§ 15.5　微观粒子的波粒二象性 不确定关系

一. 德布罗意假设

1924年，德布罗意在光的波粒二象性的启发下，提出一个大胆的假设：波粒二象性不是光才具有，一切实物粒子(电子、质子、中子……)均具有波粒二象性。

有些情况下，粒子性表现得突出，有时波动性表现得突出，此波称为物质波或德布罗意波。

爱因斯坦高度赞扬德布罗意的工作，给予大力支持，爱因斯坦在研究物理规律时非常注意对称性，他认为德布罗意的观点是自然界的对称性的又一重大表现。

1929年，德布罗意获得诺贝尔奖。

德布罗意假设： 实物粒子具有 波粒二象性。

他提出：一个质量为m，速度为υ的粒子具有波动性，有一个波长为λ，频率为ν的波与之相对应，波动性和粒子性间关系

$$\boxed{p = m\upsilon = \frac{h}{\lambda}}$$

$$\boxed{E = mc^2 = h\nu}$$

$$\text{波长}\quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\upsilon} = \frac{h}{m_0\upsilon}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$$

$$\text{频率}\quad \nu = \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h} = \frac{m_0c^2}{h\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

当$\upsilon << c$时，$\lambda = \dfrac{h}{m_0\upsilon}$ ——此时不考虑相对论效应

子弹：　$m = 0.01\,\text{kg}$　　$\upsilon = 300\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon} = 2.21\times10^{-34}\,(\text{m})$$

宏观物体 λ太小，难以觉察其波动特性

例 计算经过电势差 $U_1 = 150\ \text{V}$ 和 $U_2 = 10^4\ \text{V}$ 加速的电子的德布罗意波长（不考虑相对论效应）。

解 根据 $\frac{1}{2} m_0 \upsilon^2 = eU$，加速后电子的速度为 $\upsilon = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}$

根据德布罗意关系 $\lambda = h / p$，电子的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{m_0 \upsilon} = \frac{h}{\sqrt{2 m_0 e}} \frac{1}{\sqrt{U}} = \frac{1.225}{\sqrt{U}}\ \text{nm}$$

波长分别为 $\lambda_1 = 0.1\ \text{nm}$ $\lambda_2 = 0.0123\ \text{nm}$

说明

电子波波长 << 可见光波长

$390 \sim 760\text{nm}$

观测仪器的分辨本领 $R = \frac{D}{1.22\,\lambda}$

电子显微镜分辨率

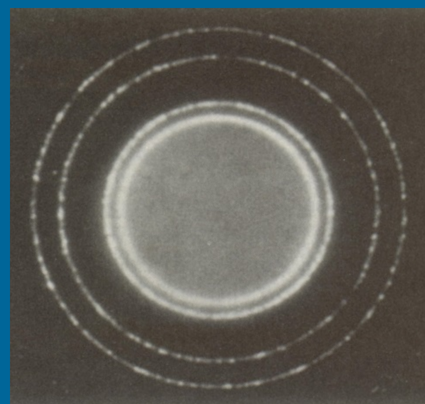
远大于

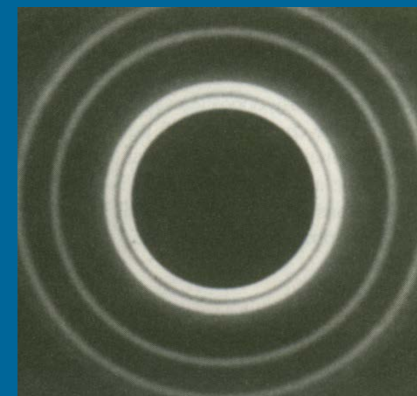
光学显微镜分辨率

物质波的实验验证： 戴维孙—革末电子散射实验(1927年)，观测到电子衍射现象。从而证实了电子具有波动性。

以下是近代实验照片，当电子波和X射线波长相等时衍射条纹相同。

电子束

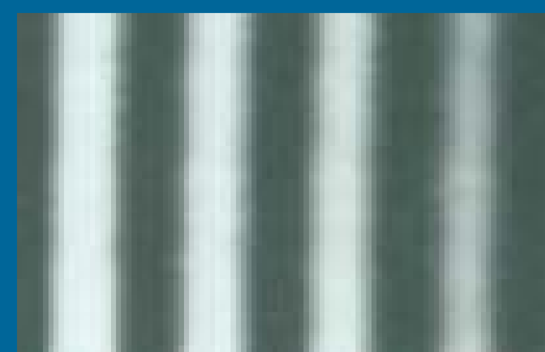




X射线

衍射图样（波长相同）

电子双缝干涉图样



杨氏双缝干涉图样

德布罗意波与玻尔量子化假设

玻尔的轨道角动量条件的物理解释：

微观粒子具有波粒二象性，原子中的电子在玻尔轨道上运动，相当于电子波在此圆周围上形成稳定的驻波。

即必须满足驻波条件：

$$2\pi r = n\lambda \qquad (n=1,2,3\ldots\ldots)$$

其中λ为电子的德布罗意波的波长，

由德布罗意假设 $\lambda = \dfrac{h}{m\upsilon}$

$$\therefore 2\pi r = n \cdot \frac{h}{m\upsilon} \qquad 2\pi r m\upsilon = nh$$

$$\therefore L = m\upsilon r = n \cdot \frac{h}{2\pi} = n\hbar \qquad n = 1, 2, 3\ldots\ldots$$

二. 不确定关系

经典力学：质点，确定的坐标和动量，确定的轨迹。

量子力学中：由于粒子具有波粒二象性，粒子的坐标、动量不可能同时准确地确定，粒子的运动不存在一个确定的轨迹。

1. 动量 — 坐标不确定关系

微观粒子的位置坐标 x 、 动量 分量 p_x 不能同时具有确定的值。

Δx、Δp_x 分别是 x、 p_x 的不确定量，其乘积

$$\boxed{\Delta x\,\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}}$$

一个量确定的越准确，另一个量的不确定程度就越大。

如果 $\Delta x = 0$ 粒子位置完全确定

则： $\Delta P_x = \infty$ 粒子动量完全不确定 ，反之，亦然。

例 原子的线度约为 10^{-10} m，求原子中电子速度的不确定量。

解 原子中电子的位置不确定量 10^{-10} m，由不确定关系

$$\Delta x\,\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

电子速度的不确定量为

$$\Delta \upsilon_x = \frac{\Delta p_x}{m} \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} = \frac{6.63\times10^{-34}}{4\times3.14\times9.1\times10^{-31}\times10^{-10}}$$

$$= 5.8\times10^{5}\ \mathrm{m/s}$$

说明

氢原子中电子速率约为 10^{6} m/s。速率不确定量与速率本身的数量级基本相同，因此原子中电子在任一时刻没有完全确定的位置和速度，不能用经典力学描述其运动。

2. 能量 — 时间不确定关系

如果微观体系处于某一状态的时间为 Δt，则其相应的能量也不能确定，有一不确定量 ΔE

$$\boxed{\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}}$$

——反映了原子能级宽度 ΔE 和原子在该能级的平均寿命 Δt 之间的关系。

基态

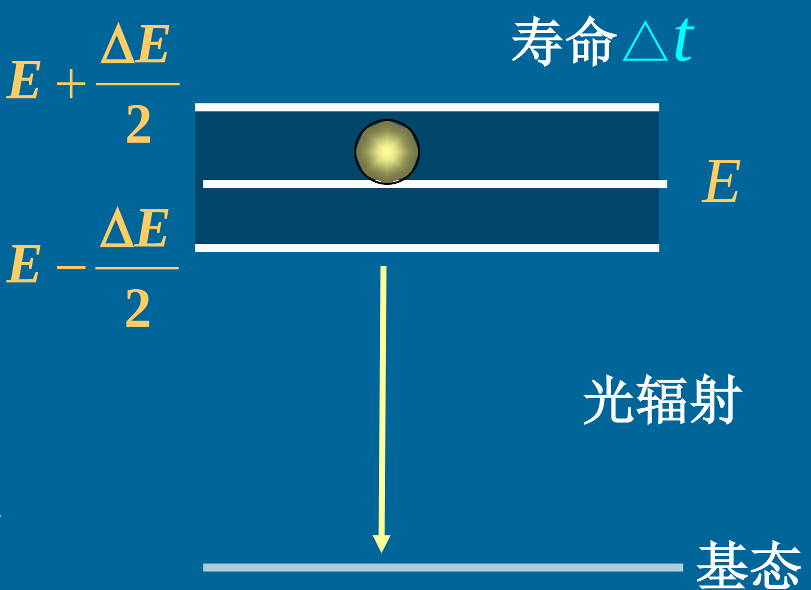
平均寿命 $\Delta t \to \infty$

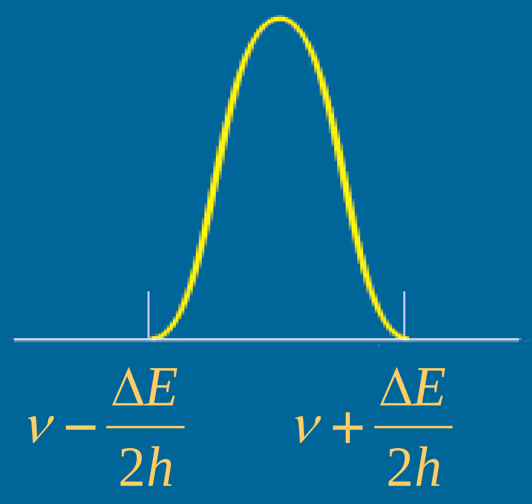
能级宽度 $\Delta E \to 0$

激发态

平均寿命 $\Delta t \sim 10^{-8}$ s

能级宽度 $\Delta E \geq \dfrac{\hbar}{2\Delta t} \sim 10^{-8}$ eV





辐射光谱线固有宽度

例 子弹质量为**0.01kg**，枪口直径***d*=0.5cm**

求 子弹射出枪口时横向速度的不确定量。

解

$$\Delta x\,\Delta p_x = \Delta x \cdot m\Delta \upsilon_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta \upsilon_x \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} = \frac{1.05\times 10^{-34}}{2\times 0.01\times 0.5\times 10^{-2}}$$

$$= 1.05\times 10^{-30}\, m/s$$

与子弹的飞行速度每秒几百米相比，这一不确定量可以忽略，所以子弹的运动速度是确定的。

例 电视显象管中，电子的加速电压U =9kV，电子枪口直径 d =0.01cm

求 1） 电子横向速度的不确定量。

2） 讨论电子能否看作经典质点。

解 1）

$$\Delta x\,\Delta p_x = \Delta x \cdot m\Delta \upsilon_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta \upsilon_x \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} = 0.58\text{m/s}$$

2） 电子加速后速率υ

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = eU \quad \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 5.6\times 10^7\,\text{m/s}$$

$$\Rightarrow \Delta \upsilon_x << \upsilon$$

电子的运动速度相对来看是很稳定的，可看作经典质点。

例 波长λ=500 nm的光波沿x 轴正向传播，若波长的不确定度为$\Delta\lambda/\lambda=10^{-7}$

求 光子位置坐标的不确定量。

解 $$p_x = h/\lambda \Rightarrow \Delta p_x = \frac{h}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

$$\Delta x\, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta x \cdot \frac{h}{\lambda^2}\Delta\lambda \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta x \geq \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda} = 0.40\mathrm{m}$$

总结

1. 德布罗意关系

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\upsilon} = \frac{h}{m_0\upsilon}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$$

2. 不确定关系

$$\Delta x\,\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$