第一章 概率论的基本概念

§1 随机现象与随机试验 §2 样本空间与随机事件§3 概率及其性质

一、单项选择题

（1）解应选（A）。

由于 $AB\subset C$，因此 $\bar{C}\subset\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$，故选（A）。

（2）解应选（A）。

由事件的运算律，得 $(A\cup B)-B=(A\cup B)\bar{B}=A\bar{B}\cup B\bar{B}=\boxed{A\bar{B}}=A-B$，即

$$(A\cup B)-B=A-B$$

故选（A）。

（3）解应选（D）。

由于比赛的结果有甲胜、乙胜和平局，因此事件 A “甲胜乙负”的逆事件为“甲负或平局”，即 $\bar{A}$ 表示事件“甲负或平局”，故选（D）。

（4）解应选（C）。

由于 $P(AB)=0$，因此 AB 未是不可能事件。事实上，随机地向以 0、1 为端点的线段上投点，设 A 表示事件“点投中以 0、$\frac{1}{2}$ 为端点的线段”，B 表示事件“点投中以 $\frac{1}{2}$、1 为端点的线段”，则 AB 表示事件“点投中 $\frac{1}{2}$ 点”，由几何概率知，$P(AB)=0$，但 $AB\neq\Phi$，故选（C）。

（5）解应选（D）。

由于事件 A、B 互不相容，因此 $AB=\Phi$，从而 $\overline{AB}=\Omega$，即 $\bar{A}\cup\bar{B}=\Omega$，所以

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\Omega)=1$$

故选（D）。

（6）解应选（C）。

由于 A、B 互不相容，即 $AB=\Phi$，因此 $P(AB)=0$，从而

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=0$$

故选（C）。

二、解（1）应填 $A\bar{B}\bar{C}$。

（2）应填 $A\cup B\cup C$。

（3）应填 ABC。

（4）应填 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$。

（5）应填 $AB\cup BC\cup AC$。

三、填空题

（1）解应填 0.7， 0.8。

由于 $P(A\cup B)=P(B)+P(A-B)=0.4+0.3=0.7$，故填 0.7。

又 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-[P(A)-P(A-B)]=1-(0.5-0.3)=0.8$，故填 0.8。

（2）解应填 0.3， 0.3。

由于 $0.6=P(A\cup B)=P(B)+P(A-B)$，因此 $P(A-B)=0.6-0.3=0.3$，从而

$$P(A-AB)=P(A-B)=0.3$$

故填 0.3。又 $P(A\overline{B})=P(A-B)=0.3$，故填 0.3。

（3）解应填 $1-p$。

由于 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$，因此

$$1-P(A)-P(B)=0$$

从而 $P(B)=1-P(A)=1-p$，故填 $1-p$。

（4）解应填 $\frac{5}{8}$。

由于 $ABC\subset AB$，且 $P(AB)=0$，因此 $0\le P(ABC)\le P(AB)=0$，从而 $P(ABC)=0$。由加法公式，得

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=3\times\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

故填 $\frac{5}{8}$。

四、解由于 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$，因此当 $A\cup B=\Omega$ 时，则 $P(A\cup B)$ 取得最大值1，从而 $P(AB)$ 取得最小值，且最小值为 $P(AB)=P(A)+P(B)-1=0.6+0.7-1=0.3$。

五、**解**由于 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}=\frac{11}{15}$，因此

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$$

又

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{17}{20}$$

故 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-\frac{17}{20}=\frac{3}{20}$，从而

$$P(\bar{A}\bar{B}\cup C)=P(C)+P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=\frac{1}{5}+\frac{3}{20}=\frac{7}{20}$$

§4 古典概率 §5 几何概率

一、单项选择题

（1）解应选（C）。

设 A 表示事件“取出的 2 件产品都是正品”，则 $P(A)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$，从而所求事件的概率为

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

故选（C）。

（2）解应选（D）。

设 A 表示事件“取出的 3 本书中没有硬皮书”，则

$$P(A)=\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\frac{24}{91}$$

从而所求事件的概率为

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{24}{91}=\frac{67}{91}$$

故选（D）。

二、**解**（1）应填 $\frac{1}{11}$。

样本空间基本事件总数 $n_1=C_{12}^1C_{11}^1$，有利于所求事件发生的基本事件数 $k_1=C_3^1C_4^1$，从而所求的概率为 $p_1=\frac{k_1}{n_1}=\frac{C_3^1C_4^1}{C_{12}^1C_{11}^1}=\frac{1}{11}$，故填 $\frac{1}{11}$。

（2）应填 $\frac{5}{36}$。

样本空间基本事件总数 $n_2 = C_{12}^1 C_{12}^1$，有利于所求事件发生的基本事件数 $k_2 = C_5^1 C_4^1$，从而所求的概率为 $p_2 = \frac{k_2}{n_2} = \frac{C_5^1 C_4^1}{C_{12}^1 C_{12}^1} = \frac{5}{36}$，故填 $\frac{5}{36}$。

三、**解**样本空间基本事件总数 $n = C_{10}^3$。

（1）有利于所求事件发生的基本事件数 $k_1 = C_1^1 C_5^2$，从而所求的概率为 $p_1 = \frac{k_1}{n} = \frac{C_1^1 C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{12}$。

（2）有利于所求事件发生的基本事件数 $k_2 = C_1^1 C_4^2$，从而所求的概率为 $p_2 = \frac{k_2}{n} = \frac{C_1^1 C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{20}$。

四、**解**样本空间基本事件总数 $n = C_5^1 C_4^1 C_3^1 = 60$，

（1）有利于所求事件发生的基本事件数 $k_1 = 3 \times 3! = 18$，从而所求的概率为 $p_1 = \frac{k_1}{n} = \frac{3}{10}$。

（2）有利于所求事件发生的基本事件数 $k_2 = 4 \times 3! = 24$，从而所求的概率为 $p_2 = \frac{k_2}{n} = \frac{2}{5}$。

五、**解**样本空间基本事件总数 $n = C_{10}^3$。

（1）有利于所求事件发生的基本事件数 $k_1 = C_6^3$，从而所求的概率为 $p_1 = \frac{k_1}{n} = \frac{1}{6}$。

（2）有利于所求事件发生的基本事件数 $k_2 = C_4^1 C_6^2$，从而所求的概率为 $p_2 = \frac{k_2}{n} = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}$。

（3）由于所求事件的逆事件为“取出的 3 件产品中没有次品或恰有 1 件次品”，因此所求的概率为 $p_3 = 1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3} - \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{3}$。

六、**解**样本空间基本事件总数 $n = P_{11}^7$，有利于所求事件发生的基本事件数

$$k = C_1^1 C_2^1 C_2^1 C_1^1 C_1^1 C_1^1 C_1^1 = 2 \times 2$$

从而所求的概率为 $p = \frac{k}{n} = \frac{2 \times 2}{P_{11}^7} = 0.0000024$。

七、**解**样本空间 $\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$，其面积为 1。

（1）所求事件 $A_1 = \{(x, y) \mid y < x^2\}$，且 A_1 的面积为 $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$，从而所求的概率为

$$P(A_1) = \frac{A_1\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

（2）所求事件 $A_2=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1,(x,y)\in\Omega\}$，且 A_2 的面积为 $\frac{\pi}{4}$，从而所求的概率为

$$P(A_2)=\frac{A_2\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{\frac{\pi}{4}}{1}=\frac{\pi}{4}$$

（3）所求事件 $A_3=\{(x,y)\big|x^2<y<\sqrt{x}\}$，且 A_3 的面积为 $\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{1}{3}$，从而所求的概率为

$$P(A_3)=\frac{A_3\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}$$

§6 条件概率与概率的三大公式

一、单项选择题

（1）解应选（A）。

由于 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B|A)$，因此

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A)P(B|A)$$

$$=P(A\cup B)-P(A)+P(A)(1-P(\bar{B}|A))$$

$$=0.84-0.6+0.6\times(1-0.4)=0.60$$

故选（A）。

（2）解应选（B）。

由于 $B\subset A$，因此 $\bar{A}\subset\bar{B}$，由减法公式，得 $P(\bar{B}-\bar{A})=P(\bar{A})-P(\bar{B})$，故选（B）。

（3）解应选（C）。

由于 $P(A|B)=1$，因此

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(B)P(A|B)$$

$$=P(A)+P(B)-P(B)=P(A)$$

故选（C）。

（4）解应选（A）。

由于事件 A 的发生必然导致 B 的发生，因此 $A\subset B$，从而

$$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(A)}{P(\bar{B})}=0$$

故选（A）。

（5）解应选（D）。

方法一由于 $P(AB)=0$ 未必成立，因此 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ 未必成立，从而选项（A）不正确；又 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)=0$，故选项（B）不正确；由于没有条件 $P(A)\neq 0$，因此条件概率 $P(B|A)$ 可能没意义，因此选项（C）不正确，故选（D）。

方法二由于 $0\le P(A)<P(B)<1$，因此 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)}{P(B)}\ge P(A)$，故选（D）。

二、填空题

（1）解应填 0.7。

由 $0.6=P(B|\bar{A})=\dfrac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\dfrac{0.8-P(AB)}{0.4}$，得 $P(AB)=0.56$，从而

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.56}{0.8}=0.7$$

故填 0.7。

（2）解应填 $\dfrac{2}{3}$。

设 A_i 表示“取出的是 i 等品”，$i=1,2,3$，则所求的概率为

$$P(A_1|\bar{A}_3)=\boxed{P(A_1|A_1\cup A_2)}=\frac{P(A_1)}{P(A_1\cup A_2)}=\frac{P(A_1)}{P(A_1)+P(A_2)}=\frac{0.6}{0.6+0.3}=\frac{2}{3}$$

故填 $\dfrac{2}{3}$。

（3）解应填 $\dfrac{1}{6}$。

设 A_i 表示“第 i 次抽到次品”，$i=1,2$

方法一根据“抽签原则”可得 $P(A_2)=P(A_1)=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$。

方法二由全概率公式得

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}+\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{1}{6}$$

故填 $\dfrac{1}{6}$。

（4）解应填 $\dfrac{3}{4}$。

$$P(AB|\bar{C})=\frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{P(\bar{C})}=\frac{P(AB)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

故填$\frac{3}{4}$。

（5）解应填0.25。

由$0.5=P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$，得

$$P(AB)=P(A)-0.5=0.7-0.5=0.2$$

从而

$$P(B|A\cup\bar{B})=\frac{P(B(A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})}=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})}=\frac{0.2}{0.7+0.6-0.5}=0.25$$

故填0.25。

（6）解应填0.7。

由加法公式及乘法公式，得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B|A)$$

$$=0.5+0.6-0.5\times0.8=0.7$$

故填0.7。

三、**解** 设 $A=\{$孩子得病$\}$，$B=\{$母亲得病$\}$，$C=\{$父亲得病$\}$，则$P(A)=0.6$，$P(B|A)=0.5$，$P(C|AB)=0.4$，由乘法公式，得所求的概率为

$$P(AB\bar{C})=P(A)P(B|A)P(\bar{C}|AB)=0.6\times0.5\times0.6=0.18$$

四、解设$A_i(i=1,2,\cdots)$表示事件“第i次取到黑球”，则

（1）所求的概率为

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

（2）所求的概率为

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}\bar{A}_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})P(\bar{A}_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$$

五、解 设 $B_i(i=0,1,2,3)$ 表示事件“从第一箱中取出的 3 件产品中恰好有 i 件不合格品”，A 表示事件“从第二箱中取出的产品是不合格品”，则

$$P(B_0)=\frac{C_3^0C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}，\quad P(B_1)=\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20}$$

$$P(B_2)=\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20}，\quad P(B_3)=\frac{C_3^3C_3^0}{C_6^3}=\frac{1}{20}$$

$$P(A|B_0)=0，\quad P(A|B_1)=\frac{1}{6}，\quad P(A|B_2)=\frac{2}{6}，\quad P(A|B_3)=\frac{3}{6}$$

由全概率公式，得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{1}{20}\times 0+\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$$

由 Bayes 公式，得

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{3}{10}$$

六、解 设 $A=\{挑选到一名男性\}$，$B=\{挑选到一名色盲者\}$，则 $P(A)=0.5$，$P(B|A)=0.05$，$P(B|\bar{A})=0.0025$，由 Bayes 公式，得

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}=\frac{0.5\times 0.05}{0.5\times 0.05+0.5\times 0.0025}=\frac{20}{21}$$

七、解 设 $H_i(i=1,2,3)$ 表示事件“抽到的报名表是第 i 地区的”，$A_j(j=1,2)$ 表示事件“第 j 次抽到的是男生表”，则

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3},P(A_1|H_1)=\frac{7}{10},P(A_1|H_2)=\frac{8}{15},P(A_1|H_3)=\frac{20}{25}$$

（1）由全概率公式，得

$$P(\bar{A}_1)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\bar{A}_1|H_i)=\frac{1}{3}(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25})=\frac{29}{90}$$

（2）由“抽签原则”知

$$P(A_2|H_1)=\frac{7}{10},P(A_2|H_2)=\frac{8}{15},P(A_2|H_3)=\frac{20}{25}$$

由全概率公式，得

$$P(A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A_2|H_i)=\frac{1}{3}(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25})=\frac{61}{90}$$

所以

$$P(\bar{A}_1|A_2)=\frac{P(\bar{A}_1A_2)}{P(A_2)}$$

$$=\frac{1}{P(A_2)}[P(H_1)P(\bar{A}_1A_2|H_1)+P(H_2)P(\bar{A}_1A_2|H_2)+P(H_3)P(\bar{A}_1A_2|H_3)]$$

$$=\frac{90}{61}(\frac{1}{3}\cdot\frac{3\times7}{10\times9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7\times8}{15\times14}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5\times20}{25\times24})$$

$$=\frac{90}{61}\cdot\frac{2}{9}=\frac{20}{61}$$

（3）$P(H_2|\bar{A}_1A_2)=\dfrac{P(H_2)P(\bar{A}_1A_2|H_2)}{P(\bar{A}_1A_2)}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{7\times8}{15\times14}}{\frac{2}{9}}=\dfrac{2}{5}$

§7 事件的独立性

一、单项选择题

（1）解应选（B）。

由于 A、B 相互对立，因此 $A\cap B=\Phi, A\cup B=\Omega$，从而 A 与 B 互不相容，故选（B）。

（2）解应选（D）。

由于 A、B 相互独立，因此所求的概率为

$$P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)=P(A)P(\bar{B})+P(\bar{A})P(B)$$

$$=p(1-q)+q(1-p)$$

故选（D）。

（3）解应选（B）。

方法一由于 A、B、C 相互独立，且 $P(A)\neq0,\ 0<P(C)<1$，因此

$$P((\overline{AC})\bar{C})=P(\overline{AC\cup C})=P(\bar{C})$$

$$P(\overline{AC})=1-P(AC)=1-P(A)P(C)<1$$

从而 $P((\overline{AC})\bar{C})\neq P(\overline{AC})P(\bar{C})$，即 $\overline{AC}$ 与 $\bar{C}$ 不相互独立，故选（B）。

方法二由于 A、B、C 相互独立，因此 $\overline{A\cup B}$ 与 C、$\overline{A-B}$ 与 $\bar{C}$、$\overline{AB}$ 与 $\bar{C}$ 相互独立，从而

就不相互独立而言，选项（A）、（C）、（D）均不正确，故选（B）。

（4）解选（A）。

由于 A、B、C 三个事件两两独立，因此

$$P(AB)=P(A)P(B)\text{，}\ P(AC)=P(A)P(C)\text{，}\ P(BC)=P(B)P(C)$$

从而 A、B、C 相互独立的充分必要条件是 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$。

若 A 与 BC 相互独立，则

$$P(ABC)=P(A(BC))=P(A)P(BC)=P(A)P(B)P(C)$$

反过来，若 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，则

$$P(A(BC))=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(A)(P(B)P(C))=P(A)P(BC)$$

即 A 与 BC 相互独立，从而 A、B、C 相互独立的充分必要条件 A 与 BC 相互独立，故选（A）。

二、填空题

（1）解应填 $\dfrac{1}{3}$。

由于 A,B 相互独立，因此 $0.6\ =P(A\cup B)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})$，由 $P(A)=0.4$，得 $P(B)=\dfrac{1}{3}$，故填 $\dfrac{1}{3}$。

（2）解应填 0.28，0.30。

由于 A,B 相互独立，因此 $P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=0.4\times0.7=0.28$，故填 0.28。

由于 $P(A\cup B)=P(B)+P(A\bar{B})=P(B)+P(A-B)$，因此 $P(A-B)=P(A\cup B)-P(B)$ $=0.6-0.3=0.30$，故填 0.30。

（3）解应填 0。

由于 A,B 相互独立且互不相容，因此 $P(A),P(B)$ 至少有一个等于零，否则 A,B 相互独立与互不相容不能同时成立，从而 $\min\{P(A),P(B)\}=0$，故填 0。

（4）解应填 $\dfrac{4}{3}$ 或 $\dfrac{5}{3}$。

由 $\dfrac{7}{9}=P(A\cup B)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})=1-(2-a)(a-1)$，得 $9a^2-27a+20=0$，解之得 $a=\dfrac{4}{3}$ 或

$a=\frac{5}{3}$，故填$\frac{4}{3}$或$\frac{5}{3}$。

三、**解**设A,B,C分别表示事件“第一个，第二个，第三个人独立译出密码”，则A,B,C相互独立，且$P(A)=\frac{1}{5}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{1}{4}$，从而所求的概率为

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=1-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=0.6$$

四、解设B_i表示事件“仪器上有i个部件不是优质品”，$i=0,1,2,3$，A表示事件“仪器不合格”，则

$$P(B_0)=0.8\times0.7\times0.9=0.504$$

$$P(B_1)=0.2\times0.7\times0.9+0.8\times0.3\times0.9+0.8\times0.7\times0.1=0.398$$

$$P(B_3)=0.2\times0.3\times0.1=0.006,\quad P(B_2)=1-P(B_0)-P(B_1)-P(B_3)=0.092$$

$$P(A|B_0)=0,\quad P(A|B_1)=0.2,\quad P(A|B_2)=0.6,\quad P(A|B_3)=0.9$$

（1）由全概率公式，得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$$

$$=0.504\times0+0.398\times0.2+0.092\times0.6+0.006\times0.9=0.1402$$

（2）由 Bayes 公式，得

$$P(B_0|A)=0$$

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.398\times0.2}{0.1402}=\frac{796}{1402}$$

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{0.092\times0.6}{0.1402}=\frac{552}{1402}$$

$$P(B_3|A)=\frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}=\frac{0.006\times0.9}{0.1402}=\frac{54}{1402}$$

从计算的结果知，一台不合格的仪器中有一个部件不是优质品的概率最大。

或者，由于$\sum_{i=0}^{3}P(B_i|A)=1$，因此当计算$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{796}{1402}>0.5$后就可以确定

$P(B_i|A)<0.5\ (i=2,3)$，从而可知一台不合格的仪器中有一个部件不是优质品的概率最大。

五、解（1）$\dfrac{1}{4}=P(AC|AB\cup C)=\dfrac{P(AC(AB\cup C))}{P(AB\cup C)}=\dfrac{P(ABC\cup AC)}{P(AB\cup C)}=\dfrac{P(AC)}{P(AB\cup C)}$

$$=\frac{P(A)P(C)}{P(AB)+P(C)-P(ABC)}=\frac{P(A)P(C)}{P(A)P(B)+P(C)}=\frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{4}+P(C)}$$

解之得 $P(C)=\dfrac{1}{4}$。

（2）$\dfrac{7}{9}=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)=3p-2p^2$$

解之得 $p=\dfrac{1}{3}$。从而所求的概率为

$$P(AB\cup AC\cup BC)=P(AB\cup AC)=P(AB)+P(AC)-P(ABC)$$

$$=P(A)P(B)+P(A)P(C)-0=2p^2=\frac{2}{9}$$

六、解 A 表示事件"甲击中目标", B 表示事件"乙击中目标",则 A、B 相互独立,且 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.6$。

（1）所求的概率为 $P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=[1-P(A)][1-P(B)]=0.3\times0.4=0.12$。

（2）所求的概率为

$$P(A\cup B)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})=1-[1-P(A)][1-P(B)]=1-0.3\times0.4=0.88$$

（3）所求的概率为 $P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-P(A)P(B)=1-0.7\times0.6=0.58$。

七、解设 A_i 表示"前 $i-1$ 次试验中没有出现点数和为 5 点或 7 点的结果，而第 i 次试验出现点数和为 5 点的结果"，$i=1,2,\cdots$，A 表示"两枚骰子点数和为 5 的结果出现在点数和为 7 的结果之前"，则 $A=\bigcup_{i=i}^{\infty}A_i$。又在一次试验中，事件"两枚骰子的点数和为 5"出现的概率为 $\dfrac{4}{36}$，"两枚骰子的点数和为 7"出现的概率为 $\dfrac{6}{36}$，从而"两枚骰子的点数和为 5 或为 7"出现的概率为 $\dfrac{10}{36}$ $\left(\dfrac{4}{36}+\dfrac{6}{36}=\dfrac{10}{36}\right)$，于是 $P(A_i)=\left(1-\dfrac{10}{36}\right)^{i-1}\times\dfrac{4}{36}$，　$i=1,2,\cdots$，故

$$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{10}{36}\right)^{i-1}\times\frac{4}{36}=\frac{1}{9}\times\frac{1}{1-\frac{13}{18}}=\frac{2}{5}$$

八、**解**由题设得 $P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$，即 $P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$，从而 $P(A)=P(B)$。由于 A 与 B 相互独立，因此 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立，从而由 $\frac{1}{9}=P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=[P(\bar{A})]^2$，得 $P(\bar{A})=\frac{1}{3}$，从而 $P(A)=\frac{2}{3}$。