

《综合训练》实验一：卫星轨道仿真实验

一、实验目的

- (1) 掌握空间坐标的各种定义；
- (2) 掌握空间坐标的各种转换；
- (3) 掌握两行轨道根数（TLE）格式定义；
- (4) 巩固 Matlab 编程，提升编程能力。

二、实验原理

2.1 开普勒定律

约翰尼斯·开普勒（Johannes Kepler，1571 年 12 月 27 日—1630 年 11 月 15 日），德国杰出的天文学家、物理学家、数学家。

开普勒发现了行星运动的三大定律，分别是**轨道定律**、**面积定律**和**周期定律**。这三大定律可分别描述为：所有行星分别是在大小不同的椭圆轨道上运行；在同样的时间里行星向径在轨道平面上所扫过的面积相等；行星公转周期的平方与它同太阳距离的立方成正比。第一和第二定律发表于 1609 年，是开普勒从天文学家第谷观测火星位置所得资料中总结出来的；第三定律发表于 1619 年。这三大定律最终使他赢得了“天空立法者”的美名。同时他对光学、数学也做出了重要的贡献，他是现代实验光学的奠基人。

2.1.1 开普勒第一定律

第一定律：所有行星绕太阳的轨道都是椭圆，太阳在椭圆的一个焦点上。

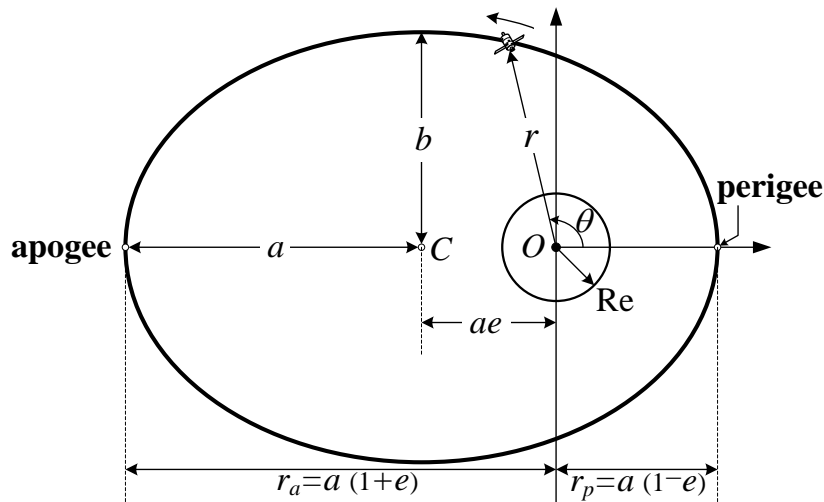


图 1 行星绕太阳示意

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| • 半长轴 semi-major axis | a |
| • 半短轴 semi-minor axis | b |
| • 偏心率 eccentricity | $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ |
| • 远地点半径 apogee radius | $r_a = a(1 + e)$ |
| • 近地点半径 perigee radius | $r_p = a(1 - e)$ |
| • 半交弦 semi-latus rectum | $p = a(1 - e^2)$ |
| • 真近地点角 true anomaly | M |

- 位置矢量 position vector $r = \frac{a(1-e^2)}{1+\cos\theta}$

2.1.2 开普勒第二定律

第二定律：行星和太阳的连线在相等的时间间隔内扫过相等的面积。

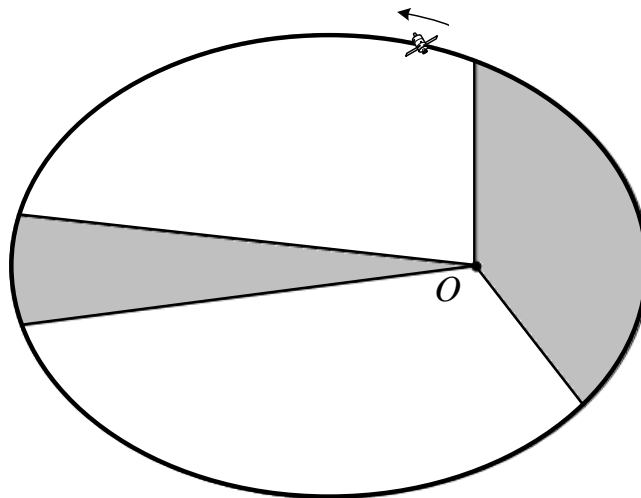


图 2 行星扫过的面积

2.1.3 开普勒第三定律

第三定律：行星/卫星轨道周期的平方正比与椭圆轨道半长轴的立方

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

其中： a 是半长轴，开普勒常数 $\mu=3.9861\times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$ ，椭圆轨道卫星具有时变的在轨飞行速度

$$V = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \quad (\text{km/s})$$

2.1.4 开普勒轨道根数

由开普勒定律可知，低轨卫星轨道是一个椭圆。描述椭圆的形状和大小，只需要椭圆长半轴 a 和偏心率 e 这两个参数即可（偏心率 e 为椭圆两焦点之间的距离与长轴的比值，偏心率为 0 时轨道是圆；偏心率在 0~1 之间时轨道是椭圆，这个值越大椭圆越扁；偏心率等于 1 时轨道是抛物线；偏心率大于 1 时轨道是双曲线。抛物线的半长轴是无穷大，双曲线的半长轴小于零）。但这样的描述还不能唯一固定卫星轨道平面相对于地球本体的位置。所以，为了固定卫星轨道相对于地球的位置，还要引入另外 4 个参数，并与 a 和 e 合称为开普勒轨道根数，也叫开普勒轨道参数，如下图所示。

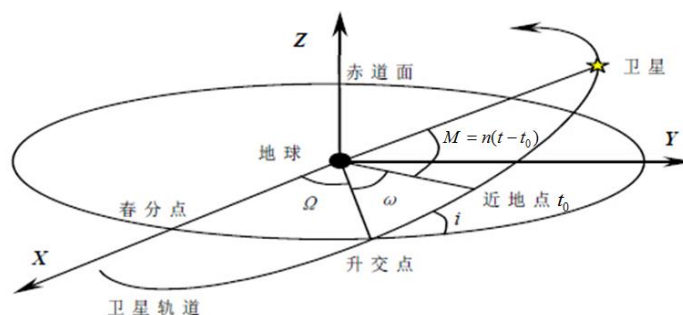


图 3 卫星轨道

i 为轨道面倾角(Inclination of Orbit)，即卫星轨道平面与赤道面的夹角。用地轴的北极方

向与轨道平面的正法线方向之间的夹角度量，轨道倾角的值从 $0^\circ \sim 180^\circ$ 。倾角小于 90° 为顺行轨道，卫星总是从西(西南或西北)向东(东北或东南)运行。倾角大于 90° 为逆行轨道，卫星的运行方向与顺行轨道相反。倾角等于 90° 为极轨道。

Ω 为升交点赤经(Right Ascension of Ascending Node)。轨道平面与地球赤道有两个交点，卫星从南半球穿过赤道到北半球的运行弧段称为升段，这时穿过赤道的那一点为升交点。相反，卫星从北半球到南半球的运行弧段称为降段，相应的赤道上的交点为降交点。在地球绕太阳的公转中，太阳从南半球到北半球时穿过赤道的点称为春分点。

ω 为近点幅角(Argument of Perigee)，即轨道平面上，升交点与近地点之间的地心夹角。

M 为真近点角，卫星瞬时位置与地心连线对轨道长轴的夹角。

以上这 6 个参数所构成的坐标系统，通常称为轨道坐标系(Elements of Coordinate System)，用来描述卫星的运动，它们的大小取决于卫星的发射条件。记 t_0 为卫星过近地点的时刻(Epoch of Perigee Passage)。

2.2 坐标系定义

2.2.1 地心惯性坐标系（ECI 历元坐标系）

地心惯性坐标系是太阳系内的一个惯性坐标系，不随地球而转动，也不受地球、太阳运行的章动和岁差的影响，记为 $O_i X_i Y_i Z_i$ 。坐标原点 O_i 在地心， X_i 轴位于赤道平面内，指向特定某一年(历元时刻)的太阳春分点经度方向（黄道与赤道的交点）， Z_i 轴指向某一年(历元时刻)地球北极的平均位置处， Y_i 轴位于赤道平面内与 X_i 轴垂直，且与 X_i 和 Z_i 构成右手定则的笛卡儿直角坐标系。由于采用的历元时间不同，可以有各种不同的地心惯性坐标系，目前国际上通用的地心惯性坐标系是 J2000.0 历元坐标系，它是以公元 2000 年的春分点（2000 年 1 月 1 日 12 时）为基准的历元坐标系。该坐标系是卫星姿态运动的绝对参考基准，常用于描述卫星在惯性空间的轨道运动以及太阳的轨道运动。

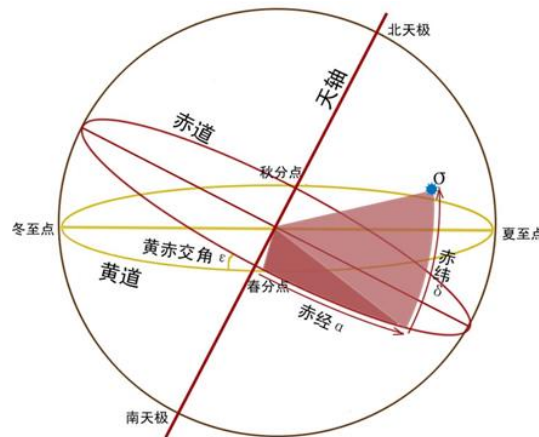


图 4 地心惯性坐标系示意

2.2.2 近焦点坐标系

以轨道平面为基础平面，以地心为坐标原点，地心到近地点方向为 X_p 轴， Z_p 轴垂直于轨道平面， X_p 、 Y_p 、 Z_p 轴构成右手坐标系。

如果已知卫星轨道六要素 $a, e, \omega, \Omega, i, M$ ，其中 a 为轨道椭圆的长半径， e 为偏心率， ω 为近地点幅角， i 为轨道倾角， Ω 为升交点赤经， M 为真近点角。按照轨道几何的定义，近焦点坐标系到地心赤道惯性坐标系的转移矩阵可表示为：

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{ip} &= \mathbf{R}_Z(-\Omega)\mathbf{R}_X(-i)\mathbf{R}_Z(-\omega) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\Omega) & -\sin(\Omega) & 0 \\ \sin(\Omega) & \cos(\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2.2.3 轨道坐标系

轨道坐标系记为 $O_o X_o Y_o Z_o$ ，三轴稳定卫星常选择此坐标系作为描述卫星姿态运动的参考坐标系，坐标原点 O_o 在卫星质心，卫星轨道平面为坐标平面， Z_o 轴从质心指向地心， X_o 轴在轨道平面内与 Z_o 轴垂直并指向卫星速度方向， X_o 轴与 Y_o 轴、 Z_o 轴成右手正交坐标系。 X_o 轴与 Y_o 轴、 Z_o 轴分别记为滚动轴、俯仰轴和偏航轴。需要注意的是，轨道坐标系在空间中是旋转的。轨道坐标系是卫星姿态确定与控制的重要参考坐标系。轨道坐标系中各坐标轴的单位矢量可以表示为

$$\mathbf{X}_o = \mathbf{Y}_o \times \mathbf{Z}_o, \mathbf{Y}_o = \frac{\mathbf{V}_o \times \mathbf{R}_o}{|\mathbf{V}_o \times \mathbf{R}_o|}, \mathbf{Z}_o = -\frac{\mathbf{R}_o}{|\mathbf{R}_o|}$$

由地心赤道惯性坐标系到轨道坐标系的转移矩阵可以表示为

$$\mathbf{T}_{oi} = [\mathbf{X}_o \quad \mathbf{Y}_o \quad \mathbf{Z}_o]^T$$

上式中，下标表示转换方向由惯性坐标系到轨道坐标系。

2.2.4 地心地固坐标系（ECEF 坐标系）

X_e 轴指向 0 经度 0 纬度点（本初子午线和赤道交点）， Z_e 轴指向北极。原点在地球质心，正 Z_e 轴指向协议的平均地极（协议地球极 CTP, Conventional Terrestrial Pole），正 X_e 轴指向赤道上的经度零点（格林尼治平均天文台）， Y_e 轴与 Z_e 轴和 X_e 轴构成右手坐标系，称为协议地球坐标系 CTS(Conventional Terrestrial System)，而以瞬时极为指向点的地球坐标系称为瞬时地球坐标系。在大地测量中采用的地心地固坐标系大多采用协议地极原点 CIO 为指向点，因而也是协议地球坐标系，一般情况下协议地球坐标系和地心地固坐标系代表相同的含义。该坐标系相对地球是固定的，以地球自转角速度相对于 ECI 坐标系的 Z 轴旋转。WGS-84、ITRF 坐标框架都属于协议地球坐标系，近地空间内与卫星轨道飞行相关的大气运动和地磁环境都在该坐标系中描述，地面测站位置与 GPS 卫星精密星历一般都以协议地球坐标系表示。

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{ECEF} &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{W}(t)\mathbf{r}_{ECI} = \mathbf{T}_{ei}\mathbf{r}_{ECI} \\ \mathbf{v}_{ECEF} &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{W}(t)\mathbf{v}_{ECI} + \mathbf{WQ}(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}(t)\mathbf{W}(t)\mathbf{r}_{ECI} \\ &= \mathbf{T}_{ei}\mathbf{v}_{ECI} + \mathbf{d}_{Tei}\mathbf{r}_{ECI}\end{aligned}$$

上式中， $\mathbf{Q}(t)$ 、 $\mathbf{R}(t)$ 和 $\mathbf{W}(t)$ 分别对应极移，自转和岁差章动转换矩阵， \mathbf{W} 为地球自转角速度为 $7.2921151467 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ 。

2.2.5 卫星本体坐标系

卫星本体坐标系原点位于卫星的质心， X_b 轴指向卫星飞行方向， Z_b 轴垂直指向卫星对地面， Y_b 轴与其他两轴构成右手坐标系，卫星三轴姿态稳定时本体系与轨道系指向一致。

2.3 根据开普勒轨道根数计算卫星在轨道坐标下 \mathbf{r} 和 \mathbf{v}

2.3.1 两行轨道根数（TLE）格式定义

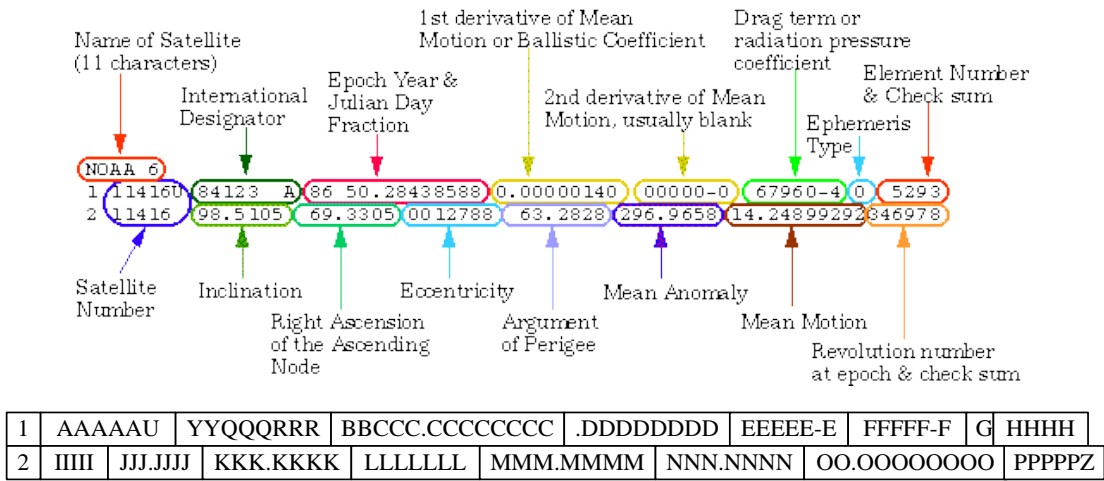


图 5 TLE 参数排列示意

表 1 TLE 参数定义

关键字	定义
1	第一行行标
AAAAA	按顺序分配的人造卫星编号(5 位整数, 1 到 99999)
U	安全保密级别(U=不保密)
YYQQRRR	国际标志符(YY, 2 位整数, 发射年度; QQQ, 3 位整数, 该年度发射序列; RRR, 该次发射中的部件序列号, 最多 3 位)
BBCCC.CCCCCCCC	纪元时间 (BB, 2 位整数, 表示年份; 其次 3 位数字表示天数, 后面的小数是不足一天的时间)
.DDDDDDDD	阻力参数, 平均运动一阶导数, SGP 轨道传播函数中会用到这个阻力参考量。
EEEE-E	阻力参数, 平均运动二阶导数, -E 指以 10 为底的 E 次幂。SGP 轨道传播函数中会用到这个阻力参考量
FFFF-F	阻力参数(1/地球半径) - 伪弹道系数, -F 是以 10 为底的 F 次幂。SGP4 轨道传播函数中会用到这个阻力参考量。
G	星历表类型
HHHH	顺序分配的根数集编号(4 位整数, 1 到 9999)。当数值数到达 9999 后, 从 1 开始循环计数
2	第二行行标
IIII	按顺序分配的人造卫星编号(5 位整数, 1 到 99999)
JJJ.JJJ	轨道倾角 i (0 到 180 度)
KKK.KKKK	升交点的赤经 Ω (0 到 360 度)
LLLLLL	轨道偏心率 e , 此处系小数点后的数值, 小数点在第一位, 已被省略。(意即此值在 0.0 到 1.0 之间)
MMM.MMMM	近地点幅角 ω (0 到 360 度)
NNN.NNNN	平近地点角度 M (0 到 360 度)
OO.OOOOOOOO	平均运动(每天的公转次数)

PPPPP	公转序号(5 位整数, 1 到 99999), 当数值到达 99999 后, 从 1 开始循环计数
Z	校验和(1 位整数)。通过计算所在行上所有整数字符的和得出校验和的值。如果当前行的符号位为负数, 需要加 1。对符号位和各字符数据位的和以 10 取模可得校验和的值。

2.3.2 坐标转换过程

计算步骤如下:

1) 用下式计算平近点角 M

$$M = n(t - t_0)$$

上式中, t_0 为卫星过近地点的时刻, n 为卫星的平均角速度:

$$n = \sqrt{\frac{G_m}{a^3}} \quad (r a \text{ } \mu s)$$

其中 a 为轨道椭圆的长半轴, $G_m = 398600.4418 \times 10^9 \text{ m}^3/\text{s}^2$ 。

2) 解开普勒方程 $E = M + e \cdot \sin E$ (e 为离心率), 计算偏近点角 E

令 $f = E - M - e \sin E$, 则 $\frac{\partial f}{\partial E} = 1 - e \cos E$

初始化: $M = \text{mod}(M, 2\pi)$, $E(0) = \begin{cases} M & e < 0.8 \\ \pi & e \geq 0.8 \end{cases}$, $i = 0$

迭代: $f(i) = E(i) - M - e \sin E(i)$

$$E(i+1) = E(i) - \frac{f(i)}{1 - e \cos E(i)}, \quad i = i + 1$$

如果 $|E(i) - E(i-1)| < \varepsilon$ 或 $i > 15$ 停止迭代。

3) 计算卫星至地心的距离 R 和速度 V

$$R = a(1 - e \cos E)$$

$$V = \frac{\sqrt{G_m a}}{R}$$

4) 计算真近点角 θ

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

5) 计算卫星在近焦点坐标系中的坐标

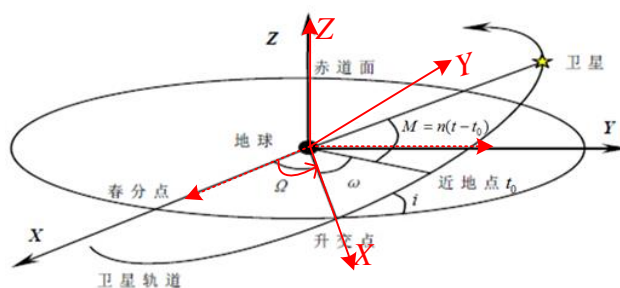
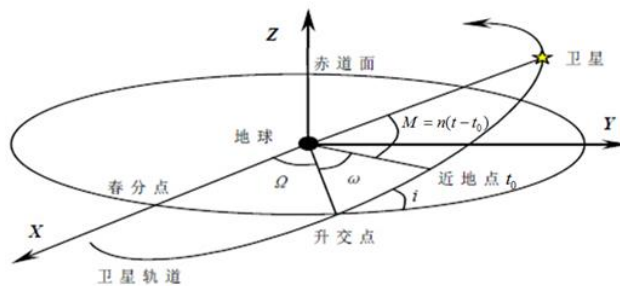
$$\begin{aligned} x_p &= R \cos \theta & x_p &= a(\cos E - e) \\ y_p &= R \sin \theta & \text{得到} & & y_p &= b \sin E = a\sqrt{1-e^2} \sin E \\ z_p &= 0 & & & z_p &= 0 \\ & & & & v_{xp} &= -V \sin E \\ & & & & v_{yp} &= V\sqrt{1-e^2} \cos E \\ & & & & v_{zp} &= 0 \end{aligned}$$

6) 卫星在地心赤道惯性坐标系 (Earth-Centered Inertial (ECI) Coordinates, J2000.0) 中

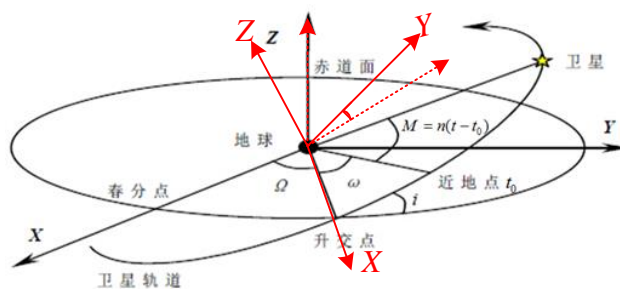
的坐标

由轨道倾角 i ，升交点赤经 Ω 和近地点幅角 ω 三个轨道参数，可以计算出卫星在地心赤道惯性坐标系中的位置。

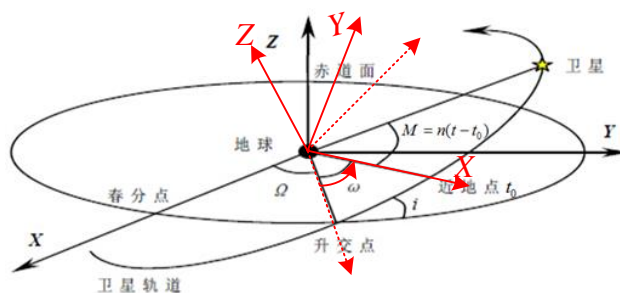
$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{ip} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{ip} \begin{bmatrix} v_{xp} \\ v_{yp} \\ v_{zp} \end{bmatrix}$$



(1)绕Z轴旋转



(2)绕X轴旋转



(3)绕Z轴旋转

图 6 坐标转换示例

7) 卫星在地心地固坐标系 (Earth-Centered Earth-Fixed (ECEF) Coordinates, WGS84) 中的坐标

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{ei} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_{xe} \\ v_{ye} \\ v_{ze} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{ei} \begin{bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{bmatrix} + \mathbf{d}_{Tei} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

8) 卫星在地理坐标系中的坐标

$$\begin{aligned} L &= \arctan(y_c/x_c) \\ B &= \arctan\left(\frac{z_c + e'^2 b \sin^3 \theta}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2 - e^2 a \cos^3 \theta}}\right) \\ H &= \frac{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}}{\cos B} - N \\ \theta &= \arctan\left(\frac{z_c \cdot a}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2} \cdot b}\right) \\ N &= a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \\ e^2 &= (a^2 - b^2) / a^2 \\ e'^2 &= (a^2 - b^2) / b^2 \\ f &= \frac{a - b}{a} \end{aligned}$$

上式中 L 为地理经度, B 为地理纬度 (上式中若 $y_c > 0$ 且 $L < 0$ 则 $L = L + 180^\circ$, 如果 $y_c < 0$ 且 $L > 0$ 则 $L = L - 180^\circ$), H 为海拔高度, a 为地球长半轴 6378137.000m, f 为地球曲率半径 1/298.257223563。

三、实验内容

3.1 选择某一卫星 TLE 数据, 编写程序提取开普勒轨道根数, 计算卫星在**近焦点**坐标系中的坐标, 以及运行曲线。

3.2 编写程序把卫星从**近焦点**坐标转换到地心惯性坐标系。画出三维坐标卫星轨迹曲线, 分析曲线特点。

3.3 利用 Matlab 自带程序 dcmeci2ecef.m (2016 版) 或用提供的 eci2ecef.m 程序把卫星从地心惯性坐标转换到地心地固坐标系。画出三维坐标卫星轨迹曲线, 分析曲线特点。

3.4 编写程序把卫星从地心地固坐标转换到地理坐标系，并把当前时间的轨迹实时显示到提供的全球经纬度数字地图上。

3.5 操作 Orbitron 3.71 软件，获得更多的轨道知识。

四、报告要求

- (1) 报告整洁、明了；
- (2) 简要描述实验原理，细化实验步骤；
- (3) 粘贴核心主要程序，对此说明；
- (4) 粘贴主要仿真数据和图像，对此说明和分析；
- (5) 所有图表有标注和排号；
- (6) 报告有总结。

空间科学与技术学院 孙文方 2018 年编制，2019 年 3 月第一次修订