西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

概率论与数理统计



概率论与数理统计课程组

3、贝叶斯公式

目的：已知某结果发生的条件下，求各原因发生的可能性大小。

定理：设 Ω 为随机试验的样本空间， A 为随机事件，$B_1, B_2, \ldots, B_n$为Ω 的一个划分， $P(A) > 0$，$P(B_i) > 0$，$i=1, 2,\ldots, n$, 则

乘法公式

$$P(B_i \mid \mathrm{A}) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}, \quad i = 1, 2 \ldots n$$

条件概率

全概率公式

贝叶斯公式

如果样本空间的划分只包含两个事件，即n=2，则定义

$$B_1 = B,\quad B_2 = \overline{B}$$

那么有以下两个常用公式：

$$\boxed{P(A) = P(B)P(A|B) + \mathrm{P}(\overline{B})P(A|\overline{B})}$$

$$\boxed{P(B|\mathrm{A}) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})}}$$

$P(B_i)$是试验之前已经知道的概率，称为**先验概率**

$P(B_i|A)$反映了试验后对 A 发生的一种原因的可能性大小，称为**后验概率**

概念

先验概率： 作为分析以往数据和经验得到的理论值，它往往描述的是“由因求果”问题中的“因”

后验概率： 基于新信息修正原来先验概率后获得的更接近实际情况的概率估计，后验概率是指在得到“结果”的信息后重新修正的概率，是“执果寻因”中的“因”

先验概率和后验概率是相对的，如果以后还有新的信息引入更新了当前所谓的后验概率，又得到新的概率值，那么这个新的概率值仍被称为后验概率

贝叶斯公式能帮助人们分析事件发生的原因，因此它在疾病诊断、机器故障分析、市场经济预测等方面有着广泛的应用。

例：一种诊断某癌症的试剂，经临床试验有如下记录：有癌症病人阳性的概率为95%，无癌症病人阴性的概率为95%，现用这种试剂在某社区进行癌症普查，设该社区癌症发病率为0.5%，问某人试剂反应为阳性时该人患病的概率？

例： 假设有两箱同种零件，第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装30 件，其中 18 件一等品。现从两箱中随意地挑出一箱，然后从该箱中先后随机地取 2 个零件，取出的零件不再放回，试求：

(1)先取出的零件是一等品的概率；

(2)在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍是一等品的概率。

解： 设事件A1：第一次取到一等品

设事件A2：第二次取到一等品

设事件B： 挑到第一箱

（1） $P(A_1)=P(B)P(A_1\mid B)+\mathrm{P}(\overline{B})P(A_1\mid \overline{B})$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}=\frac{2}{5}$$

（2） $P(\mathrm{A}_2\mid \mathrm{A}_1)=\dfrac{P(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2)}{P(\mathrm{A}_1)}$

$$P(A_1\,\mathrm{A}_2)=P(B)P(A_1\,\mathrm{A}_2\mid B)+\mathrm{P}(\overline{B})P(A_1\,\mathrm{A}_2\mid \overline{B})$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}$$

$$P(\mathrm{A}_2\mid \mathrm{A}_1)\approx 0.4856$$

例2：某工厂有 4 个车间生产同一种产品，其产量分别占总产量的 15% 、 20% 、30% 、 35% ，各车间的次品率分别为 0.05 、 0.04 、 0.03 、 0.02 。现从出厂产品中任取1件，求:

(1)取出的产品是次品的概率;

(2)若取出的产品是次品，它是一车间生产的概率。

解： 设事件A：取出的产品是次品

设事件B i ：取出的产品是第i个车间生产的，i=1,2,3,4

（1）

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+\mathrm{P}(\mathrm{B}_2)P(A|\mathrm{B}_2)+P(B_3)P(A|B_3)+\mathrm{P}(\mathrm{B}_4)P(A|\mathrm{B}_4)$$
$$=0.15\times0.05+0.20\times0.04+0.30\times0.03+0.35\times0.02$$
$$=0.0315$$

（2） $$P(B_1|\mathrm{A})=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(\mathrm{A})}=\frac{0.15\times0.05}{0.0315}\approx0.238$$

小结

设A, B是两个事件，且 $P(A) > 0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件A发生条件下事件B发生的**条件概率**

设$P(A) > 0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ **乘法公式**——用于已知条件概率情况下积事件的概率求解

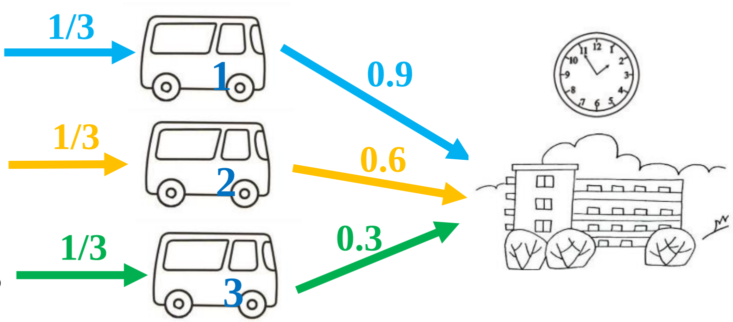
全概率公式：求由多原因引发的 **“结果”** 概率

$$P(A)=\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)$$

贝叶斯公式：推断已出现的**“结果”**是由哪个**“原因”**导致

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$$

例 从北区到南区，乘第一、二、三班次的车准时到达不迟到的概率分别为0.9、0.6、0.3，若某乘车人坐上这三班车的概率是可能的，且不会选择其他交通方式。若已知他没有迟到，求分别是乘第一班、第二班、第三班车的概率。



解 记 A_i={乘第 i 班车}，i=1, 2, 3　　B={不迟到}

已知　$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\dfrac{1}{3}$

$P(B|A_1)=0.9,\quad P(B|A_2)=0.6,\quad P(B|A_3)=0.3$

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

全概率公式

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}=\frac{1}{2}$$

贝叶斯公式

$P(A_2|B)=\dfrac{1}{3}$　　$P(A_3|B)=\dfrac{1}{6}$　　$P(A_1|B)+P(A_2|B)+P(A_3|B)=1$

例 一单位有甲、乙两人，已知甲近期出差的概率为80%，若甲出差，则乙出差的概率为20%；若甲不出差，则乙出差的概率为90%

(i) 求近期乙出差的概率；(ii) 若已知乙近期出差在外，求甲出差的概率。

解 设 A={甲出差}，B={乙出差}

已知 $P(A)=0.80,\quad P(B|A)=0.20,\quad P(B|\bar{A})=0.90$

(i) $P(B)=P(AB\cup\bar{A}B)$

AB 与 $\bar{A}B$ 互不相容

$=P(AB)+P(\bar{A}B)$

$=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$

全概率公式

$=0.8\times0.2+0.2\times0.9=34\%$

(ii) $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(AB)}{P(AB)+P(\bar{A}B)}=\dfrac{16}{34}=\dfrac{8}{17}$

贝叶斯公式

1.7 事件的独立性

一、两事件的独立性

已知事件A发生，并不影响事件B发生的概率。

1、两事件独立的定义

设A、B是两个事件，如果有等式$P(AB)=P(A)P(B)$成立，则称A、B为相互独立的事件，简称A、B独立。

2、定理一

设A、B是两个事件，且$P(A)>0$，若A、B相互独立，则有$P(B|A)=P(B)$，反之亦然。

3、定理二

设事件A、B相互独立，则有 $\overline{A}$与B，A与$\overline{B}$， $\overline{A}$与$\overline{B}$ 也相互独立。

证明： $P(A\overline{B}) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$

因为事件A、B相互独立

所以有P(AB)=P(A)P(B)

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(A)\mathrm{P(B)} = \mathrm{P(A)(1-P(B))} = \mathrm{P(A)}\,\mathrm{P}(\overline{B})$$

所以 A与$\overline{B}$ 独立。

推广至三个事件

设A, B, C为三事件，如果满足等式 $\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \end{cases}$ 称A, B, C**相互独立**

$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

推广至多个事件

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是$n\ (n \geq 2)$个事件， 如果对于其中任意2个，任意3个，……，任意n个事件的**积事件的概率，等于各事件概率之积**，即

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=\prod_{j=1}^{k}P(A_{i_j})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})\quad(2\le k\le n)$$

则称事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$**相互独立**；

若 $A_1, A_2, \ldots A_n$ 相互独立，需要验证多少个等式成立呢?

$$C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^n=2^n-n-1$$

结论1：

相互独立一定两两独立，两两独立不一定相互独立。

结论2：

n个事件相互独立，则其中任意k个事件相互独立。

结论3：

n个事件相互独立，则其相应的对立事件也相互独立。

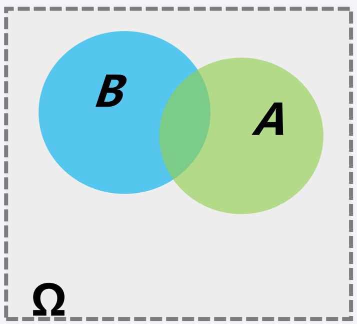
结论4：

将n个相互独立的事件任意分成 k ($2\le k \le n$)个没有相同事件的不同小组，并对每个小组中的事件施以和、积、差和逆运算后，所得到的 k 个事件也相互独立。

注意

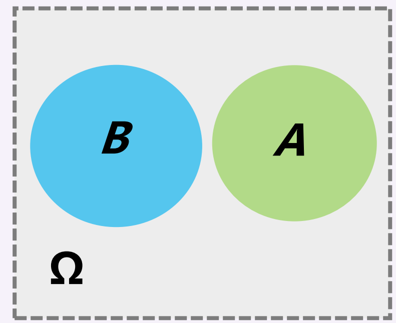
1° 独立和不相容是不同的两个概念

A, B相互独立（independent）



$P(AB)=P(A)P(B)$

A, B互不相容（exclusive）



$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

2° 事件两两独立不能推出相互独立

例如：4个学生，其中3人分别擅长歌、舞、奏，另一人集三技于一身，从中任选一人，设A={选到能歌者}，B={选到能舞者}，C={选到能奏者}，讨论事件A、B、C的独立性

独立性的应用

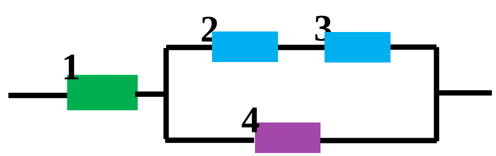
例 有4个独立元件构成的系统，设每个元件能正常运行的概率为 p，求该系统正常运行的概率。

解 设A_i={第i个元件运行正常}, $i = 1, 2, 3, 4$

$$A = A_1(A_2A_3 \cup A_4)$$

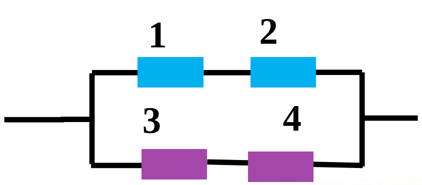
由题意知，A_1, A_2, A_3, A_4 相互独立

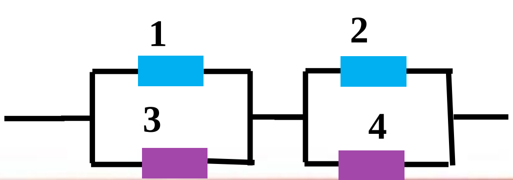
$$P(A) = P(A_1)P(A_2A_3 \cup A_4) = p(p^2 + p - p^3)$$



可否采用$P(A) = P(A_1A_2A_3 \cup A_1A_4) = p^3 + p^2 - p^5$ ？ 错误！ p^5 项是独立性公式的误用

问：这两种电路，哪种最可靠





例 甲、乙两个高射炮同时向一飞机射击，甲击中率为0.8，乙击中率为0.7，求飞机被击中的概率。

解 设 A={甲击中}，B={乙击中}，C={飞机被击中}

则 $C=A\cup B$ $$P(C)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

由于甲、乙同时射击，其结果互不影响，所以A，B 相互独立

$$P(C)=0.8+0.7-0.56=0.94$$

由实际情形判断事件的独立性

问：甲、乙、丙三个高射炮向某一飞机射击，其中甲其击中目标的概率为0.4，乙其击中目标的概率为0.5，丙其击中目标的概率为0.7；命中一发炮弹飞机能被击落的概率为0.2，命中两发炮弹飞机能被击落的概率为0.6，命中三发炮弹飞机能被击落的概率为1。求飞机被击落的概率？

第二章　随机变量及其分布

2.1　随机变量

1、随机变量的定义

设$\Omega=\{\omega\}$是随机试验的样本空间，称定义在样本空间Ω上的单值实值函数$X=X\{\omega\}$为随机变量。

研究随机试验中一串我们所关心的事件发生的概率，为方便起见，用一个数或一个区间来表示所关心的事件，把事件与数/区间的对应关系称为随机变量

随机变量的取值随机试验结果而定，而试验中各个结果的出现有一定的概率，因而随机变量的取值有一定的概率。

例： 抛一枚硬币n次，观察正面向上的次数X：

$\{X=k\}$ = {恰有k次正面向上}，$k=0,1,2,\cdots,n$

日光灯管的寿命X：

$\{2000<X<3000\}$ = {日光灯管寿命在(2000, 3000)小时之间}

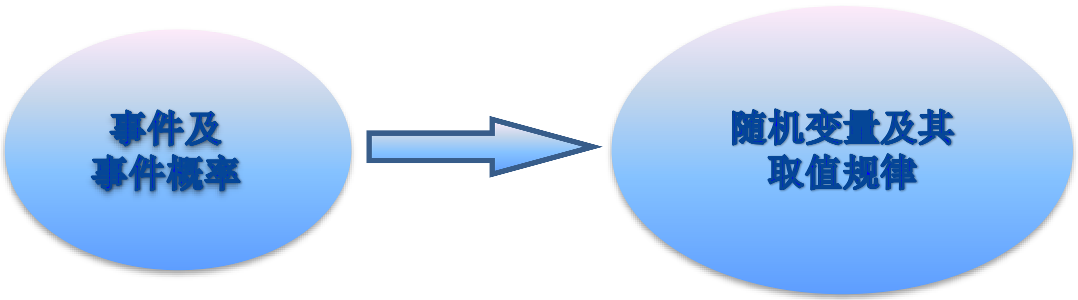
袋中有a个红球，b个白球，用X表示摸到两种颜色的事件：

$\{X=1\}$ = {摸到红球}

$\{X=0\}$ = {摸到白球}

2、引入随机变量的意义

随机变量概念的产生是概率论发展史上的重大事件。引入随机变量后，**随机试验中的各种事件，就可以通过随机变量的关系式表达出来**。对随机现象统计规律的研究，就由对事件及事件概率的研究转化为对随机变量及其取值规律的研究。



注意：1. 为何引入随机变量；2. 如何研究