第四章 根轨迹法

4.3系统闭环零极点分布与阶跃响应的关系

控制系统的闭环极点、零点与系统的稳定性及动态性能有密切关系。对于单位负反馈系统，闭环零点与开环零点相同，闭环极点由根轨迹方程表示出来。

一、闭环极点对系统阶跃响应的影响

开环传递函数

$$G_o(s)=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}\left(s-z_i\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(s-p_j\right)},\quad \begin{aligned}&K^*-\text{根轨迹增益}\\&z_i-\text{开环零点}\\&p_j-\text{开环极点}\end{aligned}$$

闭环传递函数

$$\Phi(s)=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}\left(s-z_i\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(s-s_j\right)},\quad \begin{aligned}&K^*-\text{闭环根增益}\\&z_i-\text{闭环零点}\\&s_j-\text{闭环极点}\end{aligned}$$

4.3系统闭环零极点分布与阶跃响应的关系

输入为单位阶跃信号时，r(t)=1(t),R(s)=1/s，则

$$Y(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{1}{s}\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}\left(s-z_i\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(s-s_j\right)}$$

无重根时

$$=\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{s-s_1}+\cdots+\frac{A_{\mathrm{n}}}{s-s_{\mathrm{n}}}=\frac{A_0}{s}+\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{s-s_j}$$

$$A_0=Y(s)s\big|_{s=0},A_j=Y(s)(s-s_j)\big|_{s=s_j},j=1,2,\ldots,n$$

单位阶跃响应为

$$y(t)=A_0+\sum_{j=1}^{n}A_j\mathrm{e}^{s_jt}$$

响应输出为叠加而成的信号，与模态、分量大小有关。

4.3系统闭环零极点分布与阶跃响应的关系

结论

（1）稳定性：闭环极点s_j必须都位于s左半平面；

（2）快速性：

① 使响应中分量$e^{s_j t}$衰减快，闭环极点应远离虚轴；

② 要使平稳性好，振荡要小，则复数极点最好位于s平面中与负实轴成±45°夹角线附近，所以最佳阻尼比$\zeta=\cos 45°=0.707$，此时系统的快速性和平稳性都较理想；

（3）要使动态过程尽快结束，A_j要小。

① 闭环极点之间尽量远离，闭环零点、闭环极点尽量靠近；

② 闭环零点可以削弱其附近闭环极点对系统的影响；

$$A_j=\frac{1}{s_j}\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}\left(s_j-z_i\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(s_j-s_k\right)}\Bigg|_{k\neq j}$$

（4）高阶系统的近似处理，估算性能指标：闭环主导极点。

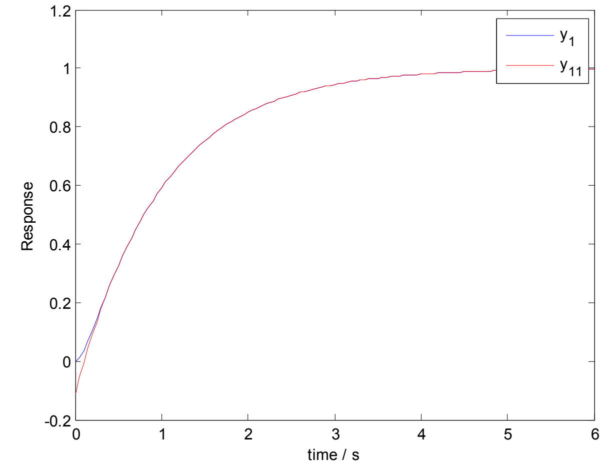
二、闭环零点对系统阶跃响应的影响

例1：闭环传递函数 $\Phi_1(s)=\dfrac{10}{(s+1)(s+10)}$ ，求单位阶跃响应。

$$Y_1(s)=R(s)\Phi_1(s)=\frac{1}{s}-\frac{1.11}{s+1}+\frac{0.11}{s+10}$$

$$y_1(t)=1-1.11e^{-t}+0.11e^{-10t}\approx 1-1.11e^{-t}$$

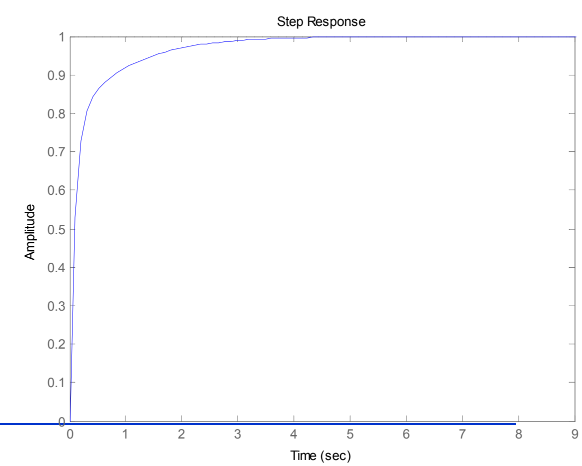
可见：-1为主导极点， $\Phi_1(s)\approx\dfrac{10}{s+1}$



增加一个闭环零点： $\Phi_2(s)=\dfrac{10(0.8s+1)}{(s+1)(s+10)}$

$$Y_2(s)=R(s)\Phi_2(s)=\frac{1}{s}-\frac{0.22}{s+1}-\frac{0.78}{s+10}$$

$$y_2(t)=1-0.22e^{-t}-0.78e^{-10t}$$



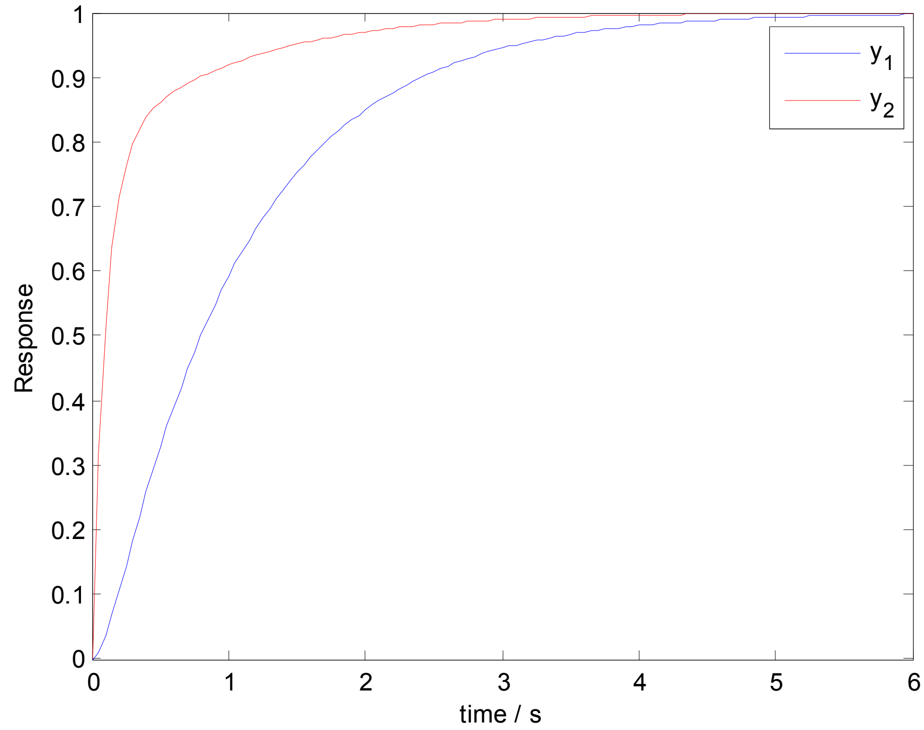
4.3系统闭环零极点分布与阶跃响应的关系

$$\Phi_1(s)=\frac{10}{(s+1)(s+10)}$$

$$y_1(t)=1-1.11e^{-t}+0.11e^{-10t}$$

$$\Phi_2(s)=\frac{10(0.8s+1)}{(s+1)(s+10)}$$

$$y_2(t)=1-0.22e^{-t}+0.78e^{-10t}$$



- 可见：零点不影响动态响应分量的个数，也不影响系统的稳定性，但显著改变了动态性能。
- Note：零点对响应起*微分加快*作用，使系统动态响应在初始阶段冲劲大，但有可能引起超调。

三、闭环主导极点

1. 满足下列条件的极点称为主导极点：

- *稳定系统的闭环极点都在s左半平面；*
- 闭环系统若存在离虚轴最近的一对共轭极点或一个实极点**或它们的组合**；
- 极点附近无闭环零点；
- 其他极点距虚轴的距离是离虚轴最近的极点距虚轴的距离的5倍以上。

主导极点在响应y(t)中的对应项衰减最慢，系数最大，系统的瞬态性能指标主要由它决定。**具有主导极点的高阶系统可近似为二阶或一阶系统。**

4.3系统闭环零极点分布与阶跃响应的关系

2.利用闭环主导极点估算系统的性能指标

具有主导极点的高阶系统可近似为二阶或一阶系统。此时高阶系统的特性可用等效低阶系统的特性做近似的估计分析。

[例如]: $p_{1,2}=-\zeta_1\omega_{n1}\pm j\omega_{n1}\sqrt{1-\zeta_1^{\;2}}=-\sigma\pm j\omega_d$ 为某高阶系统的主导极点，则单位阶跃响应近似为：

$$y(t)\approx a_0+e^{-\sigma t}(\beta_1\cos\omega_d t+\gamma_1\sin\omega_d t)$$

3.高阶系统近似简化原则：

- 在近似前后，确保输出稳态值不变；
- 在近似前后，瞬态过程基本相差不大。

具体规则是：**在时间常数形式的开环或闭环传递函数上略去小时间常数。**

四、闭环偶极子

复平面上很接近的一对**闭环零、极点**（其相互距离比本身的模值小一个数量级以上），就构成了**偶极子**。

- **距离原点非常近的偶极子**对系统暂态响应的影响必须考虑；
- 远离原点的和其他极点的偶极子对瞬态响应的影响可以忽略；
- 确定闭环主导极点时，应将**偶极子**去除。

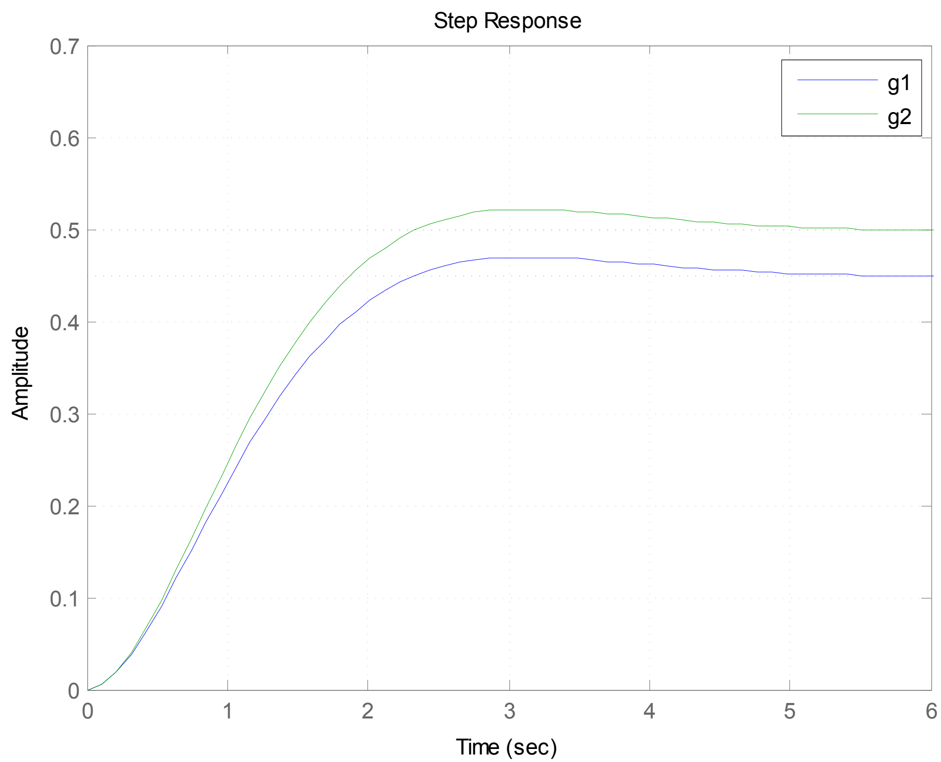
4.3系统闭环零极点分布与阶跃响应的关系

例1:

$$\Phi_1(s)=\frac{K^*(s+9)}{(s+10)(s^2+2s+2)} \qquad \Phi_2(s)=\frac{K^*}{(s^2+2s+2)}$$

```
num1=[1 9];
den11=[1 10];
den12=[1 2 2];
den1=conv(den11,den12);
g1=tf(num1,den1);
figure(1);
step(g1);
hold on;

num2=[1];
den2=[1 2 2];
g2=tf(num2,den2);
step(g2);
```

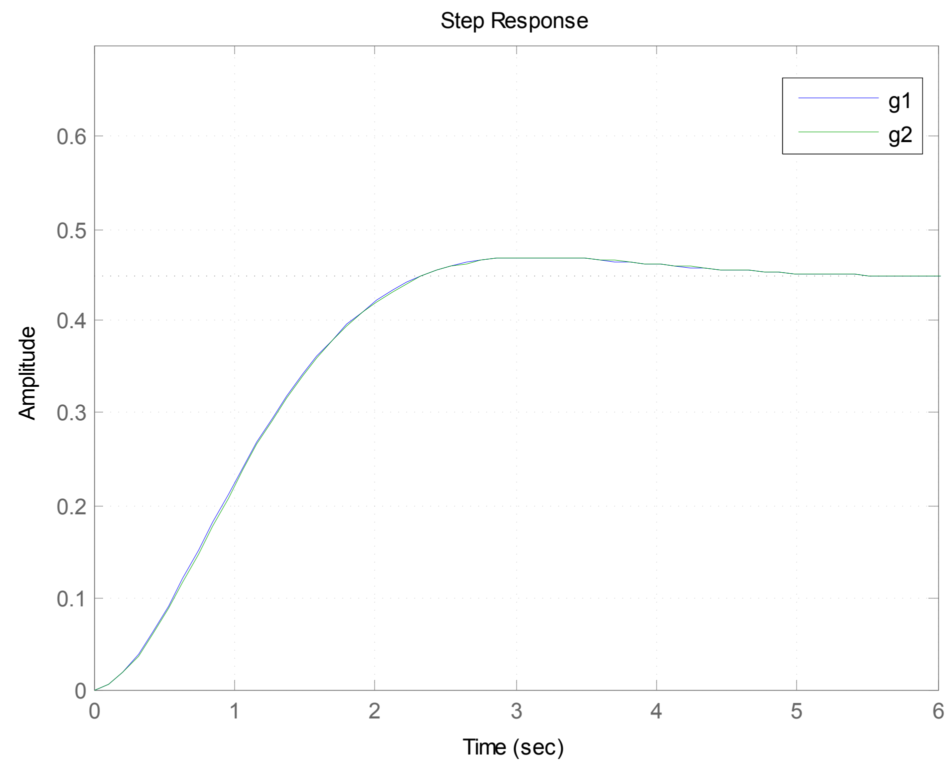


4.3系统闭环零极点分布与阶跃响应的关系

例2: $\Phi_1(s)=\dfrac{K^*(s+9)}{(s+10)(s^2+2s+2)}$ $\qquad\Phi_2(s)=\dfrac{0.9K^*}{(s^2+2s+2)}$

```
num1=[1 9];
den11=[1 10];
den12=[1 2 2];
den1=conv(den11,den12);
g1=tf(num1,den1);
figure(1);
step(g1);
hold on;

num2=[0.9];
den2=[1 2 2];
g2=tf(num2,den2);
step(g2);
```



Thank You！