第三章 多维随机变量及其分布

2、二维连续型随机变量函数的分布

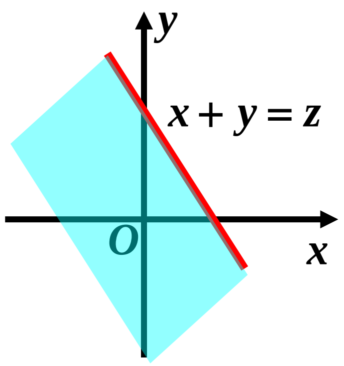
二维连续型随机变量(X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$,则Z的分布函数为：

$$F_z(z) = P(Z \le z) = P(g(X,Y) \le z) = \iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)dxdy$$

从而$Z=g(X, Y)$的概率密度为 $f_z(z) = F_z'(z)$

<1> 当Z=X+Y时， $F_z(z) = P(Z \le z) = P(X+Y \le z) = \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$

将二重积分化成二次积分(积分区域如图所示)，得：



$$F_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx\right]dy$$

$$= \int_{-\infty}^{z-y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx$$

$$F_z(z)=\int_{-\infty}^{z-y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx=\int_{-\infty}^{z-y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy\right]dx$$

由分布函数与概率密度的关系，得 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy,\quad z\in R$

同理可得 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx,\quad z\in R$

若X和Y相互独立，则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f(y)dy,\quad z\in R$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx,\quad z\in R$$

$$\triangleq f_X * f_Y$$ 卷积

例 设随机变量X, Y相互独立，且都服从正态分布$N(0, 1)$，求Z=X+Y的概率密度。

解 由于X和Y的概率密度分别为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty<x<+\infty \qquad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\ -\infty<y<+\infty$$

因此，由独立情况下的公式得

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

因此，令$t=x-z/2$，则

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}},\quad -\infty<z<+\infty$$

即Z=X+Y ～ $N(0, 2)$

若 X 和 Y独立非同分布，X～$N(\mu_1, \sigma_1^2)$， Y～$N(\mu_2, \sigma_2^2)$，求Z＝X＋Y。

做替换 $Z_1 = \dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1} \sim N(0,1)$, $\quad Z_2 = \dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2} \sim N(0,1)$

$$X + Y = aZ_1 + bZ_2 + c = \cdots \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

更一般的：有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布

$$Z = a_1X_1 + a_2X_2 + , \ldots , + a_nX_n \sim N(a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_n\mu_n, (a_1\sigma_1)^2 + (a_2\sigma_2)^2 + \ldots + (a_n\sigma_n)^2)$$

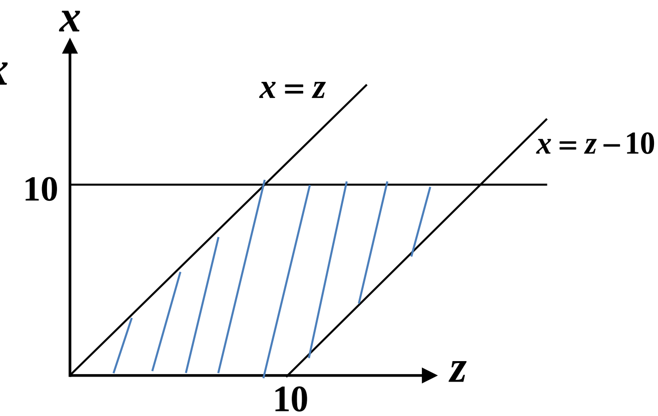
用卷积公式计算Z=X+Y的密度函数时一定要注意：当Z在不同区间取值时，被积函数的形式是否相同？积分是否要分段？

例1 在一简单电路中，两电阻R_1和R_2串联连接，设R_1，R_2相互独立，它们的概率密度均为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10\\ 0, & 其它\end{cases}$ 求总电阻$R=R_1+R_2$的概率密度$f_R(z)$。

解 $f_R(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$

仅当 $\begin{cases}0<x<10\\ 0<z-x<10\end{cases}$ 即：$\begin{cases}0<x<10\\ z-10<x<z\end{cases}$

$$f_R(z)=\int\limits_{\substack{0<x<10\\ z-10<x<z}} \frac{10-x}{50}\,\frac{10-(z-x)}{50}dx$$



$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^z \frac{(10-x)(10-z+x)}{2500}, & 0\le z<x\\ \displaystyle\int_{z-10}^{10} \frac{(10-x)(10-z+x)}{2500}, & 10<z\le 20\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{15000}(600z-60z^2+z^3), & 0\le z<x\\ \dfrac{1}{15000}(20-z)^3 & 10<z\le 20\\ 0, & 其它\end{cases}$$

例2 $X \sim U(0,1)$, $Y \sim f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$ ，X，Y独立，求Z=X+Y的 $f_Z(z)$。

解 $\begin{cases} 0<x<1 \\ z-x>0 \Rightarrow x<z \end{cases}$

$$f_Z(z)=\begin{cases} \int_0^z e^{-z+x}dx & 0<z<1 \\ \int_0^1 e^{-z+x}dx & z\ge 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 1-e^{-z} & 0<z<1 \\ e^{1-z}-e^{-z} & z\ge 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$Z=aX+bY$ 时如何求？

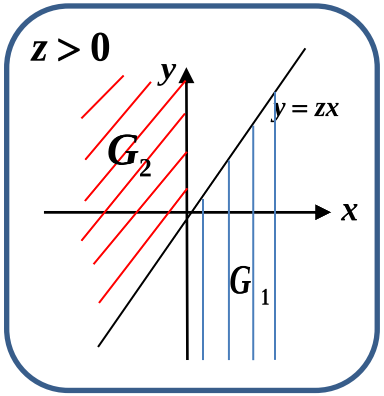
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\frac{1}{|b|}f_Y\left(\frac{z-ax}{b}\right)dx \quad \text{或} \quad f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(\frac{z-by}{a}\right)\frac{1}{|a|}f_Y(y)dy$$

$Z=\dfrac{Y}{X}$ 的概率密度如何求?

$$F_A(z)=P(Z\le z)=P(\frac{Y}{X}\le z)=\iint\limits_{\frac{y}{x}\le z} f(x,y)dxdy$$

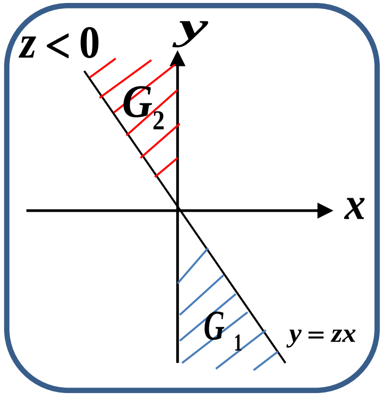
$$=\iint\limits_{G_1\cup G_2} f(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{\frac{y}{x}\le z,x<0} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{\frac{y}{x}\le z,x>0} f(x,y)dxdy$$



对应积分区域如图所示:

$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{zx}^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx+\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{zx} f(x,y)dy\right]dx$$



$$F_A(z)=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{zx}^{+\infty} f(x,y)dy\right]dx+\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{zx} f(x,y)dy\right]dx$$

做变换$y=xu$，得

$$F_A(z)=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{z}^{-\infty} xf(x,xu)du\right]dx+\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)du\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{-\infty}^{z} (-x)f(x,xu)du\right]dx+\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} xf(x,xu)du\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} |x|\,f(x,xu)du\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,f(x,xu)dx\right]du$$

由分布函数与概率密度的关系 $\Rightarrow f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,f(x,xz)dx,\quad z\in R$

若X Y独立： $=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,f_X(x)f_Y(xz)dx$

$$Z = XY$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx$$

若X Y独立：
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y(\frac{z}{x})dx$$

3、极值分布

设X Y独立，$Z=\max(X,Y)$，$W=\min(X,Y)$ 求Z ,W 的分布。

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P\{\max(X,Y)\le z\}$$

$$=P(X\le z,Y\le z)$$

若独立 $=P(X\le z)P(Y\le z)=F_X(z)F_Y(z)$

$$f_Z(z)=\left[F_X(z)F_Y(z)\right]'=f_X(z)F_Y(z)+F_X(z)f_Y(z)$$

若 $F_X(\bullet)=F_Y(\bullet)$ ，X Y为独立同分布（iid）则：$f_Z(z)=2f(z)F(z),F_Z(z)=F(z)^2$

推广：设$X_1, X_2, \dots, X_n$是n个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为

$$F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2),\cdots,F_{X_n}(x_n),$$

则 $Z=max\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$ 的分布函数为 $F_Z(z)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(z)$

若$X_1, X_2, \dots, X_n$为 iid,则 $F_Z(z)=F^n(z)$， $f_Z(z)=nF^{n-1}(z)f(z)$

W=min{ X，Y }

$$P(W \le w) = P\left\{\min(X,Y) \le w\right\}$$

$$\begin{aligned} P(\min(X,Y) \le w) &= 1 - P(\min(X,Y) > w) \\ &= 1 - P(X > w, Y > w) = 1 - P(X > w)P(Y > w) \\ &= 1 - \left[1 - F_X(w)\right]\left[1 - F_Y(w)\right] \end{aligned}$$

$$\therefore\ f_W(w) = f_X(w)\left[1 - F_Y(w)\right] + f_Y(w)\left[1 - F_X(w)\right]$$

若X Y为独立同分布（iid），$f_W(w) = 2f(w)\left[1 - F(w)\right]$

推广： N=min{X_1, X_2, … , X_n}的分布函数

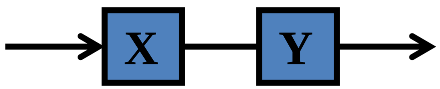
$$\begin{aligned} F_Z(z) = P(\min(X_1, X_2, ..., X_n) \le w) &= 1 - P(\min(X_1, X_2, ..., X_n) > w) \\ &= 1 - P(X_1 > w, X_2 > w, ..., X_n > w) \\ &= 1 - P(X_1 > w)P(X_2 > w)...P(X_n > w) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - F_i(w)], \quad x \in R \end{aligned}$$

例1 掷一枚骰子，记X：第一次掷的点数；Y：第二次掷的点数。求 $P(\max(X,Y)=5)$ 。

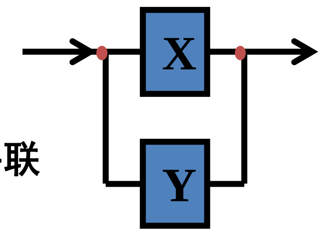
解

$$P(\max(X,Y)=5)=P(\max(X,Y)\le 5)-P(\max(X,Y)\le 4)$$
$$=P(X\le 5)P(Y\le 5)-P(X\le 4)P(Y\le 4)$$
$$=\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{4}{6}\right)^2$$

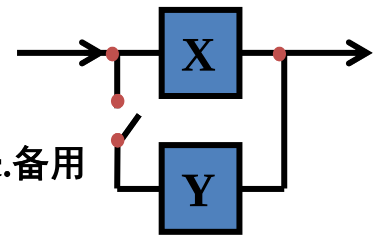
例2 $X\ Y$ 表示两个元件的寿命，服从指数分布 $X \sim E(\lambda_1),\ Y \sim E(\lambda_2)$
考虑三种情况下的寿命Z的概率密度。



a.串联



b.并联



c.备用

解

(i) 串联的情况，此时系统的寿命为 $Z = \min(X, Y)$

因为 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\lambda_1 x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

所以 X 的分布函数为

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

当 x 0 时， $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

当 $x > 0$ 时，$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} e^{-\lambda_1 t}\,dt = 1 - e^{-\lambda_1 x}$

$$\therefore F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_1 x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

同理可求得 Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_2 y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0, \end{cases}$$

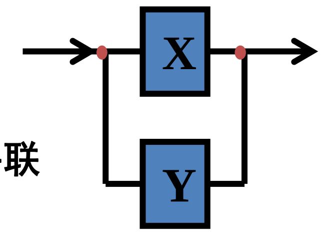
于是 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_{\min}(z)=1-\left[1-F_X(z)\right]\left[1-F_Y(z)\right]=\begin{cases}1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

$Z=\min(X,Y)$ 的概率密度为

$$f_{\min}(z)=F'_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

(ii) 并联的情况



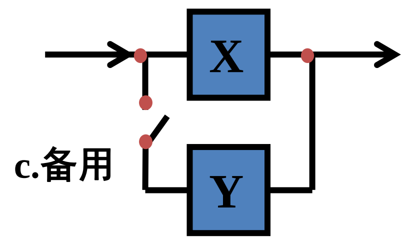
b.并联

$$Z=\max(X,Y)$$

$$F_{\max}(z)=F_X(x)F_Y(y)=\begin{cases}(1-e^{-\lambda_1 z})(1-e^{-\lambda_2 z}), & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

$$f_{\max}(z)=F'_{\max}(z)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 z}+\lambda_2 e^{-\lambda_2 z}-(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

(iii) 备用的情况



$$Z = X + Y$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

当且仅当 $\begin{cases} y > 0, \\ z - y > 0, \end{cases}$ 即 $0 < y < z$ 时

上述积分的被积函数不等于零.

故 当 $z \le 0$ 时， $f_Z(z) = 0.$

当 $z > 0$ 时，

$$f_Z(z) = \int_0^z \lambda_1 e^{-\lambda_1(z-y)} \lambda_2 e^{-\beta y} dy = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 z} \int_0^z e^{-(\lambda_2 - \lambda_1) y} dy$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z}).$$

于是$Z = X + Y$的概率密度为：

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z}) & z > 0 \\ 0 & z \le 0 \end{cases}$$