



第五章 频率响应法

5.1 频率特性的基本概念

5.2 典型环节的频率特性

5.3 开环系统频率特性图的绘制

5.4 控制系统的频域稳定判据

5.5 稳定裕量

5.6 开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

5.7 闭环频率特性和频域性能指标



5.1 频率特性的基本概念

考察一个系统的好坏，通常用阶跃信号输入下系统的阶跃响应来分析系统的动态性能和稳态性能。

有时也用正弦信号输入时系统的响应来分析，但这种响应并不是单看某一个频率的正弦信号输入时的**瞬态响应**，而是考察频率由低到高无数个正弦信号输入下所对应的每个输出的**稳态响应**。因此，这种响应也叫**频率响应**。

频率响应尽管不如阶跃响应那样直观，但同样能间接地表示系统的特性。频率响应法是分析和设计系统的一个既方便又有效的工具。

► **基本思想：** 通过开环频率特性的图形对系统进行分析。

► **数学模型：** 频率特性。



5.1 频率特性的基本概念

► 主要优点:

- (1) 频率响应法是一种图解的研究方法。
- (2) 不求解闭环特征方程,由开环系统频率特性确定闭环系统的稳定性;
- (3) 二阶系统频率特性与暂态性能指标有确切对应关系;
- (4) 可方便设计出能有效抑制噪声的系统;
- (5) 频率响应有鲜明的物理意义 (可以通过实验量测来获得,而不必推导系统的传递函数。一方面,当传递函数的解析式难以用推导方法求得时,常用的方法是利用对该系统频率特性测试曲线的拟合来得出传递函数模型。另一方面,在验证推导出的传递函数的正确性时,也往往用它所对应的频率特性同测试结果相比较来判断。);
- (6) 不仅适用于线性系统,还可推广到非线性系统。



5.1 频率特性的基本概念

一、频率特性的定义：

零初始条件的线性系统或环节，在正弦信号作用下，稳态响应与输入正弦信号的相量比。

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)}$$

►与传递函数的关系：

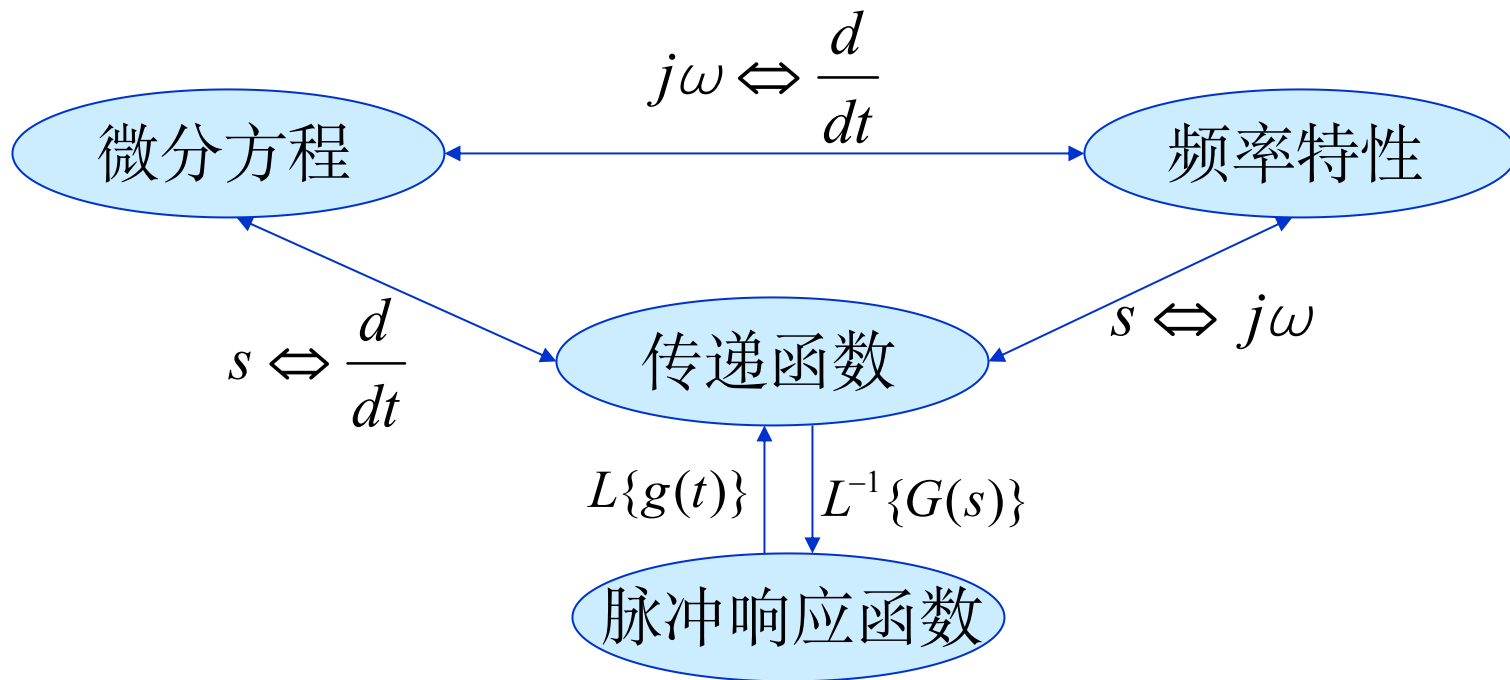
$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$

[结论]：当传递函数中的复变量 s 用 $j\omega$ 代替时，传递函数就转变为频率特性。反之亦然。



5.1 频率特性的基本概念

线性系统的数学模型有以下几种：微分方程、传递函数、脉冲响应函数和频率特性等。它们之间的关系如下：





5.1 频率特性的基本概念

[例1]: 设传递函数为: $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$

微分方程为: $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{\frac{d^2}{dt^2} + 3\frac{d}{dt} + 2}, \Rightarrow \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$

频率特性为: $G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 2}$

脉冲响应函数为: $g(t) = L^{-1}[G(s)] = (e^{-t} - e^{-2t}) \cdot 1(t)$



5.1 频率特性的基本概念

对于一般的线性定常系统，系统的输入和输出分别为 $r(t)$ 和 $y(t)$ ，系统的传递函数为 $G(s)$ 。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

式中， $p_j, j = 1, 2, \dots, n$ 为极点。

若： $r(t) = R_m \sin \omega t$ ，则 $R(s) = \frac{R_m \omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{R_m \omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$

则：
$$Y(s) = \frac{N(s)R(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \cdot \frac{R_m \omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$$
$$= \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \dots + \frac{k_n}{s - p_n} + \frac{k_{c1}}{s + j\omega} + \frac{k_{c2}}{s - j\omega}$$



5.1 频率特性的基本概念

拉氏反变换为:

$$y(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \dots + k_n e^{p_n t} + k_{c1} e^{-j\omega t} + k_{c2} e^{j\omega t}$$

若系统稳定, 则极点都在s左半平面。当 $t \rightarrow \infty$, 即稳态时:

$$e^{p_1 t} \rightarrow 0, \quad e^{p_2 t} \rightarrow 0, \dots, \quad e^{p_n t} \rightarrow 0$$

$$y_s(t) = k_{c1} e^{-j\omega t} + k_{c2} e^{j\omega t}$$

式中, k_{c1}, k_{c2} 分别为:

$$k_{c1} = Y(s)(s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = G(s) \frac{R_m \omega (s + j\omega)}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{R_m G(-j\omega)}{2j}$$

$$k_{c2} = Y(s)(s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = G(s) \frac{R_m \omega (s - j\omega)}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{R_m G(j\omega)}{2j}$$



5.1 频率特性的基本概念

而

$$G(j\omega) = G(s) \big|_{s=j\omega} = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$$

$$G(-j\omega) = G(s) \big|_{s=-j\omega} = |G(j\omega)| e^{-j\angle G(j\omega)}$$

$$\therefore k_{c1} = -\frac{R_m}{2j} |G(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)}, \quad k_{c2} = \frac{R_m}{2j} |G(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\begin{aligned} \therefore y_s(t) &= k_{c1} e^{-j\omega t} + k_{c2} e^{j\omega t} = |G(j\omega)| R_m \frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2j} \\ &= |G(j\omega)| R_m \sin(\omega t + \varphi(\omega)) = Y_m \sin(\omega t + \varphi(\omega)) \end{aligned}$$

式中： R_m 、 Y_m 分别为输入、输出信号的幅值。

$$\frac{Y_m}{R_m} = |G(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$$



5.1 频率特性的基本概念

上述分析表明，对于稳定的线性定常系统，加入一个正弦信号，它的**稳态响应**是一个与输入同频率的正弦信号，稳态响应与输入不同之处仅在于幅值和相位。其幅值放大了 $|G(j\omega)|$ 倍，相位移动了 $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$ 。 $|G(j\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$ 都是频率的函数。

幅频特性：稳态响应的幅值与输入信号的幅值之比

$$\frac{Y_m}{R_m} = A(\omega) = |G(j\omega)|$$

它描述系统对不同频率输入信号在稳态时的放大特性；

相频特性：稳态响应与正弦输入信号的相位差 $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$ ，它描述系统的稳态响应对不同频率输入信号的相位移特性；



5.1 频率特性的基本概念

幅频特性和相频特性可在复平面上构成一个完整的向量 $G(j\omega)$,
 $G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$, 它也是 ω 的函数。 $G(j\omega)$ 称为频率特性。

还可将 $G(j\omega)$ 写成复数形式, 即

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

这里 $P(\omega) = \text{Re}[G(j\omega)]$ 和 $Q(\omega) = \text{Im}[G(j\omega)]$ 分别称为系统的实频特性和虚频特性。

幅频特性、相频特性和实频特性、虚频特性之间具有下列关系:

$$\begin{cases} P(\omega) = A(\omega) \cdot \cos \varphi(\omega) \\ Q(\omega) = A(\omega) \cdot \sin \varphi(\omega) \end{cases} \quad \begin{cases} A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \end{cases}$$



5.1 频率特性的基本概念

从另一方面看，若线性系统在**正弦信号**输入作用下，在稳态情况下，输入和输出都是正弦函数，可用矢量表示：

$$R(j\omega) = R_m e^{j\varphi_x}, \quad Y(j\omega) = Y_m e^{j\varphi_y}$$

$$\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{Y_m}{R_m} e^{j(\varphi_y - \varphi_x)} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

可见，**频率特性就是输出、输入正弦函数用矢量表示时之比。**

表示线性系统在稳态情况下，输出、输入正弦信号之间的数学关系，是频率域中的数学模型。



5.1 频率特性的基本概念

频率特性的推导是在线性定常系统是稳定的假设条件下得出的。

如果不稳定，则动态过程 $y(t)$ 最终不可能趋于稳态响应 $y_s(t)$ ，当然也就无法由实际系统直接观察到这种稳态响应。

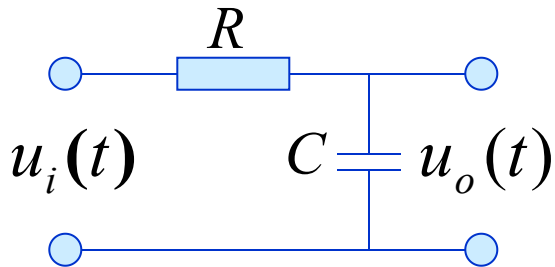
但从理论上动态过程的稳态分量总是可以分离出来的，而且其规律性并不依赖于系统的稳定性。因此可以扩展频率特性的概念，将频率特性定义为：在正弦信号输入下，线性定常系统输出的稳态分量与输入的复数比。

所以对于不稳定的系统，尽管无法用实验方法量测到其频率特性，但根据式 $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$ ，由传递函数还是可以得到其频率特性。



5.1 频率特性的基本概念

例2: 如下图所示RC电路。其微分方程和传递函数分别是:



$$RC \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

$$\frac{u_o(s)}{u_i(s)} = \frac{1}{Ts + 1}, (T = RC)$$

若: $u_i(t) = U_i \sin \omega t$, 则 $u_i(s) = \frac{U_i \omega}{s^2 + \omega^2}$

$$\therefore u_o(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{U_i \omega}{s^2 + \omega^2}, (\text{初始值为零})$$

$$\text{拉氏反变换为: } u_o(t) = \frac{U_i T \omega}{1 + T^2 \omega^2} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{U_i}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} \sin[\omega t - \arctan(T\omega)]$$

上式第一项为瞬态项, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 第一项趋于0。第二项为

$$\text{稳态项: } u_o(t) = \frac{U_i}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \sin(\omega t + \varphi), \varphi = -\arctan(RC\omega)$$



5.1 频率特性的基本概念

$$u_o(t) = \frac{U_i}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi), \varphi = -\arctan(T\omega)$$

可见，输出电压的稳态分量是频率为 ω 的正弦函数（与输入频率相同），幅值和相角与输入电压的幅值、相角和频率有关。

由上式可得系统的幅频特性为：

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$

系统的相频特性

$$\varphi = -\arctan(RC\omega)$$

系统的频率特性

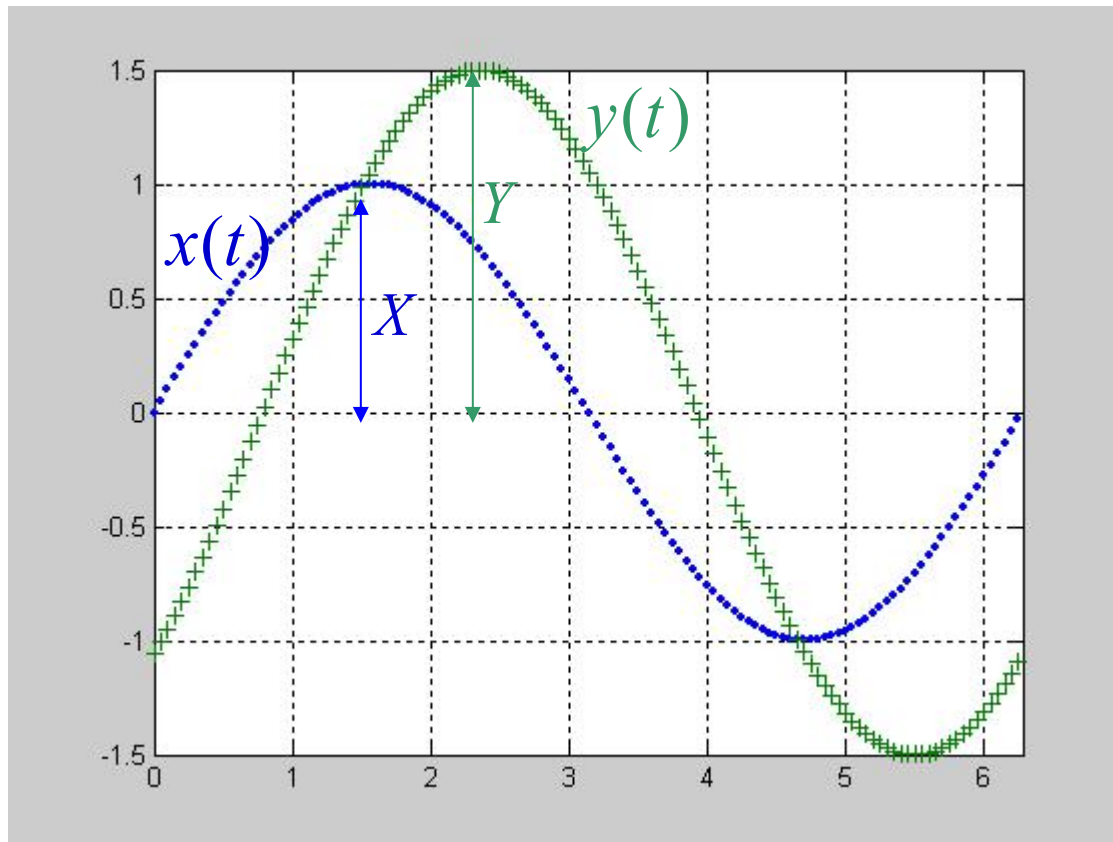
$$G(j\omega) = \frac{U_o(j\omega)}{U_i(j\omega)} = \frac{1}{1+jRC\omega}$$



5.1 频率特性的基本概念

一般地，对于线性定常系统，都有这种特性。即当输入信号为 $x(t) = X \sin(\omega t + \varphi_x)$ ，则当 $t \rightarrow \infty$ 时，其输出为：

$y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi_y)$ ， $y(t)$ 与 $x(t)$ 有相同频率。但幅值和相角不同。

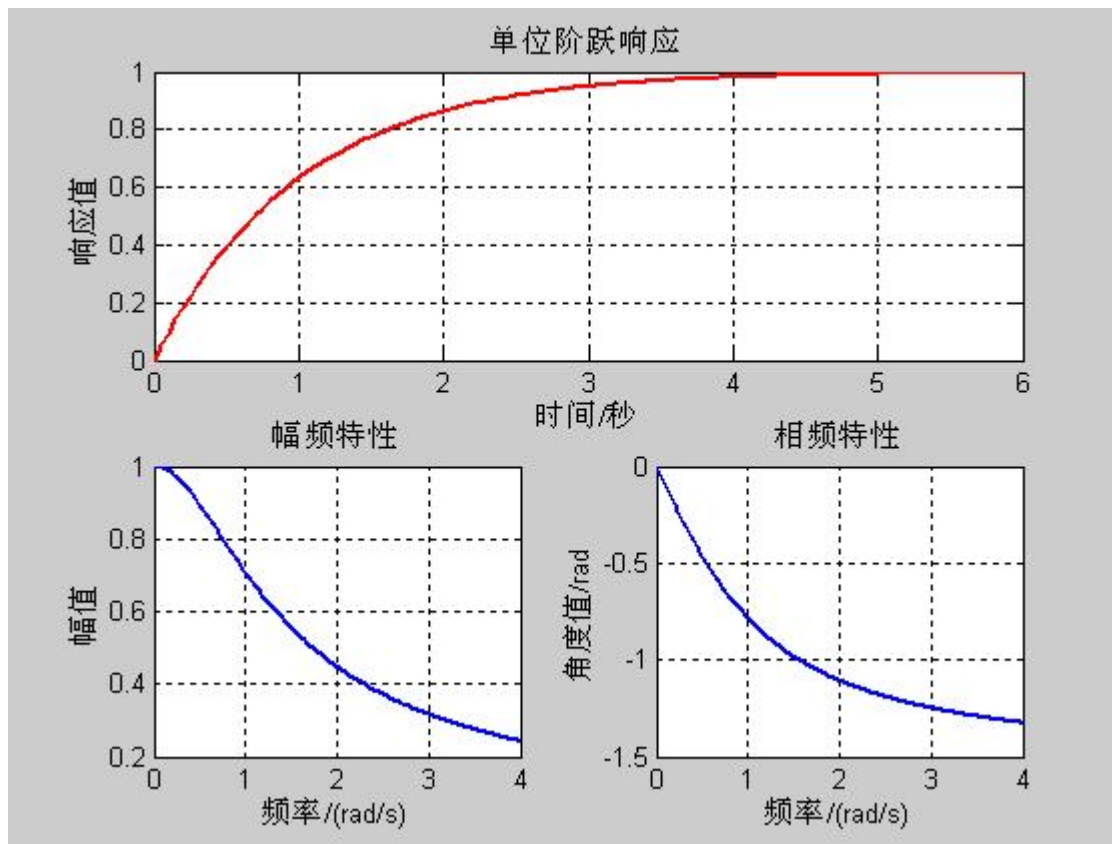




5.1 频率特性的基本概念

例2中, $A(\omega) = \frac{U_o}{U_i} = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}, \varphi(\omega) = -\arctan(RC\omega)$

画出单位阶跃响应曲线、幅频和相频特性如下:





5.1 频率特性的基本概念

二、频率特性的求法

已知系统的运动方程，输入正弦函数求其稳态解，取输出稳态分量和输入正弦的复数比。

▶根据传递函数来求取；

▶通过实验测得。

注意：

(1) 频率特性既可以用于描述一个系统，也可以用于描述系统的一个元件；

(2) 频率特性只适用于描述线性系统；

(3) 频率特性虽然定义为系统在正弦输入作用下的稳态输出与输入之间的复数比，但它也是系统的动态数学模型描述，因为它包含着系统变化过程的动态信息。



5.1 频率特性的基本概念

三、频率特性的图形表示方法：

频率特性可以写成复数形式：

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

也可以写成指数形式：

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$$

其中， $P(\omega)$ 为实频特性，

$Q(\omega)$ 为虚频特性；

$|G(j\omega)|$ 为幅频特性，

$\angle G(j\omega)$ 为相频特性。



5.1 频率特性的基本概念

在控制工程中，频率分析法常常是用图解法进行分析和设计的，因此有必要介绍常用的频率特性的三种图解表示。

- ❑ 极坐标频率特性曲线（又称奈奎斯特(Nyquist)图)
- ❑ 对数频率特性曲线（又称波德(Bode)图)
- ❑ 对数幅相特性曲线（又称尼柯尔斯(Nichols)图)



5.1 频率特性的基本概念

1、极坐标频率特性曲线（又称奈奎斯特曲线）

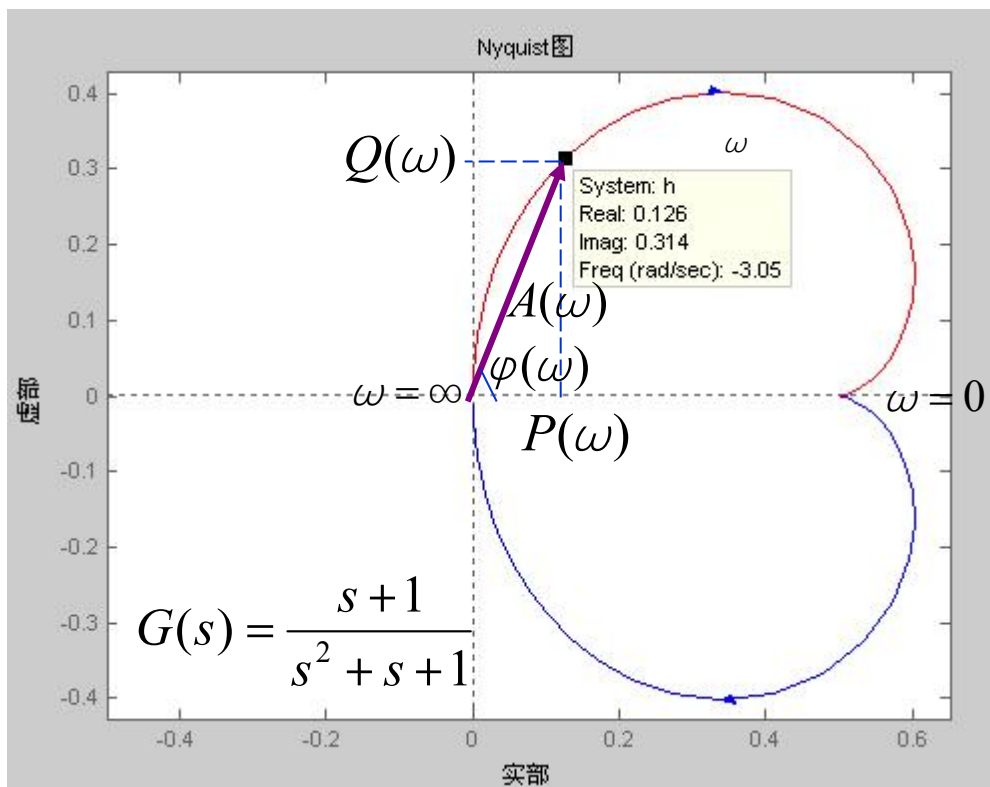
它是在复平面上用一条曲线表示 ω 由 $0 \rightarrow \infty$ 时的频率特性。即用矢量 $G(j\omega)$ 的端点轨迹形成的图形。 ω 是参变量。在曲线的上的任意一点可以确定实频、虚频、幅频和相频特性。

极坐标图是以开环频率特性的实部为直角坐标横坐标，以其虚部为纵坐标，以 ω 为参变量画出幅值与相位之间的关系。

根据频率特性和传递函数的关系，可知：频率特性曲线是S平面上变量 s 沿正虚轴变化时在 $G(s)$ 平面上的映射。



5.1 频率特性的基本概念



由于幅频特性是 ω 的偶函数，而相频特性是 ω 的奇函数，所以当 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 的频率特性曲线和 ω 从 $-\infty \rightarrow 0$ 的频率特性曲线是对称于实轴的。

极坐标图的**优点**：可在一张图上绘出整个频率域的频率响应特性；
缺点：不能明显地表示出开环传递函数中每个典型环节的作用。



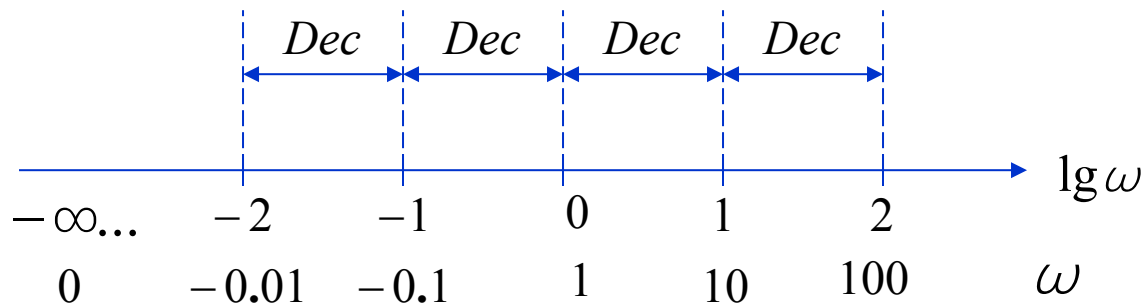
5.1 频率特性的基本概念

2、对数频率特性曲线（波德图，Bode图）

Bode图由对数幅频特性和对数相频特性两条曲线组成。

1. 波德图坐标(横坐标是频率，纵坐标是幅值和相角)的分度：

横坐标(称为频率轴)分度：它是以频率 ω 的对数值 $\lg \omega$ 进行线性分度的。但为了便于观察仍标以 ω 的值，因此对 ω 而言是非线性刻度。 ω 每变化十倍，横坐标变化一个单位长度，称为十倍频程(或十倍频)，用dec表示。类似地，频率 ω 的数值变化一倍，横坐标就变化0.301单位长度，称为“倍频程”，用oct表示。如下图所示：

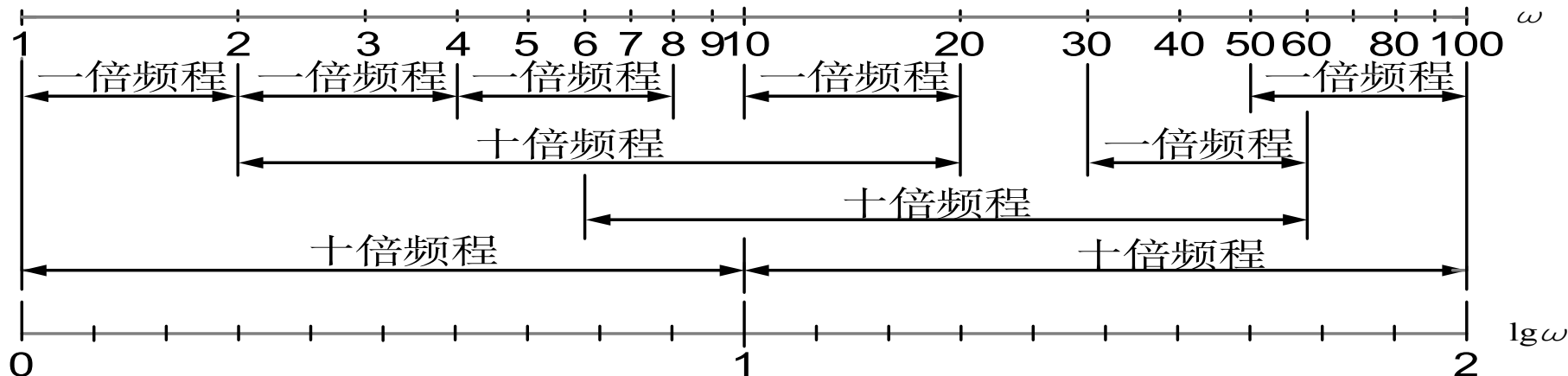


由于 ω 以对数分度，所以零频率点在 $-\infty$ 处。



5.1 频率特性的基本概念

更详细的刻度如下图所示



ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lg \omega$	0.000	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954	1.000



5.1 频率特性的基本概念

纵坐标分度：对数幅频特性曲线的纵坐标以 $L(\omega)=20\lg A(\omega)$ 表示。其单位为分贝(dB)。直接将 $20\lg A(\omega)$ 值标注在纵坐标上。

相频特性曲线的纵坐标以度或弧度为单位进行线性分度。

一般将幅频特性和相频特性画在一张图上，使用同一个横坐标（频率轴）。

当幅制特性值用分贝值表示时，通常将它称为增益。幅值和增益的关系为：增益= $20\log$ (幅值)

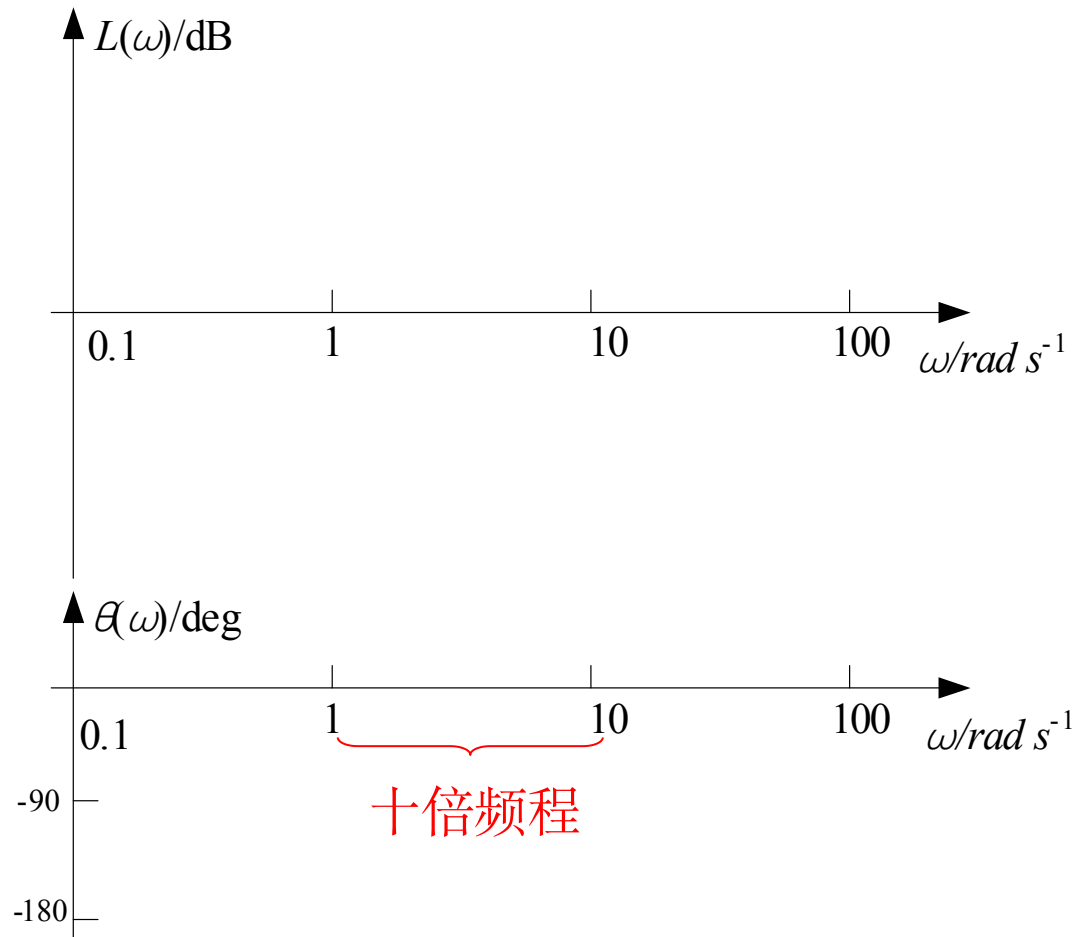
幅值 $A(\omega)$	1.00	1.26	1.56	2.00	2.51	3.16	5.62	10.0	100	1000	10000
对数幅值 $20\lg A(\omega)$	0	2	4	6	8	10	15	20	40	60	80
幅值 $A(\omega)$	1.00	0.79	0.63	0.50	0.39	0.32	0.18	0.10	0.01	0.001	0.0001
对数幅值 $20\lg A(\omega)$	0	-2	-4	-6	-8	-10	-15	-20	-40	-60	-80

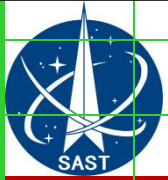


5.1 频率特性的基本概念

$$L(\omega) = 20\lg|G(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$$





对数坐标系



5.1 频率特性的基本概念

使用对数坐标图的优点：

- ❖ 可以展宽频带；频率是以10倍频表示的，因此可以清楚的表示出低频、中频和高频段的幅频和相频特性。
- ❖ 可以将乘除法运算转化为加减法运算。

$$G(j\omega) = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (1 + j\tau_i \omega) \prod_{k=1}^{m_2} [(1 - \omega^2 T_k^2) + j2\zeta_k T_k \omega] e^{-jT_d \omega}}{(j\omega)^v \prod_{j=1}^{n_1} (1 + jT_j \omega) \prod_{l=1}^{n_2} [(1 - \omega^2 T_l^2) + j2\zeta_l T_l \omega]}$$

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg K + \sum_{i=1}^{m_1} 20 \lg |1 + j\tau_i \omega| \\ &+ \sum_{k=1}^{m_2} 20 \lg |(1 - \omega^2 T_k^2) + j2\zeta_k T_k \omega| - 20 \times v \lg |j\omega| - \sum_{j=1}^{n_1} 20 \lg |1 + jT_j \omega| \\ &- \sum_{l=1}^{n_2} 20 \lg |(1 - \omega^2 T_l^2) + j2\zeta_l T_l \omega| \end{aligned}$$



5.1 频率特性的基本概念

$$G(j\omega) = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (1 + j\tau_i\omega) \prod_{k=1}^{m_2} [(1 - \omega^2 T_k^2) + j2\zeta_k T_k \omega] e^{-jT_d\omega}}{(j\omega)^v \prod_{j=1}^{n_1} (1 + jT_j\omega) \prod_{l=1}^{n_2} [(1 - \omega^2 T_l^2) + j2\zeta_l T_l \omega]}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) = & \sum_{i=1}^{m_1} \arctan(\tau_i\omega) + \sum_{k=1}^{m_2} \arctan\left(\frac{2\zeta_k T_k \omega}{1 - \omega^2 T_k^2}\right) - v \times 90^\circ - \sum_{k=1}^{n_1} \arctan(T_k \omega) \\ & - \sum_{l=1}^{n_2} \arctan\left(\frac{2\zeta_l T_l \omega}{1 - \omega^2 T_l^2}\right) - 57.3^\circ \times T_d \omega \end{aligned}$$

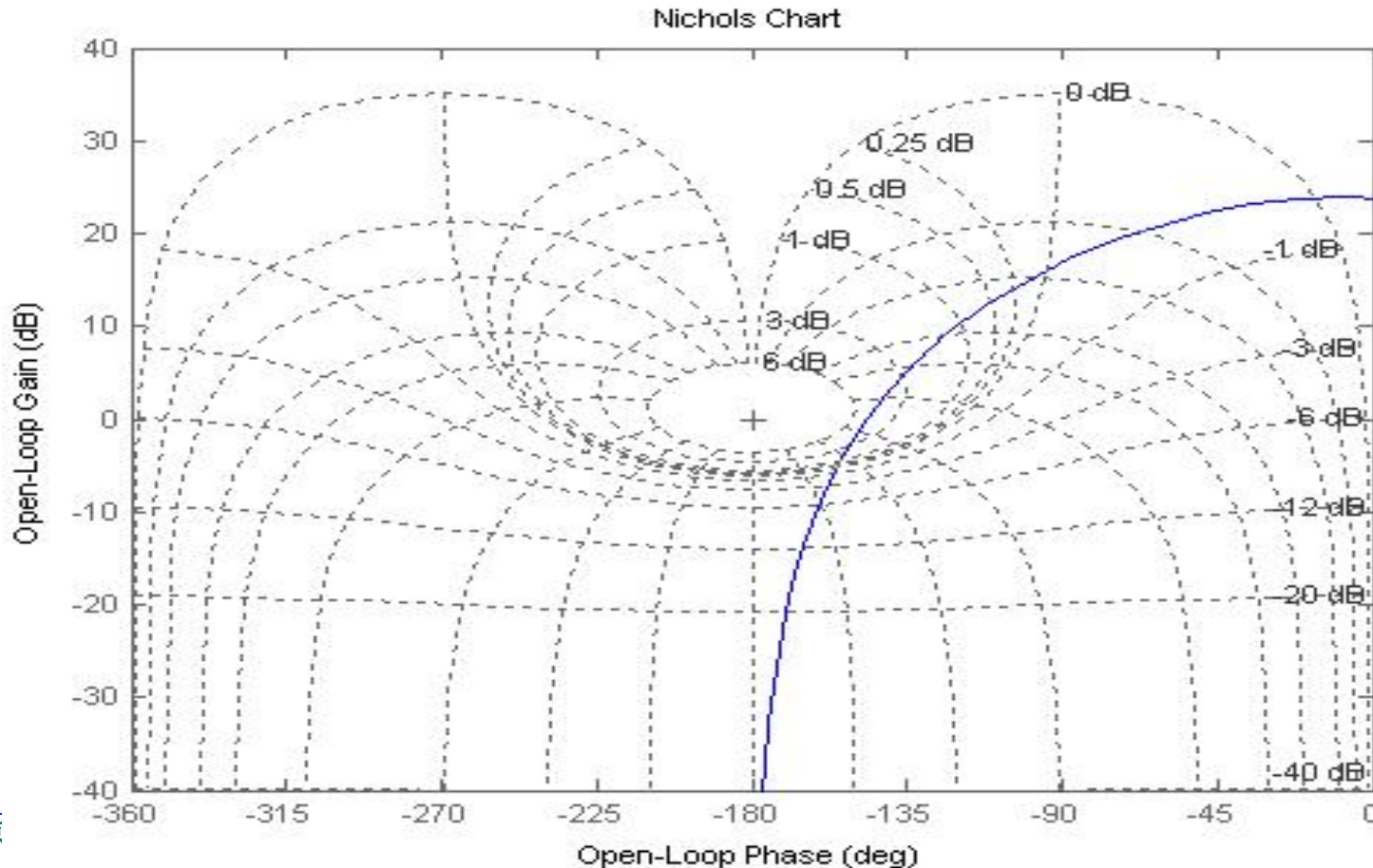
- ❖ 所有的典型环节的频率特性都可以用分段直线(渐近线)近似表示。
- ❖ 对实验所得的频率特性用对数坐标表示，并用分段直线近似的方法，可以很容易写出它的频率特性表达式。



5.1 频率特性的基本概念

*3、对数幅相特性曲线（又称尼柯尔斯图）

尼柯尔斯图是将对数幅频特性和相频特性两条曲线合并成一条曲线。横坐标为相角特性 $\varphi(j\omega)$ ，单位度或弧度；纵坐标为对数幅频特性以 $20\lg|G(j\omega)H(j\omega)|$ ，单位分贝。





5.1 频率特性的基本概念

小结

- 频率特性的定义；
- 频率特性与传递函数之间的关系；
- 各种数学模型之间的关系。



5.1 频率特性的基本概念

Thank You !