



理论力学

Engineering mechanics
Theoretical mechanics

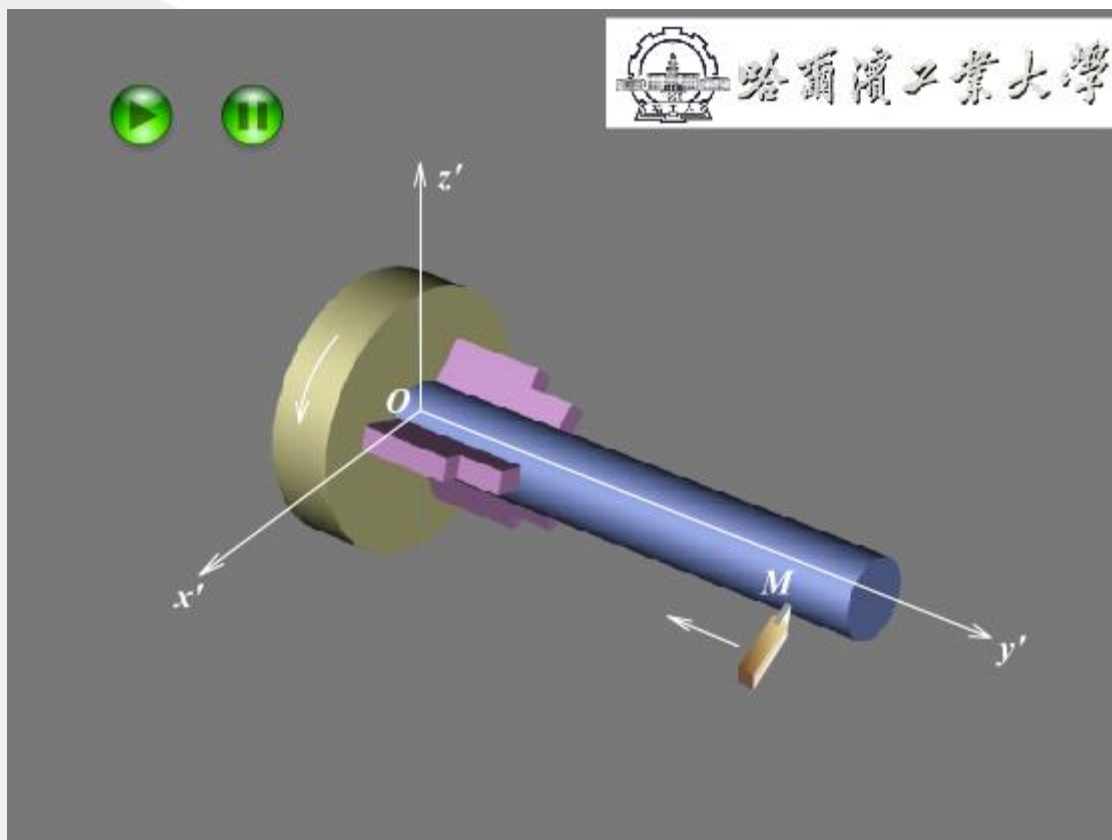


运动学

第七章 点的合成运动



哈尔滨工业大学



车刀刀尖的运动

相对某一参考体的运动可由相对于其他参考体的几个运动组合而成——**合成运动**。



§ 7-1 相对运动 · 牵连运动 · 绝对运动

两个坐标系

定坐标系（定系）

动坐标系（动系）

牵连点：动参考系上与动点相重合的点

三种运动

绝对运动：动点相对于定系的运动

相对运动：动点相对于动系的运动

牵连运动：动系相对于定系的运动

实例：回转仪的运动分析

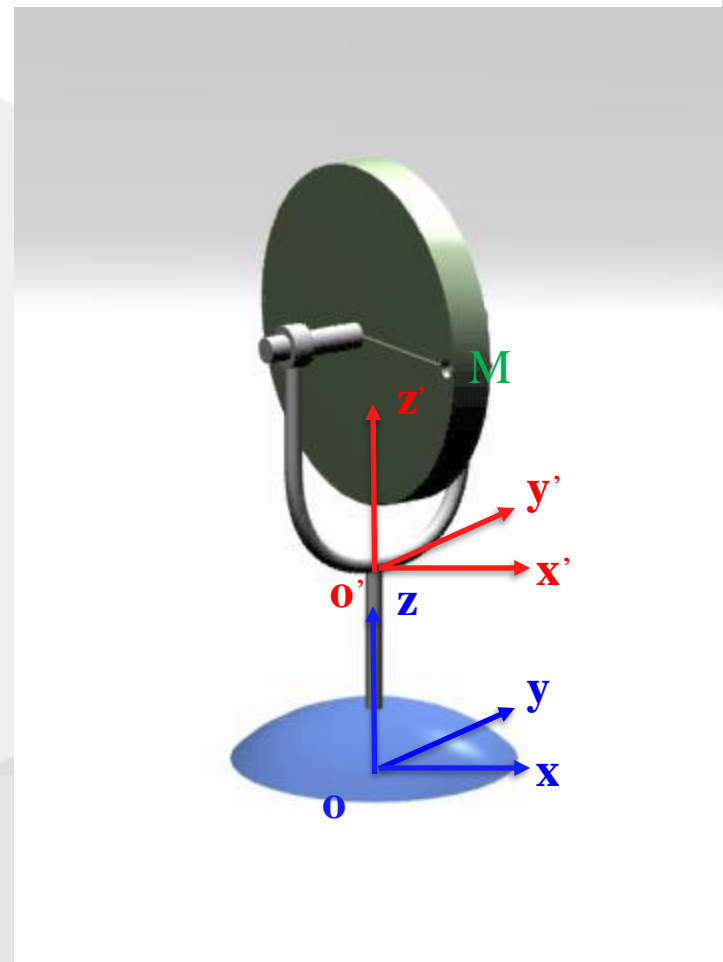
动点： **M 点** 动系：**框架**

相对运动：**圆周运动**

牵连运动：**定轴转动**

绝对运动：**空间曲线运动**

牵连点：**动系上与动点重合位置处的点**





相对轨迹

相对速度 \mathbf{v}_r

相对加速度 \mathbf{a}_r

绝对轨迹

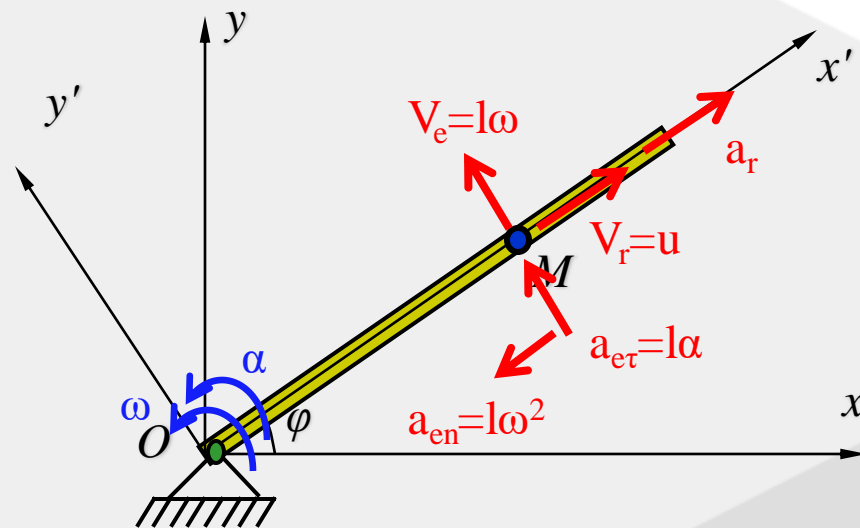
绝对速度 \mathbf{v}_a

绝对加速度 \mathbf{a}_a

在动参考系上与动点相重合的那一点（牵连点）的速度和加速度称为动点的牵连速度和牵连加速度。

牵连速度 \mathbf{v}_e 和牵连加速度 \mathbf{a}_e

**练习：已知 ω, α 小球的相对速度 u , $OM=l$ 。
求：牵连速度和牵连加速度**



$$a_e = l\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

a_e 与转动半径 OM 之间夹角

$$\theta = \arctan \frac{\alpha}{\omega^2}$$

绝对、相对和牵连运动之间的关系

动点: M 动系: $O'x'y'$

M点的绝对运动运动方程

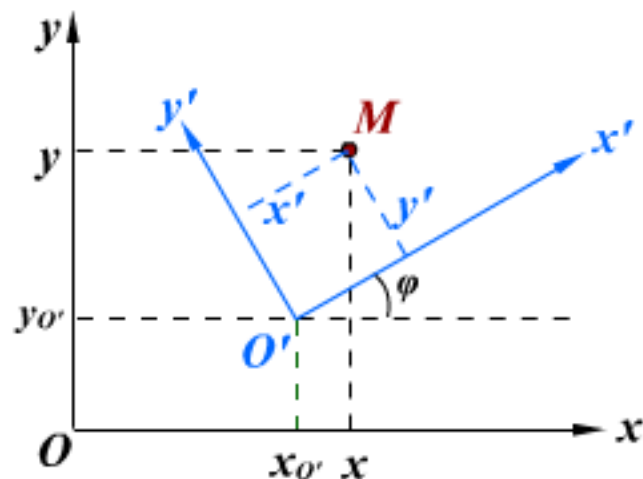
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

M点的相对运动运动方程

$$\begin{cases} x' = x'(t) \\ y' = y'(t) \end{cases}$$

牵连运动运动方程

$$\begin{cases} x_{O'} = x_{O'}(t) \\ y_{O'} = y_{O'}(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$



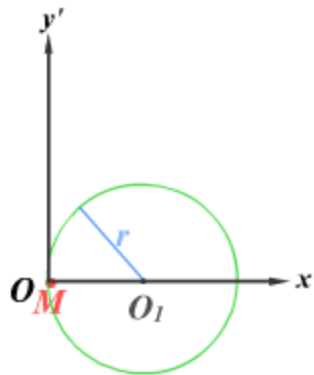
由坐标变换关系有

$$\begin{cases} x = x_{O'} + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = y_{O'} + x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases}$$

例7-1

已知：点 M 相对于动系 Ox' 沿半径为 r 的圆周以速度 v 作匀速圆周运动(圆心为 O_1)，动系 Ox' 相对于定系 O 以匀角速度 ω 绕点 O 作定轴转动，如图所示。初始时 Ox' 与 Ox 重合，点 M 与 O 重合。

求：点 M 的绝对运动方程。




解: 动点: M 点

动系: $Ox'y'$

相对运动方程

$$x' = OO_1 - O_1M \cos \psi$$

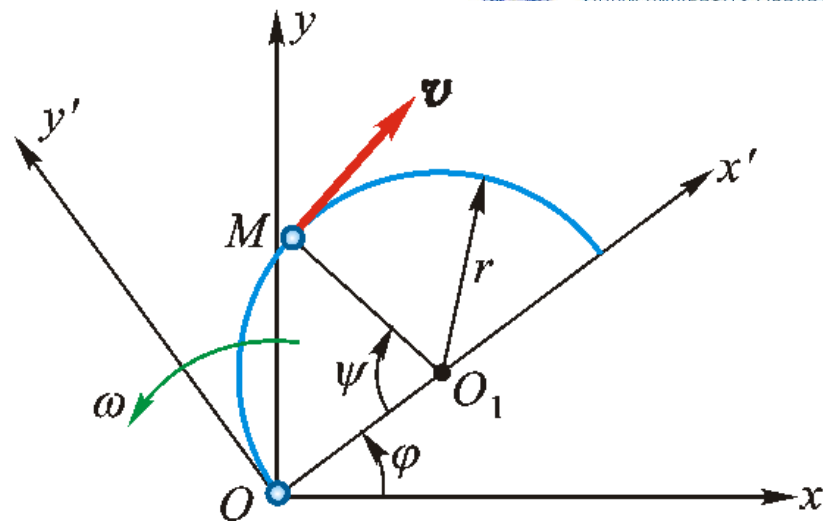
$$y' = O_1M \sin \psi$$

代入 $\psi = \frac{vt}{r}$ 

绝对运动方程

$$\begin{cases} x' = r \left(1 - \cos \frac{vt}{r} \right) \\ y' = r \sin \frac{vt}{r} \end{cases}$$

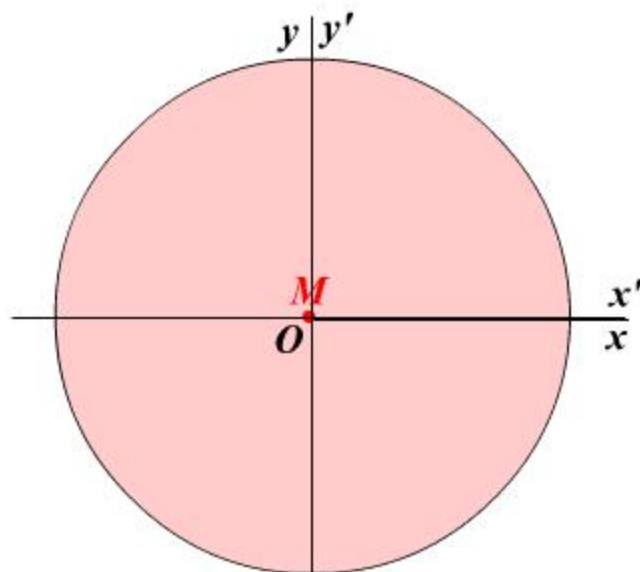
$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi = r \left(1 - \cos \frac{vt}{r} \right) \cos \omega t - r \sin \frac{vt}{r} \sin \omega t \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi = r \left(1 - \cos \frac{vt}{r} \right) \sin \omega t + r \sin \frac{vt}{r} \cos \omega t \end{cases}$$



例7-2

已知：用车刀切削工件的直径端面，车刀刀尖 M 沿水平轴 x 作往复运动，如图所示。设 O_{xy} 为定坐标系，刀尖的运动方程为 $x = b \sin(\omega t)$ 。工件以等角速度 ω 逆时针转向转动。

求：车刀在工件圆端面上切出的痕迹。



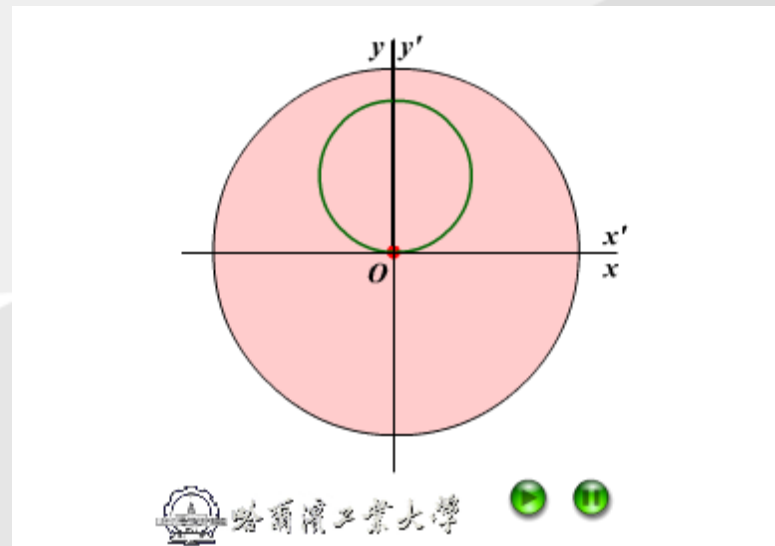
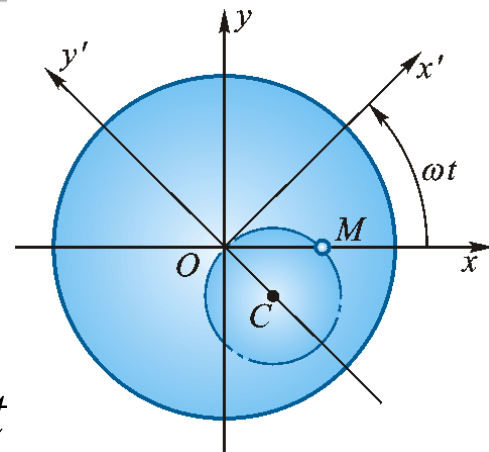
解： 动点： M 动系： 工件 ($Ox'y'$)
相对运动方程

$$x' = OM \cos \omega t = b \sin \omega t \cos \omega t = \frac{b}{2} \sin 2\omega t$$

$$y' = -OM \sin \omega t = -b \sin^2 \omega t = -\frac{b}{2} (1 - \cos 2\omega t)$$

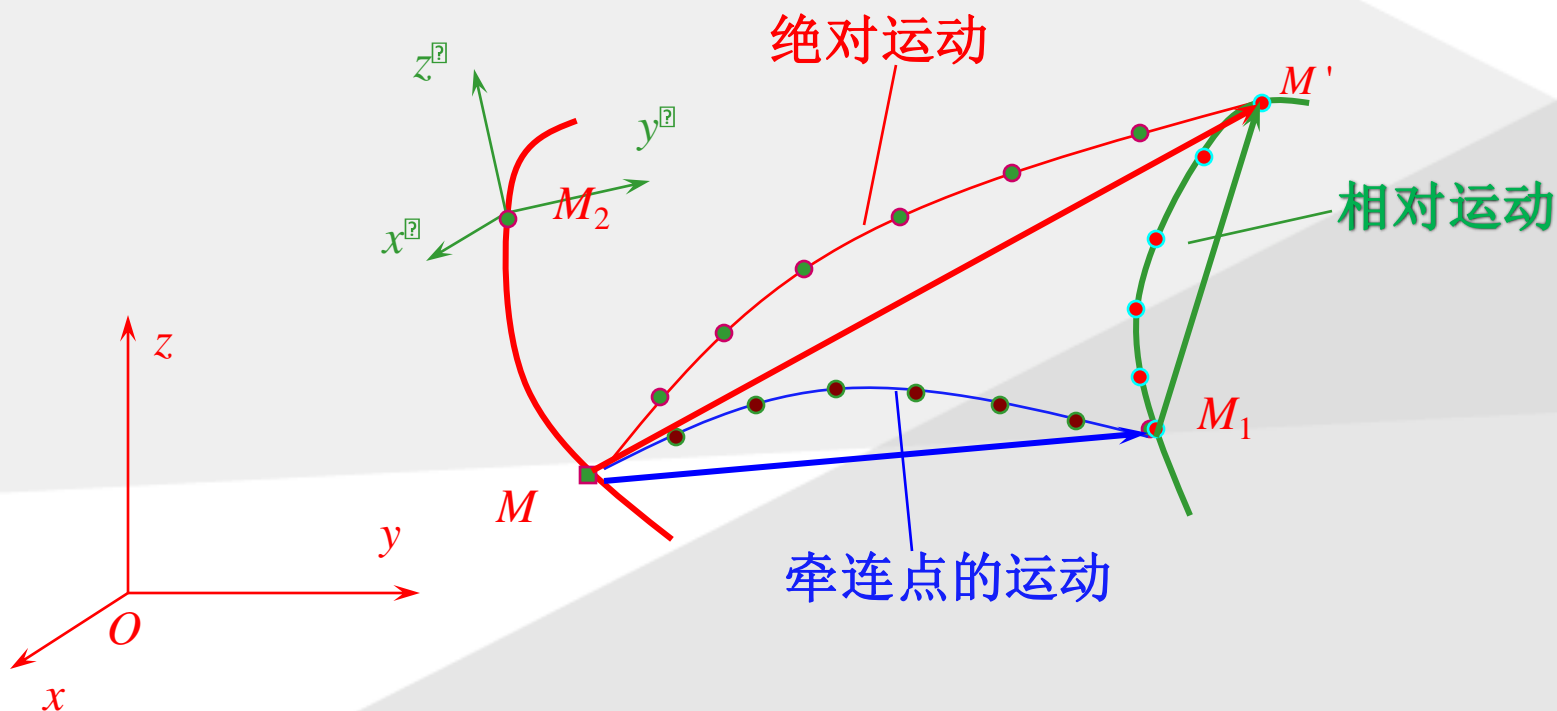
相对运动轨迹

$$x'^2 + \left(y' + \frac{b}{2} \right)^2 = \frac{b^2}{4}$$

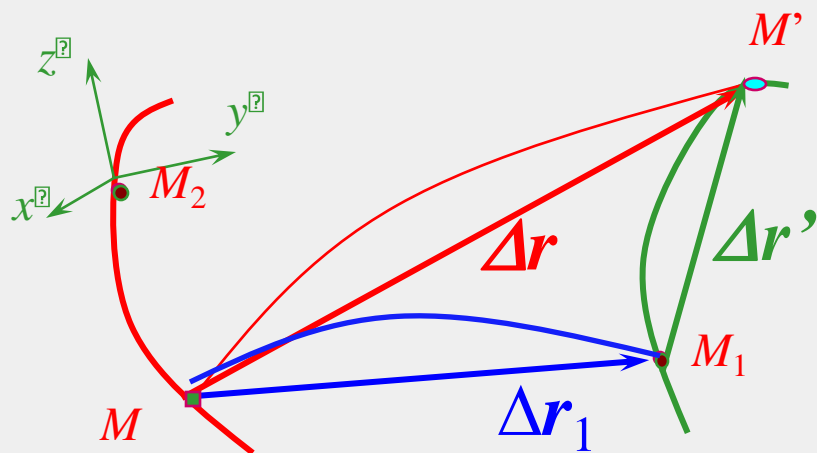


§ 7-2 点的速度合成定理

例：小圆环在移动金属丝上的运动



速度之间的关系



$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}' + \Delta \mathbf{r}_1$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}'}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_1}{\Delta t}$$

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e$$

动点在某瞬时的绝对速度等于它在该瞬时的牵连速度与相对速度的矢量和

速度合成定理的推导

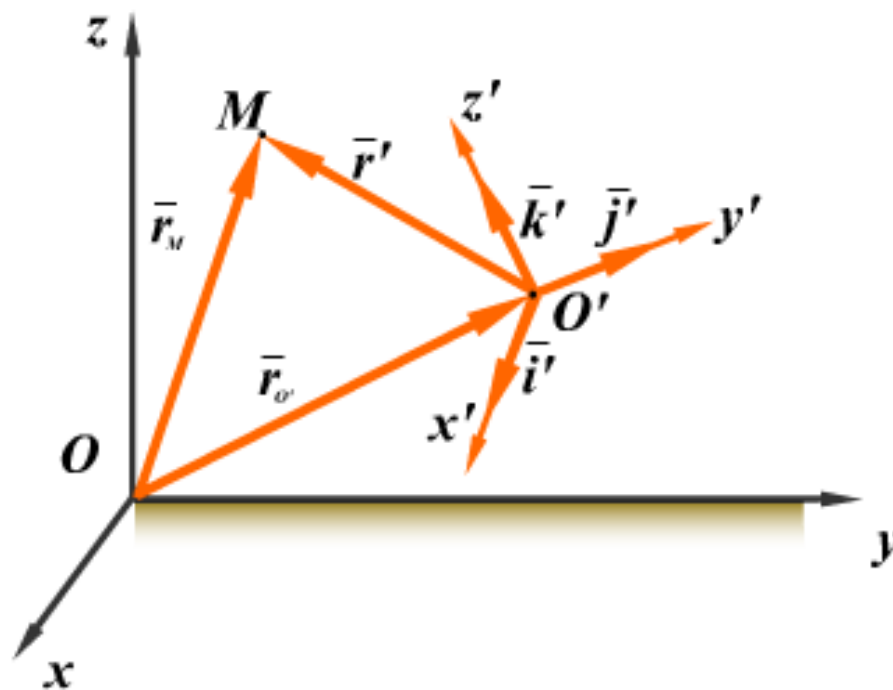
定系: $Oxyz$, 动系: $O'x'y'z'$, 动点: M

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'$$

$$\vec{r}' = x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}'$$

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{M'}$$

M 为牵连点

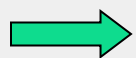


$$\mathbf{v}_r = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = x'\dot{\mathbf{i}}' + y'\dot{\mathbf{j}}' + z'\dot{\mathbf{k}}'$$

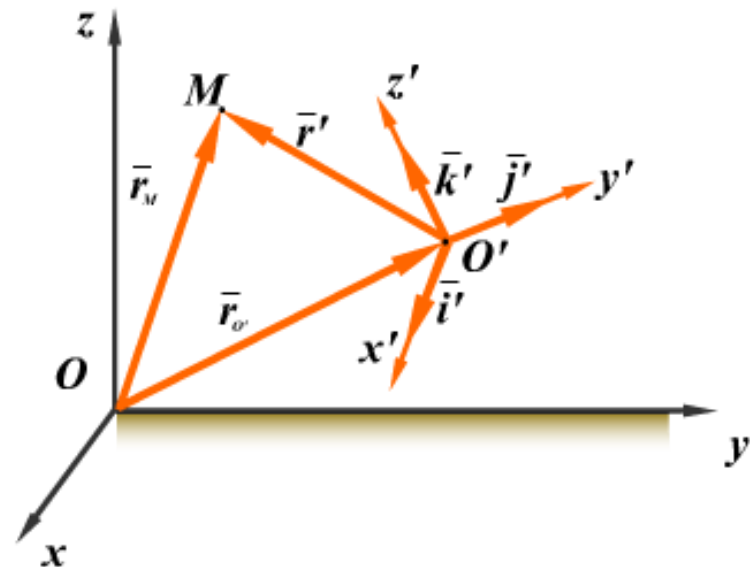
导数上加“~”表示相对导数。

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e &= \frac{d\mathbf{r}_{M'}}{dt} \\ &= \dot{\mathbf{r}}_{O'} + x'\dot{\mathbf{i}}' + y'\dot{\mathbf{j}}' + z'\dot{\mathbf{k}}' \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{r}_M}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_{O'} + x'\dot{\mathbf{i}}' + y'\dot{\mathbf{j}}' + z'\dot{\mathbf{k}}' + x\dot{\mathbf{i}} + y\dot{\mathbf{j}} + z\dot{\mathbf{k}}$$



$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$$

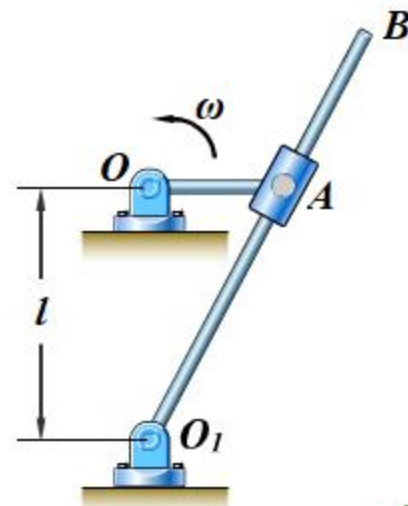


动点在某瞬时的绝对速度等于它在该瞬时的牵连速度与相对速度的矢量和——**点的速度合成定理**

例7-3

已知：刨床的急回机构如图所示。曲柄 OA 的一端 A 与滑块用铰链连接。当曲柄 OA 以匀角速度 ω 绕固定轴 O 转动时，滑块在摇杆 O_1B 上滑动，并带动杆 O_1B 绕定轴 O_1 摆动。设曲柄长为 $OA=r$ ，两轴间距离 $OO_1=l$ 。

求：曲柄在水平位置时摇杆的角速度 ω_1 。



解：1. 动点：滑块 A

动系：摇杆 O_1B

2. 运动分析：

绝对运动—绕 O 点的圆周运动；

相对运动—沿 O_1B 的直线运动；

牵连运动—绕 O_1 轴定轴转动。

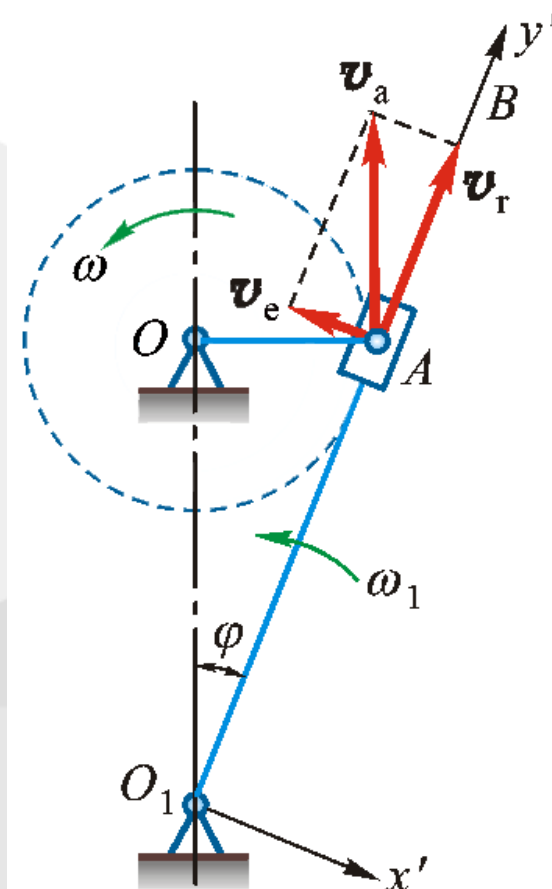
$$3. \quad \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

大小 $r\omega$? ?

方向 \checkmark \checkmark \checkmark

$$v_e = v_a \sin \varphi = \omega r \sin \varphi$$

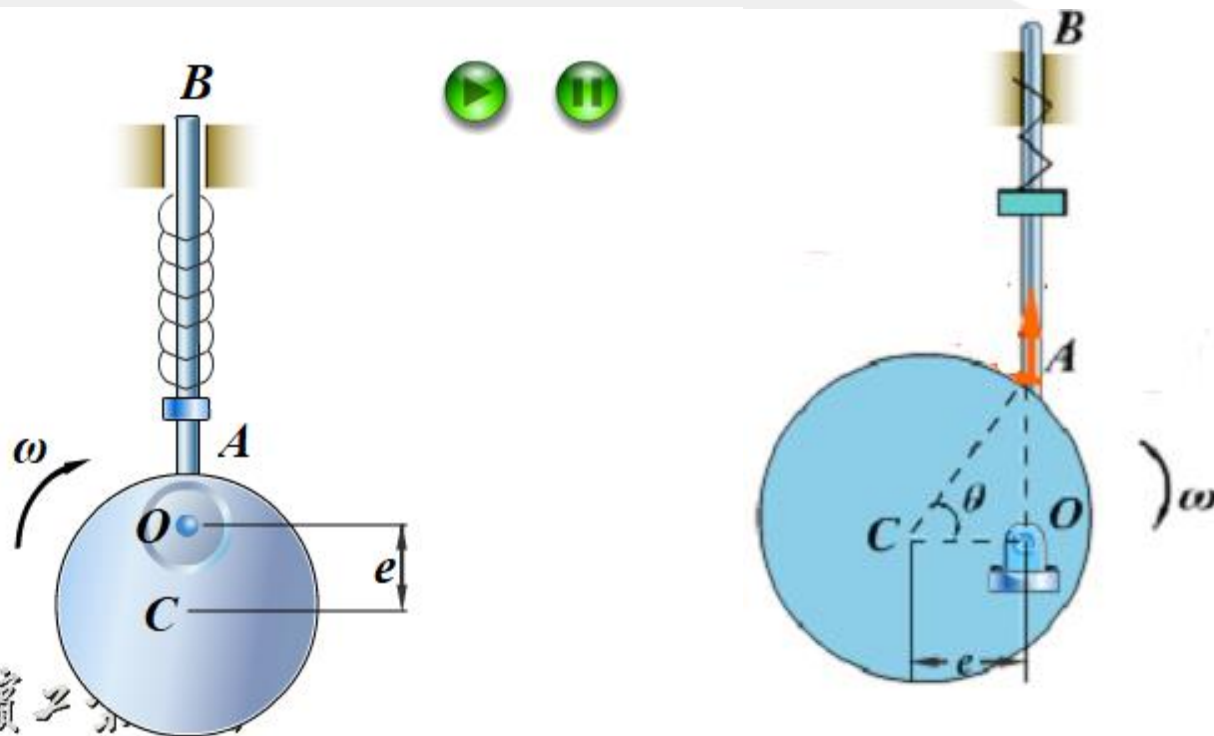
$$\omega_1 = \frac{v_e}{O_1A} = \frac{r^2 \omega}{l^2 + r^2}$$



例7-4

已知：如图所示半径为 R 、偏心距为 e 的凸轮，以角速度 ω 绕 O 轴转动，杆 AB 能在滑槽中上下平移，杆的端点 A 始终与凸轮接触，且 OAB 成一直线。

求：在图示位置时，杆 AB 的速度。



解： 1. 动点： AB杆上A； 动系： 凸轮

2. 绝对运动： 直线运动（AB）

相对运动： 圆周运动（半径R）

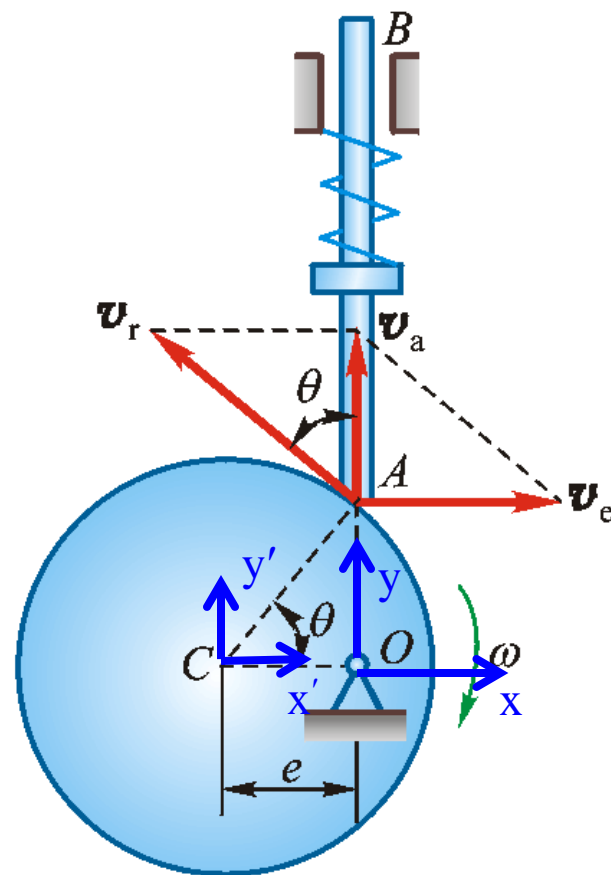
牵连运动： 定轴运动（轴O）

$$3. \quad \frac{1}{v_a} = \frac{1}{v_e} + \frac{1}{v_r}$$

大小 ? $\omega \cdot OA$?

方向 \checkmark \checkmark \checkmark

$$v_a = v_e \cot \theta = \omega \cdot OA \cdot \frac{e}{OA} = \omega e$$



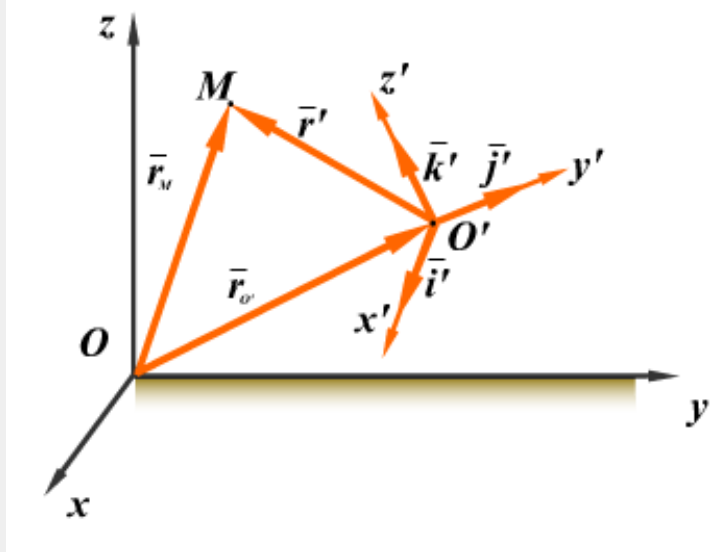
§ 7-3 牵连运动是平移时点的加速度合成定理

设动系作平移，由于 x' 、 y' 、 z' 各轴方向不变，故有

$$\frac{d\bar{i}'}{dt} = \frac{d\bar{j}'}{dt} = \frac{d\bar{k}'}{dt} = 0$$

$$\bar{a}_r = \frac{d\bar{v}_r}{dt} = \frac{d\bar{v}_r}{dt}$$

$$\frac{d\bar{v}_e}{dt} = \frac{d\bar{v}_{O'}}{dt} = \bar{a}_{O'} = \bar{a}_e$$



从而有

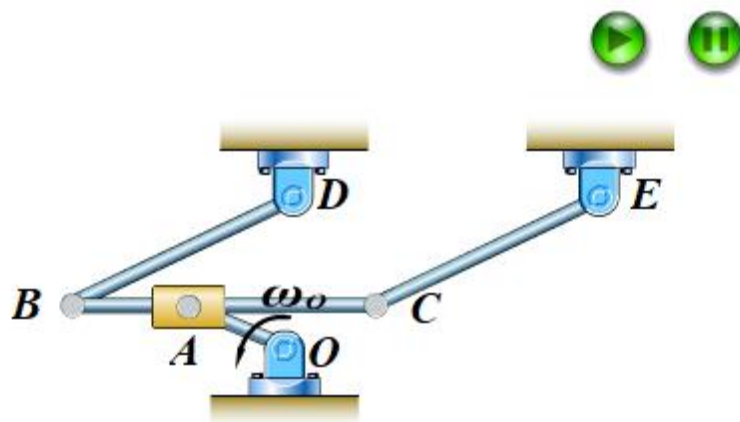
$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_a}{dt} = \frac{d\bar{v}_e}{dt} + \frac{d\bar{v}_r}{dt} = \bar{a}_e + \bar{a}_r$$

当牵连运动为平移时，动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬时它的牵连加速度与相对加速度的矢量和

例7-5

已知：如图所示平面机构中，曲柄 $OA=r$ ，以匀角速度 ω_0 转动。套筒A沿BC杆滑动。 $BC=DE$ ，且 $BD=CE=l$ 。

求：图示位置时，杆BD的角速度和角加速度。



解： 1. 动点：滑块A 动系：BC杆

绝对运动：圆周运动（O点）

相对运动：直线运动（BC）

牵连运动：平移

2. 速度

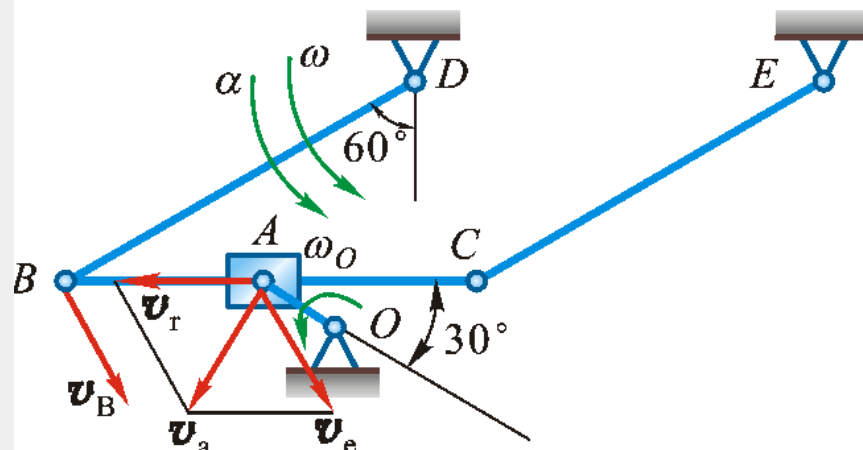
$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

大小 $r\omega_O$? ?

方向 \checkmark \checkmark \checkmark

$$v_r = v_e = v_a = r\omega_O$$

$$\omega_{BD} = \frac{v_e}{BD} = \frac{r\omega_O}{l}$$

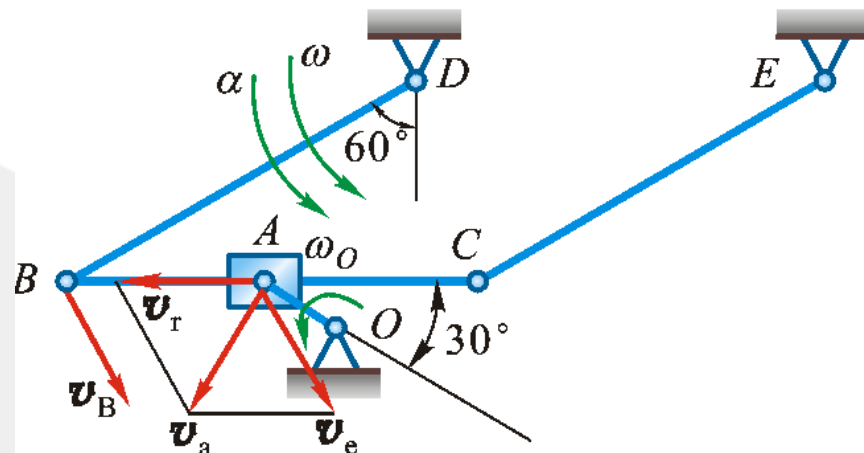


3. 加速度

$$\underline{a_a} = \underline{a_e^t} + \underline{a_e^n} + \underline{a_r}$$

大小 $r\omega_o^2$? $l\omega_{BD}^2$?

方向 \checkmark \checkmark \checkmark \checkmark

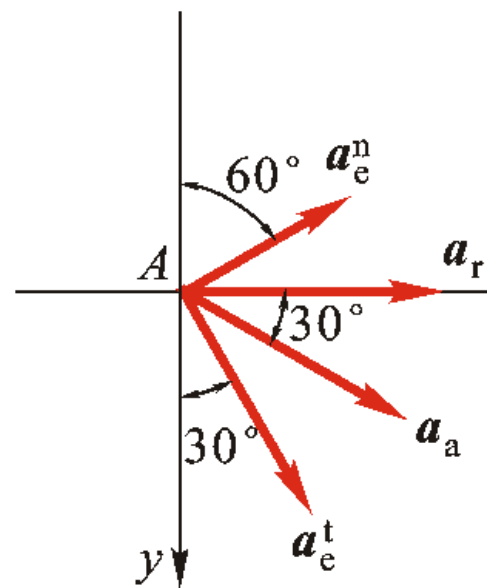


沿 y 轴投影

$$a_a \sin 30^\circ = a_e^t \cos 30^\circ - a_e^n \sin 30^\circ$$

$$a_e^t = \frac{(a_a + a_e^n) \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}\omega_o^2 r(l+r)}{3l}$$

$$\alpha_{BD} = \frac{a_e^t}{BD} = \frac{\sqrt{3}\omega_o^2 r(l+r)}{3l^2}$$



§ 7-4 牵连运动是定轴转动时点的加速度合成定理

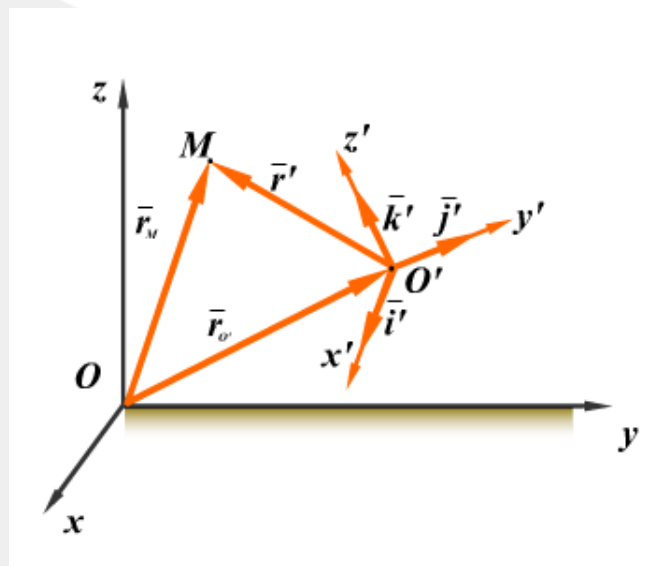
设动系作定轴转动，转轴通过点 O' ，其角速度矢量为 ω

$$\frac{d\bar{i}'}{dt} = \omega_e \times \bar{i}', \quad \frac{d\bar{j}'}{dt} = \omega_e \times \bar{j}'$$

$$\frac{d\bar{k}'}{dt} = \omega_e \times \bar{k}'$$

从而有

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}'}{dt} &= \frac{dx'}{dt} \bar{i}' + \frac{dy'}{dt} \bar{j}' + \frac{dz'}{dt} \bar{k}' + x' \frac{d\bar{i}'}{dt} + y' \frac{d\bar{j}'}{dt} + z' \frac{d\bar{k}'}{dt} \\ &= \frac{d\bar{r}'}{dt} + \omega_e \times (x' \bar{i}' + y' \bar{j}' + z' \bar{k}') = \frac{d\bar{r}'}{dt} + \omega_e \times \bar{r}' \end{aligned}$$



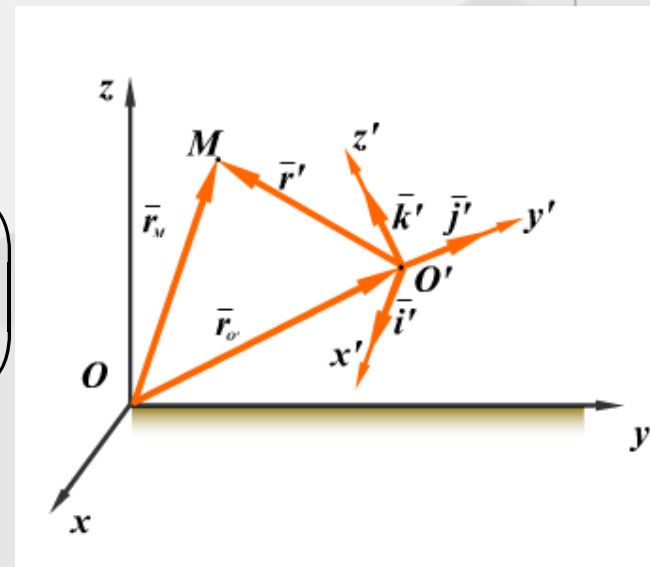
同理

$$\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r$$

代入 $\frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} = 0$ $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}'$

令 $\mathbf{a}_r = \frac{d\mathbf{v}_r}{dt}$ $\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt}$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_a &= \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_e}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}_e \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \\ &= \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}_e \times \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}' \right) \\ &= \mathbf{a}_r + \left[\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}_e \times (\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{r}') \right] + 2\boldsymbol{\omega}_e \times \mathbf{v}_r \end{aligned}$$

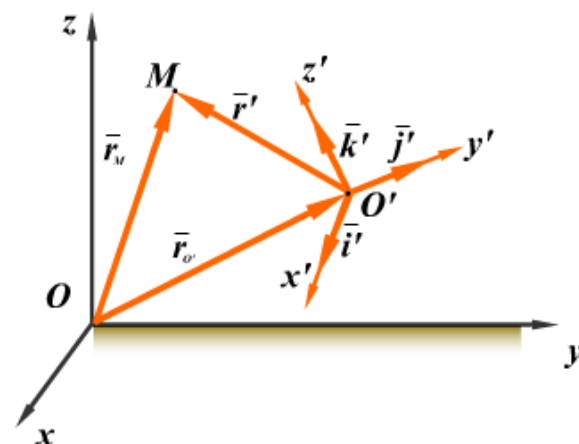


$$\mathbf{r} \mathbf{a}_e = \mathbf{r} \mathbf{a} \times \mathbf{r}' + \mathbf{r} \mathbf{\omega}_e \times (\mathbf{r} \mathbf{\omega}_e \times \mathbf{r}')$$

$$\mathbf{r} \mathbf{a}_C = 2 \mathbf{r} \mathbf{\omega}_e \times \mathbf{r} \mathbf{v}_r \quad \text{称为科氏加速度}$$



$$\mathbf{r} \mathbf{a}_a = \mathbf{r} \mathbf{a}_e + \mathbf{r} \mathbf{a}_r + \mathbf{r} \mathbf{a}_C$$

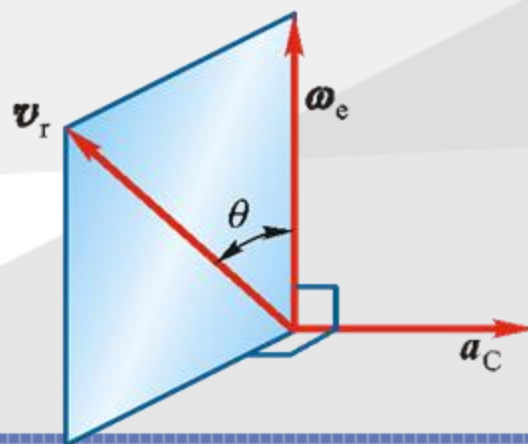


当动系作定轴转动时，动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬时它的牵连加速度、相对加速度与科氏加速度的矢量和

其中科氏加速度大小

$$a_C = 2\omega_e v_r \sin \theta$$

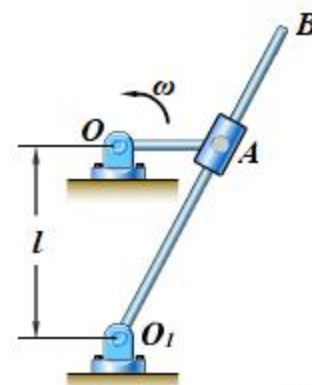
方向按右手法则确定



例7-6

已知：刨床的急回机构如图所示。曲柄 OA 的一端 A 与滑块用铰链连接。当曲柄 OA 以匀角速度 ω 绕固定轴 O 转动时，滑块在摇杆 O_1B 上滑动，并带动杆 O_1B 绕定轴 O_1 摆动。设曲柄长为 $OA=r$ ，两轴间距离 $OO_1=l$ 。

求：摇杆 O_1B 在如图所示位置时的角加速度。



解:

1. 动点: 滑块A 动系: O_1B 杆

绝对运动: 圆周运动

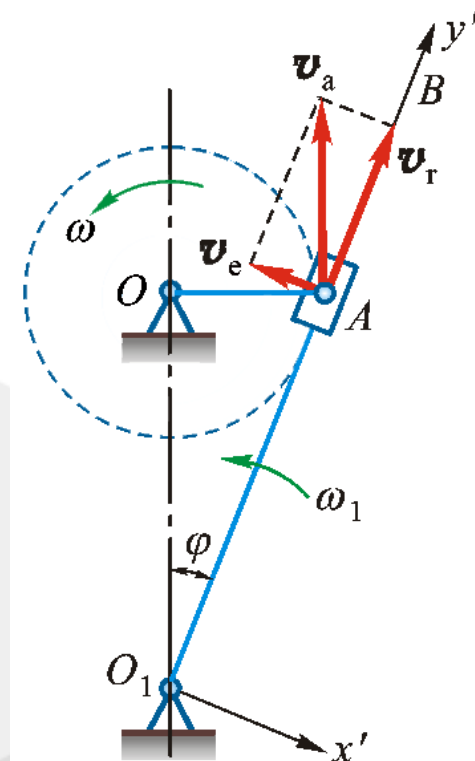
相对运动: 直线运动 (沿 O_1B)

牵连运动: 定轴转动 (绕 O_1 轴)

2. 速度 $\frac{1}{v_a} = \frac{1}{v_e} + \frac{1}{v_r}$

大小 $r\omega$? ?

方向 \checkmark \checkmark \checkmark



$$v_e = v_a \sin \varphi = \frac{r^2 \omega}{\sqrt{l^2 + r^2}}$$

$$v_r = v_a \cos \varphi = \frac{rl\omega}{\sqrt{l^2 + r^2}}$$

$$\omega_1 = \frac{v_e}{O_1A} = \frac{v_e}{\sqrt{l^2 + r^2}} = \frac{r^2 \omega}{l^2 + r^2}$$

3. 加速度

$$\overset{r}{a}_a = \overset{r}{a}_e^t + \overset{r}{a}_e^n + \overset{r}{a}_r + \overset{r}{a}_C$$

大小 $\omega^2 r$? $\omega_1^2 \cdot O_1 A$? $2\omega_1 v_r \sin 90^\circ$

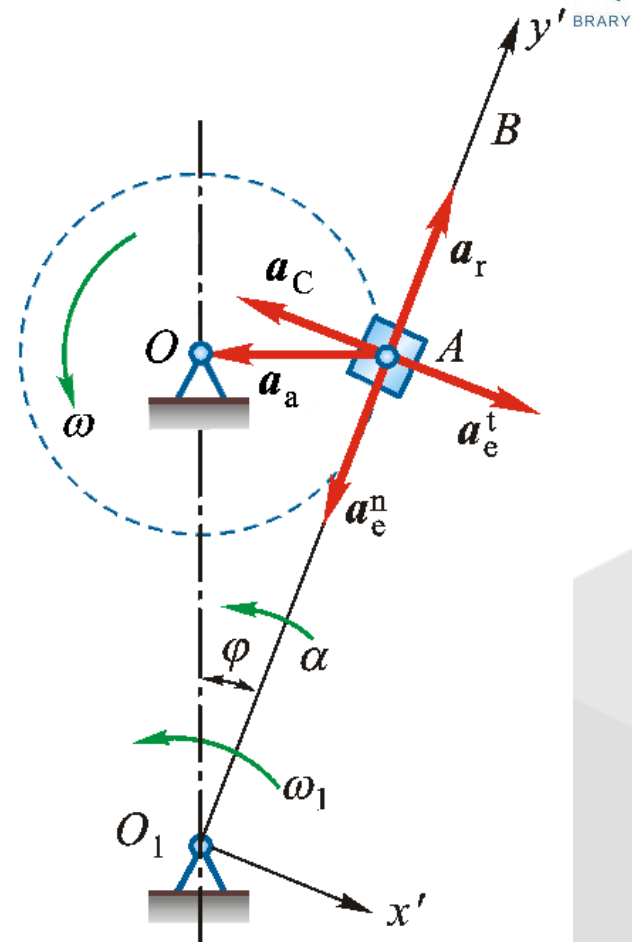
方向 \checkmark \checkmark \checkmark \checkmark \checkmark

沿加速度合成公式向 x' 轴投影

$$-a_{ax'}^n = a_e^t - a_C$$

$$a_e^t = -a_{ax'}^n + a_C = 2\omega_1 v_r - \omega^2 r \cos \varphi$$

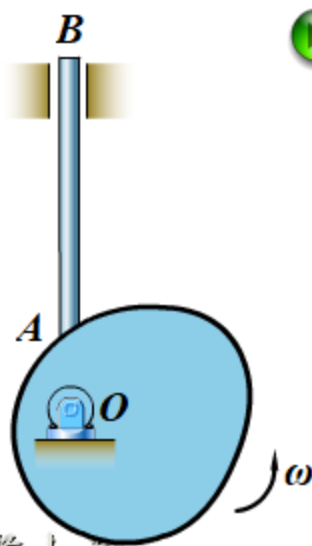
$$\alpha_1 = \frac{a_e^t}{O_1 A} = \frac{\omega^2}{\sqrt{l^2 + r^2}} \left(-\frac{rl(l^2 - r^2)}{(l^2 + r^2)^{3/2}} \right) = -\frac{rl(l^2 - r^2)}{(l^2 + r^2)^2} \omega^2$$



例7-7

已知：如图所示凸轮机构中，凸轮以匀角速度 ω 绕水平O轴转动，带动直杆AB沿铅直线上、下运动，且O，A，B共线。凸轮上与点A接触的为 A' ，图示瞬时凸轮上点 A' 曲率半径为 ρ_A ，点 A' 的法线与OA夹角为 θ ， $OA=l$ 。

求：该瞬时AB的速度及加速度。



解：1. 动点（AB杆上A点） 动系：凸轮O

绝对运动：直线运动（AB）

相对运动：曲线运动（凸轮外边缘）

牵连运动：定轴转动（O轴）

2. 速度 $\underline{v_a} = \underline{v_e} + \underline{v_r}$

大小 ? ωl ?

方向 \checkmark \checkmark \checkmark

$$v_a = v_e \tan \theta = \omega l \tan \theta \quad v_r = \frac{v_e}{\cos \theta} = \frac{\omega l}{\cos \theta}$$

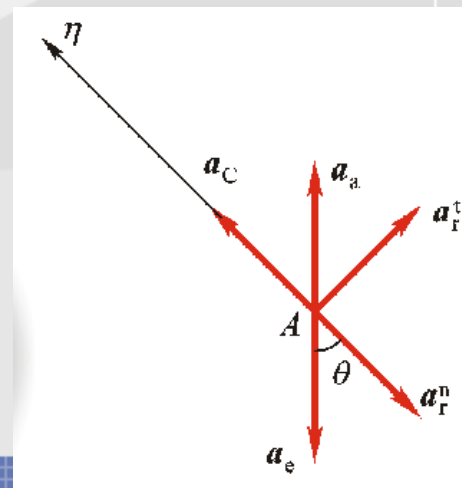
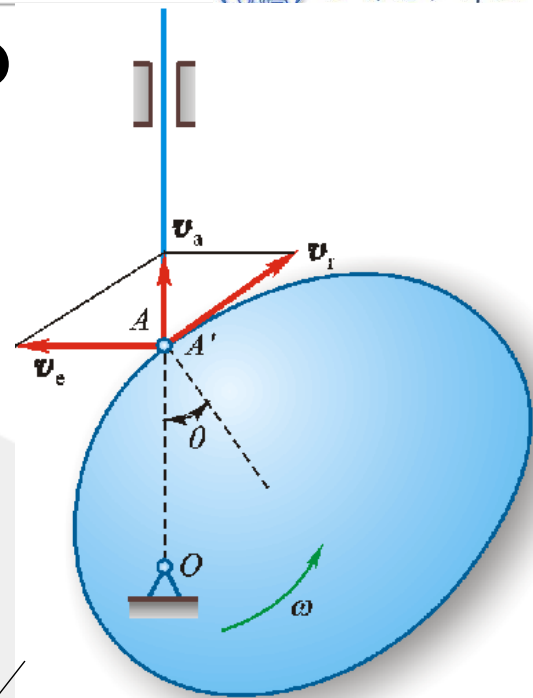
3. 加速度 $\underline{a_a} = \underline{a_e} + \underline{a_r^t} + \underline{a_r^n} + \underline{a_c}$

大小 ? $\omega^2 l$? v_r^2 / ρ_A $2\omega v_r$

方向 \checkmark \checkmark \checkmark \checkmark \checkmark

沿 η 轴投影 $a_a \cos \theta = -a_e \cos \theta - a_r^n + a_c$

$$a_a = -\omega^2 l \left(1 + \frac{l}{\rho_A \cos^3 \theta} - \frac{2}{\cos^2 \theta} \right)$$

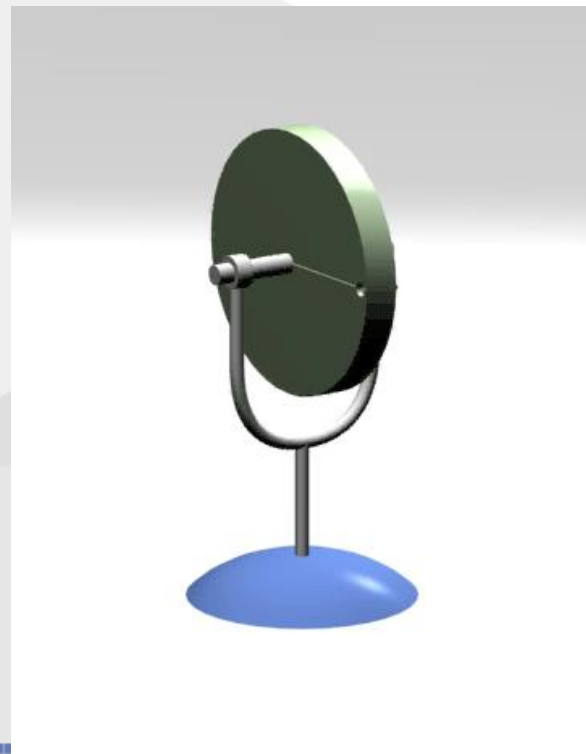


例7-8

已知：圆盘半径 $R=50\text{mm}$ ，以匀角速度 ω_1 绕水平轴 CD 转动。同时框架和 CD 轴一起以匀角速度 ω_2 绕通过圆盘中心 O 的铅直轴 AB 转动，如图所示。

如 $\omega_1=5\text{rad/s}$, $\omega_2=3\text{rad/s}$ 。

求：圆盘上1和2两点的绝对加速度。



解:

1. 动点: 圆盘上点1 (或2) 动系: 框架CAD

绝对运动: 未知

相对运动: 圆周运动 (O点)

牵连运动: 定轴转动 (AB轴)

2. 速度 (略)

3. 加速度

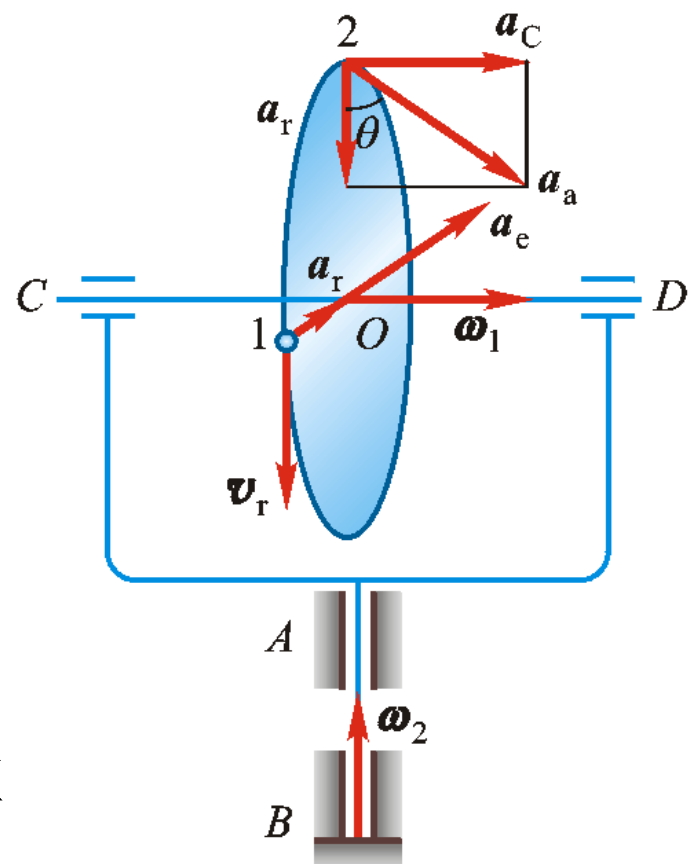
$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

$$\text{大小 ? } R\omega_2^2 \quad R\omega_1^2 \quad 2\omega_2 \times v_r$$

$$\text{方向 } \times \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark$$

点1的牵连加速度与相对加速度在同一直线上, 于是得

$$a_a = a_e + a_r = 1700 \text{ mm/s}^2$$



点 2 的牵连加速度 $a_e = 0$

相对加速度大小为

$$a_r = R\omega_1^2 = 1250\text{mm/s}^2$$

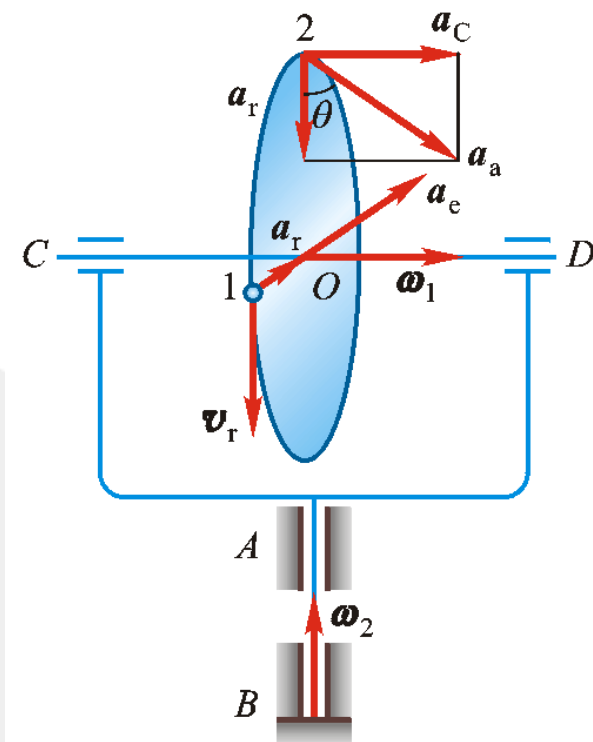
科氏加速度大小为

$$a_C = 2\omega_e v_r \sin 90^\circ = 1500\text{mm/s}^2$$

各方向如图，于是得

$$a_a = \sqrt{a_r^2 + a_C^2} = R\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = 1953\text{mm/s}^2$$

与铅垂方向夹角 $\theta = \arctan \frac{a_C}{a_r} = 50^\circ 12'$





第七章结束