 0$ 时，有：

$$x_\Delta(t)\to x(t)$$

# 2.2 连续时间LTI系统：卷积积分




引入$\delta_\Delta(t)$，即： $\delta_\Delta(t)=\begin{cases}1/\Delta & 0<t<\Delta \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

则有： $\Delta\delta_\Delta(t)=\begin{cases}1 & 0<t<\Delta \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

# 2.2 连续时间LTI系统：卷积积分

第$k$个矩形可表示为： $x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$

这些矩形叠加起来就成为阶梯形信号 $x_\Delta(t)$，

即： $$x_\Delta(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

当 $\Delta\to 0$ 时， $k\Delta\to\tau$ $\quad \Delta\to d\tau$ $\quad \sum\to\int$

$\delta_\Delta(t-k\Delta)\to\delta(t-\tau)$ $\quad x_\Delta(t)\to x(t)$

于是： $$\boxed{x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau}$$

表明：任何连续时间信号都可以被分解成移位加权的单位冲激信号的线性组合。

# 2.2 连续时间LTI系统：卷积积分

- 二. 卷积积分（The Convolution Integral）
  - 与离散时间系统的分析类似，如果一个**线性**系统对 $\delta(t-\tau)$ 的响应为 $h_\tau(t)$，则该系统对 $x(t)$ 的响应可表示为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h_\tau(t)d\tau$$

  - 若系统是**时不变**的，即：若 $\delta(t)\rightarrow h(t)$，则有：$\delta(t-\tau)\rightarrow h(t-\tau)$ 于是系统对任意输入 $x(t)$ 的响应可表示为：

$$\boxed{y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)}$$

# 2.2 连续时间LTI系统：卷积积分

- 表明：**LTI系统可以完全由它的单位冲激响应来表征。**这种求得系统响应的运算关系称为**卷积积分**（**convolution integral**）。

- 三. 卷积积分的计算
  - 运算过程的实质也是：参与卷积的两个信号中，一个不动，另一个反转后随参变量*t*移动。对每一个*t*的值，将 $x(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$ 对应相乘，再计算相乘后曲线所包围的面积。
  - 可以借助图解法确定积分区间和积分上下限。

# 2.2 连续时间LTI系统：卷积积分

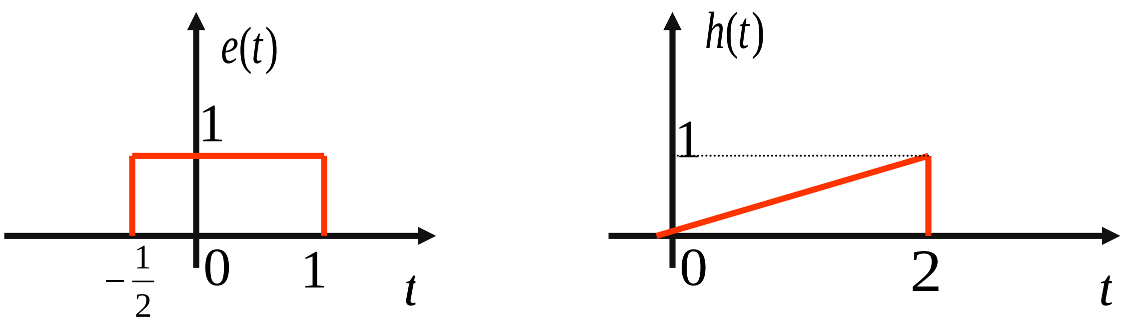
$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

– 要完成卷积运算的步骤：

1. 变量置换：将$x(t)$ ,$h(t)$变为$x(\tau)$， $h(\tau)$ ，以$\tau$为积分变量；
2. 反褶：将$h(\tau)$变为$h(-\tau)$;
3. 平移：将$h(-\tau)$平移$t$，变为$h[-(\tau - t)]$;
4. 相乘： 将$x(\tau)$和$h(t - \tau)$相乘;
5. 积分：求$x(\tau)h(t - \tau)$乘积下的面积。

# 2.2 连续时间LTI系统：卷积积分

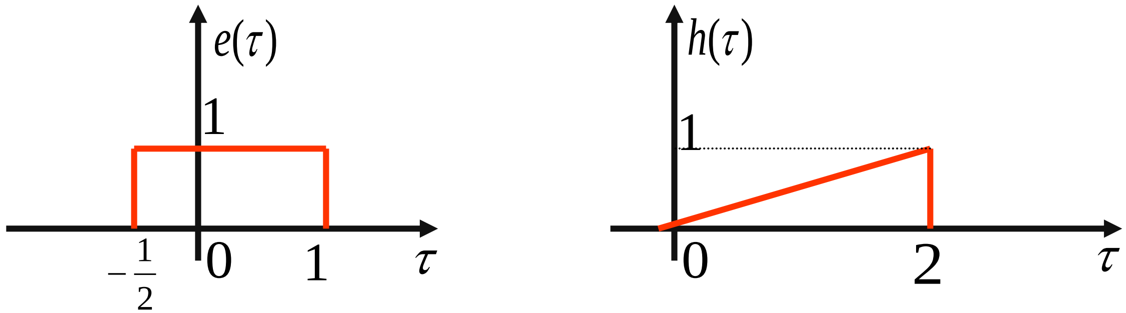
**例1:** Determine and sketch $e(t) * h(t)$



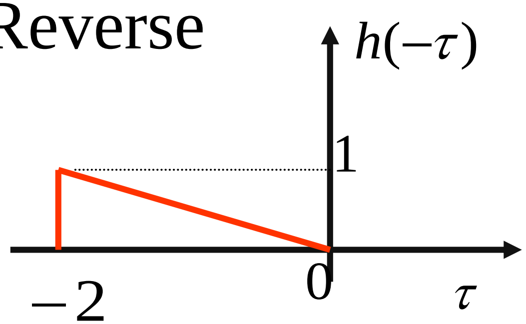

**例2:** $x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0 \qquad h(t) = u(t)$

求 $x(t) * h(t)$

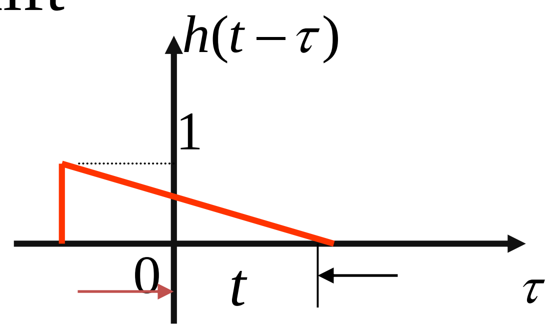
(1)



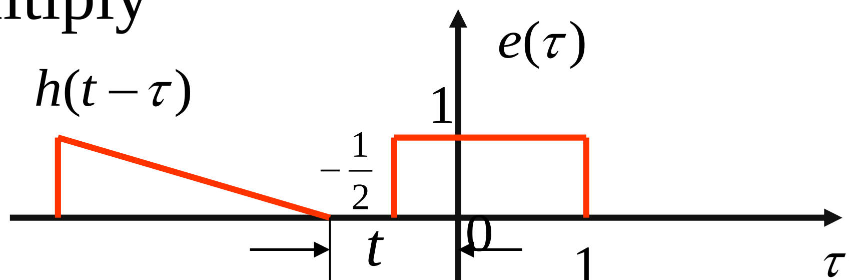

(2) Reverse



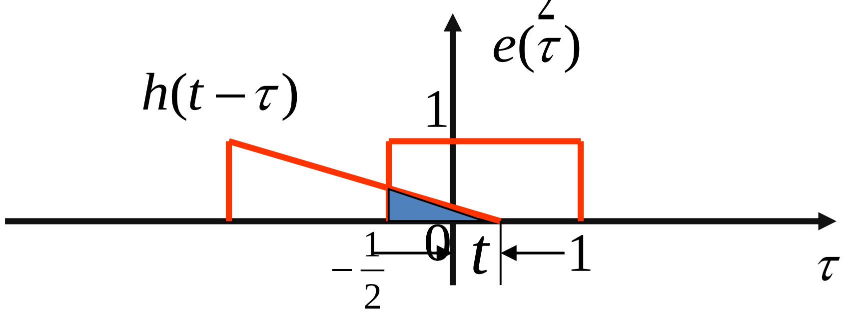

(3) Shift



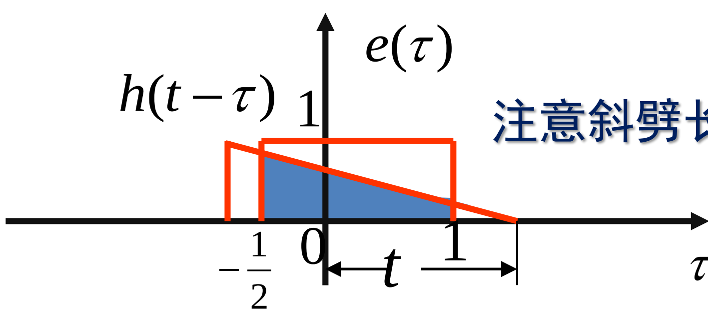
# (4)Multiply




$(a)\quad -\infty < t \le -\frac{1}{2}$




$(b)\quad -\frac{1}{2} \le t \le 1$




$(c)\quad 1 \le t \le \frac{3}{2}$

注意斜劈长度2

$(a)\quad -\infty < t \le -\frac{1}{2}$

$$e(t) * h(t) = 0$$

$(b)\quad -\frac{1}{2} \le t \le 1$

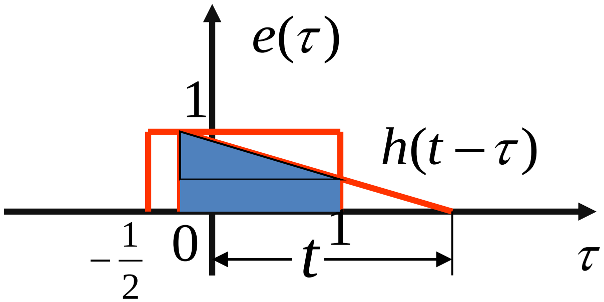
$$e(t) * h(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{t} 1 \times \frac{1}{2}(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{t^2}{4} + \frac{t}{4} + \frac{1}{16}$$

$(c)\quad 1 \le t \le \frac{3}{2}$

$$e(t) * h(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} 1 \times \frac{1}{2}(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{3}{4}t - \frac{3}{16}$$

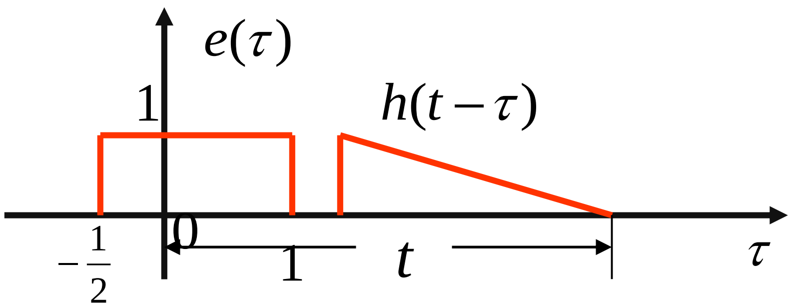



$(d)\quad \frac{3}{2} \le t \le 3$

$(d)\quad \frac{3}{2} \le t \le 3$

$$e(t) * h(t) = \int_{t-2}^{1} 1 \times \frac{1}{2}(t-\tau)d\tau$$

$$= -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + \frac{3}{4}$$

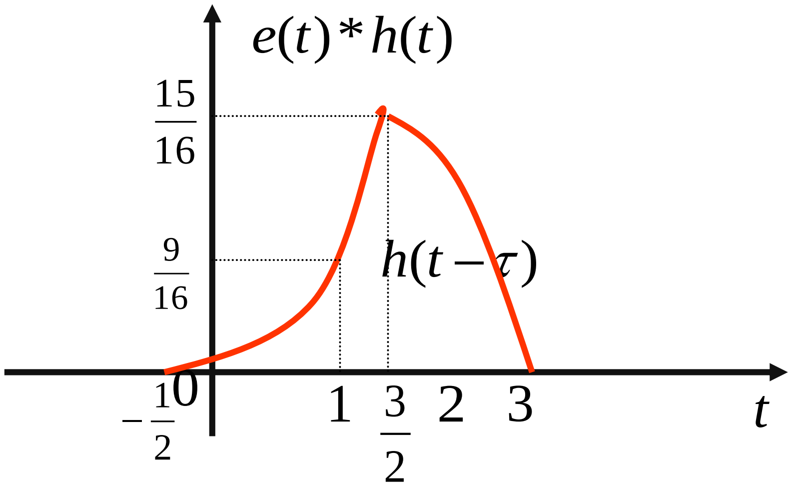



$(e)\quad 3 < t \le \infty$

$(e)\quad 3 < t \le \infty$

$$e(t) * h(t) = 0$$

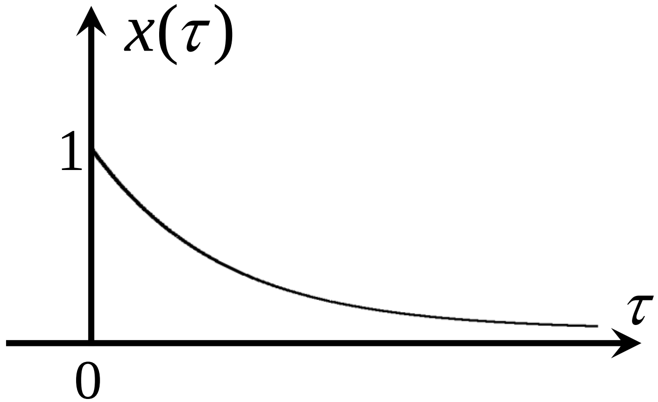
（5）Integral

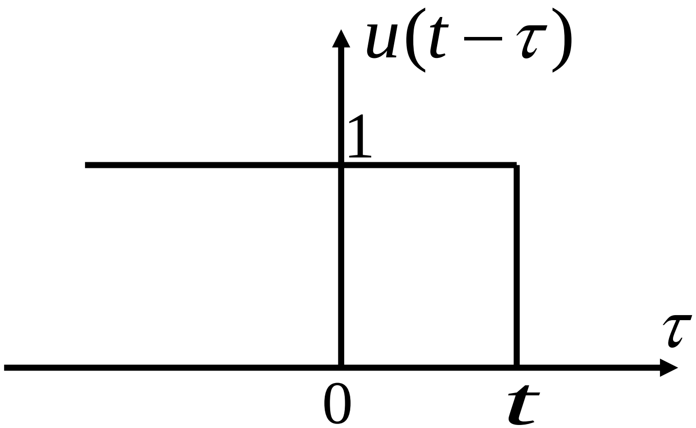



$$e(t)*h(t)$$

# 2.2 连续时间LTI系统：卷积积分

例2: $x(t)=e^{-at}u(t)$, $a>0$ $h(t)=u(t)$




$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{0}^{t}e^{-a\tau}d\tau=\frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)$$

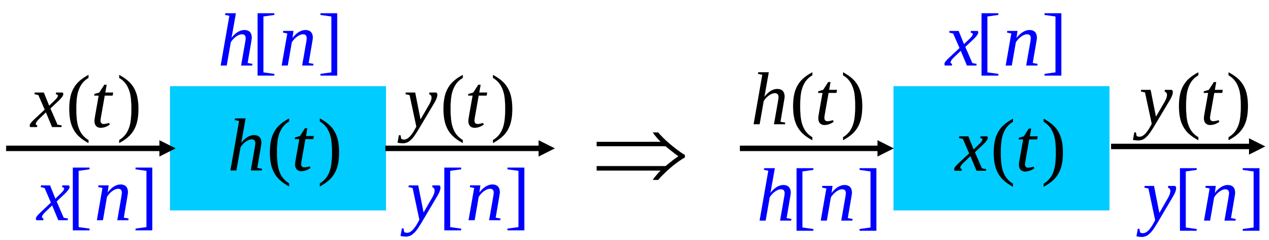
- **2.3 线性时不变系统的性质**
  **(Properties of Linear Time-Invariant Systems)**

# 2.3 线性时不变系统的性质
# (Properties of Linear Time-Invariant Systems)

- 一. 卷积积分与卷积和的性质
- 1. 交换律:

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau=h(t)*x(t)$$

$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[n-k]h[k]=h[n]*x[n]$$



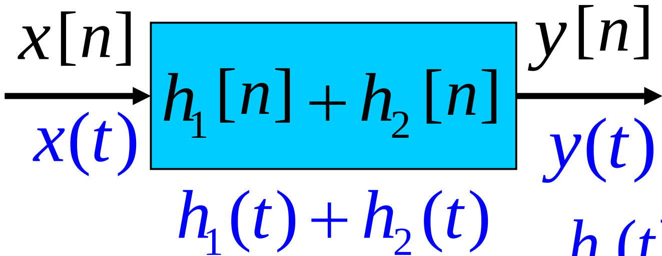

**一个单位冲激响应是 $h(t)$ 的LTI系统对输入信号 $x(t)$ 所产生的响应，与一个单位冲激响应是 $x(t)$ 的LTI系统对输入信号 $h(t)$ 所产生的响应相同。**

# 2.3 线性时不变系统的性质

- 2. 分配律：

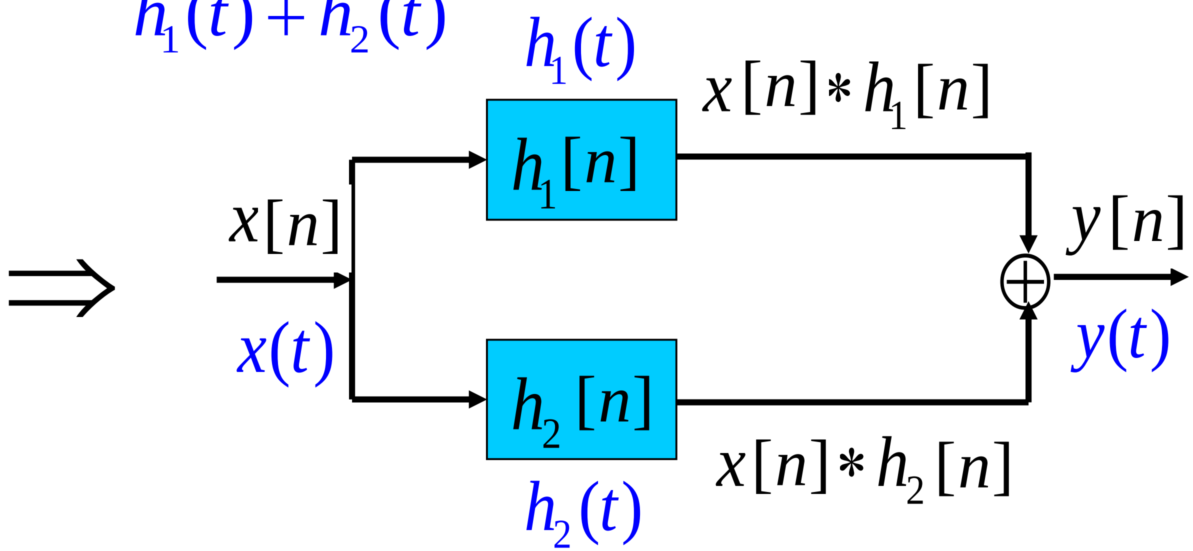
$$x[n]*[h_1[n]+h_2[n]]=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$




$$y[n]=x[n]*[h_1[n]+h_2[n]]$$

$$y(t)=x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]$$




两个LTI系统并联，其总的单位脉冲(冲激)响应等于各子系统单位脉冲(冲激)响应之和。

# 2.3 线性时不变系统的性质

- 3. 结合律:

$$[x[n]*h_1[n]]*h_2[n]=x[n]*[h_1[n]*h_2[n]]$$

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)} \xrightarrow{x(t)*h_1(t)} \boxed{h_2(t)} \longrightarrow y(t)=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \longrightarrow y[n]=[x[n]*h_1[n]]*h_2[n]$$

$$\Rightarrow$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)*h_2(t)} \longrightarrow y(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

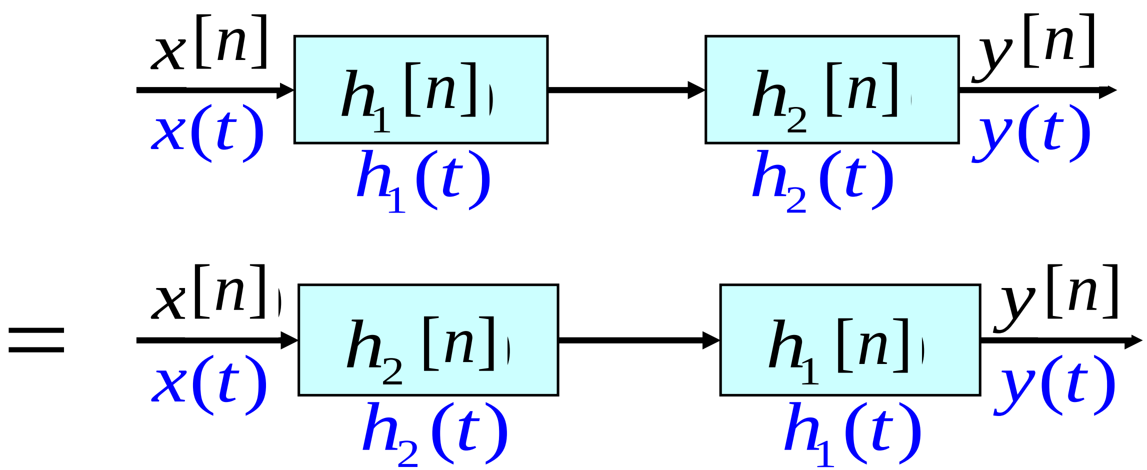
$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]*h_2[n]} \longrightarrow y[n]=x[n]*[h_1[n]*h_2[n]]$$

# 2.3 线性时不变系统的性质

- 级联的LTI系统其总的单位冲激(脉冲)响应等于各子系统单位冲激(脉冲)响应的卷积。
- 由于卷积运算满足交换律，因此，系统级联的先后次序可以调换。

$$x[n]*h_1[n]*h_2[n]=x[n]*h_2[n]*h_1[n]$$

$$x(t)*h_1(t)*h_2(t)=x(t)*h_2(t)*h_1(t)$$

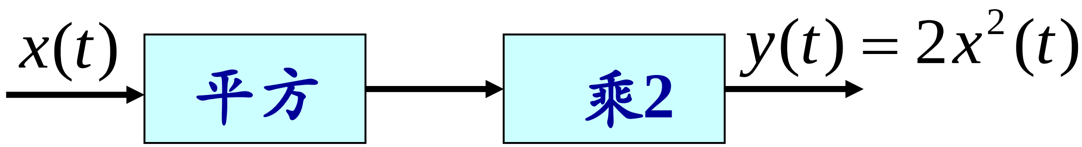


# 2.3 线性时不变系统的性质

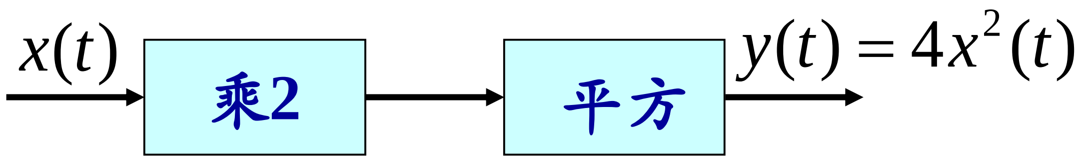
产生以上结论的前提条件：

①系统必须是LTI系统；
②所有涉及到的卷积运算必须收敛。

如：




若交换级联次序，即成为：

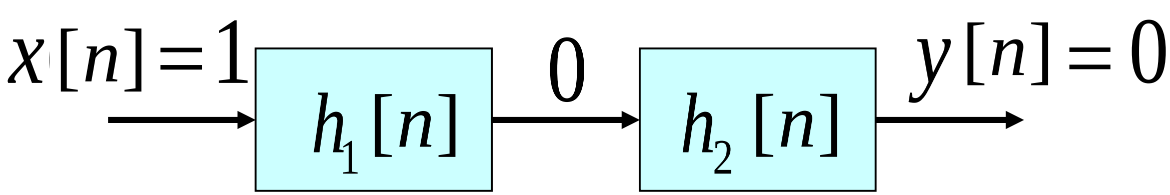



显然与原来是不等价的。因为系统不是LTI系统。

# 2.3 线性时不变系统的性质

差分器　　　　累加器

又如：若 $h_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$，$h_2[n]=u[n]$，虽然系统都是LTI系统。当 $x[n]=1$ 时，如果交换级联次序，则由于 $x[n]*u[n]$ 可能不收敛，因而交换级联次序后不等价。



# 2.3 线性时不变系统的性质

- 4. 其他性质：
  - 卷积积分满足微分、积分及时移特性：

①若 $x(t)*h(t)=y(t)$，则

$$x'(t)*h(t)=x(t)*h'(t)=y'(t)$$

$$[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau]*h(t)=x(t)*[\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau]=[\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau]$$

$$x(t-t_0)*h(t)=x(t)*h(t-t_0)=y(t-t_0)$$

# 2.3 线性时不变系统的性质

– 卷积和满足差分、求和及时移特性：

① 若 $x[n]*h[n]=y[n]$，则

$$[x[n]-x[n-1]]*h[n]=x[n]*[h[n]-h[n-1]]$$

$$=y[n]-y[n-1]$$

$$[\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]]*h[n]=x[n]*[\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]]=\sum_{k=-\infty}^{n}y[k]$$

$$x[n-n_0]*h[n]=x[n]*h[n-n_0]=y[n-n_0]$$

# 2.3 线性时不变系统的性质

- 二. LTI系统的性质：LTI 系统可以由它的单位冲激/脉冲响应来表征，因而其特性（记忆性、可逆性、因果性、稳定性）都应在其单位冲激/脉冲响应中有所体现。
- 1. 记忆性：根据 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$，如果系统是无记忆的，则在任何时刻 $n$，$y[n]$都只能和 $n$ 时刻的输入有关，和式中只能有 $k=n$ 时的一项为非零，因此必须有：

$h[n-k]=0, \quad k\neq n$ 即：$\boxed{h[n]=0, \quad n\neq 0}$

# 2.3 线性时不变系统的性质

所以，无记忆系统的单位脉冲/冲激响应为：

$$h[n]=k\delta[n] \qquad h(t)=k\delta(t)$$

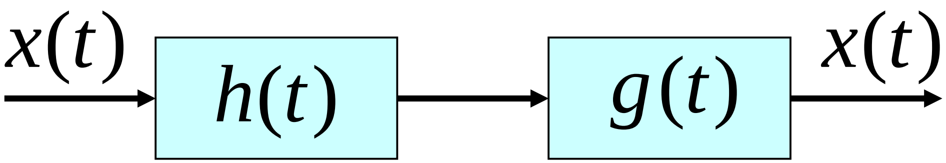
此时，$x[n]*h[n]=kx[n] \quad x(t)*h(t)=kx(t)$

当 $k=1$ 时系统是恒等系统。

如果LTI系统的单位冲激/脉冲响应不满足上述要求，则系统是记忆的。

# 2.3 线性时不变系统的性质

- 2. 可逆性：如果LTI系统是可逆的，则其逆系统也是LTI系统。




因此有： $h(t)*g(t)=\delta(t)$ $\quad h[n]*g[n]=\delta[n]$

例如：延时器是可逆的LTI系统，$h(t)=\delta(t-t_0)$，

其逆系统是 $g(t)=\delta(t+t_0)$，显然有：

$$h(t)*g(t)=\delta(t-t_0)*\delta(t+t_0)=\delta(t)$$

# 2.3 线性时不变系统的性质

累加器是可逆的LTI系统，其 $h[n]=u[n]$，其逆系统是 $g[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$，显然也有：

$$h[n]*g[n]=u[n]*[\delta[n]-\delta[n-1]]$$
$$=u[n]-u[n-1]=\delta[n]$$

但差分器是不可逆的。微分器也是不可逆的。

# 2.3 线性时不变系统的性质

- 3. 因果性：由 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$，当LTI系统是因果系统时，在任何时刻 $n$，$y[n]$ 都只能取决于 $n$ 时刻及其以前的输入，即和式中所有 $k>n$ 的项都必须为零，即：

$$h[n-k]=0, \qquad k>n$$

或：

$$h[n]=0, \qquad n<0$$

对连续时间系统有：

$$h(t)=0, \qquad t<0$$

这是LTI系统具有因果性的充分必要条件。

# 2.3 线性时不变系统的性质

- 4. 稳定性：根据稳定性的定义，由

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]$$

若 $x[n]$ 有界，则 $|x[n-k]|\le A$；若系统稳定，则要求 $y[n]$ 必有界，由

$$|y[n]|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]\right|\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]||x[n-k]|\le A\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|$$

可知，必须有：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$$

对连续时间系统，相应有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$$

LTI系统稳定的充分必要条件。

# 2.3 线性时不变系统的性质

- 5. LTI系统的单位阶跃响应：在工程实际中，也常用单位阶跃响应来描述LTI系统。单位阶跃响应就是系统对 $u(t)$ 或 $u[n]$ 所产生的响应。因此有：

$$s(t)=u(t)*h(t) \qquad s[n]=u[n]*h[n]$$

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \qquad h(t)=\frac{d}{dt}s(t)$$

$$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \qquad h[n]=s[n]-s[n-1]$$

LTI系统的特性也可以用它的单位阶跃响应来描述。

- **2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统**
  **(Causal LTI Systems Described by Differential and Difference Equations)**

# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

**(Causal LTI Systems Described by Differential and Difference Equations)**

- （回顾）机械系统与电路系统方程：

$$
\begin{aligned}
f(t) &= M\frac{dv(t)}{dt} + Bv(t) + K\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\,d\tau, \\
i(t) &= C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}
$$

- 结论：虽然连续系统的具体内容各不相同，但描述各系统的数学模型都是微分方程，因此在系统分析中，常抽去系统的物理含义，而作为一般意义下的系统来研究，以便于揭示系统的一般特性。

# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

## (Causal LTI Systems Described by Differential and Difference Equations)

- 在工程实际中有相当普遍的一类系统，其数学模型可以用**线性常系数微分方程**或**线性常系数差分方程**来描述。分析这类LTI系统，就是要求解线性常系数微分方程或差分方程。

- 一. 线性常系数微分方程（Linear Constant-Coefficient Differential Equation）

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\mathrm{d}^k y(t)}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{\mathrm{d}^k x(t)}{\mathrm{d}t^k},$$

$a_k, b_k$ 均为常数

# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

- 求解该微分方程，通常是求出通解$y_h(t)$和一个特解$y_p(t)$，则$y(t)=y_p(t)+y_h(t)$。特解$y_p(t)$是与输入$x(t)$同类型的函数，通解$y_h(t)$是齐次方程的解，即

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\mathrm{d}^k y(t)}{\mathrm{d}t^k}=0$$

的解。欲求得齐次解，可根据齐次方程建立一个特征方程：$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k=0$，求出其特征根。在特征根均为单阶根时，可得出齐次解的形式为：

$$y_h(t)=\sum_{k=1}^{N} C_k e^{\lambda_k t},$$

其中$C_k$是待定的常数。

# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

例：考虑如下微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2y(t)=x(t)$$

- 该方程描述输出信号$y(t)$与输入信号$x(t)$之间的关系，而非$y(t)$的显式表达。为获得$y(t)$的显式表达，需要求解该微分方程。
- 为求解该微分方程，需要附加条件。
- 此处我们重点关注由微分方程描述的因果LTI系统，此时附加条件形式为初始松弛条件。
- 其解包括齐次解+特解两部分：

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

齐次解$y_h(t)$:

- 也称为系统的自然响应，是以下齐次微分方程的解:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2y(t)=0$$

齐次解的形式为形如$e^{\lambda t}$的复指数函数线性组合，其中$\lambda$为特征值。此处对应的特征方程为:

$$\lambda+2=0$$

对应的齐次解（自然响应）即为:

$$y_h(t)=Ce^{-2t}$$

其中$C$为待定系数。

# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

特解$y_p(t)$:

- 也称系统的受迫响应，其形式与输入信号有关。设:

$$x(t) = Ke^{3t}u(t)$$

$t > 0$时，特解具有如下形式:

$$y_p(t) = Ye^{3t}$$

将输入信号与特解代入微分方程，有:

$$3Ye^{3t} + 2Ye^{3t} = Ke^{3t} \Rightarrow Y = \frac{K}{5}$$

故特解为:

$$y_p(t) = \frac{K}{5}e^{3t}, \qquad t > 0$$

# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

完全解：

- $t > 0$时，完全解为：

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{-2t} + \frac{K}{5}e^{3t}$$

其中的待定系数$C$由附加条件决定。

- 对于因果LTI系统，若$t < t_0$时$x(t) = 0$，则$t < t_0$时也将有$y(t) = 0$。因此令$t = 0$时$y(0) = 0$，解出：

$$C = -\frac{K}{5}$$

根据初始松弛条件，最终完全解为：

$$y(t) = (-\frac{K}{5}e^{-2t} + \frac{K}{5}e^{3t})u(t)$$

# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

- 要确定系数 $C_k$，需要有一组条件，暂且称为附加条件。仅仅从确定待定系数 $C_k$ 的角度来看，这一组附加条件可以是任意的，包括附加条件的值以及给出附加条件的时刻都可以是任意的。
- 当微分方程描述的系统是线性系统时，必须满足系统零输入—零输出的特性。因此系统在没有输入，即 $x(t)=0$ 时，$y(t)=0$。此时，微分方程就蜕变成齐次方程，因而描述线性系统的微分方程其齐次解必须为零，这就要求所有的 $C_k$ 都为零。

## 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

- 也就是要求确定待定系数所需的一组附加条件的值必须全部为零，因此，线性常系数微分方程具有一组零附加条件时，才能描述线性系统。

- 当这组零附加条件在信号加入的时刻给出时，线性常系数微分方程描述的系统不仅是线性的，也是因果的和时不变的。

- 在信号加入的时刻给出的零附加条件称为零初始条件。

# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

- 结论：线性常系数微分方程具有一组全部为零的初始条件可以描述一个因果的LTI系统。这组条件是：

$$y(t_0)=0,\ \ y'(t_0)=0,\ \ \cdots\cdots,\ \ y^{(N-1)}(t_0)=0$$

- 如果一个由线性常系数微分方程描述的系统具有零初始条件，就称该系统初始是静止的或最初是松弛的。
- 如果线性常系数微分方程具有一组不全为零的初始条件，则它所描述的系统是增量线性的。

# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

- **二. 线性常系数差分方程: (Linear Constant-Coefficient Difference Equation)**
- 一般的线性常系数差分方程可表示为:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

与微分方程一样，它的解法也可以通过求出一个特解 $y_p[n]$ 和通解，即齐次解 $y_h[n]$ 来进行，其过程与解微分方程类似。

## 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

- 要确定齐次解中的待定常数，也需要有一组附加条件。同样地，当线性常系数差分方程具有一组全部为零的初始条件时，所描述的系统是线性、时不变、因果的。
- 对于差分方程，还可以将其改写为：

$$y[n]=\frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]\right]$$

# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

- 可以看出：要求出 $y[0]$，不仅要知道所有的 $x[n]$，还要知道 $y[-1], y[-2], \cdots, y[-N]$，这就是一组初始条件，由此可以得出 $y[0]$。进一步，又可以通过 $y[0]$ 和 $y[-1], y[-2], \cdots, y[-N+1]$ 求得 $y[1]$，依次类推可求出所有 $n \geq 0$ 时的解。

- 若将差分方程改写为：

$$y[n-N] = \frac{1}{a_N}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y[n-k]\right]$$

# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

- 则可由 $y[1], y[2], \cdots\cdots, y[N]$ 求得 $y[0]$，进而由 $y[0], y[1], y[2], \cdots\cdots, y[N-1]$ 可求得 $y[-1]$，依次可推出 $n \le 0$ 时的解。
  由于这种差分方程可以通过递推求解，因而称为**递归方程**（**recursive equation**）。

- 当 $a_k = 0, k \neq 0$ 时，差分方程变为：

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$$

# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

- 此时,解方程不再需要迭代运算，因而称为**非递归方程**（nonrecursive equation）。显然，此时方程就是一个卷积和的形式，其中

$$h[n]=\frac{b_n}{a_0},\quad 0\le n\le M$$

此时，系统单位脉冲响应 $h[n]$ 是有限长的,因而把这种方程描述的LTI系统称为**FIR**（Finite Impulse Response，**有限脉冲响应**）系统。

- 递归方程描述的系统结合初始松弛条件具有无限长的单位脉冲响应，因而称为**IIR**（Infinite Impulse Response，**无限脉冲响应**）系统。

## 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

- 由于无论微分方程还是差分方程的特解都具有与输入信号相同的函数形式，即特解完全是由输入信号决定的，因而特解所对应的这一部分响应称为**受迫响应**或**强迫响应**。齐次解所对应的部分由于与输入信号的形式无关，也称为系统的**自然响应**或**自由响应**。
- 增量线性系统的响应分为**零状态响应**和**零输入响应**。零输入响应由于与输入信号无关，因此它属于自然响应。零状态响应既与输入信号有关，也与系统特性有关，因而它包含了受迫响应，也包含有一部分自然响应。

# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

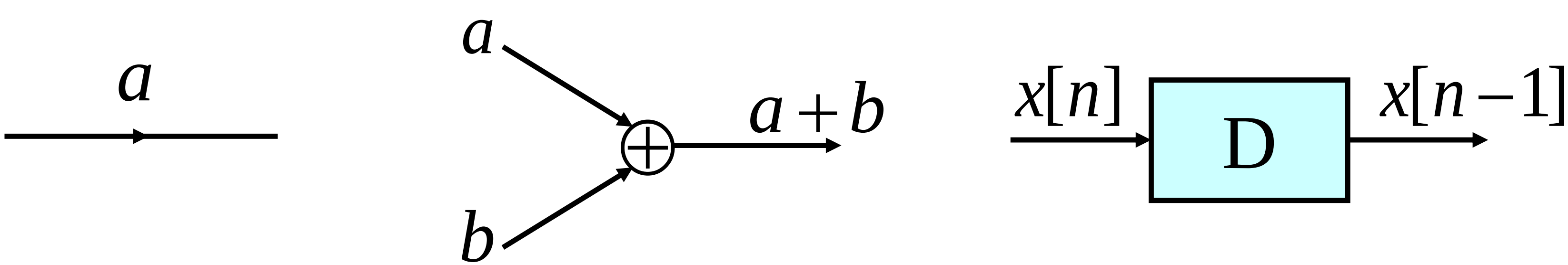
- 三. 由微分和差分方程描述的LTI系统的方框图表示（Block-Diagram Representation）
  - 由线性常系数微分和差分方程 描述的系统，其数学模型是由一些基本运算来实现的，如果能用一种图形表示方程的运算关系，就会更加形象直观;
  - 另一方面,分析系统很重要的目的是为了设计或实现一个系统,用图形表示系统的数学模型,将对系统的特性仿真、硬件或软件实现具有重要意义。

# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

- 1. 由差分方程描述的LTI系统的方框图表示：由

$$y[n]=\frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]\right]$$

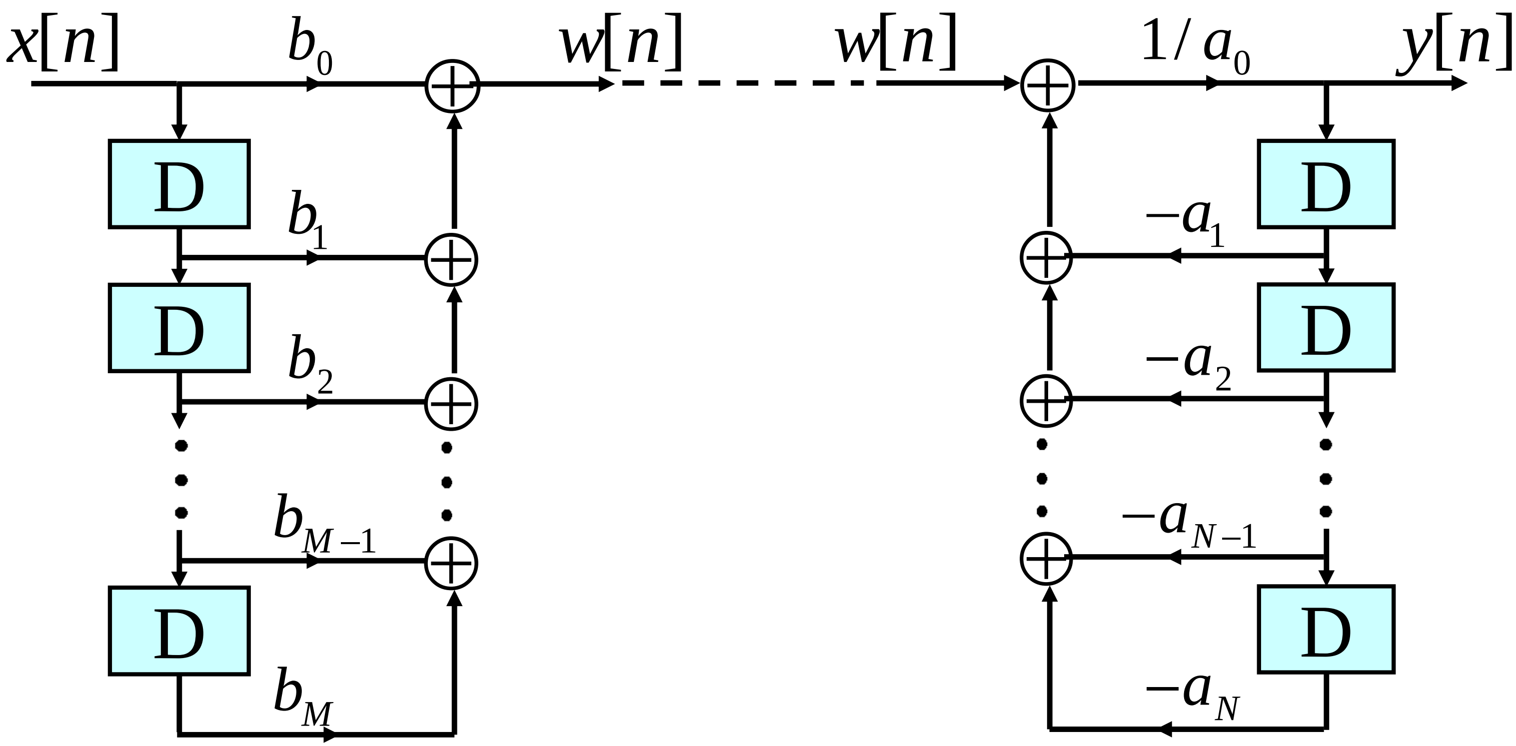
可看出：方程中包括三种基本运算：移位（延迟）、乘系数、相加。这些运算可用以下符号表示



# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

- 若令 $w[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$ ，则

$$y[n]=\frac{1}{a_0}\left[w[n]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right]$$



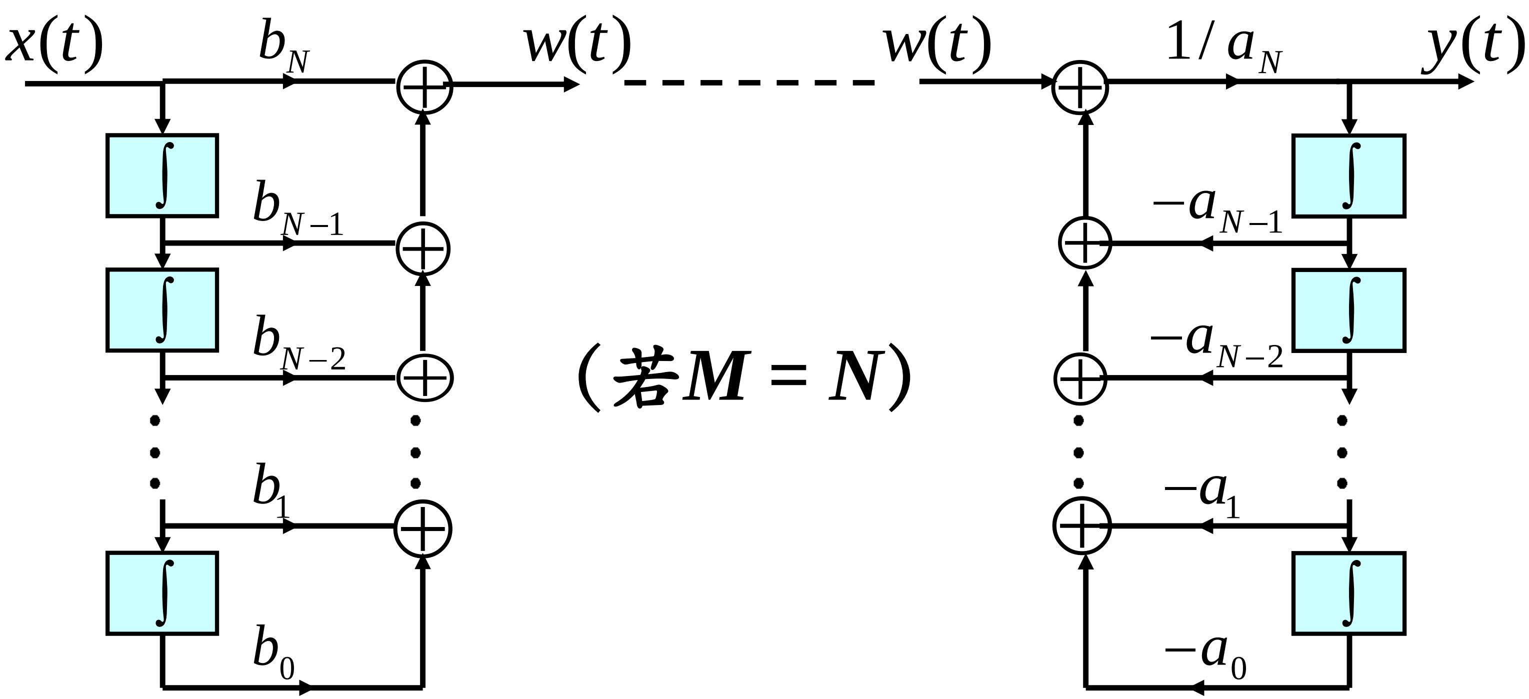
# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

- 2. 由微分方程描述的LTI系统的方框图表示：
  - 由 $$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{\mathrm{d}^k y(t)}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{\mathrm{d}^k x(t)}{\mathrm{d}t^k}$$
    看出它也包括三种基本运算：微分、乘系数、相加。
  - 但由于微分器不仅在工程实现上有困难，而且对误差及噪声极为灵敏，因此，工程上通常使用积分器而不用微分器。
  - 将微分方程两边同时积分 $N$ 次，即可得到一个积分方程：
    $$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{(N-k)}(t)$$

# 2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

- 对此积分方程完全按照差分方程的办法有：

$$y(t)=\frac{1}{a_N}\left[\underbrace{\sum_{k=0}^{M}b_k x_{(N-k)}(t)}_{w(t)}-\sum_{k=0}^{N-1}a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$



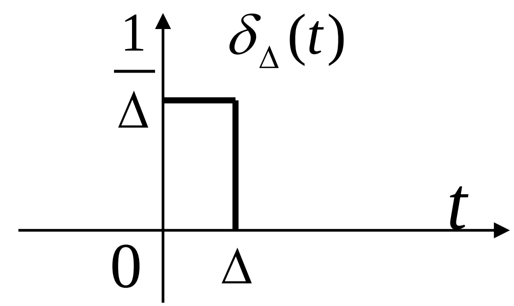
- **2.5 奇异函数 (Singularity function)**

# 2.5 奇异函数
# (Singularity function)

- 单位冲激$\delta(t)$的定义一：

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

  – 不严密，因为$u(t)$在 $t=0$ 不连续



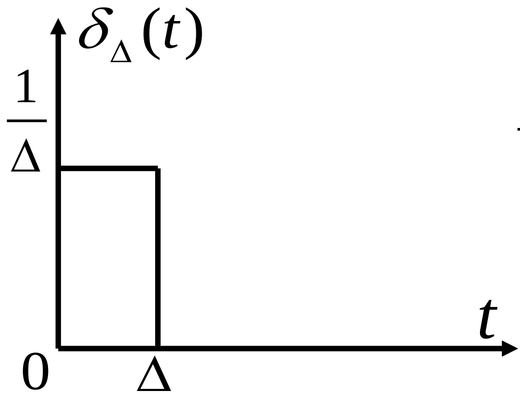

- 定义二：引入 $\delta_{\Delta}(t)$

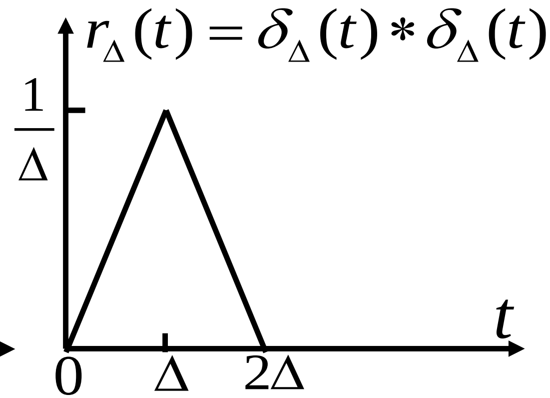
$\delta(t)$视为$\delta_{\Delta}(t)$在 $\Delta\to 0$ 时的极限

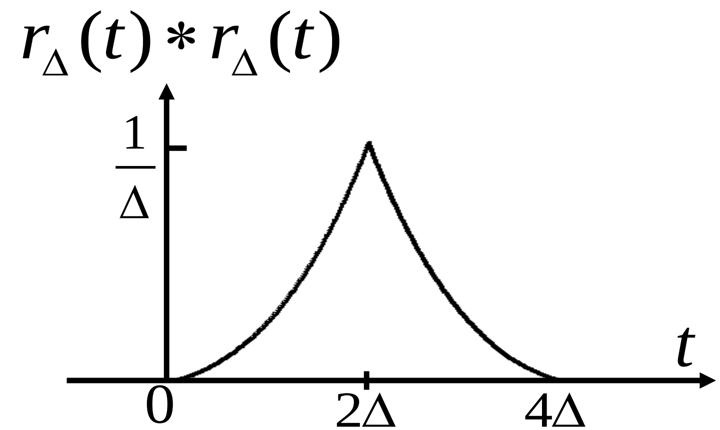
  – 仍然不严格，因为有许多不同的函数在 $\Delta\to 0$ 时都表现为与 $\delta_{\Delta}(t)$有相同的特性

# 2.5 奇异函数

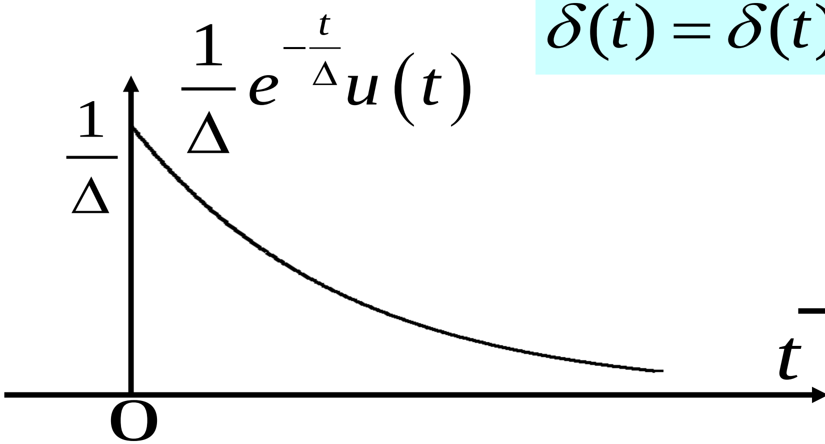
- 例如:以下信号的面积都等于1，而且在 $\Delta \to 0$ 时，它们的极限都表现为单位冲激。

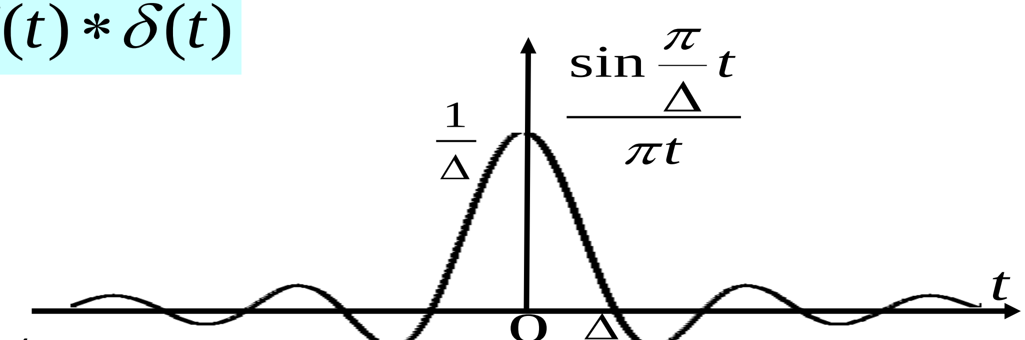



$$\delta(t) = \delta(t) * \delta(t)$$



# 2.5 奇异函数

- 之所以产生这种现象，是因为 $\delta(t)$ 是一个理想化的非常规函数，被称为奇异函数。通常采用在卷积或积分运算下函数所表现的特性来定义奇异函数。
- 一. 通过卷积定义 $\delta(t)$
  从系统的角度,可以说 $\delta(t)$ 是一个恒等系统的单位冲激响应,因此， $x(t)=x(t)*\delta(t)$ ——这就是在卷积运算下 $\delta(t)$ 的定义。
- 根据定义可以得出 $\delta(t)$ 的如下性质：
- **1.** $\because x(t)*\delta(t)=x(t)$

  $\therefore \delta(t)*\delta(t)=\delta(t)$ $\quad \delta(t-t_0)*\delta(t)=\delta(t-t_0)$

# 2.5 奇异函数

- **2. 当 $x(t)=1$ 时，有**

$$1=x(t)=x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)\delta(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)d\tau$$

- **3.**

$$g(-t)=g(-t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau-t)\delta(\tau)d\tau$$

若 $t=0$，则有：

$$g(0)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)\delta(\tau)d\tau$$

此式即可作为在积分运算下 $\delta(t)$ 的定义式。

# 2.5 奇异函数

- 二. 通过积分定义 $\delta(t)$： 以

$$g(0)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\delta(t)dt$$

作为在积分运算下 $\delta(t)$ 的定义

据此定义又可以推出：

- 4. 若 $g(t)$ 是奇函数，则 $g(0)=0$，因此 $\delta(t)$ 是偶函数，即：

$$\delta(t)=\delta(-t)$$

- 若令 $g(\tau)=x(t-\tau)$，代入积分定义式就有：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)\delta(\tau)d\tau=x(t)*\delta(t)$$

这就是卷积运算下 $\delta(t)$ 的定义。

# 2.5 奇异函数

- **5. 根据积分下的定义有：**

$$g(0)f(0)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)f(t)\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)f(0)\delta(t)dt$$

$$\therefore f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

**若** $f(t)=t$，**则可推出** $t\delta(t)=0$

# 2.5 奇异函数

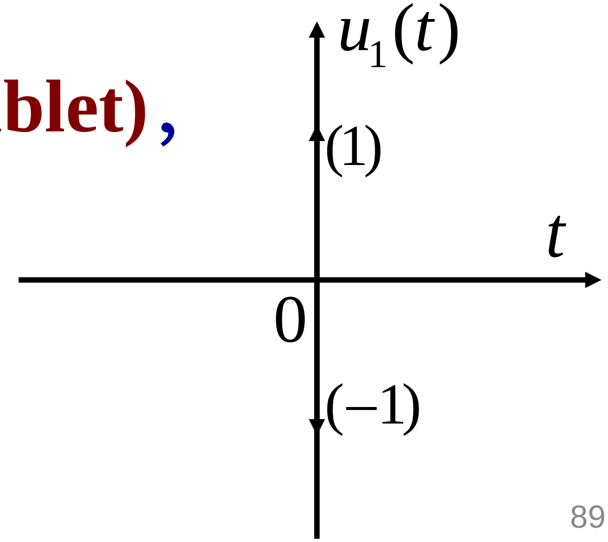
- **三. 单位冲激偶及其他奇异函数**

**理想微分器的单位冲激响应应该是 $\delta(t)$ 的微分，记为 $u_1(t)=\mathrm{d}\delta(t)/\mathrm{d}t$，从卷积运算或LTI系统分析的角度应该有：**

$$x(t)*u_1(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$$


**$u_1(t)$ 称为单位冲激偶 (unit doublet)，**

**上式为其运算定义。**



# 2.5 奇异函数

- 由此定义出发可以推出：
- **1.** 当 $x(t)=1$ 时，有：

$$0=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)*u_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)u_1(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}u_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\therefore\int_{-\infty}^{\infty}u_1(t)dt=0$$

- **2.** 考察

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau-t)u_1(\tau)\mathrm{d}\tau=g(-t)*u_1(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(-t)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}g(\sigma)\Big|_{\sigma=-t}$$

当 $t=0$ 时，有 $-g'(0)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)u_1(\tau)\mathrm{d}\tau$，此积分可作为 $u_1(t)$ 在积分意义下的定义。

# 2.5 奇异函数

- **3. 若 $g(t)$ 是一个偶函数，则 $g'(0)=0$。由此可推得 $u_1(t)$ 是奇函数，即：**

$$u_1(-t)=-u_1(t)$$

- **按此定义方式推广，有：**

$$x(t)*u_2(t)=\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}=x(t)*u_1(t)*u_1(t)$$

$$u_2(t)=u_1(t)*u_1(t)$$

$$\vdots$$

$$u_k(t)=\underbrace{u_1(t)*u_1(t)*\cdots*u_1(t)}_{k\text{个}}$$

# 2.5 奇异函数

- 在积分运算下有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)u_k(t)\mathrm{d}t = (-1)^k g^{(k)}(0)$$

例如：

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)u_2(t)\mathrm{d}t$$

$$= g(t)u_1(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g'(t)u_1(t)\mathrm{d}t$$

$$= -g'(t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} g''(t)\delta(t)\mathrm{d}t$$

$$= g''(0)$$

# 2.5 奇异函数

- 四. $\delta(t)$ 的积分：用类似方法也可以定义 $\delta(t)$ 的积分。

若用 $u_0(t) \Leftrightarrow \delta(t)$, 则有: $u_{-1}(t) \Leftrightarrow u(t)$

$$u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = u(t)$$

$u_{-1}(t)$ 是理想积分器的单位冲激响应。

其运算定义为:

$$x(t) * u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

# 2.5 奇异函数

- 进一步，有：

$$u_{-2}(t)=u_{-1}(t)*u_{-1}(t)=\int_{-\infty}^{t}u(t)dt=tu(t)$$

——称为单位斜坡函数（**unit ramp function** ）

推广：

$$u_{-3}(t)=u_{-1}(t)*u_{-1}(t)*u_{-1}(t)=\frac{1}{2}t^{2}u(t)$$

$$\vdots$$

$$u_{-k}(t)=\underbrace{u_{-1}(t)*u_{-1}(t)*\cdots*u_{-1}(t)}_{k\text{个}}=\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}u(t)$$

实际上，$\delta(t)$ 的各次积分已经是常规函数了。

# 本章小结

- 信号的时域分解:

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- LTI系统的时域分析——卷积和与卷积积分
- LTI系统的描述方法:
- ①用 $h(t)$、$h[n]$ 描述系统(也可用 $s(t)$, $s[n]$ 描述);
- ②用线性常系数微分或差分方程连同零初始条件描述LTI系统，或用等价的方框图描述;

# 本章小结

- LTI系统的特性与 $h(t)$、$h[n]$ 的关系：
  - 记忆性、因果性、稳定性、可逆性与 $h(t)$、$h[n]$ 的关系；
  - 系统级联、并联时，$h(t)$、$h[n]$ 与各子系统的关系。
- 奇异函数：单位冲激函数、单位冲激偶

# 微分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

1．齐次解（自由响应）

①齐次方程：$c_0\frac{d^n}{dt^n}r(t)+c_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(t)+\cdots+c_{n-1}\frac{d}{dt}r(t)+c_nr(t)=0$

②齐次解$r_h(t)$形式：$Ae^{\alpha t}$ 函数的线性组合

令 $r(t)=Ae^{\alpha t}$ 代入上式化简得特征方程$c_0\alpha^n+c_1\alpha^{n-1}+\cdots+c_{n-1}\alpha+c_n=0$

有**n**个根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

③各种特征根情况下的齐次解形式

**i)**互不相同实根：$r_h(t)=A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}+\cdots+A_ne^{\alpha_n t}$

**ii)**$\alpha_1$为$k$重特征根，与$\alpha_1$有关的齐次解部分：$(A_1t^{k-1}+A_2t^{k-2}+\cdots A_k)e^{\alpha_1 t}$

**iii)**$\alpha_1$与$\alpha_2$为共轭复根 $p\pm qj$（一重），对应齐次解部分

$$(A_1\cos qt+A_2\sin qt)e^{pt}$$

**iv)**$\alpha_1$与$\alpha_2$为共轭复根 $p\pm qj$（$k$重），对应齐次解部分为：

$$[(A_1t^{k-1}+A_2t^{k-2}+\ldots+A_k)\cos qt+(B_1t^{k-1}+B_2t^{k-2}+\ldots+B_k)\sin qt)e^{pt}$$

# 微分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

- **[例1]：求下列微分方程的齐次解形式**

① $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+3e(t)$

解：$\alpha^2+3\alpha+2=0 \Rightarrow (\alpha+1)(\alpha+2)=0$

$\Rightarrow \alpha_1=-1,\ \alpha_2=-2 \Rightarrow r_h(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$

② $\frac{d^3}{dt^3}r(t)+7\frac{d^2}{dt^2}r(t)+16\frac{d}{dt}r(t)+12r(t)=e(t)$

解：$\alpha^3+7\alpha^2+16\alpha+12=0 \Rightarrow (\alpha+2)^2(\alpha+3)=0$

$\Rightarrow \alpha_{1,2}=-2$**(二重)，**$\alpha_2=-3 \Rightarrow r_h(t)=(A_1t+A_2)e^{-2t}+A_3e^{-3t}$

# 微分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

③ $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+2\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)$

解：$\alpha^2+2\alpha+2=0 \Rightarrow \quad (\alpha+1)^2+1=0$

$\Rightarrow \alpha_{1,2}=-1\pm j$ (一重共轭)， $\Rightarrow r_h(t)=(A_1\cos t+A_2\sin t)e^{-t}$

④ $\frac{d^4}{dt^4}r(t)+2\frac{d^3}{dt^3}r(t)+3\frac{d^2}{dt^2}r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+e(t)$

解：$\alpha^4+2\alpha^3+3\alpha^2=0 \Rightarrow \alpha^2[(\alpha+1)^2+2]=0$

$\Rightarrow \alpha_{1,2}=0$ (二重)，$\alpha_{3,4}=-1\pm\sqrt{2}j$ (一重共轭)

$\Rightarrow r_h(t)=(A_1t+A_2)+(A_3\cos\sqrt{2}t+A_4\sin\sqrt{2}t)e^{-t}$

# 微分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

2．特解（强迫响应）：由激励形式和特征根情况共同决定

①将激励代入微分方程右端，化简得自由项（$t$>0时）

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+e(t)$$

②根据自由项形式与特征根情况设特解 $r_p(t)$，如下页表所示

<*为什么要考虑特征根情况?*>

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\underline{e^{-t}u(t)} \qquad \alpha_1=-1,\alpha_2=-2$$

$$\underline{r_p(t)=Be^{-t}} \qquad \frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=Be^{-t}-3Be^{-t}+2Be^{-t}=0\neq e^{-t} \quad (t>0)$$

$$\underline{r_p(t)=Bte^{-t}} \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}r_p(t)=Be^{-t}-Bte^{-t},\ \frac{d^2}{dt^2}r_p(t)=-Be^{-t}-Be^{-t}+Bte^{-t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}r_p(t)+3\frac{d}{dt}r_p(t)+2r_p(t)=Be^{-t}=e^{-t} \quad (t>0)\Rightarrow B=1\Rightarrow r_p(t)=te^{-t} \quad (t>0)$$

| 自由项形式 | 特征根情况 | 特解形式 |
| --- | --- | --- |
| **$E$(常数)** | **0不是** | **$B$(常数)** |
| | **0是$k$重根** | $Bt^k$ |
| $P_\lambda(t)$ | **0不是** | $G_\lambda(t)$ |
| | **0是$k$重根** | $t^k G_\lambda(t)$ |
| $Ee^{at}$ | **$a$不是** | $Be^{at}$ |
| | **$a$是$k$重根** | $Bt^k e^{at}$ |
| $e^{at}P_\lambda(t)$ | **$a$不是** | $e^{at}G_\lambda(t)$ |
| | **$a$是$k$重根** | $t^k e^{at} G_\lambda(t)$ |
| $E_1\cos\omega t + E_2\sin\omega t$ | $\pm j\omega$ **不是** | $B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t$ |
| | $\pm j\omega$ **是$k$重根** | $t^k(B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t)$ |
| $P_\lambda(t)\cos\omega t + Q_s(t)\sin\omega t$ | $\pm j\omega$ **不是** | $G_l(t)\cos\omega t + H_l(t)\sin\omega t$ |
| | $\pm j\omega$ **是$k$重根** | $t^k\left[G_l(t)\cos\omega t + H_l(t)\sin\omega t\right]$ |
| $e^{at}\left[P_\lambda(t)\cos\omega t + Q_s(t)\sin\omega t\right]$ | $a\pm j\omega$ **不是** | $e^{at}\left[G_l(t)\cos\omega t + H_l(t)\sin\omega t\right]$ |
| | $a\pm j\omega$ **是$k$重根** | $t^k e^{at}\left[G_l(t)\cos\omega t + H_l(t)\sin\omega t\right]$ |

**注：**$P_\lambda(t)$**为**$\lambda$**次多项式，**$Q_s(t)$**为$s$次的多项式；**$l=\max\{\lambda,s\}$**；**$G_\lambda(t)$**为**$\lambda$**次多项式；**$G_l(t)$, $H_l(t)$ **为$l$次多项式。**

# 微分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

③确定特解

[例2]：求下列微分方程的特解

① $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+e(t)$

**i)** $e(t)=t^2$； **ii)** $e(t)=e^{-t}u(t)$； **iii)** $e(t)=e^{-2t}u(t)$；

**iv)** $e(t)=te^{-t}u(t)$； **v)** $e(t)=e^{t}u(t)$

解：

**i)** 自由项：$t^2+2t$ ，0不是特征根，故可设 $r_p(t)=B_0t^2+B_1t+B_2$

代入左端得 $2B_0+3(2B_0t+B_1)+2(B_0t^2+B_1t+B_2)=t^2+2t$

令对应系数相等可得：$B_0=0.5, B_1=-0.5, B_2=0.25$

$r_p(t)=0.5t^2-0.5t+0.25$

**ii)** 自由项：

$$\frac{d}{dt}e(t)+e(t)=\frac{d}{dt}[e^{-t}u(t)]+e^{-t}u(t)=e^{-t}\delta(t)-e^{-t}u(t)+e^{-t}u(t)=\delta(t)=0(t>0)$$

故 $r_p(t)=0$

# 微分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

**iii)** $e(t)=e^{-2t}u(t)$ 代入右端 $\frac{d}{dt}e(t)+e(t)$ 可得自由项：$\delta(t)-e^{-2t}u(t)$

$t>0$ 时为 $-e^{-2t}$，但-2为1重特征根，故应设 $r_p(t)=Bte^{-2t}$

代入左端 $\frac{d^2}{dt^2}r_p(t)+3\frac{d}{dt}r_p(t)+2r_p(t)=Be^{-2t}=-e^{-2t}$

令对应系数相等可得：$B=-1$，即：$r_p(t)=-te^{-2t}$

**iv)** $e(t)=te^{-t}u(t)$ 代入右端得 $t>0$ 时自由项：$e^{-t}$

但-1为1重特征根，故应设 $r_p(t)=Bte^{-t}$

代入左端令对应系数相等可得：$B=1$，即：$r_p(t)=te^{-t}$

**v)** $e(t)=e^{t}u(t)$ 代入右端得 $t>0$ 时自由项= $2e^{t}$

1不是特征根，故设 $r_p(t)=Be^{t}$

代入左端令对应系数相等可得 $B=1/3$，即 $r_p(t)=\frac{1}{3}e^{t}$

# 微分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

③ $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+2\frac{d}{dt}r(t)+5r(t)=e(t)$

**i)** $e(t)=2\cos 2tu(t)$；**ii)** $e(t)=e^{-t}\cos 2tu(t)$；**iii)** $e(t)=e^{-t}u(t)$

解:

**i)** $t>0$ 时自由项= $2\cos 2t$, $\pm 2j$ 不是特征根,

$r_p(t)=\left(B_1\cos 2t+B_2\sin 2t\right)$，代入左端令对应系数相等

可得：$B_1=0, B_2=0.5$ ， 即 $r_p(t)=0.5\sin 2t$

**ii)** $t>0$ 时自由项= $e^{-t}\cos 2t$, $-1\pm 2j$ 为1重特征根,

$r_p(t)=te^{-t}\left(B_1\cos 2t+B_2\sin 2t\right)$ ，代入左端令对应系数相等

可得：$B_1=0, B_2=0.25$ ， 即 $r_p(t)=0.25te^{-t}\sin 2t$

**iii)** $t>0$ 时自由项= $e^{-t}$，-1不是特征根，$r_p(t)=Be^{-t}$

代入左端令对应系数相等可得： $B=0.25$， 即 $r_p(t)=0.25e^{-t}$

# 微分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

3．完全解

①写出完全解：$r(t)=r_p(t)+r_h(t)$,其中 $r_h(t)$ 有**n**个待定系数

②待定系数由初始条件确定

**i)**求解区间 $0_+ \le t \le +\infty$

**ii)**初始条件 $r^{(k)}(0_+)=\{r^{(0)}(0_+), r^{(1)}(0_+),..., r^{(n-1)}(0_+)\}$

**iii)**设**n**个特征根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 互不相同，则 $r(t)=r_p(t)+\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\alpha_i t}$,
将初始条件代入，可得如下方程组：

$$\begin{cases} r(0_+)=r_p(0_+)+A_1+A_2+\ldots+A_n \\ r'(0_+)=r_p'(0_+)+A_1\alpha_1+A_2\alpha_2+\ldots+A_n\alpha_n \\ \ldots\ldots\ldots \\ r^{(n-1)}(0_+)=r_p^{(n-1)}(0_+)+A_1\alpha_1^{n-1}+A_2\alpha_2^{n-1}+\ldots+A_n\alpha_n^{n-1} \end{cases}$$

# 微分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} r(0_+)-r_p(0_+) \\ r'(0_+)-r_p'(0_+) \\ \cdots\cdots\cdots \\ r^{(n-1)}(0_+)-r_p^{(n-1)}(0_+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots\cdot \\ A_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{r}^{(\boldsymbol{k})}(0_+)-\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{p}}^{(\boldsymbol{k})}(0_+)=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{A}$$

其中：$V$ 为范德蒙矩阵，一定可逆，故：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{V}^{-1}\cdot[\boldsymbol{r}^{(\boldsymbol{k})}(0_+)-\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{p}}^{(\boldsymbol{k})}(0_+)]$$

# 微分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

③若不给定初始条件，怎么由起始状态确定

i)起始状态：系统在加入激励前的瞬间的一组状态，即

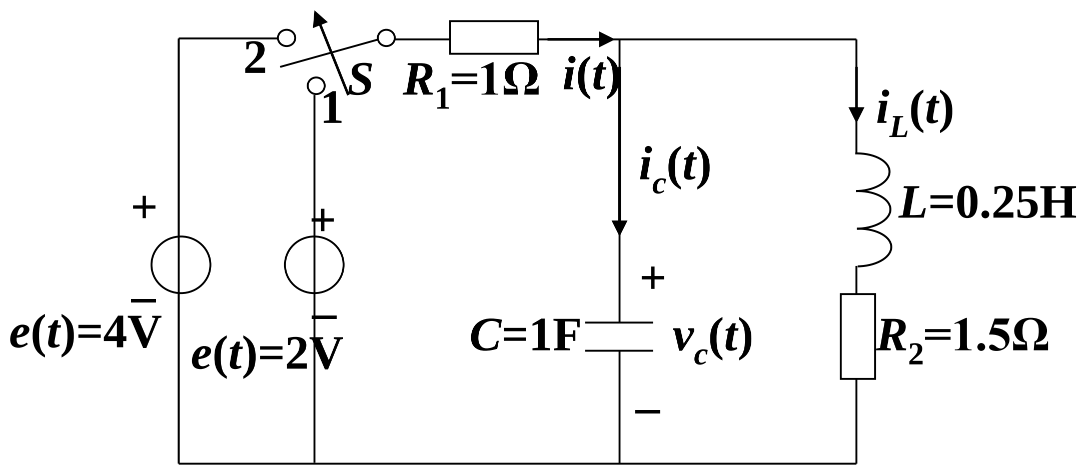
$$r^{(k)}(0_-)=\{r^{(0)}(0_-),r^{(1)}(0_-),\ldots,r^{(n-1)}(0_-)\}$$

ii)已知电路图，由 $r^{(k)}(0_-)$ 求 $r^{(k)}(0_+)$ 的原理是：电容电压电感电流一般不跳变。

iii)已知微分方程与激励，由 $r^{(k)}(0_-)$ 求 $r^{(k)}(0_+)$ 的方法是：冲激函数匹配法。

# 微分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

[例3]：已知电路图，$t=0$时刻开关$S$从1打向2，求$i(t)$




解：①由元件约束、网络拓扑约束列写微分方程

$$i(t)=C\frac{dv_c(t)}{dt}+i_L(t)\quad\Rightarrow i(t)=\frac{dv_c(t)}{dt}+i_L(t)\quad\Rightarrow i_L(t)=i(t)-\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$v_c(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)R_2\quad\Rightarrow v_c(t)=0.25\frac{di_L(t)}{dt}+1.5i_L(t)$$

$$\Rightarrow v_c(t)=0.25\frac{d(i(t)-v_c'(t))}{dt}+1.5(i(t)-v_c'(t))\qquad R_1i(t)+v_c(t)=e(t)\ \Rightarrow v_c(t)=e(t)-i(t)$$

$$\Rightarrow\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t)$$

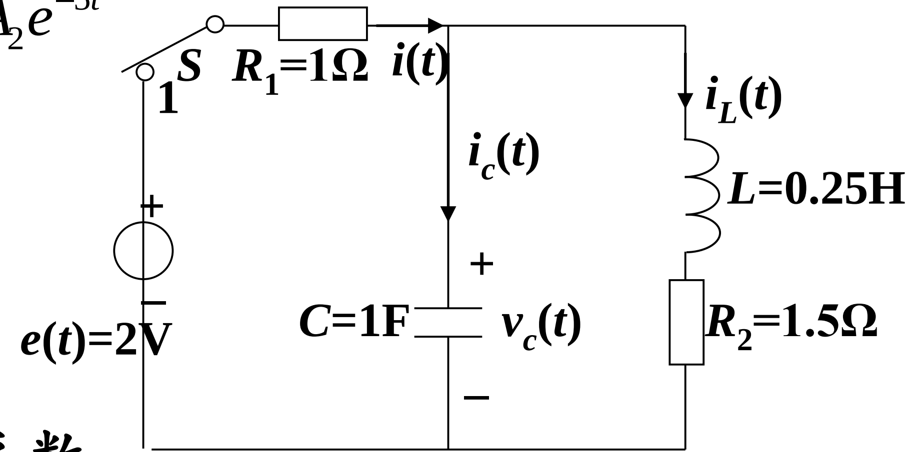
# 微分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t)$$

②由特征根写出齐次解形式

i)特征方程：$\alpha^2+7\alpha+10=0$，根 $\alpha_1=-2$，$\alpha_2=-5$

ii)齐次解形式：$i_h(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t}$




③求特解

i) $t>0$时自由项=16

ii)0不是特征根，设 $i_p(t)=B$

iii)代入方程左边解得$B$=8/5

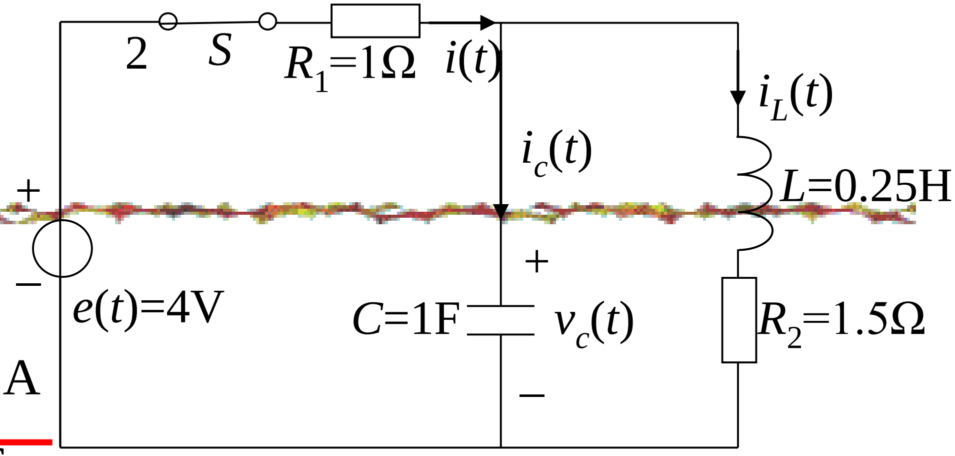
④求完全解中的齐次解待定系数

i)写出完全解形式：$i(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t}+\frac{8}{5}$

ii)求换路前的起始状态 $i(0\_)$ $i'(0\_)$

$$i(0\_)=i_L(0\_)=\frac{2}{R_1+R_2}=\frac{4}{5}\text{A}\text{，}\quad v_c(0\_)=\frac{2R_2}{R_1+R_2}=\frac{6}{5}\text{V}$$

$$i'(0\_)=0$$




**iii)求换路后初始条件** $i(0_+)\ i'(0_+)$

**电感电流不跳变：** $i_L(0_+)=i_L(0_-)=\dfrac{4}{5}\text{A}$

**电容电压不跳变：** $v_c(0_+)=v_c(0_-)=\dfrac{6}{5}\text{V}$

$$i(0_+)=\frac{4-v_c(0_+)}{R_1}=\frac{14}{5}\text{A}\text{，}\quad i_c(0_+)=i(0_+)-i_L(0_+)=i(0_+)-i_L(0_-)=2\,\text{A}$$

$$i'(0_+)=\frac{d[i(t)]}{dt}\bigg|_{t=0_+}=\frac{d[e(t)-v_c(t)]}{R_1dt}\bigg|_{t=0_+}=-\frac{1}{R_1C}i_c(0_+)=-2\,\text{A/s}$$

**iv)初始条件代入完全解** $i(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t}+\dfrac{8}{5}$ **列写方程组求出待定系数**

$$\begin{cases}A_1+A_2+\dfrac{8}{5}=\dfrac{14}{5}\\ -2A_1-5A_2=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=\dfrac{4}{3}\\ A_2=-\dfrac{2}{15}\end{cases}$$

**故：** $i(t)=\dfrac{4}{3}e^{-2t}-\dfrac{2}{15}e^{-5t}+\dfrac{8}{5}$ $\quad$ **$(t>0)$**

# 微分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

**[例4]：已知：**

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t) \qquad e(t)=2+2u(t)$$

$i(0_-)=\frac{4}{5}$　$i'(0_-)=0$　求完全响应。

解：

①由特征根写出齐次解形式

**i)**特征方程：$\alpha^2+7\alpha+10=0$，根 $\alpha_1=-2$，$\alpha_2=-5$

**ii)**齐次解形式：$i_h(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t}$

②求特解

**i)** $t>0$时自由项=16

**ii)0**不是特征根，设特解为 $i_p(t)=B$

**iii)**代入方程左边解得$B$=8/5

# 微分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

③求完全解中的齐次解待定系数

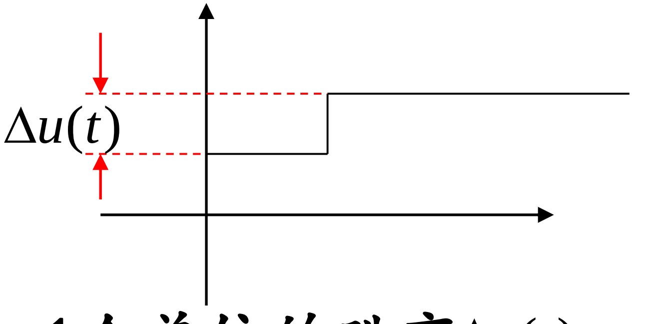
i)写出完全解形式： $i(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t}+\dfrac{8}{5}$

ii)冲激函数匹配法求跳变值

由于 $\dfrac{d^2}{dt^2}i(t)+7\dfrac{d}{dt}i(t)+10i(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)+8+8u(t)$

故可在 $0_-<t<0_+$ 区间设　　　　$<\Delta u(t)$ 的含义$>$

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dt^2}i(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)\\ \dfrac{d}{dt}i(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)\\ i(t)=a\Delta u(t)\end{cases}$$




1个单位的跳变$\Delta u(t)$

# 微分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

代入方程左端 $a\delta'(t)+(b+7a)\delta(t)+(c+7b+10a)\Delta u(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)+\underbrace{8+8u(t)}_{8\Delta u(t)}$

令左右两端的奇异函数平衡，得 ***a*=2, *b*=-2, *c*=2**

**iii)计算初始条件**

$$\begin{cases} i(0_+)-i(0_-)=a=2 \\ i'(0_+)-i'(0_-)=b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i(0_+)=2+i(0_-)=\dfrac{14}{5}\,\mathrm{A} \\ i'(0_+)=-2+i'(0_-)=-2\,\mathrm{A}/s \end{cases}$$

**iv)初始条件代入完全解，列写方程组求出待定系数**

$$\begin{cases} A_1+A_2+\dfrac{8}{5}=\dfrac{14}{5} \\ -2A_1-5A_2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=\dfrac{4}{3} \\ A_2=-\dfrac{2}{15} \end{cases}$$

故： $i(t)=\dfrac{4}{3}e^{-2t}-\dfrac{2}{15}e^{-5t}+\dfrac{8}{5}$ **($t$ >0)**

# 差分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

**1．齐次解**

①齐次方程：$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=0$

②特征根的来由

$$y(n)-ay(n-1)=0 \Longrightarrow a=\frac{y(n)}{y(n-1)} \Longrightarrow y(n)=ca^{n}$$

故$a$为特征根

一般情况下：令 $y(n)=c\alpha^{n}$ 代入 $\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=0$

可得 $a_0\alpha^{N}+a\alpha^{N-1}+\cdots\cdots+a_{N-1}\alpha+a_N=0$

有$N$个特征根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_N$

# 差分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

③齐次解一般形式

i)特征根为互不相同的实根

齐次解：$y_h(n)=c_1\alpha_1^n+c_2\alpha_2^n+\cdots\cdots c_N\alpha_N^n$

（对比连续：$r_h(t)=c_1e^{\alpha_1 t}+c_2e^{\alpha_2 t}+\cdots\cdots c_Ne^{\alpha_N t}$）

ii)$\alpha_1$与$\alpha_2$互为共轭 $\boxed{\alpha_1=A\bullet e^{jB},\alpha_2=A\bullet e^{-jB}}$

$\alpha_1$与$\alpha_2$对应的齐次解部分 $=A^n(C_1\cos Bn+C_2\sin Bn)$

（对比连续：$\boxed{\alpha_1=A+Bj,\alpha_2=A-Bj}$

$\alpha_1$与$\alpha_2$ 对应的齐次解部分 $=e^{At}(C_1\cos Bt+C_2\sin Bt)$ ）

iii) $\alpha_1$ 为$k$ 重

$\alpha_1$ 对应齐次解部分 $=\alpha_1^n(C_1+C_2n+C_3n^2+\cdots\cdots+C_kn^{k-1})$

（对比连续：$\alpha_1$为$k$ 重，齐次解$=e^{\alpha_1 t}(C_1+C_2t+C_3t^2+\cdots\cdots C_kt^{k-1})$）

# 差分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

**[例1]** $y(n)-y(n-1)-y(n-2)=0 \qquad y(1)=1, y(2)=1$

解：由 $\alpha^2-\alpha-1=0$ 得 $\alpha_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \alpha_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

所以 $y(n)=C_1(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n+C_2(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

$$\begin{cases} 1=C_1\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+C_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1=C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases}$$ 推出： $$\begin{cases} C_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ C_2=\dfrac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

**[例12]**求 $y(n)+6y(n-1)+12y(n-2)+8y(n-3)=0$ 的齐次解形式

解：$\alpha^3+6\alpha^2+12\alpha+8=0$ 得 $(\alpha+2)^3=0$

得：$y_h(n)=(C_1n^2+C_2n+C_3)\bullet(-2)^n$

# 差分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

[例2]: $y(n)-2y(n-1)+2y(n-2)-2y(n-3)+y(n-4)=0$

边界条件为: $y(1)=1, y(2)=0, y(3)=1, y(5)=1$

解: 由 $\alpha^4-2\alpha^3+2\alpha^2-2\alpha+1=0$ 即: $(\alpha-1)^2(\alpha^2+1)=0$

得:

$$\alpha_1=\alpha_2=1, \alpha_3=j=e^{j\frac{\pi}{2}}, \alpha_4=-j=e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

所以 $y(n)=(C_1n+C_2)\bullet 1^n+1^n\bullet(C_3\cos\frac{n\pi}{2}+C_4\sin\frac{n\pi}{2})$

由

$$\left.\begin{aligned}1&=C_1+C_2+C_4\\0&=2C_1+C_2-C_3\\1&=3C_1+C_2-C_4\\1&=5C_1+C_2+C_4\end{aligned}\right\}$$

得:

$$\begin{cases}C_1=0\\C_2=1\\C_3=1\\C_4=0\end{cases}$$

故

$$y(n)=1+\cos\frac{n\pi}{2}$$

# 差分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

2．特解

①将 $x(n)$ 代入右端化简得自由项，由自由项形式和特征根情况决定特解。

i) 自由项为常数，1不是特征根，特解设为 $D(n)=A$ 。

ii) 自由项为**n**的**P**次多项式，1为**k**重特征根

特解设为：$D(n)=n^k[C_0n^P+C_1n^{P-1}+\cdots\cdots+C_P]$

iii) 自由项为 $a^n$ ，**a**不是特征根，特解设为：$D(n)=Ca^n$。

iv) 自由项为 $a^n$ ，**a**为**k**重特征根，特解设为：

$$D(n)=Cn^k a^n$$

v) 自由项为 $a^n(A_1\cos bn+A_2\sin bn)$，$ae^{\pm jb}$ 不为特征根，特解设为：$D(n)=a^n(C_1\cos bn+C_2\sin bn)$

vi) 自由项为 $a^n(A_1\cos bn+A_2\sin bn)$，$ae^{\pm jb}$ 为**k**重特征根，特解为：$D(n)=n^k a^n(C_1\cos bn+C_2\sin bn)$

# 差分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

[例3] ① $y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=n$

② $y(n)+y(n-2)=\cos\frac{n\pi}{2}$

③ $y(n)-4y(n-1)+4y(n-2)=(n^2+2n)\cdot 2^n$

解:

①自由项 $=n$，1不是特征根 $D(n)=A_1n+A_2$

②自由项 $=\cos\frac{n\pi}{2}$，$j$为特征根 $D(n)=n[A_1\cos\frac{n\pi}{2}+A_2\sin\frac{n\pi}{2}]$

③自由项 $=(n^2+2n)\bullet 2^n$，2为2重根

$$D(n)=n^2(A_1n^2+A_2n+A_3)\bullet 2^n$$

# 差分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

**3．完全解**

① $y(n)=y_h(n)+D(n)=C_1\alpha_1^{\ n}+C_2\alpha_2^{\ n}+\quad\cdots\cdots\quad c_N\alpha_N^{\ n}+D(n)$

②边界条件： $y(0), y(1),\ \cdots\cdots\quad y(N-1)$

$$y(0)=C_1+C_2+\quad\cdots\cdots\quad C_N+D(0)$$

$$y(1)=C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\cdots\cdots\quad C_N\alpha_N+D(1)$$

$$\vdots$$

$$y(N-1)=C_1\alpha_1^{\ N-1}+C_2\alpha_2^{\ N-1}+\quad\cdots\cdots\quad C_N\alpha_N^{\ N-1}+D(N-1)$$

③得：

$$\begin{bmatrix} y(0)-D(0) \\ y(1)-D(1) \\ \ldots\ldots \\ y(N-1)-D(N-1) \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots\ldots & \alpha_N \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \alpha_1^{N\text{-}1} & \alpha_2^{N\text{-}1} & \ldots\ldots & \alpha_N^{N\text{-}1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdots \\ C_N \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}(k)-\mathbf{D}(k)=\mathbf{VC}$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{V}^{-1}[\mathbf{Y}(k)-\mathbf{D}(k)]$$

# 差分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

[例4]：（方程右端无 $x(n)$ 项，即齐次方程）

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=0 \qquad y(0)=1, y(1)=2$$

解：特点：无特解项，取值区间可理解为 $(-\infty,+\infty)$

$\alpha^2-3\alpha+2=0$ 得 $\alpha_1=1,\alpha_2=2$ 即：$y(n)=C_1+C_2\bullet 2^n$

由 $\begin{cases}1=C_1+C_2\\2=C_1+2C_2\end{cases}$ 得：$\begin{cases}C_1=0\\C_2=1\end{cases}$

即 $y(n)=2^n$

# 差分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

[例5] (方程右端只有 $x(n)$ 项，$x(n)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上)

$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$　　　$y(0)=1, y(1)=2, x(n)=n$

解：特点 $y(n)$ 含义从 $(-\infty,+\infty)$。

设特解为 $D(n)=(An+B)\bullet n$ ，把$D(n)$ 代入方程左边

$$(An+B)\bullet n-3[A(n-1)+B]\bullet(n-1)+2[A(n-2)+B]\bullet(n-2)=n$$

得：$A=-\frac{1}{2}, B=-\frac{5}{2}$

完全解形式 $y(n)=C_1\bullet 1^n+C_2\bullet 2^n+D(n)$

由 $\begin{cases}1=C_1+C_2\\ 2=C_1+2C_2-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}C_1=-3\\ C_2=4\end{cases}$

所以

$$y(n)=-3\bullet 1^n+4\bullet 2^n-\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{2}n$$

# 差分方程的经典时域求解法(齐次解+特解法)

**[例6] (方程右端含有 $x(n)$, $x(n-1)$ 等项, $x(n)$ 在 $n=0$ 处加入)**

$$y(n)-3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)-x(n-5),\ x(n)=3^n u(n),\ y(0)=1,\ y(1)=2$$

**解:** 需要分段讨论

①当 $n\le -1$ 时 $y(n)=C_1\bullet 1^n+C_2\bullet 2^n$ 用 $y(-1),y(-2)$ 确定待定系数

②当 $0\le n\le 4$ 自由项 $=3^n$ 用 $y(0),y(1)$ 确定待定系数

$$y(n)=C_1\bullet 1^n+C_2\bullet 2^n+D(n) \qquad D(n)=C_3\bullet 3^n$$

③当 $n\ge 5$ 时 自由项 $=3^n-\dfrac{3^n}{3^5}$ 用 $y(5),y(6)$ 确定待定系数

$$y(n)=C_1\bullet 1^n+C_2\bullet 2^n+D(n) \qquad D(n)=C_3\bullet 3^n$$