理论力学

Engineering mechanics
Theoretical mechanics

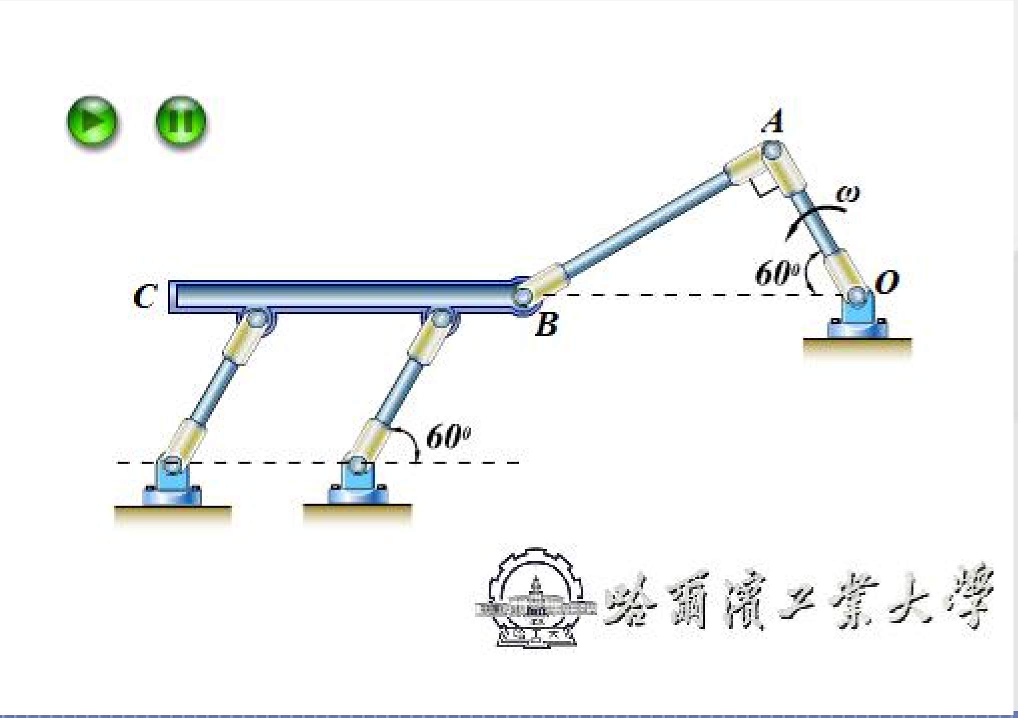
运 动 学

第六章 刚体的简单运动

§6－1 刚体的平行移动

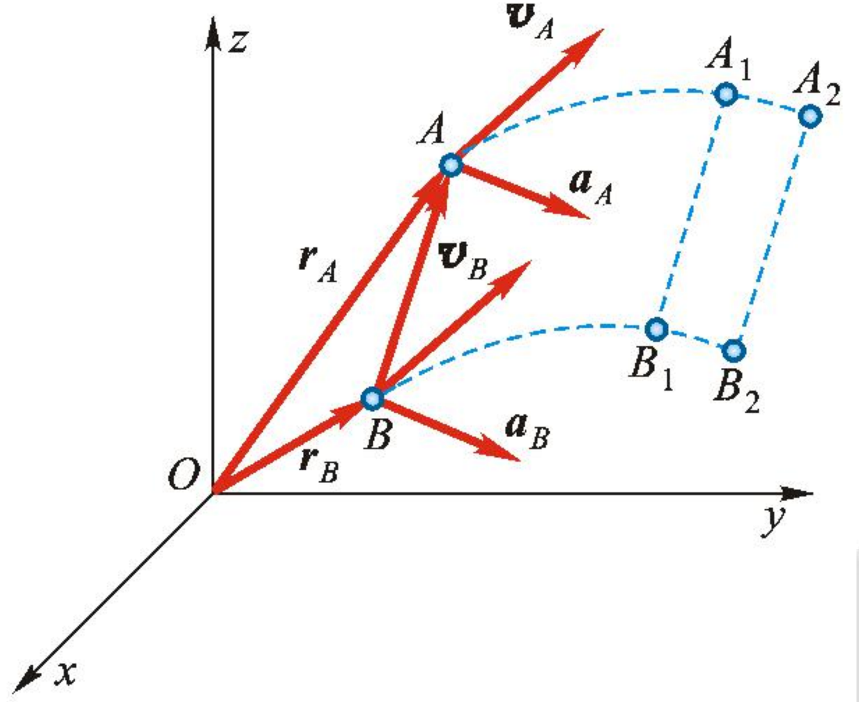
1. 定义

刚体内任一直线段在运动过程中始终平行于其初始位置，这种运动称为平行移动，简称平移。



2. 运动方程

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$$



3. 速度和加速度分布

因为 $$\frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{AB}\right)}{\mathrm{d}t} = 0$$

所以 $$\vec{v}_B = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_A}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_A \qquad \vec{a}_B = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_A}{\mathrm{d}t} = \vec{a}_A$$

刚体平移→点的运动

§6-2　刚体绕定轴的转动

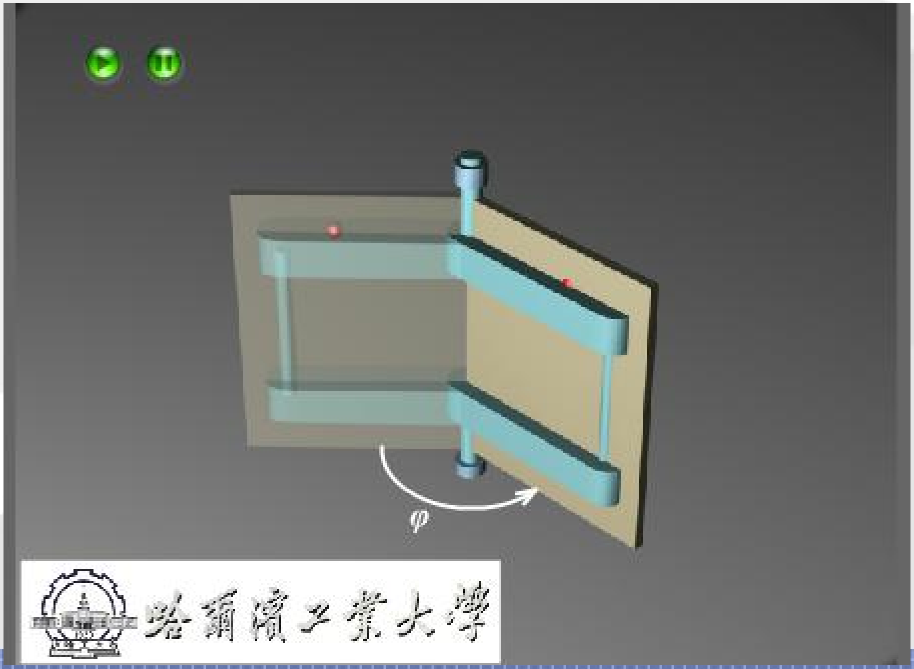
1. 定义

刚体上(或其扩展部分)两点保持不动，则这种运动称为刚体绕定轴转动，简称刚体的转动。

转轴 ：两点连线　　转角: φ　单位:弧度(rad)

2. 运动方程

$$\varphi = f(t)$$



3. 角速度和角加速度

角速度 $$\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\begin{cases}\text{大小}:\left|\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right|\\ \text{方向：逆时针为正}\end{cases}$$

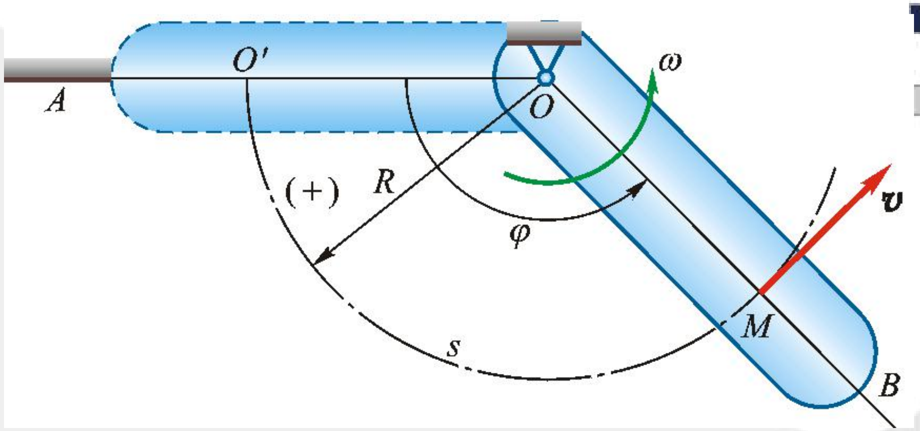
角加速度 $$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=\dot{\omega}=\ddot{\varphi}$$

匀速转动 $$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=0 \qquad \varphi=\varphi_0+\omega t$$

匀变速转动 $$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\mathrm{cont} \qquad \omega=\omega_0+\alpha t$$

$$\varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

§ 6-3　转动刚体内各点的速度和加速度



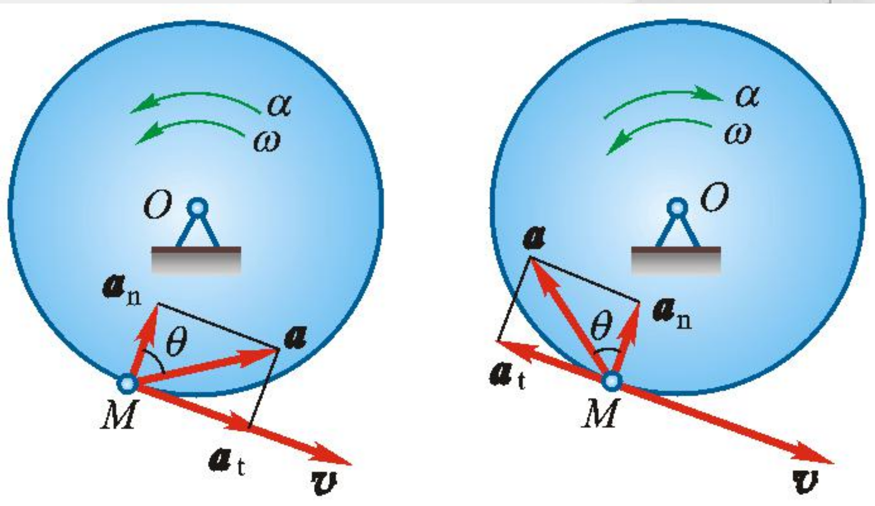
1. 点的运动方程

$$s = R\varphi$$

2. 速度

$$v = \dot{s} = R\dot{\varphi} = R\omega$$

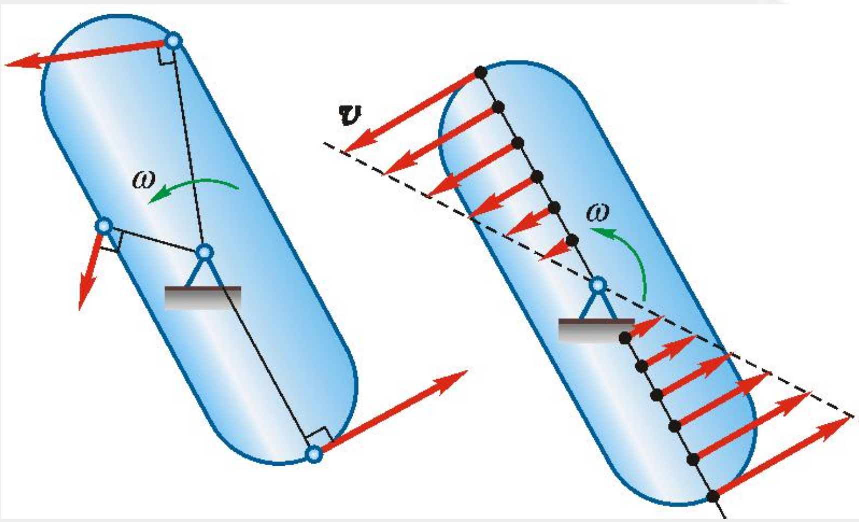
3. 加速度

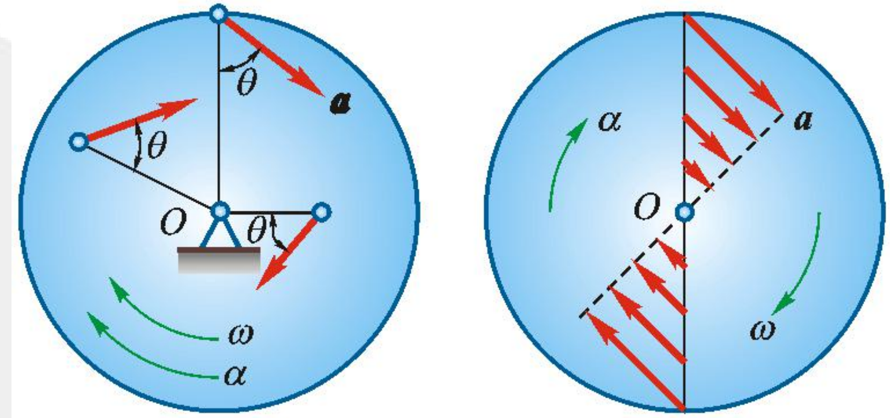


$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \ddot{s} = R\alpha$$

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{1}{R}(R\omega)^2 = R\omega^2$$

4. 速度与加速度分布图





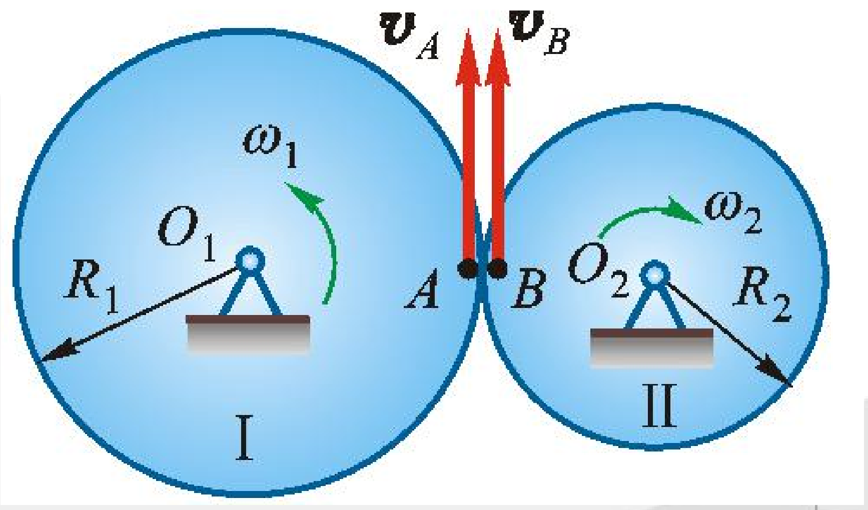
$$v = R\omega$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

$$\tan\theta = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\alpha}{\omega^2}$$

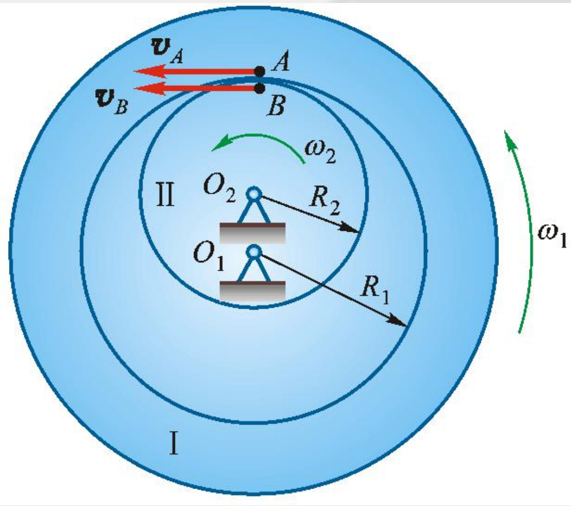
§6-4 轮系的传动比

1. 齿轮传动



① 啮合条件

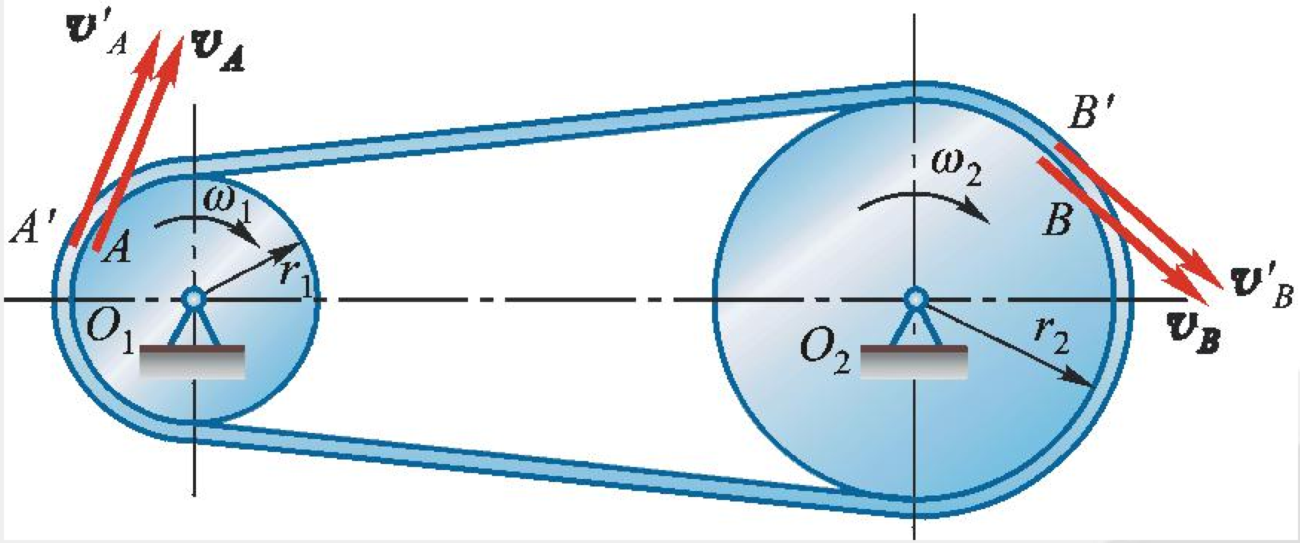
$$R_1\omega_1 = v_A = v_B = R_2\omega_2$$



② 传动比

$$i_{12} = \pm\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{R_2}{R_1} = \pm\frac{z_2}{z_1}$$

2.带轮传动



$$r_1\omega_1 = v_A = v'_A = v'_B = v_B = r_2\omega_2$$

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

§6-5 以矢量表示角速度和角加速度 以矢积表示点的速度和加速度

1. 角速度矢量和角加速度矢量

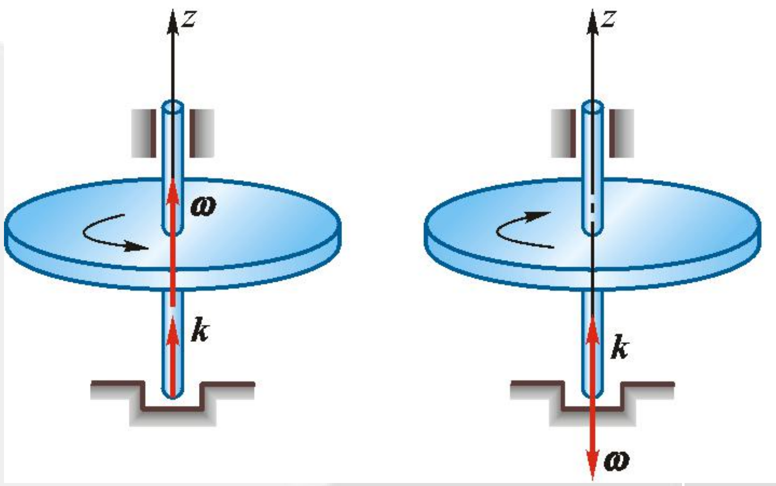
角速度矢量

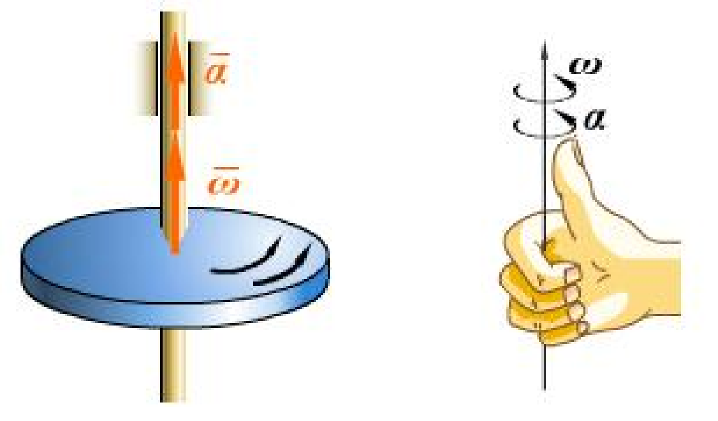
$$\vec{\omega}\begin{cases}\text{大小} & |\vec{\omega}| = |\omega| = \left|\dfrac{d\varphi}{dt}\right| \\ \text{作用线} & \text{沿轴线 滑动矢量} \\ \text{指向} & \text{右手螺旋定则}\end{cases}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = \omega\vec{k}}$$

角加速度矢量

$$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\vec{k} = \alpha\vec{k}}$$

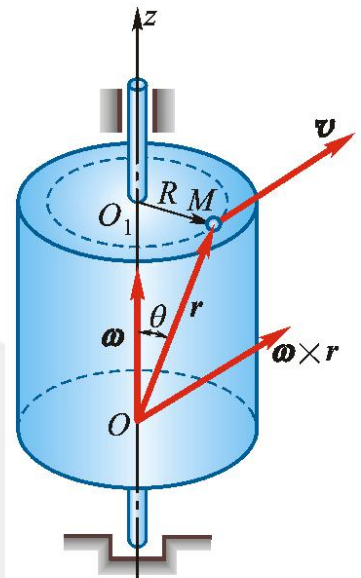




(a) (b)

2. 绕定轴转动刚体上点的速度和加速度

速度 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}\begin{cases}\text{大小} & |\vec{\omega}|\cdot|\vec{r}|\sin\theta=|\vec{\omega}|R=|\vec{v}| \\ \text{方向} & \text{右手定则}\end{cases}$

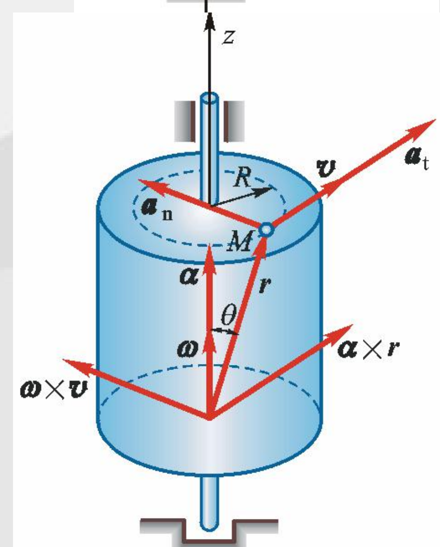


加速度 $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega}\times\vec{r})$

$$=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$$

$$=\vec{a}_{\mathrm{t}}+\vec{a}_{\mathrm{n}}$$



$\vec{a}_{\mathrm{t}}=\vec{\alpha}\times\vec{r}$ M点切向加速度

$\vec{a}_{\mathrm{n}}=\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ M点法向加速度

例6-4

已知：刚体绕定轴转动，已知转轴通过坐标原点O，角速度矢为 $\vec{\omega}=5\sin\frac{\pi t}{2}\vec{i}+5\cos\frac{\pi t}{2}\vec{j}+5\sqrt{3}\vec{k}$ 。

求：t =1s时，刚体上点M（0，2，3）的速度矢及加速度矢。

解：

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5\sin\frac{\pi t}{2} & 5\cos\frac{\pi t}{2} & 5\sqrt{3}\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=-10\sqrt{3}\vec{i}-15\vec{j}+10\vec{k}$$

$$\vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\overline{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$$

$$=\left(-\frac{15}{2}\pi+75\sqrt{3}\right)\vec{i}-200\vec{j}-75\vec{k}$$

例6-5

已知：某定轴转动刚体的转轴通过点M_0（2，1，3），其角速度矢 $\vec{\omega}$ 的方向余弦为0.6，0.48，0.64，角速度的大小ω=25rad/s 。

求：刚体上点M（10，7，11）的速度矢。

解： 角速度矢量

$$\vec{\omega} = \omega \vec{n} \qquad \text{其中} \ \vec{n} = (0.6, 0.48, 0.64)$$

M点相对于转轴上一点M_0的矢径

$$\vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_{M_0} = (10,7,11) - (2,1,3) = (8,6,8)$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega(\vec{n} \times \vec{r}) = \omega \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.6 & 0.48 & 0.64 \\ 8 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 8\vec{j} - 6\vec{k}$$

例6-6

一矢量绕z轴以角速度ω转动，若$|\mathbf{a}|$=常量

求：$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$

解： 将矢量的端点A看成是绕z轴作定轴转动刚体上的一点

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{a}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}$$