§ 10.3 自感　互感

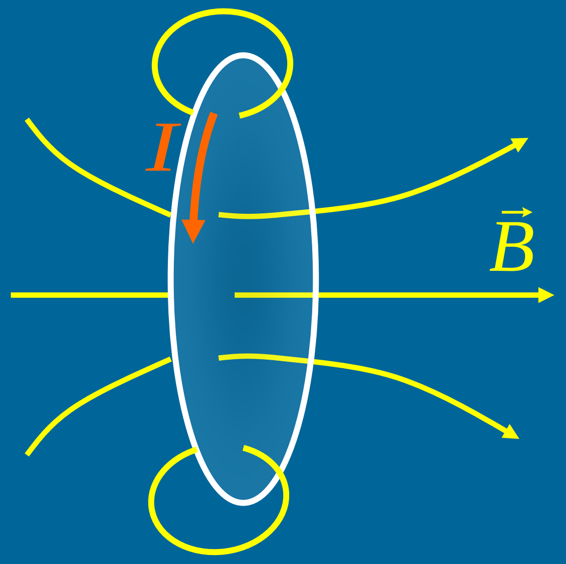
一. 自感现象　自感系数　自感电动势

1. 自感现象

线圈电流变化 $I = I(t)$

→ 穿过自身磁通变化 $\Phi_m(t)$

→ 在线圈中产生感应电动势



$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t}$$

—自感电动势遵从法拉第定律

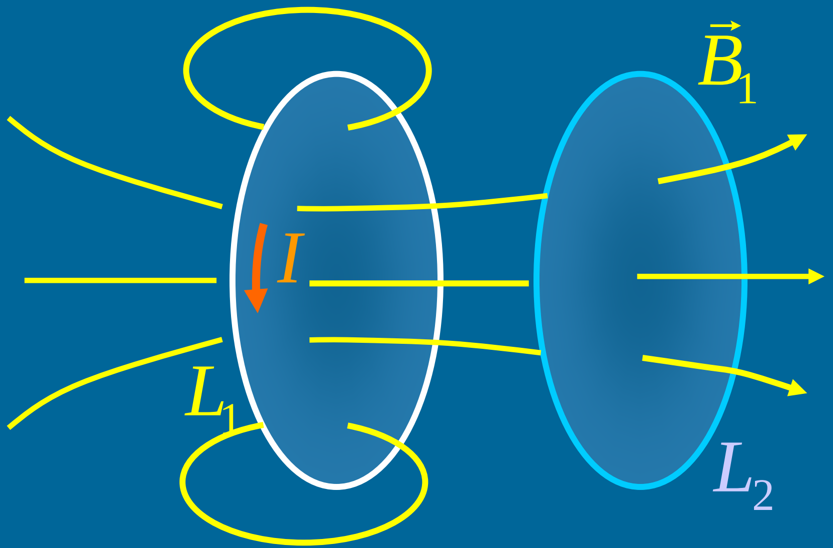
二. 互感

线圈 1 中的电流变化

引起线圈 2 的磁通变化

线圈 2 中产生感应电动势

根据毕 — 萨定律



穿过线圈 2 的磁通量正比于 线圈1 中电流 I

$$\boxed{\Psi_{21} = M_{21} I_1}$$

M_{21}是回路1 对回路2 的互感系数

- 互感电动势 $\varepsilon_{21} = -\dfrac{\mathrm{d}(M_{21}I_1)}{\mathrm{d}t} = -M_{21}\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - I_1\dfrac{\mathrm{d}M_{21}}{\mathrm{d}t}$

若回路周围不存在铁磁质

且两线圈结构、相对位置

及其周围介质分布不变时

$$\boxed{\varepsilon_{21} = -M_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}} \quad \xleftrightarrow{\text{同理}} \quad \boxed{\varepsilon_{12} = -M_{12}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}}$$

讨论

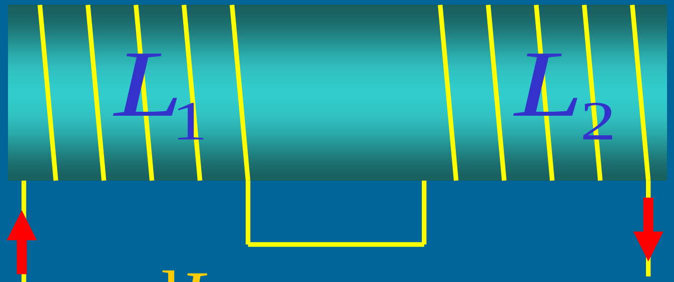
(1) 可以证明： $M_{21}=M_{12}=M$

(2) 互感反映了线圈本身的电磁性质。

M仅与两回路本身形状、大小、两者相对位置及所处介质有关，若回路周围不存在铁磁质，M与电流I 无关。

(3) 线圈之间的连接

- 线圈的顺接（磁场相互加强）



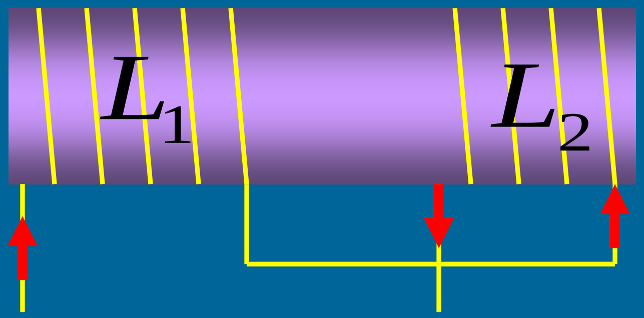
$$\Psi_1=L_1I+MI \qquad \Psi_2=L_2I+MI$$

$$\varepsilon_1=-L_1\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \varepsilon_2=-L_2\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-M\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2=-(L_1+L_2+2M)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

线圈顺接的等效总自感 $\boxed{L=L_1+L_2+2M}$

- 线圈的反接（磁场相互消弱）



$$\Psi_1 = L_1 I - MI \qquad \Psi_2 = L_2 I - MI$$

$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \varepsilon_2 = -L_2 \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -(L_1 + L_2 - 2M)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

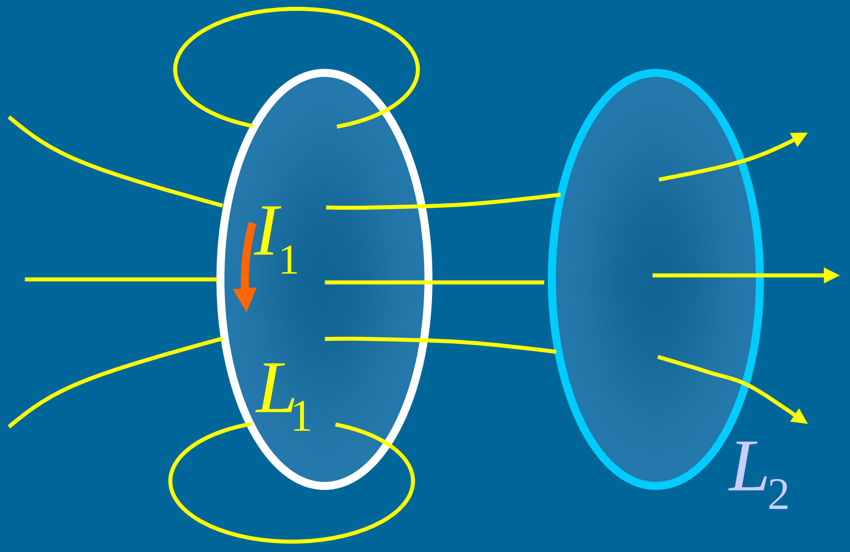
线圈反接的等效总自感 $\boxed{L = L_1 + L_2 - 2M}$

(4) 互感系数的计算

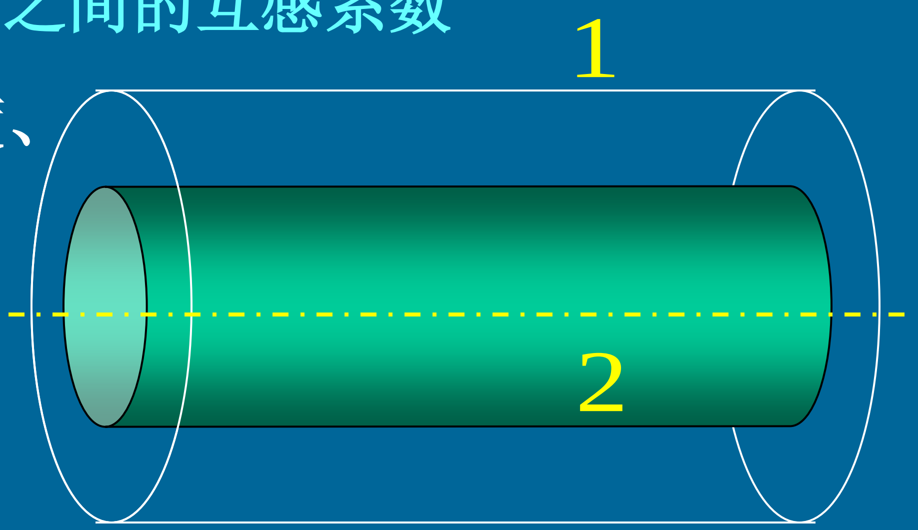
$$M_{21} = M_{12} = M$$

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$



例 计算共轴的两个长直螺线管之间的互感系数



设两个螺线管的半径、长度、匝数为 $R_1, R_2, l_1, l_2, N_1, N_2$

$$l_1 = l_2 = l, R_1 > R_2$$

解 设直螺线管1通有 I_1

$$\Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$$

$$\Psi_{21} = N_2 B_1 \pi R_2^2$$

$$= \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} \pi R_2^2 I_1$$

$$M_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} \pi R_2^2$$

同理设直螺线管2通有电流 I_2

$$\Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l}$$

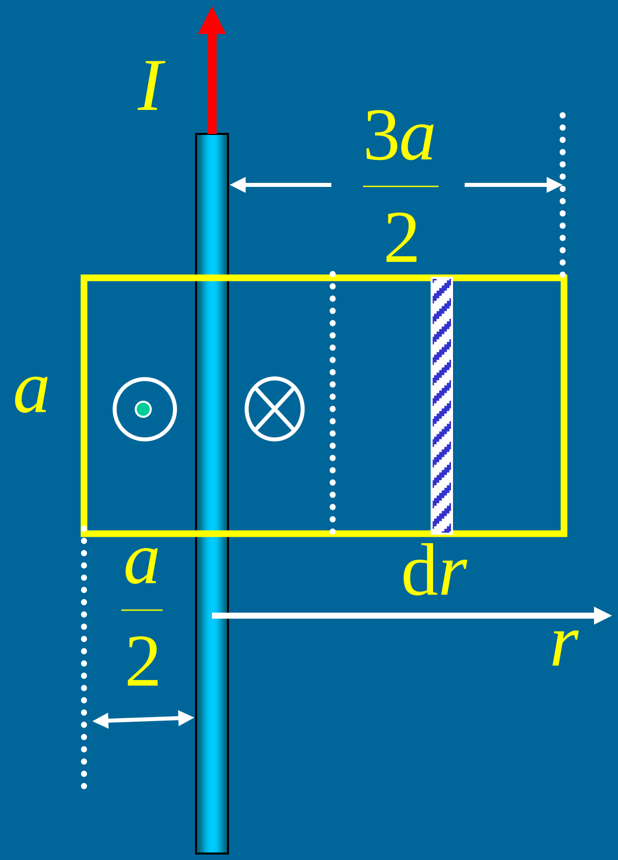
$$\Psi_{12} = N_1 B_2 \pi R_2^2$$

$$M_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} \pi R_2^2$$

$$\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$$

例 一无限长导线通有电流 $I = I_0 \sin\omega t$ 现有一矩形线框与长直导线共面。（如图所示）

求 互感系数和互感电动势



解 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

穿过线框的磁通量

$$\Phi_m = \int_{a/2}^{3a/2} B \mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln 3$$

互感系数 $M = \dfrac{\Phi_m}{I} = \dfrac{\mu_0 a}{2\pi}\ln 3$

互感电动势 $\varepsilon = -M\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mu_0 a}{2\pi}\ln 3 I_0 \omega \cos\omega t$

例 在相距为 $2a$ 的两根无限长平行导线之间，有一半径为 a 的导体圆环与两者相切并绝缘。

求 互感系数

解 $\boxed{M_{12}=M_{21}=M}$

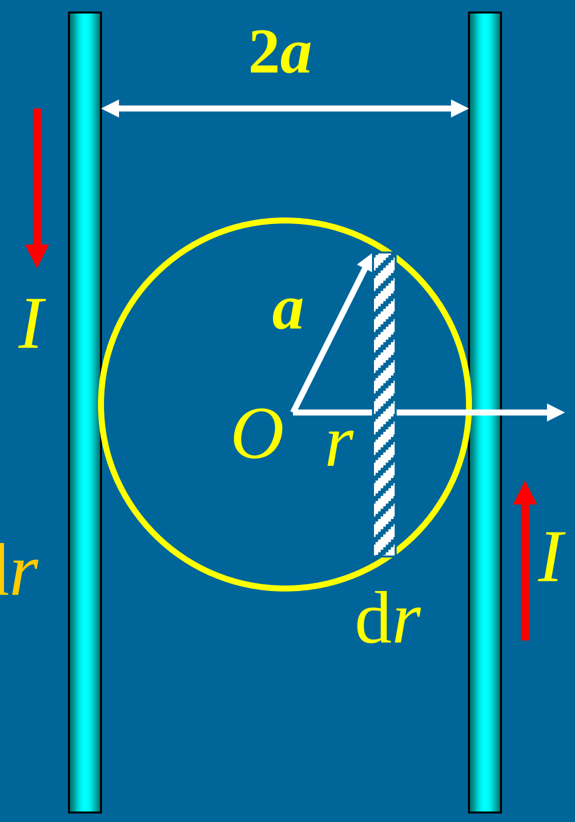
设电流 $I \Rightarrow B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{a+r}+\dfrac{1}{a-r}\right)$

$$\Phi_m=\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_S B\,dS$$

$$=\int_{-a}^{a}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{a+r}+\frac{1}{a-r}\right)2\sqrt{a^2-r^2}\,dr$$

$$=2\mu_0 I a$$

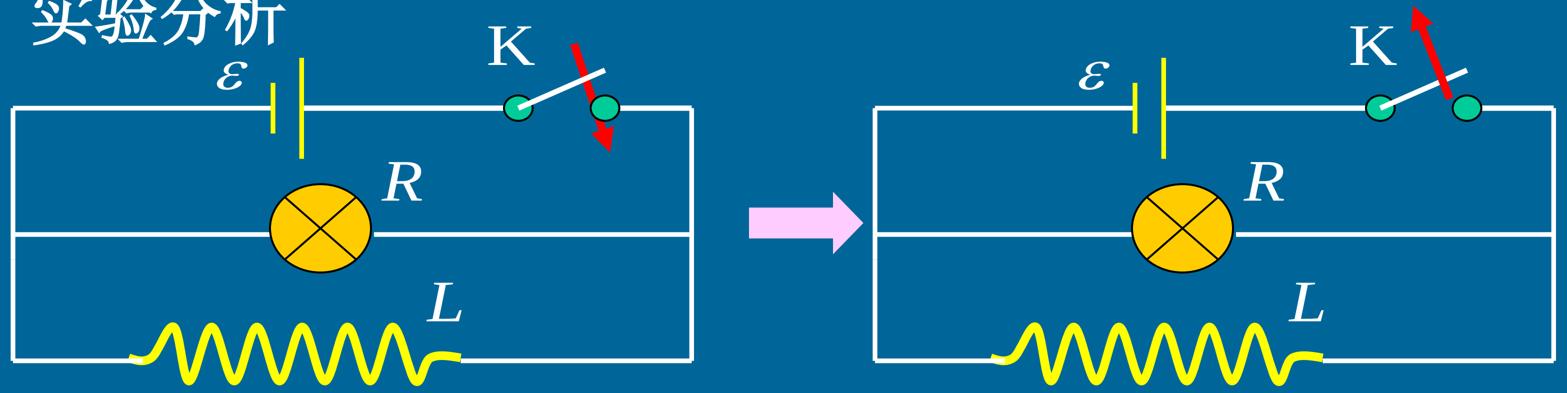
$$M=\frac{\Phi_m}{I}=2\mu_0 a$$



§ 10.4 磁场能量

一. 磁能的来源

- 实验分析



结论：在原通有电流的线圈中存在能量 —— 磁能

电源克服自感电动势作功转化为磁能储存在线圈中

- 自感磁能的计算

在t时刻，回路电流$i(t)$，感应电动势ε_L，则电源在dt时间内克服自感电动势ε_L所作的元功为：$dA = -\varepsilon_L idt$

电流由0 —I 过程中

电源所作的总功为：

$$A = \int dA = \int_0^I Lidi = \frac{1}{2}LI^2$$

$$A=\boxed{\frac{1}{2}LI^2=W_m}$$ —— (自感磁能公式)

讨论

(1) 在电流消失过程中自感电动势作功

$$dA=\varepsilon_L idt=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\mathrm{i}\mathrm{d}t=-Li\mathrm{d}i$$

$$A=\int dA=\int_I^0 -Lidi=\boxed{\frac{1}{2}LI^2=W_m}$$

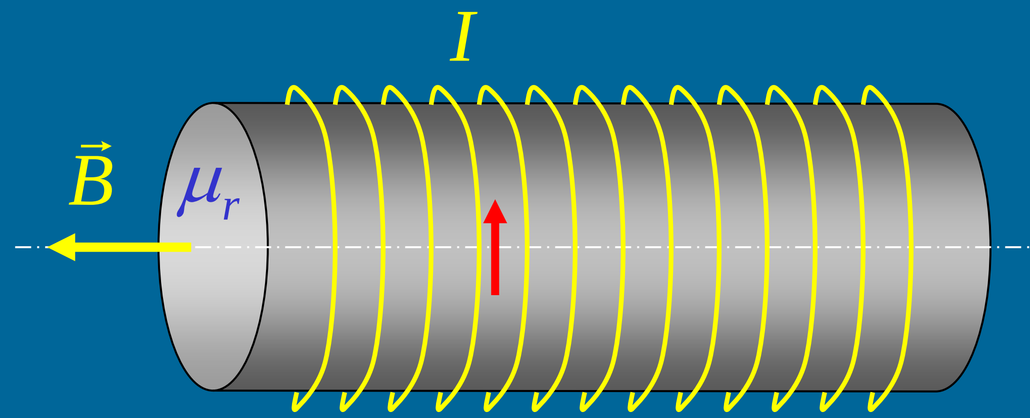
(2) 与电容储能比较

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2 \Longleftrightarrow W_e=\frac{1}{2}CU^2$$

自感线圈也是一个储能元件，自感系数反映线圈储能的本领

二. 磁能的分布

- 以无限长直螺线管为例



$$B = \mu_0 \mu_r n I$$

$$L = \frac{N\Phi_m}{I} = \frac{N\mu_0\mu_r n I \underline{S\cdot l}}{I\cdot l} = \mu_0\mu_r n^2 V$$

磁能 $W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu n^2 V I^2 = \frac{1}{2}\mu n^2 V\frac{B^2}{\mu^2 n^2} = \frac{B^2}{2\mu}V$

$$W_m = \frac{BH}{2}V$$

磁场能量密度 $w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{BH}{2}$

$$w_m = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{\mu H^2}{2}$$

说明

上式不仅适用于无限长直螺线管中的均匀磁场, 也适用于非均匀磁场, 磁能密度一般是空间和时间的函数

- 在有限区域内

$$\boxed{W_m = \int_V w_m \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2} BH \mathrm{d}V}$$

积分遍及磁场存在的空间

- 计算磁场能量的两个基本点

(1) 求磁场分布 $\longrightarrow$ $\vec{B}, \vec{H}$ $\longrightarrow$ 建立磁场能量密度

(2) 定体积元 $\mathrm{d}V$ $\longrightarrow$ 遍及磁场存在的空间积分

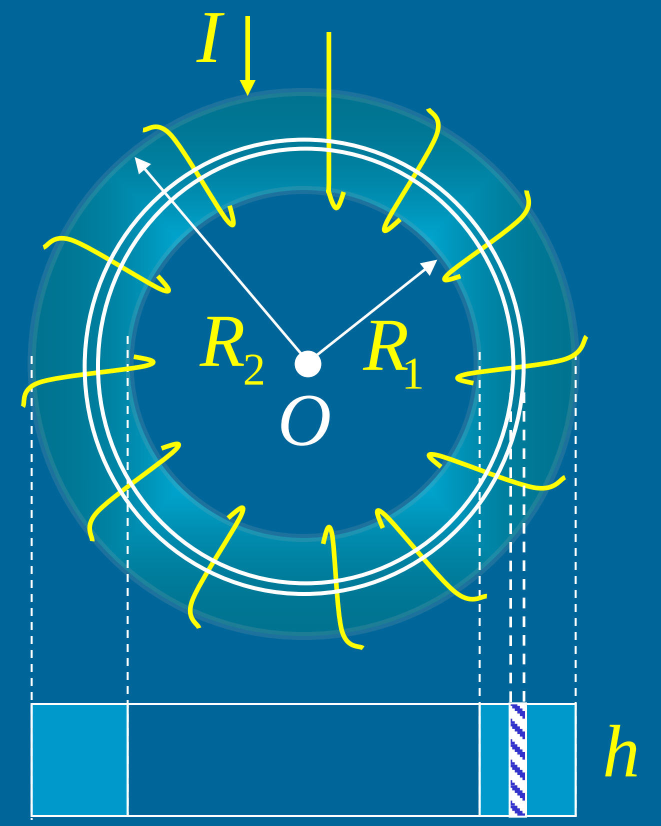
例 一由 N 匝线圈绕成的螺绕环，通有电流 I ，其中充有均匀磁介质

求 磁场能量W_m

解 根据安培环路定理, 螺绕环内

$$H=\frac{NI}{2\pi r} \quad \Leftrightarrow \quad B=\frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi r}$$

$$w_m=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}\frac{\mu_0\mu_r N^2I^2}{4\pi^2 r^2}$$



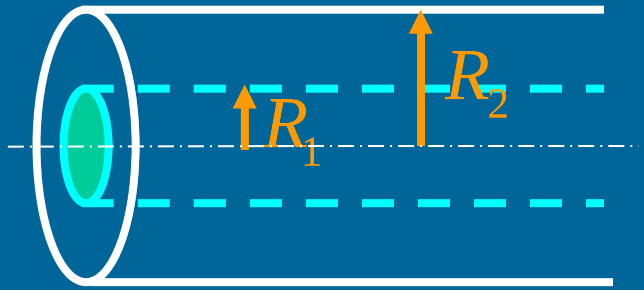
取体积元 $\mathrm{d}V=2\pi rh\mathrm{d}r$

$$W_m=\int_V w_m\mathrm{d}V=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0\mu_r N^2I^2}{8\pi^2 r^2}2\pi rh\mathrm{d}r=\frac{\mu_0\mu_r N^2I^2h}{4\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

例：一同轴电缆，由两个无限长的同轴圆筒状导体组成，沿内外筒流动的电流大小相同，方向相反，设内外圆筒截面半径为R_1、R_2

求:长为 l 的一段电缆内的磁能。

解：磁场在空间的分布



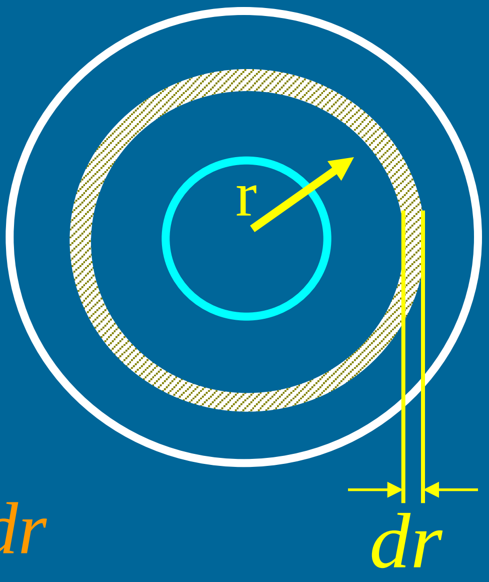
$r < R_1$ $\qquad B_1 = 0$

$R_1 < r < R_2$ $\qquad B_2 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$r > R_2$ $\qquad B_3 = 0$

磁场集中在二圆之间，磁能密度为：

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$



取一体积元 $dV = 2\pi r l dr$

$$dW_m = w_m dV = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \cdot 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi r} l dr$$

$$W_m = \int dW_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi r} l dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} l \ln \frac{R_2}{R_1}$$

又 总磁能：$W_m = \frac{1}{2} L I^2$

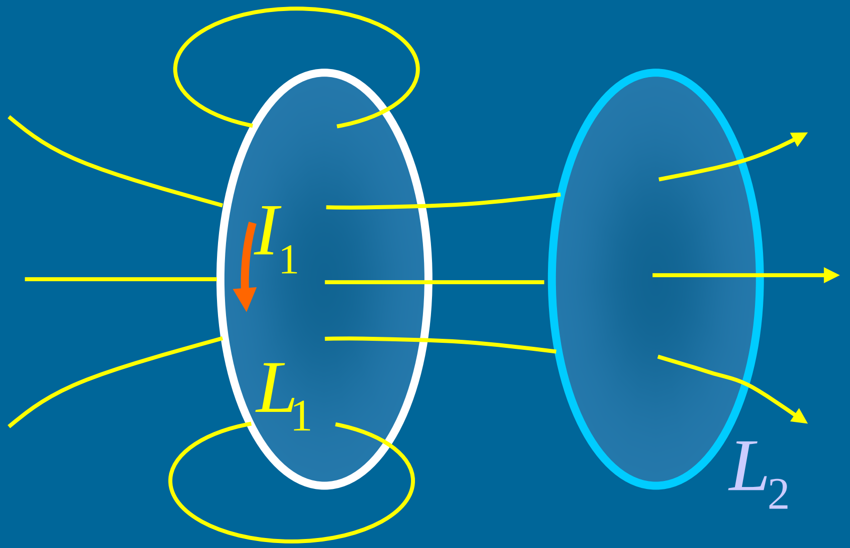
可求得长度为 l 的一段自感系数 $L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$

- 互感

$$M_{21} = M_{12} = M$$

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$



$$\varepsilon_{21} = -M_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \qquad \varepsilon_{12} = -M_{12}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

- 磁场能量

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

$$w_m = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{\mu H^2}{2}$$

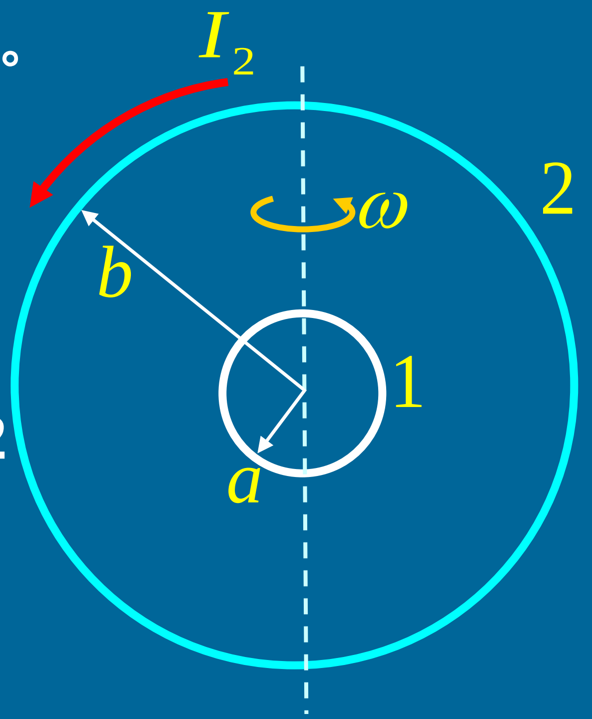
$$W_m = \int_V w_m \mathrm{d}V$$

例 两个同心线圈半径分别为a、b（$a<<b$），起初共面，大线圈保持不动并通有恒定电流 I_2，小线圈电阻为R，当小线圈绕直径以 ω 转动，忽略自感。

求 1 两线圈互感系数

2 小线圈的电流

3 大线圈的感应电动势



解 1）设小线圈为线圈1，大线圈为线圈2

线圈2在圆心处产生的磁场 $B_2=\dfrac{\mu_0 I_2}{2b}$

通过小线圈的磁通量

$$\Phi_{12}=\vec{B}_2\cdot\vec{S}_1=B_2S_1\cos\theta=\frac{\mu_0 I_2}{2b}\pi a^2\cos\omega t$$

$$M=\frac{\Phi_{12}}{I_2}=\frac{\mu_0\pi a^2}{2b}\cos\omega t$$

2）小线圈感应电动势 $\varepsilon_1=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mu_0 I_2\pi a^2\omega}{2b}\sin\omega t$

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1}{R} = \frac{\mu_0 I_2 \pi a^2 \omega}{2bR} \sin \omega t$$

3）小线圈的电流I_2产生的磁场穿过线圈2的磁通量为

$$\Phi_{21} = M I_1$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\mu_0 \pi a^2 \omega}{2b}\right)^2 \frac{I_2}{R} \cos 2\omega t$$