第五章 离散时间傅里叶变换

The Discrete time Fourier Transform

奉章的主要内容

- 离散时间傅立叶变换;
- 常用信号的离散时间傅立叶变换对;
- 离散时间周期信号的傅立叶变换;
- 傅立叶变换的性质;
- 系统的频率响应与系统的频域分析方法;

注释

- CFS (The Continuous time Fourier Series): 连续时间傅立叶级数
- DFS(The Discrete time Fourier Series): 离散时间傅立叶级数
- CFT(The Continuous time Fourier Transform): 连续时间傅立叶变换
- DFT(The Discrete time Fourier Transform): 离散时间傅立叶变换

引言

- · 本章将采用与讨论CFT完全相同的思想方法,来研究离散时间非周期信号的频域分解问题。
- DFS与CFS之间既有许多类似之处,也有一些重大差别:主要是DFS是一个有限项级数,其系数 a_k 具有周期性。
- · 在采用相同方法研究如何从 DFS 引出离散时间非 周期信号的频域描述时,可以看到, DFT与CFT 既有许多相类似的地方,也同时存在一些重要的 区别。
- 抓住它们之间的相似之处并关注其差别,对于掌握和加深对频域分析方法的理解具有重要意义。

• 5.1 旅周期信号的表示—高散时间傅里叶变换 Representation of Aperiodic Signals: The Discrete-time Fourier Thransform

回颜

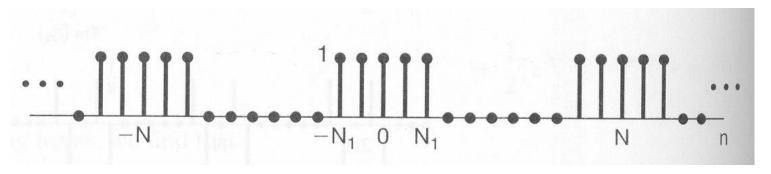
• 离散时间周期信号的傅里叶级数

$$x[n] = \sum_{k=< N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n = < N >} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

回顾:周期性方波序列

-周期信号x[n]的傅里叶级数系数 a_k 也称为x[n]的频谱系数。

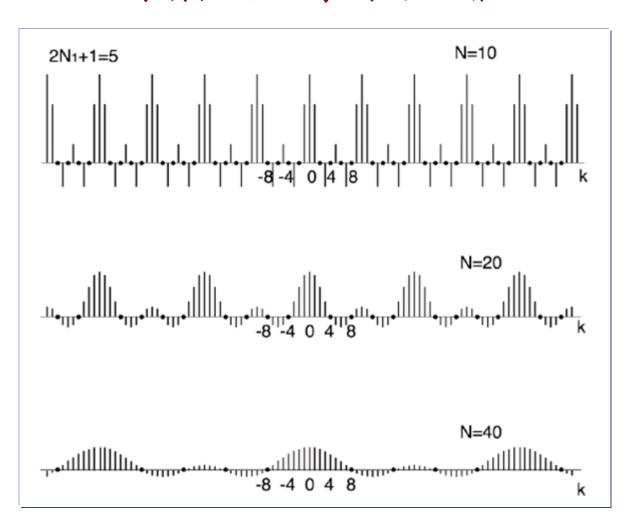


$$a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin \frac{\pi}{N} k(2N_1 + 1)}{\sin \frac{\pi}{N} k} \qquad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \cdots$$

$$a_k = \frac{2N_1 + 1}{N} \qquad k = rN$$

回顾:周期性方波序列

周期性方波序列的频谱



5.1 滁周期信号的表示—离散时间傅里叶变换 Representation of Aperiodic Signals: The Discrete-time Fourier Thransform

- 从DFS到DFT:
- 在讨论离散时间周期性矩形脉冲信号的频谱时,我们看到:
 - 信号周期N增大时,频谱的包络形状不变,幅度减小,而频谱的谱线变密。

5.1 雅周期信号的表示—离散时间傅里叶变换

当 $N \to \infty$ 时,有 $\omega_0 = (2\pi/N) \to 0$,将导致信号的频谱无限密集,最终成为连续频谱。

从时域看,当周期信号的周期 $N \to \infty$ 时,周期序列就变成了一个非周期的序列。

因此,可以预见,对一个非周期信号,它的频谱应该是一个连续的频谱。

对周期信号 $\tilde{x}[n]$: 由DFS有

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=< N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=< N>} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\mathbb{P} \ a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

有:
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$
 ————DFT

说明:显然 $X(e^{j\omega})$ 对 ω 是以 2π 为周期的。

将其与 a_k表达式比较有

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$$

于是:
$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) \cdot e^{jk\omega_0 n}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) \cdot e^{jk\omega_0 n} \cdot \omega_0$$

当 $N \to \infty$ 时, $\tilde{x}[n] \to x[n]$, $k\omega_0 \to \omega$, $\omega_0 \to d\omega$, $\sum \to \int$,

当k在一个周期范围内变化时, $k\omega_0$ 在 2π 范围变化,所以积分区间是 2π 。

$$\therefore x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

表明: 离散时间序列可以分解为频率在2π区间上

分布的、幅度为 $\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})d\omega$ 的复指数分量的线性

组合。

结论:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$
 分析公式
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{\infty} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$
 综合公式

DFT对

DFT

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

CFT

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

1.
$$x[n] = a^n u[n], |a| < 1$$

2.
$$x[n] = a^{|n|}, |a| < 1$$

3. 矩形脉冲:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

4.
$$x[n] = \delta[n]$$

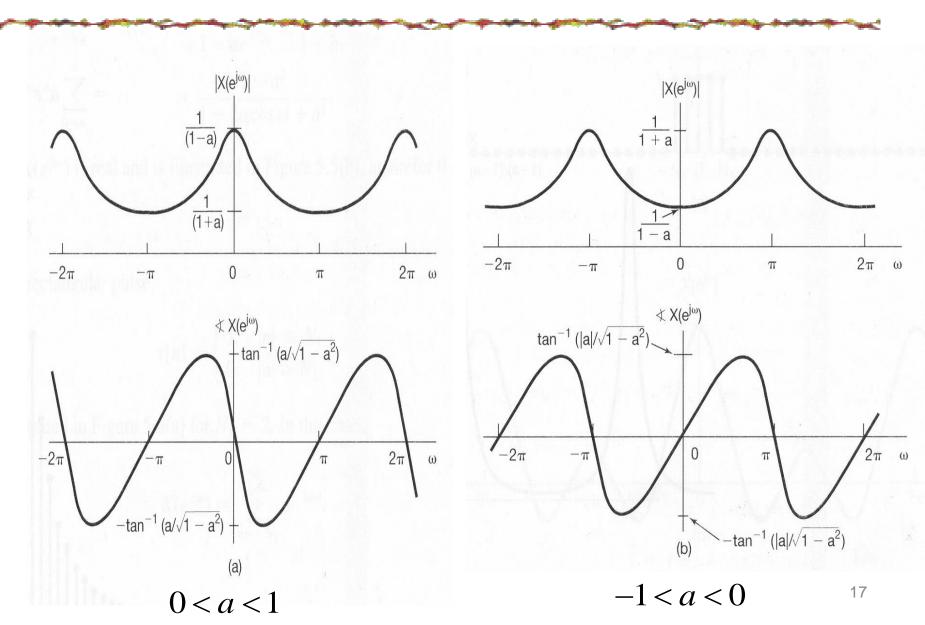
1. $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

通常X(ejo)是复函数,用它的模和相位表示:

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = -\operatorname{tg}^{-1} \frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}$$



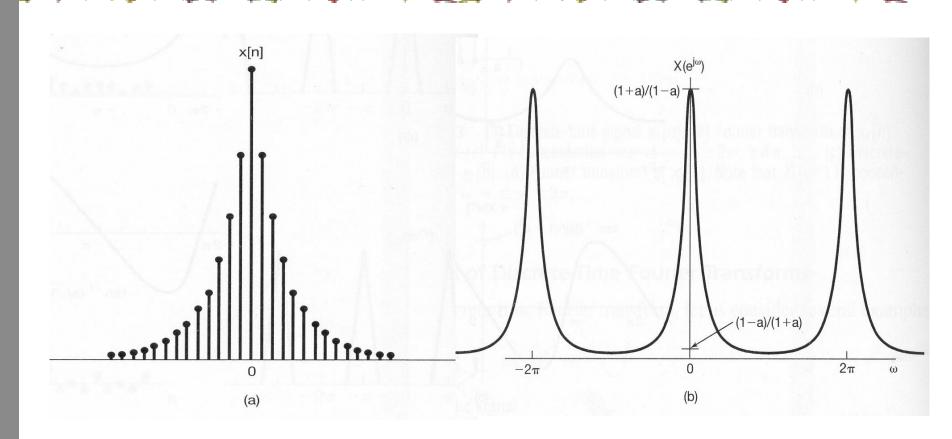
由图可以得到:

0 < a < 1 时,低通特性, x[n] 单调指数衰减 -1 < a < 0 时,高通特性, x[n] 摆动指数衰减

2.
$$x[n] = a^{|n|}, |a| < 1$$

$$x[n] = a^{-n}u(-n-1) + a^{n}u[n]$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n}$$
$$= \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} + \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a\cos\omega}$$



可以得出结论:实偶序列 → 实偶函数

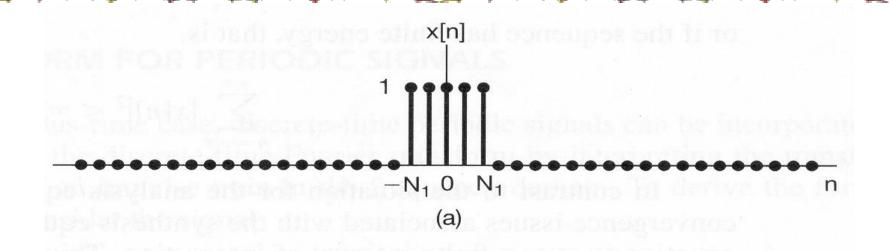
3. 矩形脉冲:

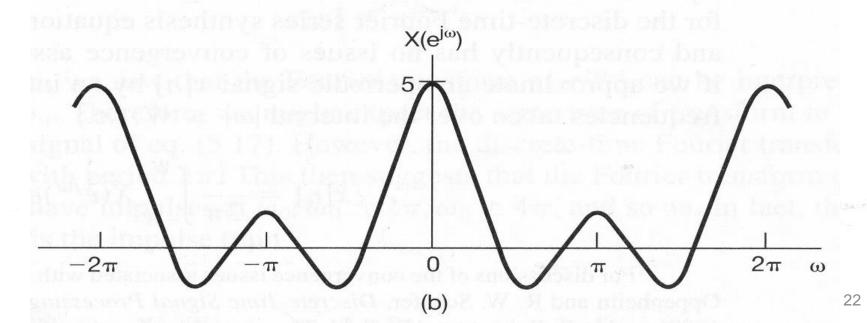
$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \frac{\sin(2N_1 + 1)\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

有同样的结论:实偶信号 → 实偶函数

当
$$N_1 = 2$$
 时,可得到:





两点比较:

1.与对应的周期信号比较

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin(2N_1+1)\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

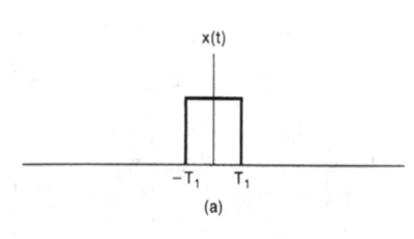
$$a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin\frac{\pi}{N}k(2N_1+1)}{\sin\frac{\pi}{N}k}, \quad \mathbf{显然有}$$

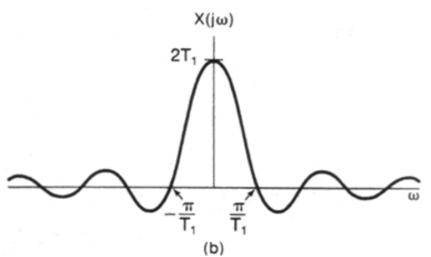
$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N} k}$$
 关系成立

2.与对应的连续时间信号比较

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \qquad X(j\omega) = \frac{2T_1 \sin \omega T_1}{\omega T_1}$$

如图所示:

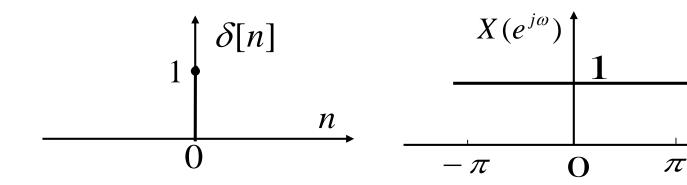




4.
$$x[n] = \delta[n]$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = 1$$

如图所示:



 ω

分析公式

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

是无穷项级数, 当然会存在收敛问题。

收敛条件有两组:

- 1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$, 则级数以均方误差最小的准则收敛于 $X(e^{j\omega})$ 。
- 2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$, 则 $X(e^{j\omega})$ 存在,且级数一致收敛

于
$$X(e^{j\omega})$$
 。

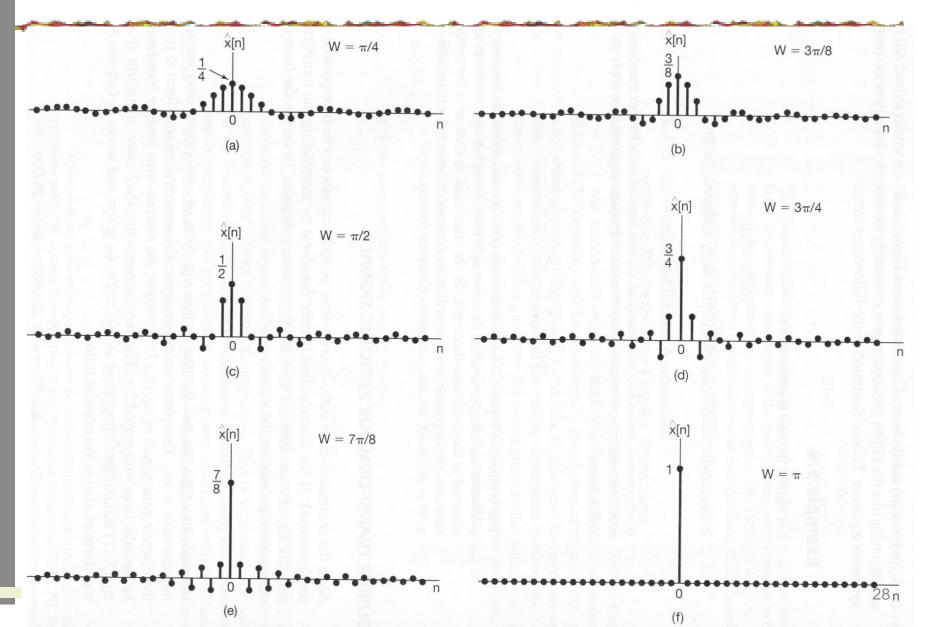
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

一般不存在收敛问题,也没有吉布斯现象

将
$$\delta[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} e^{j\omega n} d\omega$$

用频率范围 $|\omega| \leq W$ 的负指数信号积分近似

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$



由图可以得到以下结论:

当以部分复指数分量之和近似信号时,也会出现起伏和振荡;

但随着 W^{\uparrow} , $\tilde{x}[n]$ 的振荡频率变高,起伏的幅度趋小;

当 $W=\pi$ 时,振荡与起伏将完全消失,不会出现吉伯斯(Gibbs)现象,也不存在收敛问题。

• 5.2 周期信号的傅里叶变换 The Fourier Transform for Periodic Signals

The Fourier Transform for Periodic Signals

连续时间指数信号:

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

离散时间指数信号:

$$e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$

DFT以2π为周期,应为冲激串

验证:对其做反变换有

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$
$$= \int_{0}^{2\pi} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega_0 n}$$

由DFS有
$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

因此,周期信号 $\tilde{x}[n]$ 可用DFT表示为

$$\tilde{x}[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{k=< N>} a_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi l)$$

$$= \dots + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta\left[\omega - \frac{2\pi}{N}(k+N)\right]$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta \left[\omega - \frac{2\pi}{N} (k+2N) \right] + \cdots$$

$$= \dots + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) + \sum_{k=N}^{2N-1} 2\pi a_{k-N} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

$$+\sum_{k=2N}^{3N-1} 2\pi a_{k-2N} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) + \cdots$$
 注意到 a_k 也以 N 为周期,于是有:

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

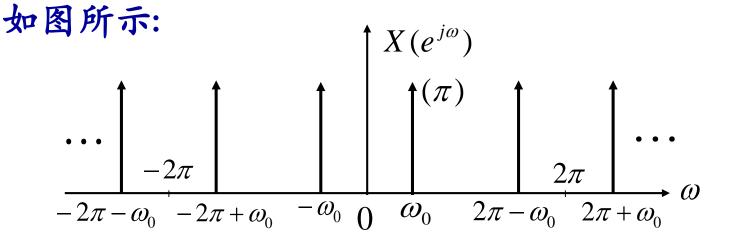
比较:可以看出与连续时间傅立叶变换中相应的形式是完全一致的。

例1.
$$x[n] = \cos \omega_0 n$$
, 其中 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N} k$

例2.
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$$
 — 均匀脉冲串

例1.
$$x[n] = \cos \omega_0 n = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$$
,它不一定是周期的。 当 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N} k$ 时才具有周期性。

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k) \right]$$

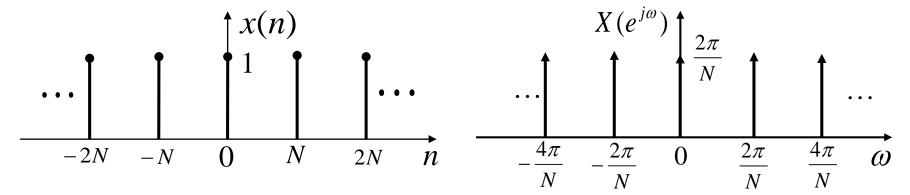


5.2周期信号的傅里叶变换

例2.
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$$
 — 均匀脉冲串

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n = \langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$



比较:与连续时间情况下对应的相一致。

DFT也有很多与CFT类似的性质, 当然也有某些明显的差别。

通过对DFT性质的讨论,目的在于揭示信号时域和频域特性之间的关系。

一、周期性 (periodic):

若 $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$,则 $X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$

比较:这是与CFT不同的。

二. 线性 (linearity):

$$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

三. 时移与频移 (shifiting):

$$z[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$
,则

$$x[n-n_0] \leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$$
 —— 时移特性

$$x[n]e^{j\omega_0n} \leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$
 — 频移特性

四. 时域反转 (reflaction):

若
$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$
, 则 $x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$

五. 共轭对称性 (symmetry properties):

若 $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则 $x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$ 由此可进一步得到以下结论:

1. 若 x[n] 是实信号,则 $x^*[n] = x[n]$

$$\therefore X^*(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega}), \quad \mathbb{P} X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$$

2. 若 x[n] 是实偶信号,则 x[n] = x[-n],

$$x^*[n] = x[n] \quad \because x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

于是有: $X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega}),$

即 $X(e^{j\omega})$ 是实偶函数。

3. 若 x[n] 是实奇信号, x[n] = -x[-n], $x^*[n] = x[n]$

于是有:
$$X(e^{j\omega}) = -X(e^{-j\omega}) = -X^*(e^{j\omega}),$$

表明 $X(e^{j\omega})$ 是虚奇函数。

4. 若 $x[n] = x_e[n] + x_o[n]$, 则有:

$$x_e[n] \leftrightarrow \text{Re} \left[X(e^{j\omega}) \right] \qquad x_o[n] \leftrightarrow j \text{Im} \left[X(e^{j\omega}) \right]$$

说明:这些结论与连续时间情况下完全一致。

六. 差分与求和 (Differencing and Accumulation):

$$x[n]-x[n-1] \leftrightarrow (1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longleftrightarrow \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

说明: 在DFT中 $(1-e^{-j\omega})$ 对应于CFT中的 $j\omega$ 。

例: 求单位阶跃信号的DFT

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \qquad \delta[n] \leftrightarrow 1$$

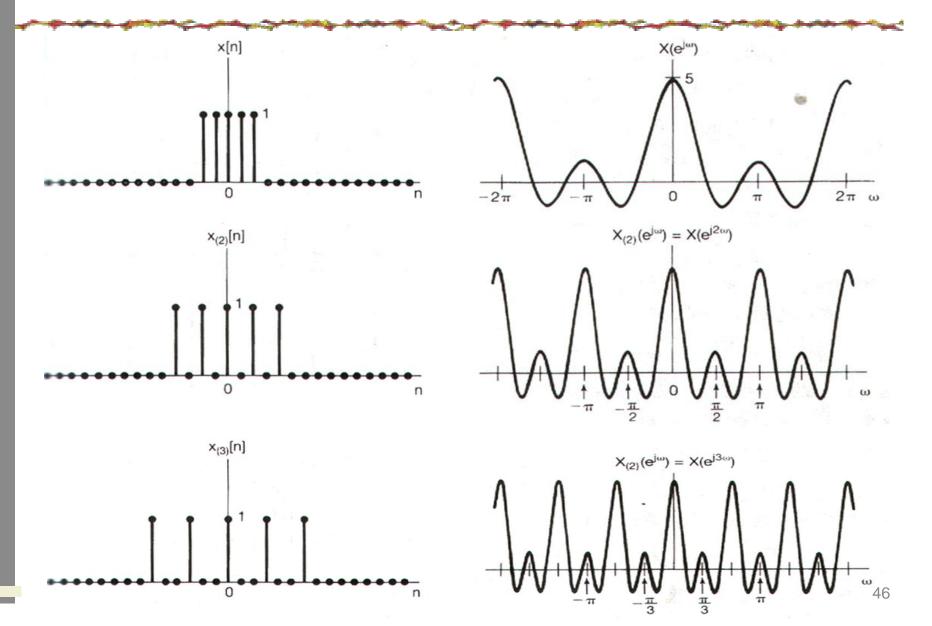
$$\therefore u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

七. 时域内插 (Interplation):

定义
$$x_k[n] = \begin{cases} x[n/k], & n \to k$$
 的整数倍 $0, & \text{其他 } n \end{cases}$

$$X_k(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k[n]e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_k[rk]e^{-j\omega rk}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[r]e^{-j\omega rk} = X(e^{jk\omega}) \qquad \therefore x_k[n] \leftrightarrow X(e^{jk\omega})$$



信号的时域与频域特性之间有一种相反的关系。

八. 频域微分(Differention in Frequency):

$$nx[n] \longleftrightarrow j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

九. Parseval定理:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \left| X(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega$$

 $\left|X(e^{j\omega})\right|^2$ 称为 x[n] 的能量谱密度函数。

比较:在DFS中有
$$\frac{1}{N} \sum_{n=< N>} |x[n]|^2 = \sum_{k=< N>} |a_k|^2$$

 $\left|a_{k}\right|^{2}$ 称为周期信号的功率谱。

5.4卷积性质

若
$$y[n] = x[n] * h[n],$$
则 $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}),$

 $H(e^{j\omega})$ 即是系统的频率特性。

说明:该特性提供了对LTI系统进行频域分析的理论基础。

5.4卷积性质

例:考虑一LTI系统,其单位脉冲响应为

$$h[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1$$

系统输入信号为

$$x[n] = b^n u[n], \quad |b| < 1$$

求系统的输出 y[n]

5.5相乘性质

如果
$$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n],$$

则 $Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$

$$= \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$

由于 $X_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ 都是以 2π 为周期的,

因此上述卷积称为周期卷积。

5.5相乘性质

例:
$$c[n] = (-1)^n$$
, $x[n] \longrightarrow \emptyset \longrightarrow y[n] = x[n] \cdot c[n]$

巴知 $X(e^{j\omega})$ 求 $Y(e^{j\omega})$

$$c[n] = (-1)^n = e^{j\pi n} \qquad C(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \pi - 2k\pi)$$

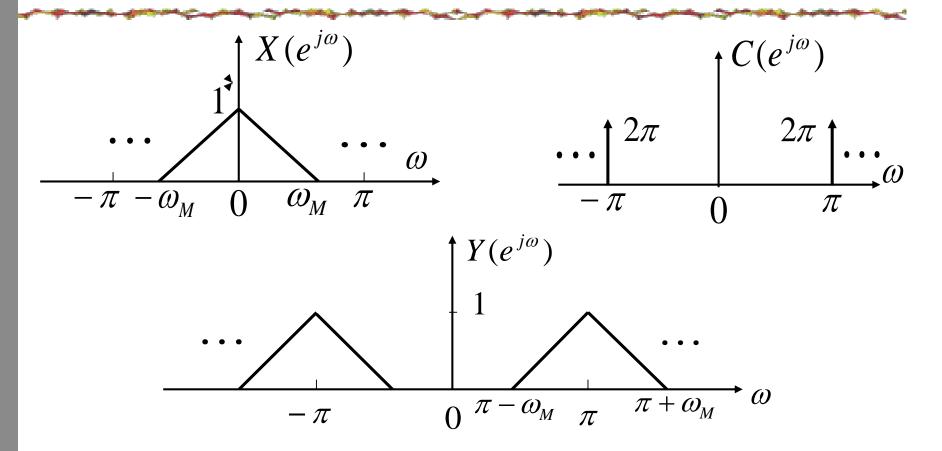
$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \otimes C(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) C(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi} X(e^{j\theta}) \delta(\theta - (\omega - \pi)) d\theta = X(e^{j(\omega - \pi)})$$

51

5.5相乘性质



5.6 傅立叶变换的性质及基本变换对列表 (略)

• 5.7 对偶性

一.DFS的对偶

$$x[n] = \sum_{k=< N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \qquad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=< N>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

由于 a_k 本身也是以N为周期的序列,当然也可以

将其展开成DFS形式。

PP:
$$a_k = \sum_{n=< N>} \frac{1}{N} x[-n] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$
 或 $a_n = \sum_{k=< N>} \frac{1}{N} x[-k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

这表明: 序列 a_n 的DFS系数就是 $\frac{1}{N}x[-k]$,

$$x[n] \stackrel{DFS}{\longleftrightarrow} a_k$$

$$a_n \stackrel{DFS}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N} x[-k]$$

利用对偶性可以很方便的将DFS在时域得到的性质,通过对偶得到频域相应的性质。

例1: 从时移到频移

$$x[n] \longleftrightarrow a_k$$

$$x[n] \leftrightarrow a_k \qquad a_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x[-k]$$

利用时移性质有:
$$a_{n-n_0} \leftrightarrow \frac{1}{N} x[-k] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}$$

由对偶性有: $\frac{1}{N}x[-n]e^{-j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow \frac{1}{N}a_{-k-M}$

$$\therefore x[-n]e^{-j\frac{2\pi}{N}Mn} \longleftrightarrow a_{-k-M}$$

$$: x[-n] \leftrightarrow a_{-k}$$
 $: x[n]e^{j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow a_{k-M}$, 频移特性

例2:由卷积特性到相乘特性

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \longleftrightarrow a_k \cdot b_k \cdot N$$

DFS的卷积特性

$$a_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x_1[-k]$$
 $b_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x_2[-k]$

$$b_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x_2[-k]$$

由时域卷积性质:

$$a_n \otimes b_n \longleftrightarrow \frac{1}{N} x_1[-k] \cdot \frac{1}{N} x_2[-k] \cdot N = \frac{1}{N} x_1[-k] \cdot x_2[-k]$$

由对偶性:
$$\frac{1}{N}x_1[-n]x_2[-n] \leftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{m=< N>} a_m b_{-k-m}$$

$$\therefore x_1[n] \cdot x_2[n] \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{k-m} = a_k \otimes b_k \text{ 时域相乘性质}$$

二. DFT与CFS间的对偶

由
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$
 知 $X(e^{j\omega})$ 是一个以

 2π 为周期的连续函数,则周期的连续时间信号 $X(e^{jt})$

可以将其表示为CFS形式:

$$X(e^{jt}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkt}, \qquad a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{jt}) e^{-jkt} dt$$

由DFT有:
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

比较 x[n]和 a_k 的表达式可以看出 $a_k = x[-k]$

这表明:

若
$$x[n] \stackrel{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$$
则 $X(e^{jt}) \stackrel{CFS}{\longleftrightarrow} x[-k]$

利用这一对偶关系,可以将DFT的若干特性对偶到CFS中去;或者反之。

例: 从DFT的频域微分到CFS的时域微分

$$-jnx[n] \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega})$$
 DFT的频域微分特性

$$\frac{d}{dt}X(e^{jt}) \stackrel{CFS}{\longleftrightarrow} jkx[-k] = j\frac{2\pi}{T}kx[-k], \quad (T = 2\pi)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) \longleftrightarrow cfs \to j\frac{2\pi}{T}ka_k$$
 CFS的时域微分特性

例: 从DFT的相乘特性到CFS的卷积特性

$$x_1[n] \stackrel{DTFT}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\omega})$$
 $x_2[n] \stackrel{DTFT}{\longleftrightarrow} X_2(e^{j\omega})$
 $X_1(e^{jt}) \stackrel{CFS}{\longleftrightarrow} x_1[-k]$ $X_2(e^{jt}) \stackrel{CFS}{\longleftrightarrow} x_2[-k]$

由对偶性:

$$X_1(e^{jt}) \otimes X_2(e^{jt}) \stackrel{CFS}{\longleftrightarrow} Tx_1[-k]x_2[-k], (T=2\pi)$$

$$x_1(t) \otimes x_2(t) \leftrightarrow Ta_k b_k$$
 CFS的卷积特性

可以将对偶关系归纳为如下图表:

连续时间傅立叶级数

$$x(t) \leftrightarrow a_k$$

连续、周期:离散、非周期

$$a_k = \frac{1}{T}X(j\frac{2\pi}{T}k)$$

$$\begin{array}{c}
x[n] & \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) \\
X(e^{jt}) & \xrightarrow{CFS} x[-k]
\end{array}$$

离散、周期:离散、周期

离散时间傅立叶级数

 $a_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x[-k]$

 $x[n] \leftrightarrow a_k$

连续时间傅立叶变换

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

$$X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

连续、非周期连续、非周期

离散时间傅立叶变换

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

离散、非周期:连续、周期

63

可以看出:信号在时域的特性和在频域的特性之间存在以下对应关系:

时域的周期性 频域的离散性 时域的非周期性 频域的连续性 时域的离散性 频域的周期性 频域的非周期性

• 5.8 由线性常系数差分方程表征的系统 Systems Characterized by Linear Constant-Coefficient Difference Equations

Systems Characterized by Linear Constant-Coefficient Difference Equations

相当广泛而有用的一类离散时间LTI系统可以由

一个线性常系数差分方程(LCCDE)来表征:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

一. 由LCCDE描述的系统的频率响应:

方法一:可以从求解 $x[n] = \delta[n]$ 时的差分方程得到 h[n], 进而对 h[n]做变换而求得 $H(e^{j\omega})$ 。

方法二: 可以通过求出 $x[n] = e^{j\omega n}$ 时方程的解而得到 $H(e^{j\omega})$,因为 $e^{j\omega n}$ 是LTI系统的特征函数,此时的 $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ 。

方法三:对方程两边进行DFT变换,可得到:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N} b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

可见 $H(e^{j\omega})$ 是一个有理函数。当需要得到 h[n]时,往往是先从方程得到 $H(e^{j\omega})$,进而通过反变换得到 h[n]。

二.系统的频率响应:

 $H(e^{j\omega})$ 刻画了LTI系统的频域特征,它是系统单位脉冲响应的傅立叶变换。

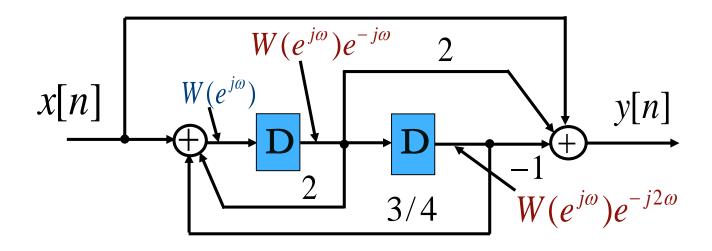
但并非所有的LTI系统都一定存在频率响应。

如果 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$, 则 $H(e^{j\omega})$ 存在。

这说明:稳定系统可以由其频率响应来描述。

由 $H(e^{j\omega})$ 所表征的系统应该是稳定系统。

三.由方框图描述的系统:



通过对图中两个加法器的输出列方程可得到:

$$W(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2W(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \frac{3}{4}W(e^{j\omega})e^{-j2\omega}$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2W(e^{j\omega})e^{-j\omega} - W(e^{j\omega})e^{-j2\omega}$$

通过对图中两个加法器的输出列方程可得到:

$$W(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2W(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \frac{3}{4}W(e^{j\omega})e^{-j2\omega}$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2W(e^{j\omega})e^{-j\omega} - W(e^{j\omega})e^{-j2\omega}$$

由上式可得:

$$X(e^{j\omega}) = (1 - 2e^{-j\omega} - \frac{3}{4}e^{-j2\omega})W(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = (1 - \frac{7}{4}e^{-j2\omega})W(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{7}{4}e^{-j2\omega}}{1 - 2e^{-j\omega} - \frac{3}{4}e^{-j2\omega}} = 1 + \frac{2e^{-j\omega} - e^{-j2\omega}}{1 - 2e^{-j\omega} - \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}$$

四. LTI系统的频域分析方法:

- 1. 对输入信号做傅立叶变换,求得 $X(e^{j\omega})$ 。
- 2. 根据系统的描述,求得系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。
- 3. 根据卷积特性得到 $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 。
- 4. 对 $Y(e^{j\omega})$ 做傅立叶反变换得到系统的响应y[n]。

做傅立叶变换或反变换的主要方法是部分分式展 开(附录A)、傅立叶变换的性质和常用变换对

• 例:某因果线性时不变系统由以下差分方程描述

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$$

试确定该系统的单位脉冲响应h[n]。

解:该系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}} = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

$$= \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{-2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

h[n]为 $H(e^{j\omega})$ 的反变换。可由常用变换对获得:

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

例:考虑一个因果线性时不变系统,其差分方程为

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

- (a) 求该系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。
- (b) 当输入为 $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ 时,求系统响应y[n]。

解:

(a) 该系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

(b)
$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \stackrel{\text{FT}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

因此
$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{1/2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1/2}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

系统响应为 $Y(e^{j\omega})$ 的逆变换,即

$$y[n] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$
$$= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] u[n]$$

- 本章与第4章平行地讨论了DFT,讨论的基本思路和方法与第4章完全对应,得到的许多结论也很类似。
- 通过对DFT性质的讨论,揭示了离散时间信号时域与频域特性的关系。不仅看到有许多性质在CFT中都有相对应的结论,而且它们也存在一些重要的差别,例如DFT总是以2π为周期的。

- 通过卷积特性的讨论,对LTI系统建立了频域 分析的方法。同样地,相乘特性的存在则为离 散时间信号的传输技术提供了理论基础。
- 对偶性的讨论为进一步认识连续时间信号、离散时间信号、周期信号与非周期信号频域描述的几种工具之间的内在联系,提供了重要的理论根据。
- 深入理解并恰当运用对偶性,对深刻掌握CFS、DFS、CFT、DFT的本质关系有很大帮助。

- 与连续时间LTI系统一样,对由LCCDE或由方框图描述的LTI系统,可以很方便的由方程或方框图得到系统的频率响应函数H(eiω),进而实现系统的频域分析。 其基本过程和涉及到的问题与连续时间LTI系统的情况也完全类似。
- 随着今后进一步的讨论,我们可以看到CFS、DFS、 CFT、DFT之间是完全相通的。

