



数字信号处理

任课教师：许录平 余航

单位：空间科学与技术学院

Email: hyu@xidian.edu.cn



第6章 无限脉冲响应数字滤波器的设计

本章主要内容

- 6.1 数字滤波器的基本概念
- 6.2 模拟滤波器的设计
- 6.3 用脉冲响应不变法设计IIR数字低通滤波器
- 6.4 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器
- 6.5 数字高通、带通和带阻滤波器的设计



6.1 数字滤波器的基本概念

■ 数字滤波器(DF)

输入和输出均是数字信号，通过一定运算关系(数值运算)，改变输入数字信号所含**频率成份的相对比例**或**滤除某些频率成份**的器件。

■ 数字滤波器的特点(相对模拟滤波器):

精度高、稳定、体积小、重量轻、不要求阻抗匹配。

■ 数字滤波器处理模拟信号

通过A/DC和D/AC，使用数字滤波器对模拟信号的处理。



1、数字滤波器的分类

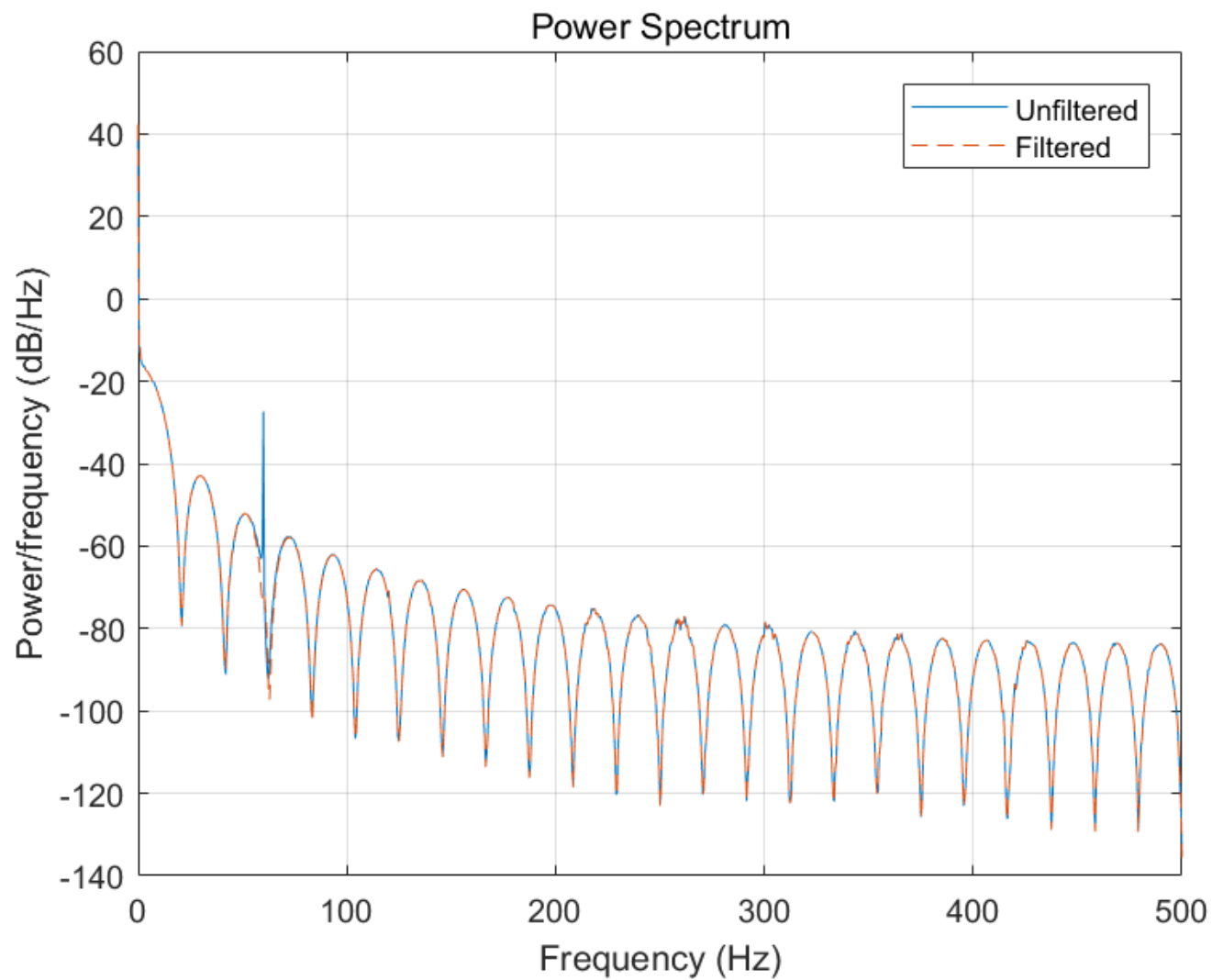
(1) 一般分类

- 经典滤波器：输入信号中的有用的频率成分和希望滤除的频率成分占用不同的频带，通过选频滤波器达到滤波的目的。
- 现代滤波器：信号和干扰的频带相互重叠，要利用信号的统计分布规律，从干扰中最佳提取信号，如：维纳滤波器、卡尔曼滤波器和自适应滤波器等。

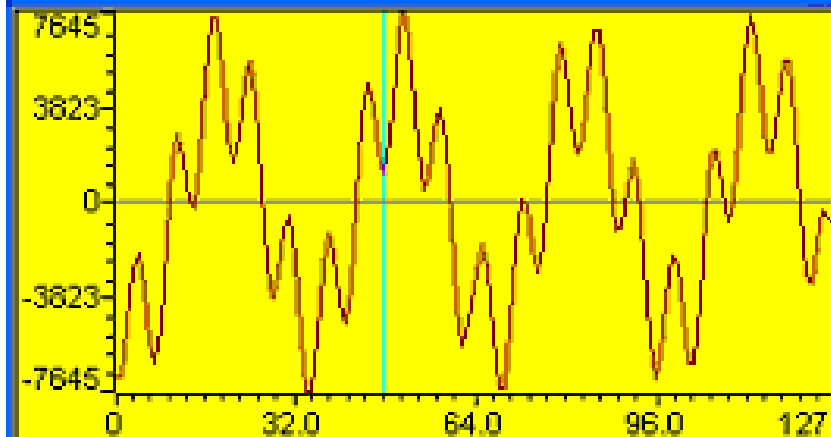
(2) 从滤波器的功能上来分类

分为低通、高通、带通、带阻滤波器





input

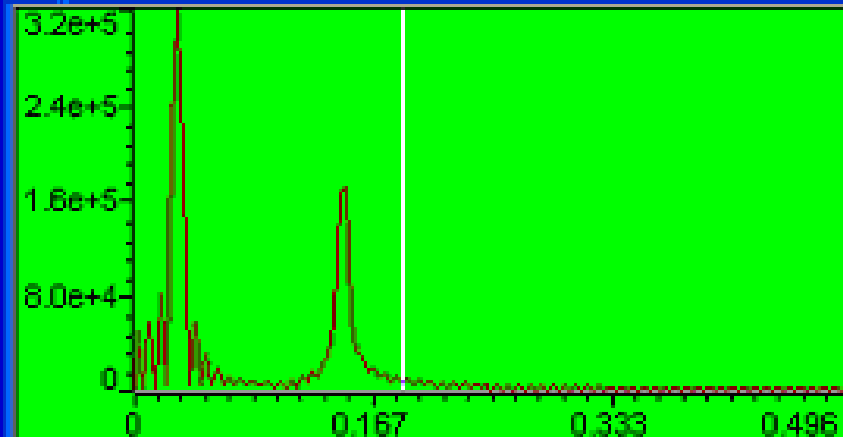


(48, 1176)

Time

Lin Auto S

input

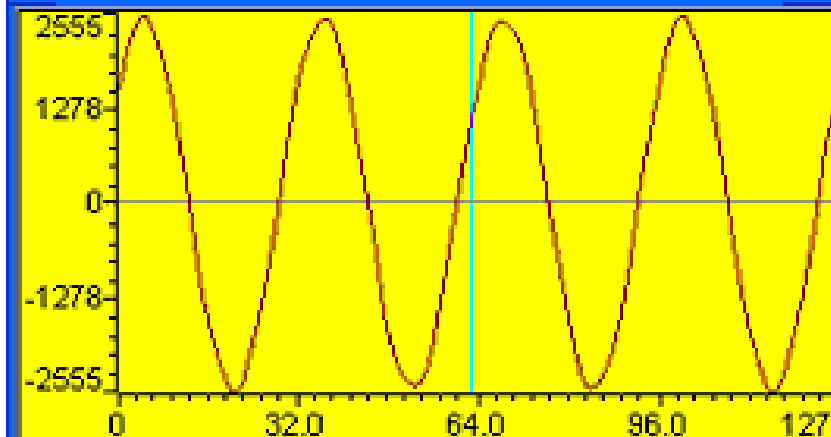


(0.1875, 7130.28)

FFT Mag

Lin Auto S

output

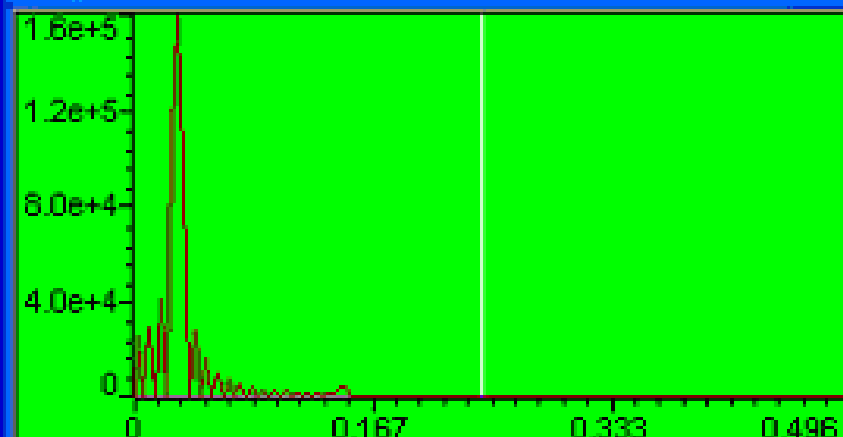


(63, 1131)

Time

Lin Auto S

output

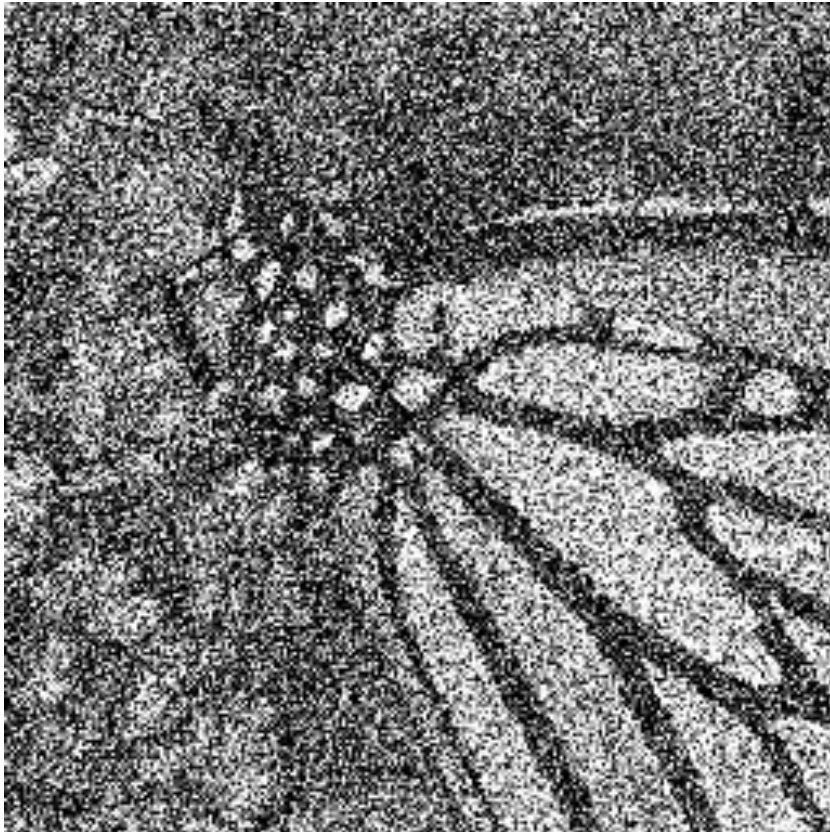


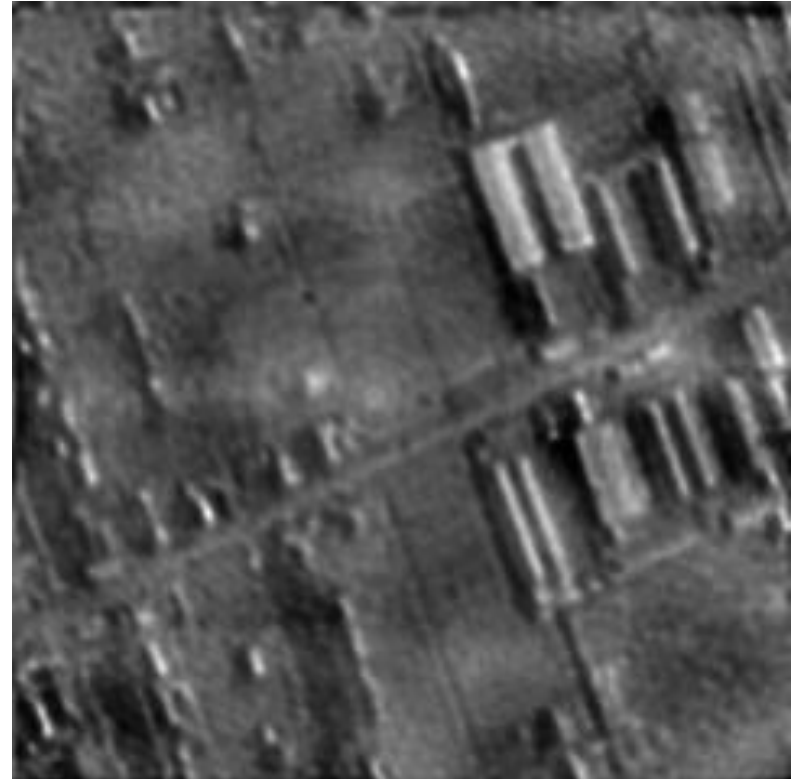
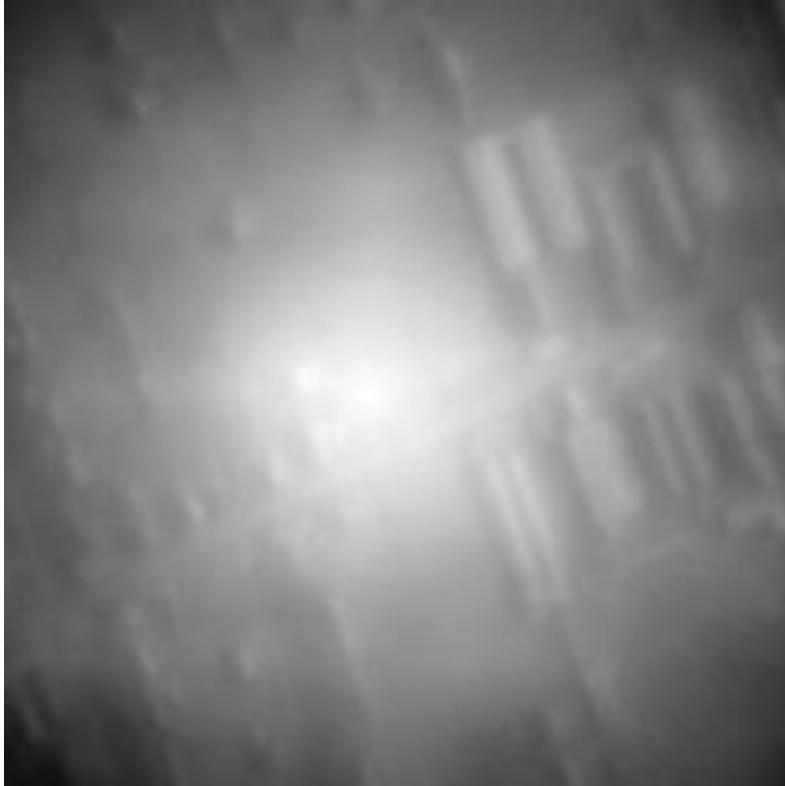
(0.242188, 69.4447)

FFT Mag

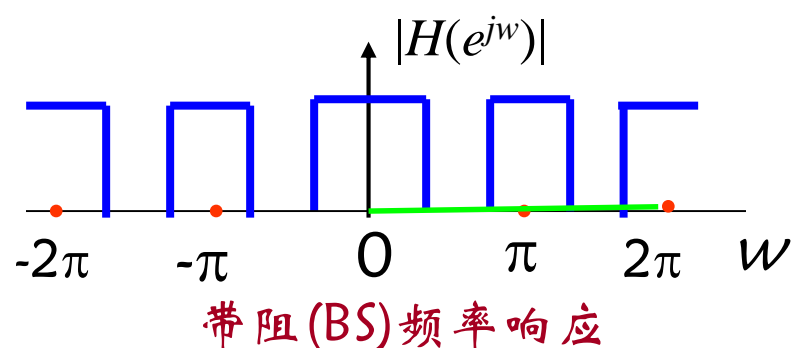
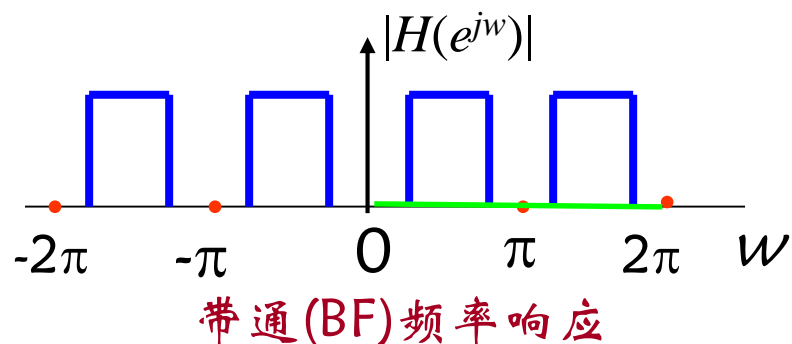
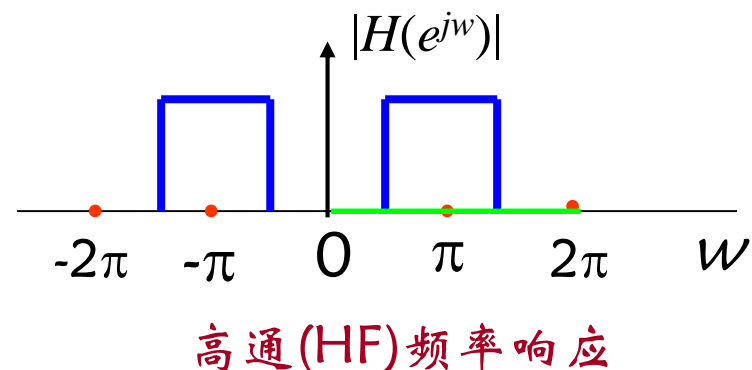
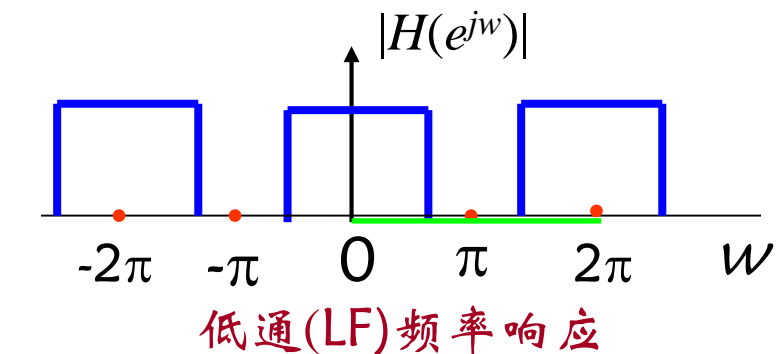
Lin Auto S







理想滤波器幅度特性



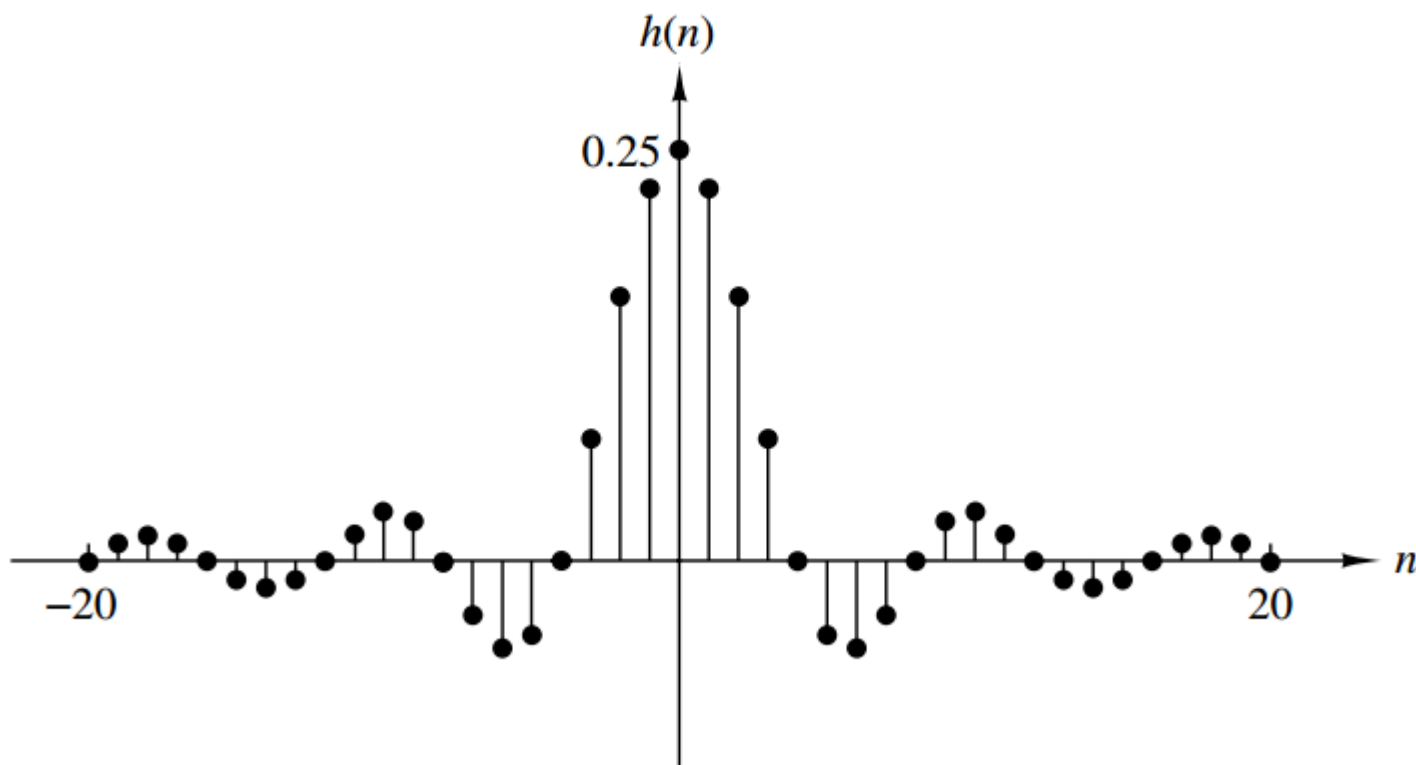
特点:

- (1) $h(n)$ 是非因果且无限长, 不可能实现, 只能尽可能逼近;
- (2) DF的传输函数是以 2π 为周期, 低通的中心频带处于 2π 的整数倍处, 高通的中心频带处于 π 的奇数倍附近。



理想滤波器因果性

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases} \quad \rightarrow \quad h(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & n = 0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c n), & n \neq 0 \end{cases}$$



在数字滤波器中，一般考察其半个周期 $\omega=[0, \pi]$ 的频域特性；
在模拟滤波器中，通常考察其 $\Omega=[0, \infty]$ 范围内频率域的特性。

(3)从滤波器的实现网络结构或从单位脉冲响应分类

■ 无限脉冲响应(IIR)数字滤波器

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

N阶IIR滤
波器函数

■ 有限脉冲响应(FIR)数字滤波器：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

N-1阶FIR
滤波器函
数





- ◆ IIR滤波器的输出取决于以前的输入和以前的滤波器输出值。
反馈使得IIR滤波器输入端的扰动将该滤波器变得不稳定并无限地振荡
- ◆ N 是IIR滤波器的阶数，表示系统中反馈环的个数
- ◆ 一般假定IIR数字滤波器满足 $M \leq N$ ，这时将系统称为 N 阶的IIR数字滤波器
- ◆ 若 $M > N$ ，可看成是一个 N 阶的IIR数字滤波器与一个 $(M - N)$ 阶的FIR数字滤波器的级联





设计IIR滤波器，如何确定滤波器系数 a_k 和 b_r ，阶数 N ？

◆ 与FIR滤波器相比

- IIR滤波器是给定了滤波器的技术指标后, 确定滤波器阶数 N 和系数 a_k 和 b_r ，在满足技术指标的前提下，滤波器的阶数要尽可能低
- IIR滤波器结构更复杂，没有线性相位响应，存在反馈，稳定性不能保证，使IIR滤波器的数字运算可能存在溢出





◆ 与FIR滤波器相比

- IIR滤波器计算每个滤波器输出样点值所需的乘法数要少得多。IIR滤波器的速度很快，从硬件设计的角度来看，其构造的滤波器的采样频率可远高于FIR滤波器，从而达到实时工作的需求



2、数字滤波器的技术要求

这里介绍的数字滤波器属于**选频滤波器**

(1) 数字滤波器的传输函数 $H(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{jQ(\omega)}$$

$|H(e^{j\omega})|$ —系统的幅频特性：表示信号通过该滤波器后各频率成分衰减情况。

$Q(\omega)$ —系统的相频特性：反映各频率成分通过滤波器后在时间上的延时情况。



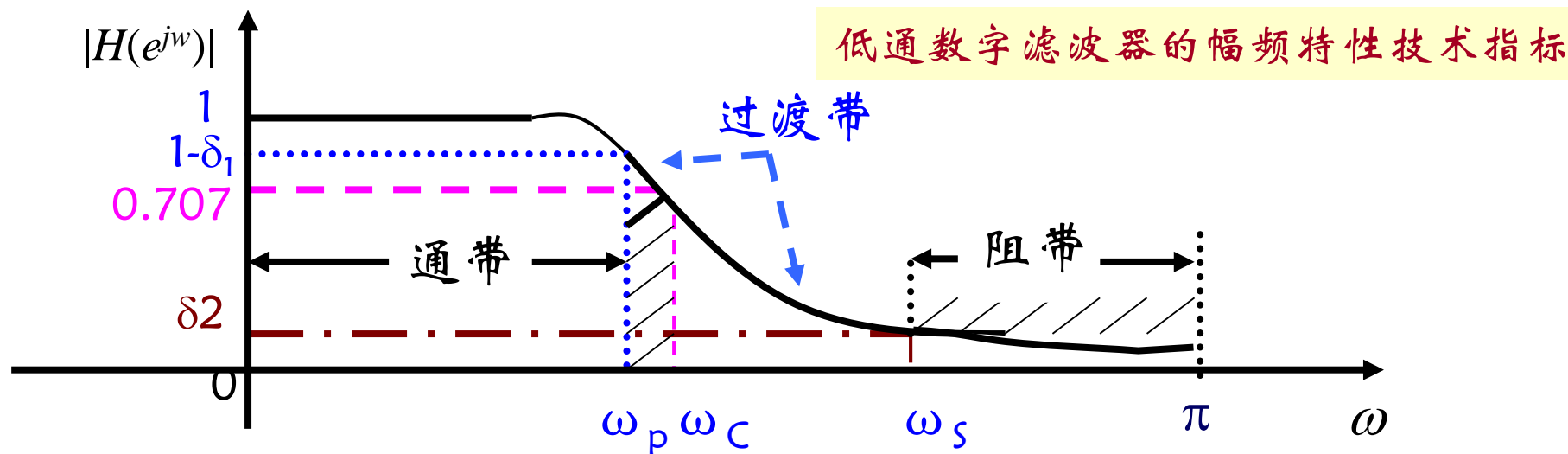
2、数字滤波器的技术要求



- ◆ 我们必须设计一个因果可实现的滤波器去近似实现理想滤波器
- ◆ 实际的滤波器的通带和阻带中都允许有一定的误差容限，即通带不是完全平的，阻带不是绝对衰减到零
- ◆ 通带和阻带之间还有一定的过渡带



(2) 数字滤波器的幅频特性 $|H(e^{j\omega})|$ 的指标



指标说明:

ω_p : 通带截止频率, 通带频率范围: $0 \leq \omega \leq \omega_p$;

ω_s : 阻带截止频率, 阻带频率范围: $\omega_s \leq \omega \leq \pi$;

ω_c : 3dB截止频率;

α_p : 通带最大衰减; α_s : 阻带最小衰减

δ_1 : 通带波纹幅度; δ_2 : 阻带波纹幅度;



α_p 和 α_s 的定义

通带内和阻带内允许的衰减用dB数表示

$$\alpha_p = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|} \text{dB}$$

$$\alpha_s = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_s})|} \text{dB}$$

如将 $|H(e^{j0})|$ 归一化为1，上两式则表示成

$$\alpha_p = -20 \lg |H(e^{j\omega_p})| \text{dB} \quad \alpha_s = -20 \lg |H(e^{j\omega_s})| \text{dB}$$

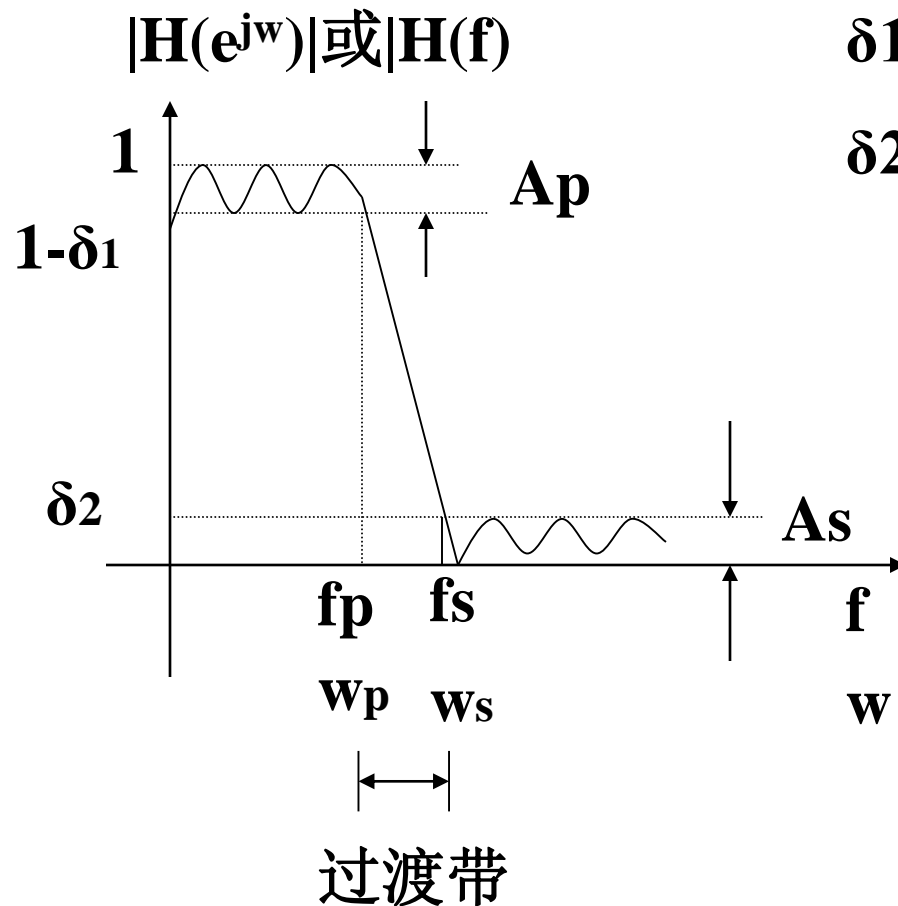
当幅度衰减到 $\sqrt{2}/2$ 倍时，所对应频率 $\omega = \omega_c$ ，此时 $\alpha_p = 3\text{dB}$ ，

称 ω_c 为3dB截止频率。

$\omega_p, \omega_s, \omega_c$ 统称为边界频率，它们是数字滤波器的重要参数



1、低通滤波器的性能指标



δ_1 : 通带的容限

δ_2 : 阻带容限

通带截止频率: $f_p(\omega_p)$ 又称为通带上限频率。

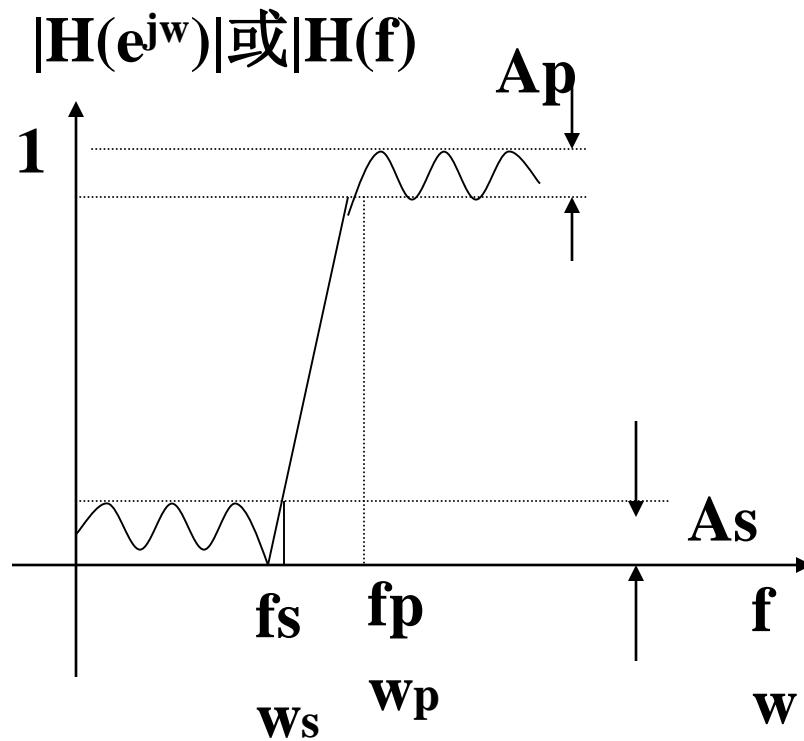
通带衰减: a_p

阻带截止频率: $f_s(\omega_s)$ 又称为阻带下限截止频率。

阻带衰减: a_s



2、高通滤波器的性能指标



通带截止频率: $f_p(\omega_p)$ 又称为通带下限频率。

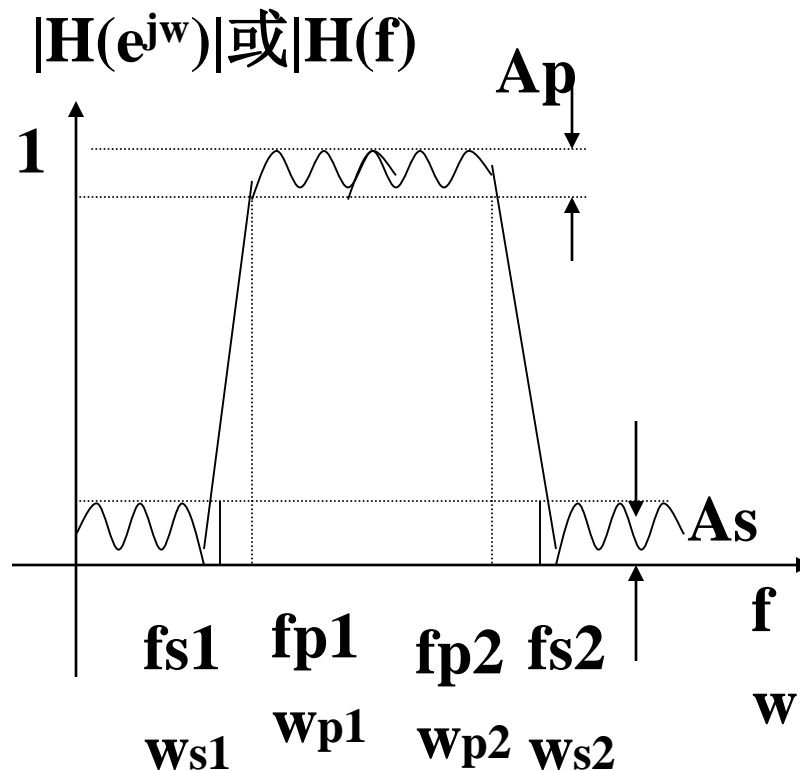
通带衰减: A_p

阻带截止频率: $f_s(\omega_s)$ 又称为阻带上限截止频率。

阻带衰减: A_s



3、带通滤波器的性能指标



通带截止频率：上限截止频率 ω_{p2} ，下限截止频率 ω_{p1} 。

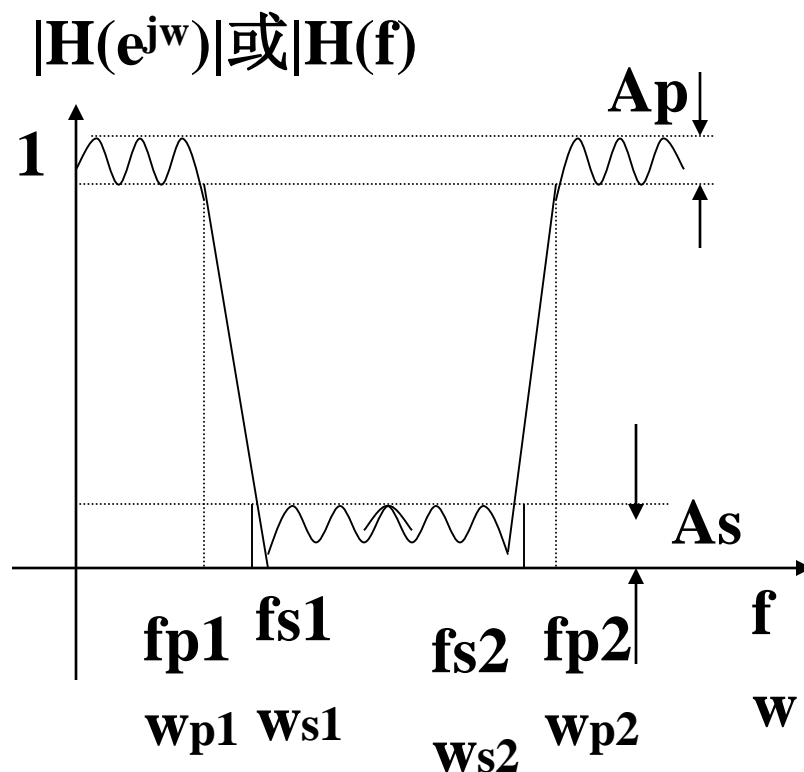
通带衰减： A_p

阻带截止频率：上限截止频率 ω_{s2} ，下限截止频率 ω_{s1} 。

阻带衰减： A_s



4、带阻滤波器的性能指标



通带截止频率：上限截止频率 $fp2(\omega p2)$ ，下限截止频率 $fp1(\omega p1)$ 。

通带衰减： A_p

阻带截止频率：上限截止频率 $fs2(\omega s2)$ ，下限截止频率 $fs1(\omega s1)$ 。

阻带衰减： A_s





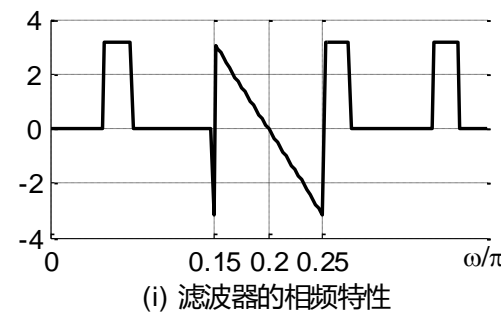
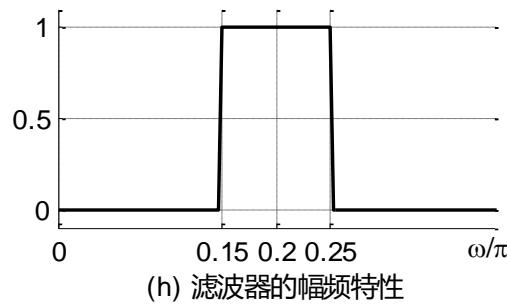
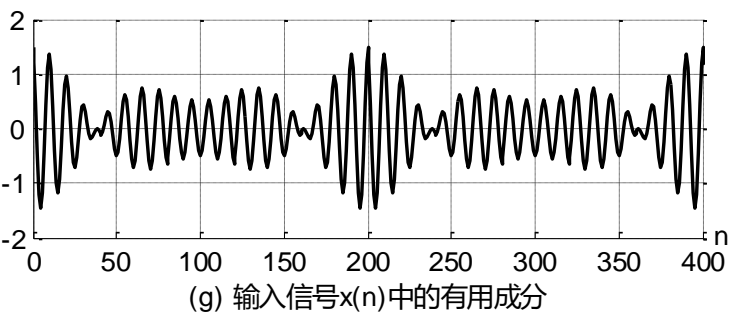
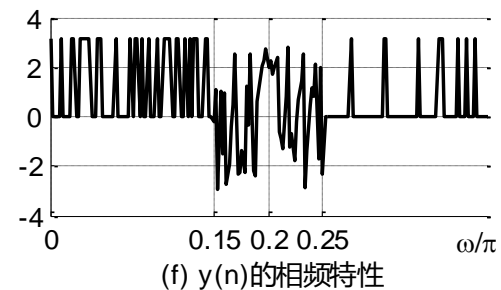
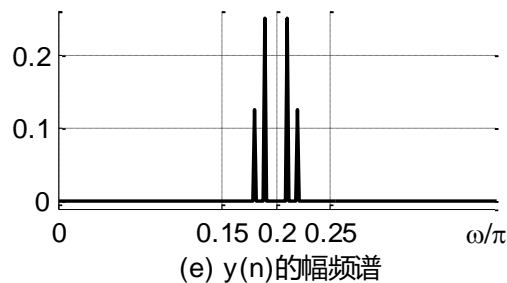
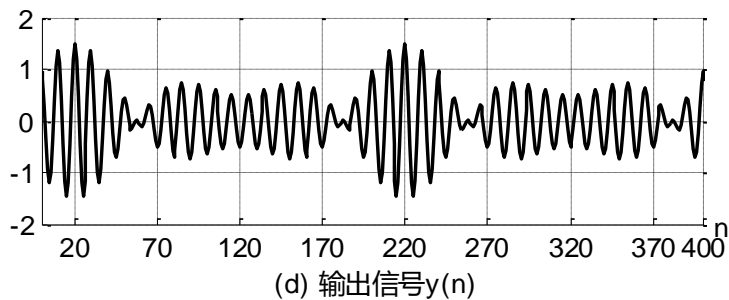
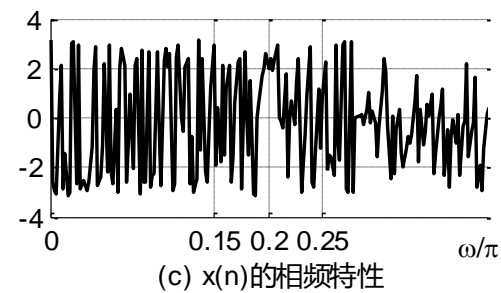
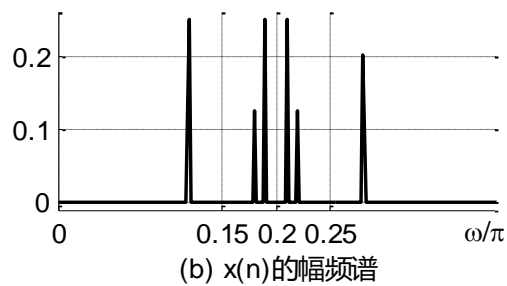
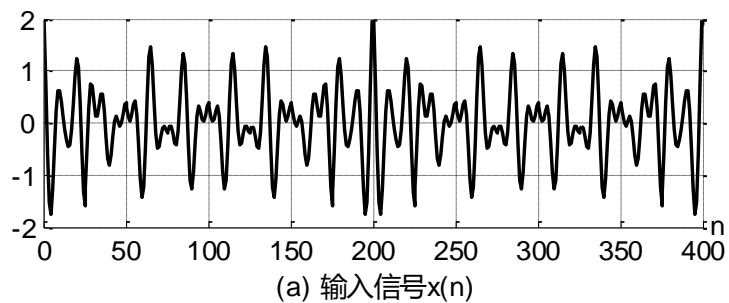
【例】某调幅波为

$$x(t) = (\cos(2\pi f_1 t) + 0.5\cos(2\pi f_2 t))\cos(2\pi f_c t) + 0.5\cos(2\pi f_{n1} t) + 0.4\cos(2\pi f_{n2} t)$$

其中基波频率 $f_1=50\text{Hz}$, $f_2=100\text{ Hz}$, 载波频率 $f_c=10^3\text{Hz}$, 干扰频率 $f_{n1}=600\text{Hz}$, $f_{n2}=1400\text{Hz}$ 。欲通过数字系统进行不失真传输, 设采样频率为 $f_s=10^4\text{ Hz}$, 系统延时量为20个采样单位。

- 1) 若 $x(t)$ 的采样序列为 $x(n)$, 给出 $x(n)$ 的表达式;
- 2) 根据题目要求给出数字传输系统的技术指标和理想频率特性;
- 3) 若理想数字传输系统的输出序列为 $y(n)=T[x(n)]$, 给出 $y(n)$ 的表达式。





3. 数字滤波器设计方法

一般来讲，数字滤波器的设计过程包括：

- S1.按照设计任务，确定数字滤波器的性能要求，归结出**设计指标**；
- S2.用一个满足设计指标的因果稳定的系统函数去逼近这个性能要求，即数字滤波器的系统设计（即获得**合适的系统函数**或单位脉冲响应序列或差分方程）；
- S3.根据 $H(z)$ 的零极点逼近要求和容差范围，选择恰当的算法结构去实现这个系统，即 $H(z)$ 的**算法结构选择及误差估计**；
- S4.用硬件或软件实现，并进行设计结果的**检验与调整**。如果符合要求，设计工作完成；否则，要重新修正系统设计，即返回到S2，直到设计结果符合要求。



3. 数字滤波器设计方法



IIR滤波器设计方法

直接法： 直接在频域或者时域中设计数字滤波器

间接法： 借助于模拟滤波器的设计原型进行设计的，又称滤波器的函数模型设计法，较常用。包括：

模拟滤波器原型介绍

模拟到数字滤波器的转换

数字滤波器的频带变换





■ 借助模拟滤波器的设计方法的基本步骤

- (1) 将DF的技术指标转换成AF的技术指标;
- (2) 按转换后技术指标、设计模拟低通滤波器的 $H_a(s)$;
- (3) 然后将 $H_a(s)$ 按某种方法转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。
- (4) 如果不是低通, 则必须先将其转换成低通 AF的技术指标。

■ 设计过程中用到的两种变换

频带变换: 将低通变换为高通、带通、带阻滤波器

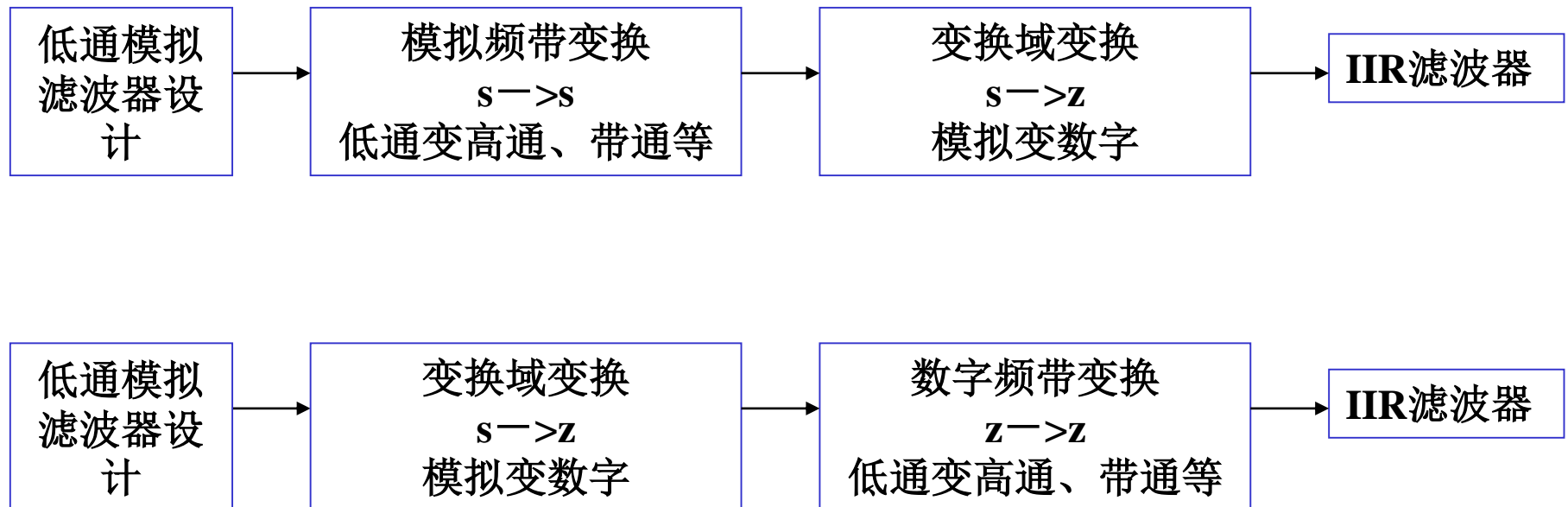
变换域变换: 将模拟滤波器转换成数字滤波器, 从 $s \rightarrow z$

或者 $H_a(s) \rightarrow H(z)$ 的变换





■ 以模拟滤波器为基础的两钟设计方法





■ IIR滤波器的间接设计是以模拟滤波器为基础的, 有若干典型的模拟滤波器原型可供选择:

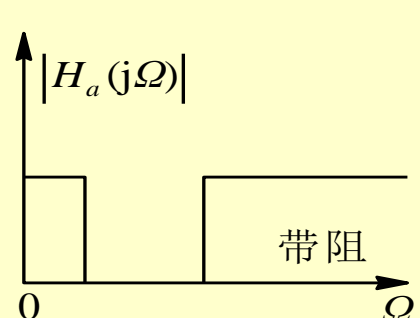
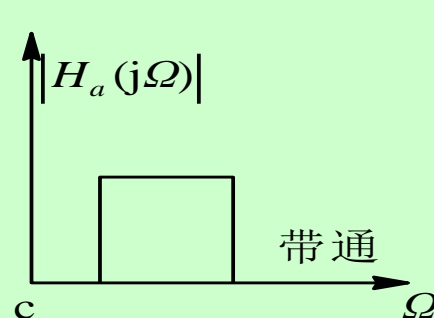
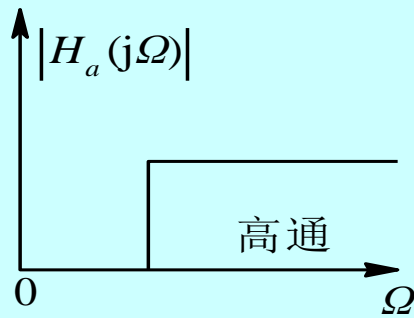
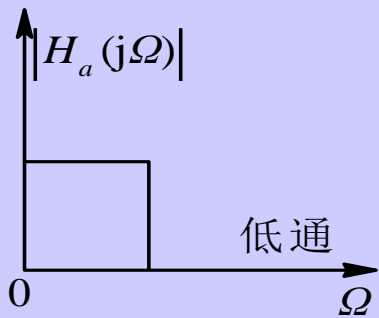
- 巴特沃斯滤波器: 具有单调下降的幅频特性
- 切比雪夫滤波器: 幅频特性在通带或者阻带有等波纹特性, 可以提高选择性
- 椭圆滤波器: 选择性相对前两种是最好的, 但通带和阻带内均呈现等波纹幅频特性, 相位特性的非线性也稍严重
- 贝塞尔滤波器



6.2 模拟滤波器的设计

理论和设计方法相当成熟，有若干典型的模拟滤波器可以选择。如：**巴特沃斯(Butterworth)滤波器**、**切比雪夫(Chebyshev)滤波器**、**椭圆(Ellipse)滤波器**、**贝塞尔(Bessel)滤波器**等，这些滤波器都有严格的设计公式、现成的曲线和图表供设计人员使用。

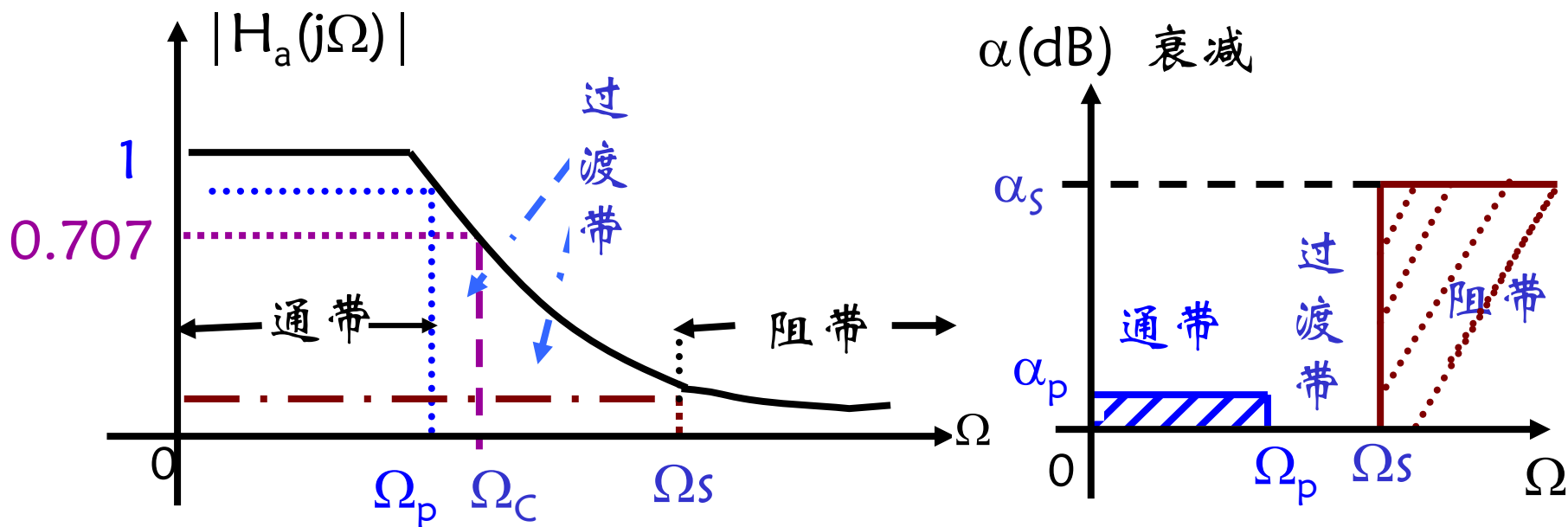
1、各种理想模拟滤波器的幅度特性



2、模拟低通滤波器的设计指标

低通设计指标:

- Ω_p 和 Ω_s 分别称为**通带截止频率**和**阻带截止频率**;
- Ω_c 称为**3dB截止频率**
- α_p 是通带 $\Omega(=0\sim\Omega_p)$ 中的**最大衰减系数**,
- α_s 是阻带 $\Omega\geq\Omega_s$ 的**最小衰减系数**,



α_p 和 α_s 一般用dB表示。对于单调下降的幅度特性，可表示成：

$$\alpha_p = 10 \lg \frac{|H_a(j0)|^2}{|H_a(j\Omega_p)|^2} \quad \alpha_s = 10 \lg \frac{|H_a(j0)|^2}{|H_a(j\Omega_s)|^2}$$

如果 $\Omega=0$ 处幅度已归一化到1，
即： $|H_a(j0)|=1$

$$\alpha_p = -10 \lg |H_a(j\Omega_p)|^2 \quad \alpha_s = -10 \lg |H_a(j\Omega_s)|^2$$

图中 Ω_c 称为3dB截止频率

$$|H_a(j\Omega_c)| = 1/\sqrt{2}$$

$$-20 \lg |H_a(j\Omega_c)| = 3dB$$



3、用模拟滤波器逼近方法设计数字IIR滤波器步骤

- 给出模拟滤波器的技术指标；
- 设计**传输函数 $H_a(s)$** ：使其**幅度平方函数**满足给定指标 a_p 和 a_s ，
$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega) \cdot H_a^*(j\Omega) = H_a(s) \cdot H_a(-s)|_{s=j\Omega}$$
- **确定 $H_a(s)$** ：系统 $H_a(s)$ 应是因果稳定的系统，因此，极点应位于S 左半平面内。



4、Butterworth 低通滤波器的设计方法

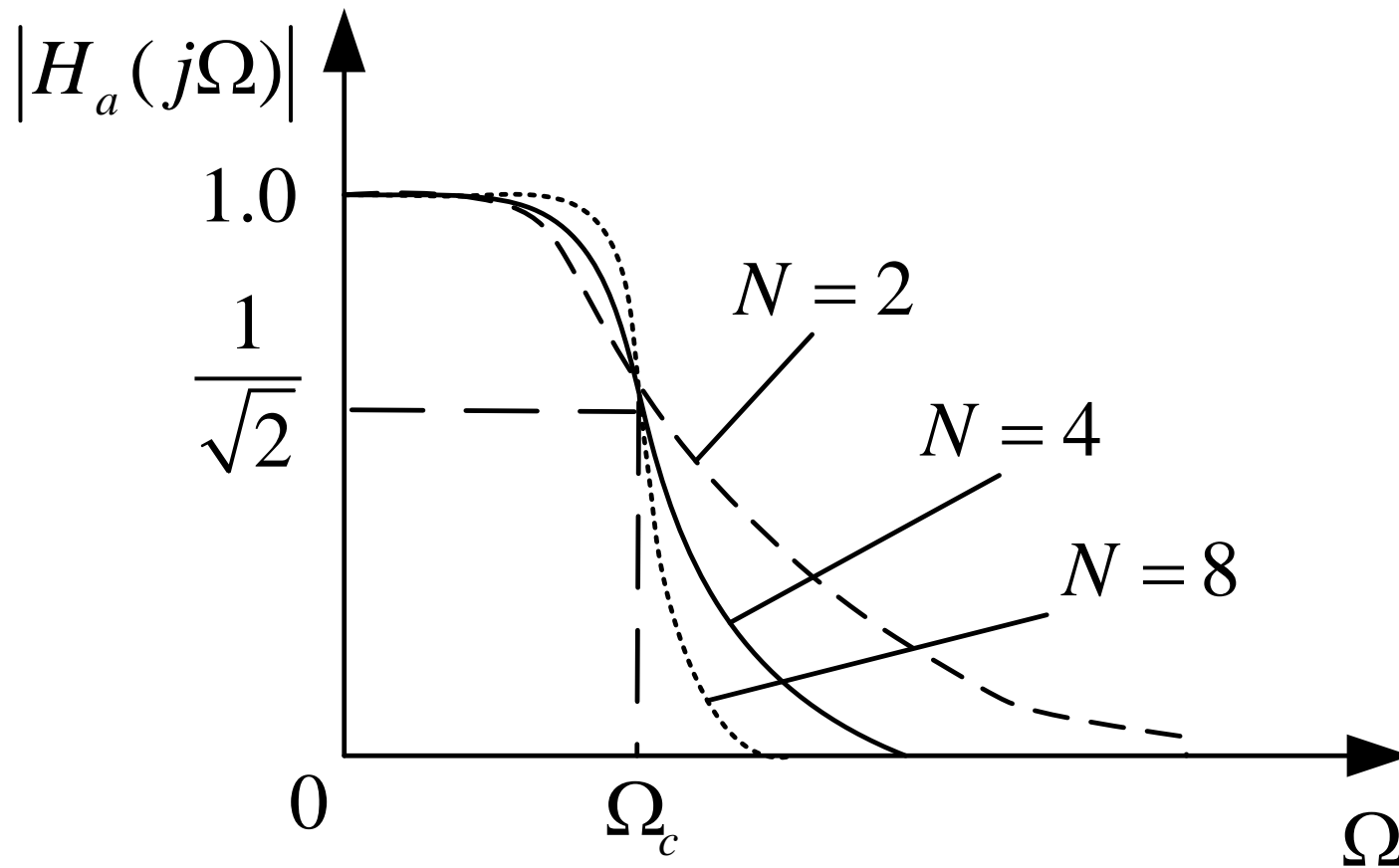
- 特点：通带和阻带的幅度响应都是平的
- 巴特沃斯低通滤波器的幅度平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 用下式表示：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}}$$

- 当 $\Omega=0$ 时, $|H(j\Omega)|=1$;
- 当 $\Omega=\Omega_c$ 时, $|H(j\Omega)|= 1 / \sqrt{2}$
 Ω_c 是3dB截止频率。
- N: 滤波器阶数。



■ 巴特沃斯模拟低通滤波器幅频响应与阶数 N 的关系



◆ 巴特沃斯模拟低通滤波器的性质

- 幅频响应平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 是 Ω 的单调减函数

$$\frac{d|H_a(j\Omega)|^2}{d\Omega} = -\frac{2N(\Omega/\Omega_c)^{2N-1}}{[1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}]^2} < 0$$

- $\Omega > \Omega_c$, 随 Ω 增大, $|H_a(j\Omega)|$ 迅速下降, N 越大, 幅度下降越快, 过渡带越窄, $N \rightarrow \infty$ 时, 向于理想低通滤波器
- 在 $\Omega=0$ 处各阶导数存在且等于0, 因此在该点得到最大值





■ 巴特沃斯滤波器的系统函数

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{(j\Omega_c)^{2N}}{s^{2N} + (j\Omega_c)^{2N}} = \frac{(j\Omega_c)^{2N}}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_{2N})}$$

此式表明幅度平方函数有 $2N$ 个极点，极点 s_k 用下式表示：

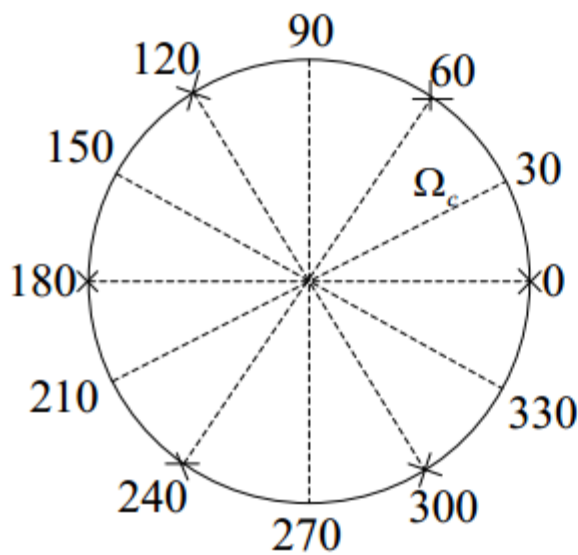
$$s_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}\right)} \quad \text{其中, } k=0,1,\dots,(2N-1)$$



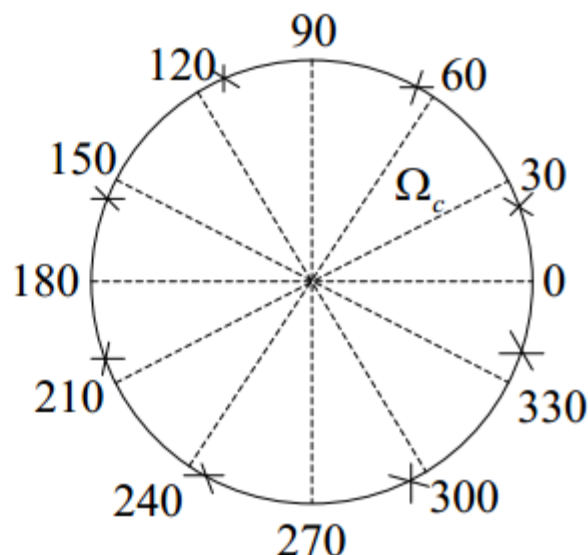
◆ $2N$ 个极点等间隔分布在半径为 Ω_c 的圆上，间隔是 π/N rad

◆ 当 N 为奇数时，极点为 $\Omega_c e^{j\pi(k-1)/N}$ 其中， $k=1,\dots,2N$

◆ 当 N 为偶数时，极点为 $\Omega_c e^{j\pi(k-1/2)/N}$ 其中， $k=1,\dots,2N$



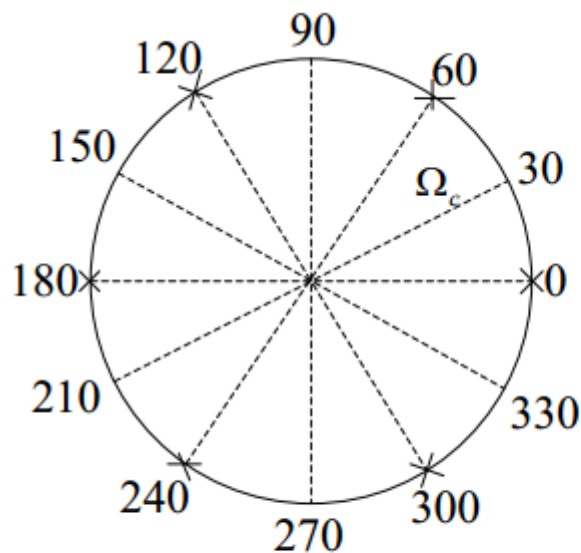
N=3
(a)



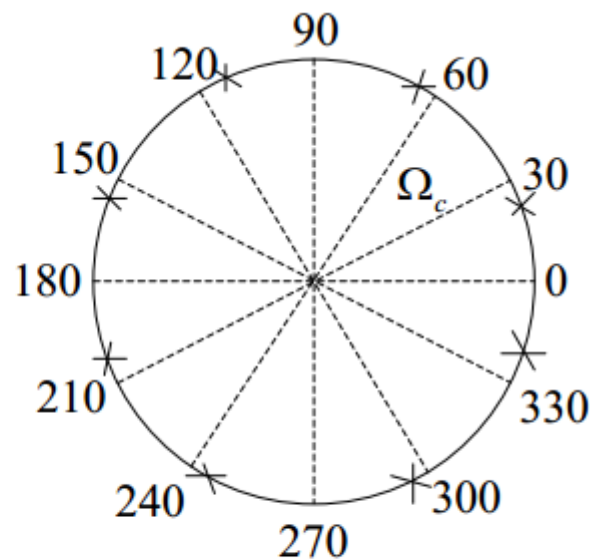
N=4
(b)

三阶和四阶巴特沃斯滤波器幅频响应平方函数的极点分布图





N=3
(a)




N=4
(b)

◆ 极点关于虚轴 $j\Omega$ 对称

◆ 极点绝不会落在虚轴上，只有当 N 为奇数时会落在实轴上

◆ 巴特沃斯滤波器没有零点





◆ 左半平面 N 个点构成 $H_a(s)$ 传输函数，右半平面 N 个点构成 $H_a(-s)$ 传输函数。

◆ 极点要满足：
$$\frac{\pi}{2} < \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N} \right) < \frac{3\pi}{2} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

◆ N 阶巴特沃斯模拟低通滤波器 N 个极点

$$s_k = \Omega_c e^{j\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N} \right)} \quad \text{其中, } k=0,1,\dots,(N-1)$$

◆ 系统函数 $H_a(s)$

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (s - s_k)}$$



例：给定 $|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+64\Omega^6}$ ，确定模拟滤波器的系统函数

解：

(1) 根据给定的模拟滤波器的平方幅频响应得：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} \qquad |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{0.5}\right)^{2*3}}$$

(2) 系统函数：

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{(0.5)^3}{(s-0.5e^{j2\pi/3})(s-0.5e^{j\pi})(s-0.5e^{-j2\pi/3})} \\ &= \frac{0.125}{(s+0.5)(s^2+0.5s+0.25)} \end{aligned}$$



- ◆ 由于各滤波器的幅频特性不同，为使设计统一，采用对3dB截止频率 Ω_c 归一化，归一化后的 $H_a(s)$ 表示为：

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (s - s_k)} \quad \longrightarrow \quad H_a(s) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1} \left(\frac{s}{\Omega_c} - \frac{s_k}{\Omega_c} \right)}$$

- ◆ 令 $s/\Omega_c = j\Omega/\Omega_c$ ， $\lambda = \Omega/\Omega_c$ ， λ 称为归一化频率，令 $p = j\lambda$ ， p 称为归一化复变量，归一化巴特沃斯的传输函数为：

$$H_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1} (p - p_k)}$$

归一化极点 $p_k = e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}\right)}$, $k=0,1,\dots,N-1$ 。



巴特沃斯滤波器的设计步骤



(1) 根据给出的技术指标 α_p 、 α_s 、 Ω_p 、 Ω_s ，求滤波器阶数 N

$$\begin{cases} \alpha_p = -10 \lg |H(j\Omega_p)|^2 \\ |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1 + (\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^{2N} = 10^{a_p/10} \\ 1 + (\frac{\Omega_s}{\Omega_c})^{2N} = 10^{a_s/10} \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)^N = \sqrt{\frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1}} \quad \text{设: } \lambda_{sp} = \Omega_s / \Omega_p, k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1}} \quad \rightarrow \quad N = \frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}$$

用上式求出的 N 可能有小数部分，应取大于等于 N 的最小整数。



(2) 求归一化极点 p_k ，确定归一化传输函数 $H_a(p)$

- 根据求极点公式： $p_k = e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}\right)}$ ， $k=0,1,\dots,N-1$ 。

$$H_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1} (p - p_k)}$$

- 或根据阶数 N ，查表P157 表6.2.1得到极点和归一化传输函数

(3) 求3dB截止频率 Ω_c

由： $|H(j\Omega)|^2 = 1/[1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}]$ ， $\Omega = \Omega_p$ 时：

$$1 + (\Omega_p/\Omega_c)^{2N} = 10^{\alpha_p/10}$$
$$\Omega_{cp} = \Omega_p (10^{0.1a_p} - 1)^{-\frac{1}{2N}}$$

阻带指标有
富裕度

$$\Omega_{cs} = \Omega_s (10^{0.1a_s} - 1)^{-\frac{1}{2N}}$$

通带指标有
富裕度



(4) 将 $H_a(p)$ 去归一化，得到实际的滤波器传输函数 $H_a(s)$

将 $p=s/\Omega_c$ ，代入 $H_a(p)$ 中得： $H_a(s)=H_a(p)|_{p=s/\Omega_c}$

表6.2.1 巴特沃斯归一化低通滤波器参数

极点位置 阶数 N	$P_{0,N-1}$	$P_{1,N-2}$	$P_{2,N-3}$	$P_{3,N-4}$	P_4
1	-1.0000				
2	-0.7071±j0.7071				
3	-0.5000±j0.8660	-1.0000			
4	-0.3827±j0.9239	-0.9239±j0.3827			
5	-0.3090±j0.9511	-0.8090±j0.5878	-1.0000		
6	-0.2588±j0.9659	-0.7071±j0.7071	-0.9659±j0.2588		
7	-0.2225±j0.9749	-0.6235±j0.7818	-0.9010±j0.4339	-1.0000	
8	0.1951±j0.9808	0.5556±j0.8315	-0.8315±j0.5556	-0.9808±j0.1951	
9	-0.1736±j0.9848	-0.5000±j0.8660	-0.7660±j0.6428	-0.9397±j0.3420	-1.0000

表示两极点 P_1 、 P_{N-2}



表6.2.1 巴特沃斯归一化低通滤波器参数

分母多项式	$B(p) = p^N + b_{N-1}p^{N-1} + b_{N-2}p^{N-2} + \dots + b_1p + b_0$								
系数阶数 N	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
1	1.0000								
2	1.0000	1.4142							
3	1.0000	2.0000	2.0000						
4	1.0000	2.6131	3.4142	2.613					
5	1.0000	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361				
6	1.0000	3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637			
7	1.0000	4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940		
8	1.0000	5.1258	13.1371	21.8462	25.6884	21.8642	13.1371	5.1258	
9	1.0000	5.7588	16.5817	31.1634	41.9864	41.9864	31.1634	16.5817	5.7588



表6.2.1 巴特沃斯归一化低通滤波器参数

分母因式 阶数 N	$B(p) = B_1(p)B_2(p)B_3(p)B_4(p)B_5(p)$ $B(p)$
1	$(p+1)$
2	$(p^2+1.4142p+1)$
3	$(p^2+p+1)(p+1)$
4	$(p^2+0.7654p+1)(p^2+1.8478p+1)$
5	$(p^2+0.6180p+1)(p^2+1.6180p+1)(p+1)$
6	$(p^2+0.5176p+1)(p^2+1.4142p+1)(p^2+1.9319p+1)$
7	$(p^2+0.4450p+1)(p^2+1.2470p+1)(p^2+1.8019p+1)(p+1)$
8	$(p^2+0.3902p+1)(p^2+1.1111p+1)(p^2+1.6629p+1)(p^2+1.9616p+1)$
9	$(p^2+0.3473p+1)(p^2+p+1)(p^2+1.5321p+1)(p^2+1.8794p+1)(p+1)$



例：已知通带截止频率 $f_p=5\text{kHz}$ ，通带最大衰减 $\alpha_p=2\text{dB}$ ，阻带截止频率 $f_s=12\text{kHz}$ ，阻带最小衰减 $\alpha_s=30\text{dB}$ ，按照以上技术指标设计巴特沃斯低通滤波器。

解：(1) 设计模拟滤波器的指标为

$$\Omega_p=2\pi f_p=\pi\cdot 10^4(\text{rad/s}), \quad a_p=2\text{dB}$$

$$\Omega_s=2\pi f_s=2.4\pi\times 10^4(\text{rad/s}), \quad a_s=30\text{dB}$$

(2) 确定滤波器的阶数 N

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1a_s} - 1}{10^{0.1a_p} - 1}} = 41.3223 \quad \lambda_{sp} = \frac{2\pi f_s}{2\pi f_p} = 2.4$$

$$N = \frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = 4.25$$

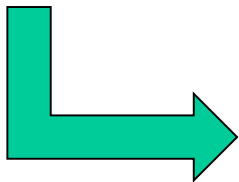
取 N 为5



(3) 求极点

$$p_k = e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}\right)}$$

$$p_0 = e^{j\frac{3}{5}\pi} \quad p_1 = e^{j\frac{4}{5}\pi} \quad p_2 = e^{j\pi} \quad p_3 = e^{j\frac{6}{5}\pi} \quad p_4 = e^{j\frac{7}{5}\pi}$$



$$H_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^4 (p - p_k)}$$

最简便的方法：由N=5，直接查表得到：

- 极点形式：-0.3090±j0.9511； -0.8090±j0.5878； -1.0000
- 分母多项式的形式：

$$H_a(p) = \frac{1}{p^5 + b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$$



(4) 将 $H_a(p)$ 去归一化，先求3dB截止频率 Ω_c

$$\Omega_c = \Omega_p (10^{0.1a_p} - 1)^{-\frac{1}{2N}} = 2\pi \times 5.2755 \text{krad} / s$$

(5) 将 $p=s/\Omega_c$ 代入 $H_a(p)$ 中得到：

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^5}{s^5 + b_4\Omega_c s^4 + b_3\Omega_c^2 s^3 + b_2\Omega_c^3 s^2 + b_1\Omega_c^4 s + b_0\Omega_c^5}$$

$$b_0=1.0000、b_1=3.2361、b_2=5.2361、b_3=5.2361、b_4=3.2361$$



例：已知巴特沃斯低通滤波器具有500Hz的3dB带宽，并在1000Hz处有40dB的衰减，请确定该滤波器的阶数和极点位置。

解：

(1) 设计模拟滤波器的指标为

$$\Omega_c = 2\pi f_p = 1000\pi \text{ (rad/s)},$$

$$\Omega_s = 2\pi f_s = 2000\pi \text{ (rad/s)},$$

$$a_s = 40\text{dB}$$

(2) 确定滤波器的阶数N

$$1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{a_s/10} \quad \longrightarrow \quad N = 6.64$$

(3) 确定极点位置

$$s_k = 1000\pi e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{14}\right)} \quad \text{其中, } k=0,1,\dots,6$$



巴特沃斯滤波器的设计步骤



(1) 根据给出的技术指标 α_p 、 α_s 、 Ω_p 、 Ω_s ，确定滤波器阶数 N

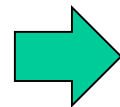
$$N = \frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}$$

$$\lambda_{sp} = \Omega_s / \Omega_p, k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1}}$$

取大于等于 N 的最小整数。

(2) 求归一化极点 p_k ，确定归一化传输函数 $H_a(p)$

$$p_k = e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N}\right)} \quad k=0,1,\dots,N-1$$



$$H_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1} (p - p_k)}$$



巴特沃斯滤波器的设计步骤

(3) 求3dB截止频率 Ω_c

$$\Omega_{cp} = \Omega_p (10^{0.1a_p} - 1)^{-\frac{1}{2N}}$$

$$\Omega_{cs} = \Omega_s (10^{0.1a_s} - 1)^{-\frac{1}{2N}}$$

实际设计时, Ω_c 可在 $[\Omega_{cp}, \Omega_{cs}]$ 范围之内

(4)去归一化得到实际的滤波器系统函数

$$H_a(s) = H_a(p) \big|_{p=s/\Omega_c}$$



切比雪夫低通滤波器的设计方法



◆ 巴特沃斯通带和阻带内都是单调的

- 巴特沃斯低通滤波器的**缺点**是阶次较高，**原因**是它的频率特性在通带和阻带内都是随 Ω 的增大而单调减小，如果在通带（阻带）满足指标，则在阻带（通带）内肯定有富裕量。
- 更为有效的设计方法应该是将逼近精确度均匀的分布在整个通带内，或者均匀的分布在整个阻带内，或者均匀的分布在两者之内，可有效降低滤波器阶数
- 可通过选择具有等波纹特性的逼近函数来实现

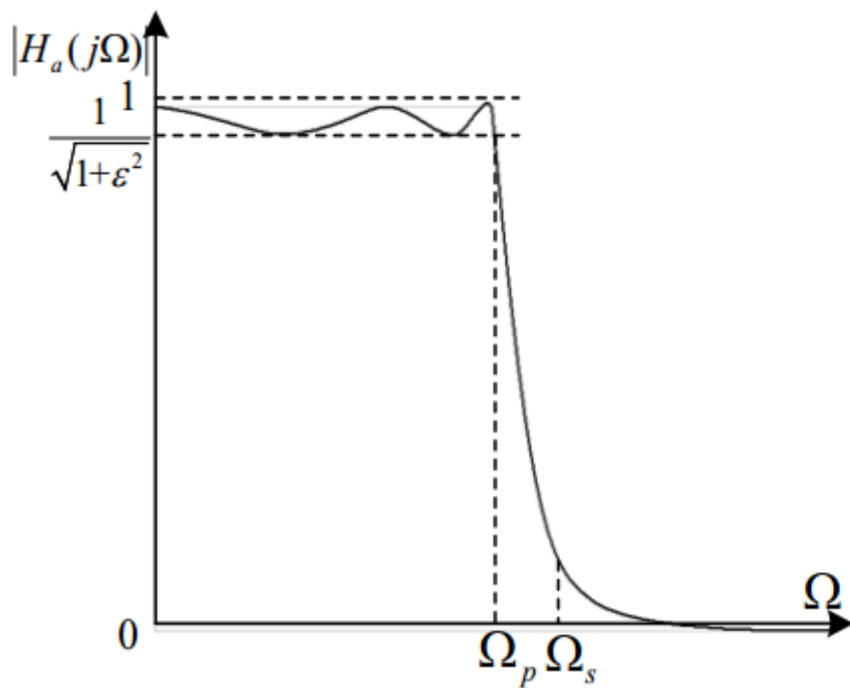
◆ 切比雪夫模拟低通滤波器的幅频响应在一个**频带中具有等波纹特性**

- Chebyshev-I filters 通带等波纹响应
- Chebyshev-II filters 阻带等波纹响应

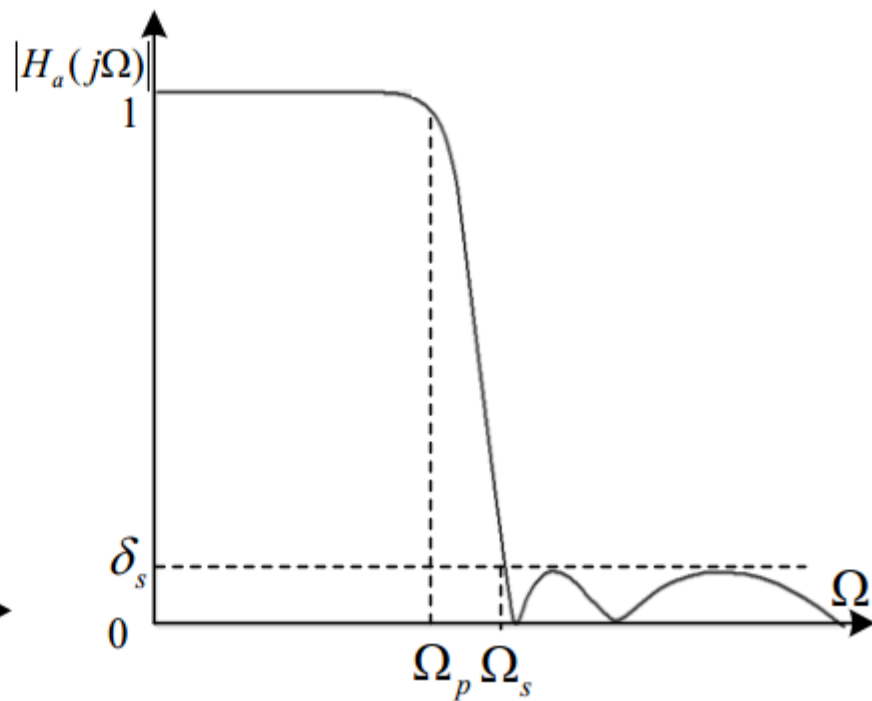
◆ 在相同的指标下, 切比雪夫滤波器比巴特沃思滤波器有更低的阶数



切比雪夫低通滤波器的设计方法



(a) 切比雪夫I型低通滤波器



(b) 切比雪夫II型低通滤波器





切比雪夫I型滤波器的平方幅度响应为：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$$

- ε 是小于1的正数，表示滤波器通带内幅度波动的程度， ε 愈大，幅度波动也愈大； Ω_p 是通带截止频率， $C_N(x)$ 是 N 阶切比雪夫多项式

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos[N \arccos(x)] & |x| \leq 1 \\ \cosh[N \operatorname{arcosh}(x)] & |x| > 1 \end{cases}$$

$$C_0(x) = 1, C_1(x) = x, C_2(x) = 2x^2 - 1 \dots$$

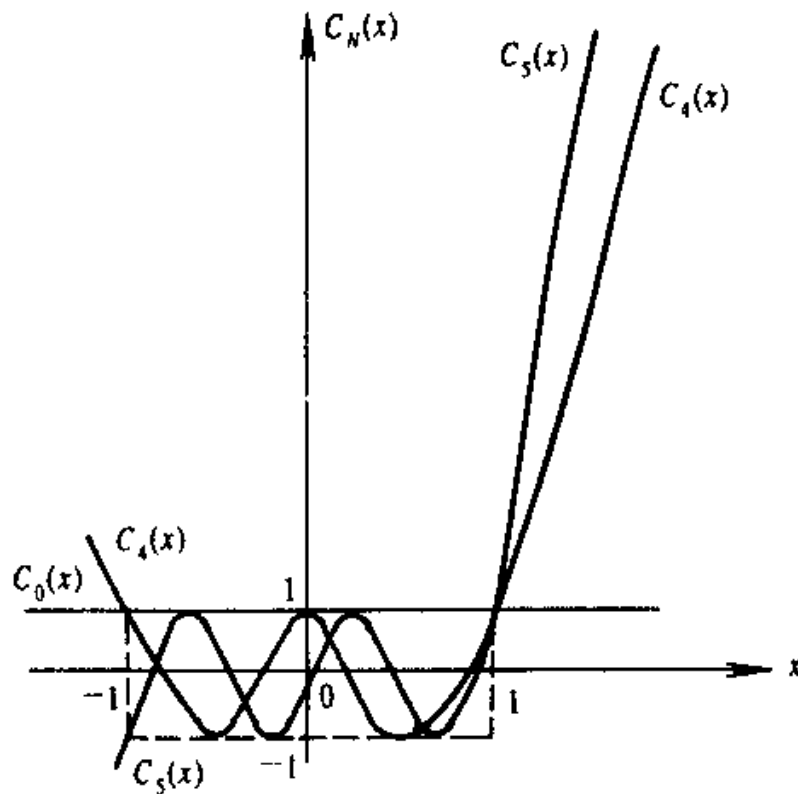
$$C_{N+1}(x) = 2xC_N(x) - C_{N-1}(x)$$



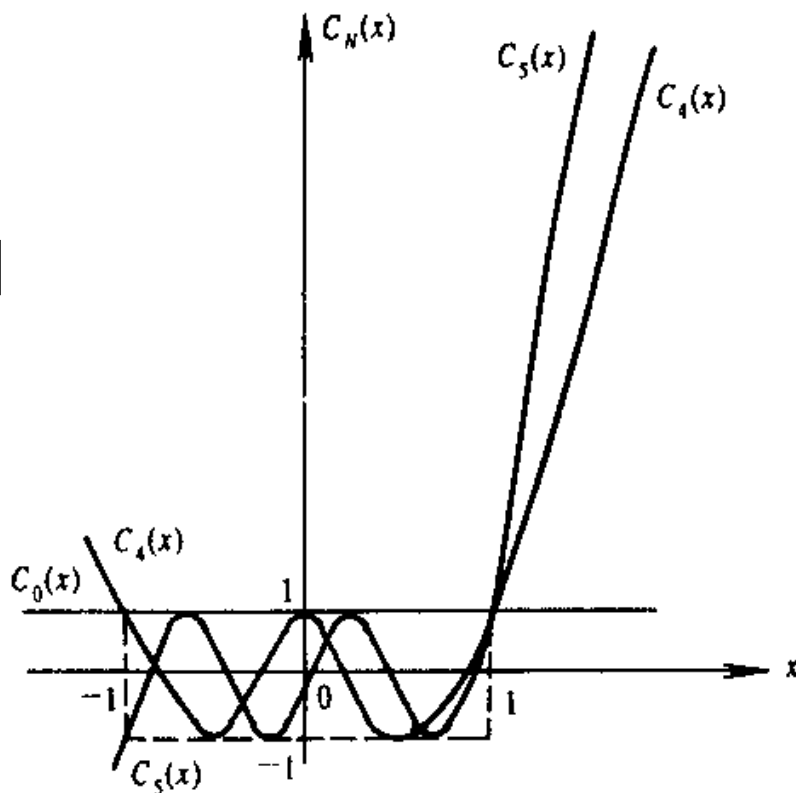
◆ 切比雪夫多项式的特性

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos[N \arccos(x)] & |x| \leq 1 \\ \cosh[N \operatorname{arcosh}(x)] & |x| > 1 \end{cases}$$

- 当 $|x| \leq 1$ 时, $|C_N(x)| \leq 1$ 。 $C_N(x)$ 在 -1 和 $+1$ 之间振荡, 振荡的次数与 N 成正比, 具有等波纹性
- 当 $|x| > 1$ 时, $|C_N(x)| > 1$, 且 $|C_N(x)|$ 随着 $|x|$ 的增大而单调上升



- 当 $|x| \leq 1$ 时, $\varepsilon^2 C_N^2(x)$ 在0和 ε^2 之间波动, 函数 $1 + \varepsilon^2 C_N^2(x)$ 的倒数是平方幅度响应 $|H(j\Omega_p)|^2$, 其在 $[0, \Omega_p]$ 上有等波纹波动, 最大值为1, 最小值为 $1/(1 + \varepsilon^2)$
- N 相同时, 切比雪夫I型低通滤波器具有较窄的过渡带



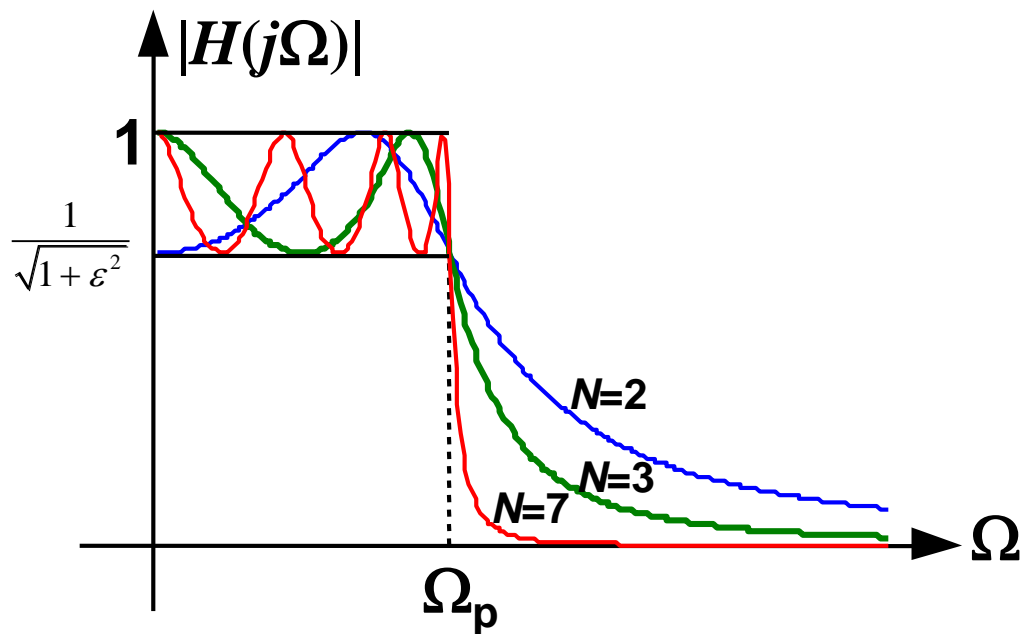
◆ 切比雪夫多项式的特性

➤ 当 $\Omega=0$ 时,

$$|H_a(j0)| = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} & N = \text{偶数} \\ 1 & N = \text{奇数} \end{cases}$$

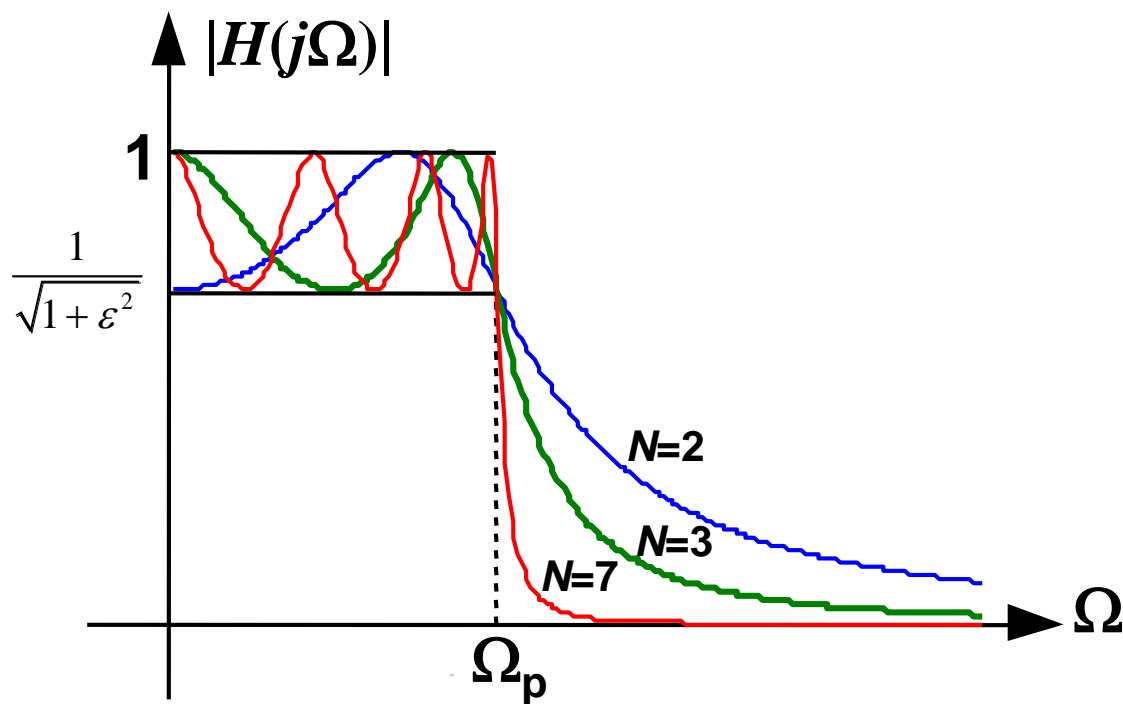
➤ $|H(j\Omega_p)|$ 的大小只决定于通带波纹参数 ε 的值而与阶数 N 的值无关

$$|H(j\Omega_p)| = 1 - \delta_p = 1 / \sqrt{1 + \varepsilon^2}$$



◆ 切比雪夫多项式的特性

- 当 $\Omega \in [0, \Omega_p]$ 时, $|H(j\Omega)|$ 在 1 和 $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ 之间等波纹起伏, 起伏波纹的极大、极小值的个数为 N 个;
- 当 $\Omega > \Omega_p$ 时, $|H(j\Omega)|$ 呈现单调减的特性, 且 N 越大幅度衰减得越快。



◆ 切比雪夫I型低通滤波器的设计步骤

(1) 确定滤波器的技术指标 α_p 、 α_s 、 Ω_p 、 Ω_s

$$\alpha_p = 10 \lg \frac{\max |H_a(j\Omega)|^2}{\min |H_a(j\Omega)|^2} = 10 \lg(1 + \varepsilon^2), \quad \Omega \leq \Omega_p$$

$$\alpha_s = -10 \lg |H_a(j\Omega_s)|^2$$

$$\Omega_c = \Omega_p \cosh\left[\frac{1}{N} \operatorname{arcosh}(1/\varepsilon)\right]$$

(2) 确定 ε

$$\varepsilon^2 = 10^{0.1\alpha_p} - 1$$



◆ 设计切比雪夫I型低通滤波器

(3) 求出滤波器的阶数 N , 取 N 为比计算结果大的最小整数

$$N = \text{arcosh}\left(\frac{10^{0.1\alpha_s} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}\right)^{\frac{1}{2}} / \text{arcosh}(\lambda_s) \quad \lambda_s = \Omega_s / \Omega_p$$

(4) 由下式求归一化切比雪夫I型低通滤波器的极点

$$|H_a(j\Omega)|_{\Omega=s/j}^2 = H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{s}{j\Omega_p}\right)}$$

$$s_i = \sigma_i + j\Omega_i \quad i = 1, 2, 3 \cdots N$$

$$\frac{\sigma_i^2}{(\Omega_p a)^2} + \frac{\Omega_i^2}{(\Omega_p b)^2} = 1$$





$$a = \frac{1}{2} \left(\beta^{\frac{1}{N}} - \beta^{-\frac{1}{N}} \right)$$

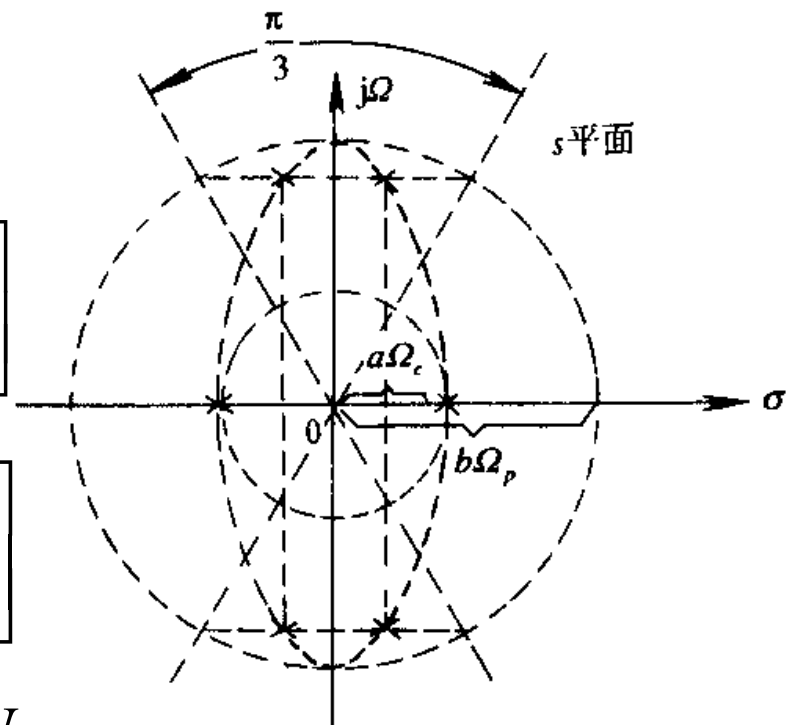
$$\beta = \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1}$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\beta^{\frac{1}{N}} + \beta^{-\frac{1}{N}} \right)$$

$$\sigma_i = -\Omega_p a \sin \left[\frac{\pi}{2N} (2i-1) \right]$$

$$\Omega_i = \Omega_p b \cos \left[\frac{\pi}{2N} (2i-1) \right]$$

$$s_i = \sigma_i + j\Omega_i \quad i = 1, 2, 3 \dots N$$



◆ 设计切比雪夫I型低通滤波器


(5) 求归一化切比雪夫I型低通滤波器的系统函数

$$H_a(p) = \frac{1}{\varepsilon \cdot 2^{N-1} \prod_{i=1}^N (p - p_i)}$$

(6) 去归一化切比雪夫I型低通滤波器的系统函数

$$H_a(s) = H_a(p) \Big|_{p=s/\Omega_p} = \frac{\Omega_p^N}{\varepsilon \cdot 2^{N-1} \prod_{i=1}^N (s - p_i \Omega_p)}$$





例6.2.2 设计低通切比雪夫滤波器，要求通带截止频率
 $f_p=3\text{kHz}$ ，通带最大衰减 $\alpha_p=0.1\text{dB}$ ，阻带截止频率
 $f_s=12\text{kHz}$ ，阻带最小衰减 $\alpha_s=60\text{dB}$ 。

解：

(1) 滤波器的技术要求：

$$\alpha_p = 0.1\text{dB}, \quad \Omega_p = 2\pi f_p$$

$$\alpha_s = 60\text{dB}, \quad \Omega_s = 2\pi f_s$$

$$\lambda_p = 1, \quad \lambda_s = \frac{f_s}{f_p} = 4$$



(2) 求阶数 N 和 ε :

$$N = \frac{\operatorname{arccosh}(k_1^{-1})}{\operatorname{arccosh}(\lambda_s)}$$

$$k_1^{-1} = \sqrt{\frac{10^{0.1a_s} - 1}{10^{0.1a_p} - 1}} = 6553$$

$$N = \frac{\operatorname{arccosh}(6553)}{\operatorname{arccosh}(4)} = \frac{9.47}{2.06} = 4.6, \quad N = 5$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1a_p} - 1} = \sqrt{10^{0.01} - 1} = 0.1526$$





(3) 求 $H_a(p)$:

$$H_a(p) = \frac{1}{0.1526 \cdot 2^{(5-1)} \prod_{i=1}^5 (p - p_i)}$$

由(6.2.32)式求出 $N=5$ 时的极点 p_i , 代入上式, 得到:

$$H_a(p) = \frac{1}{2.442(p + 0.5389)(p^2 + 0.3331p + 1.1949)} \cdot \frac{1}{p^2 + 0.8720p + 0.6359}$$

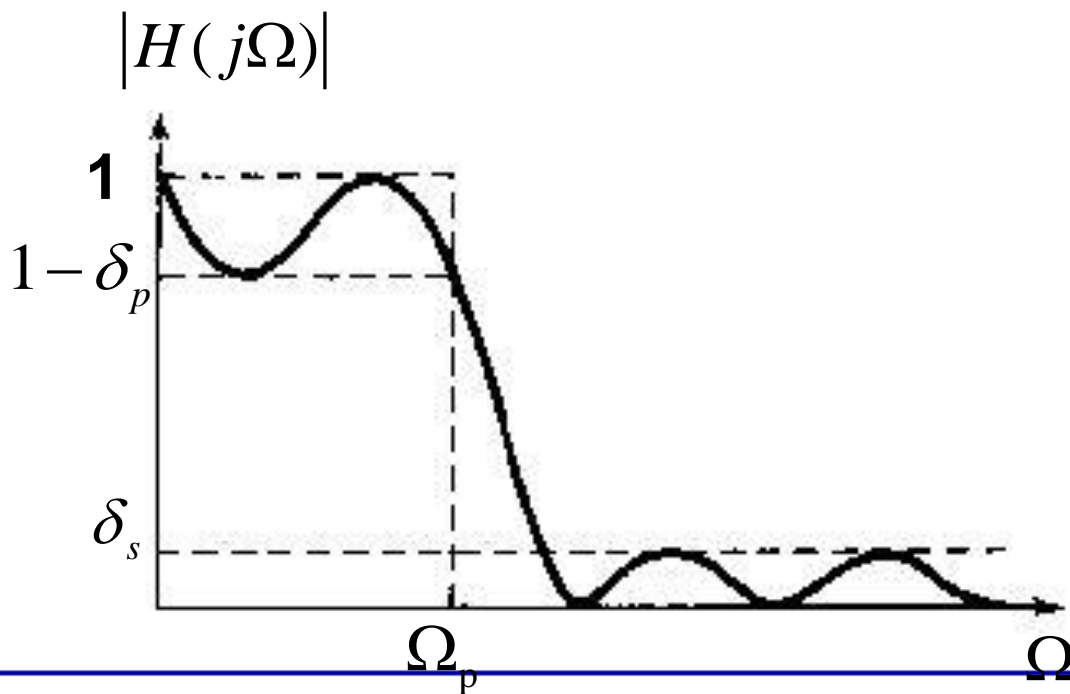
(4)将 $H_a(p)$ 去归一化, 得到:

$$H_a(s) = H_a(p) \Big|_{p=s/\Omega_p} = \frac{1}{(s + 1.0158 \times 10^7)(s^2 + 6.2788 \times 10^6 s + 4.2459 \times 10^{14})} \cdot \frac{1}{s^2 + 1.6437 \times 10^7 s + 2.2595 \times 10^{14}}$$



椭圆模拟低通滤波器

- 通带和阻带均具有等波纹响应，幅频响应特性与FIR等波纹滤波器类似
- 平方幅频响应函数 $|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_N^2(\Omega / \Omega_p)}$
- 其中 $U_N(x)$ 是 N 阶雅可比椭圆函数



模拟低通滤波器性能对比

◆ 当阶数相同时，对相同的**通带最大衰减**和**阻带最小衰减**

- 巴特沃斯滤波器具有单调下降的幅频特性，**过渡带最宽**。两种类型的切比雪夫滤波器的**过渡带相等**，比巴特沃斯的过渡带窄，但比椭圆滤波器的过渡带宽
- 切比雪夫I型滤波器在通带具有等**波纹幅频特性**，过渡带和阻带是单调下降的幅频特性
- 切比雪夫II型滤波器的通带幅频响应几乎与巴特沃斯滤波器相同，阻带是等波纹幅频特性
- 椭圆滤波器的**过渡带最窄**，通带和阻带均是等波纹幅频特性



模拟低通滤波器性能对比

◆ 相位逼近情况

- 巴特沃斯和切比雪夫滤波器在大约**3/4的通带**上非常接近线性相位特性
- 椭圆滤波器仅在**半个通带**上非常接近线性相位特性
- 贝塞尔滤波器在**整个通带**逼近线性相位特性，而其幅频特性的过渡带比其他四种滤波器宽的多



模拟低通滤波器性能对比



◆ 复杂性

- 在满足相同的滤波器幅频响应指标条件下，巴特沃斯滤波器阶数最高，椭圆滤波器的阶数最低，而且阶数差别较大
- 因此，椭圆滤波器的性价比最高，应用较广泛

- ◆ 五种滤波器各具特点。工程实际中选择哪种滤波器取决于对滤波器阶数（阶数影响处理速度和实现的复杂性）和相位特性的具体要求



频率变换与模拟高通、带通、带阻滤波器的设计



如何设计模拟 高通、带通、带阻滤波器？



1. 模拟高通滤波器的设计

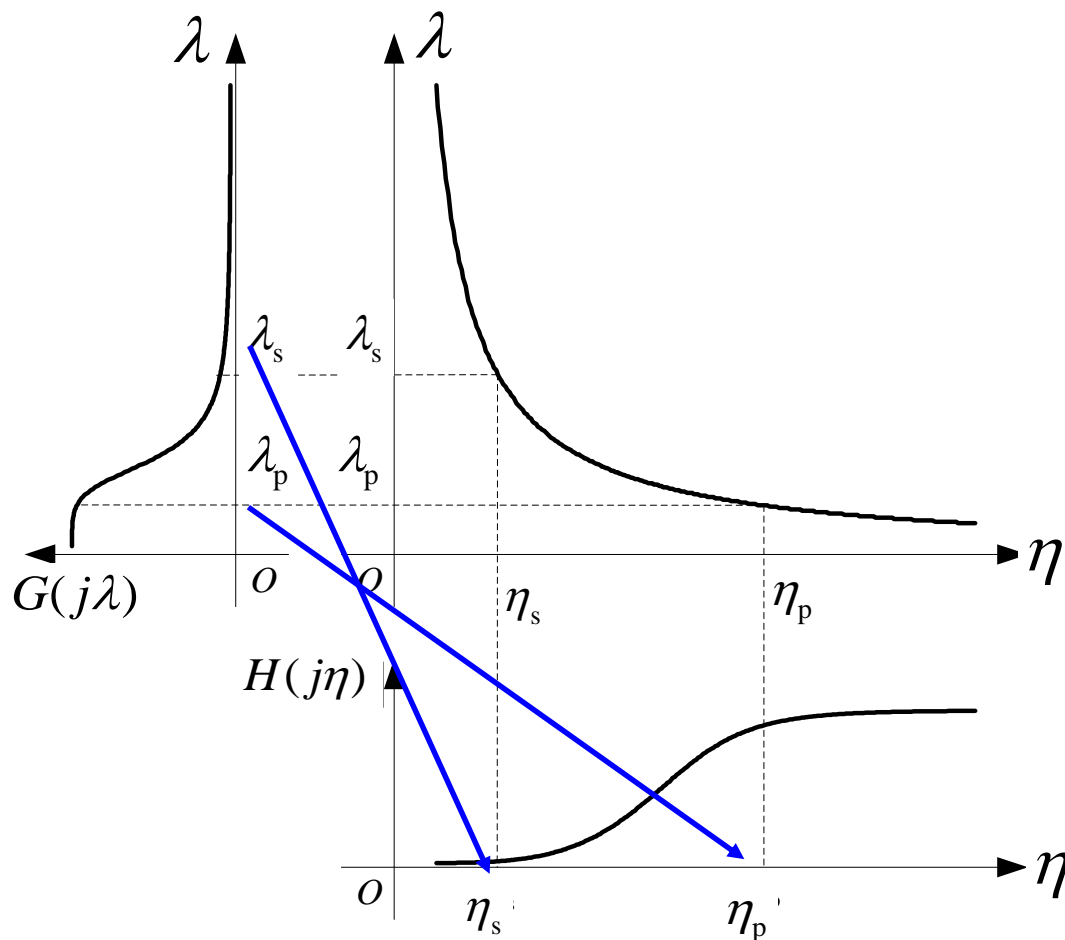


■ 原型低通到高通的模拟频率变换

$$\lambda = \frac{\lambda_p}{\eta}$$

$$\eta = \frac{\Omega}{\Omega_{ph}}$$

$$H(j\eta) = G(j\lambda) \bigg|_{\lambda = \frac{1}{\eta}}$$



1. 模拟高通滤波器的设计



■ 模拟高通滤波器的设计步骤:

(1)确定高通滤波器的技术指标：通带下限频率 Ω'_p ，阻带上限频率 Ω'_s ，通带最大衰减 α_p ，阻带最小衰减 α_s 。

(2)确定相应低通滤波器的设计指标：按照(6.2.51)式，将高通滤波器的边界频率转换成低通滤波器的边界频率，各项设计指标为：

①低通滤波器通带截止频率 $\Omega_p=1/\Omega'_p$ ；

②低通滤波器阻带截止频率 $\Omega_s=1/\Omega'_s$ ；

③通带最大衰减仍为 α_p ，阻带最小衰减仍为 α_s 。






■ 模拟高通滤波器的设计步骤:

(3)设计归一化低通滤波器 $G(p)$ 。

(4)求模拟高通的 $H(s)$ 。

$$H(s) = G(p) \bigg|_{p = \frac{\Omega_c}{s}}$$





例: 设计高通滤波器, $f_p=200\text{Hz}$, $f_s=100\text{Hz}$, 幅度特性单调下降,
 f_p 处最大衰减为3dB, 阻带最小衰减 $\alpha_s=15\text{dB}$ 。

解: ①高通技术要求:

$$f_p=200\text{Hz}, \alpha_p=3\text{dB};$$

$$f_s=100\text{Hz}, \alpha_s=15\text{dB}$$

归一化频率:

$$\eta_p = \frac{f_p}{f_c} = 1, \eta_s = \frac{f_s}{f_c} = 0.5$$





②低通技术要求:

$$\lambda_p = 1, \quad \lambda_s = \frac{1}{\eta_s} = 2$$

$$\alpha_p = 3dB, \quad \alpha_s = 15dB$$

③ 设计归一化低通 $G(p)$ 。采用巴特沃斯滤波器，故

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = 0.18$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} = 2$$

$$N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = 2.47,$$

$$G(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$





④ 求模拟高通 $H(s)$:

$$H(s) = G(p) \bigg|_{p=\frac{\Omega_c}{s}} = \frac{s^3}{s^3 + 2\Omega_c s^2 + 2\Omega_c^2 s + \Omega_c^3}$$

$$\Omega_c = 2\pi f_p$$



2. 模拟带通滤波器的设计

■ 原型低通到带通的模拟频率变换

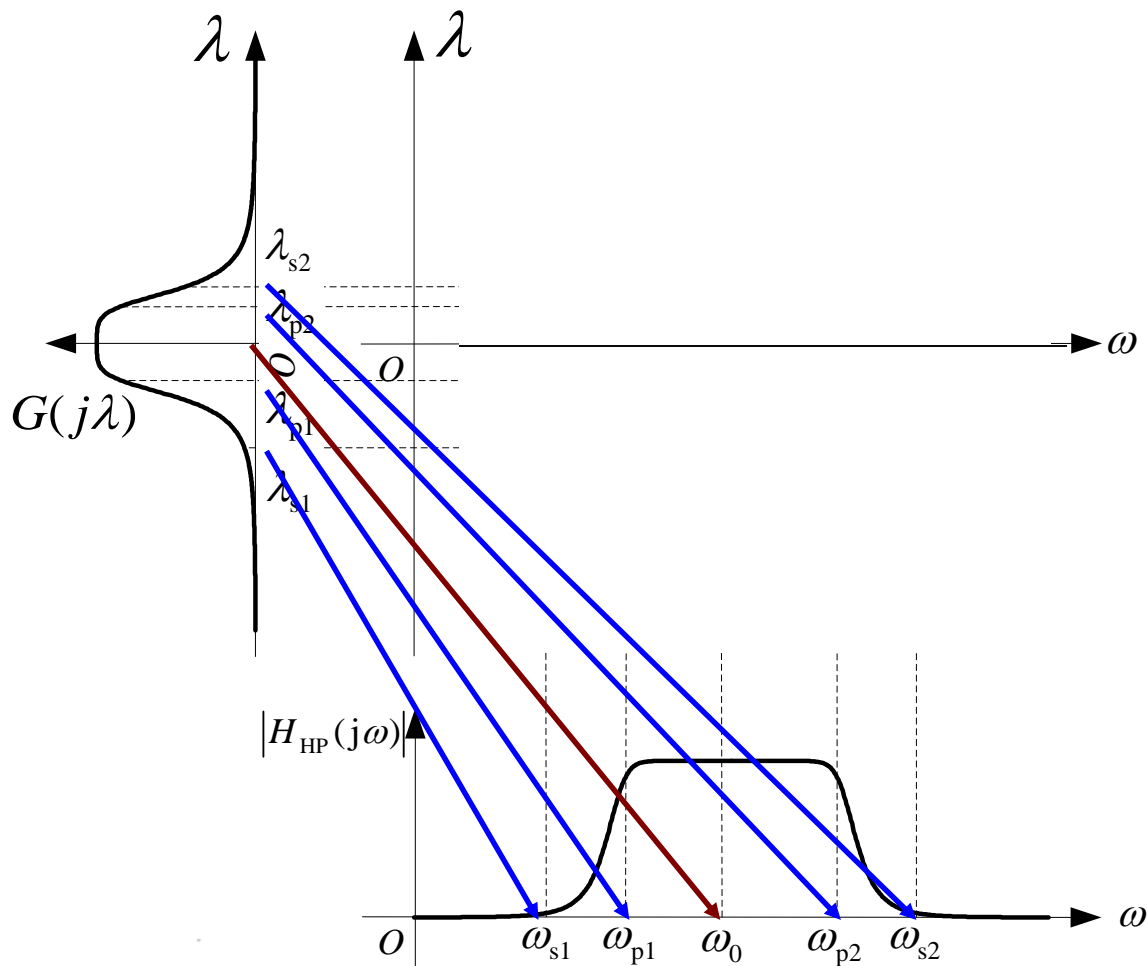
$$\lambda = \lambda_p \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega B}$$

其中：

通带宽度 $B = \omega_{p2} - \omega_{p1}$

中心频率 $\omega_0^2 = \omega_{p1}\omega_{p2}$

$$H_{BP}(s) = G(p) \Big|_{p = \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}}$$





■ 模拟带通滤波器的设计步骤

① 由带通滤波器的通带上下截频确定变换式中的参数

$$B = \omega_{p2} - \omega_{p1} \qquad \omega_0^2 = \omega_{p1} \omega_{p2}$$

② 确定原型低通滤波器的通、阻带截频

$$\lambda = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega B}$$





■ 模拟带通滤波器的设计步骤

③ 设计通带截频为1 (rad/s)、阻带截频为 λ_s 、通带衰减为 α_p 、阻带衰减为 α_s 的原型低通滤波器

④ 将原型低通滤波器转换为带通滤波器 $H_{BP}(s)$

$$H_{BP}(s) = G(p) \Big|_{p = \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}}$$





例 设计模拟带通滤波器，通带带宽 $B=2\pi\times 200\text{rad/s}$ ，中心频率 $\Omega_0=2\pi\times 1000\text{rad/s}$ ，通带内最大衰减 $\alpha_p=3\text{dB}$ ，阻带 $\Omega_{s1}=2\pi\times 830\text{rad/s}$ ， $\Omega_{s2}=2\pi\times 1200\text{rad/s}$ ，阻带最小衰减 $\alpha_s=15\text{dB}$ 。

解: (1) 模拟带通的技术要求:

$$\Omega_0=2\pi\times 1000\text{rad/s}, \alpha_p=3\text{dB}$$

$$\Omega_{s1}=2\pi\times 830\text{rad/s}, \Omega_{s2}=2\pi\times 1200\text{rad/s}, \alpha_s=15\text{dB}$$

$$B=2\pi\times 200\text{rad/s};$$

$$\eta_0=5, \quad \eta_{s1}=4.15, \quad \eta_{s2}=6$$





(2) 模拟归一化低通技术要求:

$$\lambda_p = 1, \lambda_s = \frac{\eta_{s2}^2 - \eta_0^2}{\eta_{s2}} = 1.833, -\lambda_s = \frac{\eta_{s1}^2 - \eta_0^2}{\eta_{s1}} = -1.874$$

取 $\lambda_s=1.833$, $\alpha_p=3\text{dB}$, $\alpha_s=15\text{dB}$ 。

(3)设计模拟归一化低通滤波器 $G(p)$, 采用巴特沃斯型, 可得

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = 0.18$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} = 1.833$$

$$N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = 2.83$$



取N=3，查表得

$$G(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

(4) 求模拟带通 $H(s)$:

$$H(s) = G(p) \bigg|_{p = \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}}$$

$$H(s) = s^2 B^3 [s^6 + 2B_s^5 + (3\Omega_0^2 + 2B^2)s^4 + (4\Omega_0^2 B + B^3)s^3 + (3\Omega_0^4 + 2\Omega_0^2 B^2)s^2 + 2\Omega_0^4 B s + \Omega_0^6]^{-1}$$



3.模拟带阻滤波器的设计

■ 原型低通到带阻的模拟频率变换

$$\lambda = \frac{\lambda_s \omega B}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

其中：阻带宽度 $B = \omega_{s2} - \omega_{s1}$ 中心频率 $\omega_0^2 = \omega_{s1} \omega_{s2}$

$$H_{BP}(s) = G(p) \Big|_{p = \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2}}$$





■ 模拟带通滤波器的设计步骤

① 由带阻滤波器通带的上下截频确定变换式中的参数

$$B = \omega_{s2} - \omega_{s1} \quad \omega_0^2 = \omega_{s1} \omega_{s2}$$

② 确定原型低通滤波器的通、阻带截频

$$\lambda = \frac{\omega B}{\omega^2 - \omega_0^2}$$





③ 设计通带截频为 λ_p 、阻带截频为 1 (rad/s) 、通带衰减为 α_p 、通带衰减为 α_s 的低通滤波器

④ 将低通滤波器转换为带阻滤波器 $H_{BS}(s)$

$$H_{BP}(s) = G(p) \Big|_{p = \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2}}$$



6.3 用脉冲响应不变法设计IIR数字低通滤波器

利用模拟滤波器设计IIR数字滤波器设计过程

设计技术成熟
有相当简便的
公式和图表



由此设计



要求DF特性
模仿AF的特性

连续时间域(S平面)

转换关系



离散时间域(Z平面)

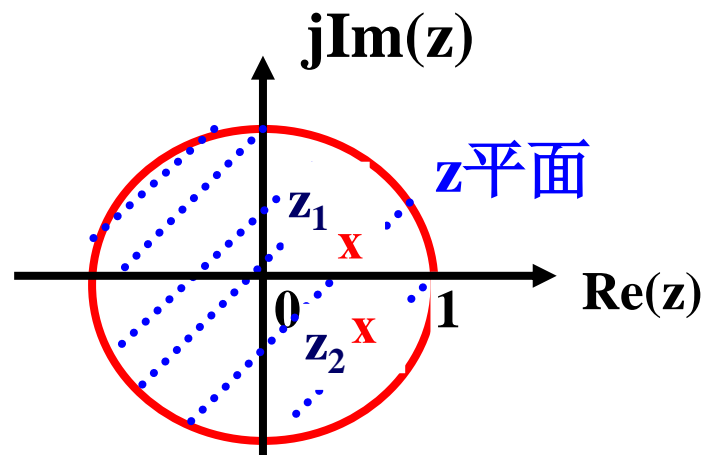
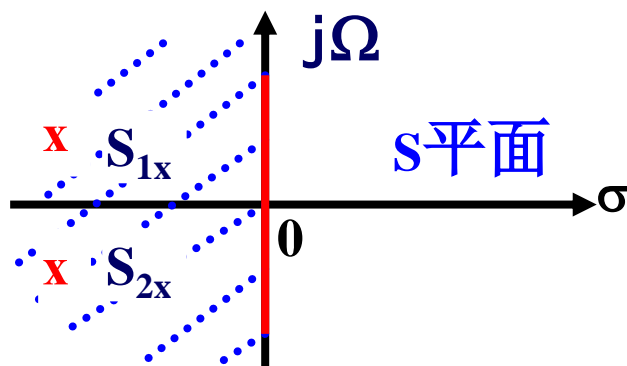
实际上是个映射问题

Mapping



对转换关系的两点要求：

- (1) 因果稳定的模拟滤波器转换成数字滤波器，仍是因果稳定的。
- (2) 数字滤波器的频率响应模仿模拟滤波器的频响， s 平面的虚轴映射 z 平面的单位圆，相应的频率之间成线性关系。



满足上述转换关系的映射方法有：脉冲响应不变法和双线性变换法



脉冲响应不变法

一、基本思想：

使数字滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 模仿模拟滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$ ，让 $h(n)$ 等于 $h_a(t)$ 的采样值

$$H_a(s) \rightarrow \text{LT}^{-1}[H_a(s)] \rightarrow h_a(t) \rightarrow \text{时域采样} \rightarrow h(n) \rightarrow \text{ZT}[h(n)] \rightarrow H(z)$$

所以说脉冲响应不变法是一种时域上的变换方法





二、变换方法

设模拟滤波器 $H_a(s)$ 只有单阶极点，且分母多项式的阶次高于分子多项式的阶次，将 $H_a(s)$ 用部分分式表示：

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i}$$

s_i 为 $H_a(s)$ 的单阶极点

$$\text{LT}^{-1}[H_a(s)] = h_a(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i t} u(t)$$

$U(t)$ 为单位阶跃函数



对 $h_a(t)$ 进行等间隔采样，采样间隔为 T ，得到：

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i nT} u(nT)$$

对上式进行Z变换，得到数字滤波器的系统函数 $H(z)$ ：

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

结论： (1) S 平面的单极点 $s=s_i$ 映射到 Z 平面的极点 $z = e^{s_i T}$ 。

(2) $H_a(s)$ 部分分式的系数与 $H(z)$ 部分分式的系数相同。



三、S平面和Z平面之间的映射关系

1、采样信号的拉氏变换与相应的序列的Z变换之间的映射关系

(1) 设 $h_a(t)$ 的采样信号表示为: $\hat{h}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(t) \delta(t - nT)$

(2) 对 $\hat{h}_a(t)$ 进行拉氏变换, 得到

$$\begin{aligned}\hat{H}_a(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_a(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n h_a(t) \delta(t - nT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) \delta(t - nT) e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(nT) e^{-snT}\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-snT} \\ H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} \end{aligned} \right\}$$

$$H(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \hat{H}_a(s) \quad \rightarrow \quad z = e^{sT}$$



2、模拟信号的拉氏变换与相应的序列的Z变换之间的映射关系：



模拟信号 $h_a(t)$ 的傅里叶变换 $H_a(j\Omega)$ 和其采样信号 $\hat{h}_a(t)$ 的傅里叶变换 $\hat{H}_a(j\Omega)$ 之间的关系满足：

$$\hat{H}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\Omega - jk\Omega_s)$$

$$\hat{H}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_k H_a(s - jk\Omega_s)$$

结论：采样信号的拉氏变换是原模拟信号的拉氏变换在S平面沿虚轴以 $\Omega_s=2\pi/T$ 为周期进行的周期延拓；



由采样信号的拉氏变换与相应的序列的Z变换之间的映射关系:

$$H(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_k H_a(s - jk\Omega_s)$$

说明: 采用脉冲响应不变法将AF变换为数字DF时

- $H_a(s)$ 沿虚轴以 $\Omega_s=2\pi/T$ 为周期进行周期延拓;
- 再经过 $Z=e^{sT}$ 的映射关系映射到Z平面上, 从而得到 $H(z)$

上面的这种转换是否满足对转换关系提出的2点要求:

因果稳定
模仿频响

设: $S=\sigma+j\Omega$, $Z=r \cdot e^{j\omega}$ 脉冲响应不变法标准映射关系: $Z=e^{sT}$

$$r \cdot e^{j\omega} = e^{(\sigma+j\Omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\Omega T} \Rightarrow \quad \mathbf{r = e^{\sigma T}} \quad \mathbf{\omega = \Omega T}$$

频率域的坐标变换是线性的

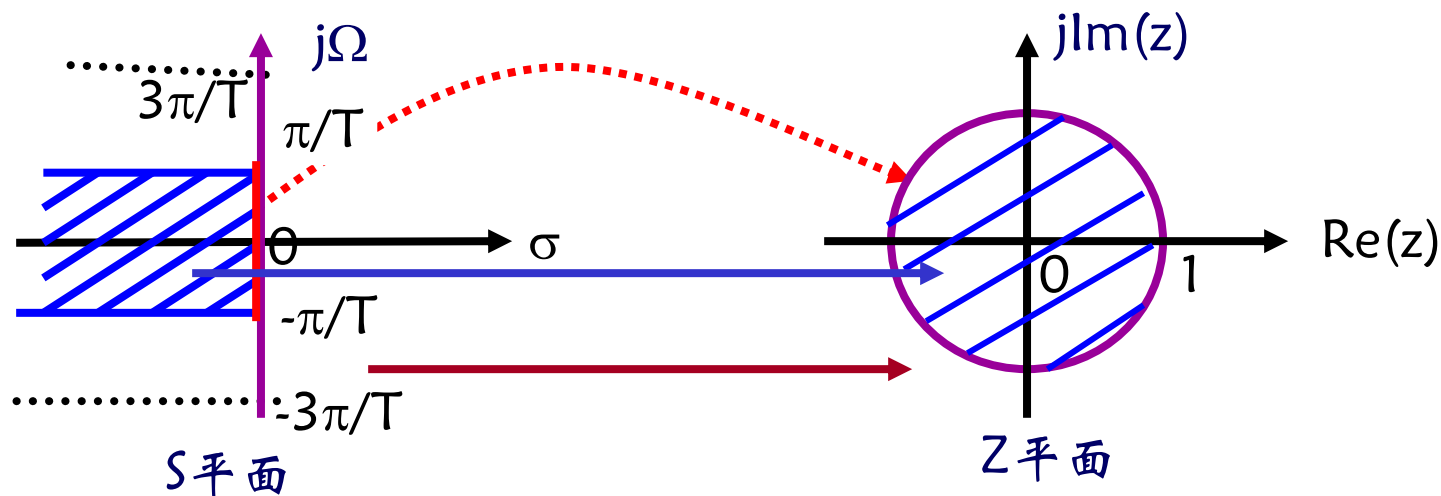


因果稳定的分析

$$r = e^{\sigma T}$$

- $\sigma < 0$ 时, S平面的**左半平面**映射到Z平面的**单位圆内**($r = |z| < 1$)
- $\sigma = 0$ 时, S平面的**虚轴**映射到Z平面的**单位圆周上**($r = |z| = 1$)
- $\sigma > 0$ 时, S平面的**右半平面**映射到Z平面的**单位圆外**($r = |z| > 1$)

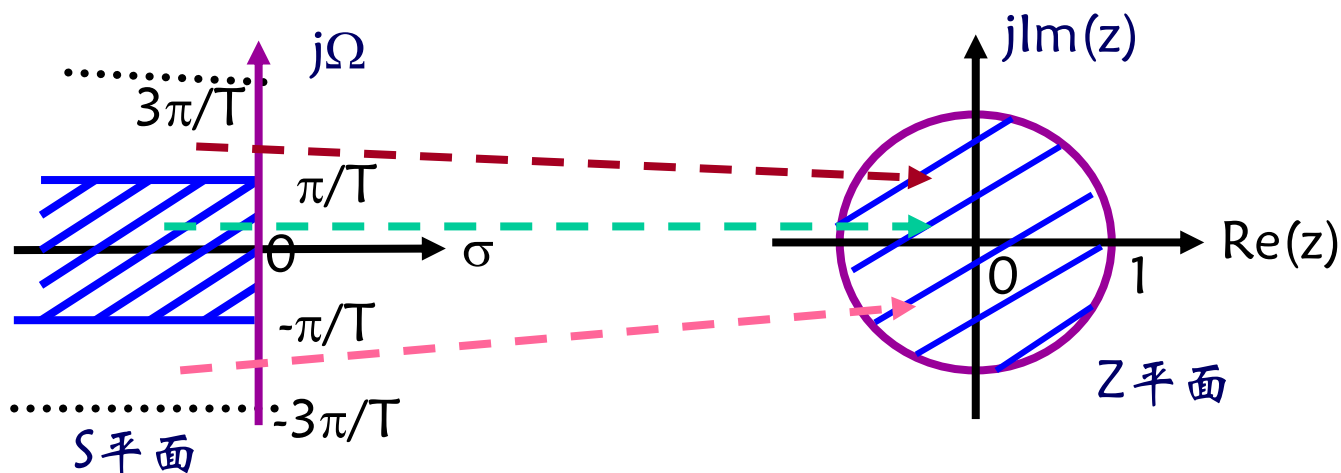
结论: 若 $H_a(s)$ 是因果稳定的, 则转换后的 $H(z)$ 也是因果稳定的。



由于 $z=e^{sT}$ 是周期函数 $e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T} = e^{\sigma T} e^{j(\Omega + \frac{2\pi}{T}M)T}$

当 σ 不变，模拟角频率 Ω 变化 $2\pi/T$ 整数倍，**映射值不变**， S 平面上每一条宽度为 $2\pi/T$ 的水平横带都重迭地映射到 Z 平面的整个全平面上

- 每条水平横带的左半部分映射到 Z 平面单位圆内；
- 水平横带右半部分映射到 Z 平面的单位圆外
- $j\Omega$ 虚轴上每 $2\pi/T$ 段都对应着单位圆一周



由上面分析结果:

- S平面与Z平面的映射关系满足转换条件;
- 但存在着多值(s) \leftrightarrow 单值(z)映射关系

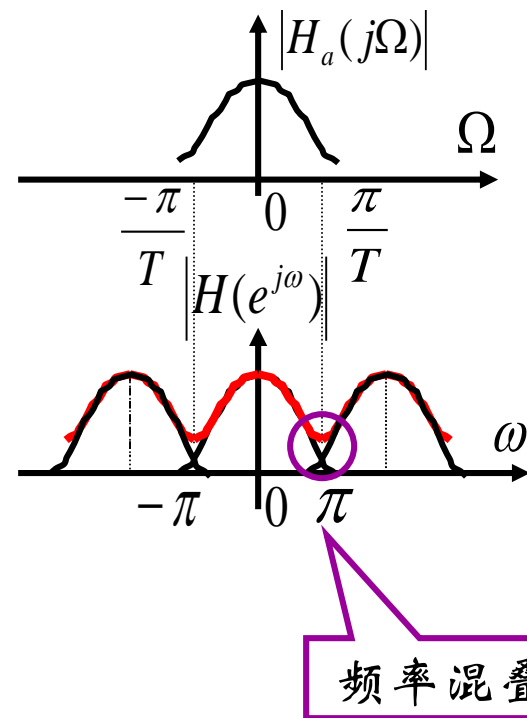
注意:

(1) 虽然 $z = e^{sT}$ 但并非 $H_a(s) \xrightarrow{\text{直接映射}} H(z)$
而是 $\hat{H}_a(s) \xrightarrow{\text{映射}} H(z)$

(2) 采样信号的拉氏变换是其模拟信号的拉氏变换以 $2\pi/T$ 为周期，沿虚轴进行周期化。

(3) DF的频响是AF频响的周期延拓

只有AF频响限于 π/T 之内，DF频响才不失真地复现AF频响，否则，设计出来的DF在 $\omega = \pm\pi$ 附近产生频率混叠。



脉冲响应不变法的应用受限

只适合设计**带限滤波器**，如：低通、带通滤波器的设计，不适合高通、带阻滤波器的设计。

假设 $\hat{H}_a(j\Omega)$ 没有频率混叠现象，即满足 $H_a(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \pi/T$

$$H(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_k H_a(s - jk\Omega_s)$$

按照上式，并将关系式 $s=j\Omega$ 代入， $\omega=\Omega T$ ，代入得到：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a(j\frac{\omega}{T}), |\omega| < \pi$$

数字滤波器的频响可以很好
模仿模拟滤波器的频响



四、脉冲响应不变法的优缺点

优点:

- 1、频率变换是**线性关系**; $\omega = \Omega T$, 数字滤波器可以很好重现模拟滤波器的频响特性;
- 2、数字滤波器的单位脉冲响应完全模仿模拟滤波器的单位冲激响应, 时域特性逼近好;

缺点:

1. 有频谱混迭失真现象; (S平面到 \leftrightarrow Z平面有多值映射关系)
2. 由于频谱混迭, 使应用受到限制。(T $\downarrow \Rightarrow$ 失真 \downarrow , 但运算量 \uparrow , 实现困难)





■ 用脉冲响应不变法设计IIR数字滤波器的设计步骤

➤ 确定采样间隔 T

➤ 根据采样间隔 T ，将给定的数字滤波器频率指标转换为模

拟滤波器的频率指标： $\Omega_c = \frac{\omega_c}{T}$ $\Omega_p = \frac{\omega_p}{T}$

➤ 根据指标 α_p 、 α_s 、 Ω_p 、 Ω_s ，设计模拟滤波器

➤ 用脉冲响应不变法，将模拟滤波器 $H_a(s)$ 变换成数字滤波器 $H(z)$



例1：已知模拟滤波系统的系统函数。利用脉冲响应不变法将其映射为数字滤波器。设采样时间间隔为0.02秒。

$$H(s) = \frac{8}{s^2 + 5s + 6}$$

解：

$$H(s) = \frac{8}{s+2} - \frac{8}{s+3}$$

$$h(t) = (8e^{-2t} - 8e^{-3t})u(t)$$

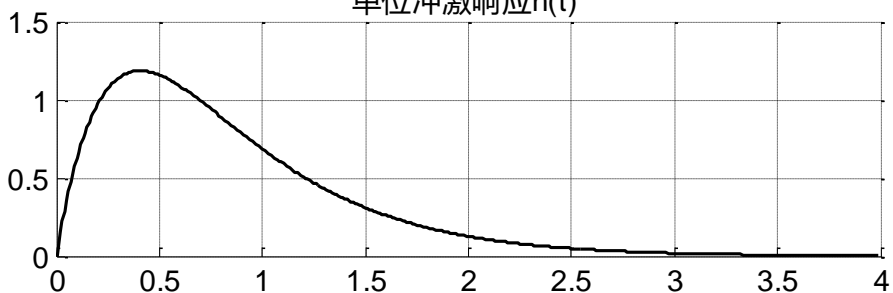
$$h(n) = h(t)|_{t=nT_s} = (8e^{-2nT_s} - 8e^{-3nT_s})u(n)$$

$$H(z) = \frac{8}{1 - e^{-2T_s}z^{-1}} - \frac{8}{1 - e^{-3T_s}z^{-1}}$$

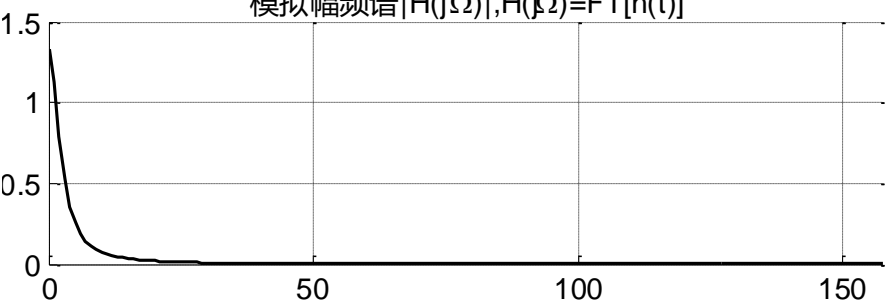




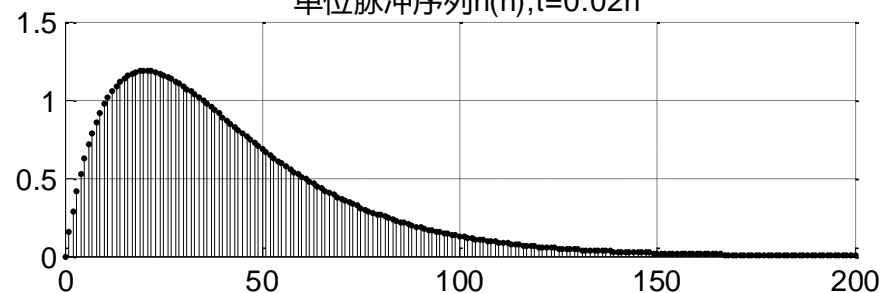
单位冲激响应 $h(t)$



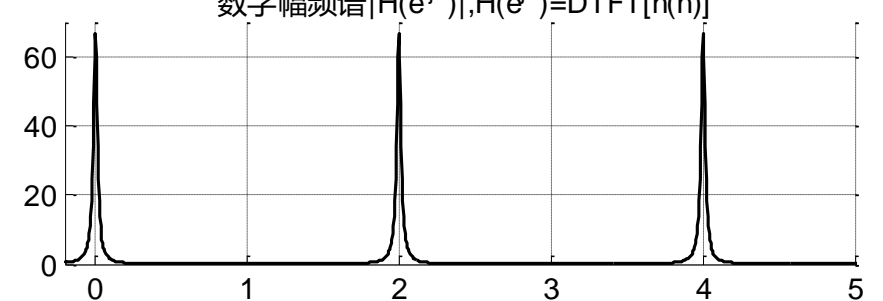
模拟幅频谱 $|H(j\Omega)|$, $H(j\Omega)=FT[h(t)]$



单位脉冲序列 $h(n)$, $t=0.02n$



数字幅频谱 $|H(e^{j\omega})|$, $H(e^{j\omega})=DTFT[h(n)]$



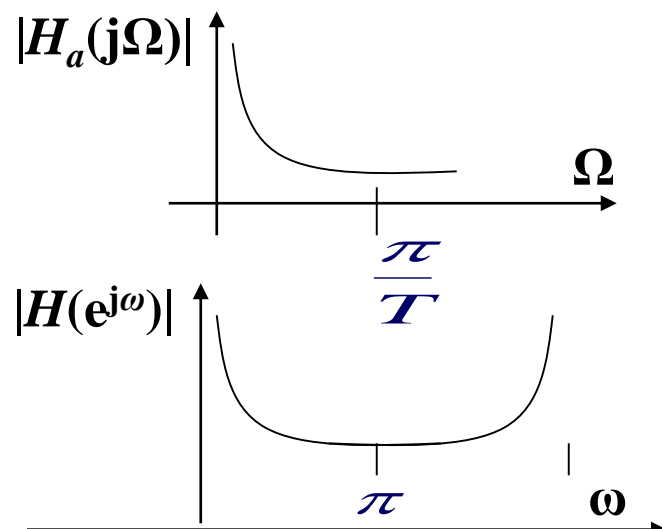
例2: 模拟滤波器原型为 $H_a(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$,

取采样周期为 $T=1s$,

解: $s_1 = -1, s_2 = -3$

$$\begin{aligned} H(z) &= T \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} = \frac{T}{1 - e^{-T} z^{-1}} - \frac{T}{1 - e^{-3T} z^{-1}} \\ &= \frac{(e^{-1} - e^{-3})z^{-1}}{1 - z^{-1}(e^{-3} + e^{-1}) + z^{-2}e^{-4}} \\ &= \frac{0.3181z^{-1}}{1 - 0.4177z^{-1} + 0.01831z^{-2}} \end{aligned}$$

由于模拟滤波器不是充分限带，所以数字滤波器产生很大的频谱混叠失真。



例3: 已知模拟滤波器的传输函数 $H_a(s)$ 为

$$H_a(s) = \frac{0.5012}{s^2 + 0.6449s + 0.7079}$$

用脉冲响应不变法将 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$

解: 首先将 $H_a(s)$ 写成部分分式:

$$H_a(s) = \frac{-j0.3224}{s + 0.3224 + j0.7772} + \frac{j0.3224}{s + 0.3224 - j0.7772}$$

极点为:

$$s_1 = -(0.3224 + j0.7772), s_2 = -(0.3224 - j0.7772)$$

根据: $z = e^{sT}$, $H(z)$ 的极点为: $z_1 = e^{s_1 T}$, $z_2 = e^{s_2 T}$



按照： $H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$ ， 可得到

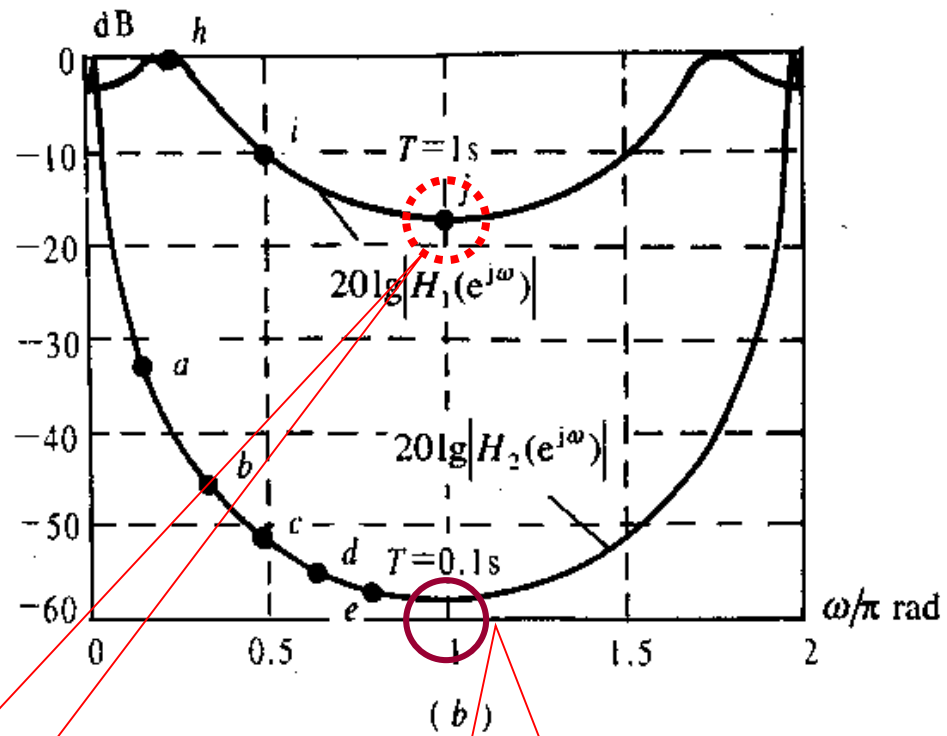
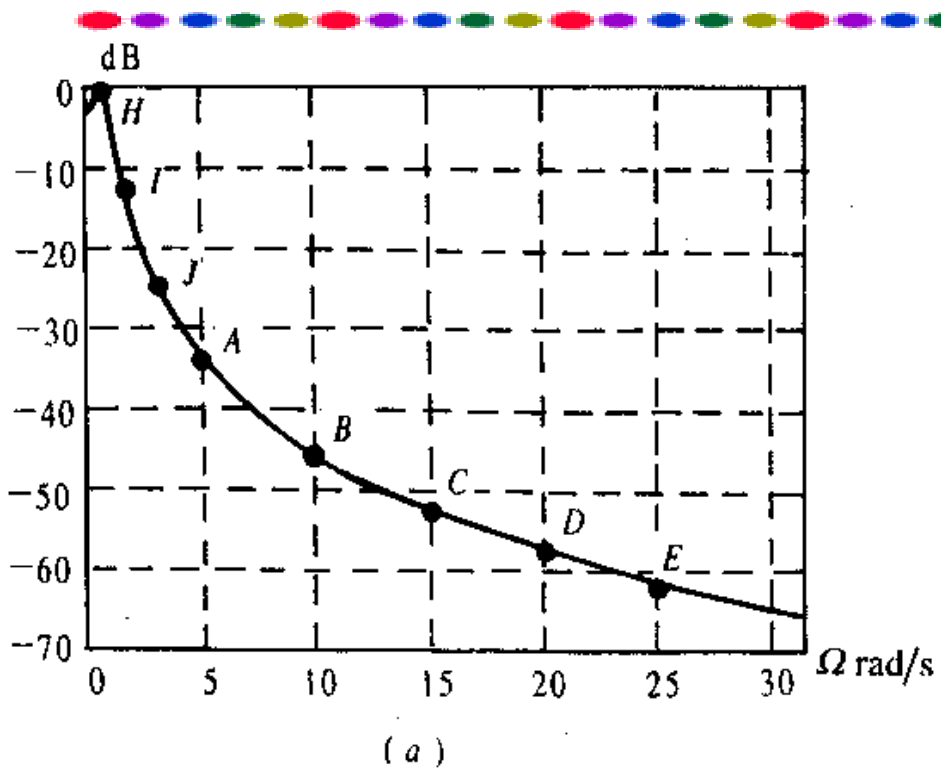
当： $T=1\text{s}$ 时用 $H_1(z)$ 表示， $T=0.1\text{s}$ 时用 $H_2(z)$ 表示， 则：

$$H_1(z) = \frac{0.3276z^{-1}}{1 - 1.0328z^{-1} + 0.247z^{-2}}$$

$$H_2(z) = \frac{0.0485z^{-1}}{1 - 1.9307z^{-1} + 0.9375z^{-2}}$$

将 $H_a(j\Omega)$ 、 $H_1(e^{j\omega})$ 、 $H_2(e^{j\omega})$ 的幅度特性用它们最大值归一化后，得到它们的幅度特性曲线，如下图所示：






严重的混叠现象

很轻的混叠现象




例4： 设低通DF的3dB带宽频率 $\omega_c=0.2\pi$, 阻带截止频率 $\omega_s=0.4\pi$, 在 $\omega=\omega_s$ 处的阻带衰减 $20\lg|H(e^{j\omega_s})|=-15\text{dB}$, 试用脉冲响应不变法设计一个Butterworth低通DF。(设采样频率 $f_s=20\text{kHz}$)

解： (1) 将数字滤波器的设计指标转变为模拟滤波器的设计指标。

因为： $f_s=20\text{kHz}$, 则采样间隔为 $T=1/f_s=1/20\text{kHz}$

对于脉冲不变法, 频率变换是线性的。

$$\text{通带截止频率: } \Omega_c = \frac{\omega_c}{T} = \frac{0.2\pi}{1/20 \times 10^3} = 4\pi \times 10^3$$

$$\text{阻带截止频率: } \Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = \frac{0.4\pi}{1/20 \times 10^3} = 8\pi \times 10^3$$

$$\text{令 } 20\lg|H(e^{j\omega_s})| = 20\lg|H_a(j\Omega_s)| = -15\text{dB}$$

要设计的模拟滤波器, $N=3$ 。

$$\Omega_{cs} = \Omega_s (10^{0.1a_s} - 1)^{-\frac{1}{2N}}$$





(2)设计 $H_a(s)$

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s - \Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi})(s + \Omega_c)(s - \Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi})}$$

$$H_a(s) = \frac{C_0}{s - \Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi}} + \frac{C_1}{s + \Omega_c} + \frac{C_2}{s - \Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi}}$$

其中： $C_0 = H_a(s)(s - s_0) \Big|_{s=s_0} = \Omega_c / (-\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}),$

$$C_1 = \Omega_c$$

$$C_2 = \Omega_c / (-\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})$$



(3)设计H(z)

利用 $\frac{A_k}{s-s_k} \rightarrow \frac{A_k}{1-e^{s_k T} z^{-1}}$ 可得:

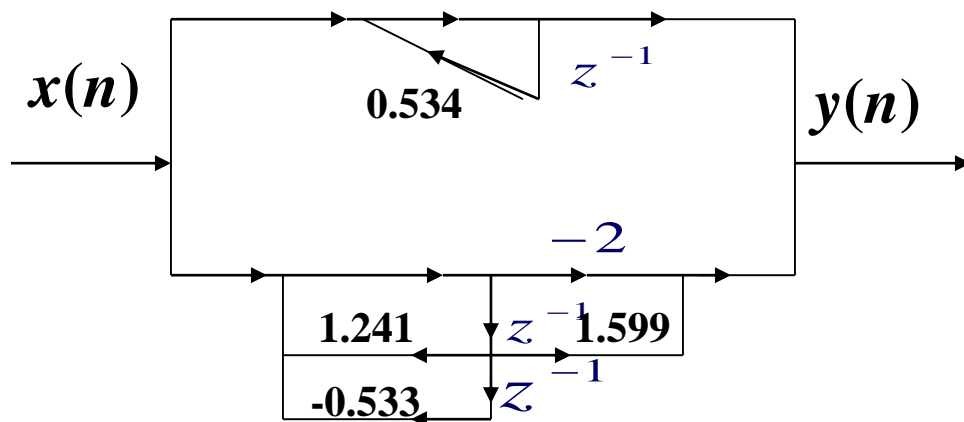
$$H(z) = \frac{\frac{\Omega_c}{-\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}}{1 - e^{\Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi}} z^{-1}} + \frac{\Omega_c}{1 - e^{-\Omega_c T} z^{-1}} + \frac{\frac{\Omega_c}{-\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}}}{1 - e^{\Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi}} z^{-1}}$$

将 $\Omega_c = 4\pi \times 10^3$ 和 $T = \frac{1}{20 \times 10^3}$ 代入上式得

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 - 0.534z^{-1}} + \frac{-2 + 1.59z^{-1}}{1 - 1.241z^{-1} + 0.533z^{-2}} \\ &= 0.2\pi \times \frac{1}{1 - 0.534z^{-1}} \times \frac{1.333 - 1.001z^{-1} + 0.306z^{-2}}{1 - 1.241z^{-1} + 0.533z^{-2}} \end{aligned}$$

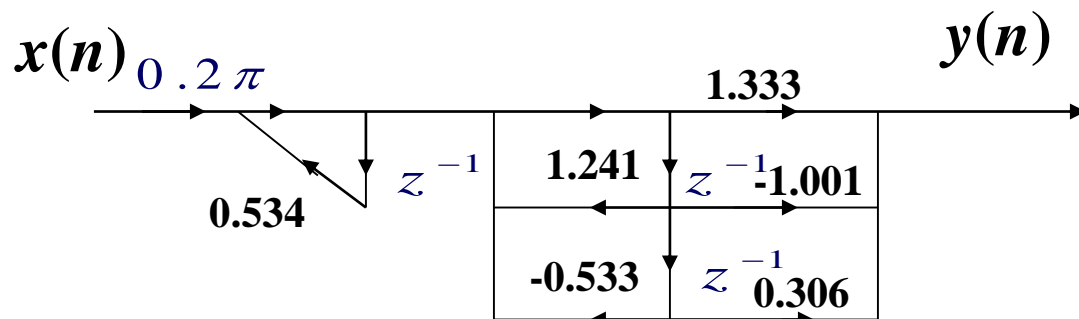


(1) 并联型




$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.534z^{-1}} + \frac{-2 + 1.59z^{-1}}{1 - 1.241z^{-1} + 0.533z^{-2}}$$

(2) 级联型



$$H(z) = 0.2\pi \times \frac{1}{1 - 0.534z^{-1}} \times \frac{1.333 - 1.001z^{-1} + 0.306z^{-2}}{1 - 1.241z^{-1} + 0.533z^{-2}}$$



- 
- 脉冲响应不变法的主要缺点:产生频率谱混迭现象。
 - 原因: 模拟低通的最高频率超过了折叠频率 π/T , 数字化后在 $\omega = \pi$ 形成频谱混叠现象。
 - 解决方法: 采用非线性压缩方法, 将整个频率轴上的频率范围压缩到 $\pm\pi/T$ 之间, 而后再用 $Z=e^{sT}$ 转换到Z平面上。



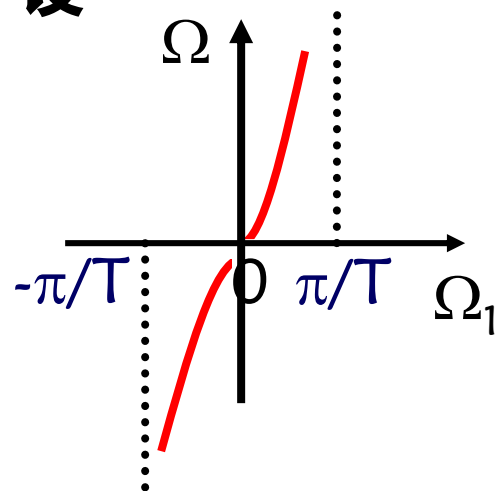
6.4 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器

一. 双线性变换法消除频谱混迭的原理

1、非线性压缩：(S平面 \rightarrow S_1 平面映射)

双线性变换法用正切变换实现非线性频率压缩，设 $H_a(s)$, $s=j\Omega$ ，经过非线性频率压缩后用 $H_a(s_1)$, $s_1=j\Omega_1$ 表示。则：

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{1}{2}\Omega_1 T\right) \quad T: \text{时域采样间隔};$$



上式表明：当 Ω_1 从 π/T 经过0变化到 $-\pi/T$ 时， Ω 则由 ∞ 经过0变化到 $-\infty$ ，这样实现了s平面上整个虚轴完全压缩到 s_1 平面上虚轴的 $\pm\pi/T$ 之间的转换。



6.4 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器

由上面可得： $\Omega \in (-\infty, +\infty)$, $\Omega_1 \in (-\pi/T, +\pi/T)$;

$$\begin{aligned} S = j\Omega &= j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega_1}{2} T\right) = \frac{2}{T} \frac{e^{j\Omega_1 T / 2} - e^{-j\Omega_1 T / 2}}{e^{j\Omega_1 T / 2} + e^{-j\Omega_1 T / 2}} \\ &= \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-S_1 T}}{1 + e^{-S_1 T}} \end{aligned}$$

2、 S_1 平面到 Z 平面的映射

将 S_1 平面映射到 Z 平面上，用标准映射 $Z=e^{S_1 T}$ 。代入上式

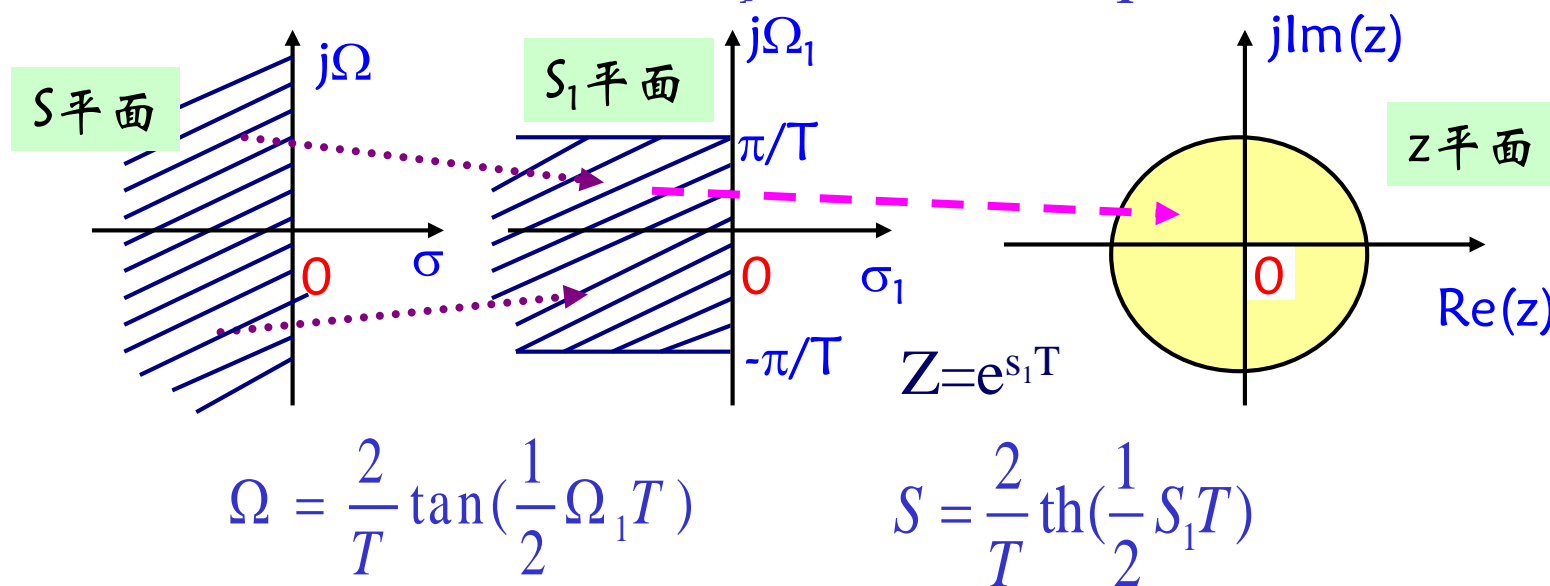
$$S = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-S_1 T}}{1 + e^{-S_1 T}} \Big|_{z=e^{S_1 T}} = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \xrightarrow{\text{推出}} z = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s}$$



6.4 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器

3、双线性不变法的映射关系

映射过程：从S平面映射到 S_1 平面，再从 S_1 平面映射到Z平面。



- S平面与Z平面是**一一对应的单值映射**关系，消除了脉冲响应不变法的多值映射关系，消除了频谱混迭现象。
- 只要模拟滤波器 $H_a(s)$ 因果稳定，其极点应位于S左半平面，转换成的 $H(z)$ 也是因果稳定的，位于单位圆内。



6.4 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器

二、模拟频率 Ω 和数字频率 ω 之间的关系

将： $z=e^{j\omega}$, $S=j\Omega$, 代入 $S \rightarrow Z$ 平面映射关系式：

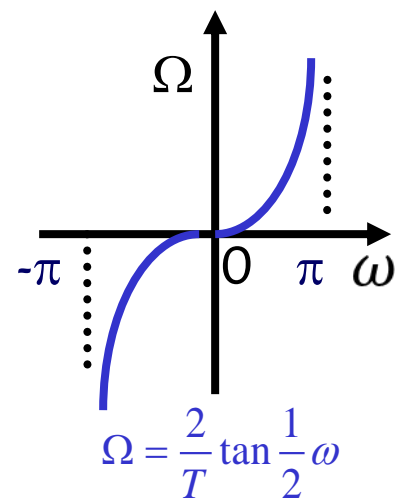
$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$



$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{1}{2} \omega$$

说明： s 平面上 Ω 与 z 平面的 ω 成非线性正切关系，当 ω 增加时， Ω 增加得很快，当 ω 趋于 π 时， Ω 趋于 ∞ ，由于这种非线性关系，消除了频率混叠现象。

代价： 影响数字滤波器频响逼真模拟滤波器的频响的逼真度，存在幅度失真和相位失真。



6.4 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器

三、双线性变换法特点

1、优点

消除了频谱混迭失真；**频率映射** $\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{1}{2} \omega$

表明S平面与Z平面是一一对应的单值映射关系，避免了脉冲响应不变法的频谱“混迭”现象。

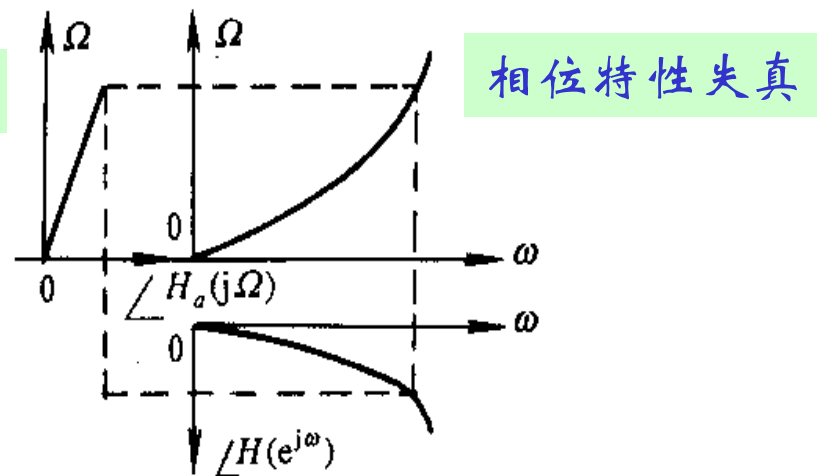
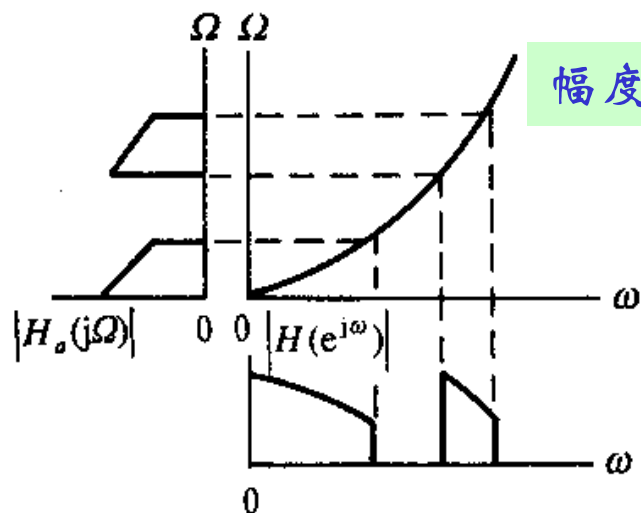
2.缺点

以频率变换的非线性为代价，模拟域和数字域进行非线性映射，其**瞬时响应**不如脉冲响应不变法好。



6.4 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器

四、双线性变换法的幅度失真和相位失真情况



- 如果 Ω 的刻度是均匀的，通过非线性正切关系，映射到 z 平面的 ω 刻度不均匀，随 ω 增加越来越密，即边界频率发生畸变。
- 如果模拟滤波器具有**片段常数特性**，则转换到 z 平面仍具有**片段常数特性**。适于**片段常系数滤波器**的设计。



6.4 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器

五、双线性变换法的预畸变

对边缘临界频率点产生的畸变，可通过频率的预畸变加以校正。

例：数字低通滤波器的两个截止频率： ω_p 和 ω_s ，如果按照线性变换所对应的模拟滤波器的截止频率分别为：

$$\Omega_p = \omega_p / T$$

$$\Omega_s = \omega_s / T$$

再利用非线性的频率变换公式，得到的数字滤波器的截止频率就不等于原来的频率。

解决方法：数字频率转换成模拟频率时，先进行预畸变的处理：

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{1}{2} \omega$$



6.4 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器

例：已知 $H_a(s)=a/(a+s)$, $a=1/(RC)$, 求 $H(z)$ 。

解：1、用脉冲响应不变法时，先确定极点： $s=-a$ ，则

$$H(z) = \frac{a}{1 - e^{-aT} \cdot z^{-1}} \quad T \text{为采样间隔}$$

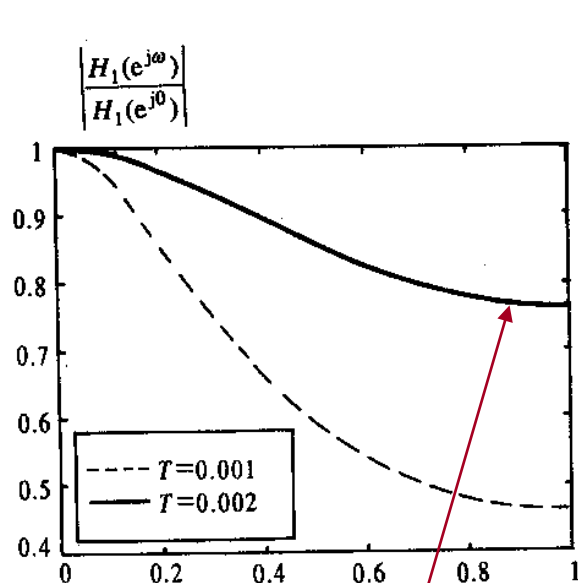
2. 用双线性不变法时

$$\begin{aligned} H(z) &= H_a(s) \bigg|_{s=\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{a}{a + \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{aT(1+z^{-1})}{(aT+2) + (aT-2) \cdot z^{-1}} \\ &= \frac{\alpha_1(1+z^{-1})}{1+\alpha_2 z^{-1}} \quad \text{其中: } \alpha_1 = \frac{\alpha T}{\alpha T+2}, \alpha_2 = \frac{\alpha T-2}{\alpha T+2} \end{aligned}$$



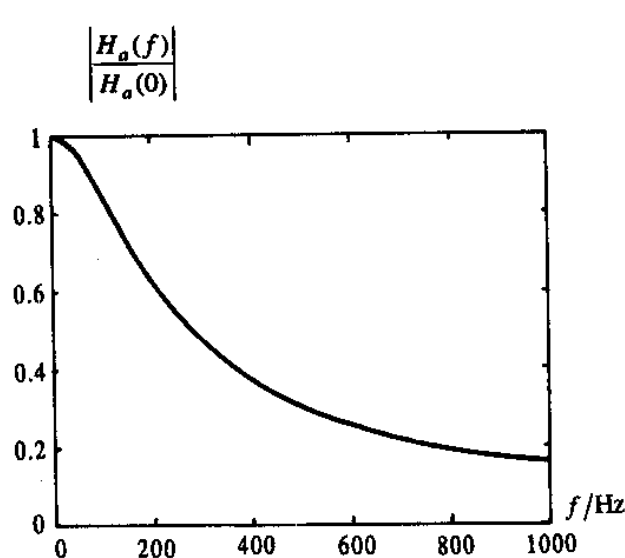
6.4 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器

设: $a = 1000$, $T=0.001$ 和 $T=0.002$, $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 的归一化幅频特性如图所示

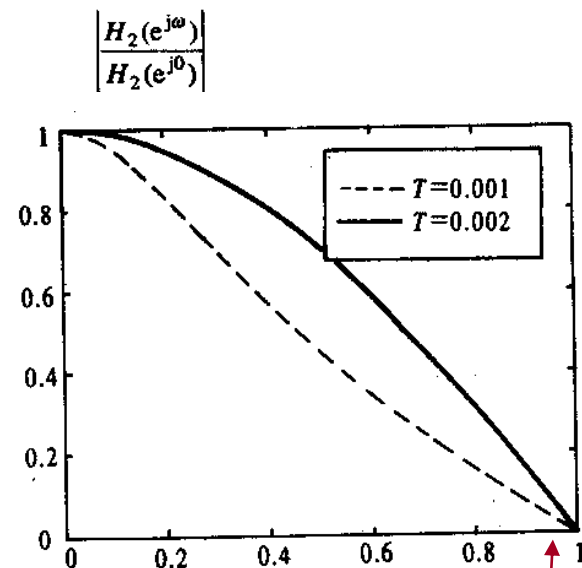


脉冲响应不变法

存在混叠



模拟滤波器幅频特性



双线性变换法

不存在混叠，曲线形状差别大



6.4 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器

五、用模拟滤波器设计IIR数字低通滤波器步骤

(1)确定数字低通滤波器的性能指标; (ω_p , a_p , ω_s , a_s)

(2)确定相应模拟低通滤波器的性能指标;

□ 脉冲响应不变法: $\Omega = \omega / T$

□ 双线性变换法: $\Omega = 2/T \times \tan(1/2 \omega)$ —预畸变;

(3)设计模拟低通滤波器的传输函数 $H_a(S)$;

(4)将 $H_a(S)$ 转换成数字滤波器系统函数 $H(z)$;

□ 利用脉冲响应不变法设计时, 应先确定 $H_a(s)$ 极点, 按
 $Z=e^{sT}$ 映射极点, 并根据P178页公式表示出 $H(z)$ 。

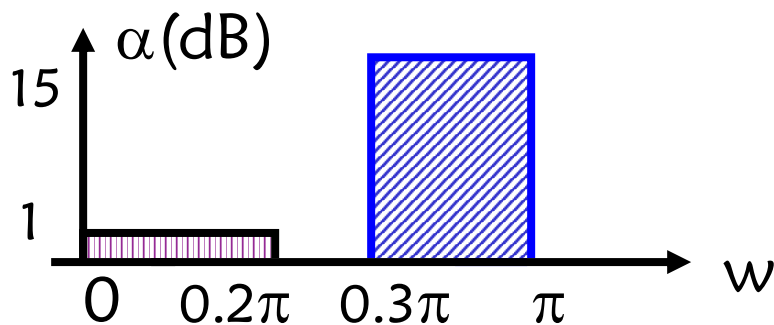
□ 若利用双线性变换法, 设采样间隔为 T , 则

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

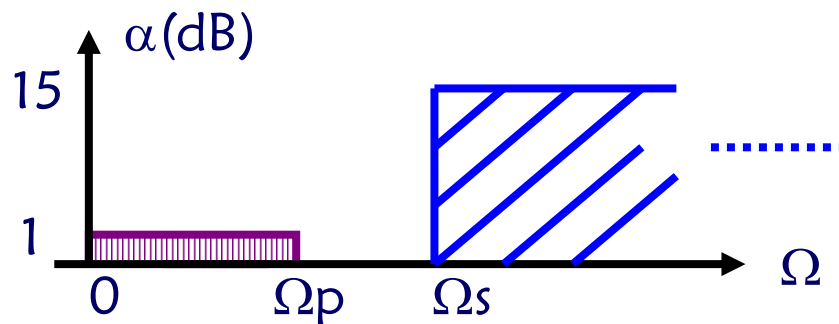


6.4 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器

例1：要求设计一数字低通滤波器，指标为：在通带内频率低于 $0.2\pi\text{rad/s}$ 时，容许幅度误差在1dB以内；在频率 $0.3\pi\sim\pi$ 之间，阻带衰减大于15dB。指定模拟滤波器采用巴特沃斯低通滤波器。分别用脉冲响应不变法和双线性变换法设计 $H(z)$ 。



数字域指标图



对应模拟域指标图



6.4 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器

解：采用脉冲响应不变法

(1)数字域指标:

$$\omega_p=0.2\pi \text{ rad}, \alpha_p=1\text{dB}, \omega_s=0.3\pi \text{ rad}, \alpha_s=15\text{dB}$$

(2)模拟域指标: 取 $T=1$,

$$\text{则: } \Omega_p = \omega_p/T = 0.2\pi \text{ rad/s}, \Omega_s = 0.3\pi \text{ rad/s}, \alpha_p=1\text{dB}, \alpha_s=15\text{dB}。$$

(3)设计模拟低通AF: 要求采用巴特沃斯低通滤波器

$$\lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = \frac{1.019}{0.65} = 1.568 \quad k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = 0.092$$

$$N \geq -\lg k_{sp} / \lg \lambda_{sp} = 5.884$$

取 $N=6$, 查P₁₅₇页表6.2.1, 得归一化传输函数 $H_a(p)=\dots$



6.4 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器

去归一化: $\Omega_c = \Omega_p (10^{0.1a_p} - 1)^{-1/2N} = 0.7032 \text{ rad/s}$

将 $p = s/\Omega_c$ 代入 $H_a(p)$ 得到去归一化传输函数

$$H_a(s) = H_a(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} = \frac{0.1209}{s^6 + 2.716s^5 + 3.691s^4 + 3.179s^3 + 1.825s^2 + 0.121s + 0.1209}$$

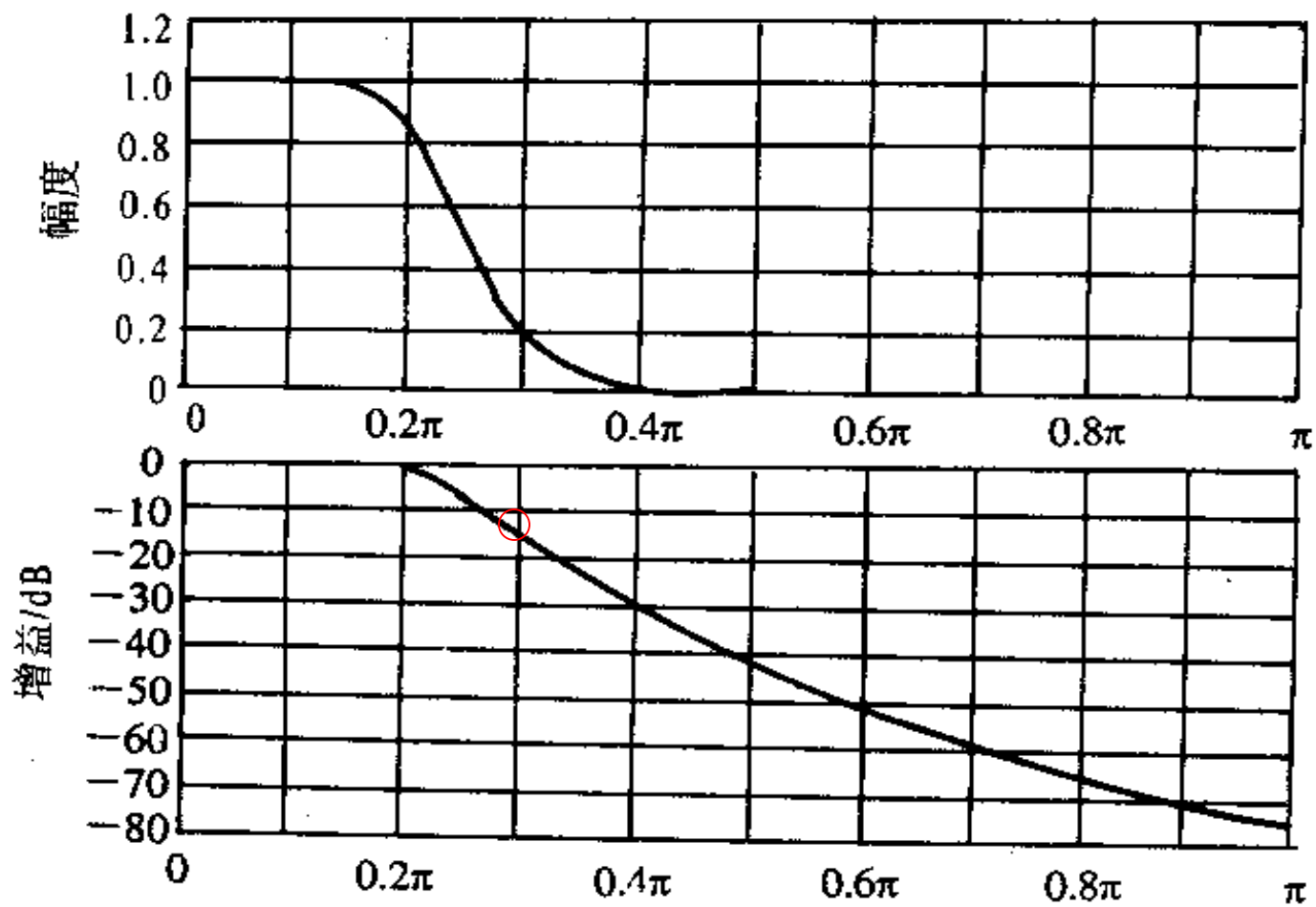
(4) 求DF的 $H(z)$

求出 $H_a(s)$ 的极点 s_i

由映射 $z = e^{s_i T}$ 确定出相应数字滤波器的传输函数 $H(z)$

$$H(z) = \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 0.1297z^{-1} + 0.6949z^{-2}} + \frac{-2.1428 + 1.1454z^{-1}}{1 - 1.0691z^{-1} + 0.3699z^{-2}} + \frac{1.8558 - 0.6304z^{-1}}{1 - 0.9972z^{-1} + 0.2570z^{-2}}$$





用脉冲响应不变法设计的数字低通滤波器的幅度特性





用双线性变换法设计数字低通IIR滤波器

(1)数字域指标: $\omega_p=0.2\pi$ rad、 $\alpha_p=1\text{dB}$ 、 $\omega_s=0.3\pi$ rad、 $\alpha_s=15\text{dB}$

(2)模拟域指标(预畸变): 取 $T=1$

$$\alpha_p=1\text{dB}, \quad \alpha_s=15\text{dB}$$

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan \frac{1}{2} \omega_p,$$

$$\Omega_p = 2 \tan 0.1\pi = 0.65 \text{ rad} / s$$

$$\Omega_s = 2 \tan 0.15\pi = 1.019 \text{ rad} / s$$

(3)设计模拟低通AF: 要求采用巴特沃斯低通滤波器

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = 0.092; \quad \lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = 1.706; \quad N \geq -\lg k_{sp} / \lg \lambda_{sp} = 5.306,$$



取 $N=6$ ，查 P_{157} 页表6.2.1，得归一化传输函数 $H_a(p)$

去归一化： $\Omega_c = \Omega_p(10^{0.1ap}-1)^{-1/2N} = 0.7662 \text{ rad/s}$

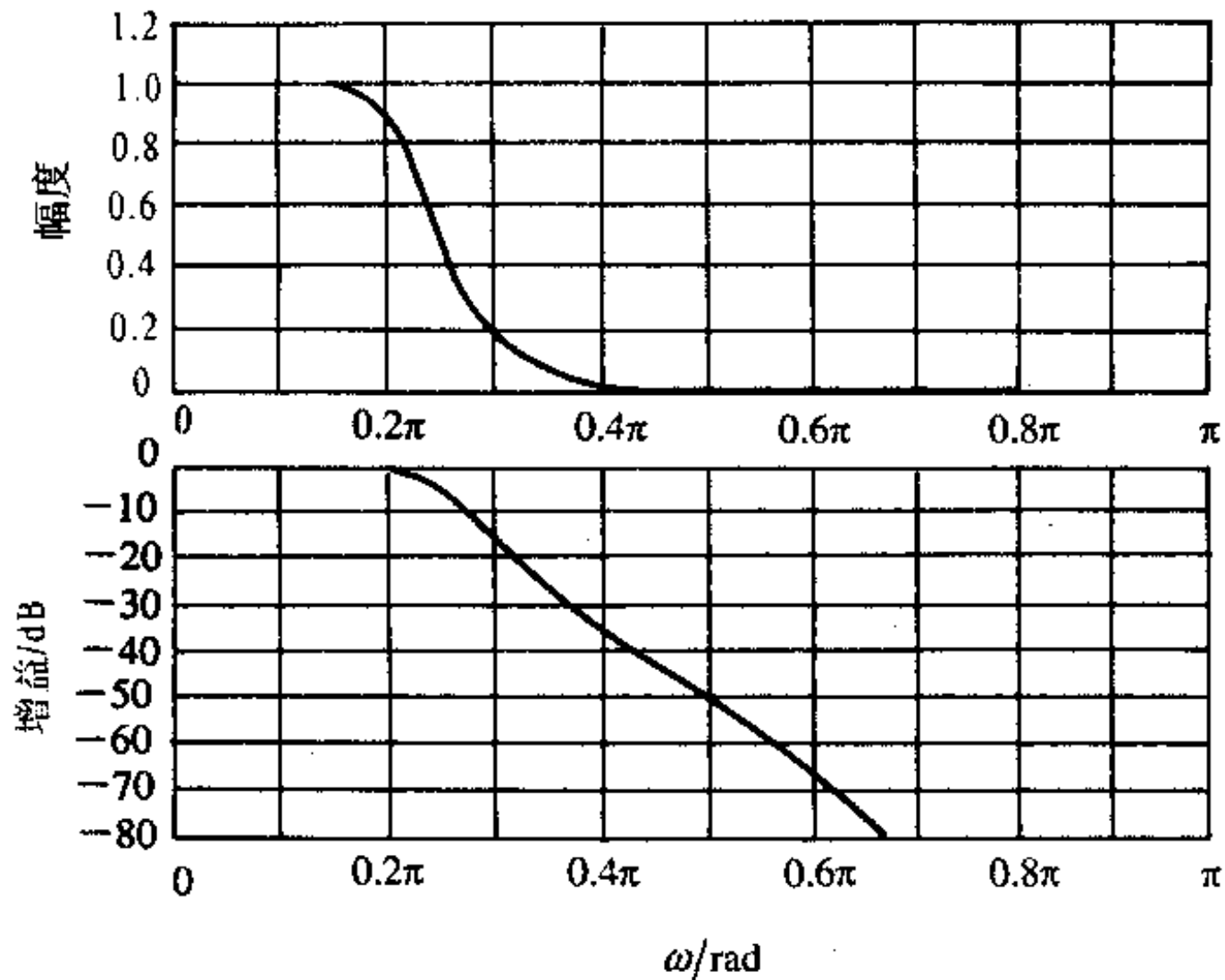
去归一化传输函数 $H_a(s) = H_a(p)|_{p=s/\Omega_c}$

$$H_a(s) = \frac{0.2024}{(s^2 + 0.396s + 0.5871)(s^2 + 1.083s + 0.5871)(s^2 + 1.480s + 0.5871)}$$

(4) 求DF的 $H(z) = H_a(s) \Big|_{s=2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

$$H(z) = \frac{0.0007378(1+z^{-1})^6}{(1-1.268z^{-1}+0.7051z^{-2})(1-1.010z^{-1}+0.358z^{-2})} \\ \times \frac{1}{1-0.9044z^{-1}+0.2155z^{-2}}$$





用双线性变换法设计的数字低通滤波器的幅度特性



6.5 数字高通、带通和带阻滤波器的设计



两种方法：

模拟频
带转换

双线性
变换

(1) 低通模拟滤波器 \rightarrow 所需类型模拟滤波器 \rightarrow 所需类型数字滤波器。

(2) 低通模拟滤波器 \rightarrow 低通数字滤波器 \rightarrow 所需类型数字滤波器。

脉冲响应不变法或
双线性变换

数字频
带转换





用第一种方法，以设计**高通数字滤波器**为例，**具体设计步骤**：

(1) 确定所需类型数字滤波器的**技术指标**。

(2) 将所需类型**数字滤波器**的技术指标转换成所需类型**模拟滤波器**的技术指标，转换公式为

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{1}{2} \omega$$

(3) 将所需类型**模拟滤波器**技术指标转换成**模拟低通**滤波器技术指标(具体转换公式参考**教材6.4节**)。

(4) 设计**模拟低通滤波器**。

(5) 将模拟低通通过**频率变换**，转换成所需类型的**模拟滤波器**。

(6) 采用**双线性变换法**，将所需类型的模拟滤波器转换成所需类型的数字滤波器。



例6.5.1 设计一个数字高通滤波器，要求通带截止频率 $\omega_p=0.8\pi\text{rad}$ ，通带衰减不大于3dB，阻带截止频率 $\omega_s=0.44\pi\text{rad}$ ，阻带衰减不小于15dB。希望采用巴特沃斯型滤波器。

解： (1)数字高通的技术指标为： $\omega_p=0.8\pi\text{rad}, \alpha_p=3\text{dB};$
 $\omega_s=0.44\pi\text{rad}, \alpha_s=15\text{dB}$

(2) 模拟高通的技术指标计算如下：

$$\text{令 } T=1, \text{ 则有 } \Omega_p = 2 \tan \frac{1}{2} \omega_p = 6.155 \text{ rad/s}, \alpha_p = 3\text{dB}$$

$$\Omega_s = 2 \tan \frac{1}{2} \omega_s = 1.655 \text{ rad/s}, \alpha_s = 15\text{dB}$$

(3)模拟低通滤波器的技术指标计算如下：

$$\lambda_p = 1, \alpha_p = 3\text{dB}$$

$$\lambda_s = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = 3.71, \alpha_s = 15\text{dB},$$



(4)设计归一化模拟低通滤波器 $G(p)$ 。模拟低通滤波器的阶数 N 计算如下：

$$N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}$$

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_p} - 1}{10^{0.1\alpha_s} - 1}} = 0.1803$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} = 3.71$$

$$N = 1.31, \quad N = 2$$

查表6.2.1，得到归一化模拟低通传输函数 $G(p)$ 为

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$$





(5) 将模拟低通转换成模拟高通 $H_a(s)$:

$$H_a(s) = G(p) \Big|_{p=\frac{\lambda_p \Omega_p}{s}} = \frac{s^2}{\Omega_p^2 + \sqrt{2}\Omega_p s + s^2}$$

(6) 用双线性变换法将模拟高通 $H(s)$ 转换成数字高通 $H(z)$:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$H(z) = \frac{0.106(1-z^{-1})^2}{1.624 + 1.947z^{-1} + 0.566z^{-2}} = \frac{0.0653(1-z^{-1})^2}{1 + 1.199z^{-1} + 0.349z^{-2}}$$



用第二种方法，数字域的频率变换

设低通数字滤波器的系统函数为 $H_L(z_1)$ ，所需类型数字滤波器的系统函数为 $H_d(z)$ ，则

$$H_d(z) = H_L(z_1) \Big|_{z_1=G(z)}$$

函数 $G(z)$ 的推导过程如下：以高通数字滤波器设计为例

step1: 将低通数字滤波器 $H_L(z_1)$ \rightarrow 归一化低通模拟滤波器 $H(p)$ ；

$$p = \frac{s}{\Omega_c} = \frac{2}{T} \frac{1 - z_1^{-1}}{1 + z_1^{-1}} \frac{1}{\Omega_c} = \frac{1 - z_1^{-1}}{1 + z_1^{-1}} \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$

其中：先利用双线性变换求得 s ，再将 s 对3dB的 Ω_c 归一化，最后代

$$\lambda \quad \Omega_c = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$$



step2: 将 p^{-1} 代替 p , 即 $p = \frac{1+z_1^{-1}}{1-z_1^{-1}} \operatorname{tg}\left(\frac{w_c}{2}\right)$ 可得归一化高通模拟滤波器

再利用 $p = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, 可得归一化高通数字滤波器

step3: 去归一化: 令 $p = \frac{p}{\Omega_l}$, 其中 $\Omega_l = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{w_l}{2}\right)$

w_l 是高通数字滤波器的下截止频率, 所以

$$\begin{cases} p = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} / \Omega_l \\ p = \frac{1+z_1^{-1}}{1-z_1^{-1}} \operatorname{tg}\left(\frac{w_c}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1^{-1} = -\frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}} \\ a = -\cos\left(\frac{w_c + w_l}{2}\right) / \cos\left(\frac{w_c - w_l}{2}\right) \end{cases}$$

即数字域低通变高通的变换公式 $G(z)$, 其他变换公式可查阅其他资料。



第6章 无限脉冲响应数字滤波器的设计



本章作业

习题：1、 3、 5、 9、 10

