第五章 频率响应法

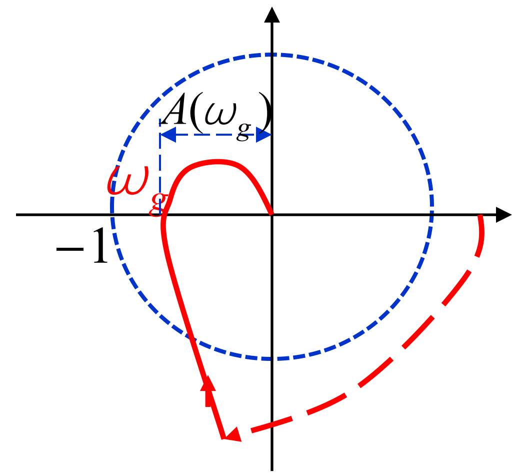
5.5 稳定裕度

- 稳定裕度的概念
- 使用稳定裕度概念综合系统

5.5 稳定裕度

一、幅值裕度(magnitude margin,MM)

相角穿越频率ω_g： $\varphi(\omega_g) = -180°$



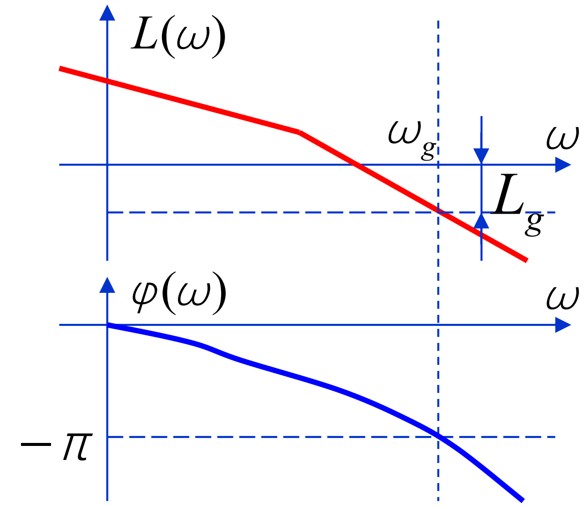
幅值稳定裕度： $K_g = \dfrac{1}{A(\omega_g)}$

在对数坐标图上，用 L_g 表示K_g的分贝值：

$$L_g = 20\,\mathbf{lg}\,K_g = -20\,\mathbf{lg}\,A(\omega_g)$$

[物理意义]:

稳定闭环系统的开环增益 K 增加K_g倍（Nyquist图）或增加 L_g分贝（波德图），则系统处于临界稳定状态。若增加的倍数大于K_g倍（或 L_g分贝），则系统变为不稳定。

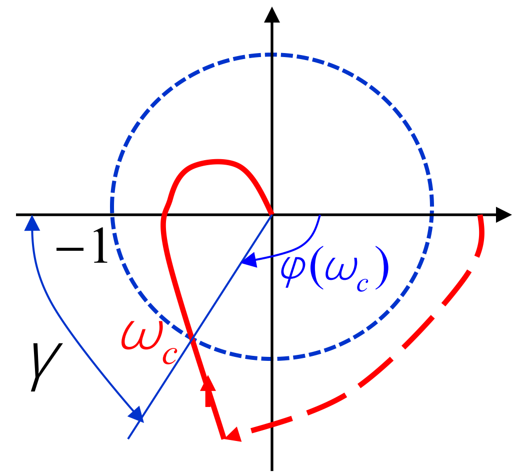


5.5 稳定裕度

二、相角裕度(phase margin,PM)

幅值穿越频率ω_c：$A(\omega_c)=1$

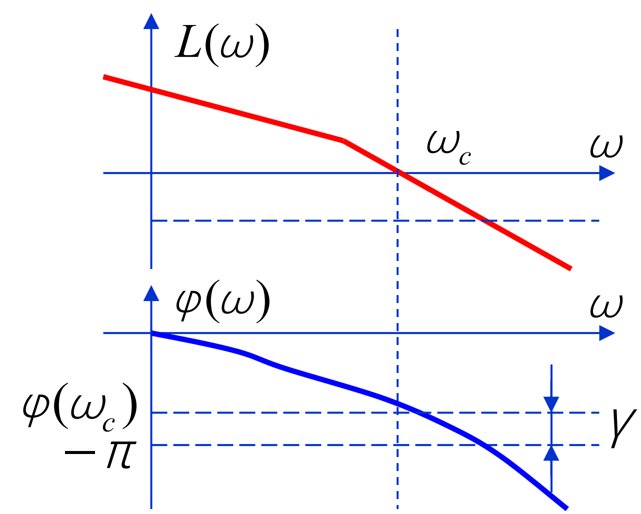
相角稳定裕度：$\gamma=180^\circ+\varphi(\omega_c)$



在工程上一般取相角裕度为30-60度，幅值裕度大于6dB。

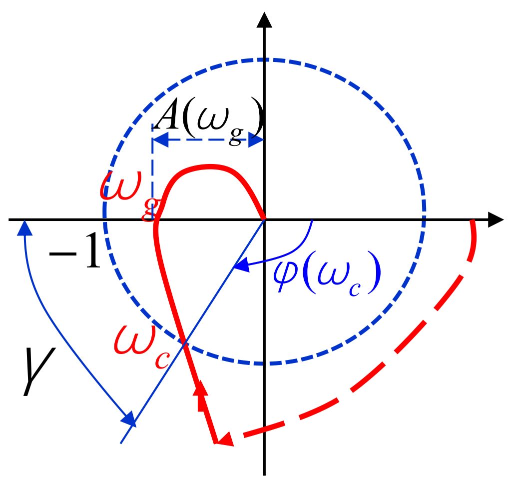
[物理意义]：

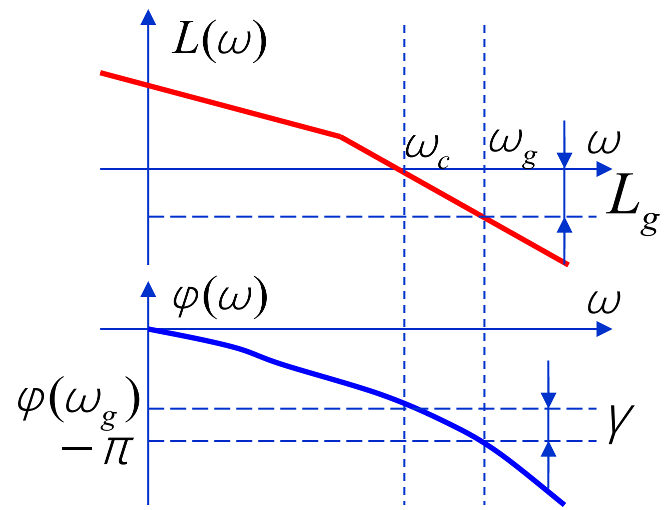
稳定闭环系统的开环频率特性还有γ度的相角裕度，若某种因素使附加滞后相角达到或超出γ度，则系统不能正常工作。



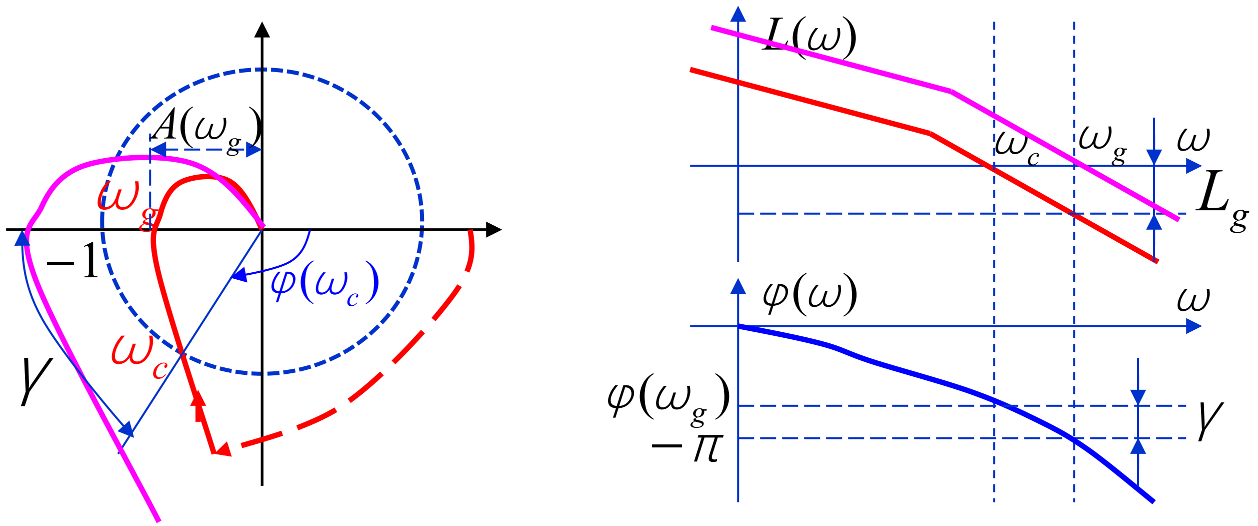
5.5 稳定裕度

当频率特性曲线穿过(-1,j0)点时，系统处于临界稳定状态。这时：$A(\omega_g)=1, \varphi(\omega_c)=-180^\circ, \omega_c=\omega_g$ 。对于最小相位系统，可以用$A(\omega_g)$ 和$\varphi(\omega_c)$ 来表示频率特性曲线接近(-1,j0)点的程度，或称为稳定裕度。稳定裕度越大，稳定性越好。





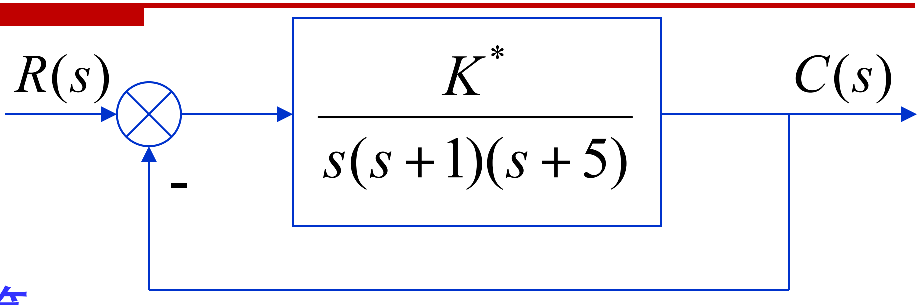
显然，当$L_g>0$ 时，即 $A(\omega_g)<1$和γ>0时，闭环系统是稳定的；否则是不稳定的。对于最小相角系统，$L_g>0$ 和 γ>0是同时发生或同时不发生的，所以经常只用一种稳定裕度来表示系统的稳定裕度。常用相角裕度。



比如，若增加开环放大系数K，则对数幅频特性曲线将上升，而相角特性曲线不变。可见，开环放大系数太大，容易引起系统的不稳定。

5.5 稳定裕度

例1: 设控制系统如下图所示 **$K^*=10$和$K^*=100$时，试求系统的相角裕度和幅值裕度。**



解：相角裕度和幅值裕度的计算：

$$A(\omega)=\frac{0.2K^*}{|s|\times|s+1|\times|0.2s+1|}=\frac{0.2K^*}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+0.04\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-90-\arctan\omega-\arctan(0.2\omega)$$

① 相角裕度： 先求幅值穿越频率ω_c（当$K^*=10$时）

$$A(\omega)=\frac{0.2K^*}{|s|\times|s+1|\times|0.2s+1|}=\frac{2}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+0.04\omega^2}}=1$$

解此方程较困难，可采用近似解法。由于ω_c较小(小于2)，所以：

$$A(\omega)\approx\frac{2}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}=1$$

近似解：$\omega_c\approx1.25$

精确值：$\omega_c=1.227$

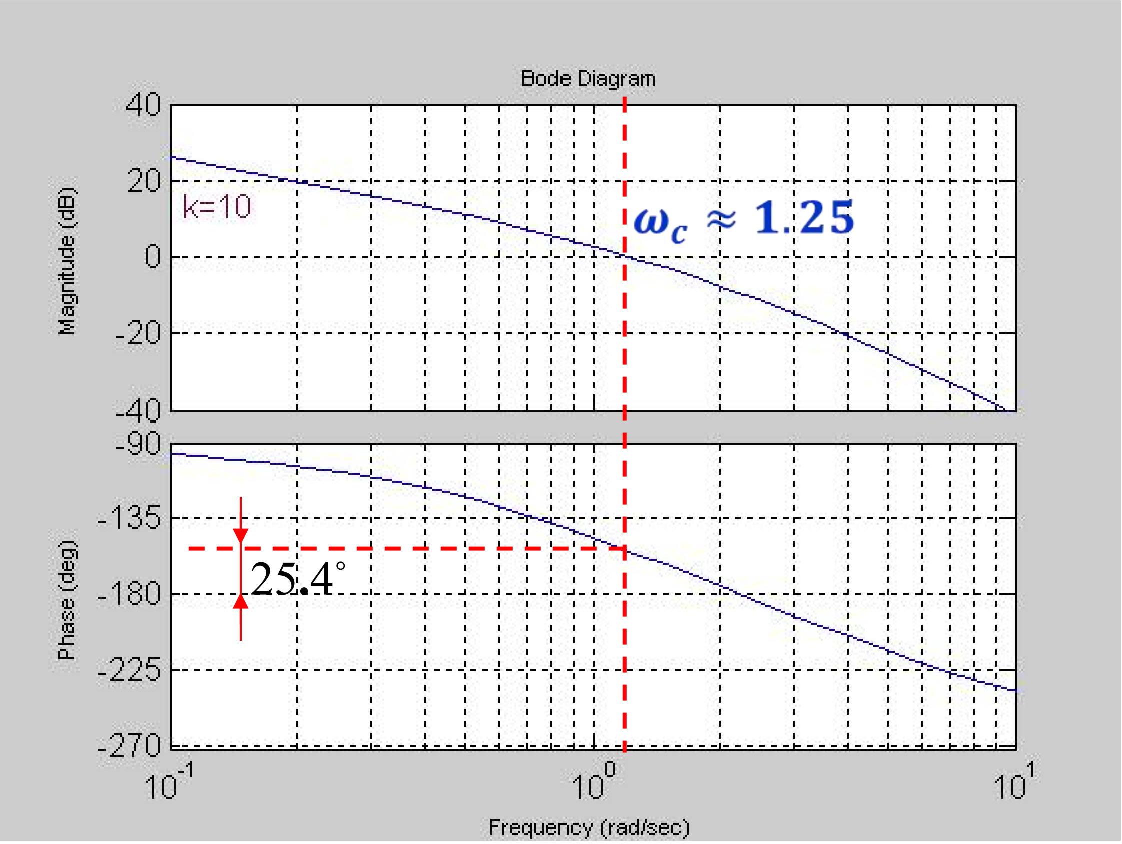
5.5 稳定裕度

幅值穿越频率ω_c处的相角为：

$$\varphi(\omega_c) = -90° - \arctan\omega_c - \arctan(0.2\omega_c) = -155.38°$$

相角裕度为：$\gamma = 180 + \varphi(\omega_c) = 180° - 155.38° = 24.6°$

精确值：$\gamma = 25.4°$



5.5 稳定裕度

② **幅值裕度**：先求相角穿越频率ω_g（当$K^*=10$时）

$$\varphi(\omega_g) = -90° - \arctan\omega_g - \arctan 0.2\omega_g = -180°$$

即：$\arctan\omega_g + \arctan(0.2\omega_g) = 90°$

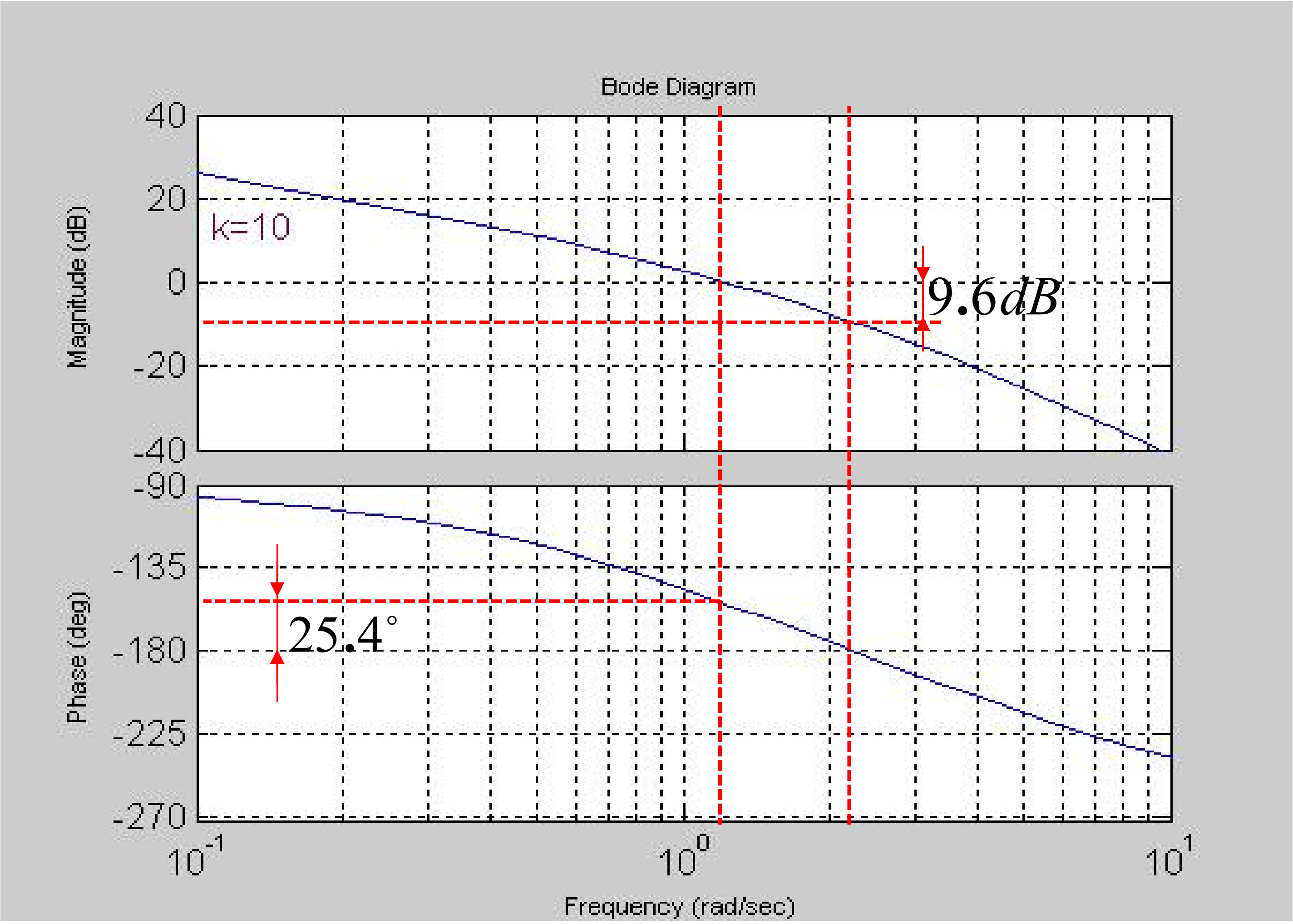
$$\tan(A+B) = \frac{\tan(A)+\tan(B)}{1-\tan(A)\tan(B)}$$

$$\frac{1.2\omega_g}{1-0.2\omega_g^2} = \tan 90°$$

得：$1-0.2\omega_g^{\ 2} = 0$，解得：$\omega_g = 2.24$

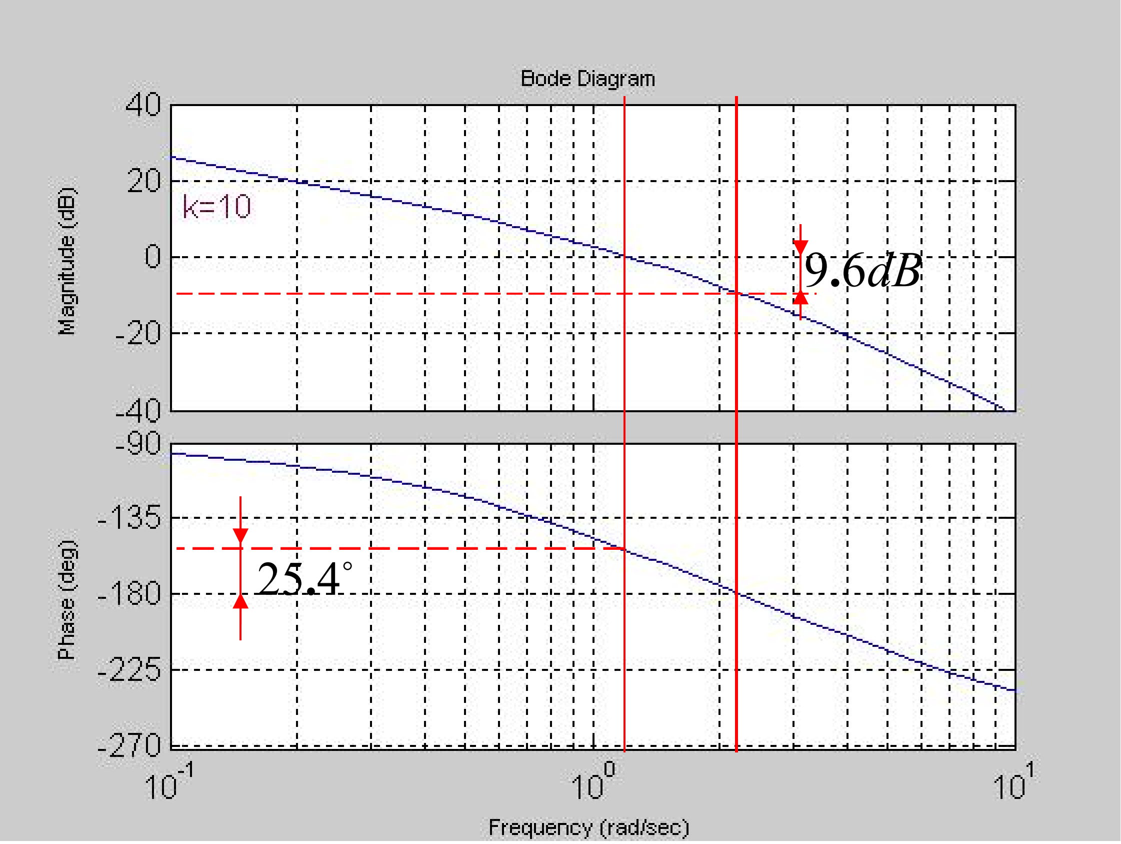
$$A(\omega_g) = \frac{2}{\omega_g\sqrt{1+\omega_g^{\ 2}}\sqrt{1+0.04\omega_g^{\ 2}}} \approx 0.33216$$

所以，**幅值裕度**为：$L_g = -20\log A(\omega_g) = 9.6(dB)$


Bode Diagram
40
20
0
-20
-40
k=10
9.6dB
Magnitude (dB)
-90
-135
-180
-225
-270
25.4°
Phase (deg)
10^-1
10^0
10^1
Frequency (rad/sec)

K*=10时波特图

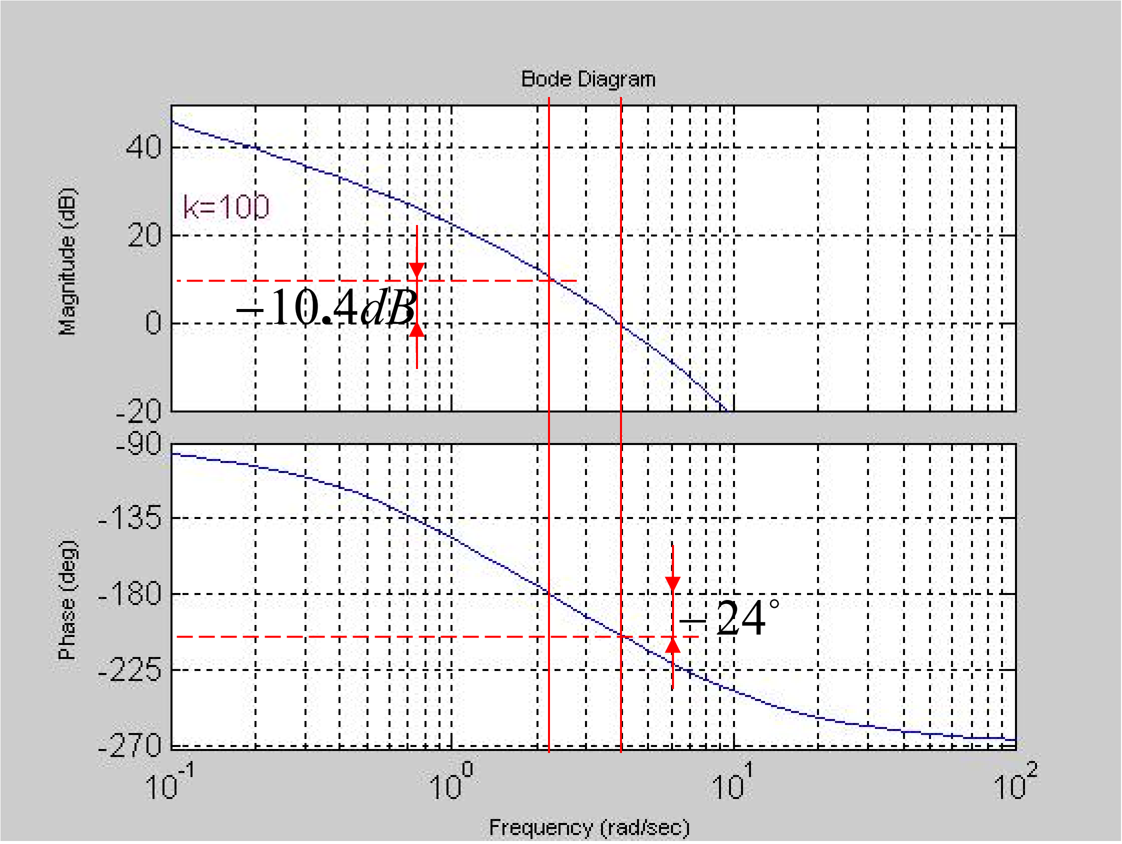
5.5 稳定裕度



当K*=10时，开环系统波德图如图所示。这时系统的幅值裕度为9.6dB；相角裕度大约为25.4°。因此，系统在不稳定之前，增益可以增加9.6dB。

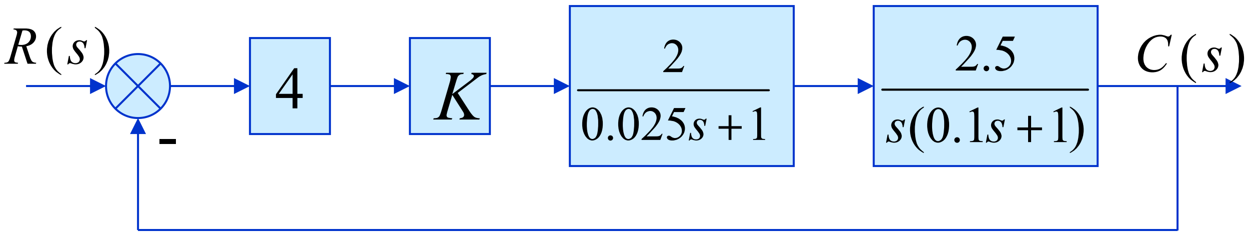
5.5 稳定裕度

当增益从K*=10增大到K*=100时，幅值特性曲线上移20dB，相角特性曲线不变。这时系统的相角裕度和幅值裕度分别是-10.4dB和-24°。因此系统在K*=10时是稳定的，在K*=100时是不稳定的。



5.5 稳定裕度

例2:某系统结构图如下所示。试确定当K=10时闭环系统的稳定性及其使相角稳定裕度为30°时的开环放大系数K。



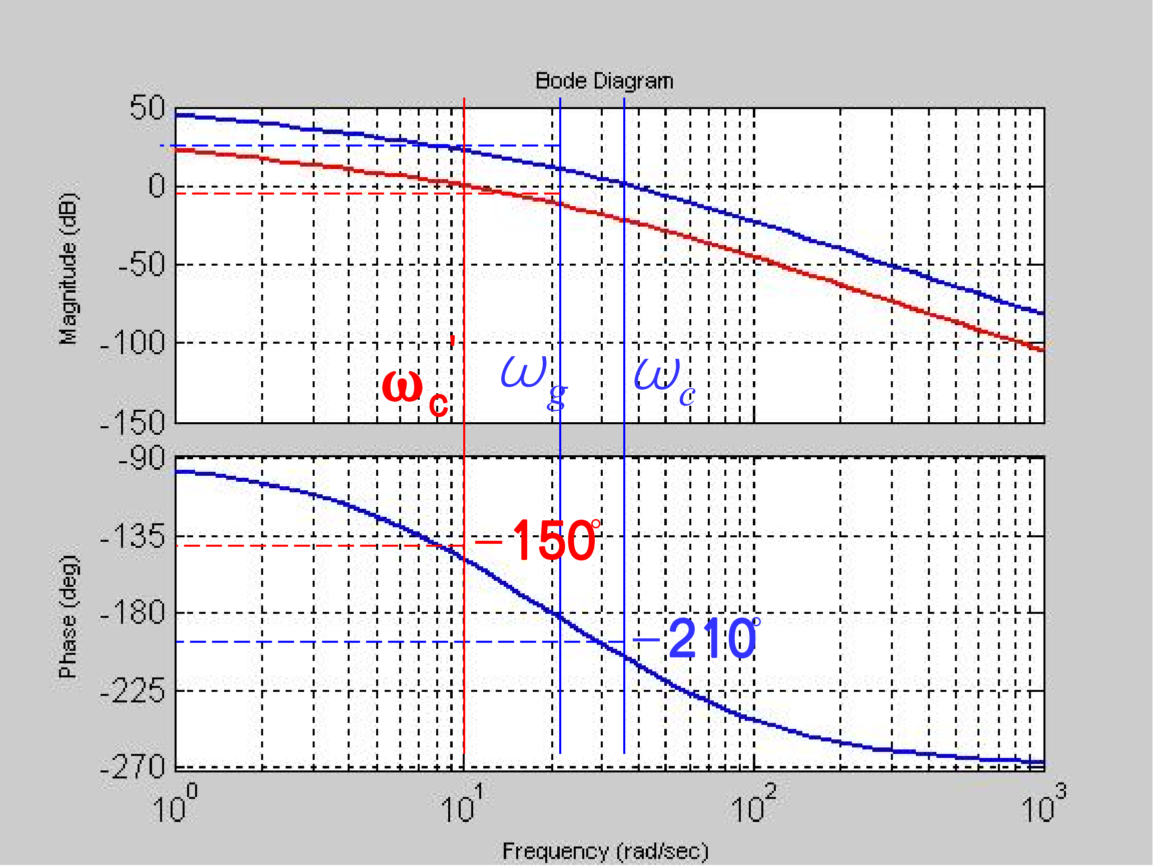
[解]: 当K=10时，开环传递函数为: $G_o(s)=\dfrac{200}{s(0.025s+1)(0.1s+1)}$

手工绘制波德图步骤:

1、确定转折频率：10、40，在(1,20log200)点画斜率为-20的斜线至 $\omega=10$ ；

2、在 $\omega=10\sim40$ 之间画斜率为-40的斜线;

3、$\omega=40$ 后画斜率为-60的斜线。



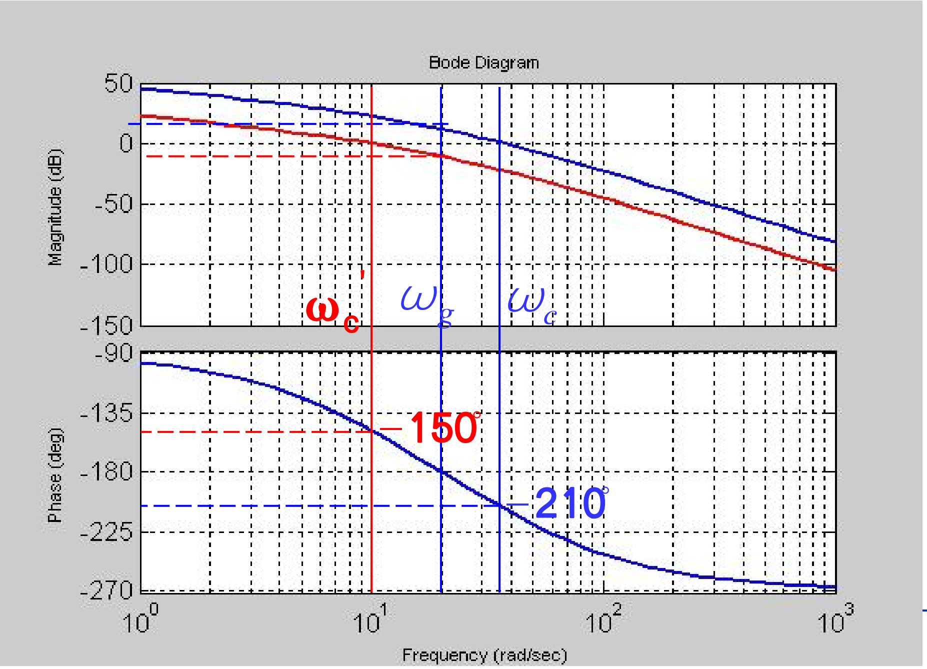
上图蓝线为原始波德图。$\varphi(\omega_c)\approx -210^\circ < -180^\circ, \omega_c \approx 38$，显然 闭环系统是不稳定的。为了使相角稳定裕度达到30 °，可将幅频曲线向下平移。即将开环放大系数减小，这时相频特性不变。截止频率左移至 ω_c'，移到哪里？

$\because \varphi(\omega_c') = -180^\circ + 30^\circ = -150^\circ$，从图中看出：$\omega_c' \approx 10$ 。所以原始幅频曲线向下移动的分贝数为：$L_g = 20\log A(\omega_c') = 20\log A(10) \approx 22dB$

设新的开环放大系数为K_1，原始的开环放大系数为K=200，则有 $22 = 20\log K - 20\log K_1$ （讨论$\omega = 1$ 时较明显）。解得：$K_1 \approx 15$

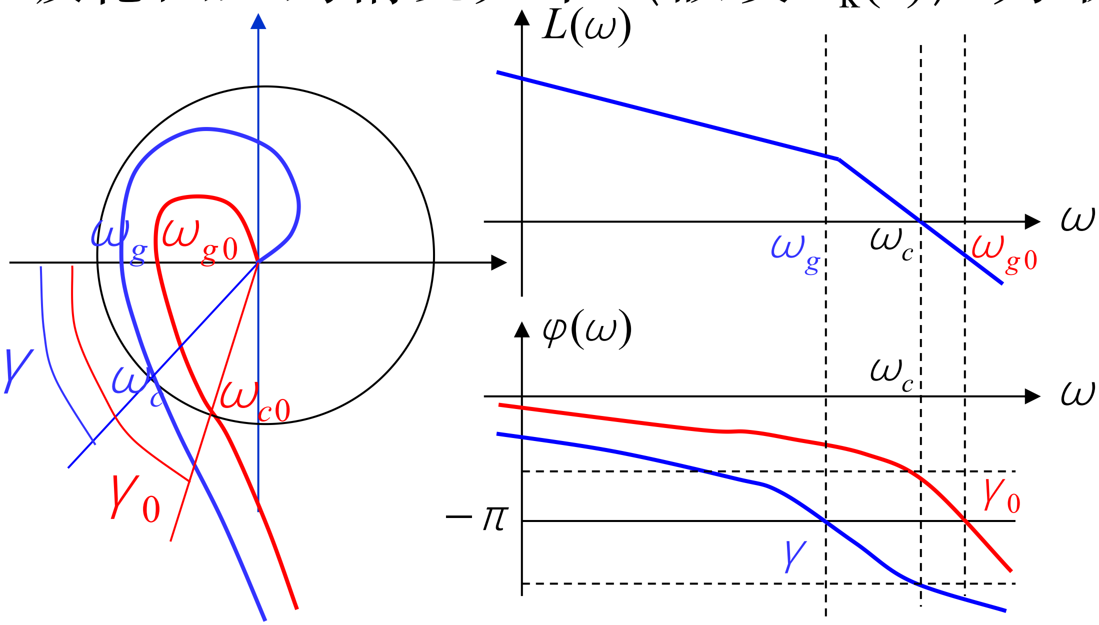
所以当开环放大系数下降到15时，闭环系统的相角稳定裕度是30 °，这时的幅频稳定裕度为：由图中看出$\omega_g \approx 20$，所以

$$L_g = 20\log A(\omega_g)|_{k=15} = 20\log A(20)|_{k=15} = 10(dB)$$



三、带有延迟环节系统的相角裕度的求法：

设系统的开环传递函数为：$G_k(s)e^{-\tau s}$ ，我们知道增加了延迟环节后系统的幅值特性不变，相角特性滞后了$-\omega\tau$。表现在奈氏图和波德图上的情况如下（假设$G_k(s)$）为最小相角系统。



左图中，红色曲线为$G_k(s)$频率特性，兰色曲线为增加了延迟环节后的频率特性。其幅值和相角穿越频率分别为$\omega_{c0},\omega_c(\omega_{c0}=\omega_c)$和$\omega_{g0},\omega_g$，相角裕度分别为$\gamma_0,\gamma$。

显然增加了延迟环节后，系统的稳定性下降了。若要确保稳定性，其相角裕度必须大于零。即：

$$\gamma=\gamma_0-\tau\omega_c=\pi+\angle G_k(j\omega_c)-\tau\omega_c>0$$

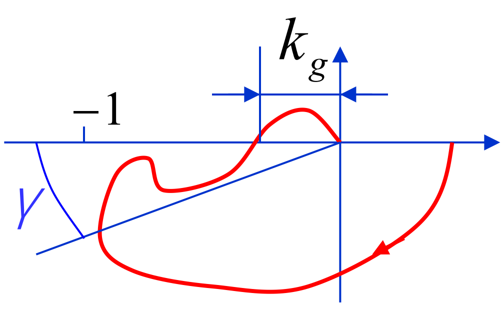
[稳定裕度概念使用时应注意]:

1、在高阶系统中，奈氏图中幅值为1的点或相角为-180度的点可能不止一个，这时使用幅值和相角稳定裕度可能会出现歧义；

2、非最小相角系统也可以使用稳定裕度的定义，但其幅值裕度和相角裕度有时符号相反。

3、有时幅值和相角稳定裕度都满足，但仍有部分曲线很靠近

(-1,j0)点，这时闭环系统的稳定性依然不好。见下图：



Thank You！