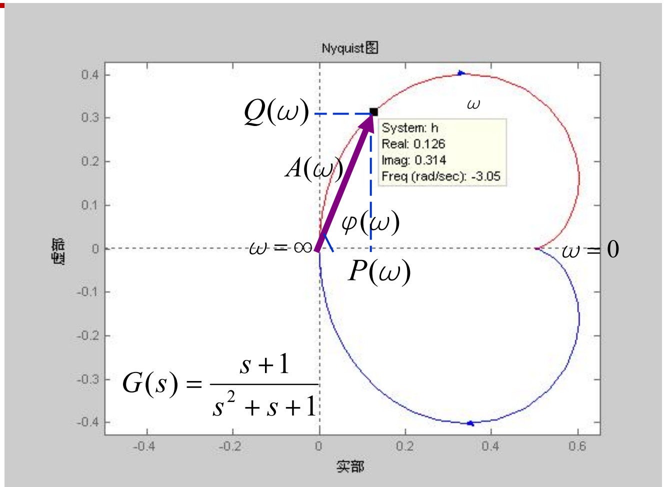
# 第五章 频率响应法

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist图

- 比例环节
- 积分环节
- 惯性环节
- 振荡环节
- 微分环节
- 延迟环节

## 幅相曲线（Nyquist plots/ Polar plots）




- 复平面[G]上用一条曲线表示$\omega$由$0\rightarrow\infty$时的频率特性：即矢量$G(j\omega)$的端点轨迹形成的图形，$\omega$是参变量。
- 极坐标图是以开环频率特性的实部为直角坐标横坐标，以其虚部为纵坐标，以$\omega$为参变量画出幅值与相位之间的关系。
- 在曲线的上的任意一点可以确定实频、虚频、幅频和相频特性。
- 根据频率特性和传递函数的关系，可知：频率特性曲线是$s$平面上变量$s$沿正虚轴变化时在$G(s)$平面上的映射。
- 幅频特性是$\omega$的偶函数，而相频特性是$\omega$的奇函数，因此当$\omega$从$0\rightarrow\infty$的频率特性曲线和$\omega$从$-\infty\rightarrow 0$的频率特性曲线是对称于实轴的。

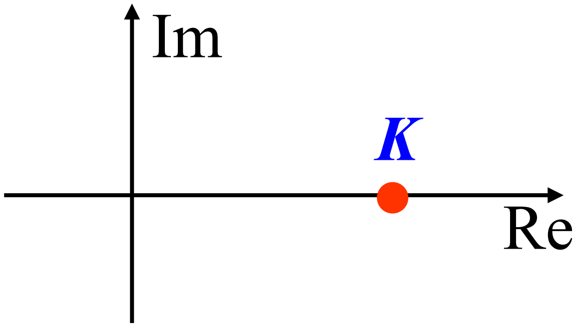
$$G(j\omega)=A(\omega)\angle\varphi(\omega)$$
$$=P(\omega)+jQ(\omega)$$

- 优点：可在一张图上绘出整个频率域的频率响应特性；
- 缺点：不能明显地表示出开环传递函数中每个典型环节的作用。

1.比例环节： $G(s)=K,\ G(j\omega)=K$

实频特性 : $P(\omega)=K$； 虚频特性: $Q(\omega)=0$；

幅频特性: $A(\omega)=K$； 相频特性: $\varphi(\omega)=0$




比例环节的极坐标图为实轴上的$K$点。

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots

2.积分环节： $G(s)=\dfrac{1}{s}$

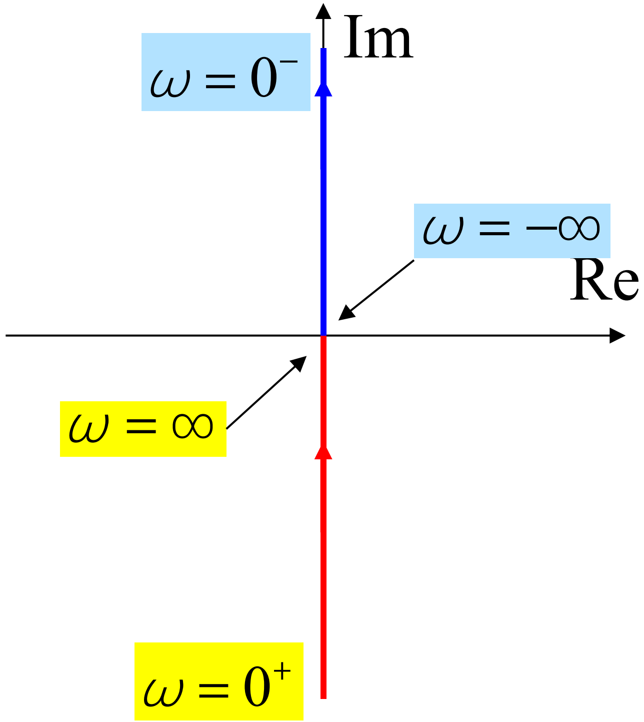
频率特性：$G(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega}=-j\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{1}{\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$A(\omega)=\dfrac{1}{\omega}$ $\qquad \varphi(\omega)=\arctan(-\dfrac{1}{\omega}\Big/0)=-\dfrac{\pi}{2}$

$P(\omega)=0$ $\qquad Q(\omega)=-\dfrac{1}{\omega}$

积分环节的极坐标图为负虚轴。频率$\omega$从$0^+\to\infty$特性曲线由虚轴的$-\infty$趋向原点。

若考虑负频率部分，当频率$\omega$从$-\infty\to 0^-$，特性曲线由虚轴的原点趋向$+\infty$。

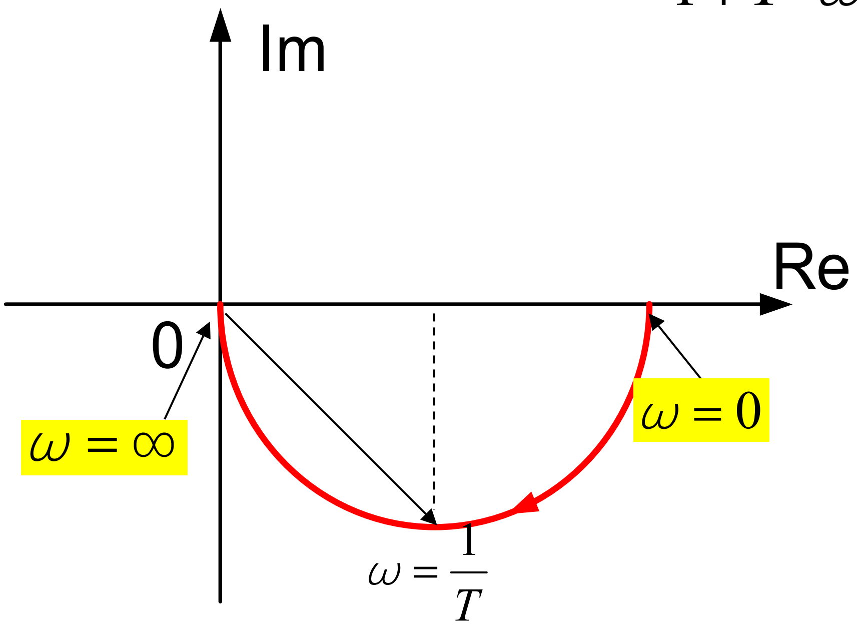


## 3.惯性环节：

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1},\qquad G(j\omega)=\frac{1}{Tj\omega+1}$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}},\qquad \varphi(\omega)=-\arctan(T\omega)$$

$$P(\omega)=\frac{1}{1+T^2\omega^2},\qquad Q(\omega)=\frac{-T\omega}{1+T^2\omega^2}$$




$\omega=0$时： $A(0)=1,\quad \varphi(0)=0$

$$P(0)=1,\quad Q(0)=0$$

$\omega=\frac{1}{T}$时： $A(\frac{1}{T})=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \varphi(\frac{1}{T})=-45°$

$$P(\frac{1}{T})=\frac{1}{2},\quad Q(\frac{1}{T})=-\frac{1}{2}$$

$\omega=\infty$时： $A(\infty)=0,\quad \varphi(\infty)=-90°$

$$P(\infty)=0,\quad Q(\infty)=0$$

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots

极坐标图是一个圆，对称于实轴。

证明如下：

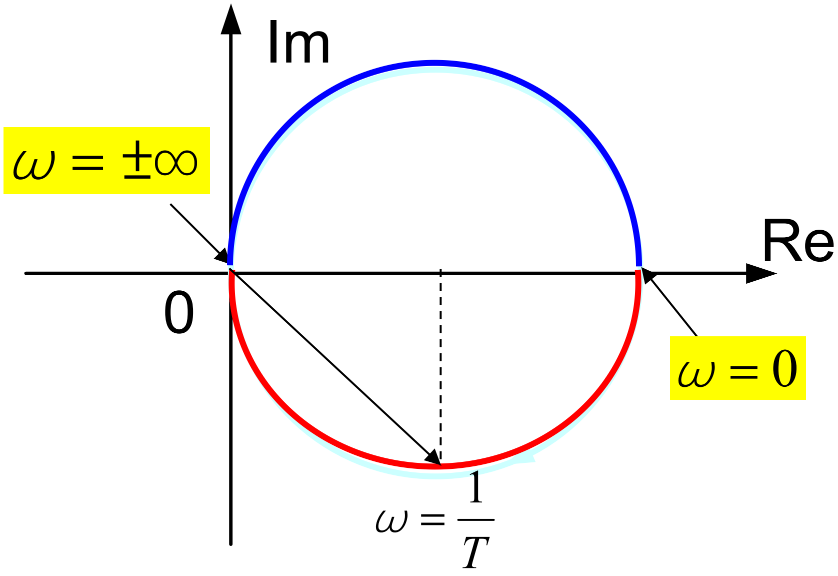
$$P(\omega) = \frac{1}{1+T^2\omega^2}$$

$$Q(\omega) = \frac{-T\omega}{1+T^2\omega^2}$$

$$\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -T\omega$$

$$\therefore P = \frac{1}{1+T^2\omega^2} = \frac{1}{1+(\frac{Q}{P})^2}$$

整理得： $(P-\frac{1}{2})^2 + Q^2 = (\frac{1}{2})^2$




下半个圆对应于正频率部分，
上半个圆对应于负频率部分。

**4.振荡环节：** $G(s)=\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$

讨论 $0<\zeta<1$时的情况。

$$G(j\omega)=\frac{1}{(1-T^2\omega^2)+j2\zeta\omega T}$$

实频、虚频、幅频和相频特性分别为：

$$P(\omega)=\frac{1-T^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2+4\zeta^2\omega^2T^2},\qquad Q(\omega)=\frac{-2\zeta\omega T}{(1-T^2\omega^2)^2+4\zeta^2\omega^2T^2}$$

$$A(\omega)=\sqrt{P(\omega)^2+Q(\omega)^2}=\frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\zeta\omega T)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}=-\arctan\frac{2\zeta\omega T}{1-T^2\omega^2}$$

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots

$$P(\omega)=\frac{1-T^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2+4\zeta^2\omega^2T^2}$$

$$Q(\omega)=\frac{-2\zeta\omega T}{(1-T^2\omega^2)^2+4\zeta^2\omega^2T^2}$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\zeta\omega T)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\frac{2\zeta\omega T}{1-T^2\omega^2}$$

当$\omega=0$时，$A(\omega)=1,\varphi(\omega)=0$

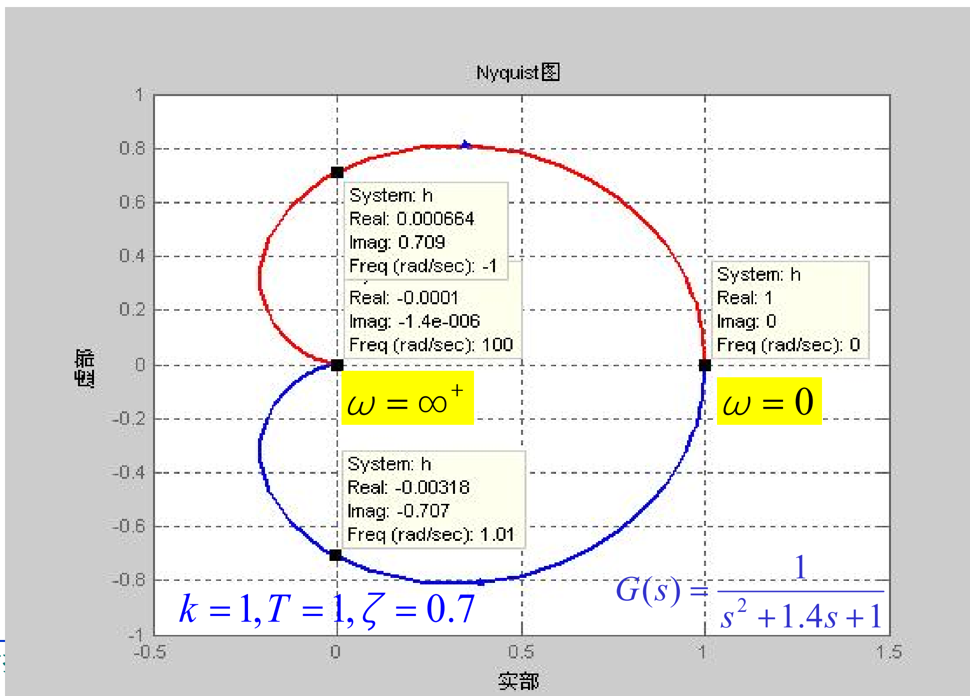
$$P(\omega)=1,Q(\omega)=0$$

当$\omega=\dfrac{1}{T}$时，$A(\omega)=\dfrac{1}{2\zeta},\varphi(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}$;

$$P(\omega)=0,Q(\omega)=-\frac{1}{2\zeta}$$

当$\omega=\infty$时，$A(\omega)=0,\varphi(\omega)=-\pi$

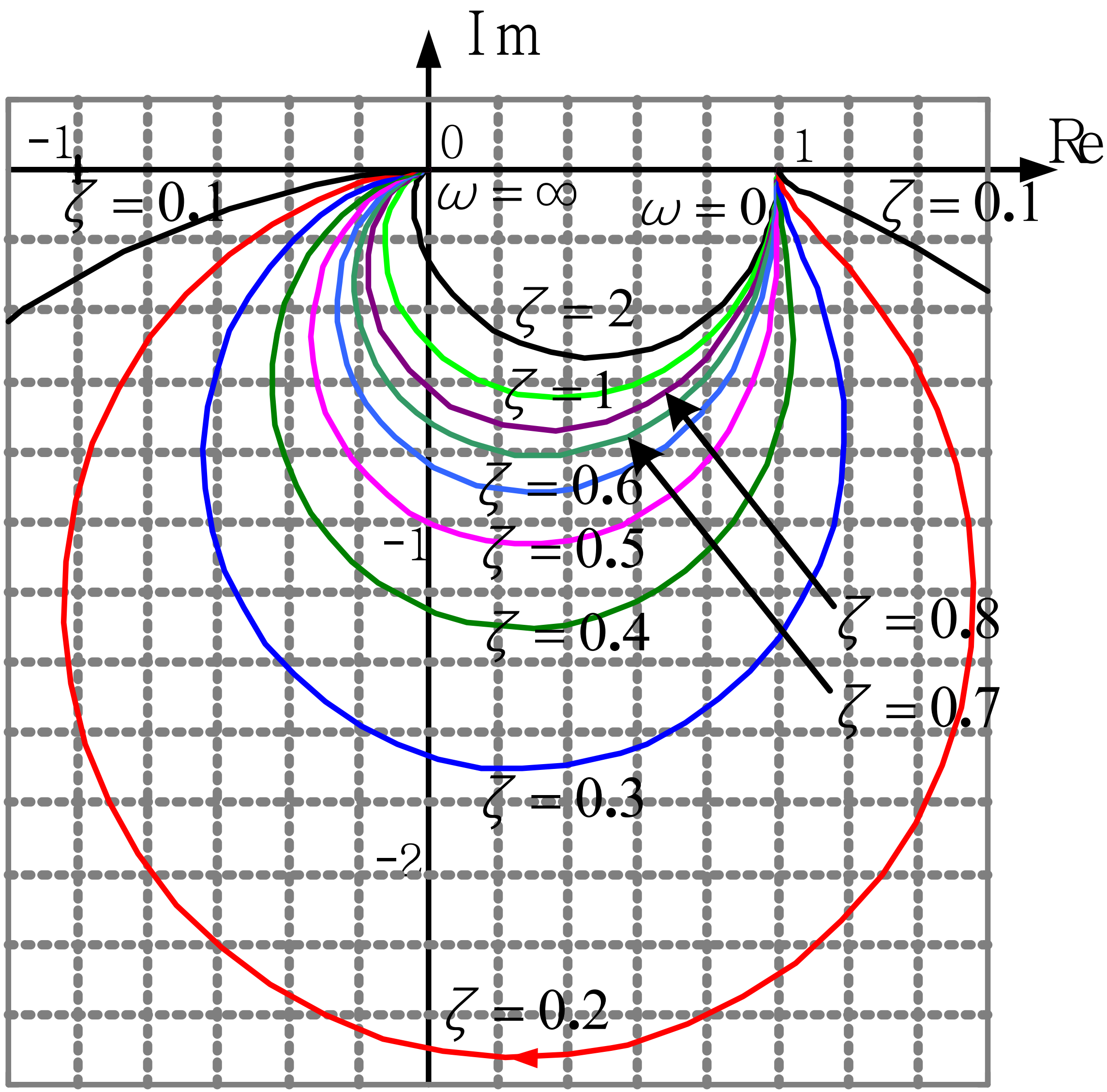
$$P(\omega)=0,Q(\omega)=0$$




当$\omega\geq0$时，$Q(\omega)\leq0$ ，曲线在3，4象限；当 $\omega<0$ 时，与之对称于实轴。

实际曲线还与阻尼系数有关。

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots




由图可见无论是欠阻尼还是过阻尼系统，其图形的基本形状是相同的。

当 $\zeta \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，有谐振峰值。

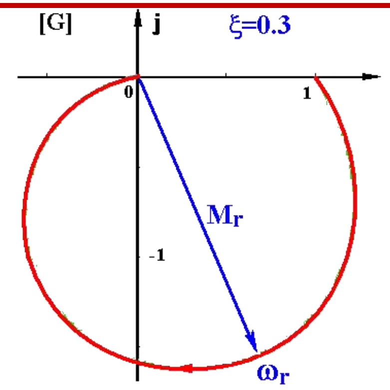
$$\omega_r=\frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{T}$$

$$A_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots

谐振峰值$M_r$： 幅频达到的最大值

谐振频率$\omega_r$： 谐振峰值对应的输入信号频率




$$|G| = 1 \Big/ \sqrt{[1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}]^2 + [2\xi\frac{\omega}{\omega_n}]^2}$$

$$\frac{d}{d\omega}|G| = 0$$

$$\frac{d}{d\omega}\left\{[1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}]^2 + [2\xi\frac{\omega}{\omega_n}]^2\right\} = 0$$

$$2[1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}][-2(\frac{\omega}{\omega_n^2})] + 2[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}](\frac{2\xi}{\omega_n}) = 0$$

$$\frac{4\omega}{\omega_n^2}[-1+\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+2\xi^2] = 0$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1-2\xi^2 \quad \begin{cases} \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \\ M_r = |G(j\omega_r)| = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \end{cases}$$

例3:当$\xi = 0.3$，$\omega_n = 1$ 时:

$$\begin{cases} \omega_r = 1\times\sqrt{1-2\times 0.3^2} = 0.9055 \\ M_r = \dfrac{1}{2\times 0.3\sqrt{1-0.3^2}} = 1.832 \end{cases}$$

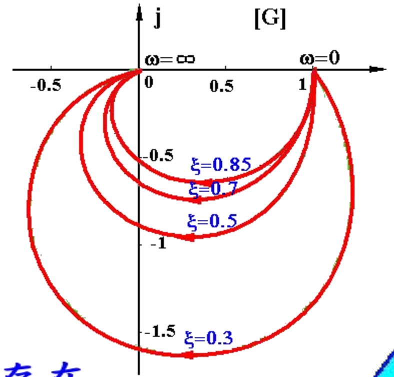
物理意义

- 表明系统在频率$\omega_r$的正弦输入信号作用下，有共振倾向;
- 一般而言，$M_r$越大，系统的平稳性越差，系统阶跃响应将产生较大的超调量。

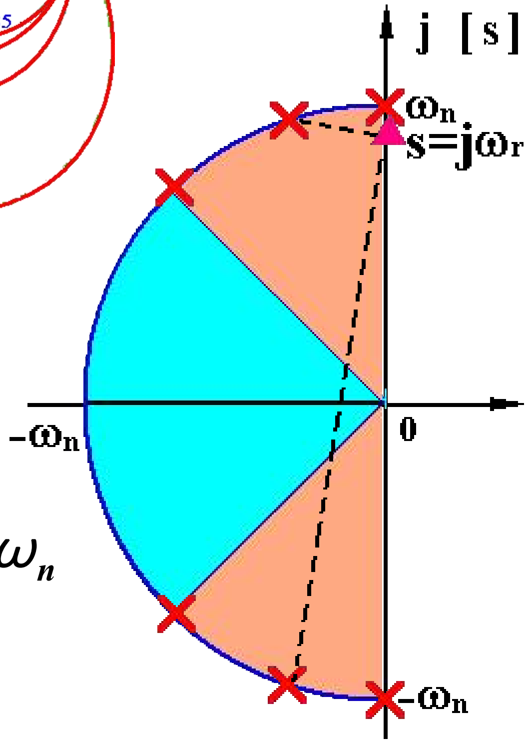
# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots

谐振频率 $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$

谐振峰值 $M_r = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$




$$\begin{cases} \xi > 0.707 \ (\beta < 45°) & 1-2\xi^2 < 0 & \omega_r, M_r \text{不存在} \\ \xi = 0.707 \ (\beta = 45°) & 1-2\xi^2 = 0 & \begin{cases} \omega_r = 0 \\ M_r = 1 \end{cases} \\ 0 < \xi < 0.707 \ (45° < \beta < 90°) & 1-2\xi^2 > 0 & \begin{cases} \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} < \omega_n \\ M_r = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} > 1 \end{cases} \\ \xi = 0 \ (\beta = 90°) & 1-2\xi^2 = 1 & \begin{cases} \omega_r = \omega_n \\ M_r = \infty \end{cases} \end{cases}$$



## 5. 微分环节：

微分环节有三种：纯微分、一阶微分和二阶微分。传递函数分别为：

$$G(s) = s$$

$$G(s) = 1 + Ts$$

$$G(s) = T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1$$

频率特性分别为：

$$G(j\omega) = j\omega$$

$$G(j\omega) = 1 + jT\omega$$

$$G(j\omega) = 1 - T^2\omega^2 + j2\zeta\omega T$$

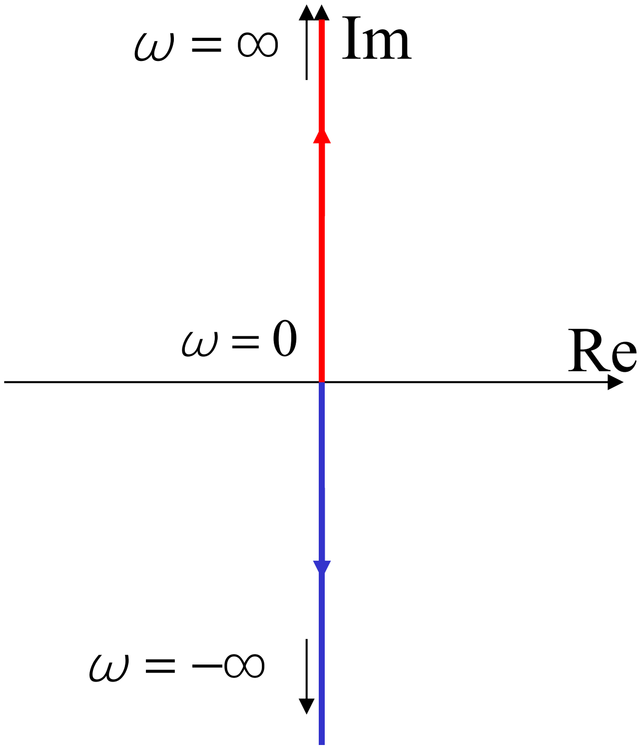
# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots

①纯微分环节： $G(s)=s \qquad G(j\omega)=j\omega$

$$A(\omega)=\omega, \qquad \varphi(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2},\omega\ge 0\\ -\dfrac{\pi}{2},\omega<0\end{cases}$$

$$P(\omega)=0, \qquad Q(\omega)=\omega$$

微分环节的极坐标图为正虚轴。频率ω从0→∞特性曲线由原点趋向虚轴的+∞。

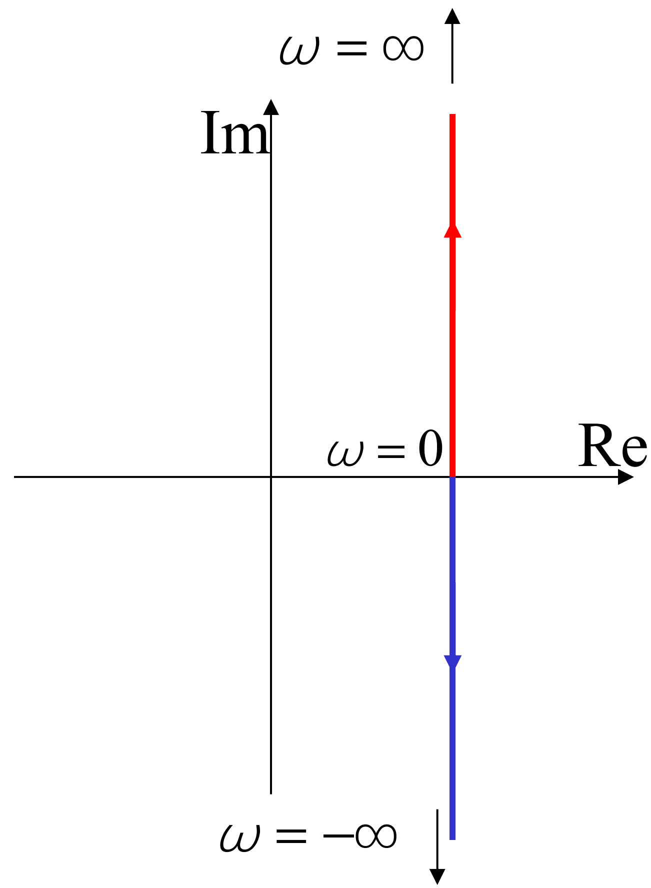


②一阶微分： $G(s)=Ts+1 \qquad G(j\omega)=Tj\omega+1$

$$A(\omega)=\sqrt{1+T^2\omega^2},\quad \varphi(\omega)=\arctan(T\omega)$$

$$P(\omega)=1,\quad Q(\omega)=T\omega$$

一阶微分环节的极坐标图为平行于虚轴的直线。频率$\omega$从0→∞特性曲线相当于纯微分环节的特性曲线向右平移一个单位。



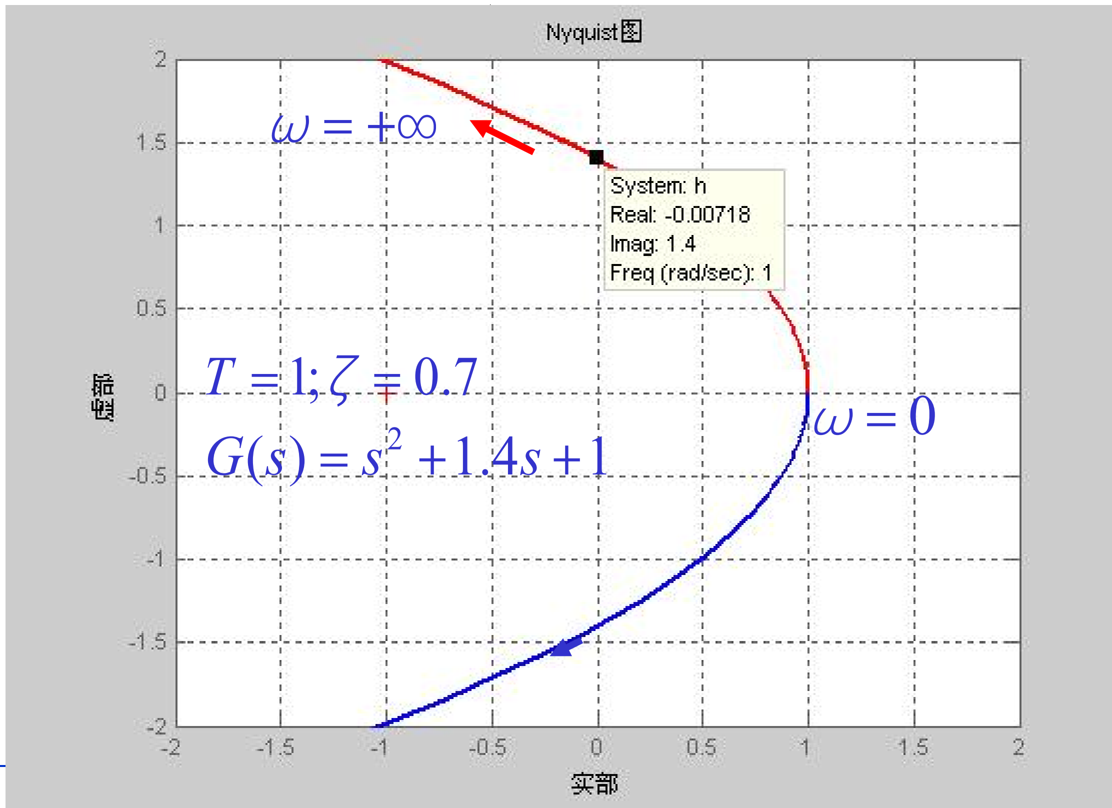
## ③二阶微分环节：

$$G(s) = T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1$$

幅频和相频特性为：

$$A(\omega) = \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\zeta\omega T)^2}, \quad \varphi(\omega) = \arctan\frac{2\zeta\omega T}{1-T^2\omega^2}$$

$$P(\omega) = 1 - T^2\omega^2, \qquad Q(\omega) = 2\zeta\omega T$$



## 6.延迟环节：

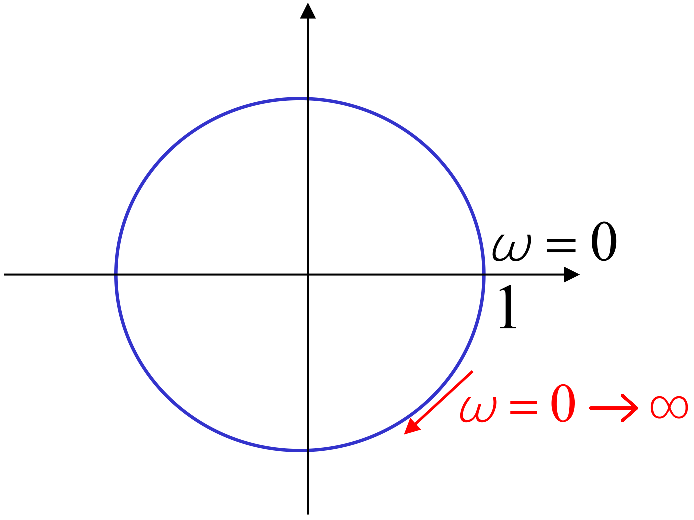
传递函数：$G(s)=e^{-\tau s}$

频率特性：$G(j\omega)=e^{-j\tau\omega}$

幅频特性：$A(\omega)=1$

相频特性：

$$\varphi(\omega)=-\omega\tau(rad)$$
$$=-57.3\omega\tau(\deg)$$




极坐标图是一个圆心在原点，半径为1的圆。

# 小结

- 比例环节的极坐标图
- 积分环节的极坐标图
- 惯性环节的极坐标图—极坐标图为圆。
- 振荡环节的极坐标图
- 微分环节的极坐标图—有三种形式：纯微分、一阶微分和二阶微分。
- 延迟环节的极坐标图

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots

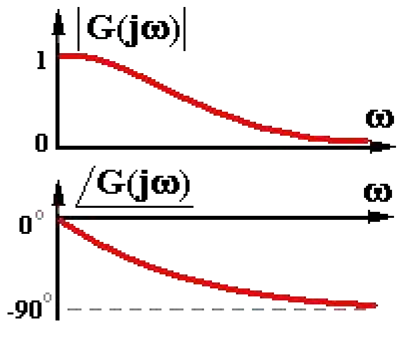
## 频率特性的四种表示方法复习

以 $G(j\omega)=\left.\dfrac{1}{Ts+1}\right|_{s=j\omega}$ 为例。

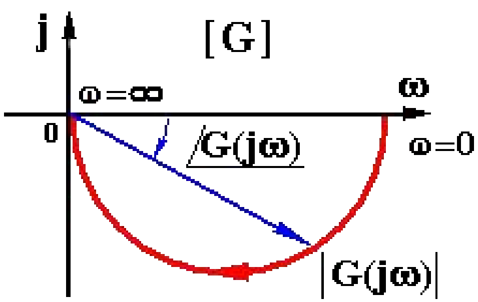
Ⅰ. 频率特性

幅频 $|G(j\omega)|$

相频 $\angle G(j\omega)$




Ⅱ. 幅相特性(Nyquist)



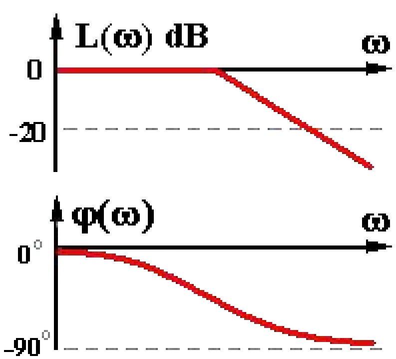

Ⅲ. 对数频率特性(Bode)

对数幅频

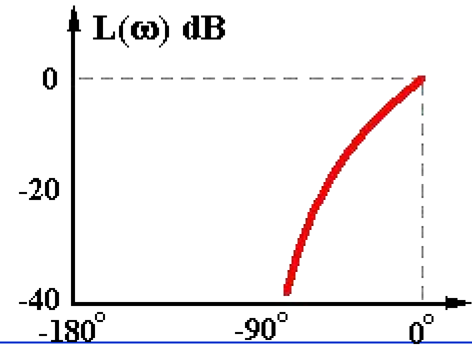
$L(\omega)=20\lg|G(j\omega)|$

对数相频

$\varphi(\omega)=\angle G(j\omega)$




Ⅳ. 对数幅相特性(Nichols)



## 典型环节频率特性的Nyquist图复习

(1) $G(j\omega)=K$

(2) $G(j\omega)=j\omega$

(3) $G(j\omega)=1/j\omega$

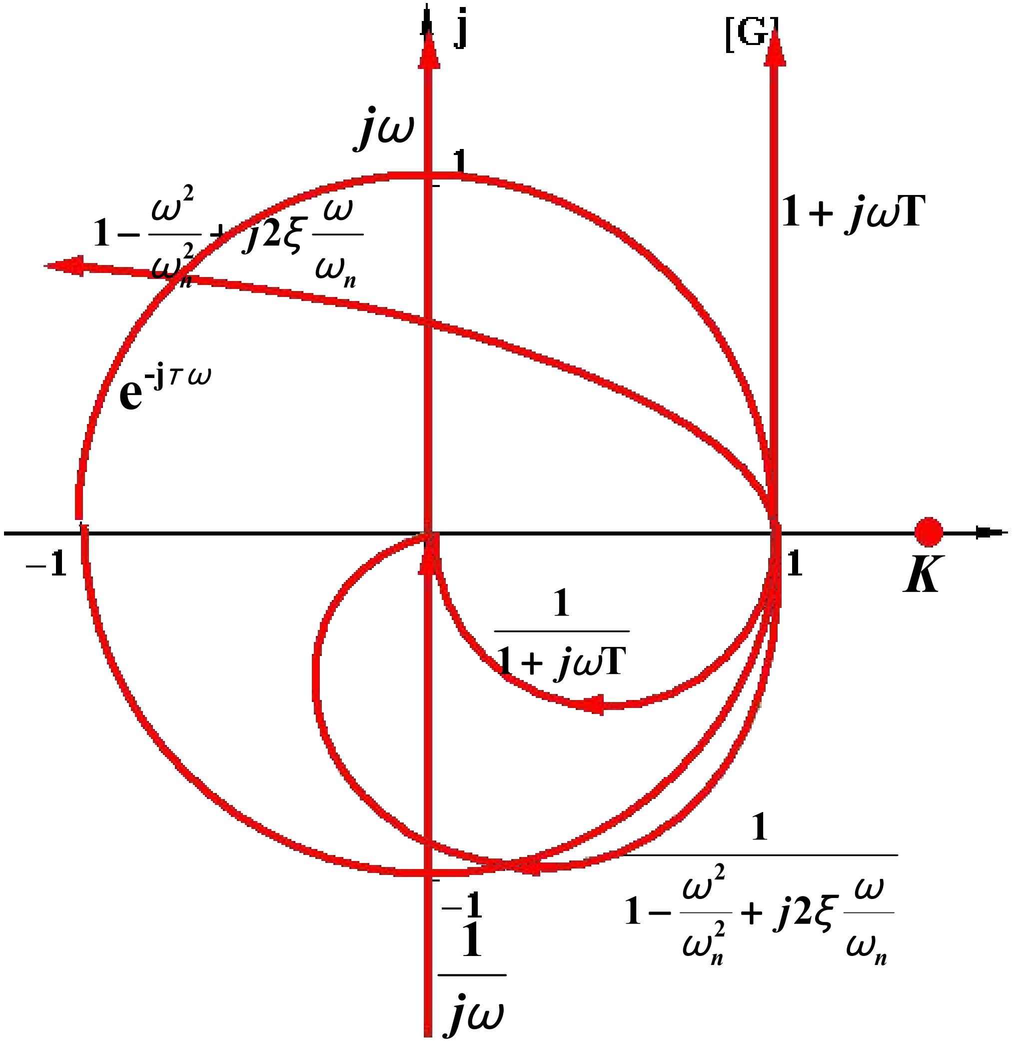
(4) $G(j\omega)=1/(+1+j\omega T)$

(5) $G(j\omega)=+1+j\omega T$

(6) $G(j\omega)=1\Big/\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}+j2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)$

(7) $G(j\omega)=1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}+j2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}$

(8) $G(j\omega)=e^{-j\tau\omega}$



## 二、增加零极点对极坐标图形状的影响

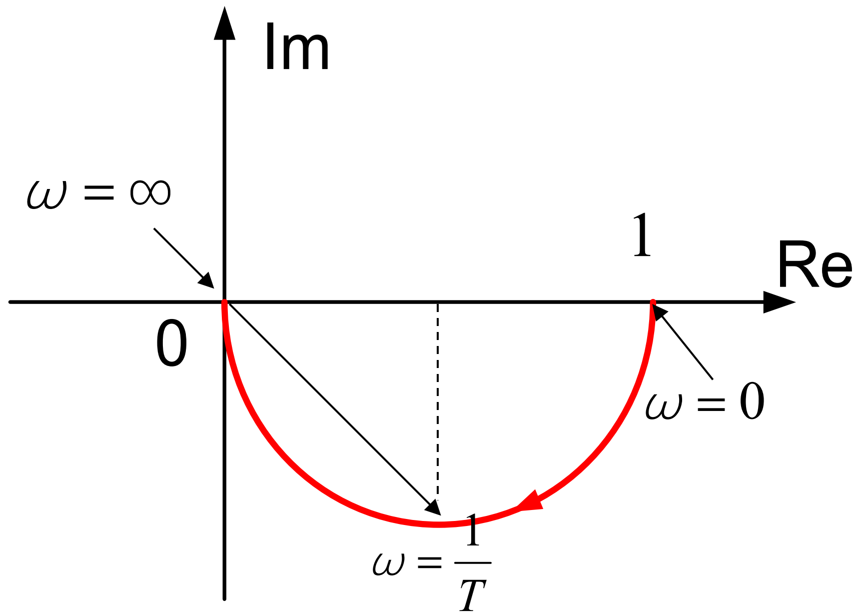
设 $G_1(s)=\dfrac{1}{T_1 s+1}$

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+T_1^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan(T_1\omega)$$

$$P(\omega)=\frac{1}{1+T_1^2\omega^2}$$

$$Q(\omega)=\frac{-T_1\omega}{1+T_1^2\omega^2}$$




当$\omega=0$时，$A(\omega)=1,\quad \varphi(\omega)=0,\quad P(\omega)=1,\quad Q(\omega)=0$

当$\omega=\infty$时，$A(\omega)=0,\quad \varphi(\omega)=-\dfrac{\pi}{2},\quad P(\omega)=0,\quad Q(\omega)=0$

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots

## 1.　增加有限极点

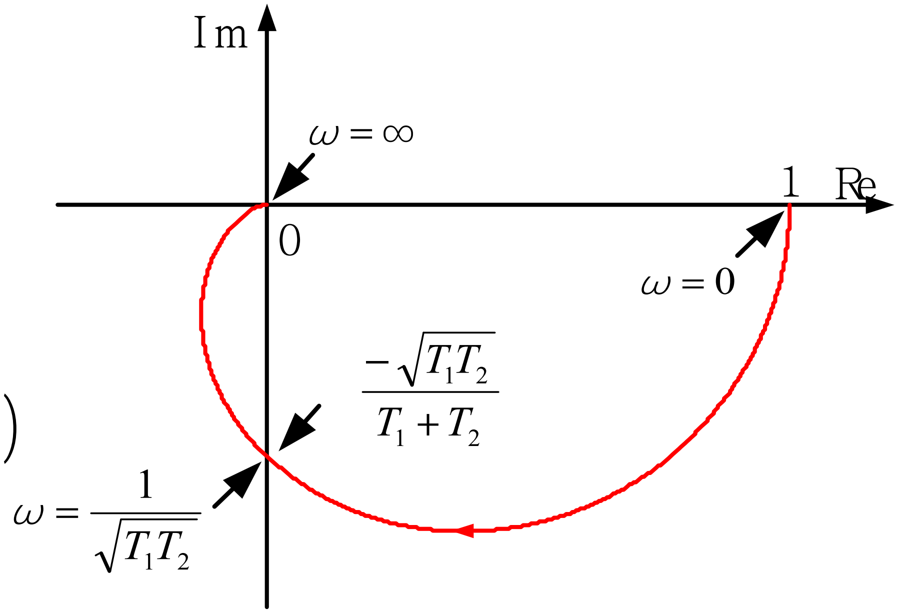
设 $G_2(s) = \dfrac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + T_1^2\omega^2}\sqrt{1 + T_2^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(T_1\omega\right) - \arctan\left(T_2\omega\right)$$

$$P(\omega) = \frac{1 - T_1 T_2 \omega^2}{(1 + T_1^2\omega^2)(1 + T_2^2\omega^2)}$$

$$Q(\omega) = \frac{-\omega(T_1 + T_2)}{(1 + T_1^2\omega^2)(1 + T_2^2\omega^2)}$$



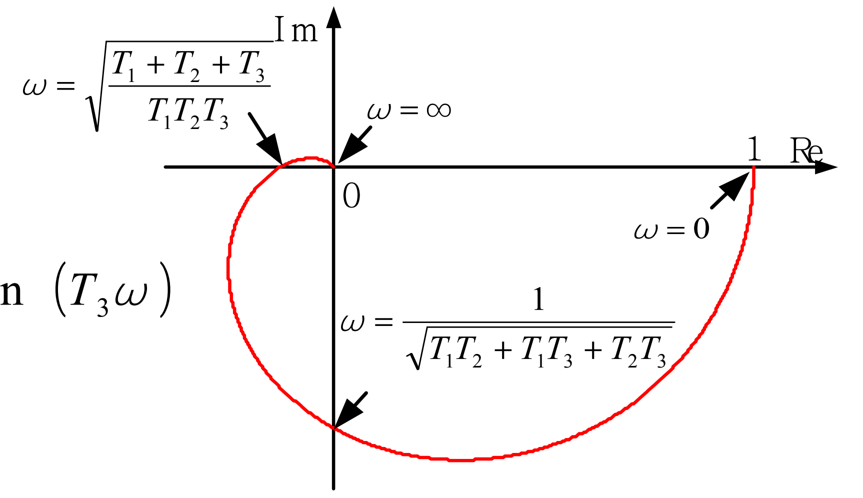

当$\omega = 0$时，$A(\omega) = 1$，$\varphi(\omega) = 0$，$P(\omega) = 1$，$Q(\omega) = 0$

当$\omega = \infty$时，$A(\omega) = 0$，$\varphi(\omega) = -\pi$，$P(\omega) = 0$，$Q(\omega) = 0$

令$P(\omega) = 0$，解得$\omega = \dfrac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$，此时$Q(\omega) = \dfrac{-\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2}$

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots

设 $G_3(s)=\dfrac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$




$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+T_1^2\omega^2}\sqrt{1+T_2^2\omega^2}\sqrt{1+T_3^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\left(T_1\omega\right)-\arctan\left(T_2\omega\right)-\arctan\left(T_3\omega\right)$$

$$P(\omega)=\frac{1-\omega^2(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)(1+T_3^2\omega^2)}$$

$$Q(\omega)=\frac{\omega(\omega^2T_1T_2T_3-T_1-T_2-T_3)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)(1+T_3^2\omega^2)}$$

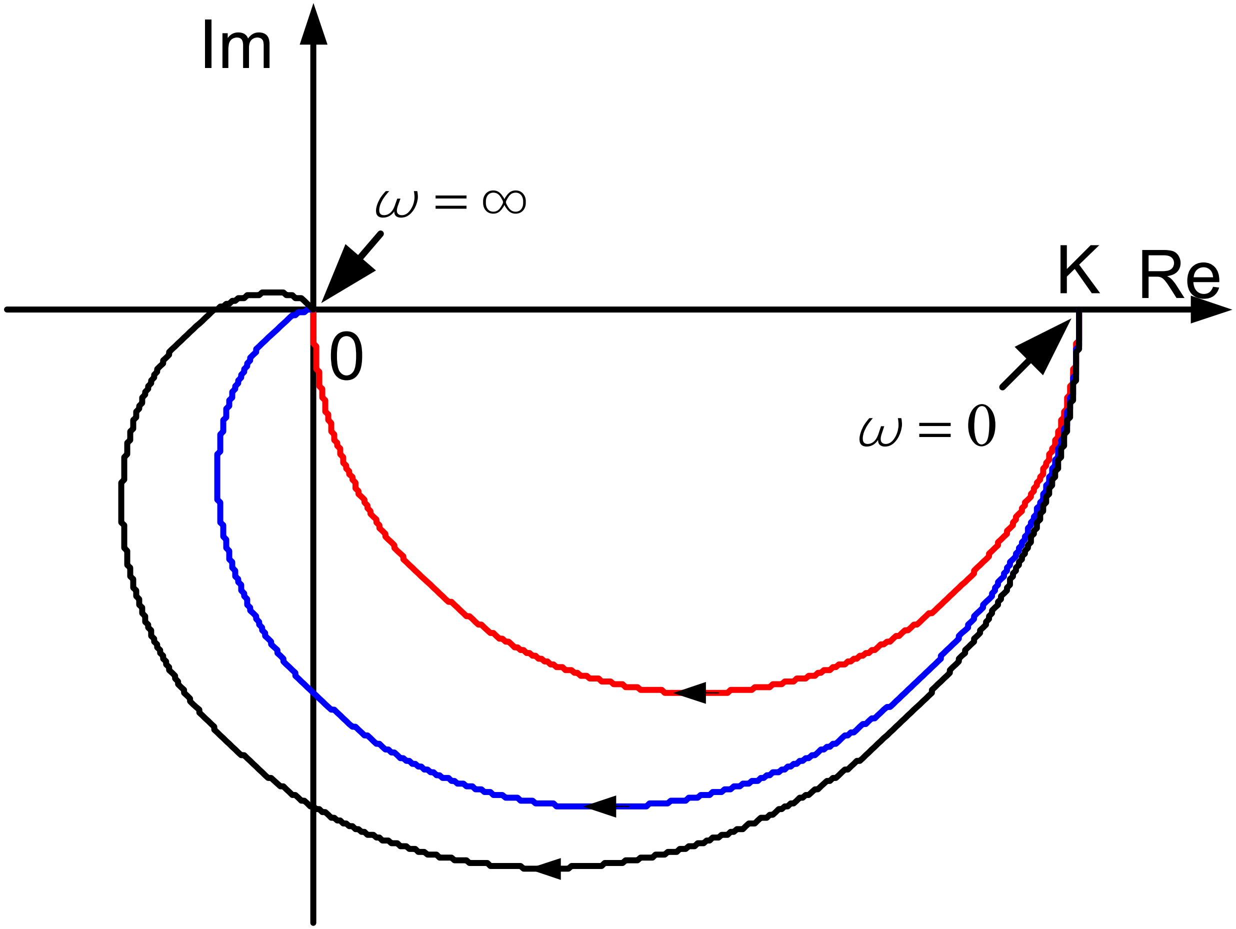
当 $\omega=0$ 时， $A(\omega)=1,\quad \varphi(\omega)=0,\quad P(\omega)=1,\quad Q(\omega)=0$

当 $\omega=\infty$ 时， $A(\omega)=0,\quad \varphi(\omega)=-\dfrac{3\pi}{2},\quad P(\omega)=0,\quad Q(\omega)=0$

令 $P(\omega)=0$，解得 $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3}}$，此时与虚轴相交；

令 $Q(\omega)=0$，解得 $\omega=0$ 和 $\omega=\sqrt{\dfrac{T_1+T_2+T_3}{T_1T_2T_3}}$，此时与实轴相交；

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots




**结论**：假如$G(s)$增加$n$个有限负极点(时间常数形式)，则$G(j\omega)$的极坐标图在$\omega=0$时幅值不变；在$\omega\to\infty$时顺时针转过$n\pi/2$(弧度)。

## 2. 增加在原点处的极点

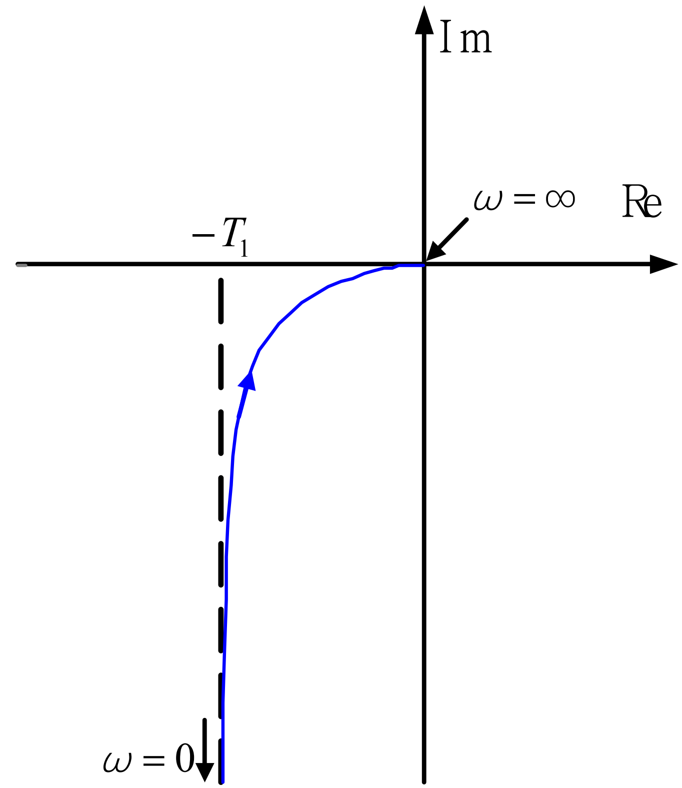
设 $G_4(s)=\dfrac{1}{s(T_1s+1)}$

$$A(\omega)=\frac{1}{\omega\sqrt{1+T_1^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-90°-\arctan(T_1\omega)$$

$$P(\omega)=\frac{-T_1}{1+T_1^2\omega^2}$$

$$Q(\omega)=\frac{-1}{\omega(1+T_1^2\omega^2)}$$




当$\omega=0$时，$A(\omega)=\infty$，$\varphi(\omega)=-90°$，$P(\omega)=-T_1$，$Q(\omega)=-\infty$

当$\omega=\infty$时，$A(\omega)=0$，$\varphi(\omega)=-\pi$，$P(\omega)=0$，$Q(\omega)=0$

在$\omega$取有限值时与坐标轴无交点。

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots

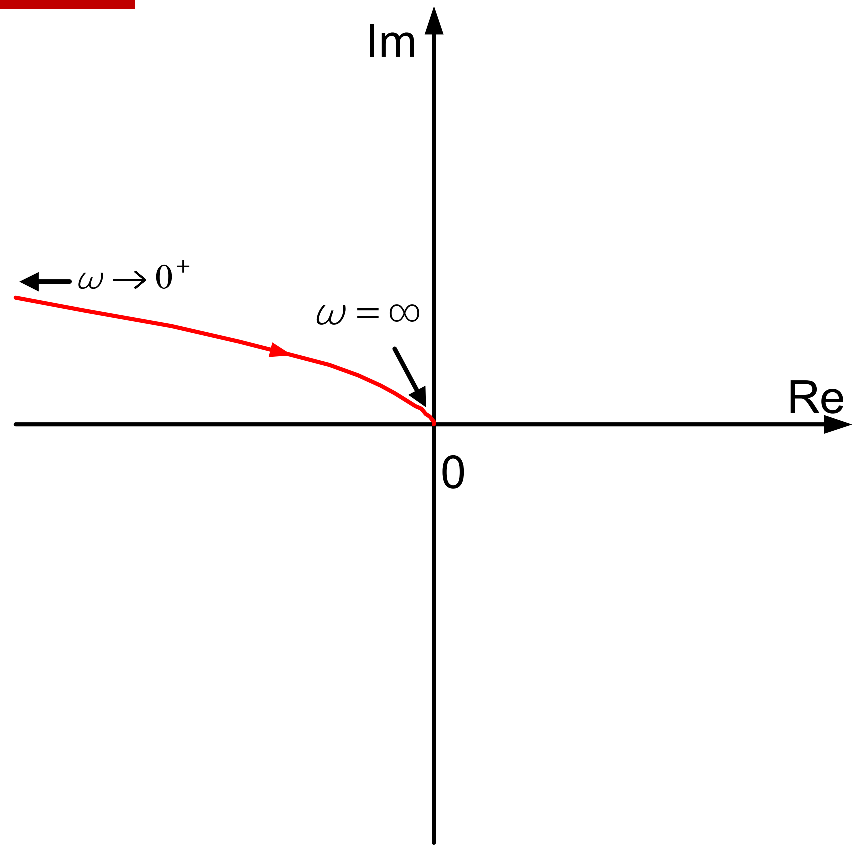
设 $G_5(s)=\dfrac{1}{s^2(T_1s+1)}$

$$A(\omega)=\frac{1}{\omega^2\sqrt{1+T_1^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-180^\circ-\arctan(T_1\omega)$$

$$P(\omega)=\frac{-1}{\omega^2(1+T_1^2\omega^2)}$$

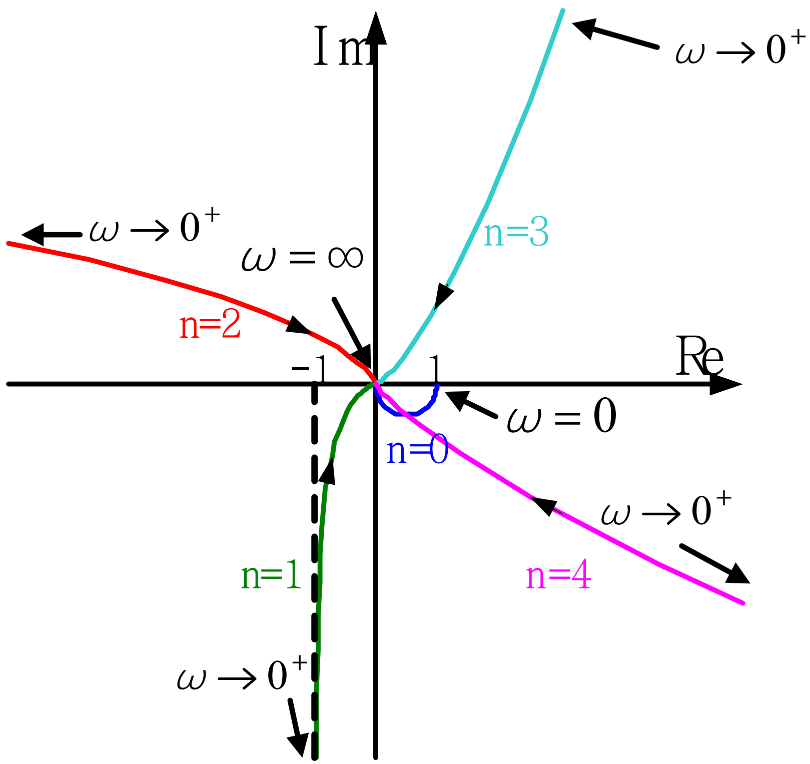
$$Q(\omega)=\frac{T_1}{\omega(1+T_1^2\omega^2)}$$



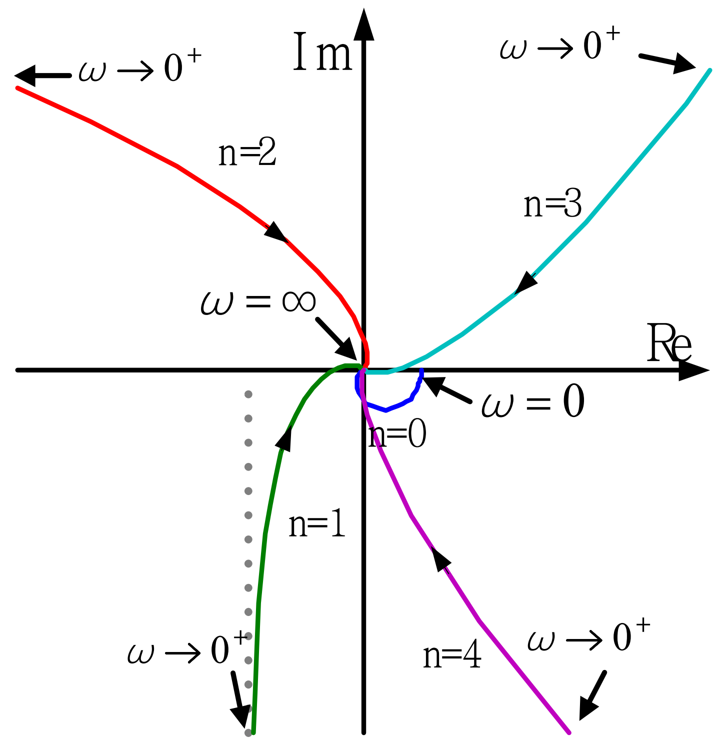

当$\omega=0$时，$A(\omega)=\infty$，$\varphi(\omega)=-180^\circ$，$P(\omega)=-\infty$，$Q(\omega)=\infty$

当$\omega=\infty$时，$A(\omega)=0$，$\varphi(\omega)=-\dfrac{3\pi}{2}$，$P(\omega)=0$，$Q(\omega)=0$

在$\omega$取有限值时与坐标轴无交点。




$\frac{1}{s^n(s+1)}$的极坐标图




$\frac{1}{s^n(s+1)^2}$的极坐标图

**结论：** 假如$G(s)$乘上因子$1/s^n$，则$G(j\omega)$的极坐标图顺时针转过$n\pi/2$(弧度)。并且只要在原点处存在极点，极坐标图在$\omega$=0的幅值为无穷大。

## 3. 增加有限零点

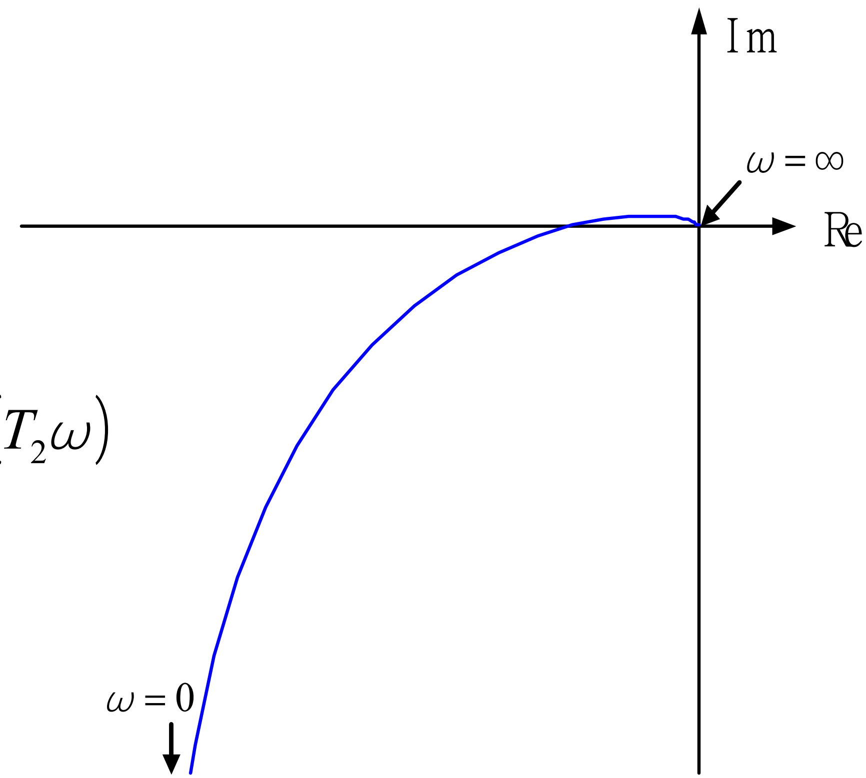
设 $G_6(s)=\dfrac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$

$$A(\omega)=\frac{1}{\omega\sqrt{1+T_1^2\omega^2}\sqrt{1+T_2^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-90°-\arctan(T_1\omega)-\arctan(T_2\omega)$$

$$P(\omega)=\frac{-(T_1+T_2)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

$$Q(\omega)=\frac{-(1-T_1T_2\omega^2)}{\omega(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$




当$\omega=0$时，$A(\omega)=\infty$， $\varphi(\omega)=-90°$， $P(\omega)=-(T_1+T_2)$， $Q(\omega)=-\infty$

当$\omega=\infty$时，$A(\omega)=0$， $\varphi(\omega)=-270°$， $P(\omega)=0$， $Q(\omega)=0$

令$Q(\omega)=0$， 解得与实轴交点$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$， 交点$P(\omega)=\dfrac{-T_1T_2}{T_1+T_2}$

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots

设 $$G_7(s)=\frac{(T_d s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

$$A(\omega)=\frac{\sqrt{1+T_d^2\omega^2}}{\omega\sqrt{1+T_1^2\omega^2}\sqrt{1+T_2^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\left(T_d\omega\right)-90^\circ-\arctan\left(T_1\omega\right)-\arctan\left(T_2\omega\right)$$

$$P(\omega)=\frac{-(T_1+T_2-T_d+\omega^2T_1T_2T_d)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

$$Q(\omega)=\frac{-[1-\omega^2(T_1T_2-T_1T_d-T_2T_d)]}{\omega(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

当$\omega=0$时，$A(\omega)=\infty$， $\varphi(\omega)=-90^\circ$， $P(\omega)=-(T_1+T_2-T_d)$， $Q(\omega)=-\infty$

当$\omega=\infty$时，$A(\omega)=0$， $\varphi(\omega)=-180^\circ$， $P(\omega)=0$， $Q(\omega)=0$

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots

令$Q(\omega)=0$，解得与实轴交点$\omega^2=\dfrac{1}{T_1T_2-T_1T_d-T_2T_d}$

注意与实轴交点有交点的条件为：$T_1T_2-T_1T_d-T_2T_d>0$

$$T_d(T_1+T_2)<T_1T_2 \quad \Rightarrow \quad T_d<\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}$$

设$T_1>T_2$，可令$T_1=aT_2$，$a>1$

$$\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}=\frac{aT_2^2}{(1+a)T_2}=\frac{a}{1+a}T_2 \qquad \because \frac{a}{1+a}<1 \qquad \therefore \frac{a}{1+a}T_2<T_2$$

即满足$T_1>T_2>T_d$时，与实轴有交点，交点为

$$P(\omega)=-(\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}-T_d)$$

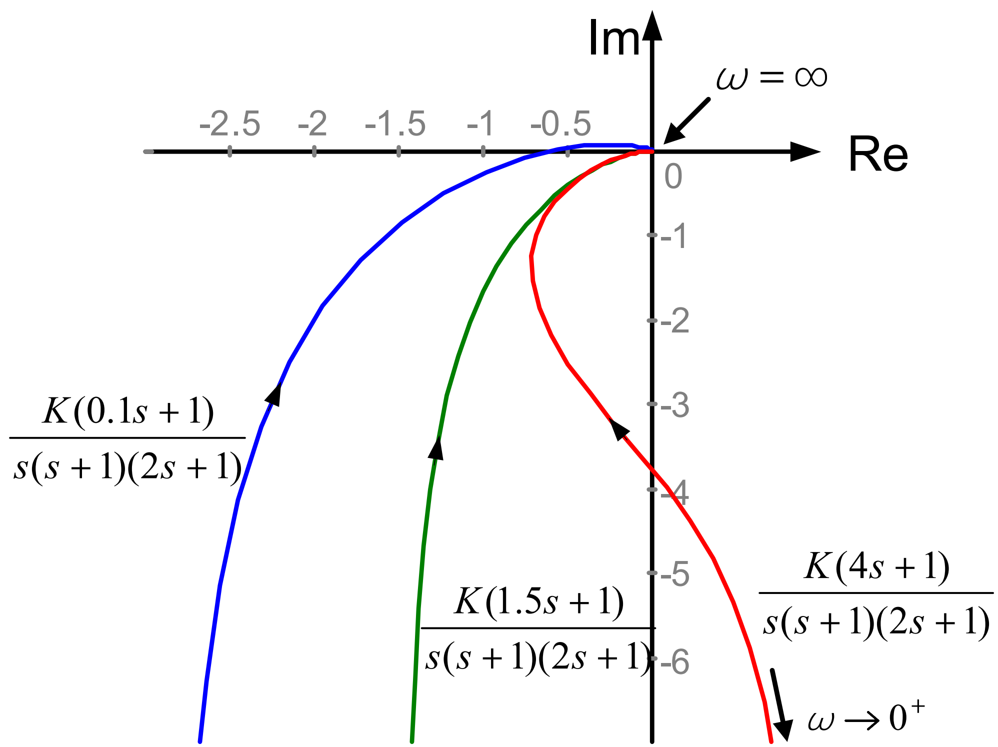
与没有零点的极坐标图比较知：交点更靠近原点，且当$\omega\to\infty$时，极坐标图趋于原点时的相角为-180°。

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots

若$T_d \geq \dfrac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$， 则极坐标图与实轴无交点。

另外令$P(\omega) = 0$， 解得与虚轴交点$\omega^2 = \dfrac{T_d - (T_1 + T_2)}{T_1 T_2 T_d}$

即当$T_d \geq (T_1 + T_2)$时极坐标图将与虚轴相交。



## 三、开环系统极坐标频率特性的绘制（绘制Nyquist图）

开环系统的频率特性或由典型环节的频率特性组合而成，或是一个有理分式，不论那种形式，都可由下面的方法绘制。

[绘制方法]:

- 将开环系统的频率特性写成 $P(\omega)+jQ(\omega)$ 或 $A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ 的形式，根据不同的$\omega$算出$P(\omega),Q(\omega)$或$A(\omega),\varphi(\omega)$可在复平面上得到不同的点并连之为曲线。（手工画法）。

实际绘图时极坐标图画的都是近似曲线。具体来讲是根据幅频特性和相频特性确定起点(对应$\omega$=0)和终点(对应$\omega$=∞)；根据实频特性和虚频特性确定与坐标轴的交点；然后按$\omega$从小到大的顺序用光滑曲线连接即可。必要时可再求一些中间的点帮助绘图。

- 使用MATLAB工具绘制。

**极坐标图的特点是除增益以外的部分决定极坐标图的形状，而增益决定图形的大小。**

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots

**例1:** 设开环系统的频率特性为：$G(j\omega)=\dfrac{K}{(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)}$

试列出实频和虚频特性的表达式。当$K=1,T_1=1,T_2=5$ 绘制奈氏图。

**解:**

$$G(j\omega)=\frac{K(1-jT_1\omega)(1-jT_2\omega)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}=\frac{K(1-T_1T_2\omega^2)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

$$-j\frac{K(T_1+T_2)\omega}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}=P(\omega)+jQ(\omega)$$

当$K=1,T_1=1,T_2=5$时，$P(\omega)=\dfrac{1-5\omega^2}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)},Q(\omega)=\dfrac{-6\omega}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)}$

找出几个特殊点（比如 $\omega=0,\infty$，与实、虚轴的交点等），可大致勾勒出奈氏图。为了相对准确，可以再算几个点。

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots

| $\omega$ | 0 | 0.2 | $\frac{1}{\sqrt{5}}$ | 0.8 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(\omega)$ | 1 | 0.385 | 0 | -0.079 | 0 |
| $Q(\omega)$ | 0 | -0.577 | $\frac{-\sqrt{5}}{6}$ | -0.172 | 0 |

相角：$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega) - \arctan(5\omega)$

| $\omega$ | 0 | 0.2 | $\frac{1}{\sqrt{5}}$ | 0.8 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(\omega)$ | 0 | -56.31 | -90 | -114.62 | -180 |

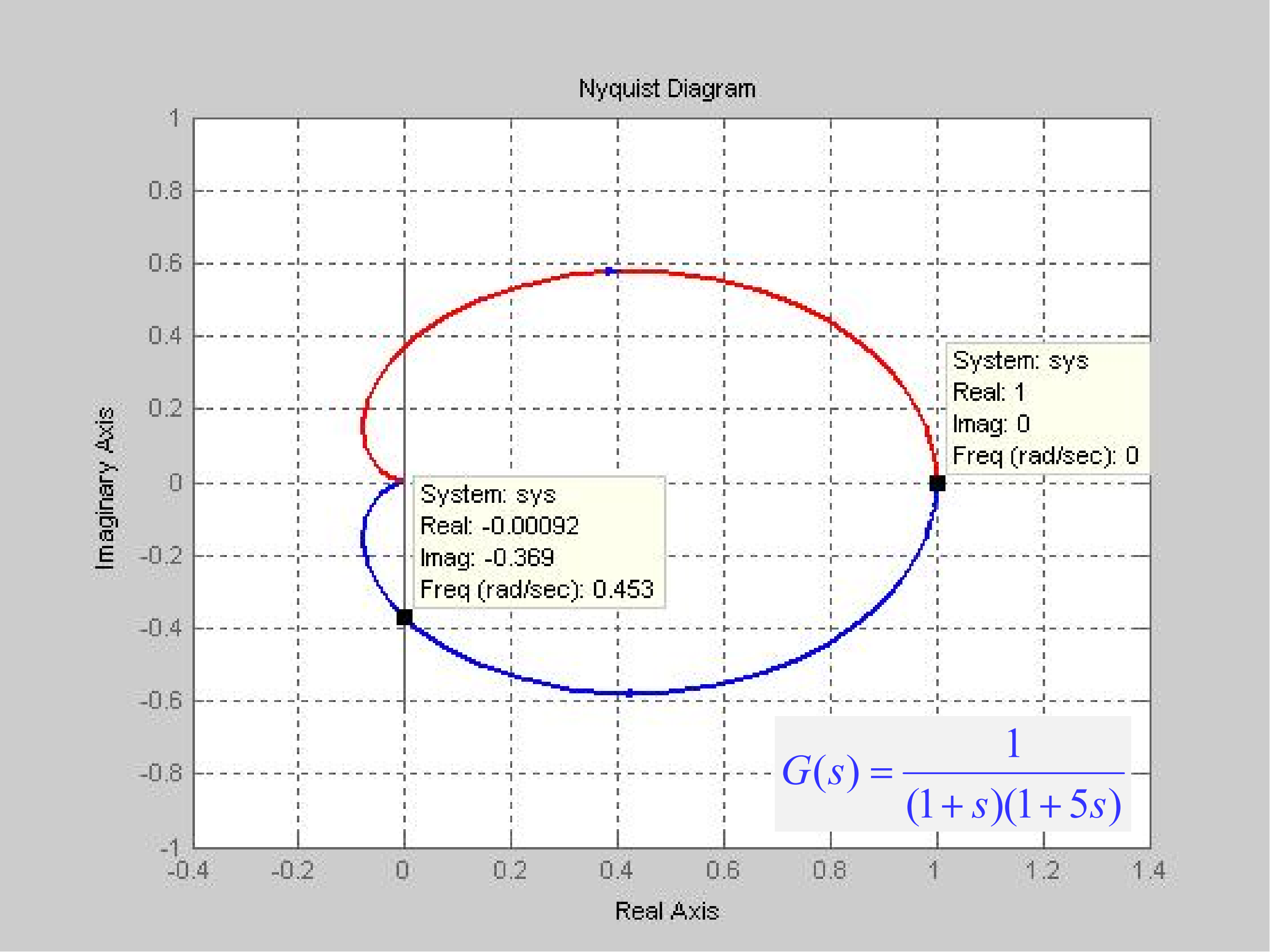
用上述信息可以大致勾勒出Nyquist图。

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots

下图是用 Matlab工具绘制的Nyquist图。

解:

```
N=[0 0 1];
D=[5 6 1];
nyquist(N,D);
```




$$G(s)=\frac{1}{(1+s)(1+5s)}$$

例2：设开环系统的频率特性为：$G(j\omega)=\dfrac{K}{j\omega(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)}$
试绘制极坐标特性曲线。

解：$$G(j\omega)=\frac{-K(T_1+T_2)}{(1+T_1{}^2\omega^2)(1+T_2{}^2\omega^2)}-j\frac{K(1-T_1T_2\omega^2)}{\omega(1+T_1{}^2\omega^2)(1+T_2{}^2\omega^2)}=P(\omega)+jQ(\omega)$$

$$\varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2}-\arctan\left(T_1\omega\right)-\arctan\left(T_2\omega\right)$$

[分析]1、当 $\omega=0$ 时，$P(0)=-K(T_1+T_2),Q(0)=-\infty,\varphi(0)=-\dfrac{\pi}{2}$

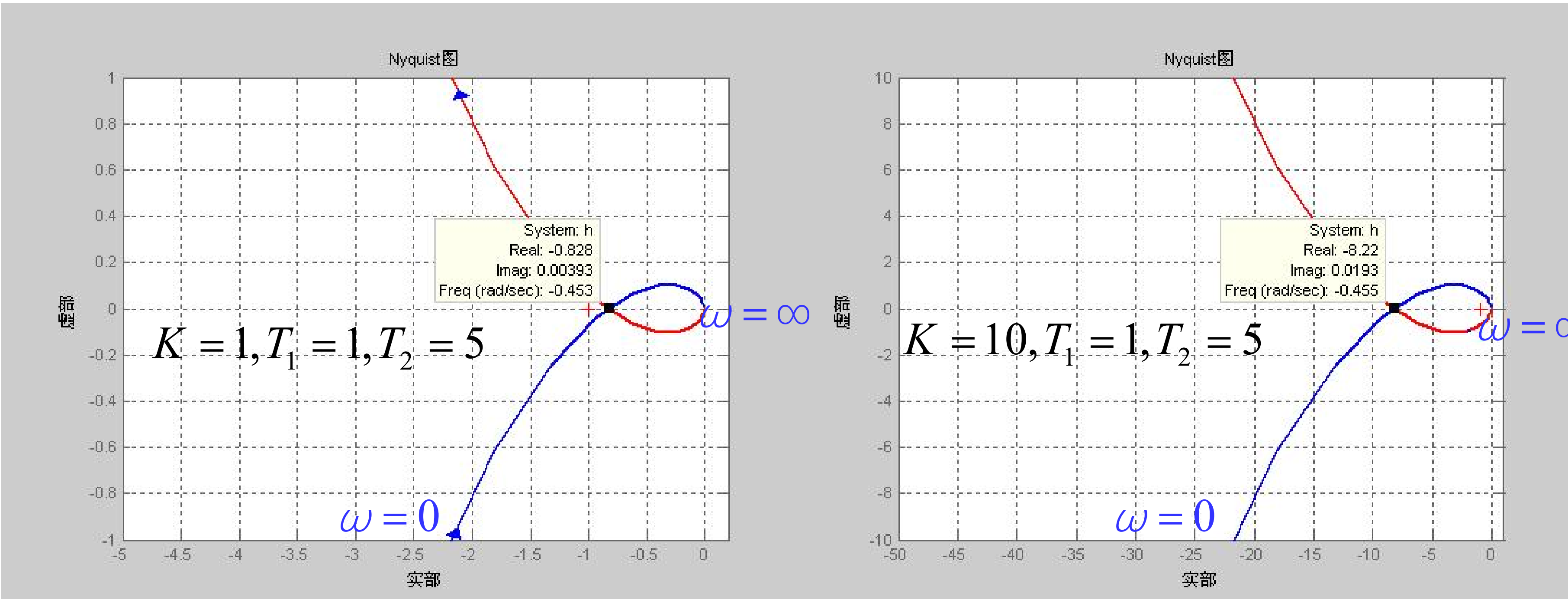
显然，当 $\omega\to 0$ 时，$G(j\omega)$的渐近线是一条通过实轴$-K(T_1+T_2)$点，且平行于虚轴的直线。

2、与实轴的交点。令：$Q(\omega)=0$，解得：$\omega_1=\dfrac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$，这时：

$$P(\omega_1)=\frac{-KT_1T_2}{T_1+T_2}$$

3、当$\omega\to\infty$时，$P(\infty)=0,Q(\infty)=0,\varphi(\infty)\dfrac{-3\pi}{2}$，渐近线方向向下。

# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots




$$G(s)=\frac{1}{s(1+s)(1+5s)}$$

$$G(s)=\frac{10}{s(1+s)(1+5s)}$$

[具有**积分环节**的系统的频率特性的特点]:

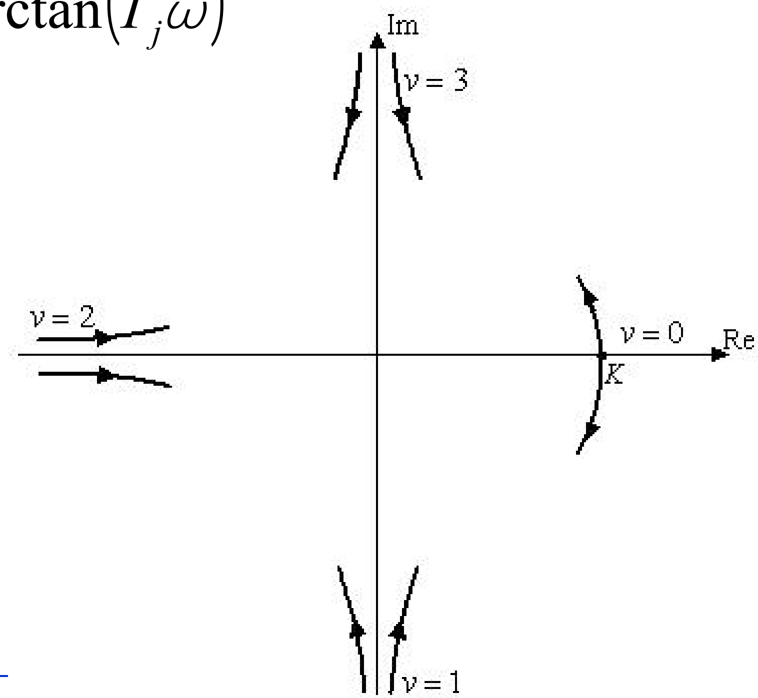
频率特性可表示为: $G(j\omega)=\dfrac{1}{(j\omega)^{\nu}}\cdot\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{m}(1+\tau_i s)}{\prod\limits_{j=1}^{n-\nu}(1+T_j s)},(n\geq m)$

其相角为:

$$\varphi(\omega)=\sum_{i=1}^{m}\arctan(\tau_i\omega)-\nu\frac{\pi}{2}-\sum_{j=1}^{n-\nu}\arctan(T_j\omega)$$

**1. 起点 (取决于型数$\nu$) :**

$$G_o(j0^+)=\lim_{\omega\to0^+}\frac{K}{(j\omega)^{\nu}}$$



# 5.2典型环节的频率特性-Nyquist plots

**1. 起点（取决于型数$\nu$）：**

**2. 终点（取决于n-m）：**

$\omega \to \infty$，此时频率特性与分子、分母多项式阶次之差n-m有关。

**终点处幅值：**

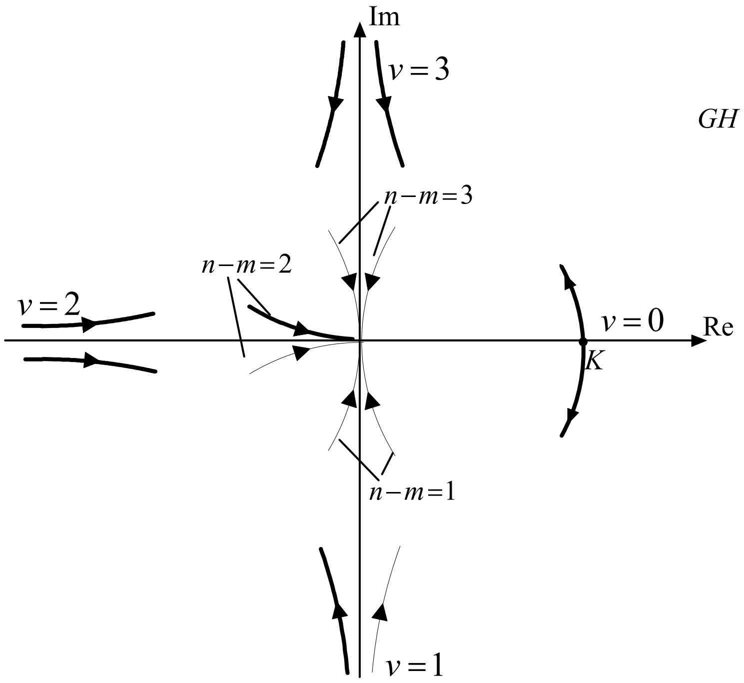
$$\lim_{\omega\to\infty}\left|G\left(j\omega\right)\right| = 0(n > m)$$

**终点处相角：**

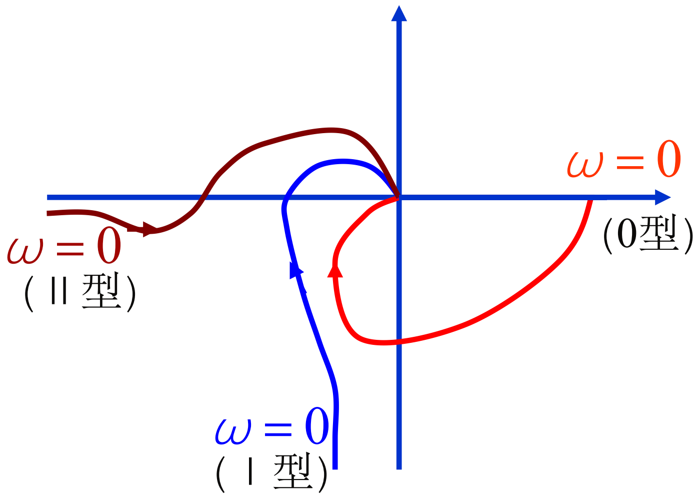
$$\lim_{\omega\to\infty}\angle G\left(j\omega\right) = -\frac{\pi}{2}\left(n-m\right)$$

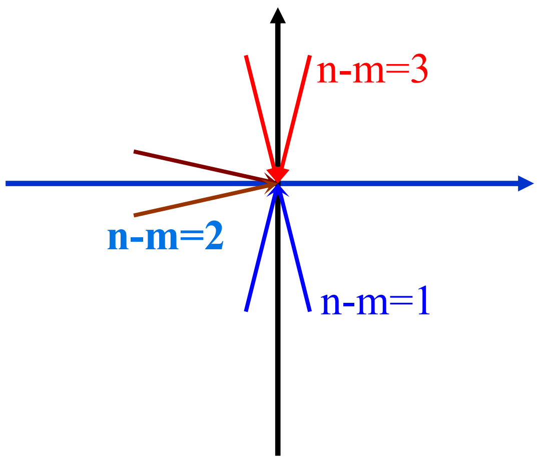
**结论：**

奈氏曲线沿 $-\frac{\pi}{2}\left(n-m\right)$ 进入原点。



下图为0型、Ⅰ型和Ⅱ型系统在**低频和高频段**频率特性示意图：




低频段频率特性

0型：$\varphi(0)=0, |G(0)|=1$

1型：$\varphi(0)=-\dfrac{\pi}{2}, |G(0)|=\infty$

2型：$\varphi(0)=-\pi, |G(0)|=\infty$

高频段频率特性

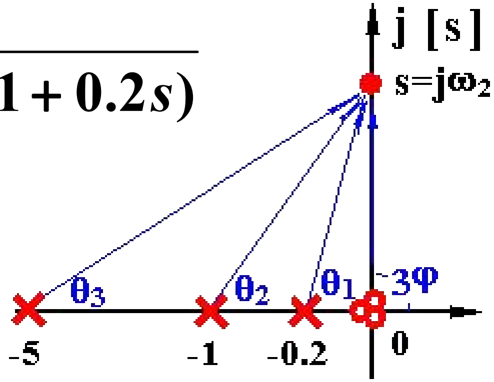
$n-m=1$时，$\varphi(\infty)=-\dfrac{\pi}{2}$

$n-m=2$时，$\varphi(\infty)=-\pi$

$n-m=3$时，$\varphi(\infty)=-\dfrac{3\pi}{2}$

中频部分，可计算一些特殊点的来确定。如与坐标的交点等。

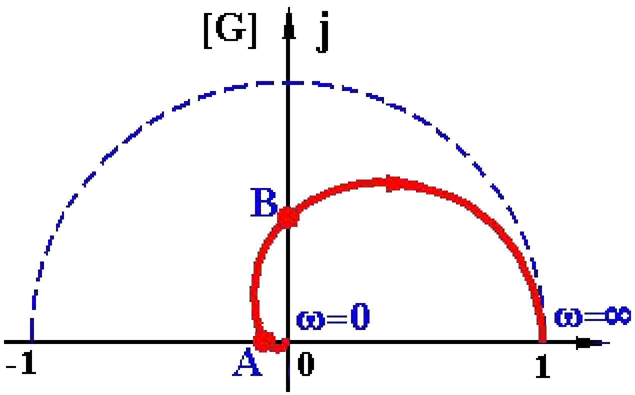
例3 $G(s)=\dfrac{s^3}{(s+0.2)(s+1)(s+5)}=\dfrac{s^3}{(1+5s)(1+s)(1+0.2s)}$




$$G(j0)=0\angle+270°$$

$$\downarrow \quad |G|\uparrow \quad \angle G\downarrow$$

$$G(j\infty)=1\angle 0°$$



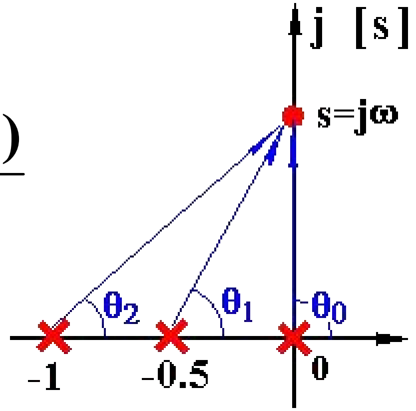

$$G(j\omega)=\frac{-j\omega^3(1-j5\omega)(1-j\omega)(1-j0.2\omega)}{(1+25\omega^2)(1+\omega^2)(1+0.04\omega^2)}$$

$$=\frac{-\omega^4(6.2-\omega^2)-j\omega^3(1-6.2\omega^2)}{(1+25\omega^2)(1+\omega^2)(1+0.04\omega^2)}$$

$$=X+jY$$

A: $\begin{cases}\omega_A=1/\sqrt{6.2}=0.402\\ G(j\omega_A)=-0.0267+j0\end{cases}$ B: $\begin{cases}\omega_B=\sqrt{6.2}=2.49\\ G(j\omega_B)=0+j0.412\end{cases}$

例4 $G(s)=\dfrac{5}{s(s+1)(2s+1)}$ 画G(jω)曲线。

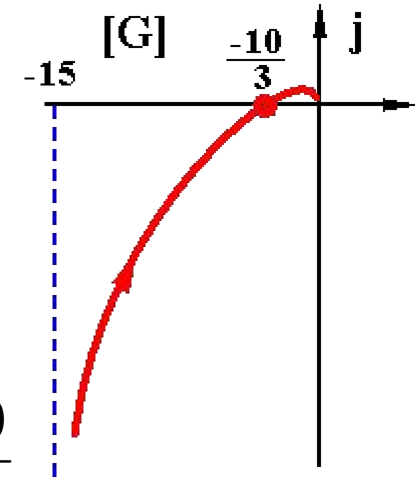



解 $G(j\omega)=\dfrac{5}{j\omega(1+j\omega)(1+j2\omega)}=\dfrac{-j5(1-j\omega)(1-j2\omega)}{\omega(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$

$$=\frac{-15}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}-j\frac{5(1-2\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

$$G(j0)=\infty\angle-90^\circ$$

$$G(j\infty)=0\angle-270^\circ$$




渐近线: $\mathrm{Re}[G(j0)]\Rightarrow -15$

与实轴交点: $\mathrm{Im}[G(j\omega)]=0 \quad \Rightarrow \quad \omega=1/\sqrt{2}=0.707$

$$\mathrm{Re}[G(j0.707)]=\frac{-15}{(1+0.5)(1+4\times0.5)}=-\frac{10}{3}$$

# Thank You !