理论力学

Engineering mechanics
Theoretical mechanics

运 动 学

第五章 点的运动学

物体在不平衡力系作用下 → 运动

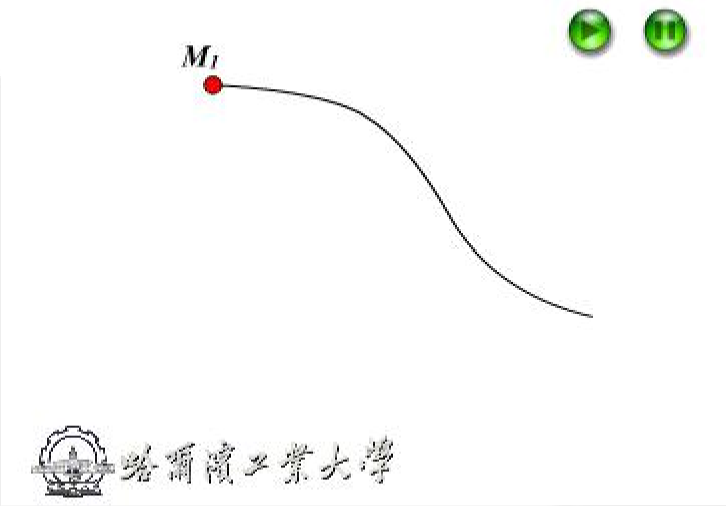
受力情况　初始状态　物体惯性

运动学：暂不考虑影响物体运动的物理因素，单独研究物体运动几何性质（轨迹、运动方程、速度、加速度等）的科学。

参考体 → 参考系

§5-1　矢量法

运动方程　$\vec{r}=\vec{r}(t)$



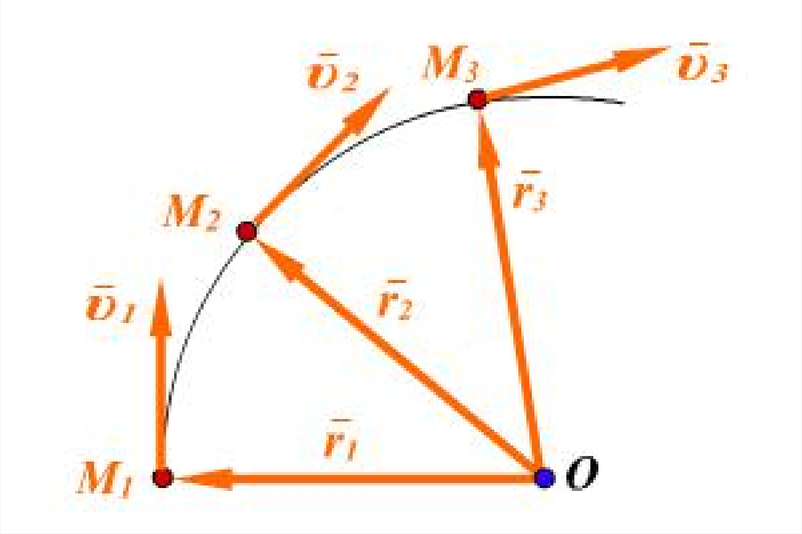
速度　$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{r}}$

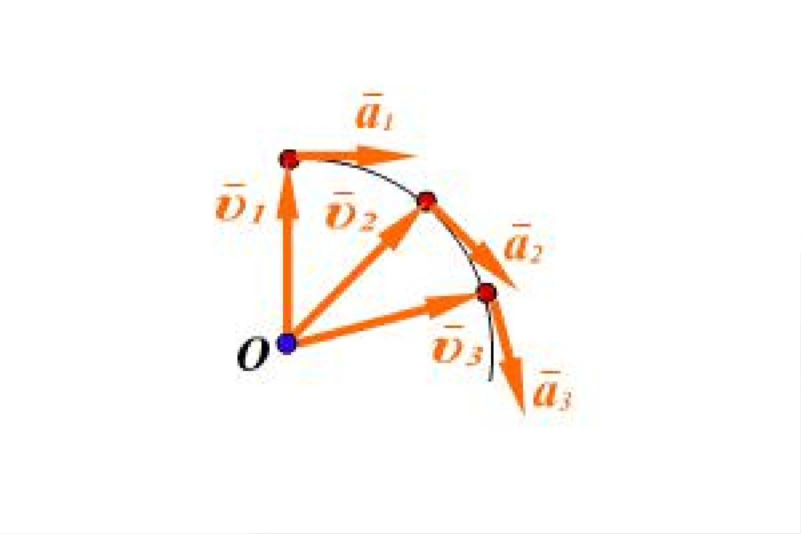
单位　m/s

加速度　$\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}$　　单位　m/s^2

提问：如何确定速度和加速度的方向？

矢端曲线





速度

矢径矢端曲线切线

加速度

速度矢端曲线切线

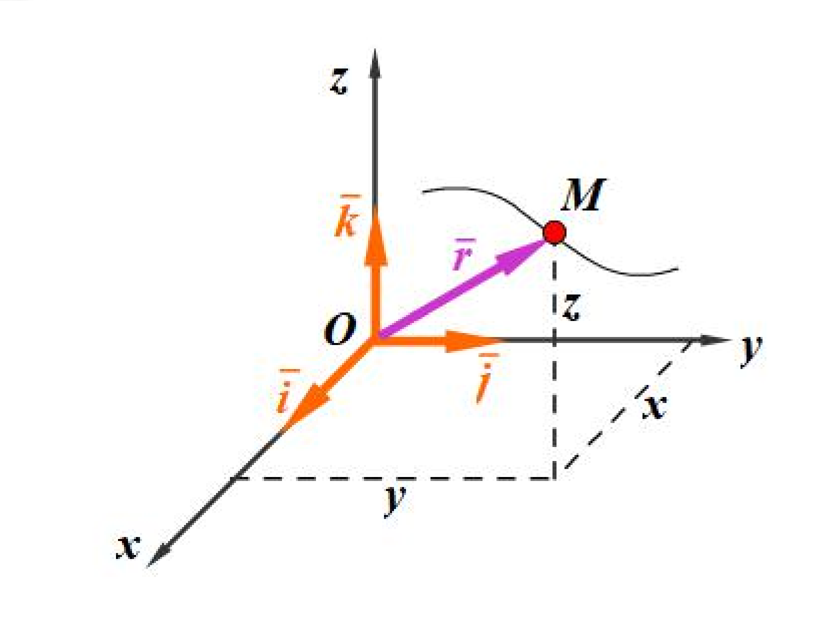
§ 5-2　直角坐标法

运动方程

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$



直角坐标与矢径坐标之间的关系

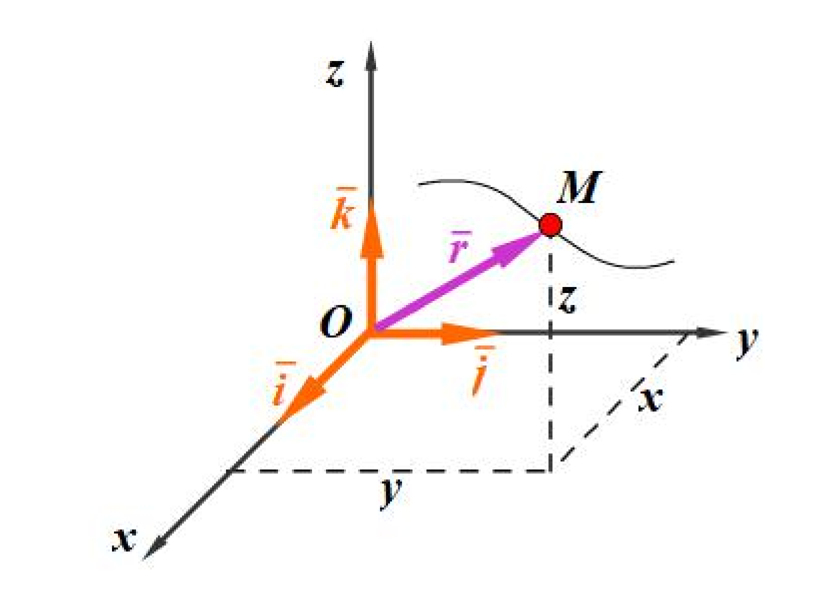
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

速度 $\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$



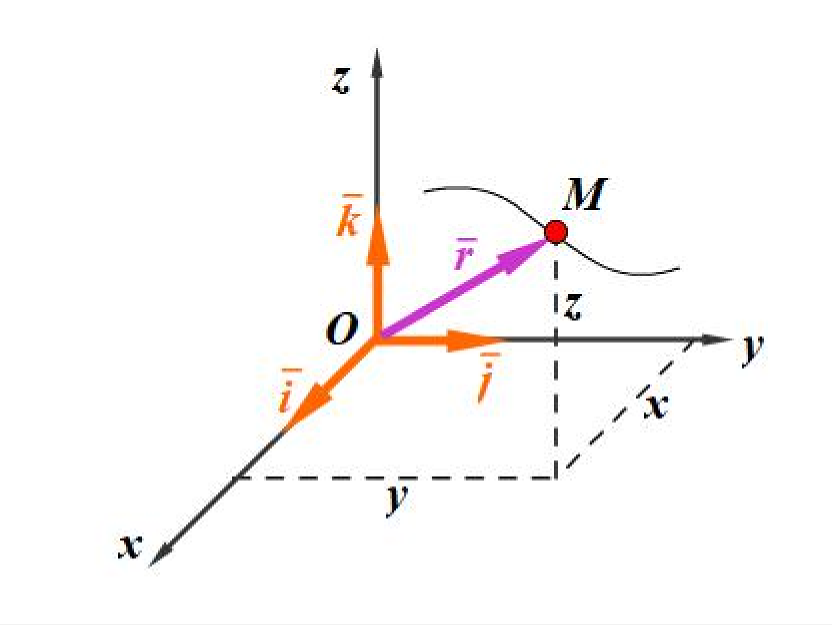
加速度

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$

$$a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$



例 5-1

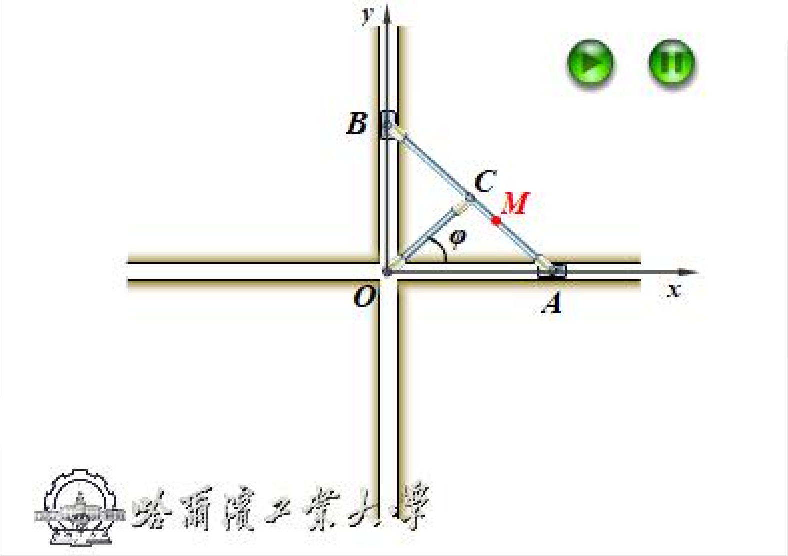
已知：椭圆规的曲柄***OC*** 可绕定轴***O*** 转动，其端点***C*** 与规尺***AB*** 的中点以铰链相连接，而规尺***A***，***B*** 两端分别在相互垂直的滑槽中运动，$OC = AC = BC = l, MC = a, \varphi = \omega t$

求：① ***M*** 点的运动方程；

② 轨迹；

③ 速度；

④ 加速度。



解： 点M作曲线运动，取坐标系Oxy如图所示。

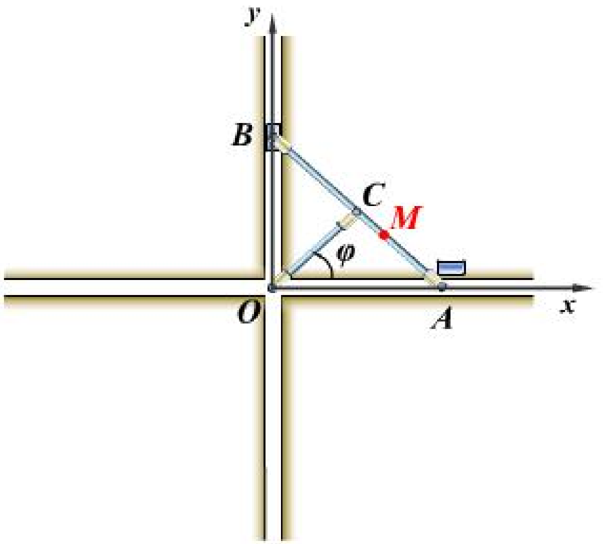
运动方程

$$x = (OC + CM)\cos\varphi = (l + a)\cos\omega t$$

$$y = AM\sin\phi = (l - a)\sin\omega t$$

消去t，得轨迹

$$\frac{x^2}{(l+a)^2} + \frac{y^2}{(l-a)^2} = 1$$



速度

$$v_x = \dot{x} = -(l+a)\omega\sin\omega t$$

$$v_y = \dot{y} = (l-a)\omega\cos\omega t$$

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(l+a)^2\omega^2\sin^2\omega t + (l-a)^2\omega^2\cos^2\omega t}$$

$$= \omega\sqrt{l^2 + a^2 - 2al\cos 2\omega t}$$

$$\cos(\vec{v},\vec{i}) = \frac{v_x}{v} = -\frac{(l+a)\sin\omega t}{\sqrt{l^2 + a^2 - 2al\cos 2\omega t}}$$

$$\cos(\vec{v},\vec{j}) = \frac{v_y}{v} = \frac{(l-a)\cos\omega t}{\sqrt{l^2 + a^2 - 2al\cos 2\omega t}}$$

加速度

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -(l+a)\omega^2 \cos\omega t$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = -(l-a)\omega^2 \sin\omega t$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(l+a)^2 \omega^4 \cos^2 \omega t + (l-a)^2 \omega^4 \sin^2 \omega t}$$

$$= \omega^2 \sqrt{l^2 + a^2 + 2al\cos 2\omega t}$$

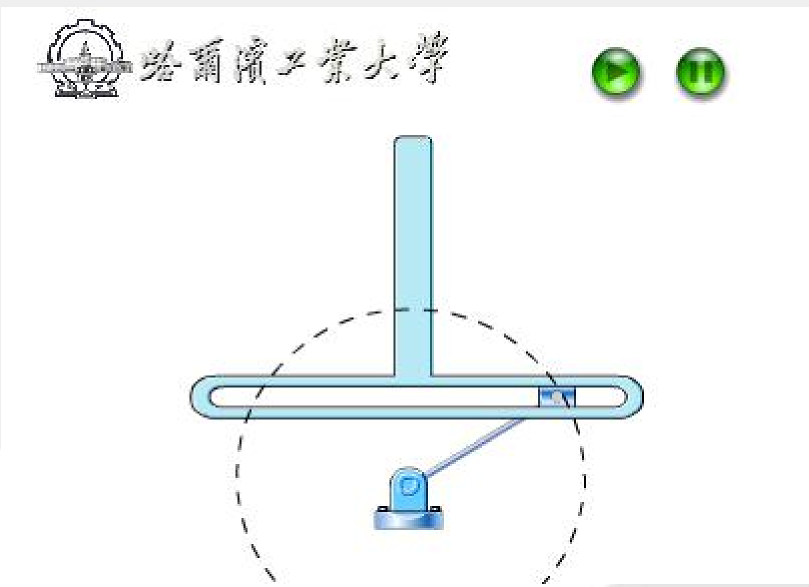
$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{a} = -\frac{(l+a)\cos\omega t}{\sqrt{l^2 + a^2 + 2al\cos 2\omega t}}$$

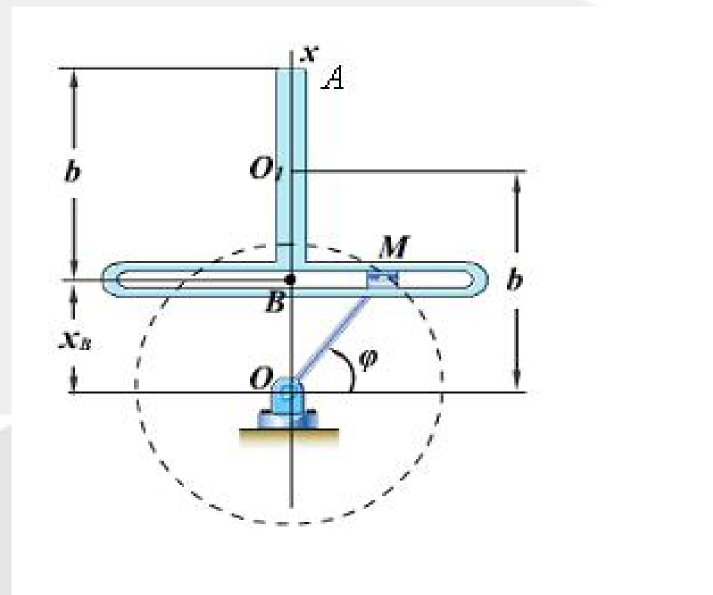
$$\cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{a} = -\frac{(l-a)\sin\omega t}{\sqrt{l^2 + a^2 + 2al\cos 2\omega t}}$$

例5-2

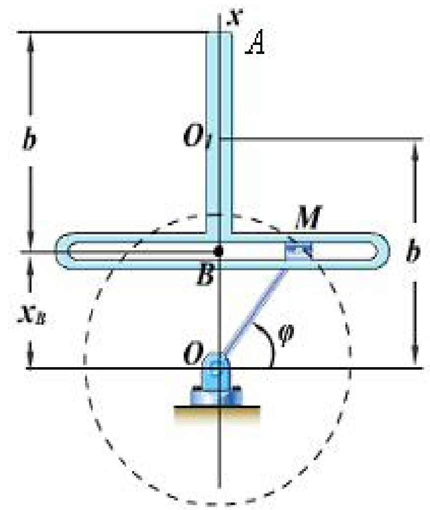
已知：正弦机构如图所示。曲柄OM长为r，绕O轴匀速转动，它与水平线间的夹角为$\varphi=\omega t+\theta$,其中 θ为$t=0$时的夹角，为一常数。动杆上A，B两点间距离为b。

求：点A和B的运动方程及点B的速度和加速度。





解： A，B点都作直线运动，取Ox轴如图所示。



运动方程

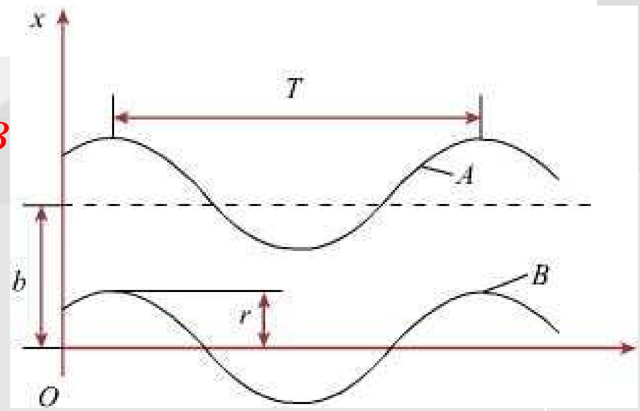
$$x_A = b + r\sin\phi = b + r\sin(\omega t + \theta)$$

$$x_B = r\sin\phi = r\sin(\omega t + \theta)$$

B点的速度和加速度

$$v_B = \dot{x}_B = r\omega\cos(\omega t + \theta)$$

$$a_B = \ddot{x}_B = -r\omega^2\sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 x_B$$



周期运动

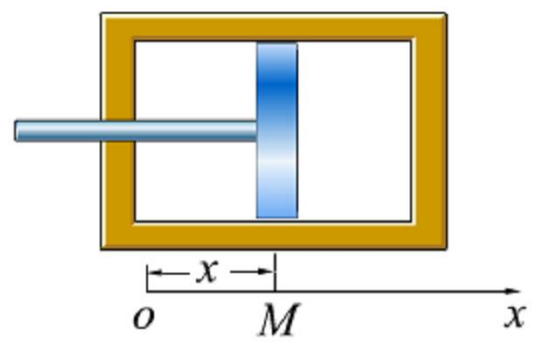
$$x(t+T) = x(t)$$

$$f = \frac{1}{T}$$ 频率

例5-3

已知：如图所示，当液压减振器工作时，它的活塞在套筒内作直线往复运动。设活塞的加速度 $\vec{a}=-k\vec{v}$（$\vec{v}$ 为活塞的速度，k 为比例常数），初速度为 $\vec{v}_0$。

求：活塞的运动规律。



解： 活塞作直线运动，取坐标轴Ox如图所示

由 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$

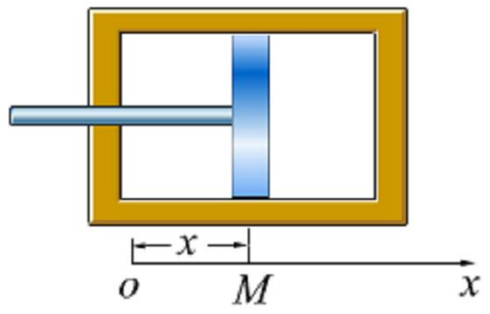
得 $\displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=-k\int_0^t\mathrm{d}t$

$\ln\dfrac{v}{v_0}=-kt$， $v=v_0\mathrm{e}^{-kt}$

由 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0\mathrm{e}^{-kt}$

得 $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t v_0\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t$

$x=x_0+\dfrac{v_0}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-kt}\right)$



§ 5-3 自然法

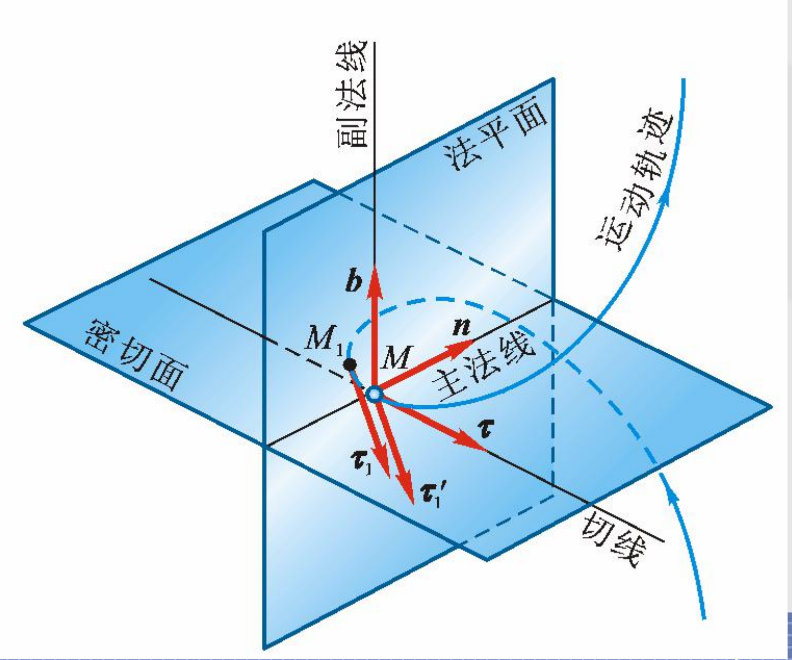
自然法：利用点的运动轨迹建立弧坐标和自然轴系，利用它们描述和分析点的运动的方法。

以点M为原点，以切线、主法线和副法线为坐标轴组成的正交坐标系称为曲线在点M的自然坐标系，这三个轴称为自然轴。

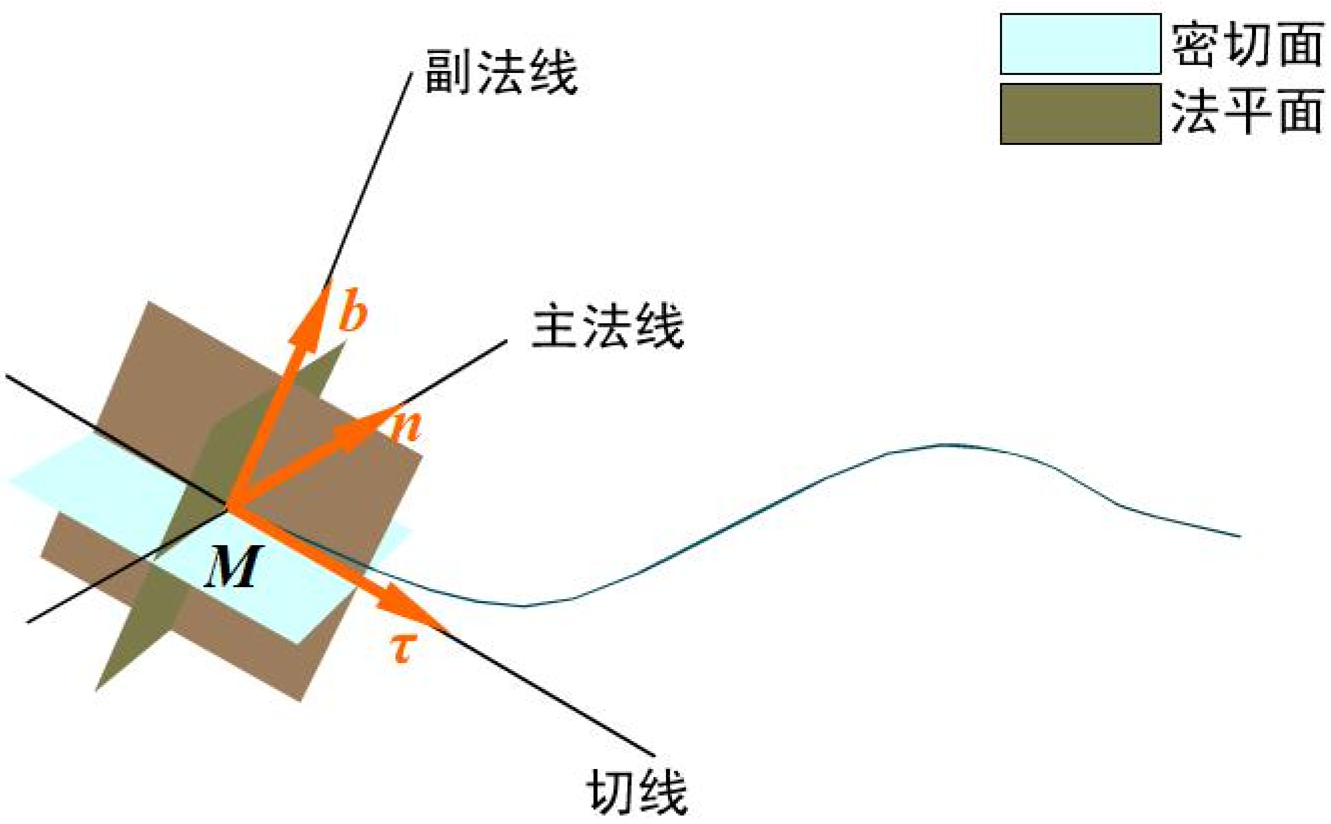
切向单位矢量 $\vec{\tau}$

主法线单位矢量 $\vec{n}$

副法线单位矢量 $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$

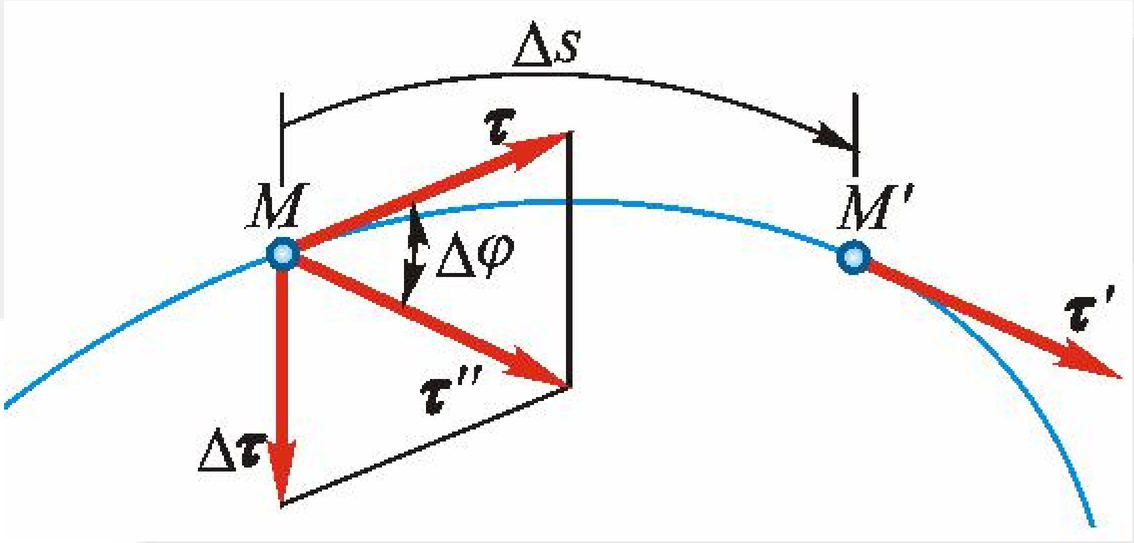


自然坐标轴的几何性质

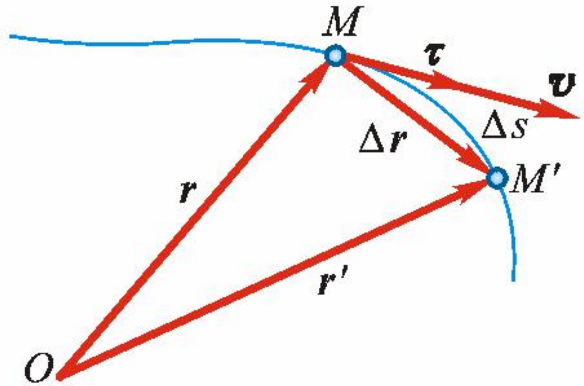


因为 $\left|\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}\varphi}\right|\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{1}{\rho}$ 方向同 $\vec{n}$

所以 $\vec{n} = \rho\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s}$



点的速度



$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}=v\vec{\tau}$$

点的加速度 $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}$

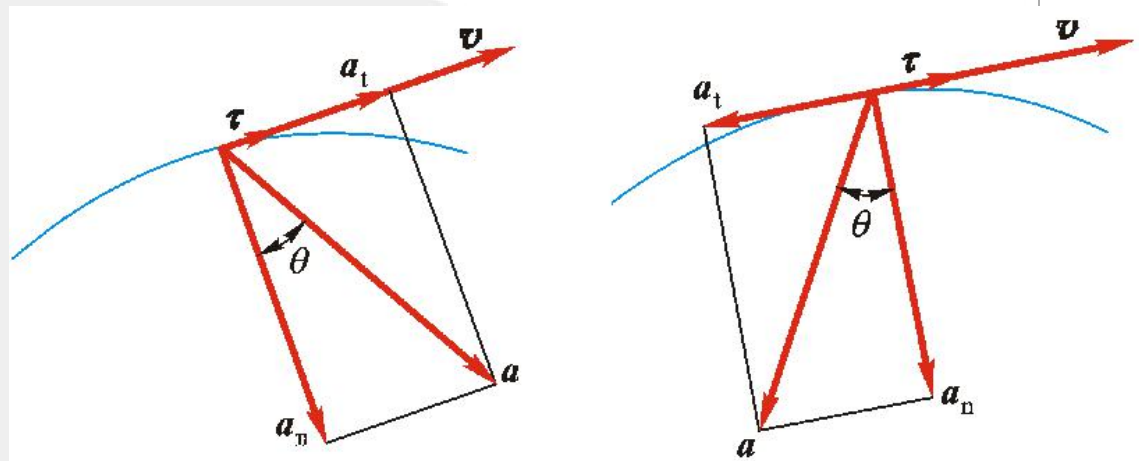
代入 $\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{v}{\rho}\vec{n}$

则 $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\vec{n}=a_t\vec{\tau}+a_n\vec{n}$

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$ ——切向加速度

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{\rho}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2$$ ——法向加速度

$$a=\sqrt{a_{\mathrm{t}}^2+a_{\mathrm{n}}^2}$$



曲线匀速运动 $a_{\mathrm{t}}=0, v=v_0=$ 常数 $, s=s_0+v_0 t$

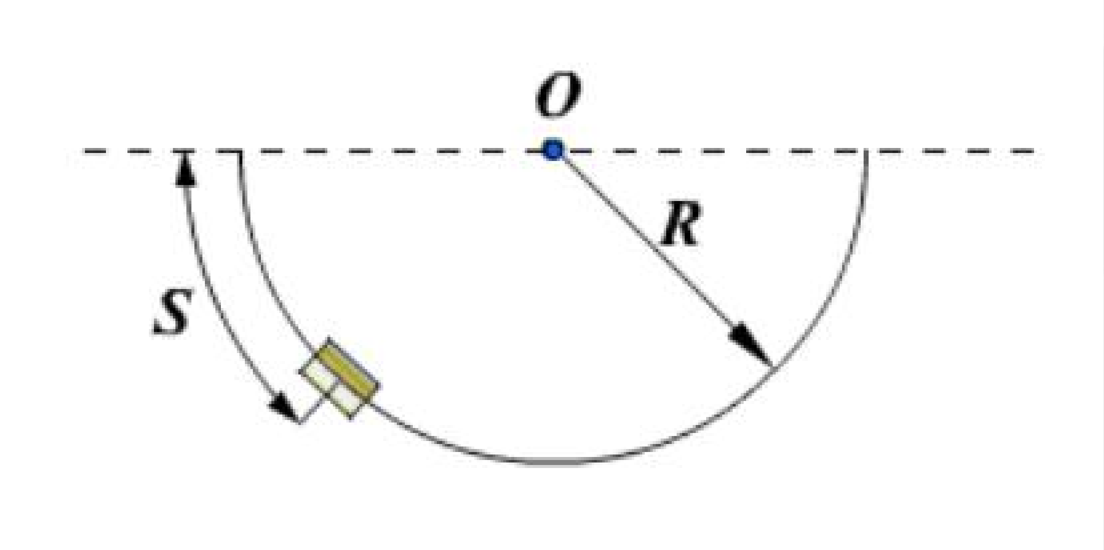
曲线匀变速运动

$$a_{\mathrm{t}}=\text{常数}, v=v_0+a_{\mathrm{t}}t, s=s_0+v_0 t+\frac{1}{2}a_{\mathrm{t}}t^2$$

例5-4

已知：列车沿半径为R=800m的圆弧轨道作匀加速运动。如初速度为零，经过2min后，速度到达54km/h。

求：列车起点和末点的加速度。



解： 列车作曲线加速运动，取弧坐标如上图。

由 $a_t =$ 常数 $, v_0 = 0$ 有 $v = a_t t$

$$a_t = \frac{v}{t} = \frac{15\,\text{m/s}}{120\text{s}} = 0.125\,\text{m/s}^2$$

① $t = 0,\quad a_n = 0 \qquad a = a_t = 0.125\,\text{m/s}^2$

② $t = 2\text{min} = 120\text{s}$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(15\,\text{m/s})^2}{800\text{m}} = 0.281\,\text{m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 0.308\,\text{m/s}^2$$

例5-5

已知点的运动方程为x=2sin 4t m，y=2cos 4t m，z=4t m。求：点运动轨迹的曲率半径 ρ 。

解： 由点M的运动方程，得

$$v_x=\dot{x}=8\cos 4t,\quad a_x=\ddot{x}=-32\sin 4t$$

$$v_y=\dot{y}=-8\sin 4t,\quad a_y=\ddot{y}=-32\cos 4t$$

$$v_z=\dot{z}=4,\ a_z=\ddot{z}=0$$

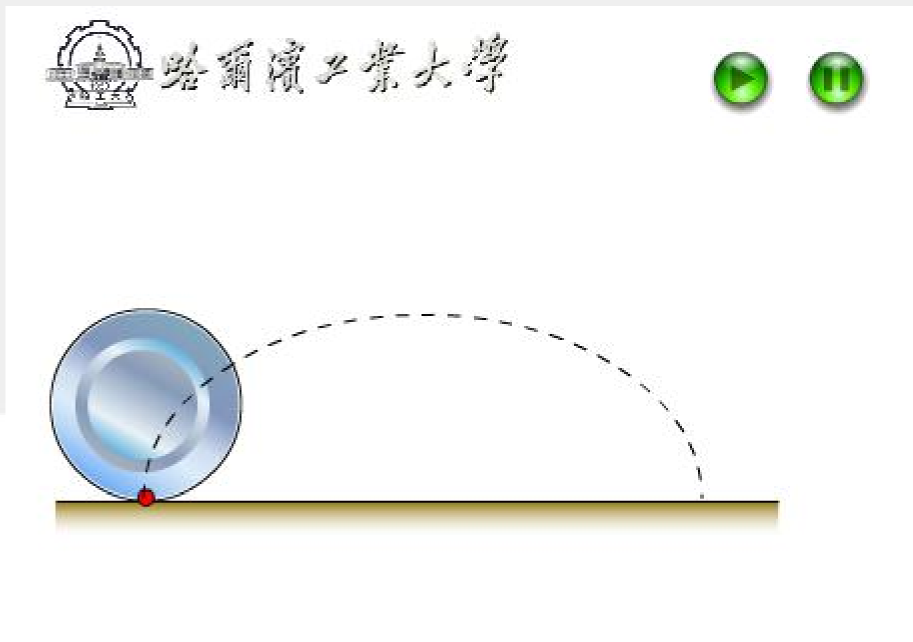
从而 $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{80}\mathrm{m/s},\ a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=32\mathrm{m/s^2}$

$$a_\mathrm{t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0,a_\mathrm{n}=a=32\,\mathrm{m/s}^2$$

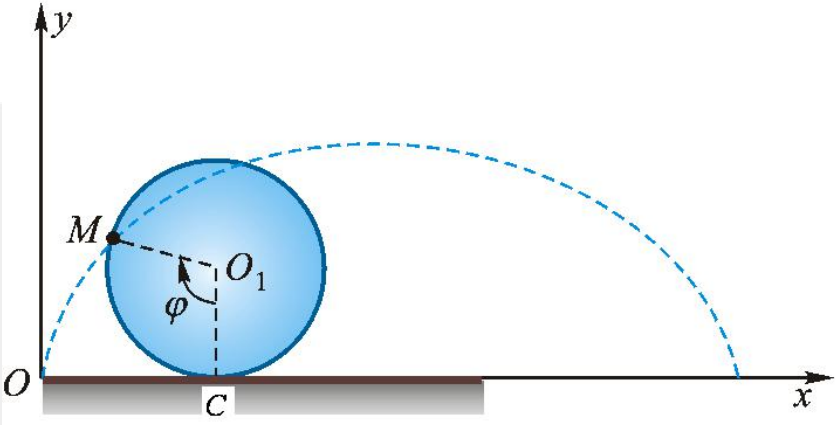
故 $\rho=\dfrac{v^2}{a_\mathrm{n}}=2.5\mathrm{m}$

例5-6

已知：半径为r的轮子沿直线轨道无滑动地滚动（称为纯滚动），设轮子转角 $\varphi=\omega t$（ω 为常值），如图所示。求用直角坐标和弧坐标表示的轮缘上任一点M的运动方程，并求该点的速度、切向加速度及法向加速度。



解：M点作曲线运动，取直角坐标系如图所示。



由纯滚动条件

$$OC = \overline{MC} = r\varphi = r\omega t$$

从而 $x = OC - O_1M\sin\varphi = r(\omega t - \sin\omega t)$

$$y = O_1C - O_1M\cos\varphi = r\left(1 - \cos\omega t\right)$$

$$v_x=\dot{x}=r\omega(1-\cos\omega t),\quad v_y=\dot{y}=r\omega\sin\omega t$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=r\omega\sqrt{2(1-\cos\omega t)}=2r\omega\sin\frac{\omega t}{2}\quad(0\le\omega t\le 2\pi)$$

$$s=\int_0^t v\mathrm{d}t=\int_0^t 2r\omega\sin\frac{\omega t}{2}\mathrm{d}t=4r(1-\cos\frac{\omega t}{2})\qquad(0\le\omega t\le 2\pi)$$

$$a_x=\ddot{x}=r\omega^2\sin\omega t,\quad a_y=\ddot{y}=r\omega^2\cos\omega t$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=r\omega^2$$

又点M的切向加速度为 $a_t=\dot{v}=r\omega^2\cos\dfrac{\omega t}{2}$

$$\Rightarrow\quad a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=r\omega^2\sin\frac{\omega t}{2}$$