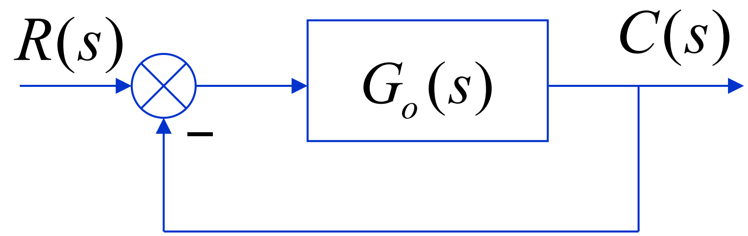
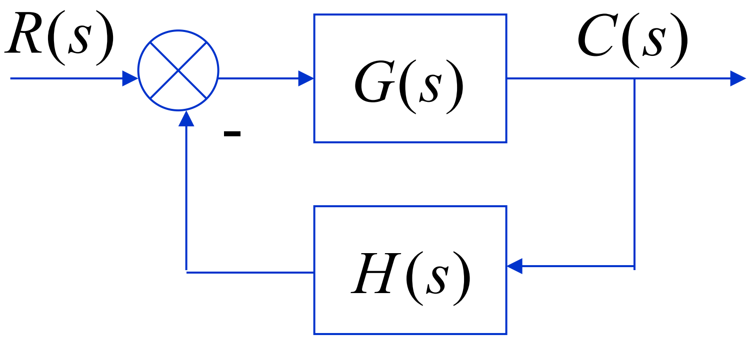
第四章 根轨迹法

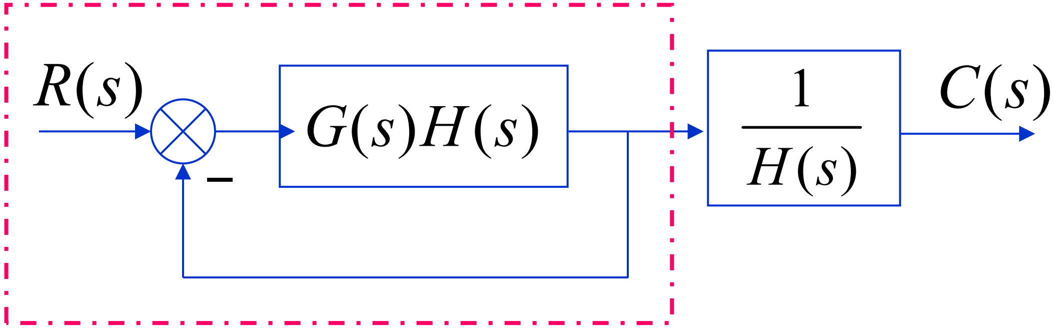
4.1 根轨迹和根轨迹方程



闭环传递函数为： $\Phi(s)=\dfrac{G_o(s)}{1+G_o(s)}$

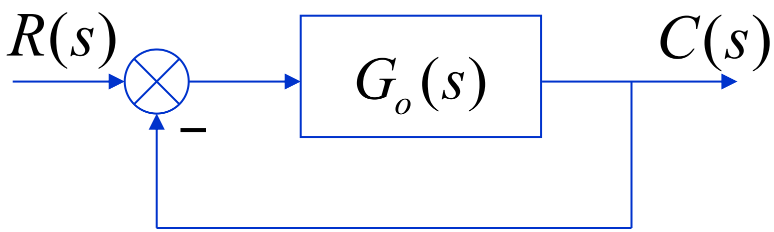


闭环传递函数为： $\Phi(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$



$$\Phi(s)=\boxed{\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}}\cdot\frac{1}{H(s)}$$

4.1 根轨迹和根轨迹方程



$$G_o(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^v(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_{n-v} s+1)}=\frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{s^v(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n-v})}$$

时常数形式（尾1）

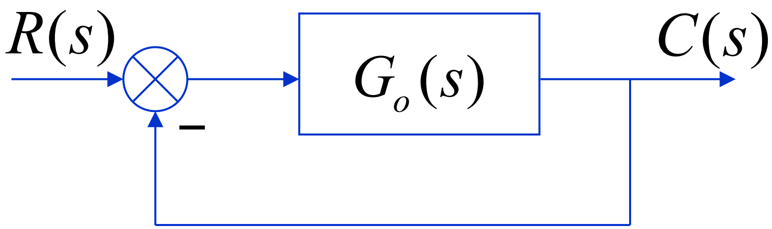
零极点形式（首1）

$$K^*=K\frac{\tau_1\cdot\tau_2\cdot\cdots\cdot\tau_m}{T_1\cdot T_2\cdot\cdots\cdot T_{n-v}},\ z_1=-\frac{1}{\tau_1},\ p_1=-\frac{1}{T_1},\cdots$$

开环根轨迹增益

开环（时常数）增益

4.1 根轨迹和根轨迹方程



$$G_o(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^v(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_{n-v}s+1)}=\frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{s^v(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n-v})}$$

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G_o(s)}{1+G_o(s)}=\frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{s^v(s-p_1)(s-p_2)\cdots+K^*(s-z_1)(s-z_2)\cdots}$$

- **结论：** 对单位负反馈控制系统：

(1) 闭环根轨迹增益＝开环根轨迹增益；

(2) 闭环零点＝开环零点；

(3) 闭环极点与<u>开环零极点</u>、及<u>根轨迹增益</u>均有关。

4.1 根轨迹和根轨迹方程

- 闭环传递函数决定控制系统的性能：

  稳定性（取决于闭环极点）

  快速性（动态性能，取决于闭环极点和零点）

  准确性（静态误差，取决于开环增益）

- 闭环极点难以计算，尤其对于高阶系统，因此需要探索不解高次代数方程，也能求出系统闭环特征方程的根，进而求出系统闭环动态特性的有效方法。

- 根轨迹分析法就是利用**开环零、极点**确定**闭环极点**的一种图解方法。

- 1948，美国，**W. R. Evans**, Control system synthesis by root locus method. Trans. Amer. Institute of Electrical Engineers, 69, pp.66-69, 1950

- **25 seminal papers in control (20c)**

4.1 根轨迹和根轨迹方程

闭环系统的稳定性取决于闭环系统的极点分布，其它性能取决于其零极点分布。因此，可以用系统的零极点分布来间接地研究控制系统的性能。W.R.伊文思提出了一种在复平面上**由开环零、极点确定闭环极点**的图解方法—根轨迹法。将系统的某一个参数（比如开环放大系数）的全部值与闭环特征根的关系表示在一张图上。

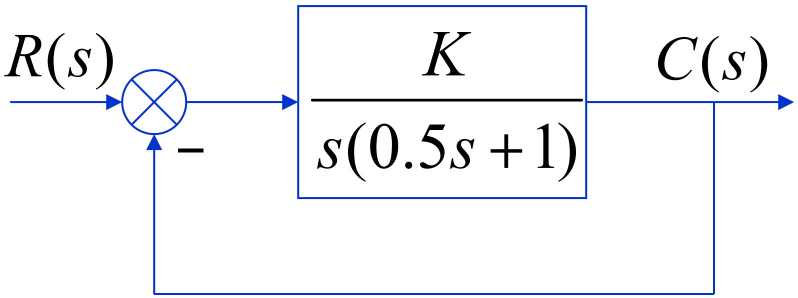
利用根轨迹法，可以：

- 分析系统的性能
- 确定系统的结构和参数
- 校正装置的综合

一、根轨迹的基本概念

例1：如图所示二阶系统，开环传递函数为：

$$G_o(s)=\frac{K}{s(0.5s+1)}=\frac{2K}{s(s+2)}$$



闭环传递函数：$\Phi(s)=\frac{G_o(s)}{1+G_o(s)}=\frac{2K}{s^2+2s+2K}$

闭环特征方程：$s^2+2s+2K=0$

闭环极点（特征根）：$s_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-2K}$

4.1 根轨迹和根轨迹方程

特征根 $s_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-2K}$ 随K的变化：

讨论：

① 当K=0时，$s_1=0, s_2=-2$,

(也是开环传递函数的极点：开环极点)

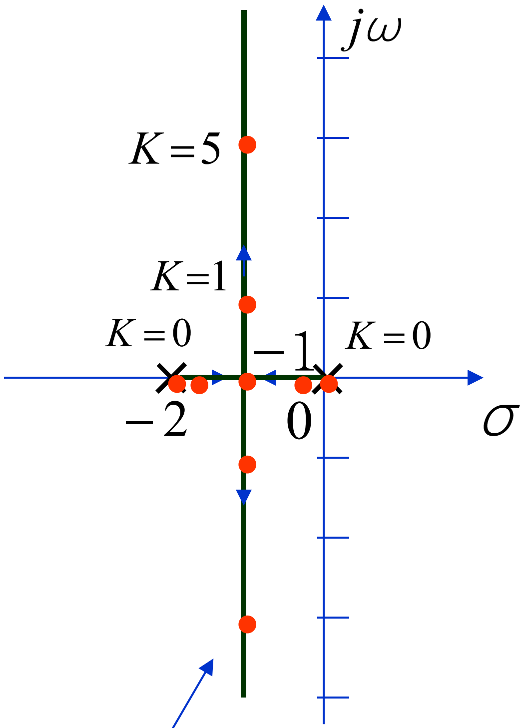
② 当K=0.32时，$s_1=-0.4, s_2=-1.6$

③ 当K=0.5时，$s_1=s_2=-1$

④ 当K=1时，$s_1=-1+j, s_2=-1-j$

⑤ 当K=5时，$s_1=-1+3j, s_2=-1-3j$

⑥ 当K=∞时，$s_1=-1+j\infty, s_2=-1-j\infty$



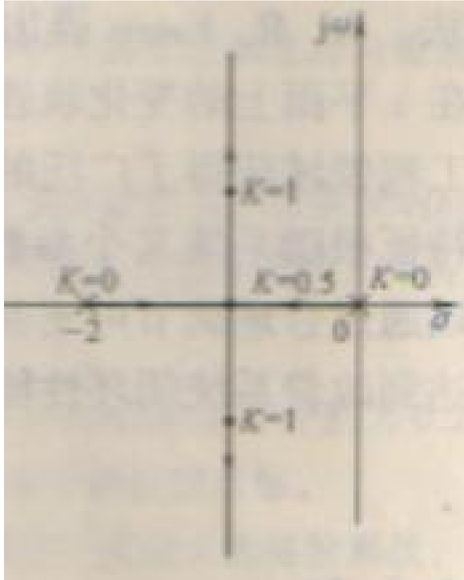
特征根的轨迹

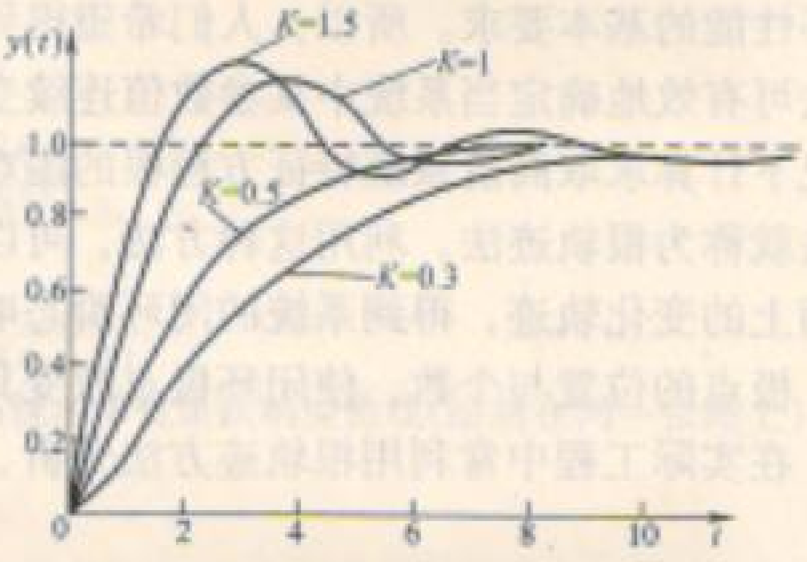
4.1 根轨迹和根轨迹方程

由上述根轨迹图可知:

- 当开环增益由0到∞变化时，根轨迹均在S平面的左半部，因此系统对所有K值都是稳定的。
- 当$0 < K < 0.5$时，闭环特征根为实根，系统呈过阻尼状态，阶跃响应为非周期过程。
- 当K=0.5时，闭环特征根为重根，系统呈临界阻尼状态,阶跃响应为非周期过程。
- 当$K > 0.5$时，闭环特征根为共轭复根，系统呈欠阻尼状态，阶跃响应为衰减振荡。
- 因为根轨迹的一个起点（开环传递函数的极点）位于坐标原点，所以系统为I型系统。

4.1 根轨迹和根轨迹方程

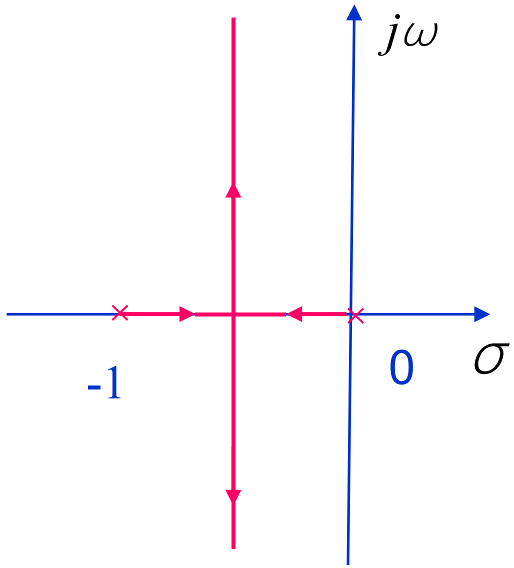


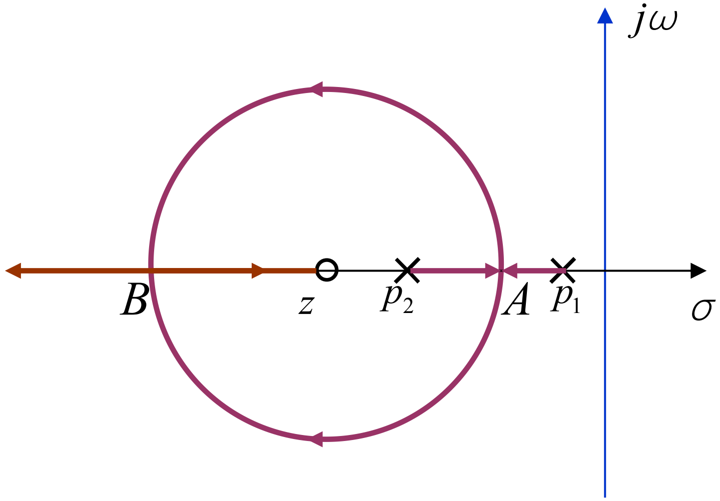


二阶系统的根轨迹图　　　　二阶系统的闭环瞬态响应曲线

显然，K变化时，s1,s2的位置不同，相应的闭环瞬态响应特性也是不同的。

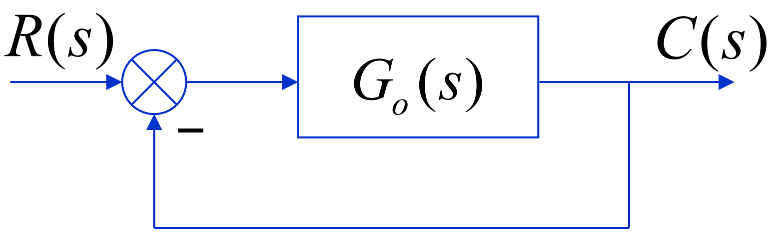
4.1 根轨迹和根轨迹方程





- [根轨迹]: 开环系统传递函数中某个参数(**如开环增益K**)由零到无穷大变化时，其闭环极点在s平面上移动的轨迹。
- 根轨迹图: s平面上由根轨迹形成的图。
- 根轨迹法: 不用求解闭环特征方程的根，而利用开环零、极点求出闭环极点的轨迹，研究系统性能的方法。

二、根轨迹方程



开环传递函数为： $G_o(s)$

闭环传递函数为： $\Phi(s)=\dfrac{G_o(s)}{1+G_o(s)}$

将 $G_o(s)$ 写成以下标准型：

$$G_o(s)=\frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

式中： K^* – 称为**根**轨迹增益；

z_i， p_j 为开环零、极点。

4.1 根轨迹和根轨迹方程

闭环传递函数的极点就是闭环特征方程：$1+G_o(s)=0$ 的根。

$$G_o(s)=\frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=-1$$

根轨迹方程

根据复变函数的概念 $G_o(s)=\left|G_o(s)\right|\angle G_o(s)=-1$

$$\begin{cases} \left|G_o(s)\right|=\dfrac{K^*\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|s-p_j|}=1 & \text{幅值条件} \\ \angle G_o(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)=(2k+1)\pi,k=0,\pm1,\pm2\ldots & \text{相角条件} \end{cases}$$

☆充要条件

4.1 根轨迹和根轨迹方程

[一些约定]：在根轨迹图中，“×”表示开环极点，“o”表示开环有限值零点。粗线表示根轨迹，箭头表示某一参数增加的方向。“•”表示根轨迹上的点。

我们先以根轨迹增益 K^*（当然也可以用其它变量）作为变化量来讨论根轨迹。

[定义]：满足相角条件的点连成的曲线称为180度等相角根轨迹。同样，满足幅值条件的点连成的曲线称为等增益根轨迹（它是在某一增益的情况下绘制的）。

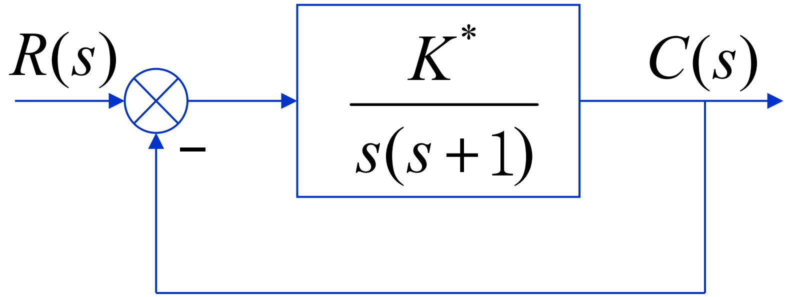
180度等相角根轨迹和等增益根轨迹是正交的，其交点满足根轨迹方程，每一点对应一个K^*。由于180度等相角根轨迹上的任意一点都可通过幅值条件计算出相应的K^*值，所以直接称180度等相角根轨迹为根轨迹。

4.1 根轨迹和根轨迹方程

根轨迹解析法绘制

例2： 如图二阶系统,当K^*从$0\to\infty$时,绘制系统的根轨迹。

[解] 闭环传递函数：$\Phi(s)=\dfrac{K^*}{s^2+s+K^*}$



特征方程和特征根：

$$s^2+s+K^*=0,\quad s_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-4K^*}$$

[讨论]：

① $K^*=0$时，$s_{1,2}=0$和-1，是开环系统的极点；

② $K^*\uparrow$时，s_1从0沿负实轴向左移动，s_2从-1沿负实轴向右移动。

③ $K^*=\dfrac{1}{4}$时，$s_{1,2}=-\dfrac{1}{2}$，重根。可见当$0<K^*<\dfrac{1}{4}$时，$s_{1,2}$在负实轴上。

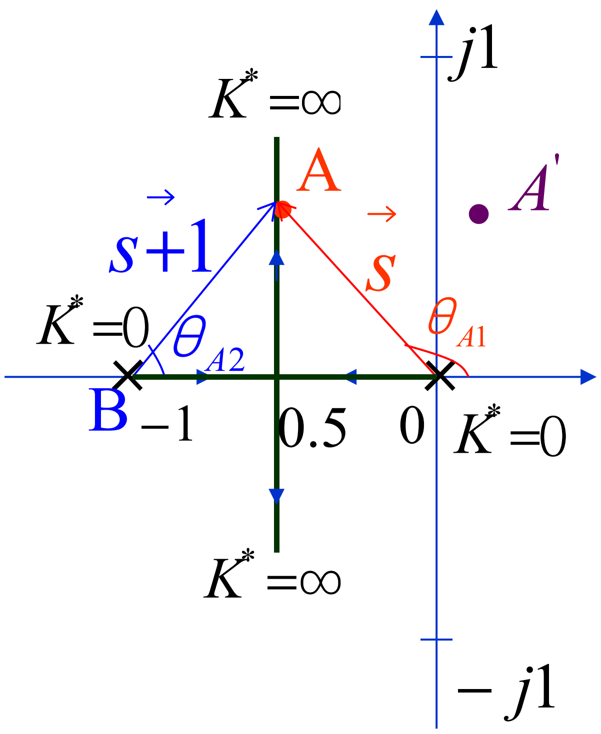
4.1 根轨迹和根轨迹方程

$$s^2+s+K^*=0,\quad s_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-4K^*}$$

[讨论]:

④ $K^*>\dfrac{1}{4}$时，$s_{1,2}$为复根。在 $-\dfrac{1}{2}$点处分成两支，沿平行 于虚轴的直线移动。

⑤ $K^*\to\infty$时，$s_{1,2}=-\dfrac{1}{2}\pm j\infty$



[总结]当K^*从0变化到∞时，系统的根轨迹是连续的。$K^*=0$的点称为起点，$K^*=\infty$的点称为终点。本例中有两个分支，终点都在无穷远处。

这里是用解析法画出的根轨迹，但对于高阶系统，求根困难，需用图解法画图。

复平面上满足相角条件的点应在根轨迹上。
上例中，A点在根轨迹上吗?

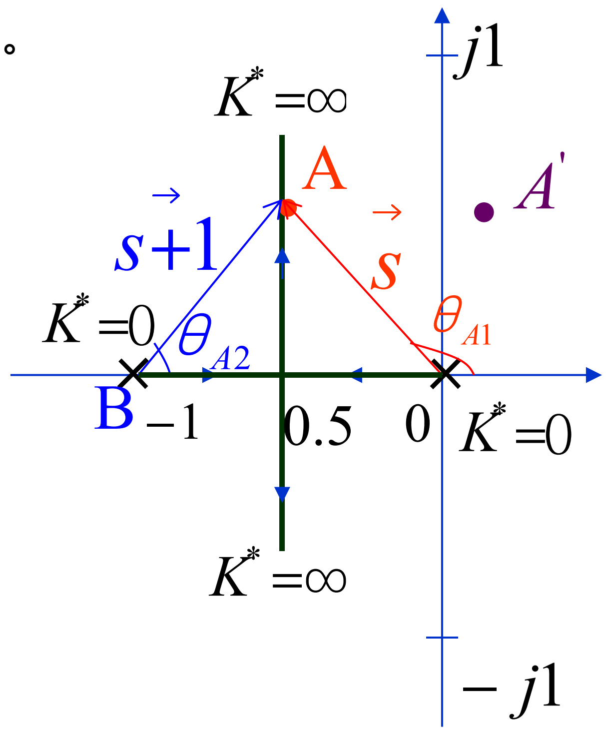
向量s和s+1的相角分别为θ_{A1}和θ_{A2} 根据相角条件(试探法):

$$\angle \frac{K^*}{s(s+1)} = -\angle s - \angle(s+1)$$

$$= -\angle \vec{OA} - \angle \vec{BA}$$

$$= \theta_{A1} + \theta_{A2}$$

$$= \pm(2k+1)\pi$$



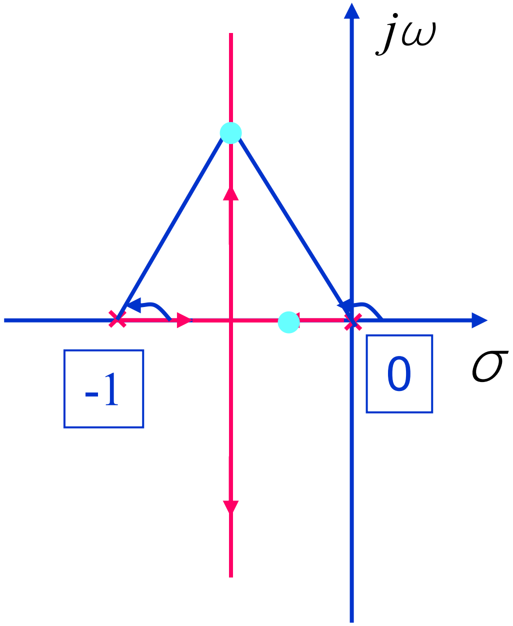
显然，只有三角形OAB是等腰三角形时，$\theta_{A1} + \theta_{A2} = \pi$ ，A点在根轨迹上。 A'点显然不在根轨迹上。

三、根轨迹方程的应用

1. 根据相角条件绘制根轨迹(充要条件)

例3：某直流电机的传递函数

$$G_o(s)=\frac{K^*}{s(s+1)}$$



2. 根据幅值条件确定根轨迹增益

s = -0.25对应的K^*值: K^*= |-0.25|*|-0.25+1| = 0.1875

s = -0.5 + j对应的K^*值: K^*= |-0.5+j|*|-0.5+j+1| = 1.25

Thank You !