第二章 控制系统的数学模型

2.1 建立数学模型的一般方法

2.2 非线性及线性化

2.3 传递函数

2.4 典型环节

2.5 动态结构图及等效变换

2.6 信号流图及梅森公式

2.7 控制系统的传递函数

引言

- 定义：控制系统的数学模型是描述实际系统各物理量（输入变量、输出变量和内部变量）之间关系的数学表达式。
- 用途(意义):

  1）分析实际系统

  2）预测实际系统的物理量

  3）设计控制系统

引言

- 控制系统的数学模型关系到对系统性能的分析结果，所以建立合理的数学模型是控制系统分析中至关重要的事情.

建立系统数学模型时，必须：

(1) 全面了解系统的特性，确定研究目的以及准确性要求，决定能否忽略一些次要因素而使系统数学模型简化。

(2) 根据所应用的系统分析方法，建立相应形式的数学模型，有时还要考虑便于计算机求解。

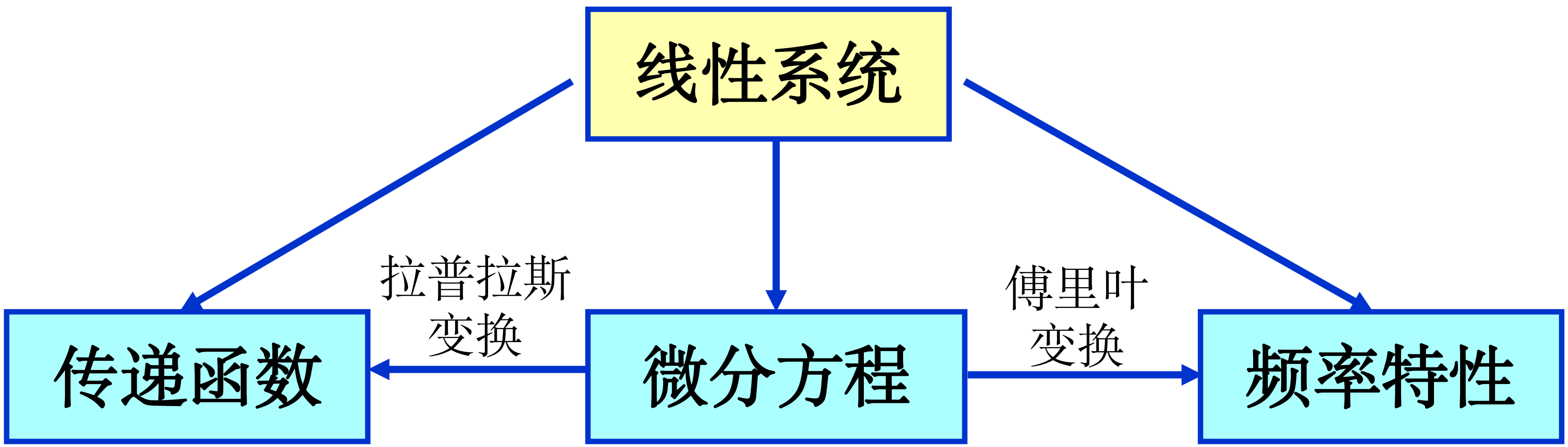
建立系统的数学模型主要方法

1、解析法。根据系统满足的物理规律或化学规律建立数学模型。

2、实验法。通过测量所得到的大量输入、输出数据，推断出被研究系统的数学模型，又称为系统辨识。

数学模型的形式：

- 时域：微分方程、差分方程、状态方程
- 频域：频率特性、信号流图
- 复（频）域：传递函数、结构图（框图）、信号流图



2.1 建立数学模型的一般方法

2.2 非线性及线性化

2.3 传递函数

2.4 典型环节

2.5 动态结构图及等效变换

2.6 信号流图及梅森公式

2.7 控制系统的传递函数

2.1 建立数学模型的一般方法

列写系统微分方程的**一般步骤**：

1）确定系统的输入、输出量；在条件许可下适当简化，忽略一些次要因素；

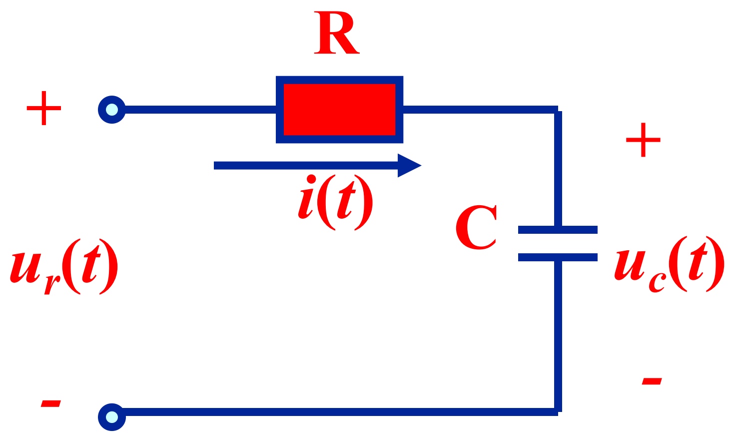
2）根据已知的物理或化学定律，列写运动过程的动态方程,通常为一组微分方程；

3）消去中间变量，写出输入、输出量的微分方程；

4）整理，写成微分方程的标准形式（输出量在左，输入量在右，按照降阶次进行排列）。

2.1 建立数学模型的一般方法

例1 电阻和电容的串联网络，其中$u_r(t)$为输入电压，$u_c(t)$为输出，建立两者关系的微分方程。



(1) 确定输入(自变量)和输出变量(因变量)。

输入：$u_r(t)$；　输出：$u_c(t)$

(2) 根据基本定律，列写原始方程（欧姆定律、基尔霍夫定律）。

$$u_r(t) = Ri(t) + u_c(t) \qquad i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

2.1 建立数学模型的一般方法

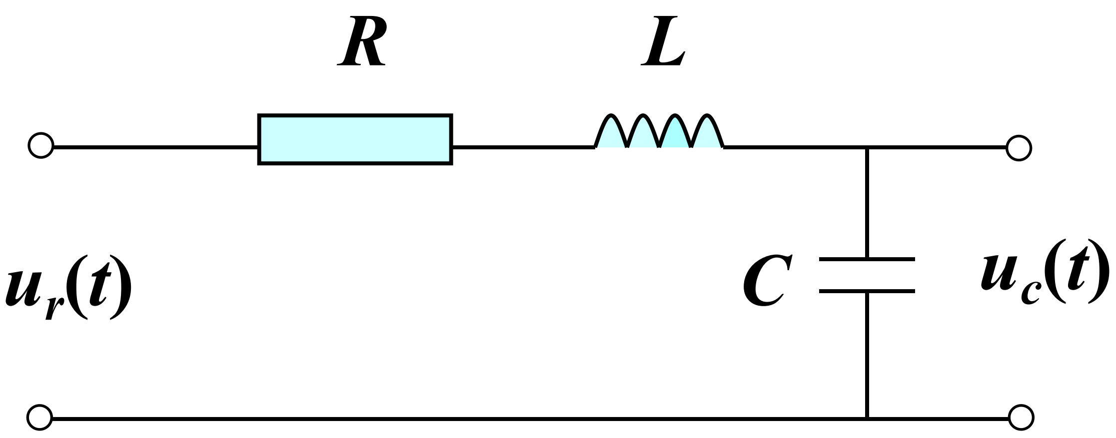
(3) 消去中间变量$i(t)$，得到最终的方程。

$$RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=u_r(t)$$

$$T\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=u_r(t)$$

上式为一阶线性微分方程，因此这个RC电路是一阶线性(定常)系统。

例2 如图所示的RLC电路，试建立以电容上电压$u_c(t)$为输出变量，输入电压$u_r(t)$为输入变量的运动方程。



2.1 建立数学模型的一般方法

解：由基尔霍夫电压定律（KVL）得

$$u_r(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + u_c(t) \qquad (1)$$

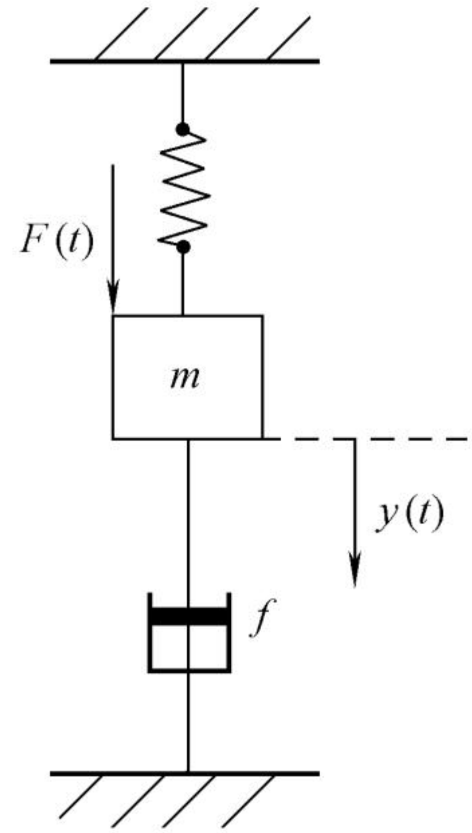
又有

$$i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt} \qquad (2)$$

将（2）代入（1），消去中间变量$i(t)$得：

$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

例3 机械位移系统,物体在外力$F(t)$ 作用下产生位移$y(t)$,写出运动方程。



输入$F(t)$，输出$y(t)$

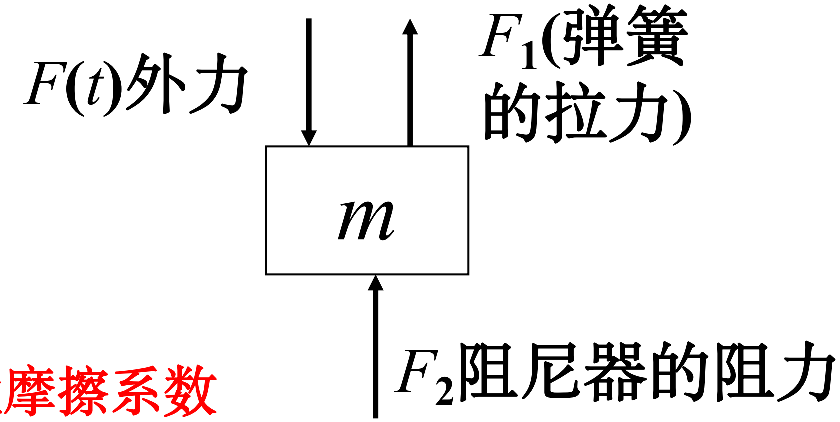
理论依据:牛顿第二定律,物体所受的合外力等于物体质量与加速度的乘积.

$$\sum F = ma$$

2.1 建立数学模型的一般方法

解: $F_1 = Ky(t)$

$$F_2 = f\frac{dy(t)}{dt}$$



*K*为弹簧弹性系数，*f*为阻尼器的粘性摩擦系数

$$a = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$F(t) - F_1 - F_2 = ma$$

$$F(t) - ky(t) - f\frac{dy(t)}{dt} = m\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

整理得到: $m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + f\dfrac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F(t)$

2.1 建立数学模型的一般方法

许多表面上看来似乎毫无共同之处的控制系统，其运动规律可能完全一样可以用一个运动方程来表示，称它们为**结构相似系统**。

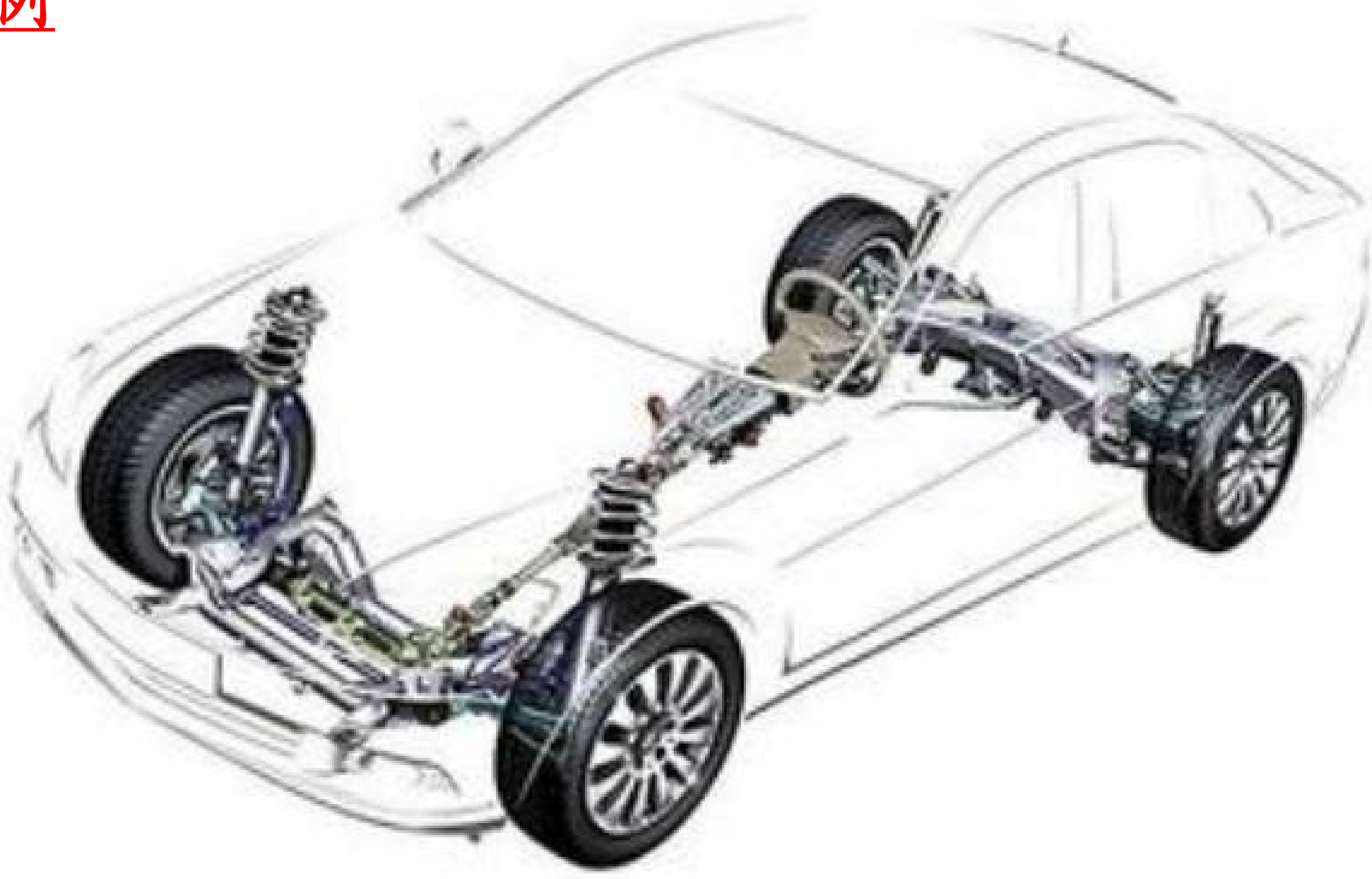
上例的机械位移系统和RLC电路就可以用同一个数学表达式分析，具有相同的数学模型。

$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}+RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=u_r(t)$$

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+f\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=F(t)$$

2.1 建立数学模型的一般方法

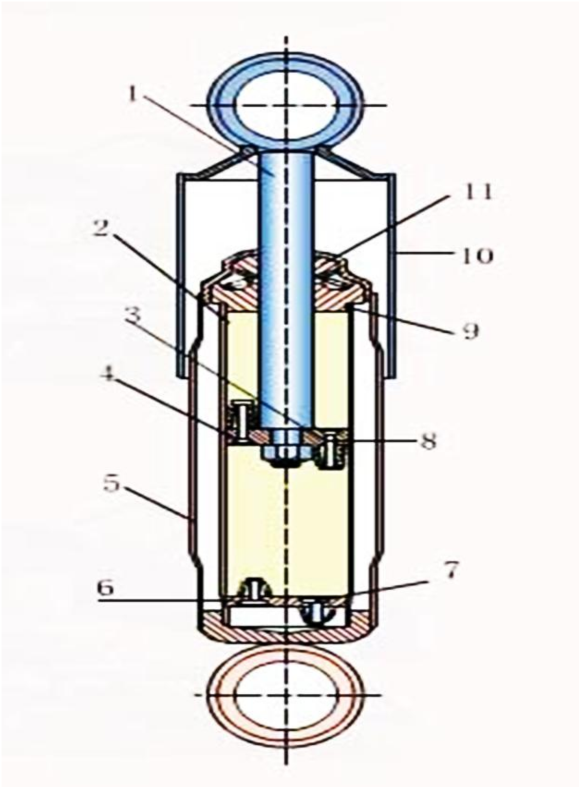
实例



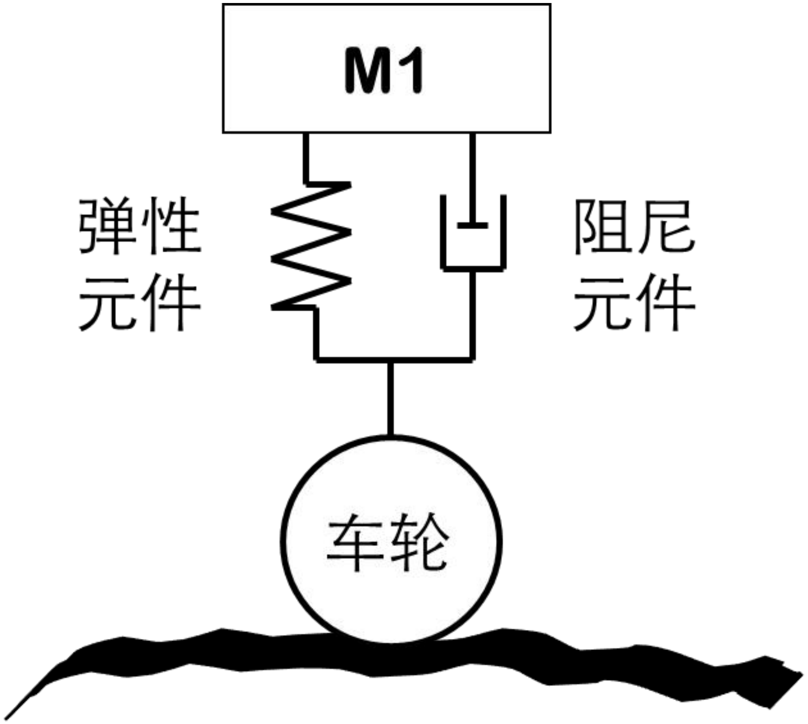
汽车减震系统

2.1 建立数学模型的一般方法

2.1 建立数学模型的一般方法

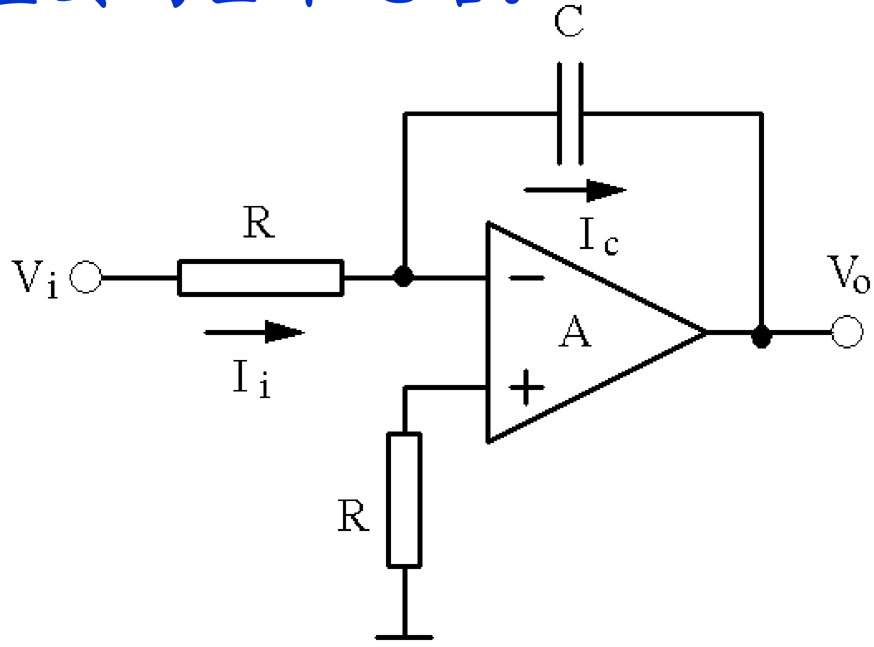


1. 活塞杆；**2.** 工作缸筒；**3.** 活塞；
4. 伸张阀；**5.** 储油缸筒；**6.** 压缩阀；
7. 补偿阀；**8.** 流通阀；**9.** 导向座；
10. 防尘罩；**11.** 油封



例4 积分器。

- 积分器是实现对输入信号进行积分运算的电路。
- 积分器具有广泛的用途，如A / D转换器、压控振荡器、波形发生器、扫描电路等许多方面都用到它，是一种重要的基本电路。

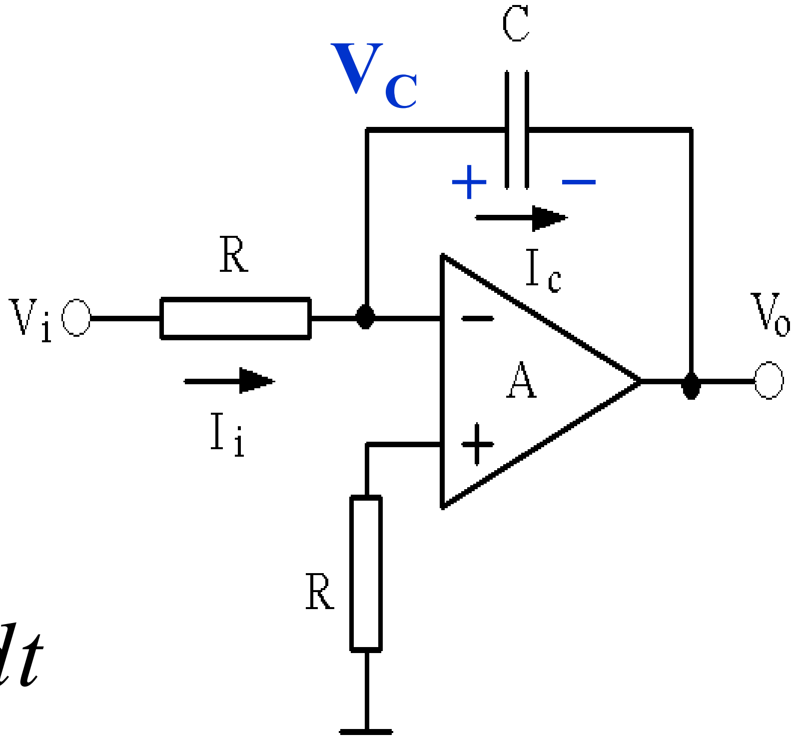


2.1 建立数学模型的一般方法

$$V_O = -V_C$$

$$= -\frac{1}{C}\int I_C dt = -\frac{1}{C}\int I_i dt$$

$$= -\frac{1}{RC}\int V_i dt = -\frac{1}{T}\int V_i dt$$



式中，$\tau = RC$，称为积分器的时间常数。

2.1 建立数学模型的一般方法

- 所以，积分器的输出电压为：

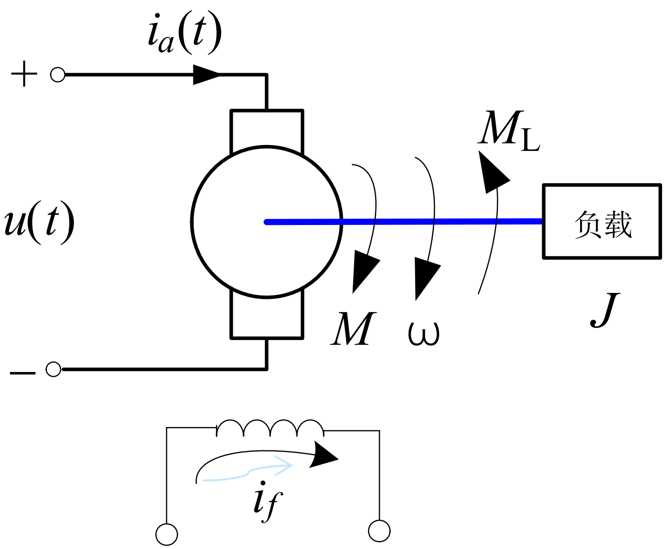
$$V_O = -\frac{1}{RC}\int V_i dt$$

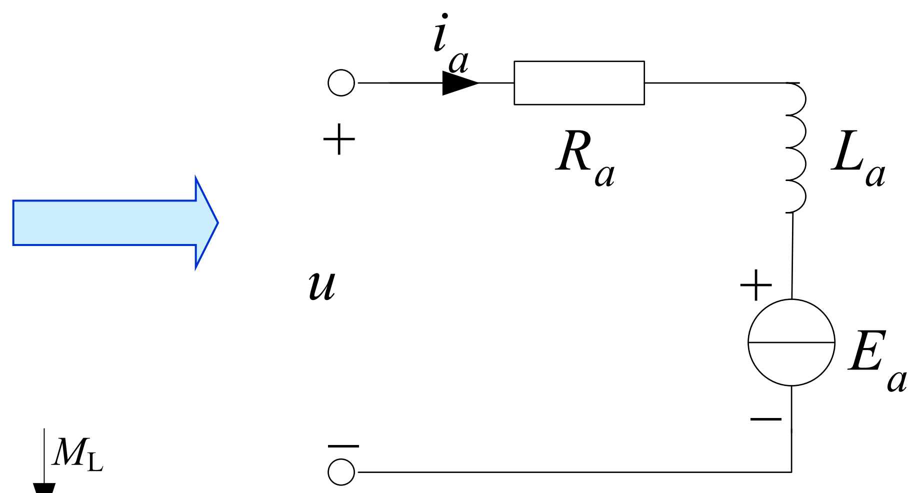
- 积分器的输出电压正比于输入电压对时间的积分。这是在初始条件Vc（0）=0的情况下得出的输出电压表达式。

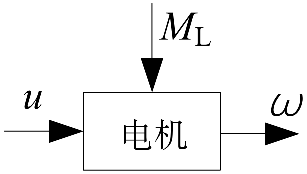
- 化为微分形式：

$$\frac{dV_o}{dt} = -\frac{1}{RC}V_i$$

例5:直流他励电机的数学模型。





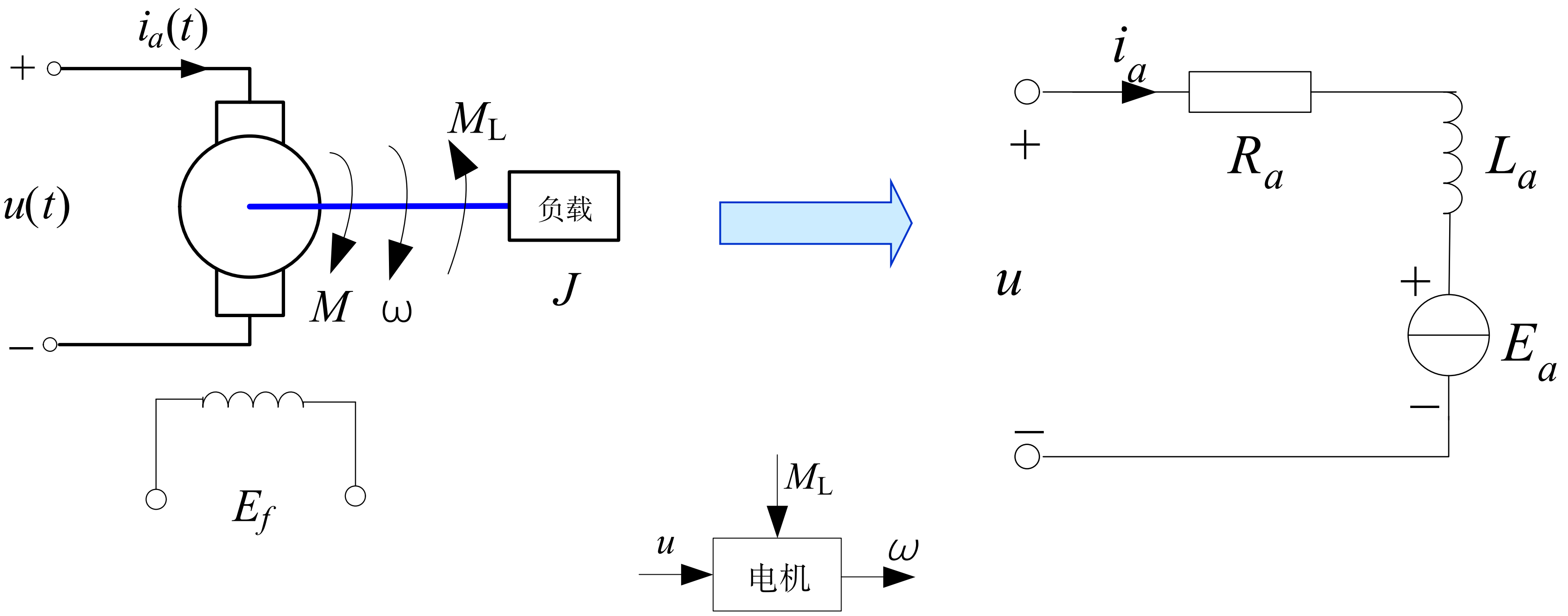


$u(t)$为电枢电压; E_a为反电动势; i_a为电枢电流; R_a为电枢电阻; L_a为电枢电感; M为电磁转矩; ω为电机角速度; J为电动机总的转动惯量; f为电动机和负载折算到轴上的等效粘性阻尼系数; i_f为励磁电流(常数)。

2.1 建立数学模型的一般方法

解: (1) 明确输入、输出量。输出量为ω，输入量为$u(t)$。

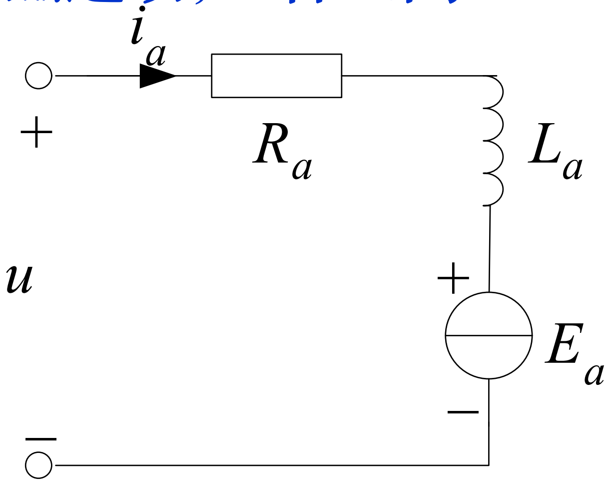
(2)不计电枢反应、涡流效应和磁滞影响；当i_f为常值时，磁场不变，电机绕组温度在瞬变过程中不变。



2.1 建立数学模型的一般方法

(3) 建立输入、 输出量的动态联系。

在他励直流电动机系统中有机械运动及电磁运动,二者之间还存在耦合。



根据基尔霍夫定律(电磁运动):

$$u = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + E_a$$

根据刚体旋转定律(电磁运动):

$$J\alpha = J\frac{d\omega}{dt} = M - M_L$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

角加速度

机电之间耦合关系:

$$E_a = C_e \omega$$

反电动势

$$M = C_m i_a(t)$$

电动机转矩

$$M_L = f\omega$$

负载转矩

C_e为电动机电势系数（V/(rad·s^{-1})）。 C_m为电动机力矩系数（N·m/A）。

2.1 建立数学模型的一般方法

(4) 消去中间变量， 得到系统的数学模型。 消去中间变量E_a、i_a、M_L和M, 得电枢电压控制直流电动机微分方程式:

$$\frac{L_aJ}{C_eC_m}\frac{d^2\omega}{dt^2}+\left(\frac{R_aJ+L_af}{C_eC_m}\right)\frac{d\omega}{dt}+\left(1+\frac{R_af}{C_eC_m}\right)\omega=\frac{u}{C_e}$$

T_m —电动机的机电时间常数， $T_m=\dfrac{R_aJ}{C_eC_m}$ （秒）；

电动机从启动到转速达到空载转速的63.2%时所经历的时间。

T_e —电动机的电气时间常数， $T_e=\dfrac{L_a}{R_a}$ （秒）；

$T_e=(1/5\text{-}1/10)T_m$

$$T_eT_m\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2}+T_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\omega=\frac{1}{C_e}u_a-\frac{T_mf}{J}\omega-\frac{T_eT_m}{J}f\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

2.1 建立数学模型的一般方法

(5)若输出为电动机的角速度ω，得电枢电压控制直流电动机微分方程式:

$$T_e T_m \frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2} + T_m \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \omega = \frac{1}{C_e} u_a - \frac{T_m f}{J} \omega - \frac{T_e T_m}{J} f \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

是一个2阶线性定常微分方程。

(6) 若输出为电动机的转角θ，则有:

$$T_e T_m \frac{\mathrm{d}^3\theta}{\mathrm{d}t^3} + T_m \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C_e} u_a - \frac{T_m}{J} M_L - \frac{T_e T_m}{J} \frac{\mathrm{d}M_L}{\mathrm{d}t}$$

是一个3阶线性定常微分方程。

(7) 若以电动机转速n（单位r/min）为输出，则有：

$$T_eT_m\frac{\mathrm{d}^2n}{\mathrm{d}t^2}+T_m\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}+n=\frac{1}{C_e'}u_a-\frac{T_m}{GD^2/375}M_L-\frac{T_eT_m}{GD^2/375}\frac{\mathrm{d}M_L}{\mathrm{d}t}$$

是一个2阶线性定常微分方程。

$$\omega=\frac{\pi}{30}n \qquad C_e'=C_e\frac{\pi}{30} \qquad J=GD^2/4g$$

*J*为电动机转动惯量；

GD为电动机飞轮转矩；

M_L为负载转矩。

2.1 建立数学模型的一般方法

$$T_eT_m\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2}+T_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\omega=\frac{1}{C_e}u_a-\frac{T_mf}{J}\omega-\frac{T_eT_m}{J}f\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

式中 T_m —电动机的机电时间常数， $T_m=\frac{R_aJ}{C_eC_m}$ （秒）；

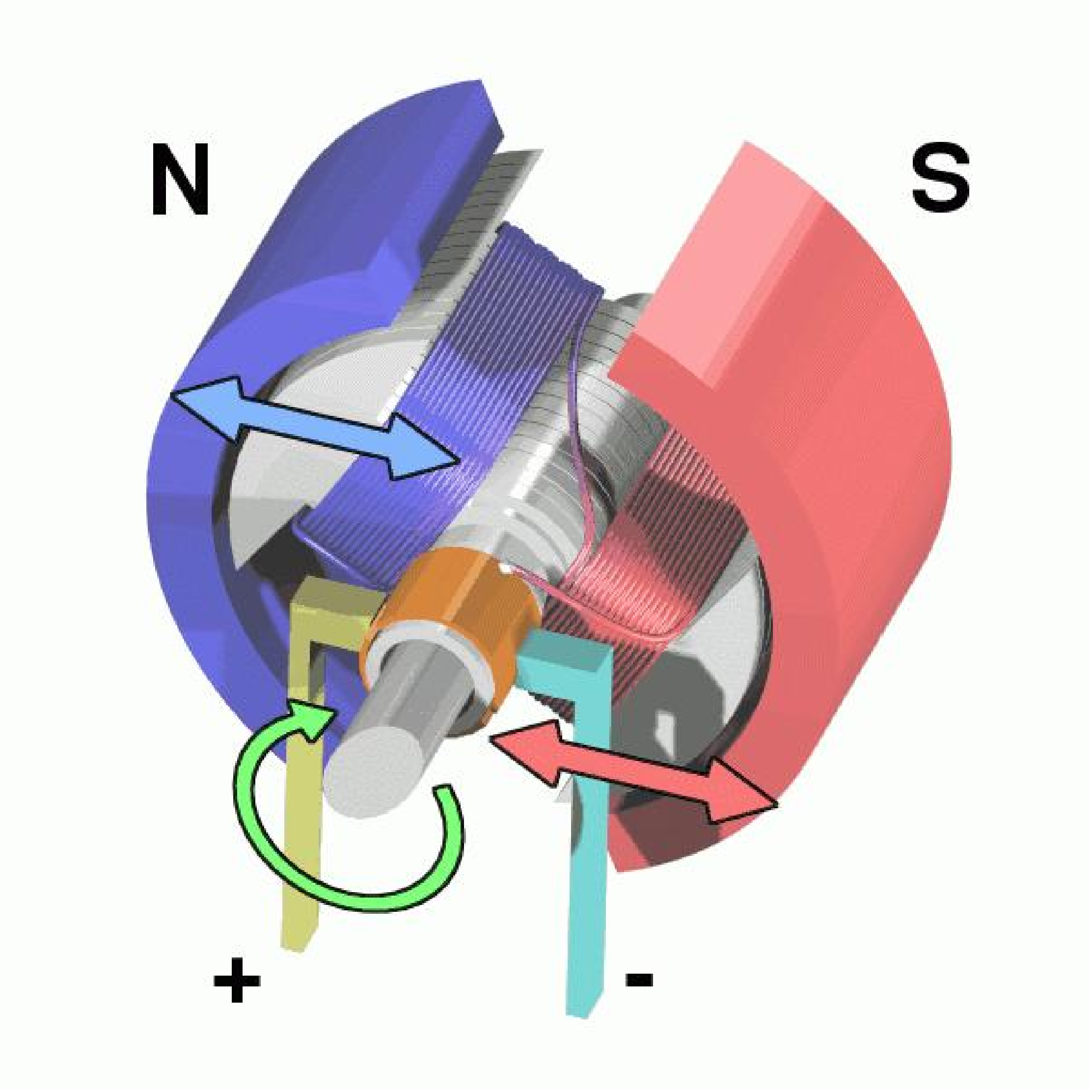
电动机从启动到转速达到空载转速的63.2%时所经历的时间。

T_e —电动机的电气时间常数， $T_e=\frac{L_a}{R_a}$ （秒）；

$T_e=(1/5-1/10)T_m$

通常，电动机的电枢电路电感L_a较小和粘性摩擦系数f较小时，二者对系统的动态影响可以忽略不计，可以简化为

$$T_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\omega=\frac{1}{C_e}u_a \qquad T_m\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}+n=\frac{1}{C_e'}u_a \qquad T_m\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{C_e}u_a$$


N
S
+
-

Thank You !