西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

概率论与数理统计

概率论与数理统计课程组

1.5 几何概率

古典概率是基于样本空间为有限集，每个基本事件发生的可能性相等的古典概型。那么对于试验结果为无限多个的情况对应的概率要如何求解呢?

例：在0至10中，任意取出一实数，求该数小于5的概率?

一、定义： 如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的测度（长度、面积或体积）成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型，简称几何概型。

二、特征：

（1）无限性： 基本事件的个数无限

（2）等可能性： 基本事件出现的可能性相同

三、几何概型的概率公式

$$P(A)=\frac{\text{构成事件A的测度（区域长度、面积或体积）}}{\text{试验的全部结果所构成的测度（区域长度、面积或体积）}}$$

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}$$

几何概率和古典概率的比较

	古典概率	几何概率
相似	样本点的等可能性（均等）	
区别	试验中所有可能出现的结果为有限个	试验中所有可能出现的结果有无限个
概率公式	$P(A)=\dfrac{A\text{包含的基本事件数}}{\Omega\text{包含的基本事件数}}$	$P(A)=\dfrac{A\text{的长度（面积或体积）}}{\Omega\text{的长度（面积或体积）}}$

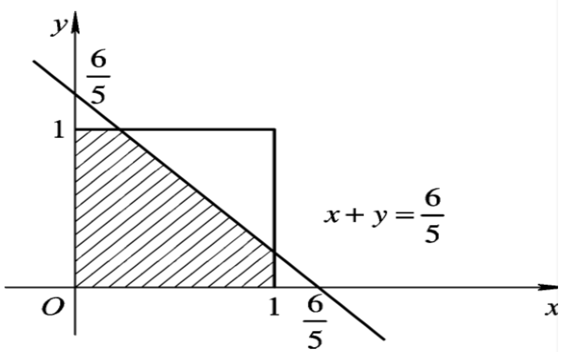
例 1： 在区间（0,1）中随机地取两个数，求事件“两数之和小于6/5”的概率。

解： 设x,y分别表示随机取出的两个数，则$0<x<1, 0<y<1$

样本空间$\Omega=\{(x,y)|0<x<1, 0<y<1\}$

事件A：“两数之和小于6/5”

事件$A=\{(x,y)|0<x<1, 0<y<1, x+y<6/5\}$



$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{1-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2}{1}=\frac{17}{25}$$

例 2（约会问题） 甲、乙两人约定0-T时刻内在某地会面，先到者等t $(t \le T)$ 时后离去，求两人能会面的概率。

解： 设x,y分别表示甲、乙两人到达某地时间

事件A：“两人能会面” $A=\{(x,y)\,\big|\,|x-y|\le t\}$

样本空间 $\Omega=\{(x,y)\,|\,0\le x\le T, 0\le y\le T\}$

$$P(A)=\frac{\mathrm{L}(A)}{\mathrm{L}(\Omega)}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-(1-\frac{t}{T})^2$$

例 3（Buffon投针问题）在平面上画出等距离为 $a(a>0)$ 的一些平行线，向平面上随机地投掷一根长为 $l(l<a)$ 的针，求针与平行线相交的概率。

解：设r为针的中心到最近平行线的距离，θ 为针的轴线与该平行线的夹角

样本空间 $\Omega=\left\{(r,\theta)\middle|0\le\theta\le\pi,0\le r\le\frac{a}{2}\right\}$

事件A={针与平行线相交}

$$\mathrm{A}=\left\{(r,\theta)\middle|0\le\theta\le\pi,0\le r\le\frac{l}{2}\sin\theta\right\}$$

$$P(A)=\frac{\mathrm{L}(A)}{\mathrm{L}(\Omega)}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\theta d\theta}{\frac{a}{2}\cdot\pi}=\frac{2l}{a\pi}$$

几何概率问题的解题步骤：

1. 明确问题的性质，判断是否是几何概率?

2. 明确具有等可能性的几何元素是什么？（时间、距离、点）

★ 3. 用几何区域（如区间、平面、空间区域等）表示基本事件数的总和

4. 利用初等几何或微积分求出Ω和A的测度L(Ω),L(A)

5. 利用 $P(A)=\dfrac{L(A)}{L(\Omega)}$ 求出事件的概率

思考：

1. **概率为零的事件一定是不可能事件吗?**

2. **概率为1的事件一定是必然事件吗?**

1.6 条件概率与概率的三大公式

一、条件概率

例：有两个孩子的家庭，假设男、女出生率一样，则两个孩子的性别（依大小排列） Ω={(B,B),(B,G),(G,B)(G,G)}，且每个基本时间发生是等可能的，若事件H={至少有一个女孩子}发生了，求事件A={此家庭有一男一女}的概率？

一、条件概率

讨论事件A已经发生的条件下事件B发生的概率问题。

1、条件概率的定义

设A、B为两个事件，P(A)>0，称

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件A发生的条件下事件B发生的条件概率。

例 三张卡片放在一顶帽子里，第一张卡片两面都是圈，第二张卡片两面都是点，第三张一面圈一面点，庄家让任取一张置于桌上，卡片上为圈，赌：若下面与上面一样，则庄家赢；若不一样，则你赢。
问：这样的赌博是否公平?

要点：确定样本空间是什么？已有信息是什么?

2、条件概率的性质

符合概率定义中的3个条件及概率的所有性质。

1° **非负性**：对于每一个事件B，有 $P(B\mid A)\geq 0$

2° **规范性**：对于必然事件Ω，有 $P(\Omega\mid A)=1$

3° **可列可加性**：设$B_1, B_2, \ldots$ 是两两不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \mid A\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i\mid A)$$

4° $P(\overline{B}\mid \mathrm{A})=1-P(B\mid A)$

5° $P(\mathrm{B}_1\cup \mathrm{B}_2\mid \mathrm{A})=P(B_1\mid A)+P(B_2\mid A)-P(\mathrm{B}_1 B_2\mid A)$

条件概率可当做无条件概率的一般形式

二、概率的三大公式

1、乘法公式

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(\mathrm{AB})=P(B|A)P(A)=P(A/B)P(B)$$

乘法公式

设$P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$

推广至多个事件的积事件

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

用乘法公式求多个事件同时发生的概率。

例（卜里耶-传染模型）：设袋中装有 r 只红球， t 只白球。每次从袋中任取 1 只球，观察其颜色然后放回，并再放入 a只与所取出的那只球同颜色的球。若在袋中连续取球n次，试求前n1次取到红球且后n2（n-n1）次取到白球的概率。

解：设 A i (i =1 ,2,3,...,n1)表示事件“第 i 次取到红球”，故所求的概率为

$$P(A_1A_2\ldots A_{n_1}\overline{A_{n_1+1}}\ldots\ldots\overline{A_{n_1+n_2}})$$

$$=P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots.P(A_{n_1}|A_1\ldots\ldots A_{n_1-1})P(\overline{A_{n_1+1}}|A_1\ldots\ldots A_{n_1})$$

$$\ldots P(\overline{A_n}|A_1A_2\ldots A_{n_1}\overline{A_{n_1+1}}\ldots\ldots\overline{A_{n_1+n_2-1}})$$

$$=\frac{r}{r+t}\cdot\frac{r+a}{r+t+a}\ldots\ldots\frac{r+(n_1-1)a}{r+t+(n_1-1)a}\cdot\frac{t}{r+t+n_1a}$$

$$\cdot\frac{t+a}{r+t+(n_1+1)a}\ldots\ldots\frac{t+(n_2-1)a}{r+t+(n-1)a}$$

例　某人忘了某饭店电话号码的最后一个数字，因而随意拨号，问：三次之内拨通电话的概率。

2、全概率公式

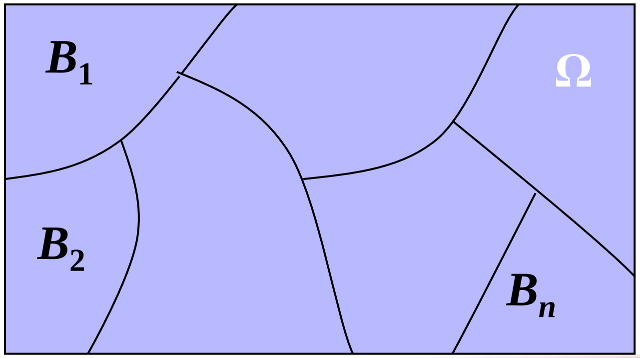
定义 设 Ω 为试验 E 的样本空间，$B_1, B_2, \ldots, B_n$为E 的一组事件，若

$$\text{(i)}\quad B_iB_j = \varnothing,\ \ i \neq j,\ \ i, j = 1, 2, \cdots, n$$

$$\text{(ii)}\quad B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$$

则称$B_1, B_2, \ldots, B_n$为样本空间Ω 的一个划分/分割

或称为一组完备事件群



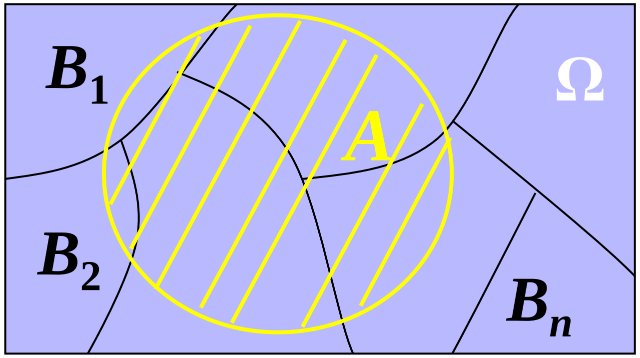
即一次试验中：$B_1, B_2, \ldots, B_n$

至少有一发生是必然的，两两同时发生又是不可能的

✓ 样本空间的划分并不唯一。

设Ω为随机试验的样本空间为，A 为随机事件，$B_1, B_2, \ldots, B_n$为Ω 的一个划分， $P(B_i) > 0$，$i=1, 2, \ldots, n$, 则

$$A = A \cap \Omega = A \cap (B_1 \cup B_2 \ldots \cup B_n) = AB_1 \cup AB_2 \ldots \cup AB_n$$



因为$B_i B_j = \phi$，所以$(AB_i)(AB_j) = \phi$

由概率的可加性得：

$$P(A) = P(AB_1 \cup AB_2 \ldots \cup AB_n) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A \mid B_i)$$ -----全概率公式

全概率公式的重要性：将复杂事件分解为若干个互不相容的简单事件的和，再利用概率的可加性来计算复杂事件的概率。

全概率公式

目的：求比较复杂事件的概率。

步骤：

（1）将复杂事件分解为若干个互斥的简单事件之和。

（2）求出简单事件的概率。

（3）利用概率可加性求出复杂事件的概率。

例1：设某厂产品的一个零部件是由三家上游厂商供货的，已知有一半是A厂提供，B厂和C厂各提供25%，已知厂商A和B的次品率都是2%，C的次品率是4%，从该厂产品中任取一个产品是次品的概率？

例2（对敏感问题如何提问）调查某地区的吸毒比率，抽样，抛硬币，若正面则回答“是否吸毒”，反面回答“电话号码尾数是否是偶数”，回答的人不需要告知正反面，只需如实回答“是”或“不是”。