



第五章 频率响应法

5.1 频率特性的基本概念

5.2 典型环节的频率特性

5.3 开环系统频率特性图的绘制

5.4 控制系统的频域稳定判据

5.5 稳定裕量

5.6 开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

5.7 闭环频率特性和频域性能指标



5.3开环系统频率特性图的绘制

- ✓ 开环系统对数坐标频率特性的绘制 (Bode图)
- ✓ 开环系统极坐标频率特性的绘制 (Nyquist图)
- ✓ 非最小相位系统的频率特性



5.3开环系统频率特性图的绘制

一、开环系统对数坐标频率特性的绘制（绘制波德图）

开环系统频率特性为：（写成时间常数形式）

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K}{(j\omega)^\nu} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (1 + j\tau_i\omega) \prod_{k=1}^{m_2} (1 - \tau_k^2\omega^2 + j2\zeta_k\tau_k\omega)}{\prod_{p=1}^{n_1} (1 + jT_p\omega) \prod_{l=1}^{n_2} (1 - T_l^2\omega^2 + j2\zeta_lT_l\omega)} \\ &= \frac{K}{\omega^\nu} e^{-j\nu\frac{\pi}{2}} \prod_{i=1}^{m_1} (\sqrt{1 + (\tau_i\omega)^2} e^{j\arctan(\tau_i\omega)}) \\ &\quad \cdot \prod_{k=1}^{m_2} \left[\sqrt{(1 - \tau_k^2\omega^2)^2 + (2\zeta_k\tau_k\omega)^2} e^{j\arctan\frac{2\zeta_k\tau_k\omega}{1 - \tau_k^2\omega^2}} \right] \\ &\quad \cdot \prod_{p=1}^{n_1} \frac{1}{\sqrt{1 + T_p^2\omega^2}} e^{-j\arctan(T_p\omega)} \prod_{l=1}^{n_2} \frac{1}{\sqrt{(1 - T_l^2\omega^2)^2 + (2\zeta_lT_l\omega)^2}} e^{-j\arctan\frac{2\zeta_lT_l\omega}{1 - T_l^2\omega^2}} \end{aligned}$$



5.3开环系统频率特性图的绘制

幅频特性:

$$L(\omega) = 20 \lg K + 20 \sum_{i=1}^{m_1} \lg \sqrt{1 + \tau_i^2 \omega^2} + 20 \sum_{k=1}^{m_2} \lg \sqrt{(1 - \tau_k^2 \omega^2)^2 + (2\zeta_k \tau_k \omega)^2} \\ - 20\nu \lg \omega - 20 \sum_{p=1}^{n_1} \lg \sqrt{1 + T_p^2 \omega^2} - 20 \sum_{l=1}^{n_2} \lg \sqrt{(1 - T_l^2 \omega^2)^2 + (2\zeta_l T_l \omega)^2}$$

相频特性:

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{m_1} \arctan(\tau_i \omega) + \sum_{k=1}^{m_2} \arctan\left(\frac{2\zeta_k \tau_k \omega}{1 - \tau_k^2 \omega^2}\right) \\ - \nu \frac{\pi}{2} - \sum_{p=1}^{n_1} \arctan(T_p \omega) - \sum_{l=1}^{n_2} \arctan\left(\frac{2\zeta_l T_l \omega}{1 - T_l^2 \omega^2}\right)$$

且有: $\varphi(0) = -\nu \frac{\pi}{2}$, $\varphi(\infty) = -(n - m) \frac{\pi}{2}$ 。 $n = \nu + n_1 + 2n_2$, $m = m_1 + 2m_2$

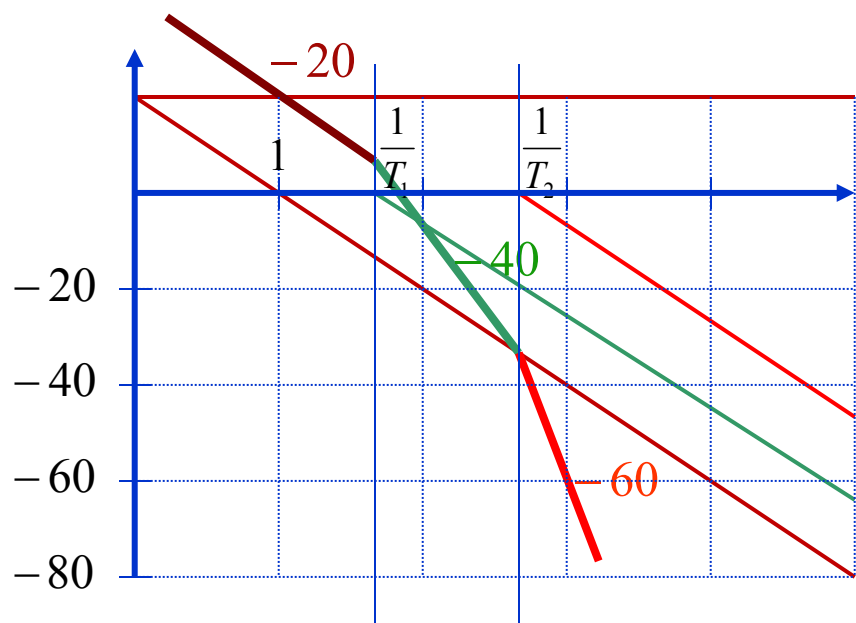
由以上的分析可得到开环系统对数频率特性曲线的绘制方法: 先画出每一个典型环节的波德图, 然后各图相加。



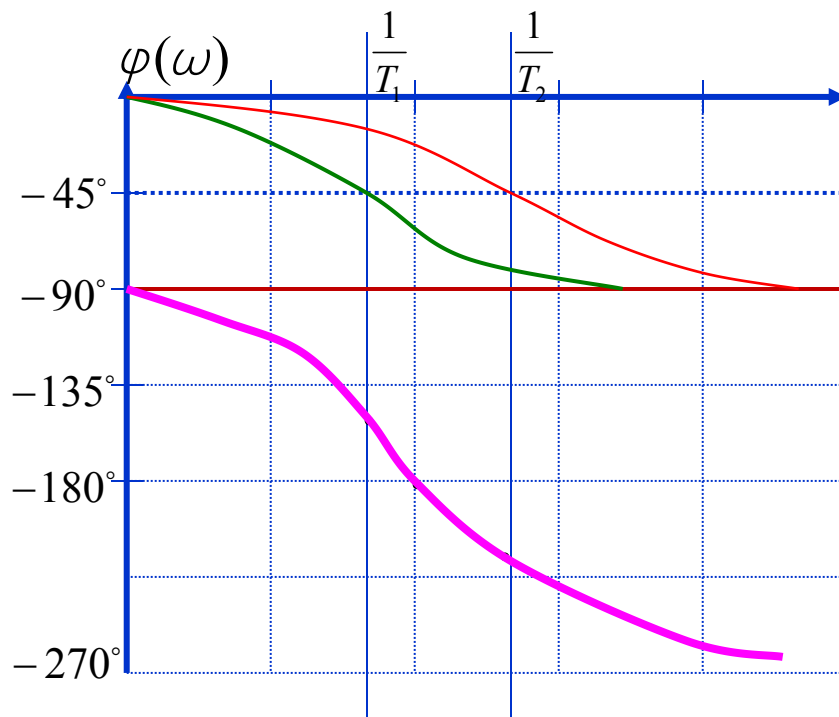
5.3开环系统频率特性图的绘制

例1： 开环系统传递函数为： $G(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$, $T_1 > T_2$, 试画出该系统的波德图。

解： 该系统由四个典型环节组成。一个比例环节，一个积分环节两个惯性环节。手工将它们分别画在一张图上。



然后，在图上相加。





5.3开环系统频率特性图的绘制

实际上，画波德图不用如此麻烦。注意到：幅频曲线由折线（渐近线）组成，在转折频率处改变斜率。

具体步骤如下：

► 开环系统频率特性为：（写成时间常数形式）

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\nu} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (1 + jT_i\omega) \prod_{k=1}^{m_2} (1 - \tau_k^2\omega^2 + j2\zeta_k\tau_k\omega)}{\prod_{p=1}^{n_1} (1 + jT_p\omega) \prod_{l=1}^{n_2} (1 - T_l^2\omega^2 + j2\zeta_lT_l\omega)}$$

► 确定 K, ν 和各转折频率 $\frac{1}{T_i}, \omega_k = \frac{1}{\tau_k}, \omega_j = \frac{1}{T_j}, \omega_l = \frac{1}{T_l}$ ，并

将这些频率按小大顺序依次标注在频率轴上；

► 确定低频渐近线： $L(\omega) = 20 \lg K - 20\nu \lg \omega$ ，就是第一条折线，其斜率为 -20ν ，过点 $(1, 20\lg K)$ 。实际上是 K 和积分 $(j\omega)^\nu$ 的曲线。



5.3开环系统频率特性图的绘制

- ▶ 画好低频渐近线后，从低频开始沿频率增大的方向，每遇到一个转折频率改变一次分段直线的斜率：

遇到 $\omega_i = \frac{1}{T_i}$ (一阶微分) 时，斜率增加+20dB/Dec;

遇到 $\omega_k = \frac{1}{T_k}$ (二阶微分) 时，斜率增加+40dB/Dec;

遇到 $\omega_j = \frac{1}{T_j}$ (一阶惯性) 时，斜率下降-20dB/Dec;

遇到 $\omega_l = \frac{1}{T_l}$ (二阶惯性) 时，斜率下降-40dB/Dec;

- ▶ 高频渐近线的斜率为：-20(n-m)dB/dec。
- ▶ 相频特性还是需要点点相加，才可画出。



5.3开环系统频率特性图的绘制

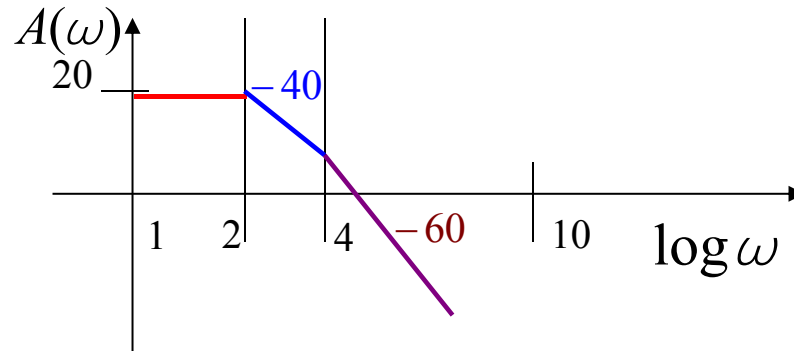
例2:系统开环特性为: $G_o(s) = \frac{10}{(0.25s+1)(0.25s^2+0.4s+1)}$
试画出波德图。

解: 1、该系统是0型系统, 所以 $\nu = 0, K = 10, T_1 = 0.25, T_2 = 0.5$

则: $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 4, \omega_2 = \frac{1}{T_2} = 2, 20 \lg K = 20dB$

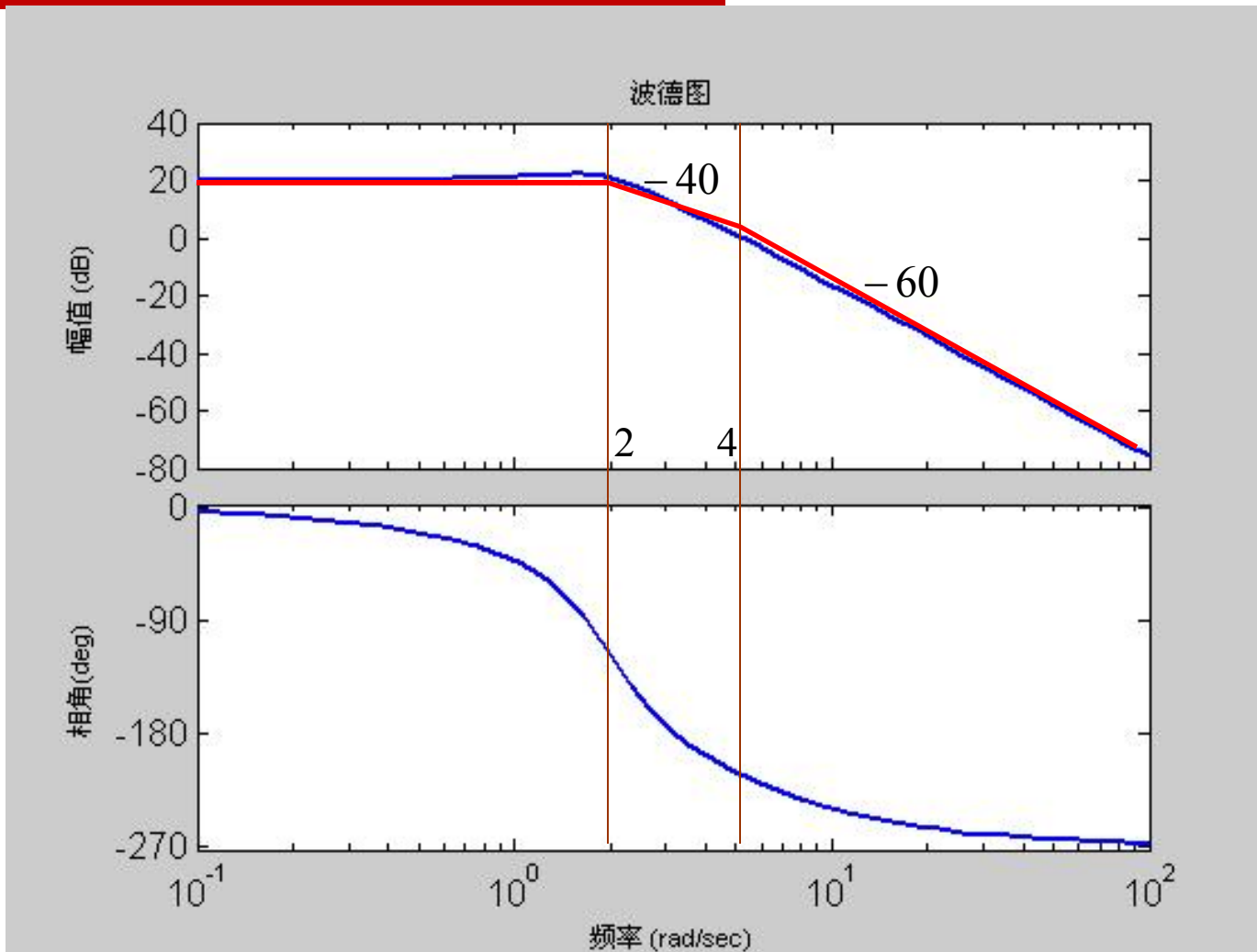
2、低频渐近线: 斜率为 $-20\nu = 0dB$, 过点 $(1, 20)$

3、波德图如下:





5.3开环系统频率特性图的绘制



红线为渐近线，蓝线为实际曲线。



5.3开环系统频率特性图的绘制

例3: 已知 $G(s) = \frac{10^{-3}(1+100s)^2}{s^2(1+10s)(1+0.125s)(1+0.05s)}$, 试画波德图。

解: 1、 $K = 10^{-3}, 20\lg K = -60; \nu = 2; \omega_1 = \frac{1}{100} = 0.01, \omega_2 = \frac{1}{10} = 0.1,$

$$\omega_3 = \frac{1}{0.125} = 8, \omega_4 = \frac{1}{0.05} = 20,$$

2、低频渐近线斜率为 $-20\nu = -40dB$, 过 $(1, -60)$ 点。

3、高频渐近线斜率为: $-20 \times (n - m) = -60$

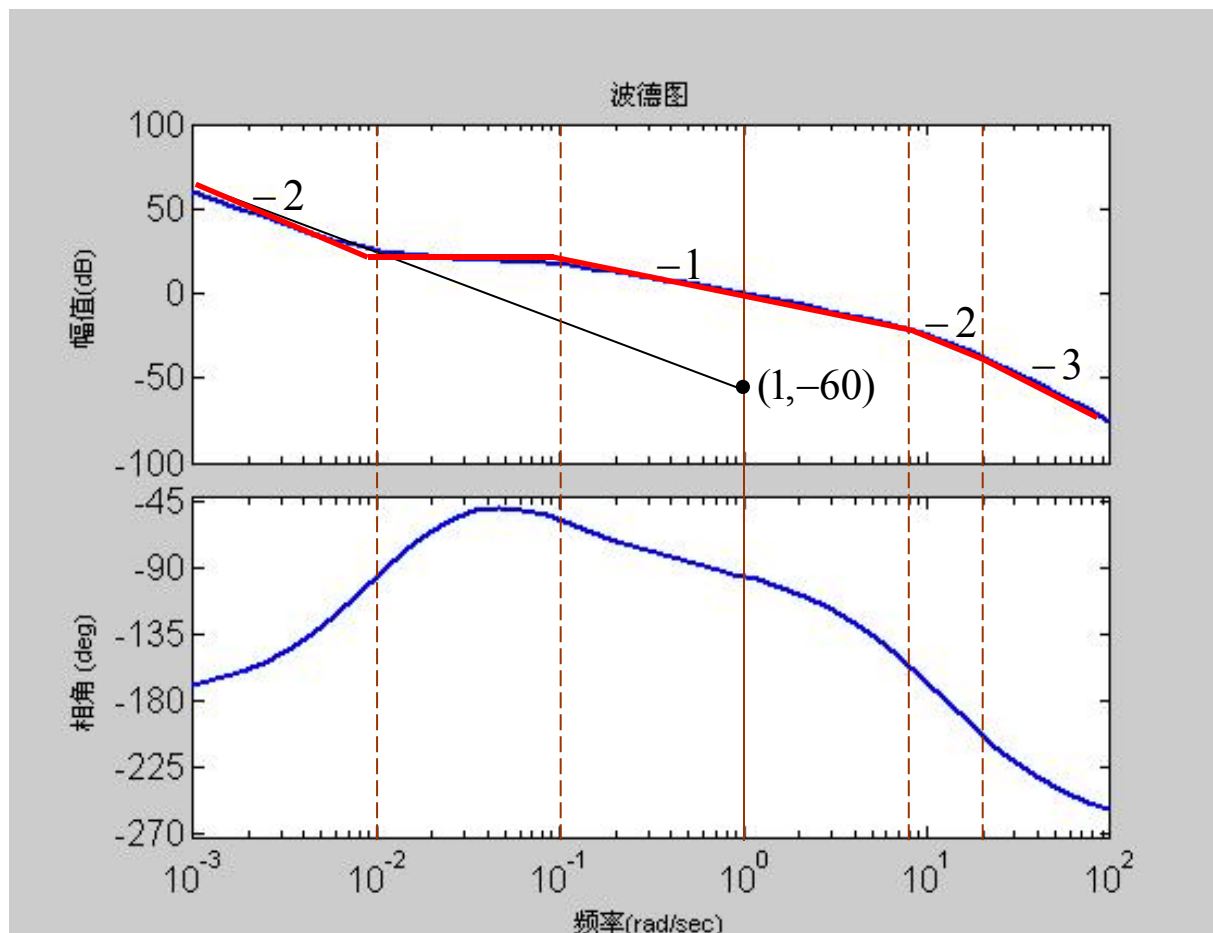
4、画出波德图如下页:



5.3开环系统频率特性图的绘制

$$G(s) = \frac{10^{-3}(1+100s)^2}{s^2(1+10s)(1+0.125s)(1+0.05s)}$$

红线为渐近线，
蓝线为实际曲线。



$$\omega_1 = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$\omega_2 = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$\omega_3 = \frac{1}{0.125} = 8$$

$$\omega_4 = \frac{1}{0.05} = 20$$

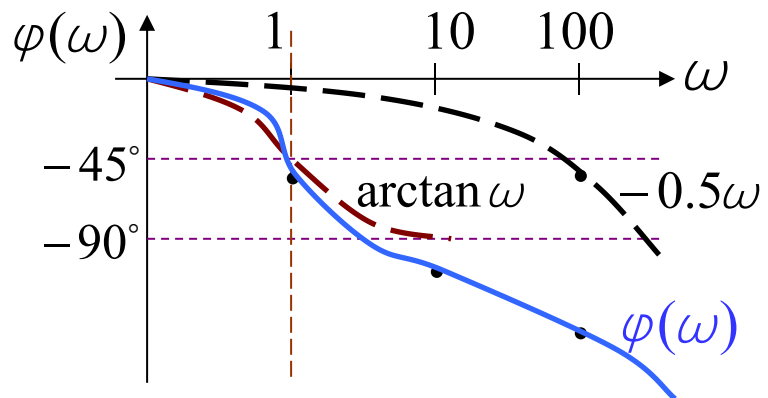
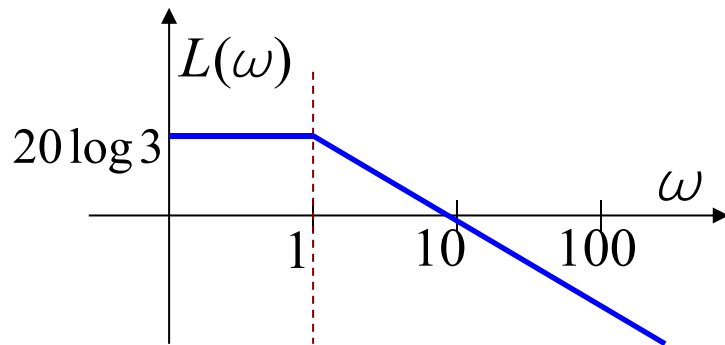


5.3开环系统频率特性图的绘制

例4: 具有延迟环节的开环频率特性为: $G_o(j\omega) = \frac{3e^{-j0.5\omega}}{1+j\omega}$, 试画出波德图。

解:
$$G_o(j\omega) = \frac{3}{\sqrt{1+\omega^2}} e^{-j\arctan\omega} e^{-j0.5\omega} = \frac{3}{\sqrt{1+\omega^2}} e^{-j1.5\omega}$$

可见, 加入了延迟环节的系统其幅频特性不变, 相位特性滞后了。





5.3开环系统频率特性图的绘制

例5: 已知 $G(s) = \frac{2000(s+1)}{s(s+0.5)(s^2+14s+400)}$, 画出其对数坐标图。

解: 1. 将传函写成时间常数形式 $G(s) = \frac{10(s+1)}{s(2s+1)(0.0025s^2+0.035s+1)}$
这可以看作是由五个典型环节构成的

$$G_1(s) = 10$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{2s+1}$$

$$G_4(s) = s+1$$

$$G_5(s) = \frac{1}{0.0025s^2+0.035s+1} = \frac{1}{(\frac{1}{20})^2 s^2 + (2 \times 0.35 \times \frac{1}{20})s + 1}$$

2. 求 $20\lg K=20\text{dB}$



5.3开环系统频率特性图的绘制

3. 列表

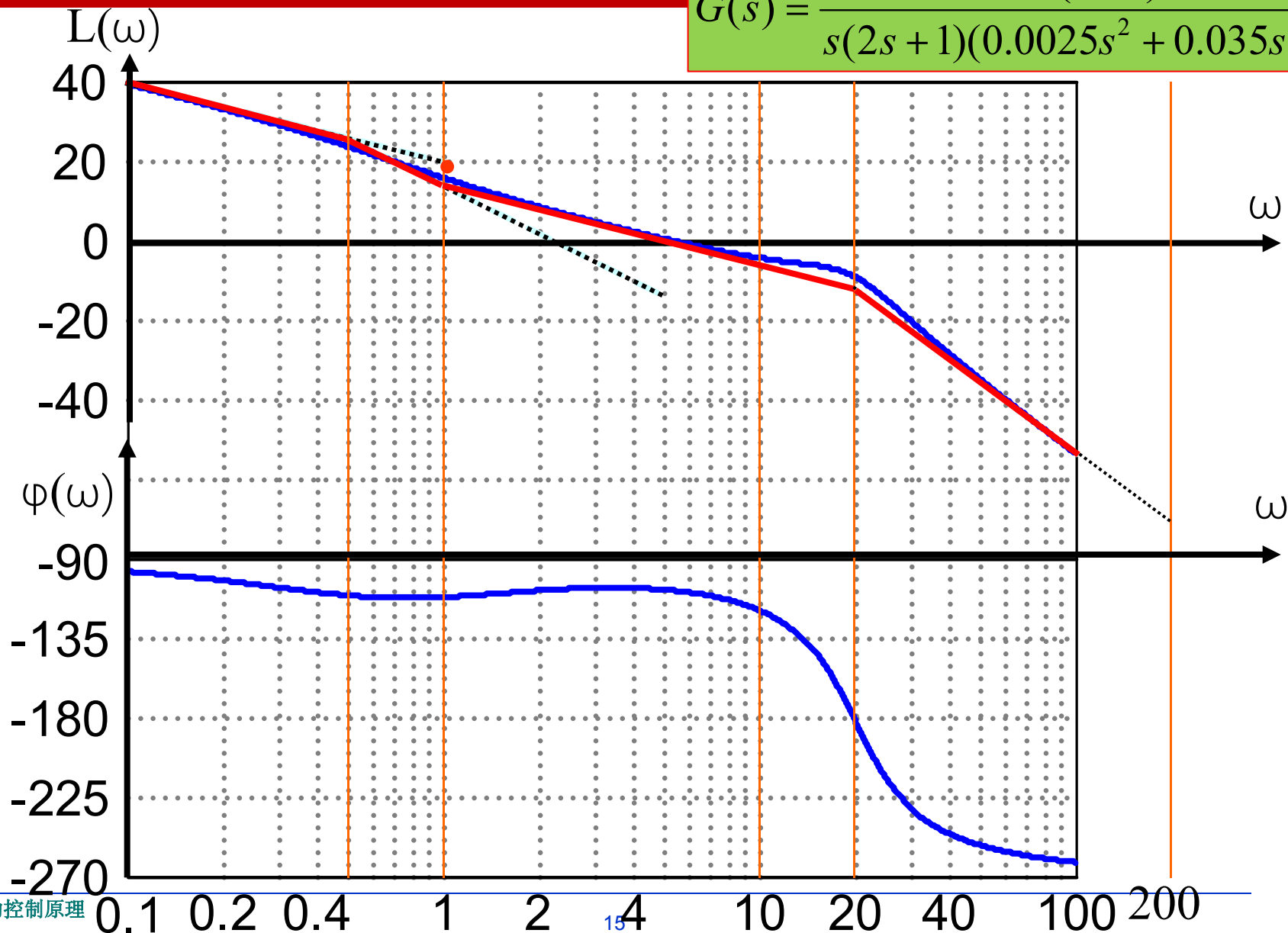
序号	环节	转折频率	转折频率 后斜率	累积斜率
1	K	—	—	—
2	$(j\omega)^{-1}$	—	- 20	- 20
3	$\frac{1}{1 + j2\omega}$	0.5	- 20	- 40
4	$1 + j\omega$	1	+20	- 20
5	$\frac{1}{(1 - 0.0025\omega^2) + j0.035\omega}$	20	- 40	- 60

注意：转折频率是时间常数的倒数。



5.3开环系统频率特性图的绘制

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s(2s+1)(0.0025s^2 + 0.035s + 1)}$$





5.3开环系统频率特性图的绘制

相频特性

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \arctan(\omega) - \arctan(2\omega) - \arctan\left(\frac{0.035\omega}{1 - 0.0025\omega^2}\right)$$

ω	0.1	0.2	0.5	1	2
$\varphi(\omega)$	-95.8 °	-104.5 °	-109.4 °	-110.4 °	-106.6 °
ω	5	10	20	50	100
$\varphi(\omega)$	-106.2 °	-117.9 °	-181.4 °	-252.1 °	-262 °



5.3开环系统频率特性图的绘制

二、开环系统极坐标频率特性的绘制（绘制Nyquist图）

开环系统的频率特性或由典型环节的频率特性组合而成，或是一个有理分式，不论那种形式，都可由下面的方法绘制。

[绘制方法]:

❑ 将开环系统的频率特性写成 $P(\omega) + jQ(\omega)$ 或 $A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ 的形式，根据不同的 ω 算出 $P(\omega), Q(\omega)$ 或 $A(\omega), \varphi(\omega)$ 可在复平面上得到不同的点并连之为曲线。（手工画法）。

实际绘图时极坐标图画的都是近似曲线。具体来讲是根据幅频特性和相频特性确定起点(对应 $\omega=0$)和终点(对应 $\omega=\infty$)；根据实频特性和虚频特性确定与坐标轴的交点；然后按 ω 从小到大的顺序用光滑曲线连接即可。必要时可再求一些中间的点帮助绘图。

❑ 使用MATLAB工具绘制。

极坐标图的特点是除增益以外的部分决定极坐标图的形状，而增益决定图形的大小。



5.3开环系统频率特性图的绘制

例1: 设开环系统的频率特性为: $G(j\omega) = \frac{K}{(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)}$
试列出实频和虚频特性的表达式。当 $K=1, T_1=1, T_2=5$ 绘制奈氏图。

解:

$$G(j\omega) = \frac{K(1-jT_1\omega)(1-jT_2\omega)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)} = \frac{K(1-T_1T_2\omega^2)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)} - j \frac{K(T_1+T_2)\omega}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

当 $K=1, T_1=1, T_2=5$ 时, $P(\omega) = \frac{1-5\omega^2}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)}, Q(\omega) = \frac{-6\omega}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)}$

找出几个特殊点 (比如 $\omega=0, \infty$, 与实、虚轴的交点等), 可大致勾勒出奈氏图。为了相对准确, 可以再算几个点。



5.3开环系统频率特性图的绘制

ω	0	0.2	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	0.8	∞
$P(\omega)$	1	0.385	0	-0.079	0
$Q(\omega)$	0	-0.577	$-\frac{\sqrt{5}}{6}$	-0.172	0

相角: $\varphi(\omega) = -\arctan(\omega) - \arctan(5\omega)$

ω	0	0.2	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	0.8	∞
$\varphi(\omega)$	0	-56.31	-90	-114.62	-180

用上述信息可以大致勾勒出Nyquist图。

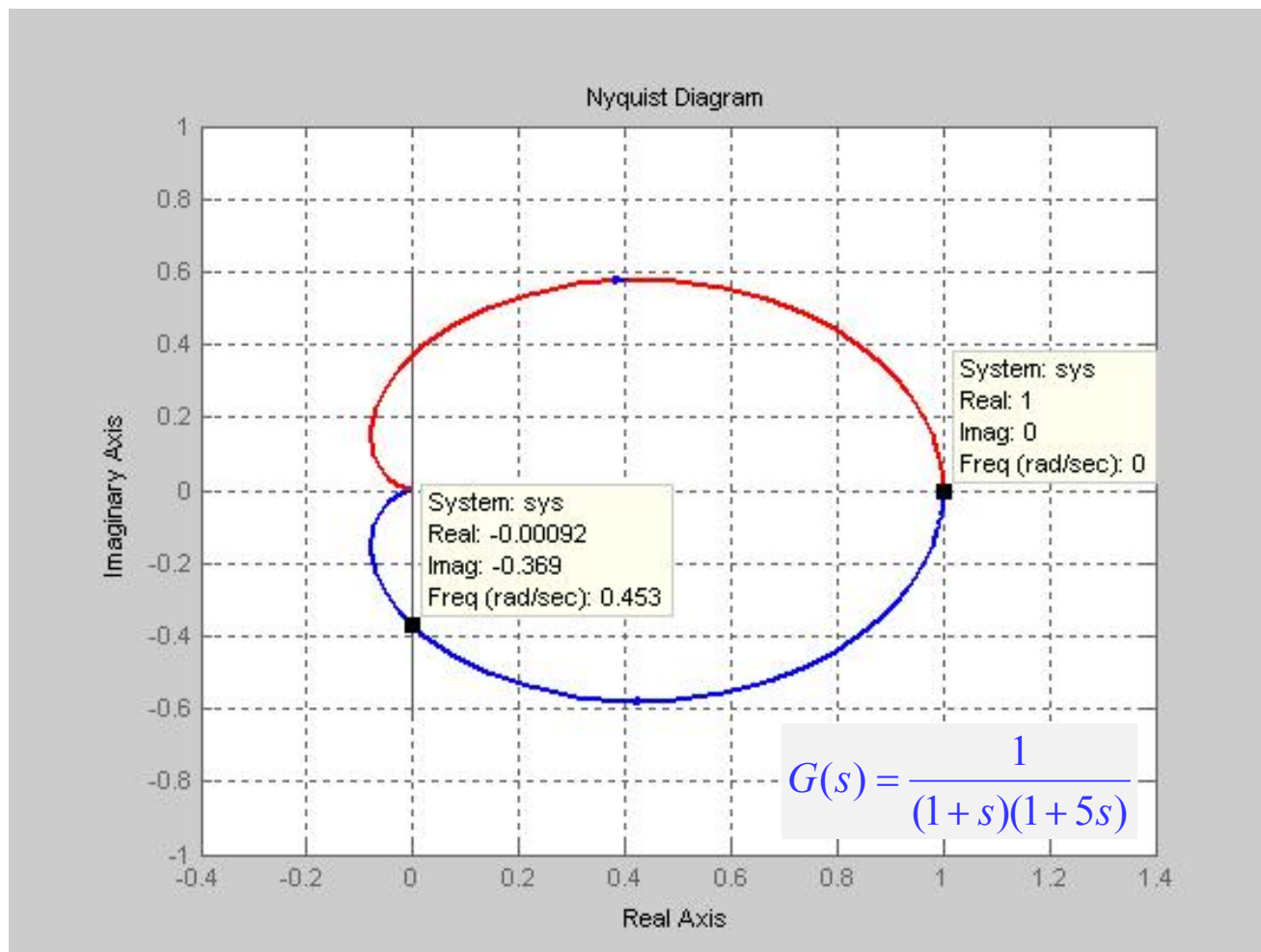


5.3开环系统频率特性图的绘制

下图是用 Matlab工具绘制的Nyquist图。

解:

```
N=[0 0 1];  
D=[5 6 1];  
nyquist(N,D);
```





5.3开环系统频率特性图的绘制

例2: 设开环系统的频率特性为: $G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)}$
试绘制极坐标特性曲线。

解:

$$G(j\omega) = \frac{-K(T_1 + T_2)}{(1 + T_1^2\omega^2)(1 + T_2^2\omega^2)} - j \frac{K(1 - T_1T_2\omega^2)}{\omega(1 + T_1^2\omega^2)(1 + T_2^2\omega^2)} = P(\omega) + jQ(\omega)$$
$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(T_1\omega) - \arctan(T_2\omega)$$

[分析]1、当 $\omega = 0$ 时, $P(0) = -K(T_1 + T_2)$, $Q(0) = -\infty$, $\varphi(0) = -\frac{\pi}{2}$

显然, 当 $\omega \rightarrow 0$ 时, $G(j\omega)$ 的渐近线是一条通过实轴 $-K(T_1 + T_2)$ 点, 且平行于虚轴的直线。

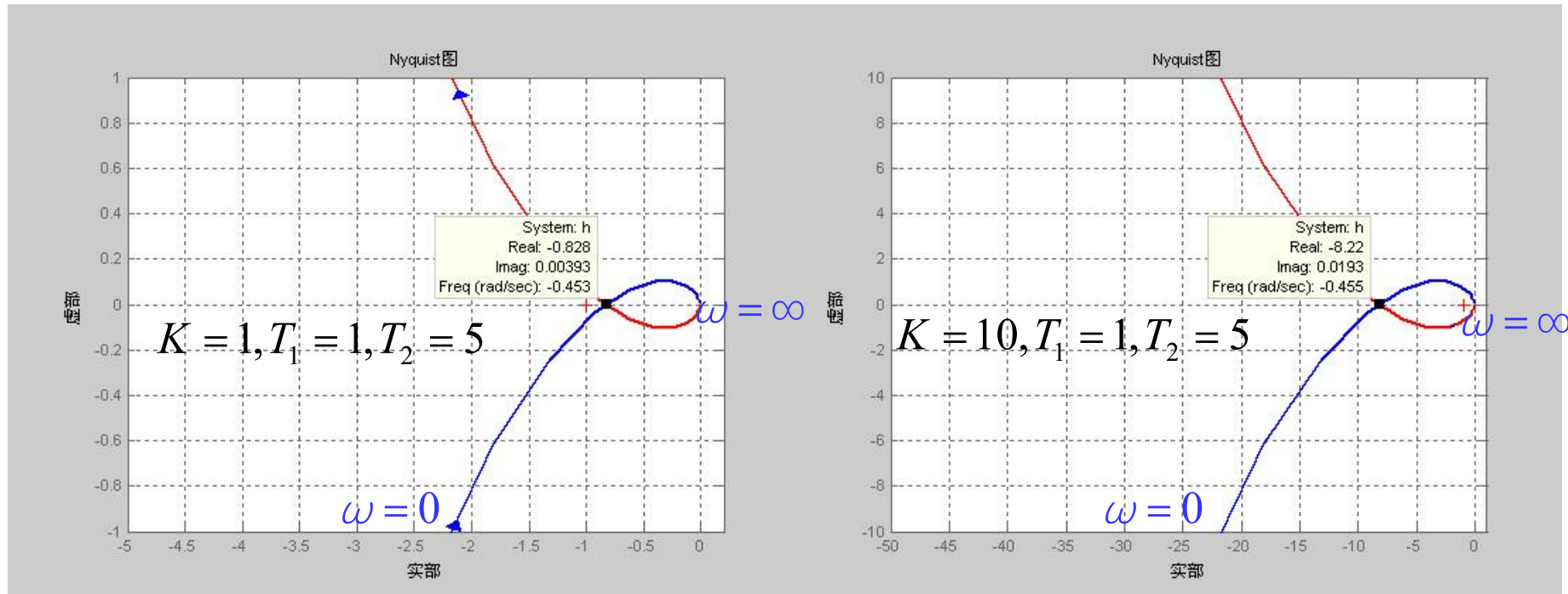
2、与实轴的交点。令: $Q(\omega) = 0$, 解得: $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$, 这时:

$$P(\omega_1) = \frac{-KT_1T_2}{T_1 + T_2}$$

3、当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $P(\infty) = 0$, $Q(\infty) = 0$, $\varphi(\infty) = -\frac{3\pi}{2}$, 渐近线方向向下。



5.3开环系统频率特性图的绘制



$$G(s) = \frac{1}{s(1+s)(1+5s)}$$

$$G(s) = \frac{10}{s(1+s)(1+5s)}$$



5.3开环系统频率特性图的绘制

[具有**积分环节**的系统的频率特性的特点]:

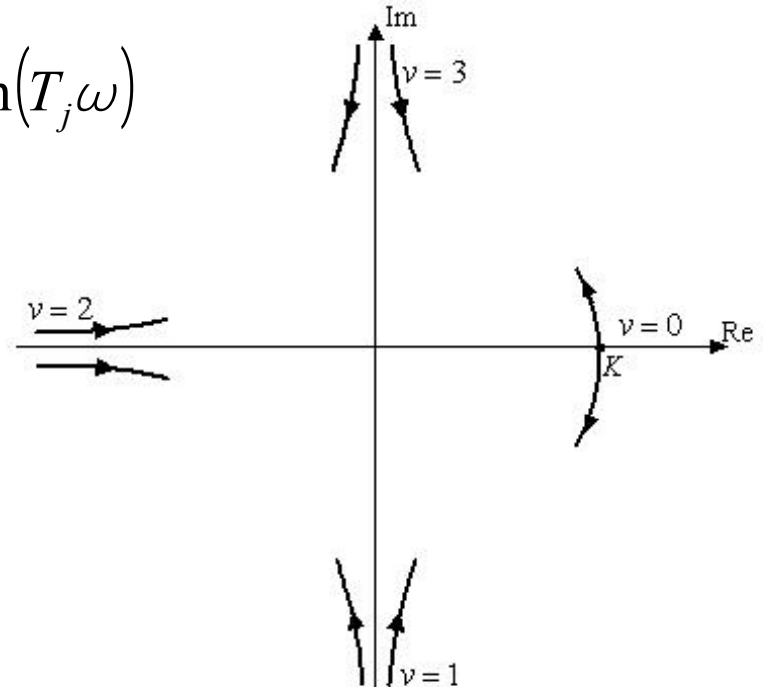
频率特性可表示为:
$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^v} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (1 + \tau_i s)}{\prod_{j=1}^{n-v} (1 + T_j s)}, (n \geq m)$$

其相角为:

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^m \arctan(\tau_i \omega) - v \frac{\pi}{2} - \sum_{j=1}^{n-v} \arctan(T_j \omega)$$

1. 起点 (取决于型数 v) :

$$G_o(j0^+) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{K}{(j\omega)^v}$$





5.3开环系统频率特性图的绘制

1. 起点 (取决于型数 v) :

2. 终点 (取决于 $n-m$) :

$\omega \rightarrow \infty$, 此时频率特性与分子、分母多项式阶次之差 $n-m$ 有关。

终点处幅值:

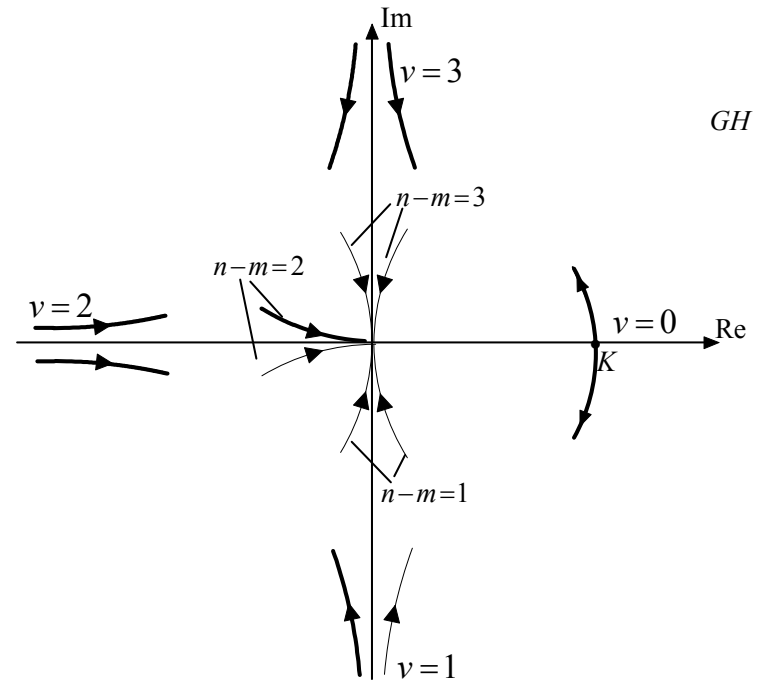
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0 (n > m)$$

终点处相角:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} (n - m)$$

结论:

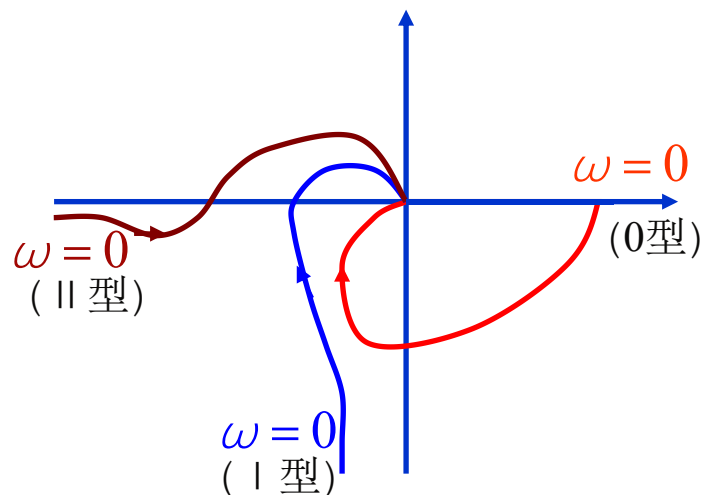
奈氏曲线沿 $-\frac{\pi}{2}(n-m)$ 进入原点。





5.3开环系统频率特性图的绘制

下图为0型、Ⅰ型和Ⅱ型系统在**低频和高频段**频率特性示意图：

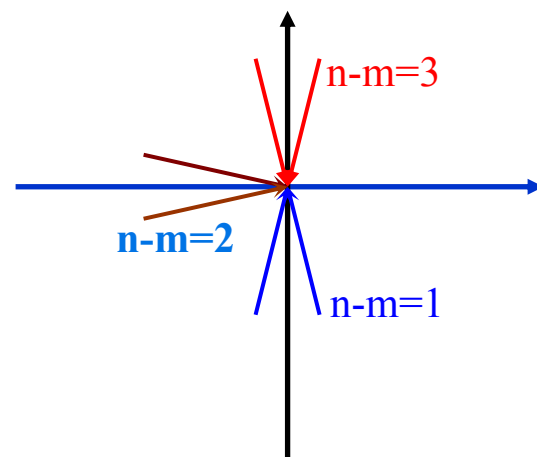


低频段频率特性

0型: $\varphi(0) = 0, |G(0)| = 1$

1型: $\varphi(0) = -\frac{\pi}{2}, |G(0)| = \infty$

2型: $\varphi(0) = -\pi, |G(0)| = \infty$



高频段频率特性

$n - m = 1$ 时, $\varphi(\infty) = -\frac{\pi}{2}$

$n - m = 2$ 时, $\varphi(\infty) = -\pi$

$n - m = 3$ 时, $\varphi(\infty) = -\frac{3\pi}{2}$

中频部分, 可计算一些特殊点的来确定。如与坐标的交点等。



5.3开环系统频率特性图的绘制

三、非最小相位系统的频率特性

在前面所讨论的例子中，当 $\omega > 0$ 时，对数幅频特性的高频渐近线的斜率都是 $-20(n-m)\text{dB/Dec}$ ，相频都趋于 $-\frac{\pi}{2}(n-m)$ 。具有这种特征的系统称为**最小相位系统**。**具有相同幅频特性的系统（或环节）中，最小相位系统其相角（位）的变化范围最小，如上表示的 $-\frac{\pi}{2}(n-m)$ 。相角变化大于最小值的系统称为非最小相位系统。**



5.3开环系统频率特性图的绘制

定义：在右半S平面上既无极点也无零点，同时无纯滞后环节的系统是**最小相位系统**，相应的传递函数称为最小相位传递函数；反之，在右半S平面上具有极点或零点，或有纯滞后环节的系统是**非最小相位系统**，相应的传递函数称为非最小相位传递函数。

在幅频特性相同的一类系统中，最小相位系统的相位移最小，并且最小相位系统的幅频特性的斜率和相频特性的角度之间具有内在的关系。

对最小相位系统： $\omega=0$ 时 $\varphi(\omega)=-90^\circ \times \text{积分环节个数}$ ；
 $\omega=\infty$ 时 $\varphi(\omega)=-90^\circ \times (n-m)$ 。

不满足上述条件一定不是最小相位系统。

满足上述条件却不一定是最小相位系统。



5.3开环系统频率特性图的绘制

例3: 有五个系统的传递函数如下。系统的幅频特性相同。

$$G_1(s) = \frac{T_2s + 1}{T_1s + 1}$$

$$\varphi_1(\omega) = \arctan(T_2\omega) - \arctan(T_1\omega)$$

$$G_2(s) = \frac{1 - T_2s}{T_1s + 1}$$

$$\varphi_2(\omega) = -\arctan(T_2\omega) - \arctan(T_1\omega)$$

$$G_3(s) = \frac{T_2s + 1}{1 - T_1s}$$

$$\varphi_3(\omega) = \arctan(T_2\omega) + \arctan(T_1\omega)$$

$$G_4(s) = \frac{1 - T_2s}{1 - T_1s}$$

$$\varphi_4(\omega) = -\arctan(T_2\omega) + \arctan(T_1\omega)$$

$$G_5(s) = \frac{T_2s + 1}{T_1s + 1} e^{-\tau s}$$

$$\varphi_5(\omega) = \arctan(T_2\omega) - \arctan(T_1\omega) - 57.3 \times \omega\tau$$

$$A_1(\omega) = A_2(\omega) = A_3(\omega) = A_4(\omega) = A_5(\omega) = \frac{\sqrt{1 + (T_2\omega)^2}}{\sqrt{1 + (T_1\omega)^2}}$$



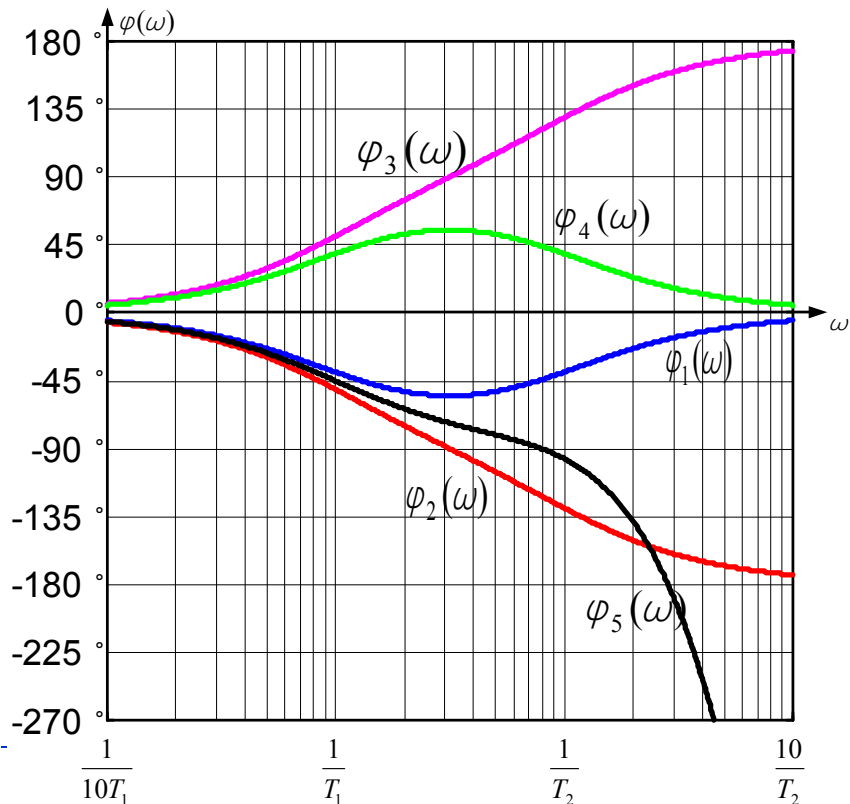
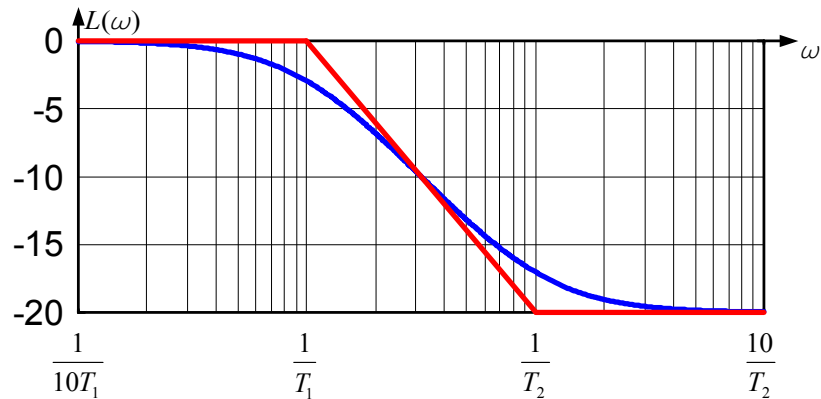
5.3开环系统频率特性图的绘制

设 $T_1 = 10T_2$, $\tau = T_2$ 可计算出下表, 其中 $\omega = \sqrt{10}/T_1$ 为对数坐标中 $\frac{1}{T_1}$ 与 $\frac{1}{T_2}$ 的几何中点。

ω	$1/10T_1$	$1/T_1$	$\sqrt{10}/T_1$	$1/T_2$	$10/T_2$
$\varphi_1(\omega)$	-5.1 °	-39.3 °	-54.9 °	-39.3 °	-5.1 °
$\varphi_2(\omega)$	-6.3 °	-50.7 °	-90 °	-129.3 °	-173.7 °
$\varphi_3(\omega)$	6.3 °	50.7 °	90 °	129.3 °	173.7 °
$\varphi_4(\omega)$	5.1 °	39.3 °	54.9 °	39.3 °	5.1 °
$\varphi_5(\omega)$	-5.7 °	-45 °	-73 °	-96.6 °	-578.1 °



5.3开环系统频率特性图的绘制



由图可知**最小相位系统**是指在具有相同幅频特性的一类系统中，当 ω 从0变化至 ∞ 时，系统的相角变化范围最小，且**变化的规律与幅频特性的斜率有关系**(如 $\varphi_1(\omega)$)。

而非最小相位系统的相角变化范围通常比前者大(如 $\varphi_2(\omega)$ 、 $\varphi_3(\omega)$ 、 $\varphi_5(\omega)$)；

或者相角变化范围虽不大，但相角的变化趋势与幅频特性的变化趋势不一致(如 $\varphi_4(\omega)$)。



5.3开环系统频率特性图的绘制

在最小相位系统中，对数频率特性的变化趋势和相频特性的变化趋势是一致的（幅频特性的斜率增加或者减少时，相频特性的角度也随之增加或者减少），因而由对数幅频特性即可唯一地确定其相频特性。

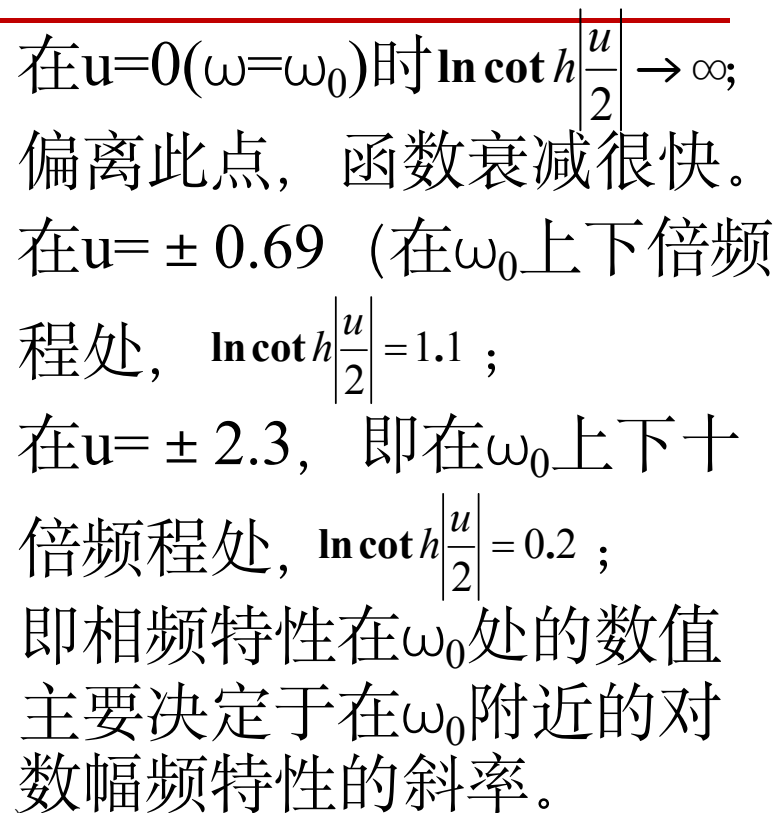
伯德证明，对于最小相位系统，对数相频特性在某一频率的相位角和对数幅频特性之间存在下述关系：

$$\varphi(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dA}{du} \ln \cot h \left| \frac{u}{2} \right| du$$

式中 $\varphi(\omega_0)$ 为系统相频特性在观察频率 ω_0 处的数值，单位为弧度； $u = \ln(\omega/\omega_0)$ 为标准化频率； $A = \ln|G(j\omega)|$ ； dA/du 为系统相频特性的斜率，当 $L(\omega)$ 的斜率等于20dB/dec时， $dA/du = 1$ ；函数

$$\ln \cot h \left| \frac{u}{2} \right| = \ln \frac{e^{\left| \frac{u}{2} \right|} + e^{-\left| \frac{u}{2} \right|}}{e^{\left| \frac{u}{2} \right|} - e^{-\left| \frac{u}{2} \right|}}$$

为加权函数，曲线如图



自动控制原理



5.3开环系统频率特性图的绘制

对于最小相位系统，幅值特性和相位特性之间具有唯一对应关系。这意味着，如果系统的幅值曲线在从零到无穷大的全部频率范围上给定，则相角曲线被唯一确定，反之亦然；而非最小相位系统则不然，在进行分析或综合时，必须同时考虑其幅频特性与相频特性。

非最小相位系统情况可能发生在两种不同的条件下。一是当系统中包含一个或多个非最小相位环节；另一种情况可能发生在系统存在不稳定的内部小回路。

一般来说，右半平面有零点时，其相位滞后更大，闭环系统更难稳定。因此，在实际系统中，应尽量避免出现非最小相位环节。



5.3开环系统频率特性图的绘制

例4: 已知最小相位系统的渐近幅频特性如图所示，试确定系统的传递函数，并写出系统的相频特性表达式。

解: 1. 由于低频段斜率为 -20dB/dec 所以有一个积分环节；

2. 在 $\omega=1$ 处， $L(\omega)=15\text{dB}$ ，可得

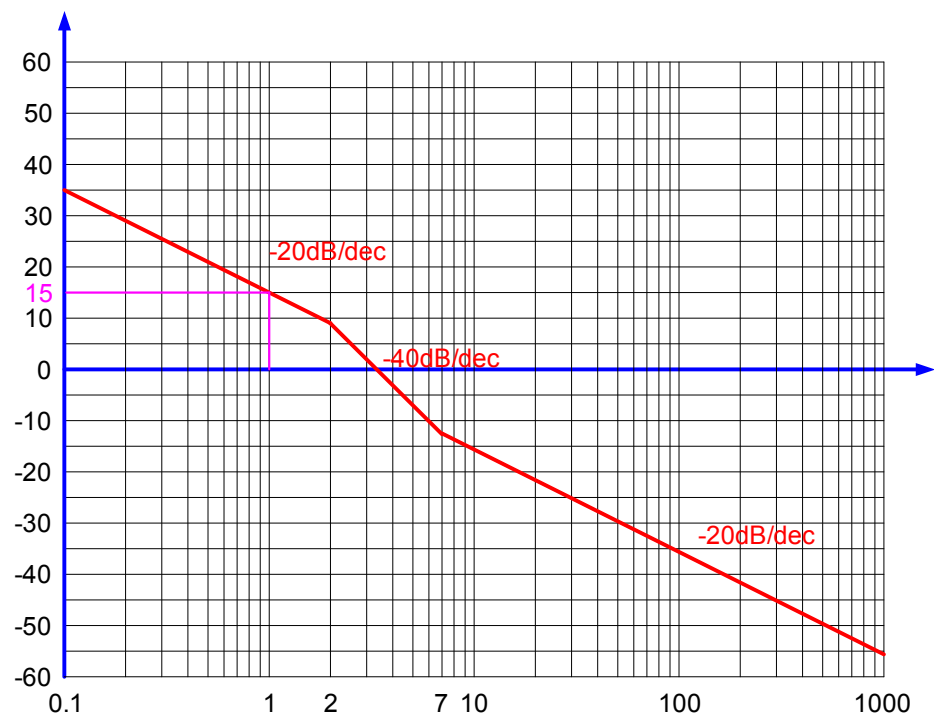
$$20\lg K=15, K=5.6$$

3. 在 $\omega=2$ 处，斜率由 -20dB/dec 变为 -40dB/dec ，故有惯性环节 $1/(s/2+1)$

4. 在 $\omega=7$ 处，斜率由 -40dB/dec 变为 -20dB/dec ，故有一阶微分环节 $(s/7+1)$

$$G(s) = \frac{5.6\left(\frac{1}{7}s + 1\right)}{s\left(\frac{1}{2}s + 1\right)}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \arctan \frac{\omega}{7} - \arctan \frac{\omega}{2}$$



$$G(j\omega) = \frac{5.6\left(1 + \frac{\omega}{7}j\right)}{s\left(1 + \frac{\omega}{2}j\right)}$$



5.3开环系统频率特性图的绘制

例4: 已知最小相位系统的渐近幅频特性如图所示,试确定系统的传递函数。

解: 1. 由于低频段斜率为 -40dB/dec 所以有两个积分环节;

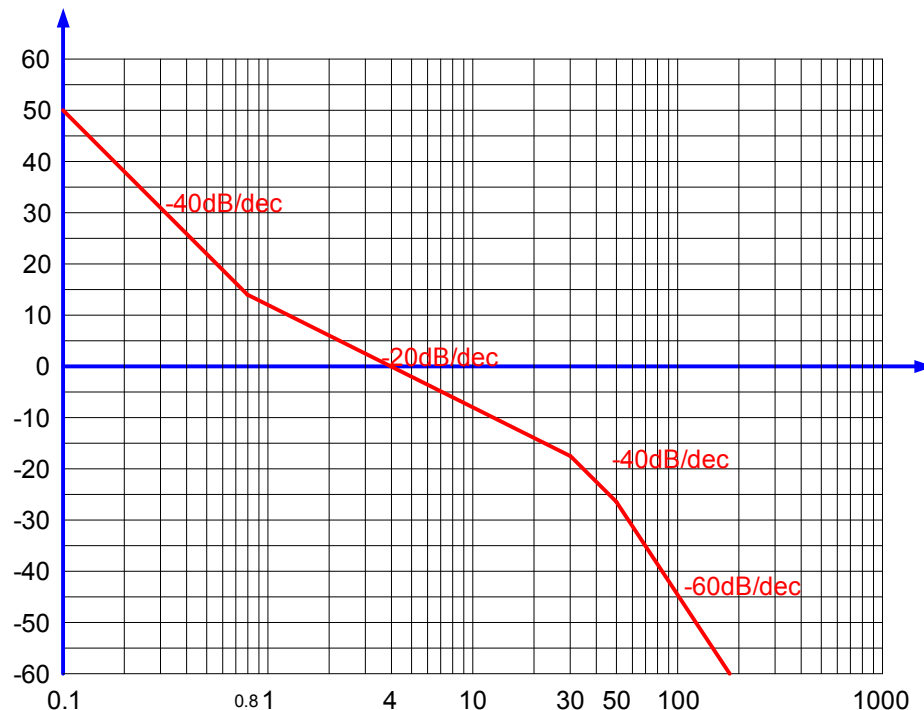
2. 在 $\omega=0.8$ 处, 斜率由 -40dB/dec 变为 -20dB/dec , 故有一阶微分环节 $(s/0.8+1)$

3. 在 $\omega=30$ 处, 斜率由 -20dB/dec 变为 -40dB/dec , 故有惯性环节 $1/(s/30+1)$

4. 在 $\omega=50$ 处, 斜率由 -40dB/dec 变为 -60dB/dec , 故有惯性环节 $(s/50+1)$

$$G(s) = \frac{K \left(\frac{s}{0.8} + 1 \right)}{s^2 \left(\frac{1}{30} s + 1 \right) \left(\frac{1}{50} s + 1 \right)}$$

$$L(\omega) = 20\lg K + 20\lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{0.8} \right)^2} - 20\lg \omega^2 - 20\lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{30} \right)^2} - 20\lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{50} \right)^2}$$





5.3开环系统频率特性图的绘制

在 $\omega=4$ 时, $L(\omega)=0$, 这时可以不考虑转折频率在 $\omega=4$ 以上的环节的影响 (为什么?)

$$L(4) = L(\omega)|_{\omega=4} \approx \left[20\lg K + 20\lg \frac{\omega}{0.8} - 20\lg \omega^2 \right]_{\omega=4}$$

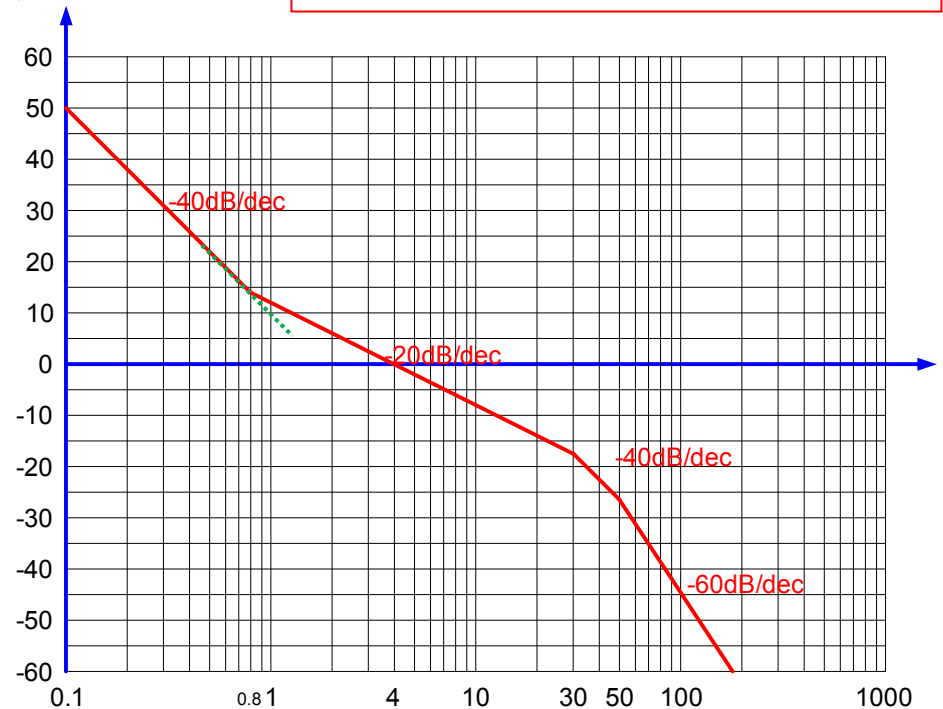
$$= 20\lg K + 20\lg \frac{4}{0.8} - 20\lg 4^2 = 20\lg \frac{4K}{0.8 \times 4^2} = 0$$

$$\frac{K}{0.8 \times 4} = 1$$

$$K = 3.2$$

$$G(s) = \frac{3.2(\frac{1}{0.8}s + 1)}{s^2(\frac{1}{30}s + 1)(\frac{1}{50}s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{K(\frac{1}{0.8}s + 1)}{s^2(\frac{1}{30}s + 1)(\frac{1}{50}s + 1)}$$





5.3开环系统频率特性图的绘制

例5:有两个系统, 频率特性分别为:

$$G_1(j\omega) = \frac{1+j\omega\tau}{1+jT\omega}, G_2(j\omega) = \frac{1-j\omega\tau}{1+jT\omega}, 0 < \tau < T$$

转折频率都是: $\omega_1 = \frac{1}{T}, \omega_2 = \frac{1}{\tau}$

幅频特性相同, 均为: $L(\omega) = 20\lg\sqrt{1+\tau^2\omega^2} - 20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}$

相频特性不同, 分别为:

$$\varphi_1(\omega) = \arctan(\omega\tau) - \arctan(\omega T), \varphi_1(0) = 0, \varphi_1(\infty) = 0, \Delta\varphi_1(\omega) = 0$$

$$\varphi_2(\omega) = -\arctan(\omega\tau) - \arctan(\omega T), \varphi_2(0) = 0, \varphi_2(\infty) = -\pi, \Delta\varphi_2(\omega) = -\pi$$

显然, $\varphi_1(\omega)$ 满足 $\varphi_1(\infty) \rightarrow -\frac{\pi}{2}(n-m) = 0$ 的条件, 是最小相位系统;

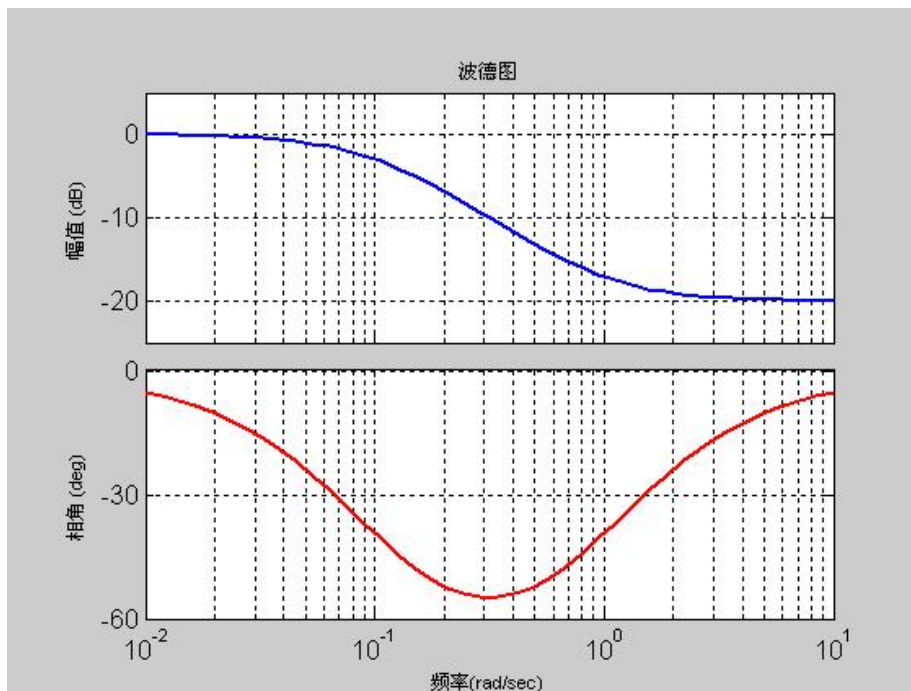
而 $\varphi_2(\omega)$ 不满足 $\varphi_2(\infty) \rightarrow -\frac{\pi}{2}(n-m) = 0$ 的条件, 是非最小相位系统。

可以发现: 在右半平面有一个零点。



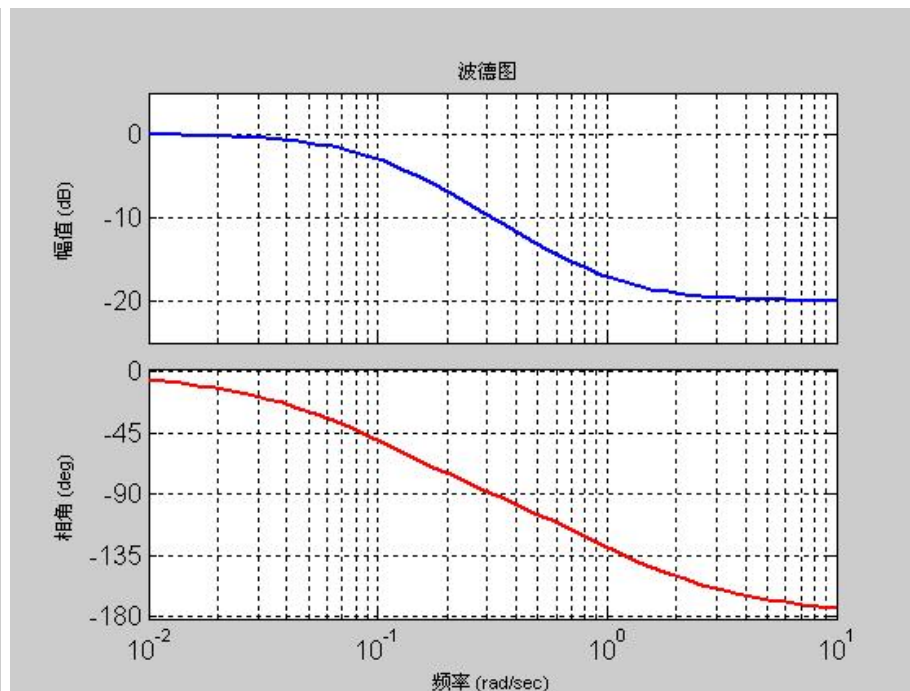
5.3开环系统频率特性图的绘制

该两个系统的波德图如下所示:



$$G_1(s) = \frac{1+s}{1+10s}$$

最小相位系统



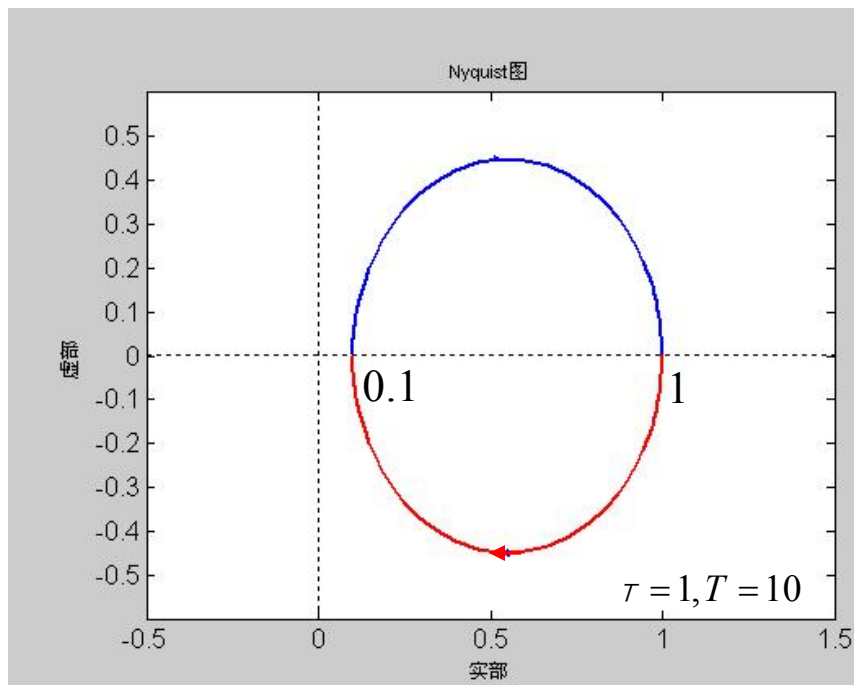
$$G_1(s) = \frac{1-s}{1+10s}$$

非最小相位系统



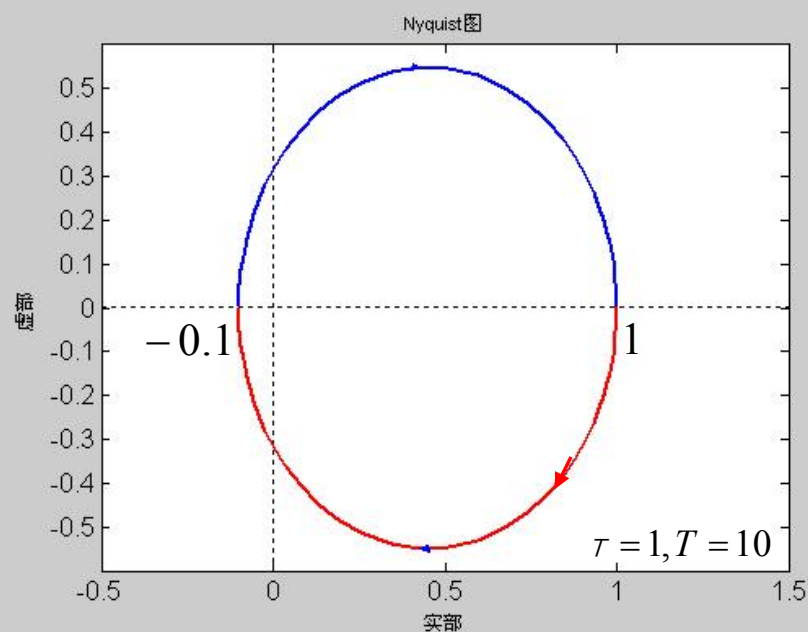
5.3开环系统频率特性图的绘制

奈氏图为:



$$G_1(s) = \frac{1+s}{1+10s}$$

最小相位系统



$$G_1(s) = \frac{1-s}{1+10s}$$

非最小相位系统



5.3开环系统频率特性图的绘制

小结

- ▶ 开环系统极坐标频率特性的绘制（绘制Nyquist图）
 - 手工绘制和使用Matlab绘制
 - 具有积分环节的系统的频率特性的特点，低频和高频特性
- ▶ 开环系统对数坐标频率特性的绘制（绘制Bode图）
 - 手工绘制波德图的步骤和使用Matlab绘制
- ▶ 最小相位系统和非最小相位系统



5.3开环系统频率特性图的绘制

Thank You !