第三章　多维随机变量及其分布

§1 二维随机变量及其联合分布函数　§2 二维离散型随机变量及其联合分布律

§3 二维连续型随机变量及其联合概率密度

一、单项选择题

（1）解应选（C）。

对于选项（C），取四点$(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$，则

$$F(1,1)-F(1,0)-F(0,1)+F(0,0)=1-1-1+0=-1<0$$

从而选项 C 给出的二元函数不能作为二维随机变量(X,Y)的联合分布函数，故选（C）。

（2）解应选（D）。

由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-\frac{x^2+y^2}{6}}dxdy=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{6}}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{6}}dy=6\pi A$$

或

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-\frac{x^2+y^2}{6}}dxdy=A\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\rho^2}{6}}\rho d\rho=6\pi A\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\rho^2}{6}}d(\frac{\rho^2}{6})=6\pi A$$

从而$A=\dfrac{1}{6\pi}$，故选（D）。

（3）解应选（D）。

由于$(X,Y)\sim U(D)$，因此(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$，从

而$P(\min\{X,Y\}\geq 0)=P(X\geq 0,Y\geq 0)=\int_0^1\int_0^1\dfrac{1}{4}dxdy=\dfrac{1}{4}$，故选（D）。

二、填空题

（1）解应填$\dfrac{1}{4}$。

$$P(X+Y\leq 1)=\iint\limits_{x+y\leq 1}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}6xdy=\int_0^{\frac{1}{2}}6x(1-2x)dx=\frac{1}{4}$$

故填$\dfrac{1}{4}$。

（1）解应填$a=\dfrac{1}{4}$，$b=\dfrac{1}{2}$。

由$a+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+b=1$，得$a+b=\frac{3}{4}$，由$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$，得$a=\frac{1}{4}$，从而$b=\frac{1}{2}$，故填$a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{2}$。

三、解 X 的可能取值为$0,1,2,3$，Y 的可能取值为$0,1,2$，且

$P(X=0,Y=0)=0$，$P(X=0,Y=1)=0$，$P(X=0,Y=2)=\frac{C_2^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{1}{35}$

$P(X=1,Y=0)=0$，$P(X=1,Y=1)=\frac{C_3^1C_2^1C_2^2}{C_7^4}=\frac{6}{35}$，

$P(X=1,Y=2)=\frac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4}=\frac{6}{35}$，$P(X=2,Y=0)=\frac{C_3^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$

$P(X=2,Y=1)=\frac{C_3^2C_2^1C_2^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}$，$P(X=2,Y=2)=\frac{C_3^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$

$P(X=3,Y=0)=\frac{C_3^3C_2^1}{C_7^4}=\frac{2}{35}$，$P(X=3,Y=1)=\frac{C_3^3C_2^1}{C_7^4}=\frac{2}{35}$，$P(X=3,Y=2)=0$

即(X,Y)的联合分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

四、解（1）$P(X=1|Z=0)=\frac{C_1^1C_2^1+C_2^1C_1^1}{C_3^1C_3^1}=\frac{4}{9}$

（2）X,Y 的可能取值为$0,1,2$，且

$P(X=0,Y=0)=\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{4}$，$P(X=0,Y=1)=\frac{C_2^1C_3^1+C_3^1C_2^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{3}$

$$P(X=0,Y=2)=\frac{C_2^1C_2^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{9}，\ P(X=1,Y=0)=\frac{C_1^1C_3^1+C_3^1C_1^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=1,Y=1)=\frac{C_1^1C_2^1+C_2^1C_1^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{9}，\ P(X=1,Y=2)=0$$

$$P(X=2,Y=0)=\frac{C_1^1C_1^1}{C_6^1C_6^1}=\frac{1}{36}，\ P(X=2,Y=1)=0，\ P(X=2,Y=2)=0$$

即 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

五、解（1）$P(X\le\lambda,Y\le2\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}\int_{-\infty}^{2\lambda}f(x,y)dxdy=\int_0^{\lambda}\int_0^{2\lambda}\frac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{x+y}{\lambda}}dxdy$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx\int_0^{2\lambda}e^{-\frac{y}{\lambda}}dy=\left[-e^{-\frac{x}{\lambda}}\right]_0^{\lambda}\left[-e^{-\frac{y}{\lambda}}\right]_0^{2\lambda}$$

$$=(1-e^{-1})(1-e^{-2})$$

（2）$P(X+Y\le\lambda)=\iint\limits_{x+y\le\lambda}f(x,y)dxdy=\int_0^{\lambda}dx\int_0^{\lambda-x}\frac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{x+y}{\lambda}}dy$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}\left[-e^{-\frac{y}{\lambda}}\right]_0^{\lambda-x}dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}\left[1-e^{-\frac{\lambda-x}{\lambda}}\right]dx=1-2e^{-1}$$

六、解（1）X 的可能取值为 $1,3$，Y 的可能取值为 $0,1,2,3$，且 $Y\sim B(3,\frac{1}{2})$，从而

$P(X=1,Y=0)=0$，

$$P(X=1,Y=1)=P(Y=1)P(X=1|Y=1)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\times1=\frac{3}{8}$$

$$P(X=1,Y=2)=P(Y=2)P(X=1|Y=2)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)\times1=\frac{3}{8}$$

$$P(X=1,Y=3)=0$$

$$P(X=3,Y=0)=P(Y=0)P(X=3|Y=0)=C_3^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^3\times 1=\frac{1}{8}$$

$P(X=3,Y=1)=0$， $P(X=3,Y=2)=0$

$$P(X=3,Y=3)=P(Y=3)P(X=3|Y=3)=C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 1=\frac{1}{8}$$

即 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

（2）$P(X=Y)=P(X=1,Y=1)+P(X=3,Y=3)=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

七、解（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$，得

$$1=\int_0^1\int_0^1(ax^2+2xy^2)dxdy=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3},$$

故 $a=2$。

（2）当 $x<0$ 或 $y<0$ 时， $F(x,y)=0$；

当 $0\le x<1, y\ge 1$ 时，

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv=\int_0^x\int_0^1(2u^2+2uv^2)dudv=\frac{2x^3+x^2}{3}$$

当 $x\ge 1, 0\le y<1$ 时，

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv=\int_0^1\int_0^y(2u^2+2uv^2)dudv=\frac{2y+y^3}{3}$$

当 $0\le x<1, 0\le y<1$ 时，

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv=\int_0^x\int_0^y(2u^2+2uv^2)dudv=\frac{2x^3y+x^2y^3}{3}$$

当 $x\ge 1, y\ge 1$ 时， $F(x,y)=1$，即 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0\\ \dfrac{2x^3+x^2}{3}, & 0\le x<1, y\ge 1\\ \dfrac{2y+y^3}{3}, & x\ge 1, 0\le y<1\\ \dfrac{2x^3y+x^2y^3}{3}, & 0\le x<1, 0\le y<1\\ 1, & x\ge 1, y\ge 1\end{cases}$$

（3）$P(X<Y)=\iint\limits_{x<y}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y(2x^2+2xy^2)dx=\int_0^1(\frac{2}{3}y^3+y^4)dy=\frac{11}{30}$

§4 边缘分布§5 条件分布

一、单项选择题

（1）解应选（A）。

设(X_1,X_2)的联合分布律为

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
-1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\frac{1}{4}$
0	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\frac{1}{2}$
1	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\frac{1}{4}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

则由$P(X_1X_2=0)=1$，得$p_{12}+p_{22}+p_{32}+p_{21}+p_{23}=1$，$p_{11}=0,p_{13}=0,p_{31}=0,p_{33}=0$，再由联合分布律和边缘分布律的关系，得$p_{12}=\frac{1}{4},p_{32}=\frac{1}{4},p_{21}=\frac{1}{4},p_{23}=\frac{1}{4}$，所以$p_{22}=0$，从而

$$P(X_1=X_2)=P(X_1=-1,X_2=-1)+P(X_1=0,X_2=0)P(X_1=1,X_2=1)$$

$$=p_{11}+p_{22}+p_{33}=0$$

故选（A）。

（2）解应选（C）。

设 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	p_{11}	p_{12}	$\frac{1}{2}$
1	p_{21}	p_{22}	$\frac{1}{2}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

则由 $P(XY=1)=\frac{1}{2}$，得 $P(X=1,Y=1)=\frac{1}{2}$，即 $p_{22}=\frac{1}{2}$，再由联合分布律和边缘分布律的关系，得 $p_{21}=\frac{1}{2}-p_{22}=0$， $p_{11}=\frac{1}{4}-p_{21}=\frac{1}{4}$，从而

$$P(X=Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)=p_{11}+p_{22}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

故选（C）。

（3）解应选（C）。

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)h(y)dy=g(x)\int_{-\infty}^{+\infty}h(y)dy=bg(x)$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)h(y)dx=h(y)\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx=ah(y)$$

故应选（C）。

二、填空题

（1）解应填 $\frac{13}{48}$。

由全概率公式，得

$$P(Y=2)=\sum_{i=1}^{4}P(X=i,Y=2)=\sum_{i=1}^{4}P(X=i)P(Y=2|X=i)$$

$$=\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{13}{48}$$

故填 $\frac{13}{48}$。

（2）解应填 $\frac{1}{4}$。

由于区域 D 的面积为 $A=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=2$，因此 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$

从而(X,Y)关于X的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2x}, & 1\le x\le e^2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

所以(X,Y)关于X的边缘概率密度在$x=2$处的值为$f_X(2)=\frac{1}{4}$，故填$\frac{1}{4}$。

（**3**）**解**由联合分布律与边缘分布律的关系得X,Y的边缘分布律分别为

X	0	1	2	3
$P_{i\cdot}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	1	3
$P_{\cdot j}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

三、**解**（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{y}e^{-y}dx=ye^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

（2）$\forall y>0, f_Y(y)\ne 0$，X的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 0<x<y\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$\forall x>0, f_X(x)\ne 0$，Y的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}e^{x-y}, & y>x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（3）$P(X>2|Y<4)=\frac{P(X>2,Y<4)}{P(Y<4)}=\frac{\int_2^4dx\int_x^4e^{-y}dy}{\int_0^4ye^{-y}dy}=\frac{e^{-2}-3e^{-4}}{1-5e^{-4}}$

四、解（1）由于$F(+\infty,+\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1$，$F(-\infty,+\infty)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=0$，$F(+\infty,-\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C-\frac{\pi}{2})=0$，因此$A=\frac{1}{\pi^2},B=\frac{\pi}{2},C=\frac{\pi}{2}$。

（2）由于(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3})$，因

此(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=\frac{6}{\pi^2(x^2+4)(y^2+9)}$$

（3） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{6}{\pi^2(x^2+4)(y^2+9)}dy=\frac{2}{\pi(x^2+4)}$， $-\infty<x<+\infty$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{6}{\pi^2(x^2+4)(y^2+9)}dx=\frac{3}{\pi(y^2+9)}$， $-\infty<y<+\infty$

五、解 由于 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2+2xy-y^2}dy=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2-x^2}dy$

$$=Ae^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-y)^2}dy=A\sqrt{\pi}e^{-x^2},-\infty<x<+\infty,$$

因此$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=A\pi$，从而$A=\frac{1}{\pi}$。

$\forall -\infty<x<+\infty$， $f_X(x)>0$，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2},-\infty<y<+\infty$$

六、解（1）先求 $f_{X|Y}(x|y)$。由于

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{1}1dx=1+y, & -1<y<0\\ \int_{y}^{1}1dx=1-y, & 0\le y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-|y|, & -1<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

因此$\forall -1<y<1, f_Y(y)>0, X$ 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

再求 $f_{Y|X}(y|x)$。由于

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

因此 $\forall 0<x<1, f_X(x)>0, Y$ 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & |y|<x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（2）$P(X>\frac{1}{2}|Y>0)=\dfrac{P(X>\frac{1}{2},Y>0)}{P(Y>0)}=\dfrac{\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f(x,y)dxdy}{\int_0^{+\infty}f_Y(y)dy}=\dfrac{\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_0^x 1dy}{\int_0^1(1-y)dy}=\dfrac{3}{4}$

七、解（1）由题设 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，在 $X=x(0<x<1)$ 条件下，Y 的概率密度为 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}$，从而当 $0<y<x<1$ 时，(X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{x}$，在其它点 (x,y) 处，$f(x,y)=0$，即

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（2）$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1\frac{1}{x}dx=-\ln y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

（3）$P(X+Y>1)=\iint\limits_{x+y>1}f(x,y)dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^1 dx\int_{1-x}^x\frac{1}{x}dy=1-\ln 2$

八、解 由题设知 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G\\ 0, & (x,y)\notin G\end{cases}$。

（1）X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x dy=x, & 0<x<1\\ \int_0^{2-x}dy=2-x, & 1\le x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$

（2）Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^{2-y}dx=2(1-y), & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

$\forall 0<y<1, f_Y(y)>0$，X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-y)}, & y<x<2-y\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（3） $P(X-Y\le 1)=1-P(X-Y>1)=1-\iint\limits_{x-y>1}f(x,y)dxdy=1-\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{1+y}^{2-y}dx=\dfrac{3}{4}$

§6 随机变量的独立性§7 二维随机变量函数及其分布

一、单项选择题

（1）解应选（A）。

由于 $X\sim E(1)$，$Y\sim E(4)$，因此 X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

又由于 X 与 Y 相互独立，故 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-(x+4y)}, & x>0,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

从而 $P(X<Y)=\iint\limits_{x<y}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx\int_x^{+\infty}4e^{-4y}dy=\int_0^{+\infty}e^{-5x}dx=\dfrac{1}{5}$，故选（A）。

（2）解应选（B）。

方法一由于 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,1)$，因此 X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}},\quad -\infty<y<+\infty$$

又由于 X 与 Y 相互独立，故 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(z-y)^2}{2}}\cdot e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}dy=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(z-1)^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-\frac{z+1}{2})^2}dy$$

令 $t=y-\dfrac{z+1}{2}$，则

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(z-1)^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(z-1)^2}{4}}\sqrt{\pi}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(z-1)^2}{4}},\quad -\infty<z<+\infty$$

即 $Z=X+Y\sim N(1,2)$，从而 $P(X+Y\le 1)=\dfrac{1}{2}$，故选（B）。

方法二由于 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,1)$，且 X 与 Y 相互独立，因此 $X+Y\sim N(1,2)$，

从而 $P(X+Y\le 1)=\dfrac{1}{2}$，故选（B）。

（**3**）**解**应选（D）。

由于 $X\sim U(0,1)$，$Y\sim U(0,1)$，因此 X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

又由于 X 与 Y 相互独立，故 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

从而 $P(X^2+Y^2\le 1)=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D} 1dxdy=\dfrac{\pi}{4}$（其中 D 为 $\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$ 含在区域 $\{(x,y)\big|0<x<1,0<y<1\}$ 中的部分），故选（D）。

（**4**）**解**应选（B）。

由全概率公式及 X 与 Y 相互独立，得

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\le z)=P(XY\le z)\\ &=P(Y=0)P(XY\le z\big|Y=0)+P(Y=1)P(XY\le z\big|Y=1)\\ &=\frac{1}{2}[P(X\cdot 0\le z\big|Y=0)+P(X\le z\big|Y=1)]\\ &=\frac{1}{2}[P(X\cdot 0\le z)+P(X\le z)]\end{aligned}$$

从而 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\varPhi(z), & z<0\\ \dfrac{1}{2}[1+\varPhi(z)], & z\ge 0\end{cases}$$

其中 $\varPhi(x)$ 是 X 的分布函数。由于

$$F_Z(0-0)=\frac{1}{2}\varPhi(0)=\frac{1}{4}\ne\frac{3}{4}=\frac{1}{2}[1+\varPhi(0)]=F_Z(0)$$

因此 $z=0$ 是函数 $F_Z(z)$ 的唯一间断点，即 $F_Z(z)$ 只有一个间断点，故选（B）。

（**5**）**解**应选（D）。

不妨设 $X \sim E(\lambda)$，则 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\min\{X,2\}\le y)$。当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $0\le y<2$ 时，

$$F_Y(y)=P(\min\{X,2\}\le y)=1-P(\min\{X,2\}>y)$$

$$=1-P(X>y)=1-\int_y^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda y}$$

当 $y\ge 2$ 时，$F_Y(y)=1$，即 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-\lambda y}, & 0\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

由于

$$F_Y(0-0)=0=F_Y(0+0)，\quad F_Y(2-0)=1-e^{-2\lambda}\ne 1=F_Y(2)$$

因此 $F_Y(y)$ 恰好有一个间断点，故选（D）。

二、填空题

（1）解应填 $\alpha+\beta=\frac{1}{3}$，$\alpha=\frac{2}{9}$，$\beta=\frac{1}{9}$。

由于 $\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{3}+\alpha+\beta=1$，因此 $\alpha+\beta=\frac{1}{3}$，故填 $\alpha+\beta=\frac{1}{3}$。

若 X 、Y 相互独立，则

$$\alpha=P(X=2,Y=2)=P(X=2)P(Y=2)=(\frac{1}{3}+\alpha+\beta)(\frac{1}{9}+\alpha)$$

从而 $\alpha=(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})(\frac{1}{9}+\alpha)$，解之得 $\alpha=\frac{2}{9}$，从而 $\beta=\frac{1}{9}$，故填 $\alpha=\frac{2}{9}$，$\beta=\frac{1}{9}$。

（2）解应填 $\frac{1}{9}$。

方法一由于 $X\sim U[0,3]$，$Y\sim U[0,3]$，因此 X 与 Y 的分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x}{3}, & 0\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}，\qquad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{y}{3}, & 0\le y<3\\ 1, & y\ge 3\end{cases}$$

又由于 X 与 Y 相互独立，故 $Z=\max\{X,Y\}$ 分布函数为

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{z^2}{9}, & 0\le z<3\\ 1, & z\ge 3\end{cases}$$

所以$P(\max\{X,Y\}\le 1)=F_{\max}(1)=\dfrac{1}{9}$，故填$\dfrac{1}{9}$。

方法二由于 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim U[0,3]$，$Y\sim U[0,3]$，因此 $(X,Y)\sim U[0,3;0,3]$。从而由几何概率，得

$$P(\max\{X,Y\}\le 1)=P(X\le 1,Y\le 1)=\frac{1}{9}$$

故填$\dfrac{1}{9}$。

（3）解应填$\sqrt[3]{4}$。

由于 $P(A)=P(X>a)=P(Y>a)=\int_a^2 \frac{3}{8}x^2dx=1-\dfrac{a^3}{8}$，因此

$$\frac{3}{4}=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(X>a)+P(Y>a)-P(X>a,Y>a)$$

$$=P(X>a)+P(Y>a)-P(X>a)P(Y>a)$$

$$=1-\frac{a^3}{8}+1-\frac{a^3}{8}-(1-\frac{a^3}{8})(1-\frac{a^3}{8})=1-\frac{a^6}{64}$$

解之得$a=\sqrt[3]{4}$，故填$\sqrt[3]{4}$。

（4）解应填$\dfrac{3}{4}$。

由于 $X\sim E(2)$，$Y\sim E(3)$，因此 X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

又由于 X 与 Y 相互独立，故 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

从而

$$P(Y<2X)=\iint\limits_{y<2x} f(x,y)dxdy=3\int_0^{+\infty}e^{-3y}dy\int_{\frac{y}{2}}^{+\infty}2e^{-2x}dx=3\int_0^{+\infty}e^{-4y}dy=\frac{3}{4}$$

故填$\dfrac{3}{4}$。

三、解（1）由于 X 与 Y 相互独立，因此

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$\forall y>0, f_Y(y)>0$，X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

（2）由于 Z 的可能取值为 $0,1$，且

$$P(Z=1)=P(X\le Y)=\iint\limits_{x\le y} f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}\lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}dy$$

$$=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-(\lambda+\mu)x}dx=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$P(Z=0)=1-P(Z=1)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

即 Z 的分布律为

Z	0	1
P	$\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$	$\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$

Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}, & 0\le z<1\\ 1, & z\ge 1\end{cases}$$

四、解（1）由于 $X\sim U(0,1)$，因此 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

又 X 与 Y 相互独立，故 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<1,\ y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2）$P($“方程$a^2+2Xa+Y=0$有实根”$)$

$$=P(4X^2-4Y\geq 0)=P(X^2-Y\geq 0)=\iint\limits_{x^2\geq y} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy=\int_0^1(1-e^{-\frac{x^2}{2}})dx=1-\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-\sqrt{2\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=1-\sqrt{2\pi}[\Phi(1)-\Phi(0)]=0.1445$$

五、解（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2x}dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}dx=1-\frac{y}{2}, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2）方法一先求Z的分布函数$F_Z(z)$。当$\frac{z}{2}<0$，即$z<0$时，$F_Z(z)=0$；

当$0\leq\frac{z}{2}<1$，即$0\leq z<2$时，

$$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(2X-Y\leq z)=\iint\limits_{2x-y\leq z}f(x,y)dxdy=z-\frac{z^2}{4}$$

当$\frac{z}{2}\geq 1$，即$z\geq 2$时，$F_Z(z)=1$，即Z的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ z-\frac{z^2}{4}, & 0\leq z<2\\ 1, & z\geq 2\end{cases}$$

再求Z的概率密度$f_Z(z)$。

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{2}, & 0<z<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

方法二 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,2x-z)dx$。

由$\begin{cases}0<x<1\\ 0<2x-z<2x\end{cases}$，得$0<z<2x$，从而$0<z<2$。故当$0<z<2$时，$f_Z(z)>0$，

在其他点，$f_Z(z)=0$。

再由$\begin{cases}0<x<1\\0<2x-z<2x\end{cases}$，得$\begin{cases}0<x<1\\\dfrac{z}{2}<x\end{cases}$，即$\dfrac{z}{2}<x<1$，从而$Z$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_{\frac{z}{2}}^{1}1dx=1-\dfrac{z}{2}, & 0<z<2\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

（3）$P(Y\le\frac{1}{2}\big|X\le\frac{1}{2})=\dfrac{P(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2})}{P(X\le\frac{1}{2})}=\dfrac{\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}}dx}{\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx}=\dfrac{3}{4}$

六、解（1）$P(Z\le\frac{1}{2}\big|X=0)=P(X+Y\le\frac{1}{2}\big|X=0)=P(Y\le\frac{1}{2}\big|X=0)$，由于$X$与$Y$相互独立，因此

$$P(Z\le\frac{1}{2}\big|X=0)=P(Y\le\frac{1}{2}\big|X=0)=P(Y\le\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}1dy=\frac{1}{2}$$

（2）设Y的分布函数为$F_Y(y)$，Z的分布函数和概率密度分别为$F_Z(z),f_Z(z)$，根据题设由全概率公式及X与Y相互独立，得

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)\\&=P(X=-1)P(X+Y\le z\big|X=-1)+P(X=0)P(X+Y\le z\big|X=0)\\&\quad+P(X=1)P(X+Y\le z\big|X=1)\\&=\frac{1}{3}(P(Y\le z+1\big|X=-1)+P(Y\le z\big|X=0)+P(Y\le z-1\big|X=1))\\&=\frac{1}{3}(P(Y\le z+1)+P(Y\le z)+P(Y\le z-1))\\&=\frac{1}{3}(F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1))\end{aligned}$$

从而Z的概率密度为

$$\begin{aligned}f_Z(z)&=F_Z'(z)=\frac{1}{3}(F_Y'(z+1)+F_Y'(z)+F_Y'(z-1))\\&=\frac{1}{3}(f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1))=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & -1<z<2\\0, & \text{其他}\end{cases}\end{aligned}$$