第六章　数理统计的基本概念

§1 基本概念　§2 抽样分析

一、单项选择题

（1）解应选（C）。

由于μ未知，因此选项（C）中含有未知参数，从而选项（C）不是统计量，故选（C）。

（2）解应选（D）。

由于$X \sim P(\lambda)$，因此$EX = DX = \lambda$，从而$ET_1 = \lambda$，$ET_2 = \lambda + \frac{1}{n}\lambda$，故$ET_1 < ET_2$。因为

$$DT_1 = \frac{\lambda}{n},\quad DT_2 = \frac{\lambda}{n-1} + \frac{\lambda}{n^2}$$

当$n \ge 2$时，$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n}$，所以$\frac{\lambda}{n} < \frac{\lambda}{n-1} + \frac{\lambda}{n^2}$，从而$DT_1 < DT_2$，故选（D）。

（3）解应选（B）。

由于$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，且$\mu = 1$，$\sigma = 3$，$n = 9$，因此$\frac{\bar{X} - 1}{1} \sim N(0,1)$，故选（B）。

（4）解应选（C）。

由于$X_i \sim N(1, \sigma^2), i = 1,2,3,4$，且相互独立，因此$X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$，因此

$$\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$$

同理$X_3 + X_4 \sim N(2, 2\sigma^2)$，$\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1)$，从而$\frac{(X_3 + X_4 - 2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$，且

$\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}$与$\frac{(X_3 + X_4 - 2)^2}{2\sigma^2}$相互独立，所以

$$\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|} = \frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\frac{\frac{(X_3 + X_4 - 2)^2}{2\sigma^2}}{1}}} \sim t(1)$$

故选（C）。

二、填空题

（1）解应填p，$\frac{p(1-p)}{n}$，$p(1-p)$。

由于X服从参数为$p\ (0 < p < 1)$的$0-1$分布，因此$EX = p,\ DX = p(1-p)$，从而$E\bar{X} = p$，故

填 p；$D\bar{X}=\frac{DX}{n}=\frac{p(1-p)}{n}$，故填 $\frac{p(1-p)}{n}$；$ES^2=DX=p(1-p)$，故填 $p(1-p)$。

（2）**解**应填 2。

由于

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2$$

因此 $DX=EX^2-(EX)^2=2$，从而 $ES^2=DX=2$，故填 2。

（3）**解**应填 np^2。

由于 $X\sim B(n,p)$，因此 $EX=np,\ DX=np(1-p)$，从而 $E\bar{X}=np,\ ES^2=np(1-p)$，所以

$$ET=E(\bar{X}-S^2)=E\bar{X}-ES^2=np-np(1-p)=np^2$$

故填 np^2。

三、**解**由于 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)\ (i=1,2,\cdots,16)$，因此 $\boxed{X_i-\mu\sim N(0,\sigma^2)}\ (i=1,2,\cdots,16)$，且相互独立，从而

$$E(|X_i-\mu|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=2\int_{0}^{+\infty}y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

$$D(|X_i-\mu|)=\boxed{E(X_i-\mu)^2}-[E(|X_i-\mu|)]^2=\sigma^2-\frac{2}{\pi}\sigma^2=(1-\frac{2}{\pi})\sigma^2$$

$E(X_i^2+\mu^2-2\mu X_i)=\mu^2+EX_i^2-2\mu EX_i$

所以

$$EU=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}E(|X_i-\mu|)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,\quad DU=\frac{1}{16^2}\sum_{i=1}^{16}D(|X_i-\mu|)=\frac{\sigma^2}{16}(1-\frac{2}{\pi})$$

$=\cancel{3\mu^2}+EX_i^2$

$=DX_i+(EX_i)^2$

四、**解**设 $\bar{X}$ 为样本均值，则 $\bar{X}\sim N(3.4,\frac{6^2}{n})$，从而 n 取决于如下条件：

$$P(1.4<\bar{X}<5.4)=\Phi(\frac{5.4-3.4}{6/\sqrt{n}})-\Phi(\frac{1.4-3.4}{6/\sqrt{n}})=\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3})-\Phi(-\frac{\sqrt{n}}{3})$$

$$=2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3})-1\geq 0.95$$

即 $\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3})\geq 0.975$，从而 $\frac{\sqrt{n}}{3}\geq 1.96$，即 $n\geq 34.57$，所以样本容量 n 至少应为 35。

五、解由于 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$，且 $n=10$， $\mu=0$， $\sigma=0.3$，因此

$$\frac{\sum_{i=1}^{10}X_i^2}{0.3^2}\sim\chi^2(10)$$

从而

$$P(\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44)=P(\frac{\sum_{i=1}^{10}X_i^2}{0.3^2}>\frac{1.44}{0.3^2})=P(\frac{\sum_{i=1}^{10}X_i^2}{0.3^2}>16)$$

因为 $\chi_{0.1}^2(10)=16$，所以 $P(\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44)=0.1$。

六、解（1）由于 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，且 $n=16$，因此 $\dfrac{15S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(15)$，从而

$$P(\frac{S^2}{\sigma^2}\le 2.041)=P(\frac{15S^2}{\sigma^2}\le 15\times 2.041)=1-P(\frac{15S^2}{\sigma^2}>30.615)$$

又由于 $\chi_{0.01}^2(15)=30.577$，故

$$P(\frac{S^2}{\sigma^2}\le 2.041)=1-0.01=0.99$$

（2）因为 $\dfrac{15S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(15)$，所以

$$DS^2=D(\frac{\sigma^2}{15}\cdot\frac{15S^2}{\sigma^2})=\frac{\sigma^4}{15^2}D(\frac{15S^2}{\sigma^2})=\frac{\sigma^4}{15^2}\times 2\times 15=\frac{2}{15}\sigma^4$$

七、证明由于 $\bar{X}_1\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{6})$， $\bar{X}_2\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{3})$，且 $\bar{X}_1$ 与 $\bar{X}_2$ 相互独立，因此

$$\bar{X}_1-\bar{X}_2\sim N(0,\frac{\sigma^2}{2})$$

即 $\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sigma/\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，又由于 $\dfrac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$，且 $\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sigma/\sqrt{2}}$ 与 $\dfrac{2S^2}{\sigma^2}$ 相互独立，故

$$\frac{\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sigma/\sqrt{2}}}{\sqrt{\dfrac{2S^2}{\sigma^2}\Big/2}} \sim t(2)$$

即 $Y=\dfrac{\sqrt{2}(\bar{X}_1-\bar{X}_2)}{S}\sim t(2)$。

八、**解**由于 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，又 $\mu=0$，$\sigma^2=1$，因此 $\dfrac{\bar{X}}{1/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，即 $\sqrt{n}\bar{X}\sim N(0,1)$，从而 $\left(\sqrt{n}\bar{X}\right)^2\sim\chi^2(1)$，即 $n\bar{X}^2\sim\chi^2(1)$，故 $D\left(n\bar{X}^2\right)=2$，从而 $D\left(\bar{X}^2\right)=\dfrac{2}{n^2}$。