中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

《图论及其应用》2024

潘嵘

计算机学院

第一章 图的基本概念

本次课主要内容

(一)、完全图、偶图与补图

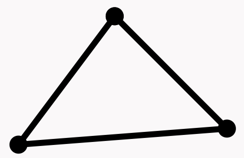
(二)、顶点的度与图的度序列

(一)、完全图、偶图与补图

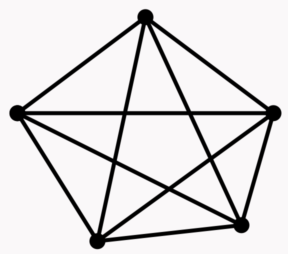
1、每两个不同的顶点之间都有一条边相连的简单图称为**完全图**.

在同构意义下，n个顶点的完全图只有一个，记为 K_n.

K_2



K_3



K_5

容易求出：$m(K_n)=\frac{1}{2}n(n-1)$.

2、所谓具有二分类(X,Y)的**偶图**（或**二部图**）是指一个图，它的点集可以分解为两个(非空)子集X和Y，使得每条边的一个端点在X中，另一个端点在Y中.

完全偶图是指具有二分类(X,Y)的简单偶图，其中X的每个顶点与Y的每个顶点相连，若$|X| = m, |Y| = n,$ 则这样的偶图记为 $K_{m,n}$.

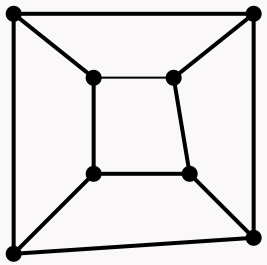


图1

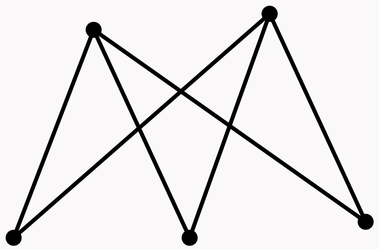
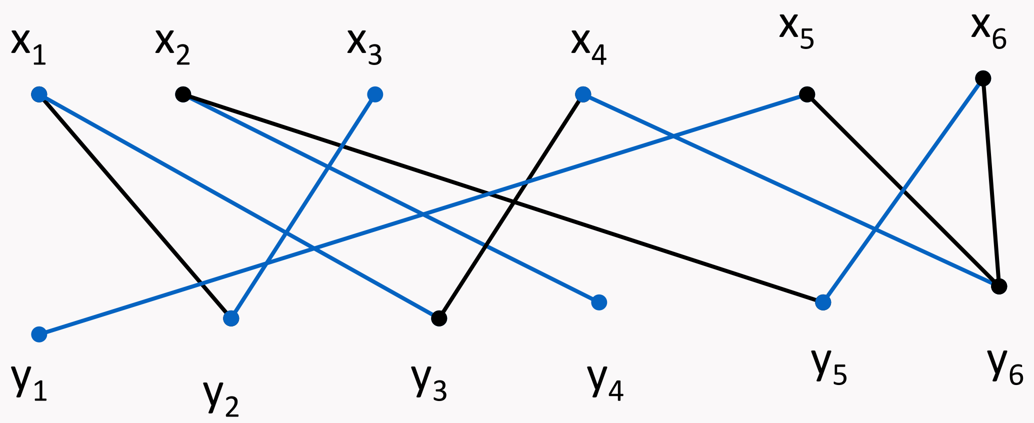


图2

图1与图2均是偶图，图2是$K_{2,3}$.

偶图是一种常见数学模型。

例1 学校有6位教师将开设6门课程。六位教师的代号是x_i $(i=1,2,3,4,5,6)$，六门课程代号是y_i $(i=1,2,3,4,5,6)$. 已知，教师x_1能够胜任课程y_2和y_3；教师x_2能够胜任课程y_4和y_5；教师x_3能够胜任课程y_2；教师x_4能够胜任课程y_6和y_3；教师x_5能够胜任课程y_1和y_6；教师x_6能够胜任课程y_5和y_6. 请画出老师和课程之间的状态图。

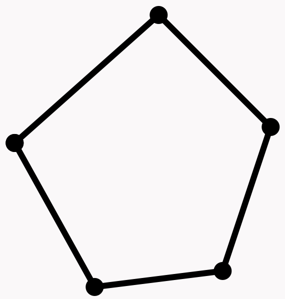


3、对于一个简单图$G = (V,E)$, 令集合

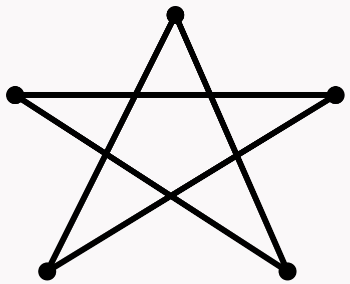
$$E_1 = \{uv | u \neq v, u, v \in V\},$$

则称图 $H = (V, E1 \backslash E)$为G的**补图**，记为$H = \overline{G}$.

例如，下面两个图互为补图。



G_1



G_2

补图是相对于完全图定义的。

补图是图论中经常涉及的概念，在图论研究中有重要的作用。

如果图G与其补图同构，则称G为自补图。

定理：若n阶图G是自补的（即$G \cong \bar{G}$），则有：$n = 0,1(\mathrm{mod}\,4)$.

证明：n阶图G是自补图，则有：

$$m(G)+m(\bar{G})=m(K_n)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

所以：

$$m(G)=\frac{1}{4}n(n-1)$$

由于n是正整数，所以：$n=0,1(\mathrm{mod}\,4)$.

自补图是很有意义的图类。它在对角型拉姆齐数方面的研究、关于图的香农容量的研究、强完美图方面的研究等都有重要作用。

例2 在10个顶点以下的单图中，哪些阶数的图可能为自补图？画出8阶的4个自补图(共10个)。

(二)、顶点的度与图的度序列

1、顶点的度及其性质

G的顶点v的度$d(v)$ 是指G中与v关联的边的数目，每个环计算两次。

分别用$\delta(G)$和$\Delta(G)$表示图G的最小与最大度。

奇数度的顶点称为**奇点**，偶数度的顶点称**偶点**。

设$G = (V,E)$为简单图，如果对所有$v \in V$, 有$d\,(v) = k$, 称图G为k-**正则图**。

定理： 图$G = (V,E)$中所有顶点的度的和等于边数m的2倍，即：

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m\,.$$

证明：由顶点度的定义知：图中每条边给图的总度数贡献2度，所以，总度数等于边数2倍。

注：该定理称为图论第一定理，是由欧拉提出的。欧拉一生发表论文886篇，著作90部。该定理还有一个名字：“握手定理”。

推论1 在任何图中，奇点个数为偶数。

证明：设V_1, V_2分别是G中奇点集和偶点集.则由握手定理有：

$$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = \sum_{v \in V} d(v)$$

是偶数，由于$\sum_{v \in V_2} d(v)$是偶数， 所以$\sum_{v \in V_1} d(v)$是偶数，于是$|V_1|$是偶数。

推论2 正则图的阶数和度数不同时为奇数 。

证明 ： 设G是k-正则图，若k为奇数，则由推论1知正则图G的点数必为偶数

例4 Δ与δ是简单图G的最大度与最小度，求证：

$$\delta \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta.$$

证明：由握手定理有：$n\delta \le \sum_{v\in V(G)} d(v) = 2m \le n\Delta$,

所以有：

$$\delta \le \frac{2m}{n} \le \Delta.$$

2、图的度序列及其性质

一个图G的各个点的度$d_1, d_2, \ldots, d_n$构成的非负整数组$(d_1, d_2, \ldots, d_n)$称为G的**度序列** 。

任意一个图G对应唯一一个度序列，图的度序列是刻画图的特征的重要“拓扑不变量”。

图G 的“拓扑不变量”是指与图G有关的一个数或数组(向量)。它对于与图G同构的所有图来说，不会发生改变。

一个图G可以对应很多拓扑不变量。如果某组不变量可完全决定一个图，称它为不变量的完全集。

定理：非负整数组$(d_1, d_2, \ldots, d_n)$是图的度序列的充分必要条件是：$\sum_{i=1}^{n} d_i$为偶数。

证明：必要性由握手定理立即得到。

如果$\sum_{i=1}^{n} d_i$为偶数，则数组中为奇数的数字个数必为偶数。按照如下方式作图G: 若d_i为偶数，则在与之对应的点作$d_i/2$个环；

对于剩下的偶数个奇数，两两配对后分别在每配对点间先连一条边，然后在每个顶点画$(d_j - 1)/2$ 个环。该图的度序列就是已知数组。

一个非负数组如果是某简单图的度序列，我们称它为**可图序列**，简称**图序列**。

关于图序列，主要研究3个问题：

(1) 存在问题：什么样的整数组是图序列？

(2) 计数问题：一个图序列对应多少不同构的图？

(3) 构造问题：如何画出图序列对应的所有不同构图？

研究现状: (1)彻底解决了，(2)解决得不好，(3)没有解决。

定理：非负整数组

$$\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n),d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n,\sum_{i=1}^{n}d_i=2m$$

是图序列的充分必要条件是：

$$\pi_1=(d_2-1,d_3-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n)$$

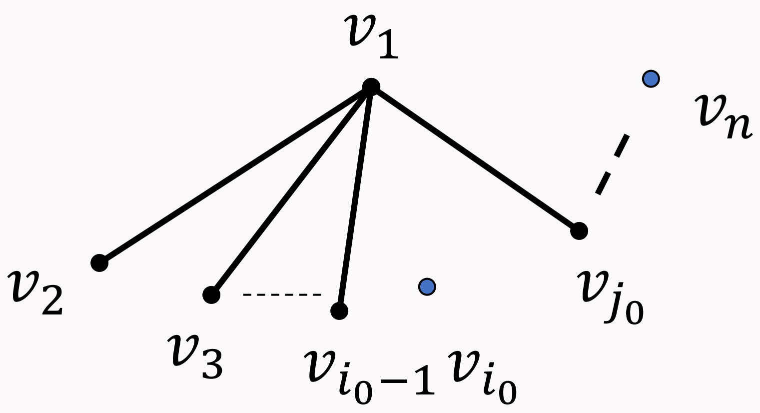
是图序列。

证明：" $\Rightarrow$ "

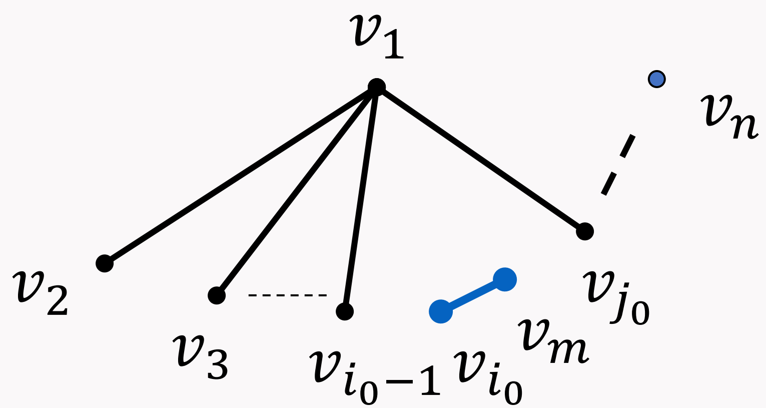
设G是Π对应的简单图，$d\left(v_i\right)=d_i$,

情形1：点v_1与点$v_2,v_3,\ldots,v_{d_1+1}$邻接，则$G-v_1$的度序列正好为Π_1

情形2：点v_1与点$v_{d_1+2},\dots,v_n$的某些顶点邻接。在这种情况下，作如下假设：设v_1与v_{j_0}邻接，但当$k > j_0$时，v_1与v_k不邻接；又设v_1与v_{i_0}不邻接，但当$k < i_0$时，v_1与点v_k邻接。

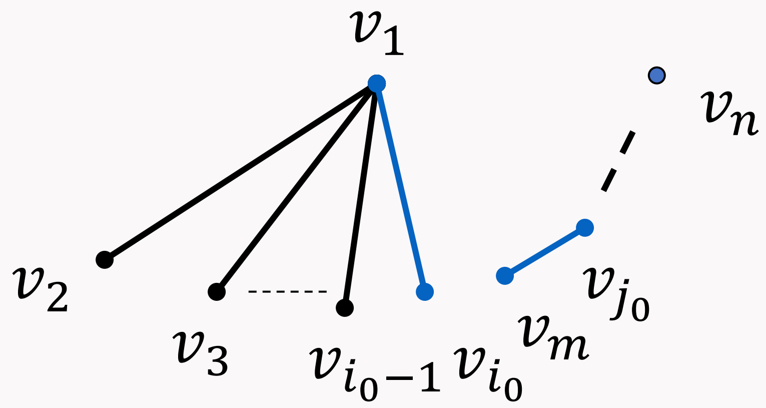


可以证明：在图中，必然存在点v_m，使得v_m与v_{i_0}邻接，但是它与v_{j_0}不邻接！



若不然，对任意的与v_{i_0}邻接的点，若都与v_{j_0}邻接，那么，有$d_{j_0} \geq d_{i_0}+1$, 这和条件矛盾！

现在，在图中去掉边$v_1v_{j_0}$和$v_{i_0}v_m$,加上边$v_{j_0}v_m$和$v_1v_{i_0}$,显然新图与原图度序列相同，但j_0减小了， i_0增大了！



如此进行下去，最后可以变情形2为情形1。

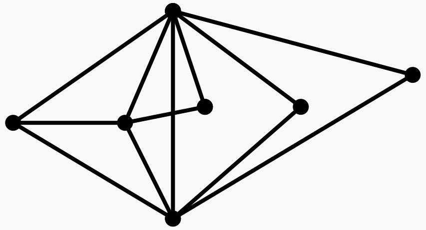
" $\Leftarrow$ ": 是显然的。

例5 $\pi=(6,5,4,3,2,2,2)$是否为图序列？如果是，作出对应的一个简单图。

解：$\pi_1=(4,3,2,1,1,1)$

$\pi_2=(2,1,0,0,1)$

由于$\pi_2=(2,1,0,0,1)$是图序列，所以原序列是图序列。



定理：（厄多斯1960）非负整数组

$$\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n),d_1\ge d_2\ge\cdots\ge d_n,\sum_{i=1}^{n}d_i=2m$$

是图序列的充分必要条件是：

$$\sum_{i=1}^{r}d_i\le r(r-1)+\sum_{i=r+1}^{n}\min\{r,d_i\},1\le r\le n-1.$$

该定理证明很难！

上世纪60年代以来，人们又研究所谓的唯一图序列问题。

例5就是一个唯一图序列！

定理：一个满足$d_2 = d_{n-1}$的图序列$\pi = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$是唯一图序列的充分必要条件是下列条件之一满足：

(1), $d_1 = d_n, d_n \in \{1, n-1, n-2\}$

(2), $d_1 = d_n = 2, n = 5$

(3), $d_1 > d_2 = d_n = 1$

(4), $d_1 > d_2 = d_n = 2, d_1 \in \{n-1, n-2\}$

(5), $n-2 = d_1 = d_{n-1} > d_n$

(6), $n-3 = d_1 = d_{n-1} > d_n = 1$

(7), $n-1 = d_1 > d_2 = d_n = 3, n = 6$

3、图的频序列及其性质

定理：　一个简单图G的n个点的度不能互不相同

证明：　因为图G为简单图，所以：$\triangle(G) \le n-1$。

情形1：若G没有孤立点，则$1 \le d(v) \le n-1, \forall v \in V(G)$, 由鸽笼原理：必有两顶点度数相同；

情形2：若G只有一个孤立点，设G_1表示G去掉孤立点后的部分，则：$1 \le d(v) \le n-2, \forall v \in V(G_1)$.

由鸽笼原理：在G_1里必有两顶点度数相同；

情形3：若G只有两个以上的孤立点，则定理显然成立。

定义：　　设n阶图G的各点的度取s个不同的非负整数$d_1, d_2, \dots, d_s$。又设度为d_i的点有b_i个（$i = 1,2, \dots, s$），则

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = n.$$

故非整数组$(b_1, b_2, \dots, b_s)$是n的一个划分，称为G的**频序列**。

定理：　一个n阶图G和它的补图有相同的频序列。

谢 谢!