§9.3　磁场的高斯定理

静电场：$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum q_i / \varepsilon_0$　　静电场是有源场

磁　场：$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = ?$

一. 磁场线

1. 规定

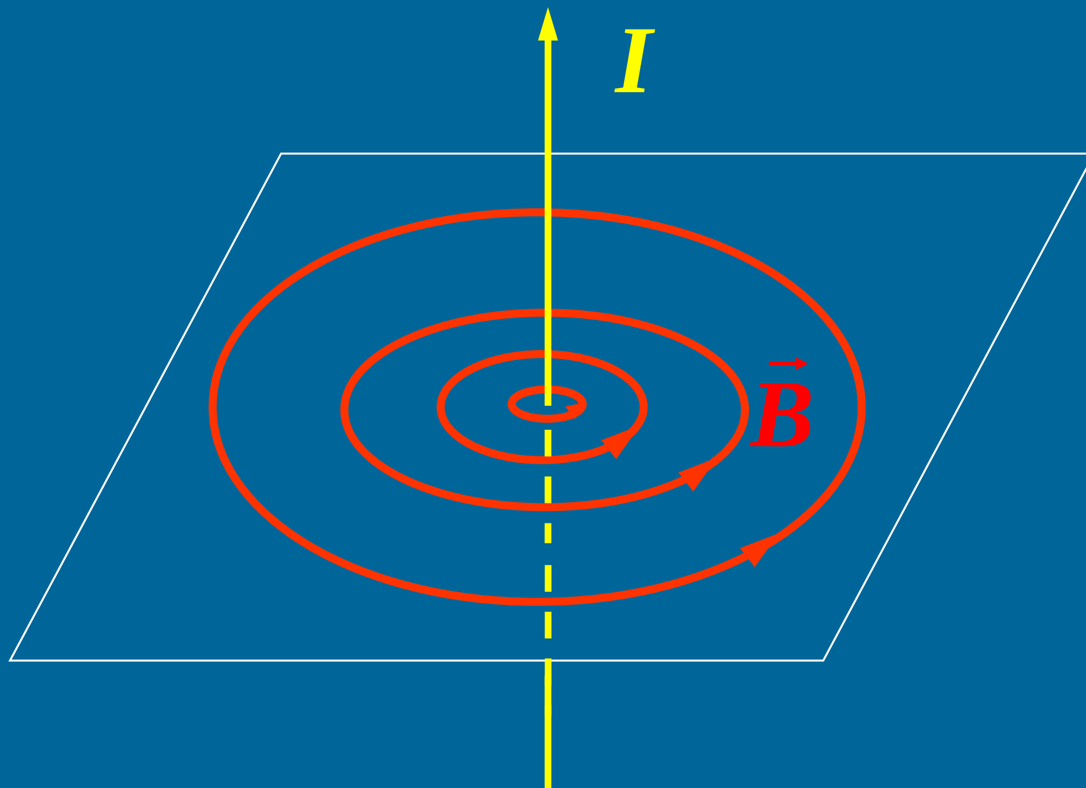
(1) 方向：磁场线切线方向为磁感应强度 $\vec{B}$ 的方向

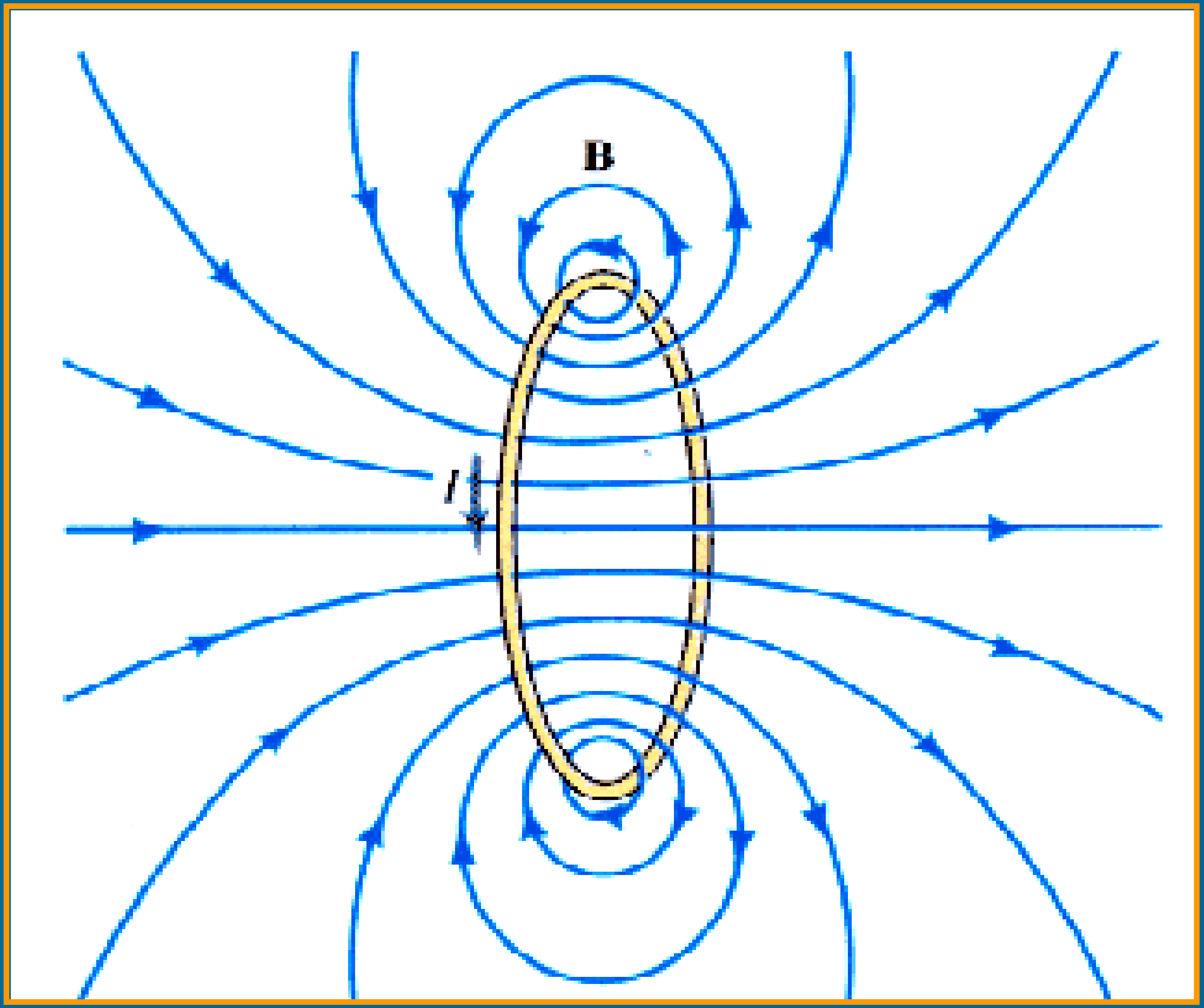
(2) 大小：垂直 $\vec{B}$ 的单位面积上穿过的磁场线条数为磁感应强度 $\vec{B}$ 的大小

$$B = \frac{dN}{dS_\perp}$$

2. 磁场线 (或称为磁感应线）的特征

(1) 磁场线都是环绕电流的无头无尾的闭合曲线（包括两头伸向无穷远的曲线）


I
B


B
I

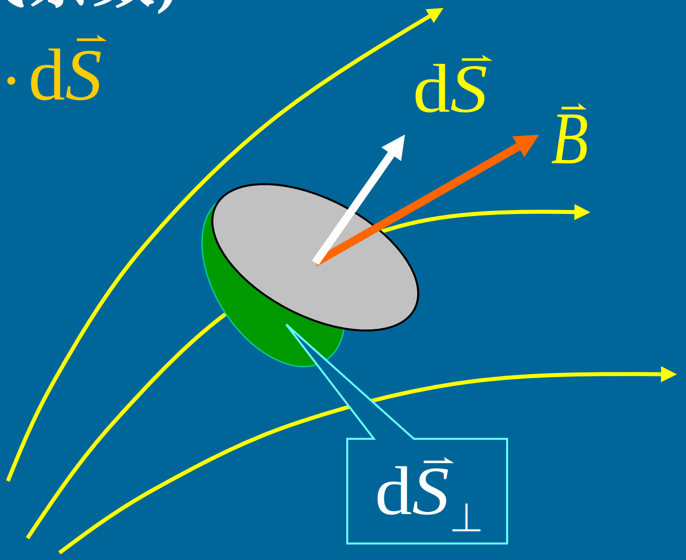
(2)磁场线的环绕方向与电流方向之间服从右手螺旋定则 (见p57 图11.9)

(3) 磁场线不相交

二. 磁通量（在磁场中穿过任意曲面 S 的磁场线的条数称该面的磁通量）

面元dS的磁通量 (通过面元的磁场线条数)

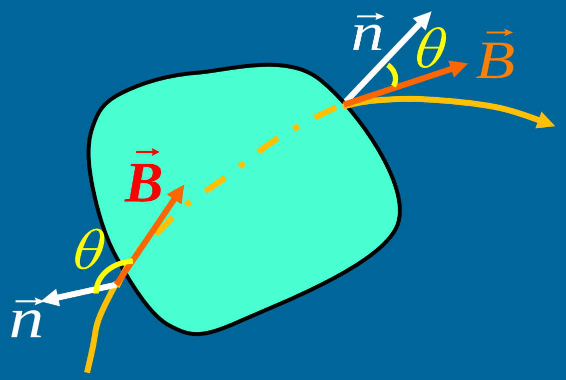
$$\mathrm{d}\Phi_m = \mathrm{d}N = B\mathrm{d}S_\perp = B\cos\theta\mathrm{d}S = \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$



对于任意曲面 $$\Phi_m = \iint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

对于闭合曲面 $$\Phi_m = \oiint_S \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

规定：法线 $\vec{n}$ 向外为正

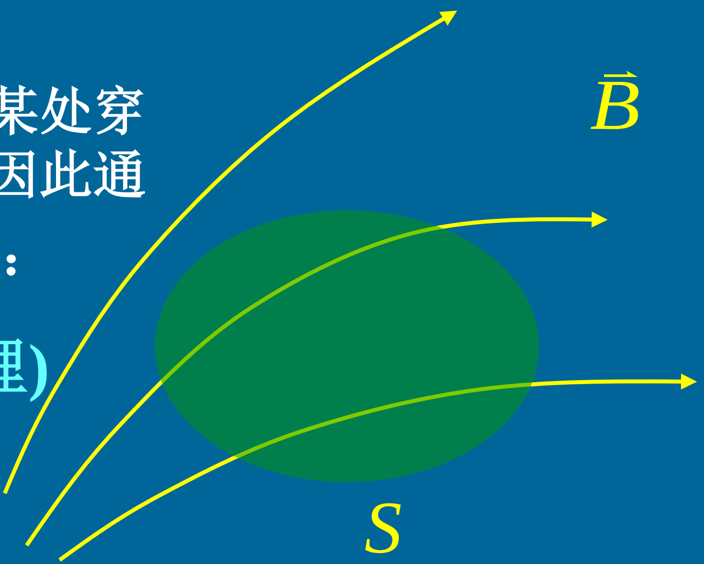


磁场线穿入 $\mathrm{d}\Phi_m < 0$

磁场线穿出 $\mathrm{d}\Phi_m > 0$

三. 磁场的高斯定理

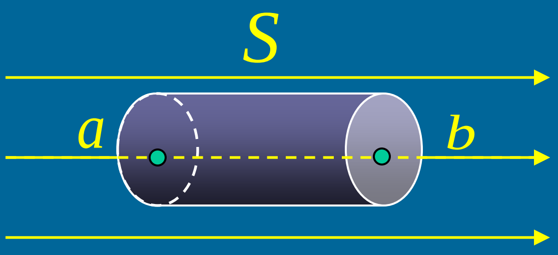
由于磁场线都是闭合的，从一个闭合曲面某处穿入的磁场线必然从该曲面的另一处穿出，因此通过任一闭合曲面的总磁通量必然为零， 即：



$$\boxed{\Phi_m = \oint\!\!\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$ (磁场高斯定理)

磁场高斯定理表明：电流产生的磁场线既没有起始点，也没有终止点，即磁场线既没有源头，也没有尾闾 —— 磁场是无源场

例 证明在 磁场线 为平行直线的空间中，同一根磁场线 上各点的磁感应强度值相等。



解

$$\Phi_m = \oint\!\!\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

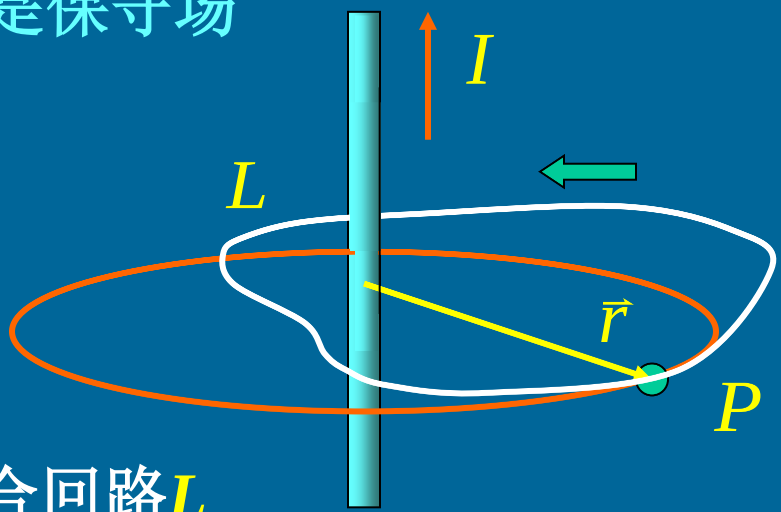
$$= -B_a \mathrm{d}S + B_b \mathrm{d}S = 0$$

$$B_a = B_b$$

§ 9.4 磁场的安培环路定理

静电场: $\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ 静电场是保守场

磁　场: $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = ?$



一. 磁场的安培环路定理

- 以无限长载流直导线为例

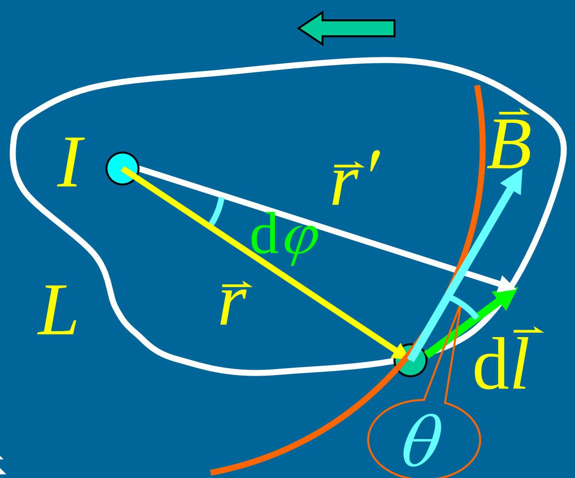
垂直于直导线的平面内取任意闭合回路L

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cos\theta \mathrm{d}l$$

$$(\mathrm{d}l\cos\theta = r\mathrm{d}\varphi)$$

$$= \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r\mathrm{d}\varphi \quad = \mu_0 I$$

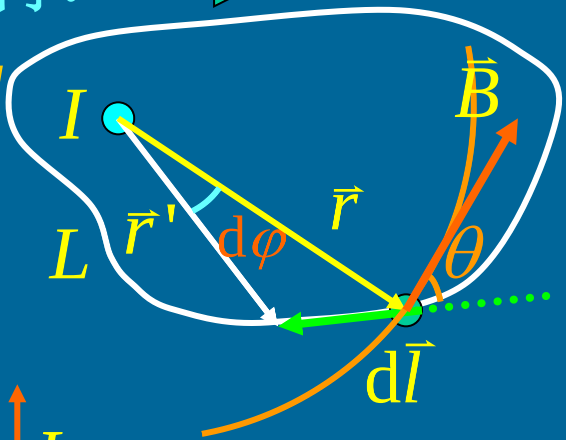


磁场的环流与环路中所包围的电流有关

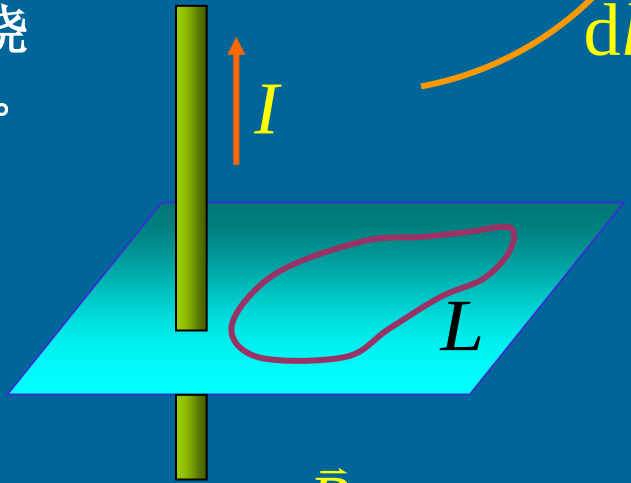
- 若环路方向反向(不满足右螺旋)，情况如何？

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cos(\pi-\theta)\mathrm{d}l = \oint_L -B\cos\theta \mathrm{d}l$$

$$= \oint_L \frac{-\mu_0 I}{2\pi r} r\mathrm{d}\varphi = -\mu_0 I$$



规定:电流为代数量， 电流方向和回路绕行方向构成右旋关系时，电流取正值。



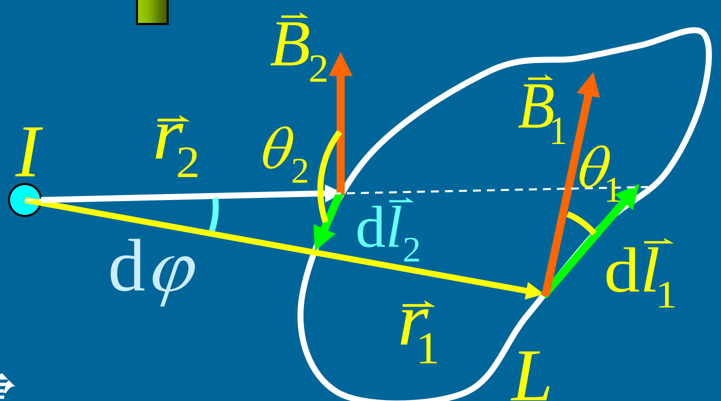
- 若环路中不包围电流

对一对线元来说

$$\vec{B}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l}_1 + \vec{B}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l}_2$$

$$= B_1 \mathrm{d}l_1 \cos\theta_1 + B_2 \mathrm{d}l_2 \cos\theta_2$$

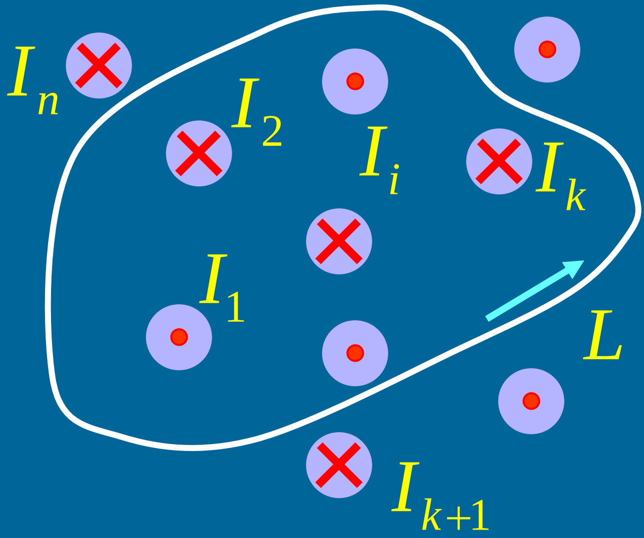
$$= \frac{\mu_0 I r_1 \mathrm{d}\varphi}{2\pi r_1} - \frac{\mu_0 I r_2 \mathrm{d}\varphi}{2\pi r_2} = 0$$



环路不包围电流，则磁场环流为零

- 推广到一般情况

$$\begin{cases} I_1 \sim I_k & \text{—— 在环路 } L \text{ 中} \\ I_{k+1} \sim I_n & \text{—— 在环路 } L \text{ 外} \end{cases}$$



则磁场环流为

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \sum \vec{B}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \sum \oint_L \vec{B}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{k} I_i + 0 = \mu_0 \sum_{i=1}^{k} I_{i内}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{i内}}$$ —— 安培环路定理

恒定电流的磁场中，磁感应强度沿一闭合路径 L 的线积分等于路径 L 包围的电流强度的代数和的 μ_0 倍

讨论

（1）注意电流的正负规定：满足右螺旋关系时 $I_i > 0$

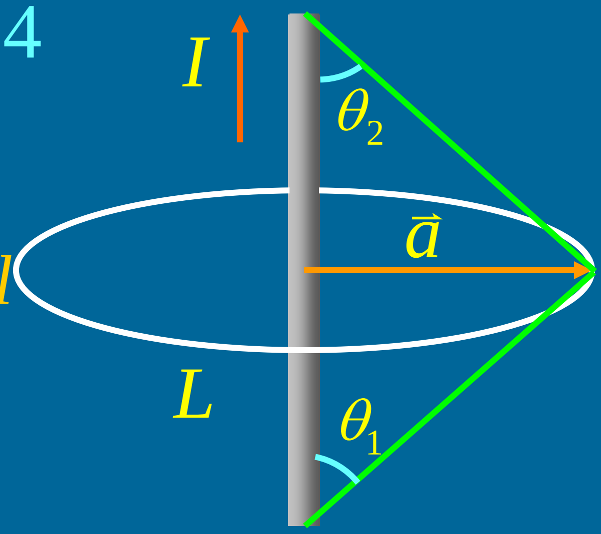
反之 $I_i < 0$

（2）$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \neq 0$ 磁场是有旋场 —— 电流是磁场涡旋的轴心

（3） 安培环路定理只适用于闭合的载流导线，对于任意设想的一段载流导线不成立

例如 图中载流直导线，设 $\theta_1 = \theta_2 = \pi/4$

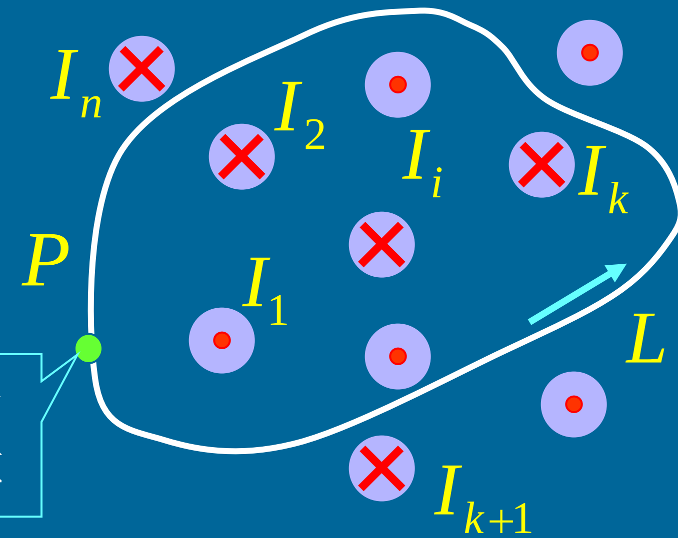
则 L 的环流为：



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\theta_1 - \cos(\pi-\theta_2)\right)\mathrm{d}l$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} 2\frac{\sqrt{2}}{2} 2\pi a = \frac{\mu_0 \sqrt{2} I}{2} \neq \mu_0 I$$

（4）$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}$ 积分值与闭合路径的形状无关，只和闭合路径所包围的电流的代数和有关。



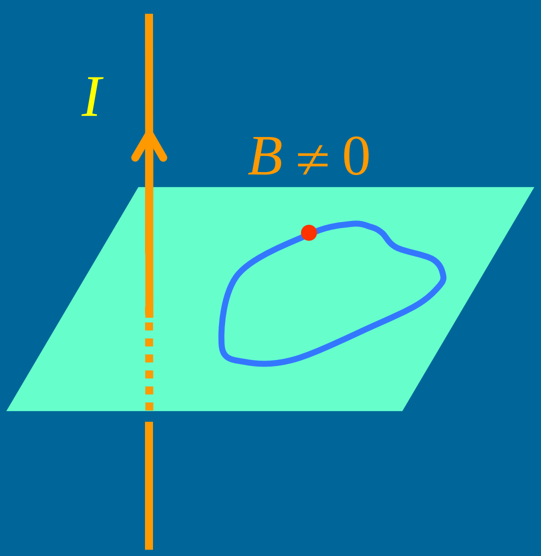
环路上各点的磁场为所有电流的贡献

（5） $\vec{B}$ 是闭合回路内外电流共同激发的。

$\sum_{L内} I$ 是闭合回路所包围的电流的代数和。

（6） 当 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$ 时 $B = 0$ 吗？

不一定为零，如 L 内不包围电流，$\sum_{L内} I = 0$ ，但 $B \neq 0$ 。



（7）安培环路定理是由长直导线推导出来的，但结论具有普遍性，可以用它求磁感应强度，但应用它求磁感应强度是有条件的：

(I) 要求磁场分布具有一定对称性；

(II) 能够选择适当的闭合积分路径，

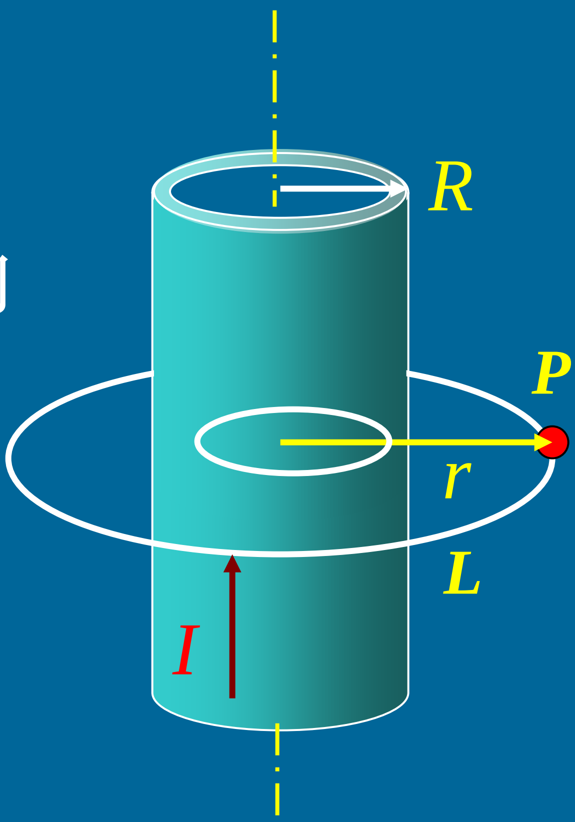
使得积分得以方便地算出。

二. 安培环路定理的应用

例　求无限长圆柱面电流的磁场分布。

解　系统有轴对称性，圆周上各点的 $\boldsymbol{B}$ 相同

$r > R$ 时过圆柱面外 $\boldsymbol{P}$ 点做一圆周作为积分路径 L，逆时针为正

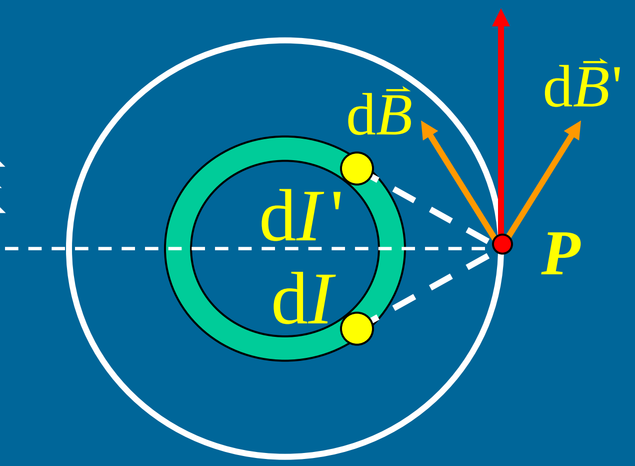


$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cos\theta \mathrm{d}l = B\oint_L \mathrm{d}l$$

$$= B2\pi r = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$r < R$ 时在圆柱面内做一圆周，逆正



$$\oint_L B\cos\theta \mathrm{d}l = B\oint_L \mathrm{d}l = B2\pi r = 0$$

$$\Rightarrow B = 0$$

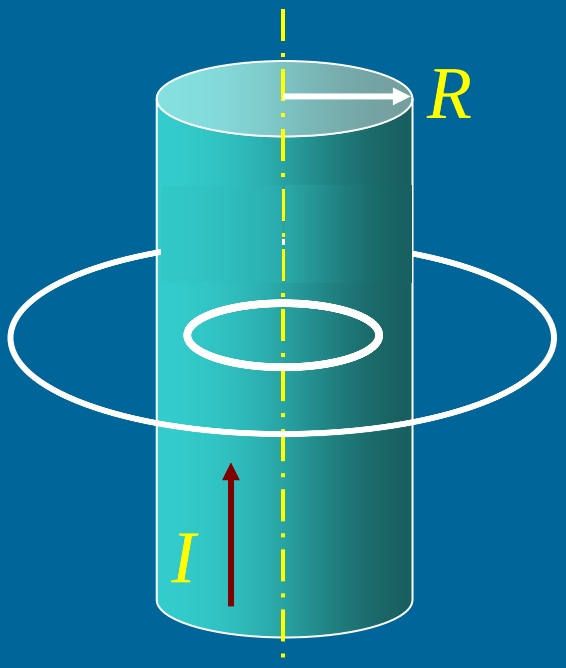
推广：无限长圆柱体载流直导线的磁场分布

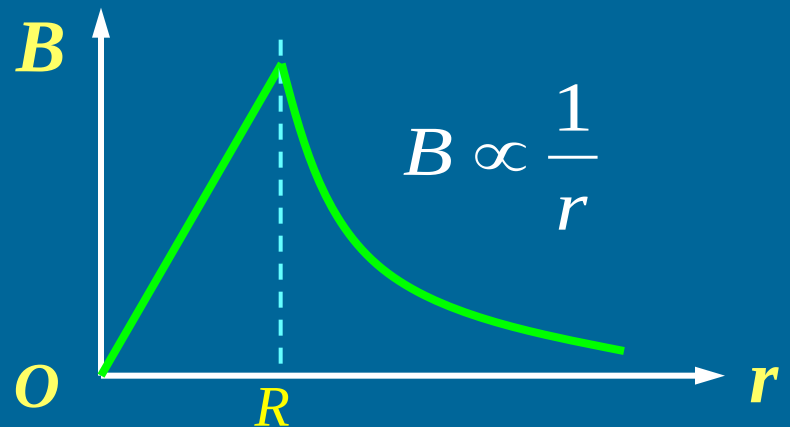
$r > R$ 区域： $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$r < R$ 区域： $B 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2$

$$j = \frac{I}{\pi R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$





磁感应强度分布曲线

载流长直螺线管内的磁场

可看作无限长直螺线管

缠绕均匀紧密的长直螺线管($L>>R$)，通有电流 I

由电流分布的对称性知管内磁场线为一系列与轴线平行的直线（如图），由于$L>>R$, 管内任取A，B点相对于两边的电流位置相同，所以 $\vec{B}$ 相同，即同一磁场线上各点 $\vec{B}$ 相同。

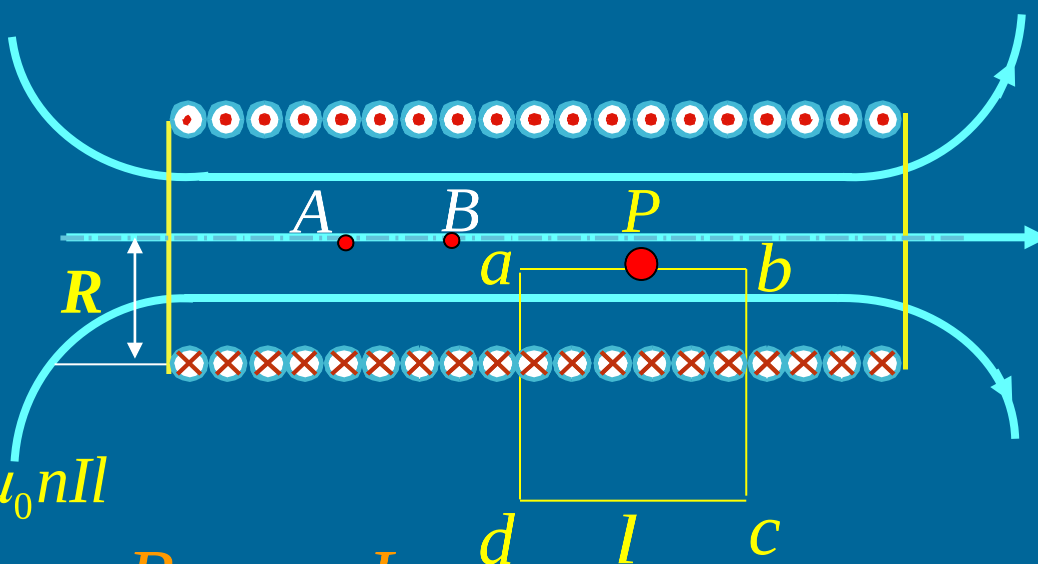
又磁场线是闭合的，在管内很集中，管外分布在无穷大的区域内，和管内相比 $\vec{B}_{外} \approx 0$

计算管中一点P的 $\vec{B}$

过P点作一矩形闭合回路 ***abcd***

$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{ab} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \underbrace{\int_{bc} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}_{=0} + \underbrace{\int_{cd} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}_{=0} + \underbrace{\int_{da} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}_{=0} = Bl = \mu_0 nIl$$



$$\Rightarrow B = \mu_0 nI$$

总结

1. 磁场的高斯定理

$$\Phi_m = \oiint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

2. 磁场的安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{i\text{内}}$$