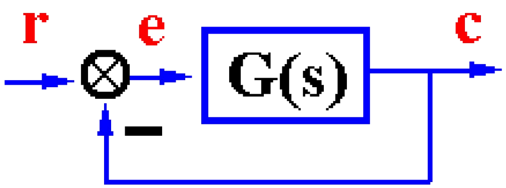
第五章 频率响应法

5.7 闭环频率特性

一、由开环频率特性求取闭环频率特性



单位负反馈系统，开环传递函数为$G(s)$，系统的闭环传递函数：

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

系统的闭环频率特性

$$\Phi(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}=M(\omega)\mathrm{e}^{j\alpha(\omega)}$$

M(ω)——闭环系统的幅频特性

α(ω) ——闭环系统的相频特性

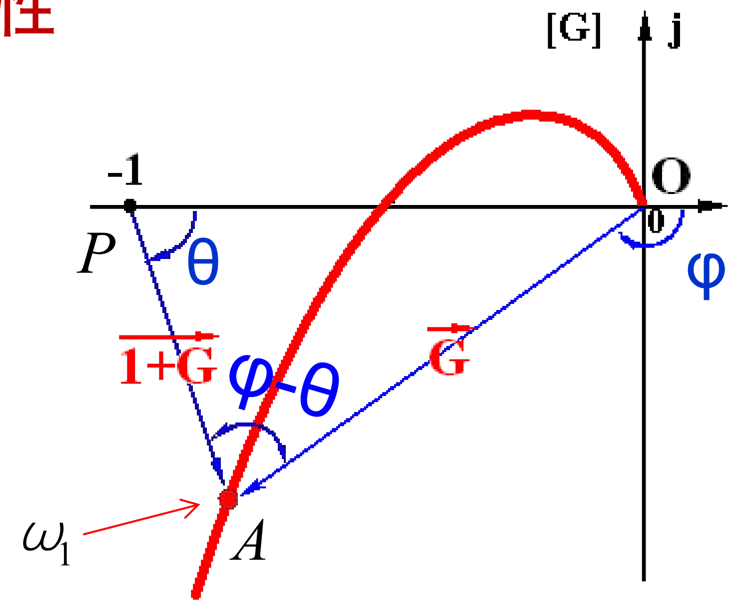
由开环幅相特性曲线确定闭环频率特性

$$\Phi(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}=M(\omega)\cdot e^{j\alpha(\omega)}$$

$$G(j\omega)=\overrightarrow{OA}$$

$$1+G(j\omega)=\overrightarrow{PA}$$

$$\Phi(j\omega)=\frac{\left|\overrightarrow{OA}\right|}{\left|\overrightarrow{PA}\right|}\left(\angle\overrightarrow{OA}-\angle\overrightarrow{PA}\right)$$



闭环频率特性的幅值是向量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{PA}$的幅值之比；

闭环频率特性的相角是向量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{PA}$的夹角；

1.等M圆（等幅值轨迹）

设开环频率特性 $G(j\omega)$为：$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$

系统的闭环频率特性

$$\Phi(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} = M(\omega)e^{j\alpha(\omega)}$$

令M=|M(jω)|，则:

$$M\sqrt{(P+1)^2+Q^2} = \sqrt{P^2+Q^2}$$

整理得：$(1-M^2)P^2+(1-M^2)Q^2-2M^2P=M^2$

5.7 闭环频率特性

$$(1-M^2)P^2+(1-M^2)Q^2-2M^2P=M^2$$

(1)当M=1时，由上式可求得P=-1/2

这是通过点(-1/2，j0)且与虚轴平行的一条直线。

(2) 当$M\neq1$时，由上式可化为

$$(P-\frac{M^2}{1-M^2})^2+Q^2=(\frac{M}{1-M^2})^2$$

对于给定的M值（等M值），上式是一个圆的方程。

圆心: $(-\frac{M^2}{M^2-1}, j0)$　　半径：$\left|\frac{M}{M^2-1}\right|$

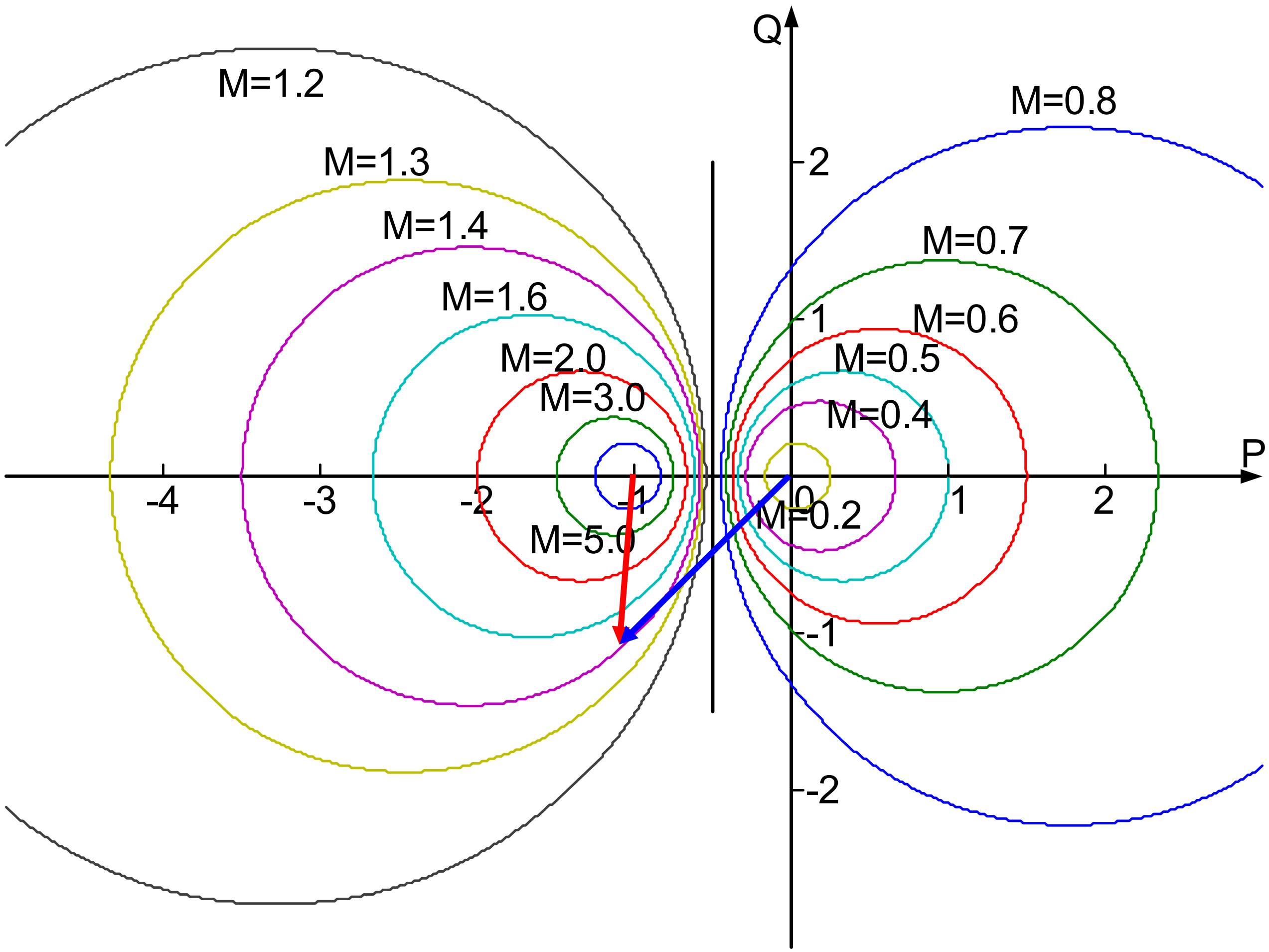
所以在G(jω)平面上，等M轨迹是一簇圆。

5.7 闭环频率特性

对于给定的M值，可算出圆心和半径，在G(s)平面上绘出一个圆

M	20lgM(dB)	圆心横坐标P	圆心纵坐标Q	圆半径
0.5	-6.0	0.33	0	0.67
0.7	-3.1	0.96	0	1.37
0.8	-1.9	1.78	0	2.22
1.0	0	∞	0	∞
1.2	1.6	-3.327	0	2.73
1.4	2.9	-2.40	0	1.46
1.6	4.1	-1.64	0	1.03
1.8	5.1	-1.46	0	0.80
2.0	6.0	-1.33	0	0.67
3.0	9.6	-1.13	0	0.38

5.7 闭环频率特性



等M圆

5.7 闭环频率特性

❖分析

□当M>1时，随着M值的增大，等M圆半径愈来愈小，最后收敛于（-1,j0）点，且这些圆均在M=1直线（P=-1/2）的左侧；

□当M<1时，随着M值的减小，M圆半径也愈来愈小，最后收敛于原点，而且这些圆都在M=1直线（P=-1/2）的右侧；

□当M=1时，它是通过（-1/2，0j）点平行于虚轴的一条直线（P=-1/2）。等M圆既对称于M=1的直线，又对称于实轴。

对单位反馈系统而言，知道开环频率特性的极坐标图在$G_o(s)$平面中的位置，就可确定**闭环幅频特性**。若知与某等M圆相交的频率，就可确定闭环频率特性在这个频率时的幅值。

2.等N圆（等相角轨迹）

$G(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)=P+jQ$

$$\Phi(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}=\frac{P+jQ}{1+P+jQ}=\mathrm{M}(\omega)e^{j\alpha(\omega)}$$

闭环频率特性的相角α(ω)为:

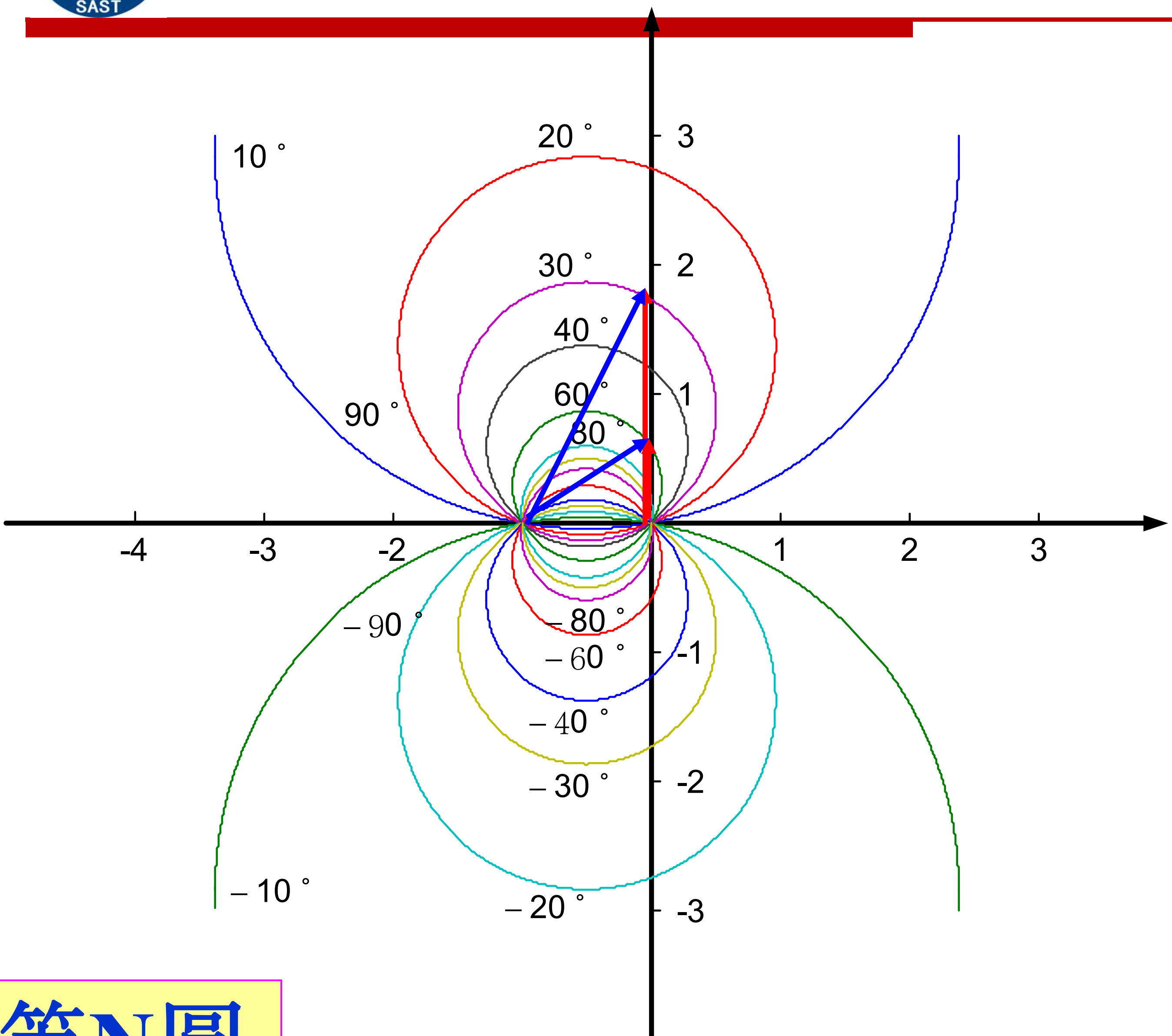
$$\alpha(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}-\arctan\frac{Q}{P+1}$$

令 $N=\tan\alpha(\omega)$

$$\boxed{\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}}$$

整理得: $\left(P+\frac{1}{2}\right)^2+\left(Q-\frac{1}{2N}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2N}\right)^2$

5.7 闭环频率特性



对单位反馈系统而言，当知道开环频率特性的极坐标图在$G_o(s)$平面中的位置，就可确定闭环相频特性。若知与某等N圆相交的频率，就可确定闭环频率特性在这个频率时的相角。

等N圆

❖分析

当给定N值(等N值)时，上式为圆的方程

圆心 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2N}\right)$ 半径 $\sqrt{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2N}\right)^2}$

等N圆实际上是等相角正切的圆，当相角增加±180°时其正切相同，因而在同一个圆上；

所有等N圆均通过原点和（-1，j0）点；

对于等N圆，并不是一个完整的圆，而只是一段圆弧；

3.利用等M圆和等N圆求闭环系统频率特性

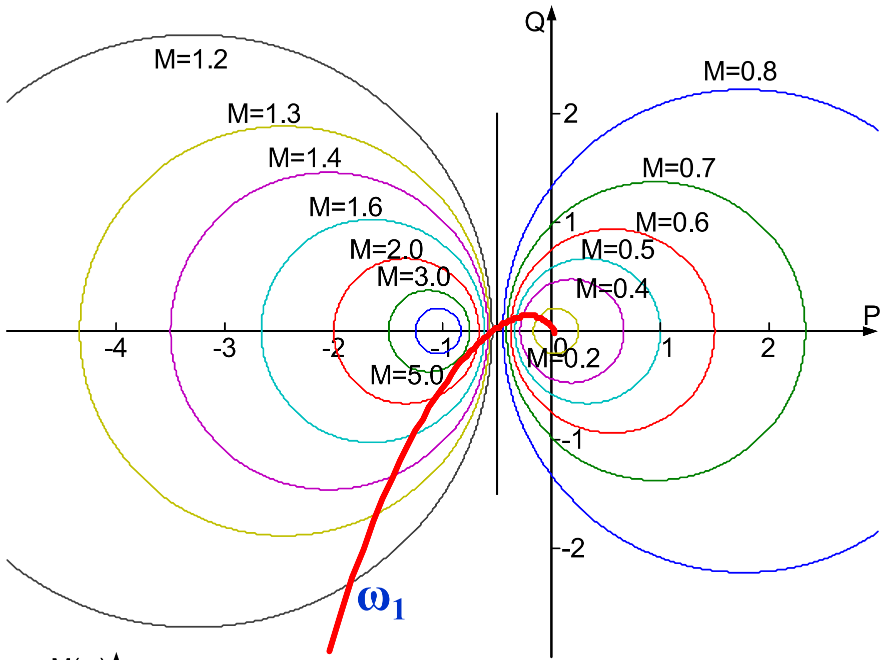
在绘有等M圆图的G(s)平面上，画出开环系统频率特性的极坐标图$G_o(j\omega)$。$G_o(j\omega)$与等M圆的交点给出了一组交点频率和与该组频率对应的闭环系统的幅值，据此可以画出以ω为横坐标，M(ω)为纵坐标的闭环系统幅频特性曲线。

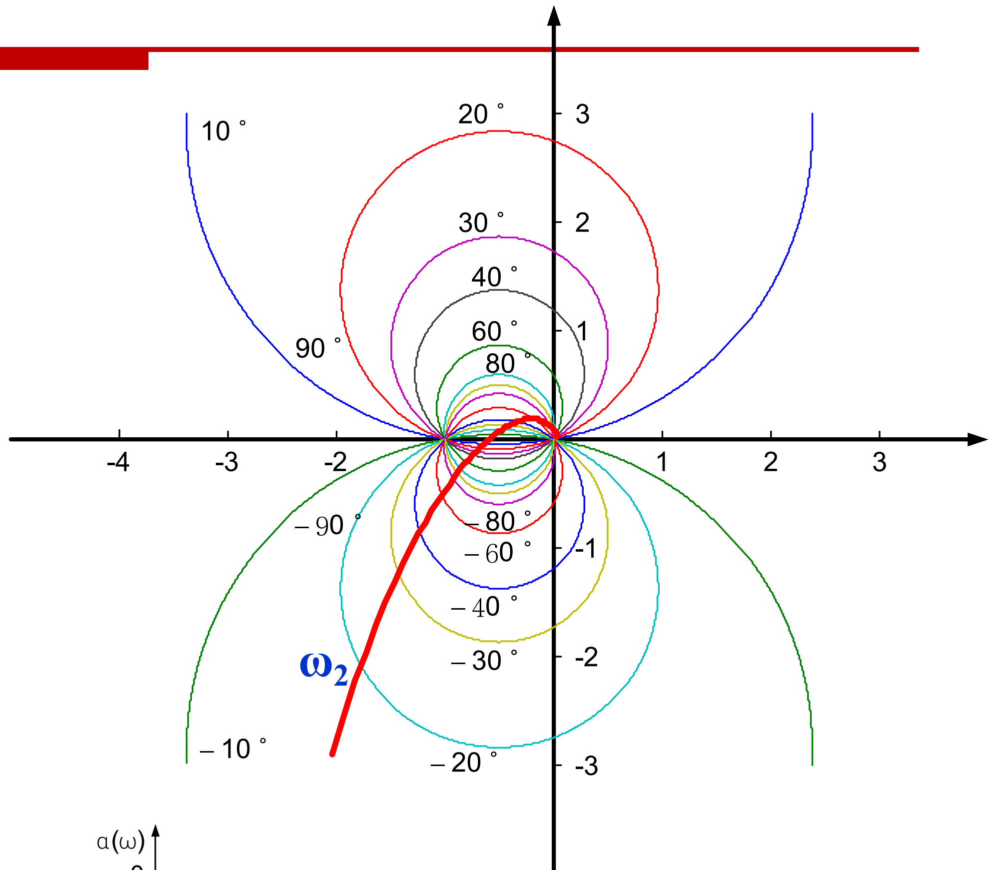
在绘有等N圆图的G(s)平面上，画出开环系统频率特性的极坐标图$G_o(j\omega)$。$G_o(j\omega)$与等N圆的交点给出了一组交点频率和与该组频率对应的闭环系统的相角，据此可以画出以ω为横坐标，α(ω)为纵坐标的闭环系统相频特性曲线。

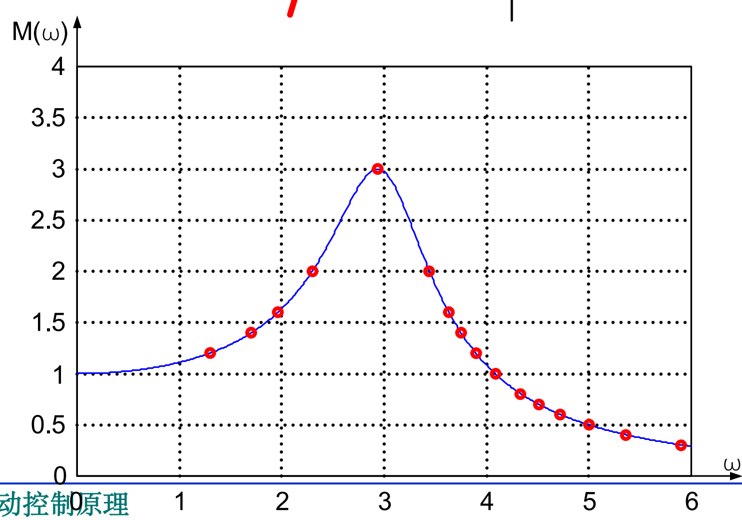
例:

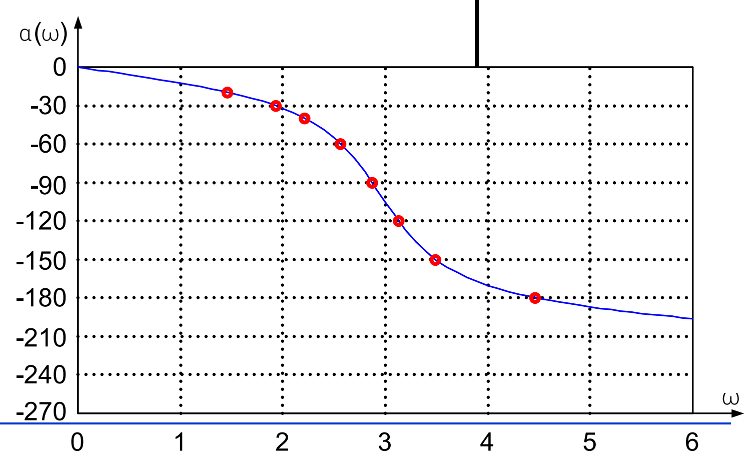
$$G(s)=\frac{100.5}{s(s+2)(s+10)}$$

5.7 闭环频率特性


M=1.2
M=1.3
M=1.4
M=1.6
M=2.0
M=3.0
M=5.0
M=0.8
M=0.7
M=0.6
M=0.5
M=0.4
M=0.2
Q
P
ω1


10 °
20 °
30 °
40 °
60 °
80 °
90 °
– 90 °
– 80 °
– 60 °
– 40 °
– 30 °
– 20 °
– 10 °
ω2


M(ω)
ω


α(ω)
ω

5.7 闭环频率特性

在$\omega=\omega_1$处，G(jω)曲线与M=1.2的等M圆相交表明在ω_1频率下，闭环系统的幅值为$M(\omega_1)=1.2$依此类推。

从图上还可看出，M=3的等M圆正好与G(jω)曲线相切，切点处的M值最大，即为闭环系统的谐振峰值Mr，而切点处的频率即为谐振频率ω_r。

此外，G(jω)曲线与M=0.707的等M圆交点处的频率为闭环系统的截止频率ω_b，$0<\omega<\omega_b$称为闭环系统的频带宽度。

❖将开环频率特性的极坐标图G(jω)叠加在等N圆线上，如图(b)所示。G(jω)曲线与等N圆相交于ω_1，ω_2，ω_3...

❖如$\omega=\omega_2$处，G (jω)曲线与-20°的等N圆相交，表明在这个频率处，闭环系统的相角为-20°，依此类推得闭环相频特性。

二、尼科尔斯图（N.b.Nichols)

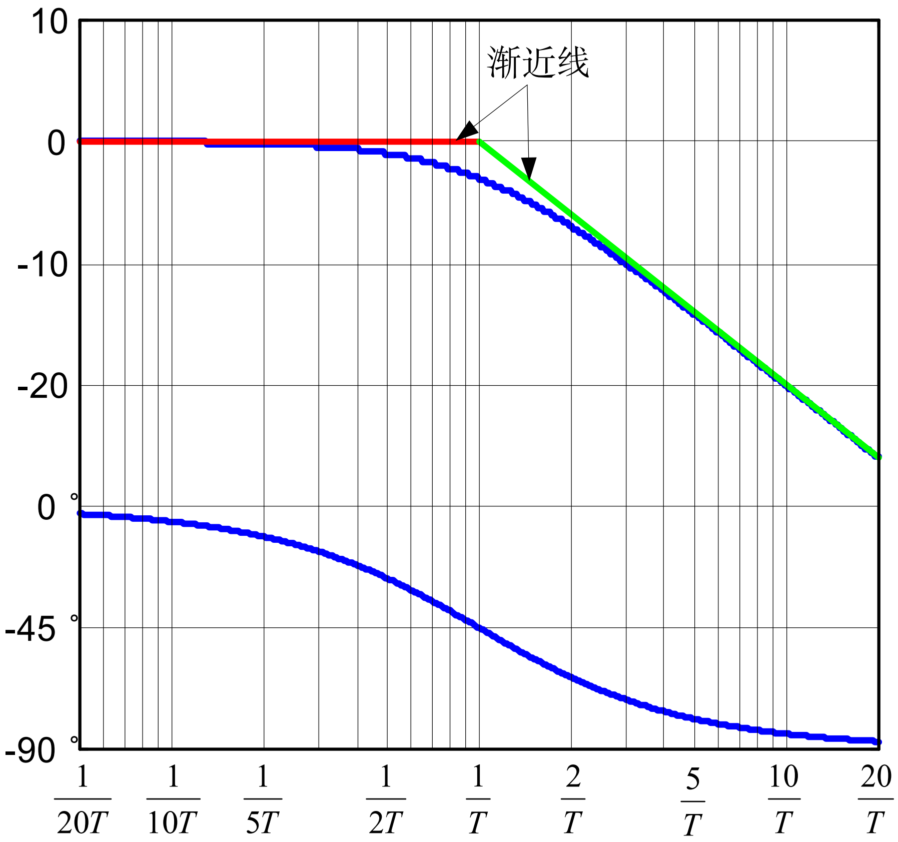
1、频率特性图示：

1、**极坐标图**——Nyquist图（幅相频率特性、奈奎斯特图，简称奈氏图)

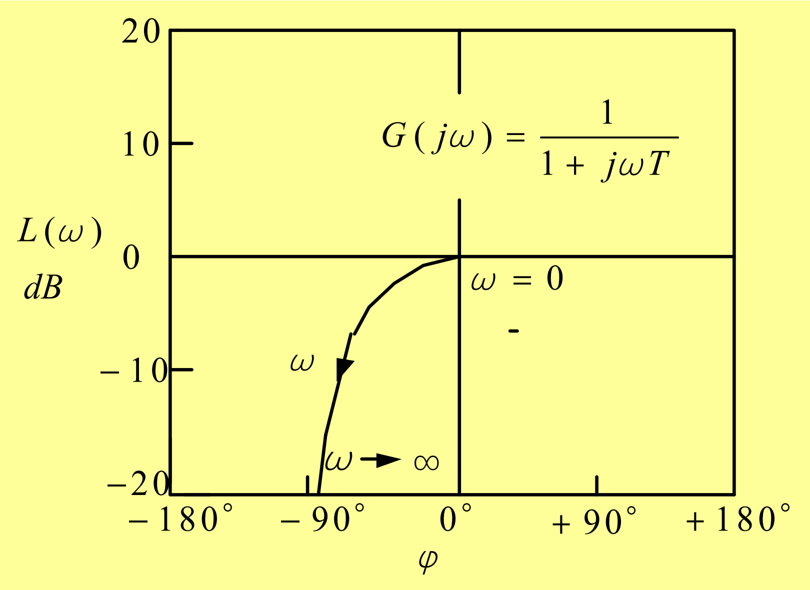
2、**对数坐标图**——Bode图（伯德图）

3、**对数幅相频率特性图**——Nichols图（尼柯尔斯图）。它是以相频特性为横坐标(单位一般为°)，以对数幅频特性为纵坐标(单位一般为dB)，以ω为参变量的一种图示法。

例1：惯性环节

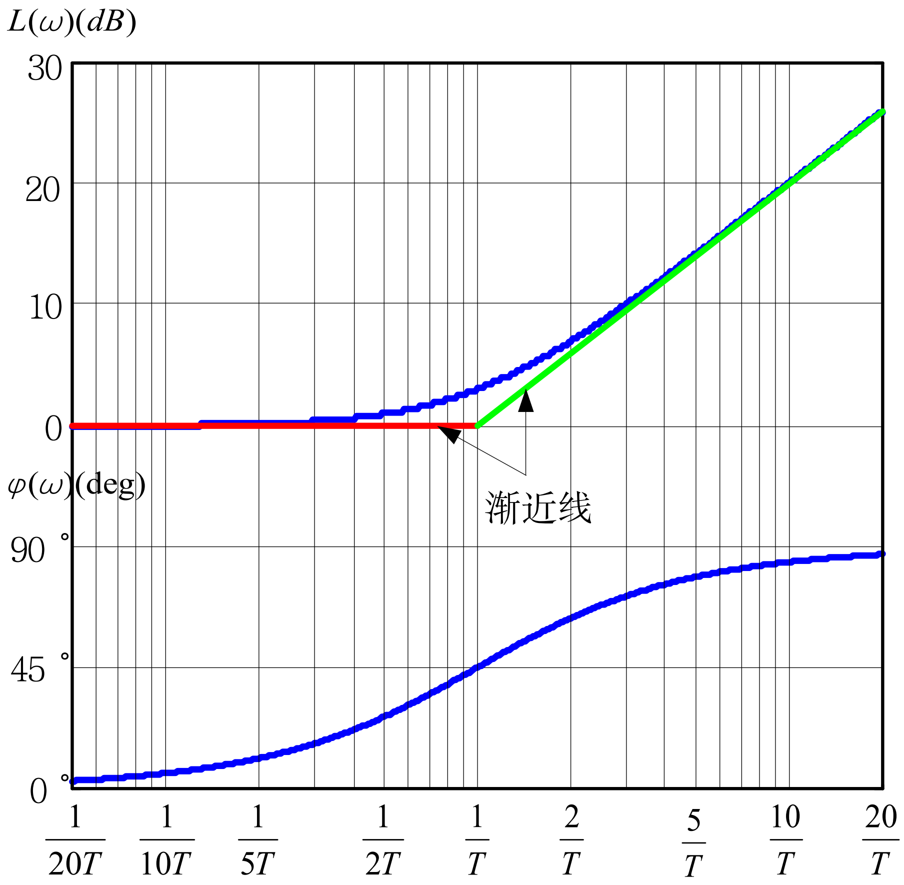


惯性环节的波德图

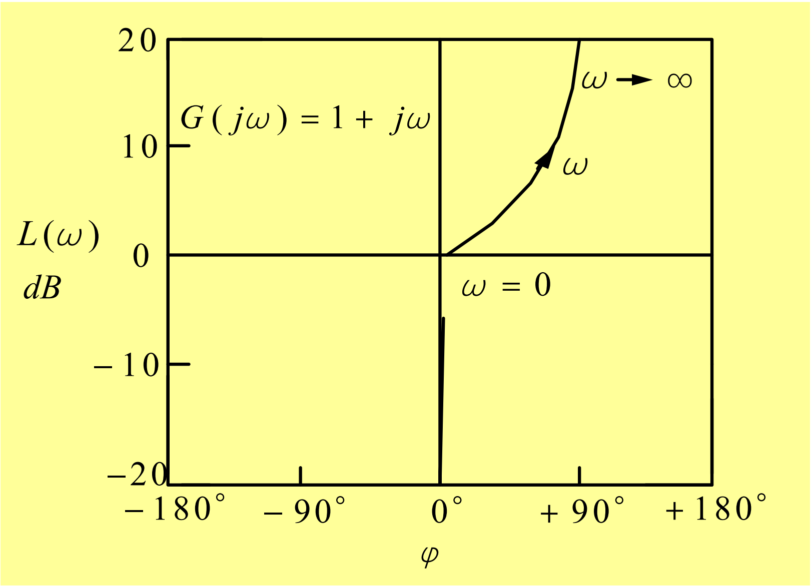


惯性环节的尼柯尔斯图

例2：一阶微分环节

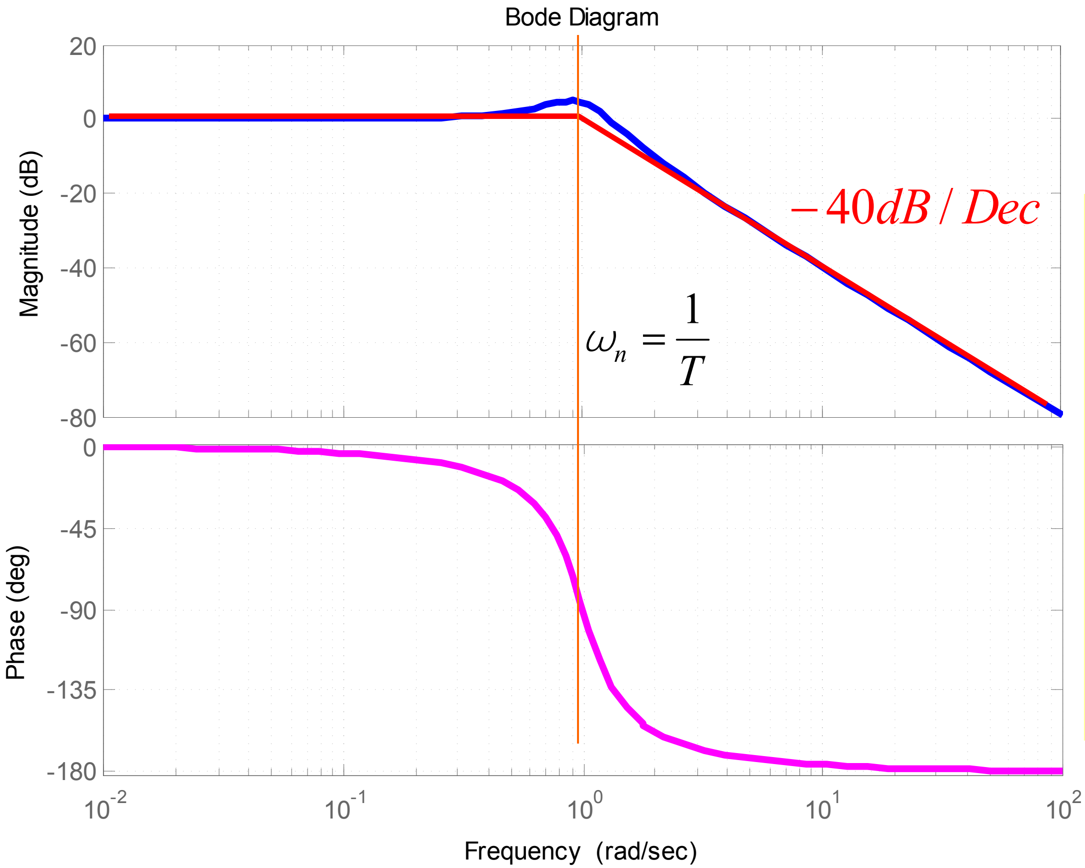


一阶微分环节的波德图

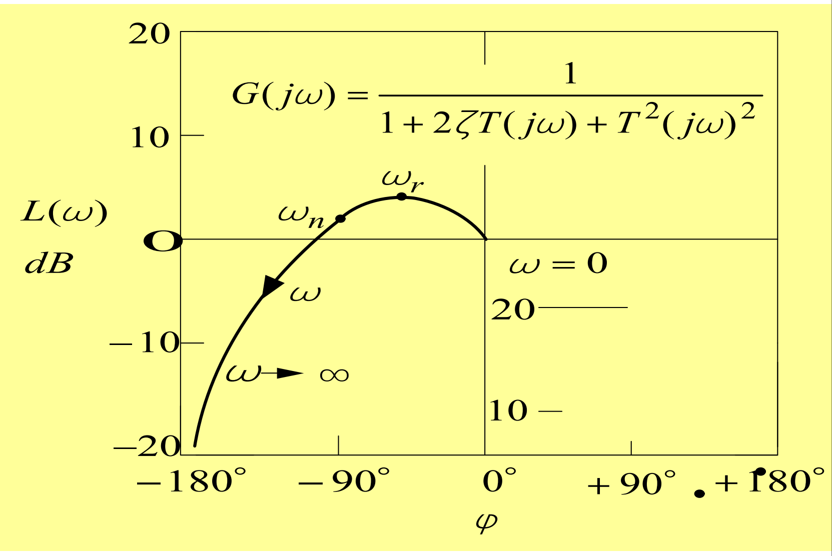


一阶微分环节的尼柯尔斯图

例3： 振荡环节



振荡环节的波德图

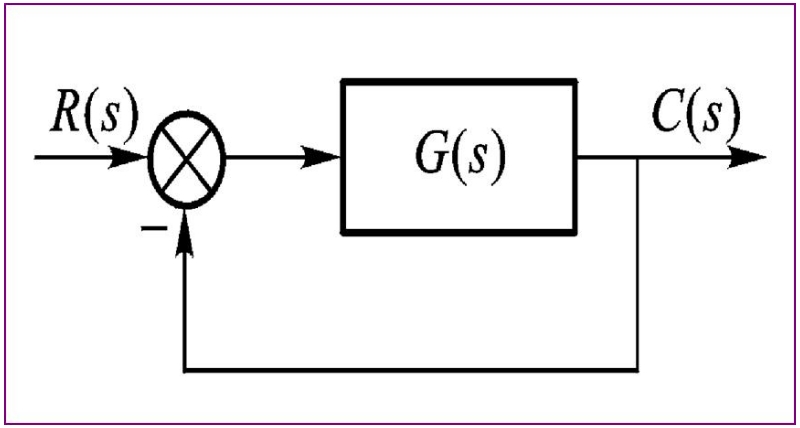


振荡环节的尼柯尔斯图

2、Nichols图

❖ 开环频率特性:

$$G(j\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$



❖ 闭环频率特性:

$$M(\omega)e^{j\alpha(\omega)}=\frac{A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}}{1+A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}}}$$

M(ω)——闭环系统的幅频特性

α(ω) ——闭环系统的相频特性

5.7 闭环频率特性

$$Me^{j\alpha} = \left[1+\frac{1}{Ae^{j\varphi}}\right]^{-1} = \left[1+\frac{e^{-j\varphi}}{|A|}\right]^{-1} = \left[(1+\frac{\cos\varphi}{|A|})-j\frac{\sin\varphi}{|A|}\right]^{-1}$$

求得 $M = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2\cos\varphi}{|A|}+\dfrac{1}{|A|^2}}}$ $\qquad (M^{-2}-1)|A|^2-2\cos\varphi|A|-1=0$

$$|A| = \frac{\cos\varphi \pm\sqrt{\cos^2\varphi + M^{-2}-1}}{M^{-2}-1}$$

$$L(\omega)=20\lg A = 20\lg\frac{\cos\varphi \pm\sqrt{\cos^2\varphi + M^{-2}-1}}{M^{-2}-1}$$

令上式中M为常数，当φ从0°~360°变化时，求得对应的L(ω)（可能有两个值），则在L(ω) ～ φ(ω) 平面上得到一条等M曲线（单位db）。

5.7 闭环频率特性

$$Me^{j\alpha}=\left[1+\frac{1}{Ae^{j\varphi}}\right]^{-1}=\left[1+\frac{e^{-j\varphi}}{|A|}\right]^{-1}=\left[(1+\frac{\cos\varphi}{|A|})-j\frac{\sin\varphi}{|A|}\right]^{-1}$$

求得

$$\alpha(\omega)=\arctan\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi+|A|}\qquad\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi+|A|}$$

$$|A|=\frac{\sin\varphi\cos\alpha-\cos\varphi\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

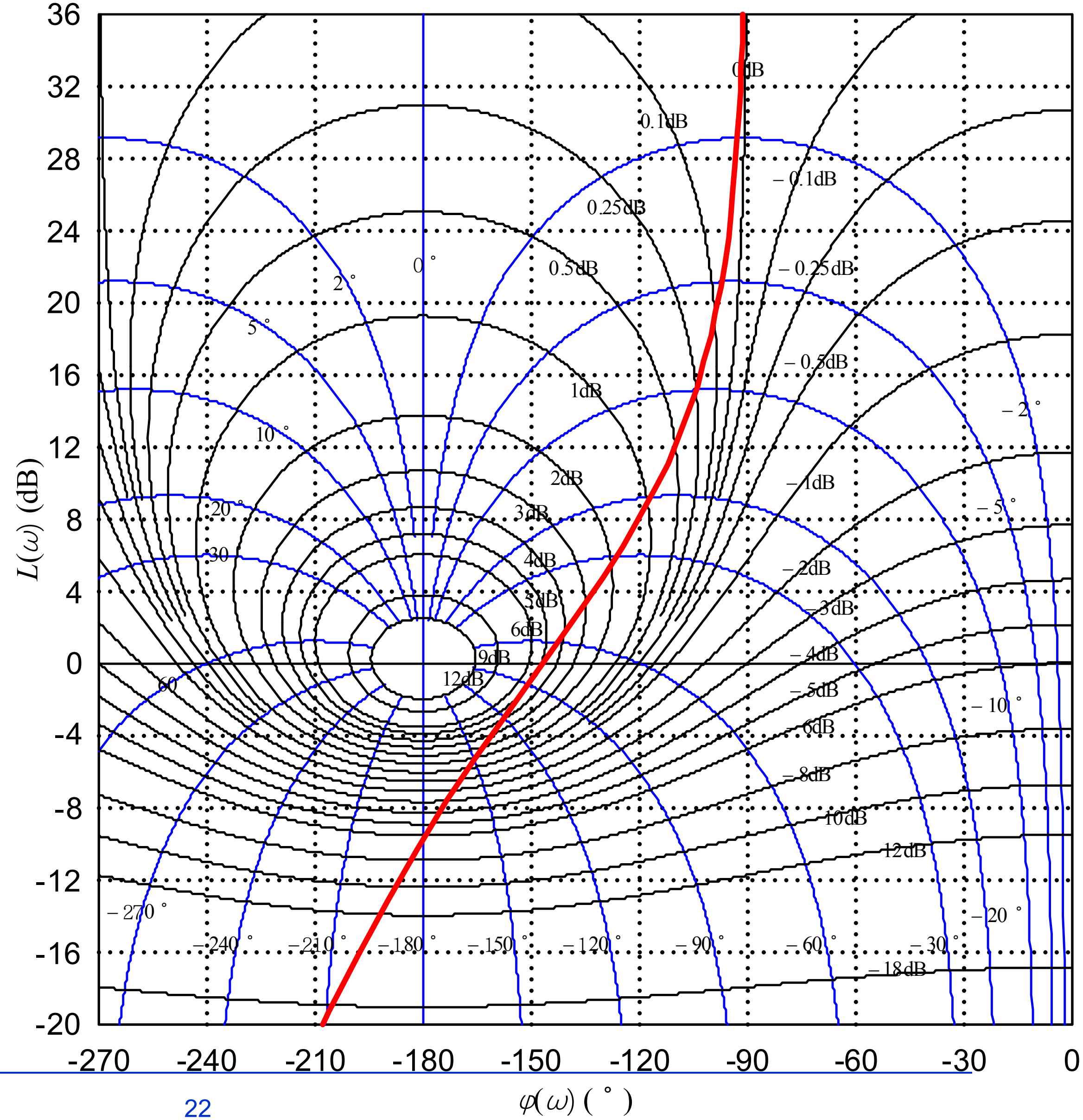
$$L(\omega)=20\lg|A|=20\lg\frac{\sin[\varphi(\omega)-\alpha(\omega)]}{\sin\alpha(\omega)}$$

上式令α(ω)为常数， L(ω)与 φ(ω)为单值方程，与求取等M曲线相似的方法在L(ω) ～ φ(ω)平面上得到一条等α曲线。

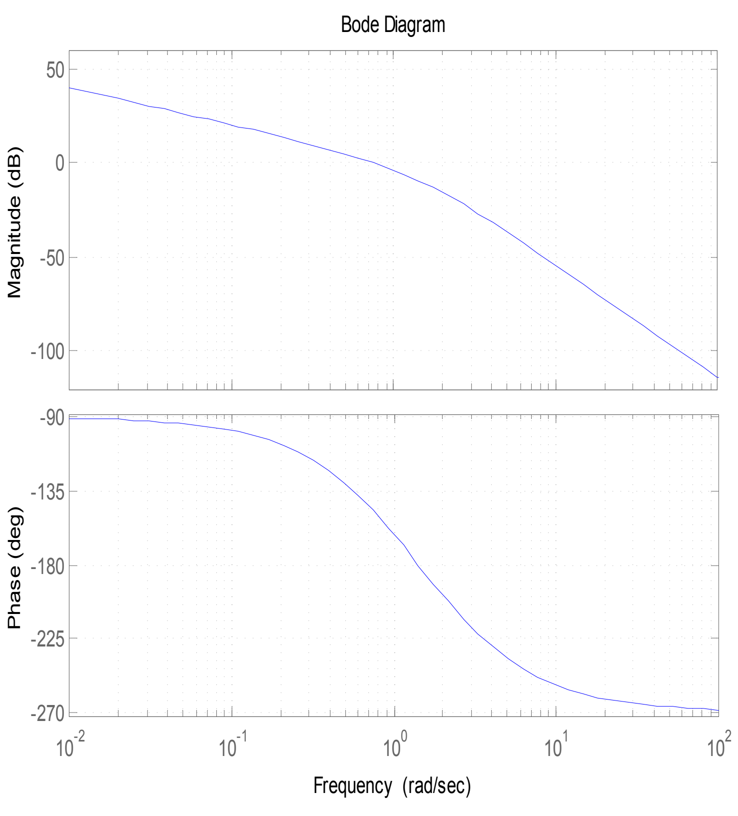
5.7 闭环频率特性

等M线和等α线组成了尼柯尔斯图线——复合坐标系。画出开环系统的对数幅相频率特性曲线。该曲线与**等M线和等α线**的交点给出了每一频率下闭环系统的对数幅值和相角。据此可以画出**闭环系统的Bode图。**

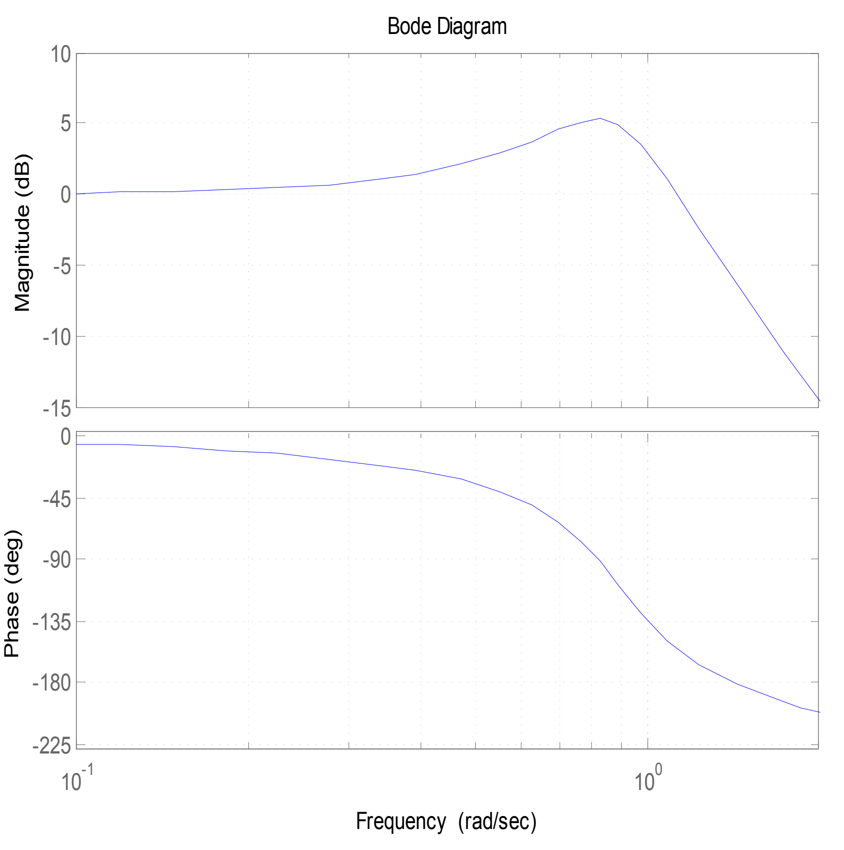
$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$$



开环Bode图

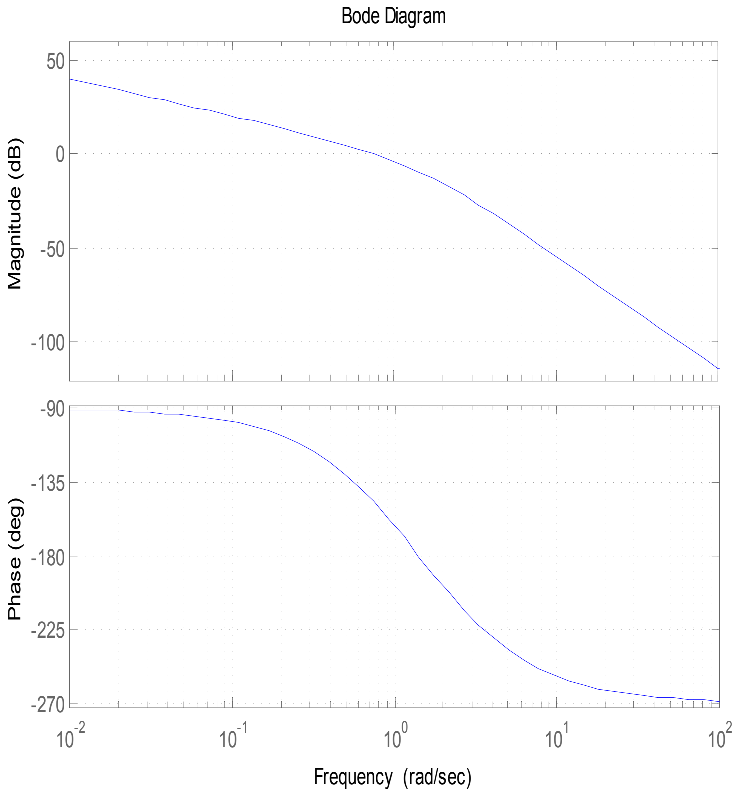


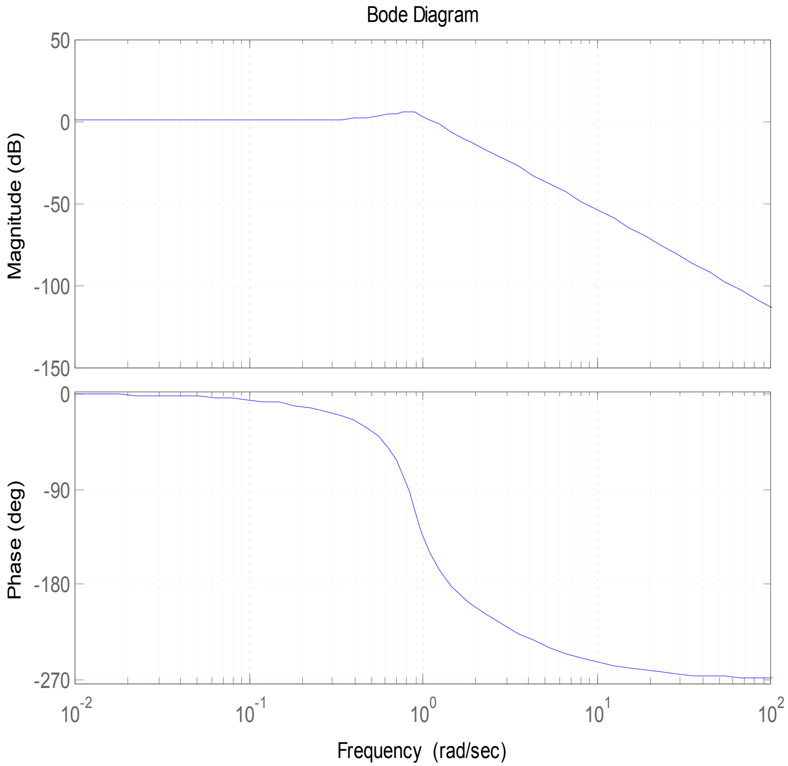
闭环Bode图



开环Bode图

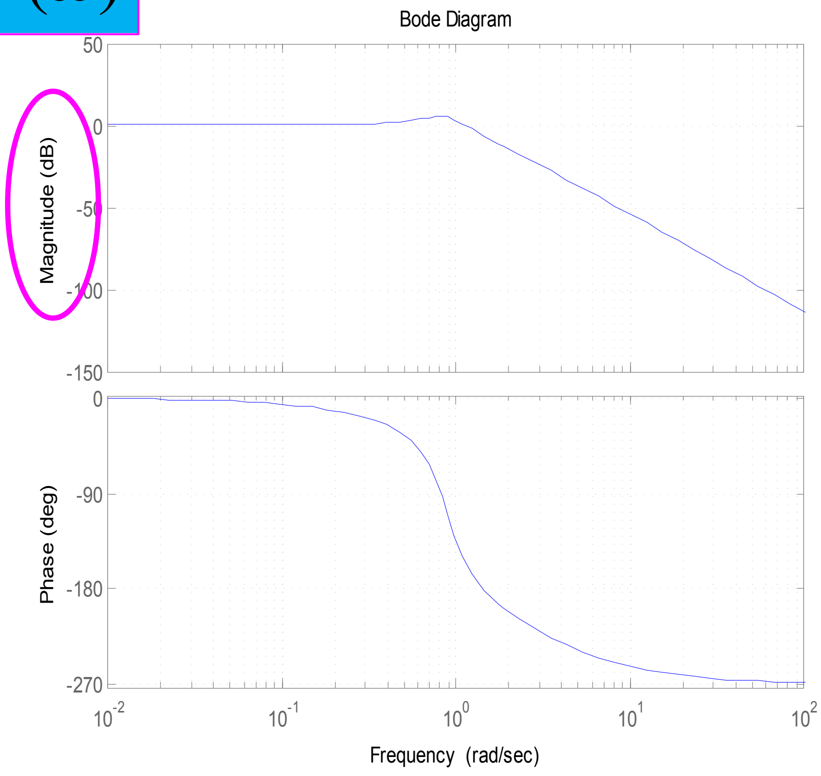
闭环Bode图





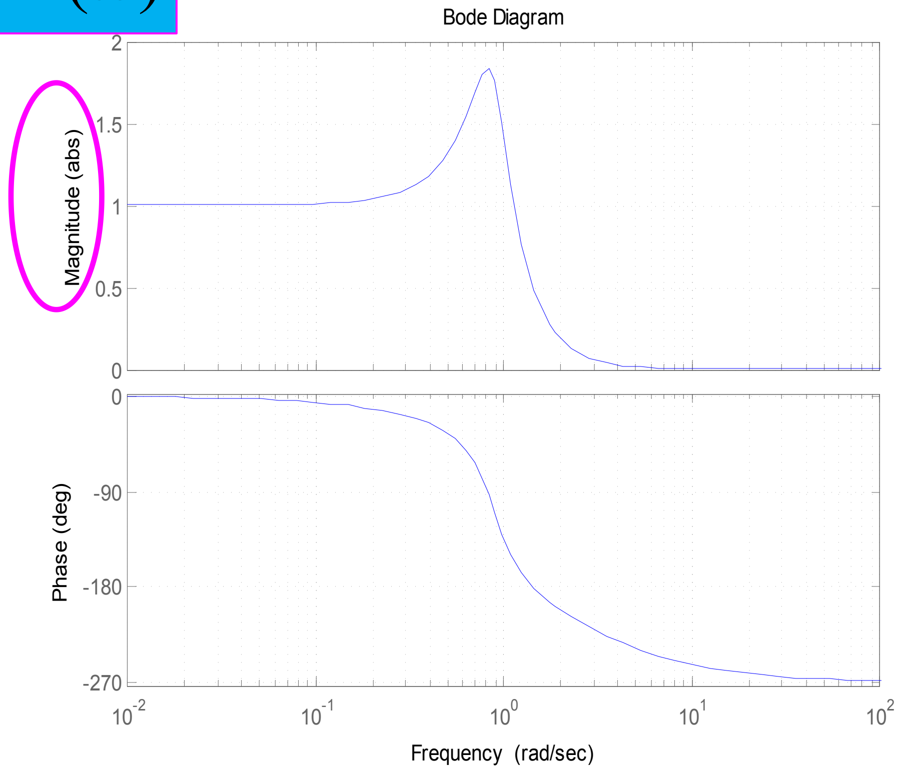
闭环Bode图

$L(\omega)$



闭环幅频/相频图

$M(\omega)$



闭环系统的伯德图分析

a. 低频段闭环对数幅频特性与0dB重合

因为 $|G(j\omega)| >> 1$ 时 $\Phi(j\omega) = \dfrac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} \approx 1$

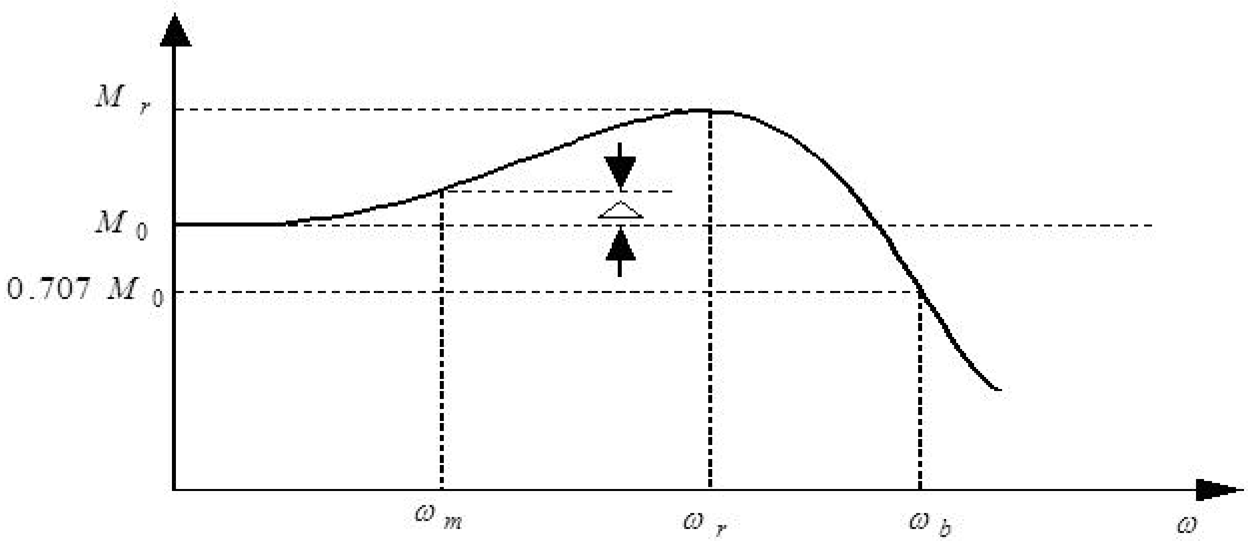
此时 $M = 0dB$ $\quad \alpha = 0^\circ$

b. 高频段闭环对数幅频特性基本上与开环对数幅频特性重合

因为 $|G(j\omega)| << 1$ 时 $\Phi(j\omega) = \dfrac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} \approx G(j\omega)$

此时 $M(dB) \approx |G(j\omega)|(dB)$ $\quad \alpha \approx \varphi$

三.利用闭环幅频特性分析和估算系统的性能

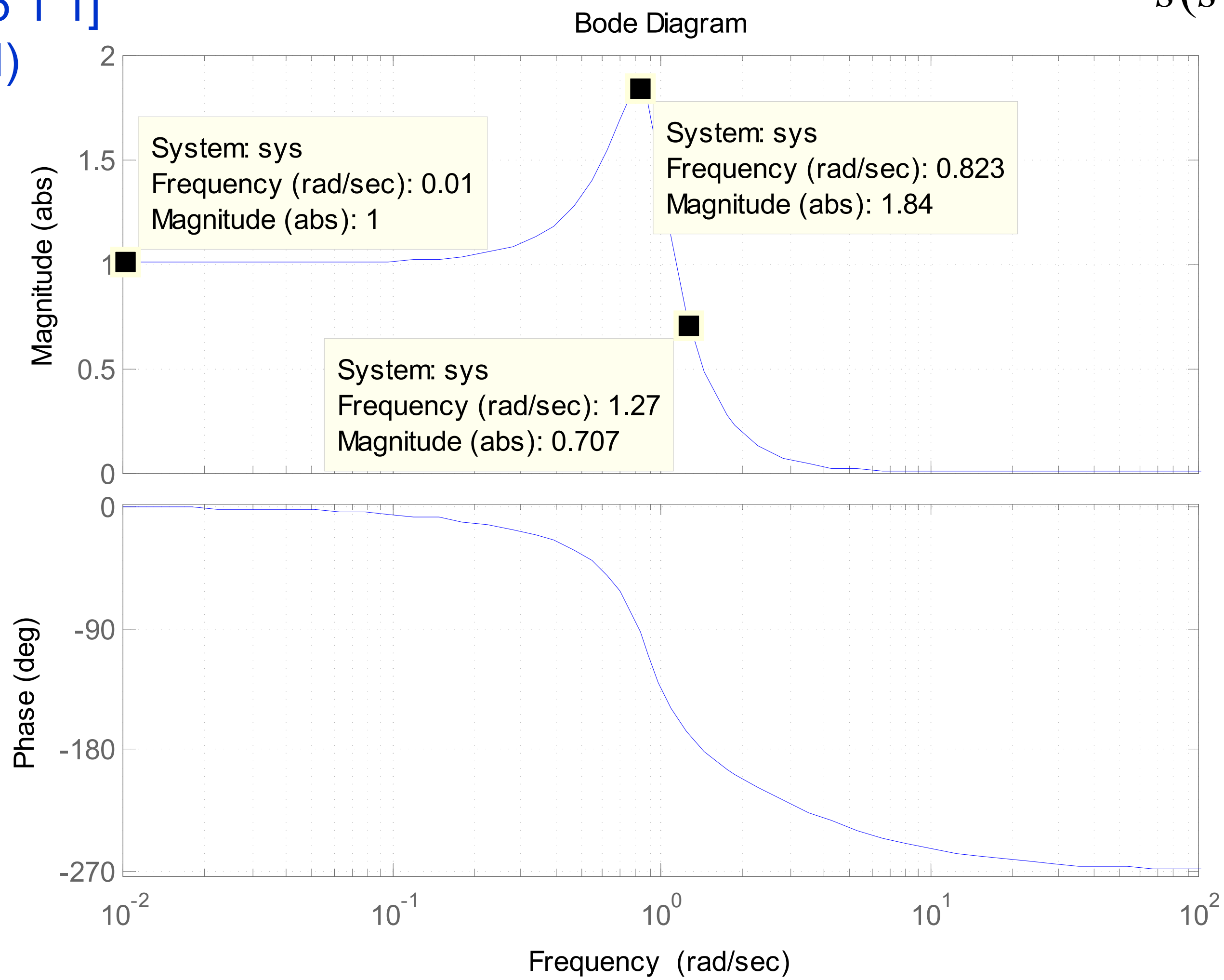


在已知闭环系统稳定的条件下，可以只根据系统闭环幅频特性曲线，对系统的动态响应过程进行定性分析和定量估算。

5.7 闭环频率特性

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

M=[1]
N=[0.5 1.5 1 1]
Bode(M,N)



定性分析

①零频的幅值M(0)反映系统在阶跃信号作用下是否存在静差。

M(0)和1之差，反映了系统的稳态精度。

② 谐振峰值M_r:幅频特性M(ω)的最大值。反映系统的平稳性。

表明系统在频率ω_r的正弦输入信号作用下，有共振倾向。一般而言，M_r越大，系统的平稳性越差，系统阶跃响应将产生较大的超调量。为保证系统具有较好的平稳性，一般实际应用中要求$M_r \leq 1.4M(0)$。

定性分析

③ 带宽频率ω_b: 幅频特性$M(\omega)$从$M(0)$衰减到$0.707M(0)$时所对应的频率。反映系统的快速性。

ω_b越高，系统所包含的各频率的成分就越丰富，系统复现快速变化信号的能力就越强，失真越小，系统快速性好，上升时间短。

④ 闭环幅频$M(\omega)$在ω_b处的斜率反映系统抗高频干扰的能力。

四.典型二阶系统的频域指标与瞬态性能指标的关系

典型二阶系统开环传递函数为: $G_o(s)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\zeta\omega_n)}$

开环频率特性为: $G_o(j\omega)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{(j\omega)(j\omega+2\zeta\omega_n)}$

开环幅频特性为: $A(\omega)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{\sqrt{(\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}$

开环相频特性为: $\varphi(\omega)=-90^\circ-\arctan\dfrac{\omega}{2\zeta\omega_n}=-180^\circ+\arctan\dfrac{2\zeta\omega_n}{\omega}$

令A(ω)=1，可求得**幅值穿越频率** $\omega_c=\omega_n\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}$

代入φ(ω)，得 $\varphi(\omega_c)=-180^\circ+\arctan\dfrac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}}$

系统的**相角裕量** $\gamma=\arctan\dfrac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}}$

5.7 闭环频率特性

闭环传递函数为： $\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

闭环频率特性为： $\Phi(j\omega)=\dfrac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2}$

闭环幅频特性为： $M(\omega)=\dfrac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}$

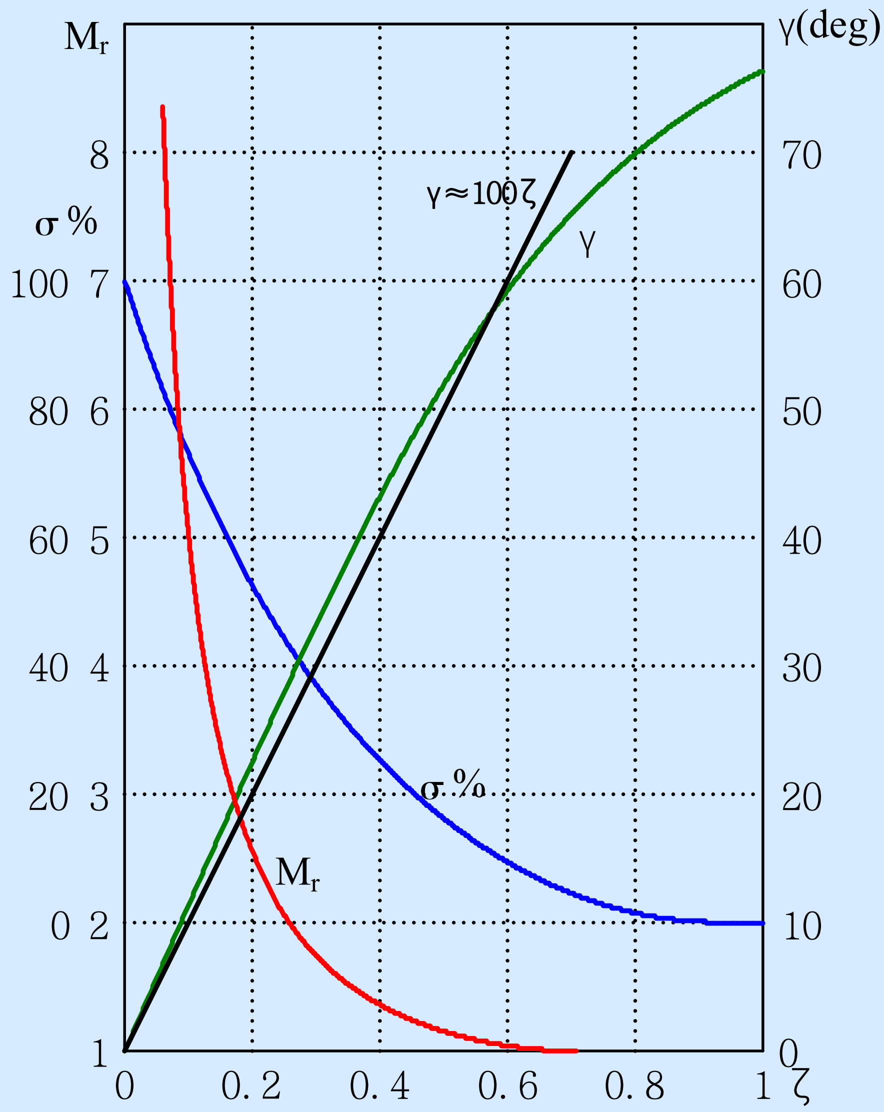
令 $\dfrac{dM}{d\omega}=0$ ， 可得当 $0<\zeta<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时

$$\boxed{\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}}\qquad \boxed{M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

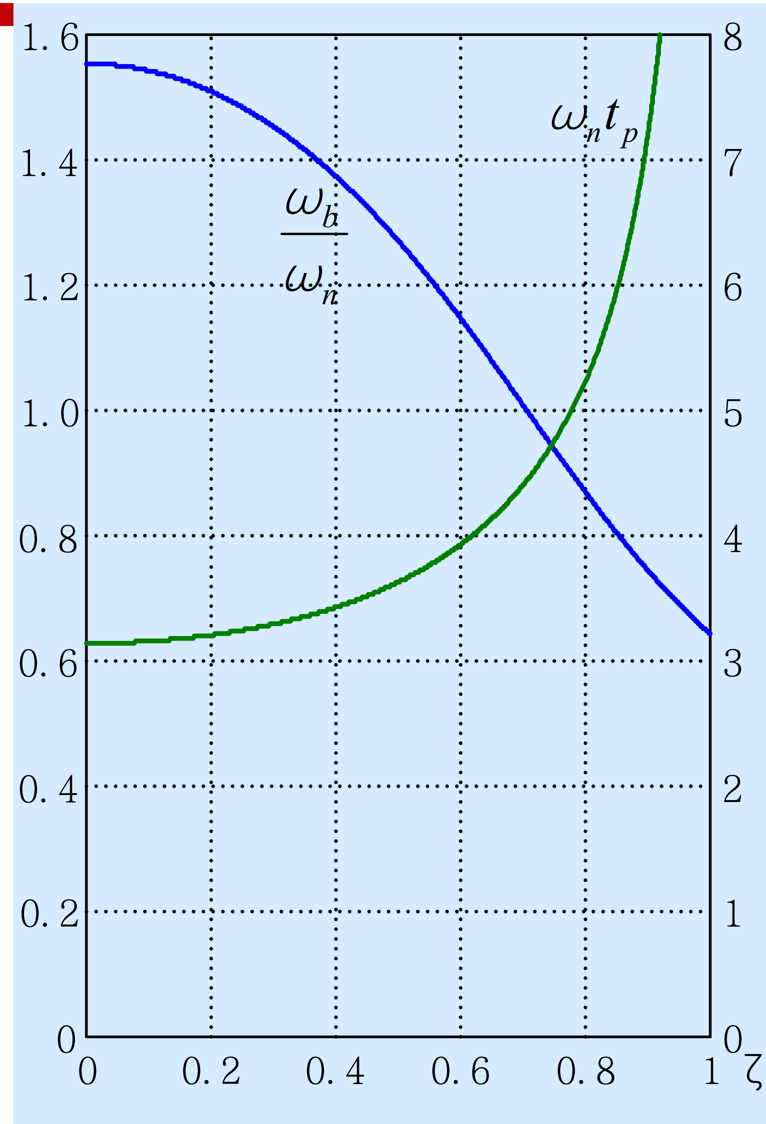
令 $M(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}M(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时， 可得带宽频率 ω_b

$$\boxed{\omega_b=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}}$$

5.7 闭环频率特性

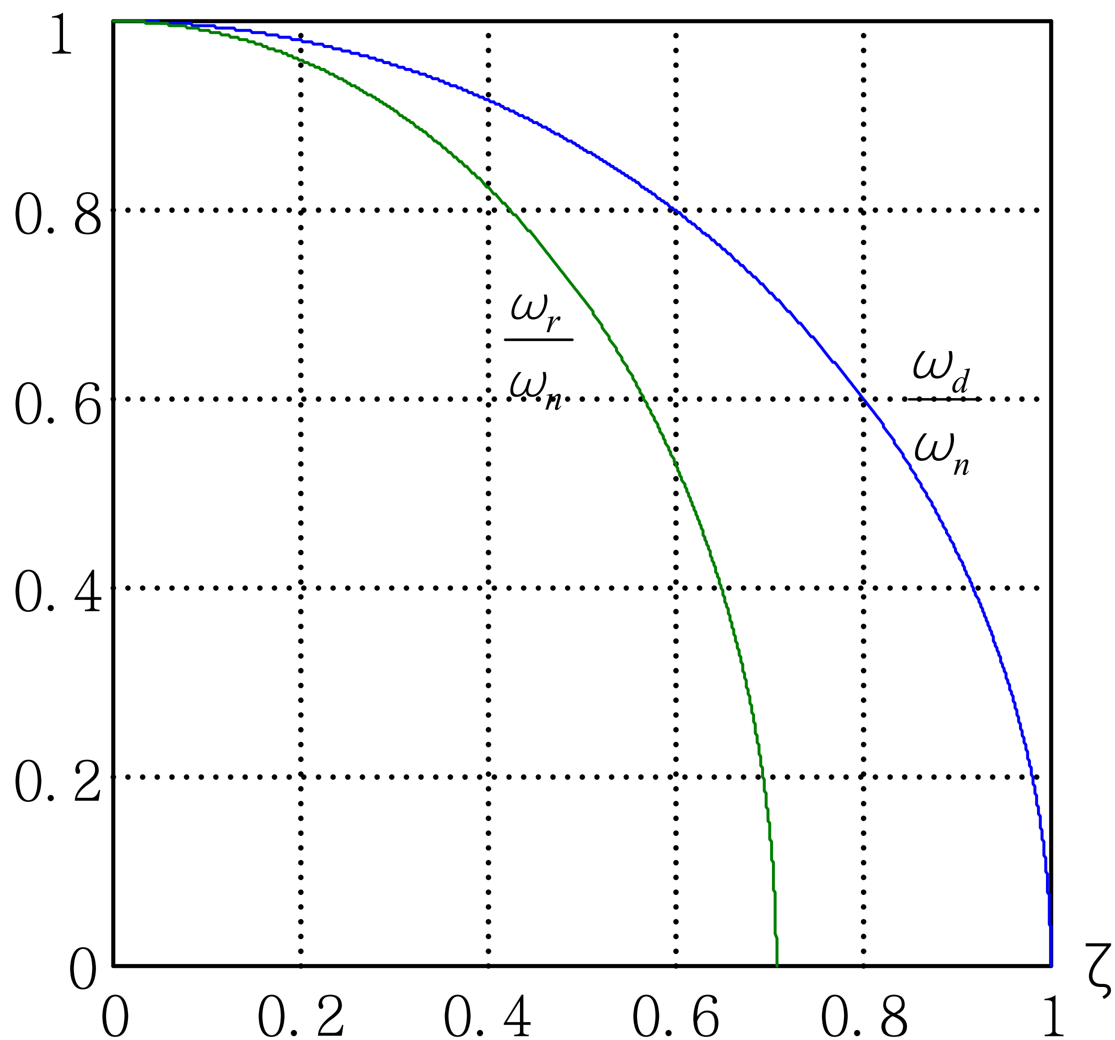


σ %、M_r和γ与ζ的关系



ω_n和ω_b与ζ的关系

5.7 闭环频率特性

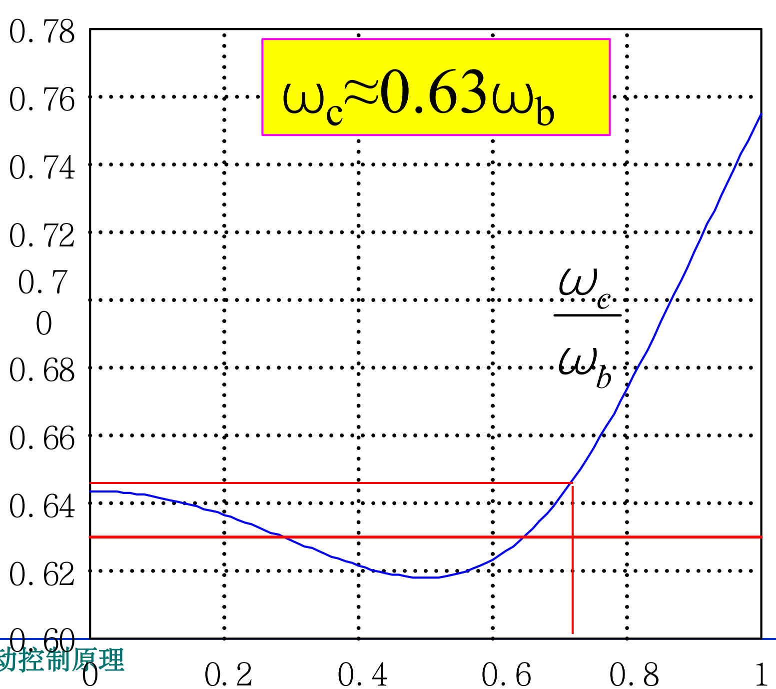


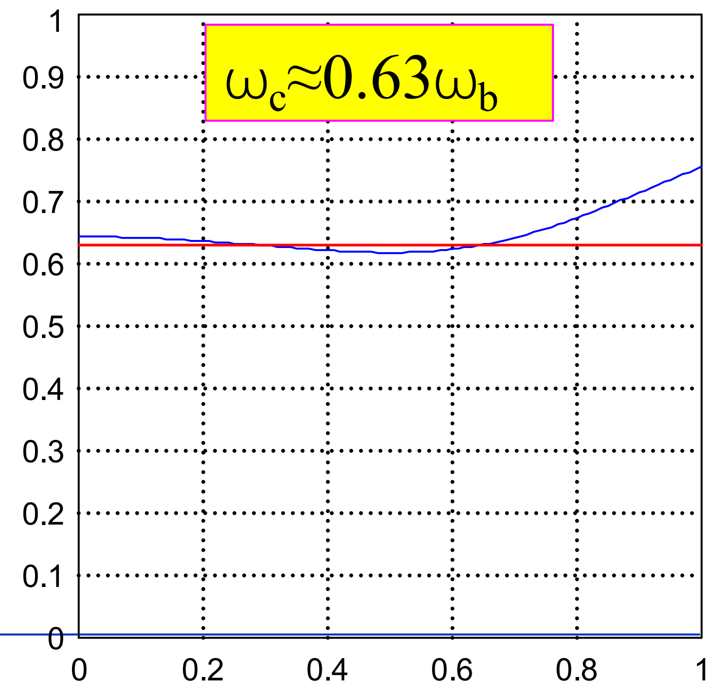
ω_r和ω_d与ζ的关系

5.7 闭环频率特性

$$\frac{\omega_c}{\omega_b}=\sqrt{\left(\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2\right)\Big/\left(\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}+1-2\zeta^2\right)}$$

ζ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
γ	0	12	24	35	45	53	61	65.2	72	75	78
ωc/ωb	0.644	0.642	0.636	0.629	0.622	0.618	0.623	0.644	0.674	0.714	0.755





例4：一系统的开环传递函数为

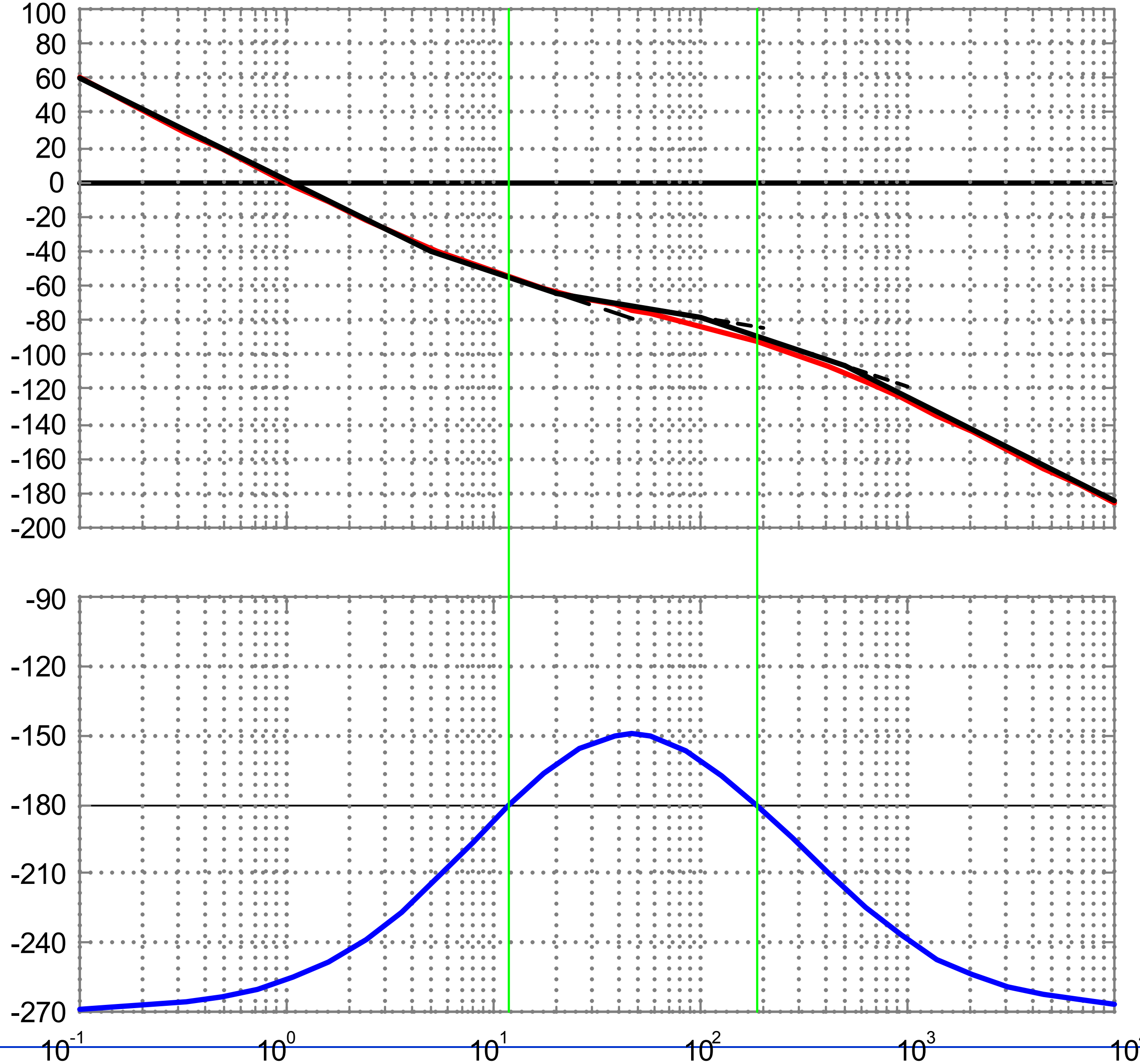
$$G_o(s)=\frac{K(1+0.2s)(1+0.05s)}{s^3(1+0.01s)(1+0.002s)}$$

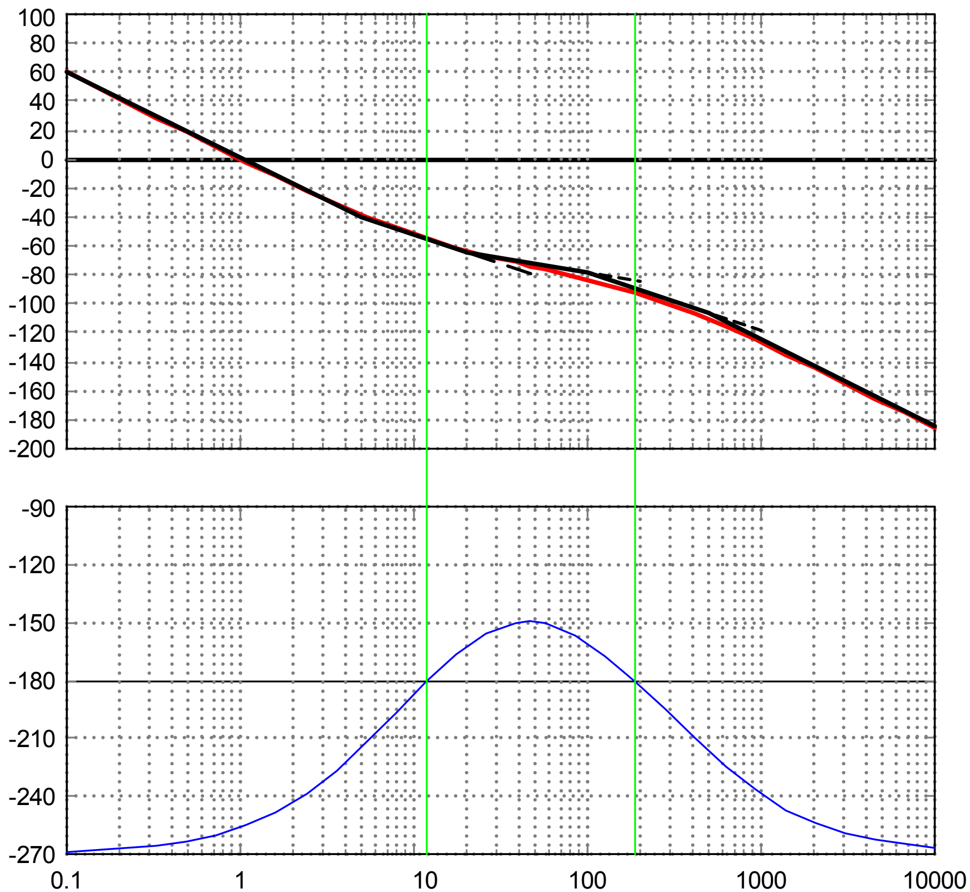
当K=1时

$$\begin{aligned}L(\omega)=&20\lg K+20\lg\sqrt{1+(0.2\omega)^2}+20\lg\sqrt{1+(0.05\omega)^2}\\&-60\lg\omega-20\lg\sqrt{1+(0.01\omega)^2}-20\lg\sqrt{1+(0.002\omega)^2}\end{aligned}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan(0.2\omega)+\arctan(0.05\omega)-270°-\arctan(0.01\omega)-\arctan(0.002\omega)$$

5.7 闭环频率特性


100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
-180
-200
-90
-120
-150
-180
-210
-240
-270
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}



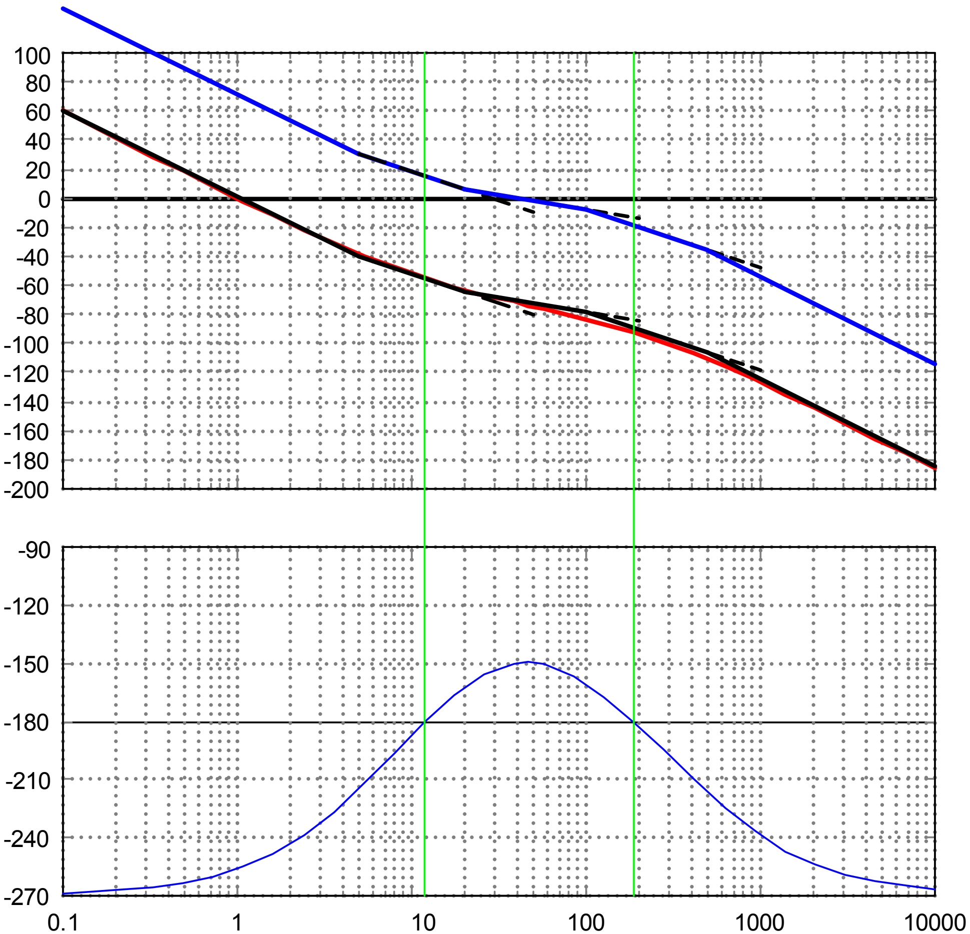
此时，$\omega_c=1$，$\varphi(\omega_c)<-180°$，系统不稳定

改变K值，就可改变ω_c值，从而改变$\varphi(\omega_c)$及γ值。

一般而言，当$L(\omega)$在ω_c处的斜率处于-20dB/dec时，系统是稳定的；当$L(\omega)$在ω_c处的斜率处于-40dB/dec时，系统可能稳定也可能不稳定，即使稳定，γ也是较小的；当$L(\omega)$在ω_c处的斜率处于-60dB/dec时，系统则肯定是不稳定的。

为使系统具有一定的相位裕量在系统设计时，应使ω_c处于$L(\omega)$的斜率-20dB/dec的段内。

5.7 闭环频率特性



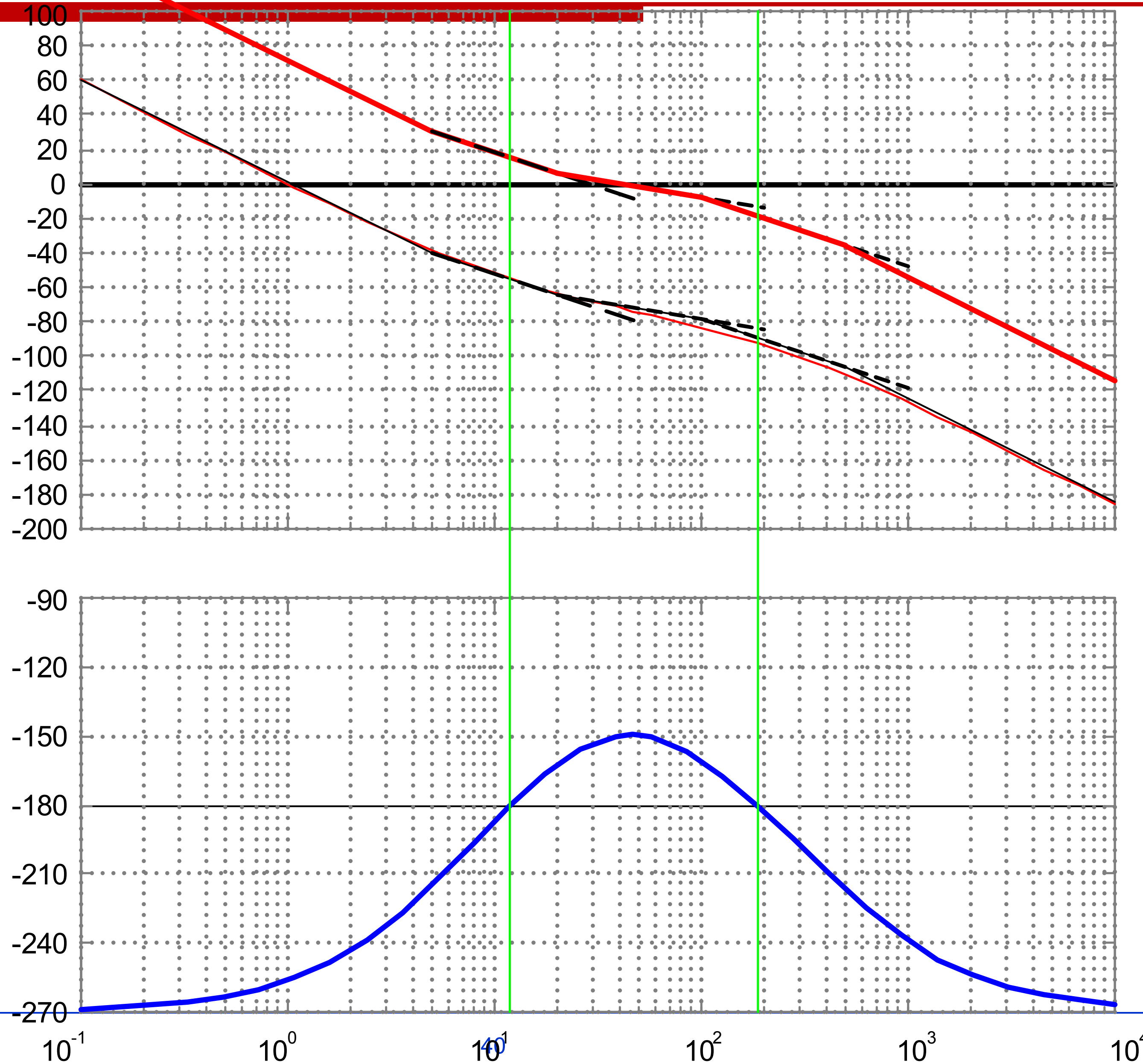
此时，$\omega_c=1$，$\varphi(\omega_c)<-180°$，系统不稳定

改变K值，就可改变ω_c值，从而改变$\varphi(\omega_c)$及γ值。

一般而言，当$L(\omega)$在ω_c处的斜率处于-20dB/dec时，系统是稳定的；当$L(\omega)$在ω_c处的斜率处于-40dB/dec时，系统可能稳定也可能不稳定，即使稳定，γ也是较小的；当$L(\omega)$在ω_c处的斜率处于-60dB/dec时，系统则肯定是不稳定的。

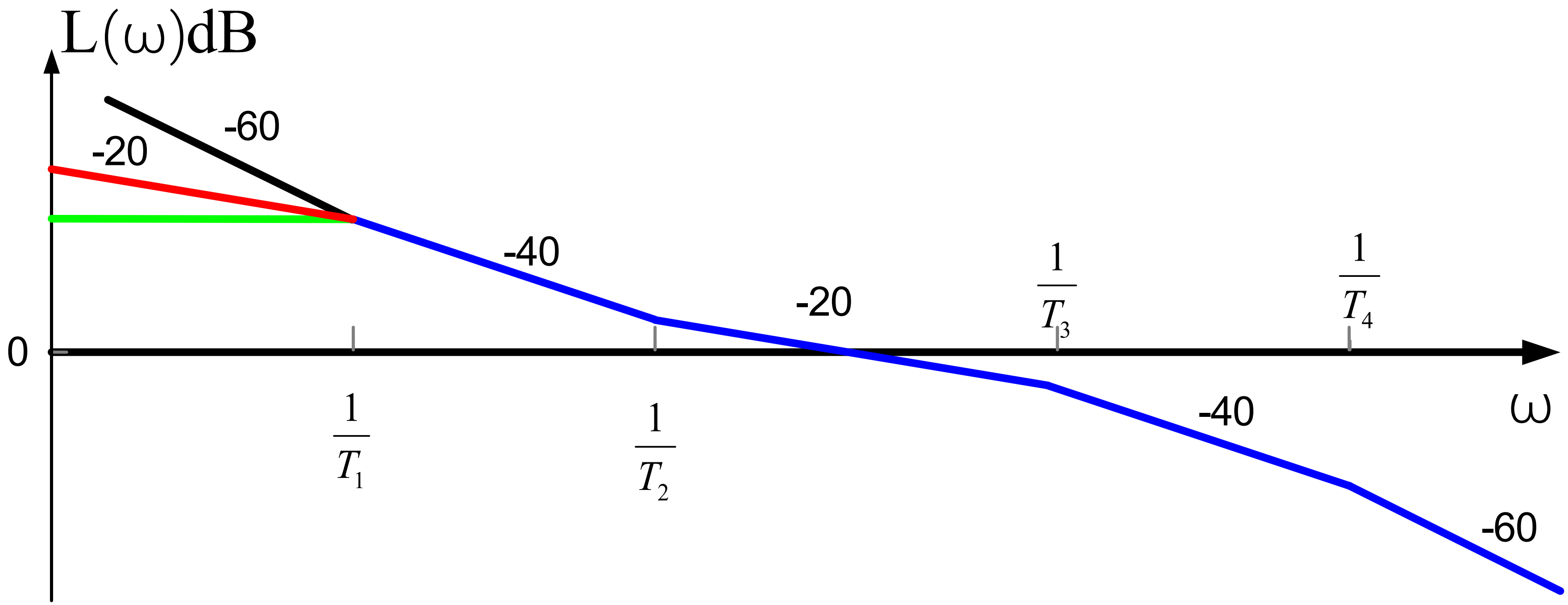
为使系统具有一定的相位裕量在系统设计时，应使ω_c处于$L(\omega)$的斜率-20dB/dec的段内。

5.7 闭环频率特性


100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
-180
-200
-90
-120
-150
-180
-210
-240
-270
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}

5.7 闭环频率特性

$$G_o(s)=\frac{K(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)} \qquad G_o(s)=\frac{K(\frac{a}{\omega_c}s+1)}{s(\frac{ab}{\omega_c}s+1)(\frac{1}{c\omega_c}s+1)(\frac{1}{cd\omega_c}s+1)}$$



5.7 闭环频率特性

当a≥2， b≥2， c≥2， d≥1，闭环系统性能可用下式估计

$$t_s \approx (6 \sim 8)\frac{1}{\omega_c} \qquad \sigma\% \approx \frac{0.64 + 0.16h}{h - 1}$$

式中h为中频段宽度， $h = \dfrac{T_2}{T_3}$

开、闭环频率性能指标有如下关系

$$\gamma = \arcsin\frac{h-1}{h+1} \qquad M_r = \frac{h+1}{h-1} \qquad h = \frac{M_r + 1}{M_r - 1} \qquad M_r = \frac{1}{\sin\gamma}$$

闭环系统性能也可用下式估计

$$\sigma\% \approx 0.16 + 0.4(M_r - 1) \qquad 1 \le M_r \le 1.8$$

$$t_s \approx \frac{k\pi}{\omega_c} \qquad k = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2 \qquad 1 \le M_r \le 1.8$$

小结

- 稳态性能

  开环放大系数的求解

  稳态误差

- 时域性能指标
- 频域性能指标

  开环：幅值稳定裕度，相角稳定裕度

  闭环：零频值，谐振峰值，谐振频率，　系统带宽和带宽频率

- 频率特性与系统性能的关系
- 典型二阶系统的频域指标与瞬态性能指标的关系

Thank You !