西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

第1章 概率论的基本概念

概率论与数理统计课程组

概率的统计定义　　　　频率 VS 概率

首先引入频率，它描述的是事件发生的频繁程度。

定义：把含有事件A的随机试验独立重复做n次

记$f_n(A) = n_A / n$;

其中　n_A ——A发生的次数（频数）

n ———总试验次数

$f_n(A)$ – A在这n次试验中发生的频率。

问题：能否用频率来代替概率？

抛硬币的例子（抛硬币出现正面的频率）

n越大，频率越稳定

表 1

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

抛硬币的例子 (抛硬币出现正面的频率)

表 2

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

重要规律

大量的实验表明，当重复实验的次数n逐渐增大时，频率fn(A)呈现出稳定性，逐渐稳定于某个常数。这种“频率稳定性”即通常所说的**统计学规律**。

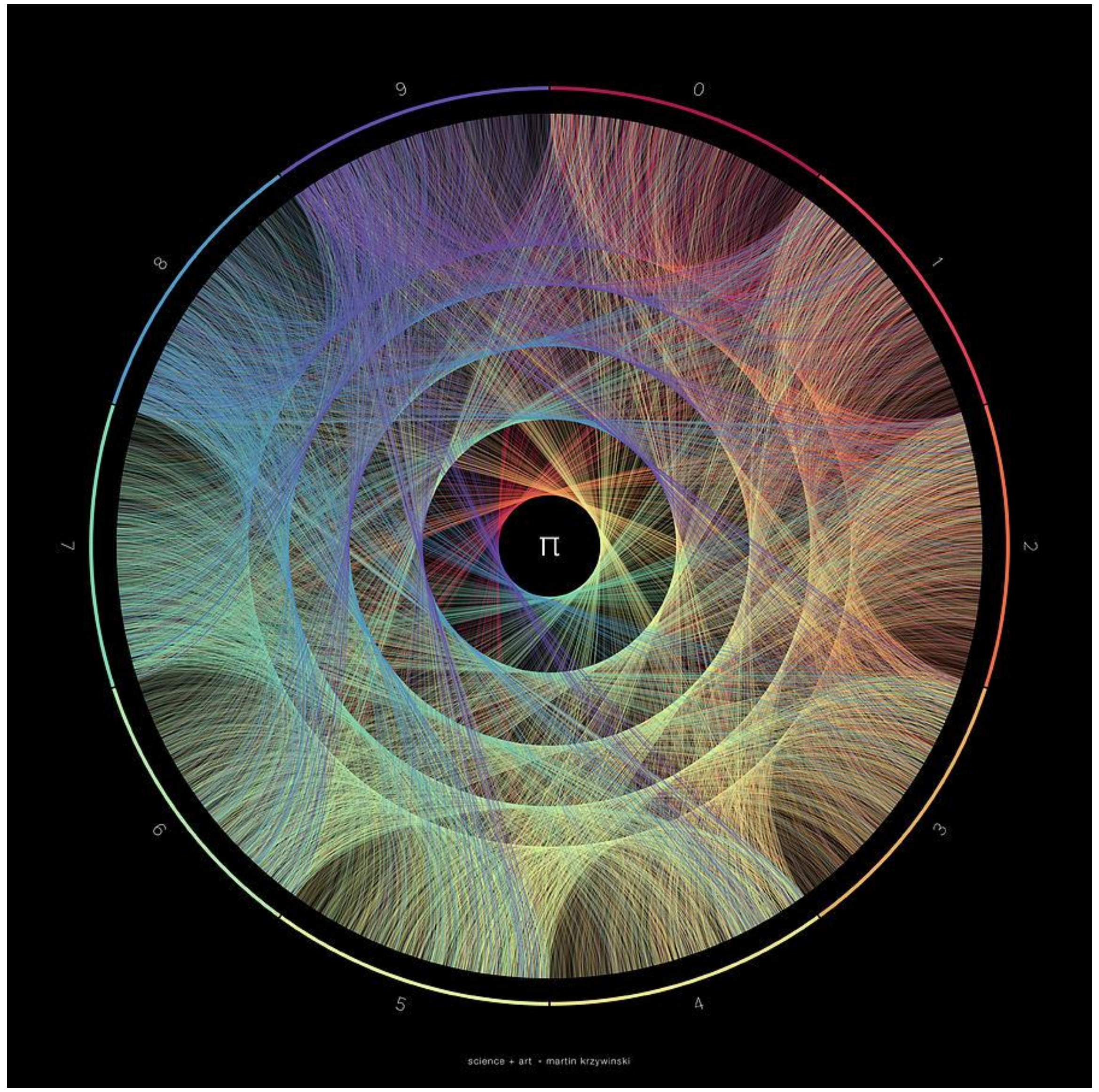
π的小数位的数字对0~9是等可能的

1872年英国人Shix. W将π算到707位

1945年法格逊核对其结果发现数字7太少，认为其结果不正确，果然只有前527位正确

计算机出现后，计算了π的前100万位小数，发现各个数字出现的频率相同

2019年谷歌工程师Emma Haruko lwaoli利用云计算资源计算出的34.1万亿位



由于事件发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，因此其大小表示了事件发生的频繁程度。频率愈大，事件发生就愈频繁。这意味着事件在一次试验中发生的可能性就愈大，反之亦然。但大量的试验证明，频率具有随机波动性，致使频率不能成为概率。同时，大量的试验也证明，频率具有稳定性，因此频率可以揭示概率，其稳定值就是事件在一次试验中发生的概率，从而产生了概率的公理化定义。

概率的公理化定义

设 Ω 是随机试验的样本空间，若对于随机试验的每一个随机事件 A 都有一个实数P(A)与之对应，且 P(A)满足下列三个条件：

$1^\circ \quad 0 \le P(A) \le 1$

$2^\circ \quad P(\Omega) = 1$

3° 若$A_1, A_2, \cdots, A_k$两两互不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots$

称P(A)为事件A的概率。

概率的几个重要的性质

(i) $P(\varnothing)=0$

证 令 $A_n=\varnothing$ $(n=1, 2, \dots)$ 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$ $A_iA_j=\varnothing, i\neq j\ (i,j=1,2,\dots,)$

由可列可加性 $P(\varnothing)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(\varnothing)$

由非负性 $P(\varnothing)\geq 0$ 故 $P(\varnothing)=0$

(ii) 有限可加性 互不相容和事件的概率为每个事件的概率之和

若$A_1, A_2, \dots, A_n$两两互不相容，则 $P(A_1\cup A_2\cup \dots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)$

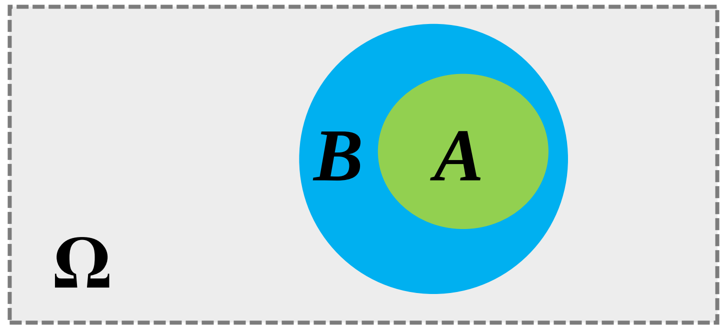
$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

证 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\dots=\varnothing$ 即 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j\ (i,j=1,2,\dots)$

$$P(A_1\cup A_2\cup \dots \cup A_n)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)+0=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n)$$

概率的几个重要的性质

性质 3 (减法公式) 设 A 、 B 是事件且 $A \subset B$，则



$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

从而 $P(A) \le P(B)$。

证明 由于 $A \subset B$，因此

$$B = A \cup (B-A)，且 A(B-A)=\varnothing$$

由概率的有限可加性，得

$$P(B)=P(A)+P(B-A)$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

再由概率的非负性知， $P(B-A) \ge 0$ ，即 $P(A) \le P(B)$。

问题：如果A和B没有包含关系，事件之差的概率怎么求解？

$$\boxed{P(\mathrm{A}-B)=P(\mathrm{A})-P(AB)}$$

证明：因为

$$A-B=A\overline{B}=A(\Omega-B)=A\Omega-AB=A-AB$$

所以 $P(\mathrm{A}-B)=P(\mathrm{A}-AB)$

又因为 $AB\subset A$

所以 $P(\mathrm{A}-AB)=\mathrm{P(A)}-\mathrm{P(AB)}$

故 $\boxed{P(\mathrm{A}-B)=P(\mathrm{A})-P(AB)}$

概率的几个重要的性质（4）

性质4　对于任一事件A, $P(A) \le 1$

证明：因为A$\subset$S，并由性质3得：

$$P(A) \le P(S) = 1$$

概率的几个重要的性质（5）

性质5（逆事件的概率） 对于任一事件A, 有$P(\bar{A})=1-P(A)$

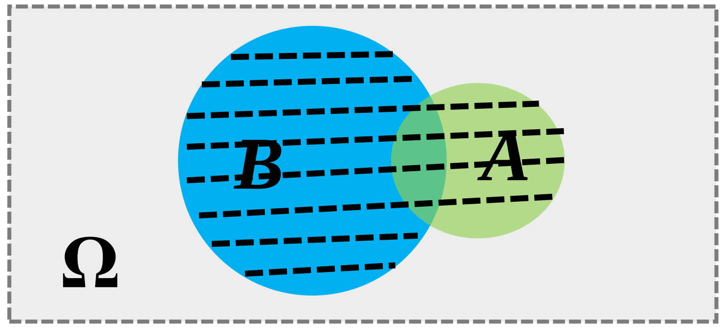
证明：因$A\cup\bar{A}=S$,且$A\bar{A}=\varnothing$,由可列可加性，得

$$1=P(S)=P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$$

概率的几个重要的性质（6）

(6) 加法公式

对任意事件A, B, 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$



文氏图重叠部分概率需被减去 1 次

证 因 $A \cup B = A \cup (B - AB)$ 且 $A(B - AB) = \varnothing$ $AB \subset B$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$

推广至多个事件

设A_1, A_2, A_3 是任意三个事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

对任意事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$，采用归纳法得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$$

1.4 古典概率

设随机试验的样本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$，n 为有限的正整数，且每个基本事件 $\{\omega_i\}(i=1, 2, \ldots, n)$发生的可能性相同，则称这种随机试验为古典概型，或称等可能概型。

条件：（1）有限性　　样本中只含有限个基本事件

（2）等可能性　　每个基本事件发生的可能性相同

古典概率的计算公式为：

$$P(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{\text{事件A中包含的基本事件数}}{\text{样本空间}\Omega\text{中包含的基本事件数}}$$

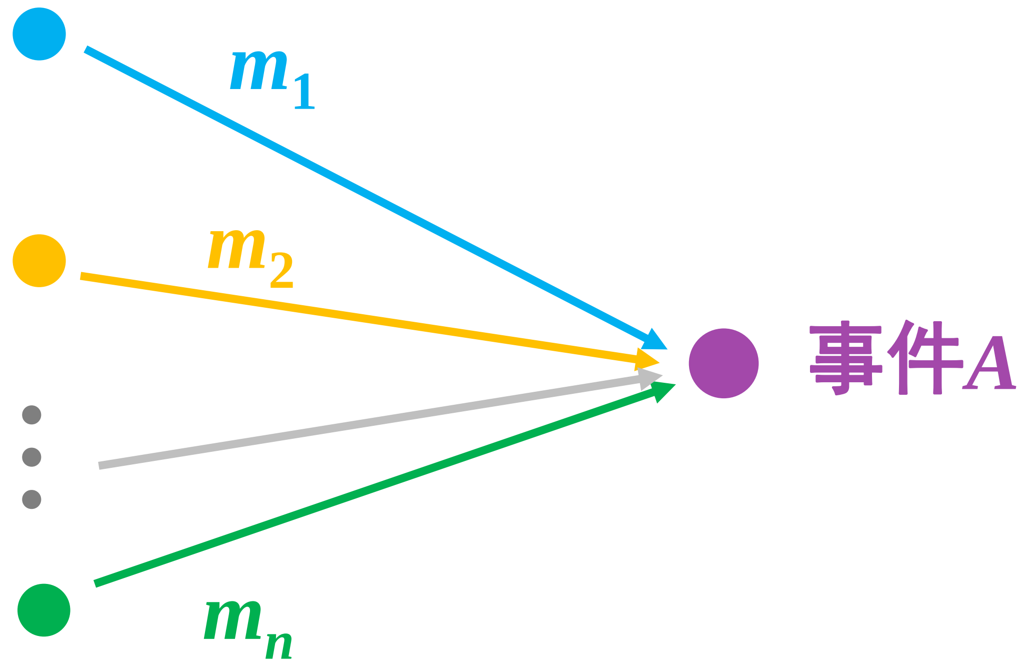
重点：1. 样本空间是什么？

2. 事件A如何表述？

中学排列组合知识回顾：

加法原理　（分类计数）

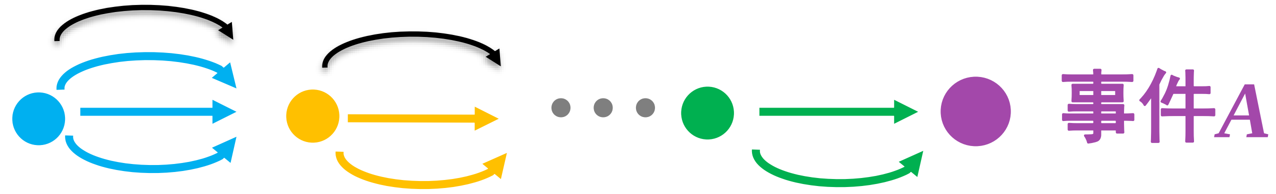
若完成一件事可有n类办法，其中，在第一类办法中有m_1种不同的方法，在第二类办法中有m_2种不同的方法，……，在第n类办法中有m_n种不同的方法



完成这件事的方法共有 $N= m_1 + m_2 + m_2+\ldots+ m_n$

乘法原理　（分步计数）

若完成一件事需分解成n个步骤，其中，做第一步有m_1种不同的方法，做第二步有m_2种不同的方法，……，做第n步有m_n种不同的方法



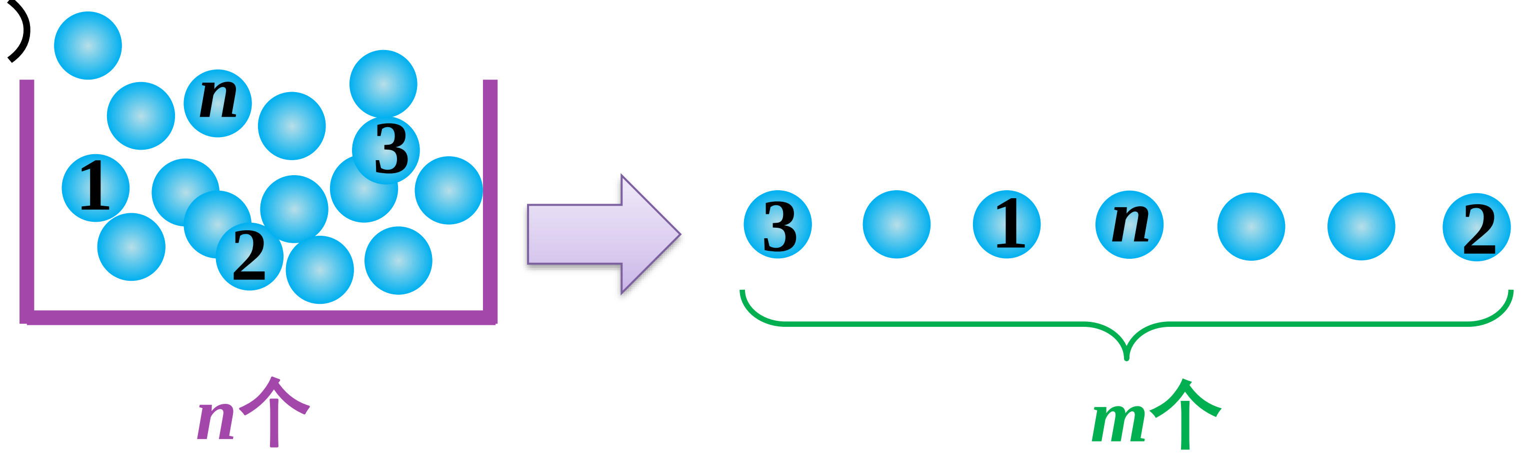
完成这件事的方法共有 $N=m_1\times m_2\times m_3\times\ldots\times m_n$

中学排列组合知识回顾：

排列 (*Arrangement*)

从n个不同元素里每次取m个不同元素的排列（记次序）

$$A_n^m = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-m+1)}_{m个} = \frac{n!}{(n-m)!}$$



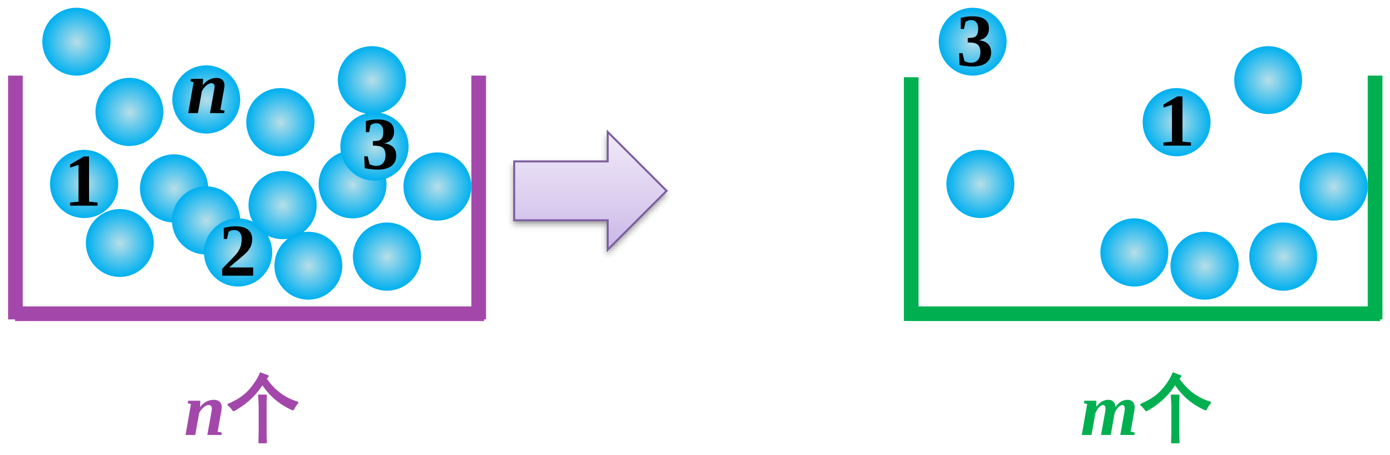
重复排列： 从n个不同元素里每次取允许重复的m个元素的排列

$$n^m$$

组合 (Combination)

从n个不同元素中选出m个元素构成一组，所有不同组合的个数

$$\binom{n}{m} = C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (n \ge m)$$



基本模型

（一）质点入盒模型：n个可辨的盒子内放入m个球

每盒最多一球：球可辨： A_n^m

球不可辨： C_n^m

每盒球数不限：球可辨： n^m 注意区分底数和指数

球不可辨： C_{n+m-1}^m

例：2封信投入3个信箱，几种投法？

例：n元函数 $y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ 求r阶偏导数，不同混合偏导数有多少个？

例：n个球随机放入N个盒（ $N \geq n$ ）中，每个盒子最多一球的概率？

例 将 n 只球随机地放入 N (N ≥ n)个盒子中，试求每个盒子中至多有 1 只球的概率(设盒子的容量不限)。

解 样本空间Ω={将 n 只球放入 N 个盒子中的不同放法}，# Ω=N × N × … × N = N^n

事件A={每个盒子中至多放一只球}， # A= N (N -1)…[N - (n -1)]

故所求的概率为

$$p=\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n}$$

事实上，有许多问题和本例具有相同的数学模型。例如，假设每人的生日在一年365 天中任一天是等可能的，即概率都等于1 / 365，那么随机选取 n (n ≤365)个人，他们的生日各不相同的概率为

$$p=\frac{365\cdot 364\cdot\cdots\cdot(365-n+1)}{365^n}$$

透过现象抓实质！

质点入盒模型概括了很多古典概率的问题

质点	盒子	问题
人	365天（或12个月）	N个人的生日问题
人	每周7天	工作的分布问题（安排问题）
人	房间	分房问题
信	邮筒	投信问题
骰子	骰子的6个点（6个盒子）	投骰子问题
硬币	硬币的正反面（2个盒子）	投硬币问题
旅客	下车车站	旅客下车问题
粒子	相空间中的小区域（空间格子）	统计物理中的Maxwell-Boltzmann统计模型
……	……	……

例（生日问题）：一个班有m个人，不计2月29日出生的（假定一年365天），问至少有两人同一天生日的概率?

解：设事件$\bar{A}$：　m个人生日各不相同

事件$\bar{A}$的概率为

$$P(\overline{A})=\frac{k}{n}=\frac{A_{365}^{m}}{365^{m}}$$

$$P(A)=1-\frac{A_{365}^{m}}{365^{m}}$$

当 m≥50时，至少有两个人生日相同的概率超过0.9

基本模型

（二）摸球模型：从n个可辨的球中一个一个地从中取出m个球

无放回：球计序： A_n^m

球不计序： C_n^m

有放回：球计序： n^m

球不计序： C_{n+m-1}^m

例1 有 1500件产品，其中有 400 件是次品。从中任取 200 件，求恰有90件次品的概率。

N件产品，D件次品，任取n件，恰有k件次品的概率

$$\boxed{P(A)=\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}}$$

超几何分布的概率公式

计件抽样检验中的一个重要公式

例2 袋中有 a 只白球， b 只红球， 依次在袋中取 1 只球，分别：(1)做放回抽样；(2)做不放回抽样。求第 k 次取到白球(记为事件 B)的概率。

解 （1）放回抽样的情况下，显然有 $P(A)=\dfrac{a}{a+b}$

（2）不放回抽样的情况：

样本空间Ω={将 a + b只球放在a + b个位置上的不同放法}，# Ω=(a + b)!

事件A={第 k 次取到白球}， # A=a (a + b-1)!

当事件 A发生时，第 i 人取的应是白球，可以在 a 只白球中任取 1 只，有 a种取法，其余被取的 k -1 只球可以是剩下的 a + b -1 只球中的任意 k -1 只，共有(a + b-1)(a + b -2)...[(a + b -1- (k -1) +1)]种取法)，从而所求的概率为

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

值得注意的是：一是 P (A)与 k无关，即 尽管取球的先后顺序不同，各人取到白球的概率是一样的，这就是著名的“抽签原则”； 二是在放回抽样的情况下与在不放回抽样的情况下， P (A)是一样的。

例3 某接待站在某一周曾接待 12 次来访，已知所有这 12 次接待都是在周二和周四进行的，问是否可以推断接待时间是有规定的?

解 假设接待站的接待时间没有规定，而各来访者在一周任一天去接待站是等可能的，那么12次接待来访者都是在周二、周四的概率为

$$2^{12}/7^{12}=0.000\,000\,3$$

现在，概率很小的事件在一次试验中竟然发生了，因此有理由怀疑假设的正确性

实际推断原理

概率很小的事件在一次试验中几乎是不发生的