



第7章 有限脉冲响应数字滤波器的设计

7.1 线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

7.2 利用窗函数法设计FIR滤波器

7.3 利用频率采样法设计FIR滤波器

7.4 利用切比雪夫逼近法设计FIR滤波器

7.5 IIR和FIR数字滤波器的比较

■ IIR滤波器

- 可利用模拟滤波器的成熟理论
- 主要对滤波器的幅频响应特性进行逼近，其相频响应特性是**非线性的**
- 为得到线性相位特性，对IIR滤波器必须另加相位校正网络，使滤波器设计变得复杂，成本也高，又难以得到严格的线性相位特性

线性相位与非线性相位

■ FIR滤波器

滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 是有限长序列, $N-1$ 阶

FIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

- 保证满足幅度特性
- 容易做到严格的线性相位
- $H(z)$ 是 z^{-1} 的 $N-1$ 次多项式, z 平面有 $N-1$ 个零点, $z=0$ 是 $(N-1)$ 阶重极点, 因此永远稳定
- 稳定和线性相位特性是FIR滤波器最突出的优点



7.1 线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

1. 线性相位FIR数字滤波器

对于长度为 N 的 $h(n)$ ，传输函数为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \quad (7.1.1)$$

$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{-j\theta(\omega)} \quad (7.1.2)$$

式中， $H_g(\omega)$ 称为**幅度特性**， $\theta(\omega)$ 称为**相位特性**。

注意：这里 $H_g(\omega)$ 不同于 $|H(e^{j\omega})|$ ， $H_g(\omega)$ 为 ω 的实函数，可能取负值，而 $|H(e^{j\omega})|$ 总是正值。



$H(e^{j\omega})$ 线性相位： $\theta(\omega)$ 是 ω 的线性函数，即

$$\theta(\omega) = -\tau\omega, \quad \tau \text{为常数} \quad (7.1.3)$$

如果 $\theta(\omega)$ 满足下式：

$$\theta(\omega) = \theta_0 - \tau\omega, \quad \theta_0 \text{是起始相位} \quad (7.1.4)$$

严格地说，此时 $\theta(\omega)$ 不具有线性相位，但以上两种情况都满足群时延（相位特性曲线的斜率）是一个常数，即

$$\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = -\tau$$

也称这种情况为线性相位。

满足(7.1.3)式是第一类线性相位；

满足(7.1.4)式是第二类线性相位。

$\theta_0 = -\pi/2$ 是第二类线性相位特性常用的情况。



2. 线性相位FIR的时域约束条件

线性相位FIR滤波器的时域约束条件是指满足线性相位时，对 $h(n)$ 的约束条件。

1) 第一类线性相位对 $h(n)$ 的约束条件

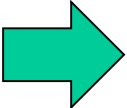
第一类线性相位FIR数字滤波器的相位函数 $\theta(\omega)=-\omega\tau$ ，可得：

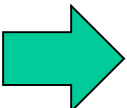
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H_g(\omega)e^{-j\omega\tau}$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)(\cos \omega n - j\sin \omega n) = H_g(\omega)(\cos \omega\tau - j\sin \omega\tau)$$

(7.1.5)



$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)(\cos \omega n - j \sin \omega n) = H_g(\omega)(\cos \omega \tau - j \sin \omega \tau)$$

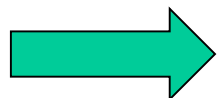

$$\left\{ \begin{array}{l} H_g(\omega) \cos \omega \tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n \\ H_g(\omega) \sin \omega \tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n \end{array} \right. \quad (7.1.6)$$


$$\frac{\cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n}$$

即

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n \sin \omega \tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n \cos \omega \tau$$

三角公式化



$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[\omega(n - \tau)] = 0 \quad (7.1.7)$$

满足 (7.1.7) 式的一组解是：

函数 $h(n) \sin \omega(n - \tau)$ 关于求和区间的中心 $(N-1)/2$ 奇对称。

因为 $\sin \omega(n - \tau)$ 关于 $n = \tau$ 奇对称，如果取 $\tau = (N-1)/2$ ，则要求 $h(n)$ 关于 $(N-1)/2$ 偶对称。

所以要求 τ 和 $h(n)$ 满足如下条件：

$$\begin{cases} \theta(\omega) = -\omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (7.1.8)$$

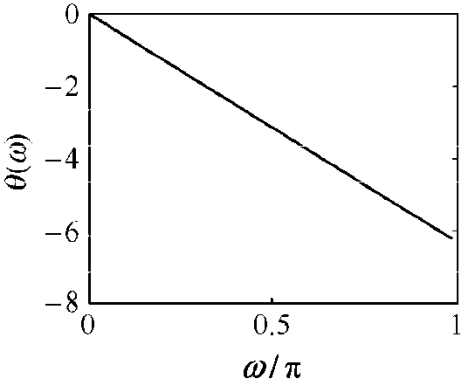
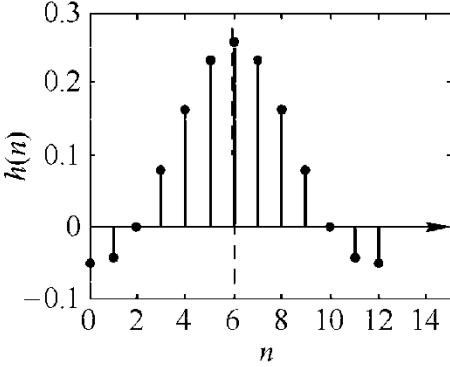
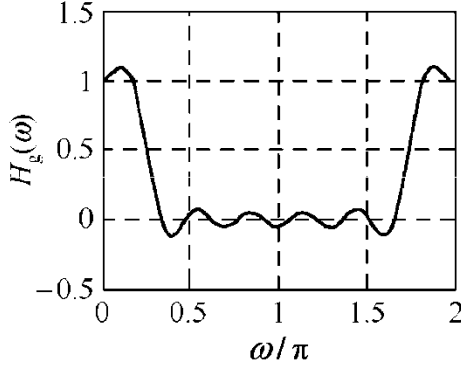
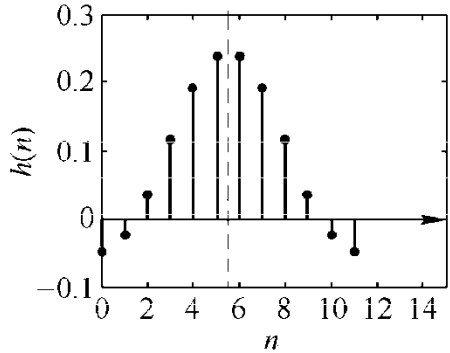
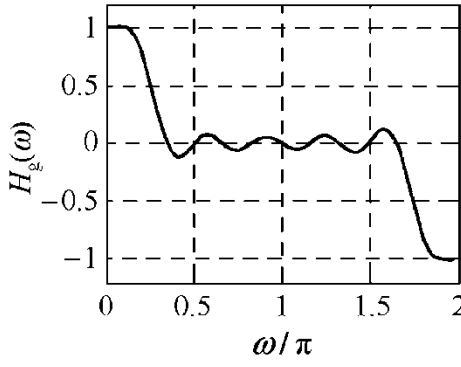
即：

如果要求单位脉冲响应为 $h(n)$ 、长度为 N 的FIR数字滤波器具有第一类线性相位特性（严格线性相位特性），则 $h(n)$ 应当关于 $n=(N-1)/2$ 点偶对称。

当 N 确定时，FIR数字滤波器的相位特性是一个确知的线性函数，即 $\theta(\omega)=-\omega(N-1)/2$ 。 N 为奇数和偶数时， $h(n)$ 的对称情况如表7.1.1中的情况1和情况2所示。



表7.1.1 线性相位FIR数字滤波器的时域和频域特性一览

第一类线性相位特性		$h(n) = h(N-1-n)$	
情况 1	<p>$\theta(\omega) = -\omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$ (以 $N=5$ 为例画图)</p> 	<p>N 为奇数 ($N=13$)</p> 	<p>$H_g(\omega) = h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)]$</p> 
情况 2		<p>N 为偶数 ($N=12$)</p> 	<p>$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)]$</p> 

2) 第二类线性相位对 $h(n)$ 的约束条件

第二类线性相位FIR数字滤波器的相位函数

$\theta(\omega) = -\pi/2 - \omega\tau$ ，可得：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H_g(\omega)e^{-j(\pi/2 + \omega\tau)}$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos[\omega(n - \tau)] = 0 \quad (7.1.9)$$

满足式 (7.1.9) 的一组解是：

函数 $h(n)\cos[\omega(n - \tau)]$ 关于求和区间的中心 $(N-1)/2$ 奇对称。

因为 $\cos[\omega(n - \tau)]$ 关于 $n = \tau$ 偶对称，如果取 $\tau = (N-1)/2$ ，则要求 $h(n)$ 关于 $(N-1)/2$ 奇对称。

所以要求 τ 和 $h(n)$ 满足如下条件：

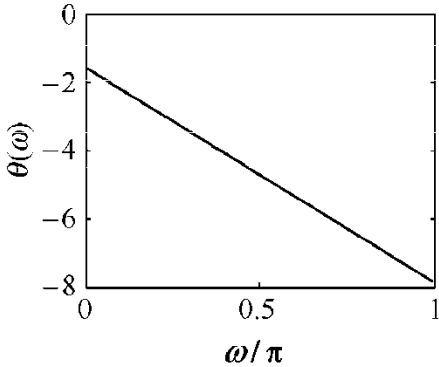
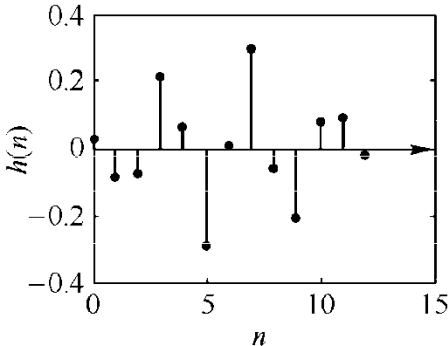
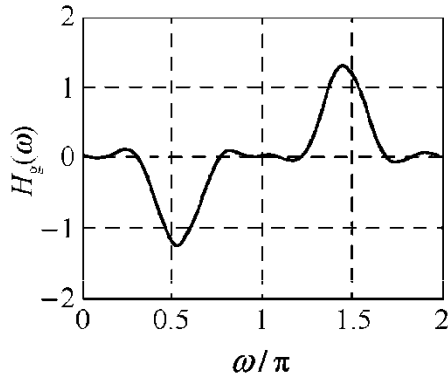
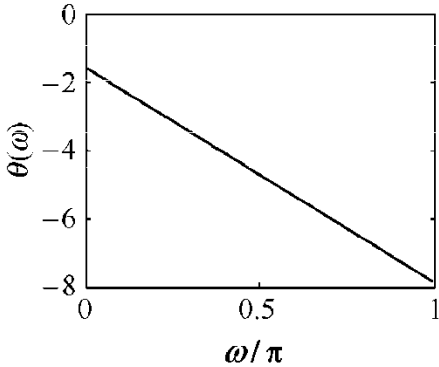
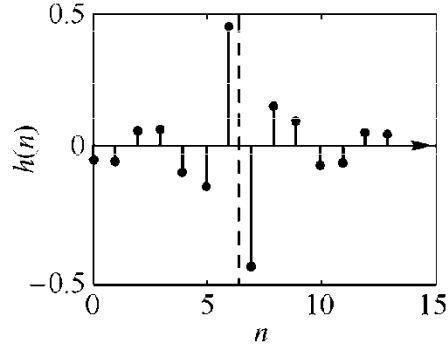
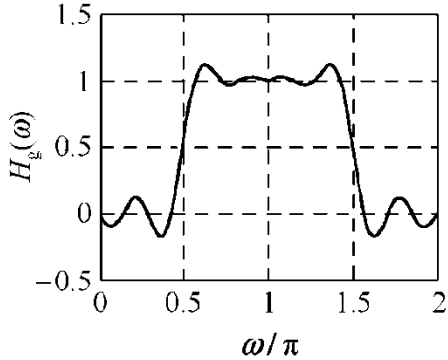
$$\begin{cases} \theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega\tau, & \tau = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = -h(N-1-n), & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (7.1.10)$$

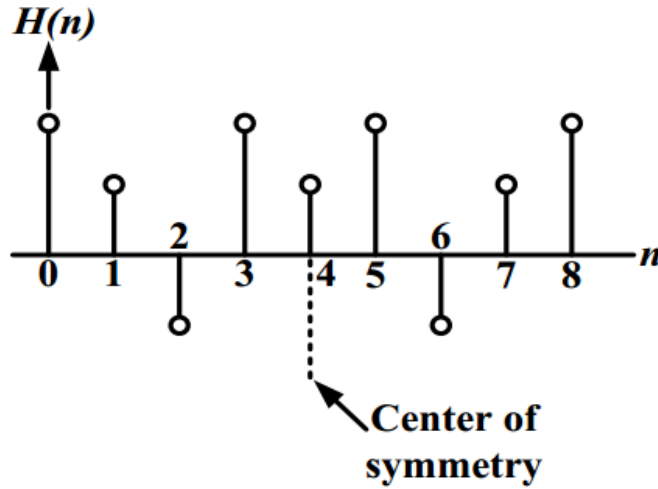
即：

如果要求单位脉冲响应为 $h(n)$ 、长度为 N 的FIR数字滤波器具有第二类线性相位特性，则 $h(n)$ 应当关于 $n=(N-1)/2$ 点奇对称。

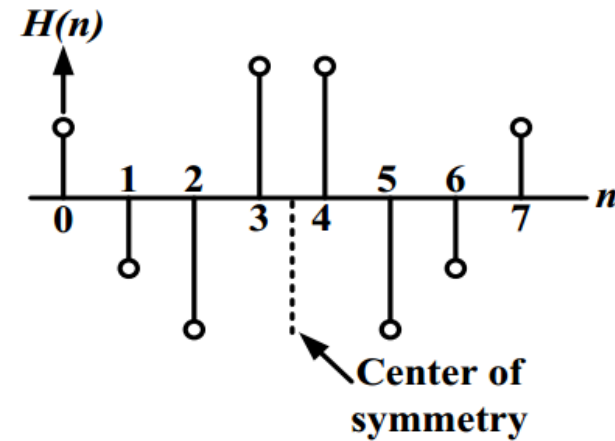
当 N 确定时，FIR数字滤波器的相位特性是一个确知的线性函数，即 $\theta(\omega) = -\pi/2 - \omega(N-1)/2$ 。 N 为奇数和偶数时 $h(n)$ 的对称情况如表7.1.1中情况3和情况4

表7.1.1 线性相位FIR数字滤波器的时域和频域特性一览

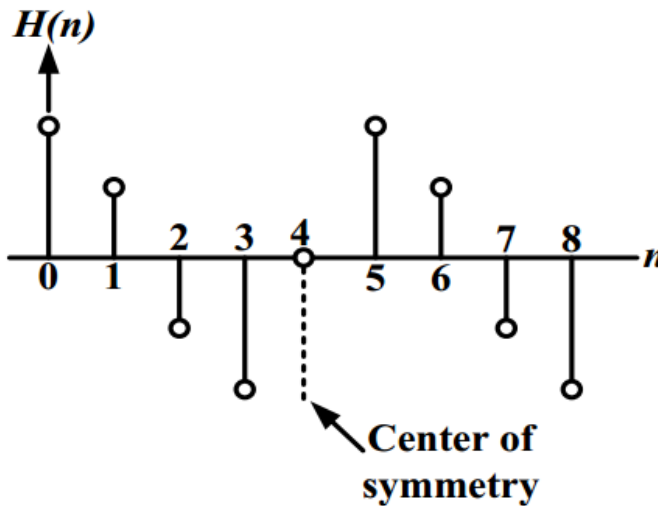
第二类线性相位特性		$h(n) = -h(N-1-n)$	
情况 3	$\theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$ <p>(以 $N=5$ 为例画图)</p> 	N 为奇数 ($N=13$) 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$ 
情况 4		N 为偶数 ($N=14$) 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$ 



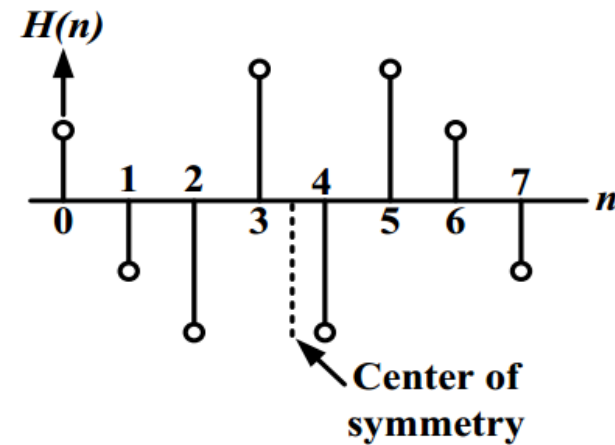
(a) Type 1, $N=9$



(b) Type 2, $N=8$



(c) Type 3, $N=9$



(d) Type 4, $N=8$



2. 线性相位FIR滤波器幅度特性 $H_g(\omega)$ 的特点

幅度特性的特点就是线性相位FIR滤波器的频域约束条件。

将时域约束条件 $h(n)=\pm h(N-n-1)$ 代入下式

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

设 $h(n)$ 为**实序列**，即可推导出线性相位条件对FIR数字滤波器的幅度特性 $H_g(\omega)$ 的约束条件。

- 当 **N 取奇数和偶数**时对 $H_g(\omega)$ 的约束不同，对于两类线性相位特性，分四种情况讨论其幅度特性的特点。
- 这些特点对正确设计线性相位FIR数字滤波器具有重要的指导作用。

■ 线性相位FIR滤波器幅度特性 $H_g(\omega)$ 的特点

- 情况1: $h(n) = h(N - n - 1)$, N 为奇数
- 情况2: $h(n) = h(N - n - 1)$, N 为偶数
- 情况3: $h(n) = -h(N - n - 1)$, N 为奇数
- 情况4: $h(n) = -h(N - n - 1)$, N 为偶数



引入两个参数符号：

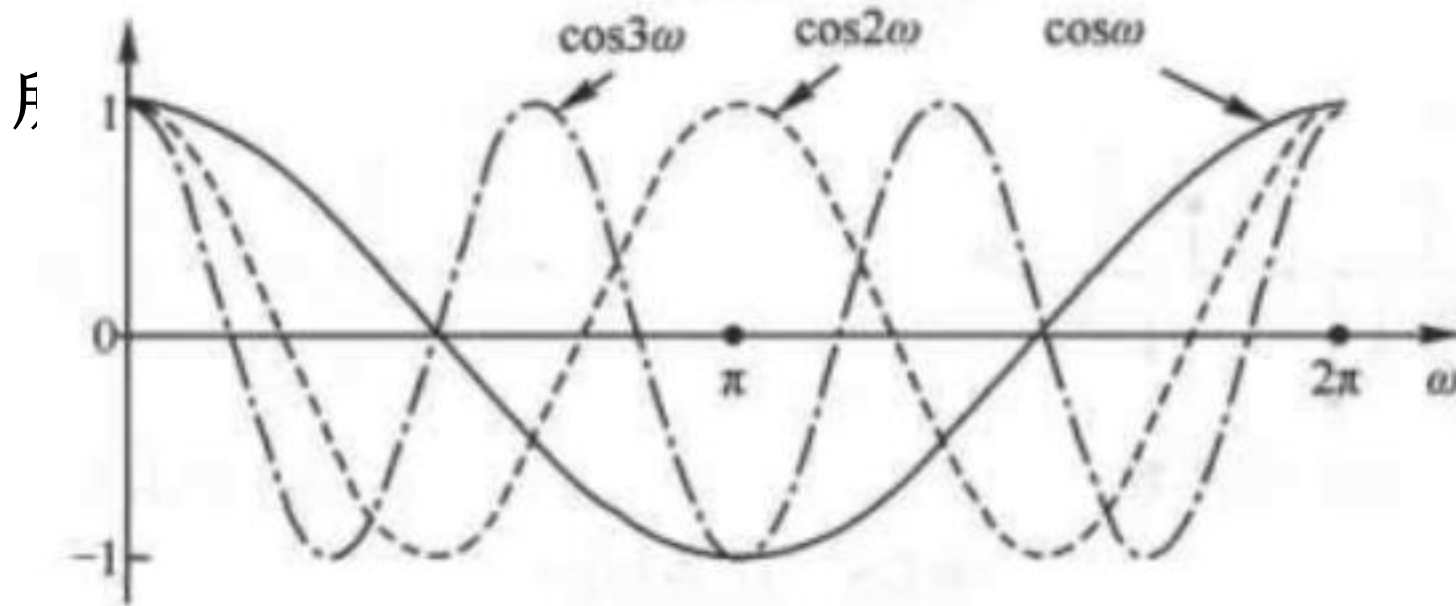
$$\tau = \frac{N-1}{2}, \quad M = \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor$$

式中， $\left\lfloor (N-1)/2 \right\rfloor$ 表示向下取整数。显然，仅当 N 为奇数时， $M=\tau=(N-1)/2$ 。

情况1： $h(n)=h(N-n-1)$ ， N 为奇数。

将时域约束条件 $h(n)=h(N-n-1)$ 和 $\theta(\omega)=-\omega\tau$ 代入式（7.1.1）和（7.1.2），得到：

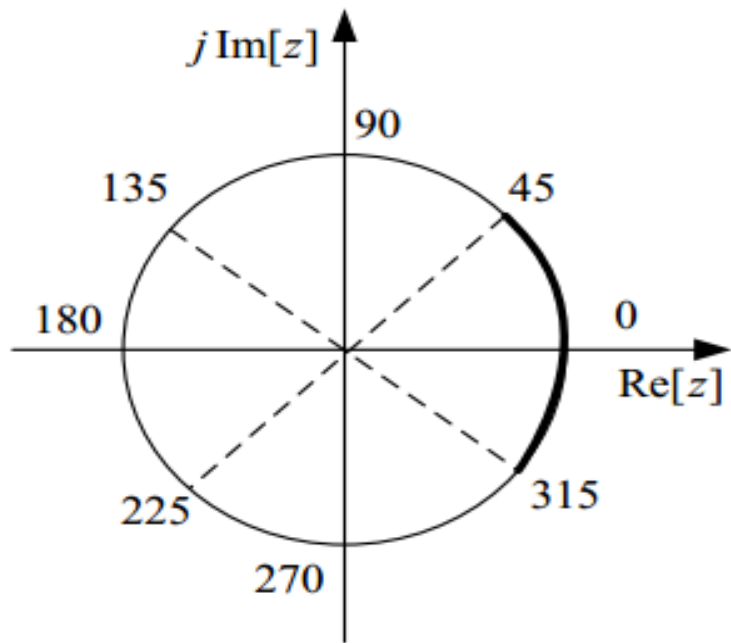
$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H_g(\omega)e^{-j\omega\tau} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{M-1} \left[h(n)e^{-j\omega n} + h(N-n-1)e^{-j\omega(N-n-1)} \right] \\ &= h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{M-1} \left[h(n)e^{-j\omega n} + h(n)e^{-j\omega(N-n-1)} \right] \\ &= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{M-1} h(n) \left[e^{-j\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} + e^{j\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} \right] \right\} \\ &= e^{-j\omega\tau} \left\{ h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)] \right\} \end{aligned}$$



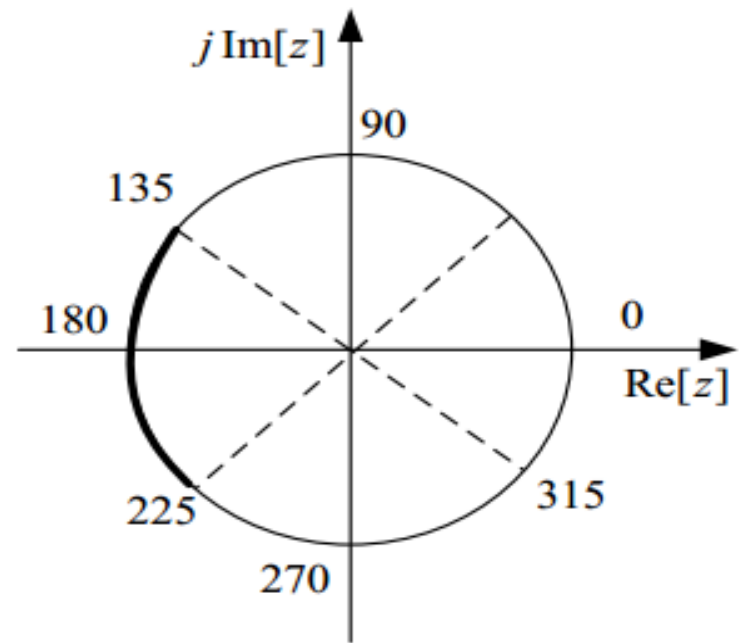
11)

■ 第一类滤波器幅度 $H_g(\omega)$ 的特点:

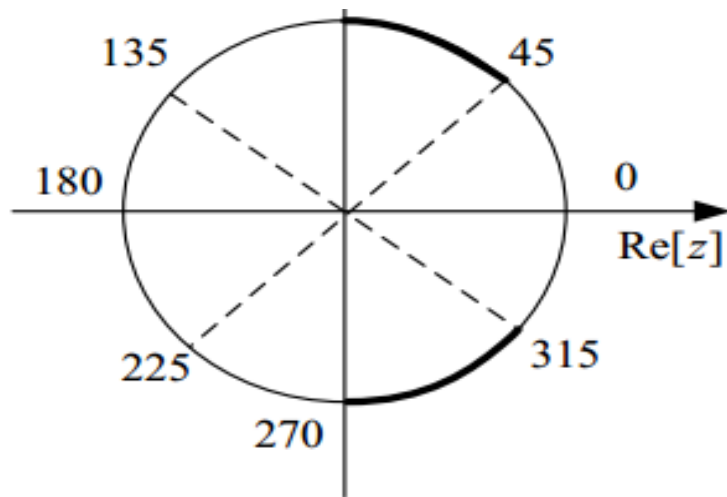
- 因为 $\cos [\omega(n-\tau)]$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 三点偶对称, 所以 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 三点偶对称。
- 可以实现各种 (低通、高通、带通、带阻) 滤波器。



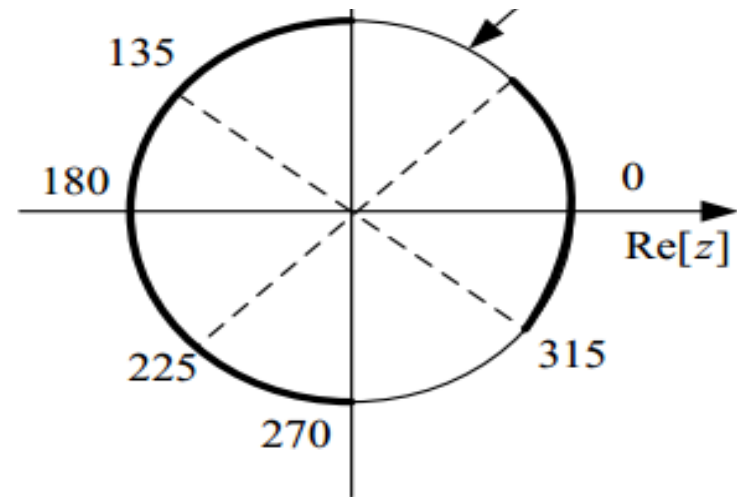
数字低通的通带频段



数字高通的通带频段



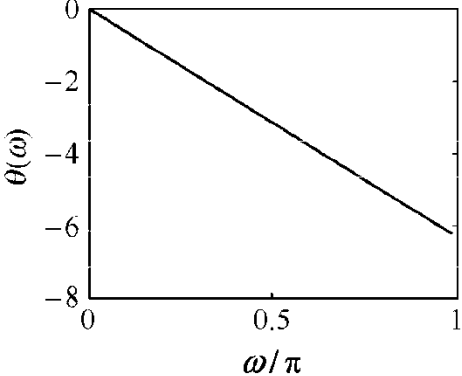
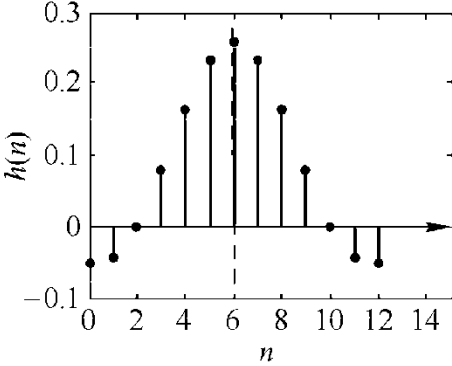
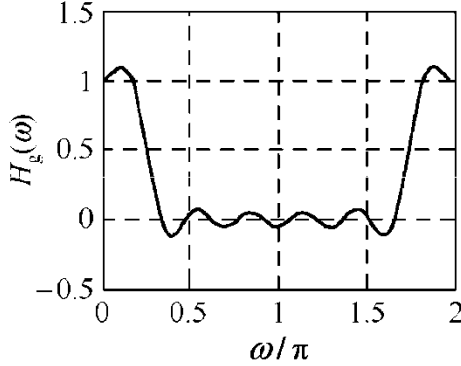
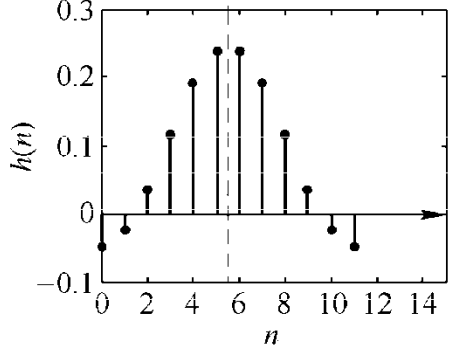
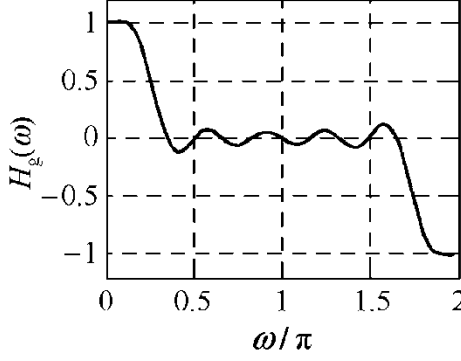
数字带通的通带频段



数字带阻的通带频段



表7.1.1 线性相位FIR数字滤波器的时域和频域特性一览

第一类线性相位特性		$h(n) = h(N-1-n)$	
情况 1	<p>$\theta(\omega) = -\omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$ (以 $N=5$ 为例画图)</p> 	<p>N 为奇数 ($N=13$)</p> 	<p>$H_g(\omega) = h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)]$</p> 
情况 2		<p>N 为偶数 ($N=12$)</p> 	<p>$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)]$</p> 

情况2: $h(n)=h(N-n-1)$, N 为偶数。

$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{-j\omega\tau} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega\tau} \sum_{n=0}^M 2h(n)\cos(\omega(n-\tau))$$
$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n)\cos[\omega(n-\tau)] \quad (7.1.12)$$

■ 第二类滤波器幅度 $H_g(\omega)$ 的特点:

➤ $\tau = (N-1)/2 = N/2 - 1/2$ 。因为 N 是偶数, 所以当时 $\omega = \pi$

$$\cos[\omega(n-\tau)] = \cos\left[\pi\left(n - \frac{N}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin\left[\pi\left(n - \frac{N}{2}\right)\right] = 0$$



■ 第二类滤波器幅度 $H_g(\omega)$ 的特点:

- 因为 $\cos [\omega(n-\tau)]$ 关于过零点**奇对称**, 关于 $\omega=0$ 和 2π **偶对称**。所以 $H_g(\pi)=0$, $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=\pi$ **奇对称**, 关于 $\omega=0$ 和 2π **偶对称**。
- 情况2不能实现**高通**和**带阻**滤波器。对 $N=12$ 的低通情况, $H_g(\omega)$ 如表7.1.1中情况2所示。

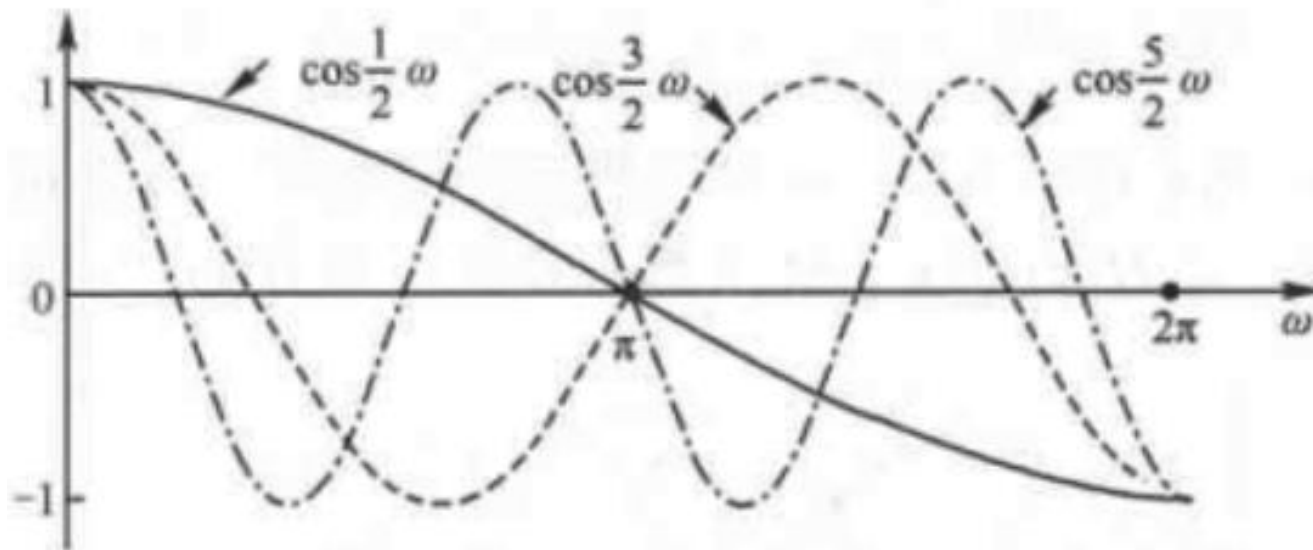
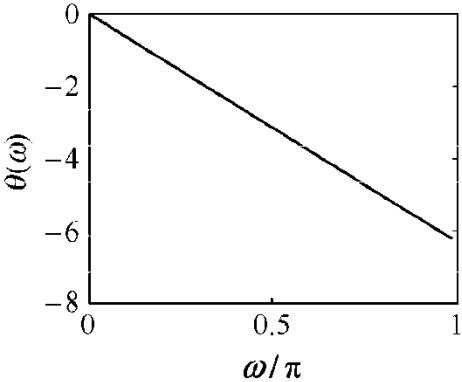
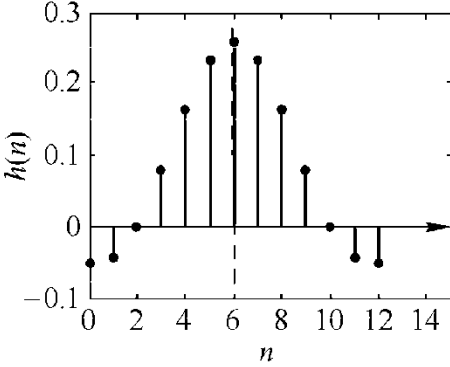
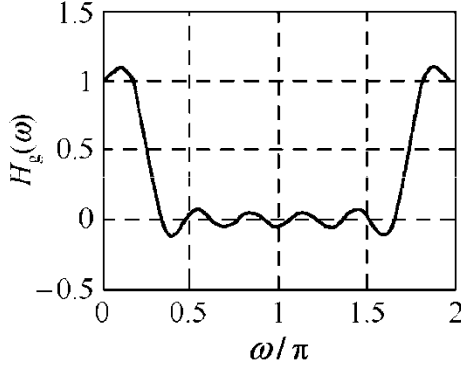
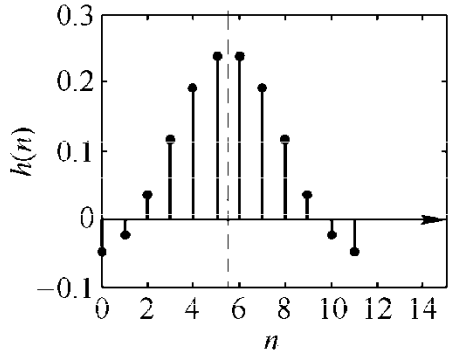
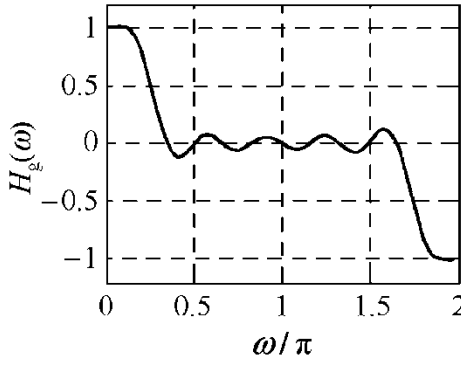




表7.1.1 线性相位FIR数字滤波器的时域和频域特性一览

第一类线性相位特性		$h(n) = h(N-1-n)$	
情况 1	<p>$\theta(\omega) = -\omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$ (以 $N=5$ 为例画图)</p> 	<p>N 为奇数 ($N=13$)</p> 	<p>$H_g(\omega) = h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)]$</p> 
情况 2		<p>N 为偶数 ($N=12$)</p> 	<p>$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)]$</p> 



情况3: $h(n) = -h(N - n - 1)$, N 为奇数。

将时域约束条件:

$$h(n) = -h(N - n - 1)$$

$$\theta(\omega) = -\pi/2 - \omega\tau$$

代入:
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{-j\theta(\omega)}$$

并考虑
$$h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$$

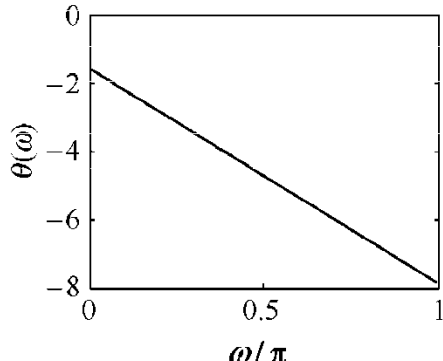
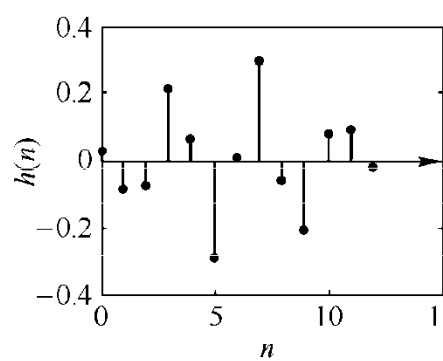
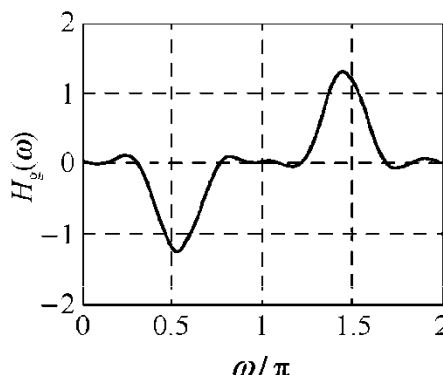
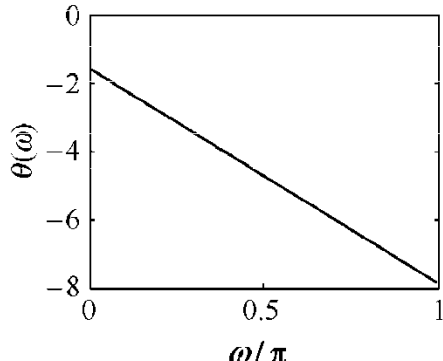
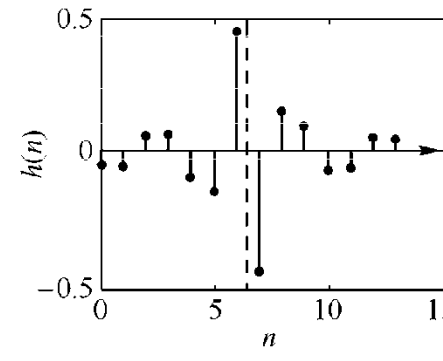
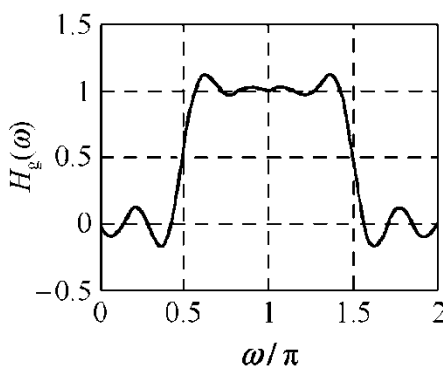
$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H_g(\omega)e^{-j\theta(\omega)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} \left[h(n)e^{-j\omega n} + h(N-n-1)e^{-j\omega(N-n-1)} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} \left[h(n)e^{-j\omega n} - h(n)e^{-j\omega(N-n-1)} \right] \\ &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{M-1} h(n) \left[e^{-j\omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right)} - e^{j\omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right)} \right] \\ &= -je^{-j\omega\tau} \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)] \\ &= e^{-j(\pi/2+\omega\tau)} \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)] \\ H_g(\omega) &= \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)] \end{aligned}$$

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n - \tau)]$$

■ 第三类滤波器幅度 $H_g(\omega)$ 的特点:

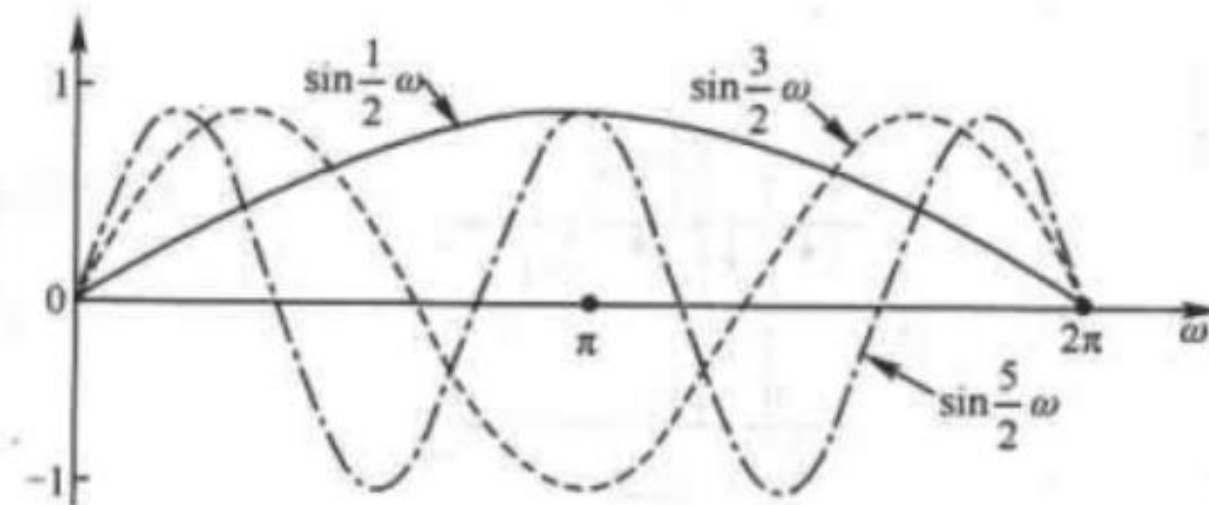
- N 是奇数, $\tau=(N-1)/2$ 是整数。所以, 当 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 时, $\sin[\omega(n - \tau)]=0$, 而且 $\sin[\omega(n - \tau)]$ 关于过零点奇对称。因此 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 三点奇对称。
- 由此可见, 情况3只能实现带通滤波器。对 $N=13$ 的带通滤波器举例, $H_g(\omega)$ 如表7.1.1中情况3所示。

表7.1.1 线性相位FIR数字滤波器的时域和频域特性一览

第二类线性相位特性		$h(n) = -h(N-1-n)$	
情况 3	$\theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$ <p>(以 $N=5$ 为例画图)</p> 	N 为奇数 ($N=13$) 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$ 
情况 4		N 为偶数 ($N=14$) 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$ 

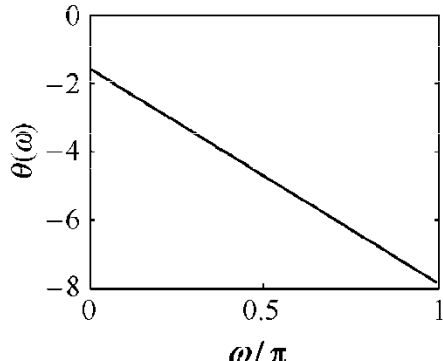
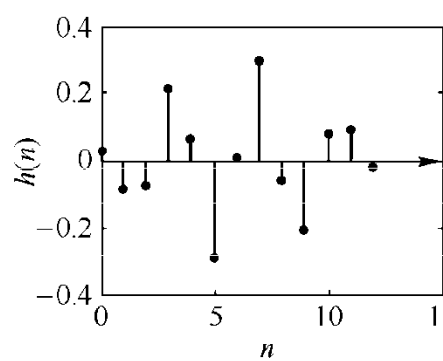
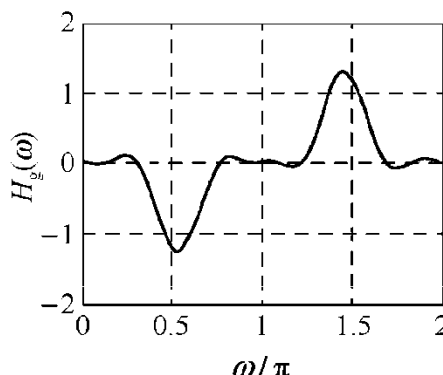
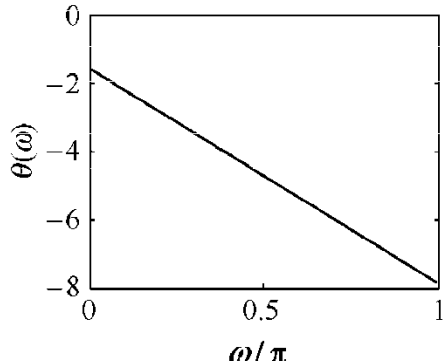
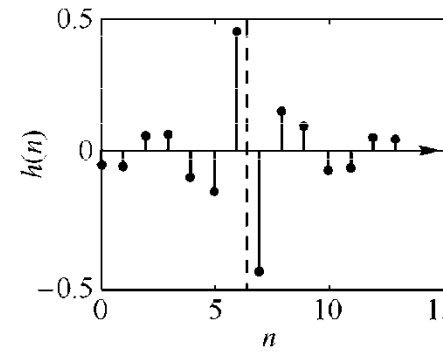
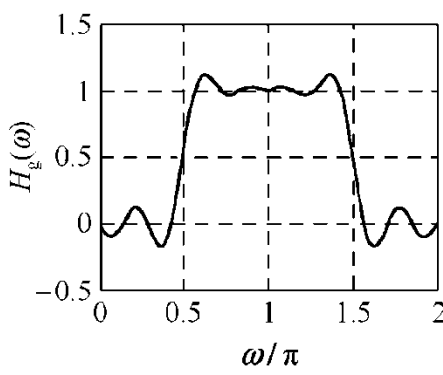


情况4:

■ 第四类滤波器幅度 $H_g(\omega)$ 的特点:

- N 是偶数, $\tau=(N-1)/2=N/2-1/2$ 。当 $\omega=0, 2\pi$ 时, $\sin[\omega(n-\tau)] = 0$; 当 $\omega=\pi$ 时, $\sin[\omega(n-\tau)] = (-1)^{n-N/2}$, 为峰值点。而 $\sin[\omega(n-\tau)]$ 关于过零点 $\omega=0$ 和 2π 两点奇对称, 关于峰值点 $\omega=\pi$ 偶对称。因此 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0$ 和 2π 两点奇对称, 关于 $\omega=\pi$ 偶对称。
- 情况4不能实现低通和带阻滤波器。对 $N=12$ 的高通滤波器举例, $H_g(\omega)$ 如表7.1.1中情况4所示。

表7.1.1 线性相位FIR数字滤波器的时域和频域特性一览

第二类线性相位特性		$h(n) = -h(N-1-n)$	
情况 3	<p>$\theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$</p> <p>(以 $N=5$ 为例画图)</p> 	<p>N 为奇数 ($N=13$)</p> 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$ 
情况 4		<p>N 为偶数 ($N=14$)</p> 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$ 



线性相位系统的频域特性

类型	I	II	III	IV
阶数 N	奇	偶	奇	偶
$h[n]$ 的对称性	偶对称	偶对称	奇对称	奇对称
$H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0$ 的对称性	偶对称	偶对称	奇对称	奇对称
$H_g(\omega)$ 关于 $\omega=\pi$ 的对称性	偶对称	奇对称	奇对称	偶对称
$H_g(\omega)$ 的周期	2π	4π	2π	4π
$H_g(0)$	任意	任意	0	0
$H_g(\pi)$	任意	0	0	任意
可适用的滤波器类型	LP,HP, BP,BS	LP, BP	微分器, Hilbert 变换器	微分器, Hilbert 变换器, HP

3. 线性相位FIR数字滤波器的零点分布特点

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

将 $h(n)=\pm h(N-1-n)$ 代入上式, 得到:

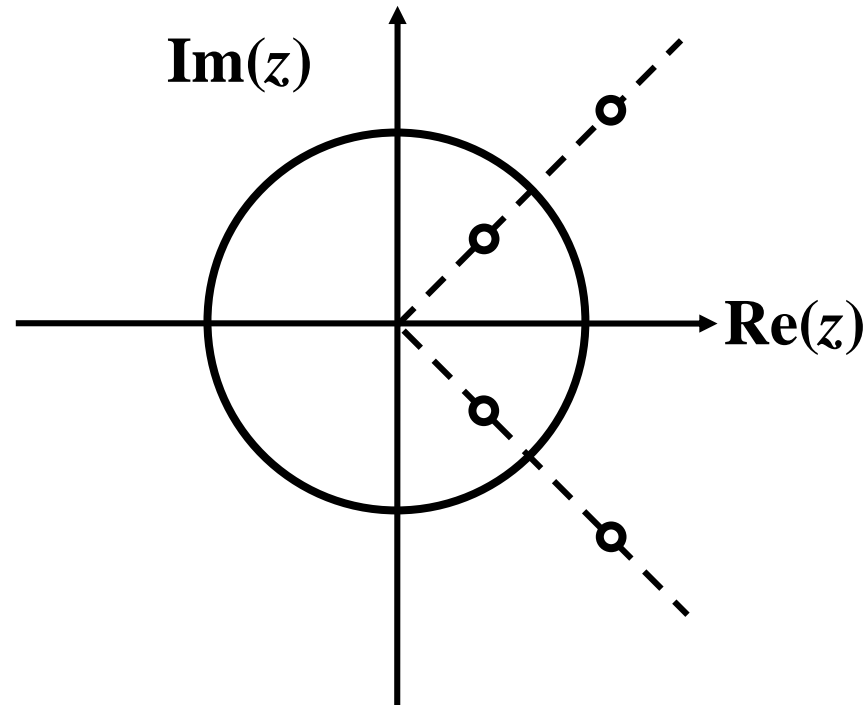
$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \pm \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n)z^{-n} \\ &= \pm \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-(N-1-m)} = \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)(z^{-1})^{-m} \\ &= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \end{aligned} \quad (7.1.14)$$



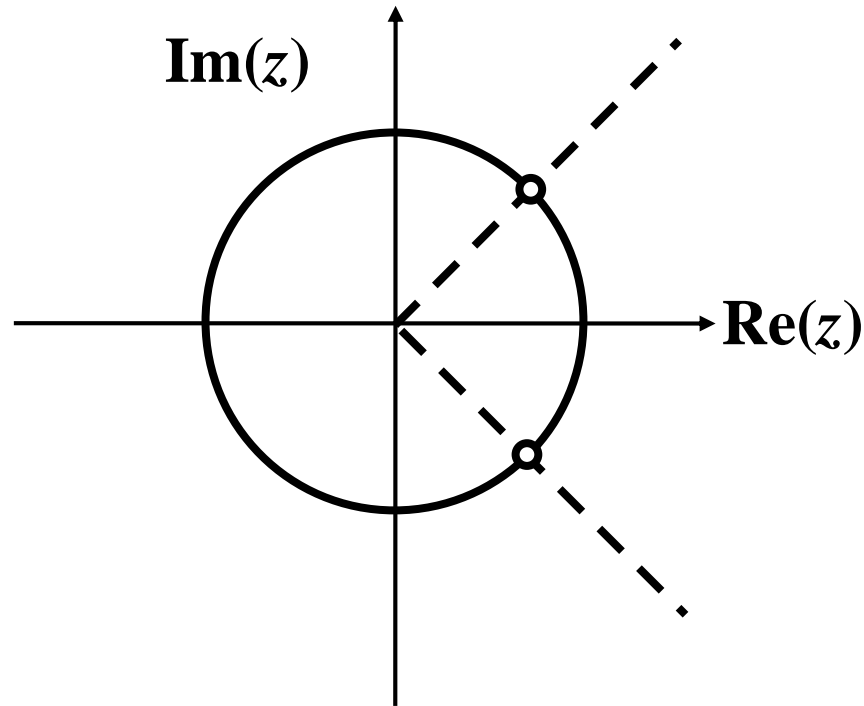
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \pm \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n)z^{-n} = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

- $z=z_i$ 是 $H(z)$ 的零点，其倒数 z_i^{-1} 也必然是其零点；
- 又因为 $h(n)$ 是实序列， $H(z)$ 的零点必定共轭成对，因此 z_i^* 和 $(z_i^{-1})^*$ 也是其零点。这样，线性相位FIR滤波器零点必定是互为倒数的共轭对，确定其中一个，另外三个零点也就确定了。

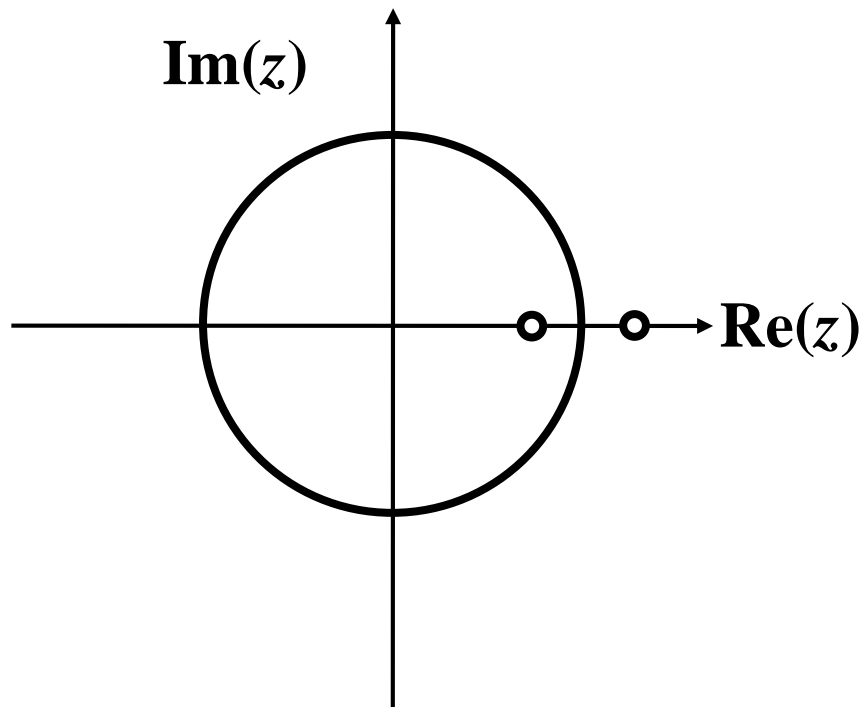
(1) $z_k = r_k e^{j\phi_k}$ 是**不在**单位圆上的**复**零点



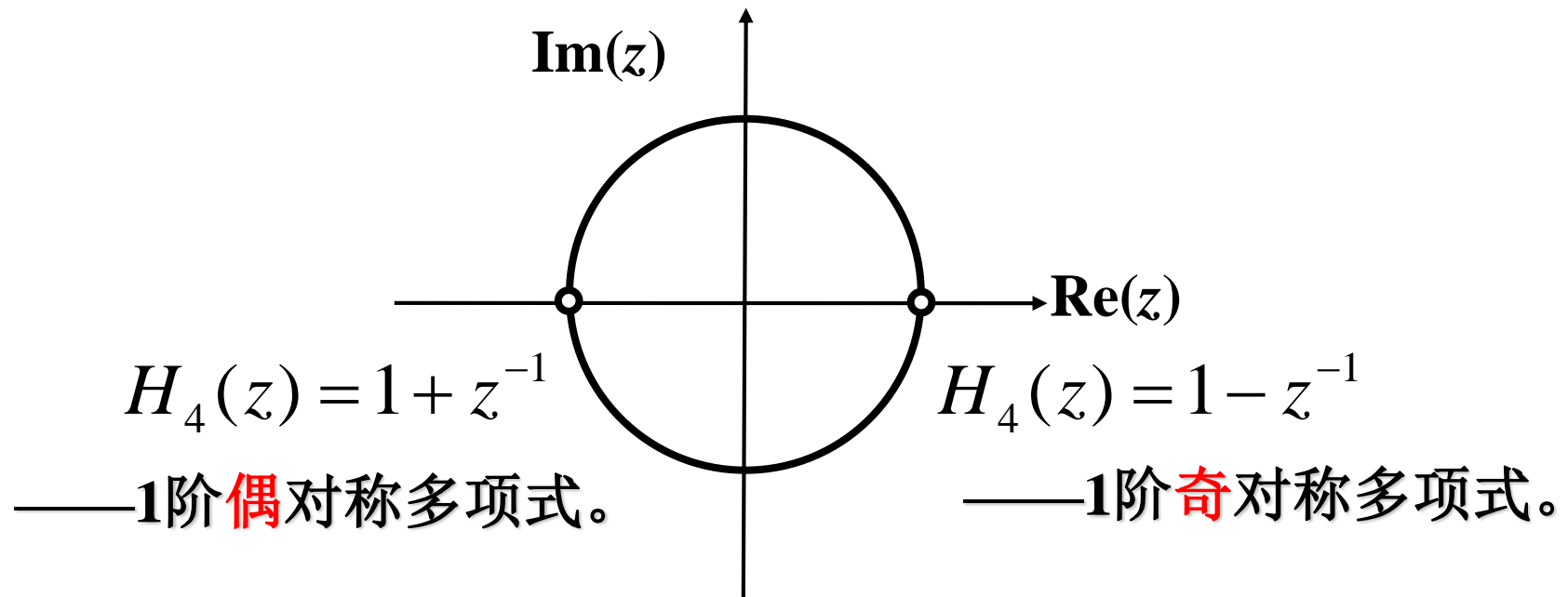
(2) $z_k = r_k e^{j\phi_k}$ 是在单位圆上的复零点



(3) $z_k = r_k e^{j\phi_k}$ 是**不在**单位圆上的**实**零点



(4) $z_k = r_k e^{j\phi_k}$ 是在单位圆上的实零点





例：如果系统的单位脉冲响应为

$$h(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{其他}n \end{cases}$$

求该系统的幅频特性、相频特性及其幅度特性、相位特性

解：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^4 e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j5\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j2\omega} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} = H(\omega) e^{j\theta(\omega)}$$

由此可得到：

$$\text{幅频特性 } |H(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right|, \quad \text{相频特性 } \varphi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega})],$$

$$\text{幅度特性 } H(\omega) = \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}, \quad \text{相位特性 } \theta(\omega) = -2\omega。$$



7.2 利用窗函数法设计FIR滤波器

◆ FIR滤波器设计任务是选择有限长度的 $h(n)$ ，使频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 满足技术指标要求，可由以下方法实现

➤ 窗函数法

应用现成的窗函数公式，使滤波器单位取样响应逼近要求的单位取样响应序列，在指标要求不高时灵活方便，属于时域逼近

➤ 频率采样法

属于频域逼近，通过频率采样值逼近期望滤波器，它适合于设计窄带滤波器

➤ 计算机辅助的优化设计法

采用计算机辅助的优化方法，可得到最佳的等波纹的线性相位FIR滤波器

7.2 利用窗函数法设计FIR滤波器

7.2.1 窗函数法设计原理

设希望逼近的滤波器频率响应函数为 $H_d(e^{j\omega})$ ，其单位脉冲响应是 $h_d(n)$ 。

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

线性相位理想低通滤波器的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$ 为:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases} \quad (7.2.1)$$

其单位脉冲响应 $h_d(n)$ 为:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)} \quad (7.2.2)$$

$h_d(n)$ 是无限长非因果序列。

用窗函数法设计FIR滤波器的思路：

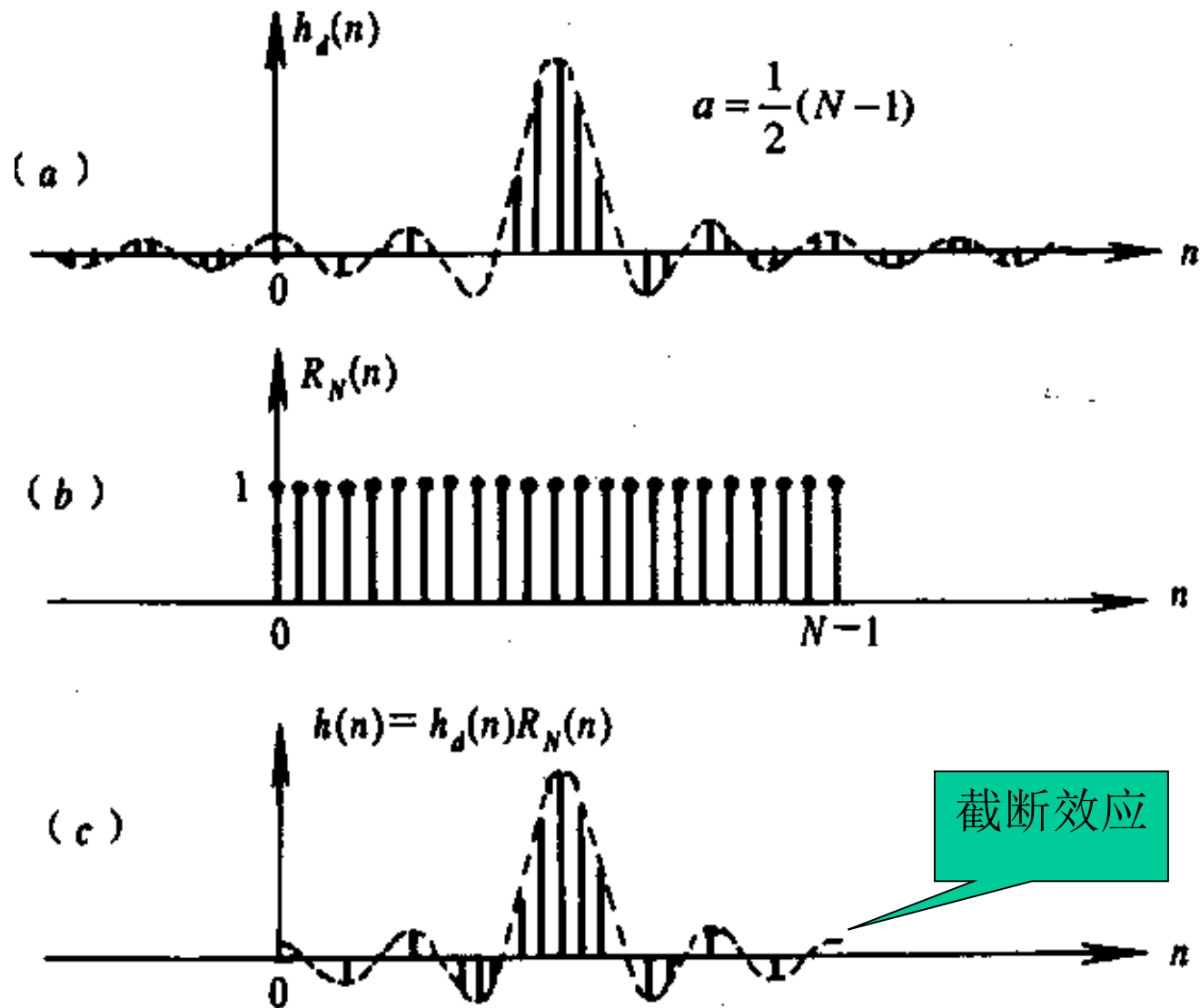
为了构造一个长度为 N 的第一类线性相位**FIR**滤波器，只有将 $h_d(n)$ **截取**一段，并保证截取的一段关于 $n=(N-1)/2$ 偶对称。设截取的一段用 $h(n)$ 表示，即

$$h(n) = h_d(n)R_N(n) \quad (7.2.3)$$

$R_N(n)$ 是一个矩形序列，长度为 N 。当 α 取值为 $(N-1)/2$ 时，截取的一段 $h(n)$ 关于 $n=(N-1)/2$ 偶对称，保证所设计的滤波器具有线性相位。

$h(n)$ 就是所设计滤波器的单位脉冲响应，长度为 N ，其系统函数为 $H(z)$ ，

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$





$R_N(n)$ （矩形序列）就是起对无限长序列的截断作用，可以形象地把 $R_N(n)$ 看做一个窗口， $h(n)$ 则是从窗口看到的一段 $h_d(n)$ 序列，所以称 $h(n)=h_d(n)R_N(n)$ 为用矩形窗对 $h_d(n)$ 进行加窗处理。

$H_d(e^{j\omega})$ 是一个以 2π 为周期的函数，可以展为傅里叶级数，即

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)e^{-j\omega n}$$



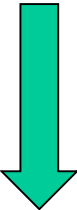
截断效应：即以有限项傅立叶级数近似替代无限项傅立叶级数，所引起的误差效果（吉布斯效应 **Gibbs**）

由于对 $h_d(n)$ 突然截短，导致实际设计的滤波器通带内出现了波纹，随着 N 的增大，波纹并不消失，波纹的振荡频率越来越高，并且从通带到阻带存在一个过渡带，这种现象称作吉布斯(**Gibbs**)现象

分析用矩形窗截断的影响和改进的措施:

$$h(n) = h_d(n)R_N(n)$$

傅
里
叶
变
换



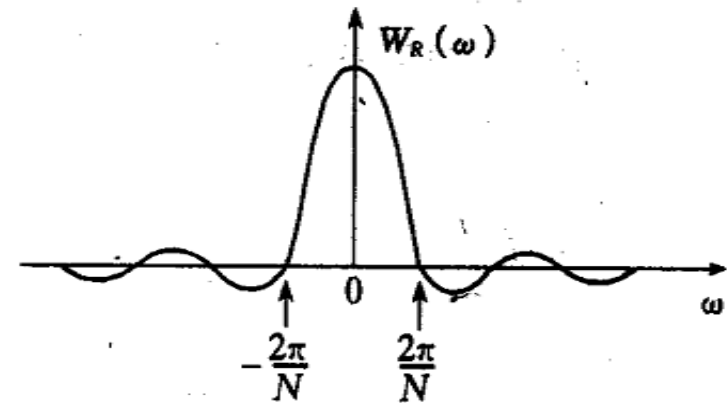
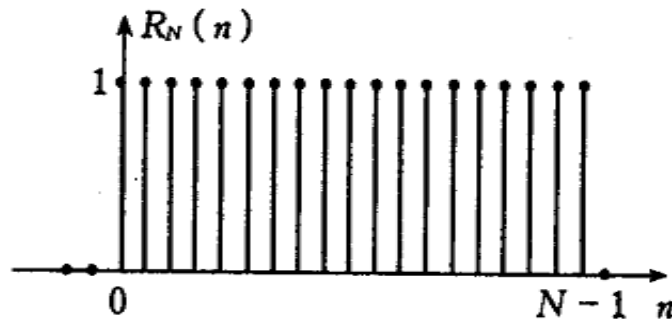
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$H_d(e^{j\omega})$ 和 $W_R(e^{j\omega})$ 分别是 $h_d(n)$ 和 $R_N(n)$ 的傅里叶变换。

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w_R(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n}$$

$$= e^{-j\frac{1}{2}(N-1)\omega} \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)}$$



$W_{Rg}(\omega)$ 称为矩形窗的幅度函数。

$W_{Rg}(\omega)$ 的**主瓣**：图中 $[-2\pi/N, 2\pi/N]$ 区间上的一段波形

$W_{Rg}(\omega)$ 的**旁瓣**：其余较小的波动。

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$H_d(e^{j\omega}) = H_{dg}(\omega) e^{-j\omega\alpha}$$

线性相位理想低通滤波器的频响应函数为：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$$

其幅度特性函数为：

$$H_{dg}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

将 $H_d(e^{j\omega})$ 和 $W_R(e^{j\omega})$ 代入式

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

得到:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) e^{-j\theta\alpha} W_{Rg}(\omega - \theta) e^{-j(\omega-\theta)\alpha} d\theta$$

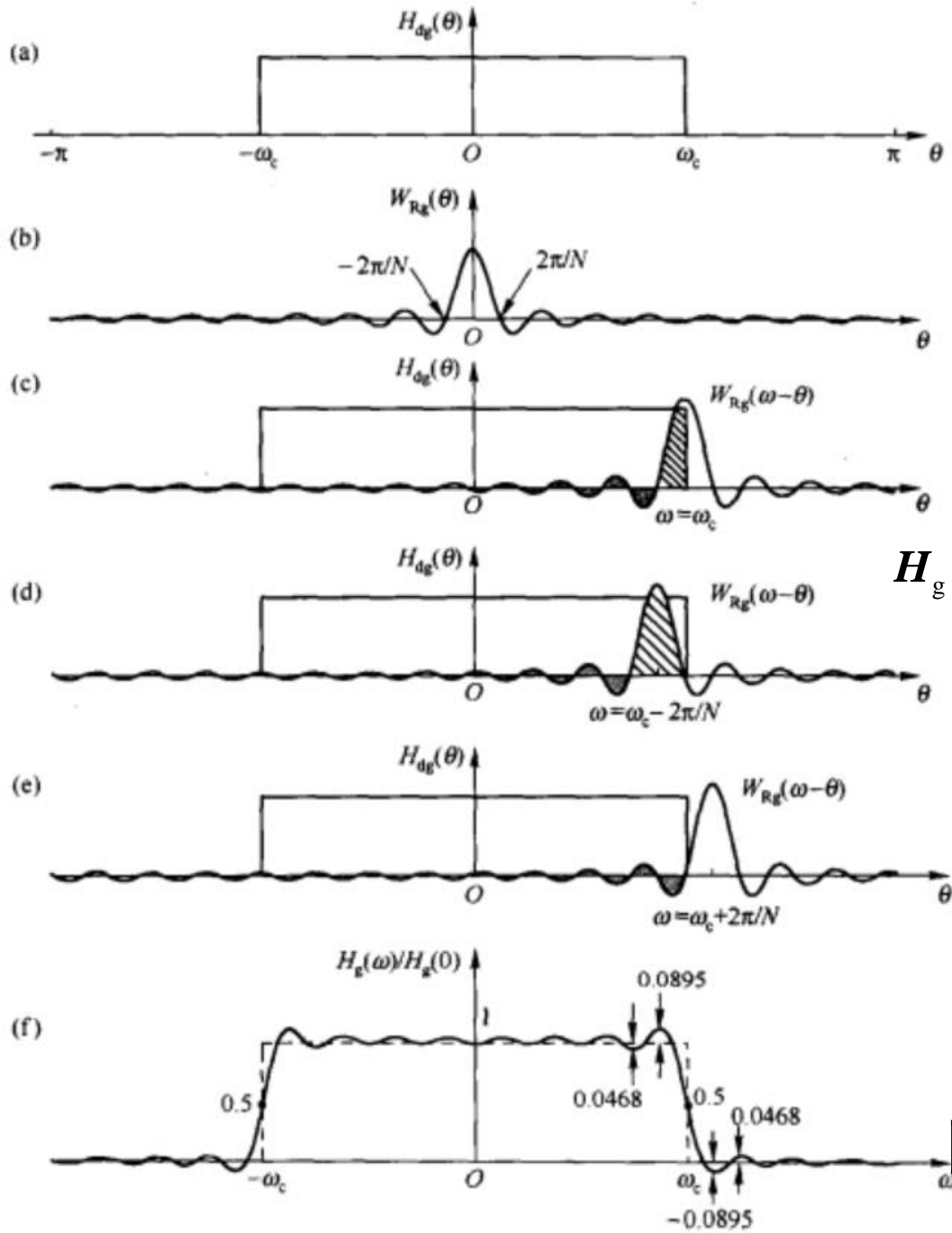
$$= e^{-j\omega\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) W_{Rg}(\omega - \theta) d\theta$$

$$= H_g(\omega) e^{-j\omega\alpha}$$

则

$$H_g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) W_{Rg}(\omega - \theta) d\theta \quad (7.2.6)$$

加窗后的滤波器的幅度特性等于理想低通滤波器的幅度特性 $H_{dg}(\omega)$ 与矩形窗幅度特性 $W_{Rg}(\omega)$ 的卷积。



$$H_g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) W_{Rg}(\omega - \theta) d\theta$$

图7.2.3 矩形窗加窗效应



$$H_g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) W_{Rg}(\omega - \theta) d\theta$$

- $\omega = 0$ $H_g(0)$ 近似于 $W_{Rg}(\theta)$ 的全部积分面积
- $\omega = \omega_c$ $H_g(\omega_c) = 0.5H_g(0)$
- $\omega = \omega_c - \frac{2\pi}{N}$ $H_g\left(\omega_c - \frac{2\pi}{N}\right)$ 为最大值，正肩峰
- $\omega = \omega_c + \frac{2\pi}{N}$ $H_g\left(\omega_c + \frac{2\pi}{N}\right)$ 为最小值，负肩峰
- $\omega > \omega_c + \frac{2\pi}{N}$ 随 $\omega \uparrow$ ， $H_g(\omega)$ 绕零值波动
- $\omega < \omega_c - \frac{2\pi}{N}$ 随 $\omega \downarrow$ ， $H_g(\omega)$ 绕 $H(0)$ 波动



对 $h_d(n)$ 加矩形窗处理后， $H_g(\omega)$ 与 $H_{dg}(\omega)$ 的差别：

- (1) 在理想特性不连续点 $\omega=\omega_c$ 附近形成过渡带。过渡带的宽度近似等于 $W_{Rg}(\omega)$ 主瓣宽度 $4\pi/N$ 。
- (2) 通带内产生了波纹，最大的峰值在 $\omega_c-2\pi/N$ 处。阻带内产生了余振，最大的负峰在 $\omega_c+2\pi/N$ 处。通带与阻带中波纹的情况与窗函数的幅度谱有关， $W_{Rg}(\omega)$ 旁瓣幅度的大小直接影响 $H_g(\omega)$ 波纹幅度的大小。

以上两点就是对 $h_d(n)$ 用矩形窗截断后的吉布斯效应：

- 通带内的波纹影响滤波器通带的平稳性，
- 阻带内的波纹影响阻带内的衰减，可能使最小衰减不满足技术指标要求。

如何减少吉布斯效应的影响？

增加矩形窗的长度就可减少吉布斯效应的影响？

在主瓣附近， $W_{\text{Rg}}(\omega)$ 可近似为

$$W_{\text{Rg}}(\omega) = \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} \approx \frac{\sin(\omega N / 2)}{\omega / 2} = N \frac{\sin x}{x}$$

该函数的性质：

1. N 加大时，主瓣幅度加高，同时旁瓣也加高，保持主瓣和旁瓣幅度相对值不变；
2. N 加大时， $W_{\text{Rg}}(\omega)$ 的主瓣和旁瓣宽度变窄，波动的频率加快。

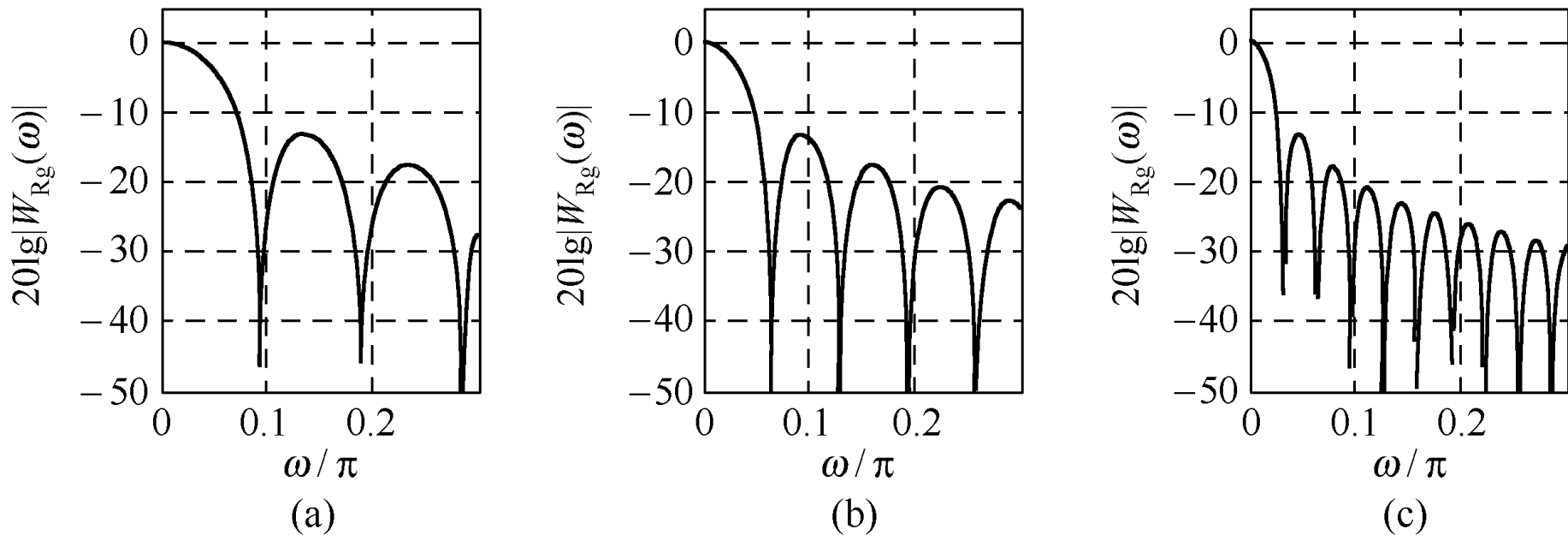


图7.2.4 矩形窗函数长度的影响

因此，当 N 加大时， $H_g(\omega)$ 的波动幅度没有多大改善，带内最大肩峰比 $H(0)$ 高8.95%，阻带最大负峰值为 $H(0)$ 的8.95%，使阻带最小衰减只有21 dB。加大 N 只能使 $H_g(\omega)$ 过渡带变窄（过渡带近似为主瓣宽度 $4\pi/N$ ）。因此加大 N ，并不是减小吉布斯效应的有效方法。



■ 结论

调整窗口长度 N 只能有效地控制过渡带的宽度，而要减少带内波动以及增大阻带衰减，只能从窗函数的形状上找解决问题的方法。

构造新的窗函数形状，使其谱函数的主瓣包含更多的能量，相应旁瓣幅度更小。旁瓣的减小可使通带、阻带波动减小，从而加大阻带衰减。但这样总是以加宽过渡带为代价的。



7.2.2 典型窗函数介绍

介绍几种常用窗函数的时域表达式、时域波形、幅度特性函数（衰减用dB计量）曲线，以及用该窗函数设计的FIR数字滤波器的单位脉冲响应和损耗函数曲线。

$H_d(e^{j\omega})$ 取理想低通， $\omega_c = \pi/2$ ，窗函数长度 $N=31$ 。

窗函数的几个参数：

旁瓣峰值 α_n ——窗函数的幅频函数 $|W_g(\omega)|$ 的最大旁瓣的最大值相对主瓣最大值的衰减值（dB）；

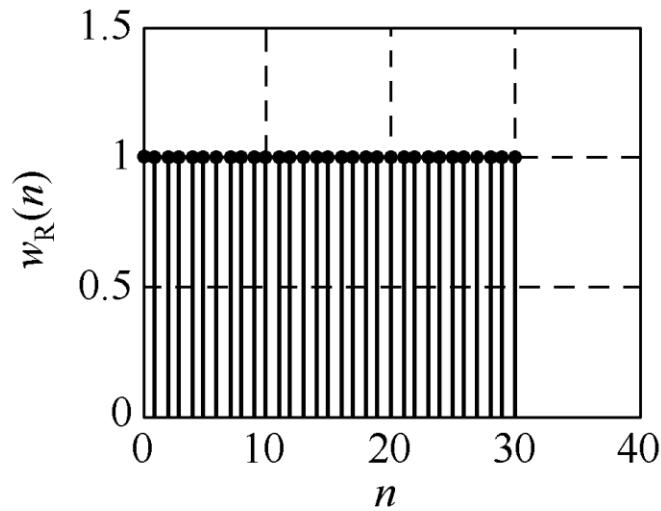
过渡带宽度 B_g ——用该窗函数设计的FIR数字滤波器（FIRDF）的过渡带宽度；

阻带最小衰减 α_s ——用该窗函数设计的FIRDF的阻带最小衰减。

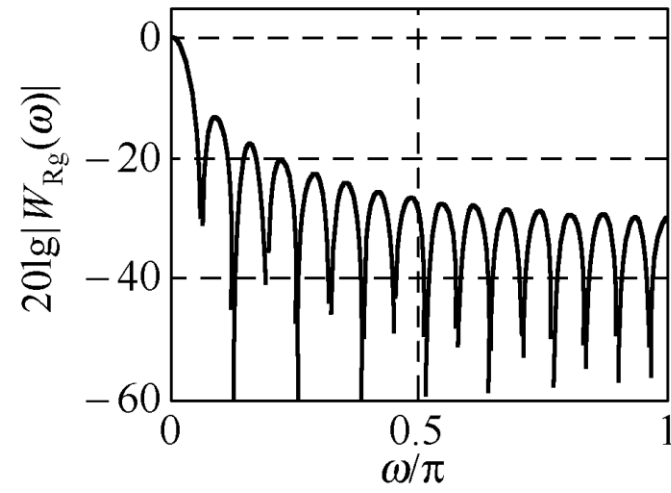
1. 矩形窗 (Rectangle Window)

$$\omega_R(n) = \begin{cases} 1 & 0 < n < N - 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

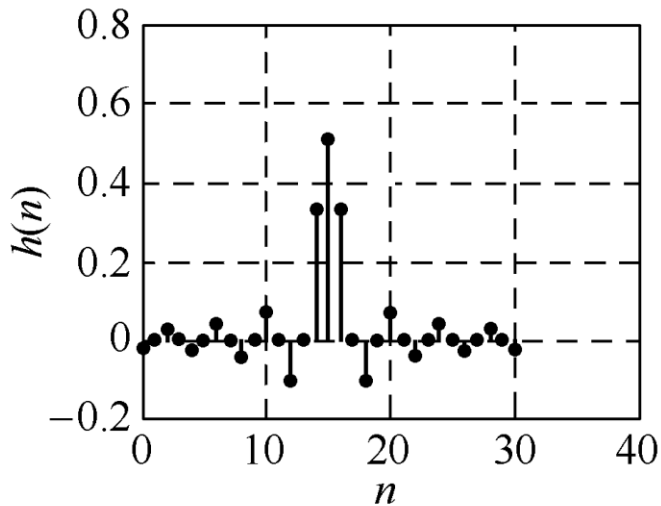
幅度函数:
$$W_{Rg}(\omega) = \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)}$$



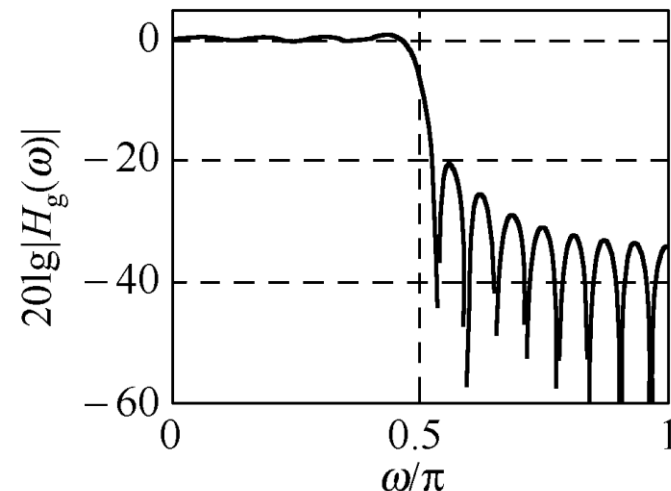
(a)



(b)



(c)



(d)

矩形窗的参数: $\alpha_n = -13$ dB; $B_g = 4\pi/N$; $\alpha_s = -21$ dB。

2. 三角形窗 (Bartlett Window)

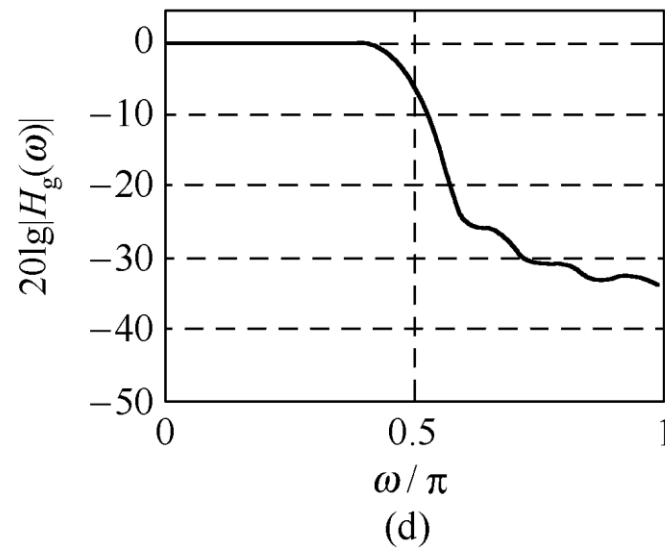
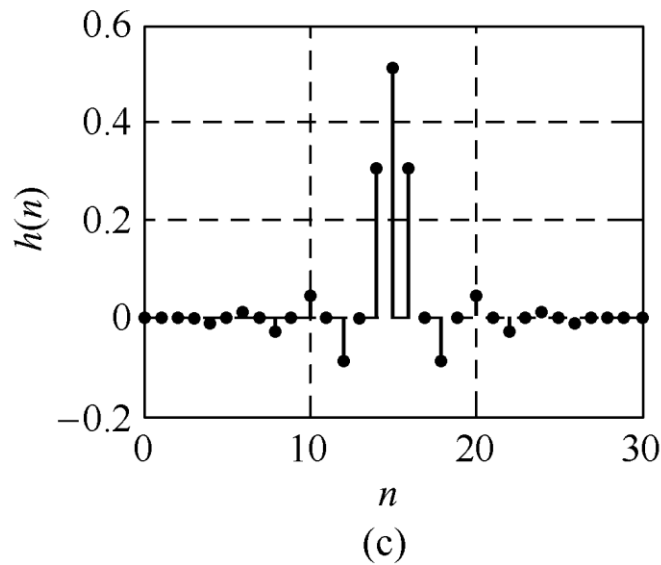
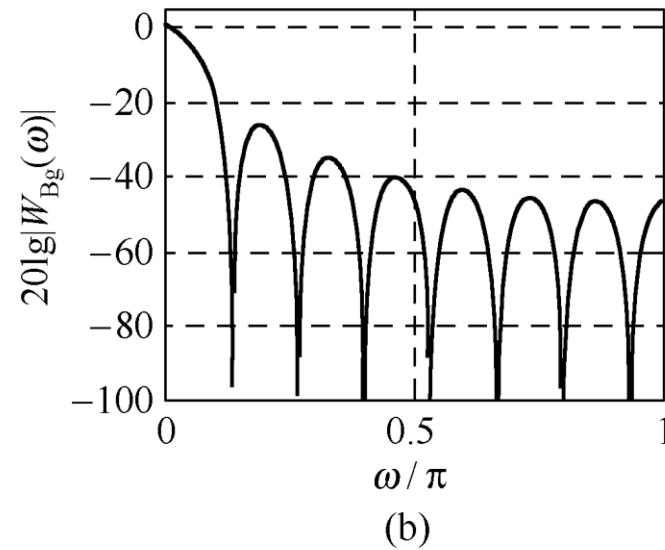
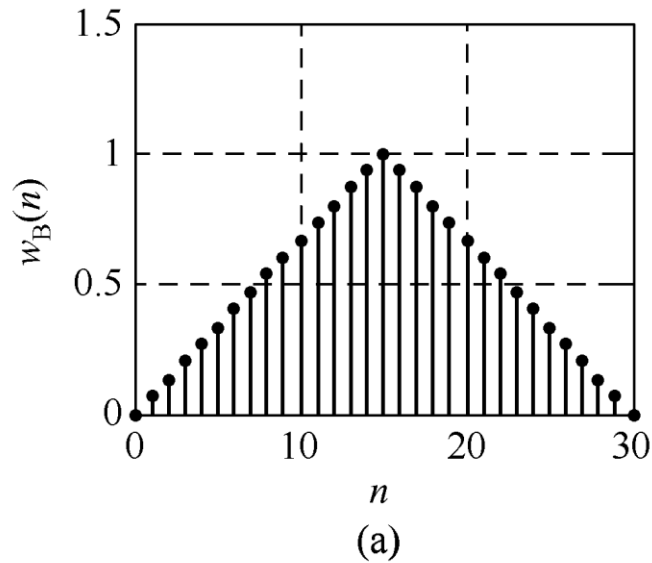
$$\omega_B(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, 0 \leq n \leq \frac{1}{2}(N-1) \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, \frac{1}{2}(N-1) < n \leq N-1 \end{cases} \quad (7.2.8)$$

频谱函数:

$$W_B(e^{j\omega}) = \frac{2}{N} \left[\frac{\sin(\omega N / 4)}{\sin(\omega / 2)} \right]^2 e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

幅度函数:

$$W_{Bg}(\omega) = \frac{2}{N} \left[\frac{\sin(\omega N / 4)}{\sin(\omega / 2)} \right]^2$$



$$\alpha_n = -25 \text{ dB}; \quad B_g = 8\pi/N; \quad \alpha_s = -25 \text{ dB}.$$

3. 汉宁 (Hanning) 窗——升余弦窗

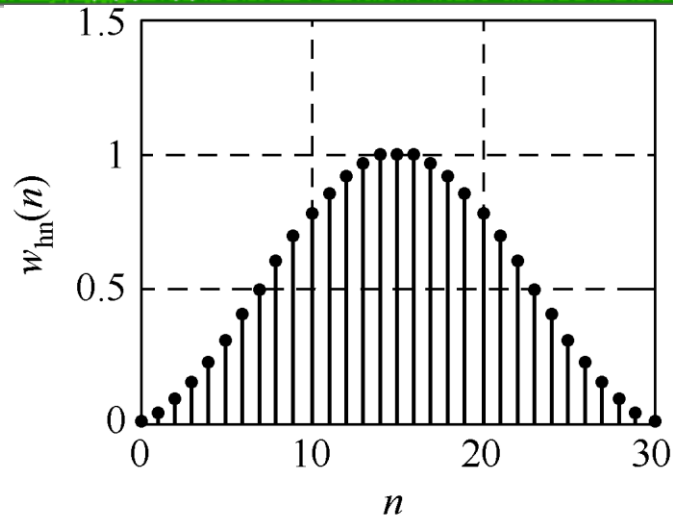
$$w_{\text{Hn}}(n) = 0.5 \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right] R_N(n) \quad (7.2.11)$$

频谱函数:

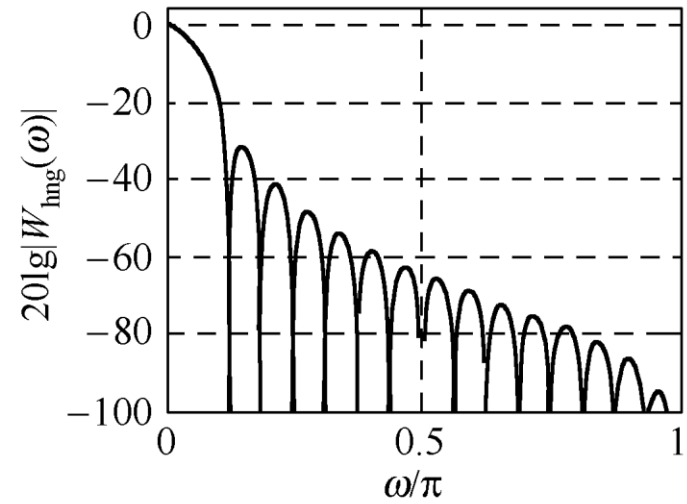
$$\begin{aligned} W_{\text{Hn}}(e^{j\omega}) &= FT[W_{\text{Hn}}(n)] \\ &= \left\{ 0.5W_{\text{Rg}}(\omega) + 0.25 \left[W_{\text{Rg}} \left(\omega + \frac{2\pi}{N-1} \right) + W_{\text{Rg}} \left(\omega - \frac{2\pi}{N-1} \right) \right] \right\} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \\ &= W_{\text{Hng}}(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \end{aligned}$$

幅度函数:

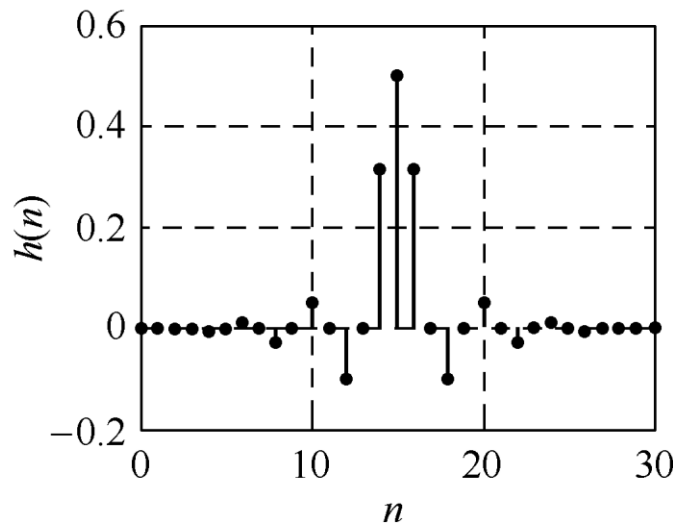
$$W_{\text{Hng}}(\omega) = 0.5W_{\text{Rg}}(\omega) + 0.25 \left[W_{\text{Rg}} \left(\omega + \frac{2\pi}{N} \right) + W_{\text{Rg}} \left(\omega - \frac{2\pi}{N} \right) \right] \quad N \gg 1$$



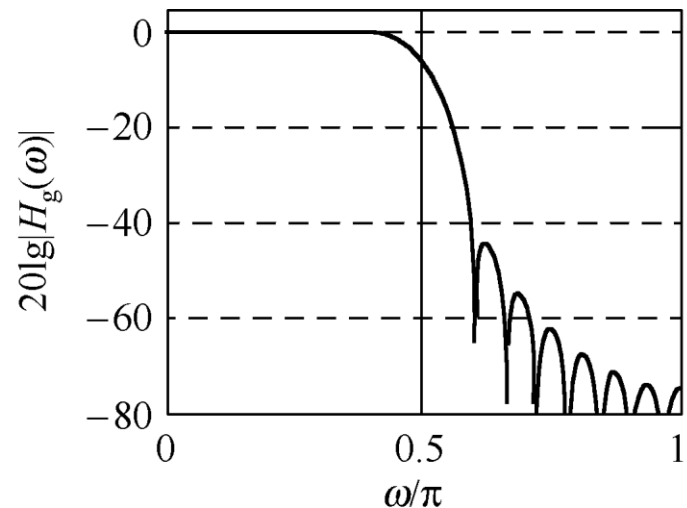
(a)



(b)



(c)



(d)

$$\alpha_n = -31 \text{ dB}; B_g = 8\pi/N; \alpha_s = -44 \text{ dB}.$$

4. 哈明 (Hamming) 窗——改进的升余弦窗

$$w_{\text{Hm}}(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right] R_N(n)$$

频谱函数:

$$W_{\text{Hm}}(e^{j\omega}) = 0.54W_R(e^{j\omega}) - 0.23W_R(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right)}) - 0.23W_R(e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)})$$

幅度函数:

$$W_{\text{Hmg}}(\omega) = 0.54W_{\text{Rg}}(\omega) + 0.23W_{\text{Rg}}\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + 0.23W_{\text{Rg}}\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)$$

$$W_{\text{Hmg}}(\omega) \approx 0.54W_{\text{Rg}}(\omega) + 0.23W_{\text{Rg}}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + 0.23W_{\text{Rg}}\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) \quad N \gg 1$$

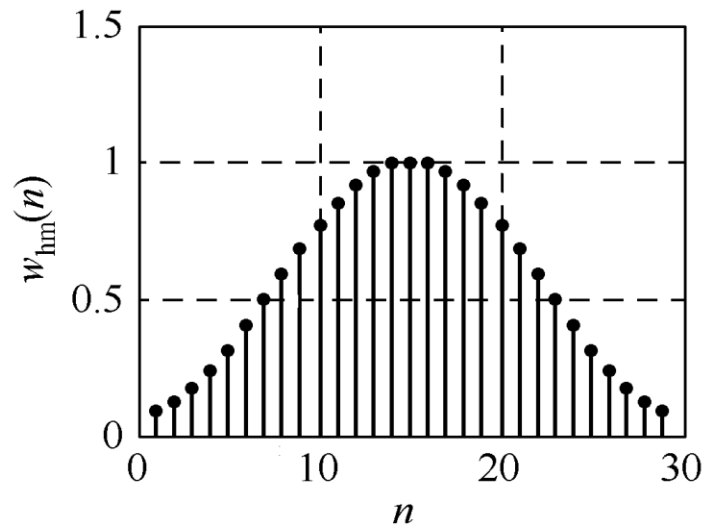


这种改进的升余弦窗，能量更加集中在主瓣中，主瓣的能量约占99.963%，旁瓣峰值幅度为40 dB，但其主瓣宽度和汉宁窗的相同，仍为 $8\pi/N$ 。

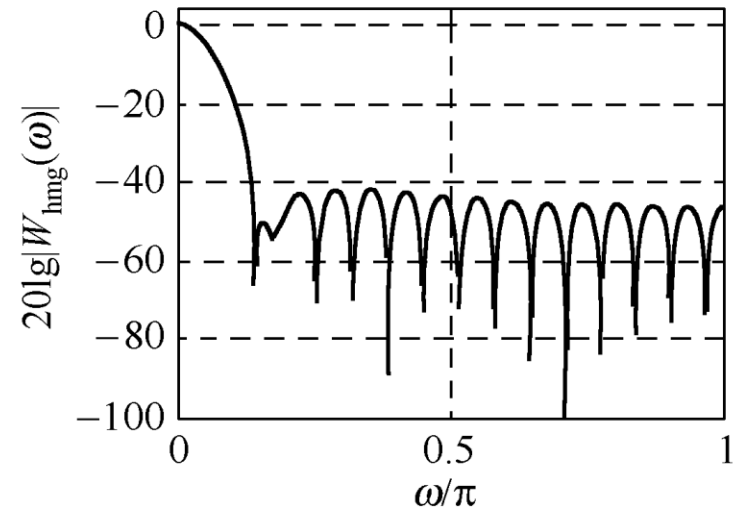
哈明窗是一种高效窗函数，所以MATLAB窗函数设计函数的默认窗函数就是哈明窗。

哈明窗的四种波形如图7.2.7所示，参数为：

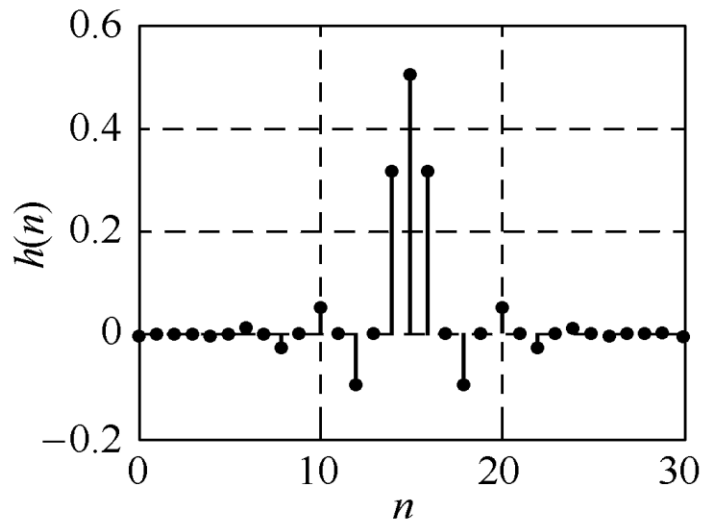
$$\alpha_n = -41 \text{ dB}; B_g = 8\pi/N; \alpha_s = -53 \text{ dB}。$$



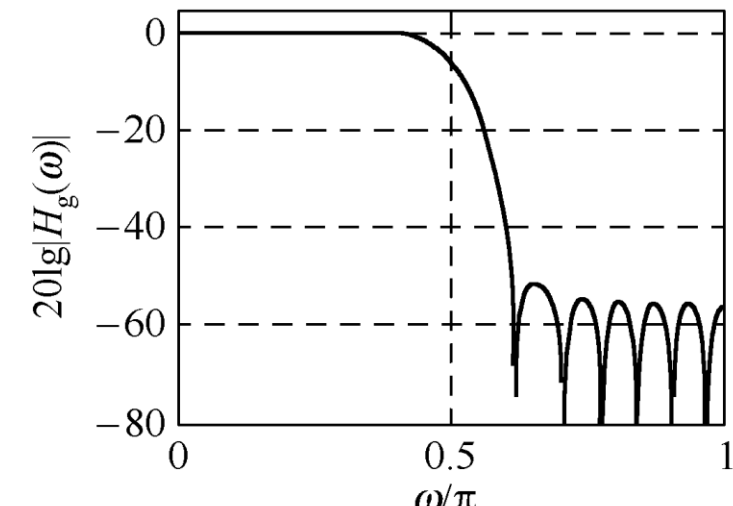
(a)



(b)



(c)



(d)

图7.2.7 哈明窗的四种波形

5. 布莱克曼 (Blackman) 窗

$$\omega_{\text{Bl}}(n) = \left[0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N-1} \right] R_N(n) \quad (7.2.13)$$

频谱函数:

$$\begin{aligned} W_{\text{Bl}}(e^{j\omega}) = & 0.42W_{\text{R}}(e^{j\omega}) - 0.25 \left[W_{\text{R}}\left(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right)}\right) + W_{\text{R}}\left(e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)}\right) \right] \\ & + 0.04 \left[W_{\text{R}}\left(e^{j\left(\omega - \frac{4\pi}{N-1}\right)}\right) + W_{\text{R}}\left(e^{j\left(\omega + \frac{4\pi}{N-1}\right)}\right) \right] \end{aligned}$$



幅度函数：

$$W_{\text{Blg}}(\omega) = 0.42W_{\text{Rg}}(\omega) + 0.25\left[W_{\text{Rg}}\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_{\text{Rg}}\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)\right] \\ + 0.04\left[W_{\text{Rg}}\left(\omega - \frac{4\pi}{N-1}\right) + W_{\text{Rg}}\left(\omega + \frac{4\pi}{N-1}\right)\right]$$

其幅度函数由五部分组成，它们都是移位不同，且幅度也不同的 $W_{\text{Rg}}(\omega)$ 函数，使旁瓣再进一步抵消。旁瓣峰值幅度进一步增加，其幅度谱主瓣宽度是矩形窗的3倍。布莱克曼窗的四种波形如图7.2.8所示，参数为： $\alpha_n = -57 \text{ dB}$ ； $\Delta B = 12\pi/N$ ； $\alpha_s = -74 \text{ dB}$ 。

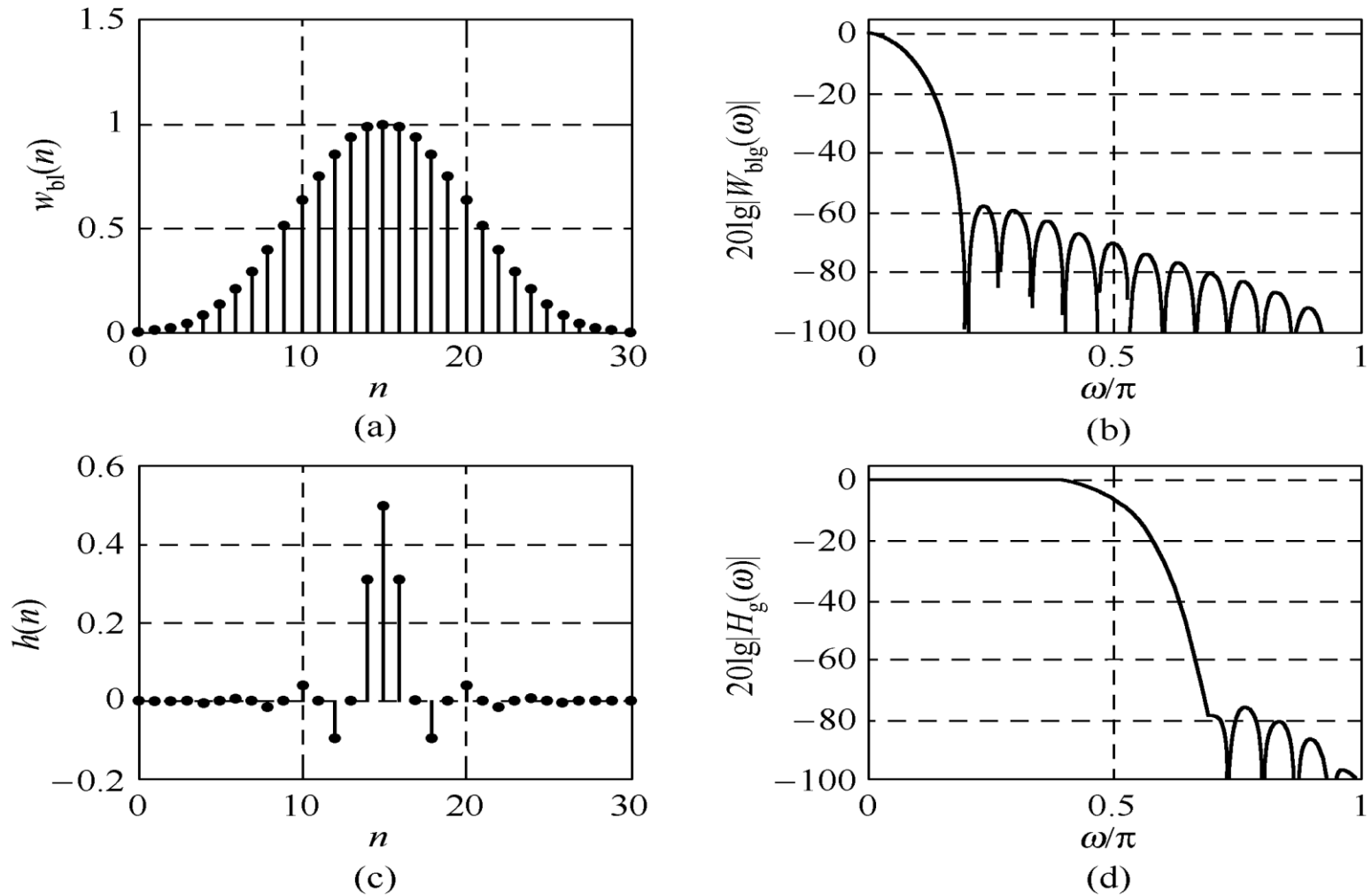


图7.2.8 布莱克曼窗的四种波形



6. 凯塞—贝塞尔窗 (Kaiser-Bessel Window)

以上五种窗函数都称为参数固定窗函数，每种窗函数的旁瓣幅度都是固定的。凯塞—贝塞尔窗是一种参数可调的窗函数，是一种最优窗函数。

$$\omega_k(n) = \frac{I_0(\beta)}{I_0(\alpha)}, 0 \leq n \leq N-1 \quad (7.2.15)$$

式中

$$\beta = \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1} - 1 \right)^2}$$

$I_0(\beta)$ 是零阶第一类修正贝塞尔函数：

$$I_0(\beta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \left(\frac{\beta}{2} \right)^k \right)^2$$

一般 $I_0(\beta)$ 取15~25项，便可以满足精度要求。 α 参数可以控制窗的形状。一般 α 加大，主瓣加宽，旁瓣幅度减小，典型数据为 $4 < \alpha < 9$ 。当 $\alpha = 5.44$ 时，窗函数接近哈明窗。 $\alpha = 7.865$ 时，窗函数接近布莱克曼窗。在设计指标给定时，可以调整 α 值，使滤波器阶数最低，所以其性能最优。凯塞（Kaiser）给出的估算 β 和滤波器阶数M的公式如下：

$$\alpha = \begin{cases} 0.112(\alpha_s - 8.7), & \alpha_s > 50 \text{ dB} \\ 0.5842(\alpha_s - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha_s - 21), & 21 < \alpha_s < 50 \text{ dB} \\ 0, & \alpha_s < 21 \end{cases}$$

(7.2.16)

$$M = \frac{\alpha_s - 8}{2.285 B_t}$$

(7.2.17)

式中， $B_t = |\omega_s - \omega_p|$ ，是数字滤波器过渡带宽度。应当注意，因为式（7.2.17）为阶数估算，所以必须对设计结果进行检验。另外，凯塞窗函数没有独立控制通带波纹幅度，实际中通带波纹幅度近似等于阻带波纹幅度。凯塞窗的幅度函数为



$$W_{\text{kg}}(\omega) = w_{\text{k}}(0) + 2 \sum_{n=1}^{(N-1)/2} w_{\text{k}}(n) \cos \omega n \quad (7.2.18)$$

对 α 的8种典型值，将凯塞窗函数的性能列于表7.2.1中，供设计者参考。由表可见，当 $\alpha=5.568$ 时，各项指标都好于哈明窗。6种典型窗函数基本参数归纳在表7.2.2中，可供设计时参考。



表7.2.1 凯塞窗参数对滤波器的性能影响

α	过渡带宽	通带波纹/dB	阻带最小衰减/dB
2.120	$3.00\pi/N$	± 0.27	-30
3.384	$4.46\pi/N$	± 0.0864	-40
4.538	$5.86\pi/N$	± 0.0274	-50
5.568	$7.24\pi/N$	$\pm 0.008\ 68$	-60
6.764	$8.64\pi/N$	$\pm 0.002\ 75$	-70
7.865	$10.0\pi/N$	$\pm 0.000\ 868$	-80
8.960	$11.4\pi/N$	$\pm 0.000\ 275$	-90
10.056	$10.8\pi/N$	$\pm 0.000\ 087$	-100



表7.2.2 6种窗函数的基本参数

窗函数类型	旁瓣峰值 α_n /dB	过渡带宽度 B_t		阻带最小衰减 α_s /dB
		近似值	精确值	
矩形窗	-13	$4\pi/N$	$1.8\pi/N$	-21
三角窗	-25	$8\pi/N$	$6.1\pi/N$	-25
汉宁窗	-31	$8\pi/N$	$6.2\pi/N$	-44
哈明窗	-41	$8\pi/N$	$6.6\pi/N$	-53
布莱克曼窗	-57	$12\pi/N$	$11\pi/N$	-74
凯塞窗($\beta = 7.865$)	-57		$10\pi/N$	-80

表中过渡带宽和阻带最小衰减是用对应的窗函数设计的FIR数字滤波器的频率响应指标。

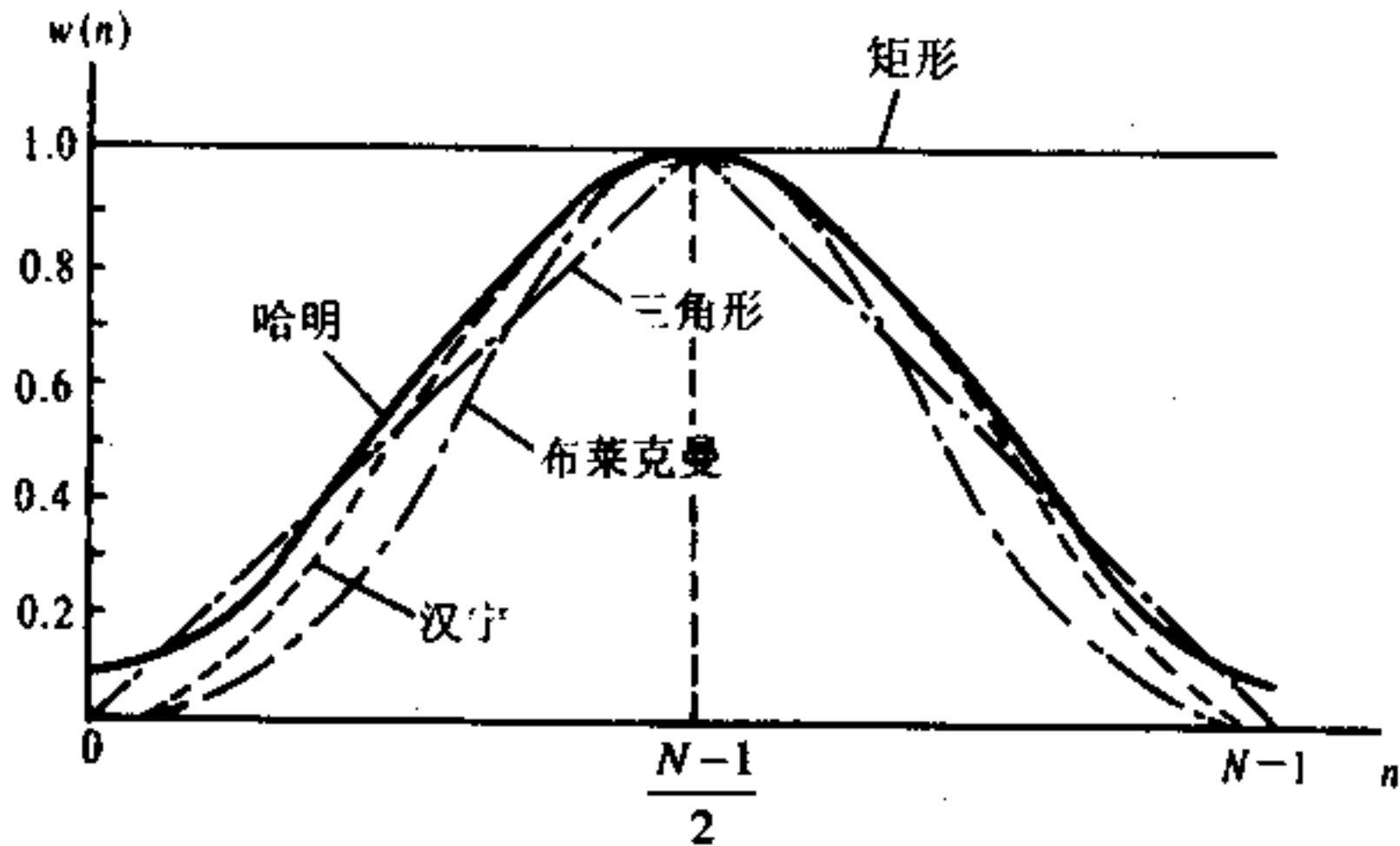


图7.2.4 常用的窗函数



7.2.3 用窗函数法设计FIR滤波器的步骤

用窗函数法设计FIR滤波器的步骤如下：

(1) 根据对过渡带及阻带衰减的指标要求，选择窗函数的类型，并估计窗口长度 N 。

a: 窗函数类型选择：

按照阻带衰减选择，原则：

在保证阻带衰减满足要求的情况下，尽量选择主瓣窄的窗函数。

b: 窗口长度 N 估计：

根据过渡带宽度。



(2) 构造希望逼近的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$ ，即

$$H_d(e^{j\omega}) = H_{dg}(\omega)e^{-j\omega(N-1)/2}$$

“标准窗函数法”：选择 $H_d(e^{j\omega})$ 为线性相位理想滤波器（理想低通、理想高通、理想带通、理想带阻）。

理想滤波器的截止频率 ω_c 近似位于最终设计的FIRDF的过渡带的**中心频率点**，幅度函数衰减一半（约-6 dB）。所以如果设计指标给定通带边界频率和阻带边界频率 ω_p 和 ω_s ，一般取

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$$



(3) 计算 $h_d(n)$ 。

如果给出待求滤波器的频响函数为 $H_d(e^{j\omega})$ ，那么单位脉冲响应用下式求出：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

如果 $H_d(e^{j\omega})$ 较复杂，或者不能用封闭公式表示，则不能用上式求出 $h_d(n)$ 。可以采用频域采样法求取。

(4) 加窗得到设计结果： $h(n)=h_d(n)w(n)$ 。

(5) 验算技术指标是否满足要求。设计出的滤波器频率响应用下式计算：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$$

窗函数法设计的FIR DF中的主要问题：

优点：设计过程较简单，大多数窗函数有封闭公式可用，性能、参数有表格可查，计算程序简单，使用方便且实用，因而用途较广。

存在的问题：

- (1) 矩形窗一般不是最佳设计，但简单快速；
- (2) 当 $H_d(e^{j\omega})$ 很复杂或不能由积分直接计算出 $h_d(n)$ ；
- (3) 窗函数法设计的滤波器具有通带、阻带最大波纹相等的特性，二者不能分别控制，且通带中越靠近通带边缘波纹幅度越大，阻带中越靠近阻带边缘波纹幅度越大。因而，若在过渡带两边频率处的衰减满足指标要求，那么在通带、阻带内的其它频率处的衰减就一定有富裕，也就是说窗函数法设计的滤波器有一定的资源浪费；
- (4) 用窗函数法进行滤波器的系统设计过程中，做不到对通带截止频率、阻带截止频率的精确控制。

【例】 用矩形窗、汉宁窗和布莱克曼窗设计FIR低通滤波器，设 $N=11, \omega_c=0.2\pi\text{rad}$ 。

解： 用理想低通作为逼近滤波器，按照(7.2.2)式，有

$$h_d(n) = \frac{\sin(\omega_c(n - \alpha))}{\pi(n - \alpha)}, 0 \leq n \leq 10$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(N - 1) = 5$$

$$h_d(n) = \frac{\sin(0.2\pi(n - 5))}{\pi(n - 5)}, 0 \leq n \leq 10$$

➤ 用汉宁窗设计:

$$h(n) = h_d(n)\omega_{Hn}(n), 0 \leq n \leq 10$$

$$\omega_{Hn}(n) = 0.5(1 - \cos \frac{2\pi n}{10})$$

➤ 用布莱克曼窗设计:

$$h(n) = h_d(n)\omega_{Bl}(n), 0 \leq n \leq 10$$

$$\omega_{Bl}(n) = (0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{10} + 0.08 \cos \frac{2\pi n}{10})R_{11}(n)$$



【例7.2.1】 用窗函数法设计线性相位高通FIRDF，要求通带截止频率 $\omega_p=\pi/2$ rad，阻带截止频率 $\omega_s=\pi/4$ rad，通带最大衰减 $\alpha_p=1$ dB，阻带最小衰减 $\alpha_s=40$ dB。

解：

(1) 选择窗函数 $w(n)$ ，计算窗函数长度 N 。

已知 $\alpha_s=40$ dB，由表(7.2.2)可知汉宁窗和哈明窗均满足要求，选择汉宁窗。

过渡带宽度 $B_t \leq \omega_p - \omega_s = \pi/4$ ，汉宁窗的精确过渡带宽度 $B_t = 6.2\pi/N$ ，所以要求 $B_t = 6.2\pi/N \leq \pi/4$ ，解之得 $N \geq 24.8$ 。
对高通滤波器 N 必须取奇数，取 $N=25$ 。有：

$$w(n) = 0.5 \left[1 - \cos \left(\frac{\pi n}{12} \right) \right] R_{25}(n)$$

(2) 构造 $H_d(e^{j\omega})$:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0, & 0 \leq |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

式中

$$\tau = \frac{N-1}{2} = 12, \quad \omega_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

(3) 求出 $h_d(n)$:

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega + \int_{\omega_c}^{\pi} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin \pi(n - \tau)}{\pi(n - \tau)} - \frac{\sin \omega_c(n - \tau)}{\pi(n - \tau)}$$

将 $\tau=12$ 代入得

全通滤波器

理想低通滤波器的单位脉冲响应

$$h_d(n) = \delta(n - 12) - \frac{\sin[3\pi(n - 12)/8]}{\pi(n - 12)}$$



$\delta(n-12)$ 对应全通滤波器， $\frac{\sin[3\pi(n-12)/8]}{\pi(n-12)}$ 是截止频率为 $3\pi/8$ 的理想低通滤波器的单位脉冲响应，二者之差就是理想高通滤波器的单位脉冲响应。

(4) 加窗：

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

$$= \left\{ \delta(n-12) - \frac{\sin[3\pi(n-12)/8]}{\pi(n-12)} \right\} \left[0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{\pi n}{12}\right) \right] R_{25}(n)$$



【例7.2.2】 对模拟信号进行低通滤波处理，要求通带 $0 \leq f \leq 1.5\text{kHz}$ 内衰减小于1 dB，阻带 $2.5\text{kHz} \leq f \leq \infty$ 上衰减大于40 dB。希望对模拟信号采样后用线性相位FIR数字滤波器实现上述滤波，采样频率 $F_s = 10\text{ kHz}$ 。用窗函数法设计满足要求的FIR数字低通滤波器，求出 $h(n)$ ，并画出损耗函数曲线。为了降低运算量，希望滤波器阶数尽量低。

解：（1）确定相应的数字滤波器指标：
通带截止频率为

$$\omega_p = \frac{2\pi f_p}{F_s} = 2\pi \times \frac{1500}{10000} = 0.3\pi$$

阻带截止频率为

$$\omega_s = \frac{2\pi f_s}{F_s} = 2\pi \times \frac{2500}{10000} = 0.5\pi$$

阻带最小衰减为

$$\alpha_s = 40\text{dB}$$

(2) 用窗函数法设计FIR数字低通滤波器，为了降低阶数选择凯塞窗。根据式(7.2.16)计算凯塞窗的控制参数为

$$\alpha = 0.5842(\alpha_s - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha_s - 21) = 3.3953$$

指标要求过渡带宽度 $B_t = \omega_s - \omega_p = 0.2\pi$ ，根据式（7.2.17）计算滤波器阶数为

$$M = \frac{\alpha_s - 8}{2.285 B_t} = \frac{40 - 8}{2.285 \times 0.2\pi} = 22.2887$$

取满足要求的最小整数 $M=23$ 。所以 $h(n)$ 长度为
 $N=M+1=24$ 。但是，如果用汉宁窗， $h(n)$ 长度为 $N=40$ 。
理想低通滤波器的通带截止频率 $\omega_c = (\omega_s + \omega_p)/2 = 0.4\pi$ ，所以由式（7.2.2）和式（7.2.3），得到：

$$h(n) = h_d(n)w(n) = \frac{\sin[0.4\pi(n - \tau)]}{\pi(n - \tau)} w(n) \quad , \quad \tau = \frac{N-1}{2} = 11.5$$

式中， $w(n)$ 是长度为24（ $\alpha=3.395$ ）的凯塞窗函数。

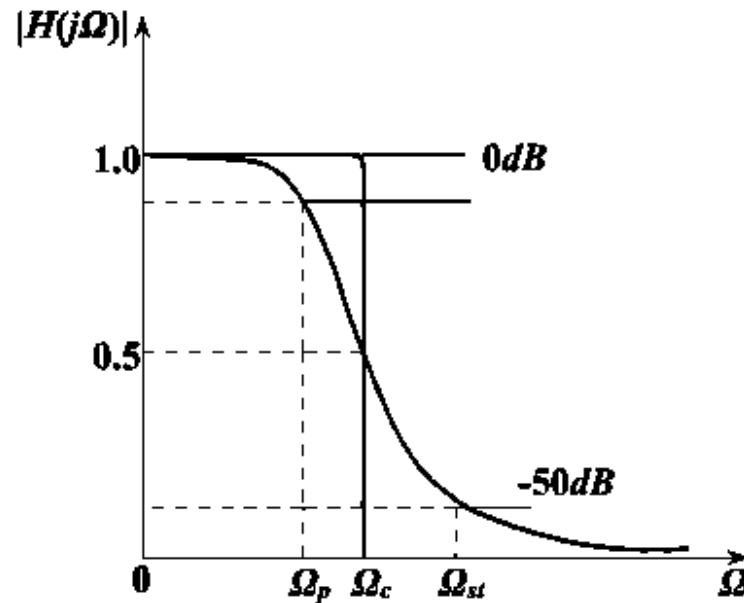
【例7.2.3】设计一个线性相位FIR低通滤波器，

给定抽样频率为 $\Omega_s = 2\pi \times 1.5 \times 10^4 (rad/sec)$

通带截止频率为 $\Omega_p = 2\pi \times 1.5 \times 10^3 (rad/sec)$

阻带起始频率为 $\Omega_{st} = 2\pi \times 3 \times 10^3 (rad/sec)$

阻带衰减不小于 $-50dB$ ，幅度特性如图所示



解：

1) 求数字频率

$$\omega_p = \Omega_p / f_s = 2\pi\Omega_p / \Omega_s = 0.2\pi$$

$$\omega_{st} = \Omega_{st} / f_s = 2\pi\Omega_{st} / \Omega_s = 0.4\pi$$

$$\alpha_s = -50dB$$

2) 求 $h_d(n)$

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_c, \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

$$\omega_c = \frac{\Omega_c}{f_s} = 2\pi \frac{1/2(\Omega_p + \Omega_{st})}{\Omega_s} = 0.3\pi$$

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\pi(n-\tau)} \sin[\omega_c(n-\tau)] & n \neq \tau \\ \frac{\omega_c}{\pi} & n = \tau \end{cases} \quad \tau = \frac{N-1}{2} \end{aligned}$$

3) 选择窗函数：由 $\alpha_s = -50\text{dB}$ 确定哈明窗（-53dB）

$$w(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right] R_N(n)$$

4) 确定 N 值

$$\text{哈明窗带宽: } B_t = \frac{6.6\pi}{N}$$

$$B_t = \omega_{st} - \omega_p = 0.2\pi$$

$$N = \frac{6.6\pi}{0.2\pi} = 33$$

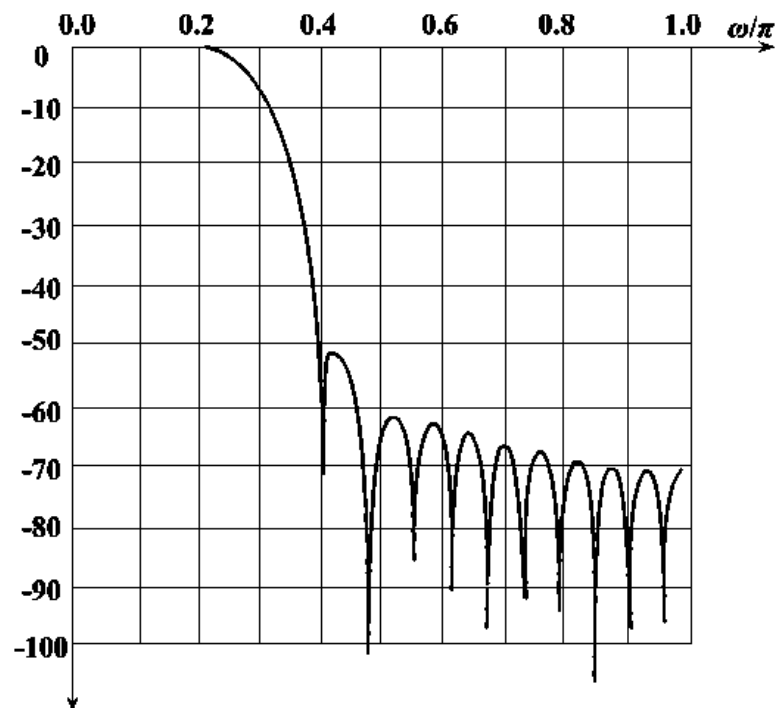
$$\tau = \frac{N-1}{2} = 16$$

5) 确定FIR滤波器的 $h(n)$

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

$$= \frac{\sin\left[0.3\pi(n-16)\right]}{\pi(n-16)} \cdot \left[0.54 - 0.46\cos\frac{\pi n}{16}\right] R_{33}(n)$$

6) 将 $h(n)$ 作 z 变换, 得到 $H(z)$ 。



过度带宽 $\Delta\omega$: 0.3476563π
第一通带波纹: 0.020837dB
第一阻带最小衰减: 50.9159dB

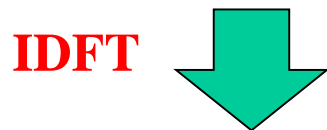
图7-15 例7-1设计出的线形相位FIR低通滤波器幅频特性
(海明窗, $N=33$)

7.3 利用频率采样法设计FIR滤波器

1. 基本思想

假设：希望逼近的滤波器的频响函数 $H_d(e^{j\omega})$ ，对它 $\omega=0$ 到 2π 之间等间隔采样 N 点，得到 $H_d(k)$ ：

$$H_d(k) = H_d(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.3.1)$$



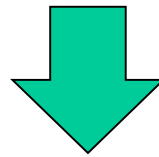
$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.3.2)$$

$h(n)$ 为所设计的FIR滤波器的单位脉冲响应，
其系统函数 $H(z)$ 为

● **FIR直接型网络结构：**

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (7.3.3)$$

频率域采样



● **FIR频率采样结构：**

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_d(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \quad (7.3.4)$$

本质：频域逼近方法

$$H_d(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

■ 两个重要问题：

- 如何实现线性相位？
- 如何减小逼近误差？

2. 设计线性相位滤波器对 $H_d(k)$ 的条件

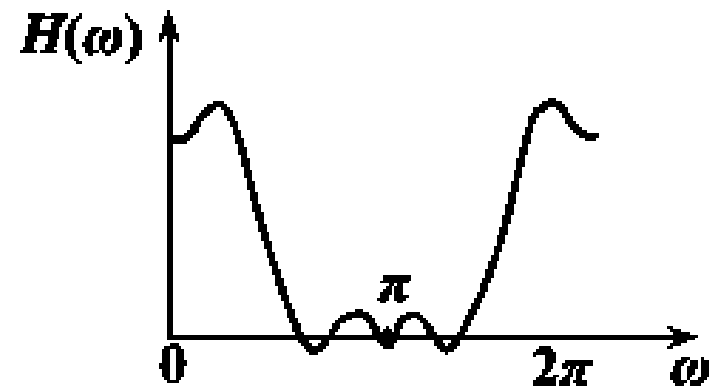
◆ FIR滤波器具有线性相位的条件

- **情况1：** $h(n)$ 是实序列， $h(n) = h(N-n-1)$ ， N 为奇数

$$H_d(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

$$H_g(\omega) = H_g(2\pi - \omega)$$



2. 设计线性相位滤波器对 $H_d(k)$ 的条件

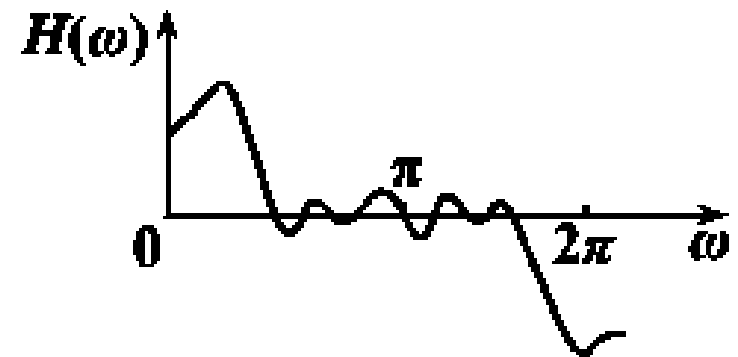
◆ FIR滤波器具有线性相位的条件

- 情况2: $h(n)$ 是实序列, $h(n) = h(N-n-1)$, N 为偶数

$$H_d(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

$$H_g(\omega) = -H_g(2\pi - \omega)$$



◆ 在 $\omega=0\sim 2\pi$ 之间等间隔采样 N 点,

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

◆ 频率采样值 $H_d(k)$

$$H_d(k) = H_g(k) e^{j\theta(k)} \quad (7.3.9)$$

$$\theta(k) = -\frac{N-1}{2} \frac{2\pi}{N} k = -\frac{N-1}{N} \pi k \quad (7.3.10)$$

$$H_g(k) = H_g(N-k), \quad k = \text{奇数} \quad (7.3.11)$$

$$H_g(k) = -H_g(N-k), \quad k = \text{偶数} \quad (7.3.12)$$

◆ 理想低通滤波器的频率采样值 $H_d(k)$

假设：希望设计一个理想低通滤波器，截止频率为 ω_c ，采样点数 N ，则 $H_g(k)$ 和 $\theta(k)$ 用下面公式计算：

● 情况1： $h(n) = h(N-n-1)$ ， N 为奇数

$$\begin{cases} H_g(k) = H_g(N-k) = 1, & k = 0, 1, 2, \dots, k_c \\ H_g(k) = 0, & k = k_c + 1, k_c + 2, \dots, N - k_c - 1 \\ \theta(k) = -\frac{N-1}{N} \pi k, & k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (7.3.13)$$

k_c 是通带内最后一个采样点的序号，所以 k_c 的值取不大于 $[\omega_c N / (2\pi)]$ 的最大整数。对于高通和带阻滤波器， N 只能取奇

- 情况2: $h(n) = h(N-n-1)$, N 为偶数

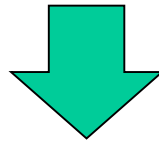
$$\left\{ \begin{array}{l} H_g(k) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_c \\ H_g(k) = 0, \quad k = k_c + 1, k_c + 2, \dots, N - k_c - 1 \\ H_g(N - k) = -1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_c \\ \theta(k) = -\frac{N-1}{N} \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{array} \right. \quad (7.3.14)$$

3. 逼近误差及其改进措施

假设：待设计的滤波器为 $H_d(e^{j\omega})$,对应的单位取样响应为 $h_d(n)$,

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

频率域采样



$$h(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d(n + rN) R_N(n)$$

※频率域采样定理：在频域 $0 \sim 2\pi$ 之间等间隔采样 N 点，利用IDFT得到的 $h(n)$ 应是 $h_d(n)$ 以 N 为周期，周期性延拓乘以 $R_N(n)$

◆ 频率域等间隔采样 $H(k)$ 与 $h(n)$ 的Z变换 $H(z)$ 的关系:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}} z^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \Phi(\omega - \frac{2\pi}{N} k)$$

● 内插函数: $\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} e^{-j\omega \frac{N-1}{2}}$

$$\Phi(\frac{2\pi}{N} i - \frac{2\pi}{N} k) = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

◆ 结论

- 在采样点上, $H(e^{j\omega_k}) = H(k)$, 逼近误差为零, $H(e^{j\omega_k})$ 频响严格地与理想频响的采样值 $H(k)$ 相等;

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \Phi(\omega - \frac{2\pi}{N} k)$$

$$\Phi(\frac{2\pi}{N} i - \frac{2\pi}{N} k) = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

◆ 结论

- 在采样点之间，频响由各采样点的内插函数延伸迭加而形成，因而产生一定的逼近误差，误差大小与理想频率响应的曲线形状有关，理想特性平滑则误差小；反之，在理想频率响应的不连续点附近误差较大，会产生肩峰和波纹；
- N 增大，则采样点变密，逼近误差减小。

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

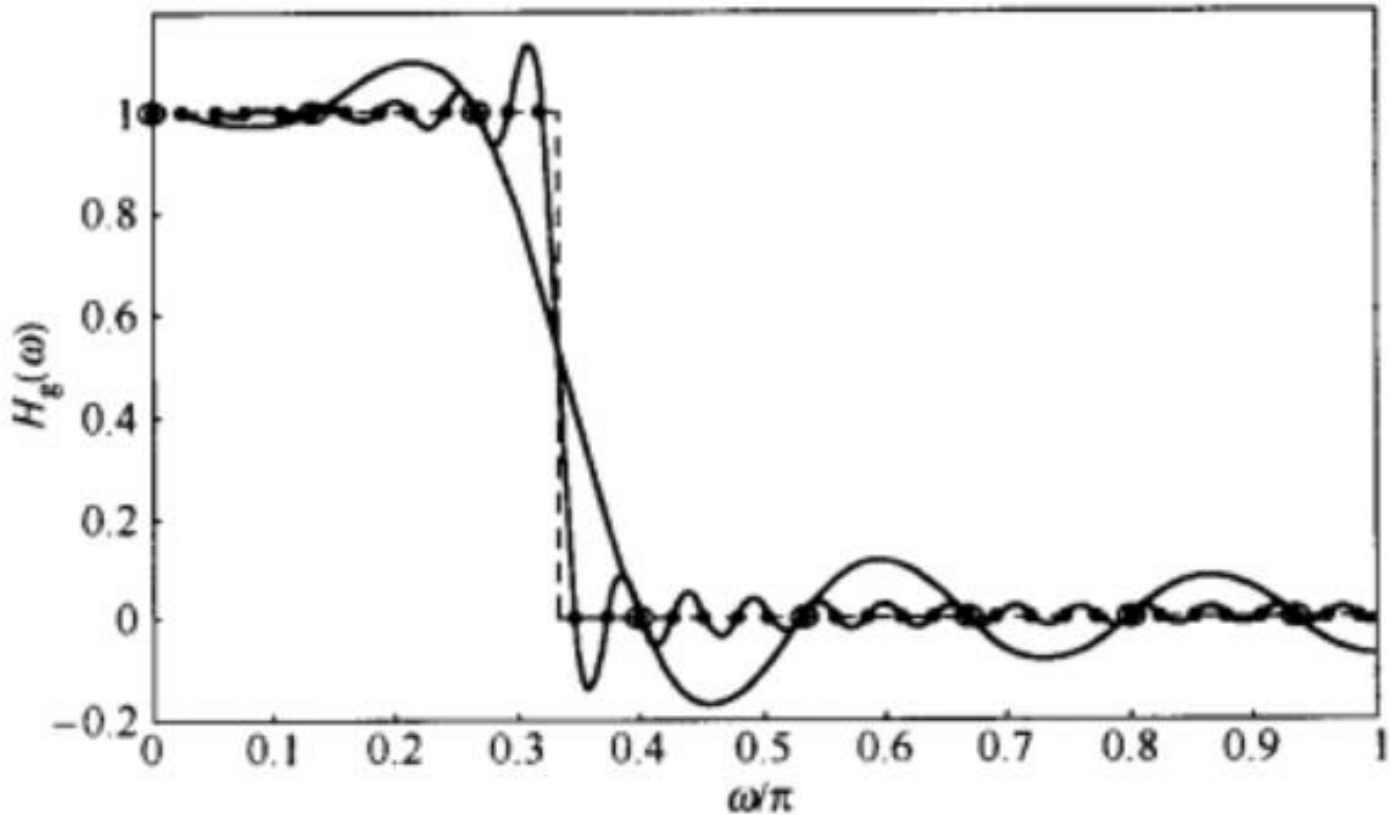


图 7.3.2 采样点数 N 不同时的逼近误差比较 ($N=15, 75$)

- $N=15$, $\alpha_p = 0.8dB$ $\alpha_s = -15.1dB$
- $N=75$, $\alpha_p = 1.1dB$ $\alpha_s = -16.6dB$
- 增大 N , 使得过渡带变窄, 增加计算量和成本



◆ 改进措施

- 为减小逼近误差, 类似于窗函数法的加窗平滑截断, 可以使希望逼近的幅度特性 $H_g(\omega)$ 从通带较平滑地过渡到阻带, 消除阶跃突变, 使逼近误差减小;
- 这相当于设置了 $H_g(\omega)$ 的过渡带, 其实质是对幅度采样设置了过渡带的采样点, 以加宽过渡带为代价换取通带和阻带内波纹幅度的减小
- 过渡带宽 B_t 与滤波器长度 N 须满足下式

$$N \geq (m+1) 2\pi / B_t$$

m:采样点数

➤ 过渡带增加采样点阻带衰减加大

$$m=0: \quad \alpha_s = -20dB$$

$$m=1: \quad \alpha_s = -44 \sim -54dB$$

$$m=2: \quad \alpha_s = -65 \sim -75dB$$

$$m=3: \quad \alpha_s = -85 \sim -95dB$$

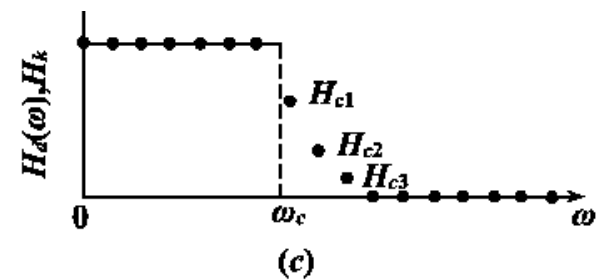
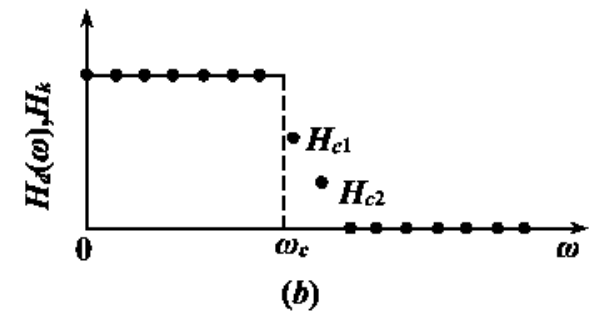
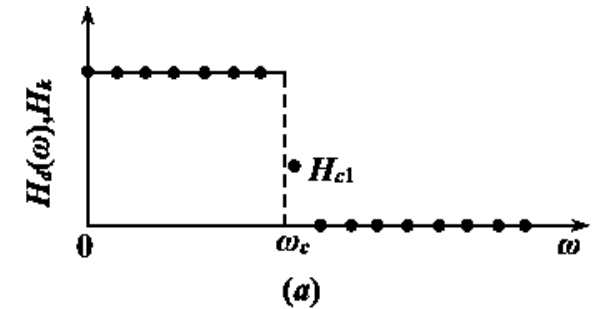


图7-18 加过渡抽样点(过渡点)

(a) 一点过渡带; (b) 二点过渡带; (c) 三点过渡带;

4. 频率采样法设计步骤

- 1) 根据阻带最小衰减 α_s ，确定过渡带采样点数 m ;
- 2) 根据过渡带宽，估计滤波器长度 N ;
- 3) 构造期望的滤波器的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$;

$$H_d(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

- 4) 对 $H_d(e^{j\omega})$ 进行频域等间隔采样（过渡带采样值根据经验，或试验，或优化算法）;
- 5) 对 $H(k)$ 进行 IDFT，得到 $h(n)$ 及其 Z 变换 $H(z)$;
- 6) 检验，若 $H(z)$ 不满足要求，调整（过渡带、临界频率等）



◆ 频率抽样设计法设计线性相位FIR DF的特点

- 1) 设计过程简单、实用，频率响应形状的调整方便且直观；特别是在多通带等频谱比较复杂的滤波器或只有少数个非零取样值的窄带滤波器的设计时具有非常高的计算效率；
- 2) 只能控制阻带最小衰减，但对通带的最大衰减则不易控制，且不能分别控制阻带、通带的衰减；
- 3) 过渡带内的最佳采样值只有借助计算机的辅助计算才能获得；
- 4) 由于所有频率取样点都在 $2\pi/N$ 的整数倍上，使得通带截止频率、阻带截止频率不易精确控制。



【例7.3.1】 利用频率采样法设计线性相位低通滤波器，要求截止频率 $\omega_c = \pi/2$ rad，采样点数 $N=33$ ，选用 $h(n)=h(N-1-n)$ 情况。

解： 用理想低通作为逼近滤波器。按照(7.3.12)式，

$$H_g(k) = H_g(33 - k) = 1, k = 0, 1, 2, \dots, 8$$

$$H_g(k) = 0, \quad k = 9, 10, \dots, 23, 24$$

$$\theta(k) = -\frac{32}{33}\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 32$$

对理想低通幅度特性采样情况如图7.3.2所示。将采样得到的

$$H_d(k) = H_g(k)e^{j\theta(k)}$$

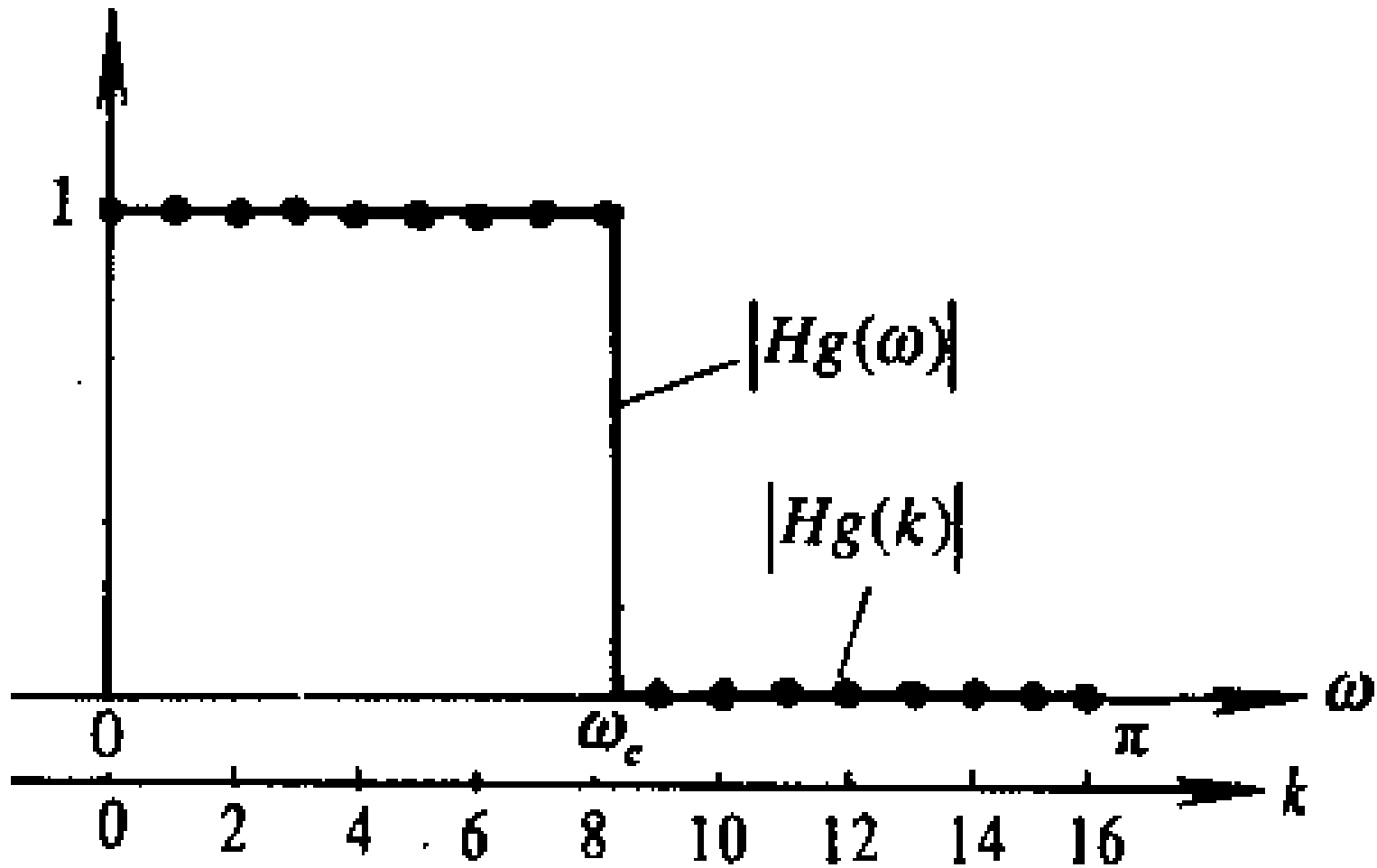
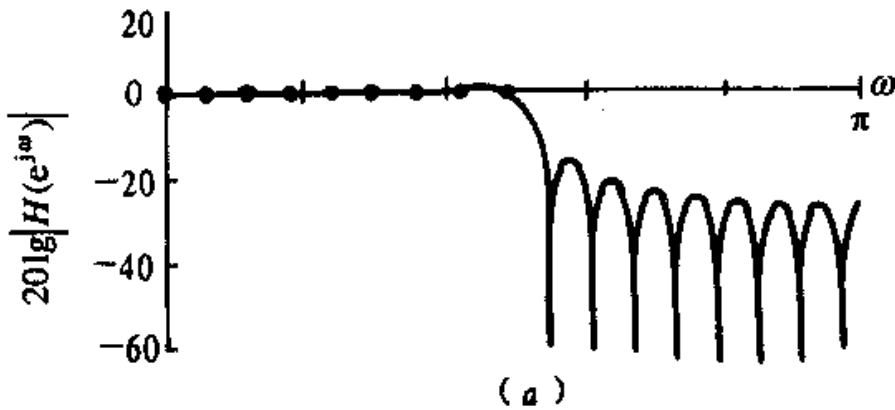
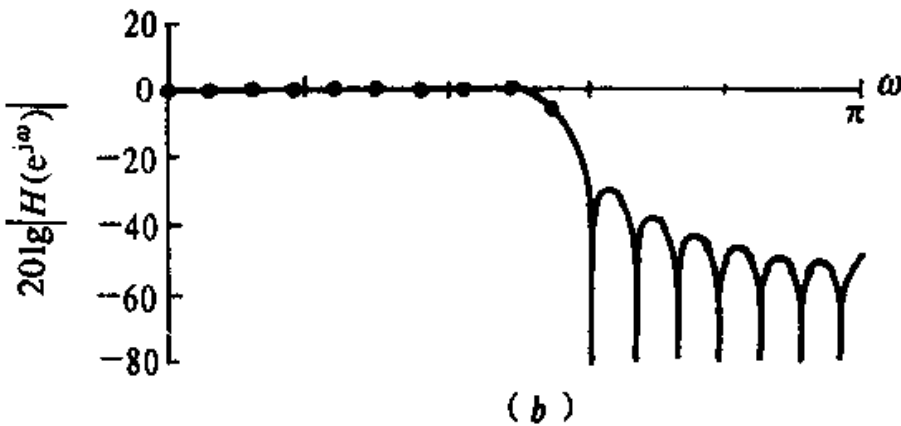


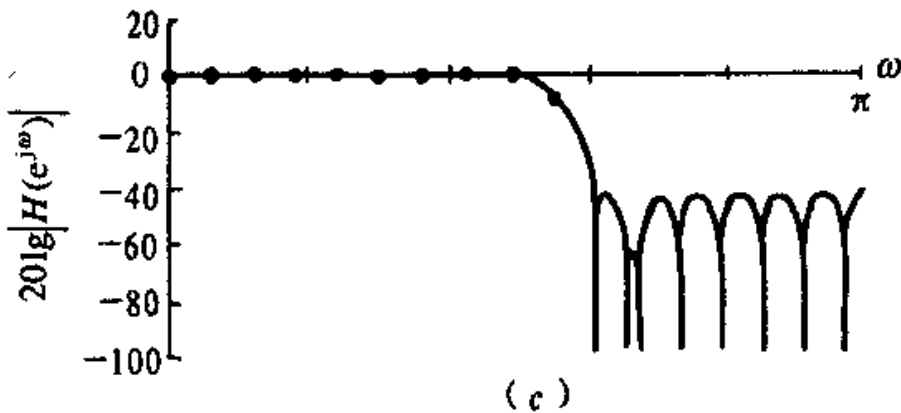
图7.3.2 对理想低通进行采样



无过渡点

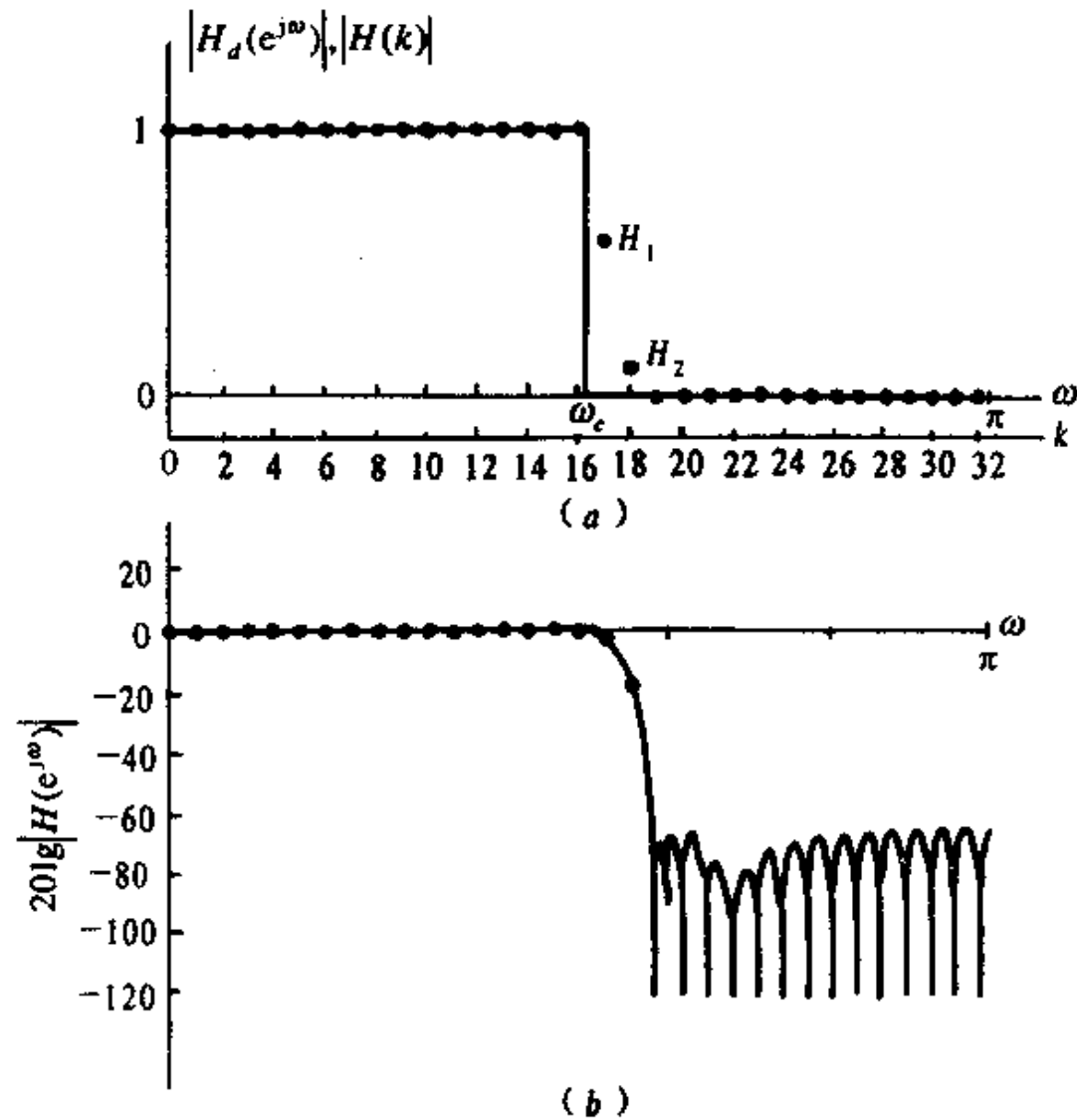


1个过渡点, $H_1=0.5$
过渡带变宽



1个过渡点, $H_1=0.3904$

例7.3.1的幅度特性

例7.3.1($N=65$)有两个过渡点幅度特性



7.4 利用等波纹最佳逼近法设计FIR滤波器

准则：选择FIR滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ ，使得 $E(\omega)$ 的最大绝对值最小

设希望设计的滤波器幅度响应为 $H_d(\omega)$ ，实际逼近的幅度响应为 $H_g(\omega)$ ，加权误差为 $E(\omega)$ ，则：

$$E(\omega) = W(\omega) [H_d(\omega) - H_g(\omega)]$$

$W(\omega)$ 称为误差加权函数，用来控制不同频段的逼近精度， $W(\omega)$ 取值越大的频段，逼近精度越高

把数字频段分为“逼近（或研究）区域”和“无关区域”。逼近区域一般指通带和阻带，而无关区域一般指过渡带

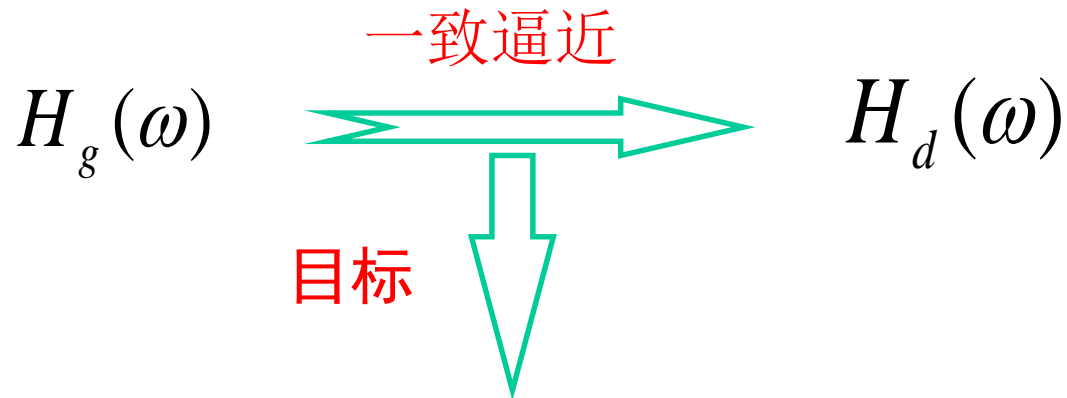
线性相位FIR滤波器有四种形式：

$$h(n) = \pm h(N-1-n) \quad \left\{ \begin{array}{l} N: \text{ odd} \\ N: \text{ even} \end{array} \right.$$

◆ 情况1:

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M a(n) \cos(n\omega), \quad M = (N-1)/2$$

$$a(n) = \begin{cases} h\left(\frac{N-1}{2}\right), & k = 0 \\ 2h\left(\frac{N-1}{2} - k\right), & k = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \end{cases}$$



寻找: $a(0), a(1), \dots, a(M)$

使得误差函数:

的最大值为最小, 并呈现交错。



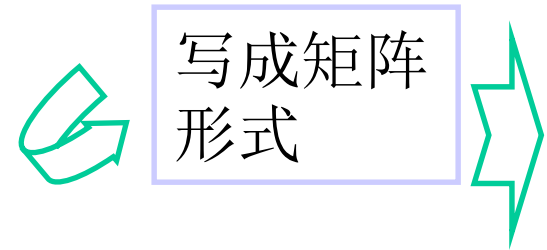
在设计滤波器时，对通带和阻带往往有不同的要求，如通带要求特别平，这是需要牺牲阻带；反之，要想阻带衰减特别大，则需要牺牲通带。实现方法：给以不同的加权。

定义加权函数：

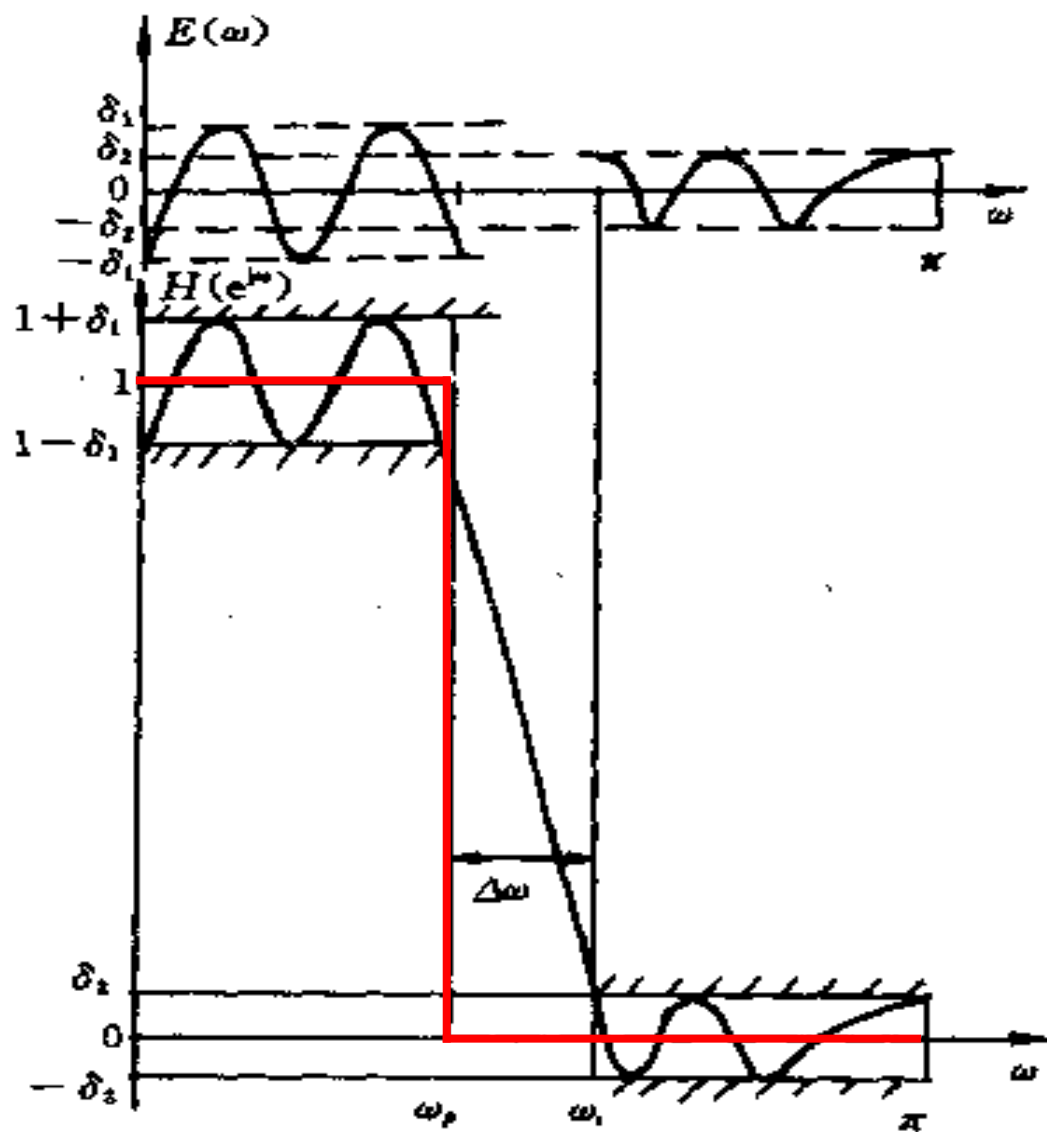
需要离散化



交错定理:



注意，将频率分成了 $M + 2$ 个离散的点。分点在通带和阻带上，过渡带不考虑。目的是取得 $M + 2$ 个极值点。



$$\begin{bmatrix}
 1 & \cos(\omega_0) & \cos(2\omega_0) & \cdots & \cos(M\omega_0) & \frac{1}{W(\omega_0)} \\
 1 & \cos(\omega_1) & \cos(2\omega_1) & \cdots & \cos(M\omega_1) & \frac{-1}{W(\omega_1)} \\
 1 & \cos(\omega_2) & \cos(2\omega_2) & \cdots & \cos(M\omega_2) & \frac{1}{W(\omega_2)} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 1 & \cos(\omega_M) & \cos(2\omega_M) & \cdots & \cos(M\omega_M) & \frac{(-1)^M}{W(\omega_M)} \\
 1 & \cos(\omega_{M+1}) & \cos(2\omega_{M+1}) & \cdots & \cos(M\omega_{M+1}) & \frac{(-1)^{M+1}}{W(\omega_{M+1})}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_0 \\
 a_1 \\
 a_2 \\
 \vdots \\
 a_M \\
 \rho
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 H_d(\omega_0) \\
 H_d(\omega_1) \\
 H_d(\omega_2) \\
 \vdots \\
 H_d(\omega_M) \\
 H_d(\omega_{M+1})
 \end{bmatrix}$$



求解异常困难!!!!

$$a(0), a(1), \cdots, a(M), \rho$$



McClellan. J.H & Parks. T. W 等于70年代初提出用数值分析中的Remez算法，靠一次次的迭代来求解最优的系数 $a(0), a(1), \dots, a(M)$ 及 ρ 。从而达到滤波器设计的目的。

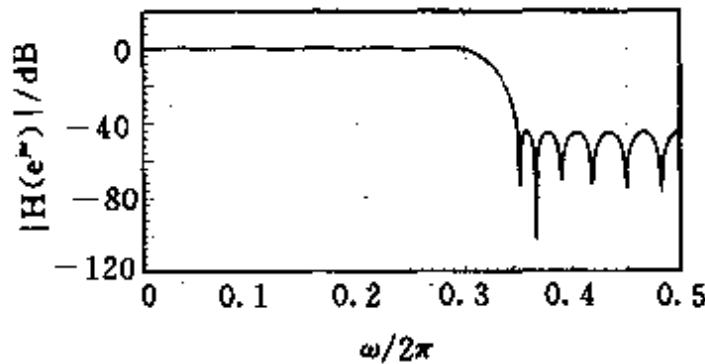
该方法不但可以用来设计低通、高通、带通、带阻等经典滤波器，而且可以用来设计差分滤波器，Hilbert变换器。不但可以给出好的幅频特性、线性相位，而且可以给出较为准确确定边缘频率。

数字信号处理中最有名的算法之一！

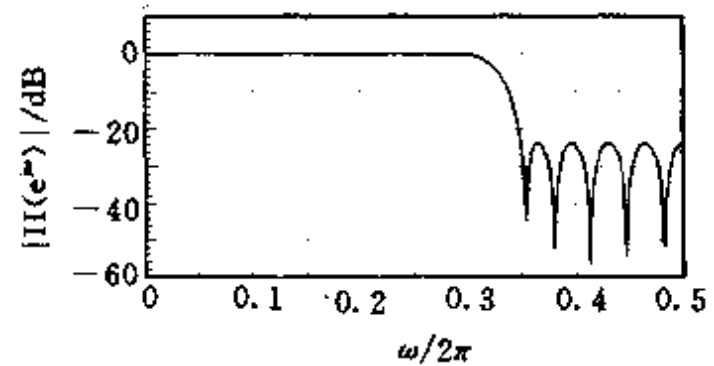
【例1】 设计低通 FIR DF: $\omega_p = 0.6\pi$, $\omega_s = 0.7\pi$

调整通带、阻带的加权及滤波器的长度。

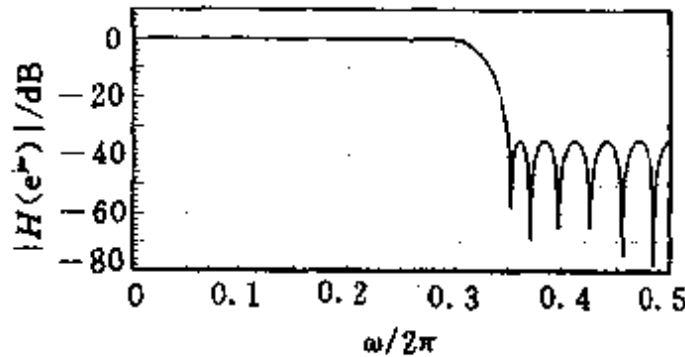
设计结果



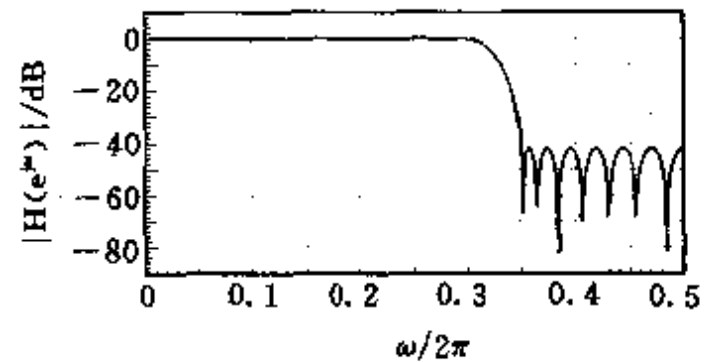
(a)



(b)



(c)



(d)



参数调整对滤波器性能的影响:

序号	输入参数及输出结果					图号 (幅频响应)
	Nfilt	通带加权 wtx(1)	阻带加权 wtx(2)	通带纹波及衰减	阻带纹波及衰减	
1	33	1	10	$\delta_1 = 0.0582$ 0.4916dB	$\delta_2 = 0.00582$ - 44.7dB	8.4.4(a)
2	33	10	1	$\delta_1 = 0.006515$ 0.05641dB	$\delta_2 = 0.06515$ - 23.67(dB)	8.4.4(b)
3	33	1	1	$\delta_1 = 0.0183$ 0.1575dB	$\delta_2 = 0.0183$ - 34.75dB	8.4.4(c)
4	43	1	1	$\delta_1 = 0.00798$ 0.069dB	$\delta_2 = 0.00798$ - 41.96dB	8.4.4(d)



7.5 IIR和FIR数字滤波器的比较

IIR与FIR滤波器各有所长，在实际应用中应该考虑多方面因素加以选择，同时也要兼顾经济方面的要求以及计算工具的实际条件。



比较项目		IIR	FIR
相同性能 (同样的选择性)	阶数	低	高
	相位	非线性	线性
	经济性	成本低	成本高
结构	结构	递归结构	非递归结构
	稳定性	极点必须在单位圆内才稳定	始终稳定
	运算误差	大, 寄生震荡	小
	快速运算	不能应用FFT算法	可用FFT算法
设计	设计公式	具有有效、封闭的设计公式	没有封闭形式的设计公式
	计算量	较小	较大
	计算工具	要求不高	要求较高
适用范围		规格化的、频率特性为分段常数的标准低通、高通、带通、带阻、全通滤波器 对相位要求不敏感 (语音通讯)	可适用于各种幅度特性和相位特性 对相位要求敏感 (图像处理)

作业：3、4、5、17