



第五章 频率响应法

5.1 频率特性的基本概念

5.2 典型环节的频率特性

5.3 开环系统频率特性图的绘制

5.4 控制系统的频域稳定判据

5.5 稳定裕量

5.6 开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

5.7 闭环频率特性和频域性能指标



5.4 控制系统的频域稳定判据

系统稳定的充要条件 — 全部闭环极点均具有负的实部

代数稳定判据 — Routh判据, 霍尔维茨判据※

- 由闭环特征多项式系数（不解根）判定系统稳定性
- 不能用于研究如何调整系统结构来改善系统稳定性的问题

频域稳定判据 — { Nyquist判据
Bode判据

- 由开环频率特性直接判定闭环系统的稳定性
- 可以研究包含延迟环节的系统的稳定性问题
- 可研究如何调整系统结构参数改善系统稳定性及性能问题

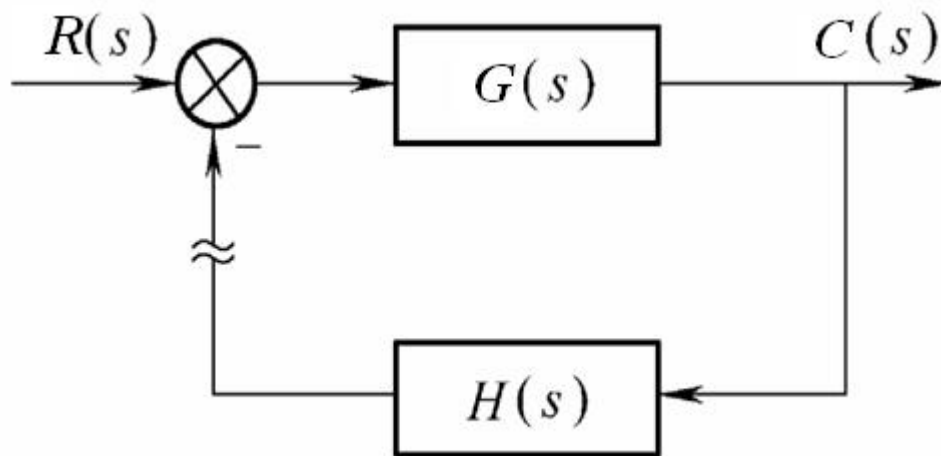


5.4 控制系统的频域稳定判据

一、辅助函数 $F(s)=1+G(s)H(s)$

基本思想：利用开环频率特性判别闭环系统稳定性。

1. 开环频率特性和闭环频率特性之间的关系





5.4 控制系统的频域稳定判据

开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$$

闭环传递函数

$$\phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)N(s)}{N(s) + M(s)}$$

构造特征函数

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{N(s) + M(s)}{N(s)}$$



5.4 控制系统的频域稳定判据

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{N(s) + M(s)}{N(s)}$$

$$F(s) = \frac{\prod_{j=1}^n (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

2. 辅助函数 $F(s)$ 的特点:

- (1) $F(s)$ 的**零点**、**极点**分别为系统的**闭环极点**、**开环极点**;
- (2) $F(s)$ 的零点和极点个数相同(均为 n);
- (3) 辅助函数和系统的开环传递函数只差常数1,
 $F(s)$ 平面的坐标原点就是 $[GH]$ 平面的点 $(-1, j0)$ 。

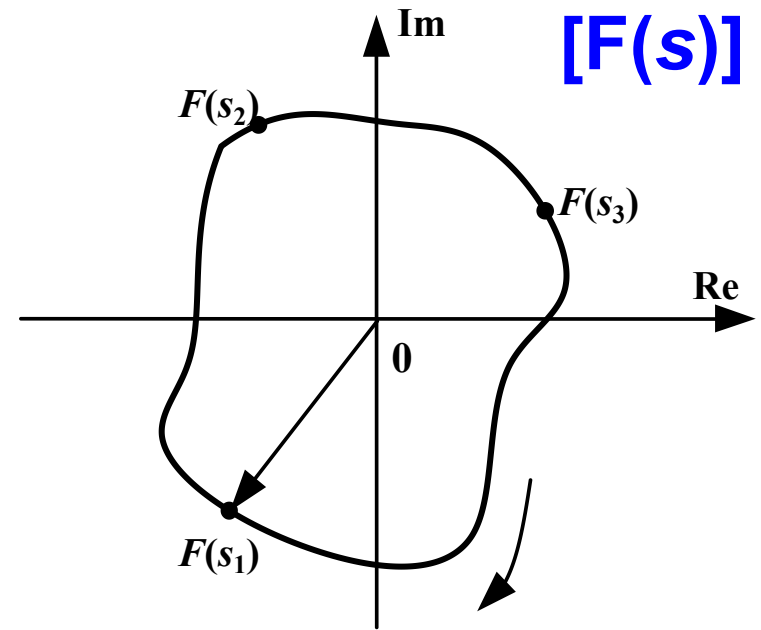
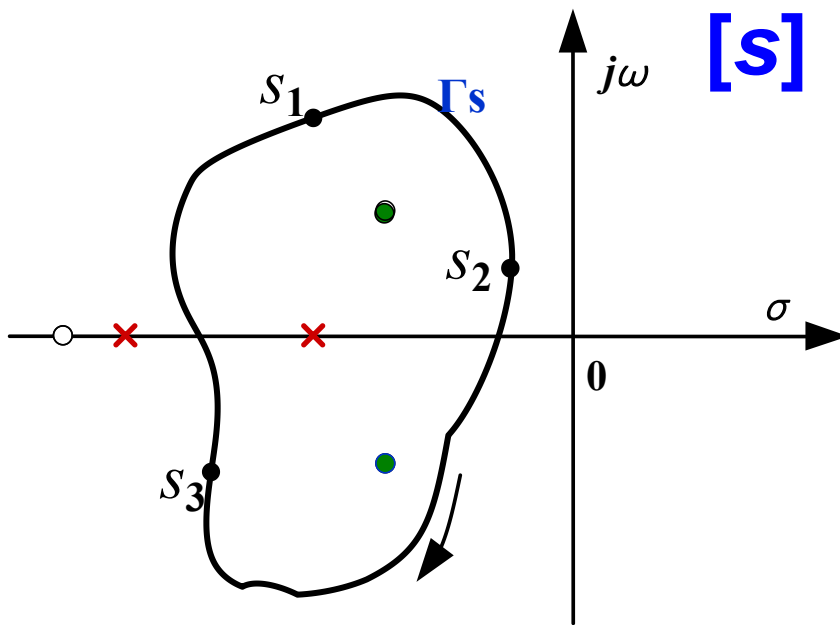


5.4 控制系统的频域稳定判据

二、幅角定理

由复变函数可知，对S复平面上除奇点外的任一点，经过特征函数 $F(s)$ 的映射，在 $F(s)$ 平面上可以找到对应的**象**。

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^n (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

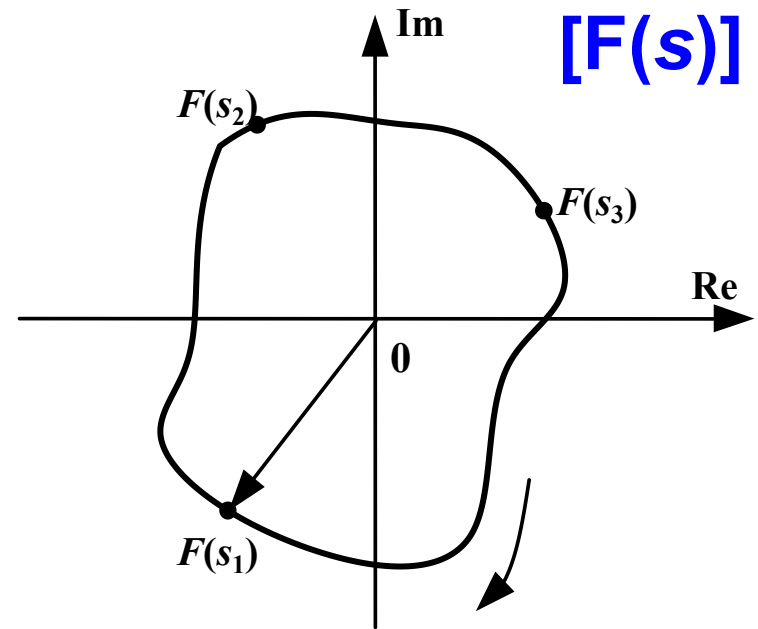
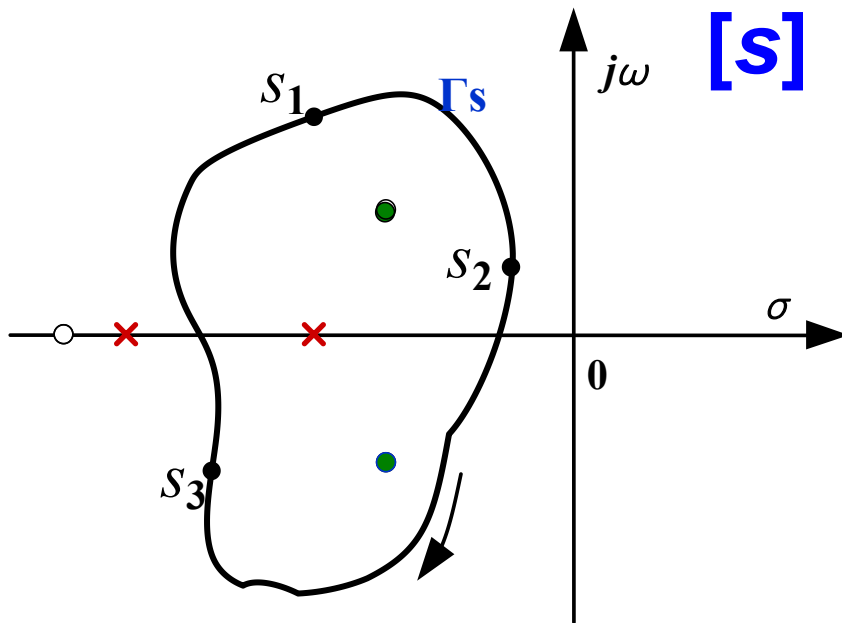




5.4 控制系统的频域稳定判据

在 s 平面上任取一条闭合路径 Γ_s ，满足以下条件：

- 1) 曲线 Γ_s 不通过 $F(s)$ 的奇点（即 $F(s)$ 的零点和极点）；
- 2) 曲线 Γ_s 包围 $F(s)$ 的 Z 个零点和 P 个极点。





5.4 控制系统的频域稳定判据

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^n (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

当 s 从 s_1 开始沿闭合路径 Γ_s 顺时针旋转一圈，复变函数 $F(s)$ 的相角增量记为：

$$\Delta \angle F(s) = \sum_{i=1}^n \Delta \angle (s - z_i) - \sum_{j=1}^n \Delta \angle (s - p_j)$$

(1) $F(s)$ 零点 z_i 和极点 p_j 没有被曲线 Γ_s 包围：

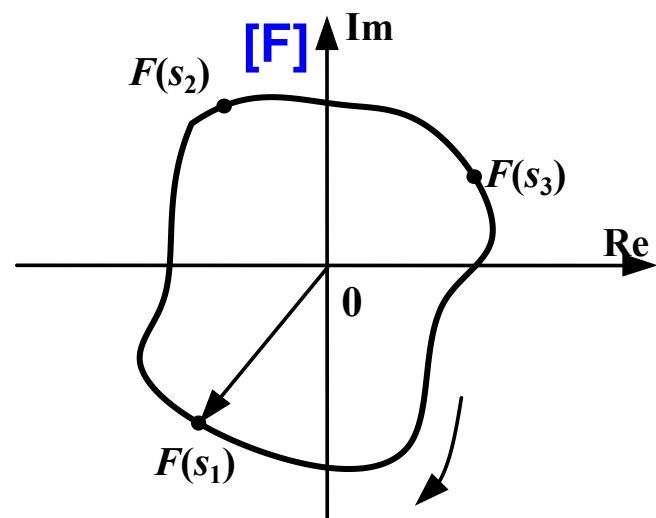
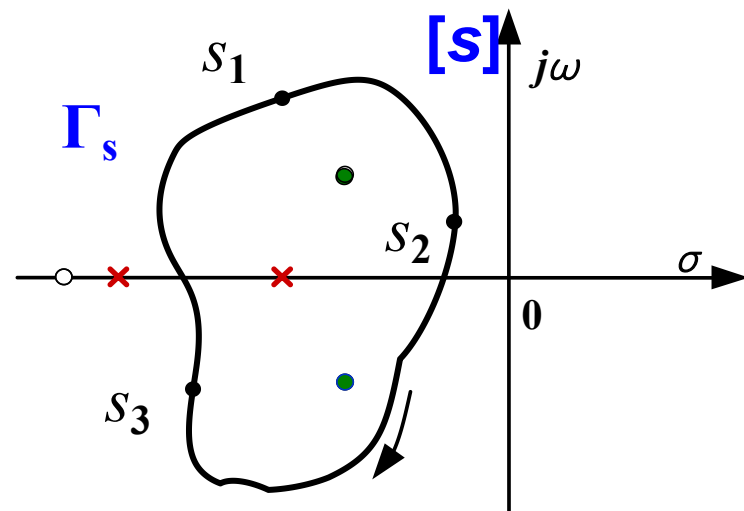
$$\Delta \angle (s - z_i) = \Delta \angle (s - p_j) = 0$$

(2) $F(s)$ 零点 z_i 和极点 p_j 被曲线 Γ_s 包围：

$$\Delta \angle (s - z_i) = \Delta \angle (s - p_j) = -2\pi \quad (\text{顺时针})$$

(3) $F(s)$ 在闭合路径 Γ_s 内有 Z 个零点和 P 个极点：

$$\Delta \angle F(s) = 2\pi(P - Z)$$

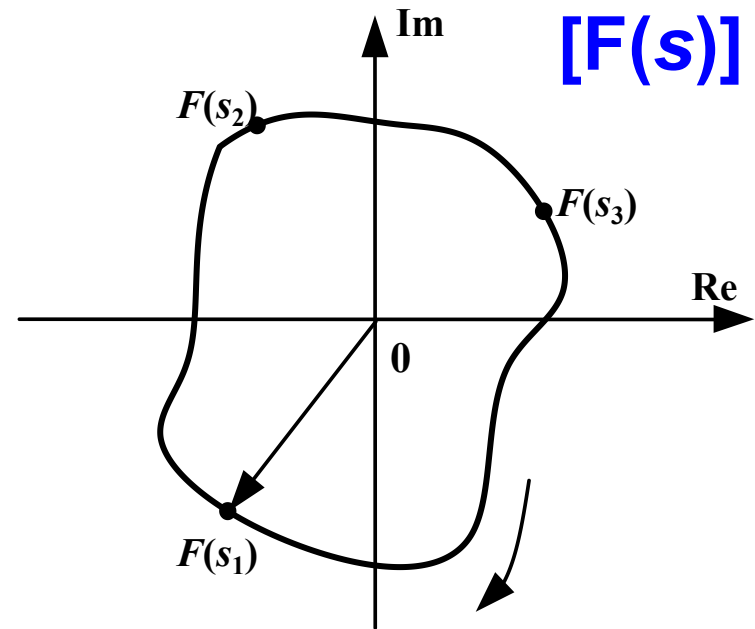
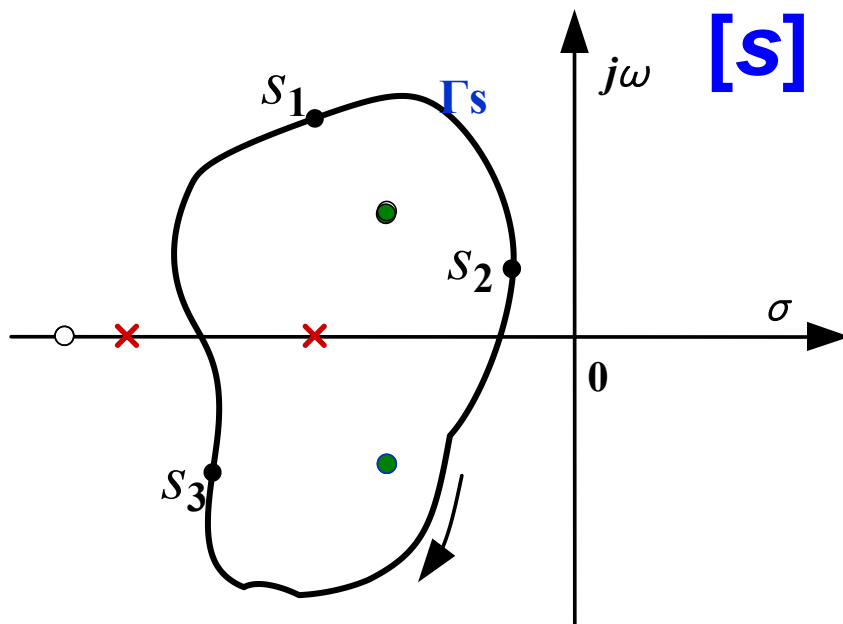




5.4 控制系统的频域稳定判据

柯西幅角定理:

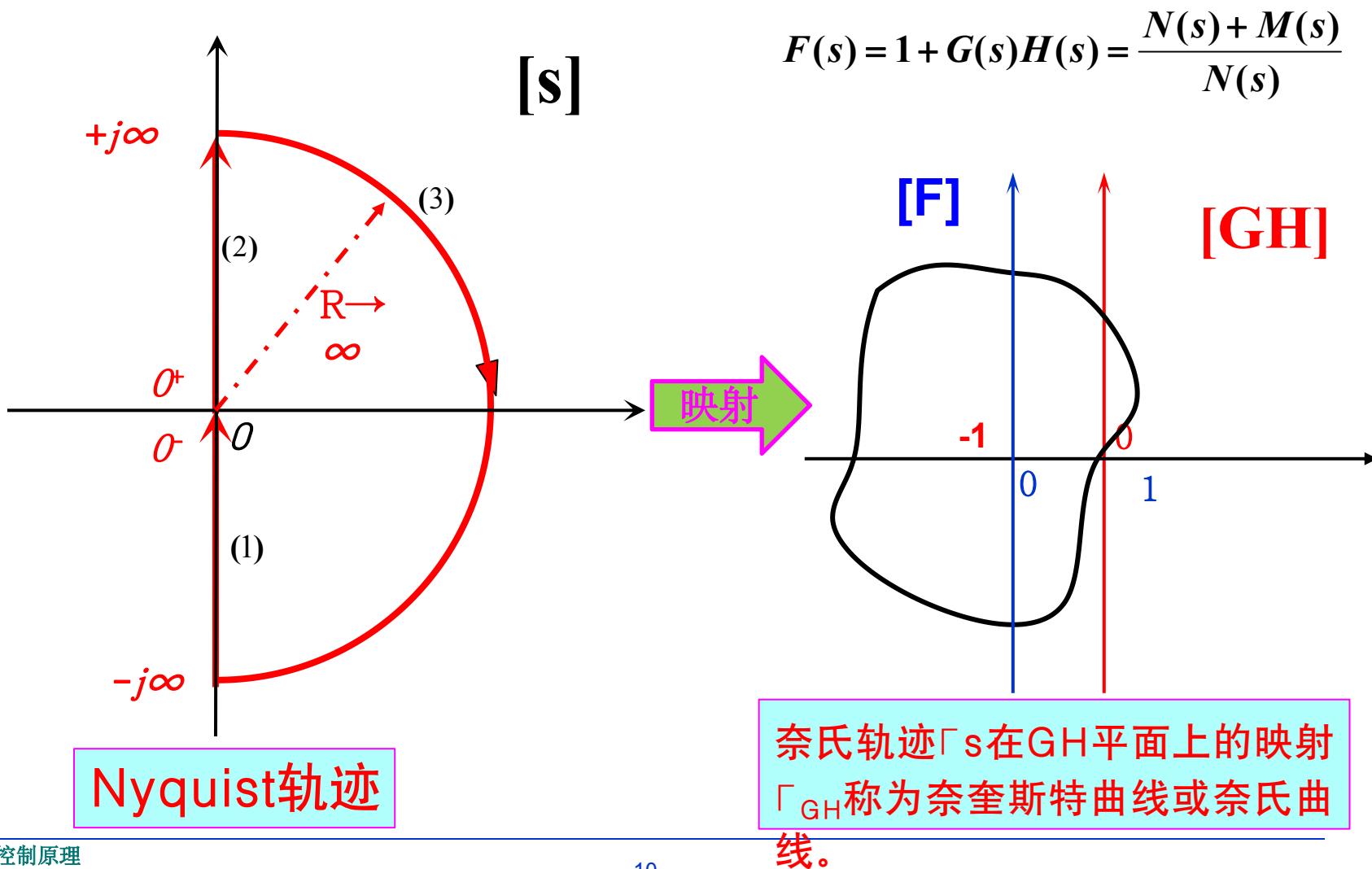
在 s 平面上任一封闭曲线包围了 $F(s)$ 的 Z 个零点和 P 个极点，并且不经过 $F(s)$ 的任一零点和极点，则当 s 沿闭合路径**顺时针**方向转过一周时，映射到 $F(s)$ 平面内的 $F(s)$ 曲线**逆时针**绕原点 $(P-Z)$ 圈。即 **$R = P-Z$** 。





5.4 控制系统的频域稳定判据

三、奈奎斯特稳定性判据





5.4 控制系统的频域稳定判据

1. 幅角原理在闭环系统稳定性分析中的应用

特征函数 $F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{N(s) + M(s)}{N(s)}$

用曲线 $s = -j\infty \rightarrow -j0 \rightarrow +j0 \rightarrow +j\infty \rightarrow -j\infty$

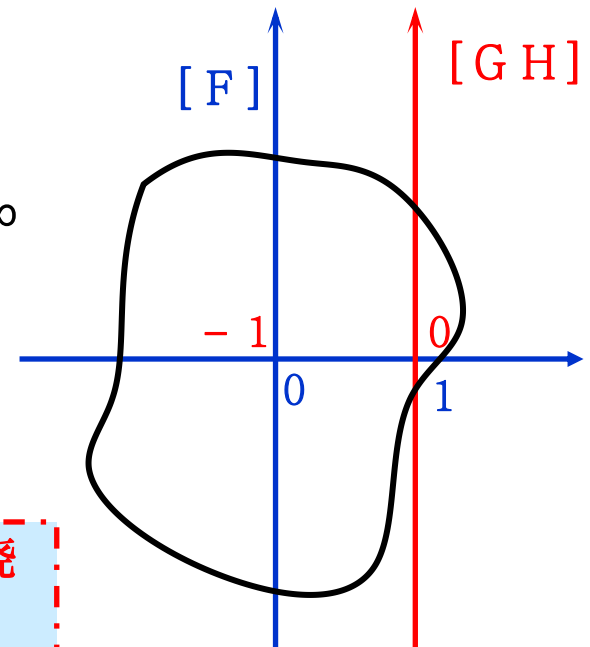
补足开环幅相频率曲线，形成 $s = +j\infty \rightarrow -j\infty$ 的奈奎斯特围线，则有：

$Z = P - R$

闭环右极点个数

开环右极点个数

奈氏曲线逆时针围绕 $(-1, j0)$ 点的次数





5.4 控制系统的频域稳定判据

2. 奈奎斯特稳定判据

$$Z = P - R$$

闭环系统稳定充要条件：当 ω 由 $-\infty \rightarrow +\infty$ 变化时， $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线逆时针包围 $[GH]$ 平面上 $(-1, j0)$ 点的次数 R 等于开环传递函数右极点个数 P 。

- a. 若 $P=0$ ，且 $R=0$ ，即 GH 曲线不包围 $(-1, j0)$ 点，则闭环系统稳定；
- b. 若 $P \neq 0$ ，且 $R=P$ ，即 GH 曲线逆时针绕 $(-1, j0)$ 点 P 圈，则闭环系统稳定，否则是不稳定系统。
不稳定系统分布 s 右半平面极点的个数可按下式求取： $Z=P-R$
- c. 若 GH 曲线通过 $(-1, j0)$ 点 L 次，则说明闭环系统有 L 个极点分布在 s 平面的虚轴上。



5.4 控制系统的频域稳定判据

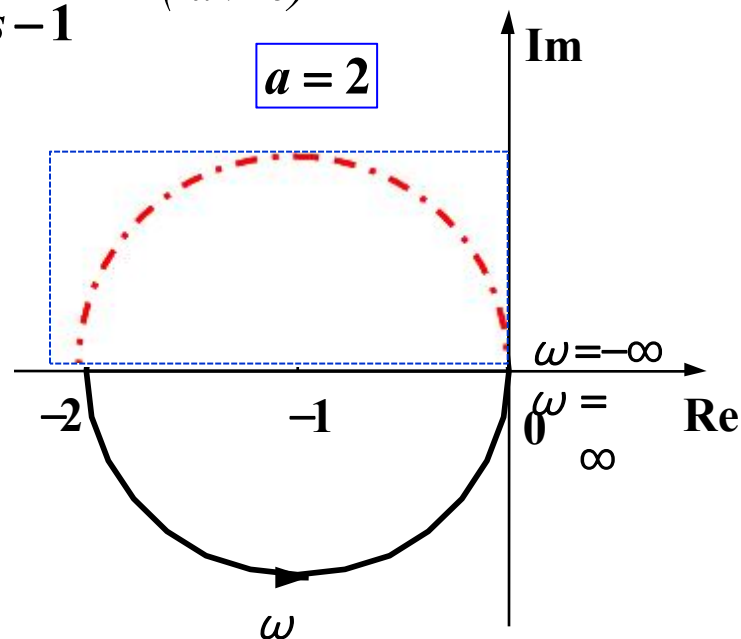
例1: 一系统开环传递函数为: $G(s)H(s) = \frac{a}{s-1}$ ($a > 0$)

试判别系统的稳定性。

解: 本系统的开环频率特性

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{a}{j\omega - 1}$$

当 $\omega = -j\infty \rightarrow -j0 \rightarrow +j0 \rightarrow +j\infty$ 变化时, 系统的幅相曲线如图所示。



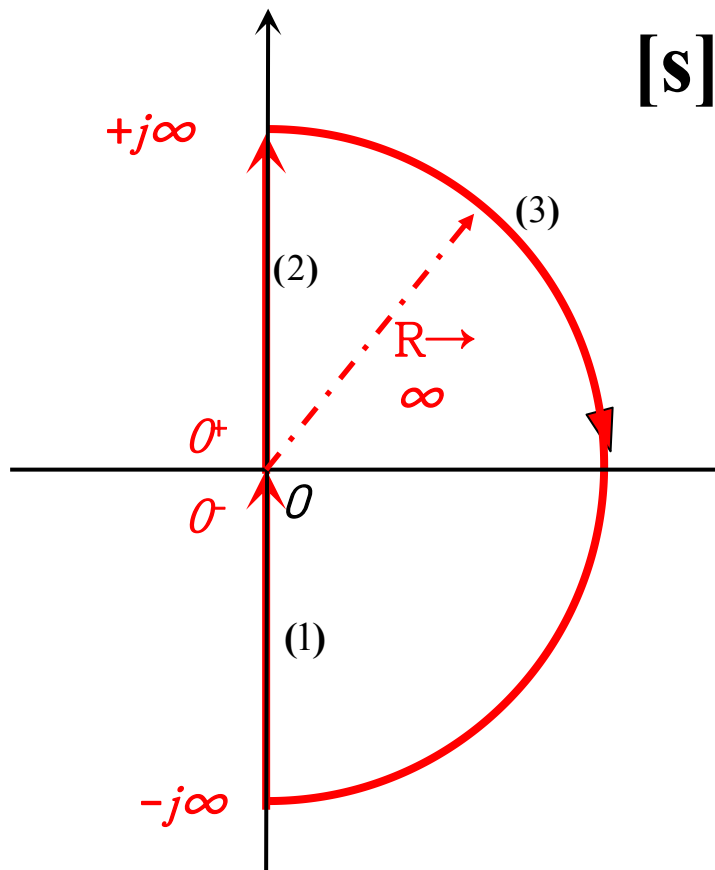
因为系统有一个开环极点位于 s 的右半平面, 即: $P=1$ 。

图中奈氏曲线是逆时针方向绕 $(-1, j0)$ 点的1圈, 即 $R=1$ 。

根据奈氏判据, 闭环系统在 s 右半平面极点数 $Z=P-R=1-1=0$, 所以系统稳定。

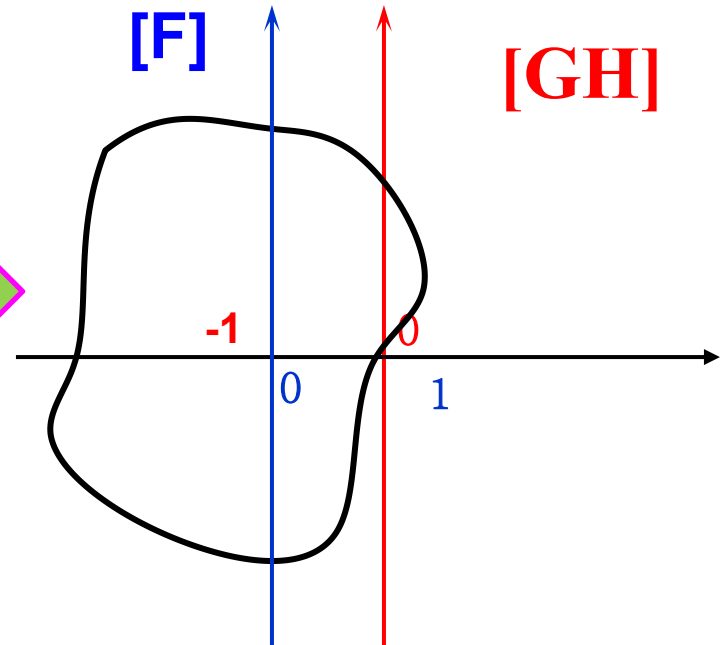
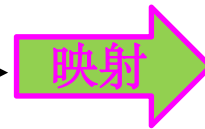


5.4 控制系统的频域稳定判据



Nyquist轨迹

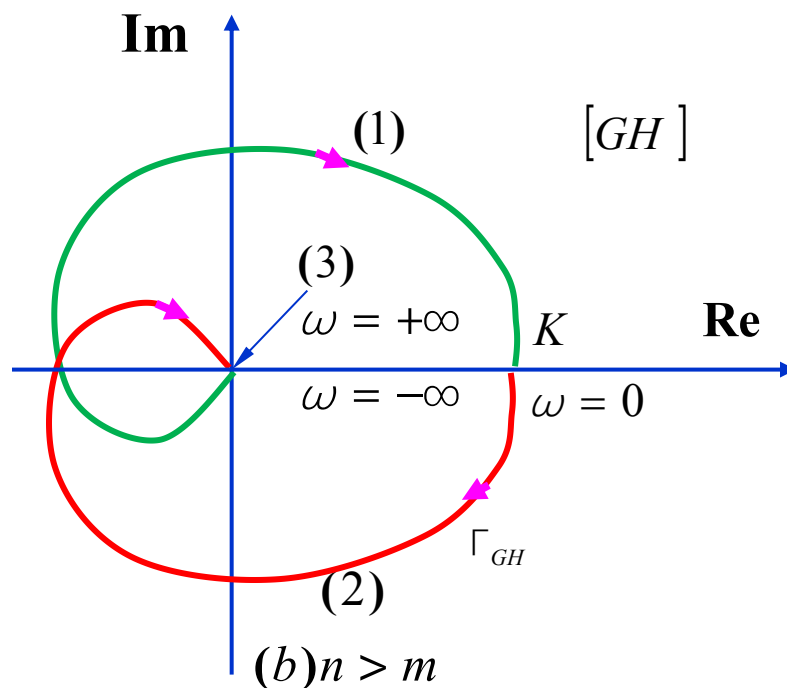
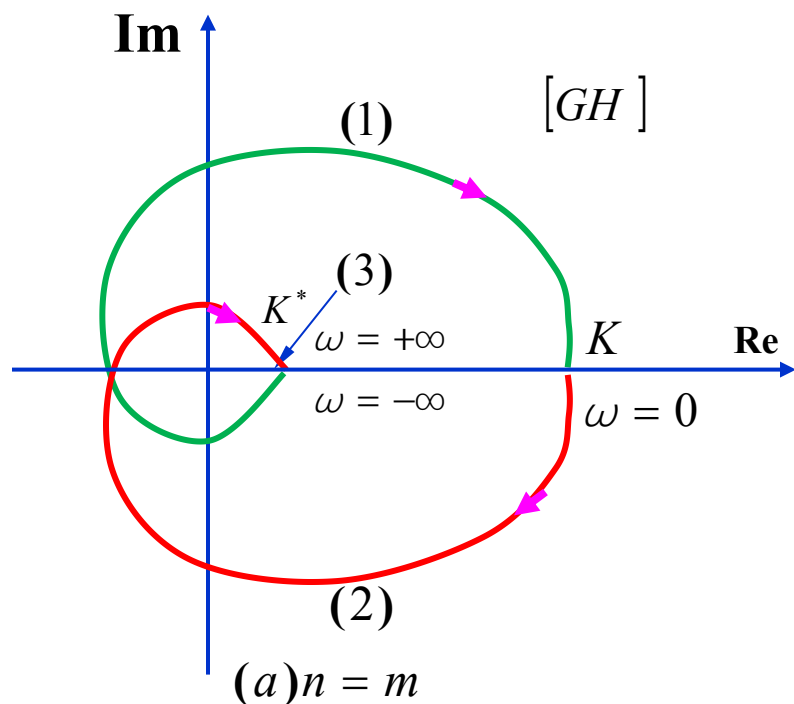
$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{N(s) + M(s)}{N(s)}$$



奈氏轨迹 Γ_s 在GH平面上的映射 Γ_{GH} 称为奈奎斯特曲线或奈氏曲线。



虚轴上无开环极点时的奈氏轨迹



Γ_s 在GH平面上的映射

当 s 在 S 平面负虚轴上变化时, $s = -j\omega$, 由于正负虚轴在 S 平面上以实轴为对称, 它们在 GH 平面上的映射也应关于实轴对称(曲线1)。即

$$\begin{aligned} |G(s)H(s)|_{s=-j\omega} &= G(-j\omega)H(-j\omega) \\ &= |G(j\omega)H(j\omega)|e^{-j\angle G(j\omega)H(j\omega)} \end{aligned}$$



5.4 控制系统的频域稳定判据

当 Γ_s 过平面原点时, $s = j0$, 它在GH平面上的映射应为

$$\left| G(s)H(s) \right|_{s=j0} = G(j0)H(j0) = K$$

即S平面原点在GH平面上的映射为常数K (K为系统开环放大系数)。

当s在 Γ_s 的第三部分上变化时, $s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{-j\phi}$, 它在GH平面上的映射为

$$\begin{aligned} \left| G(s)H(s) \right|_{s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{-j\phi}} &= \left| \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \right|_{s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{-j\phi}} \\ &= \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{1}{R^{n-m}} \right) e^{j(n-m)\phi} \end{aligned}$$

当 $n=m$ 时, $G(s)H(s) \Big|_{s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{-j\phi}} = \frac{b_m}{a_n} = K^*$

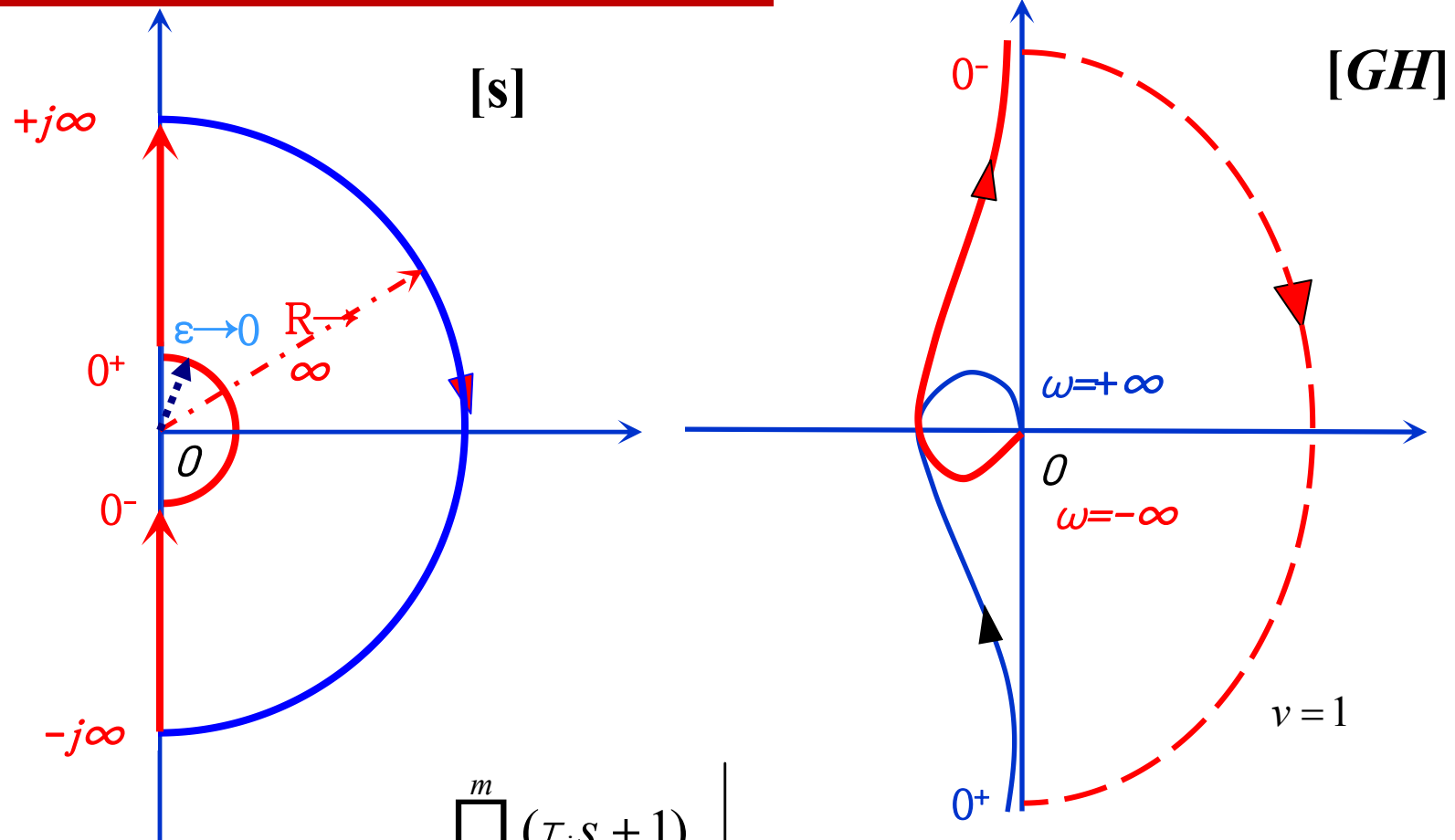
奈氏轨迹的第三部分 (无穷大半圆弧) 在GH平面上的映射为常数 K^* 。

当 $n>m$ 时, $G(s)H(s) \Big|_{s = \lim_{R \rightarrow \infty} R e^{-j\phi}} = 0 \cdot e^{j(n-m)\phi}$

Γ_s 的第三部分在GH平面上的映射是它的坐标原点。



虚轴上有开环极点时的奈氏轨迹

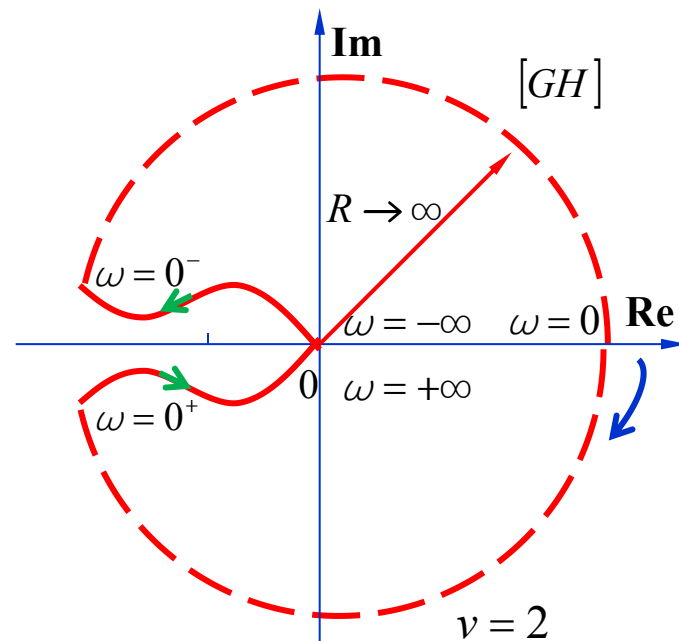
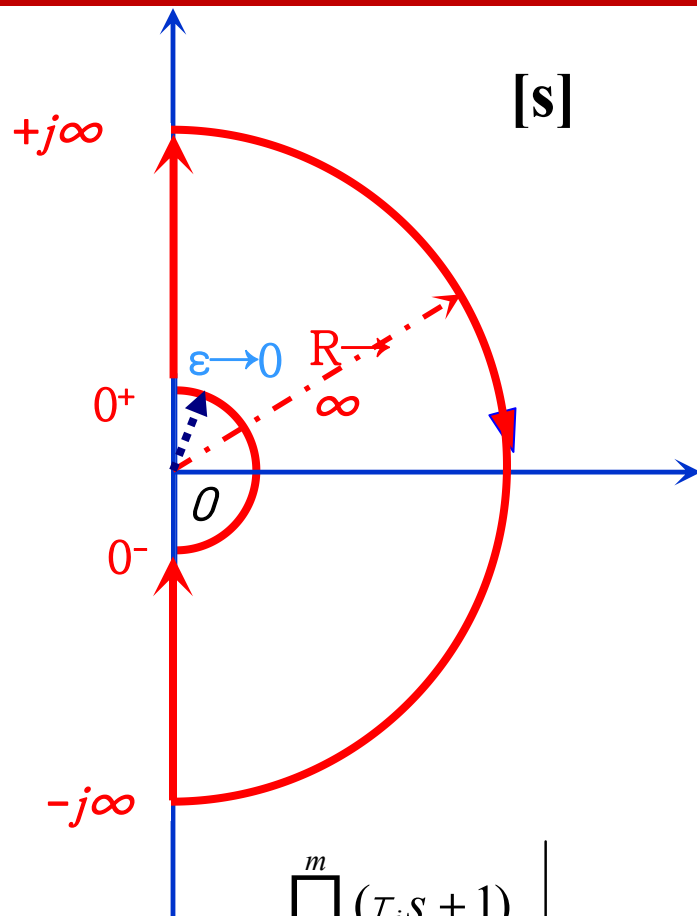


$$G(s)H(s)\Big|_{s=\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\varepsilon e^{j\theta}}=K\frac{\prod_{i=1}^m(\tau_i s+1)}{s^v\prod_{j=1}^{n-v}(T_j s+1)}\Big|_{s=\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}re^{j\theta}}$$

$$=\frac{K}{\varepsilon^v}\Big|_{\varepsilon\rightarrow 0}e^{-jv\theta}=\infty e^{-jv\theta}$$



5.4 控制系统的频域稳定判据



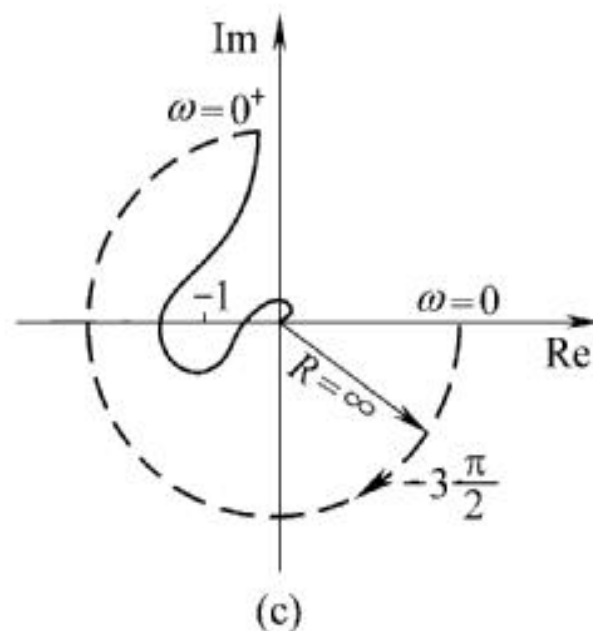
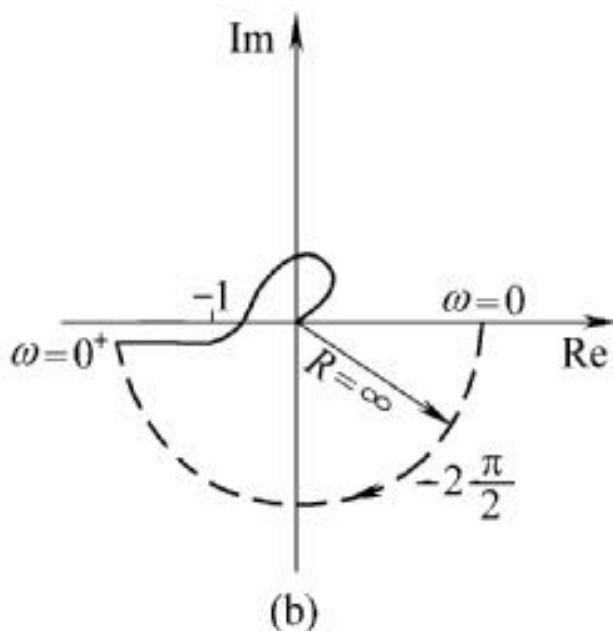
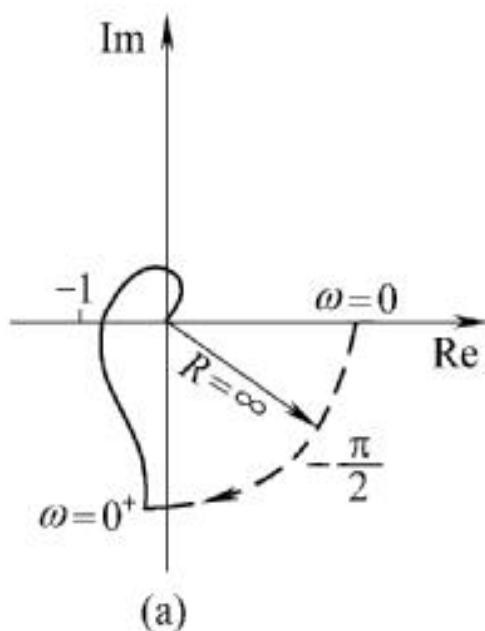
$$G(s)H(s)\Big|_{s=\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\varepsilon e^{j\theta}} = K \frac{\prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^v \prod_{j=1}^{n-v} (T_j s + 1)} \Big|_{s=\lim_{\varepsilon\rightarrow 0} r e^{j\theta}} = \frac{K}{\varepsilon^v} \Big|_{\varepsilon\rightarrow 0} e^{-jv\theta} = \infty e^{-jv\theta}$$

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

半径为 ∞ ，圆心角为 $-v\theta$ 的圆弧。即从 $G(j0^-)H(j0^-)$ 出发，半径为 ∞ ，圆心角为 $-v180^\circ$ 的**顺时针圆弧**。



5.4 控制系统的频域稳定判据



在极坐标图中，闭环系统稳定的充要条件是：当 ω 由 $0 \rightarrow +\infty$ 变化时， $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线逆时针包围 $[GH]$ 平面上 $(-1, j0)$ 点的次数 $N = P / 2$ ；否则，闭环系统不稳定，且有 $Z = P - 2N$ 个右极点。



5.4 控制系统的频域稳定判据

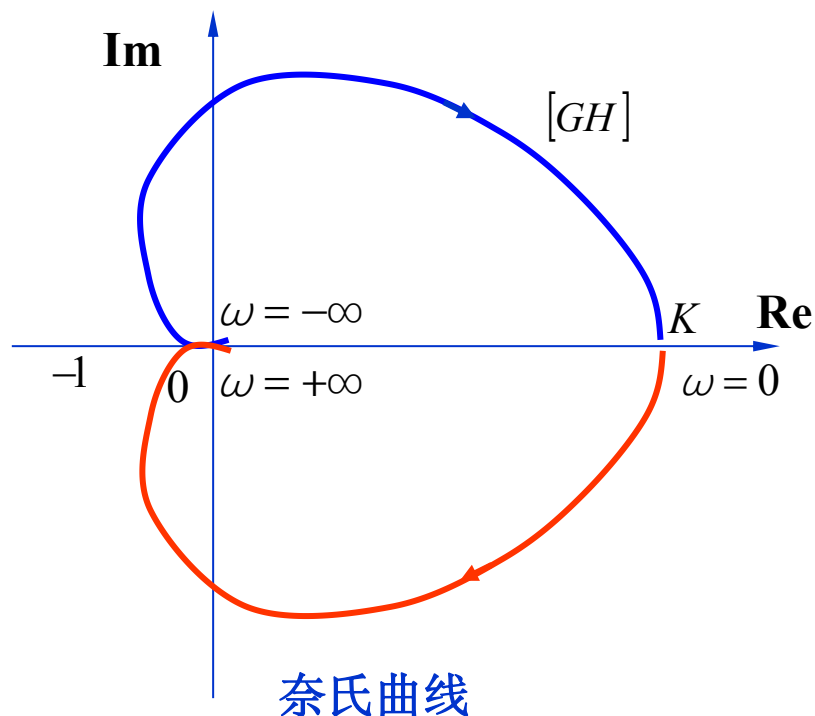
例2 试用奈氏判据分析系统的稳定性。

解：该系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (T_1 > T_2)$$

其对应的频率特性是

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)}$$



当 ω 由 $-\infty$ 变至 $+\infty$ 时，系统的奈氏曲线如图所示。由该系统的两个开环极点 $-1/T_1$ 和 $-1/T_2$ 均在S平面左半部，即S平面右半部的开环极点数 $P=0$ 。系统的奈氏曲线不包围 $(-1, j0)$ 点($N=0$)，根据奈氏判据，位于S平面右半部的闭环极点数 $Z=P-R=0$ ，该闭环系统是稳定的。



5.4 控制系统的频域稳定判据

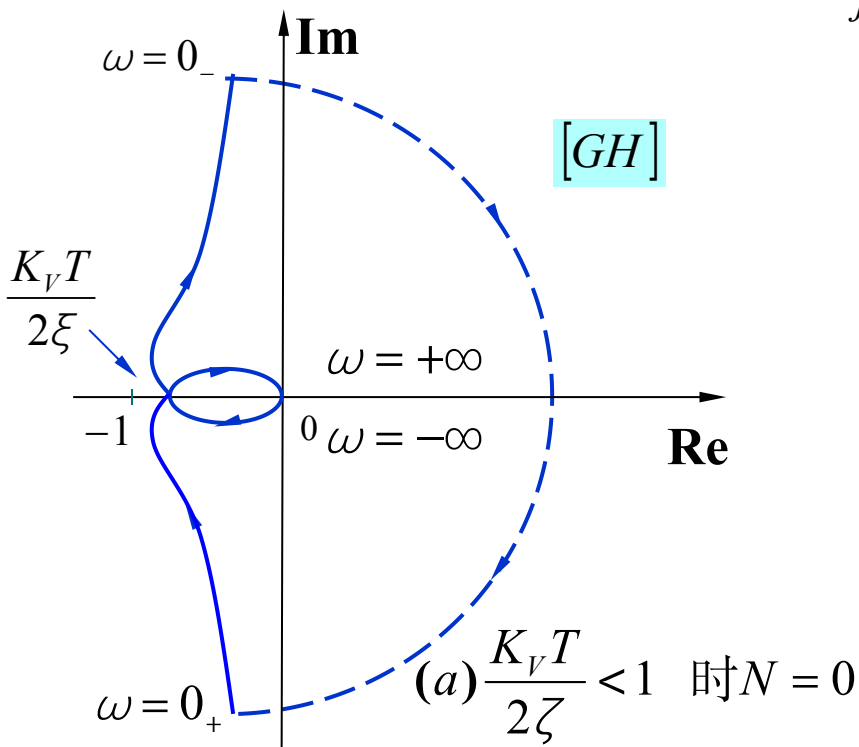
例3 试用奈氏判据分析系统的稳定性。

解：该系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_v}{s(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)} \quad (0 < \zeta < 1)$$

其对应的频率特性是

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega(1 - T^2\omega^2 + j2\zeta T\omega)}$$



当 ω 由 $-\infty$ 变至 $+\infty$ 时，系统的奈氏曲线如图所示。由于系统含有一个积分环节（ $v=1$ ），当 ω 由 0_- 至 0_+ 对应奈氏曲线为顺时针环绕坐标原点的无穷大半圆（图中虚线所示）。开环传递函数无右半S平面的极点，即 $P=0$ ，系统是否稳定取决于奈氏曲线与负实轴的交点坐标值的大小。



5.4 控制系统的频域稳定判据

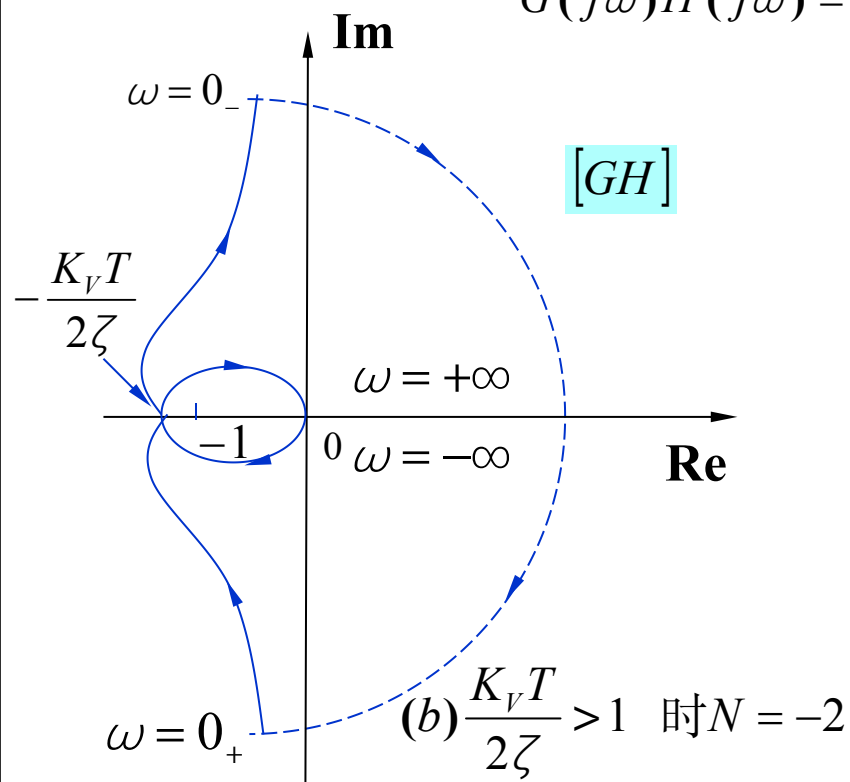
例3 试用奈氏判据分析系统的稳定性。

解：该系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_v}{s(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)} \quad (0 < \zeta < 1)$$

其对应的频率特性是

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega(1 - T^2\omega^2 + j2\zeta T\omega)}$$



当 ω 由 $-\infty$ 变至 $+\infty$ 时，系统的奈氏曲线如图所示。由于系统含有一个积分环节（ $v=1$ ），当 ω 由 0^- 至 0^+ 对应奈氏曲线为顺时针环绕坐标原点的无穷大半圆（图中虚线所示）。开环传递函数无右半 S 平面的极点，即 $P=0$ ，系统是否稳定取决于奈氏曲线与负实轴的交点坐标值的大小。



5.4 控制系统的频域稳定判据

例4 试用奈氏判据分析 $T < \tau, T = \tau, T > \tau$ 时系统的稳定性。

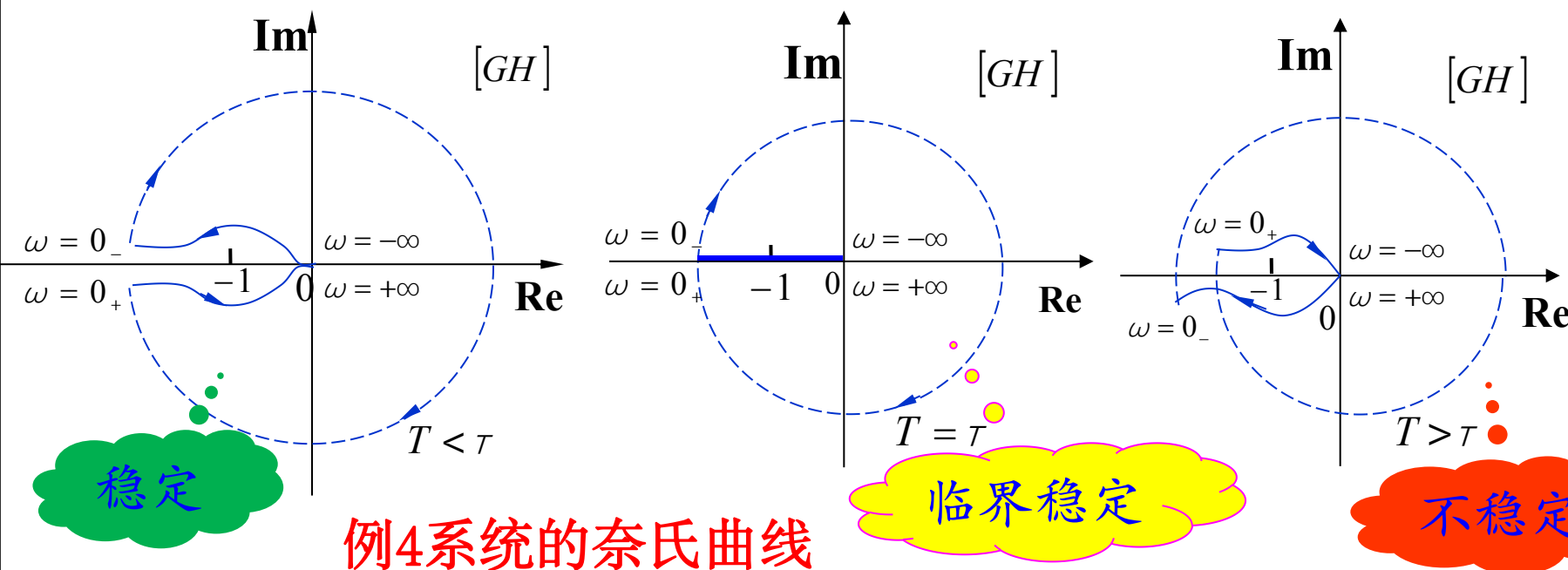
解：该系统的开环传递函数为
其对应的频率特性是

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(j\tau\omega + 1)}{-\omega^2(1 + jT\omega)}$$

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{K\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}{\omega^2\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$

$$\angle\varphi(\omega) = -180^\circ - \arctan T\omega + \arctan \tau\omega$$



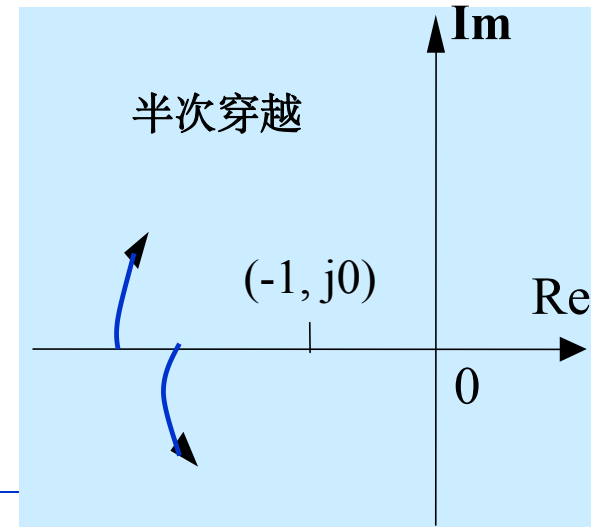
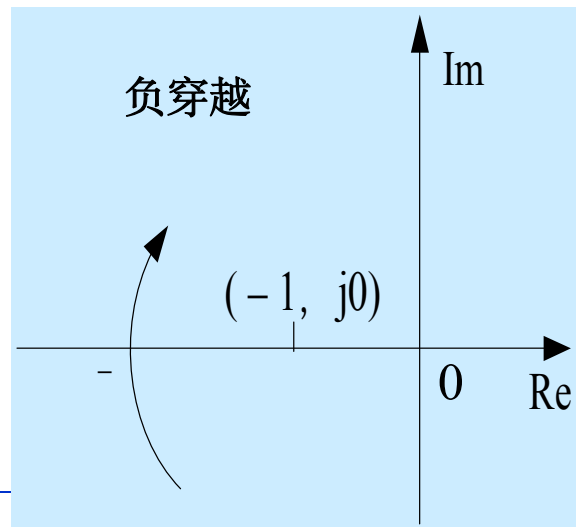
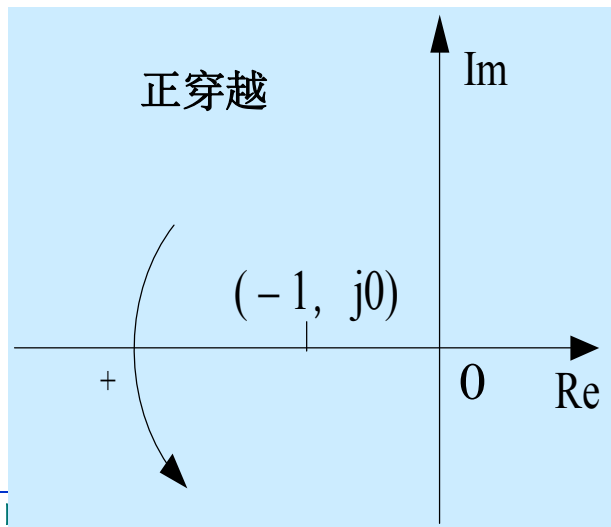


5.4 控制系统的频域稳定判据

3. 由“正负穿越次数之差”来判断稳定性

$G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线对称实轴。应用中只画 $0 \rightarrow +\infty$ 部分。所谓“穿越”是指轨迹穿过 $(-1, -\infty)$ 段。

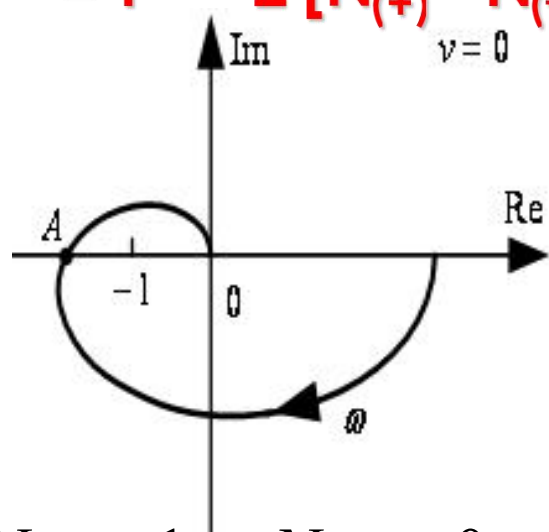
- ❖ 正穿越：从上而下穿过该段一次（相角增加），用 $N_{(+)}$ 表示。
- ❖ 负穿越：由下而上穿过该段一次（相角减少），用 $N_{(-)}$ 表示。
- ❖ 半次穿越：起始于或终止于 $(-1, -\infty)$ 段的负实轴的正、负穿越称为正负半次穿越。



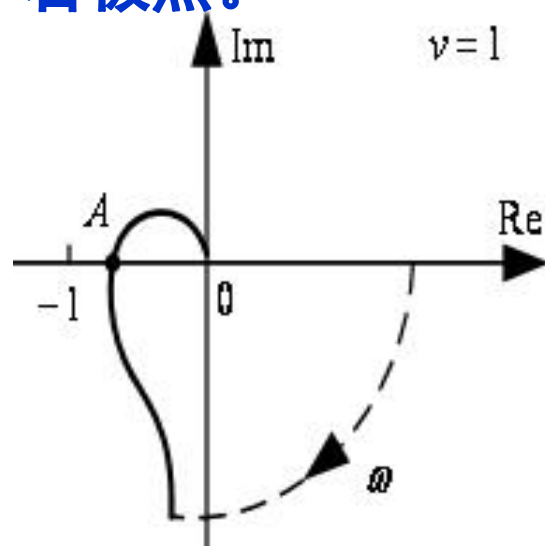


5.4 控制系统的频域稳定判据

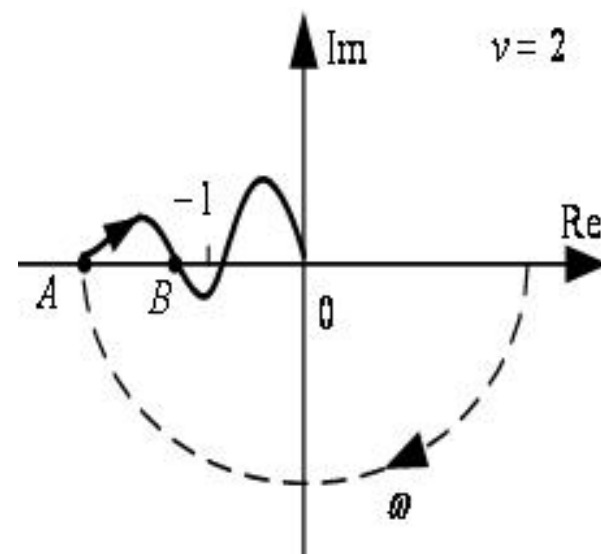
在极坐标图中，闭环系统稳定的充要条件是：当 ω 由 $0 \rightarrow +\infty$ 变化时， $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线对 $(-1, -\infty)$ 实轴段的正负穿越次数之差为 $N_{(+)} - N_{(-)} = P / 2$ ；否则，闭环系统不稳定，且有 $Z = P - 2[N_{(+)} - N_{(-)}]$ 个右极点。



$$N_{(-)} = 1, \quad N_{(+)} = 0$$
$$N = N_{(+)} - N_{(-)} = -1$$
$$Z = P - 2[N_{(+)} - N_{(-)}]$$



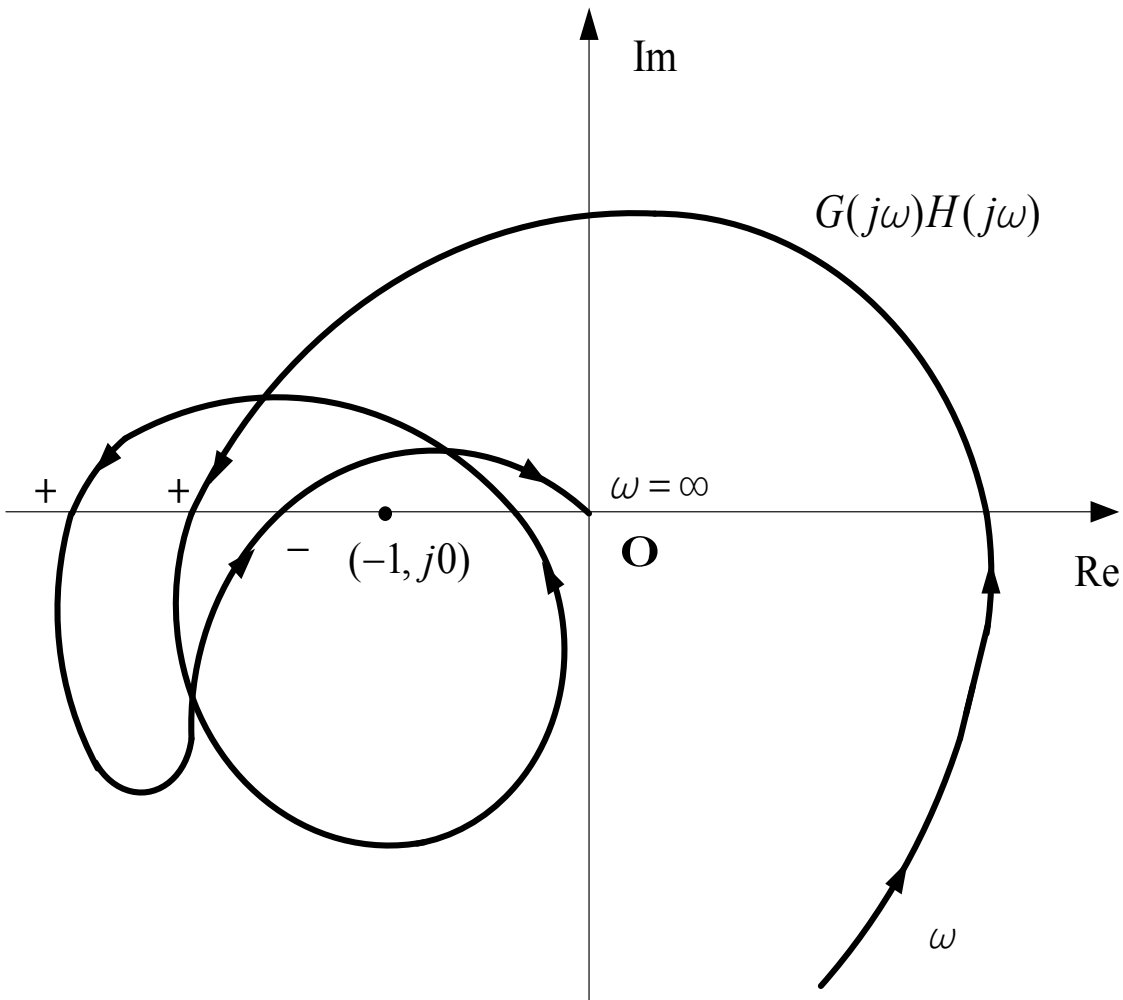
$$N_{(-)} = 0, \quad N_{(+)} = 0$$
$$N = N_{(+)} - N_{(-)} = 0$$



$$N_{(-)} = 1, \quad N_{(+)} = 1$$
$$N = N_{(+)} - N_{(-)} = 0$$



5.4 控制系统的频域稳定判据



$$N_{(-)} = 1, \quad N_{(+)} = 2$$

$$N = N_{(+)} - N_{(-)} = 1$$

$$Z = P - 2[N_{(+)} - N_{(-)}]$$



5.4 控制系统的频域稳定判据

四、对数幅频特性上的奈奎斯特判据

极坐标图

$(-1, j0)$ 点

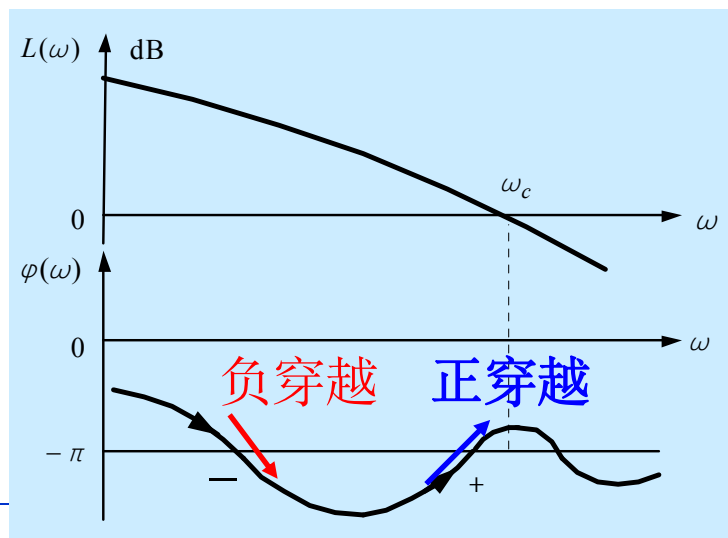
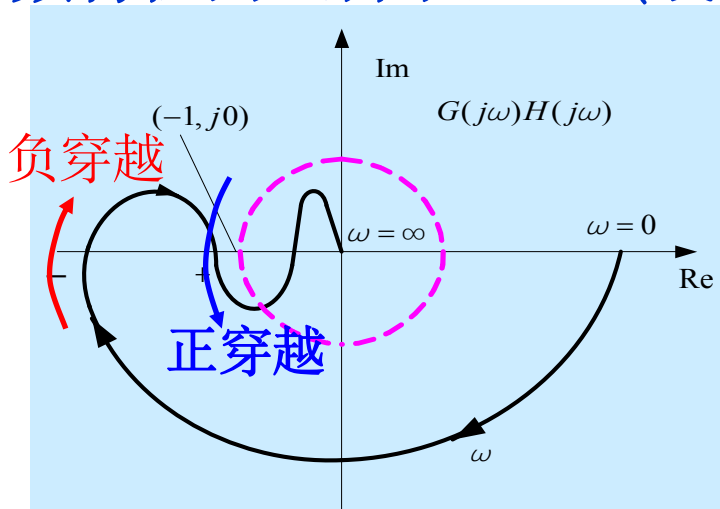
$(-1, -\infty)$ 段

伯德图

0db线和-180相角线

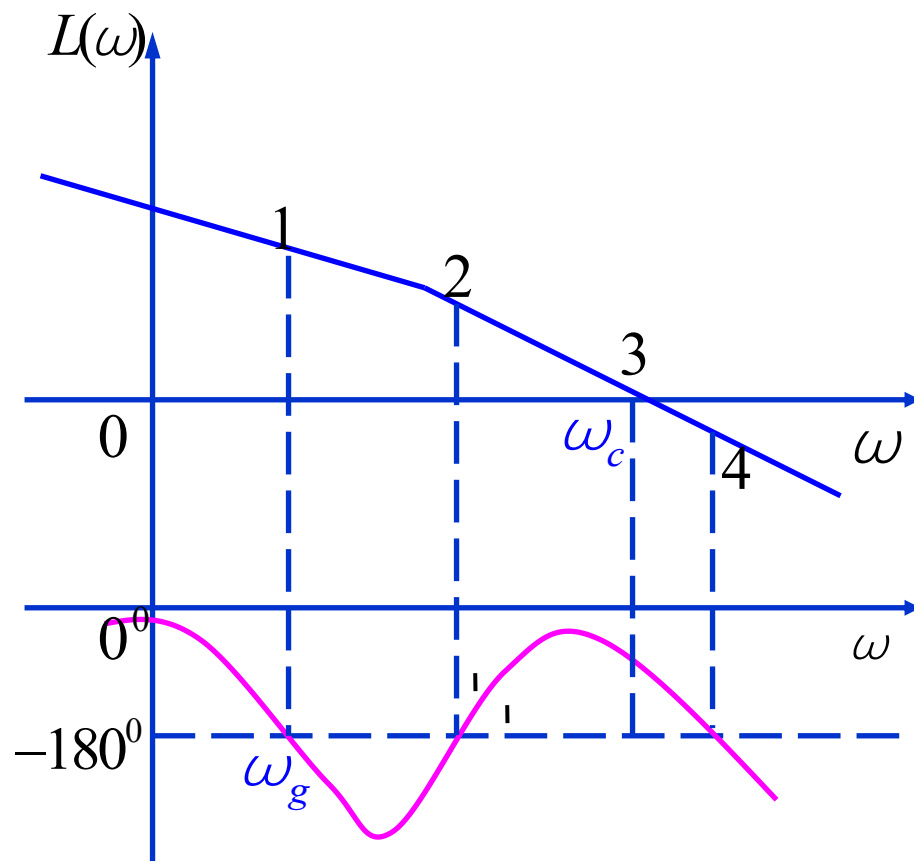
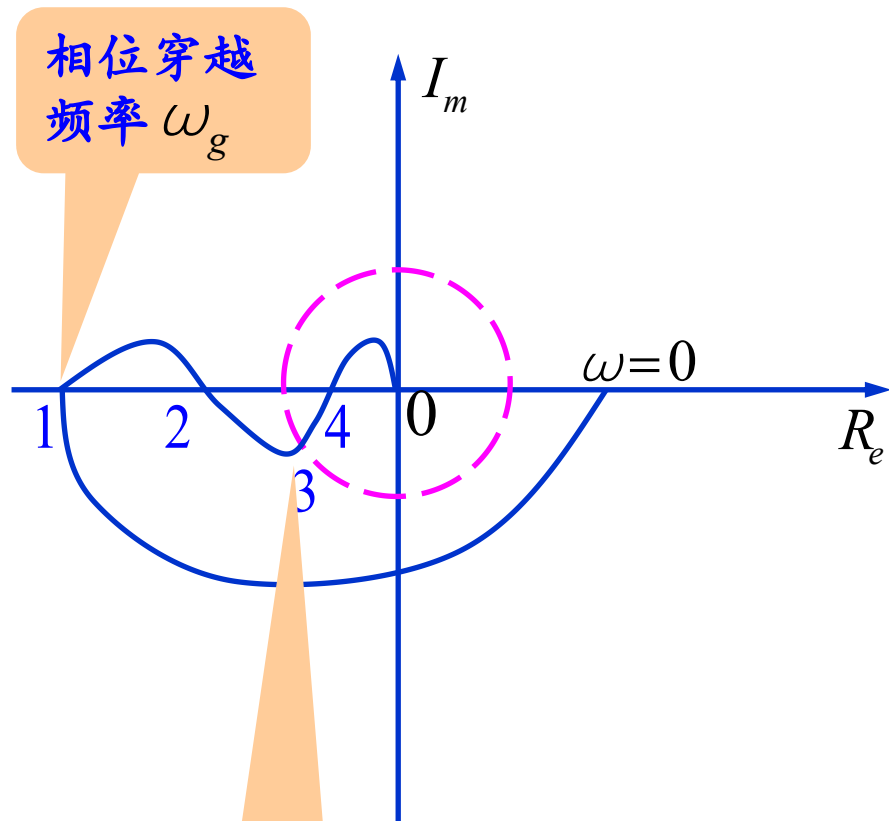
0db线以上区域

因此，奈氏曲线自上而下（或自下而上）地穿越 $(-1, j0)$ 点左边的负实轴 $(-1, -\infty)$ 段，相当于在伯德图中当 $L(\omega) > 0\text{dB}$ 时相频特性曲线自下而上（或自上而下）地穿越 -180° 线。





1. 伯德图与奈奎斯特图的对应关系

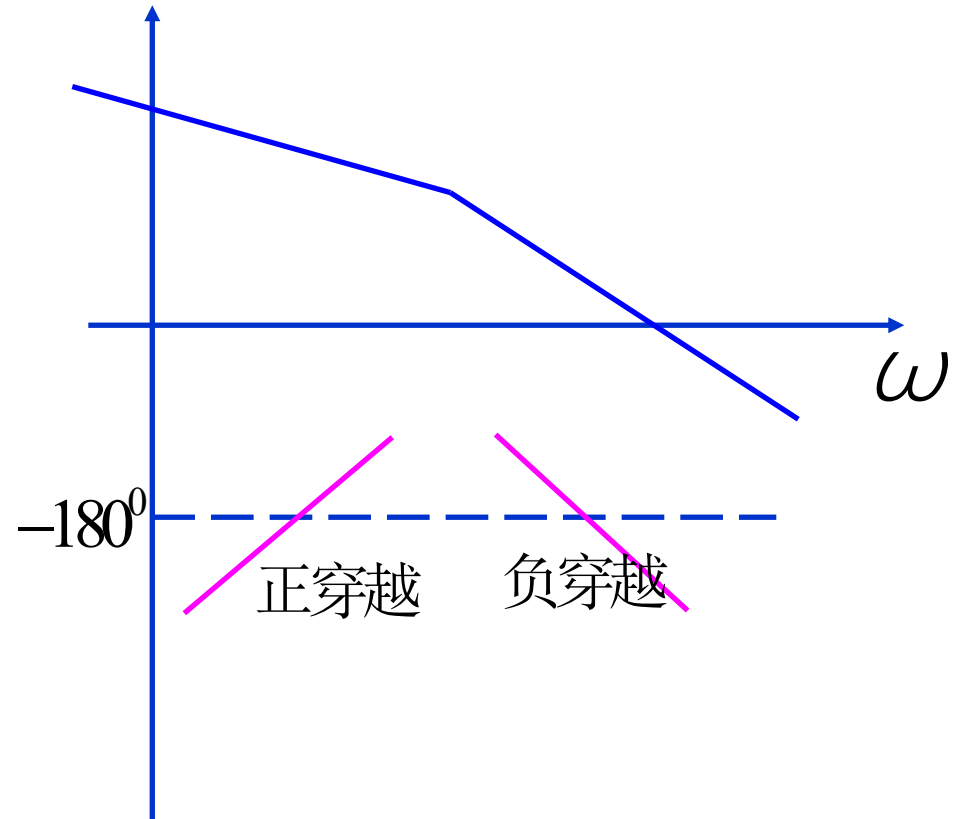
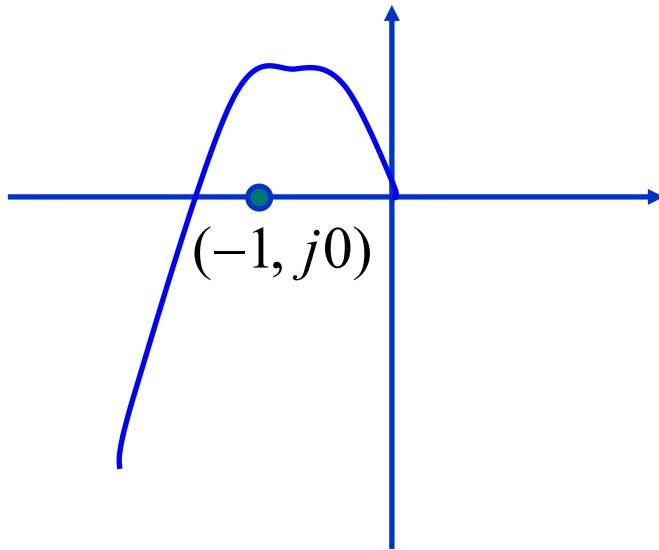


剪切频率 ω_c
幅值穿越频率

奈奎斯特图及对应的伯德图



2. 穿越的概念



注：从 -180° 开始的正或负穿越，以半次正或负穿越计算。



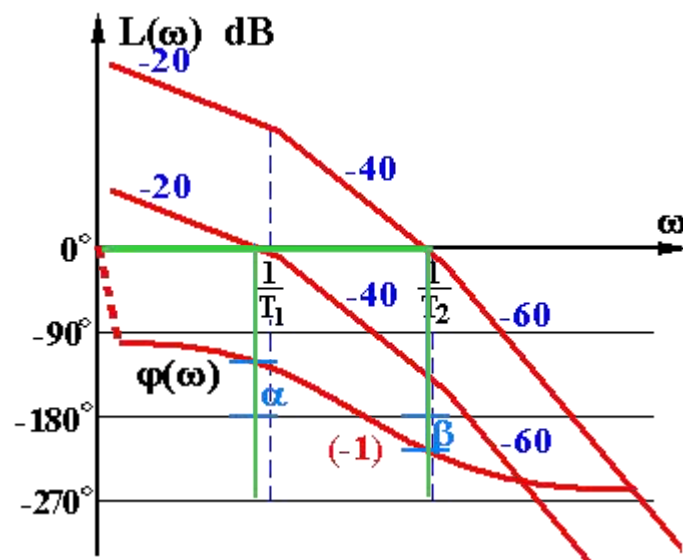
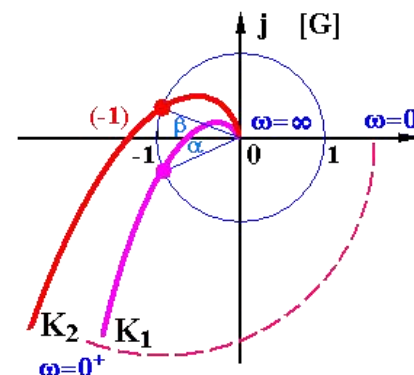
5.4 控制系统的频域稳定判据

例5 已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性。

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

对数稳定判据 $\begin{cases} Z = P - 2N \\ N = N_+ - N_- \end{cases}$

$$K = \begin{cases} K_1 \begin{cases} N = N_+ - N_- = 0 - 0 = 0 \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times 0 = 0 \\ \text{(稳定)} \end{cases} \\ K_2 \begin{cases} N = N_+ - N_- = 0 - 1 = -1 \\ Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2 \\ \text{(不稳定)} \end{cases} \end{cases}$$





5.4 控制系统的频域稳定判据

3. Bode判据

在对数频率特性图中，闭环系统稳定的充要条件是：当 ω 由 $0 \rightarrow +\infty$ 变化时，在开环对数幅频特性 $L(\omega) > 0\text{dB}$ 的所有频段内，对数相频特性 $\varphi(\omega)$ 曲线对 -180° 线的正负穿越次数之差为 $N_{(+)} - N_{(-)} = P / 2$ ；否则，闭环系统不稳定，且有 $Z = P - 2[N_{(+)} - N_{(-)}]$ 个右极点。

当开环传递函数 $G(s)H(s)$ 中含有 ν 个积分环节时，则在曲线 $\varphi(\omega)$ 最左端视为 $\omega = 0^+$ 处，由下至上补作 $-\nu 90^\circ$ 虚线段，找到 $\omega = 0$ 时起点，才能正确确定 $\varphi(\omega)$ 对 -180° 线的穿越情况。



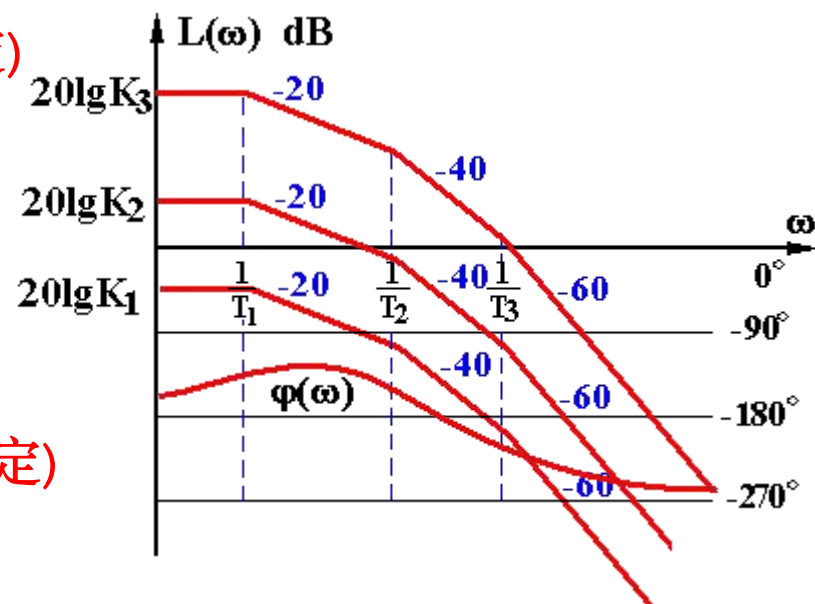
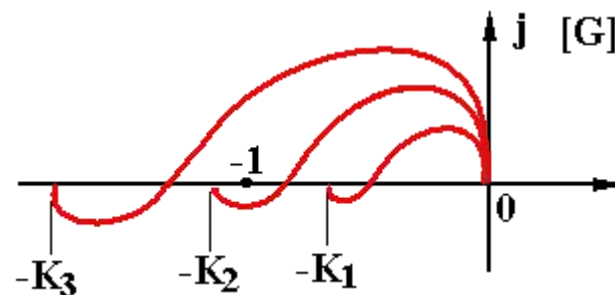
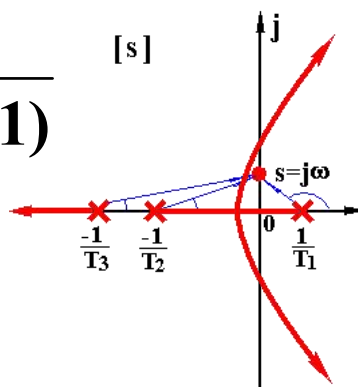
5.4 控制系统的频域稳定判据

例6 已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性。

$$G(s) = \frac{K}{(T_1s - 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$$

$$\begin{cases} G(j0) = K \angle -180^\circ \\ G(j\infty) = 0 \angle -270^\circ \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} K_1 \begin{cases} N = N_+ - N_- = 0 - 0 = 0 \\ Z = P - 2N = 1 - 2 \times 0 = 1 \end{cases} \text{ (不稳定)} \\ K_2 \begin{cases} N = N_+ - N_- = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \\ Z = P - 2N = 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \text{ (稳定)} \\ K_3 \begin{cases} N = N_+ - N_- = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \\ Z = P - 2N = 1 - 2 \times (-\frac{1}{2}) = 2 \end{cases} \text{ (不稳定)} \end{cases}$$



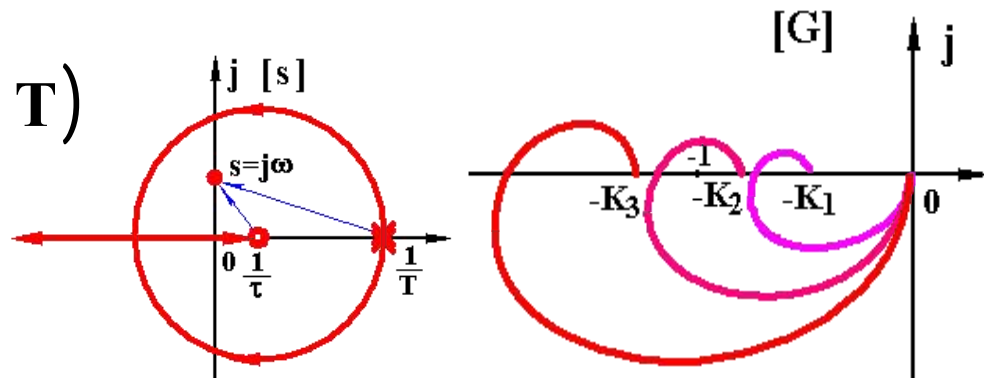


5.4 控制系统的频域稳定判据

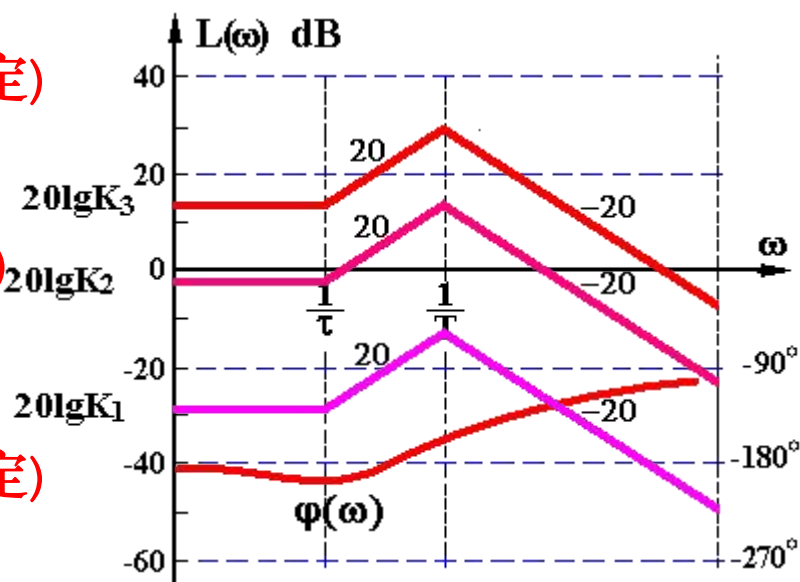
例7 已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性。

$$G(s) = \frac{K(\tau s - 1)}{(Ts - 1)^2} \quad (\tau > T)$$

$$\begin{cases} G(j0) = K \angle -180^\circ \\ G(j\infty) = 0 \angle -90^\circ \end{cases}$$



$$K = \begin{cases} K_1 \begin{cases} N = N_+ - N_- = 0 - 0 = 0 & \text{(不稳定)} \\ Z = P - 2N = 2 - 2 \times 0 = 2 \end{cases} \\ K_2 \begin{cases} N = N_+ - N_- = 1 - 0 = 1 & \text{(稳定)} \\ Z = P - 2N = 2 - 2 \times 1 = 0 \end{cases} \\ K_3 \begin{cases} N = N_+ - N_- = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} & \text{(不稳定)} \\ Z = P - 2N = 2 - 2 \times (\frac{1}{2}) = 1 \end{cases} \end{cases}$$





5.4 控制系统的频域稳定判据

注意问题

1. 当[s]平面虚轴上有开环极点时，奈氏路径要从其右边绕出半径为无穷小的圆弧；[GH]平面对应要补充大圆弧
2. N 的最小单位为二分之一
3.
$$Z \begin{cases} > 0 & \text{闭环系统不稳定} \\ = 0 & \text{闭环系统稳定} \\ < 0 & \text{有误!} \end{cases}$$
4. 临界稳定的特征? —— $GH(j\omega)$ 穿过 $(-1, j0)$ 点



5.4 控制系统的频域稳定判据

Thank You !