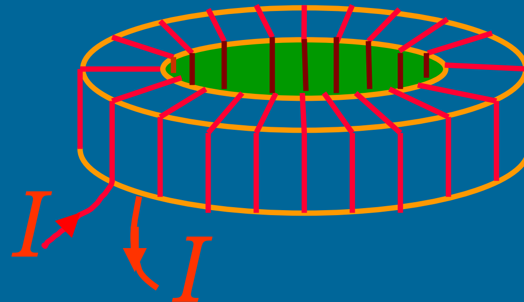
$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{i内}}$$ —— 安培环路定律

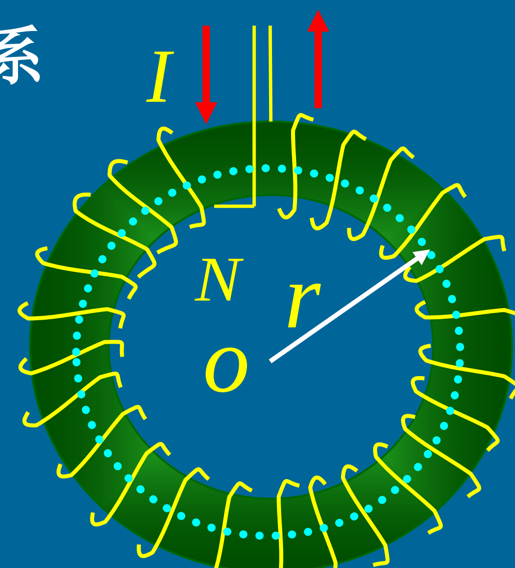
恒定电流的磁场中，磁感应强度沿一闭合路径 L 的线积分等于路径 L 包围的电流强度的代数和的 μ_0 倍

例 求螺绕环电流的磁场分布及螺绕环内的磁通量

解 设螺绕环总匝数为N，通有电流I，环平均半径为 $\bar{r}$



由电流的对称性知，环内磁场线都是同心圆，且同一磁场线上各点 $\vec{B}$ 大小都相等，方向沿圆的切线方向与电流绕行方向满足右螺旋关系



螺绕环内部作一个环路， 绕行方向为顺时针

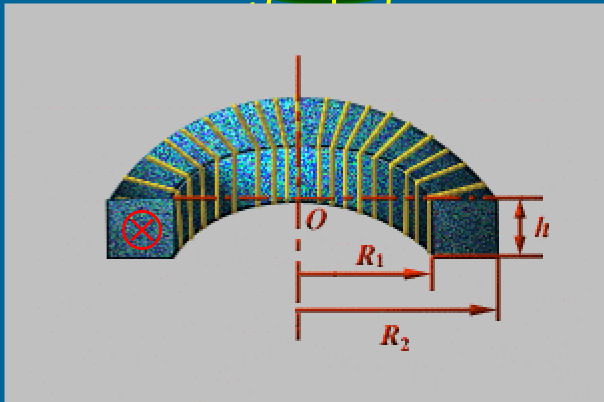
$$\oint_L B\cos\theta \mathrm{d}l = B\oint_L \mathrm{d}l = B\cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$

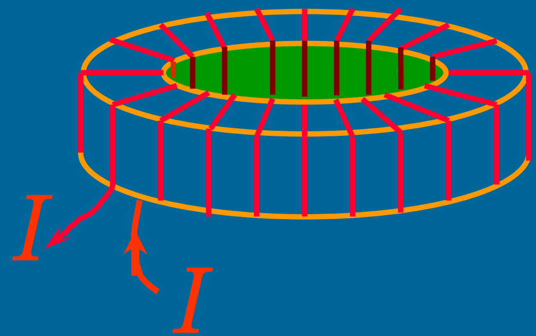
$$B = \mu_0 NI/2\pi r$$

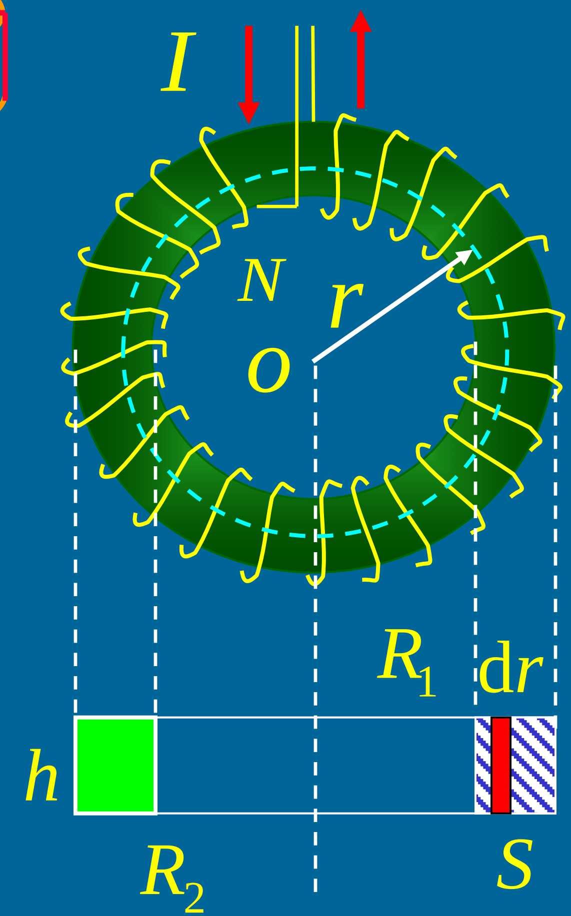
螺绕环横截面上各点 $\vec{B}$ 大小不同，与r 有关

若螺绕环的截面很小 $R_2 - R_1 << \bar{r}$ 有 $r \approx \bar{r}$

$$B_{内} = \mu_0 \frac{N}{2\pi \bar{r}} I = \mu_0 nI$$







- 若在外部再作一个环路，可得

$$\sum I_i = 0 \Rightarrow B_{外} = 0$$

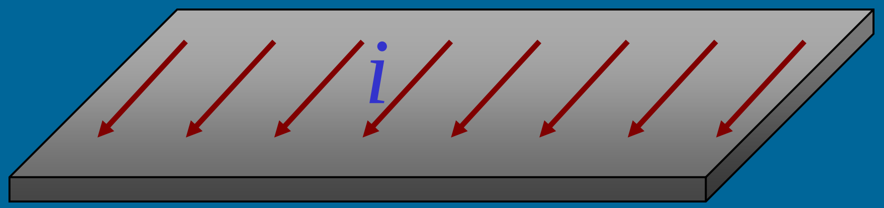
- 下面求磁通量：

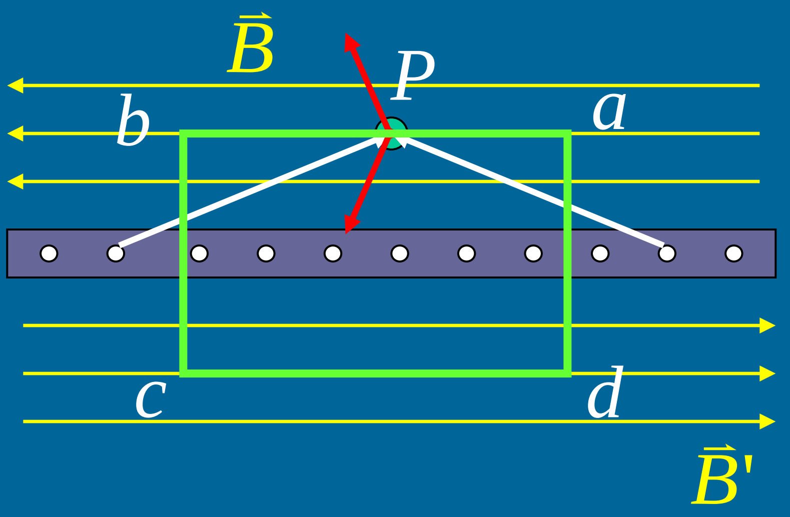
螺绕环内的磁通量为

$$\Phi_m = \int_{R_1}^{R_2} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} h\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 hNI}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

例 求无限大平面电流的磁场

解 电流分布具有面对称知：磁场线平行于板平面，并垂直于电流方向，两侧反向





$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{ab}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{bc}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

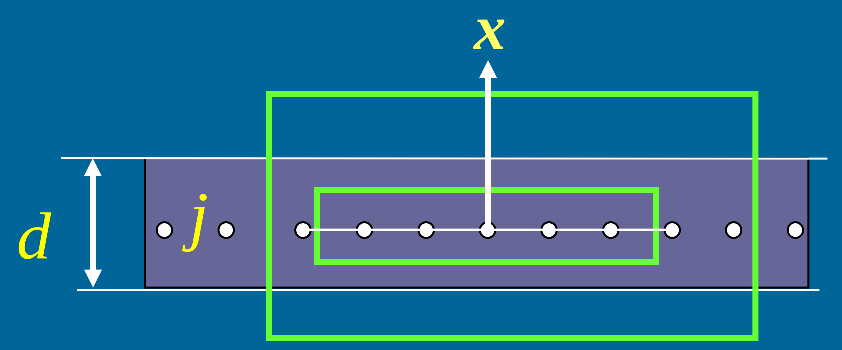
$$+ \int_{cd}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{da}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= B\int_a^b \mathrm{d}l + B\int_c^d \mathrm{d}l$$

$$= 2Bab = \mu_0 abi$$

$$B = \mu_0 i / 2$$

推广：求厚度为d 的无限大平面电流的磁场，电流体密度 j



- 在板外

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2Bl = \mu_0 jld$$

$$B = \mu_0 jd/2$$

- 在板内

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2Bl = \mu_0 jl2x$$

$$B = \mu_0 jx$$

§9.5 磁场对电流的作用

载流导体产生磁场 $\Longleftrightarrow$ 磁场对电流有作用

一. 安培定理

- 电流元的安培力 $\boxed{\mathrm{d}\vec{F}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}}$
  - 大小：$\mathrm{d}F=I\mathrm{d}lB\sin\theta$
  - 方向：由右手螺旋法则确定

- 任意形状载流导线在外磁场中受到的安培力

$$\boxed{\vec{F}=\int\mathrm{d}\vec{F}=\int I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}}$$

讨论

(1) 安培定理是矢量表述式 $\mathrm{d}\vec{F}\Rightarrow\mathrm{d}F_x,\mathrm{d}F_y,\mathrm{d}F_z$

(2) 若磁场为匀强场 $\Rightarrow$ $\vec{F}=\left(\int I\mathrm{d}\vec{l}\right)\times\vec{B}$

在匀强磁场中的闭合电流受力 $\Rightarrow$ $\vec{F}=\left(\oint I\mathrm{d}\vec{l}\right)\times\vec{B}=0$

例 在均匀磁场中放置一任意形状的导线，电流强度为 I

求 此段载流导线受的磁场力。

解 在电流上任取电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

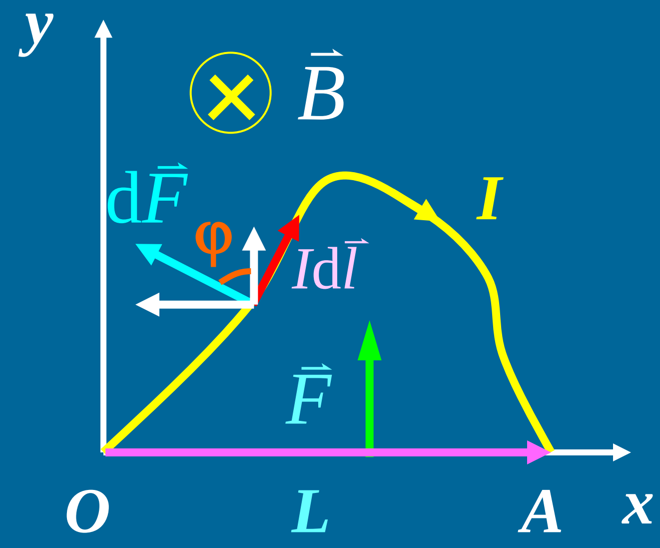
$$\mathrm{d}F = IB\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}F_x = -IB\mathrm{d}l\sin\varphi = -IB\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}F_y = IB\mathrm{d}l\cos\varphi = IB\mathrm{d}x$$

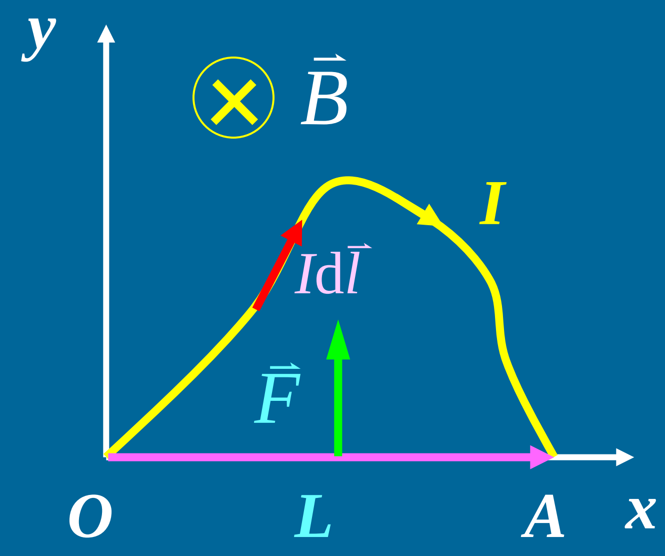
$$F_x = \int \mathrm{d}F_x = \int_0^0 -IB\mathrm{d}y = 0$$

$$F_y = \int \mathrm{d}F_y = \int_0^L IB\mathrm{d}x = IBL$$



方向沿 y 向

证法二：由安培定律 $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$



得到 整条曲线**OA**所受安培力为

$$\vec{F} = \int \mathrm{d}\vec{F} = \int_{OA} I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

$$= I\left(\int_{OA} \mathrm{d}\vec{l}\right)\times\vec{B} = I\,\overrightarrow{OA}\times\vec{B}$$

$$F = IBL$$

可见，只要处在均匀磁场中，起点与终点一样的弯曲导线和直导线，所受安培力一样。

例 求两平行无限长直导线之间的相互作用力?

解 电流 2 处于电流 1 的磁场中

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

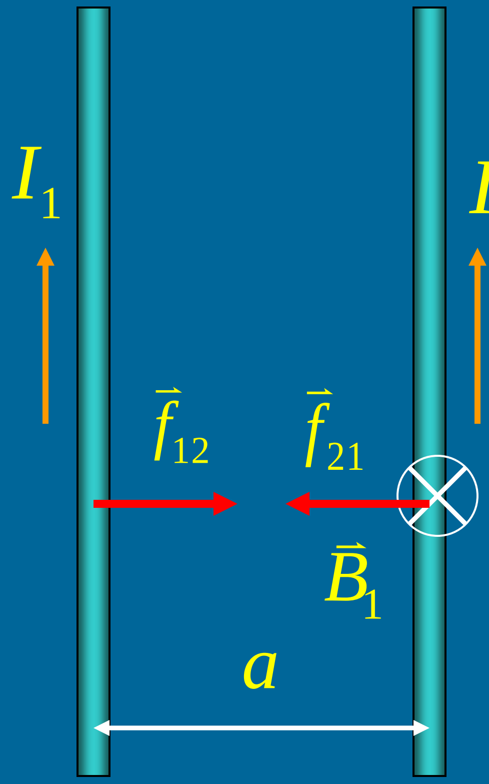
电流 2 中单位长度上受的安培力

$$f_{21} = I_2 B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

同时，电流 1 处于电流 2 的磁场中，

电流 1 中单位长度上受的安培力

$$f_{12} = I_1 B_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$



例 求一载流导线框在无限长直导线磁场中的受力和运动趋势

解

① $$f_1 = I_2 b B_1 = I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

方向向左

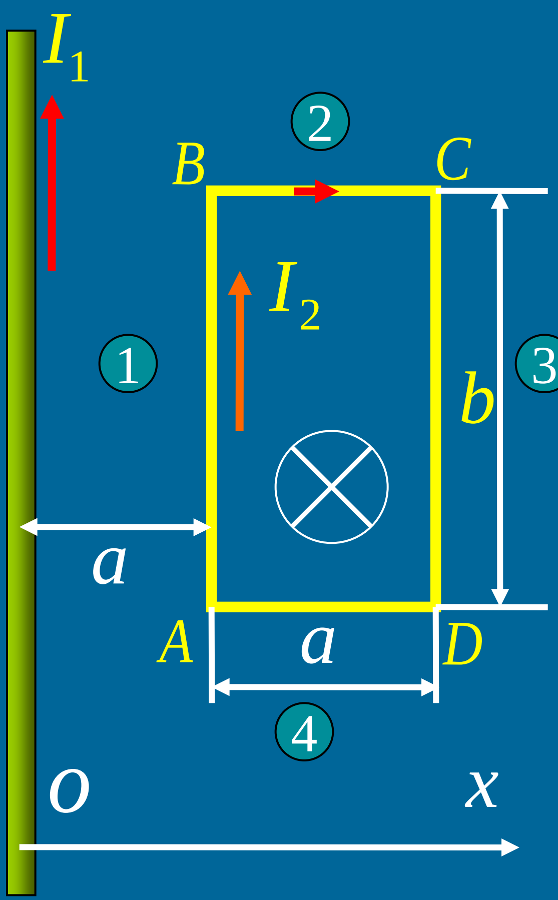
③ $$f_3 = I_2 b B_3 = I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{4\pi a}$$

方向向右

② $$f_2 = \int_a^{2a} I_2 \mathrm{d}l B_1 \sin\frac{\pi}{2}$$

$$= \int_a^{2a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} I_2 \mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln 2$$

④ $$f_4 = f_2$$



整个线圈所受的合力：$\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \vec{f}_4 = \vec{f}_1 + \vec{f}_3$

$\because |\vec{f}_1| > |\vec{f}_3|$ $\therefore$ 线圈向左做平动

总结

1. 安培环路定律 $\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{i内}$

2. 任意形状载流导线在外磁场中受到的安培力

$$\vec{F} = \int \mathrm{d}\vec{F} = \int I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

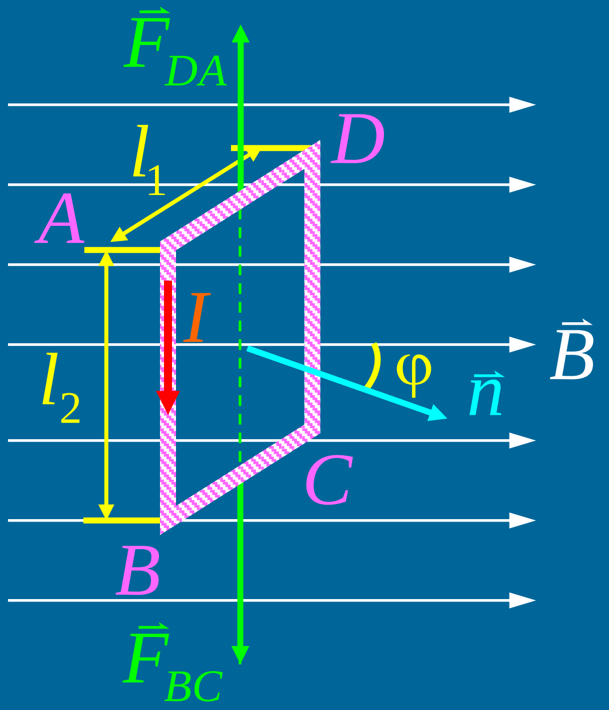
二. 匀强磁场对平面载流线圈的作用

匀强磁场中的刚性矩形载流线圈

$$F_{DA} = l_1 BI\sin(\pi/2+\varphi)$$

$$F_{BC} = l_1 BI\sin(\pi/2-\varphi)$$

（方向相反在同一直线上）

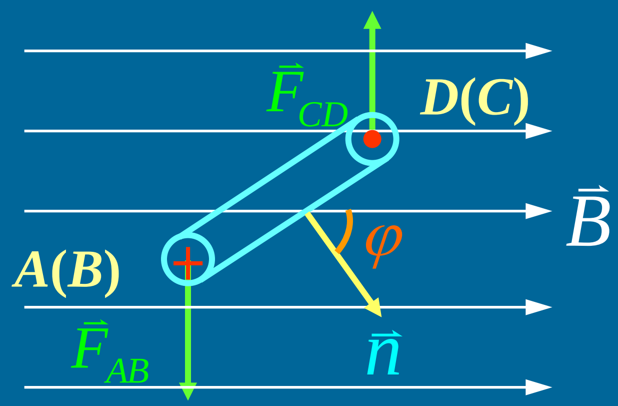


$$F_{CD} = F_{AB} = BIl_2$$

（方向相反不在一条直线上）

$$\sum \vec{F}_i = 0$$ （线圈无平动）

对中心的力矩为



$$M = F_{AB}\frac{l_1}{2}\sin\varphi + F_{CD}\frac{l_1}{2}\sin\varphi$$

$$= l_1 l_2 BI\sin\varphi$$

令 $\vec{S} = S\vec{n} = l_1 l_2 \vec{n}$ $\vec{p}_m = IS\vec{n}$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}}$$

讨论

(1) 线圈若有N 匝 $\boxed{\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} \quad \text{其中：} \vec{p}_m = NIS\vec{n}}$

(2) $\varphi = 0$ $\vec{M} = 0$ 稳定平衡

$\varphi = \pi$ $\vec{M} = 0$ 非稳定平衡

$\varphi = \pi/2$ $\vec{M}$ 最大，且该力矩有使 φ 减小的趋势

(3) • 载流线圈在均匀磁场中受合力为零，但合力矩不一定为零，力矩可使线圈发生转动，而不发生平动

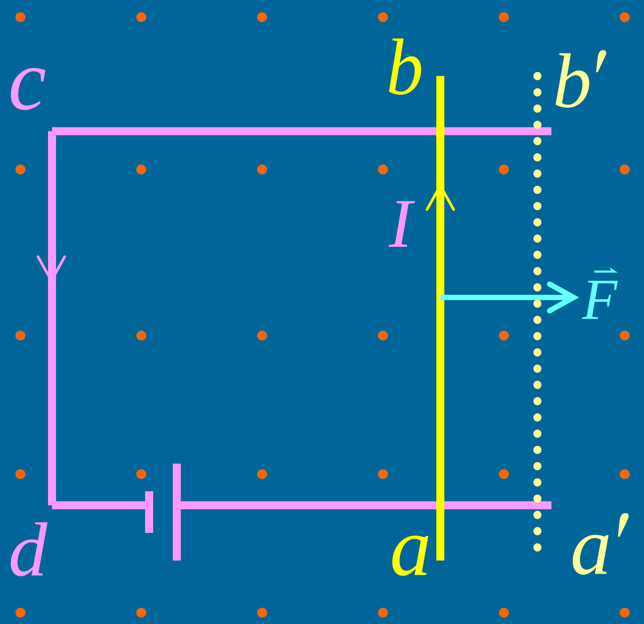
• 非均匀磁场中，受合力合力矩通常不为零，即：

$\sum \vec{F}_i \neq 0$ $\vec{M} \neq 0$ 线圈有平动和转动

(4) 如载流回路为任意形状，放入均匀磁场中，上述结论仍成立。

三、磁力的功

1. 载流导线在磁场中平动时磁场力的功



如图：**ab**导线与其它导线形成回路，**ab**导线可滑动。

假定滑动时回路中电流 ***I*** 保持不变。

则：由安培定律得**ab**受磁场力：

$$F = IBl \qquad (\overline{ab} = l)$$

ab 在 $\vec{F}$ 作用下由 $ab \to a'b'$

则磁力作功：

$$A = F\,\overline{aa'} = IBl\,\overline{aa'}$$

注：**ab**滑动前后，回路的磁通量：

$$\Phi_m = Bl\,\overline{da} \qquad \Phi'_m = Bl\,\overline{da'}$$

$$\Delta\Phi_m = Bl(\overline{da'} - \overline{da}) = Bl\,\overline{aa'} \Rightarrow A = I\Delta\Phi_m = I(\Phi'_m - \Phi_m)$$

$$A = I\Delta\Phi_m = I(\Phi'_m - \Phi_m)$$

说明： 1. $\Phi'_m - \Phi_m$为 磁通量 增量，可正可负，A可能小于零。

2. 上式表明：若电流保持不变，磁场力的功等于电流乘以回路内的磁通量的增量。

2. 载流线圈在均匀磁场中转动时磁场力的功

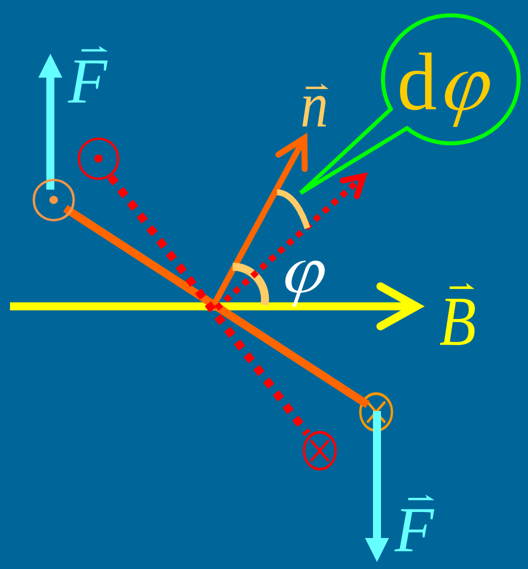
如图：载流线圈处于均匀磁场 $\vec{B}$中，线圈受到磁力矩

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$ 大小：$ISB\sin\varphi$

当线圈转过$\mathrm{d}\varphi$ 角时磁力矩作的元功:

$$\mathrm{d}A = -M\mathrm{d}\varphi = -BIS\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= I\mathrm{d}(BS\cos\varphi) = I\mathrm{d}\Phi_m$$



负号表示力矩作正功时φ 减小

当线圈从φ_{m1} 转到φ_{m2} 时磁力矩的功

$$A = \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} I\mathrm{d}\Phi_m = I(\Phi_{m2} - \Phi_{m1}) = I\Delta\Phi_m$$

$$A=\int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} I\mathrm{d}\Phi_m = I(\Phi_{m2}-\Phi_{m1}) = I\Delta\Phi_m$$

说明：对于任意形状的闭合回路在磁场中运动,若电流I 保持不变，则 $A=I\Delta\Phi_m$始终成立

例：匀强磁场中有半圆形平面载流线圈，**R，I**，$\vec{B}$ 与线圈平面平行。求：**1**）线圈受磁场力对y 轴力矩

2）线圈平面转过$\pi/2$时，磁力矩$\vec{M}$ 的功

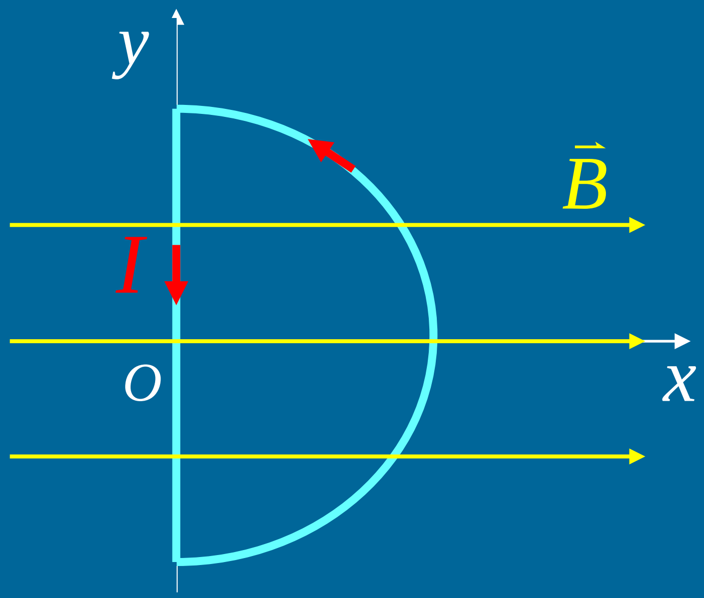
解：**1**） $\vec{M}=\vec{P}_m\times\vec{B}$

$$M=P_m B\sin\theta = I\frac{1}{2}\pi R^2 B$$

方向：$\uparrow$

2） $A=I\Delta\Phi_m = I\frac{1}{2}\pi R^2 B$

另解法见**Book**



§9.6　带电粒子在磁场中的运动

一. 洛伦兹力

载流导线受到的磁场力是运动电荷受磁场力的宏观表现，运动电荷受到的磁场力又称为 —— 洛仑兹力

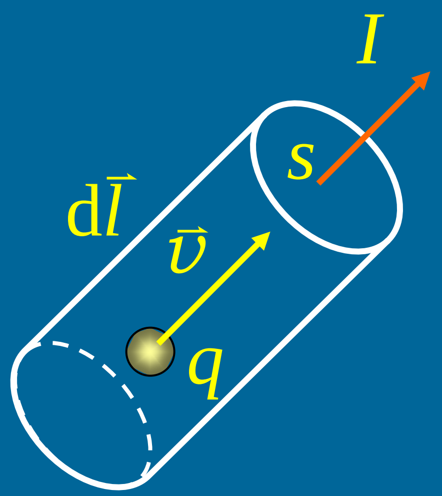
- 下面由电流元受到的安培力推导出洛仑兹力公式。

$I = nqvS$ ——单位时间内通过的电量

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

$$= nsqv\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = nsq\mathrm{d}l\vec{v} \times \vec{B}$$

$$= Nq\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{f} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{N} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

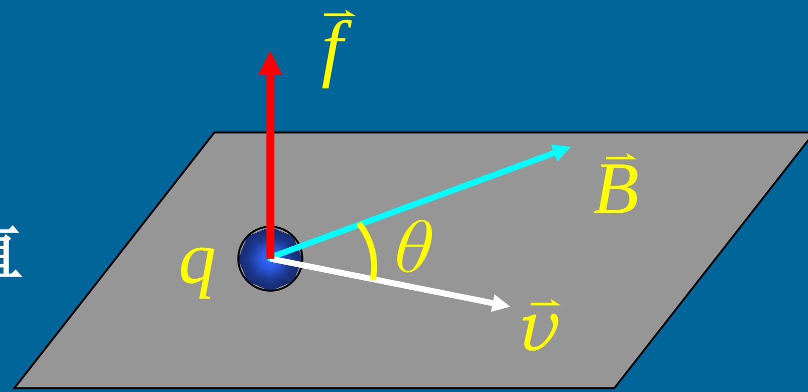


$\boxed{\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}}$ ——洛仑兹力公式

表明磁场中运动的带电粒子受到的磁场力

讨论

(1) $\vec{\upsilon}\ \vec{B}\ \vec{f}$ 之间满足右螺旋关系



(2) 洛伦兹力始终与电荷运动方向垂直

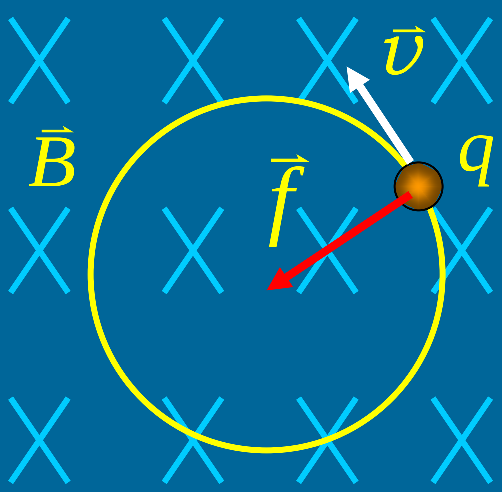
$\therefore\ \vec{f}$ 对电荷不作功

(3) 在一般情况下，空间中电场和磁场同时存在

$$\boxed{\vec{F}=\vec{f}_{\mathrm{e}}+\vec{f}_{\mathrm{m}}=q\vec{E}+q\vec{\upsilon}\times\vec{B}}$$

二. 带电粒子在均匀磁场中的运动

- $\vec{\upsilon}\,//\,\vec{B}$ $\quad\vec{f}=q\vec{\upsilon}\times\vec{B}=0\Rightarrow$ 带电粒子不受磁场影响为匀速直线运动
- $\vec{\upsilon}\perp\vec{B}$ $\quad\vec{f}\perp\vec{\upsilon}\Rightarrow$ 粒子做匀速圆周运动



$$q\upsilon B\sin\frac{\pi}{2}=m\frac{\upsilon^2}{R}\ \Rightarrow\ R=\frac{m\upsilon}{qB}$$

——圆周运动的半径

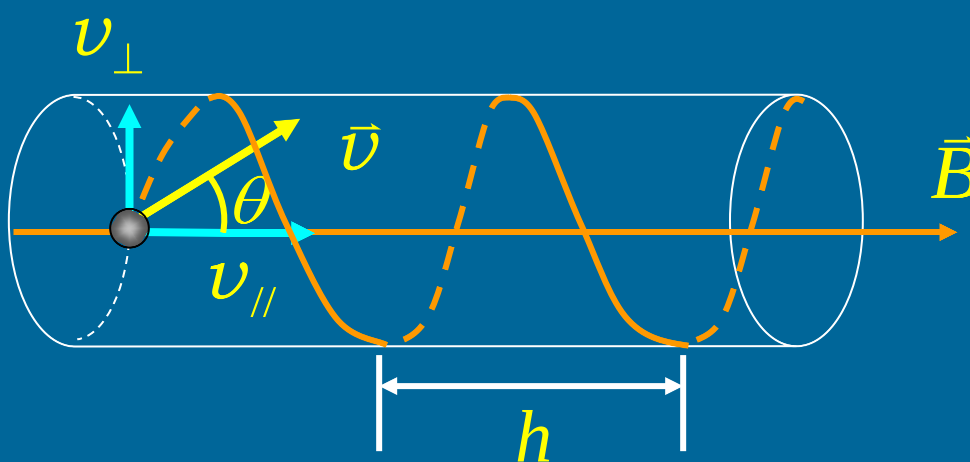
- 粒子回转周期与频率

$$T=\frac{2\pi R}{\upsilon}=\frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow \text{频率}\ \nu=\frac{qB}{2\pi m}$$

- 一般情况

$$\upsilon_{//}=\upsilon\cos\theta$$

$$\upsilon_{\perp}=\upsilon\sin\theta$$



带电粒子作螺旋运动

半径 $R=\frac{m\upsilon_{\perp}}{qB}=\frac{m\upsilon\sin\theta}{qB}$

螺距 $h=\upsilon_{//}T=\frac{2\pi m\upsilon\cos\theta}{qB}$

三. 霍尔效应

1879年 霍尔发现在一个通有电流的导体板上，若垂直于板面施加一磁场，则板面两侧会出现微弱电势差(霍尔效应)

实验结果

$$U_{ab}=K\,IB/d$$

受力分析

洛伦兹力：

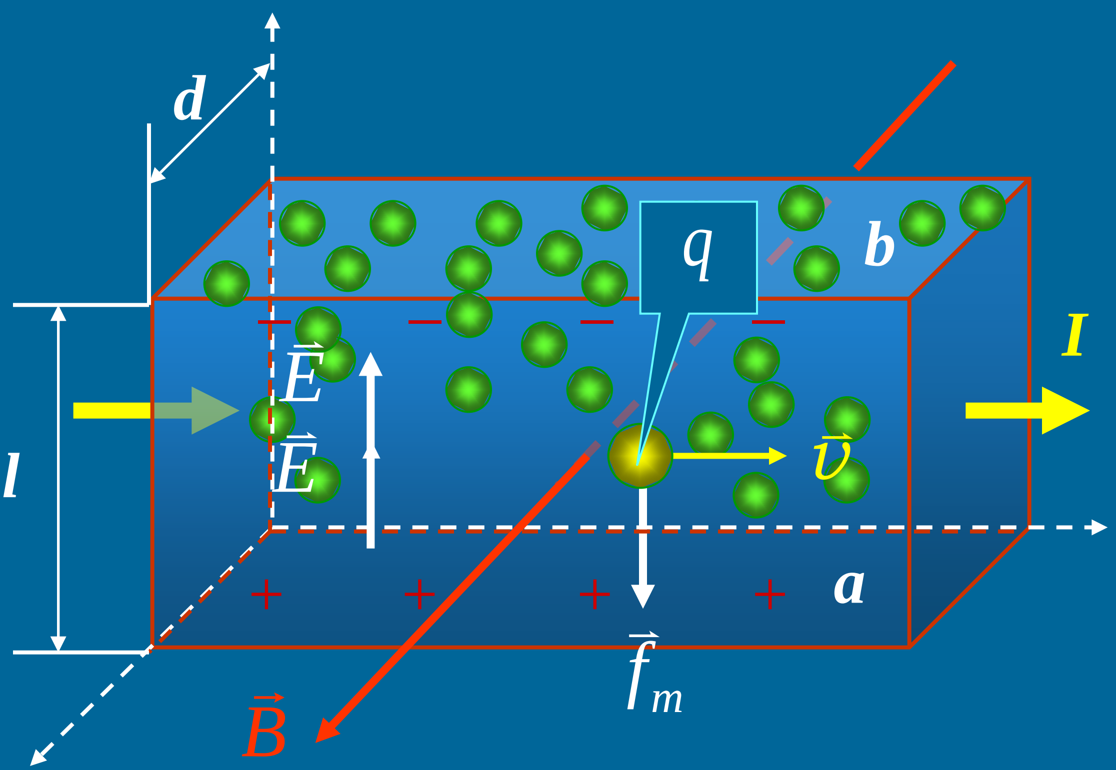
$$\vec{f}_m=q\vec{\upsilon}\times\vec{B}$$

(方向向下)

横向电场力：

$$\vec{f}_e=q\vec{E}$$

(方向向上)



当达到动态平衡时：　$q\vec{E}+(q\vec{\upsilon}\times\vec{B})=0$

$$E_h=\upsilon B$$

$$\left.\begin{aligned}U_{ab}&=E_h l=\upsilon Bl\\ I&=nq\upsilon S=nq\upsilon ld\end{aligned}\right\}\ U_{ab}=\frac{IB}{nqd}\ \Longrightarrow\ K=\frac{1}{nq}$$

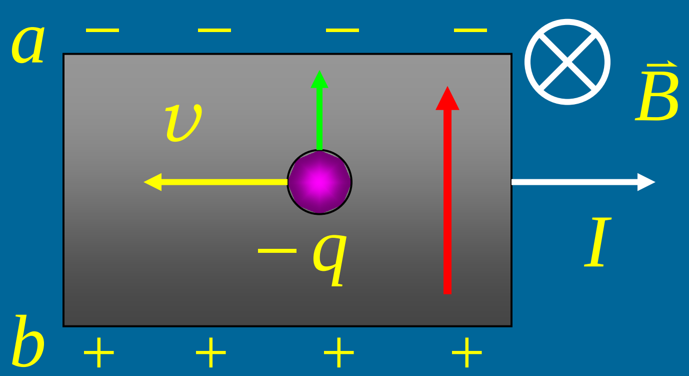
(霍耳系数)

讨论

(1) 霍尔系数***K***与载流子浓度***n***成反比，通过测量霍尔系数可以确定导电体中载流子浓度***n***，它是研究半导体材料性质的有效方法。

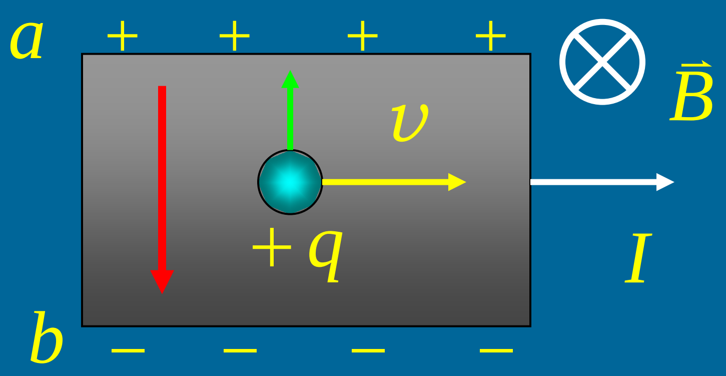
(2) 通过测定霍尔系数可区分半导体材料类型

—— 霍尔系数的正负与载流子电荷性质有关



N 型半导体

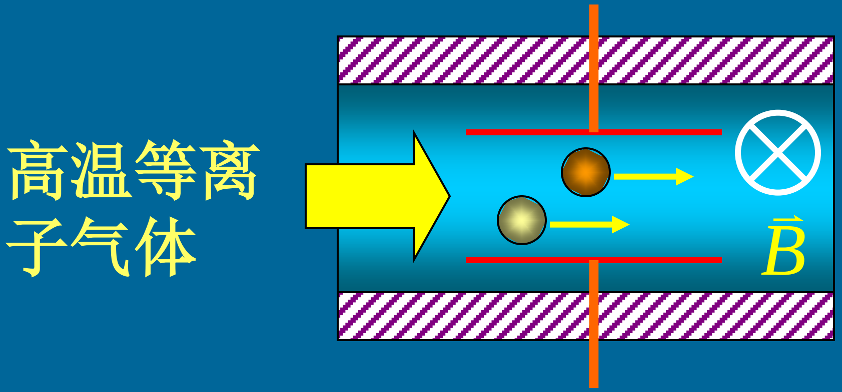
$u_a < u_b \qquad K < 0$



P 型半导体

$u_a > u_b \qquad K > 0$

(3) 磁流体发电



"磁流体发电"的基本原理

高温高速的等离子态气体通过导电管时，在垂直于气流方向加一磁场，则气体中的正负离子由于受洛仑兹力的作用分别向与流速 $\vec{v}$ 和 $\vec{B}$ 都垂直的二个相反方向偏移，结果在导电管二侧的电极上产生电势差，且从电极上输出电能。

特点：

没有机械转动部分造成的能量损耗 ——可提高效率

恒定磁场总结

1. 磁感应强度 $\vec{B}$ 的定义

2.毕奥—萨伐尔定律 $\mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}$

毕—萨定律的应用 $\vec{B} = \int \mathrm{d}\vec{B} = \int \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}$

运动电荷的磁场 $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\vec{v} \times \vec{r}_0}{r^2}$

3.磁通量和高斯定理

（1）磁通量 $\Phi_m = \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

（2）磁场高斯定理 $\Phi_m = \oint\!\!\oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$

——— 磁场是无源场

4. 安培环路定理

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I_{i内}$$ —— 磁场是有旋场

5. 磁场对载流导线和运动电荷的作用

（1）磁场对载流导线的作用力 ——安培力

$$\vec{F} = \int \mathrm{d}\vec{F} = \int I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

（2）均匀磁场对平面载流线圈的作用

合力： $\sum \vec{F}_i = 0$ （线圈无平动）

磁力矩： $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$ 其中：$\vec{p}_m = NIS\vec{n}$

（3）磁力的功

$$A = \int_{\Phi_{m_1}}^{\Phi_{m2}} I\mathrm{d}\Phi_m = I(\Phi_{m2} - \Phi_{m1}) = I\Delta\Phi_m$$

（4）磁场对运动电荷的作用

$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$$ ——洛仑兹力公式

（5）霍尔效应：磁场中载流导体上出现横向微弱电势差的现象

$$U_{ab} = K\,IB/d = \frac{IB}{nqd} \qquad K = \frac{1}{nq}$$ ——霍耳系数

特例：

有限长直线电流：$B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi\, a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$

无限长载流体：$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

圆电流轴线上：$B = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2\left(x^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ 圆心：$B_o = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$

长直螺线管：$B = \mu_0 n I$

螺绕环：$B = \mu_0 N I / 2\pi r$