第二章　随机变量及其分布

§1 随机变量　§2 随机变量的分布函数　§3 离散性随机变量及其分布律

一、单项选择题

（1）解应选（B）。

方法一由于在选项（A）中，$F(+\infty)=0\neq 1$，在选项（C）中，$F(+\infty)=\dfrac{1}{2}\neq 1$，在选项（D）中，取 $f(x)=\begin{cases}-1, & 1\le x\le 2\\ 2, & 3\le x\le 4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，但当 $1<x<2$ 时，$F(x)=1-x<0$，因此选项（A）、（C）、（D）都不正确，故选（B）。

方法二由于 $F(x)=\dfrac{1}{\pi}\arctan x+\dfrac{1}{2}$，因此 $0\le F(x)\le 1$，且 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$；$F(x)$ 单调不减；$F(x)$ 右连续，从而 $F(x)$ 是分布函数，故选（B）。

（2）解应选（C）。

由于 $F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}\varphi(x)dx$，令 $t=-x$，则

$$\begin{aligned}F(-a)&=-\int_{+\infty}^{a}\varphi(-t)dt=\int_{a}^{+\infty}\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt-\int_{-\infty}^{a}\varphi(t)dt\\&=1-\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)dt-\int_{0}^{a}\varphi(t)dt=1-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt-\int_{0}^{a}\varphi(x)dx\\&=1-\frac{1}{2}-\int_{0}^{a}\varphi(t)dt=\frac{1}{2}-\int_{0}^{a}\varphi(t)dt\end{aligned}$$

因此 $F(-a)=\dfrac{1}{2}-\int_{0}^{a}\varphi(x)dx$，故选（C）。

（3）解应选（C）。

$$P(X=1)=F(1)-F(1-0)=1-e^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-e^{-1}$$

故选（C）。

（4）解应选（C）。

由分布律的性质，得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}b\lambda^{k}=1$，由于 $b\lambda^{k}$ 是概率，因此 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda^{k}$ 收敛于 $\dfrac{1}{b}$，且 $0<\lambda<1$。由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda^{k}=\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$，得 $\dfrac{\lambda}{1-\lambda}=\dfrac{1}{b}$，从而 $\lambda=\dfrac{1}{b+1}$，故选（C）。

（5）解应选（B）。

由于此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标，即此人第 4 次射击命中目标，其概率为 p，在前三次

射击中恰好有一次命中目标，其概率为$C_3^1 p(1-p)^2$，因此由事件的相互独立性知，此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为$C_3^1 p(1-p)^2 \cdot p = 3p^2(1-p)^2$，故选（B）。

二、填空题

（1）解应填$1-(\alpha+\beta)$。

由于$\{x_1 \le X \le x_2\} = \{X \le x_2\} - \{X < x_1\}$，因此

$$P(x_1 \le X \le x_2) = P(\{X \le x_2\} - \{X < x_1\}) = P(X \le x_2) - P(X < x_1)$$

$$= P(X \le x_2) - [1 - P(X \ge x_1)] = 1 - \beta - \alpha = 1 - (\alpha+\beta)$$

故填$1-(\alpha+\beta)$。

（2）解应填$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{1}{1+\alpha}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$。

由于 X 服从参数为 p 的 $0-1$ 分布，且 $P(X=1) = \alpha P(X=0)$，因此 $p = \alpha(1-p)$，即 $p = \dfrac{\alpha}{1+\alpha}$，故填$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{1}{1+\alpha}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$。

（3）解应填

X	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

X 可能的取值为 3、4、5、6、7，且$P(X=3) = \dfrac{1}{C_4^2} = \dfrac{1}{6}$，$P(X=4) = \dfrac{1}{C_4^2} = \dfrac{1}{6}$，$P(X=5) = \dfrac{2}{C_4^2} = \dfrac{1}{3}$，$P(X=6) = \dfrac{1}{C_4^2} = \dfrac{1}{6}$，$P(X=7) = \dfrac{1}{C_4^2} = \dfrac{1}{6}$，故填

X	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

（4）解应填$P(X=k) = (\dfrac{1}{5})^{k-1}\dfrac{4}{5},\ k = 1, 2, \cdots$。

由于 X 可能的取值为$1,2,\cdots$，且事件$\{X=k\}$ $(k=1,2,\cdots)$表示第k次测试测得一个正品，前$k-1$次测试测得的都是次品，由事件的相互独立性，得

$$P(X=k)=(\frac{1}{5})^{k-1}\frac{4}{5},\ \ k=1,2,\cdots$$

故填$P(X=k)=(\frac{1}{5})^{k-1}\frac{4}{5},\ k=1,2,\cdots$。

（5）解应填$\frac{4}{27}$。

由于$P(X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)=\theta+\theta(1-\theta)=\frac{5}{9}$，即$9\theta^2-18\theta+5=0$，解之得$\theta=\frac{1}{3}$，$\theta=\frac{5}{3}$（不合题意舍去），因此$P(X=3)=\theta(1-\theta)^2=\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{27}$，故填$\frac{4}{27}$。

三、解由$F(+\infty)=1$，得$a+b=1$；再由$F(0+0)=F(0)$，得$b=0$，从而$a=1$。

$$P(1\le X\le 2)=F(2)-F(1-0)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

四、解 X 的可能取值为$0,1,2,3$，且

$P(X=0)=\frac{1}{2}$，$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}$，$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^3}$，$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^3}$

即 X 的分布律为

X	**0**	**1**	**2**	**3**
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$

当$x<0$时，$F(x)=0$；当$0\le x<1$时，$F(x)=P(X=0)=\frac{1}{2}$；当$1\le x<2$时，$F(x)=P(X=0)$ $+P(X=1)=\frac{3}{4}$；当$2\le x<3$时，$F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{7}{8}$；当$x\ge 3$时，$F(x)=1$，即 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1\\ \frac{3}{4}, & 1\le x<2\\ \frac{7}{8}, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

五、解 X 的可能取值为$3,4,5$，且

$$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}，P(X=4)=\frac{C_1^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}，P(X=5)=\frac{C_1^1C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}$$

即 X 的分布律为

X	**3**	**4**	**5**
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

六、**解**设 X 表示“该运动员 5 次独立重复射击中命中目标的次数”，则 $X\sim B(5,p)$，由

$$\frac{31}{32}=P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-(1-p)^5$$

解之得 $p=\frac{1}{2}$，从而 $X\sim B(5,\frac{1}{2})$。

（1）所求的概率为 $P(X=1)=C_5^1(\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})^4=\frac{5}{32}$。

（2）所求的概率为

$$P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-(1-\frac{1}{2})^5-C_5^1(\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})^4=\frac{13}{16}$$

七、**解**由于 $X\sim P(\frac{t}{2})$，因此 X 的分布律为 $P(X=k)=\frac{(\frac{t}{2})^k}{k!}e^{-\frac{t}{2}}$，$k=0,1,2,\cdots$。

（1）由于 $t=3$，因此所求的概率为 $P(X=0)=e^{-\frac{3}{2}}$。

（2）由于 $t=5$，因此所求的概率为 $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-e^{-\frac{5}{2}}$。

八、**解**设 X 表示第一次抽取的 10 件产品中的次品数，Y 第二次抽取的 5 件产品中的次品数，则 $X\sim B(10,0.1)$，$Y\sim B(5,0.1)$。

（1）所求的概率为 $P(X=0)=(1-0.1)^{10}\approx 0.3487$。

（2）需做第二次检验的概率为 $P(1\leq X\leq 2)=C_{10}^1(0.1)(0.9)^9+C_{10}^2(0.1)^2(0.9)^8\approx 0.5811$。

（3）这批产品按第二次检验的标准被接受的概率为 $P(Y=0)=(1-0.1)^5\approx 0.5905$。

（4）由于 X、Y 的取值可以被认为是放回抽样的结果，即随机试验的结果是相互独立的，因此事件 $\{1\leq X\leq 2\}$ 与 $\{Y=0\}$ 相互独立，从而所求的概率为

$$P(\{1\leq X\leq 2\}\cap\{Y=0\})=P(1\leq X\leq 2)P(Y=0)=0.5811\times 0.5905=0.3431$$

（5）这批产品被接受的概率为

$$P(\{X=0\}\cup(\{1\le X\le 2\}\cap\{Y=0\}))=P(X=0)+P(\{1\le X\le 2\}\cap\{Y=0\})$$

$$=0.3487+0.3431=0.6918$$

九、解（1）X 可能的取值为$0,1,2,3$，设 $A_i(i=1,2,3)$ 表示事件“取出的是第i盒”，则 $P(A_i)=\dfrac{1}{3}$，$i=1,2,3$，由全概率公式，得

$$P(X=0)=P(A_3)P(X=0|A_3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{30}$$

$$P(X=1)=P(A_2)P(X=1|A_2)+P(A_3)P(X=1|A_3)=\frac{1}{3}(\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}+\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3})=\frac{9}{30}$$

$$P(X=2)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(X=2|A_i)=\frac{1}{3}(\frac{C_4^2C_1^1}{C_5^3}+\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}+\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3})=\frac{15}{30}$$

$$P(X=3)=P(A_1)P(X=3|A_1)+P(A_2)P(X=3|A_2)=\frac{1}{3}(\frac{C_4^3}{C_5^3}+\frac{C_3^3}{C_5^3})=\frac{5}{30}$$

即 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{5}{30}$

（2）所求的概率为

$$P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{15}{30}+\frac{5}{30}=\frac{2}{3}$$

§4 连续型随机变量及其概率密度　§5 随机变量函数及其分布

一、单项选择题

（1）解应选（B）。

由于$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$，因此$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}ce^{-x^2}dx=c\sqrt{\pi}$，从而$c=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$，故选（B）。

（2）解应选（C）。

由于$P(X<1500)=\int_{1000}^{1500}\dfrac{1000}{x^2}dx=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$，设$Y$表示在开始使用 1500 小时内需要更换的元件个数，则$Y\sim B(5,\dfrac{1}{3})$，因此所求的概率为$P(Y=2)=C_5^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=10\times\dfrac{1}{9}\times\dfrac{8}{27}=\dfrac{80}{243}$，故选（C）。

（3）解应选（A）。

$$P(\text{“方程 } t^2+2Xt+4=0 \text{ 没有实根”})=P(4X^2-16<0)=P(X^2<4)=P(-2<X<2)$$

$$=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1$$

故选（A）。

（4）解应选（D）。

由于 $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\ge 0$，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)F_2(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)F_1(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(x)dF_1(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x)dF_2(x)$$

$$=\left[F_1(x)F_2(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x)dF_2(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x)dF_2(x)$$

$$=F_1(+\infty)F_2(+\infty)-F_1(-\infty)F_2(-\infty)=1$$

因此 $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$ 为概率密度，故选（D）。

二、填空题

（1）解应填 $\frac{9}{64}$。

依题意，得 $Y\sim B(3,p)$，且 $p=P(X\le\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=\frac{1}{4}$，从而 $P(Y=2)=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{64}$，

故填 $\frac{9}{64}$。

（2）解应填 e^{-8}。

由于 $\xi\sim E(2)$，因此 ξ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，从而

$$P(\text{“方程 } x^2+\xi x+4=0 \text{ 有实根”})=P(\xi^2-4\cdot 4\ge 0)$$

$$=P(\xi\le -4)+P(\xi\ge 4)=\int_4^{+\infty}2e^{-2x}dx=e^{-8}$$

故填 e^{-8}。

三、**解**（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，得 $1=\int_0^{2\sqrt{3}}3Cxdx=18C$，故 $C=\frac{1}{18}$。

（2）由（1）知 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x, & 0<x<2\sqrt{3}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，由于 X 是连续型随机变量，因

此所求的概率为

$$P\left(\frac{1}{2}<X<2\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{6}xdx=\frac{5}{16}$$

（3）当 $x<0$ 时， $F(x)=0$；当 $0\le x<2\sqrt{3}$ 时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{x}\frac{1}{6}xdx=\frac{x^2}{12}$；当 $x\ge 2\sqrt{3}$ 时， $F(x)=1$，即 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{12}x^2, & 0\le x<2\sqrt{3}\\ 1, & x\ge 2\sqrt{3}\end{cases}$$

四、解（1）由于 $X\sim N(3,2^2)$，因此

$$P(2<X\le 5)=\Phi(\frac{5-3}{2})-\Phi(\frac{2-3}{2})$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-0.5)=\Phi(1)-[1-\Phi(0.5)]=0.8413-1+0.6915=0.5328$$

$$P(-4<X\le 10)=\Phi(\frac{10-3}{2})-\Phi(\frac{-4-3}{2})=\Phi(3.5)-\Phi(-3.5)=2\Phi(3.5)-1$$

$$=2\times 0.9998-1=0.9996$$

$$P(|X|>2)=1-P(|X|\le 2)=1-[\Phi(\frac{2-3}{2})-\Phi(\frac{-2-3}{2})]$$

$$=1-\Phi(-0.5)+\Phi(-2.5)=\Phi(0.5)+1-\Phi(2.5)$$

$$=0.6915+1-0.9938=0.6977$$

$$P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-\Phi(\frac{3-3}{2})=1-\Phi(0)=1-0.5=0.5$$

（2）由 $P(X>c)=P(X\le c)$，得 $1-P(X\le c)=P(X\le c)$，即 $P(X\le c)=\frac{1}{2}$。由于 $X\sim N(3,2^2)$，因此 $P(X\le 3)=\frac{1}{2}$，从而 $c=3$。

（3）由于 $X\sim N(3,2^2)$，因此 $P(X>d)=1-P(X\le d)=1-\Phi(\frac{d-3}{2})$，从而 d 取决于如下条件：$1-\Phi(\frac{d-3}{2})\ge 0.9$，即

$$\Phi(-\frac{d-3}{2})\ge 0.9=\Phi(1.282)$$

所以 $-\frac{d-3}{2}\ge 1.282$，从而 $d\le 0.436$，即 d 至多为 0.436。

五、解（1）方法一（分布函数法）：由于 $X \sim U(0,1)$，因此 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)$。当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $1\le y<e$ 时，$F_Y(y)=P(e^X\le y)=P(X\le \ln y)=\int_{-\infty}^{\ln y}f_X(x)dx=\int_0^{\ln y}1dx=\ln y$；当 $y\ge e$ 时，$F_Y(y)=1$，从而 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 1<y<e\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

方法二（公式法）：由于 $X \sim U(0,1)$，因此 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。由于函数 $y=e^x$ 严格单调可微，其反函数为 $x=h(y)=\ln y\ (y>0)$，$h'(y)=\dfrac{1}{y}\ (y\ne 0)$。由 $f_X(h(y))>0$，即 $0<\ln y<1$，得 $1<y<e$，因此 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(\ln y)\left|\dfrac{1}{y}\right|=\dfrac{1}{y}, & 1<y<e\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2）方法一（分布函数法）：由于 $X \sim U(0,1)$，因此 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。

设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-2\ln X\le y)$。当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\ge 0$ 时，$F_Y(y)=P(-2\ln X\le y)=P(X\ge e^{-\frac{y}{2}})=\int_{e^{-\frac{y}{2}}}^{+\infty}f_X(x)dx=\int_{e^{-\frac{y}{2}}}^{1}1dx=1-e^{-\frac{y}{2}}$，从而 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

方法二（公式法）：由于 $X \sim U(0,1)$，因此 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，由于函

数 $y=-2\ln x$ 严格单调可微，其反函数为 $x=h(y)=e^{-\frac{y}{2}}$ $(-\infty<y<+\infty)$，$h'(y)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$ $(-\infty<y<+\infty)$。

由 $f_X(h(y))>0$，即 $0<e^{-\frac{y}{2}}<1$，得 $y>0$，因此 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(e^{-\frac{y}{2}})\left|-\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\right|=\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

六、解（1）设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$。当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $0\le y<16$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^4\le y)=P(X^4<0)+P(0\le X^4\le y)=P(-\sqrt[4]{y}\le X\le\sqrt[4]{y})$$

$$=P(-\sqrt[4]{y}\le X<0)+P(0\le X<\sqrt[4]{y})=\int_{-\sqrt[4]{y}}^{0}\frac{1}{3}dx+\int_{0}^{\sqrt[4]{y}}\frac{1}{9}dx=\frac{4}{9}\sqrt[4]{y}$$

当 $16\le y<81$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^4\le y)=P(X^4<0)+P(0\le X^4\le 16)+P(16<X^4\le y)$$

$$=P(-2\le X\le 2)+P(2<X\le\sqrt[4]{y})=P(-2\le X<0)+P(0\le X\le\sqrt[4]{y})$$

$$=\int_{-2}^{0}\frac{1}{3}dx+\int_{0}^{\sqrt[4]{y}}\frac{1}{9}dx=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\sqrt[4]{y}$$

当 $y\ge 81$ 时，当 $F_Y(y)=1$。

从而 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases} \frac{1}{9}y^{-\frac{3}{4}}, & 0<y<16 \\ \frac{1}{36}y^{-\frac{3}{4}}, & 16\le y<81 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（2）$P(X\le-\frac{1}{2},Y\le 1)=P(X\le-\frac{1}{2},X^4\le 1)=P(X\le-\frac{1}{2},-1\le X\le 1)$

$$=P(-1\le X\le-\frac{1}{2})=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{3}dx=\frac{1}{6}$$

七、解（1）设 Y 的分布函数为 $F(y)$，则当 $y<1$ 时，$F(y)=0$；当 $1\le y<2$ 时，

$$F(y)=P(Y\le y)=P(Y<1)+P(Y=1)+P(1<Y\le y)$$

$$=P(X\ge 2)+P(1<X\le y)$$

$$=\int_2^3 \frac{1}{9}x^2dx+\int_1^y \frac{1}{9}x^2dx=\frac{2}{3}+\frac{1}{27}y^3$$

当 $y\geq 2$ 时，$F(y)=1$。或当 $y\geq 2$ 时，

$$F(y)=P(Y\leq y)=P(Y<1)+P(Y=1)+P(1<Y<2)+(Y=2)+P(2<Y\leq y)$$

$$=P(X\geq 2)+P(1<X<2)+P(X\leq 1)=1$$

从而 Y 的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \frac{2}{3}+\frac{1}{27}y^3, & 1\leq y<2\\ 1, & y\geq 2\end{cases}$$

（2）$P(X\leq Y)=P(X\leq 1)+P(1<X<2)=P(X\leq 2)=\int_0^2 \frac{1}{9}x^2dx=\frac{8}{27}$