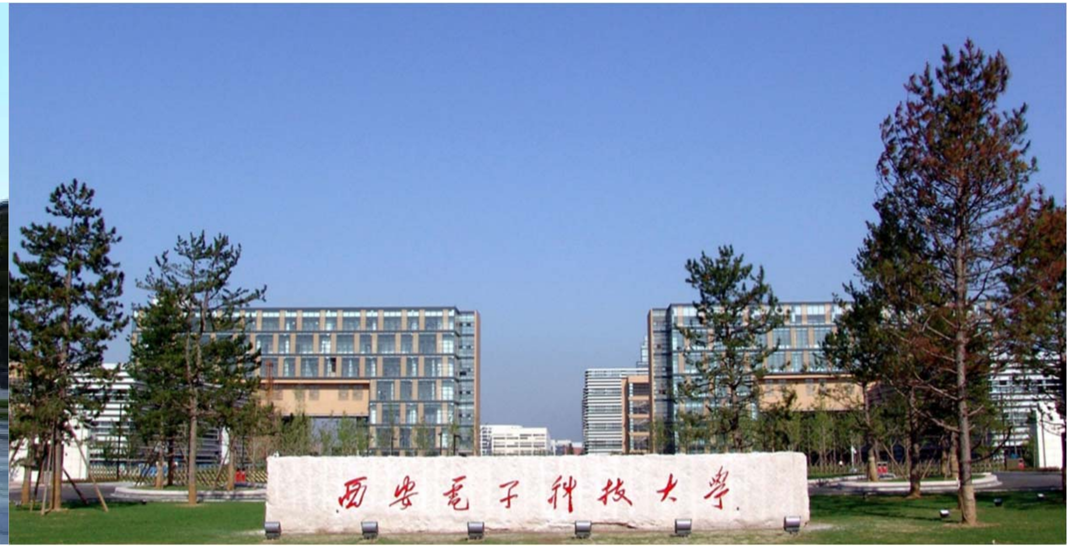
西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

航天器控制原理



冯冬竹
电话：13389281325
邮箱：dzhfeng@xidian.edu.cn
空间科学与技术学院 导航控制系

目录

CONTENTS

航天器的轨道与轨道力学

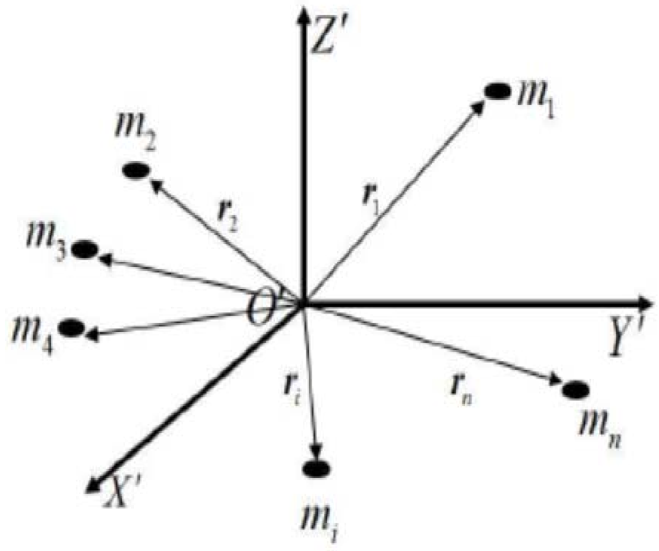
第二讲·二体轨道力学和运动方程

- **N**体问题：**N**个物体相互之间产生引力所形成的轨道力学和运动方程；
- 二体问题：两个物体相互之间产生引力所形成的轨道力学和运动方程；

N体问题

- 航天器在运动中的任何给定时刻，均会受到多个周围天体的万有引力作用，甚至还有其他的力，例如阻力、推力和太阳辐射压力等的作用。

- 不失一般性，假定存在某个合适的惯性坐标系，n个质量的位置分别为$r_1,\cdots,r_n$。



N体问题

由牛顿万有引力定律可知，m_n作用在m_i上的力：

$$\vec{F}_{gn} = -\frac{Gm_i m_n}{r_{ni}^3}\vec{r}_{ni} \qquad \left(\vec{r}_{ni} = \vec{r}_i - \vec{r}_n\right)$$

作用在第i个物体上的所有引力的矢量和为：

$$\vec{F}_g = -Gm_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{m_j}{r_{ji}^3}\vec{r}_{ji}$$

外力：阻力、推力、太阳辐射压力、由于非球形造成的摄动力等

$$\vec{F}_{其他} = \vec{F}_{阻力} + \vec{F}_{推力} + \vec{F}_{太阳压力} + \vec{F}_{干扰} + \cdots$$

作用在第i个物体上的合力：

$$\vec{F}_{总} = \vec{F}_{g} + \vec{F}_{其他}$$

N体问题

应用牛顿第二运动定律：$\vec{F}_{总}=\dfrac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\right)$

即：$$\vec{F}_{总}=m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}+\vec{v}_i\frac{dm_i}{dt}$$

1)物体排出质量以产生推力

2)某些与相对论有关的效应导致质量随时间变化

$$\ddot{\vec{r}}_i=\frac{\vec{F}_{总}}{m_i}-\dot{\vec{r}}_i\frac{\dot{m}_i}{m_i}$$

$\dot{\vec{r}}_i$和$\ddot{\vec{r}}_i$分别为第i个物体相对于惯性坐标系的速度矢量和加速度矢量；

m_i和$\dot{m}_i$分别为第i个物体的质量和质量随时间的变化率。

$$\ddot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{F}_{总}}{m_i} - \dot{\vec{r}}_i \frac{\dot{m}_i}{m_i}$$

- 假设第i个物体的质量保持不变

$$\dot{m}_i = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{F}_{总}}{m_i} = \frac{\vec{F}_g + \vec{F}_{其他}}{m_i}$$

- 阻力和其他外力不存在

$$\vec{F}_{其他} = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{F}_g}{m_i} = -G\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{m_j}{r_{ji}^3}\vec{r}_{ji}$$

N体问题

$$\ddot{\vec{r}}_i = -G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{m_j}{r_{ji}^3}\vec{r}_{ji}$$

- 假定 m_1 和 m_2 分别为地球和绕地球运行的航天器，$m_3,\cdots,m_n$ 为月球、太阳和其他行星。

研究的是近地航天器的运动

- 当i=1时：$$\ddot{\vec{r}}_1 = -G\sum_{j=2}^{n}\frac{m_j}{r_{j1}^3}\vec{r}_{j1}$$

- 当i=2时：$$\ddot{\vec{r}}_2 = -G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n}\frac{m_j}{r_{j2}^3}\vec{r}_{j2}$$

N体问题

$$\vec{r}_{21}=\vec{r}_1-\vec{r}_2 \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_{21}=\ddot{\vec{r}}_1-\ddot{\vec{r}}_2$$

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_1&=-G\sum_{j=2}^{n}\frac{m_j}{r_{j1}^3}\vec{r}_{j1}\\ \ddot{\vec{r}}_2&=-G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n}\frac{m_j}{r_{j2}^3}\vec{r}_{j2}\end{aligned}\right\}\ddot{\vec{r}}_{21}=G\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n}\frac{m_j}{r_{j2}^3}\vec{r}_{j2}-G\sum_{j=2}^{n}\frac{m_j}{r_{j1}^3}\vec{r}_{j1}$$

$$\Big\Downarrow \quad \vec{r}_{12}=-\vec{r}_{21}$$

$$\ddot{\vec{r}}_{21}=-\frac{G(m_1+m_2)}{r_{21}^3}\vec{r}_{21}+\sum_{j=3}^{n}Gm_j\left(\frac{\vec{r}_{j2}}{r_{j2}^3}-\frac{\vec{r}_{j1}}{r_{j1}^3}\right)$$

$$\ddot{\vec{r}}_{21} = \underbrace{-\frac{G(m_1+m_2)}{r_{21}^3}\vec{r}_{21}}_{\text{地球引力}} + \underbrace{\sum_{j=3}^{n} Gm_j\left(\frac{\vec{r}_{j2}}{r_{j2}^3} - \frac{\vec{r}_{j1}}{r_{j1}^3}\right)}_{\text{摄动影响}}$$

- m_1为地球质量，m_2为航天器的质量，r_{21} 和 $\ddot{r}_{21}$分别为航天器相对于地球的矢径和加速度。

N体问题

$$\ddot{\vec{r}}_{21}=-\frac{G\left(m_1+m_2\right)}{r_{21}^3}\vec{r}_{21}+\boxed{\sum_{j=3}^{n}Gm_j\left(\frac{\vec{r}_{j2}}{r_{j2}^3}-\frac{\vec{r}_{j1}}{r_{j1}^3}\right)}$$

- 为了进一步简化方程，需要确定摄动影响与航天器和地球间的引力相比有多大。
- 高度为370km的航天器的各相对加速度。
- 围绕地球运行的航天器受到地球的引力占有主导地位，因此，可进一步简化方程。

地球	8.9×10^{-1}
太阳	6.0×10^{-4}
水星	2.6×10^{-10}
金星	1.9×10^{-8}
火星	7.1×10^{-10}
木星	3.2×10^{-8}
土星	2.3×10^{-9}
天王星	8.0×10^{-11}
海王星	3.6×10^{-11}
冥王星	1.0×10^{-12}
月球	3.3×10^{-6}
地球扁率	1.0×10^{-3}

- 地球引力>>其他摄动力

$$\ddot{\vec{r}}_{21} = -\frac{G\left(m_1 + m_2\right)}{r_{21}^3}\vec{r}_{21} + \boxed{\sum_{j=3}^{n} G m_j \left(\frac{\vec{r}_{j2}}{r_{j2}^3} - \frac{\vec{r}_{j1}}{r_{j1}^3}\right)}$$

$$\ddot{\vec{r}}_{21} = -\frac{G\left(m_1 + m_2\right)}{r_{21}^3}\vec{r}_{21}$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G\left(M + m\right)}{r^3}\vec{r}$$

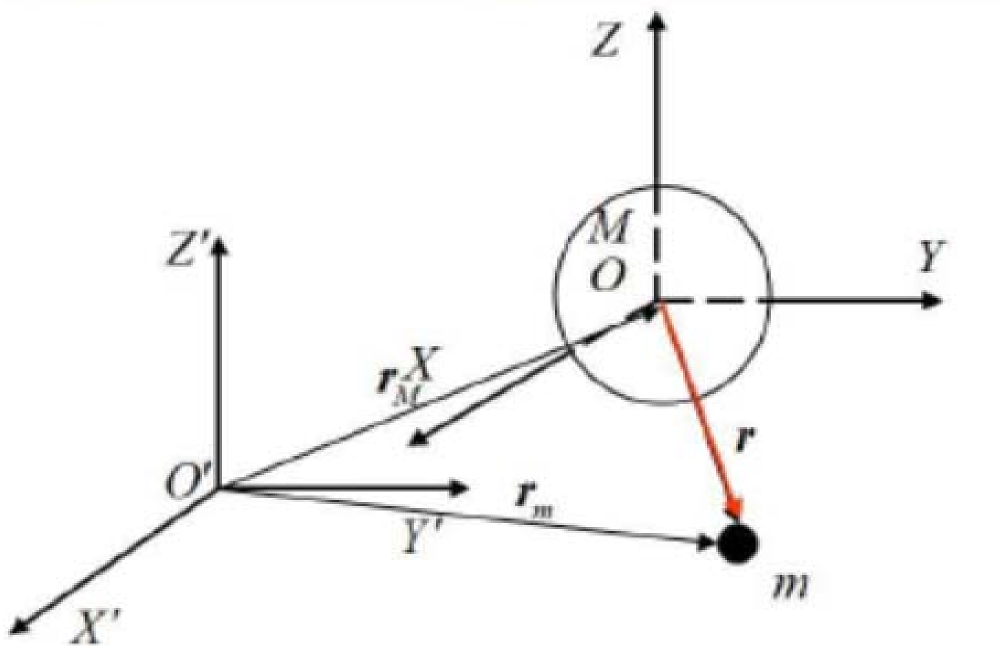
N体问题 → 二体问题

二体问题和运动方程

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^3}\vec{r}$$

方程中只有两天体间的相对矢径，没有天体到绝对惯性系的绝对矢径。

选择一个不转动的非惯性坐标系，例如原点在地球质心，三轴与惯性系平行的坐标系。



二体问题和运动方程

考虑实际情况：

$$G\left(M+m\right)\approx GM$$

为了方便和具有一般性，称M为中心引力体，定义引力参数 $\mu\equiv GM$

$$\ddot{\vec{r}}=-\frac{G\left(M+m\right)}{r^3}\vec{r} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}+\frac{\mu}{r^3}\vec{r}=0$$

二体运动方程

对于地球：

对于不同的中心引力体，μ的值不同。

对于地球：$\mu=3.986012\times10^3\ km^3/s^2$

对于太阳：$\mu=1.327154\times10^{11}\ km^3/s^2$

机械能守恒

$$\ddot{\vec{r}}+\frac{\mu}{r^3}\vec{r}=0 \xrightarrow{\dot{\vec{r}}} \dot{\vec{r}}\cdot\left(\ddot{\vec{r}}+\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\right)=0$$

$$\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}+\dot{\vec{r}}\cdot\frac{\mu}{r^3}\vec{r}=0 \xrightarrow[\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}]{\vec{v}=\dot{\vec{r}}} \vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}+\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}=0$$

$$\vec{a}\cdot\dot{\vec{a}}=a\cdot\dot{a}$$

$$v\dot{v}+\frac{\mu}{r^3}r\dot{r}=0$$

轨道运动常数

$$v\dot{v}+\frac{\mu}{r^3}r\dot{r}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)=v\dot{v}$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{\mu}{r}\right)=\frac{\mu}{r^2}\dot{r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{r}\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{r}+c\right)=0$$

$$\varepsilon=\frac{v^2}{2}+\left(c-\frac{\mu}{r}\right)=\text{常数}$$

比机械能

轨道运动常数

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} + \left(c - \frac{\mu}{r}\right) = 常数$$

$\frac{v^2}{2}$ 比动能：单位质量动能

$c - \frac{\mu}{r}$ 比势能：单位质量势能

- 当航天器沿着轨道运行时，航天器的比机械能既不增加，也不减少，而是保持常值。
- 常数c的选取依赖于零势能面的选择。如果以无穷远处$(r=\infty)$为零势能面，则：

$$c - \frac{\mu}{r} = 0 \xrightarrow{r=\infty} c = 0 \longrightarrow \varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

角动量守恒

$$\ddot{\vec{r}}+\frac{\mu}{r^3}\vec{r}=0 \xrightarrow{\vec{r}} \vec{r}\times\left(\ddot{\vec{r}}+\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\right)=0$$

$$\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}+\vec{r}\times\frac{\mu}{r^3}\vec{r}=0 \xrightarrow{\vec{a}\times\vec{a}=0} \vec{r}\times\ddot{\vec{r}}=0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\right)=\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}+\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}=0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{v}\right)=0$$

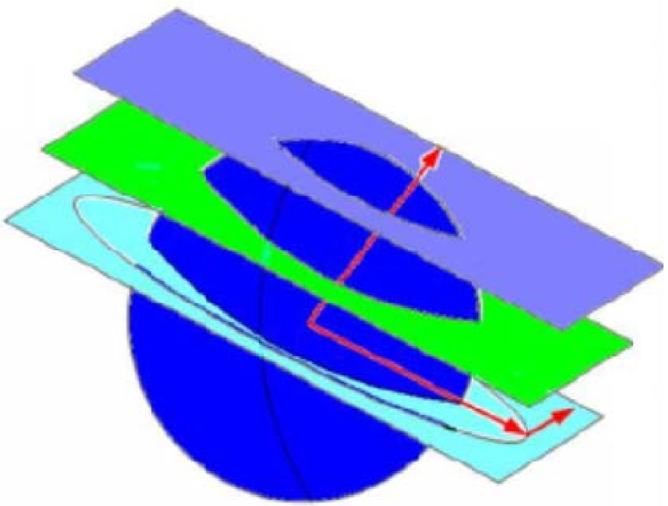
$\vec{h}=\vec{r}\times\vec{v}=$常矢量

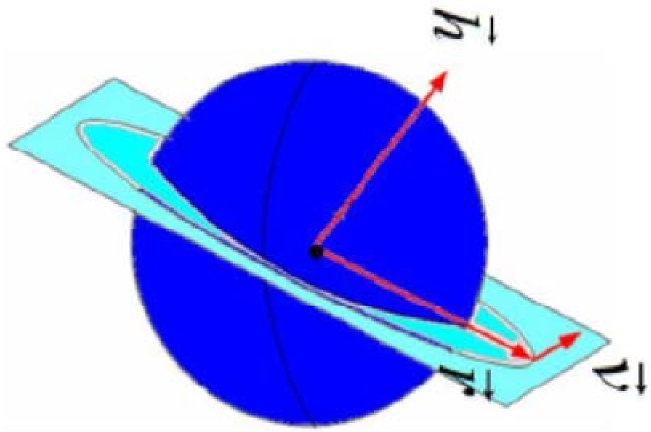
比角动量

比角动量沿着其轨道是一个常矢量

$\vec{h}=\vec{r}\times\vec{v}$ → $\vec{h}\perp\vec{r},\vec{v}$ 所在的平面

$\vec{h}=$常矢量 → $\vec{r},\vec{v}$ 所处的平面不变，轨道平面具有定向性





THANKS

13389281325

dzhfeng@xidian.edu.cn