

空气动力学基础

航天学院·空气动力学教学组

Northwestern Polytechnical University, XI'AN



第一章 流体力学基础知识

第二章 流体力学基本原理与方程

第三章 不可压理想流体绕物体的流动

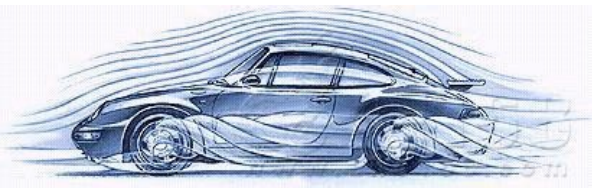
第四章 高速可压缩流基础知识

第五章 一维定常可压缩管内流动

第六章 附面层和黏性流动

第七章 绕翼型的低速流动

第八章 绕翼型的可压缩流动





第一章 流体力学基础知识

第二章 流体力学基本原理和方程

第三章 不可压理想流体绕物体的流动

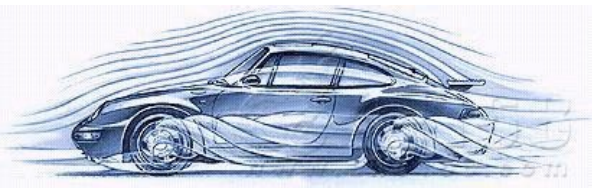
第四章 高速可压缩流基础知识

第五章 一维定常可压缩管内流动

第六章 附面层和黏性流动

第七章 绕翼型的低速流动

第八章 绕翼型的可压缩流动





第七章 绕翼型的低速流动

§7-1 翼型的几何参数与气动参数

§7-2 低速翼型气动特性概述

§7-3 库塔-儒可夫斯基后缘条件及环量确定

§7-4 薄翼型理论

§7-5 任意形状翼型绕流的数值方法

§7-6 实用低速翼型的气动特性（自学）



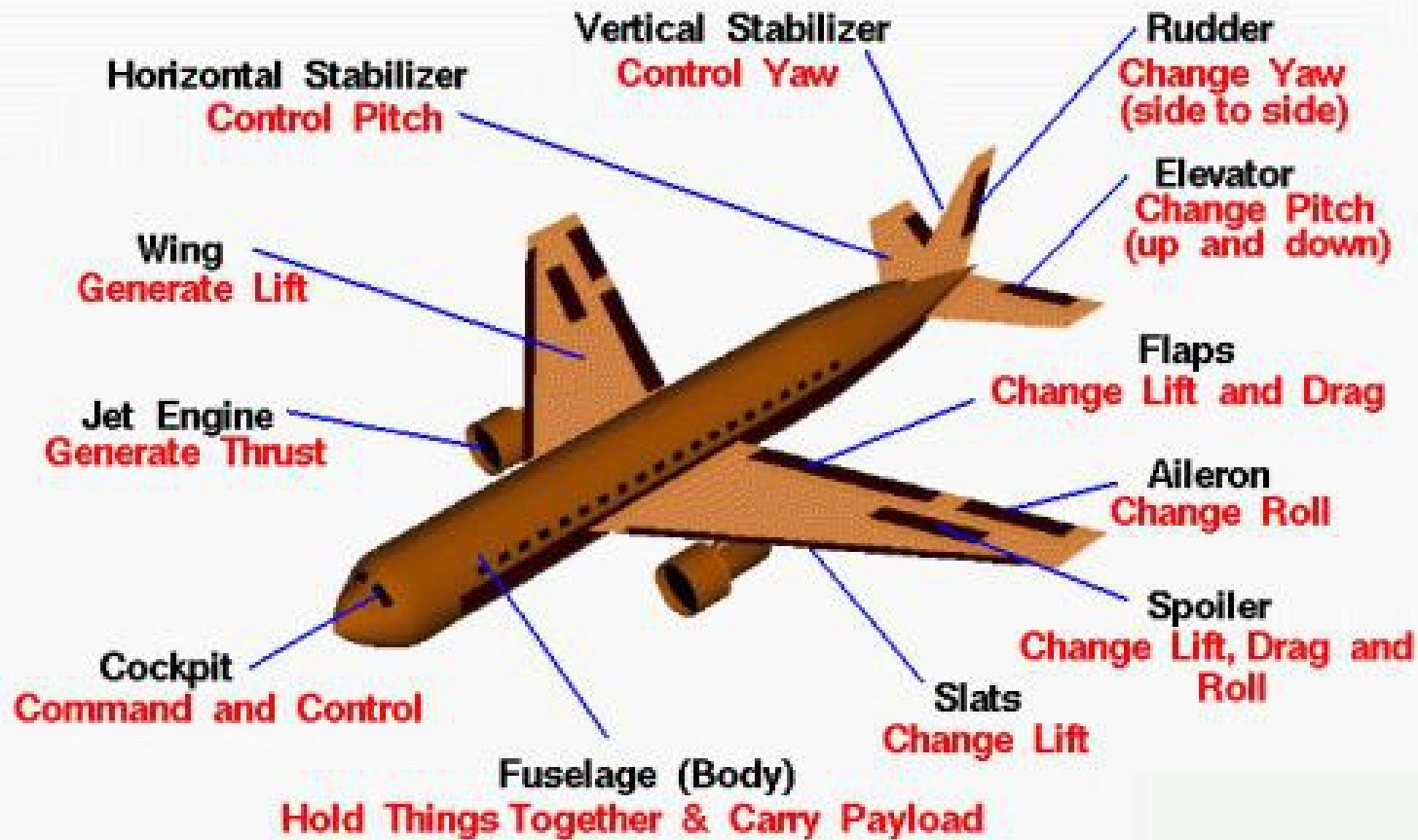


第七章 绕翼型的低速流动



Airplane Parts Definitions and Function

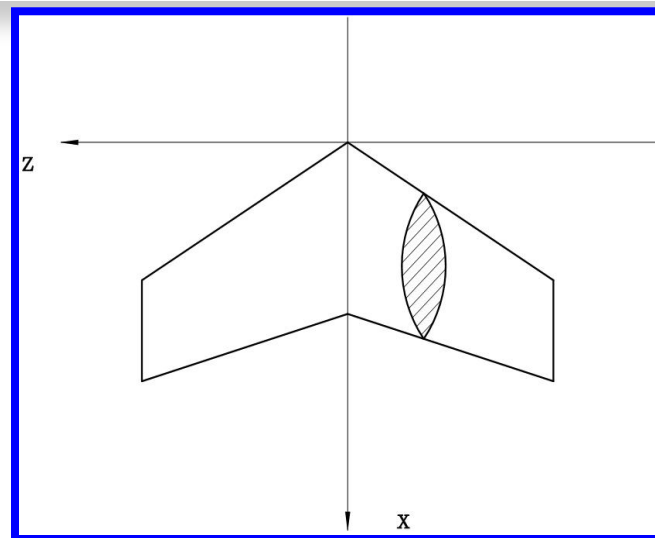
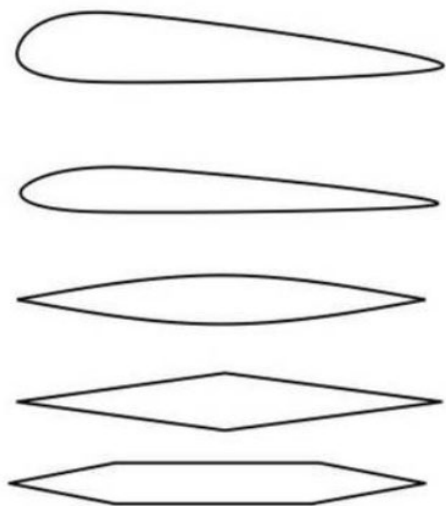
Glenn
Research
Center





第七章 绕翼型的低速流动

翼型：平行于机翼对称平面截得的机翼剖面。



圆头尖尾形 → 低速、亚音速和跨音速机翼

尖头尖尾形 → 超音速下机翼和弹翼上

本章只研究低速翼型的气动特性：

翼型的升力特性

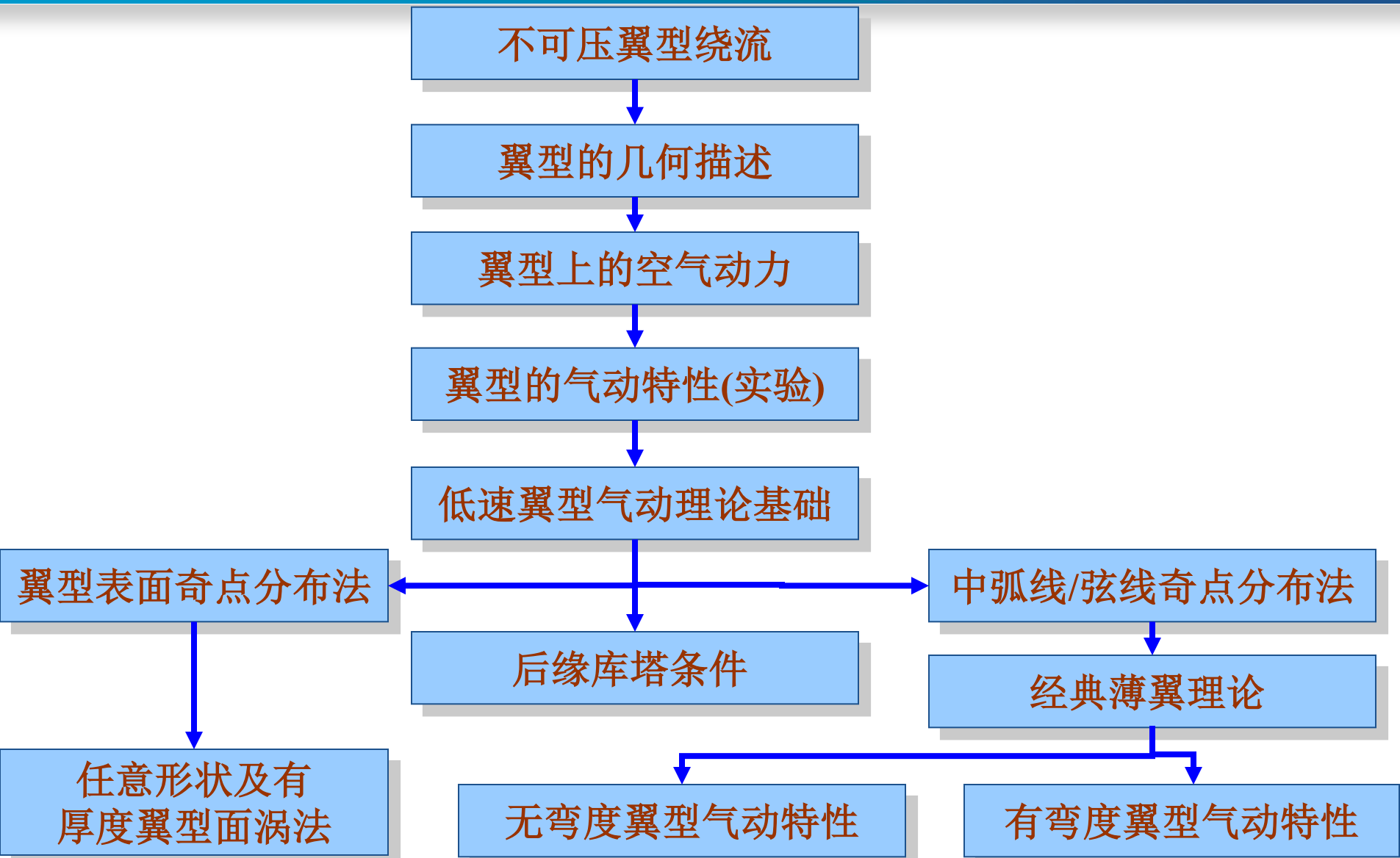
翼型的阻力特性

翼型的力矩特性





第七章 绕翼型的低速流动





第七章 绕翼型的低速流动

§7-1 翼型的几何参数与气动参数

§7-2 低速翼型气动特性概述

§7-3 库塔-儒可夫斯基后缘条件及环量确定

§7-4 薄翼型理论

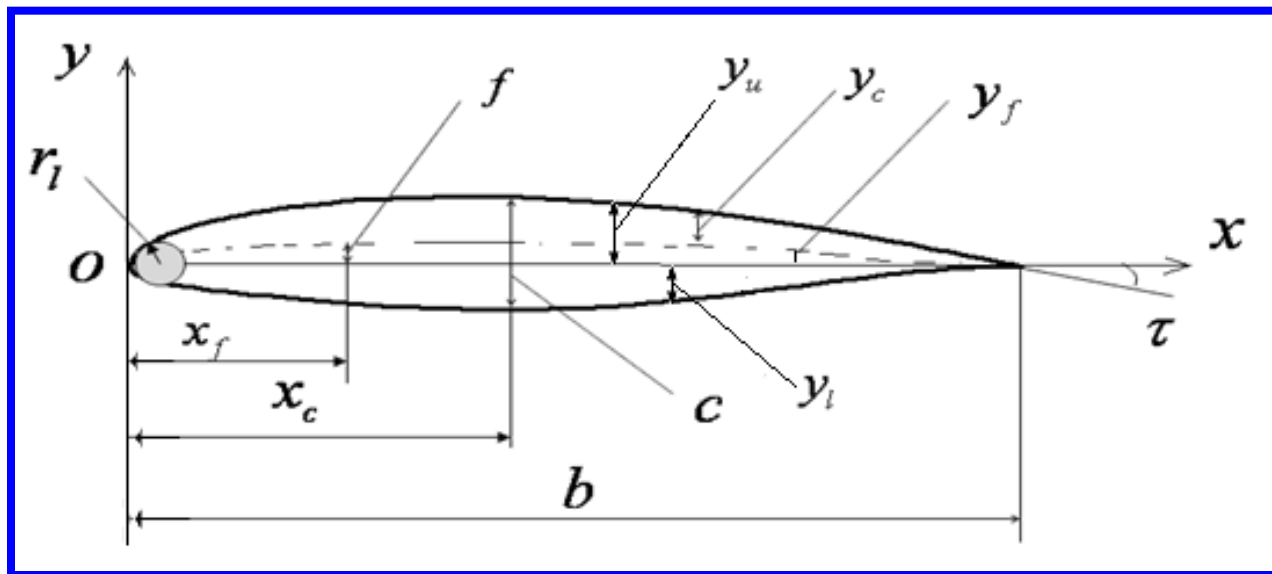
§7-5 任意形状翼型绕流的数值方法

§7-6 实用低速翼型的气动特性（自学）





◆ 翼型的几何参数



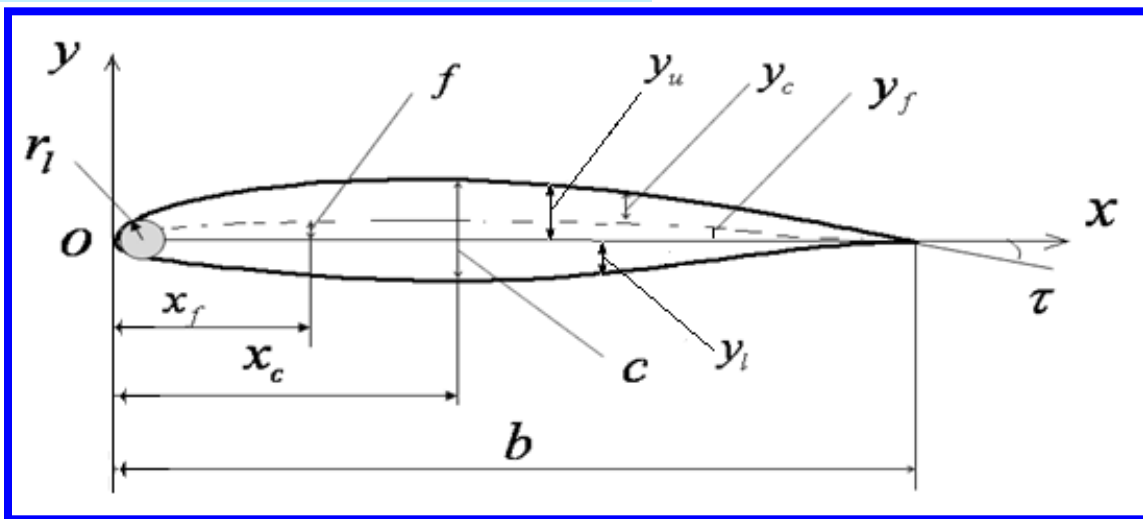
1) 几何弦长**b**

通常将连接翼型前缘和后缘的直线称为翼型的弦线，翼弦长称为几何弦长，简称弦长，用**b**表示。弦长**b**是翼型的特征尺寸。





◆ 翼型的几何参数



2) 翼型表面无量纲坐标

取体轴坐标系，翼型上下表面采用无量纲的弦长百分比表示

$$\bar{y}_{\text{上}} = \frac{y_{\text{上}}}{b} = f_{\text{上}}\left(\frac{x}{b}\right) = f_{\text{上}}(\bar{x})$$

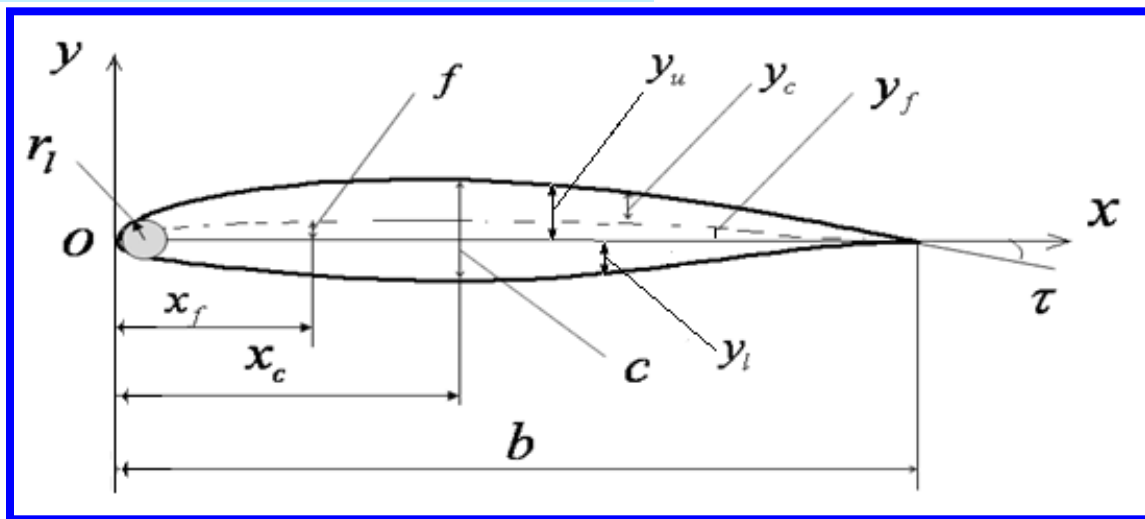
通常称为翼型表面函数

$$\bar{y}_{\text{下}} = \frac{y_{\text{下}}}{b} = f_{\text{下}}\left(\frac{x}{b}\right) = f_{\text{下}}(\bar{x})$$





◆ 翼型的几何参数



3) 弯度特性

中弧线：翼型上下表面y向高度中点的连线。

中弧线的无量纲y向坐标称为弯度函数 $\bar{y}_f(\bar{x})$

相对弯度 \bar{f}

最大弯度位置 \bar{x}_f

$$\bar{y}_f(\bar{x}) = \frac{1}{2}(\bar{y}_{\text{上}} + \bar{y}_{\text{下}})$$

$$\bar{f} = \frac{f}{b} = \bar{y}_{f \max}$$

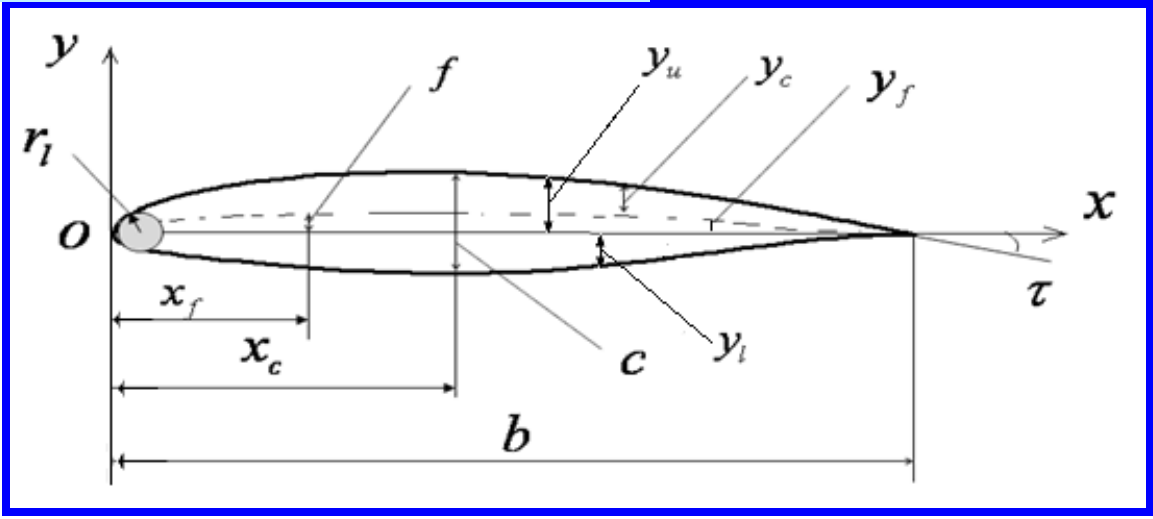
$$\bar{x}_f = \frac{x_f}{b}$$





1 翼型的几何参数与气动参数

◆ 翼型的几何参数



4) 厚度特性

厚度分布函数: **上翼面**到中弧线的无量纲y向距离 $\bar{y}_c(\bar{x})$

最大厚度: 上下表面之间无量纲最大y向高度称为相对厚度 \bar{c}

最大厚度位置: \bar{c} 的 \bar{x} 坐标 \bar{x}_c 。

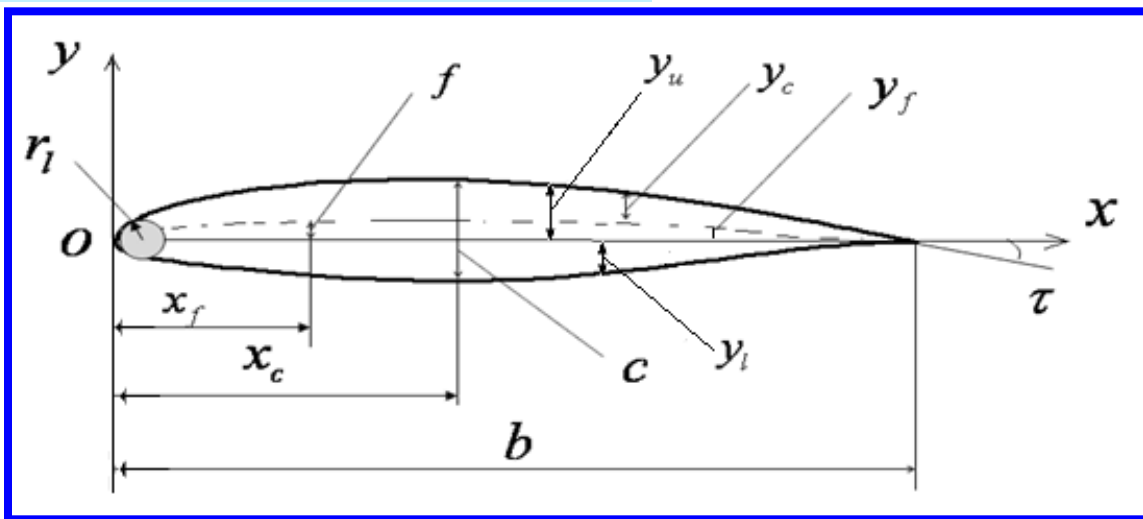
$$\bar{y}_c(\bar{x}) = \frac{1}{2}(\bar{y}_{\text{上}} - \bar{y}_{\text{下}})$$

$$\bar{c} = \frac{c}{b} = 2\bar{y}_{c\text{max}}$$

$$\bar{x}_c = \frac{x_c}{b}$$



◆ 翼型的几何参数



5) 前缘半径、后缘角

前缘半径: 前缘钝度用一个与前缘相切圆的半径 r_L 表示, 即前缘半径

相对前缘半径定义 $\bar{r}_L = \frac{r_L}{b}$

后缘角: 翼型上下表面在后缘处切线间的夹角 τ

衡量后缘的尖锐度



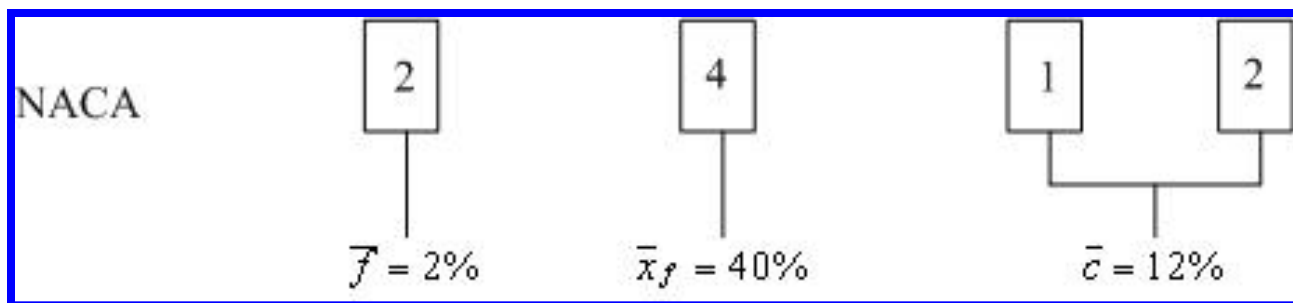


◆ 翼型的几何参数

$\bar{c}, \bar{f}, \bar{x}_f$ 对气动特性影响特别大，在翼型编号中全部或部分表示出来

NACA四位数字翼型

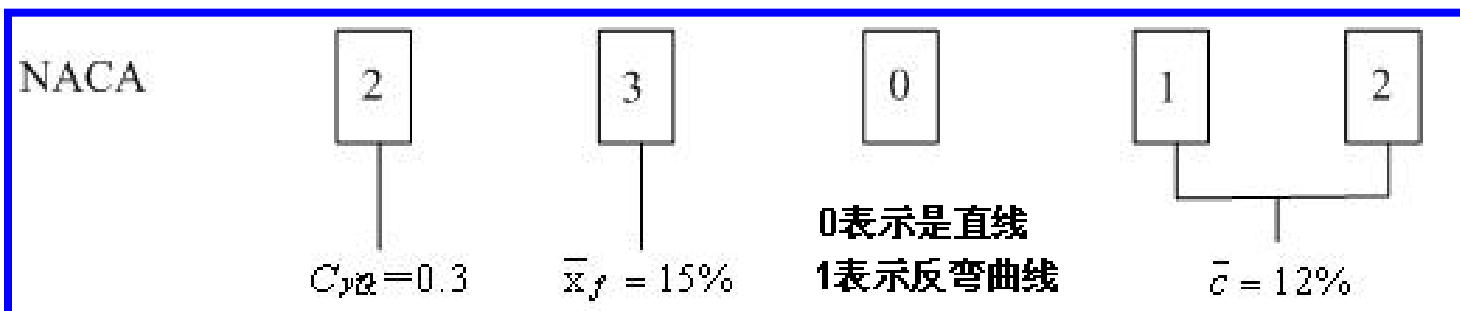
NACA2412翼型



NACA四位数字翼型的 $\bar{x}_c = 30\%$

NACA五位数字翼型

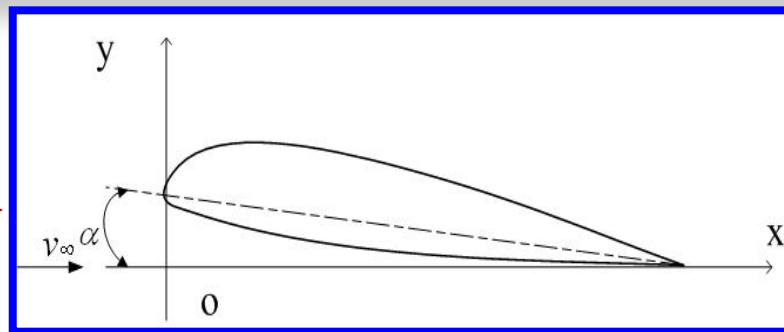
NACA 23012翼型



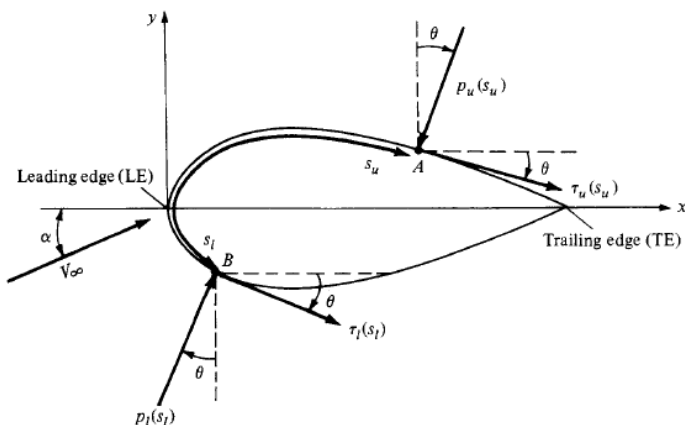
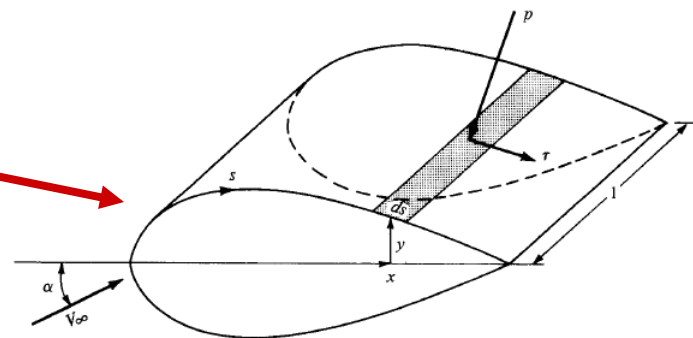


◆ 翼型的气动参数

翼型的迎角：来流 v_∞ 与翼弦 b 间夹角为几何迎角，简称迎角 α



绕翼型的流动是平面流动，翼型上气动力为无限翼展机翼在 z 方向截取单位长翼段上所产生的气动力
翼型表面上每点有压强 p 和摩擦应力 τ



$$Y_1 = \int_{LE}^{TE} (-p_u \cos \theta - \tau_u \sin \theta) ds_u + \int_{LE}^{TE} (p_l \cos \theta - \tau_l \sin \theta) ds_l$$

$$X_1 = \int_{LE}^{TE} (-p_u \sin \theta + \tau_u \cos \theta) ds_u + \int_{LE}^{TE} (p_l \sin \theta + \tau_l \cos \theta) ds_l$$

$$R = \sqrt{Y_1^2 + X_1^2}$$





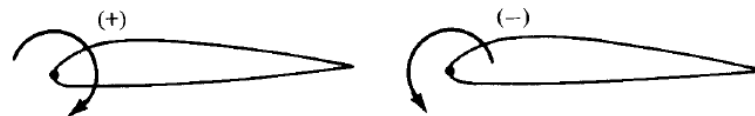
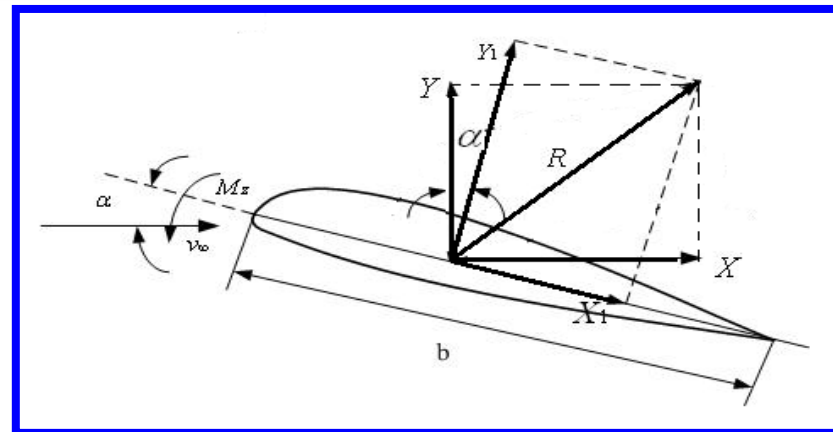
◆ 翼型的气动参数

$$R = \sqrt{Y_1^2 + X_1^2}$$

将 R 分解为垂直 v_∞ 方向的**升力** $Y(L)$ 和平行 v_∞ 方向的**阻力** $X(D)$ 。合力 R 对某参考点，例如对前缘或1/4弦点取矩可得**俯仰力矩** M_z 或 $M_{z1/4}$ 。抬头为正，低头为负。

$$Y = Y_1 \cos \alpha - X_1 \sin \alpha$$

$$X = Y_1 \sin \alpha + X_1 \cos \alpha$$



$$M_{LE} = \int_{LE}^{TE} [(p_u \cos \theta + \tau_u \sin \theta)x - (p_u \sin \theta - \tau_u \cos \theta)y] ds_u + \int_{LE}^{TE} [(-p_l \cos \theta + \tau_l \sin \theta)x + (p_l \sin \theta + \tau_l \cos \theta)y] ds_l$$





◆ 翼型的气动参数

升力系数

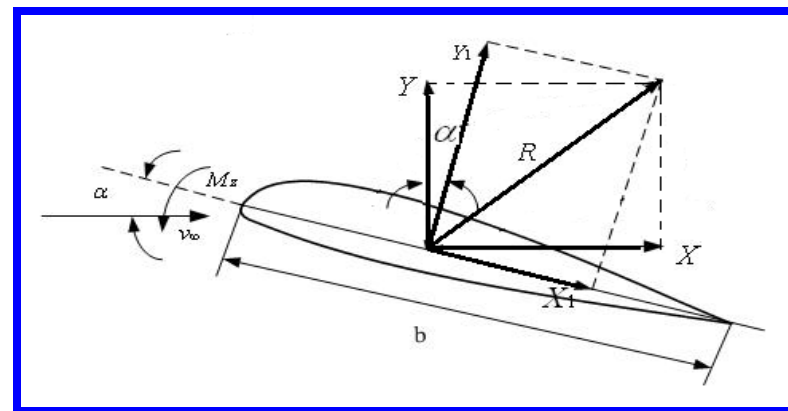
$$C_y = \frac{Y}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \cdot b \cdot l}$$

阻力系数

$$C_x = \frac{X}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \cdot b \cdot l}$$

力矩系数

$$m_z = \frac{M_z}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \cdot b^2 \cdot l}$$



对低速翼型绕流，忽略空气压缩性，须计及空气粘性。

三个空气动力系数除与翼型的几何参数和迎角有关外，还要取决于雷诺数的高低。





第七章 绕翼型的低速流动

§7-1 翼型的几何参数与气动参数

§7-2 低速翼型气动特性概述

§7-3 库塔-儒可夫斯基后缘条件及环量确定

§7-4 薄翼型理论

§7-5 任意形状翼型绕流的数值方法

§7-6 实用低速翼型的气动特性（自学）





◆ 绕流图画

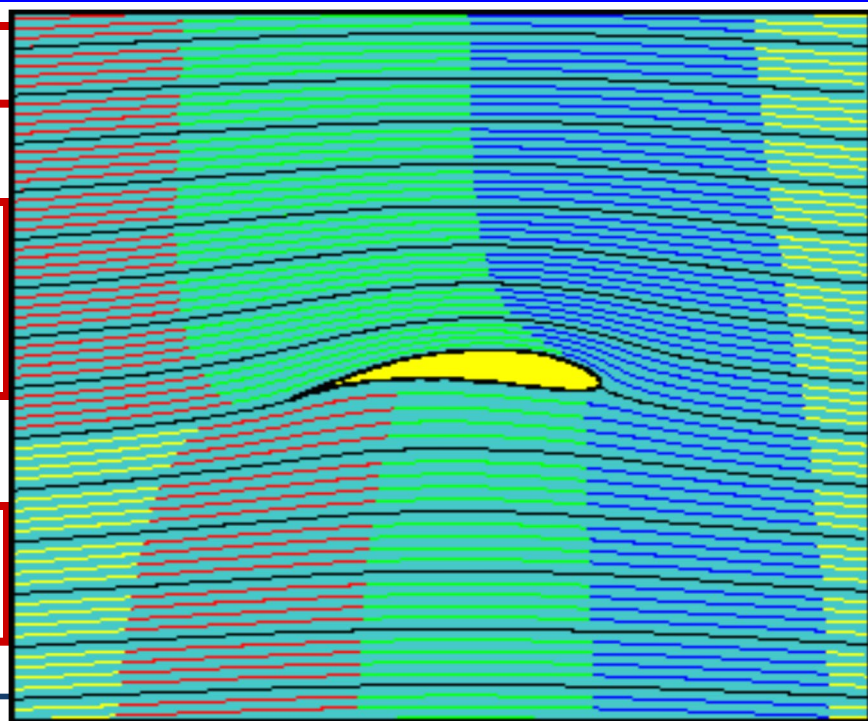
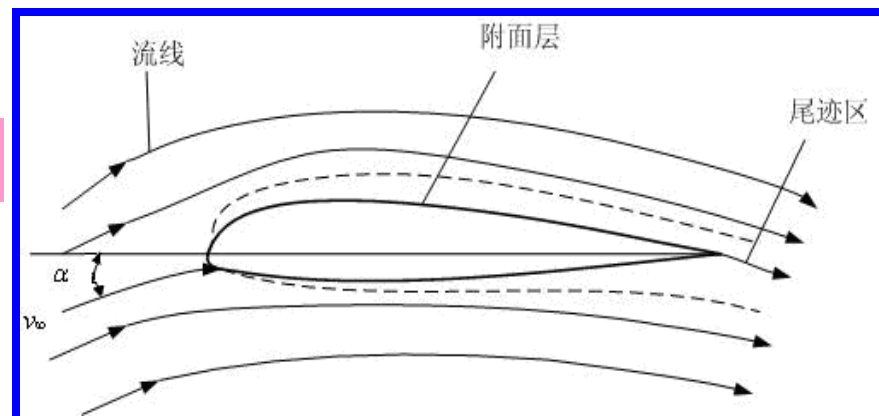
低速直匀流 v_∞ , 小 α 流过圆头尖尾翼型

(1) 流动附体无分离;

(2) 物面上附面层及尾迹区均相当薄;

(3) 前驻点在下翼面距前缘不远处, 一部分从驻点起绕过前缘经上翼面向后流, 另一部分气流沿下翼面流;

(4) 在后翼处流动平滑地汇合后向下后方流去, 并逐渐转回到来流方向。



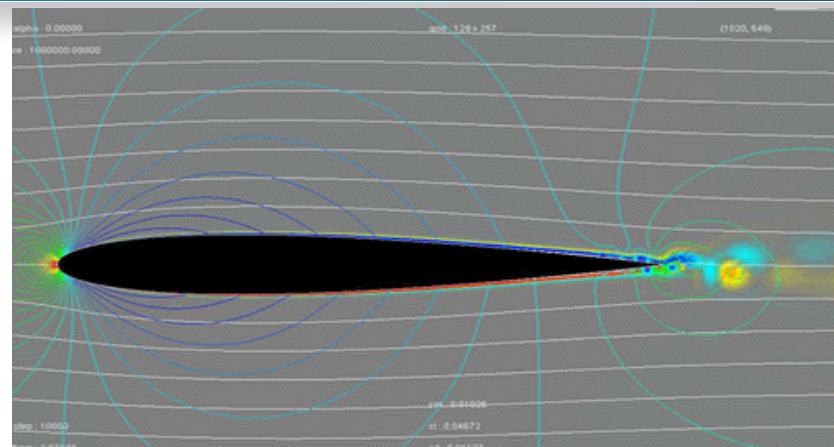


第七章 绕翼型的低速流动

§ 7-2 低速翼型气动特性概述

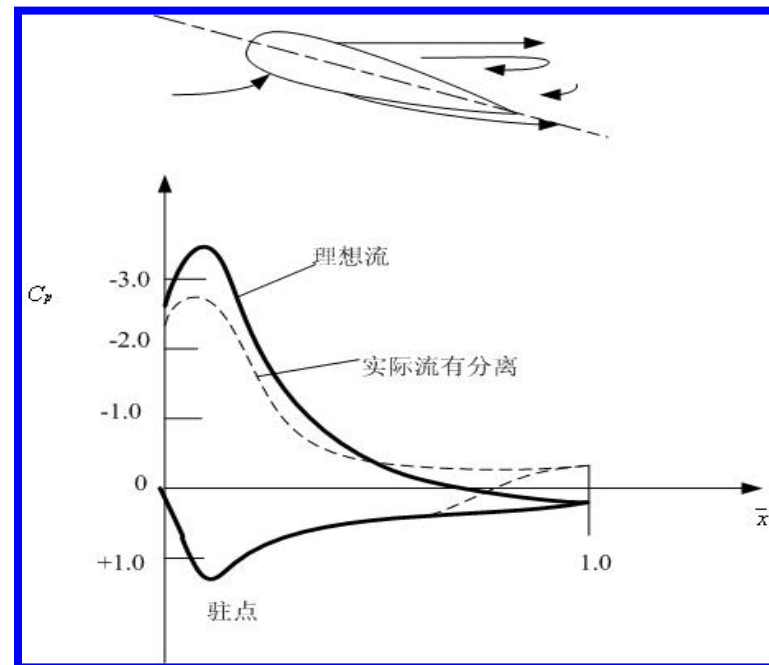
◆ 绕流图画

随迎角增大，驻点逐渐后移，最大速度点越来越靠近前缘，最大速度值越大，上下翼面压差也越大，升力越大。



在中等迎角下，上表面后区附面层因受到逐渐增大的逆压梯度作用发生分离。

随 α 增加，后缘分离区向前扩展，当达到某个临界值后上翼面的附体流动被彻底破坏，升力下降，阻力大增。流动不稳定。此现象称为失速，此临界迎角又称为失速迎角。





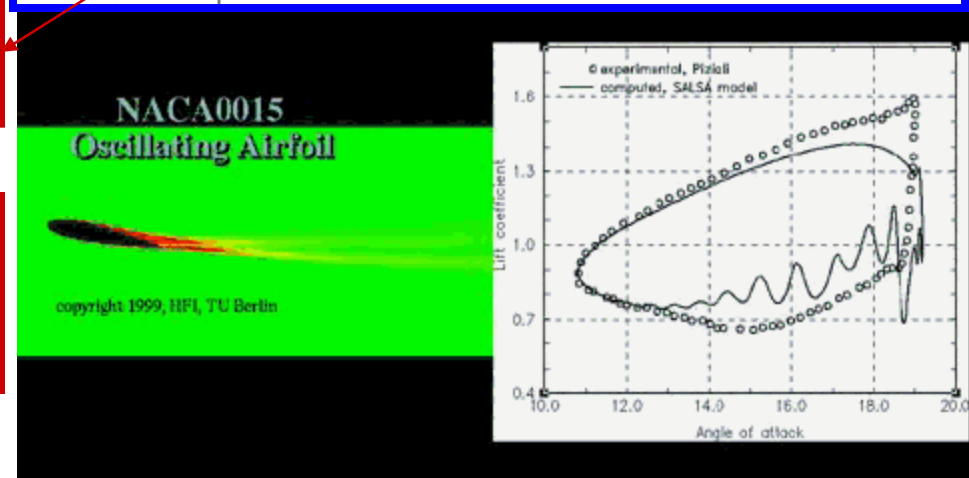
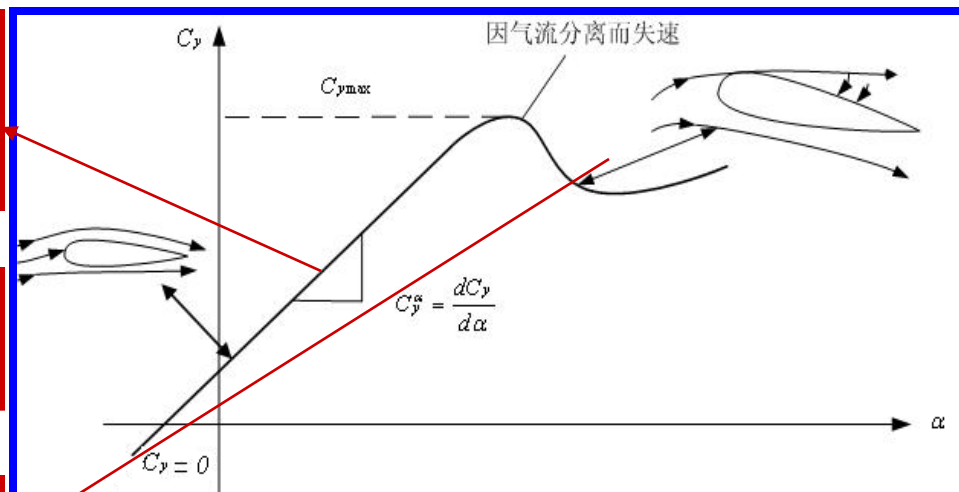
◆ 翼型气动系数随迎角变化曲线

中、小迎角，因流动附体，粘性对升力影响不大，升力系数随迎角基本上是线性增加。

翼型阻力主要是摩擦阻力，值较小且随迎角变化不大。

大迎角时，最大升力及失速后的曲线形状却受粘性很大影响。

出现粘性压差阻力，近似与 α^2 成正比。当附面层分离扩及整个上翼面，阻力系数急剧增大。





◆ 翼型气动系数随迎角变化曲线

$\alpha \leq 12^\circ \rightarrow C_y - \alpha$ 呈直线关系 $\alpha_{\text{临}} \approx 16^\circ \rightarrow C_{y\text{max}} = 1.5 \quad (\alpha)_{C_y=0} = -2.1^\circ$

$C_{x\text{min}} = 0.006 \quad C_x(\text{粘性压差}) = C_x - C_{x\text{min}} \propto \alpha^2$

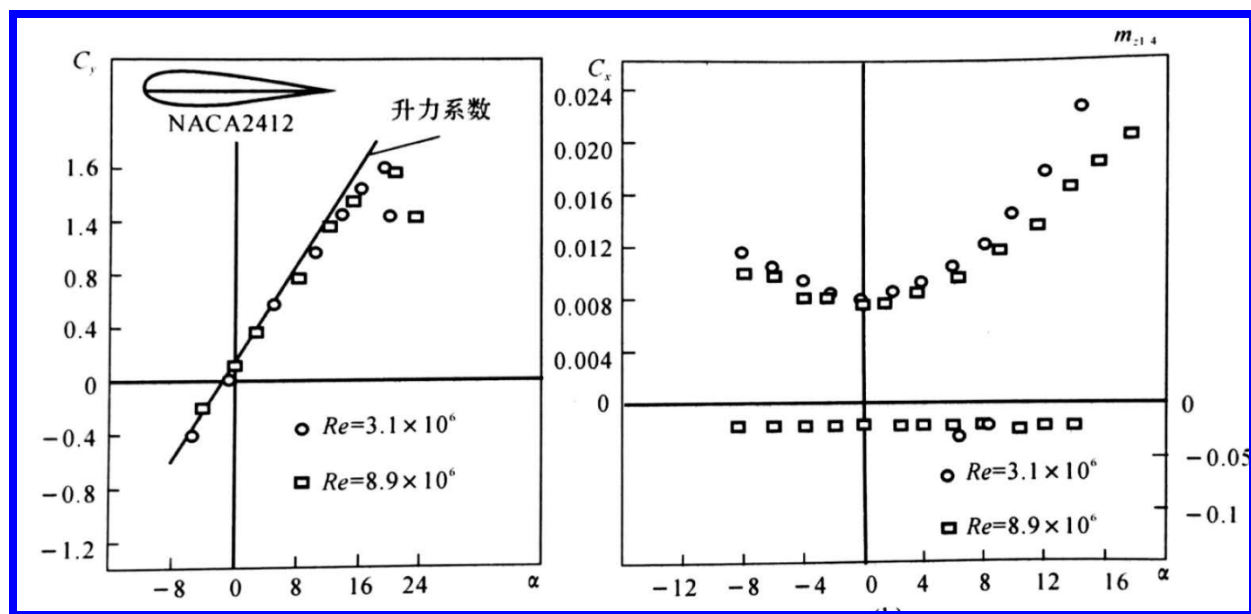
$m_{z1/4} - \alpha$ 曲线 $m_{z1/4} \approx -0.05$

Re 主要影响

$C_{y\text{max}} \quad \alpha_{\text{临}} \quad C_{x\text{min}}$

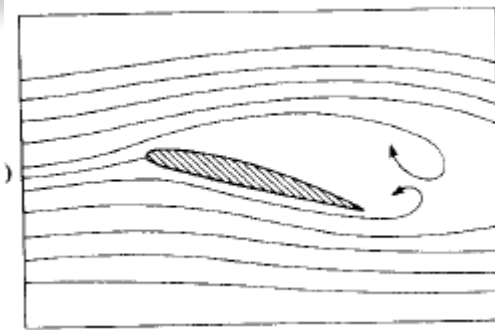
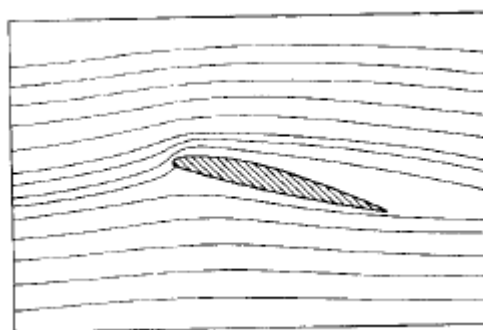
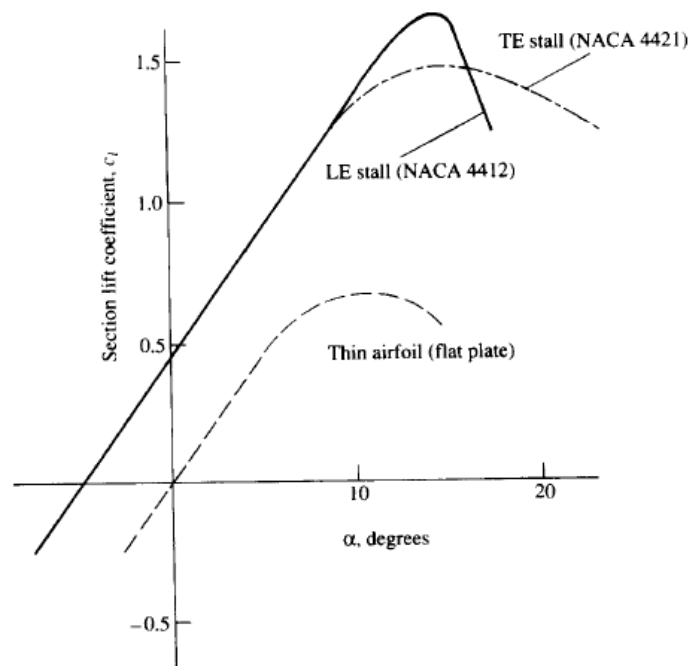
C_y^α

$m_{z1/4}$

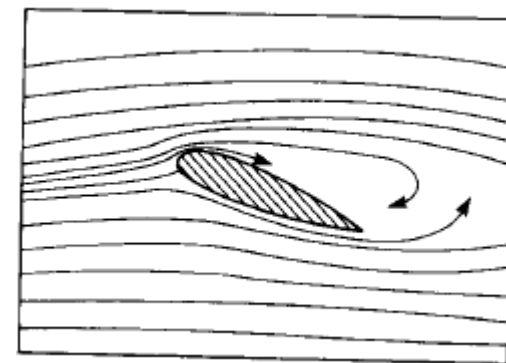
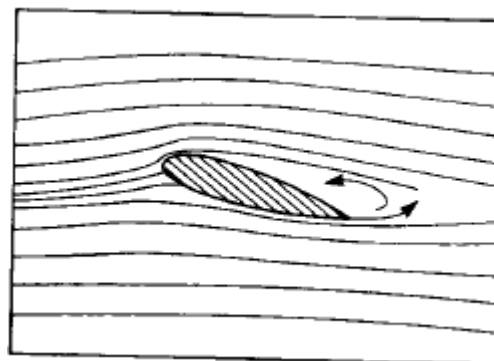




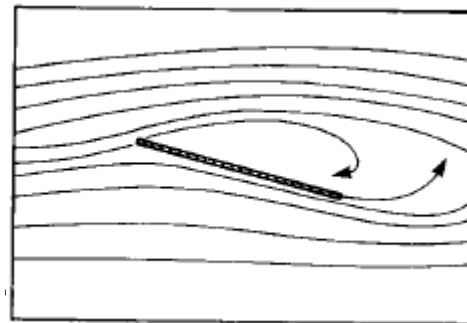
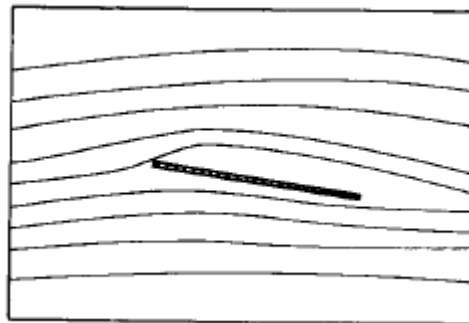
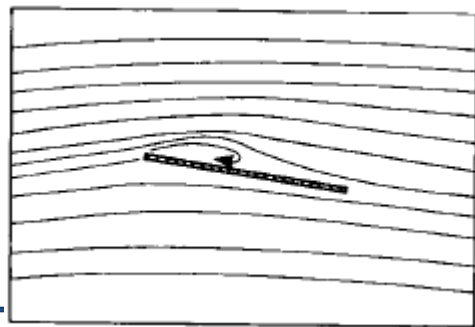
◆ 失速分类



前缘失速 (NACA4412)



后缘失速 (NACA4421)



薄翼失速 (平板)



第七章 绕翼型的低速流动

§7-1 翼型的几何参数与气动参数

§7-2 低速翼型气动特性概述

§7-3 库塔-儒可夫斯基后缘条件及环量确定

§7-4 薄翼型理论

§7-5 任意形状翼型绕流的数值方法

§7-6 实用低速翼型的气动特性（自学）





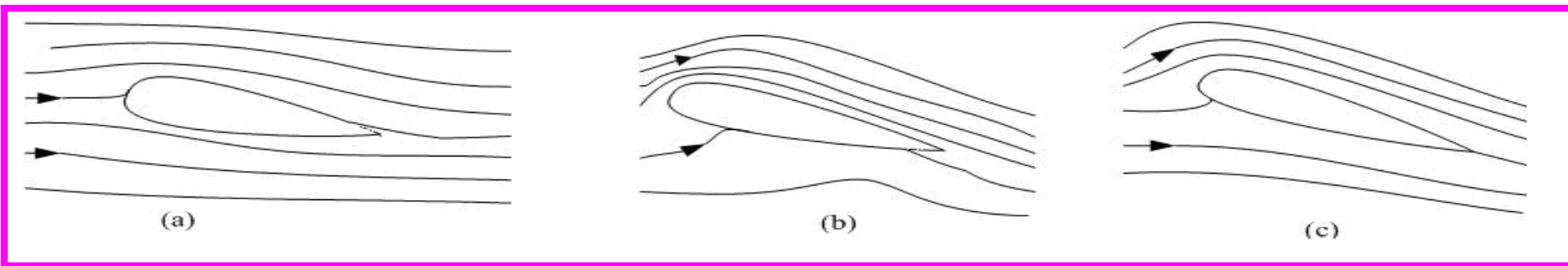
◆ 库塔-儒可夫斯基后缘条件

库塔-儒可夫斯基升力定理，在定常、理想、不可压流中，直匀流流过任意截面形状翼型的升力为：

$$Y = \rho v_{\infty} \Gamma$$

对圆柱不同环量值所对应的驻点位置有多种情形。

对尖后缘的翼型，存在多个环量，均可满足表面是流线的边界条件，但对应的后驻点有三种流动图画。



对**a**和**b**两种情况，尖后缘处将出现无穷大速度和负压，实际流动中不能持续；
在**c**情况下上下气流平滑地流过后缘。

实验观察中当迎角不太大时只有**c**实际存在。





◆ 库塔-儒可夫斯基后缘条件

库塔-儒可夫斯基后缘条件:

对于给定翼型和迎角, 环量值应正好使流动平滑地流过后缘去

若翼型后缘角 $\tau > 0$, 后缘点是后驻点

$$v_1 = v_2 = 0$$

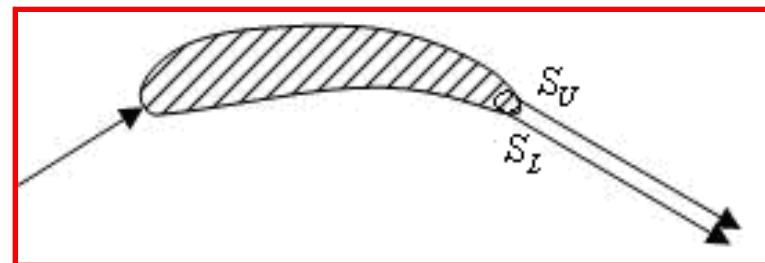
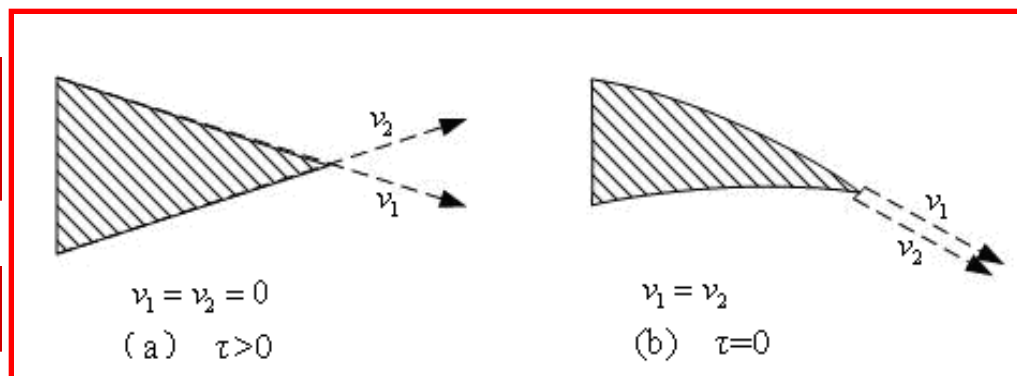
若翼型后缘角 $\tau = 0$, 后缘点速度为有限值

$$v_1 = v_2$$

真实翼型后缘往往是小圆弧。气流在上下翼面靠后很近的两点发生分离, 分离区很小。

$$p_{s_u} = p_{s_l}, v_{s_u} = v_{s_l}$$

推广的库塔-儒可夫斯基条件





◆ 环量的产生和后缘条件的关系

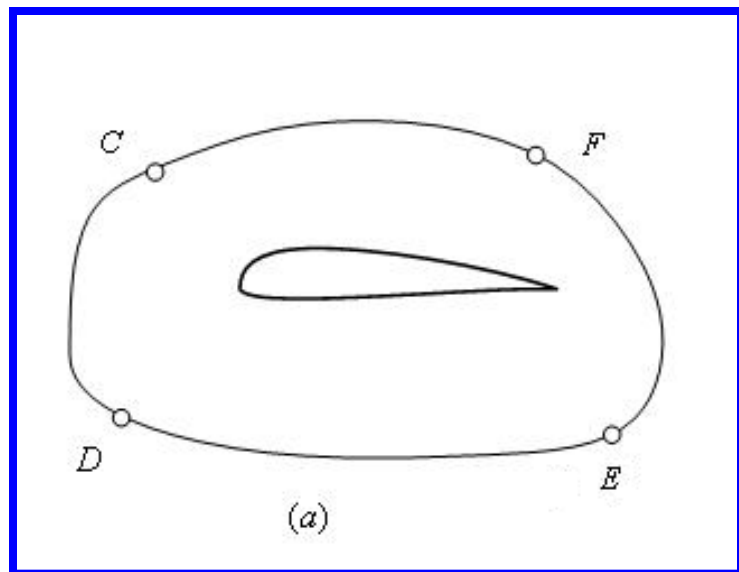
旋涡守恒定律：对于理想不可压流，绕相同流体质点组成的封闭周线上的速度环量不随时间变化



库塔条件确定的环量值不为零（升力不为零）

围绕翼型取一个很大的封闭曲线CDEF。静止→起动→定常

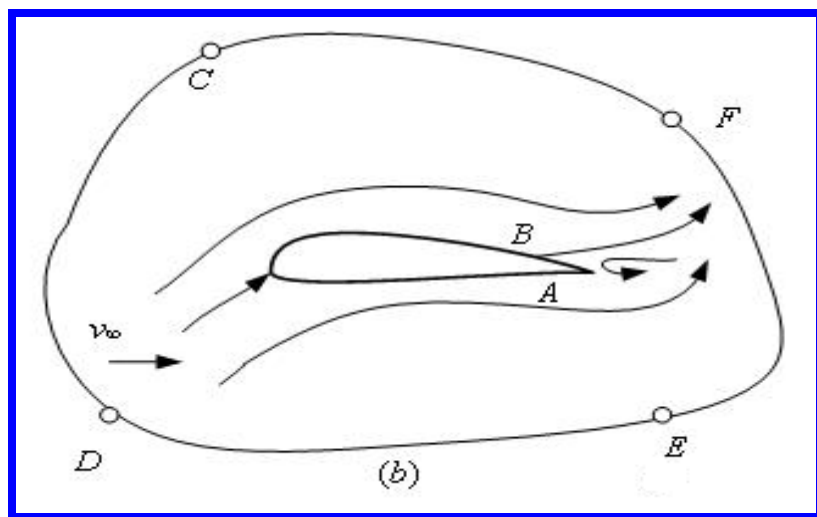
(1) 处于静止状态，绕流体线的速度环量为零。





◆ 环量的产生和后缘条件的关系

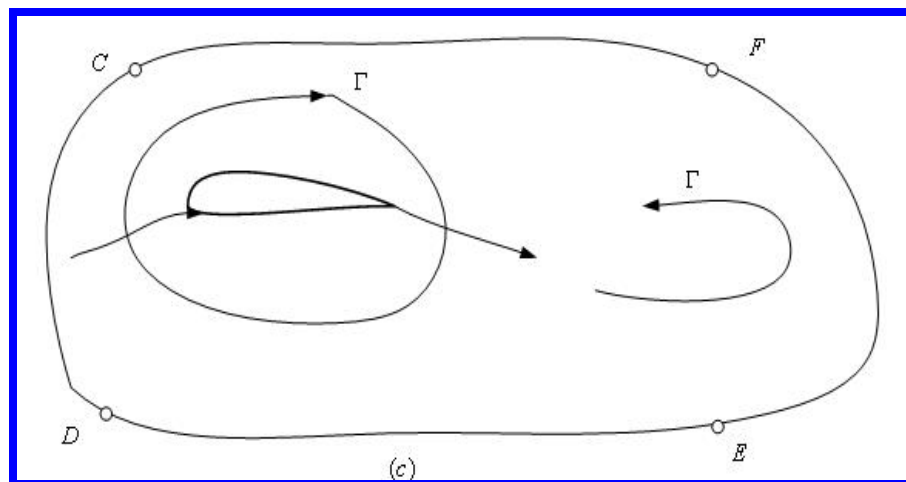
(2) 当翼型刚起动时，**附面层**尚未形成，绕翼型的速度环量为零，后驻点在上翼面某点，气流将绕过后缘流向上翼面，绕过后缘时将形成很大的速度，从后缘到后驻点存在大的逆压梯度，造成附面层分离，产生一个逆时针的旋涡（环量），称为**起动涡**。





◆ 环量的产生和后缘条件的关系

(3) 起动涡随气流流向下游，根据旋涡守恒定律，必然绕翼型存在一个顺时针的速度环量，使得**总环量为零**。翼型后驻点向后移动。只要其未移动到后缘点，翼型后缘不断有逆时针旋涡脱落，因而绕翼型环量不断增大，直到气流从后缘点平滑流出（后驻点移到后缘为止）。





◆ 环量的产生和后缘条件的关系

流体的粘性和翼型的尖后缘是产生起动涡的物理原因。绕翼型的速度环量总是与起动涡大小相等，方向相反。

对形状一定的翼型，只要给定速度和迎角，由库塔-儒可夫斯基后缘条件确定一个环量与之对应。

如果速度和迎角变化了，将重新调整速度环量，以保证气流在翼型后缘处平滑汇合。

代表绕翼型环量的旋涡，始终附着在翼型上，称为附着涡。直匀流+适当强度的附着涡，相当于直匀流中一个有环量的翼型绕流。





第七章 绕翼型的低速流动

§7-1 翼型的几何参数与气动参数

§7-2 低速翼型气动特性概述

§7-3 库塔-儒可夫斯基后缘条件及环量确定

§7-4 薄翼型理论

§7-5 任意形状翼型绕流的数值方法

§7-6 实用低速翼型的气动特性（自学）





薄翼理论:理想不可压翼型绕流,迎角、厚度、弯度很小,流场是小扰动。边界条件和压强系数可线性化,厚度、弯度、迎角三者的影响可分开考虑。

◆ 流动的分解

(1) 扰动速度位的线性叠加

绕翼型位流的速度位=直匀流速度位+翼型引起的扰动速度位

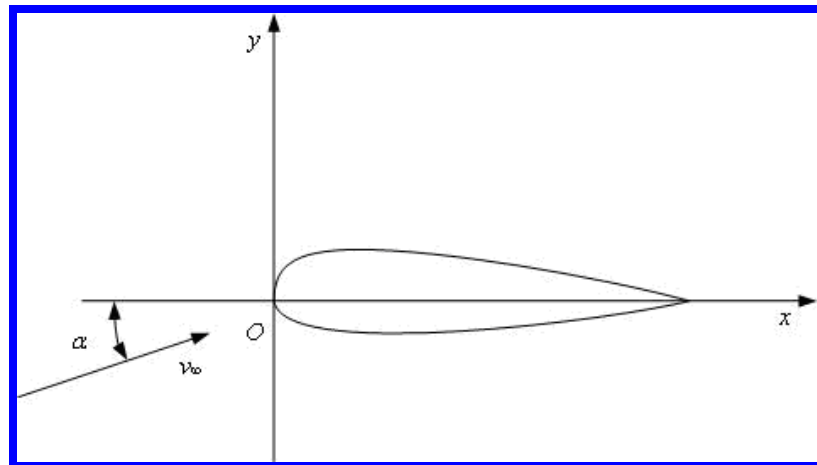
$$\Phi = \phi_{\infty} + \phi \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

设翼面边界上扰动分速度 v'_{xw}, v'_{yw} 翼面上的速度分量:

$$\begin{aligned} v_{xw} &= v_{\infty} \cos \alpha + v'_{xw} \approx v_{\infty} + v'_{xw} \\ v_{yw} &= v_{\infty} \sin \alpha + v'_{yw} \approx v_{\infty} \alpha + v'_{yw} \end{aligned}$$

翼面是流线, 可得如下边界条件:

$$\frac{dy_w}{dx_w} = \frac{v_{yw}}{v_{xw}} = \frac{v_{\infty} \alpha + v'_{yw}}{v_{\infty} + v'_{xw}} \rightarrow v'_{yw} = v_{\infty} \frac{dy_w}{dx_w} + v'_{xw} \frac{dy_w}{dx_w} - v_{\infty} \alpha \xrightarrow{\text{一阶近似}} v'_{yw} = v_{\infty} \frac{dy_w}{dx_w} - v_{\infty} \alpha$$





◆ 流动的分解

(1) 扰动速度位的线性叠加

翼面是流线的边界条件

$$\bar{y}_f(\bar{x}) = \frac{1}{2}(\bar{y}_u + \bar{y}_l) \quad \bar{y}_c(\bar{x}) = \frac{1}{2}(\bar{y}_u - \bar{y}_l)$$

$$v'_{yw} = v_\infty \frac{dy}{dx} - v_\infty \alpha$$

$$\bar{y}_{w_l}(\bar{x}) = \bar{y}_f(\bar{x}) \pm \bar{y}_c(\bar{x})$$

$$v'_{yw_l} = v_\infty \frac{dy_f}{dx} \pm v_\infty \frac{dy_c}{dx} - v_\infty \alpha$$

弯度

厚度

迎角

$$v'_{yw} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_w = \left(\frac{\partial \phi_f}{\partial y} \right)_w + \left(\frac{\partial \phi_c}{\partial y} \right)_w + \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial y} \right)_w$$

$$v'_{yw_l} = v'_{yw_f} + v'_{yw_c} + v'_{yw_\alpha}$$

$$\phi = \phi_f + \phi_c + \phi_\alpha$$





◆ 流动的分解

$$v'_{yw\frac{u}{l}} = v_{\infty} \frac{dy_f}{dx} \pm v_{\infty} \frac{dy_c}{dx} - v_{\infty} \alpha$$

弯度

厚度

迎角

$$\phi = \phi_f + \phi_c + \phi_{\alpha}$$

$$v'_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi_f}{\partial x} + \frac{\partial \phi_c}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x} = v'_{xf} + v'_{xc} + v'_{x\alpha}$$

(2) 压强系数的线化

$$C_p = 1 - \frac{v^2}{v_{\infty}^2} = 1 - \frac{(v_{\infty} \cos \alpha + v'_x)^2 + (v_{\infty} \sin \alpha + v'_y)^2}{v_{\infty}^2}$$

一阶
近似

$$C_p = -\frac{2v'_x}{v_{\infty}}$$

压强是否可以线化?

$$C_{pw} = C_{pwf} + C_{pwc} + C_{pwa\alpha}$$

$$C_p = C_{pf} + C_{pc} + C_{p\alpha}$$

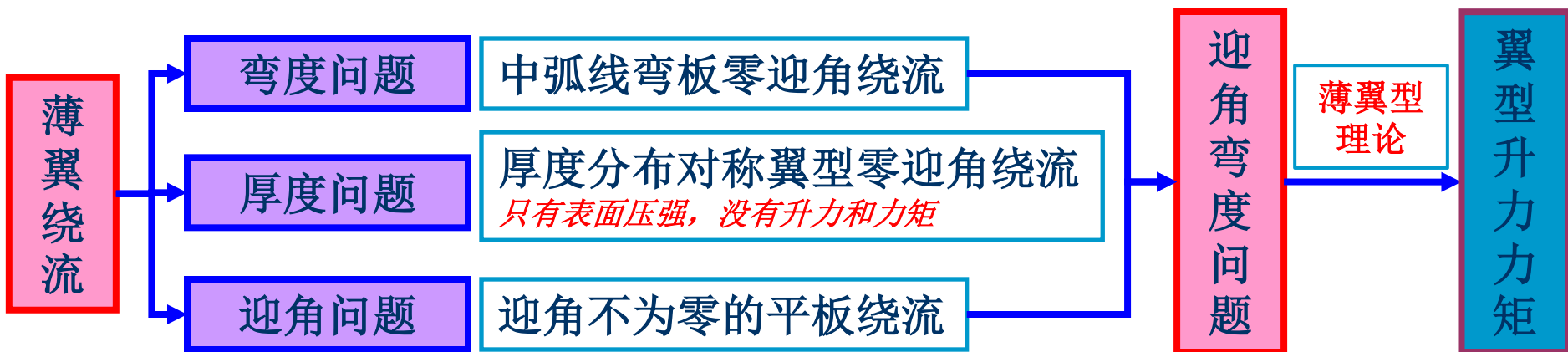
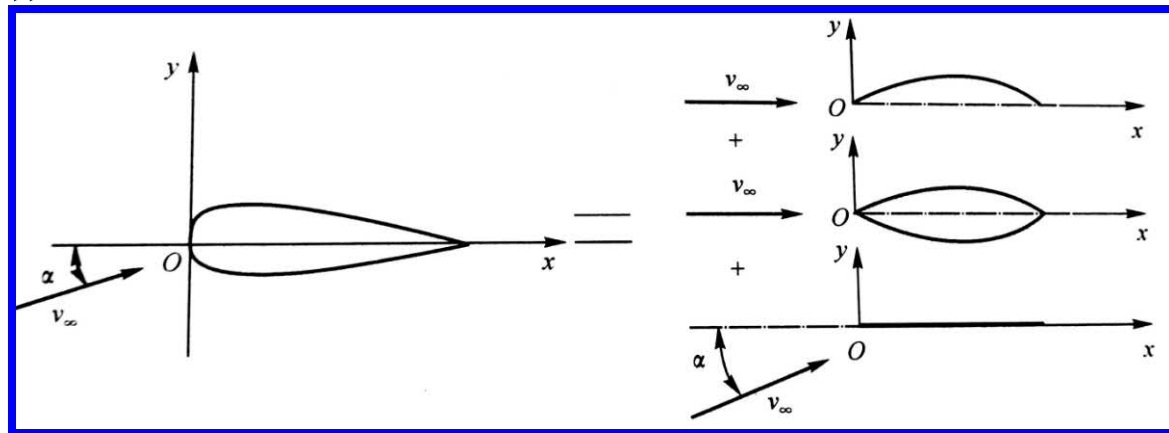
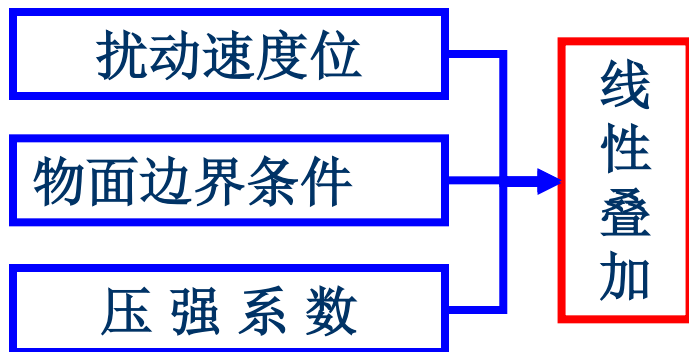
$$C_p = -\frac{2v'_{xf}}{v_{\infty}} - \frac{2v'_{xc}}{v_{\infty}} - \frac{2v'_{y\alpha}}{v_{\infty}}$$





◆ 流动的分解

(3) 薄翼型小迎角下位流的分解





◆ 流动的分解

简单二维不可压位流



基本流动叠加：奇点流（源/汇/偶极子/涡/）+直匀流

任意形状、厚度翼型

厚度效应：面源+直匀流

弯度-迎角效应：面涡+直匀流

如何确定面源和面涡？





◆ 迎角-弯度问题

面涡的基本特性

面涡是由无限多根连续分布的涡丝组成的面，面上的涡丝垂直纸面，且两端伸向无限远。

单位长度涡强为 γ ， ds 微段涡强为 γds ，
在流场中某点P处的诱导速度

$$dv = -\frac{\gamma ds}{2\pi r} \quad \begin{array}{l} r \text{ 是 P 到 } ds \text{ 距离, } dv \text{ 垂直于} \\ r, \text{ 顺时针为负} \end{array}$$

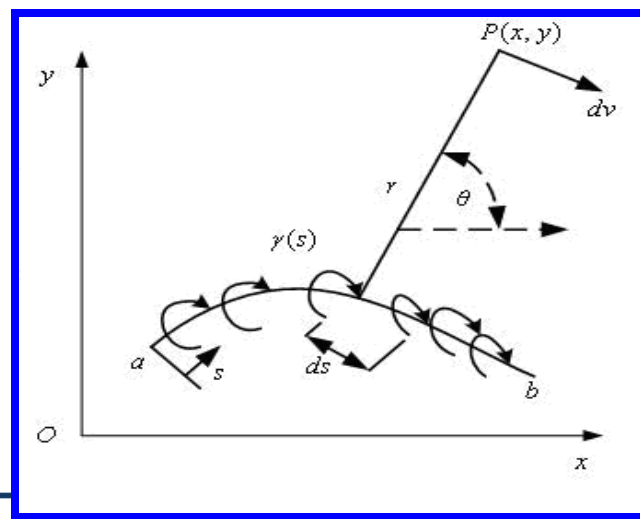
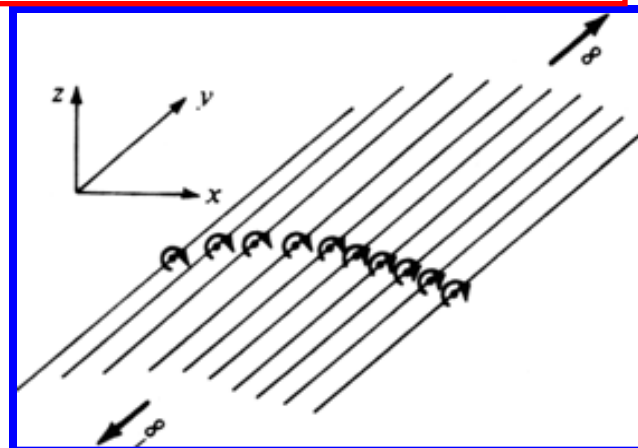
微段及整个面涡从 a 到 b 在P点引起的速度位

$$d\phi = -\frac{\gamma ds}{2\pi} \theta \quad \phi = -\int_a^b \frac{\gamma ds}{2\pi} \theta$$

绕点涡的速度环量等于点涡强度

绕涡面的速度环量等于涡面的强度

$$\Gamma = \int_a^b \gamma ds$$





◆ 迎角-弯度问题

面涡的基本特性

除面涡外整个速度场满足连续性条件
 涡面上下的流体产生切向速度的间断

分布在x轴上的平面涡面 $\gamma(\xi)d\xi$

$$(x, y), (x, -y) \quad v_x(x, y) = -v_x(x, -y)$$

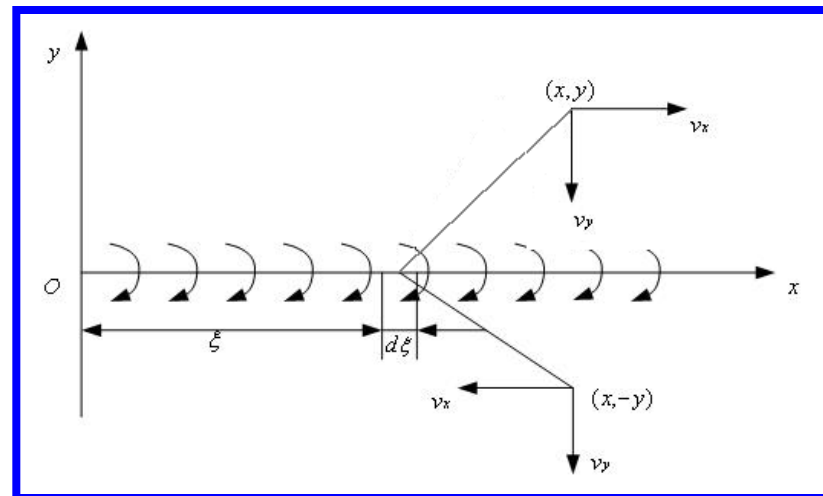
$$v_y(x, y) = v_y(x, -y)$$

诱导速度

$$v_x(x, +0) = -v_x(x, -0)$$

$y \rightarrow \pm 0$

$$v_y(x, +0) = v_y(x, -0)$$



平面涡面是切向速度间断面，法向速度是连续的。曲面涡面也是切向速度的间断面

此处实际为扰动速度位引起的
 扰动速度





◆ 迎角-弯度问题

面涡的基本特性

包围面涡做一矩形周线，边长 ds 和 dn ，周线上的速度是 v_{s1} 和 v_{s2} ， v_{n1} 和 v_{n2} 。通过矩形周线的速度环量 Γ' 等于面涡涡强 γds

$$\Gamma' = \gamma ds = (v_{s1} - v_{s2})ds + (v_{n1} - v_{n2})dn$$

ds 的中点处法向速度为 v_n

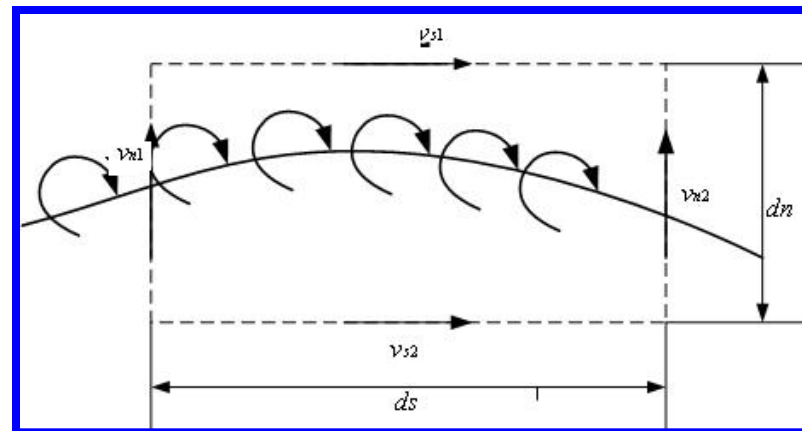
$$v_{n2} - v_{n1} = \left(v_n + \frac{\partial v_n}{\partial s} \cdot \frac{ds}{2} \right) - \left(v_n - \frac{\partial v_n}{\partial s} \cdot \frac{ds}{2} \right) = \frac{\partial v_n}{\partial s} ds$$

$$\gamma ds = (v_{s1} - v_{s2})ds - \frac{\partial v_n}{\partial s} \cdot ds \cdot dn$$

$$ds \rightarrow 0, dn \rightarrow 0$$

$$\gamma = v_{s1} - v_{s2}$$

涡面是切向速度的间断面，穿过涡面当地切向速度的突跃值等于当地的涡面强度



此处的切向速度即为X向扰动速度

$$v_x(x, +0) = -v_x(x, -0) = \frac{\gamma}{2}$$

面上某点的切向速度只与当地涡强有关
其他地方涡强对该点只产生法向速度





◆ 迎角-弯度问题

确定面涡强度

中弧线弯板零迎角绕流

迎角不为零的平板绕流

直匀流以小迎角流过
中弧线弯板

面涡法

变强度 γ 涡面代替
中弧面

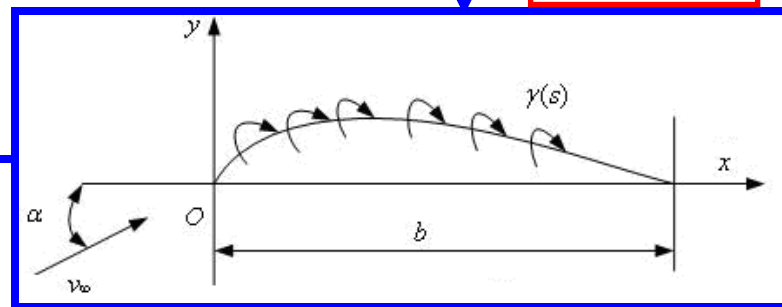
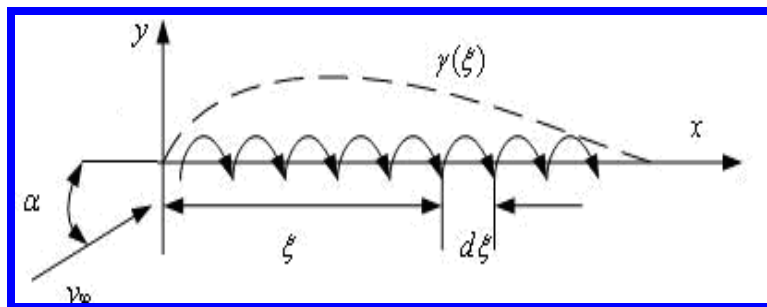
Kutta
后缘条件

边界条件

$$\gamma = v_{s1} - v_{s2} = 0$$

$$v'_{yw} = v_{\infty} \left(\frac{dy_f}{dx} - \alpha \right)$$

弯度很小



翼面上的 y 向扰动速度可以用
弦线值代替

翼面上的 x 向扰动速度可以用
当地涡面强度计算。





◆ 迎角-弯度问题

确定面涡强度

中弧线弯板零迎角绕流

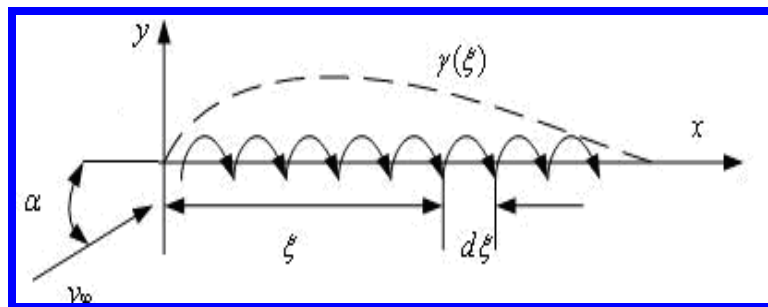
迎角不为零的平板绕流

直匀流以小迎角流
过中弧线弯板

面涡法

变强度 γ 涡面
代替中弧面

问题转换为：如何获得满足条件的
涡面强度分布函数 $\gamma(\xi)$?



无穷远处

$$v'_{x\infty} = 0; v'_{y\infty} = 0$$

物面边界

$$v'_y(x, 0) = v_\infty \left(\frac{dy_f}{dx} - \alpha \right)$$
$$0 \leq x \leq b$$

Kutta条件

$$\gamma(b) = 0$$





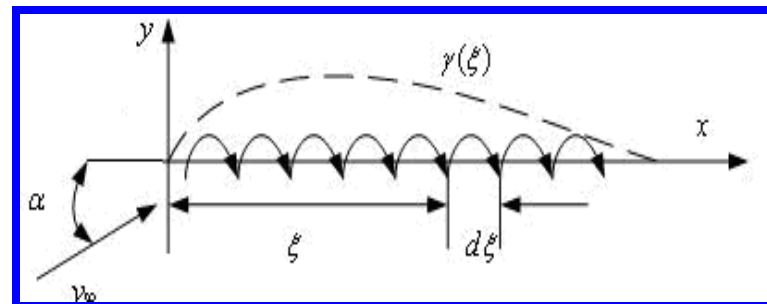
◆ 迎角-弯度问题

确定面涡强度

弧线上某点 ξ (布涡点) 处涡面强度 $\gamma(\xi)$

在 $d\xi$ 微段上的涡强为 $\gamma(\xi)d\xi$

在弦线上任一点 x 处产生的诱导速度



$$dv'_y(x,0) = \frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(\xi-x)}$$

整个涡面产生的诱导速度

$$v'_y(x,0) = \int_0^b \frac{\gamma(\xi)d\xi}{2\pi(\xi-x)}$$

代入边界条件

问题: x 点处的 v'_x 怎么确定?

v'_x 只与当地涡强有关

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^b \frac{\gamma(\xi)d\xi}{(\xi-x)} = v_\infty \left(\frac{dy_f}{dx} - \alpha \right)$$



涡强积分方程





◆ 迎角-弯度问题

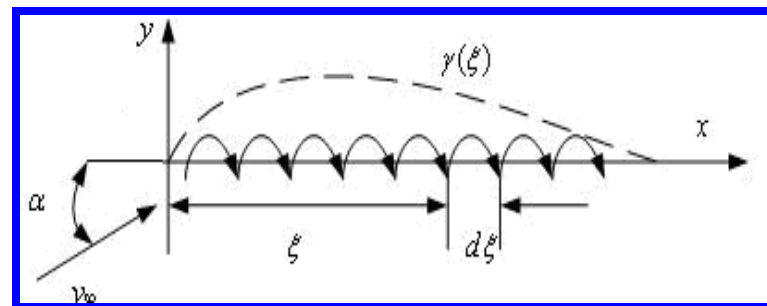
面涡强度三角级数解

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^b \frac{\gamma(\xi) d\xi}{(\xi - x)} = v_\infty \left(\frac{dy_f}{dx} - \alpha \right)$$

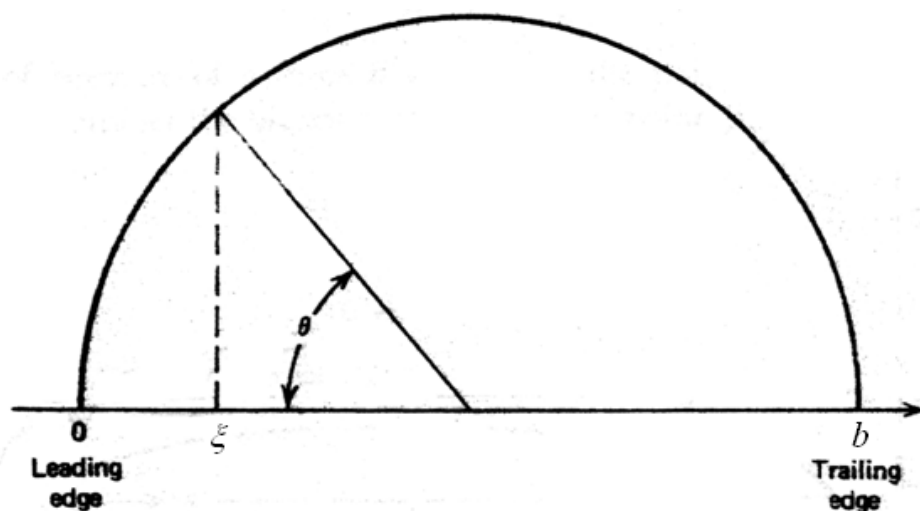
变量置换

$$\xi = \frac{b}{2}(1 - \cos \theta) \quad x = \frac{b}{2}(1 - \cos \theta_1)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_1} = v_\infty \left(\alpha - \frac{dy_f}{dx} \right)$$



三角级数求解





◆ 迎角-弯度问题

面涡强度三角级数解

$\gamma(\theta)$ 写成三角级数形式

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_1} = v_\infty \left(\alpha - \frac{dy_f}{dx} \right)$$

$$\gamma(\theta) = 2v_\infty \left(A_0 \cot \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right)$$

第一项前缘处无限大的负压；在后缘处，这个级数等于零，满足后缘条件。

$$\theta = 0$$

$$\theta = \pi$$

引入广义积分公式

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \theta_1} d\theta = \pi \frac{\sin n\theta_1}{\sin \theta_1}$$



$$\alpha - A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta_1 = \frac{dy_f}{dx}$$

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_f}{dx} d\theta_1$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_f}{dx} \cos n\theta_1 d\theta_1$$





◆ 迎角-弯度问题

绕弯板气动特性

$$\gamma(\theta) = 2v_{\infty} \left(A_0 \cot \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right)$$

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dy_f}{dx} d\theta_1$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dy_f}{dx} \cos n\theta_1 d\theta_1$$

对于给定弯度函数和迎角的翼型，计算 $\gamma(\theta)$ 后，可获得翼型气动特性：

$$C_{p_l^u}(x) = -\frac{2v'_x(x, \pm 0)}{v_{\infty}} = \mp \frac{\gamma(x)}{v_{\infty}}$$

$$\Gamma = \int_0^b \gamma(\xi) d\xi = \pi v_{\infty} b \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \quad Y = \rho v_{\infty} \Gamma = \pi \rho v_{\infty}^2 b \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right)$$

$$C_y = \frac{Y}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 \cdot b} = 2\pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) = 2\pi(\alpha - \alpha_0)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dy_f}{dx} (1 - \cos \theta_1) d\theta_1$$





◆ 迎角-弯度问题

绕弯板气动特性

$$C_y = 2\pi(\alpha - \alpha_0)$$

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_f}{dx} (1 - \cos \theta_1) d\theta_1$$

$C_y - \alpha$ 一条直线

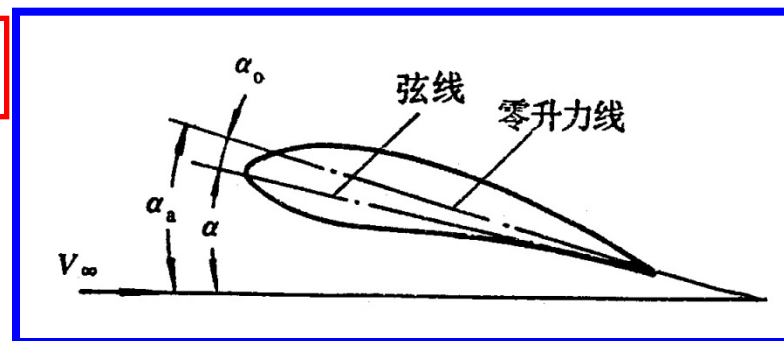
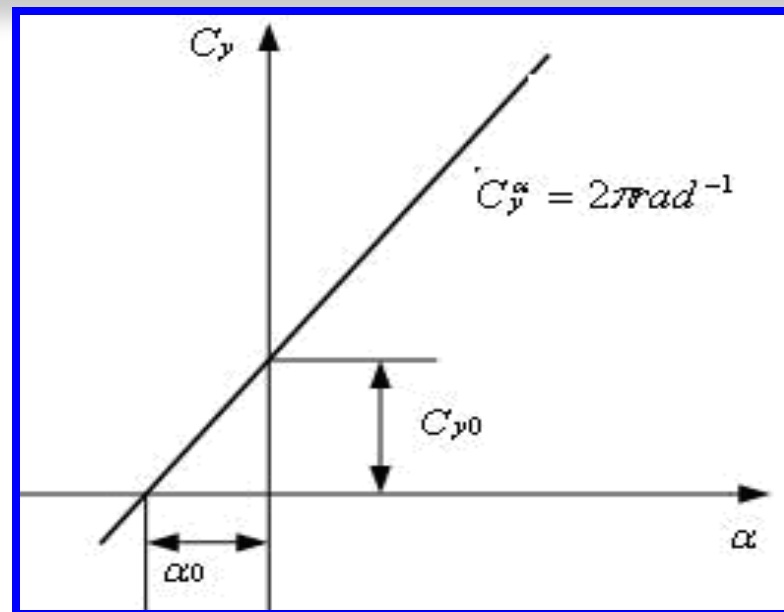
斜率

$$C_y^\alpha = 2\pi$$

截距

$$C_{y0} = -2\pi\alpha_0$$

α_0 零升迎角，在正弯度时为小负数



当几何迎角等于零升迎角时，翼型上有一条平行于来流且通过后缘直线，为**零升力线**





◆ 迎角-弯度问题

绕弯板气动特性

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_f}{dx} d\theta_1$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_f}{dx} \cos n\theta_1 d\theta_1$$

$$\gamma(\theta) = 2v_\infty \left(A_0 \cot \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right)$$

对前缘取矩

$$m_z = \frac{M_z}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 b^2} = \frac{-\int_0^b \rho v_\infty \gamma(\xi) \cdot \xi \cdot d\xi}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 b^2} = \underline{\frac{\pi}{4} (A_2 - A_1)} - \frac{1}{4} C_y$$

$$m_{z0} = \frac{\pi}{4} (A_2 - A_1) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{dy_f}{dx} (\cos 2\theta_1 - \cos \theta_1) d\theta_1$$

$$m_z = m_{z0} - \frac{1}{4} C_y$$





绕弯板气动特性

迎角-弯度问题

$$m_z = m_{z0} - \frac{1}{4} C_y$$

$$m_{z0} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{dy_f}{dx} (\cos 2\theta_1 - \cos \theta_1) d\theta_1$$

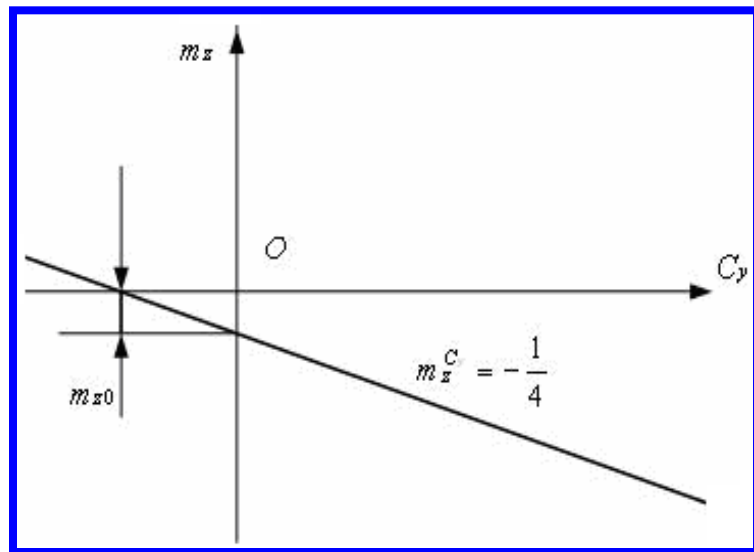
$m_z - C_y$ 一条直线

斜率

$$m_z^{C_y} = -1/4$$

截距

$$m_{z0}$$



m_{z0} 零升力矩系数，在正弯度时为小负数

问题：升力为零，为何还有力矩？





绕弯板气动特性

◆ 迎角-弯度问题

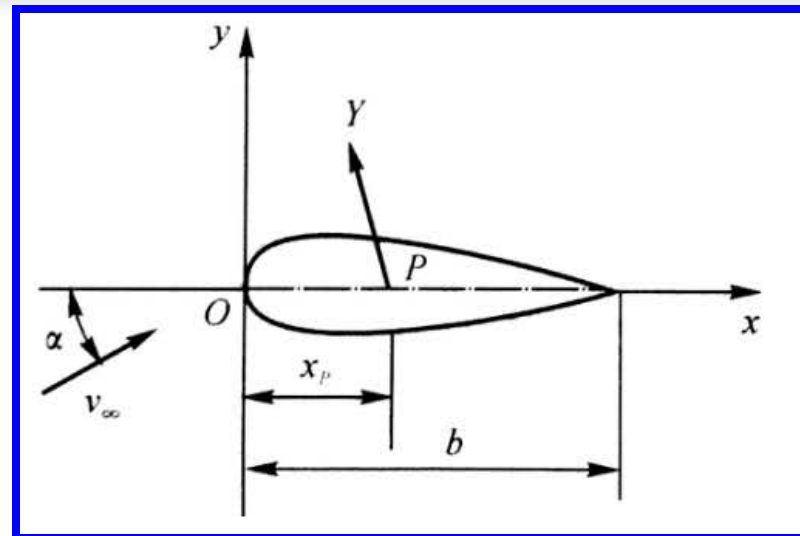
$$C_y = 2\pi(\alpha - \alpha_0)$$

$$m_z = m_{z0} - \frac{1}{4}C_y$$

压心：空气动力作用点，翼型升力作用线与弦线的交点，用 \bar{x}_p 表示

$$m_z = -C_y \cdot \bar{x}_p$$

$$\bar{x}_p = -\frac{m_z}{C_y} = -\frac{m_{z0}}{C_y} - m_z^{C_y}$$





绕弯板气动特性

迎角-弯度问题

$$C_y = 2\pi(\alpha - \alpha_0)$$

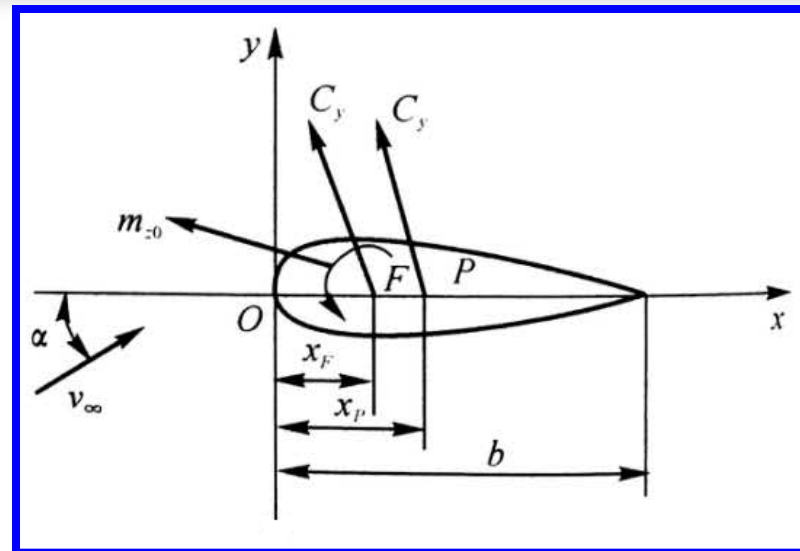
$$m_z = m_{z0} - \frac{1}{4}C_y$$

$$\bar{x}_p = -\frac{m_z}{C_y} = -\frac{m_{z0}}{C_y} - m_z^{C_y}$$

焦点：气动中心，该点力矩系数与升力系数(迎角)无关；是升力增量作用点。用 \bar{x}_F 表示

$$m_{zF} = -C_y(\bar{x}_p - \bar{x}_F) = m_{z0}$$

$$\bar{x}_F = -m_z^{C_y} = \frac{1}{4}$$



$$\bar{x}_p = \bar{x}_F - \frac{m_{z0}}{C_y}$$



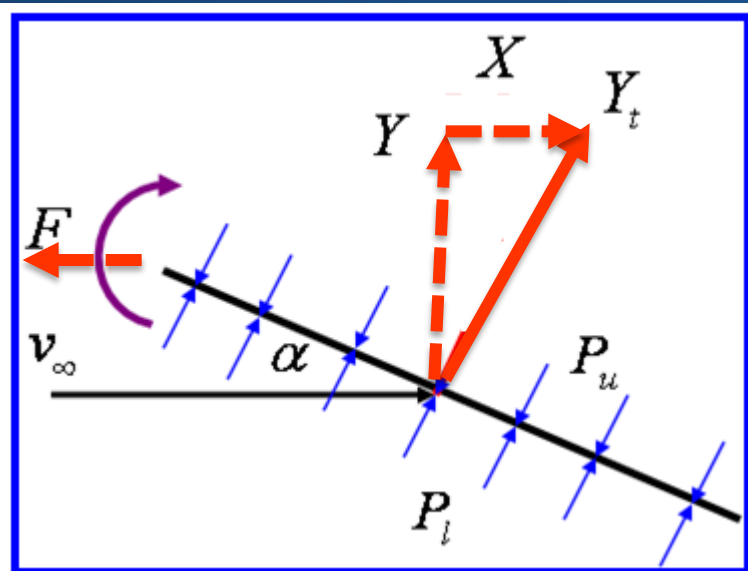


◆ 迎角-弯度问题

平板绕流问题

前缘吸力 F = 压强积分后平行于平板向前的力 X

平板弯度为零，则零升迎角为零



$$F = X \Rightarrow C_F = C_y \tan \alpha \approx 2\pi\alpha^2$$

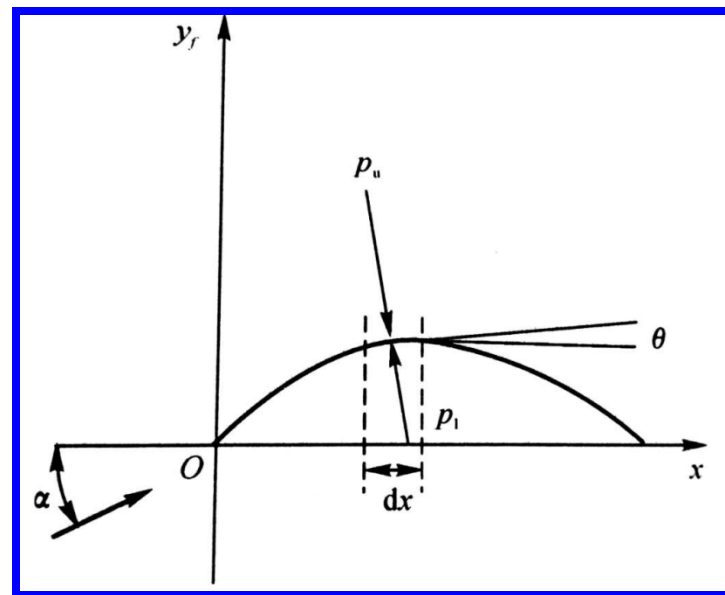
任意翼型的前缘吸力求解

$$F = -\lim_{c \rightarrow 0} \int_c^b (p_l - p_u) \left(\frac{dy_f}{dx} - \alpha \right) dx$$

$$v'_y = v_\infty \left(\frac{dy_f}{dx} - \alpha \right)$$

$$C_{pl} - C_{pu} = \frac{2\gamma(x)}{v_\infty}$$

$$C_F = -\frac{2}{bv_\infty^2} \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^b v'_y \cdot \gamma(x) dx$$





◆ 厚度问题

面源的基本特性

面源由无限多根连续分布的线源（其线垂直纸面，两头伸向无限远）组成

设单位长度面源强度为 q ， ds 微段上面源强度 qds ，在点 P 处的诱导速度

$$dv = \frac{qds}{2\pi r}$$

ds 微段面源在 P 点处产生的扰动速度位为

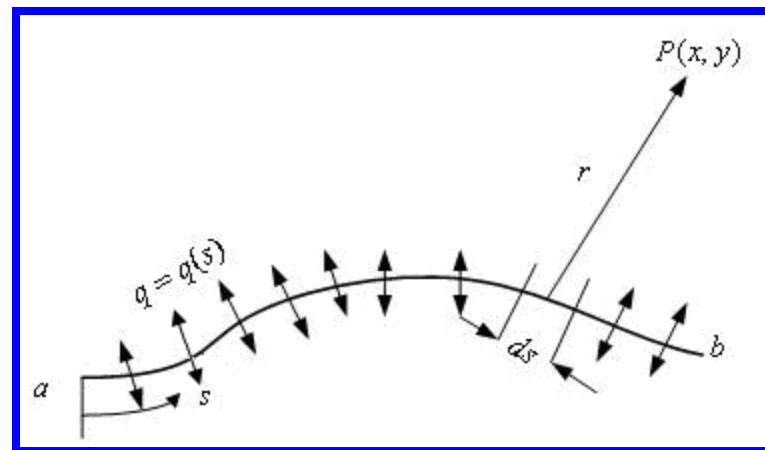
$$d\phi = \frac{q \cdot ds}{2\pi} \ln r$$

整个面源从 a 到 b ，引起的扰动速度位是

$$\phi = \int_a^b \frac{q}{2\pi} \ln r ds$$

穿过绕面源封闭周线的流量等于面源的总源强

$$Q = \int_a^b q ds$$





◆ 厚度问题

面源的基本特性

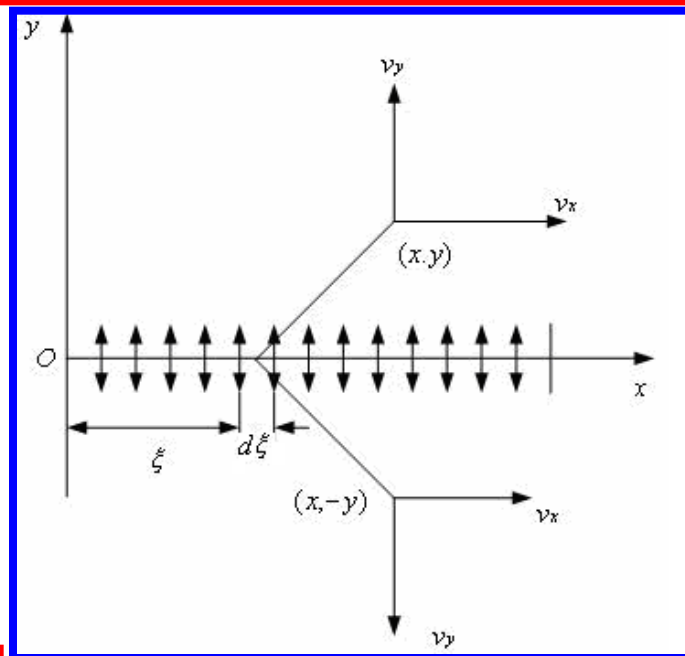
除面源外速度场中所有点满足连续性条件
面源上下的流体产生法向速度的间断

在 x 轴上二维平面面源源强 $q(\xi)d\xi$

$$\begin{aligned} (x, y), (x, -y) \quad & v_x(x, y) = v_x(x, -y); \\ & v_y(x, y) = -v_y(x, -y) \end{aligned}$$

诱导速度

$$\begin{aligned} y \rightarrow \pm 0 \quad & v_x(x, +0) = v_x(x, -0) \\ & v_y(x, +0) = -v_y(x, -0) \end{aligned}$$



平面面源是法向速度的间断面，切向速度是连续的。
曲面面源也是法向速度的间断面。

此处实际为扰动速度位引起的
扰动速度





◆ 厚度问题

面源的基本特性

包围面源做一矩形周线，边长为 ds 和 dn ，垂直周线的速度 v_{n1} 和 v_{n2} ， v_{s1} 和 v_{s2} 。通过矩形周线的体积流量 Q' 等于面源的源强 qds

$$Q' = qds = (v_{n1} - v_{n2})ds + (v_{s2} - v_{s1})dn$$

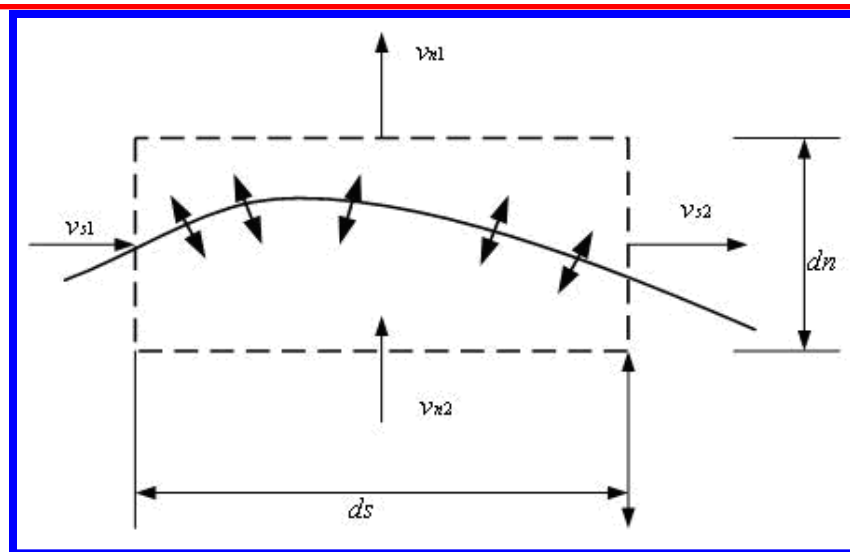
设 ds 中点处切向速度为 v_s

$$v_{s2} - v_{s1} = \left(v_s + \frac{\partial v_s}{\partial s} \cdot \frac{ds}{2}\right) - \left(v_s - \frac{\partial v_s}{\partial s} \cdot \frac{ds}{2}\right) = \frac{\partial v_s}{\partial s} \cdot ds$$

$$qds = (v_{n1} - v_{n2})ds + \frac{\partial v_s}{\partial s} \cdot ds \cdot dn$$

$$ds \rightarrow 0, dn \rightarrow 0$$

$$q = v_{n1} - v_{n2}$$



$$v_y(x, +0) = -v_y(x, -0) = \frac{q}{2}$$

面源是法向速度间断面，穿过面源当地法向速度的突跃值等于当地的面源强度

面上某点的法向速度只与当地源强有关
其他源强对该点没有法向速度贡献





◆ 厚度问题

厚度分布对称薄翼型零迎角绕流

面源法

厚度很小

在弦线上布变强度 q 面源

面源特性

$$v'_y(\xi, +0) = -v'_y(\xi, -0) = \frac{q(\xi)}{2}$$

$$v'_{yw_l}(x, 0) \approx v'_y(x, \pm 0) = \pm v_\infty \frac{dy_c}{dx}$$

边界条件

$$q(\xi) = 2v_\infty \left(\frac{dy_c}{dx} \right)_{x=\xi}$$

若已知厚度分布函数，则 q 可以直接求得

$$C_{pwc} = -\frac{2v'_{xwc}}{v_\infty} \rightarrow C_{pwc} = C_p(\bar{x}, \pm 0) = -\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{(d\bar{y}_c/d\bar{x})_{\bar{x}=\bar{\xi}}}{\bar{x} - \bar{\xi}} d\bar{\xi}$$

$$v'_{xwc} \approx v'_x(x, \pm 0) = -\int_0^b \frac{q(\xi)d\xi}{2\pi(\xi - x)} = \int_0^b \frac{v_\infty (dy_c/dx)_{x=\xi}}{\pi(x - \xi)} d\xi$$





第七章 绕翼型的低速流动

§7-1 翼型的几何参数与气动参数

§7-2 低速翼型气动特性概述

§7-3 库塔-儒可夫斯基后缘条件及环量确定

§7-4 薄翼型理论

§7-5 任意形状翼型绕流的数值方法

§7-6 实用低速翼型的气动特性（自学）





第七章 绕翼型的低速流动

§ 7-5 任意形状翼型绕流的数值方法

在平面理想势流中

直匀流+点源→半无限体厚度

任意形状厚度翼型绕流，
采用位流叠加法求解

直匀流+点源+点汇→无环量的圆柱绕流

直匀流+点源+点汇+点涡→有环量的圆柱绕流

直匀流

+

连续分布点源 $q(s)$

翼面一条流线

无升力翼型厚度
问题

直匀流

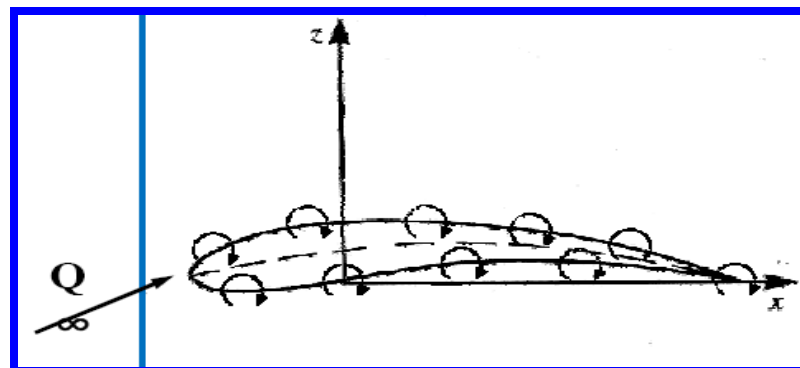
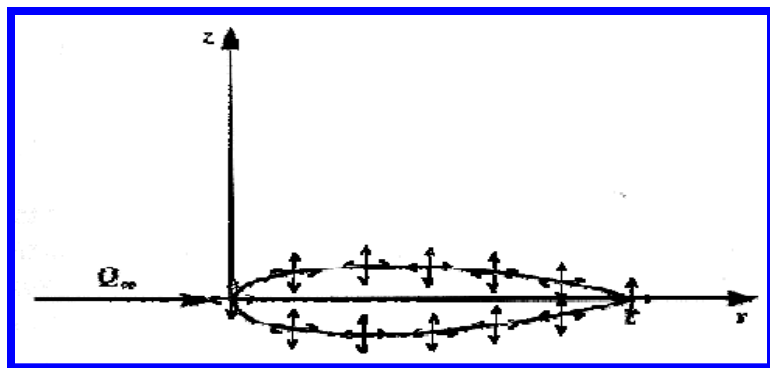
+

连续分布点涡 $\gamma(s)$

翼面一条流线

尾缘kutta条件

有升力翼型问题





薄翼型

三角级数解析解

厚翼型

数值方法

◆ 对称厚翼型无升力流的数值法(非重)

直匀流 + 平面偶极子

偶极子微段对流场中任一点P的流函数

$$d\psi = -\frac{\mu(\xi)d\xi y}{(x-\xi)^2 + y^2}$$

与直匀流叠加后, 整个流动的流函数

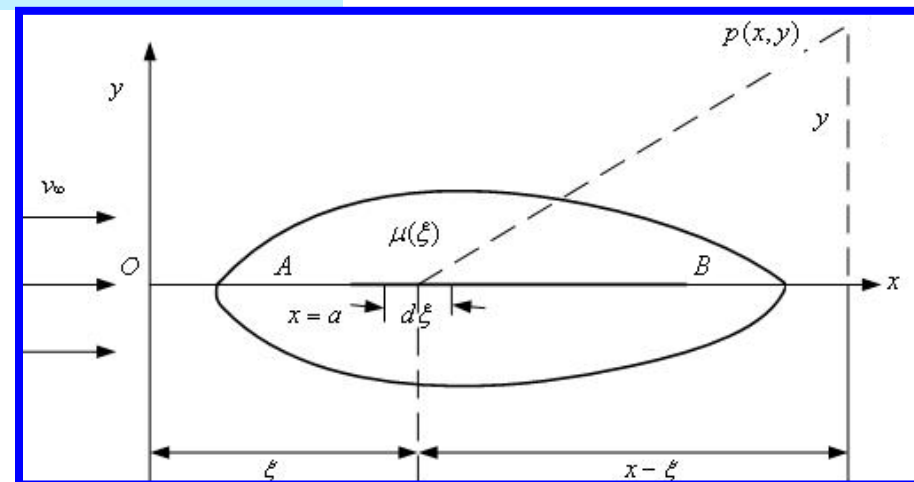
$$\psi = v_{\infty}y - \int_a^b \frac{\mu(\xi)y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi$$

$$\psi = 0$$

$$\mu(\xi)$$

$$\mu_j$$

$$\psi_p = v_{\infty}y_p - \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j \Delta \xi \cdot y_p}{(x_p - \xi_j)^2 + y_p^2}$$



需要采用
数值方法

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$C_{p面} = 1 - \frac{v_{x面}^2 + v_{y面}^2}{v_{\infty}^2}$$





◆ 任意厚翼型有升力时的数值法

面涡法

将翼面分成 n 段折线，在每个段上布置常值未知涡
在每个涡片上取控制点，满足物面边界条件

第 j 涡片在第 i 控制点上的速度位

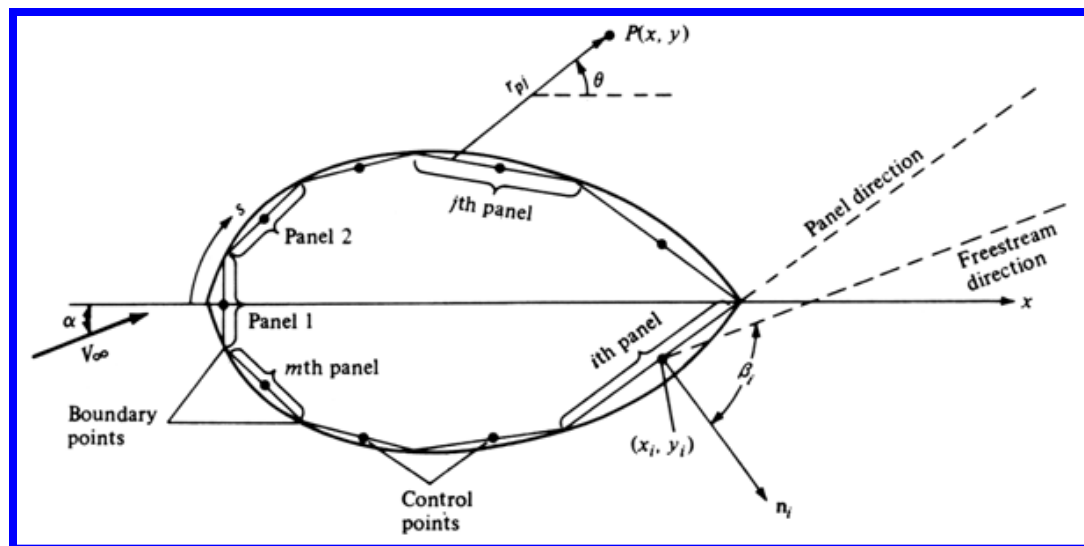
$$d\phi_{ij} = -\frac{\gamma_j}{2\pi} \int_{s_j} \theta_{ij} ds_j \quad \theta_{ij} = \tan^{-1} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$$

i 控制点总速度位和法向速度

$$\phi_i = -\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_{s_j} \theta_{ij} ds_j \quad v_{ni} = \frac{\partial \phi_i}{\partial n_i}$$

在控制点上合速度沿法向为0

$$v_{\infty, ni} + v_{ni} = 0$$





◆ 任意厚翼型有升力时的数值法

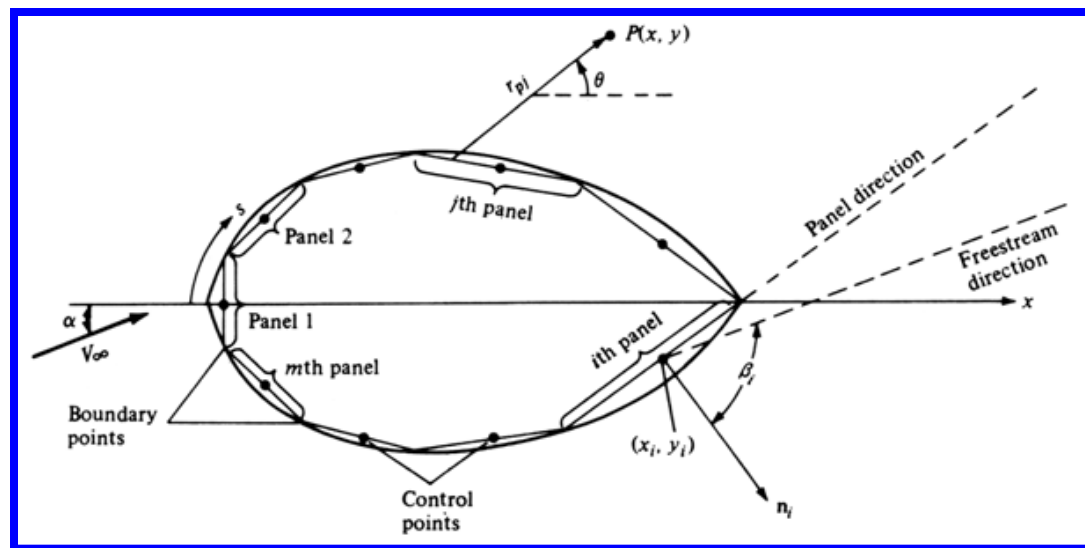
面涡法

$$v_{\infty, ni} + v_{ni} = 0$$

$$v_{\infty, n} = \vec{v}_{\infty} \cdot \vec{n}_i = v_{\infty} \cos \beta_i$$

$$v_{ni} = -\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_{s_j} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} ds_j$$

$$v_{\infty} \cos \beta_i - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_{s_j} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} ds_j = 0$$





◆ 任意厚翼型有升力时的数值法

面涡法

$$v_{\infty,ni} + v_{ni} = 0$$

$$\sin \theta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{l_i}$$

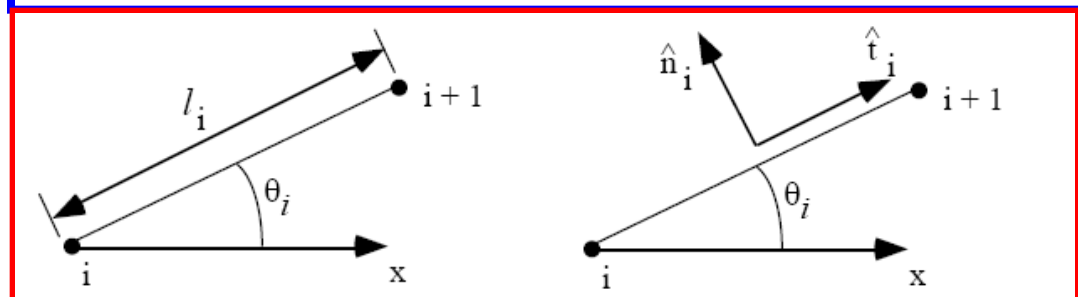
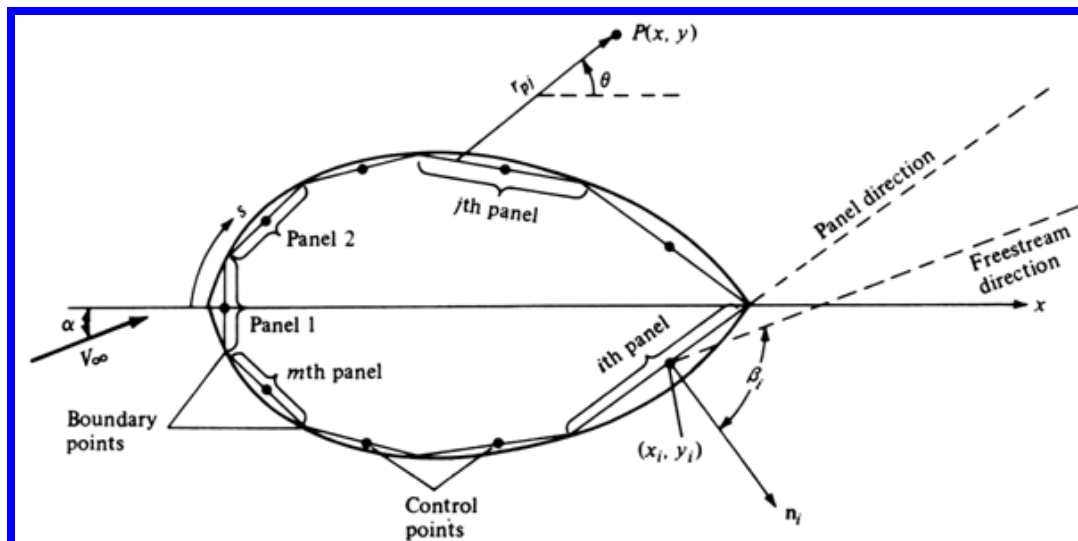
$$\cos \theta_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{l_i}$$

$$\vec{n}_i = -\sin \theta_i \vec{i} + \cos \theta_i \vec{j}$$

$$\vec{s}_i = \cos \theta_i \vec{i} + \sin \theta_i \vec{j}$$

$$\beta_i = \frac{\pi}{2} - (\theta_i - \alpha)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_{s_j} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} ds_j = \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j l_j}{2\pi} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i}$$





◆ 任意厚翼型有升力时的数值法

面涡法

$$v_{\infty,ni} + v_{ni} = 0$$

$$v_{\infty} \cos \beta_i - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j l_j}{2\pi} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} = 0$$

$$\frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} = \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\arctan \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right)$$

$$= \left[1 + \left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right)^2 \right]^{-1} \cdot \left[-\frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2} \frac{\partial x}{\partial n_i} + \frac{1}{x_i - x_j} \frac{\partial y}{\partial n_i} \right]$$

$$\frac{\partial x}{\partial n_i} = (n_x)_i = -\sin \theta_i \quad \frac{\partial y}{\partial n_i} = (n_y)_i = \cos \theta_i$$

$$i = j \Rightarrow \int_{s_j} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} ds_j = 0$$





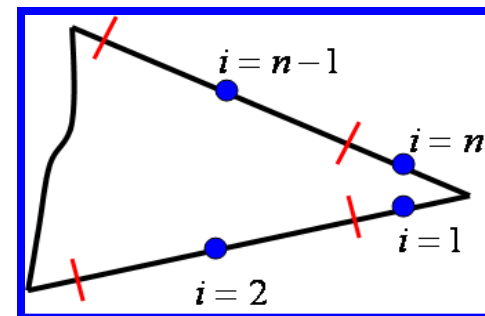
◆ 任意厚翼型有升力时的数值法

面涡法

$$v_{\infty} \cos \beta_i - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j l_j}{2\pi} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} = 0$$

$$\gamma_1 = -\gamma_n$$

后缘满足kutta条件



$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$$

$$v_{si} = v_{\infty} \sin \beta_i + \frac{\gamma_i}{2} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_{s_j} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial s_i} ds_j$$

$$C_{pi} = 1 - \left(\frac{v_{si}}{v_{\infty}} \right)^2$$

$$\Gamma = \sum_{j=1}^n l_j \gamma_j$$

$$Y = \rho_{\infty} v_{\infty} \sum_{j=1}^n l_j \gamma_j$$

$$M_z = -\rho_{\infty} v_{\infty} \sum_{j=1}^n l_j \gamma_j x_j$$





◆ Try for NACA0012

翼面方程 $\bar{y}(\bar{x}) = \pm 5\bar{c} \left(0.2969\sqrt{\bar{x}} - 0.1260\bar{x} - 0.3516\bar{x}^2 + 0.2843\bar{x}^3 - 0.1015\bar{x}^4 \right)$

迎角为-4-10度，计算 C_p , C_y 和 M_z

- ①将翼面分成若干微分段（面元）
- ②在每个面元上布置待定的面涡
- ③在选定控制点上满足不穿透条件和后缘条件
- ④确定出分布面涡的值
- ⑤由分布函数计算物面压强分布、升力和力矩特性





◆ Try for NACA0012

①将翼面分成若干微分段（面元）

$$\gamma_i$$

确定面元节点坐标，控制点坐标，求解面元几何属性 $l_i, \theta_i, \vec{n}_i, \vec{s}_i, \beta_i$

②在每个面元上布置待定的面涡

③在选定控制点上满足不穿透条件和后缘条件

$$\theta_{ij}, \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i}, \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial s_i}$$

$$v_\infty \cos \beta_i - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j l_j}{2\pi} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} = 0$$

$$\gamma_1 = -\gamma_n$$

④确定出分布面涡的值

⑤由分布函数计算物面压强分布、升力和力矩特性

$$v_{si} = v_\infty \sin \beta_i + \frac{\gamma_i}{2} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\gamma_j l_j}{2\pi} \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial s_i}$$

$$C_{pi} = 1 - \left(\frac{v_{si}}{v_\infty} \right)^2$$

$$C_y = \frac{2 \sum_{j=1}^n l_j \gamma_j}{v_\infty}$$

$$m_z = - \frac{2 \sum_{j=1}^n l_j \gamma_j x_j}{v_\infty}$$



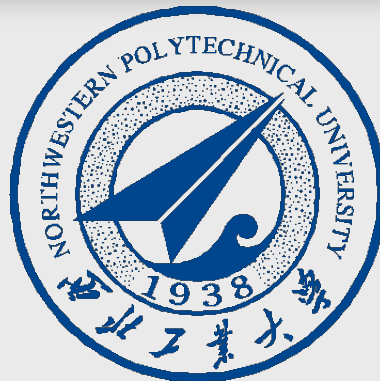


- (1) 翼型的几何参数、气动参数、NACA4位翼型编号；
- (2) 绕翼型的流动特点、气动特性；
- (3) 后缘条件与环量的产生；
- (4) 薄翼理论、线化方法、面涡基本特征；
- (5) 迎角-弯度问题与结论（升力系数与力矩系数特点、压心、焦点）；
- (6) 面源基本特征、厚度问题特点。



Thanks for your attention!

MERCI!



谢谢!