L_0 范数及数据压缩感知

纪庆革　主讲

中山大学计算机学院

E-mail: 1024180018@qq.com

3.1 信号的稀疏表示

- 应用压缩感知理论的先决条件是“信号是否稀疏”，
- 如果一个信号长度为 N 的信号$\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a} \in R^N$) 投影到某个正交变换基$\Psi(N \times N)$ 下的变换向量 $\boldsymbol{x} = \Psi\boldsymbol{a}$ 中，只有少量的 $K(K \ll N)$ 个非零系数值（远大于零），
- 其余大部分信号系数值为零，或者可以近似为零，
- 那么就可以称信号 $\boldsymbol{a}$ 在正交基Ψ下是稀疏的，

- 即信号 $\boldsymbol{a}$ 在变换基 Ψ 下可以稀疏表示为向量 $\boldsymbol{x}$，那么

  $\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{N} x_i \Psi_i$ 或 $\boldsymbol{a} = \Psi \boldsymbol{x}$

- **向量 x 的支撑集(支集)表达式**为：$supp(\boldsymbol{x}) = \{i | x_i \neq 0\}$
- 其中 x_i 为向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个元素，$\|\boldsymbol{x}\|_0 := |supp(\boldsymbol{x})|$，$\|\boldsymbol{x}\|_0$ 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 中非零元素的个数($|supp(\boldsymbol{x})|$表示 $supp(\boldsymbol{x})$的基数)，若 $\|\boldsymbol{s}\|_0 \leq K$，那么就可以称向量 $\boldsymbol{s}$ 是 K **稀疏的信号（或稀疏系数）**，K 称为**信号的稀疏度**

- 当信号本身具有稀疏性时，变换基 Ψ 可以是单位矩阵，
- 然而，现实中的大部分信号本身在时域上都没有稀疏性，为此，可以通过稀疏变换基投影到某个变换域下进行稀疏表示，大部分正交变换基都可以作为变换基，
- 如小波变换基、离散余弦变换基、傅里叶变换基等

3.2 观测矩阵与 RIP 条件

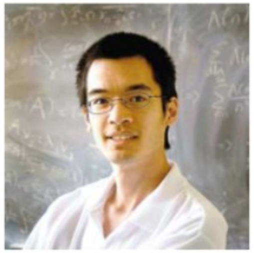
- 通过一个大小为 $M \times N$ 观测矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 对长度为 N 的信号 $\boldsymbol{x}$ 进行压缩采样后，可以得到一个长度为 $M(M \ll N)$ 的观测向量 $\boldsymbol{y}$，表达式为：$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{x}$
- 设计合适的观测矩阵可以有效提升压缩感知理论的应用效果，

- 一般**对于观测矩阵设计的主要原则**有：
  - ➢具有一定的随机特性，以满足压缩感知理论的随机采样的原则；
  - ➢具有一定的实用性；
  - ➢满足**有限等距性质**（Restricted Isometry Property, RIP），即满足RIP 条件：

$$(1-\delta)\|\boldsymbol{x}\|_2^2 \le \|\Phi\boldsymbol{x}\|_2^2 \le (1+\delta)\|\boldsymbol{x}\|_2^2$$

- 定义：设 δ_k 为满足上式的最小值 δ，K 为信号 $\boldsymbol{x}$ 的稀疏度，如果 $0 < \delta_k < 1$，则称**观测矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 满足 K 阶 RIP 条件**
- 但是通过这种方式判断观测矩阵是否满足 RIP 条件，实现起来过于复杂，因此人们提出了一种**简单的替代条件**：
- 如果观测矩阵 Φ 和稀疏变换基 Ψ 之间相关性非常低或不相关，则观测矩阵就大概率满足RIP 条件

- 现有的一些观测矩阵既可以很好地满足RIP条件，又具有良好的普适性，如 Gaussian 随机矩阵、Bernoulli 随机矩阵、部分 Fourier 矩阵和部分 Hadamard 矩阵等
- 2004年 Candes等人证明，如果信号是稀疏的，那么它可以由远低于采样定理要求的采样点重建恢复
- 2007年又正式提出了“**压缩感知**”(Compressed Sensing 又称compressed sampling, CS) 概念



陶哲轩

Emmanuel Candes

David Donoho

- Candes 和Tao 等证明：独立同分布的高斯随机测量矩阵可以成为普适的压缩感知测量矩阵
- 一般用随机高斯矩阵作为观测矩阵，目前常用的测量矩阵还有随机贝努利矩阵、部分正交矩阵、托普利兹矩阵和稀疏随机矩阵等

本课件内容来自互联网与有关教材，感谢作者！