第7章 采样

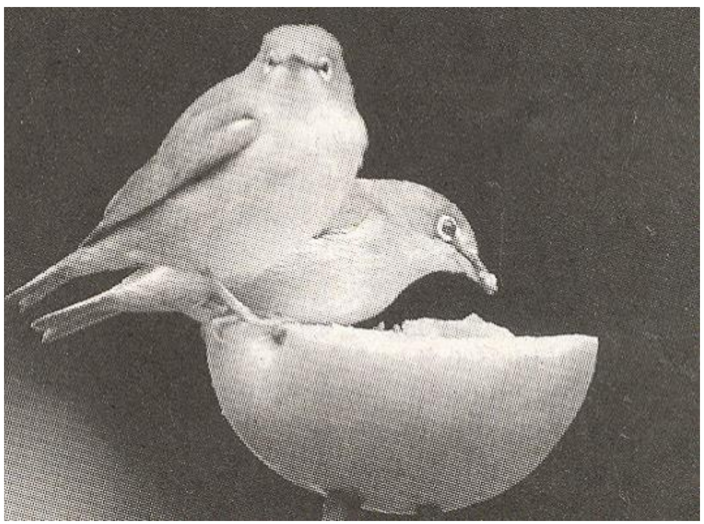
Sampling

本章主要内容

- 如何用连续时间信号的离散时间样本来表示连续时间信号——采样定理。
- 如何从采样所得到的样本重建连续时间信号。
- 欠采样导致的后果——频谱混叠。

7.0 引言

- 在日常生活中，常可以看到用离散时间信号表示连续时间信号的例子。如传真的照片、电视屏幕的画面、电影胶片等等。



一幅新闻照片

局部放大

  – 这些都表明连续时间信号与离散时间信号之间存在着密切的联系。在一定条件下，可以用离散时间信号代替连续时间信号而并不丢失原来信号所包含的信息。

现实生活中的“采样”实例

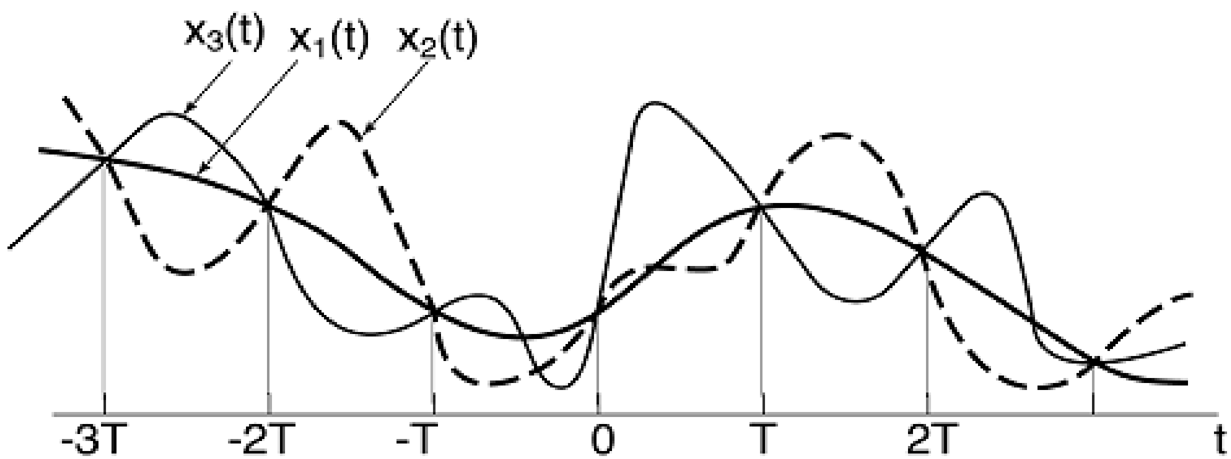
- 电影的播放-逐帧;
  - 如何实现“倒放”?
- 地铁隧道里的灯箱广告
- 计算机屏幕-像素（液晶显示、点阵字库等）;
- 书本上的文字、图片等;
- 人眼视觉的“低通”滤波插值效果

7.0 引言

- 用离散时间信号代替连续时间信号
  - 当离散时间间隔足够小时，可以完全表征原有信号
  - 在什么条件下，一个连续时间信号可以用它的离散时间样本来代替而不致丢失原有的信息。
  - 如何从连续时间信号的离散时间样本不失真地恢复成原来的连续时间信号。

7.1 用样本表示连续时间信号：采样定理
Theorem of Sampling

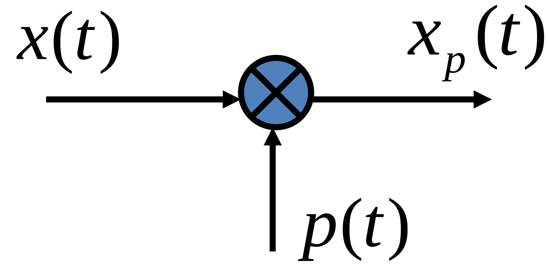
- 一. 采样 (Sampling)
  - 在某些离散的时间点上提取连续时间信号值的过程。
  - 是否任何信号都可以由它的离散时间样本来表示?
  - 考察下面一维连续时间信号采样的例子:



  - 一般情况下，从连续时间信号采样所得到的样本序列不能唯一地代表原来的连续时间信号。

7.1 用样本表示连续时间信号：采样定理

二.采样的数学模型：



在时域： $x_p(t) = x(t) \cdot p(t)$

在频域： $X_p(j\omega) = \dfrac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$

三.冲激串采样(理想采样):

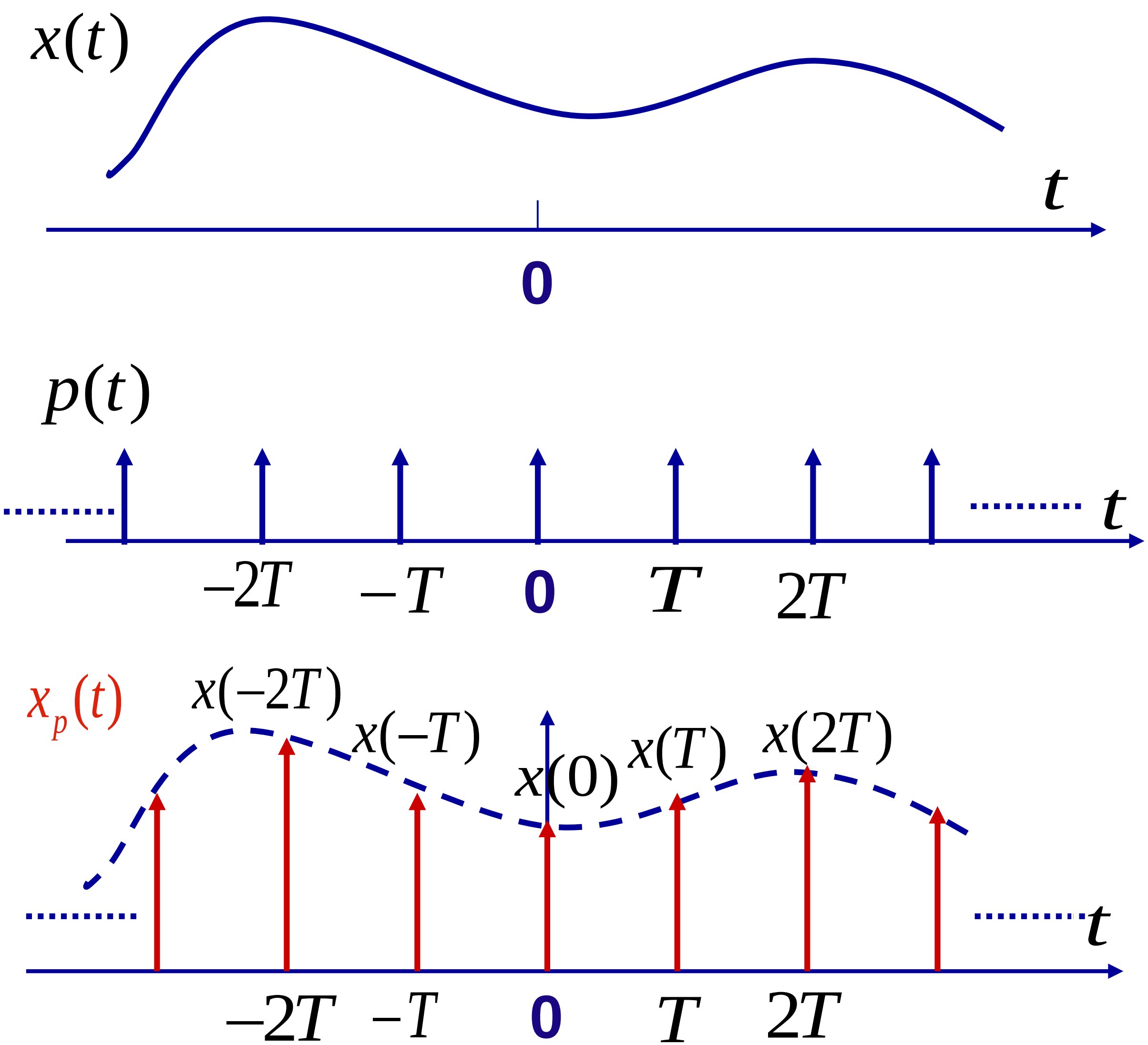
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

T 为采样间隔

$$x_p(t) = x(t)p(t)$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

7.1 用样本表示连续时间信号：采样定理



7.1 用样本表示连续时间信号：采样定理

在频域由于 $p(t) \leftrightarrow P(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - \frac{2\pi}{T}k)$

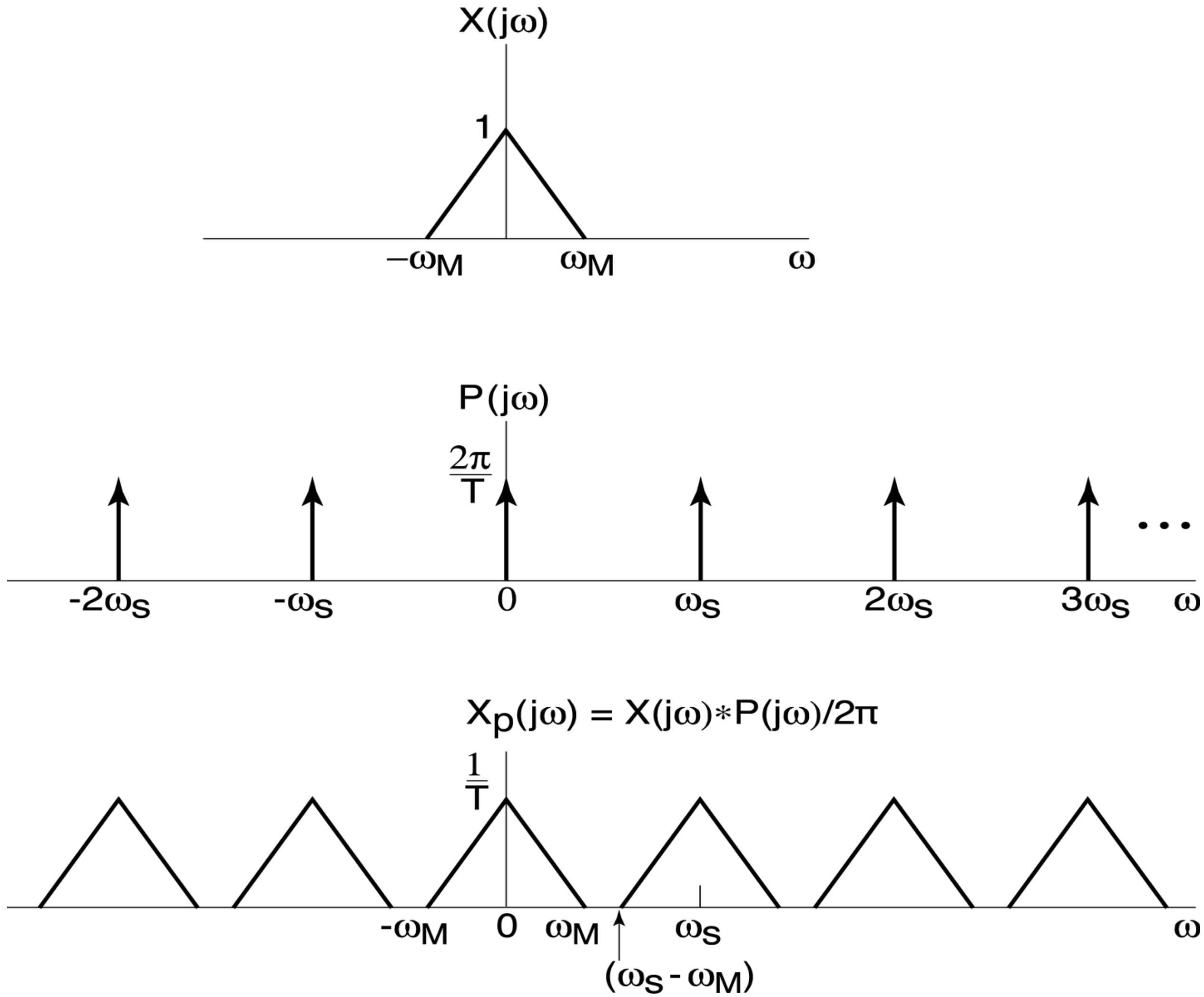
所以 $X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * P(j\omega)$

$$= \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega - k\omega_s)) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

- 可见，在时域对连续时间信号进行理想采样，就相当于在频域将连续时间信号的频谱以 ω_s 为周期进行延拓。

7.1 用样本表示连续时间信号：采样定理



7.1 用样本表示连续时间信号：采样定理

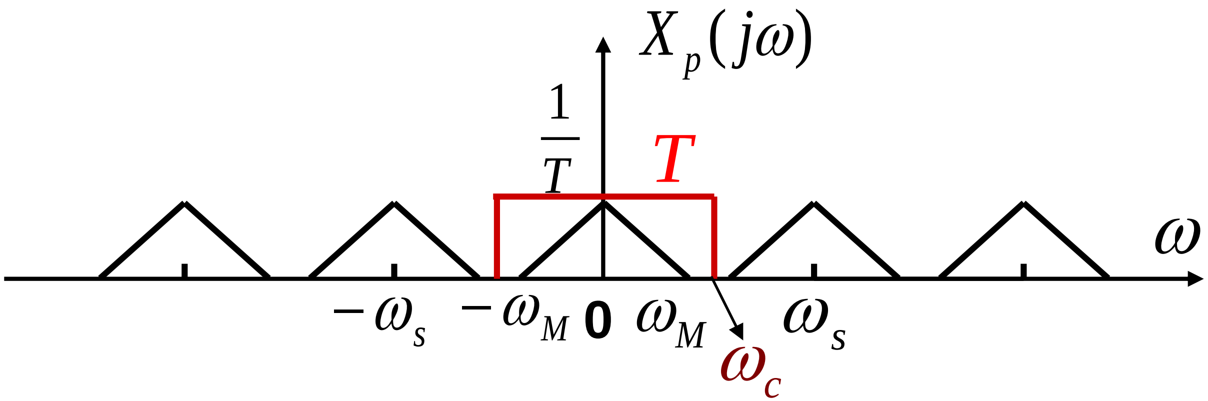
- 要想使采样后的信号样本能完全代表原来的信号，就意味着要能够从 $X_p(j\omega)$ 中不失真地分离出 $X(j\omega)$。这就要求 $X_p(j\omega)$ 在周期性延拓时不能发生频谱的混叠，因此:

1. $x(t)$ 必须是带限的，设最高频率分量为 ω_M。

2. 采样间隔 (周期) 不能是任意的，必须保证采样频率 $\omega_s > 2\omega_M$。其中 $\omega_s = 2\pi / T$ 为采样频率。

在满足上述要求时，可以通过理想低通滤波器从 $X_p(j\omega)$ 中不失真地分离出 $X(j\omega)$。

7.1 用样本表示连续时间信号：采样定理



•低通滤波器的截止频率必须满足:

$$\omega_M < \omega_c < (\omega_s - \omega_M)$$

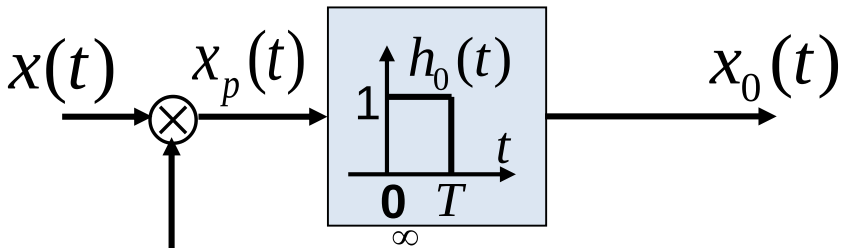
•为了补偿采样时频谱幅度的减小，滤波器应具有 T 倍的通带增益。

7.1 用样本表示连续时间信号：采样定理

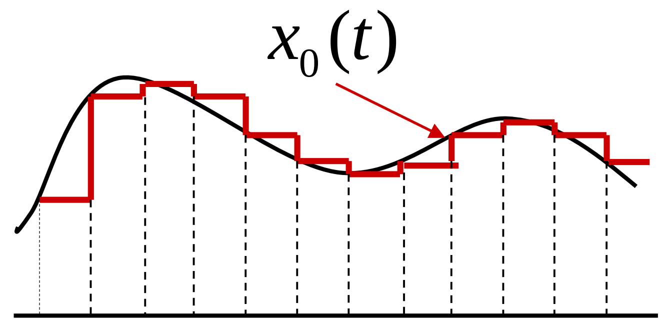
- 四．**Nyquist** 采样定理:
  - 对带限于最高频率 ω_M 的连续时间信号 $x(t)$,如果以 $\omega_s > 2\omega_M$ 的频率进行理想采样，则 $x(t)$ 可以唯一地由其样本 $x(nT)$ 来确定。

7.1 用样本表示连续时间信号：采样定理

五. 零阶保持采样:



$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$



零阶保持采样相当于理想采样后，再级联一个零阶保持系统。

7.1 用样本表示连续时间信号：采样定理

为了能从 $x_0(t)$ 恢复 $x(t)$，就要求零阶保持后再级联一个系统 $H_r(j\omega)$，使得

$$H_0(j\omega)H_r(j\omega) = H(j\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

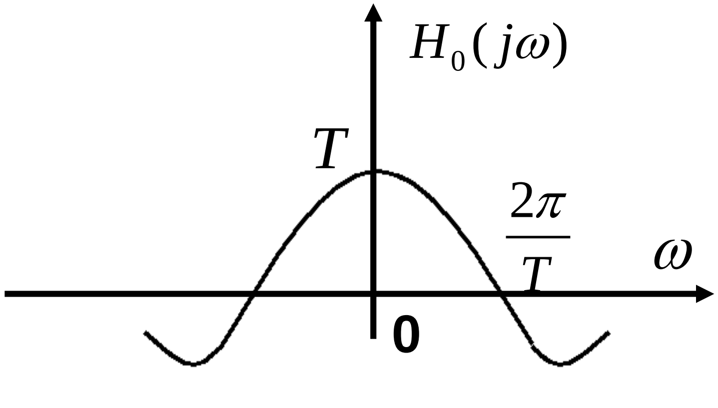
其中 $\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$

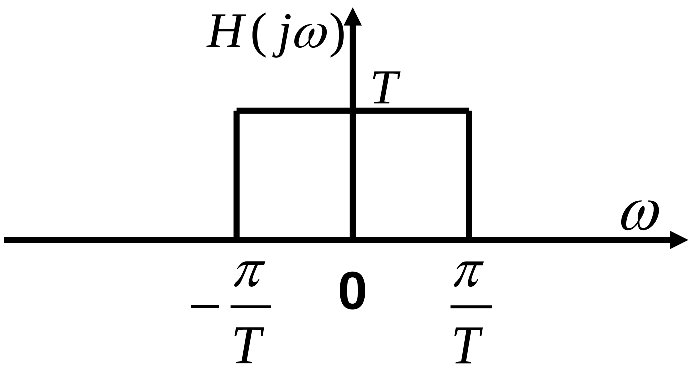
而 $$H_0(j\omega) = \frac{2\mathrm{Sin}(\omega T/2)}{\omega} e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

所以 $$H_r(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{\frac{2\mathrm{Sin}\,\omega T/2}{\omega}} \cdot e^{j\frac{\omega T}{2}}$$

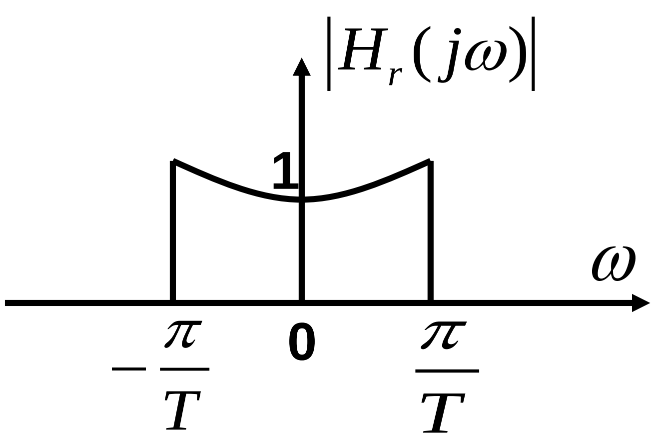
7.1 用样本表示连续时间信号：采样定理

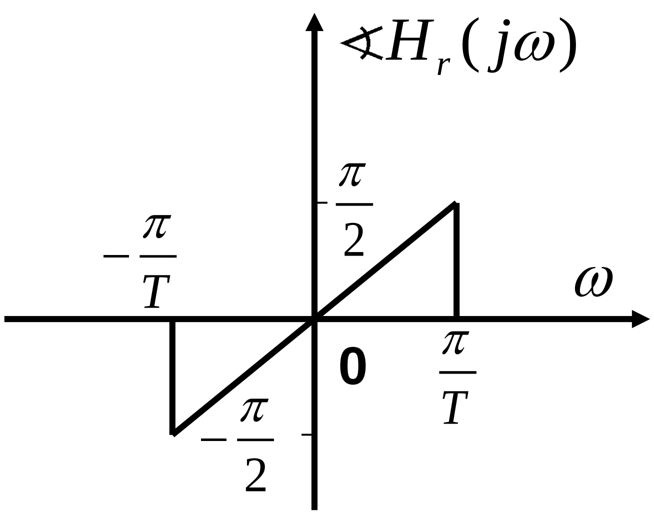
以 $H(j\omega)$ 表示理想低通滤波器的特性，则：





若 $\omega_c = \frac{1}{2}\omega_s = \frac{\pi}{T}$ 则



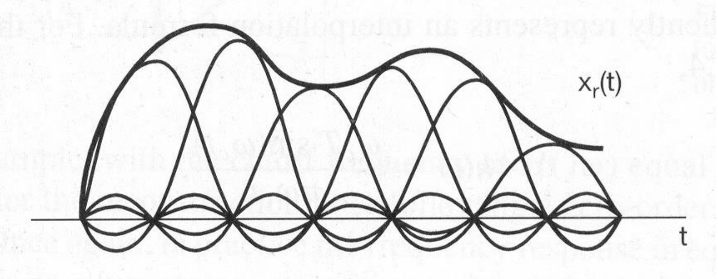


7.2 利用内插从样本重建信号
Reconstruction of a Signal from Its Samples Using Interpolation

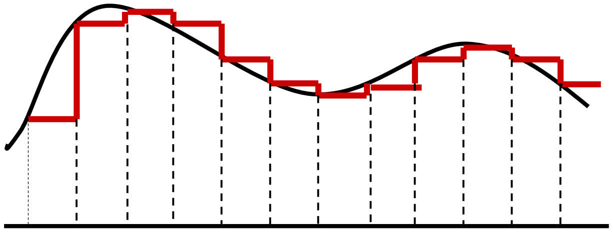
内插:

由样本值重建某一函数的过程

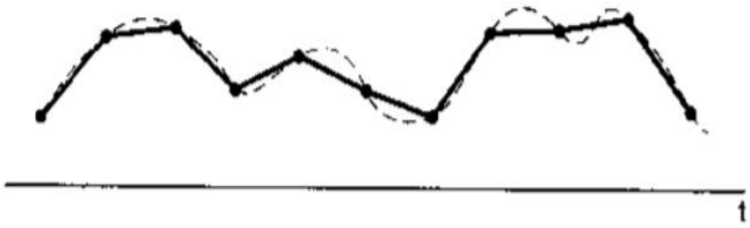
一、理想内插（低通）



二、零阶保持



三、一阶（线性）内插



7.2 利用内插从样本重建信号

Reconstruction of a Signal from Its Samples Using Interpolation

一. 理想内插:

若 $h(t)$ 为理想低通滤波器的单位冲激响应，则

$$x(t) = x_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) * h(t)$$

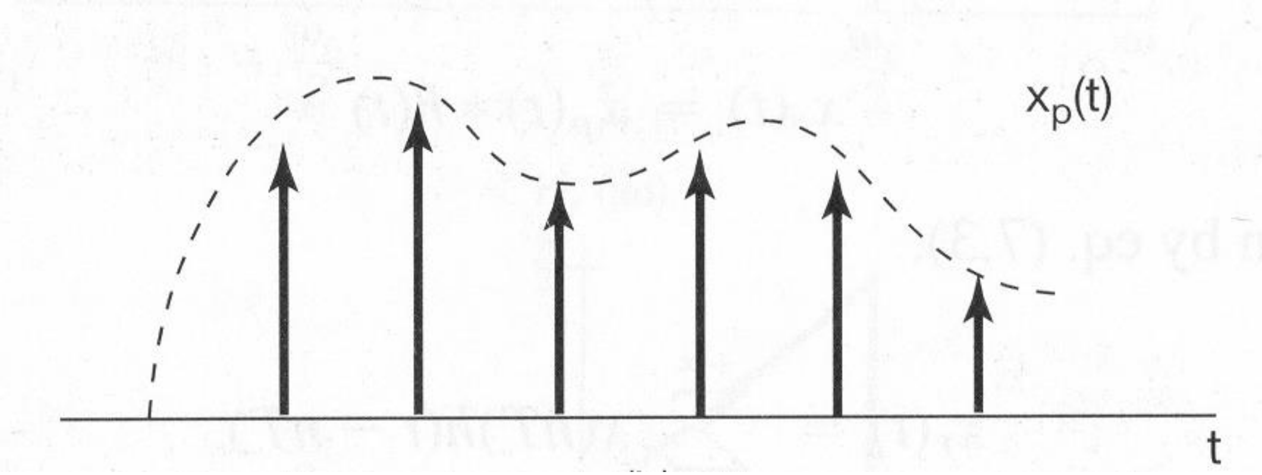
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT)$$

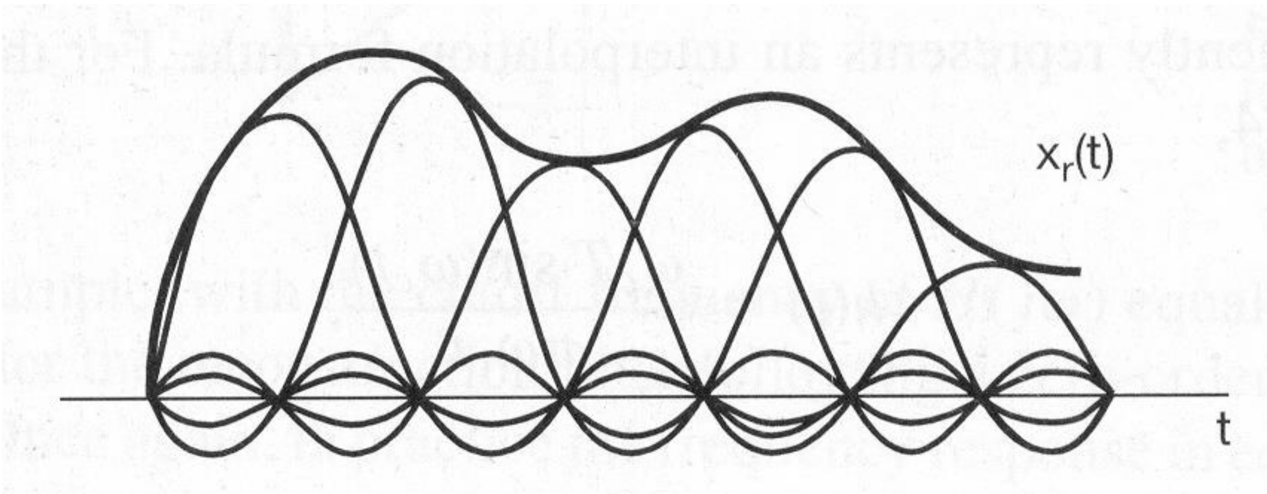
表明：理想内插以理想低通滤波器的单位冲激响应作为内插函数。

$$h(t) = T \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,\omega_c t}{\pi t} \Rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \frac{\omega_c T}{\pi} \frac{\mathrm{Sin}\,\omega_c (t-nT)}{\omega_c (t-nT)}$$

7.2 利用内插从样本重建信号

这种内插称为时域中的带限内插。

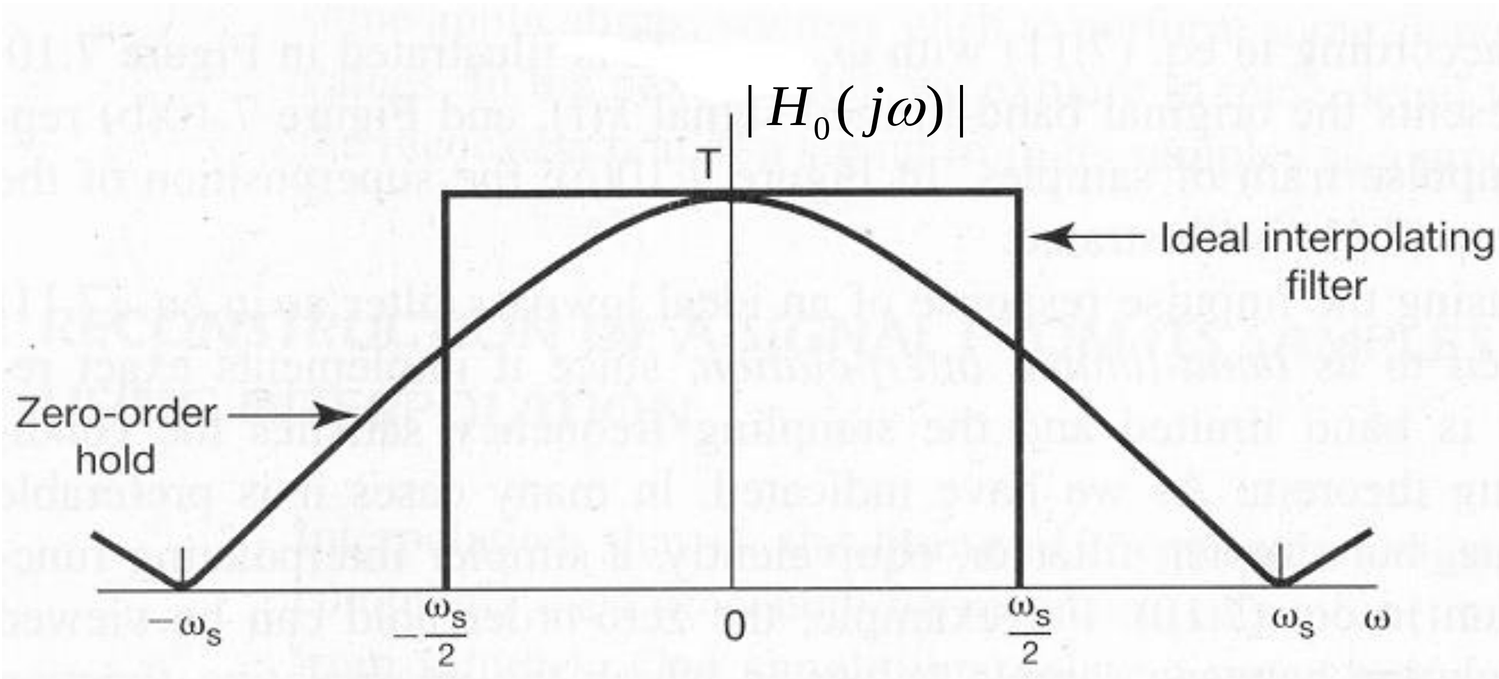




7.2 利用内插从样本重建信号

二. 零阶保持内插:

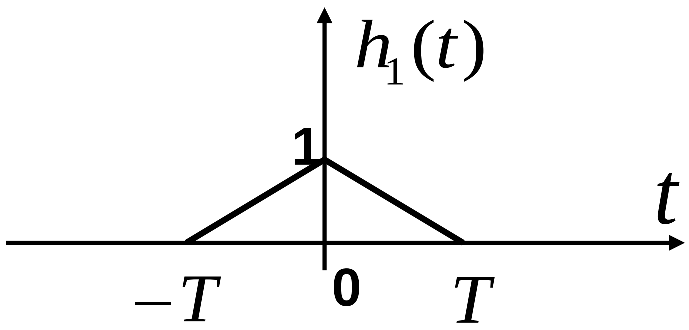
零阶保持内插的内插函数是零阶保持系统的单位冲激响应 $h_0(t)$。

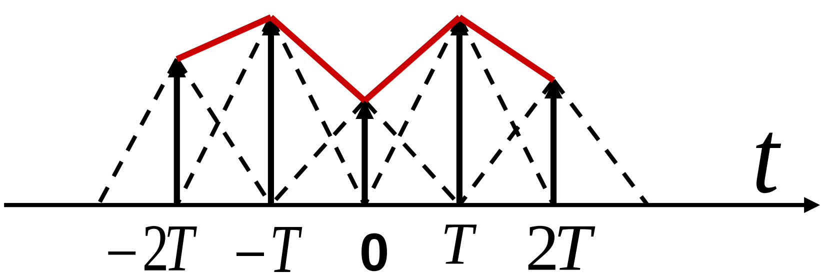


7.2 利用内插从样本重建信号

三. 一阶保持内插(线性内插):

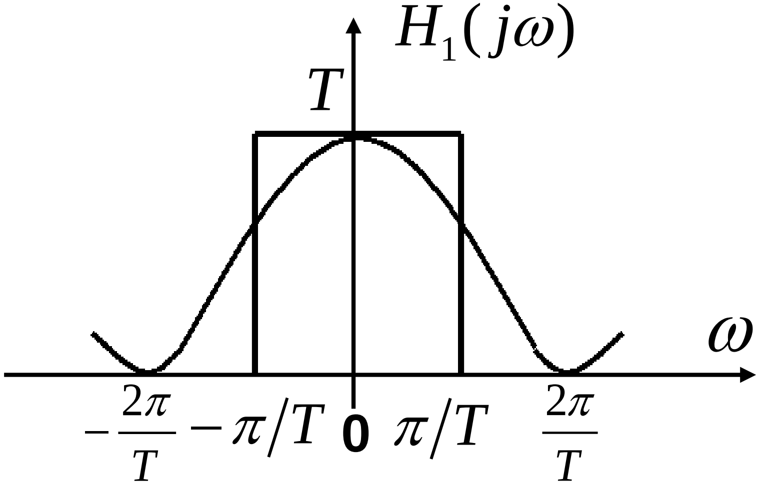
线性内插时，其内插函数是三角形脉冲。





$$H_1(j\omega)=T\left[\frac{\text{Sin}\,\frac{\omega T}{2}}{\omega T/2}\right]^2$$

$$=\frac{1}{T}\left[\frac{\text{Sin}\,\frac{\omega T}{2}}{\omega/2}\right]^2$$



7.3 欠采样的效果—频谱混叠
The Effect of Undersampling : Aliasing

欠采样与频谱混叠:

如果采样时，不满足采样定理的要求，就一定会在 $x(t)$ 的频谱周期延拓时，出现**频谱混叠**的现象。

此时，即使通过理想内插也得不到原信号。但是无论怎样，恢复所得的信号 $x_r(t)$ 与原信号 $x(t)$ 在采样点上将具有相同的值。

$$x_r(nT) = x(nT)$$

7.3 欠采样的效果—频谱混叠

The Effect of Undersampling : Aliasing

例：$x(t)=\cos\omega_0 t$

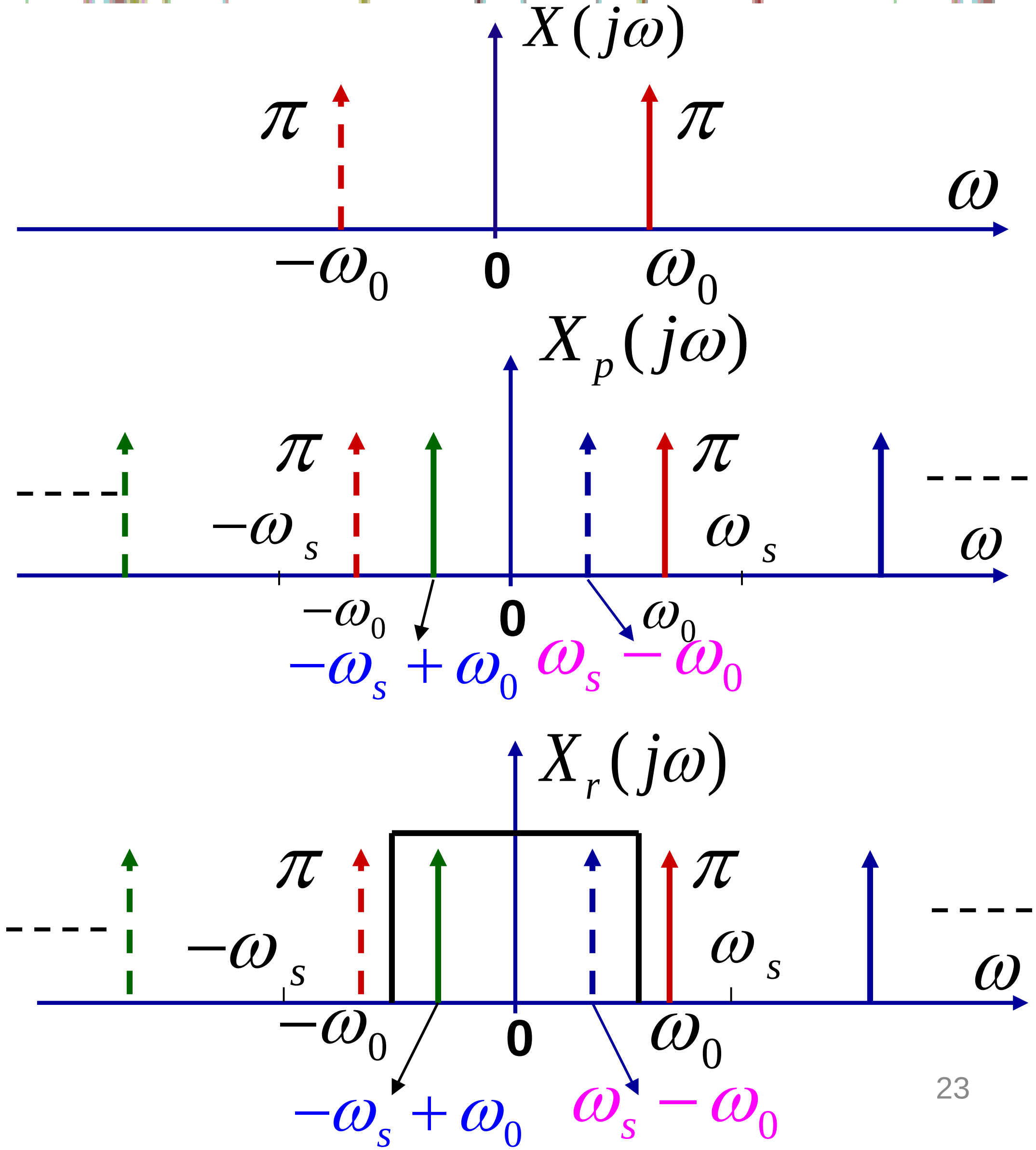
$x(t)$的频谱$X(j\omega)$

当 $\omega_0<\omega_s<2\omega_0$ 时，

采样后的频谱

恢复的信号为

$x_r(t)=\cos(\omega_s-\omega_0)t$



7.4 连续信号的离散时间处理

Example:

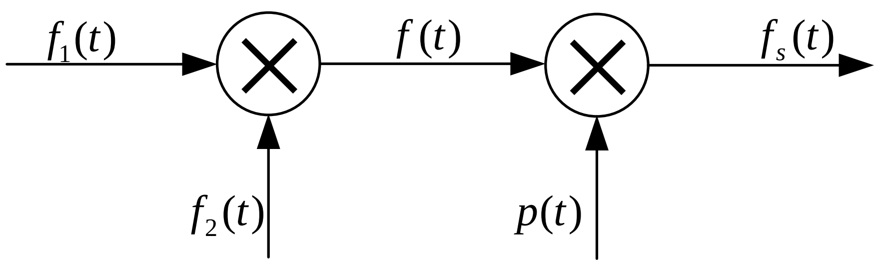
For the system as shown below, $f_1(t) = Sa(1000\pi t)$, $f_2(t) = Sa(2000\pi t)$

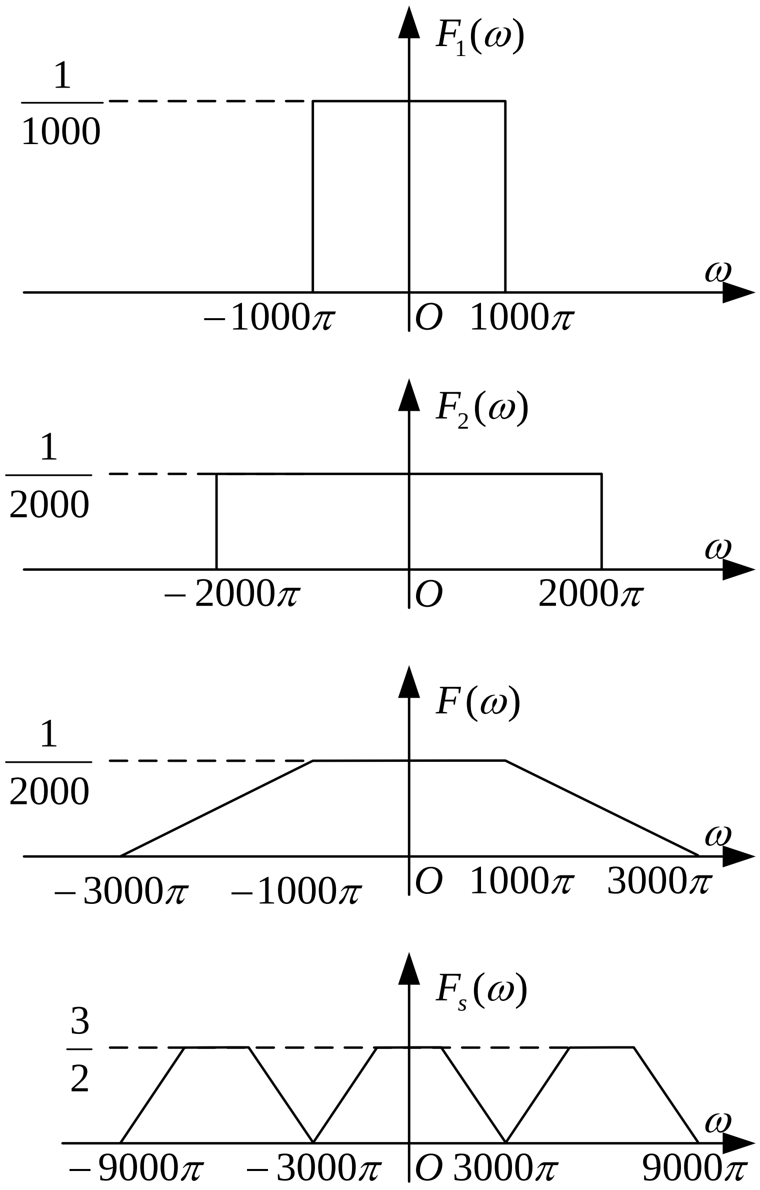
and $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$. $f(t) = f_1(t) f_2(t)$, $f_s(t) = f(t) p(t)$.

(1) Depict the spectrums for $f_1(t)$, $f_2(t)$ and $f(t)$;

(2) In order to reconstruct $f(t)$ from $f_s(t)$ without distortions, determine the maximun interval for the sampling ($T_{\max}$);

(3) Describe the relationship between $F_s(\omega)$ and $F(\omega)$ conditioned on $T = T_{\max}$. Please depict the magnitude spectrum of $|F_s(\omega)|$ within $(-9000\pi, 9000\pi)$.





$$T_{\max} = \frac{2\pi}{2\omega_m} = \frac{2\pi}{6000\pi} = \frac{1}{3000}\,s$$

$$F(\omega) = \frac{1}{T_{\max}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s), \quad \text{in which} \quad \omega_s = 6000\pi$$

Example:

For the system shown in Fig. E-2,

$$x(t)=\frac{\sin 200t}{t}, \qquad p(t)=T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

（1）Depict spectrums of $x(t)$ and $p(t)$

（2）Assume $y(t)=x(t-1)$, determine the fundamental period of $p(t)$ and the frequency response of $H(j\omega)$. What is the type of this filter?

（3）If the system shown in Fig. E-3 is employed, assume $y(t)=x(t)$ answer the same questions as in (2).

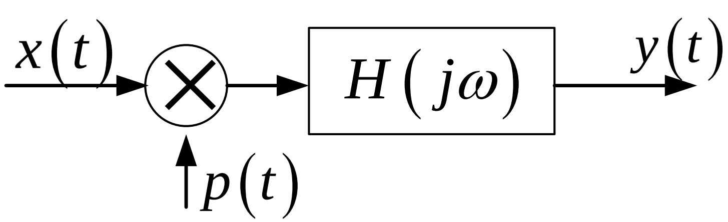


Fig. E-2

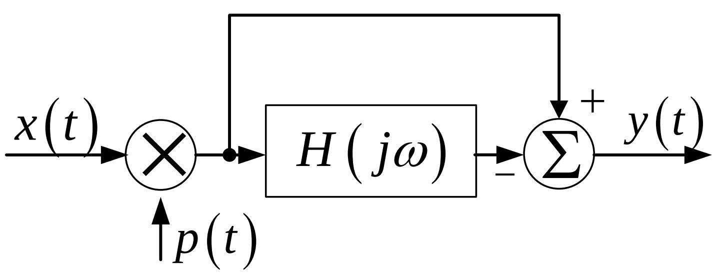
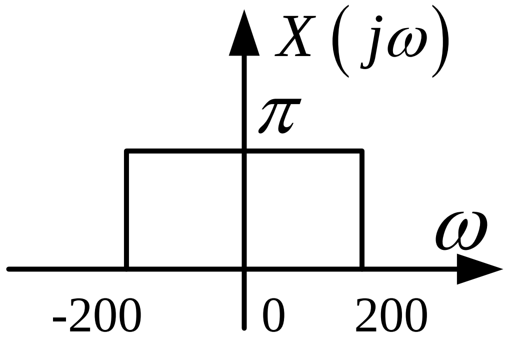
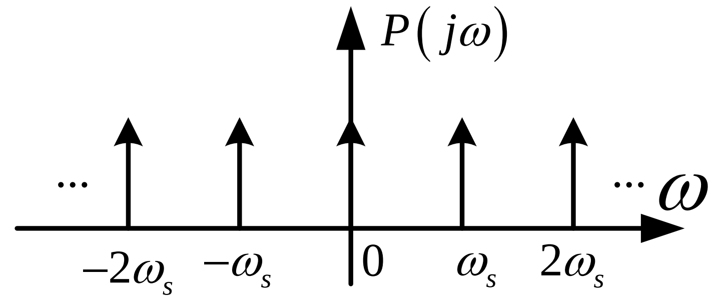


Fig. E-3

(1) $X(j\omega) = \pi G_{400}(\omega)$ $\qquad$ $P(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$





(2)

$$x(t)\cdot p(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(j(\omega - n\omega_s)\right)$$

Target is to have

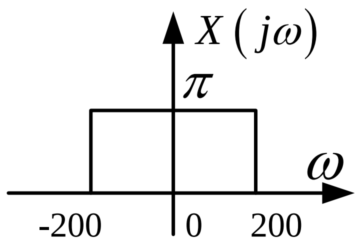
$$H(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(j(\omega - n\omega_s)\right) = X(j\omega) e^{-j\omega}$$

an LP filter should be used without aliasing. $\qquad \omega_s \geq 400 \qquad T \leq \frac{\pi}{200}$

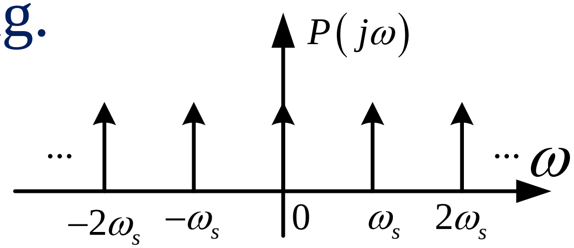
$$H(j\omega) = G_{2\omega_c}(\omega) e^{-j\omega} \qquad 200 \leq \omega_c \leq \omega_s - 200$$

(3) In order to have

$$\left[1-H(j\omega)\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\omega-n\omega_s\right)\right)=X(j\omega)$$



an HP filter should be used without aliasing.

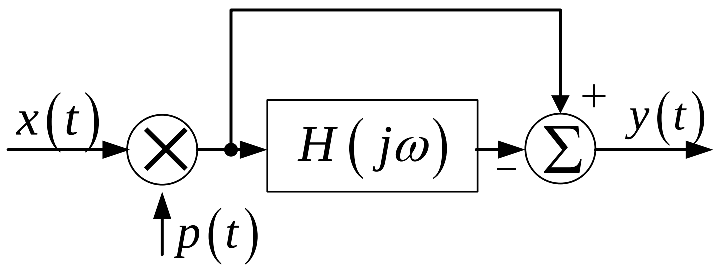


$$\omega_s \geq 400$$

$$T \leq \frac{\pi}{200}$$

$$H(j\omega)=u(-\omega-\omega_c)+u(\omega-\omega_c)$$

$$200 \leq \omega_c \leq \omega_s - 200$$



本章小结

- 连续时间信号的时域采样，采样定理。
- 从样本通过内插重建信号。
- 欠采样引起的频谱混叠。