第八章

玻色统计和费米统计

§ 8.1 热力学量的统计表达

一、从非简并到简并

玻耳兹曼系统（玻耳兹曼分布）　　孤立系统

定域粒子组成的系统，满足经典极限条件（非简并条件）的近独立粒子系统

经典极限条件（非简并条件）

$$a_l = \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l} \mp 1} \xrightarrow{e^{\alpha} >> 1} a_l = \omega_l e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}$$

玻色分布和费米分布趋向于玻耳兹曼分布。

$$Z_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \omega_l e^{-\beta\varepsilon_l} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l}{e^{-a}} \Rightarrow e^{-\alpha} = \frac{N}{Z_1} \qquad Z_1 = V\left(\frac{2\pi m}{h^2\beta}\right)^{3/2}$$

$$e^{\alpha} = \frac{V}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} >> 1 \qquad e^{-\alpha} = \frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2} = n\lambda^3 << 1$$

不满足非简并条件

开放系统，与源达到动态平衡，粒子数在能级上的平均分布。

采用玻色分布或费米分布

费米统计

$$a_l = \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l} \pm 1}$$

玻色统计

二、巨配分函数

$$\overline{N} = \sum_l a_l = \sum_l \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l} \pm 1} \qquad U = \sum_l \varepsilon_l a_l = \sum_l \frac{\varepsilon_l \omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l} \pm 1}$$

$$\Xi = \prod_l \Xi_l = \prod_l \left(1 \pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right)^{\pm\omega_l} \qquad \ln\Xi = \pm\sum_l \omega_l \ln\left(1 \pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right)$$

对比玻耳兹曼分布

$$Z_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \omega_l e^{-\beta\varepsilon_l}$$

三、用巨配分函数表示热力学量

1、 平均粒子数 $\overline{N}$

$$\overline{N}=\sum_l a_l=\sum_l \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}\pm 1} \qquad \ln\Xi=\pm\sum_l \omega_l \ln\left(1\pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Xi=\mp\frac{\partial}{\partial\alpha}\sum_l \omega_l \ln\left(1\pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right)$$

$$=\mp\sum_l \omega_l \frac{\pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}(-1)}{1\pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}}$$

$$=\sum_l \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}\pm 1}=\overline{N}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{N}=-\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Xi$$

对比玻耳兹曼分布

$$N=Z_1 e^{-\alpha}$$

2、 内能

$$U=\sum_l \varepsilon_l a_l=\sum_l \frac{\varepsilon_l \omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}\pm 1}$$

$$\ln\Xi=\pm\sum_l \omega_l \ln\left(1\pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi=\mp\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_l \omega_l \ln\left(1\pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right)$$

$$=\mp\sum_l \omega_l \frac{\pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}(-\varepsilon_l)}{1\pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}}$$

$$=\sum_l \frac{\omega_l \varepsilon_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}\pm 1}=U$$

$$\Rightarrow \quad U=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi$$

对比玻耳兹曼分布

$$U=-N\frac{\partial \ln Z_1}{\partial\beta}$$

3、 广义力

$$Y=\sum_l a_l \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial y} \qquad \ln \Xi = \pm \sum_l \omega_l \ln\left(1 \pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right)$$

$$-\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial y}\ln \Xi = \mp \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial y}\sum_l \omega_l \ln\left(1 \pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right)$$

$$=\mp \sum_l \omega_l \frac{\pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}(-1)}{1 \pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}}\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial y} = \sum_l \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l} \pm 1}\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial y} = \sum_l a_l \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial y} = Y$$

$$Y=-\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial y}\ln \Xi$$

对比玻耳兹曼分布

$$Y=-N\frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z_1}{\partial y}$$

压强 $$p=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\ln \Xi$$

$$p=\frac{N}{\beta}\frac{\partial \ln Z_1}{\partial V}$$

4、 其它热力学函数

由开系的热力学公式 $dU - Ydy - \mu dN = TdS$

$$\beta\left(dU - Ydy + \frac{\alpha}{\beta}d\overline{N}\right) = -\beta d\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi\right) + \frac{\partial}{\partial y}\ln\Xi dy - \alpha d\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Xi\right)$$

$$= -d\left(\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\overset{*}{\ln}\Xi d\beta + \frac{\partial}{\partial y}\overset{*}{\ln}\Xi dy - d\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Xi\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\overset{*}{\ln}\Xi d\alpha$$

$$= -d\left(\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi\right) - d\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Xi\right) + d(\overset{*}{\ln}\Xi)$$

$$= d\left(\ln\Xi - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi - \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Xi\right)$$

$$= \beta TdS$$

$$\beta\left(dU - Ydy + \frac{\alpha}{\beta}d\overline{N}\right) = d\left(\ln\Xi - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi - \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Xi\right) = \beta TdS$$

$\Rightarrow$ $$\beta = \frac{1}{kT} \qquad \alpha = -\frac{\mu}{kT}$$

熵 $$dS = kd\left(\ln\Xi - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi - \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Xi\right)$$

$$S = k\left(\ln\Xi - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi - \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Xi\right)$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi$$

$$S = k\left(\ln\Xi + \beta U + \alpha\overline{N}\right)$$

$$\overline{N} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\Xi$$

与玻耳兹曼关系比较 $$S = k\ln\Omega$$

§ 8.3 玻色—爱因斯坦凝聚

一、玻色气体的化学势

玻色分布下一个能级的粒子数

$$a_l = \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}-1} = \frac{\omega_l}{e^{\frac{\varepsilon_l-\mu}{kT}}-1} \qquad \alpha = -\frac{\mu}{kT}$$

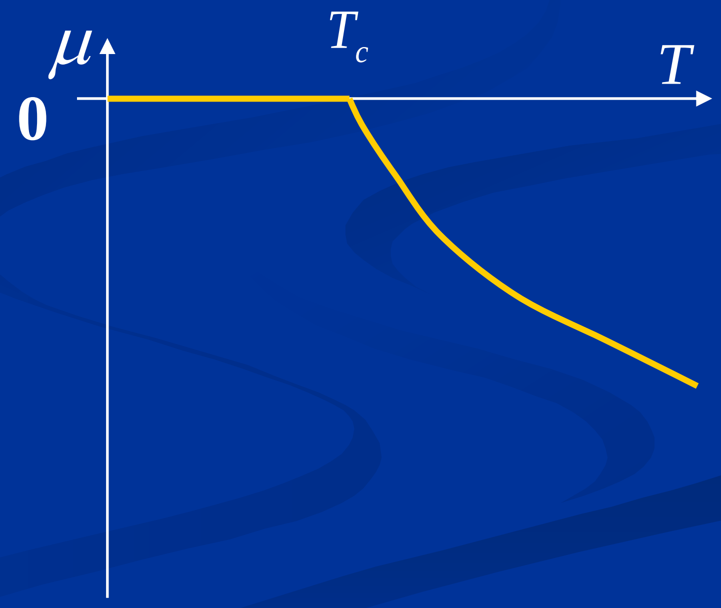
$$0 \le a_l = \frac{\omega_l}{e^{\frac{\varepsilon_l-\mu}{kT}}-1} \qquad e^{\frac{\varepsilon_l-\mu}{kT}} > 1 \qquad \varepsilon_0 > \mu$$

最低能级 $\varepsilon_0 = 0$

$$\mu(N,T,V) < 0$$

在粒子数给定情况下，μ与T 的关系

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{V}\sum_l \frac{\omega_l}{e^{\frac{\varepsilon_l-\mu}{kT}}-1}$$



μ 随温度的升高而降低

$$n=\frac{N}{V}=\frac{1}{V}\sum_l \frac{\omega_l}{e^{\frac{\varepsilon_l-\mu}{kT}}-1}$$

$$D(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$

连续化

$$n=\frac{N}{V}=\frac{1}{V}\int_0^\infty \frac{D(\varepsilon)}{\omega_l}a_l d\varepsilon=\frac{1}{V}\int_0^\infty D(\varepsilon)a(\varepsilon)d\varepsilon$$

$$n=n_0+\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}-1}$$

$\varepsilon=0$ 能级　　$\varepsilon>0$ 能级

$T>T_c$　n_0 可以忽略

$$n=\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1}$$

$$n=\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT_c}}-1}$$

临界温度T_c：所有玻色粒子都在非零能级的最低温度

$T<T_c$

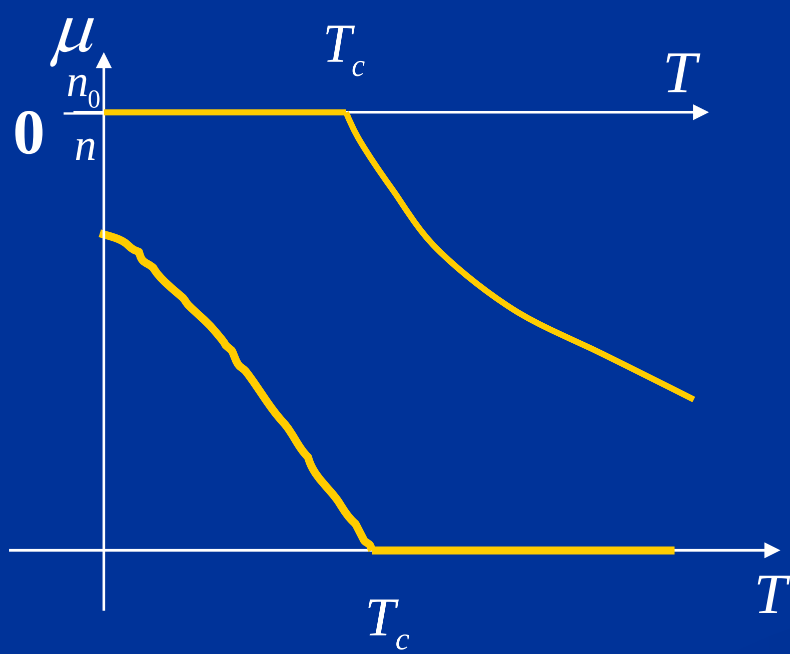
n_0可以和所有激发态能级上粒子数相比较，即粒子都往 $\varepsilon=0$ 能级聚集。

令 $x=\dfrac{\varepsilon}{kT_c}$ $\quad n=\dfrac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT_c}}-1}=\dfrac{2\pi}{h^3}(2mkT_c)^{3/2}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{x^{1/2}dx}{e^x-1}$

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}dx}{e^x-1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\times 2.612 \qquad T_c=\frac{2\pi}{(2.612)^{2/3}}\frac{\hbar^2}{mk}n^{2/3}$$

$T<T_c,\mu=0$ $\qquad \varepsilon>0$

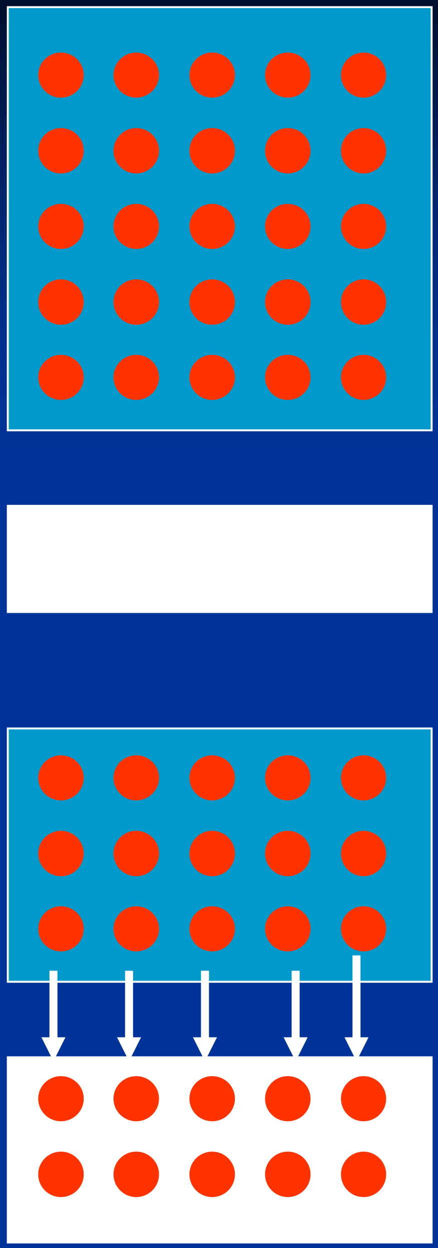
$$n_{\varepsilon>0}=\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1}$$



$$=\frac{2\pi}{h^3}(2mkT)^{3/2}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}dx}{e^x-1}$$

$$=\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\frac{2\pi}{h^3}(2mkT_c)^{3/2}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}dx}{e^x-1}$$

$$=n\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \qquad n_0=n\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right]$$



$\varepsilon > 0$

$\varepsilon = 0$

$T > T_c$

$$n_0 = n\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right] \approx 0$$

$$n_{\varepsilon>0} = n\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \approx n$$

玻色粒子都在高能级。

$\varepsilon > 0$

$\varepsilon = 0$

$T < T_c$

$$n_0 = n\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right] \neq 0$$

$$n_{\varepsilon>0} = n\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} < n$$

高能级装不下所有玻色粒子，必有可观数目粒子出现在零能级。——玻色—爱因斯坦凝聚。

$$T_c=\frac{2\pi}{(2.612)^{2/3}}\frac{\hbar^2}{mk}n^{2/3}$$

因此，为了容易实现玻色—爱因斯坦凝聚，需要提高临界温度。

为此，要提高气体密度，减小气体粒子质量。

二、热力学量

$T<T_c$时

$$n=\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1}$$

$$U=\frac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{3/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}}-1}=0.770NkT\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

$$C_V=1.925Nk\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

$T<T_c$，理想玻色气体的C_v与$T^{3/2}$成正比，$T=T_c$达极大值。 高温时趋于经典值$\frac{3}{2}Nk$

三、发展过程

1. 理论准备

1924.6.24，印度人玻色给爱因斯坦寄“玻色分布”文章。

经爱因斯坦努力，该论文发表。

在这篇文章基础上，爱因斯坦继续发表论文，提出“玻色凝聚”

Bose-Einstein Condensation （BEC） 的概念。

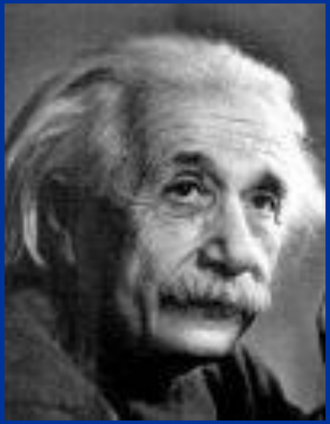
2. 实验检验

1995年7月13日，美国科罗拉多大学报告：铷 （ ^{87}Rb ）蒸气在170nK出现BEC。

8月，休斯顿Rice大学宣布，在锂 （ ^{7}Li ）蒸气中出现BEC。

11月，麻省理工学院宣布，钠（ ^{23}Na ）蒸气中出现BEC。

S. Bose



A. Einstein

1924年，玻色和爱因斯坦在理论上预言了玻色—爱因斯坦凝聚（BEC: Bose-Einstein Condensation）现象，如果将原子气体冷却到非常低的温度，那么所有原子会突然以可能的最低能态凝聚。

§8.4 光子气体

一、光子气体特性

光子——辐射场能量的量子化，自旋 1—玻色子。

平衡辐射场中，光子数不守恒。

空窖壁不断吸收和发射光子，保持能量守恒，但光子能量有高有低，发射光子平均能量高发射光子数目少，被吸收的光子平均能量低，被吸收的光子数目就多，因此不要求光子数守恒。

光子气体服从玻色分布

化学势描述物质变化

$$a_l = \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}-1} = \frac{\omega_l}{e^{\frac{\varepsilon_l-\mu}{kT}}-1} = \frac{\omega_l}{e^{\hbar\omega/kT}-1}$$

$$\mu = 0$$

二、普朗克公式

德布罗意关系： $\vec{p} = \hbar\vec{k},$ $\varepsilon = \hbar\omega.$

色散关系：$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \omega / c$

分布：$a_l = \frac{\omega_l}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$

光子能动关系 $\varepsilon = cp$

动量空间 $p \to p + dp$ 中量子态数

$$g\frac{dxdydzdp_x dp_y dp_z}{h^3} = 2\frac{V4\pi}{h^3}p^2dp = \frac{8\pi V}{h^3}p^2dp$$

频率空间 $\omega \to \omega + d\omega$ 中量子态数 $= \frac{V}{\pi^2c^3}\omega^2 d\omega$

$d\omega \to 0$

$\leftrightarrow \omega_l$

一个量子态的平均粒子数 $f=\frac{a_l}{\omega_l}=\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}$

频率空间 $\omega\to\omega+d\omega$ 中平均光子数

$$f\times\frac{V\omega^2 d\omega}{\pi^2c^3}=\frac{V}{\pi^2c^3}\frac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}$$

普朗克公式

（辐射场内能） $U(\omega,T)d\omega=\frac{V}{\pi^2c^3}\frac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}\times\hbar\omega=\frac{V}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}$

低频（弱简并），经典描述——能量均分定理。

$\hbar\omega/kT<<1$ $\quad e^{\hbar\omega/kT}\approx 1+\hbar\omega/kT$

$$U(\omega,T)d\omega\approx\frac{V}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega^3 d\omega}{1+\hbar\omega/kT-1}=\frac{V}{\pi^2c^3}\omega^2 kTd\omega$$

瑞利-金斯公式

高频 $\hbar\omega/kT >> 1$

$$U(\omega,T)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3}\hbar\omega^3 e^{-\hbar\omega/kT}d\omega$$

***U*随*ω*的增加迅速趋近于零。温度为*T* 的平衡辐射中，高频光子几乎不存在；温度为*T*时，窖壁发射高频光子的概率极小。**

三、平衡辐射公式

$$x = \hbar\omega/kT$$

1. 内能

$$U = \frac{V}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1} = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3}\left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty \frac{\hbar x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$U = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3}VT^4 \quad U = aVT^4 \quad a = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3}$$

热力学只能通过实验确定系数*a*；统计物理可以计算*a*。

2. 维恩位移律

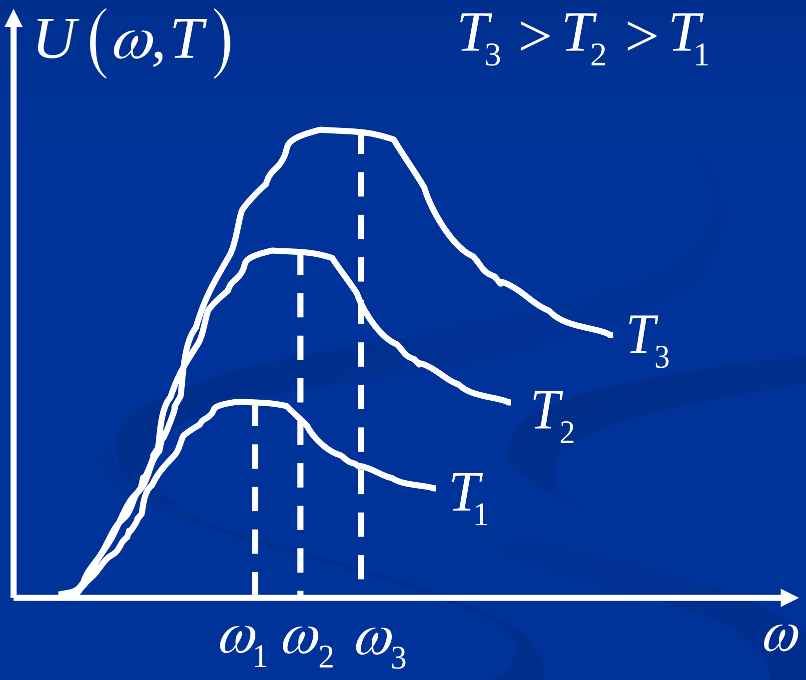
内能最大的频率 ω_m

$$\frac{\partial}{\partial\omega}U(\omega,T)\Big|_{\omega=\omega_m}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^3}{e^x-1}=\frac{3x^2}{e^x-1}-\frac{x^3e^x}{(e^x-1)^2}=0$$

$$3e^x-3-xe^x=0$$

$$\omega_m\approx\frac{2.822k}{\hbar}T$$



3. 压强、辐射通量密度

$\omega \to \omega + d\omega$ 中量子态数 $\quad \dfrac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega \leftrightarrow \omega_l$

$$x = \hbar\omega / kT$$

$$\ln \Xi = -\sum_l \omega_l \ln(1 - e^{-\alpha - \beta\varepsilon_l}) = -\frac{V}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \omega^2 \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) d\omega$$

$$\ln \Xi = -\frac{V}{\pi^2 c^3}\frac{1}{(\beta\hbar)^3}\int_0^\infty x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx$$

分部积分

$$\int_0^\infty x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(1 - e^{-x})\right]_0^\infty - \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$\ln \Xi = \frac{V}{3\pi^2 c^3}\frac{1}{(\beta\hbar)^3}\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2 V}{45 c^3}\frac{1}{(\beta\hbar)^3}$$

$$\ln \Xi = \frac{\pi^2 V}{45c^3} \frac{1}{(\beta\hbar)^3}$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Xi = \frac{\pi^2 k^4 V}{15c^3\hbar^3} T^4$$

$$p = \frac{1}{3}\frac{U}{V}$$

$$p = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V} \ln \Xi = \frac{\pi^2 k^4}{45c^3\hbar^3} T^4$$

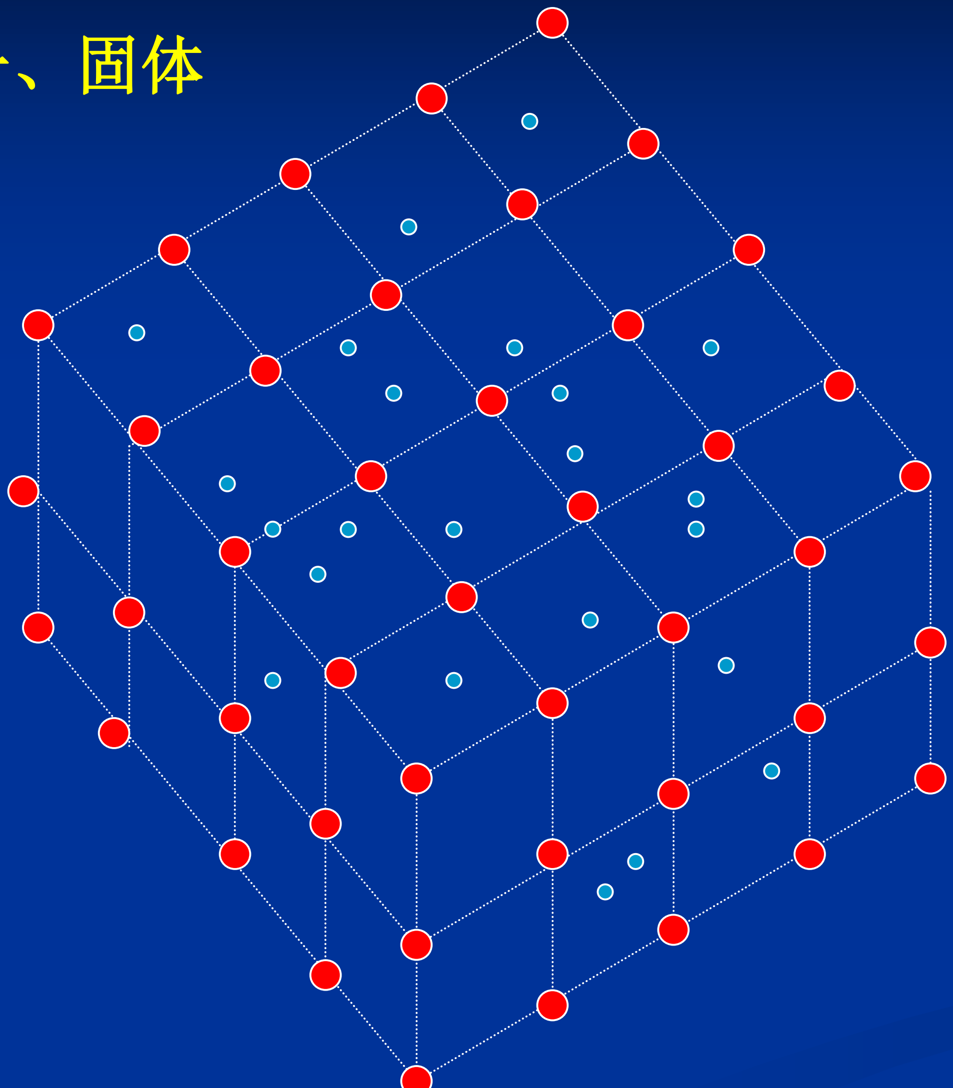
$$S = k\left(\ln \Xi - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Xi \right) = k(\ln \Xi + \beta U) = \frac{4\pi^2 k^4 V}{45c^3\hbar^3} T^3$$

平衡辐射通量密度

$$J_\mu = \frac{c}{4} u = \frac{c}{4}\frac{U}{V} = \frac{\pi^2 k^4}{60c^2\hbar^3} T^4$$

§8.5 金属中的自由电子气体

一、固体



每个原子贡献一个电子，晶格中的自由电子气体。

晶格——三维线性振子

$$U = 3NkT$$

$$C_V = 3Nk$$

电子对热容量的贡献未计！

量子性质

例Cu： 密度= $8.9 g\cdot cm^{-3}$

原子量 = 63

$$n=\frac{8.9\times10^{6}}{63}\times N_0=8.5\times10^{28}m^{-3}$$

$$m=9.1\times10^{-31}kg$$

$$e^{-\alpha}=n\lambda^3=\frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}=\frac{3.54\times10^{7}}{T^{3/2}}=3400\gg1$$

$n\lambda^3\ll1$ 非简并条件 ⇨ 弱简并 ⇨ 强简并

二、T=0K

1. 费米气体

服从费米 $$a_l = \frac{\omega_l}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}$$

每个量子态上最多能容纳一个粒子（费米子遵从泡利原理）。

一个量子态的平均费米粒子数 $$f = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}$$

电子 g =2；　粒子微观状态数

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon = \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$ **6.2.17式**

$\varepsilon \to \varepsilon + d\varepsilon$ 间粒子数

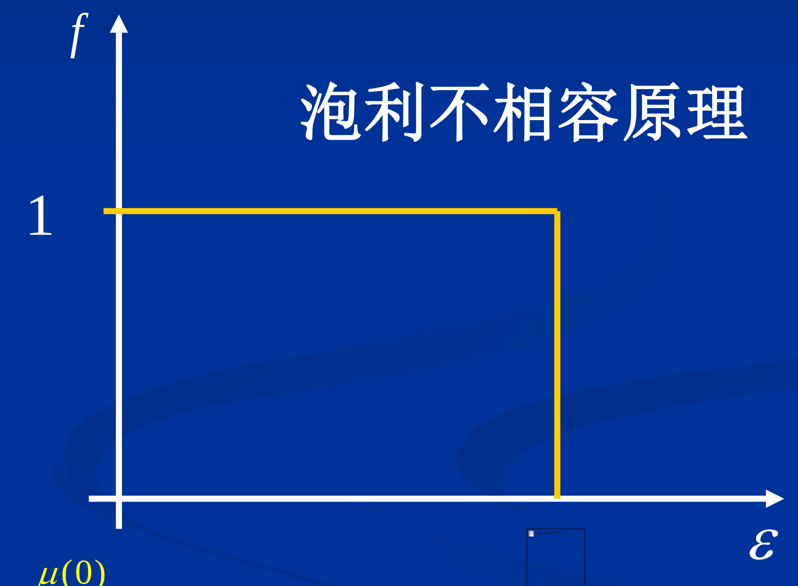
$$f \times D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}$$

对能量积分得到粒子数总数

$$\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}=N \quad \Rightarrow \quad \mu=\mu(N,T,V)$$

2. 化学势

$$f=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}\le 1$$



$$T\to 0,\frac{1}{kT}\to\infty$$

$$\varepsilon>\mu(0)\quad f=0$$

$$\varepsilon<\mu(0)\quad f=1$$

$$\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}=\frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^{\mu(0)}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon=N$$

$$\frac{8\pi V}{3h^3}(2m)^{3/2}\mu(0)^{3/2}=N$$

$$\frac{8\pi V}{3h^3}(2m)^{3/2}\mu(0)^{3/2}=N$$

费米能级 $$\mu(0)=\frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

能量 $$\mu(0)=\frac{p^2(0)}{2m}$$

费米动量 $$p(0)=\hbar\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{1/3}$$

内能

已求出 $\varepsilon \to \varepsilon + d\varepsilon$ 间粒子数 $\dfrac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\dfrac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}$

$$\Rightarrow U = \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \varepsilon\frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1} = \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^{\mu(0)}\varepsilon^{3/2}d\varepsilon$$

$$= \frac{8\pi V}{5h^3}(2m)^{3/2}\mu(0)^{5/2} = \frac{3N}{5}\mu(0)$$

例Cu $\quad \dfrac{N}{V} = 8.5\times10^{28}m^{-3}$

费米能级 $\quad \mu(0) = \dfrac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\dfrac{N}{V}\right)^{2/3} = 1.12\times10^{-18}J = 7.0eV$

费米温度 $kT_F = \mu(0)$

Cu: $T_F = 8.2\times 10^4 K$

零温电子气体压强——简并压

$$p(0) = \frac{2}{3}\frac{U(0)}{V} = \frac{2}{5}n\mu(0) = 3.8\times 10^{10} Pa$$

习题7.1结果

三、$T > 0K$

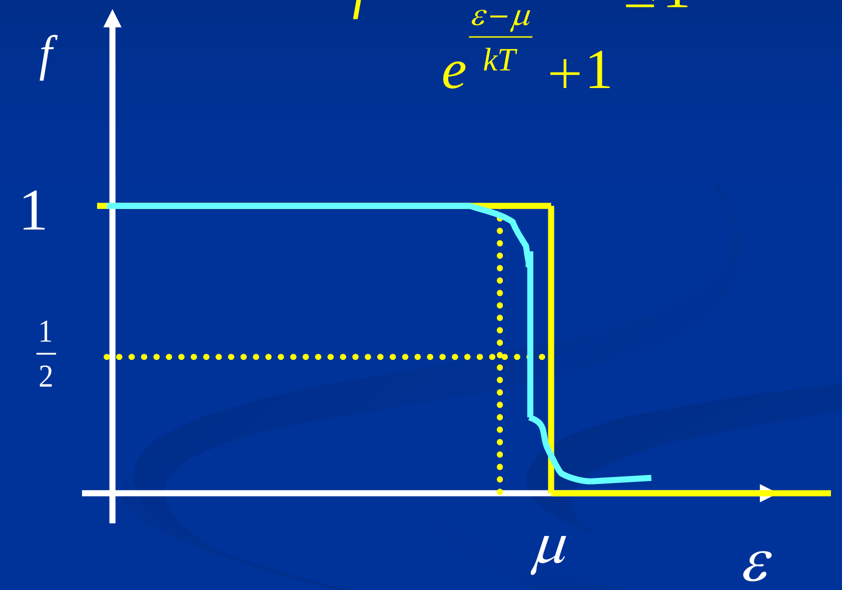
1.平均粒子数

$$f = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1} \le 1$$

$$\varepsilon < \mu \quad f > \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon = \mu \quad f = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon > \mu \quad f < \frac{1}{2}$$



粒子分布只在 μ 附近（kT量级）有变化

2. 热容量估计

只有费米能级附近 $\varepsilon = kT$ 能级中电子可以跳到费米能级之上。即吸热，对热熔有贡献，有效电子数

$$N_e = \frac{kT}{\mu} N$$

每个粒子贡献热容量 $\frac{3}{2}k$

$$C_V = \frac{3}{2} Nk \left(\frac{kT}{\mu} \right) = \frac{3}{2} Nk \left(\frac{T}{T_F} \right)$$

Cu 室温 $\frac{T}{T_F} \approx \frac{1}{260}$

与晶格的热容量相比，电子贡献可以忽略。