

博士学位论文

卫星快速姿态机动控制方法研究

**RESEARCH ON ATTITUDE CONTROL
METHODS FOR FAST MANEUVER SATELLITES**

李由

2017 年 9 月

国内图书分类号：V448.2
国际图书分类号：629.78

学校代码：10213
密级：公开

工学博士学位论文

卫星快速姿态机动控制方法研究

博士研究生：李由

导师：孙兆伟教授

申请学位：工学博士

学科：航空宇航科学与技术

所在单位：航天学院

答辩日期：2017年9月

授予学位单位：哈尔滨工业大学

Classified Index: V448.2
U.D.C: 629.78

Dissertation for the Doctoral Degree in Engineering

**RESEARCH ON ATTITUDE CONTROL
METHODS FOR FAST MANEUVER SATELLITES**

Candidate:	Li You
Supervisor:	Prof. Sun Zhaowei
Academic Degree Applied for:	Doctor of Engineering
Speciality:	Aeronautical and Astronautical Science and Technology
Affiliation:	School of Astronautics
Date of Defence:	September, 2017
Degree-Conferring-Institution:	Harbin Institute of Technology

摘 要

随着航天技术的发展，空间任务对于卫星姿态的大角度快速机动能力提出了越来越高的要求。针对当前空间任务的需求，本次研究的主要目的是：以卫星姿态的大角度快速机动为背景，在考虑模型不确定性、外部干扰力矩等扰动与角速度、控制力矩等系统约束的条件下，保证系统具有一定稳态精度的同时，设计姿态控制器实现系统的稳定，针对已有的经典控制器收敛速率方面的缺陷进行改进，在其基础上尽可能的改善系统的收敛速率。本次研究的主要内容包括以下几个部分：

卫星姿态的 PID+控制器设计。基于 PID 控制器中各个控制项的作用，在系统状态逼近平衡点的过程中实时增大比例项以提经典 PID 控制器的升收敛速率，同时在系统状态足够靠近平衡点时再引入积分项以提升系统稳态精度，并避免过早引入积分项带来的系统振荡；引入滑模控制的思想，在控制器中添加角速度叉乘项构造 PID+控制器，在不改变系统稳定性的前提下使得系统状态沿着设计的滑模面运动，通过设计系统的匀速运动过程克服角速度下降过快导致的四元数收敛速率变慢的弊端，同时提升控制力矩的利用效率；证明控制参数与控制力矩范数、姿态角速度范数之间的关系并给出对控制参数的严格约束与宽松约束，同时当控制力矩饱和时成比例缩小比例项、微分项与积分项以解决力矩饱和问题。

卫星姿态的滑模控制器设计。针对经典滑模控制器角速度下降过快导致的四元数收敛速率下降问题，首先基于 Bang-Bang 控制的思想设计了一种先匀速、后匀减速的滑模面，最大限度的利用系统角速度与控制力矩，通过对滑模参数的实时更新将时间最优的开环 Bang-Bang 控制与闭环滑模控制进行结合以提升经典滑模控制器的收敛速率；随后针对经典滑模控制锁定滑模参数的缺陷设计动态滑模面，通过设计滑模参数更新律并对其进行实时放大，从而改善系统终端性能；证明控制参数与角速度范数、控制力矩范数之间的关系，并给出对控制参数的严格约束与宽松约束以确保系统状态不超过其上界。

卫星姿态的有限时间控制器设计。首先针对大角度机动情形设计了一种三段式结构的有限时间滑模面，在状态远离平衡点时维持角速度为匀速以维持系统收敛速率，同时设计有限时间收敛的收敛段滑模面使得系统在平衡点附近具有良好的收敛特性，通过欧拉轴与角速度平行时欧拉轴指向不变的性质消除控制器的奇异性，并通过放缩控制器中的比例项解决控制力矩饱和问题；随后针对小角度机动情形基于 MRP 的导数设计一种有限时间滑模面，避免对于姿态角速度直接进行

求导从而规避了控制器中的奇异性。

卫星姿态机动的路径规划算法与跟踪控制器设计。针对现有的路径规划算法多为数值解、运算量巨大的缺陷，给出了任意初始与终端状态下姿态机动的时间较短路径解析解，将任意的姿态机动问题拆分成为独立的三次单轴欧拉机动，通过求取三次相继转动的总转角最小值得到切换点的解析解，同时基于单轴姿态机动的 Bang-Bang 式时间较短方案给出卫星姿态机动的期望路径；同时针对另一种姿态机动问题的特殊情形，基于轨道控制中“霍曼机动”的思路寻找姿态机动中的“交汇点”，使得系统状态在该“交汇点”处只需进行一次“变轨操作”即可实现姿态机动的目的，从而减少一次系统的加、减速过程以优化系统收敛速率，并优化控制力矩的利用效率；最后设计姿态跟踪控制器以实现真实状态对于期望状态的跟踪。

关键词：姿态控制；大角度快速机动；PID 控制；滑模控制；有限时间控制；路径规划算法

Abstract

As the development of aerospace technology, current space missions demand the maneuver ability of satellites. In order to solve attitude control issue of large angle fast maneuver, the goal of this paper could be concluded as follow: design attitude controllers to improve system convergence rate while maintaining the steady accuracy at a high level for satellite large angle fast maneuver attitude control, and design controllers robust to system inertia matrix uncertainty and disturbance torque under control torque and angular velocity constraint. The main work done in this paper could be concluded as follow:

Design of PID plus controllers. Based on the effect of different terms in PID controller, the integral term is added into the controller when system state approaches its equilibrium point to improve the steady accuracy, and the issue that integral term strengthened state shocking is avoided. Based on the idea of sliding mode control, the product term of angular velocity is added into the controller to ensure system state could converge along the designed sliding mode while the stability of PID controller is maintained. The angular velocity is maintained constantly at the initial stage of sliding mode hence the convergence rate of attitude quaternion could be maintained, and the efficiency of control torque could be improved. The relationship between control parameters and norm of control torque and angular velocity is proved, and the constraints on control parameters are given to ensure that the system state does not exceed its upper bound. The control torque saturation issue is also solved by minifying the PID terms proportionally.

Design of sliding mode controllers. The convergence rate of standard sliding mode descends severely sicne the angular velocity descends severely. First, in order to improve the convergence rate of standard sliding mode control, the open loop control algorithm Bang-Bang control is combined with sliding mode control. A two stage sliding mode is constructed and the system angular velocity is maintained constant and the convergence rate of attitude quaternion could be maintained at a high level. The acceleration of angular velocity at slow down is also locked so that the efficiency of control torque could be improved. Then an update law of sliding mode parameter is designed and the parameter could be enlarged as the system state converges to zero, hence the terminal convergence could be largely improved. The relationship between control parameter and control torque and angular velocity is proved and the constraints on control parameters is given to ensure that the system state does not exceed its upper bound.

Design of finite time controllers. First, a finite time sliding mode with three stage

structure is designed for the large angle maneuver situation. The angular velocity is maintained constant when the system state is far from equilibrium point so that the convergence rate of attitude quaternion could be maintained. The standard sliding mode is modified so that the system could have finite time stability when the system approaches its equilibrium point. The property of Euler Axis is used to avoid the singularity of finite time controller and the control torque saturation issue is solved. Then a finite time controller based on MRP is designed in order to deal with the small angle maneuver situation. The sliding mode is designed based on the derivative of MRP instead of angular velocity so that the singularity issue is solved.

Design of trajectory planning algorithm and attitude tracking control algorithm. The solution of current trajectory planning algorithm for satellite attitude maneuver is numerical and the computation is huge for on-board computers. In order to simplify the computation, a trajectory planning algorithm with analytical solution for attitude maneuver with any initial state and target state. The attitude maneuver is detached into three independent single axis maneuvers and the time efficient trajectory is derived based on Bang-Bang control. The total maneuver angle is optimized and the switching point is derived. Then a special situation similar as Horman maneuver is considered and the “rendezvous point” is derived. The accelerate and decelerate stage are reduced based on this method and the efficiency of control torque and system convergence rate is improved. Then an attitude tracking controller is designed to ensure that the system state could converge along the designed trajectory.

Keywords: attitude control, large angle fast maneuver, PID control, sliding mode control, finite time control, trajectory planning algorithm

目 录

摘 要	I
Abstract.....	III
目 录	V
Contents.....	VIII
第 1 章 绪 论	1
1.1 课题背景及研究的目的和意义	1
1.1.1 课题来源	1
1.1.2 研究的目的和意义	1
1.2 国内外相关研究现状	3
1.2.1 PID 控制	3
1.2.2 滑模控制	5
1.2.3 有限时间控制	6
1.2.4 路径规划算法	8
1.2.5 快速机动卫星发展现状	9
1.3 本文主要研究内容	10
第 2 章 基础理论	13
2.1 引言	13
2.2 卫星姿态数学模型	13
2.2.1 姿态动力学模型	13
2.2.2 姿态运动学模型	14
2.2.3 误差姿态模型	17
2.3 相关控制理论基础	19
2.3.1 稳定性理论	19
2.3.2 滑模控制	20
2.3.3 有限时间控制	21
2.4 本章小结	22
第 3 章 基于 PID 控制的姿态控制器设计	23
3.1 引言	23
3.2 姿态镇定 PID+控制器	24
3.2.1 控制器稳定性证明	26

3.2.2 控制器性能分析	28
3.3 姿态跟踪 PID+控制器	32
3.3.1 控制器稳定性证明	34
3.3.2 控制器性能分析	39
3.4 仿真与分析	43
3.4.1 姿态镇定控制器仿真	43
3.4.2 姿态跟踪控制器仿真	48
3.5 本章小结	52
第 4 章 基于滑模控制的姿态控制器设计	53
4.1 引言	53
4.2 基于 Bang-Bang 控制理论的滑模控制器	53
4.2.1 姿态镇定控制器	54
4.2.2 姿态跟踪控制器	61
4.3 基于动态滑模的滑模控制器	66
4.3.1 姿态镇定控制器	66
4.3.2 姿态跟踪控制器	71
4.4 仿真与分析	76
4.4.1 姿态镇定控制器仿真	76
4.4.2 姿态跟踪控制器仿真	83
4.5 本章小结	89
第 5 章 基于有限时间控制的姿态控制器设计	90
5.1 引言	90
5.2 基于欧拉轴的有限时间控制器	91
5.2.1 姿态镇定控制器	91
5.2.2 姿态跟踪控制器	97
5.3 基于 MRP 的有限时间控制器	102
5.3.1 姿态镇定控制器	102
5.3.2 姿态跟踪控制器	105
5.4 仿真与分析	108
5.4.1 基于欧拉轴的有限时间控制器仿真	108
5.4.2 基于 MRP 的有限时间控制器仿真	114
5.5 本章小结	120
第 6 章 基于路径规划算法的姿态控制器设计	122

6.1 引言	122
6.2 路径规划算法	122
6.2.1 时间较优的路径规划	122
6.2.2 霍曼机动式的路径规划	128
6.3 姿态跟踪控制器设计	130
6.4 仿真与分析	132
6.4.1 姿态镇定控制器仿真	132
6.4.2 姿态跟踪控制器仿真	135
6.5 各控制算法横向对比	144
6.6 本章小结	147
结 论	148
参考文献	151
攻读博士学位期间发表的论文及其他成果	161
哈尔滨工业大学学位论文原创性声明及使用授权说明	162
致 谢	163
个人简历	164

Contents

Abstract (In Chinese).....	I
Abstract (In English)	III
Chapter 1 Introduction.....	1
1.1 Back ground and significance of the dissertation	1
1.1.1 Source of the dissertation	1
1.1.2 Purpose and significance of the research.....	1
1.2 Research status of satellite attitude control	3
1.2.1 PID control	3
1.2.2 Sliding mode control	5
1.2.3 Finite time control	6
1.2.4 Trajectory planning algorithm	8
1.2.5 Research status of current fast maneuver satellites	9
1.3 Main research contents of the dissertation	10
Chapter 2 Basic theory	13
2.1 Introduction	13
2.2 Mathematical models.....	13
2.2.1 Satellite dynamic model	13
2.2.2 Satellite kinetic model	14
2.2.3 Error state model	17
2.3 Relevant control theory	19
2.3.1 Stability theory	19
2.3.2 Sliding mode control	20
2.3.3 Finite time control	21
2.4 Brief summary	22
Chapter 3 Attitude controller design based on PID control.....	23
3.1 Introduction	23
3.2 PID+ attitude stabilization controller	24
3.2.1 Stability analysis.....	26
3.2.2 Controller performance analysis.....	28
3.3 PID+ attitude tracking controller.....	32
3.3.1 Stability analysis.....	34
3.3.2 Controller performance analysis.....	39
3.4 Simulation and its analysis	43
3.4.1 Simulation of attitude stabilization controller	43

3.4.2 Simulation of attitude tracking controller.....	48
3.5 Brief summary	52
Chapter 4 Attitude controller design based on sliding mode control	53
4.1 Introduction	53
4.2 Sliding mode controller based on Bang-Bang control.....	53
4.2.1 Attitude stabilization controller	54
4.2.2 Attitude tracking controller.....	61
4.3 Sliding mode controller based on dynamic sliding mode.....	66
4.3.1 Attitude stabilization controller	66
4.3.2 Attitude tracking controller.....	71
4.4 Simulation and its analysis	76
4.4.1 Simulation of attitude stabilization controller	76
4.4.2 Simulation of attitude tracking controller.....	83
4.5 Brief summary	89
Chapter 5 Attitude controller design based on finite time control.....	90
5.1 Introduction	90
5.2 Finite time controller based on Euler Axis	91
5.2.1 Attitude stabilization controller	91
5.2.2 Attitude tracking controller.....	97
5.3 Finite time controller based on MRP.....	102
5.3.1 Attitude stabilization controller	102
5.3.2 Attitude tracking controller.....	105
5.4 Simulation and its analysis	108
5.4.1 Simulation of controller based on Euler Axis.....	108
5.4.2 Simulation of controller based on MRP	114
5.5 Brief summary	120
Chapter 6 Attitude controller design based on trajectory planning algorithm.....	122
6.1 Introduction	122
6.2 Trajectory planning algorithm	122
6.2.1 Time efficient trajectory planning algorithm.....	122
6.2.2 Hormann maneuvering like trajectory planning algorithm	128
6.3 Design of attitude tracking controller.....	130
6.4 Simulation and its analysis	132
6.4.1 Simulation of attitude stabilization controller	132
6.4.2 Simulation of attitude tracking controller.....	135
6.5 Contrast of proposed controllers	144
6.6 Brief summary	147
Conclusions	148

References	151
Papers published in the period of PH.D. education.....	161
Statement of copyright and Letter of authorization.....	162
Acknowledgements	163
Resume	164

第1章 绪论

1.1 课题背景及研究的目的和意义

1.1.1 课题来源

本课题来源于国家 863 计划，以卫星姿态的大角度快速机动为研究对象，旨在解决卫星姿态的大角度快速机动与稳定的控制问题。

1.1.2 研究的目的和意义

现代航天任务对于卫星姿态的大角度快速机动能力提出了越来越高的要求，如持续对地凝视、推扫成像、单线阵相机成像等等空间任务都要求卫星具有较强的大角度快速机动能力^[1,2]：对地持续凝视任务需要卫星在轨运行过程中实现相机、天线等载荷始终指向地表某点，因此卫星需要在其运行过程中持续进行姿态机动，由于当前高精度成像卫星多为低轨道卫星，在轨运行的线速度较快，因此留给姿态机动的窗口时间通常较短，这就需要卫星拥有较强的姿态快速机动能力（即卫星能够在较短时间内进行大角度姿态机动）以实现持续对地凝视的目的；推扫成像任务需要卫星持续进行姿态机动以实现条带状目标进行成像，而当成像目标较为分散时所需成像的条带也会较宽，这就需要卫星能够在有限的姿态机动窗口期内实现大幅度的姿态机动；而对于单线阵相机成像任务，由于相机需要在较短的窗口期内对成像目标进行多次、多角度拍照以对成像图片进行“拼接”，从而得到目标的成像结果，因此卫星姿态机动能力必须满足成像任务的要求。除以上这些较为新颖的空间任务之外，全球通信任务需要卫星编队实现实时的姿态协同以满足实时数据传输的需求，空间监测与国土资源观察任务则需要卫星能够针对各类突发事件实现实时的在轨姿态机动以满足对于不同地域的观测，军事侦察任务则需要针对各类突发的地区热点事件以及各类灵活的军事目标进行实时追踪，上述这些任务同样要求卫星有较强的姿态机动能力。正因为当前空间任务的迫切需求，卫星的大角速度快速机动问题已经成为国内外卫星姿态控制领域新的研究热点。

受到技术、硬件、任务需求等多方面的限制，以往的空间任务对于卫星姿态的快速机动能力并没有提出太高的要求，卫星的姿态控制器设计通常以稳定性作为首要目标，同时更加侧重于稳态精度与系统鲁棒性的提升，这就使得在控制器的设计中，系统的控制力矩与控制力往往不能够得到最大程度的利用，从而系统

在收敛速率方面存在着一定的缺陷。由于当前任务对于卫星姿态机动能力的新要求，若在快速姿态机动卫星中仍然使用传统的经典控制器，很有可能出现卫星无法完成空间任务的情况，因此对已有的姿态控制器进行改进以提升系统收敛速率已是势在必行。本次研究将对多种经典卫星姿态控制器进行改进，设计新的姿态控制器从而达到提升系统收敛速率的目的。同时传统的空间任务中往往也不需要卫星进行大角度的姿态机动，从而在小角度前提下可以对系统进行近似线性化处理，这就为控制器的设计与分析带来了极大便利。然而在当前空间任务的要求下，一些传统的控制器设计方法存在着失效的可能性。综上所述，针对当前的空间任务需求，有必要就卫星姿态大角度快速机动的控制问题重新展开讨论。

不同于卫星轨道控制燃料有限的约束条件，卫星姿态控制领域中采用的控制执行机构多为飞轮、力矩陀螺等角动量交换装置，这类角动量交换机构往往能够使用太阳能电池阵进行充电，从而其在能量方面没有太多约束，但约束多存在于控制力矩的幅值方面，因此在卫星姿态控制领域往往并没有时间-燃料的优化目标，其优化对象通常是单纯的收敛时间。但是值得注意的是为了实现提升收敛速率的目的，付出的代价往往是较大的控制力矩以及较快的姿态角速度，这二者均会对卫星系统造成一定的不良影响：1.由于卫星控制执行机构所能提供的控制力矩有限，当所需要的控制力矩超过系统上界时便会造成控制力矩饱和问题，严重时会导致控制器稳定性失效；2.一般来说目前卫星姿态确定系统最常用的姿态确定算法是扩展卡尔曼滤波算法(Extend Kalman Filter, EKF)，该算法的基本原理是基于泰勒展开对卫星的姿态运动学模型进行近似线性化处理，再使用线性卡尔曼滤波对系统进行姿态确定，当系统姿态角速度比较小时该方法误差较小，姿态确定精度较高，而当系统姿态角速度较大时泰勒展开中略去的高阶项便不再是无穷小量，从而带来较大的舍入误差，进而导致系统姿态确定精度急剧下降^[3-8]；3.卫星姿态确定系统所使用的星敏感器对卫星姿态角速度同样有一定的要求，当系统角速度超过其阈值时星敏感器会出现无法正常工作的情況，例如卫星 Proba 2 所携带的星敏感器当角速度超过 $7^{\circ}/s$ 时便无法成像^[9]；4.卫星往往携带有太阳能电池板等挠性附件，当系统姿态角速度较大时挠性附件会产生较大的形变，从而对系统造成一些不良影响^[10,11]。因此在处理卫星的大角度快速机动问题时需要讨论控制力矩以及姿态角速度方面的约束。

同时注意到在实际工程中，卫星转动惯量矩阵、挠性附件特性、干扰力矩等等系统模型参数不可能精确已知，因此在设计姿态控制器时需要对这些扰动项进行处理使得系统具有一定的鲁棒性。

总的来说，本次研究的目的可以概括为：在维持一定稳态精度的前提下，同

时考虑控制力矩与姿态角速度方面的约束，设计对于模型不确定性、干扰力矩等扰动具有鲁棒性的姿态控制器以实现系统状态的稳定，针对已有的经典控制器收敛速率方面的缺陷进行改进，在其基础上尽可能的改善系统的收敛速率。

1.2 国内外相关研究现状

在卫星姿态控制领域，常用的姿态控制算法有 PID(Proportional, Integral, Differential, PID)控制、滑模控制、有限时间控制等等，上述几种控制算法较为成熟并已得到了广泛而深入的研究。除了上述几种闭环控制算法，近些年国内外学者提出了另一种控制器设计的思路：即先规划期望路径，随后设计跟踪控制器使得系统状态沿着设计好的路径运动至平衡点。上述几种控制方法各有优劣，本次研究将基于这几类控制方法设计控制器。本节首先逐一介绍这几类方法的特点以及国内外研究现状，随后就快速机动卫星的国内外发展现状进行简要介绍。

1.2.1 PID 控制

PID 控制是一种较为成熟、经典且得到了广泛应用的控制算法，它具有结构简单、物理意义清晰的优势。在卫星姿态控制领域，应用最为广泛的是 PD 控制。Wie^[12-15]在他早期的研究中针对卫星等飞行器与航天器的姿态控制问题设计了几种典型的 PD 控制器，在他的文章中以角速度测量作为微分项反馈，以欧拉角、姿态四元数、罗德里格参数等作为比例项反馈给出了 PD 控制器的基础结构，并给出了几类经典的 Lyapunov 函数证明这些控制器的稳定性。在他的研究中证明了对于卫星姿态控制系统，任意系数的负反馈 PD 控制器均能够镇定系统，这一性质能够有效地帮助解决控制器设计中的控制力矩饱和问题。但值得注意的是，在他的研究中 Lyapunov 函数通常是严格正定的，这样做的优势是避免了对于控制参数约束的讨论，基于该 Lyapunov 函数得到的控制器结构较为简单，同时控制参数的选取具有任意性，但弊端则是很大程度的限制了控制器的结构，对于一些结构较为复杂的非线性 PD 控制器的稳定性证明显得无能为力。Forbes^[16]针对刚体卫星的姿态控制问题设计了一种无源 PD 控制器，在这篇文章中方向余弦矩阵的对角线元素被视为比例项输入到控制器当中，同时对方向余弦矩阵、向量叉乘运算的一些性质进行了证明，这对于后续研究具有一定意义，通过正交性原理与 Lyapunov 理论证明控制器的稳定性，最后证明了负反馈 PD 控制器作用下的卫星姿态系统是无源的。由于 PD 控制的全局稳定性，该控制算法不论是在理论研究中或是实际工程中均是一种最为成熟、应用最为广泛的控制算法。但值得注意的是 PD 控制器对于扰动的抑制能力不足，存在着一定的稳态误差。

PID 控制器相比较于 PD 控制器增加了积分项，该项的引入能够增强系统对于

干扰的抑制并改善系统的稳态误差，但会增强系统状态的振荡，同时系统稳定性的证明也会变得更加复杂。在卫星姿态控制领域，不同于 PD 控制器的任意负反馈的全局稳定性，PID 控制器往往对于控制参数的选取有一定的约束条件，同时 Lyapunov 函数的导数中往往含有积分项，从而使得系统稳定性证明具有一定难度。靳尔东^[17-21]针对挠性卫星分别设计了 PID 控制器与 PI 控制器，针对 PID 控制器在 Lyapunov 函数中引入角速度与四元数的交叉项，同时对积分项的结构进行改进，通过对姿态模型进行积分给出了几种非线性 PID 控制器，从而积分项能够在 Lyapunov 函数的导数中得以消除，最后通过矩阵不等式保证稳定性要求，通过选取合适的控制参数以保证 V 函数的正定性及其导数的负定性，但值得注意的是通过该矩阵不等式得到的控制器参数往往具有一定的“冗余度”，即为了保证系统的严格稳定性，控制器参数的选取考虑的均为最极端的情形，因此得到的控制参数约束均为严格约束；而对于 PI 控制器，靳则通过小扰动理论回避了对于复杂的 Lyapunov 函数的讨论，证明了 PI 控制器的稳定性，但值得注意的是在该文章中得到的稳定性并非全局稳定性，而是通过控制参数确定某收敛域，当系统状态处于该收敛域内时能够收敛至平衡点，注意到实际应用中卫星往往只需要在某些特定范围内进行机动，因此只需选取合适的控制参数确保收敛域要求以及稳定性约束便可以满足实际应用的需求。在靳的文章中，积分项往往并不是单纯的对四元数、欧拉角、MRP 等姿态参数直接进行积分，而往往是通过一定的特殊设计得到的非线性积分项，从而实现简化 Lyapunov 函数及其导数的目的，该方法中积分项虽然失去了结构简明、物理意义清晰的优势，但当合理构建积分项时能够大幅度简化稳定性分析与系统性能分析。Kamesh^[22]针对 PID 控制器稳定性证明中积分项难以处理的缺陷对 Lyapunov 函数进行了改进，并实现了稳定性证明的简化，同时针对柔性卫星中挠性模态难以测量的弊端设计了状态观测器，通过估计挠性模态状态实现全状态反馈并设计姿态控制器。Clarke^[23]针对卫星姿态跟踪控制问题设计了 PID 控制器，在该文章中姿态误差系统被视为非自治系统，同时作者给出了针对非自治系统的严格稳定性证明过程。Vadali^[24]与 Chaturvedi^[25]针对 PID 控制器稳定性的证明设计了两种较为复杂的 Lyapunov 函数，但在稳定性证明过程中需要对系统做出一定的假设。总的来说，PID 控制器相比较于 PD 控制器能够提升系统的稳态精度，但稳定性证明较为复杂，如何合理地构造积分项并对系统进行稳定性分析是设计 PID 控制器的关键。

PID 控制作为一种成熟的控制算法并不仅仅在卫星姿态控制领域得到了重视与研究，同时随着控制技术的研究与发展，国内外众多学者针对模糊 PID、非线性 PID 等新型的 PID 控制器进行了一定的研究。Su^[26]针对四旋翼飞行器的姿态控制

设计了非线性 PID 控制器，在这篇文章中系统状态经过非线性变换之后才输入到控制器当中，从而系统的稳定性得到了增强。Li^[27]基于遗传算法对 PID 控制器的参数进行了优化，在该文章中指出了控制器各项对于系统性能的影响，并给出针对收敛时间与稳态精度的参数优化方案。Tatsuya^[28]与 Zhang^[29]针对直升机的姿态控制设计了模糊 PID 控制器，考虑到直升机飞行时受到的干扰远多于卫星，作者对经典 PID 控制器进行了改进以增强其对于各类扰动的鲁棒性。

总的来说，PID 控制器是一种成熟、经典的控制算法，鲁棒性强、不需系统精确参数是 PID 控制器的优势，但其在收敛速率、稳态精度方面存在着一定的弊端。本次研究将在已有研究的基础上，对经典 PID 控制器的结构进行一定改进，针对姿态快速机动的背景，对如何实现系统收敛速率的提升并维持较高的稳态精度展开讨论。

1.2.2 滑模控制

滑模控制同样是一种研究与应用较为成熟的现代控制算法，其基本原理是首先设计出期望的滑模面，使得系统状态在该滑模面上具有良好的性能，如收敛速率快、鲁棒性强、稳态精度高等等，随后设计控制器使得系统状态从状态空间的任意位置出发均能够运动至设计好的滑模面上，并沿着滑模面运动至系统平衡点。由滑模控制器的设计方式可以看到滑模控制器具有设计思路清晰、易于分析系统性能的优势，同时在设计出优良滑模面之后系统往往能够具有较强的鲁棒性以及较高的稳态精度。在卫星姿态系统中，角速度-四元数系统是典型的级联系统 (Cascade system)，控制力矩的直接作用对象是姿态角速度而不是姿态四元数，而姿态四元数的变化率则是由姿态角速度直接决定的，因此直接找到控制力矩与姿态四元数的关系较为困难，这就为姿态控制器的设计带来了极大的挑战。而基于滑模控制的思想，在卫星姿态控制器的设计中可以先规划出期望的角速度轨迹，使得姿态四元数沿着该轨迹能够快速、平稳地收敛至系统平衡点，随后设计姿态控制器使得姿态角速度沿着规划好的轨迹运动便可以实现系统状态的收敛。该方法在卫星姿态控制领域已经得到了大量的研究与应用。

Lappas 和 Verbin^[30-34]针对卫星姿态控制问题对姿态角速度轨迹进行了规划，并设计了角速度的“刹车线”以提升系统的收敛速率，针对卫星控制系统不同的执行机构配置设计了姿态控制器。Veibin 的研究侧重点主要在于提升系统收敛速率，同时将四元数的收敛过程分为匀速段与减速段，在匀速段上卫星以匀速运动同时在减速段上以特定的轨迹进行减速，从而系统对角速度与控制力矩的利用效率均得到了提升，但美中不足的是 Verbin 的研究并没有过多考虑系统角速度上限与控制力矩上限对于控制器的约束，同时也缺少对于系统转动惯量不确定性与干

扰力矩的讨论。Xiao^[35-41]与 Hu^[42-52]同样对卫星姿态控制的滑模面设计问题进行了大量讨论，他们对经典滑模面进行了改进以增强系统的鲁棒性，同时针对角速度缺失、四元数缺失等信息缺失情形进行了讨论，将状态观测器引入滑模面中并形成全状态反馈，并针对执行机构故障的情形设计故障诊断控制器。总的来说，Xiao 与 Hu 的研究侧重点在于系统鲁棒性的增强而不是系统收敛速率的提升。Jovan^[53]针对卫星姿态镇定与姿态跟踪控制问题设计了滑模控制器，不同于其他滑模控制器固定滑模参数的做法，该文章对滑模参数进行实时更新从而滑模面能够具有更加优良的性能，但值得注意的是该动态滑模面的主要目的是提升系统对于转动惯量不确定性、干扰力矩的鲁棒性，同时解决控制力矩的饱和问题，但忽视了系统收敛速率方面的提升。Wu^[54-57]同样针对经典滑模控制器进行了大量改进，他的研究对系统模型的不确定性进行了大量讨论，给出了一些典型的系统误差模型并针对不同的误差类型进行讨论并设计鲁棒控制器，同时针对滑模控制中存在的抖振问题（由于扰动的存在系统状态不断穿越系统滑模面而不能够稳定的停留在滑模面上）进行了讨论，分析了抖振问题产生的原因并指出控制器中的符号函数项是加剧抖振的主要原因，通过引入双曲正切函数等连续函数代替符号函数项缓解抖振现象，并引入边界层函数讨论系统在滑模面附近的运动状态。Lo^[58]针对滑模控制器中的符号函数项进行了改进，提出了一种光滑控制器并对 Lyapunov 函数进行了改进以证明该控制器的稳定性。Xia^[59]对于系统转动惯量的不确定性进行了讨论并设计了自适应滑模控制器，在他的研究中 Lyapunov 函数加入了误差状态项并基于此设计了自适应控制器。为提升系统的稳态精度，国内外众多学者针对积分滑模等高阶滑模进行了讨论与研究，Leavant^[60,61]、Muhammad^[62]、Chaouki^[63]、Ernesto^[64]、Li^[65]、Yoo^[66]、Sun^[67]、Shi^[68]、Zhang^[69]等人针对卫星姿态控制、柔性机械臂控制、飞行器姿态控制等问题设计了积分滑模面，并基于此设计了高阶滑模控制器以提升系统稳态精度。

总的来说，与 PID 控制相类似，滑模控制同样是一种较为经典的控制方法，在理论研究与实际工程领域均得到了深入的研究与应用，但经典的滑模控制器在收敛速率方面存在着较为明显的不足，往往不能够满足快速机动卫星的收敛速率要求。本次研究将在已有的研究基础上针对经典滑模控制器收敛速率方面的缺陷进行改进，针对卫星姿态快速机动的背景设计滑模控制器并尽可能的提升系统的收敛速率。

1.2.3 有限时间控制

由于 PID 控制、经典滑模控制作用下的系统往往是一致渐近稳定的，这就使得系统状态在无穷远处才能够收敛至系统平衡点。为改善系统在平衡点附近的收

敛速率, 有限时间控制得到了国内外研究者的关注。有限时间控制器是一种能够在有限时间内使得系统状态到达平衡点的控制器, 其平衡点附近的收敛速率相比较于指数收敛的经典滑模控制器有了极大提升, 但收敛速率提升的代价则是系统鲁棒性的下降, 控制器的设计过程中往往需要对系统参数精确已知, 同时若控制器设计不当还会导致系统状态负数幂次的出现, 从而导致系统状态逼近平衡点时出现奇异性问题。

Liang^[70-75]与 Wang^[76-79]针对卫星编队的姿态控制问题设计了有限时间控制器, 在他们的研究中对卫星姿态角速度进行了合理规划, 使得系统具有有限时间稳定性的同时解决了控制器的奇异性问题。Wu^[80-85]针对单星姿态控制问题设计了鲁棒有限时间滑模面, 将系统模型转变成拉格朗日系统并给出了有限时间收敛滑模面, 同时通过符号函数项、自适应控制等手段处理转动惯量不确定性问题, 并讨论了控制力矩饱和问题。Ryan^[86]与 Ding^[87]针对卫星姿态控制设计了快速终端滑模控制器, 解决指数收敛速率较慢缺陷的同时规避了控制器中出现奇异性项, 但控制器需要系统转动惯量的精确值因此鲁棒性较差。Xiao^[88-90]针对卫星姿态控制器中的执行机构故障情形设计了有限时间控制器, 通过状态观测器、故障诊断矩阵、误差估计等手段将控制器故障视为扰动, 设计了鲁棒有限时间控制器。Pyare^[91]同样针对卫星姿态控制问题设计了高阶有限时间滑模面, 并着重讨论了滑模控制中的抖振问题。Amato^[92]针对一般的线性系统给出了有限时间滑模面的一般形式, 并着重解决了离散系统的控制问题。Lee^[93]针对太阳光压扰动作用下的卫星姿态系统设计有限时间控制器, 对外部干扰力矩进行建模并对其进行抑制, 但美中不足的是缺少对于系统转动惯量不确定性的讨论。

除了在卫星姿态控制领域, 有限时间控制同样在其他领域得到了广泛的讨论与研究。Yu^[94]和 Korayem^[95]针对柔性机械臂与多刚体系统的控制问题设计了有限时间滑模面, 对复杂系统的动力学模型进行处理, 使其具有拉格朗日系统的动力学模型特性, 并对有限时间控制器进行了改进以避免奇异项的出现。Lee^[96]基于 Lie 群理论对卫星的轨道控制进行了讨论。Rotondo^[97]基于线性矩阵不等式(Linear Matrix Inequality, LMI)针对离散线性系统设计有限时间控制器, 通过 LMI 得到控制器的具体形式, 并讨论干扰力矩、模型不确定性等扰动以设计鲁棒控制器。Li^[98]、Chen^[99]、Jiang^[100]等学者针对一般的一阶、二阶系统讨论了有限时间控制器的设计, 研究结果能够广泛适用于大多数线性低阶系统, 但对于大多数非线性系统与高阶系统则无法适用。

总的来说, 有限时间控制相比较于经典的滑模控制在终端收敛速率方面有了较大的提升, 但对于控制器的设计要求也更高, 需要对控制器奇异性、系统鲁棒

性等问题进行综合考量。本次研究将在已有研究的基础上以卫星快速机动为背景，设计有限时间滑模面并设计姿态控制器以实现系统状态在有限时间内到达所设计的滑模面，同时解决有限时间控制中的奇异性问题。

1.2.4 路径规划算法

除了上述 PID 控制、滑模控制、有限时间控制等闭环控制方法以外，卫星姿态控制领域中还有另一种控制器设计思路：首先规划出姿态机动的最优路径（时间最优或时间-燃料最优），随后设计姿态控制器使得系统状态沿着规划好的路径运动至平衡点。这种方法的优势在于设计角速度轨线时可以不考虑模型不确定、干扰力矩等扰动，只需考虑系统的优化对象如收敛时间、燃料-时间等，从而得到能够最大限度发挥系统性能的状态轨迹，随后在设计控制器实现系统状态沿着期望轨线运动时再考虑外部扰动等因素即可。由于卫星姿态系统为典型的级联系统，因此在设计最优路径时可以首先将姿态角速度轨迹作为优化对象，通常锁定控制力矩至系统幅值以得到类似 Bang-Bang 控制形式的运动轨迹，从而得到时间较优的卫星姿态运动轨迹。

由于卫星姿态动力学模型与姿态运动学模型均为难于处理的非线性系统，目前对于卫星姿态机动的轨迹优化思路通常有两种：第一种方法将非线性系统近似线性化，通过多项式函数等线性函数逼近姿态运动模型，再通过优化线性化之后的系统得到角速度轨迹；第二种方法则是直接对非线性系统使用高斯伪谱法等非线性方法进行优化，通过求解带有边界约束条件的非线性优化问题得到角速度轨迹的最优解。Bai^[101]通过引入协态变量并运用拉格朗日算子，得到两种控制力矩假设下的卫星姿态机动时间最优解，他的研究指出卫星姿态机动的时间最优解应当在控制力矩始终处于幅值的条件下得到，同时他证明了在控制力矩满足球面假设（即控制力矩幅值有上界，但方向任意）的条件下，绕欧拉轴的机动方式是时间最优的。Li 和 Baimum^[102]指出卫星姿态机动中绕欧拉轴的机动即使不是时间最优解，也应当是时间较优解，并通过近似线性化的方法寻找姿态机动路径中欧拉机动附近的机动路径，从而得到时间较优的轨迹。Li^[103,104]对卫星姿态系统进行线性化，将轨迹优化问题转化为多个区间上的两点边界值问题，并基于 Pontryagin 原理得到近似解。Scrivener^[105]等学者通过 Hermite 插值多项式逼近姿态系统模型，将轨迹规划问题转化为非线性优化求解问题，并通过拟牛顿法得到了姿态机动的时间最优解。同样是采用近似逼近的方法，Geogre^[106]等学者采用高斯伪谱法对系统非线性模型直接进行处理，并采用逆动力学手段进行求解，同时考虑到时间最优轨迹是在控制力矩锁定系统幅值的情形下得到的，Geogre 指出可以将轨迹优化问题转化为控制力矩切换时间的选取问题，通过计算系统控制器“开关机”时间便

可以得到轨迹优化结果。

这种先规划、再跟踪的控制器设计思路不仅在卫星姿态控制领域得到应用，在柔性机械臂控制方面同样得到了应用。Meier^[107]、Bryson^[108]、Joseph^[109]、Singh^[110,111]等学者针对柔性机械臂的控制问题给出了燃料-时间最优条件下的状态轨迹，同时将系统优化问题转化为控制器“开关机”点的选取问题，通过近似线性化的手段得到时间最优解。

总的来说，卫星姿态控制领域现有的路径规划算法所得到的多为数值解，应用时需要星载计算机对其进行实时求解，同时所需要的运算量也较为巨大，考虑到当前星载计算机运算能力较为有限的现状，本次研究将着重讨论计算时间较短的机动路径解析解的求取方法，并通过该路径实现卫星姿态机动收敛速率的提升。

1.2.5 快速机动卫星发展现状

由于当前空间任务的需求以及快速机动卫星自身所具有的独到优势，以美国NASA、欧空局为首的众多航天机构均已就快速机动卫星展开了一系列相关研究。下面简要介绍其中几种典型的快速机动卫星型号。

1. 昴宿星计划

昴宿星是欧空局研发的具有超高分辨率的多光谱地球观测卫星，欧空局分别于2011、2012年发射了该型号的前两颗卫星。为实现快速机动的目标，该卫星采用一体化框架式架构，从而系统的转动惯量得到了有效降低。同时卫星采用三轴稳定的控制模式，为提升姿态机动速度，控制执行机构配置为三正装加一斜装的四个控制力矩陀螺配置，充分利用控制力矩陀螺所提供力矩较大的特性提升卫星的姿态机动能力。

2. WorldView 系列卫星

WorldView 系列卫星是美国所研发的新一代高精度成像卫星，该系列中前两颗卫星已分别在2007、2009年成功发射。为实现高精度成像的目的，该系列卫星均采用了新型振动隔离系统以抑制系统的振荡以及状态的抖振，从而提升卫星的姿态控制精度。该型号卫星所拥有的最大姿态机动能力为星下点 $\pm 40^\circ$ ，同时所拥有的最大姿态机动角速度为 $3.5^\circ/\text{s}$ 。

3. CartoSat-2

2007年印度空间机构发射了高分辨率成像卫星 CartoSat-2，该型号卫星能够对9.6km幅宽的条带区域进行条带成像任务，同时具有0.8m的成像分辨率，为实现条带成像、多目标成像等成像任务，该卫星具有星下点 $\pm 45^\circ$ 的姿态机动能力。

CartoSat-2 卫星姿态控制系统采用的控制执行机构为飞轮、推力器、磁力矩器的混装配置，能够同时具有推力器推力大与飞轮精度高的特点。

4.ROCSat-2

ROCSat-2 是台湾独立研发设计的高分辨率成像卫星，该星已于 2004 年成功发射升空。ROCSat-2 卫星能够对幅宽为 24km 的条带状区域进行分辨率为 2m 的条带成像，基本能够实现覆盖台湾岛全境，在环境监测、军事侦察等方面均能够发挥巨大作用。同时为满足各类成像任务的需求，该卫星具有星下点 $\pm 45^\circ$ 的姿态机动能力，同时姿态机动的最大角速度为 $1.5^\circ/\text{s}$ 。

表 1-1 给出了几种快速机动卫星的相关参数。

表 1-1 国内外快速机动卫星相关参数

Table 1-1 Parameters of domestic and foreign fast maneuver satellites

	机动能力	最大角速度	成像幅宽	分辨率	轨道高度
ROCSat-2	俯仰/滚转 45°	$1.5^\circ/\text{s}$	24km	2m	891km
OrbView-5	星下点 $\pm 60^\circ$		15.2km	1m	450km
Pleiades	俯仰/滚转 60°	$3^\circ/\text{s}$	20km	0.7m	695km
QuickBird	星下点 $\pm 40^\circ$		16.5km	0.62m	450km
THEOS	星下点 $\pm 45^\circ$	$1^\circ/\text{s}$	22km	2m	822km
WorldView-2	星下点 $\pm 40^\circ$	$3.5^\circ/\text{s}$	16.4km	0.46m	770km
NigeriaSat-2	星下点 $\pm 45^\circ$	$4^\circ/\text{s}$	20km	32m	700km
CartoSat-2	星下点 $\pm 45^\circ$		9.6km	0.8m	635km

可以看到，相比较于传统的卫星型号，快速机动卫星均具有姿态机动幅度大、角速度快的特点，设计姿态控制器时需要针对这些特点以满足快速机动卫星的姿态机动能力需求。

目前对于快速机动卫星姿态控制的研究主要集中在以下两个方面：

1.约束条件下的姿态机动任务规划，如针对多目标成像任务，快速合理地规划出卫星进行姿态机动的目标路径以满足复杂空间任务的需求；

2.卫星姿态的快速机动控制器设计，即针对给定的机动目标，设计姿态控制器使得卫星快速、平稳的收敛至系统平衡点。

本次研究主要针对第二类问题进行展开，着重讨论基于不同控制方法的快速机动卫星姿态控制器设计。

1.3 本文主要研究内容

本次研究对象为大角度快速机动情形下的卫星姿态控制问题，研究目的为在

考虑系统模型不确定性与干扰力矩等扰动、控制力矩与姿态角速度等状态约束的条件下，设计鲁棒姿态控制器以实现系统稳定，保证一定控制精度的同时尽可能的提升系统收敛速率。

论文的各个章节安排如下：

第一章绪论部分，介绍本次研究目的与意义，并简要介绍相关的国内外研究现状。

第二章基础理论部分，简要介绍本次研究所要用到的系统状态模型与相关的控制理论，为后文打下铺垫。

第三章设计 PID+控制器，基于经典 PID 控制中各个控制项的作用对 PID 控制器进行改进，引入滑模控制的思想设计 PID+控制器，实现系统状态收敛的同时保证系统状态沿着设计好的滑模面运动；同时对滑模面进行改进，设计系统的匀速段、减速段与收敛段以避免角速度下降过快，从而达到提升系统收敛速率的目的；通过符号函数项解决转动惯量不确定性与干扰力矩等扰动问题；同时讨论控制力矩与角速度约束，证明控制参数与姿态角速度范数之间的联系；最后通过仿真验证本章提出控制算法的有效性。

第四章设计滑模控制器，针对经典滑模控制角速度下降过快导致四元数收敛速率急剧下降的缺陷对经典滑模面进行改进，同时改进经典滑模控制锁定滑模参数的做法，引入滑模参数的更新律，分别基于 Bang-Bang 控制与动态滑模的思路设计滑模面，实时增大滑模参数以达到提升系统收敛速率的目的；通过符号函数项解决转动惯量不确定性与干扰力矩问题；考虑角速度与控制力矩的约束，讨论了控制参数与二者之间的联系并对其进行证明；最后通过仿真验证本章提出控制算法的有效性；

第五章设计有限时间控制器，针对大角度姿态机动的情形设计了一种三段式结构的有限时间滑模面，通过设计角速度恒定的匀速段维持四元数的收敛速率，同时在系统平衡点附近设计有限时间滑模面，利用欧拉轴特型消除控制器奇异性并提升终端收敛速率；通过符号函数项解决转动惯量不确定性与干扰力矩问题；同时针对小角度机动情形另行设计有限时间滑模面，通过讨论系统状态的二阶导数规避奇异性问题；最后通过仿真验证本章提出控制算法的有效性。

第六章设计路径规划算法与姿态跟踪控制器，针对现有的路径规划算法多为数值解的缺陷提出了一种姿态机动时间较短路径的解析解，将任意的姿态机动问题拆分成三次独立的单轴机动，同时针对每一次单轴机动基于 Bang-Bang 控制理论给出时间较优的机动路径，通过优化总转角得到时间较优的姿态机动路径参考轨迹；同时引入轨道机动中霍曼机动的思路，针对姿态机动中一种特殊情形寻

找姿态机动中的“交汇点”，并通过该交汇点减少系统的一次加、减速过程，从而达到优化收敛时间的目的；随后设计姿态跟踪控制器以实现系统真实状态对于参考轨迹的追踪；在本章的最后，通过数值仿真验证本章提出控制算法的有效性。

在本次研究中，针对卫星姿态快速机动问题将分别基于前文所述的四种不同控制方法进行控制器的设计，本文第三章至第六章内容为相互平行的关系，每一章分别基于一种控制方法设计控制器，同时通过与经典控制器进行对比说明本次研究所提出控制算法的有效性与优越性，并在第六章的最后对本次研究所提出的几种不同控制方法进行相同约束条件下的横向对比，分别从收敛速率、系统鲁棒性、稳态精度等方面说明本次研究所给出的几种控制方法的优劣特性。本文的结构框图如下所示。

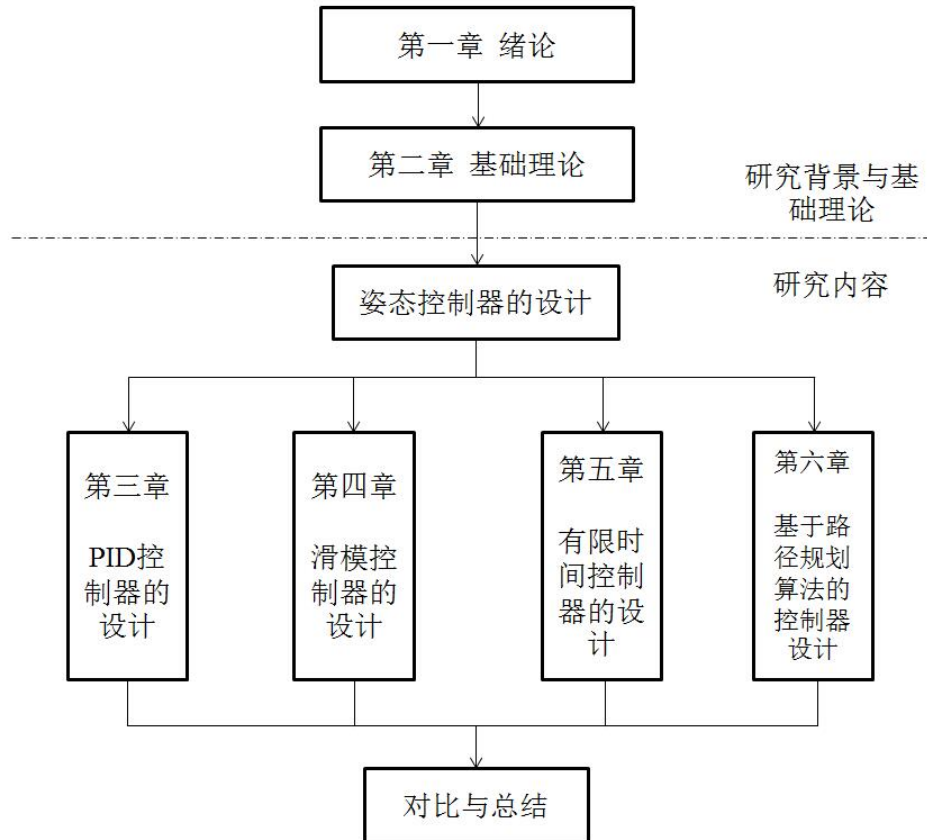


图 1-1 论文结构框图

Fig. 1-1 Figure of the structure of this paper

第2章 基础理论

2.1 引言

卫星的姿态指的是卫星相对于参考坐标系的相对方位或者指向，卫星在执行任务过程中需要保持姿态的高精度指向与定位，因此需要对卫星施加姿态控制以满足空间任务对姿态指向的要求，而对于卫星绕其质心的转动建立数学模型以对其进行描述是设计姿态控制律的基础。在本章中，首先给出了卫星的姿态动力学模型，同时介绍了几种常用的姿态参数以及基于这些姿态参数的姿态运动学模型；针对姿态跟踪控制问题，给出了误差动力学模型与误差运动学模型；最后，针对本次研究所采用的控制方法，介绍了相关的控制理论知识。

2.2 卫星姿态数学模型

卫星的姿态模型由姿态动力学模型与姿态运动学模型组成，前者描述的是卫星姿态角速度的导数与系统状态之间的关系，而后者描述的则是姿态参数的导数与系统状态之间的关系。

2.2.1 姿态动力学模型

刚体卫星的姿态动力学模型为^[112-116]

$$J\dot{\omega} + \omega^\times J\omega = u + d \quad (2-1)$$

其中 ω 为卫星的姿态角速度， J 为卫星的转动惯量矩阵，且 J 为实正定对称矩阵， u 为控制力矩， d 为外部干扰力矩。在本次研究中，假定外部干扰力矩为范数有界的高斯白噪声，即

$$\|d\| \leq \bar{d} \quad (2-2)$$

值得注意的是，常用向量范数有 1-范数、2-范数(Euclidean 范数)以及 ∞ -范数，在本次研究中，若不做特殊说明，向量范数均指向量的 2-范数，即 $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ 。

考虑到在实际控制中转动惯量矩阵不可能精确已知，假定

$$J = \hat{J} + \tilde{J} \quad (2-3)$$

其中 \hat{J} 为转动惯量矩阵的估计值。 \tilde{J} 为转动惯量矩阵的误差值。

在(2-1)中， r^\times 为三维向量 r 的叉乘算子，其定义为

$$\mathbf{r}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

叉乘矩阵 \mathbf{r}^\times 的奇异值满足

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{r}^\times) &= 0, \pm \|\mathbf{r}\| \\ \lambda_{\max}(\mathbf{r}^\times) &= \|\mathbf{r}\| \end{aligned} \quad (2-5)$$

为简化书写，在后文中以 $\lambda_m(\mathbf{A})$ 和 $\lambda_M(\mathbf{A})$ 分别表示矩阵 \mathbf{A} 的最小奇异值和最大奇异值。

同时，叉乘运算还具有如下性质

$$(\mathbf{r}^\times)^T = -\mathbf{r}^\times, \quad \mathbf{r}^\times \mathbf{r} = \mathbf{r}^T \mathbf{r}^\times = 0, \quad \mathbf{r}^\times \mathbf{m} = -\mathbf{m}^\times \mathbf{r}, \quad \mathbf{m}^T \mathbf{r}^\times \mathbf{m} = 0 \quad (2-6)$$

$$(\mathbf{a}^\times \mathbf{b})^\times = \mathbf{b} \mathbf{a}^T - \mathbf{a} \mathbf{b}^T \quad (2-7)$$

其中， $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{m}$ 均为三维向量。

2.2.2 姿态运动学模型

前文所述的姿态动力学模型描述的是卫星姿态角速度的导数与系统状态之间的联系，而姿态运动学模型描述的则是卫星姿态参数的导数与系统状态之间的联系。由于描述卫星姿态的参数有若干种，从而姿态运动学模型也有几种不同表述形式。

2.2.2.1 方向余弦矩阵

方向余弦矩阵的本质是两个参考系之间的坐标转换矩阵，在本次研究中，方向余弦矩阵描述的是空间参考坐标系到卫星本体系的坐标转换矩阵。记地心惯性系为 \mathbf{S}_a ，其矢量为 \mathbf{f}_a ，卫星本体系为 \mathbf{S}_b ，其矢量为 \mathbf{f}_b ，则描述从惯性系到卫星本体系的方向余弦矩阵 \mathbf{C} 为

$$\mathbf{C} = \mathbf{f}_b \mathbf{f}_a^T = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_b \cdot \mathbf{i}_a & \mathbf{i}_b \cdot \mathbf{j}_a & \mathbf{i}_b \cdot \mathbf{k}_a \\ \mathbf{j}_b \cdot \mathbf{i}_a & \mathbf{j}_b \cdot \mathbf{j}_a & \mathbf{j}_b \cdot \mathbf{k}_a \\ \mathbf{k}_b \cdot \mathbf{i}_a & \mathbf{k}_b \cdot \mathbf{j}_a & \mathbf{k}_b \cdot \mathbf{k}_a \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

由方向余弦矩阵的定义可以得到其为正交矩阵，且方向余弦矩阵的奇异值满足

$$\lambda(\mathbf{C}) = 1 \quad (2-9)$$

式(2-9)的本质是任意向量经过任意单位正交坐标转换之后向量的 2-范数不变。

基于方向余弦矩阵的姿态运动学模型为^[112-116]

$$\dot{\mathbf{C}} = -\boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{C} \quad (2-10)$$

由(2-8)与(2-10)可以看到，方向余弦矩阵具有物理意义清晰的优势，同时姿态运动学模型也很简洁，但方向余弦矩阵具有 9 个变量，同时自身有 6 个约束方程，过多的变量很大程度的限制了方向余弦矩阵的使用与研究。

2.2.2.2 欧拉轴/角

刚体转动的欧拉定理为：刚体绕固定点的任意角位移，可以由绕通过该点的某个轴转过某一角度得到，其中该轴叫做欧拉轴，该转角叫做欧拉角。该定理可以视为正交矩阵的一个性质：一个常实正交矩阵 \mathbf{A} 至少存在一个特征值为 1 的特征向量，亦即存在一个满足下式的单位矢量 \mathbf{e} 的分量列阵 $\underline{\mathbf{e}}$ 。

$$\underline{\mathbf{e}} = \mathbf{A} \underline{\mathbf{e}} \quad (2-11)$$

由前文讨论，方向余弦矩阵为正交矩阵，若将上式中的矩阵 \mathbf{A} 替换为从惯性系 \mathbf{S}_a 到本体系 \mathbf{S}_b 的方向余弦矩阵，则上式表明向量 \mathbf{e} 在 \mathbf{S}_a 与 \mathbf{S}_b 中的分量相同，此单位向量即为示刚体转动轴方向的单位矢量。

由欧拉定理可以看到，使用一轴+一角的模式即可描述两个坐标系之间的相对转动，一般的，记该转轴为 \mathbf{e} ，该转角为 φ 。

基于欧拉轴/角姿态运动学模型为^[112-116]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \mathbf{e}^\times \left(\mathbf{I}_3 - \cot \frac{\varphi}{2} \mathbf{e}^\times \right) \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\varphi} = \mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad (2-12)$$

由(2-12)可以看到，欧拉轴/角描述的姿态运动学模型在 $\varphi=0$ 时会出现奇异性问题，即系统状态靠近平衡点时欧拉轴 \mathbf{e} 可能会发生突变，这对于控制器的设计带来了极大的不便。

2.2.2.3 姿态四元数

卫星姿态四元数的定义是基于欧拉轴/角得到的，其表达式为

$$\mathbf{q} = \left[\cos \frac{\varphi}{2} \quad \mathbf{e}^T \sin \frac{\varphi}{2} \right]^T = [q_0 \quad q_v^T]^T = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \quad (2-13)$$

由式(2-13)可以看到姿态四元数 \mathbf{q} 为四维向量，同时满足如下约束方程

$$\mathbf{q}^T \mathbf{q} = q_0^2 + \mathbf{q}_v^T \mathbf{q}_v = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (2-14)$$

记四元数 \mathbf{q} 表示由系 \mathbf{S}_a 到系 \mathbf{S}_b 的转动，则定义表示由系 \mathbf{S}_b 到系 \mathbf{S}_a 的转动的姿态四元数为 \mathbf{q} 的共轭四元数，记为 \mathbf{q}^* ，其表达式如下

$$\mathbf{q}^* = [q_0 \quad -\mathbf{q}_v^T]^T \quad (2-15)$$

记四元数 \mathbf{q} 表示由系 S_a 到系 S_b 的转动，四元数 \mathbf{p} 表示由系 S_b 到系 S_c 的转动，则表示由系 S_a 到系 S_c 的转动的四元数 \mathbf{r} 可以表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{p} = \begin{bmatrix} q_0 p_0 - \mathbf{q}_v^T \mathbf{p}_v \\ q_0 \mathbf{p}_v + p_0 \mathbf{q}_v + \mathbf{q}_v \times \mathbf{p}_v \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

在上式中，算子 \otimes 为四元数的转动乘法算子，其定义已在(2-16)中给出。

值得注意的是，绕 \mathbf{e} 轴转过 φ 角与绕轴 \mathbf{e} 轴转过 $2\pi - \varphi$ 角是所描述的是同一姿态，若前者所对应的四元数为 \mathbf{q} ，则可以得到后者所对应的四元数为 $-\mathbf{q}$ ，这表明 \mathbf{q} 与 $-\mathbf{q}$ 描述的为同一姿态，基于此性质，在后续研究中若有需要，可以假定 $q_0 \geq 0$ 。

基于姿态四元数的姿态运动学模型为^[112-116]

$$\begin{cases} \dot{q}_0 = -\frac{1}{2} \mathbf{q}_v^T \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{q}}_v = \frac{1}{2} (q_0 \mathbf{I}_3 + \mathbf{q}_v^\times) \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{F} \boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad (2-17)$$

其中，矩阵 \mathbf{F} 的奇异值满足

$$\begin{cases} \lambda(\mathbf{F}) = |q_0|, 1 \\ \lambda_M(\mathbf{F}) = 1 \end{cases} \quad (2-18)$$

由姿态四元数的定义可以看到，姿态四元数将欧拉轴/角中用于描述姿态的两个独立变量简化为一个四维向量，同时对于相继转动问题的描述具有独特的优势，但弊端则是姿态四元数本身自带一个约束方程，具有 1 个冗余度。同时值得注意的是，基于姿态四元数的姿态运动学模型并不具有奇异性问题。

2.2.2.4 修正罗德里格参数

修正罗德里格参数(Modified Rodrigues Parameter, MRP)是在姿态四元数的基础上提出的另一种姿态参数，其定义如下

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e} \tan \frac{\varphi}{4} = \frac{\sin(\varphi/2) \mathbf{e}}{1 + \cos(\varphi/2)} = \frac{\mathbf{q}_v}{1 + q_0} \quad (2-19)$$

由 MRP 的定义可以看到其为各个分量独立的三维向量，不带有自身的约束方程与冗余度，这一点相对于姿态四元数和欧拉轴/角的态度描述方式都有改善。同时由(2-19)可以看到 $\boldsymbol{\sigma}$ 在 $q_0 = -1$ 即 $\varphi = 2\pi$ 时出现奇异性，但这意味着卫星绕其出发点转过一周，同时该情形在绝大多数情况下都可以忽略。

由前文讨论，绕 \mathbf{e} 轴转过 φ 角与绕轴 \mathbf{e} 轴转过 $2\pi - \varphi$ 角是所描述的是同一姿态，若前者对应的 MRP 为 $\boldsymbol{\sigma}_1$ ，后者对应的 MRP 为 $\boldsymbol{\sigma}_2$ ，则有 $\boldsymbol{\sigma}_1$ 、 $\boldsymbol{\sigma}_2$ 为反向向量且

$\sigma_1^T \sigma_2 = -1$ ，从而可以得到 σ 与 $-\sigma/\|\sigma\|^2$ 描述的为同一姿态，进而在后续研究中，若有必要可以假定 $\|\sigma\| \leq 1$ 。

基于 MRP 的姿态运动学模型为^[112-116]

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \sigma^T \sigma}{2} I_3 + \sigma^\times + \sigma \sigma^T \right) \omega = G \omega \quad (2-20)$$

其中，矩阵 G 满足性质

$$G^T G = \left(\frac{1 + \sigma^T \sigma}{4} \right)^2 I_3, G^{-1} = \frac{16}{(1 + \sigma^T \sigma)^2} G^T \quad (2-21)$$

从而可以得到 G 的奇异值满足

$$\lambda_M(G) = \|G\|_2 = \sqrt{\lambda_M(G^T G)} = \frac{1 + \sigma^T \sigma}{4} \leq \frac{1}{2} \quad (2-22)$$

值得注意的是，式(2-22)中，使用到了性质 $\|\sigma\| \leq 1$ 。

由(2-19)与(2-20)可以看到，虽然 MRP 在所有姿态描述方式中具有最为简明的形式与最少的独立变量个数，但其代价是相对而言最为复杂的姿态运动学模型。

2.2.3 误差姿态模型

前文所述的姿态模型适用于姿态镇定控制问题，对于卫星姿态控制中的另一大类问题——姿态跟踪控制问题，则需要引入误差角速度与误差四元数的定义及其数学模型对其进行描述。

2.2.3.1 误差状态的定义

记姿态跟踪控制问题中期望姿态四元数为 q_d ，期望角速度为 ω_d ，定义误差四元数 q_e 如下

$$q_e = q_d^* \otimes q = \begin{bmatrix} q_{e0} \\ q_{ev} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{d0} q_0 + q_{dv}^T q_v \\ q_{d0} q_v - q_0 q_{dv} - q_{dv} \times q_v \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

则可以得到由误差坐标系到惯性系的转换矩阵 $R(q_e)$ 如下

$$R(q_e) = (q_{e0}^2 - q_{ev}^T q_{ev}) I_3 + 2 q_{ev} q_{ev}^T - 2 q_{e0} q_{ev}^\times \quad (2-24)$$

则误差角速度 ω_e 定义为

$$\omega_e = \omega - R(q_e) \omega_d \quad (2-25)$$

在本次研究中，基于前文欧拉轴/角与 MRP 的定义，需要对误差欧拉轴/角与误差 MRP 做出定义。定义误差欧拉轴 e_e 与误差欧拉角 φ_e 如下

$$\begin{cases} \mathbf{e}_e = \mathbf{q}_{ev} / \|\mathbf{q}_{ev}\| \\ \cot \frac{\varphi_e}{2} = \frac{q_{e0}}{\|\mathbf{q}_{ev}\|} \end{cases} \quad (2-26)$$

定义误差 MRP σ_e 如下

$$\sigma_e = \mathbf{e}_e \tan \frac{\varphi_e}{4} = \frac{\mathbf{q}_{ev}}{1 + q_{e0}} \quad (2-27)$$

误差四元数 \mathbf{q}_e 、误差 MRP σ_e 与姿态四元数、MRP 具有类似的性质，即可以假设 $q_{e0} \geq 0$ 与 $\|\sigma_e\| \leq 1$ ，由于前文已进行过一定讨论，在此不进行赘述。

2.2.3.2 误差状态模型

将(2-25)中误差角速度的定义带入姿态动力学模型(2-1)中可以得到误差角速度模型如下^[112-116]

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_e + \mathbf{J}\mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d + (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d)^\times \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d) = \mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (2-28)$$

同时，基于误差四元数的误差运动学模型为

$$\begin{cases} \dot{q}_{e0} = -\frac{1}{2}\mathbf{q}_{ev}^T \boldsymbol{\omega}_e \\ \dot{\mathbf{q}}_{ev} = \frac{1}{2}(q_{e0}\mathbf{I}_3 + \mathbf{q}_{ev}^\times)\boldsymbol{\omega}_e = \frac{1}{2}\mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e \end{cases} \quad (2-29)$$

计算 $\|\mathbf{q}_{ev}\|$ 与 \mathbf{e}_e 的导数可以得到

$$\frac{d\|\mathbf{q}_{ev}\|}{dt} = \frac{d\sqrt{1-q_{e0}^2}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{-2q_{e0}\dot{q}_{e0}}{\sqrt{1-q_{e0}^2}} = -\frac{q_{e0}}{\|\mathbf{q}_{ev}\|} \left(-\frac{1}{2}\mathbf{q}_{ev}^T \boldsymbol{\omega}_e \right) = \frac{1}{2} q_{e0} \mathbf{e}_e^T \boldsymbol{\omega}_e \quad (2-30)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_e = \frac{\|\mathbf{q}_{ev}\| \dot{\mathbf{q}}_{ev}}{\|\mathbf{q}_{ev}\|^2} - \frac{\mathbf{q}_{ev}}{\|\mathbf{q}_{ev}\|^2} \frac{d\|\mathbf{q}_{ev}\|}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_e^\times \boldsymbol{\omega}_e + \frac{1}{2} \frac{q_{e0}}{\|\mathbf{q}_{ev}\|} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{e}_e \mathbf{e}_e^T) \boldsymbol{\omega}_e \quad (2-31)$$

从而有

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_e = \frac{1}{2} \mathbf{e}_e^\times \left(\mathbf{I}_3 - \cot \frac{\varphi_e}{2} \mathbf{e}_e^\times \right) \boldsymbol{\omega}_e \\ \dot{\varphi}_e = \mathbf{e}_e^T \boldsymbol{\omega}_e \end{cases} \quad (2-32)$$

与之相类似的，计算 σ_e 的导数可以得到

$$\dot{\sigma}_e = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \sigma_e^T \sigma_e}{2} \mathbf{I}_3 + \sigma_e^\times + \sigma_e \sigma_e^T \right) \boldsymbol{\omega}_e = \mathbf{G}_e \boldsymbol{\omega}_e \quad (2-33)$$

可以看到，误差状态 \mathbf{q}_e 、 \mathbf{e}_e 、 σ_e 的运动学模型与之前的姿态运动学模型具有相同的形式，并且矩阵 \mathbf{F}_e 、 \mathbf{G}_e 与矩阵 \mathbf{F} 、 \mathbf{G} 也有类似的性质，这使得姿态镇定控制器的设计与姿态跟踪控制器的设计有很多相似之处。

2.3 相关控制理论基础

在后文的系统稳定性证明与控制器性能分析中，将会使用到一些控制理论的定义与定理，在此对这些相关理论进行简要的介绍。

2.3.1 稳定性理论

在给出稳定性定理之前，首先需要对于系统稳定性的概念进行说明。

对于自治系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2-34)$$

其中 \mathbf{f} 为 n 维向量函数， \mathbf{x} 为 n 维向量，若 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 为该系统平衡点，则：

(1) 若对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，都存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ，使得 $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ ，其中 $\forall t \geq 0$ ，则称该平衡点是稳定的；

(2) 若该平衡点不满足性质(1)，则称该平衡点为非稳定的；

(3) 若该平衡点为系统的稳定平衡点，且能够找到正常数 $\delta > 0$ ，使得 $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$ ，则称该平衡点为渐进稳定的。

定理 2-1(Lyapunov 稳定性定理)^[117-120]：若 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 为系统(2-34)的一个平衡点，定义在平衡点邻域 $U_0 \subset U$ 内的正定标量函数 $V(\mathbf{x})$ 具有连续一阶导数 $\dot{V}(\mathbf{x})$ ，则：(1) 若对于 $\forall \mathbf{x} \in U_0$ 有 $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ ，则系统在平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处是稳定的；(2) 若对于 $\forall \mathbf{x} \in U_0$ 有 $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ ，则系统在平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处是渐进稳定的；(3) 若对于全体状态空间 U ，对于 $\forall \mathbf{x} \in U$ ，有 $V(\mathbf{x}) \geq 0$ 且 $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ ，则系统在平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处是全局渐进稳定的。

定理 2-2(LaSalle 不变集原理)^[117-120]：若系统(2-34)中 \mathbf{f} 为定义在 U 上的连续向量函数，正定标量函数 $V(\mathbf{x})$ 具有连续一阶偏导数且径向无界，且对于 $\forall \mathbf{x} \in U$ 有 $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ ，若 G 为所有满足 $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ 的集合， \bar{G} 为其中的最大不变集，则系统状态将全局收敛于 \bar{G} 。

定理 2-2 推论^[117-120]：若系统(2-34)中向量函数 \mathbf{f} 连续，正定标量函数 $V(\mathbf{x})$ 具有连续一阶偏导数，并且在平衡点附近的某个邻域 U_0 内有： $V(\mathbf{x})$ 正定， $\dot{V}(\mathbf{x})$ 半负定，且由 $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ 所确定的集合 G 中除 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 之外不包括其他任何轨线，则系统在平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处是渐进稳定的。值得注意的是，若邻域 U_0 扩充到全体状态空间 U ，则有系统在平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处是全局渐进稳定的。

定理 2-3(Barbalat 引理)^[117-120]：若函数 $f(t)$ 在 $t \in [0, \infty)$ 上是一阶连续可导

的，同时极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 存在，若对于 $\forall t \in [0, \infty)$ 有 $\dot{f}(t)$ 一致连续，则有极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{f}(t) = 0$ 。

2.3.2 滑模控制

滑模控制的基本思路是，对于非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2-35)$$

需要设计滑模面 $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ 或者切换函数 $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ ，并给出控制律

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}^+(\mathbf{x}), & \mathbf{s}(\mathbf{x}) > 0 \\ \mathbf{u}^-(\mathbf{x}), & \mathbf{s}(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (2-36)$$

以满足如下性质：

- (1) 系统从滑模面以外的任意初始状态出发，能够在足够短的时间内运动到滑模面上或者滑模面附近足够近的邻域内；
- (2) 系统状态在滑模面上能够稳定，并且具有满足控制要求的动态性能。
- (3) 存在满足上述条件的滑模面 $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ 。

上述三个性质是滑模控制的几个基本要求，一般而言，滑模控制律的设计分为两步：首先寻找满足设计要求的滑模面 $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ ，随后设计控制律 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 使得系统状态能够到达滑模面或者滑模面附近足够近的邻域内。

对于卫星姿态控制而言较为常用的滑模面为

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\omega} + k\mathbf{q}_v \quad (2-37)$$

其中 k 为正常数。

当系统状态到达滑模面时有 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ ，从而有 $\boldsymbol{\omega} = -k\mathbf{q}_v$ ，选取 Lyapunov 函数如下

$$V_1 = 1 - q_0 \quad (2-38)$$

对其求导可以得到

$$\dot{V}_1 = -\dot{q}_0 = -\frac{1}{2}k\mathbf{q}_v^T \mathbf{q}_v \leq 0 \quad (2-39)$$

从而系统在滑模面上一致渐进稳定，接下来需要设计控制律实现系统状态能够从任意状态出发到达滑模面，亦即

$$\mathbf{s}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{s}} \leq 0 \quad (2-40)$$

其中 \mathbf{M} 为任意正定矩阵。一般的，在卫星姿态控制领域，选 \mathbf{M} 为卫星姿态转动惯量矩阵 \mathbf{J} ，并选取 Lyapunov 函数如下

$$V_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{s} \quad (2-41)$$

对其求导可以得到

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + k \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}_v \\ &= \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{u} + \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{d} - \mathbf{s}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}^\times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} k \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{F} \boldsymbol{\omega}\end{aligned}\quad (2-42)$$

从而只需选择控制律如下

$$\mathbf{u} = -k_p \mathbf{s} + \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} k \mathbf{J} \mathbf{F} \boldsymbol{\omega} - \bar{d} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) \quad (2-43)$$

即可满足 $\dot{V}_2 \leq 0$ ，从而滑模状态变量 \mathbf{s} 一致渐近稳定。式(2-43)中， k_p 为正常数且 $\operatorname{sgn}(\mathbf{x})$ 为向量 \mathbf{x} 的符号函数。

由前文的讨论可以看到滑模控制律的设计具有思路清晰，易于进行性能分析的特点，这也使得滑模控制广泛应用于理论研究与实际工程领域。

2.3.3 有限时间控制

在理论研究与实际工程领域，很多控制器所得到的收敛结果是指数收敛，这意味着系统状态将在无穷远处才能到达平衡点。而作为一种终端收敛速率优良的控制律，有限时间控制能够有效解决一致渐进稳定性带来的收敛速率问题。为介绍有限时间控制相关理论，首先需要引入有限时间稳定性的概念。

对于系统(2-34)，若系统在平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处稳定且有限时间收敛，则称系统在平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处有限时间稳定。对于系统的初始状态 $\mathbf{x}_0 \in U_0$ ，其中 U_0 为平衡点的一个邻域，记系统的解为 $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ ，有限时间稳定意味着存在一个关于 \mathbf{x} 的连续函数 $T(\mathbf{x})$ ，使得当 $t \in [0, T(\mathbf{x}_0)]$ 时，有 $\lim_{t \rightarrow T(\mathbf{x}_0)} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ ，而当 $t > T(\mathbf{x}_0)$ 时，有 $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ 。若该结论能够从邻域 U_0 扩充到全集 U ，则称系统是全局有限时间稳定的。

判断系统有限时间收敛的方法主要有：最小能量方法^[121]、最优控制方法^[122]与终端滑模方法^[123]。而在本次研究中主要采用以下定理对系统的有限时间稳定性进行证明。

定理 2-4(有限时间稳定性定理)：若 $V(\mathbf{x})$ 为正定函数且存在正实数 γ 和 $\alpha \in (0, 1)$ ，存在平衡点附近的邻域 U_0 使得 $\forall \mathbf{x} \in U_0$ ，有 $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\gamma V^\alpha(\mathbf{x})$ ，则系统(2-34)在平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处有限时间稳定；若上述结论扩充到全集 U 仍然成立，则称系统(2-34)在平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 处全局有限时间稳定。其中，收敛时间 T 满足

$$T \leq \frac{V_0^{1-\alpha}}{\gamma(1-\alpha)} \quad (2-44)$$

有限时间控制作为一种较为新颖的控制律，近几年来仍处在快速发展的过程中，虽然国内外学者已经取得了多方面大量的研究成果，但仍然存在许多问题需要解决。

值得注意的是，有限时间稳定的定义有两种，即有限时间内系统状态到达平衡点或有限时间内系统状态到达平衡点附近足够小的邻域内，考虑到干扰力矩的存在，在本次研究中有限时间稳定性指的是后一种，即：

对于系统

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2-45)$$

若对于给定的正常数 c 和足够小的 ε ，当系统初始状态满足 $\|x(t_0)\| \leq c$ ，有

$$\|x(t)\| \leq \varepsilon, t_0 \leq t \leq T \quad (2-46)$$

则称系统对于给定的 ε 和 c 在区间 $[t_0, T]$ 上是有限时间稳定的。

2.4 本章小结

本章对卫星的姿态运动学模型与动力学模型进行了简要介绍，给出了一些相关的重要性质与结论，同时介绍了姿态跟踪控制问题中的误差角速度模型与误差姿态模型，最后对本次研究所使用的相关控制理论进行了简要介绍。总的来说，本章的目的是为后续研究工作做好铺垫、打下基础。

第3章 基于PID控制的姿态控制器设计

3.1 引言

在卫星姿态控制领域，研究最为成熟、应用最为广泛的是PD控制律。由于PD控制律中的比例项可以由星敏感器、红外地平仪等姿态敏感器直接测得，同时微分项可由陀螺仪直接测得，从而实现全状态反馈，同时对于卫星姿态控制系统而言，任意系数的负反馈PD控制律均为全局稳定，且无需系统转动惯量信息，这些优良特性使得PD控制律得到了深入而广泛的应用。对于卫星快速机动问题，为实现系统状态快速收敛的目标，通用手段是放大比例项，但单纯的放大比例项则会带来系统超调亦即角速度幅值的增大，进而导致姿态确定精度降低、柔性变形增大等一系列不良影响，因此为合理优化系统性能该方法并非最优方案。同时值得注意的是PD控制器作用下的系统为二阶系统，其稳态精度存在着提升空间，针对本次研究保障一定稳态精度的目的，应当在控制器中加入积分项形成PID控制器以改善系统稳态精度。最后一点需要注意的是PID控制器作为一种控制项中不含有转动惯量矩阵的控制器对系统模型不确定性有着较强的鲁棒性，但卫星姿态系统并非单纯的黑箱模型，实际应用中系统转动惯量矩阵的估计值往往是已知的，对该信息完全无视则会造成无法完全优化系统性能的后果，因此在本章中将对经典PID控制器进行改进以提升控制器性能。

在卫星姿态的PID控制器当中，比例项决定着收敛速率，比例项越大，收敛速率也越快；但单纯的比例项作用下系统并不能稳定，因此需要引入微分项增强系统的稳定性，但微分项的引入则会使得姿态角速度减小，从而导致四元数收敛速率的下降；而积分项的作用的是提升系统阶次，增强系统对于扰动的抑制作用，从而提高稳态精度，但积分项的引入则会加剧系统振荡，同时对系统稳定性造成不良影响。针对这些控制项所起到的作用，本章所提出控制器的基本思路为：在状态远离平衡点时只施加PD控制，同时随着系统状态的收敛实时增大比例项以维持四元数收敛速率，而在系统状态接近平衡点时再引入积分项以提升稳态精度，并避免积分项带来的系统大幅度振荡与收敛速率下降；同时引入滑模控制的思想，在不影响经典PID控制器稳定性的前提下，对PID控制器添加角速度叉乘项以及符号函数项，确保系统状态沿着所设计的滑模面运动，通过设计适当的滑模面实现提升收敛速率的目标。同时，考虑到过大的姿态角速度对系统造成的不良影响，本章对于控制参数与姿态角速度之间的关系进行了讨论，证明了姿态角速度不超过系统上限的严格约束条件，并给出了角速度与控制力矩受限情形下

的姿态控制器。基于上述讨论，本章先后针对姿态镇定问题与姿态跟踪问题在 PID 控制器中加入角速度的叉乘项，构造了 PID+控制器，同时对其进行稳定性证明与性能分析，最后给出数值仿真验证控制器的有效性。

3.2 姿态镇定 PID+控制器

姿态镇定控制的目标是对于任意的航天器初始状态，设计控制器 \mathbf{u} 使得系统状态满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\omega}(t), q_0(t), \mathbf{q}_v(t)) = (\mathbf{0}, 1, \mathbf{0})$ 。

本次研究提出的姿态镇定 PID+控制器结构如下

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \rho_1 \mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\tau}_1, & \|\mathbf{q}_v\| \geq \alpha \\ \rho_2 \mathbf{u}_2 + \boldsymbol{\tau}_2, & \alpha > \|\mathbf{q}_v\| \geq \beta \\ \rho_3 \mathbf{u}_3 + \boldsymbol{\tau}_3, & \beta > \|\mathbf{q}_v\| \end{cases} \quad (3-1)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = -k_d \boldsymbol{\omega} - (k_1 k_d / \|\mathbf{q}_v\|) \mathbf{q}_v \\ \mathbf{u}_2 = -k_d \boldsymbol{\omega} - k_2 k_d \mathbf{q}_v - \frac{k_2}{2} q_0 \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{u}_3 = -k_d \boldsymbol{\omega} - k_2 k_d \mathbf{q}_v - k_l \mathbf{v} - \frac{k_2}{2} q_0 \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad (3-2)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}_1 = -\bar{d} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{r}_1 \\ \boldsymbol{\tau}_2 = -\frac{k_2}{2} \lambda q_0 \|\boldsymbol{\omega}\| \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) - \bar{d} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{r}_2 \\ \boldsymbol{\tau}_3 = -\bar{d} \operatorname{sgn}(c\boldsymbol{\omega} + l_2 \mathbf{q}_v) - \frac{k_2}{2} \lambda q_0 \|\boldsymbol{\omega}\| \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) + (c\boldsymbol{\omega} + l_2 \mathbf{q}_v)^\times \mathbf{r}_3 \end{cases} \quad (3-3)$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \left(\hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{J}} \mathbf{s} - \frac{1}{2} \cot \frac{\varphi}{2} \mathbf{e}^\times \hat{\mathbf{J}} \mathbf{s} \right) - \lambda \left(\|\boldsymbol{\omega}\| + \frac{1}{2} \left(1 + \cot \frac{\varphi}{2} \right) \|\mathbf{s}\| \right) \operatorname{sgn} \left((\mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega}^\times)^T \right) \\ \mathbf{r}_2 = \left(\hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{J}} \mathbf{s} \right) - \lambda \left(\|\boldsymbol{\omega}\| + \frac{1}{2} \|\mathbf{s}\| \right) \operatorname{sgn} \left((\mathbf{q}_v^T \boldsymbol{\omega}^\times)^T \right) \\ \mathbf{r}_3 = \frac{k_2}{ck_2 - l_2} \left(\hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{J}} \mathbf{s} \right) - \frac{k_2}{ck_2 - l_2} \lambda \left(\|\boldsymbol{\omega}\| + \frac{1}{2} \|\mathbf{s}\| \right) \operatorname{sgn} \left((\mathbf{q}_v^T \boldsymbol{\omega}^\times)^T \right) \end{cases} \quad (3-4)$$

其中 \bar{d} 为正常数且满足 $\bar{d} \geq \|\mathbf{d}\|$ 。可以看到控制器(3-1)由两项构成，第一项 \mathbf{u}_i 为常规的 PID 控制项，在此用到了前文 $q_0 \geq 0$ 的假设。第二项 $\boldsymbol{\tau}_i$ 为符号函数项与为角速度叉乘项，该项目的目的是实现系统状态沿着所设计滑模面运行。 \mathbf{u}_i 中 \mathbf{v} 为积分项，其定义如下

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{cases} 0, & \beta \leq \|\mathbf{q}_v\| \\ c_1 \boldsymbol{\omega} + c_2 \mathbf{q}_v - \frac{1}{2} c_3 \mathbf{F} \boldsymbol{\omega}, & \beta > \|\mathbf{q}_v\| \end{cases} \quad (3-5)$$

在(3-3)与(3-4)中 \mathbf{s} 为滑模状态，其定义如下

$$\mathbf{s} = \begin{cases} \boldsymbol{\omega} + k_1 \mathbf{e}, & \|\mathbf{q}_v\| \geq \alpha \\ \boldsymbol{\omega} + k_2 \mathbf{q}_v, & \|\mathbf{q}_v\| < \alpha \end{cases} \quad (3-6)$$

为了保证在滑模面的切换点处角速度不发生突变， k_1 、 k_2 应满足

$$k_2 = k_1 / \alpha \quad (3-7)$$

在(3-3)与(3-4)中 λ 为正常数且满足

$$\lambda \geq \lambda_M(\tilde{\mathbf{J}}) \quad (3-8)$$

(3-1)中 ρ_i 为控制增益因子，其目的是使得控制力矩不超过系统上界， ρ_i 定义如下

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{-\mathbf{u}_i^T \boldsymbol{\tau}_i + \sqrt{(\mathbf{u}_i^T \boldsymbol{\tau}_i)^2 + \|\mathbf{u}_i\|^2 (\bar{u}^2 - \|\boldsymbol{\tau}_i\|^2)}}{\|\mathbf{u}_i\|^2}, & \|\mathbf{u}\| \geq \bar{u} \\ 1, & \|\mathbf{u}\| < \bar{u} \end{cases} \quad (3-9)$$

其中 \bar{u} 为系统控制力矩上界。在(3-1)到(3-8)中， $k_1, k_2, k_I, k_d, k_p, \alpha, \beta, c, c_1, c_2, c_3, l_2$ 均为待定正常数。

可以看到控制器(3-1)分为三个阶段：在第一阶段 $\|\mathbf{q}_v\| \geq \alpha$ 时，PID 控制项中只有比例项和微分项，考虑到由于随着 $\|\mathbf{q}_v\|$ 的减小，比例项在控制器中所占比例也随之下降，若维持 k_p 不变，会使得微分项占据主导地位，从而导致角速度的下降与四元数收敛速率的下降，因此在系统状态远离平衡点的该阶段应当对比例项系数放大，从而维持系统角速度和姿态四元数的收敛速率；在第二阶段 $\alpha > \|\mathbf{q}_v\| \geq \beta$ 时 PID 控制项中仍未引入积分项，同时比例项系数固定，这意味着系统自此阶段开始减速，通过选择合适的参数 α ，即可使系统尽可能处在匀速段，从而避免角速度下降过快导致的四元数收敛速率下降问题；在第三阶段 $\beta > \|\mathbf{q}_v\|$ 时，控制器中引入积分项，其目的是在系统临近平衡点时提升稳态精度。

控制器(3-1)具有如下性质：在选择合适控制参数的条件下，控制器(3-1)作用下的系统(2-1)、(2-17)一致渐近稳定，且系统状态能够沿着滑模面(3-6)运动，同时系统姿态角速度与控制力矩均不超过系统上界。接下来对控制器(3-1)的上述性质进行证明。

3.2.1 控制器稳定性证明

为证明系统(2-1)、(2-17)在控制器(3-1)作用下的稳定性，首先需要给出两个引理。

引理 1： 系统(2-1)、(2-17)在如下结构的控制器作用下全局一致渐近稳定。

$$\mathbf{u} = -k_d \boldsymbol{\omega} - k_p \mathbf{q}_v - \bar{d} \text{sgn}(\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{r} \quad (3-10)$$

其中 k_d 、 k_p 为任意正常数， \mathbf{r} 为任意三维向量。

证明： 选取 Lyapunov 函数如下

$$V_1 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + 2k_p (1 - q_0) \quad (3-11)$$

对其求导并带入控制器(3-10)可以得到

$$\dot{V}_1 = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} - 2k_p \dot{q}_0 = -k_d \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{d} - \bar{d} \boldsymbol{\omega}^T \text{sgn}(\boldsymbol{\omega}) \leq 0 \quad (3-12)$$

从而有 $\boldsymbol{\omega} \rightarrow \mathbf{0}$ ，进而 $\dot{\boldsymbol{\omega}} \rightarrow \mathbf{0}$ ，故 $\mathbf{q}_v \rightarrow \mathbf{0}$ ，由 LaSalle 最大不变集原理可以得到系统(2-1)、(2-17)全局一致渐近稳定。从而引理 1 证毕。

引理 2： 选择合适的控制参数的条件下，系统(2-1)、(2-17)在如下结构的控制器作用下一致渐近稳定。

$$\mathbf{u} = -k_d \boldsymbol{\omega} - k_p \mathbf{q}_v - k_l \mathbf{v} + (c\boldsymbol{\omega} + l_2 \mathbf{q}_v)^\times \mathbf{r}_3 - \bar{d} \text{sgn}(c\boldsymbol{\omega} + l_2 \mathbf{q}_v) \quad (3-13)$$

其中 k_d 、 k_p 、 k_l 为正常数， \mathbf{r} 为任意三维向量， \mathbf{v} 的定义如下。

$$\dot{\mathbf{v}} = c_1 \boldsymbol{\omega} + c_2 \mathbf{q}_v - \frac{1}{2} c_3 \mathbf{F} \boldsymbol{\omega} \quad (3-14)$$

证明： 选取 Lyapunov 函数如下

$$V_2 = 2l_1 (1 - q_0) + \frac{1}{2} c \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + l_2 \mathbf{q}_v^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + l_3 (\mathbf{v} + c_3 \mathbf{q}_v)^T (\mathbf{v} + c_3 \mathbf{q}_v) \quad (3-15)$$

其中 l_1, l_2, l_3, c, c_3 均为正常数。

考虑到

$$1 - q_0 \geq \frac{1}{2} (1 - q_0^2) = \frac{1}{2} \mathbf{q}_v^T \mathbf{q}_v, \forall q_0 \in [-1, 1] \quad (3-16)$$

从而有

$$\begin{aligned} V_2 &\geq l_1 \mathbf{q}_v^T \mathbf{q}_v + \frac{1}{2} c \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + l_2 \mathbf{q}_v^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + l_3 (\mathbf{v} + c_3 \mathbf{q}_v)^T (\mathbf{v} + c_3 \mathbf{q}_v) \\ &\geq l_1 \mathbf{q}_v^T \mathbf{q}_v + \frac{1}{2} c \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + l_2 \mathbf{q}_v^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^T & \mathbf{q}_v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} c \lambda_m(\mathbf{J}) I_3 & \frac{1}{2} l_2 \lambda_M(\mathbf{J}) I_3 \\ \frac{1}{2} l_2 \lambda_M(\mathbf{J}) I_3 & l_1 I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-17)$$

从而控制参数若满足如下不等式, V_2 正定。

$$\frac{1}{2}cl_1\lambda_m(\mathbf{J}) - \frac{1}{4}l_2^2\lambda_M^2(\mathbf{J}) > 0 \quad (3-18)$$

对 V_2 求导并带入控制器(3-13)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= l_1\omega^T \mathbf{q}_v + c\omega^T (-\omega^\times \mathbf{J}\omega + \mathbf{u} + \mathbf{d}) + \frac{1}{2}l_2\omega^T \mathbf{J}\mathbf{F}\omega + l_2\mathbf{q}_v^T (-\omega^\times \mathbf{J}\omega + \mathbf{u} + \mathbf{d}) \\ &\quad + 2l_3(\mathbf{v} + c_3\mathbf{q}_v)^T \left(c_1\omega + c_2\mathbf{q}_v - \frac{1}{2}c_3\mathbf{F}\omega + \frac{1}{2}c_3\mathbf{F}\omega \right) \\ &= (c\omega^T + l_2\mathbf{q}_v^T)(-k_d\omega - k_p\mathbf{q}_v - k_I\mathbf{v}) + (c\omega^T + l_2\mathbf{q}_v^T)(-\bar{d}\text{sgn}(c\omega^T + l_2\mathbf{q}_v^T) + \mathbf{d}) \\ &\quad + \frac{1}{2}l_2\omega^T \mathbf{J}\mathbf{F}\omega - l_2\mathbf{q}_v^T \omega^\times \mathbf{J}\omega + 2l_3(\mathbf{v} + c_3\mathbf{q}_v)^T (c_1\omega + c_2\mathbf{q}_v) + l_1\omega^T \mathbf{q}_v \\ &\leq -\omega^T \left(ck_d\mathbf{I}_3 - \frac{1}{2}l_2\mathbf{J}\mathbf{F} \right) \omega - \mathbf{q}_v^T (l_2k_p\mathbf{I}_3 - 2c_2c_3l_3\mathbf{I}_3) \mathbf{q}_v + (2c_1l_3 - ck_I)\mathbf{v}^T \omega \\ &\quad + (2c_2l_3 - l_2k_I)\mathbf{v}^T \mathbf{q}_v + (l_1 - ck_p - l_2k_d + 2c_1c_3l_3)\mathbf{q}_v^T \omega - l_2\mathbf{q}_v^T \omega^\times \mathbf{J}\omega \end{aligned} \quad (3-19)$$

选择控制参数满足

$$2l_3c_1 - ck_I = 2l_3c_2 - l_2k_I = l_1 - ck_p - l_2k_d + 2c_1c_3l_3 = 0 \quad (3-20)$$

从而有

$$\dot{V}_2 \leq - \begin{bmatrix} \omega^T & \mathbf{q}_v^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ck_d\mathbf{I}_3 - \frac{1}{2}l_2\lambda_M(\mathbf{J})\mathbf{I}_3 & \frac{1}{2}l_2\bar{\omega}\lambda_M(\mathbf{J})\mathbf{I}_3 \\ \frac{1}{2}l_2\bar{\omega}\lambda_M(\mathbf{J})\mathbf{I}_3 & l_2(k_p - c_3k_I)\mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

其中 $\bar{\omega}$ 为系统姿态角速度上界, 即 $\bar{\omega} \geq \|\omega\|$ 。从而若满足如下不等式, 有 $\dot{V}_2 \leq 0$ 。

$$l_2 \left(ck_d - \frac{1}{2}l_2\lambda_M(\mathbf{J}) \right) (k_2k_d - c_3k_I) - \frac{1}{4}l_2^2\bar{\omega}^2\lambda_M^2(\mathbf{J}) > 0 \quad (3-22)$$

从而若(3-18)、(3-20)、(3-22)得到满足, 系统(2-1)、(2-17)在控制器(3-13)作用下一致渐近稳定。引理 2 证毕。

引理 1 的本质是在 PD 控制中添加 $\omega^\times \mathbf{r}$ 项不影响控制器的稳定性, 同时注意到控制器(3-1)的结构, 可以发现 $\|\mathbf{q}_v\| \geq \alpha$ 阶段控制器(3-1)结构与控制器(3-10)结构完全相同, 而在 $\alpha > \|\mathbf{q}_v\| \geq \beta$ 阶段, 控制器(3-1)与(3-10)不同之处在于(3-1)中多出了 $-k_2\lambda_{q_0}\|\omega\|\text{sgn}(s)/2$ 项, 考虑到

$$\left\| -\frac{1}{2}\lambda_{q_0}\|\omega\|\text{sgn}(s) \right\| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}k_2\lambda_{q_0}\|\omega\| \quad (3-23)$$

从而实际的微分项可以视为

$$k'_d = k_d + \frac{k_2}{2} q_0 (\hat{\mathbf{J}} - \sqrt{3}\lambda) \quad (3-24)$$

因此只需满足

$$k_d + \frac{k_2}{2} \alpha (\lambda_m(\tilde{\mathbf{J}}) - \sqrt{3}\lambda) > 0, k_d + \frac{k_2}{2} \beta (\lambda_m(\tilde{\mathbf{J}}) - \sqrt{3}\lambda) > 0 \quad (3-25)$$

即可使得在该阶段控制器(3-1)形式与(3-10)完全相同。与之相类似的，在控制器(3-1)的第三阶段，可以发现控制器的实际微分项同样如(3-24)所示，基于引理 2 的约束条件，控制参数只需满足(3-18)与

$$2l_3c_1 - ck_I = 2l_3c_2 - l_2k_I = l_1 - ck_p - l_2k'_d + 2c_1c_3l_3 = 0 \quad (3-26)$$

$$l_2 \left(ck'_d - \frac{1}{2} l_2 \lambda_M(\mathbf{J}) \right) (k_2k'_d - c_3k_I) - \frac{1}{4} l_2^2 \bar{\omega}^2 \lambda_M^2(\mathbf{J}) > 0 \quad (3-27)$$

即可使得控制器(3-1)在 $\beta > \|\mathbf{q}_v\|$ 阶段的结构与引理 2 中控制器(3-13)的结构完全相同，并且满足引理 2 的稳定性条件。从而由引理 1 与引理 2，系统(2-1)、(2-17)在控制器(3-1)作用下一致渐近稳定。系统稳定性证毕。

3.2.2 控制器性能分析

如前文所述，控制器(3-1)具有性质：1.控制力矩范数不超过系统上界；2.系统能够沿滑模面(3-6)运动；3.在选择合适控制参数的情况下卫星姿态角速度有界。在本小节中将对这三条性质给出说明与证明。

首先，性质 1 比较明显，该性质可以由增益因子 ρ_i 的定义看出。若系统控制力矩上界为 \bar{u} ，同时选择合适的控制参数使得 $\|\boldsymbol{\tau}_i\| \leq \bar{u}$ ，则 ρ_i 的本质是当控制力矩 \mathbf{u} 范数不超过系统上界时，维持原控制器不变，而当 \mathbf{u} 范数超过系统上界时，对控制器(3-1)中的微分项、比例项、积分项成比例缩小使得 $\|\mathbf{u}\| = \bar{u}$ 。该方法在控制力矩饱和问题中较为常见，并且成比例放缩比例项、微分项、积分项并不影响系统的稳定性，已有众多国内外学者对其进行了讨论与证明，因此在此不对其进行赘述。

接下来证明性质 2。选取 Lyapunov 函数如下

$$V_3 = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{s} \quad (3-28)$$

在控制器(3-1)的 $\|\mathbf{q}_v\| \geq \alpha$ 阶段对 V_3 求导，考虑到系统状态远离平衡点时比例项、微分项远大于干扰项，从而忽略干扰力矩项，并带入控制器(3-1)，可以得到

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_3 &= \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + k_1 \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{s}^T (\mathbf{u} + \mathbf{d} - \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}) + \frac{k_1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{e}^\times \left(\mathbf{I}_3 - \cot \frac{\varphi}{2} \mathbf{e}^\times \right) \boldsymbol{\omega} \\
 &\approx \mathbf{s}^T \left(-k_d \boldsymbol{\omega} - (k_1 k_d / \|\mathbf{q}_v\|) \mathbf{q}_v + \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \right) + \frac{k_1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{e}^\times \left(\mathbf{I}_3 - \cot \frac{\varphi}{2} \mathbf{e}^\times \right) \boldsymbol{\omega} \\
 &= -k_d \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\omega} + k_1 \mathbf{e}) + \mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{r}_1 - \mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \frac{k_1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{e}^\times \boldsymbol{\omega} - \frac{k_1}{2} \cot \frac{\varphi}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{e}^\times \mathbf{e}^\times \boldsymbol{\omega} \\
 &= -k_d \mathbf{s}^T \mathbf{s} + k_1 \mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{r}_1 - k_1 \mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \frac{k_1}{2} \mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J} \mathbf{s} + \frac{k_1}{2} \cot \frac{\varphi}{2} \mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{e}^\times \mathbf{J} \mathbf{s} \\
 &= -k_d \mathbf{s}^T \mathbf{s} - k_1 \lambda \left(\|\boldsymbol{\omega}\| + \frac{1}{2} \left(1 + \cot \frac{\varphi}{2} \right) \|\mathbf{s}\| \right) \mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega}^\times \operatorname{sgn} \left((\mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega}^\times)^T \right) \\
 &\quad + k_1 \mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega}^\times \left(-\tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{s} + \frac{1}{2} \cot \frac{\varphi}{2} \mathbf{e}^\times \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{s} \right) \\
 &\leq -k_d \mathbf{s}^T \mathbf{s} - k_1 \lambda \|\boldsymbol{\omega}\| \|\mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega}^\times\| - k_1 \mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega}^\times \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} \\
 &\quad - \frac{1}{2} k_1 \lambda \left(1 + \cot \frac{\varphi}{2} \right) \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega}^\times\| + \frac{1}{2} k_1 \left(1 + \cot \frac{\varphi}{2} \right) \mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega}^\times \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{s} \\
 &\leq -k_d \mathbf{s}^T \mathbf{s} \leq 0
 \end{aligned} \tag{3-29}$$

在 $\alpha > \|\mathbf{q}_v\| \geq \beta$ 阶段对 V_3 求导同时略去干扰力矩项，并带入控制器(3-1)，可以得到

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_3 &= \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + k_2 \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}_v = \mathbf{s}^T (\mathbf{u} + \mathbf{d} - \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}) + \frac{k_2}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J} (\mathbf{q}_0 \mathbf{I}_3 + \mathbf{q}_v^\times) \boldsymbol{\omega} \\
 &\approx \mathbf{s}^T \left(-k_d \boldsymbol{\omega} - k_2 k_d \mathbf{q}_v + \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{r}_2 - \frac{k_2}{2} \lambda_1 |q_0| \|\boldsymbol{\omega}\| \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) - \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \right) \\
 &\quad + \frac{k_2}{2} \mathbf{q}_0 \mathbf{s}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \frac{k_2}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{q}_v^\times \boldsymbol{\omega} \\
 &= -k_d \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\omega} + k_2 \mathbf{q}_v) + \mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{r}_2 - \frac{k_2}{2} \lambda_1 |q_0| \|\boldsymbol{\omega}\| \mathbf{s}^T \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) - \mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \\
 &\quad + \frac{k_2}{2} \mathbf{q}_0 \mathbf{s}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} - \frac{k_2}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{q}_v^\times \boldsymbol{\omega} \\
 &= -k_d \mathbf{s}^T \mathbf{s} + k_2 \mathbf{q}_v^T \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{r}_1 - \frac{k_2}{2} \lambda_1 |q_0| \|\boldsymbol{\omega}\| \mathbf{s}^T \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) - k_2 \mathbf{q}_v^T \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \\
 &\quad + \frac{k_2}{2} \mathbf{q}_0 \mathbf{s}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} - \frac{k_2}{2} \mathbf{q}_v^T \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J} \mathbf{s} \\
 &= -k_d \mathbf{s}^T \mathbf{s} - k_2 \lambda_2 \left(\|\boldsymbol{\omega}\| + \frac{1}{2} \|\mathbf{s}\| \right) \mathbf{q}_v^T \boldsymbol{\omega}^\times \operatorname{sgn}^T(\mathbf{q}_v^T \boldsymbol{\omega}^\times) \\
 &\quad + k_2 \mathbf{q}_v^T \boldsymbol{\omega}^\times \left(-\tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{s} \right) + \frac{k_2}{2} \mathbf{q}_0 \mathbf{s}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} - \frac{k_2}{2} \lambda_1 |q_0| \|\boldsymbol{\omega}\| \mathbf{s}^T \operatorname{sgn}(\mathbf{s}) \\
 &\leq -k_d \mathbf{s}^T \mathbf{s} \leq 0
 \end{aligned} \tag{3-30}$$

在 $\|q_v\| < \beta$ 阶段对 V_3 求导同时略去干扰力矩项，并带入控制器(3-1)，可以得到

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_3 &= s^T J \dot{s} = s^T J \dot{\omega} + k_2 s^T J \dot{q}_v = s^T (u + d - \omega^\times J \omega) + \frac{k_2}{2} s^T J (q_0 I_3 + q_v^\times) \omega \\
 &\approx s^T \left(-k_d \omega - k_2 k_d q_v - k_I v + (c \omega + l_2 q_v)^\times r_3 - \frac{k_2}{2} \lambda_1 |q_0| \|\omega\| \text{sgn}(s) - \omega^\times J \omega \right) \\
 &\quad + \frac{k_2}{2} q_0 s^T J \omega + \frac{k_2}{2} s^T J q_v^\times \omega \\
 &= -k_d s^T s - k_I s^T v + c s^T \left(s + \left(\frac{l_2}{c} - k_2 \right) q_v \right)^\times r_3 - \frac{k_2}{2} \lambda_1 |q_0| \|\omega\| s^T \text{sgn}(s) \\
 &\quad - k_2 q_v^T \omega^\times J \omega + \frac{k_2}{2} q_0 s^T J \omega + \frac{k_2}{2} q_v^T \omega^\times J s \\
 &= -k_d s^T s - k_I s^T v + (c k_2 - l_2) q_v^\times r_3 - \frac{k_2}{2} \lambda_1 |q_0| \|\omega\| s^T \text{sgn}(s) \\
 &\quad - k_2 q_v^T \omega^\times J \omega + \frac{k_2}{2} q_0 s^T J \omega + \frac{k_2}{2} q_v^T \omega^\times J s \\
 &\leq -k_d s^T s - k_I s^T v
 \end{aligned} \tag{3-31}$$

考虑到随着状态的收敛有 $v \rightarrow 0$ ，从而假设

$$\|s\| \geq \rho \|v\| \tag{3-32}$$

从而选择控制参数满足

$$k_d \geq \rho k_I \tag{3-33}$$

即可得到 $\dot{V}_3 \leq 0$ ，从而有滑模状态 s 一致渐近稳定。性质 2 证毕。

值得注意的是在上述证明中用到了三维向量的性质

$$\sum |r_i| \geq \|r\| \tag{3-34}$$

由性质 2 可以看到，通过选择合适的参数 α 与 β ，即可使得系统尽可能的停留在匀速运动阶段，这样既可以节省控制力矩，也可以维持较快的四元数收敛速率。

最后对性质 3 进行证明。首先需要给出一个引理。

引理 3： 对于系统

$$J \dot{\omega} + \omega^\times J \omega = u + d \tag{3-35}$$

若控制器结构为

$$u = -k_d \omega - k_p q_v - \bar{d} \text{sgn}(\omega) \tag{3-36}$$

同时姿态角速度初值满足 $\|\omega_i\| \leq (k_p \lambda_m(J)) / (k_d \lambda_M(J))$ ，且 $\bar{d} \geq \|d\|$ ，则角速度范数满足

$$\|\omega\| \leq \frac{k_p}{k_d} \frac{\lambda_M(J)}{\lambda_m(J)} \quad (3-37)$$

证明：定义 ρ 如下

$$\rho = \omega^T J \omega \quad (3-38)$$

从而有

$$\sqrt{\lambda_m(J)} \|\omega\| \leq \rho^{1/2} \leq \sqrt{\lambda_M(J)} \|\omega\| \quad (3-39)$$

对其求导并带入控制器(3-36)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= 2\omega^T J \dot{\omega} \\ &= 2\omega^T (-k_d \omega - k_p q_v - \bar{d} \operatorname{sgn}(\omega) + d + \omega^\times r - \omega^\times J \omega) \\ &\leq -2k_d \omega^T \omega - 2k_p \omega^T q_v \\ &\leq -2k_d \frac{\rho}{\lambda_m(J)} + 2k_p \frac{\rho^{1/2}}{\sqrt{\lambda_M(J)}} \end{aligned} \quad (3-40)$$

考虑系统

$$\dot{\rho} = -2k_d \frac{\rho}{\lambda_m(J)} + 2k_p \frac{\rho^{1/2}}{\sqrt{\lambda_M(J)}} \quad (3-41)$$

其平衡点为

$$\rho^{1/2} = \frac{k_d}{k_p} \frac{\lambda_M(J)}{\sqrt{\lambda_m(J)}} \quad (3-42)$$

进而若系统(3-41)初始状态小于其平衡点，则恒有

$$\rho^{1/2} \leq \frac{k_d}{k_p} \frac{\lambda_M(J)}{\sqrt{\lambda_m(J)}} \quad (3-43)$$

注意到性质(3-39)，从而有

$$\|\omega\| \leq \frac{k_p}{k_d} \frac{\lambda_M(J)}{\lambda_m(J)} \quad (3-44)$$

从而引理 3 证毕。

考虑到前文所证明的性质 2，在控制器的第二阶段($\|q_v\| \geq \alpha$ 时)与第三阶段($\beta > \|q_v\|$ 时)，系统已进入滑模面的减速阶段，因此可以认为在这两个阶段不会发生角速度饱和的情况。在控制器的第一阶段($\|q_v\| \geq \alpha$)，控制器(3-1)的结构与引理 3 中的(3-36)完全相同，若系统姿态角速度上界为 $\bar{\omega}$ ，从而由引理 3，只需选择控制参数满足

$$\frac{k_1}{\alpha} \frac{\lambda_M(J)}{\lambda_m(J)} \leq \bar{\omega} \quad (3-45)$$

即可保证卫星的姿态角速度不超过其上界，性质 3 证毕。

值得注意的是，(3-45)给出的约束是对控制参数的严格约束，该约束的本质是选择较小的 k_1 使得系统在匀速段的角速度远离系统上界，但代价则是姿态四元数的收敛速率降低，这与本节提出的控制器(3-1)提升系统收敛速率稳的目的不符。考虑到在大多数情形下， ρ 与 $\|\omega\|$ 正相关，即可以认为 $\dot{\rho} \leq 0$ 时角速度范数不再增加，基于此，同时考察系统(3-41)，只需满足

$$\rho^{1/2} \geq \frac{k_p}{k_d} \frac{\lambda_m(J)}{\sqrt{\lambda_M(J)}} \quad (3-46)$$

即可使得 $\dot{\rho} \leq 0$ 。同时注意到

$$\rho^{1/2} \leq \sqrt{\lambda_M(J)} \|\omega\| \quad (3-47)$$

并带入控制器(3-1)可以得到

$$\frac{k_p}{k_d} \leq \frac{\|\omega\|}{\|q_v\|} \quad (3-48)$$

从而只需满足

$$k_1 \leq \bar{\omega} \quad (3-49)$$

即可使得当 $\|\omega\|$ 逼近时 $\bar{\omega}$ ，有 $\dot{\rho} \leq 0$ ，即角速度范数不再增加，从而角速度范数恒小于系统上界。可以看到，(3-45)给出的是严格的控制参数约束，而(3-49)给出的则是近似条件下的控制参数约束。

3.3 姿态跟踪 PID+控制器

与前文讨论的姿态镇定控制问题不同，本小节讨论的姿态跟踪控制问题所要实现的目标是使得系统状态沿着期望的动态轨迹运行，即设计控制器 u ，使得系统状态满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\omega(t), q_0(t), q_v(t)) = (\omega_d, q_{d0}, q_{dv})$ 。在本次研究中，假定跟踪目标为合作目标，即 ω_d 、 $\dot{\omega}_d$ 、 q_d 均为精确已知。

参考之前小节中设计 PID+控制器的思路，本小节提出的姿态跟踪 PID+控制器为

$$u = \begin{cases} \rho_1 u_1 + \tau_1, & \|q_{ev}\| \geq \alpha \\ \rho_2 u_2 + \tau_2, & \alpha > \|q_{ev}\| \geq \beta \\ \rho_3 u_3 + \tau_3, & \beta > \|q_{ev}\| \end{cases} \quad (3-50)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = -k_d \boldsymbol{\omega}_e - (k_1 k_d / \|\mathbf{q}_{ev}\|) \mathbf{q}_{ev} \\ \mathbf{u}_2 = -k_d \boldsymbol{\omega}_e - k_2 k_d \mathbf{q}_{ev} - \frac{k_2}{2} q_{e0} \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e \\ \mathbf{u}_3 = -k_d \boldsymbol{\omega}_e - k_2 k_d \mathbf{q}_{ev} - k_l \mathbf{v}_e - \frac{k_2}{2} q_{e0} \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e \end{cases} \quad (3-51)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}_1 = -\bar{d} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\omega}_e) + \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{r}_1 - \lambda \bar{\zeta} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\omega}_e) + \boldsymbol{\zeta} \\ \boldsymbol{\tau}_2 = -\frac{k_2}{2} \lambda q_{e0} \|\boldsymbol{\omega}_e\| \operatorname{sgn}(\mathbf{s}_e) - \bar{d} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}_e) + \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{r}_2 - \lambda \bar{\zeta} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}_e) + \boldsymbol{\zeta} \\ \boldsymbol{\tau}_3 = -\frac{k_2}{2} \lambda q_{e0} \|\boldsymbol{\omega}_e\| \operatorname{sgn}(\mathbf{s}_e) - \bar{d} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}_e) + \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{r}_3 - \lambda \bar{\zeta} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}_e) + \boldsymbol{\zeta} \end{cases} \quad (3-52)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\zeta} = \hat{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d + (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \hat{\mathbf{J}} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \\ \bar{\zeta} = \|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + \|\boldsymbol{\omega}_e\| \|\boldsymbol{\omega}_d\| + \|\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d\|^2 \end{cases} \quad (3-53)$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{J}} \mathbf{s}_e - \frac{1}{2} \cot \frac{\varphi_e}{2} \mathbf{e}_e^\times \hat{\mathbf{J}} \mathbf{s}_e - \frac{1}{2} \lambda \left(1 + \cot \frac{\varphi_e}{2} \right) \|\mathbf{s}_e\| \operatorname{sgn} \left((\mathbf{e}_e^T \boldsymbol{\omega}_e^\times)^T \right) \\ \mathbf{r}_2 = -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{J}} \mathbf{s}_e - \frac{1}{2} \lambda \|\mathbf{s}_e\| \operatorname{sgn} \left((\mathbf{q}_{ev}^T \boldsymbol{\omega}_e^\times)^T \right) \\ \mathbf{r}_3 = -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{J}} \mathbf{s}_e - \frac{1}{2} \lambda \|\mathbf{s}_e\| \operatorname{sgn} \left((\mathbf{q}_{ev}^T \boldsymbol{\omega}_e^\times)^T \right) \end{cases} \quad (3-54)$$

其中 \bar{d} 为正常数且满足 $\bar{d} \geq \|\mathbf{d}\|$ ，同时假定 $q_{e0} \geq 0$ 。与前文姿态镇定控制器相类似，积分项 \mathbf{v}_e 与滑模面 \mathbf{s}_e 定义如下

$$\dot{\mathbf{v}}_e = \begin{cases} 0, & \beta \leq \|\mathbf{q}_{ev}\| \\ c_1 \boldsymbol{\omega}_e + c_2 \mathbf{q}_{ev} - \frac{1}{2} c_3 \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e, & \beta > \|\mathbf{q}_{ev}\| \end{cases} \quad (3-55)$$

$$\mathbf{s}_e = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_e + k_1 \mathbf{e}_e, & \|\mathbf{q}_{ev}\| \geq \alpha \\ \boldsymbol{\omega}_e + k_2 \mathbf{q}_{ev}, & \|\mathbf{q}_{ev}\| < \alpha \end{cases} \quad (3-56)$$

为使得滑模面切换点处角速度不发生突变， k_1 、 k_2 应满足

$$k_2 = k_1 / \alpha \quad (3-57)$$

在(3-52)与(3-54)中 λ 为正常数且满足

$$\lambda \geq \lambda(\tilde{\mathbf{J}}) \quad (3-58)$$

(3-50)中 ρ_i 为控制增益因子，其目的是使得控制力矩不超过系统上界， ρ_i 定义如下

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{-\mathbf{u}_i^T \boldsymbol{\tau}_i + \sqrt{(\mathbf{u}_i^T \boldsymbol{\tau}_i)^2 + \|\mathbf{u}_i\|^2 (\bar{u}^2 - \|\boldsymbol{\tau}_i\|^2)}}{\|\mathbf{u}_i\|^2}, & \|\mathbf{u}\| \geq \bar{u} \\ 1, & \|\mathbf{u}\| < \bar{u} \end{cases} \quad (3-59)$$

其中 \bar{u} 为控制力矩上界。在(3-50)到(3-58)中, $k_1, k_2, k_l, k_d, k_p, \alpha, \beta, c, c_1, c_2, c_3, l_2$ 均为待定正常数。

可以看到, 本小节中姿态跟踪控制器(3-50)与前文 3.2 小节中姿态镇定控制器(3-1)的思路基本相同, 即在系统状态远离平衡点时只施加 PD+控制使得系统沿着滑模面先匀速、后减速运动, 随着系统状态逼近平衡点引入积分项以提升系统的稳态精度。可以看到控制器(3-50)与前文中控制器(3-1)具有类似的结构, 但主要不同之处在于 $\boldsymbol{\tau}_i$ 中 $\bar{\zeta}$ 、 ζ 项与 \mathbf{s}_e 的符号函数项, 这主要是由误差角速度模型中 $\boldsymbol{\omega}_d$ 、 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_d$ 项所导致的。

控制器(3-50)具有如下性质: 在选择合适控制参数的条件下, 控制器(3-50)作用下的系统(2-28)、(2-29)一致渐近稳定, 且系统状态能够沿着滑模面(3-56)运动, 同时通过选择合适的控制参数, 能够保证系统角速度与控制力矩不超过系统上界。接下来对控制器(3-50)的上述性质进行证明。

3.3.1 控制器稳定性证明

为证明系统(2-28)、(2-29)在控制器(3-50)作用下的稳定性, 首先需要给出三个引理。

引理 4: 对于任意的正常数 k_d 、 k_p 和三维向量 \mathbf{r} , 系统(2-28)、(2-29)在如下结构的控制器作用下一致渐近稳定。

$$\mathbf{u} = -k_d \boldsymbol{\omega}_e - k_p \mathbf{q}_{ev} + \boldsymbol{\omega}_e^* \mathbf{r} - \bar{d} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\omega}_e) - \lambda \bar{\zeta} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\omega}_e) + \zeta \quad (3-60)$$

其中 $\bar{\zeta}$ 与 ζ 的定义在(3-53)中给出。

证明: 选取 Lyapunov 函数如下

$$V_1 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e + 2k_p (1 - q_{e0}) \quad (3-61)$$

对其求导并带入控制器(3-60)可以得到

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &= \omega_e^T J \dot{\omega}_e - 2k_p \dot{q}_{e0} \\
 &= \omega_e^T \left(u + d - JR\dot{\omega}_d + J\omega_e^* R\omega_d - (\omega_e + R\omega_d)^* J(\omega_e + R\omega_d) \right) + k_p \omega_e^T q_{ev} \\
 &\leq -k_d \omega_e^T \omega_e + \omega_e^T d - \bar{d} \|\omega_e\| - \omega_e^T JR\dot{\omega}_d - \lambda \|\dot{\omega}_d\| \|\omega_e\| + \omega_e^T J\omega_e^* R\omega_d - \lambda \|\omega_e\|^2 \|\omega_d\| \quad (3-62) \\
 &\quad - \omega_e^T (\omega_e + R\omega_d)^* J(\omega_e + R\omega_d) - \lambda \|\omega_e\| \|\omega_e + R\omega_d\|^2 + \omega_e^T \omega_e^* r \\
 &\leq -k_d \omega_e^T \omega_e \leq 0
 \end{aligned}$$

从而 $\omega_e \rightarrow 0$ ，进而 $\dot{\omega}_e \rightarrow 0$ ，从而有 $q_{ev} \rightarrow 0$ ，由 LaSalle 最大不变集原理，系统(2-28)、(2-29)在控制器(3-60)作用下一致渐近稳定。引理 4 证毕。

引理 5：通过选择合适的控制参数，系统(2-28)、(2-29)在如下结构的控制器作用下一致渐近稳定。

$$u = -k_d \omega_e - k_p q_{ev} + \omega_e^* r - \bar{d} \operatorname{sgn}(s_e) - \lambda \bar{\zeta} \operatorname{sgn}(s_e) + \zeta \quad (3-63)$$

$$s_e = \omega_e + k q_{ev} \quad (3-64)$$

其中 $\bar{\zeta}$ 与 ζ 的定义在(3-53)中给出， k_d 、 k_p 、 k 为正常数。

证明：选择 Lyapunov 函数如下

$$V_2 = \frac{1}{2} \omega_e^T J \omega_e + 2(k_p + k k_d)(1 - q_{e0}) + k q_{ev}^T J \omega_e \quad (3-65)$$

注意到

$$1 - q_{e0} \geq \frac{1}{2}(1 - q_{e0}^2) = \frac{1}{2} q_{ev}^T q_{ev}, \forall q_0 \in [-1, 1] \quad (3-66)$$

从而有

$$\begin{aligned}
 V_2 &\geq \frac{1}{2} \omega_e^T J \omega_e + (k_p + k k_d) q_{ev}^T q_{ev} + k q_{ev}^T J \omega_e \\
 &\geq \begin{bmatrix} \omega_e^T & q_{ev}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \lambda_m(J) & \frac{1}{2} k \lambda_M(J) \\ \frac{1}{2} k \lambda_M(J) & k_p + k k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_e \\ q_{ev} \end{bmatrix} \quad (3-67)
 \end{aligned}$$

从而只需满足如下不等式即可保证 V_2 正定。

$$\lambda_m(J)(k_p + k k_d) > \frac{1}{2} k^2 \lambda_M^2(J) \quad (3-68)$$

计算 V_2 的导数并带入控制器(3-63)可以得到

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2 &= \omega_e^T J \dot{\omega}_e - 2(k_p + k k_d) \dot{q}_{e0} + k q_{ev}^T J \dot{\omega}_e + k \omega_e^T J \dot{q}_{ev} \\
 &= (\omega_e + k q_{ev})^T J \dot{\omega}_e + (k_p + k k_d) q_{ev}^T \omega_e + k \omega_e^T J F_e \omega_e \\
 &\leq -\omega_e^T (k_d I_3 - k J) \omega_e - k k_p q_{ev}^T q_{ev} + s_e^T d - \bar{d} \|s_e\| + s_e^T \tilde{J} R \dot{\omega}_d - \lambda \|s_e\| \|\dot{\omega}_d\| \\
 &\quad - s_e^T \tilde{J} \omega_e^\times R \omega_d - \lambda \|s_e\| \|\omega_e\| \|\omega_d\| + s_e^T (\omega_e + R \omega_d)^\times \tilde{J} (\omega_e + R \omega_d) \\
 &\quad - \lambda \|s_e\| \|\omega_e + R \omega_d\|^2 + (\omega_e + k q_{ev})^T \omega_e^\times r \\
 &\leq -\omega_e^T (k_d I_3 - k J) \omega_e - k k_p q_{ev}^T q_{ev} - k q_{ev}^T \omega_e^\times r \\
 &\leq -\begin{bmatrix} \omega_e^T & q_{ev}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_d - k \lambda_m(J) & \frac{1}{2} k \|r\| \\ \frac{1}{2} k \|r\| & k k_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_e \\ q_{ev} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3-69}$$

选择参数使得

$$(k_d - k \lambda_m(J)) k_p > \frac{1}{4} k \|r\|^2 \tag{3-70}$$

即可保证 $\dot{V}_2 \leq 0$ ，从而系统(2-28)、(2-29)在控制器(3-63)作用下一致渐近稳定。引理 5 证毕。

引理 6： 通过选择合适的控制参数，系统(2-28)、(2-29)在如下结构的控制器作用下一致渐近稳定。

$$u = -k_d \omega_e - k_p q_{ev} - k_I v_e + \omega_e^\times r - \bar{d} \operatorname{sgn}(s_e) - \lambda \bar{\zeta} \operatorname{sgn}(s_e) + \zeta \tag{3-71}$$

$$s_e = \omega_e + k q_{ev} \tag{3-72}$$

$$\dot{v}_e = c_1 \omega_e + c_2 q_{ev} - \frac{1}{2} c_3 F_e \omega_e \tag{3-73}$$

其中 $\bar{\zeta}$ 与 ζ 的定义在(3-53)中给出， $k, k_p, k_I, k_d, c_1, c_2, c_3$ 均为正常数。

证明： 选择 Lyapunov 函数如下

$$V_3 = 2l_1(1 - q_{e0}) + \frac{1}{2} \omega_e^T J \omega_e + k q_{ev}^T J \omega_e + l_2 (v_e + c_3 q_{ev})^T (v_e + c_3 q_{ev}) \tag{3-74}$$

其中 l_1, l_2 为正常数。

注意到

$$1 - q_{e0} \geq \frac{1}{2} (1 - q_{e0}^2) = \frac{1}{2} q_{ev}^T q_{ev}, \forall q_0 \in [-1, 1] \tag{3-75}$$

从而有

$$V_3 \geq l_1 \mathbf{q}_{ev}^T \mathbf{q}_{ev} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e + k \mathbf{q}_{ev}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e \geq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_e^T & \mathbf{q}_{ev}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \lambda_m(\mathbf{J}) & \frac{1}{2} k \lambda_M(\mathbf{J}) \\ \frac{1}{2} k \lambda_M(\mathbf{J}) & l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_e \\ \mathbf{q}_{ev} \end{bmatrix} \quad (3-76)$$

从而若有

$$l_1 \lambda_m(\mathbf{J}) > \frac{1}{2} k^2 \lambda_M^2(\mathbf{J}) \quad (3-77)$$

即可保证 V_3 正定。

计算 V_3 的导数可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= -2l_1 \dot{\mathbf{q}}_{ev} + \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e + k \mathbf{q}_{ev}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_e + k \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}_{ev} + 2l_2 (\mathbf{v}_e + c_3 \mathbf{q}_{ev})^T (\dot{\mathbf{v}}_e + c_3 \dot{\mathbf{q}}_{ev}) \\ &= (\boldsymbol{\omega}_e + k \mathbf{q}_{ev})^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_e + l_1 \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{q}_{ev} + k \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{J} \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e \\ &\quad + 2l_2 (\mathbf{v}_e + c_3 \mathbf{q}_{ev})^T \left(c_1 \boldsymbol{\omega}_e + c_2 \mathbf{q}_{ev} - \frac{1}{2} c_3 \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e + \frac{1}{2} c_3 \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e \right) \\ &= \mathbf{s}_e^T \left(\mathbf{u} + \mathbf{d} - \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^* \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^* \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \right) \\ &\quad + l_1 \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{q}_{ev} + k \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{J} \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e + 2l_2 (\mathbf{v}_e + c_3 \mathbf{q}_{ev})^T (c_1 \boldsymbol{\omega}_e + c_2 \mathbf{q}_{ev}) \end{aligned} \quad (3-78)$$

带入控制器(3-71)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &\leq \mathbf{s}_e^T \mathbf{d} - \bar{d} \|\mathbf{s}_e\| - \mathbf{s}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \lambda \|\mathbf{s}_e\| \|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + \mathbf{s}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^* \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - \lambda \|\mathbf{s}_e\| \|\boldsymbol{\omega}_e\| \|\boldsymbol{\omega}_d\| \\ &\quad - \mathbf{s}_e^T (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^* \tilde{\mathbf{J}} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) - \lambda \|\mathbf{s}_e\| \|\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d\|^2 - \boldsymbol{\omega}_e^T (k_d \mathbf{I}_3 - k \mathbf{J} \mathbf{F}_e) \boldsymbol{\omega}_e \\ &\quad + (2l_2 c_1 c_3 + l_1 - k_p - k k_d) \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{q}_{ev} + (2l_2 c_1 - k_I) \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{v}_e + (2l_2 c_2 - k k_I) \mathbf{q}_{ev}^T \mathbf{v}_e \\ &\quad - (k k_p - 2l_2 c_2 c_3) \mathbf{q}_{ev}^T \mathbf{q}_{ev} + \mathbf{s}_e^T \boldsymbol{\omega}_e^* \mathbf{r} \\ &\leq -\boldsymbol{\omega}_e^T (k_d \mathbf{I}_3 - k \mathbf{J} \mathbf{F}_e) \boldsymbol{\omega}_e - (k k_p - 2l_2 c_2 c_3) \mathbf{q}_{ev}^T \mathbf{q}_{ev} - k \|\mathbf{r}\| \mathbf{q}_{ev}^T \boldsymbol{\omega}_e \\ &\quad + (2l_2 c_1 c_3 + l_1 - k_p - k k_d) \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{q}_{ev} + (2l_2 c_1 - k_I) \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{v}_e + (2l_2 c_2 - k k_I) \mathbf{q}_{ev}^T \mathbf{v}_e \end{aligned} \quad (3-79)$$

选择参数满足

$$2l_2 c_1 c_3 + l_1 - k_p - k k_d = 2l_2 c_1 - k_I = 2l_2 c_2 - k k_I = 0 \quad (3-80)$$

(3-79)可以变形为

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &\leq -\boldsymbol{\omega}_e^T (k_d \mathbf{I}_3 - k \mathbf{J} \mathbf{F}_e) \boldsymbol{\omega}_e - (k k_p - 2l_2 c_2 c_3) \mathbf{q}_{ev}^T \mathbf{q}_{ev} - k \|\mathbf{r}\| \mathbf{q}_{ev}^T \boldsymbol{\omega}_e \\ &\leq -\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_e^T & \mathbf{q}_{ev}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_d - k \lambda_M(\mathbf{J}) & \frac{1}{2} k \|\mathbf{r}\| \\ \frac{1}{2} k \|\mathbf{r}\| & k k_p - 2l_2 c_2 c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_e \\ \mathbf{q}_{ev} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-81)$$

基于(3-81)，选择控制参数满足

$$(k_d - k\lambda_M(\mathbf{J}))(kk_p - 2l_2c_2c_3) - \frac{1}{4}k^2\|\mathbf{r}\|^2 > 0 \quad (3-82)$$

即可保证 $\dot{V}_3 \leq 0$ ，从而系统(2-28)、(2-29)在控制器(3-71)作用下一致渐近稳定。引理 6 证毕。

由引理 4、5、6 的证明可以看到，引理 4、5 给出的是姿态跟踪控制问题中 PD+控制器的稳定性证明，而引理 6 给出的则是姿态跟踪控制问题中 PID+控制器稳定性证明，这三个引理分别对应着控制器(3-50)的三个阶段。

控制器(3-50)中第一阶段($\|\mathbf{q}_{ev}\| \geq \alpha$)的结构与引理 4 中控制器(3-60)结构完全相同，同时满足引理 4 中所有约束条件，从而系统在控制器(3-50)的第一阶段作用下一致渐近稳定。

而控制器(3-50)中第二阶段($\alpha > \|\mathbf{q}_{ev}\| \geq \beta$)的结构与引理 5 中控制器(3-63)相类似，所不同的是控制器(3-50)中 τ_2 多出了第一项，考虑到

$$\left\| -\frac{k_2}{2}\lambda_{q_{e0}}\|\omega_e\|\mathbf{sgn}(s_e) \right\| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}k_2\lambda\|\omega_e\| \quad (3-83)$$

从而控制器(3-50)在第二阶段的微分项可以视为

$$k'_d = k_d + \frac{k_2}{2}\alpha\lambda_m(\hat{\mathbf{J}}) - \frac{\sqrt{3}}{2}k_2\lambda \quad (3-84)$$

考虑到引理 5 中的约束条件，同时注意到

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_2\| &= \left\| -\frac{1}{2}\hat{\mathbf{J}}s_e - \frac{1}{2}\lambda\|s_e\|\mathbf{sgn}\left((\mathbf{q}_{ev}^T\omega_e^\times)^T\right) \right\| \leq \frac{1}{2}(\sqrt{3}\lambda + \lambda_M(\hat{\mathbf{J}}))\|s_e\| \\ &\leq \frac{1}{2}(\sqrt{3}\lambda + \lambda_M(\hat{\mathbf{J}}))(\bar{\omega} + k_2) \end{aligned} \quad (3-85)$$

其中 $\bar{\omega}$ 为系统角速度上界，因此选择系统参数以满足

$$\lambda_m(\mathbf{J})(k_p + k_2k'_d) > \frac{1}{2}k_2^2\lambda_M^2(\mathbf{J}) \quad (3-86)$$

$$(k'_d - k_2\lambda_m(\mathbf{J}))k_p > \frac{1}{16}k_2\left(\sqrt{3}\lambda + \lambda_M(\hat{\mathbf{J}})\right)^2(\bar{\omega} + k_2)^2 \quad (3-87)$$

即可使得控制器(3-50)的第二阶段满足引理 5 中的约束条件，从而系统在控制器(3-50)第二阶段的作用下一致渐近稳定。

控制器(3-50)的第三阶段($\beta > \|\mathbf{q}_{ev}\|$)的结构与引理 6 中控制器(3-71)结构类似，所不同的是控制器(3-50)在第三阶段 τ_3 中多出了第一项，与前文类似的，考虑到性质(3-83)，控制器(3-50)在第三阶段的微分项同样可以视为

$$k'_d = k_d + \frac{k_2}{2} \alpha \lambda_m(\hat{\mathbf{J}}) - \frac{\sqrt{3}}{2} k_2 \lambda \quad (3-88)$$

注意到引理 6 中对于系统稳定性的约束条件，同时考虑到 \mathbf{r}_3 与 \mathbf{r}_2 完全相同，从而选择合适控制参数使得

$$l_1 \lambda_m(\mathbf{J}) > \frac{1}{2} k_2^2 \lambda_M^2(\mathbf{J}) \quad (3-89)$$

$$2l_2 c_1 c_3 + l_1 - k_p - k_2 k'_d = 2l_2 c_1 - k_I = 2l_2 c_2 - k_2 k_I = 0 \quad (3-90)$$

$$(k_d - k \lambda_M(\mathbf{J}))(k k_p - 2l_2 c_2 c_3) > \frac{1}{16} k_2^2 \left(\sqrt{3} \lambda + \lambda_M(\hat{\mathbf{J}}) \right)^2 (\bar{\omega} + k_2)^2 \quad (3-91)$$

即可使得控制器(3-50)的第三阶段满足引理 6 中的约束条件，从而系统在控制器(3-50)第三阶段的作用下一致渐近稳定。

基于上述讨论，系统(2-28)、(2-29)在控制器(3-50)的作用下一致渐近稳定。系统稳定性证毕。

3.3.2 控制器性能分析

如前文所述，控制器(3-50)具有性质：1.控制力矩范数不超过系统上界；2.系统能够沿滑模面(3-56)运动；3.在选择合适控制参数的情况下卫星姿态角速度有界；在本小节中将对这三条性质给出说明与证明。

与前文的讨论类似，性质 1 较为明显，该性质可以由增益因子 ρ_i 的定义看出。若系统控制力矩上界为 \bar{u} ，选择合适的控制参数使得 $\|\boldsymbol{\tau}_i\| \leq \bar{u}$ ， ρ_i 的本质是当控制力矩 \mathbf{u} 范数不超过系统上界时，维持原控制器不变，而当 \mathbf{u} 范数超过系统上界时，对控制器(3-50)中的微分项、比例项、积分项成比例缩小使得 $\|\mathbf{u}\| = \bar{u}$ 。值得注意的是，控制器(3-50)中 $\boldsymbol{\tau}_i$ 项相比较于控制器(3-1)中 $\boldsymbol{\tau}_i$ 项更为复杂，因此参数的选取也应更加谨慎。

接下来证明性质 2。与前文类似的，选取 Lyapunov 函数如下

$$V_4 = \frac{1}{2} \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{s}_e \quad (3-92)$$

在控制器(3-50)的 $\|\mathbf{q}_{ev}\| \geq \alpha$ 阶段对 V_4 求导，考虑到系统状态远离平衡点时比例项、微分项远大于干扰项与控制器中描述转动惯量不确定性的 $\bar{\zeta}$ 项，从而忽略这两项，并带入控制器(3-50)，可以得到

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_4 &= \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{s}}_e = \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_e + k_1 \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{e}}_e \\
 &= \mathbf{s}_e^T \left(\mathbf{u} + \mathbf{d} - \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} k_1 \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \left(\mathbf{I}_3 - \cot \frac{\varphi_e}{2} \mathbf{e}_e^\times \right) \mathbf{e}_e^\times \boldsymbol{\omega}_e \\
 &\approx -k_d \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_e^T \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{r}_1 + \frac{1}{2} k_1 \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{e}_e^\times \boldsymbol{\omega}_e - \frac{1}{2} k_1 \cot \frac{\varphi_e}{2} \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{e}_e^\times \mathbf{e}_e^\times \boldsymbol{\omega}_e \\
 &= -k_d \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e + k_1 \mathbf{e}_e^T \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{r}_1 + \frac{1}{2} k_1 \mathbf{e}_e^T \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{J} \mathbf{s}_e + \frac{1}{2} k_1 \cot \frac{\varphi_e}{2} \mathbf{e}_e^T \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{e}_e^\times \mathbf{J} \mathbf{s}_e \\
 &\leq -k_d \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e + \frac{1}{2} k_1 \mathbf{e}_e^T \boldsymbol{\omega}_e^\times \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{s}_e - \frac{1}{2} k_1 \lambda \|\mathbf{s}_e\| \|\mathbf{e}_e^T \boldsymbol{\omega}_e^\times\| + \frac{1}{2} k_1 \cot \frac{\varphi_e}{2} \mathbf{e}_e^T \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{e}_e^\times \mathbf{J} \mathbf{s}_e \\
 &\quad - \frac{1}{2} k_1 \lambda \cot \frac{\varphi_e}{2} \|\mathbf{s}_e\| \|\mathbf{e}_e^T \boldsymbol{\omega}_e^\times\| \\
 &\leq -k_d \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e \leq 0
 \end{aligned} \tag{3-93}$$

在控制器(3-50)的 $\alpha > \|\mathbf{q}_{ev}\| \geq \beta$ 阶段对 V_4 求导，并带入控制器(3-50)，可以得到

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_4 &= \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_e + k_2 \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}_{ev} \\
 &= \mathbf{s}_e^T \left(\mathbf{u} + \mathbf{d} - \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} k_2 \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} (\mathbf{q}_{e0} \mathbf{I}_3 + \mathbf{q}_{ev}^\times) \boldsymbol{\omega}_e \\
 &= -k_d \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_e^T \mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}} \mathbf{s}_e^T \mathbf{sgn}(\mathbf{s}_e) + \frac{1}{2} k_2 \mathbf{q}_{e0} \mathbf{s}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e - \frac{1}{2} k_2 \lambda \mathbf{q}_{e0} \|\boldsymbol{\omega}_e\| \mathbf{s}_e^T \mathbf{sgn}(\mathbf{s}_e) \\
 &\quad + \mathbf{s}_e^T \left(-\tilde{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \tilde{\mathbf{J}} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \right) - \bar{\boldsymbol{\zeta}} \mathbf{s}_e^T \mathbf{sgn}(\mathbf{s}_e) \\
 &\quad + \frac{1}{2} k_2 \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{q}_{ev}^\times \boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{s}_e^T \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{r}_2 \\
 &\leq -k_d \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e + \frac{1}{2} k_2 \mathbf{q}_{ev}^T \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{J} \mathbf{s}_e + k_2 \mathbf{q}_{ev}^T \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{r}_2 \\
 &\leq -k_d \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e + \frac{1}{2} k_2 \mathbf{q}_{ev}^T \boldsymbol{\omega}_e^\times \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{s}_e - \frac{1}{2} k_2 \lambda \|\mathbf{s}_e\| \|\mathbf{q}_{ev}^T \boldsymbol{\omega}_e^\times\| \\
 &\leq -k_d \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e \leq 0
 \end{aligned} \tag{3-94}$$

在控制器(3-50)的 $\beta > \|\mathbf{q}_{ev}\|$ 阶段对 V_4 求导，并带入控制器(3-50)，可以得到

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_4 &= \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_e + k_2 \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}_{ev} \\
 &= \mathbf{s}_e^T \left(\mathbf{u} + \mathbf{d} - \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^* \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} k_2 \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} (q_{e0} \mathbf{I}_3 + \mathbf{q}_{ev}^\times) \boldsymbol{\omega}_e \\
 &= -k_d \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e - k_I \mathbf{s}_e^T \mathbf{v}_e + \mathbf{s}_e^T \mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}} \mathbf{s}_e^T \text{sgn}(\mathbf{s}_e) + \frac{1}{2} k_2 q_{e0} \mathbf{s}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e \\
 &\quad + \mathbf{s}_e^T \left(-\tilde{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^* \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \tilde{\mathbf{J}} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \right) - \bar{\boldsymbol{\zeta}} \mathbf{s}_e^T \text{sgn}(\mathbf{s}_e) \quad (3-95) \\
 &\quad + \frac{1}{2} k_2 \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{q}_{ev}^\times \boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{s}_e^T \boldsymbol{\omega}_e^* \mathbf{r}_2 - \frac{1}{2} k_2 \lambda q_{e0} \|\boldsymbol{\omega}_e\| \mathbf{s}_e^T \text{sgn}(\mathbf{s}_e) \\
 &\leq -k_d \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e - k_I \mathbf{s}_e^T \mathbf{v}_e + \frac{1}{2} k_2 \mathbf{q}_{ev}^T \boldsymbol{\omega}_e^* \mathbf{J} \mathbf{s}_e + k_2 \mathbf{q}_{ev}^T \boldsymbol{\omega}_e^* \mathbf{r}_2 \\
 &\leq -k_d \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e + \frac{1}{2} k_2 \mathbf{q}_{ev}^T \boldsymbol{\omega}_e^* \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{s}_e - \frac{1}{2} k_2 \lambda \|\mathbf{s}_e\| \|\mathbf{q}_{ev}^T \boldsymbol{\omega}_e^*\| \\
 &\leq -k_d \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e - k_I \mathbf{s}_e^T \mathbf{v}_e
 \end{aligned}$$

考虑到随着状态的收敛有 $\mathbf{v}_e \rightarrow \mathbf{0}$ ，从而假设

$$\|\mathbf{s}_e\| \geq \rho \|\mathbf{s}_e\| \quad (3-96)$$

选择控制参数满足

$$k_d \geq \rho k_I \quad (3-97)$$

即可保证 $\dot{V}_4 \leq 0$ 。

由(3-93)、(3-94)、(3-95)可以得到滑模状态 \mathbf{s}_e 一致渐近稳定。从而性质 2 证毕。

接下来证明性质 3。首先需要给出一个引理。

引理 7： 对于系统

$$\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_e + \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^* \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d + (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) = \mathbf{u} + \mathbf{d} \quad (3-98)$$

若控制器结构为

$$\mathbf{u} = -k_d \boldsymbol{\omega}_e - k_p \mathbf{q}_{ev} - \bar{\mathbf{d}} \text{sgn}(\boldsymbol{\omega}_e) + \boldsymbol{\omega}_e^* \mathbf{r} - \lambda \bar{\boldsymbol{\zeta}} \text{sgn}(\boldsymbol{\omega}_e) + \boldsymbol{\zeta} \quad (3-99)$$

其中 $\bar{\mathbf{d}} \geq \|\mathbf{d}\|$ ， $\bar{\boldsymbol{\zeta}}$ 与 $\boldsymbol{\zeta}$ 定义在(3-53)中给出， \mathbf{r} 为任意三维向量，同时误差角速度初值满足 $\|\boldsymbol{\omega}_{ei}\| \leq (k_p \lambda_m(\mathbf{J})) / (k_d \lambda_M(\mathbf{J}))$ ，则误差角速度范数恒满足

$$\|\boldsymbol{\omega}_e\| \leq \frac{k_p \lambda_M(\mathbf{J})}{k_d \lambda_m(\mathbf{J})} \quad (3-100)$$

证明： 定义 ρ_e 如下

$$\rho_e = \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e \quad (3-101)$$

从而有

$$\sqrt{\lambda_m(\mathbf{J})}\|\boldsymbol{\omega}_e\| \leq \rho_e^{1/2} \leq \sqrt{\lambda_M(\mathbf{J})}\|\boldsymbol{\omega}_e\| \quad (3-102)$$

对其求导并带入控制器(3-99)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_e &= 2\boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_e \\ &= 2\boldsymbol{\omega}_e^T \left(-k_d \boldsymbol{\omega}_e - k_p \mathbf{q}_{ev} - \bar{d} \text{sgn}(\boldsymbol{\omega}_e) + \mathbf{d} + \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{r} - \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d \right) \\ &\leq -2k_d \boldsymbol{\omega}_e^T \boldsymbol{\omega}_e - 2k_p \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{q}_{ev} \\ &\leq -2k_d \frac{\rho_e}{\lambda_m(\mathbf{J})} + 2k_p \frac{\rho_e^{1/2}}{\sqrt{\lambda_M(\mathbf{J})}} \end{aligned} \quad (3-103)$$

考虑系统

$$\dot{\rho}_e = -2k_d \frac{\rho_e}{\lambda_m(\mathbf{J})} + 2k_p \frac{\rho_e^{1/2}}{\sqrt{\lambda_M(\mathbf{J})}} \quad (3-104)$$

其平衡点为

$$\rho_e^{1/2} = \frac{k_d}{k_p} \frac{\lambda_M(\mathbf{J})}{\sqrt{\lambda_m(\mathbf{J})}} \quad (3-105)$$

进而若系统(3-104)初始状态小于其平衡点，则恒有

$$\rho_e^{1/2} \leq \frac{k_d}{k_p} \frac{\lambda_M(\mathbf{J})}{\sqrt{\lambda_m(\mathbf{J})}} \quad (3-106)$$

注意到性质(3-102)，从而有

$$\|\boldsymbol{\omega}_e\| \leq \frac{k_p}{k_d} \frac{\lambda_M(\mathbf{J})}{\lambda_m(\mathbf{J})} \quad (3-107)$$

从而引理 7 证毕。可以看到引理 7 与前文 3.2.2 小节中引理 3 的证明类似，结论也相同，所不同之处是误差角速度模型较为复杂，需要引入 $\bar{\zeta}$ 与 ζ 项消去动力学模型中 $\boldsymbol{\omega}_d$ 与 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_d$ 项。

由于姿态跟踪控制问题中系统状态为误差角速度，因此需要对误差角速度范数进行讨论以确保系统姿态角速度不超过其上限。若系统角速度上限为 $\bar{\omega}$ ，考虑到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d \\ \lambda(\mathbf{R}) &= 1 \end{aligned} \quad (3-108)$$

从而只需保证

$$\|\boldsymbol{\omega}_e\| \leq \bar{\omega} - \|\boldsymbol{\omega}_d\| = \bar{\omega}' \quad (3-109)$$

即可使得姿态角速度不超过系统上界。

考虑到系统状态沿着滑模面(3-56)收敛，同时当 $\|q_{ev}\| < \alpha$ 时系统进入滑模面的减速阶段，误差角速度范数开始以减小，因此可以认为在选择合适控制参数的前提下，此阶段不会发生角速度超过系统上界的情形，需要着重讨论的，是系统状态未进入滑模面(3-56)的情形与滑模面(3-56)的匀速阶段，亦即控制器(3-50)的第一阶段。在该阶段，控制器(3-50)的结构与引理7中控制器(3-99)结构完全相同，从而只需选择控制参数满足

$$\frac{k_1}{\alpha} \frac{\lambda_M(J)}{\lambda_m(J)} \leq \bar{\omega}' \quad (3-110)$$

即可使得卫星的姿态角速度不超过其上界，性质3证毕。

与前文类似的，(3-110)给出的是对于控制器参数的严格约束，其本质是减小比例项以实现角速度的约束，但这与控制器(3-50)提升收敛速率的目标不符。考虑到 ρ_e 的减小可以近似认为 $\|\omega_e\|$ 的减小，因此可以在误差角速度逼近其上界 $\bar{\omega}'$ 时使得 $\dot{\rho}_e \leq 0$ ，即可近似的认为系统姿态角速度不超过其上限。基于此，考虑系统(3-104)，只需满足

$$\rho_e^{1/2} \geq \frac{k_p}{k_d} \frac{\lambda_m(J)}{\sqrt{\lambda_M(J)}} \quad (3-111)$$

即可使得 $\dot{\rho}_e \leq 0$ 。同时注意到

$$\rho_e^{1/2} \leq \sqrt{\lambda_M(J)} \|\omega_e\| \quad (3-112)$$

并带入控制器(3-50)可以得到

$$\frac{k_p}{k_d} \leq \frac{\|\omega_e\|}{\|q_{ev}\|} \quad (3-113)$$

从而只需满足

$$k_1 \leq \bar{\omega}' \quad (3-114)$$

即可使得当 $\|\omega_e\|$ 逼近时 $\bar{\omega}'$ ，有 $\dot{\rho}_e \leq 0$ ，即误差角速度范数不再增加，从而角速度范数恒小于系统上界。可以看到，(3-110)给出的是严格的控制参数约束，而(3-114)给出的则是近似条件下的控制参数约束。

3.4 仿真与分析

3.4.1 姿态镇定控制器仿真

考虑到当前快速机动卫星的姿态角速度幅值一般在 $5-7^\circ/\text{s}$ 左右，可以认为当

前卫星的姿态角速度一般不会超过 0.1rad/s ，因此设置系统参数如下

$$\begin{aligned} J &= \text{diag}([20 \ 18 \ 15])\text{kg}\cdot\text{m}^2, \hat{J} = \text{diag}([21 \ 17 \ 14])\text{kg}\cdot\text{m}^2, \lambda = 3 \\ t_{\text{sample}} &= 0.5\text{s}, \bar{d} = 0.001\text{N}\cdot\text{m}, \bar{u} = 0.5\text{N}\cdot\text{m}, \bar{\omega} = 0.1\text{rad/s} \\ \omega(t_0) &= [0.07 \ -0.05 \ -0.04]^T \text{rad/s}, q(t_0) = [0.4 \ 0.2 \ 0.4 \ -0.8]^T \end{aligned} \quad (3-115)$$

为了更好的说明本次研究所提出控制器(3-1)的性能，在本节中以经典的 PID 控制器作为参照。同时为对比系统性能，在本次研究中假定角速度范数与四元数范数小于 5×10^{-3} 即可认为系统收敛。姿态镇定的经典 PID 控制器结构为

$$\begin{aligned} u &= -k_d \omega - k_p q_v - k_I v - \bar{d} \text{sgn}(c\omega + l_2 q_v) \\ \dot{v} &= c_1 \omega + c_2 q_v - \frac{1}{2} c_3 F \omega \end{aligned} \quad (3-116)$$

一般的，为提升系统收敛速率，应当选取较小的 α 使得系统尽可能长时间的停留在匀速段，同时出于稳定性的考虑，应当选取较大的 k_d 以及较小的 k_I 以满足系统稳定性的要求，因此选取仿真参数如下

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.2, \beta = 0.05, k_1 = 0.1, k_2 = 0.25 \\ k_d &= 20, k_p = 5, k_I = 1, c = 1, l_2 = 0.01, c_1 = 0.25, c_2 = 0.05, c_3 = 1 \end{aligned} \quad (3-117)$$

由(3-26)可以得到

$$l_3 = \frac{ck_I}{2c_1} = 2, l_1 = ck_p + l_2 k_d - 2c_1 c_3 l_3 = 4.2 \quad (3-118)$$

从而通过计算可以得到前文对于控制参数的约束(3-25)与(3-27)均得到满足。

姿态镇定 PID 控制器(3-116)的仿真曲线为

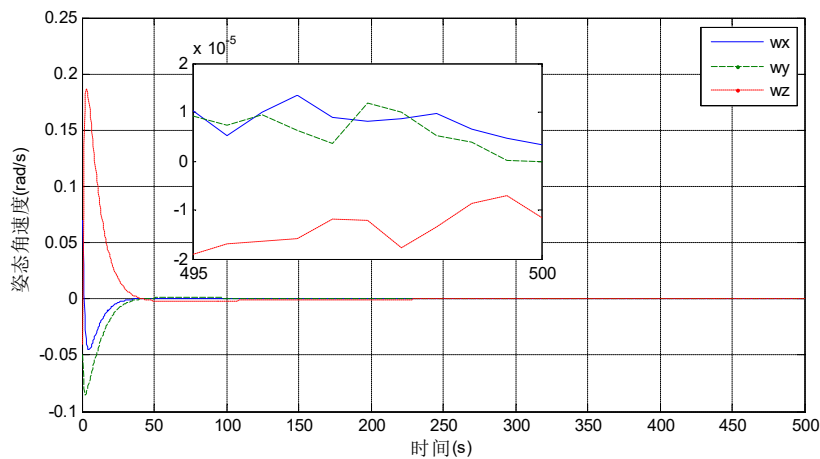


图 3-1 姿态角速度曲线

Fig. 3-1 Curve of angular velocity

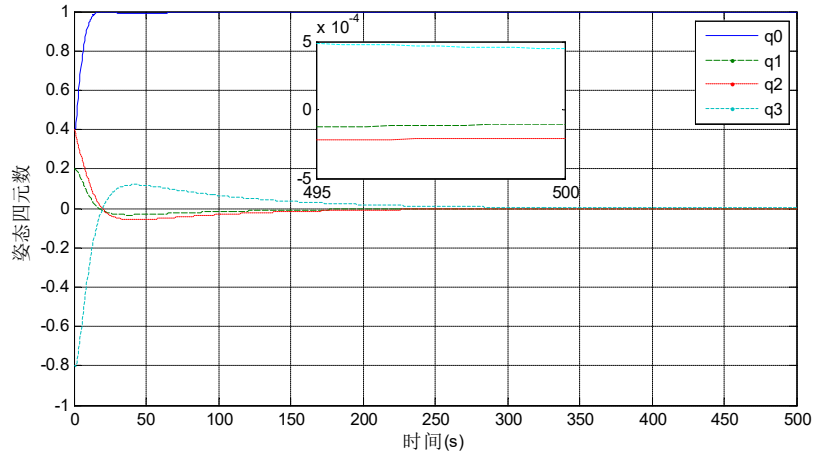


图 3-2 姿态四元数曲线

Fig. 3-2 Curve of attitude quaternion

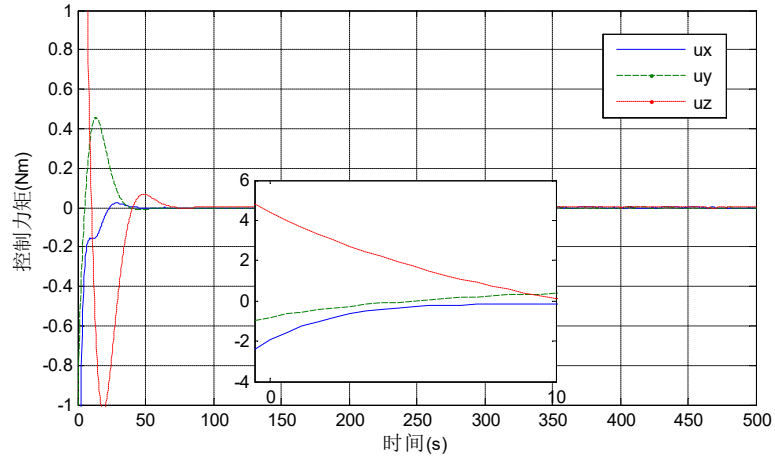


图 3-3 控制力矩曲线

Fig.3-3 Curve of control torque

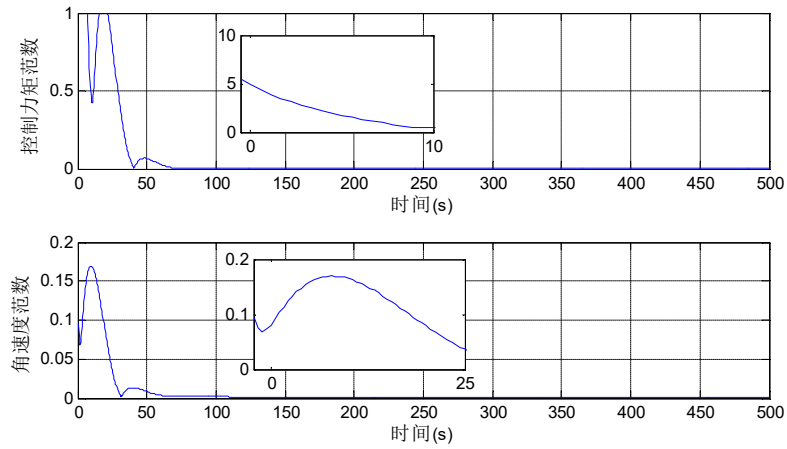


图 3-4 控制力矩范数与角速度范数曲线

Fig.3-4 Curve of norm of control torque and angular velocity

由图 1 与图 2 可以看到，在控制器(3-116)作用下系统状态能够收敛至 $\mathbf{0}$ ，但收敛时间超过 250s，同时在 400s 时姿态角速度与姿态四元数的稳态精度分别为 2×10^{-5} 和 5×10^{-4} 。由图 4 可以看到，前 5s 的初始控制力矩严重超过系统上界，同时在前 20s 系统的姿态角速度同样超过系统上界，最大超调甚至为系统上界 2 倍。

接下来给出本此研究所提出的姿态镇定 PID+控制器(3-1)的仿真曲线

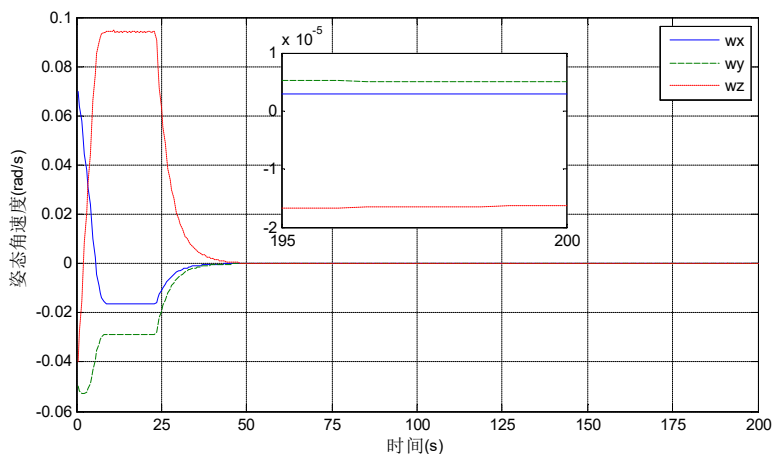


图 3-5 姿态角速度曲线

Fig.3-5 Curve of angular velocity

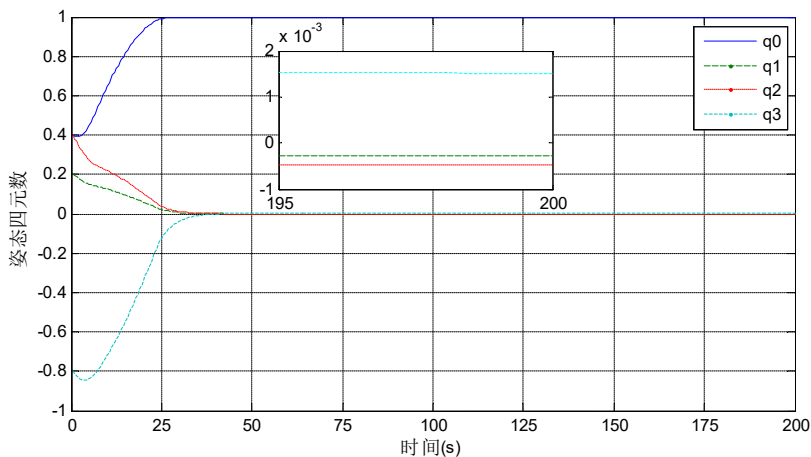


图 3-6 姿态四元数曲线

Fig.3-6 Curve of attitude quaternion

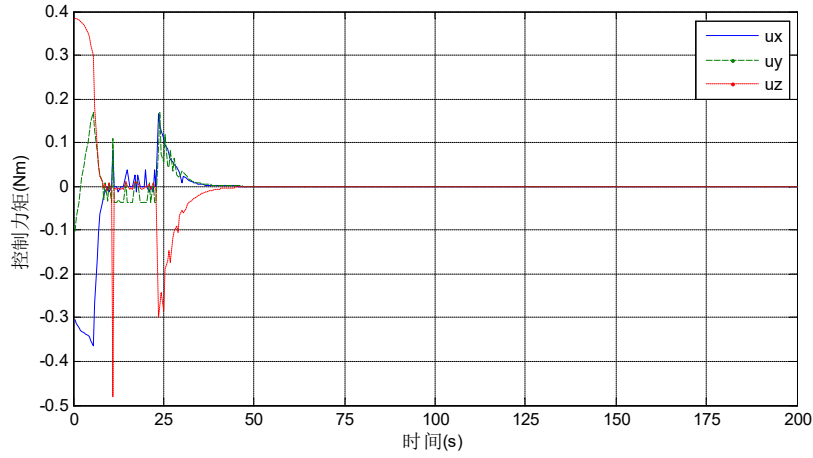


图 3-7 控制力矩曲线

Fig.3-7 Curve of control torque

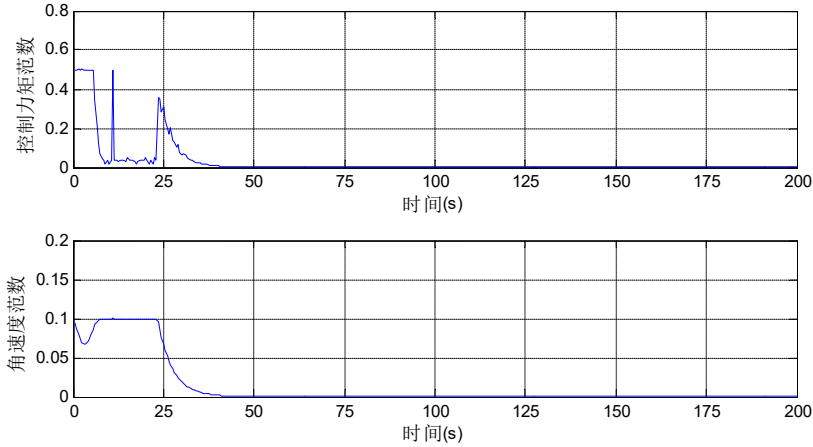


图 3-8 控制力矩及角速度范数曲线

Fig.3-8 Curve of norm of control torque and angular velocity

由图 5 与图 6 可以看到，系统在 50s 左右收敛，收敛时间相比较于经典 PID 控制器提升超过 80%，同时在 200s 时姿态角速度与姿态四元数的稳态精度分别为 1×10^{-5} 和 1×10^{-3} ，稳态精度与经典 PID 控制器 400s 时稳态精度相当，由此可以认为本次研究所提出的控制器(3-1)能够在维持稳态精度的前提下大幅提升系统收敛速率。同时由图 5 可以看到系统在 10s 左右开始进入滑模面(3-6)的匀速段，在 25s 左右开始减速，同时由图 7 可以看到在 10-25s 区间内控制力矩相对较小，这就避免了经典 PID 控制器锁定比例项所带来的四元数收敛速率下降过快的弊端，同时提升系统控制力矩的利用效率。由图 3-8 可以看到，系统控制力矩全程未超过系统上界，同时在初始姿态角速度接近系统上界的前提下，姿态角速度范数亦未超过系统上界，这也印证了前文提出的角速度约束的有效性。同时值得注意的是控制力矩在 10s 左右出现突变，这是由于控制器在该阶段中 r_1 项包含欧拉轴矢量 e ，在

某些特殊情况下较小的转角也会带来欧拉轴矢量的突变，因此控制力矩出现在该处的不连续，这也是控制器中显含欧拉轴矢量 \mathbf{e} 的一个弊端。

3.4.2 姿态跟踪控制器仿真

设置系统参数如下

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \text{diag}([20 \quad 18 \quad 15]) \text{kg}\cdot\text{m}^2, \hat{\mathbf{J}} = \text{diag}([21 \quad 17 \quad 14]) \text{kg}\cdot\text{m}^2, \lambda = 3 \\ t_{\text{sample}} &= 0.5\text{s}, \bar{d} = 0.001\text{N}\cdot\text{m}, \bar{u} = 0.5\text{N}\cdot\text{m}, \bar{\omega} = 0.1\text{rad/s} \\ \boldsymbol{\omega}(t_0) &= [0 \quad 0 \quad -0.08]^T \text{rad/s}, \mathbf{q}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}^T \\ \boldsymbol{\omega}_d(t_0) &= [0.005 \quad 0 \quad 0]^T \text{rad/s}, \dot{\boldsymbol{\omega}}_d(t_0) = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{q}_d(t_0) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned} \quad (3-119)$$

与前文类似的，为说明本次研究所提出算法的性能，以经典 PID 控制器作为参照。姿态跟踪的经典 PID 控制器结构为

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -k_d \boldsymbol{\omega}_e - k_p \mathbf{q}_{ev} - k_I \mathbf{v}_e - \bar{d} \text{sgn}(\mathbf{s}_e) - \lambda_M(\mathbf{J}) \mathbf{s}_e \odot (\mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d) \\ &\quad - \lambda_M(\mathbf{J}) \mathbf{s}_e \odot (\boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) - \bar{\omega} \lambda_M(\mathbf{J}) \mathbf{s}_e \odot \boldsymbol{\omega}_e \\ \dot{\mathbf{v}}_e &= c_1 \boldsymbol{\omega}_e + c_2 \mathbf{q}_{ev} - \frac{1}{2} c_3 \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e \end{aligned} \quad (3-120)$$

其中三维向量算子 \odot 定义为

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} = [\text{sgn}(a_1 b_1) b_1 \quad \text{sgn}(a_2 b_2) b_2 \quad \text{sgn}(a_3 b_3) b_3]^T \quad (3-121)$$

设置仿真参数如下

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.15, \beta = 0.05, k_1 = 0.09, k_2 = 0.6 \\ k_d &= 20, k_p = 5, k_I = 1, c = 1, l_2 = 0.01, c_1 = 0.25, c_2 = 0.05, c_3 = 1 \end{aligned} \quad (3-122)$$

由(3-26)可以得到

$$l_3 = \frac{c k_I}{2 c_1} = 2, l_1 = c k_p + l_2 k_d - 2 c_1 c_3 l_3 = 4.2 \quad (3-123)$$

从而通过计算可以得到前文对于控制参数的约束(3-89)、(3-90)与(3-91)均得到满足。

姿态跟踪 PID 控制器(3-120)的仿真曲线为

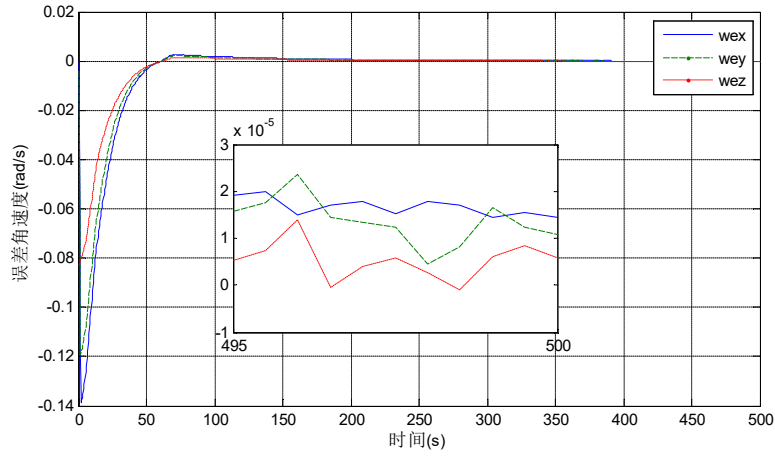


图 3-9 误差角速度曲线

Fig.3-9 Curve of error angular velocity

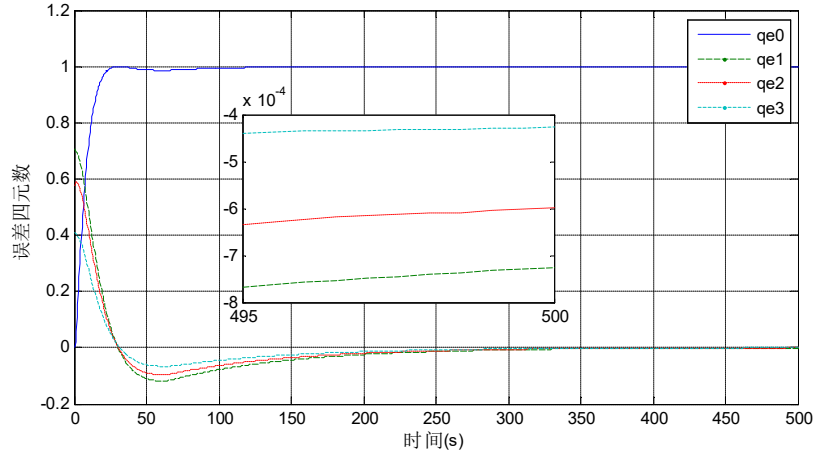


图 3-10 误差四元数曲线

Fig.3-10 Curve of error attitude quaternion

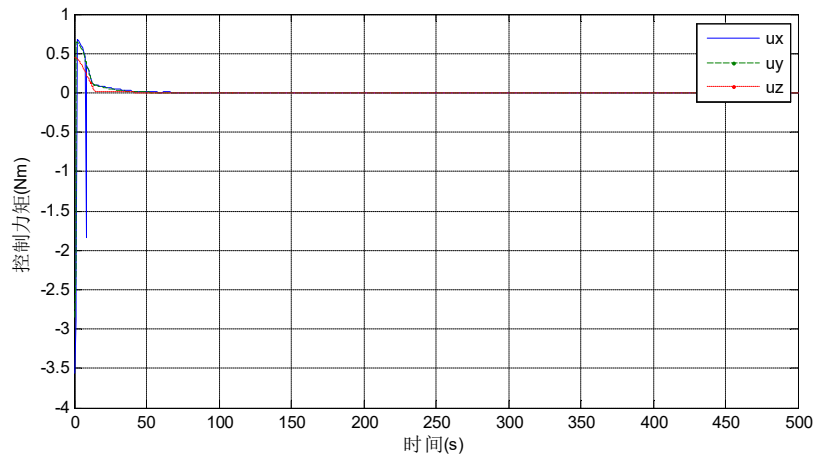


图 3-11 控制力矩曲线

Fig.3-11 Curve of control torque

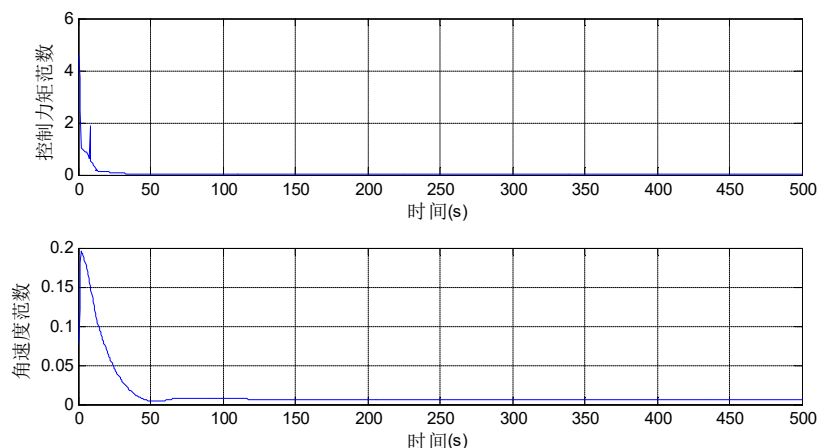


图 3-12 控制力矩及角速度范数曲线

Fig.3-12 Curve of norm of control torque and angular velocity

由图 3-9 与图 3-10 可以看到，系统状态收敛时间超过 250s，同时在 400s 时误差角速度与误差四元数的稳态精度分别为 2×10^{-5} 和 8×10^{-4} 。由图 3-12 可以看到，系统控制力矩在前 10s 严重超过系统上界，同时姿态角速度在前 25s 也超过系统上界，最大超调甚至达到系统上界的 2 倍。

接下来给出本次研究所提出的姿态跟踪 PID+控制器(3-50)的仿真曲线

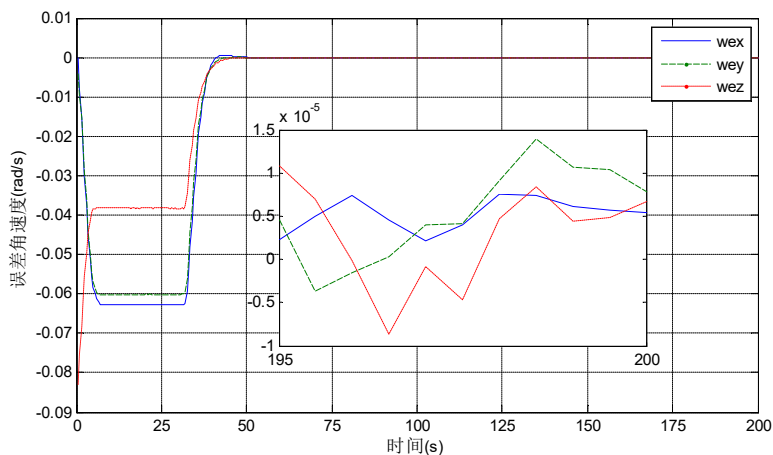


图 3-13 误差角速度曲线

Fig.3-13 Curve of error angular velocity

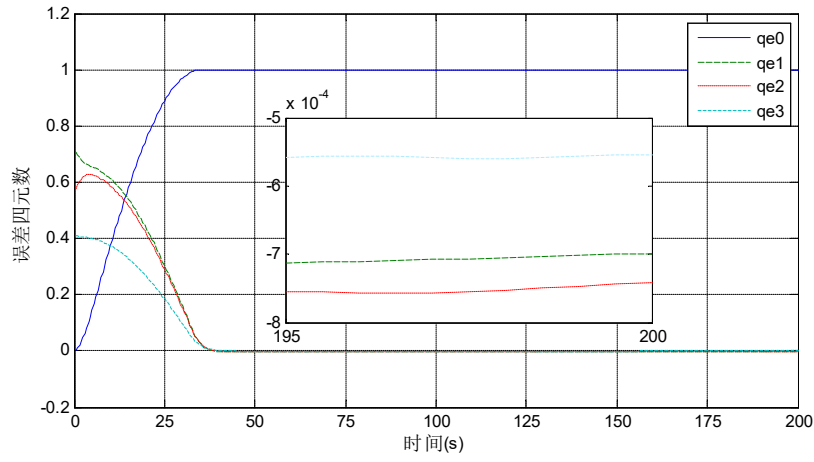


图 3-14 误差四元数曲线

Fig.3-14 Curve of error attitude quaternion

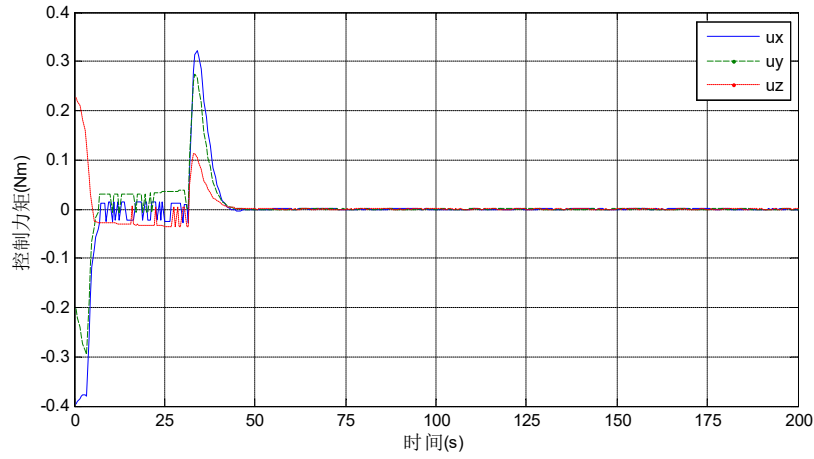


图 3-15 控制力矩曲线

Fig.3-15 Curve of control torque

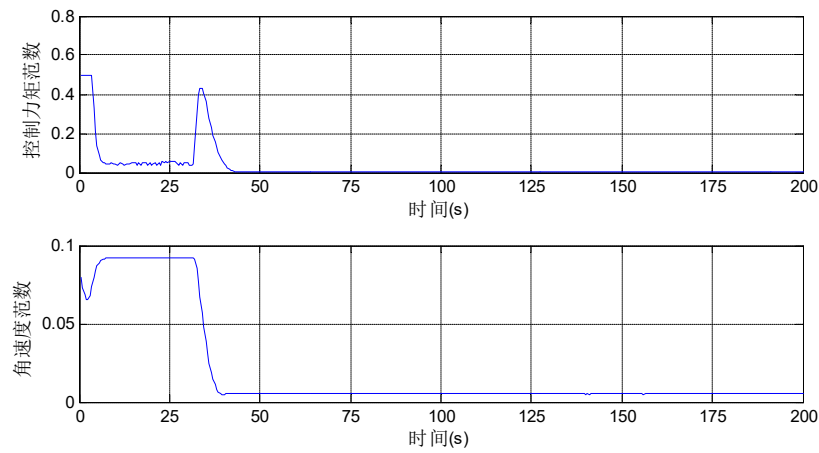


图 3-16 控制力矩及角速度范数曲线

Fig.3-16 Curve of norm of control torque and angular velocity

由图 3-13 与图 3-14 可以看到系统在 50s 左右收敛，系统收敛时间相比较于经典 PID 控制器提升约 80%，同时在 200s 时的误差角速度与误差四元数稳态精度分别为 1×10^{-5} 和 8×10^{-4} ，与经典 PID 控制器在 400s 的稳态精度相一致，由此可以认为本次研究所提出的控制器(3-50)能够在维持稳态精度的前提下大幅提升系统收敛速率。与之前讨论相类似，系统在 5s 左右开始进入滑模面(3-56)的匀速段，在 35s 左右开始减速，在此区间内控制力矩维持在相对较小的范围内，这也使得系统对于控制力矩的利用效率得到了提升。最后由图 3-16 可以看到，系统控制力矩全程未超过系统上界，同时在初始角速度较为接近系统幅值的前提下姿态角速度依然全程未超过系统上界，这也说明了本次研究所给出控制算法的有效性。

3.5 本章小结

针对姿态镇定与姿态跟踪控制问题，本章对于经典的 PID 控制器进行了改进，在系统状态远离平衡点时放大比例项以维持四元数收敛速率，在状态逼近平衡点时引入积分项以提升稳态精度并避免过早出现系统状态的振荡；通过引入角速度的叉乘项，在不改变 PID 控制器稳定性的前提下，实现系统状态沿所设计滑模面收敛的目的，从而通过设计合适的滑模面实现提升系统收敛速率的目的，并通过 Lyapunov 稳定性理论证明系统状态与滑模状态的稳定性；对于系统控制力矩与角速度上界进行了讨论，给出了姿态角速度与控制参数之间的关系并对其进行证明，设计了在控制力矩与姿态角速度受限情形下的控制器；本章最后的仿真表明本章所提出的控制算法能够保证系统控制力矩与角速度不超过其上界，同时在保证一定稳态精度的前提下系统收敛时间相比较于经典 PID 控制器有了大幅度提升，并且控制器对于外部干扰力矩与系统转动惯量不确定性具有鲁棒性。

第4章 基于滑模控制的姿态控制器设计

4.1 引言

在卫星姿态控制领域，滑模控制同样是一种成熟、经典的控制算法。不同于PID控制器，滑模控制的核心思想是首先设计出系统状态的期望轨迹，亦即系统的滑模面，在该滑模面上系统状态往往具有良好的性能，随后再设计控制器使得系统状态沿着设计好的滑模面运动，因此滑模控制具有思路清晰、易于分析系统性能的优势。

滑模控制器性能的优劣很大程度上取决于滑模面的设计，针对本次研究卫星姿态快速机动的背景，滑模控制器应当具有使得系统状态快速收敛的特性。一般来说，为提升经典滑模控制器的收敛速率，最简单的手段是增大滑模参数，但该做法却会带来以下两方面弊端：1.系统初始控制力矩较大，甚至出现所需控制力矩远超过系统幅值从而导致系统状态发散的情况，而随着状态的收敛控制力矩又急速下降，系统逼近平衡点时对其利用效率不足；2.较大的滑模参数会使得系统初始姿态角速度较大，从而带来姿态确定精度下降、柔性形变增大、星敏感器故障等不良影响。基于此，理想的滑模面应当具有以下性质：1.系统初始姿态角速度不能过大，以避免角速度饱和带来的种种弊端，但角速度同样不能下降过快，否则会导致四元数的收敛速率急剧下降，因此在系统初始阶段系统姿态角速度范数应当维持在系统所能允许的最大值或最大值附近；2.由指数收敛的特性，系统平衡点附近的收敛速率急需得到提升，同时考虑到系统在平衡点附近状态逼近 $\mathbf{0}$ ，控制力矩处于供大于求的状态，因此在系统终端应当有较大的滑模参数使得系统具有优良的终端性能。

基于上述讨论，为提升系统状态的收敛速率，本章将对经典的滑模控制器进行改进以提升其收敛速率。针对姿态镇定与姿态跟踪控制问题，首先引入Bang-Bang控制的思想，设计滑模参数的更新律，实现系统先匀速、后匀减速的运动过程，从而达到提升系统收敛速率与系统控制力矩利用效率的目的；随后引入动态滑模面的思想，实时放大滑模参数，使其初值较小同时终值较大；考虑系统角速度与控制力矩的限制，讨论二者对于控制参数更新律的约束，防止控制力矩与姿态角速度出现饱和；最后通过数值仿真验证本章所设计控制器的有效性。

4.2 基于 Bang-Bang 控制理论的滑模控制器

Bang-Bang 控制理论是一种较为经典的时间最优开环控制器，其核心思想是系

统状态或处于最大速度状态，或处于最大加速、减速状态，该控制算法的优势在于能够最大限度的优化系统性能，但其弊端则在于该控制为开环控制，系统状态无法形成闭环回路，不能有效的抑制各类扰动。在本小节中，将分别针对姿态镇定与姿态跟踪控制问题，应用 Bang-Bang 控制的思路对经典滑模面进行改进，以提升系统收敛速率与系统控制力矩利用效率。

4.2.1 姿态镇定控制器

在卫星姿态控制领域，最为经典的滑模面结构如下

$$s = \omega + kq_v \quad (4-1)$$

其中 k 为正常数。当系统状态处于该滑模面上时，有

$$\omega = -kq_v \quad (4-2)$$

选取 Lyapunov 函数如下

$$V_q = q_v^T q_v \quad (4-3)$$

对其求导可以得到

$$\dot{V}_q = 2q_v^T \dot{q}_v = q_v^T (q_0 I_3 + q_v^\times) \omega = -kq_v^T q_v = -kV_q \quad (4-4)$$

从而可以看到在滑模面(4-1)上系统具有指数收敛速率。与此同时，注意到

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2} q_v^T \omega \quad (4-5)$$

$$\dot{\phi} = e^T \omega \quad (4-6)$$

从而当姿态角速度范数 $\|\omega\|$ 固定时，若角速度 ω 与四元数矢部 q_v 反向，有四元数标部 q_0 与欧拉角 ϕ 最大的收敛速率，也就是说角速度与四元数矢部反向时对角速度利用效率最高。基于此，为提升系统收敛速率，姿态角速度在待设计滑模面上应当与四元数矢部反向。同时基于 Bang-Bang 控制的思想，系统在远离平衡点时应当处于最大角速度状态使得系统拥有最快的收敛速率，而在逼近平衡点时应当以最大控制力矩进行减速，基于此本节所设计滑模面可以写为如下形式

$$s = \begin{cases} \omega + k_1 e, & \|q_v\| \geq \alpha \\ \omega + k_2 q_v, & \|q_v\| < \alpha \end{cases} \quad (4-7)$$

不同于传统的滑模面，本次研究中控制参数 k_2 为时变正常数且其初值与更新率满足

$$\begin{cases} k_2(0) = k_1 / \alpha \\ \dot{k}_2 = f(\omega, q_v) \end{cases} \quad (4-8)$$

(4-8)中 k_1 为正常数， $f(\omega, q_v)$ 为待定函数， $k_2(0)$ 为 k_2 初值，该初值的选取是为了

使得系统在滑模面切换点处不出现角速度的突变。

由(4-8)可以看到滑模面分为两个阶段，在滑模面的第一阶段即 $\|q_v\| \geq \alpha$ 时为滑模面的匀速段，此时系统状态远离平衡点，系统姿态角速度与四元数矢部反向，且数值恒定，因此在该阶段系统能够有效利用姿态角速度使得四元数拥有较为良好的收敛速率。在第二阶段即 $\|q_v\| < \alpha$ 时，系统进入减速阶段，姿态角速度仍然与四元数矢部反向，并且角速度范数开始减小，同时可以看到 k_2 为时变参数，通过设计合适的更新率 $f(\omega, q_v)$ 便可使得系统状态拥有所期望的性能。

由 Bang-Bang 控制理论，系统在滑模面的第一阶段应当以系统所能允许的最大角速度进行机动，而在减速段应当以最大的控制力矩进行减速。假定系统控制力矩范数上界为 \bar{u} ，则应当选择控制参数使得

$$\|u\| = \bar{u} \quad (4-9)$$

注意到在滑模面(4-7)的减速阶段有

$$\dot{q}_v = \frac{1}{2}(q_0 I_3 + q_v^\times) \omega = -\frac{1}{2} k_2 q_0 q_v \quad (4-10)$$

$$\begin{aligned} u &\approx J\dot{\omega} + \omega^\times J\omega \\ &= k_2 J\dot{q}_v + \dot{k}_2 Jq_v + k_2^2 q_v^\times Jq_v \\ &= -\frac{1}{2} k_2^2 q_0 Jq_v + k_2^2 q_v^\times Jq_v + \dot{k}_2 Jq_v \end{aligned} \quad (4-11)$$

从而有

$$\begin{aligned} u^T u &= \left(-\frac{1}{2} k_2^2 q_0 q_v^T J - k_2^2 q_v^T Jq_v^\times + \dot{k}_2 q_v^T J \right) \left(-\frac{1}{2} k_2^2 q_0 Jq_v + k_2^2 q_v^\times Jq_v + \dot{k}_2 Jq_v \right) \\ &= \frac{1}{4} k_2^4 q_0^2 q_v^T J^2 q_v - \frac{1}{2} k_2^4 q_0 q_v^T Jq_v^\times Jq_v - \frac{1}{2} k_2^2 q_0 \dot{k}_2 q_v^T J^2 q_v - k_2^4 q_v^T Jq_v^\times q_v^\times Jq_v \\ &\quad - k_2^2 \dot{k}_2 q_v^T Jq_v^\times Jq_v - \frac{1}{2} k_2^2 q_0 \dot{k}_2 q_v^T J^2 q_v + k_2^2 \dot{k}_2 q_v^T Jq_v^\times Jq_v + \left(\dot{k}_2 \right)^2 q_v^T J^2 q_v \\ &= A \left(\dot{k}_2 \right)^2 - A k_2^2 q_0 \dot{k}_2 + \frac{1}{4} A k_2^4 q_0^2 - \frac{1}{2} B k_2^2 q_0 - k_2^4 C \\ &= \bar{u}^2 \end{aligned} \quad (4-12)$$

其中

$$A = q_v^T J^2 q_v, B = q_v^T Jq_v^\times Jq_v, C = q_v^T Jq_v^\times q_v^\times Jq_v \quad (4-13)$$

从而由(4-12)可以求解得到 k_2 的更新率如下

$$\dot{k}_2 = \frac{1}{2} k_2^2 q_0 - \frac{\sqrt{2ABk_2^2 q_0 + 4ACK_2^4 + 4A\bar{u}^2}}{2A} \quad (4-14)$$

值得注意的是，根据方程(4-12)所求解得到的 k_2 更新率理论上有两个解，而(4-14)

所取的是其中较小的解，这是由于较大的解所对应的情况是系统以最大的控制力矩进行加速运动，这明显与所要实现的控制目标不符，因此对该解予以舍去。

基于(4-7)、(4-8)、(4-14)便可以得到基于 Bang-Bang 控制原理的具有时间较优特性的滑模面，该滑模面能够最大限度的利用系统的控制力矩，但时却存在着严重的缺陷：在系统转动惯量精确已知、不存在干扰力矩时，能够通过数值方法确定系统的切换点 α ，即何时开始对系统进行减速，但考虑到干扰力矩的存在与转动惯量的不确定性，在实际应用中很难确定该点，从而可能会出现系统减速过早或过晚的情况；同时考虑到转动惯量不确定性的存在， k_2 更新率(4-14)中的参数 A, B, C 也很难做到精确已知，从而可能会出现所需控制力矩超过系统上界的情形。可以看到，这些缺陷与 Bang-Bang 控制中存在的开环控制器的缺陷类似，因此该方法本质上并未实现闭环滑模控制与开环 Bang-Bang 控制的有效结合，从而需要对滑模面的设计思路进行改进，使其能够在存在干扰力矩与转动惯量不确定性的情形下依然有效。

考虑到 Bang-Bang 控制中控制力矩锁定系统最大值的目的是使得系统能够以最大的角加速度进行减速，从而可以将滑模面所需实现的目标改为

$$\frac{d\|\omega\|}{dt} = -\eta \quad (4-15)$$

其中 η 为正常数。(4-15)的本质是系统以恒定的角加速度 η 进行减速。基于此，定义 σ 如下

$$\sigma = \omega^T \omega = \|\omega\|^2 \quad (4-16)$$

对 σ 求导可以得到

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= 2\omega^T \dot{\omega} \\ &= 2k_2 \mathbf{q}_v (\dot{k}_2 \mathbf{q}_v + k_2 \dot{\mathbf{q}}_v) \\ &= 2k_2 \mathbf{q}_v \left(\dot{k}_2 \mathbf{q}_v - \frac{1}{2} k_2^2 q_0 \mathbf{q}_v \right) \\ &= 2k_2 \|\mathbf{q}_v\|^2 \dot{k}_2 - \frac{1}{2} k_2^3 q_0 \|\mathbf{q}_v\|^2 \end{aligned} \quad (4-17)$$

同时注意到

$$\dot{\sigma} = 2\|\omega\| \frac{d\|\omega\|}{dt} = -2k_2 \|\mathbf{q}_v\| \eta \quad (4-18)$$

从而可以得到在匀减速模式下的 k_2 更新率

$$\dot{k}_2 = \frac{1}{2} k_2^2 q_0 - \frac{\eta}{\|\mathbf{q}_v\|} \quad (4-19)$$

考虑到系统在四元数范数减小至 α 时开始减速，同时考虑到匀速段的角速度 k_1 与减速段的角加速度 η ，可以得到“开机点” α 的表达式为

$$\alpha = \sin(k_1^2/4\eta) \quad (4-20)$$

同时为了避免系统参数 k_2 趋于无穷而导致的奇异性问题，在系统状态足够接近平衡点时应当停止更新参数 k_2 ，基于此，本节提出的基于 Bang-Bang 控制理论的改进型滑模面可以写为

$$\begin{aligned} s &= \begin{cases} \omega + k_1 e, & \|q_v\| \geq \alpha \\ \omega + k_2 q_v, & \|q_v\| < \alpha \end{cases} \\ \dot{k}_2 &= \begin{cases} 0, & \|q_v\| \geq \alpha \\ \frac{1}{2} k_2^2 q_0 - \frac{\eta}{\|q_v\|}, & \beta < \|q_v\| < \alpha \\ 0, & \|q_v\| \leq \beta \end{cases} \\ \alpha &= \sin(k_1^2/4\eta), k_2(0) = k_1/\alpha \end{aligned} \quad (4-21)$$

其中 k_1 、 η 均为正常数， β 为一足够小的正常数。

基于滑模面(4-21)的姿态滑模控制器可以写为

$$\begin{aligned} u &= \begin{cases} -\rho_1 k_s s + \omega^\times \hat{J} \omega - \frac{1}{2} k_1 \hat{J} e^\times \left(I_3 - \cot \frac{\varphi}{2} e^\times \right) \omega - l_1 \text{sgn}(s), & \|q_v\| \geq \alpha \\ -\rho_2 k_s s + \omega^\times \hat{J} \omega - \frac{1}{2} k_2 \hat{J} F \omega - \frac{1}{2} k_2^2 q_0 \hat{J} q_v + \eta \hat{J} e - l_2 \text{sgn}(s), & \beta < \|q_v\| < \alpha \\ -\rho_3 k_s s + \omega^\times \hat{J} \omega - \frac{1}{2} k_2 \hat{J} F \omega - l_3 \text{sgn}(s), & \|q_v\| < \beta \end{cases} \quad (4-22) \\ \begin{cases} l_1 = \lambda \left(\|\omega\|^2 + \frac{1}{2} k_1 \left(1 + \cot \frac{\varphi}{2} \right) \|\omega\| \right) + \bar{d} \\ l_2 = \lambda \left(\|\omega\|^2 + \frac{1}{2} k_2 \|\omega\| + \frac{1}{2} k_2^2 q_0 \|q_v\| - \eta \right) + \bar{d} \\ l_3 = \lambda \left(\|\omega\|^2 + \frac{1}{2} k_2 \|\omega\| \right) + \bar{d} \end{cases} \end{aligned} \quad (4-23)$$

其中 k_s 为正常数， λ 为正常数且满足 $\lambda \geq \lambda_M(\tilde{J})$ ， ρ_i 为控制器增益因子，其定义如下

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{-k_s s^T r_i + \sqrt{(k_s s^T r_i)^2 + k_s^2 \|s\|^2 (\bar{u}^2 - \|r_i\|^2)}}{k_s^2 \|s\|^2}, & \|u\| > \bar{u} \\ 1, & \|u\| \leq \bar{u} \end{cases} \quad (4-24)$$

$$\begin{cases} r_1 = \omega^\times \hat{J}\omega - \frac{1}{2} k_1 \hat{J}e^\times \left(I_3 - \cot \frac{\varphi}{2} e^\times \right) \omega - l_1 \text{sgn}(s) \\ r_2 = \omega^\times \hat{J}\omega - \frac{1}{2} k_2 \hat{J}F\omega - \frac{1}{2} k_2^2 q_0 \hat{J}q_v + \eta \hat{J}e - l_2 \text{sgn}(s) \\ r_3 = \omega^\times \hat{J}\omega - \frac{1}{2} k_2 \hat{J}F\omega - l_3 \text{sgn}(s) \end{cases} \quad (4-25)$$

由控制器增益因子 ρ_i 的定义可以看到其本质是当控制力矩 u 的范数不超过系统上界时维持比例项 $k_s s$ 不变，当控制力矩 u 的范数超过系统上界时对比例项 $k_s s$ 进行缩小使得系统控制力矩维持在系统上界。

接下来需要对控制器(4-22)进行稳定性证明。选取 Lyapunov 函数如下

$$V_s = \frac{1}{2} s^T J s \quad (4-26)$$

在滑模面(4-21)的第一阶段即 $\|q_v\| \geq \alpha$ 时，对 V_s 求导并带入控制器(4-22)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= s^T J \dot{s} = s^T J \dot{\omega} + k_1 s^T J \dot{e} \\ &= s^T (u + d - \omega^\times J \omega) + \frac{1}{2} k_1 s^T J e^\times \left(I_3 - \cot \frac{\varphi}{2} e^\times \right) \omega \\ &= -\rho_1 k_s s^T s + s^T \omega^\times \hat{J}\omega - \frac{1}{2} k_1 s^T \hat{J}e^\times \left(I_3 - \cot \frac{\varphi}{2} e^\times \right) \omega - l_1 s^T \text{sgn}(s) \\ &\quad + s^T d - s^T \omega^\times J \omega + \frac{1}{2} k_1 s^T J e^\times \left(I_3 - \cot \frac{\varphi}{2} e^\times \right) \omega \\ &= -\rho_1 k_s s^T s - s^T \omega^\times \tilde{J}\omega + \frac{1}{2} k_1 s^T \tilde{J}e^\times \left(I_3 - \cot \frac{\varphi}{2} e^\times \right) \omega + s^T d \\ &\quad - \lambda s^T \text{sgn}(s) \left(\| \omega \|^2 + \frac{1}{2} k_1 \left(1 + \cot \frac{\varphi}{2} \right) \| \omega \| \right) - \bar{d} s^T \text{sgn}(s) \\ &\leq -\rho_1 k_s s^T s \leq 0 \end{aligned} \quad (4-27)$$

在滑模面(4-21)的第二阶段即 $\beta < \|q_v\| < \alpha$ 时，对 V_s 求导并带入控制器(4-22)可以得到

$$\begin{aligned}
\dot{V}_s &= s^T \dot{J} \dot{s} = s^T J \dot{\omega} + k_2 s^T J \dot{q}_v + \dot{k}_2 s^T J q_v \\
&= s^T (u + d - \omega^\times J \omega) + \frac{1}{2} k_2 s^T J F \omega + \left(\frac{1}{2} k_2^2 q_0 - \frac{\eta}{\|q_v\|} \right) s^T J q_v \\
&= -\rho_2 k_s s^T s + s^T \omega^\times \hat{J} \omega - \frac{1}{2} k_2 s^T \hat{J} F \omega + \frac{1}{2} k_2^2 q_0 s^T \hat{J} q_v + \eta s^T \hat{J} e - l_2 s^T \operatorname{sgn}(s) \\
&\quad + s^T d - s^T \omega^\times J \omega + \frac{1}{2} k_2 s^T J F \omega + \frac{1}{2} k_2^2 q_0 s^T J q_v - \eta s^T J e \\
&= -\rho_2 k_s s^T s - s^T \omega^\times \tilde{J} \omega + \frac{1}{2} k_2 s^T \tilde{J} F \omega + \frac{1}{2} k_2^2 q_0 s^T \tilde{J} q_v - \eta s^T \tilde{J} e + s^T d \\
&\quad - \lambda s^T \operatorname{sgn}(s) \left(\|\omega\|^2 + \frac{1}{2} k_2 \|\omega\| + \frac{1}{2} k_2^2 q_0 \|q_v\| - \eta \right) - \bar{d} s^T \operatorname{sgn}(s) \\
&\leq -\rho_2 k_s s^T s \leq 0
\end{aligned} \tag{4-28}$$

在滑模面(4-21)的第三阶段即 $\|q_v\| < \beta$ 时, 对 V_s 求导并带入控制器(4-22)可以得到

$$\begin{aligned}
\dot{V}_s &= s^T \dot{J} \dot{s} = s^T J \dot{\omega} + k_2 s^T J \dot{q}_v \\
&= s^T (u + d - \omega^\times J \omega) + \frac{1}{2} k_2 s^T J F \omega \\
&= -\rho_3 k_s s^T s + s^T \omega^\times \hat{J} \omega - \frac{1}{2} k_2 s^T \hat{J} F \omega - l_3 s^T \operatorname{sgn}(s) + s^T d - s^T \omega^\times J \omega \\
&\quad + \frac{1}{2} k_2 s^T J F \omega \\
&= -\rho_3 k_s s^T s - s^T \omega^\times \tilde{J} \omega + \frac{1}{2} k_2 s^T \tilde{J} F \omega + s^T d - \lambda \left(\|\omega\|^2 + \frac{1}{2} k_2 \|\omega\| \right) s^T \operatorname{sgn}(s) \\
&\quad - \bar{d} s^T \operatorname{sgn}(s) \\
&\leq -\rho_3 k_s s^T s \leq 0
\end{aligned} \tag{4-29}$$

从而由(4-27)、(4-28)、(4-29)可以得到滑模状态 s 指数收敛, 同时由前文讨论姿态角速度 ω 与姿态四元数 q_v 在滑模面 $s = 0$ 上一致渐近稳定, 从而系统(2-1)、(2-17)在控制器(4-22)的作用下的一致渐近稳定。

接下来需要讨论的是滑模面(4-21)中滑模参数 $k_1, k_2, \eta, \alpha, \beta$ 的选取方法。由滑模面(4-21)的结构可以看到, 参数 β 的作用是当系统状态逼近平衡点时停止对 k_2 的更新, 防止该参数趋近于无穷, 该参数的选取独立于其他参数; 参数 k_2 的更新律取决于其初值以及角加速度 η , k_2 初值取决于 k_1 与 α , 而参数 α 的选取则取决于参数 k_1 与 η , 基于此可以看出确定滑模参数的关键是合理的选取 k_1 与 η 。由滑模面(4-21)的结构可以看出, 为使得系统拥有较快的收敛速率, 参数 k_1 应当尽量大从而使得系统在滑模面上有较快的姿态角速度, 同时 η 也应当尽量大使得系统拥有较大的

角加速度，同时系统开始减速的开机点 α 也应尽量靠近系统平衡点。但是当 k_1 与 η 取值较大时，所需要的控制力矩同样会增大，因此设计滑模面时需要在系统收敛速率与控制力矩约束两方面进行权衡。由控制器(4-22)的结构可以看到其中的比例项 $k_s s$ 可以进行放缩，同时该操作并不影响系统的稳定性，从而保证所需控制力矩范数不超过系统上界的关键是控制器中的 r_1 项。

在滑模面(4-21)的第一阶段，考虑到

$$\omega = -k_1 e \quad (4-30)$$

从而有

$$\begin{aligned} \|r_1\| &= \left\| \omega^\times \hat{J} \omega - \frac{1}{2} k_1 \hat{J} e^\times \left(I_3 - \cot \frac{\varphi}{2} e^\times \right) \omega - l_1 \operatorname{sgn}(s) \right\| \\ &\approx \left\| \omega^\times J \omega - \frac{1}{2} k_1 J e^\times \left(I_3 - \cot \frac{\varphi}{2} e^\times \right) \omega \right\| \\ &= \left\| k_1^2 e^\times J e - \frac{1}{2} k_1^2 J e^\times \left(I_3 - \cot \frac{\varphi}{2} e^\times \right) e \right\| \\ &= \|k_1^2 e^\times J e\| \\ &\leq k_1^2 \lambda_M(J) \end{aligned} \quad (4-31)$$

从而只需保证

$$k_1^2 \lambda_M(J) \leq \bar{u} \quad (4-32)$$

即可确保在滑模面(4-21)的第一阶段控制力矩范数不会超过系统上界。

在滑模面(4-21)的第二阶段，考虑到滑模参数 k_2 为时变量，因此控制器中 r_2 项的范数并不像 r_1 的范数易于进行放缩变换。注意在滑模面上有

$$\omega = -k_2 q_v \quad (4-33)$$

从而

$$\begin{aligned} \|r_2\| &\approx \left\| \omega^\times J \omega - \frac{1}{2} k_2 J F \omega - \frac{1}{2} k_2^2 q_0 J q_v + \eta J e \right\| \\ &= \left\| k_2^2 q_v^\times J q_v + \frac{1}{2} k_2^2 q_0 J q_v - \frac{1}{2} k_2^2 q_0 J q_v + \eta J e \right\| \\ &\leq \lambda_M(J) k_2^2 \|q_v\|^2 + \lambda_M(J) \eta \end{aligned} \quad (4-34)$$

定义变量 z 如下

$$z = \lambda_M(J) k_2^2 \|q_v\|^2 + \lambda_M(J) \eta \quad (4-35)$$

可以看到 z 实际上是 r_2 范数的上界，因此对于 r_2 范数的限制可以转化为对 z 最大值的限制。注意到

$$\begin{aligned}
\frac{d\|\mathbf{q}_v\|}{dt} &= \frac{d\sqrt{1-q_0^2}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{-2q_0\dot{q}_0}{\sqrt{1-q_0^2}} = -\frac{1}{2} \frac{k_2 q_0 \mathbf{q}_v^T \mathbf{q}_v}{\|\mathbf{q}_v\|} \\
&= -\frac{1}{2} k_2 q_0 \|\mathbf{q}_v\|
\end{aligned} \tag{4-36}$$

对 z 求导可以得到

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= 2\lambda_M(\mathbf{J})k_2^2\|\mathbf{q}_v\|\frac{d\|\mathbf{q}_v\|}{dt} + 2\lambda_M(\mathbf{J})k_2\|\mathbf{q}_v\|^2\dot{k}_2 \\
&= -\lambda_M(\mathbf{J})k_2^3q_0\|\mathbf{q}_v\|^2 + 2\lambda_M(\mathbf{J})k_2\|\mathbf{q}_v\|^2\left(\frac{1}{2}k_2^2q_0 - \frac{\eta}{\|\mathbf{q}_v\|}\right) \\
&= -\lambda_M(\mathbf{J})k_2\|\mathbf{q}_v\|^2\left(k_2^2q_0 - k_2^2q_0 + \frac{2\eta}{\|\mathbf{q}_v\|}\right) \\
&= -2\lambda_M(\mathbf{J})\eta k_2\|\mathbf{q}_v\| \\
&\leq 0
\end{aligned} \tag{4-37}$$

从而 z 单调递减，只需在切换点 α 处满足控制力矩约束即可确保控制力矩不超过系统上界，亦即只需

$$\lambda_M(\mathbf{J})(k_2^2(0)\alpha^2 + \eta) \leq \bar{u} \tag{4-38}$$

即可满足 $\|\mathbf{r}_2\| \leq \bar{u}$ ，从而即可使得控制力矩范数不超过系统上界。

而在滑模面(4-21)的第三阶段，注意到滑模参数 k_2 不再增加，其值为 k_2 在第二阶段的终值，从而若控制力矩在第二阶段不存在饱和问题，则在第三阶段同样不会存在饱和问题。

值得注意的是，由于在上述讨论中考虑的均为最极端的情形，因此(4-32)与(4-38)均为对于控制力矩范数的严格约束。

本小节针对经典的滑模控制存在的收敛速率方面的缺陷进行了改进，引入经典开环控制——Bang-Bang 控制的思路，通过设计滑模参数更新律、实时放大滑模参数的手段实现了卫星的匀速与匀减速机动，同时考虑卫星控制力矩的约束给出了控制参数的约束方程。

4.2.2 姿态跟踪控制器

与前一小节类似，设计滑模面如下

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_e &= \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_e + k_1 \mathbf{e}_e, & \|\mathbf{q}_{ev}\| \geq \alpha \\ \boldsymbol{\omega}_e + k_2 \mathbf{q}_{ev}, & \|\mathbf{q}_{ev}\| < \alpha \end{cases} \\
 \dot{k}_2 &= \begin{cases} 0, & \|\mathbf{q}_{ev}\| \geq \alpha \\ \frac{1}{2} k_2^2 q_{e0} - \frac{\eta}{\|\mathbf{q}_{ev}\|}, & \beta < \|\mathbf{q}_{ev}\| < \alpha \\ 0, & \|\mathbf{q}_{ev}\| \leq \beta \end{cases} \\
 \alpha &= \sin(k_1^2/4\eta), k_2(0) = k_1/\alpha
 \end{aligned} \tag{4-39}$$

其中 k_1 、 α 、 β 、 η 均为正常数。可以看到滑模面(4-39)与滑模面(4-21)的基本思路完全相同，即在系统状态远离平衡点时维持误差角速度为匀速，在适当的位置开始以恒定的角加速度开始减速，同时在系统状态足够逼近平衡点时停止更新滑模参数 k_2 。

基于滑模面(4-39)的姿态跟踪控制器结构为

$$\mathbf{u} = \begin{cases} -\rho_1 k_s \mathbf{s}_e - \frac{1}{2} k_1 \hat{\mathbf{J}} \mathbf{e}_e^\times \left(\mathbf{I}_3 - \cot \frac{\varphi_e}{2} \mathbf{e}_e^\times \right) \boldsymbol{\omega}_e + \hat{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d & \|\mathbf{q}_{ev}\| \geq \alpha \\ \quad + (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \hat{\mathbf{J}} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) - l_1 \text{sgn}(\mathbf{s}_e), & \\ -\rho_2 k_s \mathbf{s}_e - \frac{1}{2} k_2 \hat{\mathbf{J}} \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e + \hat{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - \frac{1}{2} k_2^2 q_{e0} \hat{\mathbf{J}} \mathbf{q}_{ev} & \beta < \|\mathbf{q}_{ev}\| < \alpha \\ \quad + \eta \hat{\mathbf{J}} \mathbf{e}_e + (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \hat{\mathbf{J}} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) - l_2 \text{sgn}(\mathbf{s}_e), & \\ -\rho_3 k_s \mathbf{s}_e - \frac{1}{2} k_2 \hat{\mathbf{J}} \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e + \hat{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d & \|\mathbf{q}_{ev}\| < \beta \\ \quad + (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \hat{\mathbf{J}} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) - l_3 \text{sgn}(\mathbf{s}_e), & \end{cases} \tag{4-40}$$

$$\begin{cases} l_1 = \lambda \left(\|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \frac{1}{2} k_1 \left(1 + \cot \frac{\varphi_e}{2} \right) \|\boldsymbol{\omega}_e\| + \|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + \|\boldsymbol{\omega}_e\| \|\boldsymbol{\omega}_d\| \right) + \bar{d} \\ l_2 = \lambda \left(\|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \frac{1}{2} k_2 \|\boldsymbol{\omega}_e\| + \|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + \|\boldsymbol{\omega}_e\| \|\boldsymbol{\omega}_d\| + \frac{1}{2} k_2^2 q_{e0} \|\mathbf{q}_{ev}\| - \eta \right) + \bar{d} \\ l_3 = \lambda \left(\|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \frac{1}{2} k_2 \|\boldsymbol{\omega}_e\| + \|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + \|\boldsymbol{\omega}_e\| \|\boldsymbol{\omega}_d\| \right) + \bar{d} \end{cases} \tag{4-41}$$

其中 k_s 为正常数， λ 为正常数且满足 $\lambda \geq \lambda_M(\tilde{\mathbf{J}})$ ， ρ_i 为控制器增益因子，其定义如下

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{-k_s \mathbf{s}_e^T \mathbf{r}_i + \sqrt{(k_s \mathbf{s}_e^T \mathbf{r}_i)^2 + k_s^2 \|\mathbf{s}_e\|^2 (\bar{u}^2 - \|\mathbf{r}_i\|^2)}}{k_s^2 \|\mathbf{s}_e\|^2}, & \|\mathbf{u}\| > \bar{u} \\ 1, & \|\mathbf{u}\| \leq \bar{u} \end{cases} \tag{4-42}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = -\frac{1}{2}k_1\hat{J}e_e^\times \left(I_3 - \cot \frac{\varphi_e}{2} e_e^\times \right) \omega_e + \hat{J}R\dot{\omega}_d - \hat{J}\omega_e^\times R\omega_d - l_1 \text{sgn}(s_e) \\ \quad + (\omega_e + R\omega_d)^\times \hat{J}(\omega_e + R\omega_d) \\ r_2 = -\frac{1}{2}k_2\hat{J}F_e\omega_e + \hat{J}R\dot{\omega}_d - \hat{J}\omega_e^\times R\omega_d - \frac{1}{2}k_2^2q_{e0}\hat{J}q_{ev} + \eta\hat{J}e_e \\ \quad + (\omega_e + R\omega_d)^\times \hat{J}(\omega_e + R\omega_d) - l_2 \text{sgn}(s_e) \\ r_3 = -\rho_3k_s s_e - \frac{1}{2}k_2\hat{J}F_e\omega_e + \hat{J}R\dot{\omega}_d - \hat{J}\omega_e^\times R\omega_d \\ \quad + (\omega_e + R\omega_d)^\times \hat{J}(\omega_e + R\omega_d) - l_3 \text{sgn}(s_e) \end{array} \right. \quad (4-43)$$

由控制器增益因子 ρ_i 的定义可以看到其本质是当控制力矩 u 的范数不超过系统上界时维持比例项 $k_s s_e$ 不变，当控制力矩 u 的范数超过系统上界时对比例项 $k_s s_e$ 进行缩小使得系统控制力矩维持在系统上界。

接下来需要对控制器(4-40)进行稳定性证明。选取 Lyapunov 函数如下

$$V_s = \frac{1}{2} s_e^T J s_e \quad (4-44)$$

在滑模面(4-39)的第一阶段，对 V_s 求导并带入控制器(4-40)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= s_e^T J \dot{s}_e = s_e^T J \dot{\omega}_e + k_1 s_e^T J \dot{e}_e \\ &= s_e^T \left(u + d - J R \dot{\omega}_d + J \omega_e^\times R \omega_d - (\omega_e + R \omega_d)^\times J (\omega_e + R \omega_d) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} k_1 s_e^T J e_e^\times \left(I_3 - \cot \frac{\varphi_e}{2} e_e^\times \right) \omega_e \\ &= -\rho_1 k_s s_e^T s_e + s_e^T d - s_e^T \tilde{J} R \dot{\omega}_d + s_e^T \tilde{J} \omega_e^\times R \omega_d - s_e^T (\omega_e + R \omega_d)^\times \tilde{J} (\omega_e + R \omega_d) \\ &\quad + \frac{1}{2} k_1 s_e^T J e_e^\times \left(I_3 - \cot \frac{\varphi_e}{2} e_e^\times \right) \omega_e - l_1 s_e^T \text{sgn}(s_e) \\ &\leq -\rho_1 k_s s_e^T s_e \leq 0 \end{aligned} \quad (4-45)$$

在滑模面(4-39)的第二阶段，对 V_s 求导并带入控制器(4-40)可以得到

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_s &= \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{s}}_e = \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_e + k_2 \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}_{ev} + \dot{k}_2 \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{q}_{ev} \\
 &= \mathbf{s}_e^T \left(\mathbf{u} + \mathbf{d} - \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \right) + \frac{1}{2} k_2 \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2} k_2^2 q_{e0} - \frac{\eta}{\|\mathbf{q}_{ev}\|} \right) \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{q}_{ev} \\
 &= -\rho_2 k_s \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_e^T \mathbf{d} - \mathbf{s}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{s}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - \mathbf{s}_e^T (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \tilde{\mathbf{J}} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \\
 &\quad + \frac{1}{2} k_2 \mathbf{s}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e + \frac{1}{2} k_2^2 q_{e0} \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{q}_{ev} - \eta \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{e}_e - l_2 \mathbf{s}_e^T \text{sgn}(\mathbf{s}_e) \\
 &= -\rho_2 k_s \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_e^T \mathbf{d} - \mathbf{s}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{s}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - \mathbf{s}_e^T (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \tilde{\mathbf{J}} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \\
 &\quad + \frac{1}{2} k_2 \mathbf{s}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e + \frac{1}{2} k_2^2 q_{e0} \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{q}_{ev} - \eta \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{e}_e \\
 &\quad - \left(\lambda \left(\|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \frac{1}{2} k_2 \|\boldsymbol{\omega}_e\| + \|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + \|\boldsymbol{\omega}_e\| \|\boldsymbol{\omega}_d\| \right) + \bar{d} \right) \mathbf{s}_e^T \text{sgn}(\mathbf{s}_e) \\
 &\leq -\rho_2 k_s \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e \leq 0
 \end{aligned} \tag{4-46}$$

在滑模面(4-39)的第三阶段, 对 V_s 求导并带入控制器(4-40)可以得到

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_s &= \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{s}}_e = \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_e + k_2 \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{q}_{ev} \\
 &= \mathbf{s}_e^T \left(\mathbf{u} + \mathbf{d} - \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} k_1 \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{e}_e^\times \left(\mathbf{I}_3 - \cot \frac{\varphi_e}{2} \mathbf{e}_e^\times \right) \boldsymbol{\omega}_e \\
 &= -\rho_1 k_s \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_e^T \mathbf{d} - \mathbf{s}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{s}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - \mathbf{s}_e^T (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \tilde{\mathbf{J}} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \\
 &\quad + \frac{1}{2} k_1 \mathbf{s}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{e}_e^\times \left(\mathbf{I}_3 - \cot \frac{\varphi_e}{2} \mathbf{e}_e^\times \right) \boldsymbol{\omega}_e - l_1 \mathbf{s}_e^T \text{sgn}(\mathbf{s}_e) \\
 &\leq -\rho_1 k_s \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e \leq 0
 \end{aligned} \tag{4-47}$$

从而由(4-45)、(4-46)、(4-47)可以得到滑模状态 \mathbf{s}_e 指数收敛, 由前文讨论, 误差角速度 $\boldsymbol{\omega}_e$ 与姿态四元数 \mathbf{q}_{ev} 在滑模面 $\mathbf{s}_e = \mathbf{0}$ 上一致渐近稳定, 从而系统(2-28)、(2-29)在控制器(4-39)的作用下一致渐近稳定。

接下来需要讨论控制力矩上界对于控制器参数的约束。类似于前文, 由于增益因子 ρ_i 的存在, 控制器(4-40)中的比例项 $k_s \mathbf{s}_e$ 可以进行放缩, 从而确保控制力矩不超过其上界的关键是控制器中的 \mathbf{r}_i 项。但不同于上一小节的姿态镇定控制器, 本小节中 \mathbf{r}_i 项较为复杂, 从而控制器的参数约束也较上一小节更为复杂。

在滑模面(4-39)的第一阶段, 有

$$\boldsymbol{\omega}_e = -k_1 \mathbf{e}_e \tag{4-48}$$

从而有

$$\begin{aligned}
 \|r_1\| &= \left\| -\frac{1}{2}k_1\hat{J}e_e^\times \left(I_3 - \cot \frac{\varphi_e}{2} e_e^\times \right) \omega_e + \hat{J}R\dot{\omega}_d - \hat{J}\omega_e^\times R\omega_d + \omega_e^\times \hat{J}\omega - l_1 \operatorname{sgn}(s_e) \right\| \\
 &\approx \left\| \omega_e^\times J\omega - \frac{1}{2}k_1 J e_e^\times \left(I_3 - \cot \frac{\varphi_e}{2} e_e^\times \right) \omega_e + J R \dot{\omega}_d - J \omega_e^\times R \omega_d \right\| \\
 &= \left\| (\omega_e + R\omega_d)^\times J (\omega_e + R\omega_d) + J R \dot{\omega}_d - J \omega_e^\times R \omega_d \right\| \\
 &\leq \lambda_M(J) \left(\|\omega_e + R\omega_d\|^2 + \|\dot{\omega}_d\| + \|\omega_e\| \|\omega_d\| \right) \\
 &\leq \lambda_M(J) \left((\|\omega_e\| + \|\omega_d\|)^2 + \|\omega_e\| \|\omega_d\| + \|\dot{\omega}_d\| \right) \\
 &= \lambda_M(J) \left(\|\omega_e\|^2 + 3\|\omega_e\| \|\omega_d\| + \|\omega_d\|^2 + \|\dot{\omega}_d\| \right) \\
 &= \lambda_M(J) \left(k_1^2 + 3k_1 \|\omega_d\| + \|\omega_d\|^2 + \|\dot{\omega}_d\| \right)
 \end{aligned} \tag{4-49}$$

从而只需保证

$$\lambda_M(J) \left(k_1^2 + 3k_1 \bar{\omega}_d + \bar{\omega}_d^2 + \dot{\bar{\omega}}_d \right) \leq \bar{u} \tag{4-50}$$

即可保证在滑模面(4-41)的第一阶段有 $\|r_1\| \leq \bar{u}$ ，即控制力矩不超过系统上界。其中 $\bar{\omega}_d$ 、 $\dot{\bar{\omega}}_d$ 分别为 $\|\omega_d\|$ 、 $\|\dot{\omega}_d\|$ 的上界。

在滑模面(4-41)的第二阶段有

$$\omega_e = -k_2 q_{ev} \tag{4-51}$$

从而有

$$\begin{aligned}
 \|r_2\| &\approx \left\| \omega_e^\times J\omega - \frac{1}{2}k_2 J F_e \omega_e + J R \dot{\omega}_d - J \omega_e^\times R \omega_d - \frac{1}{2}k_2^2 q_{e0} J q_{ev} + \eta J e_e \right\| \\
 &= \left\| \omega_e^\times J\omega + \frac{1}{2}k_2^2 q_{e0} J q_{ev} + J R \dot{\omega}_d - J \omega_e^\times R \omega_d - \frac{1}{2}k_2^2 q_{e0} J q_{ev} + \eta J e_e \right\| \\
 &= \left\| \omega_e^\times J\omega + J R \dot{\omega}_d - J \omega_e^\times R \omega_d + \eta J e_e \right\| \\
 &\leq \lambda_M(J) \left(\|\omega_e + R\omega_d\|^2 + \|\dot{\omega}_d\| + \|\omega_e\| \|\omega_d\| + \eta \right) \\
 &\leq \lambda_M(J) \left((\|\omega_e\| + \|\omega_d\|)^2 + \|\dot{\omega}_d\| + \|\omega_e\| \|\omega_d\| + \eta \right) \\
 &= \lambda_M(J) \left(\|\omega_e\|^2 + 3\|\omega_e\| \|\omega_d\| + \|\omega_d\|^2 + \|\dot{\omega}_d\| + \eta \right) \\
 &= \lambda_M(J) \left(k_2^2 \|q_{ev}\|^2 + 3k_2 \|q_{ev}\| \|\omega_d\| + \|\omega_d\|^2 + \|\dot{\omega}_d\| + \eta \right)
 \end{aligned} \tag{4-52}$$

定义 z 如下

$$z = \lambda_M(J) \left(k_2^2 \|q_{ev}\|^2 + 3k_2 \|q_{ev}\| \|\omega_d\| + \|\omega_d\|^2 + \|\dot{\omega}_d\| + \eta \right) \tag{4-53}$$

对其求导可以得到

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= \lambda_M(\mathbf{J}) \left(2k_2^2 \|\mathbf{q}_{ev}\| \frac{d\|\mathbf{q}_{ev}\|}{dt} + 2k_2 \|\mathbf{q}_{ev}\|^2 \dot{k}_2 + 3\|\mathbf{q}_{ev}\| \|\boldsymbol{\omega}_d\| \dot{k}_2 + 3k_2 \|\boldsymbol{\omega}_d\| \frac{d\|\mathbf{q}_{ev}\|}{dt} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \lambda_M(\mathbf{J}) k_2 q_{e0} \|\mathbf{q}_{ev}\| (2k_2^2 \|\mathbf{q}_{ev}\| + 3k_2 \|\boldsymbol{\omega}_d\|) \\
 &\quad + \lambda_M(\mathbf{J}) (2k_2 \|\mathbf{q}_{ev}\|^2 + 3\|\mathbf{q}_{ev}\| \|\boldsymbol{\omega}_d\|) \left(\frac{1}{2} k_2^2 q_{e0} - \frac{\eta}{\|\mathbf{q}_{ev}\|} \right) \\
 &= -k_2^3 q_{e0} \|\mathbf{q}_{ev}\|^2 - \frac{3}{2} k_2^2 q_{e0} \|\mathbf{q}_{ev}\| \|\boldsymbol{\omega}_d\| + k_2^3 q_{e0} \|\mathbf{q}_{ev}\|^2 - 2k_2 \eta \|\mathbf{q}_{ev}\| + \frac{3}{2} k_2^2 q_{e0} \|\mathbf{q}_{ev}\| \|\boldsymbol{\omega}_d\| \\
 &\quad - 3\eta \|\boldsymbol{\omega}_d\| \\
 &= -2k_2 \eta \|\mathbf{q}_{ev}\| - 3\eta \|\boldsymbol{\omega}_d\| \\
 &\leq 0
 \end{aligned} \tag{4-54}$$

可以看到 z 单调递减，从而只需保证在切换点处有

$$\lambda_M(\mathbf{J}) (k_2^2 \alpha^2 + 3k_2 \alpha \bar{\omega}_d + \bar{\omega}_d^2 + \dot{\bar{\omega}}_d + \eta) \leq \bar{u} \tag{4-55}$$

即可保证在滑模面(4-39)的减速段有 $\|\mathbf{r}_2\| \leq \bar{u}$ ，即控制力矩不超过系统上界。

而在滑模面(4-39)的第三阶段，注意到滑模参数 k_2 不再增加，其值为 k_2 在第二阶段的终值，从而若控制力矩在第二阶段不存在饱和问题，则在第三阶段同样不会存在饱和问题。

值得注意的是，由于在上述讨论中考虑的均为最极端的情形，(4-50)与(4-55)均为对于控制参数的严格约束。

本节中与 4.2.1 小节类似，引入了 Bang-Bang 控制的思路对经典的滑模面进行了改进。可以看到本小节与上一小节的基本原理与方法均较为类似，不同之处在于误差角速度模型中期望角速度带来的耦合项，一般来说，由于误差角速度模型较为复杂，姿态跟踪控制器的结构也较为复杂。

4.3 基于动态滑模的滑模控制器

由前文的讨论可以看到，通过对滑模参数的实时更新可以实现系统收敛速率的提升，而本质上，收敛速率的提升来源于滑模参数 k 的增加。基于该思路，本小节中将针对更为一般的情形设计滑模参数的更新律，实现当系统状态逼近平衡点时滑模参数随之增大，同时考虑系统角速度与控制力矩的约束，给出更新律所应满足的限制条件。

4.3.1 姿态镇定控制器

在滑模控制中，系统状态的运动往往分为两个部分：在滑模面外的运动以及在滑模面上的运动。在本节中，当系统状态到达滑模面之前，将不会对滑模参数

进行更新，在系统状态到达滑模面之后开始对其进行更新。基于此，改进后的滑模面可以写为

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \boldsymbol{\omega} + k\mathbf{q}_v, k(0) > 0 \\ \dot{k} &= \begin{cases} 0, & \|\mathbf{s}\| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2}pq_0^3(1-q_0), & \|\mathbf{s}\| < \varepsilon \end{cases} \end{aligned} \quad (4-56)$$

其中， ε 为一足够小的正常数， p 为正常数。

可以看到，滑模面(4-57)在上一小节的基础上有了如下改进：1.当系统状态到达滑模面之后，始终有 $\dot{k} \geq 0$ ，从而滑模参数 k 单调递增，基于此可以实现提升收敛速率的目的；2.当系统状态接近平衡点时有 $q_0 \rightarrow 1$ ，从而有 $\dot{k} \rightarrow 0$ ，这就避免了上一小节中参数 k 可能出现的逼近于无穷的情形；3.当系统状态远离平衡点时由于角速度相对较大，因此 k 的更新速率相对较慢，而当系统状态逼近平衡点时 k 的更新速率相对较快，从而系统的终端收敛速率得以提升。

基于滑模面(4-56)的姿态镇定控制器可以写为

$$\mathbf{u} = \begin{cases} -\rho_1 k_s \mathbf{s} + \boldsymbol{\omega}^\times \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} k \hat{\mathbf{J}} \mathbf{F} \boldsymbol{\omega} - l_1 \text{sgn}(\mathbf{s}), & \|\mathbf{s}\| \geq \varepsilon \\ -\rho_2 k_s \mathbf{s} + \boldsymbol{\omega}^\times \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} k \hat{\mathbf{J}} \mathbf{F} \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} p q_0^3 (1-q_0) \hat{\mathbf{J}} \mathbf{q}_v - l_2 \text{sgn}(\mathbf{s}), & \|\mathbf{s}\| < \varepsilon \end{cases} \quad (4-57)$$

其中

$$\begin{cases} l_1 = \bar{d} + \lambda \left(\|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \frac{1}{2} k \|\boldsymbol{\omega}\| \right) \\ l_2 = \bar{d} + \lambda \left(\|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \frac{1}{2} k \|\boldsymbol{\omega}\| + \frac{1}{2} p q_0^3 (1-q_0) \|\mathbf{q}_v\| \right) \end{cases} \quad (4-58)$$

(4-57)中为 k_s 正常数， λ 为正常数且满足 $\lambda \geq \lambda_M(\tilde{\mathbf{J}})$ ， ρ_i 为控制器增益因子且定义如下

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{-k_s \mathbf{s}^T \mathbf{r}_i + \sqrt{(k_s \mathbf{s}^T \mathbf{r}_i)^2 + k_s^2 \|\mathbf{s}\|^2 (\bar{u}^2 - \|\mathbf{r}_i\|^2)}}{k_s^2 \|\mathbf{s}\|^2}, & \|\mathbf{u}\| \geq \bar{u} \\ 1, & \|\mathbf{u}\| < \bar{u} \end{cases} \quad (4-59)$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\omega}^\times \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} k \hat{\mathbf{J}} \mathbf{F} \boldsymbol{\omega} - l_1 \text{sgn}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\omega}^\times \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} k \hat{\mathbf{J}} \mathbf{F} \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} p q_0^3 (1-q_0) \hat{\mathbf{J}} \mathbf{q}_v - l_2 \text{sgn}(\mathbf{s}) \end{cases}$$

其中 \bar{u} 为系统控制力矩上界。可以看到增益因子 ρ_i 与前文中的控制增益因子作用

相同，即当控制力矩不超过系统上界时对控制器不作处理，当控制力矩超过系统上界时缩小控制器中的比例项 $-k_s s$ 使其维持在系统上界。

接下来对控制器(4-57)进行稳定性证明。选取 Lyapunov 函数如下

$$V_s = \frac{1}{2} s^T J s \quad (4-60)$$

在系统尚未到达滑模面之前，即 $\|s\| \geq \varepsilon$ 时，对 V_s 求导并带入控制器(4-57)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= s^T J \dot{s} = s^T J \dot{\omega} + k s^T J \dot{q}_v \\ &= s^T (u + d - \omega^\times J \omega) + \frac{1}{2} k s^T J F \omega \\ &= -\rho_1 k_s s^T s + s^T \omega^\times \hat{J} \omega - \frac{1}{2} k s^T \hat{J} F \omega - l_1 s^T \operatorname{sgn}(s) + s^T d - s^T \omega^\times J \omega + \frac{1}{2} k s^T J F \omega \quad (4-61) \\ &= -\rho_1 k_s s^T s - s^T \omega^\times \tilde{J} \omega + \frac{1}{2} k s^T \tilde{J} F \omega + s^T d - \left(\bar{d} + \lambda \left(\|\omega\|^2 + \frac{1}{2} k \|\omega\| \right) \right) s^T \operatorname{sgn}(s) \\ &\leq -\rho_1 k_s s^T s \leq 0 \end{aligned}$$

在系统到达滑模面之后，即 $\|s\| < \varepsilon$ 时，对其求导并带入控制器(4-57)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= s^T J \dot{s} = s^T J \dot{\omega} + k s^T J \dot{q}_v + \dot{k} s^T J q_v \\ &= s^T (u + d - \omega^\times J \omega) + \frac{1}{2} k s^T J F \omega + \frac{1}{2} p q_0^3 (1 - q_0) s^T J q_v \\ &= -\rho_2 k_s s^T s + s^T \omega^\times \hat{J} \omega - \frac{1}{2} k s^T \hat{J} F \omega - \frac{1}{2} p q_0^3 (1 - q_0) s^T \hat{J} q_v - l_2 s^T \operatorname{sgn}(s) \\ &\quad + s^T d - s^T \omega^\times J \omega + \frac{1}{2} k s^T J F \omega + \frac{1}{2} p q_0^3 (1 - q_0) s^T J q_v \quad (4-62) \\ &= -\rho_2 k_s s^T s + s^T d - s^T \omega^\times \tilde{J} \omega + \frac{1}{2} k s^T \tilde{J} F \omega + \frac{1}{2} p q_0^3 (1 - q_0) s^T \tilde{J} q_v \\ &\quad - \left(\bar{d} + \lambda \left(\|\omega\|^2 + \frac{1}{2} k \|\omega\| + \frac{1}{2} p q_0^3 (1 - q_0) \|q_v\| \right) \right) s^T \operatorname{sgn}(s) \\ &\leq -\rho_2 k_s s^T s \leq 0 \end{aligned}$$

从而有滑模状态 s 一致渐近稳定，而由前文讨论，系统状态 ω 与 q_v 在滑模面 $s = 0$ 上一致渐近稳定，从而系统(2-1)、(2-17)在控制器(4-57)的作用下一致渐近稳定。

理论上，为了让系统状态尽快收敛，应当使滑模参数 k 尽快增大，从而在其更新律中应当选取尽量大的参数 p 与 k 的初值 $k(0)$ 。但值得注意的是，考虑到系统存在着控制力矩与角速度的约束，在选取参数时应当合理权衡系统收敛速率与系统性能的约束。基于此，接下来讨论系统控制力矩与角速度约束对于滑模参数选取的要求。

首先讨论系统控制力矩对滑模参数的要求。考虑到控制器(4-57)中比例项 $k_s s$ 可以进行放缩，确保控制力矩不超过系统上界的关键是确保 $\|r_i\| \leq \bar{u}$ 。在系统状态尚未到达滑模面(4-56)时，有

$$\begin{aligned}\|r_1\| &= \left\| \omega^\times \hat{J} \omega - \frac{1}{2} k \hat{J} F \omega - l_1 \operatorname{sgn}(s) \right\| \\ &\approx \left\| \omega^\times J \omega + \frac{1}{2} k J F \omega \right\| \\ &\leq \lambda_M(J) \left(\bar{\omega}^2 + \frac{1}{2} k(0) \bar{\omega} \right)\end{aligned}\quad (4-63)$$

其中 $\bar{\omega}$ 为系统姿态角速度上界，从而只需满足

$$\lambda_M(J) \left(\bar{\omega}^2 + \frac{1}{2} k(0) \bar{\omega} \right) \leq \bar{u} \quad (4-64)$$

即可确保在系统状态未到达滑模面之前控制力矩范数不超过系统上界。

在系统状态到达滑模面(4-56)之后，有

$$\omega = -k q_v \quad (4-65)$$

同时考虑到

$$q_0^3(1-q_0) = \frac{1}{3} q_0^3(3-3q_0) \leq \frac{1}{3} \left(\frac{q_0 + q_0 + q_0 + 3 - 3q_0}{4} \right)^4 = \frac{27}{256} < \frac{1}{9} \quad (4-66)$$

从而有

$$\begin{aligned}\|r_2\| &= \left\| \omega^\times \hat{J} \omega - \frac{1}{2} k \hat{J} F \omega - \frac{1}{2} p q_0^3(1-q_0) \hat{J} q_v - l_2 \operatorname{sgn}(s) \right\| \\ &\approx \left\| \omega^\times J \omega - \frac{1}{2} k J F \omega - \frac{1}{2} p q_0^3(1-q_0) J q_v \right\| \\ &= \left\| k^2 q_v^\times J q_v + \frac{1}{2} k^2 q_0 J q_v - \frac{1}{2} p q_0^3(1-q_0) J q_v \right\| \\ &\leq \lambda_M(J) \left(k^2 \|q_v\|^2 + \left(\frac{1}{2} k^2 + \frac{1}{18} p \right) \|q_v\| \right) \\ &\leq \lambda_M(J) \left(\frac{3}{2} k^2 + \frac{1}{18} p \right) \|q_v\|\end{aligned}\quad (4-67)$$

定义 z 如下

$$z = \lambda_M(J) \left(\frac{3}{2} k^2 + \frac{1}{18} p \right) \|q_v\| \quad (4-68)$$

可以看到 z 为 r_2 范数的上界，可以通过对 z 的约束实现对于 r_2 范数的限制。对 z 求导可以得到

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \lambda_M(\mathbf{J}) \left(3k\dot{k}\|\mathbf{q}_v\| + \left(\frac{3}{2}k^2 + \frac{1}{18}p \right) \frac{d\|\mathbf{q}_v\|}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{2}\lambda_M(\mathbf{J})kq_0\|\mathbf{q}_v\| \left(3pq_0^2(1-q_0) - \frac{3}{2}k^2 - \frac{1}{18}p \right)\end{aligned}\quad (4-69)$$

从而 z 取得极值时有

$$k^2 = 2pq_0^2(1-q_0) - \frac{1}{27}p \quad (4-70)$$

从而有

$$\begin{aligned}z &\leq 3\lambda_M(\mathbf{J})pq_0^2(1-q_0)\|\mathbf{q}_v\| = 3\lambda_M(\mathbf{J})pq_0^2(1-q_0)\sqrt{1-q_0^2} \\ &= 3\lambda_M(\mathbf{J})p\sqrt{q_0^4(1-q_0)^2(1-q_0^2)} \\ &\leq 3\sqrt{2}\lambda_M(\mathbf{J})p\sqrt{q_0^3(1-q_0)^3} \\ &\leq \frac{3\sqrt{2}}{8}\lambda_M(\mathbf{J})p\end{aligned}\quad (4-71)$$

从而只需满足

$$\frac{3\sqrt{2}}{8}\lambda_M(\mathbf{J})p \leq \bar{u} \quad (4-72)$$

即可确保系统在滑模面(4-56)上控制力矩不超过系统上界。

接下来需要讨论角速度约束对滑模参数的影响。注意到在系统到达滑模面(4-56)之前滑模参数 k 更新律为 0，因此可以假定若选择合适的控制参数，系统状态到达滑模面之前不存在角速度超过系统上界的问题。而在系统状态到达滑模面(4-56)之后，有

$$\boldsymbol{\omega} = -k\mathbf{q}_v \quad (4-73)$$

计算 $\boldsymbol{\omega}$ 范数的导数可以得到

$$\begin{aligned}\frac{d\|\boldsymbol{\omega}\|}{dt} &= \dot{k}\|\mathbf{q}_v\| + k\frac{d\|\mathbf{q}_v\|}{dt} \\ &= \frac{1}{2}pq_0^3(1-q_0)\|\mathbf{q}_v\| - \frac{1}{2}k^2q_0\|\mathbf{q}_v\| \\ &= \frac{1}{2}q_0\|\mathbf{q}_v\|(pq_0^2(1-q_0) - k^2)\end{aligned}\quad (4-74)$$

从而当 $\|\boldsymbol{\omega}\|$ 取得极值时有

$$k^2 = pq_0^2(1-q_0) \quad (4-75)$$

从而

$$\|\omega\| = k\|q_v\| \leq \sqrt{pq_0^2(1-q_0)}\sqrt{1-q_0^2} \leq \sqrt{2p}\sqrt{q_0^2(1-q_0)^2} \leq \frac{\sqrt{2p}}{4} \quad (4-76)$$

由此若系统角速度上界为 $\bar{\omega}$ ，只需满足

$$\sqrt{2p}/4 \leq \bar{\omega} \quad (4-77)$$

即可确保系统角速度范数不超过系统上界。

可以看到，在本小节中控制力矩对于系统参数的约束(4-64)、(4-72)与角速度对于系统参数的约束(4-77)考虑的均为最极端的情形，因此这些约束条件均为严格约束条件。

本小节对经典滑模控制器存在的收敛速率方面的缺陷进行了改进，核心思路在于随着系统状态的收敛实时增大滑模参数；同时考虑到系统控制力矩与角速度范数的约束，讨论滑模参数更新律所应满足的约束条件。

4.3.2 姿态跟踪控制器

与上一小节类似的，设计滑模面如下

$$\begin{aligned} s_e &= \omega_e + kq_{ev}, k(0) > 0 \\ \dot{k} &= \begin{cases} 0, & \|s_e\| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2}pq_{e0}^3(1-q_{e0}), & \|s_e\| < \varepsilon \end{cases} \end{aligned} \quad (4-78)$$

其中 ε 为一足够小的正常数， p 为正常数。

可以看到本小节中的动态滑模面与上一小节所提出的滑模面基本相同，其基本思路均为随着系统状态逼近平衡点，实时放大滑模参数以提升系统收敛速率和对控制力矩的利用效率。

基于滑模面(4-78)的姿态跟踪控制器可以写为

$$u = \begin{cases} -\rho_1 k_s s_e + \hat{J}R\dot{\omega}_d - \hat{J}\omega_e^\times R\omega_d - \frac{1}{2}k\hat{J}F_e\omega_e & \|s_e\| \geq \varepsilon \\ +(\omega_e + R\omega_d)^\times \hat{J}(\omega_e + R\omega_d) - l_1 \text{sgn}(s_e), & \\ -\rho_2 k_s s_e + \hat{J}R\dot{\omega}_d - \hat{J}\omega_e^\times R\omega_d - \frac{1}{2}k\hat{J}F_e\omega_e - \frac{1}{2}pq_{e0}^3(1-q_{e0})\hat{J}q_{ev} & \|s_e\| < \varepsilon \\ +(\omega_e + R\omega_d)^\times \hat{J}(\omega_e + R\omega_d) - l_2 \text{sgn}(s_e), & \end{cases} \quad (4-79)$$

$$\begin{cases} l_1 = \lambda \left(\|\dot{\omega}_d\| + \|\omega_e\|\|\omega_d\| + \frac{1}{2}k\|\omega_e\| + \|\omega_e + R\omega_d\|^2 \right) + \bar{d} \\ l_2 = \lambda \left(\|\dot{\omega}_d\| + \|\omega_e\|\|\omega_d\| + \frac{1}{2}k\|\omega_e\| + \|\omega_e + R\omega_d\|^2 + \frac{1}{2}pq_{e0}^3(1-q_{e0})\|q_{ev}\| \right) + \bar{d} \end{cases} \quad (4-80)$$

其中, k_s 为正常数, λ 为正常数且满足 $\lambda \geq \lambda_M(\tilde{J})$, ρ_i 为控制器增益因子, 其定义如下

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{-k_s s_e^T r_i + \sqrt{(k_s s_e^T r_i)^2 + k_s^2 \|s_e\|^2 (\bar{u}^2 - \|r_i\|^2)}}{k_s^2 \|s_e\|^2}, & \|u\| > \bar{u} \\ 1, & \|u\| \leq \bar{u} \end{cases} \quad (4-81)$$

$$\begin{cases} r_1 = \hat{J}R\dot{\omega}_d - \hat{J}\omega_e^\times R\omega_d - \frac{1}{2}k\hat{J}F_e\omega_e + (\omega_e + R\omega_d)^\times \hat{J}(\omega_e + R\omega_d) - l_1 \text{sgn}(s_e) \\ r_2 = \hat{J}R\dot{\omega}_d - \hat{J}\omega_e^\times R\omega_d - \frac{1}{2}k\hat{J}F_e\omega_e - \frac{1}{2}pq_{e0}^3(1-q_{e0})\hat{J}q_{ev} \\ \quad + (\omega_e + R\omega_d)^\times \hat{J}(\omega_e + R\omega_d) - l_2 \text{sgn}(s_e) \end{cases} \quad (4-82)$$

与前文类似, ρ_i 的作用是当控制力矩范数超过系统上界时, 对控制器中比例项进行放缩使得控制力矩维持在系统上界。

接下来对控制器(4-79)进行稳定性证明。选取 Lyapunov 函数如下

$$V_s = \frac{1}{2} s_e^T J s_e \quad (4-83)$$

在系统尚未到达滑模面之前, 即 $\|s_e\| \geq \varepsilon$ 时, 对 V_s 求导并带入控制器(4-79)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= s_e^T J \dot{s}_e = s_e^T J \dot{\omega}_e + k s_e^T J \dot{q}_{ev} \\ &= s_e^T \left(u + d - JR\dot{\omega}_d + J\omega_e^\times R\omega_d - (\omega_e + R\omega_d)^\times J(\omega_e + R\omega_d) \right) + \frac{1}{2} k s_e^T J F_e \omega_e \\ &= -\rho_1 k_s s_e^T s_e + s_e^T \hat{J}R\dot{\omega}_d - s_e^T \hat{J}\omega_e^\times R\omega_d - \frac{1}{2} k s_e^T \hat{J}F_e \omega_e - l_1 s_e^T \text{sgn}(s_e) + \frac{1}{2} k s_e^T J F_e \omega_e \\ &\quad + s_e^T (\omega_e + R\omega_d)^\times \hat{J}(\omega_e + R\omega_d) + s_e^T d - s_e^T JR\dot{\omega}_d + s_e^T J\omega_e^\times R\omega_d \\ &\quad - s_e^T (\omega_e + R\omega_d)^\times J(\omega_e + R\omega_d) \\ &= -\rho_1 k_s s_e^T s_e + s_e^T \tilde{J}R\dot{\omega}_d - s_e^T \tilde{J}\omega_e^\times R\omega_d + s_e^T (\omega_e + R\omega_d)^\times \tilde{J}(\omega_e + R\omega_d) \\ &\quad - \frac{1}{2} k s_e^T \tilde{J}F_e \omega_e - \left(\lambda \left(\|\dot{\omega}_d\| + \|\omega_e\| \|\omega_d\| + \frac{1}{2} k \|\omega_e\| + \|\omega_e + R\omega_d\|^2 \right) + \bar{d} \right) s_e^T \text{sgn}(s_e) \\ &\leq -\rho_1 k_s s_e^T s_e \leq 0 \end{aligned} \quad (4-84)$$

在系统到达滑模面之后即 $\|s_e\| < \varepsilon$ 时, 对其求导并带入控制器(4-79)可以得到

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_s &= \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{s}}_e = \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_e + k \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}_{ev} + \dot{k} \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{q}_{ev} \\
 &= \mathbf{s}_e^T \left(\mathbf{u} + \mathbf{d} - \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \right) + \frac{1}{2} k \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e \\
 &\quad + \frac{1}{2} p q_{e0}^3 (1 - q_{e0}) \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{q}_{ev} \\
 &= -\rho_2 k_s \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_e^T \hat{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \mathbf{s}_e^T \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - \frac{1}{2} k \mathbf{s}_e^T \hat{\mathbf{J}} \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e - \frac{1}{2} p q_{e0}^3 (1 - q_{e0}) \mathbf{s}_e^T \hat{\mathbf{J}} \mathbf{q}_{ev} \\
 &\quad + \mathbf{s}_e^T (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \hat{\mathbf{J}} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) - l_2 \mathbf{s}_e^T \text{sgn}(\mathbf{s}_e) + \mathbf{s}_e^T \mathbf{d} - \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d \\
 &\quad - \mathbf{s}_e^T (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) + \frac{1}{2} k \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e + \frac{1}{2} p q_{e0}^3 (1 - q_{e0}) \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{q}_{ev} \\
 &= -\rho_2 k_s \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_e^T \mathbf{d} - \mathbf{s}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{s}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - \mathbf{s}_e^T (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \tilde{\mathbf{J}} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \\
 &\quad + \frac{1}{2} k \mathbf{s}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e + \frac{1}{2} p q_{e0}^3 (1 - q_{e0}) \mathbf{s}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{q}_{ev} - \bar{d} \mathbf{s}_e^T \text{sgn}(\mathbf{s}_e) \\
 &\quad - \lambda \left(\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + \|\boldsymbol{\omega}_e\| \|\boldsymbol{\omega}_d\| + \frac{1}{2} k \|\boldsymbol{\omega}_e\| + \|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \frac{1}{2} p q_{e0}^3 (1 - q_{e0}) \|\mathbf{q}_{ev}\| \right) \mathbf{s}_e^T \text{sgn}(\mathbf{s}_e) \\
 &\leq -\rho_2 k_s \mathbf{s}_e^T \mathbf{s}_e \leq 0
 \end{aligned} \tag{4-85}$$

由(4-84)与(4-85)可以看到滑模状态 \mathbf{s}_e 一致渐近稳定，而由前文讨论，误差角速度 $\boldsymbol{\omega}_e$ 与误差四元数 \mathbf{q}_{ev} 在 $\mathbf{s}_e = \mathbf{0}$ 上一致渐近稳定，因此系统(2-28)、(2-29)在控制器(4-79)作用下一致渐近稳定。

值得注意的是，为了实现提升收敛速率的目的，理论上应当选取尽量大的参数 p 与 $k(0)$ 使得 k 拥有更快的更新速率，但当其取值较大时存在着控制力矩与姿态角速度超过系统上界的可能性，因此需要在系统收敛速率与系统性能约束之间进行合理权衡。基于此，接下来讨论控制力矩与姿态角速度约束对滑模参数更新律的影响。

考虑到控制器中比例项可以放缩，因此防止力矩饱和的关键是使得控制器中 \mathbf{r}_i 范数小于等于控制力矩上界。假定系统控制力矩上界为 \bar{u} ，在系统状态未到达滑模面(4-78)之前，有

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{r}_1\| &= \left\| \hat{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - \frac{1}{2} k \hat{\mathbf{J}} \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e + (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \hat{\mathbf{J}} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) - l_1 \text{sgn}(\mathbf{s}_e) \right\| \\
 &\approx \left\| \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - \frac{1}{2} k \mathbf{J} \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e + (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \right\| \\
 &= \left\| \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - \frac{1}{2} k \mathbf{J} \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e \right\| \\
 &\leq \lambda_M(\mathbf{J}) \left(\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + \bar{\omega} \|\boldsymbol{\omega}_d\| + \frac{1}{2} k \bar{\omega} + \bar{\omega}^2 \right)
 \end{aligned} \tag{4-86}$$

其中 $\bar{\omega}$ 为系统姿态角速度上界，从而只需满足

$$\lambda_M(\mathbf{J}) \left(\dot{\bar{\omega}}_d + \bar{\omega} \bar{\omega}_d + \frac{1}{2} k(0) \bar{\omega} + \bar{\omega}^2 \right) \leq \bar{u} \quad (4-87)$$

即可确保 $\|\mathbf{s}_e\| \geq \varepsilon$ 时控制力矩范数不超过系统上界。其中 $\bar{\omega}_d$ 、 $\dot{\bar{\omega}}_d$ 分别为 $\|\boldsymbol{\omega}_d\|$ 、 $\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\|$ 的上界。

当系统状态达滑模面(4-78)之后，有

$$\boldsymbol{\omega}_e = -k\mathbf{q}_{ev} \quad (4-88)$$

从而

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_2\| &= \left\| \hat{\mathbf{J}}\mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \hat{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d - \frac{1}{2} k \hat{\mathbf{J}}\mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e - \frac{1}{2} p q_{e0}^3 (1 - q_{e0}) \hat{\mathbf{J}}\mathbf{q}_{ev} + \boldsymbol{\omega}^\times \hat{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} - l_2 \text{sgn}(\mathbf{s}_e) \right\| \\ &\approx \left\| \mathbf{J}\mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d - \frac{1}{2} k \mathbf{J}\mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e - \frac{1}{2} p q_{e0}^3 (1 - q_{e0}) \mathbf{J}\mathbf{q}_{ev} + \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \right\| \\ &= \left\| \mathbf{J}\mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\omega}}_d + k \mathbf{q}_{ev}^\times \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d + \frac{1}{2} k q_{e0} \mathbf{J}\mathbf{q}_{ev} - \frac{1}{2} p q_{e0}^3 (1 - q_{e0}) \mathbf{J}\mathbf{q}_{ev} + \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \right\| \\ &\leq \lambda_M(\mathbf{J}) \left(\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + k \|\boldsymbol{\omega}_d\| \|\mathbf{q}_{ev}\| + \frac{1}{2} k \|\mathbf{q}_{ev}\| + \frac{1}{2} p q_{e0}^3 (1 - q_{e0}) \|\mathbf{q}_{ev}\| + \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \right) \\ &\leq \lambda_M(\mathbf{J}) \left(\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + k \|\boldsymbol{\omega}_d\| \|\mathbf{q}_{ev}\| + \frac{1}{2} k \|\mathbf{q}_{ev}\| + \frac{1}{2} p q_{e0}^3 (1 - q_{e0}) \|\mathbf{q}_{ev}\| + \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \right) \\ &\leq \lambda_M(\mathbf{J}) \left(\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + k \left(3\bar{\omega}_d + \frac{1}{2} \right) \bar{\omega}_d \|\mathbf{q}_{ev}\| + k^2 \|\mathbf{q}_{ev}\|^2 + \frac{1}{2} p q_{e0}^3 (1 - q_{e0}) \|\mathbf{q}_{ev}\| \right) \end{aligned} \quad (4-89)$$

其中 $\bar{\omega}_d$ 为期望角速度范数的上界。考虑到

$$q_{e0}^3 (1 - q_{e0}) = \frac{1}{3} q_{e0}^3 (3 - 3q_{e0}) \leq \frac{1}{3} \left(\frac{q_{e0} + q_{e0} + q_{e0} + 3 - 3q_{e0}}{4} \right)^4 = \frac{27}{256} < \frac{1}{9} \quad (4-90)$$

从而有

$$\|\mathbf{r}_2\| \leq \lambda_M(\mathbf{J}) \left(\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + k \left(3\bar{\omega}_d + \frac{1}{2} \right) \|\mathbf{q}_{ev}\| + k^2 \|\mathbf{q}_{ev}\| + \frac{p}{18} \|\mathbf{q}_{ev}\| \right) \quad (4-91)$$

定义变量 z 如下

$$z = \lambda_M(\mathbf{J}) \left(\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + k \left(3\bar{\omega}_d + \frac{1}{2} \right) \|\mathbf{q}_{ev}\| + k^2 \|\mathbf{q}_{ev}\| + \frac{p}{18} \|\mathbf{q}_{ev}\| \right) \quad (4-92)$$

可以看到 z 为 $\|\mathbf{r}_2\|$ 上界。对 z 求导可以得到

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \lambda_M(\mathbf{J}) \left(\left(k \left(3\bar{\omega}_d + \frac{1}{2} \right) + k^2 \frac{1}{18} \right) \frac{d\|\mathbf{q}_{ev}\|}{dt} + \left(\left(3\bar{\omega}_d + \frac{1}{2} \right) \|\mathbf{q}_{ev}\| + 2k\|\mathbf{q}_{ev}\| \right) \dot{k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lambda_M(\mathbf{J}) q_{e0} \|\mathbf{q}_{ev}\| \left(\left(3\bar{\omega}_d + \frac{1}{2} + 2k \right) p q_{e0}^2 (1 - q_{e0}) - \left(k^2 \left(3\bar{\omega}_d + \frac{1}{2} \right) + k^3 + \frac{pk}{18} \right) \right)\end{aligned}\quad (4-93)$$

考虑到

$$k^2 \left(3\bar{\omega}_d + \frac{1}{2} \right) + k^3 + \frac{pk}{18} > k^2 \left(3\bar{\omega}_d + \frac{1}{2} \right), 3\bar{\omega}_d + \frac{1}{2} + 2k < 3\bar{\omega}_d + \frac{1}{2} \quad (4-94)$$

从而有 $\dot{z} = 0$ 即 z 取得极值时有

$$k < \sqrt{p q_{e0}^2 (1 - q_{e0})} \quad (4-95)$$

带入(4-92)可以得到

$$z \leq \lambda_M(\mathbf{J}) \left(\frac{3\sqrt{2}}{8} p + \frac{\sqrt{2}}{4} p \left(3\bar{\omega}_d + \frac{1}{2} \right) + \|\dot{\omega}_d\| \right) \quad (4-96)$$

从而只需保证

$$\lambda_M(\mathbf{J}) \left(\frac{3\sqrt{2}}{8} p + \frac{\sqrt{2}}{4} p \left(3\bar{\omega}_d + \frac{1}{2} \right) + \|\dot{\omega}_d\| \right) \leq \bar{u} \quad (4-97)$$

即可使得 $\|\mathbf{r}_2\|$ 不超过系统上界，从而在系统状态到达滑模面(4-78)之后不存在控制力矩饱和的问题。

接下来需要讨论系统姿态角速度对于滑模参数的约束。注意到在系统到达滑模面(4-78)之前滑模参数 k 更新律为 0，因此可以假定若选择合适的控制参数，系统状态到达滑模面之前不存在角速度饱和的问题。而在系统状态到达滑模面(4-78)之后，有

$$\omega_e = -k\mathbf{q}_{ev} \quad (4-98)$$

计算 ω_e 范数的导数可以得到

$$\begin{aligned}\frac{d\|\omega_e\|}{dt} &= \dot{k}\|\mathbf{q}_{ev}\| + k \frac{d\|\mathbf{q}_{ev}\|}{dt} \\ &= \frac{1}{2} p q_{e0}^3 (1 - q_{e0}) \|\mathbf{q}_{ev}\| - \frac{1}{2} k^2 q_{e0} \|\mathbf{q}_{ev}\| \\ &= \frac{1}{2} q_{e0} \|\mathbf{q}_{ev}\| (p q_{e0}^2 (1 - q_{e0}) - k^2)\end{aligned}\quad (4-99)$$

从而当 $\|\omega_e\|$ 取得极值时有

$$k^2 = p q_{e0}^2 (1 - q_{e0}) \quad (4-100)$$

从而

$$\|\omega_e\| = k\|q_{ev}\| \leq \sqrt{pq_{e0}^2(1-q_{e0})}\sqrt{1-q_{e0}^2} \leq \sqrt{2p}\sqrt{q_{e0}^2(1-q_{e0})^2} \leq \frac{\sqrt{2p}}{4} \quad (4-101)$$

考虑到

$$\|\omega\| = \|\omega_e + R\omega_d\| \leq \|\omega_e\| + \|\omega_d\| \quad (4-102)$$

由此若系统角速度上界为 $\bar{\omega}$ ，只需满足

$$\sqrt{2p}/4 \leq \bar{\omega} - \bar{\omega}_d \quad (4-103)$$

即可确保系统角速度范数不超过系统上界。

与前文类似的，在本节中控制力矩约束(4-87)、(4-97)与角速度约束(4-103)均是在最极端情形下推导得到，因此均为对于控制参数的严格约束。

可以看到本小节给出的动态滑模面与 4.3.1 小节中滑模面具有相似的结构，控制器的推导过程也相类似，但由于误差角速度动力学模型的复杂，控制参数约束方程的推导较上一小节复杂得多。

4.4 仿真与分析

本节将对于本章所提出的控制器进行仿真与分析。鉴于本章中提出了两种姿态镇定控制器与两种姿态跟踪控制器，同时为了有效说明控制器的性能，本节中的仿真将按照姿态镇定控制与姿态跟踪控制的顺序给出。

4.4.1 姿态镇定控制器仿真

设置系统参数如下

$$J = \text{diag}([20 \ 18 \ 15]) \text{kg}\cdot\text{m}^2, \hat{J} = \text{diag}([21 \ 17 \ 14]) \text{kg}\cdot\text{m}^2, \lambda = 3$$

$$t_{\text{sample}} = 0.5\text{s}, \bar{d} = 0.001\text{N}\cdot\text{m}, \bar{u} = 0.5\text{N}\cdot\text{m}, \bar{\omega} = 0.1\text{rad/s} \quad (4-104)$$

$$\omega(t_0) = [-0.03 \ -0.04 \ 0.05]^T \text{rad/s}, q(t_0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T$$

为了说明本次研究所提出的控制算法的性能，本节中将以经典的滑模控制器(4-105)作为参照。

$$s = \omega + kq_v$$

$$u = -k_s s + \omega^\times J\omega - \frac{1}{2}kJF\omega - \bar{d}\text{sgn}(s) \quad (4-105)$$

$$k = 0.1, k_s = 2$$

可以得到基于经典滑模控制器的仿真曲线如下所示

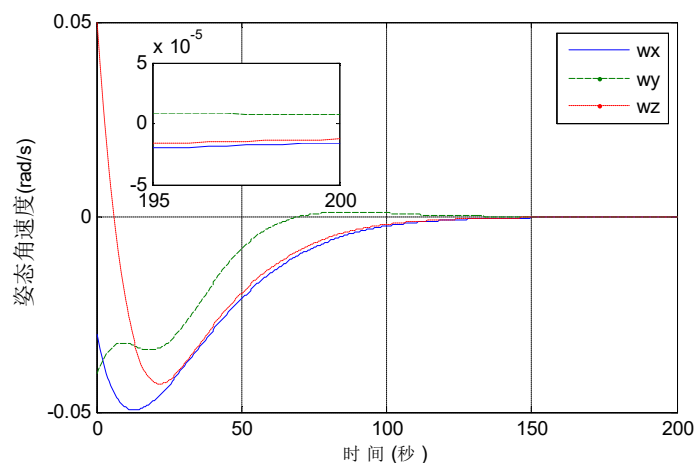


图 4-1 姿态角速度曲线

Fig. 4-1 Curve of angular velocity

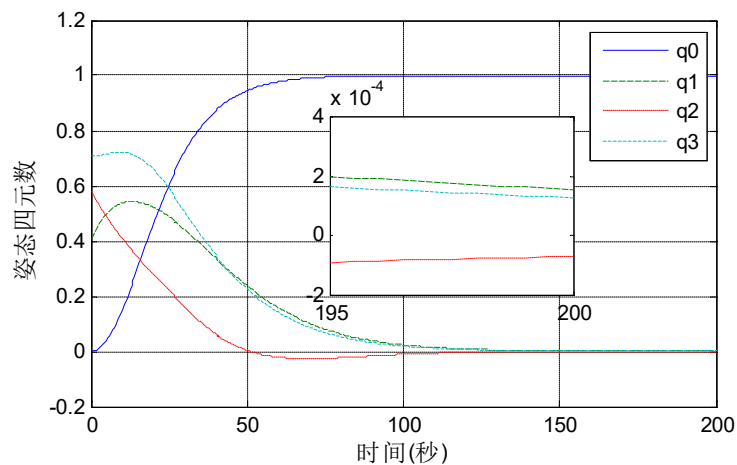


图 4-2 姿态四元数曲线

Fig. 4-2 Curve of attitude quaternion

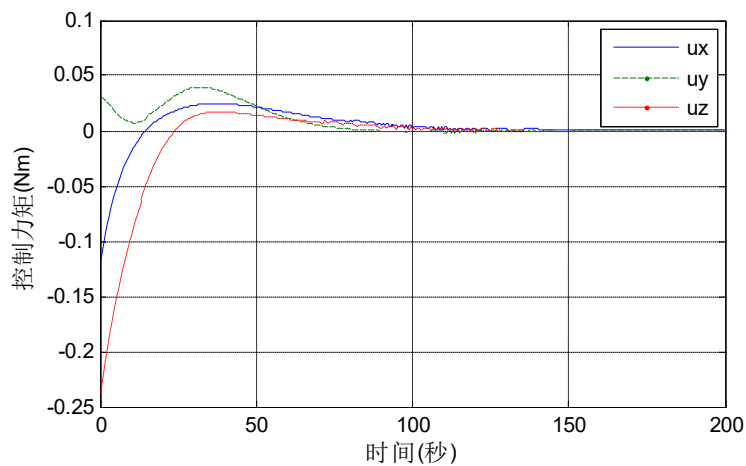


图 4-3 控制力矩曲线

Fig. 4-3 Curve of control torque

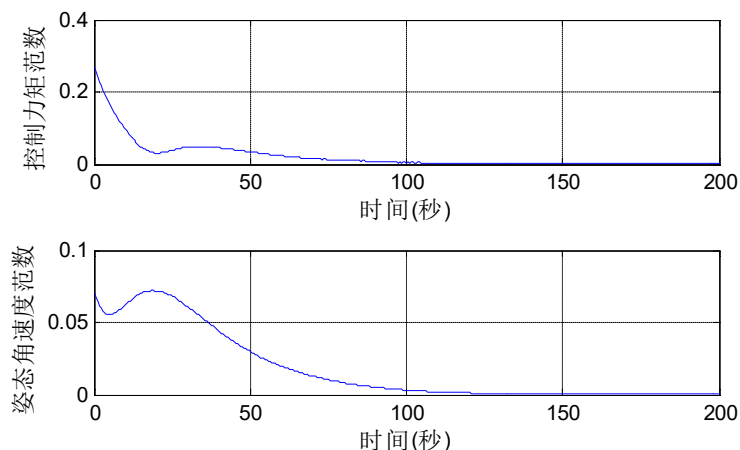


图 4-4 控制力矩范数与角速度范数曲线

Fig. 4-4 Curve of norm of control torque and angular velocity

由图 4-1 与 4-2 可以看到姿态角速度与姿态四元数大约在 150s 左右收敛至 θ ，在 200s 时姿态角速度与姿态四元数的稳态精度分别为 2×10^{-5} 与 2×10^{-4} 。由图 4-4 可以看到系统姿态角速度在 20s 之后迅速下降，这也导致了经典滑模控制器收敛速率方面的缺陷。

接下来给出本文提出的基于 Bang-Bang 控制的滑模控制器(4-22)的仿真。一般的，选取较大的 k_s 能够使得系统尽快的收敛至滑模面附近的邻域内，考虑到卫星最大姿态角速度约为 0.1rad/s ，同时注意到卫星转动惯量矩阵数值以及控制力矩幅值，因此设置仿真参数如下

$$k_1 = 0.1, \eta = 0.01, k_s = 2, \beta = 0.005 \quad (4-106)$$

可以得到系统控制力矩对滑模参数的约束(4-32)与(4-38)均得到满足。基于控制器(4-22)的仿真曲线如下所示

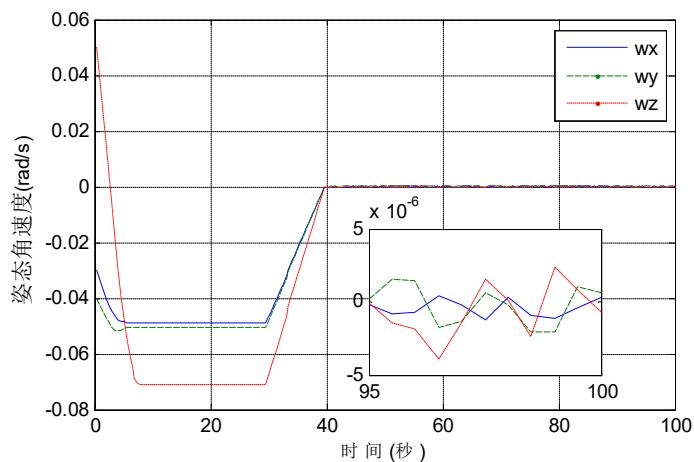


图 4-5 姿态角速度曲线

Fig. 4-5 Curve of angular velocity

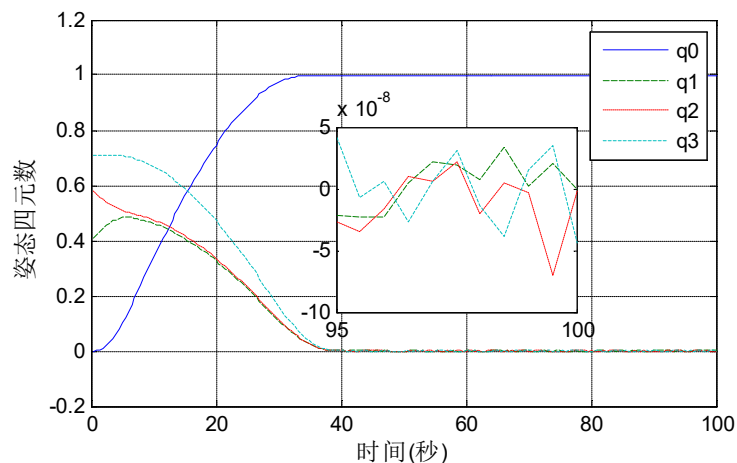


图 4-6 姿态四元数曲线

Fig. 4-6 Curve of angular quaternion

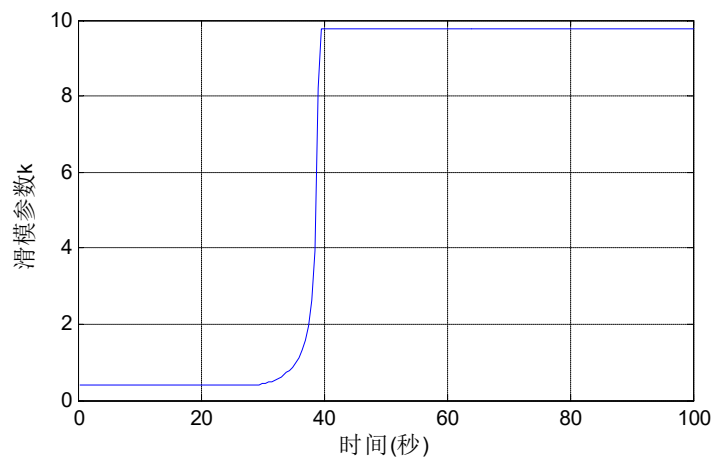


图 4-7 滑模参数 k_2 曲线

Fig. 4-7 Curve of sliding mode parameter

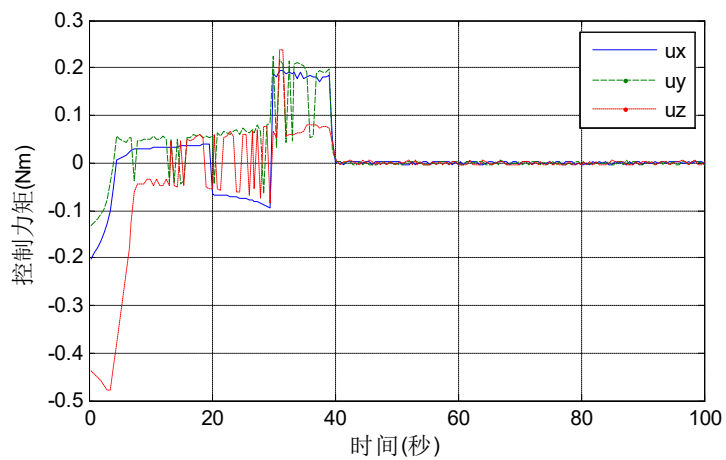


图 4-8 控制力矩曲线

Fig. 4-8 Curve of control torque

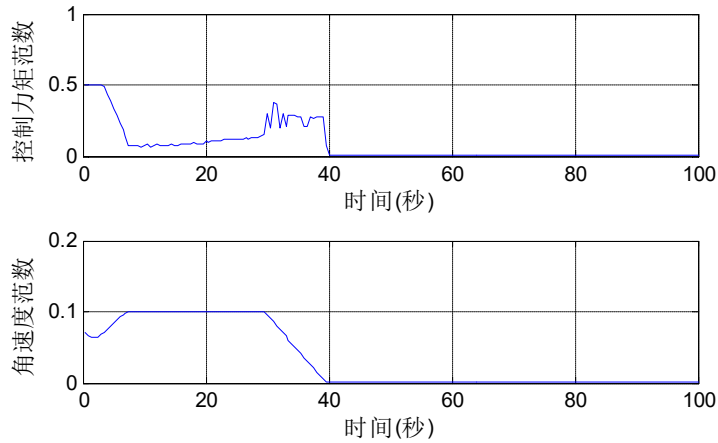


图 4-9 控制力矩范数与角速度范数曲线

Fig. 4-9 Curve of norm of control torque and angular velocity

可以看到角速度与四元数的收敛时间约为 40s，收敛时间较经典滑模控制器有了大幅提升（提升约 75%），而 100s 时的角速度与四元数稳态精度分别为 5×10^{-6} 与 5×10^{-8} ，稳态精度同样有了大幅提升，同时可以看到系统控制力矩与角速度范数全程未超过系统上界。系统角速度在 10s 至 30s 均为匀速，而从 30s 到 40s 开始匀减速至 0，这种类似于 Bang-Bang 控制的角速度曲线极大程度的提升了系统的收敛速率与控制力矩的利用效率。由图 4-7 可以看到滑模参数的不断更新是提升系统收敛速率的关键，不同于经典滑模控制中锁定滑模参数 k 的方法，本文中滑模参数 k_2 在初值的基础上不断更新，控制过程中该参数放大了约 30 倍，从而实现了开环的 Bang-Bang 控制与闭环的滑模控制的有效结合。本质上来说，提升姿态四元数收敛速率的关键在于合理规划姿态角速度轨迹，经典滑模控制中期望角速度的轨迹是一条范数单调递减的指数函数曲线，而控制器(4-22)的期望角速度曲线则是一条先匀速、后匀减速的类 Bang-Bang 曲线，对角速度的合理规划带来了系统的优良特性。但值得注意的是，虽然该滑模面能够有效实现收敛速率的提升，由图 4-9 可以看到该控制器依然没有完全利用系统的控制力矩，系统性能仍然存在着提升的空间，理论上来说滑模参数更新律(4-14)能够实现完全的 Bang-Bang “刹车线”，但系统转动惯量与干扰力矩的存在制约了该算法的研究与应用。值得注意的是，在系统状态足够逼近平衡点时需要停止更新滑模参数，否则会出现其趋近于无穷的奇异情况。同时由图 4-5 与 4-6 可以看到系统状态在平衡点附近存在着较为剧烈的振荡，这是由滑模参数的放大导致控制器中符号函数项的增大所带来的，同时值得注意的是滑模参数的增大同样会导致观测信号中有害噪声的放大，这些均会对系统带来不利的影响。

接下来给出基于动态滑模面的滑模控制器(4-57)的仿真。设置仿真参数如下

$$\varepsilon = 0.005, p = 0.3, k(0) = 0.05, k_s = 2 \quad (4-107)$$

滑模控制器(4-57)的仿真曲线如下所示

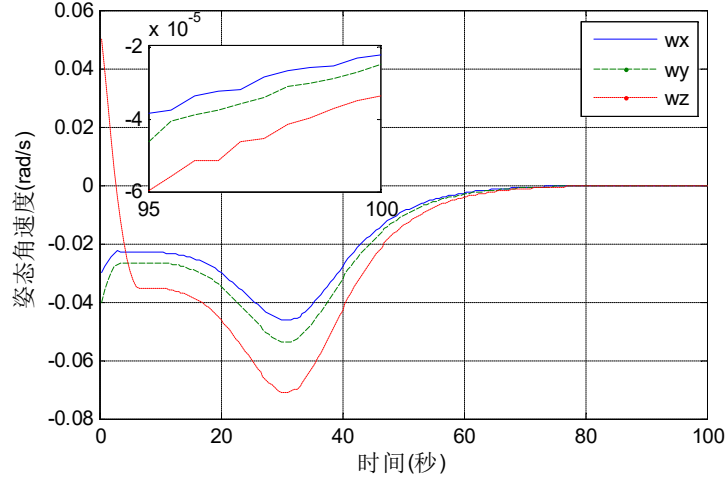


图 4-10 姿态角速度曲线

Fig. 4-10 Curve of angular velocity

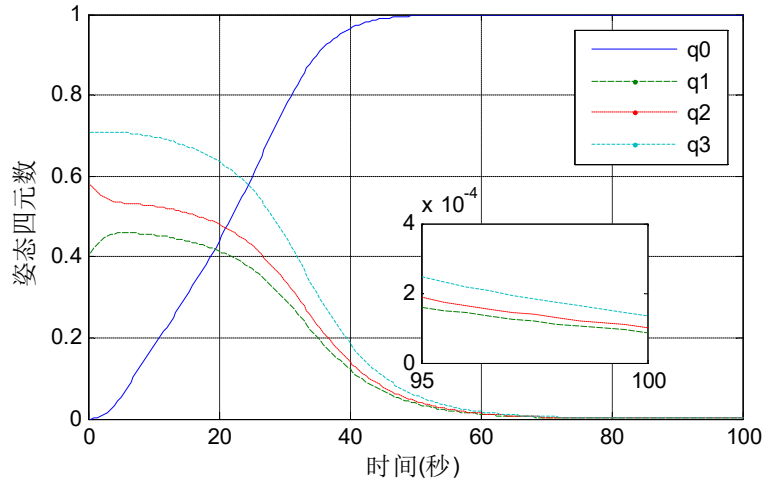


图 4-11 姿态四元数曲线

Fig. 4-11 Curve of attitude quaternion

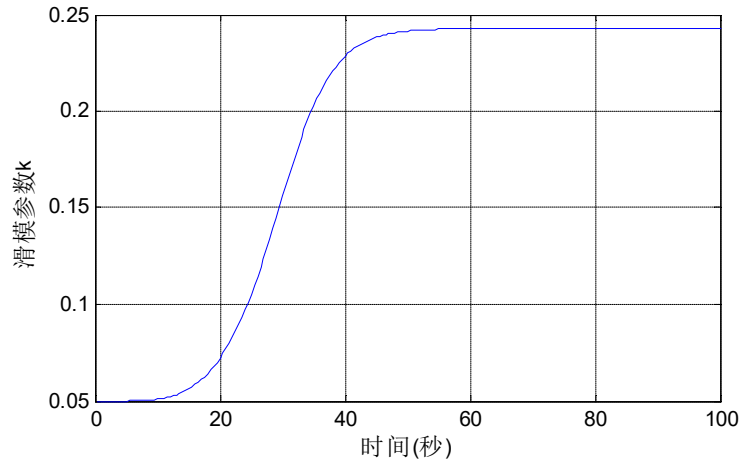


图 4-12 滑模参数 k 曲线

Fig. 4-12 Curve of sliding mode parameter

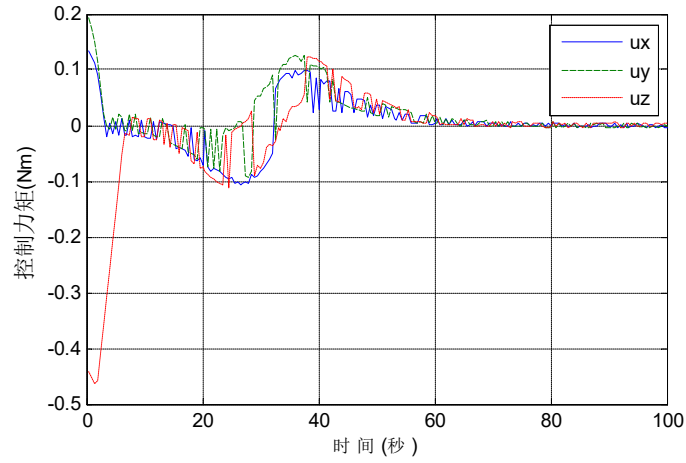


图 4-13 控制力矩曲线

Fig. 4-13 Curve of control torque

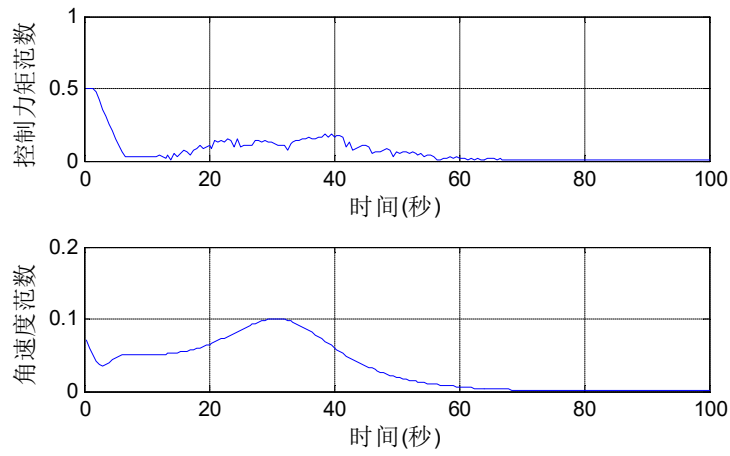


图 4-14 控制力矩范数与角速度范数曲线

Fig. 4-14 Curve of norm of control torque and angular velocity

由图 4-10 与 4-11 可以看到系统状态收敛时间约为 80s，相比较于经典滑模控制器的收敛时间提升约 50%，值得注意的是经典滑模控制器中滑模参数 k 的初值为 0.1，而控制器(4-57)中滑模参数初值仅为 0.05，在滑模参数初值更小的情形下依然实现了收敛速率的大幅提升，这说明了本文提出算法对于经典滑模控制进行改进的有效性；同时由图 4-10 与 4-11 可以看到系统在 100s 处角速度与四元数的稳态精度分别为 6×10^{-5} 与 2×10^{-4} ，与经典滑模控制 200s 处的稳态精度相当。由图 4-14 可以看到控制力矩范数与角速度范数全程未超过系统上界。由图 4-12 可以看到滑模参数 k 由初值 0.05 更新至控制结束时的 0.24，同时由图 4-14 可以看到姿态角速度在 10s 到 30s 不断增加，这样就避免了经典滑模控制中角速度下降过快带来的弊端。总的来说，滑模参数的不断增加带来了系统收敛速率的提升。同时对比基于 Bang-Bang 控制的仿真结果可以看到虽然该方法在收敛时间方面牺牲了一定的系统性能，但是系统状态在平衡点附近的振荡问题明显得到缓解。

通过本节的仿真可以看到本章提出的基于 Bang-Bang 控制的滑模控制器与动态滑模控制器均能够有效提升经典滑模控制的收敛速率，其本质均在于不断更新滑模参数，所不同的是前者滑模参数更新律较大，从而系统收敛速率也更快，但随之而来的是系统对于控制参数更加严格的约束，后者滑模参数更新律较为平缓，但是系统对于系统参数、外部扰动的鲁棒性也更强。

4.4.2 姿态跟踪控制器仿真

首先设置系统参数如下

$$\begin{aligned} J &= \text{diag}([20 \ 18 \ 15]) \text{kg} \cdot \text{m}^2, \hat{J} = \text{diag}([21 \ 17 \ 14]) \text{kg} \cdot \text{m}^2, \lambda = 3 \\ \bar{u} &= 0.5 \text{N} \cdot \text{m}, \bar{d} = 0.001 \text{N} \cdot \text{m}, \bar{\omega} = 0.1 \text{rad/s} \\ \omega(t_0) &= [0 \ 0 \ -0.1]^T \text{rad/s}, q(t_0) = [1/2 \ -1/2 \ \sqrt{3}/3 \ \sqrt{6}/6]^T \\ \omega_d(t_0) &= [0.01 \ -0.005 \ 0]^T \text{rad/s}, \dot{\omega}_d(t_0) = \mathbf{0}_{3 \times 1}, q_d(t_0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \end{aligned} \quad (4-108)$$

与前文类似，本节中仍以经典滑模控制器(4-109)作为参照

$$\begin{aligned} s_e &= \omega_e + k q_{ev} \\ u &= -k_s s_e + J R \dot{\omega}_d - J \omega_e^\times R \omega_d - \frac{1}{2} k J F_e \omega_e + \omega^\times J \omega - \bar{d} \text{sgn}(s_e) \\ k_s &= 2, k = 0.1 \end{aligned} \quad (4-109)$$

可以得到经典滑模控制器的仿真曲线如下所示

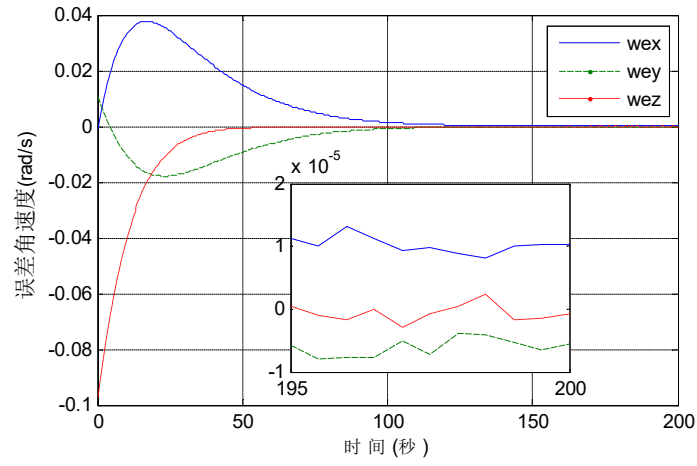


图 4-15 误差角速度曲线

Fig. 4-15 Curve of error angular velocity

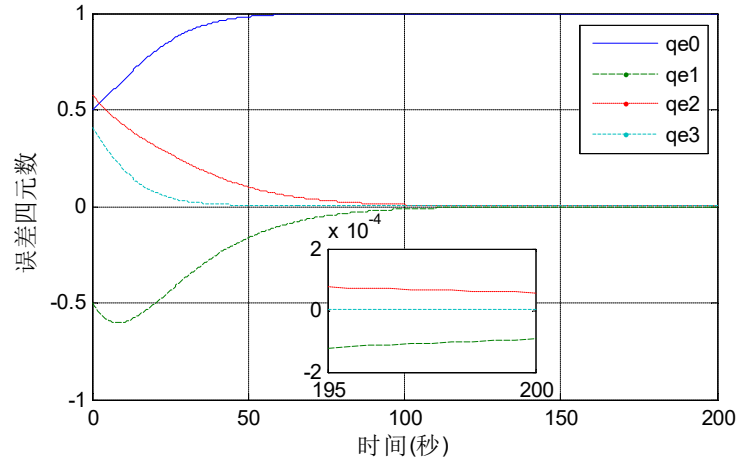


图 4-16 误差四元数曲线

Fig. 4-16 Curve of error quaternion

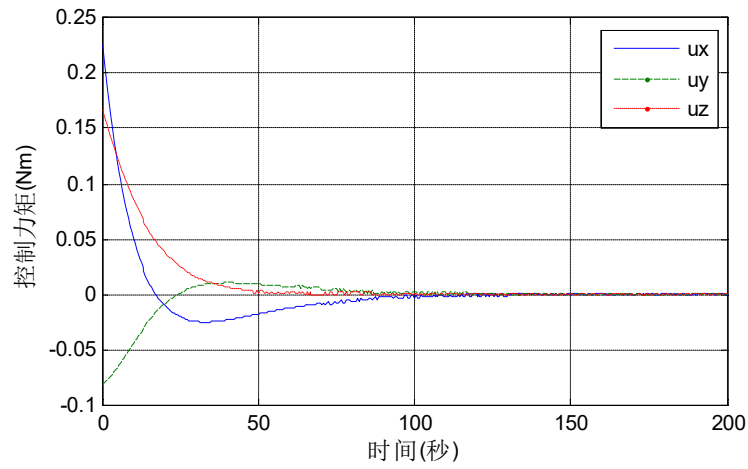


图 4-17 控制力矩曲线

Fig. 4-17 Curve of control torque

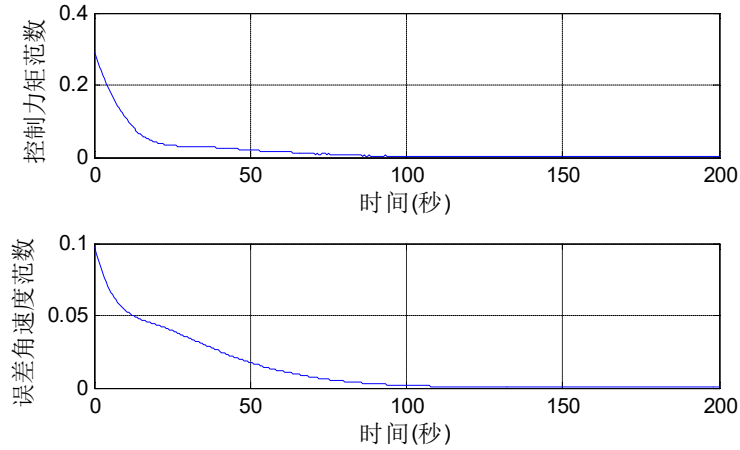


图 4-18 控制力矩范数与误差角速度范数曲线

Fig. 4-18 Curve of norm of control torque and angular velocity

由图 4-15 与 4-16 可以看到系统收敛时间约为 120s, 200s 时误差角速度与误差四元数的稳态精度分别为 1×10^{-5} 与 2×10^{-4} 。与前文分析类似, 经典滑模控制器存在的收敛速率方面的缺陷主要是由误差角速度下降过快所导致, 而这也导致了系统控制力矩利用效率的低下。

接下来给出基于 Bang-Bang 控制的滑模控制器(4-40)的仿真。首先设置仿真参数如下

$$k_1 = 0.1, \eta = 0.01, k_s = 2, \beta = 0.005 \quad (4-110)$$

可以得到控制器(4-40)的仿真曲线如下所示

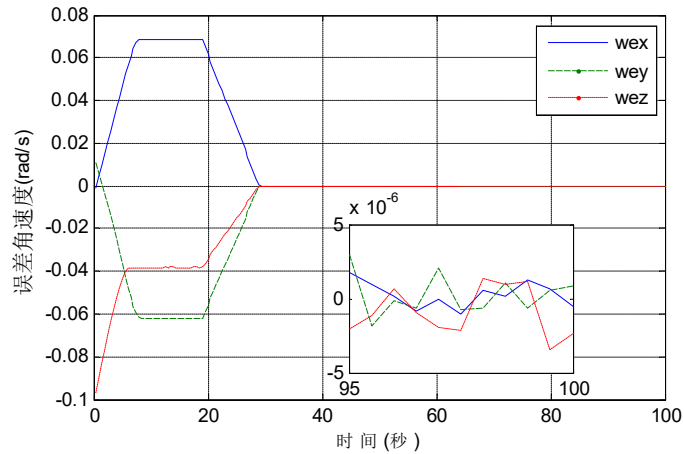


图 4-19 误差角速度曲线

Fig. 4-19 Curve of error angular velocity

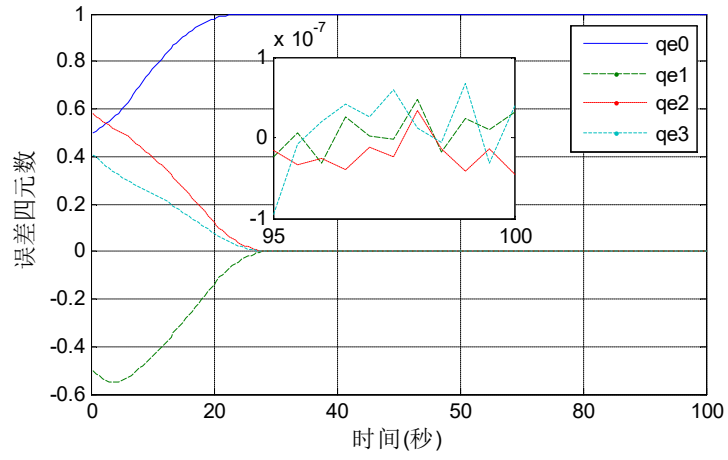


图 4-20 误差四元数曲线

Fig. 4-20 Curve of error quaternion

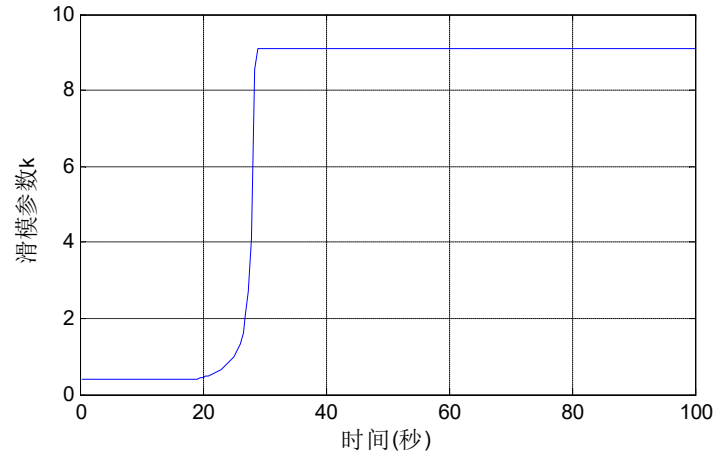


图 4-21 滑模参数 k_2 曲线

Fig. 4-21 Curve of sliding mode parameter

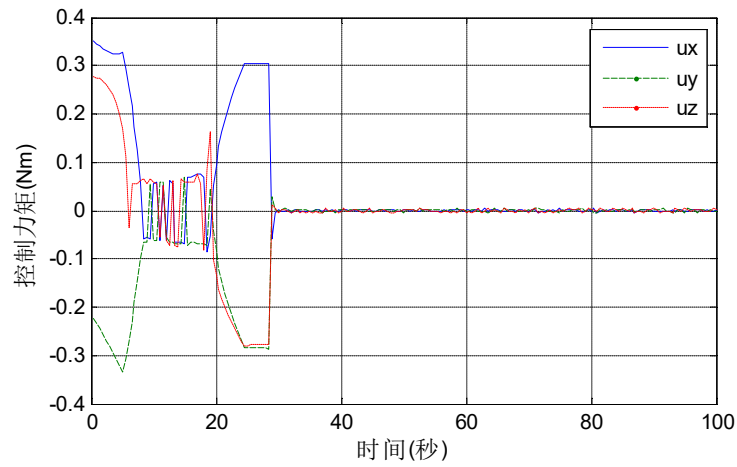


图 4-22 控制力矩曲线

Fig. 4-22 Curve of control torque

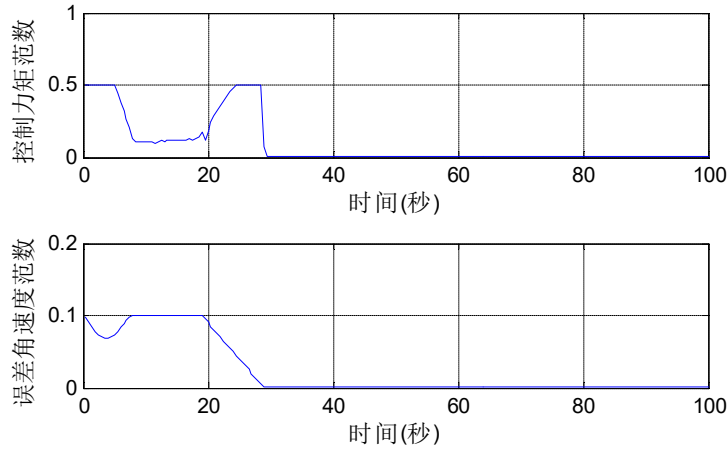


图 4-23 控制力矩范数与误差角速度范数曲线

Fig. 4-23 Curve of norm of control torque and angular velocity

可以看到系统收敛时间约为 30s，收敛时间相比较于经典滑模控制器有了大幅度的提升（提升约 75%），100s 处误差角速度与误差四元数的稳态精度分别为 5×10^{-6} 与 1×10^{-7} ，稳态精度较经典滑模控制器同样大幅提升，由图 4-23 可以看到系统控制力矩与误差角速度全程不超过系统上界，考虑到期望角速度远小于误差角速度，因此可以认为姿态角速度同样全程不超过系统上界。控制器(4-40)能够大幅提升系统收敛速率的原因同样在于合理的规划了角速度轨迹，其本质是增大滑模参数，由图 4-21 可以看到滑模参数由初值 0.2 左右增大至稳态时的 9.1，从而终端收敛速率得到了大幅度提升，由于前文已进行过类似的讨论与分析，因此在此对其不进行赘述。

接下来给出动态滑模控制器(4-79)的仿真。首先设置仿真参数如下

$$\varepsilon = 0.005, p = 0.3, k(0) = 0.05, k_s = 2 \quad (4-111)$$

可以得到控制器(4-79)的仿真曲线如下所示

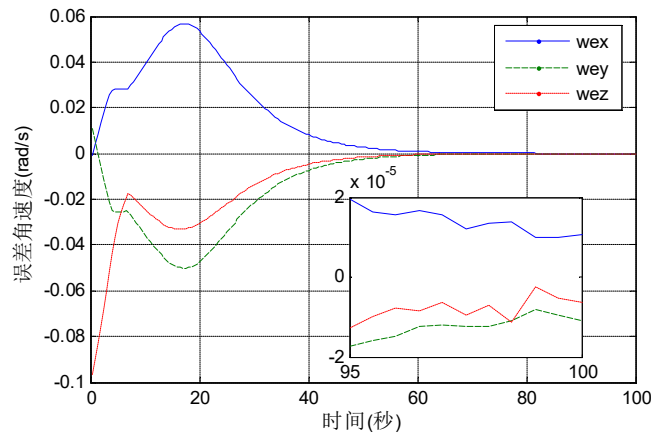


图 4-24 误差角速度曲线

Fig. 4-24 Curve of error angular velocity

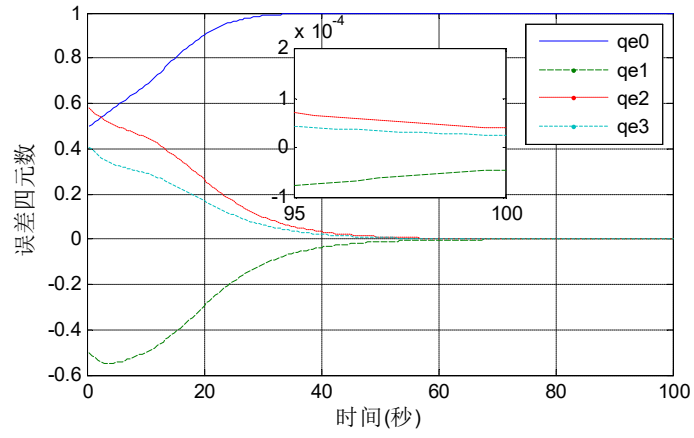


图 4-25 误差四元数曲线

Fig. 4-25 Curve of error quaternion

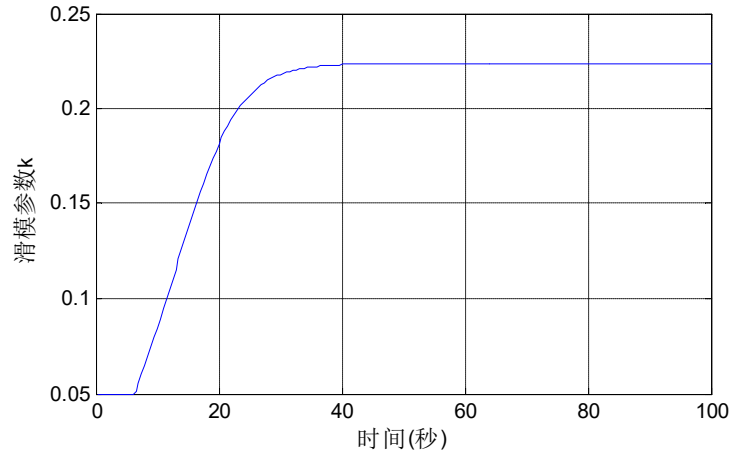


图 4-26 滑模参数 k 曲线

Fig. 4-26 Curve of sliding mode parameter

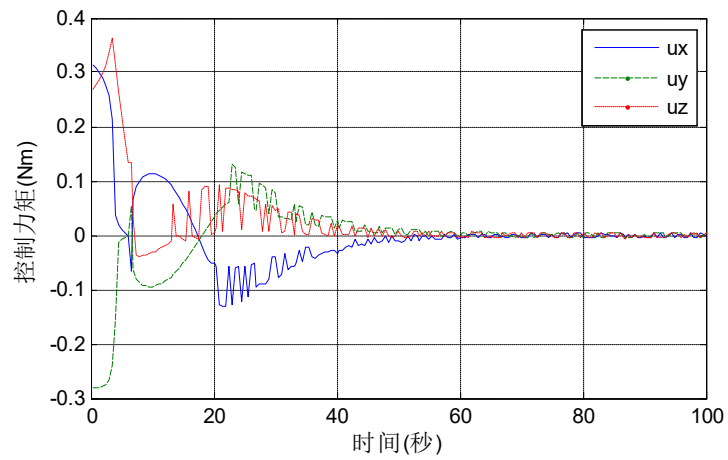


图 4-27 控制力矩曲线

Fig. 4-27 Curve of control torque

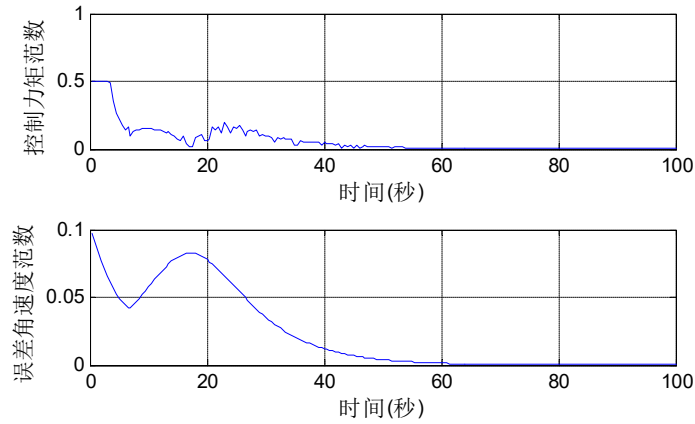


图 4-28 控制力矩范数与误差角速度范数曲线

Fig. 4-28 Curve of norm of control torque and angular velocity

由图 4-24 与 4-25 可以看到系统收敛时间约为 70s，在滑模参数初值小于经典滑模控制器初值的情形下，收敛时间与稳态精度相比较于经典滑模控制器仍有较大提升（提升约 40%）。同时可以看到控制力矩与姿态角速度同样全程不超过系统上界。由图 4-26 可以看到滑模参数 k 由初值 0.05 增大至稳态时的 0.23，滑模参数的不断更新是系统收敛速率提升的关键。由于前文以对类似的姿态镇定控制器性能的优劣进行过讨论与分析，因此在此对其不进行赘述。

通过本节的仿真可以看到本章提出的基于 Bang-Bang 控制的滑模控制器与动态滑模控制器均能够大幅度提升经典滑模控制器的收敛速率，二者改善系统性能的关键均在于对滑模参数的不断更新，所不同的是前者收敛速率更快，滑模参数更新律也较大，但对于参数的约束也更加严格，而后者滑模参数的更新律较为平缓，但对于系统参数与外部扰动的鲁棒性也更强。

4.5 本章小结

针对经典滑模控制器存在的收敛速率方面的缺陷，本章中先后引入了 Bang-Bang 控制与动态滑模的思路，针对经典滑模控制中锁定滑模参数的弊端，通过实时放大滑模参数的方法提升系统收敛速率。通过本章的讨论与分析可以看到基于 Bang-Bang 控制的滑模控制器能够更有效地改善系统性能，角速度轨迹为先匀速、后匀减速的轨线，虽然由于各类扰动存在未能实现控制力矩全程锁定其幅值，但仍然不失为一种提升系统收敛速率的有效手段。但值得注意的是为防止滑模参数出现逼近于无穷的奇异情形，必须在系统状态足够逼近平衡点时停止其更新；而基于动态滑模的滑模控制器虽然对与收敛速率的提升不如前者，但滑模参数更新律较为平滑，系统对于滑模参数的约束也更容易满足，同时在平衡点附近系统状态的振荡也较为平缓，因此系统对于参数与外部扰动的鲁棒性也更强。

第5章 基于有限时间控制的姿态控制器设计

5.1 引言

在前文的讨论中，虽然能够通过设计姿态角速度的匀速段、更新控制参数等手段提升系统收敛速率，但无论是 PID 控制器还是滑模控制器均无法解决的问题是系统的一致渐进稳定性，即随着系统逼近平衡点，系统状态的收敛速率接近于 0，系统状态在无穷远处才能到达平衡点。针对这一缺陷，本章中将引入有限时间控制以改善系统在平衡点附近的收敛特性。

由卫星的姿态运动学模型可以看到，姿态角速度决定了姿态四元数的收敛特性，因此设计有限时间控制器的关键在于合理地规划角速度轨迹亦即姿态四元数的导数的轨迹。由有限时间稳定性理论，若姿态四元数能够有限时间收敛，则姿态角速度范数应当是姿态四元数范数的分数次幂，但随之而来的问题是姿态角速度的导数亦即系统的控制力矩极易出现姿态四元数的负数次幂，在系统状态逼近 0 时便会导致系统控制力矩趋近于无穷，从而导致有限时间控制的奇异性问题。因此在设计姿态有限时间控制器时应当做到以下两点：1. 满足有限时间稳定性对于姿态角速度亦即四元数导数的要求，做到其范数为姿态四元数范数的分数次幂；2. 姿态角速度导数亦或姿态四元数的二阶导数必须有界，避免系统出现奇异性问题。同时值得注意的是，有限时间控制的特性是终端收敛速率优良，考虑到前文的讨论，系统在远离平衡点时姿态角速度范数应当维持在较大的值以保证四元数的收敛速率，因此可以通过设计变结构滑模面将系统的运动过程拆分成为若干阶段，从而对滑模控制与有限时间控制的优势进行有效结合。

基于上述讨论，针对姿态镇定控制与姿态跟踪控制问题，本章首先在经典滑模控制的基础上进行了改进，在系统状态远离平衡点时利用欧拉轴设计了系统的匀速运动轨迹，而在系统状态逼近平衡点时，利用姿态角速度矢量与四元数矢部反向时，欧拉轴指向不变的特性设计了有限时间滑模面，并规避了有限时间控制中的奇异性问题，并设计姿态控制器实现系统状态在有限时间内到达所设计的滑模面；随后针对小角度姿态机动的情形，基于 MRP 的导数设计有限时间滑模面，避免了对 MRP 的分数次幂直接进行求导，从而规避了奇异性问题，并设计姿态控制器实现系统状态在有限时间内到达所设计的滑模面；最后通过仿真验证本章所提出算法的有效性。

5.2 基于欧拉轴的有限时间控制器

在本节中将应用欧拉轴特性设计有限时间滑模面，在考虑外部干扰力矩与系统转动惯量不确定性的前提下，针对姿态镇定控制与姿态跟踪控制问题设计控制力矩受限的鲁棒有限时间控制器。

5.2.1 姿态镇定控制器

在卫星姿态控制领域中，最为经典的滑模面结构为

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\omega} + k\mathbf{q}_v, (k > 0) \quad (5-1)$$

如前文所述，该滑模面具有物理意义清晰、结构简单等等优点，但较为严重的缺陷是系统收敛速率下降过快，同时终端收敛速率过慢。考虑到

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2}\mathbf{q}_v^T \boldsymbol{\omega} \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{q}_v\| \|\boldsymbol{\omega}\| \quad (5-2)$$

通过(5-2)可以看到，在角速度范数固定时，若系统状态沿着滑模面(5-1)运动，有姿态角速度与姿态四元数矢部反向，从而 \dot{q}_0 能够取到其最大值，即姿态四元数有最大收敛速率。该性质是滑模面(5-1)自身所具有的优良特性，即姿态角速度范数一定时，姿态角速度与姿态四元数反向时有姿态四元数的最大收敛速率。基于该性质，在待设计滑模面上应当始终有角速度与四元数反向，从而本次研究所提出的基于欧拉轴的有限时间滑模面可以写为

$$\mathbf{s} = \begin{cases} \boldsymbol{\omega} + k_1 \mathbf{e}, & \|\mathbf{q}_v\| > \alpha \\ \boldsymbol{\omega} + k_2 \mathbf{q}_v, & \beta < \|\mathbf{q}_v\| \leq \alpha \\ \boldsymbol{\omega} + k_3 \|\mathbf{q}_v\|^r \mathbf{e}, & \|\mathbf{q}_v\| \leq \beta \end{cases} \quad (5-3)$$

其中 $k_1, k_2, k_3, \alpha, \beta$ 均为正常数，同时为了保证在滑模面的切换点处角速度不发生突变，控制参数应当满足

$$k_1 = \alpha k_2, k_2 = \beta^{r-1} k_3 \quad (5-4)$$

同时， r 为正常数且满足

$$1/2 < r < 1 \quad (5-5)$$

由(5-3)可以看到，本次研究所提出的有限时间滑模面分为三个阶段：第一阶段匀速段，即当 $\|\mathbf{q}_v\| > \alpha$ 时的滑模面 $\boldsymbol{\omega} + k_1 \mathbf{e}$ ，在该阶段姿态角速度的范数为常数，从而通过维持姿态角速度保证四元数的收敛速率处于较高数值；第二阶段减速段，即当 $\beta < \|\mathbf{q}_v\| \leq \alpha$ 时的滑模面 $\boldsymbol{\omega} + k_2 \mathbf{q}_v$ ，该阶段与经典滑模面(5-1)完全相同，考虑到系统在该阶段上指数收敛，为提升系统的收敛速率，应当尽量避免系统在该

阶段停留过久；第三阶段收敛段，即 $\|q_v\| \leq \beta$ 时的滑模面 $\omega + k_3 \|q_v\|^r e$ ，在该阶段系统状态能够在有限时间内收敛至平衡点。

可以看到，本次研究所提出的滑模面(5-3)在所有阶段均要求姿态角速度与姿态四元数的矢部反向，从而能够最大限度的利用姿态角速度实现提升收敛速率。同时，通过滑模面(5-3)的结构可以看到，为实现提升收敛速率的目标，应当选择尽量小的参数 α 使得系统尽可能长的停留在匀速段，同时注意到减速段与经典滑模面完全相同，存在着收敛速率下降过快、指数收敛的弊端，因此应当选择较大的参数 β 使得系统尽可能避免停留在指数收敛的减速段。但值得注意的是，为了避免有限时间控制的奇异性问题，参数 β 应当足够小使得系统在到达收敛段之前实现姿态角速度与姿态四元数的反向，即

$$\omega^T q_v / (\|\omega\| \|q_v\|) = -1 \quad (5-6)$$

因此参数 β 的选取应当兼顾系统的收敛特性与控制器的奇异性问题。

接下来需要证明系统在滑模面(5-3)上能够在有限时间内收敛至平衡点。由于在滑模面(5-3)的匀速段上姿态角速度范数恒定，故在该阶段的收敛时间 t_1 满足

$$t_1 \leq (\pi - 2 \arccos \sqrt{1 - \alpha^2}) / k_1 \quad (5-7)$$

而在滑模面(5-3)的减速段上，考虑 $q_0 \leq 1$ ，同时注意到

$$\frac{d(1 - q_0)}{dt} = -\dot{q}_0 = \frac{1}{2} q_v^T \omega = -\frac{k_2}{2} q_v^T q_v = -\frac{k_2}{2} (1 - q_0^2) \leq -k_2 (1 - q_0) \quad (5-8)$$

从而有系统在减速段的收敛时间 t_2 满足

$$t_2 \leq (\ln \alpha - \ln \beta) / (k_2 \sqrt{1 - \alpha^2}) \quad (5-9)$$

而在滑模面(5-3)的收敛段有

$$\omega = -k_3 \|q_v\|^r e \quad (5-10)$$

选取 Lyapunov 函数如下

$$V_q = q_v^T q_v \quad (5-11)$$

对其求导可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_q &= 2 q_v^T \dot{q}_v = q_v^T (q_0 I_3 + q_v^\times) \omega \\ &= -k_3 q_0 \|q_v\|^r q_v^T e = -k_3 q_0 \|q_v\|^{r+1} \\ &\leq -k_3 q_0 V_q^{\frac{r+1}{2}} \end{aligned} \quad (5-12)$$

注意到在该阶段上有 $\sqrt{1 - \beta^2} \leq q_0 \leq 1$ 与 $1/2 < r < 1$ ，从而由定理 2-4，在滑模面(5-3)

的收敛段系统有限时间收敛，且收敛时间 t_3 满足

$$t_3 \leq \frac{\beta^{2(1-\alpha)}}{k_3 \sqrt{1-\beta^2} (1-\alpha)} \quad (5-13)$$

从而由(5-7)、(5-9)、(5-13)可以得到系统状态在滑模面(5-3)上有限时间收敛至平衡点。

接下来需要设计姿态镇定控制器使得系统状态在有限时间内收敛至滑模面(5-3)。本次研究所提出的有限时间控制器结构如下

$$\mathbf{u} = \begin{cases} -\rho_1 \mathbf{s}^p + \mathbf{r}_1, & \|\mathbf{q}_v\| > \alpha \\ -\rho_2 \mathbf{s}^p + \mathbf{r}_2, & \beta < \|\mathbf{q}_v\| \leq \alpha \\ -\rho_3 \mathbf{s}^p + \mathbf{r}_3, & \|\mathbf{q}_v\| \leq \beta \end{cases} \quad (5-14)$$

其中常数 p 满足 $0 \leq p < 1$ ，三维向量函数 \mathbf{s}^p 定义如下

$$\mathbf{s}^p = \begin{bmatrix} \text{sign}(s_1) |s_1|^p & \text{sign}(s_2) |s_2|^p & \text{sign}(s_3) |s_3|^p \end{bmatrix}^T \quad (5-15)$$

式(5-14)中向量 \mathbf{r}_i 定义如下

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\omega}^\times \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} - \frac{k_1}{2} \hat{\mathbf{J}} \mathbf{e}^\times \left(\mathbf{I}_3 + \cot \frac{\varphi}{2} \mathbf{e}^\times \right) \boldsymbol{\omega} - \left(\bar{d} + \lambda \|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \frac{k_1}{2} \lambda \left(1 + \cot \frac{\varphi}{2} \right) \|\boldsymbol{\omega}\| \right) \text{sgn}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\omega}^\times \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} - \frac{k_2}{2} \hat{\mathbf{J}} \mathbf{F} \boldsymbol{\omega} - \left(\bar{d} + \lambda \|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \frac{k_2}{2} \lambda \|\boldsymbol{\omega}\| \right) \text{sgn}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{r}_3 = \boldsymbol{\omega}^\times \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} + \frac{k_3^2}{2} r q_0 \|\mathbf{q}_v\|^{2r-1} \hat{\mathbf{J}} \mathbf{e} - \left(\bar{d} + \lambda \|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \frac{k_3^2}{2} r \lambda |q_0| \|\mathbf{q}_v\|^{2r-1} \right) \text{sgn}(\mathbf{s}) \end{cases} \quad (5-16)$$

(5-16)中 \bar{d} 为正常数且满足 $\bar{d} \geq \|\mathbf{d}\|$ ， λ 满足

$$\lambda \geq \lambda_M(\tilde{\mathbf{J}}) \quad (5-17)$$

式(5-14)中 ρ_i 定义如下

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{-(\mathbf{s}^p)^T \mathbf{r}_i + \sqrt{\left((\mathbf{s}^p)^T \mathbf{r}_i \right)^2 + \|\mathbf{s}^p\|^2 (\bar{u}^2 - \|\mathbf{r}_i\|^2)}}{\|\mathbf{s}^p\|^2}, & \|\mathbf{u}\| > \bar{u} \\ k, & \|\mathbf{u}\| \leq \bar{u} \end{cases} \quad (5-18)$$

其中 k 为正常数， \bar{u} 为系统控制力矩上界。 ρ_i 的作用是使得控制器(5-14)的控制力矩范数不超过系统上界，其本质是对控制器施加饱和函数，并对滑模控制的“比例项” \mathbf{s}^p 进行放缩，当控制力矩范数不超过系统上界时，比例项系数 k 维持不变，而当控制力矩范数大于系统上界时对该项进行减小使得控制力矩维持在系统幅值。

注意到 $1/2 < r < 1$ ，则由(5-14)与(5-16)的结构可以看到，当系统状态逼近平衡点时， $\|\mathbf{q}_v\|^{2r-1}$ 项并不会出现趋近于无穷的情形，从而有限时间控制的奇异性问题得以解决。同时由控制器结构可以看到，控制器(5-14)并不需要系统的精确转动惯量矩阵，由此控制器对于系统转动惯量的不确定性具有鲁棒性。接下来需要证明控制器(5-14)能够使得系统(2-1)、(2-17)在有限时间内收敛至滑模面(5-3)附近足够近的邻域内。

在进行证明之前，需要给出一个引理。

引理 5-1: 对于任意 n 维向量 \mathbf{r} 与常数 $q \in (0, 2)$ ，均有不等式

$$\|\mathbf{r}\|^q \leq \sum_{i=1}^n |r_i|^q \quad (5-19)$$

证明: 当 \mathbf{r} 为零向量时，结论显然成立。当 \mathbf{r} 为非零向量时，有

$$0 \leq \frac{r_i^2}{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2} \leq 1 \quad (5-20)$$

从而有

$$0 \leq \frac{r_i^2}{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2} \leq \left(\frac{r_i^2}{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2} \right)^{\frac{q}{2}} = \frac{|r_i|^q}{\|\mathbf{r}\|^q} \leq 1 \quad (5-21)$$

注意到

$$1 = \sum_{i=1}^n \frac{r_i^2}{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2} \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i^2}{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2} \right)^{\frac{q}{2}} \quad (5-22)$$

从而有

$$\left(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 \right)^{\frac{q}{2}} \leq \sum_{i=1}^n \left(r_i^2 \right)^{\frac{q}{2}} \quad (5-23)$$

亦即

$$\|\mathbf{r}\|^q \leq \sum_{i=1}^n |r_i|^q \quad (5-24)$$

从而引理 5-1 证毕。

为证明控制器(5-14)能够使得系统在有限时间内收敛至滑模面(5-3)附近足够近的邻域内，选取 Lyapunov 函数如下

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{s} \quad (5-25)$$

从而有

$$V \geq \frac{1}{2} \lambda_m(\mathbf{J}) \|\mathbf{s}\|^2 \quad (5-26)$$

计算 V 的导数并带入控制器(5-14)，可以得到在控制器(5-14)的匀速段，有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + k_1 \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{e}} \\ &= \mathbf{s}^T \mathbf{u} - \mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s}^T \mathbf{d} + \frac{k_1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{e}^\times \left(\mathbf{I}_3 - \cot \frac{\varphi}{2} \mathbf{e}^\times \right) \boldsymbol{\omega} \\ &= -\rho_1 \sum_{i=1}^3 |s_i|^{p+1} - \mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}^\times \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s}^T \mathbf{d} + \frac{k_1}{2} \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{e}^\times \left(\mathbf{I}_3 - \cot \frac{\varphi}{2} \mathbf{e}^\times \right) \boldsymbol{\omega} \\ &\quad - \left(\bar{d} + \lambda \|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \frac{k_1}{2} \lambda \left(1 + \cot \frac{\varphi}{2} \right) \|\boldsymbol{\omega}\| \right) \mathbf{s}^T \mathbf{sgn}(\mathbf{s}) \\ &\leq -\rho_1 \sum_{i=1}^3 |s_i|^{p+1} + \bar{d} \|\mathbf{s}\| + \lambda(\tilde{\mathbf{J}}) \|\mathbf{s}\| \|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \frac{k_1}{2} \left(1 + \cot \frac{\varphi}{2} \right) \lambda(\tilde{\mathbf{J}}) \|\mathbf{s}\| \|\boldsymbol{\omega}\| \\ &\quad - \left(\bar{d} + \lambda \|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \frac{k_1}{2} \lambda \left(1 + \cot \frac{\varphi}{2} \right) \|\boldsymbol{\omega}\| \right) \|\mathbf{s}\| - \bar{d} \|\mathbf{s}\| \\ &\leq -\rho_1 \sum_{i=1}^3 |s_i|^{p+1} \end{aligned} \quad (5-27)$$

由引理 5-1 及性质(5-26)，(5-27)可以化简为

$$\dot{V} \leq -\rho_1 \left(\frac{2}{\lambda_m(\mathbf{J})} \right)^{\frac{p+1}{2}} V^{\frac{p+1}{2}} \quad (5-28)$$

在控制器(5-14)的减速段，有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + k_2 \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}_v \\ &= \mathbf{s}^T \mathbf{u} - \mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s}^T \mathbf{d} + \frac{k_2}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{F} \boldsymbol{\omega} \\ &= -\rho_2 \sum_{i=1}^3 |s_i|^{p+1} - \mathbf{s}^T \boldsymbol{\omega}^\times \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{s}^T \mathbf{d} + \frac{k_2}{2} \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{F} \boldsymbol{\omega} \\ &\quad - \left(\bar{d} + \lambda \|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \frac{k_2}{2} \lambda \|\boldsymbol{\omega}\| \right) \mathbf{s}^T \mathbf{sgn}(\mathbf{s}) \\ &\leq -\rho_2 \sum_{i=1}^3 |s_i|^{p+1} + \bar{d} \|\mathbf{s}\| + \lambda(\tilde{\mathbf{J}}) \|\mathbf{s}\| \|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \frac{k_2}{2} \lambda(\tilde{\mathbf{J}}) \|\mathbf{s}\| \|\boldsymbol{\omega}\| \\ &\quad - \left(\bar{d} + \lambda \|\boldsymbol{\omega}\|^2 + \frac{k_2}{2} \lambda \|\boldsymbol{\omega}\| \right) \|\mathbf{s}\| - \bar{d} \|\mathbf{s}\| \\ &\leq -\rho_2 \sum_{i=1}^3 |s_i|^{p+1} \end{aligned} \quad (5-29)$$

由引理 5-1 及性质(5-26)，(5-29)可以化简为

$$\dot{V} \leq -\rho_2 \left(\frac{2}{\lambda_m(J)} \right)^{\frac{p+1}{2}} V^{\frac{p+1}{2}} \quad (5-30)$$

在控制器(5-14)的收敛段，由前文假设系统在到达该阶段时姿态角速度与姿态四元数矢部反向，即存在正常数 c 使得

$$\omega = -ce \quad (5-31)$$

从而有

$$\dot{e} = \frac{1}{2} \left(I_3 - \cot \frac{\varphi}{2} e^\times \right) e^\times \omega = -\frac{c}{2} \left(I_3 - \cot \frac{\varphi}{2} e^\times \right) e^\times e = 0 \quad (5-32)$$

计算 V 的导数并带入控制器(5-13)，注意到性质(5-32)，从而有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T J \dot{s} = s^T J \dot{\omega} + k_3 s^T J e \frac{d \|q_v\|^r}{dt} + k_3 \|q_v\|^r s^T J \dot{e} \\ &= s^T u - s^T \omega^\times J \omega + s^T d - \frac{k_3^2}{2} r q_0 \|q_v\|^{2r-1} s^T J e \\ &= -\rho_3 \sum_{i=1}^3 |s_i|^{p+1} - s^T \omega^\times \tilde{J} \omega - \frac{k_3^2}{2} r q_0 \|q_v\|^{2r-1} s^T \tilde{J} e \\ &\quad - \left(\bar{d} + \lambda \|\omega\|^2 + \frac{k_3^2}{2} r \lambda |q_0| \|q_v\|^{2r-1} \right) s^T \operatorname{sgn}(s) + s^T d \\ &\leq -\rho_3 \sum_{i=1}^3 |s_i|^{p+1} + \bar{d} \|s\| + \lambda (\tilde{J}) \|s\| \|\omega\|^2 + \lambda (\tilde{J}) \frac{k_3^2}{2} r |q_0| \|q_v\|^{2r-1} \|s\| \\ &\quad - \left(\bar{d} + \lambda \|\omega\|^2 + \frac{k_3^2}{2} r \lambda |q_0| \|q_v\|^{2r-1} \right) \|s\| - \bar{d} \|s\| \\ &\leq -\rho_3 \sum_{i=1}^3 |s_i|^{p+1} \end{aligned} \quad (5-33)$$

由引理 5-1 及性质(5-26)，(5-33)可以化简为

$$\dot{V} \leq -\rho_3 \left(\frac{2}{\lambda_m(J)} \right)^{\frac{p+1}{2}} V^{\frac{p+1}{2}} \quad (5-34)$$

从而由(5-28)、(5-30)、(5-34)可以得到系统在控制器(5-14)的作用下在有限时间内收敛至滑模面(5-3)附近足够近的邻域内，由前文结论，系统在滑模面(5-3)上有限时间收敛，从而在控制器(5-14)作用下系统有限时间稳定。

可以看到，本节给出的有限时间控制器的设计关键在于两点：1.在滑模面(5-3)的收敛段，角速度范数为四元数范数的 r 次幂，且角速度向量与四元数矢部反向，从而实现四元数的有限时间收敛；2.利用角速度与四元数反向时欧拉轴指向不变的特性，消掉了角速度导数中的负数次幂项，从而避免了状态逼近平衡点时控制力

矩逼近无穷的情况，由此解决了有限时间控制中的奇异性问题。

5.2.2 姿态跟踪控制器

与前文类似，对于姿态跟踪控制问题，设计滑模面如下

$$s_e = \begin{cases} \omega_e + k_1 e_e, & \|q_{ev}\| > \alpha \\ \omega_e + k_2 q_{ev}, & \beta < \|q_{ev}\| \leq \alpha \\ \omega_e + k_3 \|q_{ev}\|^r e_e, & \|q_{ev}\| \leq \beta \end{cases} \quad (5-35)$$

其中， $k_1, k_2, k_3, \alpha, \beta$ 均为正常数，同时为了保证在滑模面的切换点处角速度不发生突变，控制参数应当满足

$$k_1 = \alpha k_2, k_2 = \beta^{r-1} k_3 \quad (5-36)$$

同时， r 为正常数且满足

$$1/2 < r < 1 \quad (5-37)$$

滑模面(5-35)同样分为三个阶段：第一阶段匀速段，即 $\|q_{ev}\| > \alpha$ 时的滑模面 $\omega_e + k_1 e_e$ ；第二阶段减速段，即 $\beta < \|q_{ev}\| \leq \alpha$ 时的滑模面 $\omega_e + k_2 q_{ev}$ ，该阶段的滑模面与经典滑模面完全相同；第三阶段收敛段，即 $\|q_{ev}\| \leq \beta$ 时的滑模面 $\omega_e + k_3 \|q_{ev}\|^r e_e$ ，在该阶段系统状态能够在有限时间稳定。

可以看到滑模面(5-35)要求误差角速度与误差四元数的矢部反向，从而能够最大限度的利用误差角速度。由于匀速段误差角速度的范数为常数，为提升系统的收敛速率，应当选择尽量小的参数 α 使系统状态尽可能长的停留在匀速段，同时注意到减速段与经典滑模面完全相同，均存在着收敛速率下降过快、指数收敛的缺陷，因此应当选择尽量大的参数 β 尽量避免系统状态停留在减速段。但值得注意的是，为了避免有限时间控制的奇异性问题，参数 β 应当足够小使得系统在到达收敛段之前实现误差角速度与误差四元数矢部的反向，即

$$\omega_e^T q_{ev} / (\|\omega_e\| \|q_{ev}\|) = -1 \quad (5-38)$$

因此参数 β 的选取应当兼顾系统收敛速率与控制器的奇异性问题。

接下来证明系统状态在滑模面(5-35)上有限时间收敛。由于在匀速段上误差角速度范数为常数，因此该阶段的收敛时间满足 t_1

$$t_1 \leq \left(\pi - 2 \arccos \sqrt{1 - \alpha^2} \right) / k_1 \quad (5-39)$$

而在滑模面(5-35)的减速段上，考虑 $q_{e0} \leq 1$ ，同时注意到

$$\frac{d(1-q_{e0})}{dt} = -\dot{q}_{e0} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_{ev}^T \boldsymbol{\omega}_e = -\frac{k_2}{2} \mathbf{q}_{ev}^T \mathbf{q}_{ev} = -\frac{k_2}{2} (1-q_{e0}^2) \leq -k_2 (1-q_{e0}) \quad (5-40)$$

从而有系统在减速段的收敛时间 t_2 满足

$$t_2 \leq (\ln \alpha - \ln \beta) / (k_2 \sqrt{1-\alpha^2}) \quad (5-41)$$

而在滑模面(5-35)的收敛段有

$$\boldsymbol{\omega}_e = -k_3 \|\mathbf{q}_{ev}\|^r \mathbf{e}_e \quad (5-42)$$

选取 Lyapunov 函数如下

$$V_q = \mathbf{q}_{ev}^T \mathbf{q}_{ev} \quad (5-43)$$

对其求导可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_q &= 2\mathbf{q}_{ev}^T \dot{\mathbf{q}}_{ev} = \mathbf{q}_{ev}^T (q_{e0} \mathbf{I}_3 + \mathbf{q}_{ev}^\times) \boldsymbol{\omega}_e \\ &= -k_3 q_{e0} \|\mathbf{q}_{ev}\|^r \mathbf{q}_{ev}^T \mathbf{e}_e = -k_3 q_{e0} \|\mathbf{q}_{ev}\|^{r+1} \\ &\leq -k_3 q_{e0} V_q^{\frac{r+1}{2}} \end{aligned} \quad (5-44)$$

注意到在该阶段上有 $\sqrt{1-\beta^2} \leq q_{e0} \leq 1$ 与 $1/2 < r < 1$ ，从而由定理 2-4，在滑模面(5-35)的收敛段系统有限时间收敛，且收敛时间 t_3 满足

$$t_3 \leq \frac{\beta^{2(1-\alpha)}}{k_3 \sqrt{1-\beta^2} (1-\alpha)} \quad (5-45)$$

从而由(5-39)、(5-41)、(5-45)可以得到系统状态在滑模面(5-35)上有限时间收敛至平衡点。

接下来需要设姿态跟踪控制器实现系统状态有限时间收敛至滑模面(5-35)附近足够近的邻域内。本次研究提出的姿态跟踪控制器结构如下

$$\mathbf{u} = \begin{cases} -\rho_1 \mathbf{s}_e^p + \mathbf{r}_1, & \|\mathbf{q}_v\| > \alpha \\ -\rho_2 \mathbf{s}_e^p + \mathbf{r}_2, & \beta < \|\mathbf{q}_v\| \leq \alpha \\ -\rho_3 \mathbf{s}_e^p + \mathbf{r}_3, & \|\mathbf{q}_v\| \leq \beta \end{cases} \quad (5-46)$$

其中常数 p 满足 $0 \leq p < 1$ ，向量函数 \mathbf{s}_e^p 定义如下

$$\mathbf{s}_e^p = \begin{bmatrix} \text{sign}(s_{e1}) |s_{e1}|^p & \text{sign}(s_{e2}) |s_{e2}|^p & \text{sign}(s_{e3}) |s_{e3}|^p \end{bmatrix}^T \quad (5-47)$$

式(5-46)中向量 \mathbf{r}_i 定义如下

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \hat{\mathbf{J}}\mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \hat{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d - \frac{1}{2}k_1\hat{\mathbf{J}}\mathbf{e}_e^\times \left(\mathbf{I}_3 - \cot\frac{\varphi_e}{2}\mathbf{e}_e^\times \right) \boldsymbol{\omega}_e \\ &\quad + (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d)^\times \hat{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d) - l_1 \text{sgn}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{r}_2 &= \hat{\mathbf{J}}\mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \hat{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d - \frac{1}{2}k_2\hat{\mathbf{J}}\mathbf{F}_e\boldsymbol{\omega}_e + (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d)^\times \hat{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d) - l_2 \text{sgn}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{r}_3 &= \hat{\mathbf{J}}\mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \hat{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d + \frac{k_3^2}{2}r_{q_{e0}}\|\mathbf{q}_{ev}\|^{2r-1}\hat{\mathbf{J}}\mathbf{e}_e \\ &\quad + (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d)^\times \hat{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d) - l_3 \text{sgn}(\mathbf{s}) \end{aligned} \right. \quad (5-48)$$

其中常数 l_i 定义如下

$$\left\{ \begin{aligned} l_1 &= \bar{d} + \lambda \left(\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + \|\boldsymbol{\omega}_e\| \|\boldsymbol{\omega}_d\| + \|\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d\|^2 + \frac{k_1}{2} \left(1 + \cot\frac{\varphi_e}{2} \right) \|\boldsymbol{\omega}_e\| \right) \\ l_2 &= \bar{d} + \lambda \left(\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + \|\boldsymbol{\omega}_e\| \|\boldsymbol{\omega}_d\| + \|\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d\|^2 + \frac{k_2}{2} \|\boldsymbol{\omega}_e\| \right) \\ l_3 &= \bar{d} + \lambda \left(\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + \|\boldsymbol{\omega}_e\| \|\boldsymbol{\omega}_d\| + \|\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_d\|^2 + \frac{k_3^2}{2} r_{q_{e0}} \|\mathbf{q}_{ev}\|^{2r-1} \right) \end{aligned} \right. \quad (5-49)$$

其中 \bar{d} 为正常数且满足 $\bar{d} \geq \|\mathbf{d}\|$, λ 满足 $\lambda \geq \lambda_M(\tilde{\mathbf{J}})$ 。式(5-46)中 ρ_i 定义如下

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{-\left(\mathbf{s}_e^p\right)^T \mathbf{r}_i + \sqrt{\left(\left(\mathbf{s}_e^p\right)^T \mathbf{r}_i\right)^2 + \left\|\mathbf{s}_e^p\right\|^2 \left(\bar{u}^2 - \|\mathbf{r}_i\|^2\right)}}{\left\|\mathbf{s}_e^p\right\|^2}, & \|\mathbf{u}\| > \bar{u} \\ k, & \|\mathbf{u}\| \leq \bar{u} \end{cases} \quad (5-50)$$

其中 k 为正常数, \bar{u} 为系统控制力矩上界。 ρ_i 的作用是使得控制器(5-46)的控制力矩范数不超过系统上界, 其本质是对控制器施加饱和函数, 并对滑模控制的“比例项” \mathbf{s}_e^p 进行放缩, 当控制力矩范数不超过系统上界时, 比例项系数 k 维持不变, 而当控制力矩范数大于系统上界时对该项进行减小使得控制力矩维持在系统幅值。

注意到 $1/2 < r < 1$, 由(5-46)与(5-48)的结构可以看到, 当系统状态逼近平衡点时, $\|\mathbf{q}_{ev}\|^{2r-1}$ 项并不会出现趋近于无穷的情形, 从而有限时间控制的奇异性问题得以解决。同时由控制器结构可以看到, 控制器(5-46)并不需要精确的系统转动惯量矩阵数值, 由此控制器对于系统转动惯量的不确定性具有鲁棒性。接下来需要证明控制器(5-46)能够使得系统(2-28)、(2-29)在有限时间内收敛至滑模面(5-35)附近足够近的邻域内。

选取 Lyapunov 函数如下

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}_e^T \mathbf{J} \mathbf{s}_e \quad (5-51)$$

从而有

$$V \geq \frac{1}{2} \lambda_m(\mathbf{J}) \|\mathbf{s}_e\|^2 \quad (5-52)$$

对 V 求导并带入控制器(5-46)的匀速段, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_e + k_1 \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{e}}_e \\ &= \mathbf{s}^T \mathbf{u} + \mathbf{s}^T \mathbf{d} - \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{s}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d + \frac{k_1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{e}_e^\times \left(\mathbf{I}_3 - \cot \frac{\varphi_e}{2} \mathbf{e}_e^\times \right) \boldsymbol{\omega}_e \\ &\quad - \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \\ &= -\rho_1 \sum_{i=1}^3 |s_{ei}|^{p+1} + \mathbf{s}^T \mathbf{d} - \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d + \frac{k_1}{2} \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{e}_e^\times \left(\mathbf{I}_3 - \cot \frac{\varphi_e}{2} \mathbf{e}_e^\times \right) \boldsymbol{\omega}_e \\ &\quad - \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \tilde{\mathbf{J}} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) - l_1 \mathbf{s}^T \text{sgn}(\mathbf{s}) \\ &\leq -\rho_1 \sum_{i=1}^3 |s_{ei}|^{p+1} + \bar{d} \|\mathbf{s}\| + \lambda(\tilde{\mathbf{J}}) \|\mathbf{s}\| \|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + \lambda(\tilde{\mathbf{J}}) \|\mathbf{s}\| \|\boldsymbol{\omega}_e\| \|\boldsymbol{\omega}_d\| \\ &\quad + \lambda(\tilde{\mathbf{J}}) \|\mathbf{s}\| \|\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d\|^2 + \frac{k_1}{2} \left(1 + \cot \frac{\varphi}{2} \right) \lambda(\tilde{\mathbf{J}}) \|\mathbf{s}\| \|\boldsymbol{\omega}_e\| - l_1 \mathbf{s}^T \text{sgn}(\mathbf{s}) \\ &\leq -\rho_1 \sum_{i=1}^3 |s_{ei}|^{p+1} \leq -\mu_1 V^{\frac{p+1}{2}} \end{aligned} \quad (5-53)$$

在控制器(5-46)的减速段, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_e + k_2 \mathbf{s}^T \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}_{ev} \\ &= \mathbf{s}^T \mathbf{u} + \mathbf{s}^T \mathbf{d} - \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{s}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d + \frac{k_2}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{J} \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e \\ &\quad - \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) \\ &= -\rho_2 \sum_{i=1}^3 |s_{ei}|^{p+1} + \mathbf{s}^T \mathbf{d} - \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d + \frac{k_2}{2} \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{F}_e \boldsymbol{\omega}_e \\ &\quad - \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \tilde{\mathbf{J}} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) - l_2 \mathbf{s}^T \text{sgn}(\mathbf{s}) \\ &\leq -\rho_2 \sum_{i=1}^3 |s_{ei}|^{p+1} + \bar{d} \|\mathbf{s}\| + \lambda(\tilde{\mathbf{J}}) \|\mathbf{s}\| \|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + \lambda(\tilde{\mathbf{J}}) \|\mathbf{s}\| \|\boldsymbol{\omega}_e\| \|\boldsymbol{\omega}_d\| \\ &\quad + \lambda(\tilde{\mathbf{J}}) \|\mathbf{s}\| \|\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d\|^2 + \frac{k_2}{2} \lambda(\tilde{\mathbf{J}}) \|\mathbf{s}\| \|\boldsymbol{\omega}_e\| - l_2 \mathbf{s}^T \text{sgn}(\mathbf{s}) \\ &\leq -\rho_2 \sum_{i=1}^3 |s_{ei}|^{p+1} \leq -\mu_2 V^{\frac{p+1}{2}} \end{aligned} \quad (5-54)$$

在控制器(5-46)的收敛段, 由前文假设, 误差角速度 $\boldsymbol{\omega}_e$ 与误差四元数矢部 \mathbf{q}_{ev} 反向, 从而存在正常数 c 使得

$$\boldsymbol{\omega}_e = -c\boldsymbol{e}_e \quad (5-55)$$

从而有

$$\dot{\boldsymbol{e}}_e = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{I}_3 - \cot \frac{\varphi_e}{2} \boldsymbol{e}_e^\times \right) \boldsymbol{e}_e^\times \boldsymbol{\omega}_e = -\frac{c}{2} \left(\boldsymbol{I}_3 - \cot \frac{\varphi_e}{2} \boldsymbol{e}_e^\times \right) \boldsymbol{e}_e^\times \boldsymbol{e}_e = \boldsymbol{0} \quad (5-56)$$

从而对 V 求导可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{J} \dot{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_e + k_3 \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{J} \boldsymbol{e}_e \frac{d \|\boldsymbol{q}_{ev}\|^r}{dt} + k_3 \|\boldsymbol{q}_{ev}\|^r \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{J} \dot{\boldsymbol{e}}_e \\ &= \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{u} + \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{d} - \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{J} \boldsymbol{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{J} \boldsymbol{\omega}_e^\times \boldsymbol{R} \boldsymbol{\omega}_d - \frac{k_3^2}{2} r q_{e0} \|\boldsymbol{q}_{ev}\|^{2r-1} \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{J} \boldsymbol{e}_e \\ &\quad - \boldsymbol{s}^T (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \boldsymbol{J} (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{R} \boldsymbol{\omega}_d) \\ &= -\rho_3 \sum_{i=1}^3 |s_{ei}|^{p+1} + \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{d} - \boldsymbol{s}^T \tilde{\boldsymbol{J}} \boldsymbol{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \boldsymbol{s}^T \tilde{\boldsymbol{J}} \boldsymbol{\omega}_e^\times \boldsymbol{R} \boldsymbol{\omega}_d - \frac{k_3^2}{2} r q_{e0} \|\boldsymbol{q}_{ev}\|^{2r-1} \boldsymbol{s}^T \tilde{\boldsymbol{J}} \boldsymbol{e}_e \\ &\quad - \boldsymbol{s}^T (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \tilde{\boldsymbol{J}} (\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{R} \boldsymbol{\omega}_d) - l_3 \boldsymbol{s}^T \operatorname{sgn}(\boldsymbol{s}) \\ &\leq -\rho_3 \sum_{i=1}^3 |s_{ei}|^{p+1} + \bar{d} \|\boldsymbol{s}\| + \lambda(\tilde{\boldsymbol{J}}) \|\boldsymbol{s}\| \|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + \lambda(\tilde{\boldsymbol{J}}) \|\boldsymbol{s}\| \|\boldsymbol{\omega}_e\| \|\boldsymbol{\omega}_d\| \\ &\quad + \lambda(\tilde{\boldsymbol{J}}) \|\boldsymbol{s}\| \|\boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{R} \boldsymbol{\omega}_d\|^2 + \lambda(\tilde{\boldsymbol{J}}) \frac{k_3^2}{2} r |q_{e0}| \|\boldsymbol{q}_{ev}\|^{2r-1} \|\boldsymbol{s}\| - l_3 \boldsymbol{s}^T \operatorname{sgn}(\boldsymbol{s}) \\ &\leq -\rho_3 \sum_{i=1}^3 |s_{ei}|^{p+1} \leq -\mu_3 V^{\frac{p+1}{2}} \end{aligned} \quad (5-57)$$

在(5-53)、(5-54)、(5-57)中 μ_i 定义如下

$$\mu_i = \rho_i \left(2/\lambda_m(\boldsymbol{J}) \right)^{\frac{p+1}{2}} \quad (5-58)$$

与前文类似，在(5-53)、(5-54)、(5-57)中用到了性质(5-52)与引理 5-1。

由(5-53)、(5-54)、(5-57)可以看到系统状态在有限时间内收敛至滑模面(5-35)附近足够近的邻域内，同时由前文结论，系统状态在滑模面(5-35)上有限时间内收敛至平衡点，由此系统(2-28)、(2-29)在控制器(5-46)作用下有限时间稳定。

与前文类似，控制器(5-46)能够使系统状态有限时间收敛的关键同样在于两点：1. 在滑模面(5-35)的收敛段误差角速度范数为误差四元数范数的 r 次幂，同时误差角速度与误差四元数矢部反向，从而实现了系统状态的有限时间收敛；2. 利用误差角速度与误差四元数反向时 $\dot{\boldsymbol{e}}_e = \boldsymbol{0}$ 的特性，消掉了误差角速度导数中的负数次幂项，从而避免了状态逼近平衡点时控制力矩逼近无穷，解决了有限时间控制中的奇异性问题。

5.3 基于 MRP 的有限时间控制器

上一节基于欧拉轴的特性设计了有限时间滑模面与鲁棒有限时间控制器，但在上一节中需要一个重要假设条件，即在系统到达收敛阶段之前需要实现角速度与四元数的反向，这在系统初始状态远离系统平衡点时容易实现，然而在系统初始状态离平衡点较近时极易出现四元数范数收敛至系统阈值而角速度尚未与四元数反向的状况，从而引发控制器的奇异性问题；同时，在系统逼近平衡点时，上一小节控制器中显含欧拉轴矢量 \mathbf{e} ，考虑到卫星姿态确定系统存在定姿误差，在状态趋近于零时微小的定姿误差可能会带来较大的欧拉轴矢量偏差。针对这些缺陷，在本节中将基于 MRP 设计有限时间滑模面与有限时间控制器，解决在小角度姿态机动情形下的姿态有限时间控制问题。

5.3.1 姿态镇定控制器

不同于上一小节基于欧拉轴特性给出的有限时间滑模面，本小节提出的有限时间滑模面结构如下

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} + k\dot{\boldsymbol{\sigma}}^r \quad (5-59)$$

其中 k 为正常数， r 为正常数且满足 $1 < r < 2$ ，三维向量 \mathbf{x} 的向量函数 \mathbf{x}^r 定义如下

$$\mathbf{x}^r = \begin{bmatrix} \text{sign}(x_1)|x_1|^r & \text{sign}(x_2)|x_2|^r & \text{sign}(x_3)|x_3|^r \end{bmatrix}^T \quad (5-60)$$

首先需要证明系统(2-1)、(2-20)在滑模面(5-59)上有限时间收敛。在滑模面(5-59)上有 $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ ，则有

$$\sigma_i = -k\text{sign}(\dot{\sigma}_i)|\dot{\sigma}_i|^r \quad (5-61)$$

从而有

$$\dot{\sigma}_i = -(1/k)^{1/r} \text{sign}(\sigma_i)|\sigma_i|^{1/r} \quad (5-62)$$

选取 Lyapunov 函数如下

$$V_\sigma = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (5-63)$$

对其求导可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_\sigma &= \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \dot{\sigma}_i = -(1/k)^{1/r} \sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^{1+1/r} \leq -(1/k)^{1/r} \|\boldsymbol{\sigma}\|^{1+1/r} \\ &\leq -2^{1+1/r} (1/k)^{1/r} V_\sigma^{1+1/r} \end{aligned} \quad (5-64)$$

从而 $\boldsymbol{\sigma}$ 在滑模面(5-59)上有限时间内收敛至 $\mathbf{0}$ ，进而 $\dot{\boldsymbol{\sigma}} \rightarrow \mathbf{0}$ ，从而角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在滑模面(5-59)上有限时间内收敛至 $\mathbf{0}$ 。系统状态在滑模面(5-59)上的有限时间稳定性证毕。

接下来需要设计有限时间控制器以实现系统(2-1)、(2-20)在有限时间内收敛至滑模面(5-59)。首先由前文讨论, σ 与 $-\sigma/\|\sigma\|^2$ 描述的为同一姿态, 从而可以假设 $\|\sigma\| \leq 1$ 。本次研究给出的有限时间控制器结构如下

$$\begin{aligned} u = & \omega^\times J\omega - \frac{16}{(1+\sigma^T\sigma)^2} G^T J \dot{G} \omega - \frac{1}{kr} \frac{16}{(1+\sigma^T\sigma)^2} G^T J \Omega^{2-r}(\dot{\sigma}) \text{sgn}(\dot{\sigma}) \\ & - \frac{k_s}{kr} \frac{16}{(1+\sigma^T\sigma)^2} G^T J \Omega^{2-r}(\dot{\sigma}) s^p - \bar{d} \text{sgn}(z) \end{aligned} \quad (5-65)$$

其中 k_s 为正常数, \bar{d} 为正常数且满足 $\bar{d} \geq \|d\|$, p 为正常数且满足 $0 \leq p < 1$, 向量 $\dot{\sigma}$ 表达式如下

$$\dot{\sigma} = G\omega \quad (5-66)$$

三维向量算子 s^p 定义与(5-60)相同, 三维向量算子 $\Omega^p(x)$ 定义为

$$\Omega^p(x) = \begin{bmatrix} |x_1|^p & 0 & 0 \\ 0 & |x_2|^p & 0 \\ 0 & 0 & |x_3|^p \end{bmatrix} \quad (5-67)$$

\dot{G} 为矩阵 G 的导数, 其表达式为

$$\dot{G} = -\frac{1}{2} \sigma^T G \omega I_3 + \frac{G \omega \sigma^T}{2} + \frac{\sigma \omega^T G^T}{2} + \frac{1}{2} (G \omega)^\times \quad (5-68)$$

向量 z 定义为

$$z = J^{-1} G^T \Omega^{r-1}(\dot{\sigma}) s \quad (5-69)$$

接下来需要证明控制器(5-65)能够在有限时间内使得系统状态到达滑模面(5-59)。选取 Lyapunov 函数如下

$$V = \frac{1}{2} s^T s \quad (5-70)$$

同时考虑到

$$d \frac{\text{sign}(x)|x|^r}{dt} = r|x|^{r-1} \dot{x} \quad (5-71)$$

$$\frac{d\dot{\sigma}^r}{dt} = r \Omega^{r-1}(\dot{\sigma}) \ddot{\sigma} \quad (5-72)$$

$$\Omega^{r-1}(\dot{\sigma}) \Omega^{2-r}(\dot{\sigma}) = \Omega^1(\dot{\sigma}) \quad (5-73)$$

$$G^{-1} = \frac{16}{(1+\sigma^T\sigma)^2} G^T \quad (5-74)$$

从而可以得到

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} \\
 &= \mathbf{s}^T \left(\dot{\boldsymbol{\sigma}} + kr \boldsymbol{\Omega}^{r-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \ddot{\boldsymbol{\sigma}} \right) \\
 &= \mathbf{s}^T \left(\mathbf{G}\boldsymbol{\omega} + kr \boldsymbol{\Omega}^{r-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) (\dot{\mathbf{G}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}\dot{\boldsymbol{\omega}}) \right) \\
 &= \mathbf{s}^T \left(\mathbf{G}\boldsymbol{\omega} + kr \boldsymbol{\Omega}^{r-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) (\dot{\mathbf{G}}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{u} + \mathbf{d} - \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega})) \right) \\
 &= \mathbf{s}^T \mathbf{G}\boldsymbol{\omega} + krs^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \dot{\mathbf{G}}\boldsymbol{\omega} + krs^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{G}\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{u} + \mathbf{d} - \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) \\
 &= -k_s \mathbf{s}^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{s}^p + \mathbf{s}^T \mathbf{G}\boldsymbol{\omega} + krs^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \dot{\mathbf{G}}\boldsymbol{\omega} - krs^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \dot{\mathbf{G}}\boldsymbol{\omega} \\
 &\quad - \mathbf{s}^T \mathbf{G}\boldsymbol{\omega} + krs^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{G}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{d} - kr\bar{\mathbf{d}}s^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{G}\mathbf{J}^{-1}\text{sgn}(\mathbf{z}) \\
 &= -k_s \mathbf{s}^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{s}^p + krs^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{G}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{d} - kr\bar{\mathbf{d}}z^T \text{sgn}(\mathbf{z}) \\
 &\leq -k_s \mathbf{s}^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{s}^p \\
 &= -k_s \sum_{i=1}^3 |\dot{\sigma}_i|^{r-1} |s_i|^{p+1}
 \end{aligned} \tag{5-75}$$

由于本节针对的是小角度姿态机动的情形，因此有

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{G}\boldsymbol{\omega} \approx \frac{1}{4}\boldsymbol{\omega} \tag{5-76}$$

因此(5-75)可以化简为

$$\dot{V} \leq -k_s \sum_{i=1}^3 |\omega_i|^{r-1} |s_i|^{p+1} \leq -\mu k_s \sum_{i=1}^3 |s_i|^{p+1} \leq -\mu k_s (2V)^{\frac{p+1}{2}} \tag{5-77}$$

其中正常数 μ 满足

$$0 < \mu \leq |\omega_i| \tag{5-78}$$

考虑到卫星进行姿态机动时姿态角速度不为零，从而存在正常数 μ 使得(5-78)成立，考虑到 $0 \leq p < 1$ ，从而由(5-77)可以得到系统状态在有限时间内收敛至滑模面(5-59)附近足够近的邻域内。由前文讨论，系统状态在该滑模面上有限时间收敛，从而系统(2-1)、(2-20)在控制器(5-65)作用下有限时间稳定。

由于本节针对的是小角度姿态机动的情形，因此本小节中给出的控制器并未考虑控制力矩与姿态角速度的约束。同时由前文假设 $\|\boldsymbol{\sigma}\| \leq 1$ ，从而有

$$\|\mathbf{G}\| = \|\mathbf{G}^T\| = \sqrt{\lambda_M(\mathbf{G}^T \mathbf{G})} = \frac{1 + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma}}{4} \leq \frac{1}{2} \tag{5-79}$$

进而有

$$\|\dot{\boldsymbol{\sigma}}\| = \|\mathbf{G}\boldsymbol{\omega}\| \leq \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\omega}\| \tag{5-80}$$

从而有向量 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的各个分量均有界，同时考虑到 $1 < r < 2$ ，从而有向量 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{r-1}$ 、 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{2-r}$ 的

各个分量均有界, 因此 $\Omega^{r-1}(\dot{\sigma})$ 、 $\Omega^{2-r}(\dot{\sigma})$ 各个分量均有界, 从而控制器(5-65)中所有控制变量均有界, 不存在当系统状态趋近于 $\mathbf{0}$ 时出现奇异性状况, 从而有限时间控制中的奇异性问题得以解决。

可以看到, 相比较于 5.2.1 小节中的有限时间控制器, 控制器(5-65)的优势是结构固定且规避了使用欧拉轴 \mathbf{e} 作为控制变量所带来的误差问题, 但控制器(5-65)的缺陷是需要系统较为精确的转动惯量矩阵估计值。同时, 控制器(5-65)规避奇异性问题的本质是避免滑模面中出现状态 σ 的分数次幂, 转而从构造 $\dot{\sigma}$ 的幂次形式来实现有限时间收敛的目标。值得注意的是本小节中针对的姿态机动为小角度机动模式, 因此在本小节中并未讨论控制力矩饱和、角速度约束等问题。

5.3.2 姿态跟踪控制器

与上一小节类似, 针对姿态跟踪控制的有限时间滑模面可以写为

$$\mathbf{s}_e = \sigma_e + k\dot{\sigma}_e^r \quad (5-81)$$

其中 k 为正常数, r 为正常数且满足 $1 < r < 2$, 向量函数 \mathbf{x}^r 的定义与上一小节(5-60)相同。

接下来需要证明系统状态在滑模面(5-81)上的有限时间稳定性。在滑模面(5-81)上, 有 $\mathbf{s}_e = \mathbf{0}$, 从而

$$\sigma_{ei} = -k \text{sign}(\dot{\sigma}_{ei}) |\dot{\sigma}_{ei}|^r \quad (5-82)$$

从而有

$$\dot{\sigma}_{ei} = -(1/k)^{1/r} \text{sign}(\sigma_{ei}) |\sigma_{ei}|^{1/r} \quad (5-83)$$

选取 Lyapunov 函数如下

$$V_\sigma = \frac{1}{2} \sigma_e^T \sigma_e \quad (5-84)$$

计算 V_σ 的导数可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_\sigma &= \sigma_e^T \dot{\sigma}_e = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ei} \dot{\sigma}_{ei} = -(1/k)^{1/r} \sum_{i=1}^3 |\sigma_{ei}|^{1+1/r} \leq -(1/k)^{1/r} \|\sigma_e\|^{1+1/r} \\ &\leq -2^{1+1/r} (1/k)^{1/r} V_\sigma^{1+1/r} \end{aligned} \quad (5-85)$$

从而 σ_e 在滑模面(5-81)上有限时间内收敛至 $\mathbf{0}$, 进而 $\dot{\sigma}_e \rightarrow \mathbf{0}$, 从而误差角速度 ω_e 在滑模面(5-81)上有限时间内收敛至 $\mathbf{0}$ 。系统状态在滑模面(5-81)上的有限时间稳定性证毕。

接下来需要设计有限时间控制器以实现系统状态 σ_e 与 ω_e 在有限时间内收敛至本小节给出的有限时间滑模面(5-81)附近足够近的邻域内。首先由前文讨论, σ_e 与

$-\sigma_e/\|\sigma_e\|^2$ 描述的为同一姿态，从而可以假设 $\|\sigma_e\| \leq 1$ 。本次研究给出的有限时间控制器结构如下

$$\begin{aligned} u = v - \frac{16}{(1+\sigma_e^T \sigma_e)^2} G_e^T J \dot{G}_e \omega_e - \frac{1}{kr} \frac{16}{(1+\sigma_e^T \sigma_e)^2} G_e^T J \Omega^{2-r} (\dot{\sigma}_e) \text{sgn}(\dot{\sigma}_e) \\ - \frac{k_s}{kr} \frac{16}{(1+\sigma_e^T \sigma_e)^2} G_e^T J \Omega^{2-r} (\dot{\sigma}) s_e^p - \bar{d} \text{sgn}(z) \end{aligned} \quad (5-86)$$

其中 k_s 为正常数， \bar{d} 为正常数且满足 $\bar{d} \geq \|d\|$ ， p 为正常数且满足 $0 \leq p < 1$ ，向量 v 定义为

$$v = JR\dot{\omega}_d - J\omega_e^\times R\omega_d + (\omega_e + R\omega_d)^\times J(\omega_e + R\omega_d) \quad (5-87)$$

向量 $\dot{\sigma}_e$ 表达式如下

$$\dot{\sigma}_e = G_e \omega_e \quad (5-88)$$

三维向量算子 s_e^p 定义与(5-60)相同，三维向量算子 $\Omega^p(x)$ 定义为

$$\Omega^p(x) = \begin{bmatrix} |x_1|^p & 0 & 0 \\ 0 & |x_2|^p & 0 \\ 0 & 0 & |x_3|^p \end{bmatrix} \quad (5-89)$$

\dot{G}_e 为矩阵 G_e 的导数，其表达式为

$$\dot{G}_e = -\frac{1}{2} \sigma_e^T G_e \omega_e I_3 + \frac{G_e \omega_e \sigma_e^T}{2} + \frac{\sigma_e \omega_e^T G_e^T}{2} + \frac{1}{2} (G_e \omega_e)^\times \quad (5-90)$$

向量 z 定义为

$$z = J^{-1} G_e^T \Omega^{r-1} (\dot{\sigma}_e) s_e \quad (5-91)$$

接下来需要证明控制器能够在有限时间内使得系统状态到达滑模面(5-59)附近足够近的邻域内。选取 Lyapunov 函数如下

$$V = \frac{1}{2} s_e^T s_e \quad (5-92)$$

计算 V 的导数并带入控制器(5-86)，同时注意到性质(5-71)、(5-72)、(5-73)与(5-74)，可以得到

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \mathbf{s}_e^T \dot{\mathbf{s}}_e \\
 &= \mathbf{s}_e^T \left(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e + k\tau \boldsymbol{\Omega}^{r-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e) \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_e \right) \\
 &= \mathbf{s}_e^T \left(\mathbf{G}_e \boldsymbol{\omega}_e + k\tau \boldsymbol{\Omega}^{r-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e) \left(\dot{\mathbf{G}}_e \boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{G}_e \dot{\boldsymbol{\omega}}_e \right) \right) \\
 &= \mathbf{s}_e^T \left(\mathbf{G}_e \boldsymbol{\omega}_e + k\tau \boldsymbol{\Omega}^{r-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e) \left(\dot{\mathbf{G}}_e \boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{G}_e \mathbf{J}^{-1} \left(\mathbf{u} + \mathbf{d} - \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^* \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{\omega}^* \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \right) \right) \right) \\
 &= \mathbf{s}_e^T \mathbf{G}_e \boldsymbol{\omega}_e + k\tau \mathbf{s}_e^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e) \dot{\mathbf{G}}_e \boldsymbol{\omega}_e \\
 &\quad + k\tau \mathbf{s}_e^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e) \mathbf{G}_e \mathbf{J}^{-1} \left(\mathbf{u} + \mathbf{d} - \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^* \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{\omega}^* \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \right) \\
 &= -k_s \mathbf{s}_e^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e) \mathbf{s}_e^p + \mathbf{s}_e^T \mathbf{G}_e \boldsymbol{\omega}_e + k\tau \mathbf{s}_e^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e) \dot{\mathbf{G}}_e \boldsymbol{\omega}_e - k\tau \mathbf{s}_e^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e) \dot{\mathbf{G}}_e \boldsymbol{\omega}_e \\
 &\quad - \mathbf{s}_e^T \mathbf{G}_e \boldsymbol{\omega}_e + k\tau \mathbf{s}_e^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e) \mathbf{G}_e \mathbf{J}^{-1} \mathbf{d} - k\tau \mathbf{s}_e^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e) \mathbf{G}_e \mathbf{J}^{-1} \text{sgn}(\mathbf{z}) \\
 &= -k_s \mathbf{s}_e^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e) \mathbf{s}_e^p + k\tau \mathbf{s}_e^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e) \mathbf{G}_e \mathbf{J}^{-1} \mathbf{d} - k\tau \mathbf{s}_e^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e) \mathbf{G}_e \mathbf{J}^{-1} \text{sgn}(\mathbf{z}) \\
 &\leq -k_s \mathbf{s}_e^T \boldsymbol{\Omega}^{r-1} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e) \mathbf{s}_e^p \\
 &= -k_s \sum_{i=1}^3 |\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ei}|^{r-1} |s_{ei}|^{p+1}
 \end{aligned} \tag{5-93}$$

由于本节针对的是小角度姿态机动的情形，因此有

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_e = \mathbf{G}_e \boldsymbol{\omega}_e \approx \frac{1}{4} \boldsymbol{\omega}_e \tag{5-94}$$

因此(5-75)可以化简为

$$\dot{V} \leq -k_s \sum_{i=1}^3 |\omega_{ei}|^{r-1} |s_{ei}|^{p+1} \leq -\mu k_s \sum_{i=1}^3 |s_{ei}|^{p+1} \leq -\mu k_s (2V)^{\frac{p+1}{2}} \tag{5-95}$$

其中正常数 μ 满足

$$0 < \mu \leq |\omega_{ei}| \tag{5-96}$$

考虑到卫星进行姿态跟踪时误差角速度不为零，从而存在正常数 μ 使得(5-96)成立，考虑到 $0 \leq p < 1$ ，从而由(5-95)可以得到系统状态在有限时间内收敛至滑模面(5-81)附近足够近的邻域内。由前文讨论，系统状态在该滑模面上有限时间收敛，从而误差姿态系统(2-28)、(2-33)在控制器(5-86)作用下有限时间稳定。

可以看到，本小节中的有限时间滑模面(5-81)与 5.3.1 小节中的有限时间滑模面(5-59)在结构上完全相同，这也使得由此所推导出的控制器在结构上有很大的相似之处，所不同之处仅仅在于控制器(5-86)中多出 \mathbf{v} 项，而该项的目的是消去误差角速度模型中的 $\boldsymbol{\omega}_d$ 、 $\dot{\boldsymbol{\omega}}_d$ 以及角速度叉乘项。同时，与前文类似，由于本小节中控制器针对的是小角度情形下的姿态跟踪问题，因此可以不考虑控制力矩与姿态角速度的约束。同时，与上一小节(5-79)、(5-80)的讨论类似，控制器(5-86)同样不存在因状态趋于 $\mathbf{0}$ 所导致的奇异性问题，本质上这也是由于滑模面(5-81)避免了对 MRP 分数次幂求导所带来的。

5.4 仿真与分析

5.4.1 基于欧拉轴的有限时间控制器仿真

5.4.1.1 姿态镇定控制器仿真

设置系统参数如下

$$\begin{aligned} J &= \text{diag}([20 \ 18 \ 15]) \text{kg}\cdot\text{m}^2, \hat{J} = \text{diag}([21 \ 17 \ 14]) \text{rad/s}, \lambda = 3 \\ t_{\text{sample}} &= 0.5\text{s}, \bar{d} = 0.001\text{N}\cdot\text{m} \end{aligned} \quad (5-97)$$

$$\omega(t_0) = [-0.03 \ -0.04 \ 0.05]^T \text{rad/s}, q(t_0) = [0 \ \sqrt{6}/6 \ \sqrt{3}/3 \ \sqrt{2}/2]^T$$

为说明本章所提出控制算法的有效性，以经典滑模控制器(5-98)为参照

$$\begin{aligned} u &= -k_s s + \omega^\times J \omega - \frac{k_1}{2} (q_0 I_3 + q_v^\times) \omega - \bar{d} \text{sgn}(s) \\ s &= \omega + k q_v \end{aligned} \quad (5-98)$$

同时设置控制器(5-98)参数如下

$$k_s = 10, k = 0.05 \quad (5-99)$$

可以得到基于经典滑模控制器(5-98)的仿真曲线如下

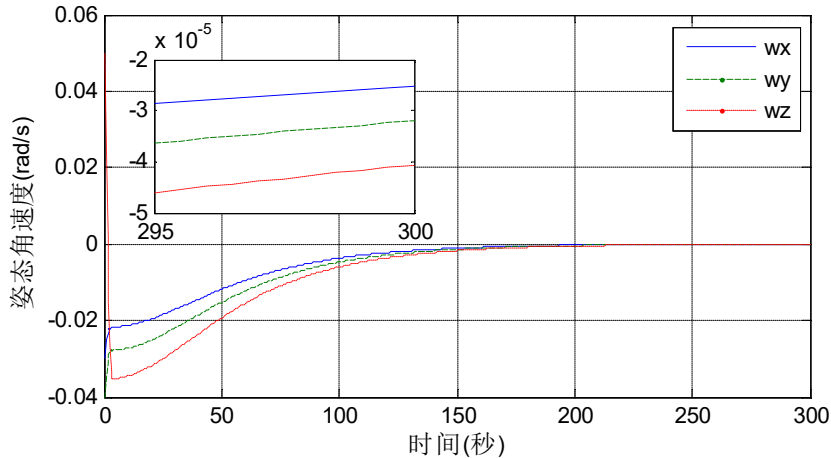


图 5-1 姿态角速度曲线

Fig. 5-1 Curve of angular velocity

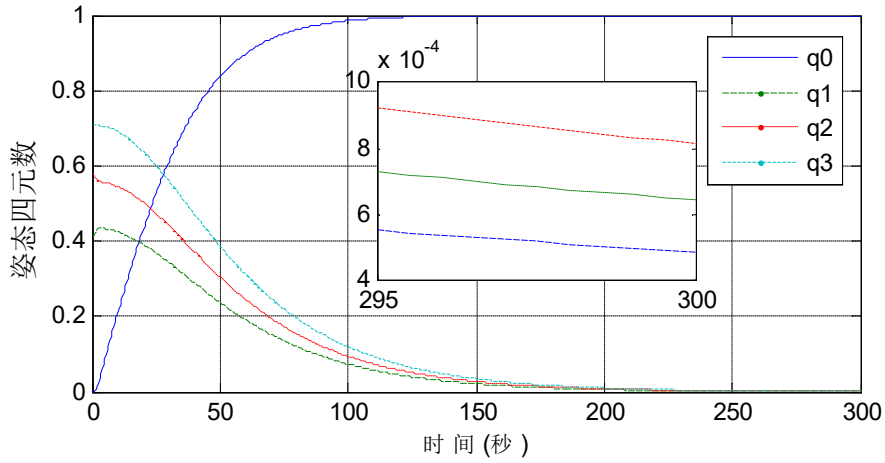


图 5-2 姿态四元数曲线

Fig.5-2 Curve of attitude quaternion

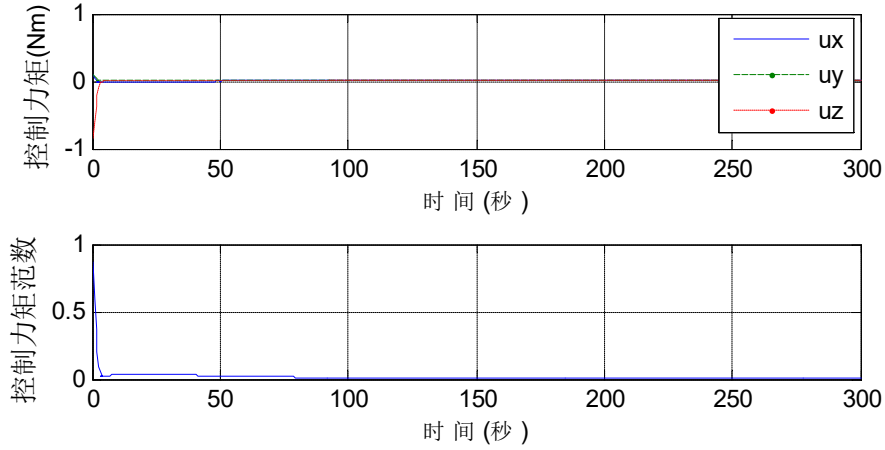


图 5-3 控制力矩及其范数曲线

Fig.5-3 Curve of control torque and its norm

由图 5-1、5-2 可以看到滑模控制器(5-98)的收敛时间在 250s 左右, 300s 处的姿态角速度与姿态四元数的稳态精度分别为 5×10^{-5} 与 9×10^{-4} 。由图 5-1 可以看到姿态角速度急速下降, 这也是导致姿态四元数收敛速率较慢的原因。同时由图 5-3 可以看到经典滑模控制器初始控制力矩较大, 但随后急剧下降。较慢的收敛速率与较低的控制力矩利用效率是经典滑模控制器所存在的固有缺陷, 有必要对其进行改进。

接下来给出本文所提出的有限时间姿态镇定控制器(5-14)的仿真。与前文类似的, 较小的 α 与较大的 β 能够使得系统有较快的收敛速率, 同时较大的 k 能够使得系统尽快运动至滑模面附近的邻域内, 因此设置控制参数如下

$$\begin{aligned} k_1 = 0.05, k_2 = 0.25, k_3 = 0.0679, k = 10, \bar{u} = 0.5 \text{ N}\cdot\text{m} \\ \alpha = 0.2, \beta = 0.02, r = 2/3, p = 1/2 \end{aligned} \quad (5-100)$$

可以得到控制器(5-14)的仿真曲线如下

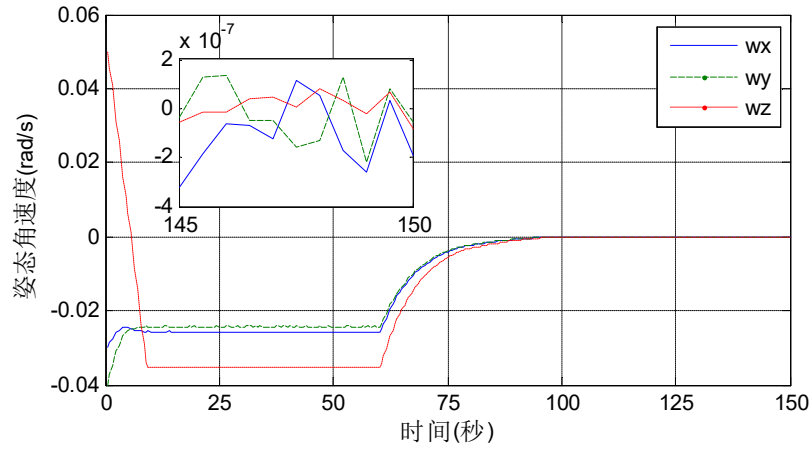


图 5-4 姿态角速度曲线

Fig.5-4 Curve of angular velocity

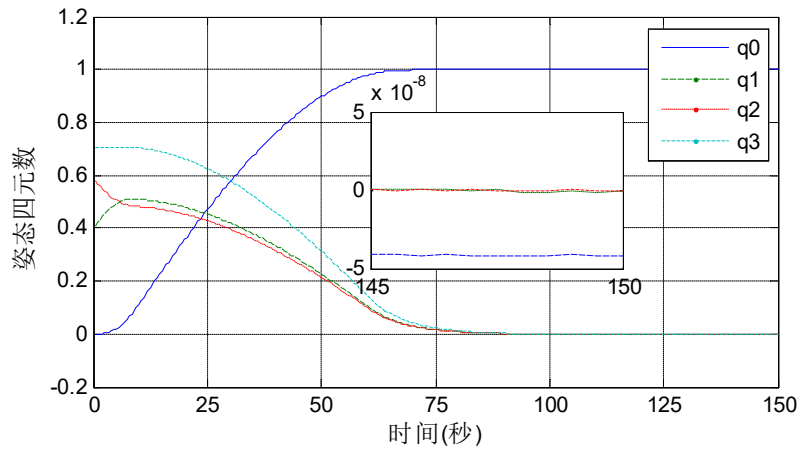


图 5-5 姿态四元数曲线

Fig.5-5 Curve of attitude quaternion

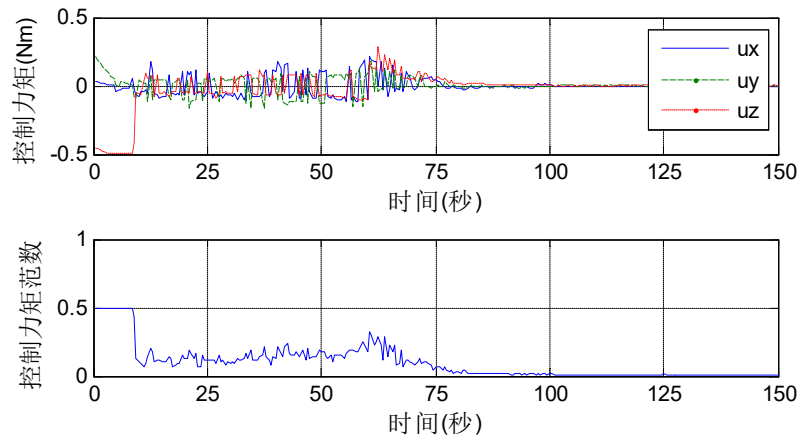


图 5-6 控制力矩及其范数曲线

Fig.5-6 Curve of control torque and its norm

由图 5-4、5-5 可以看到本次研究所给出的有限时间控制器(5-14)的收敛时间大约为 100s, 150s 处的姿态角速度与姿态四元数的稳态精度分别为 4×10^{-7} 与 5×10^{-8} , 考虑到未知干扰力矩的存在, 系统状态不可能完全收敛至 $\mathbf{0}$, 但由图 5-4 与图 5-5 可以看到系统状态仍然能够拥有较高的精度。可以看到系统收敛速率与稳态精度较经典滑模控制器均有了极大提升(系统收敛时间提升约 60%), 而收敛速率提升的原因主要有两点: 1. 由图 5-4 可以看到从 10s 到 60s 系统姿态角速度维持匀速, 从而避免了姿态角速度下降导致的四元数收敛速率下降问题; 2. 滑模面(5-3)的收敛段为有限时间收敛, 从而避免了经典滑模控制器一致渐近稳定所导致的无穷远处系统状态才能够到达平衡点的缺陷。同时由图 5-6 可以看到控制力矩全程未超过系统上限, 同时在 10s 到 60s 的匀速段控制力矩较小, 而在此阶段系统收敛速率较高, 因此可以认为控制器(5-14)对于控制力矩的利用效率较经典控制器有了较大的提升。

5.4.1.2 姿态跟踪控制器仿真

设置系统参数如下

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \text{diag}([20 \quad 18 \quad 15]) \text{kg} \cdot \text{m}^2, \hat{\mathbf{J}} = \text{diag}([21 \quad 17 \quad 14]) \text{kg} \cdot \text{m}^2, \lambda = 3 \\ \bar{\mathbf{u}} &= 0.5 \text{N} \cdot \text{m}, \bar{\mathbf{d}} = 0.001 \text{N} \cdot \text{m} \\ \boldsymbol{\omega}(t_0) &= [0 \quad 0 \quad -0.01]^T \text{rad/s}, \mathbf{q}(t_0) = [1/2 \quad -1/2 \quad \sqrt{3}/3 \quad \sqrt{6}/6]^T \\ \boldsymbol{\omega}_d(t_0) &= [0.01 \quad -0.005 \quad 0]^T \text{rad/s}, \dot{\boldsymbol{\omega}}_d(t_0) = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \mathbf{q}_d(t_0) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned} \quad (5-101)$$

与前文类似, 为说明本文提出控制器的有效性, 以经典滑模控制器(5-102)作为对比。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -k_s \mathbf{s} + \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^\times \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d + (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d)^\times \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}_e + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d) - \frac{1}{2} k_1 \mathbf{J} (\mathbf{q}_{e0} \mathbf{I}_3 + \mathbf{q}_{ev}^\times) \boldsymbol{\omega}_e \\ \mathbf{s} &= \boldsymbol{\omega}_e + k_1 \mathbf{q}_{ev} \end{aligned} \quad (5-102)$$

同时设置控制参数如下

$$k_1 = 0.05, k_s = 10 \quad (5-103)$$

可以得到基于经典滑模控制器(5-102)的仿真曲线如下

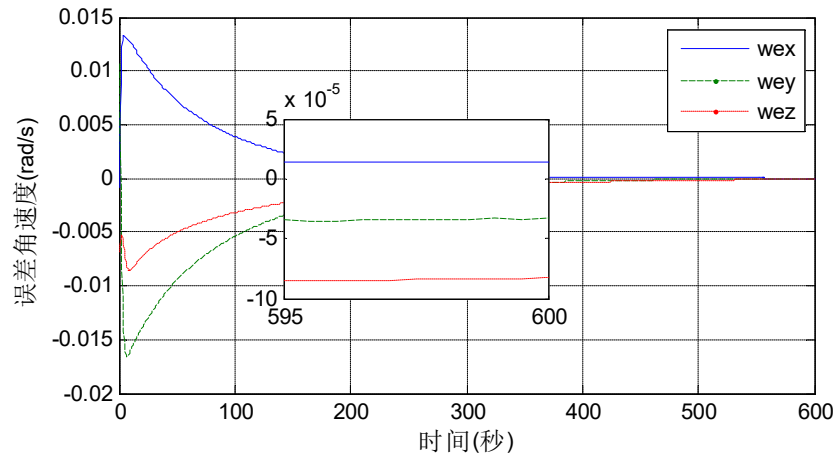


图 5-7 误差角速度曲线

Fig.5-7 Curve of error angular velocity

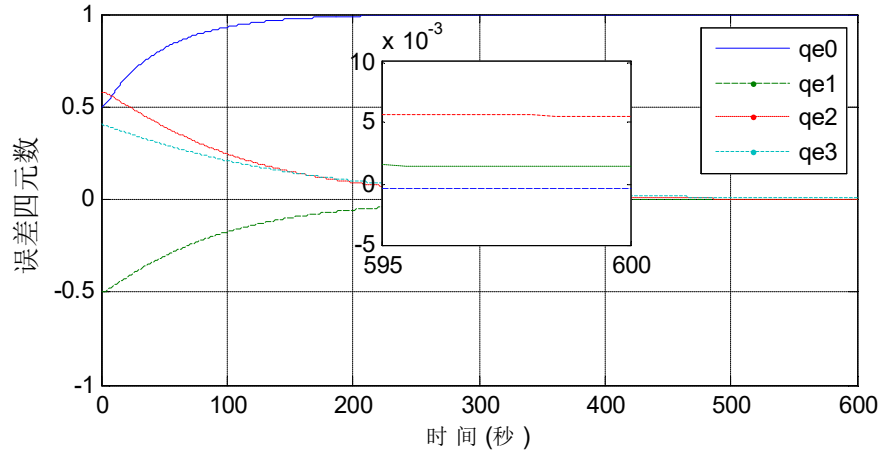


图 5-8 误差四元数曲线

Fig.5-8 Curve of error quaternion

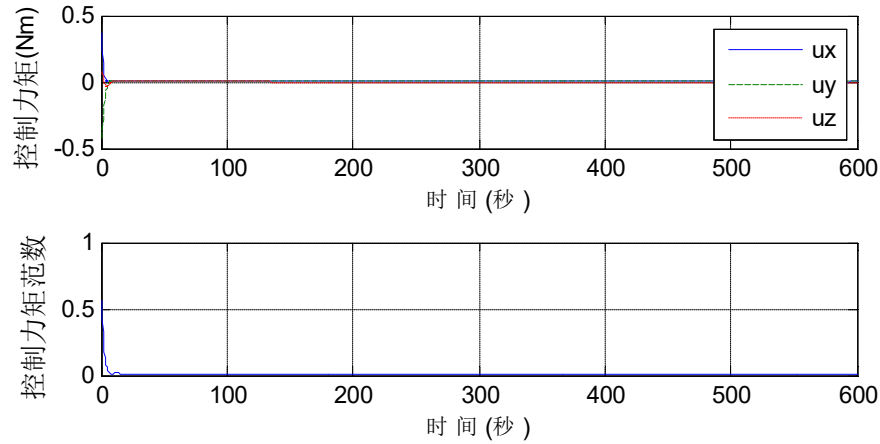


图 5-9 控制力矩及其范数曲线

Fig.5-9 Curve of control torque and its norm

由图 5-7、5-8 可以看到经典的滑模控制器(5-102)的收敛时间约为 500s, 在 600s 处误差角速度与误差四元数的稳态精度分别为 5×10^{-5} 与 5×10^{-3} , 同时由图 5-9 可以看到系统初始控制力矩较大, 随后急剧下降。与前文分析类似, 误差角速度下降过快导致了误差四元数收敛速率的下降, 同时, 经典滑模控制器对于控制力矩的利用效率较低, 这些都是经典滑模控制器所存在的缺陷。

接下来给出本文所提出的有限时间姿态跟踪控制器(5-46)的仿真。设置控制参数如下

$$\begin{aligned} k_1 = 0.05, k_2 = 0.25, k_3 = 0.0679, k = 10, \bar{u} = 0.5 \text{ N}\cdot\text{m} \\ \alpha = 0.2, \beta = 0.02, r = 2/3, p = 1/2 \end{aligned} \quad (5-104)$$

从而可以得到仿真曲线如下

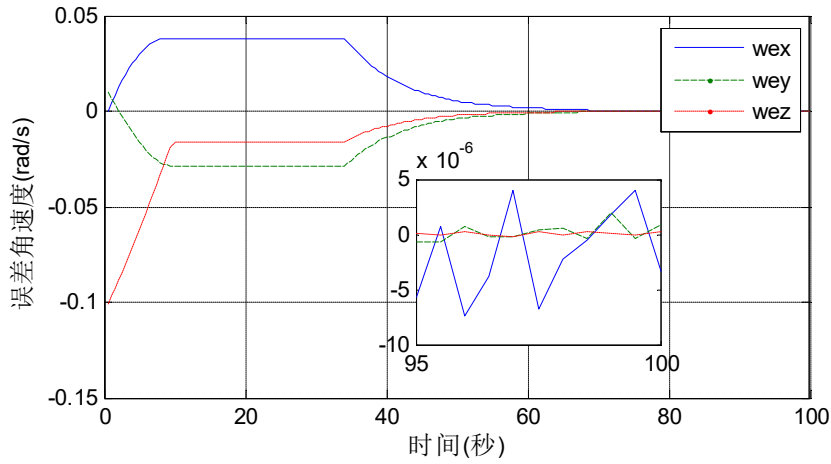


图 5-10 误差角速度曲线

Fig.5-10 Curve of error angular velocity

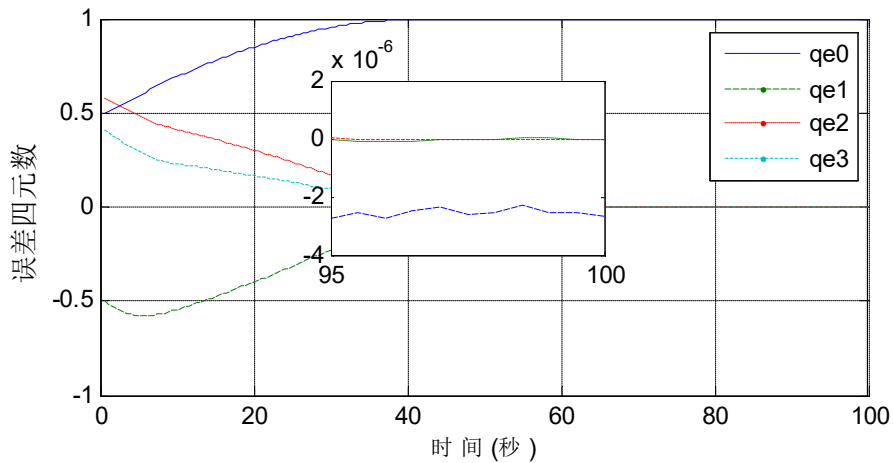


图 5-11 误差四元数曲线

Fig.5-11 Curve of error quaternion

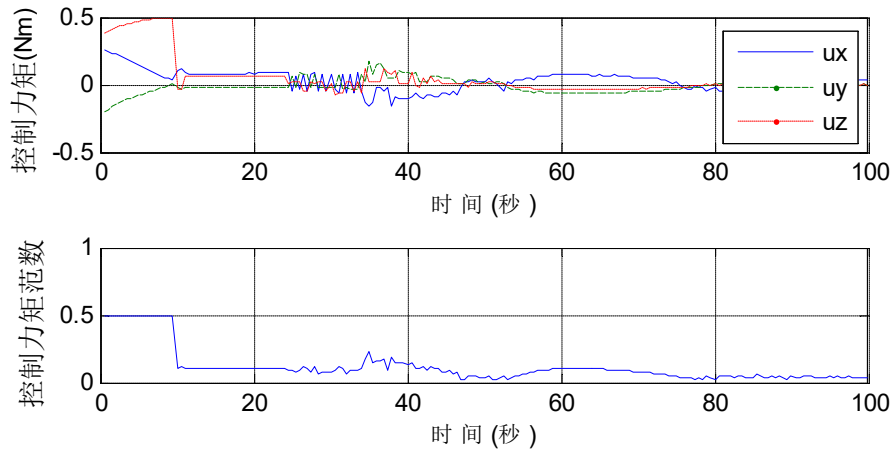


图 5-12 控制力矩及其范数曲线

Fig.5-12 Curve of control torque and its norm

由图 5-10、5-11 可以看到系统收敛时间约为 80s，同时在 100s 处的误差角速度与误差四元数的稳态精度分别为 5×10^{-6} 与 3×10^{-6} ，收敛速率与稳态精度较经典滑模控制器均有了较大提升（系统收敛时间提升约 80%）。考虑到未知干扰力矩的存在，系统状态不可能完全收敛至 $\mathbf{0}$ ，但由图 5-10 与图 5-11 可以看到系统状态仍然能够拥有较高的精度。同时由图 10 可以看到系统在 10s 左右进入匀速段，35s 左右进入减速段，在此区间内控制力矩较小且误差四元数收敛速率较高。滑模面 (5-35) 的收敛段则解决了经典滑模面一致渐近稳定的问题，使得系统状态在有限时间内收敛到系统平衡点，从而解决了终端收敛速率慢的问题。同时由图 5-12 可以看到控制力矩全程未超过系统上限，并且在系统到达滑模面之后维持在较低数值，因此可以认为控制器(5-46)提升了系统对于控制力矩的利用效率。

5.4.2 基于 MRP 的有限时间控制器仿真

5.4.2.1 姿态镇定控制器仿真

设置系统参数如下

$$\mathbf{J} = \text{diag}([20 \ 18 \ 15]) \text{kg} \cdot \text{m}^2, t_{\text{sample}} = 0.5\text{s}, \bar{d} = 0.001 \text{N} \cdot \text{m} \quad (5-105)$$

$$\boldsymbol{\omega}(t_0) = [0.001 \ -0.002 \ -0.005]^T \text{rad/s}, \boldsymbol{\sigma}(t_0) = [0.025 \ 0.05 \ -0.025]^T$$

与前文类似，为说明本章所提出控制算法的有效性，以经典滑模控制器(5-106)为参照

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -k_s \mathbf{s} + \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} - \frac{k}{2} \mathbf{G} \boldsymbol{\omega} - \bar{d} \text{sgn}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{s} &= \boldsymbol{\omega} + k\boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (5-106)$$

同时设置控制器(5-106)参数如下

$$k_s = 10, k = 0.05$$

(5-107)

可以得到基于经典滑模控制器(5-106)的仿真曲线如下

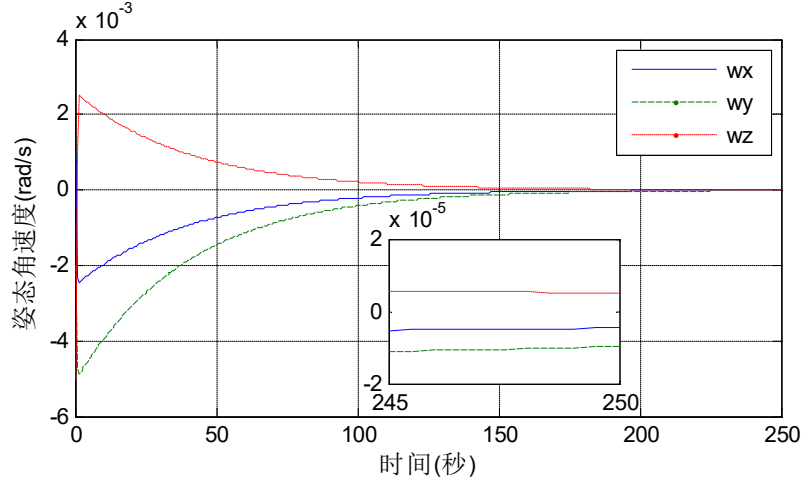


图 5-13 姿态角速度曲线

Fig.5-13 Curve of angular velocity

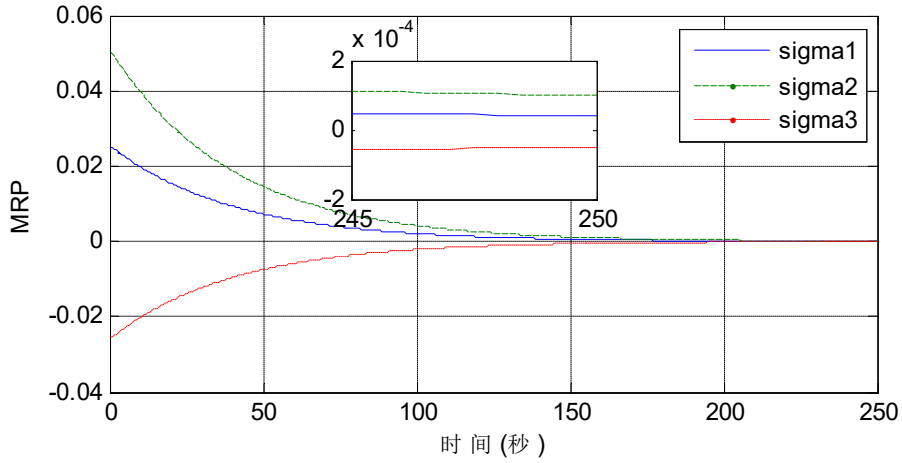


图 5-14 姿态 MRP 曲线

Fig.5-14 Curve of attitude MRP

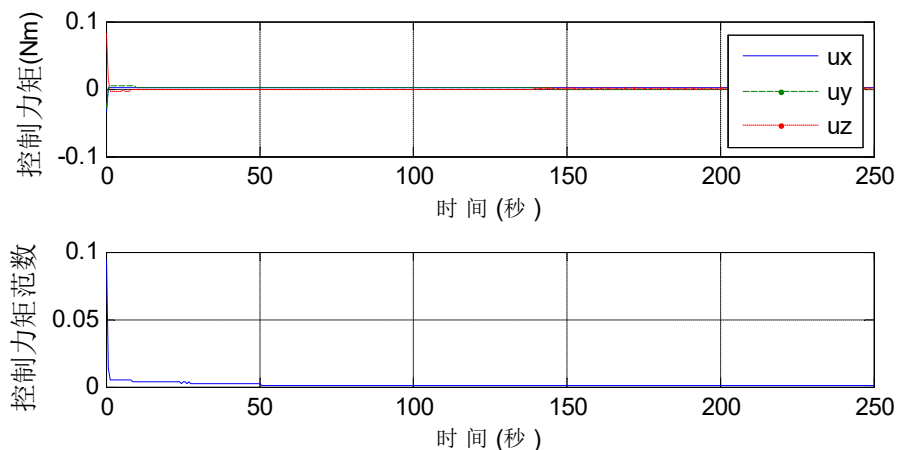


图 5-15 控制力矩及其范数曲线

Fig.5-15 Curve of control torque and its norm

由图 5-13、5-14 可以看到, 在小角度机动模式下, 系统收敛时间约为 200s, 同时 250s 处姿态角速度与姿态 MRP 的稳态精度分别为 2×10^{-5} 与 2×10^{-4} 。经典滑模控制器的弊端在上一小节中已经给出, 因此在此不对其进行赘述。

接下来给出本文提出的有限时间姿态镇定控制器(5-65)的仿真。首先设置控制参数如下

$$k = 200, k_s = 0.01, r = 5/3, p = 1/3 \quad (5-108)$$

可以得到控制器(5-65)的仿真曲线如下

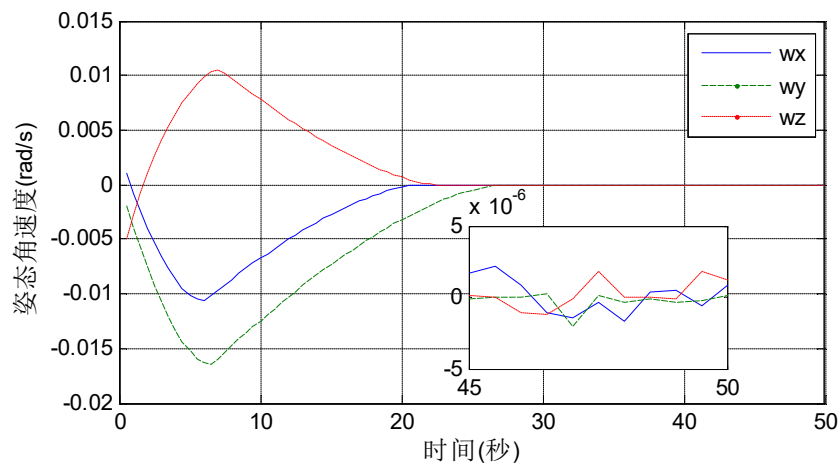


图 5-16 姿态角速度曲线

Fig.5-16 Curve of angular velocity

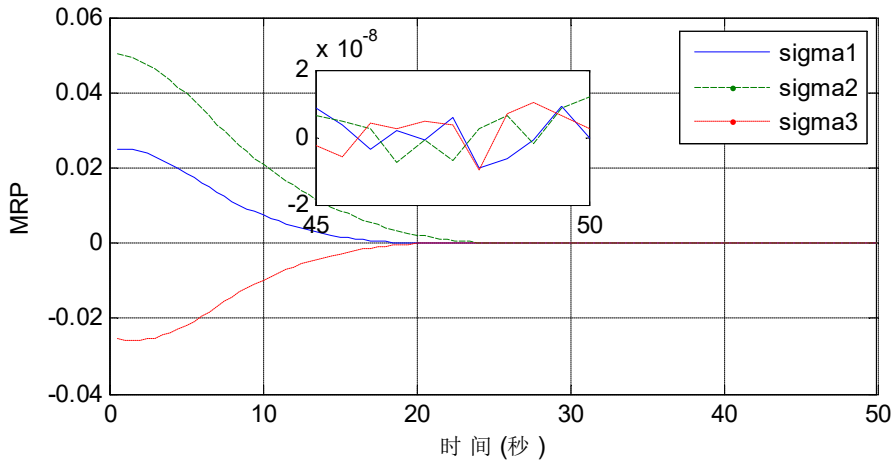


图 5-17 姿态 MRP 曲线

Fig.5-17 Curve of attitude MRP

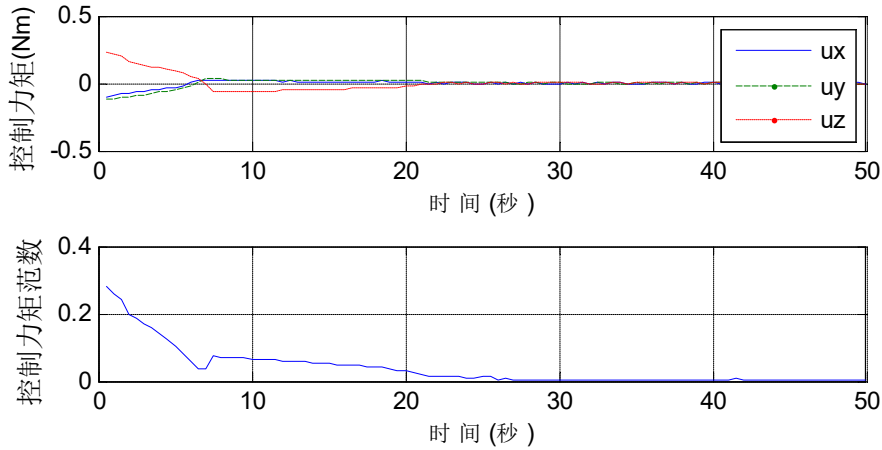


图 5-18 控制力矩及其范数曲线

Fig.5-18 Curve of control torque and its norm

由图 5-16、5-17 可以看到系统收敛时间约为 30s，同时在 50s 处姿态角速度与姿态 MRP 的稳态精度分别为 5×10^{-6} 与 2×10^{-8} ，收敛速率与稳态精度较经典滑模控制器均有了较大的提升（系统收敛时间提升约 80%）。考虑到未知干扰力矩的存在，系统状态不可能完全收敛至 $\mathbf{0}$ ，但由图 5-16 与图 5-17 可以看到系统状态仍然能够拥有较高的精度。控制器(5-65)相比较于经典滑模控制收敛速率快的原因在于滑模面(5-59)本身所具有的有限时间收敛特性，然而值得注意的是控制器(5-65)对于系统转动惯量不确定性的鲁棒性较差，同时还要求系统姿态角速度的分量 ω_i 不为零，这些缺陷均限制了控制器(5-65)的研究与应用。同时由图 5-18 可以看到控制器(5-65)的控制力矩全程不超过系统上界。

5.4.2.2 姿态跟踪控制器仿真

设置系统参数如下

$$J = \text{diag}([20 \ 18 \ 15]) \text{kg} \cdot \text{m}^2, t_{\text{sample}} = 0.5\text{s}, \bar{d} = 0.001 \text{N} \cdot \text{m}$$

$$\omega(t_0) = [0.001 \ -0.002 \ -0.005]^T \text{rad/s}, \sigma(t_0) = [0.025 \ 0.05 \ -0.025]^T \quad (5-109)$$

$$\omega_d(t_0) = [0 \ -0.001 \ 0]^T \text{rad/s}, \dot{\omega}_d(t_0) = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \sigma_d(t_0) = \mathbf{0}_{3 \times 1}$$

与前文类似，为说明本文提出控制器的有效性，以经典滑模控制器(5-110)作为对比。

$$u = -k_s s + J R \dot{\omega}_d - J \omega_e^\times R \omega_d + (\omega_e + R \omega_d)^\times J (\omega_e + R \omega_d) - \frac{1}{2} k_1 J G \omega_e \quad (5-110)$$

$$s = \omega_e + k \sigma$$

同时设置控制参数如下

$$k_1 = 0.05, k_s = 10 \quad (5-111)$$

可以得到基于经典滑模控制器(5-110)的仿真曲线如下

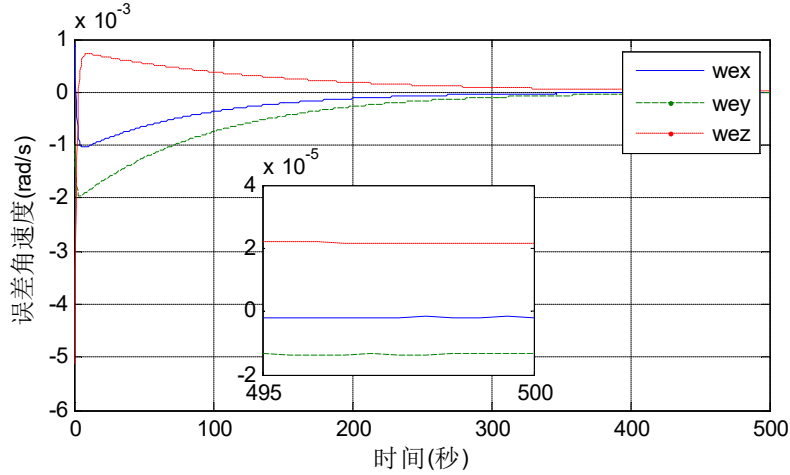


图 5-19 误差角速度曲线

Fig.5-19 Curve of error angular velocity

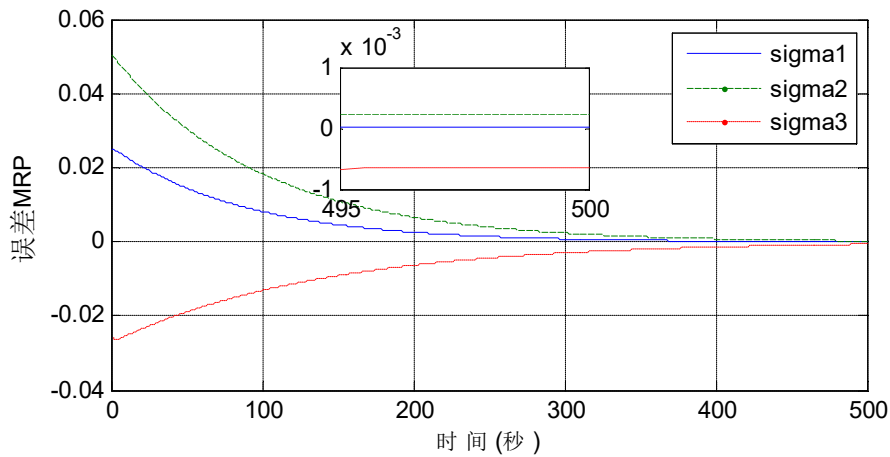


图 5-20 误差 MRP 曲线

Fig.5-20 Curve of error MRP

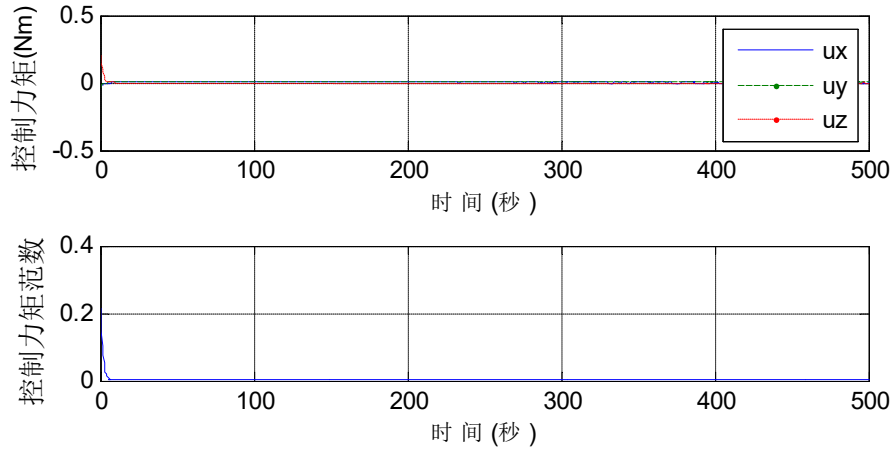


图 5-21 控制力矩及其范数曲线

Fig.5-21 Curve of control torque and its norm

由图 5-19、5-20 可以看到, 在小角度姿态跟踪模式下, 系统收敛时间约为 500s, 同时 500s 处误差角速度与误差 MRP 的稳态精度分别为 4×10^{-5} 与 1×10^{-3} 。经典滑模控制器的弊端在上一小节中已经给出, 因此在此不对其进行赘述。

接下来给出姿态跟踪控制器(5-86)的仿真。设置控制参数如下

$$k = 200, k_s = 0.01, r = 5/3, p = 1/3 \quad (5-112)$$

从而可以得到仿真曲线如下

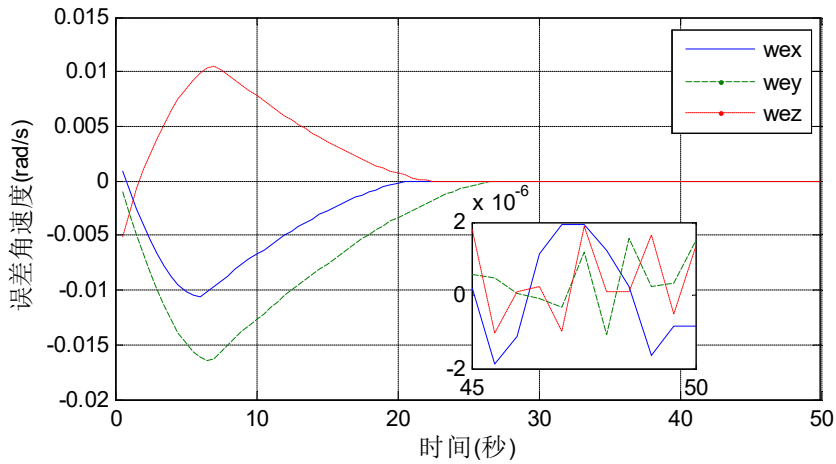


图 5-22 误差角速度曲线

Fig.5-22 Curve of error angular velocity

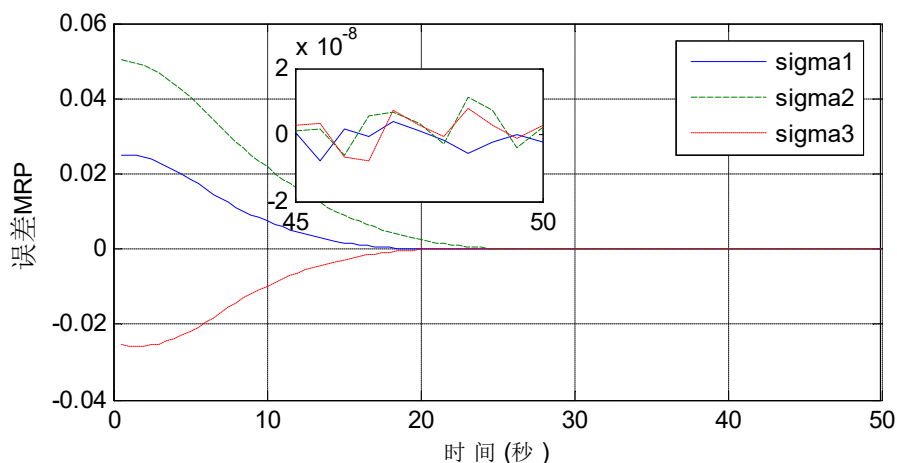


图 5-23 误差 MRP 曲线

Fig.5-23 Curve of error MRP

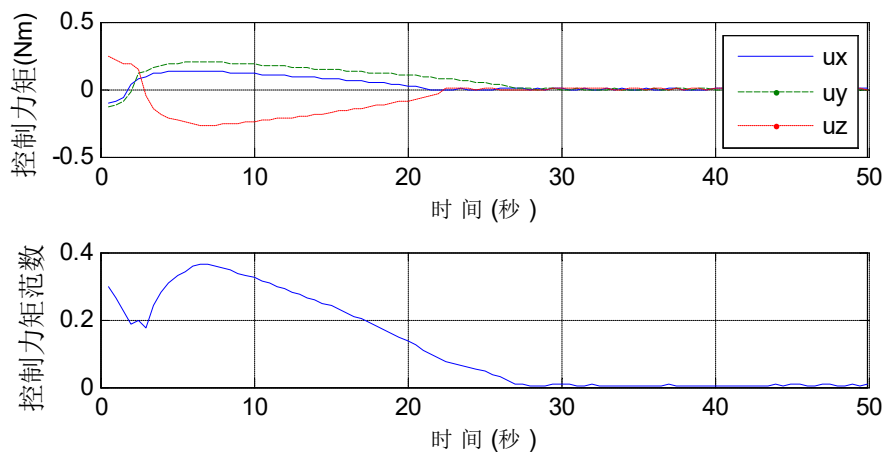


图 5-24 控制力矩及其范数曲线

Fig.5-24 Curve of control torque and its norm

由图 5-22、5-23 可以看到控制器(5-86)的收敛时间约为 30s，同时在 50s 处误差角速度与误差 MRP 的稳态精度分别为 2×10^{-6} 与 2×10^{-8} ，系统收敛速率与稳态精度相比较于经典滑模控制器均有了较大的提升（系统收敛时间提升约 80%）。考虑到未知干扰力矩的存在，系统状态不可能完全收敛至 $\mathbf{0}$ ，但由图 5-22 与图 5-23 可以看到系统状态仍然能够拥有较高的精度。同时由图 5-24 可以看到系统控制力矩全程未超过系统上界。

5.5 本章小结

对于姿态镇定与姿态跟踪控制问题，本章首先对于经典滑模面进行了改进，基于角速度与四元数矢量反向时欧拉轴指向不变的性质解决了有限时间控制的奇异性问题，给出了一种具有三段式结构的有限时间滑模面，修正了经典滑模面角

速度下降过快所导致的收敛速率慢的缺陷，同时在考虑未知外部干扰力矩与转动惯量不确定性的条件下设计了有限时间控制器实现系统状态在有限时间内收敛至所设计滑模面，但该控制器的缺陷在于对于小角度机动问题，控制器可能存在奇异性；随后针对小角度机动问题，本章设计了基于 **MRP** 的有限时间滑模面，通过避免对系统状态的分数次幂求导而规避了有限时间控制中的奇异性问题，并在考虑外部干扰力矩的条件下设计了有限时间控制器，但该控制器的缺陷是对于系统转动惯量不确定性的鲁棒性较差；本章最后的仿真表明本章所提出的控制算法能够在保证一定稳态精度的前提下，实现系统收敛时间相比较于经典滑模控制器的大幅度减少，并且对于外部干扰力矩与系统转动惯量不确定性具有鲁棒性。

第6章 基于路径规划算法的姿态控制器设计

6.1 引言

在卫星姿态控制问题中，除了前文所述的 PID 控制、滑模控制、有限时间控制等方法之外，还有另外一种控制器设计思路，即先规划出具有理想特性的期望姿态运动轨迹，随后设计姿态跟踪控制器实现系统真实姿态对于期望轨迹的跟踪，一般称该方法为先规划再跟踪的姿态控制方法。该方法的优势在于在设计期望姿态运动轨迹时可以不用考虑转动惯量不确定性、外部干扰力矩等等扰动因素，能够最大限度的实现系统的最优性能，得到具有最优性能的期望轨迹，随后设计姿态跟踪控制器时再引入转动惯量不确定性、外部干扰力矩等因素，从而实现对于系统性能的优化。

在卫星姿态控制问题中，国内外已有众多学者基于这种先规划再跟踪的控制器设计方法进行了广泛而又深入的研究，但现有的研究所存在的主要缺陷为得到了优化结果多为数值解，需要星载计算机进行实时运算，同时运算量也往往较大。为解决现有路径规划算法存在的上述弊端，同时考虑到卫星姿态机动时间最优解往往具有类似 Bang-Bang 控制的形式，即系统或处在最大角速度状态，或处在最大控制力矩输出状态，本章基于此将任意的姿态机动拆分成三次独立的单轴机动，通过优化姿态机动总转角推导出一种时间较优的姿态机动路径，同时给出姿态机动过程中“交汇点”的解析解，进而基于单轴机动的 Bang-Bang 控制形式给出每一个控制周期的期望轨迹解析解。同时，针对姿态机动中一种特殊情形设计了类似于轨道机动中“霍曼机动”的姿态机动路径，通过减少一次系统的加、减速过程达到优化机动时间的目的。随后通过仿真验证本章提出算法的有效性。在本章的最后对本次研究所提出的控制算法进行了横向对比以说明其优劣。

6.2 路径规划算法

6.2.1 时间较优的路径规划

在大多数的卫星姿态控制研究中，姿态镇定控制与姿态跟踪控制是两种不同的控制问题。由于误差角速度模型的复杂性，姿态跟踪控制问题相比较于姿态镇定控制问题要复杂一些。但是注意到姿态镇定控制问题中控制目标是使得姿态角速度与姿态四元数收敛至 0 ，而该情形可以视为姿态跟踪控制问题中期望角速度、期望四元数均为 0 的情形，因此姿态镇定控制问题可以视为一种特殊的姿态跟踪控

制问题，因此在本章中将仅仅针对广义上的姿态跟踪控制问题设计路径规划算法。

为简化研究，建立坐标系使得初始角速度方向与坐标系 x 轴平行，则初始角速度可以写为

$$\boldsymbol{\omega}_i = [\omega \quad 0 \quad 0]^T \quad (6-1)$$

从而卫星的初始角速度、初始四元数与期望角速度、期望四元数可以记作如下形式

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i &= [q_{i0} \quad \mathbf{q}_{iv}^T]^T = [q_{i0} \quad q_{i1} \quad q_{i2} \quad q_{i3}]^T, \boldsymbol{\omega}_i = [\omega \quad 0 \quad 0]^T \\ \mathbf{q}_d &= [q_{d0} \quad \mathbf{q}_{dv}^T]^T = [q_{d0} \quad q_{d1} \quad q_{d2} \quad q_{d3}]^T, \boldsymbol{\omega}_d = [\omega_{d1} \quad \omega_{d2} \quad \omega_{d3}]^T \end{aligned} \quad (6-2)$$

在本章中，若无特殊说明，以下标 i 和 d 分别表示初始状态与期望状态。值得注意的是，在本章的研究中，假定期望姿态角速度指向不变，即期望的卫星运动状态为绕定轴的转动。

本章的路径规划问题可以描述为：寻找合适的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 与四元数 \mathbf{q} 轨迹使得其从集合 $\{\boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{q}_i\}$ 出发，在尽量短的时间内收敛至期望角速度与期望四元数集合 $\{\boldsymbol{\omega}_d, \mathbf{q}_d\}$ 。

注意到卫星姿态运动学模型可以改写为

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\mathbf{q}_v^T \\ q_0 \mathbf{I}_3 + \mathbf{q}_v^\times \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}^T \\ \boldsymbol{\omega} & -\boldsymbol{\omega}^\times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{q} \quad (6-3)$$

从而若卫星以状态

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3]^T, \mathbf{q} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \quad (6-4)$$

自由运动，卫星姿态的轨迹可以记为

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}) = \mathbf{T} = e^{\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) t} \mathbf{q} = \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{q} \quad (6-5)$$

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\frac{\omega_1}{2\omega_0} \sin \theta & -\frac{\omega_2}{2\omega_0} \sin \theta & -\frac{\omega_3}{2\omega_0} \sin \theta \\ \frac{\omega_1}{2\omega_0} \sin \theta & \cos \theta & \frac{\omega_3}{2\omega_0} \sin \theta & -\frac{\omega_2}{2\omega_0} \sin \theta \\ \frac{\omega_2}{2\omega_0} \sin \theta & -\frac{\omega_3}{2\omega_0} \sin \theta & \cos \theta & \frac{\omega_1}{2\omega_0} \sin \theta \\ \frac{\omega_3}{2\omega_0} \sin \theta & \frac{\omega_2}{2\omega_0} \sin \theta & -\frac{\omega_1}{2\omega_0} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (6-6)$$

$$\omega_0 = \|\boldsymbol{\omega}\|^2 / 2, \theta = \omega_0 t$$

其中 t 为卫星自由运动的时间。

基于(6-4)、(6-5)、(6-6)可以得到若卫星以(6-2)中的初始角速度 ω_i 与初始姿态 q_i 自由运动，所形成的姿态轨迹 T_i 可以写为

$$T_i = L_i(\omega_i)q_i = [\cos \theta_1 \quad \sin \theta_1 \quad 0 \quad 0]^T \quad (6-7)$$

$$L_i(\omega_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}, \theta_1 = \frac{\omega t_1}{2} \quad (6-8)$$

同理，若卫星以(6-2)中的期望角速度 ω_d 与期望姿态 q_d 自由运动，所形成的姿态轨迹 T_d 可以写为

$$T_d = L_d(\omega_d)q_d \quad (6-9)$$

$$L_d(\omega_d) = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\frac{\omega_1}{2\omega_0} \sin \theta_2 & -\frac{\omega_2}{2\omega_0} \sin \theta_2 & -\frac{\omega_3}{2\omega_0} \sin \theta_2 \\ \frac{\omega_1}{2\omega_0} \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & \frac{\omega_3}{2\omega_0} \sin \theta_2 & -\frac{\omega_2}{2\omega_0} \sin \theta_2 \\ \frac{\omega_2}{2\omega_0} \sin \theta_2 & -\frac{\omega_3}{2\omega_0} \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & \frac{\omega_1}{2\omega_0} \sin \theta_2 \\ \frac{\omega_3}{2\omega_0} \sin \theta_2 & \frac{\omega_2}{2\omega_0} \sin \theta_2 & -\frac{\omega_1}{2\omega_0} \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (6-10)$$

$$\omega_0 = \|\omega_d\|/2, \theta_2 = \omega_0 t_2$$

在(6-8)与(6-10)中， t_1 、 t_2 为卫星自由运动的时间。

在本次研究中，时间较优的姿态机动路径可以由如下方法得到：1. 首先卫星从初始姿态开始绕初始转轴转动，使卫星运动至 T_i 集合内某个合适的切换点 P_1 并使得卫星在该点处角速度为 θ ，随后进行“变轨操作”进行姿态机动以运动至 T_d 集合内某个合适的切换点 P_2 并使得卫星在该点处角速度为 θ ，随后再在集合 T_d 内绕期望转轴转动，转过合适的角度并将角速度加速至期望角速度便能够实现真实姿态“追上”期望姿态的目标。可以看到，该方法实质上是将姿态机动问题分成了三步，即初始位置到 P_1 的姿态机动、 P_1 到 P_2 的姿态机动、 P_2 到终端位置的姿态机动，其中第一步机动终端角速度为 θ ，第二步机动初始角速度与终端角速度均为 θ ，而第三步机动初始角速度为 θ 。为了实现优化姿态机动时间的目的，需要做到以下两点：1. 路径最短，即三步机动的机动姿态角之和最小；2. 该路径下的时间最优，即在上述的三步姿态机动过程中卫星或处于最大的角速度状态，或处于最大

的加、减速状态。

首先讨论第一个路径最短的要求。记 P_1 、 P_2 的姿态所对应的姿态四元数分别为 q_{T_i} 、 q_{T_d} ，则描述从 P_1 到 P_2 的姿态四元数可以写为

$$q_e = q_{T_i}^* \otimes q_{T_d} \quad (6-11)$$

其中算子 \otimes 表示四元数的转动乘法， $q_{T_i}^*$ 表示四元数 q_{T_i} 的共轭四元数，其相关定义在第二章中已给出，在此不对其进行赘述。

基于(6-11)可以得到从 P_1 到 P_2 的转角 θ_3 满足

$$\begin{aligned} \cos(\theta_3/2) &= q_{e0} \\ &= (q_{i0} \cos \theta_1 - q_{i1} \sin \theta_1)(q_{d0} \cos \theta_2 - \frac{\omega_{d1}q_{d1} + \omega_{d2}q_{d2} + \omega_{d3}q_{d3}}{2\omega_0} \sin \theta_2) \\ &\quad + (q_{i0} \sin \theta_1 + q_{i1} \cos \theta_1)(q_{d1} \cos \theta_2 + \frac{\omega_{d1}q_{d0} - \omega_{d2}q_{d3} + \omega_{d3}q_{d3}}{2\omega_0} \sin \theta_2) \\ &\quad + (q_{i2} \cos \theta_1 + q_{i3} \sin \theta_1)(q_{d2} \cos \theta_2 + \frac{\omega_{d1}q_{d3} + \omega_{d2}q_{d0} - \omega_{d3}q_{d1}}{2\omega_0} \sin \theta_2) \\ &\quad + (-q_{i2} \sin \theta_1 + q_{i3} \cos \theta_1)(q_{d3} \cos \theta_2 + \frac{-\omega_{d1}q_{d2} + \omega_{d2}q_{d1} + \omega_{d3}q_{d0}}{2\omega_0} \sin \theta_2) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{bmatrix} \\ &= f(\theta_1, \theta_2) \end{aligned} \quad (6-12)$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= q_{i0}q_{d0} + q_{i1}q_{d1} + q_{i2}q_{d2} + q_{i3}q_{d3} \\ a_2 &= \frac{\omega_1}{2\omega_0}(-q_{i0}q_{d1} + q_{i1}q_{d0} + q_{i2}q_{d3} - q_{i3}q_{d2}) + \frac{\omega_2}{2\omega_0}(-q_{i0}q_{d2} - q_{i1}q_{d3} + q_{i2}q_{d0} + q_{i3}q_{d1}) \\ &\quad + \frac{\omega_3}{2\omega_0}(-q_{i0}q_{d3} + q_{i1}q_{d2} - q_{i2}q_{d1} + q_{i3}q_{d0}) \\ a_3 &= -q_{i1}q_{d0} + q_{i0}q_{d1} + q_{i3}q_{d2} - q_{i2}q_{d3} \\ a_4 &= \frac{\omega_1}{2\omega_0}(q_{i0}q_{d0} + q_{i1}q_{d1} + q_{i2}q_{d2} + q_{i3}q_{d3}) + \frac{\omega_2}{2\omega_0}(-q_{i0}q_{d3} + q_{i1}q_{d2} - q_{i2}q_{d1} + q_{i3}q_{d0}) \\ &\quad + \frac{\omega_3}{2\omega_0}(q_{i0}q_{d2} + q_{i1}q_{d3} - q_{i2}q_{d0} - q_{i3}q_{d1}) \end{aligned} \quad (6-13)$$

从而姿态机动的总转角可以写为

$$\varphi = 2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 = 2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\arccos(f(\theta_1, \theta_2)) \quad (6-14)$$

可以看到，在初始状态与期望状态确定之后，总转角表达式(6-14)中的自变量实际上是 θ_1 与 θ_2 ，本质上这是由于一旦 θ_1 、 θ_2 确定，“变轨点” P_1 、 P_2 便能够唯一确

定，从而姿态机动的路径便能够唯一确定。

为寻找姿态机动总转角 φ 的最小值，求 φ 的偏导数可以得到

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} = 2(1 - \frac{\partial f / \partial \theta_1}{\sqrt{1 - f^2(\theta_1, \theta_2)}}), \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} = 2(1 - \frac{\partial f / \partial \theta_2}{\sqrt{1 - f^2(\theta_1, \theta_2)}}) \quad (6-15)$$

从而当 φ 取最小值时有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} = 2(1 - \frac{\partial f / \partial \theta_1}{\sqrt{1 - f^2(\theta_1, \theta_2)}}) = 0 &\Rightarrow f^2(\theta_1, \theta_2) + (\frac{\partial f}{\partial \theta_1})^2 = 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_2} = 2(1 - \frac{\partial f / \partial \theta_2}{\sqrt{1 - f^2(\theta_1, \theta_2)}}) = 0 &\Rightarrow f^2(\theta_1, \theta_2) + (\frac{\partial f}{\partial \theta_2})^2 = 1 \end{aligned} \quad (6-16)$$

将 $f(\theta_1, \theta_2)$ 表达式带入(6-16)可以得到

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f^2 + (\frac{\partial f}{\partial \theta_1})^2 = (a_1^2 + a_3^2) \cos^2 \theta_2 + (a_2^2 + a_4^2) \sin^2 \theta_2 + 2(a_1 a_2 + a_3 a_4) \cos \theta_2 \sin \theta_2 = 1 \\ f^2 + (\frac{\partial f}{\partial \theta_2})^2 = (a_1^2 + a_2^2) \cos^2 \theta_1 + (a_3^2 + a_4^2) \sin^2 \theta_1 + 2(a_1 a_3 + a_2 a_4) \cos \theta_1 \sin \theta_1 = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2}{2} \cos 2\theta_2 + (a_1 a_2 + a_3 a_4) \sin 2\theta_2 + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{2} = 1 \\ \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2}{2} \cos 2\theta_1 + (a_1 a_3 + a_2 a_4) \sin 2\theta_1 + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{2} = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (6-17)$$

从而当 φ 取最小值时 θ_1 、 θ_2 满足

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{2} (\arcsin \frac{2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2)^2 + 4(a_1 a_3 + a_2 a_4)^2}} - \gamma_1) \\ \theta_2 = \frac{1}{2} (\arcsin \frac{2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)}{\sqrt{(a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2)^2 + 4(a_1 a_2 + a_3 a_4)^2}} - \gamma_2) \end{cases} \quad (6-18)$$

其中 γ_1 、 γ_2 定义如下

$$\tan \gamma_1 = \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2}{2(a_1 a_3 + a_2 a_4)}, \tan \gamma_2 = \frac{a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2}{2(a_1 a_2 + a_3 a_4)} \quad (6-19)$$

在确定卫星初始状态与期望状态之后，便可以依据(6-13)计算出系统参数 a_i ，随后依据(6-18)便能够得到最短路径情形下的转角 θ_1 、 θ_2 ，最后代回(6-7)、(6-9)便能够得到“变轨点” P_1 、 P_2 ，从而姿态机动的最短路径便能够唯一确定。

在得到总转角最小的最短路径之后，下一步需要给出每一步姿态机动过程中的时间较优轨迹。

为了给出时间较优的姿态机动路径，首先需要给出对于一般的单轴机动的时间较优的姿态机动轨迹。

对于单轴机动，若其机动的欧拉轴为 \mathbf{e} ，机动的欧拉角为 $\bar{\varphi}$ ，系统初始角速度与期望角速度均与欧拉轴 \mathbf{e} 平行且范数分别为 $\bar{\omega}_i$ 、 $\bar{\omega}_d$ ，系统最大角速度为 $\bar{\omega}$ ，最大角加速度为 α ，则单轴机动的时间较优轨迹为

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{cases} \sqrt{2\alpha\varphi + \bar{\omega}_i^2} \mathbf{e}, & 0 \leq \varphi \leq \frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_i^2}{2\alpha} \\ \bar{\omega} \mathbf{e}, & \frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_i^2}{2\alpha} < \varphi < \bar{\varphi} - \frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_d^2}{2\alpha} \\ \sqrt{2\alpha(\bar{\varphi} - \varphi) + \bar{\omega}_d^2} \mathbf{e}, & \bar{\varphi} - \frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_d^2}{2\alpha} \leq \varphi \leq \bar{\varphi} \end{cases} \quad (6-20)$$

从而可以得到在每个控制周期的期望角速度与期望四元数为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t + \Delta t) &= \begin{cases} (\|\boldsymbol{\omega}(t)\| + \alpha\Delta t) \mathbf{e}, & 0 \leq \varphi \leq \frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_i^2}{2\alpha} \\ \bar{\omega} \mathbf{e}, & \frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_i^2}{2\alpha} < \varphi < \bar{\varphi} - \frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_d^2}{2\alpha} \\ (\|\boldsymbol{\omega}(t)\| - \alpha\Delta t) \mathbf{e}, & \bar{\varphi} - \frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_d^2}{2\alpha} \leq \varphi \leq \bar{\varphi} \end{cases} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}(t + \Delta t) &= \begin{cases} \alpha \mathbf{e}, & 0 \leq \varphi \leq \frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_i^2}{2\alpha} \\ \mathbf{0}, & \frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_i^2}{2\alpha} < \varphi < \bar{\varphi} - \frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_d^2}{2\alpha} \\ -\alpha \mathbf{e}, & \bar{\varphi} - \frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_d^2}{2\alpha} \leq \varphi \leq \bar{\varphi} \end{cases} \\ \mathbf{q}(t + \Delta t) &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi(t + \Delta t)}{2} & \mathbf{e}^T \sin \frac{\varphi(t + \Delta t)}{2} \end{bmatrix}^T \\ \varphi(t + \Delta t) &= \begin{cases} \varphi(t) + \|\boldsymbol{\omega}(t)\| \Delta t + \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2, & 0 \leq \varphi \leq \frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_i^2}{2\alpha} \\ \varphi(t) + \bar{\omega} \Delta t, & \frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_i^2}{2\alpha} < \varphi < \bar{\varphi} - \frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_d^2}{2\alpha} \\ \varphi(t) + \|\boldsymbol{\omega}(t)\| \Delta t - \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2, & \bar{\varphi} - \frac{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_d^2}{2\alpha} \leq \varphi \leq \bar{\varphi} \end{cases} \quad (6-21) \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{x}(t)$ 为当前状态， $\mathbf{x}(t + \Delta t)$ 为离线计算得到的期望状态， Δt 为控制周期。

注意到前文所述的路径最短姿态机动中三次单轴机动的欧拉轴与欧拉角分别为

$$\mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\omega}_i / \|\boldsymbol{\omega}_i\|, \mathbf{e}_2 = \mathbf{q}_{ev} / \|\mathbf{q}_{ev}\|, \mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\omega}_d / \|\boldsymbol{\omega}_d\|, \bar{\varphi}_1 = \theta_1, \bar{\varphi}_2 = 2 \arccos(q_{e0}), \bar{\varphi}_3 = \theta_2 \quad (6-22)$$

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{q}_{T_i}^* \otimes \mathbf{q}_{T_d} \quad (6-23)$$

其中 q_{e0} 为 \mathbf{q}_e 标部, \mathbf{q}_{ev} 为 \mathbf{q}_e 矢部。

从而在得到最短路径 θ_1 、 θ_2 之后, 依据(6-22)便可以得到三次单轴机动的欧拉轴与欧拉角, 再根据(6-21)便可以得到时间较优的机动轨迹。

一般来说, 卫星姿态系统所能具有的最大角速度 $\bar{\omega}$ 往往是由空间任务、卫星自身性质等决定的, 该数值通常独立于姿态控制器的设计, 但卫星所能够拥有的最大角加速度则直接取决于控制力矩大小以及控制参数的选取。注意到

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d\|\boldsymbol{\omega}\|}{dt} = \frac{d\sqrt{\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega}}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{\|\boldsymbol{\omega}\|} 2\boldsymbol{\omega}^T \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ &= \frac{\boldsymbol{\omega}^T}{\|\boldsymbol{\omega}\|} \mathbf{J}^{-1} (\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{d}) \\ &\approx \frac{\boldsymbol{\omega}^T}{\|\boldsymbol{\omega}\|} \mathbf{J}^{-1} (\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}) \end{aligned} \quad (6-24)$$

同时考虑到 $\boldsymbol{\omega}^T / \|\boldsymbol{\omega}\|$ 为单位向量, 从而有

$$\alpha \leq \frac{\bar{u} + \lambda_M(\mathbf{J}) \bar{\omega}^2}{\lambda_m(\mathbf{J})} \quad (6-25)$$

其中 \bar{u} 为系统控制力矩上界。从而只需满足下式即可使得系统在机动过程中不会出现控制力矩超过系统上界的问题。

$$\alpha \lambda_m(\mathbf{J}) + \lambda_M(\mathbf{J}) \bar{\omega}^2 \leq \bar{u} \quad (6-26)$$

通过之前的讨论可以看到, 本小节中将任意的姿态机动问题拆分成三步独立的单轴机动, 通过优化姿态机动的总转角得到姿态机动的最短路径, 同时按照 Bang-Bang 机动模式得到了该路径下的时间较优轨迹, 值得注意的是本小节给出的路径均为解析解, 但其代价则是卫星需要进行多次加减速, 这也造成了系统性能浪费。

6.2.2 霍曼机动式的路径规划

在卫星轨道机动中, 霍曼机动是一种能量最优的机动方式。其基本原理为: 在同一轨道平面的两个圆轨道机动中, 能量最省的机动方式是沿着同时相切于两个圆轨道的椭圆轨道进行机动。其关键在于机动时卫星只需在切点处加减速一次, 从而达到节省推力器能量的目的。不同于轨道机动问题中推力器所携带燃料有限的约束, 姿态控制问题中角动量交换装置如飞轮、力矩陀螺等往往不存在能

量方面的约束，但在上一小节提出的路径规划算法中，由于卫星需要频繁地进行加减速，从而势必会造成性能浪费，若能够借鉴轨道机动中霍曼机动的思路便可以对此进行一定改良。

在上一小节的讨论中可以看到一般的姿态机动被拆分为三次独立的单轴机动，所以势必会有三次角速度的加、减速过程，注意到描述从初始轨迹集合 \mathbf{T}_i 到期望轨迹集合 \mathbf{T}_d 的姿态四元数可以写为

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{q}_{T_i}^* \otimes \mathbf{q}_{T_d} \quad (6-27)$$

若存在 \mathbf{T}_i 与 \mathbf{T}_d 中四元数使得

$$q_{e0} = 1 \quad (6-28)$$

则初始“轨道” \mathbf{T}_i 与期望“轨道” \mathbf{T}_d 有交点，从而上一小节中的第二步机动，即从 \mathbf{T}_i 到 \mathbf{T}_d 的机动即可省略，系统可以减少一次加、减速过程，从而达到优化系统收敛时间的目的。

由前文讨论， q_{e0} 定义为

$$\begin{aligned} q_{e0} &= (q_{i0} \cos \theta_1 - q_{i1} \sin \theta_1)(q_{d0} \cos \theta_2 - \frac{\omega_{d1}q_{d1} + \omega_{d2}q_{d2} + \omega_{d3}q_{d3}}{2\omega_0} \sin \theta_2) \\ &\quad + (q_{i0} \sin \theta_1 + q_{i1} \cos \theta_1)(q_{d1} \cos \theta_2 + \frac{\omega_{d1}q_{d0} - \omega_{d2}q_{d3} + \omega_{d3}q_{d3}}{2\omega_0} \sin \theta_2) \\ &\quad + (q_{i2} \cos \theta_1 + q_{i3} \sin \theta_1)(q_{d2} \cos \theta_2 + \frac{\omega_{d1}q_{d3} + \omega_{d2}q_{d0} - \omega_{d3}q_{d1}}{2\omega_0} \sin \theta_2) \\ &\quad + (-q_{i2} \sin \theta_1 + q_{i3} \cos \theta_1)(q_{d3} \cos \theta_2 + \frac{-\omega_{d1}q_{d2} + \omega_{d2}q_{d1} + \omega_{d3}q_{d0}}{2\omega_0} \sin \theta_2) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{bmatrix} \\ &= f(\theta_1, \theta_2) \end{aligned} \quad (6-29)$$

可以看到当初始状态与期望状态确定之后， q_{e0} 可以写 θ_1 为与 θ_2 的函数，对 q_{e0} 求偏导可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} &= -a_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 - a_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + a_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + a_4 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_2} &= -a_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + a_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - a_3 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + a_4 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (6-30)$$

当 q_{e0} 取最大值时有 $\partial f / \partial \theta_1 = \partial f / \partial \theta_2 = 0$ ，从而

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2a_1a_3 + 2a_2a_4}{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2}\right), \theta_2 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2a_1a_2 + 2a_3a_4}{a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2}\right) \quad (6-31)$$

$$\begin{aligned}
 q_{e0} &= a_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + a_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + a_3 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + a_4 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\
 &= \cos \theta_2 (a_1 \cos \theta_1 + a_3 \sin \theta_1) + \sin \theta_2 (a_2 \cos \theta_1 + a_4 \sin \theta_1) \\
 &= \sqrt{(a_1 \cos \theta_1 + a_3 \sin \theta_1)^2 + (a_2 \cos \theta_1 + a_4 \sin \theta_1)^2} \sin(\theta_2 + \theta') \\
 &\leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{2} + \frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2}{2} \cos 2\theta_2 + (a_1 a_3 + a_2 a_4) \sin 2\theta_2} \\
 &= \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2}{2}\right)^2 + (a_1 a_3 + a_2 a_4)^2} \sin(2\theta_2 + \theta'')} \\
 &\leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2}{2}\right)^2 + (a_1 a_3 + a_2 a_4)^2}}
 \end{aligned} \tag{6-32}$$

从而 q_{e0} 最大值满足

$$\begin{aligned}
 \max(q_{e0}) &= \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2}{2}\right)^2 + (a_1 a_3 + a_2 a_4)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2}{2}\right)^2 + (a_1 a_2 + a_3 a_4)^2}}
 \end{aligned} \tag{6-33}$$

基于(6-33)，若下式得到满足

$$\begin{aligned}
 \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2}{2}\right)^2 + (a_1 a_3 + a_2 a_4)^2} &= 1 \\
 \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2}{2}\right)^2 + (a_1 a_2 + a_3 a_4)^2} &= 1
 \end{aligned} \tag{6-34}$$

即可得到 q_{e0} 最大值为 1，从而集合 T_i 与集合 T_d 有交集，卫星姿态机动时首先沿 ω_i 方向转过角度 θ_1 到达两个集合的“交汇点”，同时在初始轨道上到达该点时减速至 0，再进行加速便可进入期望轨道，从而实现类似霍曼机动式的姿态机动。

在确定两个轨道的“交汇点”之后，便可以按照上一小节(6-21)式给出卫星姿态机动的时间较优轨迹。由于上一小节对此已进行讨论，在本小节中对其不进行赘述。

可以看到本小节中基于霍曼轨道机动的思路给出了另一种优化机动时间的方法，虽然本小节中给出的路径失去了上一小节中路径最短的特性，但由于减少了一次系统的加、减速过程，从而同样可以实现优化机动时间的目的。

6.3 姿态跟踪控制器设计

在得到优化后的机动轨迹之后，需要设计卫星姿态控制器使得卫星姿态沿着设计好的路径进行机动。在本节中将在考虑系统转动惯量不确定性、外部干扰力矩等扰动的前提下给出卫星姿态跟踪控制器实现上述目标。

本小节采用 PD 跟踪控制器，其结构为

$$\mathbf{u} = -\rho(k_d \boldsymbol{\omega}_e + k_p \mathbf{q}_{ev}) + \hat{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^x \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d + \boldsymbol{\omega}^x(t) \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}(t) - l \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\omega}_e) \quad (6-35)$$

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{q}_d^* \otimes \mathbf{q}(t)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}_e) = (\mathbf{q}_{e0}^2 - \mathbf{q}_{ev}^T \mathbf{q}_{ev}) \mathbf{I}_3 + 2 \mathbf{q}_{ev} \mathbf{q}_{ev}^T - 2 \mathbf{q}_{e0} \mathbf{q}_{ev}^x \quad (6-36)$$

$$\boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega}(t) - \mathbf{R}(\mathbf{q}_e) \boldsymbol{\omega}_d$$

在(6-35)、(6-36)中， k_d 、 k_p 均为正常数， $\hat{\mathbf{J}}$ 为转动惯量估计矩阵， $\mathbf{x}(t)$ 为状态当前值， $\mathbf{x}(t + \Delta t)$ 为离线计算出的状态期望值，上式中未声明变量定义如下

$$\rho = \begin{cases} \frac{-\mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2 + \sqrt{(\mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2)^2 + \|\mathbf{r}_1\|^2 (\bar{u}^2 - \|\mathbf{r}_2\|^2)}}{\|\mathbf{r}_1\|^2}, & \|\mathbf{u}\| \geq \bar{u} \\ 1, & \|\mathbf{u}\| < \bar{u} \end{cases} \quad (6-37)$$

$$\begin{cases} l = \lambda (\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + \|\boldsymbol{\omega}_d\| \|\boldsymbol{\omega}_e\| + \|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2) + \bar{d} \\ \mathbf{r}_1 = -k_d \boldsymbol{\omega}_e - k_p \mathbf{q}_{ev} \\ \mathbf{r}_2 = \hat{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^x \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d + \boldsymbol{\omega}^x(t) \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}(t) - l \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\omega}_e) \end{cases} \quad (6-38)$$

同时常数 λ 满足 $\lambda \geq \lambda_M(\tilde{\mathbf{J}})$ ， $\tilde{\mathbf{J}}$ 为转动惯量的误差矩阵， \bar{d} 为干扰力矩上界， \bar{u} 为系统控制力矩上界。可以看到 ρ 为控制器增益因子，其目的是维持控制器力矩范数不超过系统上界。

接下来对控制器(6-35)进行稳定性证明。选取 Lyapunov 函数如下

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e + 2\rho k_p (1 - q_{e0}) \quad (6-39)$$

对其求导并带入控制器(6-35)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}_e - 2\rho k_p \dot{q}_{e0} \\ &= \boldsymbol{\omega}_e^T (\mathbf{u} + \mathbf{d} - \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^x \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{\omega}^x \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}) + \rho k_p \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{q}_{ev} \\ &= -\rho \boldsymbol{\omega}_e^T (k_d \boldsymbol{\omega}_e + k_p \mathbf{q}_{ev}) + \boldsymbol{\omega}_e^T \hat{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \boldsymbol{\omega}_e^T \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^x \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d + \boldsymbol{\omega}_e^T \boldsymbol{\omega}^x(t) \hat{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}(t) \\ &\quad - l \boldsymbol{\omega}_e^T \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\omega}_e) - \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{J} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_e^x \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{\omega}_e^T \boldsymbol{\omega}^x \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{d} \\ &= -\rho k_d \boldsymbol{\omega}_e^T \boldsymbol{\omega}_e - \boldsymbol{\omega}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}_d + \boldsymbol{\omega}_e^T \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega}_e^x \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{\omega}_e^T \boldsymbol{\omega}^x \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{d} \\ &\quad - \left(\lambda (\|\dot{\boldsymbol{\omega}}_d\| + \|\boldsymbol{\omega}_d\| \|\boldsymbol{\omega}_e\| + \|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2) + \bar{d} \right) \boldsymbol{\omega}_e^T \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\omega}_e) \\ &\leq -\rho k_d \boldsymbol{\omega}_e^T \boldsymbol{\omega}_e \leq 0 \end{aligned} \quad (6-40)$$

从而误差系统一致渐近稳定，进而在控制器(6-35)作用下，卫星状态能够沿着上一小节设计好的期望轨迹运动。

6.4 仿真与分析

本小节将对前文给出的路径规划算法进行仿真验证，通过与现有姿态控制器的对比说明其有效性与优越性。虽然本章之前的讨论将姿态镇定控制视作一种姿态跟踪控制的特殊形式，但为了易于对比与分析，本章的仿真将依旧按照姿态镇定问题与姿态跟踪问题的形式给出。

6.4.1 姿态镇定控制器仿真

设置系统参数如下

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \text{diag}([20 \quad 18 \quad 15]) \text{kg} \cdot \text{m}^2, t_{\text{sample}} = 0.1 \text{s}, \bar{d} = 0.001 \text{N} \cdot \text{m}, \bar{u} = 0.5 \text{N} \cdot \text{m} \\ \boldsymbol{\omega}(t_0) &= 0.06 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}^T \text{rad/s}, \mathbf{q}(t_0) = [0.8104 \quad -0.5587 \quad -0.1547 \quad 0.0845]^T \end{aligned} \quad (6-41)$$

为说明本次研究提出算法的有效性，以经典 PD 控制器(6-42)作为参照，同时设置其参数如下。

$$\mathbf{u} = -k_d \boldsymbol{\omega} - k_p \mathbf{q}_v - \bar{d} \text{sgn}(\boldsymbol{\omega}) \quad (6-42)$$

$$k_d = 10, k_p = 2 \quad (6-43)$$

可以得到经典 PD 控制器仿真曲线如图 6-1 到图 6-3 所示。

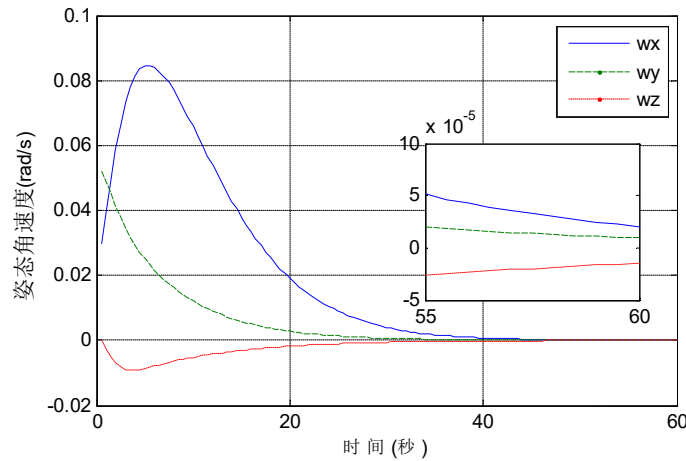


图 6-1 姿态角速度曲线

Fig. 6-1 Curve of angular velocity

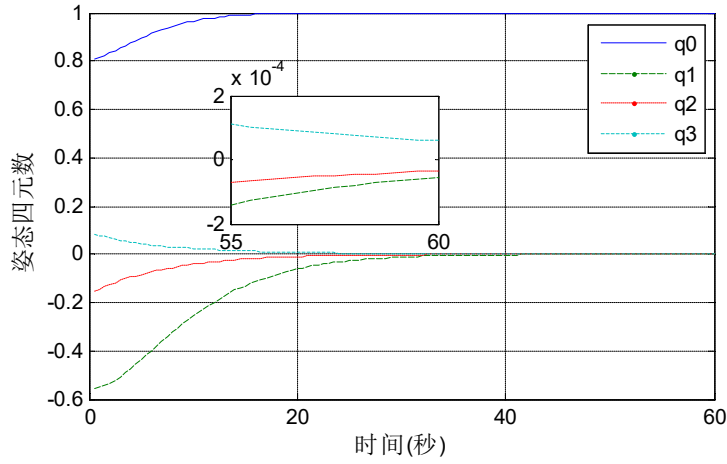


图 6-2 姿态四元数曲线

Fig. 6-2 Curve of attitude quaternion

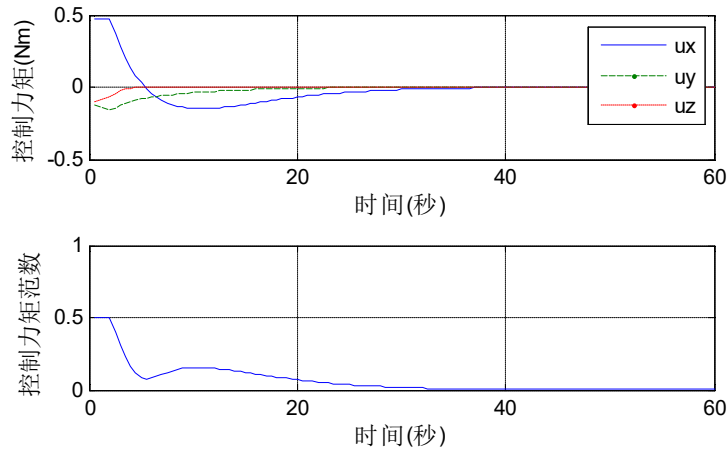


图 6-3 控制力矩及其范数曲线

Fig. 6-3 Curve of control torque and its norm

由图 6-1 与图 6-2 可以看到经典 PD 控制器作用下的系统收敛时间约为 45s，同时在 60s 处姿态角速度与姿态四元数的稳态精度分别为 5×10^{-5} 与 2×10^{-4} 。由图 6-3 可以看到系统控制力矩急剧下降，系统的收敛速率与控制力矩利用效率均较为低下。

接下来给出前文所提出的路径规划算法的仿真曲线。一般来说，卫星角速度与角加速度越大，系统的收敛速率也越快，注意到卫星转动惯量矩阵数值以及控制力矩幅值，卫星姿态控制系统能够提供的最大角加速度值约为 0.025，因此设置控制参数如下

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= 0.1 \text{ rad/s}, \alpha = 0.02, \hat{J} = \text{diag}([21 \ 17 \ 14]) \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \lambda = 3 \\ k_d &= 10, k_p = 2 \end{aligned} \quad (6-44)$$

可以得到仿真曲线如下所示

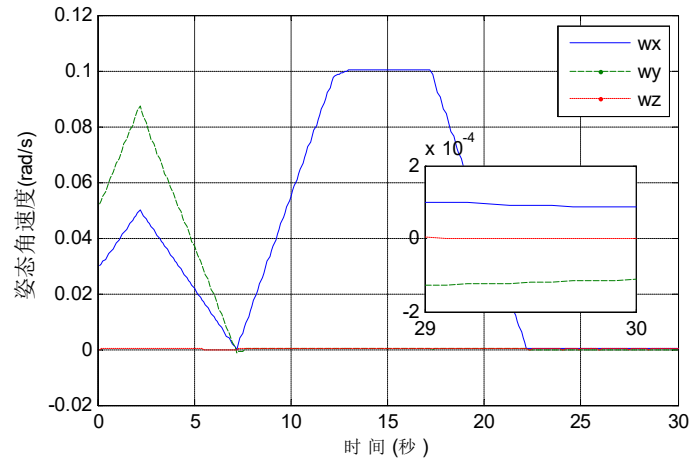


图 6-4 姿态角速度曲线

Fig. 6-4 Curve of angular velocity

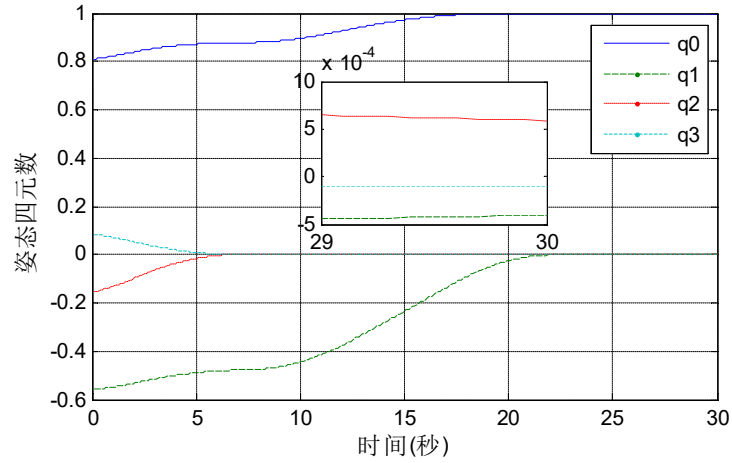


图 6-5 姿态四元数曲线

Fig. 6-5 Curve of attitude quaternion

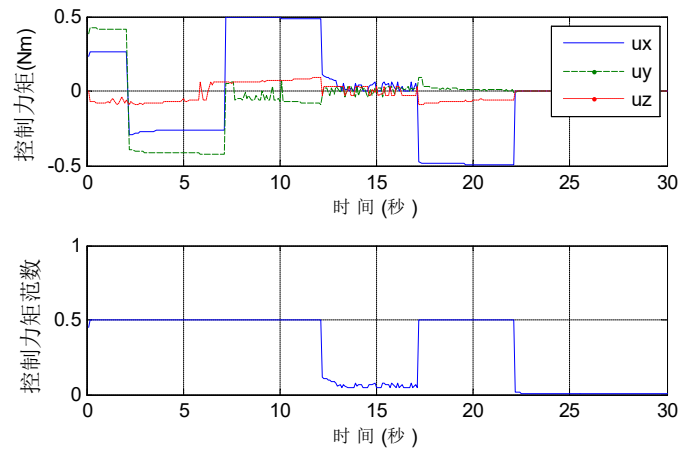


图 6-6 控制力矩及其范数曲线

Fig. 6-6 Curve of control torque and its norm

由图 6-4 与图 6-5 可以看到系统收敛时间约为 22s, 30s 处姿态角速度与姿态四元数的稳态精度分别为 1×10^{-4} 与 5×10^{-4} , 收敛时间相比较于经典的 PD 控制器有了极大提升 (收敛时间减少约 50%)。与此同时由图 6-4 可以看到系统经历两次加速与减速过程, 同时在 12s 至 17s 经历了以最大角速度运行的匀速过程, 这说明在存在转动惯量不确定性与干扰力矩等扰动的前提下, 本章所设计的控制器依然能够使得系统沿着所设计好的路径进行机动, 这也避免了单纯的 Bang-Bang 控制器由于开环特性所带来的系统鲁棒性差的缺陷。由系统角速度与控制力矩曲线可以看到, 在系统逼近平衡点之前, 系统或处于最大加、减速状态, 或处于最大角速度状态, 这种类似 Bang-Bang 控制的机动模式使得系统收敛速率有了较大提升, 同时也提高了控制力矩的利用效率。但值得注意的是, 这种机动模式要求系统频繁的进行加减速, 若卫星姿态控制执行机构为飞轮、力矩陀螺等角动量交换装置则无太大影响, 但若其为推力器等燃料有限的装置则会带来卫星寿命的大幅缩短, 这是在进行姿态控制器设计时所必须进行考虑的。

6.4.2 姿态跟踪控制器仿真

如前文所述, 初始姿态轨迹集合 T_i 与期望姿态轨迹集合 T_d 有无交点对于本章所提出的时间较优路径存在着影响, 因此在本节中对于姿态跟踪控制器的仿真分为两种情形: 1. T_i 与 T_d 无交点; 2. T_i 与 T_d 有交点。

首先设置系统参数如下

$$\begin{aligned} J &= \text{diag}([20 \quad 18 \quad 15]) \text{kg} \cdot \text{m}^2, t_{\text{sample}} = 0.1\text{s}, \bar{d} = 0.001 \text{N} \cdot \text{m}, \bar{u} = 0.5 \text{N} \cdot \text{m} \\ \omega_i(t_0) &= 0.04 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}^T \text{rad/s}, q_i(t_0) = [0.800 \quad -0.132 \quad -0.156 \quad -0.564]^T \quad (6-45) \\ \omega_d(t_0) &= 0.04 \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T \text{rad/s}, q_d(t_0) = [0.914 \quad 0.371 \quad -0.165 \quad 0.010]^T \end{aligned}$$

由(6-42)可以看到 T_i 与 T_d 无交点, 需要按照 6.2.1 小节中优化总转角的方法进行路径规划。

与前文类似的, 以经典 PD 控制器作为参照并设置控制参数如下

$$\begin{aligned} u &= -k_d \omega_e - k_p q_{ev} + JR\dot{\omega}_d - J\omega_e^\times R\omega_d + \omega_e^\times J\omega - \bar{d} \text{sgn}(\omega_e) \\ k_d &= 10, k_p = 2 \end{aligned} \quad (6-46)$$

从而可以得到基于经典 PD 控制器的仿真曲线如下所示

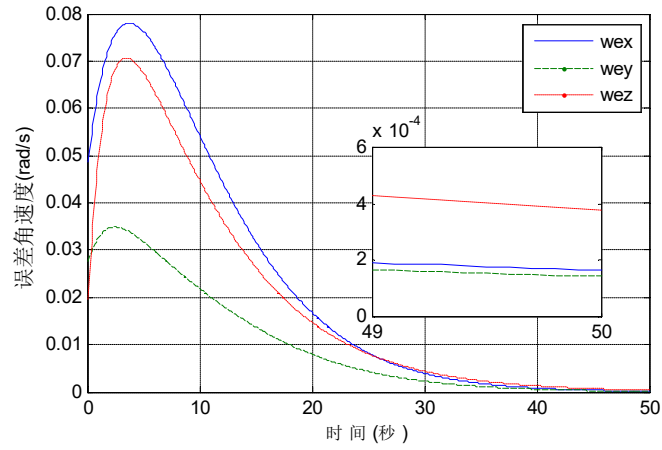


图 6-7 误差角速度曲线

Fig. 6-7 Curve of error angular velocity

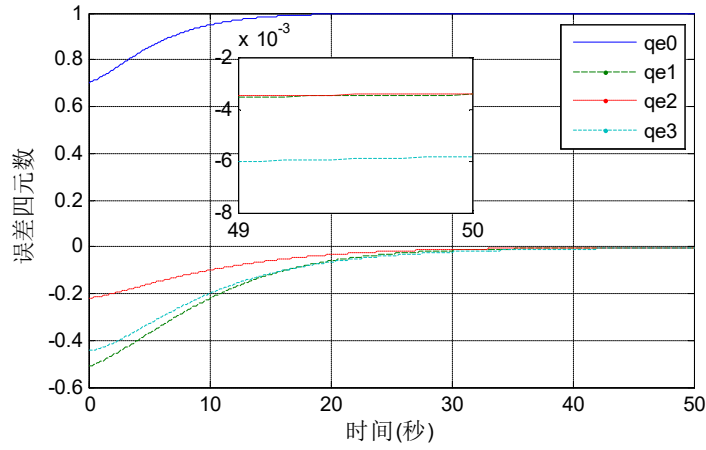


图 6-8 误差四元数曲线

Fig. 6-8 Curve of error quaternion

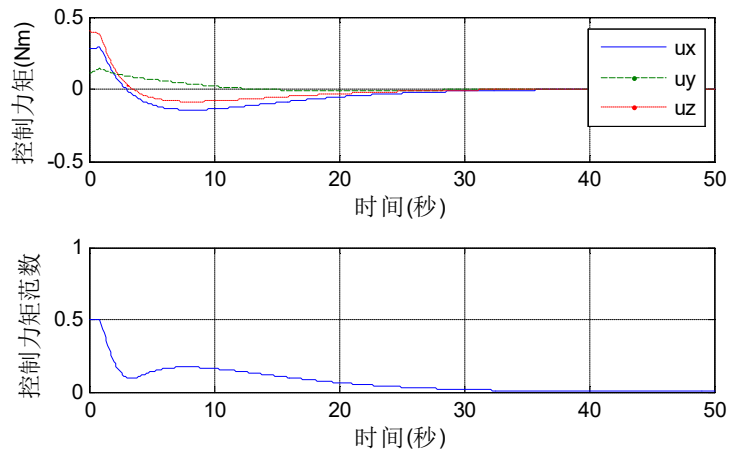


图 6-9 控制力矩及其范数曲线

Fig. 6-9 Curve of control torque and its norm

由图 6-7 与图 6-8 可以看到系统收敛时间约为 50s，同时系统在 50s 处的误差

角速度与误差四元数的稳态精度分别为 4×10^{-4} 与 6×10^{-3} ，可以看到系统在收敛速率方面存在着一定缺陷。同时由图 6-9 可以看到系统控制力矩随着状态的收敛急剧下降，这说明系统的性能并没有得到完全利用。

接下来给出本次研究所提出的路径规划算法仿真曲线，首先设置控制参数如下

$$\begin{aligned} \bar{\omega} = 0.1 \text{ rad/s}, \alpha = 0.02, \hat{J} = \text{diag}([21 \ 17 \ 14]) \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \lambda = 3 \\ k_d = 10, k_p = 2 \end{aligned} \quad (6-47)$$

从而可以得到仿真曲线如下

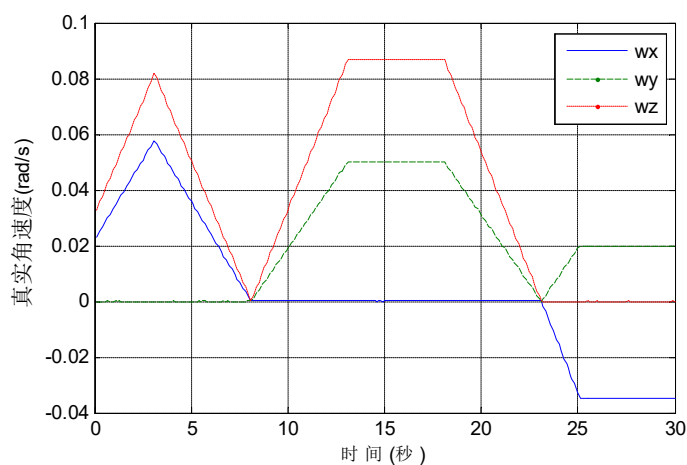


图 6-10 真实角速度曲线

Fig. 6-10 Curve of angular velocity

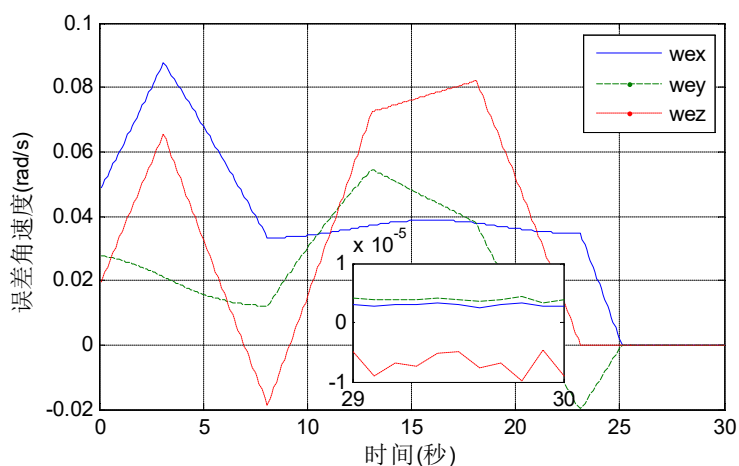


图 6-11 误差角速度曲线

Fig. 6-11 Curve of error angular velocity

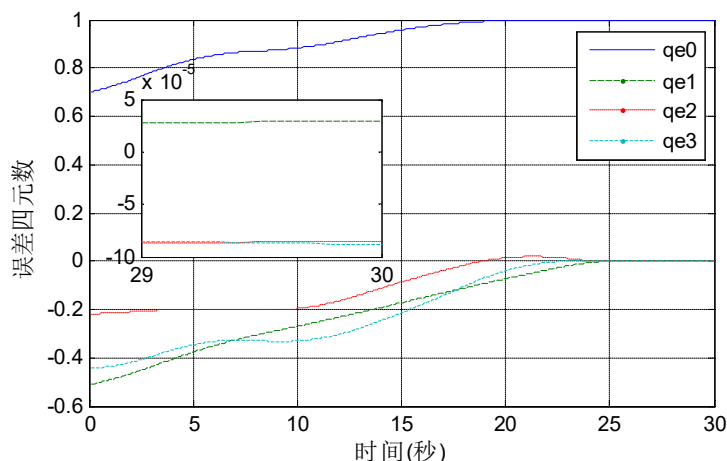


图 6-12 误差四元数曲线

Fig. 6-12 Curve of error quaternion

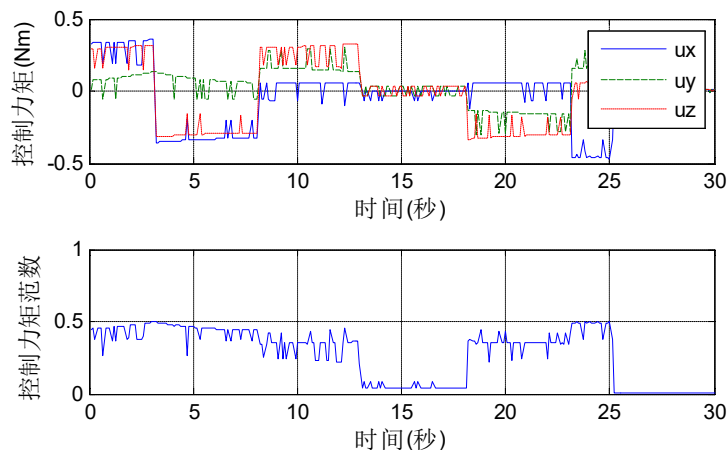


图 6-13 控制力矩及其范数曲线

Fig. 6-13 Curve of control torque and its norm

由图 6-11 与图 6-12 可以看到系统收敛时间约为 25s, 30s 处的误差角速度与误差四元数稳态精度分别为 1×10^{-5} 与 1×10^{-4} , 相比较于 PD 控制器收敛时间与稳态精度均有了大幅度提升 (收敛时间减少约 50%)。由图 6-10 与图 6-13 可以看到系统经历了三次加速过程与两次减速过程, 同时存在约 6s 的匀速过程, 在加减速过程以外系统控制力矩均处于较大的数值, 这也印证了 Bang-Bang 模式的姿态机动对于控制力矩的利用效率较高, 能够有效提升系统的收敛速率。但值得注意的是该模式下系统需进行频繁的加减速, 这在一定程度上同样造成了系统性能的浪费。

接下来对 6.2.2 小节中霍曼机动式的姿态机动进行仿真。由于 T_i 与 T_d 有交点, 从而对路径进行优化存在着两种选择: 总转角最小方案与霍曼机动方案, 前者总转角得以优化但加减速次数较多, 后者虽然转角不是最优但避免了系统频繁的加减速过程。接下来将对这两种方案以及经典 PD 控制进行仿真与对比。

首先设置系统参数如下

$$\mathbf{J} = \text{diag}([25 \quad 20 \quad 15]) \text{kg} \cdot \text{m}^2, t_{\text{sample}} = 0.1\text{s}, \bar{d} = 0.001\text{N} \cdot \text{m}, \bar{u} = 0.5\text{N} \cdot \text{m}$$

$$\boldsymbol{\omega}_i(t_0) = 0.02 \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T \text{rad/s}, \mathbf{q}_i(t_0) = [0.735 \quad 0.587 \quad -0.339 \quad 0]^T \quad (6-48)$$

$$\boldsymbol{\omega}_d(t_0) = 0.06 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}^T \text{rad/s}, \mathbf{q}_d(t_0) = [0.817 \quad -0.333 \quad 0 \quad -0.471]^T$$

同样首先给出经典 PD 控制器(6-43)的仿真曲线如下所示

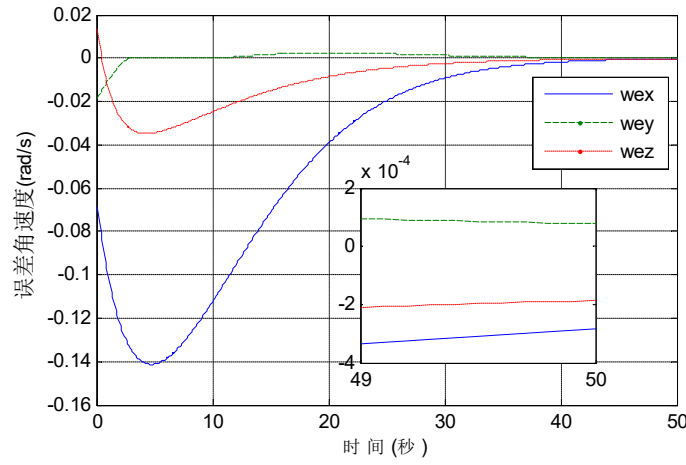


图 6-14 误差角速度曲线

Fig. 6-14 Curve of error angular velocity

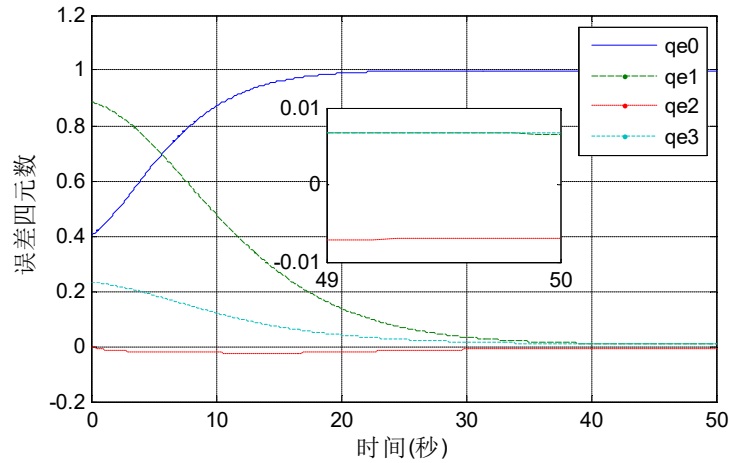


图 6-15 误差四元数曲线

Fig. 6-15 Curve of error quaternion

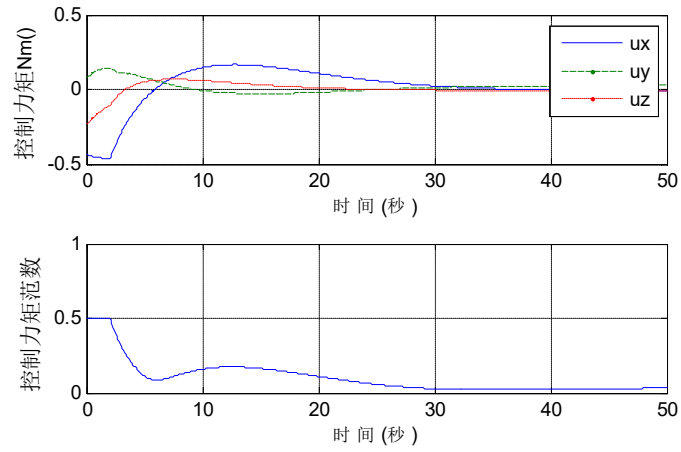


图 6-16 控制力矩及其范数曲线

Fig. 6-16 Curve of control torque and its norm

可以看到系统收敛时间约为 50s，在 50s 处稳态精度分别为 4×10^{-4} 与 1×10^{-2} 。由于经典 PD 控制器所存在的弊端前文已进行分析，在此对其不进行赘述。接下来给出基于最优姿态转角方案即 6.2.1 小节中路径(6-21)的仿真曲线。

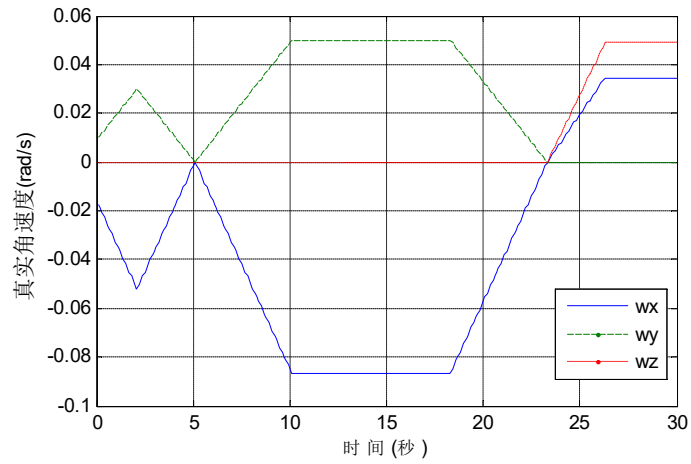


图 6-17 真实角速度曲线

Fig. 6-17 Curve of angular velocity

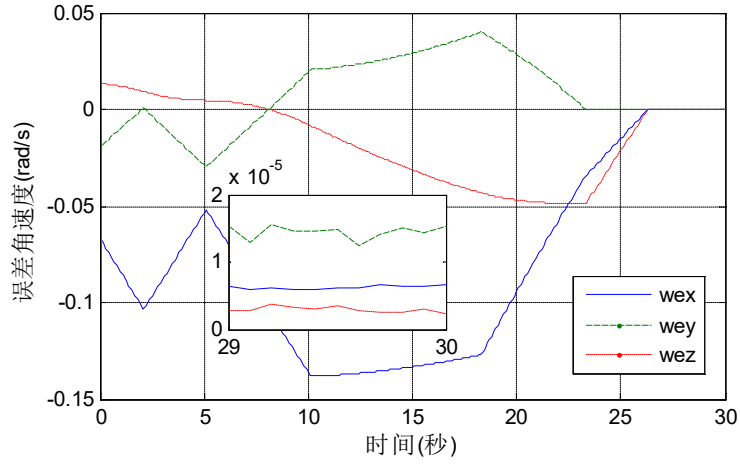


图 6-18 误差角速度曲线

Fig. 6-18 Curve of error angular velocity

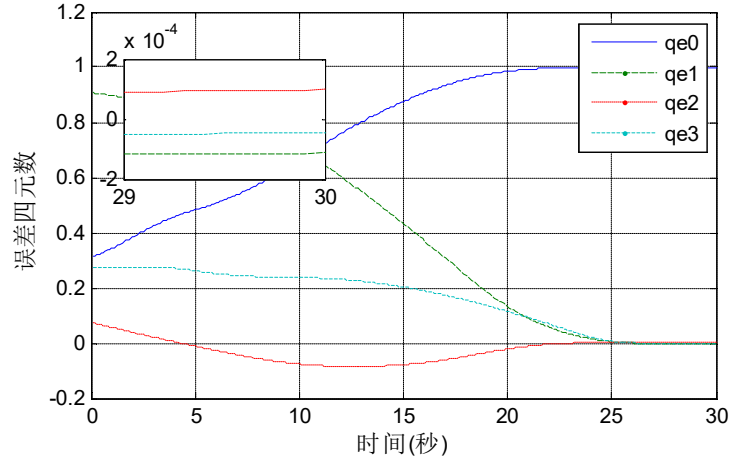


图 6-19 误差四元数曲线

Fig. 6-19 Curve of error quaternion

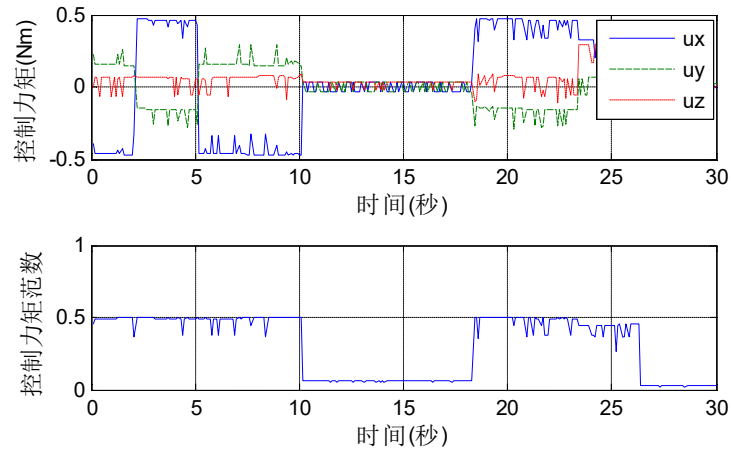


图 6-20 控制力矩及其范数曲线

Fig. 6-20 Curve of control torque and its norm

由图 6-18 与图 6-19 可以看到系统收敛时间约为 26.5s，同时由图 6-17 可以看到系统经历了三次加速过程以及两次减速过程。这种对转角进行优化的方案利弊在之前的内容中已进行过讨论，在此对其不进行赘述。

接下来给出基于 6.2.2 小节中霍曼机动路径的仿真曲线。

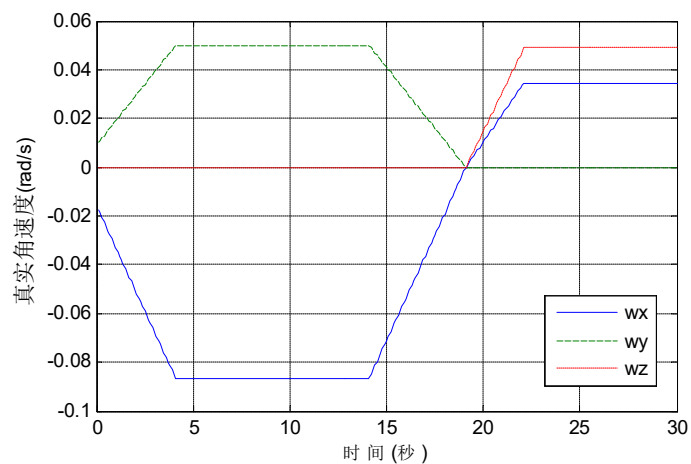


图 6-21 真实角速度曲线

Fig. 6-21 Curve of angular velocity

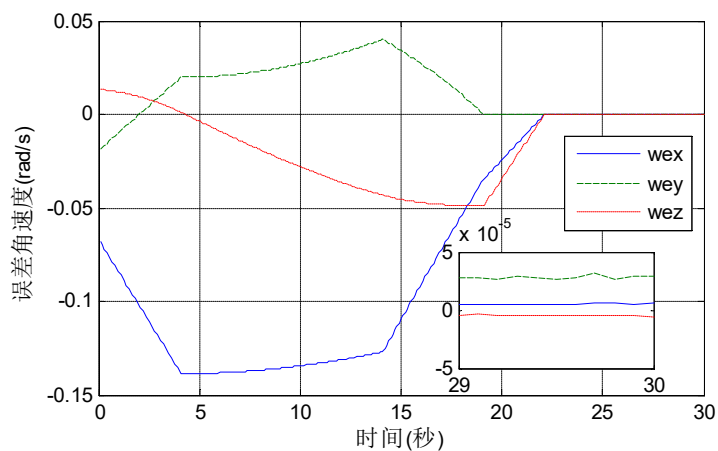


图 6-22 误差角速度曲线

Fig. 6-22 Curve of error angular velocity

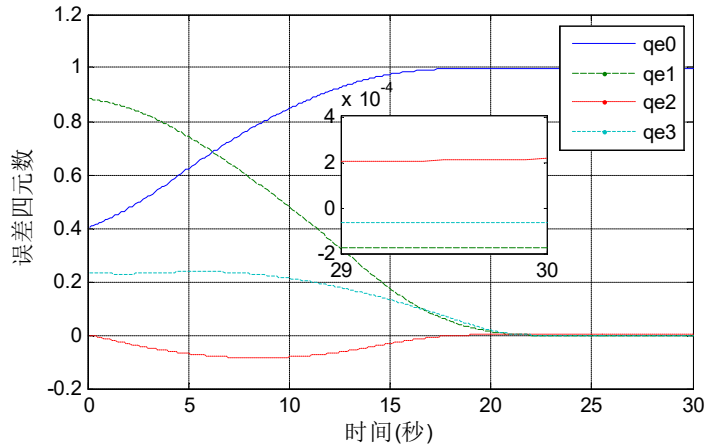


图 6-23 误差四元数曲线

Fig. 6-23 Curve of error quaternion

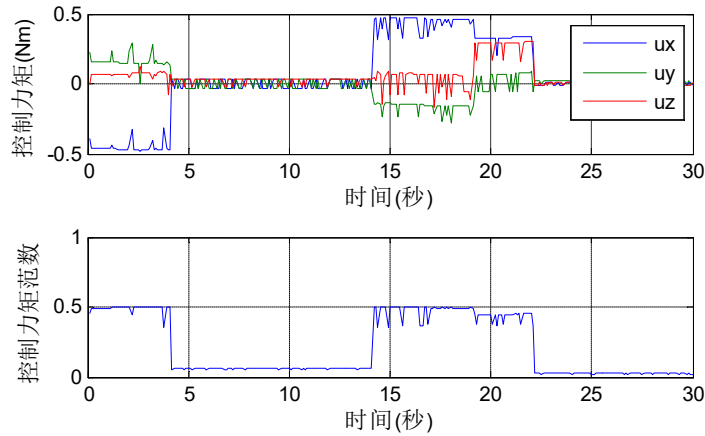


图 6-24 控制力矩曲线

Fig. 6-24 Curve of control torque and its norm

由图 6-22 与图 6-23 可以看到在 6.2.2 小节类似霍曼机动的模式下收敛时间约为 22s，注意到转角最优路径收敛时间约为 26.5s，二者的收敛时间相比较于经典的 PD 控制器均有了大幅度提升，同时稳态精度不逊于 PD 控制的稳态精度。可以看在本次研究所给出的路径中，系统或处于最大角速度状态，或处于最大加、减速状态，这种类似 Bang-Bang 控制的机动形式能够更加有效地利用系统控制力矩，在保证稳态精度的同时大幅提升收敛速率。

对转角最优路径与霍曼机动路径对比可以发现，后者相比前者的收敛时间提升约 5s，虽然该路径下转角并不是最小值，但相比较于转角最优的路径仍然实现了机动时间的提升。本质上这是由于在该模式下系统可以少进行一次加、减速过程所带来的，由图 6-21 可以看到系统只有两次加速过程以及一次减速过程，但系统以最大角速度运行的匀速段时间则由约 8s 提升到了 10s，从而在总转角更大的

不利条件下仍然实现了收敛时间的提升。与此同时，由于少进行一次加、减速过程，系统对控制力矩或推力器燃料的消耗更加节省，这也符合霍曼机动在轨道机动中能量最省的性质。但值得注意的在某些初值条件下，该路径的总转角可能会远大于转角最优路径的总转角，此时少进行一次加减速过程带来的时间补偿可能会不足以弥补转角方面的缺陷，即该模式下可能会出现卫星为运动至“交汇点”而绕大圈运行的情况，这是在进行路径规划时需要避免的。

6.5 各控制算法横向对比

在本次研究中，针对卫星姿态控制问题分别基于 PID 控制、滑模控制、有限时间控制、路径规划算法分别设计了姿态控制器，为说明各控制算法的特点，有必要对这些控制器进行横向对比。同时由于各控制器的优劣独立于姿态镇定与姿态跟踪控制，因此在本节中将基于较为简单的姿态镇定控制问题对各控制算法进行对比说明。同时为对比系统性能，按照前文标准即角速度范数与四元数范数小于 5×10^{-3} 可认为系统收敛为判据来判断系统是否收敛。

设置系统参数如下

$$\begin{aligned} J &= \text{diag}([20 \ 18 \ 15]) \text{kg} \cdot \text{m}^2, \hat{J} = \text{diag}([21 \ 17 \ 14]) \text{kg} \cdot \text{m}^2, \lambda = 3 \\ \omega(t_0) &= 0.06 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}^T \text{rad/s}, q(t_0) = [0.8104 \ -0.5587 \ -0.1547 \ 0.0845]^T \end{aligned} \quad (6-49)$$

首先可以得到第三章中 PID+控制器的仿真曲线如下

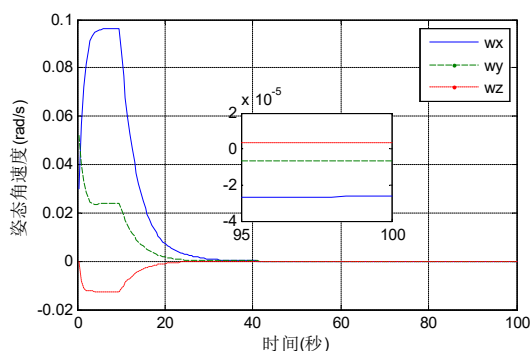


图 6-25 姿态角速度曲线

Fig. 6-25 Curve of angular velocity

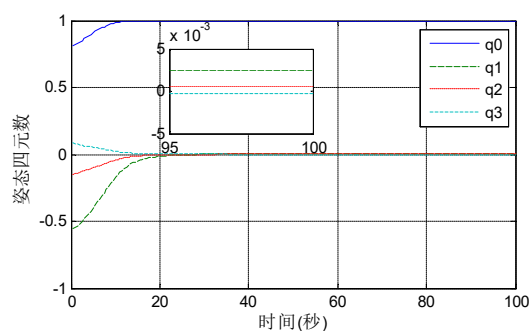


图 6-26 姿态四元数曲线

Fig. 6-26 Curve of attitude quaternion

接下来给出第四章中基于 Bang-Bang 控制的滑模控制器仿真曲线

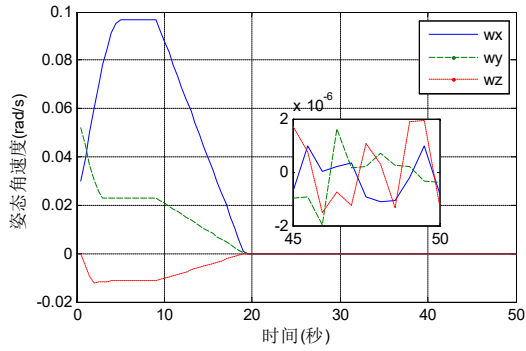


图 6-27 姿态角速度曲线

Fig. 6-27 Curve of angular velocity

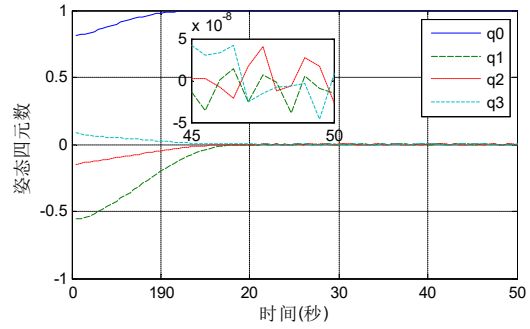


图 6-28 姿态四元数曲线

Fig. 6-28 Curve of attitude quaternion

接下来给出第五章中基于欧拉轴的有限时间控制器仿真曲线

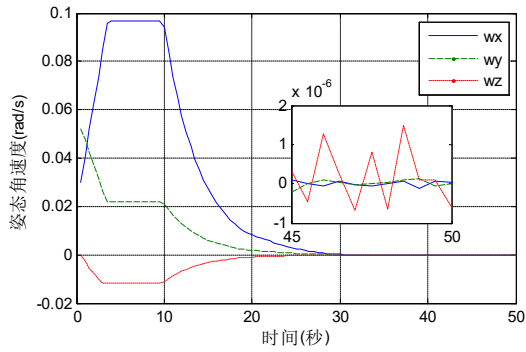


图 6-29 姿态角速度曲线

Fig. 6-29 Curve of angular velocity

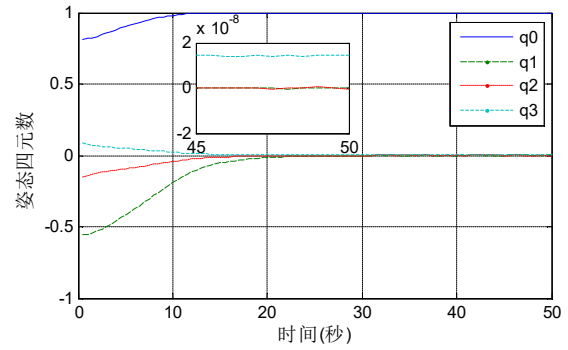


图 6-30 姿态四元数曲线

Fig. 6-30 Curve of attitude quaternion

接下来给出第六章中基于路径规划的姿态控制器仿真曲线

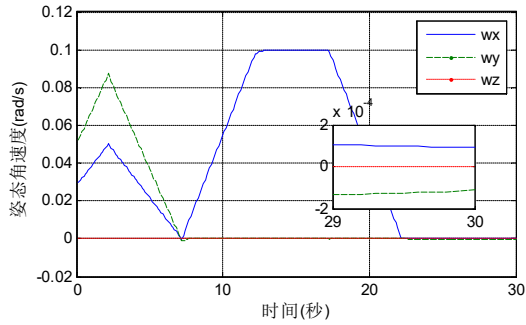


图 6-31 姿态角速度曲线

Fig. 6-31 Curve of angular velocity

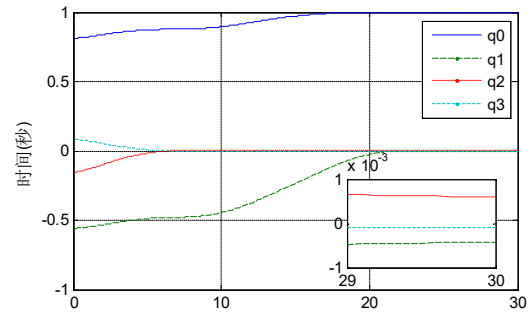


图 6-32 姿态四元数曲线

Fig. 6-32 Curve of attitude quaternion

通过图 6-25 到图 6-32 可以看到 PID 控制器、滑模控制器、有限时间控制器、基于路径规划算法的控制器收敛时间分别为 40s、19s、31s、21s，姿态角速度稳态精度分别为 2×10^{-5} 、 2×10^{-6} 、 1×10^{-6} 、 1×10^{-4} ，姿态四元数稳态精度分别为 3×10^{-3} 、 5×10^{-8} 、 2×10^{-8} 、 1×10^{-3} 。

可以看到，在收敛速率方面，第四章基于 Bang-Bang 控制的滑模控制器与第

第六章基于路径规划算法的姿态控制器收敛时间最短，这本质上是由于这两种控制器均要求系统处在最大角速度状态，或处在最大加、减速状态，这种 Bang-Bang 式的机动模式带来了经典 Bang-Bang 控制的收敛时间方面的优势，虽然在本次研究中虽然并没有证明这两种控制算法的时间最优性，但依然可以认为这两种基于 Bang-Bang 控制思路得到的控制器具有时间较优的特性，但值得注意的是这两种控制算法所需要的能量也是最大的，通过前文仿真可以看到系统控制力矩长时间处于饱和、近似饱和状态，本质上讲，控制力矩的充分利用带来了系统收敛速率的提升。而 PID 控制器与有限时间控制器作用下系统均有明显的匀速段运动过程，其匀速运动时间均为 10s 左右，可以看到 PID+控制器作用下的系统较早进入滑模面的匀速段，但因其减速段时间较长，导致其收敛速率慢于有限时间控制器的收敛速率，注意到 PID+控制器作用下的系统一致渐近稳定，而有限时间控制器作用下的系统有限时间稳定，因此可以认为有限时间控制器带来的平衡点附近优良的收敛特性使得系统收敛速率得到提升。

在稳态精度方面，可以看到基于 Bang-Bang 控制的滑模控制器与有限时间控制器稳态精度最高，PID 控制器稳态精度次之，而路径规划算法的稳态精度则相对较低。由于本次研究采用 PD 控制器对期望路径进行追踪，因此路径规划算法的稳态精度很大程度上取决于 PD 控制器的稳态精度，而 PD 控制器是一种精度相对较差的控制算法，因此在实现真实状态对于期望状态的跟踪时选择合适的跟踪控制器能够帮助改善系统稳态精度。PID 控制器的稳态精度相比较于路径规划算法的稳态精度得到了提升，本质上这是由于 PID 控制器中引入积分项帮助提升系统阶次，从而系统对于扰动的抗干扰能力得到增强，从而稳态精度得到了提升。滑模控制与有限时间控制稳态精度最高，前者是由于本次研究采用增大滑模参数的方法，但值得注意的是系统的抖振问题同样被加剧，而后者则是有限时间控制器终端收敛特性所带来的优良稳态精度。

总的来说，PID 控制器收敛速率较慢，同时稳态精度均处于一般水准，但其对于系统参数的鲁棒性较强，同时所消耗的控制系统能量也较小；基于 Bang-Bang 控制的滑模控制器收敛速率最快，稳态精度也较高，但代价则是系统控制力矩长时间处于饱和、近似饱和状态，同时系统状态的抖振问题也较为严重；有限时间控制器收敛速率相比较于两种 Bang-Bang 结构的控制器偏慢，但优于一致渐近稳定的 PID+控制器，从而印证了有限时间控制器平衡点附近收敛速率快的特点，同时其稳态精度相对较高，这也是其平衡点附近收敛特性优良带来的优势；基于路径规划算法的姿态控制器收敛速率同样较快，但所需要的控制力矩较大，同时其稳态精度取决于所选择的姿态跟踪控制器。

6.6 本章小结

基于卫星姿态控制领域中先规划、后跟踪的控制思路，本章对卫星姿态机动的路径规划算法进行了讨论。通过讨论姿态运动轨迹集合，将任意的姿态机动问题拆分成三次独立的单轴机动，并优化姿态机动的总转角得到了卫星姿态机动过程路径最短条件下的姿态机动路径；同时针对单轴机动模式引入 **Bang-Bang** 控制的思想设计了时间较短的机动路径，从而得到了卫星姿态机动的期望轨迹解析解；同时引入轨道机动中霍曼机动模式，讨论了一种姿态机动的特殊情形，利用轨道机动中“交汇点”的特性对姿态机动进行优化减少一次加减速过程，优化系统性能并避免控制力矩的浪费；随后设计姿态跟踪控制器将系统状态形成闭环回路，使得真实状态沿着设计好的路径进行运动。通过仿真可以看到本章所给出的姿态机动路径规划算法相比较于经典的 **PD** 控制器能够大幅提升系统收敛时间，其本质是使得系统或处于最大速度状态，或处于近似最大加、减速状态，但其弊端则是系统需要频繁的进行加减速，势必会对系统性能造成一定的浪费。

结 论

本次研究主要讨论了大角度快速机动卫星的姿态控制方法，对卫星姿态控制中的 PID 控制器、滑模控制器、有限时间控制器、路径规划算法等控制方法进行了讨论，所做的工作以及得到的主要结论有：

(1) 针对经典 PID 控制器收敛速率慢的缺陷对其进行了改进，实时放大比例项的同时引入角速度叉乘项，在不改变系统稳定性的前提下实现系统状态沿着设计好的滑模面收敛，通过设计系统状态的匀速段以维持系统姿态角速度从而使得系统状态在远离平衡点时具有较快的收敛速率；在系统状态靠近平衡点时再引入积分项，避免系统大幅震荡的同时使得系统在稳态时能够具有较高的精度；通过在控制器中加入符号函数项解决系统参数不确定性与干扰力矩等扰动问题；针对角速度约束证明了控制参数与姿态角速度范数之间的关系，给出了角速度对于控制参数的严格约束与宽松约束，并通过合理选择控制参数保证系统状态不超过其上界。总的来说 PID 控制器的鲁棒性较强但在系统收敛速率以及稳态精度方面均存在着一定的缺陷。

(2) 针对经典滑模控制角速度下降过快导致的系统收敛速率慢的缺陷进行了改进，首先引入经典开环 Bang-Bang 控制的思路，设计了一种先匀速、后匀减速的角速度轨线，在系统状态远离平衡点时维持角速度为匀速同时当系统状态逼近平衡点时以恒定角加速度进行减速，提升系统收敛速率的同时避免开环 Bang-Bang 控制鲁棒性差的缺陷；随后设计了一种动态滑模面，通过实时放大滑模参数的手段提升系统收敛速率，同时避免角速度下降过快所带来的四元数收敛速率下降的弊端；通过在控制器中加入符号函数项解决系统参数不确定性与干扰力矩等扰动问题；针对系统控制力矩、姿态角速度等方面的限制证明了控制参数与二者之间的关系，给出了控制参数的严格约束条件，通过合理选择控制参数保证姿态角速度与控制力矩不超过其上界。值得注意的是系统收敛速率的提升往往伴随着鲁棒性的下降以及系统状态振荡的加剧。

(3) 针对大角度姿态机动的情形基于欧拉轴设计了一种三段式结构的有限时间滑模面，通过欧拉轴自身的性质解决了有限时间控制中的奇异性问题，设计角速度的匀速段与有限时间收敛段，避免系统状态在一致渐近稳定的减速阶段停留过久从而提升系统的收敛速率，并通过在控制器中加入符号函数项解决系统参数不确定性与干扰力矩等扰动问题；针对小角度姿态机动情形基于 MRP 设计了有限时间滑模面，通过对 MRP 的导数进行讨论避免控制器中出现奇异性问题，同时改善了系统在平衡点附近的收敛特性。总的来说有限时间控制器的系统收敛速率较

快，但鲁棒性一般，同时在控制器的设计过程中需要注意奇异性问题。

(4) 针对任意的姿态机动问题，通过将其拆分成为三次独立的单轴机动并优化系统的总转角得到了转角最小姿态机动路径，同时基于单轴欧拉机动的 Bang-Bang 控制形式给出了机动时间较短的姿态机动期望轨迹解析解；随后针对一种姿态机动中的特殊情形，设计了一种类似于轨道机动中“霍曼机动”的姿态机动路径，通过寻找姿态机动中的“交汇点”减少一次系统的加减速过程以达到提升系统收敛速率的目标；设计了姿态跟踪控制器以实现在各类扰动作用下系统状态依然能够沿着设计好的期望轨迹收敛。通过各个控制器的横向对比可以看到具有 Bang-Bang 结构的控制器能够使得系统具有较快的收敛速率，但系统状态会在平衡点附件出现较为明显的振荡。

本次研究的主要创新点如下：

(1) 将 PID 控制与滑模控制有效结合，设计 PID+控制器使得系统状态沿着设计好的滑模面收敛，从而在大角度机动前提下系统状态的收敛时间相比较于经典 PID 控制器提升 70%以上；证明 PID 控制器参数与姿态角速度范数之间的关系，给出姿态角速度对于控制器参数的约束；

(2) 将开环 Bang-Bang 控制与闭环滑模控制结合，从而最大限度的改善系统性能；改进经典滑模控制锁定滑模参数的做法，设计滑模参数更新律对其实时放大以提升系统收敛速率；在大角度姿态机动前提下两种控制算法的系统收敛时间相比较于经典滑模控制器均减少 60%以上；证明控制力矩、姿态角速度与控制参数之间的关系，并给出对控制参数的严格约束；

(3) 设计一种三段式结构的有限时间滑模面，利用匀速过程维持系统在远离平衡点时的收敛速率，同时利用欧拉轴特性消除控制器奇异性，使得系统在逼近平衡点时具有有限时间稳定性；在大角度姿态机动前提下系统收敛时间相比较于一致渐近稳定的滑模控制器提升 50%以上；

(4) 基于 Bang-Bang 控制的思想并通过优化总转角给出时间较短路径的解析解，大幅减小路径规划算法的运算量并有效提升系统收敛速率；同时针对一种姿态机动的特殊情形设计了一种类似“霍曼机动”的姿态机动路径；在大角度姿态机动前提下系统收敛时间相比较于经典 PD 控制器提升 50%以上。

总的来说本次研究讨论了大角度快速机动卫星的姿态控制器设计问题，得到了阶段性的研究成果与结论，但作者认为在以下几个方面仍然有继续进行后续研究的必要：

(1) 在滑模控制方面，本文提出的基于 Bang-Bang 控制的滑模控制器中控制力矩并未处于其幅值，也就是说收敛时间仍然存在提升空间；

（2）本次研究提出的路径规划算法为得到解析解牺牲了系统的部分性能，系统需要进行频繁的加减速，如何在避免牺牲系统性能的前提下得到机动路径解析解仍然需要讨论；

（3）本次研究所进行的仿真均为数值仿真，在条件允许时可以进行物理或半物理仿真对本次研究所提出的控制算法进行验证。

（4）后续研究中可以针对更加具体的姿态机动任务对姿态控制器进行改进，使其满足不同空间任务的需求。

参考文献

- [1] 叶东. 敏捷卫星姿态快速机动与稳定控制方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013: 1-3.
- [2] 李紫涵. 小卫星姿态快速机动与稳定控制方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2011: 1-8.
- [3] 付梦印, 邓志红, 闫丽萍. Kalman 滤波理论及其在导航系统中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 160-164.
- [4] 李由. 快速机动卫星姿态确定算法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2012: 27-43.
- [5] 夏岩. 基于联邦滤波的飞行器姿态确定算法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2010: 1-11.
- [6] 曹璐. 基于非线性滤波的小卫星姿态确定及控制研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2010: 2-70.
- [7] 黄琳. 非线性滤波理论在航天器姿态确定中的应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2007: 5-50.
- [8] 牟忠凯. 卫星姿态确定的非线性滤波方法研究[D]. 郑州: 解放军信息工程大学, 2010: 9-17.
- [9] 马玉海. 应用控制力矩陀螺的敏捷卫星姿态跟踪控制研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2012: 1-9.
- [10] 胡庆雷. 挠性航天器姿态机动的主动振动控制[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2006: 1-9.
- [11] 朱良宽. 挠性航天器姿态鲁棒非线性控制算法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2008: 1-13.
- [12] Wie B. Liu Q. Sunkel J. Robust stabilization of the space station in the presence of the inertia matrix uncertainty[C]. American Control Conference, 1993: 2212-2216.
- [13] Wie B. Barba P.M. Quaternion Feedback for Spacecraft Large Angle Maneuvers[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1985, 8(3): 360-365.
- [14] Wie B. Weiss H. Arapostathis A. Quaternion Feedback Regulator for Spacecraft Eigenaxis Rotations[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1989, 12(3) : 375-380.
- [15] Wie B. Lu J. Feedback control logic for spacecraft eigenaxis rotations under slew rate and control constraints[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics,

- 1995, 18(6): 1372-1379.
- [16] Forbes J.R. Passivity-based passivity attitude control on the special orthogonal group of rigid-body rotations[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2013, 36(6): 1372-1379.
- [17] 靳尔东. 航天器编队姿态协同控制方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2009: 24-100.
- [18] Jin E.D. Sun Z.W. Robust attitude tracking control of flexible spacecraft for achieving globally asymptotic stability[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2009, 19(11): 1201-1223.
- [19] Jin E.D. Jiang E.L. Sun Z.W. Robust decentralized attitude coordination control of spacecraft formation[J], *Sytems and Control Letters*, 2008, 57(7): 567-577.
- [20] Jin E.D. Sun Z.W. Robust controllers design with finite time convergence rate for rigid spacecraft attitude tracking control[J], *Aerospace Science and Technology*, 2008, 57(7): 567-577.
- [21] 靳尔东, 孙兆伟. 挠性航天器的非线性 PID 和 PI 姿态控制器设计[J]. *控制理论与应用*, 2009, 26 (5): 540-545.
- [22] Kamesh S. Nonlinear PID-like Control for Spacecraft Attitude Regulation[J]. *The Journal of Astronautical Sciences*, 2004, 52(2): 61-74.
- [23] Clarke F.H. Ledyaeu Y.S. Sontag E.D. Subbotin A.I. Asymptotic Controllability Implies Feedback Stabilization[J]. *IEEE Transactions on Automatic control*, 1997, 42(10): 1394-1407.
- [24] Vadali S.R. Junkins J.L. Closed Loop Slewing of Flexible Spacecraft[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1990, 13(1): 57-65.
- [25] Chaturvedi N.A. Sanyal A.K. Chellappa M. Valk J.L. McClamroch N.H. Adaptive Tracking of Angular Velocity for a Planar Rigid Body with Unknown Models for Inertia and Input Nonlinearity[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, 14(4): 613-627.
- [26] Su J.Y. Fan P.H. Cai K.J. Attitude control of quadrotor via nonlinear PID[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2011, 37(9): 1054-1058.
- [27] Li Y. Sun J.G. Multi-objective optimization of aeroengine PID control based on multi-objective genetic algorithms[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2008, 23(1): 174-178.
- [28] Tatsuya S. Katayama H. Ichikawa A. Attitude Control of a helicopter model by robust PID controllers[C]. *Proceedings of the 2006 IEEE International Symposium*

-
- on Intelligent Control, 2006.
- [29] Zhang L. Bi S.J. Yang H. Fuzzy-PID control algorithm of the helicopter model flight attitude control[C]. 2010 Chinese Control and Decisions Conference, 2010.
 - [30] Verbin D. Lappas V.J. Rapid rotational maneuvering of rigid satellites with hybrid actuators configuration[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2013, 36(2): 532-547.
 - [31] Verbin D. Lappas V.J. Rapid rotational maneuvering of rigid satellites with reaction wheels[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, Engineering Notes, 2013, 36(5): 1538-1544.
 - [32] Verbin D. Joseph Z.B. Time efficient closed loop steering laws for rigid satellite large rotational maneuver[C]. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, 2005.
 - [33] Verbin D. Lappas V.J. Joseph Z.B. Time efficient angular steering laws for rigid satellites[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2011, 34(3): 878-892.
 - [34] Verbin D. Lappas V.J. Rapid rotational maneuvering of rigid satellites with hybrid actuators configuration[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2013, 36(2): 532-547.
 - [35] Xiao B. Yin S. Wu L.G. A structure simple controller for satellite attitude tracking maneuver[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, 64(2): 1436-1446.
 - [36] Xiao B. Yin S. Gao H.J. Tracking control of robotic manipulators with uncertain kinematics and dynamics[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2016, 63(10): 6439-6449.
 - [37] Xiao B. Yin S. Velocity-free Fault tolerant and uncertainty attenuation control for a class of nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2016, 63(7): 4400-4411.
 - [38] Xiao B. Hu Q.L. Huo X. Ma G.F. Sliding mode fault tolerant attitude control for flexible spacecraft under actuator fault[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(10): 1869-1878.
 - [39] Xiao B. Hu Q.L. Zhang Y.M. Adaptive sliding mode fault tolerant attitude tracking control for flexible spacecraft under actuator saturation[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2012, 20(6): 1605-1612.
 - [40] Xiao B. Huo M.Y. Yang X.B. Zhang Y.M. Fault-tolerant attitude stabilization for satellites without rate sensor[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics,

- 2015, 62(11): 7191-7202.
- [41] Xiao B. Hu Q.L. Zhang Y.M. Sliding mode fault tolerant attitude control for flexible spacecraft under actuator fault[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2011, 43(1): 5-9.
- [42] Hu Q.L. Du C.L. Xie L.H. Wang Y.Y. Discrete-time sliding mode control with time-varying surface for hard disk drives[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2009, 17(1): 175-183.
- [43] Hu Q.L. Zhang Y.M. Huo X. Xiao B. Adaptive integral-type sliding mode control for spacecraft attitude maneuvering under actuator stuck failures[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2011, 24(1): 32-45.
- [44] Hu Q.L. Robust adaptive sliding mode attitude control and vibration damping of flexible spacecraft subject to unknown disturbance and uncertainty[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2012, 34(4): 436-447.
- [45] Hu Q.L. Robust adaptive sliding mode attitude control and vibration damping of three-axis-stabilized spacecraft with actuator saturation limits[J]. Nonlinear Dynamics, 2009, 55(4): 301-321.
- [46] Hu Q.L. Xie L.H. Wang Y.Y. Du C.L. Robust track-following control of hard disk drives using improved integral sliding mode combined with phase lead pear filter[J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2008, 22(4): 413-430.
- [47] Hu Q.L. Xiao B. Fault-tolerant sliding mode attitude control for flexible spacecraft under loss of actuator effectiveness[J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 64(1-2): 13-23.
- [48] Hu Q.L. Sliding mode attitude control with L2-gain performance and vibration reduction of flexible spacecraft with actuator dynamics[J]. Acta Astronautica, 2010, 67(5-6): 572-583.
- [49] Hu Q.L. Xiao B. Sliding mode attitude control with L2-gain performance and vibration reduction of flexible spacecraft with actuator dynamics[J]. Acta Astronautica, 2010, 67(5-6): 572-583.
- [50] Hu Q.L. Xiao B. Adaptive fault tolerant control using integral sliding mode strategy with application to flexible spacecraft[J]. International Journal of Systems Science, 2013, 44(12): 2273-2286.
- [51] Hu Q.L. Cao J. Zhang Y.Z. Robust backstepping sliding mode attitude tracking and vibration damping of flexible spacecraft with actuator dynamics[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2009, 22(2): 139-152.

-
- [52] Hu Q.L. Sliding mode maneuvering control and active vibration damping of three-axis stabilized flexible spacecraft with actuator dynamics[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2008, 52(3): 227-248.
- [53] Jovan D.B. Sai M.L. Raman K.M. Robust tracking control design for spacecraft under control input saturation[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2004, 27(4): 627-633.
- [54] Wu S.N. Sun Z.W. Deng H. Robust sliding mode controller design for globally fast attitude tracking of target spacecraft[J]. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 2011, 7(5): 2087-2098.
- [55] Wu S.N. Wu Z.G. Wu G.Q. Observer-based robust sliding mode control for spacecraft attitude maneuver subject to reaction wheel friction[C]. *Proceeding of the International Astronautical Congress*, 2013.
- [56] Wu S.N. Wang R. Radice G. Wu Z.G. Robust attitude maneuver control of spacecraft with reaction wheel low-speed friction compensation[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2015, 43: 213-218.
- [57] Wu S.N. Sun Z.W. Li H. Sliding mode controller design for rigid satellite attitude tracking[C]. *2009 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, 2009.
- [58] Lo S.C. Chen Y.P. Smooth sliding-mode control for spacecraft attitude tracking maneuvers[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1995, 18(6): 1345-1349.
- [59] Xia Y.Q. Zhu Z. Fu M.Y. Wang S. Attitude tracking of rigid spacecraft with bounded disturbances[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2011, 58(2): 647-659.
- [60] Levant A. Michael A. Adjustment of high-order sliding-mode controllers[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2009, 19(15): 1657-1672.
- [61] Levant A. Finite-time stability and high relative degree in sliding-mode control[J]. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 2011, 412: 59-92.
- [62] Muhammad A. Bhatti A. Iqbal S. Asfia Y. A smooth integral sliding mode controller and disturbance estimator design[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2015, 13(6): 1326-1336.
- [63] Chaouki M. Moncer G. LMI-based adaptive fuzzy integral sliding mode control of mismatched uncertain systems[J]. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2011, 21(4): 605-615.
- [64] Ernesto W. Duran J.L. Acosta P.R. Integral sliding-mode active filter control for

- hr/>
-
- harmonic distortion compensation[J]. Electric Power Components and Systems, 2011, 39(9): 833-849.
- [65] Li L. Liu Y. Chen X.L. Discrete-time optimal integral sliding mode control with input saturation[J]. Electric Power Components and Systems, 2011, 39(9): 833-849.
- [66] Yoo D.S. Integral sliding mode control for robot manipulators[J]. Journal of Institute of Control, Robotics and Systems, 2008, 14(12): 1266-1269.
- [67] Sun S.J. Ye H. Fei S.M. Integral sliding mode control based on uncertainty compensator[J]. Journal of Computational Information Systems, 2013, 9(4): 1331-1338.
- [68] Shi J. Liu H. Bajcinca N. Robust control of robotic manipulators based on integral sliding mode[J]. International Journal of Control, 2008, 81(10): 1537-1548.
- [69] Zhang B.L. Han Q.L. Zhang X.M. Yu X.H. Integral sliding mode control for offshore steel jacket platforms[J]. Journal of Sound and Vibration, 2012, 331(14): 3271-3285.
- [70] Liang H.Z. Wang J.Y. Sun Z.W. Robust decentralized coordinated attitude control of spacecraft formation[J]. Acta Astronautica, 2011, 69(5-6): 280-288.
- [71] Liang H.Z. Wang J.Y. Sun Z.W. Zhang Y.Y. Decentralized attitude synchronization of spacecraft formation under disturbances[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2016, 4(11-19): 11-19.
- [72] Liang H.Z. Sun Z.W. Wang J.Y. Coordinated attitude control of flexible spacecraft formations via behavior-based approach[J]. International Journal of Innovative, Information and Control, 2012, 8(12): 8487-8500.
- [73] Liang H.Z. Sun Z.W. Wang J.Y. Attitude coordination of satellite swarms with communication delays[J]. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 2013, 85(3): 222-235.
- [74] Liang H.Z. Sun Z.W. Wang J.Y. Finite-time attitude synchronization controllers design for spacecraft formations via behavior-based approach[J]. Part G, Journal of Aerospace Engineering, 2013, 227(11): 1737-1753.
- [75] Liang H.Z. Sun Z.W. Wang J.Y. Robust decentralized attitude control of spacecraft formations under time-varying topologies, model uncertainties and disturbances[J]. Acta Astronautica, 2012, 81(2): 445-455.
- [76] Wang J.Y. Liang H.Z. Wu X.D. Fu Q.J. Continuous terminal sliding mode attitude control for hypersonic aircrafts[J]. Journal of harbin Engineering University, 2016, 37(2): 187-191.

-
- [77] Wang J.Y. Liang H.Z. Sun Z.W. Dual-quaternion-based finite-time control for spacecraft tracking in six degrees of freedom[J]. Part G, Journal of Aerospace Engineering, 2013, 227(3): 528-545.
- [78] Wang J.Y. Sun Z.W. Liang H.Z. Wu S.N. Monocular vision-based navigation algorithm for spacecraft using dual quaternion[J]. Part G, Journal of Harbin Institute of Technology, 2013, 45(1): 7-13.
- [79] Wang J.Y. Liang H.Z. Sun Z.W. Zhang S.J. Liu M. Finite-time control for spacecraft formation with dual-number-based description[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2012, 35(3): 950-962.
- [80] Wu S.N. Radice G. Wu Z.G. Adaptive finite time control of relative translation in proximity of a freely tumbling spacecraft[C]. Proceedings of the International Astronautical Congress, 2014, 7: 4979-4982.
- [81] Wu S.N. Radice G. Sun Z.W. Robust finite-time control for flexible spacecraft attitude maneuver[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2014, 27(1): 185-190.
- [82] Wang J.Y. Sun Z.W. Wu X.D. Attitude maneuver control of flexible spacecraft with finite-time convergence[J]. Applied Mechanics and Materials, 2012, 157-158: 847-851.
- [83] Wu S.N. Zhang K.M. Peng H.J. Wu Z.G. Radice G. Robust optimal sun pointing control of a large solar power satellite[J]. Acta Astronautica, 2016, 127: 226-234.
- [84] Wu S.N. Sun Z.W. Si J.T. Ma X. Observer-based finite time control for proximity to target spacecraft[J]. Advances in the Astronautical Sciences, 2012, 145: 1013-1021.
- [85] Wu S.N. Radice G. Gao Y.S. Sun Z.W. Quaternion-based finite time control for spacecraft attitude tracking[J]. Acta Astronautica, 2011, 69(1-2): 48-58.
- [86] Ryan E.P. Singular optimal controls for second-order saturating systems[J]. International Journal of Control, 1979, 30(4): 549-564.
- [87] Ding S.H. Li S.H. Second-order sliding mode controller design subject to mismatched term[J]. Automatica, 2017, 77: 388-392.
- [88] Xiao B. Hu Q.L. Zhang Y.M. Finite-time attitude tracking of spacecraft with fault-tolerant capability[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2015, 23(4): 1338-1350.
- [89] Xiao B. Yin S. Wu L.G. A structure simple controller for satellite attitude tracking maneuver[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, 64(2): 1436-1446.
- [90] Xiao B. Yin S. An fast reconstruction approach for actuator fault in robot

- manipulators[C]. Proceedings on IEEE International Workshop on Variable Structure Systems, 2016: 414-419.
- [91] Pyare M.T. Janardhanhan S. Mashuq N. Attitude control using higher order sliding mode[J]. Aerospace Science and Technology, 2016, 54: 108-113.
- [92] Amato F. Ariola M. Finite time control of discrete time linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(5): 724-729.
- [93] Lee K.W. Singh S.N. A higher-order sliding mode three-axis solar pressure satellite attitude control system[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2016, 29(1): 670-684.
- [94] Yu S. Yu X. Shirinzadeh B. Continuous finite-time control for robotic manipulators[J]. Automatica, 2005, 41(11): 1957-1964.
- [95] Korayem M.H. Nekoo S.R. Finite-time state-dependent Riccati equation for time-varying nonaffine systems: rigid and flexible joint manipulator control[J]. ISA Transactions, 2015, 54: 125-144.
- [96] Lee D. Sanyal A.K. Butcher E.A. Scheeres D.J. Finite-time control for body-fixed hovering of rigid spacecraft over an asteroid[C]. 24th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, 2014, 152: 303-321.
- [97] Rontondo D. Nejari F. Puig V. Dilated LMI characterization for the robust finite time control of discrete time uncertain linear systems[J]. Automatica, 2016, 63: 16-20.
- [98] Li S.H. Du H.B. Lin X.Z. Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with double-integrator dynamics[J]. Automatica, 2011, 47(8): 1706-1712.
- [99] Chen G. Lewis F.L. Xie L.H. Finite-time distributed consensus via binary control protocols[J]. Automatica, 2011, 47(9): 1962-1968.
- [100] Jiang F.C. Wang L. Finite-time weighted average consensus with respect to a monotonic function application[J]. System and Control Letters, 2011, 60(9): 718-725.
- [101] Bai X.L. Junkins J.L. New Results for time-optimal three-axis reorientation of a rigid spacecraft[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2009, 32(4): 1071-1076.
- [102] Li F. Bainum P.M. Use of the Quasilinearization algorithm for the simulation of LSS(Large space structures) slewing[R]. United States, 1989: 1-25.
- [103] Li F. Bainum P.M. Numerical approach for solving rigid spacecraft minimum time attitude maneuvers[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1990, 13(1): 38-45.

- [104] Li F. Bainum P.M. Creamer N.G. et al. 3-Axis near-time maneuvers of reshape-numerical and experimental results[J]. Journal of the Astronautical Sciences, 1995, 43(2): 1-25.
- [105] Scrivener S.L. Time-optimal multi-axis attitude maneuvers of rigid spacecraft using collocation and nonlinear programming[D]. Pennsylvania, United States, Pennsylvania State University, 1993: 1-175.
- [106] Geogre A.B. Romano M. Yakimenko O.A. Time-optimal reorientation of a spacecraft using an inverse dynamic optimization method[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2011, 34(4): 1197-1208.
- [107] Meier E.B. An efficient algorithm for Bang-Bang control systems applied to a two-link manipulator[D]. California, United States, Stanford University, 1987: 1-13.
- [108] Meier E.B. Bryson A.E. Efficient algorithm for time-optimal control of a 2-link manipulator[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1990, 13(5): 859-866.
- [109] Liu S.W. Singh T. Fuel/time optimal control of spacecraft maneuvers[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1997, 20(2): 394-397.
- [110] Byers R.M. Minimum time reorientation of an arbitrary rigid body[C]. Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Conference, 1993: 1889-1903.
- [111] Byers R.M. Vadali S.R. Quasi-closed-form solution to the time-optimal rigid spacecraft reorientation problem[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1993, 16(3): 453-461.
- [112] 章仁为. 卫星轨道姿态动力学与控制[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006: 137-155.
- [113] 宋申民. 稳定运动与航天控制[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 431-451.
- [114] 刘墩, 赵钧. 空间飞行器动力学[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2003: 153-166.
- [115] 吕建婷. 三轴稳定卫星姿态控制算法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2007: 16-22.
- [116] 邬树楠. 接近空间目标的追踪航天器控制方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2012: 15-22.
- [117] 吴敏, 何勇, 余锦华. 鲁棒控制理论制[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010: 1-12.
- [118] 于长官. 现代控制理论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2010: 186-216.

- [119] 梅晓蓉. 自动控制原理[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 279-286.
- [120] 李传江, 马广富. 最优控制[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 1-9.
- [121] 丁世宏, 李世华. 有限时间控制问题综述[J]. 控制与决策, 2011, 26(2): 1-10.
- [122] Ryan E.P. Singular optimal controls for second-order saturating systems[J]. International Journal of Control, 1979,30(4): 549-564.
- [123] Wu Y.Q. Yu X.H. Man Z.H. Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic systems[J]. System and Control Letters, 1998, 34(5): 281-287.

攻读博士学位期间发表的论文及其他成果

(一) 发表的学术论文

- 1 Li You, Sun Zhaowei, Ye Dong. An attitude determination algorithm for fast maneuver satellites. Proceedings 2014 International Conference on Mechatronics and Control, 2015. (EI 收录号: 20160201794434, DOI: 10.1109/ICMC.2014.7231974)
- 2 Li You, Sun Zhaowei, Ye Dong. Time Efficient Robust PID Plus Controller for Satellite Attitude Stabilization Control Considering Angular Velocity and Control Torque Constraint. Journal of Aerospace Engineering. 2017, 30(5). (SCI 检索, IDS 号: FF1PE, DOI: 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000743, IF=1.107)
- 3 李由, 孙兆伟, 叶东. 控制力矩受限的卫星姿态有限时间鲁棒控制. 哈尔滨工业大学学报. (EI 检索, 已录用)
- 4 Li You, Ye Dong, Sun Zhaowei. Robust Finite Time Control Algorithm for Satellite Attitude Control. Aerospace Science and Technology, 2017, 68: 46-57. (SCI 检索, IDS 号: FC9UD, DOI: 10.1016/j.ast.2017.05.014, IF=2.057)

本人郑重声明：此处所提交的学位论文《卫星快速姿态机动控制方法研究》，是本人在导师指导下，在哈尔滨工业大学攻读学位期间独立进行研究工作所取得的成果，且学位论文中除已标注引用文献的部分外不包含他人完成或已发表的研究成果。对本学位论文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。

学位论文使用权限

(1) 学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文，并向国家图书馆报送学位论文；(2) 学校可以将学位论文部分或全部内容编入有关数据库进行检索和提供相应阅览服务；(3) 研究生毕业后发表与此学位论文研究成果相关的学术论文和其他成果时，应征得导师同意，且第一署名为哈尔滨工业大学。

本人知悉学位论文的使用权限，并将遵守有关规定。

导师签名: _____ 日期: _____ 年 _____ 月 _____ 日

致 谢

在这博士毕业之际，首先要对我的导师孙兆伟教授致以最崇高的感激与敬意。这篇论文是在孙老师悉心指导下完成的，从选题、开题到文章的撰写，每一部分都凝结着孙老师的心血。在攻读博士期间孙老师在学术方面对我的指导让我获益匪浅，同时孙老师认真、严谨的治学与工作态度也无时无刻的鼓舞着我。

感谢李晖、邢雷和叶东老师与师兄，在卫星技术研究所的七年间众位老师与师兄在学习与生活方面对我无微不至的照顾让我感激不尽；感谢杨震国、苏杭、张志刚、张相宇、赵亚飞等博士同窗，读博艰辛路上正是你们一路相互鼓舞使得我有动力走到终点。

感谢孙老师门下吴限德、陈长春、梁海朝、王剑颖、邬树楠、刘源、张兴丽等众位师兄师姐，带领我们进行学术同时丰富业余生活，同时也要感谢张健、刘瑞霞、肖岩、成雨、张众正、张剑桥、刘闯、石珂珂、姜炳强、张宗增等众位师弟师妹，枯燥学术生活之余正是你们让 514 充满了欢声笑语。

最后特别感谢我的父母。感谢父母在我 20 年的求学生涯中，给予我无微不至的关怀和殷切的教诲，让我战胜困难、勇往直前，给与我无时无刻、最大程度的关心与支持，做我最坚强可靠的后盾。

谨以此论文献给所有关心、爱护和帮助过我的人们！

个人简历

李由，男，汉族，1988 年 5 月，陕西咸阳人。

2006.09~2010.07 哈尔滨工业大学航天学院飞行器设计专业 获学士学位

2010.09~2012.07 哈尔滨工业大学航天学院航空宇航科学技术专业 获硕士学位

2012.09~2017.07 哈尔滨工业大学航天学院航空宇航科学技术专业 攻读博士学位

主要研究方向：

卫星姿态控制、非线性控制