第4章　电磁波的反射和折射

4.1 平面波向理想导体界面上的垂直入射

4.2 平面波向理想介质界面上的垂直入射

4.3 斯涅耳定律和极化的概念

4.4 平面波向理想导体界面上的斜入射

4.5 平面波向理想介质界面上的斜入射

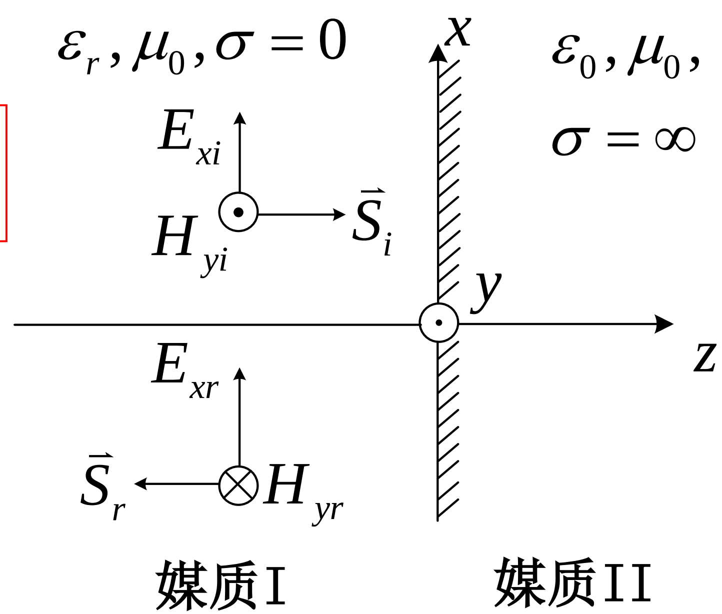
4.1 平面波向理想导体界面上的垂直入射

◆ 设媒质I是理想介质，媒质II是理想导体。由于理想导体内没有电磁场，所以当电磁波入射到理想导体表面时，必然全部反射回去。

若设 $\vec{E}_i, \vec{H}_i, \vec{S}_i$ 分别为入射波电场、磁场和能流密度矢量，$\vec{E}_r, \vec{H}_r, \vec{S}_r$ 表示反射波电场、磁场和能流密度矢量，则有：

$$\begin{cases} E_{ix} = E_{im} e^{-jkz} \\ E_{rx} = E_{rm} e^{jkz} \end{cases}$$

取入射线极化波的电场强度方向为x轴的正方向。



传播常数 $k = \beta = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

波阻抗 $\eta = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} = \dfrac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

理想介质中的场是两者的合成，即：

$$E_x = E_{ix} + E_{rx} = E_{im}e^{-jkz} + E_{rm}e^{jkz}$$

E_{im} 和 E_{rm} 的关系可通过边界条件求得。

◆ 在理想导体的边界上，电场的切向分量是连续的，即

$$\vec{n} \times \vec{E}\Big|_{z=0} = 0$$

$$E_{im} + E_{rm} = 0 \qquad\qquad E_{im} = -E_{rm}$$

定义反射系数为 $$\Gamma = \frac{E_r}{E_i}\bigg|_{z=0} = \frac{E_{rm}}{E_{im}}$$

在理想导体的边界上 $$\Gamma = \frac{E_{rm}}{E_{im}} = -1$$

理想介质中的总合成电场是

$$E_x = E_{im} e^{-jkz} + E_{rm} e^{jkz} = -E_{im}\left(e^{jkz} - e^{-jkz}\right) = -j2E_m \sin kz$$

对磁场有 $H_{iy} = \dfrac{E_{ix}}{\eta} = \dfrac{E_{im}}{\eta} e^{-jkz}, H_{ry} = -\dfrac{E_{rx}}{\eta} = -\dfrac{E_{rm}}{\eta} e^{jkz}$

总合成磁场有

$$H_y = H_{iy} + H_{ry} = \frac{E_{im}}{\eta}\left(e^{jkz} + e^{-jkz}\right) = \frac{2E_m}{\eta}\cos kz$$

还可以由Maxwell第二方程求解

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu}\nabla \times \vec{E} = \vec{e}_y \frac{2E_m}{\eta}\cos kz$$

注意：合成磁场和合成电场之间 $H_y \neq \dfrac{E_x}{\eta}$

复振幅
$$E_x = -j2E_{im}\sin kz$$
$$H_y = \frac{2E_{im}}{\eta}\cos kz$$

瞬时值
$$E_x = \mathrm{Re}\left(E_x e^{i\omega t}\right) = 2E_{im}\sin kz \sin \omega t$$
$$H_y = \mathrm{Re}\left(H_y e^{i\omega t}\right) = \frac{2E_{im}}{\eta}\cos kz \cos \omega t$$

在 $z<0$ 的空间，电磁场振幅的空间分布

在 $kz=-n\pi$ 处，即 $\frac{2\pi}{\lambda}z=-n\pi$ $z=-\frac{n\lambda}{2}$，半波长的整数倍

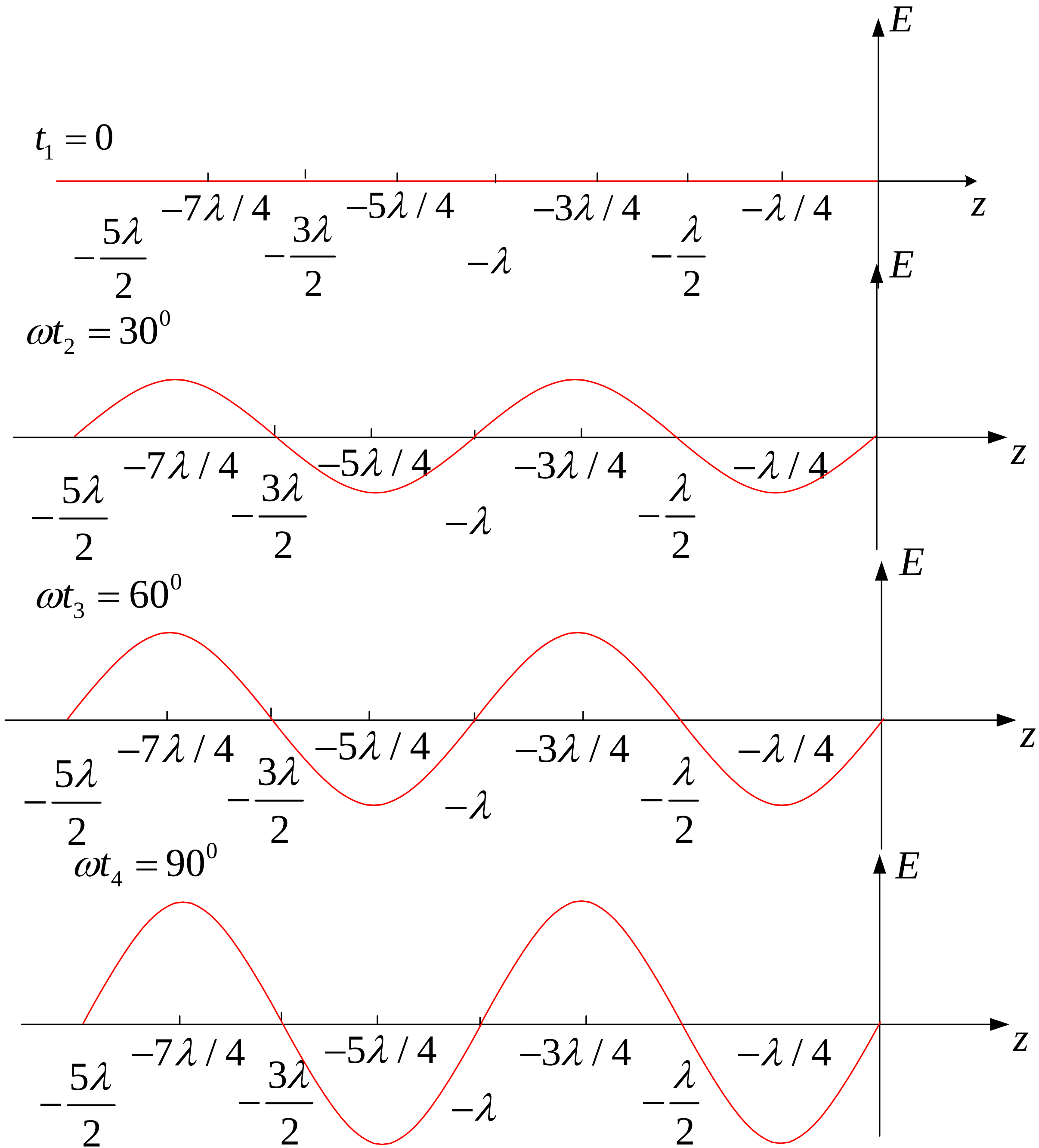
$$E_x = 0, \quad \left|H_y\right| = \left|H_y\right|_{\max} = \left|2E_{im}\cos\omega t\right|/\eta$$ 电场波节，磁场波腹

在$kz=-(2n-1)\pi/2$处，即 $z=-\frac{2n-1}{4}\lambda$，四分之一波长的奇数倍

$$\left|E_x\right| = \left|E_x\right|_{\max} = \left|2E_{im}\sin\omega t\right|, \quad \left|H_y\right| = 0$$ 电场波腹，磁场波节

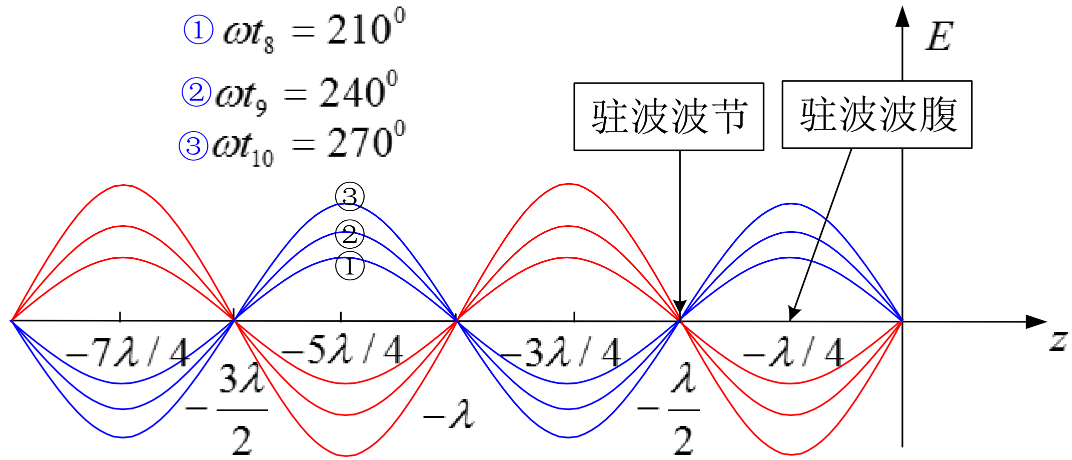
$$z=-\frac{n\lambda}{2}$$

电场波节，磁场波腹

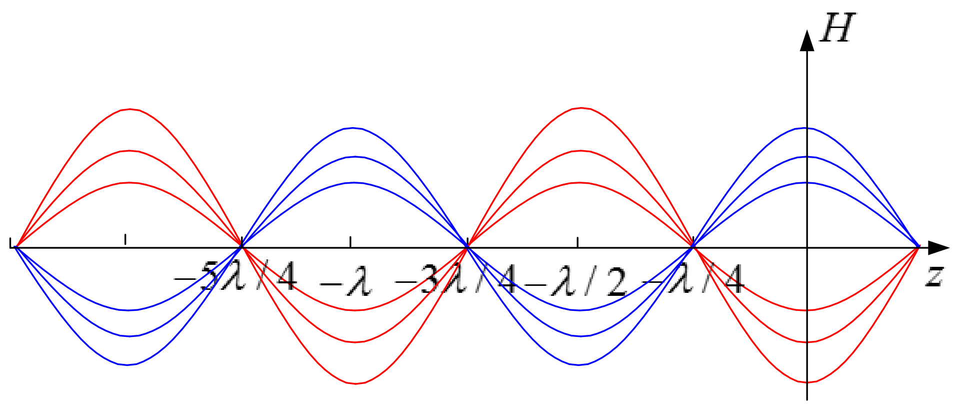


$$z=-\frac{2n-1}{4}\lambda$$

电场波腹，磁场波节



$$E_x = 2E_{im}\sin kz \sin \omega t$$



$$H_y = \frac{2E_{im}}{\eta}\cos kz \cos \omega t$$

其平均坡印廷矢量：

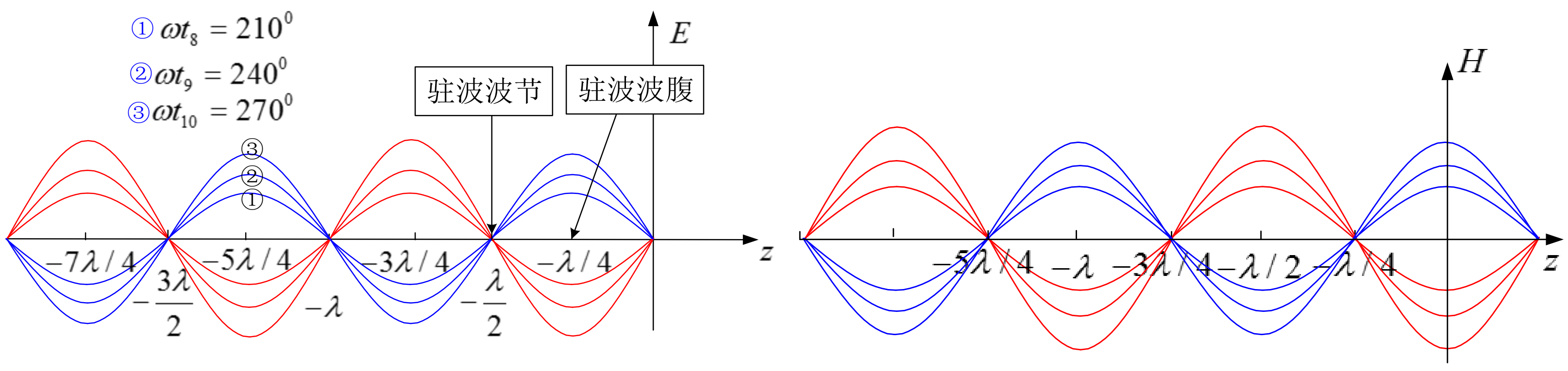
$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right) = \vec{e}_z \frac{1}{T}\int_0^T S_z dt = 0$$

即此时没有能量传输。

➢ 从分布曲线可以看出：

1. 在不同的时刻，电磁场沿z轴方向的分布是不同幅度的正弦波。在一些固定的位置点上，电磁场分别取到最大值和零值。把这些位置点分别称为波腹和波节点，相邻波腹、波节点间距为 $\lambda/4$, 两个波腹（波节）点间距是 $\lambda/2$，$z=0$ 处是电场波节，磁场波腹

2. 波节点和波腹点的位置固定不变，称其为驻波；不传输能量



3. 电磁能量只是储存在 $z<0$ 的空间，并且不停的相互转化。电能最大时，磁能为零，同样磁能最大时，电能为零。这称为电磁振荡，且瞬时电能和磁能密度分别为：

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E_x^2 = 2\varepsilon E_{im}^2 \sin^2 kz \sin^2 \omega t$$

$$w_m = \frac{1}{2}\mu H_y^2 = 2\varepsilon E_{im}^2 \cos^2 kz \cos^2 \omega t = 2\varepsilon E_{im}^2 \cos^2 kz \cos^2 \omega t$$

➢对于理想媒质中的驻波分布，由于没有能量传输，也没有能量消耗，总储能应不随时间变化，因此总能量密度在空间的时间平均值应是一个常数，即

$$\bar{w} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(w_e + w_m\right)dt = \frac{1}{T}\int_0^T 2\varepsilon E_{im}^2 \left(\sin^2 kz \sin^2 \omega t + \cos^2 kz \cos^2 \omega t\right)dt = \varepsilon E_{im}^2$$

例4-1．空气中一均匀平面波，其电场强度为 $\vec{E} = E_m\left(\vec{e}_x + j\vec{e}_y\right)e^{-j10\pi z}$

垂直入射到一理想导体表面（z=0平面）

求（1）空气中的波数（即相移常数k），频率f；

（2）反射波电场复振幅，并说明入、反射波的极化方式；

（3）导体表面上的电流密度 $\vec{J}_S$ ；

（4）入射波的平均坡印廷矢量 $\vec{S}_{av}$；

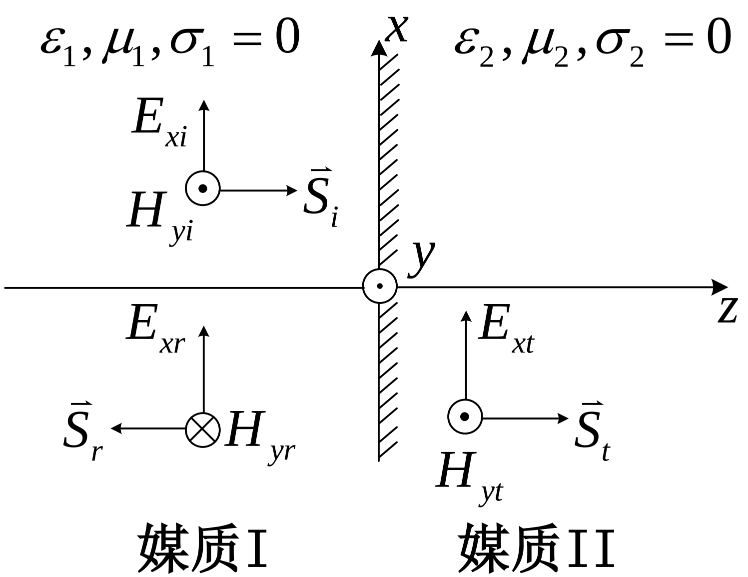
（5）z<0空间的平均坡印廷矢量 $\vec{S}_{av}$ 。

结论：圆极化波入射到理想导体表面，其在z＜0空间的合成场也是驻波。（因为圆极化波可以分解成两个相互正交的线极化波）

4.2 平面波向理想介质界面上的垂直入射

设 $z>0$ 和 $z<0$ 的两个半无限大空间分别充满了传播常数分别为 k_1 和 k_2 的两种理想介质。设入射波、反射波和透射波为 E_i, E_r, E_t，在 $z<0$ 的区域：

$$\begin{cases} E_{ix} = E_{im} e^{-jk_1 z} \\ E_{rx} = E_{rm} e^{jk_1 z} \end{cases}$$



对磁场有

$$\begin{cases} H_{iy} = \dfrac{E_{im}}{\eta_1} e^{-jk_1 z} \\ H_{ry} = -\dfrac{E_{rm}}{\eta_1} e^{jk_1 z} \end{cases}$$

其中：$k_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} = \dfrac{2\pi}{\lambda_1}$ $\qquad \eta_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$

媒质1中的总合成电磁场

$$E_{1x} = E_{ix} + E_{rx} = E_{im}e^{-jk_1 z} + E_{rm}e^{jk_1 z}$$

$$H_{1y} = -\frac{1}{j\omega\mu_1}\frac{\partial E_{1x}}{\partial z} = \frac{E_{im}}{\eta_1}e^{-jk_1 z} - \frac{E_{rm}}{\eta_1}e^{jk_1 z}$$

在 $z > 0$ 的区域（媒质II），

$$E_{2x} = E_{tm}e^{-jk_2 z}, \qquad H_{2y} = \frac{E_{tm}}{\eta_2}e^{-jk_2 z}$$

$$k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} = \frac{2\pi}{\lambda_2} \qquad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$$

定义

$$\Gamma = \left.\frac{E_r}{E_i}\right|_{z=0} = \frac{E_{rm}}{E_{im}}$$ ——反射系数

$$T = \left.\frac{E_t}{E_i}\right|_{z=0} = \frac{E_{tm}}{E_{im}}$$ ——透射系数

于是，媒质I中的合成电场 $E_{1x} = E_{im}\left(e^{-jk_1z} + \Gamma e^{jk_1z}\right)$

媒质I中的合成磁场 $H_{1y} = \frac{E_{im}}{\eta_1}\left(e^{-jk_1z} - \Gamma e^{jk_1z}\right)$

媒质II中的电场 $E_{2x} = TE_{im}e^{-jk_2z}$

媒质II中的磁场 $H_{2y} = \frac{TE_{im}}{\eta_2}e^{-jk_2z}$

两种理想介质分界面上（z=0）：

$$\vec{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0,\qquad \vec{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=0$$

即 $\left(E_{1x}-E_{2x}\right)\Big|_{z=0}=0,\qquad \left(H_{1y}-H_{2y}\right)\Big|_{z=0}=0$

$$E_{im}\left(e^{-jk_1z}+\Gamma e^{jk_1z}\right)\Big|_{z=0}=TE_{im}e^{-jk_2z}\Big|_{z=0}\qquad \frac{E_{im}}{\eta_1}\left(e^{-jk_1z}-\Gamma e^{jk_1z}\right)\Big|_{z=0}=\frac{TE_{im}}{\eta_2}e^{-jk_2z}\Big|_{z=0}$$

$$\boxed{\begin{cases}1+\Gamma=T\\ \dfrac{1}{\eta_1}(1-\Gamma)=\dfrac{T}{\eta_2}\end{cases}}\Longrightarrow$$

反射系数和透射系数的关系

解之有

$$\boxed{\Gamma=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1},\quad T=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}\qquad (|\Gamma|\le 1)}\Longrightarrow$$

反射系数/透射系数与波阻抗的关系

对于前面讨论过的理想导体表面的反射问题

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \approx -j\frac{\sigma}{\omega} \to -j\infty \qquad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = 0$$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -1, \qquad T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 0$$

即波全反射，没有透射。

对于理想介质界面，在 $z<0$ 的空间， $|\Gamma|\le 1$

$$E_{1x}=E_{im}\left(e^{-jk_1z}+\Gamma e^{jk_1z}\right)$$

$$=E_{im}\left(e^{-jk_1z}-\Gamma e^{-jk_1z}+\Gamma e^{-jk_1z}+\Gamma e^{jk_1z}\right)$$

$$=\boxed{E_{im}(1-\Gamma)e^{-jk_1z}}+\boxed{2E_{im}\Gamma\cos k_1z}$$

$$H_{1y}=\frac{E_{im}}{\eta_1}\left(e^{-jk_1z}-\Gamma e^{jk_1z}\right)$$

$$=\frac{E_{im}}{\eta_1}\left(e^{-jk_1z}-\Gamma e^{-jk_1z}+\Gamma e^{-jk_1z}-\Gamma e^{jk_1z}\right)$$

$$=\boxed{\frac{E_{im}}{\eta_1}(1-\Gamma)e^{-jk_1z}}-\boxed{j2\frac{E_{im}}{\eta_1}\Gamma\sin k_1z}$$

行波部分

驻波部分

在媒质1中传播的是行驻波。既有行波的特点，也有驻波的特征，在空间的一些固定点处取得场的最大值与最小值。

$$E_{1x}=E_{im}\left(e^{-jk_1z}+\Gamma e^{jk_1z}\right)=E_{im}e^{-jk_1z}\left(1+\Gamma e^{j2k_1z}\right)$$

$$H_{1y}=\frac{E_{im}}{\eta_1}\left(e^{-jk_1z}-\Gamma e^{jk_1z}\right)=\frac{E_{im}}{\eta_1}e^{-jk_1z}\left(1-\Gamma e^{j2k_1z}\right)$$

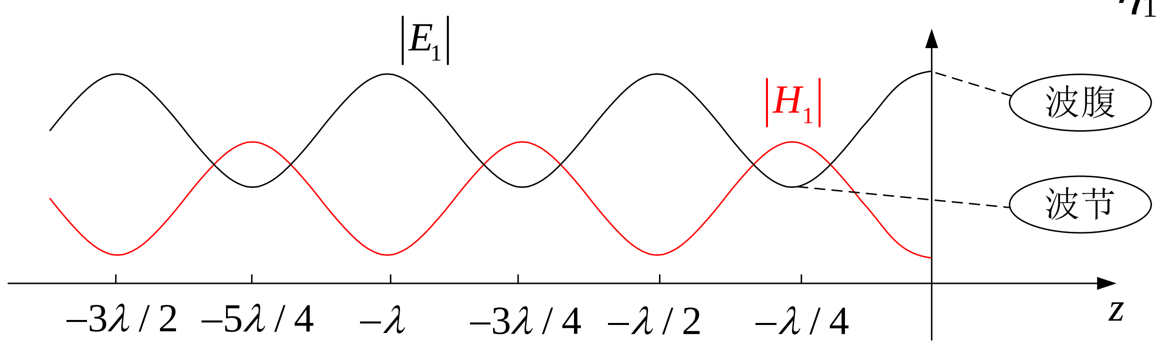
理想介质中Γ的幅角不是0就是π，设 $\eta_2>\eta_1$ 则： $0<\Gamma<1$

当 $2k_1z=-2n\pi$ $z_{\max}=-n\lambda_1/2,\quad n=0,1,2,3\ldots$ 电场波腹，磁场波节

$$\left|E_{1x}\right|=\left|E_{1x}\right|_{\max}=\left|E_{im}\right|\left(1+\left|\Gamma\right|\right),\qquad \left|H_{1y}\right|=\left|H_{1y}\right|_{\min}=\frac{\left|E_{im}\right|}{\eta_1}\left(1-\left|\Gamma\right|\right)$$

当 $2k_1z=-(2n+1)\pi$ $z_{\min}=-(2n+1)\lambda_1/4,\quad n=0,1,2,3\ldots$ 电场波节，磁场波腹

$$\left|E_{1x}\right|=\left|E_{1x}\right|_{\min}=\left|E_{im}\right|\left(1-\left|\Gamma\right|\right),\qquad \left|H_{1y}\right|=\left|H_{1y}\right|_{\max}=\frac{\left|E_{im}\right|}{\eta_1}\left(1+\left|\Gamma\right|\right)$$



当$\eta_2<\eta_1$时， $-1<\Gamma<0$， 上述结论反过来就可以。

为了反映行驻波状态的成分大小，定义驻波系数为

$$\rho = \frac{|E_{\max}|}{|E_{\min}|} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$$

由于是行驻波，所以有能量传播，媒质I中，平均坡印廷矢量为

$$\vec{S}_{av1} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_{1x} \times \vec{H}_{1y}^{*}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\frac{E_{im}^{2}}{\eta_1}\left(e^{-jk_1 z} + \Gamma e^{jk_1 z}\right)\left(e^{jk_1 z} - \Gamma e^{-jk_1 z}\right)\right)\vec{e}_z$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{E_{im}^{2}}{2\eta_1}\left(1-\Gamma^{2}\right) + j2\Gamma\sin 2k_1 z\right)\vec{e}_z$$

$$= \frac{E_{im}^{2}}{2\eta_1}\left(1-\Gamma^{2}\right)\vec{e}_z$$

设

$$\vec{S}_{入}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_i\times\vec{H}_i^*\right)=\frac{E_{im}^2}{2\eta_1}\vec{e}_z$$

$$\vec{S}_{反}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_r\times\vec{H}_r^*\right)=-\left|\Gamma\right|^2\frac{E_{im}^2}{2\eta_1}\vec{e}_z$$

$$\vec{S}_{av1}=\frac{E_{im}^2}{2\eta_1}\left(1-\left|\Gamma\right|^2\right)\vec{e}_z=\left(\frac{E_{im}^2}{2\eta_1}-\left|\Gamma\right|^2\frac{E_{im}^2}{2\eta_1}\right)\vec{e}_z$$

Γ^2 ——功率反射系数

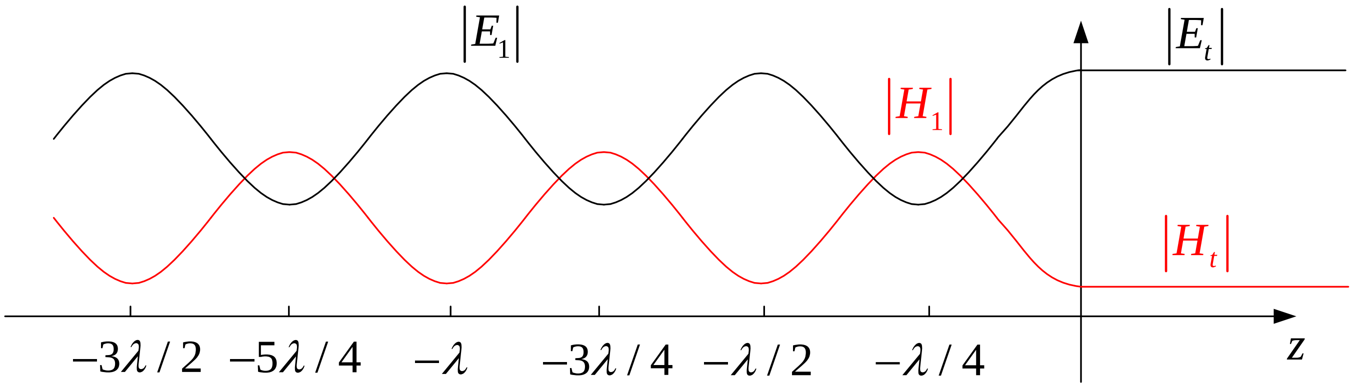
区域1中向z方向传输的平均功率密度=入射波传输的功率-反射波沿相反方向传输的功率。

在媒质II中

$$T=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}, \qquad 0\le T<2$$

$$E_{2x}=TE_{im}e^{-jk_2z}, \qquad H_{2y}=\frac{TE_{im}}{\eta_2}e^{-jk_2z}$$

媒质II中是行波传播



其平均坡印廷矢量

$$\vec{S}_{av2}=\vec{S}_{透}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_{2x}\times\vec{H}^*_{2y}\right)=\frac{E^2_{tm}}{2\eta_2}\vec{e}_z=\frac{T^2E^2_{im}}{2\eta_2}\vec{e}_z$$

$$\vec{S}_{av1}=\frac{E_{im}^2}{2\eta_1}\left(1-|\Gamma|^2\right)\vec{e}_z$$

$$\vec{S}_{av2}=\vec{S}_{透}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_2\times\vec{H}_2^*\right)=\frac{E_{tm}^2}{2\eta_2}\vec{e}_z=\frac{|T|^2 E_{im}^2}{2\eta_2}\vec{e}_z$$

$$\begin{cases} 1+\Gamma=T \\ \dfrac{1}{\eta_1}(1-\Gamma)=\dfrac{1}{\eta_2}T \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{\eta_1}\left(1-|\Gamma|^2\right)=\frac{1}{\eta_2}|T|^2$$

$$\vec{S}_{av1}=\vec{S}_{av2}$$

区域1中的入射波功率-区域**1**中反射波功率=区域2中的透射波功率，移项得，

区域1中的入射波功率=区域**1**中反射波功率+区域2中的透射波功率（能量守恒）

若是非理想介质，用 $\tilde{\varepsilon}$ 换 ε ，则 Γ、$\tilde{k}$、$\tilde{\eta}$ 是复数，且为衰减波。

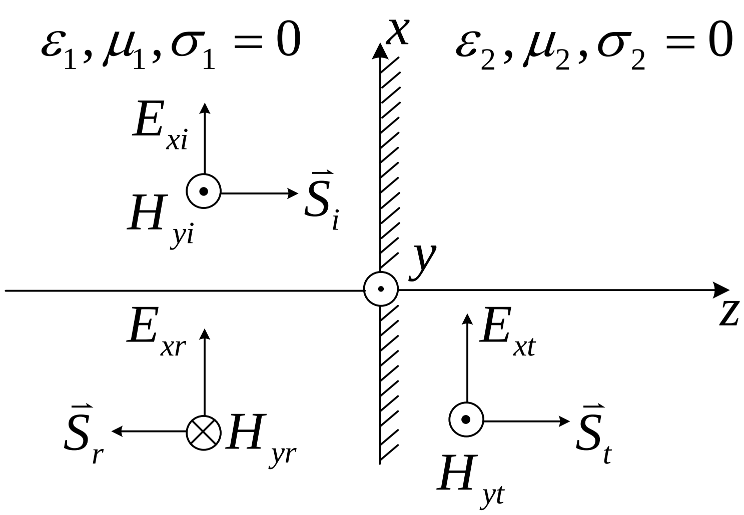
$$\Gamma=\frac{\tilde{\eta}_2-\tilde{\eta}_1}{\tilde{\eta}_2+\tilde{\eta}_1},\qquad T=\frac{2\tilde{\eta}_2}{\tilde{\eta}_2+\tilde{\eta}_1}$$

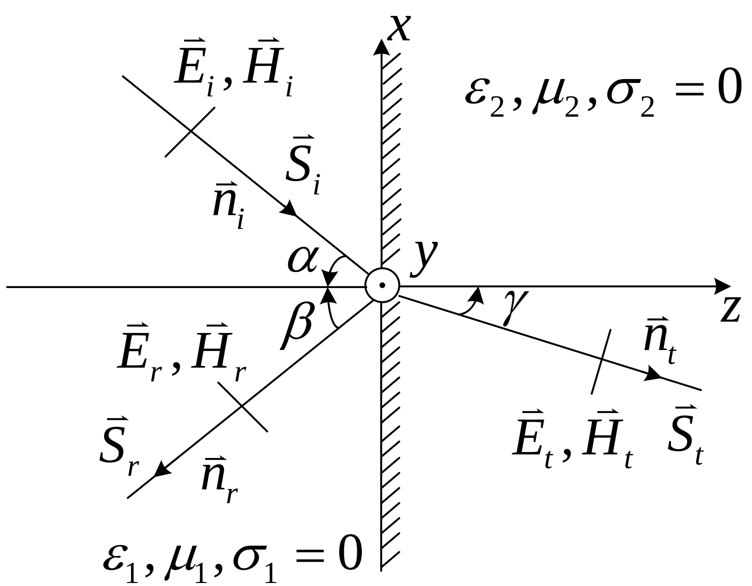
例4-2. 均匀平面波由空气垂直入射到 $\mu_r = 1, \varepsilon_r = 4$ 的理想介质，已知介质中：$E_2 = 1mV/m, \omega = 3\times10^8 rad/s$ ，求空气中的 E_1, H_1、介质中的 E_2, H_2 以及空气中的平均功率密度、介质中的平均功率密度 $\vec{S}_{av1}$ 和 $\vec{S}_{av2}$ 。

4.3 斯涅耳定律和极化的概念

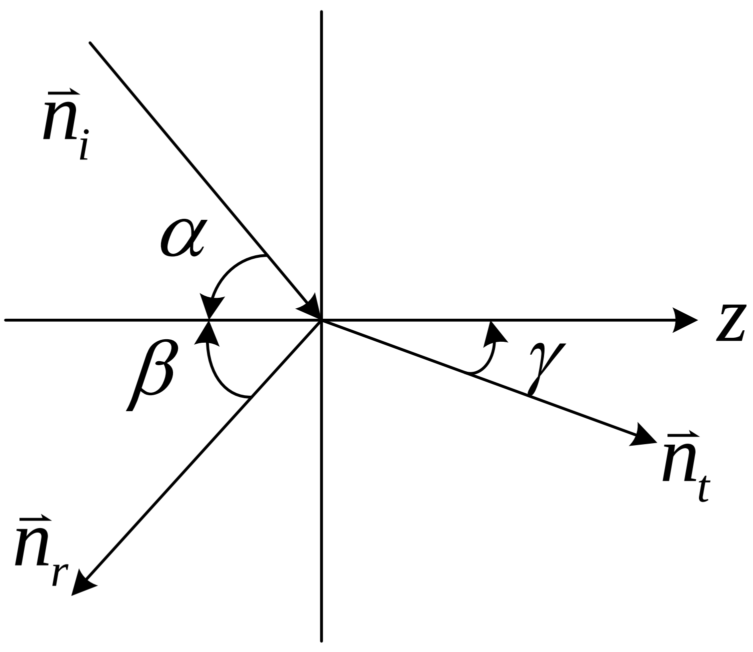
均匀平面波斜入射到不同媒质的交界面比垂直入射更有普遍意义。垂直入射只是斜入射的特殊情况，斜入射时发生的现象除了与入射波的方向有关外，还与波的极化（空间取向）有关。

下面先讨论反射、折射定律、波的极化定义，然后讨论不同媒质界面的斜入射。



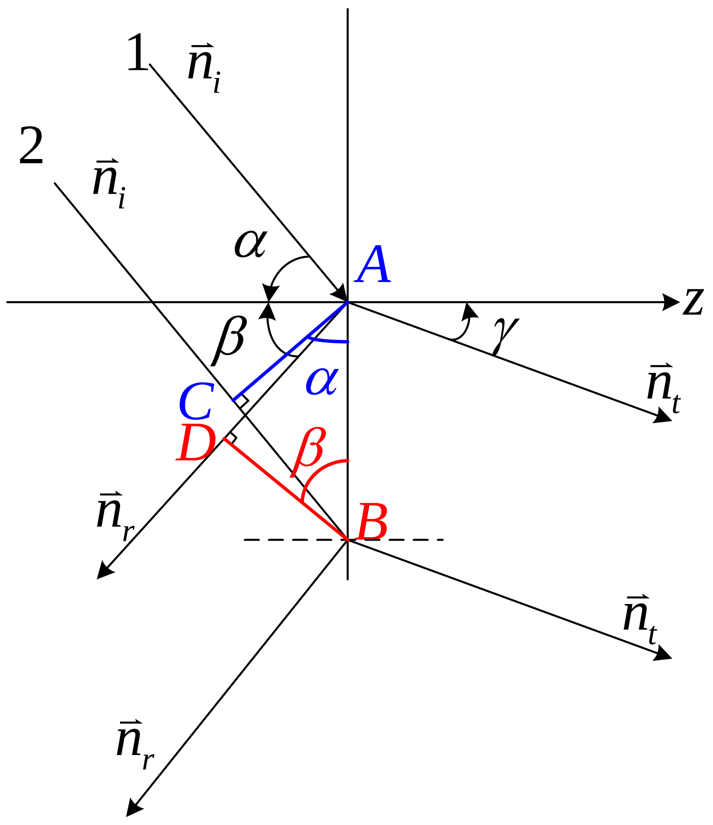


在斜入射时，对于给定的入射方向$\boldsymbol{n}_i$，其反射线方向$\boldsymbol{n}_r$与折射线方向$\boldsymbol{n}_t$均在同一个平面内——即入射线与分界面法矢所构成的平面，称其为入射面，如图所示。



1. 反射定律：入射角 α 等于反射角 β

证明：由于射线**1**、**2**分别在**A**、**B**两点发生反射与折射，**AC、BD分别为入射波、反射波的等相位面**，等相位**AC** 在**1**、**2**两条入射线上的相移为**CB**，而等相位面**BD**在**1**、**2**对应反射线上的相移为**AD**，两者满足



$$k_1 AD = k_1 CB \rightarrow AD = CB$$

$$\because AD = AB\sin\beta, \quad CB = AB\sin\alpha$$

$$\therefore \alpha = \beta$$

- 折射现象

BF也是等相位面，我们有

$$k_2 AF = k_1 BC$$

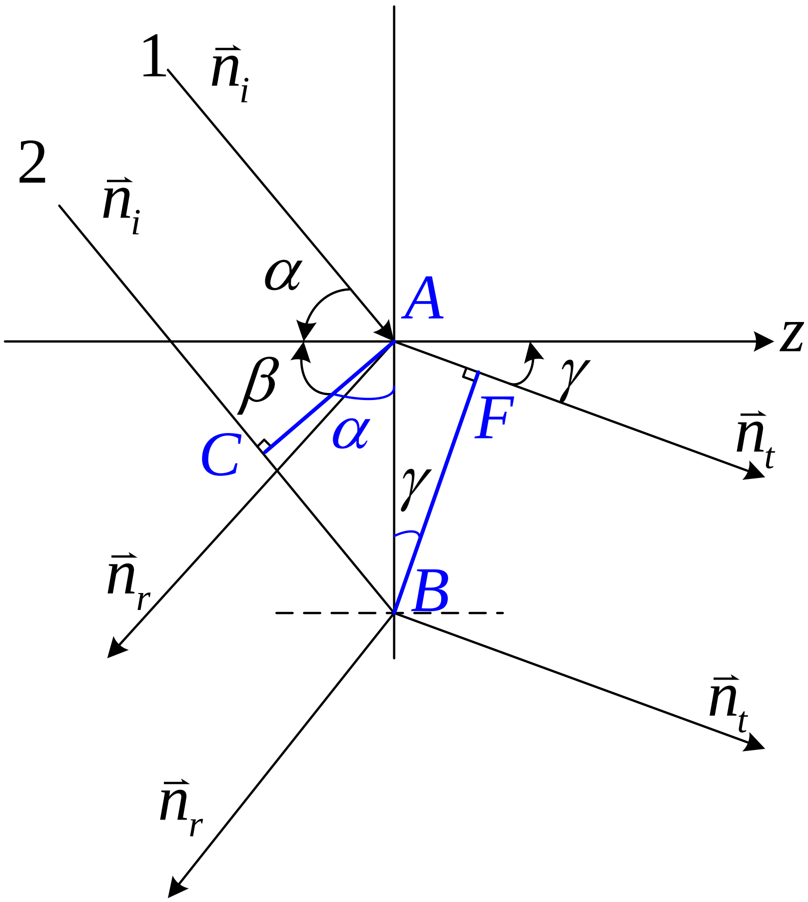
$$\because\ AF = AB\sin\gamma, \qquad BC = AB\sin\alpha$$

$$\therefore k_2 \sin\gamma = k_1 \sin\alpha$$

一般媒质均有 $\mu_1 = \mu_2$

$$\therefore \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = n_{21}$$

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{v_2}$$



2. 折射定理：当从媒质1折射入媒质2时，入射角与折射角满足关系式：

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{k_2}{k_1}=\sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}}=\sqrt{\frac{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}=\frac{n_2}{n_1}$$ 式中，$n=\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$ ——物质的折射率

若 $\gamma=90^0$ ，则无透射波（全反射），发生全反射时的入射角称为临界角，且：

$$\alpha_c=\sin^{-1}\sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}}$$

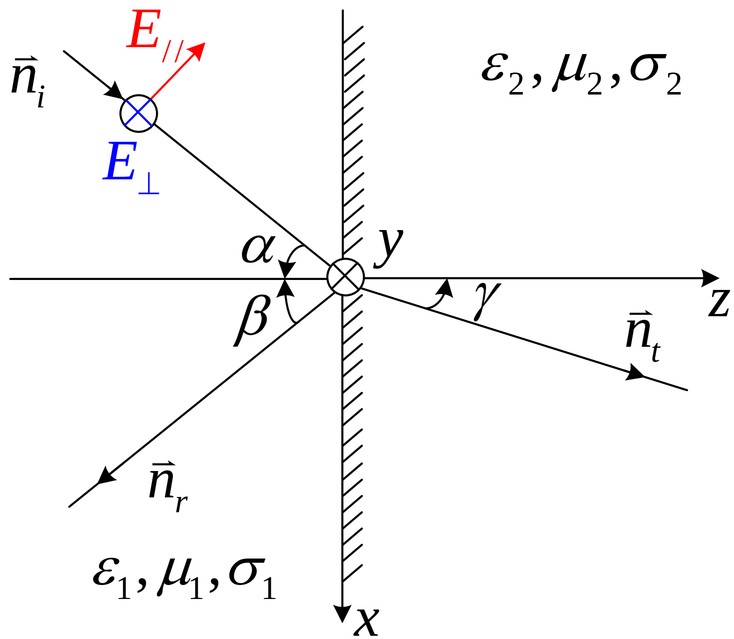
只有在由光密媒质（ε_1）向光疏媒质（ε_2）斜入射（ $\varepsilon_1>\varepsilon_2$），且

$$\alpha\geq\alpha_c$$

时才出现全反射。

•水平与垂直极化的概念

对于给定的入射方向$\boldsymbol{n}_i$，其电场矢量必然位于与传播方向垂直的等位面上，但在等位面内可以有不同的取向（对于垂直入射，等位面与媒质界面是平行的，任意斜入射时等位面与分界面有一入射夹角）。不管$\boldsymbol{E}$的取向如何，总可将它分解为与入射面平行及与入射面垂直的两个分量—— $E_{//}, E_{\perp}$



- 任意极化的平面波都可以分解为平行极化波和垂直极化波的合成
- $E_{//}$ 分量位于入射面内，与入射面平行，称为水平极化波；
- $E_{\perp}$ 分量垂直于入射面，与入射面垂直，称为垂直极化波。

- 不同的极化波有着不同的反射与折射特性，下面分别加以讨论。

4.4 平面波向理想导体界面上的斜入射

1. 垂直极化波向理想导体界面斜入射

2. 平行极化波向理想导体界面斜入射

回顾：任意方向传播的均匀平面波

- 对于沿任意方向传播的均匀平面波，其仍满足矢量亥姆赫兹方程

$$\nabla^2 \vec{E} + \tilde{k}^2 \vec{E} = 0$$

在直角坐标系下：

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \vec{E}(x, y, z) = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z$$

则每个分量均满足： $\nabla^2 \vec{E}_i + \tilde{k}^2 \vec{E}_i = 0, \quad i = x, y, z$

以 E_x 为例则有：

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0$$

该方程可采用分离变量法求解，即：$E_x = f(x)g(y)h(z)$

设 $k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$，则可得

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 f}{dx^2} + k_x^2 f = 0 \\ \dfrac{d^2 g}{dy^2} + k_y^2 g = 0 \\ \dfrac{d^2 g}{dz^2} + k_z^2 h = 0 \end{cases}$$

方程的解分别为 $e^{\pm jk_x x}, e^{\pm jk_y y}, e^{\pm jk_z z}$

取离开源的单一方向的波，解为

$$E_x = Ae^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z} = Ae^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

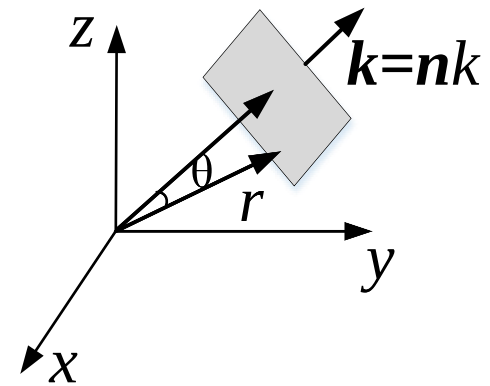
$\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$，$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

$\vec{k}$ 为传播矢量，是常矢。

沿任意方向传播的解表示为 $E_x = Ae^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$

沿任意方向传播的解表示为 $E_x = Ae^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$

表明：这是由传播矢量 $\vec{k}$ 所决定的传播方向上传播的电场的 x 分量，而标量积 $\vec{k}\cdot\vec{r}$ 则表示 $\vec{k}$ 乘以从原点0到与矢量 $\vec{k}=\vec{n}k$ 相垂直的平面的距离。



同样的方法可得：

$$E_y = Be^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad E_z = Ce^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\therefore \vec{E} = \left(A\vec{e}_x + B\vec{e}_y + C\vec{e}_z\right)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{E}_{mi}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$\vec{E}_{mi}$ 为常矢。

用**Maxwell**第二方程求磁场

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu}\nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{j\omega\mu}\left[e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\nabla\times\vec{E}_{mi} + \nabla\left(e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)\times\vec{E}_{mi}\right]$$

$$= -\frac{1}{j\omega\mu}\left[-je^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\nabla\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\times\vec{E}_{mi}\right]$$

$$\nabla\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)=\vec{k}\times\nabla\times\vec{r}+\left(\vec{k}\cdot\nabla\right)\vec{r}+\vec{r}\times\nabla\times\vec{k}+\left(\vec{r}\cdot\nabla\right)\vec{k}$$

$$=\left(\vec{k}\cdot\nabla\right)\vec{r}=\left(k_x\frac{\partial}{\partial x}+k_y\frac{\partial}{\partial y}+k_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z\right)$$

$$=k_x\vec{e}_x+k_y\vec{e}_y+k_z\vec{e}_z=\vec{k}=k\vec{n}$$ ($\vec{n}$是k方向的单位矢量)

$$\vec{H}=-\frac{1}{j\omega\mu}\left[-je^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\nabla\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\times\vec{E}_{mi}\right]=\frac{1}{\omega\mu}\vec{k}\times\vec{E}$$

$$=\frac{k}{\omega\mu}\vec{n}\times\vec{E}\boxed{=\frac{1}{\eta}\vec{n}\times\vec{E}}$$

同理，由 $$\vec{n}\times\vec{H}=\frac{1}{\eta}\vec{n}\times\vec{n}\times\vec{E}=\left(\vec{n}\cdot\vec{E}\right)\vec{n}-\left(\vec{n}\cdot\vec{n}\right)\vec{E}=-\vec{E}$$

可得 $$\vec{n}\times\vec{H}=-\frac{1}{\eta}\vec{E},\qquad \boxed{\vec{E}=-\eta\vec{n}\times\vec{H}}$$

这是由于所研究的是任意方向传播的均匀平面波，在垂直于 $\vec{k}$ 的平面内

$E_m=const,\quad H_m=const$ 且 $\vec{E}\perp\vec{k},\quad \vec{H}\perp\vec{k}$ $\Longrightarrow$ $\vec{k}\cdot\vec{E}=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{H}=0$

1. 垂直极化波向理想导体界面斜入射

垂直极化波：电场矢量与入射面垂直，与导体表面平行，磁场矢量在入射面内。

均匀平面波向理想导体表面斜入射时，同样会发生全反射。设

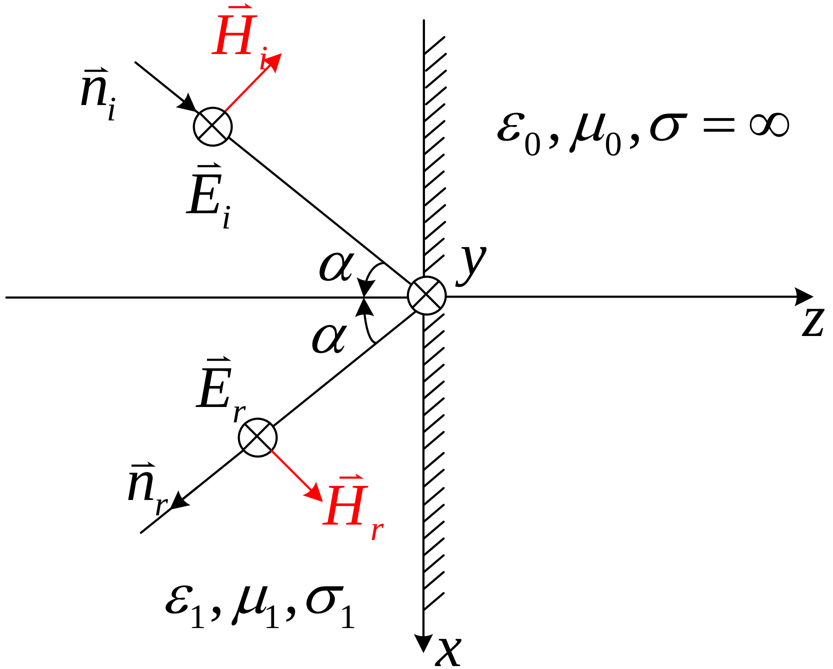
$$\vec{n}_i = \sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_z \qquad \vec{k}_i = k_i\vec{n}_i$$

$$\vec{n}_r = \sin\alpha\vec{e}_x - \cos\alpha\vec{e}_z \qquad \vec{k}_r = k_r\vec{n}_r$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

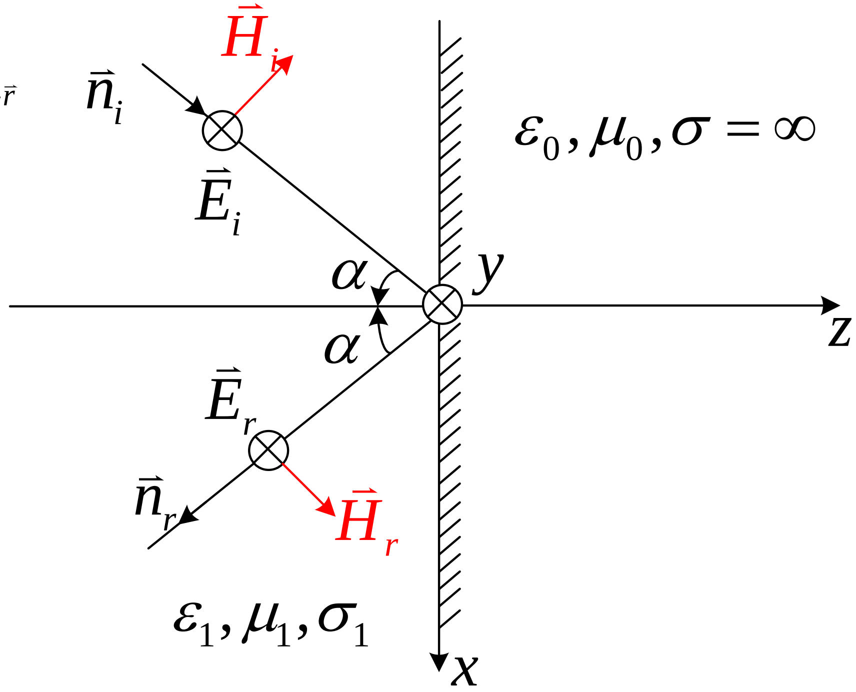
$$E_i = E_{yi} = E_{im}e^{-j\vec{k}_i\cdot\vec{r}} = E_{im}e^{-jk(x\sin\alpha + z\cos\alpha)}$$

$$E_r = E_{yr} = E_{rm}e^{-j\vec{k}_r\cdot\vec{r}} = E_{rm}e^{-jk(x\sin\alpha - z\cos\alpha)}$$



$$H_i=\frac{1}{\eta}\vec{n}_i\times\vec{E}_i=\left(-\cos\alpha\vec{e}_x+\sin\alpha\vec{e}_z\right)\frac{E_{im}}{\eta}e^{-j\vec{k}_i\cdot\vec{r}}$$

$$=\left(-\cos\alpha\vec{e}_x+\sin\alpha\vec{e}_z\right)\frac{E_{im}}{\eta}e^{-jk_1(x\sin\alpha+z\cos\alpha)}$$



$$H_r=\frac{1}{\eta}\vec{n}_r\times\vec{E}_r=\left(\cos\alpha\vec{e}_x+\sin\alpha\vec{e}_z\right)\frac{E_{rm}}{\eta}e^{-j\vec{k}_r\cdot\vec{r}}$$

$$=\left(\cos\alpha\vec{e}_x+\sin\alpha\vec{e}_z\right)\frac{E_{rm}}{\eta}e^{-jk_1(x\sin\alpha-z\cos\alpha)}$$

在 $z=0$ 处，由边界条件

$$\left(E_i+E_r\right)\Big|_{z=0}=0\rightarrow E_{rm}=-E_{im}$$

$$\Gamma_\perp=\frac{E_{rm}}{E_{im}}=-1$$

在 $z<0$ 的空间，

$$E_i = E_{yi} = E_{im}e^{-j\vec{k}_i\cdot\vec{r}} = E_{im}e^{-jk_1(x\sin\alpha+z\cos\alpha)}$$

$$E_r = E_{yr} = E_{rm}e^{-j\vec{k}_r\cdot\vec{r}} = -E_{im}e^{-jk_1(x\sin\alpha-z\cos\alpha)}$$

$$H_i = (-\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_z)\frac{E_{im}}{\eta}e^{-jk_1(x\sin\alpha+z\cos\alpha)}$$

$$H_r = (\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_z)\frac{-E_{im}}{\eta}e^{-jk_1(x\sin\alpha-z\cos\alpha)}$$

合成电场：

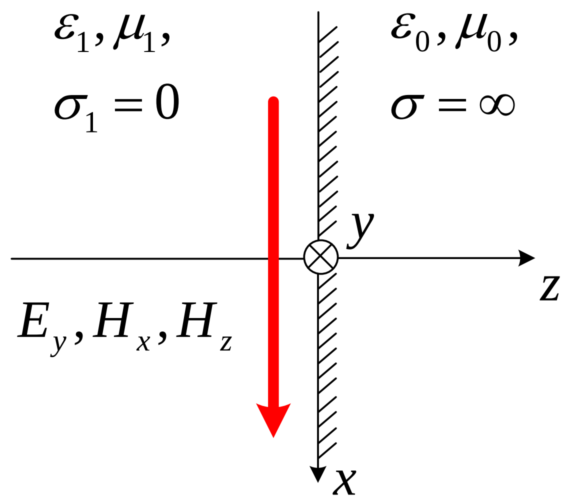
$$E_{1y} = E_i + E_r = E_{im}e^{-jk_1x\sin\alpha}\left(e^{-jk_1z\cos\alpha} - e^{jk_1z\cos\alpha}\right) = -j2E_{im}\sin(k_1z\cos\alpha)e^{-jk_1x\sin\alpha}$$

合成磁场：

$$H_{1x} = -\frac{2E_{im}}{\eta}\cos\alpha\cos(k_1z\cos\alpha)e^{-jk_1x\sin\alpha}$$

$$H_{1z} = -j\frac{2E_{im}}{\eta}\sin\alpha\sin(k_1z\cos\alpha)e^{-jk_1x\sin\alpha}$$

磁场也可由Maxwell方程求 $\vec{H}=-\dfrac{1}{j\omega\mu}\nabla\times\vec{E}$



$$E_{1y}=-j2E_{im}\sin\left(k_1 z\cos\alpha\right)e^{-jk_1 x\sin\alpha}$$

$$H_{1x}=-\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{2E_{im}}{\eta}\cos\alpha\cos\left(k_1 z\cos\alpha\right)e^{-jk_1 x\sin\alpha}$$

$$H_{1z}=-\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x}=-j\frac{2E_{im}}{\eta}\sin\alpha\sin\left(k_1 z\cos\alpha\right)e^{-jk_1 x\sin\alpha}$$

性质：**1.** 合成波是沿x方向传播的行波，理想的导体表面起了一个导波作用；

2. 合成波电场 E_y 与传播方向垂直，而磁场有与传播方向一致的分量 H_x ，不是TEM波，是导行波，称其为横电波（TE波）或纵磁波（H波）；

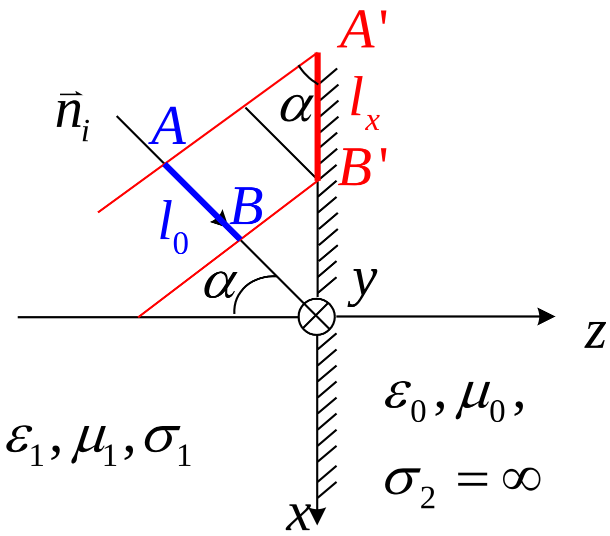
3. 合成波各场分量的振幅沿z轴呈驻波分布，具有驻波的特点；合成波电磁场分量是z的函数，是‘非均匀平面波’。

4. 沿x轴方向传播的相速 v_p 大于光速 c【沿x方向相位常数是k1sinα，

其相速为：$v_{px}=\dfrac{\omega}{k_1\sin\alpha}=\dfrac{c}{\sin\alpha}>c$ 】

$\because \vec{k}_1 = k_1\vec{n}_i = k_1\left(\sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_z\right) = \vec{k}_{1x} + \vec{k}_{1z}$ $\quad k_{1x} = k_1\sin\alpha, \quad k_{1z} = k_1\cos\alpha$

相速度是等相位点移动的速度，即



$$\omega t - k_1 x\sin\alpha + \varphi = const$$

$$v_{px} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k_{1x}} = \frac{\omega}{k_1\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\alpha} > c$$

几何解释：

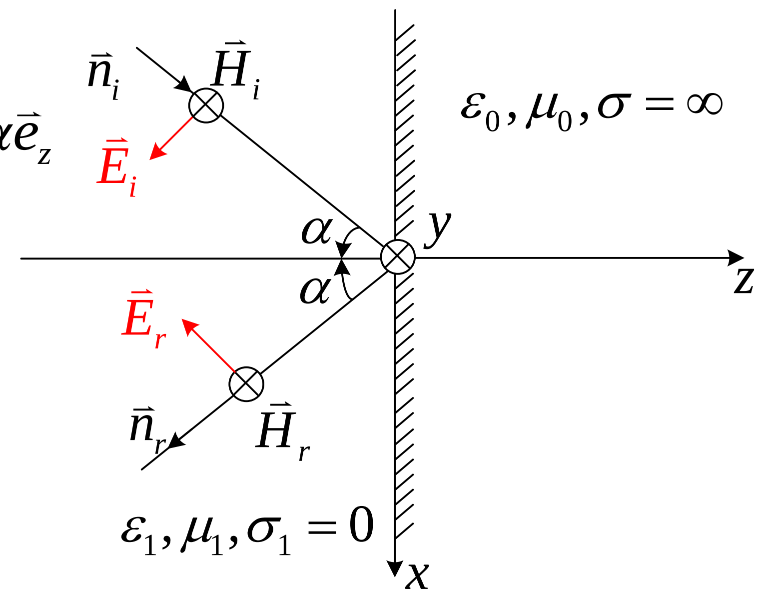
沿$\boldsymbol{n_i}$方向传播的电磁波，等相位点由**A**移动到**B**，以光速**c**在Δt 时间移动了 l_0

而在导体表面附近，**A'**和**B'**同样是等相位点，但由于导体板的作用，传播方向发生了改变，只能沿**x**方向传播，这样在相等的Δt 时间内，等相位点**A'**到达**B'**时走的路径 l_x

$$l_x = \frac{l_0}{\sin\alpha} \qquad v_{px} = \frac{l_x}{\Delta t} = \frac{l_0}{\Delta t\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\alpha} > c$$

2.平行极化波斜入射到理想导体表面

平行极化波斜入射到理想导体表面，此时电场矢量位于入射面内，磁场方向与导体界面平行。



设： $\vec{n}_i = \sin\alpha \vec{e}_x + \cos\alpha \vec{e}_z$， $\vec{n}_r = \sin\alpha \vec{e}_x - \cos\alpha \vec{e}_z$

$$\vec{H}_i = H_{yi}\vec{e}_y = \frac{E_{im}}{\eta} e^{-jk\vec{n}_i\cdot\vec{r}}\vec{e}_y = \frac{E_{im}}{\eta} e^{-jk(x\sin\alpha + z\cos\alpha)}\vec{e}_y$$

$$\vec{E}_i = E_{im}e^{-jk\vec{n}_i\cdot\vec{r}}\vec{e}_i = E_{im}(\cos\alpha\vec{e}_x - \sin\alpha\vec{e}_z)e^{-jk(x\sin\alpha + z\cos\alpha)}$$

$$\vec{H}_r = H_{yr}\vec{e}_y = \frac{E_{rm}}{\eta} e^{-jk\vec{n}_r\cdot\vec{r}}\vec{e}_y = \frac{E_{rm}}{\eta} e^{-jk(x\sin\alpha - z\cos\alpha)}\vec{e}_y$$

$$\vec{E}_r = E_{rm}(-\cos\alpha\vec{e}_x - \sin\alpha\vec{e}_z)e^{-jk(x\sin\alpha - z\cos\alpha)}$$

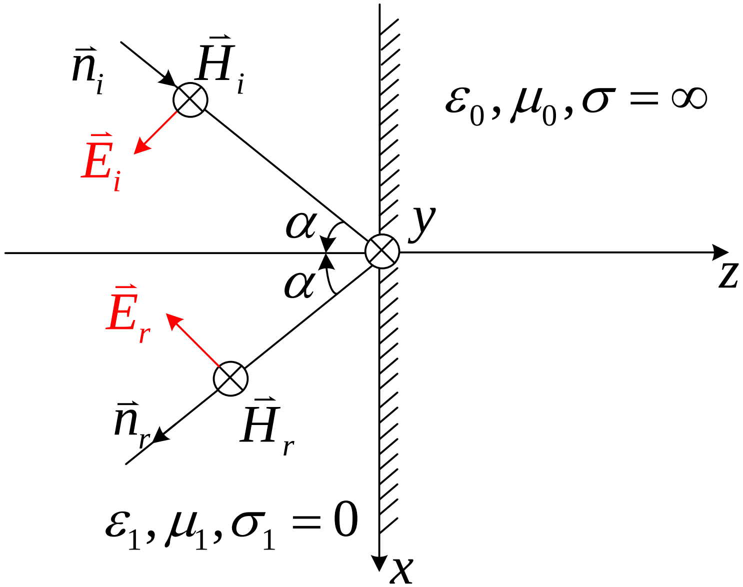
理想介质中的总合成场

$$H_y = H_{yi} + H_{yr} = \frac{E_{im}}{\eta} e^{-jkx\sin\alpha}\left(e^{-jkz\cos\alpha} + \frac{E_{rm}}{E_{im}} e^{jkz\cos\alpha}\right)$$

$$E_x = E_{xi} + E_{xr} = E_{im}\cos\alpha e^{-jkx\sin\alpha}\left(e^{-jkz\cos\alpha} - \frac{E_{rm}}{E_{im}} e^{jkz\cos\alpha}\right)$$

$$E_z = E_{zi} + E_{zr} = -E_{im}\sin\alpha e^{-jkx\sin\alpha}\left(e^{-jkz\cos\alpha} + \frac{E_{rm}}{E_{im}} e^{jkz\cos\alpha}\right)$$

$$(E_{xi}+E_{xr})\big|_{z=0}=0 \Longrightarrow E_{rm}=E_{im}$$



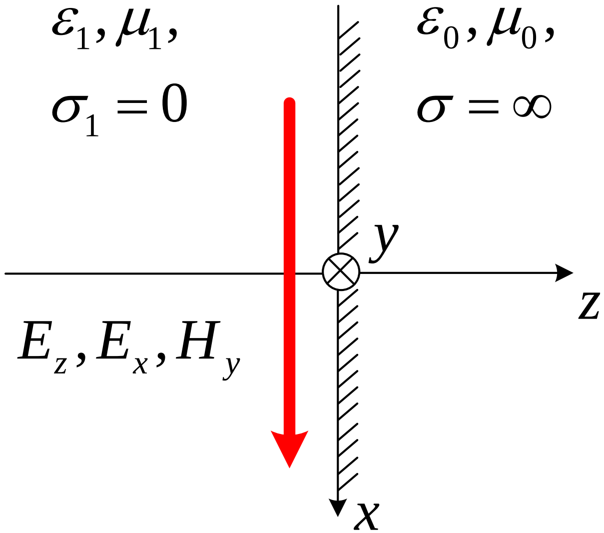
反射系数： $\Gamma_{//}=\dfrac{E_{rm}}{E_{im}}=1$

在 $z<0$ 的区域，合成场为：

$$H_y=\frac{2E_{im}}{\eta}\cos(kz\cos\alpha)e^{-jkx\sin\alpha}$$

$$E_x=-j2E_{im}\cos\alpha\sin(kz\cos\alpha)e^{-jkx\sin\alpha}$$

$$E_z=-2E_{im}\sin\alpha\cos(kz\cos\alpha)e^{-jkx\sin\alpha}$$



$$E_x = -j2E_{im}\cos\alpha\sin(kz\cos\alpha)e^{-jkx\sin\alpha}$$

$$E_z = -2E_{im}\sin\alpha\cos(kz\cos\alpha)e^{-jkx\sin\alpha}$$

$$H_y = \frac{2E_{im}}{\eta}\cos(kz\cos\alpha)e^{-jkx\sin\alpha}$$

显然：

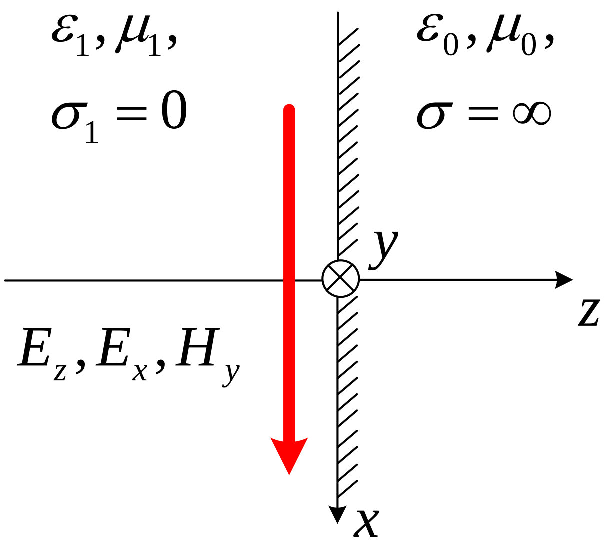
1：与垂直极化分量一样，也是全反射，无透射。

2：也是一个沿*x*轴方向（导体表面）传播的导行波，是一个非*TEM*波。但因为沿传播方向只有 E_x 分量无 H_x 分量，即磁场位于垂直于传播方向的平面内，所以称此波为横磁波（*TM*波），或纵电波（*E*波）。

3：不是均匀平面波，沿*z*轴方向是驻波分布。

4：其沿*x*轴方向的相速 $v_{px} > c$

$$v_{px} = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{k\sin\alpha} > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$



例4-3. 均匀平面波由空气斜入射到理想导体表面z=0，已知入射波电场为 $\vec{E}_i = 5\left(\vec{e}_x + \sqrt{3}\vec{e}_z\right)e^{j6\left(\sqrt{3}x - z\right)} V/m$

试求：（**1**）入射波磁场、反射波电场和磁场；

（**2**）理想导体表面的面电荷密度和面电流密度。

4.5 平面波向理想介质界面上的斜入射

1. 垂直极化波向理想介质界面的斜入射

(1) 全反射情况

(2) 全透射情况

2. 平行极化波向理想介质界面的斜入射

(1) 全反射——临界角

(2) 全透射——极化角（**Brewster angle**）

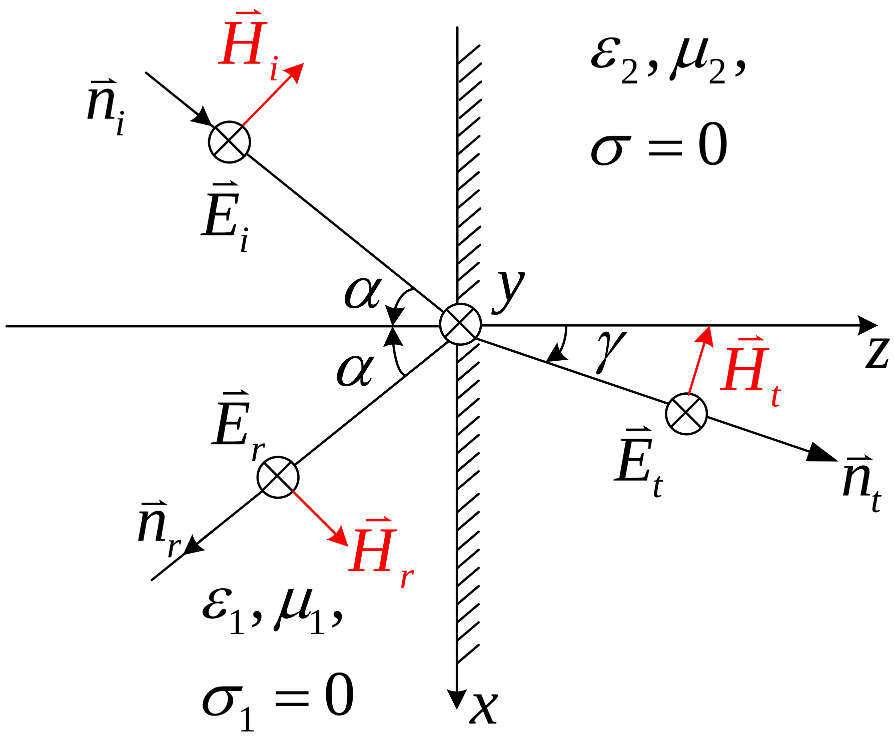
1. 垂直极化波的斜入射

设媒质界面的反射系数为

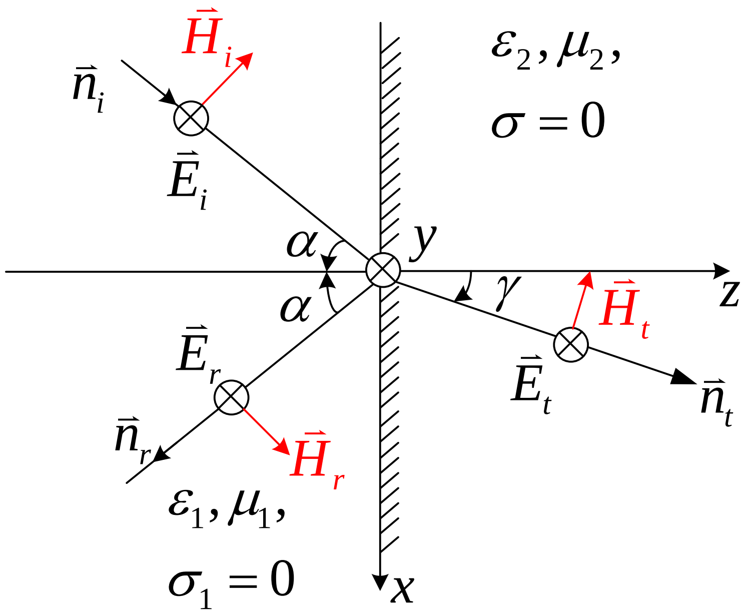
$$\Gamma_{\perp}=\frac{E_r}{E_i}\Big|_{z=0}=\frac{E_{rm}}{E_{im}}$$

媒质交界面的透射系数为

$$T_{\perp}=\frac{E_t}{E_i}\Big|_{z=0}=\frac{E_{tm}}{E_{im}}$$



在区域1中：



$$k_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} = \frac{2\pi}{\lambda_1}$$

$$\vec{n}_i = \sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_z$$

$$\vec{n}_r = \sin\alpha\vec{e}_x - \cos\alpha\vec{e}_z$$

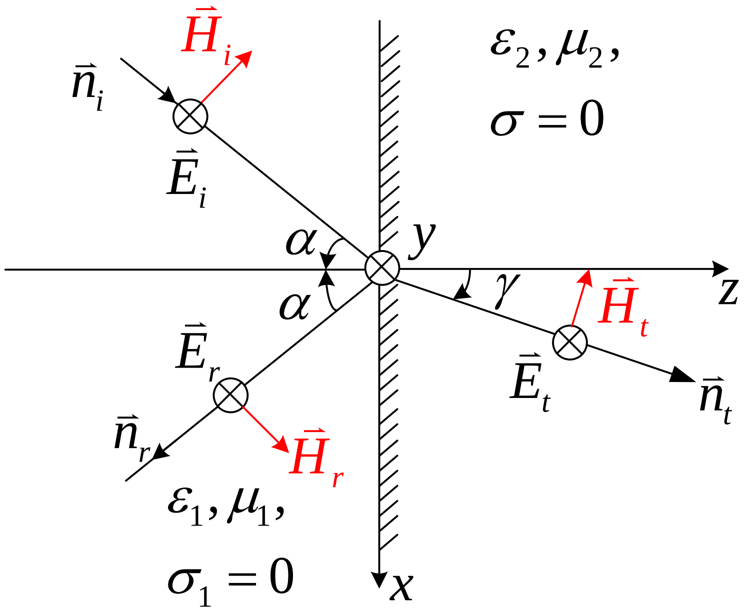
$$\vec{E}_i = E_{yi}\vec{e}_y = E_{im}e^{-jk_1\vec{n}_i\cdot\vec{r}}\vec{e}_y = E_{im}e^{-jk_1(x\sin\alpha+z\cos\alpha)}\vec{e}_y$$

$$\vec{H}_i = \frac{E_i}{\eta_1}\vec{e}_{Hi} = \frac{E_{im}}{\eta_1}(-\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_z)e^{-jk_1(x\sin\alpha+z\cos\alpha)}$$

$$\vec{E}_r = E_{yr}\vec{e}_y = E_{rm}e^{-jk_1\vec{n}_r\cdot\vec{r}}\vec{e}_y = \Gamma_\perp E_{im}e^{-jk_1(x\sin\alpha-z\cos\alpha)}\vec{e}_y$$

$$\vec{H}_r = \frac{E_r}{\eta_1}\vec{e}_{Hr} = \frac{\Gamma_\perp E_{im}}{\eta_1}(\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_z)e^{-jk_1(x\sin\alpha-z\cos\alpha)}$$

区域1合成场：



$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{\boldsymbol{i}} + \vec{E}_{\boldsymbol{r}}$$

$$E_{1y} = E_{yi} + E_{yr}$$

$$= E_{im} e^{-jk_1(x\sin\alpha + z\cos\alpha)} + \Gamma_{\perp} E_{im} e^{-jk_1(x\sin\alpha - z\cos\alpha)}$$

$$= E_{im} e^{-jk_1 x\sin\alpha} (e^{-jk_1 z\cos\alpha} + \Gamma_{\perp} e^{jk_1 z\cos\alpha})$$

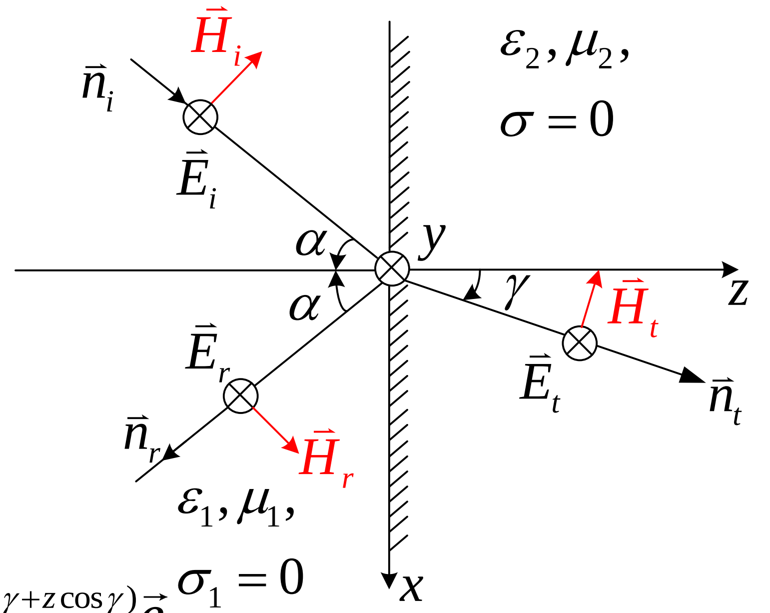
$$\vec{H}_1 = \vec{H}_{\boldsymbol{i}} + \vec{H}_{\boldsymbol{r}}$$

$$H_{1x} = H_{xi} + H_{xr}$$

$$= -\frac{E_{im}}{\eta_1} \cos\alpha e^{-jk_1 x\sin\alpha} (e^{-jk_1 z\cos\alpha} - \Gamma_{\perp} e^{jk_1 z\cos\alpha})$$

$$H_{1z} = H_{zi} + H_{zr} = \frac{E_{im}}{\eta_1} \sin\alpha e^{-jk_1 x\sin\alpha} (e^{-jk_1 z\cos\alpha} + \Gamma_{\perp} e^{jk_1 z\cos\alpha})$$

在区域2中：



$$k_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}=\frac{2\pi}{\lambda_2}$$

$$\vec{n}_t=\sin\gamma\vec{e}_x+\cos\gamma\vec{e}_z$$

$$\vec{E}_2=\vec{E}_t=E_{yt}\vec{e}_y=E_{tm}e^{-jk_2\vec{n}_t\cdot\vec{r}}\vec{e}_y=T_\perp E_{im}e^{-jk_2(x\sin\gamma+z\cos\gamma)}\vec{e}_y$$

$$\vec{H}_2=\vec{H}_t=\frac{E_t}{\eta_2}\vec{e}_{H_t}=\frac{T_\perp E_{im}}{\eta_2}(-\cos\gamma\vec{e}_x+\sin\gamma\vec{e}_z)e^{-jk_2(x\sin\gamma+z\cos\gamma)}$$

在理想介质的界面上：

$$\vec{n}\times(\vec{E}_1-\vec{E}_2)\Big|_{z=0}=0\qquad \vec{n}\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)\Big|_{z=0}=0$$

及折射定理： $$k_1\sin\alpha=k_2\sin\gamma$$

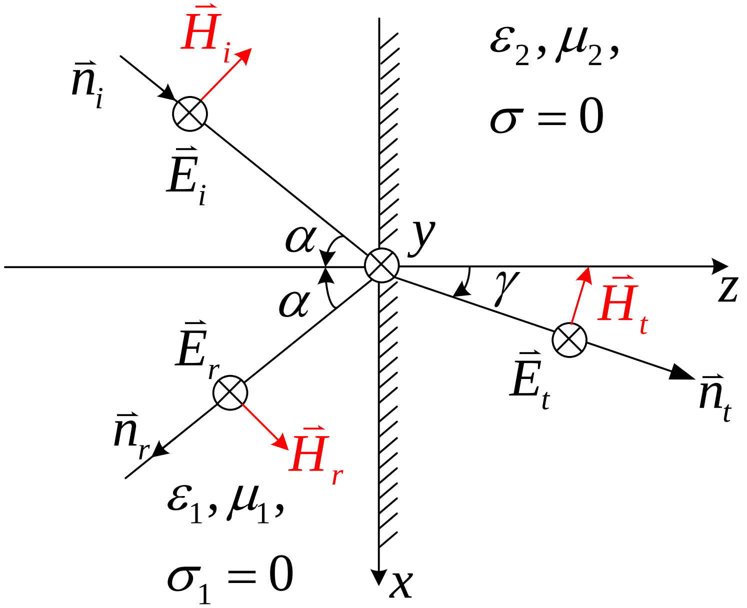
$$(E_{yi}+E_{yr})\big|_{z=0}=E_{yt}\big|_{z=0} \qquad (H_{xi}+H_{xr})\big|_{z=0}=H_{xt}\big|_{z=0}$$

$$E_{im}e^{-j\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{x}\sin\alpha}(e^{-j\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{z}\cos\alpha}+\boldsymbol{\Gamma}_{\perp}e^{j\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{z}\cos\alpha})\Big|_{z=0}=\boldsymbol{T}_{\perp}E_{im}e^{-j\boldsymbol{k}_2(x\sin\gamma+z\cos\gamma)}\Big|_{z=0}$$

$$\frac{E_{im}}{\eta_1}\cos\alpha e^{-j\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{x}\sin\alpha}(e^{-j\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{z}\cos\alpha}-\boldsymbol{\Gamma}_{\perp}e^{j\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{z}\cos\alpha})\Bigg|_{z=0}=\frac{\boldsymbol{T}_{\perp}E_{im}}{\eta_2}\cos\gamma e^{-j\boldsymbol{k}_2(x\sin\gamma+z\cos\gamma)}\Big|_{z=0}$$

$$1+\boldsymbol{\Gamma}_{\perp}=\boldsymbol{T}_{\perp}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\eta_1}(1-\boldsymbol{\Gamma}_{\perp})=\frac{\boldsymbol{T}_{\perp}}{\eta_2}\cos\gamma$$



$$\boldsymbol{\Gamma}_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos\alpha - \eta_1 \cos\gamma}{\eta_2 \cos\alpha + \eta_1 \cos\gamma} \qquad \boldsymbol{T}_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos\alpha}{\eta_2 \cos\alpha + \eta_1 \cos\gamma}$$

对于理想的非磁性媒质通常有： $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

$$\eta_1 = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} \qquad \eta_2 = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

折射定理：$k_1 \sin\alpha = k_2 \sin\gamma$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\perp} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos\alpha - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cos\gamma}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos\alpha + \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cos\gamma} = \frac{\sin\gamma\cos\alpha - \sin\alpha\cos\gamma}{\sin\gamma\cos\alpha + \sin\alpha\cos\gamma} = \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

$$\boldsymbol{T}_{\perp} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos\alpha}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} \cos\alpha + \sqrt{\varepsilon_{r2}} \cos\gamma} = \frac{2\sin\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\cos\alpha + \sin\alpha\cos\gamma} = \frac{2\sin\gamma\cos\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

用入射角 α 表示折射角γ, [$\sqrt{\varepsilon_{r1}}\sin\alpha=\sqrt{\varepsilon_{r2}}\sin\gamma$]

$$\cos\gamma=\sqrt{1-\sin^2\gamma}=\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1}\sin^2\alpha}{\varepsilon_{r2}}}$$

用入射角 α 表示的反射系数和透射系数：

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\perp}=\frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos\alpha-\sqrt{\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1}\sin^2\alpha}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos\alpha+\sqrt{\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1}\sin^2\alpha}}=\frac{\cos\alpha-\sqrt{\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha+\sqrt{\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}-\sin^2\alpha}}$$

$$\boldsymbol{T}_{\perp}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos\alpha}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos\alpha+\sqrt{\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1}\sin^2\alpha}}=\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha+\sqrt{\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}-\sin^2\alpha}}$$

讨论： **(1) 全反射情况** $|\Gamma_\perp| = 1$

$$(\cos\alpha + \sqrt{\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1} - \sin^2\alpha})^2 = (\cos\alpha - \sqrt{\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1} - \sin^2\alpha})^2$$

$$\cancel{\alpha_c = 90^o}$$ （无效解）

$$\sin\alpha_c = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}$$

垂直极化波斜入射，全反射情况出现在由光密媒质向光疏媒质斜入射，且入射角大于临界角时。

(2) 全透射情况 $|\Gamma_\perp| = 0$

$$\cos\alpha - \sqrt{\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1} - \sin^2\alpha} = 0$$

$$\varepsilon_{r2} = \varepsilon_{r1}$$

垂直极化波斜入射，不会出现全透射现象。

特别是当由自由空间（空气）向理想介质斜入射时，不会出现全反射现象。

$$\varepsilon_{r1}=1 \qquad \varepsilon_{r2}=\varepsilon_r$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\perp}=\frac{\cos\alpha-\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\alpha}}{\cos\alpha+\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\alpha}} \qquad \boldsymbol{T}_{\perp}=\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha+\sqrt{\varepsilon_r-\sin^2\alpha}}$$

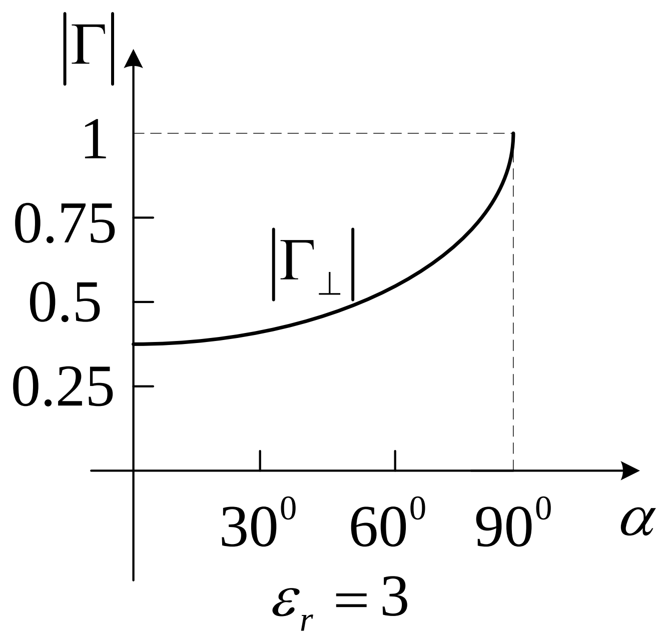
垂直极化波斜入射时，仅当 $\alpha=0^0$ 时（垂直入射），其反射系数的绝对值才最小：

$$\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\perp}\right|_{\min}=\left|\frac{\sqrt{\varepsilon_r}-1}{\sqrt{\varepsilon_r}+1}\right|, \qquad T_{\perp}=\frac{2}{\sqrt{\varepsilon_r}+1}$$

且仅当 $\alpha=90^0$ 时，反射系数的绝对值才最大：

$$\left|\boldsymbol{\Gamma}_{\perp}\right|_{\max}=1, \qquad T_{\perp}=0$$

垂直极化波由自由空间向理想介质斜入射时，当 $0^0 < \alpha < 90^0$ 时，一般既不会出现全反射情况，也不会出现全透射。$|\Gamma|$ 随 α 的变化曲线如图所示（设 $\varepsilon_r = 3$）



2. 平行极化波的斜入射

$$\vec{n}_i = \sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_z$$

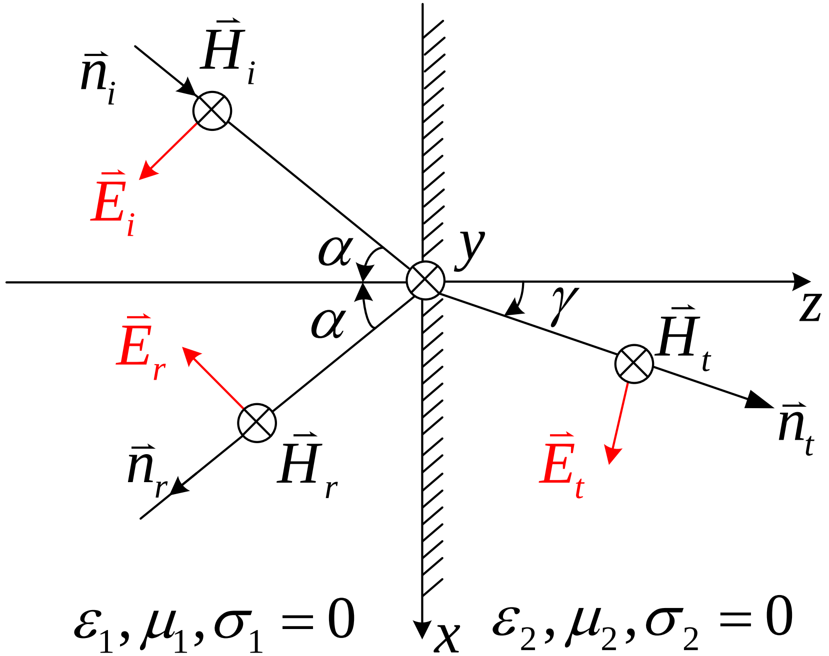
$$\vec{n}_r = \sin\alpha\vec{e}_x - \cos\alpha\vec{e}_z$$

$$\vec{n}_t = \sin\gamma\vec{e}_x + \cos\gamma\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_{Ei} = \cos\alpha\vec{e}_x - \sin\alpha\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_{Er} = -\cos\alpha\vec{e}_x - \sin\alpha\vec{e}_z$$

$$\vec{e}_{Et} = \cos\gamma\vec{e}_x - \sin\gamma\vec{e}_z$$



设媒质界面的反射系数为 $\quad \Gamma_{//} = \dfrac{E_{rm}}{E_{im}}$

媒质交界面的透射系数为 $\quad T_{//} = \dfrac{E_{tm}}{E_{im}}$

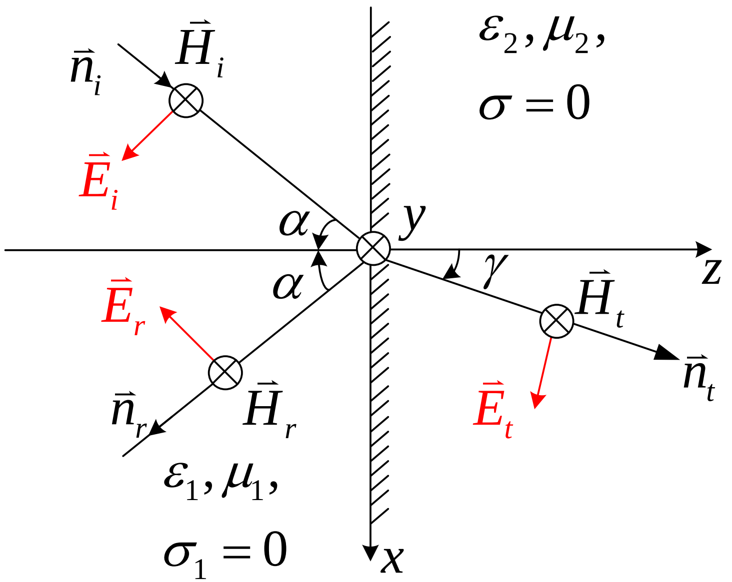
在区域1中： $k_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}=\dfrac{2\pi}{\lambda_1}$

$$\vec{E}_{\boldsymbol{i}}=E_{im}e^{-jk_1\vec{n}_i\cdot\vec{r}}\vec{e}_{Ei}=E_{im}\left(\cos\alpha\vec{e}_x-\sin\alpha\vec{e}_z\right)e^{-jk_1(x\sin\alpha+z\cos\alpha)}$$

$$\vec{H}_{\boldsymbol{i}}=\frac{E_i}{\eta_1}\vec{e}_y=\frac{E_{im}}{\eta_1}e^{-jk_1(\boldsymbol{x}\sin\alpha+\boldsymbol{z}\cos\alpha)}\vec{e}_y$$

$$\vec{E}_{\boldsymbol{r}}=\Gamma_{//}E_{im}e^{-jk_1\vec{n}_r\cdot\vec{r}}\vec{\boldsymbol{e}}_{Er}=\Gamma_{//}E_{im}\left(-\cos\alpha\vec{e}_x-\sin\alpha\vec{e}_z\right)e^{-jk_1(\boldsymbol{x}\sin\alpha+\boldsymbol{z}\cos\alpha)}$$

$$\vec{H}_{\boldsymbol{r}}=\frac{E_r}{\eta_1}\vec{e}_y=\frac{\boldsymbol{\Gamma}_{//}E_{im}}{\eta_1}e^{-jk_1(x\sin\alpha-z\cos\alpha)}\vec{e}_y$$



在区域2中： $k_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}=\dfrac{2\pi}{\lambda_2}$

$$\vec{E}_2=\vec{E}_t=T_{//}E_{im}e^{-jk_1\vec{n}_t\cdot\vec{r}}\vec{e}_{Et}$$
$$=T_{//}E_{im}\left(\cos\gamma\vec{e}_x-\sin\gamma\vec{e}_z\right)e^{-jk_2(x\sin\gamma+z\cos\gamma)}$$

$$\vec{H}_2=\vec{H}_t=\frac{T_{//}E_{im}}{\eta_2}e^{-jk_1\vec{n}_t\cdot\vec{r}}\vec{e}_y=\frac{T_{//}E_{im}}{\eta_2}e^{-jk_2(x\sin\gamma+z\cos\gamma)}\vec{e}_y$$

在理想介质的界面上：

$$\vec{n}\times(\vec{E}_1-\vec{E}_2)\Big|_{z=0}=0$$

$$\vec{n}\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)\Big|_{z=0}=0$$

及折射定理： $$k_1\sin\alpha=k_2\sin\gamma$$

$$(E_{xi}+E_{xr})\Big|_{z=0}=E_{xt}\Big|_{z=0} \qquad (H_{yi}+H_{yr})\Big|_{z=0}=H_{yt}\Big|_{z=0}$$

$$\cos\alpha\left(1-\Gamma_{//}\right)=\cos\gamma T_{//} \qquad \frac{1}{\eta_1}(1+\Gamma_{//})=\frac{1}{\eta_2}T_{//}$$

$$\Gamma_{//}=\frac{\eta_1\cos\alpha-\eta_2\cos\gamma}{\eta_1\cos\alpha+\eta_2\cos\gamma} \qquad T_{//}=\frac{2\eta_2\cos\alpha}{\eta_1\cos\alpha+\eta_2\cos\gamma}$$

对于理想的非磁性媒质通常有： $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

$$\eta_1 = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}} \qquad \eta_2 = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}} \qquad \sqrt{\varepsilon_{r1}}\sin\alpha = \sqrt{\varepsilon_{r2}}\sin\gamma$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{//} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos\alpha - \sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos\gamma}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos\alpha + \sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos\gamma} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\gamma\cos\gamma}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\gamma\cos\gamma}$$

$$= \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\gamma}{\sin 2\alpha + \sin 2\gamma} = \frac{2\cos(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma)}{2\sin(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma)} = \frac{\tan(\alpha-\gamma)}{\tan(\alpha+\gamma)}$$

$$T_{//} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos\alpha}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos\alpha + \sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos\gamma} = \frac{2\sin\gamma\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\gamma\cos\gamma}$$

$$= \frac{2\sin\gamma\cos\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma)}$$

用入射角 α 表示折射角γ

$$\cos\gamma = \sqrt{1-\sin^2\gamma} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}\sin^2\alpha}{\varepsilon_{r2}}}$$

用入射角 α 表示的反射系数和透射系数：

$$\Gamma_{//} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos\alpha - \sqrt{\varepsilon_{r1}}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\sin^2\alpha}}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos\alpha + \sqrt{\varepsilon_{r1}}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\sin^2\alpha}}$$

$$T_{//} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r1}}\cos\alpha}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos\alpha + \sqrt{\varepsilon_{r1}}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\sin^2\alpha}}$$

讨论： **(1) 全反射情况** $|\Gamma_{//}|=1$

$$\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos\alpha-\sqrt{\varepsilon_{r1}}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\sin^2\alpha}=\pm\left(\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos\alpha+\sqrt{\varepsilon_{r1}}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\sin^2\alpha}\right)$$

$$\sqrt{\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1}-\sin^2\alpha}=0 \qquad (取+号)$$

$$\cos\alpha=0 \qquad (取-号)$$

$$\cancel{\alpha_c=90^o} \qquad \sin\alpha_c=\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}$$

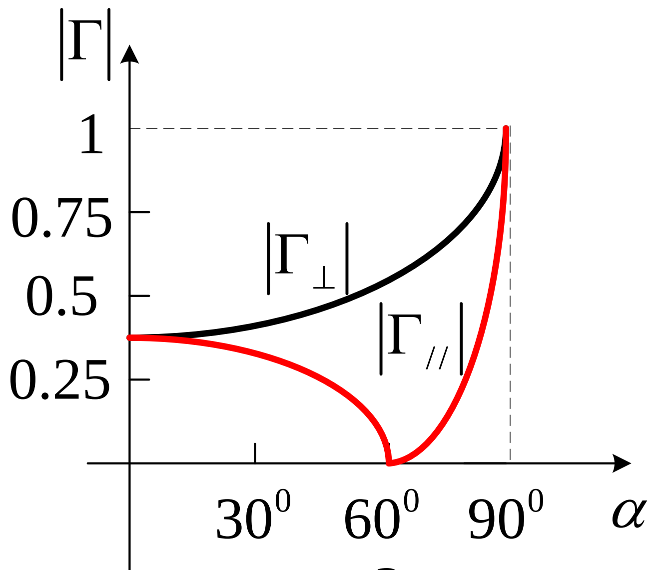
平行极化波斜入射，全反射情况出现在由光密媒质向光疏媒质斜入射，且入射角大于临界角时。

当由自由空间（空气）向理想介质斜入射时，不会出现全反射现象。

设 $\varepsilon_{r1}=1,\varepsilon_{r2}=3$

$$\left|\Gamma_{//}\right|_{\alpha=0}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=0.27,\qquad \left|\Gamma_{//}\right|_{\alpha=90}=1$$

$\left|\Gamma_{//}\right|$ 随 α 的变化曲线如图所示



$\varepsilon_r=3$

(2) 全透射情况

$$|\Gamma_{//}|=0$$

$$\sqrt{\varepsilon_{r2}}\cos\alpha-\sqrt{\varepsilon_{r1}}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\sin^2\alpha}=0$$

$$\varepsilon_{r2}\cos^2\alpha=\varepsilon_{r1}-\frac{\varepsilon_{r1}^2}{\varepsilon_{r2}}\sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha_p=\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2}}}$$

α_p 为极化角（或布鲁斯特角 **Brewster angle**）

平行极化波斜入射，会出现全透射现象。

$$\alpha_p=\sin^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2}}}=\cos^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2}}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}$$

说明：

1：极化方式不同，反射，透射特性不同

2：平行极化波斜入射，存在一个全透射角 α_p，称其为极化角（或布鲁斯特角Brewster angle）。当 $\alpha=\alpha_p$ 时，媒质1中的平行极化波全部透入媒质2，媒质1中无反射波，称此为全透射现象。

$$\alpha_p=\tan^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}$$

3：当从自由空间（空气）向理想介质斜入射时，垂直和平行极化波均不会出现全反射现象。仅在 $\alpha=90^0$ 平行于介质界面入射时，才会出现全反射现象。

4：无论水平极化还是垂直极化，当波由光密媒质斜入射到光疏媒质时，均存在一个临界角 α_c，当 $\alpha>\alpha_c$ 时，发生全反射，此时没有功率透入区域2。

例4-4. 圆极化均匀平面电磁波由$\mu_r=1, \varepsilon_r=3$ 的理想介质斜入射到它与空气的界面（z=0）上，试求，当入射角为何值时反射波为线极化波；又当入射角为何值时将发生全反射。

小结

1、向理想导体界面的斜入射（全反射无透射）

垂直极化	平行极化
$\Gamma_{\perp}=-1$	$\Gamma_{//}=1$
沿x方向是行波且 $v_{px}>v$	沿x方向是行波且 $v_{px}>v$
沿z方向是驻波	沿z方向是驻波
含有传播方向（x）的场分量 H_x	含有传播方向（x）的场分量 E_x
非**TEM**波，导行波	非**TEM**波，导行波
横电波，**TE**波（E_y）	横磁波，**TM**波（H_y）
纵磁波，**H**波（H_x）	纵电波，**E**波（E_x）

2、向理想介质界面的斜入射（部分反射，部分透射）

垂直极化
（没有全透射现象）

$$
\begin{cases}
\Gamma_{\perp} = \dfrac{\eta_2 \cos\alpha - \eta_1 \cos\gamma}{\eta_2 \cos\alpha + \eta_1 \cos\gamma} \\
T_{\perp} = \dfrac{2\eta_2 \cos\alpha}{\eta_2 \cos\alpha + \eta_1 \cos\gamma}
\end{cases}
$$

平行极化
（以极化角 α_p 斜入射时有全透射现象）

$$
\begin{cases}
\Gamma_{//} = \dfrac{\eta_1 \cos\alpha - \eta_2 \cos\gamma}{\eta_1 \cos\alpha + \eta_2 \cos\gamma} \\
T_{//} = \dfrac{2\eta_2 \cos\alpha}{\eta_1 \cos\alpha + \eta_2 \cos\gamma}
\end{cases}
$$

全透射，极化角（布鲁斯特角） $\alpha_p = \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}$

2、向理想介质界面的斜入射（部分反射，部分透射）

由光密媒质向光疏媒质斜入射（ $\alpha > \alpha_c$ ）时，都会出现全反射现象。

全反射，临界角 $\alpha_c = \sin^{-1}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}$

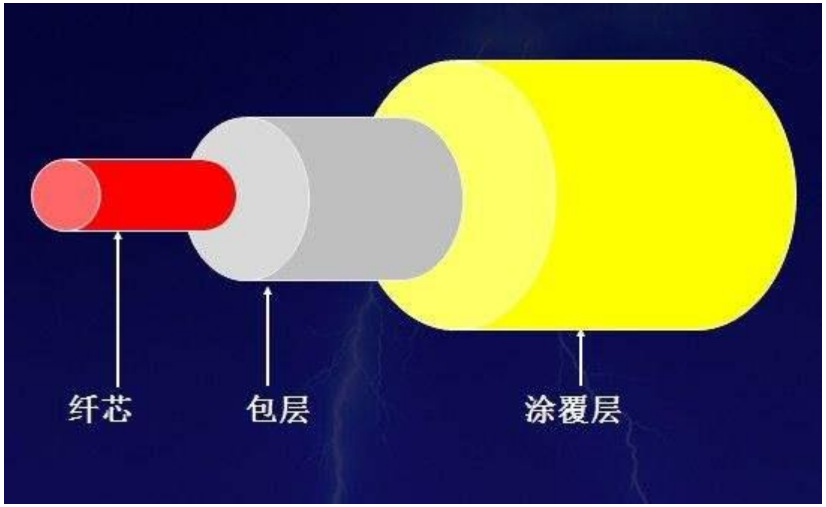
全反射时，垂直极化波：**TE**导行波，**H**波。

全反射时，平行极化波：**TM**导行波，**E**波。

显然极化方式不同，反、透射特性也不同。

3、全反射的应用——光纤（海底电缆）

◆ 中心部分用介电常数较大的介质制成，称为核；核外部是介电常数较小的介质涂层，以满足产生全反射的条件，最外层涂上吸收材料从而形成无反射条件。



光纤：https://haokan.baidu.com/v?pd=wisenatural&vid=4690111558832467756