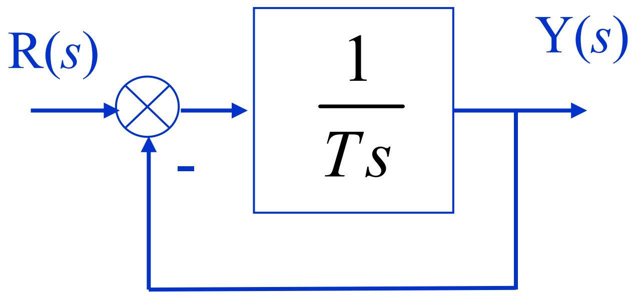
第三章 控制系统的时域分析

二、一阶系统的数学模型

当控制系统的数学模型为一阶微分方程时,称其为一阶系统.

一阶系统框图:



一阶系统闭环传递函数: $\Phi(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$

时间常数

二、一阶系统时域响应及性能分析

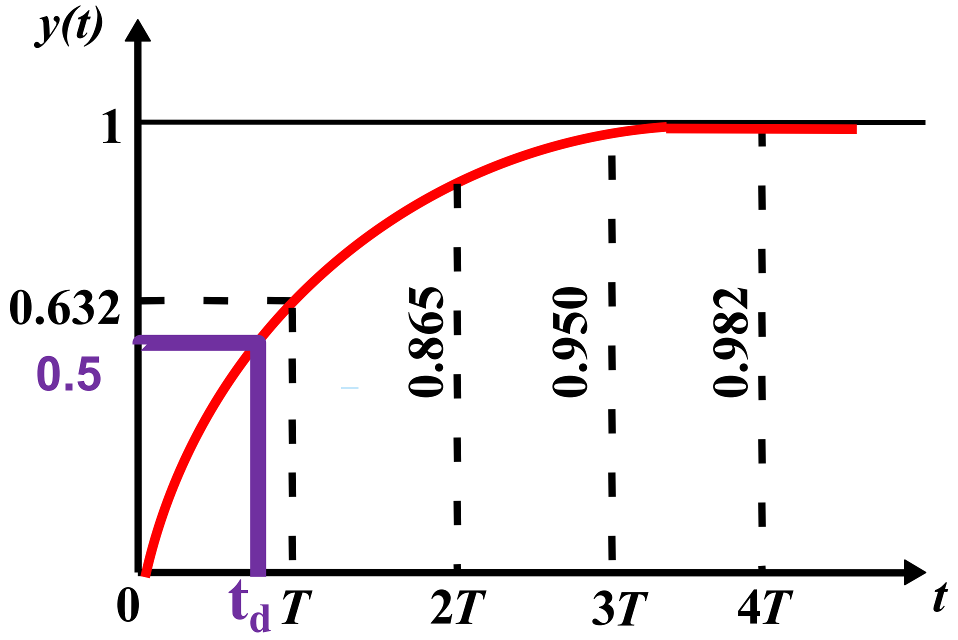
1、单位阶跃响应

$$r(t)=1, R(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=R(s)\Phi(s)=\frac{1}{s(Ts+1)}=\frac{1}{s}-\frac{T}{Ts+1}$$

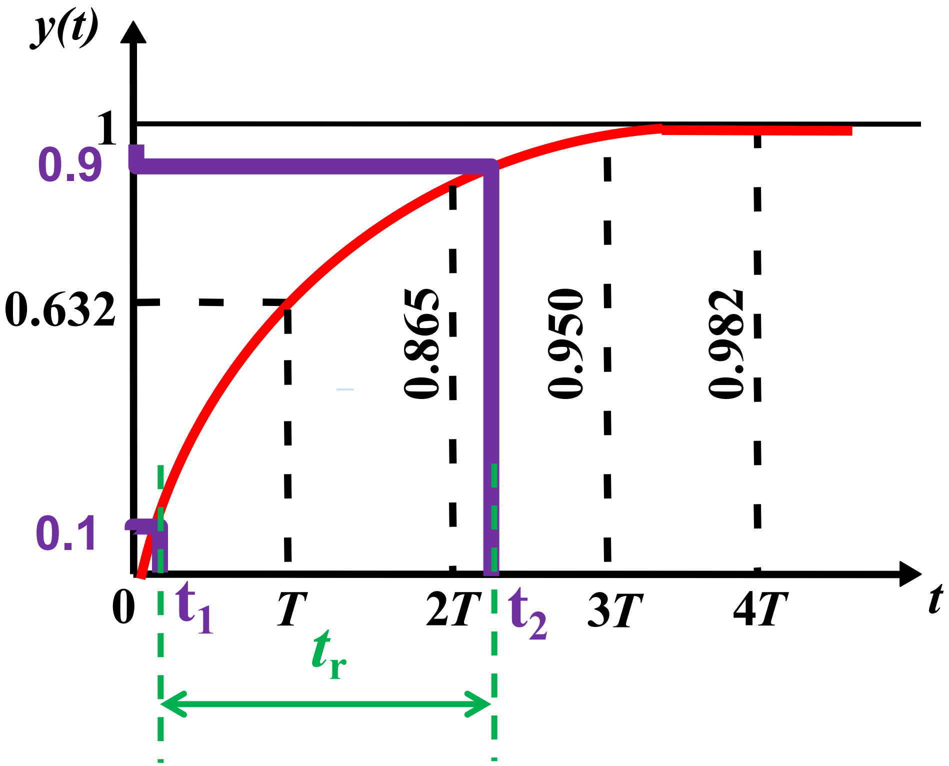
$$y(t)=1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}, t\geq 0$$

3.3 一阶系统的时域响应



<u>延迟时间</u>t_d：$y(t)$上升到稳态的50%所需的时间。

$$0.5 = 1 - e^{-\frac{t_d}{T}} \Longrightarrow t_d \approx 0.693T$$



$$0.1 = 1 - e^{-\frac{t_1}{T}} \Rightarrow$$

$$t_1 \approx 0.10536T$$

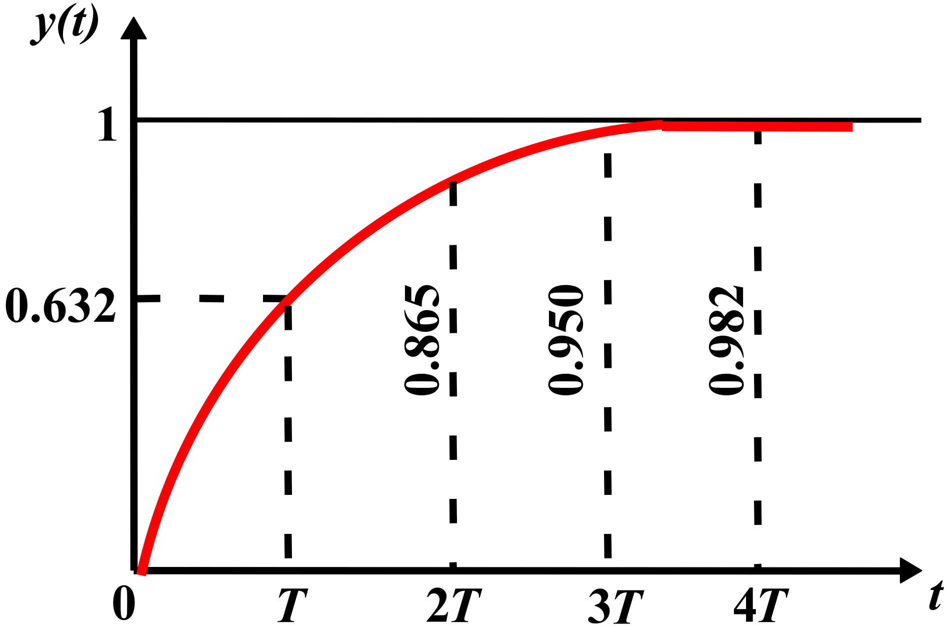
$$0.9 = 1 - e^{-\frac{t_2}{T}} \Rightarrow$$

$$t_2 \approx 2.30259T$$

<u>上升时间</u>t_r： $y(t)$从稳态值10%上升到90%所需时间。

$$t_r = t_2 - t_1 \approx 2.197T$$

3.3 一阶系统的时域响应



响应曲线具有非振荡特征：

$t=T$，　$y(t)=0.632$;

$t=2T$，$y(t)=0.865$;

$t=3T$，$y(t)=0.95$;

$t=4T$，$y(t)=0.982$;

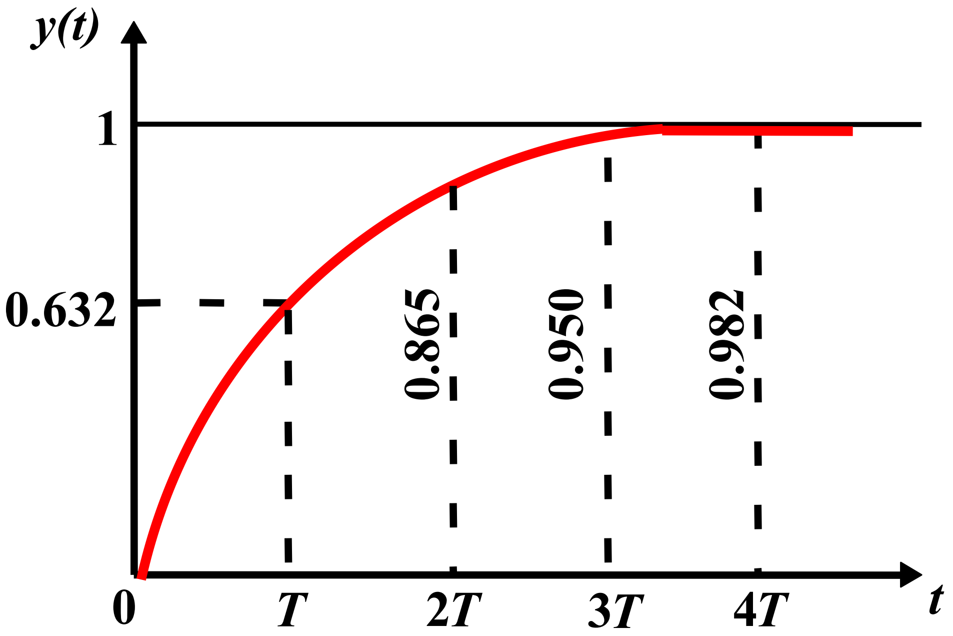
调整时间t_s：

$t_s=3T$ （$\triangle=5\%$）

$t_s=4T$ （$\triangle=2\%$）

因此，T越小，系统暂态过程持续时间就越短。

3.3 一阶系统的时域响应



稳态误差：

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}\left[r(t)-y(t)\right]=\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}=0$$

Note：一阶系统可以无差跟踪阶跃信号。

2、单位速度响应

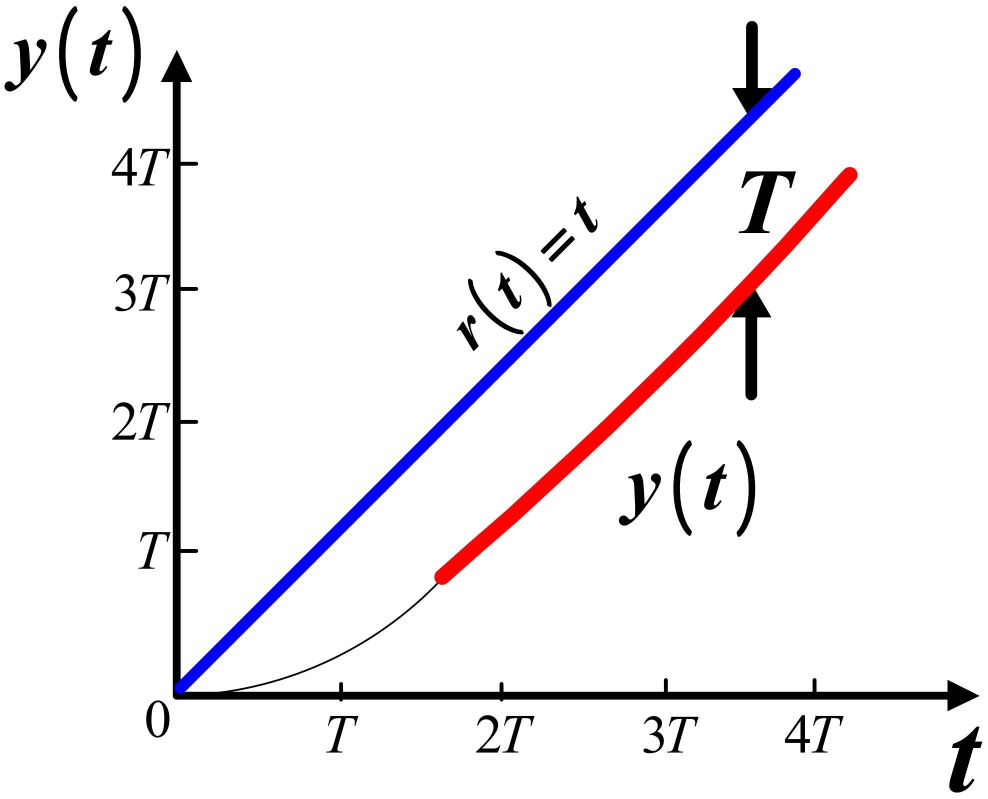
$$r(t)=t,R(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)=R(s)\Phi(s)=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{Ts+1}=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T^2}{Ts+1}$$

输出响应 $y(t)=t-T+Te^{-t/T},t\geq 0$

稳态误差 $e_{ss}=\lim\limits_{t\to\infty}\left[r(t)-y(t)\right]=\lim\limits_{t\to\infty}\left(T-Te^{-t/T}\right)=T$

3.3 一阶系统的时域响应



稳态误差趋于T，T越小，动态性能越好，稳态误差越小，但不能消除。

Note：一阶系统可以有差跟踪速度信号。

3、单位加速度响应

$$r(t)=\frac{1}{2}t^2, R(s)=\frac{1}{s^3}$$

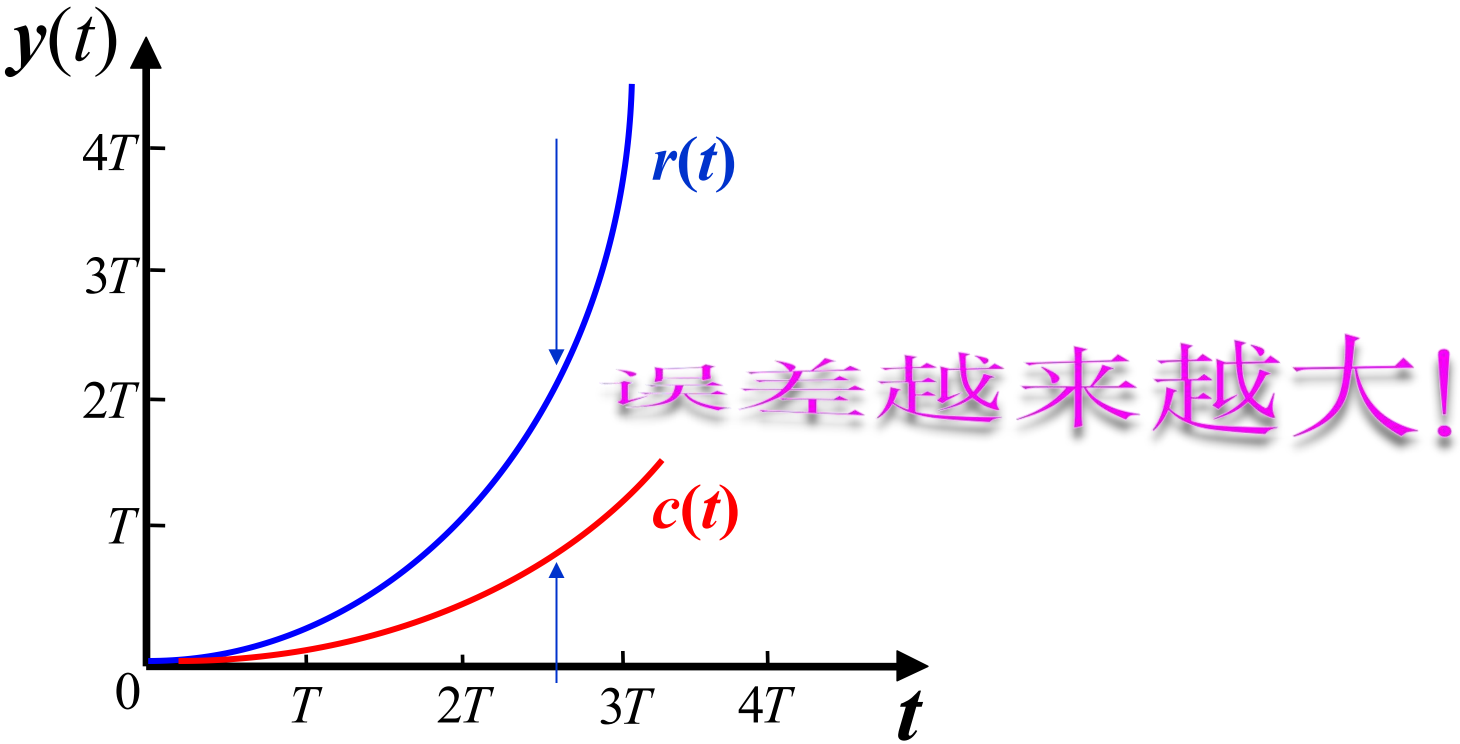
$$Y(s)=R(s)\Phi(s)=\frac{1}{s^3}\cdot\frac{1}{Ts+1}=\frac{1}{s^3}-\frac{T}{s^2}+\frac{T^2}{s}-\frac{T^3}{Ts+1}$$

输出响应 $y(t)=\frac{1}{2}t^2-Tt+T^2-T^2e^{-t/T}, t\ge 0$

稳态误差

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}\left[r(t)-y(t)\right]=\lim_{t\to\infty}\left(Tt-T^2+T^2e^{-t/T}\right)=\infty$$

3.3 一阶系统的时域响应



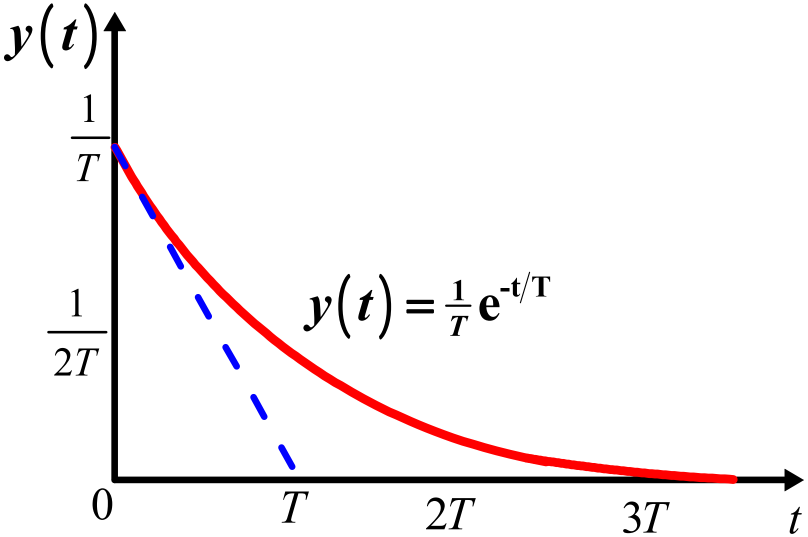
Note: 一阶系统不能跟踪加速度信号。

4、单位脉冲响应

$$r(t)=\delta(t),R(s)=1$$

$$Y(s)=\Phi(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

$$y(t)=\frac{1}{T}e^{\frac{-t}{T}},t\geq 0$$



根据一阶系统四种响应的输入输出信号:

$$r(t)=\delta(t) \Rightarrow c(t)=\frac{1}{T}e^{-t/T}$$

$$r(t)=1(t) \Rightarrow c(t)=1-e^{-t/T}$$

$$r(t)=t \Rightarrow c(t)=t-T+Te^{-t/T}$$

$$r(t)=t^2/2 \Rightarrow c(t)=t^2/2-tT+T^2-T^2e^{-t/T}$$

可知: 系统输入信号导数的输出响应,等于该输入信号输出响应的导数;根据一种典型信号的响应,就可推知其它。

3.3 一阶系统的时域响应

例1：某温度计插入温度恒定的热水后，其显示的温度随时间的变化的规律为

$$y(t)=1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}},t\geq 0$$

实验测得当t=60s时温度计读数达到实际水温的95%，试确定该温度计的传递函数。

解：依据题意，温度计的调节时间

$$t_s=60=3T$$

所以

$$T=20\mathrm{s}$$

$$y(t)=1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}=1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{20}},t\geq 0$$

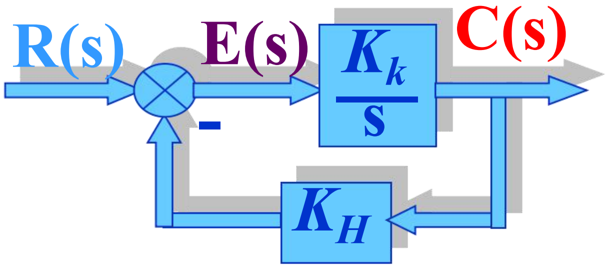
$$h(t)=y'(t)=\frac{1}{20}\mathrm{e}^{-\frac{t}{20}},t\geq 0$$

传递函数 $$\Phi(s)=\frac{1}{20s+1}$$

3.3 一阶系统的时域响应

例2：一阶系统的结构如图，(1)试求系统的调节时间t_s(±5%)？(2)如果要求$t_s = 0.1s$，求反馈系数？

$K_k = 100$　　$K_H = 0.1$



解：闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_k}{s}}{1+\frac{K_k K_H}{s}}$$

$$= \frac{100}{s+10}$$

$$= \frac{10}{0.1s+1}$$

得：$t_s = 3T = 3 \times 0.1$

$= 0.3\ s$

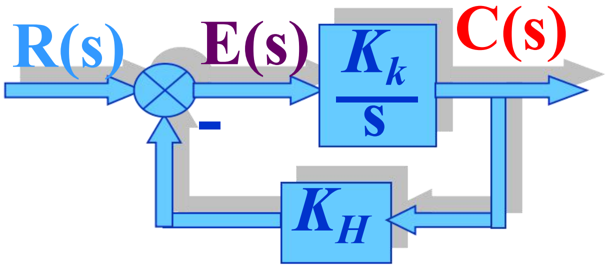
若要求：

$t_s = 0.1\ s$

3.3 一阶系统的时域响应

例2：一阶系统的结构如图，(1)试求系统的调节时间t_s ($\pm 5\%$)？(2)如果要求$t_s = 0.1$s，求反馈系数？

$K_k = 100$　　$K_H = 0.1$



解：闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{\frac{100}{s}}{1+\frac{100K_H}{s}} = \frac{\frac{1}{K_H}}{\frac{0.01}{K_H}s+1}$$

得：$t_s = 3T = 3 \times 0.1$
$= 0.3$

若要求：

$t_s = 0.1$ s

$t_s = 3 \times 0.01/K_H = 0.1$

$K_H = 0.3$

Thank You !