



第三章 控制系统的时域分析法

3.1 典型输入信号

3.2 控制系统的时域性能指标

3.3 一阶系统的时域响应

3.4 二阶系统的时域响应

3.5 高阶系统的时域分析

3.6 线性定常系统的稳定性和劳斯判据

3.7 控制系统的稳态误差分析



3.7 控制系统的稳态误差分析

- 对控制系统的基本要求：**稳、快、准。**
 - 控制系统的稳态误差是系统控制精度的一种度量，通常称为**稳态性能**。在控制系统的设计中，稳态误差是一项重要的技术指标。
 - **讨论稳态误差的前提：系统是稳定的。**对于不稳定的系统而言，根本不存在研究稳态误差的可能性。
- ❖ 控制系统的误差包括：
- ①原理性误差，由**系统模型和输入信号**决定；
 - ②扰动引起的误差；
 - ③系统机械结构、非线性误差。



3.7 控制系统的稳态误差分析

对于一个实际的控制系统，由于系统的结构、输入作用的类型(给定量或扰动量)、输入函数的形式(阶跃、斜坡或加速度)不同，控制系统的稳态输出不可能在任何情况下都与输入量一致或相当，也不可能在任何形式的扰动作用下都能准确地恢复到原平衡位置。这类由于系统结构、输入作用形式和类型所产生的稳态误差称为**原理性稳态误差**。

此外，控制系统中不可避免地存在摩擦、间隙、不灵敏区等非线性因素，都会造成附加的稳态误差。这类由于非线性因素所引起的系统稳态误差称为**附加稳态误差**或**结构性稳态误差**。

本节只讨论原理性稳态误差（简称稳态误差），不讨论结构性稳态误差。



3.7 控制系统的稳态误差分析

可以说控制系统的稳态误差是不可避免的，控制系统设计的任务之一，是尽量减少系统的稳态误差，或者使稳态误差小于某一允许值。

有时，把在阶跃函数作用下没有稳态误差的系统，称为**无差系统**；而把具有稳态误差的系统，称为**有差系统**。



3.7 控制系统的稳态误差分析

一、控制系统的误差:

典型的控制系统结构框图:

1、定义 (两种方法)

①从输入端 (偏差): 参考输入信号与主反馈信号之差。

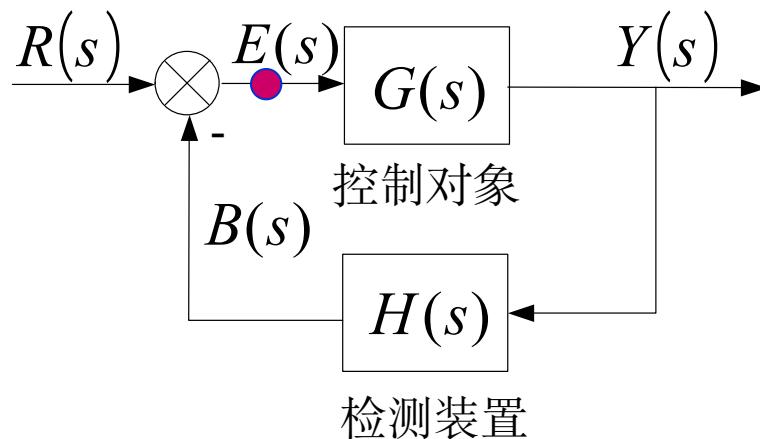
$$e(t) = r(t) - b(t)$$

②从输出端 (误差): 期望值与实际输出值之差。

$$e(t) = y_0(t) - y(t)$$

注: 对单位反馈系统 ($H(s) = 1$) , 两种定义等同。

在本课叙述中, 均采用从**输入端定义**系统的误差。





3.7 控制系统的稳态误差分析

二、控制系统的稳态误差：

1.定义： 误差信号 $e(t)$ 在时间 t 趋于无穷大时的数值定义为系统的稳态误差，记为 e_{ss} 。即：

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

由系统误差的讨论和稳态误差的定义，可知稳态误差不仅和系统的**特性**（系统的类型和结构）有关，而且和系统的**输入**（参考输入和扰动输入）信号的特性有关。由系统的类型、结构或输入信号形式所产生的稳态误差称为**原理性稳态误差**，而由非线性因素所引起的稳态误差称为**附加稳态误差**。

需要指出： 只有当系统稳定时，研究稳态误差才有意义。因此，在计算系统的稳态误差之前，必须判断系统是稳定的。对于不稳定的系统，计算稳态误差是没有意义的。

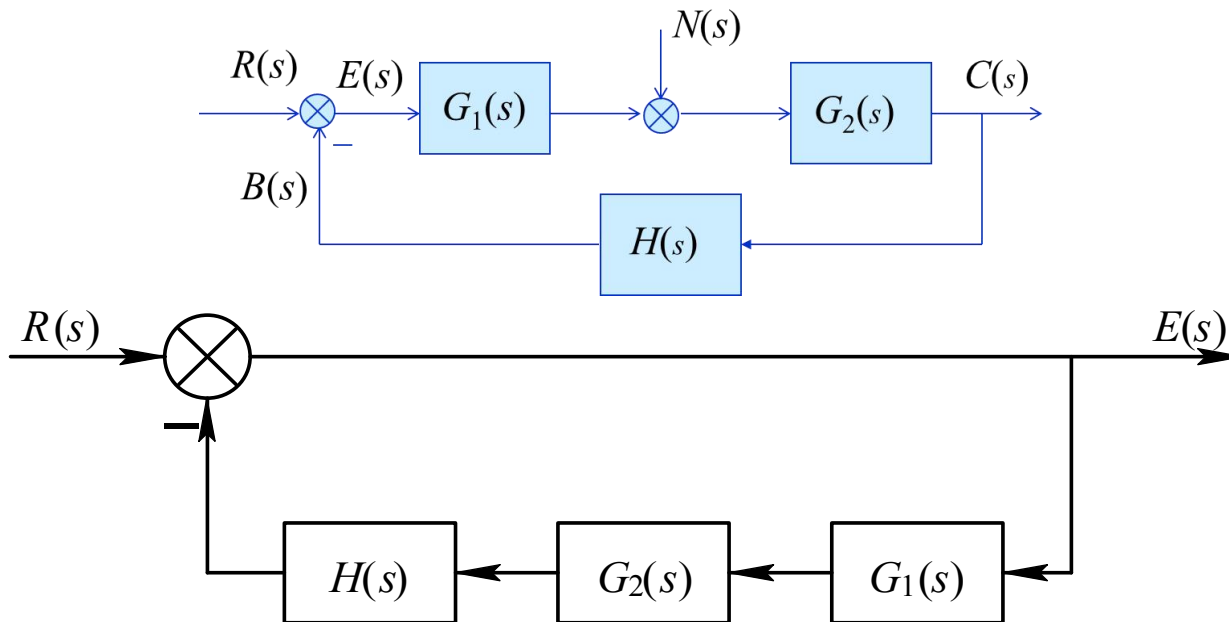


3.7 控制系统的稳态误差分析

2. (带扰动) 闭环系统的误差传递函数

1) 输入作用下的误差传递函数

$$\Phi_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$



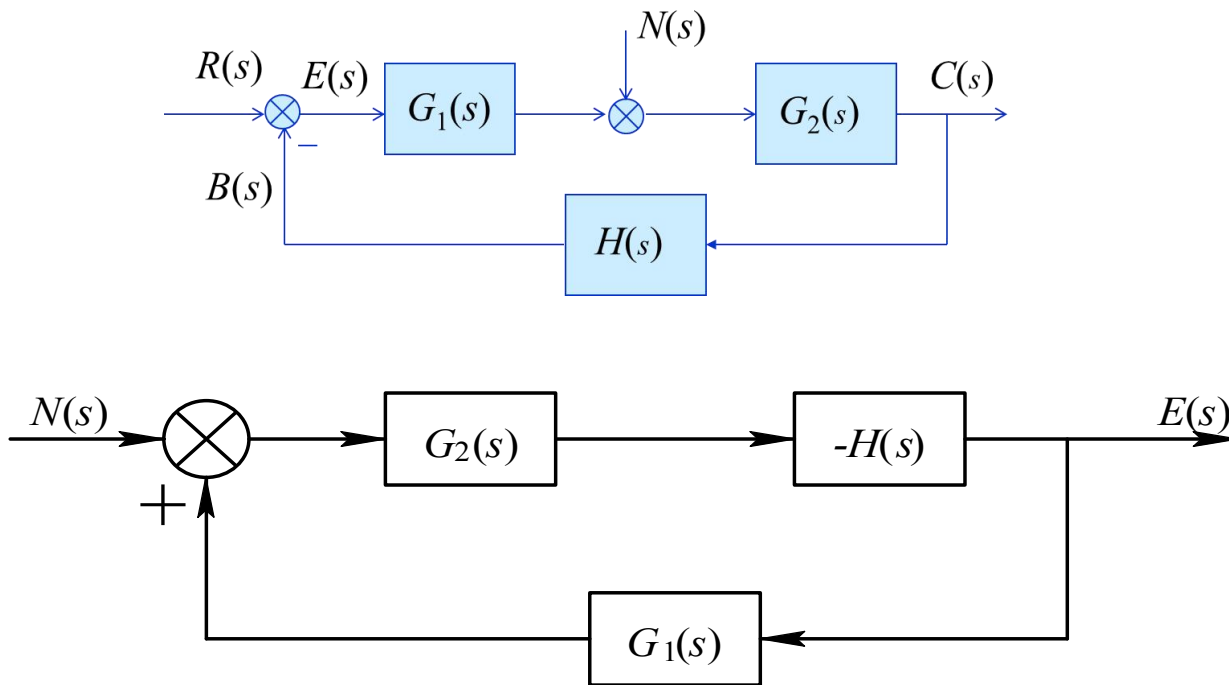
$r(t)$ 作用下的误差输出结构图



3.7 控制系统的稳态误差分析

2) 扰动作用下的误差传递函数

$$\Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$



$n(t)$ 作用下闭环系统的误差传递函数



3.7 控制系统的稳态误差分析

3) 系统的总误差

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s)\Phi_{er}(s) + N(s)\Phi_{en}(s) \\ &= \frac{R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} - \frac{G_2(s)H(s)N(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \end{aligned}$$

■ 对稳定的系统，利用终值定理计算稳态误差

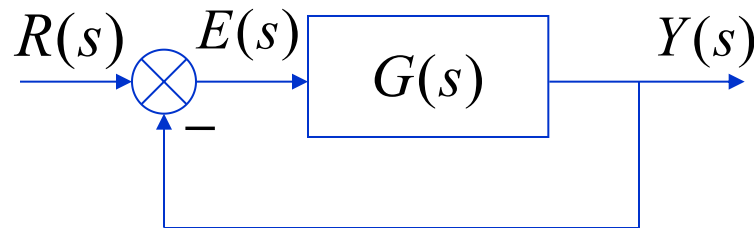
$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-sG_2(s)H(s)N(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \end{aligned}$$



3.7 控制系统的稳态误差分析

3. (无干扰) 系统误差传递函数 $\Phi_e(s)$

① 单位反馈系统 (直接反馈)



误差传递函数 $\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + G_o(s)}$

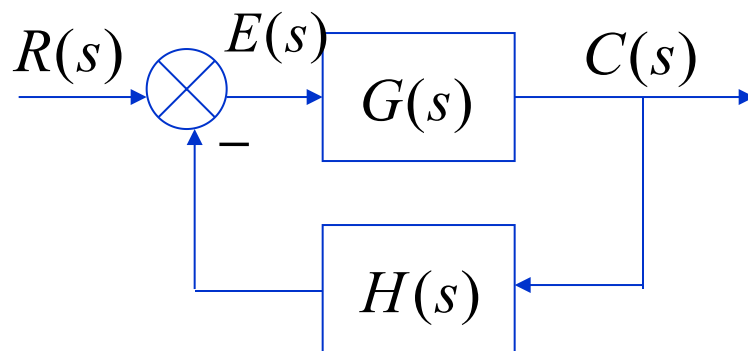
误差象函数: $E(s) = \Phi_e(s)R(s) = \frac{1}{1 + G(s)}R(s)$

根据终值定理: $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$



3.7 控制系统的稳态误差分析

②非单位反馈系统（间接反馈）



误差传递函数 $\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + G_o(s)}$

误差象函数: $E(s) = \Phi_e(s)R(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}R(s)$

根据终值定理: $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$



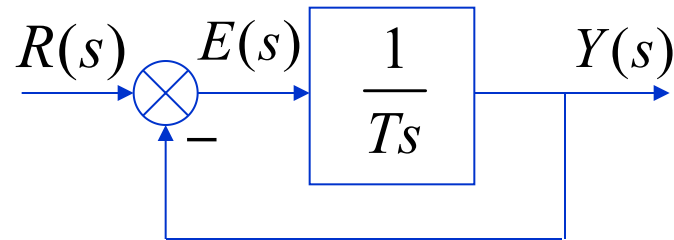
3.7 控制系统的稳态误差分析

例1: 一阶系统在单位速度信号作用下的稳态误差 ($e_{ss} = T$) .

解:
$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)} = \frac{Ts}{Ts + 1}$$

$$E(s) = R(s)\Phi_e(s) = \frac{1}{s^2} \frac{Ts}{Ts + 1}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \frac{Ts}{Ts + 1} = T$$

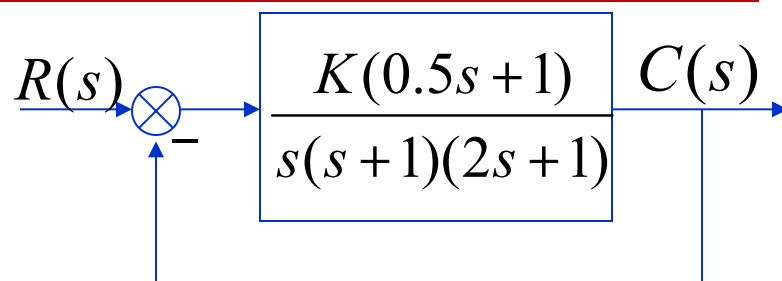


注意: 根据终值定理算出的稳态误差是误差信号稳态分量 $e_{ss}(t)$ 在 t 趋于无穷时的数值, 故有时称为**终值误差**, 它不能反映 $e_{ss}(t)$ 随时间 t 的变化规律, 具有一定的局限性。



3.7 控制系统的稳态误差分析

例2： 系统结构图如图所示，当输入信号为单位斜坡函数时，求系统在输入信号作用下的稳态误差；调整K值能使稳态误差小于0.1吗？



解： 只有稳定的系统计算稳态误差才有意义，所以先判稳：

系统特征方程为 $2s^3 + 3s^2 + (1 + 0.5K)s + K = 0$

由劳斯判据知稳定的条件为： $0 < K < 6$

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)}$$

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \quad E(s) = \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{K}$$

由稳定的条件知： $e_{ss} > \frac{1}{6}$ 不能满足 $e_{ss} < 0.1$ 的要求



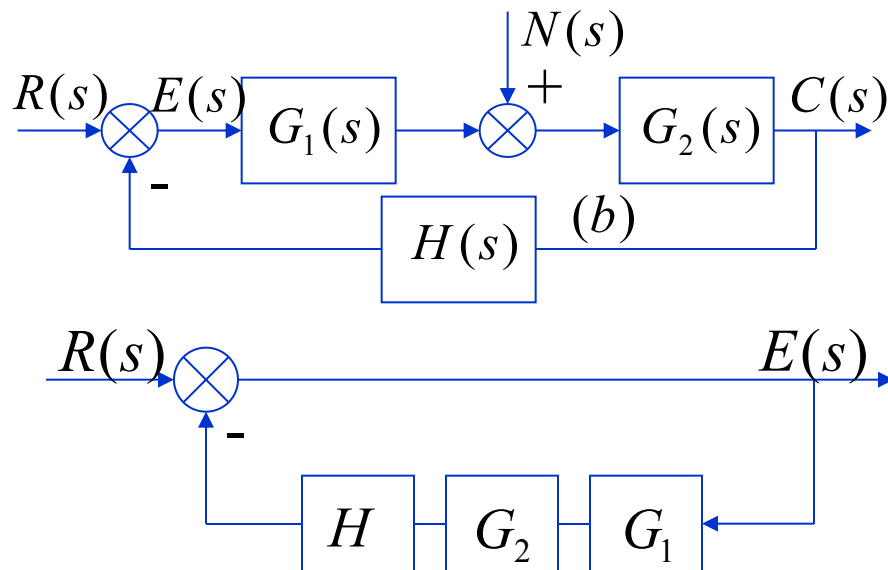
3.7 控制系统的稳态误差分析

三、系统的类型 (型数)

不考虑扰动的影响。可以写出随动系统的误差 $E(s)$ 为

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)},$$

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$



当 t 趋于无穷大时的误差称为稳态误差 e_{ss} 。根据终值定理有：

$$e_{ssr} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_1 G_2 H} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_K(s)}$$

式中, $G_K(s) = G_1 G_2 H$ 为开环传递函数。

显然, e_{ssr} 与输入和开环传递函数有关。



3.7 控制系统的稳态误差分析

假设**开环传递函数** $G_K(s)$ 的形式如下:

$$G_K(s) = \frac{K}{s^\nu} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)} = \frac{K}{s^\nu} \cdot G_0(s)$$

式中: K —开环放大系数, ν 积分环节的个数;

$G_0(s)$ — 开环传递函数去掉积分和比例环节剩余部分。

$$G_0(0) = 1, m_1 + 2m_2 = m, \nu + n_1 + 2n_2 = n$$

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + G_K(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + \frac{K}{s^\nu} G_0(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\nu+1} R(s)}{s^\nu + K}$$

输入作用下的**稳态误差**与**外作用**有关; 与时间常数形式的**开环增益** K 有关; 与**积分环节的个数** ν 有关。



3.7 控制系统的稳态误差分析

系统的无差度阶数（开环传递函数的型）

通常称开环传递函数中积分的个数为系统的无差度阶数，并将系统按无差度阶数进行分类。

当 $\nu = 0$ ，无积分环节，称为0型系统

当 $\nu = 1$ ，有一个积分环节，称为 I 型系统

当 $\nu = 2$ ，有二个积分环节，称为 II 型系统

.....

当 $\nu > 2$ 时，使系统稳定是相当困难的。因此除航天控制等系统外，III型及III型以上的系统几乎不用。

之所以按照积分环节个数 ν 对系统进行分类，是由于 ν 反映了系统跟踪参考输入的能力，另外，可以根据已知的输入信号形式，迅速判断系统是否存在稳态误差及稳态误差的大小。



3.7 控制系统的稳态误差分析

四、典型输入作用下系统的稳态误差分析

□ 当输入为 $R(s) = \frac{1}{s}$ 时 (单位阶跃函数)

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_K(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_K(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^\nu} \cdot G_0(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

式中: $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_K(s)$ 称为**静态位置误差系数**;

$$\text{当 } \nu = 0 \text{ 时, } K_p = \lim_{s \rightarrow 0} KG_0(s) = K, \therefore e_{ssr} = \frac{1}{1 + K}$$

$$\text{当 } \nu \geq 1 \text{ 时, } K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^\nu} G_0(s) = \infty, \therefore e_{ssr} = 0$$

稳态误差为零的系统称为**无差系统**, 为有限值的称为**有差系统**。在单位阶跃作用下, $\nu = 0$ 的系统为有差系统, $\nu \geq 1$ 的系统为无差系统。

K_p 的大小反映了系统在阶跃输入下的稳态精度。 K_p 越大, e_{ssr} 越小。所以说 K_p 反映了系统跟踪阶跃输入的能力。



3.7 控制系统的稳态误差分析

□ 当输入为 $R(s) = \frac{1}{s^2}$ 时 (单位斜坡函数)

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_K(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_K(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-1}} \cdot G_0(s)} = \frac{1}{K_v}$$

式中: $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_K(s)$ 称为**静态速度误差系数**;

$$\text{当 } \nu = 0 \text{ 时, } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sKG_0(s) = 0, \therefore e_{ssr} = \infty$$

$$\text{当 } \nu = 1 \text{ 时, } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} KG_0(s) = K, \therefore e_{ssr} = \frac{1}{K}$$

$$\text{当 } \nu \geq 2 \text{ 时, } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s} G_0(s) = \infty, \therefore e_{ssr} = 0$$

K_v 的大小反映了系统在斜坡输入下的稳态精度。 K_v 越大, e_{ssr} 越小。所以说 K_v 反映了系统跟踪斜坡输入的能力。

注意: 根据 K_v 计算的稳态误差并不是速度的误差, 而是系统在跟踪速度输入时产生的位置上的误差。



3.7 控制系统的稳态误差分析

□ 当输入为 $R(s) = \frac{1}{s^3}$ 时 (单位加速度函数)

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_K(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G_K(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-2}} \cdot G_0(s)} = \frac{1}{K_a}$$

式中: $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_K(s)$ 称为**静态加速度误差系数**;

当 $\nu = 0, 1$ 时, $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^{(1,2)} KG_0(s) = 0, \therefore e_{ssr} = \infty$

当 $\nu = 2$ 时, $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} KG_0(s) = K, \therefore e_{ssr} = \frac{1}{K}$

当 $\nu \geq 3$ 时, $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s} G_0(s) = \infty, \therefore e_{ssr} = 0$

K_a 的大小反映了系统在抛物线输入下的稳态精度。 K_a 越大, e_{ssr} 越小。所以说 K_a 反映了系统跟踪抛物线输入的能力。

注意: 根据 K_a 计算的稳态误差并不是加速度的误差, 而是系统在跟踪加速度输入时产生的位置上的误差。



3.7 控制系统的稳态误差分析

□ 当系统的输入信号由位置，速度和加速度分量组成时，即

$$r(t) = A + Bt + \frac{Ct^2}{2}$$

有：

$$e_{ssr} = \frac{A}{1 + K_p} + \frac{B}{K_v} + \frac{C}{K_a}$$



3.7 控制系统的稳态误差分析

典型输入信号作用下系统的稳态误差

系统 型别	稳态误差系数			阶跃信号 $r(t) = A \cdot 1(t)$	速度信号 $r(t) = Bt$	加速度信号 $r(t) = \frac{1}{2} Ct^2$
	K_p	K_v	K_a	位置误差 $e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$	速度误差 $e_{ss} = \frac{B}{K_v}$	加速度误差 $e_{ss} = \frac{C}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{A}{1 + K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{B}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{C}{K}$
III	∞	∞	∞	0	0	0

上表中， K 为开环放大系数（开环传递函数写成时间常数形式时的开环增益）



3.7 控制系统的稳态误差分析

小结

- ▶ 给定作用下的稳态误差与外作用有关。对同一系统加入不同的输入，稳态误差不同。
- ▶ 与时间常数形式的开环增益 K 有关；对有差系统， $K \uparrow$ ，稳态误差 \downarrow ，但同时系统的稳定性和动态特性变差。
- ▶ 与积分环节的个数有关。积分环节的个数 $\nu \uparrow$ ，稳态误差 \downarrow ，但同时系统的稳定性和动态特性变差。所以Ⅲ型及Ⅲ型以上的系统几乎不用。
- ▶ 欲降低 e_{ss} ，应增大稳态误差系数 K ；欲消除 e_{ss} ($e_{ss}=0$)，应提高系统型数 ν 。

可见对稳态误差的要求往往与系统的稳定性和动态特性的要求是矛盾的。



3.7 控制系统的稳态误差分析

小结

- **稳态误差系数**：衡量系统跟踪不同信号的能力；
- 稳态误差和**输入信号**和**系统的结构和参数**有关；
 - **0型**系统可以有差跟踪阶跃信号，不能跟踪速度信号和加速度信号；
 - **I型**系统可以无差跟踪阶跃信号，有差跟踪速度信号，不能跟踪加速度信号；
 - **II型**系统可以无差跟踪阶跃信号和速度信号，有差跟踪加速度信号。



3.7 控制系统的稳态误差分析

回顾

一、误差与稳态误差

- (1)按输入端定义误差;
- (2)按输出端定义误差

二、计算稳态误差的一般步骤

- (1)判定系统的稳定性
- (2)求误差传递函数
- (3)用终值定理求稳态误差

三、典型输入信号作用下系统的稳态误差

- (1) 系统的型数
- (2)静态误差系数: K_p, K_v, K_a

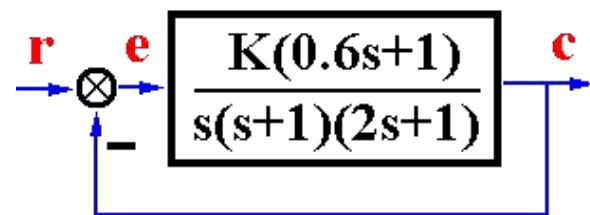


3.7 控制系统的稳态误差分析

例3 系统结构图如图所示，当 $r(t)=t$ 时，要求 $e_{ss}<0.1$ ，求 K 的范围。

解: $G(s) = \frac{K(0.6s+1)}{s(s+1)(2s+1)} \Rightarrow K_v = K$

$$r(t) = t \quad e_{ss} = \frac{1}{K} < 0.1 \Rightarrow K > 10$$



$$D(s) = s(s+1)(2s+1) + K(0.6s+1) = 2s^3 + 3s^2 + (1+0.6K)s + K = 0$$

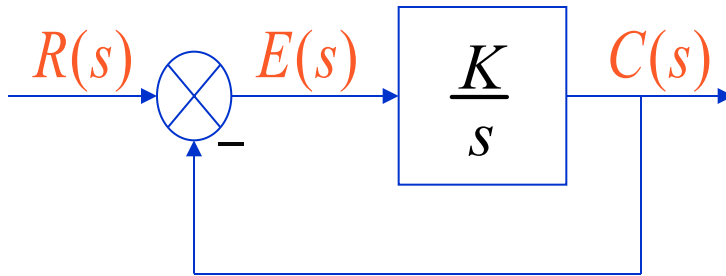
劳斯 阵列	s^3	2	$1+0.6K$	
	s^2	3	K	
	s^1	$\frac{3(1+0.6K)-2K}{3}$	0	$\rightarrow 3-0.2K>0 \rightarrow K<15$
	s^0	K		$\rightarrow K>0$

$$10 < K < 15$$



3.7 控制系统的稳态误差分析

典型一阶系统的稳态误差



开环传递函数为:

$$G_k(s) = \frac{K}{s}$$

$$v = 1, \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = \infty, \quad \text{阶跃输入时}, e_{ssr1} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

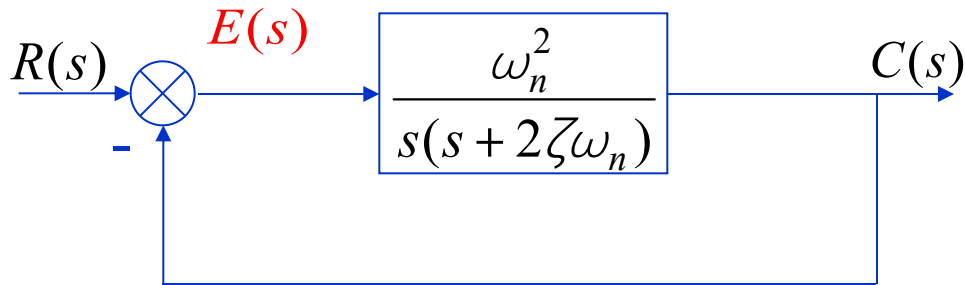
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_k(s) = K, \quad \text{斜坡输入时}, e_{ssr2} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s) = 0, \quad \text{抛物线输入时}, e_{ssr3} = \frac{1}{K_a} = \infty$$



3.7 控制系统的稳态误差分析

典型二阶系统的稳态误差：



$$G_k(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

$$\nu = 1, \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = \infty, \quad \text{阶跃输入时, } e_{ssr1} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

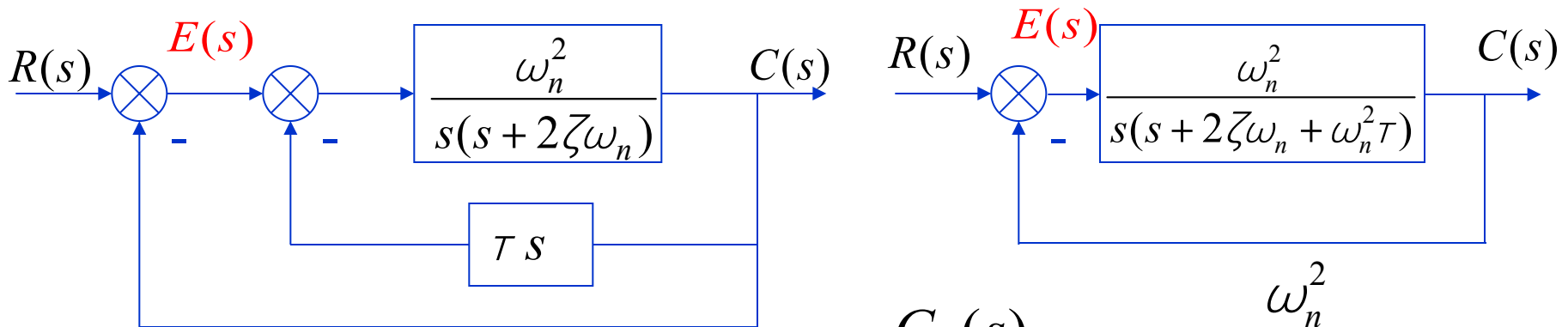
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_k(s) = \frac{\omega_n}{2\zeta}, \quad \text{斜坡输入时, } e_{ssr2} = \frac{1}{K_v} = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s) = 0, \quad \text{抛物线输入时, } e_{ssr3} = \frac{1}{K_a} = \infty$$



3.7 控制系统的稳态误差分析

二阶系统引入速度反馈控制时的稳态误差：



$$G_k(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2\tau)}$$

$$\nu = 1, \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = \infty, \quad \text{阶跃输入时, } e_{ssr1} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

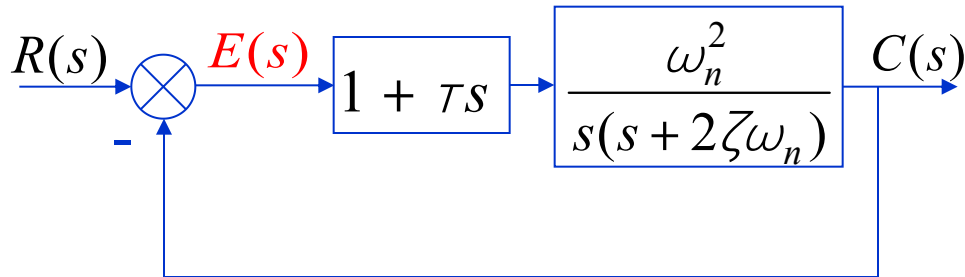
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_k(s) = \frac{\omega_n^2}{2\zeta\omega_n + \tau\omega_n^2}, \quad \text{斜坡输入时, } e_{ssr2} = \frac{1}{K_v} = \frac{2\zeta}{\omega_n} + \tau$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s) = 0, \quad \text{抛物线输入时, } e_{ssr3} = \frac{1}{K_a} = \infty$$



3.7 控制系统的稳态误差分析

二阶系统引入比例微分控制时的稳态误差：



$$G_k(s) = \frac{\omega_n^2(1 + \tau s)}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

$$\nu = 1, \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = \infty, \quad \text{阶跃输入时, } e_{ssr1} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

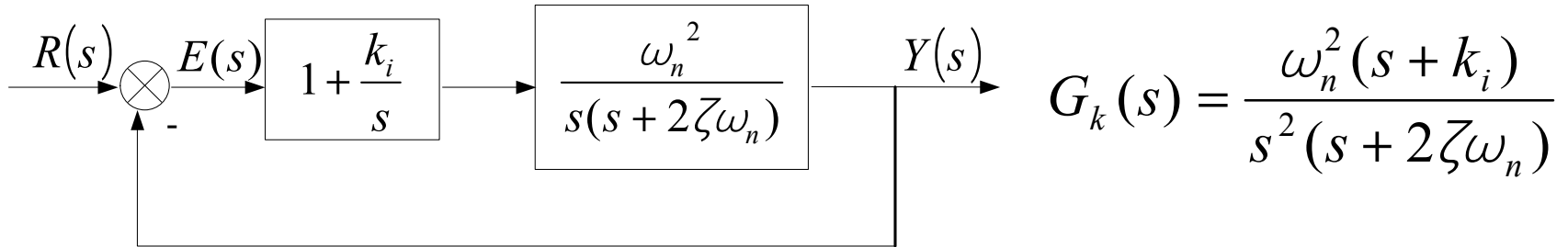
$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_k(s) = \frac{\omega_n}{2\zeta}, \quad \text{斜坡输入时, } e_{ssr2} = \frac{1}{K_v} = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s) = 0, \quad \text{抛物线输入时, } e_{ssr3} = \frac{1}{K_a} = \infty$$



3.7 控制系统的稳态误差分析

二阶系统引入比例积分控制时的稳态误差:



$$\nu = 2, \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = \infty, \quad \text{阶跃输入时, } e_{ssr1} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_k(s) = \infty, \quad \text{斜坡输入时, } e_{ssr2} = \frac{1}{K_v} = 0$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s) = \frac{\omega_n k_i}{2\zeta}, \quad \text{抛物线输入时, } e_{ssr3} = \frac{1}{K_a} = \frac{2\zeta}{\omega_n k_i}$$



3.7 控制系统的稳态误差分析

原二阶系统

$$e_{ssr} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_v} = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

速度反馈

$$e_{ssr} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_v} = \frac{2\zeta}{\omega_n} + T$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

比例微分

$$e_{ssr} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_v} = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

比例积分

$$e_{ssr} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_v} = 0$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_a} = \frac{2\zeta}{\omega_n k_i}$$

稳态误差比较:

- ▶ 典型二阶系统引入速度反馈环节后，跟踪阶跃信号和加速度信号时与原系统有相同的稳态误差，而跟踪斜坡信号时的稳态误差比原系统要大。
- ▶ 典型二阶系统引入比例微分环节后不改变原系统的稳态误差。
- ▶ 引入比例积分环节后将减小原系统的稳态误差。



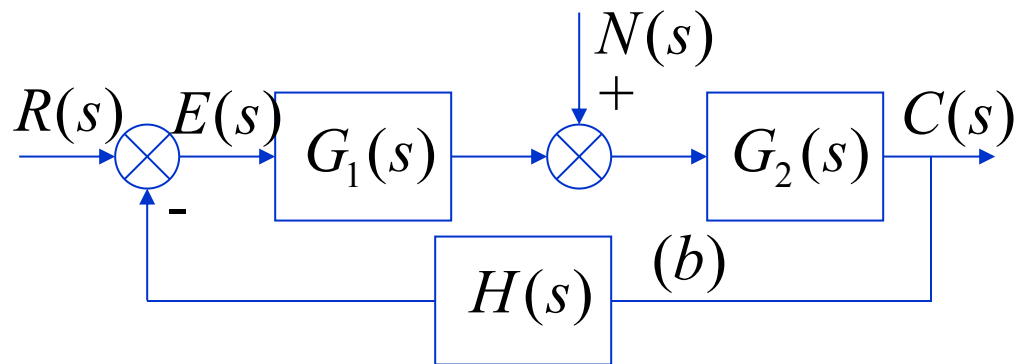
3.7 控制系统的稳态误差分析

五、扰动输入作用下系统的误差分析

通常，给定输入作用产生的误差称为系统的给定误差，扰动作用产生的误差为扰动误差。

$R(s) = 0, N(s) \neq 0$ 时产生的误差 $E(s)$ 称为扰动误差。

$$\begin{aligned} E(s) &= \Phi_{en}(s)N(s) \\ &= -\frac{G_2H}{1+G_1G_2H}N(s) \end{aligned}$$



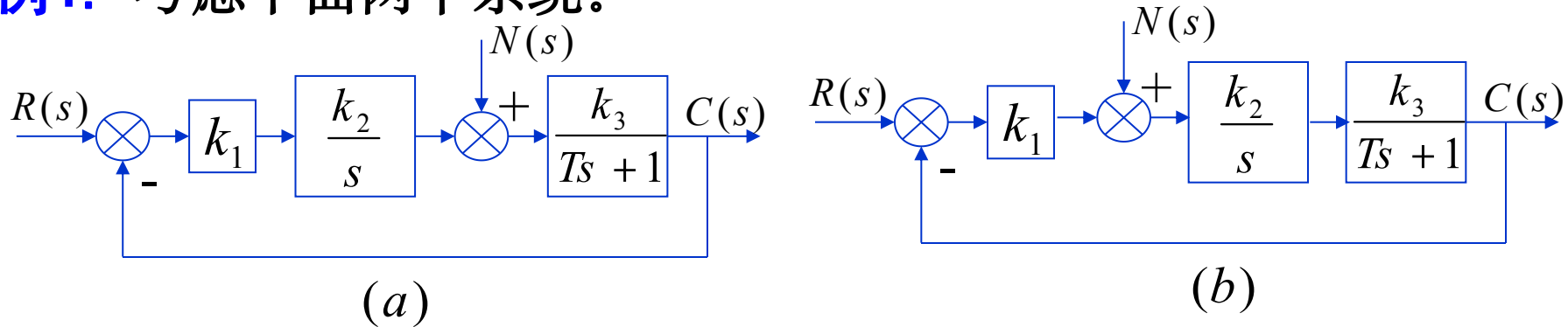
$$\therefore e_{ssn} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_2H}{1+G_1G_2H} N(s)$$

可见， e_{ssn} 不仅与 $G_k(s)$, $N(s)$ 有关，还与 $G_2(s)$ 有关（扰动点到输出点之间的那部分前向通道传递函数）。



3.7 控制系统的稳态误差分析

例4: 考虑下面两个系统。



图a和图b的开环传递函数是一样的。 $G_k(s) = \frac{k_1 k_2 k_3}{s(Ts + 1)}$

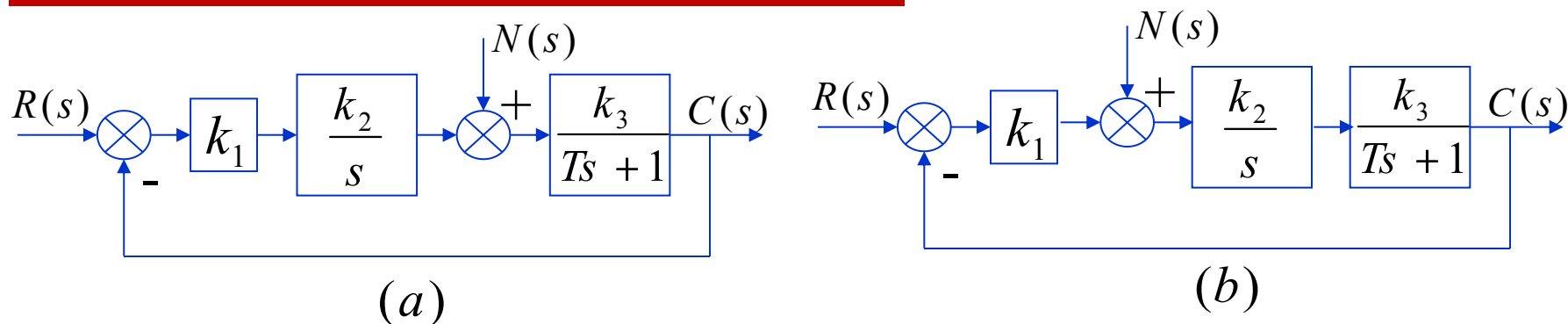
对于给定输入，其稳态误差是一样的（假设输入为阶跃信号）。

$$e_{ssr} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s)} = 0$$

但对于扰动作用，由于扰动点不同，扰动前向通道不同，其扰动误差是不一样的。



3.7 控制系统的稳态误差分析



设 $N(s) = \frac{1}{s}$, $R(s) = 0$, 由图(a)得:
$$e_{ssn} = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_3(s)}{1 + G_k(s)} N(s) = 0$$

由图(b)得:
$$e_{ssn} = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_k(s)} N(s) = -\frac{1}{k_1}$$

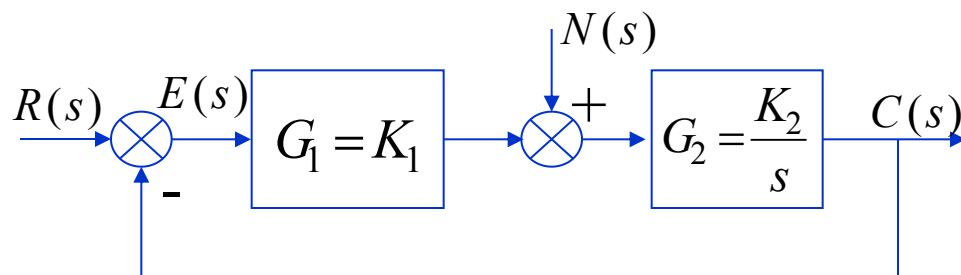
若在扰动作用点和偏差点之间增加一个积分环节（串联或并联），可减小或消除稳态误差。

注：对于给定输入和扰动作用同时存在的系统，系统的总稳态误差等于给定误差和扰动误差的迭加（误差点定义在同一点）。



3.7 控制系统的稳态误差分析

例5: 系统结构图如图所示。
当 $r(t) = n(t) = 1(t)$ 时, 求系统的稳态误差 e_{ss} ; 若要求稳态误差为零, 如何改变系统结构。



解: 该系统对给定输入而言属于 I 型系统。所以当给定输入为单位阶跃函数时的稳态误差 $e_{ssr} = 0$

但该系统对于扰动输入为单位阶跃函数时的稳态误差 e_{ssn} 并不等于零。

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{en}(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-K_2}{s + K_1 K_2} = -\frac{1}{K_1}$$

系统总的稳态误差为：

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = -\frac{1}{K_1}$$



3.7 控制系统的稳态误差分析

若想使稳态误差为零，则要求 G_1 中有积分环节，令

$$G_1 = \frac{K_1}{s}$$

$$\text{此时 } e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-K_2/s}{1 + K_1K_2/s^2} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-K_2s}{s^2 + K_1K_2} = 0$$

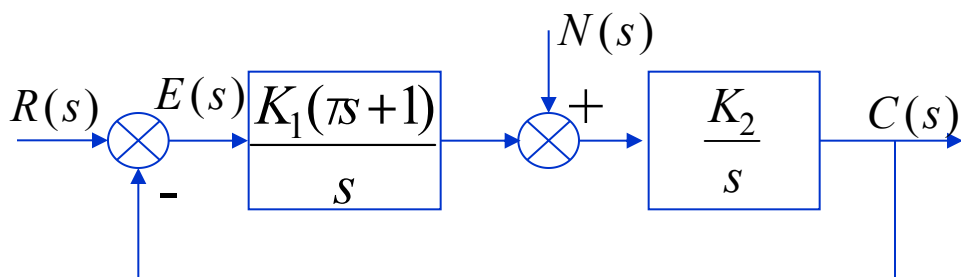
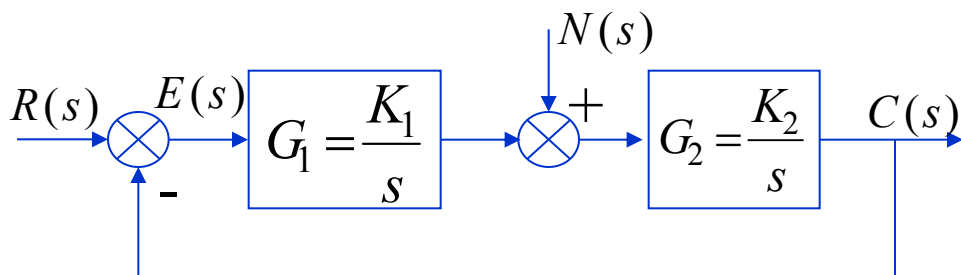
对不对？

由于此时系统的稳定性遭到破坏，成为结构不稳定系统，直接加一个积分环节是不可行的。若要使系统稳定，还必须在原 G_1 中引入比例+微分环节

$$G_1 = \frac{K_1(\tau s + 1)}{s}$$

$$\Phi = \frac{K_1K_2(\tau s + 1)}{s^2 + K_1K_2\tau s + K_1K_2} = 0$$

当 $K_1 > 0$, $K_2 > 0$, $\tau > 0$ 时
系统稳定





3.7 控制系统的稳态误差分析

由此可见当用 $G_1 = \frac{K_1(\tau s + 1)}{s}$ 时，才能在保证稳定的前提下使系统在阶跃扰动作用下的稳态误差为零。

$$G_1 = \frac{K_1(\tau s + 1)}{s} = K_1\left(\tau + \frac{1}{s}\right) = K_1\tau + \frac{K_1}{s}$$

这个环节称为比例+积分环节或比例+积分控制器(PI控制器)。

$$G_1 = \frac{K_1(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s} = \frac{K_1 + K_2 s + K_3 s^2}{s} = \frac{K_i}{s} + K_p + K_d s$$

这个环节称为比例+积分+微分环节或比例+积分+微分控制器
(PID控制器)。

比例+积分(PI)或比例+积分+微分 (PID)控制器的作用就是在保证闭环系统稳定及动态特性的前提下提高系统的控制精度。



PID控制器: (Proportion Integration Differentiation)

- ▶ 在工程实际中，应用最为广泛的调节器控制规律为比例、积分、微分控制，简称PID控制，又称PID调节。
- ▶ PID控制器问世至今已有近100年历史，以其结构简单、稳定性好、工作可靠、调整方便而成为工业控制的主要技术之一。
- ▶ 当被控对象的结构和参数不能完全掌握，或得不到精确的数学模型时，控制理论的其它技术难以采用时，系统控制器的结构和参数必须依靠经验和现场调试来确定，这时应用PID控制技术最为方便。即当我们不完全了解一个系统和被控对象，或不能通过有效的测量手段来获得系统参数时，最适合用PID控制技术。
- ▶ PID控制，实际中也有PI和PD控制。PID控制器就是根据系统的误差，利用比例、积分、微分计算出控制量进行控制的。



比例 (P) 控制

比例控制是一种最简单的控制方式。其控制器的输出与输入误差信号成比例关系。当仅有比例控制时系统输出存在稳态误差 (Steady-state error) 。

积分 (I) 控制

在积分控制中，控制器的输出与输入误差信号的积分成正比关系。对于一个自动控制系统，如果在进入稳态后存在稳态误差，则称这个控制系统是有稳态误差的或简称有差系统 (System with Steady-state Error) 。为了消除稳态误差，在控制器中必须引入“积分项”。积分项对误差取决于时间的积分，随着时间的增加，积分项会增大。这样，即便误差很小，积分项也会随着时间的增加而加大，它推动控制器的输出增大，使稳态误差进一步减小，直到等于零。因此，比例+积分(PI)控制器，可以使系统在进入稳态后无稳态误差。

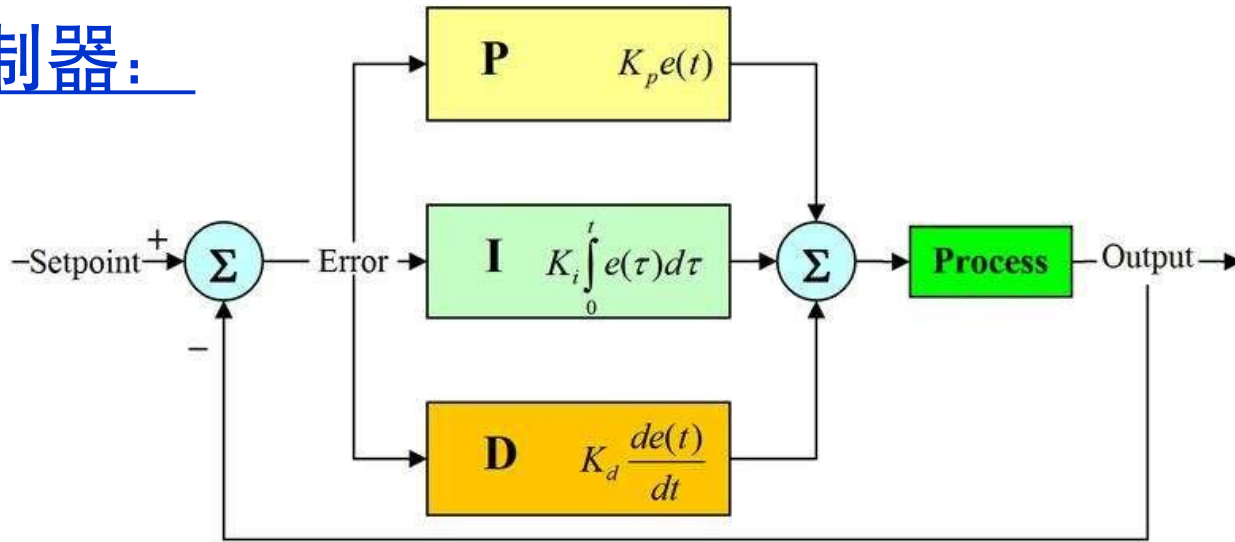


微分 (D) 控制

在微分控制中，控制器的输出与输入误差信号的微分（即误差的变化率）成正比关系。自动控制系统在克服误差的调节过程中可能会出现振荡甚至失稳。其原因是由于存在有较大惯性组件（环节）或有滞后(delay)组件，具有抑制误差的作用，其变化总是落后于误差的变化。解决的办法是使抑制误差的作用的变化“超前”，即在误差接近零时，抑制误差的作用就应该是零。这就是说，在控制器中仅引入“比例”项往往是不够的，比例项的作用仅是放大误差的幅值，而目前需要增加的是“微分项”，它能预测误差变化的趋势，这样，具有比例+微分的控制器，就能够提前使抑制误差的控制作用等于零，甚至为负值，从而避免了被控量的严重超调。所以对有较大惯性或滞后的被控对象，比例+微分(PD)控制器能改善系统在调节过程中的动态特性。



PID控制器:



$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$K_i = \frac{K_p}{T_i}$$

$$K_d = K_p T_d$$

Kp: 比例系数

比例度 $P=1/K_p$: 输入偏差信号变化的相对值与输出信号变化的相对值之比的百分数表示 (比例系数的倒数)

Ti: 积分时间

Td: 微分时间



比例积分微分控制器相关论文:

[1]Minorsky, N. (1922). "Directional stability of automatically steered bodies". *J. Amer. Soc of Naval Engineers*. 34: 280–309. doi:[10.1111/j.1559-3584.1922.tb04958.x](https://doi.org/10.1111/j.1559-3584.1922.tb04958.x)

[2]Patents, software, and hardware for PID control: An overview and analysis of the current art, *IEEE Control Systems*, 2006.

上文给出了在一般情况下比例、积分、微分控制器三项各系数对各项性能指标的影响，还警告了特定情况下增加Kd会反过来削弱稳定性。

Effects of	(on) Rise Time	Overshoot	Settling time	Steady-state error	Stability
↑ K_p	Decrease ↓	Increase ↑	Small Increase ↗	Decrease ↓	Degrade ↓
↑ K_i	Small Decrease ↘	Increase ↑	Increase ↑	Large Decrease ↓↓	Degrade ↓
↑ K_d	Small Decrease ↘	Decrease ↓	Decrease ↓	Minor Change →	Improve ↑



为什么PID应用如此广泛、又长久不衰？

因为PID解决了自动控制理论所要解决的最基本问题，即系统的稳定性、快速性和准确性。调节PID的参数，可实现在系统稳定的前提下，兼顾系统的带载能力和抗扰能力，同时，在PID调节器中引入积分项，系统增加了一个零极点，使之成为I型或II型以上的系统，这样系统阶跃响应的稳态误差就为零。

PID控制器参数的工程整定,各种调节系统中PID参数经验数据以下可参照:

温度T: $P=20\sim60\%$, $T_i=180\sim600s$, $T_d=3\sim180s$

压力P: $P=30\sim70\%$, $T_i=24\sim180s$,

液位L: $P=20\sim80\%$, $T_i=60\sim300s$,

流量L: $P=40\sim100\%$, $T_i=6\sim60s$ 。





PID控制器的参数整定

PID控制器的参数整定是**控制系统设计**的核心内容。它是根据被控过程的特性确定PID控制器的比例系数、积分时间和微分时间的大小。PID控制器参数整定的方法很多，概括起来有两大类：一是**理论计算整定法**。它主要是依据系统的数学模型，经过理论计算确定控制器参数。这种方法所得到的计算数据未必可以直接用，还必须通过工程实际进行调整和修改。二是**工程整定方法**，它主要依赖工程经验，直接在控制系统的试验中进行，且方法简单、易于掌握，在工程实际中被广泛采用。PID控制器参数的工程整定方法，主要有**临界比例法、反应曲线法和衰减法**。三种方法各有其特点，其共同点都是通过试验，然后按照工程**经验公式**对控制器参数进行整定。但无论采用哪一种方法所得到的控制器参数，都需要在实际运行中进行最后调整与完善。现在一般采用的是**临界比例法**。



PID控制器的参数整定经验

- (1) 一般来说，在整定中，观察到曲线震荡很频繁，需把比例带增大以减少震荡；当曲线最大偏差大且趋于非周期过程时，需把比例带减少
- (2) 当曲线波动较大时，应增大积分时间；曲线偏离给定值后，长时间回不来，则需减小积分时间，以加快消除余差。
- (3) 如果曲线震荡的厉害，需把微分作用减到最小，或暂时不加微分；曲线最大偏差大而衰减慢，需把微分时间加长而加大作用
- (4) 比例带过小，积分时间过小或微分时间过大，都会产生周期性的激烈震荡。积分时间过小，震荡周期较长；比例带过小，震荡周期较短；微分时间过大，震荡周期最短
- (5) 比例带过大或积分时间过长，都会使过渡过程变化缓慢。比例带过大，曲线如不规则的波浪较大的偏离给定值。积分时间过长，曲线会通过非周期的不正常途径，慢慢回复到给定值。

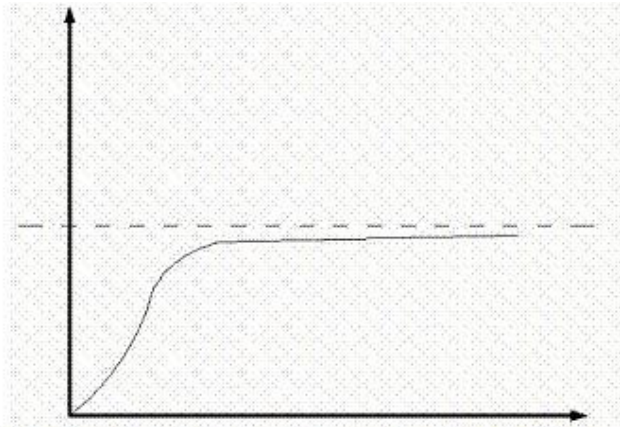
注意：当积分时间过长或微分时间过大，超出允许的范围时，不管如果改变比例带，都是无法补救的。



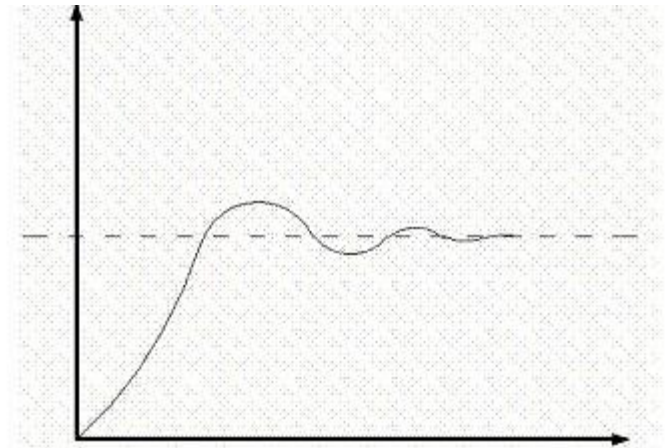
PID常用口诀

(最早出现在1973年11月出版的《化工自动化》)

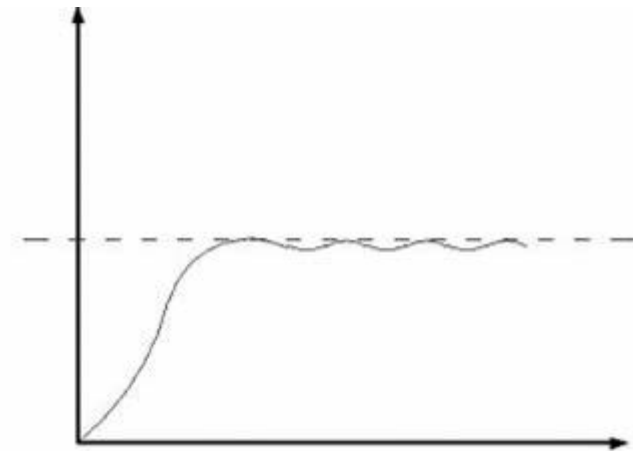
参数整定找最佳，从小到大顺序查
先是比例后积分，最后再把微分加
曲线振荡很频繁，比例度盘要放大
曲线漂浮绕大湾，比例度盘往小扳
曲线偏离回复慢，积分时间往下降
曲线波动周期长，积分时间再加长
曲线振荡频率快，先把微分降下来
动差大来波动慢。微分时间应加长
理想曲线两个波，前高后低4比1
一看二调多分析，调节质量不会低



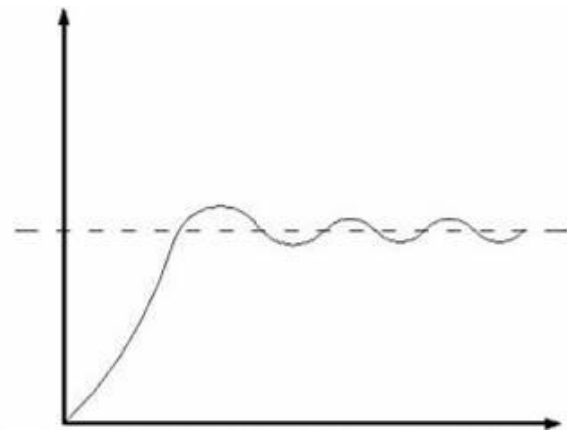
图A 响应曲线没有超调量，应增加比例系数 K_p （减小比例度 P ）使响应有一定的超调量



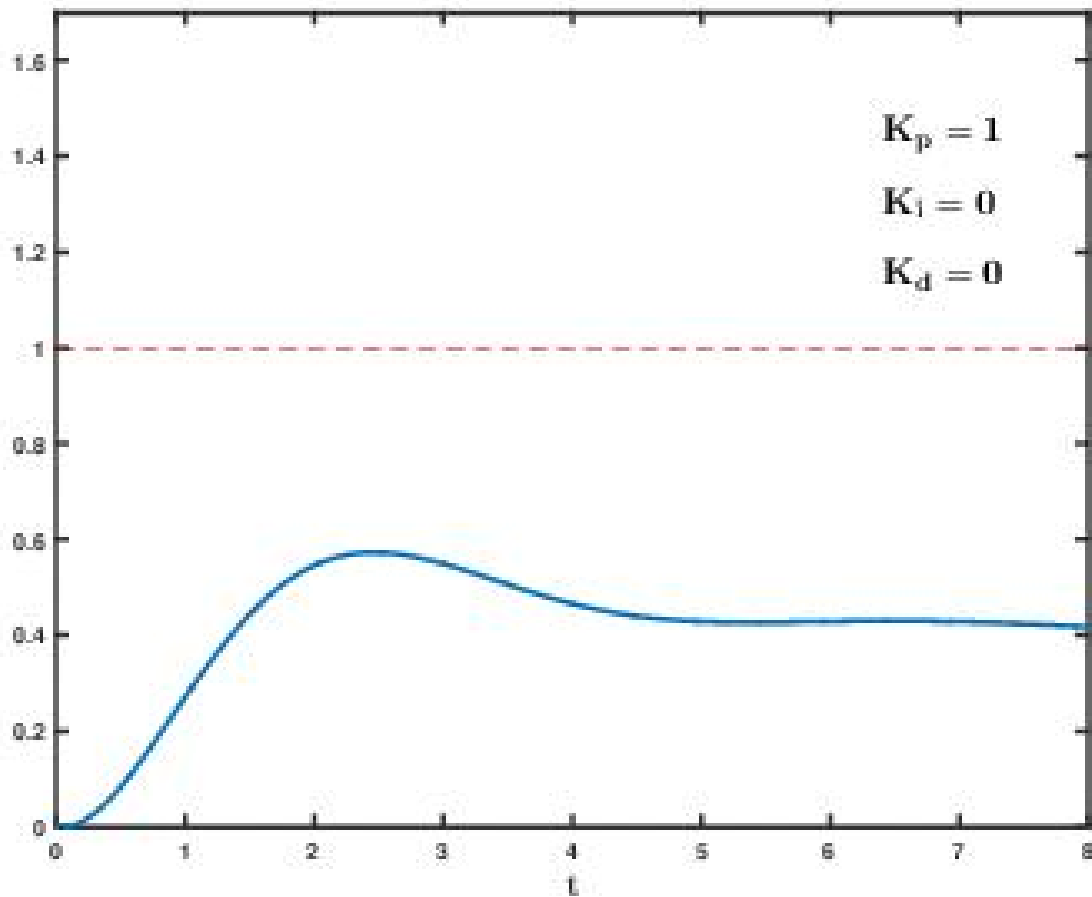
图B 响应曲线超调量太大，应减小比例系数 K_p （增大比例度 P ）使响应的超调量减少



图C 响应曲线有一定超调量，但是由于积分时间 T_d 太长导致无法平稳，应该减少积分时间



图D 响应曲线超调量偏大，积分时间 T_d 偏小导致响应振荡，应该适当减小比例系数适当增大积分时间

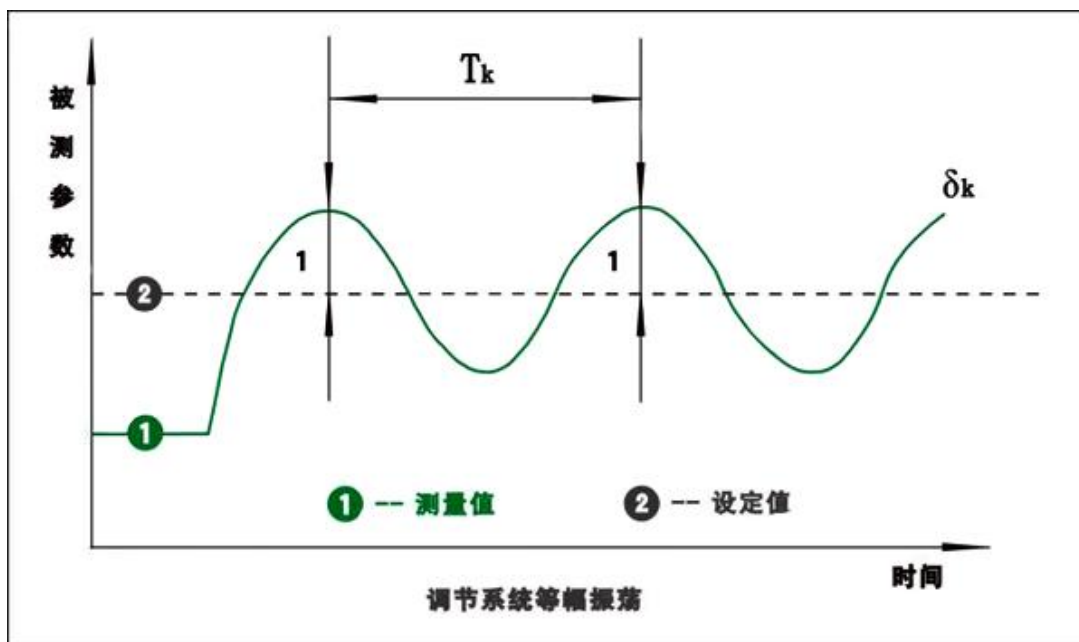


比例积分PID模型参数变化效果模拟图



1、临界振荡过程

控制系统在外界干扰作用后，不能恢复到稳定的平衡状态，而出现一种既不衰减，也不发散的等幅振荡过程，这样的过渡过程就称为临界振荡过程，如图1所示。我们在临界比例度法整定中，首先需要得到的就是临界参数，即在临界状态下，被控量 y 来回振荡一次所用时间，称为临界周期 T_k ；被调参数处于临界状态时的比例度，称为临界比例度 δ_k 。





临界比例度法整定口诀

临界整定应用多，纯P运转减参数；
等幅振荡出现时， δk 值 T_k 值为临界；
按照公式乘系数，P、I、D序不能错；
静观运行勤调整，细心寻求最佳值。

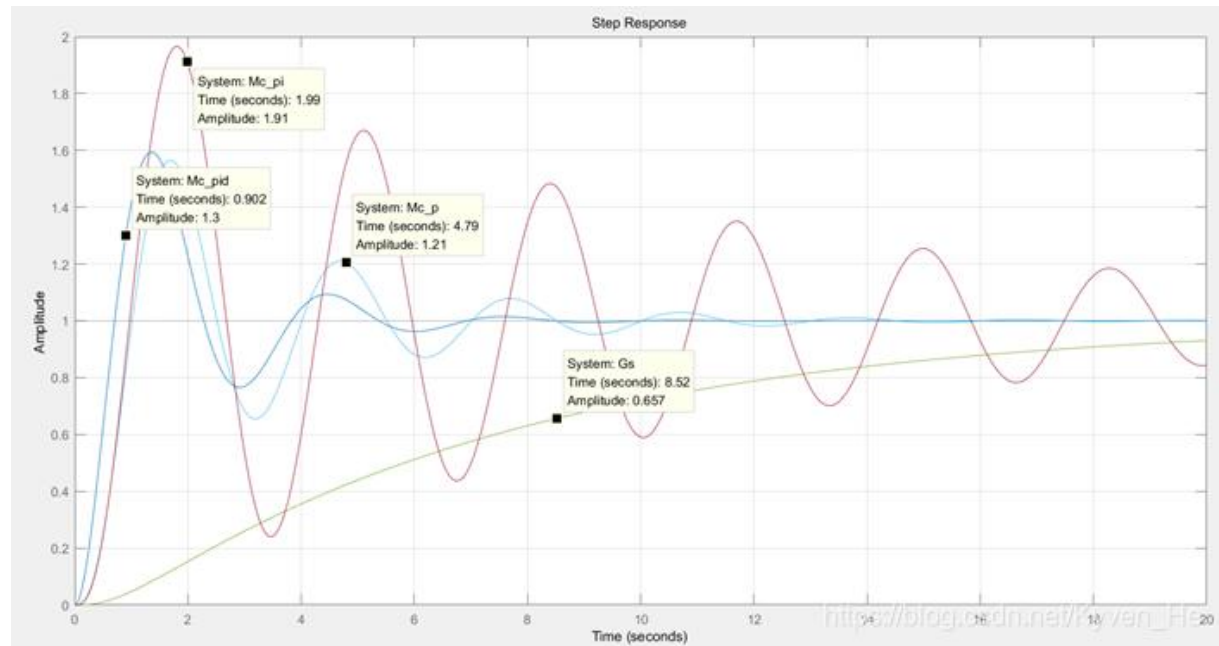


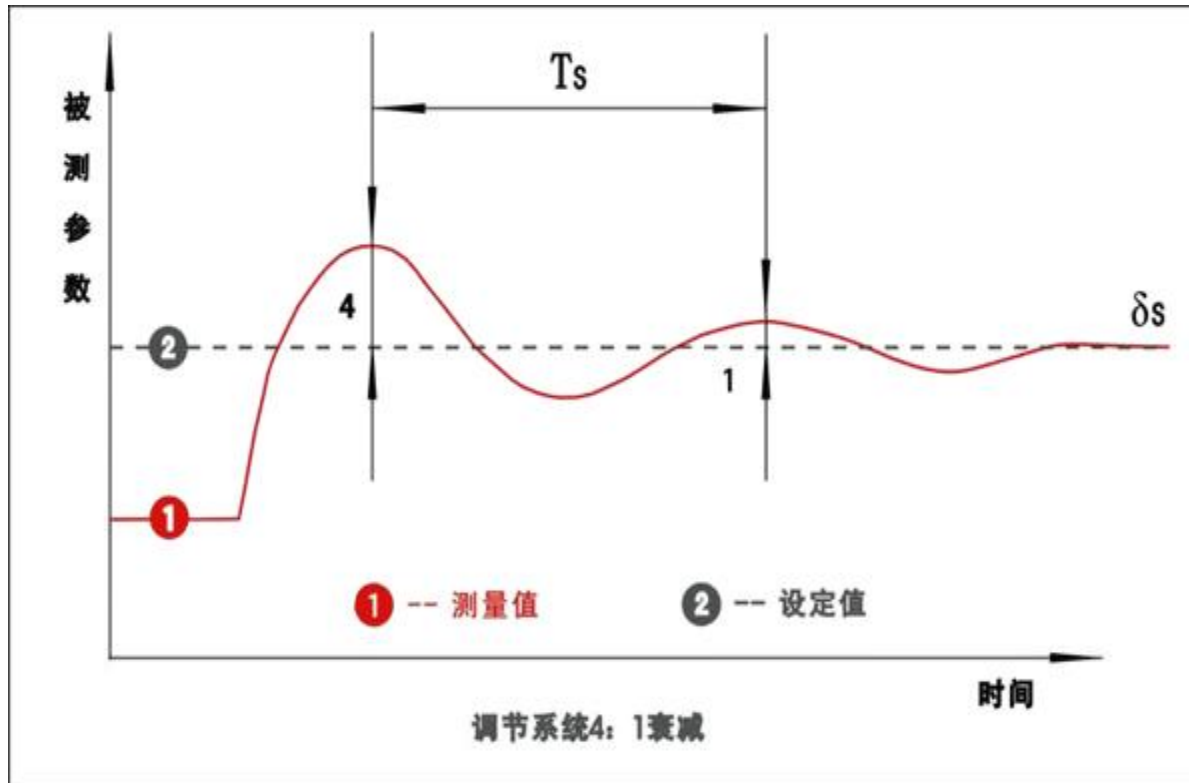
表1 临界比例度法参数计算公式表

调节规律	调节器参数		
	比例度 δ , 单位: %	积分时间 T_i , 单位: min	微分时间 T_d , 单位: min
P	$2 \times \delta_k$	---	---
PI	$2.2 \times \delta_k$	$0.85 \times T_k$	---
PD	$1.8 \times \delta_k$	---	$0.1 \times T_k$
PID	$1.7 \times \delta_k$	$0.5 \times T_k$	$0.125 \times T_k$



```
1 Gp = zpk([], [0 -2 -4], [1]);
2 Gs = feedback(Gp, 1);
3 step(Gs);
4 hold on
5
6 Dk = 48;
7 Tk = 2.2256;
8 % P调节
9 p_Kp = Dk / 2;
10 Gc = pid(p_Kp, 0, 0);
11 Mc_p = feedback(Gc*Gp, 1);
12 step(Mc_p);
13 hold on
14 % PI调节
15 pi_Kp = Dk / 2.2;
16 pi_Ki = pi_Kp / (0.833 * Tk);
17 Gc = pid(pi_Kp, pi_Ki, 0);
18 Mc_pi = feedback(Gc*Gp, 1);
19 step(Mc_pi);
20 hold on
21 % PID调节
22 pid_Kp = Dk / 1.7;
23 pid_Ki = pid_Kp / (0.5 * Tk);
24 pid_Kd = 0.125 * Tk * pid_Kp;
25 Gc = pid(pid_Kp, pid_Ki, pid_Kd);
26 Mc_pid = feedback(Gc*Gp, 1);
27 step(Mc_pid, 20);
28 grid on
```





过渡过程的衰减曲线



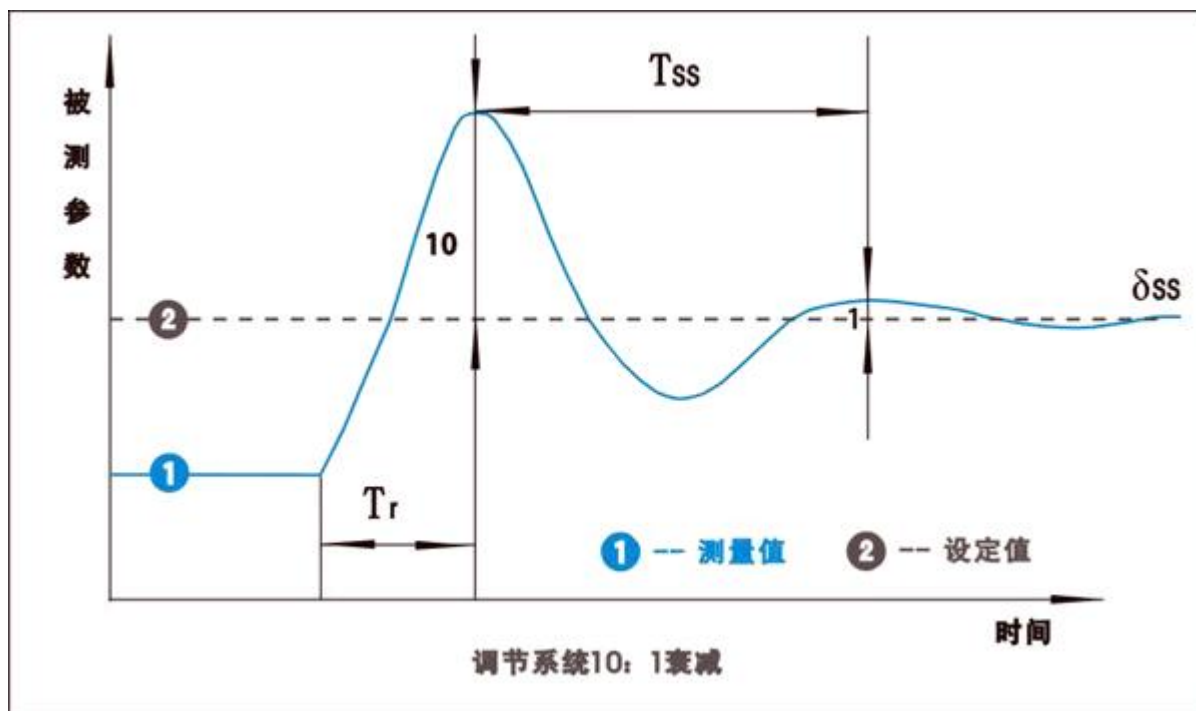
衰减曲线法整定口诀

衰减整定好处多，操作安全又迅速；
纯P降低比例度，找到衰减4:1；
按照公式来计算，PID序加参数；
观看运行细调整，直到找出最佳值。



4:1衰减曲线法PID数整定经验公式

调节规律	调节器参数		
	比例度 δ , 单位: %	积分时间 T_i , 单位: min	微分时间 T_d , 单位: min
P	δs	---	---
PI	$0.2 \times \delta s$	$0.5 \times T_s$	---
PID	$0.8 \times \delta s$	$0.3 \times T_s$	$0.1 \times T_s$





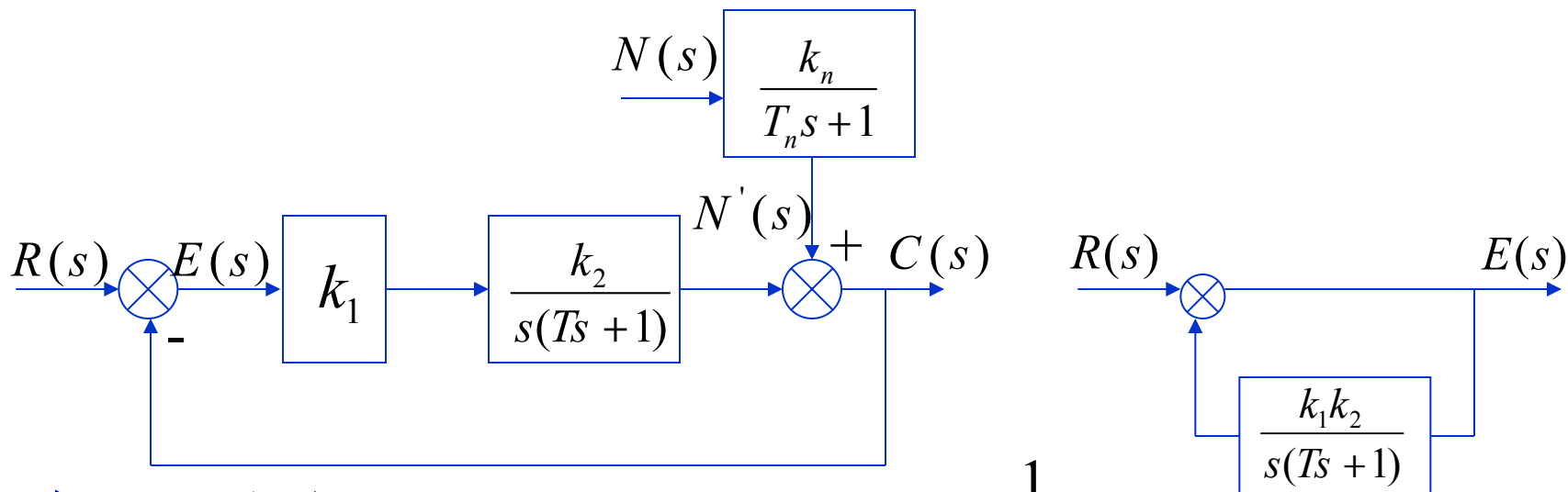
10:1衰减曲线法PID数整定经验公式

调节规律	调节器参数		
	比例度 δ , 单位: %	积分时间 T_i , 单位: min	微分时间 T_d , 单位: min
P	δ_{ss}	---	---
PI	$1.2 \times \delta_{ss}$	$2 \times T_r$	---
PID	$0.8 \times \delta_{ss}$	$1.2 \times T_r$	$0.4 \times T_r$



3.7 控制系统的稳态误差分析

例6：速度控制系统的结构图如下图所示。给定输入和扰动作用均为单位斜坡函数。求系统的稳态误差。



[解]:1、先令 $n(t) = 0$, $r(t) = t$, 即 $R(s) = \frac{1}{s^2}$,

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1k_2}, \quad E(s) = \Phi_e(s) \cdot R(s) = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1k_2} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ts + 1}{Ts^2 + s + k_1k_2} = \frac{1}{k_1k_2}$$



3.7 控制系统的稳态误差分析

2、再令 $R(s) = 0, N(s) = \frac{1}{s^2}$

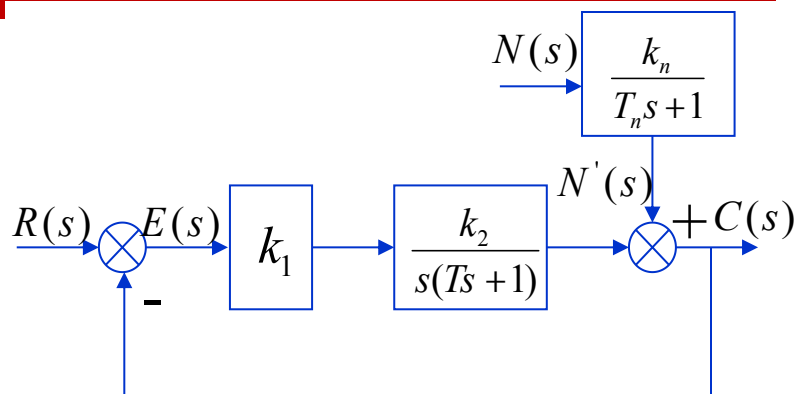
$$\Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-\frac{k_n}{T_n s + 1}}{1 + \frac{k_1 k_2}{s(Ts + 1)}}$$

$$E(s) = -\frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1 k_2} \cdot \frac{k_n}{T_n s + 1} N(s)$$

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1 k_2} \cdot \frac{k_n}{T_n s + 1} \cdot \frac{1}{s^2} = -\frac{k_n}{k_1 k_2}$$

3、总的稳态误差为:

$$e_{ss} = \frac{1}{k_1 k_2} - \frac{k_n}{k_1 k_2} = \frac{1 - k_n}{k_1 k_2}$$





3.7 控制系统的稳态误差分析

[结论]:

- ❑ 为了减少给定误差，可以增加前向通道上的积分环节个数或增大系统的开环放大系数。
- ❑ 为了减小扰动误差，可以增加偏差点到扰动作用点之间积分环节个数或放大系数。
- ❑ 放大系数不能任意放大，积分环节也不能太多（一般少于2个），否则系统将会不稳定。

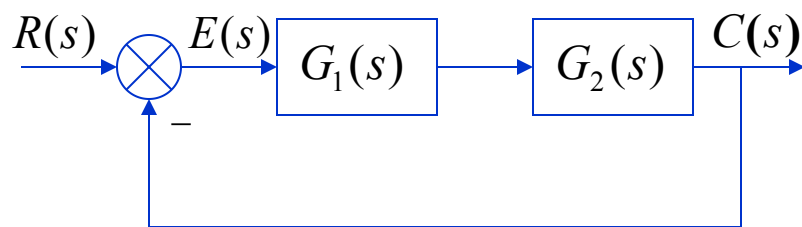


3.7 控制系统的稳态误差分析

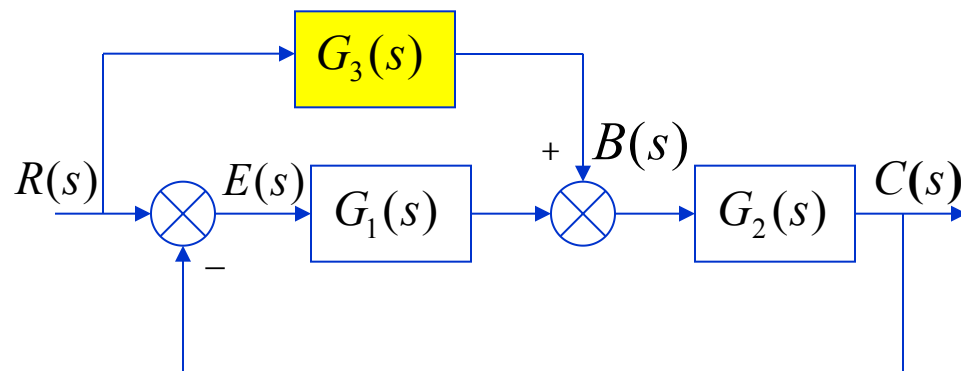
六、复合控制系统的误差分析

[复合控制系统]: 在控制系统中引入与给定作用和扰动作用有关的附加控制可构成复合控制，可进一步减小给定误差和扰动误差。

□ 顺馈控制系统（按输入补偿）：



图(a)

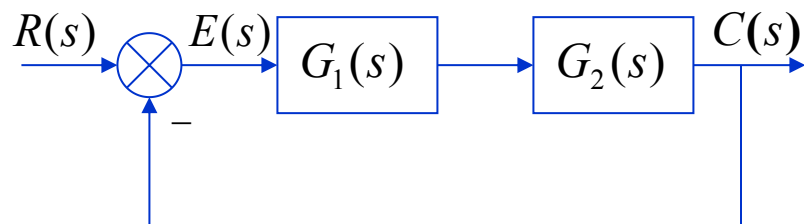


图(b)

在图(a)的基础上加上环节 $G_3(s)$ ，就构成了顺馈控制系统。



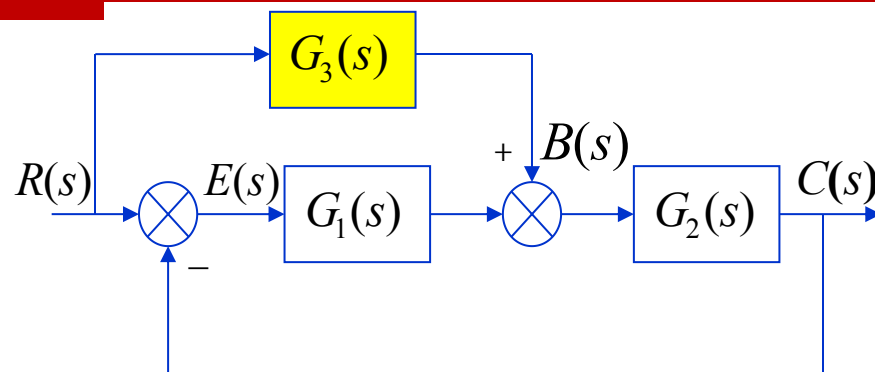
3.7 控制系统的稳态误差分析



图(a)

$$\Phi_{\text{en}}(s) = \frac{1}{1 + G_1 G_2}$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot R(s)$$



图(b)

$$\Phi'_{\text{en}}(s) = \frac{1 - G_3 G_2}{1 + G_1 G_2}$$

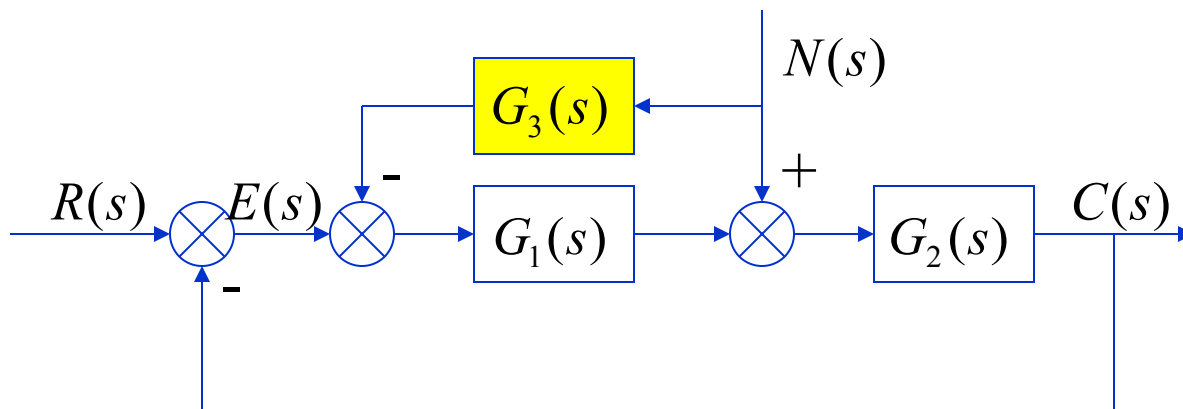
$$\therefore E'(s) = \frac{1 - G_2 G_3}{1 + G_1 G_2} \cdot R(s)$$

若满足 $G_3 = \frac{1}{G_2}$ ，则 $E'(s) = 0$ ，即无输入稳态误差，输出完全复现输入。该式称为给定作用实现完全不变性的条件。



3.7 控制系统的稳态误差分析

前馈控制系统 (按扰动补偿)



令 $R(s) = 0$ ，由于是单位反馈系统，所以误差 $E(s) = -C(s)$ 。

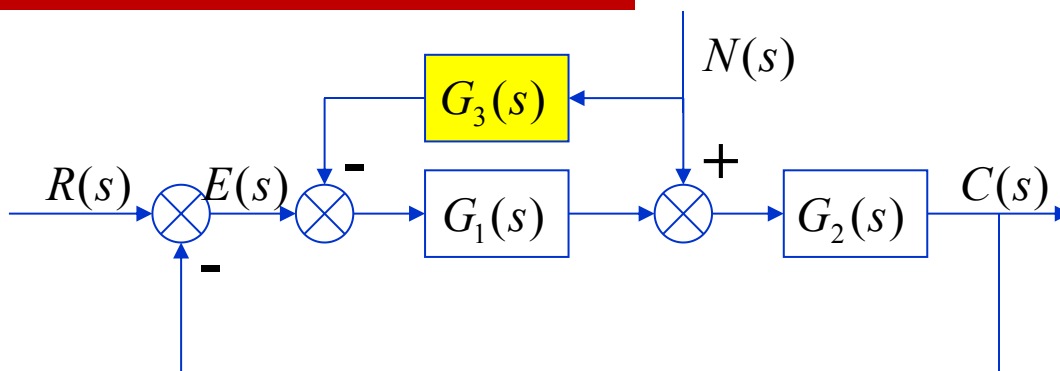
未加前馈时，

$$\Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{G_2}{1 + G_1 G_2}$$

$$E(s) = \Phi_{en}(s) \cdot N(s) = -\frac{G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot N(s)$$



3.7 控制系统的稳态误差分析



加入前馈后，有：

$$E'(s) = \Phi'_{en}(s) \cdot N(s) = \frac{-G_2(s) + G_3(s)G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot N(s)$$

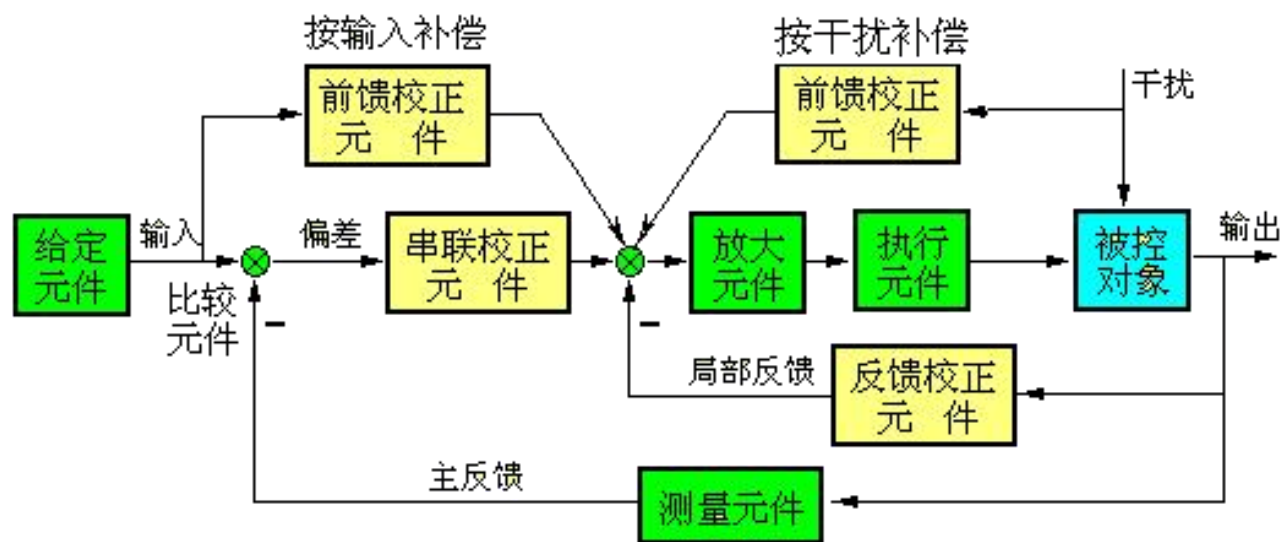
若 $G_3(s) = \frac{1}{G_1(s)}$ ，则 $E'(s) = 0$ ，这个条件就是**对扰动作用实现完全不变性的条件**。

注意：在实际的系统中，有时 $G_3(s) = \frac{1}{G_1(s)}$ 或 $\frac{1}{G_2(s)}$ 是难以实现的。可以采取近似的补偿，以减小扰动稳态误差。



3.7 控制系统的稳态误差分析

校正： 采用适当方式，在系统中加入一些结构和参数可调整的装置（校正装置），用以改善系统性能，使系统满足指标要求。



校正方式： 串联校正， 反馈校正， 复合校正



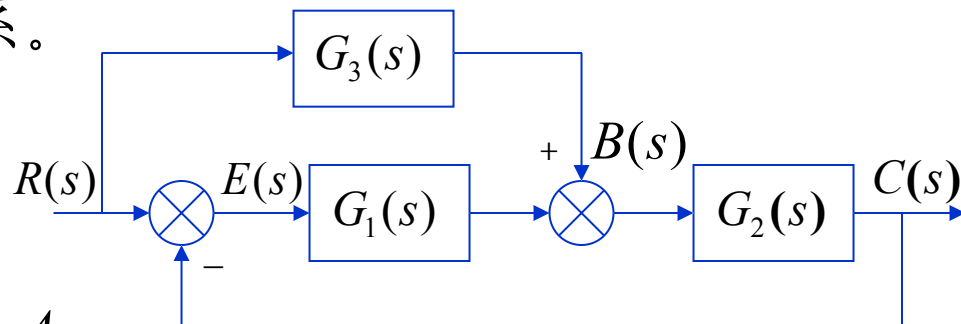
3.7 控制系统的稳态误差分析

例7.如下图所示的复合系统。 $G_1(s) = \frac{k_1}{T_1s + 1}, G_2(s) = \frac{k_2}{s(T_2s + 1)}$

顺馈补偿环节 $G_3(s) = \tau_d s$ 。试求位置误差和速度误差。并讨论位置误差、速度误差与 τ 的关系。

[解]: 闭环误差为:

$$E(s) = \Phi_{en}(s)R(s) = \frac{1 - G_2 G_3}{1 + G_1 G_2} R(s)$$



□ 位置误差: $r(t) = A \cdot 1(t), R(s) = \frac{A}{s}$

无顺馈时,
$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{k_1}{T_1s + 1} \cdot \frac{k_2}{s(T_2s + 1)}} \cdot \frac{A}{s} = 0$$

有顺馈时,
$$e_{ssr}' = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1 - \frac{k_2}{s(T_2s + 1)} \tau_d s}{1 + \frac{k_1}{T_1s + 1} \cdot \frac{k_2}{s(T_2s + 1)}} \cdot \frac{A}{s} = 0$$



3.7 控制系统的稳态误差分析

□ 速度误差: $r(t) = Bt, R(s) = \frac{B}{s^2}$

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1 - \frac{k_2}{s(T_2s + 1)} \tau_d s}{1 + \frac{k_1}{T_1s + 1} \cdot \frac{k_2}{s(T_2s + 1)}} \cdot \frac{B}{s^2} = \frac{(1 - k_2 \tau_d)B}{k_1 k_2}$$

分析:

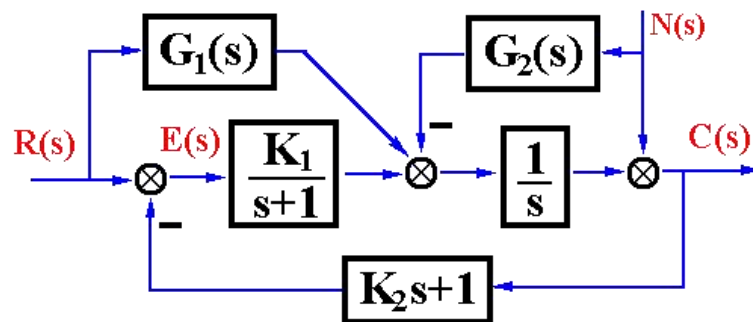
- 当 $\tau_d = 0$ 时, 没有顺馈补偿, 速度误差等于 $e_{ssr} = \frac{B}{k_1 k_2}$ 。
- 当 $0 < \tau_d < \frac{1}{k_2}$ 时, 还有速度误差, 但比补偿前要小。
- 当 $\tau_d = \frac{1}{k_2}$ 时, 速度误差为零, 实现了完全补偿。
- 当 $\tau_d > \frac{1}{k_2}$ 时, 速度误差为负, 过度补偿。表示输出量大于要求值。



3.7 控制系统的稳态误差分析

例8. 系统结构图如图所示

- (1) 确定 K_1, K_2 , 使系统极点 $\lambda_{1,2} = -5 \pm j5$;
- (2) 设计 $G_1(s)$, 使 $r(t)=t$ 作用下 $e_{ssr}=0$;
- (3) 设计 $G_2(s)$, 使 $n(t)$ 作用下 $e_n(t) \equiv 0$.



解: (1)
$$G(s) = \frac{K_1(K_2s+1)}{s(s+1)} \quad \begin{cases} K = K_1 \\ v = 1 \end{cases}$$

$$D(s) = s^2 + (1 + K_1K_2)s + K_1 = 0$$

为保证系统稳定, 取

$$K_1 > 0, K_2 > 0$$

$$D(s) = s^2 + (1 + K_1K_2)s + K_1 = (s + 5 - j5)(s + 5 + j5) = s^2 + 10s + 50$$

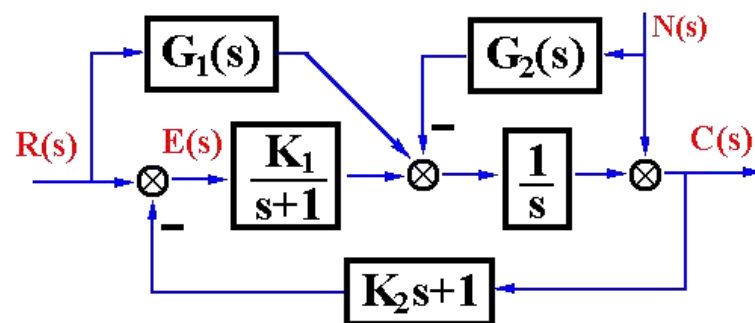
比较系数:
$$\begin{cases} K_1 = 50 \\ 1 + K_1K_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = 50 \\ K_2 = 0.18 \end{cases}$$



3.7 控制系统的稳态误差分析

例8. 系统结构图如图所示

- (1) 确定 K_1, K_2 , 使系统极点 $\lambda_{1,2} = -5 \pm j5$;
- (2) 设计 $G_1(s)$, 使 $r(t)=t$ 作用下 $e_{ssr}=0$;
- (3) 设计 $G_2(s)$, 使 $n(t)$ 作用下 $e_n(t) \equiv 0$ 。



$$(2) \quad \Phi_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 - \frac{K_2 s + 1}{s} G_1(s)}{1 + \frac{K_1 (K_2 s + 1)}{s(s+1)}} = \frac{(s+1) \left[s - (K_2 s + 1) G_1(s) \right]}{s(s+1) + K_1 (K_2 s + 1)}$$

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \Phi_{er}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+1) \left[1 - \frac{K_2 s + 1}{s} G_1(s) \right]}{s^2 + (1 + K_1 K_2)s + K_1} \equiv 0$$

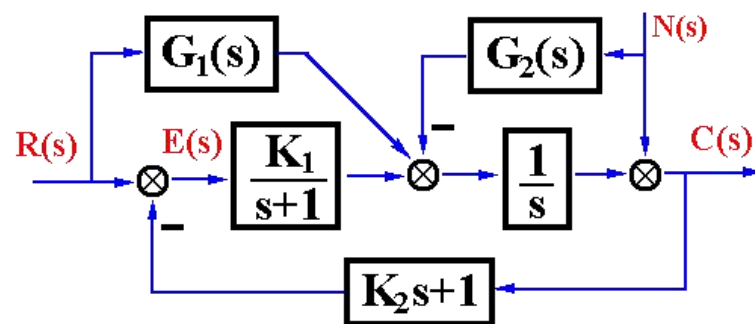
$$G_1(s) = \frac{s}{K_2 s + 1}$$



3.7 控制系统的稳态误差分析

例8. 系统结构图如图所示

- (1) 确定 K_1, K_2 , 使系统极点 $\lambda_{1,2} = -5 \pm j5$;
- (2) 设计 $G_1(s)$, 使 $r(t)=t$ 作用下 $e_{ssr}=0$;
- (3) 设计 $G_2(s)$, 使 $n(t)$ 作用下 $e_n(t) \equiv 0$ 。



$$(3) \quad \Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-(K_2s+1) + \frac{K_2s+1}{s} G_2(s)}{1 + \frac{K_1(K_2s+1)}{s(s+1)}} = \frac{-(K_2s+1)(s+1)[s - G_2(s)]}{s(s+1) + K_1(K_2s+1)} \equiv 0$$

$$G_2(s) = s$$



3.7 控制系统的稳态误差分析

七、动态误差系数

前面讨论的误差系数都称为静态误差系数，它们分别针对输入为阶跃函数、斜坡函数和抛物线函数而言的。其特点是一个给定系统只有一个系数为有限值，其它系数不是零就是无穷大。因而，通过静态误差系数求得的稳态误差或是零，或是有限非零值，或是无穷大，而不反映误差与时间的关系。

用静态误差系数法只能求出误差的稳态值 $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ ；而稳态误差随时间变化的规律无法获得。

用动态误差系数法可以研究误差中的稳态分量 $e_s(t)$ 随时间的变化规律。

动态误差系数法可以研究输入信号几乎为任意时间函数时的系统稳态误差与时间的关系，因此动态误差系数又称广义误差系数。



3.7 控制系统的稳态误差分析

现只考虑给定作用与偏差之间的误差传递函数

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_k(s)}$$

考虑到 $t \rightarrow \infty$ 时的情况，也就是 $s \rightarrow 0$ 的情况。将误差传递函数在 $s=0$ 的邻域内展开成泰勒级数

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \Phi_e(0) + \frac{1}{1!} \Phi_e'(0)s + \frac{1}{2!} \Phi_e''(0)s^2 + \cdots + \frac{1}{i!} \Phi_e^{(i)}(0)s^i + \cdots$$



$$C_i = \frac{1}{i!} \Phi_e^{(i)}(0) \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$= C_0 + C_1s + C_2s^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i s^i$$

$$E(s) = \Phi_e(s) \cdot R(s)$$

$$= C_0 R(s) + C_1 s R(s) + C_2 s^2 R(s) + \cdots + C_i s^i R(s) + \cdots$$



3.7 控制系统的稳态误差分析

$$E(s) = \Phi_e(s) \cdot R(s)$$

$$= C_0 R(s) + C_1 s R(s) + C_2 s^2 R(s) + \cdots + C_i s^i R(s) + \cdots$$

$$e_s(t) = C_0 r(t) + C_1 r'(t) + C_2 r''(t) + \cdots + C_i r^{(i)}(t) + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i r^{(i)}(t)$$

也可记为:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{k_0} r(t) + \frac{1}{k_1} \frac{dr(t)}{dt} + \frac{1}{k_2} \frac{d^2 r(t)}{dt^2} + \cdots$$

其中:

$$\frac{1}{k_0} = \left. \frac{1}{1 + G_k(s)} \right|_{s=0} \quad \frac{1}{k_1} = \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{1 + G_k(s)} \right] \right|_{s=0} \quad \frac{1}{k_2} = \left. \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{1}{1 + G_k(s)} \right] \right|_{s=0}$$

.....



3.7 控制系统的稳态误差分析

可见, $t \rightarrow \infty$ 时的误差函数的表达式与输入函数及其各阶导数有关。仿照静态误差系数的定义, 可定义**动态误差系数**如下:

k_0 — 动态位置误差系数

k_1 — 动态速度误差系数

k_2 — 动态加速度误差系数

说明: 这里所谓“动态”两字的含义是指这种方法可以完整描述系统**稳态误差** $e_{ss}(t)$ 随时间变化的规律, 而不是指**误差信号**中的瞬态分量 $e_{ts}(t)$ 随时间变化的情况, 即不应包含的误差信号中随时间趋于零的分量。**此外上面给出的误差级数仅在 $t \rightarrow \infty$ 时成立, 因此如果输入信号 $r(t)$ 中包含有随时间趋于零的分量, 则这些分量不应包含在稳态误差级数表达式中的输入函数及其各阶导数之内。**



3.7 控制系统的稳态误差分析

动态误差系数的另一种求法

将误差传递函数写成s有理分式形式，利用**长除法**（**升幂**）得到各动态误差系数。

$$G_k(s) = \frac{K}{s^\nu} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + 1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_k(s)}$$

$$= \frac{s^\nu (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1)}{s^\nu (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1) + K(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + 1)}$$

$$= C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i s^i$$



3.7 控制系统的稳态误差分析

$$v=0 \text{ 时 } \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^n}{(1 + K) + (a_1 + b_1K)s + (a_2 + b_2K)s^2 + \dots}$$

$$\frac{1}{k_0} = C_0 = \frac{1}{1 + K} \quad \frac{1}{k_1} = \frac{K(a_1 - b_1)}{(1 + K)^2} \quad \frac{1}{k_2} = \frac{(a_2 - b_2)K}{(1 + K)^3} + \frac{a_1(b_1 - a_1)K}{(1 + K)^3} + \frac{b_1(b_1 - a_1)K^2}{(1 + K)^3}$$

$$v=1 \text{ 时 } \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s + a_1s^2 + a_2s^3 \dots + a_{n-1}s^n + a_ns^{n+1}}{K + (b_1K + 1)s + (b_2K + a_1)s^2 + \dots}$$

$$\frac{1}{k_0} = C_0 = 0 \quad \frac{1}{k_1} = C_1 = \frac{1}{K} \quad \frac{1}{k_2} = C_2 = \frac{a_1 - b_1}{K} - \frac{1}{K^2}$$

$$v=2 \text{ 时 } \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + a_1s^3 + a_2s^4 \dots + a_{n-1}s^{n+1} + a_ns^{n+2}}{K + b_1Ks + (b_2K + 1)s^2 + \dots}$$

$$\frac{1}{k_0} = C_0 = 0 \quad \frac{1}{k_1} = C_1 = 0 \quad \frac{1}{k_2} = C_2 = \frac{1}{K}$$



3.7 控制系统的稳态误差分析

例9.两系统如图示,要求在4分钟内误差不超过6m,应选用哪个系统?

已知: $r(t) = 2t + t^2/4$

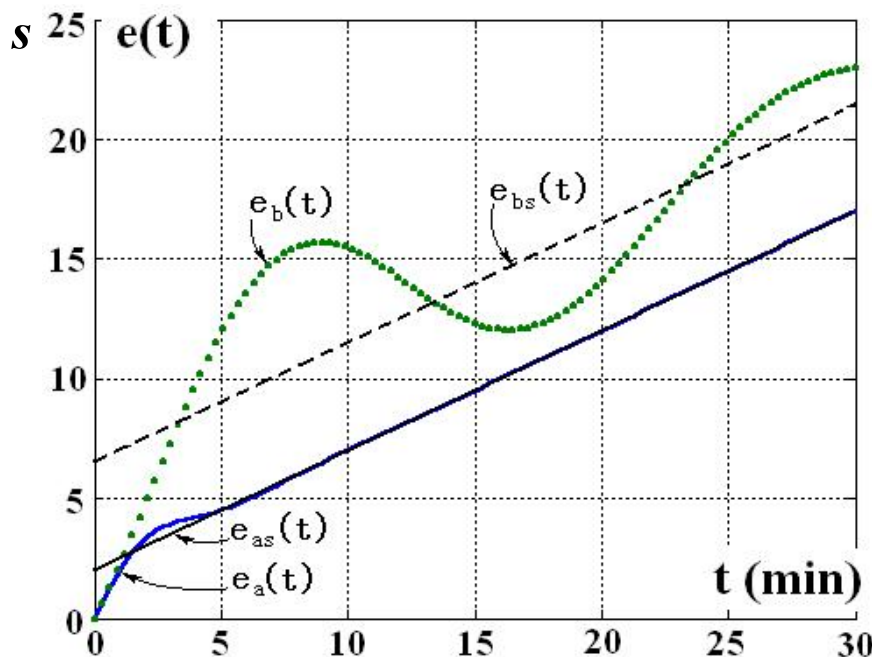
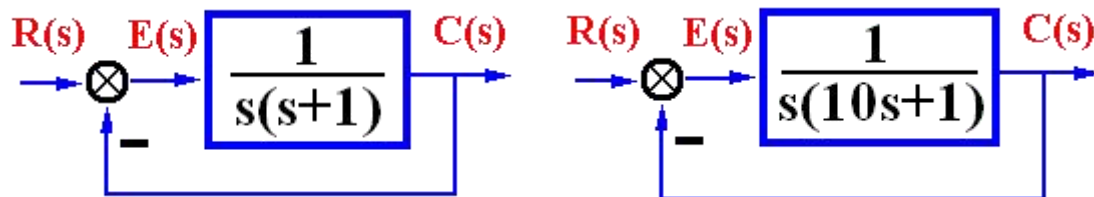
解 ①. $r'(t) = 2 + t/2$

$$r''(t) = 1/2$$

$$r'''(t) = 0$$

$$\begin{aligned}\Phi_{e1}(s) &= \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{s(s+1)}} \\ &= \frac{s(s+1)}{s^2 + s + 1} \\ &= C_0 + C_1s + C_2s^2 + \dots \\ &= s - s^3 + \dots\end{aligned}$$

$$e_{s1}(t) = C_0r + C_1r' + C_2r'' = 2 + t/2$$





3.7 控制系统的稳态误差分析

例9.两系统如图示,要求在4分钟内误差不超过6m,应选用哪个系统?

已知: $r(t) = 2t + t^2/4$

解. ②

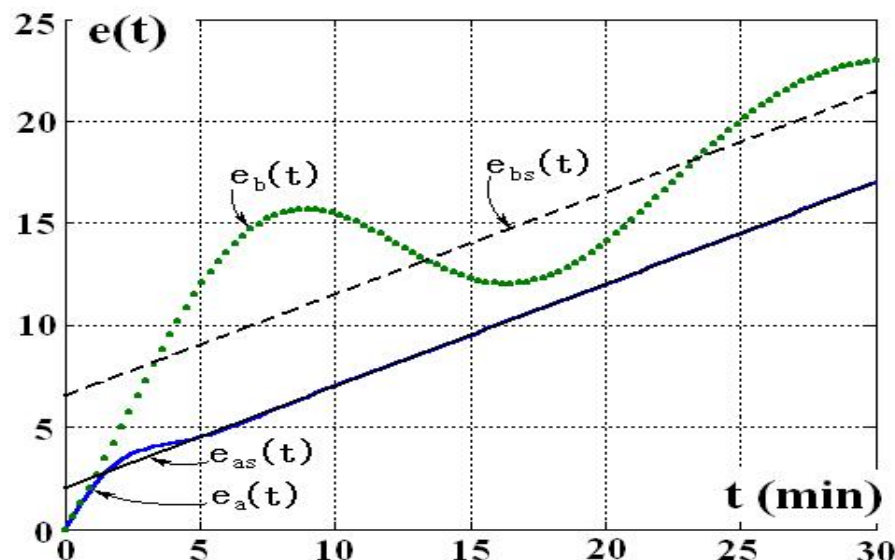
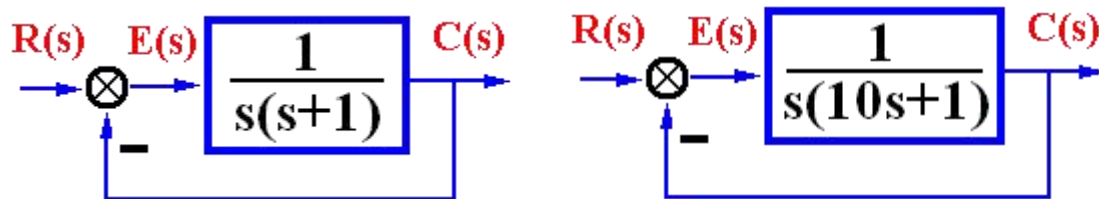
$$r'(t) = 2 + t/2$$

$$r''(t) = 1/2$$

$$r'''(t) = 0$$

$$\begin{aligned}\Phi_{e2}(s) &= \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{s(10s+1)}} \\ &= \frac{s(10s+1)}{10s^2 + s + 1} \\ &= s + 9s^2 - 19s^3 + \dots\end{aligned}$$

$$e_{s2}(t) = C_0 r + C_1 r' + C_2 r'' = 0 + r' + 9r'' = 6.5 + t/2$$





3.7 控制系统的稳态误差分析

小结:

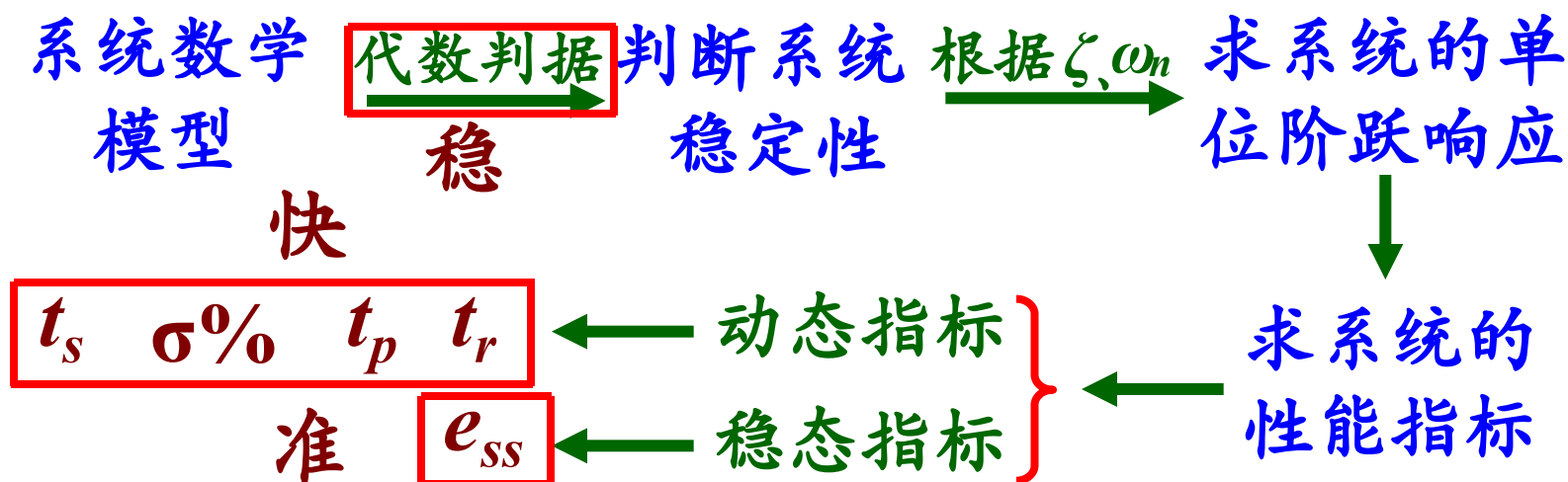
- 系统误差、稳态误差的定义
- 给定输入值作用下系统的误差分析
 - 系统的型
 - 位置误差系数，速度误差系数，加速度误差系数
- 扰动输入作用下系统的误差分析—减小扰动误差的方法
- 给定输入和扰动作用同时存在系统的误差分析
 - 系统的总稳态误差等于给定误差和扰动误差的迭加（误差点定义在同一点）
- 复合控制系统的误差分析—顺馈控制和前馈控制
- 动态误差系数



3.7 控制系统的稳态误差分析

第三章 总结

时域法分析系统的性能主要是通过求系统的单位阶跃响应和系统的性能指标。时域分析法是一种直观的、高精度的分析方法。系统性能的分析过程：





3.7 控制系统的稳态误差分析

❖ 稳定性

与闭环极点位置有关，相当于与系统的结构和参数有关；
与输入无关。

❖ 瞬态响应及动态性能指标

与闭环传递函数的极点和零点的位置有关，输入一般为阶跃函数。

❖ 稳态性能

与时间常数形式开环传递函数中的积分环节及增益有关；
与输入作用的形式有关；与输入作用的类型有关；



Thank You !