第二章 控制系统的数学模型

2.2 非线性及线性化

原因:

- 工程中大多数系统都是非线性的。

  eg. 弹簧 $K=f(x)$, 电阻、电容受温度的影响。

- 非线性微分方程式求解复杂
- 线性系统理论和方法成熟

条件:

- 变量间关系在平衡点附近的小范围内是线性的;
- 把非线性方程局部线性化。

2.2非线性及线性化

❈ **处理方法：**

①简化模型，直接忽略非线性的影响；

（电阻、电容、电位器、齿轮组）

②微偏线性化（切线线性化、小偏差法）

非线性关系： $y=f(x)$

在工作点(x_0, y_0)附近进行泰勒级数展开

2.2非线性及线性化

$$y = f(x) = y_0 + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_0}(x - x_0)^2 + \cdots$$

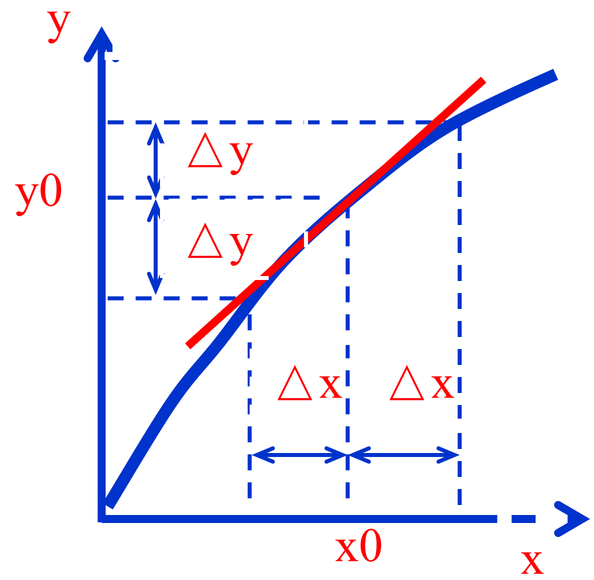
忽略二次及高次项，有

$$y = y_0 + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}(x - x_0)$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= y - y_0 \\ &= K(x - x_0) = K\Delta x\end{aligned}$$

线性

$$K = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}$$



非线性特性的线性化，**实质是以过平衡点的切线代替平衡点附近的曲线。**

2.2非线性及线性化

多个输入变量时：

$$y = f(x_1, x_2) = f(x_{10}, x_{20}) + \left[\left.\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|_{x_{10}} (x_1 - x_{10}) + \left.\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|_{x_{20}} (x_2 - x_{20}) \right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right|_{x_{10}} (x_1 - x_{10})^2 + 2\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{x_{10}, x_{20}} (x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20})\right.$$

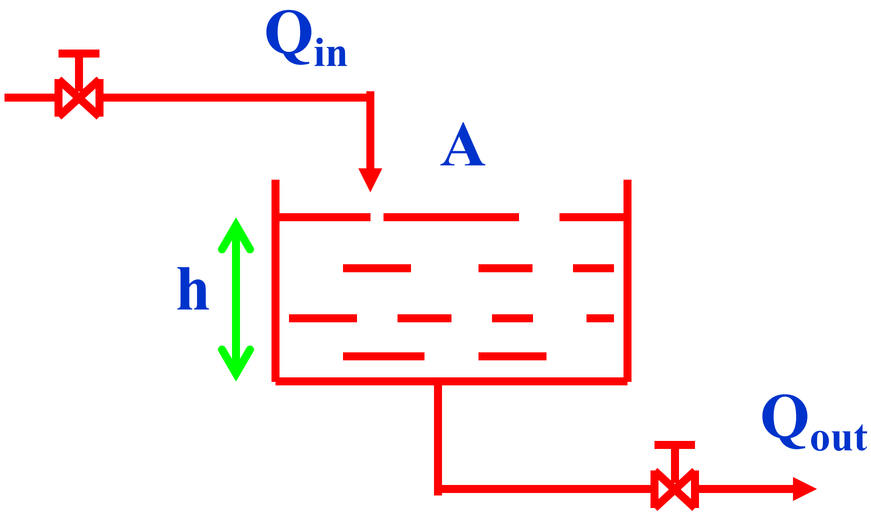
$$\left. + \left.\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right|_{x_{20}} (x_2 - x_{20})^2 \right] + \cdots$$

忽略二次及高次项，有

$$\Delta y = K_1 (x_1 - x_{10}) + K_2 (x_2 - x_{20})$$

例1 下图是一个液体贮槽的示意图。

要求列出液位h对流入量Q_{in}之间的关系式。

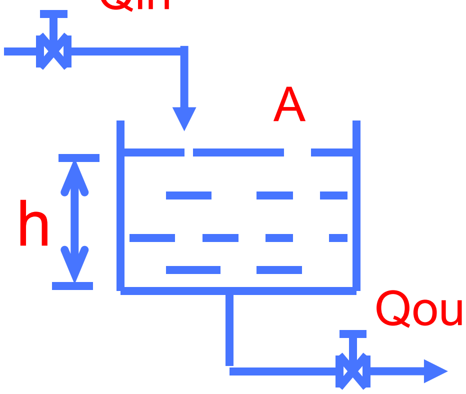


(1) 确定输入输出变量:

输入（自变量）：Q_{in}

输出（因变量）：h

（2）利用物料（能量）平衡式：



物料(能量) 蓄存量的变化率 = 单位时间进入的物料(能量) － 单位时间流出的物料(能量)

$$Q_{in} - Q_{out} = \frac{dV}{dt} = A\frac{dh}{dt}$$

（3）消去中间变量Q_{out}：

根据流体力学有

$$Q_{out} = \alpha f\sqrt{h} = \beta\sqrt{h}$$

其中，*f*：阀的流通面积，α：阀的节流系数，设两者均为常数（β为常数）。

$$\left.\begin{aligned} Q_{in} - Q_{out} &= \frac{dV}{dt} = A\frac{dh}{dt} \\ Q_{out} &= \alpha f\sqrt{h} = \beta\sqrt{h} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\frac{dh}{dt} + \beta\sqrt{h} = Q_{in}$$

(4) 增量化:

原因：主要关心被调参数在平衡点（设定值）附近的变化情况，即参数偏离平衡点的变化量。因此，把变量转换为增量形式，构成增量方程。如:

$$\Delta h = h - h_0$$

益处:

①便于方程简化和求解，相当于设初始条件（稳态条件）为零。

②便于线性化。

稳态方程:
$$A\frac{dh_0}{dt}+\beta\sqrt{h_0}=Q_{in0}$$

增量方程:
$$A\frac{d(h_0+\Delta h)}{dt}+\beta\sqrt{h_0+\Delta h}=Q_{in0}+\Delta Q_{in}$$

两式作差:
$$A\frac{d(\Delta h)}{dt}+\beta\sqrt{h_0+\Delta h}-\beta\sqrt{h_0}=\Delta Q_{in}$$

$$Q_{out}=\beta\sqrt{h} \qquad Q_{out0}=\beta\sqrt{h_0}$$

(5) 线性化:

$$Q_{out}=\beta\sqrt{h}=Q_{out0}+\frac{\partial Q_{out}}{\partial h}\Big|_{h=h_0}(h-h_0)=\beta\sqrt{h_0}+\frac{\beta\Delta h}{2\sqrt{h_0}}$$

$$A\frac{d(\Delta h)}{dt}+\underbrace{\cancel{\beta\sqrt{h_0}}+\frac{\beta\Delta h}{2\sqrt{h_0}}}_{Qout}-\cancel{\underbrace{\beta\sqrt{h_0}}_{Qout\,0}}=\Delta Q_{in}$$

$$\boxed{A\frac{d(\Delta h)}{dt}+\frac{\beta}{2\sqrt{h_0}}\Delta h=\Delta Q_{in}}$$

注意：在不引起混淆的场合，**Δ**号常常省略。

$$\boxed{AR\frac{dh}{dt}+h=RQ_{in}}$$

其中 $\frac{\beta}{2\sqrt{h_0}}=\frac{1}{R}$,

写成<u>标准形式</u>,

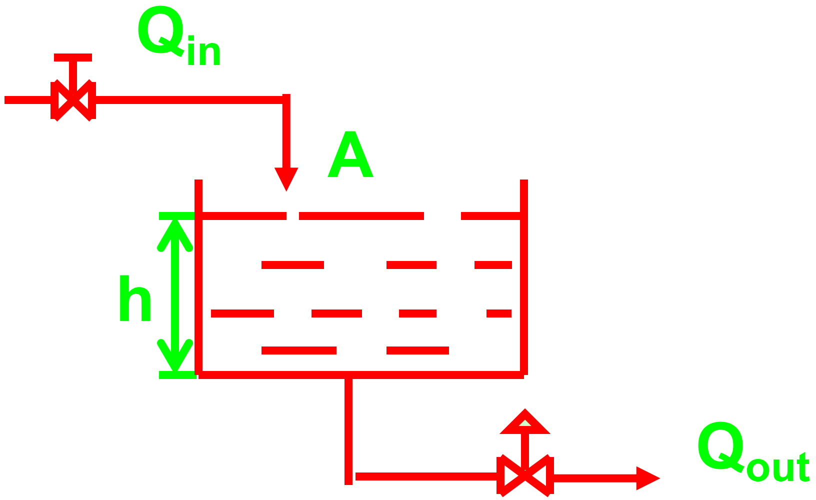
$$\boxed{T\frac{dh}{dt}+h=KQ_{in}}$$

其中 $K=R,T=AR$

K：放大倍数，**T**：时间常数，具有物理意义。

当输出流量是两个变量的函数时，使用2元泰勒级数展开：

例2 贮槽系统，控制流出量以保证液位稳定。



其流出量的方程为： $\boxed{Q_{out} = \alpha f\sqrt{h}}$

其中，α：阀的节流系数，常数。

f：调节阀的流通面积，受调节器的控制，输入变量。

2.2非线性及线性化

线性化 (二元的泰勒级数展开式):

$$Q_{out}=\alpha f\sqrt{h}=Q_{out0}+\left.\frac{\partial Q_{out}}{\partial h}\right|_{\substack{h=h_0\\ f=f_0}}(h-h_0)+\left.\frac{\partial Q_{out}}{\partial f}\right|_{\substack{h=h_0\\ f=f_0}}(f-f_0)$$

$$=Q_{out0}+\underbrace{\frac{1}{2}\alpha f_0\sqrt{\frac{1}{h_0}}}_{\frac{1}{R}}\Delta h+\alpha\underbrace{\sqrt{h_0}}_{k}\Delta f$$

$$=Q_{out0}+\frac{1}{R}\Delta h+k\Delta f$$

代入物料平衡方程: $A\frac{dh}{dt}+Q_{out}=Q_{in}$

2.2非线性及线性化

各变量分别用稳态值+增量值表示:

$$A\frac{d(h_0+\Delta h)}{dt}+Q_{out0}+k\Delta f+\frac{1}{R}\Delta h=Q_{in0}+\Delta Q_{in}$$

考虑到平衡关系式:

$$Q_{out0}=Q_{in0} \qquad 此时,\ \frac{dh_0}{dt}=0\ ,$$

上式可整理为线性化方程:

$$A\frac{d(\Delta h)}{dt}+\frac{1}{R}\Delta h=\Delta Q_{in}-k\Delta f$$

上述方程表示的是在流入量和调节阀开度（调节器作用）共同作用下，液位的变化关系。

✔ 线性系统的特性和分析：

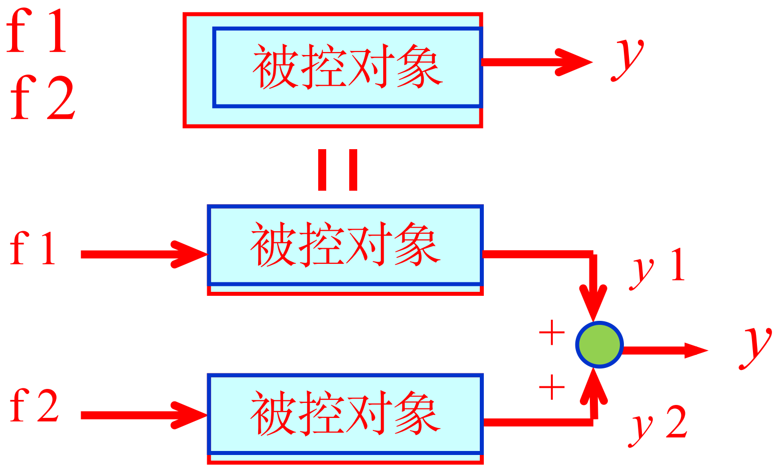
两个重要性质：可叠加性和均匀性（齐次性）。

1.可叠加性： 当$f(t)=f_1(t)$时，方程有解$y_1(t)$，

当$f(t)=f_2(t)$时，方程有解$y_2(t)$，

当$f(t)=f_1(t)+f_2(t)$时，方程解为$y_1(t)+y_2(t)$

表明：两个输入同时作用于系统所产生的总输出，等于各个输入单独作用时分别产生的输出之和。



2.2非线性及线性化

2.齐次性:

当$f(t)=Af_1(t)$时，A为常数，$y(t)=Ay_1(t)$，

表明：当外作用比例增加时，输出也增加同样的倍数。

例2中，
$$A\frac{d(\Delta h)}{dt}+\frac{1}{R}\Delta h=\Delta Q_{in}-k\Delta f$$

液位受到两个变量的共同作用，根据叠加原理，可分别研究在各个变量单独作用下，液位的过渡过程，然后相加，可以得到整个液位控制系统的全部特性。

Thank You！