§ 4.7 理想气体的化学平衡

对化学反应,需要解决的基本问题有:

- (1) 化学反应释放的能量? (热化学的内容)
- (2) 化学反应在什么条件下达到平衡? (化学平衡条件,前已导出)
 - (3) 化学反应达到平衡时各组元的数量关系?
 - (4) 若反应未达到平衡,反应进行的方向?
 - (5) 化学反应的速率? (化学动力学的内容)

••••

本节只对理想气体化学反应的(3)、(4)两个问题做简单介绍。理想气体的化学反应可以作为实际气体化学反应的近似。

一、质量作用律

其中 K, 为化学反应的定压平衡常量,简称平衡常量。

热统

$$\ln K_p(T) = -\sum_i v_i \varphi_i(T) = \sum_i \ln p_i^{v_i} = \ln \left(\prod_i p_i^{v_i} \right)$$

$$K_p(T) = \prod_i p_i^{v_i}$$

一质量作用律: 气体反应达到平衡时,各组元分压之间的关系。

由于
$$p_i = x_i p$$

$$K_p(T) = \prod p_i^{\nu_i} = \prod (px_i)^{\nu_i} = p^{\nu} \prod x_i^{\nu_i}$$

其中
$$v = \sum_{i} v_i$$

$$K(T,p) = \prod_{i} x_i^{\nu_i}$$

对于 v = 0 的气体反应 $K(T, p) = K_p(T)$

——质量作用律的另一表达:气体反应达到平衡时,各组元摩尔分数之间的关系。

二、化学反应方向

当未达到平衡时,化学反应朝吉布斯函数减小的方向进行,即朝

$$\delta n \sum_{i} \mu_{i} v_{i} < 0$$
 的方向反应

若
$$\sum_{i} \mu_{i} v_{i} < 0$$
 则 $\delta n > 0$ \Longrightarrow 反应正向进行

若
$$\sum_{i} \mu_{i} v_{i} > 0$$
 则 $\delta n < 0$ \Longrightarrow 反应逆向进行

对于反应正向进行:
$$\sum_{i} \mu_{i} v_{i} = \sum_{i} (\varphi_{i} + \ln p_{i}) v_{i} < 0$$

$$K_p(T) > \prod_i p_i^{\nu_i}$$

对于反应逆向进行: $K_p(T) < \prod p_i^{\nu_i}$

考虑化学反应

$$\sum_{i} v_i A_i = 0$$

$$\sum_{i} v_{i} A_{i} = 0$$

$$\sum_{i} \mu_{i} v_{i} = 0$$

反应达到平衡

$$\sum_{i} \mu_{i} v_{i} < 0$$

反应正向进行

$$\sum_{i} \mu_{i} v_{i} > 0$$

反应反向进行

利用质量作用律,可以化为

$$\prod_{i} p_i^{v_i} = K_p(T)$$

反应达到平衡

$$\prod_{i} p_{i}^{v_{i}} < K_{p}(T)$$

反应正向进行

$$\prod_{i} p_i^{v_i} > K_p(T)$$

反应反向进行

以高炉中的下列反应为例

$$2 CO_2 - 2 CO - O_2 = 0$$

在T = 1600K下,测得分压为(以atm为单位)

$$p_{\text{CO}_2} = 1$$
, $p_{\text{CO}} = 1$, $p_{\text{O}_2} = 2$

已知在该温度下, $K_p(T) = 0.666$

因此

$$\frac{p_{\text{CO}_2}^2}{p_{\text{CO}}^2 p_{\text{O}_2}} = \frac{1^2}{1^2 \cdot 2} = 0.5 < K_p(T)$$

由此可知,反应正向进行。

若在相同温度下,测得各分压为

$$p_{\text{CO}_2} = 1$$
, $p_{\text{CO}} = 1$, $p_{\text{O}_2} = 1$

则有

$$\frac{p_{\text{CO}_2}^2}{p_{\text{CO}}^2 p_{\text{O}_2}} = \frac{1^2}{1^2 \cdot 1} = 1 > K_p(T)$$

由此可知,反应反向进行。

$$\ln K_p(T) = -\sum_i v_i \varphi_i(T)$$
 (4.7.3)

$$\varphi_{i} = \frac{h_{i0}}{RT} - \int \frac{dT}{RT^{2}} \int c_{pi} dT - \frac{s_{i0}}{R}$$
 (4.6.7)

可以求得平衡常量的热力学公式:

$$\ln K_{p} = -\frac{\sum_{i} v_{i} h_{i0}}{RT} + \frac{1}{R} \sum_{i} v_{i} \int \frac{dT}{T^{2}} \int c_{pi} dT + \frac{\sum_{i} v_{i} s_{i0}}{R}$$
(4.7.11)

如果热容量看成常量则
$$\varphi_{i} = \frac{h_{i0}}{RT} - \frac{c_{pi}}{R} \ln T + \frac{c_{pi} - s_{io}}{R} \quad (4.6.8)$$

$$\ln K_p = -\frac{A}{T} + C \ln T + B \quad (4.7.12)$$

三、应用举例

例1: 求化学反应:
$$H_2S + 2H_2O - 3H_2 - SO_2 = 0$$

化学平衡条件
$$\mu_{H_2S} + 2\mu_{H_2O} - 3\mu_{H_2} - \mu_{SO_2} = 0$$

平衡时,各组元的摩尔数 n_i 。已知初始条件为:

$$n_{H_2S}^0 = \frac{1}{2}mol$$
 $n_{H_2O}^0 = \frac{3}{4}mol$ $n_{H_2}^0 = 2mol$ $n_{SO_2}^0 = 1mol$

反应温度与压强为T=30°C,p=1atm。

解: 由
$$dn_i = v_i dn$$

可知:
$$\Delta n_i = n_i - n_i^0 = \nu_i \Delta n$$

$$\therefore n_i = n_i^0 + \nu_i \Delta n \qquad i = 1, 2, \dots, k$$

由上式得
$$n_{H_2S} = \frac{1}{2} + \Delta n$$
 $n_{H_2O} = \frac{3}{4} + 2\Delta n$

$$n_{H_2} = 2 - 3\Delta n \qquad n_{SO_2} = 1 - \Delta n$$

A.统

$$H_2S + 2H_2O - 3H_2 - SO_2 = 0$$

终态物质总量: $n = \sum_{i} n_i = 4.25 - \Delta n$

各物质的摩尔分数为:

$$x_{H_2S} = \frac{n_{H_2S}}{n} = \frac{0.5 + \Delta n}{4.25 - \Delta n} \qquad x_{H_2O} = \frac{n_{H_2O}}{n} = \frac{0.75 + 2\Delta n}{4.25 - \Delta n}$$

$$x_{H_2} = \frac{n_{H_2}}{n} = \frac{2 - 3\Delta n}{4.25 - \Delta n} \qquad x_{SO_2} = \frac{n_{SO_2}}{n} = \frac{1 - \Delta n}{4.25 - \Delta n}$$
由质量作用律:
$$p^{-v}K_p(T) = \prod_i x_i^{v_i} \qquad (v = -1)$$

$$pK_{p}(T) = \frac{(0.5 + \Delta n)(0.75 + 2\Delta n)^{2}(4.25 - \Delta n)}{(2 - 3\Delta n)^{3}(1 - \Delta n)}$$

若已知平衡常数 $K_p(T)$,则可算出 Δn 从而求出各物质的摩尔分数。

"平衡常量 K(T)"的测量方法:

给定各组元的摩尔数后, 改变外界条件使化学反应进行,

当达到平衡(化学反应停止)时, 迅速降温使气体冷却(液化)以保持各组元比例不变。

这样,通过测量各组元的摩尔数,就可得到K(T)。

例 2. 在等温等压条件下, N_2O_4 分解过程的分析。(分解过程中," $K_p(T)$ ""分解度 ε "的实验测量)

$$2 NO2 - N2O4 = 0$$

$$0 n0$$

那么,在恒温恒压条件下,设已分解的 N_2O_4 的摩尔数为:

$$\Delta n = n_0 \times \varepsilon$$

其中, ε 为"反应度",此种情况下称 "分解度"

$$\varepsilon = \frac{反应达到平衡时已分解的 N_2O_4 摩尔数初始时 N_2O_4 的摩尔数$$

这样,在一定的温度和压强下,分解过程停止时,

N₂O₄、NO₂的摩尔数分别为:

$$n_0(1-\varepsilon), \qquad 2n_0\varepsilon$$

• 二个组元的摩尔分数为:

$$x_{\text{NO}_2} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \qquad x_{\text{N}_2\text{O}_4} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

可得分解过程的"平衡常量"为:

热统

$$K_{p}(T) = \frac{4\varepsilon^{2}}{1 - \varepsilon^{2}} p \qquad 2 \operatorname{NO}_{2} - \operatorname{N}_{2} \operatorname{O}_{4} = 0$$

设: 在保持等温、等压的情况下,

混合气体分解前、后的质量密度分别为: ρ_0 , ρ_e

$$\rho = mn$$
, m : 每个分子质量

$$p = nkT$$
 n: 分子数密度(单位体积分子数)

很容易证明:
$$\varepsilon = \frac{\rho_0}{\rho_e} - 1$$

所以,对分解过程,可通过测量其始、末状态的质量密度,得到其"平衡常量"。

热统

例 3: 原子、电子、离子混合气体 化学平衡的分析,萨哈公式 (原子电离程度和T、p的关系分析)

在一定的温度、压强下,

原子的电离过程为: $A \rightarrow A^+ + e$

$$A \rightarrow A^+ + e$$

也为一种分解过程:

$$A^{+} + e - A = 0$$

分解前: n_0

分解后:

 $n_0 \varepsilon$ $n_0 \varepsilon$ $n_0 (1-\varepsilon)$

达到平衡

$$A^{+} + e - A = 0$$

平衡时,原子、离子、电子的摩尔分数:

$$x_A = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, x_{A^+} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, x_e = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

由质量作用律,可得:

$$\frac{x_{A^{+}} \cdot x_{e}}{x_{A}} = \frac{\varepsilon^{2}}{1 - \varepsilon^{2}} = p^{-1}K_{p}(T)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p}{K_p(T)}}}$$

$$A^{+} + e - A = 0$$

将上述混合气体(原子、离子和电子)看作单原子 理想气体,

有:
$$c_{pm} = \frac{5}{2}R$$

再有:
$$\ln K_p(T) = -\sum_i \nu_i \varphi_i(T)$$
 (4.7.3)

$$\varphi_i = \frac{h_{i0}}{RT} - \frac{c_{pm}}{R} \ln T + \frac{c_{pm} - s_{i0}}{R}$$
 (4.6.8)

可得:
$$\ln K_p(T) = -\frac{\Delta H_0}{RT} + \frac{5}{2} \ln T + 常量$$

... 原子电离的分解度为:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{1 + bpT^{-\frac{5}{2}}e^{\frac{\Delta H_0}{RT}}}}$$
萨哈公式

其中, $\triangle H_0$ 是摩尔电离能,b是常数。

萨哈公式在恒星大气物理中有重要的应用

 $\varepsilon = \frac{反应达到平衡时已电离原子A的摩尔数}{初始时原子A的摩尔数}$

§ 4.8 热力学第三定律

问题: 光速

- 1. 温度有否可能降到0 K?
- 2. T=0 K时, S是否趋于一个有限的数值?

一、 能斯特定理

1、能氏定理表述:

1906年能斯特在研究低温下各种化学反应性质时,从大量实验中总结出如下结论:凝聚系的熵在等温过程中的改变随绝对温度趋于零,即:

$$\lim_{T \to 0} (\Delta S)_T = 0$$
 ——热三定律的一种表述

其中 $(\Delta S)_T$ 代表系统在等温过程中熵的改变,这个等温过程可以是某个参数(比如体积、压强、磁场等)改变引起的,也可以是相变或化学反应引起的。

1912年能斯特根据他的定理推出一个原理:不可能通过有限的步骤使一个物体冷却到绝对温度的零度——第三定律的标准表述。它是量子效应的宏观表现,必须用量子统计理论才能解释。

能斯特(Nernst)的生平简介



德国物理化学家,1864年6月25日 生于西普鲁士的布利森。 主要成就:

- 1889年,他提出溶解压假说,从热力学导出能斯特方程。
- ·同年,引入溶度积概念,解释沉淀反应。提出光化学的"原子链式反应"理论。
- · 1906年,热力学第三定律, 有效地解决了计算平衡常数问题 和许多工业生产难题。

1920年诺贝尔化学奖

化学反应亲和势(affinity of chemical reaction)

1922年,比利时热力学专家德唐德(De donder)首先引进了化学反应亲和势的概念。他定义化学亲和势A为:

$$A \stackrel{\text{def}}{=} -\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{T,p} = -\sum_{\mathbf{B}} \nu_{\mathbf{B}} \mu_{\mathbf{B}} \quad 与4.5.4类似$$

或 $A = -\Delta_r G_m$

 $dn_{\rm B} = v_{\rm B}d\xi$

A是状态函数,体系的强度性质。用A判断化学反应的方向具有"势"的性质,即:

A>0 反应正向进行

A<0 反应逆向进行

A=0 反应达平衡

2、 能氏定理的引出

在等温等压下,系统朝吉布斯函数减小即 $\Delta G < 0$ 的方向进行。

汤姆孙—伯特洛原理: 化学反应总是朝着放热即 $\Delta H < 0$ 的方向进行。

在低温下,经验得到两种判据等效,两种判据有何联系?

$$G$$
和 H 的关系 $G = H - TS$ 等温过程 $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$

 \triangle S有界, $T\rightarrow 0$ 时 $\triangle G = \triangle H$,但不能 说明在一个温度范围内近似相等

$$\frac{\Delta H - \Delta G}{T} = \Delta S$$

$$\frac{\Delta H - \Delta G}{T} = \Delta S \qquad T \to 0, \quad \frac{0}{0}$$
不定式

应用洛必达法则
方程两边对
$$T$$
求导
$$\left(\frac{\partial \Delta H}{\partial T} \right)_0 - \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial T} \right)_0 = \lim_{T \to 0} \Delta S$$

假设
$$\lim_{T\to 0} (\Delta S)_T = 0$$

则
$$\left(\frac{\partial \Delta H}{\partial T} \right)_0 = \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial T} \right)_0$$

热统

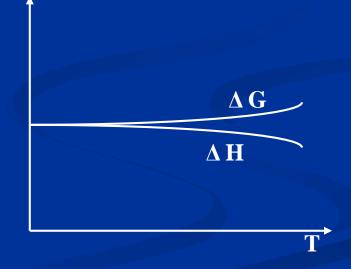
等温等压
$$dG = -SdT + Vdp$$

$$\left(\frac{\partial \Delta H}{\partial T}\right)_0 - \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial T}\right)_0 = \lim_{T \to 0} \Delta S$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial T}\right)_0 = -\lim_{T \to 0} (\Delta S)_T = 0 \qquad \Rightarrow \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial T}\right)_0 = \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial T}\right)_0 = 0$$

 ΔG , ΔH 随T的变化曲线, 在 $T \rightarrow 0$ 处相等相切且公切线与T 轴平行。 在假设下低温范围内 ΔG , ΔH 近似相等, 即两种判 据等效,因此从经验上要求假 设成立,即:

$$\lim_{T \to 0} (\Delta S)_T = 0$$



在等温等容过程,系统朝自由能函数减小即 $\Delta F < 0$ 的方向进行。

汤姆孙—伯特洛原理: 化学反应总是朝着放热即 $\Delta U < 0$ 的方向进行。

同样的推导过程: F和U的关系 $\Delta F = \Delta U - T \Delta S$

$$\frac{\Delta U - \Delta F}{T} = \Delta S \qquad \qquad \left(\frac{\partial \Delta U}{\partial T}\right)_0 - \left(\frac{\partial \Delta F}{\partial T}\right)_0 = \lim_{T \to 0} \Delta S$$
假设 $\lim_{T \to 0} \Delta S = 0 \qquad \qquad \left(\frac{\partial \Delta U}{\partial T}\right)_0 = \left(\frac{\partial \Delta F}{\partial T}\right)_0$
由于 $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \qquad \Longrightarrow \left(\frac{\partial \Delta F}{\partial T}\right)_0 = -\lim_{T \to 0} (\Delta S)_T = 0$

$$\qquad \qquad \left(\frac{\partial \Delta U}{\partial T}\right)_0 = \left(\frac{\partial \Delta F}{\partial T}\right)_0 = 0 \qquad dF = -SdT - pdV$$

两种判据等效,因此从经验上要求假设成立,即: $\lim_{T\to 0} (\Delta S)_T = 0$

推广到任意等温过程,得到能氏定理:它是从实验研究中总结出来的!

能氏定理
$$\lim_{T\to 0} (\Delta S)_{T} = 0$$
 (4.8.1)

其中 $(\Delta S)_T$ 代表系统在等温过程中熵的改变,这个等温过程可以是某个参数(比如体积、压强、磁场等)改变引起的,也可以是相变或化学反应引起的。

能氏定理
$$\lim_{T\to 0} (\Delta S)_{T} = 0$$
 (4.8.1)

以T,y为状态参量,上式也可以写为

$$S(T \to 0, y_B) = S(T \to 0, y_A)$$
 (4.8.9)

即 $T \rightarrow 0$ 时物质系统熵的数值与状态参量 y 的数值无关。

类比 C_v 和 C_v ,状态参量 y 不变时的热容可以表示为

$$C_y = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_y = \left(\frac{\partial S}{\partial \ln T} \right)_y$$
 (4.8.10)

即 $T \rightarrow 0$ 时 $\ln T \rightarrow -\infty$,而S 是有限的,所以

$$\lim_{T \to 0} C_y = 0 \quad (4.8.11)$$

能氏定理的推论: $T \rightarrow 0$ 时物质系统的热容趋于零。

根据能氏定理 $T \rightarrow 0$ 时系统的熵与体积和压强无关 当体积发生微小改变时

3、能氏定理的应用

$$(\Delta S)_T \approx \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \Delta V = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta V$$

① 、p-V-T系统

当
$$T \to 0$$
 K 时,系数 $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ 和 $\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$ 的行为。

 $\lim_{T\to 0} \Delta S = 0$

$$\lim_{T \to 0K} \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = 0 \qquad \qquad \lim_{T \to 0K} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = 0$$

$$\lim_{T \to 0K} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = 0$$

麦氏关系
$$(\partial S/\partial P)_T = -(\partial V/\partial T)_p$$
 $(\partial S/\partial V)_T = (\partial P/\partial T)_V$

$$\lim_{T \to 0K} \alpha = \lim_{T \to 0K} \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p} = \lim_{T \to 0K} -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_{T} = 0 \qquad C_{p} - C_{V} = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p}$$

$$\lim_{T \to 0K} \beta = \lim_{T \to 0K} \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V} = \lim_{T \to 0K} \frac{1}{p} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{T} = 0 \qquad \lim_{T \to 0} C_{p} = \lim_{T \to 0} C_{V}$$

该结论在铜、铝、银和其他一些固体的低温试验中得到证实!

$$S(0, y_B) = S(0, y_A)$$
 (4.8.9)

将(4.8.9)中不同的 y 理解为物质不同的相,意味着 $T \rightarrow 0$ 时 两相的熵相等。因为一级相变两相体积有突变,根据

克拉珀龙方程:
$$\frac{dp}{dT} = \frac{S_2 - S_1}{V_2 - V_1}$$
 (4.8.13)

 $T \to 0$ 时一级相变的平衡曲线斜率为零。

将(4.8.9)中不同的 y 理解为物质在化学反应前后的反应物和生成物,对于化学反应

$$Pb+S\rightarrow PbS$$

(4.8.9) 式意味着
$$S_{Pb}(0)+S_{S}(0)=S_{PbS}(0)$$
 (4.8.14)

$$S(0, y_B) = S(0, y_A)$$
 (4.8.9)

热力学温度趋于零时,同一物质处在热力学平衡的一切形态 具有相同的熵,是一个绝对量,可以把这个绝对量取作零, 用 S_0 表示,则

$$\lim_{T \to 0} S_0 = 0 \tag{4.8.15}$$

这是热力学第三定律的又一种表述。

②、
$$\Leftrightarrow S = S(T, y)$$
 热容量 $C_y = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_y = \left(\frac{\partial S}{\partial \ln T}\right)_y$

S有限,T o 0时, $\ln T o -\infty$ 所以:T o 0时, $C_{
m v} o 0$

与在低温下测量物体的热容量随温度减低而减小的实验结果相符!

二、绝对熵
$$dS = \frac{dQ}{T}, \quad (1.14.4), \qquad C = \frac{dQ}{dT}, \quad (1.6.1)$$

$$S(T, y) = S_0 + \int_{T_0}^T \frac{C_y}{T} dT$$
 $S_0 \equiv S(T_0, y)$ 是y的函数

据:
$$T \rightarrow 0$$
时, $C_y \rightarrow 0$ $S(T, y) = S_0 + \int_0^T \frac{C_y}{T} dT$ $S_0 \equiv S(0, y)$

$$S(T, y) = S_0 + \int_0^T \frac{C_y}{T} dT$$

考虑一等温过程的熵变

$$(\Delta S)_{T} = S_{0}'' - S_{0}' + \int_{0}^{T} (C_{y''} - C_{y'}) \frac{dT_{y}}{T}$$

$$\diamondsuit: T \longrightarrow \mathbf{0} \qquad \lim_{T \to 0} \left(\Delta S \right)_T = S_0'' - S_0' = 0$$

$$S_0''(0, y_1) = S_0'(0, y_2)$$

可见: $S_0 \equiv S(0, y)$ 是一个与状态变量 y 无关的绝对常量,选取 $S_0 = 0$

$$S(T,y) = \int_0^T \frac{C_y(T)}{T} dT \qquad -$$
绝对熵
$$S(T,p) = \int_0^T \frac{C_p(T)}{T} dT$$

$$\lim_{T\to 0} S_0 = 0$$
 系统的熵随温度趋于绝度零度而趋于零 ——热三定律的另一表述

三、能氏定理在亚稳态中的应用

硫: 常压下相变温度 $T_0=367$ K,单斜晶($T>T_0$)是稳定的,正交晶($T<T_0$)是稳定的,如果在 T_0 以上将单斜晶硫迅速冷却至 T_0 以下,样品将被冻结在单斜晶,此时处于亚稳态,则:

$$S^{m}(T_{0}) = S^{m}(0) + \int_{0}^{T_{0}} \frac{C_{p}^{m}}{T} dT$$

$$S^{r}(T_{0}) = S^{r}(0) + \int_{0}^{T_{0}} \frac{C_{p}^{r}}{T} dT$$

$$S^{m}(T_{0}) - S^{r}(T_{0}) = \frac{L}{T_{0}}$$

 $S^{m}(T_{0}) = S^{r}(0) + \int_{0}^{T_{0}} \frac{C_{p}^{r}}{T} dT + \frac{L}{T_{0}}$

m单斜晶,r正交晶, L表示两晶态的相变潜热

实验测得

$$S^{m}(T_{0}) - S^{m}(0) = 37.82 \pm 0.40 kJ \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$$
$$S^{m}(T_{0}) - S^{r}(0) = 37.95 \pm 0.20 kJ \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$$

误差范围内, 两者相等!



$$S^{m}(0) = S^{r}(0)$$
 表明能氏定理在亚稳态中也适用!

作



4.1; 4.2; 4.7; 4.8; 4.9; 4.11