航天器控制原理

冯冬竹
电话：13389281325
邮箱：dzhfeng@xidian.edu.cn
空间科学与技术学院 导航控制系

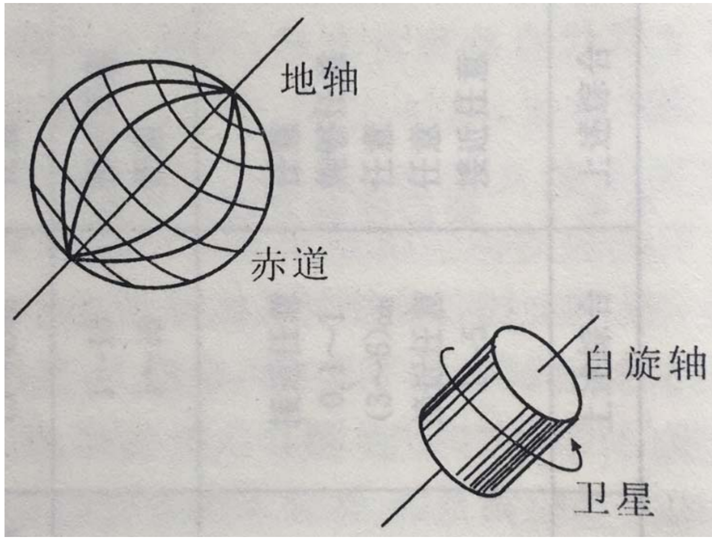
目录

CONTENTS

航天器的被动姿态控制系统

第一讲·自旋卫星的稳定性和章动性

- 原理：利用航天器绕自旋轴旋转所获得的陀螺定轴性，使航天器的自旋轴方向在惯性空间定向。
- 优点：
  - 为航天器获得规则的姿态运动提供了一种简单的手段
  - 自旋运动具有比较大的动量矩，航天器抵抗外干扰的能力很强



自旋卫星

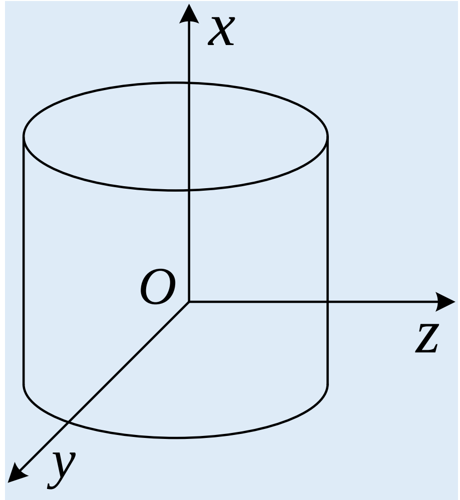

YOUKU
USAF
DELTA
NASA
A

自旋卫星的稳定性

- 自旋稳定的原理

$$\dot{\vec{H}} + \vec{\omega} \times \vec{H} = \vec{M}$$

$$\vec{H} = I\vec{\omega}$$

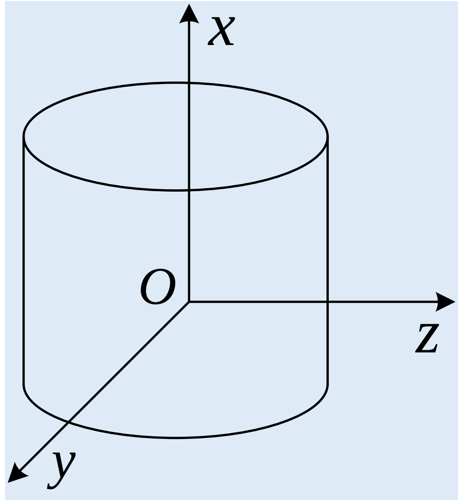


- 令坐标系**Oxyz**是卫星的主轴本体坐标系

➢ 卫星的主惯量为I_x, I_y, I_z，惯量积为零。

自旋卫星的稳定性

➢ 卫星姿态自由转动：$\vec{M}=0$



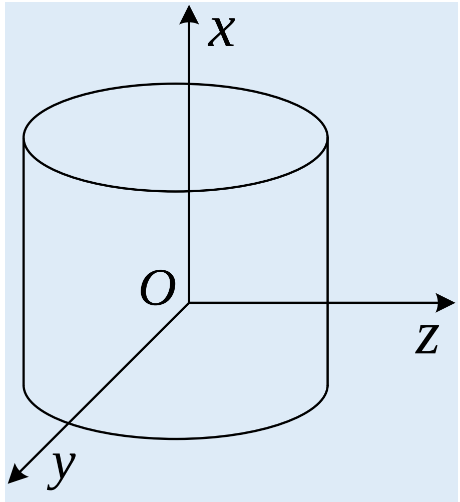
□ 欧拉动力学方程：

$$\begin{cases} M_x = I_x \dfrac{d\omega_x}{dt} + \omega_y\omega_z\left(I_z - I_y\right) \\ M_y = I_y \dfrac{d\omega_y}{dt} + \omega_x\omega_z\left(I_x - I_z\right) \\ M_z = I_z \dfrac{d\omega_z}{dt} + \omega_x\omega_y\left(I_y - I_x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_x \dfrac{d\omega_x}{dt} + \omega_y\omega_z\left(I_z - I_y\right) = 0 \\ I_y \dfrac{d\omega_y}{dt} + \omega_x\omega_z\left(I_x - I_z\right) = 0 \\ I_z \dfrac{d\omega_z}{dt} + \omega_x\omega_y\left(I_y - I_x\right) = 0 \end{cases}$$

- $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 是卫星对空间的瞬时转速在本体坐标系各轴上的分量

自旋卫星的稳定性

- 假设卫星绕**Ox**轴自旋，且
  - ✓ 星体相对于自旋轴**Ox**是轴对称的 $I_y = I_z = I_t$
  - ✓ $\omega_x \gg \omega_y , \omega_x \gg \omega_z$



$$\begin{cases} I_x \dfrac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z \left(I_z - I_y \right) = 0 \\ I_y \dfrac{d\omega_y}{dt} + \omega_x \omega_z \left(I_x - I_z \right) = 0 \\ I_z \dfrac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y \left(I_y - I_x \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_x \dfrac{d\omega_x}{dt} = 0 \\ I_y \dfrac{d\omega_y}{dt} + \omega_x \omega_z \left(I_x - I_z \right) = 0 \\ I_z \dfrac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y \left(I_y - I_x \right) = 0 \end{cases}$$

自旋卫星的稳定性

$$\begin{cases} I_x \dfrac{d\omega_x}{dt} = 0 \\ I_y \dfrac{d\omega_y}{dt} + \omega_x \omega_z \left(I_x - I_z\right) = 0 \\ I_z \dfrac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y \left(I_y - I_x\right) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_{x0} = \text{常数} \\ \dfrac{d\omega_y}{dt} + \dfrac{I_x - I_z}{I_y} \omega_x \omega_z = 0 \\ \dfrac{d\omega_z}{dt} + \dfrac{I_y - I_x}{I_z} \omega_x \omega_y = 0 \end{cases}$$

自旋卫星的稳定性

$$\frac{d\omega_y}{dt}+\frac{I_x-I_z}{I_y}\omega_x\omega_z=0 \rightarrow \frac{d^2\omega_y}{dt^2}+\frac{I_x-I_z}{I_y}\omega_x\frac{d\omega_z}{dt}=0$$

$$\frac{d\omega_z}{dt}+\frac{I_y-I_x}{I_z}\omega_x\omega_y=0$$

$$\frac{d^2\omega_y}{dt^2}+\frac{I_x-I_z}{I_y}\frac{I_x-I_y}{I_z}\omega_{x0}^2\omega_y=0$$

$$\frac{d^2\omega_z}{dt^2}+\frac{I_x-I_z}{I_y}\frac{I_x-I_y}{I_z}\omega_{x0}^2\omega_z=0$$

自旋卫星的稳定性

$$\Omega^2 = \frac{I_x - I_z}{I_y}\frac{I_x - I_y}{I_z}\omega_{x0}^2$$

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_{x0} = \text{常数} \\ \dfrac{d^2\omega_y}{dt^2} + \Omega^2\omega_y = 0 \\ \dfrac{d^2\omega_z}{dt^2} + \Omega^2\omega_z = 0 \end{cases}$$

自旋卫星的稳定性

$$\frac{d^2\omega_y}{dt^2}+\lambda\omega_y=0 \xrightarrow{\text{拉氏变换}} \omega_y(s)=\frac{s}{s^2+\lambda}\omega_{y0}+\frac{1}{s^2+\lambda}\dot{\omega}_{y0}$$

□ 时域解

$$\lambda<0 \Rightarrow \omega_y(t)=\left(\frac{1}{2}\omega_{y0}+\frac{1}{2\sqrt{-\lambda}}\dot{\omega}_{y0}\right)e^{\sqrt{-\lambda}t}+\left(\frac{1}{2}\omega_{y0}-\frac{1}{2\sqrt{-\lambda}}\dot{\omega}_{y0}\right)e^{-\sqrt{-\lambda}t}$$

$$\lambda=0 \Rightarrow \omega_y(t)=\dot{\omega}_{y0}t+\omega_{y0}$$

$$\lambda>0 \Rightarrow \omega_y(t)=\omega_{y0}\cos\left(\sqrt{\lambda}t\right)+\frac{\dot{\omega}_{y0}}{\sqrt{\lambda}}\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)$$

- 满足李雅普诺夫意义下稳定的充要条件是：

$$\Omega^2 = \frac{I_x - I_z}{I_y}\frac{I_x - I_y}{I_z}\omega_{x0}^2 > 0$$

a) $I_x > I_z, I_x > I_y$ ，即星体绕最大主惯量轴旋转；

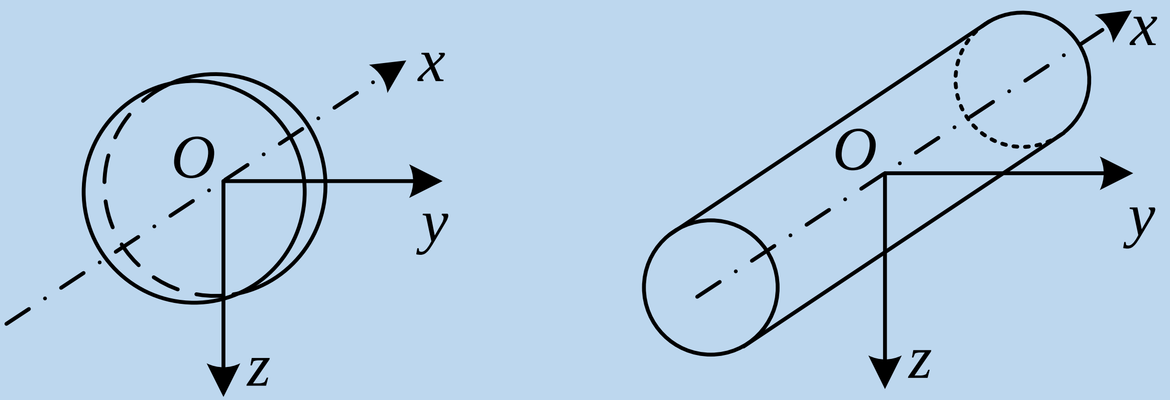
b) $I_x < I_z, I_x < I_y$ ，即星体绕最小主惯量轴旋转；

✓ 当条件(a)或者(b)成立时，ω_y 和 ω_z将在有限值内振荡；

✓ 反之，ω_y 和 ω_z将发散，并导致自旋轴**Ox**翻滚。

自旋卫星的稳定性

- 由上述分析得知，自旋轴为最大惯量轴和最小惯量轴都是稳定的，星体保持自旋稳定的结构形状如图所示：



短粗自旋体

$$I_x > I_y$$

$$I_x > I_z$$

细长自旋体

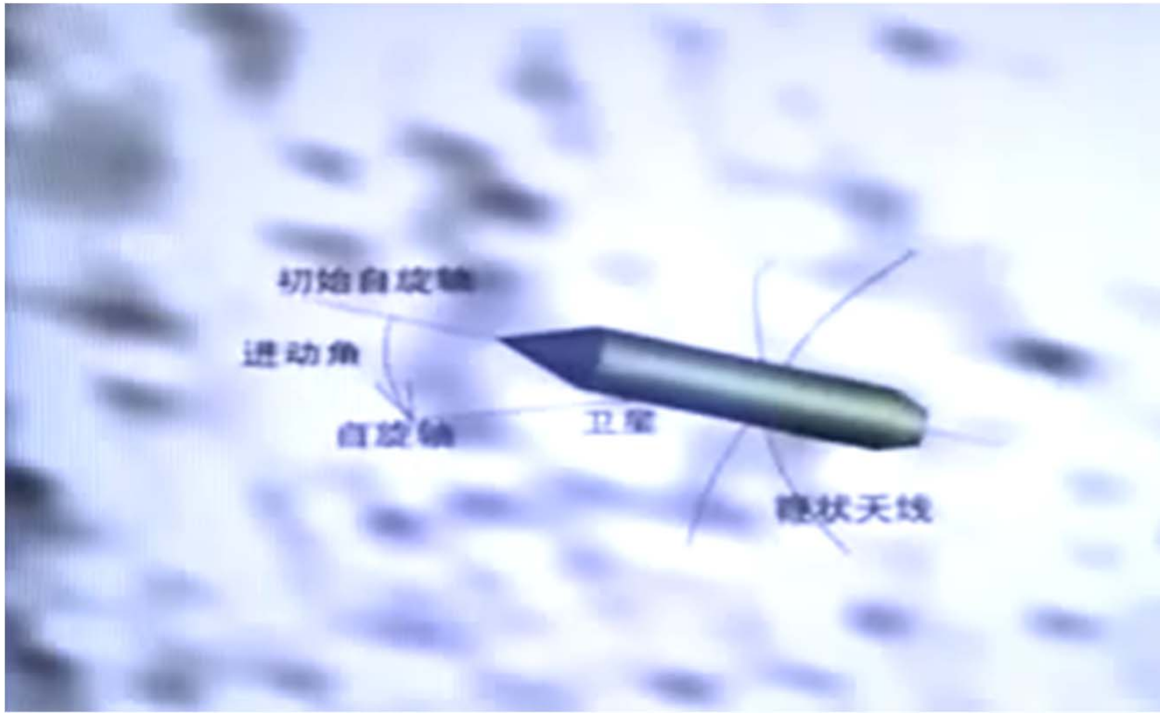
$$I_x < I_y$$

$$I_x < I_z$$

- **1958年美国发射第一颗人造地球卫星“探险者-1号”，它是一个长圆柱体，带有四根横向伸出的挠性鞭状天线。**

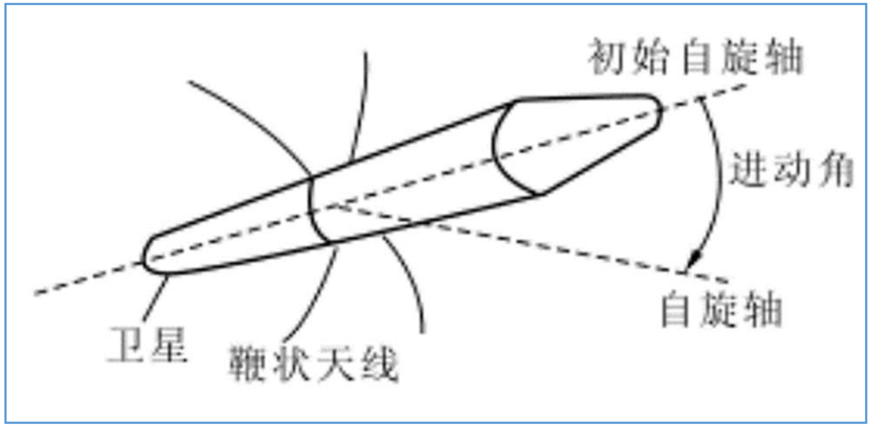
自旋卫星的稳定性

- 本来要使卫星绕其最小惯量轴自旋稳定，但运行一个轨道周期后，卫星便显示出半角为1 **rad**的进动运动。几天之内，卫星获得了另一种本质上稳定的运动 ——— 绕其最大惯量轴旋转。



自旋卫星的稳定性

- 以上结论是在假设航天器是刚体的条件下，利用刚体动力学方程得到的，对于没有能量耗散的绝对刚体完全正确。
- 实际中，鞭状天线的弯曲提供了一种通过结构阻尼耗散能量的机构，使得探险者-1号并不是绝对刚体。
- 因为损失了机械能，动量矩守恒原理迫使卫星绕着一根与旋转对称轴倾斜的轴进动，进动和弯曲运动的动力学耦合能使能量耗散过程继续下去，直到获得最小能量动力学状态，绕最大惯量轴旋转。



自旋卫星的稳定性

- 假设对称自旋卫星近似于刚体，不受外力矩作用。
- ✓ 定义自旋轴惯量I_x与横向轴惯量 $I_y = I_z$ 之比为惯量比：

$$\mu = \frac{I_x}{I_y} = \frac{I_x}{I_z} = \frac{I_x}{I_t}$$

- 自旋卫星的稳定准则总结如下：
- ✓ 若 $\mu > 1$，卫星是短粗的，短粗卫星自旋运动稳定。
- ✓ 若 $\mu < 1$，卫星是细长的，细长卫星自旋运动不稳定。
- ◆ 注意，在工程上为了确保稳定性，应设计至少 $\mu > 1.05$ 。

自旋卫星的章动性

- 假设航天器是相对于自旋轴**Ox**对称的星体：

$$I_y = I_z = I_t < I_x$$

$$\begin{cases} I_x \dfrac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z \left(I_z - I_y\right) = 0 \\ I_y \dfrac{d\omega_y}{dt} + \omega_x \omega_z \left(I_x - I_z\right) = 0 \\ I_z \dfrac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y \left(I_y - I_x\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_x \dfrac{d\omega_x}{dt} = 0 \\ I_y \dfrac{d\omega_y}{dt} + \left(I_x - I_z\right) \omega_x \omega_z = 0 \\ I_z \dfrac{d\omega_z}{dt} - \left(I_x - I_y\right) \omega_x \omega_y = 0 \end{cases}$$

自旋卫星的章动性

$$\begin{cases} I_x \dfrac{d\omega_x}{dt} = 0 \\ I_y \dfrac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z = 0 \\ I_z \dfrac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_{x0} = 常数 \\ \dfrac{d\omega_y}{dt} + \dfrac{I_x - I_z}{I_y}\omega_{x0}\omega_z = 0 \\ \dfrac{d\omega_z}{dt} - \dfrac{I_x - I_y}{I_z}\omega_{x0}\omega_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_{x0} = 常数 \\ \dfrac{d\omega_y}{dt} + \Omega\omega_z = 0 \\ \dfrac{d\omega_z}{dt} - \Omega\omega_y = 0 \end{cases}$$

$$\Omega = \frac{I_x - I_t}{I_t}\omega_{x0}$$

对称自旋卫星的自旋运动是独立的，它和横向运动之间没有耦合作用

□ 横向运动的初始状态分别为：$\omega_y(0), \omega_z(0), \dot{\omega}_y(0), \dot{\omega}_z(0)$

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_{x0} = \text{常数} \\ \dfrac{d\omega_y}{dt} + \Omega\omega_z = 0 \\ \dfrac{d\omega_z}{dt} - \Omega\omega_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &\omega_x = \omega_{x0} \\ &\omega_y = \omega_y(0)\cos\Omega t + \frac{\dot{\omega}_y(0)}{\Omega}\sin\Omega t \\ &\omega_z = \omega_z(0)\cos\Omega t + \frac{\dot{\omega}_z(0)}{\Omega}\sin\Omega t \end{aligned}$$

◆ 对称自旋卫星姿态运动的特点：本体坐标系中，自旋转速ω_x始终为常值，横向角速度分量ω_y, ω_z周期性地变化，周期为$2\pi/\Omega$，幅值取决于它们的初始值。

自旋卫星的章动性

$$\frac{d\omega_y}{dt}+\Omega\omega_z=0$$
$$\frac{d\omega_z}{dt}-\Omega\omega_y=0$$

$$\omega_y\frac{d\omega_y}{dt}+\Omega\omega_y\omega_z=0$$
$$\omega_z\frac{d\omega_z}{dt}-\Omega\omega_y\omega_z=0$$

$$\omega_y\frac{d\omega_y}{dt}+\omega_z\frac{d\omega_z}{dt}=0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\omega_y^2+\omega_z^2\right)=0$$

$\omega_y^2+\omega_z^2$ 是常数

- 定义合成角速率：

$$\omega_t=\left(\omega_y^2+\omega_z^2\right)^{\frac{1}{2}}=\text{常数}$$

自旋卫星的章动性

- 本体坐标系中，星体的转速矢量$\vec{\omega}$可以表达为：

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} = \omega_x \vec{i} + \vec{\omega}_t$$

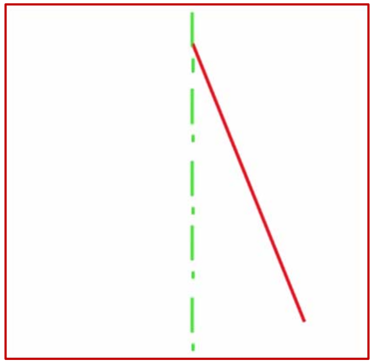
✓ $\vec{\omega}_t = \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$ 是 ω_y, ω_z 的合成角速度矢量。由于它们处在和自旋轴垂直的平面内，因此称之为横向角速度。

自旋卫星的章动性

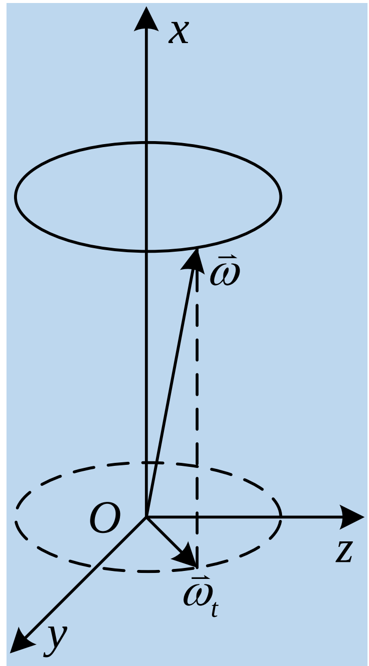
$$\omega_x = \omega_{x0}$$

$$\omega_y = \omega_y(0)\cos\Omega t + \frac{\dot{\omega}_y(0)}{\Omega}\sin\Omega t$$

$$\omega_z = \omega_z(0)\cos\Omega t + \frac{\dot{\omega}_z(0)}{\Omega}\sin\Omega t$$

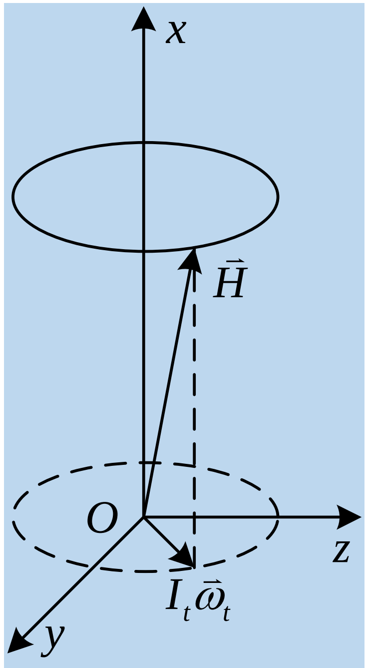


- 由于ω_y,ω_z周期性变化，所以在本体坐标系的**Oyz**平面内，$\vec{\omega}_t$绕**Ox**轴以速率Ω旋转，而幅值ω_t恒定。由此可见，星体的瞬时转速$\vec{\omega}$绕自旋轴**Ox**作圆锥运动。



$$\left.\begin{aligned}\vec{H} &= h_x\vec{i} + h_y\vec{j} + h_z\vec{k} \\ h_x &= I_x\omega_x \\ h_y &= I_y\omega_y \\ h_z &= I_z\omega_z\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}\vec{H} &= I_x\omega_x\vec{i} + I_y\omega_y\vec{j} + I_z\omega_z\vec{k} \\ &= I_x\omega_x\vec{i} + I_t\vec{\omega}_t\end{aligned}$$

- $\vec{H}$ 由横向和轴向两部分组成。

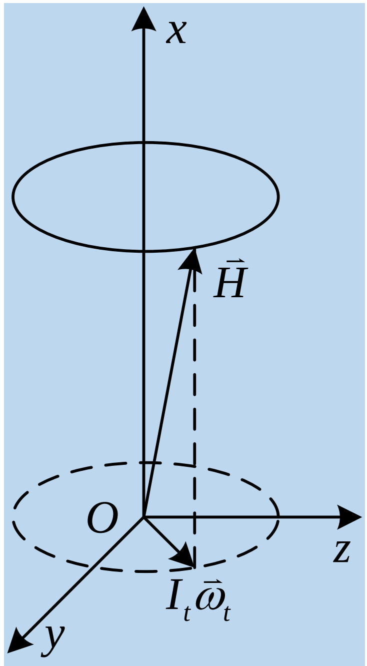


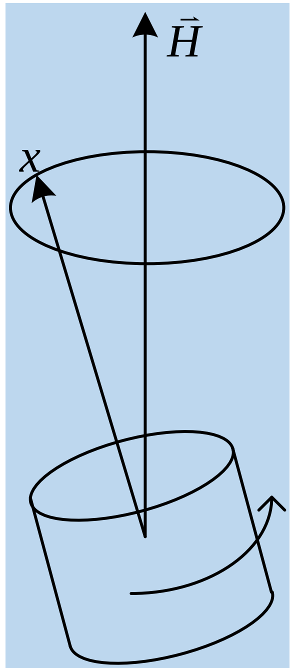
自旋卫星的章动性

$$\left.\begin{aligned}\vec{H} &= h_x\vec{i}+h_y\vec{j}+h_z\vec{k}\\ h_x &= I_x\omega_x\\ h_y &= I_y\omega_y\\ h_z &= I_z\omega_z\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}\vec{H} &= I_x\omega_x\vec{i}+I_y\omega_y\vec{j}+I_z\omega_z\vec{k}\\ &= I_x\omega_x\vec{i}+I_t\vec{\omega}_t\end{aligned}$$

- 由于$\vec{\omega}_t$绕**Ox**轴旋转，因此**Ox**也必然作圆锥运动，才能使得它们的和矢量$\vec{H}$在空间定向。

在无外力矩作用下，航天器的动量矩$\vec{H}$守恒，即在空间中固定不变。





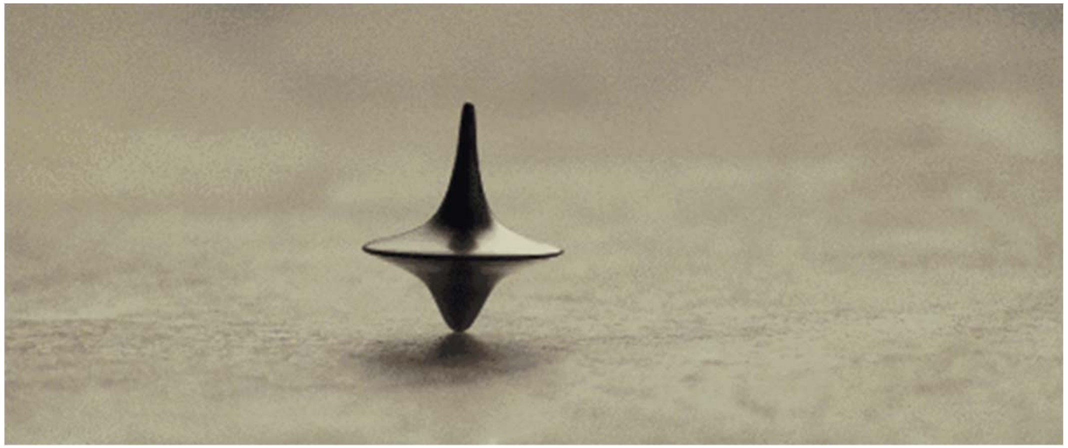
$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \vec{\omega}_t$$
$$\vec{H} = I_x \omega_x \vec{i} + I_t \vec{\omega}_t$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{I_t}\vec{H} - \frac{I_x - I_t}{I_t}\omega_x \vec{i} = \frac{H}{I_t}\left(\frac{\vec{H}}{H}\right) - \Omega \vec{i}$$

- 航天器动量矩$\vec{H}$、瞬时转速$\vec{\omega}$和自旋轴**Ox**三个矢量必定在同一平面内；
- $\vec{\omega}$在空间的运动由两种圆锥运动合成：绕自旋轴**Ox**的圆锥运动，转速速率为Ω；绕动量矩$\vec{H}$的圆锥运动，转速速率为$\Omega_r = H/I_t$。

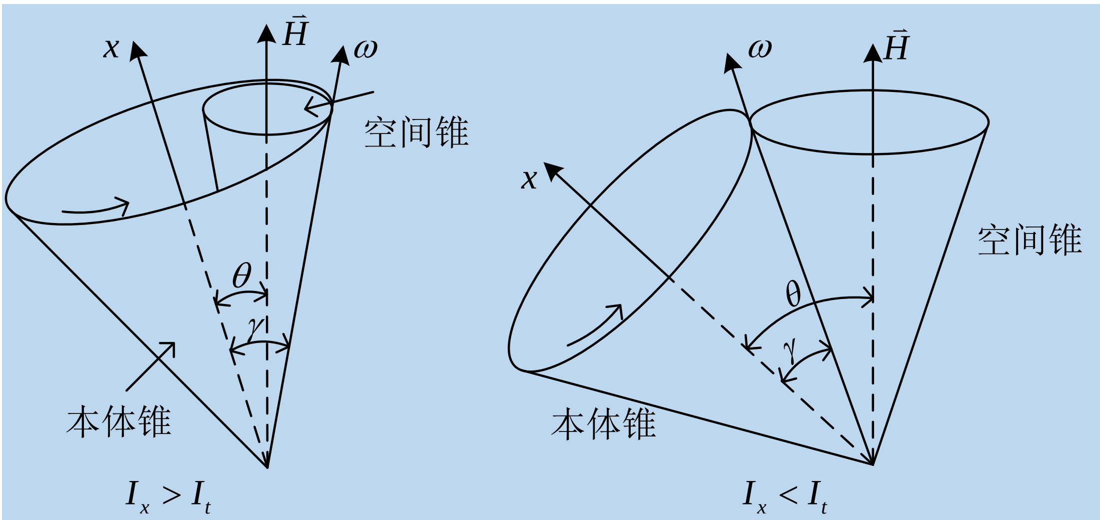
自旋卫星的章动性

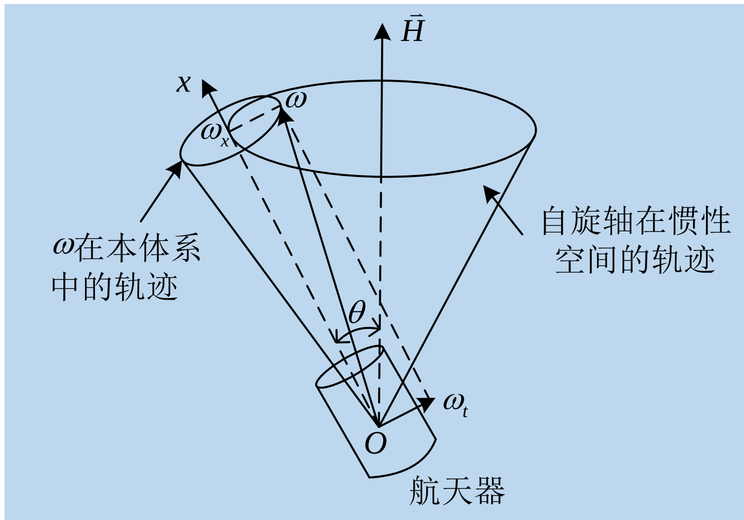
- 称自旋卫星瞬时转速$\vec{\omega}$的这两种圆锥运动为章动。
- $\vec{\omega}$ 绕自旋轴的圆锥运动称为本体章动，所形成的轨迹圆锥称为本体锥，Ω称为本体章动速率；
- $\vec{\omega}$ 绕$\vec{H}$的圆锥运动称为空间章动，所形成的圆锥称为空间锥，Ω_r称为空间章动速率。



自旋卫星的章动性

- 由于$\vec{H}$ 固定不变，空间锥在空间也是固定的。整个自旋卫星的姿态运动可以综合描述为：星体绕自旋轴旋转，同时本体锥在空间锥上滚动。两锥切线方向即为$\vec{\omega}$方向。
- 由于本体锥在空间锥上滚动，所以，星体自旋轴**Ox**也绕$\vec{H}$作圆锥运动，且其速率就是Ω_r。





自旋卫星的章动性

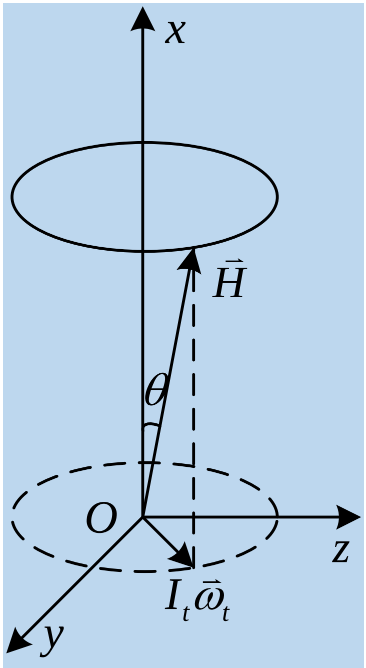
- 自旋轴**Ox**与动量矩$\vec{H}$之间的夹角θ称为章动角。

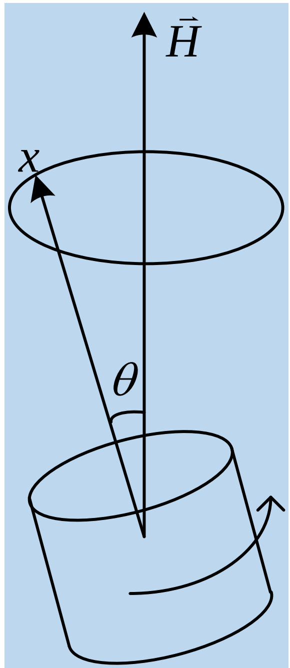
$$\tan\theta = \frac{I_t\omega_t}{I_x\omega_x}$$

$$\cos\theta = \frac{I_x\omega_x}{H}$$

- 对于轴对称自旋卫星，由于ω_x恒定，所以章动角θ也是常值。

$$0 \le \theta < 90^\circ$$





自旋卫星的章动性

- 将$\vec{\omega}$与自旋轴**Ox**之间的夹角记为γ：

$$\tan\gamma = \frac{\omega_t}{\omega_x}$$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{I_t}{I_x}\tan\gamma}$$

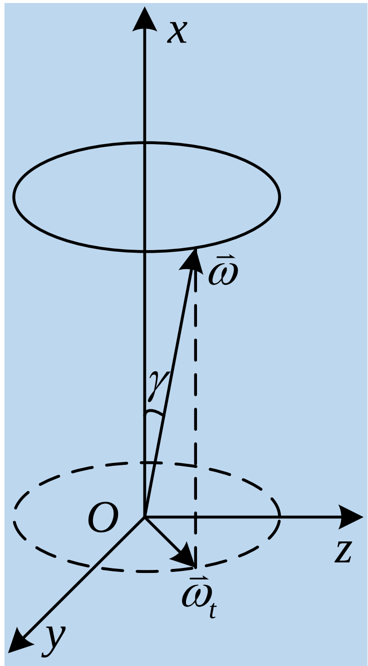
$$I_x > I_t \Rightarrow \theta < \gamma$$

$$I_x < I_t \Rightarrow \theta > \gamma$$

$$\boxed{\Omega_r = \frac{H}{I_t} = \frac{I_x\omega_x}{I_t\cos\theta}}$$

- 本体章动速率与空间章动速率之间的关系：

$$\boxed{\Omega = \frac{I_x - I_t}{I_x}\Omega_r\cos\theta \quad \left(0 \le \theta < 90^\circ\right)}$$



自旋卫星的章动性

- 自旋卫星在不同惯量情况下的章动运动：

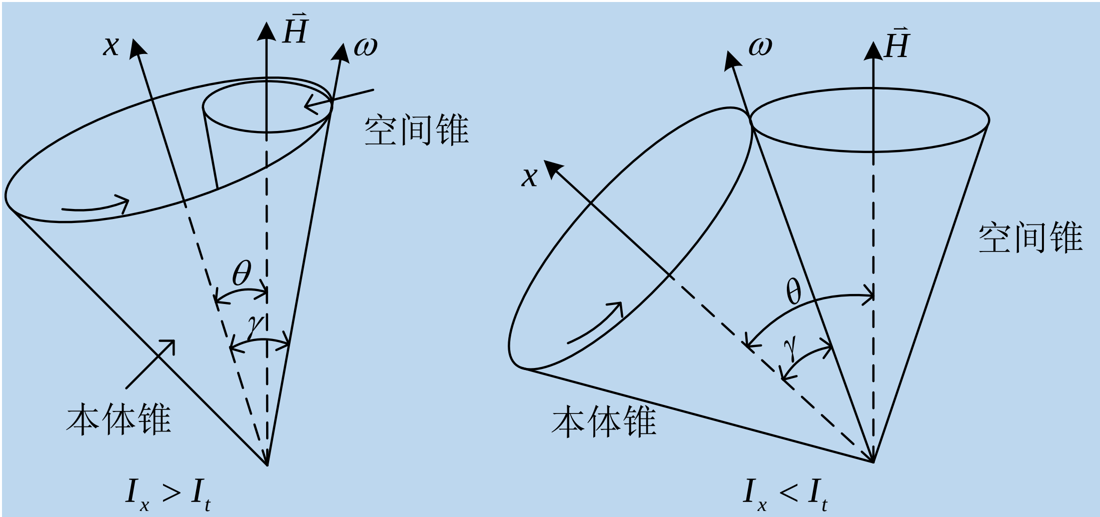
✓ 当$I_x > I_t$时，星体为扁粗形，自旋轴为最大惯量轴。此时：

- $\Omega > 0$，与ω_x同号，$\vec{\omega}$绕自旋轴本体锥旋转的方向和自旋方向同向；
- Ω与Ω_r同号，本体锥与空间锥旋转的方向相同；
- $\theta < \gamma$，$\vec{H}$在$\vec{\omega}$与**Ox**之间，空间锥在本体锥之内。

$$\Omega = \frac{I_x - I_t}{I_t}\omega_{x0}$$

$$\Omega = \frac{I_x - I_t}{I_x}\Omega_r \cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{I_t}{I_x}\tan\gamma$$



自旋卫星在不同惯量情况下的章动运动：

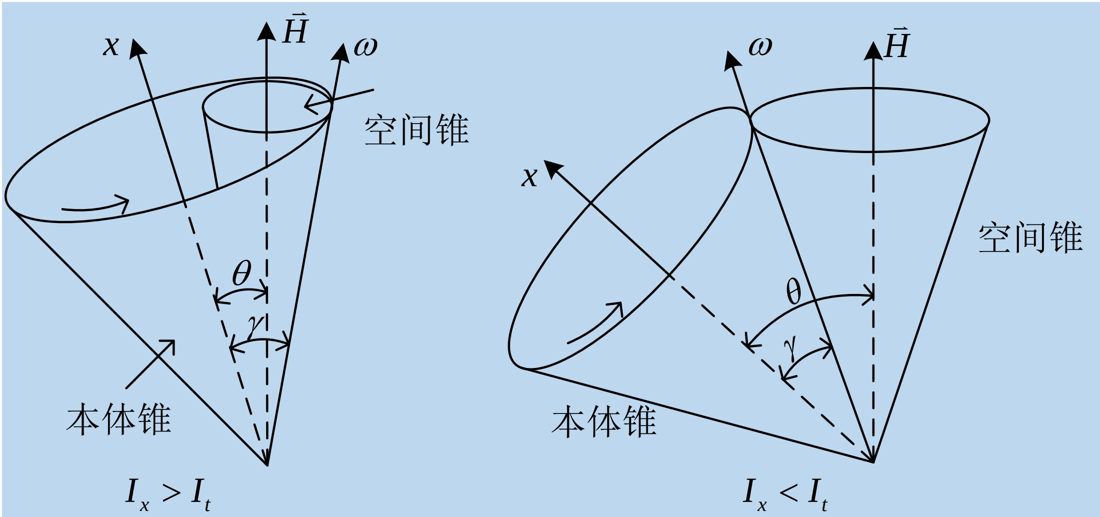
✓ 当 $I_x < I_t$时，星体为细长形，自旋轴为最小惯量轴。此时：

- $\Omega < 0$，与ω_x异号，$\vec{\omega}$绕自旋轴本体锥旋转的方向和自旋方向相反；
- Ω与Ω_r异号，本体锥与空间锥旋转的方向相反；
- $\theta > \gamma$，$\vec{\omega}$在$\vec{H}$与**Ox**之间，空间锥在本体锥之外。

$$\Omega = \frac{I_x - I_t}{I_t}\omega_{x0}$$

$$\Omega = \frac{I_x - I_t}{I_x}\Omega_r \cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{I_t}{I_x}\tan\gamma$$



自旋卫星的章动性

◆ 只要横轴存在初始角速度$\omega_y(0)$和$\omega_z(0)$或初始角加速度$\dot{\omega}_y(0)$和$\dot{\omega}_z(0)$，即使外力矩不再存在，卫星将始终存在不衰减的横向角速度$\vec{\omega}_t$。

$$\omega_y = \omega_y(0)\cos\Omega t + \frac{\dot{\omega}_y(0)}{\Omega}\sin\Omega t$$

$$\omega_z = \omega_z(0)\cos\Omega t + \frac{\dot{\omega}_z(0)}{\Omega}\sin\Omega t$$

$$\tan\theta = \frac{I_t\omega_t}{I_x\omega_x}$$

$$\tan\gamma = \frac{\omega_t}{\omega_x}$$

$\Rightarrow$ $\theta \neq 0, \gamma \neq 0$，章动就存在，从而影响自旋卫星的定向性。

□ 如果本体轴与主惯量轴不重合，会产生自旋轴摇摆运动。在自旋卫星设计和星体总装时还要求把自旋轴摇摆消除或者降低到允许水平以下。

THANKS

13389281325

dzhfeng@xidian.edu.cn