数值计算方法

纪庆革 主讲

中山大学计算机学院

E-mail: 1024180018@qq.com

第四章 数值积分（和数值微分）

- 内容提要
- 4.1 数值积分概论
- 4.2 牛顿-柯特斯公式
- 4.3 复化求积公式
- 4.4 龙贝格求积公式
- 4.5 高斯求积公式

4.1 数值积分概论

4.1.1 数值求积的基本思想

- 对定义在区间［*a*, *b*］上的定积分

$$I=\int_a^b f(x)\mathbf{d}x=F(b)-F(a)$$

- 但实际使用这种积分方法时往往有困难，有时原函数不能用初等函数表示，有时原函数又十分复杂，难于求出或计算；另外如被积函数是由测量或数值计算给出的一张数据表示时，上述方法也不能直接运用。因此有必要研究积分的数值计算问题

- 计算定积分有微积分基本公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

- 但很多函数找不到原函数，如

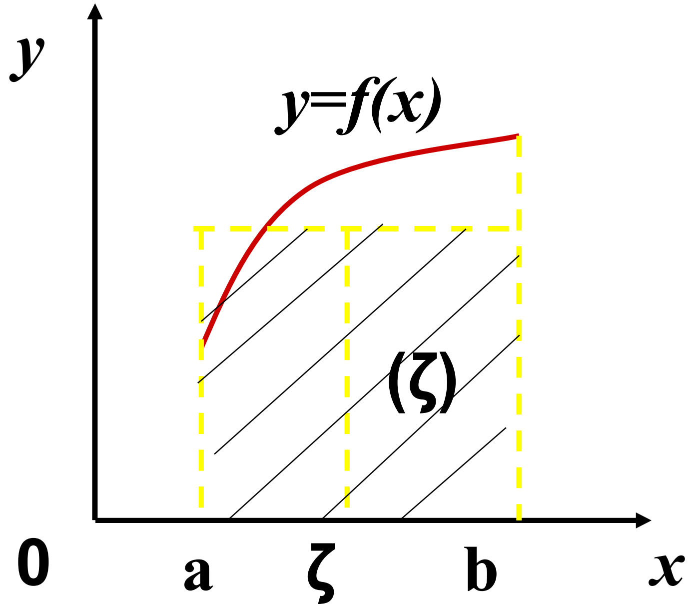
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad f(x) = e^{-x^2}$$

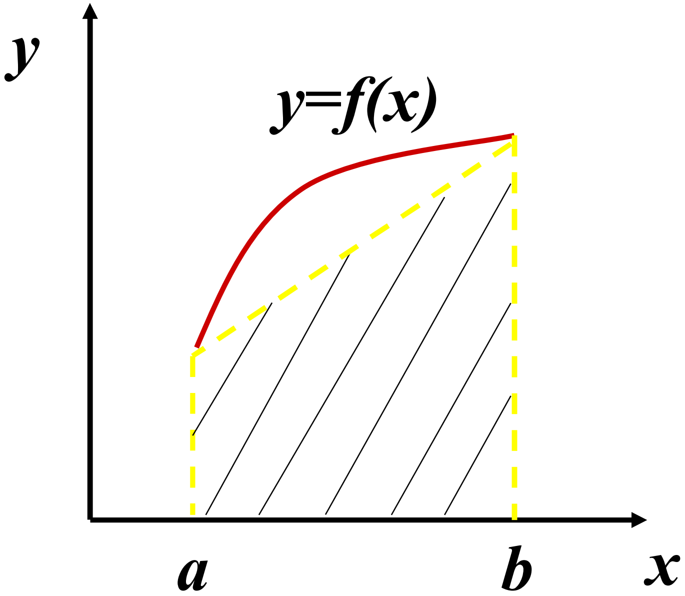
- 等。而实际上，有很多函数只知一些离散点的函数值，并无表达式，这就需要利用已知条件求出近似值

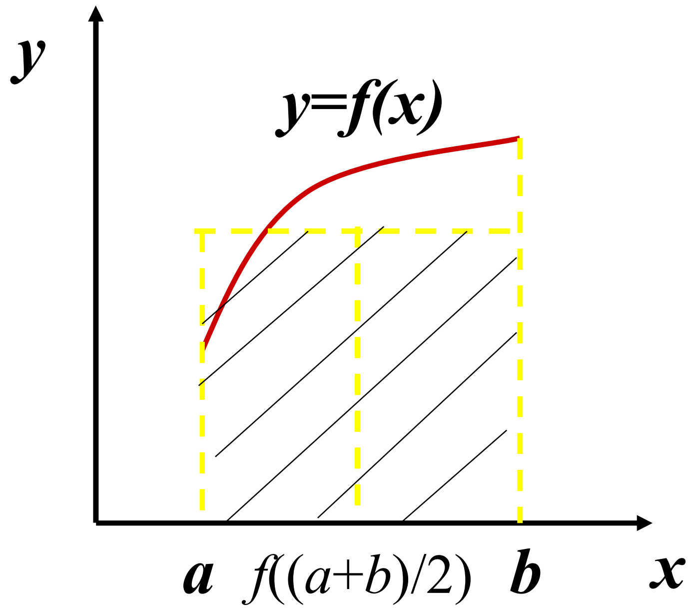
- **积分中值定理告诉我们：**

$$I=\int_a^b f(x)\mathbf{d}x=\underline{f(\xi)}(b-a).$$

平均高度







$$T=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{[f(a)+f(b)]}{2}(b-a) \qquad R=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

梯形公式　　平均高度　　中矩形公式　　平均高度

如果简单地选取区间[a,b]的一个端点或区间中点的高度作为平均高度,这样建立的求积公式分别是:

左矩形公式: $I(f)\approx(b-a)f(a)$

右矩形公式: $I(f)\approx(b-a)f(b)$

中矩形公式: $I(f)\approx(b-a)f[(a+b)/2]$

- 更一般地，我们构造具有下列形式的求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathbf{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

- 这类数值积分方法通常称为机械求积，其特点是将积分求值问题归结为函数值的计算，这就避开了牛顿-莱布尼兹公式需要寻求原函数的困难

4.1.2 代数精度的概念

定义4-1 如果某个求积公式对于次数不超过 m 的多项式均能准确地成立，但对于 $m+1$ 次的多项式就不准确成立，则称该求积公式具有 m **次代数精度**。

梯形公式 $\left(T=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{[f(a)+f(b)]}{2}(b-a)\right)$ 代数精度

令$f(x)=1,x,....$

当$f(x)=1$,左边$=\int_a^b 1\,\mathrm{d}x=b-a$

右边$=\frac{[1+1]}{2}(b-a)=b-a$　　　　左边$=$右边

当$f(x)=x$,左边$=\int_a^b x\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}$

右边$=\frac{[b+a]}{2}(b-a)=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}$　　　　左边$=$右边

当$f(x)=x^2$,左边$=\int_a^b x^2\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}=\frac{(b^2+ab+a^2)}{3}(b-a)$

右边$=\frac{[b^2+a^2]}{2}(b-a)$　　　　左边$\neq$右边

因此梯形公式具有一次代数精确度。

利用代数精度的概念构造求积公式

例4–1 确定下面公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造的求积公式所具有的代数精度

$$\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx Af(-h) + Bf(x_1)$$

解: 令$f(x)=1,\ x,\ x^2$, 代入公式并令其相等，得

$$\begin{cases} A+B=2h \\ -hA+Bx_1=0 \\ h^2A+Bx_1^2=\dfrac{2}{3}h^3 \end{cases}$$

解得 $x_1=\dfrac{1}{3}h,\ A=\dfrac{1}{2}h,\ B=\dfrac{3}{2}h.$ 于是

$$\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\left[f(-h)+3f\left(\frac{1}{3}h\right)\right]$$

再令$f(x)=x^3$, 得

$$0=\int_{-h}^{h} x^3\mathrm{d}x \neq \frac{h}{2}\left[(-h)^3+3\left(\frac{1}{3}h\right)^3\right]=-\frac{4}{9}h^4$$

故求积公式具有2次代数精度。

例4-2 确定下面公式中的待定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造的求积公式所具有的代数精度

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx Af(0)+Bf(x_1)+Cf(1)$$

解: 令$f(x)=1,\ x,\ x^2,\ x^3$，代入公式两端并令其相等，得

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ Bx_1+C=\dfrac{1}{2} \\ Bx_1^2+C=\dfrac{1}{3} \\ Bx_1^3+C=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

解得，$x_1=\dfrac{1}{2},\ A=\dfrac{1}{6},\ B=\dfrac{2}{3},\ C=\dfrac{1}{6}.$ 于是

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{6}f(0)+\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}f(1)$$

再令$f(x)=x^4$，得

$$\frac{1}{5}=\int_0^1 x^4\mathrm{d}x \neq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$$

故求积公式具有3次代数精度。

4.1.3 插值型的求积公式

设给定一组节点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

且已知 函数 $f(x)$ 在这些节点上的值 f_k $(k = 0,1,2,\cdots,n)$，作拉格朗日插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f_k$$

于是, 得到积分 $I=\int_a^b f(x)dx$ 的近似值

$$I_n=\int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{k=0}^{n} l_k(x)f_k\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\left[\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x\right]f_k=\sum_{k=0}^{n}A_k f_k$$

这样构造的求积公式称为插值型的求积公式。

它的余项为 $R[f]=I-I_n=\int_a^b[f(x)-L_n(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\mathrm{d}x$

这时的求积公式至少具有 n 次代数精度

梯形公式余项：$R[f]=\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)\mathrm{d}x=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)\quad,\eta\in(a,b)$

同理，辛普森公式余项：$R[f]=-\frac{b-a}{180}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta)\quad,\eta\in(a,b)$

定理4-1 形如 $I_n = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 的积分公式至少有n次代数精度的充分必要条件是：它是插值型的。

辛普森(Simpson)公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx S = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

Theorem 1.11 (Weighted Integral Mean Value Theorem). Assume that $f, g \in C[a, b]$ and $g(x) \geq 0$ for $x \in [a, b]$. Then there exists a number c, with $c \in (a, b)$, such that

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{14}$$

Theorem 1.10 (Mean Value Theorem for Integrals). Assume that $f \in C[a, b]$. Then there exists a number c, with $c \in (a, b)$, such that

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

The value $f(c)$ is the average value of f over the interval $[a, b]$.

Theorem 1.8 (First Fundamental Theorem). If f is continuous over $[a, b]$ and F is any antiderivative of f on $[a, b]$, then

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{where } F'(x) = f(x). \tag{12}$$

Theorem 1.6 (Mean Value Theorem). Assume that $f \in C[a, b]$ and that $f'(x)$ exists for all $x \in (a, b)$. Then there exists a number c, with $c \in (a, b)$, such that

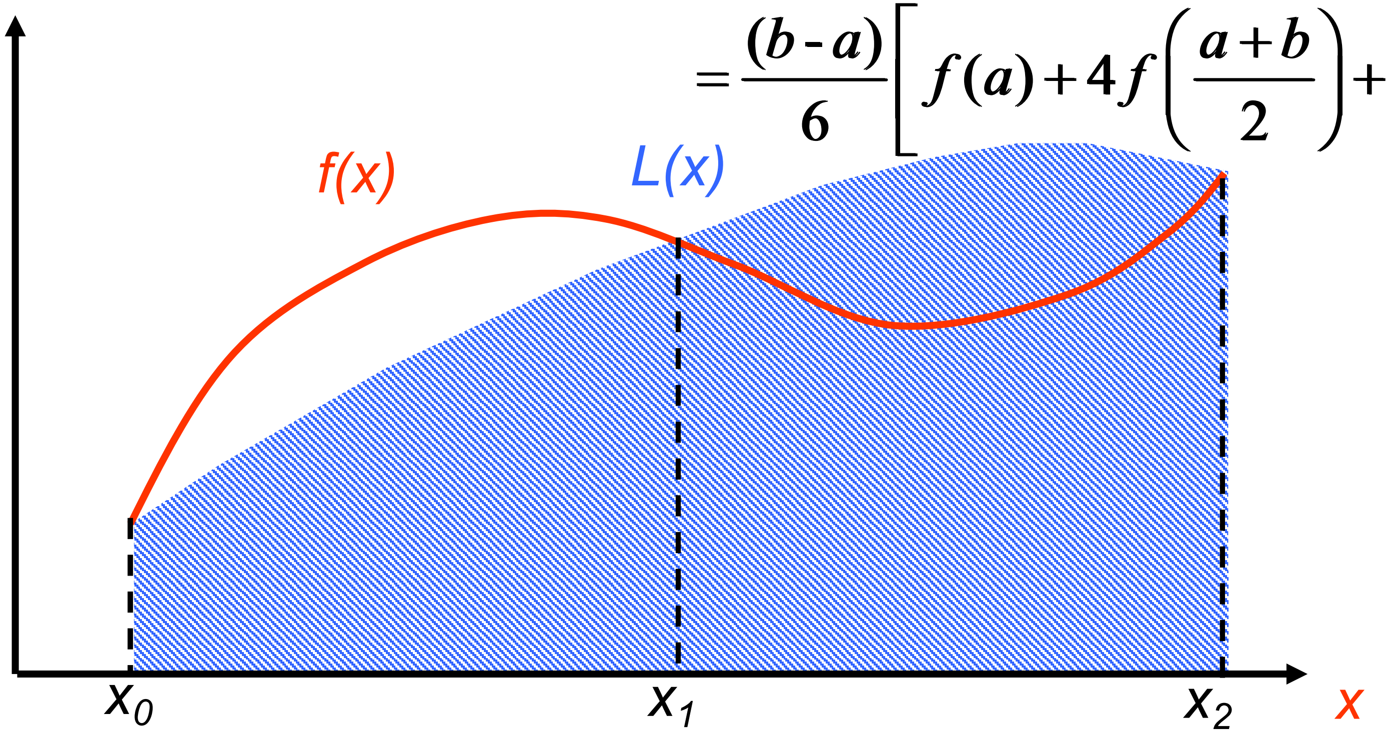
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{11}$$

Simpson's Rule

- **Approximate the function by a parabola**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{2} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= \frac{(b-a)}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$



4.2 牛顿-柯特斯公式
一、柯特斯系数

设将求积区间$[a,b]$做n等分，步长$h=\dfrac{b-a}{n}$, 在等距节点

$x_k=a+kh$构造出的插值型求积公式

$$I_n=(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}f(x_k),$$

称为 牛顿-柯特斯公式（Newton-Cotes公式），

$C_k^{(n)}$ 称为 柯特斯系数.

由插值型求积公式：$I_n = \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\left[\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x\right] f_k$ 知

求积系数 $A_k = \int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x,\ k = 0,1,\cdots,n$

引入变换 $x = a + th$

则有

$$C_k^{(n)} = \frac{h}{b-a}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{t-j}{k-j}\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(t-j)\mathrm{d}t.$$

当$n=1$时，得到梯形公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx T = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

当$n=2$时，得到**辛普森(Simpson)公式**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx S = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

当$n=4$时，得到**柯特斯(Cotes)公式**（英文书称Boole公式）

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx C = \frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)],$$

其中$x_k = a+kh$，$h=\dfrac{b-a}{4}$

柯特斯系数表. $n \geq 8$ 时$C_k^{(n)}$ 出现负值，N-C 公式不稳定

由于构造Newton-Cotes公式需要Cotes系数,将其列表如下:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

例1 设$f(x)\in C^2[a,b]$，求$n=1$时的Newton-Cotes公式并估计误差.

解 计算Cotes系数

$$C_0^{(1)}=-\int_0^1(t-1)\mathrm{d}t=\frac{1}{2},\quad C_1^{(1)}=\int_0^1 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2},$$

于是有 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

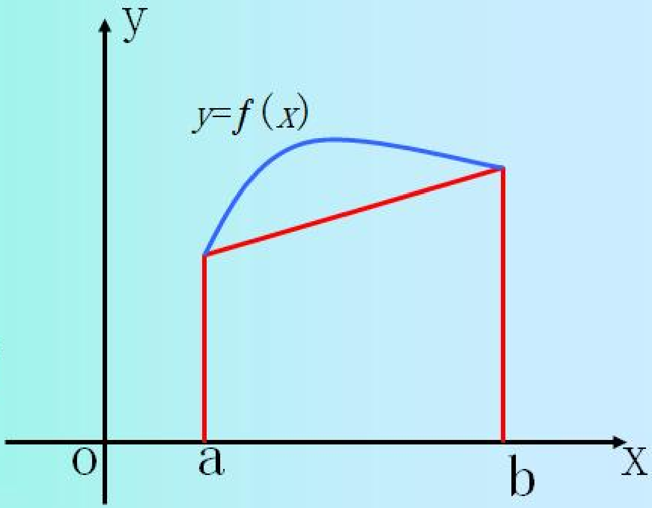
$$R[f]=\frac{1}{2!}\int_a^b f''(\xi_x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)\mathrm{d}x=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta),\quad \eta\in(a,b)$$

若记 $M_2=\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$ ，则有误差估计

$$|R[f]|\le\frac{M_2}{12}(b-a)^3$$

从几何上看:



所以公式

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\mathrm{T}$$

也称为**梯形公式**, 记为T.

例2 设 $f(x)\in C^4[a,b]$, 求 $n=2$ 时的Newton-Cotes公式并估计误差.

解 计算Cotes系数

$$C_0^{(2)}=\frac{1}{4}\int_0^2(t-1)(t-2)dt=\frac{1}{6},$$

$$C_1^{(2)} = -\frac{1}{2}\int_0^2 t(t-2)dt = \frac{4}{6},$$

$$C_2^{(2)} = \frac{1}{4}\int_0^2 t(t-1)dt = \frac{1}{6},$$

于是有

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)] = S.$$

称之为**Simpson公式或抛物线公式**，记为S.

容易证明Simpson公式对不高于三次的多项式精确成立, 即

$$\int_a^b p_3(x)dx = \frac{b-a}{6}[p_3(a)+4p_3(\frac{a+b}{2})+p_3(b)]$$

构造三次多项式$H_3(x)$, 使满足 $H_3(a)=f(a)$, $H_3(b)=f(b)$,

$H_3(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{a+b}{2}), H_3'(\frac{a+b}{2}) = f'(\frac{a+b}{2})$, 这时插值误差为

不做要求

$$f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b),\quad \xi_x\in(a,b)$$

于是有

$$\begin{aligned}
R[f]&=\int_a^b f(x)dx-S\\
&=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b H_3(x)dx\\
&=\frac{1}{4!}\int_a^b f^{(4)}(\xi_x)(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)dx\\
&=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_a^b(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)dx\\
&=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)\qquad ,\eta\in(a,b)
\end{aligned}$$

若记 $M_4=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$，则有

$$\left|R[f]\right|\le\frac{M_4}{2880}(b-a)^5$$

不做要求

例3 求n=4的Newton-Cotes公式及误差.

解 查表可得

$$C_0^{(4)}=\frac{7}{90},\quad C_1^{(4)}=\frac{16}{45}, C_2^{(4)}=\frac{2}{15},\quad C_3^{(4)}=\frac{16}{45},\quad C_4^{(4)}=\frac{7}{90}$$

于是有

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

其中，$x_k=a+kh$, $k=0,1,2,3,4$, $h=(b-a)/4$.

称之为**Cotes公式**，记为C。其误差为

$$R[f]=-\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^6 f^{(6)}(\eta)$$

$$=-\frac{(b-a)^7}{1935360}f^{(6)}(\eta)\qquad ,\eta\in(a,b)$$

例4-3 运用梯形公式、辛普森公式分别计算积分 $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$ ，并估计误差。

解： 运用梯形公式

$$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}[e^0 + e^1] = 1.8591409$$

其误差为 $|R[f]| = \left| -\frac{1}{12} e^{\eta} (1-0)^3 \right| \le \frac{e}{12} = 0.2265235, \quad \eta \in (0,1)$

运用辛普森公式

$$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x \approx \frac{1}{6}\left[e^0 + 4e^{\frac{1}{2}} + e^1 \right] = 1.7188612$$

其误差为

$$|R[f]| = \left| -\frac{1}{180} e^{\eta} \left(\frac{1-0}{2} \right)^4 \right| = \left| -\frac{1}{2880} e^{\eta} \right| \le \frac{e}{2880} = 0.00094385, \quad \eta \in (0,1)$$

牛顿-柯特斯公式的代数精度

定理4－2 若n为偶数, 则 n 阶 N-C 公式至少有 $n+1$ 次代数精度.

§2 求积公式的代数精度

定义4.1 若求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

对 $f(x)=x^j$ (j=0, 1, 2, …, m) 都精确成立, 但对 $f(x)=x^{m+1}$ 不精确成立, 即

$$\int_a^b x^j dx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^j \qquad , j = 0,1,2,\dots, m$$

$$\int_a^b x^{m+1} dx \neq \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^{m+1}$$

则称此公式**具有m次代数精度.**

可见, 若公式具有m次代数精度, 则公式对所有次数不超过m的多项式都精确成立. n+1个节点的插值型求积公式至少具有n次代数精度, n是偶数时具有n+1次代数精度.

若求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ ，具有n次代数精度，则

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + \ldots + A_n = b - a \\ x_0 A_0 + x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = \dfrac{b^2 - a^2}{2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_0^n A_0 + x_1^n A_1 + \ldots + x_n^n A_n = \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{cases} \quad (4.1)$$

这是关于$A_0, A_1, \ldots, A_n$的线性方程组，其系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \neq 0$$

所以方程组(4.1)有唯一解。

例5　确定形如

$$\int_0^3 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(3)$$

的求积公式，使其代数精度尽可能高。

解　令公式对$f(x)=1, x, x^2$都精确成立，则

$$\begin{cases} A_0+A_1+A_2=3 \\ A_1+3A_2=4.5 \\ A_1+9A_2=9 \end{cases}$$，解之得：$A_0=0, A_1=9/4, A_2=3/4.$

数值求积公式为

$$\int_0^3 f(x)dx \approx \frac{3}{4}[3f(1)+f(3)]$$

例6　试确定参数A_0, A_1, A_2，使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$$

具有尽可能高的代数精度, 并问代数精度是多少?

解 令公式对$f(x)=1, x, x^2$都精确成立, 则

$$\begin{cases} A_0+A_1+A_2=2 \\ -A_0+A_2=0 \\ A_0+A_2=2/3 \end{cases}$$

, 解得: $A_0=A_2=1/3$, $A_1=4/3$.

求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)]$$

当$f(x)=x^3$时, 左=0, 右=0, 公式也精确成立.

当$f(x)=x^4$时, 左=2/5, 右=2/3, 公式不精确成立.

所以, 此公式的代数精度为3.

例7 试确定参数A_0, A_1, A_2，使求积公式

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1)$$

具有尽可能高的代数精度，并问代数精度是多少？

解 令公式对$f(x)=1, x, x^2$都精确成立，则

$$\begin{cases} A_0+A_1+A_2=2/3 \\ -A_0+A_2=0 \\ A_0+A_2=2/5 \end{cases}$$，解得：$A_0=A_2=1/5$，$A_1=4/15$.

求积公式为

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx \approx \frac{1}{15}[3f(-1) + 4f(0) + 3f(1)]$$

经验证公式对$f(x)=x^3$精确成立，但对$f(x)=x^4$不精确成立，公式的代数精度为3.

例8 试确定参数A_0, A_1和x_0, x_1, 使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

具有尽可能高的代数精度, 并问代数精度是多少?

解 令公式对$f(x)=1, x, x^2, x^3$都精确成立, 则

$$\begin{cases} A_0+A_1=2 \\ A_0x_0+A_1x_1=0 \\ A_0x_0^2+A_1x_1^2=2/3 \\ A_0x_0^3+A_1x_1^3=0 \end{cases}, 解得: \begin{cases} A_0 = A_1 = 1 \\ -x_0 = x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

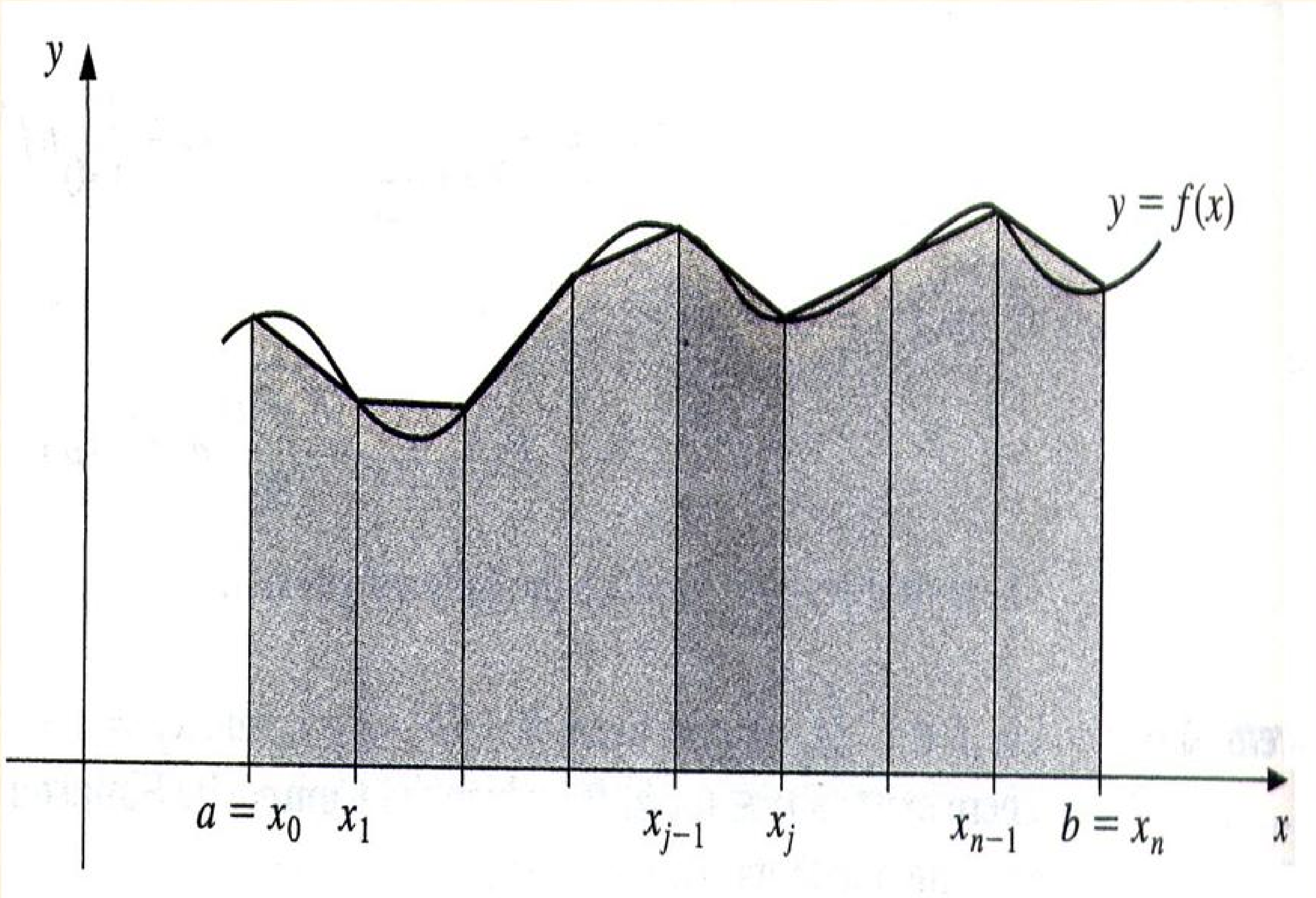
求积公式的代数精度为3。

课堂练习

4.3 复合求积公式

一、问题与基本思想

- 在使用牛顿-柯特斯公式时将导致求积系数出现负数(当$n\geq 8$时，牛顿-柯特斯求积系数会出现负数)，因而不可能通过提高阶的方法来提高求积精度
- 为了提高精度通常采用将积分区间划分成若干个小区间，在各小区间上采用低次的求积公式(梯形公式或辛普森公式)，然后再利用积分的可加性，把各区间上的积分加起来，便得到新的求积公式，这就是复化求积公式的基本思想
- 下面介绍复化的梯形公式和复化的辛普森公式



复化梯形公式积分法

二、复合梯形公式

将区间 $[a,b]$ 等分为 n 个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$,其中

$$x_k = a + kh, \quad \left(h = \frac{b-a}{n}, k = 0,1,\cdots,n-1 \right),$$

并在每个小区间上应用梯形公式, 则得复合梯形公式

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})] + R_n[f]$$

记 $T_n = \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right]$

称为复合梯形公式，余项为

$$R_n[f] = I - T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left[-\frac{h^3}{12} f''(\eta_k) \right], \quad \eta_k \in (x_k, x_{k+1})$$

$$= -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta), \qquad \eta \in (a,b)$$

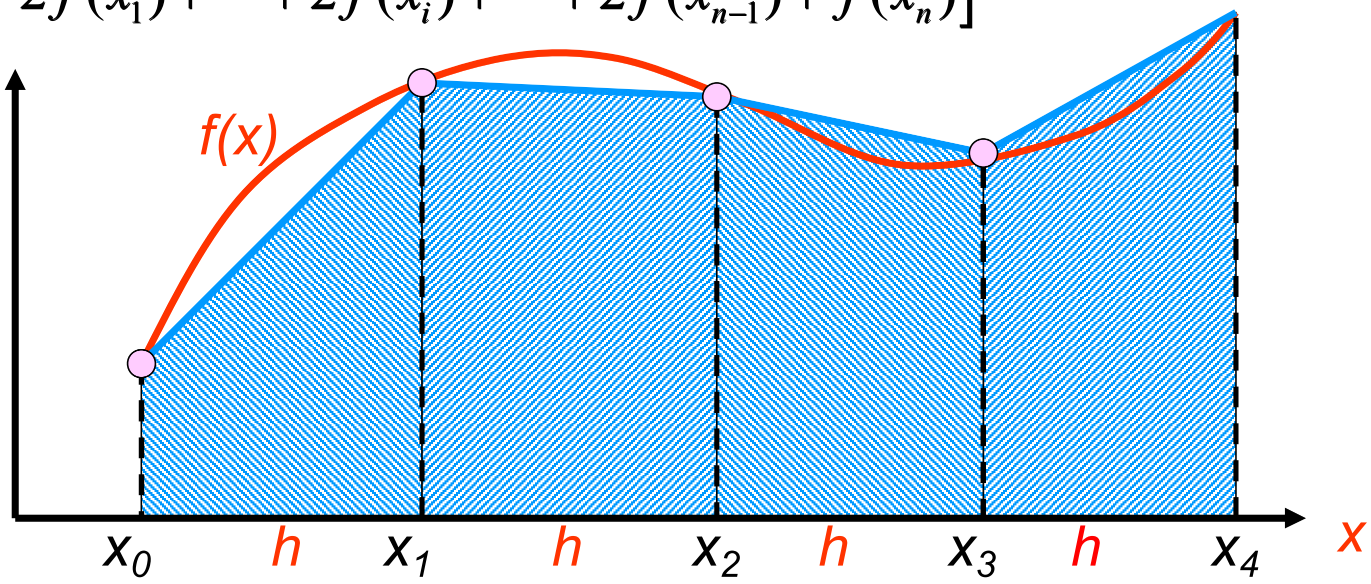
Composite Trapezoid Rule

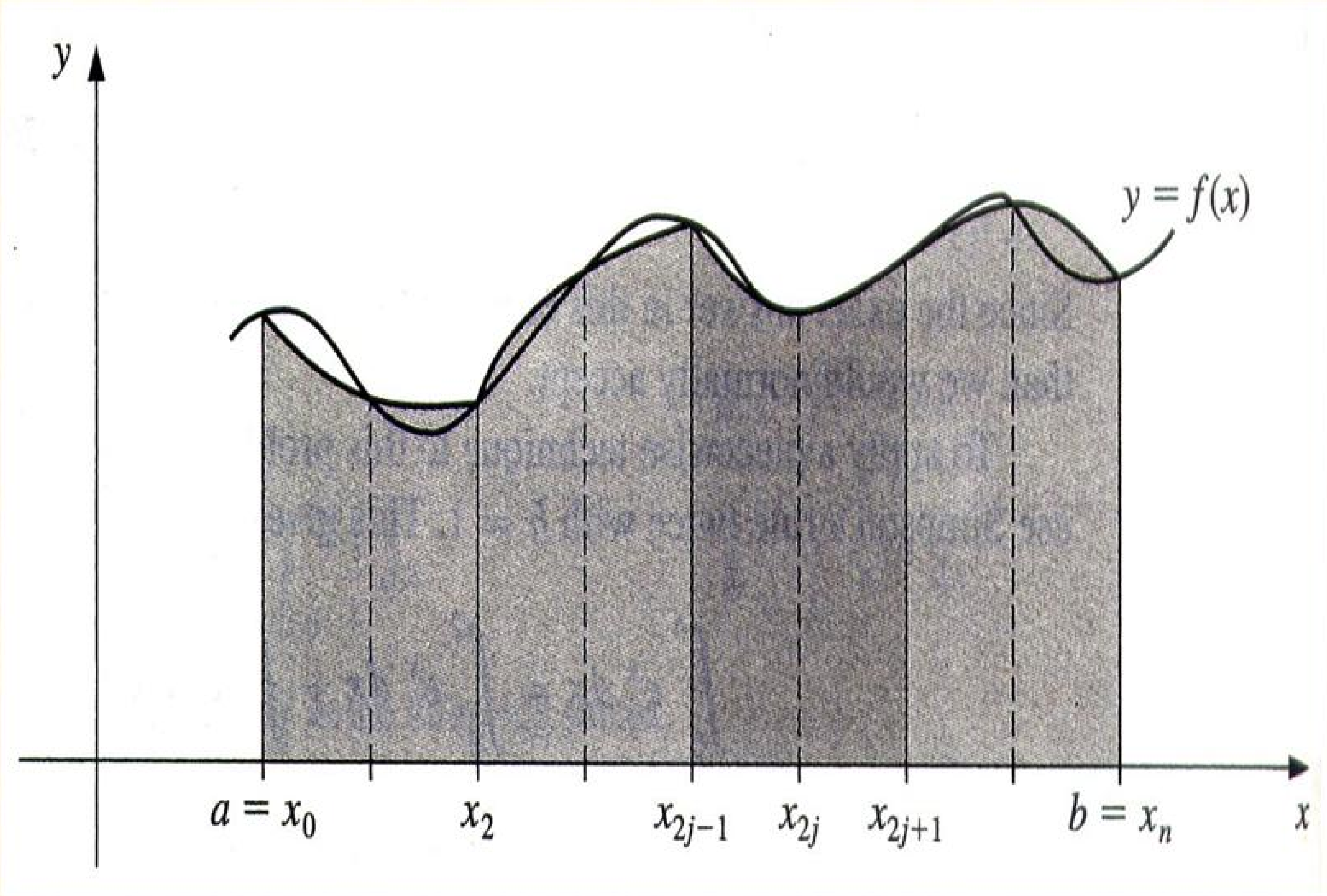
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + \cdots\cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\approx \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1)+f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_i)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$$





复化Simpson公式积分法

三、复合辛普森公式

记 $[x_k, x_{k+1}]$ 的中点为 $x_{k+\frac{1}{2}}$, 在每个小区间上应用辛普森公式, 则得复合辛普森公式

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{6}[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]+R_n[f],$$

记 $$S_n=\frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]$$

$$=\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

称为复合辛普森公式。

1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, ..., 4, 2, 4, 1

Composite Simpson's Rule

- **Multiple applications of Simpson's rule**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] + \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$

$$+ \cdots + \frac{h}{3}\left[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots$$

$$+ 4f(x_{2i-1}) + 2f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + \cdots$$

$$+ 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big]$$

注意中英文讲法之区别

余项为 $R_n[f] = I - S_n = -\frac{h}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 \sum_{k=0}^{n\text{-}1} f^{(4)}(\eta_k), \quad \eta_k \in (x_k, x_{k+1})$

$$= -\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta), \qquad \eta \in (a,b)$$

例4－4 对于函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，给出$n=8$时的函数表，试用复合梯形公式及复合辛普森公式计算积分$I=\int_0^1 \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 。

x_i	0	1/8	1/4	3/8	1/2
$f(x_i)$	1 (极限)	0.9973978	0.9896158	0.9767267	0.9588510
x_i	5/8	3/4	7/8	1	
$f(x_i)$	0.9361556	0.9088516	0.8414709	0.8414709	

$$T_8=\frac{1}{8}\left[\frac{f(0)}{2}+f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)+\frac{f(1)}{2}\right]$$

$$\approx 0.945\ 690\ 9.$$

$$S_4=\frac{1}{4\times 6}\left\{f(0)+4\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]\right.$$

$$\left.+2\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]+f(1)\right\}\approx 0.946\ 083\ 2$$

例4－5 计算积分$I=\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx$，若用复合梯形公式，问区间$\left[0,\pi/2\right]$应分多少等份才能使误差不超过$10^{-3}/2$，若取同样的求积节点，改用复合辛普森公式，截断误差是多少？（辛普森公式需引入半个节点值）

解：　由于$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f^{(4)}(x)=\sin x,\ b-a=\dfrac{\pi}{2}$。

故复合梯形公式, 要求

$$\left|R_n[f]\right|=\left|-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)\right|\le\frac{1}{12}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2\le\frac{1}{2}\times10^{-3},\ \eta\in\left(0,\pi/2\right)$$

即$n^2\ge\dfrac{\pi^3}{48}\times10^3,\ n\ge25.416,$ 取$n=26,$ 即将区间$[0,\pi/2]$分为26等份时，

用复合梯形公式计算，截断误差不超过$10^{-3}/2$。

用复合辛普森公式(考虑引入半个节点值)，截断误差为

$$\left|R_S[f]\right|=\left|-\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\eta)\right|\le\frac{\pi}{180\times2}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^4\le0.1162608\times10^{-7}$$

例4－6 计算积分$I=\int_0^1 e^x dx$，若用复合梯形公式，问区间[0, 1]应分多少等份才能使误差不超过$10^{-5}/2$；若改用复合普森公式，要达到同样精度，区间[0, 1]应该分多少等份。

解： 由于$f'(x)=e^x, f''(x)=e^x, f^{(4)}(x)=e^x$，$b-a=1$，对复合梯形公式$T_n$ 余项

$$|R[f]|=\left|-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)\right|\le\left|-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 e\right|\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

由此有$n^2\ge\frac{e}{6}\times10^5$，$n\ge212.85$，可取$n=213$，即将区间[0,1]分为213等份，则可使误差不超过$10^{-5}/2$。

复合辛普森公式计算积分，则由余项公式可知要满足精度要求，必须使

$$|R[f]|=\frac{b-a}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4\left|f^4(\xi)\right|\le\frac{1}{180}\left(\frac{1}{2n}\right)^4 e\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$$

由此得 $n^4\ge\frac{e}{144}\times10^4$，$n\ge3.707$取4，$2n\ge2*3.707=7.414$取8，也即，复合辛普森公式可达到精度要求，此时区间[0,1] 实际上应分为8 等份。

课堂练习与确认

Error Analysis

Corollary 7.3 (Simpson's Rule: Error Analysis). Suppose that $[a, b]$ is subdivided into $2M$ subintervals $[x_k, x_{k+1}]$ of equal width $h = (b-a)/(2M)$. The composite Simpson rule

$$(14) \qquad S(f,h) = \frac{h}{3}(f(a)+f(b)) + \frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{M-1} f(x_{2k}) + \frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{M} f(x_{2k-1})$$

is an approximation to the integral

$$(15) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = S(f,h) + E_S(f,h).$$

Furthermore, if $f \in C^4[a,b]$, there exists a value c with $a < c < b$ so that the error term $E_S(f,h)$ has the form

$$(16) \qquad E_S(f,h) = \frac{-(b-a)f^{(4)}(c)h^4}{180} = \boldsymbol{O}(h^4).$$

4.4 龙贝格求积公式

一、梯形法的递推化 (变步长求积法)

把区间 $[a,b]$ 作 n 等分得 n 个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$, $h = \dfrac{b-a}{n}$,

则复合梯形公式

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})] = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right].$$

把区间 $[a,b]$ 作 $2n$ 等分, 记 $[x_k, x_{k+1}]$ 的中点 $x_{k+\frac{1}{2}} = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$,

则复合梯形公式

$$T_{2n}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)[f(x_k)+2f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]$$

$$=\frac{h}{4}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})]+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

$$=\frac{1}{2}T_n+\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}}).$$

于是可以逐次对分形成一个序列{ $T_1, T_2, T_4, T_8,\ldots$}, 此序列收敛于积分真值 I。当 $|T_{2n}- T_n|<\varepsilon$时，取 T_{2n}为 I 的近似值。以上算法称为变步长求积法。 但由于此序列收敛太慢 。下节我们将其改造成为收敛快的序列

例如 利用变步长的梯形法求$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$的近似值。

解：
$$T_1=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=0.9207355$$
$$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)=0.9397933$$
$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]=0.9445135$$
$$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{1}{8}\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]=0.956909$$
$$\cdots$$

二、龙贝格算法 (1955)

如何提高收敛速度以节省计算量是龙贝格算法要讨论的中心问题。

Richardson外推extrapolation: 1910

$$I-T_n=-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta_1)\quad \eta_1\in(a,b)$$

$$I-T_{2n}=-\frac{b-a}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\eta_2)\quad \eta_2\in(a,b)$$

假定$f''(\eta_1)\approx f''(\eta_2)$，则有

$$\frac{I-T_n}{I-T_{2n}}\approx 4$$ 整理，移项得

于是 $$I\approx\frac{4T_{2n}-T_n}{4-1}$$ 和 $$I-T_{2n}\approx\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$$

记 $$S_n=\frac{4T_{2n}-T_n}{4-1}$$

这样我们从收敛较慢的$\{T_n\}$序列推出了收敛较快的$\{S_n\}$序列。
可以证明$\{S_n\}$序列实际上就是逐次分半的复化辛普森公式序列

同理，$$I-S_{2n}\approx\frac{1}{15}(S_{2n}-S_n)$$ 和 $$I\approx\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n$$

复化柯特斯公式 $$C_n=\frac{16}{15}S_{2n}-\frac{1}{15}S_n=\frac{4^2S_{2n}-S_n}{4^2-1}$$

龙贝格求积公式 $$R_n=\frac{64}{63}C_{2n}-\frac{1}{63}C_n=\frac{4^3C_{2n}-C_n}{4^3-1}$$

这样我们从$\{C_n\}$序列又推出了收敛更快的$\{R_n\}$序列. $\{R_n\}$序列也称为龙贝格序列。

总结：我们从收敛较慢的$\{T_n\}$序列只用了一些四则运算，便推出了收敛更快的$\{S_n\}$序列, $\{C_n\}$序列和$\{R_n\}$序列。

$$I - S_n = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\eta) \qquad ,\eta \in (a,b)$$

$$I - S_{2n} = -\frac{(b-a)^5}{2880(2n)^4} f^{(4)}(\overline{\eta}) \qquad ,\overline{\eta} \in (a,b)$$

所以有

$$\frac{I - S_n}{I - S_{2n}} \approx 16$$

由此得

$$I \approx \frac{16S_{2n} - S_n}{15} \qquad 或 \qquad I - S_{2n} \approx \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n)$$

一方面，若$|S_{2n}-S_n|<15\varepsilon$，则有近似误差$|I-S_{2n}|<\varepsilon$.

另一方面，$(16S_{2n}-S_n)/15$应比S_n和S_{2n}的近似程度更好.

事实上，有 $(16S_{2n}-S_n)/15=C_n$

类似地，由于

$$I - C_n = -\frac{(b-a)^7}{1935360n^6} f^{(6)}(\eta) \qquad ,\eta \in (a,b)$$

$$I - C_{2n} = -\frac{(b-a)^7}{1935360(2n)^6} f^{(6)}(\overline{\eta}) \qquad ,\overline{\eta} \in (a,b)$$

所以有

$$\frac{I - C_n}{I - C_{2n}} \approx 64$$

由此得

$$I \approx \frac{64C_{2n} - C_n}{63} \qquad 或 \qquad I - C_{2n} \approx \frac{1}{63}(C_{2n} - C_n)$$

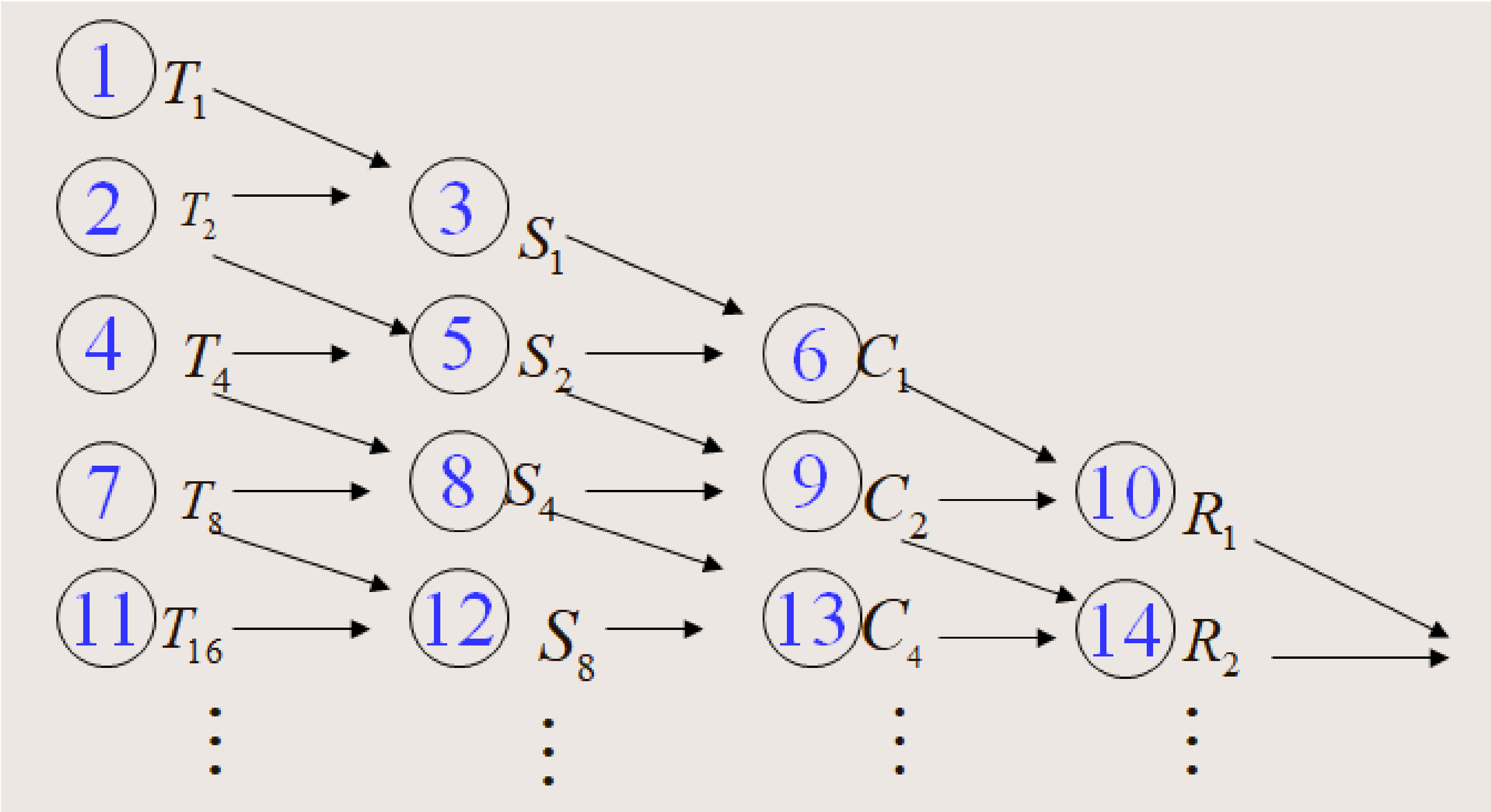
一方面，若 $|C_{2n}-C_n|<63\varepsilon$，则有近似误差 $|I-C_{2n}|<\varepsilon$.

另一方面，$(64C_{2n}-C_n)/63$ 应比 C_n 和 C_{2n} 的近似程度更好.

记 $(64C_{2n}-C_n)/63=R_n$，称为**Romberg求积公式**.

运算顺序表

T_1			
T_2	S_1		
T_4	S_2	C_1	
T_8	S_4	C_2	R_1
T_{16}	S_8	C_4	R_2
:	:	:	:



1 T_1
2 T_2
3 S_1
4 T_4
5 S_2
6 C_1
7 T_8
8 S_4
9 C_2
10 R_1
11 T_{16}
12 S_8
13 C_4
14 R_2

实际计算可按下表顺序进行

k	区间等分数 $n=2^k$	梯形公式 $T_1^{(k)}$	Simpson公式 $T_2^{(k)}$	Cotes公式 $T_3^{(k)}$	Romberg公式 $T_4^{(k)}$
0	1	$T_1^{(0)}$			
1	2	$T_1^{(1)}$	$T_2^{(0)}$		
2	4	$T_1^{(2)}$	$T_2^{(1)}$	$T_3^{(0)}$	
3	8	$T_1^{(3)}$	$T_2^{(2)}$	$T_3^{(1)}$	$T_4^{(0)}$
4	16	$T_1^{(4)}$	$T_2^{(3)}$	$T_3^{(2)}$	$T_4^{(1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

例11 利用Romberg积分公式计算积分

$$I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$$

解　按递推公式计算,结果如下

k	$n=2^k$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$
0	1	3.0000000			
1	2	3.1000000	3.1333333		
2	4	3.1311765	3.1415687	3.1421177	
3	8	3.1389885	3.1415925	3.1415941	3.1415858
4	16	3.1409416	3.1415926	3.1415926	3.1415926

可见,由于$|T_1^{(4)}-T_1^{(3)}|=0.0019531$,应有$|I-T_1^{(4)}|<0.000651033$.

由于$|T_2^{(3)}-T_2^{(2)}|=0.0000001$,应有$|I-T_2^{(3)}|<0.00000000666$.

由于$|T_3^{(2)}-T_3^{(1)}|=0.0000015$,应有$|I-T_3^{(2)}|<0.000000238$.

由于$|T_4^{(1)}-T_4^{(0)}|=0.0000068$,应有$|I-T_4^{(1)}|<0.0000002666$.

例4－7 利用龙贝格求积算法求$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$的近似值

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	
3	0.9456909	0.9460833	0.9460831	0.9460831

这里利用二分3次的数据（它们的精度都很差，只有两三位有效数字）通过三次加速求得$R_1=0.9460831$, 这个结果的每一位数字都是有效数字，可见加速效果是十分显著的

4.5 高斯求积公式

一般理论

机械求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

含有 $2n+2$ 个待定参数，x_k 和 $A_k (k=0,1,\cdots,n)$。插值型求积公式的代数精度至少 n 次。如果适当选取 x_k $(k=0,1,\cdots,n)$ 有可能使求积公式具有 $2n+1$ 次代数精度，这类求积公式称为高斯（Gauss）求积公式。

一般地，我们研究带权积分

$$I = \int_a^b \rho(x) f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

定义4-2 若一组节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，使插值型求积公式具有$2n+1$次代数精度，则称此组节点为**高斯点**，并称此求积公式为**高斯求积公式**。

构造高斯求积公式方法（一）

利用代数精度的定义，只要求解方程组

$$\int_a^b x^m \rho(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^m \text{ , } m = 0,1,\cdots,2n+1.$$

例4-8 试构造高斯求积公式

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) .$$

解：令公式对于$f(x) = 1, x, x^2, x^3$准确成立，得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = \dfrac{2}{3} \\ x_0 A_0 + x_1 A_1 = \dfrac{2}{5} \\ x_0^2 A_0 + x_1^2 A_1 = \dfrac{2}{7} \\ x_0^3 A_0 + x_1^3 A_1 = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

解得

$$x_0 = 0.821\ 162，\ A_0 = 0.389\ 111$$

$$x_1 = 0.289\ 949，\ A_1 = 0.277\ 556$$

于是, 高斯公式为

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \mathrm{d}x \approx 0.389111 f(0.821162) + 0.277556 f(0.289949)$$

非线性方程(组)：MATLAB内置函数 solve, vpasolve, fsolve, fzero, roots [MATLAB]

MATLAB函数 solve, vpasolve, fsolve, fzero, roots 功能和信息概览

求解函数	多项式型	非多项式型	一维	高维	符号	数值	算法
solve	支持，得到全部符号解	若可符号解则得到根	支持	支持	支持	当无符号解时	符号解方法：利用等式性质得到标准可解函数的方法 基本即模拟人工运算
vpasolve	支持，得到全部数值解	（随机初值）得到一个实根	支持	支持	×	支持	未知
fsolve	由初值得到一个实根	由初值得到一个实根	支持	支持	×	支持	**优化方法**，即用优化方法求解函数距离零点最近，具体方法为信赖域方法。 包含预处理共轭梯度(PCG)、狗腿(dogleg)算法和Levenberg-Marquardt算法等
fzero	由初值得到一个实根	由初值得到一个实根	支持	×	×	支持	**一维解非线性方程方法**，二分法、二次反插和割线法的混合运用 具体原理见数值求解非线性方程的二分法、不动点迭代和牛顿法和插值方法
roots	支持，得到全部数值解	×	支持	×	×	支持	**特征值方法**，即将多项式转化友矩阵(companion matrix) 然后使用求矩阵特征值的算法求得所有解（那是另外一个问题了）

https://www.cnblogs.com/gentle-min-601/p/9672221.html

注：同学可整该网页为PPT后课堂开讲

构造高斯求积公式方法（二）

先确定了节点 x_k ，后利用方程组求解系数A_k 。

定理4-3 插值型求积公式的节点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 是高斯点$\Leftrightarrow$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

与任何次数不超过n 的多项式$P(x)$ 带权$\rho(x)$ 正交, 即

$$\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)P(x)\mathrm{d}x = 0.$$

定理 4-3 表明在$[a,b]$上带权的$n+1$次正交多项式的零点就是求积公式的高斯点，有了求积节点x_k （0, 1,⋯， n ），再利用代数精度概念得到一组关于求积系数 A_0 ，A_1 ，⋯，A_n 的线性方程组。解此方程组的系数$\{A_k\}$。也可直接由插值多项式求出求积系数。

§ 5.2 多种Gauss型求积公式

(1) Gauss-Legendre求积公式

区间[-1, 1]上权函数$\rho(x)=1$的Gauss型求积公式, 称为**Gauss-Legendre求积公式**,其Gauss点为Legendre多项式的零点. 公式的Gauss点和求积系数可在数学用表中查到 .

n	x_k	A_k
1	0	2
2	±0.5773502692	1
3	±0.7745966692 0	0.5555555556 0.8888888889
4	±0.8611363116 ±0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549
5	±0.9061798459 ±0.5384693101 0	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888889
6	±0.9324695142 ±0.6612093865 ±0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346
7	±0.9491079123 ±0.7415311856 ±0.4058451514 0	0.1294849662 0.2797053915 0.3818300505 0.4179591837
8	±0.9602898565 ±0.7966664774 ±0.5255324099 ±0.1834346425	0.1012285363 0.2223810345 0.3137066459 0.3626837834

注意：此表中n为点数【非以前的n，相当于以前的$(n+1)$】。

Gauss-Legendre求积公式的余项为

$$R[f]=\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)}f^{(2n)}(\eta)\quad,\eta\in(-1,1)$$

例13 用3点Gauss公式计算积分 $I=\int_{-1}^{1}\cos x dx.$

解 查表得 x_1=−0.7745966692, x_2=0, x_3=0.7745966692, A_1=A_3=0.5555555556, A_2=0.8888888889，所以有

$$I\approx A_1\cos x_1+A_2\cos x_2+A_3\cos x_3=1.68300355$$

误差为

$$R[f]=\left|\frac{2^7\times 6^4}{(6!)^3\times 7}(-\cos\eta)\right|\le 6.3492\times 10^{-5}$$

实际上,$I=2\sin 1=1.68294197$, 误差为$|R[f]|=6.158\times 10^{-5}$.

用Simpson公式,则有$I\approx 1.69353487$, 误差为$|R[f]|=1.06\times 10^{-2}$.

由于

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t)dt \quad (x=\frac{(a+b)+(b-a)t}{2})$$

因此,[a,b]上权函数$\rho(x)$=1的Gauss型求积公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}x_i)$$

求积误差可表示为

$$R[f]=\frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)}f^{(2n)}(\eta) \quad ,\eta\in(a,b)$$

例14 用3点Gauss公式计算积分 $I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx.$

解 这里Gauss点和积分系数与上例相同,所以

$$I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} A_i \frac{4}{1+[(1+x_i)/2]^2} = 3.141068$$

结果远比Simpson公式的结果精确.

(2) Gauss-Laguerre求积公式

区间$[0, +\infty)$上权函数$\rho(x)=e^{-x}$的Gauss型求积公式，称为**Gauss-Laguerre求积公式**，其Gauss点为Laguerre多项式的零点. 公式的Gauss点和求积系数可在数学用表中查到 .

n	x_k	A_k
2	0.5858864376	0.8535533905
	3.4142135623	0.1464466094
3	0.4157745567	0.7110930099
	2.2942803602	0.2785177335
	602899450829	0.0103892565
4	0.3225476896	0.6031541043
	1.7457611011	0.3574186924
	4.5366202969	0.0388879085
	9.3950709123	0.0005392947

n	x_k	A_k
5	0.2635603197	0.5217556105
	1.4134030591	0.3986668110
	3.5964257710	0.0759424497
	7.0858100058	0.0036117587
	12.6408008442	0.0000233700
6	0.2228466041	0.4589646793
	1.1889321016	0.4170008307
	2.9927363260	0.1133733820
	5.7751435691	0.0103991975
	9.8374674183	0.0002610172
	15.9828739806	0.0000008985

注意：此表中*n*为点数【非以前的*n*，相当于以前的(*n*+1)】。

(3) Gauss-Hermite求积公式

区间$(-\infty, +\infty)$上权函数$\rho(x) = e^{-x^2}$的Gauss型求积公式，称为**Gauss-Hermite求积公式**，其Gauss点为Hermite多项式的零点. 公式的Gauss点和求积系数可在数学用表中查到 .

n	x_k	A_k	n	x_k	A_k
2	±0.7071067811	0.8862269254	6	±0.4360774119	0.7246295952
3	±1.2247448713	0.2954089751		±1.3358490704	0.1570673203
	0	1.8163590006		±2.3506049736	0.0045300099
4	±0.5246476232	0.8049140900	7	±0.8162878828	0.4256072526
	±1.6506801238	0.0813128354		±1.6735516287	0.0545155828
5	±0.9585724646	0.3936193231		±2.6519613563	0.0009717812
	±2.0201828704	0.0199532421		0	0.8102646175
	0	0.9453087204			

Gauss-Hermite求积公式为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \quad 或 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i e^{x_i^2} f(x_i)$$

注意：此表中n为点数【非以前的n，相当于以前的($n+1$)】。

知识结构图

数值积分

- 基本概念
- 牛顿-柯特斯公式
- 复合求积公式
- 龙贝格求积公式
- 高斯求积公式

Thanks!

纪庆革　主讲
中山大学计算机学院
E-mail: 1024180018@qq.com