



第五章 频率响应法

5.1 频率特性的基本概念

5.2 典型环节的频率特性

5.3 开环系统频率特性图的绘制

5.4 控制系统的频域稳定判据

5.5 稳定裕量

5.6 开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

5.7 闭环频率特性和频域性能指标



5.2典型环节的频率特性-Bode图

5.2典型环节的频率特性-Bode图

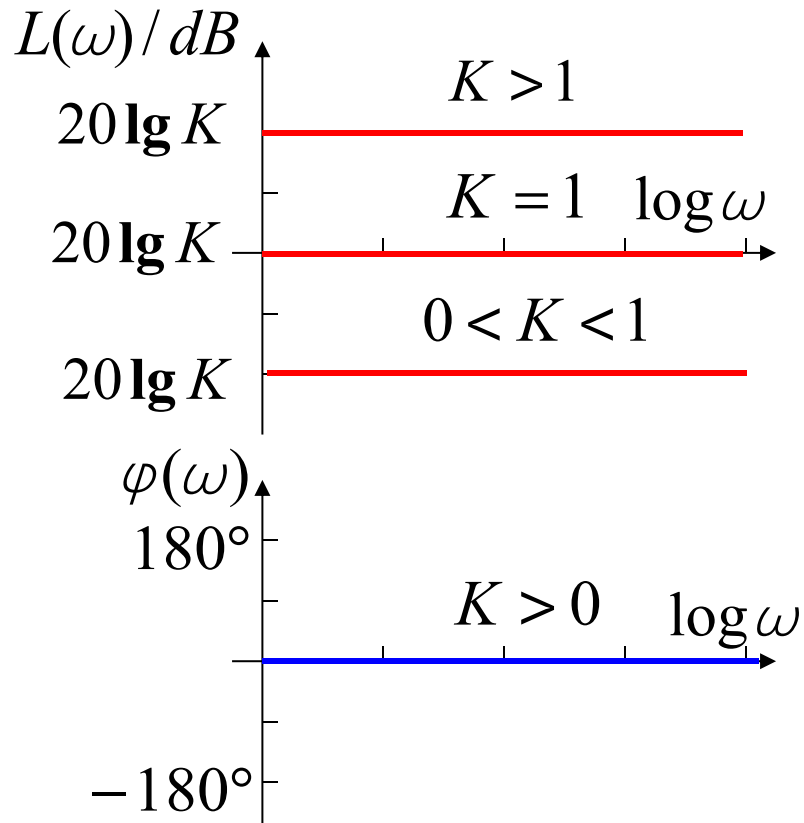
- ▶ 比例环节
- ▶ 积分环节
- ▶ 惯性环节
- ▶ 振荡环节
- ▶ 微分环节
- ▶ 延迟环节



5.2典型环节的频率特性-Bode图

1. 比例环节 $G(s) = K, (K > 0), G(j\omega) = K$

幅频特性: $A(\omega) = K$; 相频特性: $\varphi(\omega) = 0$



对数幅频特性:

$$L(\omega) = 20 \lg K = \begin{cases} > 0 & K > 1 \\ = 0 & K = 1 \\ < 0 & 0 < K < 1 \end{cases}$$

对数相频特性:

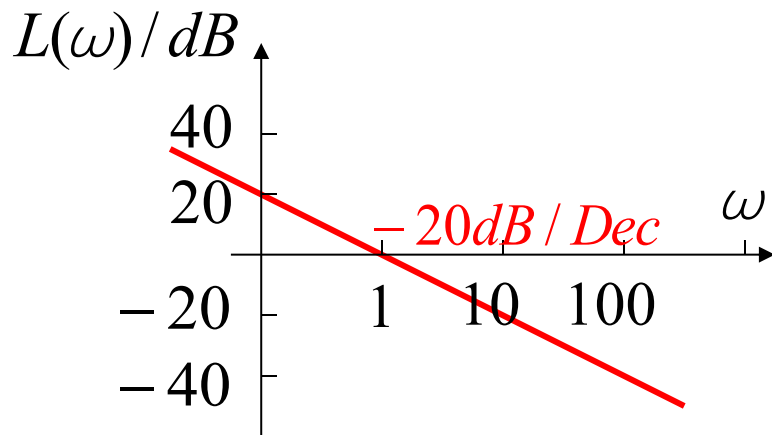
$$\varphi(\omega) = \angle K = 0^\circ$$



5.2典型环节的频率特性-Bode图

2. 积分环节: $G(s) = \frac{1}{s}$, $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-\frac{\pi}{2}}$

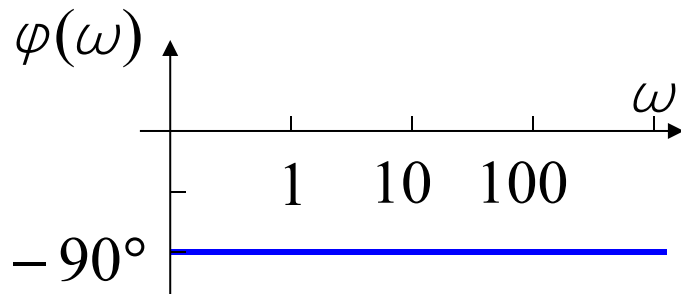
幅频特性: $A(\omega) = \frac{1}{\omega}$; 相频特性: $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$



对数幅频特性:

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\omega} \\ &= -20 \lg \omega \end{aligned}$$

可见斜率为 -20dB/dec .



对数相频特性:

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$



5.2典型环节的频率特性-Bode图

3. 惯性环节: $G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$, $G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1}$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctan(T\omega)$$

①对数幅频特性:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = -20\lg \sqrt{1 + T^2\omega^2}$$

为了图示简单, 采用分段直线近似表示:

低频段: 当 $T\omega \ll 1$ 时, $L(\omega) \approx 20\lg 1 = 0$, 称为**低频渐近线**。

高频段: 当 $T\omega \gg 1$ 时, $L(\omega) \approx -20\lg T\omega$, 称为**高频渐近线**。

这是一条斜率为-20dB/Dec的直线
(ω 每增加10倍频程下降20分贝)。



5.2典型环节的频率特性-Bode图

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}$$

- ▶ 当 $\omega \rightarrow 0$ 时, 对数幅频曲线趋近于低频渐近线 $L(\omega) \approx 0$,
- ▶ 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 对数幅频曲线趋近于高频渐近线 $L(\omega) \approx -20 \lg T\omega$ 。

低频高频渐近线的交点为:

$$0 = -20 \lg T\omega$$

$$\Rightarrow T\omega = 1$$

$$\Rightarrow \omega_n = \frac{1}{T}$$

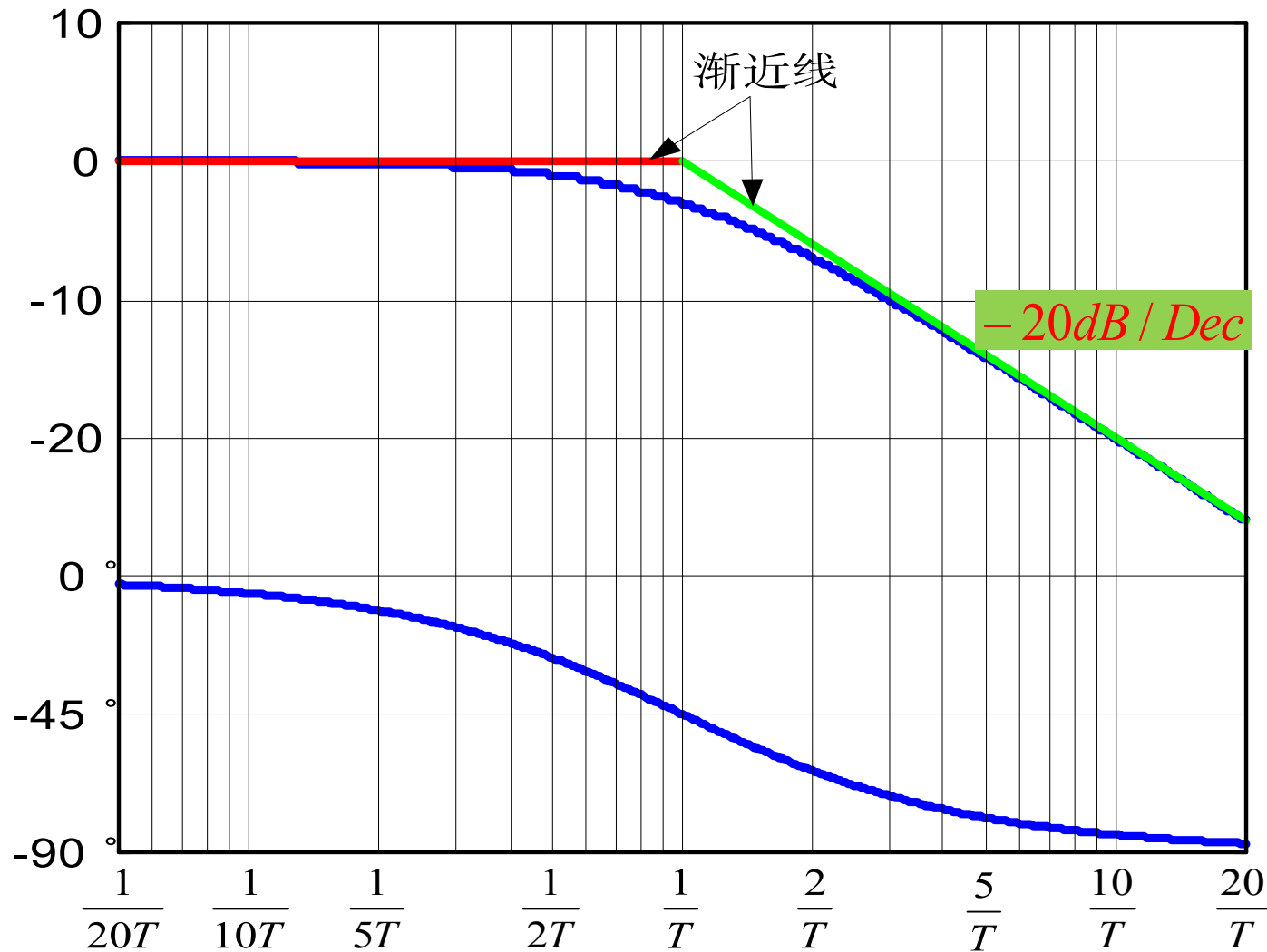
称为**转折频率**
或**交接频率**。

惯性环节的对数幅频特性可以用这两段渐近线近似表示:

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < \frac{1}{T} \\ -20 \lg T\omega, & \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$



5.2典型环节的频率特性-Bode图



图中，红、绿线分别是低频、高频渐近线，蓝线是实际曲线。



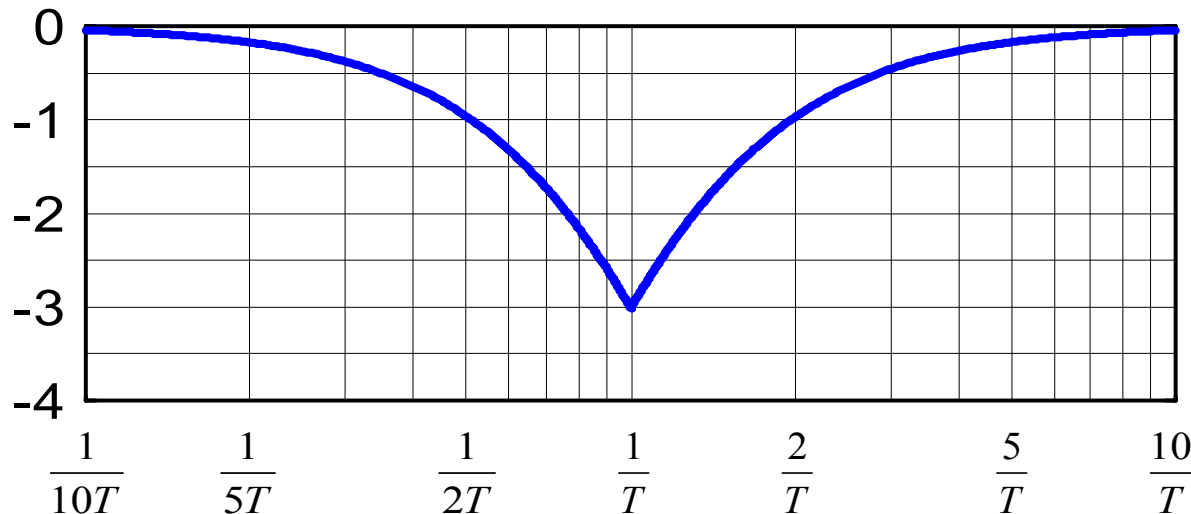
5.2典型环节的频率特性-Bode图

波德图误差分析（实际频率特性和渐近线之间的误差）：

当 $\omega \leq \omega_n$ 时，误差为： $\Delta_1 = -20\lg \sqrt{1+T^2\omega^2}$

当 $\omega > \omega_n$ 时，误差为： $\Delta_2 = -20\lg \sqrt{1+T^2\omega^2} + 20\lg T\omega = -20\lg \sqrt{1/T^2\omega^2 + 1}$

ωT	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10
$L(\omega), \text{dB}$	-0.04	-0.2	-1	-3	-7	-14.2	-20.04
渐近线, dB	0	0	0	0	-6	-14	-20
误差, dB	-0.04	-0.2	-1	-3	-1	-0.2	-0.04



最大误差发生在
 $\omega = \omega_n = \frac{1}{T}$ 处，为

$$\begin{aligned}\Delta_{\max} &= -20\lg \sqrt{1+T^2\omega_0^2} \\ &= -20\lg \sqrt{2} \\ &\approx -3(\text{dB})\end{aligned}$$



5.2典型环节的频率特性-Bode图

②相频特性: $\varphi(\omega) = -\arctan(T\omega)$

作图时先计算几个特殊点:

ωT	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	1.0
$\varphi(\omega)$	-0.6	-1.1	-2.9	-5.7	-11.3	-16.7	-26.6	-35	-45
ωT	2.0	3.0	4.0	5.0	7.0	10	20	50	100
$\varphi(\omega)$	-63.4	-71.5	-76	-78.7	-81.9	-84.3	-87.1	-88.9	-89.4

当 $\omega=0$ 时, $\varphi(0)=0$; 当 $\omega=\frac{1}{T}$ 时, $\varphi(\frac{1}{T})=-\frac{\pi}{4}$; 当 $\omega=\infty$ 时, $\varphi(\infty)=-\frac{\pi}{2}$ 。

- 由图不难看出相频特性曲线在半对数坐标系中对于 $(\omega_n, -45^\circ)$ 点是斜对称的, 这是对数相频特性的一个特点。
- 当时间常数 T 变化时, 对数幅频特性和对数相频特性形状都不变, 仅仅是根据转折频率 $1/T$ 的大小整条曲线向左或向右平移。
- 当增益 K 改变时, 相频特性不变, 幅频特性上下平移。



5.2典型环节的频率特性-Bode图

4. 振荡环节: $G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

讨论 $0 \leq \zeta \leq 1$ 时的情况:

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1 - T^2\omega^2) + j2\zeta\omega T}$$

幅频特性为: $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\zeta\omega T)^2}}$

相频特性为: $\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\zeta\omega T}{1 - T^2\omega^2}\right)$

①对数幅频特性:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\zeta\omega T)^2}$$



5.2典型环节的频率特性-Bode图

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\zeta \omega T)^2}$$

低频段渐近线: $T\omega \ll 1$ 时, $L(\omega) \approx 0$

高频段渐近线: $T\omega \gg 1$ 时, $L(\omega) \approx -20 \lg \sqrt{(T^2 \omega^2)^2} = -40 \lg T\omega$

- ▶ 两渐近线的交点 $\omega_o = \frac{1}{T}$ 称为振荡环节的**转折频率**或**交接频率**。
- ▶ $\omega > \omega_0$ 后斜率为**-40dB/Dec**。

振荡环节的对数幅频特性可以用这两段渐近线近似表示:

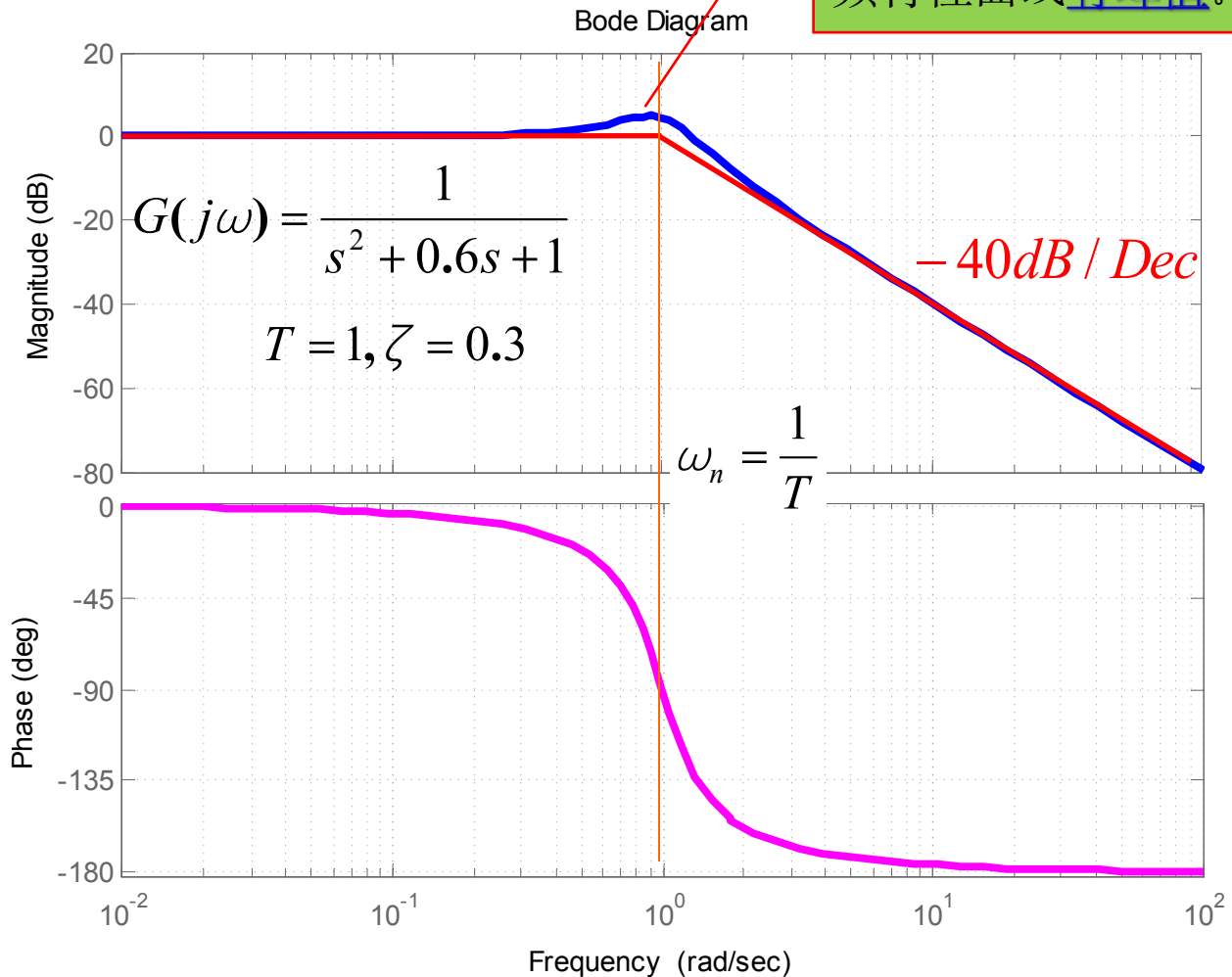
$$L_a(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < \frac{1}{T} \\ -40 \lg T\omega, & \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$



5.2典型环节的频率特性-Bode图

Matlab代码如下:

```
N=[1];  
D=[1 0.6 1];  
bode(N,D);  
h = findobj(gcf, 'Type','line');  
set(h, 'LineWidth', 2);  
set(h(3), 'linewidth', 2.5);  
set(h(4), 'linewidth', 2.5);  
set(h(3), 'color', 'm');  
set(h(4), 'color', 'b');  
%set(h(3), 'linestyle', '--');  
grid on;
```





5.2典型环节的频率特性-Bode图

对 $A(\omega)$ 求导并令等于零，可解得 $A(\omega)$ 的极值对应的频率 ω_r 。

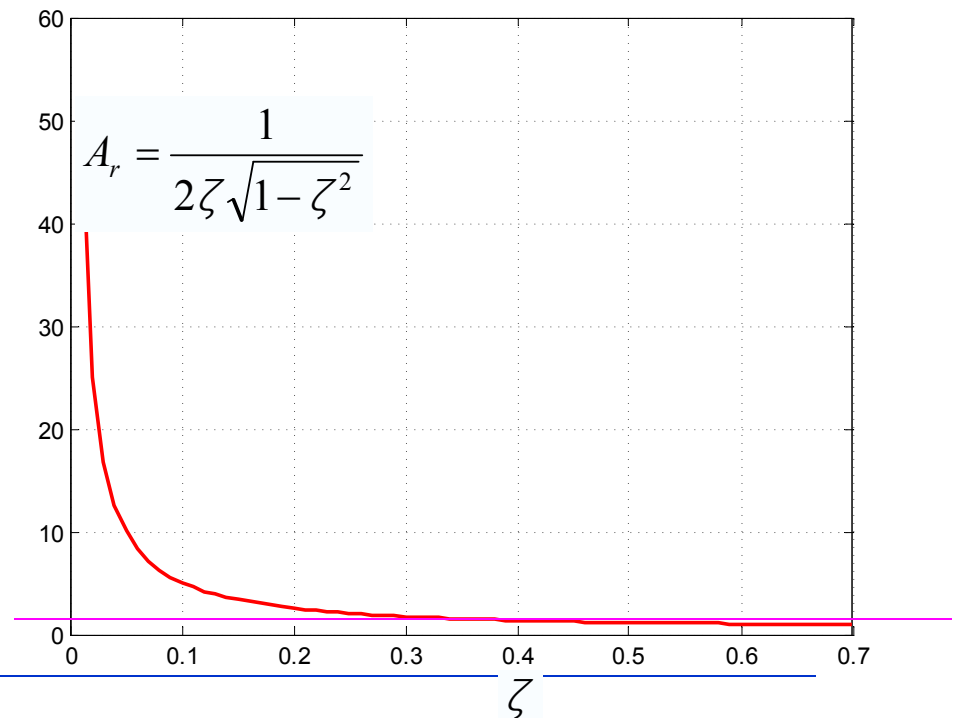
$$\omega_r = \frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{T} = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} \quad (0 < \zeta < 0.707)$$

该频率称为**谐振峰值频率**。可见，谐振峰值频率与阻尼系数 ζ 有关，当 $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ 时， $\omega_r = 0$ ；当 $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，无谐振峰值；当 $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，有**谐振峰值**：

$$A_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Matlab代码如下：

```
x=0:0.01:0.707;  
y=1./(2.*x.*sqrt(1-x.^2));  
plot(x,y, 'LineWidth', 2,'color','r');  
grid on;
```



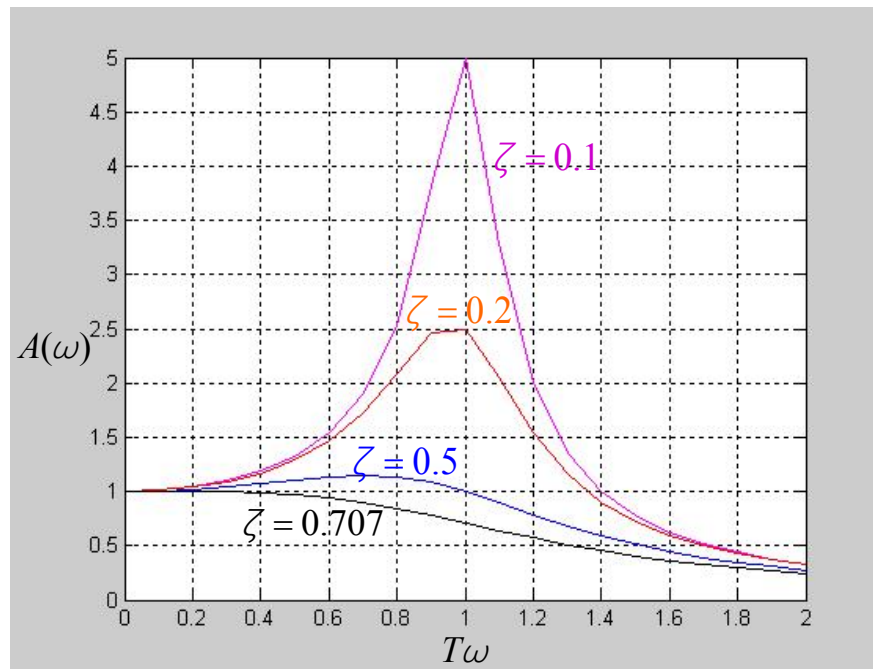


5.2典型环节的频率特性-Bode图

由幅频特性 $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\zeta\omega T)^2}}$

当 $\omega = \omega_n$, $A(\omega_n) = \frac{1}{2\zeta}$, $L(\omega_n) = -20\lg 2\zeta$ 。

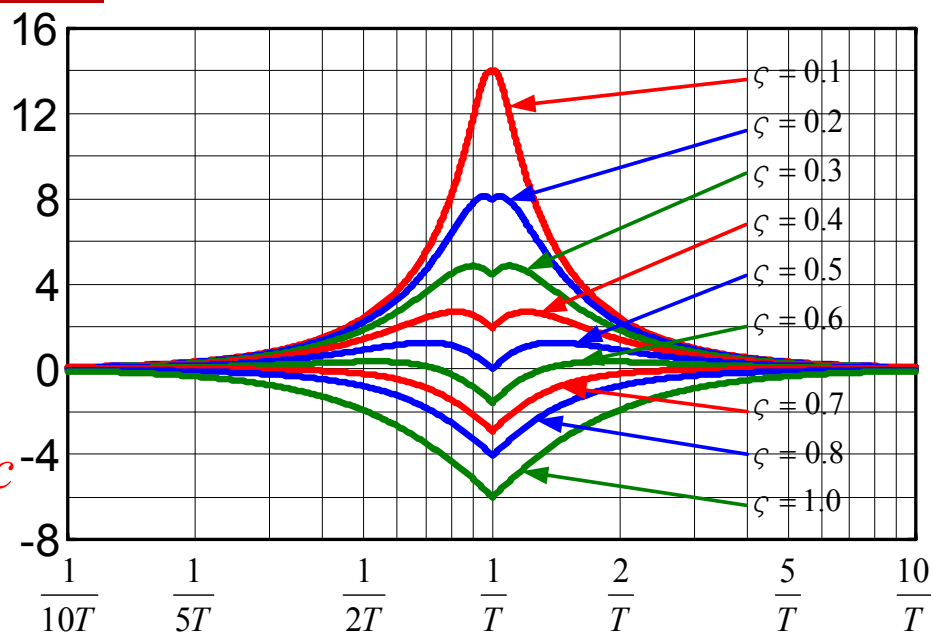
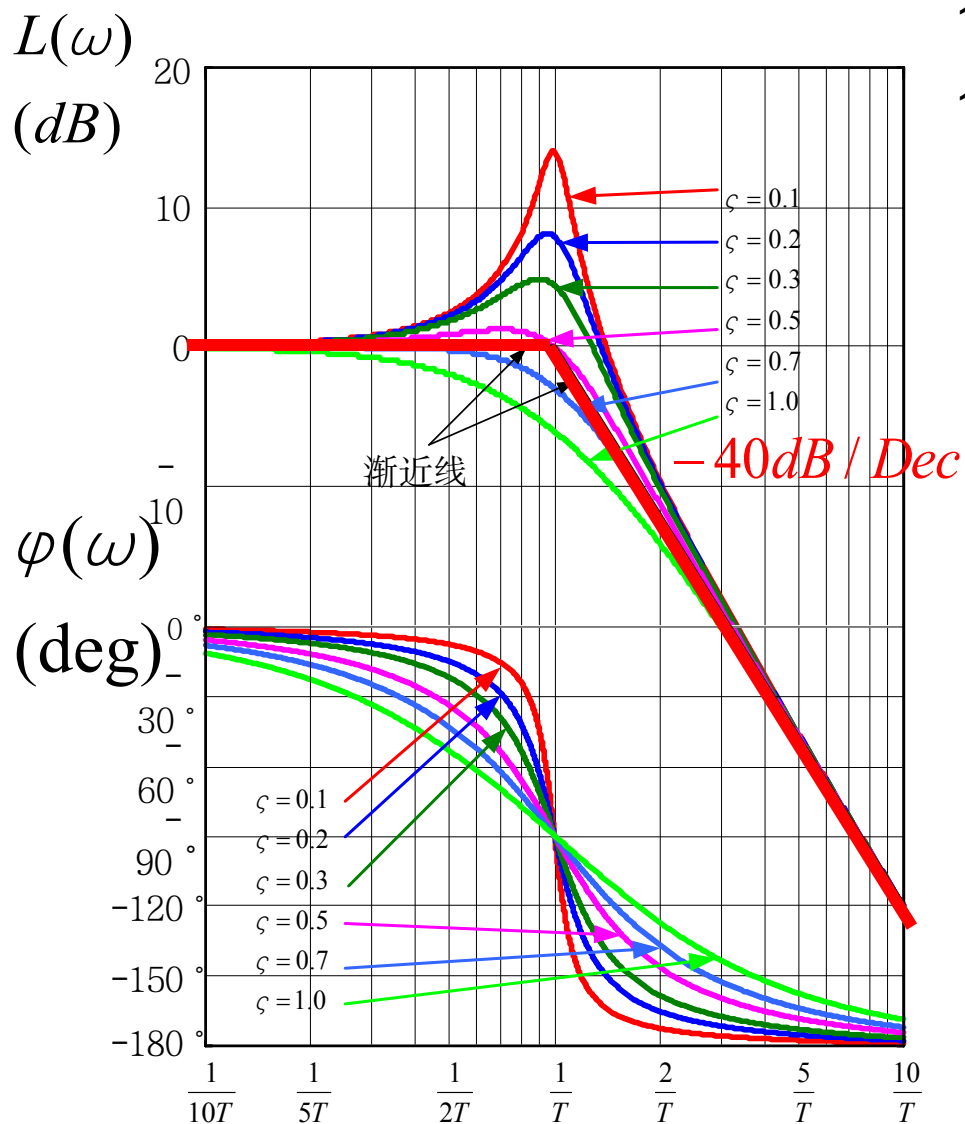
因此在转折频率附近的渐近线依不同阻尼系数与实际曲线可能有很大误差。



幅值 $A(\omega)$ 与 $T\omega$ 的关系:



5.2典型环节的频率特性-Bode图



左图是不同阻尼系数情况下的对数幅频特性和对数相频特性图。上图是不同阻尼系数情况下的对数幅频特性实际曲线与渐近线之间的误差曲线。

当 $0.3 < \zeta < 0.8$, 误差约为 $\pm 4 \text{ dB}$



5.2典型环节的频率特性-Bode图

②相频特性: $\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta\omega T}{1-T^2\omega^2}$

几个特殊点: $\omega = 0, \varphi(\omega) = 0; \omega = \frac{1}{T}, \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}; \omega = \infty, \varphi(\omega) = -\pi$ 。

相频特性曲线在半对数坐标中关于 $(\omega_0, -90^\circ)$ 点是斜对称的。

注意: 说明的是当 $\omega \in (0, \frac{1}{T})$ 时, $\varphi(\omega) \in (0, -90^\circ)$, 当 $\omega \in (\frac{1}{T}, \infty)$ 时, $\varphi(\omega) \in (-90^\circ, -180^\circ)$ 。此时若根据相频特性的表达式用计算器来计算只能求出 $\pm 90^\circ$ 之间的值(\arctan 函数的主值范围), 也就是说当 $\omega \in (\frac{1}{T}, \infty)$ 时, 用计算器计算的结果要经过转换才能得到。即当 $\omega \in (\frac{1}{T}, \infty)$ 时, 用计算器计算的结果要减 180° 才能得到。

或用下式计算

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{T\omega + \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} - \arctan \frac{T\omega - \sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$



5.2典型环节的频率特性-Bode图

5. 微分环节：

微分环节有三种：纯微分、一阶微分和二阶微分。传递函数分别为：

$$G(s) = s$$

$$G(s) = 1 + Ts$$

$$G(s) = T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1$$

频率特性分别为：

$$G(j\omega) = j\omega$$

$$G(j\omega) = 1 + jT\omega$$

$$G(j\omega) = 1 - T^2\omega^2 + j2\zeta\omega T$$



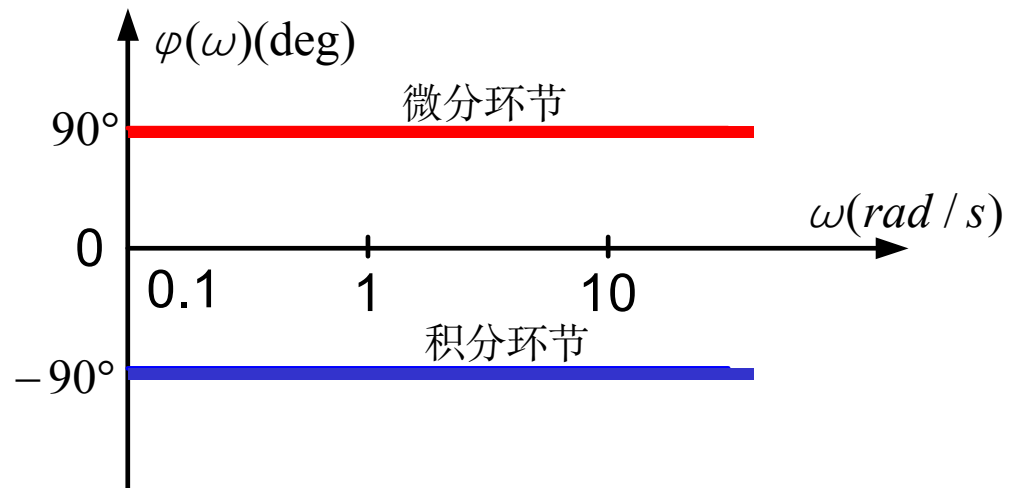
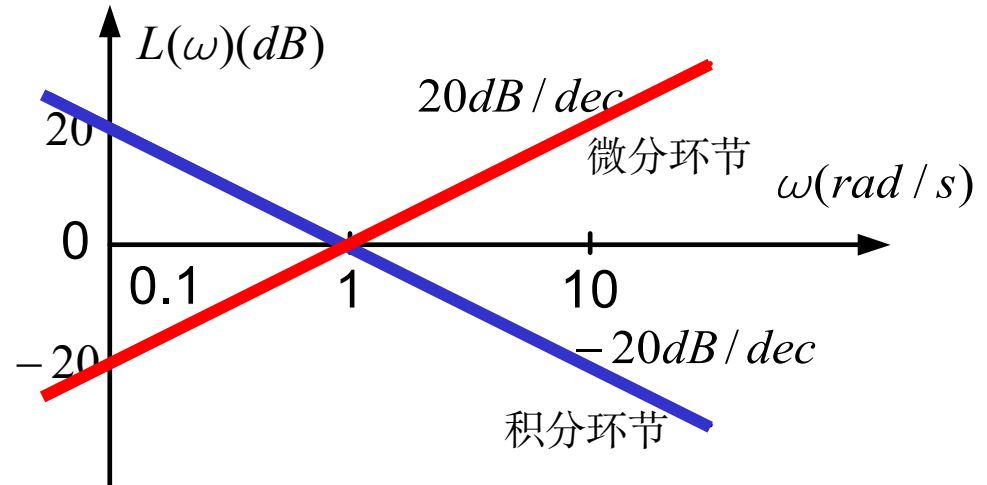
5.2典型环节的频率特性-Bode图

① 纯微分环节: $G(s) = s$, $G(j\omega) = j\omega$

$$A(\omega) = \omega$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \omega$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$





5.2典型环节的频率特性-Bode图

② 一阶微分: $G(s) = 1 + Ts$, $G(j\omega) = 1 + jT\omega$

$$A(\omega) = \sqrt{1 + T^2\omega^2}, \quad \varphi(\omega) = \arctan(T\omega)$$

$$L(\omega) = 20\lg\sqrt{1 + T^2\omega^2}$$

对数幅频特性（用渐近线近似）：

低频段渐近线：当 $T\omega \ll 1$ 时, $A(\omega) \approx 1$, $20\lg A(\omega) = 0$

高频段渐近线：当 $T\omega \gg 1$ 时, $A(\omega) \approx T\omega$, $L(\omega) = 20\lg T\omega$

这是斜率为+20dB/Dec的直线。低、高频渐近线的交点为 $\omega = \frac{1}{T}$

相频特性：几个特殊点如下

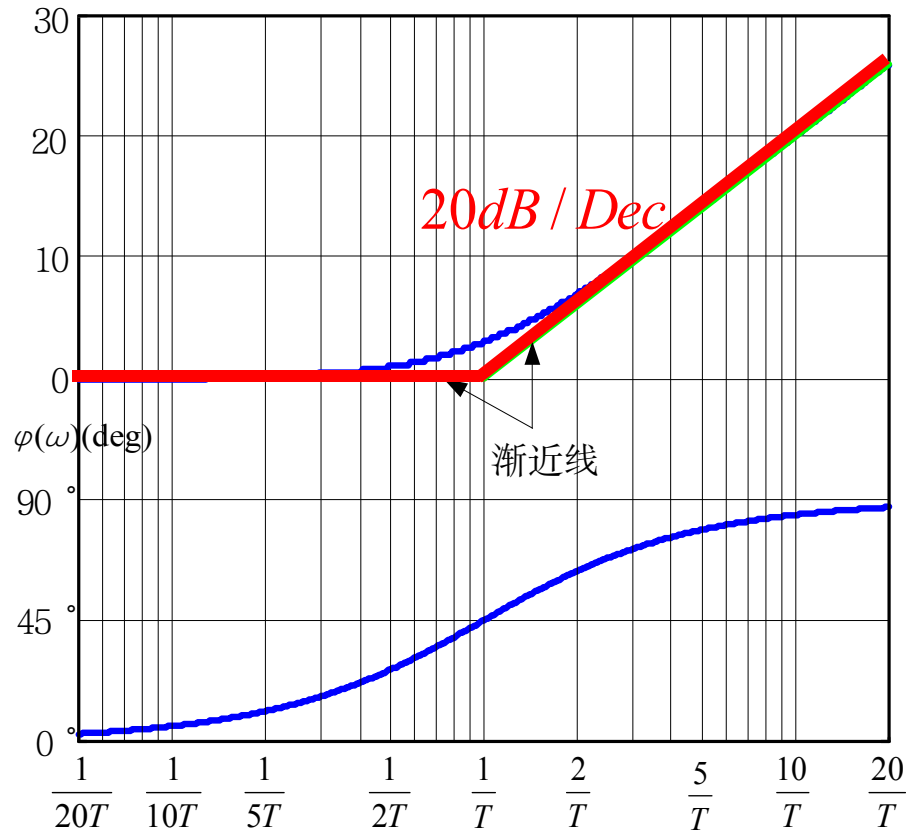
$$\omega = 0, \quad \varphi(\omega) = 0; \quad \omega = \frac{1}{T}, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{4}; \quad \omega = \infty, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

相角的变化范围从0到 $\frac{\pi}{2}$ 。

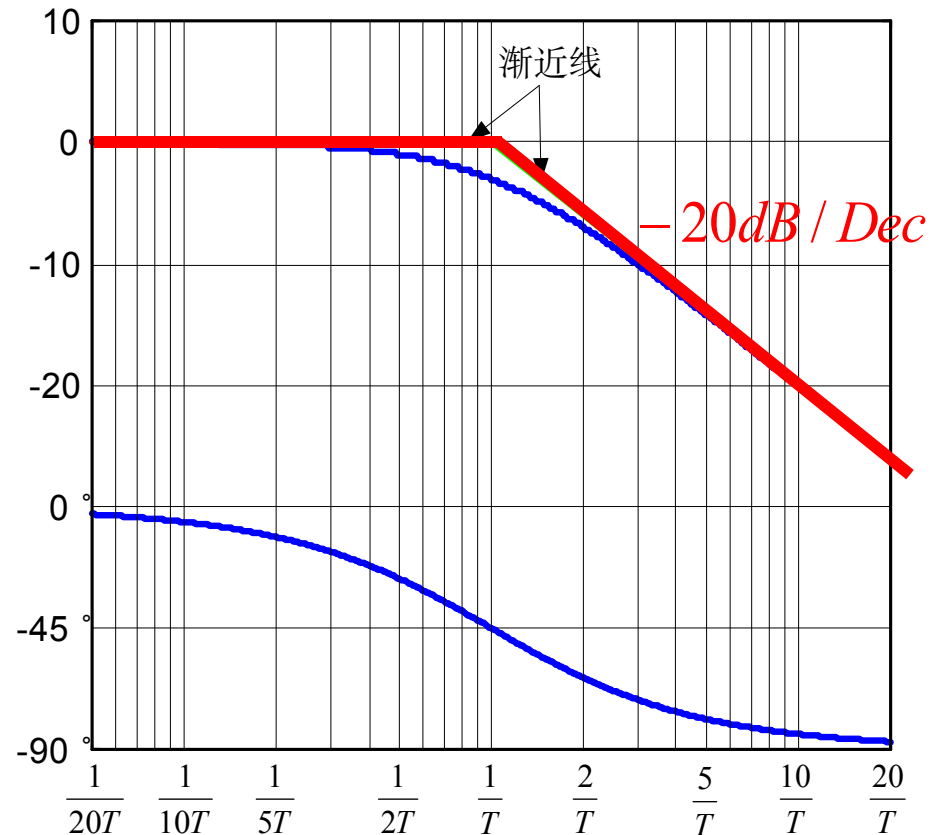


5.2典型环节的频率特性-Bode图

$L(\omega)(dB)$



一阶微分环节的波德图



惯性环节的波德图



5.2典型环节的频率特性-Bode图

③ 二阶微分环节 $G(s) = T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1$, $G(j\omega) = 1 - T^2 \omega^2 + j2\zeta \omega T$

幅频和相频特性为:

$$A(\omega) = \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\zeta \omega T)^2}, \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{2\zeta \omega T}{1 - T^2 \omega^2}$$

$$L(\omega) = 20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\zeta \omega T)^2}$$

低频渐近线: $T\omega \ll 1$ 时, $L(\omega) \approx 0$

高频渐近线: $T\omega \gg 1$ 时, $L(\omega) \approx 40 \lg T\omega$

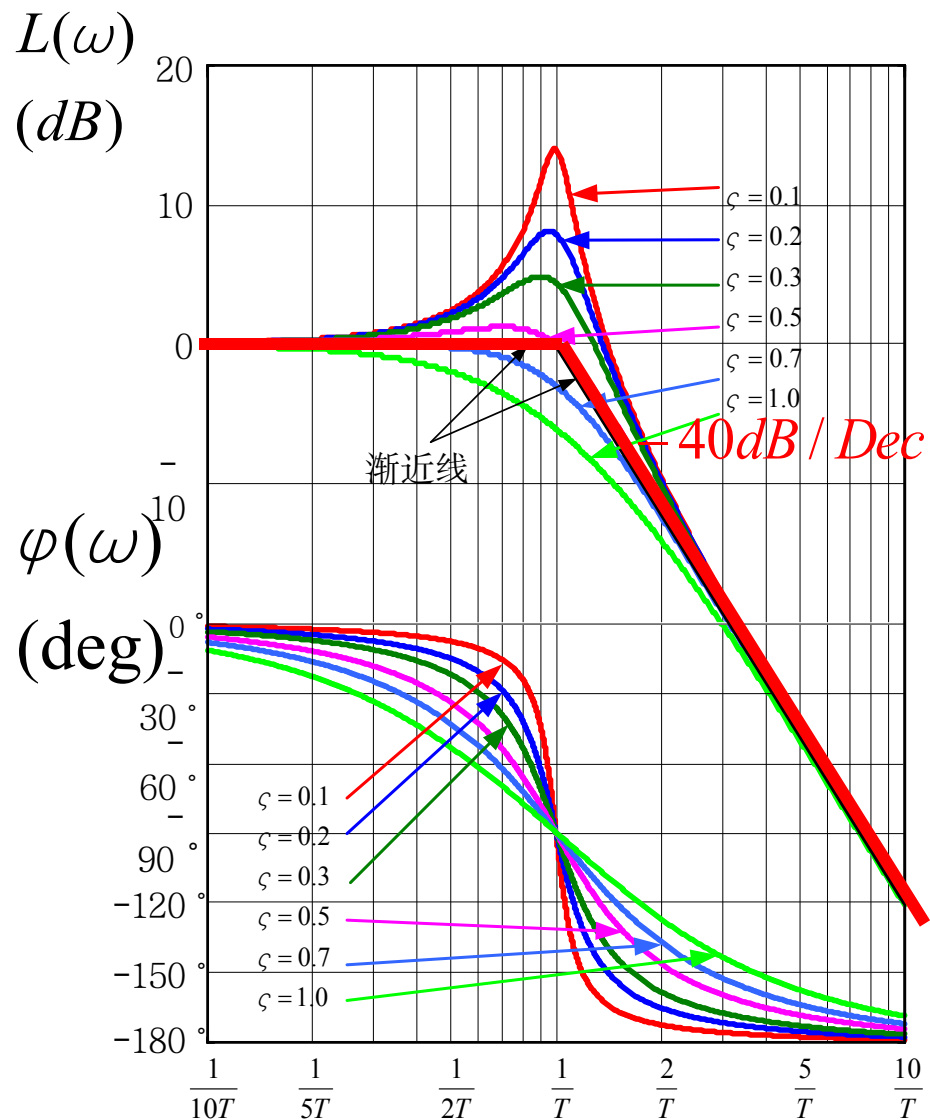
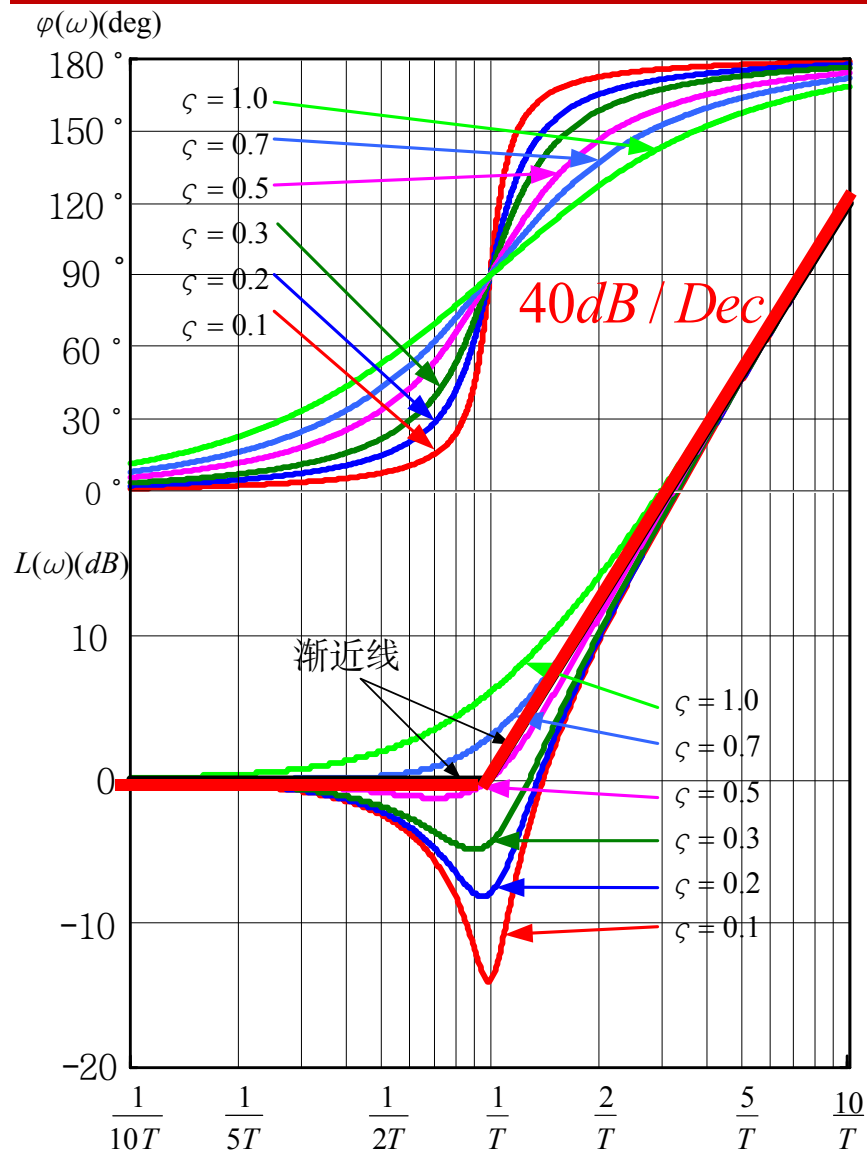
转折频率为: $\omega_n = \frac{1}{T}$, 高频段的斜率+40dB/Dec。

相角: 当 $\omega = 0$ 时, $\varphi(\omega) = 0$; $\omega = \frac{1}{T}$, $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$; $\omega = +\infty$, $\varphi(\omega) = \pi$

可见, 相角的变化范围从0~180度。



5.2典型环节的频率特性-Bode图





5.2典型环节的频率特性-Bode图

6. 延迟环节:

传递函数: $G(s) = e^{-\tau s}$

频率特性: $G(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$

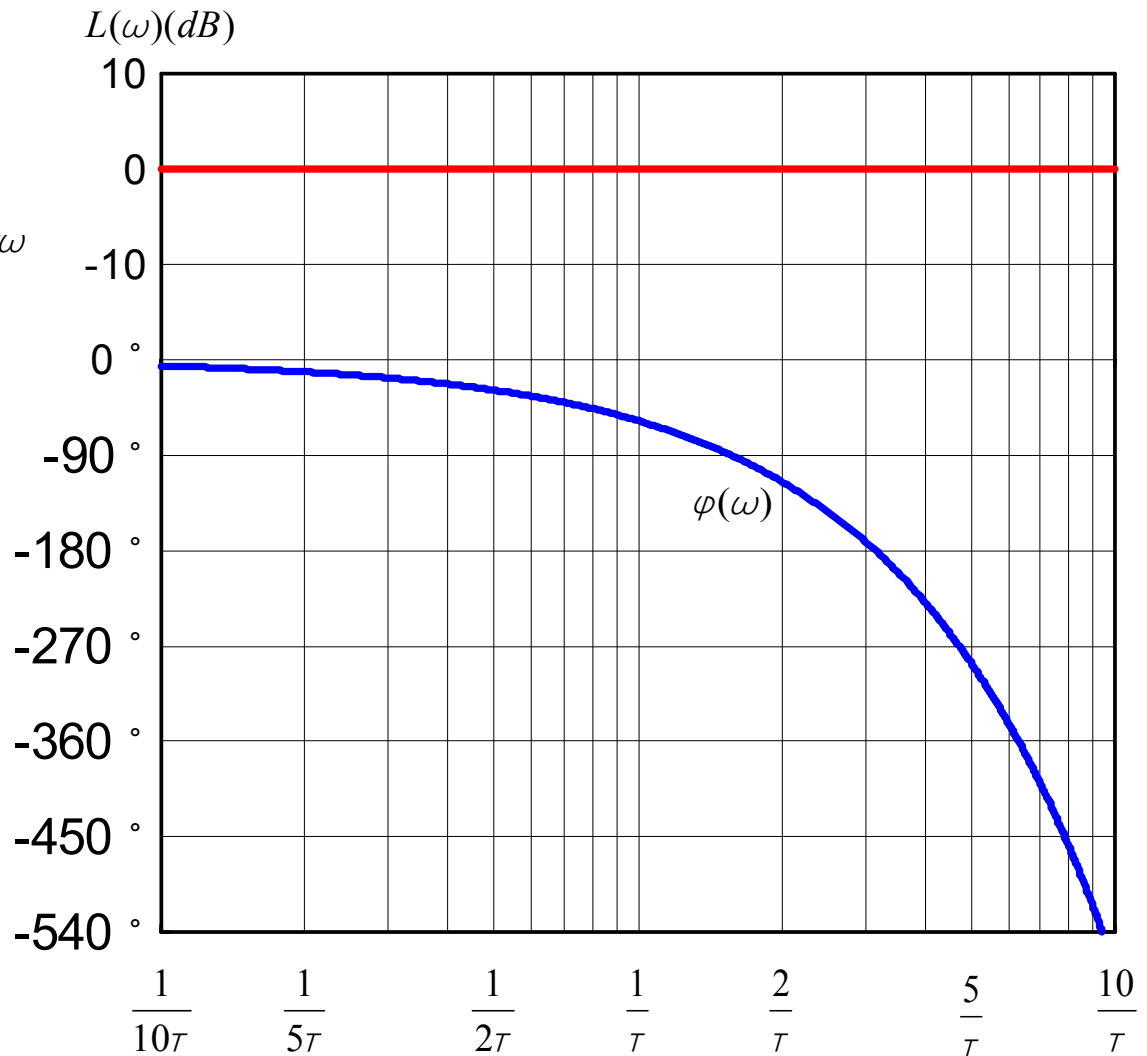
幅频特性: $A(\omega) = 1$

对数幅频特性:

$$L(\omega) = 0$$

相频特性:

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= -\omega\tau(\text{rad}) \\ &= -57.3\omega\tau(\text{deg})\end{aligned}$$





5.2典型环节的频率特性-Bode图

小结

□ 比例环节和积分环节的频率特性

□ 惯性环节的频率特性—波德图：低频、高频渐进线，斜率-20，
转折频率 $\omega_n = \frac{1}{T}$

□ 振荡环节的频率特性—波德图：低频、高频渐进线，斜率-40，
转折频率 $\omega_n = \frac{1}{T}$

□ 微分环节的频率特性—有三种形式：纯微分、一阶微分和二阶微分。分别对应积分、一阶惯性和振荡环节

□ 延迟环节的频率特性



5.2典型环节的频率特性-Bode图

Thank You !