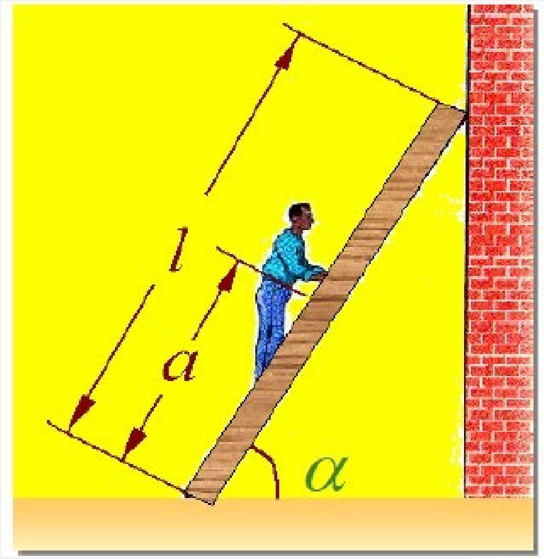
理论力学

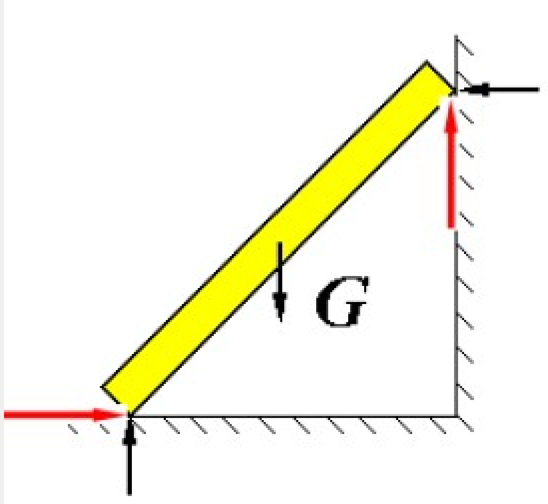
Engineering mechanics
Theoretical mechanics

静 力 学

第四章 摩擦

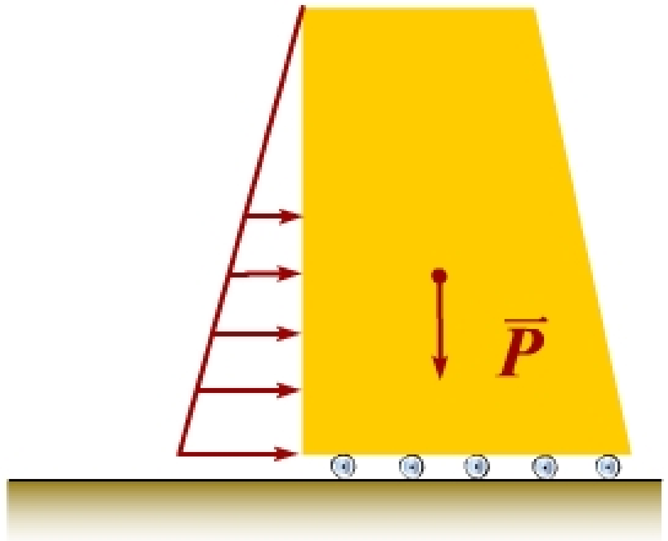
前几章我们把接触表面都看成是绝对光滑的，忽略了物体之间的摩擦，事实上完全光滑的表面是不存在的，一般情况下都存在有摩擦。[例]





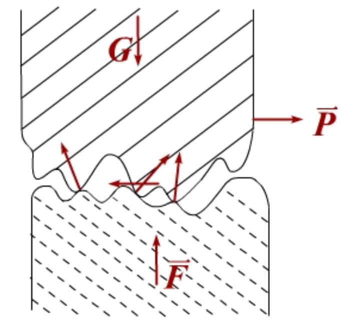
平衡必计摩擦

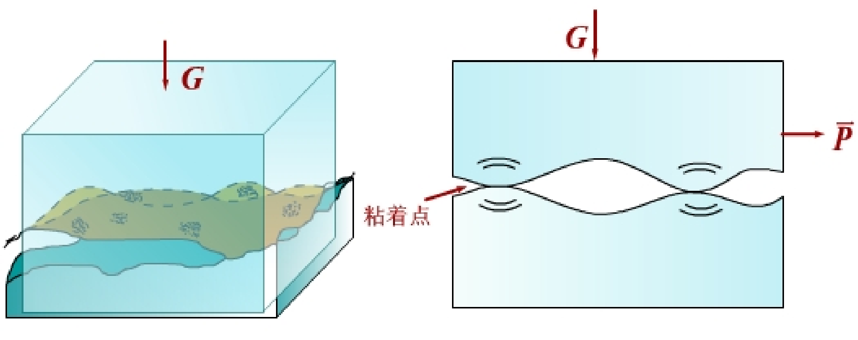
按接触面的运动情况看摩擦分为：
滑动摩擦，滚动摩擦



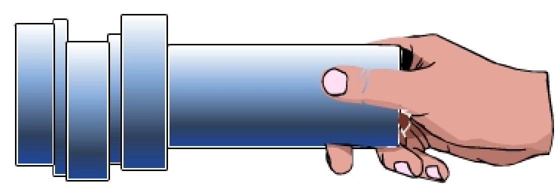
- 摩擦
  - 滑动摩擦
    - 静滑动摩擦
    - 动滑动摩擦
  - 滚动摩擦
    - 静滚动摩擦
    - 动滚动摩擦

- 摩擦
  - 干摩擦
  - 湿摩擦



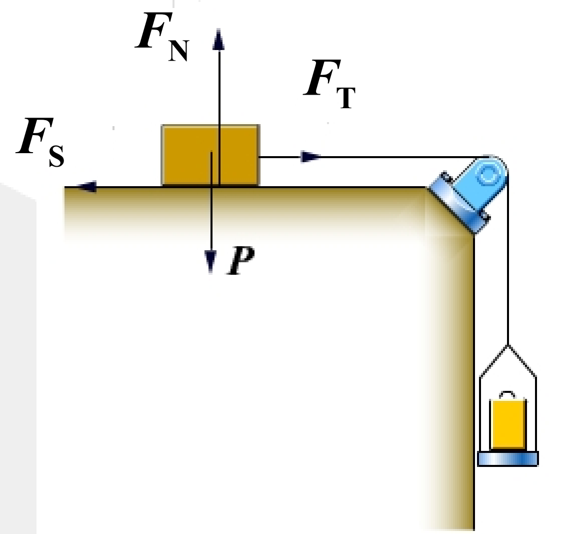


《摩擦学》



§4-1　滑动摩擦

$$\sum F_x = 0 \quad F_T - F_S = 0 \quad F_S = F_T$$



静滑动摩擦力的特点

方向：沿接触处的公切线，
　　　与相对滑动趋势反向；

大小：　$0 \leq F_s \leq F_{max}$

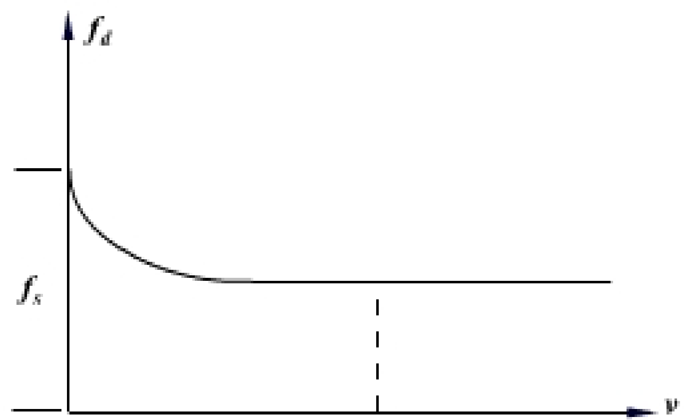
$$F_{max} = f_s F_N$$　（库仑摩擦定律）

动滑动摩擦力的特点

方向：沿接触处的公切线，与相对滑动方向反向；

大小：　$F_{\mathrm{d}} = f_{\mathrm{d}} F_{\mathrm{N}}$

$f_{\mathrm{d}} < f_{\mathrm{s}}$（对多数材料，通常情况下）



§ 4-2　摩擦角和自锁现象

一. 摩擦角

$\vec{F}_{RA}$ ---全约束力

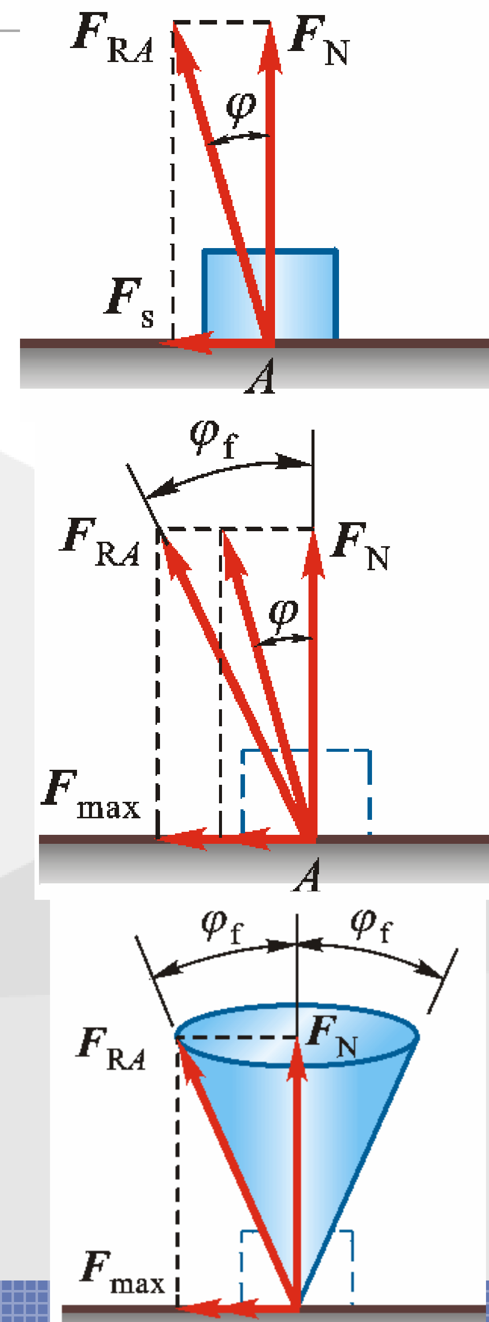
物体处于临界平衡状态时，全约束力和法线间的夹角---摩擦角

$$\tan\varphi_f = \frac{F_{max}}{F_N} = \frac{f_s F_N}{F_N} = f_s$$

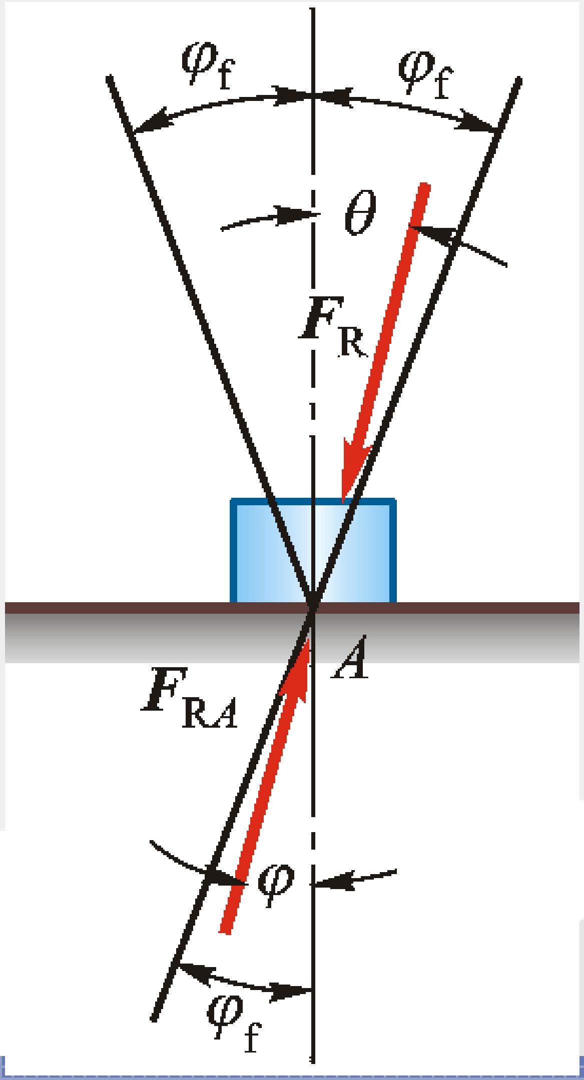
⇩

摩擦角的正切值等于静滑动摩擦系数.

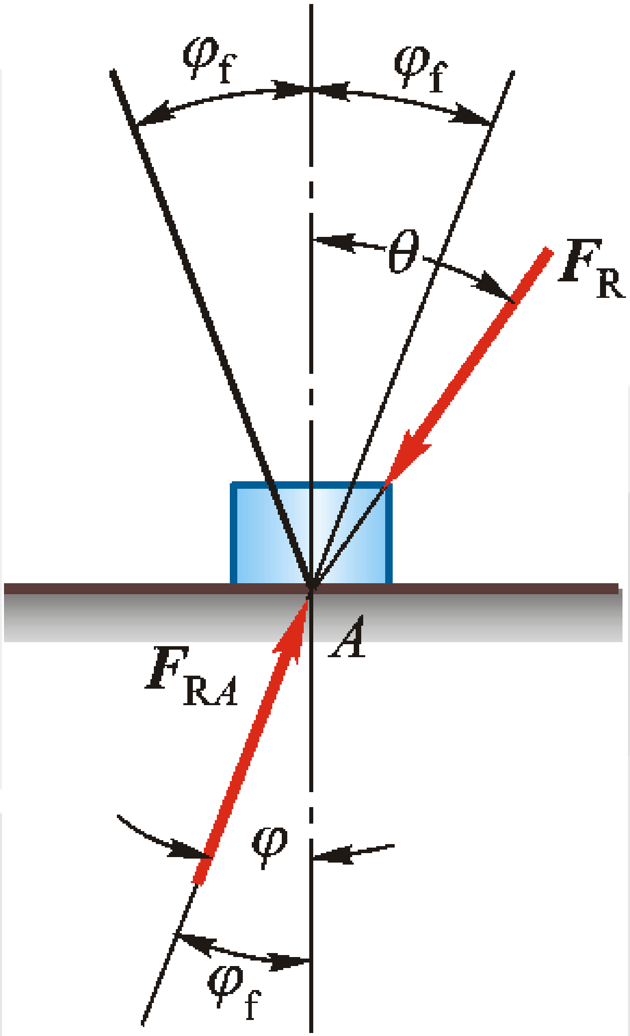
摩擦锥　　$0 \le \varphi \le \varphi_f$



二. 自锁现象

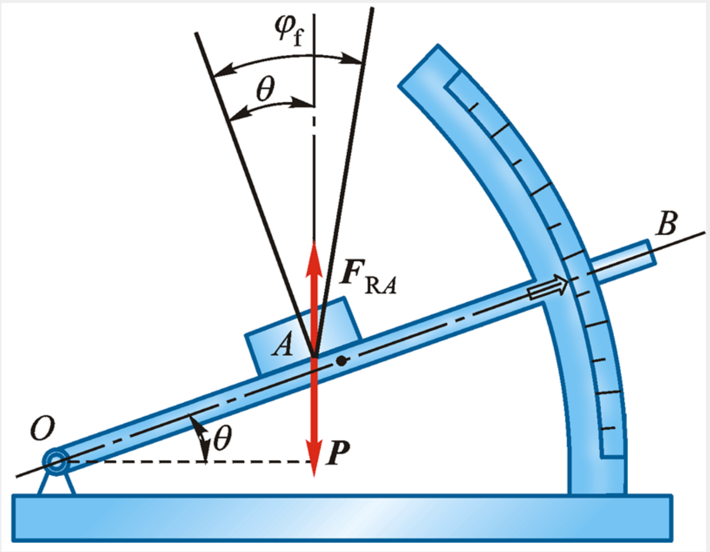


φ_f
φ_f
θ
F_R
A
F_{RA}
φ
φ_f

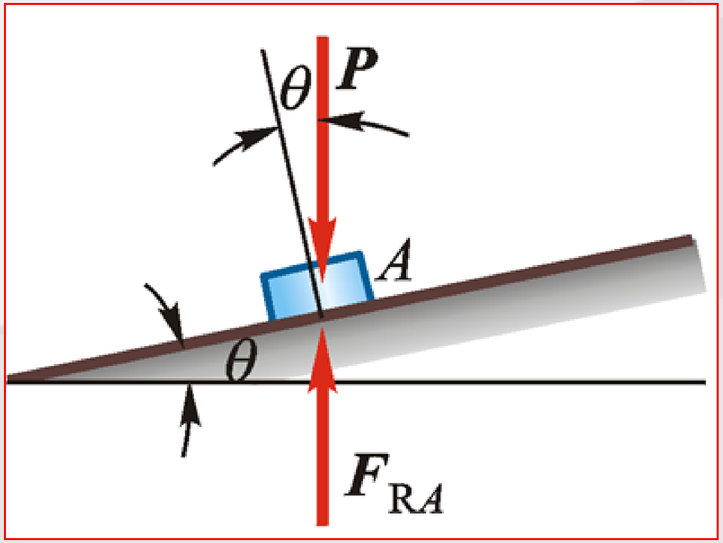


φ_f
φ_f
θ
F_R
A
F_{RA}
φ
φ_f

三. 测定静摩擦系数的一种简易方法



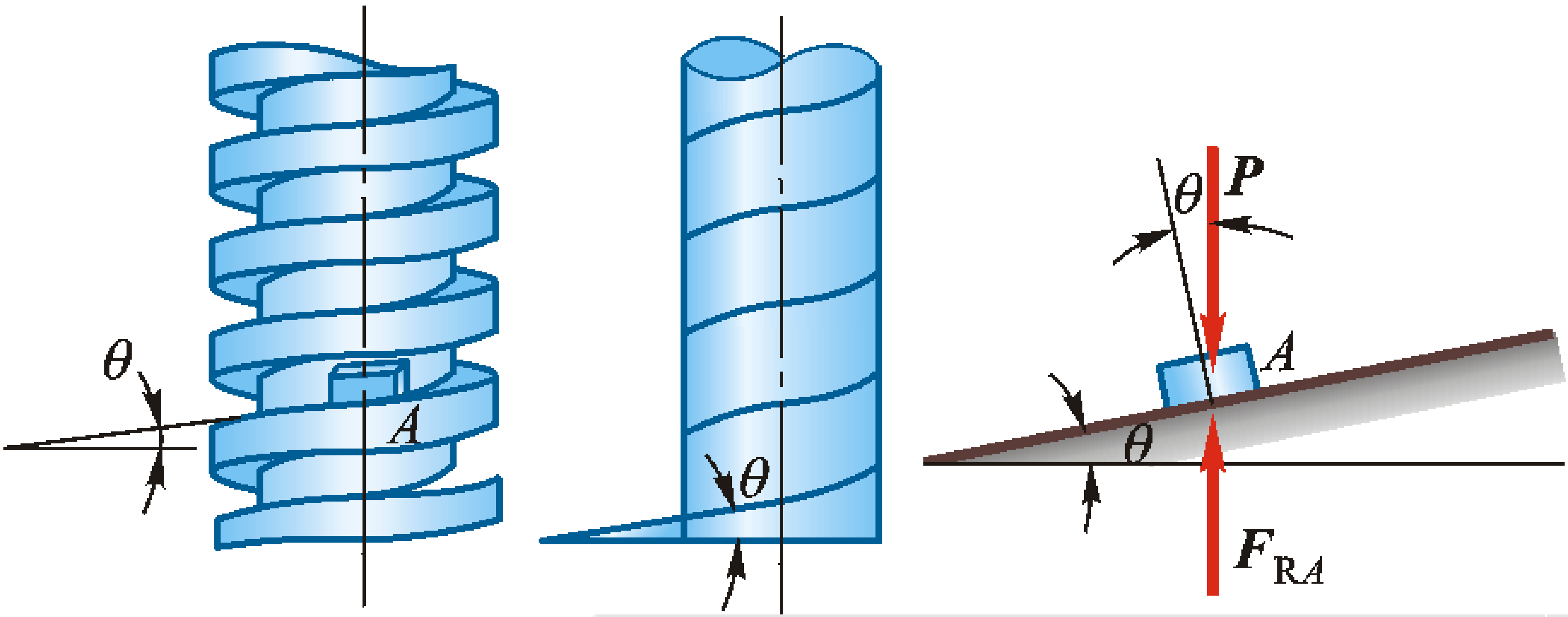
$$\tan\theta = \tan\varphi_f = f_s$$



斜面自锁条件 $\theta \le \varphi_f$

四．螺纹自锁条件

$$\theta \le \varphi_f$$



§4-3 考虑滑动摩擦时物体的平衡问题

仍为平衡问题，平衡方程照用，求解步骤与前面基本相同.

一. 几个新特点

1 画受力图时，必须考虑摩擦力，未知量增加；

2 严格区分物体处于临界、非临界状态。若处于临界平衡状态，可用库伦摩擦定律，方程数目增加；处于非临界平衡状态，不能用库伦定律，在题目条件足够的前提下，根据平衡条件确定；

3 因 $0 \le F_s \le F_{\max}$，问题的解有时在一个范围内变化，而不像之前求出的是一个确定值。

二. 求平衡范围问题（包括力范围与几何范围）

1 设物体处于某种临界平衡，摩擦力达到最大值F_{max}，最大静摩擦力方向不能假设，要根据物体运动趋势来判断；

2 补充方程$F_{max}=f_s F_N$，由平衡方程求未知量；

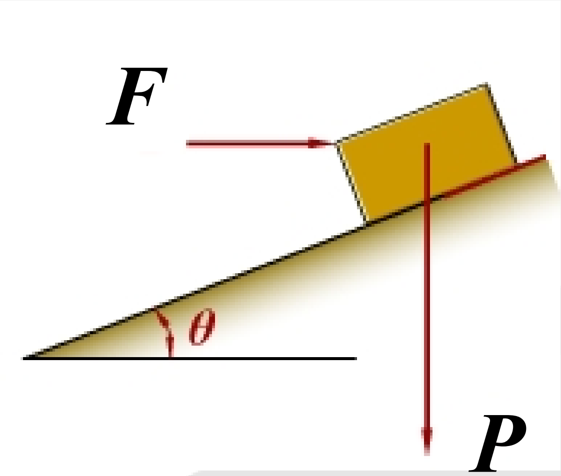
3 根据求得的某种临界平衡条件，分析其平衡范围。

工程中有很多问题只需要分析临界平衡状态，这时静摩擦力就是最大静摩擦力。

例4-2

已知： P,θ,f_s .

求： 使物块静止，水平推力 $\boldsymbol{F}$ 的大小.



解： 使物块有上滑趋势时，推力为F_1

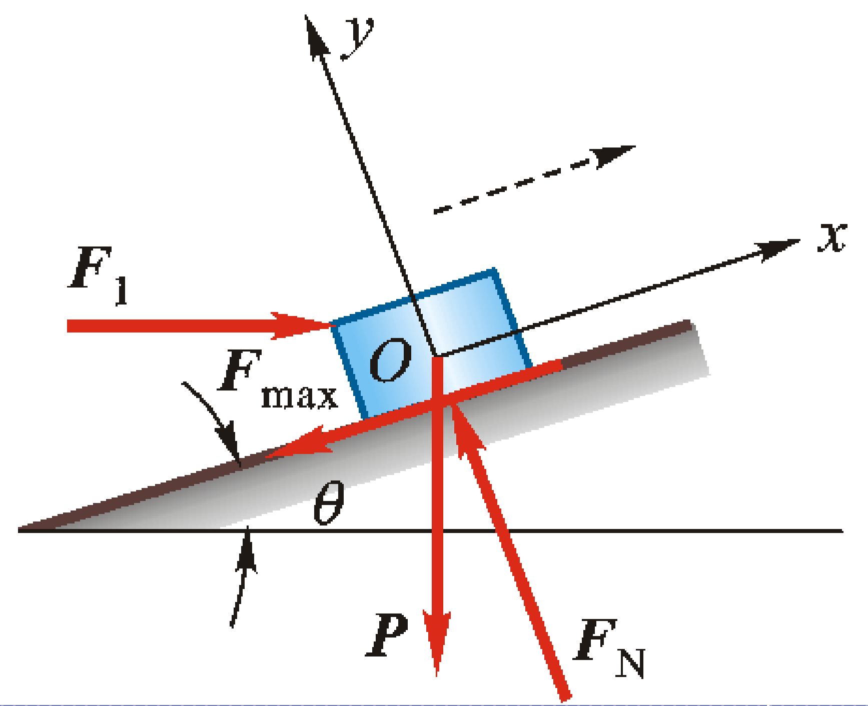
画物块受力图

$$\sum F_x = 0 \qquad F_1\cos\theta - P\sin\theta - F_{\max} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad -F_1\sin\theta - P\cos\theta + F_N = 0$$

$$F_{\max} = f_s F_N$$

$$\Rightarrow \quad F_1 = \frac{\sin\theta + f_s\cos\theta}{\cos\theta - f_s\sin\theta}P$$



设物块有下滑趋势时，推力为 F_1

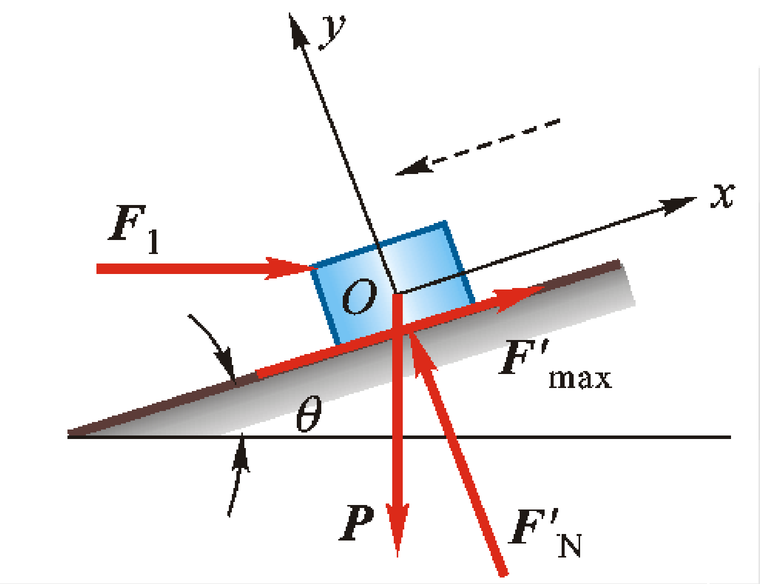
画物块受力图

$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_1\cos\theta - P\sin\theta + F_{\max}{}' = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad -F_1\sin\theta - P\cos\theta + F_N{}' = 0$$

$$F_{\max}{}' = f_s F_N{}'$$

$$\Rightarrow \quad F_1 = \frac{\sin\theta - f_s\cos\theta}{\cos\theta + f_s\sin\theta}P$$

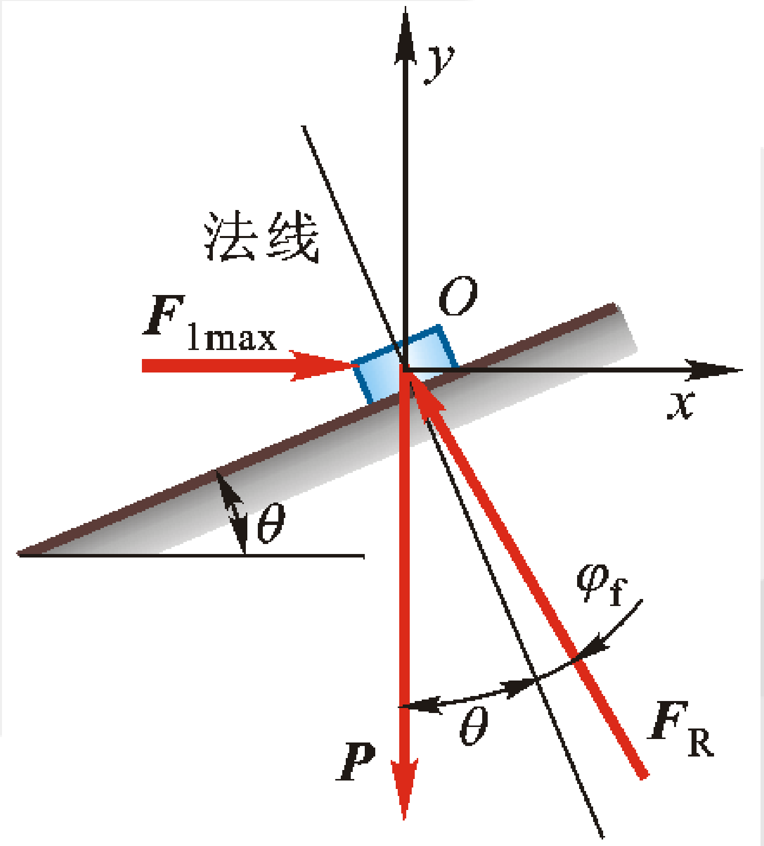


$$\Rightarrow$$

$$\frac{\sin\theta - f_s\cos\theta}{\cos\theta + f_s\sin\theta}P \le F \le \frac{\sin\theta + f_s\cos\theta}{\cos\theta - f_s\sin\theta}P$$

用几何法求解

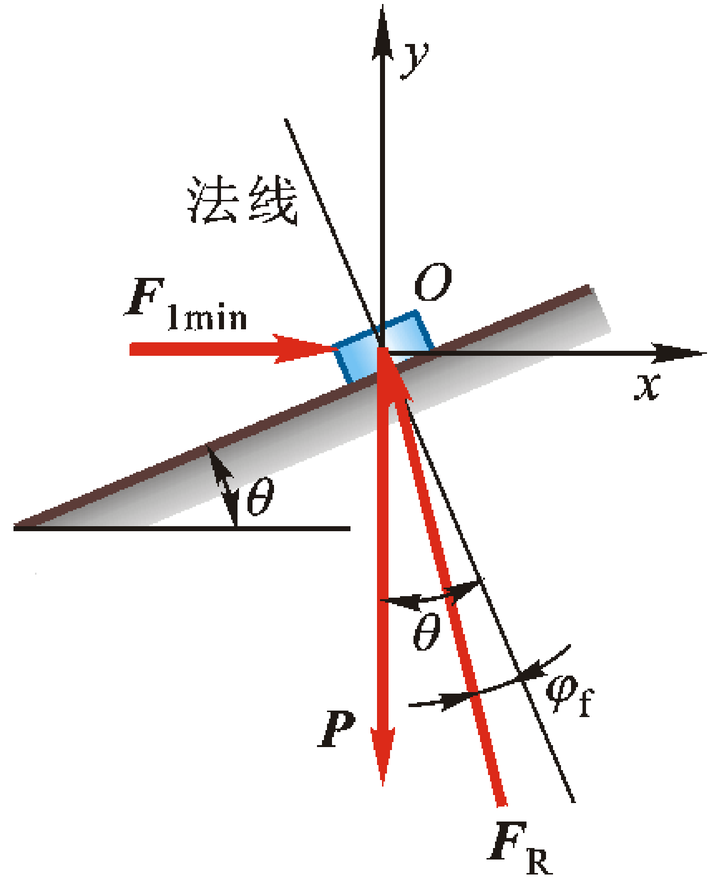
解： 物块有向上滑动趋势时



$$F_{1max} = P\tan(\theta + \varphi)$$

物块有向下滑动趋势时

$$F_{1\min} = P\tan(\theta - \varphi)$$



$\Rightarrow$

$$P\tan(\theta - \varphi) \le F \le P\tan(\theta + \varphi)$$

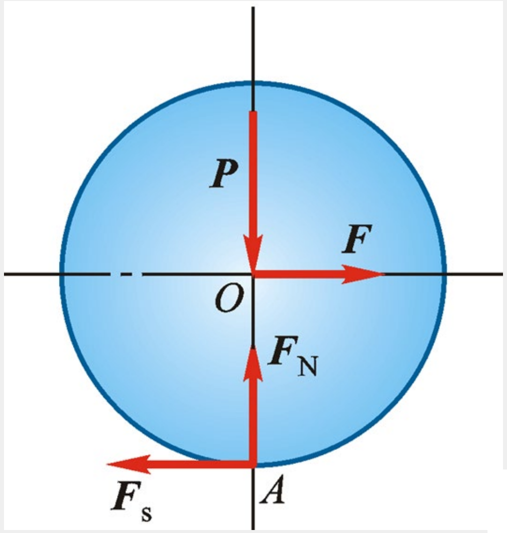
利用三角公式与 $\tan\varphi = f_s$,

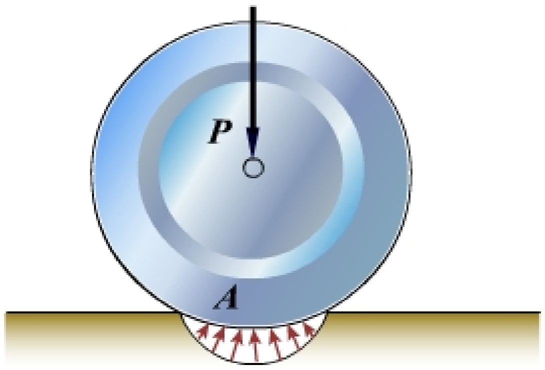
$\Rightarrow$

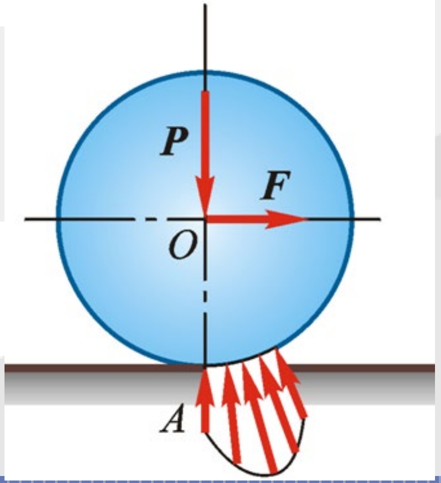
$$P\frac{\sin\theta - f_s\cos\theta}{\cos\theta + f_s\sin\theta} \le F \le P\frac{\sin\theta + f_s\cos\theta}{\cos\theta - f_s\sin\theta}$$

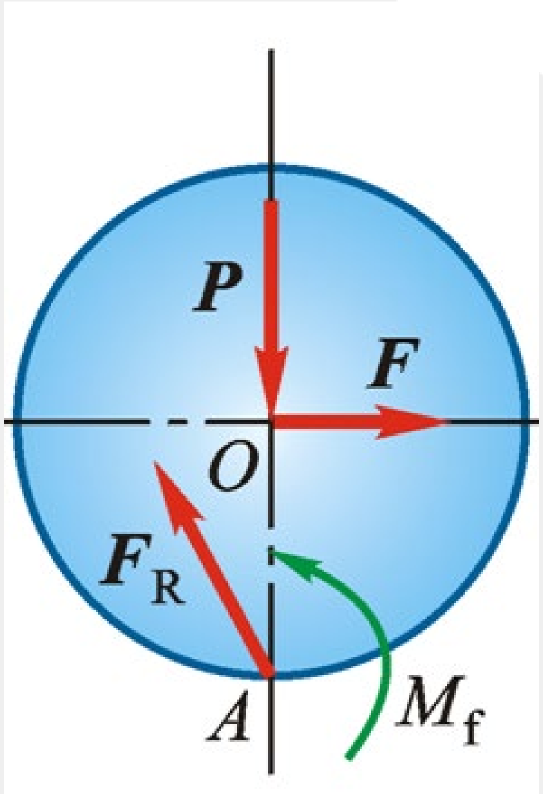
§ 4-4 滚动摩阻（擦）的概念

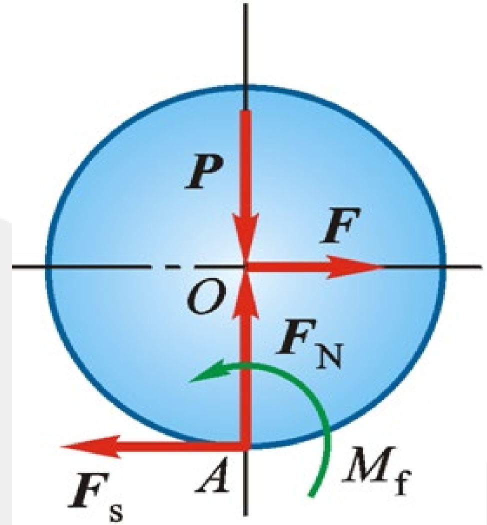
静滚动摩阻（擦）











$$\sum F_x = 0 \qquad F - F_s = 0$$

$$\sum M_A = 0 \qquad M - FR = 0$$

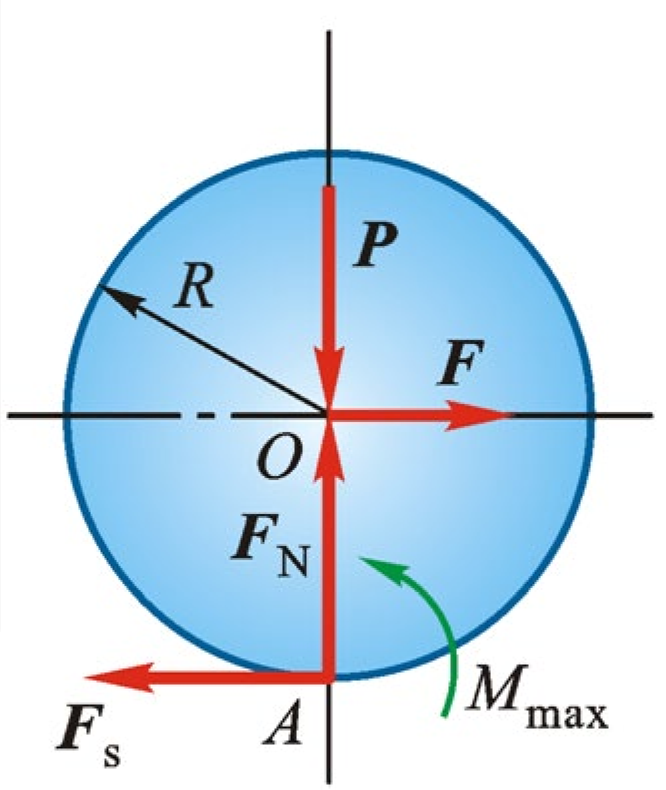
$$0 \le F_s \le F_{max}$$

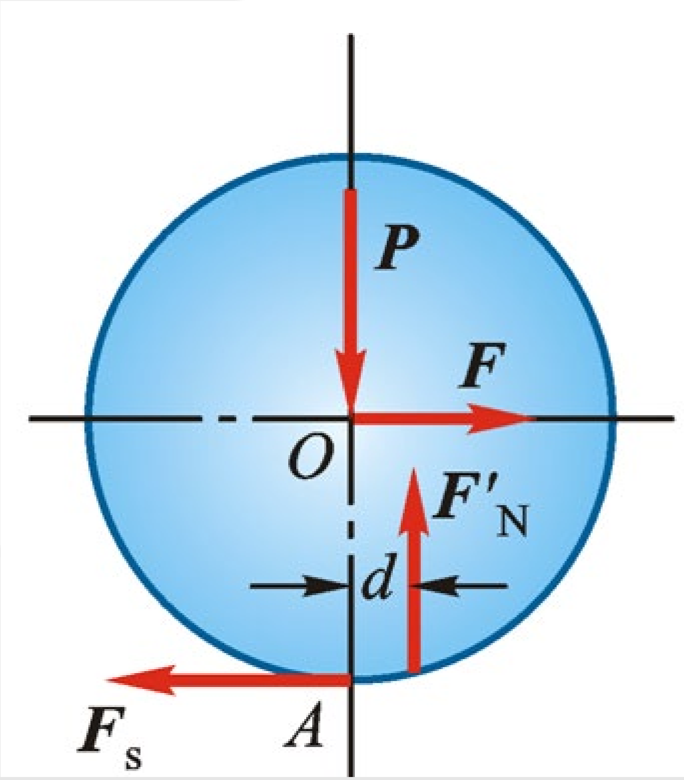
$$0 \le M \le M_{max}$$

$F_{max} = f_s F_N$　　$M_{max} = \delta F_N$　　- - 最大滚动摩阻（擦）力偶

δ 滚动摩阻（擦）系数，长度量纲(mm)

δ 的物理意义





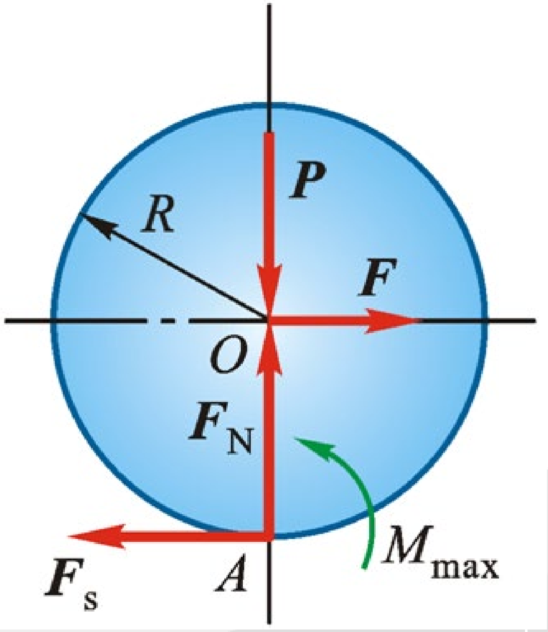
使圆轮滚动比滑动省力的原因

处于临界滚动状态

$$M_{\max}=\delta F_{\mathrm{N}}=F_1 R \qquad F_1=\frac{\delta}{R}F_{\mathrm{N}}$$

处于临界滑动状态

$$F_{\max}=f_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{N}}=F_2 \qquad F_2=f_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{N}}$$



一般情况下，$\frac{\delta}{R}<f_{\mathrm{s}}$ 或 $\frac{\delta}{R}<<f_{\mathrm{s}}$

→ $F_1<F_2$ 或 $F_1<<F_2$.

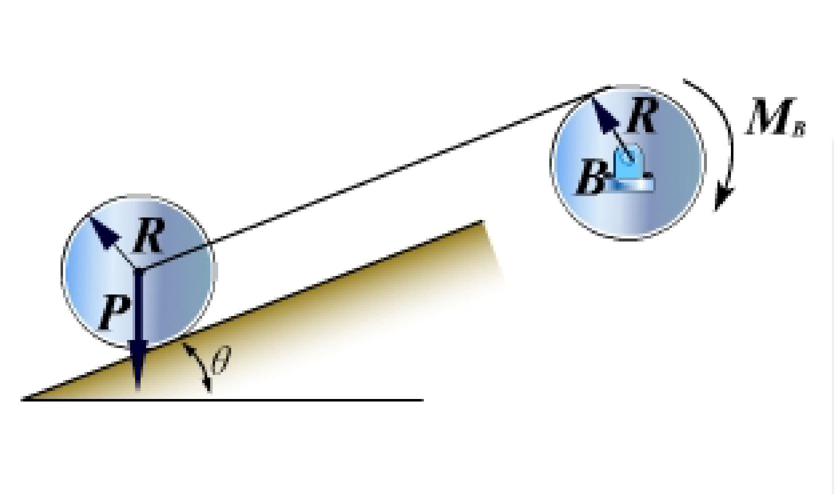
例：某型号车轮半径，$R=450\mathrm{mm}$

混凝土路面 $\delta=3.15\mathrm{mm}$ $f_s=0.7$

$$\frac{F_2}{F_1}=\frac{f_{\mathrm{s}}R}{\delta}=\frac{0.7\times 350}{3.15}=100$$

例4-3

已知: P , R , θ , δ ;



求: (1) 使系统平衡时，力偶矩 M_B;

(2) 圆柱C匀速纯滚动时，静滑动摩擦系数的最小值.

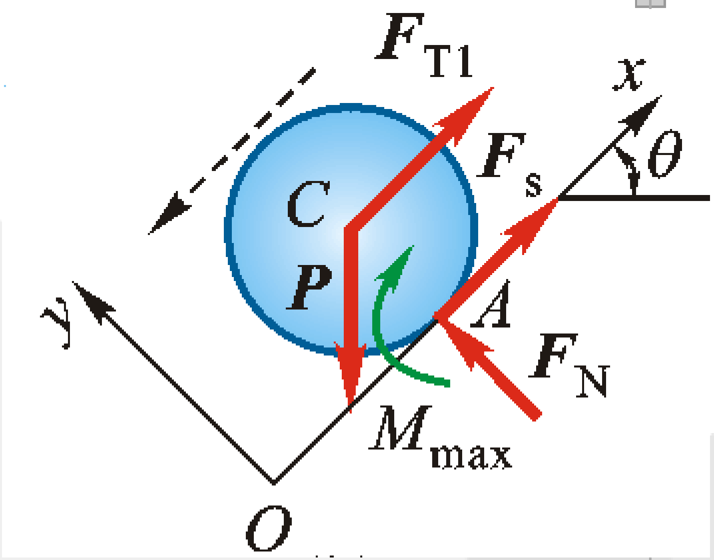
解： （1）设圆柱C有向下滚动趋势，取圆柱C

$$\Sigma M_A = 0$$

$$P\sin\theta \cdot R - F_{T1} \cdot R - M_{max} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad F_N - P\cos\theta = 0$$

又 $M_{max} = \delta F_N$



$$\Rightarrow \quad F_{T1} = P(\sin\theta - \frac{\delta}{R}\cos\theta)$$

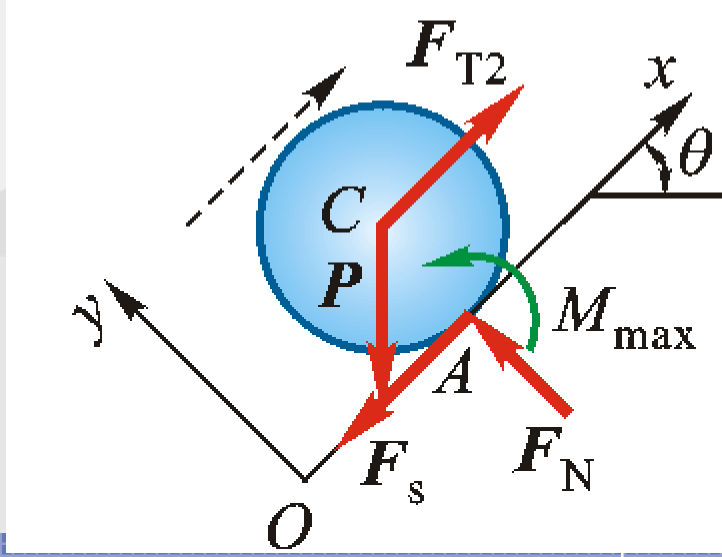
设圆柱 C 有向上滚动趋势，取圆柱 O

$$\Sigma M_A = 0$$

$$P\sin\theta \cdot R - F_{T2} \cdot R + M_{max} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_N - P\cos\theta = 0$$

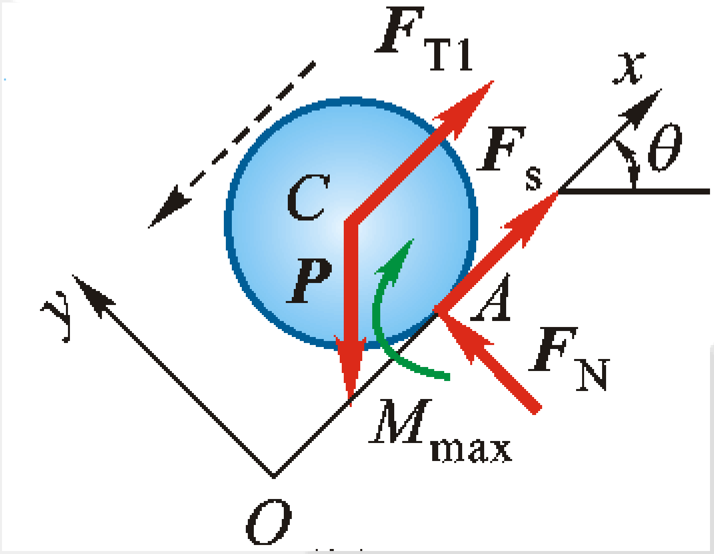
又 $M_{max} = \delta F_N$



$$\Rightarrow \quad F'_{\mathrm{T\,max}} = P(\sin\theta + \frac{\delta}{R}\cos\theta) \qquad F_s \le f_s F_{N1} = f_s P\cos\theta$$

系统平衡时 $P(R\sin\theta - \delta\cos\theta) \le M_B \le P(R\sin\theta + \delta\cos\theta)$

(2) 设圆柱C有向下滚动趋势.



$$\Sigma M_C = 0 \qquad F_s \cdot R - M_{max} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_N - P\cos\theta = 0$$

又 $M_{max} = \delta F_N$

$$\Rightarrow \quad F_s = \frac{\delta}{R} P\cos\theta$$

只滚不滑时，应有 $F_s \le f_s F_N = f_s P\cos\theta$ 则 $f_s \ge \dfrac{\delta}{R}$

同理，圆柱 C有向上滚动趋势时 得 $f_s \ge \dfrac{\delta}{R}$

圆柱匀速纯滚时， $\boxed{f_s \ge \dfrac{\delta}{R}}$