§ 10.4 静电场的环路定理　电势能

一. 静电力作功的特点

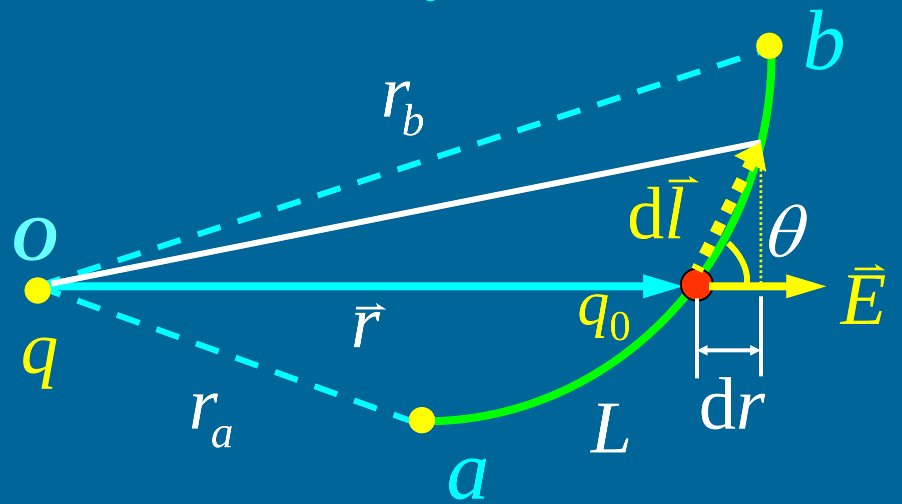
- 单个点电荷 q 产生的电场中移动试验电荷 q_0

$$A=\int_{a(L)}^{b}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{a(L)}^{b}q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{a(L)}^{b}q_0 E\,\mathrm{d}l\cos\theta$$

$$\boxed{\mathrm{d}l\cos\theta=\mathrm{d}r}$$

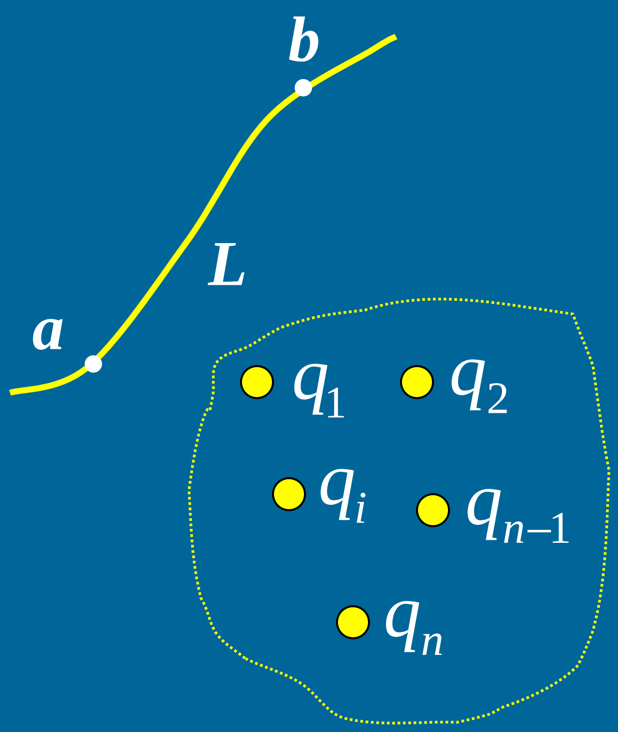


$$=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

(与路径无关)

- 任意带电体系产生的电场中

电荷系q_1、q_2、…的电场中，移动q_0，有



$$A_{ab}=\int_{a(L)}^{b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{a(L)}^{b}q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{a(L)}^{b}q_0\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i\right)\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{a(L)}^{b}q_0\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\sum_{i}\frac{q_iq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{ai}}-\frac{1}{r_{bi}}\right)$$

结论

电场力作功只与始末位置有关，与路径无关，所以静电力是保守力，静电场是保守力场。

二. 静电场的环路定理

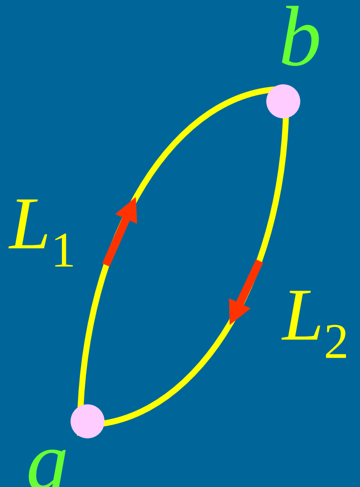
在静电场中，沿闭合路径移动 q_0，电场力作功

$$A_{aba} = \oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{a(L_1)}^{b} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{b(L_2)}^{a} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{a(L_1)}^{b} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_{a(L_2)}^{b} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= 0$$

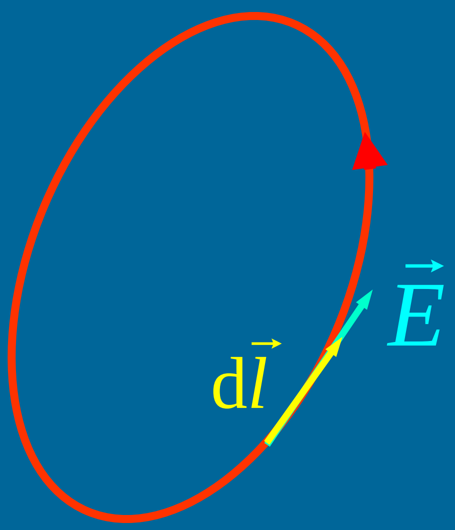


$$\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$$

——环路定理（场强的环流为零）

例：　由静电场的环路定理证明：静电场的电场线不能是闭合曲线

证：反证法，设静电场的某条电场线是闭合曲线



$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L E\cos\theta \mathrm{d}l > 0$$

与静电场的环路定理矛盾

结论：　静电场的电场线不可能是闭合的

静电场是无旋场

讨论

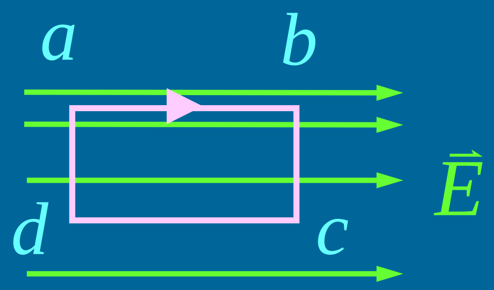
(1) 环路定理是静电场的另一重要定理，可用环路定理检验一个电场是不是静电场。

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_b^c \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_c^d \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_d^a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_a^b E_1 \mathrm{d}l + \int_c^d - E_2 \mathrm{d}l$$

$$\neq 0$$

不是静电场

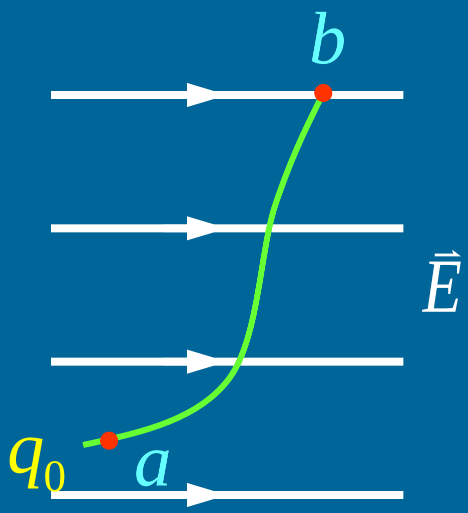


(2) 静电场是有源、无旋场，可引进电势能。

力学 ⟶ 保守力场 ⟶ 引入势能

静电场 ⟶ 保守场 ⟶ 引入静电势能

三. 电势能



- 电势能的差

定义：q_0 在电场中a、b 两点电势能之差等于把 q_0 自 a 点移至 b 点过程中电场力所作的功。

$$W_a - W_b = A_{ab} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

- 电势能

取势能零点 $W_{“0”} = 0$

q_0 在电场中某点 a 的电势能： $W_a = A_{a"0"} = \int_a^{"0"} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

说明

(1) 电势能应属于 q_0 和产生电场的源电荷系统共有。

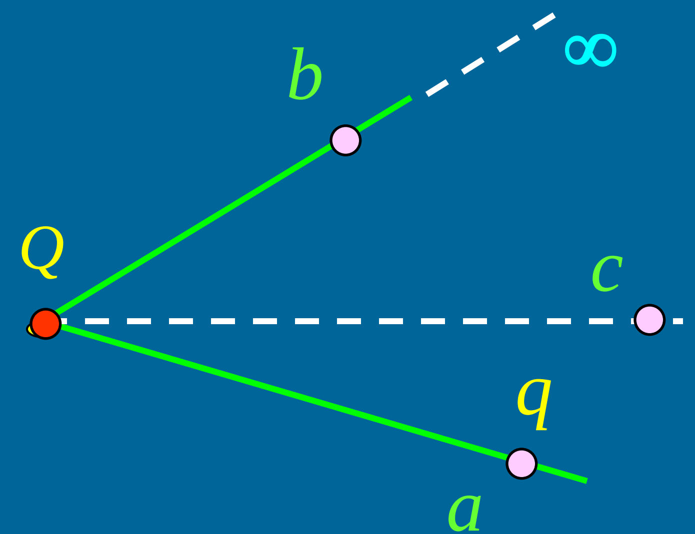
(2) 电荷在某点电势能的值与零点选取有关, 而两点的差值与零点选取无关

(3) 选势能零点原则:

- 当(源)电荷分布在有限范围内时，势能零点一般选在无穷远处。
- 无限大带电体，势能零点一般选在有限远处一点。
- 实际应用中取大地、仪器外壳等为势能零点。

例 如图所示，在带电量为 Q 的点电荷所产生的静电场中，有一带电量为q 的点电荷

求 q 在a 点和 b 点的电势能



解 选无穷远为电势能零点

$$W_a = \int_a^\infty q\vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_a}$$

$$W_b = \int_b^\infty q\vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_b}$$

选 C 点为电势能零点

$$W_a = \int_a^c q\vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_c})$$

$$W_b = \int_b^c q\vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_c})$$

两点的电势能差：

$$W_a - W_b = \int_a^b q\vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b})$$

§10.5 电势　电势差

一. 电势（电势是从能的角度来描述电场分布的物理量）

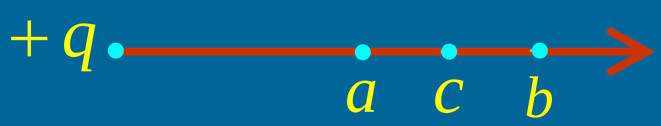
a点电势在量值上等于：将单位正电荷**a**→“零”过程中电场力作的功。

- 电势定义

$$u_a = \frac{W_a}{q_0} \Leftrightarrow u_a = \frac{A_{a"0"}}{q_0} = \int_a^{"0"} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- 电势的理解：

1.电势是标量，电势的值与电势零点的选取有关。

如 

若　$U_\infty = 0$　　$U_a = \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$　　$U_b = \int_b^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$

若　$U_c = 0$　　$U_a = \int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$　　$U_b = \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{l} < 0$

2. 电势的单位：伏

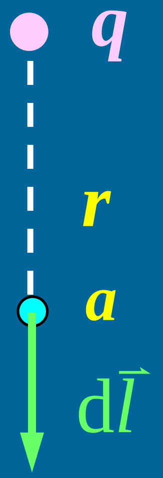
单位正电荷自$a \to b$过程中电场力作的功。

- 电势差

$$u_{ab} = u_a - u_b = \frac{W_a}{q_0} - \frac{W_b}{q_0} = \frac{A_{ab}}{q_0} = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

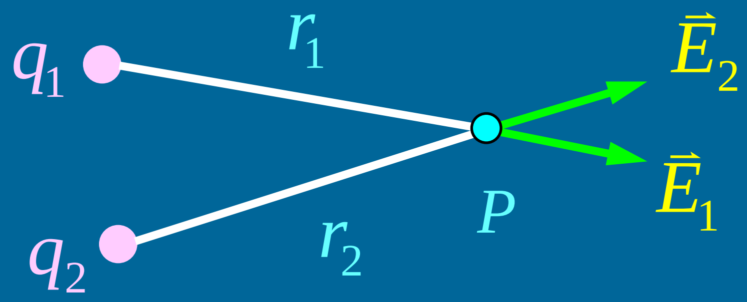
- 点电荷的电势

$$u_a = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{r}^{\,0} \qquad \mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}r\, \vec{r}^{\,0}$$



$$u_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

二. 电势叠加原理



- 点电荷系的电势

$$u_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_P^\infty (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{r_1}^\infty \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r + \int_{r_2}^\infty \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

对 n 个点电荷

$$\boxed{u = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$$

- 在点电荷系产生的电场中，某点的电势是各个点电荷单独存在时，在该点产生的电势的代数和——电势叠加原理。

- 对连续分布的带电体 $u=\int_V \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ ——标量积分

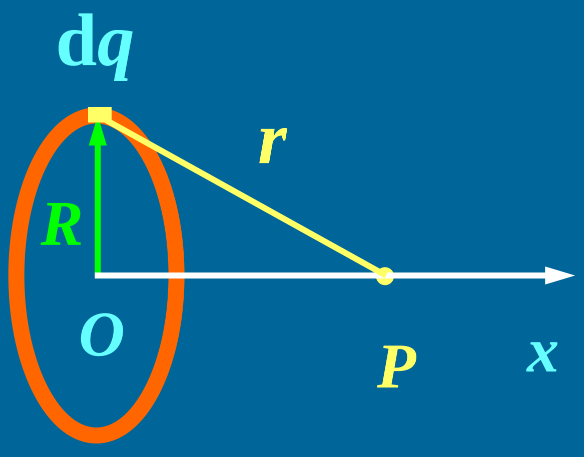
三. 电势的计算

方法
- （1） 已知电荷分布 $u=\int_V \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$
- （2） 已知场强分布 $u_P=\int_P^{"0"} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

例 均匀带电圆环半径为 R，电荷线密度为 λ。

求 圆环轴线上一点的电势

解 建立如图坐标系，选取电荷元 $\mathrm{d}q$

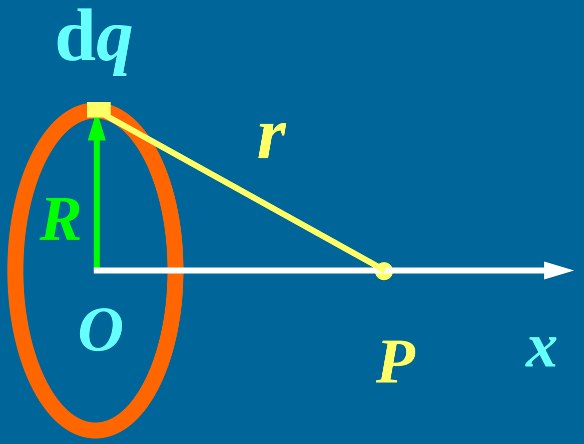


$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$u_P = \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{2\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$$

方法II：　　∞为势能零点



$$U_P = \int_P^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_P^\infty E\cos\theta \mathrm{d}l$$ 沿ox 轴积分

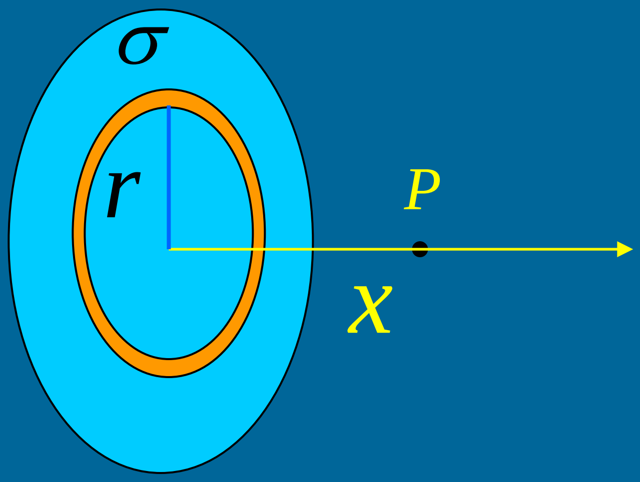
其中：$E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$　　　$\cos\theta = 1$　　$\mathrm{d}l = \mathrm{d}x$

$$U_P = \int_x^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}dx = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\Bigg|_x^\infty$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

注：和方法1相比较复杂

例： 均匀带电圆盘，R　σ　求中心轴线上任一点的U



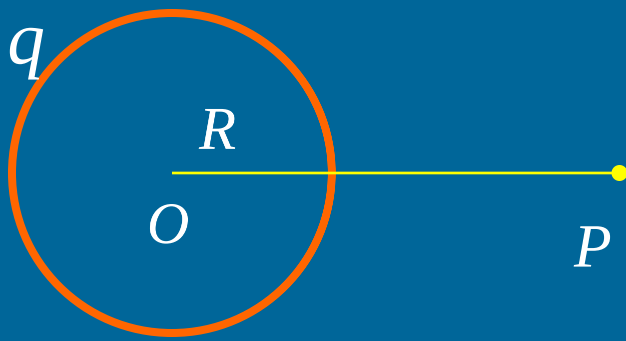
解：$$\mathrm{d}U = \frac{\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + x^2)^{1/2}}$$

$$U = \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + x^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\mathrm{d}r}{(r^2 + x^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + x^2} - x\right)$$

例 ：均匀带电球面，R, q ，求电场中任一点的电势。



$$E = \begin{cases} 0, & r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r > R \end{cases}$$

（ $r=R$ 时，场强值突变，不连续。）

有限大带电体 $U_\infty = 0$

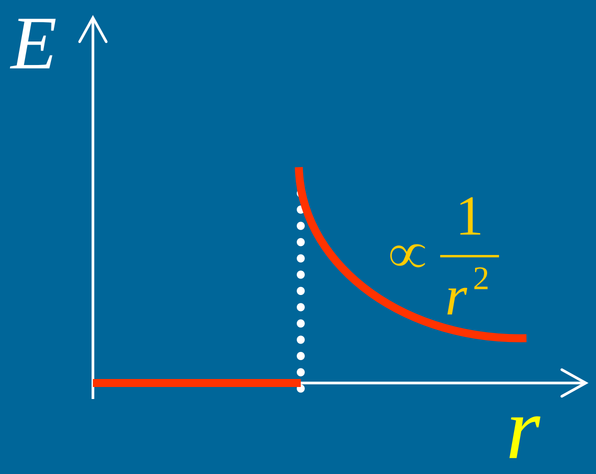
$$r > R \qquad U = \int_P^\infty \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_P^\infty E\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

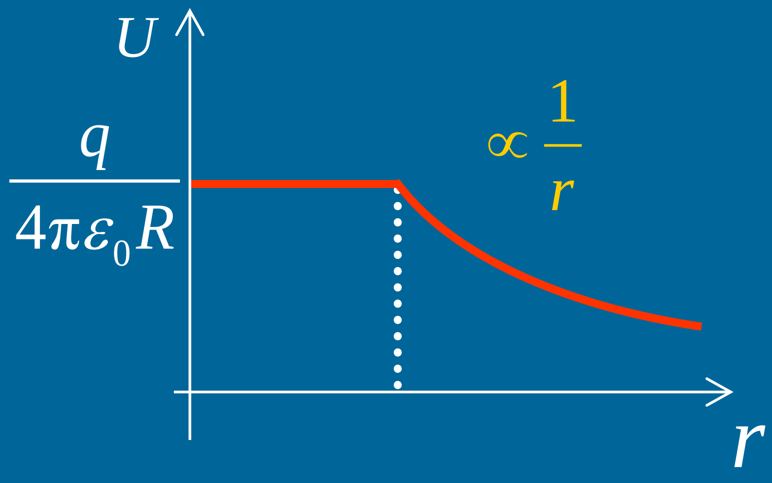
$r < R$

$$U = \int_P^\infty \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_P^R \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_R^\infty \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

球内电势为一常数，和球表面处电势值一样 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

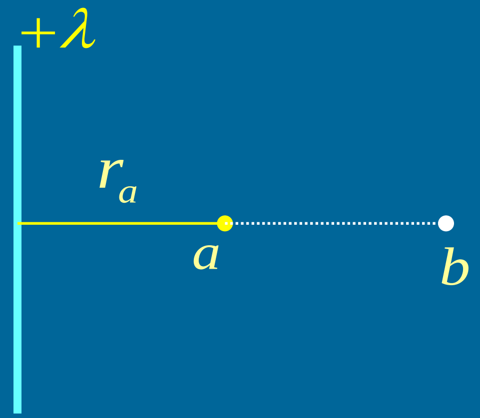
球外电势的分布和点电荷电场一样。





例：求无限长均匀带电直线外一点 a 的电势 U_a

设 a 到线的垂直距离为 r_a，线密度 λ



解：若选无限远处为参考点，则

$$U_a = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^{\infty} \frac{\lambda \mathrm{d}r}{2\pi\varepsilon_0 r} \rightarrow \infty$$

(以上结果无意义。)

若 选 b 点为电势零点，则

$$U_a = \int_a^{"0"} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^{b} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_b - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_a$$

第一项是常数项，若取 $r_b = 1$，则此项为零，即

选 $r_b = 1$ 处为势能零点时

$$U_a = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_a$$

$r_a > 1$时，U_a为负　　　$r_a < 1$时，U_a为正

总结

1. 静电场的环路定理 $\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$ 场强的环流为零

2. 电势能 $W_a=A_{a"0"}=\int_a^{"0"} q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

3. 电势 $u_a=\dfrac{W_a}{q_0}$

4. 电势的计算

方法
（1） 已知电荷分布 $u=\int_V \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

（2） 已知场强分布 $u_P=\int_P^{"0"} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$