第四章 根轨迹法

4.6 广义根轨迹

根轨迹

- 常规根轨迹(180度根轨迹):
  负反馈系统
- 广义根轨迹
  - 1.零度根轨迹:
    正反馈系统
  - 2.参数根轨迹
    负反馈系统

常规根轨迹、零度根轨迹：根轨迹增益K^*在变化

参数根轨迹：非根轨迹增益变化!

一、零度根轨迹

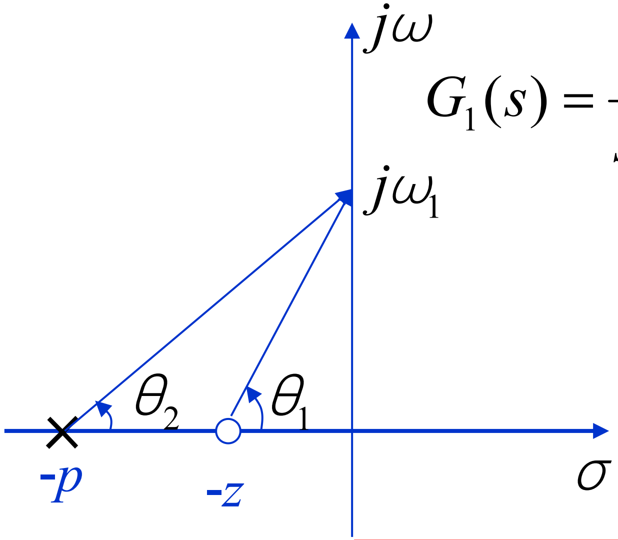
源自于：（1）非最小相位系统；

（2）正反馈系统（出现在复杂系统中）；

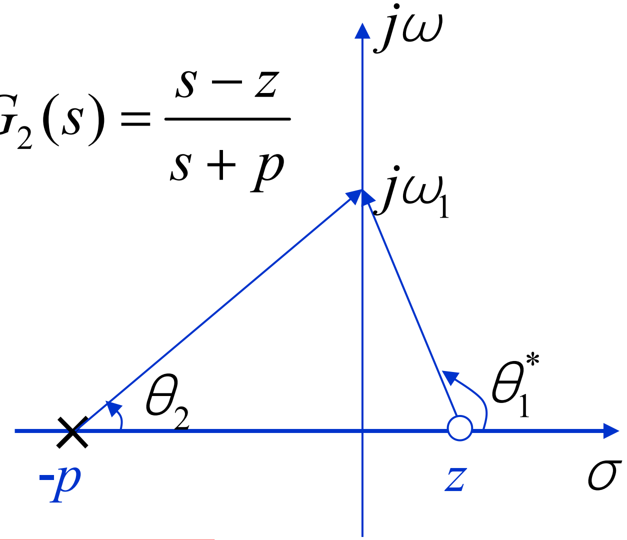
最小相位系统：开环零极点全在s左半平面的系统。

非最小相位系统：在s右半平面存在开环零极点的系统。

$$G_1(s)=\frac{s+z}{s+p}$$



$$G_2(s)=\frac{s-z}{s+p}$$



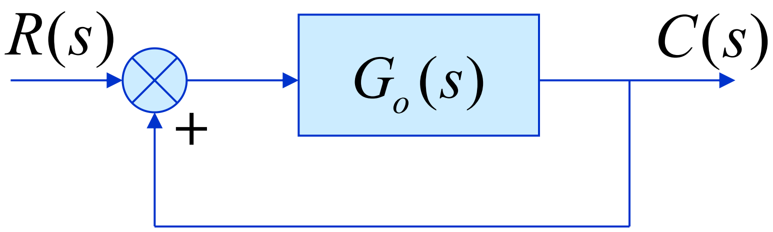
$$\left|G_1(s)\right|=\left|G_2(s)\right|$$

$$ArgG_1(s)=\theta_1-\theta_2<ArgG_2(s)=\theta_1^*-\theta_2$$

4.6 广义根轨迹

开环传递函数为：

$$G_o(s)=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$



正反馈系统

闭环传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{G_o(s)}{1-G_o(s)}$$

系统闭环特征方程： $1-G_o(s)=0 \Rightarrow G_o(s)=1$

4.6 广义根轨迹

$$G_o(s)=\frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=K^*\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=1$$

零度根轨迹方程

$$\begin{cases} K^*\cdot\dfrac{\prod_{i=1}^{m}|(s-z_i)|}{\prod_{j=1}^{n}|(s-p_j)|}=1 \\ \sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=\pm 2k\pi, k=0,1,2\ldots \end{cases}$$

模值条件

相角条件

零度根轨迹作图法则:

以下六个法则与180°根轨迹相同。

法则1、根轨迹连续、对称于实轴、有n条分支。

法则2、根轨迹的起点：开环极点，起点处$K^*=0$.

法则3、根轨迹的终点：开环零点或无穷远处，终点处$K^*=\infty$.

法则6、根轨迹的分离、会合点。

法则8、根轨迹和虚轴的交点。

法则9、根之和与根之积。

4.6 广义根轨迹

以下三个法则与180°根轨迹不相同。

***法则4、实轴上的根轨迹。**

实轴上某一线段的右边，若开环零、极点的数目之和为偶数，则该线段为根轨迹上的线段。简记为：向右看，为偶数。

***法则5、根轨迹的渐近线。**

1）渐近线共有n-m条；

2）倾斜角：$$\varphi_a = \frac{2k\pi}{n-m}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

3）交点：$$\sigma_a = \frac{(\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i)}{n-m}$$

*法则7、出射角（起始角）和入射角（终止角）。

- 实轴上的极点出射角：
- 实轴上的零点入射角：

$0^\circ, 180^\circ$

非实轴上的极点（共轭极点）出射角计算式为：

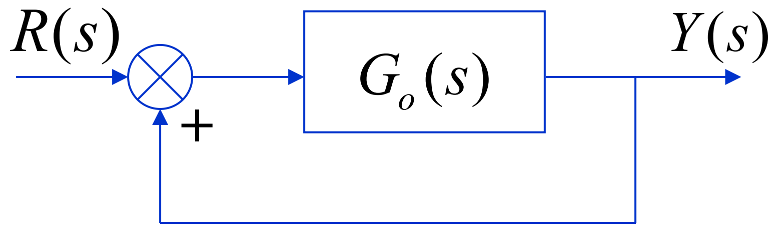
$$\theta_{p_i} = -2k\pi + \left[\sum_{j=1}^{m} \angle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \angle(p_i - p_j) \right]$$

非实轴上的零点（共轭零点）入射角计算式为：

$$\theta_{z_i} = 2k\pi - \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \angle(z_i - z_j) - \sum_{j=1}^{n} \angle(z_i - p_j) \right]$$

4.6 广义根轨迹

例1：单位闭环正反馈系统的开环传递函数为



$$G_o(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

试画出系统的根轨迹。

解：1)系统无开环零点，开环极点为p_1=0, p_2=-1, p_3=-2;

2)实轴上的根轨迹;

3)渐近线与实轴交点和夹角:

$$\sigma_a=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m}=\frac{[0+(-1)+(-2)]-0}{3}=-1$$

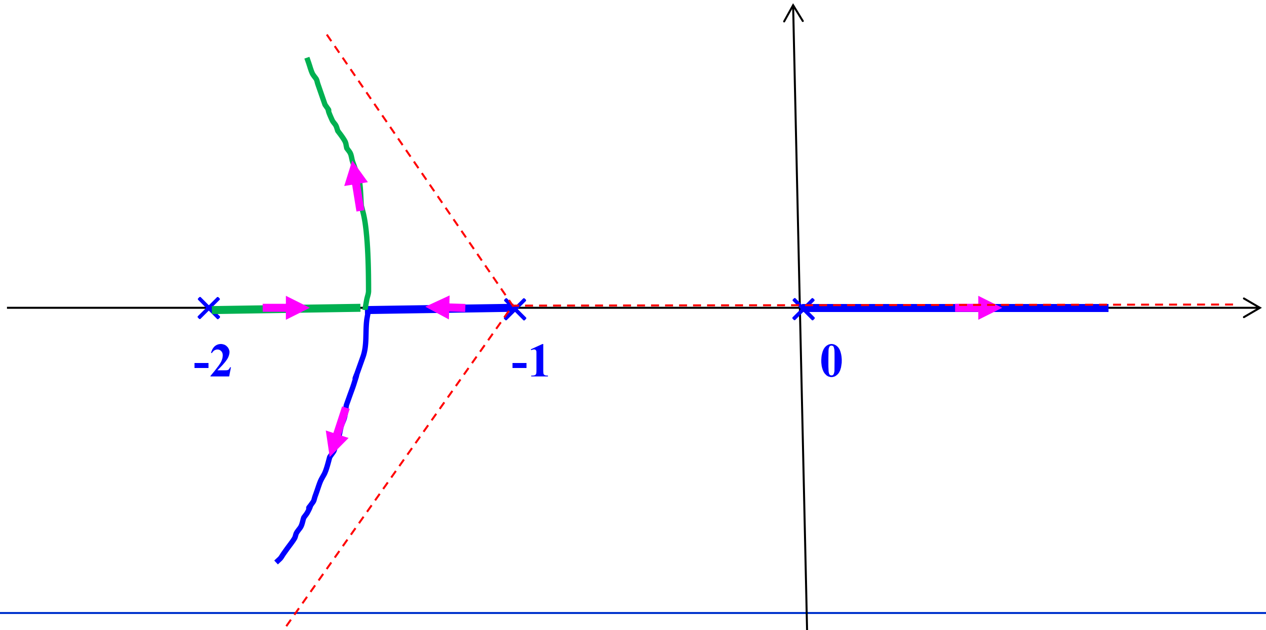
$$\varphi_a=\frac{2k\pi}{3},k=0,1,2,\Rightarrow\ \varphi_a=0,\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$$

4) 用求导法求分离、会合点,

$$\frac{dG_o(s)}{ds}=\frac{0-K^*\cdot d[s(s+1)(s+2)]}{[s(s+1)(s+2)]^2}=\frac{-K^*(3s^2+6s+2)}{[s(s+1)(s+2)]^2}=0$$

$$\Rightarrow 3s^2+6s+2=0\Rightarrow s_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times3\times2}}{2\times3}$$

$s_1=-0.422$(舍弃)$,s_2=-1.578$



例2非最小相位系统（系统具有位于s右半平面的开环零、极点）

$$G_o(s)=\frac{K(1-2s)}{s(s+1)}$$

试画出系统的根轨迹。

解：1)系统具有位于s右半平面的开环零、极点，故为非最小相位系统；

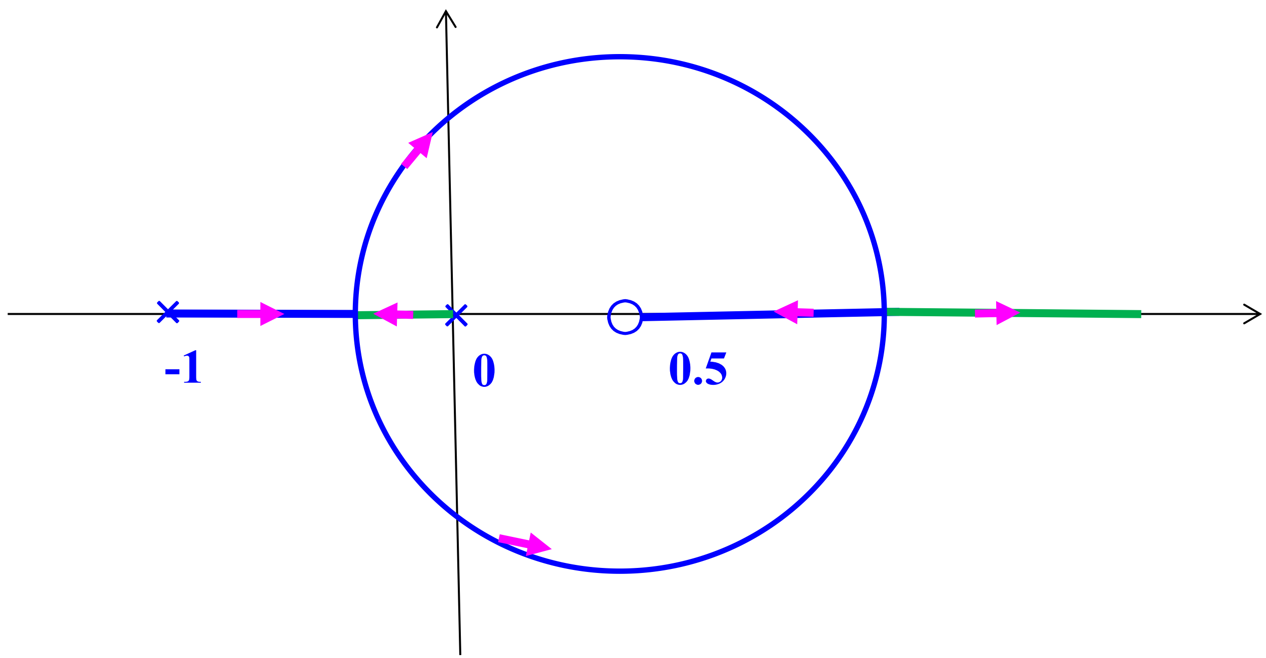
2)开环传递函数为负，相当于正反馈情况；

所以，本例根轨迹要按照零度根轨迹法则绘制。

$$G_o(s)=\frac{K(1-2s)}{s(s+1)}=-\frac{K^*(s-0.5)}{s(s+1)}$$

4.6 广义根轨迹

$$G_o(s)=\frac{K(1-2s)}{s(s+1)}=-\frac{K^*(s-0.5)}{s(s+1)}$$



二、参数根轨迹

上一节讨论了开环根轨迹增益 K^*变化时系统的闭环根轨迹。在实际系统设计中，还常常碰到其它参数变化时对闭环特征方程的影响。比如，特殊的开环零、极点，校正环节的参数等。

需要绘制除 K^*以外的其它参数变化时闭环系统特征方程根的轨迹，就是**参数根轨迹**。

一般情况，只要所论参数是线性地出现在闭环特征方程中，总可以把方程写为不含可变参数的多项式加上可变参数和另一多项式的乘积。将不含可变参数的多项式除方程两边，便可得到以可变参数为根轨迹增益的**等效根轨迹方程**。

注意： 此时的**等效**是指闭环特征方程相同，而并不保证闭环传递函数相同，除非根轨迹参数是系统的开环增益。

4.6 广义根轨迹

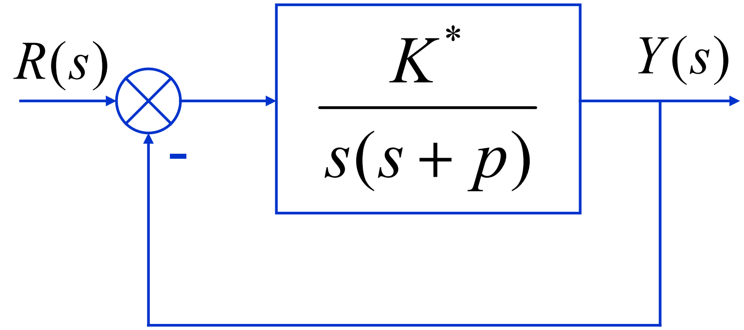
绘制参数根轨迹的步骤：

- 列出系统的闭环特征方程；
- 以特征方程中不含参变量的各项除特征方程，得到等效的系统根轨迹方程$G_{01}(s)$。**在$G_{01}(s)$中，可变参数的位置与常规根轨迹中的根增益 K^* 位置相同**。该参数称为等效系统的根轨迹增益。
- 用已知的方法绘制等效系统的根轨迹，即为原系统的参数根轨迹。

4.6 广义根轨迹

例3： 如下图，绘制开环极点p变化时的参量根轨迹(设$K^*=4$)。

[解]： 闭环传递函数为：



$$\Phi(s)=\frac{K^*}{s^2+ps+K^*}=\frac{4}{s^2+ps+4}$$

特征方程为： $s^2+ps+4=0 \Rightarrow p\frac{s}{s^2+4}=-1$

此式与前述的根轨迹方程形式 $K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=-1$完全相同。

$p\frac{s}{s^2+4}$ 相当于开环传递函数，称为等效开环传递函数。

参数p称为等效根轨迹增益。

4.6 广义根轨迹

画出p从0→∞时的根轨迹：

$$p\frac{s}{s^2+4}$$

- 根轨迹有两支，两个开环极点为±2j，一个开环零点为0。
- 实轴上根轨迹为负实轴；
- 出射角：$\theta_1=\pi+(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})=\pi(j2\text{极点})$

$$\theta_2=\pi+[(-\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})]=\pi(-j2\text{极点})$$

- 分离点和会合点：

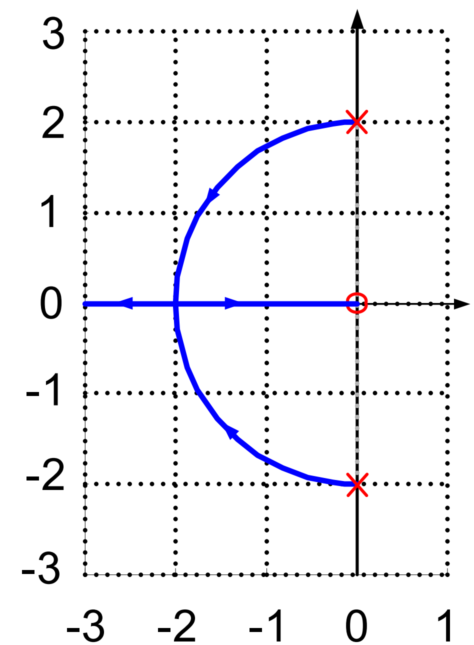
根据 $N'(s)D(s)-N(s)D'(s)=0$

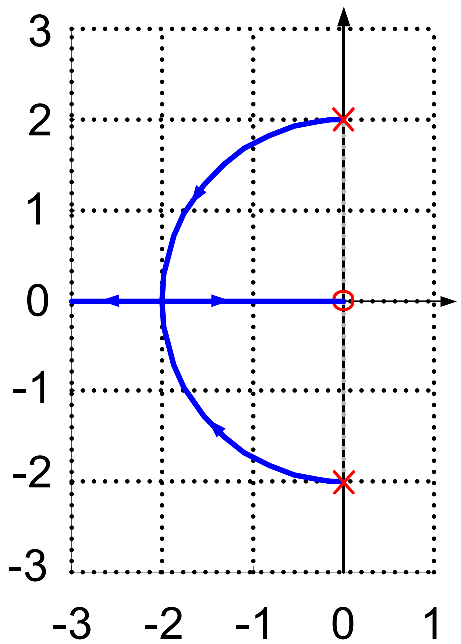
$N(s)=s$，$N'(s)=1$； $D(s)=s^2+4$，$D'(s)=2s$

$\therefore 1\times(s^2+4)-2s\times s=0$，解得：$s=\mp 2$

对应的p=±4，取p=+4，s=－2为会合点。

会合角为：$\theta_d=\frac{\pi}{2}$。





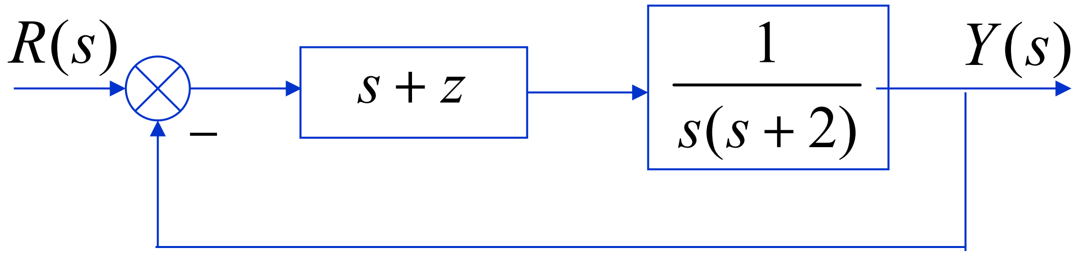
由根轨迹可见在复平面上的根轨迹是半个圆，对应0<p<4。

由二阶系统特征方程可见：$p=2\zeta\omega_n$，解得 $\zeta=\dfrac{p}{2\omega_n}=\dfrac{p}{4}$

即 $0<p<4$ 时 $0<\zeta<1$ ，这对应于欠阻尼情况。

4.6 广义根轨迹

例4：系统如图示，试绘制以开环零点 z 变化时的根轨迹。



解：系统闭环传递函数为

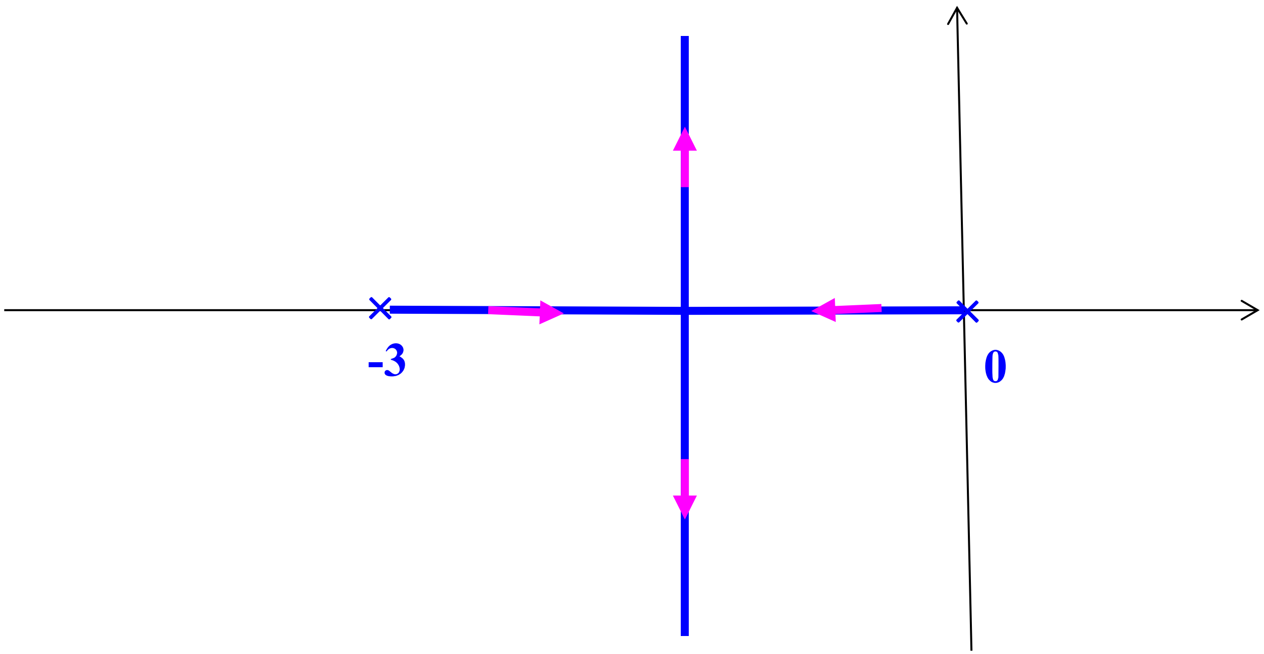
$$\Phi(s)=\frac{s+z}{s^2+3s+z}$$

所以，系统闭环特征方程为 $s^2+3s+z=0$

可得，参数根轨迹方程为 $1+G_{o1}(s)=1+\frac{z}{s^2+3s}=0$

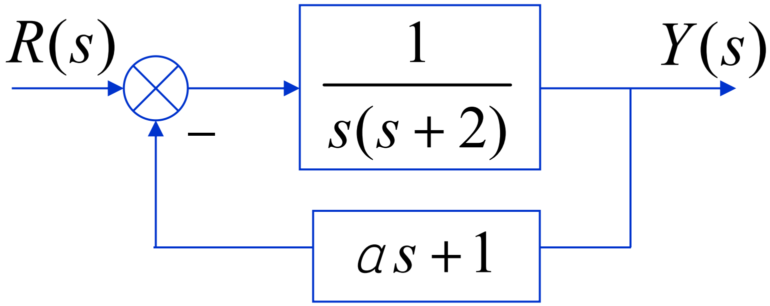
等效开环传递函数

$$G_{o1}(s)=\frac{z}{s^2+3s}$$



4.6 广义根轨迹

例5： 系统如图所示，试绘制以 a 为变量时的根轨迹。



解：系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{1}{s^2+2s+1+as}$$

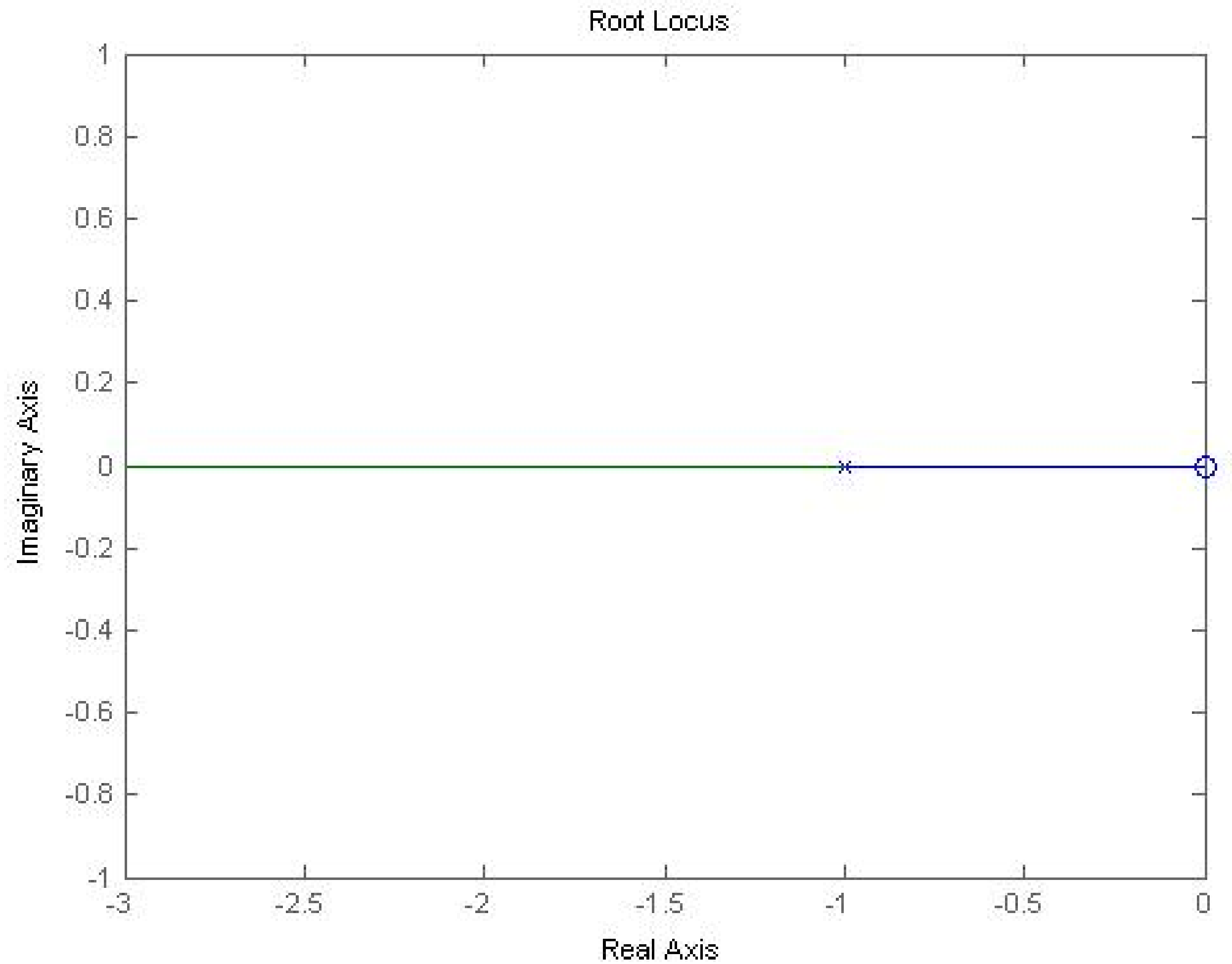
$$1+G_o(s)=0$$

所以，系统闭环特征方程为 $s^2+2s+1+as=0$

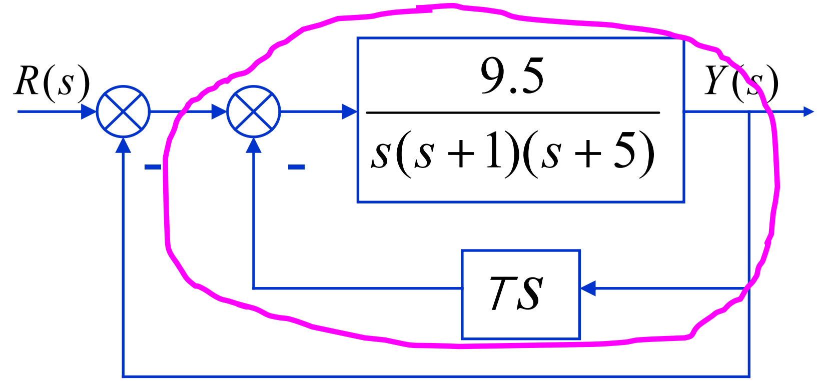
可得，参数根轨迹方程为 $1+G_{o1}(s)=1+\dfrac{as}{s^2+2s+1}=0$

4.6 广义根轨迹

等效开环传递函数 $G_{o1}(s)=\dfrac{a\,s}{s^2+2s+1}=\dfrac{a\,s}{(s+1)^2}$



例6：系统结构如图所示，绘制以τ为参变量的根轨迹，并讨论速度反馈对系统阶跃响应的影响。



解：(1)先求等效开环传递函数。

此时系统特征方程为

$$1+\frac{9.5(1+\tau s)}{s(s+1)(s+5)}=0$$

$$\Rightarrow s(s+1)(s+5)+9.5(1+\tau s)=0 \quad \Rightarrow s^3+6s^2+5s+9.5+9.5\tau s=0$$

$$\Rightarrow 1+\frac{9.5\tau s}{s^3+6s^2+5s+9.5}=0$$

令 $\tau^*=9.5\tau$，等效开环传递函数为

$$G_{o1}(s)=\frac{\tau^* s}{s^3+6s^2+5s+9.5}=\frac{\tau^* s}{(s+5.4)(s+0.3-j1.292)(s+0.3+j1.292)}$$

(2)画参量根轨迹

$$G_{o1}=\frac{T^{*}s}{(s+5.4)(s+0.3-j1.292)(s+0.3+j1.292)}$$

① 开环极点为 -5.4、 $-0.3\pm j1.292$,

开环零点为 0 。

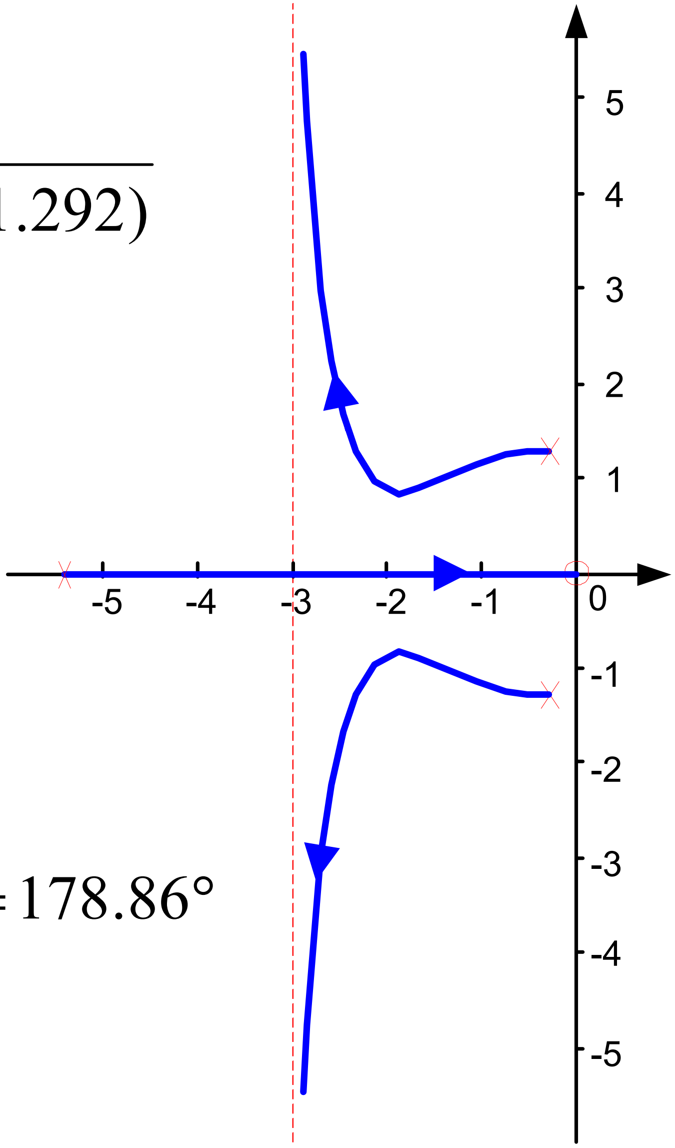
② 渐近线(2条):

$$\sigma_a=-3,\quad \varphi_a=\pm 90^\circ$$

③ 出射角:

$$\theta_{p_2}=\pi+(\pi-tg^{-1}\frac{1.292}{0.3})-tg^{-1}\frac{1.292}{5.1}-90^\circ=178.86^\circ$$

$$\theta_{p_3}=-178.86^\circ$$



(3)讨论

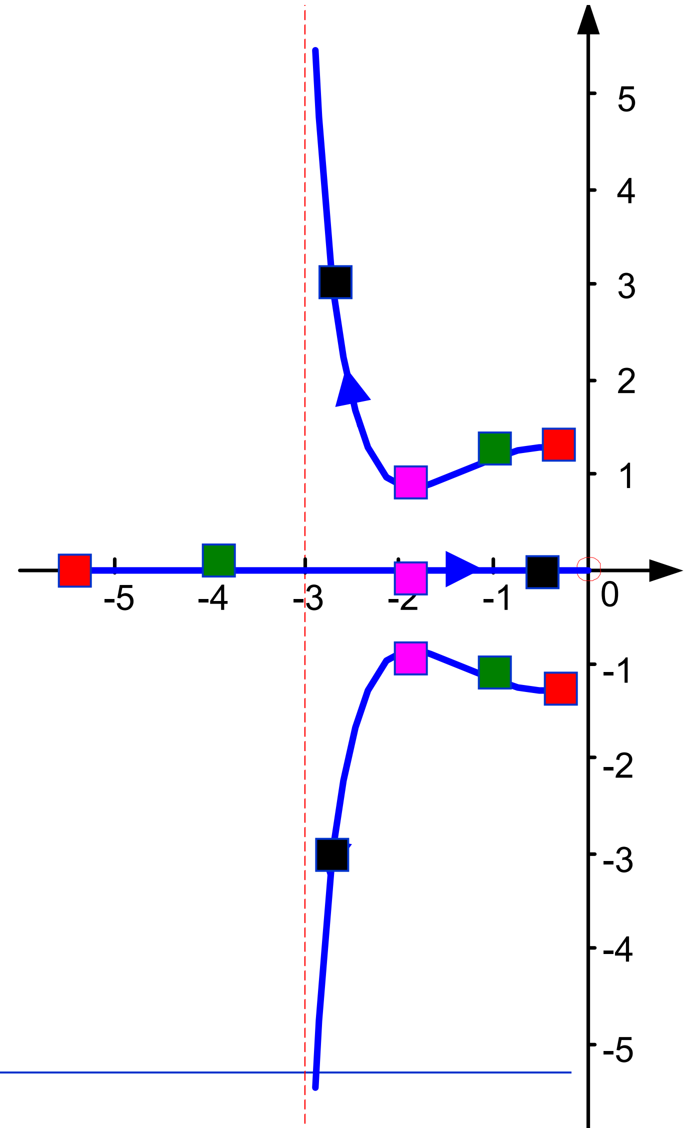
$$\Phi(s)=\frac{9.5}{s^3+6s^2+(5+\tau^*)s+9.5}$$

① $\tau^*=0$，此时闭环极点为等效开环极点，即 -5.4、$-0.3\pm j1.292$，此时 $\alpha=5.4/0.3=18$，可近似为二阶系统。$\zeta=0.226$，$\sigma\%=48.2\%$，$t_s=10s$

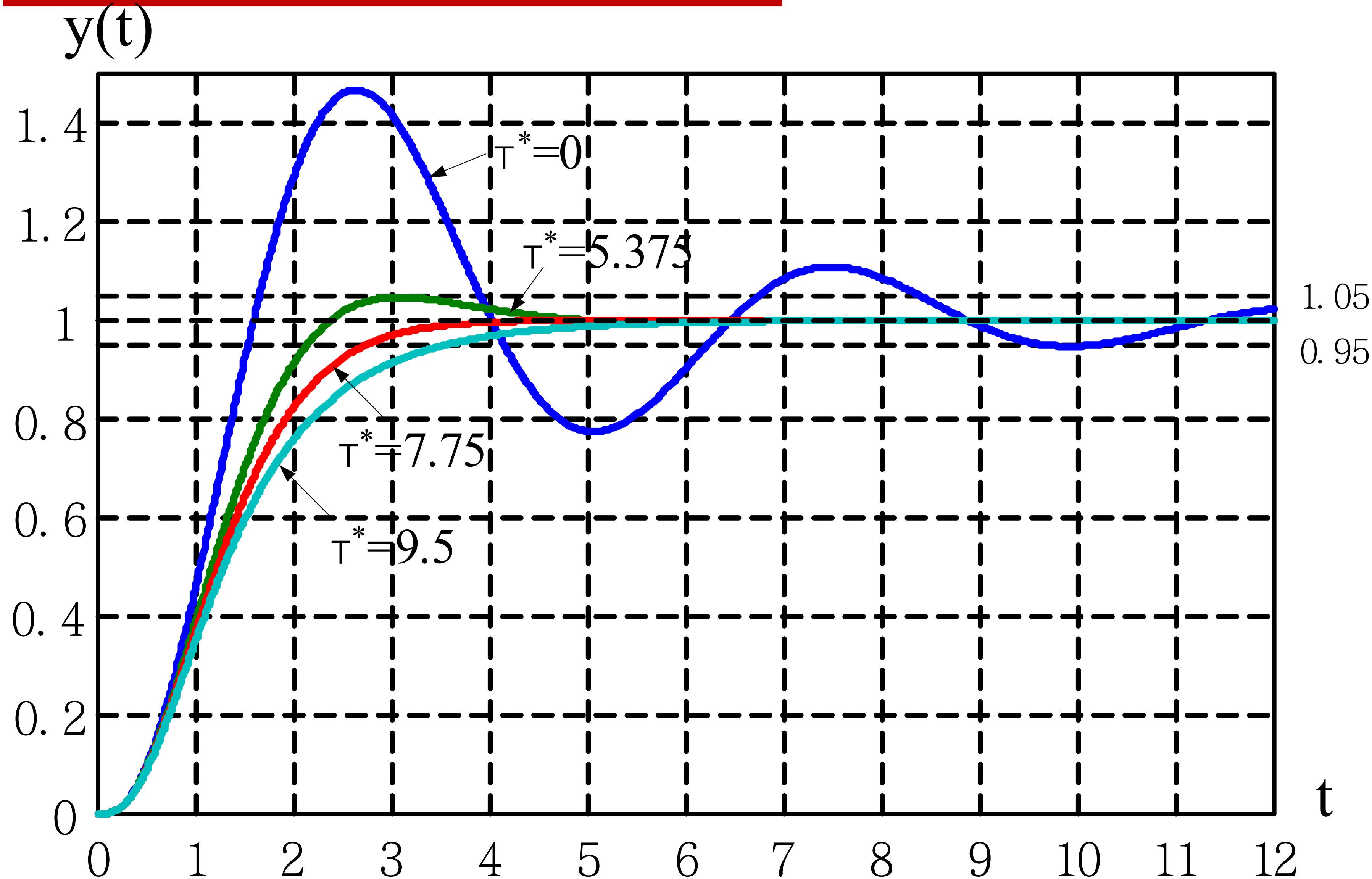
② $\tau^*=5.375$，此时闭环极点为 -4、$-1\pm j1.17$，此时 $\alpha=4/1=4$，若视作二阶系统则：$\zeta=0.65$，$\sigma\%=6.8\%$，$t_s=3s$

③ $\tau^*=7.75$，此时闭环极点为 -2、$-2\pm j0.866$，此时 $\alpha=2/2=1$，已不能看作二阶系统。

④ $\tau^*=9.5$，此时闭环极点为 -0.5604、$-2.7198+j3.0910$，$-2.7198-3.0910$，此时可看作一阶系统。



4.6 广义根轨迹

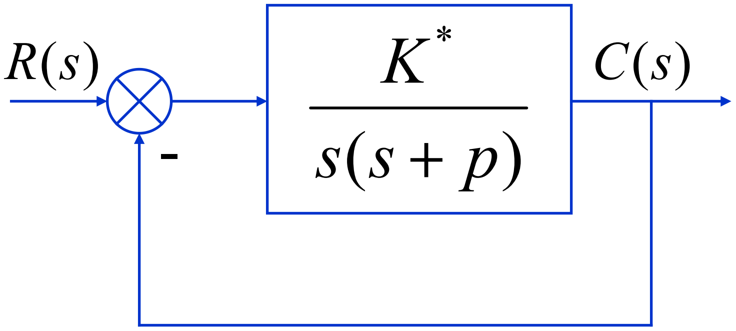


y(t)
1. 4
1. 2
1
0. 8
0. 6
0. 4
0. 2
0
τ*=0
τ*=5.375
τ*=7.75
τ*=9.5
1. 05
0. 95
t
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

三、根轨迹簇

当系统有两个参数变化时，所绘出的根轨迹称谓**根轨迹簇**。

[例]系统如下。试绘制K^*和p分别从零变化到无穷大时的根轨迹。



[解]:

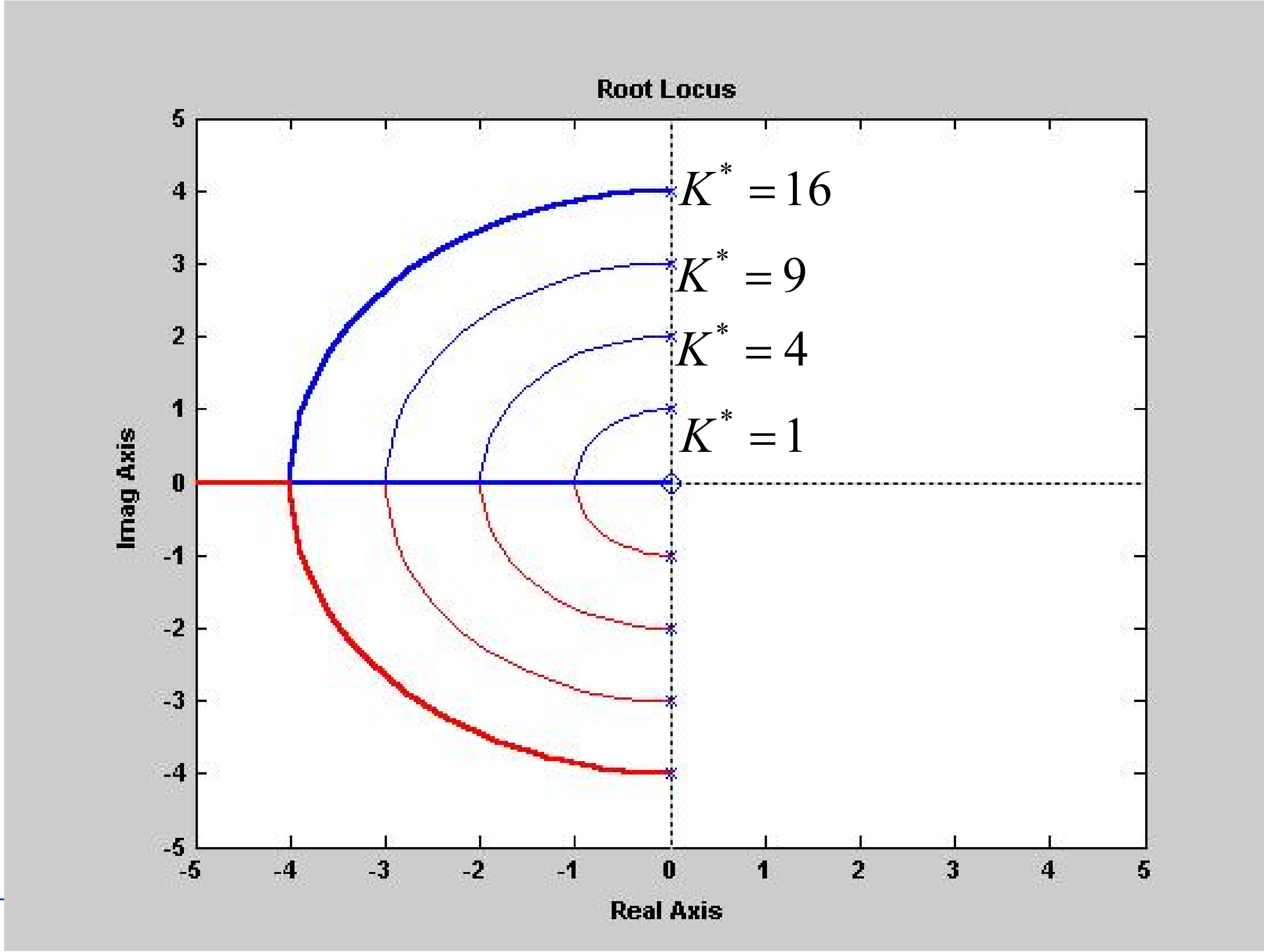
- 取K^*为不同值时，绘制参量p从零变化到无穷大时的参量根轨迹。这时，根轨迹方程为:

$$p\frac{s}{s^2+K^*}=-1$$

K^*不同时的根轨迹如下页所示:

4.6 广义根轨迹

$$p\frac{s}{s^2+K^*}=-1$$

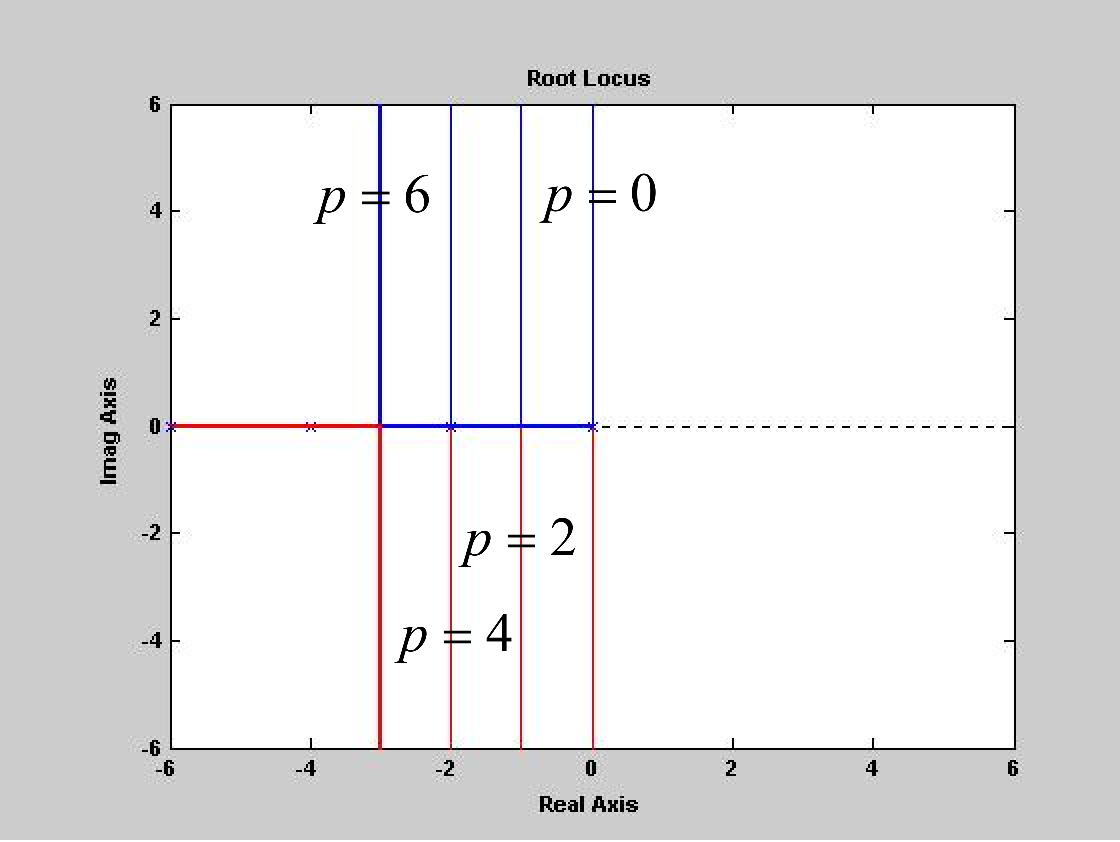


4.6 广义根轨迹

- 取p为不同值时，绘制参量K*从零变化到无穷大时的180度（常规）根轨迹。这时，根轨迹方程为：

$$K^*\frac{1}{s(s+p)}=-1$$

p不同时的根轨迹如图所示：



小结

- 零度根轨迹
- 零度根轨迹的绘制法则
- 参数根轨迹
- 参数根轨迹的绘制步骤
- 根轨迹簇

Thank You !