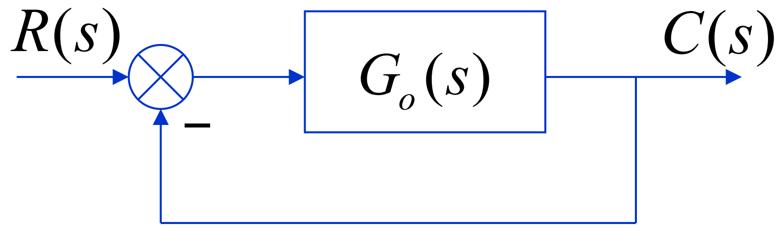
第四章 根轨迹法

知识回顾:



根轨迹的概念

开环传递函数为: $G_o(s)$

闭环传递函数为: $\Phi(s)=\dfrac{G_o(s)}{1+G_o(s)}$

$$G_o(s)=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

根轨迹方程

$$\begin{cases} |G_o(s)|=\dfrac{K^*\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|s-p_j|}=1 & \text{幅值条件} \\ \angle G_o(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=(2k+1)\pi,k=0,\pm1,\pm2... & \text{相角条件} \end{cases}$$

4.2 绘制根轨迹的基本法则

综上分析，可以得到如下结论：

(1) 绘制根轨迹的相角条件与系统开环根轨迹增益值K^*的大小无关。即在s平面上，所有满足相角条件点的集合构成系统的根轨迹图。即相角条件是绘制根轨迹的充要条件。

(2) 绘制根轨迹的幅值条件与系统开环根轨迹增益值的大小有关。即K^*值的变化会改变系统的闭环极点在s平面上的位置。

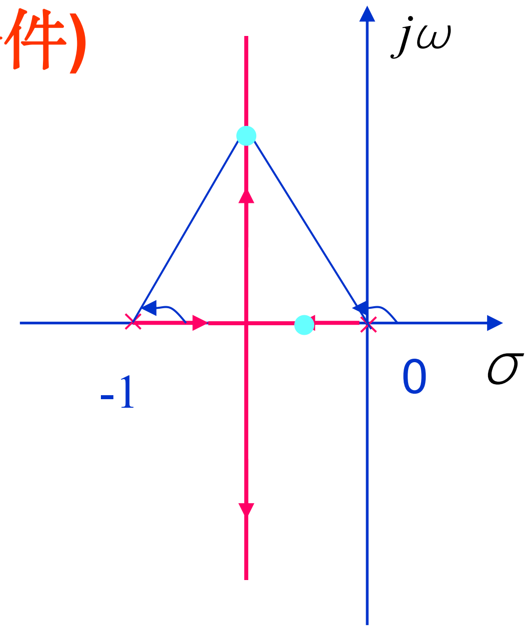
(3) 在系数参数全部确定的情况下，凡能满足相角条件和幅值条件的s值，就是对应给定参数的特征根，或系统的闭环极点。

(4) 由于相角条件和幅值条件只与系统的开环传递函数有关，因此，已知系统的开环传递函数便可绘制出根轨迹图。

1. 根据相角条件绘制根轨迹(充要条件)

【例】某直流电机的传递函数

$$G_o(s)=\frac{K^*}{s(s+1)}$$



2. 根据幅值条件确定根轨迹增益

s = -0.25对应的K*值: K*= |-0.25|*|-0.25+1| = 0.1875

s = -0.5 + j对应的K*值: K*= |-0.5+j|*|-0.5+j+1| = 1.25

4.2 绘制根轨迹的基本法则

用解析法或试探法绘制根轨迹很烦琐。下面讨论的内容通过研究根轨迹和开环零极点的关系，根轨迹的特殊点，渐进线和其他性质将有助于减少绘图工作量，能够较迅速地画出根轨迹的大致形状和变化趋势。以下的讨论是针对参数K^*的180度根轨迹的性质。

【约定】**在根轨迹图中，“×”表示开环极点，“○”表示开环有限零点。粗线表示根轨迹，箭头表示某一参数增加的方向。**

“●”表示根轨迹上的点。

4.2 绘制根轨迹的基本法则

法则1、根轨迹的连续性、对称性、分支数:

➤ 根轨迹的连续性:

闭环系统特征方程的某些系数是增益K*的函数。当K*从0到无穷变化时，这些系数是连续变化的。故特征方程的根是连续变化的，即根轨迹曲线是连续曲线。

➤ 根轨迹的对称性:

一般物理系统特征方程的系数是实数，其根必为实根或共轭复根。即位于复平面的实轴上或对称于实轴。

➤ 根轨迹的分支数：n阶系统有n条根轨迹。

根轨迹是开环系统某一参数从零变化到无穷大时，闭环极点在s平面上的变化轨迹。因此，根轨迹的分支数必与闭环特征方程根的数目一致。即：n阶系统有n条根轨迹。

4.2 绘制根轨迹的基本法则

法则2、根轨迹起始于开环极点，起点处$K^* = 0$.

根轨迹方程为：

$$\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} = -1 \Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} = -\frac{1}{K^*}$$

起点：$K^*=0$，只有 $s=p_j(j=1\sim n)$ 时，上式才能成立。而 p_j 是开环传递函数的极点，所以根轨迹起始于开环极点。n阶系统有n个开环极点，分别是n条根轨迹的起点。

4.2 绘制根轨迹的基本法则

法则3、根轨迹终止于开环零点或无穷远处，终点处$K^{*}=\infty$。

根轨迹方程为：

$$\frac{K^{*}\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=-1\Rightarrow\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=-\frac{1}{K^{*}}$$

终点$K^{*}=\infty$，① $s=z_i(i=1\sim m)$，上式成立。z_i是开环传递函数有限值的零点，有m个。故n阶系统有m支根轨迹的终点在m个有限零点处。②若$n>m$，那么剩余的n-m个终点在哪里呢？在无穷远处。

4.2 绘制根轨迹的基本法则

由根轨迹方程知：当 $s \to \infty$时

$$根轨迹方程左边 = \lim_{s\to\infty} \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n-m}(s-p_j)} = 0$$

$$根轨迹方程右边 = \lim_{K^*\to\infty}(-\frac{1}{K^*}) = 0$$

我们称系统有*n-m*个无限远零点。有限值零点加无穷远零点的个数等于极点数(=根轨迹条数=系统阶次*n*)。

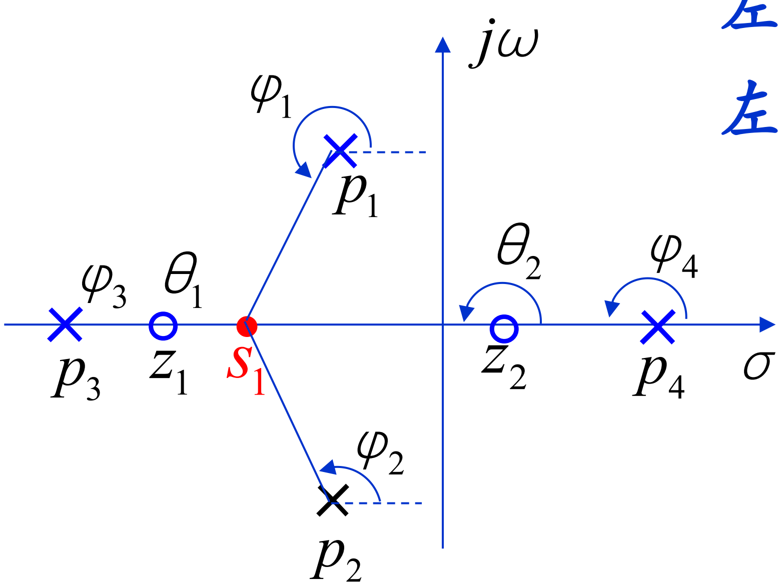
思考：n-m支根轨迹是如何趋于无限远呢?

法则4、实轴上的根轨迹。（简记：向右看，为奇数）

若实轴上某一线段的右边，开环零点和开环极点的数目之和为奇数，则该线段为根轨迹的一部分。

证明： 相角条件 $ArgG_o(s)=\sum_{i=1}^{m}\underbrace{Arg(s-z_i)}_{\theta_i}-\sum_{j=1}^{n}\underbrace{Arg(s-p_j)}_{\varphi_j}=(2k+1)\pi\ ,k=0,\pm1,\pm2..$

取s_1为测试点：



共轭复极点对应：$\varphi_1+\varphi_2=2\pi$

左极点：$\varphi_3=0$　　右极点：$\varphi_4=\pi$

左零点：$\theta_1=0$　　右零点：$\theta_2=\pi$

假设$n_左$个左极点，$n_右$个右极点

$m_左$个左零点，$m_右$个右零点

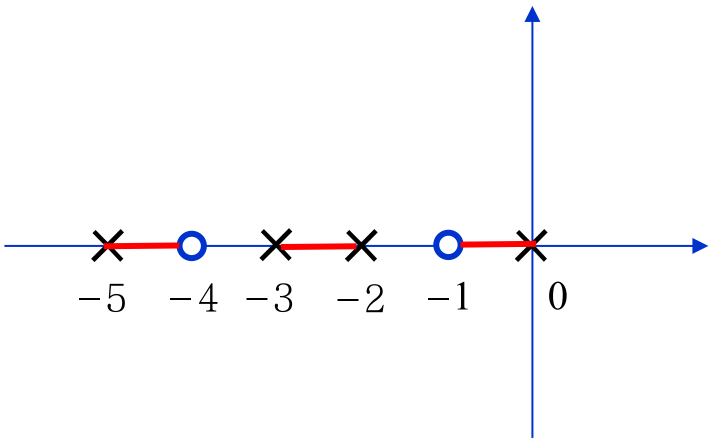
$$ArgG_o(s)=m_右\pi+m_左0-\left(n_右\pi+n_左0+2\pi\right)$$
$$=\left(m_右-n_右\right)\pi=\left(m_右-n_右+2n_右\right)\pi$$
$$=\left(m_{right}+n_{right}\right)\pi=\left(2k+1\right)\pi$$

例1:画出以下系统单位负反馈时在实轴上的根轨迹。

$$G_o(s)=\frac{K^*(s+1)(s+4)}{s(s+2)(s+3)(s+5)}$$

解： (1)标出系统的开环零极点;

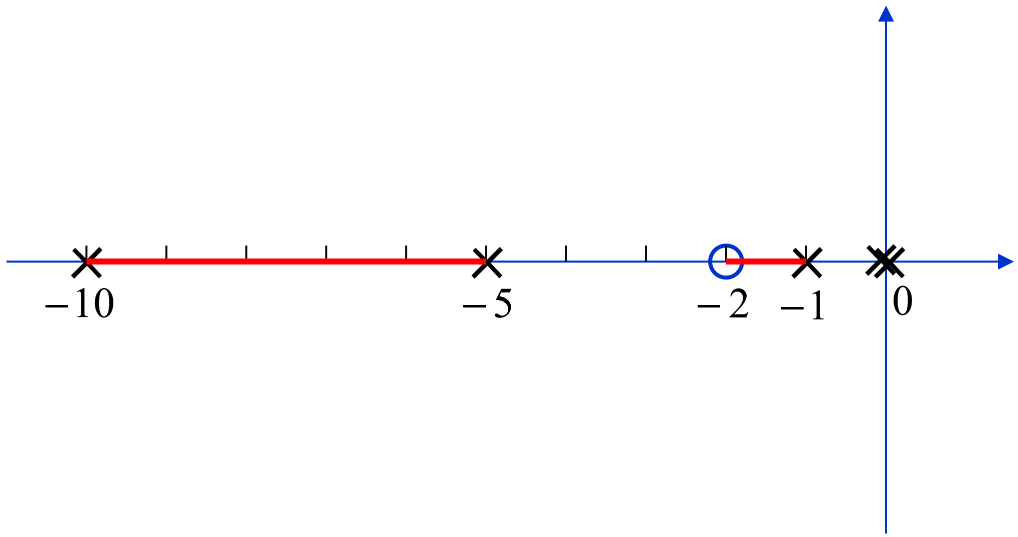
(2)根据规则，绘制实轴上根轨迹。



4.2 绘制根轨迹的基本法则

例2：设系统的开环传递函数为：$G_o(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{s^2(s+1)(s+5)(s+10)}$
试求实轴上的根轨迹。

解：开环零、极点分布如下：



红线所示为实轴上根轨迹，为：[-10，-5]和[-2，-1]。注意在原点有两个极点，双重极点用“✖”表示。

法则5、根轨迹的渐近线。

$K^*\rightarrow\infty$时趋向无穷远处的根轨迹共有n-m条。这n-m条根轨迹趋向无穷远的方向由渐近线决定。

渐近线包括两个内容：渐近线的倾斜角，渐近线与实轴的交点。

渐近线：

1）倾斜角：$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m},k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

2）交点：$$\sigma_a=\frac{(\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{i=1}^{m}z_i)}{n-m}$$

Note： 根轨迹与渐近线的关系：重合或无限逼近。

4.2 绘制根轨迹的基本法则

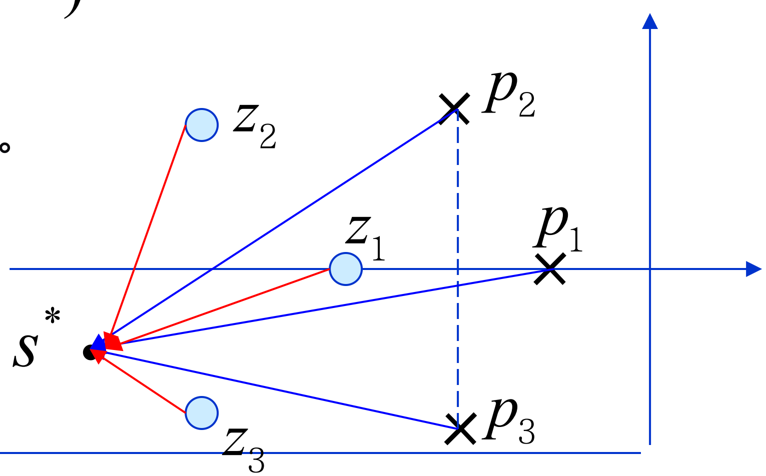
渐进线与实轴的交点，倾角推导方法一

倾斜角：设根轨迹在无限远处有一点 s^*，则s平面上所有的开环有限零点和极点到 s^* 的相角都相等，即为渐近线的倾角 φ_a。代入根轨迹的相角条件得：

$$\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=m\varphi_a-n\varphi_a=(2k+1)\pi$$

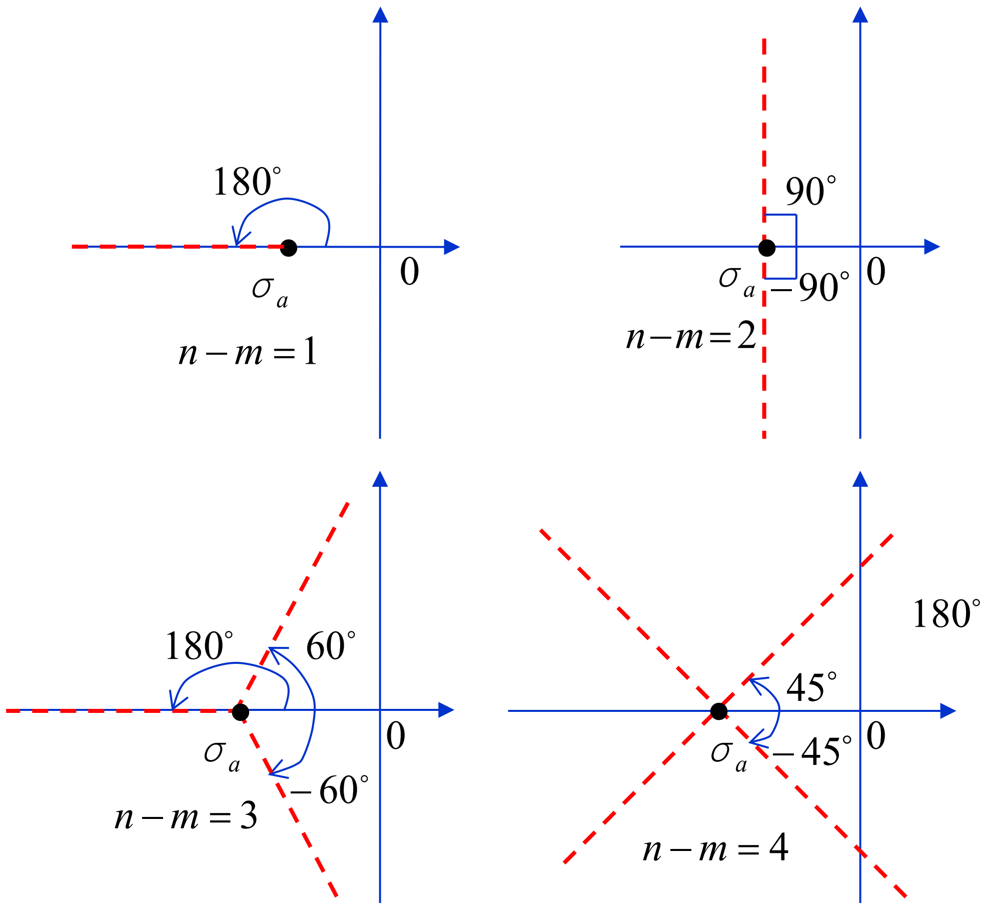
$$\therefore \varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m},(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

约定：**相角**逆时针为正，顺时针为负。



4.2 绘制根轨迹的基本法则

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$



渐近线与实轴的交点σ_a

假设根轨迹在无限远处有一点 s^* ，则s平面上所有开环有限零点和极点到 s^* 的矢量长度都相等。可以认为：对无限远闭环极点s^*而言，所有的开环有限零点 z_i 、极点 p_i 都汇集在一起，其位置为 σ_a ，这就是渐近线与实轴的交点。

幅值条件:

$$\left|\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}\right| = \frac{1}{K^*} = \left|\frac{s^m+\left[\sum_{i=1}^{m}(-z_i)\right]s^{m-1}+\cdots+\prod_{i=1}^{m}(-z_i)}{s^n+\left[\sum_{j=1}^{n}(-p_j)\right]s^{n-1}+\cdots+\prod_{j=1}^{n}(-p_j)}\right|$$

当$\mathbf{s}=\mathbf{s}^*=\infty$时，认为：$\mathbf{z}_i=p_j\approx\sigma_a$(零极点的重心)

$$\left|\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}\right| = \frac{1}{K^*} = \left|\frac{s^m + \left(-\sum_{i=1}^{m} z_i\right)s^{m-1} + \cdots + \prod_{i=1}^{m}(-z_i)}{s^n + \left(-\sum_{j=1}^{n} p_j\right)s^{n-1} + \cdots + \prod_{j=1}^{n}(-p_j)}\right|$$

等式左端为: $\left|\frac{1}{(s-\sigma_a)^{n-m}}\right| = \left|\frac{1}{s^{n-m} - (n-m)\sigma_a s^{n-m-1} + \ldots}\right|$

等式右端用长除法得: $\left|\frac{1}{\mathrm{s}^{\mathrm{n-m}} - (\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i)s^{n-m-1} + \ldots}\right|$

比较系数得: $(n-m)\sigma_a = \sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i$, $\therefore \sigma_a = \frac{(\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i)}{n-m}$

渐进线与实轴的交点，倾角推导方法二

由根轨迹方程可得：

$$\frac{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}=-K^*$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}=\frac{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}{s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}=-K^*$$

式中 $a_{n-1}=-\sum_{j=1}^{n}p_j$ ， $b_{m-1}=-\sum_{i=1}^{m}z_i$

做长除法并取高次项，得 $s^{n-m}+(a_{n-1}-b_{m-1})s^{n-m-1}+\cdots=-K^*$

4.2 绘制根轨迹的基本法则

当K*→∞，由于m<n，故s→∞满足根轨迹方程，上式近似为

$$s^{n-m}+(a_{n-1}-b_{m-1})s^{n-m-1}=-K^*$$

$$s^{n-m}(1+\frac{a_{n-1}-b_{m-1}}{s})=-K^*$$

两边开n-m次方

$$s(1+\frac{a_{n-1}-b_{m-1}}{s})^{\frac{1}{n-m}}=(-K^*)^{\frac{1}{n-m}}$$

利用二项式定理

$$(1+x)^K=1+Kx+\frac{K(K-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{K(K-1)\cdots(K-I+1)}{I!}x^I+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

当 $x<<1$时，$(1+x)^K\approx 1+Kx$，令 $x=\frac{a_{n-1}-b_{m-1}}{s}$，$K=\frac{1}{n-m}$

$$s(1+\frac{1}{n-m}\frac{a_{n-1}-b_{m-1}}{s})=(-K^*)^{\frac{1}{n-m}}$$

4.2 绘制根轨迹的基本法则

$$s+\frac{a_{n-1}-b_{m-1}}{n-m}=(-K^*)^{\frac{1}{n-m}}$$

设s=x+jy, 利用 – 1=cos(2k+1)π+j sin(2k+1)π, 并根据德莫弗(De Moive)代数定理(cosθ +j sinθ)ⁿ= cos(nθ)+j sin(nθ), 上式可写为

$$x+jy+\frac{a_{n-1}-b_{m-1}}{n-m}=\left(K^*\right)^{\frac{1}{n-m}}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n-m}+j\sin\frac{(2k+1)\pi}{n-m}\right]$$

$$x+\frac{a_{n-1}-b_{m-1}}{n-m}=\left(K^*\right)^{\frac{1}{n-m}}\cos\frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

$$y=\left(K^*\right)^{\frac{1}{n-m}}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

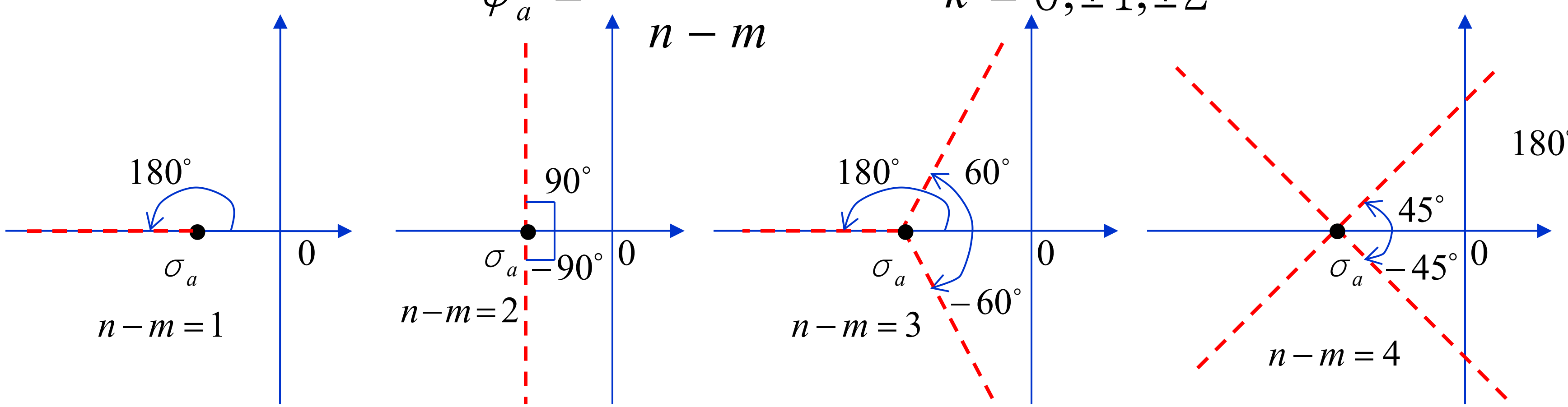
$$\frac{y}{x+\frac{a_{n-1}-b_{m-1}}{n-m}}=\tan\frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

$$y=\tan\frac{(2k+1)\pi}{n-m}\left(x+\frac{a_{n-1}-b_{m-1}}{n-m}\right)=\tan\frac{(2k+1)\pi}{n-m}(x-\sigma_a)$$

$$\sigma_a=-\frac{a_{n-1}-b_{m-1}}{n-m}=-\frac{-\sum_{j=1}^{n}p_j+\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=\frac{\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}$$

这是与实轴交点为σ_a，斜率为 $\tan\frac{(2k+1)\pi}{n-m}$ 的直线方程。也就是渐近线方程。渐近线与实轴的夹角(称为渐近线的倾斜角)为

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}\qquad k=0,\pm1,\pm2\cdots$$



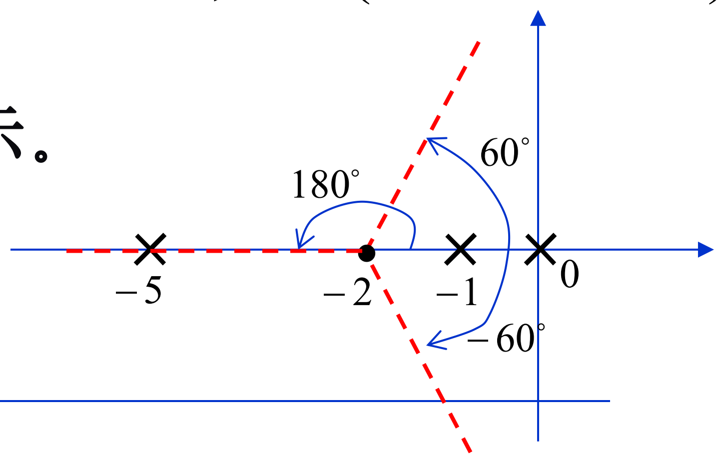
例3: 系统开环传递函数为：$G_o(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+5)}$，试确定根轨迹支数，起点和终点。若终点在无穷远处，求渐进线与实轴的交点和倾角。

解: 根轨迹有3支。起点为开环极点 $p_1=0, p_2=-1, p_3=-5,$ 无有限值零点，所以三支根轨迹都趋向无穷远。

渐进线与实轴的交点：$\sigma_a=\dfrac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m}=\dfrac{0-1-5-0}{3-0}=-2$

渐进线与实轴的倾角：$\varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}=\pm 60^\circ, 180^\circ$(去掉重复的)

零极点分布和渐进线（红线）如图所示。



例4：求下面闭环特征方程式根轨迹的渐近线。

$$s(s+4)(s^2+2s+2)+K_1(s+1)=0$$

解:

$$1+\frac{K_1(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}=0$$

根轨迹有4支。起点为开环极点 $p_1=0, p_2=-4, p_{3,4}=-1\pm j1,$

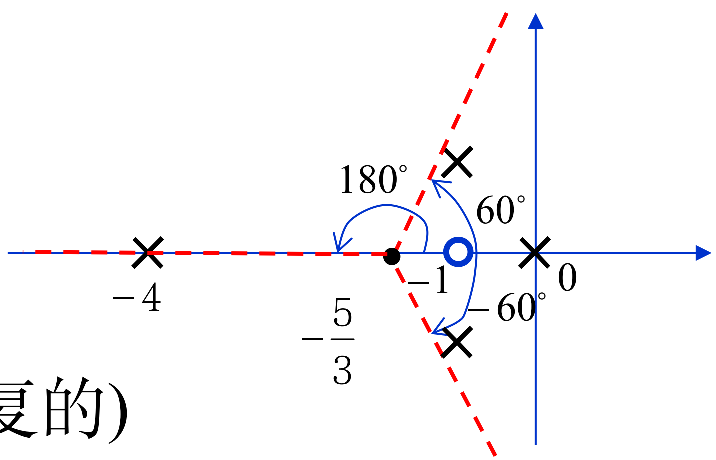
零点$z_1=-1,$

渐进线与实轴的交点：

$$\sigma_a=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m}=-\frac{5}{3}$$

渐进线与实轴的倾角：

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=\pm 60^\circ, 180^\circ(\text{去掉重复的})$$



4.2 绘制根轨迹的基本法则

例5： 单位闭环反馈系统的开环传递函数为：

$$G_o(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

画出系统的根轨迹。

解： 1)系统无开环零点，开环极点为 $p_1=0$, $p_2=-1$, $p_3=-2$；

2) 3条根轨迹均终止于无穷远；

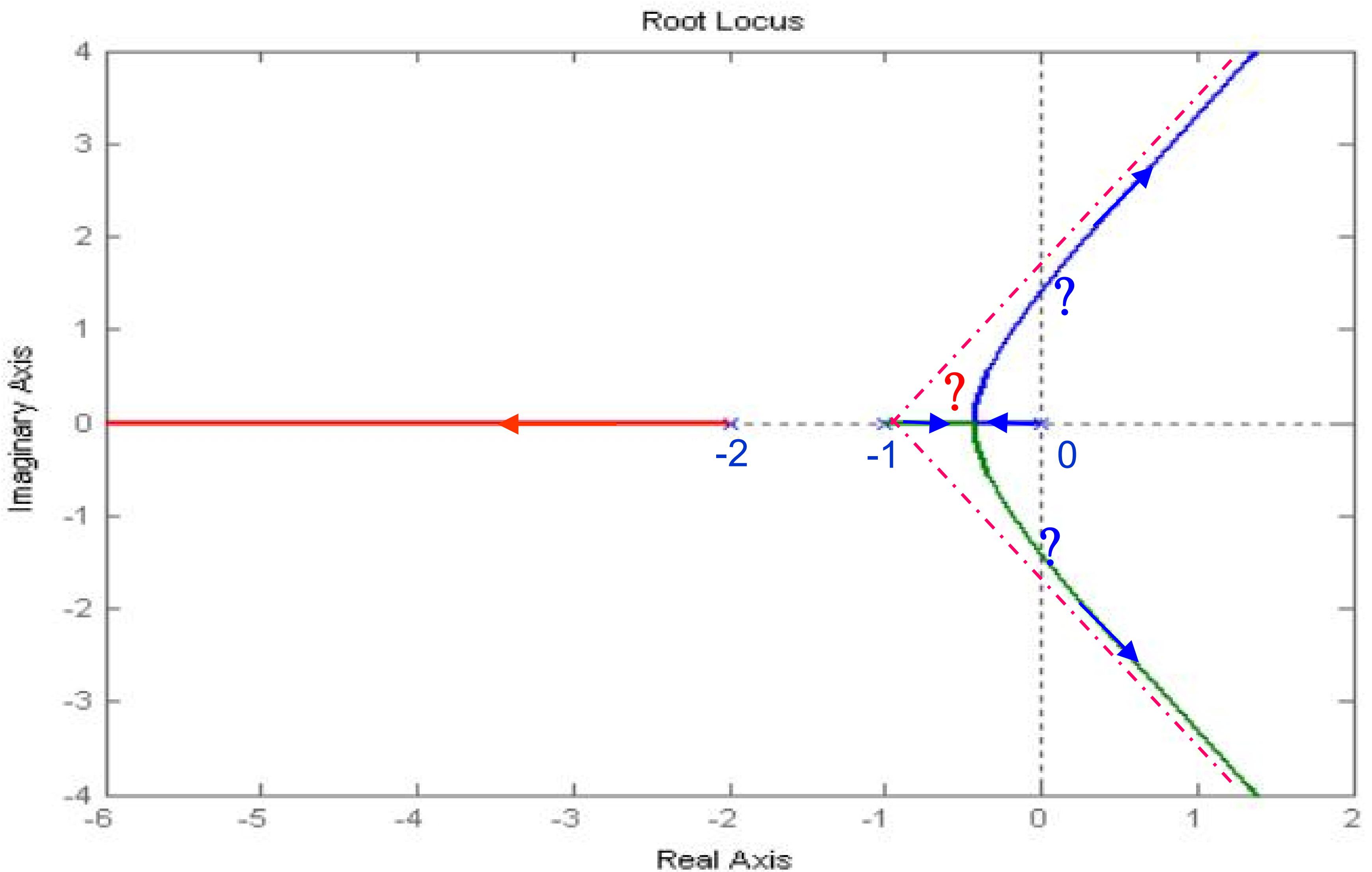
3)实轴上的根轨迹；

4)渐近线与实轴的交点和夹角：

$$\sigma_a=\frac{\sum p_j-\sum z_i}{n-m}=\frac{[0+(-1)+(-2)]-0}{3}=-1$$

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{3},k=0,\pm1,\pm2,\cdots\Rightarrow\ \theta=\pm\frac{\pi}{3},\pi$$

4.2 绘制根轨迹的基本法则



法则6：根轨迹的分离、会合点。

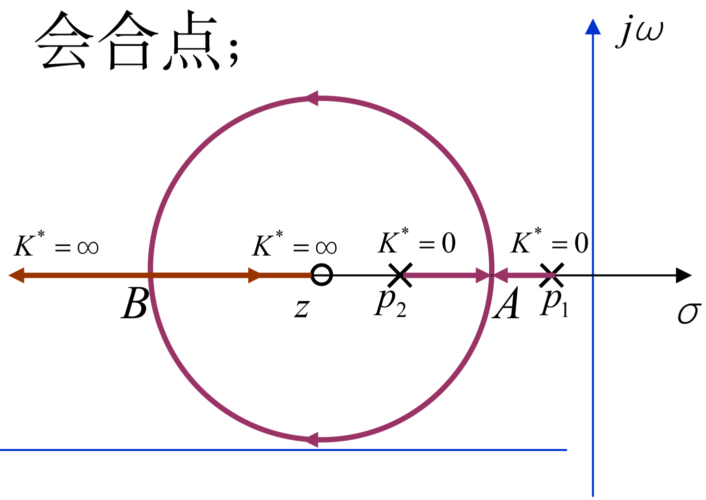
不同的根轨迹分支在s平面上相交的点，称为根轨迹的分离点（会合点）。

分离、会合点的特性：

1）位于实轴上，或以共轭形式出现在复平面中；

2）根轨迹位于实轴上两个相邻的开环极点之间，则在这两个极点之间至少存在一个分离、会合点；

3）根轨迹位于实轴上两个相邻的开环零点之间(可为无穷远零点)，则在这两个零点之间至少存在一个分离、会合点；



分离点和会合点的求法

①求导法（重根法）： 根轨迹在实轴上的分离点或会合点d表示这些点是闭环特征方程的重根点。

设系统开环传递函数为: $G_o(s) = K^* \dfrac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} = K^* \dfrac{N(s)}{D(s)}$

令闭环特征方程为: $f(s) = 1 + G_o(s) = 0$

对于分离会合点，有 $f(s_d) = 0$ & $f'(s_d) = 0$

$$\begin{cases} f(s_d) = 0 \Rightarrow D(s_d) + K^* N(s_d) = 0 & (1) \\ f'(s_d) = 0 \Rightarrow D'(s_d) + K^* N'(s_d) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$G_o(s) = K^* \frac{N(s)}{D(s)} = -1 \Rightarrow K^* = -\frac{D(s)}{N(s)}$$

将 K* 代入(2)式，得

$$D'(s_d)N(s_d)-N'(s_d)D(s_d)=0$$

$$\left.\frac{dG_o(s)}{ds}\right|_{s=s_d}=\frac{D'(s_d)N(s_d)-N'(s_d)D(s_d)}{D^2(s_d)}=0$$

$$\boxed{\frac{dG_o(s)}{ds}=0}$$

求导法公式

注意：由上式可求得的点是分离点和会合点必要条件，还需求出这些点对应的增益 $K^*=-\left.\frac{D(s)}{N(s)}\right|_{s=s_d}$，若增益为大于零的实数，则所求出的点为分离会合点。有时也可直接根据图形判断确定。

例6: 单位闭环负反馈系统的开环传递函数为

$$G_o(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

画出系统的根轨迹，确定分离、会合点位置。

解: 用求导法求分离、会合点;

$$\frac{dG_o(s)}{ds}=\frac{0-K^*\cdot d[s(s+1)(s+2)]}{[s(s+1)(s+2)]^2}=\frac{-K^*(3s^2+6s+2)}{[s(s+1)(s+2)]^2}=0$$

$$\Rightarrow 3s^2+6s+2=0\Rightarrow s_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times3\times2}}{2\times3}$$

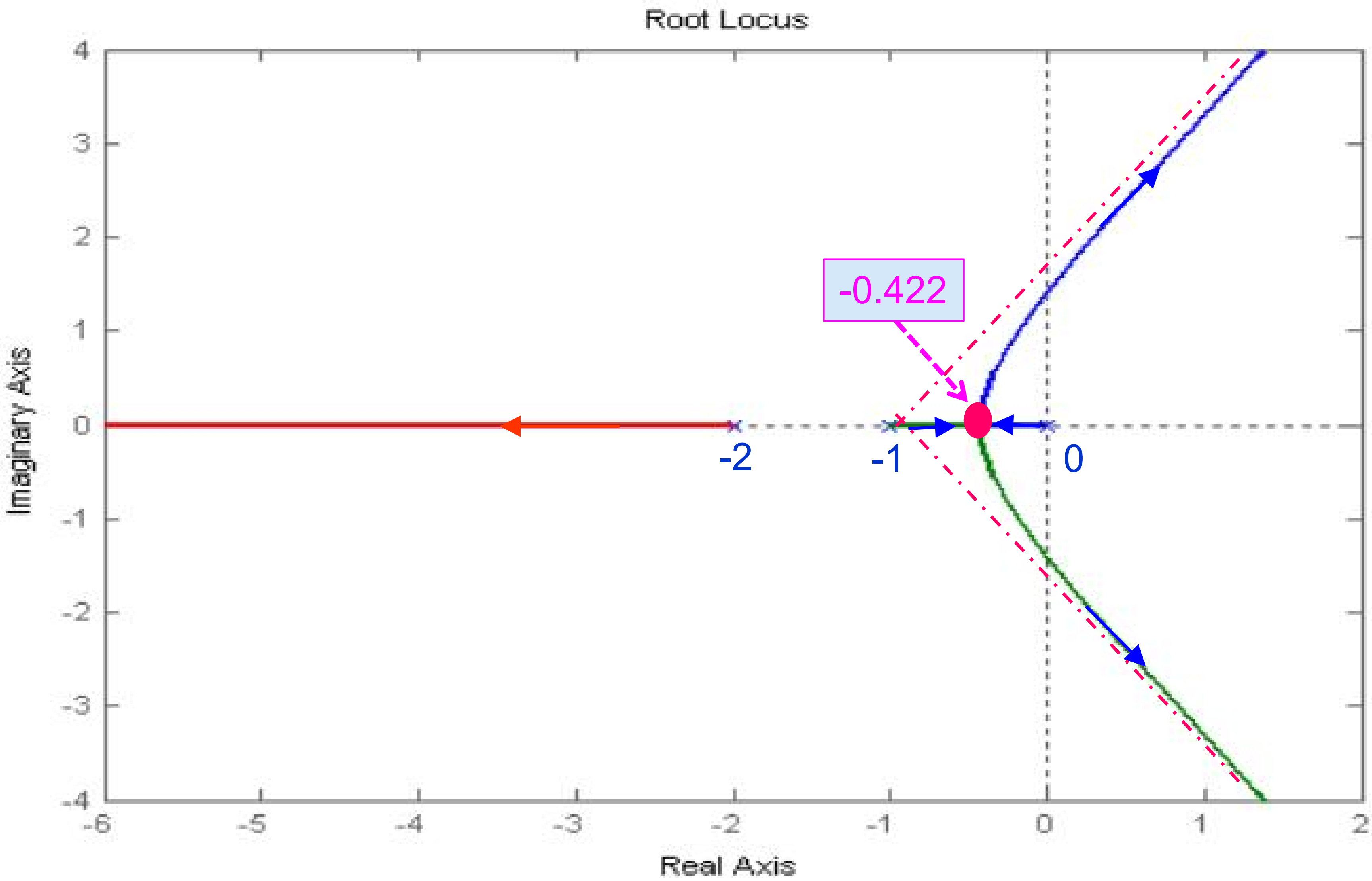
$\Rightarrow s_1=-0.422, s_2=-1.578$，由例5知$s_2$不在根轨迹上，所以$s_1$是分离会合点。

或代入 $G_o(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+2)}=-1\Rightarrow K^*=-s(s+1)(s+2)$ 进行检验。

0.3849

– 0.3849

4.2 绘制根轨迹的基本法则



4.2 绘制根轨迹的基本法则

②极值法：若以K*为纵坐标，以实轴为横坐标，在根轨迹的分离点和会合点上，K*具有极值。

$$K^* = -\frac{D(s)}{N(s)}$$

$$\frac{dK^*}{ds} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{D(s)}{N(s)}\right] = -\frac{D'(s)N(s) - N'(s)D(s)}{N^2(s)} = 0$$

$$N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 0$$

$$\boxed{\frac{dK^*}{ds} = 0}$$

极值法公式

例6: 单位闭环负反馈系统的开环传递函数为

$$G_o(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

画出系统的根轨迹，确定分离、会合点位置。

解： 用极值法求分离、会合点：分离点在[-1，0]之间。

$$K^*=-s(s+1)(s+2)$$

s	0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1
K*	0	0.171	0.288	0.357	0.384	0.375	0.336	0.273	0.192	0.099	0

③工程法:

设系统开环传递函数为: $G_o(s) = K^* \dfrac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$

因闭环特征方程为: $G_o(s) = -1$

即: $F(s) = K^* \prod_{i=1}^{m}(s-z_i) + \prod_{j=1}^{n}(s-p_j) = 0$

重根时还满足: $\dfrac{dF(s)}{ds} = \dfrac{d}{ds}\left[K^* \prod_{i=1}^{m}(s-z_i) + \prod_{j=1}^{n}(s-p_j)\right] = 0$

$$\prod_{j=1}^{n}(s-p_j) = -K^* \prod_{i=1}^{m}(s-z_i) \qquad (1)$$

$$\frac{d}{ds}\prod_{j=1}^{n}(s-p_j) = -K^* \frac{d}{ds}\prod_{i=1}^{m}(s-z_i) \qquad (2)$$

4.2 绘制根轨迹的基本法则

$$\frac{(2)}{(1)}得,\quad \frac{\dfrac{d}{ds}\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=\frac{\dfrac{d}{ds}\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}$$

$$d\ln x=\frac{dx}{x}$$

$$\frac{d\left[\ln\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)\right]}{ds}=\frac{d\left[\ln\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)\right]}{ds}$$

$$\ln\prod\ =\sum\ln$$

$$\frac{d\left[\sum_{j=1}^{n}\ln(s-p_j)\right]}{ds}=\frac{d\left[\sum_{i=1}^{m}\ln(s-z_i)\right]}{ds}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{d\ln(s-p_j)}{ds}=\sum_{i=1}^{m}\frac{d\ln(s-z_i)}{ds}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{s-p_j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s-z_i}}$$

工程法公式

Note: 系统无零点时，等式右端为零。

例7:设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G_o(s)=\frac{K(0.5s+1)}{0.5s^2+s+1}$$

试绘制闭环系统根轨迹。

解:将$G_o(s)$化成零极点标准形式

$$G_o(s)=\frac{K^*(s+2)}{(s+1+j)(s+1-j)}$$

其中, $K^*=K$, 根轨迹如图所示。

根轨迹有2支。起点为开环极点 $p_1=-1+j, p_2=-1-j$

有限值零点1个 $z_1=-2$ **，另一条根轨迹趋向无穷远。**

渐进线与实轴的交点: $\sigma_a=\dfrac{\sum p_j-\sum z_i}{n-m}=0$

渐进线与实轴的倾角: $\varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}=180^\circ$

$$G_o(s)=\frac{K^*(s+2)}{(s+1+j)(s+1-j)}$$

求分离、会合点d:

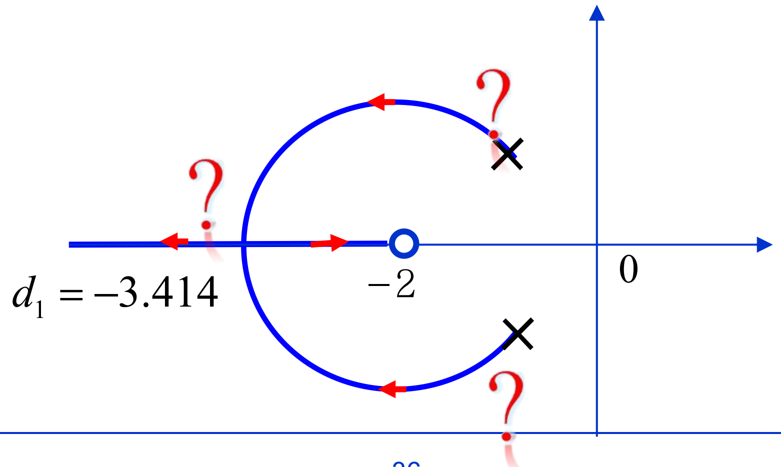
$$\frac{1}{d+1-j}+\frac{1}{d+1+j}=\frac{1}{d+2}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{s-p_j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s-z_i}}$$

整理得,

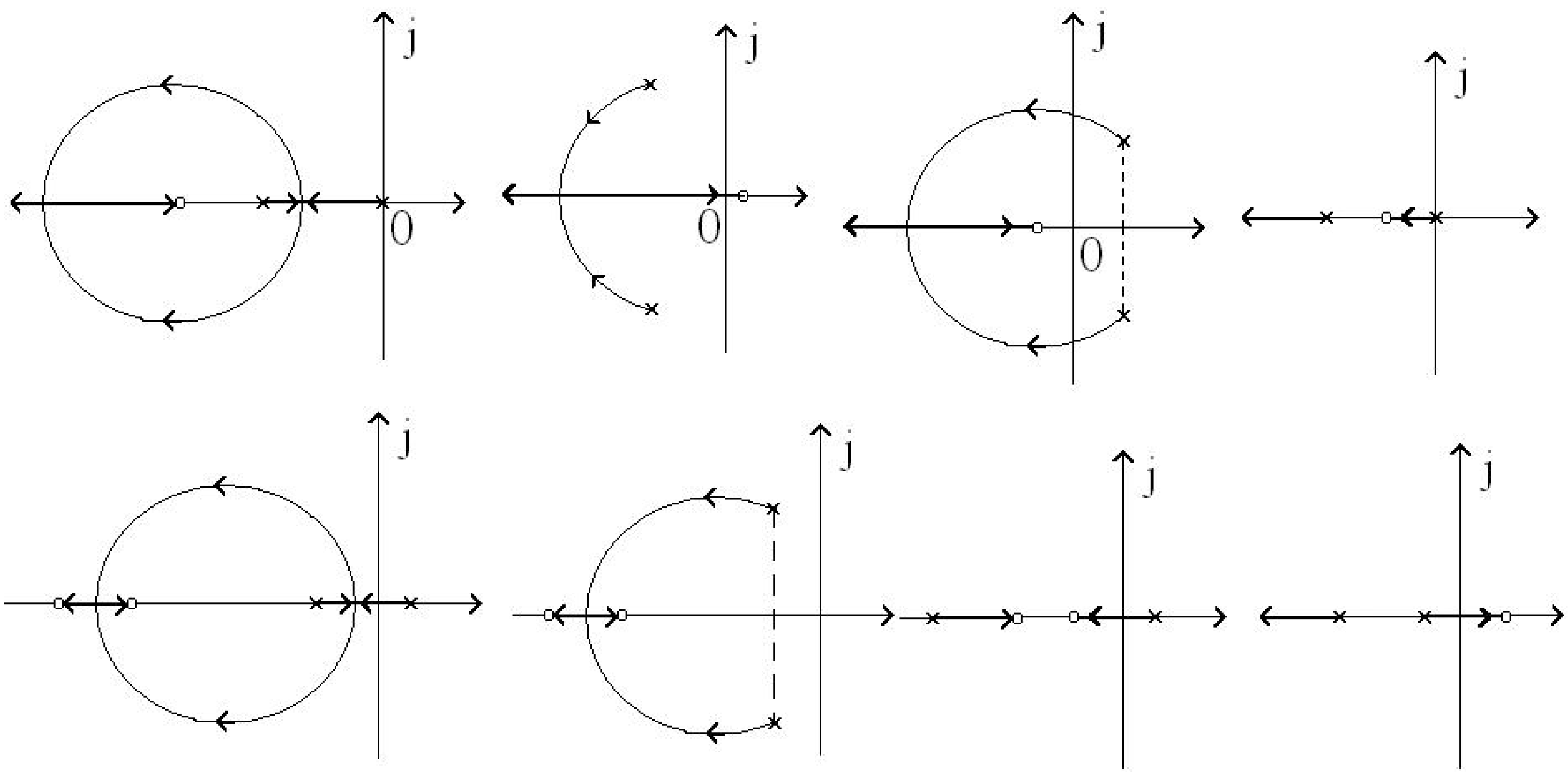
$$d^2+4d+2=0$$

$$d_1=-3.414, d_2=-0.586\text{(舍弃)}$$



4.2 绘制根轨迹的基本法则

定理： 当系统有2个开环极点、1个开环零点，并且在复平面上有根轨迹时，则复平面上的根轨迹一定是以零点为圆心的圆弧。

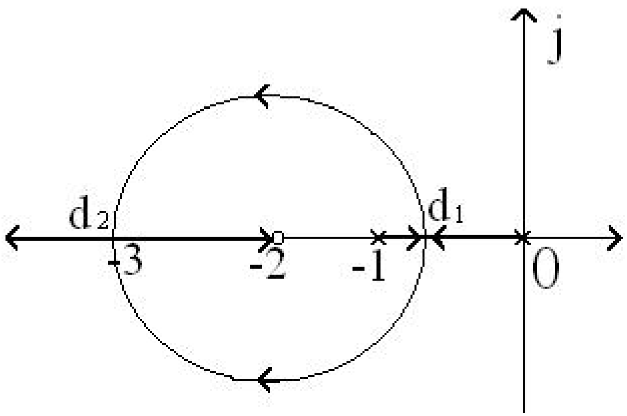


例8： 单位反馈系统，其开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$ ，画出系统根轨迹，证明根轨迹是圆，求出圆心和半径。

解： 系统的闭环特征方程为

$$D(s)=s(s+1)+K^*(s+2)=s^2+(1+K^*)s+2K^*=0$$

$$s_{1,2}=\frac{-(1+K^*)\pm\sqrt{(1+K^*)^2-8K^*}}{2}=-\frac{1+K^*}{2}\pm\frac{\sqrt{(1+K^*)^2-8K^*}}{2}$$



根位于复平面时，有 $(1+K^*)^2<8K^*$

$$s_{1,2}=-\frac{1+K^*}{2}\pm j\frac{\sqrt{8K^*-(1+K^*)^2}}{2}=\sigma\pm j\omega \quad \Rightarrow \sigma=-\frac{1+K^*}{2}\rightarrow K^*=-2\sigma-1$$

$$\Rightarrow \omega^2=\frac{8K^*-(1+K^*)^2}{4}=\frac{(-2\sigma-1)\times 8-(2\sigma)^2}{4}=-\sigma^2-4\sigma-2$$

$$\therefore \sigma^2+4\sigma+2+\omega^2=0 \qquad (\sigma+2)^2+\omega^2=2\Rightarrow\begin{cases}\text{圆心：}(-2,0)\\ \text{半径：}\sqrt{2}\end{cases}$$

4.2 绘制根轨迹的基本法则

闭环特征方程： $G_o(s)=K^*\dfrac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=K^*\dfrac{N(s)}{D(s)}=-1$

①求导法

$$\boxed{\frac{dG_o(s)}{ds}=0}$$

②极值法

$$\boxed{\frac{dK^*}{ds}=0}$$

③工程法

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{s-p_j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{s-z_i}}$$

[分离角]： 在分离点或会合点上，根轨迹的切线和实轴的夹角称为分离角 θ_d 。 θ_d与相分离的根轨迹的支数k有关： $\theta_d=\dfrac{\pi}{k}$ 。

注意： 分离点和会合点也可能出现在复平面上，由于根轨迹对称于实轴，所以，复平面上的分离点和会合点必对称于实轴。

法则7、根轨迹的出射角（起始角）和入射角（终止角）。

出射角(起始角)：根轨迹离开开环极点处的切线与正实轴的夹角；

入射角(终止角)：根轨迹进入开环零点处的切线与正实轴的夹角。

- 实轴上的极点出射角：
- 实轴上的零点入射角：

0°，180°

非实轴上的极点（共轭极点）出射角计算式为：

$$\theta_{p_i} = -(2k+1)\pi + \left[\sum_{j=1}^{m} \angle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \angle(p_i - p_j) \right]$$

非实轴上的零点（共轭零点）入射角计算式为：

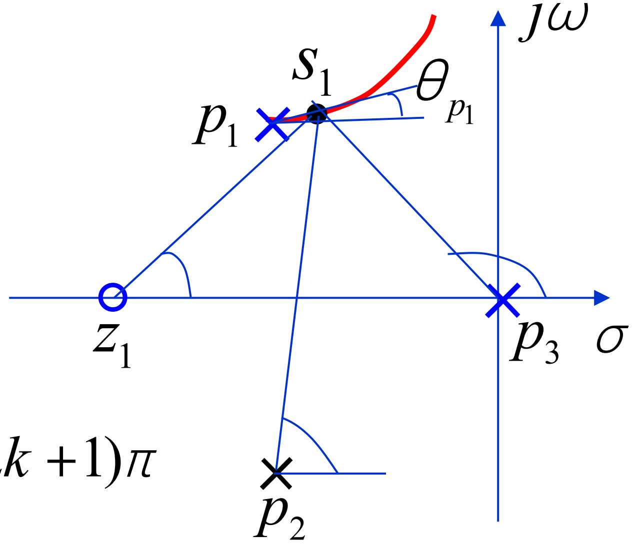
$$\theta_{z_i} = (2k+1)\pi - \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \angle(z_i - z_j) - \sum_{j=1}^{n} \angle(z_i - p_j) \right]$$

4.2 绘制根轨迹的基本法则

略证:

(针对3极点1零点情况)

如图所示，取根轨迹上接近p_1的点s_1，s_1应满足相角条件:



$$\angle(s_1 - z_1) - \angle(s_1 - p_1) - \angle(s_1 - p_2) - \angle(s_1 - p_3) = (2k+1)\pi$$

因 $s_1 \to p_1$，$\angle(s_1 - p_1)$即为出射角 θ_{p_1}，上式可化为

$$\angle(p_1 - z_1) - \theta_{p_1} - \angle(p_1 - p_2) - \angle(p_1 - p_3) = (2k+1)\pi$$

即

$$\theta_{p_1} = -(2k+1)\pi + \underbrace{\angle(p_1 - z_1)}_{\text{零点角}} - \underbrace{\angle(p_1 - p_2) - \angle(p_1 - p_3)}_{\text{极点角}}$$

考虑到周期性:

非实轴上的极点(共轭极点)出射角计算式为:

$$\theta_{p_i} = 180° + \left[\sum_{j=1}^{m} \angle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \angle(p_i - p_j) \right]$$

非实轴上的零点(共轭零点)入射角计算式为:

$$\theta_{z_i} = 180° - \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \angle(z_i - z_j) - \sum_{j=1}^{n} \angle(z_i - p_j) \right]$$

Note: 计算双重极点的出射角时的计算式为:

$$2\theta_{p_i} = 180° + \left[\sum_{j=1}^{m} \angle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \angle(p_i - p_j) \right]$$

例9：设系统开环传递函数

$$G_o(s)=\frac{K^*(s+1.5)(s+2+j)(s+2-j)}{s(s+2.5)(s+0.5+j1.5)(s+0.5-j1.5)}$$

试绘制该系统的根轨迹。

解：1）画出开环零、极点。

$$z_1=-1.5, z_2=-2+j, z_3=-2-j,$$

$$p_1=0, p_2=-2.5, p_3=-0.5+j1.5, p_4=-0.5-j1.5,$$

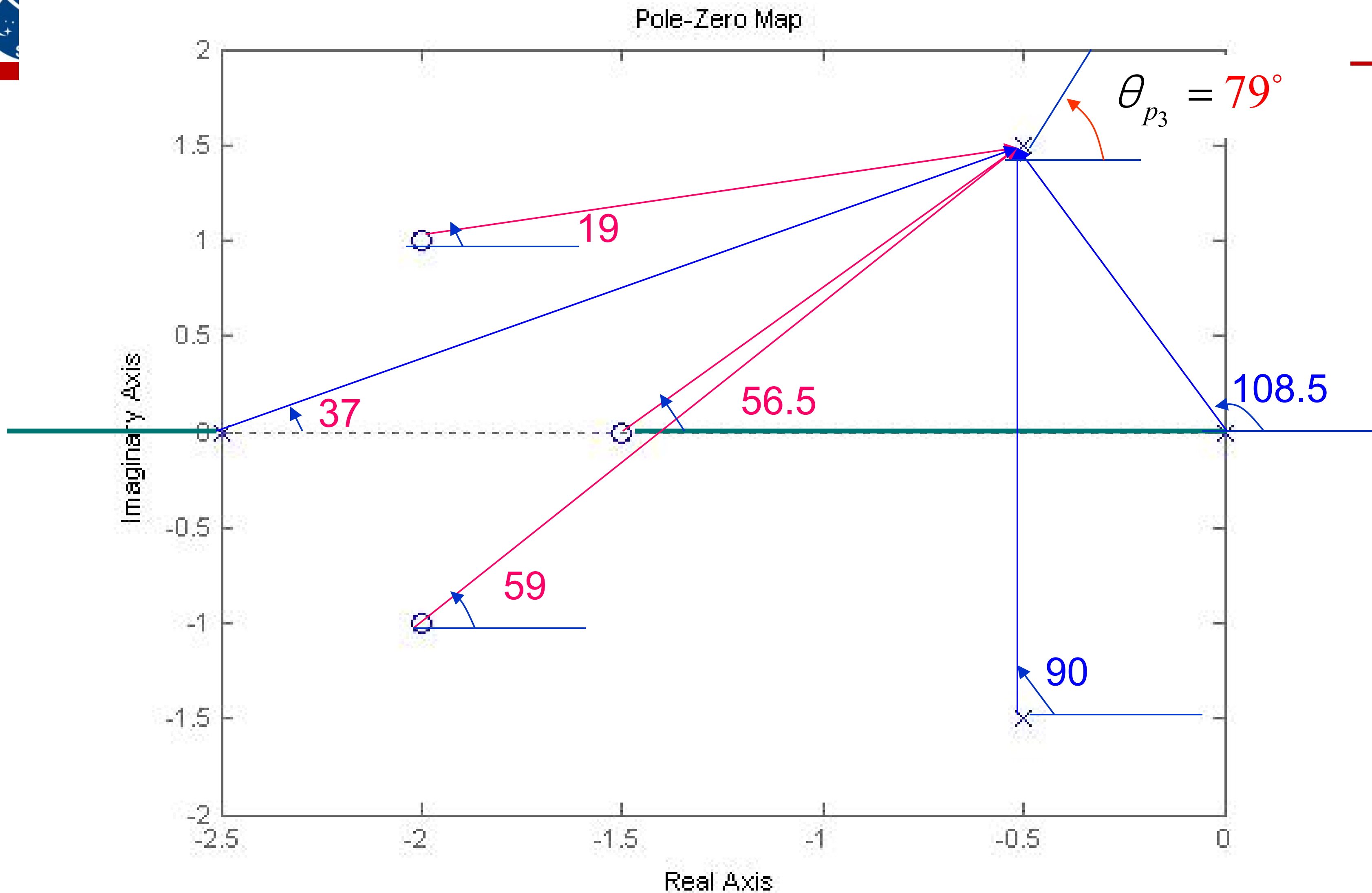
2）确定实轴上的根轨迹。

3）确定根轨迹的渐近线。n-m=1,无需渐近线。

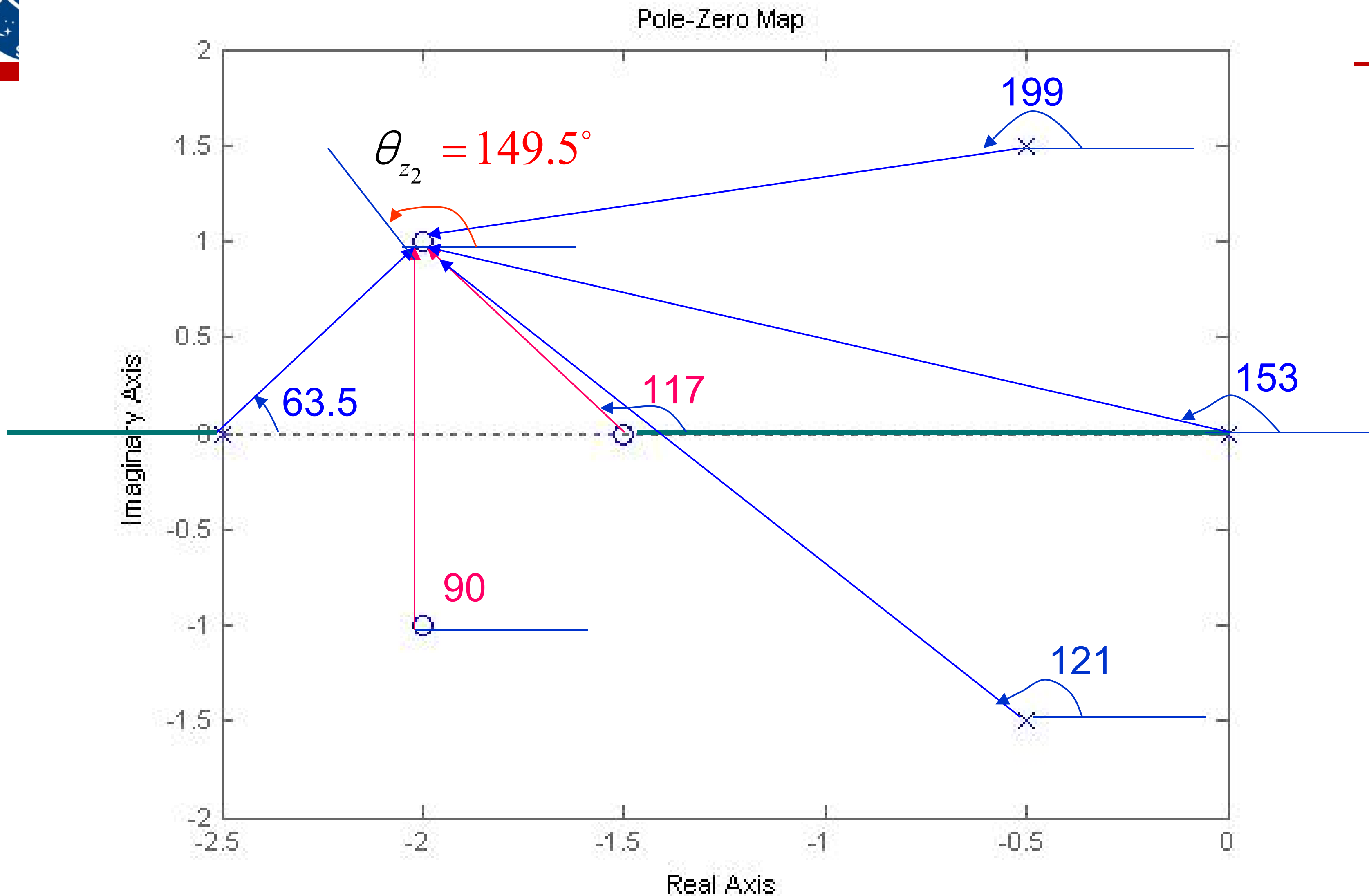
4）确定出射角与入射角。

$$\theta_{p_3}=180^\circ+\left[\left(19^\circ+56.5^\circ+59^\circ\right)-\left(108.5^\circ+37^\circ+90^\circ\right)\right]=79^\circ$$

$$\theta_{z_2}=180^\circ-\left[\left(117^\circ+90^\circ\right)-\left(153^\circ+63.5^\circ+199^\circ+121^\circ\right)\right]=509.5^\circ=149.5^\circ$$

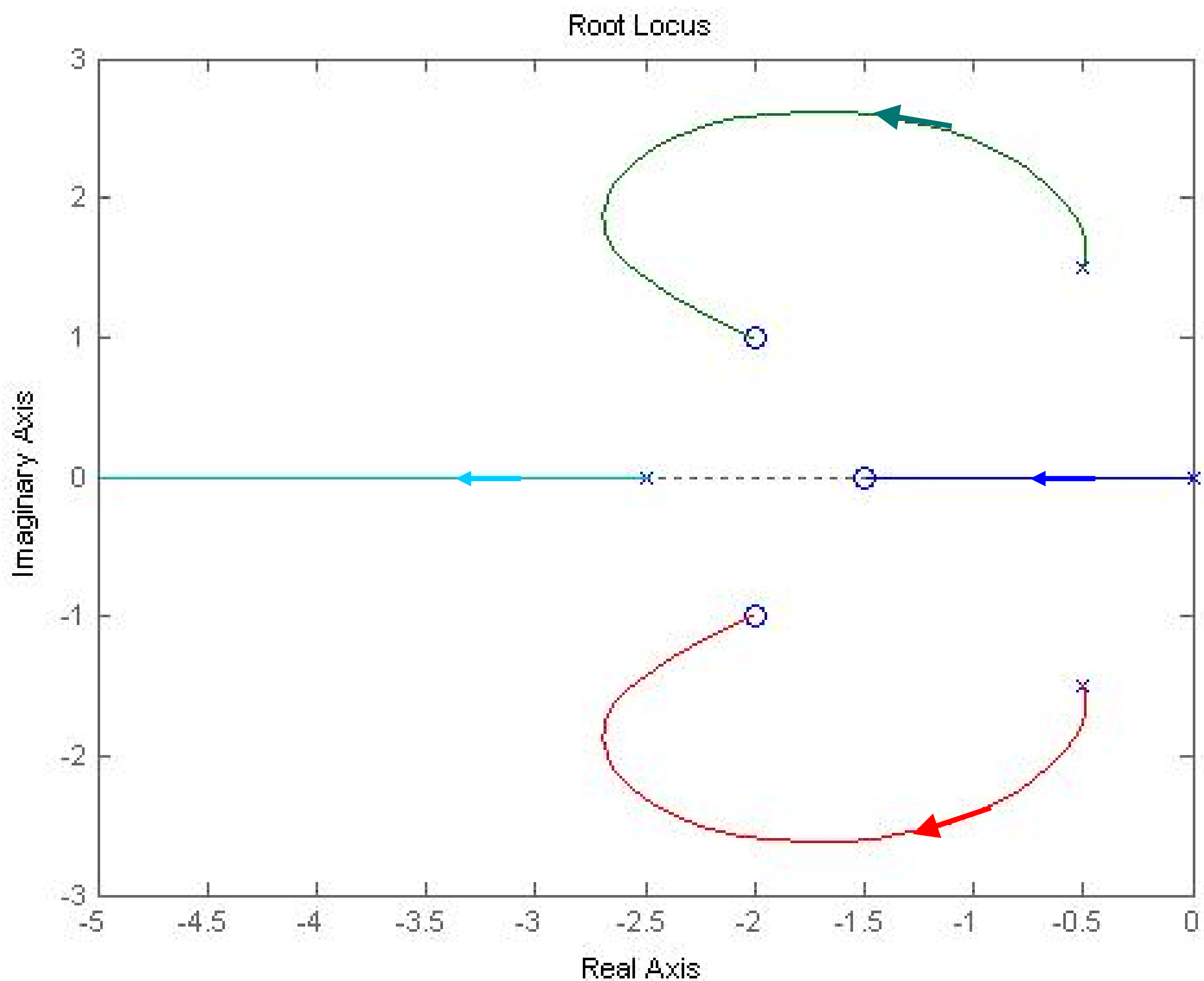


$$\theta_{p_3} = 180^\circ + \left[\left(19^\circ + 56.5^\circ + 59^\circ \right) - \left(108.5^\circ + 37^\circ + 90^\circ \right) \right] = 79^\circ$$



$$\theta_{z_2}=180^\circ-\left[\left(117^\circ+90^\circ\right)-\left(153^\circ+63.5^\circ+199^\circ+121^\circ\right)\right]=509.5^\circ=149.5^\circ$$

4.2 绘制根轨迹的基本法则



法则8、根轨迹与虚轴的交点。

根轨迹和虚轴相交时，闭环特征方程有一对共轭虚根，系统处于临界稳定状态。这时的增益 K_c 称为临界根轨迹增益。

I. 在闭环特征方程中令 $s=j\omega$，然后使特征方程的实、虚部为零即可求出虚轴上的交点 ω_c 及其 K_c^*。

$$1+G_o(j\omega)=0 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\left[1+G_o(j\omega)\right]=0 \\ \mathrm{Im}\left[1+G_o(j\omega)\right]=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_c = ? \\ K_c^* = ? \end{cases}$$

II. 由劳斯稳定判据求解。

系统临界稳定（劳斯表某行首列元素为零，且该元素上下两行首列元素同号）。

4.2 绘制根轨迹的基本法则

例10: 开环传递函数为: $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+5)}$，试求根轨迹与虚轴的交点和 K_c^*。

方法 I： 闭环系统的特征方程为:

$$D(s)=s(s+1)(s+5)+K^*=s^3+6s^2+5s+K^*=0$$

将 $s=j\omega$ 代入得:

$$D(j\omega)=-j\omega^3-6\omega^2+5j\omega+K^*=0$$

$$\therefore \begin{cases}-6\omega^2+K^*=0\\ -\omega^3+5\omega=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\omega=0,\quad \pm\sqrt{5}\\ K_c^*=0,\quad 30\end{cases}$$

当 $K_c^*=0$ 时，为根轨迹的起点（开环极点）；

当 $K_c^*=30$ 时，$\omega=\pm\sqrt{5}$，即根轨迹与虚轴的交点为 $\pm j\sqrt{5}$。

方法Ⅱ： 用劳斯稳定判据确定 ω_c，K_c 的值。

闭环系统的特征方程为： $D(s)=s^3+6s^2+5s+K^*=0$

列劳斯表为：

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 5 \\
s^2 & 6 & K^* \\
s^1 & \dfrac{30-K^*}{6} & \\
s^0 & K^* &
\end{array}
$$

劳斯阵列中某一行首列元素为零，且其上下两行首列元素同号时，特征方程出现共轭纯虚根（根轨迹与虚轴有交点）。

令 $\begin{cases} 30-K^*=0 \\ K^*>0 \end{cases}$，得临界增益为： $K_c^*=30$

共轭虚根为辅助方程 $6s^2+K_c^*=0$ 的根： $6s^2+30=0, s_{1,2}=\pm j\sqrt{5}$

例9: 已知单位闭环负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

试绘制该系统的根轨迹。

解：（1）开环极点： $p_1=0, p_2=-4, p_3=-2+j4, p_4=-2-j4$

（2）实轴上的根轨迹 $[-4,0]$

(3) 渐近线:

$$\sigma_a=\frac{\sum p_j-\sum z_i}{n-m}=\frac{[0+(-4)+(-2+j4)+(-2-j4)]-0}{4}=-2$$

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{4},k=0,\pm1,\pm2,\ldots \Rightarrow \theta=\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{3\pi}{4}$$

（4）根轨迹的分离点（汇合点）：

$$D'(s_d)N(s_d) - N'(s_d)D(s_d) = 0$$

$$\Rightarrow s^3 + 6s^2 + 18s + 20 = 0$$

$$\Rightarrow s_1 = -2, s_2 = -2 + j2.5, s_3 = -2 - j2.5$$

（5）出射角:

$$\theta_{p3} = 180° - arctan2 - (180° - arctan2) - 90° = -90°$$

$$\theta_{p4} = 180° - [-arctan2 - (180° - arctan2) - 90°] = 90°$$

（6）根轨迹与虚轴的交点：

$$s^4+8s^3+36s^2+80s+K=0$$

$$s^4+8s^3+36s^2+80s+k=0$$

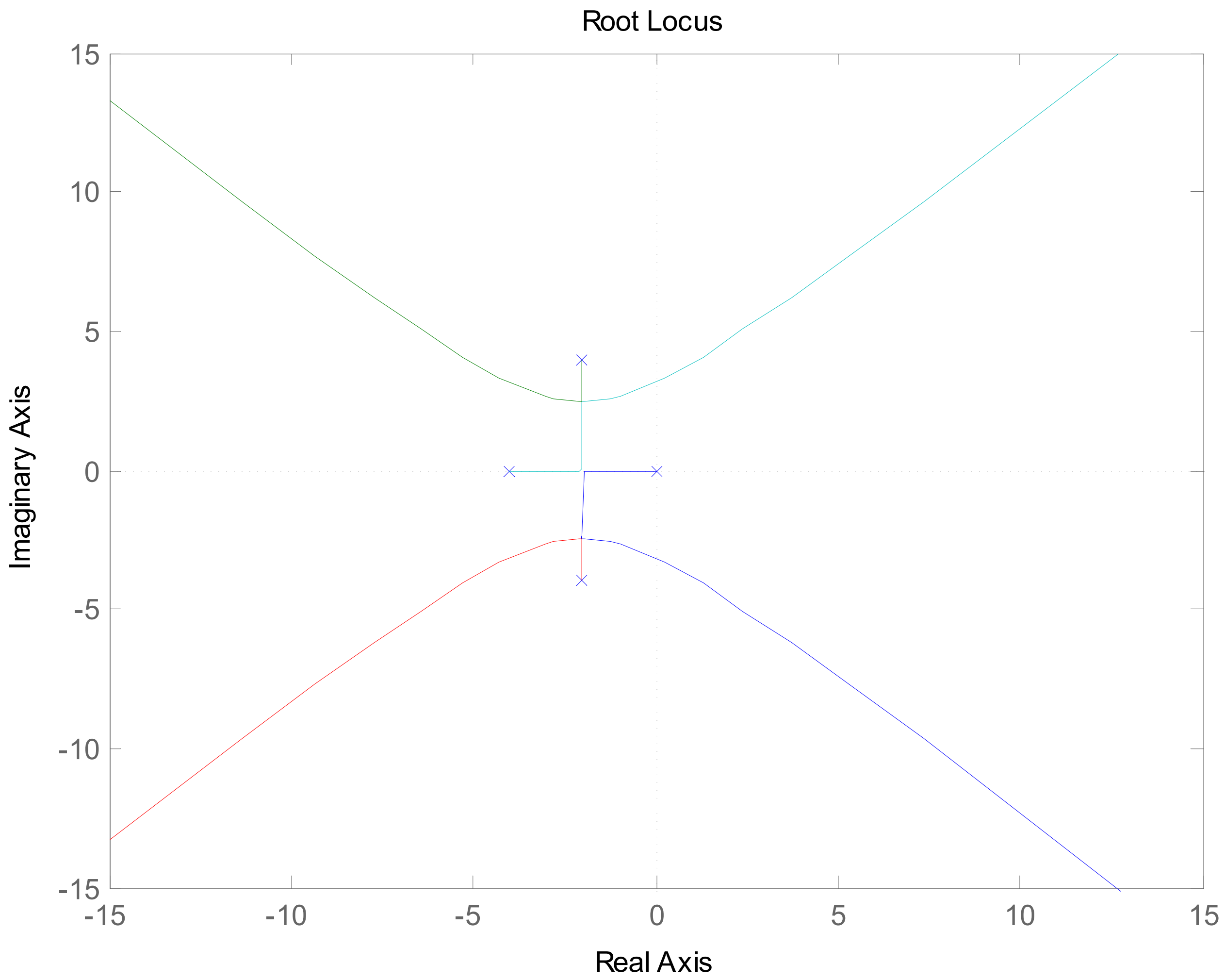
S^4	1	36	k
S^3	8	80	0
S^2	26	k	
S^1	$\frac{26\times80-8k}{26}$	0	
S^0	k		

$$\frac{26\times80-8k}{26}=0 \qquad k=260$$

$$26s^2+260=0 \quad 得 \quad s=\pm j\sqrt{10}$$

$$G(s) = \frac{K}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

rlocus([1],conv(conv([1 0],[1 4]),[1 4 20]))



法则9、根之和与根之积。

开环传递函数为：
$$G_o(s)=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

由闭环特征方程 $1+G_o(s)=0$ 得：$\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)+K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)=0$

设闭环系统的极点为：$s_1,s_2,\dots s_n$ ，则

$$s^n+A_{n-1}s^{n-1}+A_{n-2}s^{n-2}+\dots+A_0=(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)=0 \quad \textbf{(1)}$$

$$\boxed{A_{n-1}=-\sum_{j=1}^{n}s_j}$$

开环特征方程为：

$$s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\dots+a_0=(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)=0 \quad \textbf{(2)}$$

$$\boxed{a_{n-1}=-\sum_{j=1}^{n}p_j}$$

当n-m>=2时， $\boxed{A_{n-1}=a_{n-1}}$

4.2 绘制根轨迹的基本法则

$$\sum_{j=1}^{n} s_j = \sum_{j=1}^{n} p_j,\ n-m \geq 2$$

表明：

- **n-m≥2**时，闭环特征根之和为常数，与**K***无关。
- **n-m≥2**时，如果一部分闭环极点随着**K***的增大，沿着根轨迹向左移动，则必有一部分闭环极点沿根轨迹向右移动。

4.2 绘制根轨迹的基本法则

闭环特征方程： $\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)+K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)=0$

方程左端常数项： $A_0=\prod_{j=1}^{n}(-p_j)+K^*\prod_{i=1}^{m}(-z_i)$

设闭环系统的极点为： $s_1,s_2,\ldots s_n$ ， 则

$$s^n+A_{n-1}s^{n-1}+A_{n-2}s^{n-2}+\ldots+A_0=(s-s_1)(s-s_2)\ldots(s-s_n)=0$$

闭环极点之积为： $\boxed{\prod_{j=1}^{n}(-s_j)=A_0=\prod_{j=1}^{n}(-p_j)+K^*\prod_{i=1}^{m}(-z_i)}$

当有为零的开环极点： $\boxed{\prod_{j=1}^{n}(-s_j)=A_0=K^*\prod_{i=1}^{m}(-z_i)}$

例11：单位闭环反馈系统：
$$G_o(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

求闭环系统根轨迹与虚轴的交点，临界根轨迹增益，确定此时的闭环极点。

解：闭环系统的特征方程为：

$$D(s)=s(s+1)(s+2)+K^*=s^3+3s^2+2s+K^*=0$$

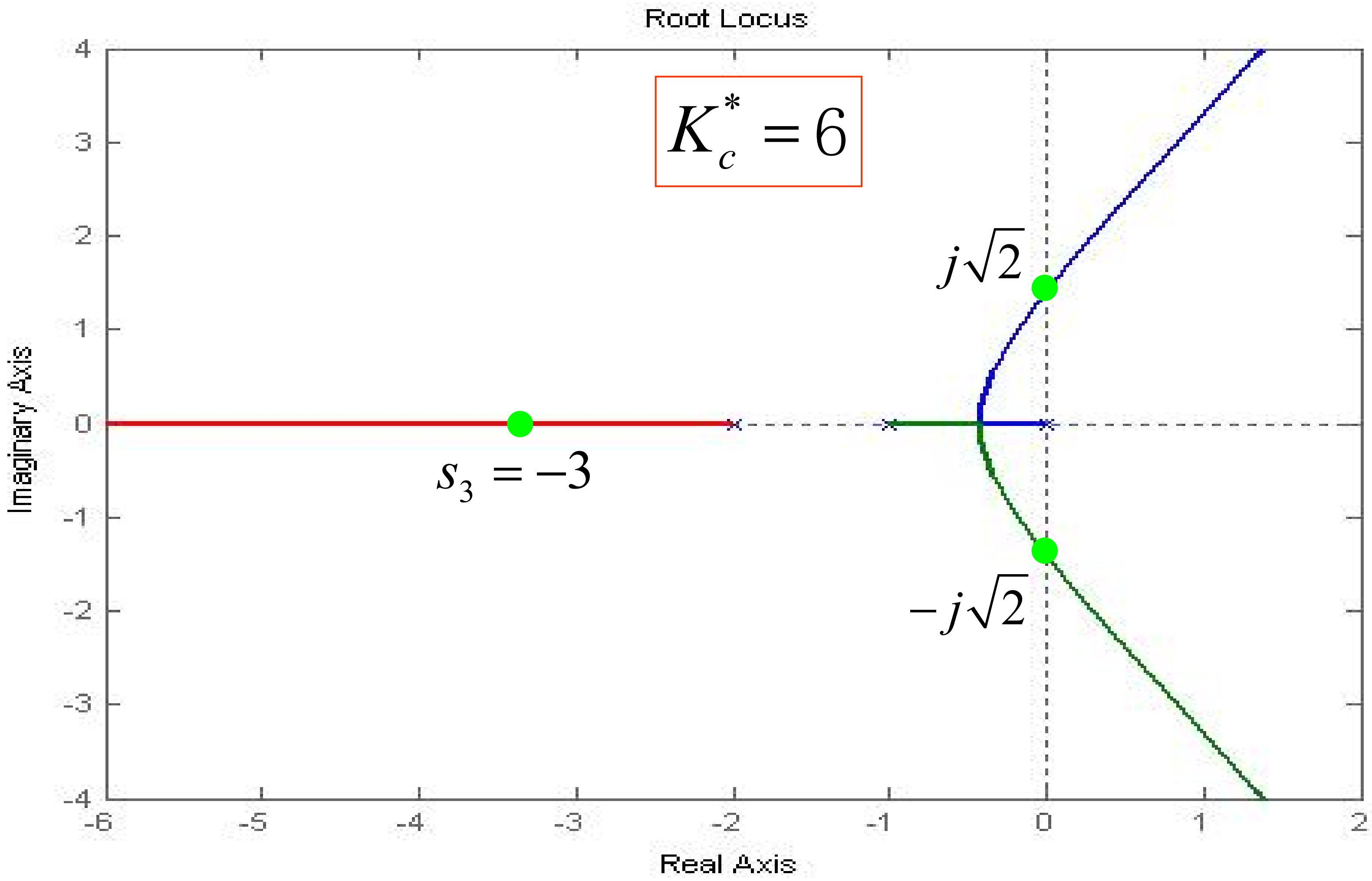
将 $s=j\omega$ 代入得：
$$D(j\omega)=-j\omega^3-3\omega^2+2j\omega+K^*=0$$

$$\therefore\begin{cases}-3\omega^2+K^*=0\\ -\omega^3+2\omega=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega_c=\pm\sqrt{2}\\ K_c^*=6\end{cases}\ or\begin{cases}\omega_c=0\\ K_c^*=0\end{cases}$$

因为n-m=3，所以利用根之和，

$$\left.\begin{cases}\text{开环极点之和：}\ \sum p_j=0+(-1)+(-2)=-3\\ \text{闭环极点之和：}\ \sum s_j=-\sqrt{2}j+\sqrt{2}j+s_3=-3\end{cases}\right.\Rightarrow s_3=-3$$

4.2 绘制根轨迹的基本法则



小结:

需掌握绘制根轨迹的九条法则

- 根轨迹的连续性、对称性、分支数;
- 根轨迹的起点、终点;
- 实轴上的根轨迹;
- 根轨迹的渐近线;
- 根轨迹的出射角、入射角;
- 根轨迹的分离、会合点;
- 根轨迹与虚轴的交点;
- 闭环极点之和。

根轨迹作图步骤回顾

一、s平面纵横坐标用相同的比例尺，标注开环零点和极点；

二、画实轴上的根轨迹；

三、*n*-*m*条渐近线（视情况而定）；

四、根轨迹的出射、入射角；

五、根轨迹的分离点、会合点；

六、根轨迹与虚轴的交点；

结合根轨迹的对称性、闭环极点之和及之积等性质完善根轨迹；检验根轨迹的分支数、箭头标注。

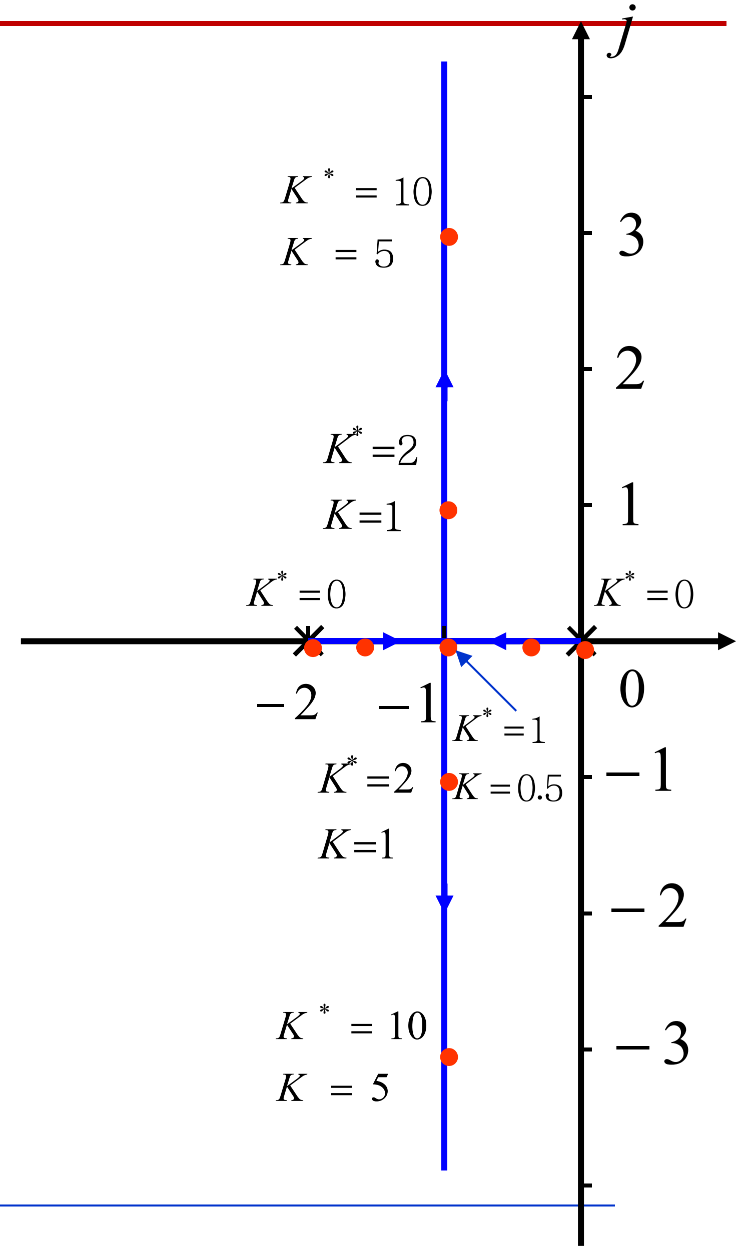
二、根轨迹的一些重要特点

1. 在开环传递函数增加极点和零点对根轨迹的影响

①增加开环极点对根轨迹的影响

一般情况下，在原开环传递函数零极点的左边增加极点会使原根轨迹向右半部移动，虽然很难作出确切的说明和提供必要的证明，但可以用几个例子说明。

[例]开环传递函数为：$G_o(s)=\dfrac{K^*}{s(s+2)}$ 画根轨迹。



[例]开环传递函数为： $G_o(s)=\dfrac{K^*}{s(s+2)(s+4)}$ 画根轨迹。

解：1. 求出开环零极点， 即： $p_1=0,\ p_2=-2,\ p_3=-4$

2. 实轴上的根轨迹: $(-\infty,-4],\ [-2,0]$

3. 渐近线 $\sigma_a=\dfrac{0-2-4}{3}=-\dfrac{6}{3}=-2$ $\quad\varphi_a=\dfrac{(2k+1)180^\circ}{3}=\begin{cases}\pm 60^\circ\\ 180^\circ\end{cases}$

4. 求与虚轴的交点， 此时特征方程为 $s^3+6s^2+8s+K^*=0$

将 $s=j\omega$ 代入得： $-j\omega^3-6\omega^2+j8\omega+K^*=0$

$$-6\omega^2+K^*=0 \qquad -\omega^3+8\omega=0$$

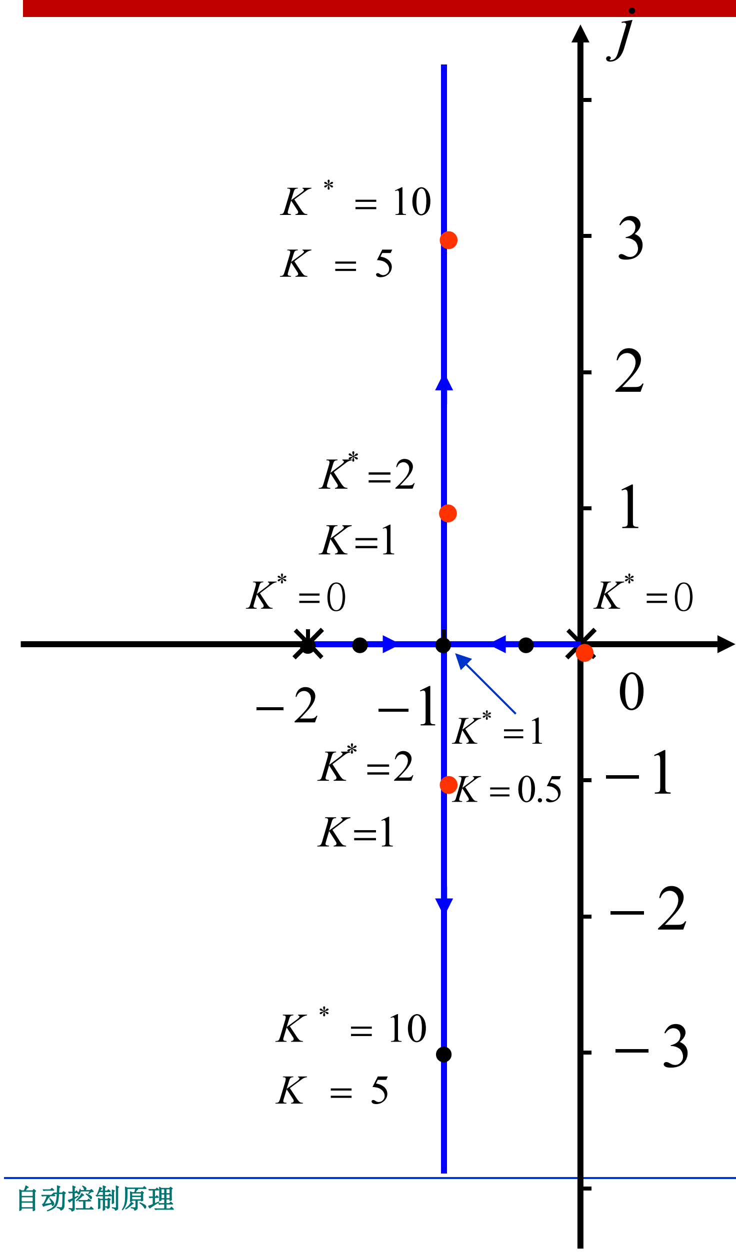
$$\omega_c=\begin{cases}0\\ \pm 2\sqrt{2}\end{cases}\qquad K_c^*=\begin{cases}0 & \omega_c=0\\ 48 & \omega_c=\pm 2\sqrt{2}\end{cases}$$

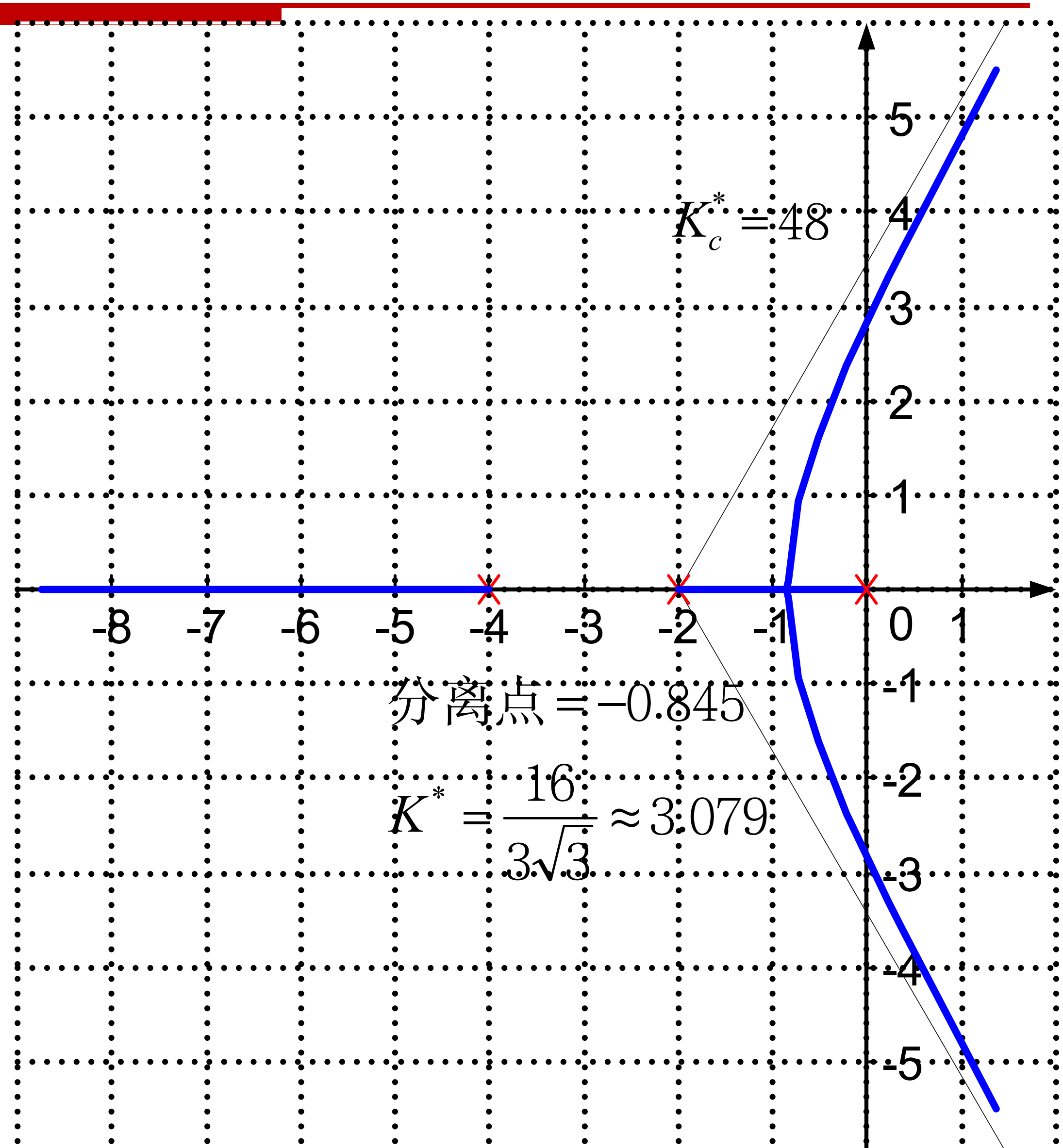
5. 求分离会合点： 由特征方程可得 $K^*=-(s^3+6s^2+8s)$

$$\frac{dK^*}{ds}=-(3s^2+12s+8)=0\qquad s=-2\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\approx\begin{cases}-0.845\\ -3.155\end{cases}\qquad K^*=\pm\frac{16}{3\sqrt{3}}\approx\pm 3.079$$

由图知只有$K^*>0$的点在根轨迹上， 所以-0.845是分离会合点。

4.2 绘制根轨迹的基本法则





[例]开环传递函数为：$G_o(s)=\dfrac{K^*}{s(s+2)(s+4)(s+6)}$ 画根轨迹。

解：1.求出开环零极点，即：$p_1=0,\ p_2=-2,\ p_3=-4,\ p_3=-6$

2.实轴上的根轨迹：$[-6,\ -4]\ [-2,0]$

3.渐近线 $\sigma_a=\dfrac{0-2-4-6}{4}=-\dfrac{12}{4}=-3$ $\quad \varphi_a=\dfrac{(2k+1)180°}{4}=\begin{cases}\pm 45°\\ \pm 135°\end{cases}$

4.求与虚轴的交点，此时特征方程为 $s^4+12s^3+44s^2+48s+K^*=0$

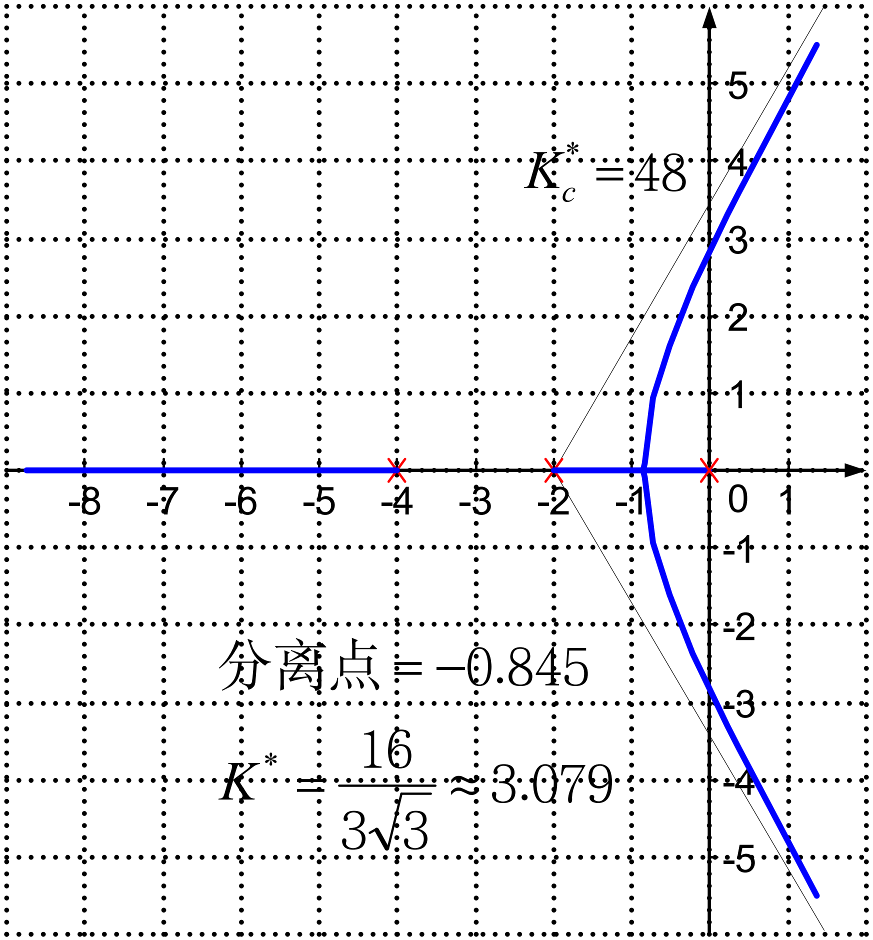
将 $s=j\omega$ 代入得：$\omega^4-j12\omega^3-44\omega^2+j48\omega+K^*=0$

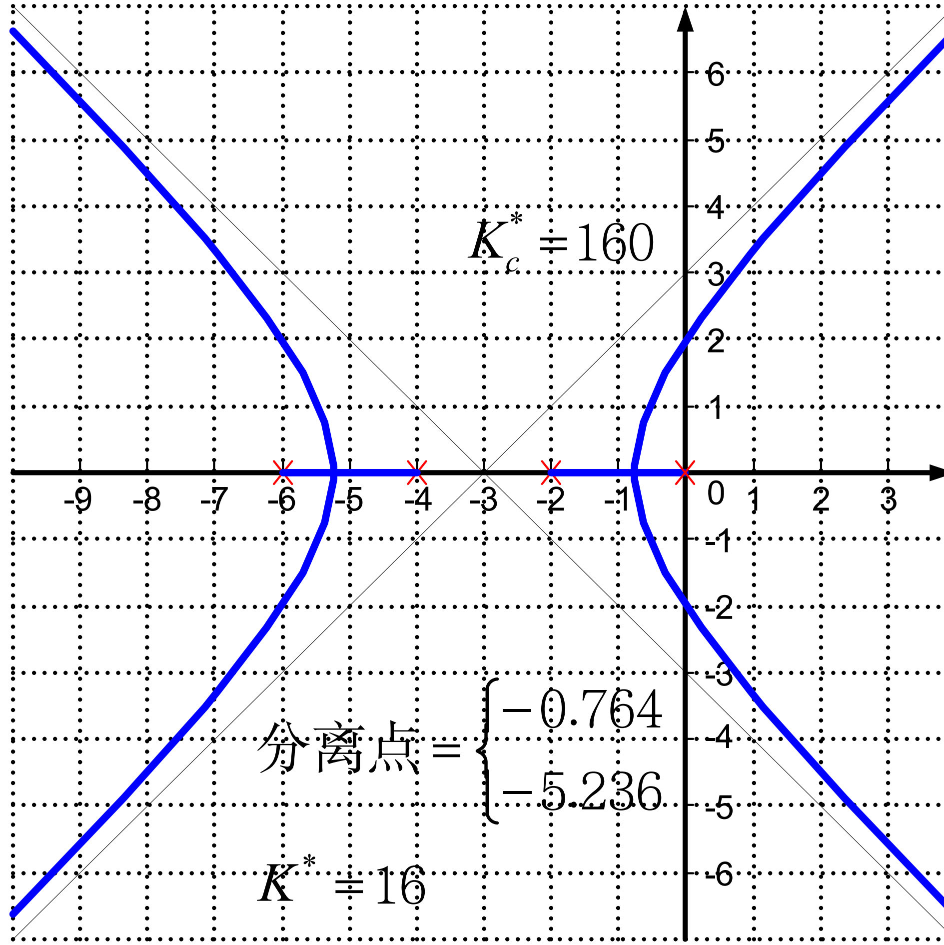
$$\begin{aligned}&\omega^4-44\omega^2+K^*=0\\&-12\omega^3+48\omega=0\end{aligned}\qquad \omega=\begin{cases}0\\ \omega=\pm 2\end{cases}\qquad K_c^*=\begin{cases}0 & \omega_c=0\\ 160 & \omega_c=\pm 2\end{cases}$$

5.求分离会合点：由特征方程可得 $K^*=-(s^4+12s^3+44s^2+48s)$

$$\frac{dK^*}{ds}=-(4s^3+36s^2+88s+48)=0\qquad s=\begin{cases}-3 & K^*=-9\\ -3\pm\sqrt{5}=\begin{cases}-0.764\\ -5.236\end{cases} & K^*=16\end{cases}$$

只有K*>0的点在根轨迹上。





$$G_o(s) = \frac{K^*}{s(s+2)(s+4)}$$

$$G_o(s) = \frac{K^*}{s(s+2)(s+4)(s+6)}$$

②增加开环零点对根轨迹的影响

一般情况下，在原开环传递函数零极点的左边增加零点会使原根轨迹向左半部移动，举例说明如下。

[例]开环传递函数为：$G_o(s)=\dfrac{K^*(s+4)}{s(s+2)}$ 画根轨迹。

解: 1.求出开环零极点，即：$-p_1=0,-p_2=-2,-z=-4$

2.实轴上的根轨迹：$[-\infty,\ -4]\ [-2,0]$

3.渐近线只有一条，即负实轴。

4.求与虚轴的交点，此时特征方程为 $s^2+(2+K^*)s+4K^*=0$

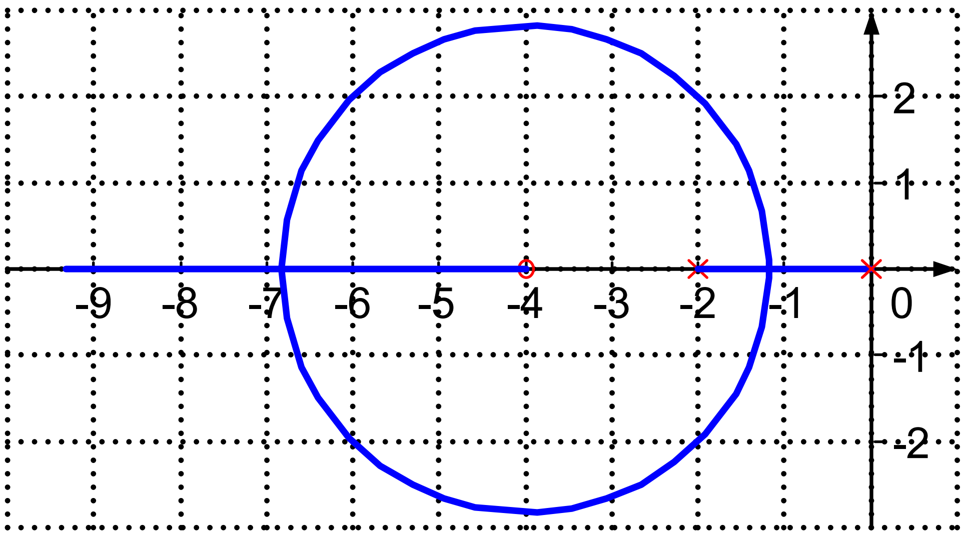
将 $s=j\omega$ 代入得：$-\omega^2+j(2+K^*)\omega+4K^*=0$

$-\omega^2+4K_c^*=0$ $\quad (2+K^*)\omega=0$ $\quad \omega=0$ $\quad K_c^*=0$

5.求分离会合点：由特征方程可得 $K^* = -\dfrac{s^2+2s}{s+4}$

$$\frac{dK^*}{ds} = -\frac{s^2+8s+8}{(s+4)^2} = 0 \qquad s = -4 \pm 2\sqrt{2} = \begin{cases} -1.17 & K^* = 0.343 \\ -6.83 & K^* = 11.657 \end{cases}$$

可见这两点都在根轨迹上，所以都是分离会合点。



与无零点根轨迹比较可见根轨迹向左半平面弯曲和移动。

增加开环零极点对根轨迹的影响

- 增加开环零点对根轨迹的影响

 （1）改变渐近线的倾角，减少渐近线的条数。

 （2）相当于增加微分作用，一般可使根轨迹向左半s平面弯曲或移动，增强系统的相对稳定性，增大系统的阻尼，过渡过程时间缩短。

 （3）增加的开环零点越接近坐标原点，微分作用越强，系统的相对稳定性越好。

- 增加开环极点对根轨迹的影响

 （1）改变渐近线的倾角，增加渐近线的条数。

 （2）相当于增加积分作用，一般可使根轨迹向右半s平面弯曲或移动，降低系统的相对稳定性，减小系统的阻尼，过渡过程时间加长。

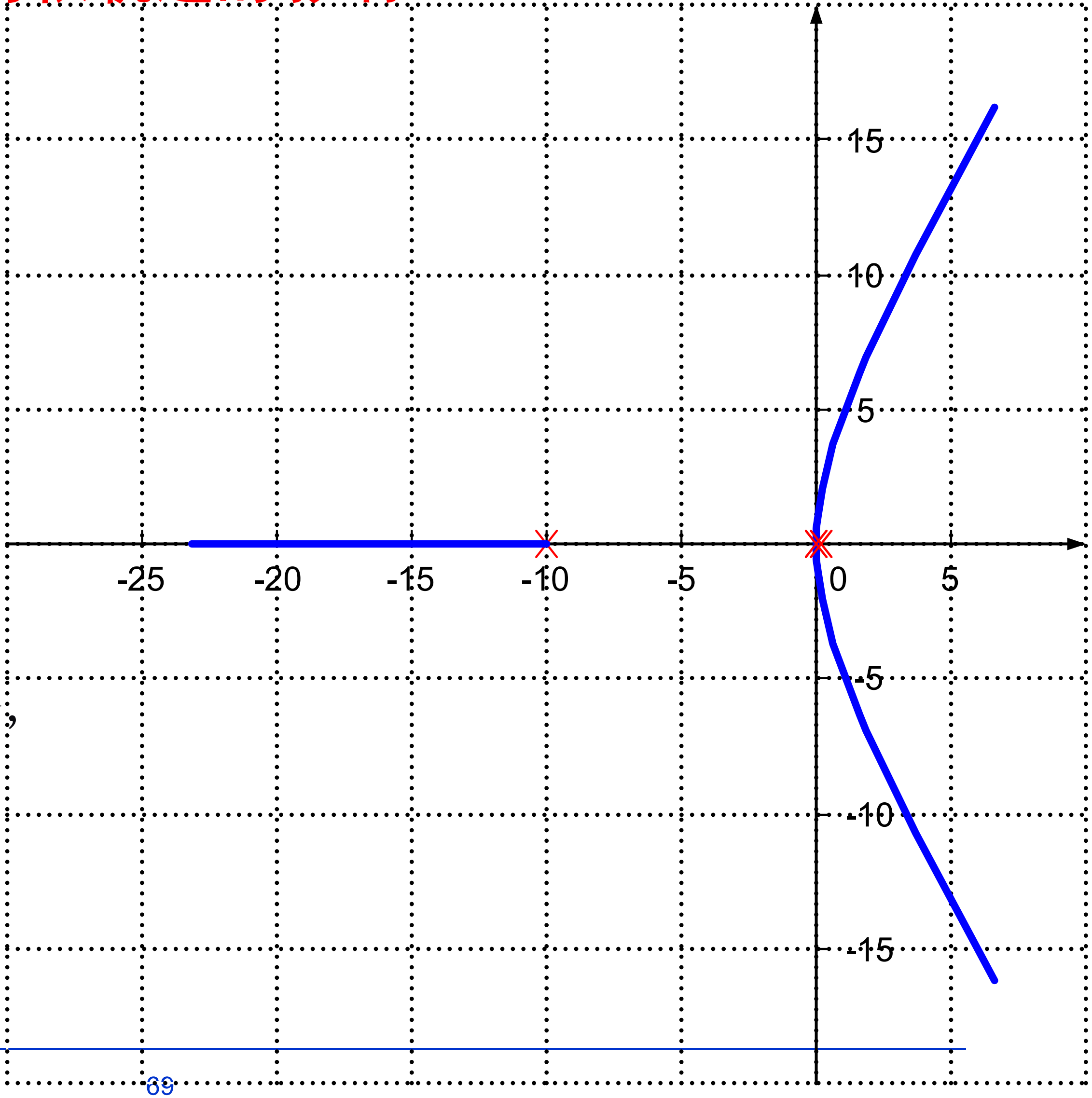
 （3）增加的开环极点越接近坐标原点，积分作用越强，系统的相对稳定性越差。

2. 移动开环零点和极点对根轨迹的影响

[例]开环传递函数为：

$$G_o(s) = \frac{K^*}{s^2(s+10)}$$

画根轨迹。



这是结构不稳定系统的根轨迹。

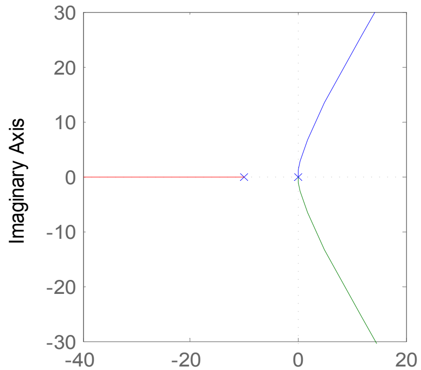
为了让该系统稳定，则应加入比例+微分控制器，相当于加入一个零点。

下面讨论零、极点为不同值对根轨迹的影响

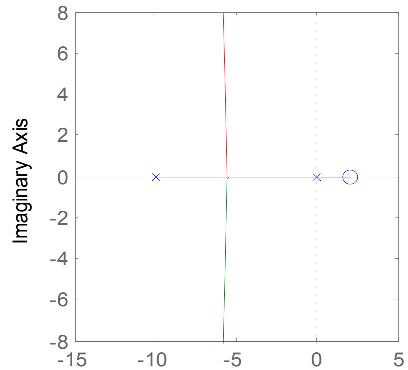
4.2 绘制根轨迹的基本法则

①移动开环零点对根轨迹的影响

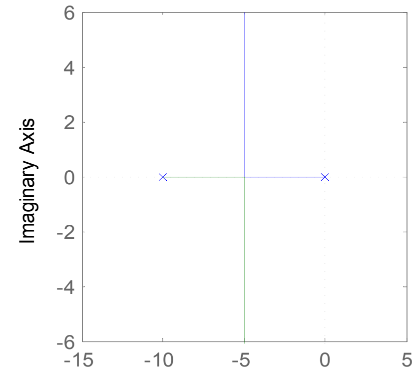
$$G_o(s)=\frac{K^*}{s^2(s+10)}$$



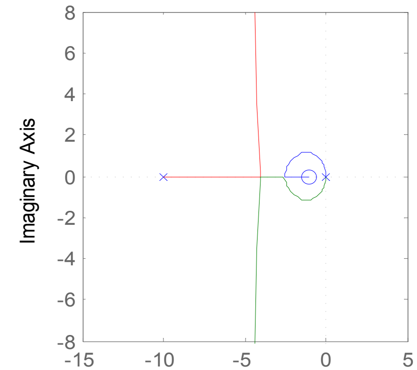
$$G_o(s)=\frac{K^*(s-2)}{s^2(s+10)}$$



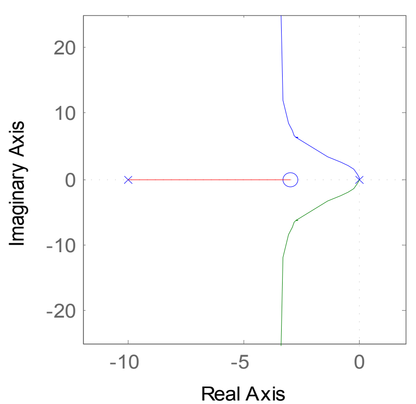
$$G_o(s)=\frac{K^*(s+0)}{s^2(s+10)}$$



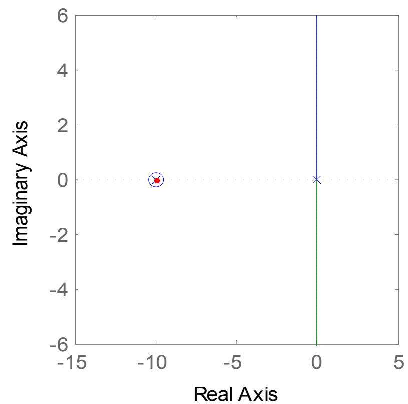
$$G_o(s)=\frac{K^*(s+1)}{s^2(s+10)}$$



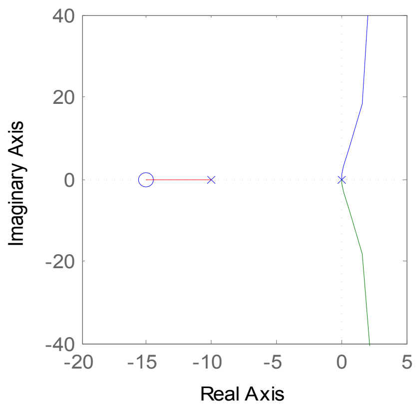
$$G_o(s)=\frac{K^*(s+3)}{s^2(s+10)}$$



$$G_o(s)=\frac{K^*(s+10)}{s^2(s+10)}$$



$$G_o(s)=\frac{K^*(s+15)}{s^2(s+10)}$$

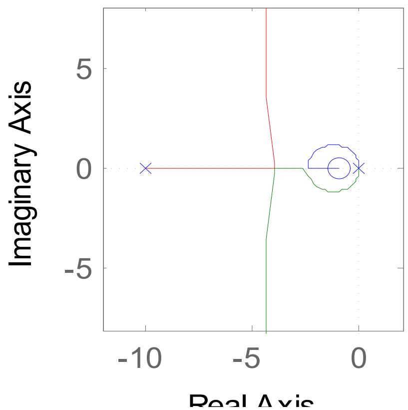


开环零点越靠近虚轴，作用越强，对系统闭环动态性能及稳定性的改善愈明显。

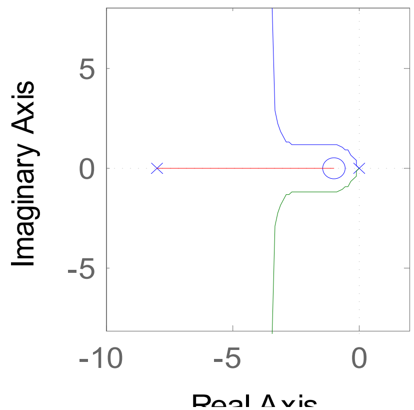
4.2 绘制根轨迹的基本法则

②移动开环极点对根轨迹的影响

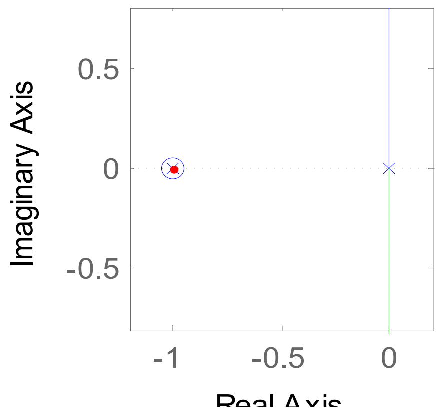
$$G_o(s)=\frac{K^*(s+1)}{s^2(s+10)}$$



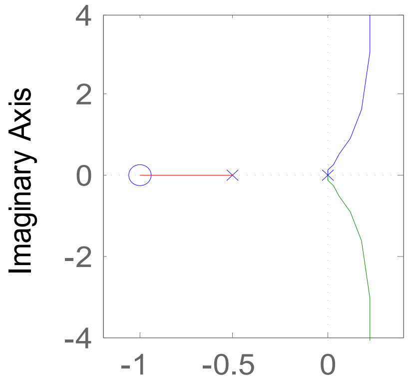
$$G_o(s)=\frac{K^*(s+1)}{s^2(s+8)}$$



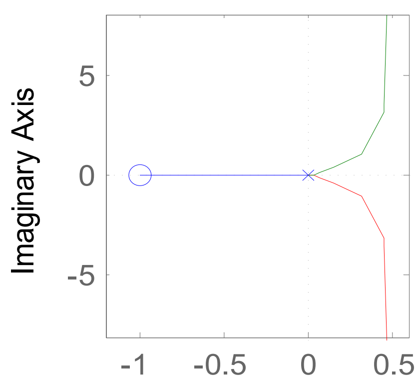
$$G_o(s)=\frac{K^*(s+1)}{s^2(s+1)}$$



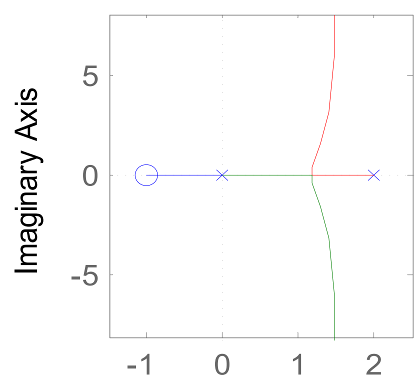
$$G_o(s)=\frac{K^*(s+1)}{s^2(s+0.5)}$$



$$G_o(s)=\frac{K^*(s+1)}{s^2(s+0)}$$



$$G_o(s)=\frac{K^*(s+1)}{s^2(s-2)}$$



开环极点越远离虚轴(左)，系统闭环稳定性越好。

4.2 绘制根轨迹的基本法则

注意!

❖ 不要企图增加位于右半平面的开环零点或极点，因为开环零点和极点是根轨迹的终点和起点，它们将根轨迹引向右半平面，使系统稳定性变差。

- 左侧负实轴上新增加的零点和极点，距原点近的影响较大。

4.2 绘制根轨迹的基本法则

例： 使用MATLAB画根轨迹：

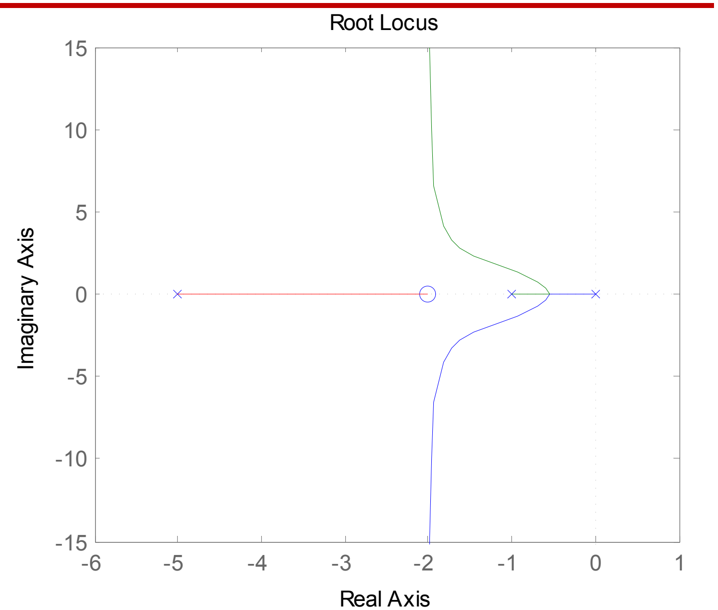
试画该系统的根轨迹图。

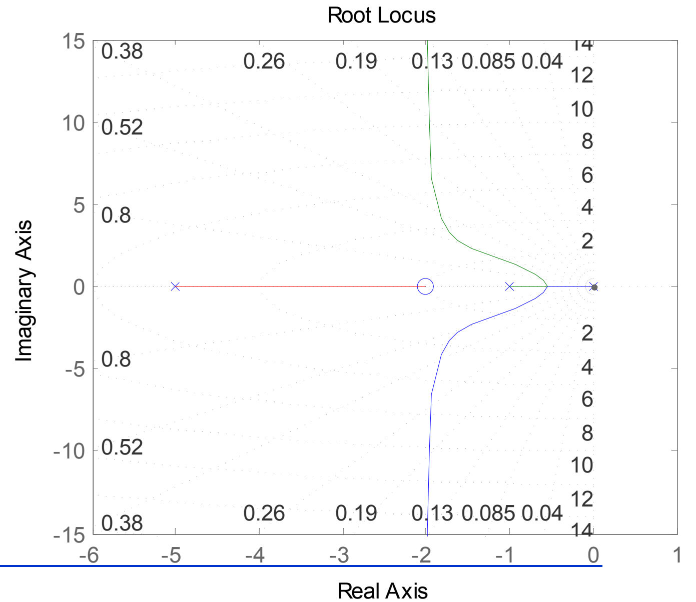
$$G_o(s)=\frac{(s+2)}{s(s+1)(s+5)}$$

解：

```
N=[0 0 1 2];
D=[1 6 5 0];
Rlocus(N,D);
```

```
N=[1 2];
D=conv([1 0],conv([1 1],[1 5]));
Rlocus(N,D);
grid on;
```





Thank You !