第三章　多维随机变量及其分布

3、连续型随机向量的概率密度函数

二维连续型随机向量的定义

设(X, Y)是二维随机变量，其联合分布函数为$F(x, y)$， 如果存在非负可积函数 $f(x, y)$，使得：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv, \quad x,y\in R$$

则称(X, Y)为二维连续型随机变量，称 $f(x, y)$ 为 (X, Y) 的联合概率密度函数，简称联合概率密度。

$$\boxed{P((X,Y)\in G)=\iint_G f(x,y)dxdy}$$

例 2 设二维连续型随机变量(X, Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0<x<2,2<y<4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

试求：(1) 常数k；(2) $P(X<2, Y<3)$；(3) $P(X<1.5)$；(4) $P(X+Y\le 4)$。

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$，得 $1=\int_2^4 dy\int_0^2 k(6-x-y)dx=k\int_2^4\left[(6-y)x-\frac{x^2}{2}\right]_0^2 dy$

$$=k\int_2^4(12-2y-2)dy=k[10y-y^2]_2^4=8k\text{，故 } k=\frac{1}{8}$$

(2) $P(X<1,Y<3)=\int_2^3 dy\int_0^1\frac{1}{8}(6-x-y)dx=\frac{1}{8}\int_2^3\left[(6-y)x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy=\frac{1}{8}\int_2^3(\frac{11}{2}-y)dy=\frac{3}{8}$

(3) $P(X<1.5)=\int_2^4 dy\int_0^{1.5}\frac{1}{8}(6-x-y)dx=\frac{1}{8}\int_2^4\left[(6-y)x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{1.5}dy=\frac{1}{8}\int_2^4(\frac{63}{8}-\frac{3}{2}y)dy=\frac{27}{32}$

(4) $P(X+Y\le 4)=\iint\limits_{x+y\le 4} f(x,y)dxdy=\int_2^4 dy\int_0^{4-y}\frac{1}{8}(6-x-y)dx=\frac{1}{8}\int_2^4\left[(6-y)x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{4-y}dy$

$$=\frac{1}{8}\int_2^4\left[(6-y)(4-y)-\frac{(4-y)^2}{2}\right]dy=\frac{2}{3}$$

例 3 设二维连续型随机变量(X, Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{xy}{3}, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求：(1) $P(X+Y\ge 1)$ ；(2) $F(x,y)$。

解：(1) $P(X+Y\ge 1)=1-P(X+Y<1)\quad =1-\iint\limits_G x^2+\dfrac{xy}{3}dxdy$

$$=1-\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x^2+\frac{xy}{3}dy\ =1-\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x^2+\frac{xy}{3}dy=1-\int_0^1\left(x^2y+\frac{x}{6}y^2\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=\frac{65}{72}$$

(2) 当 $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$ 时，有：$\displaystyle\int_0^x\int_0^y x^2+\frac{xy}{3}dxdy$

当 $x\ge 1,\ 0\le y\le 2$ 时，有：$\displaystyle\int_0^1\int_0^y x^2+\frac{xy}{3}dxdy$

……

$$F(x,y)=\begin{cases} \dfrac{yx^3}{3}+\dfrac{x^2y^2}{12} & 0\le x<1, 0\le y<2 \\ \dfrac{y}{3}+\dfrac{y^2}{12} & x\ge 1, 0\le y<2 \\ \dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{3} & 0\le x<1, y\ge 2 \\ 1 & x\ge 1, y\ge 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

4、两个重要的连续型随机向量

1）二维均匀分布

定义： 若二维连续型随机变量(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中A为区域G的面积，则称(X, Y)在区域G上服从均匀分布。

性质： 设二维连续型随机变量(X, Y)～$U(G)$，则(X, Y)在G内的任一子区域上取值的概率等价于平面区域G上的几何概率。

$$P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)dxdy=\frac{|D|}{|G|}$$

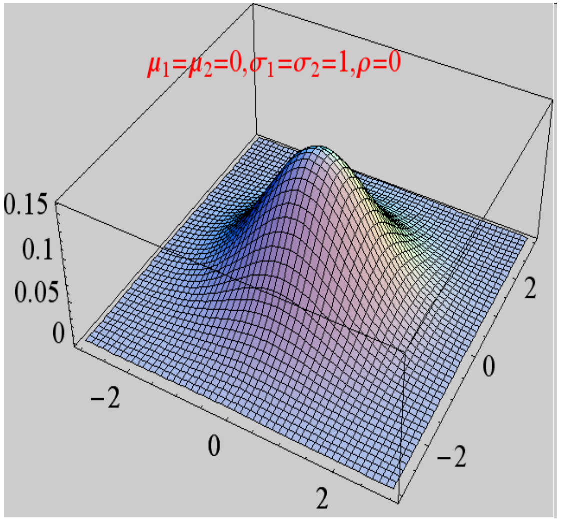
2）二维正态分布

定义： 若二维连续型随机变量(X, Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},\quad x,y\in R$$

其中μ_1，μ_2，$\sigma_1(\sigma_1>0)$，$\sigma_2\,(\sigma_2>0)$，$\rho\,(|\rho|<1)$是常数，则称(X, Y)服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 的二维正态分布，记为：

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho).$$



3.2 边缘分布

二维随机变量(X, Y)作为一个整体具有联合概率分布(联合分布函数或联合分布律或联合概率密度)，而X和Y都是随机变量，各自也具有概率分布，这样的分布就是边缘分布。

例： 袋中有3个白球，4个黑球，无放回地从中摸两次，记：

$$X=\begin{cases}1 & \text{第一次摸出白球}\\ 0 & \text{第一次摸出黑球}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1 & \text{第二次摸出白球}\\ 0 & \text{第二次摸出黑球}\end{cases}$$

求（X，Y）的分布律。

（X，Y）的分布律：

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

1. 二维随机变量的边缘分布函数

定义： 设(X, Y)是二维随机变量，称

$$F_X(x) = P(X \le x), \quad x \in R$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y), \quad y \in R$$

分别为(X, Y)关于X，Y的边缘分布函数。

如何求： 由于$x \in \mathrm{R}$ $F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, Y < +\infty) \;\; = F(x, +\infty)$

$$\xrightarrow{\text{定义为}} \lim_{y \to +\infty} F(x, y)$$

定理 设(X, Y)是二维随机变量，其联合分布函数为$F(x, y)$，则

$$F_X(x) = F(x, +\infty), \quad x \in R$$
$$F_Y(y) = F(+\infty, y), \quad y \in R$$

联合分布函数中把不要的变量用正无穷代替就得到边缘分布

定理： 设二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律为：

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, \quad i, j=1,2,\dots$$

则(X, Y)关于X，Y的边缘分布律为：

$$p_{i\bullet}=P(X=x_i)=\sum_j p_{ij}, \quad i=1,2,\cdots$$

$$p_{\bullet j}=P(Y=y_j)=\sum_i p_{ij}, \quad j=1,2,\cdots$$

联合分布律中把不要的变量用求和求掉就得到边缘分布律

或在(X, Y)的联合分布律中表示为：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\bullet}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$p_{\bullet j}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\cdots$	$p_{\bullet j}$	$\cdots$	1

2. 二维连续型随机变量的边缘概率密度

设 $(X,Y) \sim f(x,y)$

$$f_X(x)=\frac{\partial F(x,+\infty)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)\,du\,dv=\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{x}\underbrace{\boxed{\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)\,dv\right)}}_{G(u)}du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy$$

定理： 设二维连续型随机变量(X, Y)的联合概率密度为$f(x,y)$，则其关于X，Y的边缘概率密度分别为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy,\quad -\infty<x<+\infty$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx,\quad -\infty<y<+\infty$$

联合密度函数中把不要的变量用积分积掉就得到边缘密度函数

例1： 设二维连续型随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. 即$(X, Y)$的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},\quad x,y\in R$$

求(X,Y)关于X，Y的边缘概率密度。

解 由于
$$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}=\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$

因此
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}dy$$

令
$$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$$

则
$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

同理可得Y的边缘概率密度也是正态分布。

注意：

以上结果说明如果 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. 那么 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 且都不依赖于参数ρ。也就是说，对于任意给定的 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$，不同 ρ 的对应不同的二维正态分布，其边缘分布却都是一样的，即单由关于X，Y的边缘分布一般不能确定X, Y的联合分布，并且(X,Y)不一定服从二维正态分布。

联合分布决定边缘分布，反之不一定成立

3.3 条件分布

1. 二维离散型随机变量的条件分布

之前定义了条件概率，两事件A、B，若$P(A)>0$，则可考虑在A发生前提下B发生的概率：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

对二维随机变量，也可类似分析

(X, Y)联合分布律为 $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$，$i, j=1, 2, \cdots$

边缘分布律为 $P(X=x_i)=p_{i\bullet}=\sum_j p_{ij}$ $\quad P(Y=y_j)=p_{\bullet j}=\sum_i p_{ij}$

定义 若 $P(Y=y_j)=p_{\bullet j}>0$

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},\ i=1, 2, \cdots$$

称为$Y=y_j$条件下，随机变量X的条件分布律

同理，若 $P(X=x_i)=p_{i\bullet}>0$

$$P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},\ j=1, 2, \cdots$$

称为$X=x_i$条件下，随机变量Y的条件分布律

例1： 二维随机向量（X，Y）的联合分布律：

$X \backslash Y$	-1	0	5
1	0.17	0.05	0.21
3	0.04	0.28	0.25

求当$Y=0$时，X的条件分布律。

解 由联合分布律算出两个边缘分布律 $p_{\cdot j}$ $p_{i\cdot}$

$X \backslash Y$	-1	0	5	$p_{i\cdot}$
1	0.17	0.05	0.21	0.43
3	0.04	0.28	0.25	0.57
$p_{\cdot j}$	0.21	0.33	0.46	1

$$P(X=1|Y=0)=\frac{0.05}{0.33}=\frac{5}{33}$$

$$P(X=3|Y=0)=\frac{0.28}{0.33}=\frac{28}{33}$$

2. 二维连续型随机变量的条件概率密度

设(X, Y)为二维连续型随机变量，其联合概率密度为$f(x, y)$，

定义 $F_{X|Y}(x\,|\,y) = P(X \le x\,|\,Y{=}y)$ 为在$Y{=}y$条件下随机变量X的条件分布函数

$$F_{X|Y}(x\,|\,y) = ? \qquad \frac{P(X \le x, Y{=}y)}{P(Y{=}y)} \quad ?$$

由于连续型随机变量取单点值的概率为0，条件分布不能直接用条件概率的计算方法来解。必须定义一个区间才能作分母。

定义： 设二维随机变量(X, Y)的联合分布函数为$F(x, y)$，关于Y的边缘分布函数为$F_Y(y)$，给定增量及其增量Δy(不妨设$\Delta y>0$)，使得$P(y<Y\le y+\Delta y)>0$

$$F_{X|Y}(x\,|\,y)=P(X\le x\,|\,y<Y\le y+\Delta y)$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{P(X\le x, y<Y\le y+\Delta y)}{P(y<Y\le y+\Delta y)}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{F(x, y+\Delta y)-F(x, y)}{F_y(y+\Delta y)-F_y(y)}$$

则称该极限为在$Y=y$条件下随机变量X的条件分布函数，记为$F_{X|Y}(x\,|\,y)$，即

类似地，有 $$F_{Y|X}(y\,|\,x)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{F(x+\Delta x, y)-F(x, y)}{F_X(x+\Delta x)-F_X(x)}$$

$$F_{X|Y}(x\,|\,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{F(x,y+\Delta y)-F(x,y)}{F_Y(y+\Delta y)-F_Y(y)}\quad=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(F(x,y+\Delta y)-F(x,y))/\Delta y}{(F_Y(y+\Delta y)-F_Y(y))/\Delta y}$$

$$=\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{dF_Y(y)}{dy}}\qquad=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(u,y)du}{f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du$$

且 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}\geq 0\ (-\infty<x<\infty),\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx=\dfrac{1}{f_Y(y)}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=1,$

则 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}(-\infty<x<\infty),$ 则构成概率密度

定义： 设二维连续型随机变量(X, Y)的联合概率密度为 $f(x, y)$，

如果对于任意固定的y，有 $f_Y(y) > 0$，则称

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \quad -\infty < x < \infty$$

为在$Y=y$条件下随机变量X的条件概率密度

如果对于任意固定的x，有 $f_X(x) > 0$，则称

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \quad -\infty < y < \infty$$

为在$X=x$条件下随机变量Y的条件概率密度。

例2： 在(0,1)中随机取一个数X，在$X=x(0<x<1)$的条件下，再从$(0\,,x)$中随机取一个数Y，求Y的分布。

解： 由题设知X的概率密度为：$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & Others\end{cases}$

又由于在$X=x(0<x<1)$的条件下，Y的条件概率密度为：$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x\\ 0, & Others\end{cases}$

故(X, Y)的联合概率密度为: $f(x,y)=f_x(x)\,f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1\\ 0, & Others\end{cases}$

Y的边缘概率密度 $f_Y(y)$为：$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_y^1\frac{1}{x}dx=-\ln y, & 0<y<1\\ 0, & Others\end{cases}$$

例3： 设二维随机变量(X, Y)在区域G上服从均以分布，其中G是由$x-y=0$，$x+y=2$与$y=0$所围成的三角形区域。

试求：(1) (X, Y)关于X的边缘概率密度$f_X(x)$; (2) 条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$。

解： (1) 由题设知(X, Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G\\ 0, & (x,y)\notin G\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x dy = x, & 0<x<1\\ \int_0^{2-x} dy = 2-x, & 1\le x<2\\ 0, & Others\end{cases}$$

(2) $$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^{2-y} dx = 2(1-y), & 0<y<1\\ 0, & Others\end{cases}$$

$\forall\, 0<y<1$，$f_Y(y)>0$，X的条件概率密度为：

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-y)}, & y\le x\le 2-y\\ 0, & Others\end{cases}$$