



第三章 控制系统的时域分析法

3.1 典型输入信号

3.2 控制系统的时域性能指标

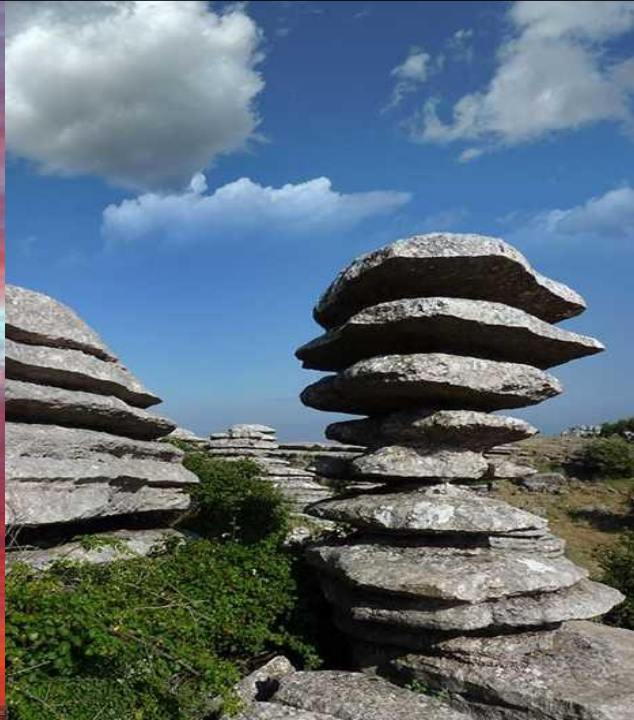
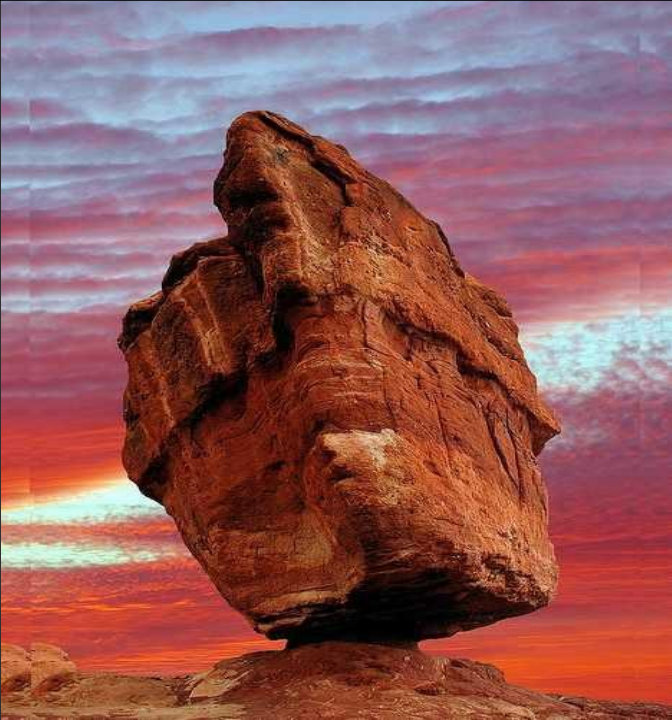
3.3 一阶系统的时域响应

3.4 二阶系统的时域响应

3.5 高阶系统的时域分析

3.6 线性定常系统的稳定性和劳斯判据

3.7 控制系统的稳态误差分析





3.6 系统稳定性和劳斯判据



视频：一根羽毛的重量

A problem has been detected and Windows has been shut down to prevent damage to your computer.

PFN_LIST_CORRUPT

If this is the first time you've seen this Stop error screen, restart your computer. If this screen appears again, follow these steps:

Check to make sure any new hardware or software is properly installed. If this is a new installation, ask your hardware or software manufacturer for any Windows updates you might need.

If problems continue, disable or remove any newly installed hardware or software. Disable BIOS memory options such as caching or shadowing. If you need to use Safe Mode to remove or disable components, restart your computer, press F8 to select Advanced Startup Options, and then select Safe Mode.

Technical information: 停机码
*** STOP: 0x0000004e (0x00000099, 0x00000000, 0x00000000, 0x00000000)

Beginning dump of physical memory
Physical memory dump complete.
Contact your system administrator or technical support group for further assistance.

세월호 사고 배상금
학생 8.2억 교사 11.4억

연합뉴스TV



입건<경기 부천소사서> 새정치연합, 광주 현장 최고위원회의... 광주 원/달러 1102.50 ▼7.00





3.6 系统稳定性和劳斯判据

Tacoma Narrows Bridge Collapse Gallopin Gertie

画面尺寸 50% 75% 100%

11:26



00:32

00:28 / 05:56

音量 字幕 设置

视频：塔科马海峡大桥坍塌

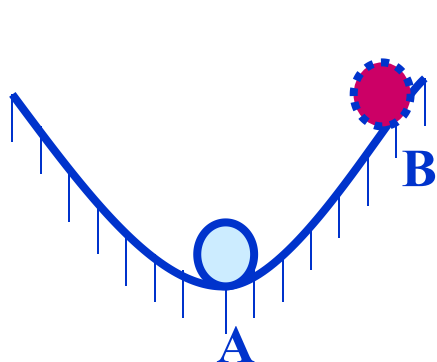
自动控制原理



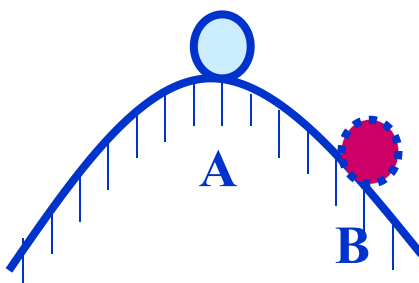
3.6 系统稳定性和劳斯判据

一、稳定性的基本概念

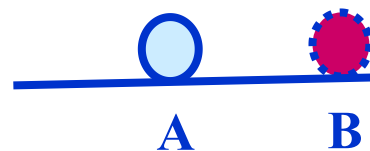
稳定性：系统在扰动消除后，由初始偏差状态恢复到原平衡状态的能力。若系统可恢复平衡状态，则称系统是**稳定的**，否则是**不稳定的**。



(a)稳定平衡



(b)不稳定平衡



(c)随遇平衡

► 稳定性是系统的固有特性，对线性系统来说，它只取决于系统的**结构、参数**，而与**初始条件及外作用**无关。



3.6 系统稳定性和劳斯判据

渐近稳定: 若线性系统在初始扰动的作用下，其过渡过程逐渐衰减并趋于零（回到平衡状态），则称系统为**渐近稳定**，简称**稳定**。反之，若在初始扰动的作用下，系统的过渡过程逐渐发散，则称其**不稳定**。若在初始扰动的作用下，系统状态保持**恒定或等幅振荡**，则系统**临界稳定**。

大范围（渐近）稳定: 无论初始扰动引起的初始偏差有多大，系统在扰动取消后均可恢复到平衡状态。

小范围（渐近）稳定: 要求初始扰动引起的初始偏差小于某个值。

BIBO稳定: 若系统对于任意有界输入，只能产生有界输出，则该系统为BIBO稳定系统。



3.6 系统稳定性和劳斯判据

外部稳定

BIBO(Boundary Input/ Boundary Output)稳定

若系统对于任意有界输入，只能产生有界输出，
则该系统为BIBO(有界输入/有界输出)稳定系统。

内部稳定

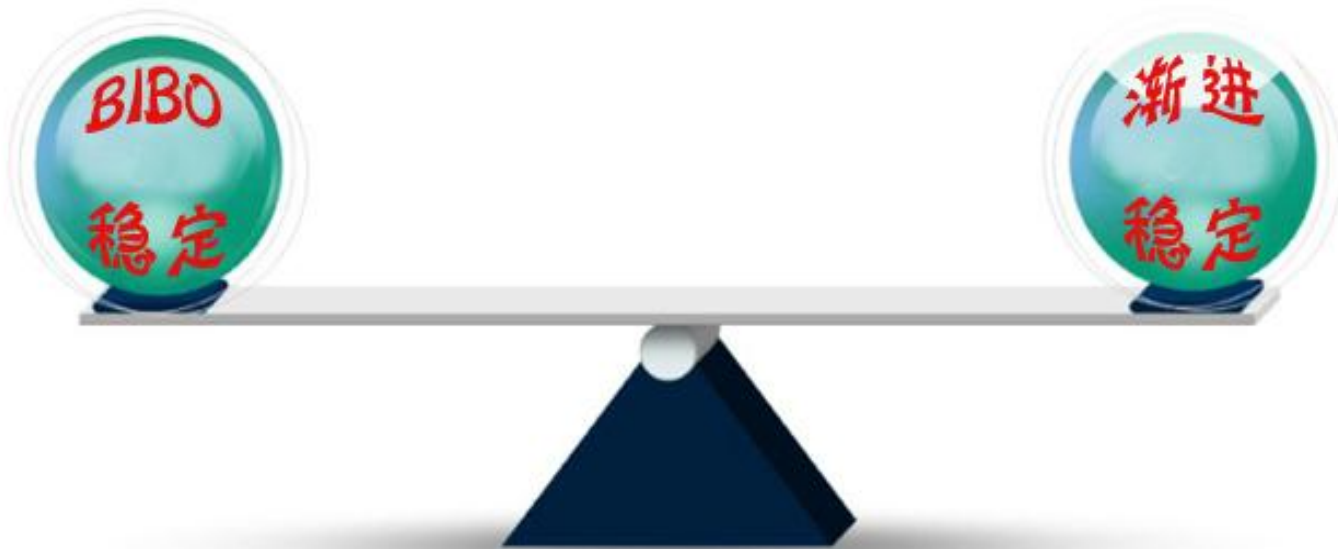
渐进稳定(李雅普诺夫稳定):

若线性系统在初始扰动的作用下，其过渡过程
逐渐衰减并趋于零(回到平衡状态)，则称系统为
渐近稳定。



3.6 系统稳定性和劳斯判据

- ❖ 对线性系统，必定是大范围和小范围都稳定的；只有非线性系统才会有小范围稳定而大范围不稳定的情况。
- ❖ 如果闭环传递函数能够完全表征系统，即系统没有零极点相消，或者相消的极点具有负实部，则BIBO稳定等价于渐近稳定。





3.6 系统稳定性和劳斯判据

LTIC系统BIBO稳定充要条件:

单位冲激响应 $h(t)$ 绝对可积。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

充分性: 已知: $|f(t-\tau)| < K < \infty$, $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$

$$y_{zs}(t) = h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow |y_{zs}(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |f(t-\tau)| d\tau$$

$$|y_{zs}(t)| \leq K \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$



3.6 系统稳定性和劳斯判据

LTIC系统BIBO稳定充要条件:

单位冲激响应 $h(t)$ 绝对可积。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

必要性: 设 $|f(t)| \leq M_f$, $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \infty$

$$\text{令 } f(-t) = \text{Sgn}[h(t)] = \begin{cases} -1 & h(t) < 0 \\ 0 & h(t) = 0 \\ 1 & h(t) > 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } f(-t)h(t) = |h(t)|$$

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

$$y_{zs}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau = \infty$$



3.6 系统稳定性和劳斯判据

线性系统渐进稳定的充要条件:

线性系统的稳定性是系统的固有特性，与外界条件无关。按照李雅普诺夫稳定性理论，当系统的脉冲响应 $h(t)$ 满足：

$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ ，系统**渐近**稳定。

$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \text{Con}$ ，系统**临界**稳定。

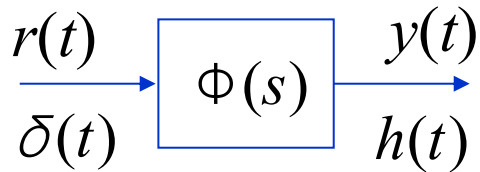
$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ ，系统**不**稳定。



李雅普诺夫
(1857-1918)



3.6 系统稳定性和劳斯判据



$$\Phi(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

设闭环传递函数 $\Phi(s)$ 有 q 个实极点, r 对复极点, 脉冲响应:

$$H(s) = R(s)\Phi(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^q (s - s_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2)}, q + 2r = n$$

$$= \sum_{i=1}^q \frac{C_i}{s - s_i} + \sum_{k=1}^r \frac{A_k (s + \zeta_k \omega_{nk}) + B_k \omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2}$$



3.6 系统稳定性和劳斯判据

$$H(s) = \sum_{i=1}^q \frac{C_i}{s - s_i} + \sum_{k=1}^r \frac{A_k (s + \zeta_k \omega_{nk}) + B_k \omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2}$$

$$h(t) = \sum_{i=1}^q C_i e^{s_i t} + \sum_{k=1}^r D_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin(\sqrt{1 - \zeta_k^2} \omega_{nk} t + \theta_k)$$



3.6 系统稳定性和劳斯判据

$$h(t) = \sum_{i=1}^q C_i e^{s_i t} + \sum_{k=1}^r D_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin(\sqrt{1 - \zeta_k^2} \omega_{nk} t + \theta_k)$$

分析上式:

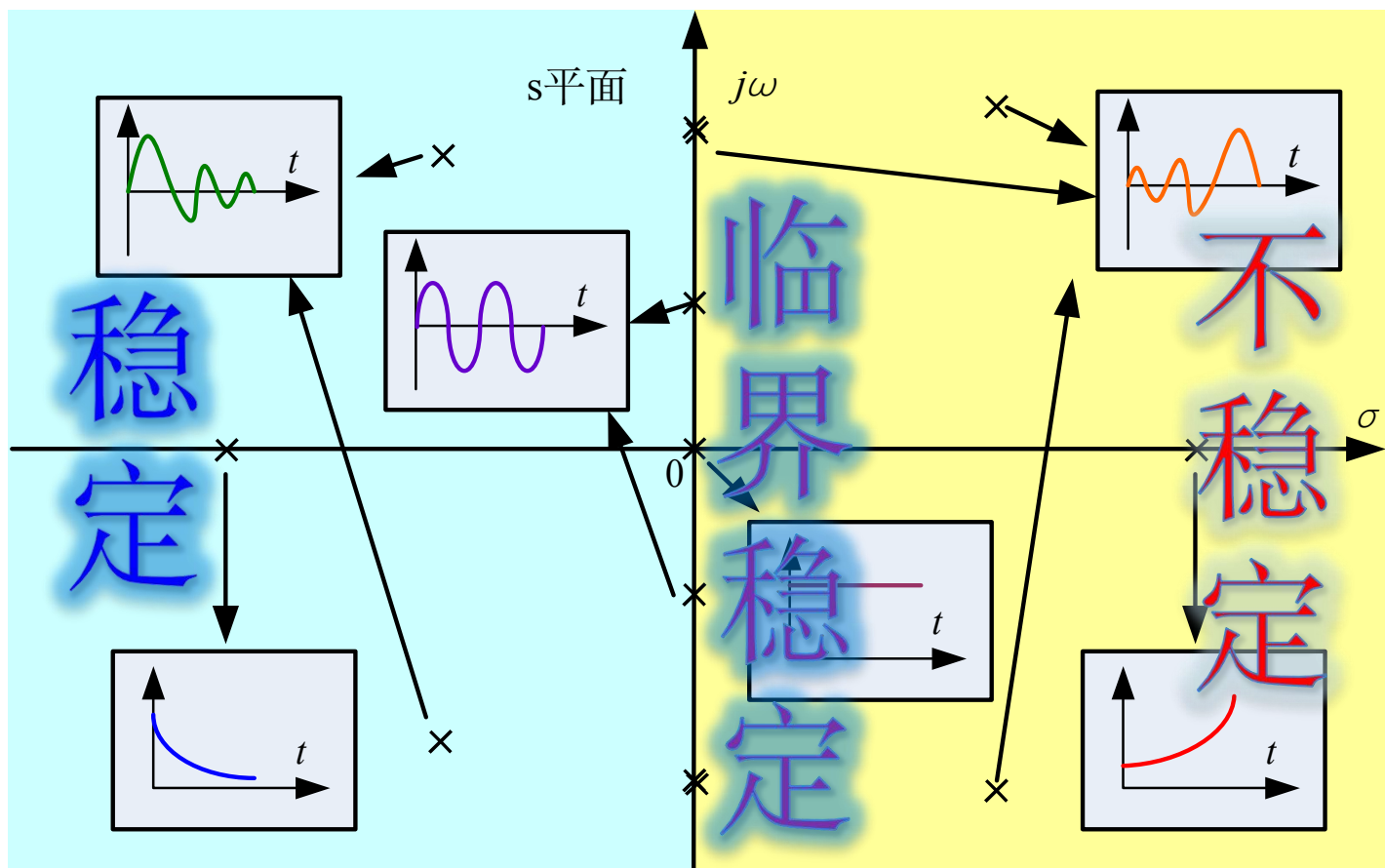
- (1) 若 $s_i < 0, -\zeta_k \omega_{nk}$ 即所有闭环极点具有负实部, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$, 系统稳定。
- (2) 若 $s_i, -\zeta_k \omega_{nk}$ 有一个大于零, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$, 系统不稳定。
- (3) 只要 $-\zeta_k \omega_{nk}$ 中有一个为零, 即系统有一对纯虚根, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$, 系统临界稳定。



3.6 系统稳定性和劳斯判据

线性系统稳定的充要条件：

闭环传递函数的极点全部位于 s 的左半平面。





3.6 系统稳定性和劳斯判据

✓ 李雅普诺夫第一方法 (间接法, 属于小范围稳定性分析方法)

求出线性化以后的常微分方程的解, 从而分析原系统的稳定性, 经典控制理论中对稳定性的讨论以此为基础。

第一定理: 若微偏线性化后系统的闭环极点全在 s 左半平面, 则原系统渐近稳定; 被忽略的高阶项不会使系统变为不稳定。

第二定理: 若微偏线性化后的系统只要有一个闭环极点不在 s 左半平面, 则原系统的运动不稳定; 被忽略的高阶项也不会使系统变成稳定。

✓ 李雅普诺夫第二方法 (直接法, 属于渐进/大范围渐进稳定分析方法)

根据系统结构判断内部稳定性, 不要求解微分方程的解, 而能够提供系统稳定性的信息, 对于非线性、时变、多输入多输出系统特别重要, 现代控制理论稳定性讨论以此为基础。)

要点: 构造李雅普诺夫函数, 进行稳定性分析。



3.6 系统稳定性和劳斯判据

例1: 某单位反馈系统，其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} \quad (K > 0, T > 0)$$

解:

$$\Phi(s) = \frac{K}{Ts^2 + S + K}$$

$$D(s) = Ts^2 + S + K$$

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4TK}}{2T}$$

结果: 负实根，或者共轭复根，具有负实部，稳定。



3.6 系统稳定性和劳斯判据

二、劳斯 (Routh) 判据

- 由稳定性分析可知，上面的方法必须求出闭环传递函数的所有极点。
- 对于三阶以上系统，求解极点一般来说是比较困难的。因此人们希望不求解高阶方程而进行稳定性的间接判断。
- 1877年，英国学者劳斯 (Routh) 提出了利用特征方程的系数进行代数运算，得到全部极点具有负实部的条件，以此判断系统是否稳定。



3.6 系统稳定性和劳斯判据

Routh-Hurwitz判据:

① 系统稳定的必要条件:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

特征方程的系数同号且不缺项。



Edward John Routh

② 系统稳定的充分必要条件:

Routh-Hurwitz判据: R-H表第一列元素均为正。



3.6 系统稳定性和劳斯判据

系统稳定的必要条件: 特征方程的系数同号且不缺项。

略证: 系统特征方程为: $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \cdots a_1 s + a_0 = 0$

上式中所有系数均为实数, 并设 $a_0 > 0$

设系统传递函数有 q 个实根: $s_i (i = 1, 2, \cdots, q)$

r 对共轭复根: $(\sigma_i \pm j\omega_i) (i = 1 \cdots r)$

$$(s - s_1) \cdots (s - s_q) [(s - \sigma_1)^2 + \omega_1^2] \cdots [(s - \sigma_r)^2 + \omega_r^2]$$

因为所有根都在 s 的左半平面, 即 $s_i < 0, \sigma_i < 0$

$$\Rightarrow -s_i > 0, -\sigma_i > 0 \Rightarrow a_i > 0$$



3.6 系统稳定性和劳斯判据

利用劳斯判据判断稳定性

第1步：列出系统的特征方程：

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \cdots a_1 s + a_0 = 0$$

初步观察：特征方程系数若缺项或异号，则系统不稳定。



3.6 系统稳定性和劳斯判据

第2步：列写劳斯阵列（行列表），共 $n+1$ 行：

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \cdots a_1 s + a_0 = 0$$

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\cdots	$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$	$b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$	\cdots
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\cdots			
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	\cdots	$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}$	$c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}$	\cdots
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	\cdots			
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	\cdots	$d_1 = -\frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{c_1}$	$d_2 = -\frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{c_1}$	\cdots
\vdots	\vdots						
s^2	x_1	x_2					
s^1	y_1						
s^0	z_1				\vdots	\vdots	\vdots

在进行行列表计算时，为了运算方便，可将一行中各数都乘以一个正数，不影响稳定性判断。



3.6 系统稳定性和劳斯判据

第3步：考察劳斯表

❖ 若第一列元素均为正，则系统**稳定**，否则系统不稳定；
且第一列元素的**变号次数**等于右根（正实部根）的个数。

控制系统稳定的充分必要条件：
劳斯阵列第一列元素不改变符号。

注：通常 $a_0 > 0$ ，因此，劳斯稳定判据可以简述为劳斯阵列表中第一列的各数均大于零。



3.6 系统稳定性和劳斯判据

例2: 系统特征方程如下，试用R-H判据判定稳定性。

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

解: R-H表

s^4	1	3	5
s^3	2	4	0
s^2	$-\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1$	$-\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 5$	0
s^1	$-\frac{1}{1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -6$	$-\frac{1}{1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$	
s^0	$-\frac{1}{-6} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 5$		

结论: 系统不稳定，有2个右根。



利用Matlab进行验证:

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

```
>>roots([1,2,3,4,5])
```

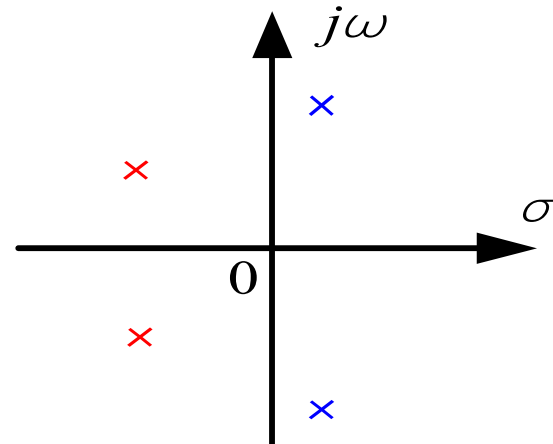
```
ans =
```

```
0.2878 + 1.4161i
```

```
0.2878 - 1.4161i
```

```
-1.2878 + 0.8579i
```

```
-1.2878 - 0.8579i
```





3.6 系统稳定性和劳斯判据

三、劳斯(routh)判据的两种特殊情况

- 特殊情况1：第一列出现0
- 特殊情况2：某一行元素均为0



3.6 系统稳定性和劳斯判据

特殊情况1: 劳斯表中某行的首列元素为0，其余各元素不为0。

解决方法: 用小正数 ε 来代替0，继续运算。

若 ε 上下两行首列元素符号相反，则系统有右根（不稳定）；若符号相同，则系统有一对纯虚根。（临界稳定，等幅振荡。可由 ε 上一行元素构造辅助方程求解振荡频率）



3.6 系统稳定性和劳斯判据

例3: $D(s) = s^4 + s^3 + 3s^2 + 3s + 2 = 0$

各项系数均为正数

s^4	1	3	2
s^3	1	3	0
s^2	$0(\approx \varepsilon)$	2	
s^1	$3 - \frac{2}{\varepsilon}$	0	
s^0	2		



3.6 系统稳定性和劳斯判据

特殊情况2： 劳斯表中某一行元素全为0。（说明有对称于原点的根。）

解决方法： 建立一个辅助方程继续进行分析。

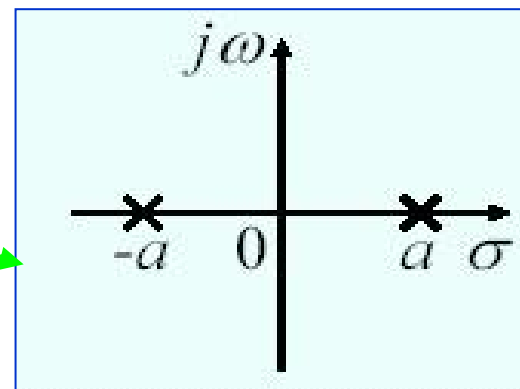
- (a) 用全0行的上一行元素构造辅助多项式 $F(s)$ ；
- (b) 对辅助多项式 $F(s)$ 求导，用 $\frac{dF(s)}{ds}$ 的系数代替全0行，继续运算；
- (c) 可由方程 $F(s) = 0$ 求解原系统对称于原点的根。



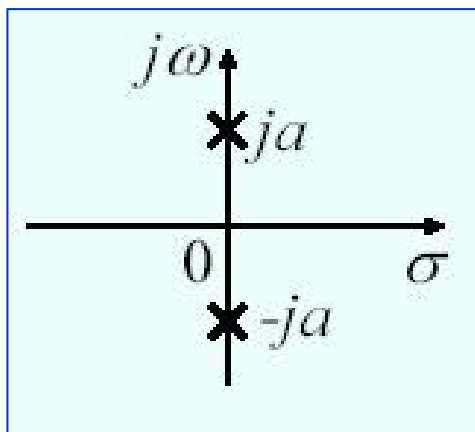
3.6 系统稳定性和劳斯判据

劳斯阵列出现全零行:

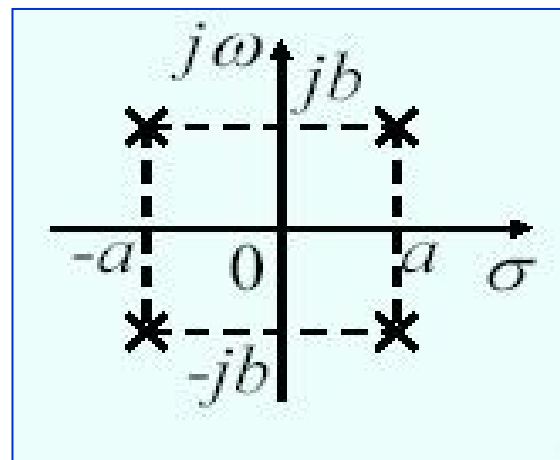
系统在s平面有对称分布的根



大小相等符号相反的实根



共轭虚根



对称于实轴的两对共轭复根



3.6 系统稳定性和劳斯判据

例4: $D(s) = s^5 + s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 6s + 6 = 0$

解: 各项系数均为正数

s^5	1	5	6	辅助方程: $s^4 + 5s^2 + 6 = 0$
s^4	1	5	6	
s^3	$0 \rightarrow 4$	$0 \rightarrow 10$	0	求导得: $4s^3 + 10s = 0$
s^2	$5/2$	6		
s^1	$2/5$			
s^0	6			

验证: $s_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$ $s_{3,4} = \pm j\sqrt{3}$ $s_5 = -1$



3.6 系统稳定性和劳斯判据

四、三阶系统的稳定判据

❖ 充分必要条件：闭环特征方程 $a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$ 的系数为正，且满足 $a_1a_2 > a_0a_3$ 。

例5: $s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0$



3.6 系统稳定性和劳斯判据

五、稳定裕度的检验

应用劳斯判据可以判断系统稳定或不稳定，即绝对稳定性。

在实际系统中，往往需要知道系统离临界稳定有多少裕量，这就是相对稳定性或稳定裕量问题。

利用实部最大的特征方程的根 p （若稳定的话，它离虚轴最近）和虚轴的距离 σ 表示系统稳定裕量。

若 p 处于虚轴上，则 $\sigma = 0$ ，表示稳定裕量为 0。

作 $s = -\sigma$ 的垂线，若系统的极点都在该线的左边，则称该系统具有 σ 的稳定裕度。一般说， σ 越大，稳定程度越高。

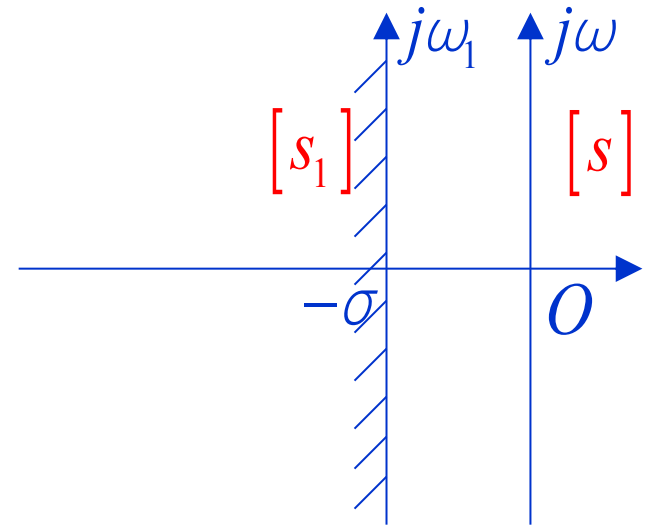


3.6 系统稳定性和劳斯判据

这时可以移动 s 平面的坐标系，
然后再应用劳斯判据。如图，
定义新变量：

$$s_1 = s + \sigma$$

相当于 s 平面的虚轴左移 σ 。



将 $s = s_1 - \sigma$ 代入原方程，得到以 s_1 为变量的新的特征方程，再检验其稳定性。此时系统如果仍然稳定，则称系统具有**稳定裕度** σ 。



3.6 系统稳定性和劳斯判据

例6: 系统特征方程为 $2s^3 + 10s^2 + 13s + 4 = 0$

判断系统是否有根在右半平面，并验有几个根在 $s = -1$ 的右边。

解：列劳斯表：

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 2 & 13 \\ s^2 & 10 & 4 \\ s^1 & 12.2 & \\ s^0 & 4 & \end{array}$$

故 s 右半平面无根。

将 $s = s_1 - 1$ 代入原方程得：

$$2s_1^3 + 4s_1^2 - s_1 - 1 = 0$$

新列劳斯表：

$$\begin{array}{ccc} s_1^3 & 2 & -1 \\ s_1^2 & 4 & -1 \\ s_1^1 & -0.5 & \\ s_1^0 & -1 & \end{array}$$

故系统有一个根在 $s = -1$ 的右边。



3.6 系统稳定性和劳斯判据

六、参数的稳定域

例7: $\Phi(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)+K}$, 求使系统稳定的 K 值范围。

解: 特征方程为:

$$s(s+1)(s+5)+K=0 \Rightarrow s^3+6s^2+5s+K=0$$

根据三阶系统稳定的充要条件, 要使系统稳定, 则有:

$$\begin{cases} K > 0 \\ 30 - K > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < K < 30$$

故 $0 < K < 30$ 时, 系统稳定。



3.6 系统稳定性和劳斯判据

多参数的稳定域

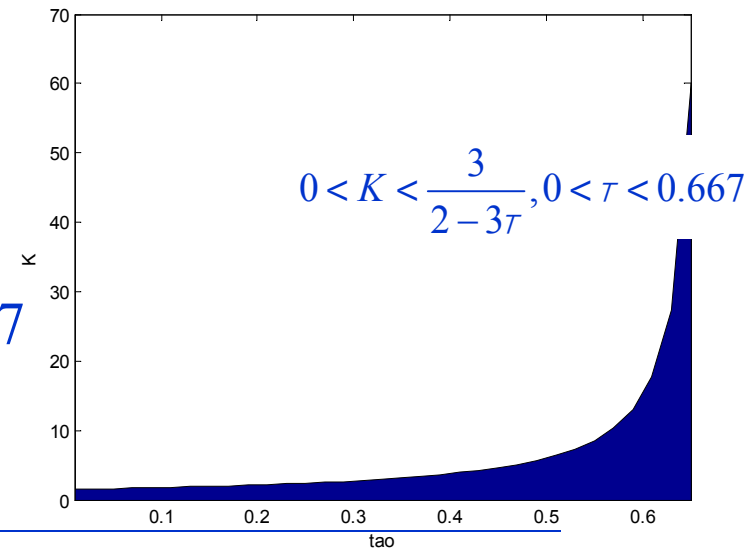
例8: 单位反馈系统开环传递函数 $G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(s+1)(2s+1)}, \tau > 0$
求使系统稳定的 K 值范围。

解: 闭环传递函数为: $\Phi(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(s+1)(2s+1) + K(\tau s + 1)}$

特征方程为: $2s^3 + 3s^2 + (K\tau + 1)s + K = 0$

根据三阶系统稳定的充要条件, 得:

$$\begin{cases} K > 0 \\ 3(K\tau + 1) > 2K \end{cases} \Rightarrow 0 < K < \frac{3}{2-3\tau}, 0 < \tau < 0.667$$



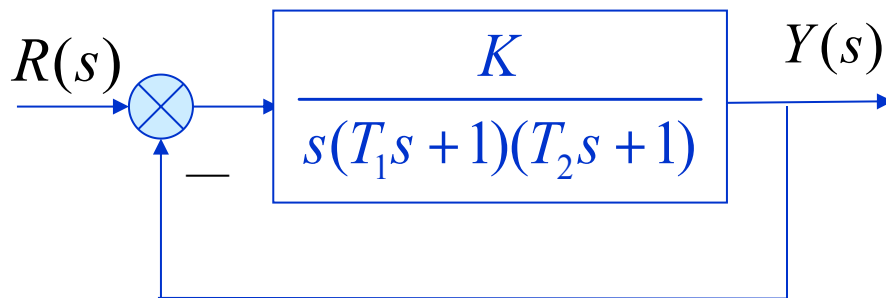


3.6 系统稳定性和劳斯判据

例9：分析系统中增益 K 及时间常数 T_1, T_2 的大小对系统稳定性的影响。

解：闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1) + K}$$



特征方程为：

$$D(s) = s(T_1s + 1)(T_2s + 1) + K = T_1T_2s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K = 0$$

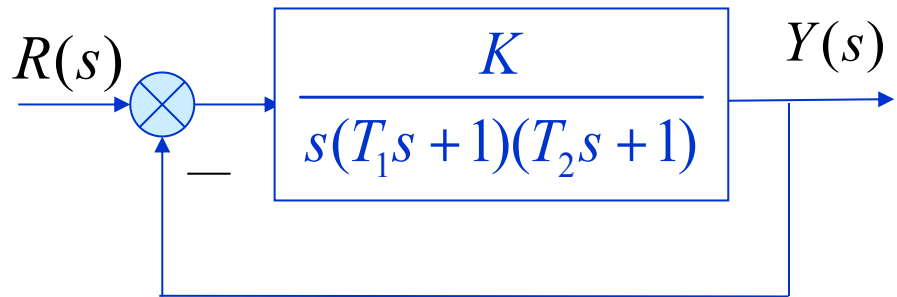
根据三阶系统稳定的充要条件，得：

$$\begin{cases} T_1, T_2 > 0 & K > 0 \\ T_1 + T_2 > KT_1T_2 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad K < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} = K_c$$



3.6 系统稳定性和劳斯判据

$$K < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} = K_c$$



- (1) $0 < K < K_c$ 时，系统是稳定的； $K = K_c$ 时，系统是临界稳定的； $K > K_c$ 时，系统不稳定；
- (2) 增大时间常数 T_1 和/或 T_2 ，对系统的稳定性不利，将使系统的增益 K 的可调范围变小；
- (3) 减少时间常数的个数，对系统的稳定性有利，如对本例三阶系统，若减少一个时间常数，则系统变为二阶系统，其允许增益 K 可以为无穷大。



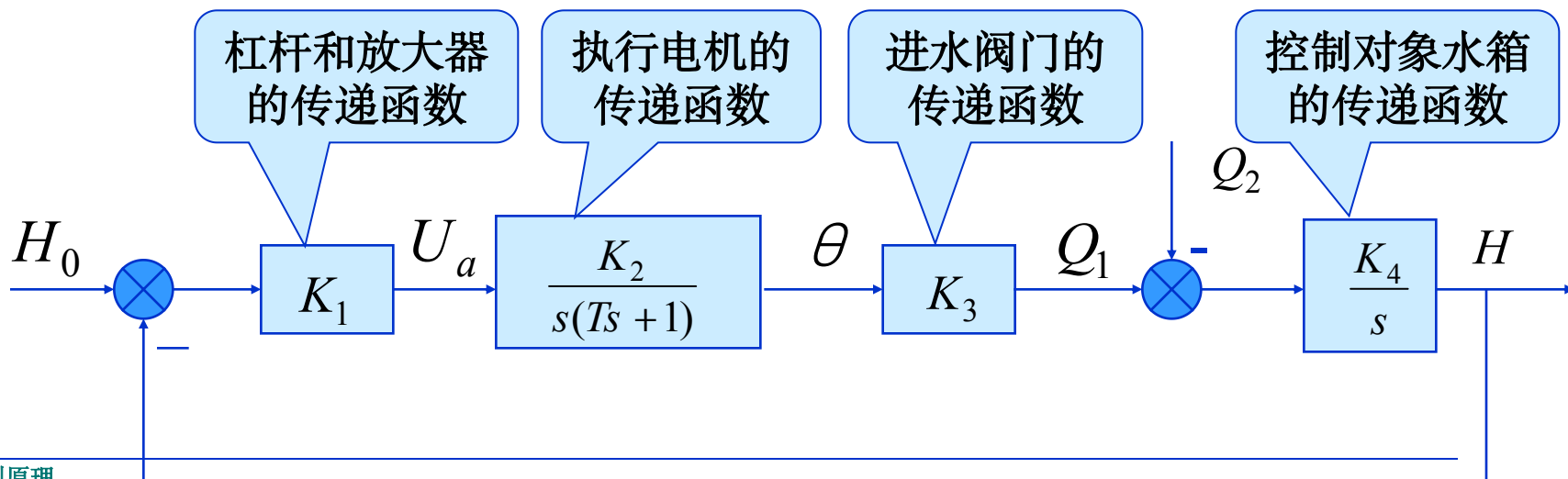
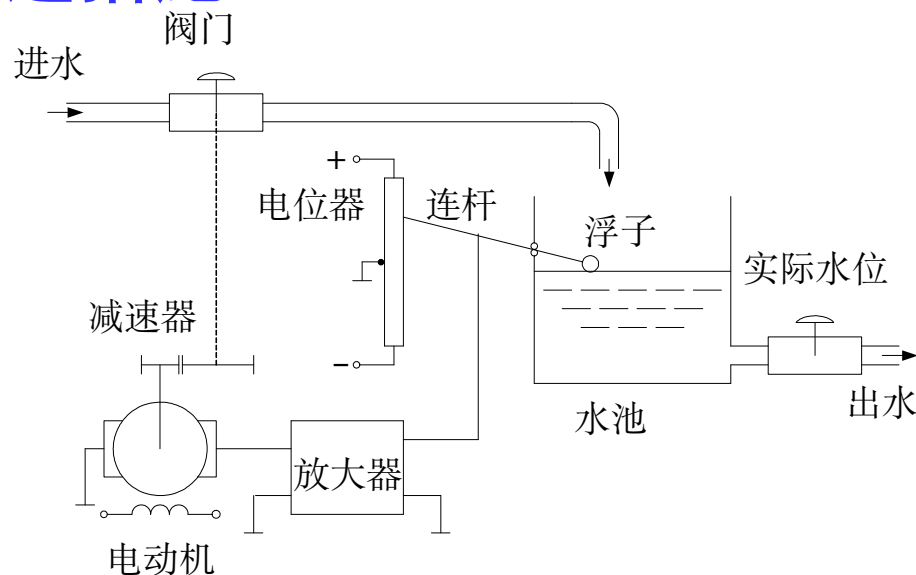
3.6 系统稳定性和劳斯判据

七、结构不稳定系统及其改进措施

仅仅调节参数无法稳定的系统称为结构不稳定系统。

例10：如图所示液位控制系统

系统结构图为：





3.6 系统稳定性和劳斯判据

闭环传递函数为:

$$\Phi(s) = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4}{s^2 (Ts + 1) + K_1 K_2 K_3 K_4}$$

令: $K = K_1 K_2 K_3 K_4$

闭环特征方程为: $s^2 (Ts + 1) + K = 0$

展开为: $Ts^3 + s^2 + K = 0$

方程系数: $a_3 = T, a_2 = 1, a_1 = 0, a_0 = K$

由于 $a_1 = 0$, 不满足系统稳定的必要条件, 所以系统是不稳定的。这也可从劳斯表看出。

由于无论怎样调节参数K和T都不能使系统稳定, 所以是一个结构不稳定的系统。

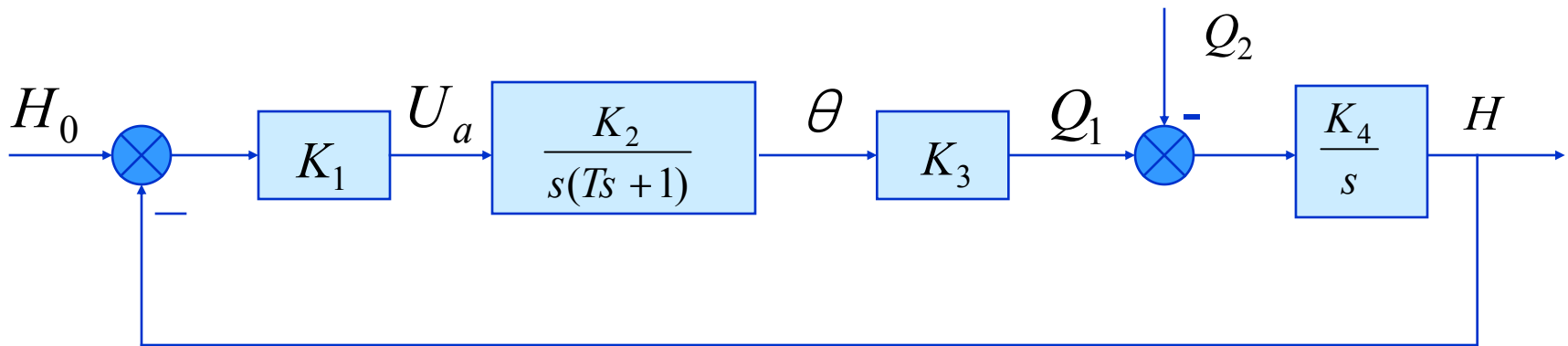
欲使系统稳定, 必须改变原系统的结构。

劳斯表:

s^3	T	0
s^2	1	K
s^1	$-KT$	
s^0	K	



3.6 系统稳定性和劳斯判据



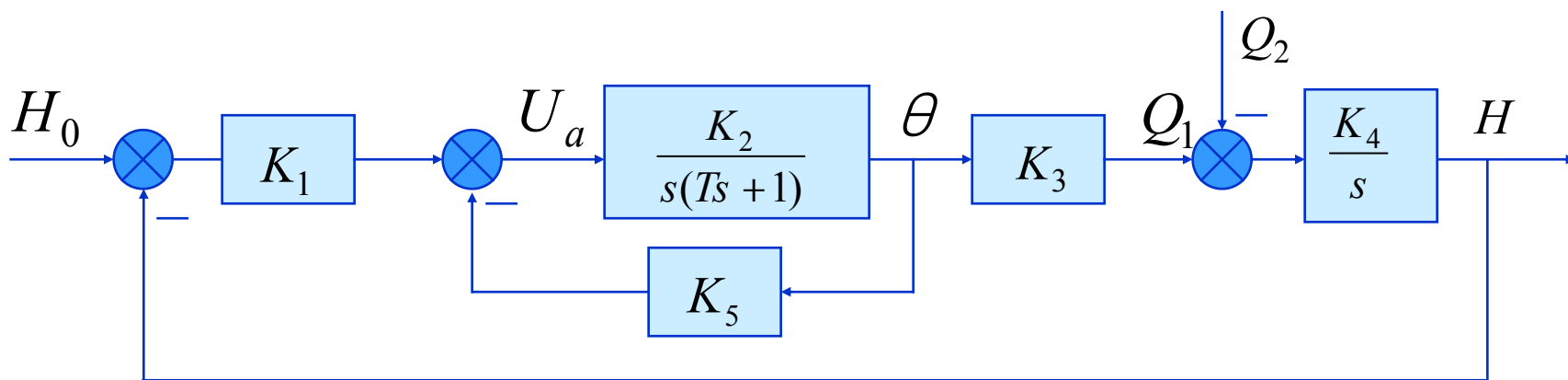
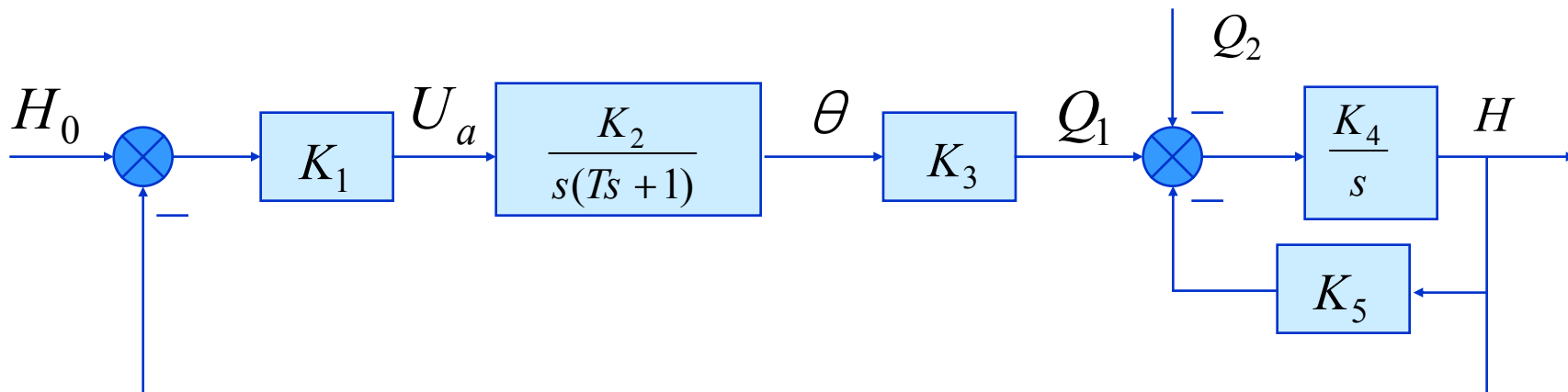
由图可看出，造成系统结构不稳定的原因是前向通路中有两个积分环节串联，而传递函数的分子只有增益 K 。这样，造成系统闭环特征方程缺项，即 s 一次项系数为零。

因此，消除结构不稳定的措施可以有两种，一是改变积分性质；二是引入开环零点，补上特征方程中的缺项。



3.6 系统稳定性和劳斯判据

(1) 改变积分性质：用反馈包围积分环节，破坏其积分性质。



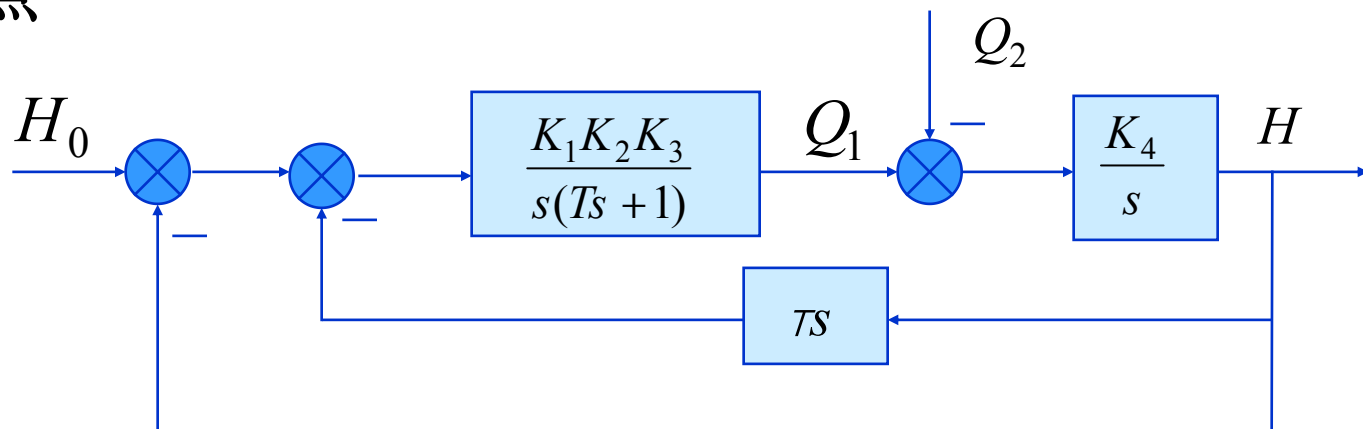
积分性质的破坏将改善系统的稳定性，但会使系统的稳态精度下降。



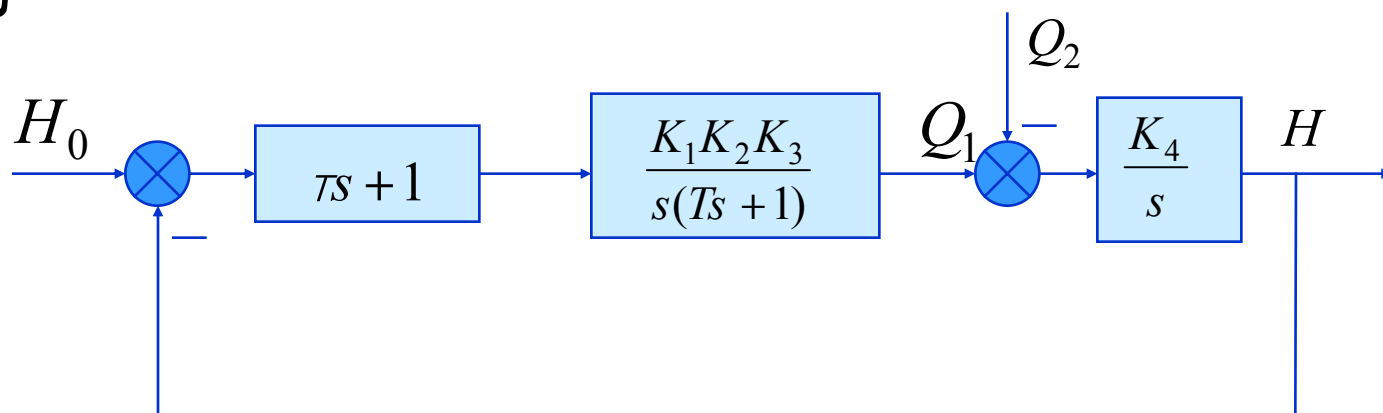
3.6 系统稳定性和劳斯判据

(2) 引入开环零点

① 速度反馈



② 比例+微分





3.6 系统稳定性和劳斯判据

闭环传递函数为:

$$\Phi(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1) + K(\tau s + 1)}$$

闭环特征方程为: $Ts^3 + s^2 + K\tau s + K = 0$

方程系数: $a_3 = T$, $a_2 = 1$, $a_1 = K\tau$, $a_0 = K$

稳定的充分必要条件为:

① $a_i > 0$ 即 $T > 0$, $K > 0$, $\tau > 0$

② $K(\tau - T) > 0$ 即 $\tau > T$

引入比例+微分控制后, 补上了特征方程中s一次项系数。故只要适当匹配参数, 满足上述条件, 系统就可稳定。

劳斯表:

s^3	T	$K\tau$
s^2	1	K
s^1	$K(\tau - T)$	
s^0	K	



3.6 系统稳定性和劳斯判据

例11: 倒立摆系统 当忽略转动惯量J时

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} - \frac{(M + m)g}{Ml} \theta = -\frac{u}{Ml}$$

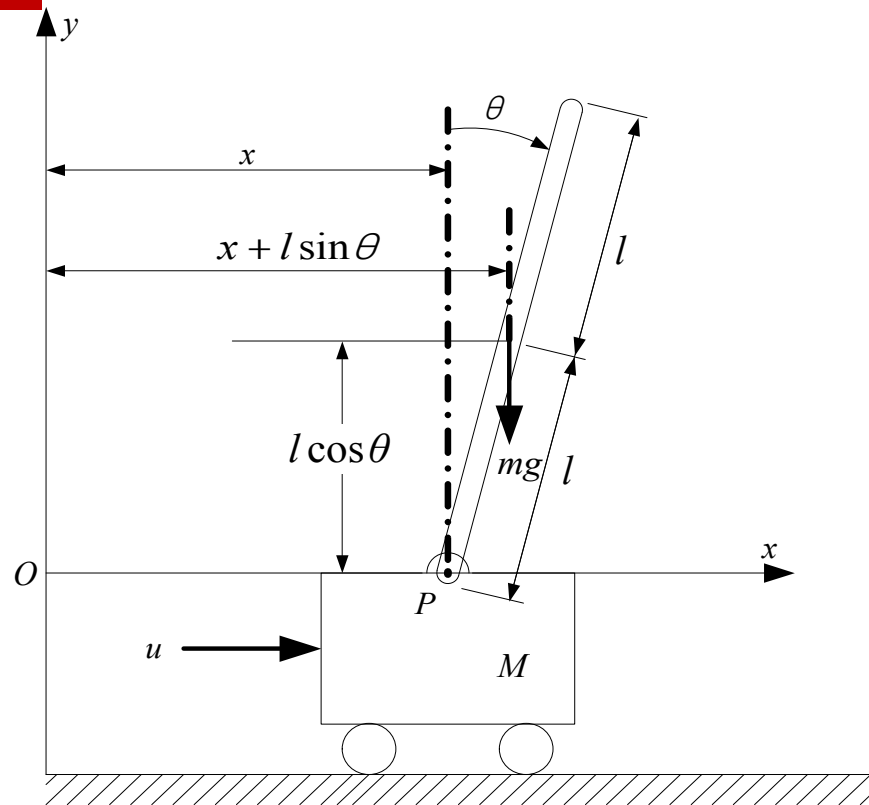
$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{-\frac{1}{Ml}}{s^2 - \frac{(M + m)g}{Ml}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{Ml}}{\left(s - \sqrt{\frac{(M + m)g}{Ml}}\right)\left(s + \sqrt{\frac{(M + m)g}{Ml}}\right)}$$

此时若输入 $u = a\theta + b\theta'$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{b}{Ml} \frac{d\theta}{dt} + \frac{a - (M + m)g}{Ml} \theta = 0$$

当 $\frac{b}{Ml} > 0$, $\frac{a - (M + m)g}{Ml} > 0$ 时系统稳定。





Thank You !