第6章 数理统计的基本概念

6.2 抽样分布

回忆： Γ 函数 $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \quad x>0$

性质： 1. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\Gamma(1)=1 \Rightarrow \Gamma(n+1)=n!$ 2. $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi},\therefore \Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

1. 四大分布

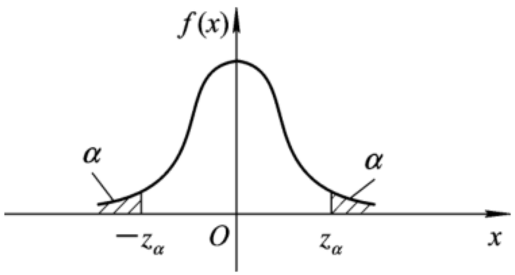
1) 标准正态分布：$X \sim N(0,1)$

在概率论中，标准正态分布作为重要分布已经作了重点讨论，在此需要补充数理统计中重要的上α分位点的概念。

定义 对于给定的正数 α ($0<\alpha<1$)，如果点 z_α 满足条件

$$P(X>z_\alpha)=\alpha$$

则称点 z_α 为*某某分布*的上α分位点。



点 z_α 为$X \sim N(0,1)$的上α分位点。

由于$0<\alpha<1$，因此$0<1-\alpha<1$，从而有上$1-\alpha$分位点，

由标准正态分布的概率密度图的对称性可知 $z_{1-\alpha}=-z_\alpha$

对于α=0.05，查得$\Phi(1.645)=0.95$，故$z_{0.05}=1.645$。

对于α=0.025，查得$\Phi(1.96)=0.975$，故$z_{0.025}=1.96$。

1. 四大分布

2) χ^2分布 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

定义 设随机变量 相互独立且同服从标准正态分布，则称

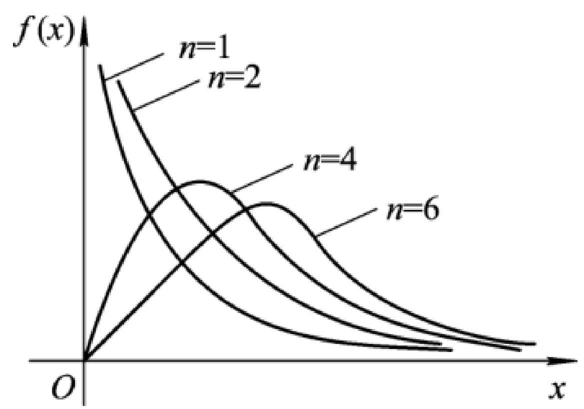
$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

的分布为服从**自由度为n**的 χ^2分布，记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ ，则χ^2 的概率密度为：
$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

当n=1时，$f_1(x) = \dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) 2^{\frac{1}{2}}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \quad, x > 0$

当n=2时，$f_2(x) = \dfrac{1}{\Gamma(1)\cdot 2} e^{-\frac{x}{2}} \quad, x > 0$



当n≥3时，经过原点。

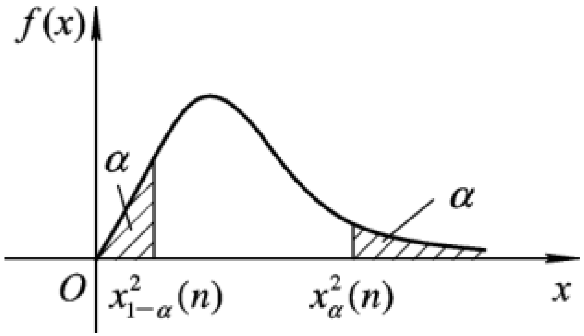
1. 四大分布

2) χ^2分布 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

对于给定的正数α ($0<\alpha<1$)，如果点 $\chi_\alpha^{\ 2}(n)$ 满足条件

$$P(\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)) = \alpha$$

则称点 $\chi_\alpha^{\ 2}(n)$为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ 的上 α 分位点。



由于$0<\alpha<1$，因此$0<1-\alpha<1$，从而有上$1-\alpha$分位点 $\chi_{1\text{-}\alpha}^{\ 2}(n)$，由 χ^2 分布的概率密度图不是对称的可知 $\chi_{1\text{-}\alpha}^{\ 2}(n)$ 与 $\chi_\alpha^{\ 2}(n)$ 没有关系，如图所示。对于不同的 α 和 n，上 α 分位点的值已制成表格（见附表3），可以直接查表。

例如： $\chi_{0.05}^2(10)=18.307$ ， $\chi_{1\text{-}0.05}^2(10)=3.94$

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

1. 四大分布

2) χ^2 分布 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

χ^2分布具有以下性质:

性质 1 设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则 $E\chi^2 = n, D\chi^2 = 2n$

证明 设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$，其中 $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ 相互独立且同服从标准正态分布$N(0,1)$，从而

$$E\chi^2 = EX_1^2 + EX_2^2 + \cdots + EX_n^2 = nEX_1^2 = n\left[DX_1 + (EX_1)^2\right] = n$$

$$D\chi^2 = DX_1^2 + DX_2^2 + \cdots + DX_n^2 = nDX_1^2 = n\left[EX_1^4 - (EX_1^2)^2\right] = n(EX_1^4 - 1)$$

$$EX_1^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$= \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + 3\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad = 3EX_1^2 = 3\left[DX_1 + (EX_1)^2\right] = 3$$

故 $D\chi^2 = 2n$

性质 2 设 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$，且 χ_1^2，χ_2^2 相互独立，则:

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$$

χ^2分布的可加性

1. 四大分布

3) t 分布：$T\sim t(n)$

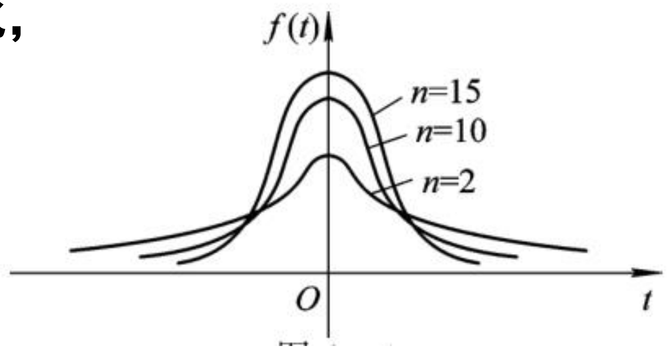
定义 设随机变量$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且X、Y相互独立，则称 $T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 的分布为服从参数为n的t分布，记为$T\sim t(n)$。

设$T\sim t(n)$，则T的概率密度为：

$$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},-\infty<t<+\infty$$

$f(t)$ 的图形如图所示。显然，$f(t)$随n发生变化，且 $f(t)$是偶函数，其图形关于 $t=0$ 对称。当$n\to\infty$时，$f(t)$趋于标准正态分布的概率密度，即

$$\lim_{n\to\infty}f(t)=\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

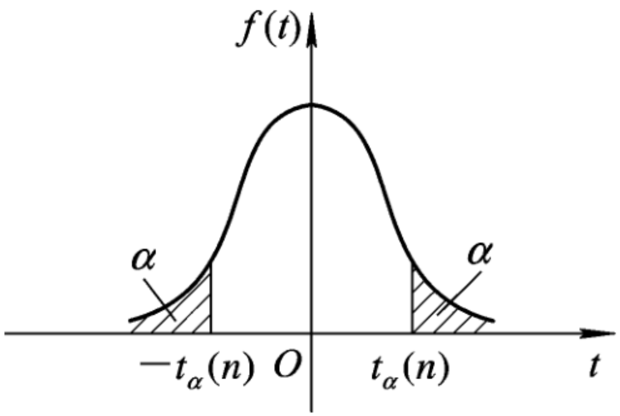


但当n较小时，t分布与标准正态分布差异很大。

1. 四大分布

3) t 分布：$T \sim t(n)$

对于给定的正数α ($0 < \alpha < 1$)，如果点 $t_\alpha(n)$ 满足条件 $P(T > t_\alpha(n)) = \alpha$ 则称点 $t_\alpha(n)$ 为$T \sim t(n)$的上 α 分位点。



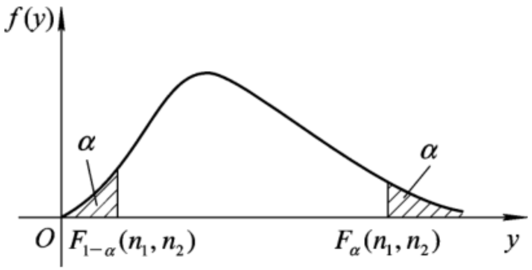
由于$0 < \alpha < 1$，因此$0 < 1-\alpha < 1$，从而有上$1-\alpha$分位点 $t_{1-\alpha}(n)$，由 t 分布的概率密度图的对称性可知 $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$ 。

1. 四大分布

4) F分布：$F\sim F(n_1,n_2)$

定义 设随机变量 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，且X、Y相互独立，则称 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 的分布为服从参数为(n_1,n_2)的F分布，记为$F\sim F(n_1,n_2)$。

对于给定的正数α ($0<\alpha<1$)，如果点 $F_\alpha(n_1,n_2)$ 满足条件 $P(F>F_\alpha(n_1,n_2))=\alpha$，则称点 $F_\alpha(n_1,n_2)$ 为 $F\sim F(n_1,n_2)$的上 α 分位点。



F分布具有以下性质：

性质 1 设$F\sim F(n_1,n_2)$，则 $\dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$

性质 2 设$F\sim F(n_1,n_2)$，则 $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$

性质 3 F分布就是t分布平方： $t^2(n)=\dfrac{X^2}{Y/n}\sim F(1,n)$

2．正态总体的样本均值和样本方差的分布

设总体X（不管服从什么分布，只要均值和方差存在）的均值为μ，方差为 σ^2， $X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自X的一个样本，样本均值 $\overline{X}$，样本方差 S^2。

$$E(\overline{X}) = \mu$$

$$D(\overline{X}) = \sigma^2 / n$$

$$E(S^2) = E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_n X_i^2 - n\overline{X}^2\right)\right] = \frac{1}{n-1}\left[\sum_n E(X_i^2) - nE(\overline{X}^2)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_n (\sigma^2 + \mu^2) - n(\sigma^2 / n + \mu^2)\right] = \sigma^2$$

2. 正态总体的样本均值和样本方差的分布

对于正态总体：

定理：（$X_1, X_2, \dots, X_n$）是从总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取的一个样本，则：

① $\overline{X} \sim N(\mu,\sigma^2/n)$ $\qquad$ $$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

② $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \qquad \frac{\sum_n (X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

2. 正态总体的样本均值和样本方差的分布

③推论： $$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

证明：根据t分布定义，由于 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 与 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 独立，

$$\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/n-1}} \sim t(n-1)$$

$X_i \sim N(\mu,\sigma^2), \frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ 根据 χ^2分布定义，

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

即： $$\frac{\sum_{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) \qquad ④$$

2. 正态总体的样本均值和样本方差的分布

对于双正态总体：

双正态总体，设 $X_1,\cdots,X_{n_1}$ 独立且服从 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ ，$Y_1,\cdots,Y_{n_2}$ 独立且服从 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且样本 $X_1,\cdots,X_{n_1}$ 与 $Y_1,\cdots,Y_{n_2}$ 独立，则：

① $$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

证明：$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(n_1-1),\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n_2-1)$$

且二者相互独立，利用F分布定义：$$\frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\Big/(n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\Big/(n_2-1)}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

② 当方差相同时：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

其中 $$S_\omega^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

2. 正态总体的样本均值和样本方差的分布

对于双正态总体：

双正态总体，设 $X_1,\cdots,X_{n_1}$ 独立且服从 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ ，$Y_1,\cdots,Y_{n_2}$ 独立且服从 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且样本 $X_1,\cdots,X_{n_1}$ 与 $Y_1,\cdots,Y_{n_2}$ 独立，则：

③ $$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1) \qquad \overline{X}-\overline{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

④ $$\frac{n_2\sigma_2^2\sum\limits_{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sigma_1^2\sum\limits_{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\sim F(n_1,n_2)$$

总结：

单正态总体：

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$\frac{\sum_{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{\sum_{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

双正态总体：

$$\frac{S_1^{\ 2}/S_2^{\ 2}}{\sigma_1^{\ 2}/\sigma_2^{\ 2}} \sim F(n_1-1,n_2-1)$$

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

$$\sigma_1^{\ 2}=\sigma_2^{\ 2}$$

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1}+\frac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{n_2\sigma_2^{\ 2}\sum_{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sigma_1^{\ 2}\sum_{n_2}(Y_i-\mu_2)^2} \sim F(n_1,n_2)$$

题型：

1. **求统计量的分布** 已知总体分布（特别是正态分布）求某统计量的分布
2. **利用统计量的分布计算相关事件的概率或与概率相关的问题**
3. **计算统计量的数字特征**

例1：设总体 $\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体X的一个样本，则：

A、$\dfrac{\overline{X}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$ B、$\dfrac{S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ C、$\dfrac{\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$ D、$\dfrac{S^2}{n\overline{X}^2}\sim F(n-1,1)$

解：

$$\frac{\overline{X}}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)\qquad \frac{\overline{X}^2}{(\sigma/\sqrt{n})^2}\sim\chi^2(1)\qquad \frac{n\overline{X}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)\qquad \frac{\overline{X}}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

$$\frac{\dfrac{(n-1)S^2/\sigma^2}{n-1}}{\dfrac{n\overline{X}^2/\sigma^2}{1}}\sim F(n-1,1)\to\frac{S^2}{n\overline{X}^2}\sim F(n-1,1)$$

例2：$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ， $X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体X的一个样本，则：

$$n(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma})^2 \sim \chi^2(1)$$

$$n(\frac{\overline{X}-\mu}{S})^2 \sim F(1,n-1)$$

例3：设二维连续型随机变量（X,Y）的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)},-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty$$

则： $\frac{X^2}{Y^2} \sim F(1,1)$

例4：总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ， $X_1,\cdots,X_{16}$ 为来自总体X的一个样本，

若 $P(\bar{X} > \mu + aS) = 0.95$ ，则a= –0. 4383 $(t_{0.05}(15) = 1.7531)$

例5：随机变量X与Y独立，$X \sim N(5,15), Y \sim \chi^2(5)$

求 $P(X - 5 > 3.5\sqrt{Y}) =$ 0. 05 $(t_{0.05}(5) = 2.02)$