洛仑兹变换是同一个事件在两个惯性系中的时空坐标之间的关系。

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-ut}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t-\left(u/c^2\right)x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

其逆变换为

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'+ut'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t'+\left(u/c^2\right)x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

空间测量与时间测量相互影响，相互制约

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Delta y' = \Delta y \quad \Delta z' = \Delta z \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - u\Delta x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + u\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Delta y = \Delta y' \quad \Delta z = \Delta z' \quad \Delta t = \frac{\Delta t' + u\Delta x'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\upsilon_x' = \frac{\upsilon_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x} \qquad \upsilon_y' = \frac{\upsilon_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x} \qquad \upsilon_z' = \frac{\upsilon_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x}$$

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon_x' + u}{1 + \frac{u}{c^2}\upsilon_x'} \qquad \upsilon_y = \frac{\upsilon_y'\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + \frac{u}{c^2}\upsilon_x'} \qquad \upsilon_z = \frac{\upsilon_z'\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + \frac{u}{c^2}\upsilon_x'}$$

§14.3 狭义相对论的时空观

一. 同时性的相对性

	S	S'
事件1	(x_1, y_1, z_1, t_1)	(x_1', y_1', z_1', t_1')
事件2	(x_2, y_2, z_2, t_2)	(x_2', y_2', z_2', t_2')

1. 两事件在S系同时同地发生 $\Delta t = 0 \quad \Delta x = 0$

$$\text{由}\ \Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t - \left(u/c^2\right)\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

S'系 $\Delta t' = 0 \quad \Delta x' = 0 \quad \rightarrow$ 同时同地发生

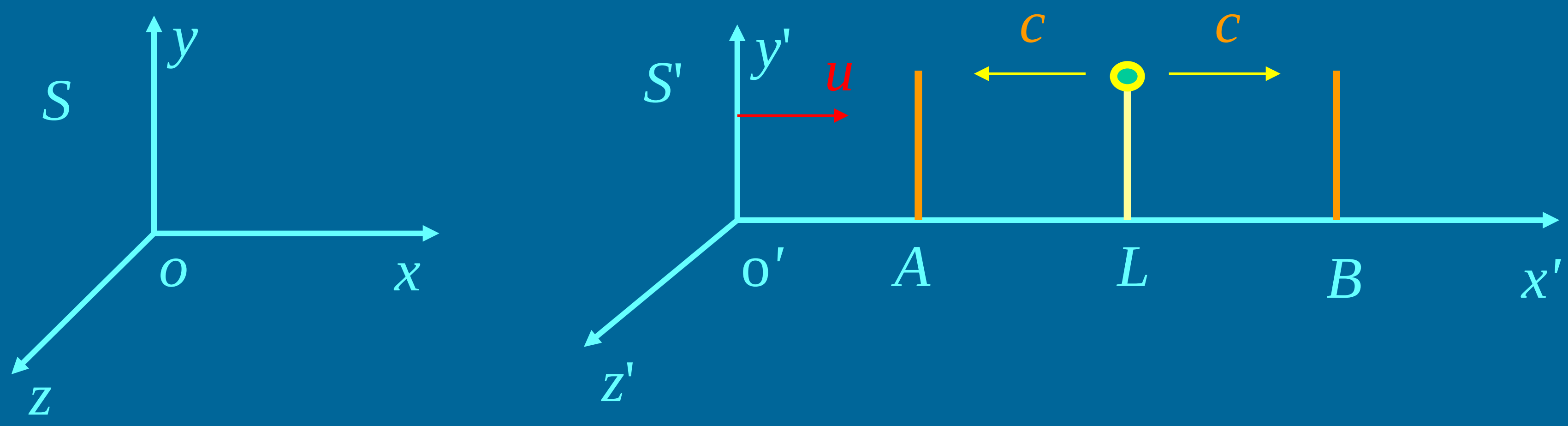
2. 两事件在S系同时、不同地发生 $\Delta t = 0$，$\Delta x \neq 0$

$$\text{由}\ \Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \left(u/c^2\right)\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{知}\ \Delta x' \neq 0 \quad \Delta t' \neq 0$$

即S'系，不同时，不同地发生$\Delta t' \neq 0$，$\Delta x' \neq 0$

结论: 同时性具有相对意义。

沿两个惯性系运动方向，不同地点发生的两个事件，在其中一个惯性系中是同时的，在另一惯性系中观察则不同时，所以同时具有相对意义；只有在同一地点，同一时刻发生的两个事件，在其他惯性系中观察也是同时的。



设A、B是两个固定在S'系中的光信号接收器。在A、B的中点位置放置一光信号源 L

L发出一个光信号后

S' 系中的观察者测得A、B同时接收到光信号。(同时不同地）

S 系中的观察者测得A先接收到光信号，而B后接收到光信号。

由时间间隔变换式可进一步算出在S系中A、B接收到光信号的时间间隔：

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \left(u/c^2\right)\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{u}{c^2}(x_B' - x_A')/\sqrt{1-u^2/c^2}$$

二、时间膨胀

研究的问题是 在S、S' 系中，两事件发生的时间间隔之间的关系

定义：在某惯性系中，同一地点先后发生的两个事件之间的时间间隔 ——原时（或固有时间） 用 τ_0 表示

设在 S'系两事件发生在 同一地点不同时 $\Delta t' = \tau_0$ $\Delta x' = 0$

则在S 系中时间间隔（用 τ 表示）

$$\tau = \Delta t = \frac{\Delta t' + u\Delta x'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\tau_0$$

$$\boxed{\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\,\tau_0}$$

讨论

$$\boxed{\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\,\tau_0}$$

(1) 当 $u \ll c$ 时， $\gamma \sim 1,\ \tau \approx \tau_0$

(2) 时间延缓效应

在 S' 系中测得发生在同一地点的两个事件之间的时间间隔 τ_0 ，在 S 系中观测者看来，这两个事件为异地事件，且时间间隔 τ 总是比 τ_0 要大。

- 在不同惯性系中测量给定两事件之间的时间间隔，测得的结果以原时最短。
- 运动时钟走的速率比静止时钟走的速率要慢。

（S系中观测者看来，S'系中测同地事件的时钟是运动的）

(3) 时间延缓效应是相对的。（若在S 中同地发生则 $\Delta x = 0$ ）

$$\Delta t = \tau_0 \neq 0$$

$$\tau = \Delta t' = \frac{\Delta t - u\Delta x / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\tau_0$$

(4) 时间延缓效应显著与否决定于 γ 因子。

例 带电π介子的固有寿命为 $2.6\times10^{-8}s$，某加速器射出的带电π介子的速率为$0.8c$。求实验室中测得这种粒子的寿命和衰变前飞行的距离。

解：实验室S系， π介子S' 系，带电π介子相对于实验室参照系以u=0.8c运动，由此可计算出粒子在实验室中的寿命

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{2.6\times10^{-8}}{\sqrt{1-0.8^2}}=4.33\times10^{-8}s$$

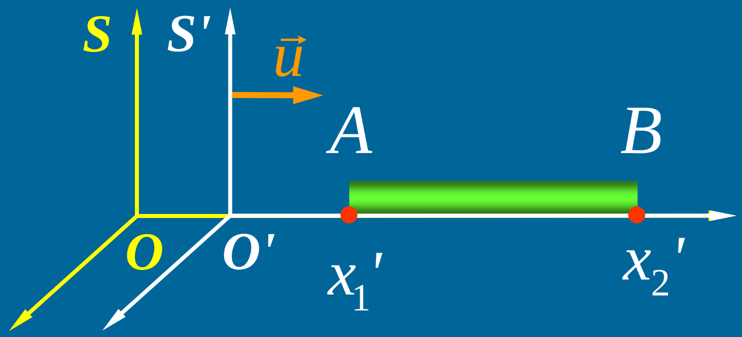
衰变前飞行距离

$$l=u\tau=0.8\times3\times10^{8}\times4.33\times10^{-8}=10.4m$$

计算结果与实验符合得很好，从而证实了时间膨胀效应。

三、长度收缩

定义相对于棒静止的惯性系测得棒的长度——原长 l_0



设 ***AB***相对于***S'*** 系静止，则：$l_0 = x_2' - x_1'$

运动物体的长度等于同时测得的物体两端的坐标差

S系中观察***AB***为运动物体，长度 $l = x_2 - x_1$

$A:(x_1, t) \quad B:(x_2, t)$

又 $x_1' = \dfrac{x_1 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad x_2' = \dfrac{x_2 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow x_2' - x_1' = \dfrac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\therefore l = x_2 - x_1 = (x_2' - x_1')\sqrt{1-\beta^2} = l_0\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\boxed{l = l_0\sqrt{1-\beta^2} < l_0}$$

讨论

$$\boxed{l = l_0\sqrt{1-\beta^2} < l_0}$$

(1) 当 $u << c$ 时， $l \approx l_0$

(2) 长度缩短效应

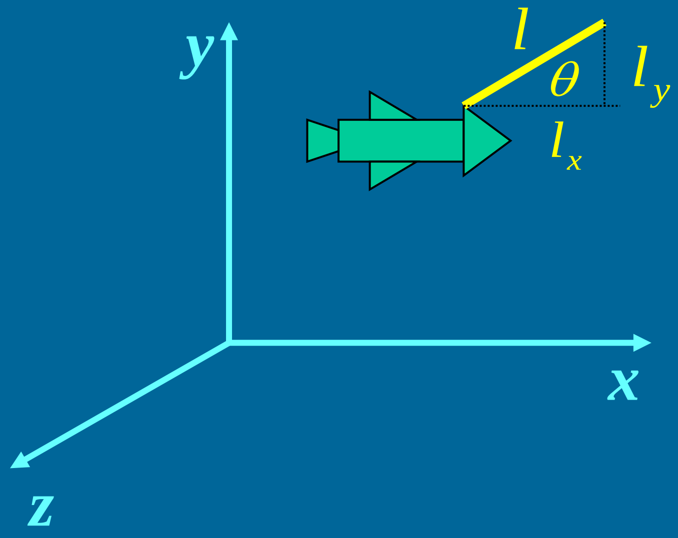
沿尺长度方向相对尺运动的观测者测得的尺长 l，较相对尺静止观测者测得的同一尺的原长 l_0 要短。

- 在不同惯性系中测量同一尺长，以原长为最长。

(3) 长度收缩效应是相对的。

(4) 长度收缩效应显著与否决定于 $\sqrt{1-\beta^2}$

例　设火箭上有一天线，长l_0=1m，以45^0角伸出火箭体外，火箭沿水平方向以 $u=\sqrt{3}c/2$ 的速度飞行，**问**地面的观察者测得这天线的长度和天线与火箭体的交角各为多少？



解：设火箭相对于S'系静止

$$l_0 = 1m \qquad \theta_0 = 45^\circ$$

$$l'_{0x} = l_0 \cos\theta_0 \qquad l'_{0y} = l_0 \sin\theta_0$$

设地面(S系)测得天线长度为l，交角为θ，注意到收缩只沿运动方向(即x轴方向)发生，有：

$$l_x = l'_{0x}\sqrt{1-\beta^2} = l_0\cos\theta_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$l_y = l'_{oy} = l_0 \sin\theta_0 \qquad l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}\cos^2\theta_0} = \sqrt{0.625}\mathrm{m}$$

$$\tan\theta = \frac{l_y}{l_x} = \tan\theta_0 \Big/ \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = 2 \qquad \Rightarrow \theta = 63^\circ 27'$$

例 一短跑选手在地面上以 10 s 的时间跑完 100 m。一飞船沿同一方向以速率 $u = 0.8c$ 飞行。

求 (1) 飞船参考系上的观测者测得百米跑道的长度和选手跑过的路程；(2) 飞船参考系上测得选手的平均速度 。

解 设地面参考系为 S 系， 飞船参考系为 S'，选手起跑为事件1，到终点为事件2，依题意有

$$\Delta x = 100\,\mathrm{m} \qquad \Delta t = 10\,\mathrm{s} \qquad u = 0.8\,c$$

(1) S 系中测得跑道长度 100 m 为原长 l_0 ，S' 系中测得跑道长度 l 为运动长度，由长度收缩公式有

$$l = l_0\sqrt{1-u^2/c^2} = 100\times\sqrt{1-0.8^2} = 60\,\mathrm{m}$$

选手从起点到终点，这一过程在 S' 系中对应的空间间隔为 $\Delta x'$，根据空间间隔变换式得

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{100-0.8\times 3\times 10^8\times 10}{\sqrt{1-0.8^2}} = -4.0\times 10^9\ \mathrm{m}$$

因此，S' 系中测得选手跑过的路程为

$$|\Delta x'| = 4.0\times 10^9\ \mathrm{m}$$

(2) S' 系中测得选手从起点到终点的时间间隔为 $\Delta t'$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{10-\frac{0.8\times 100}{3\times 10^8}}{\sqrt{1-0.8^2}} = 16.7\ \mathrm{s}$$

S' 系中测得选手的平均速度为

$$\upsilon' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{-4.0\times 10^9}{16.7} = -2.4\times 10^8\ \mathrm{m/s} = -0.8c$$

四、相对性与绝对性

时序:两个事件发生的时间顺序

1）两独立事件的先后次序是相对的

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + u\Delta x'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

由于 u 和 $\Delta x'$ 的任意性，不能保证 Δt 和 $\Delta t'$ 同号

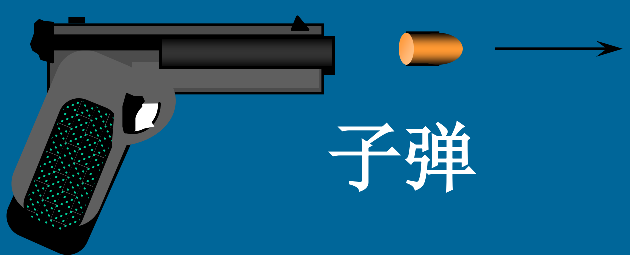
即 S 和 S' 中两独立事件发生的次序可以不同

2）事件的因果顺序决不会因参照系不同而颠倒

开枪

事件1:

(x_1, t_1) 前



子弹

$\vec{v}$

鸟死

事件2:

(x_2, t_2) 后

在 S 系中 $t_2 > t_1$ $\Delta t > 0$

在 S 中：先开枪，后鸟死

在 S' 中是否能发生先鸟死，后开枪？

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (u/c^2)\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\boxed{\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \upsilon}$$ ——子弹速度

$$\Delta t' = \frac{\Delta t(1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t})}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t(1 - \frac{u}{c^2}\upsilon)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

因为 $u\upsilon < c^2$ 所以 $\Delta t' > 0$ $t'_2 > t'_1$

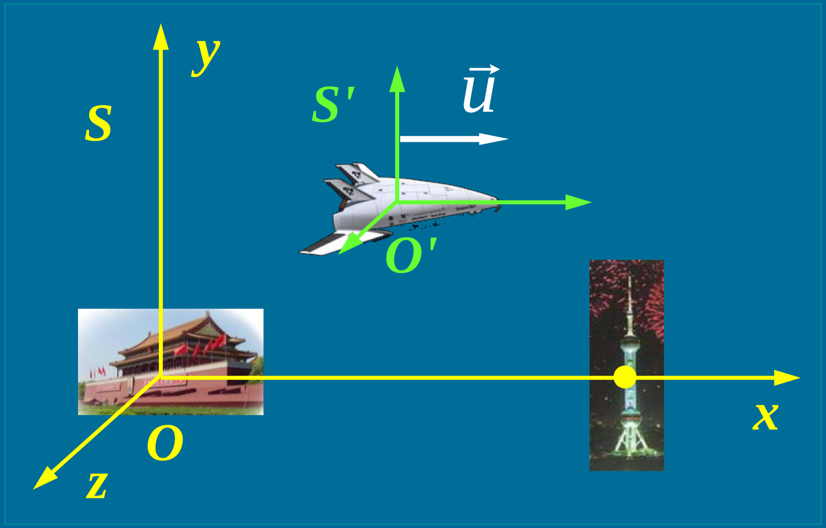
在S'中：仍然是开枪在前，鸟死在后。

所以由因果联系的两事件的时序不会颠倒。

例 北京和上海相距 1000 km，北京站的甲火车先于上海站的乙火车 1.0×10^{-3} s 发车。现有一艘飞船沿从北京到上海的方向从高空掠过，速率恒为 $u=0.6c$ 。

求 宇航员参考系中测得的甲乙两列火车发车的时间间隔，哪一列先开?

解 取地面为 S 系，和飞船一起运动的参考系为 S' 系，北京站为坐标原点，北京至上海方向为 x 轴正方向，依题意有



设 甲火车出发为事件1

乙火车出发为事件2

$$\Delta t = 1.0\times10^{-3}\ \mathrm{s}$$

$$\Delta x = 1000\times10^{3}\ \mathrm{m}$$

S' 测得甲乙两列火车发车的时间间隔为

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$= \frac{1.0\times 10^{-3} - \frac{1000\times 10^3 \times 0.6}{3\times 10^8}}{\sqrt{1-0.6^2}} = -1.25\times 10^{-3}\text{s}$$

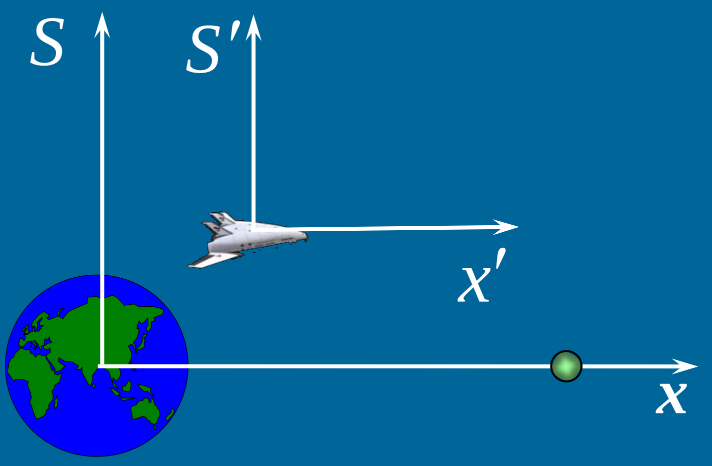
$\Delta t' < 0$，说明上海站的乙火车先开，时序颠倒。

例 在地球—月球系统中测得地—月距离为3.844×10^{8}m，一火箭以0.8c的速率沿着从地球到月球的方向飞行，先经过地球(事件1)，之后又经过月球(事件2)，试问在地球—月球系和火箭系中观察，火箭由地球飞向月球各需要多长时间。

解法一 用时间间隔变换

在地—月系统S，火箭由地球飞向月球

$$\Delta t=\frac{\Delta x}{u}=\frac{3.844\times10^{8}}{0.8\times3\times10^{8}}=1.6s$$



在火箭S'系测量时：

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1.6 - \frac{0.8}{3\times 10^8}\times 3.844\times 10^8}{\sqrt{1-0.8^2}} = 0.96s$$

解法二　用时间膨胀

在地——月系统S，火箭由地球飞向月球所需时间

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{u} = 1.6s$$

在火箭系S'中观察，地球——月球皆以u=0.8c的速度运动，

事件1是地球经过火箭，事件2是月球经过火箭

则在S'系中，上述两事件1、2是同地事件，故时间间隔$\Delta t'$为原时(固有时)

即此时公式应为：
$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\therefore \Delta t'=\Delta t\sqrt{1-\beta^2}=1.6\sqrt{1-0.8^2}=0.96s$$

解法三 用长度收缩

在地—月系统S，同上 $$\Delta t=\frac{\Delta x}{u}=1.6s$$

在S'中观察，地—月距离为 $$l'=l_0\sqrt{1-\beta^2}$$

故：
$$\Delta t'=\frac{l'}{u}=\frac{l_0\sqrt{1-\beta^2}}{u}=\frac{3.844\times10^8\times\sqrt{1-0.8^2}}{0.8\times3\times10^8}=0.96s$$

总结

1. 同时性的相对性

沿两个惯性系运动方向，不同地点发生的两个事件，在其中一个惯性系中是同时的，在另一惯性系中观察则不同时，所以同时具有相对意义；只有在同一地点，同一时刻发生的两个事件，在其他惯性系中观察也是同时的。

2. 时间膨胀 $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\tau_0$

3. 长度收缩 $l = l_0\sqrt{1-\beta^2} < l_0$

4. 相对性与绝对性

1）两独立事件的先后次序是相对的

2）事件的因果顺序决不会因参照系不同而颠倒