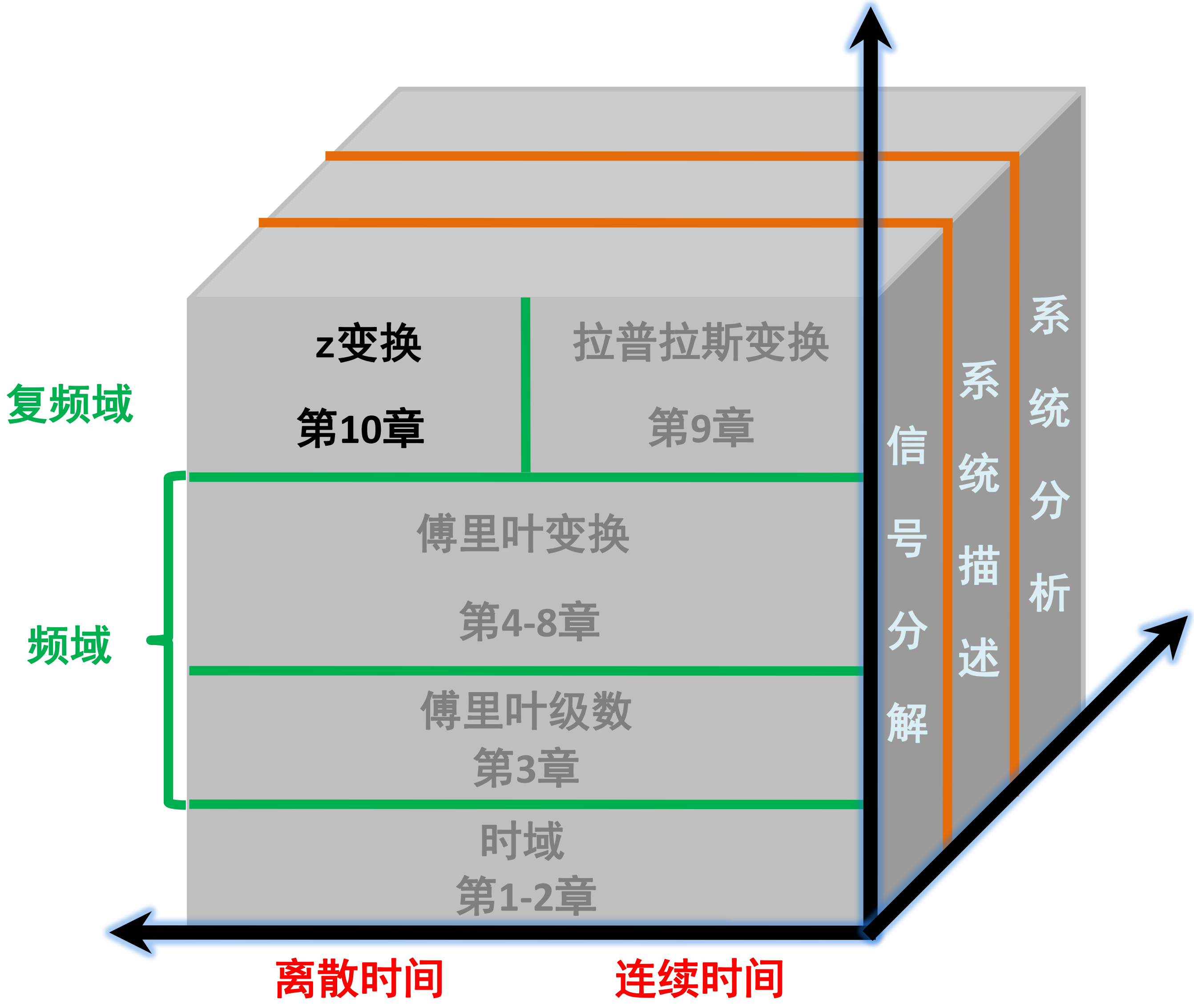
第10章　z变换

The *z*-Transform



知识体系三维结构

信号与系统

引言

- 拉普拉斯变换的提出突破了连续时间傅里叶变换的应用局限
- 离散时间傅里叶变换存在与连续时间傅里叶变换类似的局限，是否有一种与拉普拉斯变换类似的解决方案?
  - z变换与拉普拉斯变换相对应，是离散时间傅里叶变换的推广。
  - z变换的基本思想、性质及分析方法与拉普拉斯变换有许多相似之处，也存在一些重要差异。

10.0 引言

离散时间傅里叶变换（DTFT或DFT)

DFT对

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$ → 分析公式

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$ → 综合公式

10.1 双边Z变换

10.1 双边Z变换

一. 双边z变换的定义:

$$\boxed{X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}}$$

其中$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$是一个复数。

当$r=1$时，$z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$即为离散时间傅里叶变换 (DTFT, Discrete-Time Fourier Transform)。

即：DTFT就是单位圆上的z变换。

10.1 双边Z变换

反之，$x[n]$的z变换就等价于$x[n]r^{-n}$的DTFT：

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} = \mathcal{F}[x[n]r^{-n}]$$

因此，z变换是对DTFT的推广。

10.1 双边Z变换

二. z变换的收敛域（ROC）：

z变换与DTFT一样存在着收敛的问题。

1. 并非任何信号的z变换都存在。

2. 并非z平面上的任何复数都能使$X(z)$收敛。z平面上那些能使$X(z)$收敛的点的集合，就构成了$X(z)$的收敛域（ROC）。

3. 如果$X(z)$的ROC包括单位圆，那么

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = X(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}$$

10.1 双边Z变换

例1. $x[n] = a^n u[n]$

例2. $x[n] = -a^n u[-n-1]$

例3. $x[n] = u[n]$

例4. $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] - 2^n u[-n-1]$

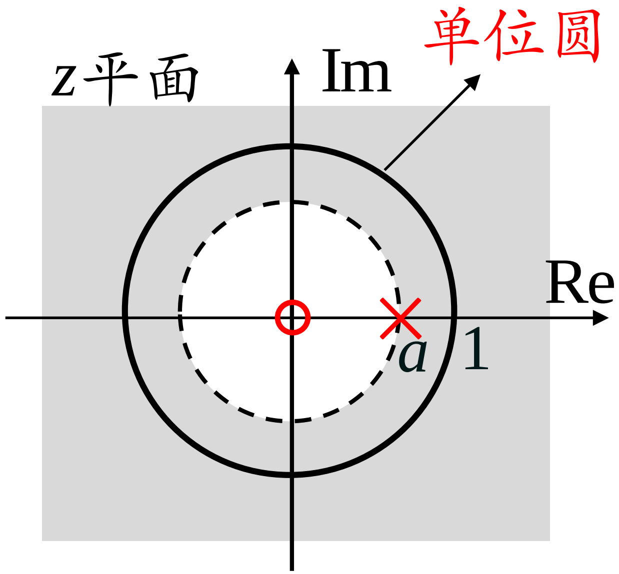
10.1 双边Z变换

例1. $x[n] = a^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \text{ROC：} |z| > |a|$$

当$|a| < 1$时， ROC包括了单位圆。此时，$x[n]$的DTFT存在：

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = X(z)|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}} = \frac{1}{1 - a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$$

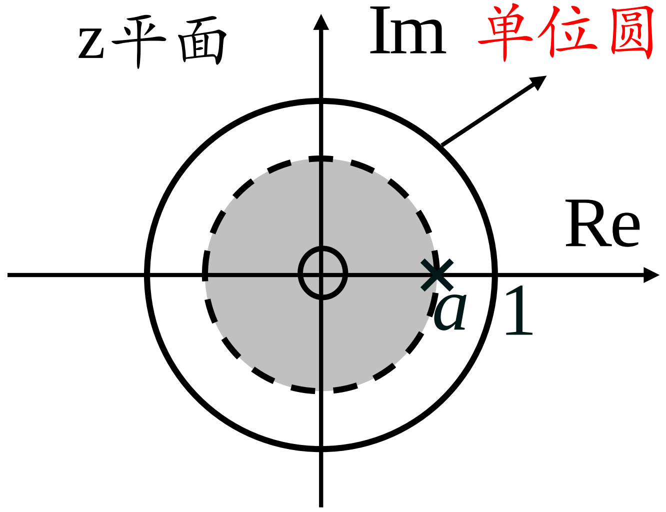


10.1 双边Z变换

例2. $x[n] = -a^n u[-n-1]$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n$$

$$= -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad \text{ROC: } |z| < |a|$$



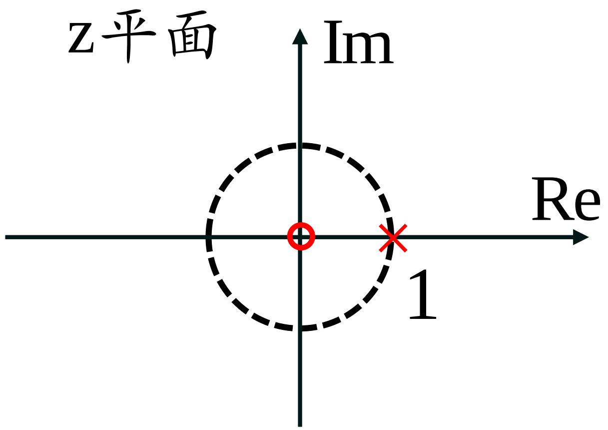
双边z变换的表达式与其 ROC联合才具有与信号的一一对应关系。

10.1 双边Z变换

例3. $x[n] = u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

此时，ROC不包括单位圆，所以不能简单地从$X(z)$通过令$z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$得到$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$。



$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

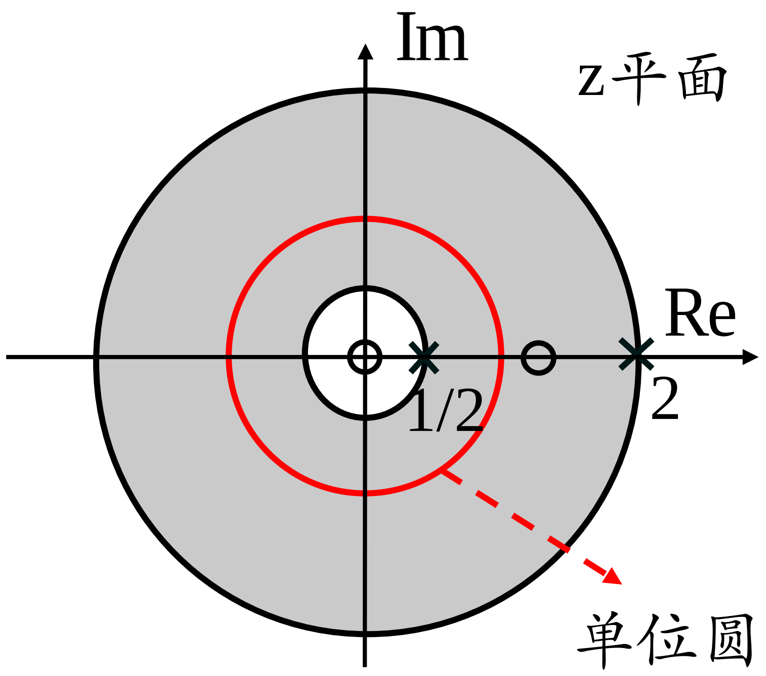
10.1 双边Z变换

例4. $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] - 2^n u[-n-1]$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^{-n}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

ROC: $\frac{1}{2} < |z| < 2$



10.1 双边z变换

结 论:

1）z变换的ROC一般是z平面上以原点为中心的环形区域。

2）当$X(z)$是有理函数时，其ROC的边界总是由$X(z)$的极点所在的圆周界定的。

3）如果$x[n]=\sum_i x_i[n]$，则其ROC是各个$x_i[n]$的ROC的公共部分。若没有公共区域则表明$x[n]$的z变换不存在。

10.1 双边Z变换

三. $X(z)$的几何表示——零极点图：

如果$X(z)$是有理函数，将其分子多项式与分母多项式分别因式分解可以得到：

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=M\frac{\prod_i(z-z_i)}{\prod_p(z-z_p)}$$

在z平面上标出$X(z)$的全部零、极点，即为零极点图，它是$X(z)$的几何表示。

如果在零极点图上标出ROC，则该零极点图可以唯一地确定一个有理函数形式的Z变换（除常数因子M外）。

零极点图对分析与刻画LTI系统有重要作用。

10.2 z变换的ROC

10.2 z变换的ROC

ROC的特征：

1. $X(z)$的ROC是z平面上以原点为中心的环形区域。

2. 在ROC内，$X(z)$无极点。

3. 有限长序列的ROC是整个z平面（可能不包括$z=0$和/或$|z|=\infty$）。

10.2 z变换的ROC

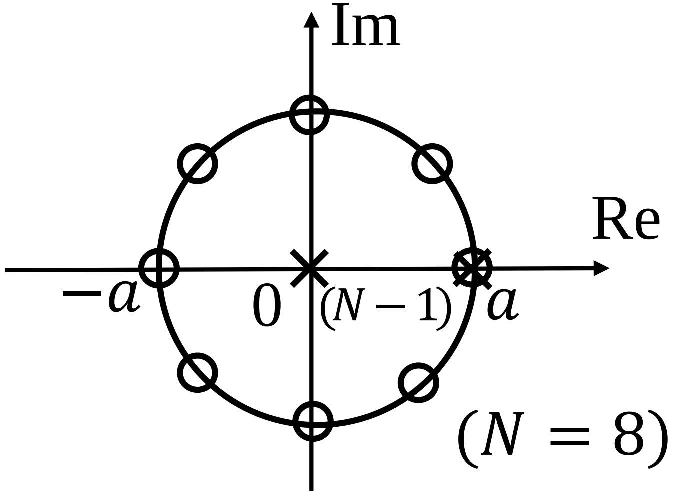
例2. $x[n]=\begin{cases}a^n, & 0\le n\le N-1,\\ 0, & 其他n,\end{cases}\quad a>0$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}a^n z^{-n}=\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}=\frac{z^N-a^N}{z^{N-1}(z-a)}$$

极点： $z=a$ （一阶） $z=0$ （N—1阶）

零点： $z=a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}$ $(k=0,1\cdots N-1)$

在$z=a$处，零极点抵消，ROC:$|z|>0$。



10.2 z变换的ROC

4. 右边序列的ROC是某个圆的外部，但可能不包括$|z| = \infty$。

分析：设$x[n]$是右边序列，定义于$[N_1, \infty)$，则有：

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

若$|z| = r_0 \in \text{ROC}$，则有

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]r_0^{-n}| < \infty$$

10.2 z变换的ROC

对任意$r_1 > r_0$，有：

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]r_1^{-n}| = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]r_0^{-n}| \cdot (\frac{r_0}{r_1})^n$$

$$\leq \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]r_0^{-n}| \cdot (\frac{r_0}{r_1})^{N_1} < \infty$$

$$\therefore |z| = r_1 \in \mathrm{ROC}$$

若$X(z)$为有理函数，则ROC必位于最外极点之外。

当$N_1 < 0$时，$|z| = \infty$不在ROC内。

当且仅当$|z| = \infty$在ROC内时，$x[n]$为因果序列。

10.2 z变换的ROC

5. 左边序列的ROC是某个圆的内部，但可能不包括$z = 0$。

分析：若$r_0 \in \mathrm{ROC}$，$r_1 < r_0$，则有

$$\sum_{n=-\infty}^{N_1} |x[n]r_1^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{N_1} |x[n]r_0^{-n}| \cdot (\frac{r_0}{r_1})^n$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{N_1} |x[n]r_0^{-n}| \cdot (\frac{r_0}{r_1})^{N_1} < \infty$$

$$\therefore r_1 \in \mathrm{ROC}$$

若$X(z)$为有理函数，则ROC必位于最内极点之内。

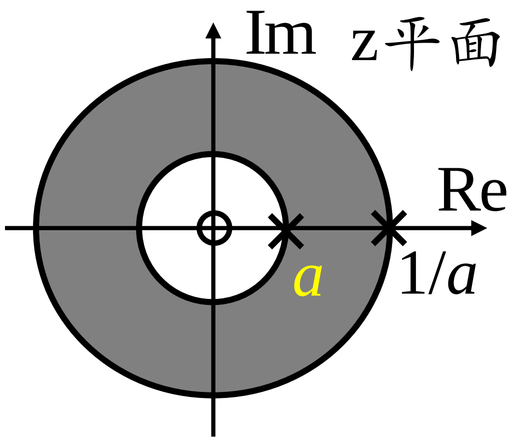
设$x[n]$定义于$(-\infty, N_1]$，当$N_1 > 0$时，$z = 0$不在ROC内。

当且仅当$z = 0$在ROC内时，$x[n]$为反因果序列。

10.2 z变换的ROC

6. 双边序列的z变换如果存在，则ROC必是一个环形区域。

例1. $x[n]=a^{|n|},\ a>0$



$$x[n]=a^n u[n]+a^{-n}u[-n-1]$$

$$a^n u[n]\leftrightarrow\frac{1}{1-az^{-1}},\quad |z|>a$$

$$a^{-n}u[-n-1]\leftrightarrow-\frac{1}{1-a^{-1}z^{-1}},\quad |z|<a^{-1}$$

$a>1$时，两部分的收敛域无交集，此时$X(z)$不存在。

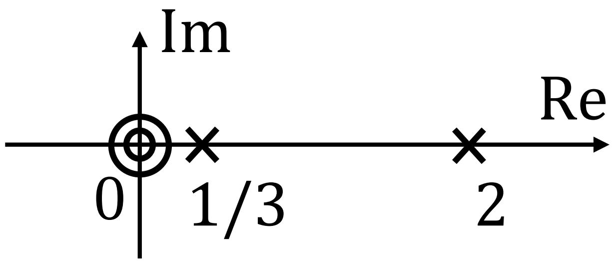
$0<a<1$时，$X(z)$为两部分变换之和，ROC为$a<|z|<1/a$。

10.2 z变换的ROC

例3. $X(z)=\dfrac{1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})}$

极点：$z_1=\frac{1}{3}$，　$z_2=2$

零点：$z=0$（二阶）



根据ROC，$x[n]$分为三种情况：

(1) $|z|>2$：$x[n]$为右边序列，且是因果的，但其傅里叶变换不存在；

(2) $|z|<\frac{1}{3}$：$x[n]$是左边序列，且是反因果的，其傅里叶变换不存在；

(3) $\frac{1}{3}<|z|<2$：$x[n]$是双边序列，其傅里叶变换存在。

10.3 z反变换

10.3 z反变换

一. z反变换：

$$\because X(re^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} \qquad (z=re^{j\omega})$$

$$\therefore x[n]r^{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(re^{j\omega})r^{n}e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(z)z^{n}d\omega$$

而$dz=jre^{j\omega}d\omega=jzd\omega$，因此

$$\boxed{x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz}$$

当ω从$0\rightarrow 2\pi$时，z沿着ROC内半径为r的圆积分一周。

10.3 z反变换

二. 反变换的求取:

1. 部分分式展开法:

$X(z)$为有理函数时，可将其展开为部分分式:

$$X(z) = \sum_i \frac{A_i}{1 - a_i z^{-1}}$$

步骤：

1. 求出$X(z)$的所有极点a_i;
2. 将$X(z)$展开为部分分式;
3. 根据总的ROC，确定每一项的ROC;
4. 求出每一项的反变换。

10.3 Z反变换

例： $X(z)=\dfrac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$， $\dfrac{1}{4}<|z|<\dfrac{1}{3}$

将$X(z)$展开为部分分式有：

$$X(z)=\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}_{\mathrm{ROC}_1}+\underbrace{\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}_{\mathrm{ROC}_2}$$

ROC_1: $|z|>1/4$

ROC_2: $|z|<1/3$

$$\therefore x[n]=(\frac{1}{4})^n u[n]-2(\frac{1}{3})^n u[-n-1]$$

10.3 z反变换

2. 幂级数展开法:

由$X(z)$的定义，将其展开为幂级数，有

$$X(z) = \cdots + x[-n]z^n + \cdots + x[-1]z + x[0] +$$
$$x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots + x[n]z^{-n} + \cdots$$

展开式中z^{-n}项的系数即为$x[n]$。

- 泰勒级数展开法适合用来求解非有理函数形式$X(z)$的反变换。
- $X(z)$为有理函数时，可采用长除法，但可能不易获得闭式表达。

10.3 z反变换

- 当$X(z)$是有理函数时，可以通过长除的方法将其展开为幂级数。
  - 由于右边序列的展开式中应包含无限个z的负幂项，所以要按降幂长除。
  - 左边序列的展开式中应包含无限个z的正幂项，要按升幂长除。
  - 对双边序列，先要将其分成对应信号的右边和左边的两部分，再分别按上述原则长除。

10.3 z反变换

例：

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} \qquad \frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{3}$$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

ROC_1 ROC_2

ROC_1: $|z|>1/4$

ROC_2: $|z|<1/3$

所以前一项按降幂长除，后一项按升幂长除。

10.4 由零极点图对离散时间傅里叶变换几何求值

10.4 由零极点图对离散时间傅里叶变换几何求值

- 可以利用零极点图对单位圆上的z变换——即离散时间傅里叶变换进行几何求值。
- 其方法与拉普拉斯变换时完全类似：
  - 考查动点在单位圆上移动一周时，各极点矢量和零点矢量的长度与幅角变化的情况，即可反映频率特性。

10.4 由零极点图对离散时间傅里叶变换几何求值

例. 一阶因果离散时间LTI系统

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

可求得:

$$h[n] = a^n u[n]$$

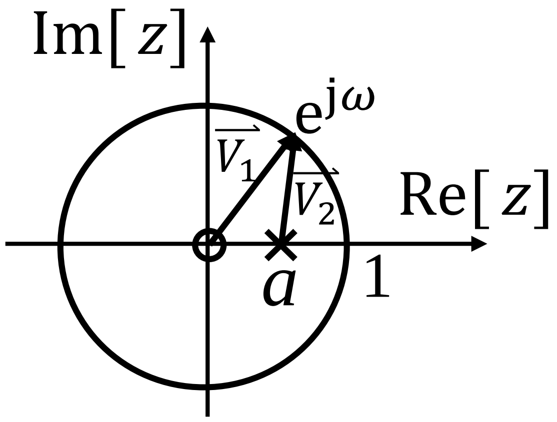
$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$

当$|a| < 1$时，ROC包括单位圆。此时:

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{1}{1 - a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$$

极点在单位圆内是实际应用中常见而感兴趣的系统函数的特点，为什么?

10.4 由零极点图对离散时间傅里叶变换几何求值



$$|H(e^{j\omega})| = |\vec{V_1}|/|\vec{V_2}|$$

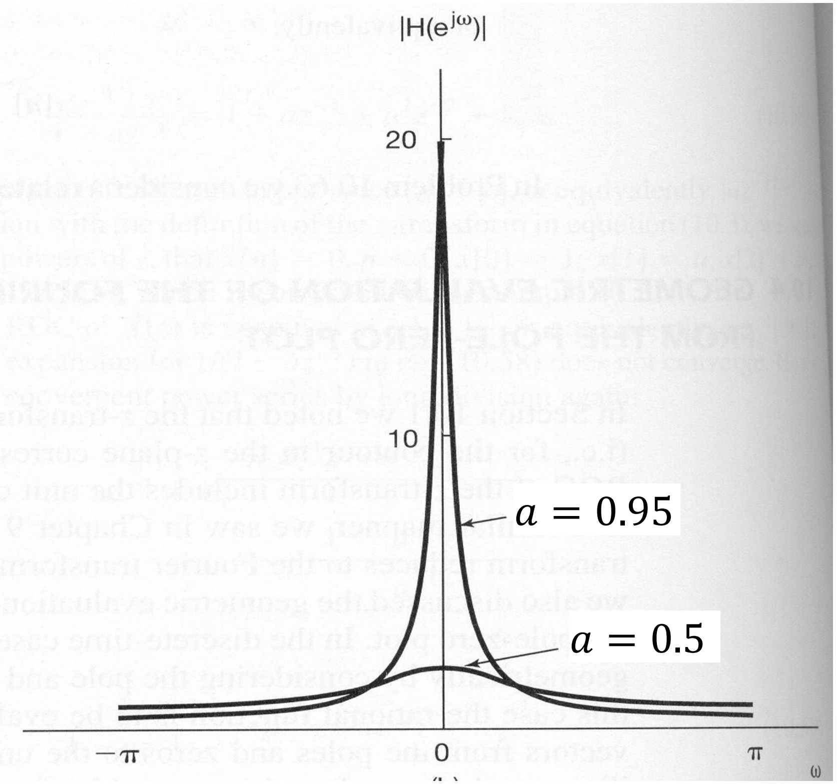
显然，$|\vec{V_1}| = 1$，$|H(e^{j\omega})|$取决于$|\vec{V_2}|$的变化。

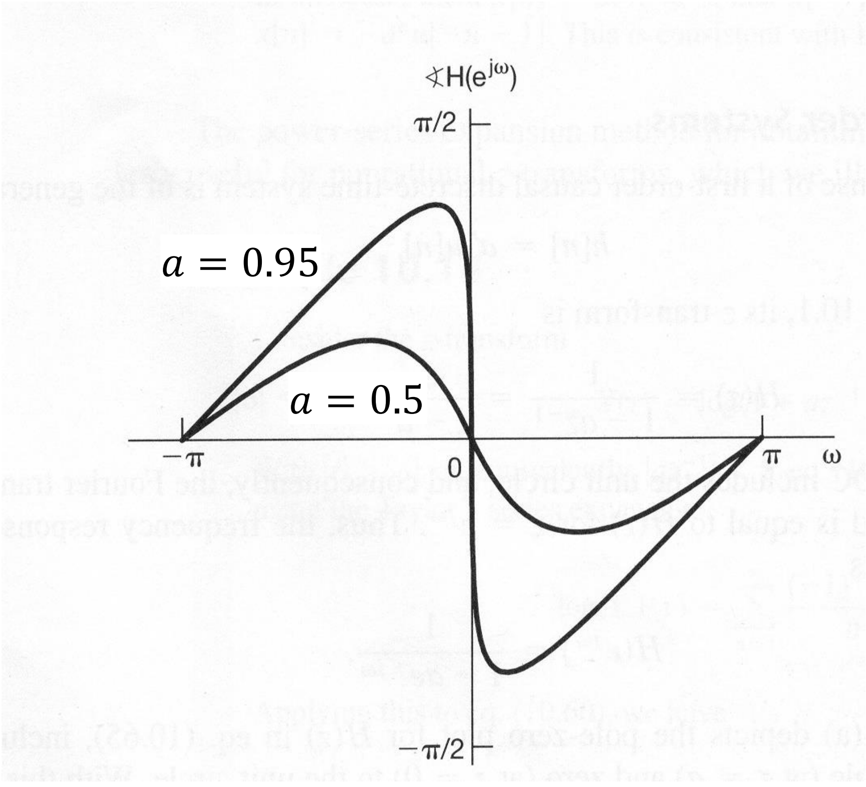
当$0 < a < 1$时，$|H(e^{j\omega})|$随$|\omega|$呈单调变化：

在$|\omega| = 0$处，$|H(e^{j\omega})|$有最大值。

当$|\omega| = \pi$时，$|H(e^{j\omega})|$有最小值。

10.4 由零极点图对离散时间傅里叶变换几何求值



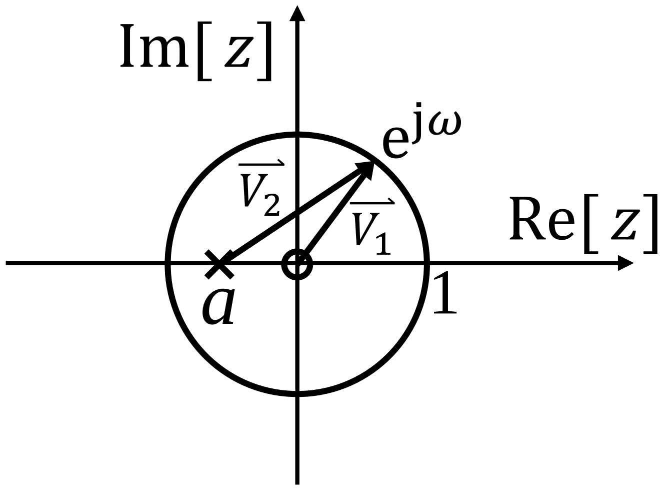


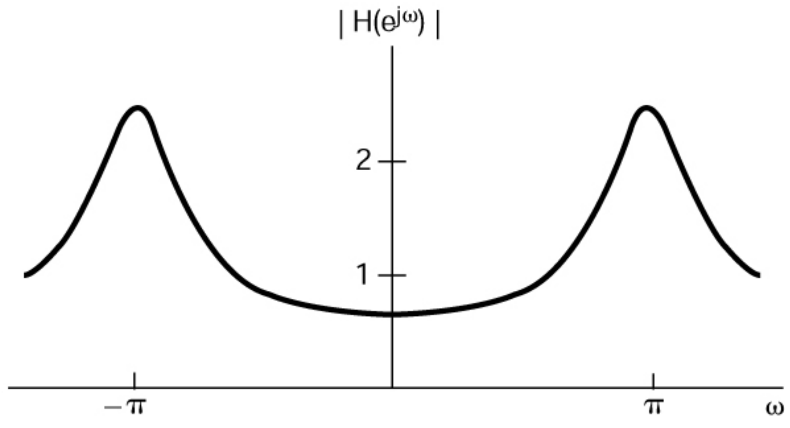
幅频特性　　　　相频特性

一阶系统的频率特性：$0 < a < 1$

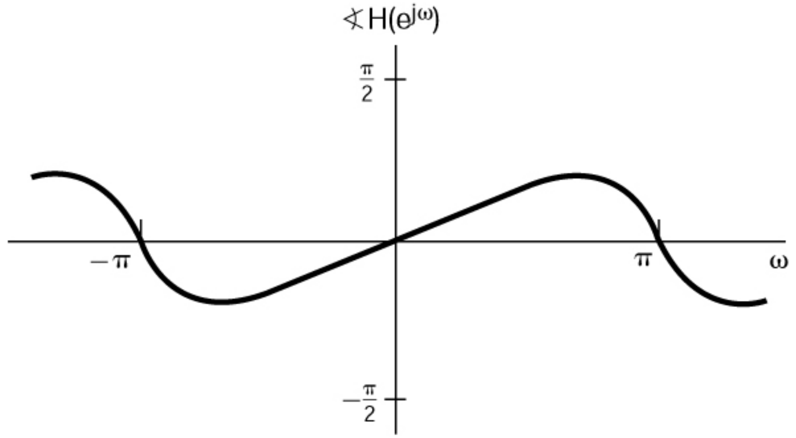
10.4 由零极点图对离散时间傅里叶变换几何求值

当$-1 < a < 0$时，





幅频特性



相频特性

10.5 Z变换的性质

10.5 z变换的性质

- 与s变换类似，在讨论z变换的许多性质时我们都要考虑其ROC的变化。

1. 线性：

$$x_1[n] \leftrightarrow X_1(z) \qquad \text{ROC}: R_1$$

$$x_2[n] \leftrightarrow X_2(z) \qquad \text{ROC}: R_2$$

则$ax_1[n] + bx_2[n] \leftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z)$

ROC： 包括$R_1 \cap R_2$

如果在线性组合过程中出现零极点相抵消，则ROC可能会扩大。

10.5 Z变换的性质

2. 时移：

若$x[n] \leftrightarrow X(z)$　　ROC: R

则$x[n-n_0] \leftrightarrow X(z)z^{-n_0}$

ROC: R，但在$z=0$和$|z|=\infty$可能会有增删。

这是由于信号时移可能会改变其因果性。

10.5 z变换的性质

练习：设$x[n]=\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-2]$，求其z变换、零极点图、ROC，并指出该序列的傅里叶变换是否存在。（教材习题10.21(e)）

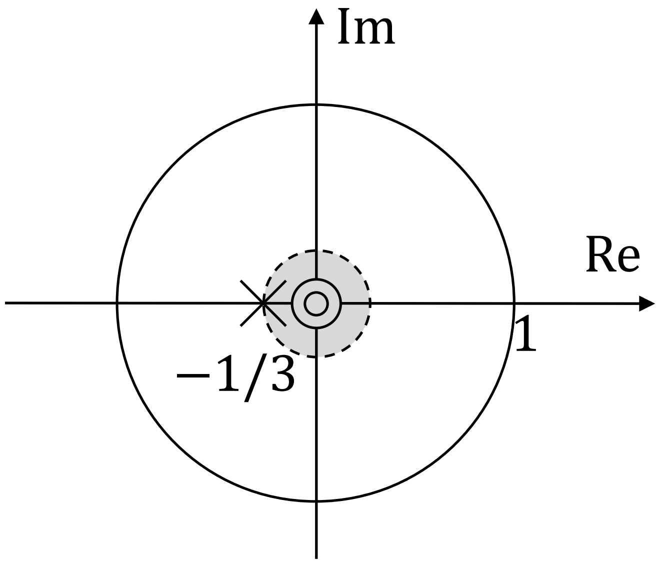
解：

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \leftrightarrow -\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-2] = -3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} u[-(n+1)-1]$$

$$\leftrightarrow -3z\cdot\left(-\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}\right)=\frac{3}{z^{-1}\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)},$$

ROC: $|z| < 1/3$



ROC不包括单位圆，故傅里叶变换不存在。

10.5 z变换的性质

3. z域尺度变换：

$$若x[n] \leftrightarrow X(z) \qquad \text{ROC}: R$$

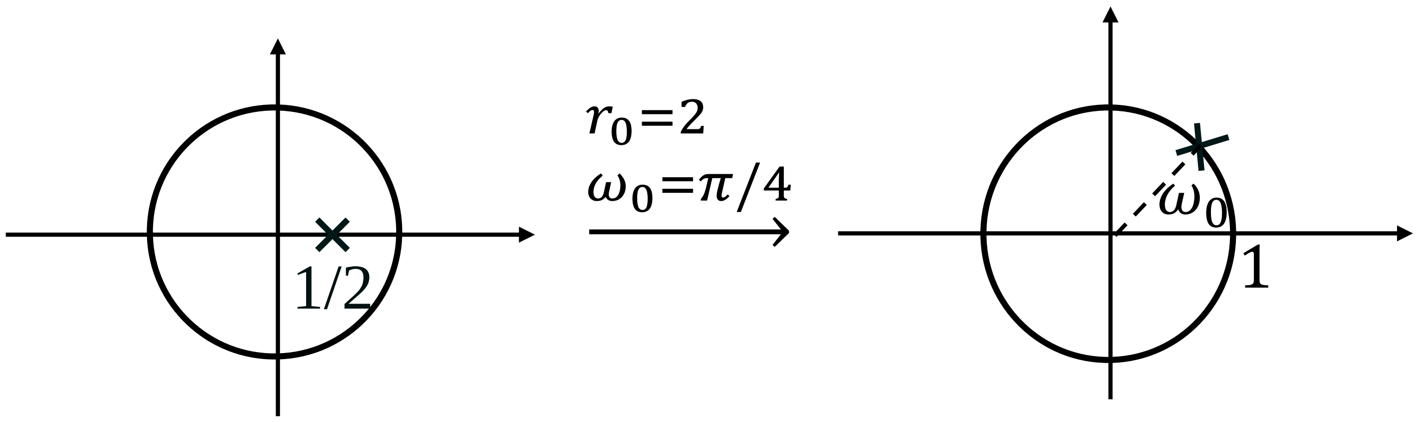
$$则z_0^n x[n] \leftrightarrow X(z/z_0) \qquad \text{ROC}: |z_0|R$$

$\because z \in R$时$X(z)$收敛，$\therefore z/z_0 \in R$，即$z \in |z_0|R$时 $X(z/z_0)$收敛。

当$z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}$时，即为移频特性。

10.5 z变换的性质

对于复数$z_0 = r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}$，$X(z/z_0)$可以通过将$X(z)$逆时针旋转$\omega_0$，并在径向施加$r_0$倍的尺度变化得到。



$X(z)$　　　　$X(z/z_0)$

10.5 z变换的性质

4. 时域反转：

若$x[n] \leftrightarrow X(z)$　　ROC: R

则$x[-n] \leftrightarrow X(z^{-1})$　ROC: $1/R$ (收敛域边界倒置)

例. 若$X(z)$的ROC为$\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$，则$X(z^{-1})$的ROC为$\frac{2}{3} < |z| < 2$。

如果z_i是$X(z)$的零/极点，则$1/z_i$就是$X(z^{-1})$的零/极点。

Example Suppose $a^k u[k] \leftrightarrow \dfrac{1}{1-az^{-1}}, |z|>a,$

Determine the z-transform of $a^{-k}u[-k-1]$.

According to the property of time reversal, we have:

$$a^{-k}u[-k] \leftrightarrow \frac{1}{1-az}, |z|<\frac{1}{a}$$

Shift leftward by one $a^{-k-1}u[-k-1] \leftrightarrow \dfrac{z}{1-az}$

Consider the homogeneity property:

$$a^{-k}u[-k-1] \leftrightarrow \frac{az}{1-az}, |z|<\frac{1}{a}$$

10.5 Z变换的性质

5. 时间扩展:

若$x[n] \leftrightarrow X(z)$ ROC: R

$$x_k[n] = \begin{cases} x[n/k] & n\text{为}k\text{的整数倍} \\ 0 & \text{其它}n \end{cases}$$

则$x_k[n] \leftrightarrow X(z^k)$ ROC: $R^{1/k}$

证明:

$$X_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k[n]z^{-n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_k[rk]z^{-rk}$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]z^{-rk} = X(z^k)$$

10.5 z变换的性质

6. 共轭对称性：

$$若x[n] \leftrightarrow X(z) \qquad \text{ROC}: R$$

$$则x^*[n] \leftrightarrow X^*(z^*) \quad \text{ROC}: R$$

当$x[n]$是实信号时，$x^*[n]=x[n]$，于是有

$$X^*(z^*) = X(z)$$

表明实信号$x[n]$的z变换$X(z)$的复数零极点必共轭成对出现。

纯虚信号$x[n]$的z
变换的零极点呢?

10.5 Z变换的性质

7. 卷积性质：

$$x_1[n] \leftrightarrow X_1(z) \qquad \text{ROC}: R_1$$

$$x_2[n] \leftrightarrow X_2(z) \qquad \text{ROC}: R_2$$

则 $$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z)X_2(z) \qquad \text{ROC}:\ 包括 R_1 \cap R_2$$

如果相乘时零极点抵消则ROC可能会扩大。

证明：

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] x_2[n-m]\, z^{-n}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]\, X_2(z) z^{-m} = X_1(z)X_2(z)$$

Accumulation

If $f[k] \leftrightarrow F(z), \alpha < |z| < \beta$

Then $g[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} f[i] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} F(z), \max(\alpha,1) < |z| < \beta$

Proof

$$\because f[k] * u[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[i]u[k-i] = \sum_{i=-\infty}^{k} f[i]$$

and $Z\{u[k]\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$

$$\therefore Z\{g[k]\} = Z\{\sum_{i=-\infty}^{k} f[i]\} = Z\{f[k] * u[k]\}$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}} F(z), \max(\alpha,1) < |z| < \beta$$

10.5 z变换的性质

8. z域微分：

$$\text{若}\,x[n] \leftrightarrow X(z) \qquad \mathrm{ROC}: R$$

则

$$nx[n] \leftrightarrow -z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} \qquad \mathrm{ROC}: R$$

用该性质可以方便地求出具有高阶极点的有理函数$X(z)$的反变换。

10.5 z变换的性质

例1. $X(z)=\ln(1+az^{-1})$ $\quad |z|>|a|\quad$ 求反变换$x[n]$。

例2. 已知$X(z)=\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$， $|z|>|a|$，求反变换$x[n]$。

10.5 Z变换的性质

例1. $X(z)=\ln(1+az^{-1})$　　$|z|>|a|$　　求反变换$x[n]$。

$$\because \frac{dX(z)}{dz}=\frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}}$$

$$-z\frac{dX(z)}{dz}=\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}\leftrightarrow a[-a]^{n-1}u[n-1]=nx[n]$$

$$\therefore x[n]=\frac{a}{n}(-a)^{n-1}u[n-1]=-\frac{1}{n}(-a)^{n}u[n-1]$$

10.5 Z变换的性质

例2. 已知$X(z)=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$， $|z|>|a|$，求反变换$x[n]$。

解：

$$\because\ a^n u[n] \leftrightarrow \hat{X}(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}(\hat{X}(z))=-\frac{az^{-2}}{(1-az^{-1})^2}$$

$$na^n u[n] \leftrightarrow -z\frac{d\hat{X}(z)}{dz}=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \qquad (=X(z))$$

$$\therefore\ x[n]=na^n u[n]$$

10.5 z变换的性质

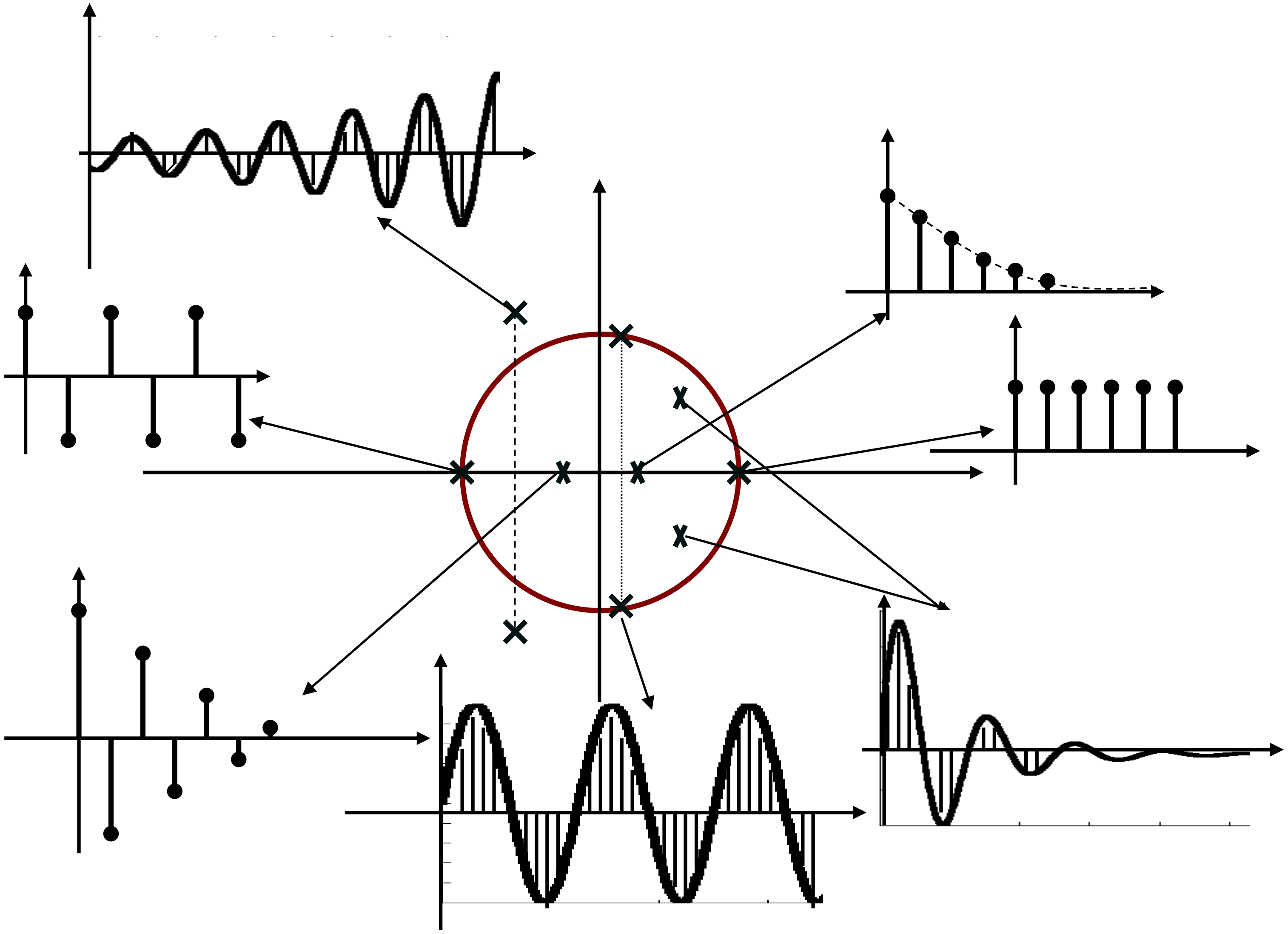
9. 初值定理:

若$x[n]$是因果信号，且$x[n] \leftrightarrow X(z)$，则$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$。

10. 终值定理：

若$x[n]$是因果信号，且$x[n] \leftrightarrow X(z)$，$X(z)$除了在$z = 1$可以有一阶极点外，其它极点均在单位圆内，则

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to1}(z-1)X(z)$$



z平面上极点位置与信号模式的关系示意图

10.6 常用信号的Z变换对

教材P496，表10.2（自学）

10.7 利用z变换分析与表征LTI系统

10.7 利用z变换分析与表征LTI系统

一. 系统特性与$H(z)$的关系：

设离散时间LTI系统的单位脉冲响应为$h[n]$，则$h[n]$的z变换$H(z)$称为系统函数或转移函数，它描述了一个离散时间LTI系统并体现其系统特性。

1. 因果性：如果离散时间LTI系统是因果的，即$n < 0$时有$h[n] = 0$，则$H(z)$的ROC是最外部极点的外部，并且包括$|z| = \infty$；反之亦然。

设有理函数$H(z)$是某离散时间因果LTI系统的系统函数，则$H(z)$分子多项式的次数不能高于分母多项式的次数。

10.7 利用z变换分析与表征LTI系统

2. 稳定性：若LTI系统稳定，即$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]| < \infty$，也即$h[n]$的DTFT存在，则$H(z)$的ROC必包括单位圆；反之亦然。

对于因果稳定的LTI系统，其系统函数$H(z)$如果存在极点，则全部极点必须位于单位圆内。

为什么?

10.7 利用z变换分析与表征LTI系统

二. 基于z变换的LTI系统分析:

分析步骤:

1）由输入信号$x[n]$求得$X(z)$及其ROC: R_1;

2）由系统的描述求得$H(z)$及其ROC: R_2;

3）计算$Y(z) = X(z)H(z)$并确定其ROC，该ROC应包括$R_1 \cap R_2$;

4）对$Y(z)$做反变换得到$y[n]$。

10.7 利用z变换分析与表征LTI系统

三. 由线性常系数差分方程描述的LTI系统的$H(z)$:

考虑由下面的差分方程描述的LTI系统:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

对方程两边做z变换可得:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \qquad \text{（有理函数）}$$

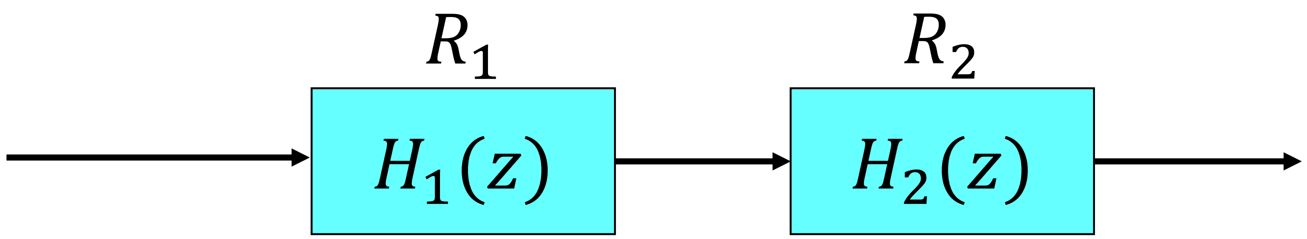
$H(z)$的ROC可通过其它条件，如系统的因果性或稳定性等确定。

10.8 系统函数的代数属性与方框图表示

10.8 系统函数的代数属性与方框图表示

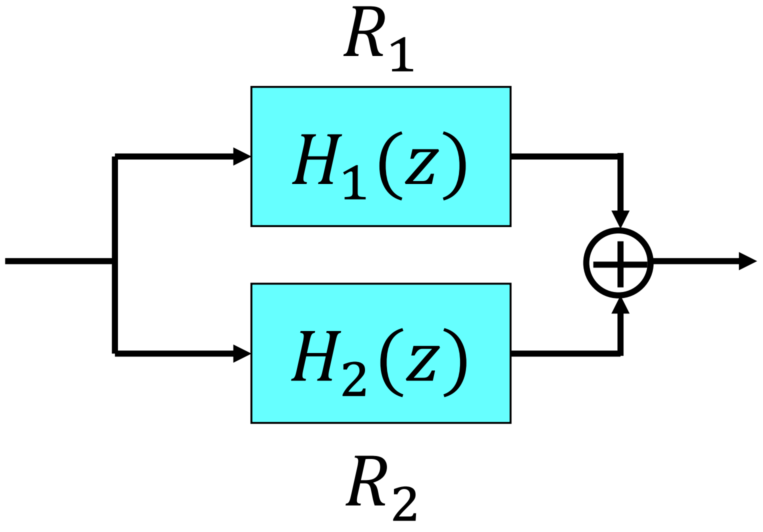
一. 互联系统的系统函数:

1. 级联:



$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$ ROC包括$R_1 \cap R_2$

2. 并联:



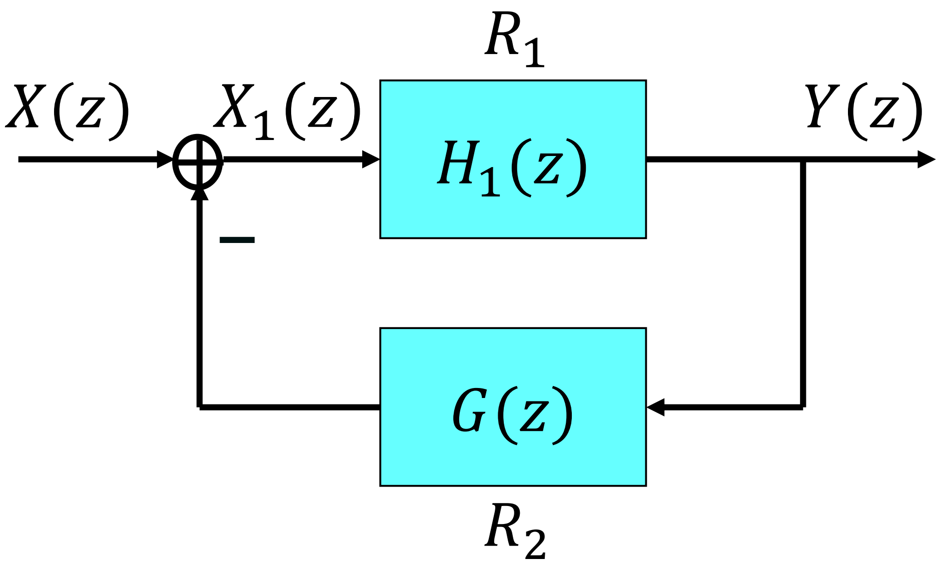
$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

ROC包括$R_1 \cap R_2$

10.8 系统函数的代数属性与方框图表示

3. 反馈联接：

由系统框图可列出如下方程：



$$X_1(z) = X(z) - Y(z)G(z)$$

$$Y(z) = X_1(z)H_1(z)$$

$$= X(z)H_1(z) - Y(z)H_1(z)G(z)$$

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)G(z)}$$ ROC：包括$R_1 \cap R_2$

10.8 系统函数的代数属性与方框图表示

二. 由差分方程和有理系统函数描述的因果LTI系统的方框图表示：

1. 直接型表示：

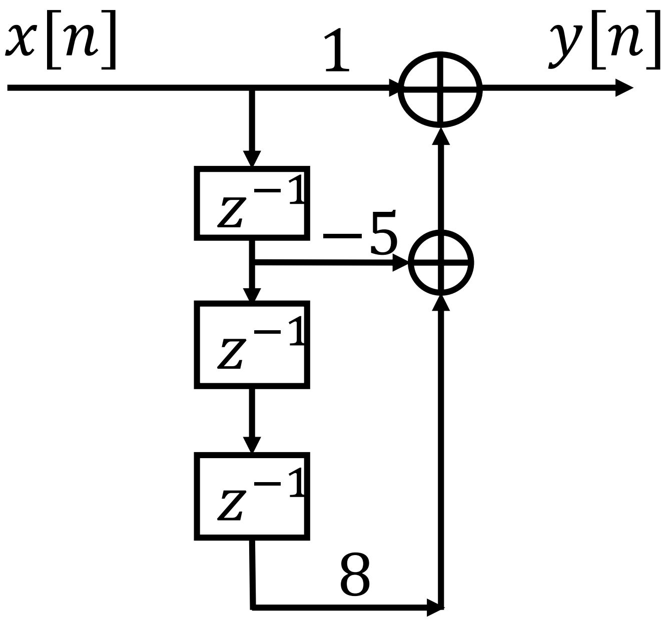
求下列差分方程对应的系统函数$H(z)$和单位脉冲响应$h[n]$，并画出对应的方框图。

例1. $y[n]=x[n]-5x[n-1]+8x[n-3]$

例2. $y[n]-3y[n-1]+3y[n-2]-y[n-3]=x[n]$

10.8 系统函数的代数属性与方框图表示

例1. $y[n] = x[n] - 5x[n-1] + 8x[n-3]$



解：由方程可得

$$Y(z) = (1 - 5z^{-1} + 8z^{-3})X(z)$$

$$H(z) = 1 - 5z^{-1} + 8z^{-3}$$

$$h[n] = \delta[n] - 5\delta[n-1] + 8\delta[n-3]$$

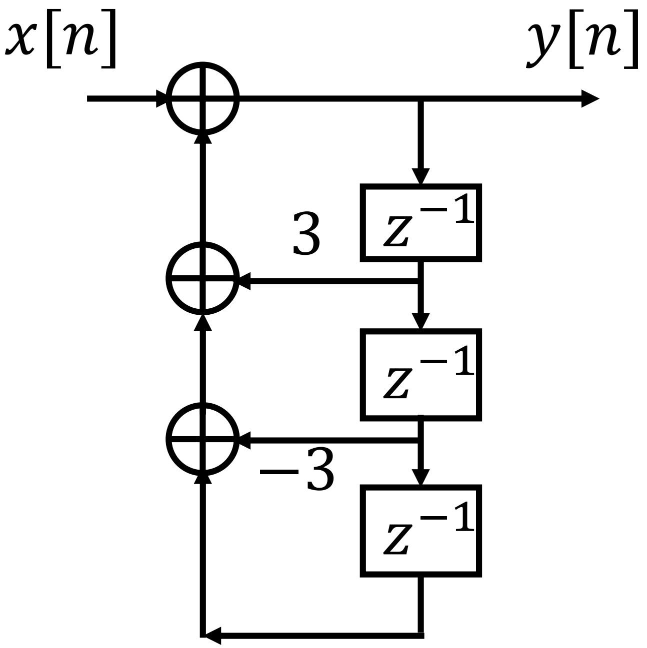
10.8 系统函数的代数属性与方框图表示

例2. $y[n]-3y[n-1]+3y[n-2]-y[n-3]=x[n]$

解：由方程可得 $Y(z)=X(z)+3z^{-1}Y(z)-3z^{-2}Y(z)+z^{-3}Y(z)$

$$(1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3})Y(z)=X(z)$$

$$H(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})^3}$$



利用z域微分及时移性质可得

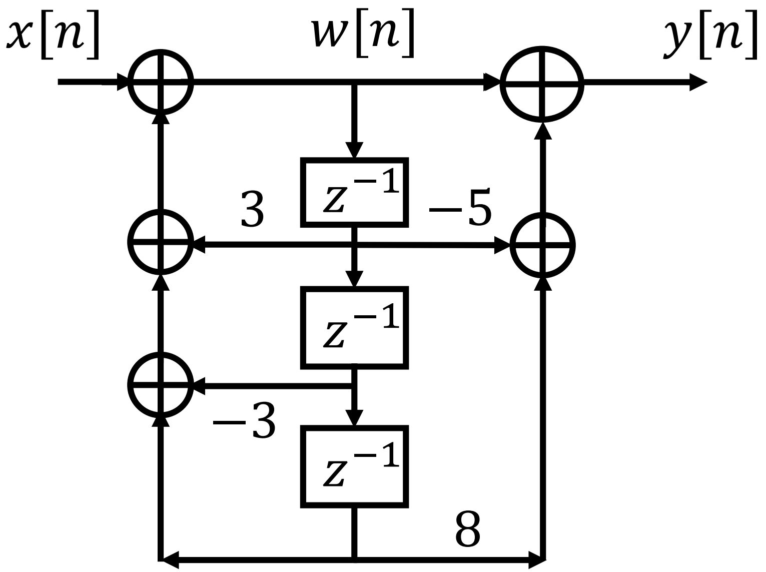
$$h[n]=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)u[n]$$

例3. $y[n]-3y[n-1]+3y[n-2]-y[n-3]=x[n]-5x[n-1]+8x[n-3]$

$$H(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})^3}\cdot(1-5z^{-1}+8z^{-3})$$

$$W(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})^3}\cdot X(z)$$

$$Y(z)=(1-5z^{-1}+8z^{-3})\cdot W(z)$$



10.8 系统函数的代数属性与方框图表示

2. 级联型表示：

将$H(z)$因式分解，在无重阶极点时可得

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1+\mu_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1+\eta_k z^{-1})}$$

$M=N$为偶数时

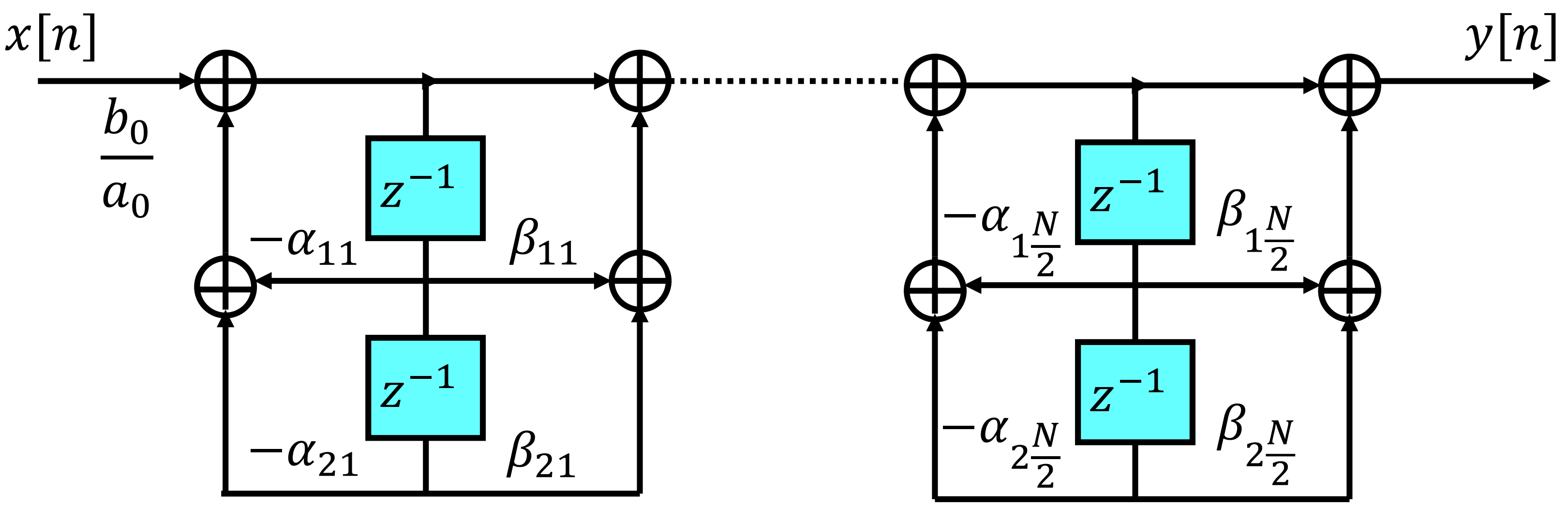
$$=\frac{b_0}{a_0}\prod_{k=1}^{N/2}\frac{1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2}}{1+\alpha_{1k}z^{-1}+\alpha_{2k}z^{-2}}=\frac{b_0}{a_0}\prod_{k=1}^{N/2}H_k(z)$$

其中$H_k(z)$是二阶子系统函数。

10.8 系统函数的代数属性与方框图表示

$$H(z)=\frac{b_0}{a_0}\prod_{k=1}^{N/2}\frac{1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2}}{1+\alpha_{1k}z^{-1}+\alpha_{2k}z^{-2}}$$

由此即可得系统的级联型表示：



离散时间LTI系统的级联型表示

10.8 系统函数的代数属性与方框图表示

3. 并联型表示：

将$H(z)$展开为部分分式，在无重阶极点时有

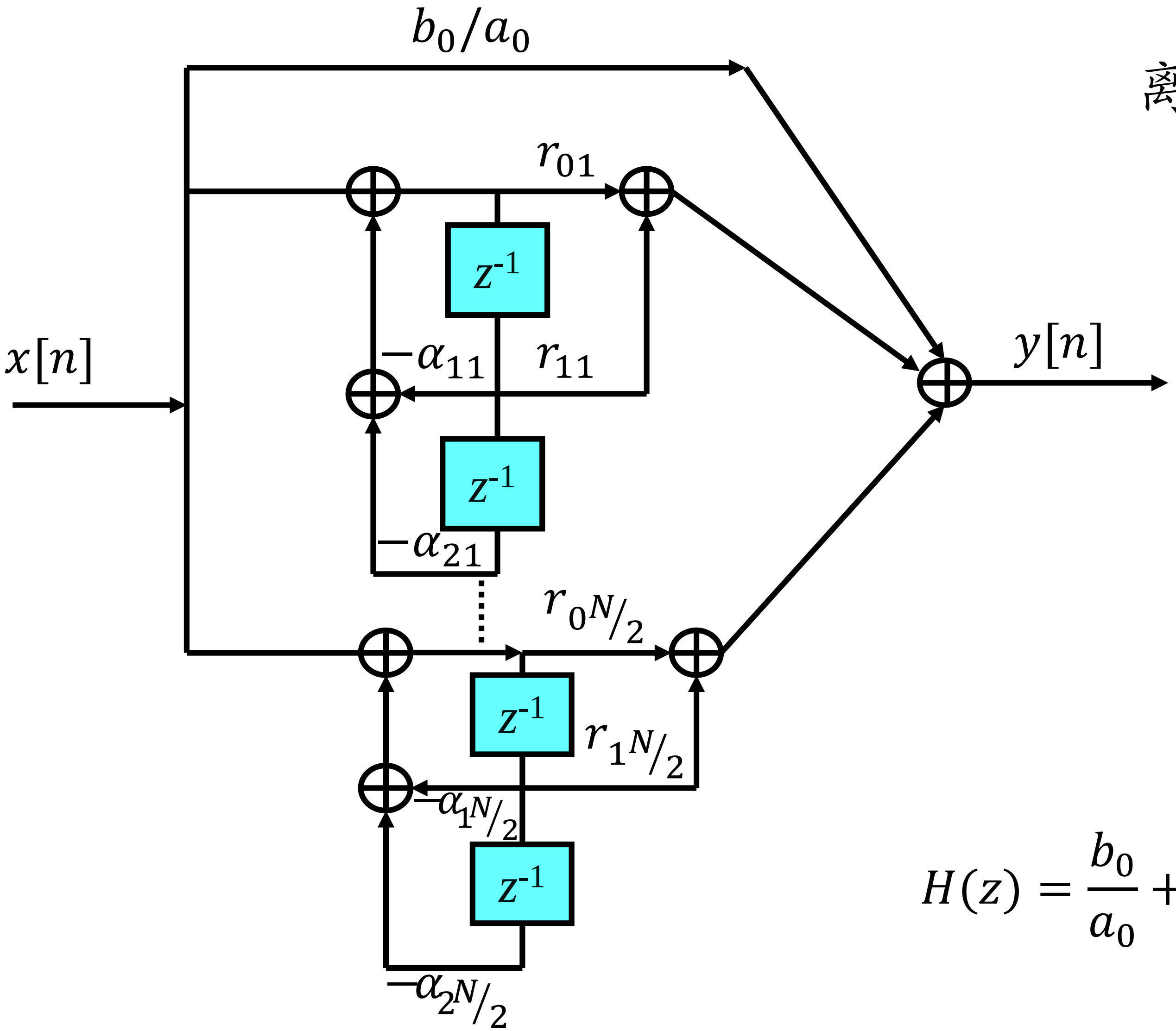
$$H(z)=\frac{b_0}{a_0}+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1+\eta_k z^{-1}}$$

N为偶数时

$$=\frac{b_0}{a_0}+\sum_{k=1}^{N/2}\frac{r_{0k}+r_{1k}z^{-1}}{1+\alpha_{1k}z^{-1}+\alpha_{2k}z^{-2}}$$

$$=\frac{b_0}{a_0}+\sum_{k=1}^{N/2}H_k'(z)$$

10.8 系统函数的代数属性与方框图表示



离散时间LTI系统
的并联型表示

$$H(z)=\frac{b_0}{a_0}+\sum_{k=1}^{N/2}\frac{r_{0k}+r_{1k}z^{-1}}{1+\alpha_{1k}z^{-1}+\alpha_{2k}z^{-2}}$$

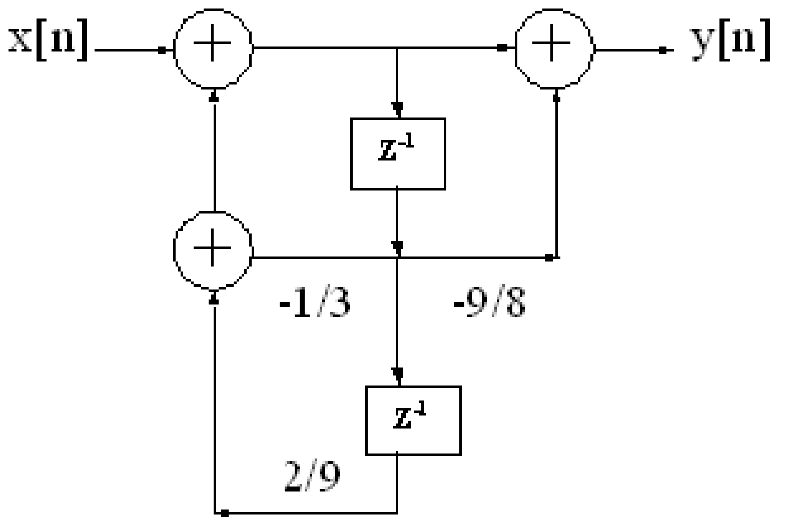
10.8 系统函数的代数属性与方框图表示

练习：一个因果LTI系统的输入$x[n]$和输出$y[n]$如图所示。

(a) 求$y[n]$和$x[n]$之间的差分方程。

(b) 该系统是稳定吗?

（教材习题10.37）



解：

(a) 差分方程为：

$$y[n]+\frac{1}{3}y[n-1]-\frac{2}{9}y[n-2]=x[n]-\frac{9}{8}x[n-1]$$

(b) 系统函数

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-\frac{9}{8}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{2}{9}z^{-2}}=\frac{1-\frac{9}{8}z^{-1}}{(1+\frac{2}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

$H(z)$具有极点$z_1=\frac{1}{3}$与$z_2=-\frac{2}{3}$。由于系统是因果的，收敛域为$|z|>\frac{2}{3}$，包含了单位圆，所以系统是稳定的。

10.9 单边Z变换

10.9 单边z变换

一. 单边z变换：

$$\boxed{\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}}$$

$x[n]$的单边z变换是$x[n]$中$n \geq 0$这部分，即$x[n]u[n]$的双边z变换。因此单边z变换的ROC一定是最外部极点的外部，且包括$|z| = \infty$。

所以在讨论单边z变换时，不再强调其ROC。

如果$x[n]$非因果，则其双边z变换$X(z)$与单边z变换$\chi(z)$不同。

10.9 单边z变换

单边z变换的反变换与双边z变换的反变换形式一致，但是只能给出$x[n]$在$n \geq 0$这部分的值。

$$x[n] = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\mathrm{c}} \chi(z) z^{n-1} \mathrm{d}z \qquad n \geq 0$$

10.9 单边z变换

例1. $x[n] = a^n u[n]$

对其做双边z变换有：

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

对其做单边z变换有：

$$\chi(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

因$x[n]$为因果信号，$\chi(z) = X(z)$

10.9 单边z变换

例2. $x[n] = a^{n+1}u[n+1]$

对其做双边z变换有：

$$X(z) = \frac{z}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

对其做单边z变换有：

$$\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1}z^{-n} = \frac{a}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

因$x[n]$在$n < 0$的部分对双边z变换起作用，而对单边z变换不起作用，故$\chi(z) \neq X(z)$。

10.9 单边Z变换

二. 单边z变换的性质：

单边z变换的一些性质可以由因果信号的双边z变换得到，主要的不同是时移特性。

时移特性：

若

$$x[n] \leftrightarrow \chi(z)$$

则

$$x[n-1] \leftrightarrow z^{-1}\chi(z) + x[-1]$$

$$x[n+1] \leftrightarrow z\chi(z) - zx[0]$$

10.9 单边Z变换

$x[n-1] \leftrightarrow z^{-1}\chi(z) + x[-1]$

证明:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]z^{-n} = \sum_{m=-1}^{\infty} x[m]z^{-(m+1)}$$

$$= x[-1] + z^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m}$$

$$= z^{-1}\chi(z) + x[-1]$$

同理可得:

$$x[n-2] \leftrightarrow z^{-2}\chi(z) + z^{-1}x[-1] + x[-2]$$

10.9 单边Z变换

$x[n+1] \leftrightarrow z\chi(z) - zx[0]$

证明:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[n+1]z^{-n} = \sum_{m=1}^{\infty} x[m]z^{-(m-1)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-(m-1)} - x[0]z = z\chi(z) - zx[0]$$

同理可得:

$$x[n+2] \leftrightarrow z^2\chi(z) - z^2x[0] - zx[1]$$

10.9 单边z变换

三. 利用单边z变换分析增量线性系统:

单边z变换在将线性常系数差分方程变换为z域代数方程时，可以自动将方程的初始条件引入，因而在解决增量线性系统问题时特别有用。

例. 计算下面因果系统的响应$y[n]$:

$$y[n]+3y[n-1]=x[n],\quad y[-1]=1,\quad x[n]=u[n].$$

解：方程两边做单边z变换，有：

$$\mathcal{Y}(z)+3z^{-1}\mathcal{Y}(z)+3y[-1]=\chi(z)$$

10.9 单边Z变换

$$\mathcal{Y}(z)+3z^{-1}\mathcal{Y}(z)+3y[-1]=\mathcal{X}(z),\quad y[-1]=1,\quad x[n]=u[n].$$

$$\mathcal{Y}(z)=\underbrace{\frac{\mathcal{X}(z)}{1+3z^{-1}}}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{\frac{-3y[-1]}{1+3z^{-1}}}_{\text{零输入响应}}=\underbrace{\frac{1}{1+3z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{\frac{-3}{1+3z^{-1}}}_{\text{零输入响应}}$$

$$=\underbrace{\frac{1/4}{1-z^{-1}}}_{\text{强迫响应}}-\underbrace{\frac{9/4}{1+3z^{-1}}}_{\text{自然响应}}$$

零状态响应、零输入响应与强迫响应、自然响应之间有何关系?

$$\therefore\ y[n]=[\frac{1}{4}-\frac{9}{4}(-3)^n]u[n]=\frac{1}{4}[1-(-3)^{n+2}]u[n]$$

$$n\geq 0$$

强迫响应　　自然响应

本章小结

1. 讨论了对离散时间信号和系统进行z变换分析的方法，主要内容与第九章相对应，如：收敛域、零极点图、系统函数、方框图、单边变换，…

2. 与拉普拉斯变换的情况对照，可以发现s平面与z平面之间存在着一种映射关系: $z \leftrightarrow \mathrm{e}^{sT}$。

实际上，对连续时间信号$x_{\mathrm{c}}(t)$采样，可以得到:

$$x_{\mathrm{p}}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{\mathrm{c}}(nT)\delta(t-nT)$$

本章小结

$$x_{\mathrm{p}}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{\mathrm{c}}(nT)\delta(t-nT)$$

$x_{\mathrm{p}}(t)$的拉普拉斯变换为：

$$X_{\mathrm{p}}(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{\mathrm{c}}(nT)\mathrm{e}^{-snT}$$

而采样序列$x[n]=x_{\mathrm{c}}(nT)$的z变换为：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{\mathrm{c}}(nT)z^{-n}$$

比较$X(z)$与$X_{\mathrm{p}}(s)$，可以发现$z\leftrightarrow \mathrm{e}^{sT}$。

离散时间信号与系统的复频域分析——z变换

信号分解	$x[n]=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint \dfrac{X(z)}{z}z^{n}\mathrm{d}z$ $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$（双边） $X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n}$（单边）
系统描述	1) $H(z)$ 2) 零极点图 3) 方框图 4) 差分方程
系统分析	(双边) z变换: $Y(z)=X(z)H(z)$
	单边z变换: 增量线性系统