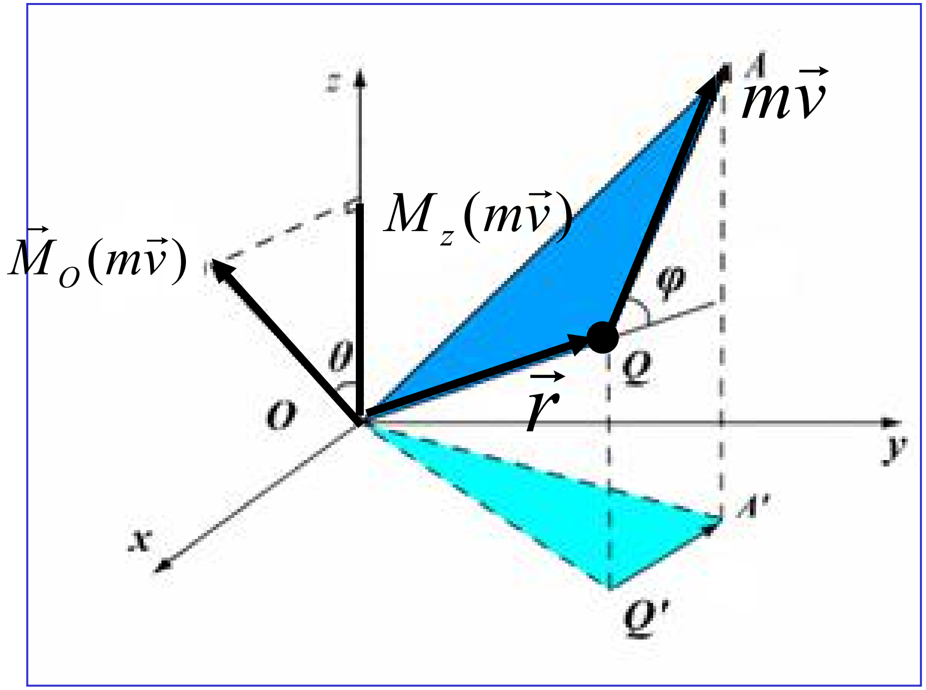
第十一章

动　量　矩　定　理

§11-1 质点和质点系的动量矩

1. 质点的动量矩



$$[\vec{M}_O(m\vec{v})]_z = M_z(m\vec{v})$$

对点 O 的动量矩

$$\vec{M}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}$$

对 z 轴的动量矩

$$M_z(m\vec{v}) = M_O\left[(m\vec{v})_{xy}\right]$$

代数量, 从 z 轴正向看,
逆时针为正, 顺时针为负.

2．质点系的动量矩

对点的动量矩

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(m_i\vec{v}_i)$$

对轴的动量矩

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} M_z(m_i\vec{v}_i)$$

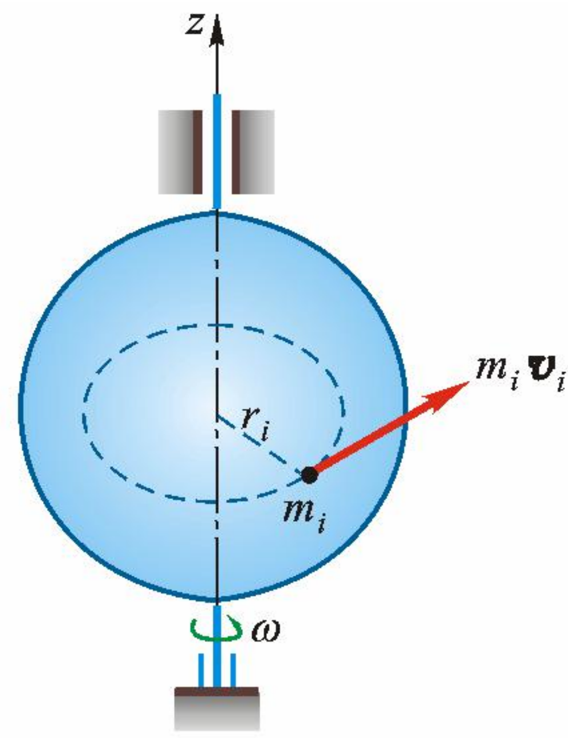
二者关系

$$[\vec{L}_O]_z = L_z$$

即 $\vec{L}_O = L_x\vec{i} + L_y\vec{j} + L_z\vec{k}$

（1） 刚体平移 $\vec{L}_O = \vec{M}_O(m\vec{v}_C)$ $L_z = M_z(m\vec{v}_C)$

（2） 刚体绕定轴转动 $L_z = J_z\omega$



$$L_z = \sum M_z(m_i v_i) = \sum m_i v_i r_i$$

$$= \sum m_i \omega r_i r_i = \omega \sum m_i r_i^2$$

$$J_z = \sum m_i r_i^2$$ ——转动惯量

§ 11-2　　动量矩定理

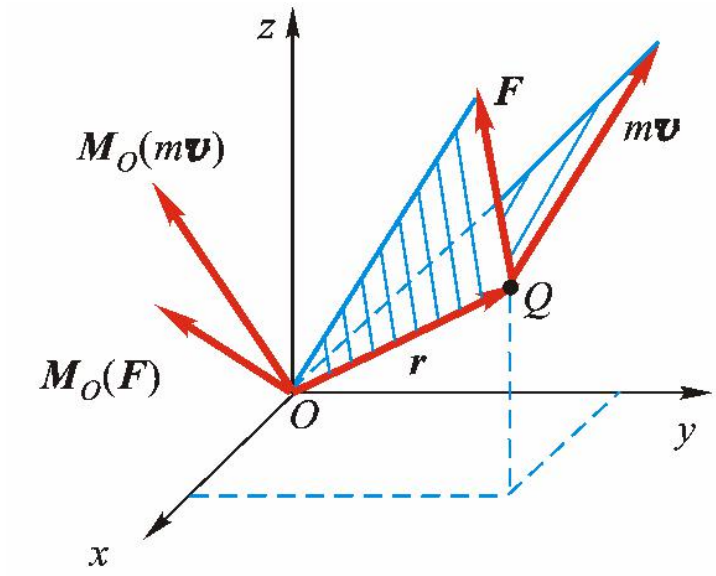
1. 质点的动量矩定理

设O为定点，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M}_O(m\vec{v})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times m\vec{v})$$

$$=\boxed{\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{v}}\times m\vec{v}}_{\,0}+\vec{r}\times\boxed{\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})}_{\vec{F}}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M}_O(m\vec{v})=\vec{M}_O(\vec{F})$$



投影式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_x(m\vec{v})=M_x(\vec{F})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_y(m\vec{v})=M_y(\vec{F})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_z(m\vec{v})=M_z(\vec{F})$$

质点对某定点的动量矩对时间的一阶导数，等于作用力对同一点的矩.

——质点的动量矩定理

2. 质点系的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M}_O(m_i\vec{v}_i)=\vec{M}_O(\vec{F}_i^{(\mathrm{i})})+\vec{M}_O(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

$$\sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M}_O(m_i\vec{v}_i)=\boxed{\overset{0}{\sum\vec{M}_O(\vec{F}_i^{(\mathrm{i})})}}+\sum\vec{M}_O(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

$$\sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{M}_O(m_i\vec{v}_i)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum\vec{M}_O(m_i\vec{v}_i)=\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{M}_O(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

投影式：

$$\frac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}=\sum M_x(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

$$\frac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t}=\sum M_y(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

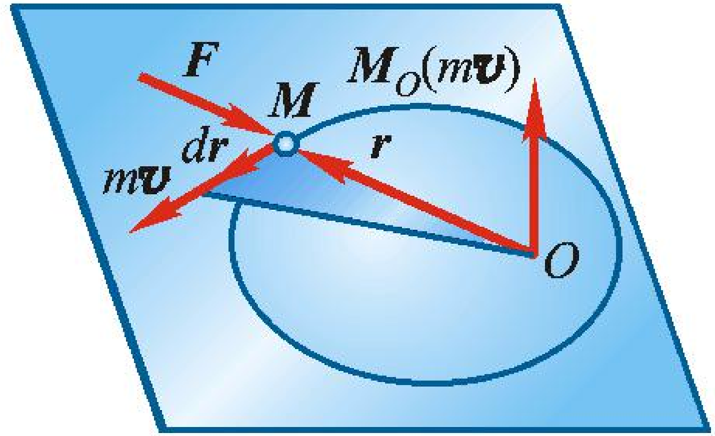
$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=\sum M_z(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

质点系对某定点*O*的动量矩对时间的导数,等于作用于质点系的外力对于同一点的矩的矢量和.

——质点系的动量矩定理

问题：内力能否改变质点系的动量矩？

3. 动量矩守恒定律



若$\sum \vec{M}_O(\vec{F}^{(e)}) \equiv 0$ 则$\vec{L}_O$ =常矢量,

若$\sum M_z(\vec{F}^{(e)}) \equiv 0$ 则 L_z =常量。

面积速度定理:

质点在有心力作用下其面积速度守恒.

有心力：力作用线始终通过某固定点，该点称**力心**.

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = 0 \Longrightarrow \vec{M}(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{常矢量}$$

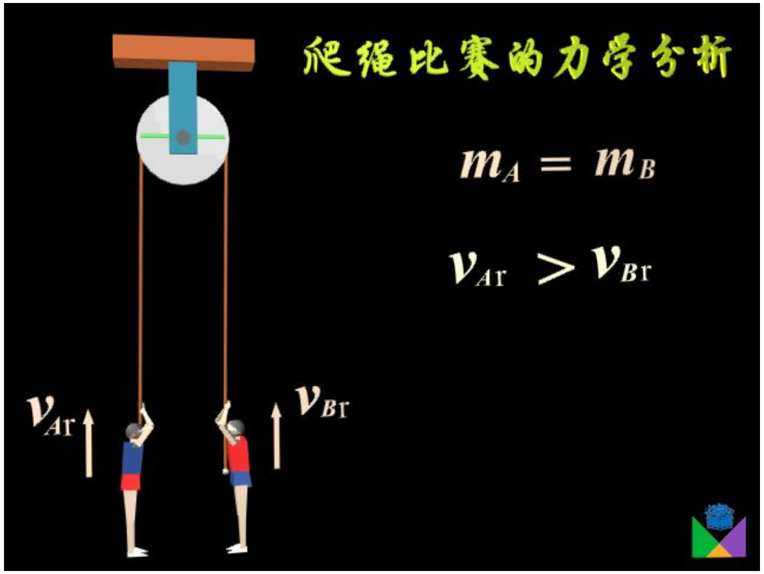
(1) $\vec{r}$与 $\vec{v}$必在一固定平面内, 即点M的运动轨迹是平面曲线.

(2) $|\vec{r} \times m\vec{v}| = \left|\vec{r} \times m\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| = b =$常量 即 $\left|\vec{r} \times \dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|$=常量

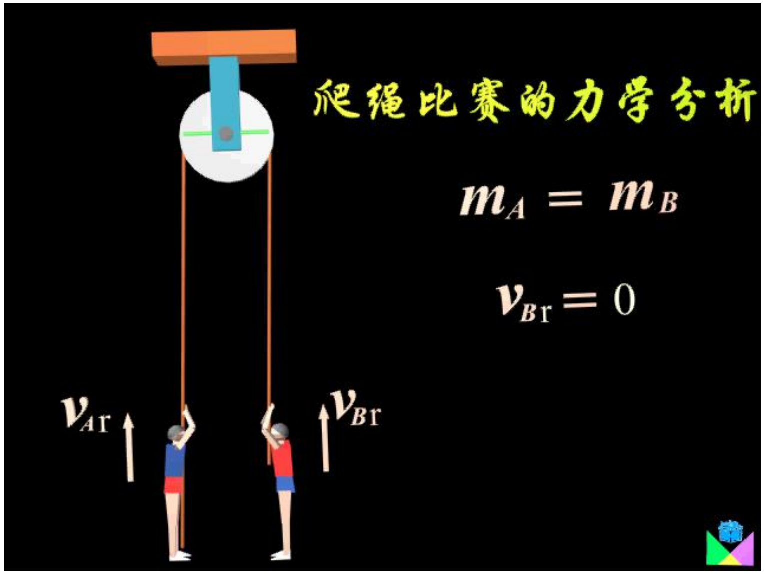
$|\vec{r} \times d\vec{r}| = 2dA$ 因此, $\boxed{\dfrac{dA}{dt}}$=常量

面积速度

思考：谁先到达顶部？



爬绳比赛的力学分析
$m_A = m_B$
$v_{A\mathrm{r}} > v_{B\mathrm{r}}$
$v_{A\mathrm{r}}$
$v_{B\mathrm{r}}$

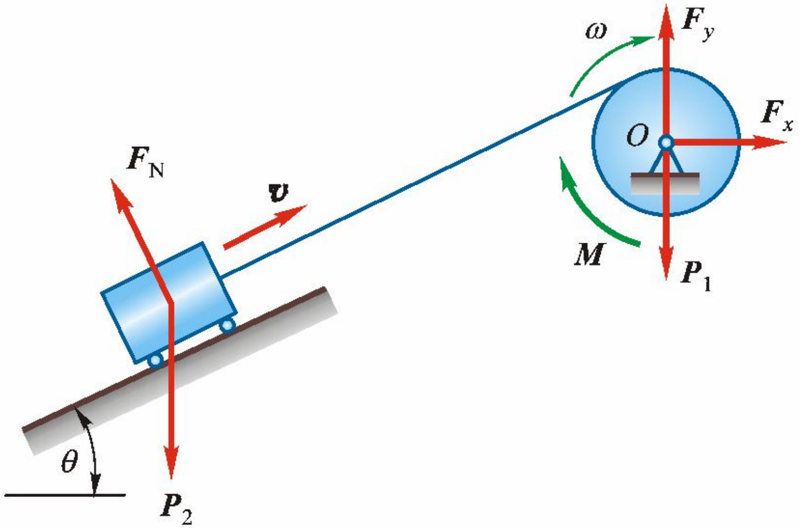


爬绳比赛的力学分析
$m_A = m_B$
$v_{B\mathrm{r}} = 0$
$v_{A\mathrm{r}}$
$v_{B\mathrm{r}}$

例11-1

已知：R, J, M, θ, m ，小车不计摩擦.

求：小车的加速度 a .



解：

$$L_O = J\omega + mvR$$

$$M_O^{(e)} = M - mg\sin\theta \cdot R$$

$$\frac{d}{dt}[J\omega + mvR] = M - mg\sin\theta \cdot R$$

由 $\omega = \dfrac{v}{R}$　$\dfrac{dv}{dt} = a$ ，得

$$a = \frac{MR - mgR^2\sin\theta}{J + mR^2}$$

例11-2

已知：m_1，m，m_2，J_O，r_1，r_2，不计摩擦.

求：（1）α

（2）O 处约束力 F_N

（3）绳索张力 F_{T_1}，F_{T_2}

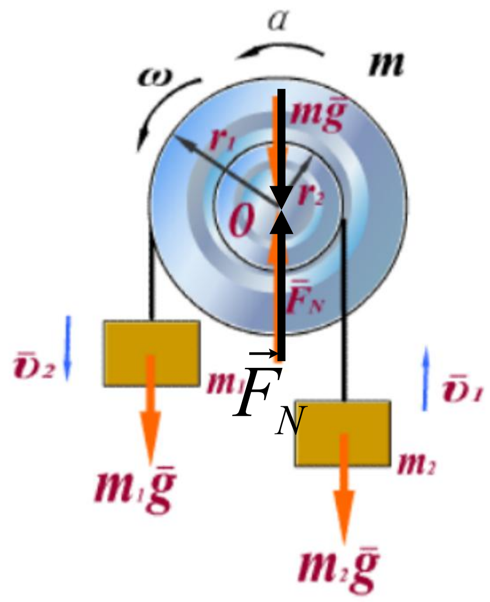
解： (1) $$L_O = J_O\omega + m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2$$

$$= \omega(J_O + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)$$

$$\sum M_O(\vec{F}^{(e)}) = (m_1 r_1 - m_2 r_2)g$$

由 $$\frac{\mathrm{d}L_O}{\mathrm{d}t} = \sum M_O(\vec{F}^{(e)})$$ ，得

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{(m_1 r_1 - m_2 r_2)g}{J_O + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}$$



（2）由质心运动定理

$$F_N - (m + m_1 + m_2)g = (m + m_1 + m_2)a_{Cy}$$

$$a_{Cy} = \ddot{y}_C = \frac{\sum m_i \ddot{y}_i}{\sum m_i} = \frac{-m_1 a_1 + m_2 a_2}{m + m_1 + m_2} = \frac{\alpha(-m_1 r_1 + m_2 r_2)}{m + m_1 + m_2}$$

$$F_{\mathrm{N}} = (m + m_1 + m_2)g + \alpha(-m_1 r_1 + m_2 r_2)$$

（3） 研究 m_1

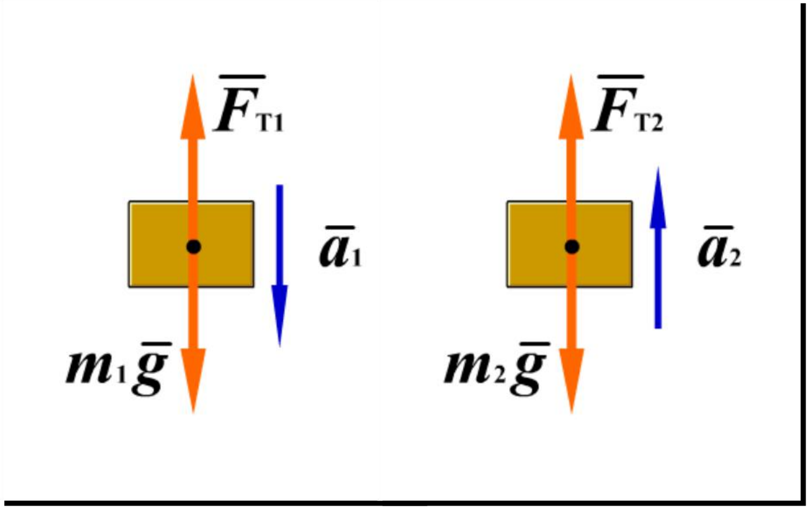
$$m_1 g - F_{\mathrm{T}_1} = m_1 a_1 = m_1 r_1 \alpha$$

$$F_{\mathrm{T}_1} = m_1(g - r_1 \alpha)$$

（4） 研究 m_2

$$F_{\mathrm{T}_2} - m_2 g = m_2 a_2 = m_2 r_2 \alpha$$

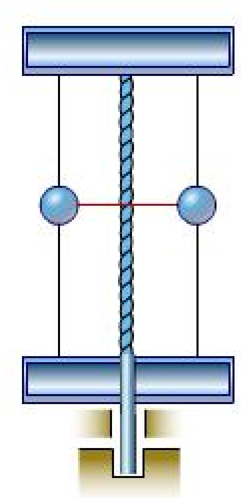
$$F_{\mathrm{T}_2} = m_2(g + r_2 \alpha)$$



例11-3

已知：两小球质量皆为 m ，初始角速度 ω_0 。

求：剪断绳后， θ 角时的 ω .



解：

$\theta = 0$ 时，

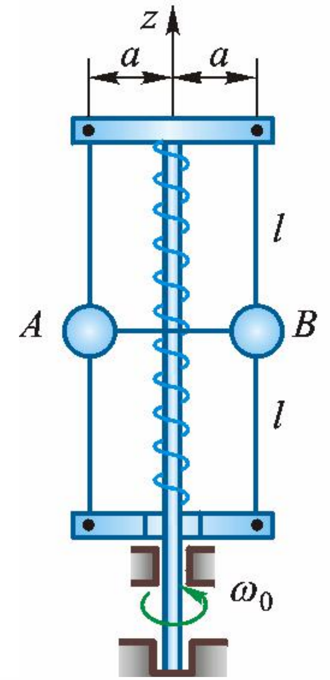
$$L_{z_1} = 2ma\omega_0 a = 2ma^2\omega_0$$

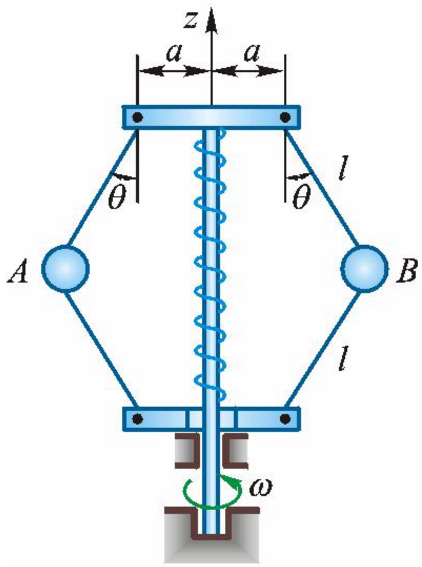
$\theta \neq 0$ 时，

$$L_{z_2} = 2m(a + l\sin\theta)^2\omega$$

$$L_{z_1} = L_{z_2}$$

$$\omega = \frac{a^2\omega_0}{(a + l\sin\theta)^2}$$





§11-3 刚体绕定轴的转动微分方程

主动力： $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots\cdots, \vec{F}_n$

约束力： $\vec{F}_{N_1}, \vec{F}_{N_2}$

$$\frac{d}{dt}(J_z\omega) = \sum M_z(\vec{F}_i) + \sum M_z(\vec{F}_{N_i})$$

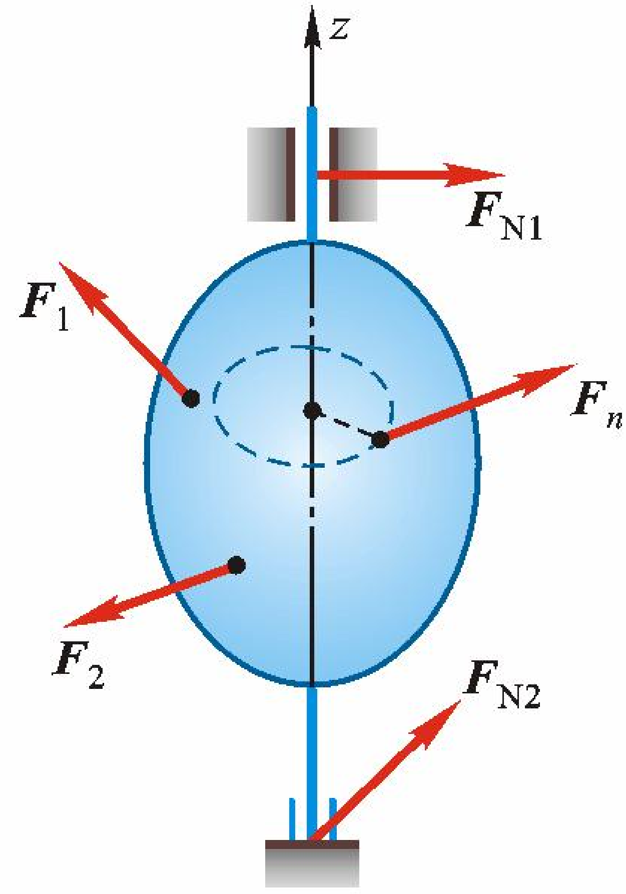
$$= \sum M_z(\vec{F}_i)$$

即： $$\boxed{J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_i)}$$

或 $$\boxed{J_z\alpha = \sum M_z(\vec{F})}$$

或 $$\boxed{J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum M_z(\vec{F})}$$

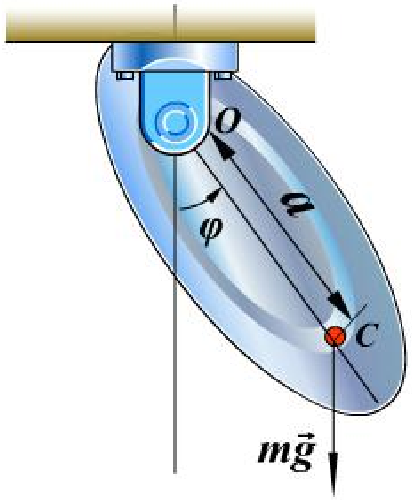
转动微分方程



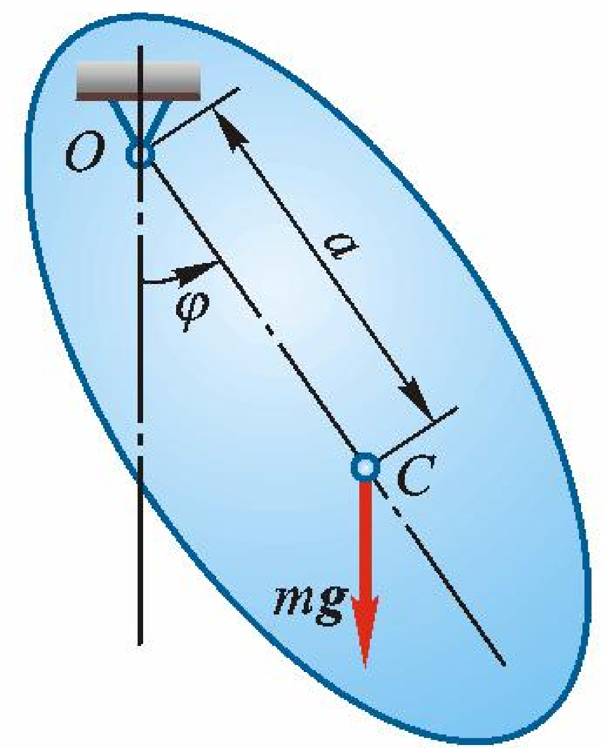
例11-4

已知：物理摆（复摆），m, J_O, a 。

求：微小摆动的周期 。



解： $J_O\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-mga\sin\varphi$



微小摆动时， $\sin\varphi\approx\varphi$

$$J_O\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-mga\varphi$$

即： $\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{mga}{J_O}\varphi=0$

通解为 $\varphi=\varphi_O\sin(\sqrt{\dfrac{mga}{J_O}}t+\theta)$

φ_O 称角振幅，θ 称初相位，由初始条件确定.

周期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{J_O}{mga}}$

例11-5

已知：J_O, ω_0, F_N, R，动滑动摩擦因数 f 。

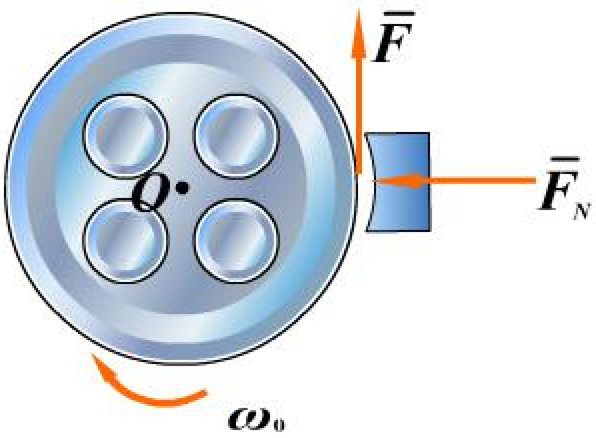
求：制动所需时间 t .

解：

$$J_O \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = FR = f F_{\mathrm{N}} R$$

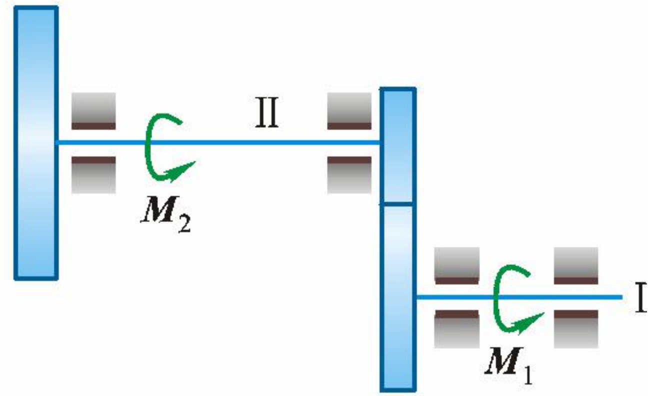
$$\int_{-\omega_0}^{0} J_O \mathrm{d}\omega = \int_0^t f F_{\mathrm{N}} R \mathrm{d}t$$

$$t = \frac{J_O \omega_0}{f F_{\mathrm{N}} R}$$



例11-6

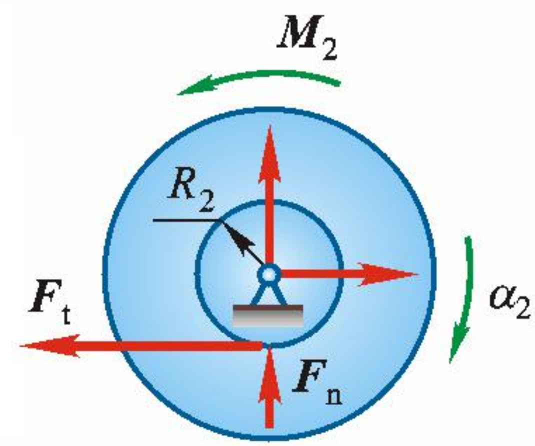
已知：$J_1, J_2, i_{12} = \dfrac{R_2}{R_1}, M_1, M_2$。 求：$\alpha_1$ 。



解：

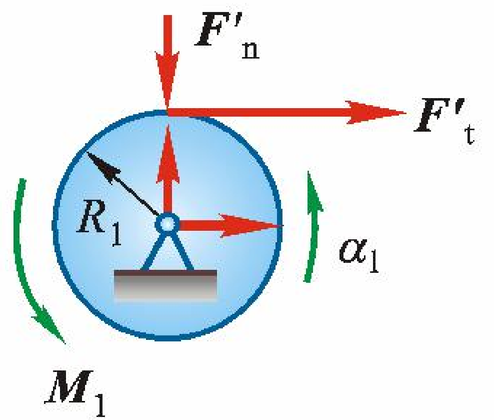
$$J_1\alpha_1 = M_1 - F_t'R_1$$

$$J_2\alpha_2 = F_tR_2 - M_2$$



因 $F_t' = F_t$， $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = i_{12} = \dfrac{R_2}{R_1}$，得

$$\alpha_1 = \frac{M_1 - \dfrac{M_2}{i_{12}}}{J_1 + \dfrac{J_2}{i_{12}^2}}$$



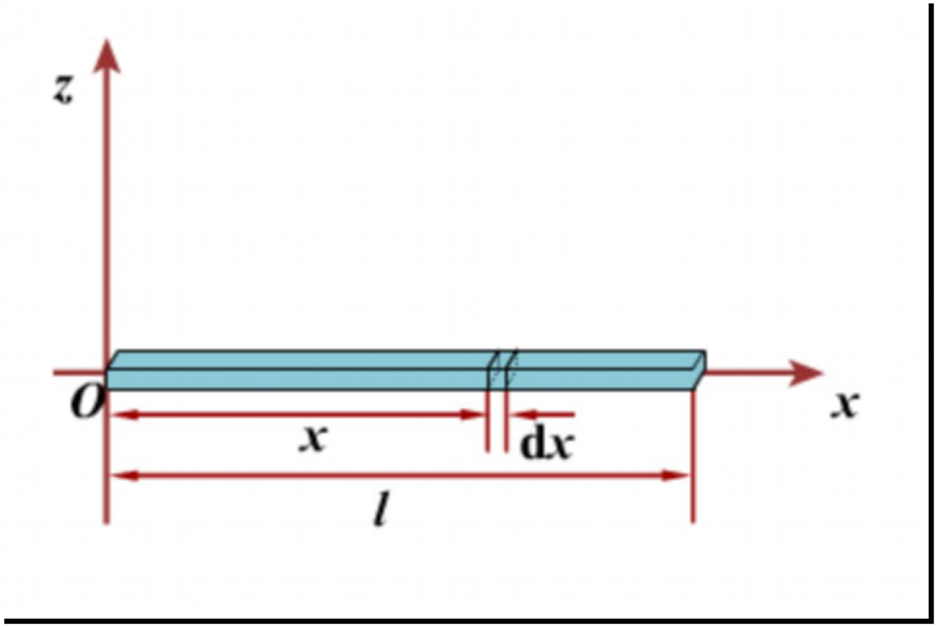
§11-4 刚体对轴的转动惯量

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

1. 简单形状物体的转动惯量计算

(1) 均质细直杆对一端的转动惯量

$$J_z = \int_0^l \rho_l x^2 \mathrm{d}x = \frac{\rho_l l^3}{3}$$

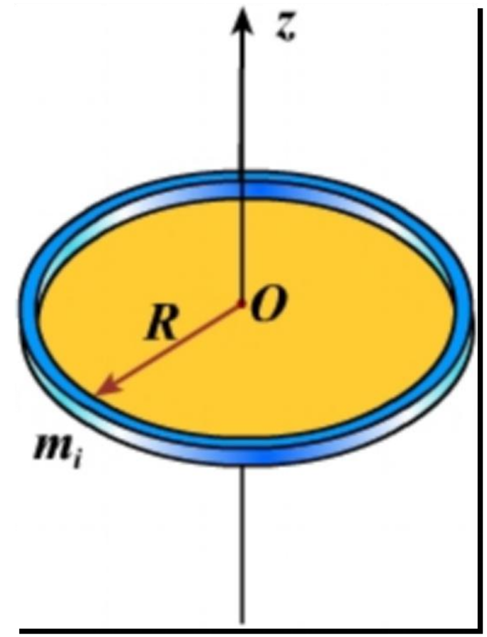


由 $m = \rho_l l$，得

$$J_z = \frac{1}{3} m l^2$$

（2）均质薄圆环对中心轴的转动惯量

$$J_z = \sum m_i R^2 = R^2 \sum m_i = mR^2$$



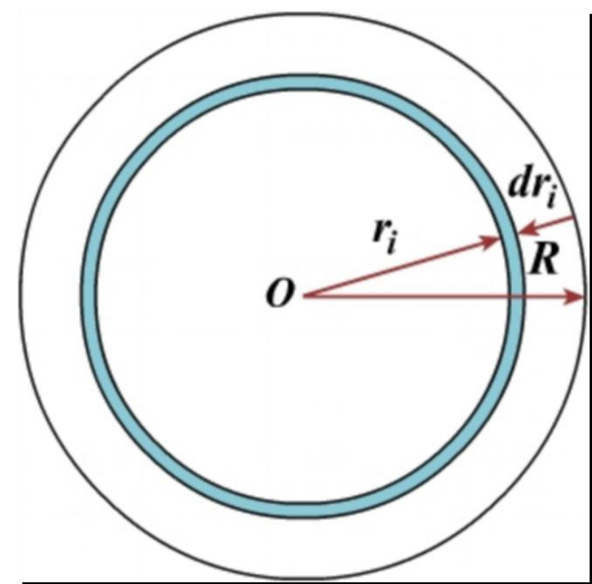
（3）均质圆板对中心轴的转动惯量

$$m_i = 2\pi r_i \, \mathrm{d}r_i \cdot \rho_A$$

式中： $\rho_A = \dfrac{m}{\pi R^2}$

$$J_O = \int_0^R (2\pi r \rho_A \mathrm{d}r \cdot r^2) = 2\pi \rho_A \frac{R^4}{4}$$

或 $J_O = \dfrac{1}{2} mR^2$



2. 回转半径（惯性半径）

$$\rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{m}} \quad \text{或} \quad \boxed{J_z = m\rho_z^2}$$

3. 平行轴定理

$$\boxed{J_z = J_{z_C} + md^2}$$

式中 z_C 轴为过质心且与 z 轴平行的轴，d 为 z 与 z_C 轴之间的距离。

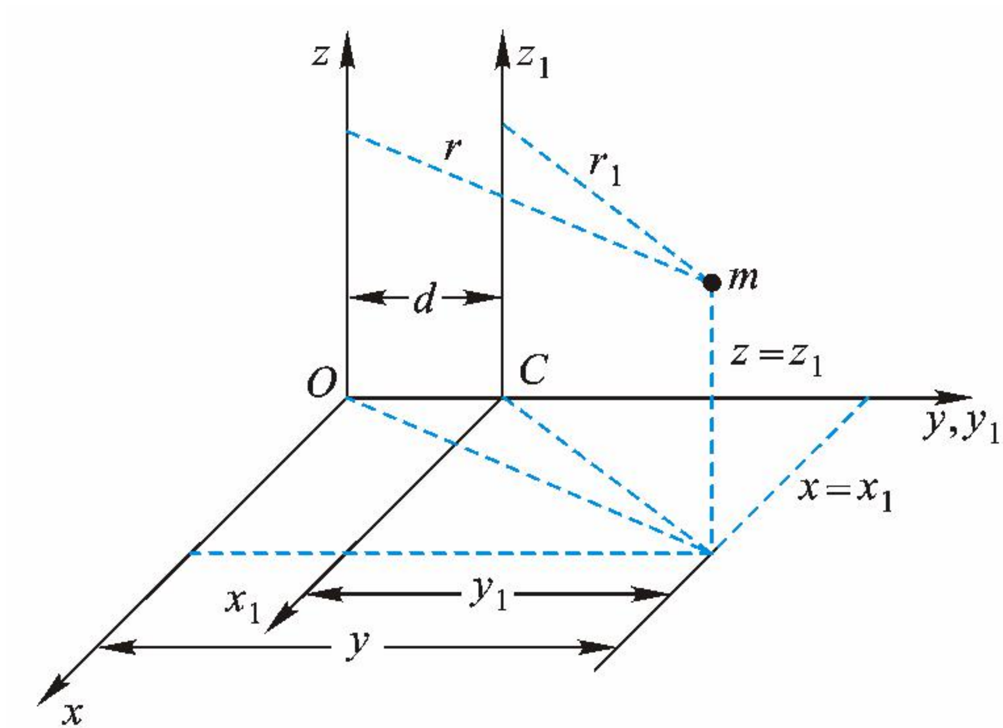
即：刚体对于任一轴的转动惯量，等于刚体对于通过质心并与该轴平行的轴的转动惯量，加上刚体的质量与两轴间距离平方的乘积.

证明： $J_{z_C} = \sum m_i(x_1^2 + y_1^2)$

$$J_z = \sum m_i r^2 = \sum m_i (x^2 + y^2) = \sum m_i[x_1^2 + (y_1 + d)^2]$$

$$= \sum m_i(x_1^2 + y_1^2) + 2d\boxed{\sum 0\, y_1} + d^2 \sum m_i$$

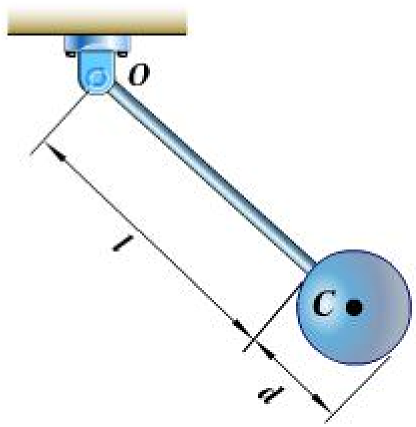
$$\boxed{J_z = J_{z_C} + md^2}$$



4．组合法

已知：杆长为 l 质量为 m_1 ，圆盘半径为 d ，质量为 m_2 .

求：J_O .



解：

$$J_O = J_{O杆} + J_{O盘}$$

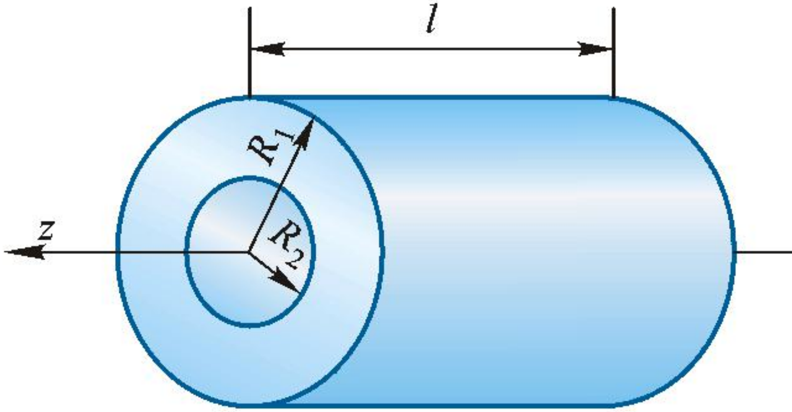
$$J_{O杆} = \frac{1}{3}ml^2$$

$$J_{O盘} = \frac{1}{2}m_2(\frac{d}{2})^2 + m_2(l+\frac{d}{2})^2$$

$$= m_2(\frac{3}{8}d^2 + l^2 + ld)$$

$$J_O = \frac{1}{3}m_1l^2 + m_2(\frac{3}{8}d^2 + l^2 + ld)$$

已知：m, R_1, R_2。　　求：J_z.



解： $J_z = J_1 - J_2$

$$= \frac{1}{2} m_1 R_1^2 - \frac{1}{2} m_2 R_2^2$$

其中 $m_1 = \rho \pi R_1^2 l \quad m_2 = \rho \pi R_2^2 l$

$$J_z = \frac{1}{2} \rho \pi l (R_1^4 - R_2^4)$$

$$= \frac{1}{2} \rho \pi l (R_1^2 - R_2^2)(R_1^2 + R_2^2)$$

由 $\rho \pi l (R_1^2 - R_2^2) = m$，得

$$J_z = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$$

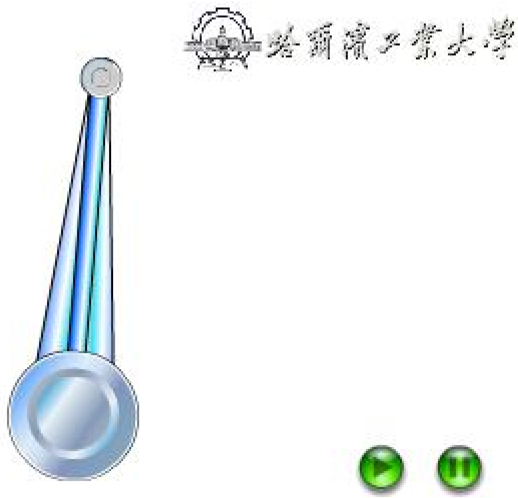
5．实验法

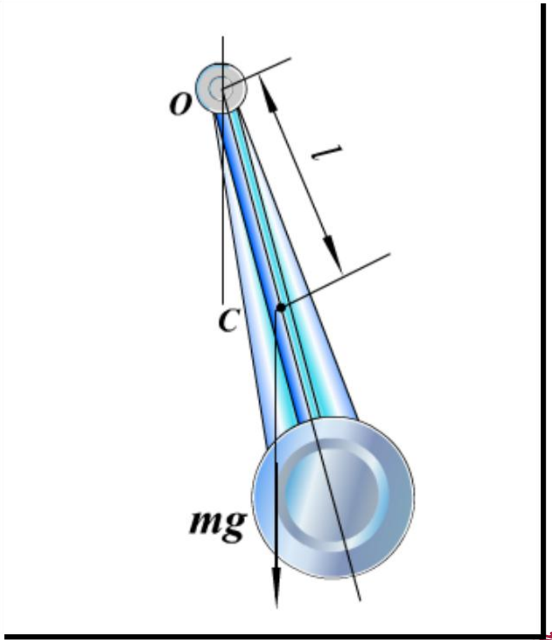
思考： 如图所示复摆如何确定对转轴的转动惯量?

将曲柄悬挂在轴 O上，作微幅摆动.

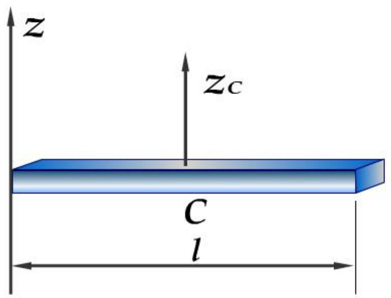
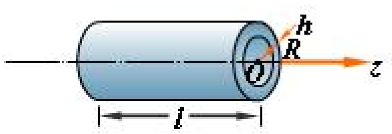
由 $$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

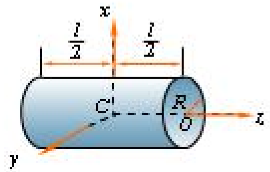
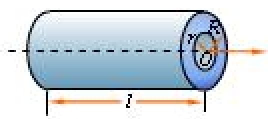
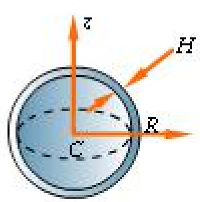
其中 m,l 已知, T 可测得，从而求得 J .

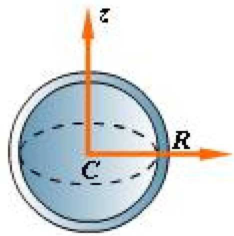
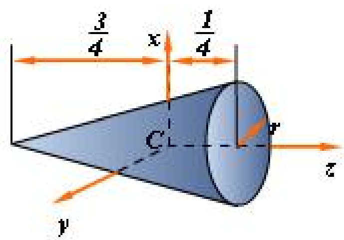
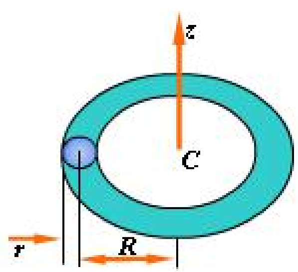


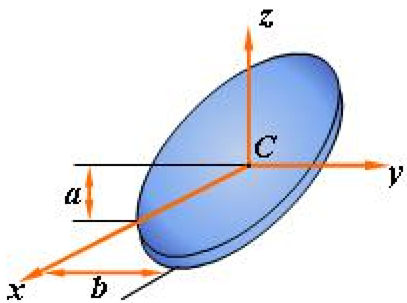
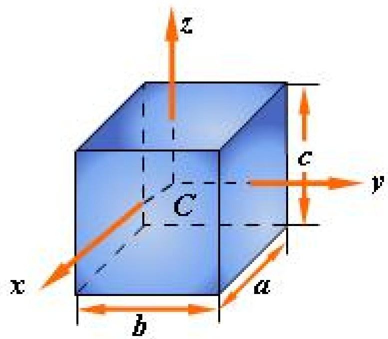
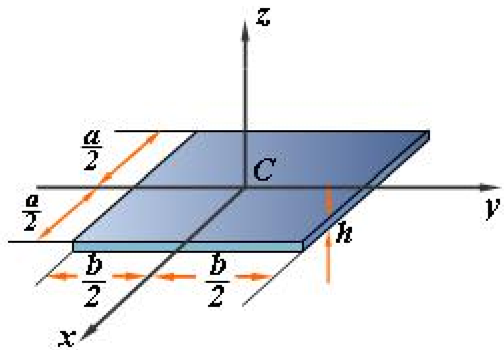


6. 查表法　均质物体的转动惯量

物体的形状	简　图	转动惯量	惯性半径	体积
细直杆		$J_{z_C}=\frac{m}{12}l^2$ $J_z=\frac{m}{3}l^2$	$\rho_{z_C}=\frac{l}{2\sqrt{3}}$ $\rho_z=\frac{l}{\sqrt{3}}$	
薄壁圆筒		$J_z=mR^2$	$\rho_z=R$	$2\pi Rlh$

圆柱		$J_Z=\frac{1}{2}mR^2$ $J_x=J_y$ $=\frac{m}{12}(3R^2+l^2)$	$\rho_z=\frac{R}{\sqrt{2}}$ $\rho_x=\rho_y$ $=\sqrt{\frac{1}{12}(3R^2+l^2)}$	$\pi R^2 l$
空心圆柱		$J_z=\frac{m}{2}(R^2+r^2)$	$\rho_z=\sqrt{\frac{1}{2}(R^2+r^2)}$	$\pi l(R^2-r^2)$
薄壁空心球		$J_z=\frac{2}{3}mR^2$	$\rho_z=\sqrt{\frac{2}{3}R}$	$\frac{3}{2}\pi Rh$

实心球		$J_z = \frac{2}{5} mR^2$	$\rho_z = \sqrt{\frac{2}{5}} R$	$\frac{3}{4}\pi R^3$
圆锥体		$J_z = \frac{3}{10} mr^2$ $J_x = J_y$ $= \frac{3}{80} m(4r^2 + l^2)$	$\rho_z = \sqrt{\frac{3}{10}} r$ $\rho_x = \rho_y$ $= \sqrt{\frac{3}{80}(4r^2 + l^2)}$	$\frac{\pi}{3} r^2 l$
圆环		$J_z = m(R^2 + \frac{3}{4} r^2)$	$\rho_z = \sqrt{R^2 + \frac{3}{4} r^2}$	$2\pi^2 r^2 R$

椭圆形薄板		$J_z=\frac{m}{4}(a^2+b^2)$ $J_y=\frac{m}{4}a^2$ $J_y=\frac{m}{4}b^2$	$\rho_z=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ $\rho_x=\frac{a}{2}$ $\rho_y=\frac{b}{2}$	πabh
长方体		$J_z=\frac{m}{12}(a^2+b^2)$ $J_y=\frac{m}{12}(a^2+c^2)$ $J_y=\frac{m}{12}(b^2+c^2)$	$\rho_z=\sqrt{\frac{1}{12}(a^2+b^2)}$ $\rho_x=\sqrt{\frac{1}{12}(a^2+c^2)}$ $\rho_y=\sqrt{\frac{1}{12}(b^2+c^2)}$	abc
矩形薄板		$J_z=\frac{m}{12}(a^2+b^2)$ $J_y=\frac{m}{12}a^2$ $J_y=\frac{m}{12}b^2$	$\rho_z=\sqrt{\frac{1}{12}(a^2+b^2)}$ $\rho_x=0.289a$ $\rho_y=0.289b$	abh

§11-5　质点系相对于质心的动量矩定理

1. 对质心的动量矩

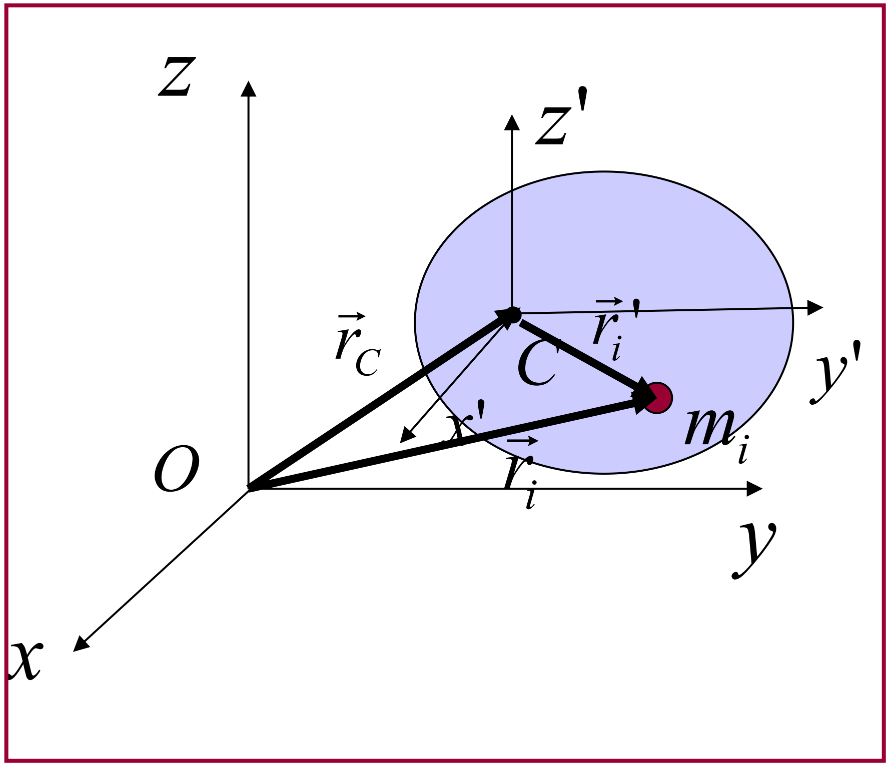
$$\vec L_C = \sum \vec M_C\left(m_i \vec v_i\right) = \sum \vec r_i' \times m_i \vec v_i \overset{?}{=} \sum \vec r_i' \times m_i \vec v_{ir}$$

$$\vec v_i = \vec v_C + \vec v_{ir}$$

$$\vec L_C = \underbrace{\sum \vec r_i' \times m_i \vec v_C}_{0} + \sum \vec r_i' \times m_i \vec v_{ir}$$

$$\sum \vec r_i' \times m_i \vec v_C = \left(\sum m_i \vec r\,'_i\right) \times \vec v_C = 0$$

$$\vec L_C = \sum \vec r_i' \times m_i \vec v_{ir}$$



$$\vec L_O = \sum (\vec r_C + \vec r\,') \times m_i \vec v_i$$

$$= \vec r_C \times \underbrace{\sum m_i \vec v_i}_{m\vec v_C} + \underbrace{\sum (\vec r\,' \times m_i \vec v_i)}_{\vec L_C}$$

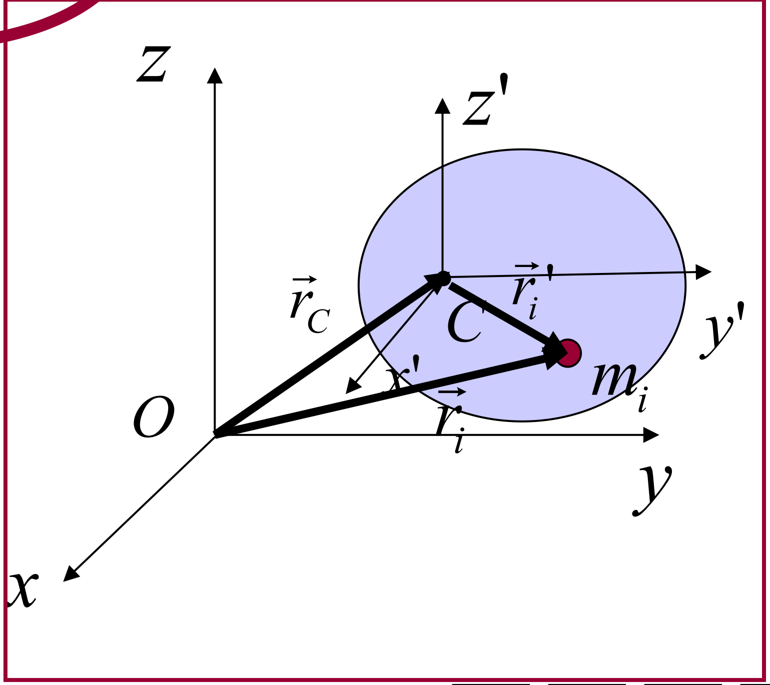
$$\vec L_O = \vec r_C \times m\vec v_C + \vec L_C$$

2　相对质心的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_C\times m\vec{v}_C+\vec{L}_C\right)=\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

$$\boxed{\vec{v}_C\times m\vec{v}_C = 0}+\vec{r}_C\times\boxed{\sum\vec{F}_i^{(e)}}+\frac{\mathrm{d}\vec{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{r}_C\times\vec{F}_i^{(\mathrm{e})}+\sum\vec{r}_i'\times\vec{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{r}'_i\times\vec{F}_i^{(\mathrm{e})}\qquad\frac{\mathrm{d}\vec{L}_C}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{M}_C(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})})$$

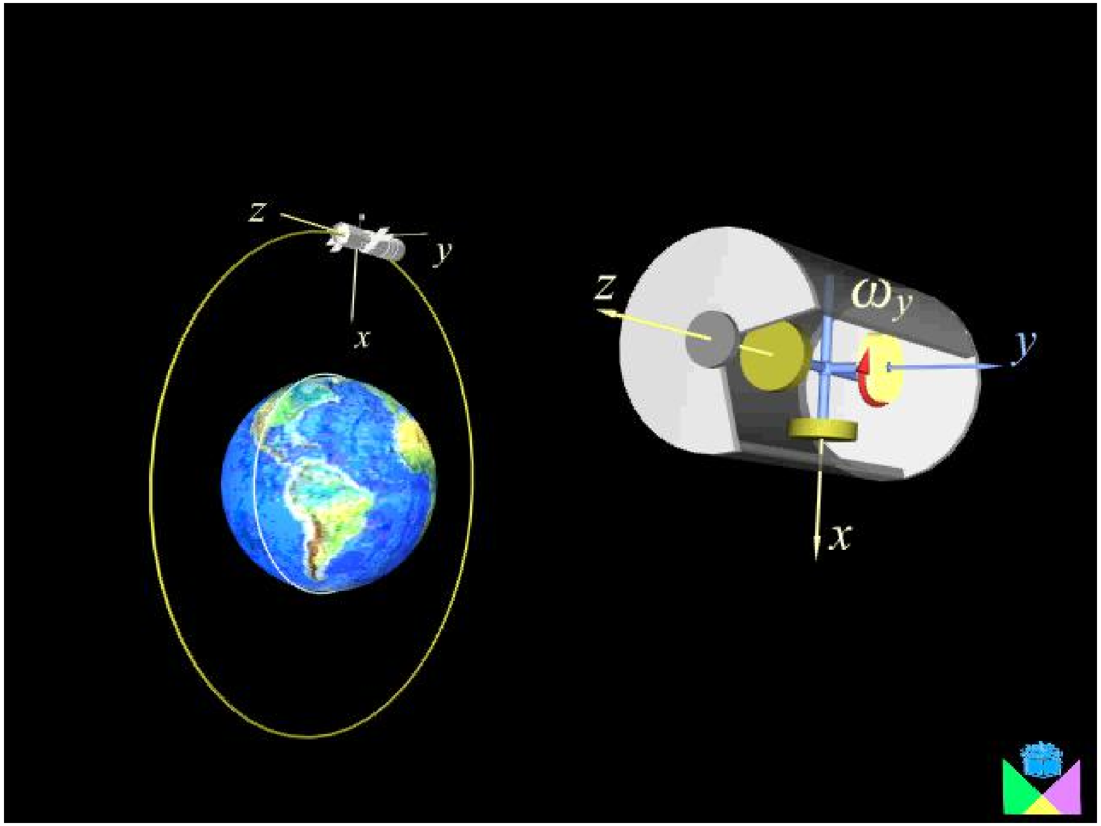


——质点系相对于质心的动量矩定理

质点系相对于质心的动量矩对时间的导数，等于作用于质点系的外力对质心的主矩.

思考：如何实现卫星姿态控制？

动量矩守恒定律实例

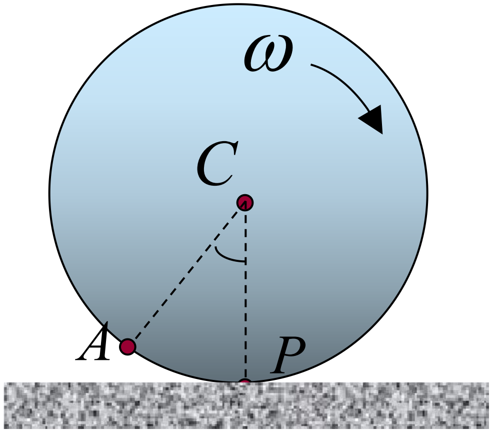


航天器中反作用轮姿
态控制系统示意简图

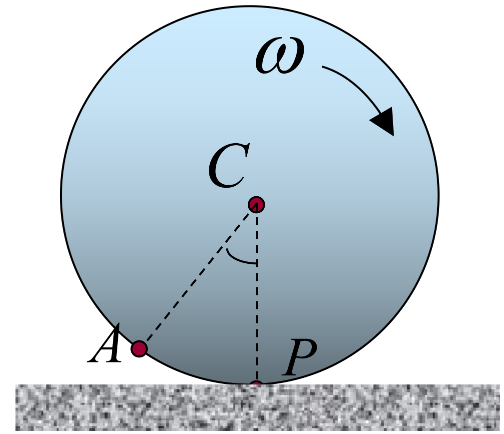
例11-7

已知：均质圆盘质量为m，半径为R，沿地面纯滚动，角速度为 ω 。

求：圆盘对A、C、P三点的动量矩。



解： 点C为质心 $L_C = J_C\omega = \dfrac{mR^2}{2}\omega$



点P为瞬心 $L_P = J_P\omega = \dfrac{3mR^2}{2}\omega$

或

$$L_P = mv_C R + L_C = mR^2\omega + \frac{1}{2}mR^2\omega = \frac{3mR^2}{2}\omega$$

$$L_A = mv_C\frac{\sqrt{2}}{2}R + L_C = \frac{\sqrt{2}}{2}mR^2\omega + \frac{1}{2}mR^2\omega = \frac{(\sqrt{2}+1)mR^2}{2}\omega$$

是否可以如下计算：

$$L_A = J_A\omega = (J_C + mR^2) = \frac{3mR^2}{2}\omega$$

§ 11-6 刚体的平面运动微分方程

$$\text{平面运动}\begin{cases}\text{随质心平移}\\ \text{绕质心转动}\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} m\vec{a}_C &= \Sigma \vec{F}^{(\mathrm{e})} \\ J_C\alpha &= \Sigma M_C(\vec{F}^{(\mathrm{e})}) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2} &= \Sigma \vec{F}^{(\mathrm{e})} \\ J_C\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} &= \Sigma M_C(\vec{F}^{(\mathrm{e})}) \end{aligned}\right\}$$

投影式:

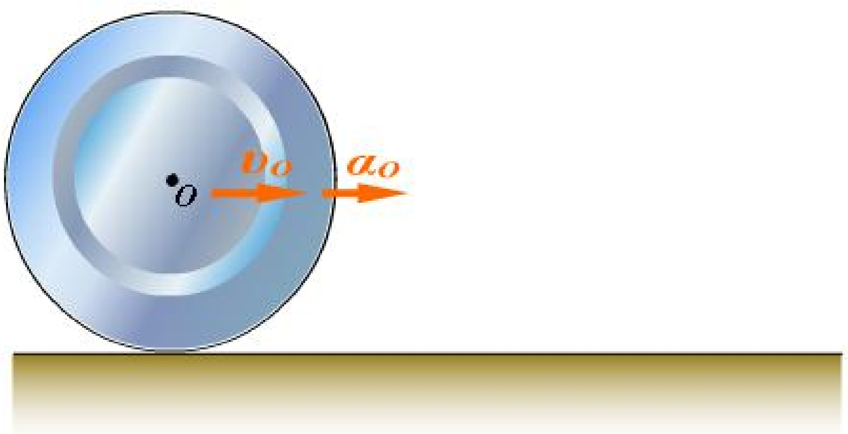
$$\boxed{\left.\begin{aligned} ma_{Cx} &= \Sigma F_x^{(\mathrm{e})} \\ ma_{Cy} &= \Sigma F_y^{(\mathrm{e})} \\ J_C\alpha &= \Sigma M_C(\vec{F}^{(\mathrm{e})}) \end{aligned}\right\}}$$

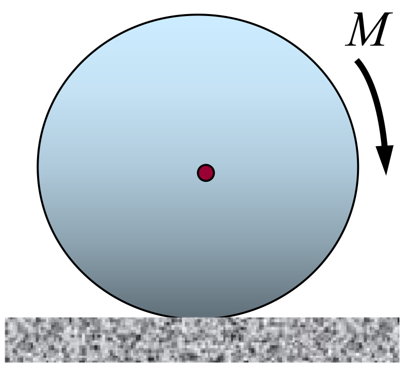
$$\boxed{\left.\begin{aligned} ma_C^{\mathrm{t}} &= \Sigma F_t^{(\mathrm{e})} \\ ma_C^{\mathrm{n}} &= \Sigma F_n^{(\mathrm{e})} \\ J_C\alpha &= \Sigma M_C(\vec{F}^{(\mathrm{e})}) \end{aligned}\right\}}$$

以上各组均称为刚体平面运动微分方程.

例11-8

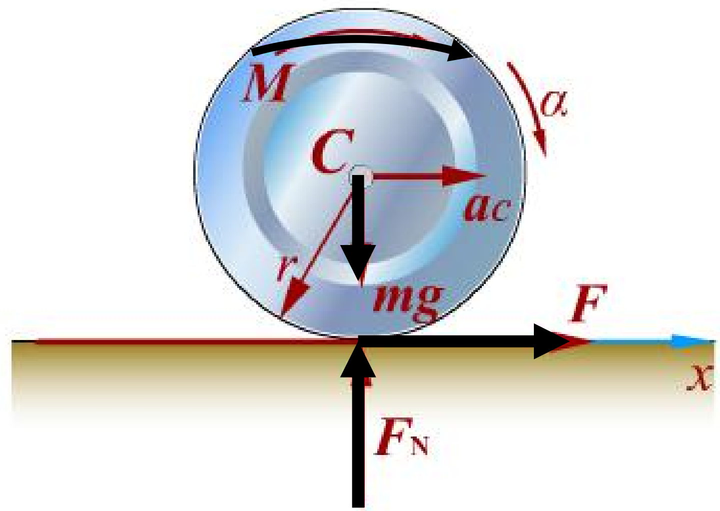
已知：半径为r，质量为m 的均质圆轮沿水平直线滚动，如图所示. 设轮的惯性半径为ρ_C，作用于轮的力偶矩为M. 求轮心的加速度. 如果圆轮对地面的滑动摩擦因数为f，问力偶M 必须符合什么条件不致使圆轮滑动?





解：

$$\left.\begin{aligned} m a_C &= F \\ m\,0 &= F_N - mg \\ m\rho_C^2\alpha &= M - Fr \end{aligned}\right\}$$



$$a_C = r\alpha$$

$$a_C = \frac{Mr}{m\left(\rho_C^2 + r^2\right)}, \quad M = \frac{F\left(r^2 + \rho_C^2\right)}{r},$$

$$F = m a_C, \quad F_N = mg$$

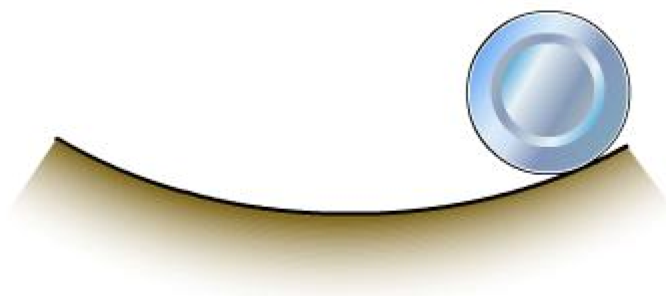
纯滚动的条件： $F \le f_s F_N$

即 $$M \le f_s mg \frac{r^2 + \rho_C^2}{r}$$

例11-9

已知：均质圆轮半径为r 质量为m ，受到轻微扰动后，在半径为R 的圆弧上往复滚动，如图所示. 设表面足够粗糙，使圆轮在滚动时无滑动.

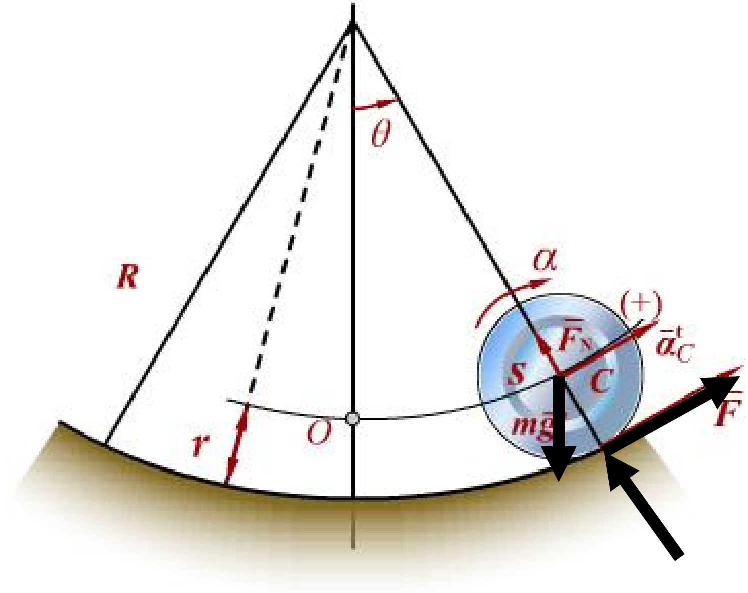
求:质心C 的运动规律.



解：$ma_C^{\mathrm{t}} = F - mg\sin\theta$

$$m\frac{v_C^2}{R-r} = F_N - mg\cos\theta$$

$$J_C\alpha = -Fr$$



$$a_C^{\mathrm{t}} = \alpha r \qquad s = (R-r)\theta$$

$$a_C^{\mathrm{t}} = \ddot{S},\ J_C = \frac{1}{2}mr^2,\ \sin\theta \approx \theta\ (\theta\text{很小})$$

$$\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{R-r}s = 0 \qquad s = s_0\sin(\omega_0 t + \beta) \qquad \omega_0^2 = \frac{2g}{3(R-r)}$$

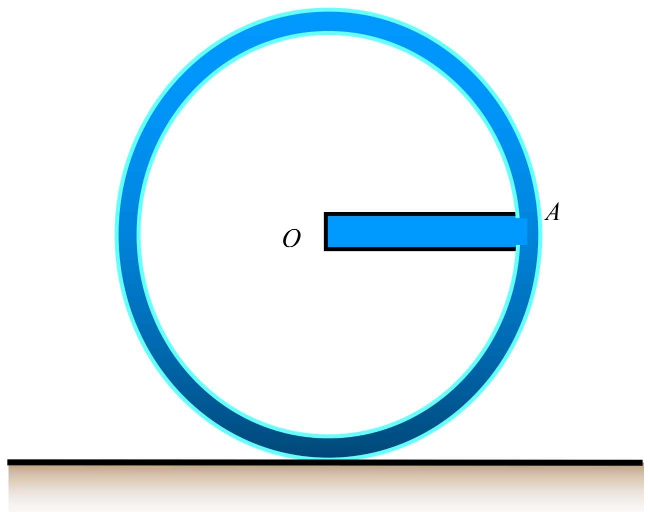
初始条件 $s = 0,\quad \dot{s} = v_0,$ $\Rightarrow$ $\beta = 0^\circ,\quad s_0 = v_0\sqrt{\dfrac{3(R-r)}{2g}}$

运动方程为 $$s = v_0\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}\sin\left(\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}\cdot t\right)$$

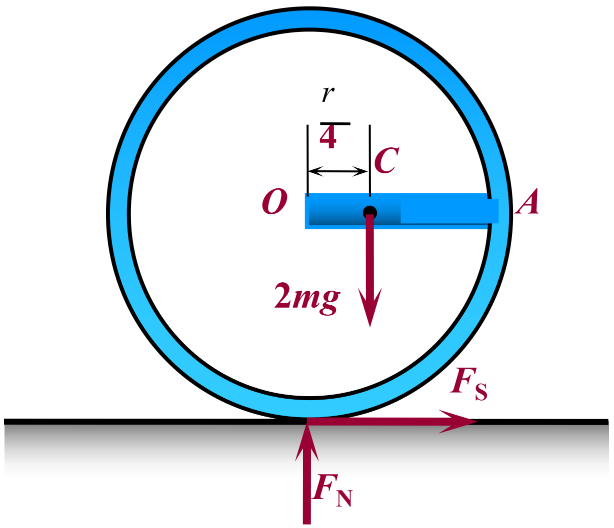
例11-10

已知：如图所示均质圆环半径为r，质量为m，其上焊接刚杆OA，杆长为r，质量也为m。用手扶住圆环使其在OA水平位置静止。设圆环与地面间为纯滚动。

求：放手瞬时，圆环的角加速度，地面的摩擦力及法向约束力。



解： 整体质心为*C*，其受力如图所示



(a)

建立平面运动微分方程

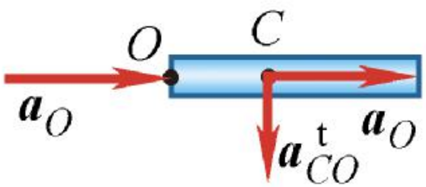
$$2ma_{Cx} = F_s$$

$$2ma_{Cy} = 2mg - F_N$$

$$J_C\alpha = F_N \cdot \frac{r}{4} - Fr$$

其中：$J_C = \frac{mr^2}{12} + m(\frac{r}{4})^2 + mr^2 + m(\frac{r}{4})^2 = \frac{29}{24}mr^2$

由求加速度基点法有



$$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \vec{a}_{co}^n + \vec{a}_{co}^t$$

投影到水平和铅直两个方向

$$a_{Cx} = a_O = r\alpha \qquad a_{Cy} = a_{CO}^t = \frac{1}{4} r\alpha$$

$$\alpha = \frac{3}{20}\frac{g}{r}$$ 顺时针

$$F_s = \frac{3}{10} mg \qquad F_N = \frac{77}{40} mg$$