第6讲 数字特征

知识结构

- **数学期望**
  - **X**
    - $X \sim p_i \Rightarrow EX = \sum_i x_i p_i$ $\begin{cases}\text{有限项相加} \\ \text{无穷项相加(无穷级数)}\end{cases}$
    - $X \sim f(x) \Rightarrow EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$ $\begin{cases}\text{有限区间积分(定积分)} \\ \text{无穷区间积分(反常积分)}\end{cases}$
  - **$g(X)$**
    - $X \sim p_i, Y = g(X) \Rightarrow EY = \sum_i g(x_i) p_i$
    - $X \sim f(x), Y = g(X) \Rightarrow EY = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\mathrm{d}x$
  - **$g(X,Y)$**
    - $(X,Y) \sim p_{ij}, Z = g(X,Y) \Rightarrow EZ = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$
    - $(X,Y) \sim f(x,y), Z = g(X,Y) \Rightarrow EZ = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
  - **最值**
    - $Y = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, EY = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\mathrm{d}y$，其中 $f_Y(y) = n[1-F(y)]^{n-1} f(y)$
    - $Z = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, EZ = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z)\mathrm{d}z$，其中 $f_Z(z) = n[F(z)]^{n-1} f(z)$
  - 加 **分解** — $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_n$
  - **性质**
    - ① $Ea = a, E(EX) = EX$
    - ② $E(aX+bY) = aEX + bEY, E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i EX_i$ (无条件)
    - 乘 ③ 若 X,Y 相互独立(不相关)，则 $E(XY) = EXEY$ (独立就可拆)拆
- **方差**
  - **X**
    - **定义** — $DX \xlongequal{\triangle} E[(X-EX)^2]$
    - **定义法**
      - $X \sim p_i \Rightarrow DX = E[(X-EX)^2] = \sum_i (x_i - EX)^2 p_i$
      - $X \sim f(x) \Rightarrow DX = E[(X-EX)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-EX)^2 f(x)\mathrm{d}x$
    - **公式法** — $DX = E(X^2) - (EX)^2$
  - **最值**
    - $Y = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\mathrm{d}y \Rightarrow DY = E(Y^2) - (EY)^2$
    - $Z = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 f_Z(z)\mathrm{d}z \Rightarrow DZ = E(Z^2) - (EZ)^2$
  - 加 **分解** — $D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = DX_1 + DX_2 + \cdots + DX_n + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \xlongequal{\text{独立}} DX_1 + DX_2 + \cdots + DX_n$
  - **性质**
    - ① $DX \geqslant 0, E(X^2) = DX + (EX)^2 \geqslant (EX)^2$
    - ② $Dc = 0$ (c 为常数)
    - ③ $DX = 0 \Leftrightarrow X$ 几乎处处为某个常数 a，即 $P\{X = a\} = 1$
    - ④ $D(aX+b) = a^2 DX$
    - ⑤ $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$
    - ⑥ $D\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 DX_i + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$
    - ⑦ $D(aX+bY) \xlongequal{\text{独立}} a^2 DX + b^2 DY$
    - 乘 ⑧ $D(XY) \xlongequal{\text{独立}} DX \cdot DY + DX(EY)^2 + DY(EX)^2 \geqslant DX \cdot DY$
    - ⑨ 对任意常数 c，有 $DX = E[(X-EX)^2] \leqslant E[(X-c)^2]$

- **常用 EX, DX**
  - ①0－1分布，$EX=p$，$DX=p-p^2=(1-p)p$
  - ②$X\sim B(n,p)$，$EX=np$，$DX=np(1-p)$
  - ③$X\sim P(\lambda)$，$EX=\lambda$，$DX=\lambda$
  - ④$X\sim G(p)$，$EX=\frac{1}{p}$，$DX=\frac{1-p}{p^2}$　(几何分布)
  - ⑤$X\sim U(a,b)$，$EX=\frac{a+b}{2}$，$DX=\frac{(b-a)^2}{12}$
  - ⑥$X\sim E(\lambda)$，$EX=\frac{1}{\lambda}$，$DX=\frac{1}{\lambda^2}$
  - ⑦$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$EX=\mu$，$DX=\sigma^2$　$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
  - ⑧$X\sim\chi^2(n)$，$EX=n$，$DX=2n$　统计量、分布
- **协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 与相关系数 ρ_{XY}**
  - **$\mathrm{Cov}(X,Y)$**
    - **定义**—$\mathrm{Cov}(X,Y)\xlongequal{\triangle}E[(X-EX)(Y-EY)]$
    - **定义法**
      - $(X,Y)\sim p_{ij}\Rightarrow\mathrm{Cov}(X,Y)=\sum_i\sum_j(x_i-EX)(y_j-EY)p_{ij}$
      - $(X,Y)\sim f(x,y)\Rightarrow\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)(y-EY)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
    - **公式法**—$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY$
  - **ρ_{XY} 定义**—$\rho_{XY}\xlongequal{\triangle}\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}\begin{cases}=0\Leftrightarrow X,Y\text{ 不相关}\\\neq0\Leftrightarrow X,Y\text{ 相关}\end{cases}$　(线性关系)　记定义
  - **性质**
    - ①$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$
    - ②$\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$
    - ③$\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$
    - ④$|\rho_{XY}|\leqslant1$
    - ⑤$\rho_{XY}=1\Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1(a>0)$
    - ⑥$\rho_{XY}=-1\Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1(a<0)$
    - ⑦$\rho_{XY}=0\Leftrightarrow\mathrm{Cov}(X,Y)=0\Leftrightarrow E(XY)=EX\cdot EY$ $\Leftrightarrow D(X+Y)=DX+DY\Leftrightarrow D(X-Y)=DX+DY$　※
    - ⑧X,Y 独立 $\Rightarrow\rho_{XY}=0$
    - ⑨若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho_{XY})$，则 X,Y 独立 $\Leftrightarrow X,Y$ 不相关 $(\rho_{XY}=0)$
- **独立性与不相关性的判定**
  - **用分布判独立**
    - ①若 (X,Y) 是连续型的，则 X 与 Y 相互独立的充要条件是 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$
    - ②若 (X,Y) 是离散型的，则 X 与 Y 相互独立的充要条件是 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$
  - **用数字特征判不相关**—$\rho_{XY}=0\Leftrightarrow\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ $\Leftrightarrow E(XY)=EX\cdot EY\Leftrightarrow D(X\pm Y)=DX+DY$
  - **程序**—先计算 $\mathrm{Cov}(X,Y)$，而后按下列程序进行判断或再计算：
    - 先判相关 再判独立
    - $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY$
      - $\neq0\Leftrightarrow X$ 与 Y 相关 $\Rightarrow X$ 与 Y 不独立
      - $=0\Leftrightarrow X$ 与 Y 不相关，通过
        - 分布推断 $\begin{cases}X,Y\text{ 独立}\\X,Y\text{ 不独立}\end{cases}$　☆
        - 反证法
  - **重要结论**
    - ①如果 X 与 Y 独立，则 X,Y 不相关，反之不然
    - ②如果 X 与 Y 相关，则 X,Y 不独立
    - ③如果 (X,Y) 服从二维正态分布，则 X,Y 独立 $\Leftrightarrow X,Y$ 不相关
    - ④如果 X 与 Y 都服从0－1分布，则 X,Y 独立 $\Leftrightarrow X,Y$ 不相关

    独立 $\underset{\times}{\overset{\checkmark}{\rightleftarrows}}$ 不相关

    $\Updownarrow$ 逆否

    不独立 $\underset{\times}{\overset{\checkmark}{\leftrightarrows}}$ 相关
- **切比雪夫不等式**
  - $P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2}$
  - $P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geqslant1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$