

第3章 平面电磁波

3.1 均匀平面波

3.2 导电介质中的均匀平面波

3.3 电磁波的极化

3.1 均匀平面波

- (1) 均匀平面波的行波解
- (2) 相速与波长
- (3) 讨论 $\sqrt{\epsilon_r}$ 的物理意义
- (4) 任意方向传播的均匀平面波

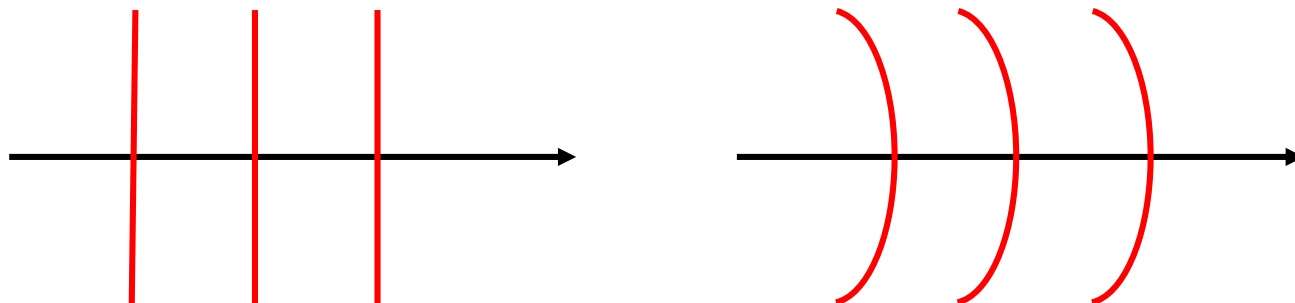
均匀平面波的概念：

◆ 等相位面（波阵面）：等相位面是空间相位相同的点构成的面。

根据等相位面的形状，电磁波可分为：平面波/柱面波/球面波。

- 无限大的面源产生的波是平面波，等相位面是平面；
- 无限长的线或柱产生的波是柱面波，其等相位面是柱面；
- 一个点源产生的波是球面波，其等相位面是球面。

波动过程中，等相面和传播方向是垂直的。



均匀平面波的概念：

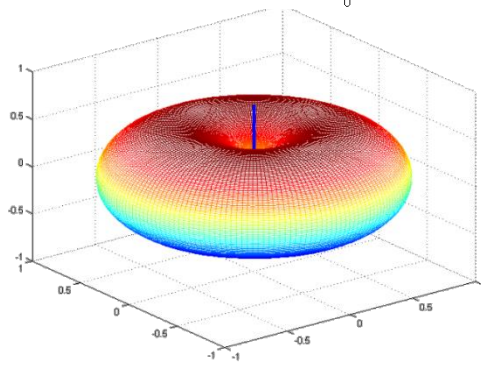
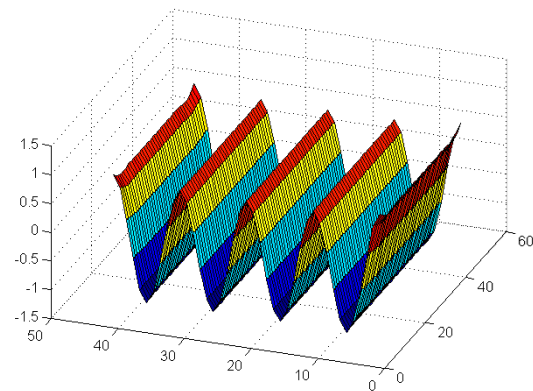
◆ 从波源发出，在媒质中向各个方向传播的电磁波，在某一时刻电磁波的场矢量的等相位面是与电磁波传播方向垂直的无限大平面，则称为平面波。若面上各点的场强大小相等、方向相同则称为均匀平面波，即沿某方向传播的平面电磁波的场量除随时间变化外，只与波传播方向的坐标有关，而与其他坐标无关。

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$E_m = E_0 \text{ --- 均匀平面波}$$

$$\vec{E} = \vec{e}_\theta \frac{E_0}{r} \sin \theta \cos(\omega t - \beta z)$$

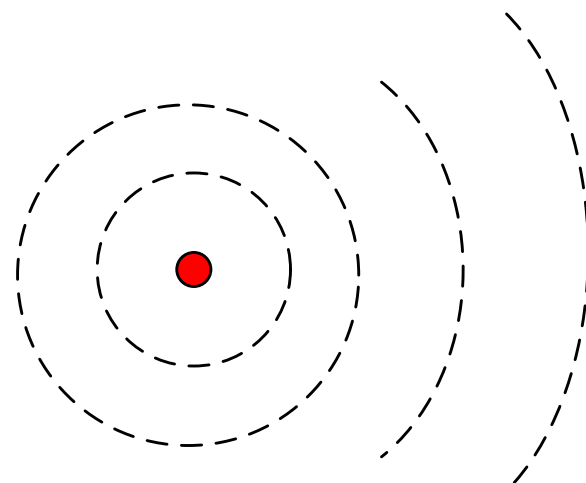
$$E_m = \frac{E_0}{r} \sin \theta \text{ --- 非均匀平面波}$$



为什么要研究均匀平面波：

◆平面波具有电磁波的普遍性质和规律，实际存在的电磁波均可分解成许多平面波

◆如果场点离波源足够远，那么空间的曲面的很小一部分，可看做一个平面，在这一范围内，波的传播特性近似为平面波的传播特性。



(1) 均匀平面波的行波解

在线性、各向同性、均匀的导电媒质填充的无源区域内（ $\rho=0, \sigma \neq 0$ ），正弦电磁场所满足的波动方程：

$$\nabla^2 \vec{E} + \tilde{k}^2 \vec{E} = 0$$

其中：

$$\tilde{k} = \beta - j\alpha = \omega\sqrt{\mu\tilde{\varepsilon}}, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right) = \varepsilon (1 - j \tan \delta_e)$$

➤ 讨论该方程在直角坐标系中的解：

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \vec{E}(x, y, z) = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z$$

$\nabla^2 \vec{E}$ 有3*3项，为简化分析，根据平面波的特点，设电场只有x方向分量，且等相位面位于xoy面，即

$$\vec{E} = E_x(z, t) \vec{e}_x = \text{Re} \left(E_x(z) e^{j\omega t} \vec{e}_x \right)$$

这样矢量的亥姆赫兹方程就变成了标量的波动方程：

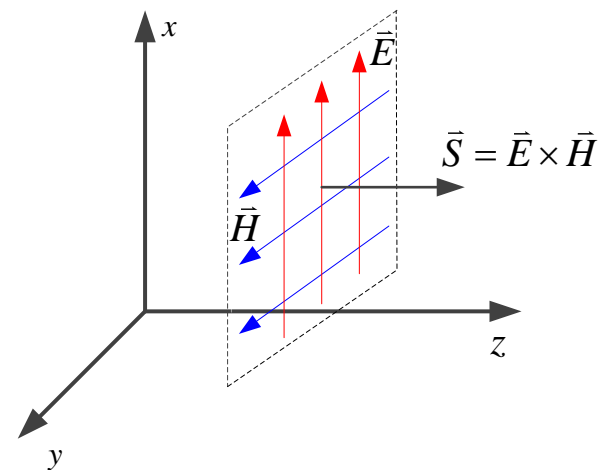
$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + \tilde{k}^2 E_x = 0$$

这是一个二阶常微分方程，其通解为

$$E_x = A_1 e^{-j\tilde{k}z} + A_2 e^{j\tilde{k}z} \quad \tilde{k} = \beta - j\alpha$$

式中 A_1, A_2 是与电场振幅有关的待定常数（复数），若设 A_1, A_2 的幅角为零，可写出 E_x 的瞬时值表达式

$$E_x(z, t) = A_1 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + A_2 e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)$$

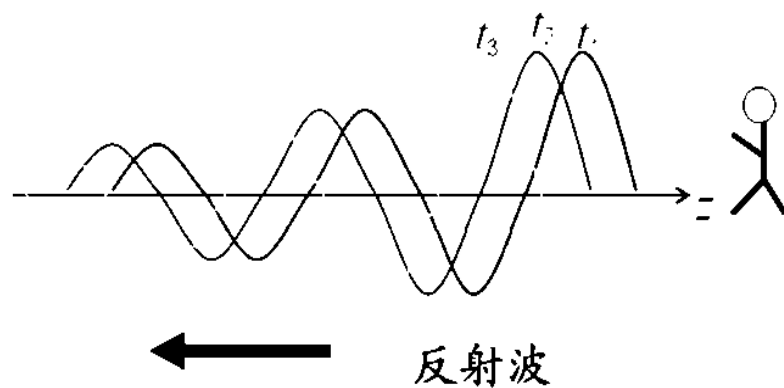
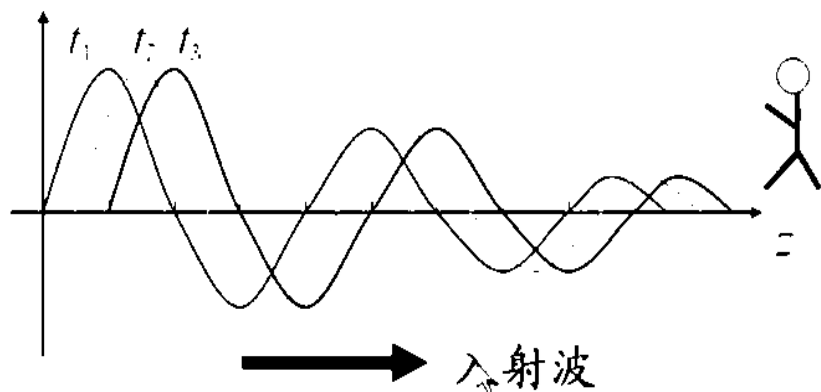


$$E_x(z, t) = A_1 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + A_2 e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)$$

该式代表两个电场行波，令 $\theta = \omega t \mp \beta z$

同一个场值随时间的增加向 z 增大的方向推移，振幅也越小（衰减因子 α ），说明该项代表一个沿正 z 方向行进的波，即正向的衰减行波，也叫入射波。用复数形式表示的话，含 e^{-jkz} （行波因子）的解，表示向正向传播的波。

同一个场值随时间的增加向 z 减小的方向推移，振幅也越小（衰减因子 α ），说明该项代表一个沿负 z 方向行进的波，即反向的衰减行波，也叫反射波。用复数形式表示的话，含 e^{jkz} （行波因子）的解，表示向反向传播的波。



空间任一点的场是由入射波和反射波的场相加的结果。

➤ 上式表明，空间任一点的场是由入射波和反射波的场相加的结果。假设

$$A_1 = E_{mi}, \quad A_2 = E_{mr}, \quad \text{代入通解表达式: } E_x = A_1 e^{-j\tilde{k}z} + A_2 e^{j\tilde{k}z}$$

$$E_x(z) = E_{mi} e^{-j\tilde{k}z} + E_{mr} e^{j\tilde{k}z} = E_{xi} + E_{xr}$$

$$\therefore \vec{E}(z) = E_x(z) \vec{e}_x = (E_{mi} e^{-j\tilde{k}z} + E_{mr} e^{j\tilde{k}z}) \vec{e}_x = (E_{xi} + E_{xr}) \vec{e}_x$$

➤ \vec{H} 可根据已知的 \vec{E} ，利用Maxwell第二方程求出

$$\begin{aligned} \vec{H} &= -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{dE_x}{dz} \vec{e}_y = \left(-\frac{-j\tilde{k}}{j\omega\mu} E_{mi} e^{-j\tilde{k}z} - \frac{j\tilde{k}}{j\omega\mu} E_{mr} e^{j\tilde{k}z} \right) \vec{e}_y \\ &= (H_{yi} + H_{yr}) \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$H_{yi} = \frac{\tilde{k}}{\omega\mu} E_{mi} e^{-j\tilde{k}z}, \quad H_{yr} = -\frac{\tilde{k}}{\omega\mu} E_{mr} e^{j\tilde{k}z}$$

可以看出，磁场也有正向和反向两个行波（入射波和反射波）

$$\vec{E}(z) = (E_{xi} + E_{xr})\vec{e}_x = (E_{mi}e^{-j\tilde{k}z} + E_{mr}e^{j\tilde{k}z})\vec{e}_x$$

$$\vec{H} = (H_{yi} + H_{yr})\vec{e}_y = \left(\frac{\tilde{k}}{\omega\mu} E_{mi}e^{-j\tilde{k}z} - \frac{\tilde{k}}{\omega\mu} E_{mr}e^{j\tilde{k}z} \right) \vec{e}_y$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{e}_z \times \vec{E}_i + \frac{1}{\eta} (-\vec{e}_z) \times \vec{E}_r$$

电场、磁场都有正向和反向两个行波（入射波和反射波）。其复振幅之比具有阻抗量纲（ Ω ），因此，定义为有耗媒质的复波阻抗：

$$\frac{E_{xi}}{H_{yi}} = \frac{E_{mi}e^{-j\tilde{k}z}}{\frac{\tilde{k}}{\omega\mu} E_{mi}e^{-j\tilde{k}z}} = \frac{\omega\mu}{\tilde{k}} \quad \frac{E_{xr}}{H_{yr}} = -\frac{E_{mr}e^{j\tilde{k}z}}{\frac{\tilde{k}}{\omega\mu} E_{mr}e^{j\tilde{k}z}} = -\frac{\omega\mu}{\tilde{k}}$$

$$\tilde{k} = \omega\sqrt{\mu\tilde{\epsilon}} \quad \tilde{\eta} = \frac{\omega\mu}{\tilde{k}} = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\epsilon}}} \quad \text{——复波阻抗（}\Omega\text{）}$$

$$\text{有} \quad H_{yi} = \frac{E_{xi}}{\tilde{\eta}}, \quad H_{yr} = -\frac{E_{xr}}{\tilde{\eta}}$$

均匀平面波在空间任意一点上方向由 $E_i \times H_i$ 决定。

➤ 以入射波为例来进一步分析研究波的特性。因为媒质是各向同性的，所以无论波的传播方向如何，表现出来的特性都是一样的，特别是选取理想的介质来分析，过程更为简单。

对于理想介质有： $\sigma = 0$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, $\mu = \mu_0$

则特征传播常数： $\tilde{k} = \beta - j\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = k$, ($\alpha=0$,说明无衰减)

波阻抗： $\tilde{\eta} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} \Omega$

在无界的无穷大空间反射波不存在，此时只有向正z方向传播的行波：

$$\vec{E} = E_{mi} e^{-jkz} \vec{e}_x, \quad \vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{e}_z \times \vec{E} = \frac{E_{mi}}{\eta} e^{-jkz} \vec{e}_y = H_{mi} e^{-jkz} \vec{e}_y$$

瞬时值 $\vec{E}(z,t) = E_m \cos(\omega t - kz + \varphi_0) \vec{e}_x$ $\vec{H}(z,t) = \frac{E_m}{\eta} \cos(\omega t - kz + \varphi_0) \vec{e}_y$

时间相位 ωt 变化 2π 所经历的时间称为电磁波的**周期**，以 T 表示，而一秒内相位变化 2π 的次数称为**频率**，以 f 表示。那么由 $\omega T = 2\pi$ 的关系式，得 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$

空间相位 kz 变化 2π 所经过的距离称为**波长**，以 λ 表示。那么由关系式 $k\lambda = 2\pi$ ，得 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

由上可见，电磁波的**频率**是描述相位随**时间**的变化特性，而**波长**描述相位随**空间**的变化特性。

由上式又可得 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

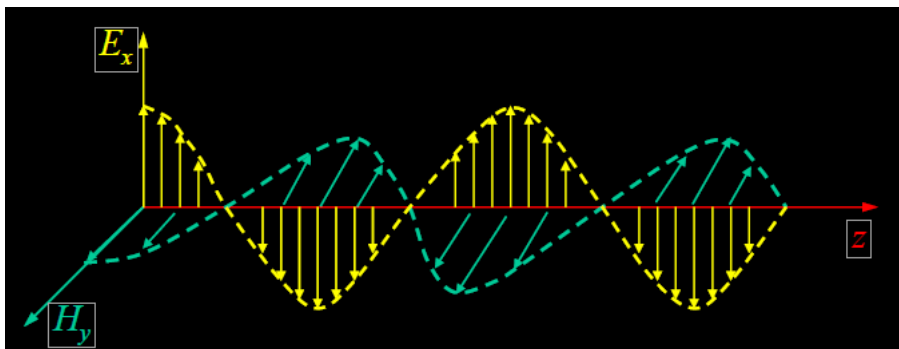
因空间相位变化 2π 相当于一个**全波**， k 的大小又可衡量单位长度内具有的全波数目，所以 k 又称为**波数**。

$$\vec{E} = E_{mi} e^{-jkz} \vec{e}_x, \quad \vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{e}_z \times \vec{E} = \frac{E_{mi}}{\eta} e^{-jkz} \vec{e}_y = H_{mi} e^{-jkz} \vec{e}_y$$

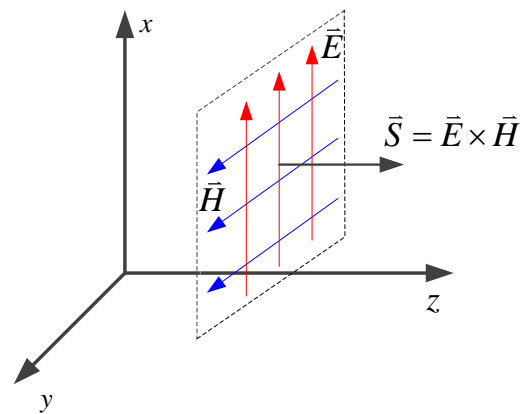
$$\vec{E}(z, t) = E_m \cos(\omega t - kz + \varphi_0) \vec{e}_x \quad \vec{H}(z, t) = \frac{E_m}{\eta} \cos(\omega t - kz + \varphi_0) \vec{e}_y$$

◆表明:

1. 均匀平面波的电场和磁场相互垂直（正交），波形相同，时间同相。而且没有传播方向的分量（ $E_z = H_z = 0$ ），称这种波为横电磁波（*TEM*波，TEM- transverse electro-magnetic wave）
2. 电场、磁场与传播方向相互垂直（正交）



理想介质中均匀平面波



$$\vec{E} = E_{mi} e^{-jkz} \vec{e}_x, \quad \vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{e}_z \times \vec{E} = \frac{E_{mi}}{\eta} e^{-jkz} \vec{e}_y = H_{mi} e^{-jkz} \vec{e}_y$$

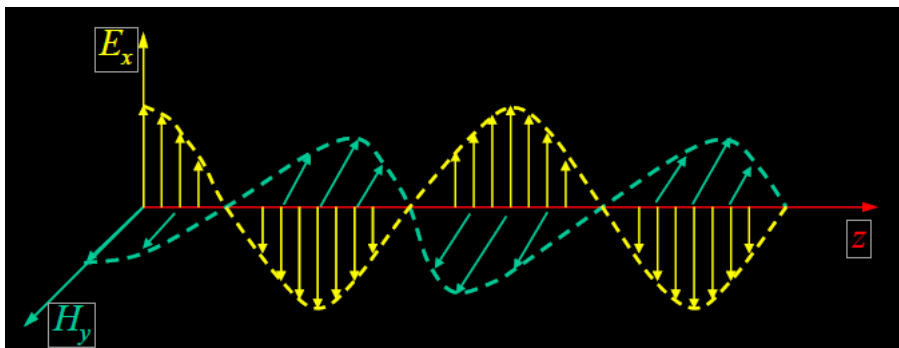
$$\vec{E}(z, t) = E_m \cos(\omega t - kz + \varphi_0) \vec{e}_x \quad \vec{H}(z, t) = \frac{E_m}{\eta} \cos(\omega t - kz + \varphi_0) \vec{e}_y$$

◆表明:

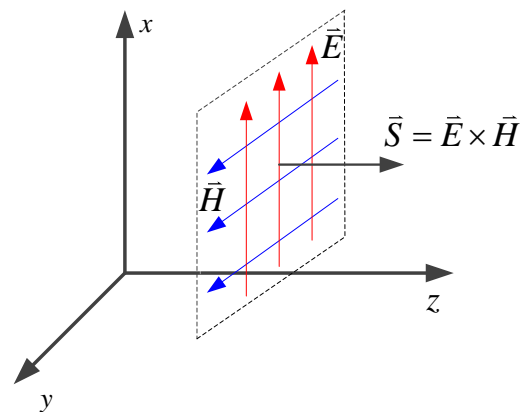
$$3. \text{复坡印廷矢量 } \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} E_{mi} H_{mi} \vec{e}_z = \frac{1}{2} \frac{E_{mi}^2}{\eta} \vec{e}_z = \frac{1}{2} \eta H_{mi}^2 \vec{e}_z = \vec{S}_{av}$$

复能流密度矢量为**实数**，虚部为零。这就表明，电磁波能量仅向正 z 方向**单向**流动，空间**不存在**来回流动的**交换**能量。

4. 无衰减; 非色散波 (相速与频率无关)



理想介质中均匀平面波



(2) 相速与波长

➤ 在波的传播过程中，等相位面以多大的速度在运动，亦即波传播的相速是多大？我们任意指定相位为某一常数的等相位面 $\omega t - kz + \varphi_0 = \text{const}$ 来观察。

➤ 定义相速 v_p 为等相位点沿传播方向移动的速度。

对 $\omega t - kz + \varphi_0 = \text{const}$ ，求时间微分得

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

在自由空间中， $\mu_r = \epsilon_r = 1$ $v_p = c$

➤ **波长 λ** (相波长 λ_p) ——沿传播方向, t_0 时刻相位相差为 2π 两点间的距离。

$$(\omega t_0 - kz_2 + \varphi_0) - (\omega t_0 - kz_1 + \varphi_0) = -2\pi$$

$$\lambda = \lambda_p = z_2 - z_1 = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

在自由空间 $\mu_r = \varepsilon_r = 1$, $\lambda = \lambda_p = c / f = \lambda_0$ λ_0 为自由空间的工作波长

(3) 讨论 $\sqrt{\varepsilon_r}$ 的物理意义

➤ 理想介质中，当 $\mu_r = 1$, $v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

理想介质中的相速 v_p 小于自由空间的相速 c ，就相速而言，称 $\sqrt{\varepsilon_r}$ 为慢波系数。

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

理想介质中的波长 λ 小于自由空间的工作波长 λ_0 ，就波长而言，称 $\sqrt{\varepsilon_r}$ 为波长缩短系数。

折射指数（就自由空间到介质的折射现象而言），用 n 表示：

$$n = \sqrt{\varepsilon_r}$$

将理想介质和有耗介质中的均匀平面波的传播参数 v_p , λ , $\tilde{\eta}$, $\tilde{k} = \beta - j\alpha$ 归纳如下：

理想介质中

$$\beta = k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\alpha = 0$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

自由空间

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

$$v_p = c$$

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{2\pi}{k_0}$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$$

有耗媒质中

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \tan^2 \delta_e} + 1 \right)} > k$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \tan^2 \delta_e} - 1 \right)}$$

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \tan^2 \delta_e} + 1 \right)}} < v_{p\text{理想}}$$

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{1}{f \sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \tan^2 \delta_e} + 1 \right)}} < \lambda_{\text{理想}}$$

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(1 - j \tan \delta_e)}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - j \tan \delta_e}}$$

例3-1 已知有一向+z方向传播的均匀平面波, 频率 $f = 300\text{MHz}$,

$$E_m|_{z=0} = 3.77\text{V} / \text{m}$$

求: 1) 在自由空间中的 v_p , λ , k , α , η 及 \vec{E} 、 \vec{H} 的振幅, 瞬时值表达式和 \vec{S}_{av}

2) 在 $\varepsilon_r = 4, \mu = \mu_0$ 的理想介质中的上述各量

3) 在 $\varepsilon_r = 4, \mu = \mu_0, \tan \delta_e = 0.3$ 的有耗介质中的上述各量

解: 1) 在自由空间中

$$v_p = c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad \lambda = \lambda_0 = \frac{c}{f} = 1\text{m}$$

$$k = \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi (1/\text{m}), \quad \alpha = 0, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega$$

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x, \quad E_x = 3.77 e^{-jkz} = 3.77 e^{-j2\pi z} \text{ V/m} \quad \vec{E} = 3.77 \cos(\omega t - 2\pi z) \vec{e}_x \text{ V/m}$$

$$\vec{H} = H_y \vec{e}_y, \quad H_y = \frac{E_x}{\eta_0} = 0.01 e^{-j2\pi z} \text{ A/m} \quad \vec{H} = 0.01 \cos(\omega t - 2\pi z) \vec{e}_y \text{ A/m}$$

$$\vec{S}_{av} = \text{Re} \left(\frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \right) = 1.885 \times 10^{-2} \vec{e}_z \text{ W/m}^2$$

$$\text{其中 } \omega = 2\pi f = 6\pi \times 10^8 \text{ rad/s}$$

2) 在 $\varepsilon_r = 4, \mu = \mu_0$ 理想媒质中

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 1.5 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 0.5 \text{ m}$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 4\pi (1/\text{m}), \quad \alpha = 0, \quad \eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 60\pi \Omega$$

$$\vec{E} = 3.77 \cos(\omega t - 4\pi z) \vec{e}_x \text{ V/m}$$

$$H_y = \frac{E_x}{\eta} = 0.02 e^{-j4\pi z} \text{ A/m}$$

$$\vec{H} = 0.02 \cos(\omega t - 4\pi z) \vec{e}_y \text{ A/m}$$

其中 $\omega = 2\pi f = 6\pi \times 10^8 \text{ rad/s}$

$$\vec{S}_{av} = \frac{E_{xm}^2}{2\eta} \vec{e}_z = 3.77 \times 10^{-2} \vec{e}_z \text{ W/m}^2$$

3) 在 $\varepsilon_r = 4, \mu = \mu_0, \tan \delta_e = 0.3$ 有耗媒质中

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \tan^2 \delta_e} + 1 \right)}} = 1.48 \times 10^8 \text{ m/s},$$

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = 0.495 \text{ m}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 4.044\pi \text{ (1/m)},$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \tan^2 \delta_e} - 1 \right)} = 0.59\pi \text{ (1/m)},$$

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon(1 - j \tan \delta_e)}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - j0.3}} = 57.5\pi \angle 8.35^\circ \Omega$$

3) 在 $\varepsilon_r = 4, \mu = \mu_0, \tan \delta_e = 0.3$ 有耗媒质中

$$E_x = 3.77e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = 3.77e^{-0.59\pi z} e^{-j4.044\pi z} \quad V/m$$

$$\bar{E} = 3.77e^{-0.59\pi z} \cos(\omega t - 4.044\pi z) \bar{e}_x \quad V/m$$

$$H_y = \frac{E_x}{\tilde{\eta}} = 0.021e^{-0.59\pi z} e^{-j(4.044\pi z + 8.35^\circ)} \quad A/m$$

$$\bar{H} = 0.021e^{-0.59\pi z} \cos(\omega t - 4.044\pi z - 8.35^\circ) \bar{e}_y \quad A/m$$

$$\bar{S}_{av} = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} 3.77e^{-\alpha z} \times 0.021e^{\alpha z} e^{j8.35^\circ} \right) = 3.92 \times 10^{-2} e^{-3.18\pi z} \bar{e}_z \quad \text{W/m}^2$$

(4) 任意方向传播的均匀平面波

- 对于沿任意方向传播的均匀平面波，其仍满足矢量亥姆赫兹方程

$$\nabla^2 \vec{E} + \tilde{k}^2 \vec{E} = 0$$

在直角坐标系下：

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \vec{E}(x, y, z) = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z$$

则每个分量均满足： $\nabla^2 \vec{E}_i + \tilde{k}^2 \vec{E}_i = 0, \quad i = x, y, z$

以 E_x 为例则有：

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0$$

该方程可采用分离变量法求解，即： $E_x = f(x)g(y)h(z)$

设 $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ ，则可得

$$\begin{cases} \frac{d^2 f}{dx^2} + k_x^2 f = 0 \\ \frac{d^2 g}{dy^2} + k_y^2 g = 0 \\ \frac{d^2 h}{dz^2} + k_z^2 h = 0 \end{cases}$$

方程的解分别为 $e^{\pm jk_x x}, e^{\pm jk_y y}, e^{\pm jk_z z}$

取离开源的单一方向的波，解为

$$E_x = A e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z} = A e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z, \quad \vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

\vec{k} 为传播矢量，是常矢。

沿任意方向传播的解表示为 $E_x = A e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$

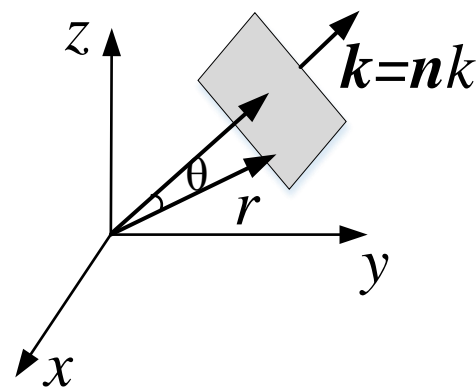
沿任意方向传播的解表示为 $E_x = Ae^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$

表明：这是由传播矢量 \vec{k} 所决定的传播方向上传播的电场的 x 分量，而标量积 $\vec{k}\cdot\vec{r}$ 则表示 \vec{k} 乘以从原点 o 到与矢量 $\vec{k} = n\vec{k}$ 相垂直的平面的距离。

同样的方法可得：

$$E_y = Be^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad E_z = Ce^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\therefore \vec{E} = (A\vec{e}_x + B\vec{e}_y + C\vec{e}_z)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{E}_{mi}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad \vec{E}_{mi} \text{ 为常矢。}$$



用Maxwell第二方程求磁场

$$\begin{aligned} \vec{H} &= -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{j\omega\mu} \left[e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \nabla \times \vec{E}_{mi} + \nabla \left(e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) \times \vec{E}_{mi} \right] \\ &= -\frac{1}{j\omega\mu} \left[-je^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \nabla (\vec{k} \cdot \vec{r}) \times \vec{E}_{mi} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla(\vec{k} \cdot \vec{r}) &= \vec{k} \times \nabla \times \vec{r} + (\vec{k} \cdot \nabla) \vec{r} + \vec{r} \times \nabla \times \vec{k} + (\vec{r} \cdot \nabla) \vec{k} \\
&= (\vec{k} \cdot \nabla) \vec{r} = \left(k_x \frac{\partial}{\partial x} + k_y \frac{\partial}{\partial y} + k_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \\
&= k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z = \vec{k} = k\vec{n} \quad (\vec{n} \text{ 是 } k \text{ 方向的单位矢量})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= -\frac{1}{j\omega\mu} \left[-je^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \nabla(\vec{k} \cdot \vec{r}) \times \vec{E}_{mi} \right] = \frac{1}{\omega\mu} \vec{k} \times \vec{E} \\
&= \frac{k}{\omega\mu} \vec{n} \times \vec{E} = \frac{1}{\eta} \vec{n} \times \vec{E}
\end{aligned}$$

同理，由 $\vec{n} \times \vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{E} = (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{n}) \vec{E} = -\vec{E}$

可得 $\vec{n} \times \vec{H} = -\frac{1}{\eta} \vec{E}, \quad \vec{E} = -\eta \vec{n} \times \vec{H}$

这是由于所研究的是任意方向传播的均匀平面波，在垂直于 \vec{k} 的平面内

$$E_m = \text{const}, \quad H_m = \text{const} \quad \text{且} \quad \vec{E} \perp \vec{k}, \quad \vec{H} \perp \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{H} = 0$$

3.2 导电介质中平面电磁波

- (1) 趋肤效应
- (2) 穿透（趋肤）深度
- (3) 相速与相波长
- (4) 表面电阻

一、导电介质中平面电磁波的传播特性

无源、无界导电介质中麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega\epsilon \vec{E} & (1) \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} & (2) \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 & (3) \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 & (4) \end{cases}$$

式(1)可改写为

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \left(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} = j\omega \tilde{\epsilon} \vec{E}$$

其中

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = \epsilon \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)$$

导电介质的复介电常数
或等效介电常数

由此，就电磁波在其中的传播而言，可以把导电介质等效地看作一种介质，其等效介电常数为复数。

一、导电介质中平面电磁波的传播特性

无源、无界导电介质中的波动方程

$$\nabla^2 \vec{E} + \tilde{k}^2 \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} + \tilde{k}^2 \vec{H} = 0$$

其中 $\tilde{k}^2 = \omega^2 \mu \tilde{\epsilon}$ 。

直角坐标系中，沿+z方向传播的均匀平面波，假定电场只有x分量，则

$$\vec{E} = \vec{a}_x E_0 e^{-j\tilde{k}z}$$

$$\text{令 } \tilde{k} = \beta - j\alpha, \text{ 则 } \vec{E} = \vec{a}_x E_0 e^{-j(\beta - j\alpha)z} = \vec{a}_x E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right)}, \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} + 1 \right)}$$

衰减常数, Np/m

相移常数, rad/m

一、导电介质中平面电磁波的传播特性

导电介质中均匀平面电磁波的相速

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left(\frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} + 1} \right)^{1/2} < \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

波长

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_p}{f}$$

表明：均匀平面电磁波在导电介质中传播时，波的相速和波长比介电常数和磁导率相同的理想介质的情况慢和短，且 σ 越大，相速越慢，波长越短。

此外，相速和波长随频率变化，频率低，相速慢。携带信号的电磁波其不同频率分量将以不同的相速传播，经过一段距离后，它们的相位关系将发生变化，导致信号失真。这种现象称为**色散**。

一、导电介质中平面电磁波的传播特性

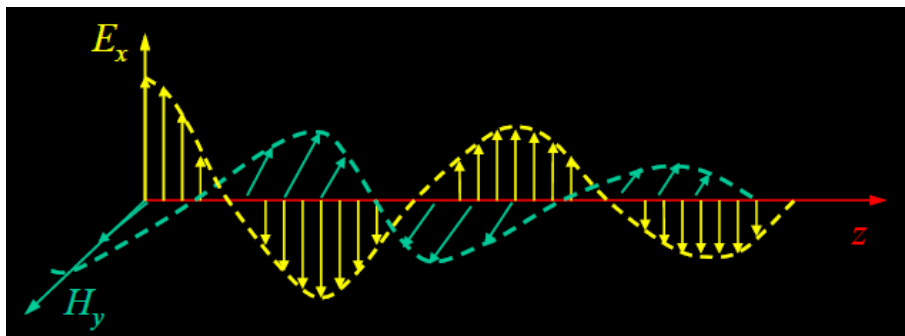
导电介质的波阻抗 $\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{-1/2} = |\tilde{\eta}| e^{j\theta}$

$$|\tilde{\eta}| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right)^{-1/4} < \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) = 0 \sim \frac{\pi}{4}$$

导电介质的波阻抗为一复数，其模小于理想介质的波阻抗，幅角在 $0 \sim \pi/4$ 变化，具有感性相角。

一、导电介质中平面电磁波的传播特性

$$\text{此时 } \vec{E} = \vec{a}_x E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad \vec{H} = \vec{a}_y \frac{E_0}{\tilde{\eta}} e^{-j\tilde{k}z} = \vec{a}_y \frac{E_0}{\tilde{\eta}} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = \vec{a}_y \frac{E_0}{|\tilde{\eta}|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\theta}$$



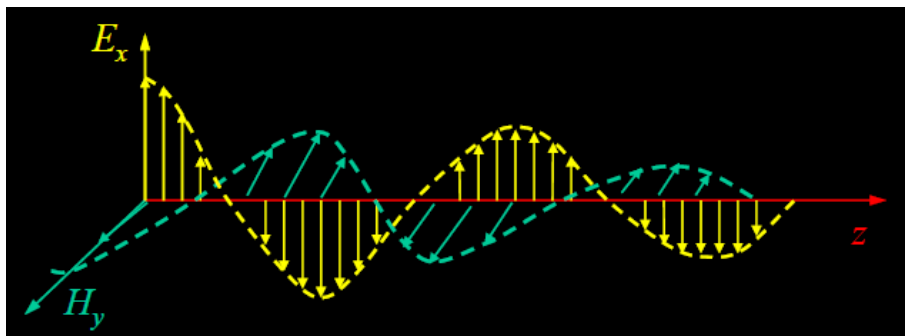
导电介质中的均匀平面波

◆ 表明:

1. 在导电介质中传播的平面波，电场磁场和传播方向三者相互垂直，呈右手螺旋关系，仍是TEM波
2. 电场强度和磁场强度在空间上虽然仍相互垂直，但在时间上有相位差，二者不再同相，电场强度相位超前磁场强度

一、导电介质中平面电磁波的传播特性

$$\text{此时 } \vec{E} = \vec{a}_x E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad \vec{H} = \vec{a}_y \frac{E_0}{\tilde{\eta}} e^{-j\tilde{k}z} = \vec{a}_y \frac{E_0}{\tilde{\eta}} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = \vec{a}_y \frac{E_0}{|\tilde{\eta}|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\theta}$$



导电媒质中的均匀平面波

◆ 表明:

3. 因为电场强度与磁场强度的相位不同，复能流密度的实部及虚部均不会为零，这就意味着平面波在导电媒质中传播时，既有单向流动的传播能量，又有来回流动的交流能量。
4. 有衰减；色散波（相速与频率有关）

二、良导体中平面电磁波的传播特性

通常，按 $\sigma / \omega \varepsilon$ 的比值，把介质分为三类：

良介质： $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \ll 1$

不良导体： $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \approx 1$

良导体： $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \gg 1$

注意： 介质属于良介质还是良导体，不仅与介质参数有关，而且与频率有关。

在良导体中，考虑： $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \gg 1, \quad |J_c| \gg |J_d|$

则有 $\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega \varepsilon \vec{E} = j\omega \varepsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right) \vec{E}$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \end{cases}$$

相应的波动方程

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - j\omega \mu \sigma \vec{E} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - j\omega \mu \sigma \vec{H} &= 0 \end{aligned}$$

令 $\tilde{k} = \sqrt{-j\omega\mu\sigma} = \beta - j\alpha$ 则有

$$\beta = \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{2\pi}{\lambda_p}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}, \quad \lambda_p = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\varepsilon}}} = \sqrt{j\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+j) = \frac{\alpha}{\sigma}(1+j)$$

设导体中的均匀平面波沿+z传播，则一般解为

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x, \quad E_x = E_{im} e^{-j\tilde{k}z} + E_{rm} e^{j\tilde{k}z}$$

只考虑入射波项

$$E_x = E_{im} e^{-j\tilde{k}z} = E_{im} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

$$H_y = \frac{E_{im}}{\tilde{\eta}} e^{-j\tilde{k}z} = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} E_{im} e^{-j\alpha z} e^{-j\beta z - j\frac{\pi}{4}} \quad -- H \text{ 的相位比 } E \text{ 落后 } 45^\circ$$

(1) 趋肤效应

衰减常数

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

以铜为例：

$$\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$$

$$300 \text{ MHz} \leq f \leq 3000 \text{ GHz}$$

$$26 \times 10^4 \leq \alpha \leq 26 \times 10^6 \text{ (1/m)}$$

$$26 \times 10^4 \leq \alpha \leq 26 \times 10^6 (1/m)$$

导体中 α 的值很大，电磁波一旦进入良导体内很快衰减为零，所以导体内的波动性很差，其内部几乎没有电磁波，只在导体表面很薄的一层中有电磁场。在导体表面

$$|E_x|_{z=0} = |E_{im}|$$

$$|\vec{J}| = \sigma |\vec{E}|$$

该电流很大，只存在于导体表面，称该现象为趋肤效应。

(2) 穿透（趋肤）深度

定义：电磁场幅值衰减到表现值（导体）的 e^{-1} 倍时所对应的距离为穿透深度，用 δ 表示，则有

$$E_m e^{-\alpha z} = E_m e^{-1}$$
$$\delta = z = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

1δ 处（ e^{-1} 倍时）的电磁场的幅值仅是导体表面值的0.368（36.8%）倍，功率仅是表面功率的13.5%

2δ 处（ e^{-2} 倍时）的电磁场的幅值仅是导体表面值的0.135（13.5%）倍，功率仅是表面功率的1.8%

银、铜、金穿透深度比较，在微波波段

$$3 \times 10^8 \leq f \leq 3 \times 10^{12} \text{ Hz} \quad (300 \text{ MHz} \leq f \leq 3000 \text{ GHz})$$

$$\delta = z = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

银: $\sigma = 6.15 \times 10^7 \text{ S/m}$ $3.7 \mu\text{m} > \delta > 0.037 \mu\text{m}$

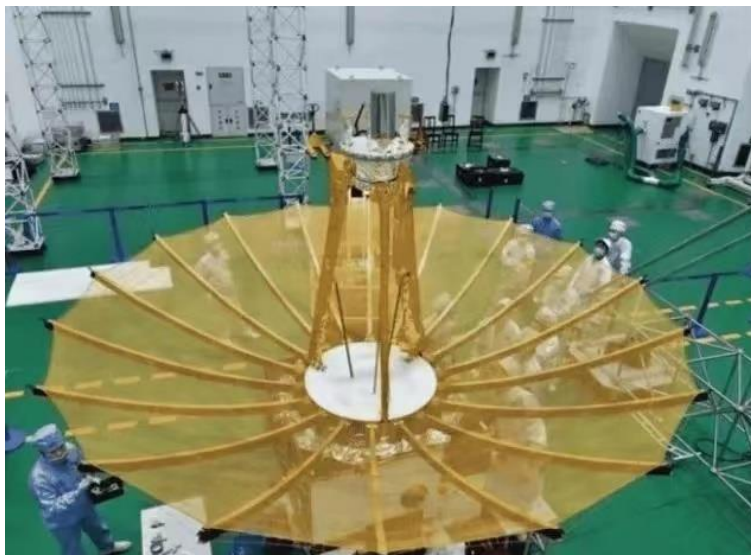
铜: $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ $3.8 \mu\text{m} > \delta > 0.038 \mu\text{m}$

金: $\sigma = 4.1 \times 10^7 \text{ S/m}$ $4.5 \mu\text{m} > \delta > 0.045 \mu\text{m}$

理想导体: $\sigma = \infty, \delta = 0$

趋肤效应的应用：

1. 高频线圈使用多股漆包线绕制，增加截面积，提高 Q 值；
2. 短波发射机可使用空心铜管绕制发射线圈（电流主要在表面流动）；
3. 使用工程塑料或玻璃钢表面金属化工艺制做天线；
4. 材料表面镀金或镀银，降低表面电阻。



避免趋肤效应举例：

- 1.微波炉内不能放金属碗。由于微波的趋肤效应，金属表面会感应出壁电流并有欧姆损耗，在金属制品的接缝和尖端处，还能迸发电火花，从而损伤微波炉体，甚至可以缩短磁控管的使用寿命。
- 2.由于海水中电磁能量的损耗和趋肤效应，海底通信必须使用频率很低的无线电波，或者将收发天线上浮至海水表面附近。



(3) 波阻抗

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\varepsilon}}} = \sqrt{j \frac{\omega \mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} (1 + j) = \frac{\alpha}{\sigma} (1 + j)$$

以铜为例 $|\tilde{\eta}| = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{\sigma}} = 6.39 \sqrt{10^{-14} f}$

在微波波段（300MHz—3000GHz）

$$6.39 \times 10^{-3} \leq |\tilde{\eta}| \leq 0.639 (\Omega)$$

波阻抗很小，电场强度远小于磁场强度。而且频率越低，波阻抗越小。电磁波在良导电媒质表面上大部分被反射掉，少部分进入表面薄层转化为焦耳热被损耗掉。

(4) 相速与波长

$$\beta = \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad \text{与} f \text{有关, 是色散波}$$

$$\lambda_p = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mu\sigma f}}$$

(5) 表面阻抗

设导体中的平面波 $E_x = E_{im} e^{-j\tilde{k}z}$ $H_y = \frac{E_{im}}{\tilde{\eta}} e^{-j\tilde{k}z}$

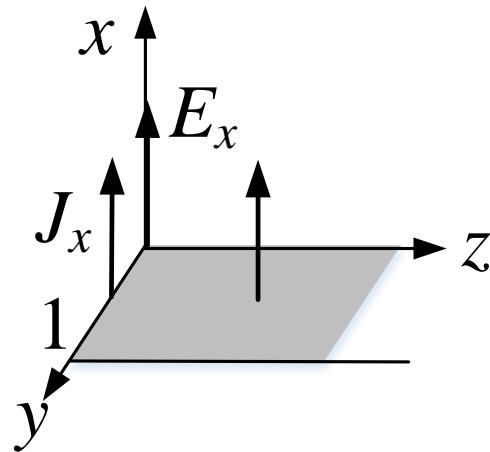
导体中有传导电流 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

$$J_x = \sigma E_x = \sigma E_{im} e^{-j\tilde{k}z} \text{ (A/m}^2\text{)}$$

流过 $yo z$ 面单位宽度 (y 方向取1, $z \rightarrow \infty$)
的电流 I 为:

$$I = \int_0^1 dy \int_0^\infty J_x dz = \frac{\sigma}{j\tilde{k}} E_{im} = \frac{\sigma}{(1+j)\alpha} E_{im} = \frac{1}{\tilde{\eta}} E_{im} = H_{im} = J_s$$

导体表面上单位长度的电压为: $V = \int_0^1 E_x|_{z=0} dx = E_{im}$



表面阻抗

$$Z_s = \frac{\text{表面上单位长度的电压}}{\text{单位宽度上流过的电流}} = \frac{V}{I} = \frac{E_{im}}{E_{im}\sigma} j\tilde{k}$$
$$= \frac{j\tilde{k}}{\sigma} = \frac{\alpha}{\sigma}(1+j) = \tilde{\eta} = R_s + jX_s$$

$$R_s = \frac{1}{\sigma\delta} \quad \text{——表面电阻}$$

$$R_s = X_s$$

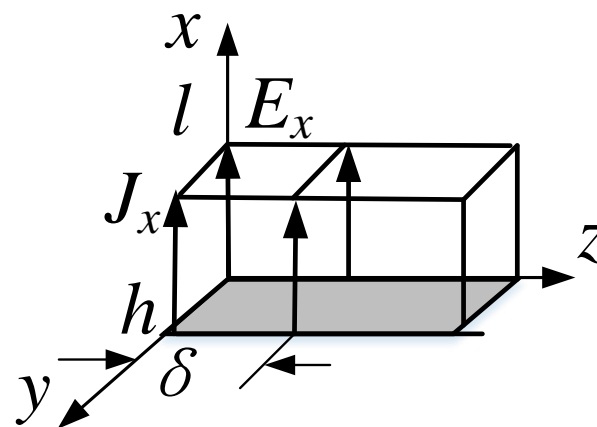
$$X_s = \frac{1}{\sigma\delta} \quad \text{——表面电抗}$$

若计算长为 l （ x 方向），宽为 h （ y 方向）的导体表面阻抗，则可得

$$V = E_{im} l, \quad I = \frac{\sigma}{jk} h E_{im}, \quad Z = \frac{l}{h} Z_s$$

$$R = \operatorname{Re} \left(\frac{jk}{\sigma} \frac{l}{h} \right) = \frac{1}{\sigma \delta} \frac{l}{h}$$

相当于厚为 δ 的导体在直流下的电阻。



若导体表面的面电流密度 $\vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H}$ 已知，可得导体表面单位面积上的平均损耗功率为

$$\Delta P_l = \frac{1}{2} R_s |\vec{J}_s|^2 = \frac{1}{2} R_s |H_{im}|^2$$

$$|H_{im}| = \frac{1}{|\tilde{\eta}|} |E_{im}| = \frac{1}{\sqrt{2} R_s} |E_{im}|$$

$$\Delta P_l = \frac{1}{2} R_s |H_{im}|^2 = \frac{1}{2} |E_m|^2 \frac{\sigma \delta}{2} = \frac{1}{2} |E_m|^2 \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}}$$

$$P_l = \oint_s \frac{1}{2} R_s |\vec{J}_s|^2 dS$$

例3-2 证明均匀平面波在良导体中传播时，场强行进一个波长的衰减约为-55dB。

证明： 良导体 $\tan \delta_e = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \gg 1$, $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \frac{2\pi}{\lambda_p}$

设 $\vec{E} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$, $\vec{E}|_{z=0} = E_0$, $\vec{E}|_{z=\lambda_p} = E_0 e^{-2\pi} e^{-j2\pi}$

$$\therefore \left| \frac{\vec{E}}{E_0} \right|_{z=\lambda_p} = e^{-\alpha \lambda_p} = e^{-2\pi}$$

即 $20 \log \left| \frac{\vec{E}}{E_0} \right|_{z=\lambda_p} = 20 \log e^{-2\pi} \approx -54.58 \text{dB}$

关于“dB”的小知识：

dB是一个比值，是一个数值，是一个纯计数方法，没有任何单位标注。在不同领域有着不同的名称，因此它也代表不同的实际意义。

1. 声音的大小

在实际日常生活中，住宅小区告知牌上面标示噪音要低于**60**分贝，也就是要低于**60dB**，在这里**dB**（分贝）的定义为噪声源功率与基准声功率比值的对数乘**10**的数值，用来形容声音的大小。

分贝数	实际效果
1~15	寂静
15~20	安静
20~40	喃喃细语
40~60	正常交谈
60~70	吵闹
70~90	很吵，开始损耗听力

关于“dB”的小知识：

2、信号强度

在无线通讯领域，衡量一个地点的某一无线基站通信信号强度也可以用dB

【 $10\lg$ （甲功率/乙功率）， $20\lg$ （甲场强/乙场强）】

常见表示形式：dBm、dBw

dbm--- $10\lg$ （功率值/1mw）

dBw---- $10\lg$ （功率值/1w）

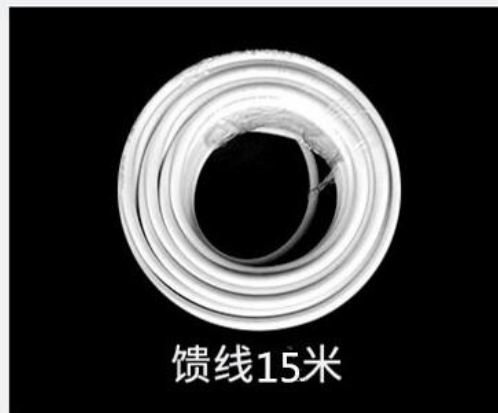


关于“dB”的小知识：

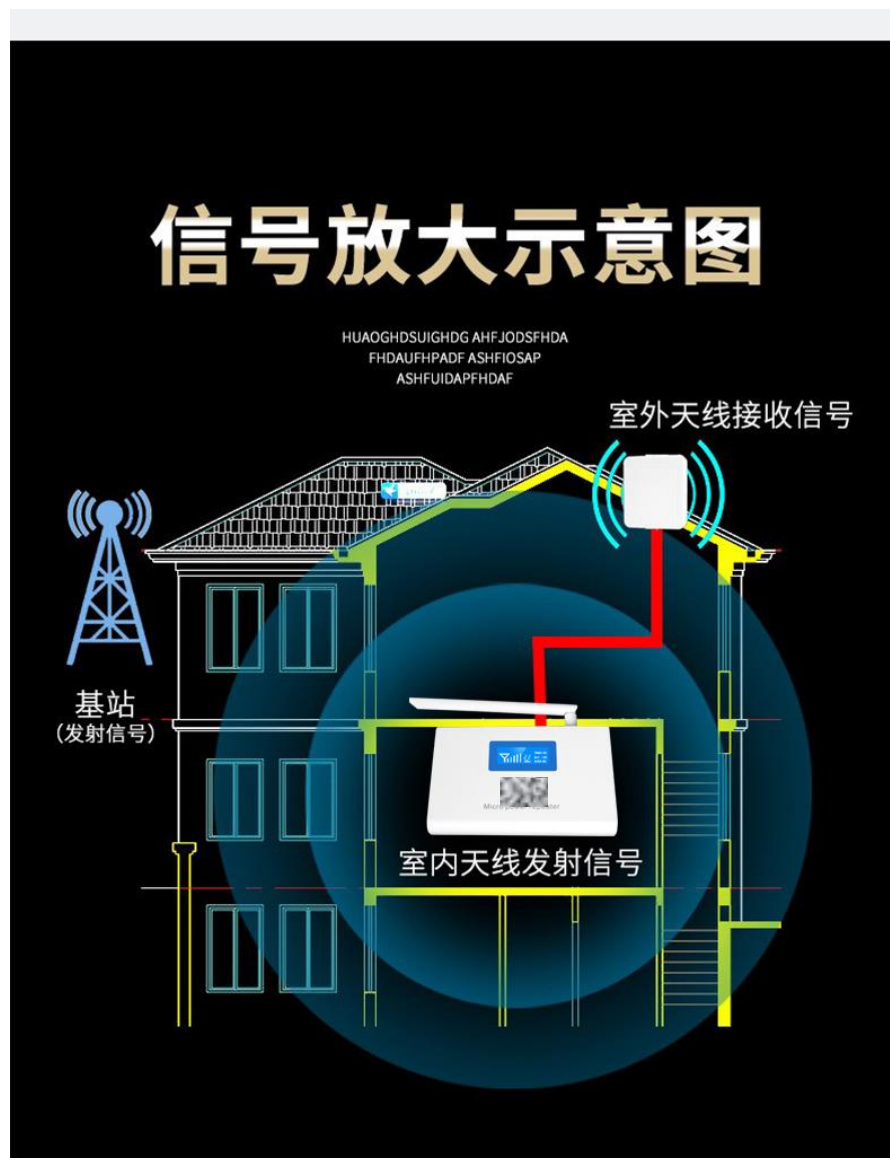
产品标配清单



BROADBAND CONNECTION



关于“dB”的小知识：



关于“dB”的小知识：

产品信息



BROADBAND CONNECTION

品牌	 手机信号放大器		
主机尺寸	180*110*25mm	频率	上行1710-1785MHZ 下行1805-1880MHZ
杂散辐射	<-40dBm	总噪声系数	<-5dB
带内波动	<-5dBm	阻抗	50Ω
最低可放大功率	-105dBm/Channel	接口	室外F头 室内SMA头
电源	AC100-240V/DC5V-0.5/1A	运营商	三网

关于“dB”的小知识：

3、增益

在天线技术方面，**dB**是衡量天线性能的一个参数，名称为增益。它是指在输入功率相等的条件下，实际天线与理想天线在空间同一点处所产生的信号的功率密度之比。常见表示形式：**dB_i**、**dB_d**

dB_i和**dB_d**是表征增益的值（功率增益），两者都是一个相对值，但参考基准不一样。**dB_i**的参考基准为全方向性天线，**dB_d**的参考基准为偶极子，所以两者略有不同。一般认为，表示同一个增益，用**dB_i**表示出来比用**dB_d**表示出来要大2.15。

3.3 电磁波的极化

- (1) 线极化波
- (2) 圆极化波
- (3) 椭圆极化波
- (4) 均匀平面波的合成分解及应用

前面我们讨论了均匀平面波，其电场矢量 \vec{E} 或磁场矢量 \vec{H} 的方向是不随时间 t 变化的，即

$$\vec{E} = E_{xi} e^{-jkz} \vec{e}_x, \quad \vec{H} = H_{yi} e^{-jkz} \vec{e}_y = \frac{E_{xi}}{\eta} e^{-jkz} \vec{e}_y$$

无论何时，电磁场矢量 \vec{E} 始终沿着 x 轴方向， \vec{H} 始终沿着 y 轴方向。然而这仅是横电磁波的一个特例。

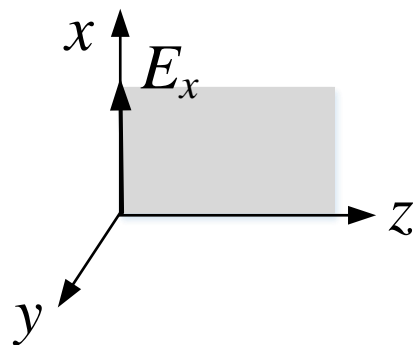
就普遍情况而言，横电磁波的电场矢量 \vec{E} 含有两个相互正交的分量 E_x, E_y ，且它们的合成矢量 \vec{E} 的方向随着时间在空间是变化的。

电磁波的空间取向随时间的变化方式称为**电磁波的极化**（物理学中称为偏振），它是电磁波的重要特性之一。

➤ 极化方式通常用观察点电场矢量的端点（矢端）随时间变化在空间描绘的轨迹表示。电场矢量 \vec{E} 和传播方向所处的平面称为极化平面。

➤ 极化的用途：极化隔离，某些极化方式影响传播性能。

➤ \vec{E} 的矢端轨迹有三种：线、圆、椭圆。所以分别称其为线极化，圆极化和椭圆极化。前面讨论的平面波的极化方向就是x轴方向，极化平面就是xoz平面，不随时间变化，所以称为线极化。



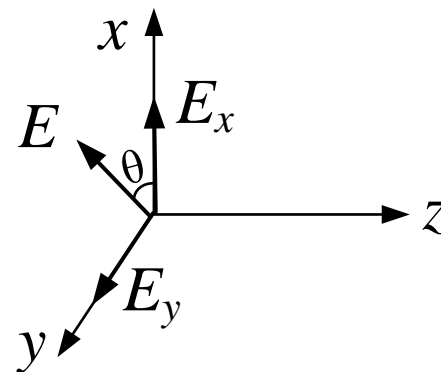
一般情况下，平面波 $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y$ ，设其仍沿+z轴方向传播，则有

$$E_x = E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) = |E| \cos \theta$$

$$E_y = E_{ym} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) = |E| \sin \theta$$

其合成矢量

$$\vec{E} = |\vec{E}| e^{j\theta}$$



其中

$$|\vec{E}| = E_m \cos(\omega t - kz + \varphi) = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{E_y}{E_x}$$

根据 E_{xm} 、 E_{ym} 、 φ_x 、 φ_y 的不同，可组合出不同的极化波。

1) 线极化

$$E_{xm}、E_{ym} \text{ 任意, } \varphi_y - \varphi_x = n\pi$$

$$E_y = E_{ym} \cos(\omega t - kz + \varphi_x + n\pi) = \pm E_{ym} \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$$

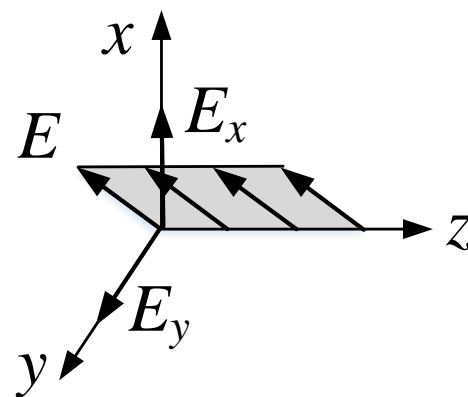
$$E_x = E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$$

$$\therefore |\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_{xm}^2 + E_{ym}^2} \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$$

$$\theta = \arctan \frac{E_y}{E_x} = \arctan \frac{\pm E_{ym}}{E_{xm}} = \text{const}$$

由于 θ 与 t 无关 (θ 是 \vec{E} 与 x 轴正向的夹角), 所以 \vec{E} 的方向不随时间变化, 所以是线极化。极化平面是与 xoz 平面夹角为 θ 的平面。

LP——Linear Polarization



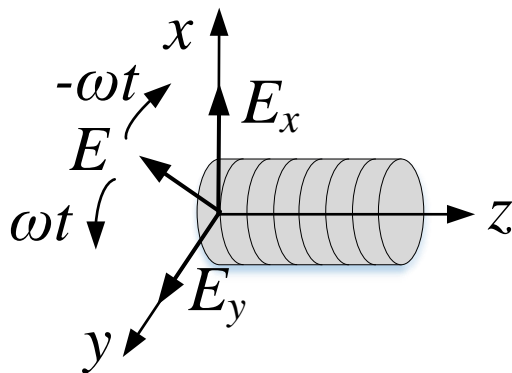
2) 圆极化 $E_{xm} = E_{ym} = E_m \quad \varphi_y - \varphi_x = \pm \frac{\pi}{2}$

$$\therefore E_y = E_m \cos\left(\omega t - kz + \varphi_x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp E_m \sin(\omega t - kz + \varphi_x)$$

$$E_x = E_m \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$$

$$\therefore |\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_m \quad \theta = \arctan \frac{E_y}{E_x} = \mp(\omega t - kz + \varphi_x)$$

合成场的矢端随时间以角频率 ω 在空间旋转，当 z 固定时，矢端轨迹是一个圆，所以称为圆极化（CP——Circular Polarization）

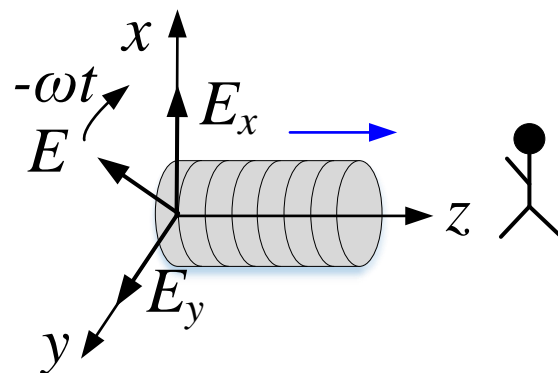


- 当 $\varphi_y - \varphi_x = +\frac{\pi}{2}$ 即 E_y 超前 E_x 90° 时

$$\theta = -(\omega t - kz + \varphi_x)$$

逆着传播方向看过去， ω 沿顺时针方向旋转，
称为左旋圆极化（LHCP）。

LHCP—Left Hand Circular Polarization

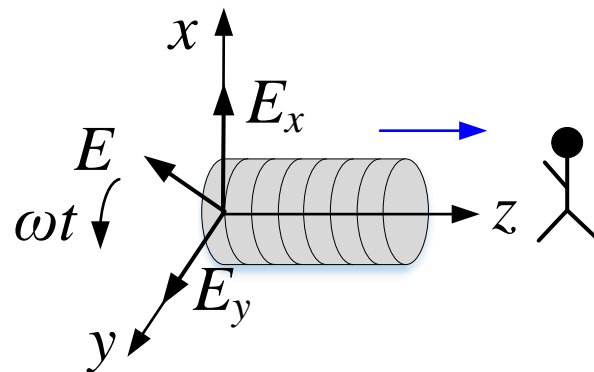


- 当 $\varphi_y - \varphi_x = -\frac{\pi}{2}$ 即 E_x 超前 E_y 90° 时

$$\theta = (\omega t - kz + \varphi_x)$$

逆着传播方向看过去， ω 沿逆时针方向旋转，
称为右旋圆极化（RHCP）。

RHCP—Right Hand Circular Polarization



- ✓ 左右手的判断方法：迎着传播方向，拇指对准传播方向，由相位超前的场分量沿最短路径（小于180角度）转向相位滞后的场分量，符合左手，就是左旋圆极化波，符合右手，就是右旋圆极化波。
- ✓ 判断圆极化波的旋向时，注意确定传播方向和哪个分量领先。
- ✓ 无论是左旋还是右旋圆极化波，其旋转速率都是均匀的角速度 ω 。

(3) 椭圆极化波

条件 $E_{xm} \neq E_{ym}, \varphi_x, \varphi_y$ 任意, 令 $\alpha = -kz + \varphi_x, \quad \beta = -kz + \varphi_y$

则
$$\frac{E_x}{E_{xm}} = \cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha \quad (1)$$

$$\frac{E_y}{E_{ym}} = \cos(\omega t + \beta) = \cos \omega t \cos \beta - \sin \omega t \sin \beta \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) \times \cos \beta - (2) \times \cos \alpha \quad \cos \beta \frac{E_x}{E_{xm}} - \cos \alpha \frac{E_y}{E_{ym}} &= \sin \omega t \cos \alpha \sin \beta - \sin \omega t \sin \alpha \cos \beta \\ &= \sin \omega t \sin(\beta - \alpha) \end{aligned} \quad (3)$$

$$(1) \times \sin \beta - (2) \times \sin \alpha \quad \sin \beta \frac{E_x}{E_{xm}} - \sin \alpha \frac{E_y}{E_{ym}} = \cos \omega t \sin(\beta - \alpha) \quad (4)$$

$$(3)^2 + (4)^2 \quad \left(\frac{E_x}{E_{xm}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{ym}} \right)^2 - \frac{2E_x E_y}{E_{xm} E_{ym}} \cos(\beta - \alpha) = \sin^2(\beta - \alpha) \quad (5)$$

式（5）是一个非标准的椭圆方程，也就是说，任意两个线极化波在空间的矢端轨迹（随 t 的变化）是一个椭圆。

$$\text{当 } \beta - \alpha = \pm \frac{\pi}{2} (E_{xm} \neq E_{ym})$$

$$\text{式（5）成为标准椭圆方程：} \left(\frac{E_x}{E_{xm}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{ym}} \right)^2 = 1$$

当 $E_{xm} = E_{ym}$ 上式成为圆的方程。

描述非标准椭圆方程的圆形参数：极化角和椭圆率（轴比）

极化角：椭圆的长轴与 x 轴正向的夹角，用 α 表示。

椭圆率（轴比）：

$$\rho = \frac{\text{短轴长}}{\text{长轴长}}$$

显然： $\rho = 0$ 为线极化， $\rho = 1$ 为圆极化， $0 < \rho < 1$ 为椭圆极化。

对于椭圆极化波同样也有左右旋极化之分。设波沿+z方向传播

当 $\beta - \alpha > 0$ 时，即 $0 < \varphi_y - \varphi_x < \pi$

E_y 超前 E_x ，称其为左旋椭圆极化。

当 $\beta - \alpha < 0$ 时，即 $0 < \varphi_x - \varphi_y < \pi$

E_x 超前 E_y ，称其为右旋椭圆极化。

线极化、圆极化、椭圆极化演示

（时间固定，电场的大小和方向随位置变化的情况）

[极化.mp4](#)

例6-3 已知空间平面波的电场为 $E_x = E_0 \cos(\omega t + kz - 45^\circ)$

$E_y = E_0 \cos(\omega t + kz + 225^\circ)$ 判断波的极化方式。

解: $E_{xm} = E_{ym} = E_0$, $\varphi_x = -45^\circ$, $\varphi_y = 225^\circ$ $\varphi_y - \varphi_x = 270^\circ = -90^\circ$

即 E_x 超前 E_y 90° , 平面波沿-z轴方向传播, 所以是左旋圆极化。

例6-4 已知自由空间中有一均匀平面波

$$E = 3 \cos(\omega t - kz) \bar{e}_x + 6 \cos(\omega t - kz + 75^\circ) \bar{e}_y \text{ (V / m)}$$

1) 判断波的极化方式; 2) 通过垂直于传播方向的单位面积的平均功率。

解: 1) $0 < \varphi_y - \varphi_x = 75^\circ < \pi$

即 E_y 超前 E_x , 且 $E_{xm} \neq E_{ym}$, 沿+z轴方向传播, 所以是左旋椭圆极化波。

$$2) \quad E_x = 3e^{-jkz} (V / m), E_y = 6e^{-j(kz-75^\circ)} (V / m)$$

$$H_y = \frac{E_x}{\eta_0}, \quad H_x = -\frac{E_y}{\eta_0}$$

$$S_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\left(3e^{-jkz} \vec{e}_x + 6e^{-j(kz-75^\circ)} \vec{e}_y \right) \times \left(-\frac{6}{\eta_0} e^{-j(kz-75^\circ)} \vec{e}_x + \frac{3}{\eta_0} e^{-jkz} \vec{e}_y \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{9}{\eta_0} + \frac{36}{\eta_0} \right) \vec{e}_z = \frac{45}{240\pi} \vec{e}_z (W / m^2)$$

(4) 均匀平面波的合成分解及应用

① 线极化波可以分解为两个幅值相等，旋向相反的圆极化波

设线极化波 $|\vec{E}| = E_m \cos(\omega t - kz + \varphi)$

它与x轴正向夹角为 θ ，则可分解为

$$\begin{aligned} E_x &= |\vec{E}| \cos \theta = E_m \cos(\omega t - kz + \varphi) \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} E_m \cos(\omega t - kz + \varphi + \theta) + \frac{1}{2} E_m \cos(\omega t - kz + \varphi - \theta) = E'_x + E''_x \\ E_y &= |\vec{E}| \sin \theta = E_m \cos(\omega t - kz + \varphi) \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} E_m \cos\left(\omega t - kz + \varphi + \theta - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} E_m \cos\left(\omega t - kz + \varphi - \theta + \frac{\pi}{2}\right) = E'_y + E''_y \end{aligned}$$

平面波沿+z轴方向传播

E'_x 与 E'_y 振幅相同， E'_x 相位超前 E'_y 相位 90° ，右旋圆极化

E''_x 与 E''_y 振幅相同， E''_x 相位超前 E''_y 相位 90° ，左旋圆极化

② 圆极化波可分解为两个幅值相等，相位相差**90°**，方向垂直的线极化波

$$\vec{E} = E_m \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \vec{e}_x + E_m \cos\left(\omega t - kz + \varphi_x \pm \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_y$$

因此，用接收圆极化波的天线可接收到线极化波，反之亦然。民用中，大多数FM调频广播都是用圆极化波载波，这样用线天线也可接收。

圆极化波具有重要特性：

- （1）当圆极化波入射到对称目标（如平面、球面）上时，反射波的旋向改变，即左旋变右旋，右旋变左旋。
- （2）辐射圆极化波的天线，可以接收任意方向的线极化波。
- （3）辐射左旋圆极化波的天线，可接收左旋圆极化波，但不接收右旋圆极化波；辐射右旋圆极化波的天线，可接收右旋圆极化波，但不接收左旋圆极化波。这称为圆极化天线的旋向正交性。

圆极化波应用：

- ◆ 军事通讯用圆极化天线进行电子侦察和实施电子干扰，因为使用圆极化天线可以接受任意方向的线极化波。
- ◆ 雨雾天气，雷达采用圆极化波工作具有抑制雨雾干扰的能力。
- ◆ 电视台的电视信号（卫星电视信号）用圆极化波可以避免因城市建筑物的多次散射导致的电视图像重影效应。
- ◆ ...

圆极化波应用实例——导航

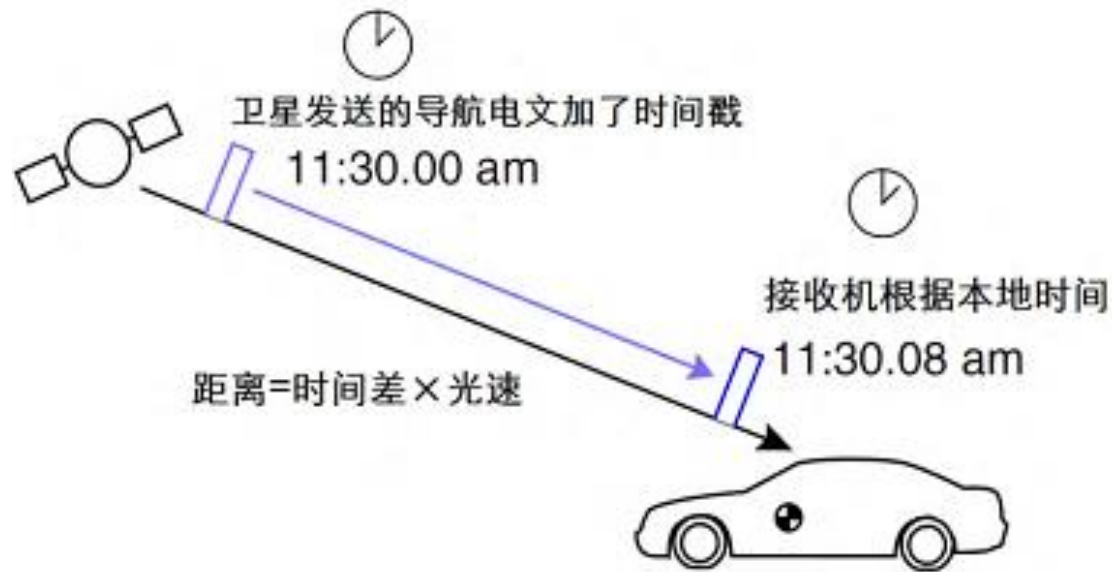


4大全球卫星导航系统

目前有4大全球卫星导航系统（**Global Navigation Satellite System, GNSS**），包括中国的北斗卫星导航系统（**BDS**）、美国的全球定位系统（**GPS**）、欧盟的伽利略卫星导航系统（**Galileo**）和俄罗斯的格洛纳斯卫星导航系统（**GLONASS**）。

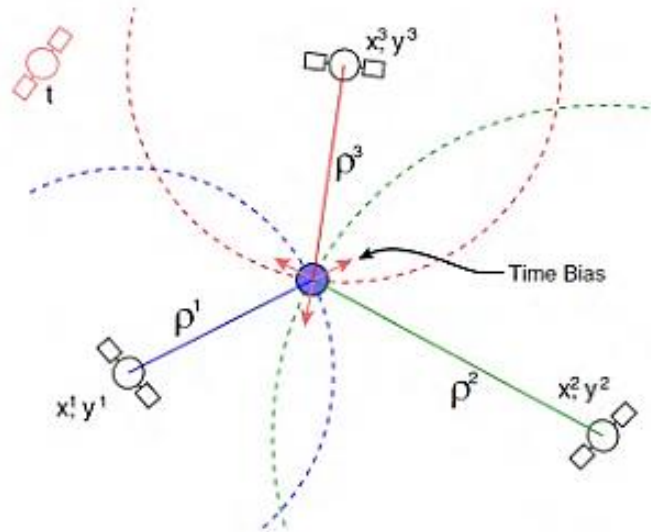


如何进行导航？



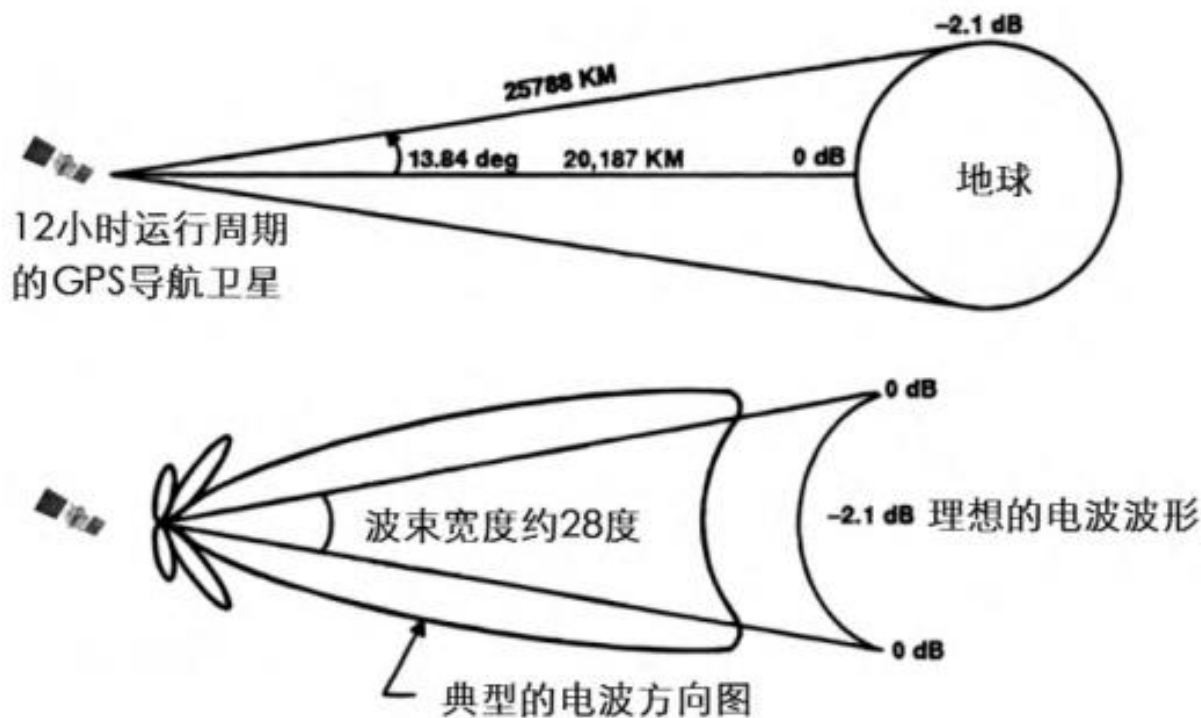
简单来说，导航卫星上有非常精密的原子钟，在其导航电文中包含了信号发送的时间，接收端根据本地时间做减法，再乘以光速，就是接收机到卫星的距离。如果同时测算三颗卫星的信号，就可以根据三角测量法确认位置。

如何进行导航？



不过，接收机很难有和卫星同步的精准时间，因此除了用户的三维坐标 x 、 y 、 z 外，还要引进一个卫星与接收机之间的时间差为未知数，然后用4个方程将这4个未知数解出来。所以如果想知道接收机所处的位置，需要接收到4个卫星的信号。

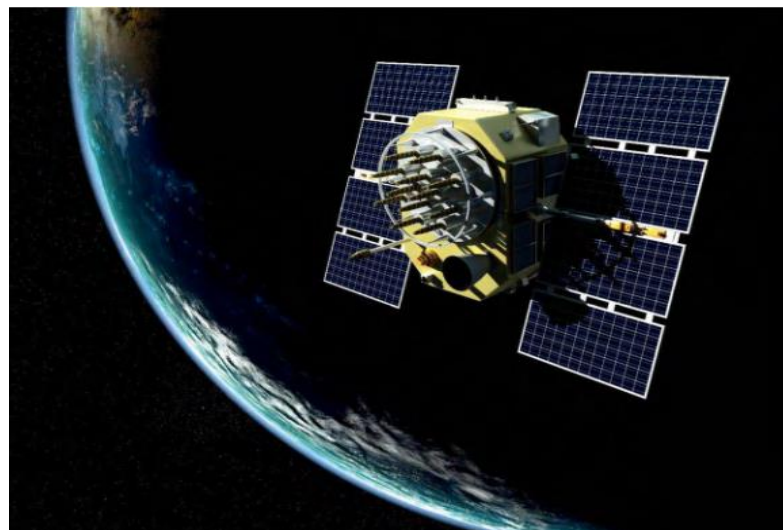
如何能够让地面用户收到远在2万多公里外发出的导航电文信号？



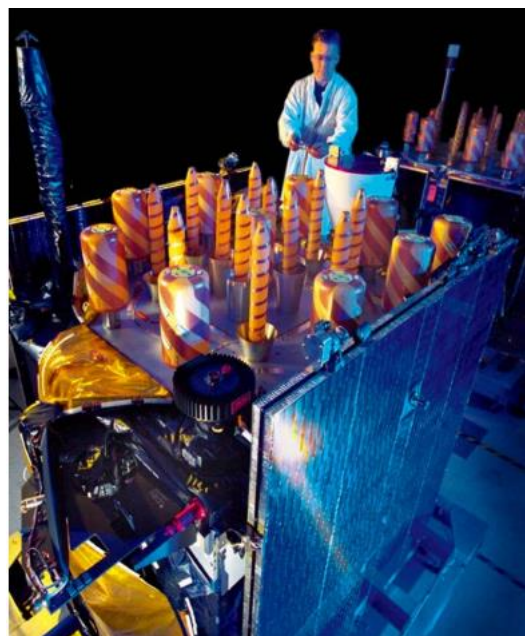
完美契合地球球面的天线波形



GPS BLOCK I卫星



GPS BLOCK II/IIA卫星



GPS BLOCK IIR



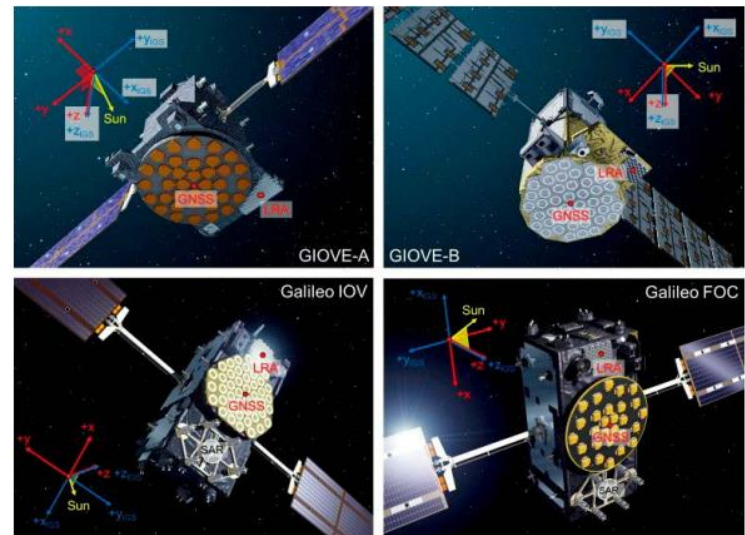
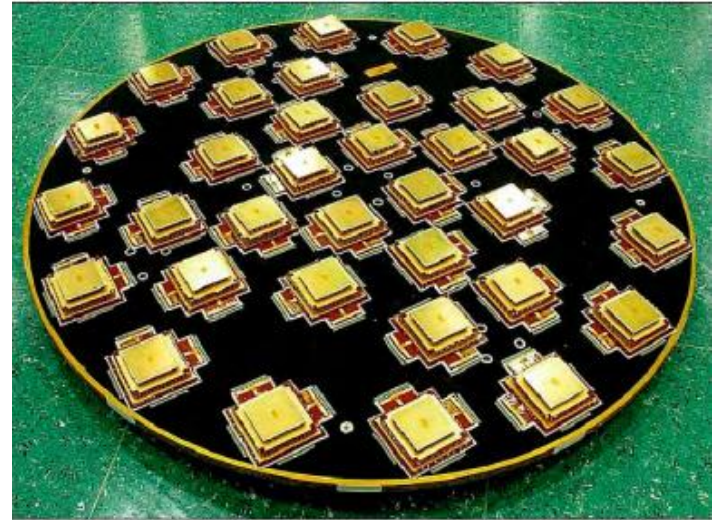
GPS BLOCK IIF



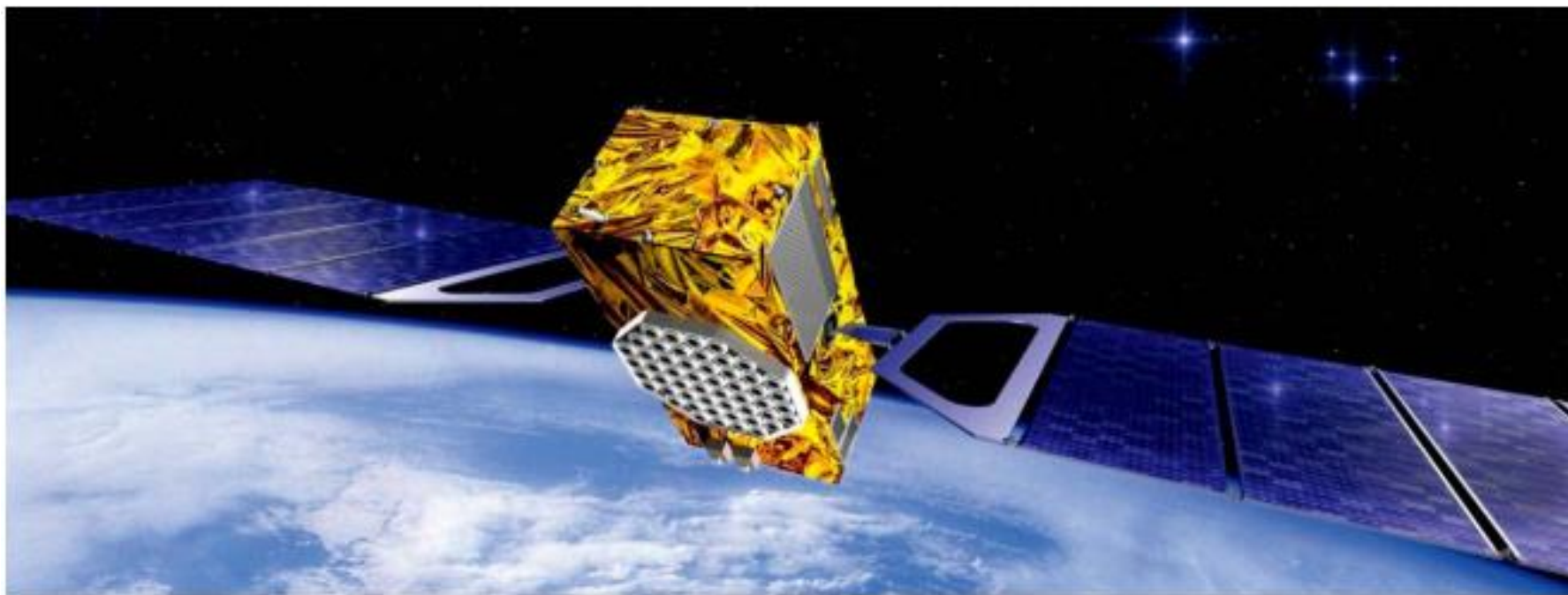
GPS BLOCK III



俄罗斯的格洛纳斯K卫星



欧盟的伽利略卫星

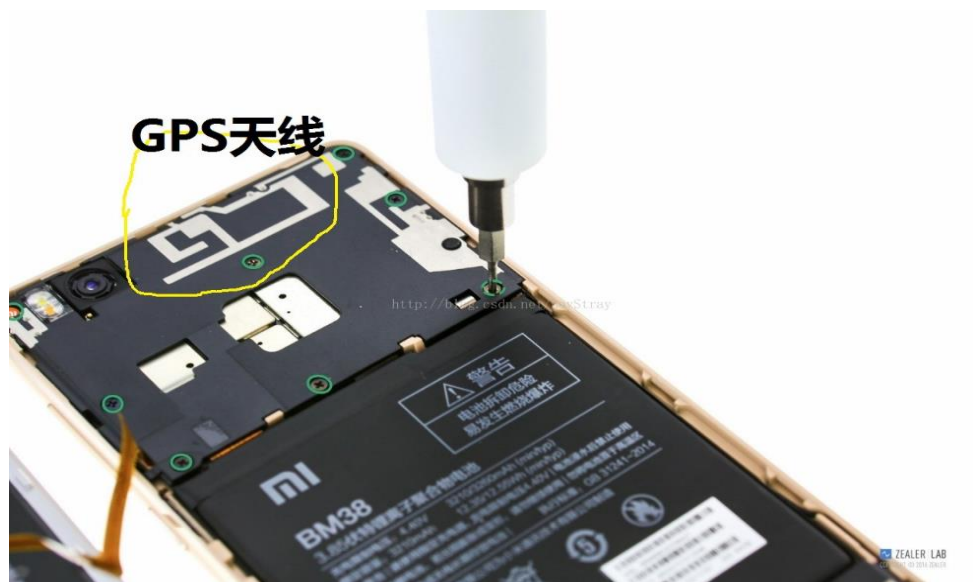


艺术家绘制的北斗ME0导航卫星示意图

北斗纪录片：

<https://tv.cctv.com/2020/10/05/VIDEOzDsdY0OZrfT8sli7HOk201005.shtml?spm=C55924871139.Pyoh1UKNPqt4.0.0>

地面用户用线极化天线或右旋圆极化天线可以接收导航信号



地面用户用线极化天线或右旋圆极化天线可以接收导航信号

身材小巧

质量轻，天线总重量 $<20\text{g}$
特别适用于无人机，手持机
可穿戴设备等对质量体积有
严苛要求的设备，大大降低
载荷负担



全向辐射特性

天线采用四臂螺旋结构
与传统微带结构天线相比
其具有更好的低仰角增益
广角圆极化特性，能接受
更多低仰角的卫星信号



地面用户用线极化天线或右旋圆极化天线可以接收导航信号

产品信息

天线频率	GPS L1 / L2	GLONASS G1 / G2	GALILEO E1 / E5b	BDS B1 / B2 / B3
顶点增益	L1≥2.0dBi L2≥2.0dBi	G1≥2.0dBi G2≥2.0dBi	E1≥2.0dBi E5b≥2.0dBi	B1≥2.0dBi B2≥2.0dBi B3≥1.5dBi
极化方式	RHCP			
输出阻抗	50Ω			
水平面覆盖角度	360°			
输出驻波比	≤1.5			
LNA指标				
增益	35±2dB			
噪声系数	≤2dB			
输出驻波比	≤1.5			
工作电压	3.0V-6.0V			
工作电流	≤25mA			
接头	SMA-J			
尺寸	Φ29.0mm*56.0mm			
重量	≤20g			
防水等级	IP67			
工作温度	-40℃~+80℃			
存储温度	-55℃~+85℃			

地面用户用线极化天线或右旋圆极化天线可以接收导航信号



基本参数

PRODUCT PARAMETER

Short enough to have a sense of security, built in intelligent
circuit control charging the wire prevents the current overload to a certain extent, it is to cut off the power
protect the safety of the machine



(尺寸为手工测量) 有1-2mm误差属正常

★型号:	GPS+北斗导航天线
★工作频率:	1575MHZ/1561MHZ
★阻抗:	50 Ω
★天线增益:	38DBI/28DBI
★长度高度:	50*38*17mm
★驻波比:	≤1.5
★极化方式:	右旋圆极化
★接口型号:	SMA内螺内针
★馈线长度:	RG174线 3米
★安装方式:	吸附式
★适用范围:	汽车4S店、车行、公交车报站器、驾校、出租公司及个体、DVD导航、汽车维修等设备