第六章 不确定性推理

李玲玲

人工智能学院

llli@xidian.edu.cn

不确定性推理

- 基本概念
- 逆概率推理方法
- 可信度方法
- 模糊逻辑与模糊集合
- 模糊集合运算与合成
- 模糊推理与模糊判决

不确定性推理

- 基本概念
- 逆概率推理方法
- 可信度方法
- 模糊逻辑与模糊集合
- 模糊集合运算与合成
- 模糊推理与模糊判决

什么是不确定性推理

- 不确定性推理是建立在非经典逻辑基础上的一种推理，它是对不确定性知识的运用与处理。
- 具体地说，所谓不确定性推理就是从不确定性的初始证据（即事实）出发，通过运用不确定性的知识，最终推出具有一定程度不确定性的结论。

不确定性推理中的基本问题

（1）不确定性的表示与度量

- 不确定性推理中的“不确定性”一般分为两类：**一是知识的不确定性，一是证据的不确定性**。
- **知识不确定性的表示**：目前在专家系统中知识的不确定性一般是由领域专家给出的，通常用一个数值表示，它表示相应知识的不确定性程度，称为知识的静态强度。
- **证据不确定性的表示**：证据不确定性的表示方法与知识不确定性的表示方法一致，通常也用一个数值表示，代表相应证据的不确定性程度，称之为动态强度。

不确定性推理中的基本问题

（2）不确定性匹配算法及阈值的选择

推理是不断运用知识的过程，为了找到所需的知识，需要在这一过程中用知识的前提与已知证据进行匹配。只有匹配成功的知识才有可能被应用。

- 设计一个不确定性匹配算法；
- 指定一个匹配阈值。

(3) 组合证据不确定性的计算方法

即已知证据E_1 和 E_2 的不确定性度量，求证据E_1 和 E_2的析取和合取的不确定性，常用的方法有：

- 最大最小法：

$$T(E_1 \text{ AND } E_2)=\min\{T(E_1),T(E_2)\}$$

$$T(E_1 \text{ OR } E_2)=\max\{T(E_1),T(E_2)\}$$

- 概率法：

$$T(E_1 \text{ AND } E_2)=T(E_1)\times T(E_2)$$

$$T(E_1 \text{ OR } E_2)=T(E_1)+T(E_2)-T(E_1)\times T(E_2)$$

- 有界法：

$$T(E_1 \text{ AND } E_2)=\max\{0,T(E_1)+T(E_2)-1\}$$

$$T(E_1 \text{ OR } E_2)=\min\{1,T(E_1)+T(E_2)\}$$

其中，$T(E)$表示证据E为真的程度（动态强度），如可信度、概率等。

不确定性推理中的基本问题

（4）不确定性的传递算法

- 在每一步推理中，如何把证据及知识的不确定性传递给结论。
- 在多步推理中，如何把初始证据的不确定性传递给最终结论

（5）结论不确定性的合成

用不同知识进行推理得到了相同结论，但所得结论的不确定性却不同。此时，需要用合适的算法对结论的不确定性进行合成。

不确定性推理方法的分类

- 不确定性推理方法主要可分为**模型法**与**控制法**。
- **模型法**：在推理一级对确定性推理进行扩展，引入证据的不确定性及知识的不确定性。
- 模型方法又分为**数值方法和非数值方法**两类。数值方法对不确定性进行定量的描述，按其所依据的理论又可分为基于概率的方法和基于模糊理论的方法。本节主要针对模型方法中相关的典型算法展开。

不确定性推理

- 基本概念
- 逆概率推理方法
- 可信度方法
- 模糊逻辑与模糊集合
- 模糊集合运算与合成
- 模糊推理与模糊判决

逆概率法

经典概率方法

（1）设有如下产生式规则：

IF　E　THEN　H

其中，E为前提条件，H为结论。后验概率$P(H|E)$可以作为在证据E出现时结论H的确定性程度，即规则的静态强度。

（2）对于复合条件

$$E=E_1 \text{ AND } E_2 \text{ AND } \cdots \text{ AND } E_n$$

当已知条件概率$P(H|E_1, E_2, \cdots, E_n)$时，就可把它作为在证据$E_1, E_2, \cdots, E_n$出现时结论H的确定性程度。

（3）先验概率：　$P(H)$　　　　后验概率：　$P(H|E)$

逆概率法

经典概率方法要求给出条件概率P(H/E)，在实际中通常比较困难。例如E代表咳嗽，H代表支气管炎，则P(H/E)表示在咳嗽的人群中患支气管炎的概率，这个比较困难，因为样本空间太大。而P(E/H)表示在得支气管炎的人群中咳嗽的概率，这个就比较容易获得。

我们可以根据Bayes定理从P(E/H)推出P(H/E)

逆概率法

若A_1, A_2, …, A_n构成一个完备事件组且都有正概率，对于事件B，则有以下贝叶斯概率

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i)\times P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\times P(B \mid A_j)}, i=1,2,\ldots,n$$

其中，$P(A_i)$是事件A_i的先验概率；$P(B|A_i)$是在事件A_i发生条件下事件B的条件概率。

对于一组产生式规则

IF E THEN H_i

同样有后验概率如下（H_i 确定性的程度，或规则的静态强度）：

$$P(H_i \mid E)=\frac{P(H_i)\times P(E \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)\times P(E \mid H_j)}, i=1,2,\ldots,n$$

例1 设H_1, H_2, H_3分别是三个结论，E是支持这些结论的证据。已知：

$P(H_1)=0.2$, $P(H_2)=0.5$, $P(H_3)=0.3$

$P(E|H_1)=0.1$, $P(E|H_2)=0.3$, $P(E|H_3)=0.7$

求$P(H_1|E)$, $P(H_2|E)$及$P(H_3|E)$的值各是多少？

解：

$$
\begin{aligned}
P(H_1|E) &= \frac{P(H_1)\times P(E|H_1)}{P(H_1)\times P(E|H_1)+P(H_2)\times P(E|H_2)+P(H_3)\times P(E|H_3)} \\
&= \frac{0.02}{0.02+0.15+0.21} \\
&= 0.0526
\end{aligned}
$$

同理可得： $P(H_2|E)=0.3947$, $P(H_3|E)=0.5526$

对应的产生式规则：

IF	E	THEN	H_1
IF	E	THEN	H_2
IF	E	THEN	H_3

规则的静态强度（H_i为真的程度、或不确定性程度）

$P(H_1|E)=0.0526$

$P(H_2|E)=0.3947$

$P(H_3|E)=0.5526$

逆概率法的特点

优点：

- 逆概率法有较强的理论背景和良好的数学特性，当证据彼此独立时计算的复杂度比较低。

缺点：

- 逆概率法要求给出结论H_i的先验概率$P(H_i)$及条件概率$P(E_j|H_i)$。

不确定性推理

- 基本概念
- 逆概率推理方法
- 可信度方法
- 模糊逻辑与模糊集合
- 模糊集合运算与合成
- 模糊推理与模糊判决

可信度方法

- 可信度方法是在确定性理论的基础上，结合概率论等提出的一种不确定性推理方法，简称C-F模型。该方法首先在医疗系统MYCIN中得到成功的应用。
- **可信度的概念**
- 根据经验对一个事物和现象为真的相信程度称为可信度。
- 在可信度方法中，**由专家给出规则或知识的可信度**，从而可避免对先验概率、或条件概率的要求。

＊ C-F模型

1. 知识不确定性的表示

在C-F模型中，知识是用产生式规则表示的，其一般形式为：

IF E THEN H (CF(H, E))

其中：

（1）前提E可以是命题的合取和析取组合

（2）结论H可为单一命题，也可以是复合命题

（3）CF(H, E)为确定性因子(Certainty factor)，简称可信度，用以量度规则的确定性（可信）程度。取值于[-1, 1]，表示E为真时，对H的支持程度。CF(H, E)值越大，E就越支持H为真。

可信度因子的定义

IF E THEN H (CF(H, E))

CF(H, E)定义为：

$$CF(H,E)=MB(H,E)-MD(H,E)$$

MB反映了证据对结论有利的一面，MD反映了证据对结论不利的一面。MB(Measure Belief) 表示因与E匹配的证据出现，使H为真的信任增长度。MD(Measure Disbelief)指不信任增长度，表示因与E匹配的证据出现，使H为真的不信任增长度。 MB和MD的定义为：

$$MB(H,E)=\begin{cases} 1 & ,P(H)=1 \\ \dfrac{\max\{P(H|E),P(H)\}-P(H)}{1-P(H)} & ,\text{否则} \end{cases}$$

$$MD(H,E)=\begin{cases} 1 & ,P(H)=0 \\ \dfrac{\min\{P(H|E),P(H)\}-P(H)}{-P(H)} & ,\text{否则} \end{cases}$$

$$MB(H,E)=\begin{cases}1 & ,P(H)=1\\ \dfrac{\max\{P(H|E),P(H)\}-P(H)}{1-P(H)} & ,否则\end{cases}$$

$$MD(H,E)=\begin{cases}1 & ,P(H)=0\\ \dfrac{\min\{P(H|E),P(H)\}-P(H)}{-P(H)} & ,否则\end{cases}$$

- **当**P(H|E)>P(H)**时：表示证据**E**支持结论**H
  MB(H,E)>0，MD(H,E)=0 。
- **当**P(H|E)<P(H)**时，表示**E**不支持**H
  MD(H,E)>0， MB(H,E) =0。
  当p(H/E)＝p(H)**时，表示**E**对**H**无影响，则有**MB＝MD＝0
- MB(H,E)**与**MD(H,E)**是互斥的**：
  当MB(H,E)>0**时**，MD(H,E)＝0
  当MD(H,E)>0**时**，MB(H,E)＝0

CF(H, E)的计算公式

根据定义CF(H, E)=MB(H, E)−MD(H, E)，及MB(H, E)与MD(H, E)的互斥性，可得：

$$CF(H,E)=\begin{cases} MB(H,E)-0=\dfrac{P(H|E)-P(H)}{1-P(H)} & ,P(H|E)>P(H) \\ 0 & ,P(H|E)=P(H) \\ 0-MD(H,E)=-\dfrac{P(H)-P(H|E)}{P(H)} & ,P(H|E)<P(H) \end{cases}$$

从上式可看出：

CF(H, E)>0对应于P(H|E)>P(H)；

CF(H, E)<0对应于P(H|E)<P(H)；

CF(H, E)=0对应于P(H|E)=P(H)。

22

IF E THEN H (CF(H, E))

$$CF(H,E)=\begin{cases} MB(H,E)-0=\dfrac{P(H|E)-P(H)}{1-P(H)} & ,P(H|E)>P(H) \\ 0 & ,P(H|E)=P(H) \\ 0-MD(H,E)=-\dfrac{P(H)-P(H|E)}{P(H)} & ,P(H|E)<P(H) \end{cases}$$

当且仅当P(H|E)=1时， CF(H, E)=1

当且仅当P(H|E)=0时， CF(H, E)=-1

CF(H, E)定性地反映了P(H|E)的大小，因此可以用CF(H, E)近似表示P(H|E)的大小，从而描述了规则的可信度。

2. 证据不确定性的表示

证据的不确定性也用可信度因子表示。如：CF(E)=0.6

CF(E)的取值范围：[-1, +1]。

CF(E)>0:表示证据以某种程度为真。

CF(E)<0:表示证据以某种程度为假。

CF(E)表示证据的强度，即动态强度。

2. 证据不确定性的表示

设证据E所在的环境为 S，则可用**可信度**CF(E, S)来表示E在 S 下的确定性程度，并有：

$$CF(E, S) = MB(E, S) - MD(E, S)$$

若 S 下E为真，则 $CF(E, S) = 1$；

若E为假，则 $CF(E, S) = -1$；

若 S 对E的真值无影响，则 $CF(E, S) = 0$。

类似于规则的不确定性，证据的可信度往往可由领域专家凭经验主观确定。

证据的可信度值来源于两种情况：

（1）初始证据由领域专家或用户给出；

（2）中间结论由不确定性传递算法计算得到。

3. 组合证据不确定性的算法

(1) 当组合证据是多个单一证据的合取时，即：

E=E1 AND E2 AND…AND En

则CF(E)=min{CF(E1), CF(E2)… CF(En)}

(2) 当组合证据是多个单一证据的析取时，即：

E=E1 OR E2 OR…OR En

则CF(E)=max{CF(E1), CF(E2)… CF(En)}

4. 不确定性的传递

不确定性的传递算法定义如下：

$$CF(H) = CF(H, E) \times \max[0, CF(E)]$$

由上式可以看出：

(1) CF(E)<0时，CF(H)=0，说明该模型没有考虑证据为假时对结论H所产生的影响。

(2) CF(E)=1时，CF(H)=CF(H, E)，说明规则可信度CF(H, E)就是证据为真时的结论H的可信度。

5. 结论不确定性的合成算法

若由**多条不同知识推出了相同的结论**，但可信度不同，则可用合成算法求出综合的可信度。由于对多条知识的综合可通过两两的合成实现，所以下面只考虑两条知识的情况。

设有如下知识：

IF E1 THEN H (CF(H, E1))

IF E2 THEN H (CF(H, E2))

则结论H的综合可信度可分为如下两步算出：

（1）首先分别对每一条知识求出CF(H)

CF1(H)=CF(H, E1) × max{0, CF(E1)}

CF2(H)=CF(H, E2) × max{0, CF(E2)}

（2）然后用下述公式求出E_1与E_2对H的综合可信度$CF_{12}(H)$：

$$CF_{12}(H)=\begin{cases} CF_1(H)+CF_2(H)-CF_1(H)\times CF_2(H) & ,CF_1(H)\ge 0,CF_2(H)\ge 0 \\ CF_1(H)+CF_2(H)+CF_1(H)\times CF_2(H) & ,CF_1(H)<0,CF_2(H)<0 \\ \dfrac{CF_1(H)+CF_2(H)}{1-\min\{|CF_1(H)|,|CF_2(H)|\}} & ,CF_1(H)\times CF_2(H)<0 \end{cases}$$

C-F模型推理示例(1)

$CF(H) = CF(H,E) \times \max[0, CF(E)]$

例5.5 设有如下一组知识：

R1: IF E_1 THEN H (0.8)

R2: IF E_2 THEN H (0.6)

R3: IF E_3 THEN H (-0.5)

R4: IF E_4 AND (E_5 OR E_6) THEN E_1 (0.7)

R5: IF E_7 AND E_8 THEN E_3 (0.9)

已知：$CF(E_2)=0.8$，$CF(E_4)=0.5$，$CF(E_5)=0.6$

$CF(E_6)=0.7$，$CF(E_7)=0.6$，$CF(E_8)=0.9$

求：$CF(H)=?$

解：由R4得到：

$$CF(E_1)=0.7\times\max\{0, CF[E_4 \text{ AND } (E_5 \text{ OR } E_6)]\}$$
$$=0.7\times\max\{0, \min\{CF(E_4), CF(E_5 \text{ OR } E_6)\}\}$$
$$=0.35$$

由R5得到：

$$CF(E_3)=0.9\times\max\{0, CF[E_7 \text{ AND } E_8]\}$$
$$=0.54$$

R1: IF E_1	THEN	H	(0.8)
R2: IF E_2	THEN	H	(0.6)
R3: IF E_3	THEN	H	(-0.5)

由R1**得到**：

$CF_1(H)=0.8\times\max\{0, CF(E_1)\}=0.28$

由R2**得到**：

$CF_2(H)=0.6\times\max\{0, CF(E_2)\}=0.48$

由R3**得到**：

$CF_3(H)=-0.5\times\max\{0, CF(E_3)\}=-0.27$

根据结论不确定性的合成算法：

$CF_{12}(H)=CF_1(H)+CF_2(H)-CF_1(H)\times CF_2(H)=0.63$

$$CF_{123}(H)=[CF_{12}(H)+CF_3(H)]/[1-\min\{|CF_{12}(H)|, |CF_3(H)|\}]$$
$$=0.49$$

即最终的综合可信度为$CF(H)=0.49$。

IF E THEN H (CF(H, E))

C-F模型的核心问题是三个可信度：

(1) **知识的可信度CF(H,E)**：取值范围[-1, 1]

CF(H,E)=1 对应于 P(H|E)=1 (证据绝对支持结论)

CF(H,E)=-1 对应于 P(H|E)=0 (证据绝对否定结论)

CF(H,E)=0 对应于 P(H|E)=P(H) (证据与结论无关)

(2) **证据的可信度CF(E)**：取值范围[-1, 1]

CF(E)=1 对应于 P(E)=1 (证据绝对存在)；

CF(E)=-1 对应于 P(E)=0； (证据绝对不存在)

CF(E)=0 对应于 P(E)=0.5 (对证据一无所知)。

(3) **结论的可信度CF(H)**：取值范围[-1, 1]

$$CF(H)=CF(H,E)\times \max\{0, CF(E)\}$$

该公式隐含了一个知识运用的条件，即CF(E)>0。

加权的不确定性推理

1. 知识不确定性的表示

IF $E_1(\omega_1)$ AND $E_2(\omega_2)$ AND…AND $E_n(\omega_n)$

THEN H (CF(H, E), λ)

其中 ω_i (i=1, 2, …, n) 是加权因子，λ 是阈值，其值均由专家给出。

加权因子的取值范围一般为[0, 1]，且应满足归一条件，即

$$0 \le \omega_i \le 1, \quad i = 1,2,\cdots,n, \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

2. 组合证据不确定性的算法

若有CF(E_1)，CF(E_2)，…，CF(E_n)，则组合证据的可信度为：

$$CF(E)=\sum_{i=1}^{n}(\omega_i \times CF(E_i))$$

3. 不确定性的传递算法

当一条知识的CF(E)满足如下条件时，

$$CF(E) \geqslant \lambda$$

该知识就可被应用。结论H的可信度为：

$$CF(H)=CF(H,E) \times CF(E)$$

- 加权因子的引入不仅可以区分不同证据的重要性，同时还可以解决证据不全时的推理问题。

冲突消解

r_1: IF $\{E_1(\omega_1)\}$ THEN H_1 $(CF(H_1,E_1),\lambda_1)$

r_2: IF $\{E_2(\omega_2)\}$ THEN H_2 $(CF(H_2,E_2),\lambda_2)$

且 $CF(\{E_1(\omega_1)\})\geq\lambda_1$

$CF(\{E_2(\omega_2)\})\geq\lambda_2$

若$CF(\{E_1(\omega_1)\})\geq CF(\{E_2(\omega_2)\})$，则优先使用$r_1$进行推理。

加权不确定性推理举例(1)

例设有如下知识：

R1：IF $E_1(0.6)$ AND $E_2(0.4)$ THEN $E_6(0.8, 0.75)$

R2：IF $E_3(0.5)$ AND $E_4(0.3)$ AND $E_5(0.2)$

THEN $E_7(0.7, 0.6)$

R3：IF $E_6(0.7)$ AND $E_7(0.3)$ THEN $H(0.75, 0.6)$

已知：$CF(E_1)=0.9$，$CF(E_2)=0.8$，$CF(E_3)=0.7$，

$CF(E_4)=0.6$，$CF(E_5)=0.5$

求：$CF(H)=?$

解：**由R1得到**：

$CF(E_1(0.6)\ \text{AND}\ E_2(0.4))=0.86>\lambda_1=0.75$

∴R1可被应用。

加权不确定性推理举例(2)

由R2得到：

$CF(E_3(0.5)\ AND\ E_4(0.3)\ AND\ E_5(0.2)) = 0.63 > \lambda_2 = 0.6$

∴R2可被应用。

∵0.86>0.63

∴R1先被应用。

由R1得到：$CF(E_6)=0.69$

由R2得到：$CF(E_7)=0.44$

由R3得到：

$CF(E_6(0.7)\ AND\ E_7(0.3))=0.615 > \lambda_3 = 0.6$

∴R3可被应用，得到：

$CF(H)=0.46$

即最终得到的结论H可信度为0.46

例、设有下列知识：

IF 该动物有蹄（**0.3**）

AND 该动物有长腿（**0.2**）

AND 该动物有长颈（**0.2**）

AND 该动物是黄褐色（**0.13**）

AND 该动物身上有暗黑色斑点（**0.13**）

AND 该动物的体重≥200kg（**0.04**）

THEN 该动物是长颈鹿（**0.95, 0.8**）

证据为：

E_1: 该动物有蹄（**1**）

E_2: 该动物有长腿（**1**）

E_3: 该动物有长颈（**1**）

E_4: 该动物是黄褐色（**0.8**）

E_5: 该动物身上有暗黑色斑点（**0.6**）

试问该动物是什么动物？

解：

$CF(E)=0.3\times1+0.2\times1+0.2\times1+0.13\times0.8+0.13\times0.6$
$=0.882$

因 $\lambda=0.8$，而$CF(E)>\lambda$，所以该知识可以被应用，推出该动物是长颈鹿，其可信度是：

$CF(H)=CF(H,E)\times CF(E)$
$=0.95\times0.882$

基于可信度的不确定性推理方法的特点

优点：

- 简单、直观。

缺点：

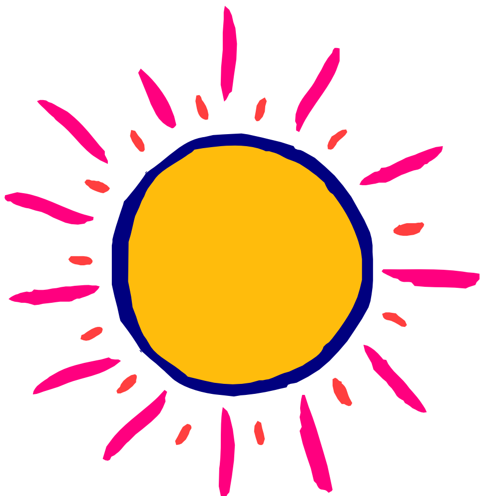
- 可信度因子依赖于专家主观指定，没有统一、客观的尺度，容易产生片面性。
- 随着推理延伸，可信度越来越不可靠，误差越来越大。当推理深度达到一定深度时，有可能出现推出的结论不再可信的情况。

不确定性推理

- 基本概念
- 逆概率推理方法
- 可信度方法
- 模糊逻辑与模糊集合
- 模糊集合运算与合成
- 模糊推理与模糊判决

模糊计算和模糊推理

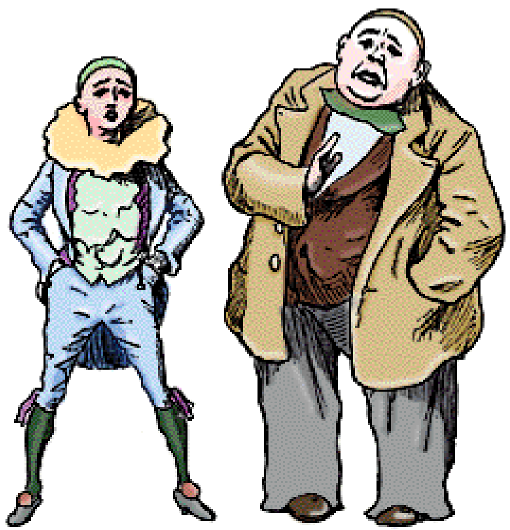
- 经典二值（布尔）逻辑
  - 在经典二值（布尔）逻辑体系中，所有的分类都被假定为有明确的边界；（突变）
  - 任一被讨论的对象，要么属于这一类，要么不属于这一类；
  - 一个命题不是真即是假，不存在亦真亦假或非真非伪的情况。（确定）



天气冷热

雨的大小

风的强弱



人的胖瘦

年龄大小

个子高低

模糊数学

•模糊概念

模糊概念：从属于该概念到不属于该概念之间无明显分界线

年轻、重、热、美、厚、薄、快、慢、大、小、高、低、长、短、贵、贱、强、弱、软、硬、阴天、多云、暴雨、清晨。

模糊数学就是用数学方法研究模糊现象。

模糊数学的产生与基本思想

- 产生

1965年，L.A. Zadeh（扎德） 发表了文章《模糊集》（Fuzzy Sets，Information and Control，8，338-353）

- 基本思想

用属于程度代替属于或不属于。

模糊数学的发展

1975年之前，发展缓慢；1980以后发展迅速；

1990-1992 **Fuzzy Boom**

- 杂志种类

1978年，**Int. J. of Fuzzy Sets and Systems**

每年1卷共340页，1999年8卷每卷480页

Int. J. of Approximate Reasoning

Int. J. Fuzzy Mathematics

Int. J. Uncertainty, Fuzziness, knowledge-based Systems

IEEE 系列杂志

主要杂志25种涉及模糊内容

- 国际会议

  IFSA (Int. Fuzzy Systems Association)

  EUFIT、NAFIP、Fuzzy-IEEE、IPMU

- 涉及学科

模糊代数，模糊拓扑，模糊逻辑，模糊分析，

模糊概率，模糊图论，模糊优化等模糊数学分支；

分类、识别、评判、预测、控制、排序、选择；

人工智能、控制、决策、专家系统、医学、土木、农业、气象、信息、经济、文学、音乐

- **模糊产品**

洗衣机、摄像机、照相机、电饭锅、空调、电梯

国内状况

- 1976年传入我国
- 1980年成立中国模糊数学与模糊系统学会
- 1981年创办《模糊数学》杂志
- 1987年创办《模糊系统与数学》杂志
- 我国已成为全球四大模糊数学研究中心之一
  （美国、西欧、日本、中国）

为什么研究模糊数学

- 人工智能的要求
- 取得精确数据不可能或很困难
- 没有必要获取精确数据

模糊数学的产生不仅形成了一门崭新的数学学科，而且也形成了一种崭新的思维方法，它告诉我们存在亦真亦假的命题，从而打破了以二值逻辑为基础的传统思维，使得模糊推理成为严格的数学方法。随着模糊数学的发展，模糊理论和模糊技术将对于人类社会的进步发挥更大的作用。

模糊性与随机性之区别

- 随机性
  - 事件本身具有明确含意
  - 事件是否出现的不确定性
  - $[0, 1]$上概率分布函数描述
- 模糊性
  - 事物的概念本身是模糊的
  - 概念的外延的模糊－不确定性：模糊性
  - $[0, 1]$上的隶属函数描述

模糊数学理论

1.1 经典集合

集合是数学中最基本的概念之一。

- 所谓**集合**，是指具有某种特定属性的对象的全体。
- 讨论某一概念的外延时总离不开一定的范围。这个讨论的范围，称为“**论域**”，论域中的每个对象称为“**元素**”。

模糊数学理论

集合的特征函数：设A是论域U上的一个集合，对任意 $u \in U$，令

$$C_A(u) = \begin{cases} 1 & \text{如果} \quad u \in A \\ 0 & \text{如果} \quad u \notin A \end{cases}$$

则称$C_A(u)$为集合A的特征函数。

集合A与其特征函数可以认为是等价的。

$$A = \{u \mid C_A(u) = 1\}$$

例：设有论域：U={ 1, 2, 3, 4, 5 }，A={ 1, 3, 5 }，求其特征函数。

解：特征函数如下：

$$C_A(u) = \begin{cases} 1 & \text{当} \quad u=1,3,5 \\ 0 & \text{当} \quad u=2,4 \end{cases}$$

1.2 模糊理论基本概念

定义1-1　模糊集合：论域U中的模糊集F用一个在区间[0, 1]的取值的隶属函数 μ_F 来表示，即：

$$\mu_F : U \rightarrow [0,1]$$

- μ_F 称为F的**隶属函数**，$\mu_F(u)$ 称为u对A的**隶属度**。

- 模糊子集F完全由其隶属函数所刻画。隶属函数　把U中的每一个元素都映射为[0, 1]上的一个值，表示该元素隶属于F的程度，值越大表示隶属的程度越高。当　　的值仅为0或1时，模糊子集F就退化为一个普通的集合，隶属函数也就退化为特征函数。

F可以表示为：$F = \{(u, \mu_F(u)) / u \in U\}$

◆ 例：设有论域：U={高山，刘水，秦声 }

确定一个模糊集A，以表示他们分别对“学习好”的隶属程度。

假设他们的平均成绩分别为：98分，72分，86分，设映射为平均成绩除以100。则有隶属度：

μ_A(高山)=0.98，μ_A(刘水)=0.72，μ_A(秦声)=0.86

模糊集A={ 0.98，0.72，0.86 }

对于一般的模糊子集A可表示为A={ μ_1，μ_2，…，μ_n }，其中μ_i表示论域中第i个元素对A的隶属度。

例：　设F 表示远远大于0的实数集合，则它的隶属函数可以用下式表示来定义

$$\mu_F = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{100}{x^2}} & x > 0 \end{cases}$$

可以算出 $\mu(5) = 0.2;\ \mu(10) = 0.5;\ \mu(20) = 0.8$ 表示5属于大于零的程度为0.2，也就意味着5不算远大于0.

1.3 模糊集的表示方法

若U为离散域且为有限集合时，模糊集合可以表示为：

- 1扎德表示法

$$F=\sum_{i=1}^{n}\mu_F(u_i)/u_i$$

"/"不是表示相除，它只是一个记号，其分母是论域中的元素，分子是该元素对模糊子集F的隶属度。

- 2序偶表示法

$$F=\{(u_1,\mu(u_1)),(u_2,\mu(u_2))\ldots,(u_n,\mu(u_n))\}$$

- 3向量表示法

$$F=\{\mu(u_1),\mu(u_2)\ldots,\mu(u_n)\}$$

$\sum$也不是表示相加，它只是一个记号。

$\mu_F(u_i)/u_i$ 表示u_i对模糊集F的隶属度。当某个隶属度为0时，可以略去不写。

如：

$$A=1/u_1+0.7/u_2+0/u_3+0.5/u_4$$

$$B=1/u_1+0.7/u_2+0.5/u_4$$

它们是相同的模糊集。

（适用于扎德表示法和序偶表示法，对于向量表示法，隶属度为0的项不可省略）

- 无论论域是有限的还是无限的，连续的还是离散的，扎德都用如下记号作为模糊子集的一般表示形式：

$$F=\int_U \frac{\mu_F}{u}$$

- 这里的积分号不是数学中的积分，也不是求和，只是表示论域中各元素与其隶属度对应关系的总括，是一个记号。

1.4 集合运算

模糊集合是利用集合中的特征函数或者隶属度函数来定义和操作的，A, B是U中的两个模糊子集，隶属度函数分别为 μ_A 和 μ_B 。

定义1-2 设A, B是论域U的模糊集，即 $A, B \in F(U)$ 若对于任一 $u \in U$，都有 $\mu_B(u) \leq \mu_A(u)$，则称B包含于A，或者称B是A的一个子集，记作 $B \subseteq A$ 。若对于任一 $u \in U$ 都有 $\mu_B(u) = \mu_A(u)$ ，则称B等于A，记作 $B = A$ 。

1.4 集合运算

定义1-3 并：并（$A \cup B$）的隶属度函数$\mu_{A \cup B}$对所有的$u \in U$被逐点定义为取大运算，即：

$$\mu_{A\cup B} = \mu_A(u) \vee \mu_B(u)$$

式中，$\vee$ 符号取极大值运算。

定义1-4 交：交（$A \cap B$）的隶属度函数$\mu_{A \cap B}$对所有的$u \in U$被逐点定义为取小运算，即：

$$\mu_{A\cap B} = \mu_A(u) \wedge \mu_B(u)$$

式中，$\wedge$ 符号取极小值运算

1.4 集合运算

定义1-5 补：隶属度函数$\mu_{\bar{A}}$，对所有的$u \in U$，被逐点定义为 $\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u)$。

例： 设论域 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$中的两个模糊子集为

$$A = \frac{0.6}{u_1} + \frac{0.6}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{0.4}{u_4} + \frac{0.3}{u_5} \qquad B = \frac{0.5}{u_1} + \frac{0.6}{u_2} + \frac{0.3}{u_3} + \frac{0.4}{u_4} + \frac{0.7}{u_5}$$

则 $$A \cup B = \frac{0.6 \vee 0.5}{u_1} + \frac{0.6 \vee 0.6}{u_2} + \frac{1 \vee 0.3}{u_3} + \frac{0.4 \vee 0.4}{u_4} + \frac{0.3 \vee 0.7}{u_5} = \frac{0.6}{u_1} + \frac{0.6}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{0.4}{u_4} + \frac{0.7}{u_5}$$

$$A \cap B = \frac{0.6 \wedge 0.5}{u_1} + \frac{0.6 \wedge 0.6}{u_2} + \frac{1 \wedge 0.3}{u_3} + \frac{0.4 \wedge 0.4}{u_4} + \frac{0.3 \wedge 0.7}{u_5} = \frac{0.5}{u_1} + \frac{0.6}{u_2} + \frac{0.3}{u_3} + \frac{0.4}{u_4} + \frac{0.3}{u_5}$$

例：设$U=\{u_1, u_2, u_3\}$

$$A=0.3/u_1+0.8/u_2+0.6/u_3$$

$$B=0.6/u_1+0.4/u_2+0.7/u_3$$

求：$A\cap B$，$A\cup B$及$\overline{A}$

$A=0.3/u_1+0.8/u_2+0.6/u_3$

$B=0.6/u_1+0.4/u_2+0.7/u_3$

解：

$A \cap B=0.3/u_1+0.4/u_2+0.6/u_3$

$A \cup B=0.6/u_1+0.8/u_2+0.7/u_3$

$\overline{A}=(1-0.3)/u_1+(1-0.8)/u_2+(1-0.6)/u_3$

$=0.7/u_1+0.2/u_2+0.4/u_3$

定理1-1　模糊集运算的基本定律：论U为论域，A、B、C为U中的任意模糊子集，则下列等式成立：

(1) 幂等律　$A \cap A = A, A \cup A = A$

(2) 结合律　$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(3) 交换律　$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$

(4) 分配率　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(5) 同一律　$A \cap U = A, A \cup \varnothing = A$

(6) 零一律　$A \cup U = U, A \cap \varnothing = \varnothing$

(7) 吸收率　$A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A$

(8) 德摩根律　$\overline{A \cap B} = \overline{B} \cup \overline{A}, \overline{A \cup B} = \overline{B} \cap \overline{A}$

(9) 双重否定律　$\overline{\overline{A}} = A$

其它形式的模糊集运算：

- 有界和算子$\oplus$ 和有界积算子 $\otimes$

$$A \oplus B : \min\{1, \mu_A(u) + \mu_B(u)\}$$

$$A \otimes B : \max\{0, \mu_A(u) + \mu_B(u) - 1\}$$

- 概率和算子 $\hat{+}$与实数积算子 $\bullet$

$$A \hat{+} B : \mu_A(u) + \mu_B(u) - \mu_A(u) \times \mu_B(u)$$

$$A \bullet B : \mu_A(u) \times \mu_B(u)$$

- 爱因斯坦和算子$\overset{+}{\varepsilon}$ 与爱因斯坦积算子 $\overset{\bullet}{\varepsilon}$

$$A \overset{+}{\varepsilon} B : \frac{\mu_A(u) + \mu_B(u)}{1 + \mu_A(u) \times \mu_B(u)}$$

$$A \overset{\bullet}{\varepsilon} B : \frac{\mu_A(u) \times \mu_B(u)}{1 + [1 - \mu_A(u)] \times [1 - \mu_B(u)]}$$

λ截集是把模糊集向普通集合转化的一个重要概念。

1.5 模糊集的截集

定义：设 $A \in F(u), \lambda \in [0,1]$，则：

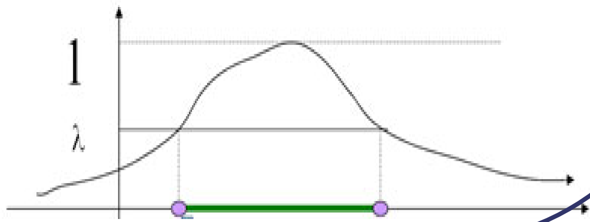
(1) $A_\lambda = \{u \mid u \in U, \mu_A(u) \geq \lambda\}$ 称 A_λ 为A的一个 λ 截集，称 λ 为阈值（置信水平）；

（2） $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \{u \mid u \in U, \mu_A(u) > \lambda\}$ 称 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 为A的一个 λ 强截集；

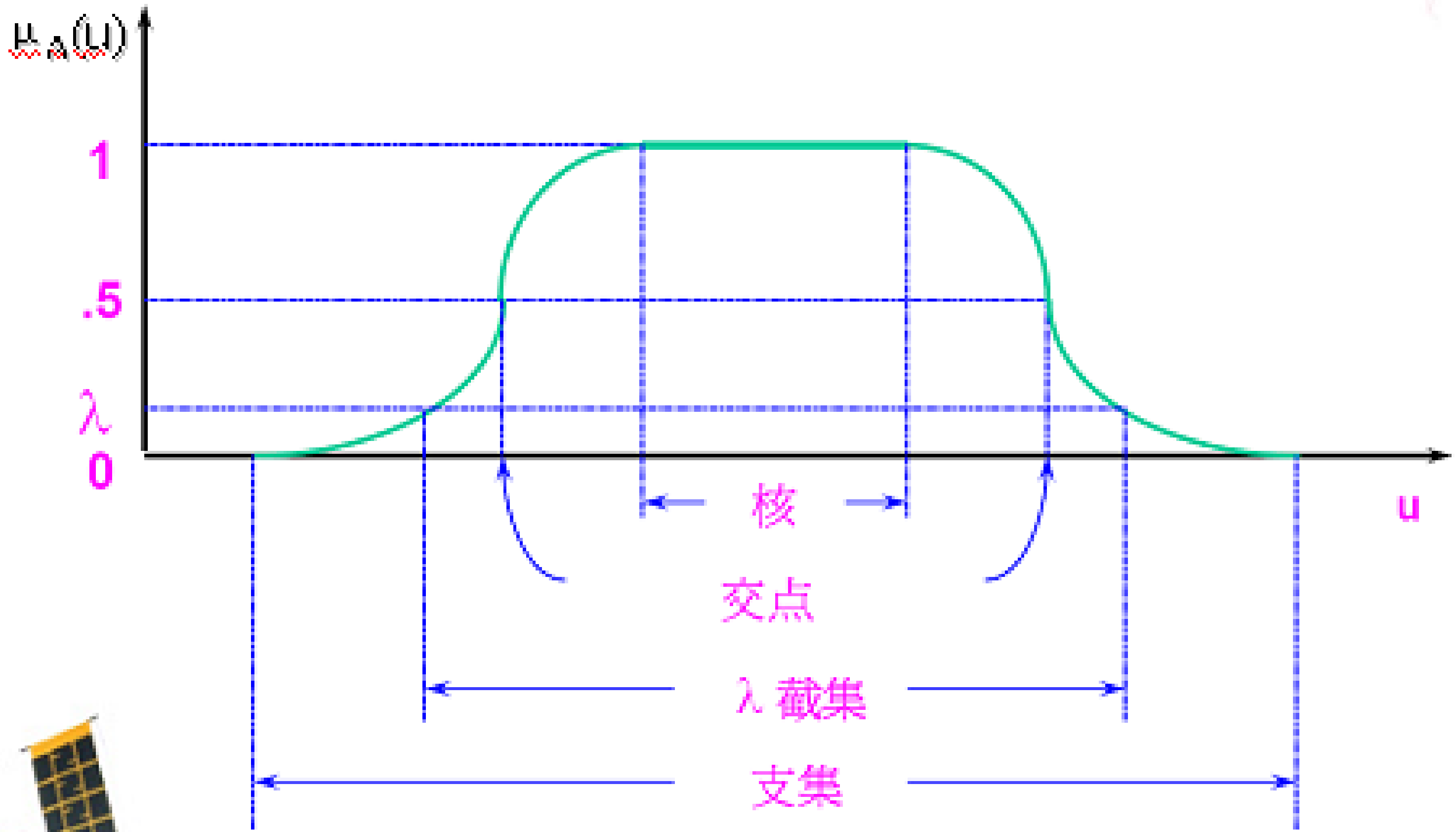
（3） $SuppA = \{u \mid u \in U, \mu_A(u) > 0\}$ A的支集

$KerA = \{u \mid u \in U, \mu_A(u) = 1\}$ A的核

当A的核不为空，则称A为正规F集



1.5 模糊集的截集



1.5 模糊集的截集

例：设有模糊集：

$$A=0.3/u_1+0.7/u_2+1/u_3+0.6/u_4+0.5/u_5$$

且λ分别为1，0.6，0.5，0.3，分别求其相应的λ截集、核及支集。

$$A=0.3/u_1+0.7/u_2+1/u_3+0.6/u_4+0.5/u_5$$

解：

（1）λ截集

$A_1=\{u_3\}$

$A_{0.6}=\{u_2,u_3,u_4\}$

$A_{0.5}=\{u_2,u_3,u_4,u_5\}$

$A_{0.3}=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$

（2）核、支集

$KerA=\{u_3\}$

$SuppA=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$

1.6 模糊集合的模糊度

模糊度是模糊集模糊程度的一种度量。

定义 设$A \in F(U)$，d是定义在$F(U)$上的一个实函数，如果它满足以下条件：

(1) 对任意$A \in F(U)$，有$d(A) \in [0, 1]$；

(2) 当且仅当A是一个普通集合时，$d(A)=0$；

(3) 若A的隶属函数$\mu_A(u) \equiv 0.5$，则$d(A)=1$；

(4) 若$A, B \in F(U)$，且对任意$u \in U$，满足

$$\mu_B(u) \leqslant \mu_A(u) \leqslant 0.5 \text{ 或者 } \mu_B(u) \geqslant \mu_A(u) \geqslant 0.5$$

则有$d(B) \leqslant d(A)$

(5) 对任意$A \in F(U)$，有$d(A)=d(\neg A)$

则称d为定义在$F(U)$上的一个模糊度，$d(A)$称为A的模糊度。

模糊度的直观含义

- 是[0, 1]上一个数；
- 普通集合的模糊度是0，表示所刻画的概念不模糊；
- 越靠近0.5就越模糊，当 $\mu_A(u)=0.5$ 时最模糊；
- 模糊集A与其补集¬A有相同的模糊度。

计算模糊度的方法

- **海明(Haming)模糊度**

$$d_1(A)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_{A_{0.5}}(u_i)|$$

其中，$\mu_{A0.5}(u_i)$是A的$\lambda=0.5$截集的隶属函数。由于$A_{0.5}$是一个普通集合，所以$\mu_{A0.5}(u_i)$实际上是特征函数。

- **欧几里德(Euclid)模糊度**

$$d_2(A)=\frac{2}{\sqrt{n}}(\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_{A_{0.5}}(u_i)|^2)^{1/2}$$

◆ 明可夫斯基(Minkowski)模糊度

$$d_p(A)=\frac{2}{n^{1/p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_{A_{0.5}}(u_i)|^p\right)^{1/p}$$

◆ 香农模糊度

$$d(A)=\frac{1}{n\ln 2}\sum_{i=1}^{n}S(\mu_A(u_i))$$

其中S(x)是定义在[0, 1]上的香农函数，即

$$S(x)=\begin{cases}-x\ln x-(1-x)\ln(1-x), & x\in(0,1)\\ 0, & x=1\ or\ x=0\end{cases}$$

例 设U={u_1, u_2, u_3, u_4}

$$A=0.8/u_1+0.9/u_2+0.1/u_3+0.6/u_4$$

则

$$d_1(A)=\frac{2}{4}(|0.8-1|+|0.9-1|+|0.1-0|+|0.6-1|)$$

$$=\frac{1}{2}(0.2+0.1+0.1+0.4)$$

$$=0.4$$

$$d_2(A)=\frac{2}{\sqrt{4}}[(0.8-1)^2+(0.9-1)^2+(0.1-0)^2+(0.6-1)^2]^{1/2}$$

$$=0.47$$

模糊数

模糊的数量，例如：500人左右，大约0.6

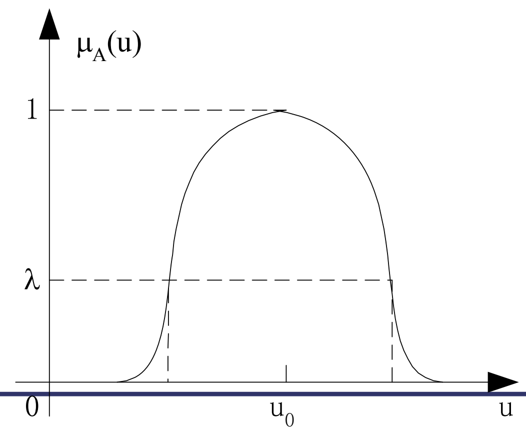
1\. **定义** 如果实数域R上的模糊集A的隶属函数$\mu_A(u)$在R上连续且具有如下性质：

(1) A是凸模糊集，即对任意$\lambda\in[0,1]$，A_λ是闭区间；

(2) A是正规模糊集，即存在$u\in R$，使$\mu_A(u)=1$。

则称A为一个模糊数。

- **直观上模糊数的隶属函数图形是单峰的，且在峰顶使隶属度达到1。**



一个模糊数的例子。

“6左右”

$$\mu_6(u)=\begin{cases} e^{-10(u-6)^2}, & 当|u-6|\le 3 \\ 0, & 当|u-6|>3 \end{cases}$$

2 普通集合上的“关系”

◆ 笛卡尔乘积

设U与V是两个集合，则称

$$U\times V=\{(u,v)\mid u\in U,\ v\in V\}$$

为U与V的笛卡尔乘积。

◆ 若R是U×V上的一个子集，则称R为从U到V的一个关系。记为： $U\xrightarrow{R}V$

◆ 对于U×V中的元素(u, v)，若(u, v)∈R，则称u与v有关系R，否则，称u与v没有关系R。

2 普通集合上的“关系”

例：设U={ 红桃，方块，黑桃，梅花 }

V={ A，2，3，4，5，6，7，8，9，10，J，Q，K }

求U×V

解：

U×V＝{（红桃，A），（红 桃，2），……，（梅花， K） }，共52个元素。

3 模糊关系

- 在普通集合上定义的“关系”都是确定性关系，u和v或者有某种关系，或者没有这种关系。
- 但是，在现实世界中，很多事物的关系并不是十分明确的，如：人与人之间的相像关系，人与事物之间的爱好关系等。

3. 模糊关系

模糊二元关系R是以U×V为论域的一个模糊子集，序偶(u, v)的隶属度为 $\mu_R(u,v)$

模糊关系的定义

设论域U和V，则 $U \times V$ 的一个子集R，就是从U到V的模糊关系，记作

$$U \xrightarrow{\quad R \quad} V$$

这里的模糊关系R是属于模糊二元关系。

其隶属函数为映射： $\mu_R : U \times V \to [0,1]$

隶属度 $\mu_R(u_0, v_0)$ ，表示u_0与v_0具有关系R的程度。

3 模糊关系

- 对于有限论域$U=\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$，$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，则U对V的模糊关系的隶属函数可以用$m\times n$阶模糊矩阵R来表示，即

$$R=(r_{ij})_{m\times n}$$

3 模糊关系

例：设有一组学生U：

U={ 张三，李四，王五 }

他们对球类运动V：

V={ 篮球，排球，足球，乒乓球 }

有不同的爱好，其爱好程度可以用下面的模糊关系来表示：

$$R=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

例　设有七种物品：苹果、乒乓球、书、篮球、花、桃、菱形组成的一个论域U，并设X_1、X_2、……X_7分别为这些物品的代号，则U={X_1、X_2、……X_7}，现在就这些物品中两两之间的相似程度来确定他们的模糊关系。

R	苹果	乒乓器	书	篮球	花	桃	菱形
苹果	1.0	0.7	0	0.7	0.5	0.6	0
乒乓球	0.7	1.0	0	0.9	0.4	0.5	0
书	0	0	1.0	0	0	0	0.1
篮球	0.7	0.9	0	1.0	0.4	0.5	0
花	0.5	0.4	0	0.4	1.0	0.4	0
桃	0.6	0.5	0	0.5	0.4	1.0	0
菱形	0	0	0.1	0	0	0	1.0

U与V可以是相同的论域，此时，称R为U上的模糊关系。

模糊集的笛卡尔乘积

模糊集A和B的笛卡尔乘积为：

$$A\times B=\int_{U\times V}\min(\mu_A(u),\mu_B(v)/(u,v))$$

例 设 $U=\{1,2,3\},V=\{1,2,3,4\}$

$$A=1/1+0.7/2+0.2/3,\ B=0.8/1+0.6/2+0.4/3+0.2/4$$

$A\times B=0.8/(1,1)+0.6/(1,2)+0.4/(1,3)+0.2/(1,4)+0.7/(2,1)+0.6/(2,2)+0.4/(2,3)+0.2/(2,4)+0.2/(3,1)+0.2/(3,2)+0.2/(3,3)+0.2/(3,4)$

u \ v	1	2	3	4
1	0.8	0.6	0.4	0.2
2	0.7	0.6	0.4	0.2
3	0.2	0.2	0.2	0.2

模糊关系的合成

某家中的子女与父母的长相的相似关系R为模糊关系，可表示为：

R	父	母
子	0.2	0.8
女	0.6	0.1

用模糊矩阵R表示为：

$$R = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.1 \end{bmatrix}$$

该家中的父母与祖父母的相似关系R也是模糊关系，可表示为：

S	祖父	祖母
父	0.5	0.7
母	0.1	0

用模糊矩阵R可表示为：

$$S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

R	父	母
子	0.2	0.8
女	0.6	0.1

S	祖父	祖母
父	0.5	0.7
母	0.1	0

那么家中孙子，孙女与祖父，祖母的相似程度如何？

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0.2 \wedge 0.5) \vee (0.8 \wedge 0.1) & (0.2 \wedge 0.7) \vee (0.8 \wedge 0) \\ (0.6 \wedge 0.5) \vee (0.1 \wedge 0.1) & (0.6 \wedge 0.7) \vee (0.1 \wedge 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$$

P	祖父	祖母
孙子	0.2	0.2
孙女	0.5	0.6

模糊关系的合成

设R_1与R_2分别是U×V及V×W上的两个模糊关系，则R_1与R_2的合成是指从U到W的一个模糊关系，记为：$R_1 \circ R_2$

其隶属函数为

$$\mu_{R1\circ R2}(u,w) = \vee\{\mu_{R1}(u,v) \wedge \mu_{R2}(v,w)\}$$

例：设有如下两个模糊关系：

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

求 $R_1 \circ R_2$

方法：

取R_1的第i行元素分别与R_2的第j列的对应元素相比较，两个数中取其小者，然后再在所得的一组最小数中取最大的一个，并以此数作为$R_1 \circ R_2$第i行第j列的元素。

解：

$$R_1 \circ R_2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

模糊推理

模糊命题

1 张三是一个年轻人。

模糊概念

2 李四的身高为1.75m左右。

模糊数据

3 他考上大学的可能性在60%左右。

4 明天八成是个好天气。

5 今年冬天不会太冷的可能性很大。

对相应事件发生的可能性或确信程度作出判断。

91

模糊推理

模糊命题

- 含有模糊概念、模糊数据的语句称为**模糊命题**。它的一般表示形式为：

$$x \quad is \quad A$$

或者 $$x \quad is \quad A\,(CF)$$

其中，A是**模糊概念**或者**模糊数**，用相应的**模糊集**及**隶属函数**刻画；x是论域上的变量，用以代表所论述对象的属性；CF是该模糊命题的**可信度**，它既可以是一个**确定的数**，也可以是一个**模糊数**或者**模糊语言值**。

模糊推理

模糊语言值是指表示大小、长短、多少等程度的一些词汇。如：极大、很大、相当大、比较大。模糊语言值同样可用模糊集描述。

模糊数： 如果实数域R上的模糊集A的隶属函数 $\mu_A(u)$ 在R上连续且具有如下性质，则A为一模糊数：

（1）A是正规模糊集，即存在u属于R，使得 $\mu_A(u)=1$。

（2）A是凸模糊集，即对于任意实数x，a<x<b，有 $\mu_A(x)>=\min\{\mu_A(a),\ \mu_A(b)\}$。

直观上看，模糊数的隶属函数的图形是单峰的，在在峰顶时隶属度达到1。

模糊知识的表示

(1) 模糊产生式规则的一般形式是：

IF E THEN H (CF, λ)

其中，E是用模糊命题表示的模糊条件；H是用模糊命题表示的模糊结论；CF是知识的可信度因子，它既可以是一个确定的数，也可以是一个模糊数或模糊语言值。λ是匹配度的阈值，用以指出知识被运用的条件。例如：

IF x is A THEN y is B (CF, λ)

(2) 推理中所用的证据也用模糊命题表示，一般形式为

x is A'

或者

x is A' (CF)

(3) 模糊推理要解决的问题：证据与知识的条件是否匹配；如果匹配，如何利用知识及证据推出结论。

模糊匹配与冲突消解

- 在模糊推理中，知识的前提条件中的A与证据中的A’不一定完全相同，因此首先必须考虑**匹配问题**。例如：

IF x is 小 THEN y is 大 (0.6)

x is 较小

- 两个模糊集或模糊概念的相似程度称为**匹配度**。常用的计算匹配度的方法主要有**贴近度**、**语义距离**及**相似度**等。

1. 贴近度

设A与B分别是论域U={u1, u2, •••, un}上的两个模糊集，则它们的贴近度定义为：

$$(A, B) = [A \cdot B + (1 - A \odot B)] / 2$$

其中

$$A \bullet B = \bigvee_U (\mu_A(u_i) \wedge \mu_B(u_i)) \quad \text{内积}$$

$$A \odot B = \bigwedge_U (\mu_A(u_i) \vee \mu_B(u_i)) \quad \text{外积}$$

2. 语义距离

(1) 海明距离

$$d(A,B)=\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i)|$$

$$d(A,B)=\frac{1}{b-a}\int_a^b|\mu_A(u)-\mu_B(u)|\,du$$

(2) 欧几里得距离

$$d(A,B)=\frac{1}{\sqrt{n}}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i))^2}$$

(3) 明可夫斯基距离

$$d(A,B)=[\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i)|^q]^{\frac{1}{q}},\quad q\geq 1$$

(4) 切比雪夫距离

$$d(A,B)=\max_{1\leq i\leq n}|\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i)|$$

匹配度为：1-d(A, B)

3. 相似度

(1) 最大最小法

$$r(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\min\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}{\sum_{i=1}^{n}\max\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}$$

(2) 算术平均法

$$r(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\min\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}{\frac{1}{2}\times\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(u_i)+\mu_B(u_i))}$$

(3) 几何平均最小法

$$r(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\min\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\mu_A(u_i)\times\mu_B(u_i)}}$$

（4） 相关系数法

$$r(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(u_i)-\overline{\mu}_A)\times(\mu_B(u_i)-\overline{\mu}_B)}{\sqrt{[\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(u_i)-\overline{\mu}_A)^2]\times[\sum_{i=1}^{n}(\mu_B(u_i)-\overline{\mu}_B)^2]}}$$

$$\overline{\mu}_A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_A(u_i),\quad \overline{\mu}_B=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_B(u_i)$$

（5） 指数法

$$r(A,B)=e^{-\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i)|}$$

匹配度举例

$$A \bullet B = \underset{U}{\vee}(\mu_A(u_i) \wedge \mu_B(u_i))$$

$$A \odot B = \underset{U}{\wedge}(\mu_A(u_i) \vee \mu_B(u_i))$$

设U={a, b, c, d}

A=0.3/a+0.4/b+0.6/c+0.8/d

B=0.2/a+0.5/b+0.6/c+0.7/d

贴近度：

$A \cdot B = (0.3 \wedge 0.2) \vee (0.4 \wedge 0.5) \vee (0.6 \wedge 0.6) \vee (0.8 \wedge 0.7) = 0.7$

$A \odot B = (0.3 \vee 0.2) \wedge (0.4 \vee 0.5) \wedge (0.6 \vee 0.6) \wedge (0.8 \vee 0.7) = 0.3$

$(A, B) = 1/2[A \cdot B + (1 - A \odot B)] = 1/2[0.7 + (1 - 0.3)] = 0.7$

匹配度举例

设U={a, b, c, d}

A=0. 3/a+0. 4/b+0. 6/c+0. 8/d

B=0. 2/a+0. 5/b+0. 6/c+0. 7/d

$$d(A,B)=\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}|\mu_A(u_i)-\mu_B(u_i)|$$

$$d(A,B)=\frac{1}{b-a}\int_a^b|\mu_A(u)-\mu_B(u)|du$$

海明距离：

d(A, B)=1/4×(|0. 3−0. 2|+|0. 4−0. 5|+|0. 6−0. 6|+|0. 8−0. 7|)=0. 075

(A, B)=1−d(A, B)=1−0. 075=0. 925

匹配度举例

设U={a, b, c, d}

A=0.3/a+0.4/b+0.6/c+0.8/d

B=0.2/a+0.5/b+0.6/c+0.7/d

$$r(A,B)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\min\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}{\sum_{i=1}^{n}\max\{\mu_A(u_i),\mu_B(u_i)\}}$$

相似度：

最大最小法：

r(A, B)=((0.3∧0.2)+(0.4∧0.5)+(0.6∧0.6)+(0.8∧0.7))/((0.3∨0.2)+(0.4∨0.5)+(0.6∨0.6)+(0.8∨0.7))

=1.9/2.2=0.86

复合条件的模糊匹配

(1) 分别计算出每一个子条件与其证据的匹配度

例如对复合条件

$E=x_1$ is A_1 AND x_2 is A_2 AND x_3 is A_3

及相应证据E’：

x_1 is A_1'，x_2 is A_2'，x_3 is A_3'

分别算出A_i与A'_i的匹配度

$\delta_{match}(A_i, A_i')$, i=1, 2, 3。

复合条件的模糊匹配

(2) **求出整个前提条件与证据的总匹配度。目前常用的方法有“取极小”和“相乘”等。**

$$\delta_{match}(E, E') = \min\{\delta_{match}(A_1, A'_1), \delta_{match}(A_2, A'_2), \delta_{match}(A_3, A'_3)\}$$

$$\delta_{match}(E, E') = \delta_{match}(A_1, A'_1) \times \delta_{match}(A_2, A'_2) \times \delta_{match}(A_3, A'_3)$$

(3) **检查总匹配度是否满足阈值条件，如果满足就可以匹配，否则为不可匹配。**

模糊推理中的冲突消解

1. 按匹配度大小排序

2. 按加权平均值排序

例如， 设$U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$，

$A=0.9/u_1+0.6/u_2+0.4/u_3$

$B=0.6/u_2+0.8/u_3+0.5/u_4$

$C=0.5/u_3+0.8/u_4+1/u_5$

$D=0.8/u_1+0.5/u_2+0.1/u_3$

并设有如下模糊知识：

R1:	IF	x is A	THEN	y is H_1
R2:	IF	x is B	THEN	y is H_2
R3:	IF	x is C	THEN	y is H_3

用户提供的初始证据为：

E’ : x is D

$\delta_{match}(A, D) = \mu_D(u_1) / \mu_A(u_1) + \mu_D(u_2) / \mu_A(u_2) + \mu_D(u3) / \mu_A(u_3)$
$=0.8/0.9+0.5/0.6+0.1/0.4$

同理可得：

$\delta_{match}(B, D)=0.8/0+0.5/0.6+0.1/0.8$

$\delta_{match}(C, D)=0.8/0+0.5/0+0.1/0.5$

以上D与A、B、C的匹配度不是用一个数而是用**模糊集形式**表示。

下面求匹配度的加权平均值：

$$AV(\delta_{match}(A,D)) = (0.8\times 0.9+0.5\times 0.6+0.1\times 0.4)/(0.9+0.6+0.4) = 0.56$$

同理可得：

$$AV(\delta_{match}(B,D)) = 0.27$$

$$AV(\delta_{match}(C,D)) = 0.1$$

于是得到：

$$AV(\delta_{match}(A,D)) > AV(\delta_{match}(B,D)) > AV(\delta_{match}(C,D))$$

所以R1是当前首先被选用的知识。

3. 按广义顺序关系排序

由上例可得：

$\delta_{match}(A,D)=\mu_D(u1)/\mu_A(u1)+\mu_D(u2)/\mu_A(u2)+\mu_D(u3)/\mu_A(u3)$

$=0.8/0.9+0.5/0.6+0.1/0.4$

$\delta_{match}(B,D)=0.8/0+0.5/0.6+0.1/0.8$

$\delta_{match}(C,D)=0.8/0+0.5/0+0.1/0.5$

下面以$\delta_{match}(A,D)$与$\delta_{match}(B,D)$为例说明广义顺序关系排序的方法：

(1)首先用$\delta_{match}(B,D)$的每一项分别与$\delta_{match}(A,D)$的每一项进行比较。比较时$\mu_D(u_i)$与$\mu_D(u_j)$中取其小者，　$\mu_A(u_i)$与$\mu_B(u_j)$按如下规则取值：若$\mu_A(u_i)\geqslant\mu_B(u_j)$则取"1"；若$\mu_A(u_i)<\mu_B(u_j)$则取"0"。例如用$\mu_D(u_1)/\mu_B(u_1)$与$\delta_{match}(A,D)$的各项进行比较时得到：

$$0.8/1+0.5/1+0.1/1$$

(2)然后对得到的各项进行归并，把"分母"相同的项归并为一项，"分子"取其最大者，于是得到如下比较结果：

$$\mu_1/1+\mu_0/0$$

此时，若$\mu_1>\mu_0$，则就认为$\delta_{match}(A,D)$优于$\delta_{match}(B,D)$，记为$\delta_{match}(A,D)\geqslant\delta_{match}(B,D)$。

按这种方法，对$\delta_{match}(A,D)$与$\delta_{match}(B,D)$可以得到：

$$0.8/1+0.5/1+0.1/1+0.5/1+0.5/1+0.1/0+0.1/1+0.1/0+0.1/0$$

$$=0.8/1+0.1/0$$

由于$\mu_1=0.8>\mu_0=0.1$，所以得到：

$$\delta_{match}(A,D) \geq \delta_{match}(B,D)$$

同理可得：

$$\delta_{match}(A,D) \geq \delta_{match}(C,D)$$
$$\delta_{match}(B,D) \geq \delta_{match}(C,D)$$

最后得到：

$$\delta_{match}(A,D) \geq \delta_{match}(B,D) \geq \delta_{match}(C,D)$$

由此可知**R1**应该是首先被选用的知识。

模糊推理的基本模式

1. 模糊假言推理

知识：**IF x is A THEN y is B**

证据：**x is A'**

--

结论：**y is B'**

对于复合条件有：

知识：**IF x_1 is A_1 AND x_2 is A_2 AND…AND x_n is A_n THEN**

y is B

证据：**x_1 is A'_1， x_2 is A'_2， …， x_n is A'_n**

结论：**y is B'**

2. 模糊拒取式推理

知识： IF x is A THEN y is B

证据： y is B'

结论： x is A'

简单模糊推理

- 知识中只含有简单条件，且不带可信度因子的模糊推理称为**简单模糊推理**。

- **合成推理规则**：对于知识

IF x is A THEN y is B

首先构造出A与B之间的**模糊关系**R，然后通过R**与证据的合成求出结论**。

如果已知证据是

x is A’

且A与A’可以模糊匹配，则通过下述合成运算求取B’：

$$B' = A' \circ R$$

如果已知证据是

y is B’

且B与B’可以模糊匹配，则通过下述合成运算求出A’：

$$A' = R \circ B'$$

构造模糊关系R的方法

1. 扎德方法

- 扎德提出了两种方法：一种称为**条件命题的极大极小规则**；另一种称为**条件命题的算术规则**，由它们获得的模糊关系分别记为R_m和R_a。

设$A\in F(U)$，$B\in F(V)$，其表示分别为

$$A=\int_U \mu_A(u)/u \quad ,B=\int_V \mu_B(u)/u$$

且用×，∪，∩，¬，⊕分别表示模糊集的笛卡儿乘积、并、交、补及**有界和**运算，则扎德把R_m和R_a分别定义为：

$$R_m=(A\times B)\cup(\neg A\times V)=\int_{U\times V}(\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))\vee(1-\mu_A(u))/(u,v)$$

$$R_a=(\neg A\times V)\oplus(U\times B)=\int_{U\times V}1\wedge(1-\mu_A(u)+\mu_B(v))/(u,v)$$

有界和 $x\oplus y=\min\{1,\ x+y\}$

IF x is A THEN y is B

对于模糊假言推理，若已知证据为

x is A'

则：

$$B'_m = A' \circ R_m$$

$$B'_a = A' \circ R_a$$

对于模糊拒取式推理，若已知证据为

y is B'

则：

$$A'_m = R_m \circ B'$$

$$A'_a = R_a \circ B'$$

扎德法推理举例(1)

例：设U=V={1,2,3,4,5}，A=1/1+0.5/2，B=0.4/3+0.6/4+1/5

并设模糊知识及模糊证据分别为：

IF x is A THEN y is B　　　　　　x is A’

其中，A’ 的模糊集为：A’ =1/1+0.4/2+0.2/3

则由模糊知识可分别得到R_m与R_a：

$$R_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, R_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

扎德法推理举例(2)

$B'_m=A'\circ R_m$

$$=\{1,0.4,0.2,0,0\}\circ\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1\\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$=\{0.4,0.4,0.4,0.6,1\}$

$B'_a=A'\circ R_a=\{0.4,0.4,0.4,0.6,1\}$

若已知证据为:y is B’,且B’=0.2/1+0.4/2+0.6/3+0.5/4+0.3/5,则:

$A'_m=R_m\circ B'$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1\\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.2\\ 0.4\\ 0.6\\ 0.5\\ 0.3\end{bmatrix}=\{0.5,0.5,0.6,0.6,0.6\}$$

$A'_a=R_a\circ B'=\{0.5,0.6,0.6,0.6,0.6\}$

2. Mamdani方法

IF x is A THEN y is B

$$R_c = A \times B = \int_{U\times V} \mu_A(u) \wedge \mu_B(v) / (u,v)$$

对于模糊假言推理，

$$B'_c = A' \circ R_c$$

对于模糊拒取式推理，

$$A'_c = R_c \circ B'$$

3. Mizumoto方法

- 米祖莫托等人根据多值逻辑中计算T(AB)的定义，提出了一组构造模糊关系的方法，分别记为R_s, R_g, R_{sg}, R_{gs}, R_{gg}, R_{ss}等等。其定义分别为：

$$R_s = A\times V \underset{s}{\Rightarrow} U\times B = \int_{U\times V}[\mu_A(u) \xrightarrow[s]{} \mu_B(v)]/(u,v)$$

其中，
$$\mu_A(u) \xrightarrow[s]{} \mu_B(v) = \begin{cases} 1, \mu_A(u) \le \mu_B(v) \\ 0, \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

$$R_g = A\times V \underset{g}{\Rightarrow} U\times B = \int_{U\times V}[\mu_A(u) \xrightarrow[g]{} \mu_B(v)]/(u,v)$$

其中，
$$\mu_A(u) \xrightarrow[g]{} \mu_B(v) = \begin{cases} 1, \mu_A(u) \le \mu_B(v) \\ \mu_B(v), \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

…

设U=V={1, 2, 3, 4, 5}, A=1/1+0.5/2, B=0.4/3+0.6/4+1/5

模糊知识: IF x is A THEN y is B

模糊证据: x is A’

其中, A’的模糊集为: A’=1/1+0.4/2+0.2/3

$$R_s=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},R_g=\begin{bmatrix}0&0&0.4&0.6&1\\0&0&0.4&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$B'_s=A'\circ R_s=\{0.2, 0.2, 0.2, 0.4, 1\}$

$B'_g=A'\circ R_g=\{0.2, 0.2, 0.4, 0.6, 1\}$

模糊判决方法

在推理得到的模糊集合中取一个相对最能代表这个模糊集合的单值的过程就称作解模糊（去模糊）或模糊判决(Defuzzification)。

模糊判决可以采用不同的方法：

重心法

最大隶属度方法

加权平均法

隶属度限幅元素平均法

◆下面介绍各种模糊判决方法，并以“水温适中”为例，说明不同方法的计算过程。

◆假设“水温适中”的模糊集合为

F=0.0/0+0.0/10+0.33/20+0.67/30+1.0/40+1.0/50+0.75/60+0.5/70+0.25/80+0.0/90+0.0/100

1、重心法

所谓**重心法**就是取模糊隶属函数曲线与横坐标轴围成面积的重心作为代表点。理论上应该计算输出范围内一系列连续点的重心，即

$$u=\frac{\int_x x\mu_N(x)dx}{\int_x \mu_N(x)dx}$$

但实际上是计算输出范围内整个**采样点**（即若干离散值）的重心。这样，在不花太多时间的情况下，用足够小的取样间隔来提供所需要的精度，这是一种最好的折衷方案。

$$u=\sum x_i\cdot\mu_N(x_i)/\sum\mu_{\mathrm{N}}(x_i)$$

F=0.0/0+0.0/10+0.33/20+0.67/30+1.0/40+1.0/50+0.75/60+0.5/70+0.25/80+0.0/90+0.0/100

$$u=\sum x_i \cdot \mu_F(x_i)/\sum \mu_F(x_i)$$

$$=(0\times0.0+10\times0.0\times+20\times.033\times+30\times0.67\times+40\times1.0\times+50\times1.0+60\times0.75\times+70\times0.5+80\times0.25+90\times0.0+100\times0.0)$$

$$/(0.0+0.0+0.33+0.67+1.0+1.0+0.75+0.5+0.25+0.0+0.0)$$

$$=48.2$$

在隶属函数不对称的情况下，其输出的代表值48.2 °C 。如果模糊集合中没有48.2 °C ，那么就选取最靠近的一个温度值50 °C 输出。

F=0.0/0+0.0/10+0.33/20+0.67/30+1.0/40+1.0/50+0.75/60+0.5/70+0.25/80+0.0/90+0.0/100

- 2. **最大隶属度法**
- 这种方法最简单，只要在推理结论的模糊集合中取隶属度最大的那个元素作为输出量即可。不过，要求这种情况下的隶属函数曲线一定是单峰曲线。如果该曲线是**梯形平顶**，那么具有最大隶属度的元素就可能不只一个，这时就要对所有取最大隶属度的元素求其平均值。

- 例如，对于“水温适中”这种情况，按最大隶属度原则，有两个元素40和50具有最大隶属度 1.0，那就要对所有取最大隶属度的元素40和50求平均值，执行量应取：

$$u_{max}=(40+50)/2=45$$

◆ 3.系数加权平均法

系数加权平均法的输出执行量由下式决定：

$$u=\sum k_i \cdot x_i / \sum k_i$$

式中，系数k_i的选择要根据实际情况而定，不同的系统决定了系统有不同的响应特性。

◆ 4.隶属度限幅元素平均法

用所确定的隶属度值 a对隶属度函数曲线进行切割，再对切割后大于等于该隶属度的所有元素进行平均，用这个平均值作为输出执行量，这种方法就称为隶属度限幅元素平均法。

F=0.0/0+0.0/10+0.33/20+0.67/30+1.0/40+1.0/50+0.75/60+0.5/70+0.25/80+0.0/90+0.0/100

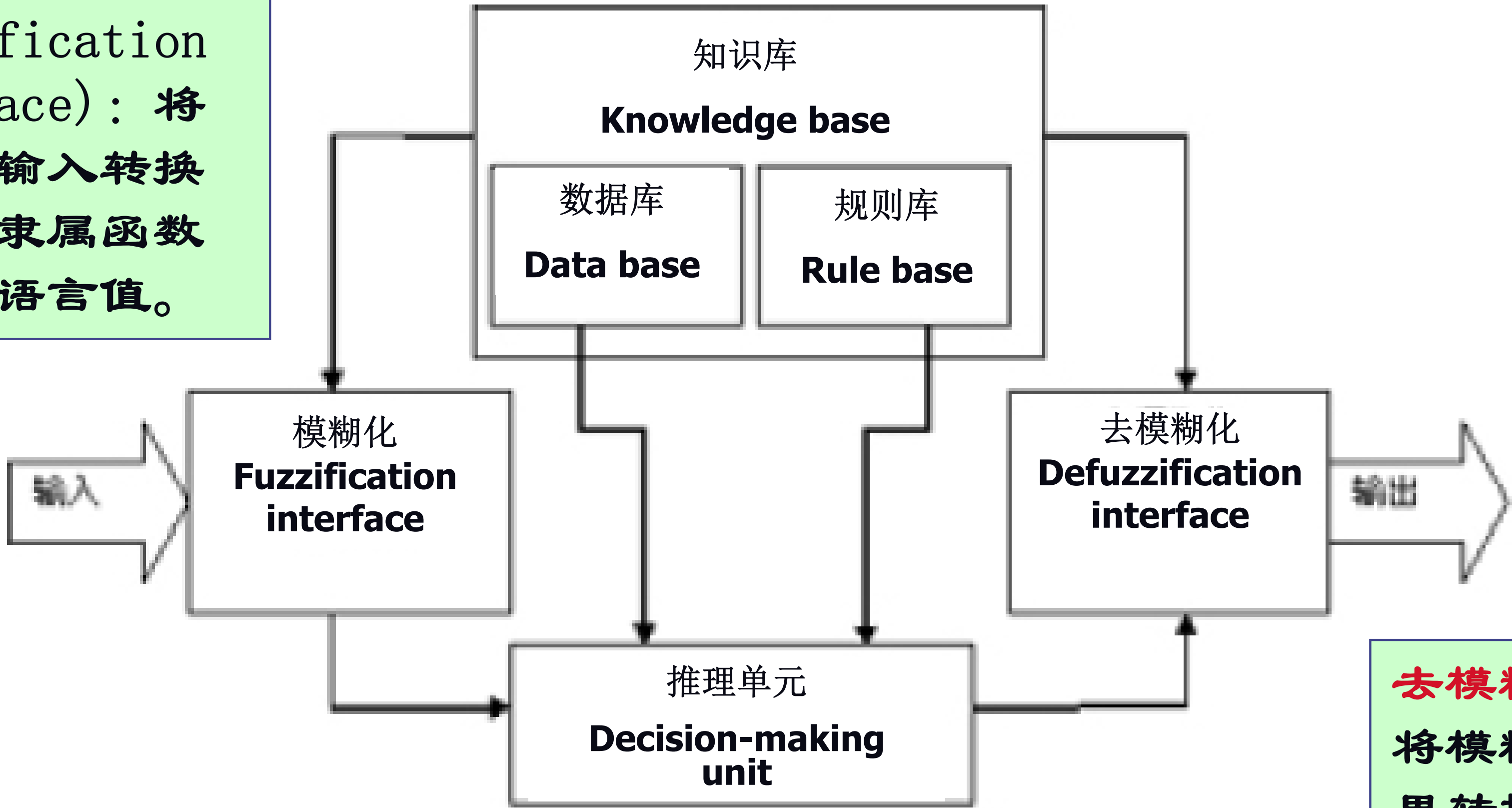
- 例如，当取 α 为最大隶属度值时，表示“完全隶属”关系，这时 $\alpha=1.0$。在“水温适中”的情况下，40℃和50℃的隶属度是1.0，求其平均值得到输出代表量：
  u =(40+50)/2=45
  这样，当“完全隶属”时，其代表量为45℃。

- 如果当 $\alpha=0.5$时，表示“大概隶属”关系，切割隶属度函数曲线后，这时从30℃到70℃的隶属度值都包含在其中，所以求其平均值得到输出代表量：
  u =(30+40+50+60+70)/5=50
  这样，当“大概隶属”时，其代表量为50℃

模糊推理系统

知识库：包含模糊if-then**规则库**和**数据库**。其中，**规则库**（rule base）中的**模糊规则**定义和体现了与领域问题有关的专家经验或知识，而**数据库**则定义模糊规则中用到的隶属函数。

模糊输入接口(fuzzification interface)：将明确的输入转换为对应隶属函数的模糊语言值。



去模糊输出接口：将模糊的计算结果转换为明确的输出。

推理单元(decision-making unit)：按照这些规则和所给的事实执行推理过程，求得合理的输出或结论。

127

练习题

- 对某种产品的质量进行抽查评估。现随机选出5个产品x_1，x_2，x_3，x_4，x_5进行检验，它们质量情况分别为：$x_1=80$，$x_2=72$，$x_3=65$，$x_4=98$，$x_5=53$
- 这就确定了一个模糊集合Q，表示该组产品的“质量水平”这个模糊概念的隶属程度。
- 试写出该模糊集。

- 设有下列两个模糊关系
-
- $$R_1=\begin{bmatrix}0.2 & 0.8 & 0.4\\ 0.4 & 0 & 1\\ 1 & 0.5 & 0\\ 0.7 & 0.6 & 0.5\end{bmatrix}\qquad R_2=\begin{bmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.8\\ 0.2 & 0.9\end{bmatrix}$$
- 试求出R_1与R_2的复合关系 $R_1\circ R_2$ 。

本章小结

1. 不确定性推理的基本概念

2. 不确定证据推理的主要方法

3. 模糊的基本概念及模糊推理的基本方法