§ 6.3 系统微观运动状态的描述

一、基本概念

全同粒子系统 就是由具有完全相同属性（相同的质量、自旋、电荷等）的同类粒子所组成的系统。如自由电子气体。

近独立粒子系统：粒子之间的相互作用很弱，相互作用的平均能量远小于单个粒子的平均能量，因而可以忽略粒子之间的相互作用。将整个系统的能量表达为单个粒子的能量之和。（如理想气体：近独立的粒子组成的系统 ）

$$E=\sum_i \varepsilon_i$$

二、系统微观运动状态的经典描述

全同粒子是可以分辨的。在全同粒子系统中，将两个粒子的运动状态加以交换，则系统的力学运动状态是不同的。

任一粒子的状态发生变化，则整个系统的微观状态发生变化

经典描述单粒子的状态要 r 个广义坐标和 r 个广义动量，N 个粒子系统的微观运动状态需要 $q_{i1}, q_{i2}, \cdots q_{ir}$； $p_{i1}, p_{i2}, \cdots p_{ir}$ (i = 1, 2, …, N) 共 2Nr 个变量来确定。在 μ 空间中要用 N 个点表示系统某时刻的一个微观运动状态。

三、系统微观运动状态的量子描述

A) 全同粒子是不可分辨的。交换任何一对粒子不改变整个系统的微观状态。

但定域系粒子可辨（定域系——粒子位置被限定）

B) 粒子状态是分立的。

粒子所处的状态叫量子态（单粒子态）。

量子态 用一组量子数表征（如自由粒子n_x, n_y, n_z）。

不同量子态的量子数取值不同。

量子描述单粒子的状态是确定单粒子的量子态，对于 N 个粒子的系统，就是确定各个量子态上的粒子数。

1、玻耳兹曼系统

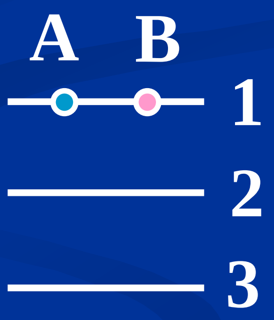
（如定域系）

粒子可以分辨，每个个体量子态上的粒子数不受限制。

确定系统的微观状态要求确定每个粒子所处的个体量子态。确定了每个粒子所处的量子态就确定了系统的一个微观状态

例：设系统由A、B两个粒子组成（定域子）。粒子的个体量子态有3个，讨论系统有那些可能的微观状态？

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
量子态1	AB			A	B	A	B		
量子态2		AB		B	A			A	B
量子态3			AB			B	A	B	A



因此，对于定域系统可有9种不同的微观状态，即 3^2。一般地为 ω^a。

2、不可分辨的全同粒子系统

对于不可分辨的全同粒子，必须考虑全同性原理。

确定由全同近独立粒子组成的**系统的**微观状态归结为确定每一个体量子态上的粒子数。或：

确定了每个量子态上的粒子数就确定了系统的微观状态

（1）玻色系统：即自旋量子数为整数的粒子组成的系统。

如光子自旋为1、π 介子自旋为0。由玻色子构成的复合粒子是玻色子，由偶数个费米子构成的复合粒子也是玻色子

粒子不可分辨，每个量子态上的粒子数不限（即不受泡利原理限制）

上例变为（A=B）

两个玻色子占据3个量子态有6种方式

	①	②	③	④	⑤	⑥
量子态1	AA			A	A	
量子态2		AA		A		A
量子态3			AA		A	A

（2）费米系统：即自旋量子数为半整数的粒子组成的系统。

如电子、质子、中子等都是自旋为1/2的费米子。由奇数个费米子构成的复合粒子也是费米子。

粒子不可分辨，每个个体量子态上最多能容纳一个粒子（费米子遵从泡利原理）。

仍为
A=B

	④	⑤	⑥
量子态1	A	A	
量子态2	A		A
量子态3		A	A

两个费米子占据3个量子态有3种占据方式

对于不同统计性质的系统，即使它们有相同的粒子数、相同的量子态，系统包含的微观状态数也是不同的。

上例仅为两个粒子组成的系统、三个量子态。对于大量微观粒子组成的实际系统，其微观状态数目是大量的。

§6.4 等概率原理

宏观态： 系统的热力学状态。

用少数几个宏观参量即可确定系统的宏观态。

微观态： 系统的力学状态。

确定方法：①可分辨的全同粒子系统（玻耳兹曼系统）；

②不可分辨的全同粒子系统（玻色、费米系）。

宏观性质是大量微观粒子运动的集体表现；

宏观物理量是相应微观物理量的统计平均值。

确定各微观状态出现的概率就能用统计的方法求出微观量的统计平均值，从而求出相应宏观物理量，因此**确定各微观状态出现的概率是统计物理学的基本问题。**

等概率原理：对于处在平衡状态的孤立系统，系统各个可能的微观状态出现的概率是相等的！

对于孤立系统，会出现大量的微观状态。这些微观状态都满足具有确定的N、E、V的宏观条件。从能量上讲这些微观状态应是平权的。

等概率原理是统计物理学中的一个基本假设，是平衡态统计物理学理论的基础。不能直接从实验上验证。它的正确性在于从它推出的各种结论上的正确性。

例：① 静止容器中平衡态气体——平动动能为零；

② 重力场中平衡态气体——压强按高度分布。

§ 6.5 分布和微观状态

系统具有确定的N，E，V(孤立系)。这时系统有大量微观态。

一、分布

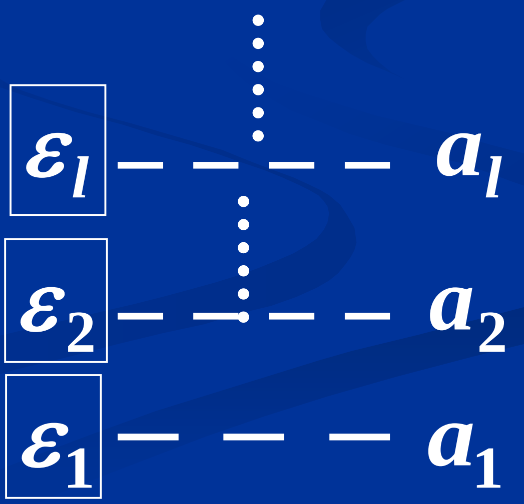
若确定了各能级上的粒子数，则确定了系统的一个分布。

N 粒子系统的 能 级	$\varepsilon_1,$	$\varepsilon_2,\cdots,$	$\varepsilon_l,\cdots$
简并度	$\omega_1,$	$\omega_2,\cdots,$	$\omega_l,\cdots$
粒子数	$a_1,$	$a_2,\cdots,$	$a_l,\cdots$

即：能级ε_1上有a_1个粒子，

能级ε_2上有a_2个粒子，……。

这就给出一个分布，即数列 $\{a_l\}$



满足约束条件

$$\sum_l a_l = N, \qquad \sum_l a_l \varepsilon_l = E$$

分布只表示每一个能级上有多少个粒子。一种分布包含大量的微观状态。

每一种不同的占据方式都是不同的微观运动状态。

对一个确定的分布，它相应的微观状态数是确定的。

二、分布$\{a_l\}$包含的微观状态数（量子描述）

1、玻耳兹曼系统 （定域系统）：

粒子可以分辨（可编号），每个量子态上的粒子数不限。

(1) a_l个粒子占据 ε_l上的ω_l个量子态的占据方式数：$\omega_l^{a_l}$

(2) 各个能级都考虑在内，系统总的占据方式数：$\prod_l \omega_l^{a_l}$

(3) 由于粒子可分辨，能级之间粒子的交换是新的占据方式，能级之间粒子的交换有 $N!/\prod_l a_l!$ 种不同的交换方式。（未改变分布）

例： 系统有6个可分辨粒子，共两个能级，$\omega_1=3$，$\omega_2=4$

给定分布：$a_1= 4$，$a_2=2$

$3^4 \cdot 4^2$

$3^4 \cdot 4^2$

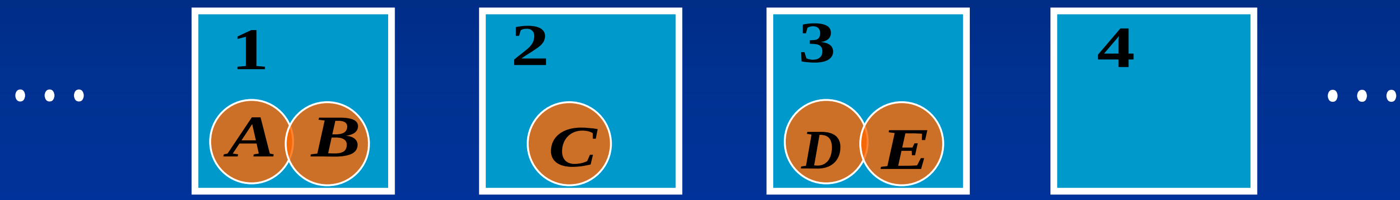
能级之间粒子交换的方式数目为 $\dfrac{N!}{\prod_l a_l!}$

(4) 系统分布 $\{a_l\}$ 包含的总微观状态数为

$$\Omega_{M.B.} = \frac{N!}{\prod_l a_l!} \cdot \prod_l \omega_l^{a_l} = N! \prod_l \frac{\omega_l^{a_l}}{a_l!}$$

2、玻色系统分布 $\{a_l\}$ 包含的微观状态数

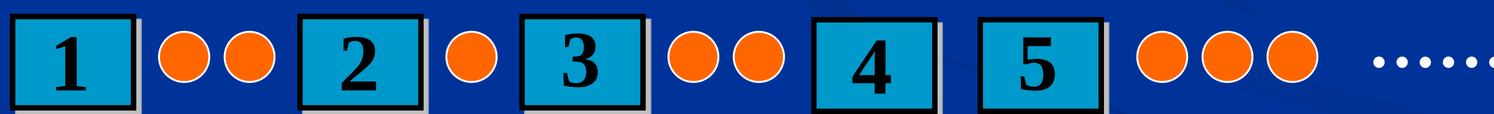
粒子不可分辨，交换任意一对粒子不改变系统的微观态。每个量子态上的粒子数不受限制。



(1) a_l个粒子占据能级ε_l上的ω_l个量子态的占据方式数：

用 表示量子态， 表示粒子。

规定：粒子占据左边的量子态。 例如：

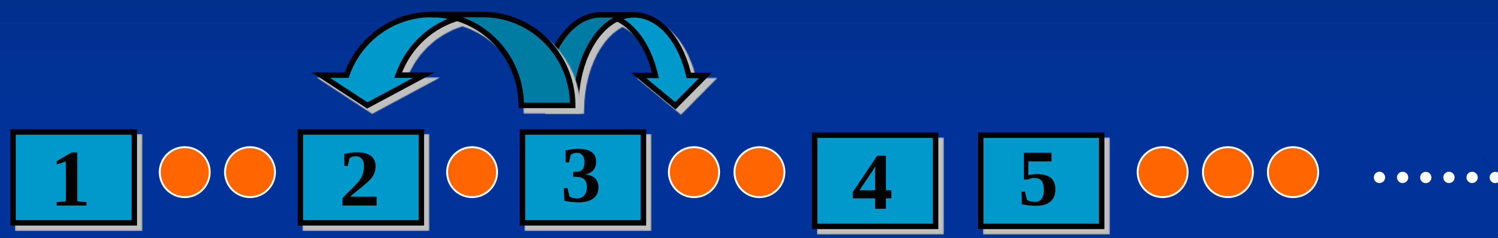


这样就确定了每个量子态上的粒子数，即确定了一种占据方式（一个微观态）。

改变排列，可得到新的占据方式。

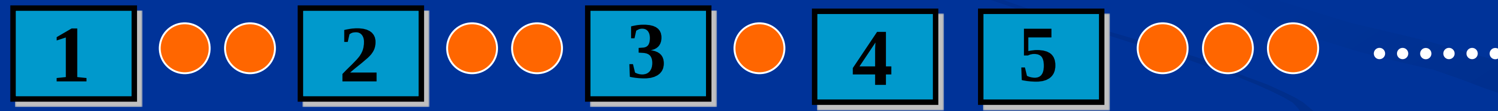
量子态、粒子各种交换(排列)总数　$(\omega_l + a_l - 1)!$

其中粒子与粒子的交换、量子态与量子态的交换不产生新的微观态。只有量子态与粒子交换导致不同微观态。



▲ 显然，粒子和粒子之间的交换 不会产生新的占据方式。

▲ 粒子和量子态之间的交换 会产生新的占据方式：



▲ 量子态和量子态之间的交换 不产生新的占据方式：

量子态交换数 $(\omega_l - 1)!$

粒子交换数 $a_l\,!$

各种交换共有 $\dfrac{(\omega_l + a_l - 1)!}{a_l\,!(\omega_l - 1)!}$ 种可能的方式。

（2）将各种能级的结果相乘，就得到玻色系统与分布 $\{ a_l \}$相应的微观状态数为：

$$\Omega_{B.E.} = \prod_l \frac{(\omega_l + a_l - 1)!}{a_l\,!\ (\omega_l - 1)!}$$

3、费米系统分布 $\{a_l\}$ 包含的微观状态数：

粒子不可分辨，每一个量子态最多能容纳一个粒子。a_l 个粒子占据能级 ε_l 上的 ω_l 个量子态，占据方式数为：从 ω_l 个量子态中选取 a_l 个量子态让 a_l 个粒子占据，即

$$C_{\omega_l}^{a_l}=\frac{\omega_l\,!}{a_l\,!(\omega_l-a_l)!}$$

将各能级的结果相乘，得到费米系统与分布 $\{a_l\}$ 相应的微观状态数为：

$$\Omega_{F.D.}=\prod_l\frac{\omega_l\,!}{a_l\,!(\omega_l-a_l)!}$$

三、经典极限条件下三种分布微观状态数的关系

若满足 $\boxed{\dfrac{a_l}{\omega_l} << 1}$，称为经典极限条件（或非简并性条件）

此时有

$$\Omega_{M.B.} = N!\prod_l \frac{\omega_l^{a_l}}{a_l!}$$

$$\Omega_{B.E.} = \prod_l \frac{(\omega_l + a_l - 1)!}{a_l!(\omega_l - 1)!}$$

$$= \prod_l \frac{(\omega_l + a_l - 1)(\omega_l + a_l - 2)\cdots\cdots\omega_l(\omega_l - 1)!}{a_l!\ \ (\omega_l - 1)!}$$

$$\approx \prod_l \frac{\omega_l^{a_l}}{a_l!} \quad = \frac{\Omega_{M.B.}}{N!}$$

$$\Omega_{F.D.}=\prod_l \frac{\omega_l\,!}{a_l\,!(\omega_l-a_l)!}$$

$$=\prod_l \frac{\omega_l(\omega_l-1)\cdots\cdots(\omega_l-a_l+1)(\omega_l-a_l)!}{a_l\,!\ \ (\omega_l-a_l)!}$$

$$\approx\prod_l \frac{\omega_l^{a_l}}{a_l\,!} \quad =\frac{\Omega_{M.B.}}{N\,!}$$

即在经典极限条件下

$$\Omega_{B.E.}=\Omega_{F.D.}=\frac{\Omega_{M.B.}}{N\,!}$$

四、经典系统中的分布和微观状态数

经典粒子状态由 $q_1 \ldots q_r$，$p_1 \ldots p_r$ 的值确定。N 粒子系统对应μ空间中的N个点。

坐标和动量取值连续，微观状态不可数。处理如下

第一步：

μ 空间各轴上取间隔 $dq_1 \ldots dq_r$，$dp_1 \ldots dp_r$ 围成体积元

$$d\omega = dq_1 dq_2 \cdots dq_r dp_1 dp_2 \cdots dp_r \approx h_0^r$$

若体积元很小，其内各点的状态都看作相同h_0^r —— 相格。

即：处于同一相格内的各代表点状态都相同。不同相格内代表点的状态不同。每个相格就是一个状态。

在一定的相体积内包含多少相格，则此体积中就有多少个力学运动状态（微观态）。

经典力学中 h_0可以任意小；量子力学中 h_0 最小为 h 。

第二步：

再把μ空间按能量大小划分成许多能量层，每层体积分别为 $\Delta\omega_1$、$\Delta\omega_2$ 、 …、 $\Delta\omega_l$、 …；每层内包含许多相格。

同一能层内各状态 （代表点）的能量相同。（能层很薄）

不同能层中各点的能量则不同。$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \cdots \quad , \varepsilon_l, \quad \cdots$

某能量层的体积为$\Delta\omega_l$，则此层内包含的相格数为：$\dfrac{\Delta\omega_l}{h_0^r}$

这些相格的状态不同，但具有相同的能量，故相当于量子描述中的简并度。于是有分布

能 级	$\varepsilon_1,$	$\varepsilon_2,\cdots,$	$\varepsilon_l,\cdots$
“简并度”	$\dfrac{\Delta\omega_1}{h_0^r},$	$\dfrac{\Delta\omega_2}{h_0^r},\cdots,$	$\dfrac{\Delta\omega_l}{h_0^r},\cdots$
粒子数	$a_1,$	$a_2,\cdots,$	$a_l,\cdots$

给定了一种分布$\{a_l\}$

所以经典系统分布 $\{ a_l \}$ 对应的微观状态数为可参照

玻耳兹曼系统

$$\Omega_{M.B.} = \frac{N!}{\prod_l a_l!} \cdot \prod_l \omega_l^{a_l}$$

得到

$$\Omega_{cl} = \frac{N!}{\prod_l a_l!} \prod_l \left(\frac{\Delta\omega_l}{h_0^r} \right)^{a_l}$$