第2章　时变电磁场

时变电磁场

变化的电荷、电流产生变化的电场、磁场，电场和磁场不再相互独立，而是相互激发，互相转化，构成一个统一的整体，称为时变电磁场。

其主要特点：

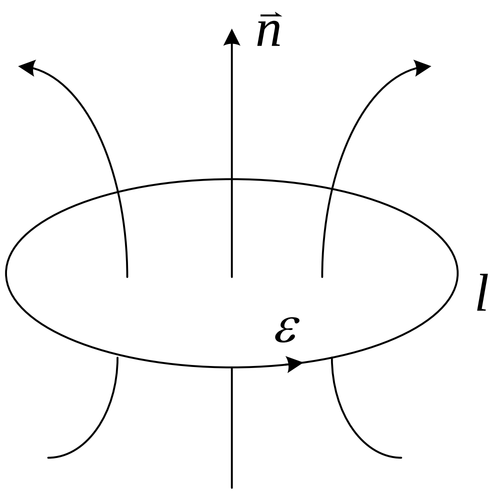
1. 变化的磁场激发电场——法拉第电磁感应定律
2. 变化的电场激发磁场——全电流定律（麦克斯韦位移电流假设）

麦克斯韦方程组——描述时变电磁场基本规律的方程组

2.1 法拉第电磁感应定律

任一闭合导线中，感应电动势等于回路所交链的磁通变化率的负值

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}$$



电源电动势的定义：非库仑场搬运单位正电荷由电源负极到正极电场力所作的功，而非库仑场通过化学反应或电磁感应提供，即

感应电动势等于感应电场（非库仑场）沿着闭合路径***l***的积分

$$\oint_l\vec{E}_{ind}\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi}{dt}$$

如果空间同时还存在由静止电荷产生的库伦场 $\vec{E}_c$，则总电场 $\vec{E}$ 为两者之和，即

$\vec{E} = \vec{E}_{ind} + \vec{E}_c$ （感应场+库伦场，由于库伦场是保守场/无旋场，其线积分为0）

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_l \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} + \oint_l \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = \oint_l \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$ 推广的法拉第电磁感应定律积分形式

引起与闭合回路交链的磁通发生变化的原因可以是磁感应强度 $\vec{B}$ 随时间的变化，也可以是闭合回路*l*自身的运动（大小、形状、位置的变化）。

若*l*为固定回路（不随时间变化）

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

利用矢量斯托克斯定理，上式可写为

$$\int_S \left(\nabla\times\vec{E}\right)\cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

上式对任意面积均成立，所以

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

推广的法拉第电磁感应定律的微分形式

说明

（1） $\because \vec{E}=\vec{E}_{ind}+\vec{E}_{c}$（感应场+库伦场，由于库伦场是保守场，其旋度为0）

$$\therefore \nabla\times\vec{E}=\nabla\times\vec{E}_{ind}+\nabla\times\vec{E}_{c}=\nabla\times\vec{E}_{ind}$$

即 $$\nabla\times\vec{E}_{ind}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

表明感应电场是有旋场，时变磁场为其涡旋源；

（2）感应电场的电力线是围绕磁感应线的闭合曲线；

（3）对于闭合回路自身运动，也可以得到

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

2.2 位移电流

电荷守恒定律在任何时刻都成立。时变情况下，电流的连续性方程为

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} \qquad (1)$$

单位时间内流出包围体积V的闭合面S的电荷量等于S面内单位时间电荷量的减少。

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{J}dV = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\cdot dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV$$

$$\nabla\cdot\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (2)$$

静态场中的安培环路定理的积分形式和微分形式 $\begin{cases}\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = I \\ \nabla\times\vec{H} = \vec{J}\end{cases}$

由于，对于任意矢量 $\vec{A}$，有 $\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)=0$ $\qquad$ $\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)=0=\nabla\cdot\vec{J}$

恒定电流的连续性方程 $\nabla\cdot\vec{J}=0 \qquad (3)$

令 $$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)=0=\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

在承认高斯定律 $\begin{cases}\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=Q=\int_V \rho dV\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho\end{cases}$ 也适用于时变场的前提下，有

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)=\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{D}\right)=\nabla\cdot\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\qquad \oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}}$$

修正的安培定律-麦克斯韦全电流定律

位移电流密度矢量-- $\vec{J}_d=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$　　位移电流-- $I_{\mathrm{d}}=\int_S\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\bullet d\vec{S}$

全电流定律揭示，不仅传导电流激发磁场，变化的电场（由位移电流形成的）也可以激发磁场。它与变化的磁场激发电场形成了一个对偶关系。

全电流：传导电流、运流电流和位移电流之和

$$\vec{J}_t = \vec{J}_c + \vec{J}_v + \vec{J}_d$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_t \qquad \nabla \cdot \left(\vec{J}_c + \vec{J}_v + \vec{J}_d \right) = 0$$

对任意封闭曲面S有

$$\oint_S \left(\vec{J}_c + \vec{J}_v + \vec{J}_d \right) \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \left(\vec{J}_c + \vec{J}_v + \vec{J}_d \right) dV = 0$$

即

$$I_c + I_v + I_d = 0$$

穿过任意封闭面的各类电流之和恒等于零，这就是全电流连续性原理。

将其应用于只有传导电流的回路中，可知节点处传导电流的代数和为零（流出的电流取正号，流入的电流取负号）。

基尔霍夫电流定律： $\sum\limits_{\text{流入，流出}} I = 0$

例**1**：计算铜中的位移电流密度和传导电流密度的比值。设铜中的电场为 $E_0\sin\omega t$ ，铜的电导率 $\sigma=5.8\times10^7 S/m$，$\varepsilon=\varepsilon_0$

解：铜中的传导电流密度为 $J_c=\sigma E=\sigma E_0\sin\omega t$

铜中的位移电流密度为 $J_d=\dfrac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon\dfrac{\partial E}{\partial t}=\varepsilon\omega E_0\cos\omega t$

$$\frac{J_d}{J_c}=\frac{\omega\varepsilon}{\sigma}=\frac{2\pi f\,\dfrac{1}{36\pi}\times10^{-9}}{5.8\times10^7}=9.6\times10^{-19}\,f$$

例2：在坐标原点附近区域内，传导电流密度为

$$\vec{J} = \vec{e}_r 10 r^{-1.5} \qquad \left(A/m^2\right)$$

试求：

（1）通过半径r=1mm的球面的电流值；

（2）在r=1mm的球面上电荷密度的增加率；

（3）在r=1mm的球内总电荷的增加率。

解：

(1)
$$I=\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}10r^{-1.5}r^2\sin\theta d\theta d\varphi\,|_{r=1mm}$$
$$=40\pi r^{0.5}\,|_{r=1mm}=3.9738A$$

(2) 因为$\nabla\cdot\vec{J}=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}(r^2\times 10r^{-1.5})=5r^{-2.5}$

由电流连续性方程，得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\Big|_{r=1mm}=-\nabla\cdot\vec{J}\Big|_{r=1mm}=-1.58\times10^8\,(A/m^2)$$

(3) 在r =1mm的球内总电荷的增加率：（电荷守恒定律）

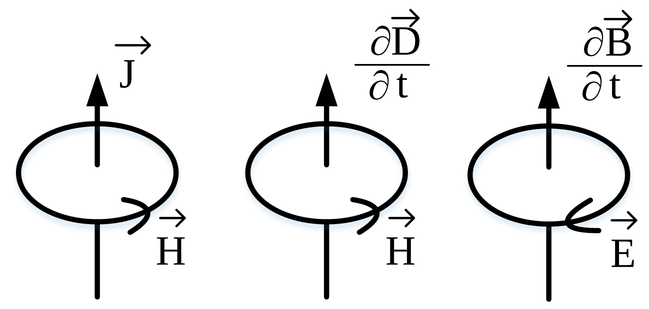
$$\frac{dQ}{dt}=-I=-3.97A$$

2.3 麦克斯韦方程组

一、麦克斯韦方程组

微分形式

$$
\begin{cases}
\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} & \text{（1）全电流定律} \\
\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \text{（2）法拉第电磁感应定律} \\
\nabla\cdot\vec{B}=0 & \text{（3）磁通连续性定理} \\
\nabla\cdot\vec{D}=\rho & \text{（4）高斯定理}
\end{cases}
$$



$$\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$ 电流的连续性方程

（可由Maxwell第一方程和第四方程推导出来）

2.3 麦克斯韦方程组

一、麦克斯韦方程组

积分形式

$$
\begin{cases}
\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} \\
\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\
\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\
\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV
\end{cases}
$$

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}$$ 电流的连续性方程

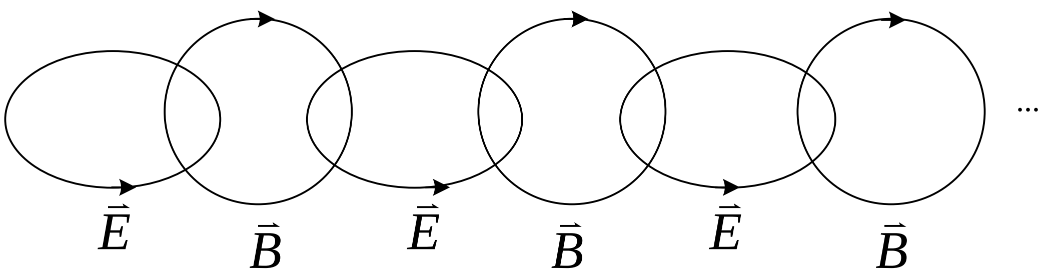
麦克斯韦方程组是世界上最美方程组

https://zhuanlan.zhihu.com/p/71793554

$$
\begin{cases}
\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} & \text{（1）全电流定律} \\
\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \text{（2）法拉第电磁感应定律} \\
\nabla\cdot\vec{B}=0 & \text{（3）磁通连续性定理} \\
\nabla\cdot\vec{D}=\rho & \text{（4）高斯定理}
\end{cases}
$$

关于麦克斯韦方程组的说明：

1、麦克斯韦方程（1）和（2）为麦克斯韦方程组的核心，称为基本方程；它表明：传导电流和时变电场能激发磁场，时变磁场能激发电场，电场与磁场可以互相激发，并脱离场源而独立存在，形成电磁波。



$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} & \text{（1）全电流定律} \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \text{（2）法拉第电磁感应定律} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 & \text{（3）磁通连续性定理} \\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho & \text{（4）高斯定理} \end{cases}$$

关于麦克斯韦方程组的说明：

2、麦克斯韦方程（3）表示磁场是无散场，磁力线总是闭合曲线。麦克斯韦方程（4）为电场高斯定理，表明电场是有源场。

3、一般的，$\vec{E},\vec{B},\vec{D},\vec{H},\rho,\vec{J}$为 $\vec{r},t$ 的函数，若与 t 无关，则退化为静态场方程，电场与磁场不再相关，彼此独立。

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J} \\ \nabla\times\vec{E}=0 \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho \end{cases}$$

静电场有散无旋

恒定磁场有旋无散

4、线性空间中，叠加原理适用于麦克斯韦方程组。

5、可以由基本方程推导其他两个方程。

如：

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{E})=\nabla\cdot\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right)=0$$

如果我们假设过去或将来某一时刻，$\nabla\cdot\vec{B}$在空间每一点上都为零，则$\nabla\cdot\vec{B}$在任何时刻处处为零，所以有

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

另一个的推导需要使用电荷守恒定律的微分形式：$\nabla\cdot\vec{J}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$

视频：https://haokan.baidu.com/v?pd=wisenatural&vid=11543643792762171671

二、麦克斯韦方程的辅助方程——本构关系

对于各向同性的线性媒质，本构关系为
$$\begin{cases}\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}\\ \vec{B}=\mu\vec{H}=\mu_r\mu_0\vec{H}\\ \vec{J}=\sigma\vec{E}\end{cases}$$

ε是介电常数，ε_r是相对介电常数， ε_0是真空的介电常数，取值为

$$\varepsilon_0=\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\approx8.854\times10^{-12}\,(\mathrm{F/m})$$

μ是磁导率， μ_r是相对磁导率， μ_0是真空的磁导率，取值为

$$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,(\mathrm{H/m})$$

σ 是导电媒质的电导率，单位是西门子每米（S/m）；

σ =0的介质称为理想介质；

σ --∞的介质称为理想导体；

σ 介于0和∞之间的媒质称为导电媒质或有耗媒质；

二、麦克斯韦方程的辅助方程——本构关系

利用本构关系 $\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 H \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{cases}$

麦克斯韦方程组可用 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 两个场量表示如下：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial \mathrm{t}} \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial \mathrm{t}} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

上面这组方程称为麦克斯韦方程的限定形式

例1. 证明均匀导电媒质内部，不会有永久的自由电荷分布。

解：将$\vec{J}=\sigma\vec{E}$代入电流连续性方程，考虑到媒质均匀，有

$$\nabla\cdot\left(\sigma\vec{E}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}=\sigma\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

由于

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho\Rightarrow\nabla\cdot\left(\varepsilon\vec{E}\right)=\rho\Rightarrow\varepsilon\nabla\cdot\vec{E}=\rho$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho=0$$

$$\rho(\mathrm{t})=\rho_o e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

例2. 已知在无源的自由空间中，$\vec{E}=\vec{e}_x E_0\cos(\omega t-\beta z)$，其中 E_0,β 为常数，求 $\vec{H}$

解：所谓无源，即所研究区域内没有场源电流和电荷，即 $\vec{J}=0,\rho=0$

$$\nabla\times\vec{E}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ E_x & 0 & 0\end{vmatrix}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\vec{e}_y E_0\beta\sin(\omega t-\beta z)=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{e}_x H_x+\vec{e}_y H_y+\vec{e}_z H_z\right)$$

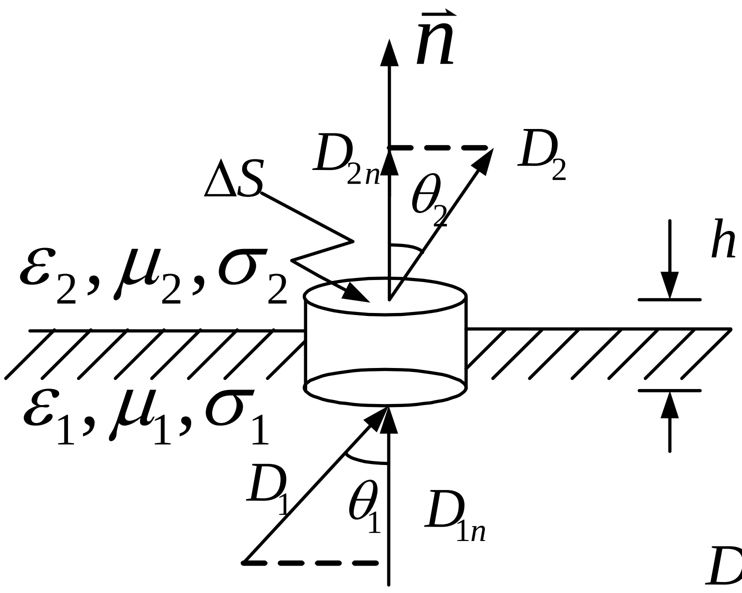
$$\therefore H_x=H_z=0$$

$$-\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t}=E_0\beta\sin(\omega t-\beta z)$$

$$H_y=\frac{E_0\beta}{\mu_0\omega}\cos(\omega t-\beta z)\qquad\qquad \vec{H}=\vec{e}_y\frac{E_0\beta}{\mu_0\omega}\cos(\omega t-\beta z)$$

2.4　时变电磁场的边界条件

一. 不同介质分界面上法向分量的边界条件



$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S_1} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{\Delta S_2} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{\Delta S_3} \vec{D}\cdot d\vec{S} = q$$

$$h \to 0 \qquad \int_{\Delta S_3} \vec{D}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{D}_2 \cdot \vec{n}\Delta S - \vec{D}_1 \cdot \vec{n}\Delta S = \rho_S \Delta S$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_S \qquad \text{或} \qquad \vec{n}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \rho_S$$

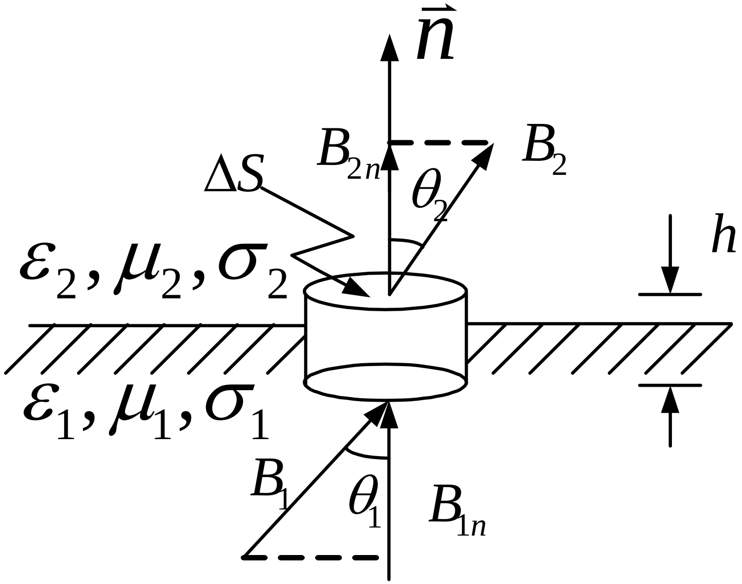
当界面上有自由面电荷分布时，电位移矢量的法向分量不连续而要发生突变，其突变量等于界面上的自由面电荷密度。

同理，在边界上计算穿过圆柱体封闭面的磁通量

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0$$

$$B_{2n}=B_{1n}$$



磁感应强度的法向分量连续。

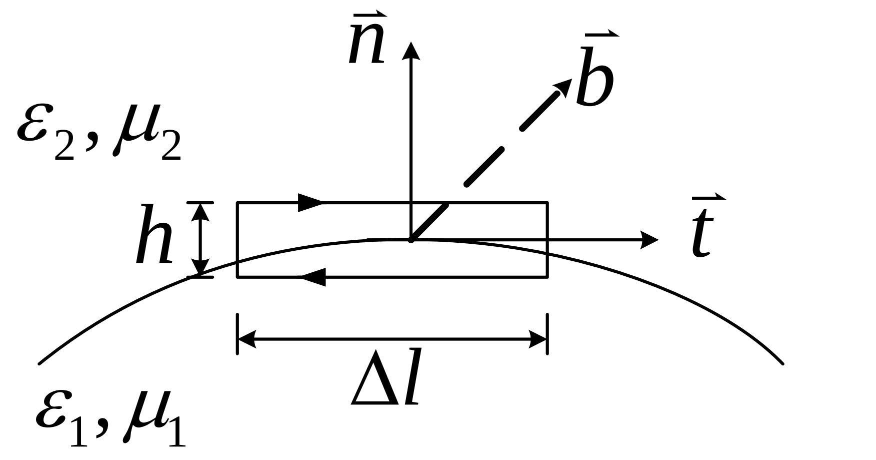
二、不同介质分界面上切向分量的边界条件

在边界面上作一个矩形回路，如图，矩形上下边的长度为 Δl，且 Δl 很小，可以认为磁场强度 $\vec{H}$ 在 Δl 上是均匀的，高度***h***趋于零。

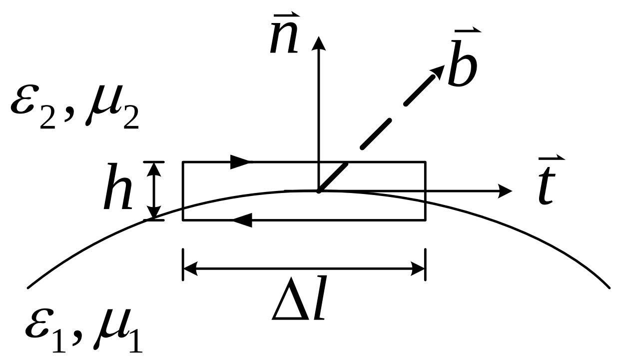
由于此闭合回路很小，认为通过该回路围成的曲面**S**的电流是均匀的，即电流密度 $\vec{J}$ 为常矢量。

在此闭合回路上使用全电流定律

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$



$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

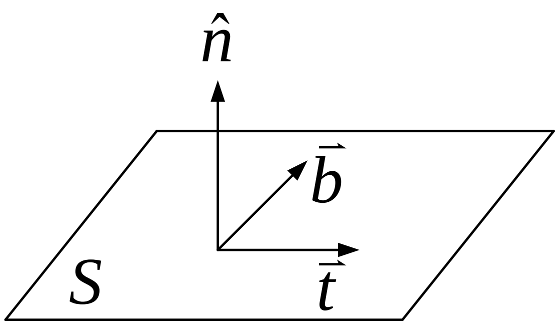


$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \vec{H}_2\cdot\vec{t}\,\Delta l + \vec{H}_1\cdot\left(-\vec{t}\,\Delta l\right) = \vec{t}\cdot\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right)\Delta l$$

$$= \left(\vec{b}\times\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right)\Delta l = \boxed{\vec{b}\cdot\left[\vec{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right)\right]\Delta l}$$

传导电流项： 由于矩形回路的高h趋于零，所以通过该回路的电流可以看成面电流，则

$$\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \vec{J}\cdot\vec{b}\,\Delta l h \xrightarrow{h\to 0} \boxed{\vec{J}_S\cdot\vec{b}\,\Delta l}$$



$$\vec{t} = \vec{b}\times\hat{n}$$

位移电流项：

$$\because \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\text{有限，而}h\to 0$$

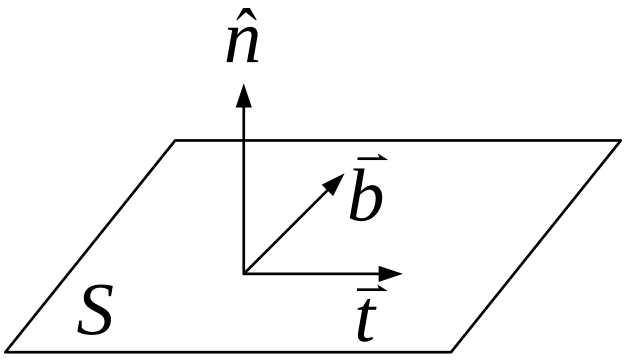
$$\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \lim_{h\to 0}\frac{\partial D}{\partial t}\cdot bh\Delta l = 0$$

$$\vec{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)\cdot\vec{b}=\vec{J}_S\cdot\vec{b}$$

其中，b为矩形回路所构成的曲面的单位法矢。与回路的选取有关，为垂直于$\vec{n}$的任意方向单位矢量，所以

$$\vec{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{J}_S$$

$$H_{2t}-H_{1t}=J_S$$



磁场强度切向存在跃变，跃变值为面电流密度。

$$\vec{t}=\vec{b}\times\hat{n}$$

同理，在边界上使用法拉第电磁感应定律

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) = 0$$

$$E_{2t} = E_{1t}$$

电场强度切向连续。

时变电磁场边界条件总结：

$$\begin{cases} \vec{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{J}_S \\ \vec{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=\vec{0} \\ \vec{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0 \\ \vec{n}\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=\rho_S \end{cases}$$

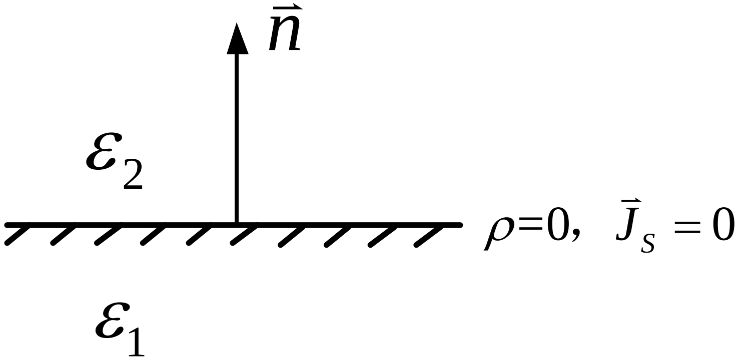
$$\begin{cases} H_{2t}-H_{1t}=J_S \\ E_{2t}-E_{1t}=0 \\ B_{2n}-B_{1n}=0 \\ D_{2n}-D_{1n}=\rho_S \end{cases}$$

- 磁场强度矢量 $\bar{H}$ 切向存在跃变，跃变值等于自由面电流密度；
- 电场强度 $\bar{E}$ 切向连续；
- 磁感应强度 $\bar{B}$ 法向连续；
- 电位移矢量 $\bar{D}$ 法向存在跃变，跃变值等于自由面电荷密度。

三、两种特殊情况

- 两种理想介质界面的边界条件

理想介质电导率为0，在分界面不存在自由面电荷和自由面电流 $\vec{J}_S=0, \rho_S=0$

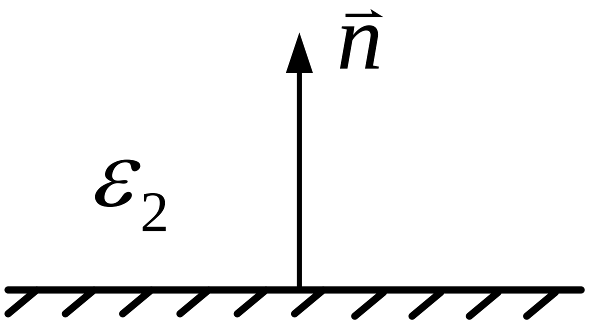


$$\begin{cases} \vec{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{0} \\ \vec{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=\vec{0} \\ \vec{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0 \\ \vec{n}\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{2t}-H_{1t}=0 \\ E_{2t}-E_{1t}=0 \\ B_{2n}-B_{1n}=0 \\ D_{2n}-D_{1n}=0 \end{cases}$$

•理想导体与理想介质界面的边界条件

理想导体中 $\sigma \to \infty$，所以在理想导体内部不存在电场。此外，在时变条件下，理想导体内部也不存在磁场。因此，时变条件下，理想导体内部不存在电磁场，即所有场量为零。



理想导体**1** $\{\vec{E}1, \vec{B}1, \vec{D}1, \vec{H}1\} = 0$

$$\begin{cases} \vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{J}_S \\ \vec{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = \vec{0} \\ \vec{n} \cdot \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0 \\ \vec{n} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \rho_S \end{cases}$$

设 $\vec{n}$是理想导体的外法向矢量，$\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$ 为理想导体外部的电磁场，那么理想导体表面的边界条件为

$$\begin{cases} \vec{n} \times \vec{H} = \vec{J}_S \\ \vec{n} \times \vec{E} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{D} = \rho_S \end{cases} \qquad \begin{cases} H_{2t} = J_S \\ E_{2t} = 0 \\ B_{2n} = 0 \\ D_{2n} = \rho_S \end{cases}$$

2.5　时变电磁场的能量和能流

静态场的能量密度公式及损耗功率密度公式完全可以推广到时变电磁场。

对于各向同性的线性媒质

电场能量密度 $$w_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}\varepsilon E^2(\boldsymbol{r},t)$$

磁场能量密度 $$w_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}\mu H^2(\boldsymbol{r},t)$$

损耗功率密度 $$p_l(\boldsymbol{r},t)=\sigma E^2(\boldsymbol{r},t)$$

因此，时变电磁场的能量密度为

$$w(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}\left[\varepsilon E^2(\boldsymbol{r},t)+\mu H^2(\boldsymbol{r},t)\right]$$

可见，时变场的能量密度是空间及时间的函数，而且时变电磁场的能量还会流动。

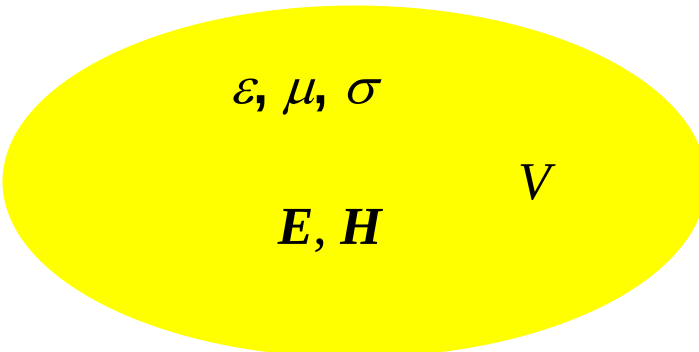
为了衡量这种能量流动的方向及强度，引入能量流动密度矢量，其方向表示能量流动方向，其大小表示单位时间内垂直穿过单位面积的能量。或者说，垂直穿过单位面积的功率，所以能量流动密度矢量又称为功率流动密度矢量。

能量流动密度矢量在英美书刊中称为坡印亭矢量，在俄罗斯书刊中称为乌莫夫矢量。

能量流动密度矢量或简称为能流密度矢量以 S 表示， 单位为$\mathrm{W/m^2}$。

能流密度矢量 S 与电场强度 E 及磁场强度 H 的关系如何？

设无外源（$J' = 0$，$\rho = 0$）的区域 V 中，媒质是线性且各向同性的，则此区域中麦克斯韦方程为



$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \sigma\boldsymbol{E} + \varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot(\mu\boldsymbol{H}) = 0$$

$$\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E}) = 0$$

利用矢量恒等式 $\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}$

将上式代入，整理后求得 $\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu H^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2}\right) - \sigma E^2$

将上式两边对区域 V 求积分，得

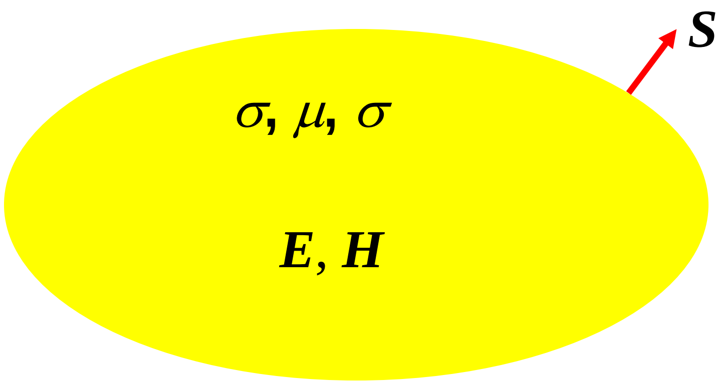
$$\int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)\mathrm{d}V - \int_V \sigma E^2\mathrm{d}V$$

考虑到 $\int_V \nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V = \oint_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ （散度定理），那么

$$-\oint_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)\mathrm{d}V + \int_V \sigma E^2 \mathrm{d}V$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right)dV + \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}dV$$

上式称为时变电磁场的能量定理/坡印廷定理。任何满足上述麦克斯韦方程的时变电磁场均必须服从该能量定理。

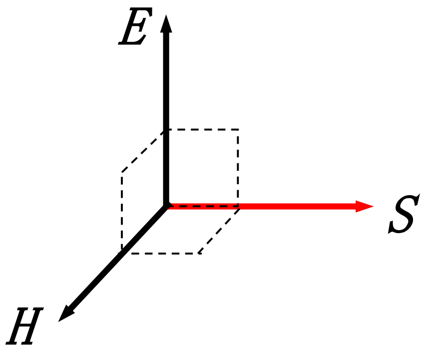


上式左边的被积函数 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 代表单位时间内穿过单位面积的能量/功率，因此，就是前述的能流密度矢量/功率流密度矢量/坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$， 即

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$$

此式表明，S 与 E 及 H 垂直。又知 $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{H}$ ，因此，S，E 及 H 三者在空间是相互垂直的，且由 E 至 H 与 S 构成右手螺旋关系，如图。



能流密度矢量的瞬时值为

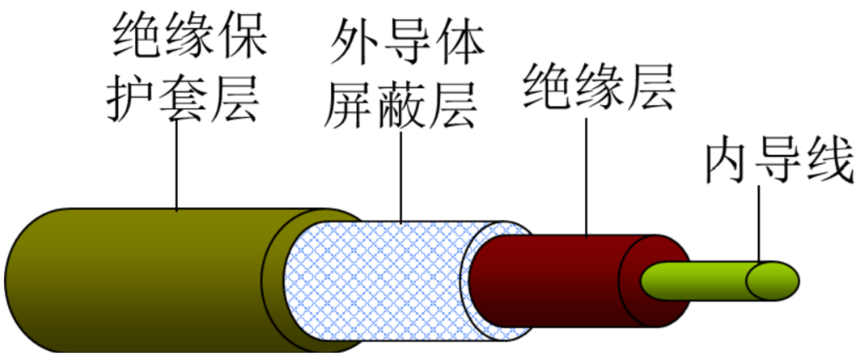
$$S(\boldsymbol{r},t) = E(\boldsymbol{r},t)H(\boldsymbol{r},t)$$

可见，能流密度矢量的瞬时值等于电场强度和磁场强度的瞬时值的乘积。

只有当两者同时达到最大值时，能流密度才达到最大。若某一时刻电场强度或磁场强度为零，则在该时刻能流密度矢量为零。

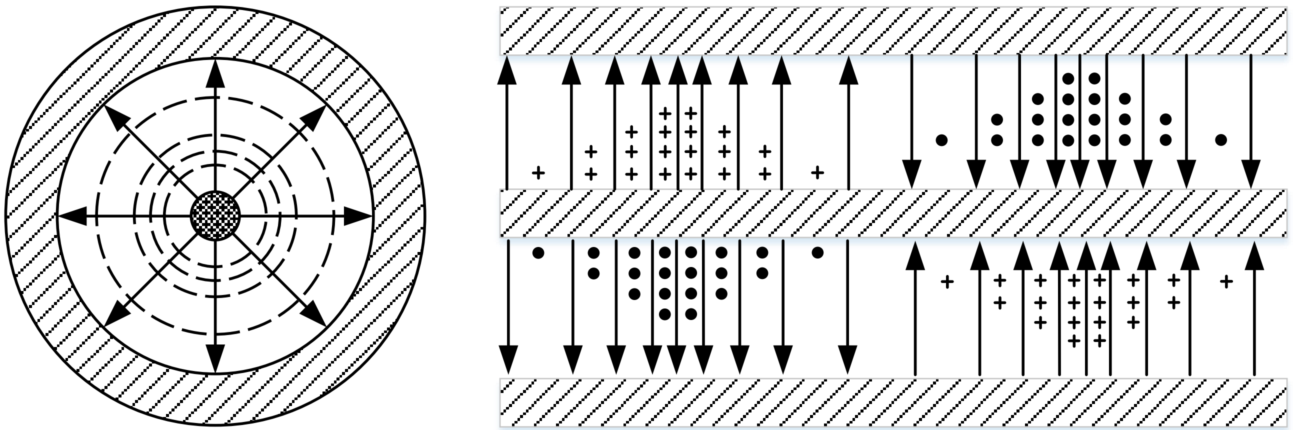
同轴线的电场、磁场、电磁场的方向是怎样的呢？

例：课本37页例2-4-1



同轴线结构图

同轴线实物图



同轴线场力线

说明：1. 同轴线结构上属于双导体传输线，在其横截面上的电磁场分布与静态场类似；

2. 电磁场被限定在内外导体之间，所以同轴线基本没有辐射损耗，几乎不受外界信号干扰；

3. 同轴线可从直流段一直应用到毫米波波段，比如有线电视，毫米波天线中都有同轴线的应用。

结论：传输线所传输的功率是通过内外导体间的电磁场传送的，导体结构只起着引导的作用。

2.6　正弦电磁场

1.　正弦电磁场

各场量均随时间以相同频率作正弦或余弦变化的电磁场，称为时谐电磁场或正弦电磁场。它作为交变电磁场的特例，有特别重要的意义。这是因为任何时变场（不管是周期还是非周期）都可以根据傅里叶变换将其展为离散（周期变化）或连续（非周期变化）的正弦分量，因此研究时谐场的计算方法具有重要意义。

（1）正弦电磁场的构成

正弦电磁场的构成与交流电路中的电压电流表示一样，区别就是交流电压电流是标量（相量），电场磁场是矢量。

这里的“正弦”是广义泛指以角频率ω 周期变化的时变场，不是数学上狭义特指的正弦函数。

设 $\vec{E}=\vec{E}_m\cos(\omega t+\varphi)=\mathrm{Re}\left[\vec{E}_m e^{j(\omega t+\varphi)}\right]=\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t}\right]$

其中：

$\vec{E}_m$ ——振幅矢量，实矢量，不是复数，只与位置有关，与时间无关

$\dot{\vec{E}}_m=\vec{E}_m e^{j\varphi}$ ——复振幅矢量，是复数，只与位置有关，与时间无关

$\dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t}\left(or\ \vec{E}_m e^{j(\omega t+\varphi)}\right)$ ——瞬时值复数形式，是复数，与时间有关

$\vec{E}_m\cos(\omega t+\varphi)$ ——瞬时值矢量，不是复数，与时间有关

$$\vec{E}_m \longrightarrow \vec{E}_m e^{j\varphi} \longrightarrow \vec{E}_m e^{j\varphi}e^{jwt} \longrightarrow \mathrm{Re}\left[\vec{E}_m e^{j\varphi}e^{jwt}\right]$$

振幅矢量→复振幅矢量$\dot{\vec{E}}_m$→瞬时值复数形式$\dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t}$→瞬时值矢量$\vec{E}_m\cos(\omega t+\varphi)$

例：$\vec{E}=E_{xm}\cos\left(\omega t+\varphi_x\right)\vec{e}_x+E_{ym}\cos\left(\omega t+\varphi_y\right)\vec{e}_y+E_{zm}\cos\left(\omega t+\varphi_z\right)\vec{e}_z$

$\vec{E}$ ——表示的是瞬时值

$\dot{\vec{E}}=E_{xm}e^{j\varphi_x}\vec{e}_x+E_{ym}e^{j\varphi_y}\vec{e}_y+E_{zm}e^{j\varphi_z}\vec{e}_z$ ——复振幅

$\vec{E}=\left(E_{xm}e^{j\varphi_x}\vec{e}_x+E_{ym}e^{j\varphi_y}\vec{e}_y+E_{zm}e^{j\varphi_z}\vec{e}_z\right)e^{j\omega t}$ ——瞬时值的复数形式

（2）复数形式（频域）的Maxwell方程

利用场矢量的瞬时值的复数形式，可以很容易导出复数形式的**Maxwell**方程

设 $\dot{\vec{E}}e^{j\omega t},\dot{\vec{H}}e^{j\omega t},\dot{\vec{B}}e^{j\omega t},\dot{\vec{D}}e^{j\omega t},\dot{\vec{J}}e^{j\omega t},\rho e^{j\omega t}$，为各场分量的瞬时值的复数形式，

$\dot{\vec{E}},\dot{\vec{H}},\dot{\vec{B}},\dot{\vec{D}},\dot{\vec{J}}$ 为复振幅矢量，ρ 为复振幅，$\dfrac{\partial}{\partial t}=j\omega$，代入**Maxwell**方程，有

$$e^{j\omega t}\left(\nabla\times\dot{\vec{H}}\right)=\left(\dot{\vec{J}}+j\omega\dot{\vec{D}}\right)e^{j\omega t}$$

$$
\begin{cases}
\nabla \times \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}} + j\omega\dot{\vec{D}} \\
\nabla \times \dot{\vec{E}} = -j\omega\dot{\vec{B}} \\
\nabla \cdot \dot{\vec{B}} = 0 \\
\nabla \cdot \dot{\vec{D}} = \rho
\end{cases}
$$

$$
\nabla \cdot \dot{\vec{J}} = -j\omega\rho
$$

显然，上述方程中的各场量只是位置的函数，即复量方程是一组三维方程，而瞬时值方程是一组四维方程。因此，复数的场矢量方程更便于求解各矢量，再由复振幅和瞬时值的关系，可以很快求出瞬时值。

上述复数形式的Maxwell方程组也称为Maxwell频域方程。

例：已知自由空间中有一正弦电磁场 $\vec{E} = E_0 \sin k_1 x \cos(\omega t - kz)\vec{e}_x$
求自由空间中 $\vec{H}$ 的瞬时值。

解：E 的瞬时值的复数形式为 $\vec{E} = E_0 \sin k_1 x e^{-jkz} e^{j\omega t}\vec{e}_x$

$$\text{复振幅} \quad \dot{\vec{E}} = E_0 \sin k_1 x e^{-jkz}\vec{e}_x$$

$$-j\omega\mu_0 \dot{\vec{H}} = \nabla \times \dot{\vec{E}} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_0 \sin k_1 x e^{-jkz} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -jkE_0 \sin k_1 x e^{-jkz}\vec{e}_y$$

$$\dot{\vec{H}} = \frac{k}{\omega\mu_0} E_0 \sin k_1 x e^{-jkz}\vec{e}_y$$

$$\vec{H} = \frac{k}{\omega\mu_0} E_0 \sin k_1 x \cos(\omega t - kz)\vec{e}_y$$

2. 复坡印廷矢量

对正弦电磁场 $$\vec{E}=\mathrm{Re}\left(\dot{\vec{E}}\cdot e^{j\omega t}\right)=\frac{1}{2}\left(\dot{\vec{E}}\cdot e^{j\omega t}+\dot{\vec{E}}^{*}\cdot e^{-j\omega t}\right)$$

$$\vec{H}=\mathrm{Re}\left(\dot{\vec{H}}\cdot e^{j\omega t}\right)=\frac{1}{2}\left(\dot{\vec{H}}\cdot e^{j\omega t}+\dot{\vec{H}}^{*}\cdot e^{-j\omega t}\right)$$

则瞬时坡印廷矢量为

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{1}{2}\left(\dot{\vec{E}}\cdot e^{j\omega t}+\dot{\vec{E}}^{*}\cdot e^{-j\omega t}\right)\times\frac{1}{2}\left(\dot{\vec{H}}\cdot e^{j\omega t}+\dot{\vec{H}}^{*}\cdot e^{-j\omega t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^{*}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}\cdot e^{j2\omega t}\right)$$

对 $\vec{S}$ 在一个周期内取平均得

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\vec{S}dt=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^{*}\right)=\mathrm{Re}\left(\dot{\vec{S}}\right)$$

$\vec{S}_{av}$称为平均能流密度矢量或平均坡印廷矢量

注意：当出现场量的非线性运算时，切记

$$\mathrm{Re}\left(\vec{A}\right)\times\mathrm{Re}\left(\vec{B}\right)\neq\mathrm{Re}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$$

$$\mathrm{Re}\left(\vec{A}\right)\cdot\mathrm{Re}\left(\vec{B}\right)\neq\mathrm{Re}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\vec{A}\right)\times\mathrm{Re}\left(\vec{B}\right) &= \frac{1}{2}\left(\vec{A}+\vec{A}^{*}\right)\times\frac{1}{2}\left(\vec{B}+\vec{B}^{*}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left[\vec{A}\times\vec{B}+\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)^{*}+\vec{A}\times\vec{B}^{*}+\left(\vec{A}\times\vec{B}^{*}\right)^{*}\right]\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{B}^{*}\right)
\end{aligned}$$

复坡印廷矢量

$$\dot{\vec{S}} = \frac{1}{2}\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*$$

与时间t无关，表示复功率流密度，其实部为平均功率流密度（有功功率流密度），虚部为无功功率流密度。

注意： 式中的 $\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}$ 是复振幅值而不是有效值。

$\dot{\vec{S}}, \vec{S}_{av}, \vec{S}$ 之间的相互关系

1. $\dot{\vec{S}} = \frac{1}{2}\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*$是复功率流密度，是复矢量——复坡印廷矢量

   $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ 是瞬时功率流密度矢量——坡印廷矢量

2. $\vec{S}_{av} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^*\right) = \mathrm{Re}\left(\dot{\vec{S}}\right)$ 是平均功率流密度，是实矢量，与t无关

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}dt \qquad \vec{S}_{av} \neq \vec{S}$$

例：已知 $\vec{E}=E_0\sin k_1x\cos\left(\omega t-kz+30^0\right)\vec{e}_x$

$$\vec{H}=\frac{k}{\omega\mu_0}E_0\sin k_1x\cos\left(\omega t-kz\right)\vec{e}_y$$

求瞬时坡印廷矢量、复坡印廷矢量和平均坡印廷矢量。

解：

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{k}{\omega\mu_0}E_0^2\sin^2k_1x\cos\left(\omega t-kz+30^0\right)\cos\left(\omega t-kz\right)\vec{e}_z$$

$$\dot{\vec{E}}=E_0\sin k_1xe^{-j\left(kz-30^0\right)}\vec{e}_x,\quad \dot{\vec{H}}=\frac{k}{\omega\mu_0}E_0\sin k_1xe^{-jkz}\vec{e}_y,$$

$$\dot{\vec{S}}=\frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*=\frac{k}{2\omega\mu_0}E_0^2\sin^2k_1xe^{j30^0}\vec{e}_z$$

$$\vec{S}_{av}=\mathrm{Re}\left(\dot{\vec{S}}\right)=\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{S}dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{k}{\omega\mu_0}E_0^2\sin^2k_1x\vec{e}_z$$

2.7 波动方程

- **Maxwell**方程组揭示出这样一个事实：在交变条件下，电磁场的变化具有波动的性质，这种以波动形式传播的电磁场，就称为电磁波。

- 一方面，在电磁波理论的基础上把光与电磁场统一起来，证明了光也是一种具有不同波长的电磁波，并将这种统一扩展到热射线，*X*射线和γ射线等，从而对揭示物质的微观结构起了重大作用。

- 另一方面，由于电磁波日益广泛和重要的应用，又反过来推动了电磁理论的进一步发展。

- 下面我们就从**Maxwell**方程组出发来考察在不同情况下电磁场如何变化，找出电磁场随时间和空间而变化的关系。

1. 线性、各向同性、均匀、无源的理想介质中（$\vec{J}=0, \rho=0, \sigma=0$）

$$\nabla\times\vec{H}=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (1) \qquad \nabla\cdot\vec{B}=\mu\nabla\cdot\vec{H}=0 \quad (3)$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \quad (2) \qquad \nabla\cdot\vec{D}=\varepsilon\nabla\cdot\vec{E}=0 \quad (4)$$

推导：

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=-\mu\nabla\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{H}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{H}=-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$\because \nabla\cdot\vec{E}=0 \quad \therefore \nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$ 　　$\vec{E}$的齐次波动方程

同理，$\nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0$ 　　$\vec{H}$的齐次波动方程

1. 线性、各向同性、均匀、无源的理想介质中（$\vec{J}=0, \rho=0, \sigma=0$）

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

自由空间的电磁场波动方程

其解必须满足：$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0$

正弦电磁场，相应的复数形式的波动方程（证明）

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + k^2 \dot{\vec{E}} = 0, \quad \nabla^2 \dot{\vec{H}} + k^2 \dot{\vec{H}} = 0$$ 齐次亥姆霍兹方程

$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ ——传播常数（波数）

其解必须满足：$\nabla \cdot \dot{\vec{E}} = 0, \quad \nabla \cdot \dot{\vec{H}} = 0$

2. 线性、各向同性、均匀的导电媒质填充的无源区域内（ $\rho = 0, \sigma \neq 0$ ）

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

电磁场的波动方程

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

(矢量齐次波动方程)

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$$

其解必须满足： $\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0$

2. 线性、各向同性、均匀的导电媒质填充的无源区域内（ $\rho=0,\sigma\neq 0$ ）

电磁场的波动方程：

$$\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0$$

$$\nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=0$$

正弦电磁场，复数形式的波动方程

$$\nabla^2\dot{\vec{E}}+\left(k^2-j\omega\mu\sigma\right)\dot{\vec{E}}=0$$

$$\nabla^2\dot{\vec{H}}+\left(k^2-j\omega\mu\sigma\right)\dot{\vec{H}}=0$$

$\tilde{k}=\sqrt{k^2-j\omega\mu\sigma}=\omega\sqrt{\mu\tilde{\varepsilon}}\ [\tilde{\varepsilon}=\varepsilon(1-\mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon})]=\beta-j\alpha$ ——特征传播常数（复波数）

$$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right)}\qquad\alpha=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right)}$$

相移常数，1/m　　　　衰减常数，**1/m**

3. 更普遍的，考虑外加场源不为0的情况

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

电磁场的波动方程

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\varepsilon}$$

非齐次矢量波动方程

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{J}$$

对比数学物理方程中的一维波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t)$

波速 $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$　　自由空间中 $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8 m/s = c$

电磁场的波动方程

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\varepsilon} \qquad \nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{J}$$

- 波动方程表明：在交变电磁场中，电场和磁场都以波的形式运动变化，而电荷和电流是波动的源，并激发出电磁波。

- 波动方程在自由空间的解是一个沿某一特定方向以光速传播的电磁波。研究电磁波的传播问题都可归结为在给定边界条件和初始条件下求波动方程的解。

- 既然是一种波动过程，因此根据波的普遍性质可以推断已激发并传播出去的电磁波，即使激发它的源消失了，仍应连续存在并向前传播。这就像用石头激发出的水波纹一样，即使石头已沉入水底，但由它先前激发出的水波纹仍然向四周扩散传播，并没有因为石头的不动而停止传播。波动方程就证明了这种推断的正确性。

2.8　标量位和矢量位

由**Maxwell**方程得到电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{H}$ 满足的矢量波动方程。在保留电流密度矢量 $\vec{J}$ 与电荷 ρ 时有

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{J}$$

在非齐次波动方程中，场与源的关系非常复杂，为了能在有源区有效地求解电场与磁场，一般情况下，不直接求解上述波动方程，而是引入辅助位函数。

矢位和标位是广泛采用的辅助函数，在已知场源分布求场时，通常采用该方法。

Maxwell方程

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad (4)$$

由式（3），可知

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}} \qquad (5)$$

$\vec{A}$ 称为辅助矢位函数。

将（5）代入（2），有

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

引入标位函数 φ ，令 $\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$ ，则 $\boxed{\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$

注意，这里的矢量位 A 及标量位 φ 均是时间及空间函数。

当它们与时间无关时，矢量位 A 及标量位 φ 与场量的关系和静态场完全相同。因此矢量位 A 又称为矢量磁位，标量位 φ 又称为标量电位。

显然，只要求出 φ 和 $\vec{A}$ ，则场 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 就可求出。

为了导出位函数与源的关系，根据位函数定义式及麦克斯韦方程：

将 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A},\vec{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ 代入（1），有

$$\mu\nabla\times\vec{H}=\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\mu\vec{J}+\mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

利用矢量恒等式 $\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla\nabla\cdot\vec{A}-\nabla^2\vec{A}$ ，上两式又可写为

$$\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}=\mu\vec{J}+\mu\varepsilon\left(-\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right)$$

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}+\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

已经规定了矢量场 $\vec{A}$ 的旋度，$\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$，必须再规定其散度。

原则上，其散度值可以任意给定，但是为了简化计算，由上式可知，若令

$$\nabla\cdot\vec{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$ ——洛伦兹条件

则上可以简化为

$$\boxed{\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}}$$ 矢位 $\vec{A}$ 满足的非齐次波动方程

另一方面，将 $\vec{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ 和洛伦兹条件代入Maxwell（4），得

$$\boxed{\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}}$$ 标位 φ 满足的非齐次波动方程

由上可见，已知电流及电荷分布，即可求出矢量位 $\vec{A}$ 和标量位 φ。求出 $\vec{A}$ 及 φ 以后，即可求出电场与磁场。

这样，麦克斯韦方程的求解归结为位函数方程的求解，而且求解过程显然得到了简化。

原来电磁场方程为两个结构复杂的矢量方程，在三维空间中需要求解 6 个坐标分量

$$\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}+\frac{\nabla\rho}{\varepsilon} \qquad \nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{J}$$

位函数方程为一个矢量方程和一个标量方程

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J} \qquad \nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

在三维空间中仅需求解 4 个坐标分量。在直角坐标系中，实际上等于求解 1 个标量方程。

达朗贝尔方程 $\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}$ $\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$

对时谐场，$\dfrac{\partial}{\partial t}=j\omega$ 复数形式的达朗贝尔方程 $\begin{cases}\nabla^2\dot{\vec{A}}+k^2\dot{\vec{A}}=-\mu\dot{\vec{J}}\\ \nabla^2\dot{\varphi}+k^2\dot{\varphi}=-\dfrac{\dot{\rho}}{\varepsilon}\end{cases}$

洛伦兹条件 $\longrightarrow \nabla\cdot\dot{\vec{A}}=-j\omega\mu\varepsilon\dot{\varphi}$ $\left(\dot{\varphi}=-\dfrac{\nabla\cdot\dot{\vec{A}}}{j\omega\mu\varepsilon}\right)$

达朗贝尔方程的解 $\dot{\vec{A}}=\int_V\dfrac{\mu\dot{\vec{J}}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{R}}}{4\pi R}dV$ ——滞后位

通常由 $\vec{A}$ 求电场和磁场

$$\dot{\vec{E}}=-\nabla\dot{\varphi}-j\omega\dot{\vec{A}}=\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\nabla\left(\nabla\cdot\dot{\vec{A}}\right)-j\omega\dot{\vec{A}}$$

$$\dot{\vec{H}}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\dot{\vec{A}}$$