理论力学

Engineering mechanics
Theoretical mechanics

静 力 学

第二章 平面力系

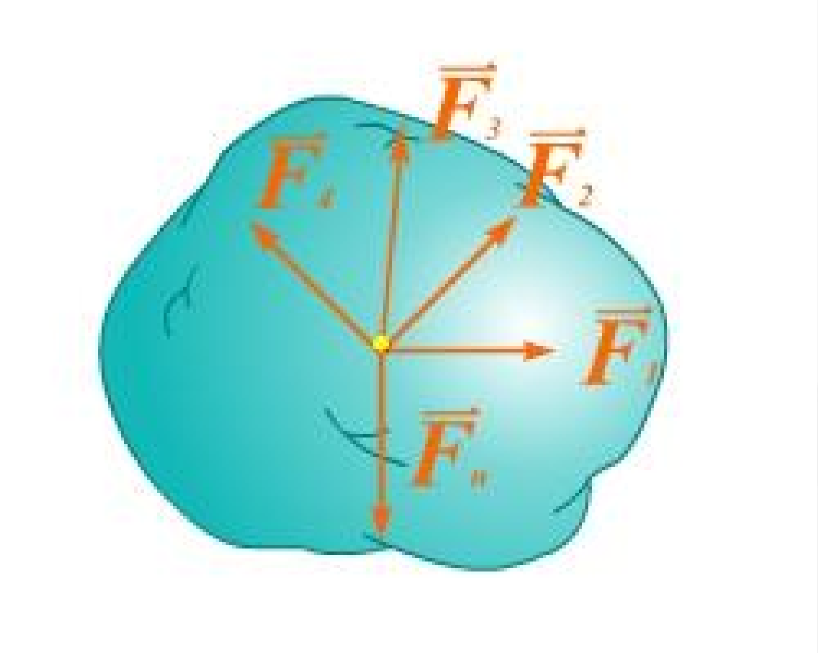
作用在刚体上的一系列力组成的系统，简称力系。平面汇交力系是指各力的作用线都在同一平面内且汇交于一点的力系。

当力系中各力的作用线处于同一平面内且任意分布时，称其为平面任意力系。

平面力偶系是指力系中都是一些力偶，而且力偶的作用面都在同一平面内。

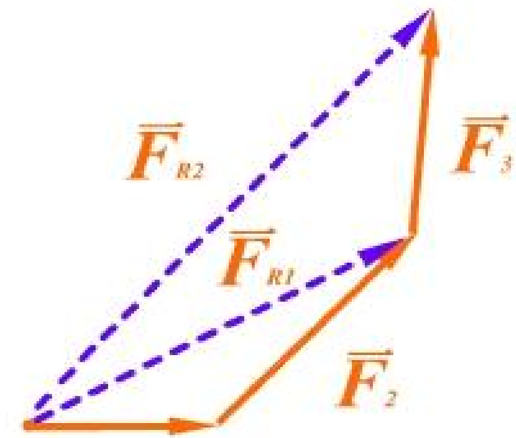
§2-1　平面汇交力系

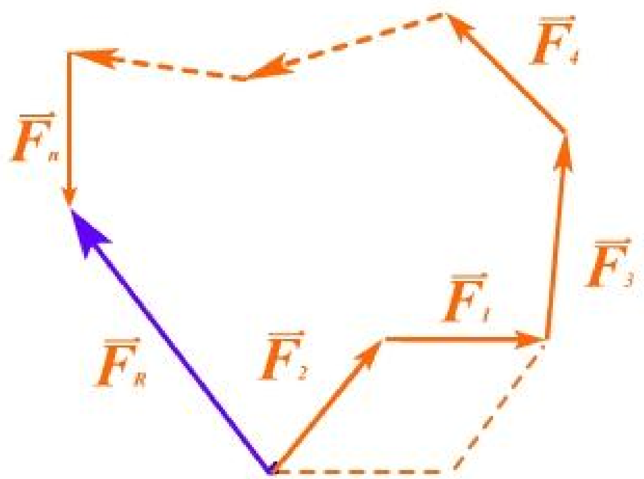
一、平面汇交力系合成的几何法——力多边形规则



$$\vec{F}_{R1} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_{R2} = \vec{F}_{R1} + \vec{F}_{R3} = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i$$





$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum \vec{F}_i$$

力多边形

力多边形规则

二、平面汇交力系平衡的几何条件

平衡条件 $\sum \vec{F}_i = 0$

平面汇交力系平衡的必要和充分条件是：

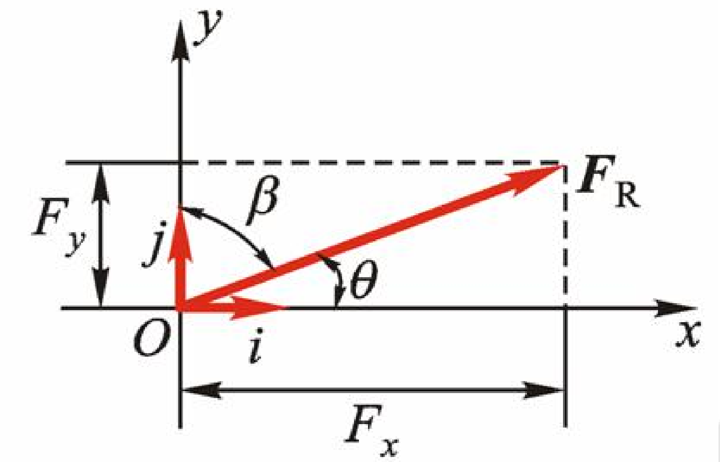
该力系的力多边形自行封闭.

三、平面汇交力系合成的解析法

合力 $\vec{F}_{\mathrm{R}}$ 在x轴，y轴投影分别为

$$F_{\mathrm{R}x} = F_{\mathrm{R}} \cos\theta$$

$$F_{\mathrm{R}y} = F_{\mathrm{R}} \cos\beta$$

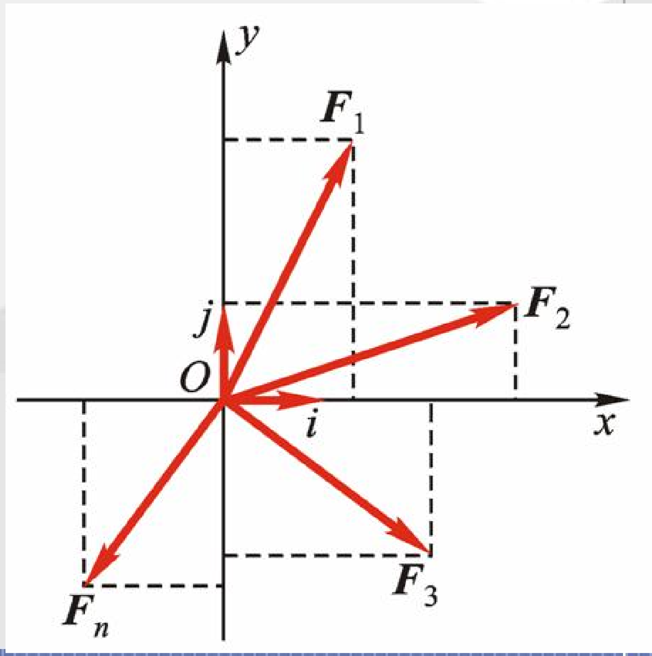


合力等于各分力矢量和

$$\vec{F}_{\mathrm{R}} = \sum \vec{F}_i$$

由合矢量投影定理，得合力投影定理

$$F_{\mathrm{R}x} = \sum F_{ix} \qquad F_{\mathrm{R}y} = \sum F_{iy}$$



合力的大小为：

$$F_{\mathrm{R}} = \sqrt{F_{\mathrm{R}x}{}^{2} + F_{\mathrm{R}y}{}^{2}}$$

方向为：

$$\cos(\vec{F}_{\mathrm{R}}, \vec{i}) = \frac{\sum F_{ix}}{F_{\mathrm{R}}} \qquad \cos(\vec{F}_{\mathrm{R}}, \vec{j}) = \frac{\sum F_{iy}}{F_{\mathrm{R}}}$$

作用点为力的汇交点.

四、平面汇交力系的平衡方程

平衡条件 $\vec{F}_{\mathrm{R}} = 0$

平衡方程 $\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$

例2-1

已知：

求：

1. 水平拉力　　　　　　时，碾子对地面及障碍物的压力？

2. 欲将碾子拉过障碍物，水平拉力　至少多大？

3. 力　沿什么方向拉动碾子最省力，及此时力　多大？

解：1. 取碾子，-受力图.

用几何法，按比例画封闭力四边形

2. 碾子拉过障碍物， 应有

用几何法解得

3. 解得

例2-2

已知：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　,各杆自重不计；

求：　　　杆及铰链　　的受力.

解：　为二力杆，取　杆，画受力图.

用几何法，画封闭力三角形.

按比例量得

例2-3　已知：图示平面共点力系，　　　，　　　，

，求：此力系的合力.

解：用解析法

例2-4

已知：系统如图，不计杆、轮自重，忽略滑轮大小，P=20kN；

求：系统平衡时，杆AB，BC受力.

解： AB、BC杆为二力杆，取滑轮B（或点B），画受力图. 建图示坐标系

例2-5

已知： F=3kN， l=1500mm， h=200mm，忽略自重；

求：平衡时，压块C对工件与地面的压力，AB杆受力.

解： AB、BC杆为二力杆.

取销钉B.

选压块*C*

§2-2 平面力对点之矩 平面力偶理论

一、平面力对点之矩（力矩）

力矩作用面， 称为矩心，
到力的作用线的垂直距离 称为力臂

两个要素：

1. 大小：力 与力臂的乘积

2. 方向：转动方向

力对点之矩是一个代数量，它的绝对值等于力的大小与力臂的乘积，它的正负：力使物体绕矩心逆时针转向时为正，反之为负. 常用单位 或

二、合力矩定理与力矩的解析表达式

合力矩定理：平面汇交力系的合力对平面内任一点之矩等于所有各分力对于该点之矩的代数和。

该结论适用于任何合力存在的力系

三、力偶和力偶矩

力偶

由两个等值、反向、不共线的（平行）力组成的力系称为力偶，记作

力偶矩

力偶中两力所在平面称为力偶作用面.

力偶两力之间的垂直距离称为力偶臂.

两个要素

a. 大小：力与力偶臂乘积

b. 方向：转动方向

力偶矩

四、同平面内力偶的等效定理

定理： 同平面内的两个力偶，如果力偶矩相等（大小，正负），则两力偶彼此等效。

推论：

任一力偶可在它的作用面内任意转移，而不改变它对刚体的作用。因此力偶对刚体的作用与力偶在其作用面内的位置无关。

只要保持力偶矩不变(大小，正负)，可以同时改变力偶中力的大小与力偶臂的长短，对刚体的作用效果不变.

力偶中的力偶臂和力的大小都不是力偶的特征量，只有力偶矩是平面力偶作用的唯一度量。

$=$ $=$

$=$ $=$

五、平面力偶系的合成和平衡条件

已知：

任选一段距离d

$=$ $=$

=

=

=

平面力偶系平衡的充要条件 ，有如下平衡方程

平面力偶系平衡的必要和充分条件是：所有各力偶矩的代数和等于零.（力偶只能和力偶平衡）

例2-6

已知:

求:

解: 直接按定义

按合力矩定理

例2-7

已知：

求：　平衡时，　　杆的拉力.

解：　　为二力杆，取踏板

由杠杆平衡条件

解得

例2-8 已知：

求：合力及合力作用线位置.

解： 取微元如图

由合力矩定理

得

例2-9

已知：

求：　光滑螺柱　　所受水平力.

解： 由力偶只能由力偶平衡的性质，

其受力图为

解得

例2-10

已知

求：平衡时的　　　及铰链　　　处的约束力.

解： 取轮, 由力偶只能由力偶平衡的性质, 画受力图.

解得

取杆 ，画受力图.

解得

§2-3　平面任意力系的简化

当力系中各力的作用线处于同一平面内且任意分布时，称其为平面任意力系.

平面任意力系实例

一. 力的平移定理

可以把作用在刚体上点　的力　平行移到任一点　，但必须同时附加一个力偶，这个附加力偶的矩等于原来的力　对新作用点　的矩.

实例

二. 平面任意力系向作用面内一点简化・主矢和主矩

主矢

主矩

主矢与简化中心无关，而主矩一般与简化中心有关.

主矢大小

方向

作用点　　作用于简化中心上

主矩

平面固定端约束

三. 平面任意力系的简化结果分析

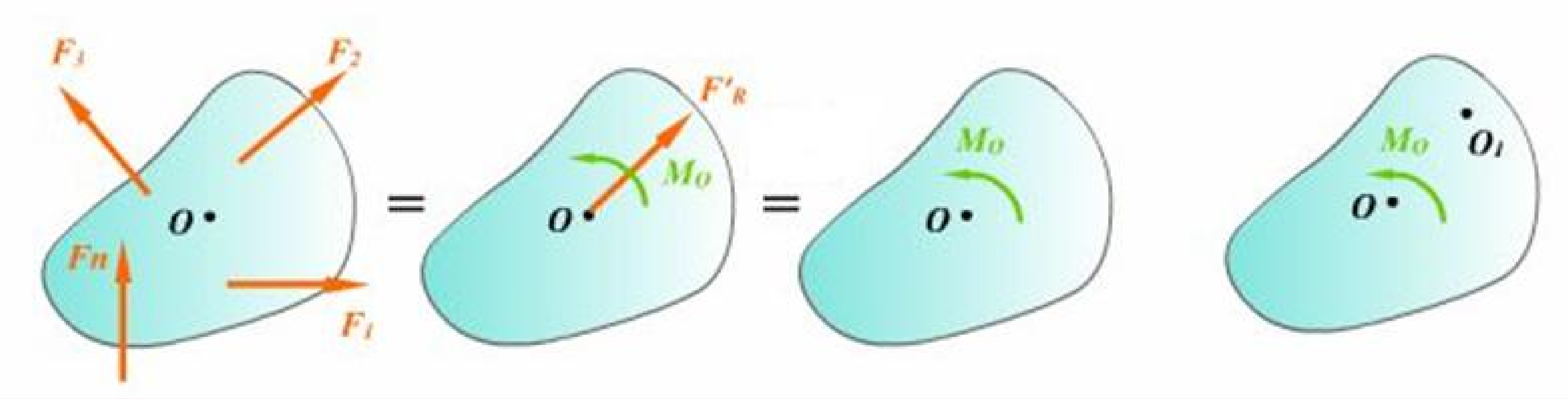
简化成一个合力
该合力作用线过简化中心

简化成一个合力，
该合力作用线距简化中心

合力矩定理

简化成一个合力偶

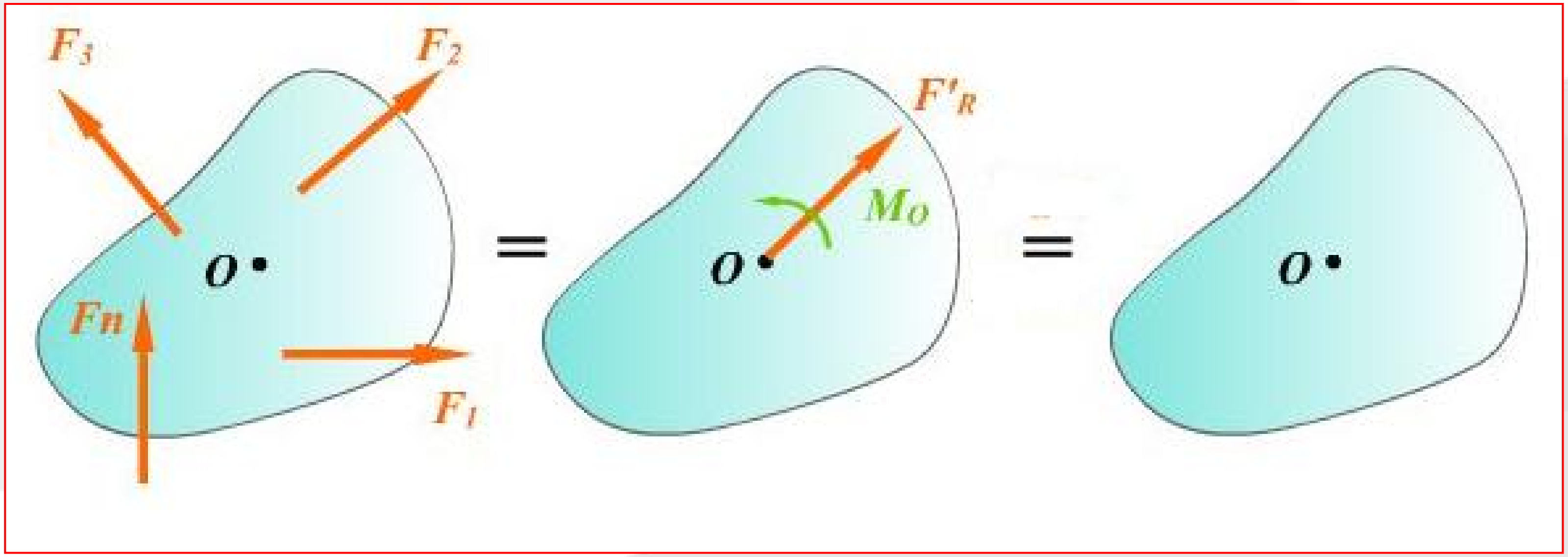
与简化中心的位置无关



若为　　点，如何?

$\overline{F}'_{\mathrm{R}} = 0 \qquad M_O = 0$ ⟹ 刚体平衡，平衡力系

与简化中心的位置无关



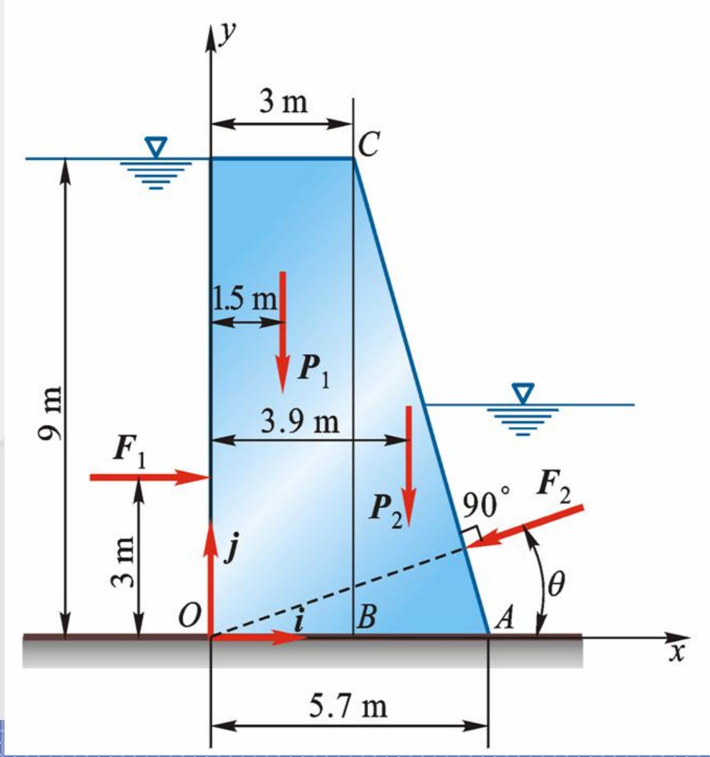
例2-11

已知：$P_1 = 450\text{kN}, P_2 = 200\text{kN}, F_1 = 300\text{kN}, F_1 = 70\text{kN}$

求：力系向 O 点的简化结果；

合力与OA 的交点到点O 的距离 x ；

合力作用线方程。

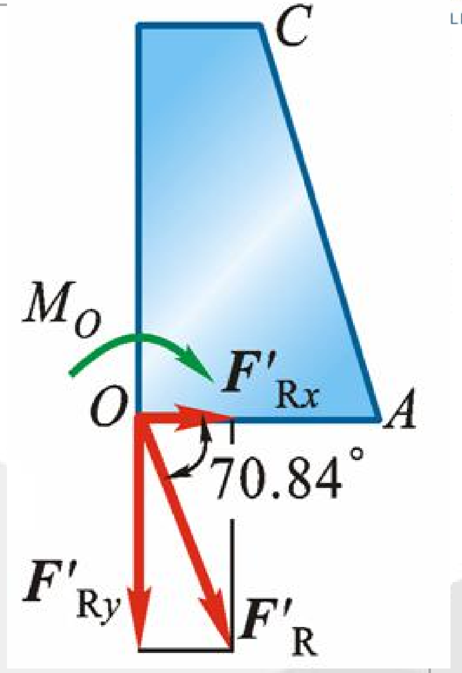


解：

（1）主矢：

$$\sum F_x = F_1 - F_2\cos\theta = 232.9\text{kN}$$

$$\sum F_y = -P_1 - P_2 - F_2\sin\theta = -670.1\text{kN}$$



$$\Rightarrow \quad F_R' = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = 709.4\text{kN}$$

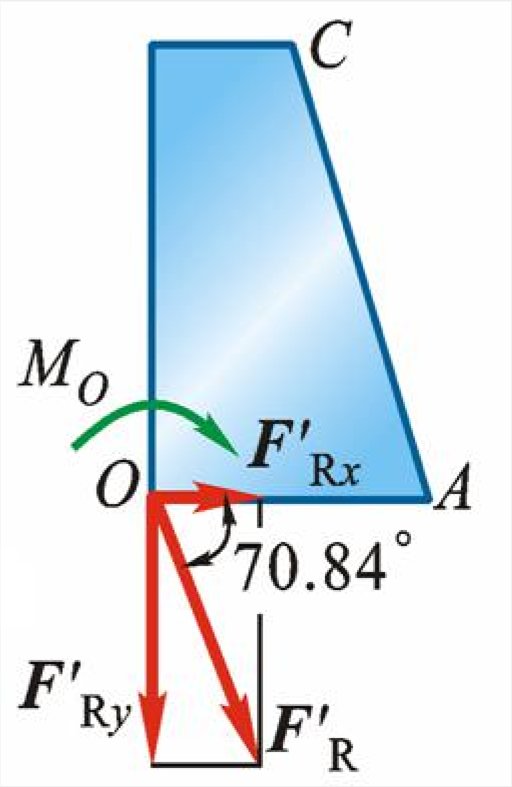
$$\cos(\vec{F}_R', \vec{i}) = \frac{\sum F_x}{F_R'} = 0.3283, \quad \cos(\vec{F}_R', \vec{j}) = \frac{\sum F_y}{F_R'} = -0.9446$$

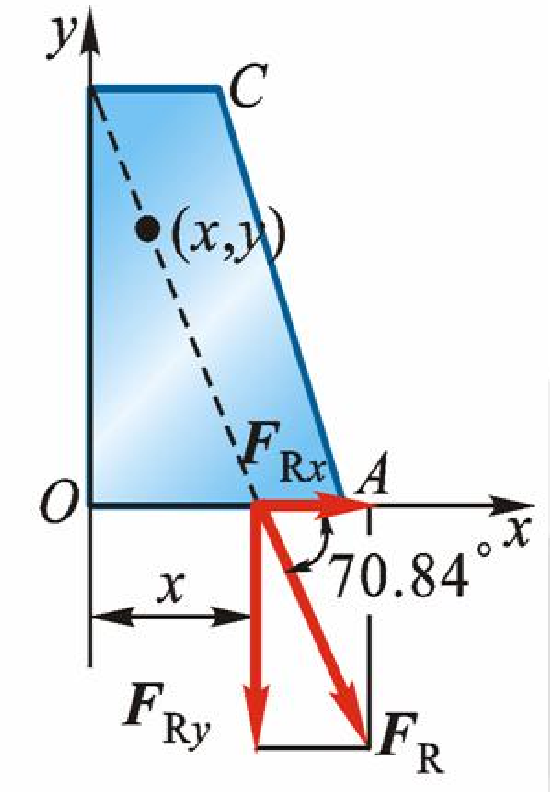
$$\Rightarrow \quad \angle(\vec{F}_R', \vec{i}) = \pm 70.84^\circ, \quad \angle(\vec{F}_R', \vec{j}) = 180^\circ \pm 19.16^\circ$$

主矩：

$$M_O = \sum M_O(\vec{F}) = -3F_1 - 1.5P_1 - 3.9P_2 = -2355\text{kN}\cdot\text{m}$$

（2）求合力及其作用线位置：





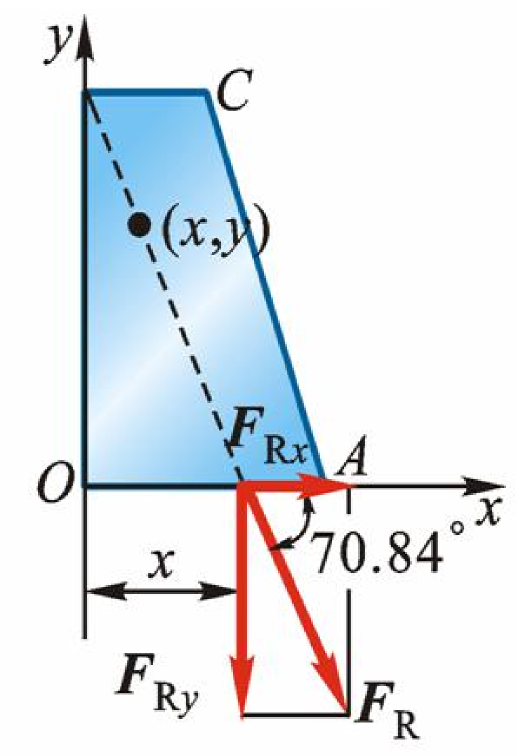
$$x=\frac{d}{\cos\left(90^0-70.84^0\right)}=3.514\text{m}$$

（3）求合力作用线方程：

$$M_O = M_O\left(\vec{F}_{\mathrm{R}}\right) = x \cdot F_{\mathrm{R}y} - y \cdot F_{\mathrm{R}x} = x \cdot F_{\mathrm{R}y}^{'} - y \cdot F_{\mathrm{R}x}^{'}$$

$$\Rightarrow -2355 = x(-670.1) - y(232.9)$$

$$\Rightarrow 607.1x - 232.9y - 2355 = 0$$



§2-4 平面任意力系的平衡条件和平衡方程

一. 平面任意力系的平衡方程

平面任意力系平衡的充要条件是： $\overline{F}_R' = 0$

力系的主矢和对任意点的主矩都等于零 $M_O = 0$

因为 $F_R' = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$ $M_O = \sum M_O(\overline{F}_i)$

平面任意力系的平衡方程

$$\boxed{\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O = 0 \end{cases}}$$

一般式

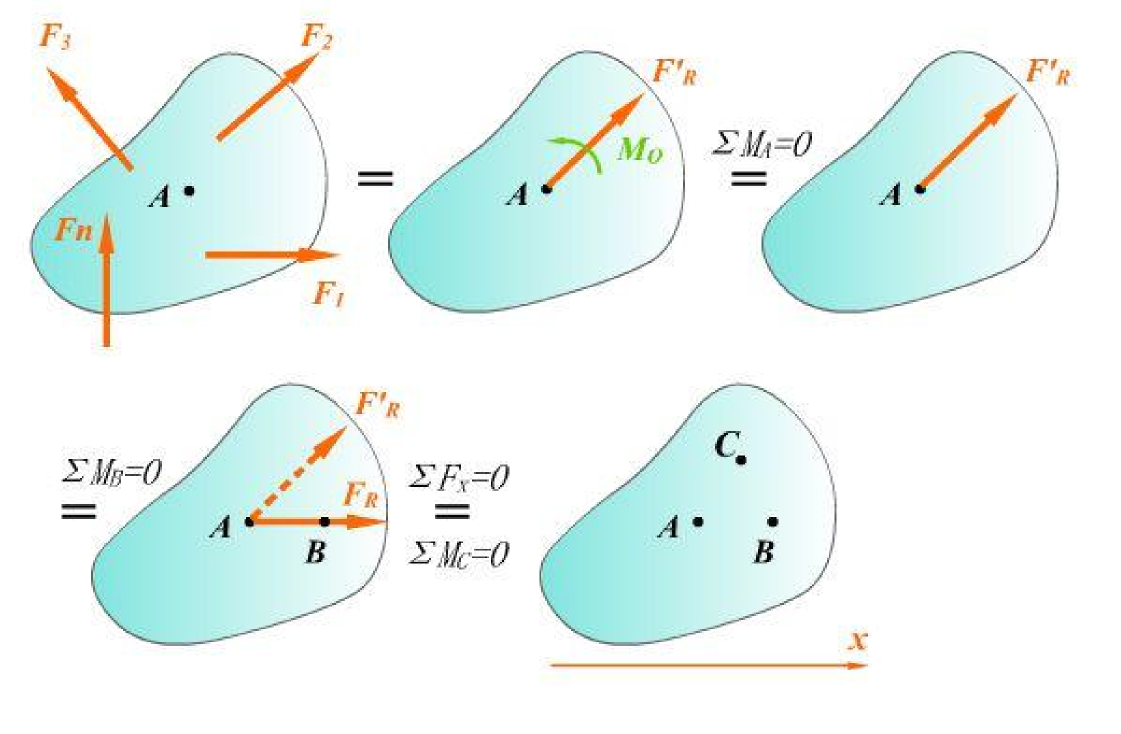
平面任意力系平衡的解析条件是：所有各力在两个任选的坐标轴上的投影的代数和分别等于零，以及各力对于任意一点的矩的代数和也等于零.

平面任意力系的平衡方程另两种形式

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \end{cases}$$

二矩式

两个取矩点连线，不得与投影轴垂直

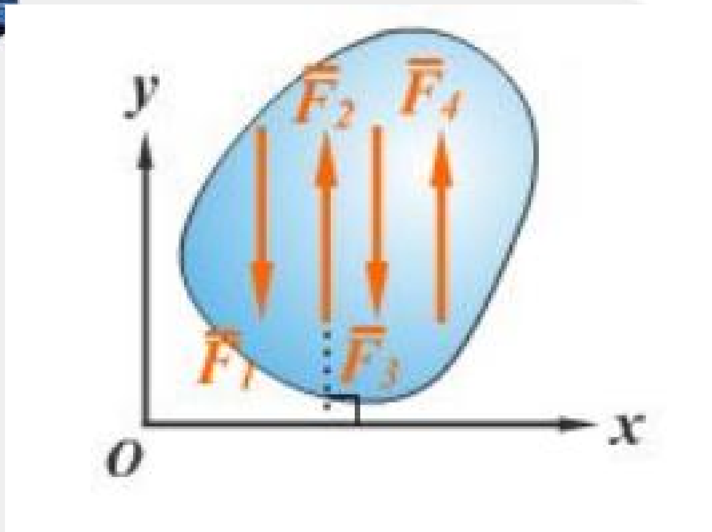


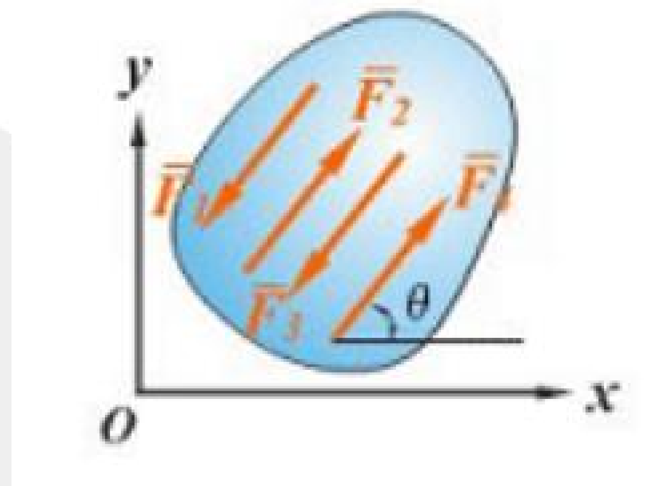
$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases}$$

三矩式

三个取矩点，不得共线

二. 平面平行力系的平衡方程





$$\sum F_x \equiv 0 \qquad 0+0+0+\cdots=0$$

$$\sum F_x = 0 \quad -F_1\cos\theta + F_2\cos\theta - F_3\cos\theta + \cdots = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad -F_1\sin\theta + F_2\sin\theta - F_3\sin\theta + \cdots = 0$$

$$\boxed{\begin{cases}\sum F_y = 0\\ \sum M_A = 0\end{cases}}$$

各力不得与投影轴垂直

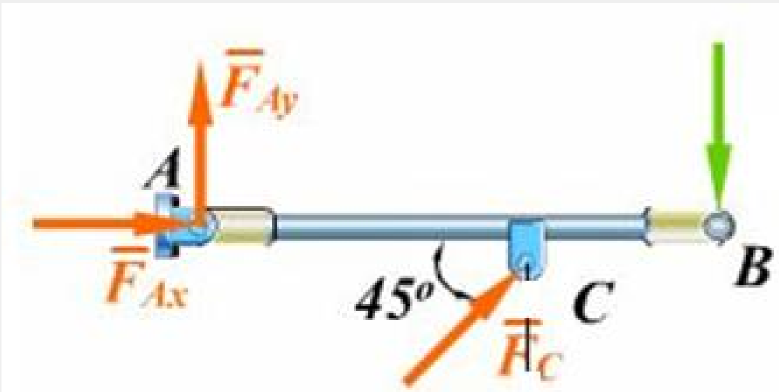
$$\boxed{\begin{cases}\sum M_A = 0\\ \sum M_B = 0\end{cases}}$$

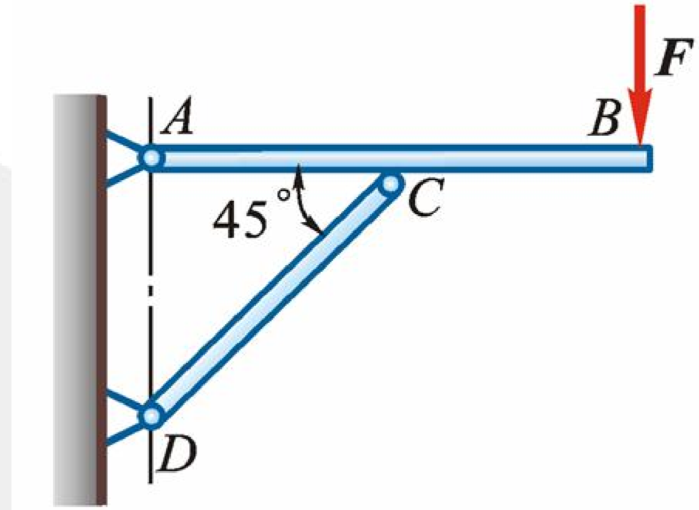
两点连线不得与各力平行

例2-12

已知：$AC = CB = l, F = 10\,\text{kN}$

求： 铰链 A 和 DC 杆受力.





解： 取 AB梁，画受力图.

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F_C \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_C \sin 45^\circ - F = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad F_C \cos 45^\circ \cdot l - F \cdot 2l = 0$$

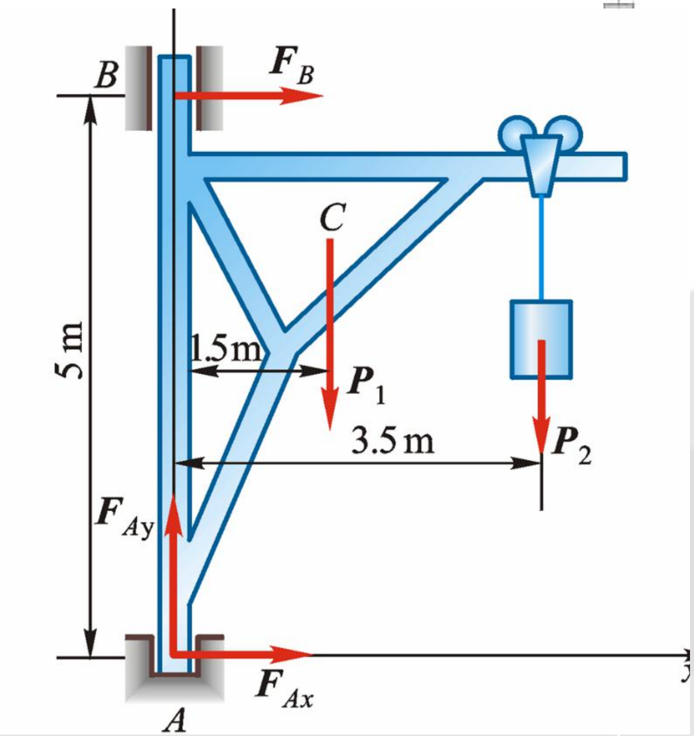
$F_C = 28.28\text{kN}, F_{Ax} = -20\text{kN}, F_{Ay} = -10\text{kN}$

例2-13

已知： $P_1=10\text{kN},\ P_2=40\text{kN}$,尺寸如图。

求： 轴承 A,B 处的约束力.

解： 取起重机，画受力图.



$$\sum F_x=0 \qquad F_{Ax}+F_B=0$$

$$\sum F_y=0 \qquad F_{Ay}-P_1-P_2=0$$

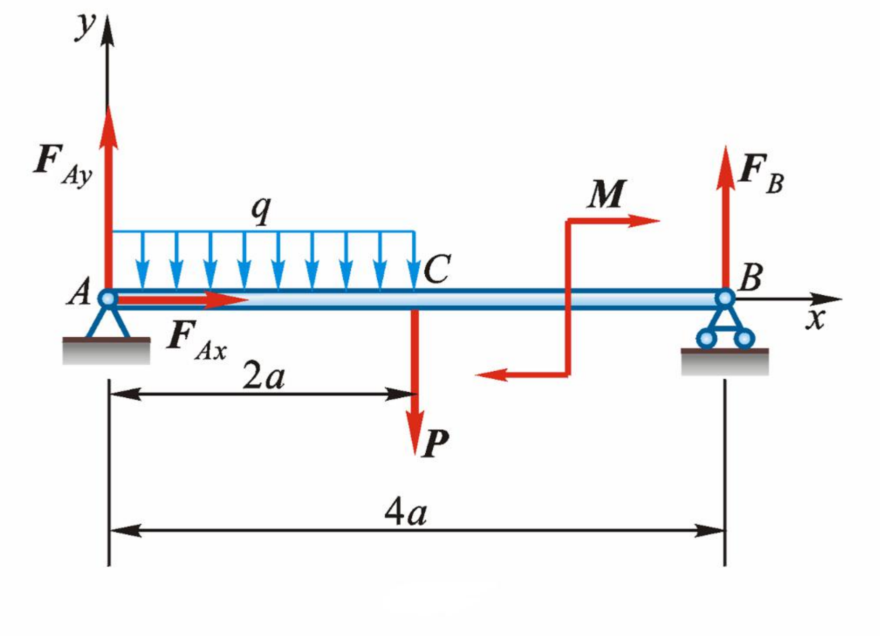
$$\sum M_A=0 \qquad -F_B\cdot 5-1.5\cdot P_1-3.5\cdot P_2=0$$

$$\Rightarrow \quad F_{Ay}=50\text{kN} \qquad F_B=-31\text{kN} \qquad F_{Ax}=31\text{kN}$$

例2-14

已知： $P, q, a, M = qa$ 。

求： 支座 A, B 处的约束力.



解： 取 AB梁，画受力图.

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad F_B \cdot 4a - M - P \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 0$$

$$F_B = \frac{3}{4}P + \frac{1}{2}qa$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} - q \cdot 2a - P + F_B = 0$$

$$F_{Ay} = \frac{P}{4} + \frac{3}{2}qa$$

例2－15

已知：

求：固定端　处约束力.

解： 取　型刚架，画受力图.

其中 $F_1=\dfrac{1}{2}q\times 3l=30\mathbf{kN}$

$\sum F_x=0 \quad F_{Ax}+F_1-F\sin 60^\circ=0$

$\sum F_y=0 \quad F_{Ay}-P-F\cos 60^\circ=0$

$\sum M_A=0$

$M_A-M-F_1\cdot l+F\cos 60^\circ\cdot l+F\sin 60^\circ\cdot 3l=0$

$F_{Ax}=316.4\text{kN} \quad F_{Ay}=300\text{kN}$

例2-16 已知：

求：（1）起重机满载和空载时不翻倒，平衡载重 ；

（2） ，轨道 给起重机轮子的约束力。

解：取起重机，画受力图.

满载时，

为不安全状况

空载时，

为不安全状况

时

§2-5　物体系的平衡·静定和超静定问题

§2-6　平面简单桁架的内力计算