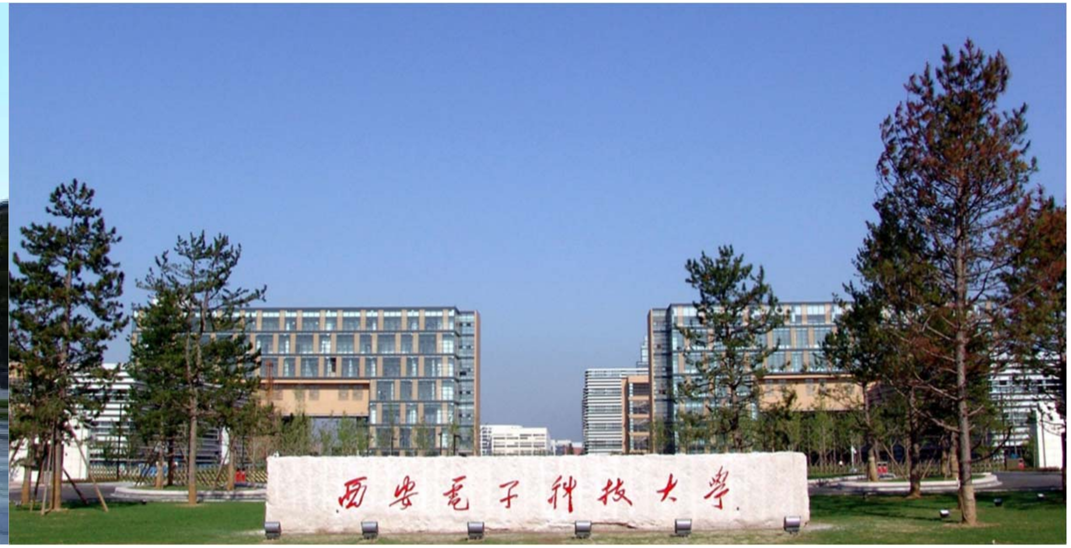
西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

航天器控制原理



冯冬竹
电话：13389281325

空间科学与技术学院 导航控制系

目录

CONTENTS

航天器的轨道与轨道力学

第三讲·航天器轨道的几何特性

轨道的几何方程

$$\ddot{\vec{r}}+\frac{\mu}{r^3}\vec{r}=0 \xrightarrow{\vec{h}} \left(\ddot{\vec{r}}+\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\right)\times\vec{h}=0$$

$$\ddot{\vec{r}}\times\vec{h}+\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\times\vec{h}=0 \longrightarrow \ddot{\vec{r}}\times\vec{h}=-\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\times\vec{h}$$

$$\downarrow \ \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\ddot{\vec{r}}\times\vec{h}=\frac{\mu}{r^3}\vec{h}\times\vec{r}$$

轨道的几何方程

01

$$\ddot{\vec{r}}\times\vec{h}=\frac{\mu}{r^3}\vec{h}\times\vec{r}$$

$$\ddot{\vec{r}}\times\vec{h}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{h}\right)=\ddot{\vec{r}}\times\vec{h}+\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{h}}$$

$\vec{h}$守恒 $\dot{\vec{h}}=0$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{h}\right)=\ddot{\vec{r}}\times\vec{h}$$

轨道的几何方程

02

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3} \vec{h} \times \vec{r}$$

$$\frac{\mu}{r^3} \vec{h} \times \vec{r} \xrightarrow{\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}} \frac{\mu}{r^3} \vec{h} \times \vec{r} = \frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r}$$

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r\dot{r} \qquad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$\frac{\mu}{r^3} \vec{h} \times \vec{r} = \frac{\mu}{r} \vec{v} - \frac{\mu \dot{r}}{r^2} \vec{r}$$

$$\frac{\mu}{r^3} \vec{h} \times \vec{r} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

轨道的几何方程

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = \frac{\mu}{r^3}\vec{h} \times \vec{r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}\right) = \mu \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

两边同时积分

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \mu \frac{\vec{r}}{r} + \vec{B}$$

$\vec{B}$是积分常矢量

$\vec{r}$

$$\vec{r} \cdot \left(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}\right) = \mu \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} + \vec{r} \cdot \vec{B}$$

轨道的几何方程

$$\vec{r}\cdot\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{h}\right)=\mu\vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}+\vec{r}\cdot\vec{B}$$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2$ $\quad$ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$

$$\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\cdot\vec{h}=\mu r+\vec{r}\cdot\vec{B}$$

$$h^2=\mu r+rB\cos\theta$$

θ是常矢量$\vec{B}$和矢径$\vec{r}$之间的夹角

$$r=\frac{h^2/\mu}{1+(B/\mu)\cos\theta}$$

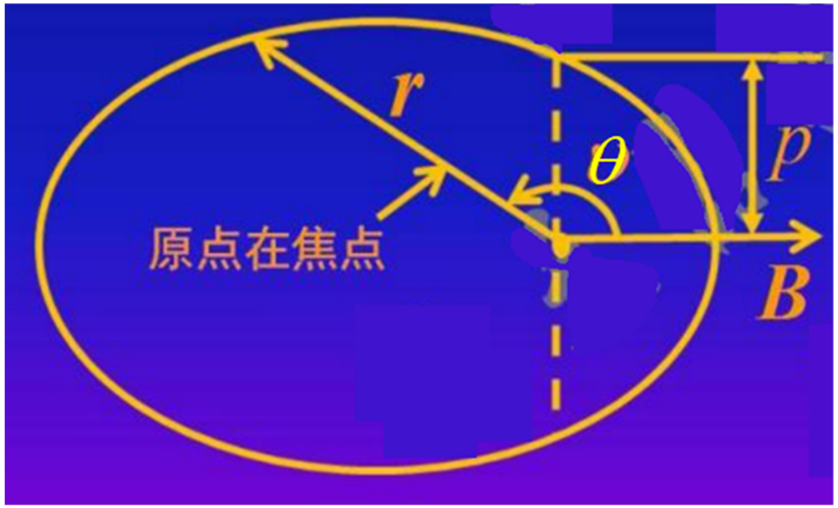
$p=h^2/\mu$ $\quad$ $e=B/\mu$

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$$

轨道的几何方程

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$$

- 圆锥曲线的极坐标方程；
- 中心引力体的质心就是极坐标的原点，位于一个焦点上；
- 极角θ为r与圆锥曲线上离焦点距离最近的一点与焦点连线间的夹角；
- 常数p成为“半正焦弦”，常数e称为“偏心率”。



$$\text{当}\begin{cases} e=0 & \text{圆} \\ 0<e<1 & \text{椭圆} \\ e=1 & \text{抛物线} \\ e>1 & \text{双曲线} \end{cases}$$

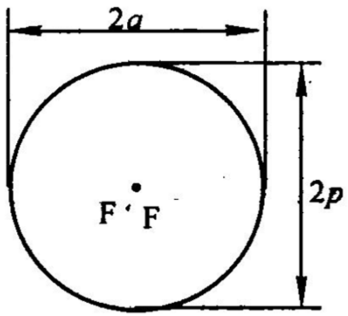
□航天器的轨道运动

- 圆锥曲线族(圆、椭圆、抛物线、双曲线)为二体问题中的航天器惟一可能的运动轨道;
- 中心引力体中心必定为圆锥曲线轨道的一个焦点;
- 当航天器沿着圆锥曲线轨道运动时，其比机械能(单位质量的动能和势能之和)保持不变;
- 航天器绕中心引力体运动，当 $\vec{r}$ 和 $\vec{v}$ 沿轨道变化时，比角动量 $\vec{h}$ 保持不变;
- 轨道运动总是处在一个固定于惯性空间的平面内。

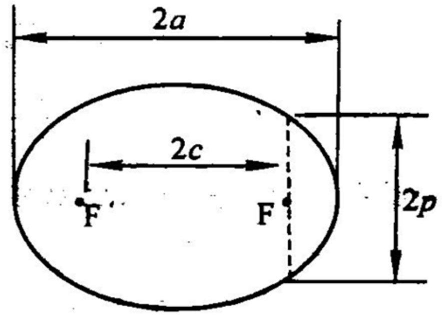
轨道的几何性质

1、圆锥曲线轨道的几何参数

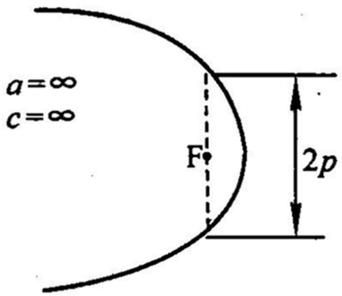
圆锥曲线轨道包括圆、椭圆、抛物线和双曲线4种类型的轨道



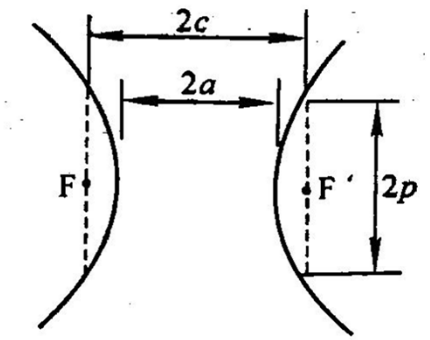
圆



椭圆



抛物线



双曲线

轨道的几何性质

- 所有圆锥曲线均有两个焦点F和F'。主焦点F代表中心引力体所在的位置。两个焦点间的距离以$2c$表示。对于圆，两个焦点重合，所以$2c$为零；对于抛物线，认为虚焦点F′在无穷远处，所以$2c$为无穷大；对于双曲线，$2c$取负值。
- 通过两个焦点的弦长称为圆锥曲线的长轴，以$2a$表示，参数a称为长半轴或长半径。对于圆，$2a$就是直径；对于抛物线，$2a$为无穷大；对于双曲线，$2a$取负值。
- 曲线在焦点处的宽度是一个正值量，称为正焦弦(通径)，以$2p$表示。

轨道的几何性质

- 除了抛物线之外，所有的圆锥曲线均有偏心率：

$$e=\frac{c}{a}$$

$$p=a\left(1-e^{2}\right)$$

2、轨道的近拱点和远拱点

- 轨道长轴的两个端点称为拱点。
- 离主焦点近的称为近拱点，离主焦点远的称为远拱点。

主焦点到拱点距离

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}\begin{cases}\xRightarrow{\theta=0} r_{\min}=\dfrac{p}{1+e}=a(1-e)\equiv r_p\\[2ex] \xRightarrow{\theta=\pi} r_{\max}=\dfrac{p}{1-e}=a(1+e)\equiv r_a\end{cases}$$

轨道的几何性质

- 在任何圆锥曲线轨道的近拱点或远拱点(若存在)处，总有 $\vec{r} \perp \vec{v}$，所以：

$$h = r_p v_p = r_a v_a$$

其中，$v_p = \left|\vec{v}_p\right|$，$v_a = \left|\vec{v}_a\right|$

3、轨道形状与比机械能

对近拱点写出航天器的能量方程式：

$$\varepsilon=\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{r}=\frac{h^2}{2r_p^2}-\frac{\mu}{r_p}$$

$$p=a(1-e^2) \qquad p=h^2/\mu$$

$$h^2=\mu a(1-e^2)$$

$$\varepsilon=\frac{\mu a(1-e^2)}{2a^2(1-e)^2}-\frac{\mu}{a(1-e)}=-\frac{\mu}{2a}$$

轨道的几何性质

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a}$$

- 对于所有的圆锥曲线，轨道的长半轴a仅与航天器的比机械能有关。进一步说，比机械能仅与轨道上任一点的r和v有关，即：

圆和椭圆轨道：$a > 0$　　航天器的比机械能：　$\varepsilon < 0$

抛物线轨道：　$a = \infty$　　航天器的比机械能：　$\varepsilon = 0$

双曲线轨道：　$a < 0$　　航天器的比机械能：　$\varepsilon > 0$

- 仅由航天器比机械能的符号就可以确定航天器处在哪种类型的圆锥曲线轨道内。

轨道的几何性质

$$\left.\begin{aligned} p &= a(1-e^2) \\ p &= h^2/\mu \\ \varepsilon &= -\mu/2a \end{aligned}\right\} e = \sqrt{1+\frac{2\varepsilon h^2}{\mu^2}}$$

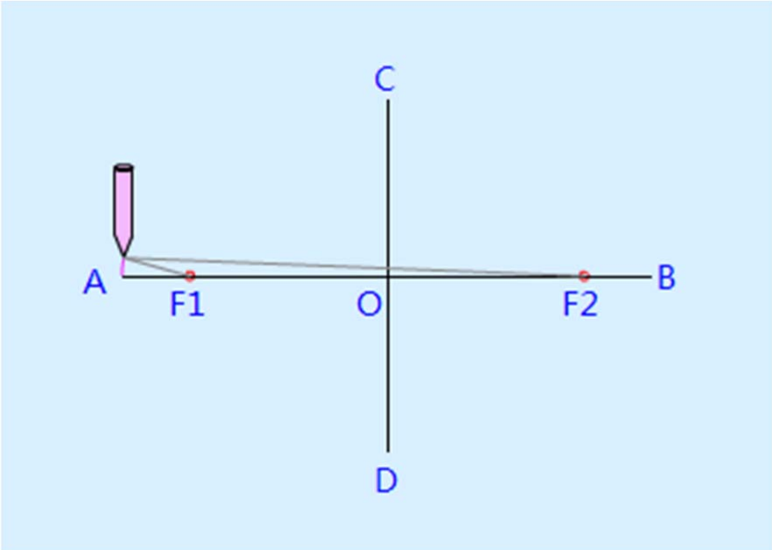
- h单独决定了p，而ε单独决定了a，它们共同决定了e，即确定了圆锥曲线轨道的具体形状。
- 当$h \neq 0$：

  若$\varepsilon < 0$，则$e < 1$，为椭圆和圆轨道；

  若$\varepsilon = 0$，则$e = 1$，为抛物线轨道；

  若$\varepsilon > 0$，则$e > 1$，为双曲线轨道；
- 当$h = 0$时，无论ε取值如何，$e = 1$。此时，航天器的轨道是一条通过中心引力体质心和航天器当前位置的直线，也是一种退化的圆锥曲线。

- 太阳系所有行星的轨道和所有围绕天体运动的航天器的轨道都是封闭曲线——椭圆。



椭圆轨道

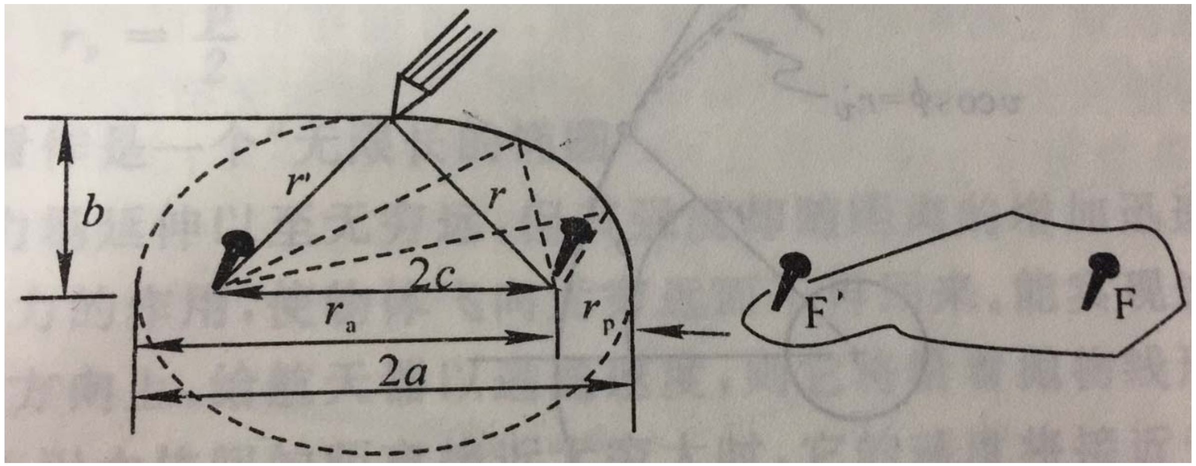
椭圆上任何一点到两个焦点的距离之和恒满足：

$$r + r' = 2a$$

$$r_a + r_p = 2a$$
$$r_a - r_p = 2c$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

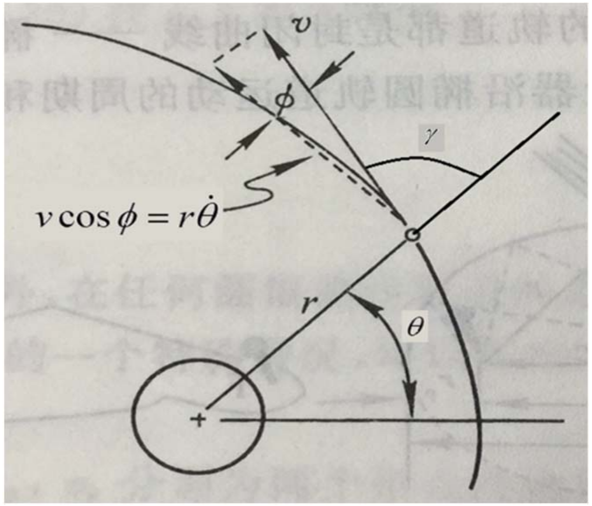
$$a^2 = b^2 + c^2$$ b为椭圆的短半轴



椭圆轨道
周期

$$\begin{cases} h = rv\sin\gamma = rv\cos\phi \\ v\cos\phi = r\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow h = rv\cos\phi = r^2\frac{d\theta}{dt}$$

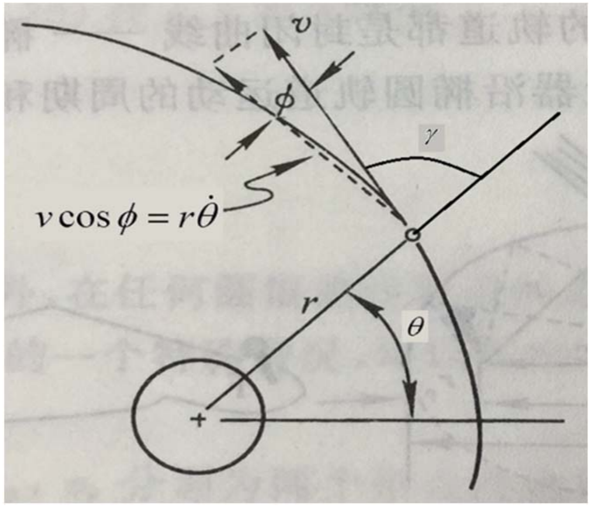
$$dt = \frac{r^2}{h}d\theta$$

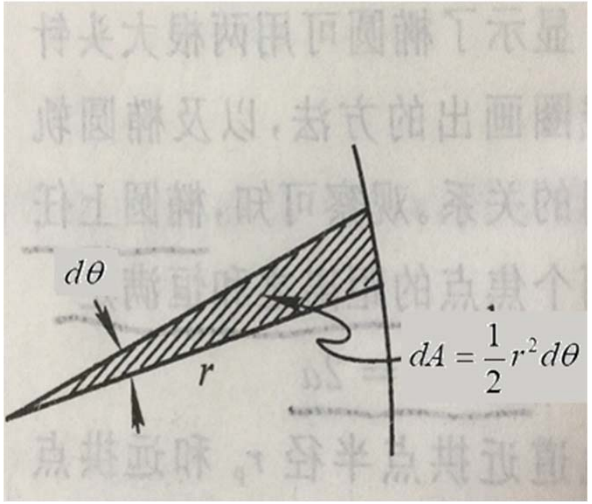


椭圆轨道

矢径转过一角度$d\theta$时，扫过的面积微元dA：

$$dA=\frac{1}{2}r^2d\theta \quad \Rightarrow \quad dt=\frac{2}{h}dA$$





椭圆轨道

$$dt = \frac{2}{h} dA$$

对于任何给定的轨道，h是一个常数，所以证明了开普勒第二定律：

“相等的时间间隔内矢径扫过的面积相等”

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} = 常数$$

椭圆轨道

在一个轨道周期内，矢径扫过整个椭圆。在一个周期内进行积分：

$$dt = \frac{2}{h} dA \rightarrow T = \frac{2\pi ab}{h}$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ e &= \frac{c}{a} \\ p &= a(1-e^2) \end{aligned}\right\} b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2(1-e^2)} = \sqrt{ap}$$

$$h = \sqrt{\mu p}$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2}$$

椭圆轨道的周期仅与长半轴的大小有关。也证明了开普勒第三定律：

“周期的平方与椭圆轨道长半轴的立方成正比”

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} = K$$

椭圆轨道
速度

当航天器在椭圆轨道上距中心引力体距离为r时，其速度大小v：

$$\varepsilon=\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{r}=-\frac{\mu}{2a} \quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{2\mu\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right)}$$

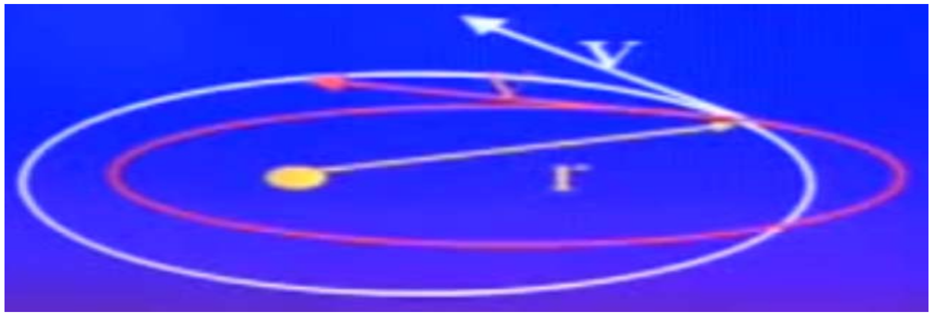
速度方向沿椭圆该点切线方向，并与航天器运动方向一致。

椭圆轨道

$$v=\sqrt{2\mu\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right)}$$

航天器在轨道内任意一点的速度，由航天器的轨道位置唯一确定。

在空间某一点，不同速度对应于不同的轨道。



圆轨道

- 圆是椭圆的特殊情况，所以刚才推导出的用于椭圆轨道的全部公式，包括周期和速度的公式都能用于圆轨道。
- 圆轨道的长半轴r_{cs}就是半径，即 $r_{cs}=a$，因此，圆轨道的周期为：

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}r_{cs}^{3/2}$$

圆轨道

- 航天器在圆周轨道上运行所必须具备的速度叫做圆周速度。当然，航天器必须在所需的高度以水平方向发射，才能实现圆形轨道。这时所说的圆周速度，意味着同时具有正确的大小和方向。在半径为 r_{cs} 的圆轨道上运行所需的速度大小：

$$v=\sqrt{2\mu\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right)} \xrightarrow{r=r_{cs}=a} v_{cs}=\sqrt{\frac{\mu}{r_{cs}}}$$

- 圆轨道的半径越大，航天器保持在轨道上运行所需的速度就越小。对于低高度的地球轨道，圆周速度约为7900m/s；而月球在其轨道上绕地球运行，其圆周速度仅需约900m/s。航天器在圆轨道上的速度恒定不变。

抛物线轨道

- 虽然某些彗星的轨道近似于抛物线，但在自然界中抛物线轨道是较为罕见的。
- 抛物线轨道引起人们的兴趣，是因为它处在闭合轨道与非闭合轨道的分界状态。
- 物体以抛物线轨道运行，那么它将一去不复返地飞向无穷远处。

抛物线轨道

- 当抛物线逐渐延伸时，其上下两支将越来越趋于平行，而且由于e=1，所以近拱点距离为：

$$r_p = \frac{p}{1+e} \longrightarrow r_p = \frac{p}{2}$$

- 抛物线轨道不存在远拱点，它可以看作是一个“无限长的椭圆”。

抛物线轨道

- 从理论上说，太阳或行星的引力场延伸以至无穷远，但其强度却随距离的增加迅速地减少，所以只须有限的动能就可克服引力的作用，使物体飞向无穷远而不再回来。能实现这一目的的最小速度称为逃逸速度。
- 在任一方向上，给航天器以逃逸速度，则它将沿着抛物线形的逃逸轨道运动。
- 从理论上讲，当它与中心引力体间的距离接近无穷大时，它的速度将接近于零。

- 在离中心距离为r的某点写出能量方程，该点“当地逃逸速度”为v_{esc}；然后，对无穷远点写出能量方程，无穷远点的速度v_∞为零。由于能量不变，所以得到：

$$\varepsilon=\frac{v_{esc}^2}{2}-\frac{\mu}{r}=\frac{v_\infty^2}{2}-\frac{\mu}{r_\infty}=0$$

$$v_{esc}=\sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

抛物线轨道

- 如果航天器在无穷远点的速度为零，则其比机械能ε必定为零。又因为 $\varepsilon = -\mu/2a$ ，所以逃逸轨道的长半轴a必须是无穷大，这证实了逃逸轨道确实是抛物线。

- 离中心引力体越远(r越大)，则为了逃逸出剩余引力场所需的速度就越小。地球表面的逃逸速度为11200m/s，而地面上空3400km处的逃逸速度仅需7900m/s。

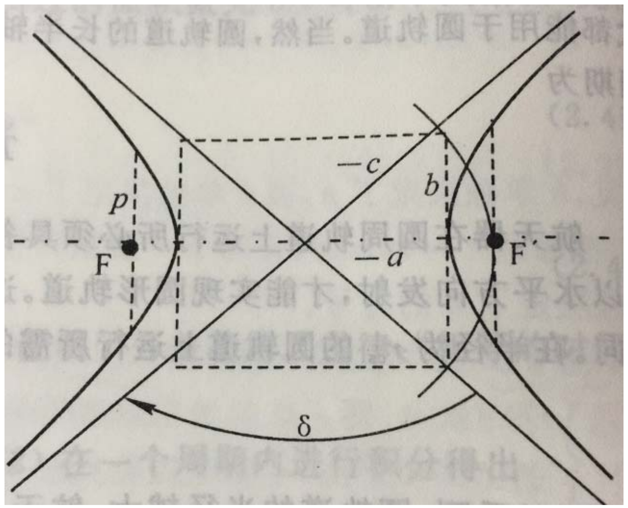
$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

双曲线轨道

- 撞击地球的流星和从地球上发射的星际探测器，它们相对于地球，都是按双曲线轨道飞行的。
- 如果要航天器在脱离了地球引力场后，还剩余一些速度，则它们必须按双曲线轨道飞行。

双曲线轨道

- 若把左边的焦点F看作主焦点(中心引力体质心位于此点)，那么只有左边的一支才是可能的轨道。
- 反之，若航天器和位于F的天体间有排斥力(例如带有同种电荷的两个粒子间的力)，则右边的一支代表了运行轨道。

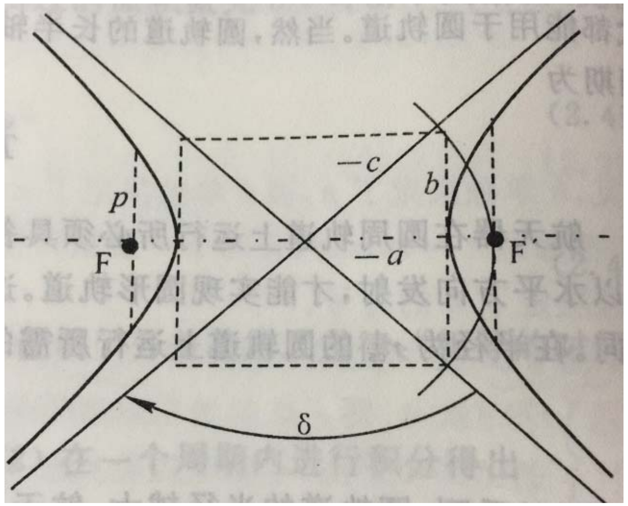


双曲线轨道

- 若两渐近线间的夹角标为δ，则它表示了航天器与行星相遇时，其轨道应拐过的角度。拐角δ与双曲线的几何参数的关系为：

$$\sin\frac{\delta}{2}=\frac{a}{c}=\frac{1}{e}$$

- 双曲线的偏心率越大，拐角δ越小。



双曲线轨道

- 因为比机械能沿轨道保持不变，所以令熄火点处和无穷远处的比机械能相等，即：

$$\varepsilon = \frac{v_{bo}^2}{2} - \frac{\mu}{r_{bo}} = \frac{v_{\infty}^2}{2} - \frac{\mu}{r_{\infty}}$$

$$v_{\infty}^2 = v_{bo}^2 - \frac{2\mu}{r_{\infty}} = v_{bo}^2 - v_{esc}^2$$

- 称航天器在双曲线轨道无穷远处的速度为剩余速度 v_{∞}：

$$v_{bo}^2 = v_{\infty}^2 + v_{esc}^2$$

- 若v_{∞}为零，如同抛物线轨道情况，熄火点速度v_{bo}就变为逃逸速度。

双曲线轨道

- 因为比机械能沿轨道保持不变，所以令熄火点处和无穷远处的比机械能相等，即：

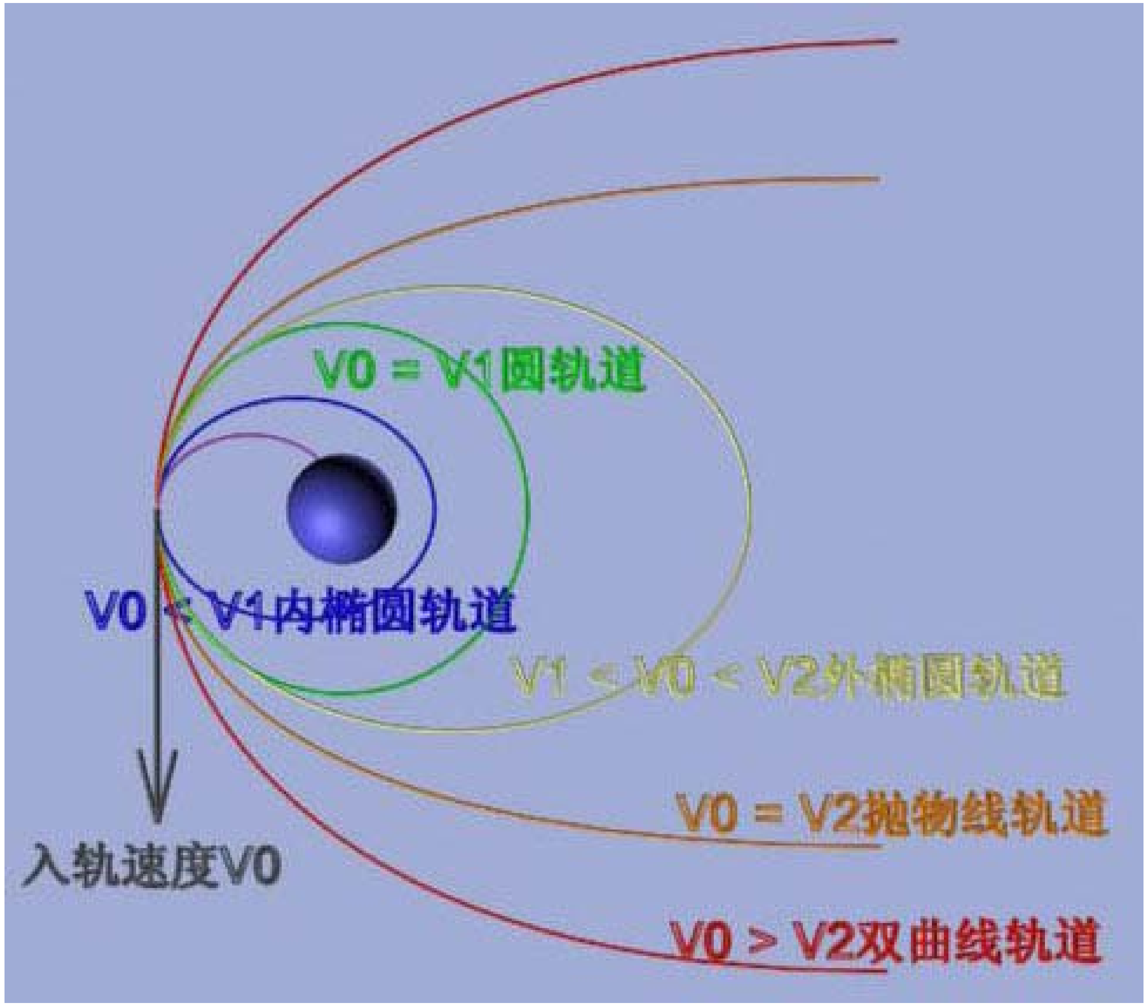
$$\varepsilon = \frac{v_{bo}^2}{2} - \frac{\mu}{r_{bo}} = \frac{v_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{r_\infty}$$

$$v_\infty^2 = v_{bo}^2 - \frac{2\mu}{r_\infty} = v_{bo}^2 - v_{esc}^2$$

- 称航天器在双曲线轨道无穷远处的速度为剩余速度 v_∞：

$$\frac{1}{2}mv_{bo}^2 = \frac{1}{2}mv_\infty^2 + \frac{1}{2}mv_{esc}^2$$

双曲线轨道



v_1：第一宇宙速度　　v_2：第二宇宙速度

双曲线轨道

- 第一宇宙速度$v_1 = 7.9\,km/s$：卫星在地面附近环绕地球作匀速圆周运动所必须具有的速度。如果$7.9\,km/s < v < 11.2\,km/s$，它绕地球运动的轨道是椭圆。

- 第二宇宙速度$v_2 = 11.2\,km/s$：物体完全摆脱地球引力束缚，飞离地球的所需要的最小初始速度。

- 第三宇宙速度$v_3 = 16.7\,km/s$：在地球上发射的物体摆脱太阳引力束缚，飞出太阳系所需的最小初始速度。

THANKS

029-81891860