洛仑兹变换是同一个事件在两个惯性系中的时空坐标之间的关系。

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-ut}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t-\left(u/c^2\right)x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

其逆变换为

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'+ut'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t'+\left(u/c^2\right)x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

空间测量与时间测量相互影响，相互制约

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Delta y' = \Delta y \quad \Delta z' = \Delta z \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - u\Delta x / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + u\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Delta y = \Delta y' \quad \Delta z = \Delta z' \quad \Delta t = \frac{\Delta t' + u\Delta x' / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \qquad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} \qquad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2} v_x}$$

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \qquad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \qquad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x}$$

一. 同时性的相对性

沿两个惯性系运动方向，不同地点发生的两个事件，在其中一个惯性系中是同时的，在另一惯性系中观察则不同时，所以同时具有相对意义；只有在同一地点，同一时刻发生的两个事件，在其他惯性系中观察也是同时的。

二、时间膨胀

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\,\tau_0$$

三、长度收缩

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2} < l_0$$

四、相对性与绝对性

1）两独立事件的先后次序是相对的

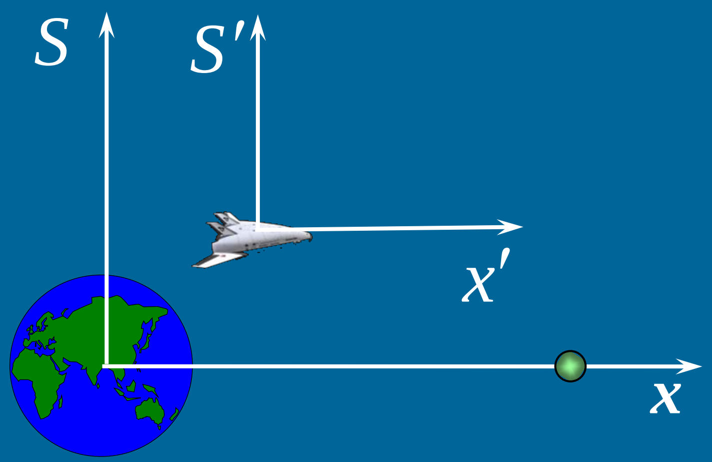
2）事件的因果顺序决不会因参照系不同而颠倒

例 在地球—月球系统中测得地—月距离为3.844×10^8m，一火箭以$0.8c$的速率沿着从地球到月球的方向飞行，先经过地球(事件1)，之后又经过月球(事件2)，试问在地球—月球系和火箭系中观察，火箭由地球飞向月球各需要多长时间。

解法一 用时间间隔变换

在地—月系统S，火箭由地球飞向月球

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{u} = \frac{3.844 \times 10^8}{0.8 \times 3 \times 10^8} = 1.6s$$



在火箭S'系测量时：

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1.6 - \frac{0.8}{3\times 10^8}\times 3.844\times 10^8}{\sqrt{1-0.8^2}} = 0.96s$$

解法二　用时间膨胀

在地——月系统S，火箭由地球飞向月球所需时间

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{u} = 1.6s$$

在火箭系S'中观察，地球——月球皆以**u=0.8c**的速度运动，

事件1是地球经过火箭，事件2是月球经过火箭

则在S'系中，上述两事件1、2是同地事件，故时间间隔$\Delta t'$为原时(固有时)

即此时公式应为： $\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\therefore \Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\beta^2} = 1.6\sqrt{1-0.8^2} = 0.96s$$

解法三 用长度收缩

在地—月系统S，同上 $\Delta t = \dfrac{\Delta x}{u} = 1.6s$

在S'中观察，地—月距离为 $l' = l_0\sqrt{1-\beta^2}$

故： $$\Delta t' = \frac{l'}{u} = \frac{l_0\sqrt{1-\beta^2}}{u} = \frac{3.844\times10^8\times\sqrt{1-0.8^2}}{0.8\times3\times10^8} = 0.96s$$

§ 14.5 狭义相对论质点动力学简介

当物体的速度接近光速时，经典力学不再适用，爱因斯坦在相对论的时空观的基础上建立起了狭义相对论力学。

物理概念：质量，动量，能量，…… ⟷ 重新审视其定义

原则

(1) 应符合爱因斯坦的狭义相对性原理

即经过洛伦兹变换时保持定律形式不变

(2) 应满足对应原理

即趋于低速时，物理量须趋于经典理论中相应的量

一. 相对论质量、动量 质点动力学基本方程

1. 质速关系

经典理论： $m = m_0 =$ 恒量 ⟷ 与物体运动无关

• 在相对论中，仍定义质点动量为质量与速度的乘积 $\vec{p} = m\vec{v}$ 要使动量守恒定律在洛伦兹变换下保持不变，则要求质量 m 与质点运动速度有关

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

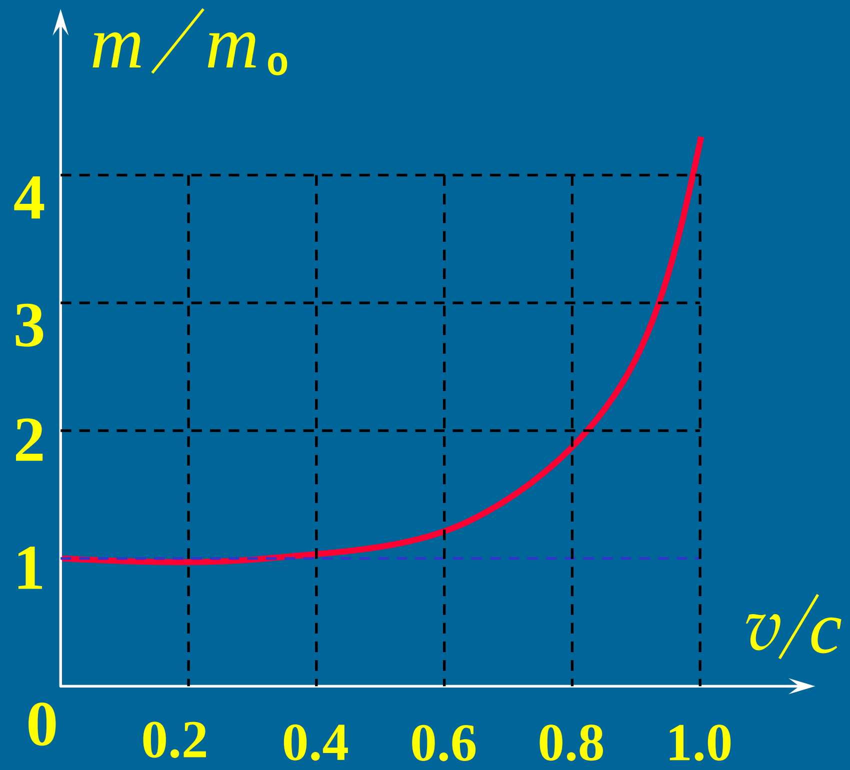
——质速关系式

m_0：质点的静止质量

——相对于该物体静止的观察者测得的质量

m : 质点的相对论质量

——相对于该物体运动的观察者测得的质量



讨论

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

(1) 当 $\upsilon << c$ 时， $\beta \to 0,\ m \approx m_0$ 还原到经典力学

例：地球绕太阳公转的速度 υ =30千米 / 秒

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{30000}{3\times 10^8}\right)^2}}=1.000000005m_0$$

(2)一般情况下 $m > m_0$

当 υ =0.1 c　　m 增加 0.5%

当 υ =0.866 c　　$m = 2m_0$

当 $\upsilon \to c$　　$m \to \infty$

当质点速度接近光速时，质量变得很大，再要使其加速就很困难，这就是一切物体的速度不可能达到或超过光速的动力学原因。

2. 相对论动量

$$\boxed{\vec{p}=m\vec{\upsilon}=m_0\vec{\upsilon}/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

3. 相对论质点动力学基本方程

经典力学 $\vec{p}=m_0\vec{\upsilon}$ $\longrightarrow$ $\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=m_0\dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=m_0\vec{a}$

相对论力学 $\boxed{\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{\upsilon}\right)}$

低速退化

二. 能量 质能关系

- 经典力学
- 相对论力学

$$E_k=\frac{m_0\upsilon^2}{2} \longrightarrow E_k=\frac{m_0}{2\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\upsilon^2 \ ?$$

在相对论中，认为动能定理仍适用。若取质点速率为零时动能为零。则质点从静止开始在恒外力作用下速率增加到 $\boldsymbol{\upsilon}$ 的过程中, 合外力所做的功就是质点动能。

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k} = \mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\vec{p}\cdot\vec{v}$$

$$= (\vec{v}\mathrm{d}m + m\mathrm{d}\vec{v})\cdot\vec{v} = v^2\mathrm{d}m + mv\mathrm{d}v = c^2\mathrm{d}m$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \xrightarrow{\text{两边微分}} v^2\mathrm{d}m + mv\mathrm{d}v = c^2\mathrm{d}m$$

$$E_K = \int_L \vec{F}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r} = \int_{m_0}^{m} c^2\mathrm{d}\,m$$

$$\Rightarrow \boxed{E_K = mc^2 - m_0c^2}$$ ——相对论的动能表达式

讨论

(1) 注意相对论动能与经典力学动能的区别和联系

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 \Leftrightarrow E_k = m_0v^2/2$$

当$\upsilon << c$时，$\beta \to 0$，有

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1 \right)$$

$$= m_0 c^2 (1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{\upsilon^4}{c^4} + \cdots - 1) \quad = \frac{m_0 \upsilon^2}{2}$$

牛顿力学中的动能公式

$\upsilon << c$ 出现退化

(2) 当$\upsilon \to c$，$E_k \to \infty$，意味着将一个静止质量不为零的粒子，使其速度达到光速，是不可能的。

(3) 质能关系式

$$\boxed{\begin{aligned} E_K &= mc^2 - m_0 c^2 \\ &= E - E_0 \end{aligned}}$$

静止能量：$E_0 = m_0 c^2$

任何宏观静止物体具有能量

总 能 量：$E = mc^2$

相对论质量是能量的量度

质能关系

$$\boxed{E = mc^2}$$

物体的相对论总能量与物体的总质量成正比

——质量与能量不可分割

$$\boxed{\Delta E = (\Delta m)c^2}$$

物体质量与能量变化的关系

一定的质量相应于一定的能量

相对论的质能关系为开创原子能时代提供了理论基础，这是一个具有划时代意义的理论公式 。

例如 **1kg** 水由 0 度加热到 100 度，所增加的能量为

$$\Delta E = 4.18\times10^5 \text{ J} \longrightarrow \Delta m = 4.6\times10^{-12} \text{ kg}$$

质能关系式在原子核反应等过程中已得到证实。

某些原子核反应过程中会发生静止质量减小的现象。

——质量亏损

与这部分亏损的质量相应的能量转化为粒子的动能。

例 氢元素的原子核发生聚变时释放出大量的能量，氢弹爆炸时有如下核聚变发生：

$$ {}_1H^2(\text{氘}) + {}_1H^3(\text{氚}) \rightarrow {}_2H_e{}^4(\text{氦}) + {}_0n^1(\text{中子}) $$

氘的质量为2.0136原子质量单位

氚的质量为3.0160原子质量单位

氦的质量为4.0026原子质量单位

中子质量为1.00867原子质量单位

求 在以上反应中释放的能量(1原子质量单位≈1.660×10^{-27}千克)

解 反应前质量和：2.0136+3.0160=5.0296原子质量单位

反应后质量和：4.0026+1.00867=5.01127原子质量单位

反应前后质量差：

Δm =5.0296-5.01127=0.0183原子质量单位=3.038×10^{-29}千克

由反应前系统的质量大于反应后系统的质量，可知反应释放能量

$$\Delta E = (\Delta m)c^2 \quad = 3.038\times10^{-29}\times\left(3\times10^{8}\right)^2 = 2.74\times10^{-12}\,\mathrm{J}$$

$$= \frac{2.74\times10^{-12}}{1.6\times10^{-19}}\,\mathrm{eV} = 1.71\times10^{7}\,\mathrm{eV}$$

在碳燃烧过程中释放出热能 $C + O_2 \rightarrow CO_2 +$ 约1eV能量

可见核聚变反应释放出能量是化学反应释放出来的能量的一千万倍以上。

问题：(1) 1克物质完全转化为辐射能，将释放多少能量？

$$E_0 = m_0 c^2 = 9\times10^{13}\,\mathrm{J}$$

(2) 能量变化1焦耳，相当于质量改变多少？

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{1}{9\times10^{16}} = 0.11\times10^{-16}\,\mathrm{kg}$$

四. 相对论能量和动量的关系

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \xrightarrow{\text{两边平方}} m^2(1-\beta^2) = m_0^2$$

两边乘以 c^4

$$m^2c^4 = m^2\upsilon^2c^2 + m_0^2c^4$$

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + E_0^2}$$

——相对论能量、动量关系式

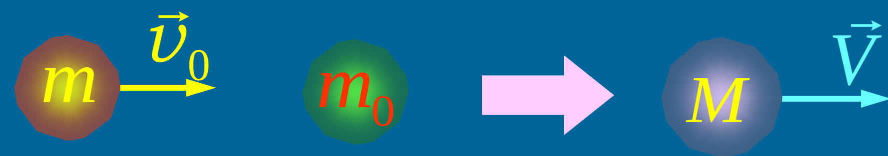
取极限情况考虑，如光子（由能量求动量及质量）

$$\left.\begin{array}{l} m_0 = 0 \\ E = pc \\ p = E/c \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} E = h\nu \\ p = \dfrac{h\nu}{c} = \dfrac{h}{\lambda} \\ m = \dfrac{E}{c^2} = \dfrac{h\nu}{c^2} \end{array}\right.$$

例 两个静质量都为 m_0 的粒子，其中一个静止，另一个以 $\upsilon_0 = 0.8\,c$ 运动，它们对心碰撞以后粘在一起。

求 碰撞后合成粒子的静止质量。

解 取两粒子作为一个系统，碰撞前后动量、能量均守恒，设碰撞后合成粒子的静止质量为 M_0，运动质量为 M，运动速度为 V，则



$$m\upsilon_0 + 0 = MV$$

$$mc^2 + m_0c^2 = Mc^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} M = \dfrac{8}{3}m_0 \\ V = 0.5c \end{cases}$$

$$m = m_0 \Big/ \sqrt{1-\upsilon_0^2/c^2}$$

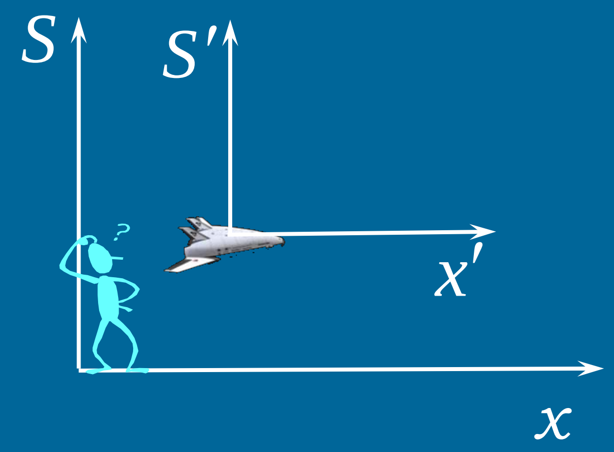
由 $M = \dfrac{M_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ 得

$$M_0 = M\sqrt{1-V^2/c^2} = \frac{8}{3}m_0\sqrt{1-0.5} = 2.31m_0$$

例 火箭相对地球上静止的观察者以速度u=0.99c运动

求 相对此观察者而言，火箭的密度。

解 火箭S'系，地球S系



$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$V = l\,s$　　s为垂直运动方向的物体截面（火箭看成圆柱形）

$$V = l_0\sqrt{1-\beta^2}\,s$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0}{l_0 s(1-\beta^2)} = \frac{\rho_0}{1-\beta^2} = 50.2\rho_0$$

例 一弹簧的倔强系数为$k=10\text{N/m}$，我们将其拉伸0.5m。

求 弹簧对应弹性势能的增加而增加的质量。

解 弹簧弹性势能的增量

$$\Delta E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}\times 10\times 0.5^2=1.25\text{J}$$

$$\Delta m=\frac{\Delta E_p}{c^2}=\frac{1.25}{(3\times 10^8)^2}=1.39\times 10^{-11}\text{kg}$$

Δm是无法观测出的量

例 某粒子的静止质量为 m_0，当其动能等于其静能时，

求 其质量和动量各等于多少？

解 动能 $E_k = mc^2 - m_0 c^2$

$$E_0 = m_0 c^2 \longrightarrow m = 2m_0$$

由质速关系 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \longrightarrow \upsilon = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$

由此得，动量 $p = m\upsilon = \dfrac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} = \sqrt{3}m_0 c$

例 为了使静止质量为 m_0 的粒子的固有时为实验室时间的 n 分之一，其动能为多少？

解

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

□ $\tau = n\tau_0 \qquad \therefore n = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\therefore E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = m_0c^2(n-1)$$

总结

1. 质速关系 $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$

2. 相对论动量 $\vec{p}=m\vec{\upsilon}=m_0\vec{\upsilon}/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$

3. 相对论的动能表达式 $E_K=mc^2-m_0c^2$

4. 质能关系 总 能 量：$E=mc^2$

静止能量：$E_0=m_0c^2$

5. 相对论能量和动量的关系 $E^2=p^2c^2+E_0^2$

例 动能为20千电子伏特的电子，速度为多少？

解
$$E_k = E - E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) E_0$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\beta^2} = \frac{E_0}{E_0 + E_k}$$

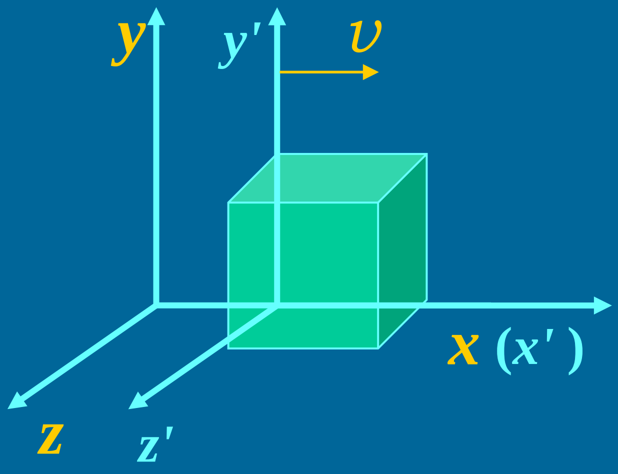
$$\Rightarrow u = c\sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E_0 + E_k} \right)^2}$$

$$E_0 = m_0 c^2 = 9.11 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16} = 8.2 \times 10^{-14}\,\mathrm{J}$$

$$= \frac{8.2 \times 10^{-14}}{1.6 \times 10^{-19}} = 0.51 \times 10^{6}\,\mathrm{eV}$$ (电子静能)

$$\therefore \quad u = c\sqrt{1-(0.962)^2} = 0.82 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$$

例 当一静止体积为V_0，静止质量为 m_0 的立方体沿其一棱以速率υ 运动时，**计算**其体积、质量和密度。



解 $V = l' l_0{}^2 = l_0{}^3 \sqrt{1-\beta^2}$

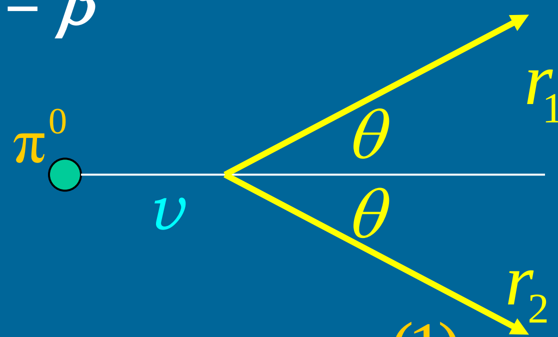
$$= V_0 \sqrt{1-(\upsilon/c)^2}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}}{V_0\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0}{V_0}\frac{1}{1-(\upsilon/c)^2} = \frac{\rho_0}{1-(\upsilon/c)^2}$$

例 一中性介子(π^0)相对于观察者以速度$\upsilon=\beta c$ 运动，后衰变为两个光子。如图所示，若两个光子的运动轨迹与π^0介子原来方向成相等的夹角θ

证明：(1) 两光子有相等的能量 (2) $\cos\theta = \beta$



证： 设两光子的能量分别为E_1和E_2

则动量分别为 $p_1 = \dfrac{E_1}{c}$ $\quad p_2 = \dfrac{E_2}{c}$

由动量守恒

$$\frac{E_1}{c}\sin\theta - \frac{E_2}{c}\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{E_1}{c}\cos\theta + \frac{E_2}{c}\cos\theta = \frac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} \qquad (2)$$

由能量守恒

$$E_1 + E_2 = \frac{m_0\cdot c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} \qquad (3)$$

由(1)式知，$E_1=E_2$，即两光子能量相等,将$E_1=E_2$代入(2)、(3)式，得

$$\frac{\cos\theta}{c} = \frac{\upsilon}{c^2} = \frac{\beta}{c}$$

故有 $\cos\theta = \beta$ 证毕