



## 第三章 控制系统的时域分析法

3.1 典型输入信号

3.2 控制系统的时域性能指标

3.3 一阶系统的时域响应

3.4 二阶系统的时域响应

3.5 高阶系统的时域分析

3.6 线性定常系统的稳定性和劳斯判据

3.7 控制系统的稳态误差分析



## 3.4 二阶系统的时域响应

# 3.4 二阶系统的时域响应

- 一、二阶系统的数学模型
- 二、二阶系统的单位阶跃响应
- 三、二阶系统的性能指标
- 四、二阶系统对其他典型输入信号的响应
- 五、具有零点的二阶系统分析
- 六、改善二阶系统性能的措施



## 3.4 二阶系统的时域响应

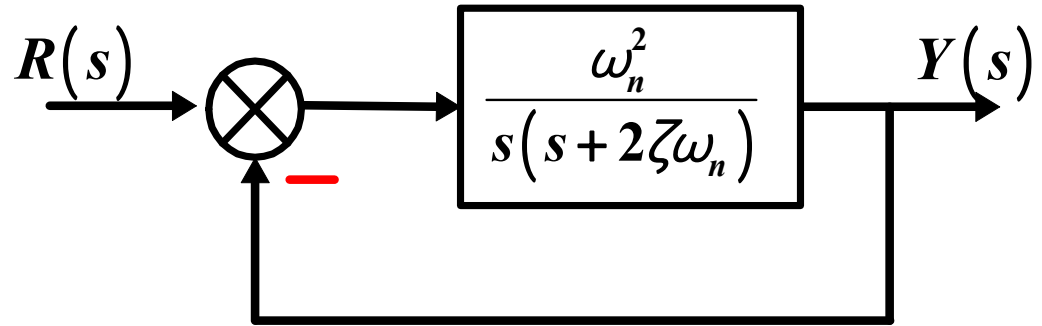
### 一、二阶系统的数学模型

- ▶ 用二阶微分方程描述的系统称为二阶系统；
- ▶ 二阶系统不仅在工程中比较常见，而且许多高阶系统也可以转化为二阶系统来研究，因此研究二阶系统具有很重要的意义；
- ▶ 求出标准形式的性能指标表达式，便可求得任何二阶系统的动态性能指标。



## 3.4 二阶系统的时域响应

- 系统结构图：



- 闭环传递函数：
$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$
- 闭环特征方程：
$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$\Phi(s)$  为典型二阶系统的传递函数， $\zeta$  为阻尼系数，  
 $\omega_n$  为无阻尼自然振荡角频率或固有频率。



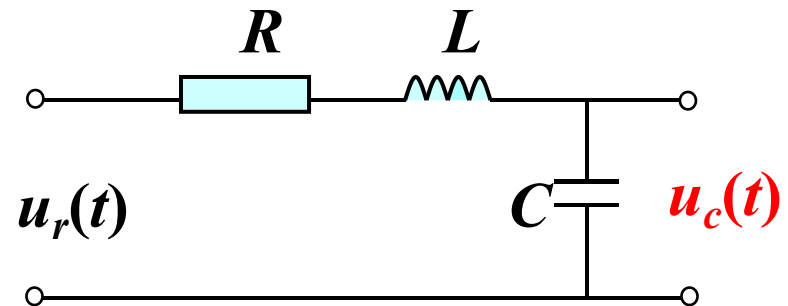
## 3.4 二阶系统的时域响应

### 例1: $RLC$ 电路的传递函数为

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = \frac{R}{L} \\ \omega_n^2 = \frac{1}{LC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \zeta = \frac{R\sqrt{C}}{2\sqrt{L}} \end{cases}$$



可见：二阶系统的参数与标准式的参数之间有着对应的关系。



## 3.4 二阶系统的时域响应

### 二、二阶系统的单位阶跃响应

$$Y(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(-2\zeta\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$\zeta$ 值不同，两个根的性质不同，有可能为实数根、复数根或重根。相应的单位阶跃响应的形式也不相同。下面分别讨论。



## 3.4 二阶系统的时域响应

①当  $\zeta = 0$  时，零阻尼系统

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

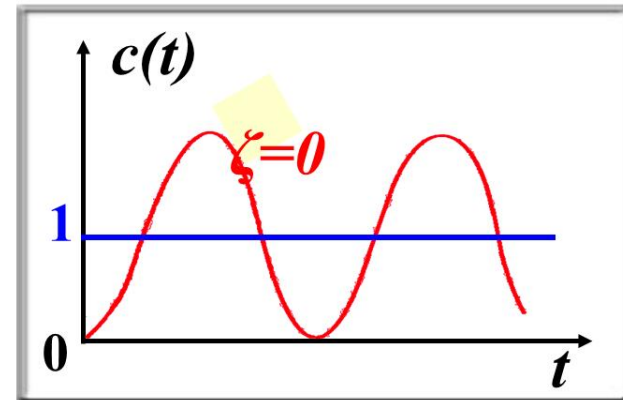
系统两个共轭虚根:  $s_{1,2} = \pm j\omega_n$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$y(t) = 1 - \cos \omega_n t, \quad t \geq 0$$

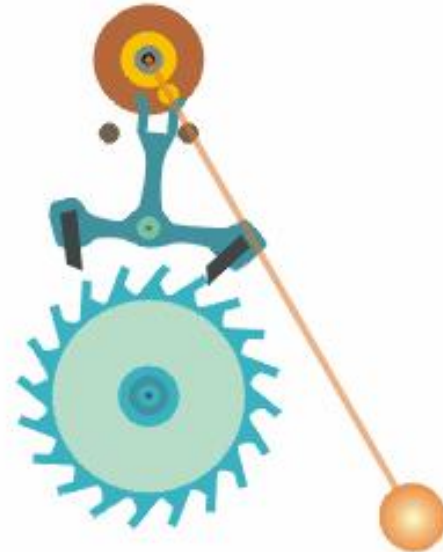
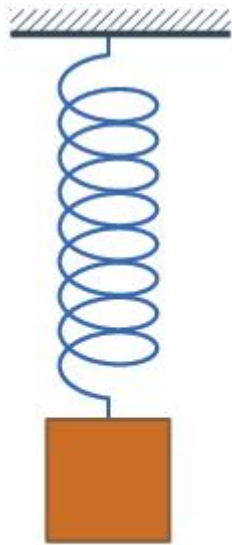
此时输出将以频率  $\omega_n$  做等幅振荡，所以， $\omega_n$  称为无阻尼振荡角频率。

单位阶跃响应曲线





## 3.4 二阶系统的时域响应







## 3.4 二阶系统的时域响应

②当  $0 < \zeta < 1$  时，欠阻尼系统：

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

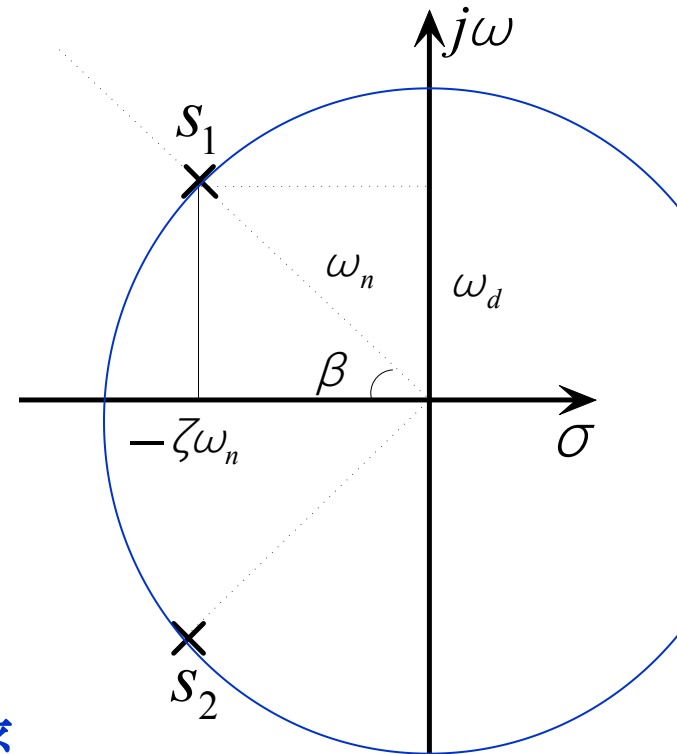
二阶系统两个共轭复根：

$$s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma + j\omega_d$$

$$s_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma - j\omega_d$$

其中：  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$  阻尼振荡角频率

$\beta = \cos^{-1} \zeta$  阻尼角





## 3.4 二阶系统的时域响应

$s$ 域输出响应:

$$Y(s) = R(s)\Phi(s)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$



## 3.4 二阶系统的时域响应

时域响应:

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t - e^{-\zeta\omega_n t} \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t$$

$$= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} (\sqrt{1-\zeta^2} \cos \omega_d t + \zeta \sin \omega_d t)$$

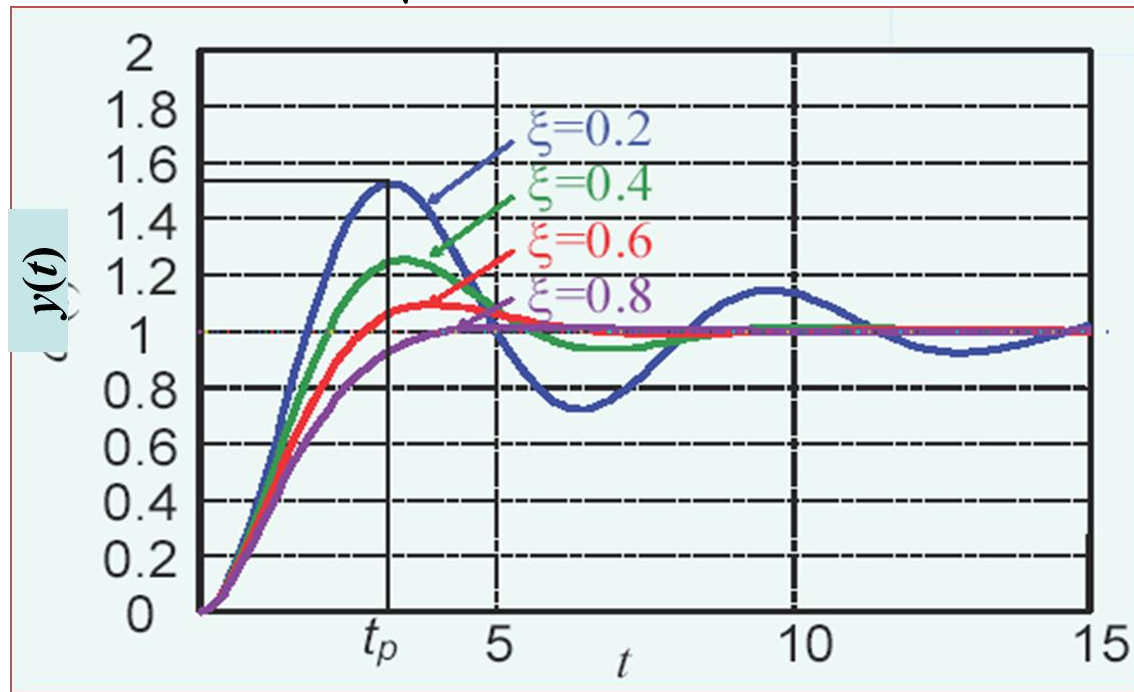
$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} (\sin \beta \cos \omega_d t + \cos \beta \sin \omega_d t)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), \quad t \geq 0$$



## 3.4 二阶系统的时域响应

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), \quad t \geq 0$$



欠阻尼系统的单位阶跃响应 ( $0 < \zeta < 1$ )

系统响应的暂态分量为振幅随时间按指数函数规律衰减的周期函数，其振荡频率为： $\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$



## 3.4 二阶系统的时域响应

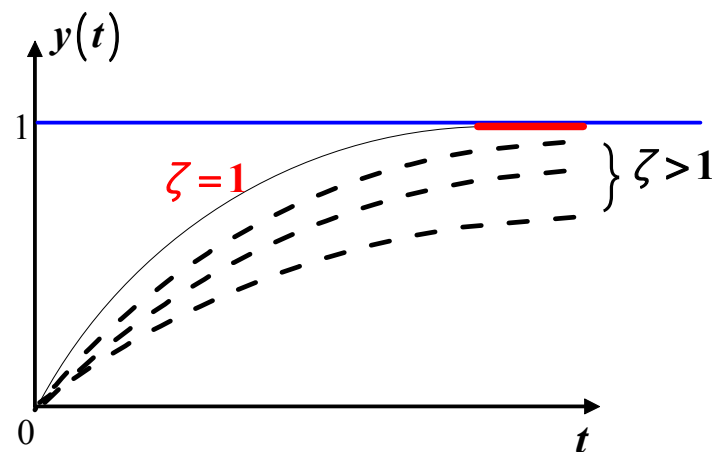
③当  $\zeta=1$  时，**临界阻尼**系统

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

系统两个负实重根:  $s_1 = s_2 = -\omega_n$

$$\begin{aligned} Y(s) &= R(s)\Phi(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} \end{aligned}$$

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), \quad t \geq 0$$



临界阻尼系统单位阶跃响应( $\zeta=1$ )

输出响应无振荡和超调。 $\zeta=1$ 时系统的响应速度比 $\zeta>1$ 时快。



## 3.4 二阶系统的时域响应

④当  $\zeta > 1$  时: 过阻尼系统  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

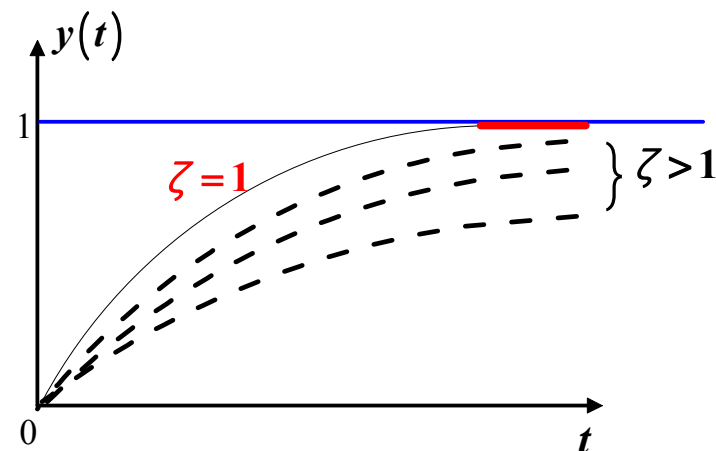
系统两个不等负实根:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$Y(s) = R(s)\Phi(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2}$$

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2} \right), \quad t \geq 0$$



过阻尼系统单位阶跃响应( $\zeta > 1$ )

系统输出无振荡和超调，输出响应最终趋于稳态值1。



## 3.4 二阶系统的时域响应

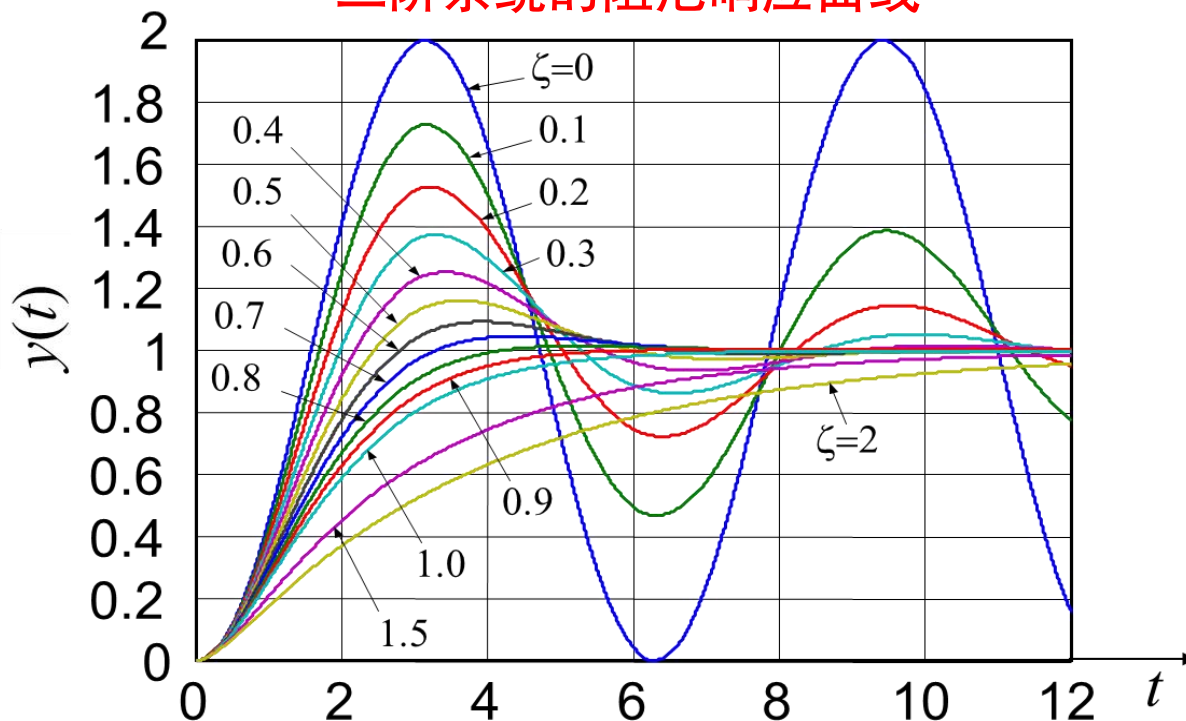
上述四种情况分别称为二阶**无阻尼**、**欠阻尼**、**临界阻尼**和**过阻尼**系统。其阻尼系数、特征根（闭环极点）、特征根分布和单位阶跃响应如下表所示：

阻尼系数	特征根	特征根分布	单位阶跃响应
$\zeta = 0$ , 零阻尼	$s_{1,2} = \pm j\omega_n$	一对共轭虚根	等幅振荡
$0 < \zeta < 1$ , 欠阻尼	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	一对共轭复根 (左半平面)	衰减振荡
$\zeta = 1$ , 临界阻尼	$s_1 = s_2 = -\omega_n$	一对负实重根	单调上升
$\zeta > 1$ , 过阻尼	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$	两个互异负实根	单调上升



## 3.4 二阶系统的时域响应

二阶系统的阻尼响应曲线



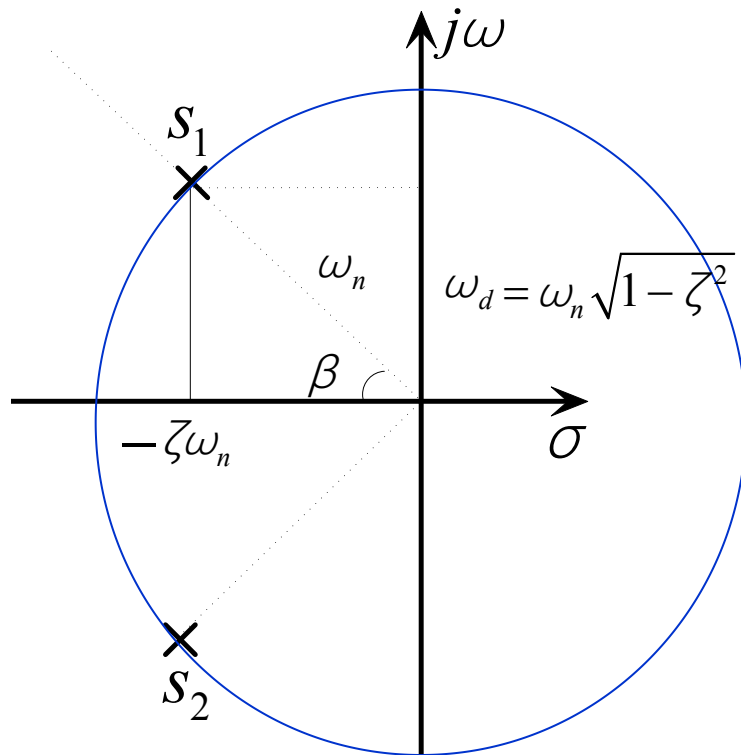
- ▶ 随着阻尼系数 $\zeta$ 的增加,  $y(t)$ 将从无衰减的周期运动变为有衰减的正弦运动, 当 $\zeta > 1$ 时 $y(t)$ 呈现单调上升运动(无振荡)。
- ▶  $\zeta$ 值越大, 系统的平稳性越好;  $\zeta$ 值越小, 输出响应振荡越强。
- ★  $\zeta = 0.707$  **最佳阻尼比**, 系统响应较快、超调不大。





## 3.4 二阶系统的时域响应

❖ 闭环极点坐标与阻尼比的关系:



- 1 等阻尼线
- 2  $\zeta = \cos \beta$
- 3 横坐标  $-\zeta\omega_n$
- 4 纵坐标  $\omega_d$
- 5 距原点  $\omega_n$



## 3.4 二阶系统的时域响应

### 三、二阶系统的性能指标

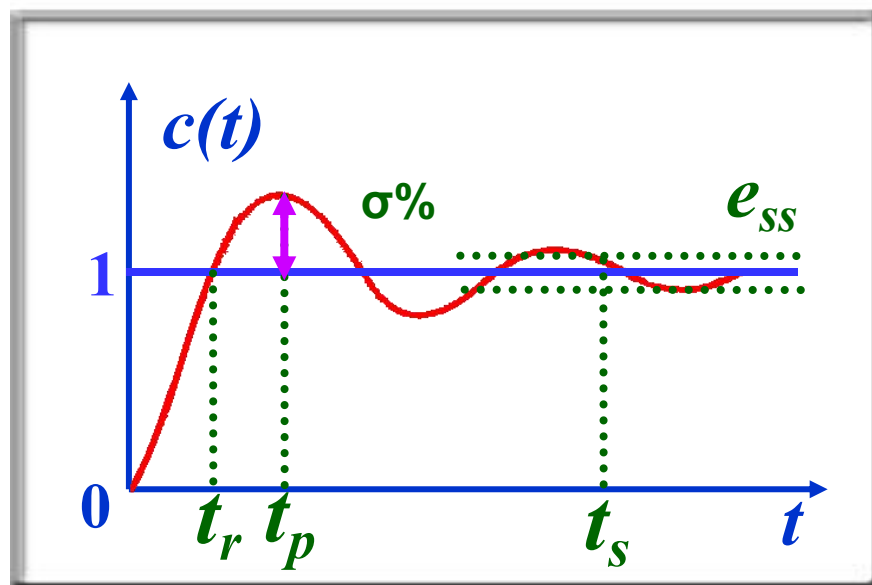
#### 1. 欠阻尼二阶系统的性能指标

本课程主要对欠阻尼二阶系统的性能指标进行讨论。  
其单位阶跃响应曲线：

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), \quad t \geq 0$$

性能指标有：

- (1) 上升时间  $t_r$
- (2) 峰值时间  $t_p$
- (3) 超调量  $\sigma\%$
- (4) 调节时间  $t_s$
- (5) 振荡次数  $N$
- (6) 稳态误差  $e_{ss}$





## 3.4 二阶系统的时域响应

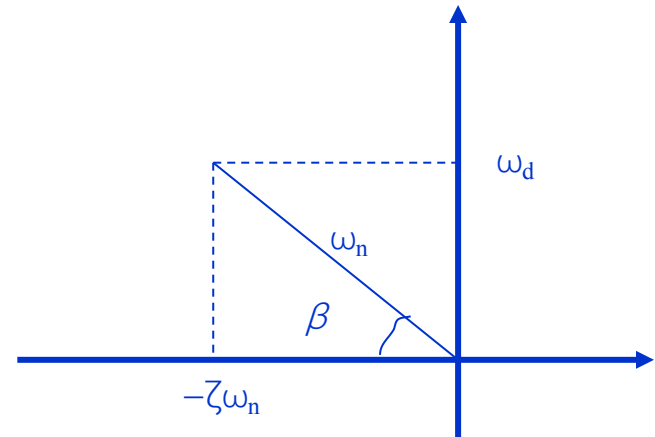
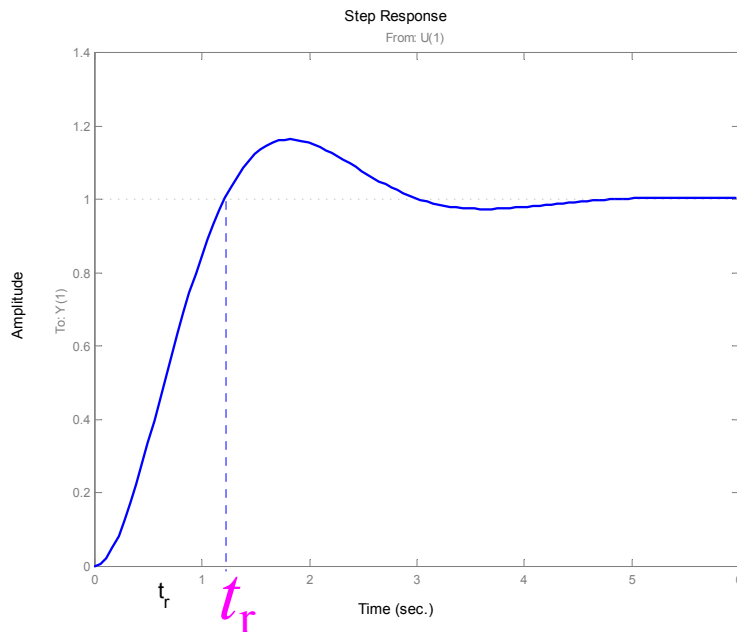
### (1) 上升时间 $t_r$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), \quad t \geq 0$$

$$y(t_r) = 1$$

$$\sin(\omega_d t_r + \beta) = 0$$

$$\Rightarrow t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$





## 3.4 二阶系统的时域响应

### (2)峰值时间 $t_p$

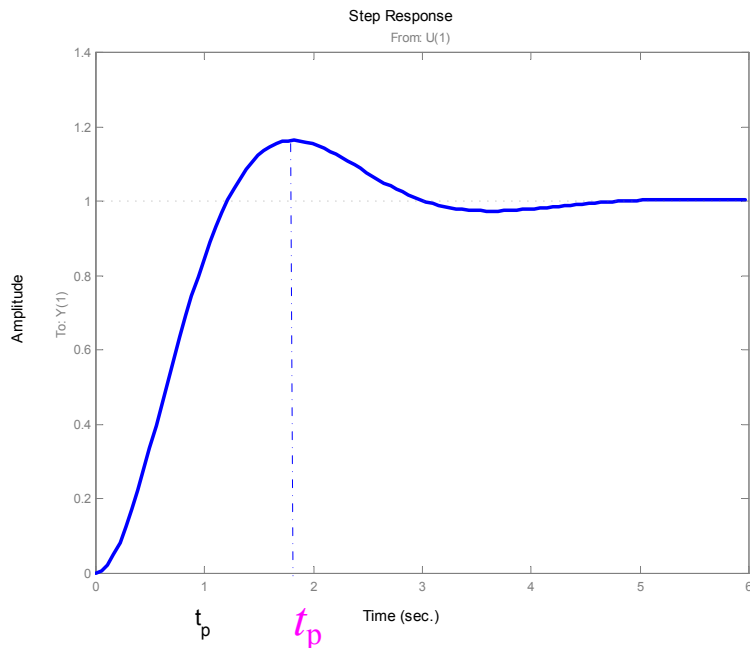
$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), \quad t \geq 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[ \zeta\omega_n \sin(\omega_d t + \beta) - \omega_d \cos(\omega_d t + \beta) \right] \\ &= \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[ \zeta \sin(\omega_d t + \beta) - \sqrt{1-\zeta^2} \cos(\omega_d t + \beta) \right] \\ &= \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[ \cos \beta \sin(\omega_d t + \beta) - \sin \beta \cos(\omega_d t + \beta) \right] \\ &= \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t) \end{aligned}$$



## 3.4 二阶系统的时域响应

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = \sin \omega_d t_p \cdot \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t_p} = 0$$



$$\Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

峰值时间=阻尼振荡周期的一半

$\zeta$ 一定时,  $\omega_n$ 越大,  $t_p$ 越小;  
 $\omega_n$ 一定时,  $\zeta$ 越大,  $t_p$ 越大。



## 3.4 二阶系统的时域响应

### (3)超调量 $\sigma\%$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), \quad t \geq 0$$

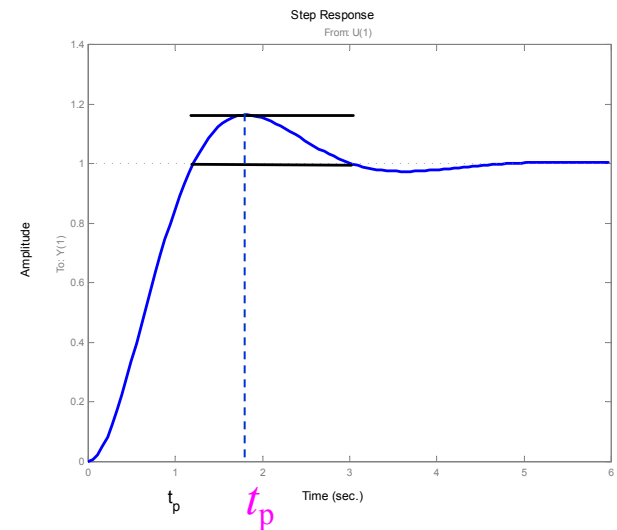
$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$  代入  $y(t)$ , 有:

$$y(t)_{\max} = y(t_p) = 1 - \frac{e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\pi + \beta)$$

$$\text{而 } \sin(\pi + \beta) = -\sin \beta = -\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\therefore y(t_p) = 1 + e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

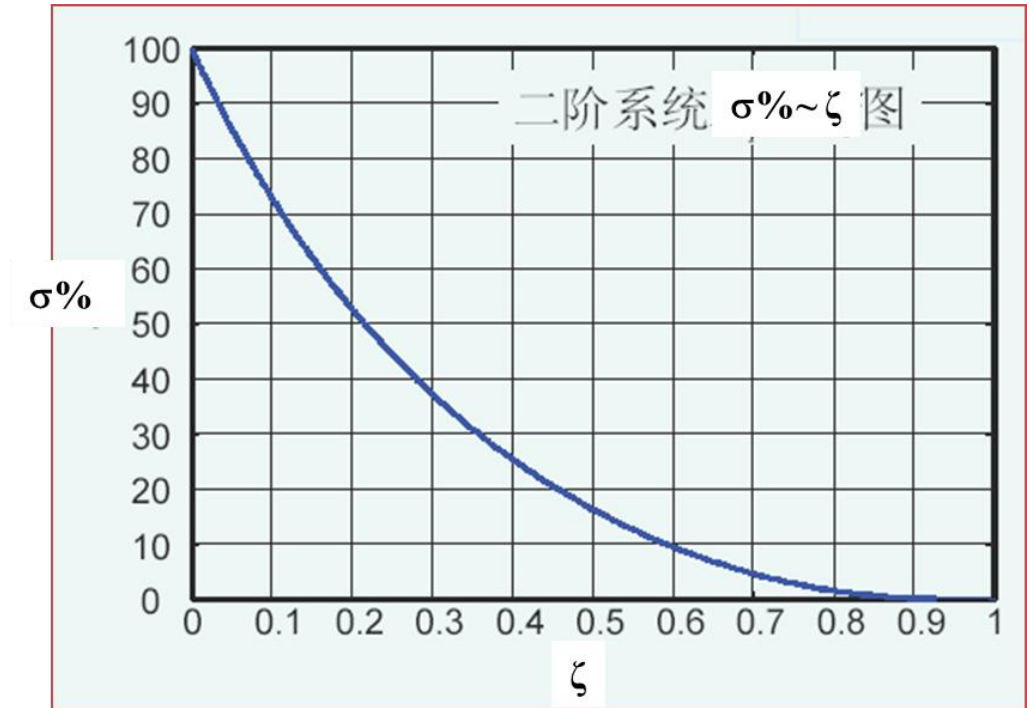
$$\therefore \sigma\% = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\% = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$





## 3.4 二阶系统的时域响应

$$\sigma\% = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$



$\sigma\%$ 的大小完全取决于 $\zeta$ ,  $\zeta$ 越小,  $\sigma\%$ 越大;

反映了系统的平稳性,  $\zeta$ 越大, 系统平稳性越好。

$$\zeta = 0.4 \sim 0.8 \leftrightarrow \sigma\% = 25.4\% \sim 1.5\%。$$



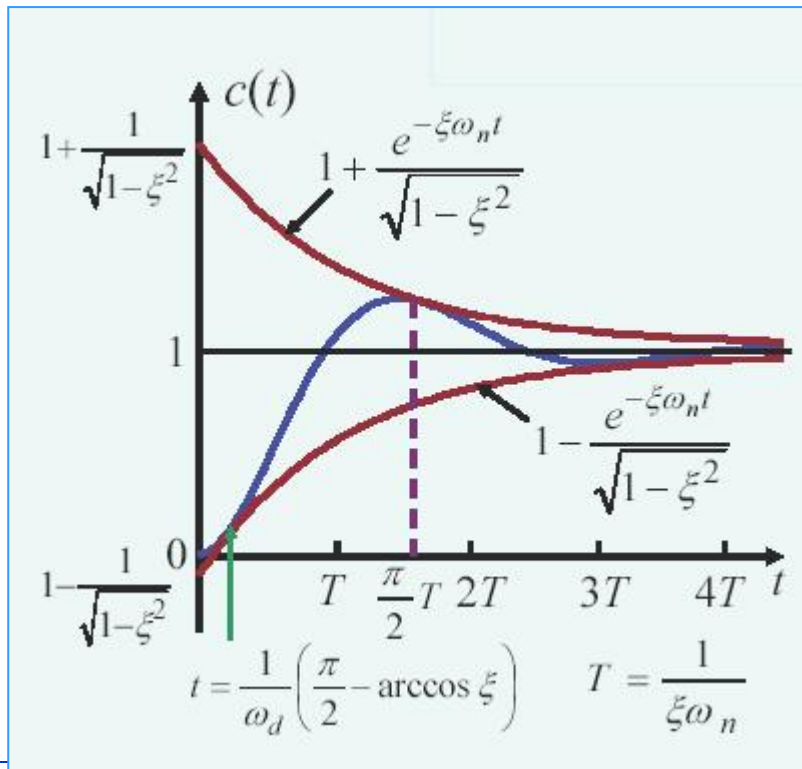
## 3.4 二阶系统的时域响应

### (4)调整时间 $t_s$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), \quad t \geq 0$$

按定义:  $\frac{|y(t_s) - y(\infty)|}{y(\infty)} = \Delta$

包络线  $1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$



$$1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1 \pm \Delta$$

$$t_s = -\frac{\ln\left(\Delta\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\zeta\omega_n}$$

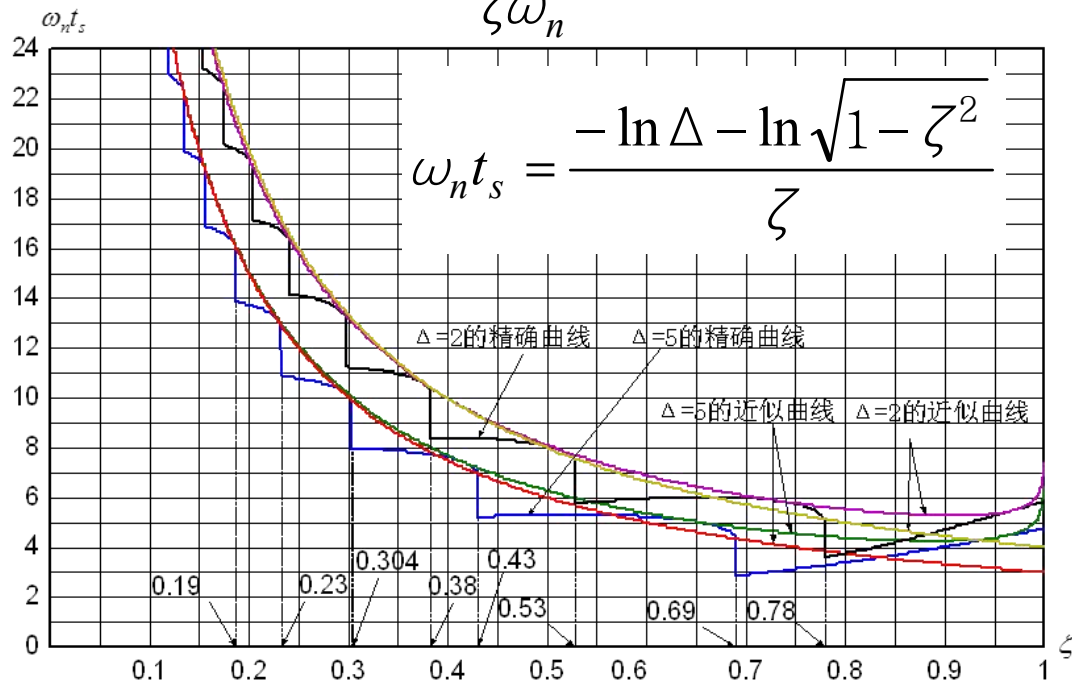
或  $t_s = \frac{-\ln \Delta - \ln \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n}$





## 3.4 二阶系统的时域响应

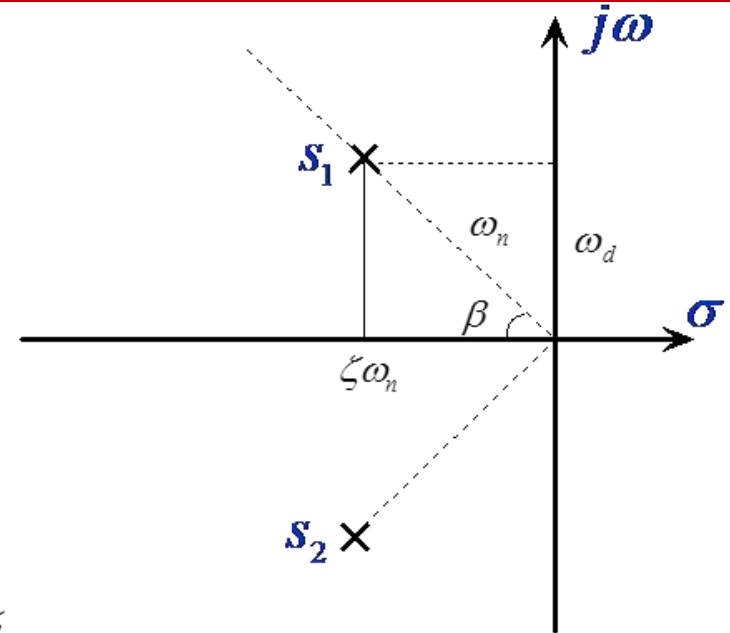
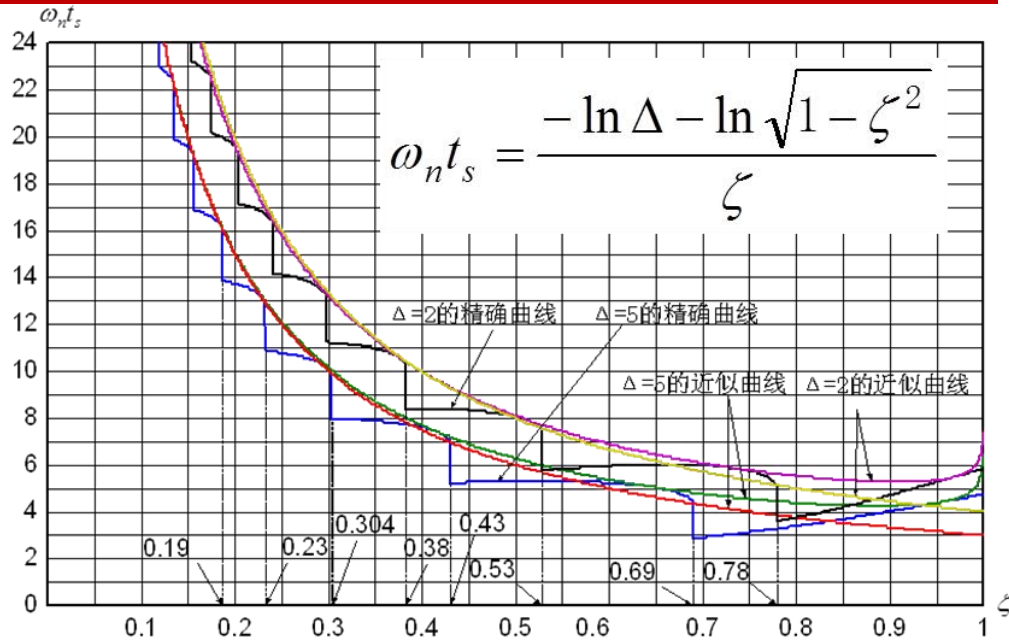
$$t_s = \frac{-\ln \Delta - \ln \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta \omega_n}$$



当 $\zeta$ 由零增大时,  $\omega_n t_s$ 先减小后增大,  
 $\Delta=5\%$ ,  $\omega_n t_s$ 的最小值出现在 $\zeta=0.69$ 处;  
 $\Delta=2\%$ ,  $\omega_n t_s$ 的最小值出现在 $\zeta=0.78$ 处;  
出现最小值后,  $\omega_n t_s$ 随 $\zeta$ 几乎线性增加。



## 3.4 二阶系统的时域响应



结论:

当 $\zeta$ 增加到**0.69** ( $\Delta=5\%$ )或**0.78** ( $\Delta=2\%$ )时, 调整时间 $t_s$ 为最小。设计二阶系统, 一般选 $\zeta=0.707$  ( $\beta=45^\circ$ ), 为**最佳阻尼比**, 此时不但调整时间 $t_s$ 为最小, 而且超调量也不大。

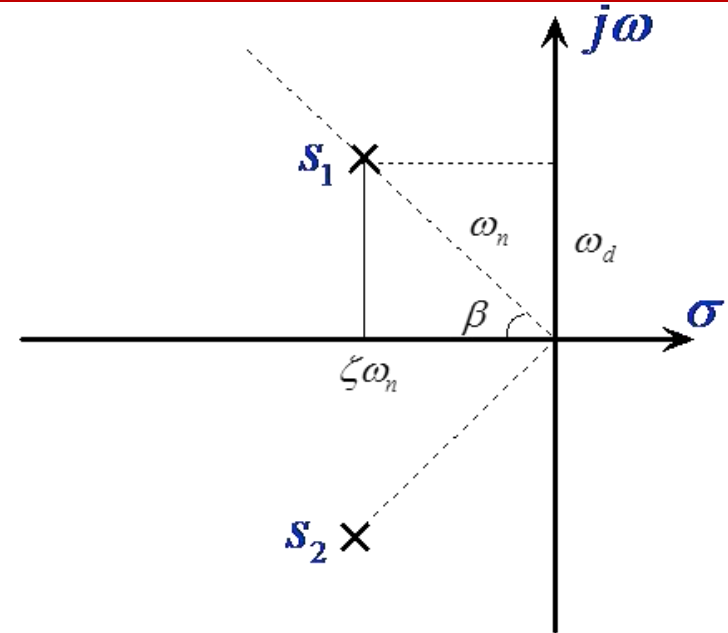
$$\zeta = 0.707 \rightarrow \sigma\% = 4.32\% \approx 5\%。 t_s \approx 3/(\zeta\omega_n)。$$



## 3.4 二阶系统的时域响应

$$t_s = \frac{-\ln \Delta - \ln \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta \omega_n}$$

$$\begin{aligned} t_s &\approx \frac{3}{\zeta \omega_n}, \Delta = 5\% \\ t_s &\approx \frac{4}{\zeta \omega_n}, \Delta = 2\% \end{aligned}$$



- 典型二阶系统的调节时间 $t_s$ 与阻尼比 $\zeta$ 和自然振荡频率 $\omega_n$ 的乘积成反比。
- 闭环极点离虚轴越远， $t_s$ 越短，系统响应越快。



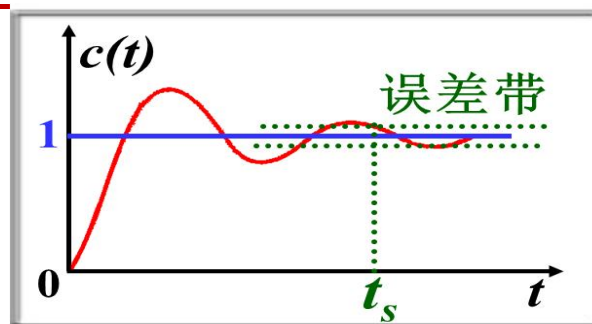
## 3.4 二阶系统的时域响应

### (5) 振荡次数N

$$t_f = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{阻尼振荡周期}$$

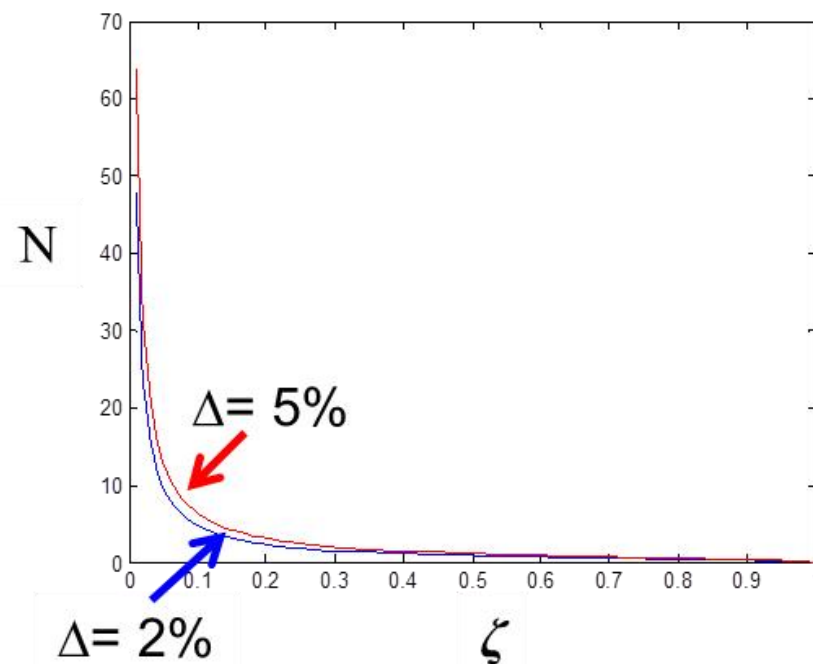
$$N = \frac{t_s}{t_f} = \begin{cases} \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\pi}, \Delta = 5\% \\ \frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\pi}, \Delta = 2\% \end{cases}$$

**N** 仅与 $\zeta$ 有关: $\zeta$ 越大, **N** 越小, 系统平稳性越好。



$\pm 5\%$  误差带

$\pm 2\%$  误差带



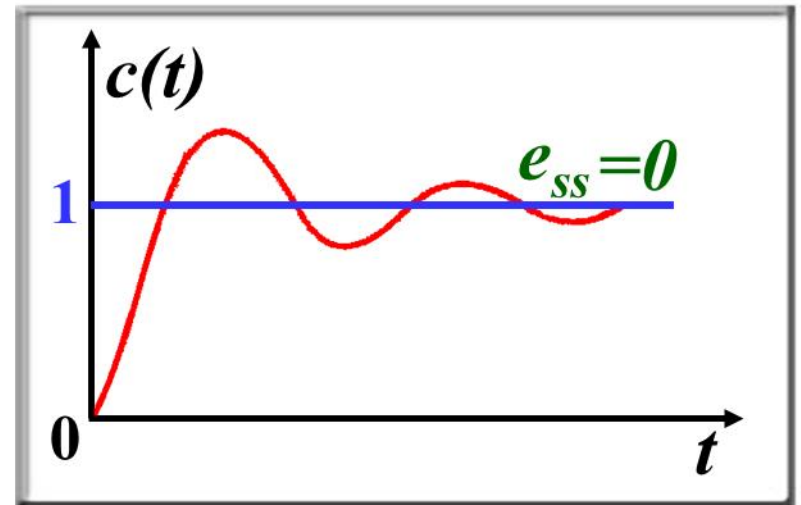


## 3.4 二阶系统的时域响应

### (6) 稳态误差 $e_{ss}$

根据稳态误差的定义

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - y(t) \\ &= \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta) \end{aligned}$$



欠阻尼二阶系统的稳态误差:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta) = 0$$



## 3.4 二阶系统的时域响应

### [总结]

- 1、二阶系统的动态性能由 $\omega_n$ 和 $\zeta$ 决定。
- 2、阻尼系数 $\zeta$ 是二阶系统的一个重要参数，用它可以直接地判断一个二阶系统的瞬态品质。当 $\zeta \leq 0$ 时，输出量作等幅振荡或发散振荡，系统不能稳定工作。在 $\zeta > 1$ 的情况下瞬态特性为单调变化曲线，无超调和振荡，但 $t_s$ 长。
- 3、在欠阻尼 $0 < \zeta < 1$ 情况下工作时，若 $\zeta$ 过小，则超调量大，振荡次数多，调节时间长，瞬态控制品质差。
- 4、超调量 $\sigma\%$ 、振荡次数 $N$ 仅与 $\zeta$ 有关，而 $t_r$ 、 $t_p$ 、 $t_s$ 与 $\zeta$ 、 $\omega_n$ 有关。所以一般根据允许的最大超调量 $\sigma\%$ 选择 $\zeta$ 。为了限制超调量，并使 $t_s$ 较小， $\zeta$ 一般选择在 $0.4 \sim 0.8$ 之间，则超调量在 $25\% \sim 1.5\%$ 之间然后再调整 $\omega_n$ 以获得合适的瞬态响应时间。

$$\sigma\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$



## 3.4 二阶系统的时域响应

### [总结]

$$\sigma\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

$$N = \frac{t_s}{t_f} = \begin{cases} \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\pi}, \Delta = 5\% \\ \frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\pi}, \Delta = 2\% \end{cases}$$

5、 $\omega_n$ 一定，增加 $\zeta$

→降低振荡，减小超调量 $\sigma\%$ 和  
振荡次数 $N$ ；

→系统快速性降低， $t_r$ 、 $t_p$ 增加。

6、 $\zeta$ 一定， $\omega_n$ 越大，系统响应快速性越好， $t_r$ 、 $t_p$ 、 $t_s$ 越小。

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$t_s = \frac{-\ln \Delta - \ln \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta \omega_n}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$t_s \approx \frac{4}{\omega_n \zeta} \text{ (或 } \frac{3}{\omega_n \zeta} \text{)},$$



## 3.4 二阶系统的时域响应

### 2. 过阻尼二阶系统的性能指标

过阻尼二阶系统其性能指标只有调节时间和稳态误差。

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2} \right), \quad t \geq 0$$

(1) 调节时间是根据特征根中绝对值小的来近似计算:

设  $|s_1| < |s_2|, T_1 = \frac{1}{|s_1|}$   $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

当  $\zeta \geq 0.6\sqrt{5} \approx 1.34$  时,  $T_1 \geq 5T_2$  , 这时可用一阶系统来近似。

$t_s \approx 3T_1, \Delta = 5\%$	<b>± 5% 误差带</b>
$t_s \approx 4T_1, \Delta = 2\%$	<b>± 2% 误差带</b>

(2) 稳态误差的计算:  $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t)) = 0$





## 3.4 二阶系统的时域响应

### 四、二阶系统对其他典型输入信号的响应



❖ 若  $y(t)$  为单位阶跃响应，则

$\frac{dy(t)}{dt} \rightarrow$  单位脉冲响应

$\int y(t)dt \rightarrow$  单位速度（斜坡）响应

$\iint y(t)dt^2 \rightarrow$  单位加速度（抛物线）响应



## 3.4 二阶系统的时域响应

### 二阶系统的单位斜坡响应

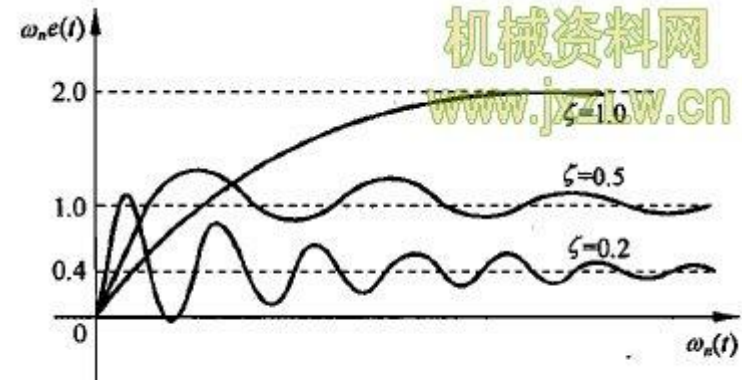
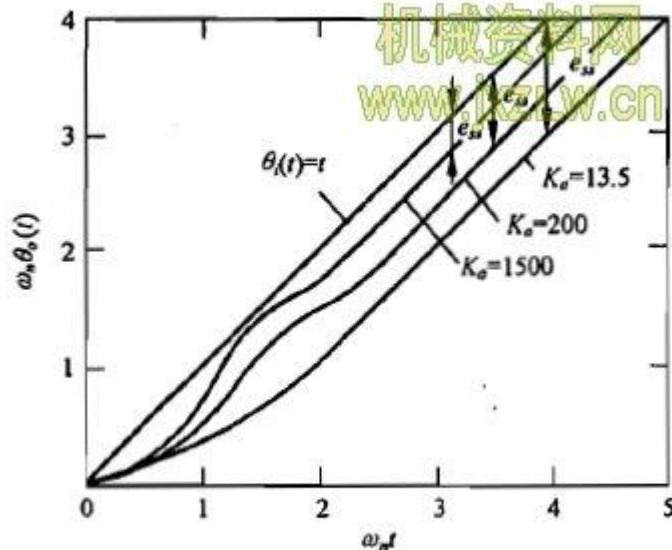
$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad R(s) = \frac{1}{s^2}$$

●欠阻尼:  $0 < \zeta < 1$   $y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + 2\beta) \quad (t \geq 0)$

●无阻尼:  $\zeta = 0$   $y(t) = t - \frac{1}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$

●临界阻尼:  $\zeta = 1$   $y(t) = t - \frac{2}{\omega_n} + \frac{2}{\omega_n} e^{-\omega_n t} \left(1 + \frac{\omega_n t}{2}\right)$

●过阻尼:  $\zeta > 1$   $y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} - \frac{2\zeta^2 - 1 - 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$   
 $+ \frac{2\zeta^2 - 1 + 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$



$$y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + 2\beta) \quad e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + 2\beta) \right] = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

● 欠阻尼:  $0 < \zeta < 1$



## 3.4 二阶系统的时域响应

由以上分析归纳出二阶系统性能分析要点:

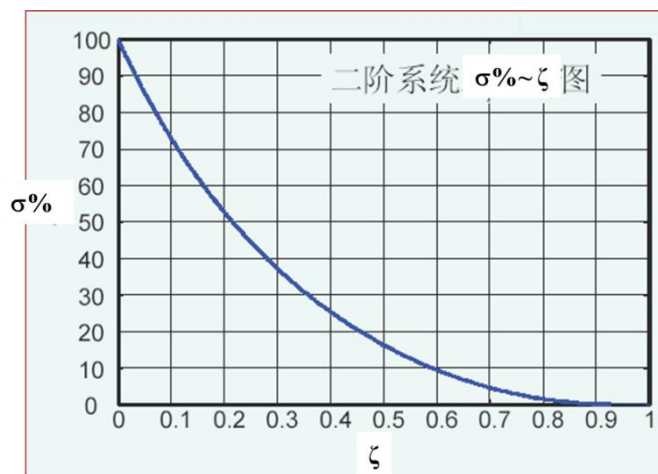
1) 平稳性: 主要由 $\zeta$ 决定。

超调量 $\sigma\%$

$$\sigma\% = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

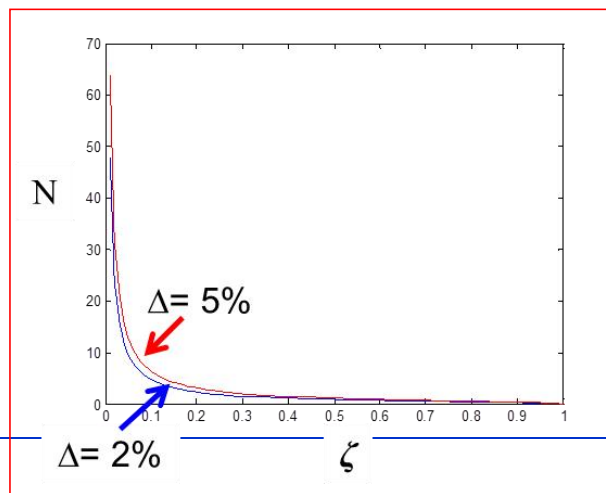
振荡次数 $N$

$$N = \frac{t_s}{T_d} = \begin{cases} \frac{1.5\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\pi}, \Delta = 5\% \\ \frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\pi}, \Delta = 2\% \end{cases}$$



$\zeta=0$ 时, 等幅振荡, 不能稳定工作。

$\zeta \uparrow \rightarrow \sigma\% \downarrow, N \downarrow$   
 $\rightarrow$  平稳性 $\uparrow$ 。



$\zeta$ 一定时,  
 $\omega_n \uparrow \rightarrow \omega_d \uparrow$   
 $\rightarrow$  平稳性 $\downarrow$ 。



## 3.4 二阶系统的时域响应

2) 快速性: 由 $\zeta$ 和 $\omega_n$ 决定。

(1) 上升时间  $t_r$  
$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

(2) 峰值时间  $t_p$  
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

(3) 调整时间  $t_s$  
$$t_s = \frac{-\ln \Delta - \ln \sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta \omega_n}$$

$\omega_n$ 一定时, 若 $\zeta$ 较小,  $\zeta \downarrow \rightarrow t_s \uparrow \rightarrow$ 快速性 $\downarrow$ ;  
 $\zeta > 0.707$ 之后,  $\zeta \uparrow \rightarrow t_s \uparrow \rightarrow$ 快速性 $\downarrow$ 。  
所以 $\zeta$ 太小或太大, 快速性均变差。

□ 综合考虑系统的平稳性和快速性, 一般取 $\zeta = 0.707$ 为最佳。



## 3.4 二阶系统的时域响应

3) 准确性: 由 $\zeta$ 和 $\omega_n$ 决定。

以欠阻尼为例。

单位阶跃响应: 
$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta), \quad t \geq 0$$

稳态误差  $e_{ss}$  
$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta) = 0$$

单位速度响应: 
$$y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + 2\beta)$$

稳态误差  $e_{ss}$  
$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + 2\beta) \right] = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

$\zeta$ 的增加和 $\omega_n$ 的减小虽然对系统的平稳性有利, 但使得系统跟踪斜坡信号的稳态误差增加。



## 3.4 二阶系统的时域响应

**例1.** 已知系统的闭环传递函数，当  $K=2, K=4$  时，求系统的单位阶跃响应和性能指标  $\sigma\%, t_s (\Delta=5\%)$ 。

**解：(1)  $K=2$**

$$\Phi(s) = \frac{K}{s^2 + 3s + K}$$

$$\Phi(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \quad \begin{cases} 2\zeta\omega^n = 3 \\ \omega^n = 2 \end{cases} \quad \zeta = 1.06 > 1$$

$$C(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

$$c(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}$$

**系统性能指标：**  $t_s = 3T_1 = 3$



## 3.4 二阶系统的时域响应

**例1.** 已知系统的闭环传递函数，当  $K=2, K=4$  时，求系统的单位阶跃响应和性能指标  $\sigma\%, t_s$ 。

(2)  $K=4$

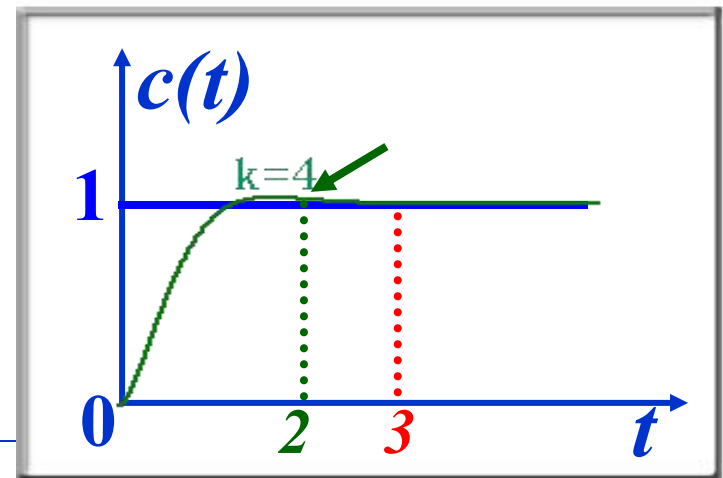
$$\Phi(s) = \frac{K}{s^2 + 3s + K}$$

$$\Phi(s) = \frac{4}{s^2 + 3s + 4} \quad \begin{cases} 2\zeta\omega^n = 3 \\ \omega^n = 4 \end{cases} \quad \zeta = 0.75 < 1$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega^d t + \beta) = 1 - 1.5e^{-1.5t} \sin(1.32t + 41.4^\circ)$$

$$\sigma\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} 100\% = 2.8\%$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega^n} = 2$$







## 3.4 二阶系统的时域响应

**例2.** 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

若  $K=16, T=0.25$ , 试求:

- (1) 二阶系统的参数  $\zeta$  和  $\omega_n$ ;
- (2) 暂态性能指标  $\sigma\%$ ,  $t_s$ ;
- (3) 欲使  $\sigma\% = 16\%$ , 当  $T$  不变时  $K$  应取何值?

**解:**

闭环传递函数  $\Phi(s) = \frac{K}{s(Ts + 1) + K} = \frac{\frac{K}{T}}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T}}$

典型形式:  $\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$



## 3.4 二阶系统的时域响应

(1) 二阶系统的参数 $\zeta$ 和 $\omega_n$ ;

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}} = \sqrt{\frac{16}{0.25}} = 8(\text{rad} / \text{s})$$

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}} = \frac{1}{2\sqrt{16 \times 0.25}} = 0.25$$

(2) 暂态性能指标 $\sigma\%$ ,  $t_s$ ;

$$\sigma\% = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = e^{\frac{-0.25\pi}{\sqrt{1-0.25^2}}} \times 100\% = 44.4\%$$

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} = 1.5(\text{s}), \Delta = 5\%$$

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2(\text{s}), \Delta = 2\%$$



## 3.4 二阶系统的时域响应

(3) 欲使 $\sigma\% = 16\%$ ,当 $T$ 不变时 $K$ 应取何值?

$\sigma\% = 16\%$ ,可反推出 $\zeta = 0.5$

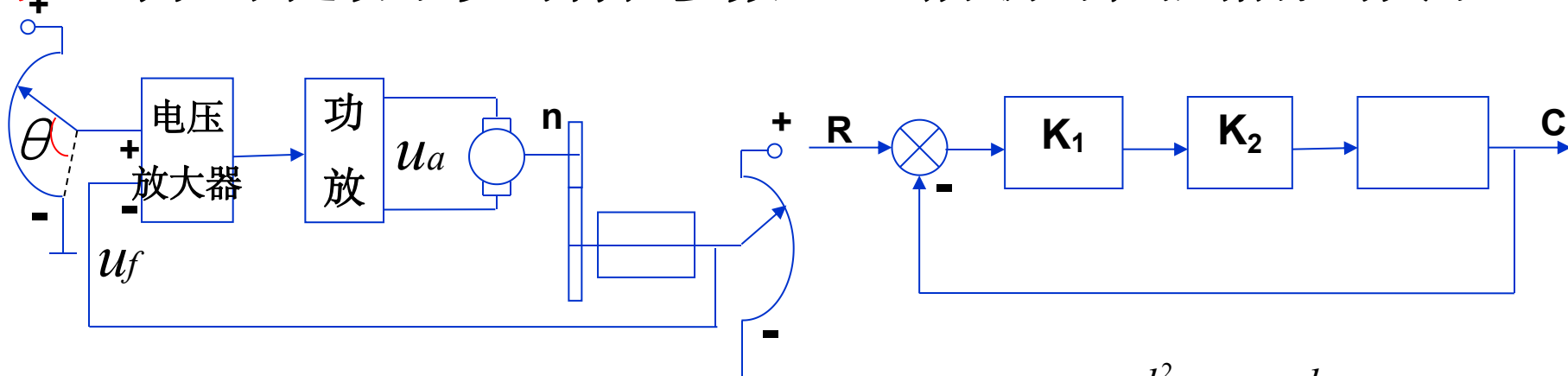
$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}} = 0.5$$

$$K = \frac{1}{4T\zeta^2} = \frac{1}{4 \times 0.25 \times 0.5^2} = 4(s^{-1})$$



## 3.4 二阶系统的时域响应

**例3:** 求如下随动系统的特征参数  $\zeta, \omega_n$ , 分析与性能指标的关系。

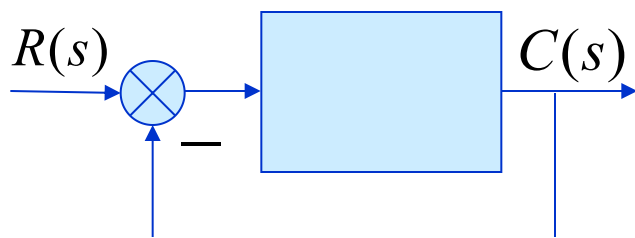


当只考虑  $U_a$  时, 电动机的微分方程为  $T_a T_m \frac{d^2 \omega}{dt^2} + T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = K_u u_a$

若假设电枢电感  $L_a = 0$ , 则  $T_a = 0$ , 方程为  $T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = K_u u_a$

因 所以  $T_m \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = K_u u_a$

电动机传递函数为  $\frac{\Theta(s)}{U_a(s)} = \frac{K_u}{s(T_m s + 1)}$



电压放大器和功放的传递函数分别为  $K_1$  和  $K_2$ , 可得方框图



## 3.4 二阶系统的时域响应

闭环传递函数为:

$$\Phi(s) = \frac{K}{Ts^2 + s + K} = \frac{\frac{K}{T}}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{K}{T} \\ 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}} \\ \zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}} \end{cases}$$

下面分析瞬态性能指标和系统参数之间的关系(假设  $0 < \zeta < 1$ ):

1. **T**不变, **K**↑ →  $\zeta$ ↓ →  $\sigma\%$ ↑

→  $\omega_n$ ↑ →  $\omega_d$ ↑

→  $\zeta\omega_n = 1/2T$ 不变,  $t_s$ 几乎不变

→ **N**↑。 总之, **K**增大振荡加剧;

2. **K**不变, **T**↑ →  $\zeta$ ↓ →  $\sigma\%$ ↑

→  $\omega_n$ ↓ →  $\omega_d$ ↓

→  $\zeta\omega_n = 1/2T$ ↓ →  $t_s$ ↑

→ **N**↑。

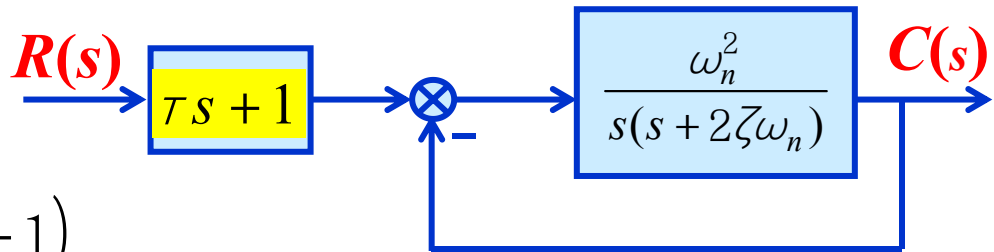
实际系统中**T**往往不能变,  
要使系统性能好, 则**K**↓,  
这对控制精度不利。



## 3.4 二阶系统的时域响应

### 五、具有零点的二阶系统分析

系统结构为



$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(\tau s + 1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

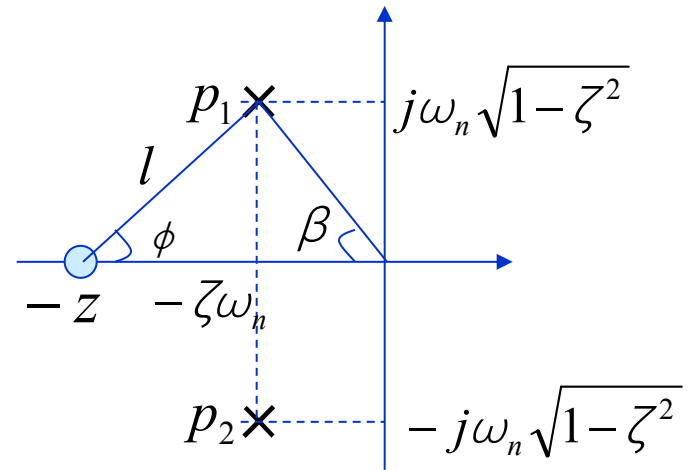
$\tau$ : 时间常数

$-z = -1/\tau$ : 闭环零点

系统( $0 < \zeta < 1$ )单位阶跃响应为:

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2(\tau s + 1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} + \frac{\omega_n^2 \tau}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = C_1(s) + C_2(s)$$



零极点分布图



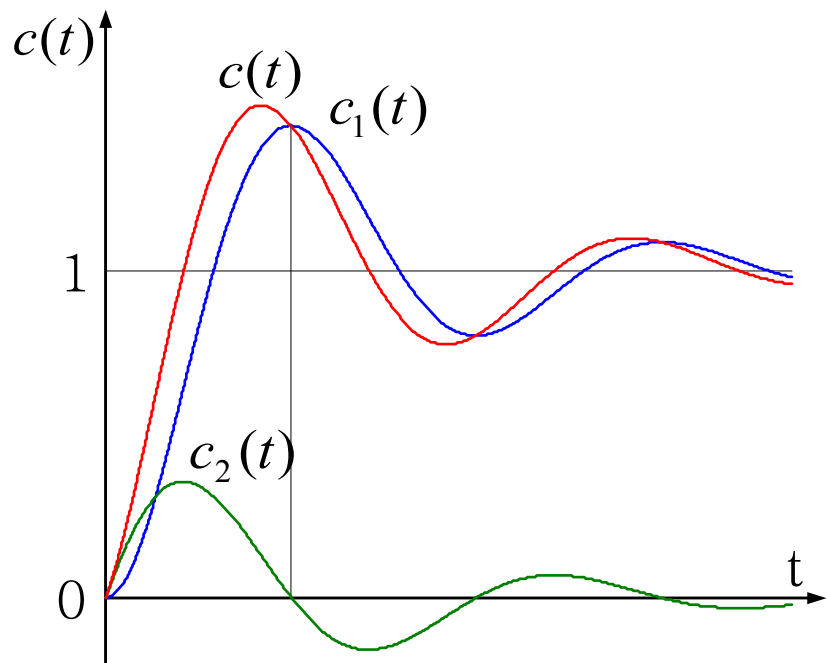
## 3.4 二阶系统的时域响应

$$C_1(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} \quad \longrightarrow \quad c_1(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta)$$

$$C_2(s) = \frac{\omega_n^2 \tau}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{s}{z} C_1(s) \quad \longrightarrow \quad c_2(t) = \tau \frac{dc_1(t)}{dt} = \frac{1}{z} \frac{dc_1(t)}{dt}$$

$$c(t) = c_1(t) + \frac{1}{z} \frac{dc_1(t)}{dt}$$

由图可见： $c_2(t)$ 使得 $c(t)$ 比 $c_1(t)$ 响应迅速且有较大超调量。





## 3.4 二阶系统的时域响应

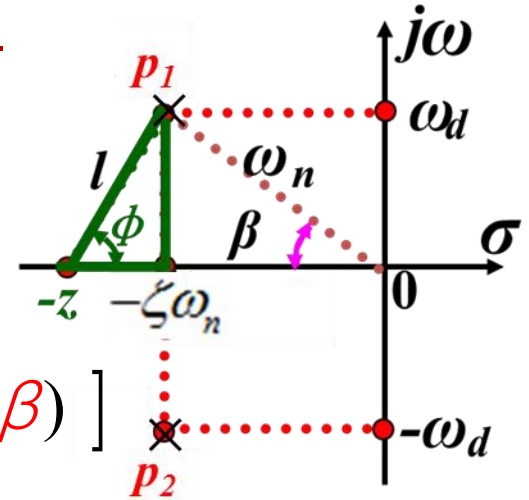
$$c_1(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta)$$

$$\frac{dc_1(t)}{dt} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[ \zeta\omega_n \sin(\omega_d t + \beta) - \omega_d \cos(\omega_d t + \beta) \right]$$

$$c(t) = c_1(t) + \frac{1}{z} \frac{dc_1(t)}{dt}$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{1}{z} \left[ (z - \zeta\omega_n) \sin(\omega_d t + \beta) + \omega_d \cos(\omega_d t + \beta) \right]$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{l}{z} \left[ \frac{(z - \zeta\omega_n)}{l} \sin(\omega_d t + \beta) + \frac{\omega_d}{l} \cos(\omega_d t + \beta) \right]$$







$$l = |-\textcolor{red}{z} - p_1| = \sqrt{(z - \zeta\omega_n)^2 + \textcolor{red}{\omega}_d^2} = \sqrt{z^2 - 2\zeta\omega_n z + \textcolor{red}{\omega}_n^2}$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{l}{z} \left[ \frac{(z - \zeta\omega_n)}{l} \sin(\omega_d t + \beta) + \frac{\omega_d}{l} \cos(\omega_d t + \beta) \right]$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{l}{z} [\cos \phi \sin(\omega_d t + \beta) + \sin \phi \cos(\omega_d t + \beta)]$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{l}{z} \sin(\omega_d t + \beta + \phi)$$



## 3.4 二阶系统的时域响应

可求得系统的性能指标:

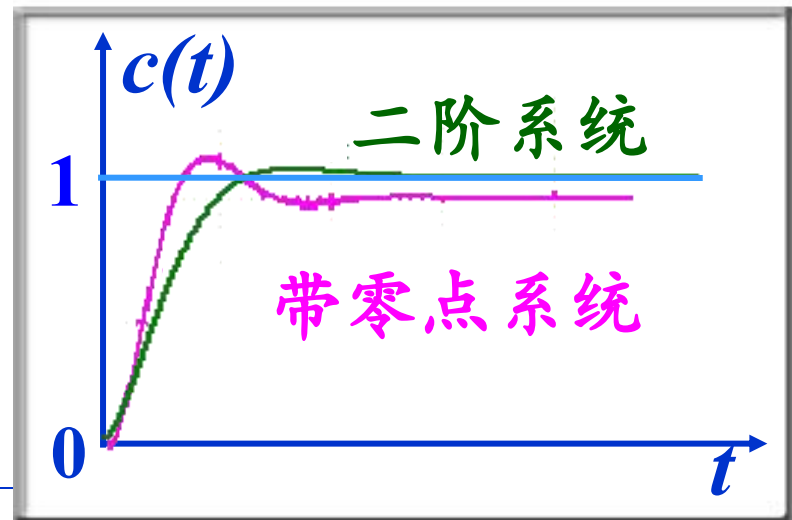
$$t_r = \frac{\pi - (\beta + \phi)}{\omega_d} = \frac{\pi - (\beta + \phi)}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$t_p = \frac{\pi - \phi}{\omega_d} = \frac{\pi - \phi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\sigma\% = \frac{l}{z} e^{\frac{-\zeta(\pi - \phi)}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \times 100\%$$

$$\begin{cases} t_s \approx \left(3 + \ln \frac{l}{z}\right) \frac{1}{\zeta \omega_n}, \Delta = 5\% \\ t_s \approx \left(4 + \ln \frac{l}{z}\right) \frac{1}{\zeta \omega_n}, \Delta = 2\% \end{cases}$$

增加零点后,上升时间和峰值时间缩短,系统的初始响应加快,系统的超调量增大,振荡性增加。



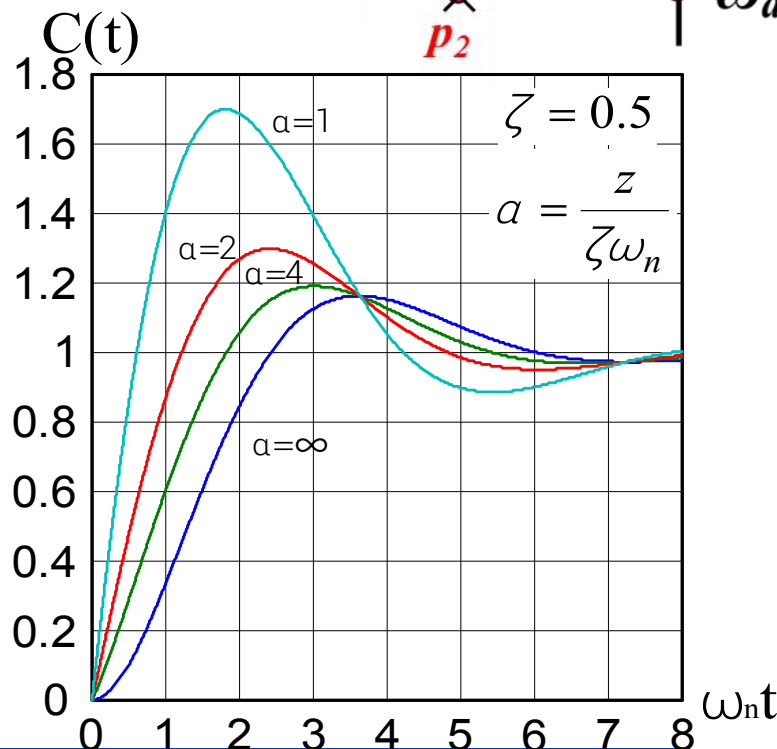
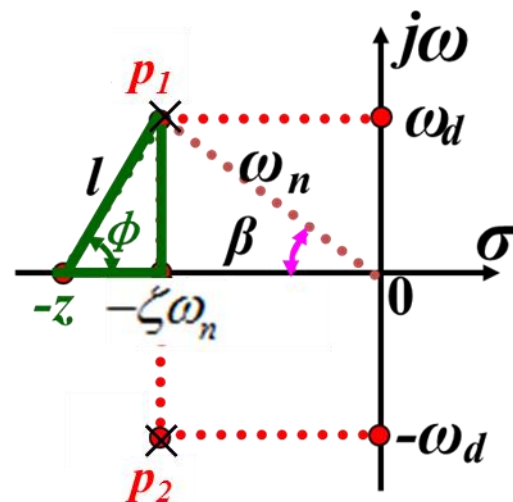


## 3.4 二阶系统的时域响应

为了定量说明附加零点对二阶系统性能的影响，用参数 $\alpha$ 表示附加零点与典型二阶系统复数极点至虚轴距离之比，即

$$\alpha = \frac{z}{\zeta\omega_n}$$

- ▶ 零点从极点左侧向极点越靠近，影响越大；
- ▶ 当零点距离虚轴很远时( $\alpha > 5$ )，零点的影响可以忽略。





## 3.4 二阶系统的时域响应

### 六、改善二阶系统性能的措施

系统的平稳性和快速性对系统结构和参数的要求往往是矛盾的,工程中通过在系统中增加一些合适的附加装置来改善二阶系统的性能。

常用附加装置有误差信号的比例微分控制和输出量的微分(测速)负反馈控制,通过附加的装置改变系统的结构,从而达到改善系统性能的目的。

为了改善系统性能而改变系统的结构、参数或附加具有一定功能的环节的方法称为对系统进行校正。附加环节称为校正环节。速度反馈和速度顺馈是较常用的校正方法。



## 3.4 二阶系统的时域响应

### 1. 误差信号比例-微分控制(PD)

开环传递函数:

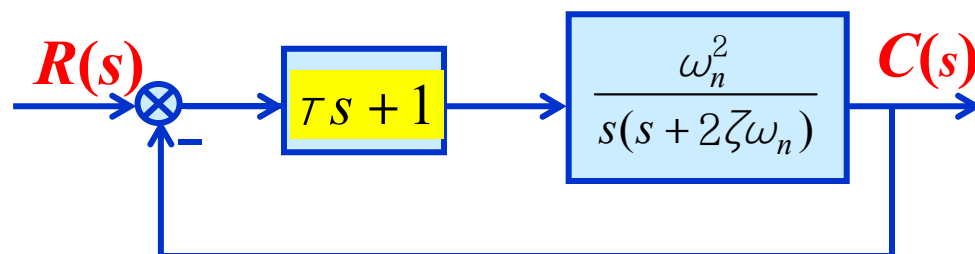
$$G(s) = \frac{\omega_n^2 (\tau s + 1)}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

闭环传递函数:

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2 (\tau s + 1)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + \omega_n^2 \tau)s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2 (\tau s + 1)}{s^2 + 2\zeta'\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$2\zeta'\omega_n = 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 \tau$$

得  $\zeta' = \zeta + \frac{\omega_n \tau}{2}$



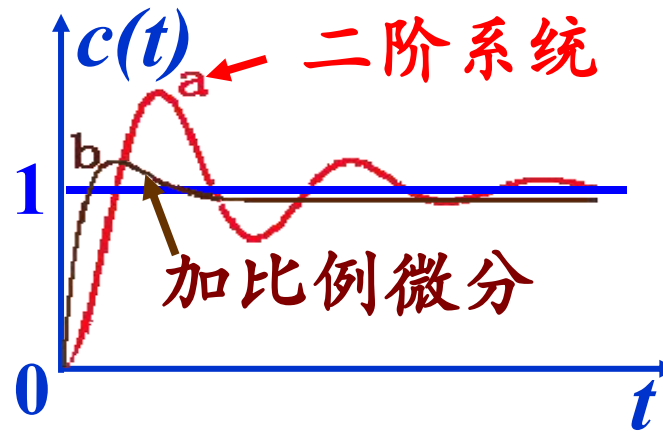
比例微分控制二阶系统结构图

比例微分控制使系统阻尼比增大,超调量将减少。若传递函数中增加的零点合适,将使得系统响应加快。



## 3.4 二阶系统的时域响应

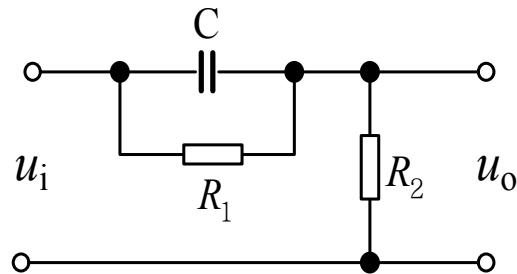
### 对二阶系统性能的改善



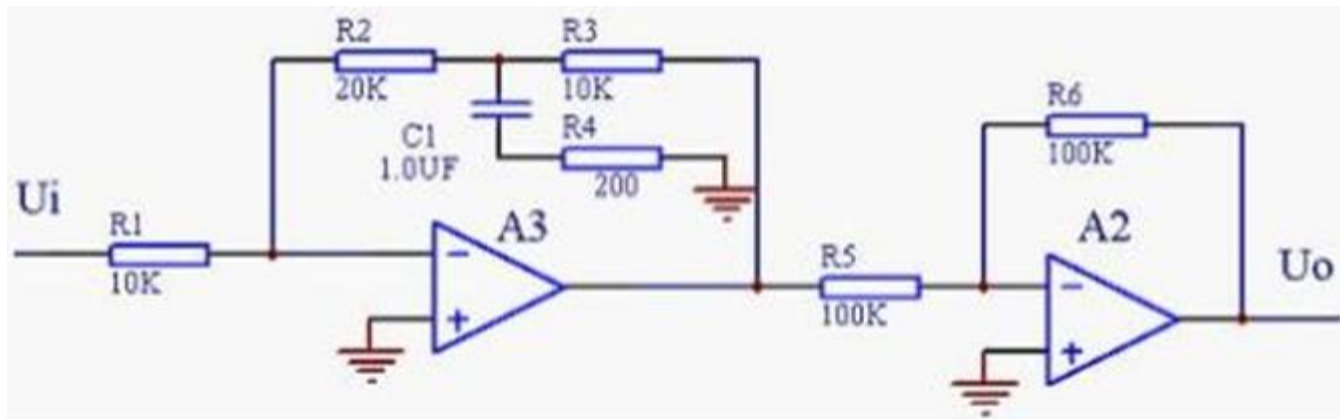


## 3.4 二阶系统的时域响应

### 比例-微分控制的实现



RC比例-微分网络



运算放大器比例-微分网络



## 3.4 二阶系统的时域响应

### 2. 输出量微分(测速)负反馈控制

开环传递函数(外环):

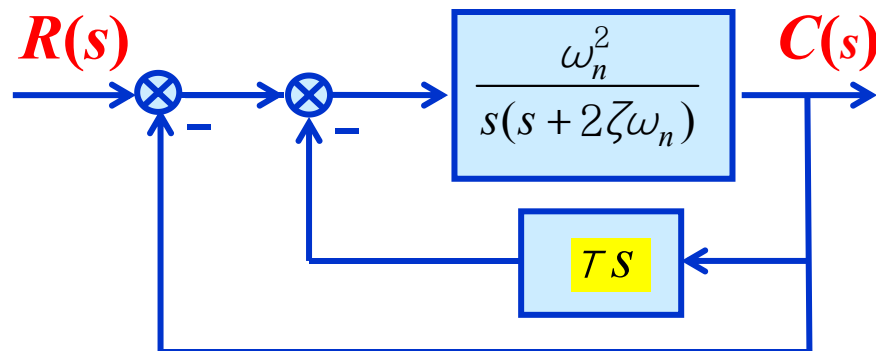
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \tau s}$$

闭环传递函数:

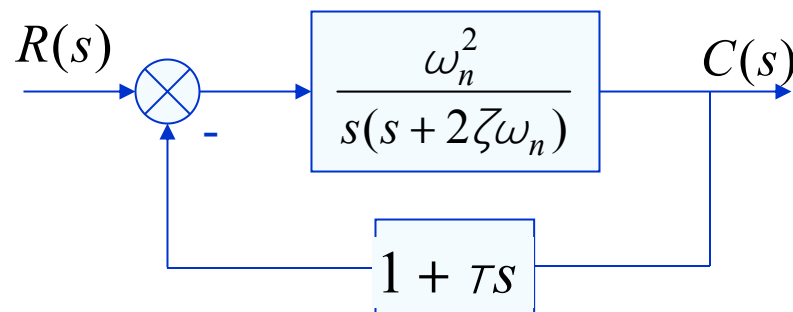
$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + \omega_n^2 \tau)s + \omega_n^2} \\ &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta'\omega_n s + \omega_n^2}\end{aligned}$$

$$2\zeta'\omega_n = 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 \tau$$

得  $\zeta' = \zeta + \frac{\omega_n \tau}{2}$



微分(测速)负反馈控制二阶系统结构图



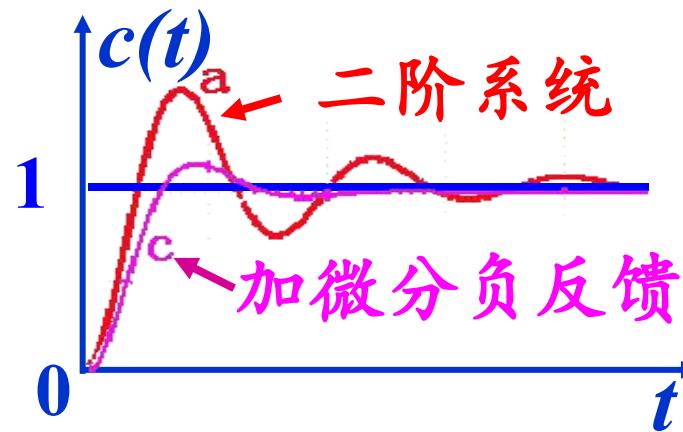
加入微分负反馈，系统的  
阻尼比增大，超调量减少。





## 3.4 二阶系统的时域响应

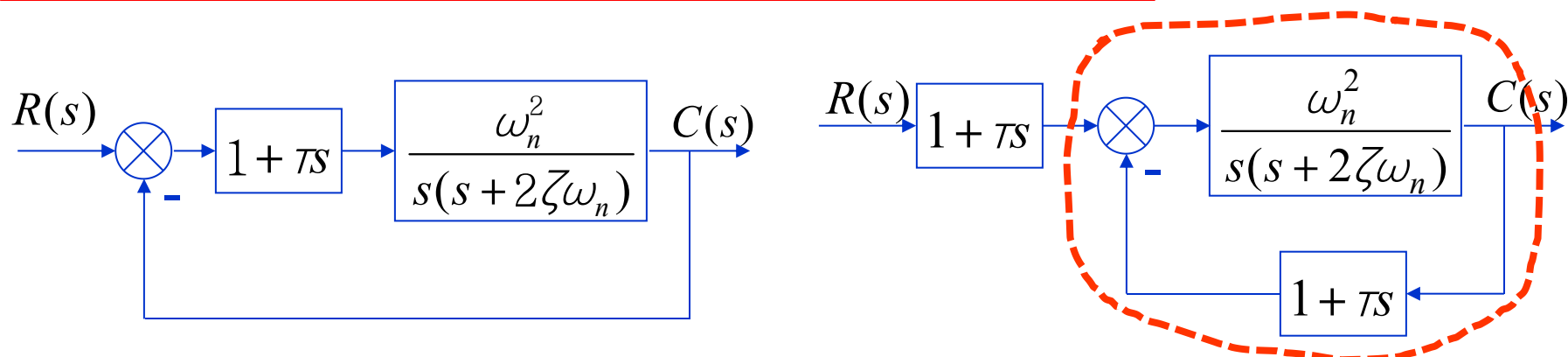
### 对二阶系统性能的改善



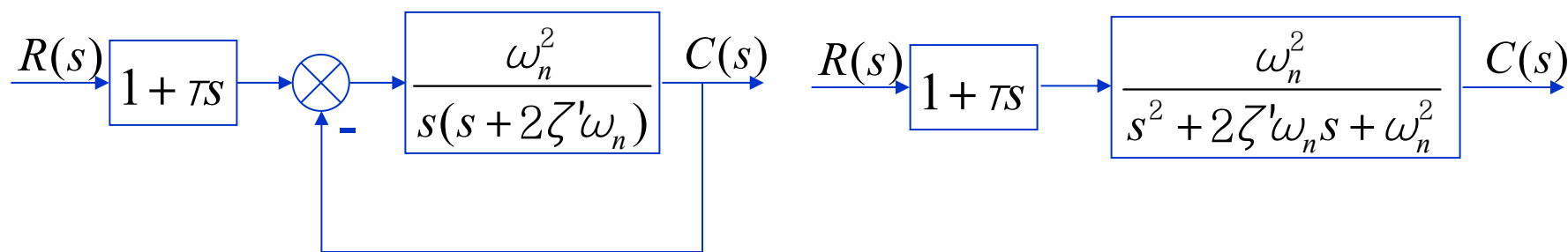


## 3.4 二阶系统的时域响应

### (3)比例+微分控制与速度反馈控制的关系



比例+微分控制相当于分别对输入信号和反馈信号进行比例+微分。其中对反馈信号进行比例+微分相当于速度反馈。所以误差的比例+微分控制相当于输出的速度反馈构成的闭环系统再串联比例+微分环节。因此可以将其分别讨论。





## 3.4 二阶系统的时域响应

### 比例微分控制与测速反馈控制的比较

1、从物理本质上讲，测速反馈控制相当于增加了系统的阻尼，使系统的振荡性得到抑制，超调量减小；比例-微分控制是一种早期控制，微分信号有超前性，相当于系统的调节作用提前，阻止了系统的过调。对于理想的线性控制系统来说，两种方法均可改善系统的动态性能。然而，实际控制系统有许多必须考虑的因素，例如系统的具体组成、作用在系统上噪声的大小及频率等。

2、对系统动态性能的影响：比例-微分控制相当于在测速反馈系统中加入实零点，可以加快上升时间。在相同阻尼比的条件下，比例-微分控制系统的超调量会大于测速反馈控制系统的超调量。



## 3.4 二阶系统的时域响应

3、从抗干扰能力来看，比例-微分控制环节是高通滤波器，会放大噪声，可能影响系统的正常工作，当系统输入端噪声严重时，一般不宜选用比例微分控制。而测速反馈信号则引自具有较大惯性的控制对象（如电动机）滤波后的输出端，噪声成分很弱，所以抗噪声能力强。

4、比例-微分控制环节一般串联在前向通道信号功率较弱的地方，输入信号为系统的误差信号，其能量水平低，需要用放大器将信号放大后去控制被控对象，为了不明显恶化信噪比，要求选用高质量的放大器；而测速反馈则是从大功率的输出端（如电动机）反馈到前端信号较弱的地方，一般不需要加放大器，因此对系统组成元件没有过高的质量要求，使用场合比较广泛。



## 3.4 二阶系统的时域响应

5、从对稳态精度的影响来看：在相同阻尼比和无阻尼自然频率下，采用比例-微分控制不改变系统的开环增益，因而不会影响稳态精度。测速反馈控制虽不影响自然频率，但会导致开环增益下降，造成稳态误差增加。因此，对于确定的常值稳态误差，测速反馈控制要求有较大的开环增益。开环增益的加大，必然导致系统自然频率增大，在系统存在高频噪声时，可能引起系统共振。然而采用测速反馈能削弱被包围部件中非线性特性、参数漂移等不利因素的影响。

6、从实现角度来看，比例-微分控制环节线路简单，成本较低；而测速部件则较昂贵。



**Thank You !**