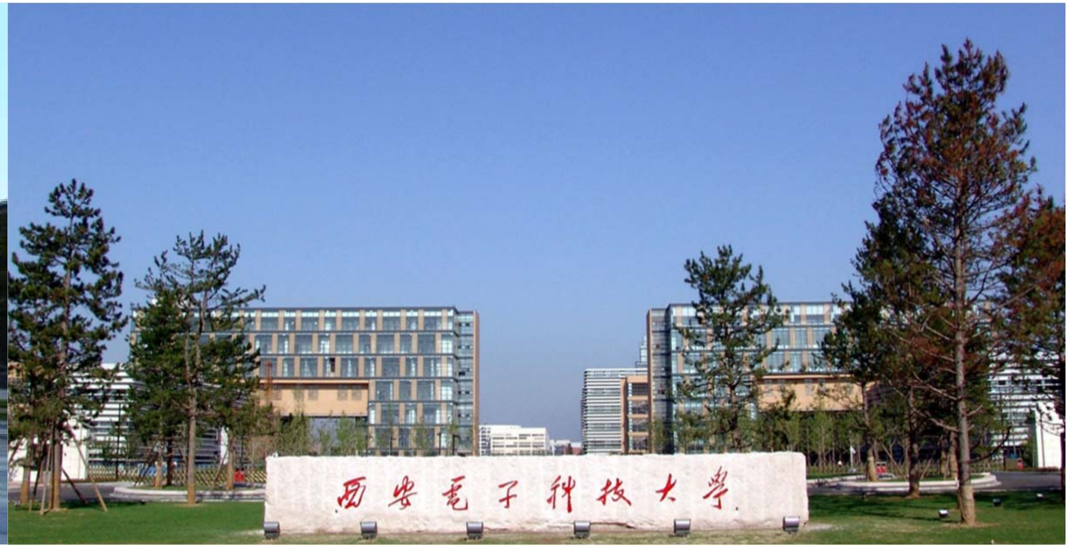
航天器控制原理



冯冬竹
电话：13389281325
邮箱：dzhfeng@xidian.edu.cn
空间科学与技术学院 导航控制系

目录

CONTENTS

航天器的姿态运动学和动力学

第三讲·航天器的一般运动方程

六自由度运动方程

- 作为刚体的航天器质量为m，质心为O；
- 坐标系$Ox_0y_0z_0$是质心轨道坐标系，坐标系$Oxyz$是本体坐标系，且坐标轴Ox, Oy, Oz取为航天器主惯量轴，坐标系$O'XYZ$是惯性坐标系；
- $\vec{F}$是所有作用在航天器上的合外力矢量，$\vec{M}$是所有作用在航天器上相对于O点的合外力矩矢量。

- 根据牛顿第二定律，相对于质心O的动力学方程在惯性坐标系中的投影式为：

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

式中，F_x, F_y, F_z为$\vec{F}$在惯性坐标系各轴上的投影分量。

六自由度运动方程

- 实际上，上式中的$\vec{F}$由下列等式表示，即：

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_{其他} \begin{cases} \vec{F}_g = -Gm_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{m_j}{r_{ji}^3} \vec{r}_{ji} & (01) \\ \vec{F}_{其他} = \vec{F}_{阻力} + \vec{F}_{推力} + \vec{F}_{太阳压力} + \vec{F}_{干扰} + \cdots & (02) \end{cases}$$

- 第二章中讨论的二体轨道运动方程式正是投影式在以下特殊条件下的极坐标形式：

  - 式(01)中 $n = 2$
  - 式(02)中 $\vec{F}_{其他} = 0$

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0$$

六自由度运动方程

➢ 根据对质心的动量矩定理，航天器绕质心O运动的姿态动力学方程在本体坐标系Oxyz中的投影式为：

$$\begin{cases} I_x \dfrac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z \left(I_z - I_y \right) = M_x \\ I_y \dfrac{d\omega_y}{dt} + \omega_x \omega_z \left(I_x - I_z \right) = M_y \\ I_z \dfrac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y \left(I_y - I_x \right) = M_z \end{cases}$$

式中，M_x, M_y, M_z是$\vec{M}$沿航天器主惯量轴的分量；$\omega_x, \omega_y, \omega_z$是航天器空间转动角速度$\vec{\omega}$沿主惯量轴的分量，它们与欧拉角$\theta, \psi, \varphi$的关系是：

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi} \cos\psi \cos\theta + \dot{\theta} \sin\psi \\ \omega_y = -\dot{\varphi} \sin\psi \cos\theta + \dot{\theta} \cos\psi \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \sin\theta \end{cases}$$

➢ 联立三组方程得到刚性航天器一般运动的全部运动方程：

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases} \qquad (a)$$

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi}\cos\psi\cos\theta + \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_y = -\dot{\varphi}\sin\psi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\sin\theta \end{cases} \qquad (b)$$

$$\begin{cases} I_x \dfrac{d\omega_x}{dt} + \omega_y\omega_z\left(I_z - I_y\right) = M_x \\ I_y \dfrac{d\omega_y}{dt} + \omega_x\omega_z\left(I_x - I_z\right) = M_y \\ I_z \dfrac{d\omega_z}{dt} + \omega_x\omega_y\left(I_y - I_x\right) = M_z \end{cases} \qquad (c)$$

六自由度运动方程

- 刚性航天器在空间有6个运动自由度，其中3个为质心平动自由度，描述轨道运动；3个转动自由度，描述姿态运动。
- 式(a)的3个二阶微分方程描述了航天器的质心运动规律，即轨道运动；
- 将式(b)代入式(c)得到3个以欧拉角表示的二阶微分方程，描述了航天器绕质心的运动规律，即姿态运动。

◆ 总之，以上联立的三组9个运动方程正好形成6个二阶微分方程，在给定12个初始条件以后，就可以全部解出航天器6个自由度的轨道和姿态运动了。

六自由度线性化运动方程

- 由刚体复合运动关系知，航天器的空间旋转角速度$\vec{\omega}$等于航天器本体坐标系$Oxyz$相对于质心轨道坐标系$Ox_0y_0z_0$的旋转角速度矢量$\vec{\omega}_r$与质心轨道坐标系$Ox_0y_0z_0$对于惯性坐标系$O'xyz$的牵连角速度矢量$\vec{\omega}_e$之和，即：

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e$$

六自由度线性化运动方程

- 将该式投影至航天器本体坐标系上则有：

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + B\vec{\omega}_0$$

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T$$

$$\vec{\omega}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

式中，ω_0为航天器绕中心引力体旋转的轨道角速度。

- 考虑到若 $\alpha, \beta \ll 1\,\mathrm{rad}$，则以下近似关系成立：

$$\sin\alpha \sin\beta \approx 0$$

$$\sin\alpha \cos\beta \approx \sin\alpha \approx \alpha$$

$$\sin\alpha \approx \alpha \qquad \cos\beta \approx 1$$

六自由度线性化运动方程

➢ 当航天器姿态在小范围变化，即$|\theta|,|\psi|,|\varphi| \ll 1\,\text{rad}$ 时：

$$B=\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\cos\psi\sin\theta+\sin\varphi\sin\psi \\ -\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\theta\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi \\ \sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\approx\begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \varphi \\ \theta & -\varphi & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}_r=\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dot{\varphi}\cos\psi\cos\theta+\dot{\theta}\sin\psi \\ -\dot{\varphi}\sin\psi\cos\theta+\dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\psi}+\dot{\varphi}\sin\theta \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

六自由度线性化运动方程

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + B\vec{\omega}_0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \phi \\ \theta & -\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 即：

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi} - \omega_0 \psi \\ \omega_y = \dot{\theta} - \omega_0 \\ \omega_z = \dot{\psi} + \omega_0 \varphi \end{cases}$$

六自由度线性化运动方程

➢ 代入姿态欧拉动力学方程，得到航天器的线性化姿态动力学方程：

$$
\begin{cases}
M_x = I_x\ddot{\varphi} + (I_y - I_z - I_x)\omega_0\dot{\psi} + (I_y - I_z)\omega_0^2\varphi \\
M_y = I_y\ddot{\theta} \\
M_z = I_z\ddot{\psi} - (I_y - I_z - I_x)\omega_0\dot{\varphi} + (I_y - I_x)\omega_0^2\psi
\end{cases}
$$

□ 航天器姿态动力学在俯仰轴可以独立出来，而滚动和偏航姿态是相互耦合的。

六自由度线性化运动方程

- 当航天器的各轴惯量基本相同，而且忽略轨道角速度耦合作用时(或者ω_0很小, 例如同步轨道)，上式简化为：

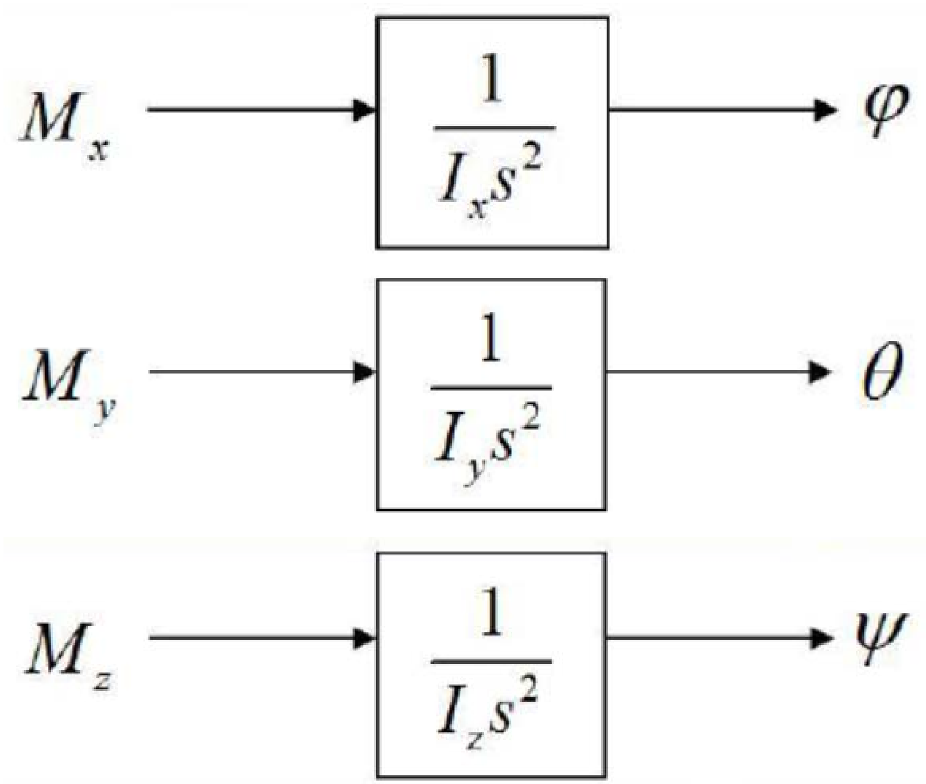
$$
\begin{cases}
M_x = I_x \ddot{\varphi} \\
M_y = I_y \ddot{\theta} \\
M_z = I_z \ddot{\psi}
\end{cases}
$$

- 这是一组航天器姿态的解耦动力学方程。
- 在解耦情况下，俯仰、偏航和滚动3个通道的运动互不相关，但形式上完全相同。

六自由度线性化运动方程

- 通过拉普拉斯变换，得到航天器姿态控制的被控对象传递函数。

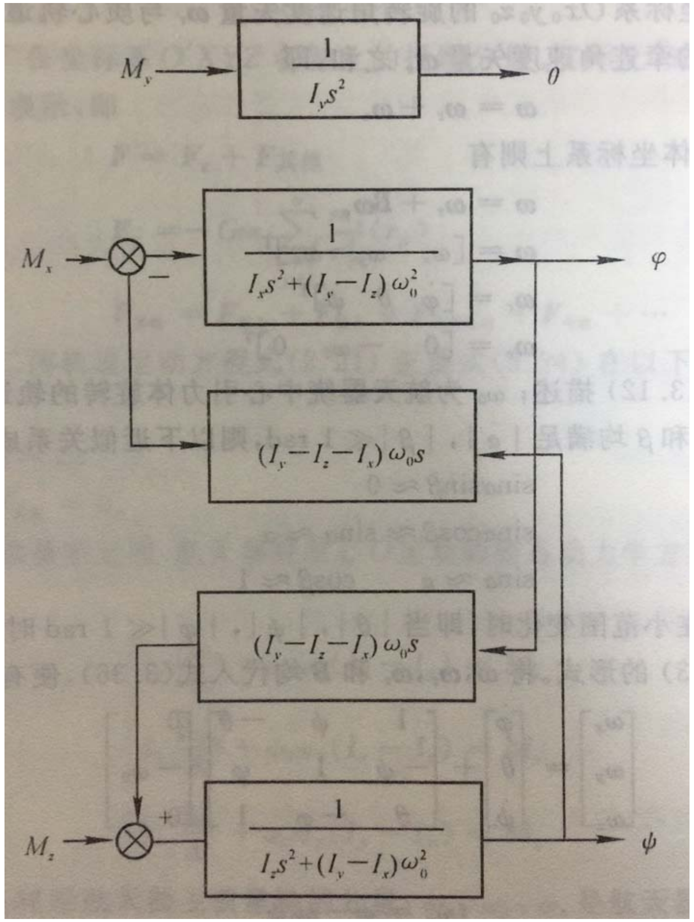
$$
\begin{cases}
M_x = I_x\ddot{\varphi} \\
M_y = I_y\ddot{\theta} \\
M_z = I_z\ddot{\psi}
\end{cases}
$$



六自由度线性化运动方程

➢ 通过拉普拉斯变换，得到航天器姿态控制的被控对象传递函数。

$$\begin{cases} M_x = I_x\ddot{\varphi} + (I_y - I_z - I_x)\omega_0\dot{\psi} + (I_y - I_z)\omega_0^2\varphi \\ M_y = I_y\ddot{\theta} \\ M_z = I_z\ddot{\psi} - (I_y - I_z - I_x)\omega_0\dot{\varphi} + (I_y - I_x)\omega_0^2\psi \end{cases}$$



六自由度线性化运动方程

- 至此，就得到了描述刚性航天器轨道和姿态六自由度运动的线性化运动方程：

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_x = I_x\ddot{\varphi} + (I_y - I_z - I_x)\omega_0\dot{\psi} + (I_y - I_z)\omega_0^2\varphi \\ M_y = I_y\ddot{\theta} \\ M_z = I_z\ddot{\psi} - (I_y - I_z - I_x)\omega_0\dot{\varphi} + (I_y - I_x)\omega_0^2\psi \end{cases}$$

THANKS

13389281325
dzhfeng@xidian.edu.cn