电势的计算

方法

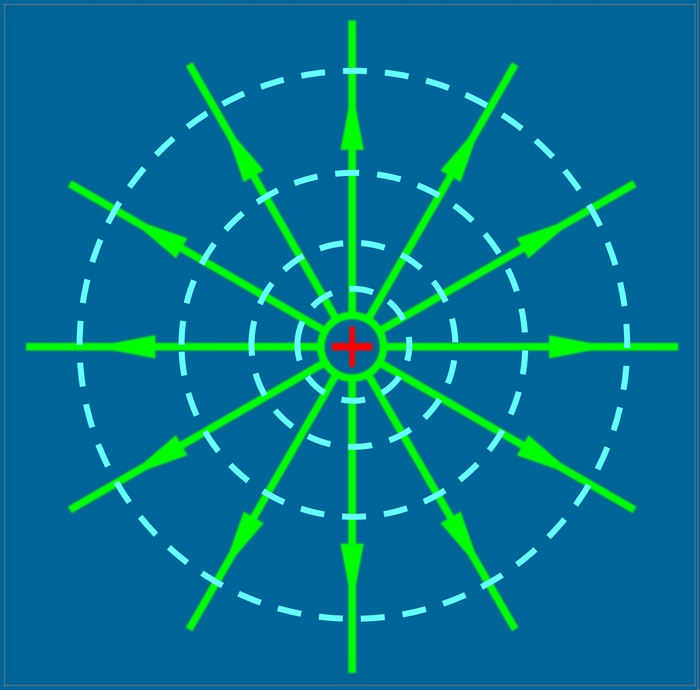
（1） 已知电荷分布 $u=\int_V \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

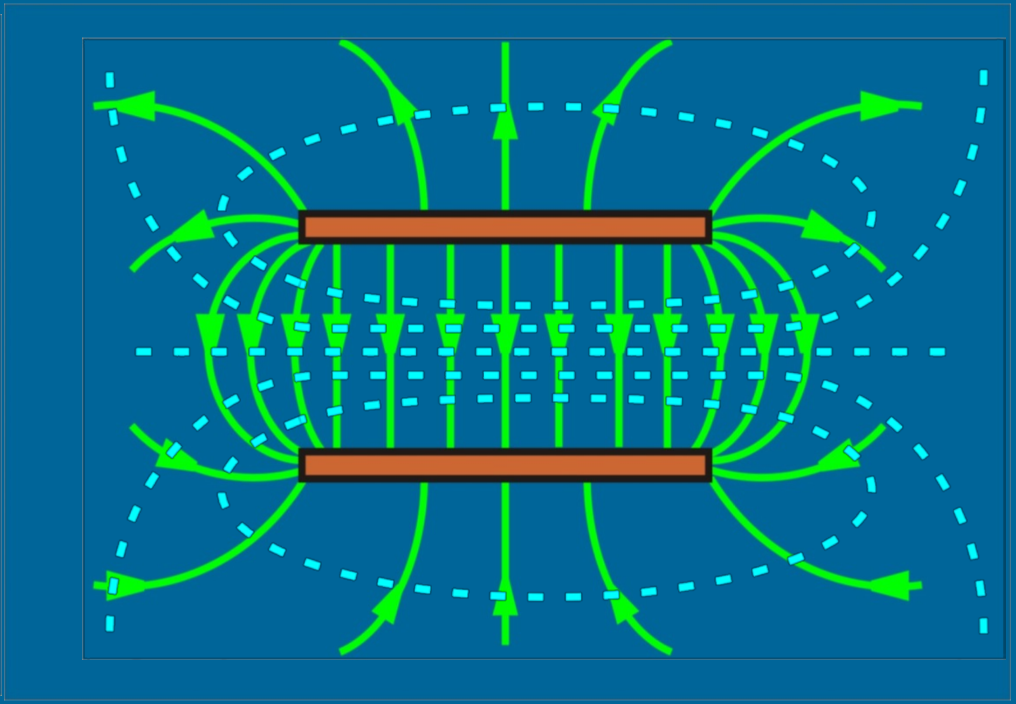
（2） 已知场强分布 $u=\int_P^{"0"} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

§ 10.6　等势面　电势与电场强度的微分关系

一. 等势面

电场中电势相等的点连成的面称为等势面。





等势面的性质：

(1) $\vec{E} \perp$ 等势面

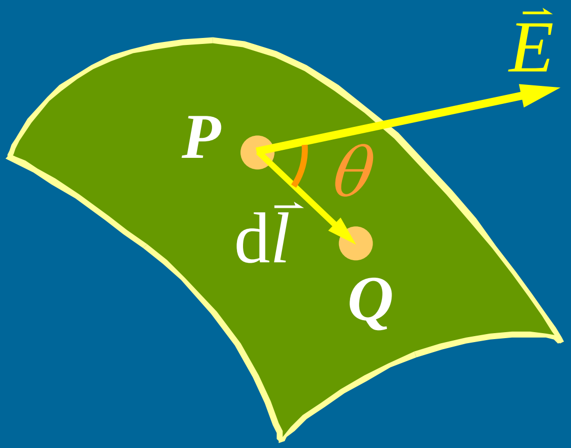
证明：把q_0在等势面上移动 $\mathrm{d}\vec{l}$

设等势面上P点的电场强度与 $\mathrm{d}\vec{l}$ 夹角为θ

电场力作功为：

$$\mathrm{d}A = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = q_0 E\cos\theta\mathrm{d}l$$

$$= q_0(u_P - u_Q)$$



$$\because u_P = u_Q$$

$$\therefore q_0 E\cos\theta\mathrm{d}l = 0$$

$$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

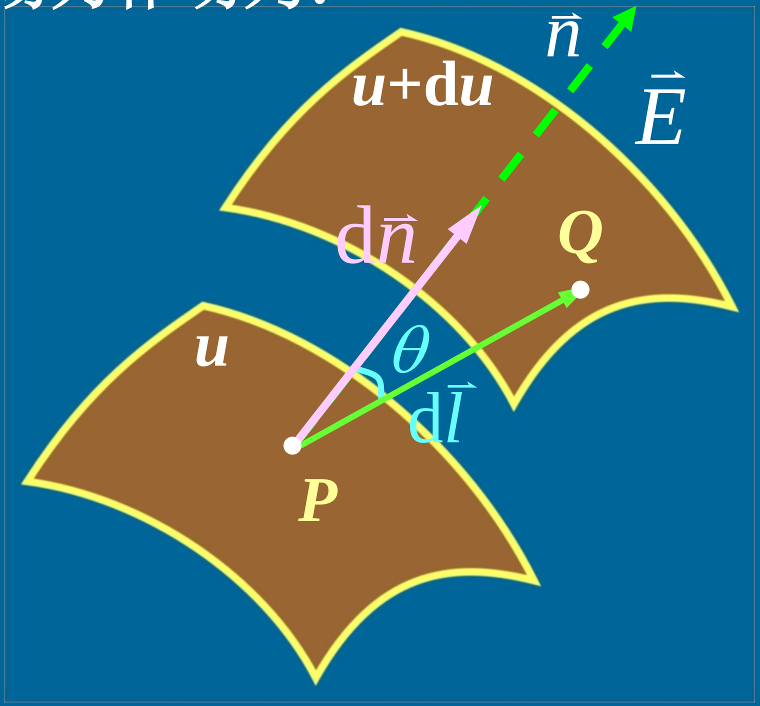
(2) 规定相邻两等势面间的电势差都相同

等势面密 $\longrightarrow$ $\vec{E}$大　　等势面疏 $\longrightarrow$ $\vec{E}$ 小

(3) 电场强度的方向总是指向电势降落的方向

二. 电势与电场强度的微分关系

取两个相邻的等势面，等势面法线方向为 $\vec{n}$,假定 $\vec{E}$ 的方向与 $\vec{n}$ 同向，把点电荷从 P 移到 Q，电场力作功为：



$$
\begin{cases} \mathrm{d}A = q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = qE\cos\theta \mathrm{d}l \\ \quad = qE\mathrm{d}n \\ \mathrm{d}A = q[u-(u+\mathrm{d}u)] = -q\mathrm{d}u \end{cases}
$$

$$E\cos\theta \mathrm{d}l = E\mathrm{d}n = -\mathrm{d}u$$

$$\boxed{E = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}}$$

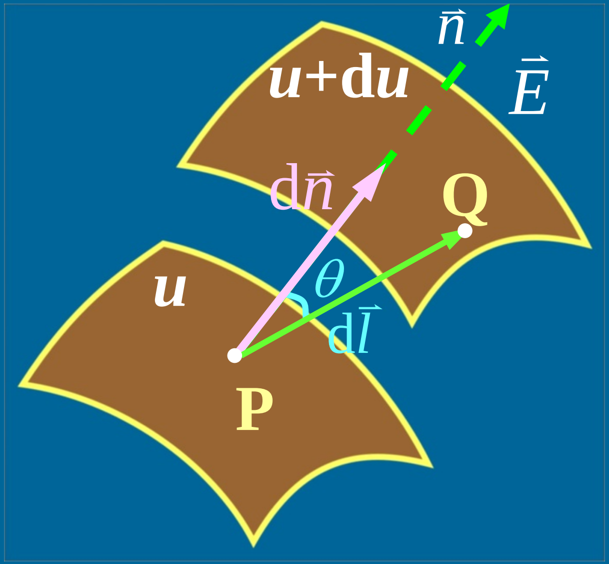
任意一场点 P 处电场强度的大小等于沿(过该点)等势面法线方向上电势的变化率，负号表示电场强度的方向指向电势减小的方向。

另一种理解

$$E\cos\theta\,\mathrm{d}l = E\mathrm{d}n = -\mathrm{d}u$$

$$\Downarrow$$

$$E_l\mathrm{d}l = -\mathrm{d}u \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_l = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}}$$



电场强度在 l 方向的投影等于电势沿该方向变化率的负值

$$\mathrm{d}l \geq \mathrm{d}n \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l} \leq \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}$$

电势沿等势面法线方向的变化率最大

在直角坐标系中

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{E}=-(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k})=-\mathrm{grad}(u)}$$

某点的电场强度等于该点电势梯度的负值，这就是电势与电场强度的微分关系。

例 已知 $u=6x-6x^2y-7z^2$

求（2，3，0）点的电场强度。

解

$$E_x=-\frac{\partial u}{\partial x}=-(6-12xy)=66$$

$$E_y=-\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2=24 \qquad E_z=-\frac{\partial u}{\partial z}=-14z=0$$

$$\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}=66\vec{i}+24\vec{j}$$

§ 10.7 静电场中的导体

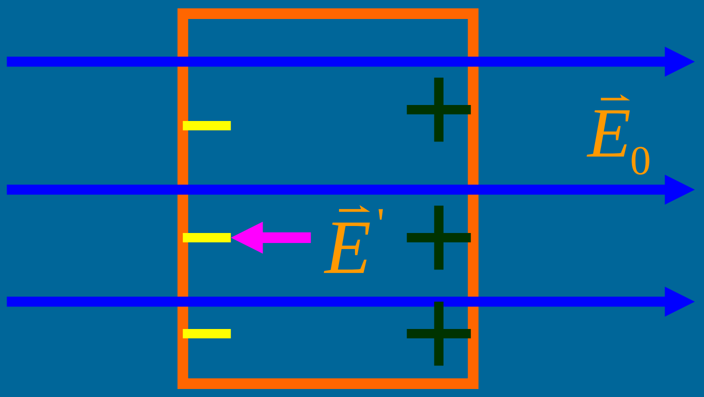
引言：前面讨论的是真空中的静电场（即空间除了确定的电荷分布外，电场中不存在其它物质，实际上，电场中总是有其它物质存在，当有导体或电介质存在时，空间电场不仅与电荷的分布有关，还与导体和电介质的位置和形状有关。

一. 导体的静电平衡

导体上有可以自由移动的电荷，不受外电场作用时，电子做无规则热运动，电子无定向运动，一般不显电性，当导体放入外电场，导体上的电荷分布发生变化，原来不显电性的导体显示出电性，这种现象叫静电感应，出现的电荷叫感应电荷。

●导体的静电平衡状态

处于电场中的导体，由于静电感应 (电子定向运动)，导体上出现感应电荷，感应电荷的出现又要影响原场的分布。



当 $E' < E_0$ 时

继续有电子的定向运动

直到 $E' = E_0$ 时

内部的合电场：$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$

导体上无电荷宏观定向运动，导体处于静电平衡状态。

1. 静电平衡

导体内部和表面上任何一部分都没有宏观电荷运动，我们就说导体处于静电平衡状态。

2. 导体静电平衡的条件（用 $\vec{E}$ 描述）

$$\boxed{E_{内}=0}$$

$$\boxed{\vec{E}_{表面} \perp \text{导体表面}}$$

3. 导体静电平衡的条件（用电势 U 描述）

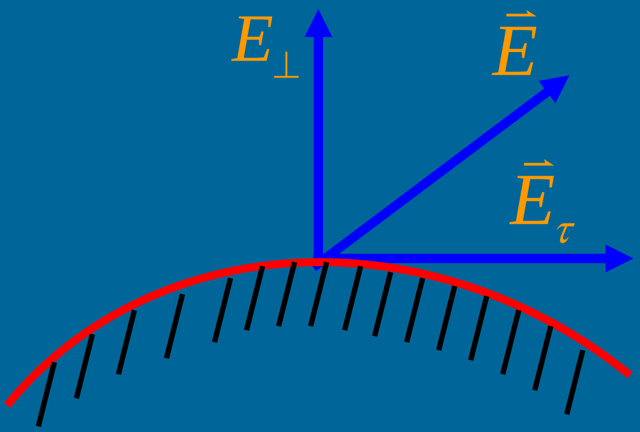
导体静电平衡时，导体上各点电势相等，即导体是等势体，表面是等势面。

证明：导体处于静电平衡条件为：

$\vec{E}$ 描述： 导体内部：$\vec{E}_{内}=0$

导体表面：$\vec{E}\perp$表面

证：（用静电平衡状态的含义证明）



(1) 仅当 $\vec{E}_{内}=0$

导体上的电子才无定向运动;

(2) 表面如果 $\vec{E}\not\perp$表面

$\vec{E}$ 则分解为 E_{τ}和$E_{\perp}$

E_{τ}存在，则导体上电子

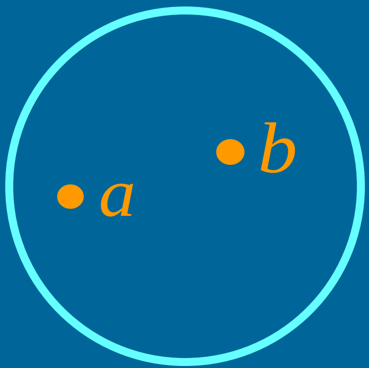
受力作用 $F=eE_{\tau}$

则有电子定向运动，不符合静电平衡状态含义

$\therefore$导体表面为 $\vec{E}\perp$表面

用电势U来描述

导体静电平衡时，导体上各点电势相等，即导体是等势体，表面是等势面。

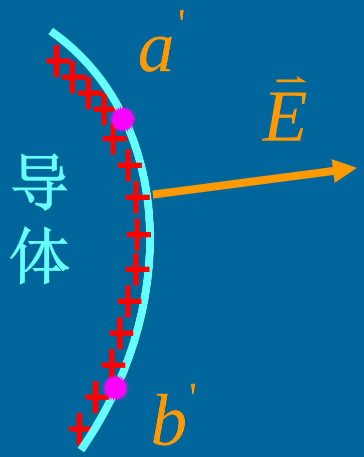


证：①导体内各点电势相等

当导体处于静电平衡 $\vec{E}_{内}=0$

则导体内任二点**a**，**b**

$$U_a - U_b = \int_a^b \vec{E}_{内} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow U_a = U_b$$

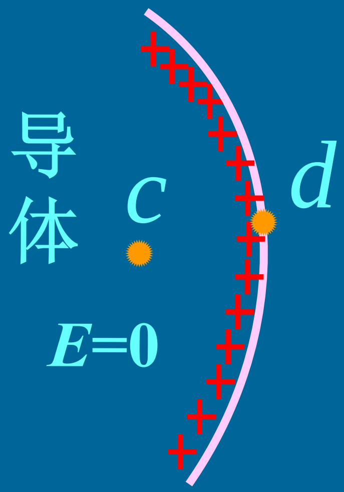


② 表面两点电势相等　　表面取 a'，b'

导体表面 $\vec{E} \perp$表面 $\left(\theta = 90^\circ\right)$

$$U_{a'} - U_{b'} = \int_{a'}^{b'} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{a'}^{b'} E\cos\theta \mathrm{d}l = 0$$

$\Rightarrow U_{a'} = U_{b'}$　表面两点电势相等



③ 导体内表面电势等于导体外表面电势。

如图*c*、*d* 分别为导体内、外表面任意点，有：

$$U_c - U_d = \int_c^d \vec{E}_{内} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

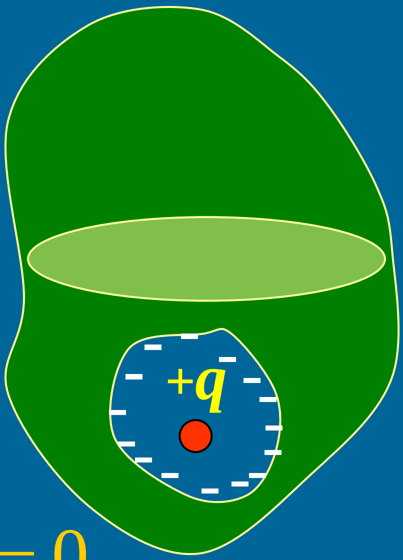
$$\therefore U_c = U_d$$

静电平衡时，内外表面电势相等

综上，处于静电平衡时，导体为等势体。

二. 导体上电荷的分布

（由导体的静电平衡条件和静电场的基本性质，可以出导体上的电荷分布。）



1. 静电平衡导体的内部处处不带电

证明：在导体内任取体积元 $\mathrm{d}V$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \xrightarrow{\text{由高斯定理}} \sum_i q_i = \int_V \rho \mathrm{d}V = 0$$

$\because$ 体积元任取 $\longrightarrow$ 导体中各处 $\rho = 0$

例：带电q的导体球，静电平衡时电荷的分布。

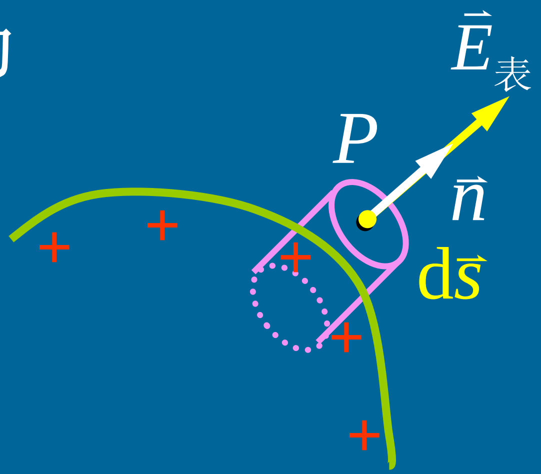
讨论:

- 如果有空腔且空腔中无电荷, 可证明电荷只分布在外表面。
- 如果有空腔且空腔中有电荷q, 则在内外表面都有电荷分布，内表面电荷与 q 等值异号。

2. 静电平衡导体表面附近的电场强度与导体表面电荷的关系

设导体表面电荷面密度为 $\sigma(x, y, z)$

P 是导体外紧靠导体表面的一点, 相应的电场强度为 $\vec{E}_{表}(x, y, z)$

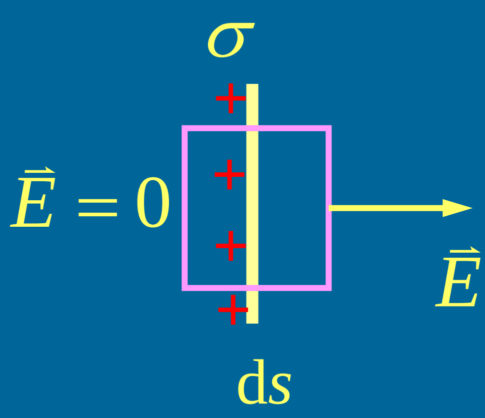


根据高斯定理:

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\mathrm{d}S} \vec{E}_{表}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{(S-\mathrm{d}S)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

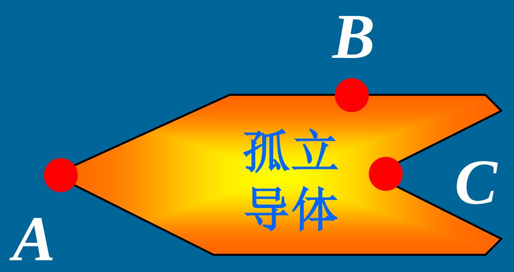
$$= \frac{\sigma \mathrm{d}S}{\varepsilon_0}$$

$$E_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}}$$



3. 处于静电平衡的孤立带电导体电荷分布

由实验可得以下定性的结论：在表面凸出的尖锐部分(曲率大）电荷面密度较大，在比较平坦部分（曲率小）电荷面密度较小，在表面凹进部分带电面密度最小。

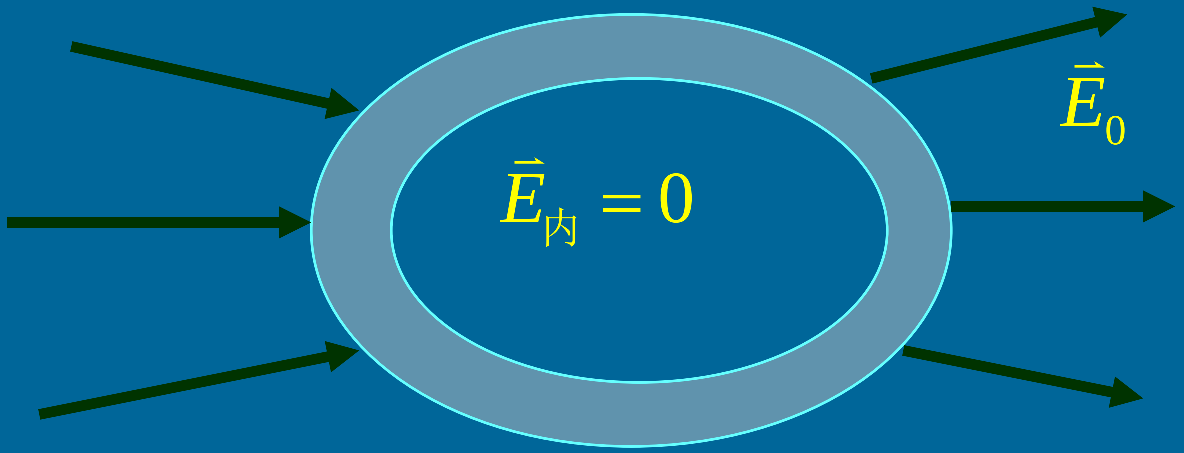


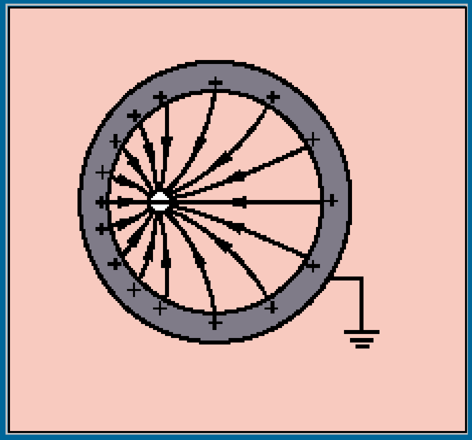
$$\sigma_A > \sigma_B > \sigma_C$$

尖端放电：$E_{表} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

当电场强度超过空气的击穿场强时空气被电离，与尖端所带电荷符号相反的离子被吸引到尖端上和尖端上的电荷中和；与尖端所带电荷相同的离子被排斥加速离开尖端，这种现象称为尖端放电。

4. 静电屏蔽(腔内、腔外的场互不影响)





总结

1. 电势与电场强度的微分关系 $\vec{E}=-(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k})$

$$=-\mathrm{grad}(u)$$

2. 导体的静电平衡:

导体内部和表面上任何一部分都没有宏观电荷运动

$\vec{E}$ 描述　　U 描述

3. 导体上电荷的分布

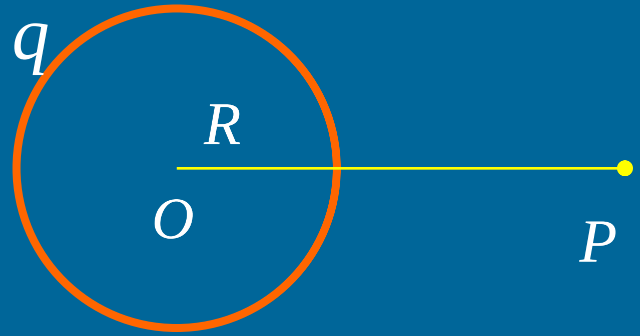
- 静电平衡导体的内部处处不带电
- 如果有空腔且空腔中无电荷，电荷只分布在外表面。
- 如果有空腔且空腔中有电荷q，内外表面都有电荷分布，内表面电荷与 q 等值异号。

4. 静电平衡导体表面附近的电场强度与导体表面电荷的关系

$$\vec{E}_{表}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

5. 静电屏蔽

例 ：均匀带电球面，***R***， ***q***，求电场中任一点的电势。



$$E=\begin{cases}0\,, & r<R\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r>R\end{cases}$$

（***r*** =***R*** 时，场强值突变，不连续。）

有限大带电体 $U_\infty=0$

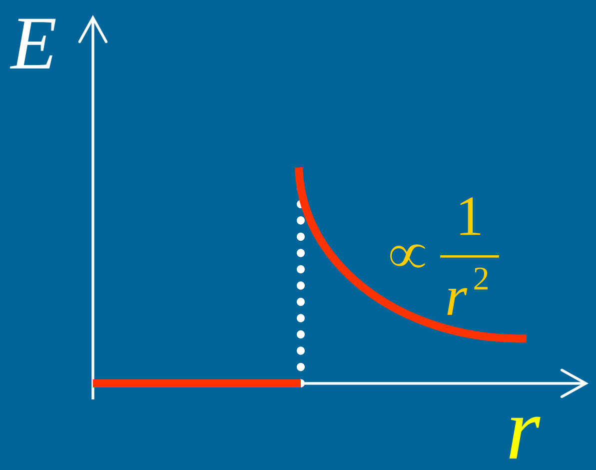
$$r>R \qquad U=\int_P^\infty \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_P^\infty E\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

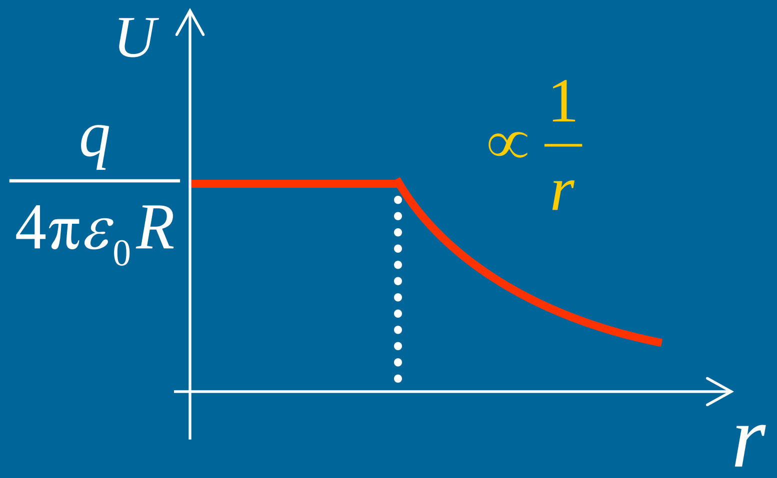
$r < R$

$$U = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_P^{R} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 + \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

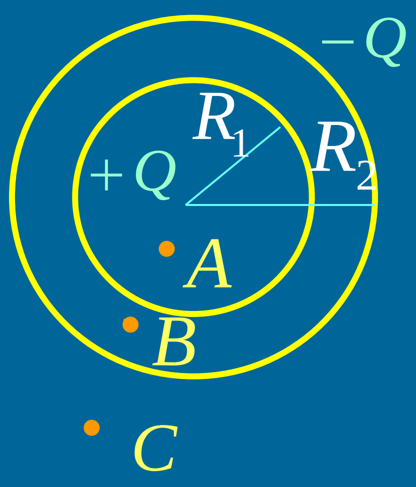
球内电势为一常数，和球表面处电势值一样 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

球外电势的分布和点电荷电场一样。





例：同心球面半径为 R_1、R_2 ，带电 $\pm Q$，求U 的分布。



$$r < R_1 \qquad E_1 = 0$$

$$R_1 < r < R_2 \qquad E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

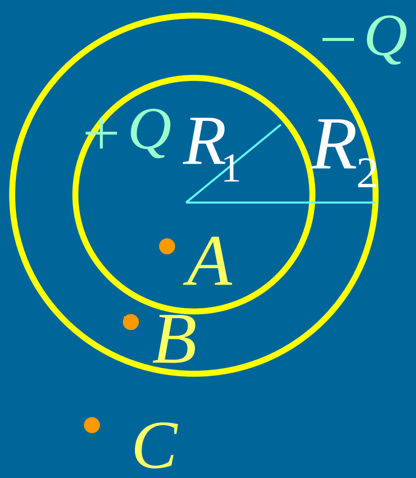
$$r > R_2 \qquad E_3 = 0$$

$$U_A = \int_{r_A}^{\infty} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{r_A}^{R_1} \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$



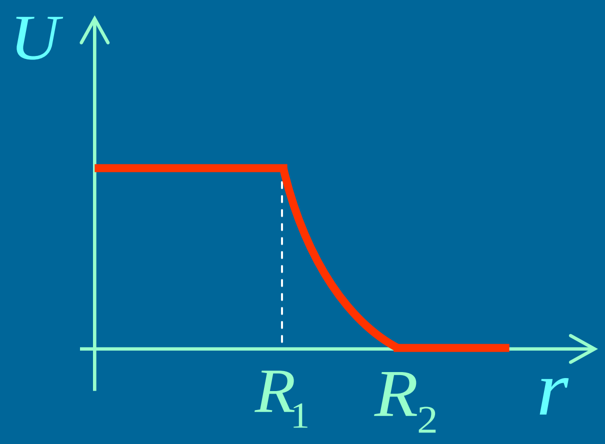
$$U_B=\int_{r_B}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_{r_B}^{R_2}\vec{E}_2\cdot d\vec{l}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_3\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_{r_B}^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr+0$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{R_2}\right)$$

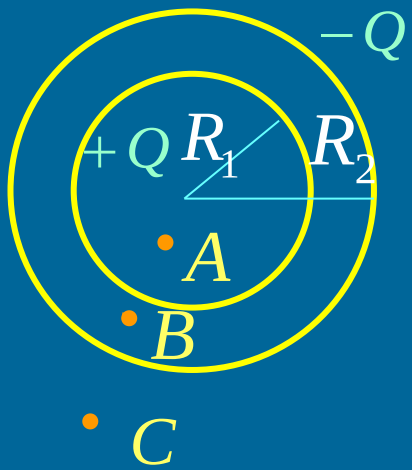
$$U_C=\int_{r_C}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

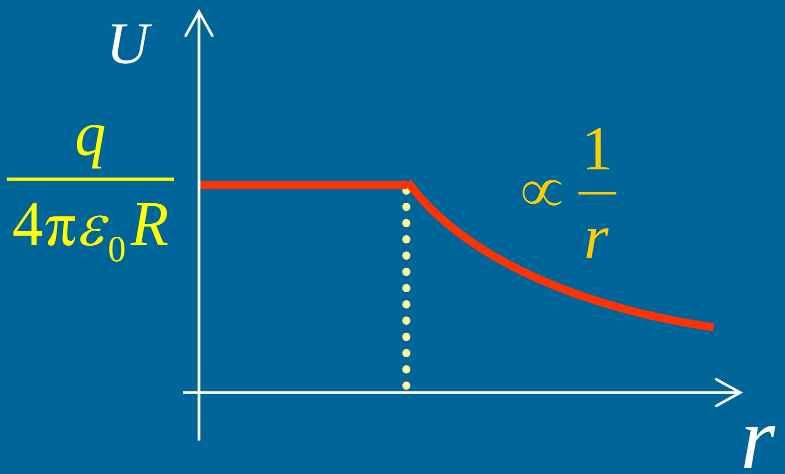


U~r曲线

$$U_{AB}=\int_{r_A}^{R_1}\vec{E}_1\cdot d\vec{l}+\int_{R_1}^{r_B}\vec{E}_2\cdot d\vec{l}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{r_B}\right)$$





$$U_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

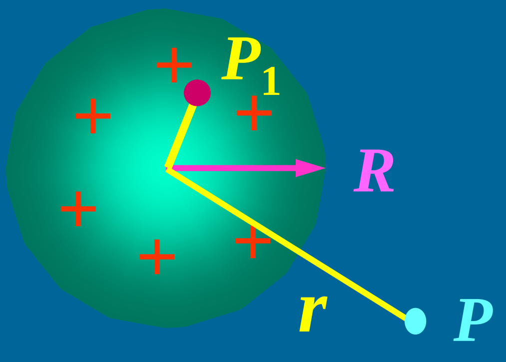
$$U_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$U_C = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_C} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r_C} = 0$$

例 半径为R，带电量为q 的均匀带电球体

求 带电球体的电势分布

解 根据高斯定理可得：



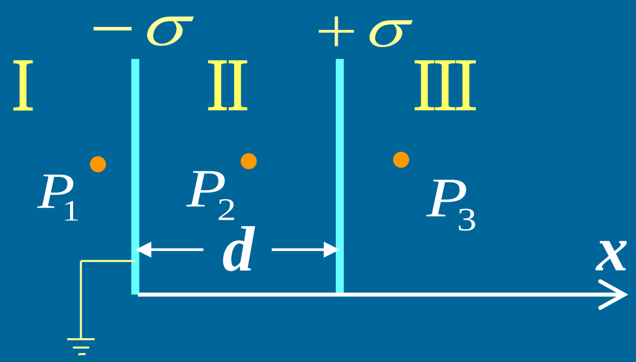
$$\begin{cases} r < R & E_1 = \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \\ r \ge R & E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$

对球外一点P $$u_{外} = \int_p^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

对球内一点P_1

$$u_{内} = \int_{p_1}^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2)$$

例：　2 个无限大带电面 $\pm\sigma$，求：U 的分布。

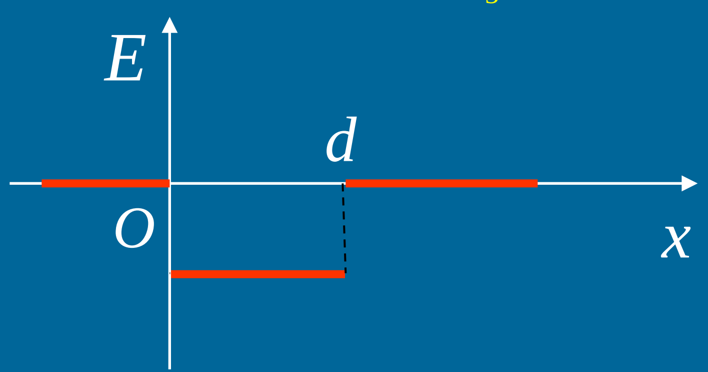


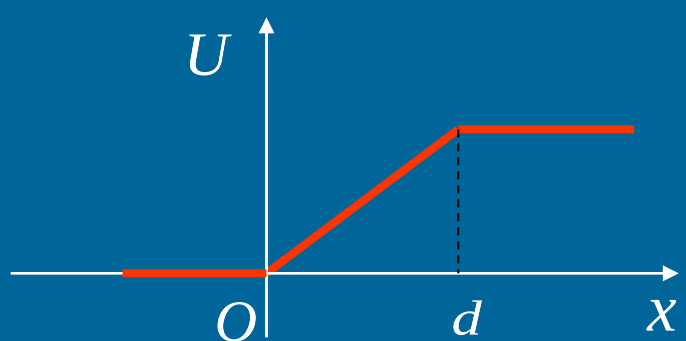
$$\begin{cases} \text{I}: E_1 = 0 \\ \text{II}: E_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ \text{III}: E_3 = 0 \end{cases}$$

$$U_{P_1} = \int_{P_1}^{"0"} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

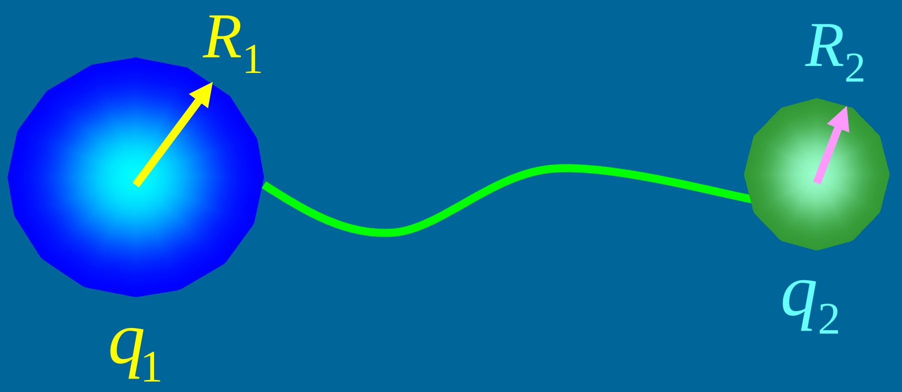
$$U_{P_2} = \int_{P_2}^{"0"} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_x^0 -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathrm{d}x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x$$

$$U_{P_3} = \int_{P_3}^{"0"} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_x^d \vec{E}_3\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_d^0 \vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x\Big|_d^0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$$





例 两导体球半径分别为R_1、R_2，带电量q_1、q_2，设两球相距很远，当用导线将彼此连接时，电荷将如何 分布(导线上电荷可忽略)



解 设用导线连接后，两球带电量为 q_1' q_2'

$$q_1' + q_2' = q_1 + q_2 \qquad (1)$$

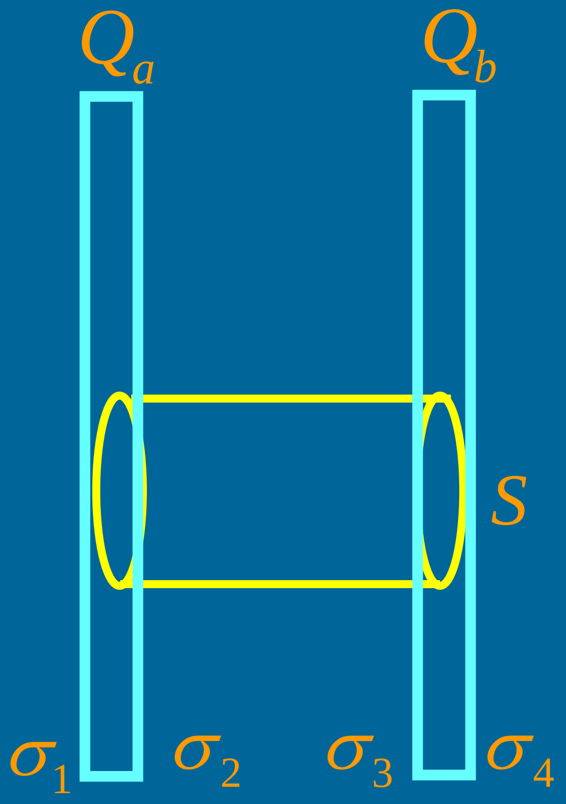
$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \\ u_2 &= \frac{q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{u_1 = u_2} \frac{q_1'}{q_2'} = \frac{R_1}{R_2} \qquad (2)$$

由（1）（2）式得：

$$q_1' = \frac{(q_1 + q_2)R_1}{R_1 + R_2} \qquad q_2' = \frac{(q_1 + q_2)R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\sigma_1' = \frac{q_1 + q_2}{4\pi R_1 (R_1 + R_2)} \qquad \sigma_2' = \frac{q_1 + q_2}{4\pi R_2 (R_1 + R_2)}$$

例 求二平行等大导体板上电荷的分布，设二板分别带电 Q_a, Q_b ，极板面积为S，极板间距离为d （$S \gg d^2$）。



解：设电荷分布在表面上密度分别为

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$$

由电荷守恒：

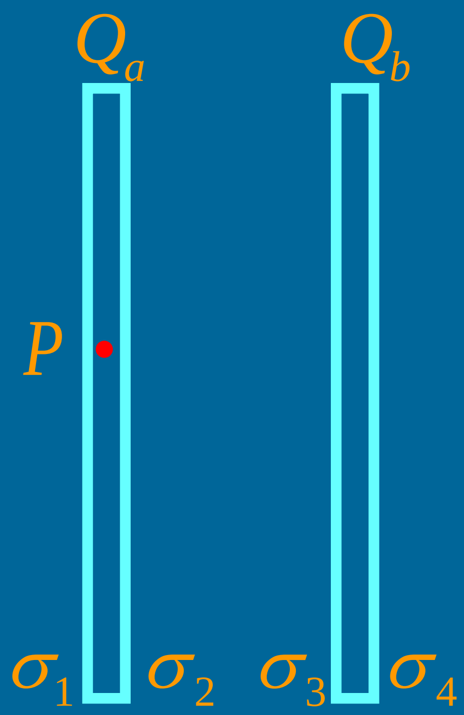
$$\sigma_1 S + \sigma_2 S = Q_a \quad (1)$$

$$\sigma_3 S + \sigma_4 S = Q_b \quad (2)$$

由高斯定理：$\oint_s \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$

$$\sigma_2 S' + \sigma_3 S' = 0$$

$$\therefore \sigma_2 = -\sigma_3 \quad (3)$$



由静电平衡条件：$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = 0$

$$E_P = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(+\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4\right) = 0 \ldots (4)$$

解得：
$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_4 = \dfrac{Q_a + Q_b}{2S} \\ \sigma_2 = -\sigma_3 = \dfrac{Q_a - Q_b}{2S} \end{cases}$$

讨论：（1）若 $Q_a = -Q_b$ 则有：
$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_4 = 0 \\ \sigma_2 = -\sigma_3 = Q_a \big/ S \end{cases}$$

（2）此结果具有普遍意义，二平行带电板上电荷的分布有以下特点：相对二面带等量异号电荷；

相背二面带等量同号电荷；

(有导体存在时静电场的计算方法)

静电平衡条件

电荷守恒定律

导体上的电荷分布

计算 $\vec{E}$, U 分布

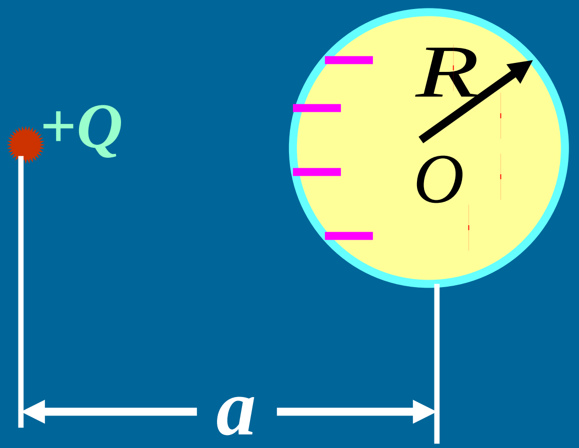
（ 方法同前 ）

例 一点电荷 Q 距半径为 R 的不带电导体球中心为$a(a>R)$

求：导体球的电势为多少？

解：导体处于静电平衡状态，导体是等势体，

导体球的电势和球心O点的电势相等。



$$U_O = U_{QO} + U_{球O} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \int_{Q'} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{Q'} \mathrm{d}q$$

由电荷守恒得 $\int_{Q'} \mathrm{d}q = 0$

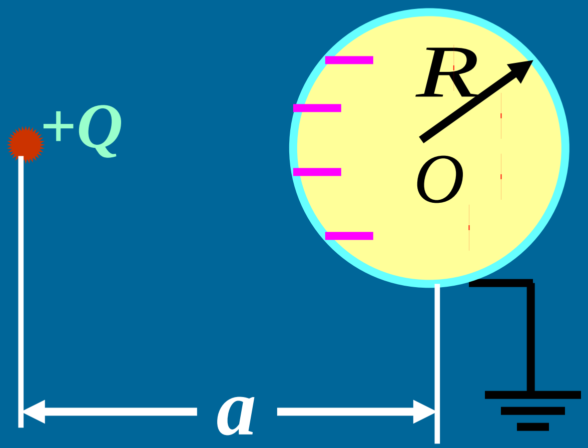
$$U_{球} = U_O = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}$$

讨论：

如果将球接地($U_{球}=0$)

求：球上感应电荷数量Q'

$$U_0=U_{Q0}+U_{球O}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{Q'}\mathrm{d}q$$



$$U_{球}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{R}=0$$

$$\therefore \frac{Q}{a}=-\frac{Q'}{R}$$

$$Q'=-\frac{R}{a}Q$$

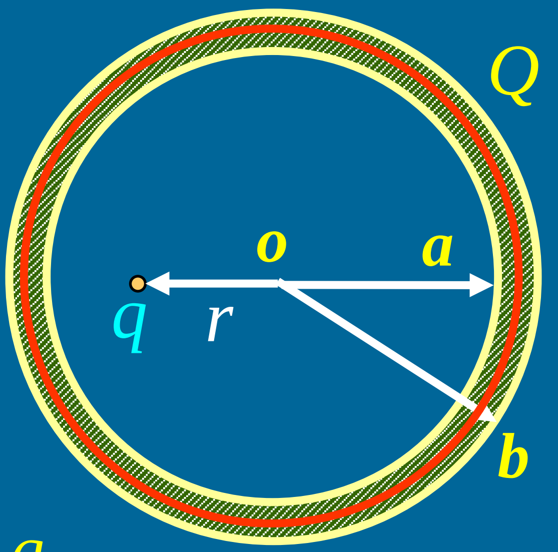
$$|Q'|<|Q|$$

例：一内半径a外半径b的导体球壳，带电Q，在球壳空腔中距球心r处有一点电荷q，设无穷远处电势为零。

求：（1）球壳内外表面上的电荷

（2）球心o处，由球壳内表面上电荷产生的电势

（3）球心o处的总电势



解：（1）取图示高斯面

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{i内} = 0$$

知球壳内表面上电荷$-q$

由电荷守恒知外表面$Q+q$

（2）将球壳内表面电荷分成电荷元dq

$$U_{0□表面} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\int dq = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

（3） $$U_o = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

例 已知导体球壳 ***A*** 带电量为 ***Q*** ，导体球 ***B*** 带电量为 ***q***

求 (1) 将 ***A*** 接地后再断开，电荷和电势的分布；

(2) 再将 ***B*** 接地，电荷和电势的分布。

解 (1) ***A*** 接地时，内表面电荷为 ***-q***

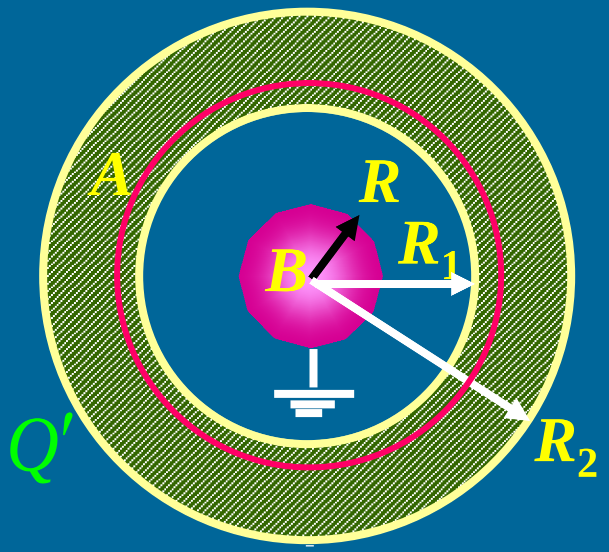
外表面电荷设为 Q'

$$U_A = 0 \qquad Q' = 0$$

A与地断开后, 电荷分布不变

$$Q_A = -q$$

$$U_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$



(2) 设接地后***B***上的电量为 q'

$$E_{壳内} = 0 \Rightarrow Q_{壳内} = -q'$$

根据孤立导体电荷守恒

$$Q_{壳内}+Q_{壳外}=-q \Rightarrow Q_{壳外}=q'-q$$

B 球圆心处的电势

$$U_B=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{-q'}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{q'-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=0$$

$$q'=\frac{qRR_1}{R_1R-R_2R+R_1R_2}$$

$$U_A=\frac{q'-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$