习题一解答

1．求下列复数的实部与虚部、共轭复数、模与辐角。

（1）$\dfrac{1}{3+2i}$；　（2）$\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$；　（3）$\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$；　（4）$i^8-4i^{21}+i$

解　（1）$\dfrac{1}{3+2i}=\dfrac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{1}{13}(3-2i)$

所以

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{3+2i}\right\}=\frac{3}{13}，\quad \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{3+2i}\right\}=-\frac{2}{13},$$

$$\overline{\frac{1}{3+2i}}=\frac{1}{13}(3+2i)，\quad \left|\frac{1}{3+2i}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2+\left(-\frac{3}{13}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{13}，$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{3+2i}\right)=\arg\left(\frac{1}{3+2i}\right)+2k\pi$$

$$=-\arctan\frac{2}{3}+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

（2）$\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}=\dfrac{-i}{i(-i)}-\dfrac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-i-\dfrac{1}{2}(-3+3i)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i,$

所以

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\right\}=\frac{3}{2},$$

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\right\}=-\frac{5}{2}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\right)}=\frac{3}{2}+i\frac{5}{2}，\quad \left|\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}，$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\right)=\arg\left(\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}\right)+2k\pi$$

$$=-\arctan\frac{5}{3}+2k\pi,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

（3）$\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}=\dfrac{(3+4i)(2-5i)(-2i)}{(2i)(-2i)}=\dfrac{(26-7i)(-2i)}{4}$

$$=\frac{-7-26i}{2}=-\frac{7}{2}-13i$$

所以

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right\}=-\frac{7}{2}，$$

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right\}=-13，$$

$$\overline{\left[\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right]}=-\frac{7}{2}+13i$$

$$\left|\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right|=\frac{5\sqrt{29}}{2}，$$

$$\operatorname{Arg}\left[\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right]=\arg\left[\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}\right]+2k\pi=2\arctan\frac{26}{7}-\pi+2k\pi$$

$$=\arctan\frac{26}{7}+(2k-1)\pi,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

（4） $i^8-4i^{21}+i=(i^2)^4-4(i^2)^{10}i+i=(-1)^4-4(-1)^{10}i+i$

$$=1-4i+i=1-3i$$

所以

$$\operatorname{Re}\{i^8-4i^{21}+i\}=1,\operatorname{Im}\{i^8-4i^{21}+i\}=-3$$

$$\left(\overline{i^8-4i^{21}+i}\right)=1+3i\text{，}|i^8-4i^{21}+i|=\sqrt{10}$$

$$\operatorname{Arg}(i^8-4i^{21}+i)=\arg(i^8-4i^{21}+i)+2k\pi=\arg(1-3i)+2k\pi$$

$$=-\arctan3+2k\pi\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

2．如果等式$\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$成立，试求实数$x,y$为何值。

解：由于

$$\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=\frac{[x+1+i(y-3)](5-3i)}{(5+3i)(5-3i)}$$

$$=\frac{5(x+1)+3(y-3)+i[-3(x+1)+5(y-3)]}{34}$$

$$=\frac{1}{34}[5x+3y-4]+i(-3x+5y-18)=1+i$$

比较等式两端的实、虚部，得

$$\begin{cases}5x+3y-4=34\\-3x+5y-18=34\end{cases}\text{或}\begin{cases}5x+3y=38\\-3x+5y=52\end{cases}$$

解得$x=1,y=11$。

3．证明虚单位i有这样的性质：$-i=i^{-1}=\overline{i}$。

4．证明

$$1)\ |z|^2=z\overline{z}$$

$$\vdots$$

$$6)\ \operatorname{Re}(z)=\frac{1}{2}(\overline{z}+z),\operatorname{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$$

证明：可设$z=x+\mathrm{i}y$，然后代入逐项验证。

5．对任何z，$z^2=|z|^2$是否成立？如果是，就给出证明。如果不是，对z那些值才成立？

解：设$z=x+\mathrm{i}y$，则要使$z^2=|z|^2$成立有

$x^2-y^2+2\mathrm{i}xy=x^2+y^2$，即$x^2-y^2=x^2+y^2, xy=0$。由此可得$z$为实数。

6．当$|z|\le 1$时，求$|z^n+a|$的最大值，其中n为正整数，a为复数。

解：由于$\left|z^n+a\right|\le|z|^n+|a|\le 1+|a|$，且当$z=e^{\mathrm{i}\frac{\arg a}{n}}$时，有

$$|z^n+a|=\left|\left(e^{\mathrm{i}\frac{\arg a}{n}}\right)^n+|a|e^{\mathrm{i}\arg a}\right|=\left|(1+|a|)e^{\mathrm{i}\arg a}\right|=1+|a|$$

故$1+|a|$为所求。

8．将下列复数化成三角表示式和指数表示式。

（1）i；（2）-1；（3）$1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$；

（4）$1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi(0\le\varphi\le\pi)$；（5）$\dfrac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$；（6）$\dfrac{(\cos 5\varphi+\mathrm{i}\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-\mathrm{i}\sin 3\varphi)^3}$

解：（1）$\mathrm{i}=\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$；

（2）$-1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

（3）$1+\mathrm{i}\sqrt{3}=2\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=\boxed{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$；

（4）$1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi=2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}+\mathrm{i}2\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}=2\sin\dfrac{\varphi}{2}\left(\sin\dfrac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)$

$$=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi-\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-\varphi}{2}\right)=2\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi-\varphi}{2}},(0\le\varphi\le\pi)；$$

（5）$\dfrac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}2\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})=1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

（6）$\dfrac{(\cos 5\varphi+\mathrm{i}\sin 5\varphi)^2}{(\cos 3\varphi-\mathrm{i}\sin 3\varphi)^3}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\varphi}\right)^2/\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\varphi}\right)^3=\mathrm{e}^{\mathrm{i}10\varphi}/\mathrm{e}^{-\mathrm{i}9\varphi}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}19\varphi}$

$$=\cos 19\varphi+\mathrm{i}\sin 19\varphi$$

9．将下列坐标变换公式写成复数的形式：

1）平移公式：$\begin{cases}x=x_1+a_1,\\ y=y_1+b_1;\end{cases}$

2）旋转公式：$\begin{cases}x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha,\\ y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha.\end{cases}$

解：设 $A=a_1+\mathrm{i}b_1$， $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$， $z=x+\mathrm{i}y$，则有

1） $z=z_1+A$ ；2） $z=z_1(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)=z_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 。

10．一个复数乘以-i，它的模与辐角有何改变？

解：设复数 $z=|z|e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}z}$，则 $z(-i)=|z|e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}z}\cdot e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=|z|e^{\mathrm{i}\left(\mathrm{Arg}z-\frac{\pi}{2}\right)}$，可知复数的模不变，辐角减少 $\frac{\pi}{2}$ 。

11．证明：$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明其几何意义。

证明：
$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\ &= 2(z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2})\\ &= 2(|z_1|^2+|z_2|^2)\end{aligned}$$

其几何意义平行四边形的对角线长度平方的和等于四个边的平方的和。

12．证明下列各题：

1）任何有理分式函数 $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 可以化为 $X+\mathrm{i}Y$ 的形式，其中 X 与 Y 为具有实系数的 x 与 y 的有理分式函数；

2）如果 $R(z)$ 为 1）中的有理分式函数，但具有实系数，那么 $R(\overline{z})=X-\mathrm{i}Y$ ；

3）如果复数 $a+\mathrm{i}b$ 是实系数方程

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$

的根，那么 $a-\mathrm{i}b$ 也是它的根。

证 1） $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}=\dfrac{P(z)\overline{Q(z)}}{Q(z)\overline{Q(z)}}=\dfrac{\mathrm{Re}(P(z)\overline{Q(z)})}{q(x,y)}+\dfrac{\mathrm{Im}(P(z)\overline{Q(z)})}{q(x,y)}$;

2） $R(\overline{z})=\dfrac{P(\overline{z})}{Q(\overline{z})}=\dfrac{\overline{P(z)}}{\overline{Q(z)}}=\overline{\left(\dfrac{P(z)}{Q(z)}\right)}=\overline{X+\mathrm{i}Y}=X-\mathrm{i}Y$;

3）事实上

$$P(\overline{z})=a_0\overline{z}^n+a_1\overline{z}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\overline{z}+a_n$$

$$=\overline{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n}=\overline{P(z)}$$

13．如果 $z=e^{it}$ ，试证明

（1） $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos nt$ ；　　　　（2） $z^n-\dfrac{1}{z^n}=2\,\mathrm{i}\sin nt$

解　（1） $z^n+\dfrac{1}{z^n}=e^{\mathrm{int}}+e^{-\mathrm{int}}=e^{\mathrm{int}}+e^{\overline{\mathrm{int}}}=2\sin nt$

（2） $z^n-\dfrac{1}{z^n}=e^{\mathrm{int}}-e^{-\mathrm{int}}=e^{\mathrm{int}}-\overline{e^{\mathrm{int}}}=2\,\mathrm{i}\sin nt$

14．求下列各式的值

（1） $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^5$ ；　（2） $(1+\mathrm{i})^6$ ；　（3） $\sqrt[6]{-1}$ ；　（4） $(1-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}$

解　（1） $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^5=\left[2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)\right]^5=\left(2e^{-\mathrm{i}\pi/6}\right)^5=32e^{-\mathrm{i}5\pi/6}$

$$=32\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=-16\sqrt{3}-16\mathrm{i}$$

（2） $(1+\mathrm{i})^6=\left[\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\right]^6=\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right)^6=8\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/2}=-8\mathrm{i}$。

（3） $\sqrt[6]{-1}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+2k\pi}\right)^{\frac{1}{6}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(2k+1)/6},k=0,1,2,3,4,5$。可知 $\sqrt[6]{-1}$ 的 6 个值分别是

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}=\mathrm{i}，\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}，\ e^{\mathrm{i}3\pi/2}=-\mathrm{i}，\ e^{\mathrm{i}11\pi/4}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}。$$

（4） $(1-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}=\left[\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)\right]^{\frac{1}{3}}=\left(\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\pi/4}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{2}e^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)/3},\qquad k=0,1,2$。

可知 $(1-\mathrm{i})^{1/3}$ 的 3 个值分别是

$$\sqrt[6]{2}e^{-\mathrm{i}\pi/2}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$\sqrt[6]{2}e^{\mathrm{i}7\pi/12}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$\sqrt[6]{2}e^{\mathrm{i}5\pi/4}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)。$$

15．若 $(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$ ，试求 n 的值。

解 由题意即$(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})^n=(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4})^n,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/4}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi/4}$，$\sin\frac{n}{4}\pi=0$，

故$n=4k,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

16．(1) 求方程$z^3+8=0$的所有根

(2) 求微分方程$y'''+8y=0$的一般解。

解 (1) $z=(-8)^{\frac{1}{3}}=2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}(1+2k)}$，k=0,1,2。

即原方程有如下三个解：

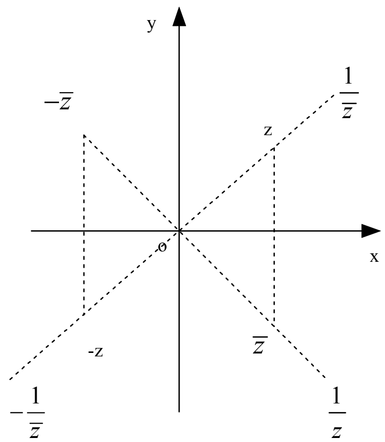
$$1+\mathrm{i}\sqrt{3},\quad -2,\quad 1-\mathrm{i}\sqrt{3}\text{。}$$

(2) 原方程的特征方程$\lambda^3+8=0$有根$\lambda_1=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$，故其一般形式为

$$y=C_1e^{-2x}+e^x\left(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x\right)$$

17．在平面上任意选一点z，然后在复平面上画出下列各点的位置：

$$-z,\bar{z},-\bar{z},\frac{1}{z},\frac{1}{\bar{z}},-\frac{1}{\bar{z}}\text{。}$$



18．已知两点z_1与z_2（或已知三点z_1,z_2,z_3）问下列各点位于何处？

(1) $z=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$

(2) $z=\lambda z_1+(1-\lambda)z_2$（其中$\lambda$为实数）；

(3) $z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$。

解 令$z_k=x_k+\mathrm{i}y_k,k=1,2,3$，则

(1) $z=\frac{x_1+x_2}{2}+\mathrm{i}\frac{y_1+y_2}{2}$，知点$z$位于$z_1$与$z_2$连线的中点。

（2）$z=x_2-\lambda(x_2-x_1)+\mathrm{i}[y_2-\lambda(y_2-y_1)]$，知点位于 z_1 与 z_2 连线上定比 $\lambda=\frac{|z-z_1|}{|z_2-z_1|}$ 处。

（3） $z=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)+\frac{\mathrm{i}}{3}(y_1+y_2+y_3)$，由几何知识知点 z 位于 $\Delta z_1z_2z_3$ 的重心处。

19．设 z_1,z_2,z_3 三点适合条件：$z_1+z_2+z_3=0$，

$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$。证明z_1，z_2，z_3是内接于单位圆 $|z|=1$ 的一个正三角形的顶点。

证　由于 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，知 $\Delta z_1z_2z_3$ 的三个顶点均在单位圆上。

因为

$$\begin{aligned}1&=|z_3|^2=z_3\bar{z}_3\\&=[-(z_1+z_2)][-(\bar{z}_1+\bar{z}_2)]=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_3\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2\\&=2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2\end{aligned}$$

所以，$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=-1$，又

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|^2&=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2-(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)\\&=2-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)=3\end{aligned}$$

故

$|z_1-z_2|=\sqrt{3}$，同理 $|z_1-z_3|=|z_2-z_3|=\sqrt{3}$，知 $\Delta z_1z_2z_3$ 是内接于单位圆 $|z|=1$ 的一个正三角形。

20．如果复数z_1，z_2，z_3满足等式

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$$

证明 $|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$，并说明这些等式的几何意义。

由等式得

$$\arg(z_2-z_1)-\arg(z_3-z_1)=\arg(z_1-z_3)-\arg(z_2-z_3)$$

即 $\angle z_2z_1z_3=\angle z_1z_3z_2$。又因为

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{(z_2-z_1)+(z_1-z_3)}{(z_3-z_1)+(z_2-z_3)}=\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

又可得 $\angle z_2z_1z_3=\angle z_3z_2z_1$，所以知 $\Delta z_1z_2z_3$ 是正三角形，从而

$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$。

21．指出下列各题中点 z 的存在范围，并作图。

（1） $|z-5|=6$ ；(2) $|z+2\mathrm{i}|\geq 1$ ；

（3） $\mathrm{Re}(z+2)=-1$ ；(4) $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\bar{z})=3$ ；

（5） $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}|$ ；(6) $|z+3|+|z+1|=4$

（7） $\mathrm{Im}(z)\leq 2$ ；(8) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|\geq 1$ ；

（9） $0<\arg z<\pi$ ；(10) $\arg(z-\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}$

解：(1) 以点 $z_0=5$ 为心，半径为 6 的圆周（见下图（a））；

(2) 以点 $z_0=-2\mathrm{i}$ 为心，半径为 1 的圆周及外部（见下图（b））；

(3) 由于 $\mathrm{Re}(z+2)=-1\Leftrightarrow x=-3$ 知点 z 的范围是直线 $x=-3$ （见下图（c））；

(4) $\mathrm{i}\bar{z}=\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)=y+\mathrm{i}x$ ，故 $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\bar{z})=3\Leftrightarrow y=3.$ 知点 z 的范围是直线 y=3（见下图（d））；

(5) $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}|\Leftrightarrow|z+\mathrm{i}|^2=|z-\mathrm{i}|^2\Leftrightarrow(z+\mathrm{i})(\bar{z}-\mathrm{i})=(z-\mathrm{i})(\bar{z}+\mathrm{i})\Leftrightarrow$

$|z|^2-\mathrm{i}z+\mathrm{i}\,\bar{z}+1=|z|^2+\mathrm{i}z-\mathrm{i}\bar{z}+1\Leftrightarrow\mathrm{i}\bar{z}-\mathrm{i}z=0\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{i}\bar{z})=0\Leftrightarrow 2y=0$

$\Rightarrow y=0.$ 知点 z 的范围是实轴（见下图（e））；

(6) $|z+3|+|z+1|=4\Leftrightarrow|z+3|^2=(4-|z+1|)^2\Leftrightarrow x-2=-2|z+1|\Leftrightarrow(x-2)^2=4|z+1|^2$

$\Leftrightarrow 3^2+12x+4y^2=0\Leftrightarrow\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，即点 z 的范围是以（-3,0）和（-1,0）为焦点，长半轴为 2，短半轴为 $\sqrt{3}$ 的一椭圆（见下图（f））；

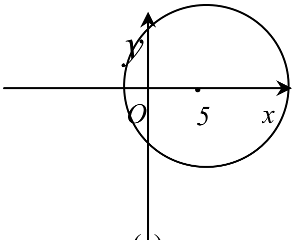
(7) $y\leq 2$，(见下图（g））;。

(8) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|\geq 1\Leftrightarrow|z-3|^2\geq|z-2|^2\Leftrightarrow(z-3)(\bar{z}-3)\geq(z-2)(\bar{z}-2)\Leftrightarrow|z|^2-3z-3\bar{z}+9\geq$

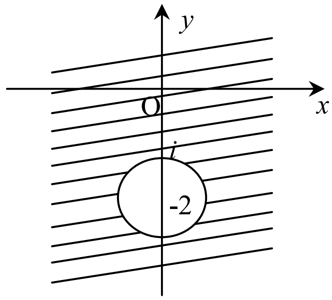
$|z|^2-2z-2\bar{z}+4\Leftrightarrow z+\bar{z}\leq 5\Leftrightarrow x\leq\dfrac{5}{2}.$ 即点 z 的范围是直线 $x=\dfrac{5}{2}$ 以及 $x=\dfrac{5}{2}$ 为边界的左半平面（见下图（h））；

(9) 不包含实轴上半平面（见下图（i））；

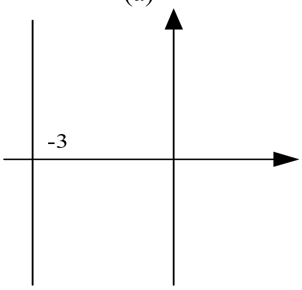
(10) 以 i 为起点的射线 $y=x+1,x>0$ （见下图（j））；



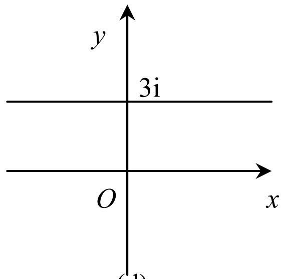
(a)



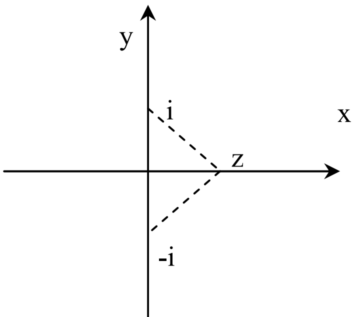
(b)



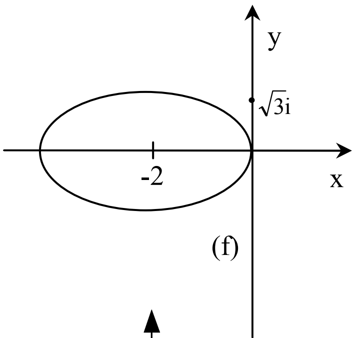
(c)



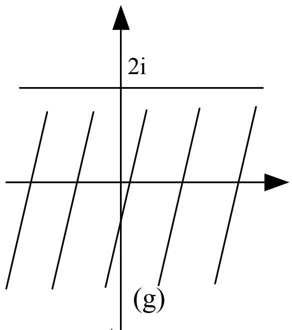
(d)



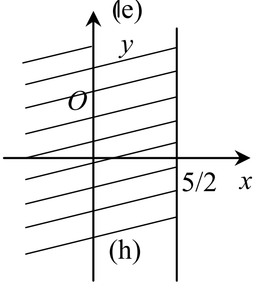
(e)



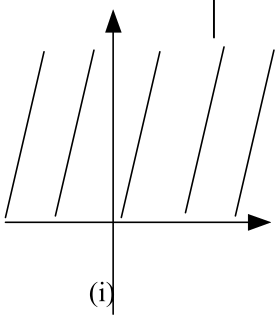
(f)

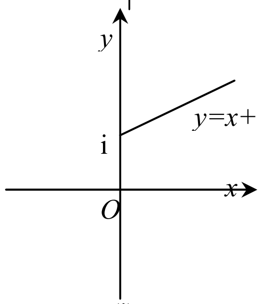


(g)



(h)


(i)



(j)

22．描出下列不等式所确定的区域，并指是有界的还是无界的，闭的还是开的，单连的还是多连的。

（1） $\operatorname{Im} z > 0$ ；　　（2） $|z-1| > 4$ ；

（3） $0 < \operatorname{Re} z < 1$ ；　　（4） $2 \le |z| \le 3$ ；

（5） $|z-1| < |z+3|$ ；　　（6） $-1 < \arg z < -1+\pi$ ；

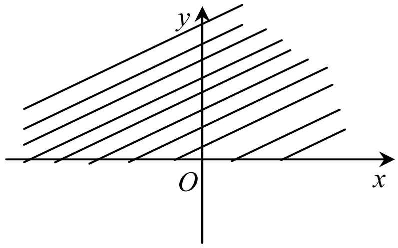
(7) $|z-1|<4|z+1|$；

(8) $|z-2|+|z+2|\le 6$；

(9) $|z-2|-|z+2|>1$；

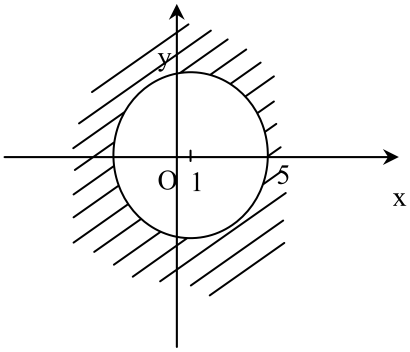
(10) $z\overline{z}-(2+\mathrm{i})z-(2-\mathrm{i})\overline{z}\le 4$。

解 (1) $\operatorname{Im} z>0$



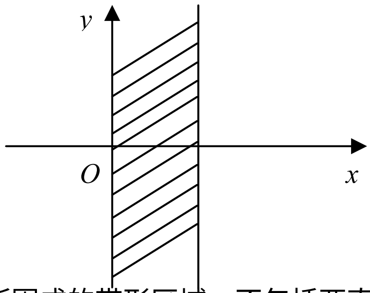
不包含实轴的上半平面，是无界的、开的单连通区域。

(2) $|z-1|>4$



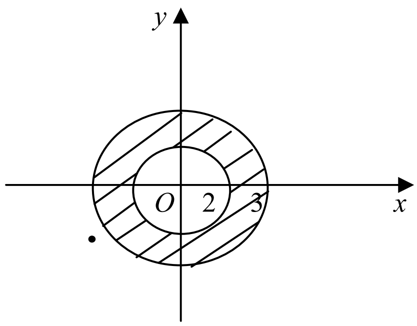
圆 $(z-1)^2+y^2=16$ 的外部（不包括圆周），是无界的、开的多连通区域。

(3) $0<\operatorname{Re} z<1$



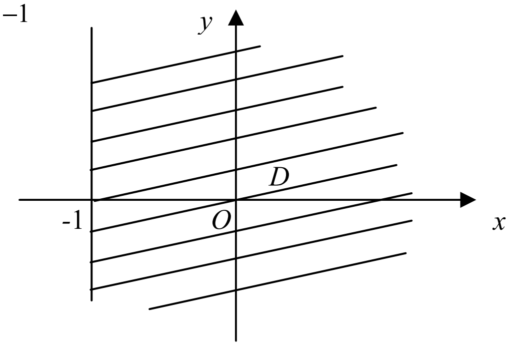
由直线 x = 0 与 x = 1 所围成的带形区域，不包括两直线在内，是无界的、开的单连通区域。

(4) $2\le|z|\le 3$



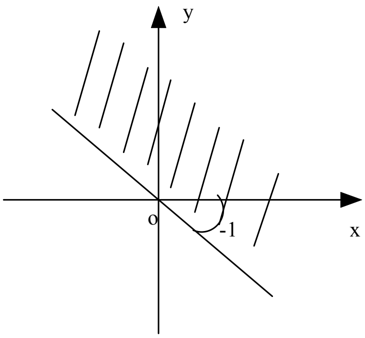
以原点为中心，2 与 3 分别为内、外半径的圆环域，不包括圆周，是有界的、开的多连通区域。

（5） $|z-1|<|z+3| \Leftrightarrow x>-1$



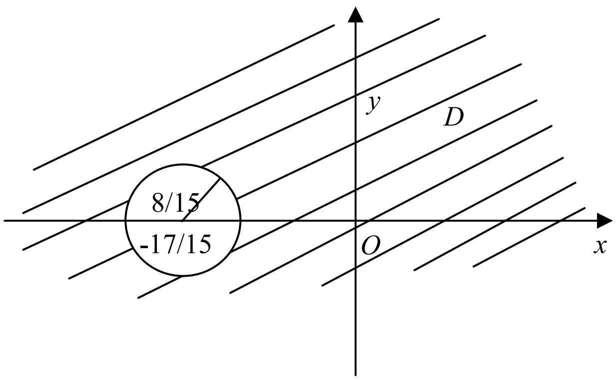
直线 $x=-1$ 右边的平面区域，不包括直线在内，是无界的、开的单连通的区域。

（6） $-1<\arg z<-1+\pi$



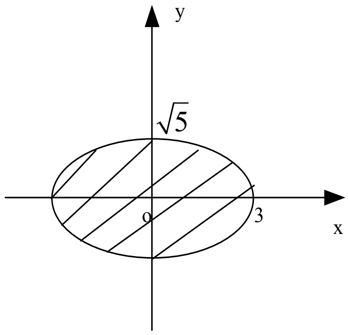
由射线 $\theta=1$ 及 $\theta=1+\pi$ 构成的角形域，不包括两射线在内，即为一半平面，是无界的、开的单连通区域。

（7） $|z-1|<4|z+1| \Leftrightarrow \left(x+\frac{17}{15}\right)^2+y^2>\left(\frac{8}{15}\right)^2$



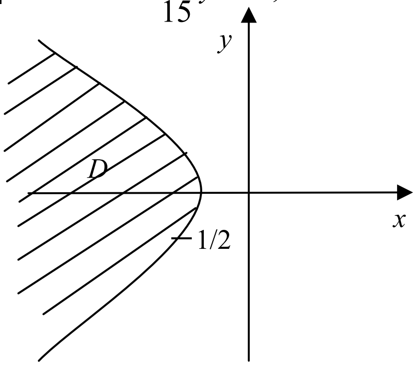
中心在点$z=-\dfrac{17}{15}$，半径为$\dfrac{8}{15}$的圆周的外部区域（不包括圆周本身在内），是无界的、开的多连通区域。

（8）$|z-2|+|z+2|\le 6$



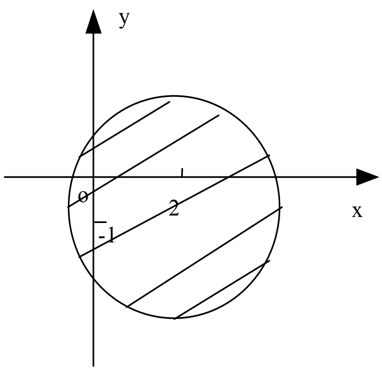
是椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$及其围成的区域，是有界的、闭的单连通区域。

（9）$|z-2|-|z+2|>1 \Leftrightarrow 4x^2-\dfrac{4}{15}y^2>1, x<0$



是双曲线$4x^2-\dfrac{4}{15}y^2=1$的左边分支的内部区域，是无界的、开的单连通区域。

（10）$z\overline{z}-(2+\mathrm{i})z-(2-\mathrm{i})\overline{z}\le 4$



是圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ 及其内部区域，是有界的、闭的单连通区域。

23．证明：z 平面上的直线方程可以写成

$$a\bar{z}+\bar{a}z=C \quad (a\text{ 是非零复常数，C 是实常数})$$

证　设直角坐标系的平面方程为 $Ax+By=C$ 将 $x=\operatorname{Re}z=\frac{1}{2}(z+\bar{z}), y=\operatorname{Im}z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$ 代入，得

$$\frac{1}{2}(A-\mathrm{i}B)z+\frac{1}{2}(A-\mathrm{i}B)\bar{z}=C$$

令 $a=\frac{1}{2}(A+\mathrm{i}B)$，则 $\bar{a}=\frac{1}{2}(A-\mathrm{i}B)$，上式即为 $a\bar{z}+\bar{a}z=C$。

24．证明复平面上的圆周方程可写成：

$$z\bar{z}+\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z+c=0,(\text{其中}\alpha\text{为复常数，}c\text{为实常数})。$$

证 $(z+a)\overline{(z+a)}=R^2 \Leftrightarrow z\bar{z}+a\bar{z}+\bar{a}z+a\bar{a}-R^2=0$，其中 $c=a\bar{a}-R^2$ 为实常数。

25．求下列方程（t 是实参数）给出的曲线。

（1） $z=(1+\mathrm{i})t$；　（2） $z=a\cos t+\mathrm{i}b\sin t$；

（3） $z=t+\frac{\mathrm{i}}{t}$；　（4） $z=t^2+\frac{\mathrm{i}}{t^2}$，

（5） $z=a\operatorname{ch}t+\mathrm{i}b\operatorname{sh}t$　（6） $z=ae^{\mathrm{i}t}+be^{-\mathrm{i}t}$

（7） $z=e^{\alpha t},(\alpha=a+b\mathrm{i}\text{为复数})$

解（1） $z=x+\mathrm{i}y=(1+\mathrm{i})t \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\ y=t\end{cases},-\infty<t<\infty$。即直线 $y=x$。

（2） $z=x+\mathrm{i}y=a\cos t+\mathrm{i}b\sin t \Leftrightarrow \begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases},\quad 0<t\le 2\pi$，即为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

（3） $z=x+\mathrm{i}y=t+\frac{\mathrm{i}}{t} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\ y=\frac{1}{t}\end{cases}$，即为双曲线 $xy=1$；

（4） $z=x+\mathrm{i}y=t^2+\frac{\mathrm{i}}{t^2} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t^2\\ y=\frac{1}{t^2}\end{cases}$，即为双曲线 $xy=1$ 中位于第一象限中的一支。

(5) $z = a\mathrm{ch}t + \mathrm{i}b\mathrm{sh}t \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\mathrm{ch}t \\ y = b\mathrm{sh}t \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，双曲线

(6) $\dfrac{x^2}{(a+b)^2} + \dfrac{y^2}{(a-b)^2} = 1$,椭圆

(7) $x^2 + y^2 = e^{\frac{2a}{b}\arctan\frac{y}{x}}$

26．函数 $w = \dfrac{1}{z}$ 将 z 平面上的下列曲线变成 w 平面上的什么曲线 $(z = x + iy, w = u + iv)$？

(1) $x^2 + y^2 = 6$ ；　　　　(2) $y = x$ ；

(3) $x = 1$ ；　　　　(4) $(x-1)^2 + y^2 = 1$

解 $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$， $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}, v = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$，可得

(1) $u^2 + v^2 = \dfrac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \dfrac{1}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{4}$，是 w 平面上一圆周；

(2) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{y}{x^2+y^2} = \dfrac{-(-y)}{x^2+y^2} = -v$，是 w 平面上一直线；

(3) 由 $\mathrm{x} = 1$，知 $u = \dfrac{1}{1+y^2}, v = \dfrac{-y}{1+y^2}$，从而 $u^2 + v^2 = \dfrac{1}{1+y^2} = u$

此为 $\left(u - \dfrac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ 是 w 平面上一圆周；

(4) $(x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}$，于是 $u = \dfrac{1}{2}$，是 w 平面上一平行与 v 轴的直线。

27．已知映射 $w = z^3$，求

(1) 点 $z_1 = \mathrm{i}$， $z_2 = 1 + \mathrm{i}$， $z_3 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ 在 w 平面上的像。

(2) 区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$ 在 w 平面上的像。

解　设 $z = re^{i\theta}$，则 $\omega = z^3 = r^3 e^{i3\theta}$。于是

(1) $z_1 = \mathrm{i} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}, z_2 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$$z_3 = \sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

经映射后在 w 平面上的像分别是

$$w_1 = e^{\mathrm{i}3\pi/3} = -\mathrm{i} \text{，}$$

$$w_2 = 2^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2 + \mathrm{i}\,2 \text{，}$$

$$w_3 = 2^3 e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 8\mathrm{i}$$

（2）因为以原点为顶点的角形域的顶角张大三倍，所以为 $0 < \arg w < \pi$ 。

29．设函数f(z)在z$_0$处连续，且 $f(z_0) \neq 0$ ，证明存在z$_0$的邻域使 $f(z) \neq 0$ 。

证　因为 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ ，且 $f(z_0) \neq 0$ 。可取 $\varepsilon = \dfrac{|f(z_0)|}{2} > 0$ ，则 $\exists \delta > 0$ ，当 $|z - z_0| < \delta$ 时，有

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon = \frac{|f(z_0)|}{2}$$

从而 $|f(z_0)| - \dfrac{|f(z_0)|}{2} < |f(z)|$，即 $|f(z)| > \dfrac{|f(z_0)|}{2} > 0$ 即点 $z \in U(z_0, \delta)$ 时，则 $f(z) \neq 0$ 。

30．设 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ ，证明 $f(z)$ 在 z_0 的某一去心邻域内是有界的。

证　取 $\varepsilon = 1$ ，则存在 $\delta > 0$ ，当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，$|f(z) - A| \leq 1$ 。故在 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内，$|f(z)| = |f(z) - A + A| \leq |f(z) - A| + |A| \leq 1 + |A|$。

31．设 $f(z) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{z}{\overline{z}} - \dfrac{\overline{z}}{z}\right), (z \neq 0)$ 试证当 $z \to 0$ 时 $f(z)$ 的极限不存在。

证　$f(z) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{z}{\overline{z}} - \dfrac{\overline{z}}{z}\right) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ ，显然。

32．试证 $\arg z(-\pi < \arg z \leq \pi)$ 在负实轴上（包括原点）不连续，除此而外在 z 平面上处处连续。

证　设 $f(z) = \arg z$ ，因为 $f(0)$无定义，所以 $f(z)$在原点 z=0 处不连续。

当z_0为负实轴上的点时，即 $z_0 = x_0 (x_0 < 0)$ ，有

$$\lim_{z \to z_0} \arg z = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0^+}} \left(\arctan\dfrac{y}{x} + \pi\right) \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to 0^-}} \left(\arctan\dfrac{y}{x} - \pi\right) \end{cases} = \begin{cases} \pi \\ -\pi \end{cases}$$

所以 $\lim\limits_{z \to z_0} \arg z$ 不存在，即 $\arg z$ 在负实轴上不连续。而 argz 在 z 平面上的其它点处的连续性显然。

习题二解答

1．利用导数定义推出：

1)$(z^n)'=nz^{n-1}$,(n是正整数)；　　2)$\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2}$。

证　1）$(z^n)'=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}(nz^{n-1}+C_n^2z^{n-2}\Delta z+\cdots\Delta z^{n-1})=nz^{n-1}$

2）$\left(\dfrac{1}{z}\right)'=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{z+\Delta z}-\dfrac{1}{z}}{\Delta z}=-\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{1}{z(z+\Delta z)}=-\dfrac{1}{z^2}$

2．下列函数何处可导？何处解析？

（1）$f(z)=x^2-\mathrm{i}\,y$　　（2）$f(z)=2x^3+3y^3\mathrm{i}$

（3）$f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$　　（4）$f(z)=\sin x\operatorname{ch}y+\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh}y$

解　（1）由于　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$

在 z 平面上处处连续，且当且仅当$x=-\dfrac{1}{2}$时，u,v 才满足 C-R 条件，故 $f(z)=u+\mathrm{i}\,v=x-\mathrm{i}\,y$ 仅在直线$x=-\dfrac{1}{2}$上可导，在 z 平面上处处不解析。

（2）由于　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=6x^2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=9y^2$

在 z 平面上处处连续，且当且仅当$2x^2=3y^2$,即$\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$时，u,v 才满足 C-R 条件，故 $f(z)=u+\mathrm{i}\,v=2x^3+3y^3\mathrm{i}$ 仅在直线$\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$上可导，在 z 平面上处处不解析。

（3）由于　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xy$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=2xy$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=x^2$

在 z 平面上处处连续，且当且仅当 z=0 时，u,v 才满足 C-R 条件，故 $f(z)=xy^2+\mathrm{i}\,x^2y$ 仅在点 $z=0$ 处可导，在 z 平面处处不解析。

（4）由于　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x\operatorname{ch}y$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sin x\operatorname{sh}y$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\sin x\operatorname{sh}y$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\cos x\operatorname{ch}y$

在 z 平面上处处连续，且在整个复平面 u,v 才满足 C-R 条件，故 $f(z)=\sin x\operatorname{ch}y+\mathrm{i}\cos x\operatorname{sh}y$ 在 z 平面处处可导，在 z 平面处处不解析。

3．指出下列函数 $f(z)$ 的解析性区域，并求出其导数。

1）$(z-1)^5$；　　（2）$z^3+2\mathrm{i}z$；

3）$\dfrac{1}{z^2-1}$；　　（4）$\dfrac{az+b}{cz+d}$(c,d中至少有一个不为0)

解　（1）由于 $f'(z)=5(z-1)^4$，故 $f(z)$ 在 z 平面上处处解析。

（2）由于 $f'(z)=3z^2+2\mathrm{i}$，知 $f(z)$ 在 z 平面上处处解析。

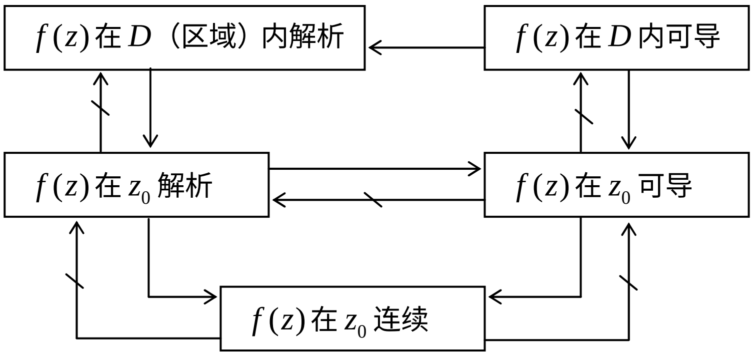
（3）由于 $f'(z)=\dfrac{-2z}{(z^2-1)^2}=-\dfrac{2z}{(z-1)^2(z+1)^2}$

知 $f(z)$ 在除去点 $z=\pm1$ 外的 z 平面上处处可导。处处解析，$z=\pm1$ 是 $f(z)$ 的奇点。

（4）由于 $f'(z)=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$，知 $f(z)$ 在除去 $z=-d/c(c\neq 0)$ 外在复平面上处处解析。

5．复变函数的可导性与解析性有什么不同？判断函数的解析性有那些方法？

答：



判定函数解析主要有两种方法：1）利用解析的定义：要判断一个复变函数在 z_0 是否解析，只要判定它在 z_0 及其邻域内是否可导；要判断该函数在区域 D 内是否解析，只要判定它在 D 内是否可导；2）利用解析的充要条件，即本章§2 中的定理二。

6．判断下述命题的真假，并举例说明。

（1）如果 $f(z)$ 在 z_0 点连续，那么 $f'(z_0)$ 存在。

（2）如果 $f'(z_0)$ 存在，那么 $f(z)$ 在 z_0 点解析。

（3）如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，那么 $f(z)$ 在 z_0 不可导。

（4）如果 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的一个奇点，那么 z_0 也是 $f(z)+g(z)$ 和 $f(z)/g(z)$ 的奇点。

（5）如果 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可导（指偏导数存在），那么 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 亦可导。

（6）设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域内是解析的。如果 u 是实常数，那么 $f(z)$ 在整个 D 内是常数；如果 v 是实常数，那么 $f(z)$ 在整个 D 内是常数；

解

（1）命题假。如函数 $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ 在 z 平面上处处连续，除了点 z=0 外处处不可导。

（2）命题假，如函数 $f(z)=|z|^2$ 在点 z=0 处可导，却在点 z=0 处不解析。

（3）命题假，如果 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，则 z_0 称为 $f(z)$ 的奇点。如上例。

（4）命题假，如 $f(z)=\sin x\,\mathrm{ch}\,y, g(z)=\mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}\,y$，$z=(\pi/2,0)$ 为它们的奇点，但不是 $f(z)+g(z)$ 的奇点。

（5）命题假。如函数 $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z=x^2+\mathrm{i}\,xy$ 仅在点 z=0 处满足 C-R 条件，故 $f(z)$ 仅在点 z=0 处可导。

（6）命题真。由 u 是实常数，根据 C-R 方程知 v 也是实常数，故 $f(z)$ 在整个 D 内是常数；后面同理可得。

7．如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是 z 的解析函数，证明：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=|f'(z)|^2$$

证　$|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$，于是

$$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|=\frac{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{u^2+v^2}}，\quad \frac{\partial}{\partial y}|f(z)|=\frac{u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

由于 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 为解析函数，故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}，\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}，$$

从而

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=\frac{1}{u^2+v^2}\left[u^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u^2\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right.$$

$$\left.+v^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2uv\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+2uv\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left\{u^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]+v^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{u^2+v^2}\left(u^2+v^2\right)|f(z)|^2=|f(z)|^2$$

9．证明：柯西-黎曼方程的极坐标形式是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}，\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

证　令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，利用复合函数求导法则和 u,v 满足 C-R 条件，得

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial v}{\partial y}r\cos\theta=\frac{\partial u}{\partial y}r\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\theta=r\frac{\partial u}{\partial r}$$

即　$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$。又

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta=-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta$$

$$=-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

总之，有 $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$，$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$。

10．证明：如果函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，并满足下列条件之一，那么 $f(z)$ 是常数。

（1） $f(z)$ 恒取实值。

（2） $\overline{f(z)}$ 在 D 内解析。

（3） $|f(z)|$ 在 D 内是一个常数。

（4） $\arg f(z)$ 在 D 内是一个常数。

（5） $au+bv=c$，其中 a、b 与 c 为不全为零的实常数。

解　（1）若 $f(z)$ 恒取实值，则 $v=0$，又根据 $f(z)$ 在区域 D 内解析，知 C-R 条件成立，于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0，\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

故 u 在区域 D 内为一常数，记 $u=C$(实常数)，则 $f(z)=u+iv=C$ 为一常数。

（2）若 $\overline{f(z)}=\overline{u+iv}=u-iv$ 在区域 D 内解析，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-v)}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}，\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1}$$

又 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}，\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

结合（1)、（2）两式，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{vy}=0，$$

故 u,v 在 D 内均为常数，分别记之为

$$u_1=C_1,u_2=C_2\left(C_1,C_2\text{为实常数}\right)，$$

则

$$f(z)=u+iv=C_1+iC_2=C$$

为一复常数。

（3）若 $|f(z)|$ 在 D 内为一常数，记为 C_1，则 $u^2+v^2=C_1^2$，两边分别对于 x 和 y 求偏导，得

$$\begin{cases}2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

由于 $f(z)$ 在 D 内解析，满足 C-R 条件 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 代入上式又可写得

$$\begin{cases}u\dfrac{\partial u}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\\v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$。同理，可解得 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{vy}=0$ 故 u,v 均为常数，分别记为 $u=C_1,v=C_2$，则 $f(z)=u+iv=C_1+iC_2=C$ 为一复常数。

（4）若 $\arg z$ 在 D 内是一个常数 C_1，则 $f(z)\neq 0$，从而 $f(z)=u+iv\neq 0$，且

$$\arg f(z)=\begin{cases}\arctan\dfrac{v}{u}, & u>0\\\arctan\dfrac{v}{u}+\pi, & u<0,v>0\\\arctan\dfrac{v}{u}-\pi, & u<0,v<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}C_1 & u>1\\C_1+\pi & u<0,v>0\\C_1-\pi & u<0,v<0\end{cases}$$

总之对 $\arg f(z)$ 分别关于 x 和 y 求偏导，得

$$\frac{\frac{1}{u^2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2}=\frac{u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}}{u^2+v^2}=0$$

$$\frac{\frac{1}{u^2}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2}=\frac{u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}}{u^2+v^2}=0$$

化简上式并利用 $f(z)$ 解析，其实、虚部满足 C-R 条件，得

$$\begin{cases}-v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial u}{\partial y}=0\\ u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，同理也可求得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$，即 u 和 v 均为实常数，分别记为 C_2 和 C_3，从而 $f(z)=u+iv=C_2+iC_3=C$ 为一复常数。

（5）若 $au+bv=c$，其中 a、b 和 c 为不全为零的实常数，这里 a 和 b 不全为 0，即 $a^2+b^2\neq0$，否则此时 a、b 和 c 全为零。对方程 $au+bv=c$ 分别对于 x 和 y 求偏导，得

$$\begin{cases}a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ a\frac{\partial u}{\partial y}+b\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

再利用解析函数 $f(z)=u+iv$ 的实、虚部 u 和 v 满足 C-R 条件，得

$$\begin{cases}a\frac{\partial u}{\partial x}-b\frac{\partial u}{\partial y}=0\\ b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

解得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，同理也可求得 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$，知函数 $f(z)$ 为一常数。

11.下列关系是否正确？

（1）$\overline{e^z}=e^{\bar z}$；（2）$\overline{\cos z}=\cos\bar z$；（3）$\overline{\sin z}=\sin\bar z$

解（1）$e^{\bar z}=e^x\overline{(\cos y+\mathrm{i}\sin y)}=e^x(\cos y-\mathrm{i}\sin y)=e^{x-\mathrm{i}y}=e^{\bar z}$

（2）$\overline{\cos z}=\left(\overline{\frac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{e^{\mathrm{i}z}}+\overline{e^{-\mathrm{i}z}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{-\mathrm{i}\bar z}+e^{\mathrm{i}\bar z}\right)=\cos\bar z$。

（3）$\overline{\sin z}=\overline{\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}\right)}=\frac{1}{\overline{2\mathrm{i}}}\left(\overline{e^{\mathrm{i}z}}-\overline{e^{-\mathrm{i}z}}\right)=\frac{1}{-2\mathrm{i}}(e^{-\mathrm{i}\bar z}-e^{\mathrm{i}\bar z})$

$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}\bar z}-e^{-\mathrm{i}\bar z}\right)=\sin\bar z$。

12．找出下列方程的全部解。

（3）$1+e^z=0$；（4）$\sin z+\cos z=0$；

解（3）原方程等价于 $e^z=-1$，于是它的解为：

$$z=\mathrm{Ln}(-1)=\ln|-1|+\mathrm{i}[\arg(-1)+2k\pi]=\mathrm{i}\,\pi(1+2k)\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

（4）由于$\sin z=-\cos z$, $\dfrac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=-\dfrac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}\right)$，故

$$e^{2\mathrm{i}z}-1=-\mathrm{i}\left(e^{2\mathrm{i}z}+1\right)$$

$$e^{2\mathrm{i}z}=\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$$

$$z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Ln}(-\mathrm{i})=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\ln|-\mathrm{i}|+\mathrm{i}(\arg(-\mathrm{i})+2k\pi)]$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\left(k-\frac{1}{4}\right)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

13．证明：

（1）$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$；

$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2-\cos z_1\sin z_2$；

（2）$\sin^2 z+\cos^2 z=1$；（3）$\sin 2z=2\sin z\cos z$；（4）$\tan 2z=\dfrac{2\tan z}{1-\tan^2 z}$；

（5）$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)=\cos z$， $\cos(z+\pi)=-\cos z$；

（6）$|\cos z|^2=\cos^2 x+\mathrm{sh}^2 y,|\sin z|^2=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y$

证 （1）左$=\cos(z_1+z_2)=\dfrac{1}{2}\left[e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}\right]$

右$=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$

$$=\frac{e^{\mathrm{i}z_1}+e^{-\mathrm{i}z_1}}{2}\frac{e^{\mathrm{i}z_2}+e^{-\mathrm{i}z_2}}{2}-\frac{e^{\mathrm{i}z_1}-e^{-\mathrm{i}z_1}}{2\mathrm{i}}\frac{e^{\mathrm{i}z_2}-e^{-\mathrm{i}z_2}}{2\mathrm{i}}$$

$$=\frac{e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+e^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1-z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}+e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-e^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1-z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}}{4}$$

$$=\frac{e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}}{2}$$

可见左=右，即$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$；

左$=\sin(z_1+z_2)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]$

右$=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z_1}-e^{-\mathrm{i}z_1}\right)\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z_2}-e^{-\mathrm{i}z_2}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z_1}+e^{-\mathrm{i}z_1}\right)\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z_2}-e^{-\mathrm{i}z_2}\right)$$

$$=\frac{1}{4\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}+e^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1-z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]+\frac{1}{4\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-e^{\mathrm{i}(z_1-z_2)}+e^{-\mathrm{i}(z_1-z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]$$

$$=\frac{1}{4\mathrm{i}}\left[2e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-2e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[e^{\mathrm{i}(z_1+z_2)}-e^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}\right]$$

可见左=右，即$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$

（2）$\sin^2 z+\cos^2 z=\left(\dfrac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2+\left(\dfrac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2$

$$=-\frac{1}{4}\left(e^{2\mathrm{i}z}-2+e^{-2\mathrm{i}z}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{2\mathrm{i}z}+2+e^{-2\mathrm{i}z}\right)=1$$

（3）左=$\sin 2z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}2z}-e^{-\mathrm{i}2z}\right)$

右=$2\sin z\cos z=2\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}\right)\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}\right)$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}2z}+1-1-e^{-\mathrm{i}2z}\right)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}2z}-e^{-\mathrm{i}2z}\right)$$

可见左=右，即 $\sin 2z=2\cos z\sin z$。

（4） $\tan 2z=\frac{\sin 2z}{\cos 2z}=\frac{2\sin z\cos z}{\cos^2 z-\sin^2 z}=2\frac{\sin z}{\cos z}\Big/\left[1-\left(\frac{\sin z}{\cos z}\right)^2\right]=\frac{2\tan z}{1-\tan^2 z}$

（5）由（1）知

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+(-z)\right]=\sin\frac{\pi}{2}\cos(-z)+\cos\frac{\pi}{2}\sin(-z)$$

$$=\cos(-z)=\frac{1}{2}\left(e^{i(-z)}+e^{-i(-z)}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$$

$$=\cos z$$

由（1）得 $\cos(z+\pi)=\cos z\cos\pi-\sin z\sin\pi=-\cos z$

（6）左＝$|\cos z|^2=|\cos x\,\mathrm{ch}\,y-\mathrm{i}\sin x\,\mathrm{sh}\,y|^2=\cos^2 x\,\mathrm{ch}^2 y+\sin^2 x\,\mathrm{sh}^2 y$

$$=\cos^2 x(1+\mathrm{sh}^2 y)+\sin^2 x\,\mathrm{sh}^2 y=\cos^2 x+\mathrm{sh}^2 y$$

左＝$|\sin z|^2=|\sin x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}\,y|^2=\sin^2 x\,\mathrm{ch}^2 y+\cos^2 x\,\mathrm{sh}^2 y$

$=\sin^2 x(1+\mathrm{sh}^2 y)+\cos^2 x\,\mathrm{sh}^2 y=\sin^2 x+\mathrm{sh}^2 y$。

14．说明：1）当 $y\to\infty$ 时，$|\sin(x+\mathrm{i}y)|$和$|\cos(x+\mathrm{i}y)|$趋于无穷大；

2）当t为复数时，$|\sin t|\le 1$和$|\cos t|\le 1$不成立。

解 1）$|\sin z|=\left|\frac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right|\ge\frac{|e^{-y}-e^{y}|}{2}$ ；$|\cos z|$同理。

2）设$t=\mathrm{i}y, y\in R$，则$|\sin t|=\frac{|e^{-y}-e^{y}|}{2}$，则当 $y\to\infty$ 时显然题设不成立。

15．求$\mathrm{Ln}(-\mathrm{i})$，$\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})$和它们的主值。

解 $\mathrm{Ln}(-\mathrm{i})=\mathrm{Ln}|-\mathrm{i}|+\mathrm{i}(\arg(-\mathrm{i})+2k\pi)=\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

$$=\mathrm{i}\pi\left(2k-\frac{1}{2}\right),k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\ln(-\mathrm{i})=\ln|-\mathrm{i}|+\mathrm{i}\arg(-\mathrm{i})=-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$$

$$\mathrm{Ln}(-3+4\mathrm{i})=\ln|-3+4\mathrm{i}|+\mathrm{i}[\arg(-3+4\mathrm{i})+2k\pi]$$

$$=\ln 5+\mathrm{i}\left[\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}\right)+2k\pi\right]$$

$$=\ln 5-\mathrm{i}\left[\left(\arctan\frac{4}{3}-(2k+1)\pi\right)\right], k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\ln(-3+4\mathrm{i})=\ln|-3+4\mathrm{i}|+\mathrm{i}\arg(-3+4\mathrm{i})=\ln 5+\mathrm{i}\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}\right)。$$

16．证明对数的下列性质：1） $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2$ ；2） $\mathrm{Ln}(z_1/z_2)=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2$ 。

证明 1） $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\ln(|z_1z_2|)+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1z_2=\ln z_1+\ln z_2+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_2=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2$ ；

2） $\mathrm{Ln}(z_1/z_2)=\ln(|z_1/z_2|)+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1/z_2=\ln z_1-\ln z_2+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_1\text{-}\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z_2=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2$ 。

17．说明下列等式是否正确：1） $\mathrm{Ln}\,z^2=2\,\mathrm{Ln}\,z$ ；2） $\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,z$ 。

解：两式均不正确。1） $\mathrm{Ln}\,z^2=2\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(2z)$,而$2\,\mathrm{Ln}\,z=2\ln|z|+2\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)$ ；

2） $\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\frac{1}{2}\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(\sqrt{z})$,而$\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,z=\frac{1}{2}\ln|z|+\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Arg}(z)$ 。

18．求$e^{1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$，$\exp\left(\frac{1+\mathrm{i}\pi}{4}\right)$，$3^{\mathrm{i}}$和$(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$的值。

解：

$$e^{1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=ee^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=e\left(\cos\frac{\pi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=-\mathrm{i}\,e$$

$$\exp\left(\frac{1+\mathrm{i}\pi}{4}\right)=e^{\frac{1}{4}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=e^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{4}}(1+\mathrm{i})$$

$$3^{\mathrm{i}}=e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\,3}=e^{\mathrm{i}[\ln 3+\mathrm{i}(\arg 3+2k\pi)]}=e^{-2k\pi}e^{\mathrm{i}\ln 3}=e^{-2k\pi}(\cos\ln 3+\mathrm{i}\sin\ln 3),\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}=e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}(1+\mathrm{i})}=e^{\mathrm{i}[\ln|1+\mathrm{i}|]+\mathrm{i}(\arg(1+\mathrm{i})+2k\pi)}$$

$$=e^{\mathrm{i}\frac{\ln 2}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}=e^{-\pi\left(\frac{1}{4}+2k\right)}\left(\cos\frac{\ln 2}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\ln 2}{2}\right),\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

19．证明$(z^a)'=az^{a-1}$，其中a为实数。

证明　　$(z^a)'=(e^{a\ln z+2k\pi i})'=a(\ln z)'e^{a\ln z+2k\pi i}=a\frac{1}{z}z^a=az^{a-1}$。

20．证明 1） $\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=1$ ；2） $\mathrm{sh}^2 z+\mathrm{ch}^2 z=\mathrm{ch}\,2z$ ；

3） $\mathrm{sh}(z_1+z_2)=\mathrm{sh}\,z_1\,\mathrm{ch}\,z_2+\mathrm{ch}\,z_1\,\mathrm{sh}\,z_2$ ； $\mathrm{ch}(z_1+z_2)=\mathrm{ch}\,z_1\,\mathrm{ch}\,z_2+\mathrm{sh}\,z_1\,\mathrm{sh}\,z_2$ 。

证明 1） $\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z=(\frac{e^z+e^{-z}}{2})^2-(\frac{e^z-e^{-z}}{2})^2=1$ ；

2） $\mathrm{sh}^2 z+\mathrm{ch}^2 z=(\frac{e^z-e^{-z}}{2})^2+(\frac{e^z+e^{-z}}{2})^2=\frac{e^{2z}+e^{-2z}}{2}=1$ ；

3） $\mathrm{sh}\,z_1\,\mathrm{ch}\,z_2+\mathrm{ch}\,z_1\,\mathrm{sh}\,z_2=\frac{(e^{z_1}-e^{-z_1})(e^{z_2}+e^{-z_2})}{4}+\frac{(e^{z_1}+e^{-z_1})(e^{z_2}-e^{-z_2})}{4}=\frac{e^{z_1+z_2}-e^{-z_1-z_2}}{2}$

$$=\mathrm{sh}(z_1+z_2)。$$

21．解下列方程：1） $\operatorname{sh} z=0$ ；2） $\operatorname{ch} z=0$ ；3） $\operatorname{sh} z=\mathrm{i}$ 。

解 1）由 $\operatorname{sh} z=0$ 得 $e^{2z}=1$ ， $z=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}1=\mathrm{i}\,k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 。

2）由 $\operatorname{ch} z=0$ 得 $e^{2z}=-1$ ， $z=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}(-1)=\dfrac{(2k+1)}{2}\mathrm{i}\,\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 。

3）由 $\operatorname{sh} z=\mathrm{i}$ 得 $e^{z}=\mathrm{i}$ ， $z=\operatorname{Ln}\mathrm{i}=\mathrm{i}(2k+\dfrac{1}{2})\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 。

23．证明: $\operatorname{sh} z$ 的反函数 $\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$ 。

证 设 $\operatorname{sh} w=z$ ，即 $\dfrac{e^{w}-e^{-w}}{2}=z\Rightarrow e^{2w}-2ze^{w}-1=0$ 解得 $e^{w}=z+\sqrt{z^2+1}$,

故 $w=\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$ 。

24．已知平面流速场的复势 $f(z)$ 为

（1） $(z+\mathrm{i})^2$ ； （2） z^3 ； (3) $\dfrac{1}{z^2+1}$ ；

求流动的速度以及流线和等势线的方程。

解（1） $V(z)=\overline{f'(z)}=\overline{2(z+\mathrm{i})}=2(\bar{z}-\mathrm{i})$ 为流速，又

$$f(z)=(z+\mathrm{i})^2=[x+\mathrm{i}(y+1)]^2=x^2-(y+1)^2+\mathrm{i}\,2x(y+1)$$

知流线和等势线方程分别为 $x(y+1)=C_1$ 和 $x^2-(y+1)^2=C_2$ 。

（2）流速 $V(z)=\overline{f'(z)}=\overline{3z^2}=3\bar{z}^2$ ，又 $f(z)=z^3=x(x^2-3y^2)+\mathrm{i}\,y(3x^2-y^2)$,

流线方程： $(3x^2-y^2)y=C_1$ ， 等势线方程： $x(x^2-3y^2)=C_2$ 。

（3）流速 $V(z)=\overline{f'(z)}=\overline{\left(\dfrac{1}{z^2+1}\right)'}=\overline{\left(\dfrac{-2z}{z^2+1}\right)}=\dfrac{-2\bar{z}}{(\bar{z}^2+1)^2}$

又 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}=\dfrac{1}{x^2-y^2+1+\mathrm{i}\,2xy}=\dfrac{x^2-y^2+1-\mathrm{i}\,2xy}{(x^2-y^2+1)+4x^2y^2}$ ，

流线方程为 $$\frac{xy}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2}=C_1,$$

等势线方程为 $$\frac{x^2-y^2+1}{(x^2-y^2+1)+4x^2y^2}=C_2。$$

习题三解答

1.沿下列路线计算积分$\int_0^{3+i} z^2 dz$。

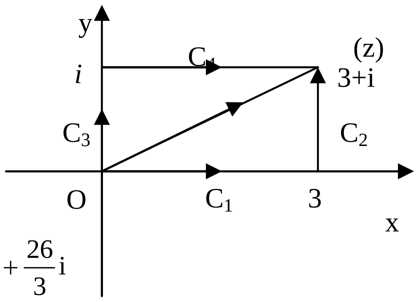
（1）自原点到$3+\mathrm{i}$的直线段

（2）自原点沿实轴至 3，再由 3 沿垂直向上至$3+\mathrm{i}$；

（3）自原点沿虚轴至 i，再由 i 沿水平方向右至$3+\mathrm{i}$。

解（1）$\begin{cases} x=3t, \\ y=t, \end{cases}$ $0\le t\le 1$，故$z=3t+\mathrm{i}t$，$0\le t\le 1$。$dz=(3+\mathrm{i})dt$

于是



$$\int_0^{3+1} z^2 dz = \int_0^1 (3t+\mathrm{i}t)^2 (3+\mathrm{i})dt$$

$$=(3+\mathrm{i})^3 \int_0^1 t^2 dt$$

$$=\frac{1}{3}(3+\mathrm{i})^3 t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(3+\mathrm{i})^3 = 6+\frac{26}{3}\mathrm{i}$$

（2）$\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2 dz = \int_0^{3+\mathrm{i}} z^2 dz + \int_{C_1} z^2 dz + \int_{C_2} z^2 dz$。$C_1$之参数方程为$\begin{cases} x=3t, \\ y=t, \end{cases} (0\le t\le 1)$；$C_2$之参数方程为

$$\begin{cases} x=3, \\ y=t, \end{cases} (0\le t\le 1)$$

故 $$\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2 dz = \int_0^1 9t^2 \cdot 3dt + \int_0^1 (3+\mathrm{i}t)^2 \cdot \mathrm{i}\,dt = 6+\frac{26}{3}\mathrm{i}。$$

（3）$\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2 dz = \int_0^{\mathrm{i}} z^2 dt + \int_{\mathrm{i}}^{3+\mathrm{i}} z^2 dz = \int_{C_3} z^2 dz + \int_{C_4} z^2 dz$。

$C_3: z=\mathrm{i}t(0\le t\le 1)$；$C_4: z=3t+\mathrm{i}$ $(0\le t\le 1)$，

故 $$\int_0^{3+\mathrm{i}} z^2 dz = \int_0^1 -t^2 \cdot \mathrm{i}\,dt + \int_0^1 (3t+\mathrm{i})^2 \cdot 3dt = 6+\frac{26}{3}\mathrm{i}$$

2．分别沿$y=x$与$y=x^2$算出、积分$\int_0^{1+i} (x^2+\mathrm{i}y)dz$的值。

解（1）沿$y=x$。此时$z=t+\mathrm{i}t(0\le t\le 1)$。$dz=(1+\mathrm{i})dt$，于是

$$\int_0^{1+\mathrm{i}} (x^2+\mathrm{i}y)dz = \int_0^1 (t^2+\mathrm{i}t)(1+\mathrm{i})dt = (1+\mathrm{i})\int_0^1 (t^2+\mathrm{i}t)dt = (1+\mathrm{i})\left(\frac{1}{3}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right) = -\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\mathrm{i}。$$

（2）沿$y=x^2$，此时$z=t+\mathrm{i}t^2(0\le t\le 1)$。$dz=(1+\mathrm{i}2t)dt$，故

$$\int_0^{1+\mathrm{i}} (x^2+\mathrm{i}y)dz = \int_0^1 (t^2+\mathrm{i}t^2)(1+\mathrm{i}2t)dt = (1+\mathrm{i})\int_0^1 t^2(1+\mathrm{i}2t)dt = (1+\mathrm{i})\int_0^1 (t^2+\mathrm{i}2t^3)dt$$

$$=(1+\mathrm{i})\left(\frac{1}{3}+\frac{\mathrm{i}}{2}\right) = -\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\mathrm{i}。$$

3．设$f(z)$在单连域 D 内解析，C 为 D 内任何一条正向简单闭曲线，问

$$\oint_C \mathrm{Re}[f(z)]dz = \oint_C \mathrm{Im}[f(z)]dz = 0$$

是否成立，如果成立，给出证明；如果不成立，举例说明。

解　未必成立。令$f(z)=z$，$C:|z|=1$，则$f(z)$在全平面上解析，但是

$$\oint_C \mathrm{Re}[f(z)]dz=\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}[e^{i\theta}]de^{i\theta}=\int_0^{2\pi}\cos\theta(-\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)d\theta=\pi\mathrm{i}\neq 0$$

$$\oint_C \mathrm{Im}[f(z)]dz=\int_0^{2\pi}\mathrm{Im}[e^{i\theta}]de^{i\theta}=\int_0^{2\pi}\sin\theta(-\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)d\theta=-\pi\neq 0$$

4．利用单位圆上 $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ 的性质，及柯西积分公式说明 $\oint_C \overline{z}dz=2\pi\mathrm{i}$，其中 C 为正向单位圆周 $|z|=1$。

解　$\oint_C \overline{z}dz=\oint_C \dfrac{1}{z}dz=2\pi\mathrm{i}$，（利用柯西积分公式）

5．计算积分 $\oint_C \dfrac{\overline{z}}{|z|}dz$ 的值，其中 C 为正向圆周：(1)　$|z|=2$；(2)　$|z|=4$

解　（1）因在 $|z|=2$ 上有 $|z|=2$，$z\cdot \overline{z}=|z|^2=4$，从而有 $\overline{z}=\dfrac{4}{z}$，故有

$$\oint_C \frac{\overline{z}}{|z|}dz=\oint_{|z|=2}\frac{\frac{4}{z}}{2}dz=\oint_{|z|=2}\frac{2}{z}dz=4\pi\mathrm{i}$$

（2）因在 C 上有 $|z|=4$，$z\cdot \overline{z}=|z|^2=16$，从而有 $\overline{z}=\dfrac{16}{z}$，故有

$$\oint_C \frac{\overline{z}}{|z|}dz=\oint_{|z|=4}\frac{\frac{16}{z}}{4}dz=\oint_{|z|=4}\frac{4}{z}dz=8\pi\mathrm{i}$$

6．利用观察法得出下列积分的值。

解　利用柯西－古萨基本定理和柯西积分公式。

7．沿指定曲线的正向计算下列各积分。

（1）$\oint_C \dfrac{e^z}{z-2}dz$，$C:|z-2|=1$　　（2）$\oint_C \dfrac{dz}{z^2-a^2}$，$C:|z-a|=a$

（3）$\oint_C \dfrac{e^{iz}dz}{z^2+1}$，$C:|z-2\mathrm{i}|=3/2$　　（4）$\oint_C \dfrac{zdz}{z-3}$，$C:|z|=2$

（5）$\oint_C \dfrac{dz}{(z^2-1)(z^3-1)}$, $C:|z|=r<1$　　（6）$\oint_C z^3\cos zdz$，C为包围z＝0的闭曲线

（7）$\oint_C \dfrac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$，$C:|z|=3/2$　　（8）$\oint_C \dfrac{\sin zdz}{z}$，$C:|z|=1$

（9）$\oint_C \dfrac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz$，$C:|z|=2$　　（10）$\oint_C \dfrac{e^z dz}{z^5}$，$C:|z|=1$

解　（1）由 Cauchy 积分公式，$\oint_C \dfrac{e^z}{z-2}dz=2\pi\mathrm{i}\,e^z\Big|_{z=2}=2\pi e^2\mathrm{i}$

（2）　解 1：$\oint_C \dfrac{dz}{z^2-a^2}=\oint_C \dfrac{\frac{1}{z+a}}{z-a}dz=2\pi\mathrm{i}\dfrac{1}{z+a}\Big|_{z=a}=\dfrac{\pi}{a}\mathrm{i}$，

解 2：$\oint_C \dfrac{dz}{z^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\left[\oint_C \dfrac{1}{z-a}dz-\oint_C \dfrac{1}{z+a}dz\right]=\dfrac{1}{2a}[2\pi\mathrm{i}-0]=\dfrac{\pi}{a}\mathrm{i}$

（3）由 Cauchy 积分公式，$\oint_C \dfrac{e^{iz}dz}{z^2+1}=\oint_C \dfrac{e^{iz}dz/(z+\mathrm{i})}{z-\mathrm{i}}=2\pi\mathrm{i}\dfrac{e^{iz}}{z+\mathrm{i}}\Big|_{z=\mathrm{i}}=\pi/e$

（4）（5）（6）由柯西基本定理知：其结果均为 0

（7）因被积函数的奇点 $z=\pm\mathrm{i}$ 在 C 的内部，$z=\pm 2\mathrm{i}$ 在 C 的外部，故由复合闭路定理及 Cauchy 积分公式有：

$$\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}=\oint_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{3}}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}+\oint_{|z+\mathrm{i}|=\frac{1}{3}}\frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

$$=\oint_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z^2+4)}}{z-\mathrm{i}}dz+\oint_{|z+\mathrm{i}|=\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z^2+4)}}{z+\mathrm{i}}dz$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left.\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z^2+4)}\right|_{z=\mathrm{i}}+2\pi\mathrm{i}\left.\frac{1}{(z-\mathrm{i})(z^2+4)}\right|_{z=-\mathrm{i}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=0$$

（8）由 Cauchy 积分公式，$\oint_C \frac{\sin z dz}{z}=2\pi\mathrm{i}\sin z|_{z=0}=0$

（9）由高阶求导公式，$\oint_C \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}dz=2\pi\mathrm{i}(\sin z)'\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=0$

（10）由高阶求导公式，$\oint_C \frac{e^z dz}{z^5}=\frac{2\pi\mathrm{i}}{4!}(e^z)^{(4)}|_{z=0}=\frac{\pi\mathrm{i}}{12}$

8．计算下列各题：

1）$\int_{-\pi\mathrm{i}}^{3\pi\mathrm{i}}e^{2z}dz$ ； 2）$\int_{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}^{0}\mathrm{ch}\,3z dz$ ； 3）$\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}}\sin^2 z dz$ ；4）$\int_0^1 z\sin z dz$ ；

5）$\int_0^{\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})e^{-z}dz$ ； 6）$\int_1^{\mathrm{i}}\frac{1+\tan z}{\cos^2 z}dz$(沿1到i的直线段)。

解 1）$\int_{-\pi\mathrm{i}}^{3\pi\mathrm{i}}e^{2z}dz=\left.\frac{e^{2z}}{2}\right|_{-\pi\mathrm{i}}^{3\pi\mathrm{i}}=0$ 2）$\int_{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}^{0}\mathrm{ch}\,3z dz=\frac{1}{3}\mathrm{sh}\,3z|_{\pi\mathrm{i}/6}^{0}=-\mathrm{i}/3$

3）$\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}}\sin^2 z dz=\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}}\frac{1-\cos 2z}{2}dz=(\frac{z}{2}-\frac{\sin 2z}{4})|_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}}=(\pi-\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2\pi)\mathrm{i}$

4）$\int_0^1 z\sin z dz=(\sin z-z\cos z)|_0^1=\sin 1-\cos 1$

5）$\int_0^{\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})e^{-z}dz=(\mathrm{i}-1-z)e^{-z}|_0^{\mathrm{i}}=1-\cos 1+\mathrm{i}(\sin 1-1)$

6）$\int_1^{\mathrm{i}}\frac{1+\tan z}{\cos^2 z}dz=(\tan z+\tan^2 z/2)|_1^{\mathrm{i}}=-(\tan 1+\frac{1}{2}\tan^2 1+\frac{1}{2}\mathrm{th}^2 1)+\mathrm{i}\,\mathrm{th}1$

9．计算下列积分：

1）$\oint_C(\frac{4}{z+1}+\frac{3}{z+2\mathrm{i}})dz,$其中$C:|z|=4$为正向

2）$\oint_C\frac{2\mathrm{i}}{z^2+1}dz,$其中$C:|z-1|=6$为正向

3）$\oint_{C=C_1+C_2}\frac{\cos z}{z^3}dz,$其中$C_1:|z|=2$为正向，$C_2:|z|=3$为负向

4） $\oint\limits_C \frac{dz}{z-i}$,其中$C$为以$\pm\frac{1}{2},\pm\frac{6}{5}$i为顶点的正向菱形

5） $\oint\limits_C \frac{e^z}{(z-a)^3}dz$,其中$a$为$|a|\neq 1$的任何复数，$C:|z|=1$为正向

解　1） $\oint\limits_C (\frac{4}{z+1}+\frac{3}{z+2\mathrm{i}})dz = 2\pi\mathrm{i}(4+3)=14\pi\mathrm{i}$

2） $\oint\limits_C \frac{2\mathrm{i}}{z^2+1}dz = \oint\limits_{|z-\mathrm{i}|=1}\frac{2i/(z+\mathrm{i})}{z-\mathrm{i}}dz + \oint\limits_{|z+\mathrm{i}|=1}\frac{2i/(z-\mathrm{i})}{z+\mathrm{i}}dz = 0$

3） $\oint\limits_{C=C_1+C_2}\frac{\cos z}{z^3}dz = \oint\limits_{C_1}\frac{\cos z}{z^3}dz - \oint\limits_{C_2^-}\frac{\cos z}{z^3}dz = \frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}(\cos z)''|_{z=0} - \frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}(\cos z)''|_{z=0} = 0$

4） $\oint\limits_C \frac{dz}{z-\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}$

5） 当$|a|>1$时，$1/(z-a)^3$在$|z|\leq 1$上解析，故$\oint\limits_C \frac{e^z}{(z-a)^3}dz = 0$；

当$|a|<1$时，$\oint\limits_C \frac{e^z}{(z-a)^3}dz = \frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}(e^z)''|_{z=a} = \pi\mathrm{i}e^a$

10．证明：当C为任何不通过原点的简单闭曲线时，$\oint\limits_C \frac{1}{z^2}dz = 0$。

证明　　当原点在曲线C内部时，$\oint\limits_C \frac{1}{z^2}dz = 2\pi\mathrm{i}(1)'|_{z=0} = 0$；当原点在曲线$C$外部时，$1/z^2$在$C$内解析，故$\oint\limits_C \frac{1}{z^2}dz = 0$。

11．下列两个积分的值是否相等？积分 2）的值能否利用闭路变形原理从 1）的值得到？为什么？

1） $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\overline{z}}{z}dz$；　　　　2） $\oint\limits_{|z|=4}\frac{\overline{z}}{z}dz$

解　$\oint\limits_{|z|=2}\frac{\overline{z}}{z}dz = \int_0^{2\pi} 2\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\theta}d\theta = 0$；$\oint\limits_{|z|=4}\frac{\overline{z}}{z}dz = \int_0^{2\pi} 4\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\theta}d\theta = 0$，故两个积分的值相等。但不能利用闭路变形原理从 1）的值得到，因$\frac{\overline{z}}{z}$不是一个解析函数。

12．设区域D为右半平面，z为D内圆周$|z|=1$上的任意一点，用在D内的任意一条曲线C连结原点与z，证明$\mathrm{Re}\left[\int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta\right] = \frac{\pi}{4}.$

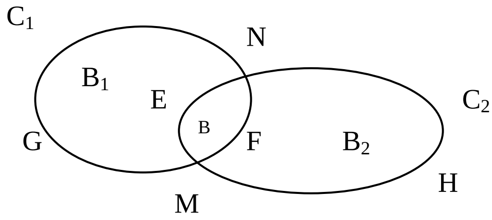
证明　　函数$\frac{1}{1+\zeta^2}$在右半平面解析，故在计算从 0 到z沿任意一条曲线C的积分时与积分路径无关。则$\int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^\theta \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\eta}}{1+e^{2\mathrm{i}\eta}}d\eta = \frac{\pi}{4} + \int_0^\theta \frac{2\mathrm{i}\cos\eta}{2+2\cos 2\eta}d\eta.$（分子分母同乘以$1+e^{-2\mathrm{i}\eta}$），

故　$\mathrm{Re}\left[\int_0^z \frac{1}{1+\zeta^2}d\zeta\right]=\frac{\pi}{4}.$

13．设 C_1 与 C_2 为相交于 M、N 两点的简单闭曲线，它们所围的区域分别为 B_1 与 B_2。B_1 与 B_2 的公共部分为 B。如果 $f(z)$ 在 B_1-B 与 B_2-B 内解析，在 C_1、C_2 上也解析，证明：$\oint_{C_1} f(z)dz=\oint_{C_2} f(z)dz$。

证明　　在 B_1-B 上 $f(z)$ 为解析函数，则由柯西基本定理 $\oint_{MENGM} f(z)dz=0$；同理 $\oint_{MHNFM} f(z)dz=0$

则 $\int_{NGM} f(z)dz+\int_{MEN} f(z)dz=\int_{MHN} f(z)dz+\int_{NFM} f(z)dz$，即 $\oint_{C_1} f(z)dz=\oint_{C_2} f(z)dz$。



14．设 C 为不经过 a 与-a 的正向简单闭曲线，a 为不等于零的任何复数，试就 a 与-a 同 C 的各种不同位置，计算积分 $\oint_C \frac{z}{z^2-a^2}dz$。

解　(i) 当 a 在 C 的内部而-a 在 C 的外部时

$$\oint_C \frac{z}{z^2-a^2}dz=\oint_C \frac{\frac{z}{z+a}}{z-a}dz=2\pi\,\mathrm{i}\left.\frac{z}{z+a}\right|_{z=a}=\pi\,\mathrm{i}。$$

(ii) 当 $-a$ 在 C 的内部而 a 在 C 的外部时，

$$\oint_c \frac{z}{z^2-a^2}dz=\oint_c \frac{\frac{z}{z-a}}{z+a}dz=2\pi\,\mathrm{i}\left.\frac{z}{z-a}\right|_{z=-a}=\pi\,\mathrm{i}$$

(iii) 当 a 与$-a$ 在 C 的内部时，设 C_1,C_2 分别为以 $a,-a$ 为心半径充分小的圆周使 C_1,C_2 均在 C 的内部且互不相交也互不包含，则由复合闭路定理及 Cauchy 积分公式得

$$\oint_c \frac{z}{z^2-a^2}dz=\oint_{c_1}\frac{\frac{z}{z+a}}{z-a}dz+\oint_{c_2}\frac{\frac{z}{z-a}}{z+a}dz=\pi i+\pi i=2\pi i$$

(iv) 当 a 与$-a$ 都在 C 的外部时，由 Cauchy-Goursat 定理得

$$\oint_C \frac{z}{z^2-a^2}dz=0。$$

15．设 C_1 与 C_2 为两条互不包含，也互不相交的正向简单闭曲线，证明：

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\oint_{C_1}\frac{z^2dz}{z-z_0}+\oint_{C_2}\frac{\sin zdz}{z-z_0}\right]=\begin{cases} z_0^2, & \text{当}z_0\text{在}C_1\text{内时}, \\ \sin z_0, & \text{当}z_0\text{在}C_2\text{内时}. \end{cases}$$

证明　　利用 Cauchy 积分公式，当 z_0 在 C_1 内时，$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_1}\frac{z^2dz}{z-z_0}=z^2|_{z=z_0}=z_0^2$，而 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_2}\frac{\sin zdz}{z-z_0}=0$；

当 z_0 在 C_2 内时，$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_1}\frac{z^2dz}{z-z_0}=0$，而 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_2}\frac{\sin zdz}{z-z_0}=\sin z|_{z=z_0}=\sin z_0$。故结论成立。

16．设函数 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任何圆周 C：$|z|=r$，$0<r<1$ 的积分为零，问 $f(z)$ 是否需在 z=0 处解析？试举例说明之。

解　不一定。如令 $f(z)=\frac{1}{z^2}$，则其在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任何圆周 C：$|z|=r$，$0<r<1$ 的积分

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{|z|=r} \frac{1}{z^2}dz = 0$$

但显然 $f(z)=\frac{1}{z^2}$ 在 z=0 处不解析。

17.设 $f(z)$与 $g(z)$在区域 D 内处处解析，C 为 D 内任何一条简单光滑闭曲线，它的内部全属于 D。如果 $f(z)=g(z)$在 C 上所有点都成立，试证在C的内部所有点处 $f(z)=g(z)$也成立。

证　因 $f(z),g(z)$在D内处处解析故在C上及其内部也处处解析，设 z_0 为C的内部的任一点，则由 Cauchy 积分公式有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz, \qquad g(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz \text{ ，}$$

又因在 C 上 $f(z)=g(z)$，故

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz \text{ ，}$$

从而 $f(z_0)=g(z_0)$,由 z_0 的任意性，在C的内部均有 $f(z)=g(z)$。

18．设区域D是圆环域， $f(z)$在D内解析，以圆环的中心为中心作正向圆周 K_1与K_2， K_2包含K_1，z_0 为 K_1,K_2之间任一点，试证（3.5.1）仍成立，但C要换成$K_1^- + K_2$(见图).

证明　　参照 78 页闭路变形定理的证明方法。

19.设 $f(z)$在 单连通区域D内解析,且不为零,C为D内任何一条简单光滑闭曲线,问积分$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$是否为零？为什么？

解　等于零。因 $f(z)$在D内解析，故 $f(z)$具有各阶导数且仍为解析函数，从而 $f'(z)$在D内也解析，又因在D内 $f(z)\neq 0$，故$\frac{f'(z)}{f(z)}$在D内解析，从而在C上及C的内部也解析，于是由 Cauchy-Goursat 定理，有

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0 \text{ 。}$$

20．试说明柯西－古萨基本定理中的C为什么可以不是简单闭曲线？

21．设 $f(z)$在区域D内解析，C为D内的任意一条正向简单闭曲线，证明：对在D内但不在C上的任意一点 z_0，等式：$\oint\limits_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz = \oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$成立。

证明　　利用 Cauchy 积分公式，有$\oint\limits_C \frac{f'(z)}{z-z_0}dz = 2\pi \mathrm{i} f'(z)|_{z=z_0} = 2\pi \mathrm{i} f'(z_0)$；而由高阶导数公式$\oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \frac{2\pi \mathrm{i}}{1!} f'(z)|_{z=z_0} = 2\pi \mathrm{i} f'(z_0)$，故所证等式成立。

22.如果$\varphi(x,y)$和$\psi(x,y)$都具有二阶连续偏导数,且适合拉普拉斯方程,而$s=\varphi_y-\psi_x$，$t=\varphi_x+\psi_y$那么$s+\mathrm{i}t$是$x+\mathrm{i}y$的解析函数。

证明　　由$\varphi(x,y)$和$\psi(x,y)$都具有二阶连续偏导数，而$s=\varphi_y-\psi_x$，$t=\varphi_x+\psi_y$知，s,t具有一阶连续的偏导数，在证s,t满足 C－R 方程即可。注意$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0$，$\psi_{xx}+\psi_{yy}=0$，则

$s_x=\varphi_{yx}-\psi_{xx}=\varphi_{xy}+\psi_{yy}=t_y$；$s_y=\varphi_{yy}-\psi_{xy}=-\varphi_{xx}-\psi_{yx}=-t_x$，故$s,t$满足 C－R 方程，即

$s+\mathrm{i}t$ 是 $x+\mathrm{i}y$ 的解析函数。

23．设 u 为区域 D 内的调和函数及 $f=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}$，问 f 是不是 D 内的解析函数？为什么？

解　f 是 D 内的解析函数。因 u 为区域 D 内的调和函数，故 u_x 和 $-u_y$ 在 D 内有一阶连续的偏导数。又 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_x=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_y$；$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_y=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\left(-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_x$，即满足 C－R 方程。

24．函数 $v=x+y$ 是 $u=x+y$ 的共轭调和函数吗？为什么？

解　不是。因 $u+\mathrm{i}v$ 不能构成一解析函数。

25．设 u 和 v 都是调和函数，如果 v 是 u 的共轭调和函数，那么 u 也是 v 的共轭调和函数。这句话对吗？为什么？

解　不对。参考 27 题的第二问。

26．证明：一对共轭调和函数的乘积仍是调和函数。

证明　　设 v 是 u 的共轭调和函数，则 $u_{xx}+u_{yy}=0$，$v_{xx}+v_{yy}=0$，$u_x=v_y$，$u_y=-v_x$。又

$(uv)_{xx}=u_{xx}v+2u_xv_x+uv_{xx}$，$(uv)_{yy}=u_{yy}v+2u_yv_y+uv_{yy}$，故 $(uv)_{xx}+(uv)_{yy}=0$，即一对共轭调和函数的乘积仍是调和函数。

27．如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一解析函数，试证：

1）$\overline{\mathrm{i}\overline{f(z)}}$ 也是解析函数；　2）$-u$ 是 v 的共轭调和函数；

3）$\dfrac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial y^2}=4(u_x^2+v_x^2)=4|f'(z)|^2$。

证明　　1）$\overline{\mathrm{i}\overline{f(z)}}=v-\mathrm{i}u$，而 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一解析函数，故 u,v 满足 C－R 方程，进而 $v_x=(-u)_y$，$v_y=-(-u)_x$。故 $\overline{\mathrm{i}\overline{f(z)}}$ 也是解析函数。

2）由 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是一解析函数，$\overline{\mathrm{i}\overline{f(z)}}=v-\mathrm{i}u$。故 $-u$ 是 v 的共轭调和函数。

3）
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2|f(z)|^2}{\partial y^2}&=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u^2+v^2)\\&=2u_x^2+2v_x^2+2u_y^2+2v_y^2+2u(u_{xx}+u_{yy})+2v(v_{xx}+v_{yy})\\&=4(u_x^2+v_x^2)=4|f'(z)|^2\end{aligned}$$

28．证明：$u=x^2-y^2$ 和 $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 都是调和函数，但是 $u+\mathrm{i}v$ 不是解析函数。

证明　　$u_x=2x$，$u_y=-2y$，$v_x=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$v_y=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，

$$v_{xx}=\frac{8x^2y}{(x^2+y^2)^3}-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2},\quad v_{yy}=\frac{8y^3}{(x^2+y^2)^3}-\frac{6y}{(x^2+y^2)^2},\text{ 则}$$

$$u_{xx}+u_{yy}=2+(-2)=0,\quad v_{xx}+v_{yy}=\frac{8x^2y}{(x^2+y^2)^3}+\frac{8y^3}{(x^2+y^2)^3}-\frac{8y}{(x^2+y^2)^2}=0\text{。}$$

29．求具有下列形式的所有调和函数u：1）$u=f(ax+by), a$与b为常数；2）$u=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$。

解　1）由$u_x=af', u_{xx}=a^2f'', u_{yy}=b^2f''$，而$u_{xx}+u_{yy}=0$，则$f''=0$，即$f=c_1(ax+by)+c_2$。

2）由$u_x=-\dfrac{y}{x^2}f', u_{xx}=2\dfrac{y}{x^3}f'+\dfrac{y^2}{x^4}f'', u_y=\dfrac{1}{x}f', u_{yy}=\dfrac{1}{x^2}f''$，而$u_{xx}+u_{yy}=0$，则

$$\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)f''+2\frac{y}{x}f'=0,\text{即}f=c_1\arctan\frac{y}{x}+c_2\text{。}$$

30．由下列各已知调和函数求解析函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$：

1）$u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$；　　2）$v=\dfrac{y}{x^2+y^2}, f(2)=0$；

3）$u=2(x-1)y, f(2)=-\mathrm{i}$；　　4）$v=\arctan\dfrac{y}{x}, x>0$。

解　1）$u_x=3x^2+6xy-3y^2, u_y=3x^2-6xy-3y^2$，则

$f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y=3x^2+6xy-3y^2-\mathrm{i}(3x^2-6xy-3y^2)=3(1-i)z^2$，故

$f(z)=(1-i)z^3+\mathrm{i}c, c\in\mathbb{R}$；

2）$f'(z)=v_y+\mathrm{i}v_x=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\mathrm{i}\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{x^2-y^2-2\mathrm{i}xy}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\bar{z}^2}{(z\bar{z})^2}=\dfrac{1}{z^2}$，故

$f(z)=-\dfrac{1}{z}+c$，又$f(2)=0$，则$f(z)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{z}$；

3）$f'(z)=u_x-\mathrm{i}u_y=2y-2\mathrm{i}(x-1)=-2\mathrm{i}(x-1+\mathrm{i}y)=-2\mathrm{i}(z-1)$，故

$f(z)=-\mathrm{i}(z-1)^2+c$，又$f(2)=-\mathrm{i}$，则$f(z)=-\mathrm{i}(z-1)^2$；

4）$f'(z)=v_y+\mathrm{i}v_x=\dfrac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\dfrac{-y}{x^2+y^2}=\dfrac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}=\dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\dfrac{1}{z}$，故$f(z)=\ln z+c, c\in\mathbb{R}$。

31．设$v=e^{px}\sin y$，求p的值使v为调和函数，并求出解析函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$。

解　$v_{xx}+v_{yy}=e^{px}\sin y(p^2-1)=0$，知$p=\pm1$。当$p=1$时，$f(z)=e^z+c, c\in\mathbb{R}$；当$p=-1$时，$f(z)=-e^{-z}+c, c\in\mathbb{R}$。

32．如果$u(x,y)$是区域D内的调和函数，C为D内以z_0为中心的任何一个正向圆周：$|z-z_0|=r$，它的内部完全含于D。试证：

1）$u(x,y)$在(x_0,y_0)的值等于$u(x,y)$在圆周C上的平均值，即

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi, y_0+r\sin\varphi)d\varphi\text{；}$$

2）$u(x,y)$在(x_0,y_0)的值等于$u(x,y)$在圆域$|z-z_0|\le r_0$上的平均值，即

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi, y_0+r\sin\varphi)rd\varphi dr\text{。}$$

证明　1）由平均值公式（P86）

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+R\mathrm{e}^{i\theta})d\theta$$

只取其实部有： $u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)d\varphi$ ；

2）由 1）知 $\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)rd\varphi dr=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}2\pi u(x_0,y_0)rdr=u(x_0,y_0)$。

33. 如果 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内处处解析，C 为 D 内的正向圆周：$|z|=R$，它的内部完全含于 D。设 z 为 C 内一点，并令 $\tilde{z}=R^2/\overline{z}$，试证

$$\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}d\zeta=\oint_C\frac{\overline{z}f(\zeta)}{\zeta\overline{z}-R^2}d\zeta=0。$$

证明　因 z 为 C 内一点，$|\tilde{z}|=|R^2/\overline{z}|=R^2/|z|=\frac{R}{|z|}R>R$，故 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}$ 在 C 及其内部解析。由 Cauchy 基本定理知：$\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-\tilde{z}}d\zeta=\oint_C\frac{\overline{z}f(\zeta)}{\zeta\overline{z}-R^2}d\zeta=0$。

34. 根据柯西积分公式与习题 33 的结果，证明

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\left[\frac{1}{\zeta-z}+\frac{\overline{z}}{R^2-\zeta\overline{z}}\right]f(\zeta)d\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{(R^2-z\overline{z})f(\zeta)}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\overline{z})}d\zeta，$$

其中 C 为 $|z|=R|$.

证明　由柯西积分公式有：$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$；而由 33 题结果知 $\oint_C\frac{\overline{z}f(\zeta)}{\zeta\overline{z}-R^2}d\zeta=0$，故将这两式相减即得。

35 如果令 $\zeta=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，验证

$$\frac{d\zeta}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\overline{z})}=\frac{d\zeta/\zeta}{(\zeta-z)(\overline{\zeta}-\overline{z})}=\frac{\mathrm{i}d\theta}{\mathrm{R}^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}.$$

并由 34 题的结果，证明

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta.$$

取其实部，得

$$u(x,y)=u(r\cos\varphi,r\sin\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)u(R\cos\theta,R\sin\theta)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$$

这个积分称为泊松（Poisson）积分。通过这个公式，一个调和函数在一个圆内得值可用它在圆周上的值来表示。

证明　$\frac{R^2}{\zeta}=R\frac{R}{\zeta}=R\cdot e^{-\mathrm{i}\theta}=\overline{\zeta}$，故 $\frac{d\zeta}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\overline{z})}=\frac{d\zeta/\zeta}{(\zeta-z)(\frac{R^2}{\zeta}-\overline{z})}=\frac{d\zeta/\zeta}{(\zeta-z)(\overline{\zeta}-\overline{z})}$.又

$\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{iR\cdot e^{i\theta}d\theta}{R\cdot e^{i\theta}}=id\theta$，$(\zeta-z)(\overline{\zeta}-\overline{z})=R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2$，故

$$\frac{d\zeta/\zeta}{(\zeta-z)(\overline{\zeta}-\overline{z})}=\frac{\mathrm{i}d\theta}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}。$$

又由 34 题知 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\oint_C\frac{(R^2-z\overline{z})f(\zeta)}{(\zeta-z)(R^2-\zeta\overline{z})}d\zeta=\dfrac{1}{2\pi}\oint_C\frac{(R^2-r^2)f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})d\theta}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}$。

36．设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 内及 C 上解析，且不恒为常数，n 为正整数.

1）试用柯西积分公式证明：

$$[f(z)]^n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta-z}d\zeta.$$

2）设 M 为 $|f(\zeta)|$ 在 C 上的最大值，L 为 C 的长，d 为 z 到 C 的最短距离，试用积分估值公式（3.1.10）于 1）中的等式，证明不等式：

$$|f(z)|\le M\left(\frac{L}{2\pi d}\right)^{1/n}.$$

3）令 $n\to+\infty$，对 2）中的不等式取极限，证明：$|f(z)|\le M$。这个结果表明：在闭区域内不恒为常数的解析函数的模的最大值只能在区域的边界上取得（最大模原理）。

证明　1）在柯西积分公式中将里面的函数 $f(z)$ 换成 $[f(z)]^n$ 即得。

2）由 1）知 $|f(z)|^n=|[f(z)]^n|\le\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\oint_C\left|\frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta-z}\right|ds\le\dfrac{L}{2\pi d}M^n$，故

$$|f(z)|\le\left(\frac{L}{2\pi d}M^n\right)^{1/n}=M\left(\frac{L}{2\pi d}\right)^{1/n}。$$

3）对 2）中的不等式取极限（$n\to+\infty$），即得。

习题四解答

1．下列数列$\{\alpha_n\}$是否收敛？如果收敛，求出它们的极限：

1） $\alpha_n=\dfrac{1+n\mathrm{i}}{1-n\mathrm{i}}$ ；2） $\alpha_n=\left(1+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)^{-n}$ ；3） $\alpha_n=(-1)^n+\dfrac{\mathrm{i}}{n+1}$；4） $\alpha_n=e^{-n\pi\mathrm{i}/2}$ ；5） $\alpha_n=\dfrac{1}{n}e^{-n\pi\mathrm{i}/2}$

解　1）$\alpha_n=\dfrac{1+n\mathrm{i}}{1-n\mathrm{i}}=\dfrac{1-n^2}{1+n^2}+\dfrac{2n}{1+n^2}\mathrm{i}$，又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^2}{1+n^2}=-1,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{1+n^2}=0$，故$\alpha_n$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=-1$

2） $\alpha_n=\left(1+\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)^{-n}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}e^{-i\theta}\right)^n$，又$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}e^{-i\theta}\right)^n=0$，故$\alpha_n$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$

3）由于α_n的实部$\left\{(-1)^n\right\}$发散，故α_n发散

4）由于$\alpha_n=e^{-n\pi\mathrm{i}/2}=\cos\dfrac{n\pi}{2}-\mathrm{i}\sin\dfrac{n\pi}{2}$，其实部、虚部数列均发散，故$\alpha_n$发散

5） $\alpha_n=\dfrac{1}{n}e^{-n\pi\mathrm{i}/2}=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}-\mathrm{i}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$，知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}=0$，故$\alpha_n$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$

2．证明：

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n=\begin{cases}0, & |\alpha|<1,\\ \infty, & |\alpha|>1,\\ 1, & \alpha=1,\\ \text{不存在，} & |\alpha|=1,\alpha\neq1.\end{cases}$$

3．判断下列级数的绝对收敛性与收敛性：

1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{i}^n}{n}$ ； 2） $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\mathrm{i}^n}{\ln n}$ ；　　3） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(6+5\mathrm{i})^n}{8^n}$ ；4） $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos\mathrm{i}n}{2^n}$。

解　1）由$\mathrm{i}^n=\cos\dfrac{n\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{n\pi}{2}$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$为收敛的交错项实级数，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{i}^n}{n}$收敛，但$\left|\dfrac{\mathrm{i}^n}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\mathrm{i}^n}{n}\right|$发散，原级数条件收敛；

2）与 1）采用同样的方法，并利用 $\dfrac{1}{\ln n}\geq\dfrac{1}{n}(n\geq2)$；

3）因 $\left|\dfrac{(6+5\mathrm{i})^n}{8^n}\right|=\left(\dfrac{\sqrt{61}}{8}\right)^n$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sqrt{61}}{8}\right)^n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(6+5\mathrm{i})^n}{8^n}$ 绝对收敛；

4）因 $\cos\mathrm{i}n=\mathrm{ch}n$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{ch}n}{2^n}\neq0$，故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos\mathrm{i}n}{2^n}$ 发散。

4．下列说法是否正确？为什么？

（1）每一个幂级数在它的收敛圆周上处处收敛；

（2）每一个幂级数的和函数在收敛圆内可能有奇点；

（3）每一个在 z_0 连续的函数一定可以在 z_0 的邻域内展开成 Taylor 级数。

解（1）不对。如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ 在收敛圆 $|z|<1$ 内收敛，但在收敛圆周 $|z|=1$ 上并不收敛；

（2）不对。幂级数的和函数在收敛圆内为解析函数，不能有奇点；

(3)不对。如 $f(z)=\bar{z}$ 在全平面上连续,但它在任何点的邻域内均不能展开成 Taylor 级数。

5.幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-2)^n$ 能否在 $z=0$ 收敛而在 $z=3$ 发散？

解　不能。因如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-2)^n$ 在 $z=0$ 收敛，则由 Abel 定理其收敛半径 $R\geq|0-2|=2$，而 $|3-2|=1<2$ 即 $z=3$ 在其收敛圆 $|z-2|<2$ 内，故级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-2)^n$ 在 $z=3$ 收敛，矛盾。

6．求下列幂级数的收敛半径：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^p}(p\text{为正整数})$；　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{n^n}z^n$；　（3）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$；

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^n$；　（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{ch}\left(\dfrac{\mathrm{i}}{n}\right)(z-1)^n$；　（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z}{\ln\mathrm{i}n}\right)^n$。

解　（1）$R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p}=1$；

（2） $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{n})^n}{n+1}=0$;

（3） $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}1/|1+\mathrm{i}|=1/\sqrt{2}$ ；

（4） $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$ ；

（5） $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\operatorname{ch}\left(\dfrac{i}{n}\right)\right|}=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos\dfrac{1}{n}}=1$ ；

（6） $R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}|\ln in|=\infty$;

7．如果$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$的收敛半径为 R，证明级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\operatorname{Re}c_n)z^n$的收敛半径$\geq R$。

证明　对于圆$|z|<R$内的任意一点 z，由已知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$绝对收敛即$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n||z|^n$收敛，又因$|\operatorname{Re}c_n|\leq|c_n|$，从而$|\operatorname{Re}c_n||z|^n\leq|c_n||z|^n$，故由正项级数的比较判别法$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\operatorname{Re}c_n||z|^n$也收敛即$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\operatorname{Re}c_n)z^n$在$|z|<R$内绝对收敛，于是其收敛半径$\geq R$。

8．证明：如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$存在（$\neq\infty$），下列三个幂级数有相同的收敛半径

$$\sum c_nz^n\ ;\qquad \sum\frac{c_n}{n+1}z^{n+1}\ ;\qquad \sum nc_nz^{n-1}\text{。}$$

证明　　设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\rho$，则幂级数$\sum c_nz^n$的收敛半径为$1/|\rho|$；

幂级数$\sum\dfrac{c_n}{n+1}z^{n+1}$的收敛半径为$R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n/(n+1)}{c_{n+1}/(n+2)}\right|=1/|\rho|$ ；

幂级数$\sum nc_nz^{n-1}$的收敛半径为$R=1/\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{nc_n}{(n+1)c_{n+1}}\right|=1/|\rho|$；

故以上三个幂级数有相同的收敛半径。

9．设级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$收敛，而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|$发散，证明$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$的收敛半径为 1。

证明　由级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$收敛，知幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$在$z=1$处收敛，由 Abel 定理知$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$的收敛半径$R \geq 1$；而$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$发散知$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$在$|z|=1$处发散，故$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$的收敛半径$R \leq 1$。所以$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$的收敛半径为 1。

10．如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$在它的收敛圆的圆周上一点$z_0$处绝对收敛，证明它在收敛圆所围的闭区域上绝对收敛。

证明　由 Abel 定理知$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$在其收敛圆内绝对收敛，再证其在圆周上绝对收敛即可。在圆周上任取一点η，$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n \eta^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n|$，知$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \eta^n$绝对收敛，故结论成立。

11．把下列各函数展开成 z 的幂级数，并指出它们的收敛半径。

（1）$\frac{1}{1+z^3}$；（2）$\frac{1}{(1+z^2)^2}$；（3）$\cos z^2$；（4）$\operatorname{sh} z$；

（5）$\operatorname{ch} z$；（6）$e^{z^2}\sin z^2$；（7）$e^{\frac{z}{z-1}}$；（8）$\sin\frac{1}{1-z}$

解　（1）由$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots, |z|<1$，故

$$\frac{1}{1+z^3} = 1 - z^3 + z^6 - z^9 + \ldots + (-1)^n z^{3n} + \ldots ，\quad |z|<1，$$

而收敛半径 R=1；

（2）因$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots$，$|z|<1$，

故
$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 + \ldots + (-1)^n z^{2n} + \ldots ，\quad |z|<1，$$

又因
$$\left(\frac{1}{1+z^2}\right)' = \frac{-2z}{(1+z^2)^2}，$$

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{2z}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)' = 1 - 2z^2 + 3z^4 - 4z^6 + \ldots ，\quad |z|<1，$$

而$R=1$；

（3）因$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots, |z| < \infty$, 故　$\cos z^2 = 1 - \frac{z^4}{2!} + \frac{z^8}{4!} - \frac{z^{12}}{6!} + \cdots$

$|z|<+\infty$ 而其收敛半径 $R=+\infty$ ；

（4）因 $\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}, e^{z}=1+z+\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{3}}{3!}+\ldots,|z|<+\infty,\ e^{-z}=1-z+\frac{z^{2}}{2!}-\frac{z^{3}}{3!}+\ldots,|z|<+\infty,$

故 $\operatorname{sh} z=z+\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{3}}{5!}+\ldots,|z|<+\infty,$ 而收敛半径 $R=+\infty$ ；

（5）$\operatorname{ch} z=1+\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{4}}{4!}+\ldots,|z|<+\infty,$

（6）因 $e^{z^{2}}=1+z^{2}+\frac{z^{4}}{2!}+\frac{z^{6}}{3!}+\ldots,|z|<+\infty,\ \sin z^{2}=z^{2}-\frac{z^{6}}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}+\ldots,|z|<+\infty,$

故 $e^{z^{2}}\sin z^{2}=\left(1+z^{2}+\frac{z^{4}}{2!}+\frac{z^{6}}{3!}+\ldots\right).\left(z^{2}-\frac{z^{6}}{3!}+\frac{z^{10}}{5!}+\ldots\right)=z^{2}+z^{4}+\frac{z^{6}}{3}+\ldots,|z|<+\infty,$

而收敛半径 $R=+\infty;$

（7）因 $e^{z}=1+z+\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{3}}{3!}+\ldots,|z|<+\infty,$

$$\frac{z}{z-1}=-z-z^{2}-z^{3}-\ldots=-\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1},|z|<1,$$

故 $e^{\frac{z}{z-1}}=1-\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}+\frac{\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}\right)^{2}}{2!}-\frac{\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}\right)^{3}}{3!}+\cdots=1-z-\frac{z^{2}}{2!}-\frac{z^{3}}{3!}+\cdots,|z|<1,$

而收敛半径 R=1。

（8）因 $\sin\frac{1}{1-z}=\sin\left(1+\frac{z}{1-z}\right)=\sin 1\cos\frac{z}{1-z}+\cos 1\sin\frac{z}{1-z},$

$$\frac{z}{1-z}=z+z^{2}+z^{3}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1},|z|<1,$$

故 $\sin\frac{z}{1-z}=\left(z+z^{2}+z^{3}+\ldots\right)-\frac{1}{3!}\left(z+z^{2}+z^{3}+\ldots\right)^{3}+\ldots=z+z^{2}+\frac{5}{6}z^{3}+\ldots$， $|z|<1$，

$\cos\frac{z}{1-z}=1-\frac{1}{2}\left(z+z^{2}+z^{3}+\ldots\right)^{2}-\frac{1}{4!}\left(z+z^{2}+z^{3}+\ldots\right)^{4}+\ldots=1-\frac{1}{2}z^{2}-z^{3}+\ldots$， $|z|<1$，

故 $\sin\frac{1}{1-z}=\sin 1\left(1-\frac{1}{2}z^{2}-z^{3}+\ldots\right)+\cos 1\left(z+z^{2}+\frac{5}{6}z^{3}+\ldots\right)$

$$=\sin 1+(\cos 1)z+\left(\cos 1-\frac{1}{2}\sin 1\right)z^{2}+\left(\frac{5}{6}\cos 1-\sin 1\right)z^{3}+\cdots,|z|<1,$$

而收敛半径 R=1。

12．求下列各函数在指定点 z_0 处的 Taylor 展开式，并指出它们的收敛半径：

(1) $\frac{z-1}{z+1}$， $z_0=1$ (2) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$， $z_0=2$

(3) $\frac{1}{z^2}$， $z_0=-1$ (4) $\frac{1}{4-3z}$， $z_0=1+\mathrm{i}$

(5) $\tan z$， $z_0=\pi/4$ (6) $\arctan z$， $z_0=0$

解 (1) 因 $$\frac{z-1}{z+1}=(z-1)\frac{1}{(z-1+2)}=\frac{z-1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$$

及 $\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots,|z|<1$。故

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{z-1}{2}\left[1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{n-1}+\cdots\right]$$

$$=\frac{z-1}{2}-\left(\frac{z-1}{2}\right)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}(z-1)^n, \qquad |z-1|<2$$

于是收敛半径 R=2。

(2) 因 $$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{z+2}-\frac{2}{z+1}\right)=\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1}$$

及 $$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{4+(z-2)}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{z-2}{4}}=\frac{1}{4}\left[1-\frac{z-2}{4}+\left(\frac{z-2}{4}\right)^2-\cdots\right], \qquad |z-2|<4$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{3+(z-2)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z-2}{3}}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{z-2}{3}+\left(\frac{z-2}{3}\right)^2-\cdots\right], \qquad |z-2|<3$$

故原式 $=\frac{2}{4}\left[1-\frac{z-2}{2^2}+\frac{1}{2^{2\cdot 2}}(z-2)^2-\cdots\right]-\frac{1}{3}\left(1-\frac{z-2}{3}+\frac{(z-2)^2}{3^2}-\cdots\right)$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^{2n}}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}(z-2)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n$$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{2n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-2)^n$，$|z-2|<3$，而 $R=3$。

(3) 因 $\frac{1}{z^2}=-\left(\frac{1}{z}\right)'$ 及 $\frac{1}{z}=-\frac{1}{1-(z+1)}=-[1+(z+1)+(z+1)^2+\cdots]$， $|z+1|<1$，

故 $$\frac{1}{z^2}=1+2(z+1)+\cdots+n(z+1)^{n-1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n$$， $|z+1|<1$，

而 R=1。

（4）因 $\dfrac{1}{4-3z}=\dfrac{1}{4-3[z-(1+\mathrm{i})]-3-3\mathrm{i}}=\dfrac{1}{1-3\mathrm{i}-3[z-(1+\mathrm{i})]}$

$$=\frac{1}{1-3\mathrm{i}}\frac{1}{1-\frac{3}{1-3\mathrm{i}}[z-(1+\mathrm{i})]}=\frac{1}{1-3\mathrm{i}}\left\{1+\frac{3}{1-3\mathrm{i}}[z-(1+\mathrm{i})]+\left(\frac{3}{1-3\mathrm{i}}\right)^2[z-(1+\mathrm{i})]^2+\cdots\right\},$$

其中$\left|\dfrac{3}{1-3\mathrm{i}}[z-(1+\mathrm{i})]\right|<1$，故

$$\frac{1}{4-3z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(1-3\mathrm{i})^{n+1}}[z-(1+\mathrm{i})]^n，\ |z-(1+\mathrm{i})|<\left|\frac{1-3\mathrm{i}}{3}\right|=\frac{\sqrt{10}}{3},$$

且收敛半径$R=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$。

（5）因$\tan z=z+\dfrac{z^3}{3}+\dfrac{2}{15}z^5+\cdots,|z|<\dfrac{\pi}{2}$，又$\tan z=\dfrac{1+\tan(z-\frac{\pi}{4})}{1-\tan(z-\frac{\pi}{4})}$，故

$\tan z=[1+\tan(z-\frac{\pi}{4})](1+\tan(z-\frac{\pi}{4})+\tan^2(z-\frac{\pi}{4})+\cdots)$

$$=1+2(z-\frac{\pi}{4})+2(z-\frac{\pi}{4})^2+\frac{8}{3}(z-\frac{\pi}{4})^3+\cdots,$$ 且收敛半径$R=\dfrac{\pi}{4}$。

（6）因$(\arctan z)'=\dfrac{1}{1+z^2}$，又$\dfrac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-\cdots,|z|<1$，故

$$\arctan z=\int_0^z\frac{1}{1+z^2}dz=\int_0^z\sum_0^{\infty}(-1)^n z^{2n}dz=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1},\ |z|<1,$$

且收敛半径$R=1$。

13．为什么在区域$|z|<R$内解析且在区间$(-R,R)$取实数值的函数$f(z)$展开成z的幂级数时，展开式的系数都是实数？

解　$f(z)$展开成z的幂级数时，展开式的系数为$c_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$，而函数$f(z)$在区间$(-R,R)$取实数值，可知$f^{(n)}(0)$也为实数。故展开式的系数都是实数。

14．证明在$f(z)=\cos(z+\dfrac{1}{z})$以$z$的各幂表出的洛朗展开式中的各系数为

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)。$$

证明　$f(z)=\cos(z+\dfrac{1}{z})$在复平面内出去点$z=0$外解析，所以在$0<|z|<+\infty$内可展开成洛朗级数$\cos(z+\dfrac{1}{z})=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$，其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{\cos(z+\frac{1}{z})}{z^{n+1}}dz,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots,0<r<+\infty)$$

与要证明式子中 c_n 的表示式相比较，我们取 $r=1$ 并利用复积分的计算公式可得

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{\cos(z+\frac{1}{z})}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta})}{e^{\mathrm{i}n\theta}}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta$$

$$-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta$$

因 $\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta$，而 $\cos(2\cos\theta)\sin n\theta$ 为 θ 的奇函数。

15．下列结论是否正确？

用长除法 $\frac{z}{1-z}=z+z^2+z^3+\cdots$，$\frac{z}{z-1}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots$

因为 $\frac{z}{1-z}+\frac{z}{z-1}=0$，所以 $\cdots+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\cdots=0$。

解　不正确。因为长除法所得到的两式，使它们成立的 z 值的范围不同（分别为 $|z|<1$；$|z|>1$），因此不能相加。

16．把下列各函数在指定的圆环域内展开成 Laurent 级数。

（1）$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$，$1<|z|<2$；

（2）$\frac{1}{z(1-z)^2}$，$0<|z|<1,0<|z-1|<1$；

（3）$\frac{1}{(z-1)(z-2)},0<|z-1|<1,1<|z-2|<+\infty$

（4）$e^{\frac{1}{1-z}}$，$1<|z|<+\infty$

（5）$\frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}$，在以 i 为中心的圆环域内

（6）$\sin\frac{1}{1-z}$，$0<|z-1|<+\infty$

（7）$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)},3<|z|<4,4<|z|<+\infty$

解　（1）因
$$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}=\frac{-\frac{1}{5}z}{z^2+1}+\frac{-\frac{2}{5}}{z^2+1}+\frac{\frac{1}{5}}{z-2}$$

故
$$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}=-\frac{1}{5}z\cdot\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}-\frac{2}{5}\frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}-\frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{5}z\cdot\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}-\frac{2}{5}\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)z^{\frac{1}{2n}}-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

$$=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n+1}}-\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2(n+1)}}-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

$$=\cdots+\frac{2}{5}\frac{1}{z^4}+\frac{1}{5}\frac{1}{z^3}-\frac{2}{5}\frac{1}{z^2}-\frac{1}{5}\frac{1}{z}-\frac{1}{10}-\frac{z}{20}-\frac{z^2}{40}-\frac{z^3}{80}-\cdots\ 1<|z|<2$$ ；

（2）在 $0<|z|<1$ 内，

$$\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{z}\left(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\right)^2=\frac{1}{z}\left(1+2z+3z^2+\cdots+(n+1)z^n+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z}+2+3z+\cdots+(n+1)z^{n-1}+\cdots=\sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)z^n$$

在 $0<|z-1|<1$ 内，

$$\frac{1}{z(1-z)^2}=\frac{1}{(1-z)^2}\frac{1}{1+(z-1)}=\frac{1}{(1-z)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

$$=\sum_{n=-2}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$ ；

（3） $0<|z-1|<1$ 内，

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-1)-1}-\frac{1}{z-1}$$

$$=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

在 $1<|z-2|<+\infty$ 内

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{(z-2)+1}$$

$$=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}$$

$$=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(z-2)^{n+1}}=\frac{1}{z-2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(z-2)^n}$$

（4）在 $1<|z|<+\infty$ 内，因

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=\frac{-1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

故 $e^{\frac{1}{1-z}}=1-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^2-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^3+\cdots$；

$$=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^4}+\cdots$$

（5）在$0<|z-\mathrm{i}|<1$内，因$\frac{1}{(1+z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^{n-1},|z|<1$，故

$$\frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}=\frac{1}{\mathrm{i}^2(z-\mathrm{i})(1+\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}})^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(z-\mathrm{i})^{n-2}}{\mathrm{i}^{n+1}}$$

在$1<|z-\mathrm{i}|<+\infty$内，因$\frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}=\frac{1}{(z-\mathrm{i})^3(1+\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}})^2}$，故

$$\frac{1}{z^2(z-\mathrm{i})}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\mathrm{i}^{n-1}}{(z-\mathrm{i})^{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n+1)\mathrm{i}^{n}}{(z-\mathrm{i})^{n+3}}$$

（6）因$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},|z|<+\infty$,故

$$\sin\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(1-z)^{2n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}},\qquad 0<|z-1|<+\infty$$

（7）在$3<|z|<4$内，因$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=(z^2-3z+2)(\frac{1}{3-z}-\frac{1}{4-z})$，故

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=-(z^2-3z+2)(\frac{1}{z(1-\frac{3}{z})}+\frac{1}{4(1-\frac{z}{4})})$$

$$=-(z^2-3z+2)(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}})=1-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^n}-2\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$$

在$4<|z|<+\infty$内，$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=(z^2-3z+2)(\frac{1}{z-4}-\frac{1}{z-3})$

$$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=(z^2-3z+2)(\frac{1}{z(1-\frac{4}{z})}-\frac{1}{z(1-\frac{3}{z})})$$

$$=(z^2-3z+2)(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}})=1+\sum_{n=1}^{\infty}(3\cdot 2^{2n-1}-2\cdot 3^{n-1})z^{-n}$$

17．函数$\tan\frac{1}{z}$能否在圆环域$0<|z|<R$（$0<R<+\infty$）内展开成洛朗级数？为什么？

解　不能展成洛朗级数。因在圆环域$0<|z|<R$内$\tan\dfrac{1}{z}$不解析。

18．如果k为满足关系$k^2<1$的实数，证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\sin(n+1)\theta=\frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}\ ;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}k^n\cos(n+1)\theta=\frac{\cos\theta-k}{1-2k\cos\theta+k^2}。$$

证明　　$\dfrac{1}{z-k}$在$|z|>k$内为解析函数，将其展成洛朗级数有

$$\frac{1}{z-k}=\frac{1}{z(1-\frac{k}{z})}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n}{z^{n+1}}$$

在上式中令$z=e^{i\theta}$，

$\dfrac{1}{e^{i\theta}-k}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{k^n}{(e^{i\theta})^{n+1}}$，即$\dfrac{\cos\theta-k-i\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(k^n\cos(n+1)\theta-ik^n\sin(n+1)\theta\right)$

分离实部和虚部即得结论。

19．如果C为正向圆周$|z|=3$，求积分$\int_C f(z)dz$的值.设$f(z)$为

1）$\dfrac{1}{z(z+2)}$；　2）$\dfrac{z+2}{(z+1)z}$；　3）$\dfrac{1}{z(z+1)^2}$；　4）$\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$。

解

$$\int_C f(z)dz=2\pi i c_{-1}$$

1）$\dfrac{1}{z(z+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z+2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z(1+\frac{2}{z})}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n}{z^{n+1}}\right),|z|>2$。

故$\int_C f(z)dz=0$。

2）$\dfrac{z+2}{(z+1)z}=(z+2)\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z(1+\frac{1}{z})}\right)=(z+2)\left(\dfrac{1}{z}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{z^{n+1}}\right),|z|>1$

故$\int_C f(z)dz=2\pi i$。

3）$\dfrac{1}{z(z+1)^2}=\dfrac{1}{z^3(1+\frac{1}{z})^2}=\dfrac{1}{z^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{z^{n-1}},|z|>1$。故$\int_C f(z)dz=0$。

4） $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}=z\left(\dfrac{1}{z(1+\frac{1}{z})}-\dfrac{1}{z(1+\frac{2}{z})}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n2^n}{z^n},|z|>2$

故$\int_C f(z)dz=2\pi\mathrm{i}$。

20．试求积分$\oint_C(\sum_{n=-2}^{\infty}z^n)dz$的值，其中$C$为单位圆$|z|=1$内的任何一条不经过原点的简单闭曲线。

解 $\sum_{n=-2}^{\infty}z^n=\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{1-z},0<|z|<1$。而$C$为单位圆$|z|=1$内的任何一条不经过原点的简单闭曲线，故$\oint_C(\sum_{n=-2}^{\infty}z^n)dz=2\pi\mathrm{i}c_{-1}=2\pi\mathrm{i}$。

习题五解答

1、下列函数有些什么奇点？如果是极点，指出它的级。

（1） $\dfrac{1}{z\left(z^2+1\right)^2}$；　（2） $\dfrac{\sin z}{z^3}$；　（3） $\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$；

（4） $\dfrac{\ln(z+1)}{z}$；　（5） $\dfrac{z}{\left(1+z^2\right)\left(1+e^{\pi z}\right)}$；　（6） $e^{\frac{1}{1-z}}$；

（7） $\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$；　（8） $\dfrac{z^{2n}}{1+z^n}$；　（9） $\dfrac{1}{\sin z^2}$.

解（1） $f(z)=\dfrac{1}{z\left(z^2+1\right)^2}$是有理函数，故奇点只是极点，满足$z\left(z^2+1\right)^2$=0，故 $z=0$，与 $z=\pm\mathrm{i}$ 为其奇点， $z=0$ 为一级极点，而 $z=\pm\mathrm{i}$ 为其二级极点。

（2）因$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z^3}=\infty$ 则 $z=0$ 为其极点。再确定极点的级，有两种方法：

a. $z=0$ 为 $\sin z$ 为的一级零点；而 $z=0$ 为 z^3 的三级零点。故 $z=0$ 为 $\dfrac{\sin z}{z^3}$ 的二级极点。

b. $\lim\limits_{z\to 0}z^2\dfrac{\sin z}{z^3}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1\neq 0$，故 $z=0$ 为其二级极点，

（3）原式=$\dfrac{1}{(z^2-1)(z-1)}=\dfrac{1}{(z-1)^2(z+1)}$，故 $z=1$ 为其二级极点，而 $z=-1$ 为一级极点。

（4） a． $\ln(1+z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{n+1}}{n+1}$， $0<|z|<1$， $\dfrac{\ln(1+z)}{z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{n+1}$ 无负幂项，故 $z=0$ 为其可去奇点。

b． $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\ln(1+z)}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{(1+z)}=1$，故 $z=0$ 为可去奇点。

（5）由 $1+z^2=0$ 得 $z=\pm\mathrm{i}$ 为 $\left(1+z^2\right)$的一级零点，由 $1+e^{\pi z}=0$ 得 $z_k=(2k+1)\mathrm{i}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为 $\left(1+e^z\right)$ 的零点，又 $\left(1+e^{\pi z}\right)'\Big|_{z_k}=\pi e^{\pi z_k}=-\pi\neq 0$，所以 z_k 为 $\left(1+e^z\right)$的一级零点，因此， $z=\pm\mathrm{i}$ 为二级极点；$z_k=(2k+1)\mathrm{i}$，$(k=1,\pm2,\cdots)$为一级极点。

（6）由 $e^{\frac{1}{1-z}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}$，知 $z=1$ 为本性奇点。

（7）因 $e^z-1=z\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{(n+1)!}=z(1+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{3!}+\cdots)$，故 $z=0$ 为 $z^2(e^z-1)$ 的三级零点，因而是 $\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$ 的三级极点，而 $z=2k\pi\mathrm{i},(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 均为一级极点。

（8）由 $z^n+1=0$， $z^n=-1$，得 $z_k=e^{\mathrm{i}\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ $(k=0,1,\cdots n-1)$为原式一级极点。

（9） $\sin z^2=0\Rightarrow z=\pm\sqrt{k\pi},z=\pm\mathrm{i}\sqrt{k\pi}$， $k=0,1,2,\cdots$ 由

$(\sin z^2)'|_{z^2=k\pi}=2z\cos z^2|_{z^2=k\pi}=\begin{cases}0 & k=0\\ \neq 0 & k\neq 0\end{cases}$，$(\sin z^2)''|_{z=0}=2$，知 $z=0$ 是 $\dfrac{1}{\sin z^2}$ 的二级极点，$z=\pm\sqrt{k\pi}$，$z=\pm \mathrm{i}\sqrt{k\pi}$ （$k=1,2,3,\cdots$）均为 $\dfrac{1}{\sin z^2}$ 一级极点。

2．求证：如果 z_0 是 $f(z)$ 是 m（$m>1$）级零点，那么 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 级零点。

证　由题知：$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，$\varphi(z_0)\neq 0$，则有

$$f'(z)=m(z-z_0)^{m-1}\varphi(z)+(z-z_0)^m\varphi'(z)=(z-z_0)^{m-1}\left[m\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)\right]$$

故 z_0 是 $f'(z)$ 的 m-1 级零点。

3．验证：$z=\dfrac{\pi \mathrm{i}}{2}$ 是 $\operatorname{ch} z$ 的一级零点。

解　由 $\operatorname{ch}\dfrac{\pi \mathrm{i}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，$(\operatorname{ch} z)'|_{z=\frac{\pi \mathrm{i}}{2}}=\operatorname{sh}\dfrac{\pi \mathrm{i}}{2}=\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}=\mathrm{i}$，知 $z=\dfrac{\pi \mathrm{i}}{2}$ 是 $\operatorname{ch} z$ 的一级零点。

4．$z=0$ 是函数 $(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{-2}$ 的几级极点？

解　$(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)|_{z=0}=0,(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)'|_{z=0}=(\cos z+\operatorname{ch} z-2)|_{z=0}=0$，

$(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)''|_{z=0}=(-\sin z+\operatorname{sh} z)|_{z=0}=0,(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)'''|_{z=0}=(-\cos z+\operatorname{ch} z)|_{z=0}=0$，

$(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{(4)}|_{z=0}=(\sin z+\operatorname{sh} z)|_{z=0}=0,(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{(5)}|_{z=0}=(\cos z+\operatorname{ch} z)|_{z=0}=2$，

故 $z=0$ 是函数 $\sin z+\operatorname{sh} z-2z$ 的五级零点，也即为 $(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{-2}$ 的十级极点。

5．如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒等于零的解析函数，那么

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\quad(\text{或两端均为}\infty)。$$

证　因 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是以 z_0 为零点的两个不恒等于零的解析函数，可设 $f(z)=(z-z_0)\varphi(z)$，$g(z)=(z-z_0)\psi(z)$，$\varphi(z),\psi(z)$ 为解析函数，则

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{(z-z_0)\varphi(z)}{(z-z_0)\psi(z)}=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},\quad \frac{f'(z)}{g'(z)}=\frac{\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)}{\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)},$$

故　$\displaystyle\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$，$\displaystyle\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)}{\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$，即

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}\quad(\text{或两端均为}\infty)$$

6．若 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 级与 n 级极点（或零点），那么下列三个函数在 $z=a$ 处各有什么性质？

（1）$\varphi(z)\psi(z)$；（2）$\varphi(z)/\psi(z)$；（3）$\varphi(z)+\psi(z)$

解　由题意，$\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^m}$，$\psi(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^n}$，其中 $f(z)$，$g(z)$ 在 a 点解析且 $f(a)\neq 0$，$g(a)\neq 0$。

（1） $z=a$ 是 $\varphi(z)\cdot\psi(z)$ 的 $m+n$ 级极点。

（2）对于 $\varphi(z)/\psi(z)$，当 $m<n$ 时，a 是 $n-m$ 级零点；当 $m>n$ 时，a 是 $m-n$ 级极点；当 $m=n$ 时，a 是可去奇点。

（3）当 $m\neq n$ 时，点 a 是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 $\max\{m,n\}$ 级极点，当 $m=n$ 时，点 a 是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的极点。（可退化为可去），其级不高于 m，点 a 也可能是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的可去奇点（解析点）。

7．函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 在 $z=1$ 处有一个二级极点，这个函数又有下列洛朗展开式

$$\frac{1}{z(z-1)^2}=\cdots+\frac{1}{(z-1)^5}-\frac{1}{(z-1)^4}+\frac{1}{(z-1)^3},|z-1|>1.,\ |z-2|>1$$

所以“ $z=1$ 又是 $f(z)$ 的本性奇点”，又其中不含 $(z-2)^{-1}$ 幂项，因此 $\mathrm{Res}[f(z),1]=0$，这些说法对吗？

解　不对，$z=1$ 不是 $f(z)$ 的本性奇点，这是因为函数的洛朗展开式是在 $|z-2|>1$ 内得到的，而不是在 $z=2$ 的圆环域内的洛朗展开式。

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{1}{z(z-1)^2}\right]=-1$$

孤立奇点的分类必须根据在这个奇点邻域内洛朗展开式来决定。

8．求下列各函数 $f(z)$ 在有限奇点处的留数：

1） $\dfrac{z+1}{z^2-2z}$；　2） $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$；　3） $\dfrac{1+z^4}{(z^2+1)^3}$；　4） $\dfrac{z}{\cos z}$；

5） $\cos\dfrac{1}{1-z}$；　6） $z^2\sin\dfrac{1}{z}$；　7） $\dfrac{1}{z\sin z}$；　8） $\dfrac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}$。

解　1） $\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim\limits_{z\to0}z\dfrac{z+1}{z^2-2z}=-\dfrac{1}{2}$，　$\mathrm{Res}[f(z),2]=\lim\limits_{z\to2}(z-2)\dfrac{z+1}{z^2-2z}=\dfrac{3}{2}$

2） $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$，$z=0$ 为分母的四级零点，是分子的一级零点，所以是 $f(z)$ 的三级极点。

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[z^3\cdot\frac{1-e^{2z}}{z^4}\right]=-\frac{4}{3}$$

或展开洛朗级数

$$f(z)=\frac{1}{z^4}\left[1-1-2z-\frac{1}{2!}4z^2-\frac{1}{3!}8z^3\cdots\right]$$

知 $\mathrm{Res}[f(z),0]=c_{-1}=-\dfrac{4}{3}$

3） $\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}]=\lim\limits_{z\to\mathrm{i}}\dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2}{dz^2}\left[(z-\mathrm{i})^3\dfrac{1+z^4}{(z^2+1)^3}\right]=-\dfrac{3}{8}\mathrm{i}$，

$$\operatorname{Res}\left[f(z),-\mathrm{i}\right]=\lim_{z\to-\mathrm{i}}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+\mathrm{i})^3\frac{1+z^4}{(z^2+1)^3}\right]=\frac{3}{8}\mathrm{i}$$

4） $\operatorname{Res}\left[f(z),k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]=\left.\dfrac{z}{(\cos z)'}\right|_{z=k\pi+\frac{\pi}{2}}=(-1)^{k+1}(k\pi+\dfrac{\pi}{2})$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

5） $\cos\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}},|z-1|>0$，知 $\operatorname{Res}\left[f(z),1\right]=c_{-1}=0$

6） $z^2\sin\dfrac{1}{z}=z^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!z^{2n-1}},|z|>0$，知 $\operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=c_{-1}=-\dfrac{1}{6}$

7） $\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{d}{dz}\left[z^2\dfrac{1}{z\sin z}\right]=0$， $\operatorname{Res}[f(z),k\pi]=\left.\dfrac{1}{(z\sin z)'}\right|_{z=k\pi}=\dfrac{(-1)^k}{k\pi},k=\pm1,\pm2,\cdots$

8） $\operatorname{Res}\left[f(z),(k+\dfrac{1}{2})\pi\mathrm{i}\right]=\left.\dfrac{\operatorname{sh}z}{(\operatorname{ch}z)'}\right|_{z=(k+\frac{1}{2})\pi\mathrm{i}}=1,k$为整数。

9．计算下列各积分（利用留数；圆周均取正向）

（1） $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\dfrac{\sin z}{z}dz$； （2） $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz$； （3） $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}}\dfrac{1-\cos z}{z^m}dz$，（其中 m 为整数）；

（4） $\oint\limits_{|z-2\mathrm{i}|=1}\operatorname{th}z\,dz$； （5） $\oint\limits_{|z|=3}\tan(\pi z)dz$； （6） $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}dz$（其中 n 为正整数，且 $|a|\neq1,|b|\neq1,|a|<|b|$）。

解（1） $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$， $\lim\limits_{z\to0}f(z)=1$ 故 $z=0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点则

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=c_{-1}=0$$

故原积分=0。

（2）在 C 内， $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ 以 $z=1$ 为其二级极点，则 $\operatorname{Res}\left[f(z),1\right]=\lim\limits_{z\to1}(e^{2z})'_{z=1}=2e^2$ 由留数基本定理有原积分=4 $\pi e^2\,\mathrm{i}$.

(3) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^m}=\dfrac{1}{z^{m-2}}(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{z^2}{4!}+\dfrac{z^4}{6!}-\ldots)$ 故以 $z=0$ 为其 $m-2$ 级极点。设 $I=\int_C f(z)dz$

当 $m\le2$ 时， $\operatorname{Res}[f(z),0]=c_{-1}=0$， $I=0$；

当 $m=2n>2$ 时， $\operatorname{Res}[f(z),0]=c_{-1}=0$， $I=0$；

当 $m=2n+1>2$ 时， $\operatorname{Res}[f(z),0]=(-1)^{n-1}/2n!=(-1)^{\frac{m-3}{2}}/(m-1)$ ！

由此 $I=(-1)^{\frac{m-3}{2}}2\pi\mathrm{i}/(m-1)!$ 或说 m 为大于或等于 3 的奇数时， $I=(-1)^{\frac{m-3}{2}}2\pi\mathrm{i}/(m-1)!$

（4） $f(z)=\operatorname{th}z=\dfrac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z},z_k=\left(k+\dfrac{1}{z}\right)\pi\mathrm{i}$ 为其一级极点 $(k=0,\pm1,\cdots)$ $k=0$ 时， $z_0=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}$ 在 $|z-2\mathrm{i}|=1$ 内，则

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\operatorname{sh}z_0=1 \text{故} \quad I=\oint_C f(z)dz=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[f(z),\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\right]=2\pi\mathrm{i}$$

（5） $f(z)=\tan\pi z$ 在$|z|=3$内有一级极点$z_k=k+\dfrac{1}{2}$ （$k=0,\pm1,\pm2,-3$），共 6 个。故

$\operatorname{Res}\left[\tan\pi,k+\dfrac{1}{2}\right]=\dfrac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\bigg|_{z=k+\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{\pi}$，由留数定理

$$\oint_C\tan\pi z dz=2\pi\mathrm{i}\sum\operatorname{Res}\left[f(z),z_k\right]=2\pi\mathrm{i}\cdot6\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\right)=-12\mathrm{i}$$

（6）当$1<|a|<|b|$时，被积函数在单位圆内解析，故积分为 0；

当$|a|<|b|<1$时，$\operatorname{Res}[f(z),a]=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to a}\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(z-a)^n\dfrac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}=\dfrac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(a-b)^{2n-1}}$

$\operatorname{Res}[f(z),b]=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to a}\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(z-b)^n\dfrac{1}{(z-a)^n(z-b)^n}=\dfrac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(b-a)^{2n-1}}$，故积分为 0；

当$|a|<1<|b|$时，积分＝$\dfrac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{[(n-1)!]^2(a-b)^{2n-1}}$

10．判定$z=\infty$是下列各函数的什么奇点？并求出在∞的留数。

1） $e^{\frac{1}{z^2}}$ ；　　2） $\cos z-\sin z$ ；　　3） $\dfrac{2z}{3+z^2}$。

解　1）可去奇点，∞的留数为零。$\varphi(t)=f(z)=f(\dfrac{1}{t})=e^{t^2}$ ；

2）$\varphi(t)=f(z)=f(\dfrac{1}{t})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$，故$z=\infty$为函数的本性奇点，又由于$\cos z-\sin z$在整个复平面解析，故$\infty$的留数为零。

3） $\dfrac{2z}{3+z^2}=\dfrac{2}{z}(1-\dfrac{3}{z^2}+\dfrac{9}{z^4}+\cdots)$不含正幂项，故为可去奇点，留数为$c_{-1}=2$

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\operatorname{Res}[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]=\operatorname{Res}[\frac{2}{z(1+3z^2)},0]=2\text{。}$$

11．求$\operatorname{Res}[f(z),\infty]$的值，如果

（1） $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-1}$　　（2） $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$

解（1） $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-1}$有两个一级极点$z=1,z=-1,$故由全部留数和为零的定理，则

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}[f(z),1]-\operatorname{Res}[f(z),-1]=-\lim_{z\to1}\frac{e^z}{z+1}-\lim_{z\to-1}\frac{e^z}{z-1}$$

$$=-\frac{e}{2}+\frac{e^{-1}}{2}=-\operatorname{sh}1$$

（2） $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)^4(z-4)}$以$z=0$为一级极点，$z=-1$为四级极点，$z=4$为一级极点，用有限奇点留数和来求无穷远点的留数，计算过程太麻烦，一般采用直接在$z=\infty$的圆环域（解析）$4<|z|<\infty$内展开为洛朗级数的方式，则有

$$f(z)=\frac{1}{z(z+1)^4(z-4)}=\frac{1}{z\cdot z^4\left(1+\frac{1}{z}\right)^4\cdot z\left(1-\frac{4}{z}\right)}=\frac{1}{\left[z^6\left(1+\frac{1}{z}\right)^4\left(1-\frac{4}{z}\right)\right]}=\frac{1}{z^6}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right]^4\cdot\left[\frac{1}{1-\frac{4}{z}}\right]$$

$$=\frac{1}{z^6}\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right)^4\left(1+\frac{4}{z}+\frac{16}{z^2}+\ldots\right)$$

显见 $c_{-1}=0$, 故 $\text{Res}[f(z),\infty]=0$．（注也可利用规则 IV）。

12．计算下列各积分，C 为正向圆周。

1) $\oint_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz$，$C:|z|=3$；　　2) $\oint_C \frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$，$C:|z|=2$；

3) $\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}dz$　（n 为一整数），$C:|z|=r>1$。

解　1）函数 $\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}$ 在 $|z|=3$ 的外部，除 ∞ 点外没有其他奇点，因此根据定理二与规则 IV，

$$\oint_C \frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}dz=-2\pi\mathrm{i}\,\text{Res}[f(z),\infty]=2\pi\mathrm{i}\,\text{Res}[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\,\text{Res}[\frac{1}{z(1+z^2)^2(1+2z^4)^3},0]=2\pi\mathrm{i}$$

2）$f(z)=\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}$ 有奇点，$z=-1$，$z=0$，$z=-1$ 为一级极点，而 $z=0$ 为本性奇点，在 $2<|z|<+\infty$ 内展开 $f(z)$，则

$$f(z)=\frac{z^3}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}e^{\frac{1}{z}}=\frac{z^2}{\left(1+\frac{1}{z}\right)}\cdot e^{\frac{1}{z}}=z^2\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\ldots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots\right)$$

$$=\left(z^2-z+1-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\ldots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots\right)=z^2+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3}\frac{1}{z}+\ldots$$

得 $-c_{-1}=\frac{1}{3}$, 故原积分 $=2\pi i(c_{-1})=-\frac{2}{3}\pi i$．

3）当 $n=1$ 时，$\oint_C \frac{z^2}{1+z}dz=2\pi\mathrm{i}\,\text{Res}[f(z),-1]=2\pi\mathrm{i}$；当 $n\neq 1$ 时，

$$\frac{z^{2n}}{1+z^n}=\frac{z^n}{1+z^{-n}}=z^n(1-\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^{2n}}+\cdots)=z^n-1+\frac{1}{z^n}+\cdots$$

知 $c_{-1}=0$，故 $\oint_C \frac{z^{2n}}{1+z^n}dz=0$。

13 计算下列积分

1) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin\theta}d\theta$；　　2）$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta$　$(a>b>0)$；　　3）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$；

4) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$；　　5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4x+5}dx$；　　6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$。

解　1）由于被积函数的分母 $5+3\sin\theta$ 在 $0\le\theta\le 2\pi$ 内不为零，因而积分有意义。

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{5+3\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}}\frac{dz}{\mathrm{i}z}=\oint_{|z|=1}\frac{2}{3z^2+10\mathrm{i}z-3}dz=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),-\frac{\mathrm{i}}{3}]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\frac{2}{6z+10\mathrm{i}}\Big|_{z=-\frac{\mathrm{i}}{3}}=\frac{\pi}{2}$$

2）由于被积函数的分母 $a+b\cos\theta$ 在 $0\le\theta\le 2\pi$ 内不为零，因而积分有意义。

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{(\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z})^2}{a+b\frac{z^2+1}{2z}}\frac{dz}{\mathrm{i}z}=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{i}(z^2-1)^2}{2z^2(bz^2+2az+b)}dz=2\pi\mathrm{i}\{\mathrm{Re}\,s[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}]\}$$

又　$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{(-1+z^2)(a+3az^2+bz(3+z^2))}{(b+2az+bz^2)^2}\Big|_{z=0}=-\frac{a\mathrm{i}}{b^2}$，

$$\mathrm{Res}[f(z),\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}]=\frac{\mathrm{i}(z^2-1)^2}{4z(b+3az+2bz^2)}\Big|_{z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}}=\frac{\mathrm{i}\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$$

故 $I=\frac{2\pi}{b^2}(a-\sqrt{a^2-b^2})$。

3）函数 $f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^2}$ 在上半平面内只有 2 级极点 i，且

$$\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}]=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{d}{dz}(z-\mathrm{i})^2f(z)=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+\mathrm{i})^2}=-\frac{2}{(2\mathrm{i})^3}=-\frac{\mathrm{i}}{4},$$

故　$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}]=\frac{\pi}{2}。$$

4）注意到被积函数为偶函数，

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$$ $e^{\frac{\pi}{2}i}$

函数 $f(z)=\frac{z^2}{1+z^4}$ 在上半平面内只有一级极点 $e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}},e^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}}$，且

$\frac{1}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}}=\frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i}=\frac{1-i}{\sqrt{2}\cdot 4}$

$$\mathrm{Res}[f(z),\frac{\pi\mathrm{i}}{4}]=\frac{z^2}{4z^3}\Big|_{z=e^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}}=\frac{1-\mathrm{i}}{4\sqrt{2}}；\ \mathrm{Res}[f(z),\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}]=\frac{z^2}{4z^3}\Big|_{z=e^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}}}=-\frac{1+\mathrm{i}}{4\sqrt{2}}$$

故　$$I=\frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}(\mathrm{Res}[f(z),\frac{\pi\mathrm{i}}{4}]+\mathrm{Res}[f(z),\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}])=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}。$$

$\frac{i}{4\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)}=$

5）对于 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{x^2+4x+5}dx$，令 $R(z)=\frac{1}{z^2+4z+5}$，则 $z=-2+\mathrm{i}$ 为上半平面内的 $R(z)$ 的一级极

点，故有：$\mathrm{Res}\left[R(z)e^{\mathrm{i}z},\mathrm{i}\right]=\left.\dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{2z+4}\right|_{z=-2+\mathrm{i}}=-\dfrac{e^{-1}(\sin 2+\mathrm{i}\cos 2)}{2}$，

则原积分$=\mathrm{Re}\{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[R(z)e^{\mathrm{i}z},-2+\mathrm{i}]\}=\pi e^{-1}\cos 2$。

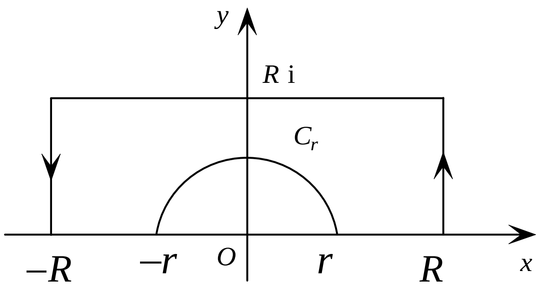
6）对于 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{xe^{\mathrm{i}x}}{1+x^2}dx$，令 $R(z)=\dfrac{z}{1+z^2}$，则 $z=\mathrm{i}$ 为上半平面内的 $R(z)$ 的一级极点，故有：

$$\mathrm{Res}\left[R(z)e^{\mathrm{i}z},\mathrm{i}\right]=\lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\frac{ze^{\mathrm{i}z}}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}=\frac{e^{-1}}{2}$$

$I=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[R(z)e^{\mathrm{i}z},\mathrm{i}\right]=\pi e^{-1}\mathrm{i}$，则原积分$=\mathrm{Im}\{I\}=\pi e^{-1}$

14．试用下图中的积分路线，求例 4 中的积分：$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$。

解　$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$，采用 $e^{\mathrm{i}z}/z$ 沿如如图所示闭曲线来计算上式右端的积分（$z=0$ 为 $e^{\mathrm{i}z}/z$ 的一级极点，且在实轴上）。由 Cauchy 基本定理，有



第 14题 图

$$\int_{C_r}\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz+\int_r^R\frac{e^{\mathrm{i}x}}{x}dx+\int_R^{R+R\mathrm{i}}\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz+\int_{R+R\mathrm{i}}^{-R+R\mathrm{i}}\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz+\int_{-R+R\mathrm{i}}^{-R}\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz+\int_{-R}^{-r}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{x}dx=0,$$

令 $x=-t$，则有 $\int_{-R}^{-r}\dfrac{e^{\mathrm{i}x}}{x}dx=-\int_r^R\dfrac{e^{-\mathrm{i}x}}{x}dx$，所以 $\int_r^R\dfrac{e^{\mathrm{i}x}}{x}dx+\int_{-R}^{-r}\dfrac{e^{\mathrm{i}x}}{x}dx=2\mathrm{i}\int_r^R\dfrac{\sin x}{x}dx$。

又 $\left|\int_{R+R\mathrm{i}}^{-R+R\mathrm{i}}\dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz\right|=\left|\int_R^{-R}\dfrac{e^{\mathrm{i}(x+R\mathrm{i})}}{x+R\mathrm{i}}dx\right|\le\int_R^{-R}\dfrac{e^{-R}}{\sqrt{x^2+R^2}}dx\le 2e^{-R}$，知 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{R+R\mathrm{i}}^{-R+R\mathrm{i}}\dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz=0$；

$\left|\int_R^{R+R\mathrm{i}}\dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz\right|=\left|\int_0^R\dfrac{e^{\mathrm{i}(R+\mathrm{i}y)}}{R+\mathrm{i}y}\mathrm{i}\,dy\right|\le\int_0^R\dfrac{e^{-y}}{\sqrt{R^2+y^2}}dy\le\dfrac{1-e^{-R}}{R}$，同理 $\left|\int_{-R+R\mathrm{i}}^{-R}\dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz\right|\le\dfrac{1-e^{-R}}{R}$，知

$$\lim_{R\to+\infty}\left\{\int_R^{R+R\mathrm{i}}\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz+\int_{-R+R\mathrm{i}}^{-R}\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz\right\}=0$$

和例 4 采用同样的方法得到　$\lim\limits_{r\to0}\int_{C_r}\dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z}dz=-\pi\mathrm{i}$。

故 $2\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\pi\mathrm{i}$，即 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\dfrac{\pi}{2}$。

15．利用公式（5.4.1）计算下列积分：

1）$\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{1}{z}dz=2\pi\mathrm{i}$；　　2）$\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{z}{z^2-1}dz=2\pi\mathrm{i}$；

3） $\oint_{|z|=3} \tan z dz = -4\pi \mathrm{i}$ ；　　　　4） $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)} dz = 0$ 。

16．设 C 为区域 D 内的一条正向简单闭曲线，z_0 为 C 内一点。如果 $f(z)$ 在 D 内解析，且 $f(z_0)=0$，$f'(z_0)\neq 0$。在 C 内 $f(z)$ 无其他零点。试证：

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = z_0 。$$

证　$f(z)$ 在 C 内只有一级零点 z_0，而 $\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)} + \frac{z_0 f'(z)}{f(z)}$，知 z_0 为函数 $\frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)}$ 的可去奇点，故由留数定理和（5.4.1）知

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)}dz + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{z_0 f'(z)}{f(z)}dz = 0 + z_0 = z_0 。$$

17．若 $\varphi(z)$ 在 $C:|z|=1$ 上及其内部解析，且在 C 上 $|\varphi(z)|<1$，证明在 C 内只有一个点 z_0 使 $\varphi(z_0)=z_0$。

证　令 $f(z)=-z$，则在 C 上，$|f(z)|=1$，而 $|\varphi(z)|<1$，故由路西定理，知方程 $z=\varphi(z)$ 与方程 $f(z)=0$ 在 C 内有相同个数的根，从而 $\varphi(z)=z$ 在 $|z|<1$ 只有一根。

18．证明：当 $|a|>e$，则方程 $e^z = az^n$ 在圆 $|z|=1$ 内有 n 个根。

证　设 $f(z)=-az^n$，$g(z)=e^z$，在 $|z|\le 1$ 内均解析，且当 $|z|=1$ 时，$|-az^n|=|-a|z^n|=|a|$，$|e^z|=e^{\cos\varphi}\le e$ 而 $|a|>e$，故 $|f(z)|=|-az^n|=|a|>|e^z|=|g(z)|$。

根据路西定理知，$f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 在 $C:|z|=1$ 内的零点个数相同，即 $e^z = az^n$ 的根的个数与 $-az^n=0$ 的根的个数相同，即为 n。

19．证明方程 $z^7 - z^3 + 12 = 0$ 的根都在圆环域 $1\le |z| \le 2$ 内。

证　当 $|z|<2$ 时，取 $f(z)=z^7$，$g(z)=12-z^3$，当 $|z|=2$ 时，

$$|g(z)| = |12-z^3| \le 12 + z^3 \le 20 < |z^7| = |f(z)|$$

所以 $z^7 - z^3 + 12 = 0$ 的根的个数与 z^7 的根的个数相同，因此，$z^7 - z^3 + 12 = 0$ 的根全部在|z|=2 的内部。

当 $|z|<1$ 时，取 $f(z)=12$，$g(z)=z^7-z^3$，当 $|z|=1$ 时，$|f(z)|>|z^7|+|z^3|\ge |z^7-z^3| = |g(z)|$，故 $z^7 - z^3 + 12 = 0$ 的根与 $f(z)=12$ 的根的个数相同，即在 $|z|=1$ 内无根，综上所述，$z^7 - z^3 + 12 = 0$ 的根全在 $1\le |z| \le 2$ 内。