§ 10.2 感应电动势

感应电动势分类：根据磁通量发生变化的原因不同

- 相对于实验室参照系，若磁场不变，而导体或导体回路运动（切割磁场线）

  — 动生电动势

- 相对于实验室参照系，若导体或导体回路静止，磁场随时间变化

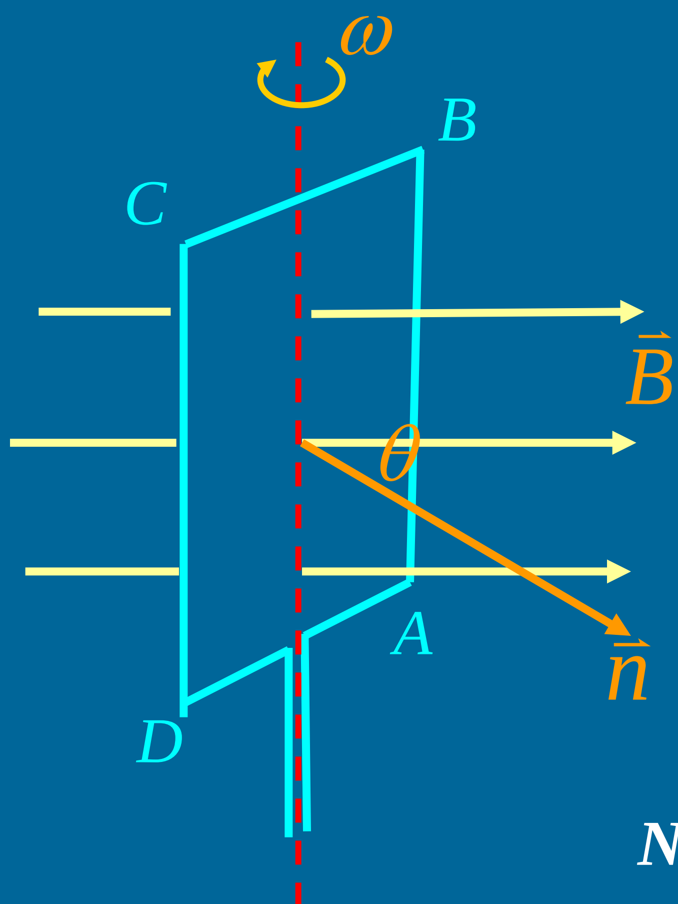
  — 感生电动势

一. 动生电动势

- 动生电动势：

$$\varepsilon_i = \int_{-}^{+} \vec{E}_K \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{-}^{+} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

例 求在磁场中转动的线圈内的感应电动势



由电磁感应定律计算 ε_i

S不变，$\vec{B}$与S的$\vec{n}$夹角变

$$\Phi_m = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos\theta$$

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = BS\omega\sin\theta$$

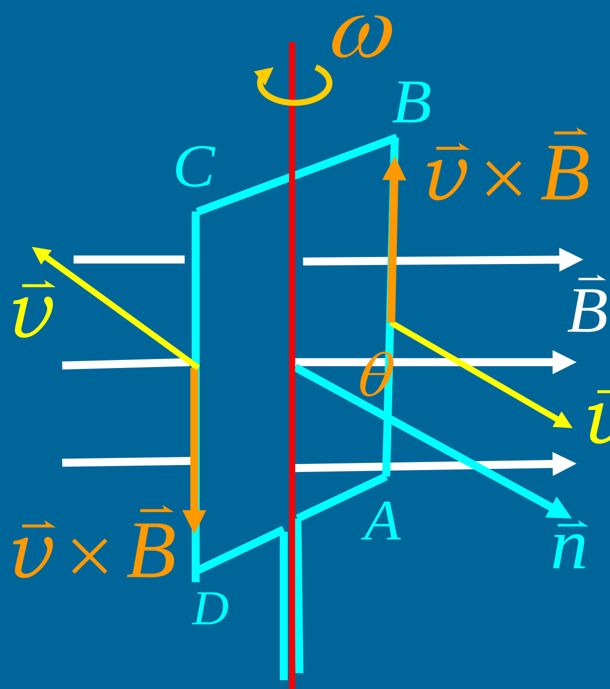
$t=0 \quad \theta=0$ t时刻 $\theta=\omega t$

$$\varepsilon_i = BS\omega\sin\omega t$$

N匝：$\varepsilon_i = NBS\omega\sin\omega t$

匀强磁场内转动线圈产生的动生电动势随时间周期变化

——交变电动势（发电机工作原理）



由动生电动势的计算公式求解

$$\varepsilon_i = \oint (\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_A^B (\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \underbrace{\int_B^C (\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}}_{=0}$$

$$+ \underbrace{\int_C^D (\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}}_{} + \underbrace{\int_D^A (\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}}_{=0}$$

BC段和**DA**段，各点处 $(\vec{\upsilon}\times\vec{B})\perp \mathrm{d}\vec{l}$

$$\varepsilon_i = \int_A^B \upsilon B \sin\theta \mathrm{d}l + \int_C^D \upsilon B \sin(\pi-\theta)\mathrm{d}l$$

$$= 2\overline{AB}\upsilon B\sin\theta \qquad \upsilon = \frac{\overline{DA}}{2}\omega$$

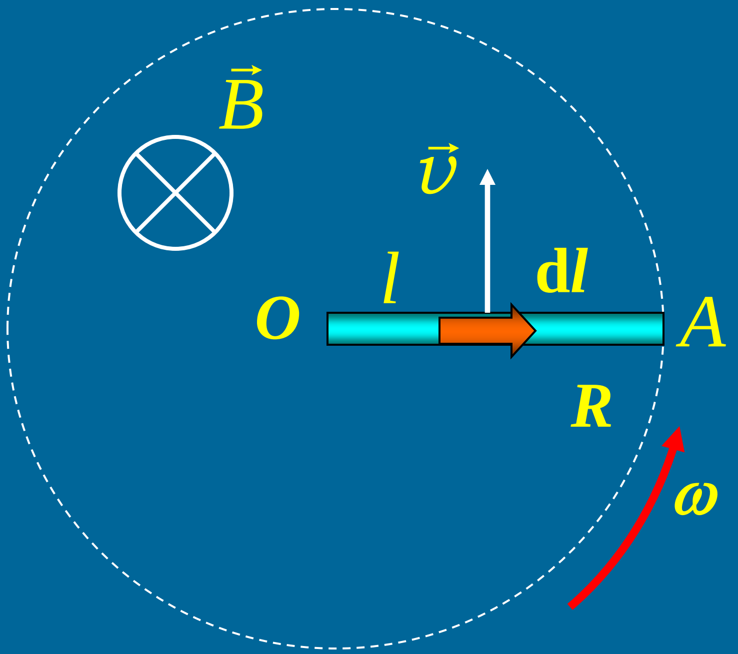
$$= B\omega\overline{AB}\cdot\overline{DA}\sin\theta = B\omega S\sin\theta = B\omega S\sin\omega t$$

N匝：$\varepsilon_i = NBS\omega\sin\omega t$ 与电磁感应定律计算结果一致

例 在匀强磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，长 $\boldsymbol{R}$ 的铜棒绕其一端 $\boldsymbol{O}$ 在垂直于 $\boldsymbol{B}$ 的平面内转动，角速度为 $\boldsymbol{\omega}$

求 棒上的电动势

解 动生电动势：



$$\varepsilon_i = \int_O^A (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= -\int_O^R vB\mathrm{d}l = -\int_O^R l\omega B\mathrm{d}l$$

$$= -\frac{BR^2}{2}\omega$$

负号表示与积分方向相反，即 ε_i 方向 $A \rightarrow O$

若为半径**R**的圆盘，绕**O**转动，求：圆盘中心和边缘的电势差

圆盘可看作无数细棒组成，每一细棒产生的 $\varepsilon_i = -\frac{1}{2}B\omega R^2$

细棒之间是并联，故 $U_0 - U_A = \frac{1}{2}B\omega R^2$

二. 感生电动势

- 当磁场变化时，静止导体或导体回路中出现感生电动势。

产生电动势必有一种非静电力作用推动正电荷从负极移动到正极，该非静电力以何种形式存在？（由于回路不动，不能再用洛仑兹力解释。） 麦克斯韦 提出：

> 无论有无导体或导体回路，变化的磁场都将在其周围空间产生具有闭合电场线的电场，并称此为感生电场或有旋电场$\vec{E}_V$

感生电场的作用力充当非静电力

感生电动势 $\varepsilon_i=\int_a^b \vec{E}_K\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_a^b \vec{E}_V\cdot \mathrm{d}\vec{l}$

闭合回路中 $\varepsilon_i=\oint_L \vec{E}_V\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

得到：感生电场与变化磁场之间的关系

$$\oint_L \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

讨论

(1) 感生电场的存在与导体回路是否存在无关

(2) 感生电场是无源有旋场

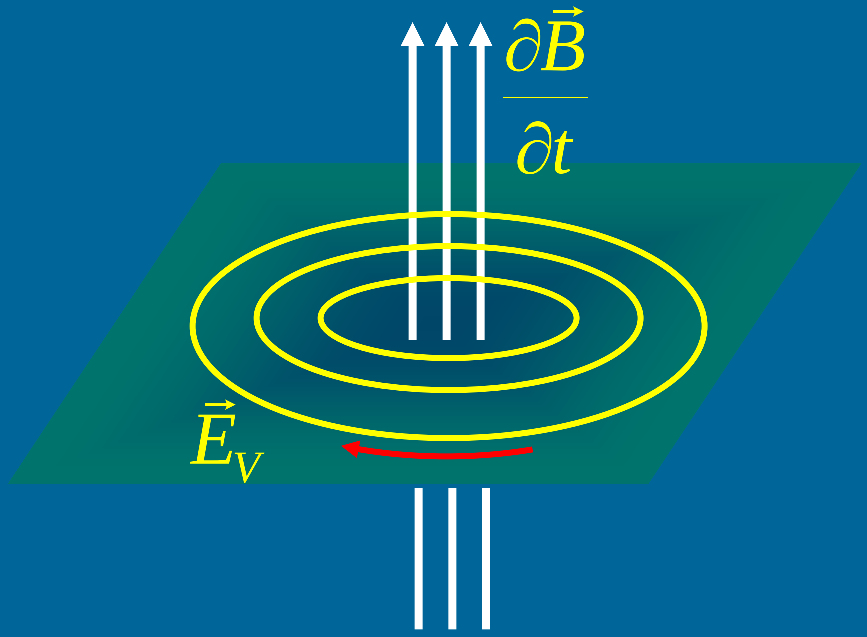
感生电场与静电场的比较

- 产生原因
  - 静电场——静电荷
  - 感生电场——变化的磁场（磁生电）
- 环流
  - 静电场环流为零——保守场
  - 感生电场环流非零——非保守场（不能定义电势）
- 通量
  - 静电场通量非零——有源场
  - 感生电场通量为零——无源场（闭合电场线）

(3) 感生电场线的方向与磁场的变化率成左螺旋关系

空间存在变化磁场 $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

在空间产生感生电场 $\vec{E}_V$



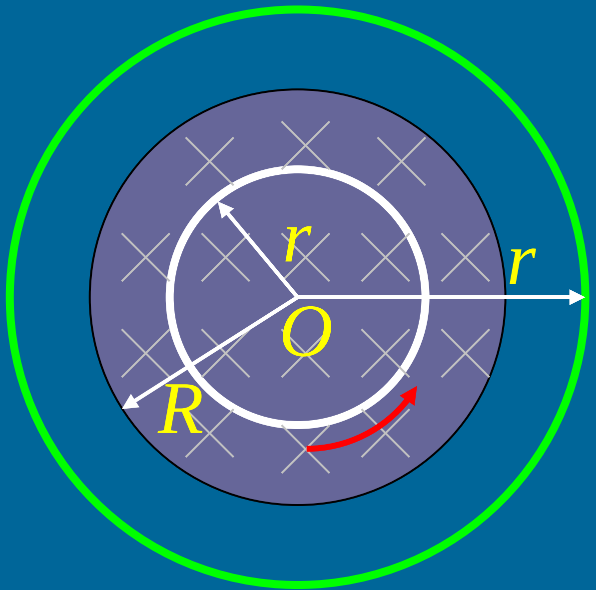
(4) 当问题中既有动生、又有感生电动势，则总感应电动势为

$$\varepsilon_i = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_V \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$ （导体不闭合）

$$\varepsilon_i = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_L \vec{E}_V \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$ （导体闭合）

求 轴对称分布的变化磁场产生的感应电场

设一个半径为R 的长直载流螺线管，内部磁场强度为$\vec{B}$，若$\partial\vec{B}/\partial t$ 为大于零的恒量。求:管内外的感应电场。



由磁场的对称性知，$\vec{E}_V$ 也具有对称性，同一圆周上$\vec{E}_V$大小相等 沿同心圆的切线方向。

取圆形积分路径并沿逆时针为正

$r < R$ $\quad \varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = E_V \oint_L dl$

$$= E_V 2\pi r = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial B}{\partial t} \pi r^2 \cos\pi$$

$$= \frac{\partial B}{\partial t} \pi r^2 \Longrightarrow E_V = \frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$r > R$ $\quad \varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = E_V 2\pi r$

$$= -\frac{\partial B}{\partial t} \pi R^2 \cos\pi \Longrightarrow E_V = \frac{R^2}{2r} \frac{\partial B}{\partial t}$$

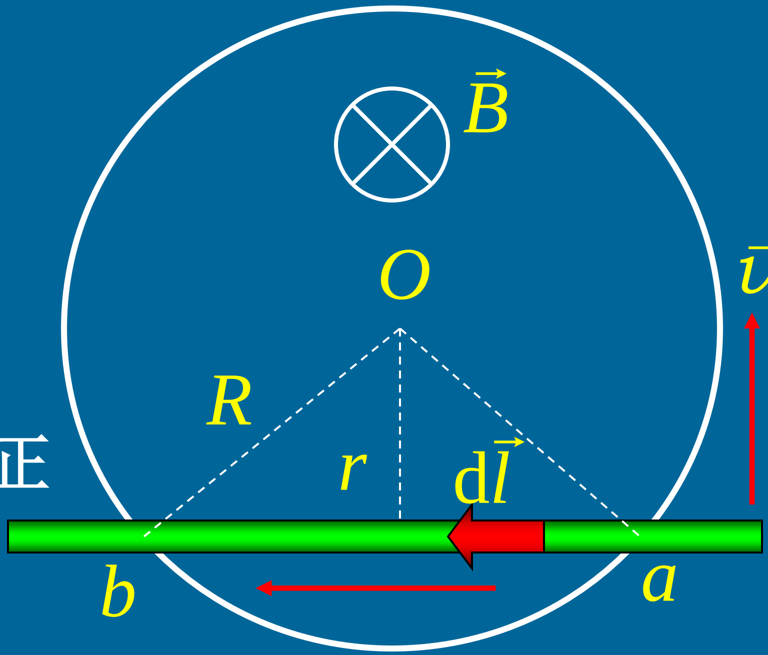
例 在半径为R 的圆形截面区域内有匀强磁场 B，一直导线垂直于磁场方向以速度 υ 扫过磁场区。

求 当导线距区域中心轴 垂直距离为 r 时的动生电动势

解 方法一：动生电动势

$$\varepsilon_i = \int_a^b (\vec{\upsilon} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \upsilon B \mathrm{d}l$$

$$= \upsilon B \overline{ab} = 2\upsilon B\sqrt{R^2 - r^2}$$



方法二：法拉第电磁感应定律

ab与上半圆构成闭合回路顺时针为正

$\mathrm{d}t$ 时间内导体棒切割磁场线

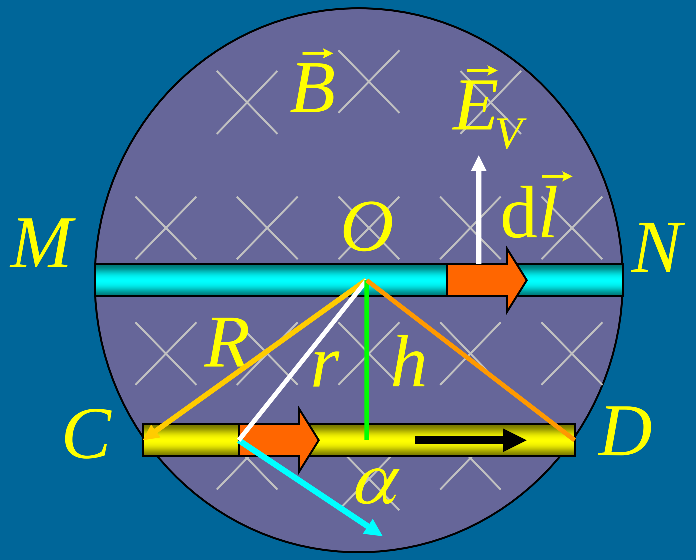
$$\mathrm{d}\Phi_m = -B2\sqrt{R^2 - r^2}\upsilon \mathrm{d}t$$

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = 2B\sqrt{R^2 - r^2}\frac{\upsilon \mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = 2B\upsilon\sqrt{R^2 - r^2}$$

方向也可由楞次定律确定

例 一被限制在半径为 R 的无限长圆柱内的均匀磁场 B， B 均匀增加，B 的方向如图所示。

求 导体棒MN、CD的感生电动势



解 方法一(用感生电场计算):

$$E_V=\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}(r<R)$$

$$\varepsilon_{MN}=\int_M^N \vec{E}_V\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

$$\varepsilon_{CD}=\int_C^D \vec{E}_V\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_C^D E_V\cos\alpha\mathrm{d}l=\int_o^L\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\frac{h}{r}\mathrm{d}l=\frac{hL}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

方法二(用法拉第电磁感应定律): (补逆时针回路 $OCDO$)

$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(BLh/2)}{\mathrm{d}t}=\varepsilon_{OC}+\varepsilon_{CD}+\varepsilon_{DO}=\varepsilon_{CD}=\frac{hL}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

总结

1. 动生电动势

$$\varepsilon_i = \int_{-}^{+} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

2. 感生电动势

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_V \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$