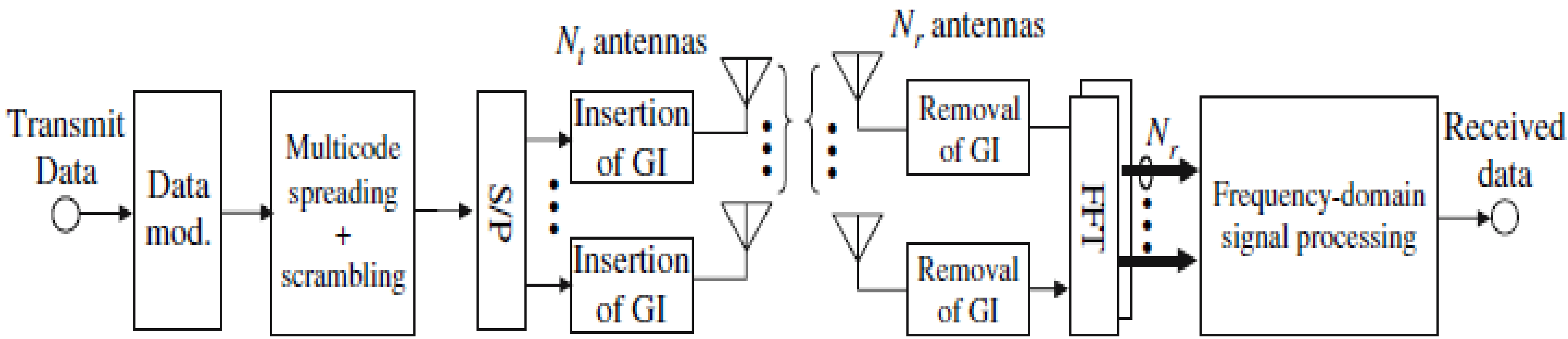
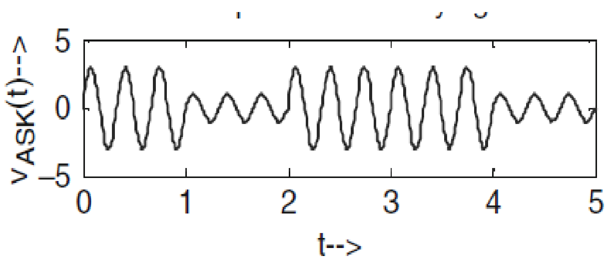
通信原理

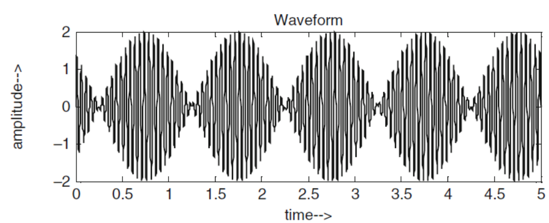
任光亮
glren@mail.xidian.edu.cn

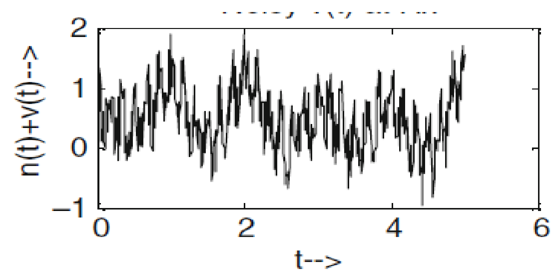
西安电子科技大学 通信工程学院
2020年9月

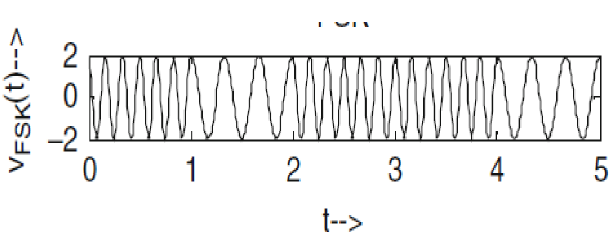
第2章 随机过程

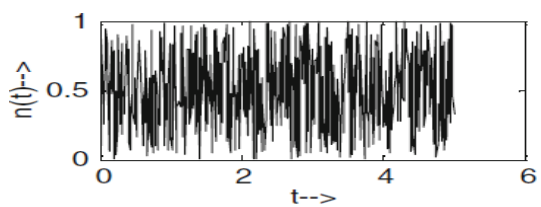

N_t antennas
N_r antennas
Transmit Data
Data mod.
Multicode spreading + scrambling
S/P
Insertion of GI
Insertion of GI
Removal of GI
Removal of GI
FFT
N_r
Frequency-domain signal processing
Received data

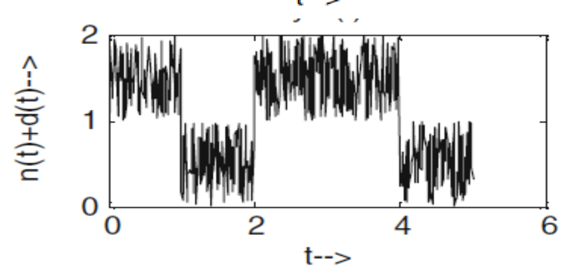

vASK(t)-->
t-->


Waveform
amplitude-->
time-->


n(t)+v(t)-->
t-->


vFSK(t)-->
t-->


n(t)-->
t-->


n(t)+d(t)-->
t-->

第2章 随机过程

本章主要内容

★随机过程的基本概念和统计特性

★平稳随机过程的定义和性质

★高斯随机过程的定义和性质

★随机过程通过线性系统

★窄带高斯过程的统计特性

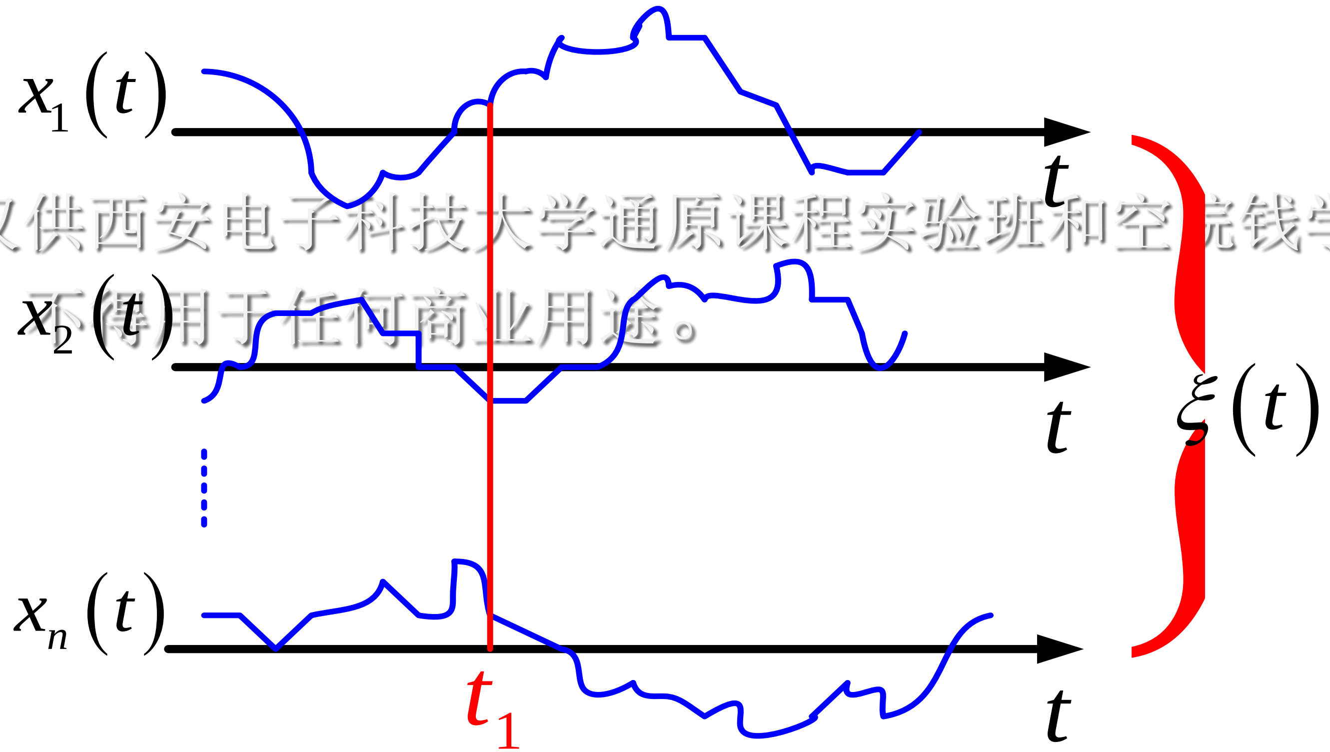
★正弦波加窄带高斯过程的统计特性

➢ 本章作业：1，5，7，8，9，10，14，20

2.1 随机过程的基本概念和统计特性

一、基本概念

1、举例：



2、随机过程的定义

无穷多个样本函数的总体构成一个随机过程。

随机过程的两个属性：

① $\xi(t)$ 是一个时间函数；

②在任一观察时刻 t_1，$\xi(t_1)$ 是一个随机变量。

二、统计特性

1、分布函数和概率密度函数

设 $\xi(t)$ 为一个随机过程，在任意给定的时刻 t_1，$\xi(t_1)$ 小于或等于某一数值 x_1 的概率

$$F_1(x_1, t_1) = P\{\xi(t_1) \le x_1\}$$

称为随机过程 $\xi(t)$ 的**一维分布函数**。

如果存在 $\dfrac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1, t_1)$

则称 $f_1(x_1, t_1)$ 为 $\xi(t)$ 的**一维概率密度函数**。

n维分布函数：

$$F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = P\{\xi(t_1) \le x_1, \xi(t_2) \le x_2, \cdots, \xi(t_n) \le x_n\}$$

如果存在

$$\frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

则称 $f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 为$\xi(t)$ 的**n维概率密度函数**。

注：n 越大，对随机过程统计特性的描述就越充分。

2、 数字特征

(1) 数学期望

$$E\left[\xi(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x,\ t)\,dx=a(t)$$

它表示随机过程的n个样本函数曲线的摆动中心。

(2) 方差

$$D\left[\xi(t)\right]=E\left\{\left[\xi(t)-a(t)\right]^2\right\}$$

$$=E\left[\xi^2(t)\right]-\left[a(t)\right]^2=\sigma^2(t)$$

它表示随机过程在时刻t对于均值$a(t)$的偏离程度。当 $a(t)=0$

时，

$$\sigma^2(t)=E\left[\xi^2(t)\right]$$

（3）自协方差函数

$$B(t_1, t_2) = E\{[\xi(t_1) - a(t_1)][\xi(t_2) - a(t_2)]\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)]f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1x_2$$

（4）自相关函数

$$R(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\xi(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1dx_2$$

关系：

$$B(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - a(t_1)a(t_2)$$

若 $t_2 > t_1$ ，令 $t_2 = t_1 + \tau$ ，则

$$R(t_1, t_2) = R(t_1, t_1 + \tau)$$

注：自相关函数是 t_1 和 τ 的函数。

（5）互协方差函数

$$B_{\xi\eta}(t_1, t_2) = E\{[\xi(t_1) - a_\xi(t_1)][\eta(t_2) - a_\eta(t_2)]\}$$

（6）互相关函数

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\eta(t_2)]$$

2.2 平稳随机过程

一、定义

1、狭义平稳：对任意的n和h ，随机过程 $\xi(t)$ 的n维概率密度函数满足

$$f_n\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ t_1,\ t_2,\cdots,\ t_n\right)$$

$$=f_n\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ t_1+h,\ t_2+h,\ \cdots,\ t_n+h\right)$$

含义：随机过程的任意n维分布与时间起点无关。

一维分布与时间t无关

二维分布只与时间间隔T 有关

2.2 平稳随机过程

2、广义平稳： 随机过程 $\xi(t)$ 的数学期望与时间无关，而自相关函数仅与时间间隔τ 有关。

即
$$\begin{cases} E\left[\xi(t)\right] = a \\ R(t_1,\ t_1+\tau) = R(\tau) \end{cases}$$

关系： 狭义平稳 $\underset{\text{不一定}}{\overset{\text{均方值有界}}{\rightleftarrows}}$ 广义平稳

2.2 平稳随机过程

二、性质

1、各态历经性（遍历性）

设$x(t)$是平稳随机过程$\xi(t)$的任意一个实现，若$\xi(t)$的数字特征可由$x(t)$的时间平均替代，即

$$\overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \overline{a} = a$$

则$\xi(t)$具有各态历经性。

$$\overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt = \overline{R(\tau)} = R(\tau)$$

意义：用时间平均代替统计平均

2.2 平稳随机过程

西安电子科技大学 通信工程学院

2、自相关函数的性质

设 $\xi(t)$ 为实平稳过程，则 $R(\tau)=E\left[\xi(t)\xi(t+\tau)\right]$

(1) $R(0)=E\left[\xi^2(t)\right]=S\geq 0$ 平均功率

(2) $R(\infty)=E^2\left[\xi(t)\right]=a^2$ 直流功率

(3) $R(0)-R(\infty)=\sigma^2$ 交流功率，方差

(4) $R(-\tau)=R(\tau)$ 偶函数

(5) $\left|R(\tau)\right|\leq R(0)$ 上界

2.2 平稳随机过程

3、频谱特性

$$\begin{cases} P_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{cases}$$

$$R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(f) df$$ 平均功率

① $P_\xi(\omega) \geq 0$　　② $P_\xi(-\omega) = P_\xi(\omega)$

③单边功率谱密度

$$P_{\xi_1}(\omega) = \begin{cases} 2P_\xi(\omega) & \omega \geq 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$

2.2 平稳随机过程

【例】已知 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是统计独立的平稳随机过程，且它们的自相关函数分别为 $R_x(\tau)$ 和 $R_y(\tau)$ 。

（1）试求 $z(t)=x(t)y(t)$ 的自相关函数。

（2）试求 $z(t)=x(t)+y(t)$ 的自相关函数。

2.2 平稳随机过程

解：(1) $R_z(t_1, t_2) = E\left[z(t_1)\cdot z(t_2)\right]$

$$= E\left[x(t_1)y(t_1)\cdot x(t_2)y(t_2)\right]$$

$$= E\left[x(t_1)x(t_2)\right]\cdot E\left[y(t_1)y(t_2)\right]$$

$$= R_x(\tau)\cdot R_y(\tau)$$

(2) $R_z(t_1, t_2) = E\left[z(t_1)\cdot z(t_2)\right]$

$$= E\left\{\left[x(t_1)+y(t_1)\right]\left[x(t_2)+y(t_2)\right]\right\}$$

$$= E\left[x(t_1)x(t_2)+x(t_1)y(t_2)+y(t_1)x(t_2)+y(t_1)y(t_2)\right]$$

$$= R_x(\tau)+a_1a_2+a_2a_1+R_y(\tau)$$

$$= R_x(\tau)+R_y(\tau)+2a_1a_2$$

【例】随机过程 $x(t)=A\cos(\omega t+\theta)$，式中$A$, ω, θ 是相互独立的随机变量，其中 A 的均值为2，方差为4，θ 在区间 $(-\pi,\ \pi)$ 上均匀分布，ω 在区间 $(-5,\ 5)$ 上均匀分布，$x(t)$ 是否是平稳随机过程？

2.2 平稳随机过程

解： $E\left[x(t)\right]=E\left[A\cos(\omega t+\theta)\right]$

$$=E\left[A\cos\omega t\cdot\cos\theta-A\sin\omega t\cdot\sin\theta\right]$$

$$=E[A]\cdot E[\cos\omega t]\cdot E[\cos\theta]-E[A]\cdot E[\sin\omega t]\cdot E[\sin\theta]$$

$$=0$$

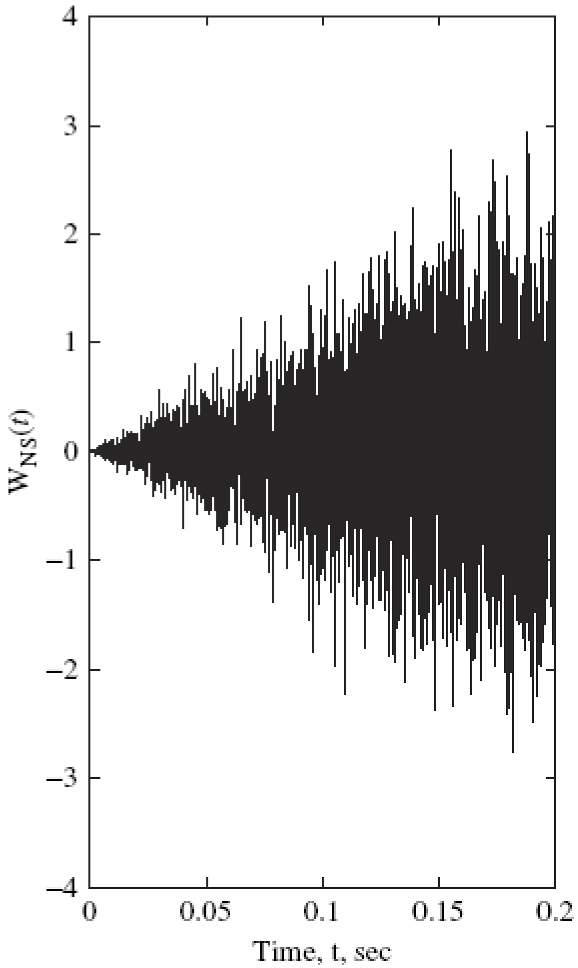
$$R_x(t_1,t_2)=E\left[x(t_1)\cdot x(t_2)\right]$$

$$=E\left\{\left[A\cos(\omega t_1+\theta)\right]\cdot\left[A\cos(\omega t_2+\theta)\right]\right\}$$

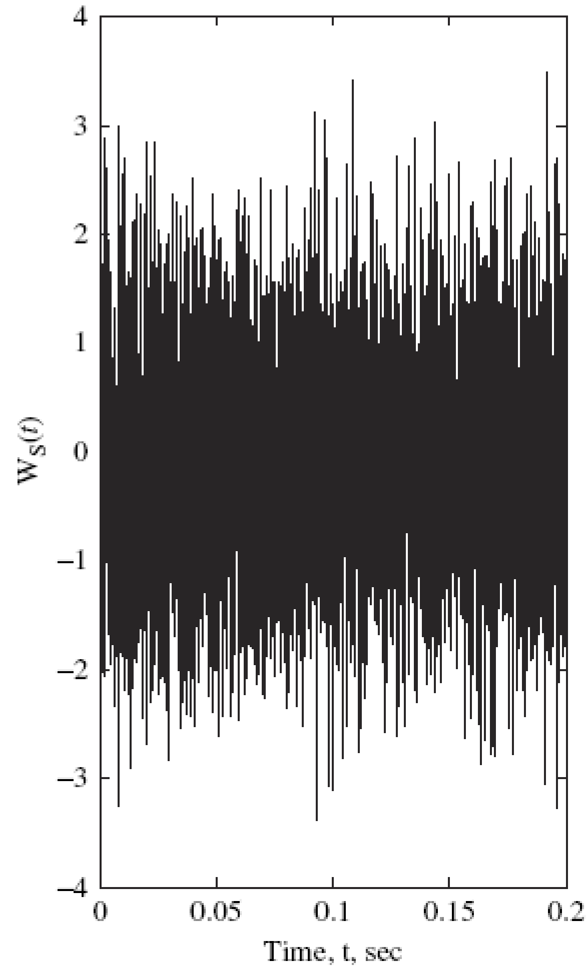
$$=E\left\{\frac{A^2}{2}\left[\cos\omega(t_2-t_1)+\cos\left(\omega(t_2+t_1)+2\theta\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}E\left[A^2\right]\cdot E[\cos\omega\tau]+\frac{1}{2}E\left[A^2\right]\cdot E\left[\cos\left(\omega(t_2+t_1)+2\theta\right)\right]$$

$$=4sa(5\tau)$$



(a) A nonstationary noise



(b) A stationary noise

2.3 高斯随机过程

西安电子科技大学 通信工程学院

一、定义

若随机过程$\xi(t)$的任意n维分布都服从正态分布，则称它为高斯过程。

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n|B|^{1/2}}\exp\left[\frac{-1}{2|B|}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|B|_{jk}\left(\frac{x_j-a_j}{\sigma_j}\right)\left(\frac{x_k-a_k}{\sigma_k}\right)\right]$$

2.3 高斯随机过程

西安电子科技大学　　通信工程学院

式中：　$a_k = E\left[\xi(t_k)\right]$　　$\sigma_k^2 = E\left[\xi(t_k) - a_k\right]^2$

$|B|$　为归一化协方差矩阵的行列式，即

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & 1 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$|B|_{jk}$ 为行列式 $|B|$ 中元素 b_{jk} 的代数余因子

$$b_{jk} = \frac{E\left\{\left[\xi(t_j) - a_j\right]\left[\xi(t_k) - a_k\right]\right\}}{\sigma_j \sigma_k}$$

二、 性质

1、若高斯过程是广义平稳的，则也是狭义平稳的。

2、若高斯过程在不同时刻的取值互不相关，则它们也是统计独立的。

3、高斯过程经过线性变换（或线性系统）后的过程仍是高斯过程。

2.3 高斯随机过程

性质2证明： $\because j \neq k,\ b_{jk} = 0$

$$f_n\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\prod_{j=1}^{n}\sigma_j}\exp\left[-\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(x_j-a_j\right)^2}{2\sigma_j^2}\right]$$

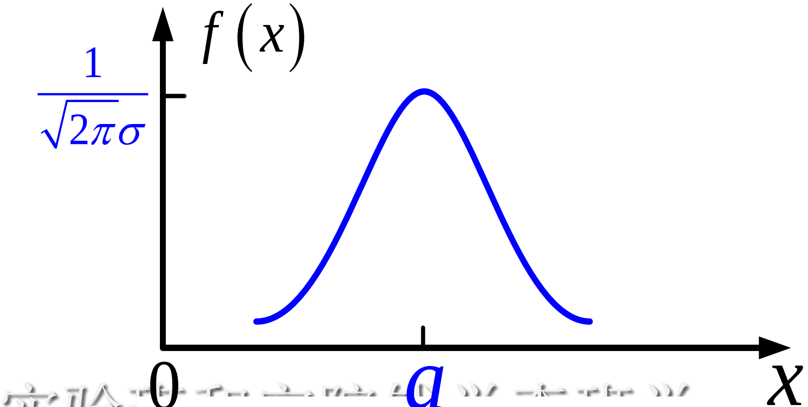
$$= \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j}\exp\left[-\frac{\left(x_j-a_j\right)^2}{2\sigma_j^2}\right]$$

$$= f_1\left(x_1,\ t_1\right)\cdot f_1\left(x_2,\ t_2\right)\cdots f_1\left(x_n,\ t_n\right)$$

三、一维概率密度和特殊函数

1、一维概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

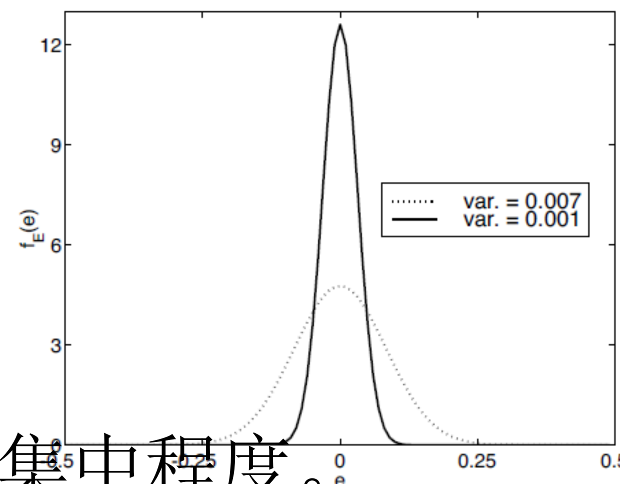


a 数学期望 σ^2 方差

（1）对称性

（2）单调性

（3）a 表示分布中心，σ 表示集中程度。

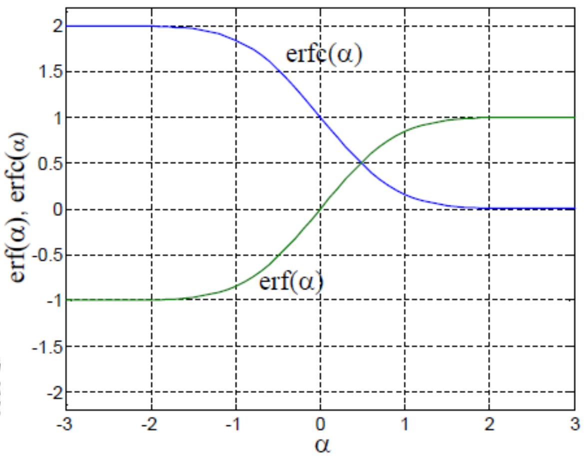


2.3 高斯随机过程

2、随机分析中常用的特殊函数

（1）误差函数

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$



$x\uparrow\rightarrow erf(x)\uparrow$

$$erf(-x)=-erf(x)$$

$$erf(0)=0$$

$$erf(\infty)=1$$

$$-1\le \mathrm{erf}(\alpha)\le 1$$

2.3 高斯随机过程

西安电子科技大学　　　　　　　　　　　　通信工程学院

（2）互补误差函数

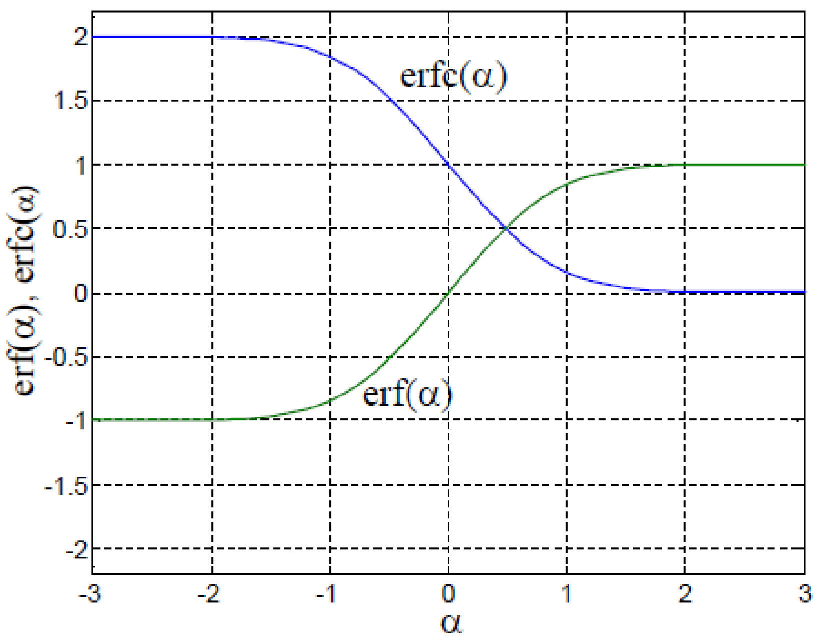
$$erfc(x)=1-erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-t^2}dt$$

$$x\uparrow\rightarrow erfc(x)\downarrow \qquad erfc(-x)=2-erfc(x)$$

$$erfc(0)=1 \qquad erfc(\infty)=0$$

$$erfc(x)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}x}e^{-x^2} \qquad x\rangle\rangle 1$$

$$0\le \mathrm{erfc}(\alpha)\le 2$$



(3)正态分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right]dz$$

令 $t=(z-a)/\sqrt{2}\sigma$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}erf\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right)\\ 1-\frac{1}{2}erfc\left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right)\end{cases}$$

目的：表示误码率公式比较简明。

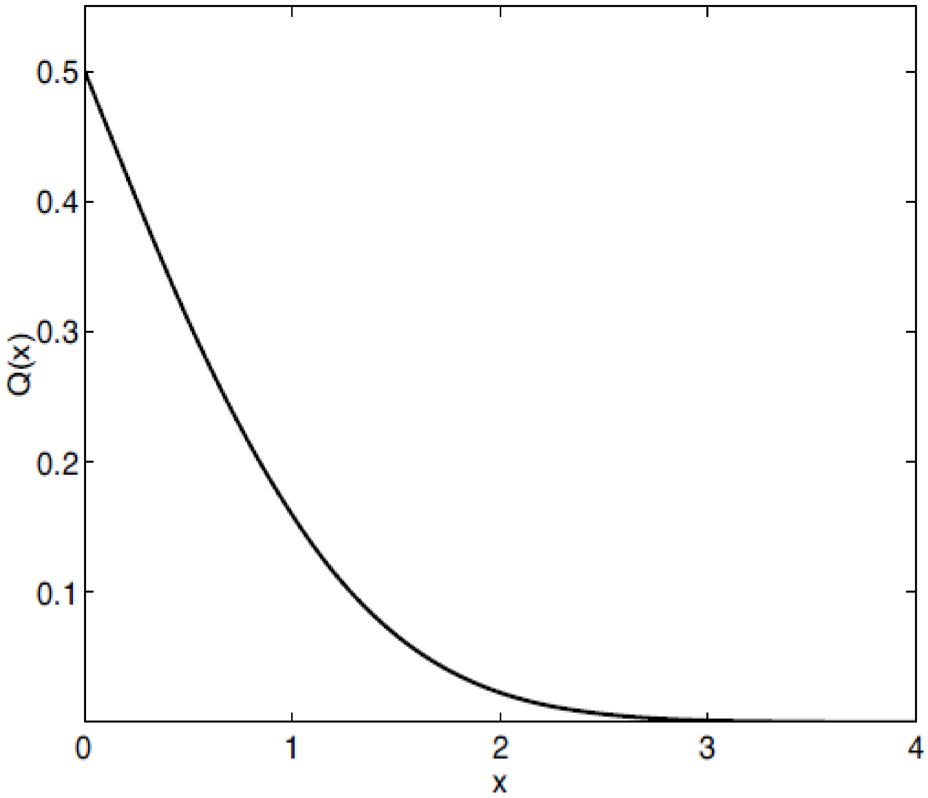
(4) Marcum Q 函数

$$Q(\alpha)=\int_{\alpha}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

$$Q(\alpha)=1-Q(-\alpha)$$

$$\frac{1}{2}erfc(\alpha)=Q(\sqrt{2}\alpha)$$

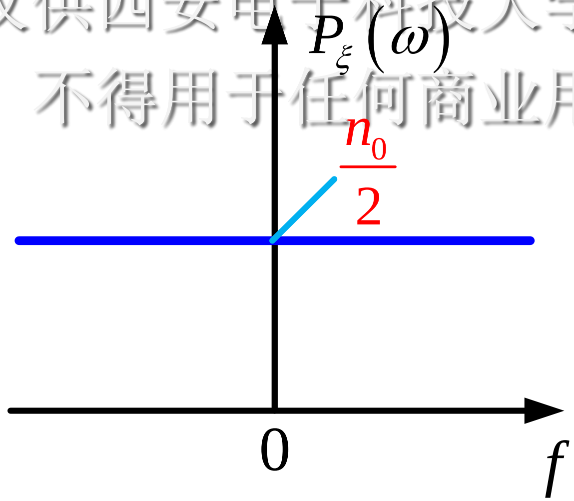
$$erfc(\alpha)=1-2Q(\sqrt{2}\alpha)$$

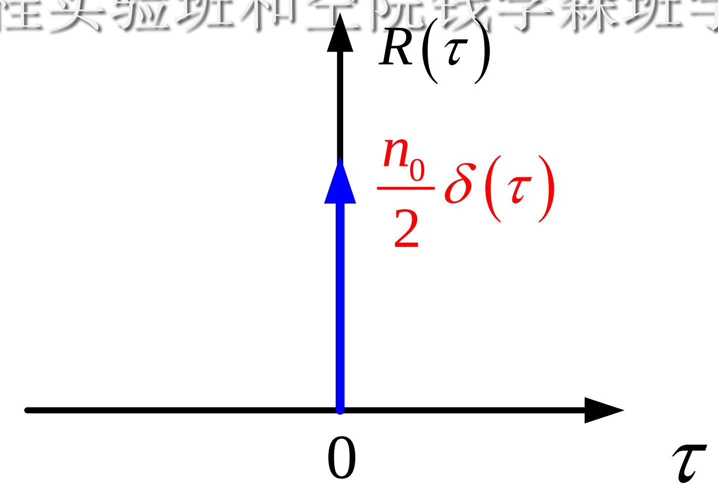


四、高斯白噪声

白噪声：功率谱密度在整个频域内均匀分布。

$$P_\xi(\omega)=\frac{n_0}{2}\,(W/Hz) \qquad R(\tau)=\frac{n_0}{2}\delta(\tau)$$





2.3 高斯随机过程

注： 白噪声在任意两个时刻上的取值互不相关。

高斯白噪声： 白噪声服从高斯分布。

注： 高斯白噪声在任意两个时刻的取值互不相关且统计独立。

高斯变量的高阶矩

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$E\left[X^{2k}\right]=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)\sigma^{2k}$$

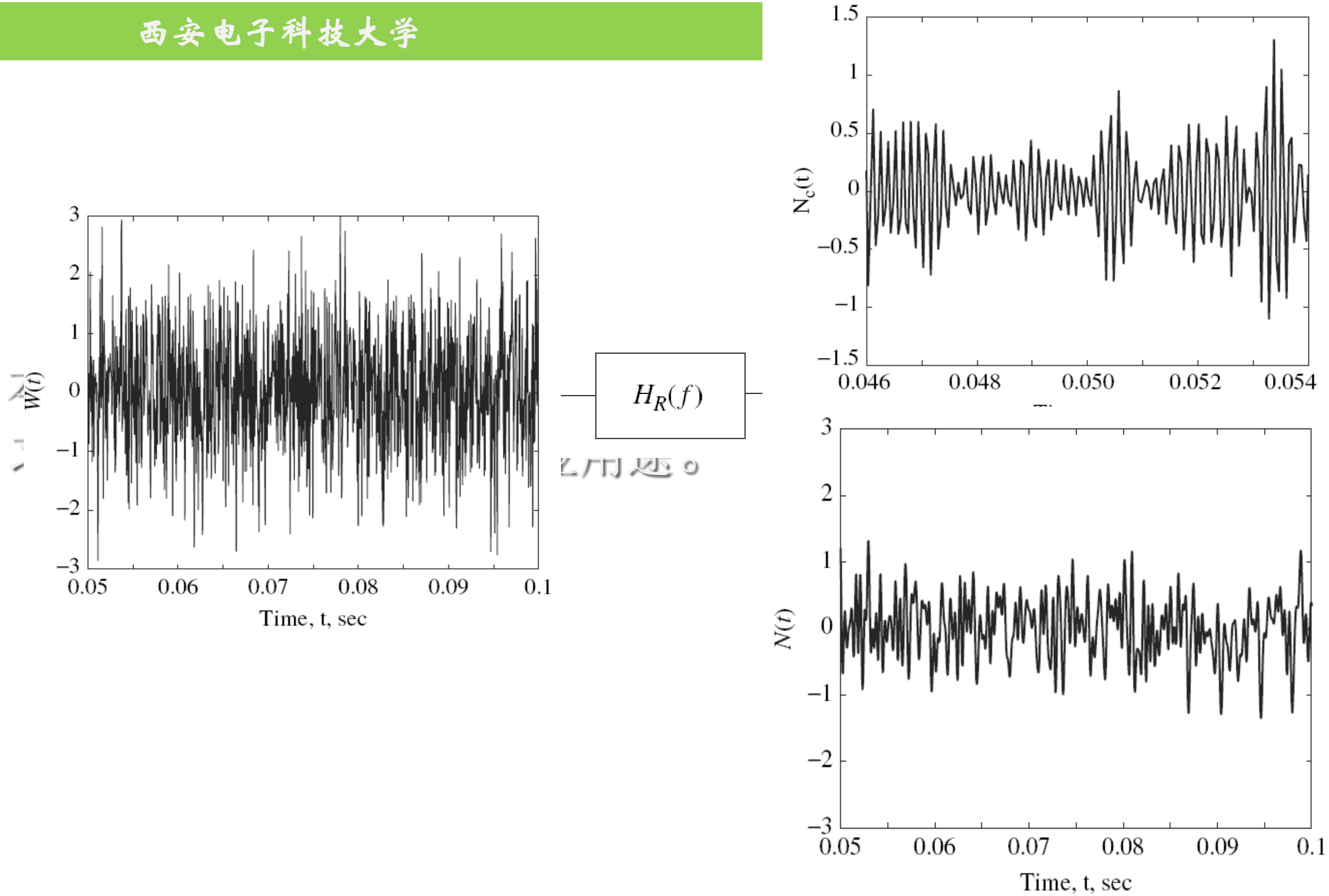
$$E\left[X^{2k+1}\right]=0$$

$$E[X]=a;$$

$$E[X^2]=a^2+\sigma^2$$

$$E[X^3]=a^3+3a\sigma^2$$

$$E[X^4]=a^4+6a^2\sigma^2+3\sigma^4$$


W(t)
Time, t, sec
0.05
0.06
0.07
0.08
0.09
0.1
3
2
1
0
−1
−2
−3
$H_R(f)$
$N_c(t)$
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
0.046
0.048
0.050
0.052
0.054
N(t)
Time, t, sec

2.4 随机过程通过线性系统

设线性系统的冲激响应为$h(t) \Leftrightarrow H(\omega)$

若输入随机过程为 $\xi_i(t)$ ，则输出随机过程

$$\xi_o(t) = \xi_i(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_i(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \xi_i(t-\tau) d\tau$$

若系统是物理可实现的，则

$$\xi_o(t) = \int_{-\infty}^{t} \xi_i(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

或 $\xi_o(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau) \xi_i(t-\tau) d\tau$

2.4 随机过程通过线性系统

假设 $\xi_i(t)$ 是平稳随机过程，且 $E\left[\xi_i(t)\right]=a$

一、输出过程的数学期望

$$E\left[\xi_o(t)\right]=E\left[\int_0^{\infty}h(\tau)\xi_i(t-\tau)d\tau\right]$$

$$=\int_0^{\infty}h(\tau)E\left[\xi_i(t-\tau)\right]d\tau$$

$$=a\cdot H(0)$$

2.4 随机过程通过线性系统

二、输出过程的自相关函数

$$R_o(t_1, t_1+\tau) = E\left[\xi_o(t_1)\xi_o(t_1+\tau)\right]$$

$$= E\left[\int_0^\infty h(\alpha)\xi_i(t_1-\alpha)d\alpha\int_0^\infty h(\beta)\xi_i(t_1+\tau-\beta)d\beta\right]$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty h(\alpha)h(\beta)E\left[\xi_i(t_1-\alpha)\xi_i(t_1+\tau-\beta)\right]d\alpha d\beta$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty h(\alpha)h(\beta)R_i(\tau+\alpha-\beta)d\alpha d\beta$$

$$= R_o(\tau)$$

2.4 随机过程通过线性系统

三、输出过程的功率谱密度

$$P_o(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_o(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left[h(\alpha)h(\beta)R_i(\tau+\alpha-\beta)d\alpha d\beta\right]e^{-j\omega\tau}d\tau$$

令 $\tau'=\tau+\alpha-\beta$

$$P_o(\omega)=\int_0^{\infty}h(\alpha)e^{j\omega\alpha}d\alpha\cdot\int_0^{\infty}h(\beta)e^{-j\omega\beta}d\beta\cdot\int_{-\infty}^{\infty}R_i(\tau')e^{-j\omega\tau'}d\tau'$$

$$=H^*(\omega)\cdot H(\omega)\cdot P_i(\omega)$$

$$=\left|H(\omega)\right|^2 P_i(\omega)$$

2.4 随机过程通过线性系统

结论： 若输入 $\xi_i(t)$ 是平稳随机过程，则：

（1）输出 $\xi_o(t)$ 也是平稳随机过程

（2）$\mathrm{E}\left[\xi_o(t)\right]=H(0)\cdot\mathrm{E}\left[\xi_i(t)\right]$

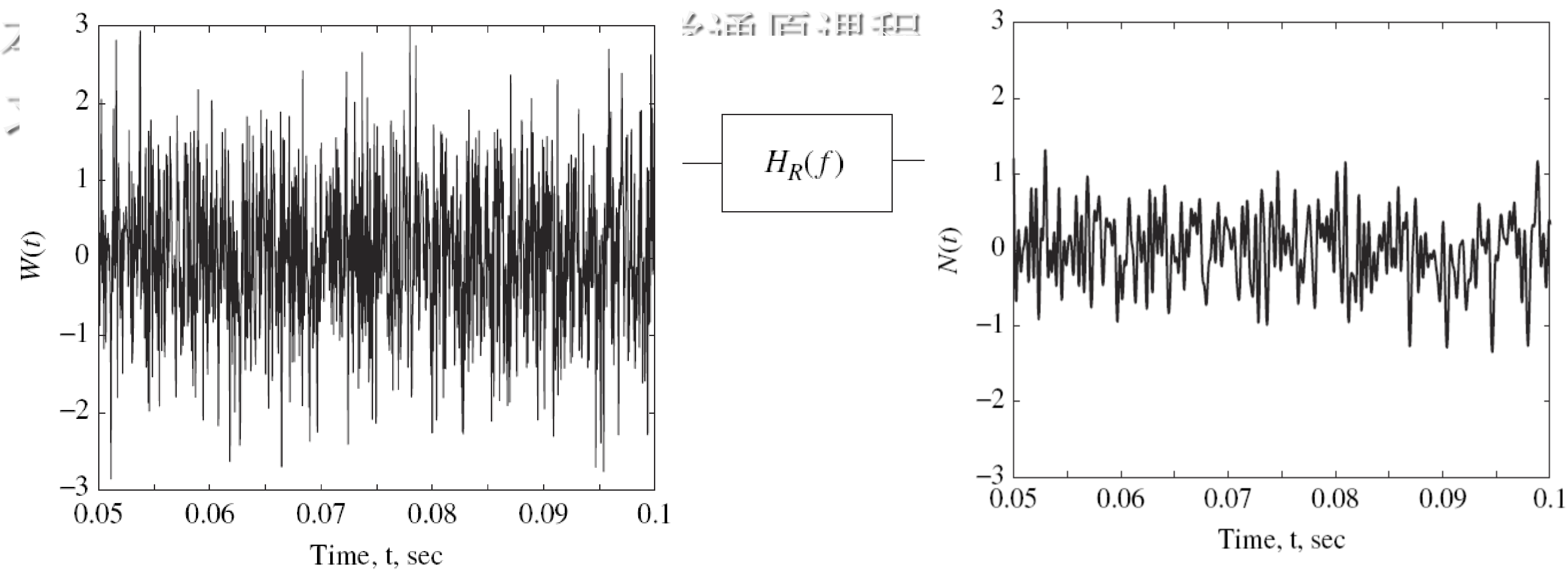
（3）$P_o(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2 P_i(\omega)$

（4）若输入过程是高斯过程，则输出过程也是高斯过程

2.4 随机过程通过线性系统

【例】 功率谱密度为 $n_0/2$ 的白噪声，通过理想低通滤波器，求其功率谱密度、自相关函数和噪声功率。

（带限白噪声）



2.4 随机过程通过线性系统

【例】功率谱密度为 $n_0/2$ 的白噪声，通过理想低通滤波器，求其功率谱密度、自相关函数和噪声功率。

（带限白噪声）

解：理想低通的传输特性为：

$$H(\omega)=\begin{cases} K_0 e^{-j\omega t_d}, & |\omega|\le\omega_H \\ 0, & |\omega|>\omega_H \end{cases}$$

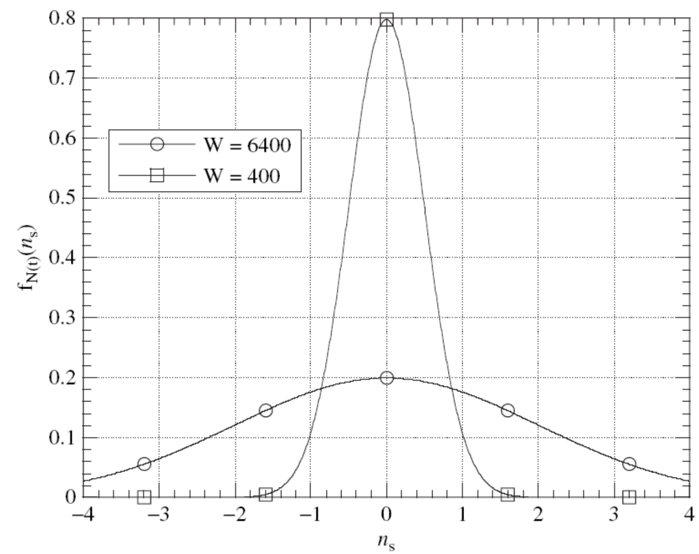
$$P_o(\omega)=|H(\omega)|^2 P_i(\omega)=K_0^2\cdot\frac{n_0}{2},\quad |\omega|\le\omega_H$$

输出噪声的自相关函数：

$$R_o(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P_o(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{K_0^2n_0}{4\pi}\int_{-\omega_H}^{\omega_H}e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$=K_0^2n_0f_H sa(\omega_H\tau)$$

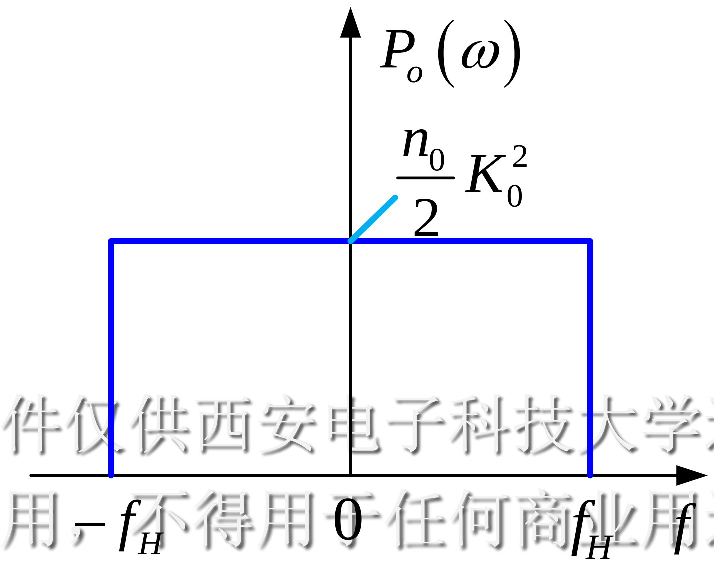


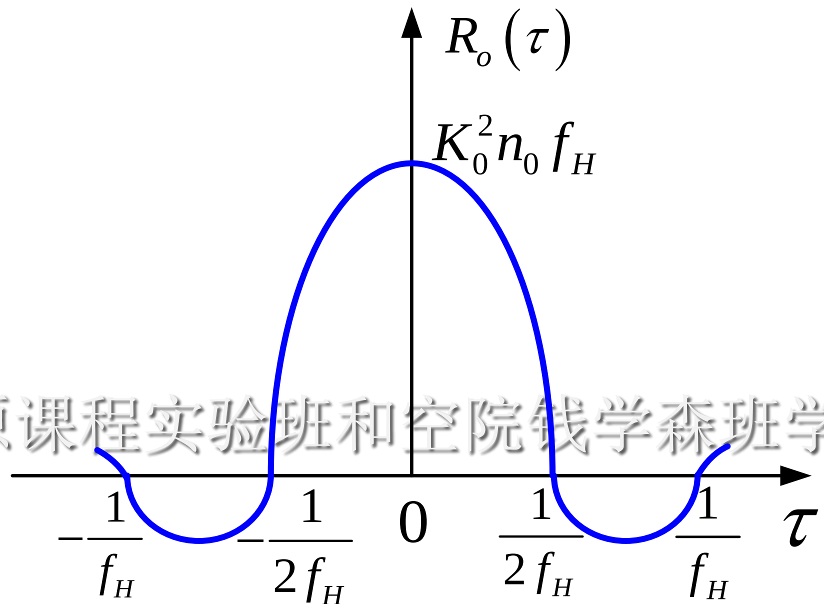
输出噪声的平均功率：

$$N_o=R_o(0)=K_0^2n_0f_H$$

2.4 随机过程通过线性系统

西安电子科技大学　　　　通信工程学院





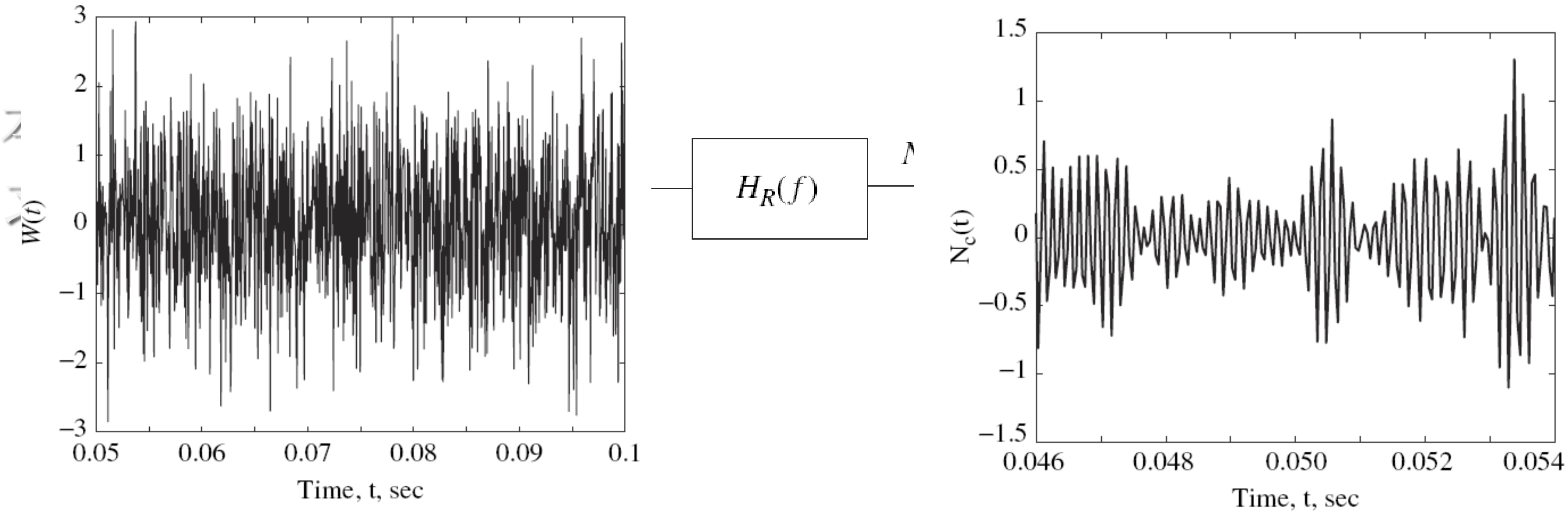
$$\because \tau = \frac{k}{2f_H}\left(k=1,\ 2,\ 3\cdots\right) \qquad R_o(\tau)=0$$

对带限白噪声以 $2f_H$ 速率抽样，各抽样值互不相关

。

2. 4 随机过程通过线性系统

【例】 功率谱密度为 $n_0/2$ 的白噪声，通过理想带通滤波器，求其功率谱密度、自相关函数和噪声功率。



2.4 随机过程通过线性系统

【例】功率谱密度为 $n_0/2$ 的白噪声，通过理想带通滤波器，求其功率谱密度、自相关函数和噪声功率。

解：设理想带通滤波器的传输特性为：

$$H(f)=\begin{cases}1, & f_c-\dfrac{B}{2}\le|f|\le f_c+\dfrac{B}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$P_o(f)=\frac{n_0}{2},\quad f_c-\frac{B}{2}\le|f|\le f_c+\frac{B}{2}$$

2.4 随机过程通过线性系统

输出噪声的自相关函数：

$$R_o(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}P_o(f)e^{j2\pi f\tau}df$$

$$=\int_{-f_c-\frac{B}{2}}^{-f_c+\frac{B}{2}}\frac{n_0}{2}e^{j2\pi f\tau}df+\int_{f_c-\frac{B}{2}}^{f_c+\frac{B}{2}}\frac{n_0}{2}e^{j2\pi f\tau}df$$

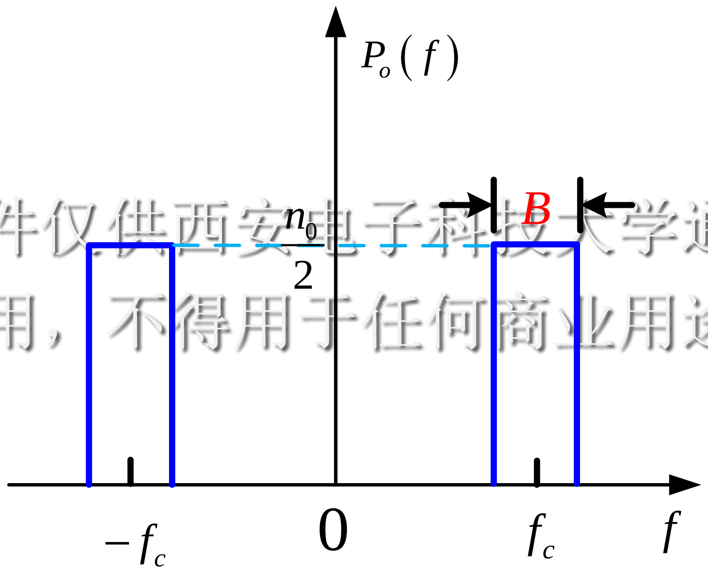
$$=n_0Bsa(\pi B\tau)\cos\omega_c\tau$$

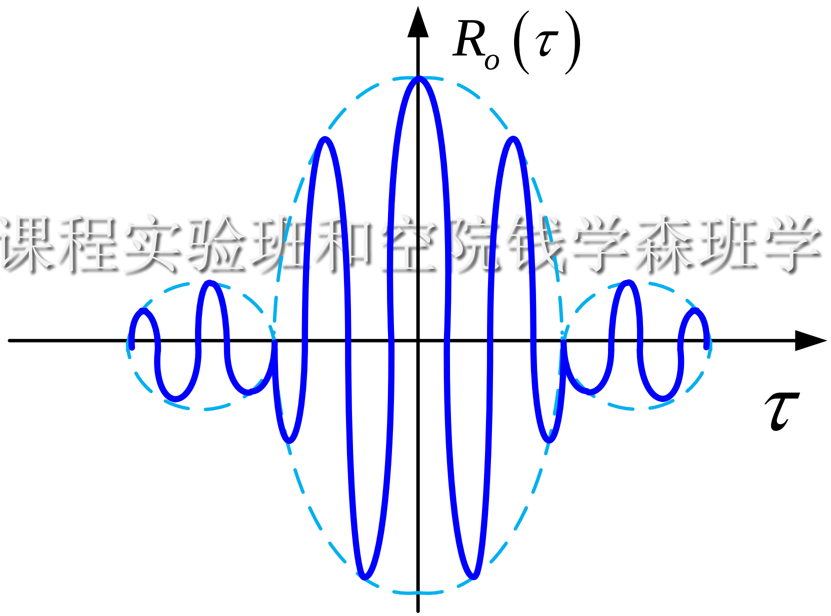
输出噪声的平均功率：

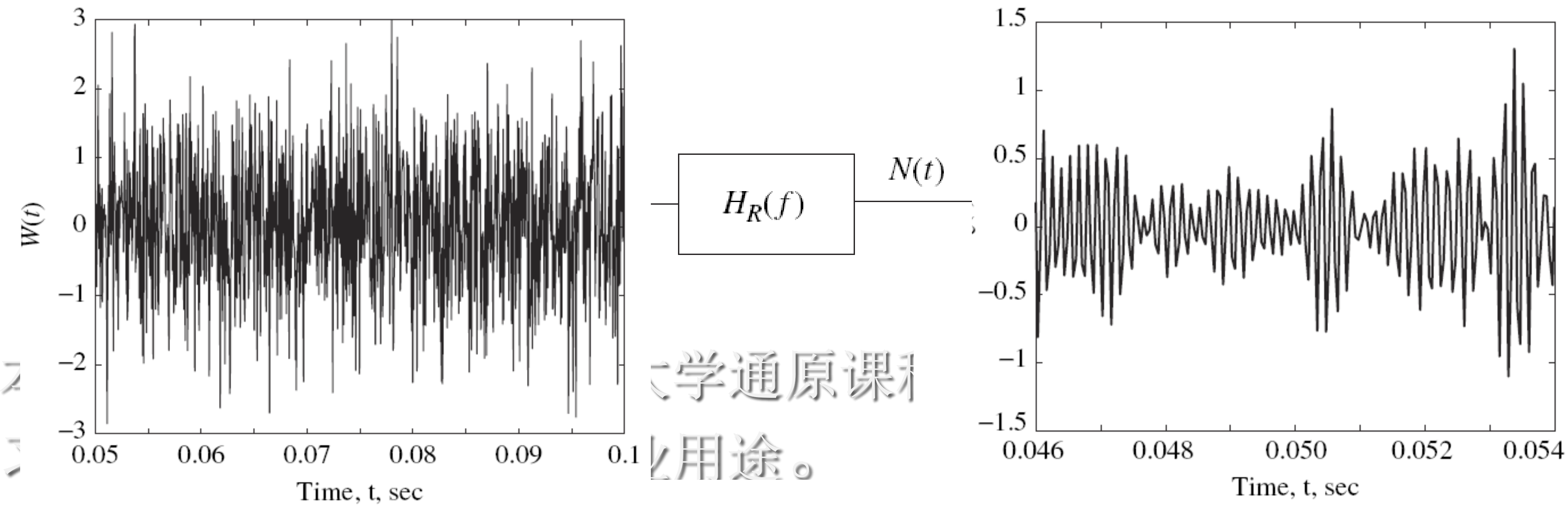
$$N_o=R_o(0)=n_0B$$

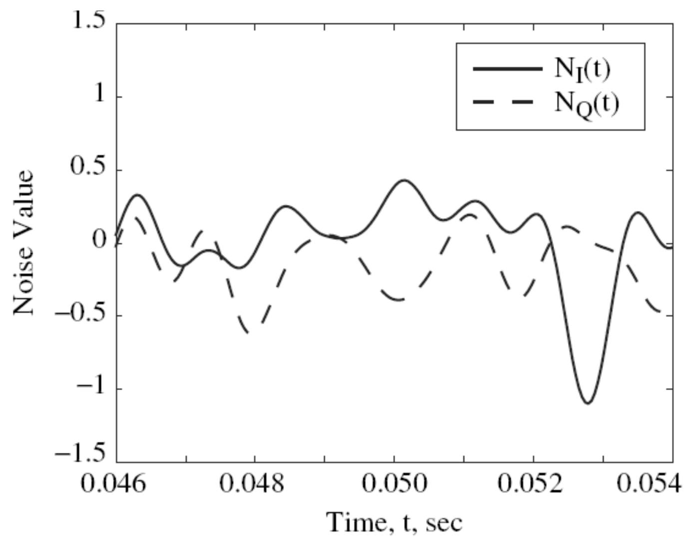
2.4 随机过程通过线性系统

带通白噪声的功率谱密度和自相关函数：





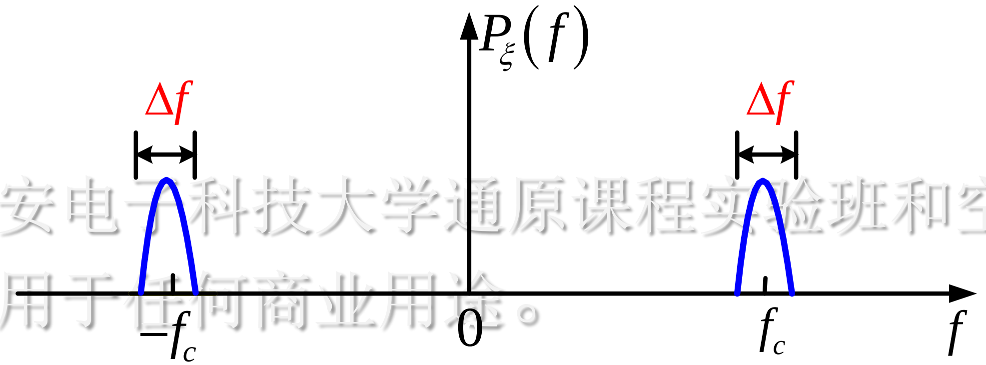

W(t)
Time, t, sec
$H_R(f)$
$N(t)$
Time, t, sec

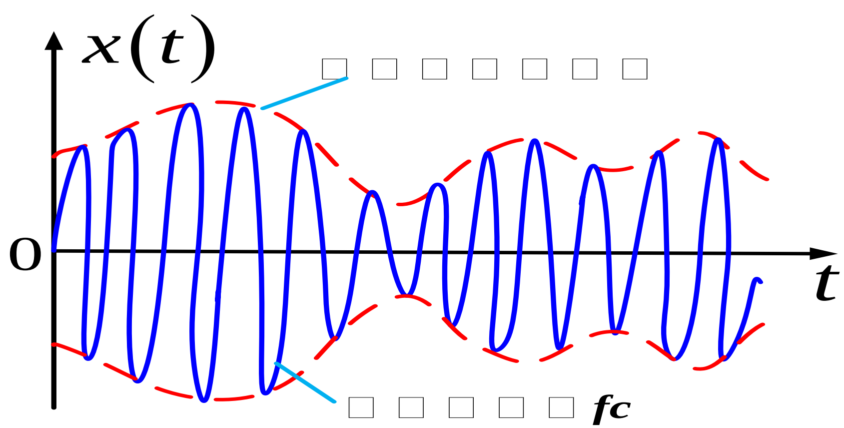

$N_I(t)$
$N_Q(t)$
Noise Value
Time, t, sec

2.5 窄带随机过程

一、定义

窄带随机过程： $\Delta f << f_c$





2.5 窄带随机过程

二、数学表示

1、包络相位表示

$$\xi(t)=a_\xi(t)\cos\left[\omega_c t+\varphi_\xi(t)\right], \qquad a_\xi(t)\geq 0$$

2、同相正交表示

$$\xi(t)=\xi_c(t)\cos\omega_c t-\xi_s(t)\sin\omega_c t$$

其中 $\xi_c(t)=a_\xi(t)\cos\varphi_\xi(t)$ 同相分量

$\xi_s(t)=a_\xi(t)\sin\varphi_\xi(t)$ 正交分量

2.5 窄带随机过程

三、统计特性

假设 $\xi(t)$ 是均值为0，方差为 σ_{ξ}^{2} 的窄带平稳高斯过程。

1、同相和正交分量的统计特性

$$\because E\left[\xi(t)\right]=E\left[\xi_c(t)\right]\cos\omega_c t-E\left[\xi_s(t)\right]\sin\omega_c t=0$$

$$\therefore E\left[\xi_c(t)\right]=E\left[\xi_s(t)\right]=0$$

2.5 窄带随机过程

三、统计特性

$$R_\xi(t,\ t+\tau)=E\left[\xi(t)\xi(t+\tau)\right]$$

$$=E\left\{\left[\xi_c(t)\cos\omega_c t-\xi_s(t)\sin\omega_c t\right]\cdot\left[\xi_c(t+\tau)\cos\omega_c(t+\tau)-\xi_s(t+\tau)\sin\omega_c(t+\tau)\right]\right\}$$

$$=R_c(t,\ t+\tau)\cos\omega_c t\cos\omega_c(t+\tau)$$

$$-R_{cs}(t,\ t+\tau)\cos\omega_c t\sin\omega_c(t+\tau)$$

$$-R_{sc}(t,\ t+\tau)\sin\omega_c t\cos\omega_c(t+\tau)$$

$$+R_s(t,\ t+\tau)\sin\omega_c t\sin\omega_c(t+\tau)$$

$$=R_\xi(\tau)$$

2.5 窄带随机过程

三、统计特性

对于使$\sin(\omega t)=0$的所有t,

$$R_\xi(\tau)=\left[R_c(t,\ t+\tau)\big|_{t=0}\right]\cos\omega_c\tau-\left[R_{cs}(t,\ t+\tau)\big|_{t=0}\right]\sin\omega_c\tau$$

$$\because\begin{cases}R_c(t,\ t+\tau)=R_c(\tau)\\R_{cs}(t,\ t+\tau)=R_{cs}(\tau)\end{cases}$$

$$R_\xi(\tau)=R_c(\tau)\cos\omega_c\tau-R_{cs}(\tau)\sin\omega_c\tau \qquad *$$

对于使$\cos(\omega t)=0$的所有t,

$$R_\xi(\tau)=R_s(\tau)\cos\omega_c\tau+R_{sc}(\tau)\sin\omega_c\tau \qquad *$$

2.5 窄带随机过程

西安电子科技大学 通信工程学院

三、统计特性

$$R_\xi(\tau) = R_c(\tau)\cos\omega_c\tau - R_{cs}(\tau)\sin\omega_c\tau \quad *$$

$$R_\xi(\tau) = R_s(\tau)\cos\omega_c\tau + R_{sc}(\tau)\sin\omega_c\tau \quad *$$

$$\therefore \begin{cases} R_c(\tau) = R_s(\tau) \\ R_{cs}(\tau) = -R_{sc}(\tau) \end{cases}$$

由互相关函数性质 $R_{cs}(\tau) = R_{sc}(-\tau)$

$$\therefore R_{sc}(-\tau) = -R_{sc}(\tau) \qquad R_{sc}(0) = 0$$

由*式，得 $R_\xi(0) = R_c(0) = R_s(0)$ $\quad \therefore \sigma_\xi^2 = \sigma_c^2 = \sigma_s^2$

三、统计特性

结论1： 均值为零，方差为 σ_ξ^2 的窄带平稳高斯过程，它的同相分量 $\xi_c(t)$ 和正交分量 $\xi_s(t)$ 同样是平稳高斯过程，而且均值为零，方差为 σ_ξ^2；此外，在同一时刻上得到的 ξ_c 和 ξ_s 互不相关且统计独立。

2.5 窄带随机过程

三、统计特性

2、包络和相位的统计特性

$$f(\xi_c, \xi_s) = f(\xi_c) \cdot f(\xi_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2} \exp\left[-\frac{\xi_c^2 + \xi_s^2}{2\sigma_\xi^2}\right]$$

$$f(a_\xi, \varphi_\xi) = f(\xi_c, \xi_s) \cdot \left| \frac{\partial(\xi_c, \xi_s)}{\partial(a_\xi, \varphi_\xi)} \right|$$

$$\left| \frac{\partial(\xi_c, \xi_s)}{\partial(a_\xi, \varphi_\xi)} \right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi_c}{\partial a_\xi} & \dfrac{\partial \xi_s}{\partial a_\xi} \\ \dfrac{\partial \xi_c}{\partial \varphi_\xi} & \dfrac{\partial \xi_s}{\partial \varphi_\xi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi_\xi & \sin\varphi_\xi \\ -a_\xi \sin\varphi_\xi & a_\xi \cos\varphi_\xi \end{vmatrix} = a_\xi$$

三、统计特性

2、包络和相位的统计特性

$$f\left(a_\xi, \ \varphi_\xi\right) = a_\xi \cdot f\left(a_\xi \cos\varphi_\xi, \ a_\xi \sin\varphi_\xi\right)$$

$$= \frac{a_\xi}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left[-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right], \qquad a_\xi \geq 0, \ 0 \leq \varphi_\xi \leq 2\pi$$

$$f\left(a_\xi\right) = \int_0^{2\pi} f\left(a_\xi, \ \varphi_\xi\right) d\varphi_\xi = \frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2}\exp\left(-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right), \qquad a_\xi \geq 0$$

$$f\left(\varphi_\xi\right) = \int_0^{\infty} f\left(a_\xi, \ \varphi_\xi\right) da_\xi = \frac{1}{2\pi}, \qquad 0 \leq \varphi_\xi \leq 2\pi$$

三、统计特性

2、包络和相位的统计特性

结论2： 均值为零，方差为σ_ξ^2的窄带平稳高斯过程，其包络$a_\xi(t)$的一维分布是**瑞利分布**，相位$\varphi_\xi(t)$的一维分布是**均匀分布**；且在同一时刻上得到的a_ξ和φ_ξ是统计独立的。

瑞利分布
$$f(a_\xi)=\frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2}\exp\left(-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right),\qquad a_\xi \ge 0$$

均匀分布
$$f(\varphi_\xi)=\frac{1}{2\pi},\qquad 0\le\varphi_\xi\le 2\pi$$

2.6 正弦波加窄带高斯过程

一、定义

随机相位正弦波加窄带高斯噪声：

$$r(t)=A\cos(\omega_c t+\theta)+n(t)$$

式中A, ω_c 为常数，$\theta \sim U(0,\ 2\pi)$

$$n(t)=n_c(t)\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t \qquad n\sim N\left(0,\ \sigma_n^2\right)$$

2.6 正弦波加窄带高斯过程

二、数学表示

$$r(t)=\left[A\cos\theta+n_c(t)\right]\cos\omega_c t-\left[A\sin\theta+n_s(t)\right]\sin\omega_c t$$

$$=z_c(t)\cos\omega_c t-z_S(t)\sin\omega_c t$$

$$=z(t)\cos\left[\omega_c t+\varphi(t)\right]$$

式中： $z_c(t)=A\cos\theta+n_c(t)$

$$z_s(t)=A\sin\theta+n_s(t)$$

合成信号的包络和相位分别为

$$z(t)=\sqrt{z_c^2(t)+z_s^2(t)},\qquad z\geq 0$$

$$\varphi(t)=\arctan\frac{z_s(t)}{z_c(t)},\qquad 0\leq\varphi\leq 2\pi$$

三、统计特性

若 θ 给定

$$z_c(t) = A\cos\theta + n_c(t)$$
$$z_s(t) = A\sin\theta + n_s(t)$$

$$E[z_c] = A\cos\theta$$
$$E[z_s] = A\sin\theta$$
$$\sigma_c^2 = \sigma_s^2 = \sigma_n^2$$

$$f(z_c,\ z_s/\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left[(z_c - A\cos\theta)^2 + (z_s - A\sin\theta)^2\right]\right\}$$

2.6 正弦波加窄带高斯过程

三、统计特性

$$f\left(z_c,\ z_s/\theta\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left[\left(z_c-A\cos\theta\right)^2+\left(z_s-A\sin\theta\right)^2\right]\right\}$$

$$f\left(z,\ \varphi/\theta\right)=f\left(z_c,\ z_s/\theta\right)\left|\frac{\partial\left(z_c,z_s\right)}{\partial\left(z,\ \varphi\right)}\right|$$

$$=\frac{z}{2\pi\sigma_n^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left[z^2+A^2-2Az\cos\left(\theta-\varphi\right)\right]\right\}$$

$$f\left(z/\theta\right)=\int_0^{2\pi}f\left(z,\ \varphi/\theta\right)d\varphi$$

三、统计特性

$$I_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(x\cos\theta)d\theta$$ 零阶修正贝塞尔函数

性质：① $I_0(0)=1$

② $x\geq 0$ 时，单调上升函数

$$f(z/\theta)=\int_0^{2\pi}f(z,\ \varphi/\theta)d\varphi$$

$$=\frac{z}{\sigma_n^2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left(z^2+A^2\right)\right]I_0\left(\frac{Az}{\sigma_n^2}\right)$$

2.6 正弦波加窄带高斯过程

三、统计特性

$$f\left(z/\theta\right)=\int_0^{2\pi} f\left(z,\ \varphi/\theta\right)d\varphi$$

$$=\frac{z}{\sigma_n^2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left(z^2+A^2\right)\right]I_0\left(\frac{Az}{\sigma_n^2}\right)$$

$$f\left(z\right)=\frac{z}{\sigma_n^2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left(z^2+A^2\right)\right]I_0\left(\frac{Az}{\sigma_n^2}\right),\qquad z\geq 0$$

结论：正弦波加窄带高斯过程的包络 $z(t)$ 服从广义瑞利分布，也称莱斯分布。

2.6 正弦波加窄带高斯过程

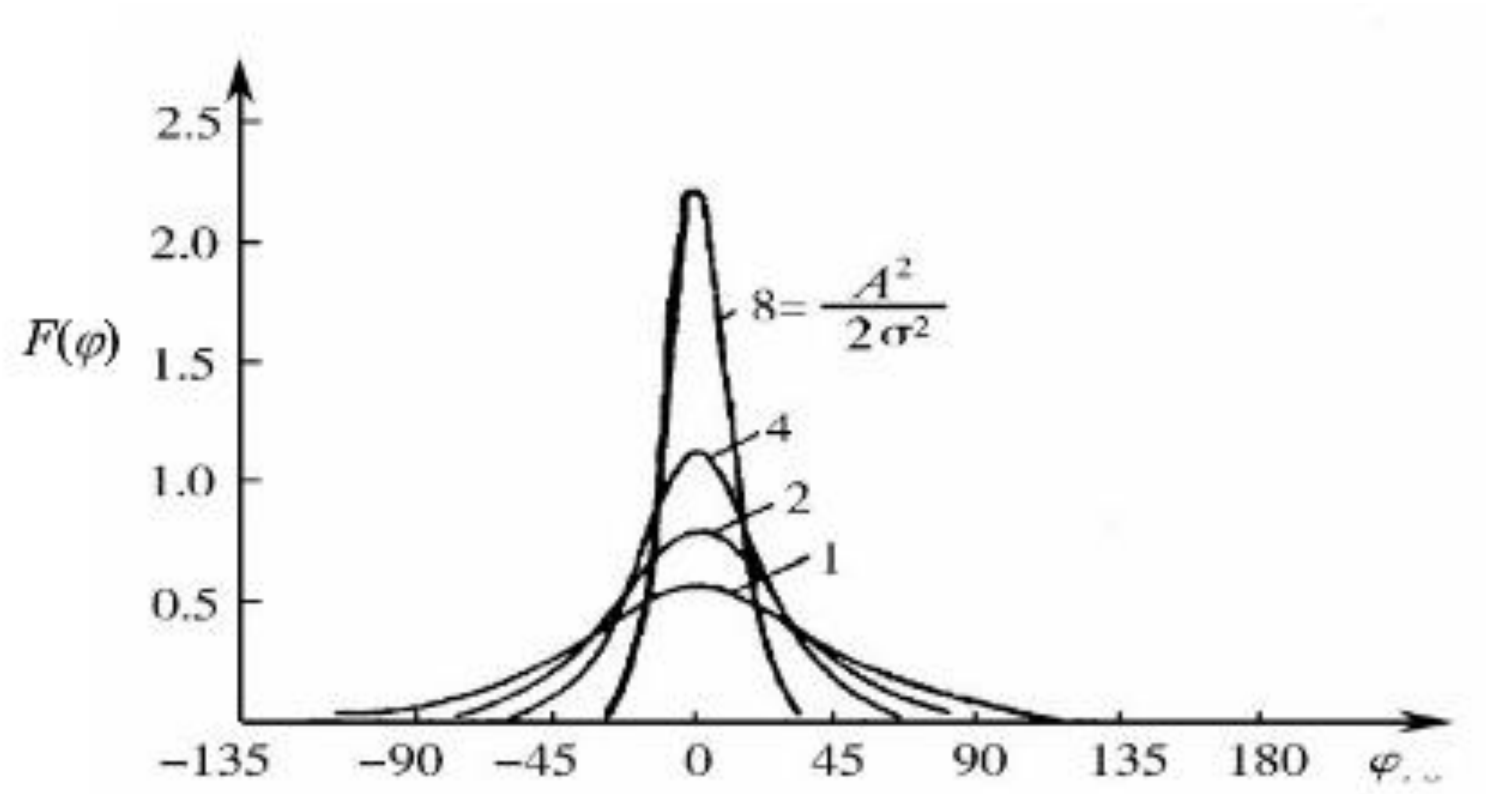
三、统计特性

$$
\begin{aligned}
f(\phi) = {} & \frac{\exp\left\{-E_{m,k}^2/2\sigma^2\right\}}{2\pi} + \frac{E_{m,k}\cos(\phi-\psi_{m,k})}{2(2\pi)^{1/2}\sigma} \\
& \cdot \exp\left\{-\frac{E_{m,k}^2}{2\sigma^2}\sin^2(\phi-\psi_{m,k})\right\} \\
& \cdot \left\{1 + erf\left[\frac{E_{m,k}\cos(\phi-\psi_{m,k})}{\sqrt{2}\sigma}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

2.6 正弦波加窄带高斯过程

西安电子科技大学 通信工程学院

三、统计特性



2.6 正弦波加窄带高斯过程

西安电子科技大学 通信工程学院

【例】均值为0，方差为σ_n^2 的窄带高斯过程

$$n(t)=n_c(t)\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t \quad , v(t)=\sqrt{n_c^2(t)+n_s^2(t)}$$

证明：$E\left[v(t)\right]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_n$

$$D\left[v(t)\right]=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma_n^2$$

2.6 正弦波加窄带高斯过程

证明： $$f(v)=\frac{v}{\sigma_n^2}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_n^2}\right) \qquad v\ge 0$$

$$E\left[v(t)\right]=\int_0^\infty v\cdot f(v)\,dv=\int_0^\infty \frac{v^2}{\sigma_n^2}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_n^2}\right)dv=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_n$$

$$D\left[v(t)\right]=E\left[v^2(t)\right]-\frac{\pi}{2}\sigma_n^2$$

$$=\int_0^\infty \frac{v^3}{\sigma_n^2}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_n^2}\right)dv-\frac{\pi}{2}\sigma_n^2$$

$$=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma_n^2$$

思考： 设 $n(t)$ 高斯白噪声，若 $r(t)=n(t)+\cos\omega_1 t$ 通过中心频率为 ω_1 的窄带滤波器，则输出包络服从 ________ 分布；若 $r(t)$ 通过中心频率为 $\omega_2(\omega_2>>\omega_1)$ 的窄带滤波器，则输出包络服从 ________ 分布。