统计物理

习题课

例1： 自由粒子在边长为 L 的立方形容器中运动。若德布罗意波在器壁的边界条件采用周期性边界条件，则粒子动量分量的可能值为：

$$p_x = \frac{2\pi\hbar}{L} n_x, \qquad n_x = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

$$p_y = \frac{2\pi\hbar}{L} n_y, \qquad n_y = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

$$p_z = \frac{2\pi\hbar}{L} n_z, \qquad n_z = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

三维自由粒子能量的可能值为

$$\varepsilon = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) = \frac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)$$

试证明，在体积 V 内，在 ε 到 $\varepsilon+d\varepsilon$ 的能量范围内，三维自由粒子的状态数为：

$$D(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}d\varepsilon$$

解答： 由题给的动量分量可能值，可得

$$dn_x dn_y dn_z=\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 dp_x dp_y dp_z=\frac{V}{h^3}dp_x dp_y dp_z \qquad (1)$$

上式左方 $dn_x dn_y dn_z$ 表示量子数空间中的一个体积元，也就是在此体积元中的量子态数，所以（1）式表示在体积 V 中，动量分量在 $p_x\rightarrow p_x+dp_x$，$p_y\rightarrow p_y+dp_y$，$p_z\rightarrow p_z+dp_z$ 范围内的量子态数。

由（1）式可得在体积 V 内，动量大小在 $p \to p+dp$范围内的量子态数为

$$\frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp \qquad (2)$$

由自由粒子 的动量能量关系 $\varepsilon = \dfrac{p^2}{2m}$ ，可得

$$p = \sqrt{2m\varepsilon}, \qquad pdp = md\varepsilon \qquad (3)$$

将（3）式代入（2）式，得三维自由粒子的量子态数为

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon$$

例2：试证明，对于一维自由粒子，在长度为 L 内，在 ε 到 $\varepsilon+d\varepsilon$ 的能量范围内，量子态数为

$$D(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{2L}{h}\left(\frac{m}{2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}d\varepsilon$$

解答： 一维自由粒子在 μ 空间体积元 $dxdp_x$ 内可能的量子态数为

$$\frac{dxdp_x}{h}$$

在长度 L 内，动量大小在 p 到 $p+dp$ 范围内（注意动量可以有正负两个可能的方向）的量子态数为

$$\frac{2L}{h}dp$$

将能量动量关系

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$$

代入，即得

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2L}{h}\left(\frac{m}{2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} d\varepsilon$$

例3： 试证明，对于二维自由粒子，在面积 L^2 内，在 ε 到 $\varepsilon+d\varepsilon$ 的能量范围内，量子态数为

$$D(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{2\pi L^2}{h^2}md\varepsilon$$

解答： 二维自由粒子在 μ 空间体积元 $dxdydp_xdp_y$ 内可能的量子态数为

$$\frac{dxdydp_xdp_y}{h^2}$$

在面积 L^2 内，动量大小在 p 到 $p+dp$ 范围内（动量方向任意），二维自由粒子可能的量子态数为

$$\frac{2\pi L^2}{h^2}pdp$$

将能量动量关系

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$$

代入，即得

$$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2\pi L^2}{h^2} m d\varepsilon$$

例4： 在极端相对论情形下，粒子的能量动量关系为

$$\varepsilon = cp$$

试求在体积 V 内，在 ε 到 $\varepsilon + d\varepsilon$ 的能量范围内，三维自由粒子的量子态数。

解答： 在体积 V 内，动量大小在 $p \to p + dp$ 范围内三维自由粒子可能的状态数为

$$\frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp$$

将极端相对论粒子的能量动量关系

$$\varepsilon = cp$$

代入，可得在体积 V 内，在 ε 到 $\varepsilon+d\varepsilon$ 的能量范围内，极端相对论粒子的量子态数为

$$D(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{4\pi V}{(ch)^3}\varepsilon^2 d\varepsilon$$

例5： 试根据公式 $p=-\sum_l a_l \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial V}$ 证明，对于非相对论粒子

$$\varepsilon=\frac{p^2}{2m}=\frac{1}{2m}\left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^2\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right) \qquad \left(n_x,n_y,n_z=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$$

有

$$p=\frac{2}{3}\frac{U}{V}$$

上述结论对于玻尔兹曼分布，玻色分布和费米分布都成立。

解答： 处在边长为 L 的立方体中，非相对论粒子的能量本征值为

$$\varepsilon_{n_x n_y n_z}=\frac{1}{2m}\left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^2\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right) \qquad \left(n_x,n_y,n_z=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$$

为书写简便，我们将上式简记为

$$\varepsilon_l = aV^{-\frac{2}{3}}$$

其中 $V = L^3$ 是系统的体积，常量 $a = \dfrac{(2\pi\hbar)^2}{2m}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)$ ，并以单一指标 l 代表 n_x, n_y, n_z 三个量子数。

因此可得

$$\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial V} = -\frac{2}{3} aV^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{\varepsilon_l}{V}$$

代入压强公式，有

$$p = -\sum_l a_l \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial V} = \frac{2}{3V}\sum_l a_l \varepsilon_l = \frac{2}{3}\frac{U}{V}$$

式中，$U = \sum_l a_l \varepsilon_l$ 是系统的内能。

上述分布未涉及分布 $\{a_l\}$ 的具体表达式，因此对于玻尔兹曼分布、玻色分布和费米分布都成立。

例6： 试根据公式 $p=-\sum_l a_l \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial V}$ 证明，对于相对论粒子

$$\varepsilon = cp = c\frac{2\pi\hbar}{L}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \left(n_x,n_y,n_z=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$$

有

$$p=\frac{1}{3}\frac{U}{V}$$

上述结论对于玻尔兹曼分布，玻色分布和费米分布都成立。

解答： 处在边长为 L 的立方体中，极端相对论粒子的能量本征值为

$$\varepsilon_{n_x n_y n_z} = c\frac{2\pi\hbar}{L}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \left(n_x,n_y,n_z=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$$

为书写简便，我们将上式简记为

$$\varepsilon_l = aV^{-\frac{1}{3}}$$

其中 $V = L^3$ 是系统的体积，常量 $a = 2\pi\hbar c\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ，并以单一指标 l 代表 n_x, n_y, n_z 三个量子数。

因此可得

$$\frac{\partial \varepsilon_l}{\partial V} = -\frac{1}{3} aV^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3}\frac{\varepsilon_l}{V}$$

代入压强公式，有

$$p = -\sum_l a_l \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial V} = \frac{1}{3V}\sum_l a_l \varepsilon_l = \frac{1}{3}\frac{U}{V}$$

式中，$U = \sum_l a_l \varepsilon_l$ 是系统的内能。

上述分布未涉及分布 $\{a_l\}$ 的具体表达式，因此对于玻尔兹曼分布、玻色分布和费米分布都成立。

例7： 已知粒子遵从经典玻尔兹曼分布，其能量的表达式为

$$\varepsilon = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + ax^2 + bx$$

其中a，b是常量，求粒子的平均能量。

解答： 应用能量均分定理求粒子的平均能量时，需要注意所给能量表达式 ε 中 ax^2 和 bx 两项都是 x 的函数，不能直接将能量均分定理用于 ax^2 项而得出 $\overline{ax^2} = \frac{1}{2}kT$ 的结论。要通过配方将 ε 表达为

$$\varepsilon = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

在上式中，仅有第四项是 x 的函数，又是平方项。由能量均分定理知

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2m}\overline{\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)}+a\overline{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}-\frac{b^2}{4a}$$

$$=2kT-\frac{b^2}{4a}$$

例8： 试求双原子分子理想气体的振动熵。

解答： 将双原子分子中原子的相对振动近似看作简谐振动。以 ω 表示振动的圆频率，振动能级为

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

振动配分函数为

$$Z_1^v = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

$$\ln Z_1^v = -\frac{1}{2}\beta\hbar\omega - \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)$$

双原子理想气体的熵为

$$S^v = Nk\left(\ln Z_1^v - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_1^v\right)$$

$$= Nk\left[\frac{\beta\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} - \ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)\right]$$

$$= Nk\left[\frac{\frac{\theta_v}{T}}{e^{\frac{\theta_v}{T}}-1} - \ln\left(1-e^{-\frac{\theta_v}{T}}\right)\right]$$

例9： 计算温度为T时，在体积V内光子气体的平均总光子数，并据此估算

（a）温度为1000K的平衡辐射。

（b）温度为3K的宇宙背景辐射中光子的数密度。

解答： 在体积V内，在 $\omega \to \omega + d\omega$ 的圆频率范围内光子的量子态数为

$$D(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega$$

温度为T时平均光子数为

$$\bar{N}(\omega, T)d\omega = \frac{D(\omega)d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

因此温度为*T*时，在体积*V*内光子气体的平均光子数为

$$\bar{N}(T)=\frac{V}{\pi^2c^3}\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}$$

引入变量 $x=\frac{\hbar\omega}{kT}$，上式可表示为

$$\bar{N}(T)=\frac{V}{\pi^2c^3}\left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{e^x-1}$$

$$=2.404\frac{k^3}{\pi^2c^3\hbar^3}VT^3$$

或

$$n(T) = 2.404\frac{k^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3}T^3$$

在1000K下，有

$$n \approx 2\times10^{16}\,m^{-3}$$

在3K下，有

$$n \approx 5.5\times10^{8}\,m^{-3}$$

例10： 银的导电电子数密度为 $5.9\times10^{28}m^{-3}$，试求0K时电子气体的费米能量、费米速率和简并压。

解答： 0K下金属中自由电子气体的费米能量（电子的最大能量）、费米速率（电子的最大速率）和电子气体的压强取决于电子气体的密度 n。

式（8.5.6）给出

$$\mu(0)=\frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{\frac{2}{3}}$$

将 $m=9.1\times10^{-31}kg$，$\hbar=1.05\times10^{-34}J\cdot s$，$n=5.9\times10^{28}m^{-3}$ 代入，即得

$$\mu(0) = 0.876\times10^{-18} J = 5.6eV$$

费米速率等于

$$v_F = \sqrt{\frac{2\mu(0)}{m}} = 1.4\times10^{6} m\cdot s^{-1}$$

式（8.5.8）给出0K下电子气体的压强为

$$p(0) = \frac{2}{5}n\mu(0) \approx 2.1\times10^{10} Pa$$