第三章 控制系统的时域分析法

3.5 高阶系统的时域分析

- 前面研究了两种低阶系统；
- 用高阶微分方程描述的系统为高阶系统；
- 工程实际中的系统大都为高阶系统，解析解比较复杂，动态性能指标的确定也比较复杂；
- 工程上常采用闭环主导极点的概念对高阶系统近似成低阶系统分析，从而得到高阶系统动态性能指标的估算公式。

3.5 高阶系统的时域分析

一、典型三阶系统的瞬态响应

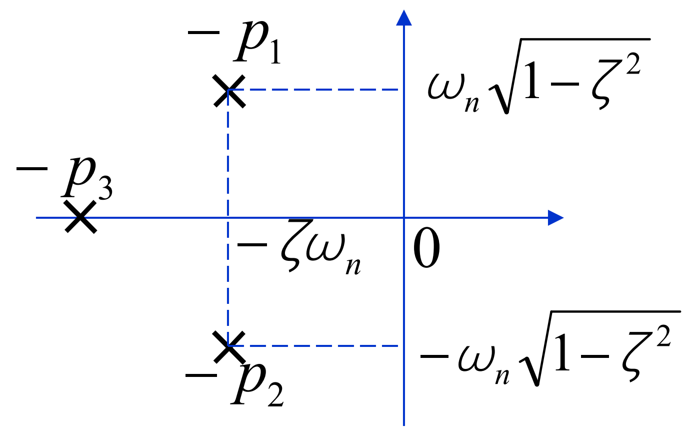
传递函数：$\Phi(s)=\dfrac{\omega_n{}^2}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2)(Ts+1)}$

当 0 < ζ < 1 时，极点分布如下：

$$-p_1=-\zeta\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$-p_2=-\zeta\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$-p_3=-\frac{1}{T}$$



这相当于在典型二阶系统的基础上增加了一个惯性环节。

3.5 高阶系统的时域分析

单位阶跃响应的表达式和曲线:

$$C(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{\omega_n^{\ 2}}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})(s+p_3)}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{A_1 s+A_2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}+\frac{A_3}{s+p_3}$$

式中: A_1, A_2, A_3 与 $\zeta, \omega_n, \beta=\dfrac{p_3}{\zeta\omega_n}$ 有关。

$$A_1=\frac{-\zeta^2\beta(\beta-2)}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1} \qquad A_2=\frac{-\zeta\beta[2\zeta^2(\beta-2)+1]\omega_n}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}$$

$$A_3=\frac{-1}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}$$

式中: A_1, A_2, A_3 分别为在极点处的留数有关的常系数。

三阶系统的单位阶跃响应如下:

$$c(t)=1-\frac{e^{-p_3 t}}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}$$

$$-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}\{\zeta^2\beta(\beta-2)\cos\omega_d t+\frac{\zeta\beta[\zeta^2(\beta-2)+1]}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\},t\geq 0$$

$\beta=\frac{p_3}{\zeta\omega_n}$表示增加的极点和共轭复极点的相对位置。

由于:

$$\beta\zeta^2(\beta-2)+1=\zeta^2\beta^2-2\beta\zeta^2+1+\zeta^2-\zeta^2=\zeta^2(\beta-1)^2+(1-\zeta^2)>0$$

所以 e^{-p_3}的系数总为负。

3.5 高阶系统的时域分析

$$c(t)=1-\frac{e^{-p_3 t}}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}\{\zeta^2\beta(\beta-2)\cos\omega_d t+\frac{\zeta\beta[\zeta^2(\beta-2)+1]}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\},t\geq 0$$

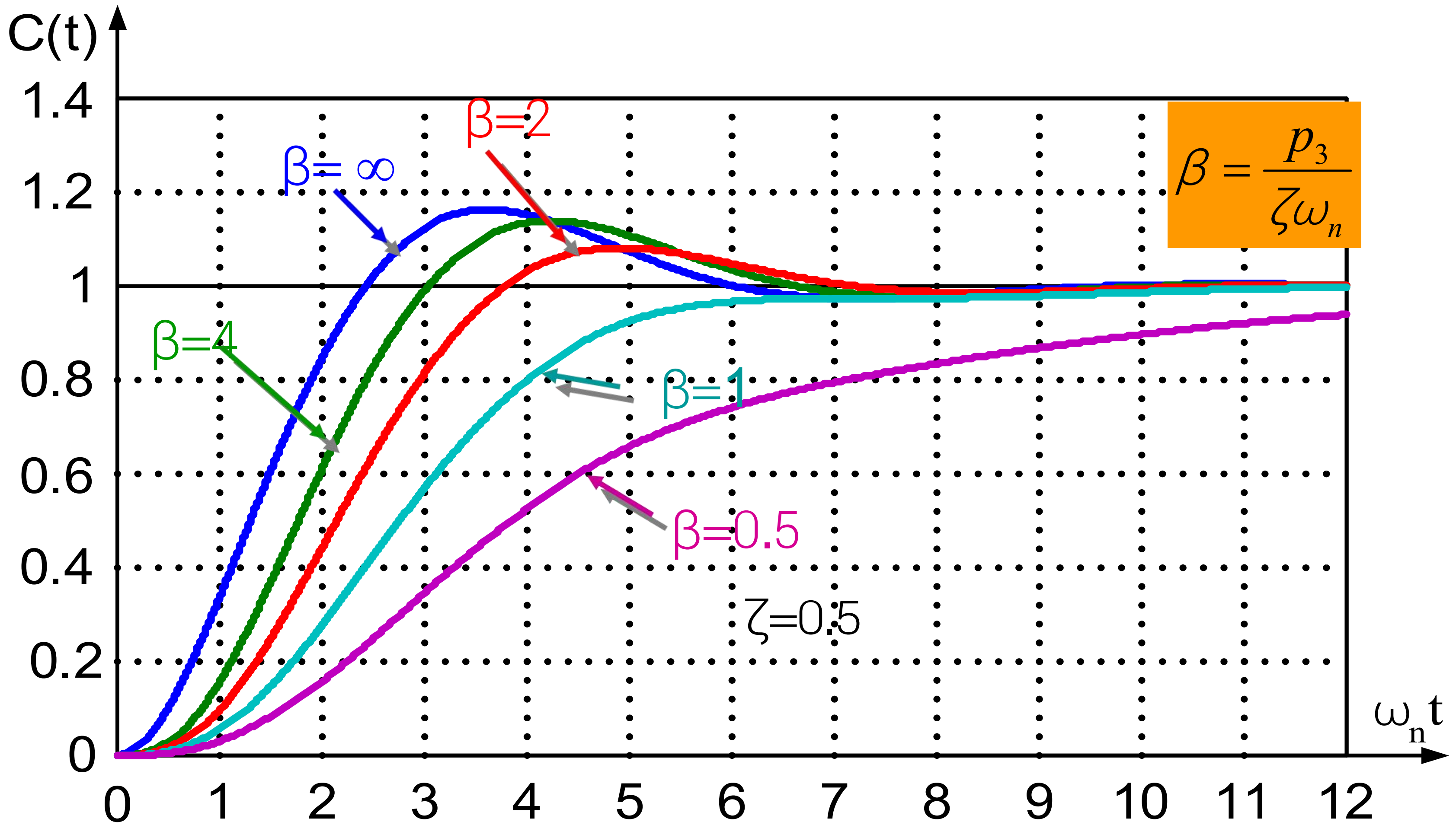
[分析]：三阶系统的单位阶跃响应由三部分组成：稳态项，共轭复极点形成的振荡分量，实极点构成的衰减指数项分量。

1.当β>>1时，表示实极点远离虚轴，共轭复极点离虚轴近，系统的瞬态特性主要由共轭复极点决定，呈二阶系统的特性，即系统的特性由二阶系统的特征参数ζ和ω_n决定。

2.当β<<1时，表示实极点离虚轴近，共轭复极点离虚轴远，系统的瞬态特性主要由实极点决定，呈一阶系统的特性。

3.一般情况下三阶系统的阶跃响应与实极点和共轭复极点的相对位置有关。

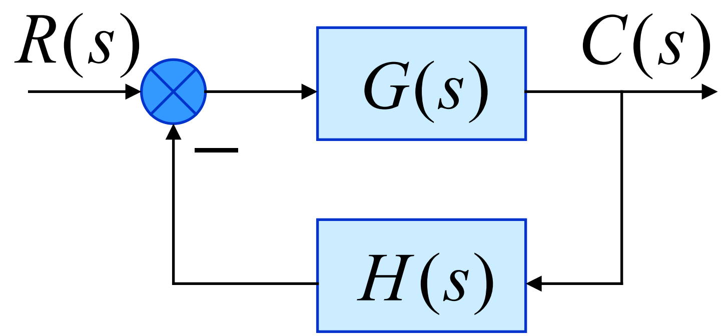
3.5 高阶系统的时域分析



图中β=∞，表示无实极点。由图可见，加入实极点后，当ζ不变时，超调量下降了，但调节时间增加了。

二、高阶系统分析

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$



设：$G(s)=\dfrac{A(s)}{B(s)}$，$H(s)=\dfrac{C(s)}{D(s)}$

$$\Phi(s)=\frac{A(s)D(s)}{A(s)C(s)+B(s)D(s)}$$

1.闭环传递函数的零点由前向传递函数的零点和反馈传递函数的极点构成。

2.闭环传递函数的极点由开环传递函数的零点和开环传递函数的极点构成。

3.5 高阶系统的时域分析

高阶系统传递函数的一般形式为：

$$\Phi(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}\qquad m\le n$$

写成零极点形式：

$$\Phi(s)=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n_1}(s+p_j)\prod_{k=1}^{n_2}(s^2+2\zeta_k\omega_k s+\omega_k^2)}\qquad n_1+2n_2=n,\quad m\le n$$

其单位阶跃响应函数为：

$$C(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{a_0}{s}+\sum_{j=1}^{n_1}\frac{a_j}{s+p_j}+\sum_{k=1}^{n_2}\frac{b_k(s+\zeta_k\omega_k)+c_k\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}}{s^2+2\zeta_k\omega_k s+\omega_k^2}$$

3.5 高阶系统的时域分析

时域表达式为：

$$c(t)=a_0+\sum_{j=1}^{n_1}a_je^{-p_jt}$$

$$+\sum_{k=1}^{n_2}b_ke^{-\zeta_k\omega_{nk}t}\cos\sqrt{1-\zeta_k^2}\omega_{nk}t+\sum_{k=1}^{n_2}c_ke^{-\zeta_k\omega_{nk}t}\sin\sqrt{1-\zeta_k^2}\omega_{nk}t$$

$$t\geq 0$$

由此可见：

1.高阶系统的阶跃响应总可以由简单函数项组成，即由一阶、二阶系统的响应组成。

2. $c(t)$不仅与闭环极点 $-p_j$、$-\zeta_k\omega_k\pm j\sqrt{1-\zeta_k^2}\omega_k$ 有关，而且与系数 a_j、b_k、c_k 有关(这些系数都与闭环零、极点有关)。所以，高阶系统的单位阶跃响应取决于闭环系统的零、极点分布。

3.5 高阶系统的时域分析

[定性分析]:

- **极点的影响**

对于稳定的高阶系统(稳定的充要条件：闭环极点全部位于s左半平面)，极点为实数或共轭复数，分别对应时域表达式的指数衰减项或衰减正弦项，但衰减的快慢取决于极点离虚轴的距离。距虚轴近的极点对应的项衰减得慢；距虚轴远的极点对应的项衰减得快。所以，距虚轴远的极点瞬态响应快，距虚轴近的极点对瞬态响应影响大。

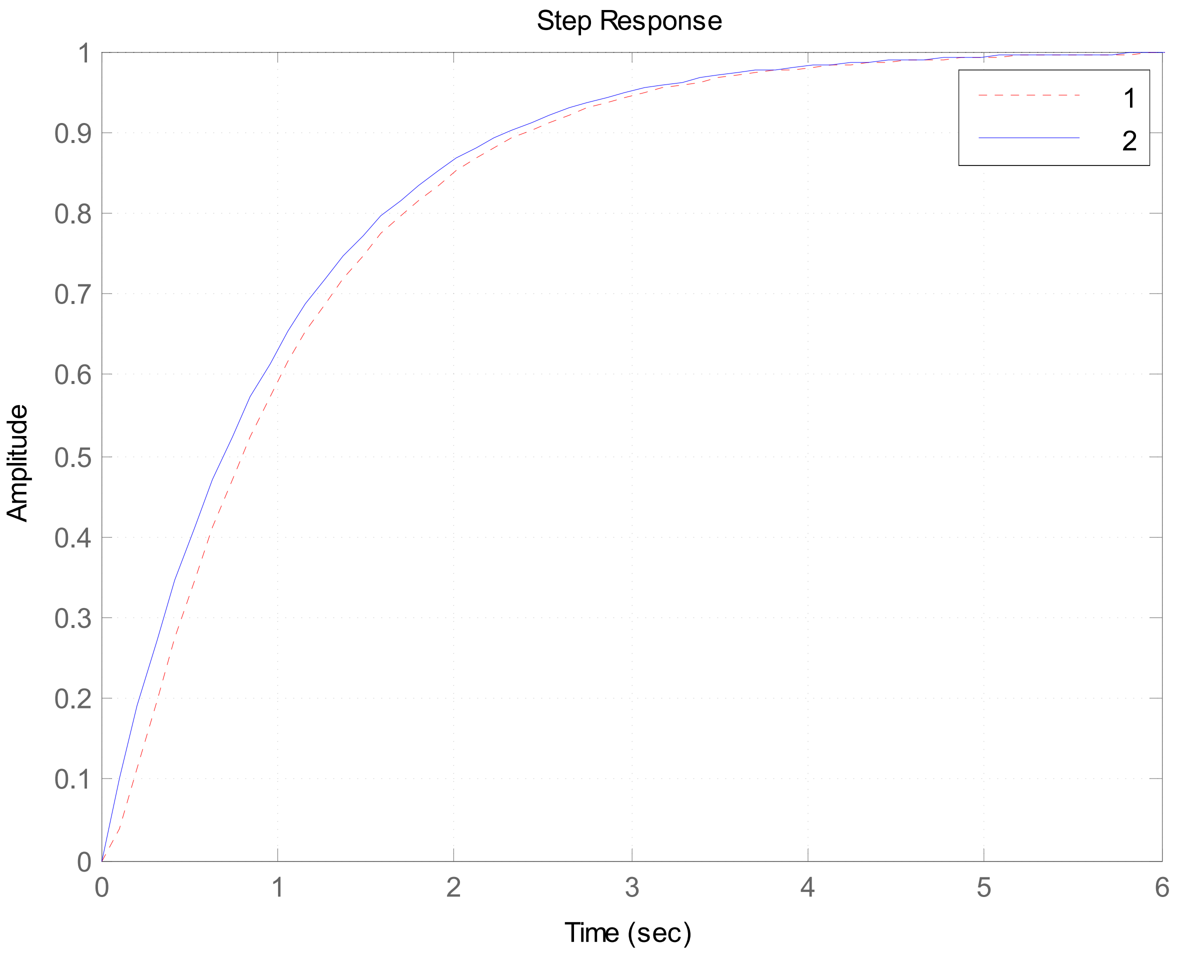
$$C(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{10}{s(s+1)(s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{10}{9}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{9}\frac{1}{s+10}$$

$$c(t)=1-\frac{10}{9}e^{-t}+\frac{1}{9}e^{-10t}$$

```
N=[0 0 10];
D=[1 11 10];
step(N,D,'--r');
hold on

N2=[0 1];
D2=[1 1];
step(N2,D2);

legend('Í¼1','Í¼2')
grid on
```



3.5 高阶系统的时域分析

- **零点的影响**

　零点不影响响应的形式。零点只影响各项的系数。零点若靠近某个极点，则该极点对应项的系数就小。

- **偶极子**

一对闭环零、极点之间的距离比它们到其他极点的距离及其自身的模值小一个数量级，这对零、极点称为偶极子。远离原点的和其他极点的偶极子对瞬态响应的影响可以忽略。

- 系数 a_j,β_l,γ_l 取决于零、极点分布。有以下几种情况：
  - 若极点远离原点，则系数小；
  - 极点靠近一个零点，远离其他极点和零点，系数小；
  - 极点远离零点，又接近原点或其他极点，系数大。

衰减慢且系数大的项在瞬态过程中起主导作用。

3.5 高阶系统的时域分析

[主导极点]：满足下列条件的极点称为主导极点。

- ***稳定系统的闭环极点都在s左半平面；***
- 闭环系统若存在离虚轴最近的一对共轭极点或一个实极点**或它们的组合**；
- 极点附近无闭环零点；
- 其他极点距虚轴的距离是离虚轴最近的极点距虚轴的距离的5倍以上。

主导极点在c(t)中的对应项衰减最慢，系数最大，系统的瞬态性能指标主要由它决定。**具有主导极点的高阶系统可近似为二阶或一阶系统。**

[例如]： $-p_{1,2}=-\zeta_1\omega_{n1}\pm j\omega_{n1}\sqrt{1-\zeta_1^2}=-\sigma\pm j\omega_d$ 为某高阶系统的主导极点，则单位阶跃响应近似为：

$$c(t)\approx a_0+e^{-\sigma t}(\beta_1\cos\omega_d t+\gamma_1\sin\omega_d t)$$

3.5 高阶系统的时域分析

[利用主导极点的概念可以对高阶系统的特性做近似的估计分析]

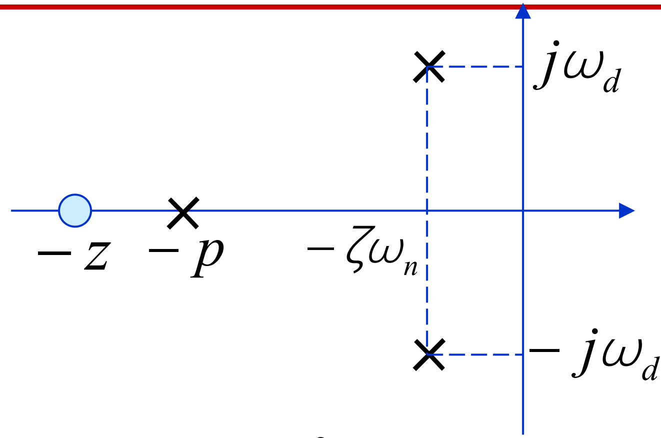
具有主导极点的高阶系统可近似为二阶或一阶系统。此时高阶系统的特性可用等效低阶系统的特性做近似的估计分析。

高阶系统近似简化原则：

- 在近似前后，确保输出稳态值不变；
- 在近似前后，瞬态过程基本相差不大。

具体规则是：在时间常数形式的开环或闭环传递函数上略去小时间常数。

3.5 高阶系统的时域分析



例如： $$\Phi(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}(s+z)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})(s+p)}$$

如果： $$\frac{z}{\zeta\omega_n}>5\text{以及}\frac{p}{\zeta\omega_n}>5$$

则： $$\Phi(s)=\frac{z\omega_n^{\ 2}(1+\frac{1}{z}s)}{p(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})(1+\frac{1}{p}s)}\approx\frac{z\omega_n^{\ 2}}{p(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})}$$

说明： 假设输入为单位阶跃函数，则化简前后的稳态值如下

$$\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^{\ 2}(s+z)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})(s+p)}=\frac{z}{p}$$

$$\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^{\ 2}z}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})p}=\frac{z}{p}$$

3.5 高阶系统的时域分析

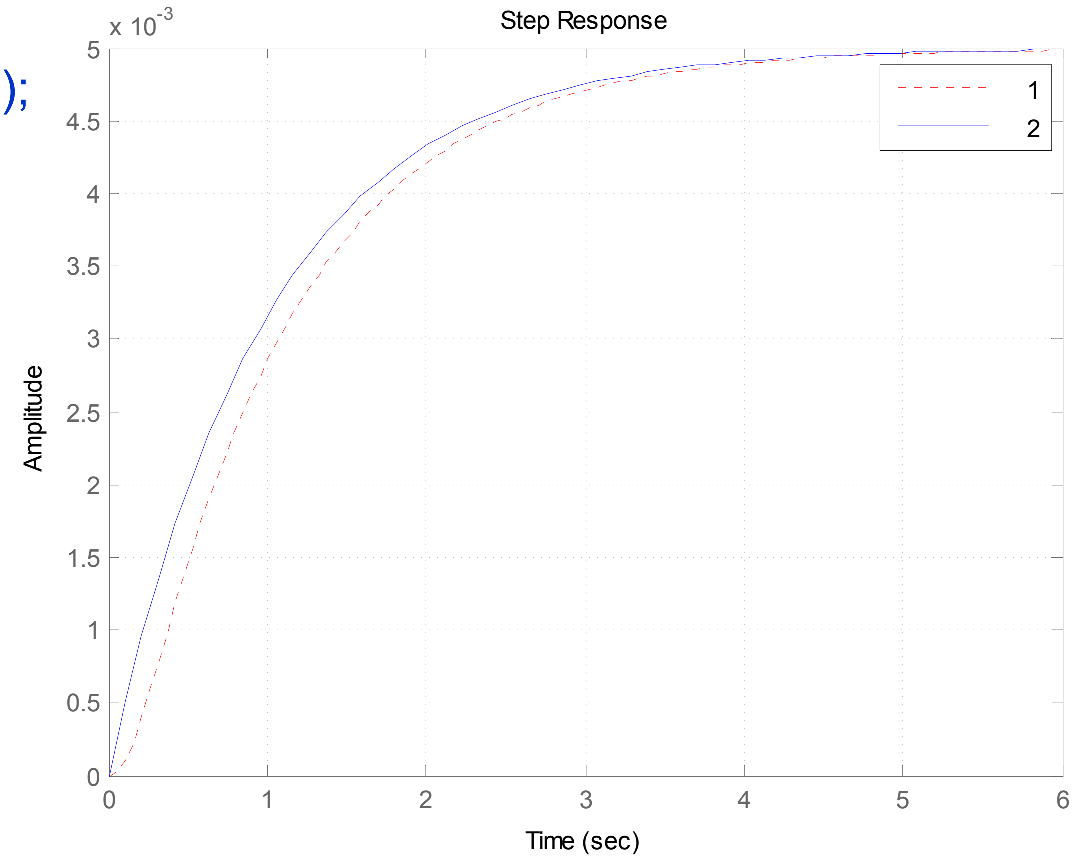
【例1】 $$\Phi(s)=\frac{K}{(s+1)(s+10)(s+20)}\approx\frac{K/200}{s+1}$$

高阶系统近似为惯性环节。

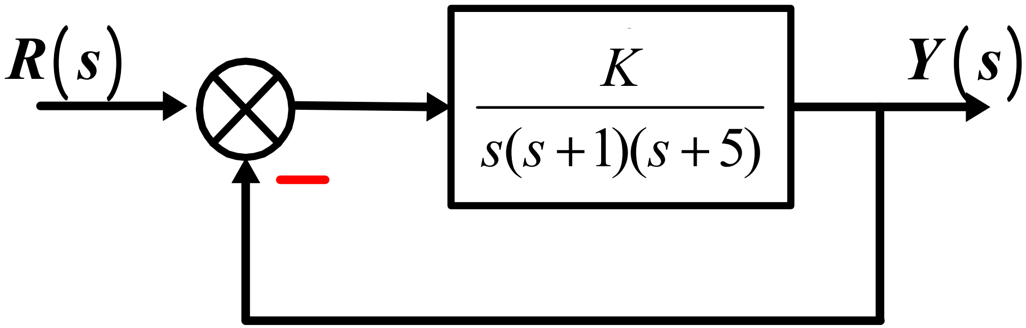
```
N=[1];
D=conv([1 1],conv([1 10],[1 20]));
step(N,D,'--r');
hold on

N2=[1/200];
D2=[1 1];
step(N2,D2);

legend('图1','图2')
grid on
```



【例2】



小结

- 零、极点位置对高阶系统单位阶跃响应曲线的影响情况。极点位置决定衰减快慢，零点和极点共同决定各项系数的大小
- 闭环主导极点
- 高阶系统简化为低阶系统的原则
- 计算机技术的发展为定量分析高阶系统提供了便利，利用Matlab等仿真软件可获得高阶系统准确的时间响应曲线

Thank You！