



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

# 航天器控制原理



冯冬竹

电话: 13389281325

邮箱: [dzhfeng@xidian.edu.cn](mailto:dzhfeng@xidian.edu.cn)

空间科学与技术学院 导航控制系



西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY

# 目录

CONTENTS

01

绪论

02

航天器的轨道与轨道力学

03

航天器的姿态运动学和动力学

04

航天器姿态控制系统的组成与分类

05

航天器的被动姿态控制系统

06

航天器主动姿态稳定系统



# 航天器的被动姿态控制系统

01

自旋卫星的稳定性和章动性

02

自旋卫星的章动阻尼

03

双自旋卫星稳定系统

04

重力梯度稳定系统

05

重力梯度稳定卫星的天平动阻尼

06

重力梯度稳定系统的伸展杆

07

其他被动姿态稳定系统



## 第四讲 · 重力梯度稳定系统

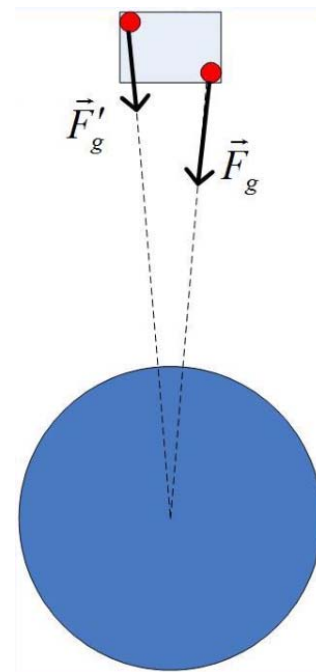
•01 重力梯度稳定原理

•02 重力梯度力矩

•03 稳定性分析

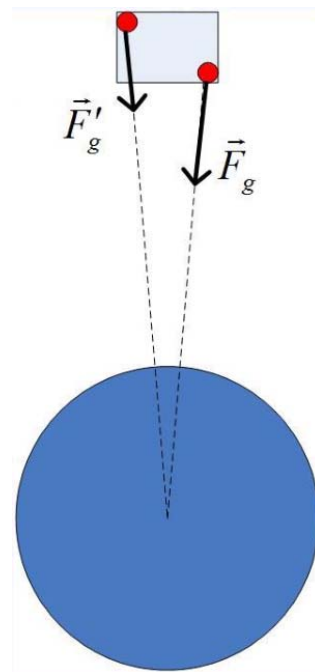


- 在引力场中，由于物体内部各质点所受的引力不同，对其质心产生的引力梯度矩也将随其质量分布的几何尺度及其在引力场中的角位置等的不同而不同。





- 重力梯度被动稳定就是航天器利用地球或其他天体的引力场，在不依赖飞轮、推力器和伺服系统等主动控制部件的情况下，获得对地球或其他天体姿态定向的一种稳定方式。
- ✓ 优点：寿命长，功耗需求低
- ✓ 缺点：控制力矩小，需要天平动阻尼，指向精度低



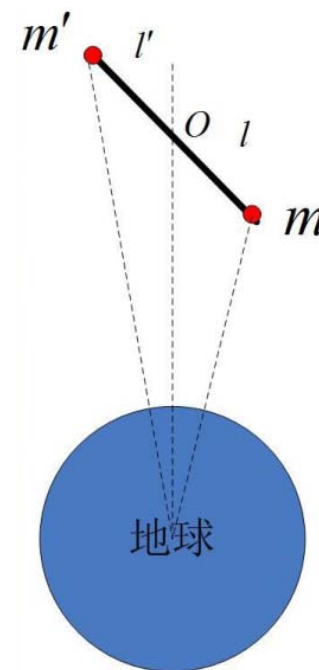


- **基本原理**：利用航天器各部分质量在重力场中具有不同的重力，以及在轨道运动中产生不同的离心力，重力和离心力的合力产生一个恢复力矩，即**重力梯度力矩**。这个恢复力矩虽然很小，但是它能起稳定作用，使航天器的某根体坐标轴指向地球。



□ 用哑铃式结构说明重力梯度稳定的原理：

- ✓ 哑铃两端质量  $m$  和  $m'$  相等,  $m = m'$
- ✓ 哑铃两端距中心的臂长  $l$  和  $l'$  相等,  $l = l'$
- ✓ 哑铃臂无质量（也可以理解为已等效至两端）。



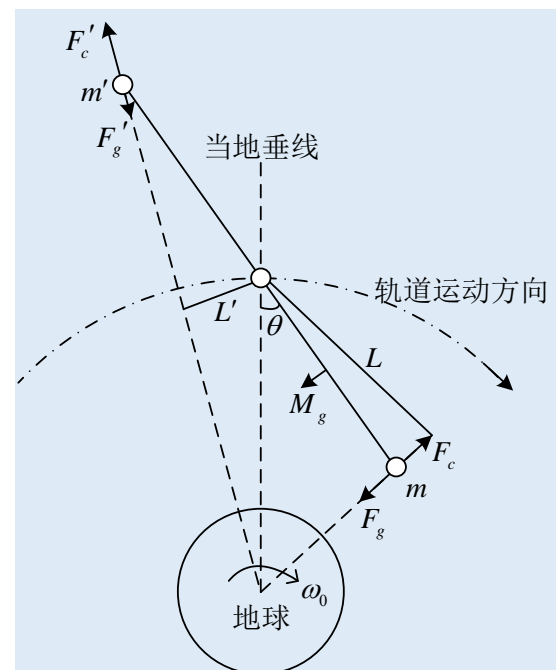




## □ 俯仰通道

□ 哑铃式卫星在轨道平面内（俯仰通道）偏离当地垂线时的情况。

✓  $\theta$  为俯仰角。





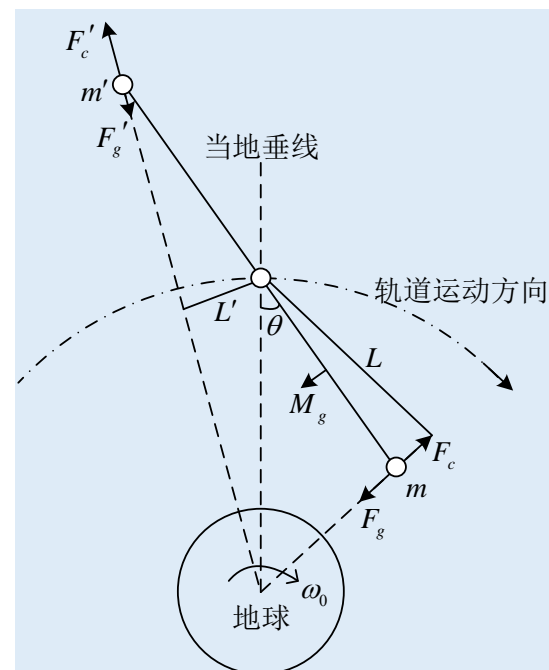
- 质量  $m$  更靠近地心，它所受重力  $F_g$  比质量  $m'$  所受重力  $F_g'$  大。
- 较大重力  $F_g$  对哑铃质量中心的力臂也较大。

$$F_g > F_g'$$

$$L > L'$$

- 哑铃两端质量  $m$  和  $m'$  所产生的净力矩为：

$$M_g = F_g L - F_g' L'$$

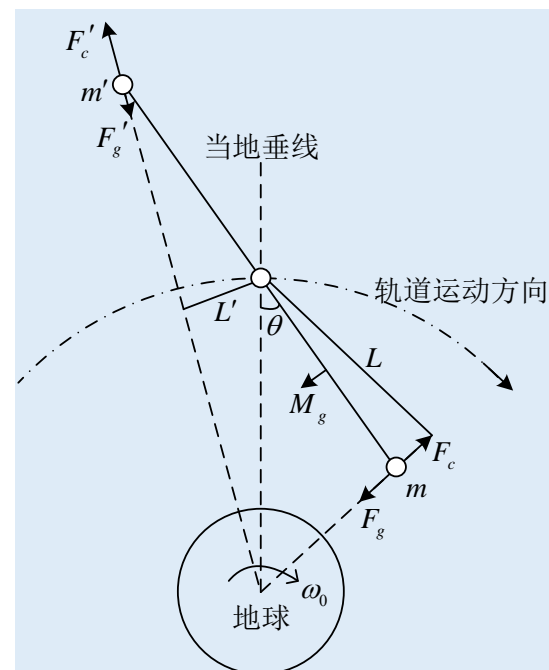




□ 由地心、端质量质心和哑铃中心所构成的两个三角形面积相等：

$$RL = R'L'$$

✓  $R$  和  $R'$  分别为两哑铃端质量  $m$  和  $m'$  到地心的距离。





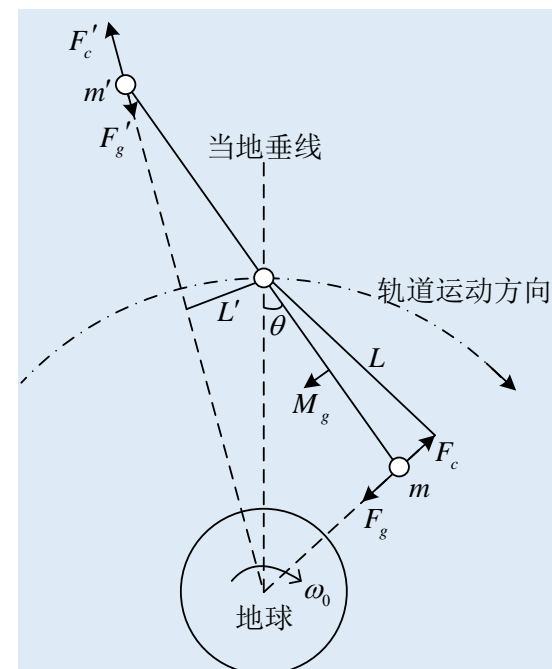
□ 质量  $m$  和  $m'$  的离心力  $F_c$  和  $F'_c$  对卫星质量中心产生的力矩为：

$$M_c = m\omega_0^2 RL$$

$$M'_c = m'\omega_0^2 R'L'$$

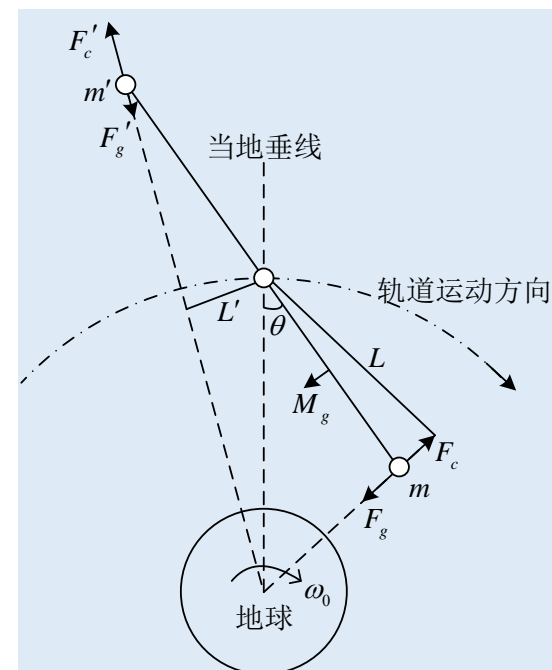


$$M_c = M'_c$$





- 在俯仰平面内，质量 $m$ 和 $m'$ 的离心力所产生的力矩相互抵消，恢复力矩仅由质量 $m$ 和 $m'$ 在重力场中所受重力而产生。

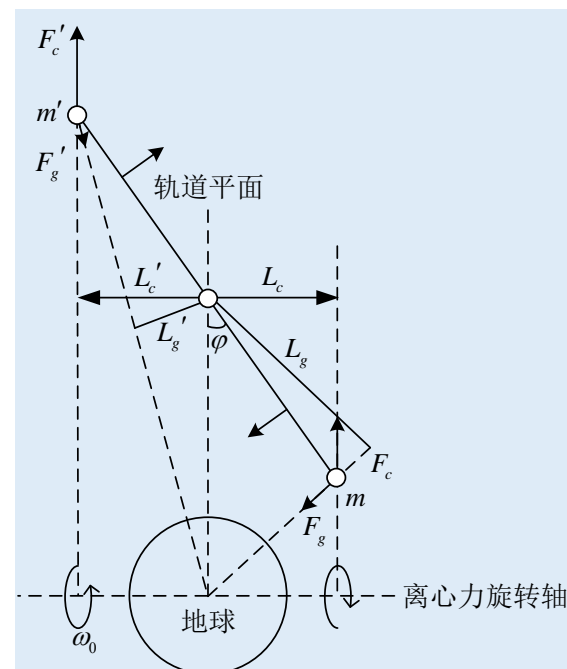




## □ 滚动通道

□ 在轨道法平面（即滚动平面）内哑铃式卫星偏离铅垂线的情况。

✓  $\varphi$  为滚动角。





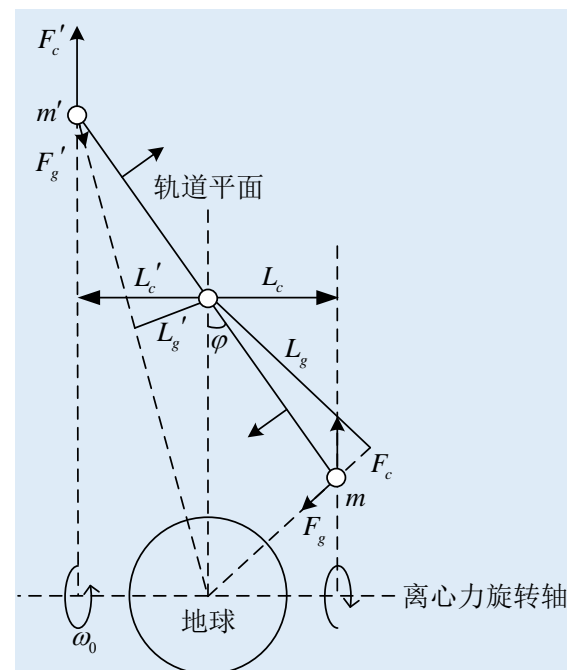
- 质量  $m$  所受重力  $F_g$  和相对于卫星质量中心的力臂  $L_g$  都比质量  $m'$  的要大。

$$F_g > F_g'$$

$$L_g > L_g'$$

- 在轨道法平面所受净重力矩：

$$M_g = F_g L_g - F_g' L_g'$$

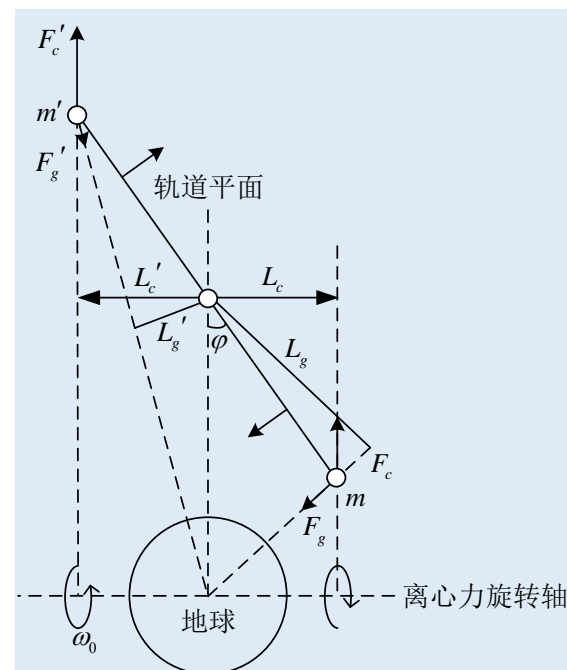




- 在轨道法平面除了重力矩以外，还有质量  $m$  和  $m'$  围绕地心旋转所产生的离心力矩。因为哑铃两端质量  $m$  和  $m'$  与旋转中心距离不一样，所产生离心力也不一样  $F'_c > F_c$ ，但是作用力臂相等。

- 由离心力所产生的净恢复力矩为：

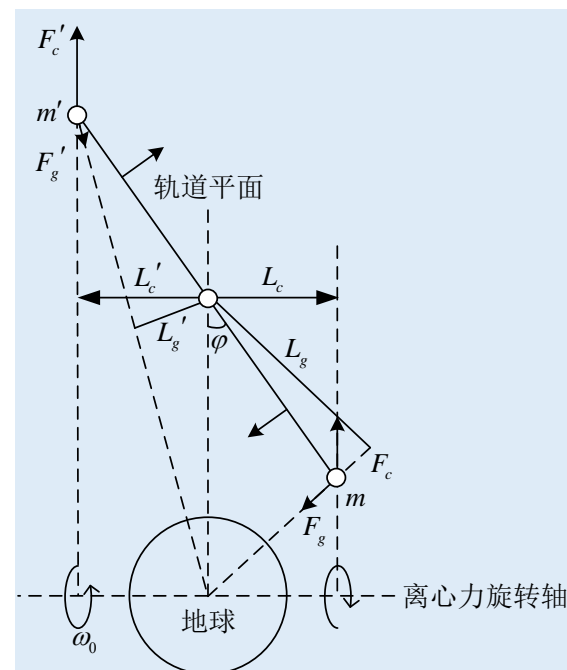
$$M_c = F'_c L'_c - F_c L_c = (F'_c - F_c) L_c$$







- 在滚动平面内，恢复力矩不仅取决于重力而且还取决于离心力。  
这两种力产生的力矩方向相同，所以它比在俯仰平面的恢复力矩要大。



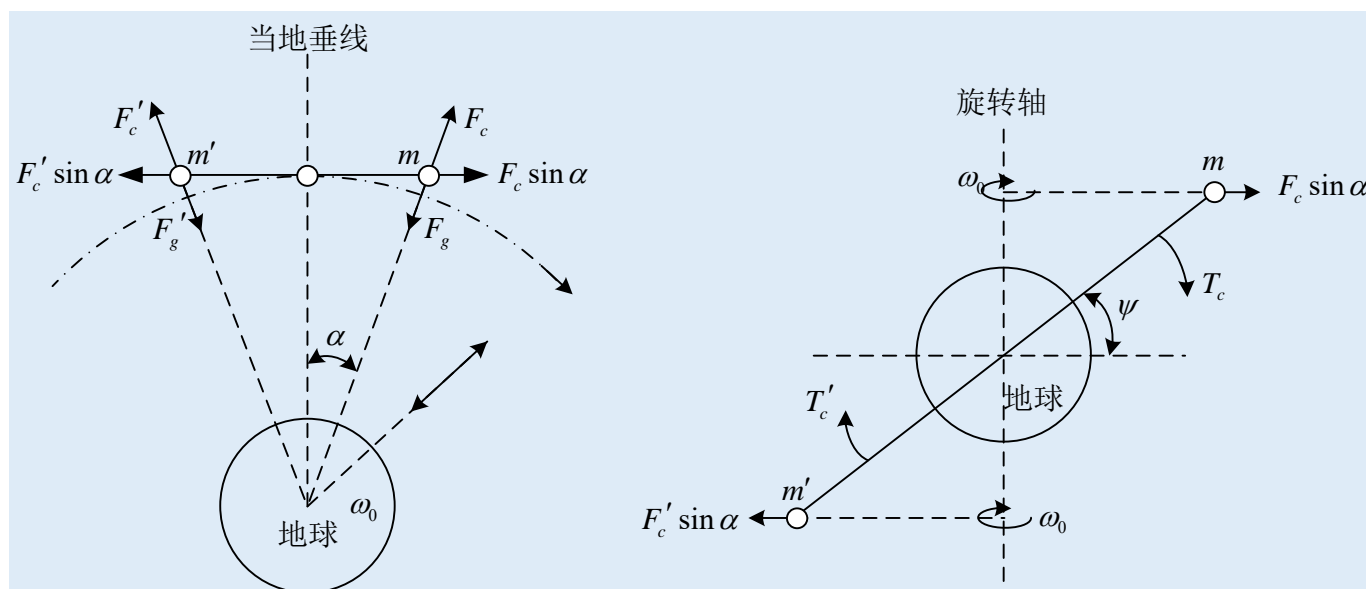


## □ 偏航通道

□ 偏航平面内哑铃式卫星偏离速度方向的情况。

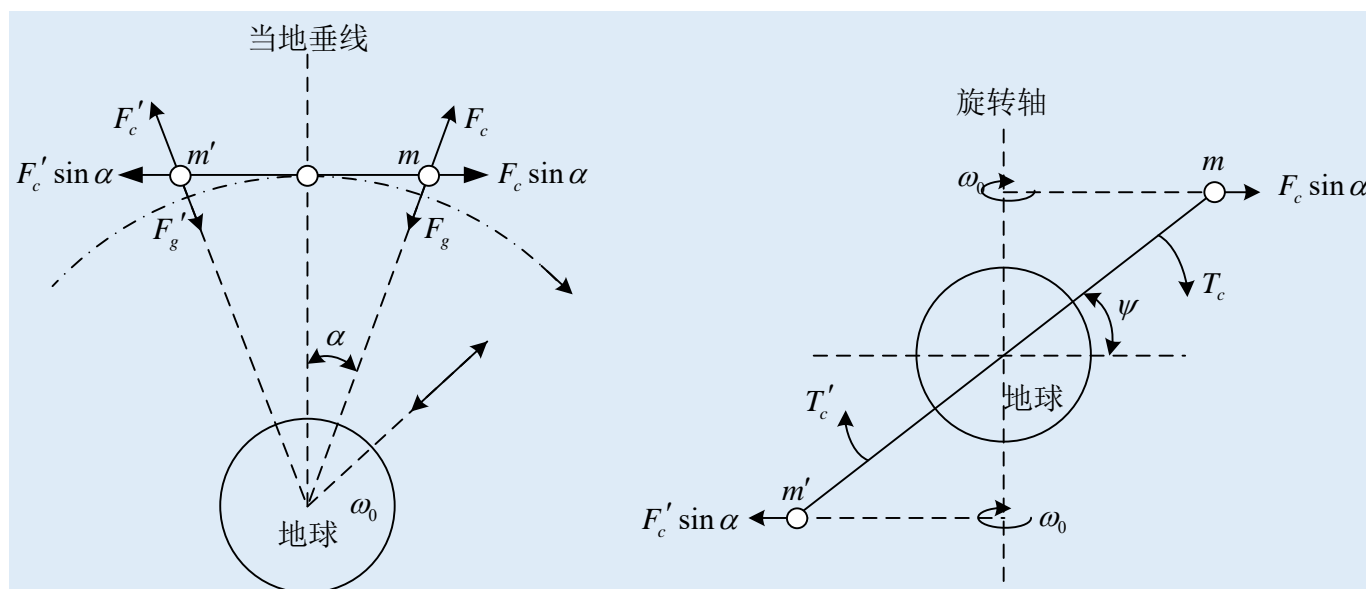
✓ 轨道平面内、水平平面内的投影。

✓  $\psi$  为偏航角。





- 质量  $m$  和  $m'$  所受重力相等  $F_g = F_g'$ ，而且与卫星质量中心距离也相等，因此质量  $m$  和  $m'$  所产生的重力矩相互抵消。



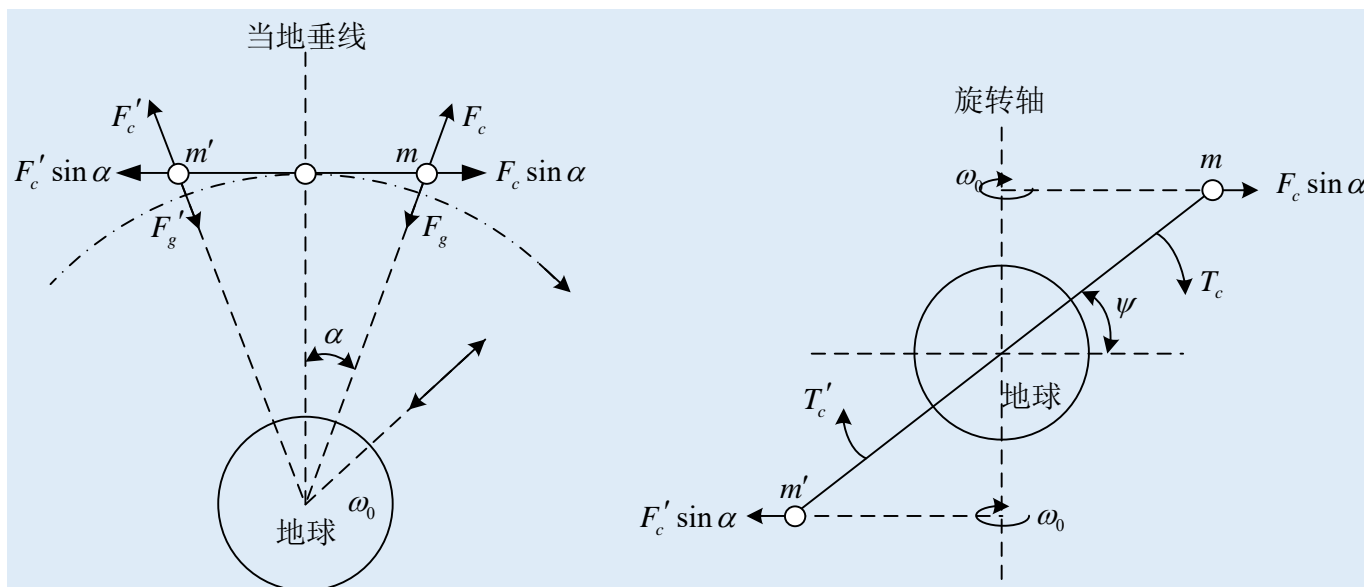


- 质量  $m$  和  $m'$  的离心力  $F_c$  和  $F'_c$  所产生的力矩在数量上相等，而且方向相同。

$$M_c = LF_c \sin \alpha + L'F'_c \sin \alpha = 2LF_c \sin \alpha$$

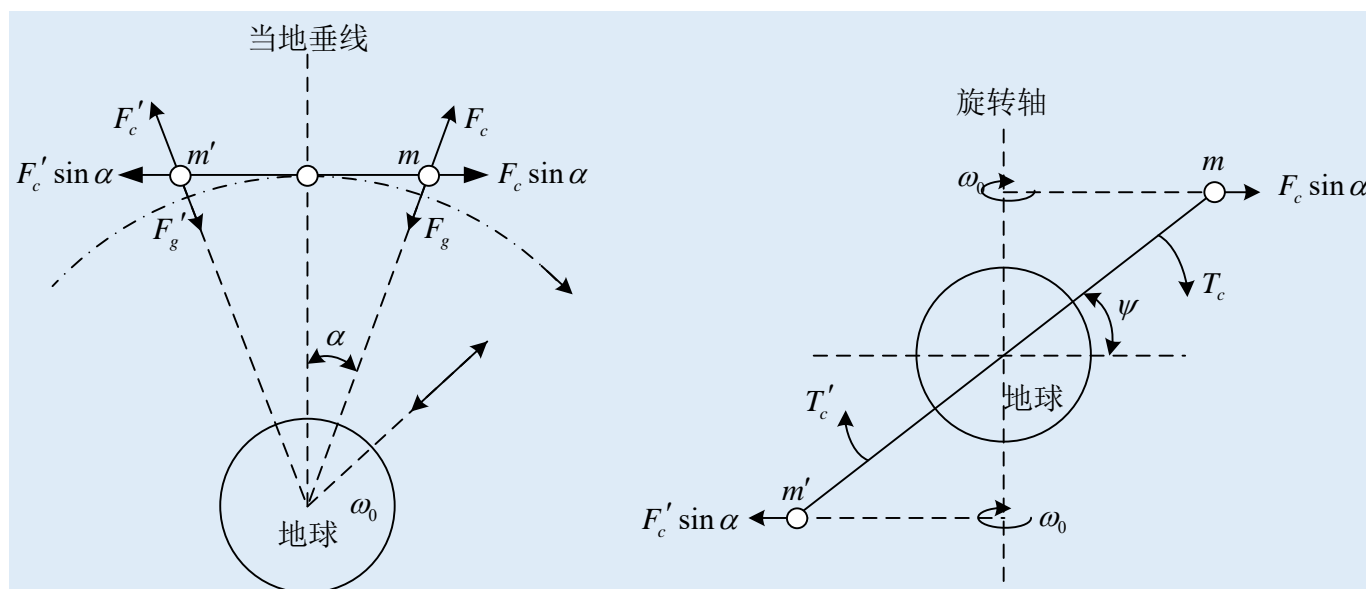
- ✓  $\alpha$  为哑铃在轨道平面内投影对地心张角的一半。

$$L = l \sin \psi$$





- 在偏航平面内，质量 $m$ 和 $m'$ 的重力所产生的力矩相互抵消，恢复力矩仅由质量 $m$ 和 $m'$ 所受的离心力产生。



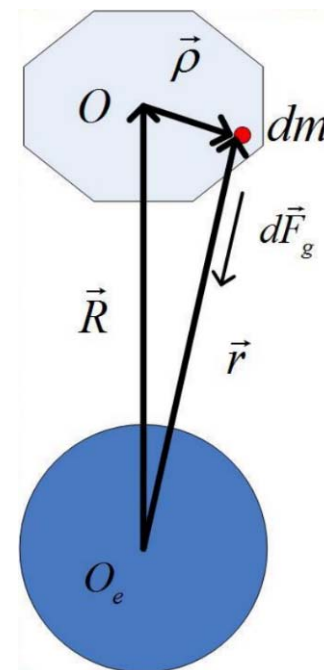


- 俯仰平面内恢复力矩仅由重力所产生；
- 滚动平面内除重力外，还有离心力所产生的恢复力矩；
- 偏航平面内恢复力矩仅由离心力所产生；



- 假设地心为  $O_e$ ，航天器质心为  $O$ ，质量为  $m$ ，航天器绕地球运行的某时刻到地心的距离为  $R_0$ 。
- 质心轨道坐标系  $Ox_0y_0z_0$ ，航天器本体坐标系  $Oxyz$ 。
- $\vec{R}$  表示地心  $O_e$  到质心  $O$  的矢径， $\vec{\rho}$  表示质心  $O$  到任一质量元  $dm$  的矢径，则从地心  $O_e$  到该质量元  $dm$  的矢径  $\vec{r}$  为：

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$$





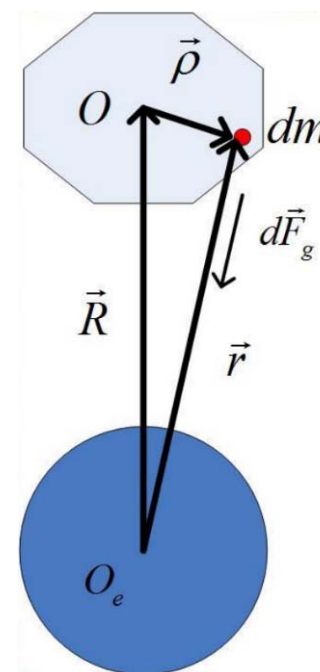
□ 重力场作用到质量元上的重力为：

$$dF_g = -\frac{\mu dm}{r^3} \cdot \vec{r}$$

$$\mu = GM_e$$

$$r = |\vec{r}|$$

➤  $G$ 为万有引力常数,  $M_e$ 为地球质量。

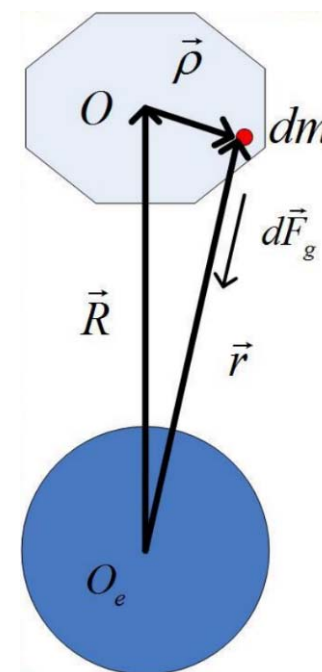






□ 这个力产生的绕航天器质心的力矩为：

$$\begin{aligned} d\vec{M}_g &= \vec{\rho} \times d\vec{F}_g \\ &= -\frac{\mu dm}{r^3} \vec{\rho} \times \vec{r} \\ &= -\frac{\mu dm}{r^3} \vec{\rho} \times (\vec{R} + \vec{\rho}) \\ &= -\frac{\mu dm}{r^3} \vec{\rho} \times \vec{R} \end{aligned}$$





□ 因为：

$$r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = (\vec{R} + \vec{\rho})(\vec{R} + \vec{\rho}) = R_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{\rho}{R_0} \right)^2 + \frac{2\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R_0^2} \right]$$

□ 所以：

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R_0^3} \left[ 1 + \left( \frac{\rho}{R_0} \right)^2 + \frac{2\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R_0^2} \right]^{-\frac{3}{2}}$$



□ 展开并去掉高阶项：

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R_0^3} \left[ 1 + \left( \frac{\rho}{R_0} \right)^2 + \frac{2\bar{R} \cdot \bar{\rho}}{R_0^2} \right]^{-\frac{3}{2}} \longrightarrow \frac{1}{r^3} = \frac{1}{R_0^3} \left( 1 - \frac{3\bar{R} \cdot \bar{\rho}}{R_0^2} \right)$$

$$d\bar{M}_g = -\frac{\mu dm}{r^3} \bar{\rho} \times \bar{R} \longrightarrow d\bar{M}_g = -\frac{\mu dm}{R_0^3} \left( 1 - \frac{3\bar{R} \cdot \bar{\rho}}{R_0^2} \right) \bar{\rho} \times \bar{R}$$

□ 积分得到整个航天器受到的重力梯度力矩：

$$\bar{M}_g = -\frac{\mu}{R_0^3} \int_m \left( 1 - \frac{3\bar{R} \cdot \bar{\rho}}{R_0^2} \right) \bar{\rho} \times \bar{R} dm$$



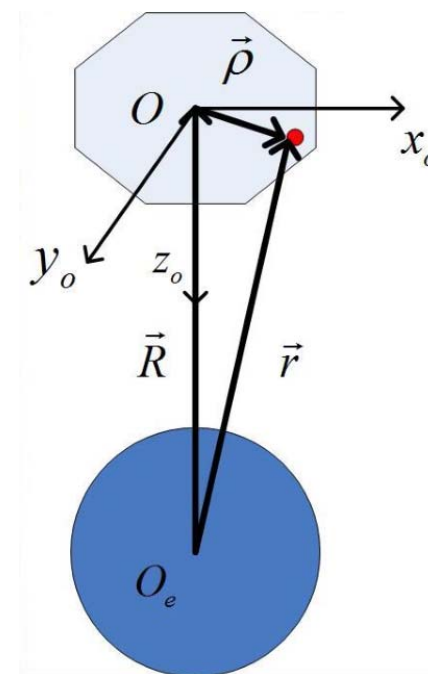
$$\begin{aligned}\vec{M}_g &= -\frac{\mu}{R_0^3} \int_m \left( 1 - \frac{3\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R_0^2} \right) \vec{\rho} \times \vec{R} dm \\ &= -\frac{\mu}{R_0^3} \int_m \vec{\rho} \times \vec{R} dm + \frac{\mu}{R_0^3} \int_m \frac{3\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R_0^2} \vec{\rho} \times \vec{R} dm\end{aligned}$$



$$\int_m \vec{\rho} \times \vec{R} dm = 0$$

$$\vec{\rho} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \vec{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{R} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \\ -\cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix}$$





$$\frac{\mu}{R_0^3} \int_m \frac{3\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R_0^2} \vec{\rho} \times \vec{R} dm$$

$$= \frac{3\mu}{R_0^5} \begin{bmatrix} (I_z - I_y) R_y R_z + I_{xy} R_x R_z - I_{xz} R_x R_y + I_{yz} (R_z^2 - R_y^2) \\ (I_x - I_z) R_x R_z - I_{xy} R_y R_z + I_{xz} (R_x^2 - R_z^2) + I_{yz} R_x R_y \\ (I_y - I_x) R_x R_y + I_{xy} (R_y^2 - R_x^2) + I_{xz} R_y R_z - I_{yz} R_x R_z \end{bmatrix}$$

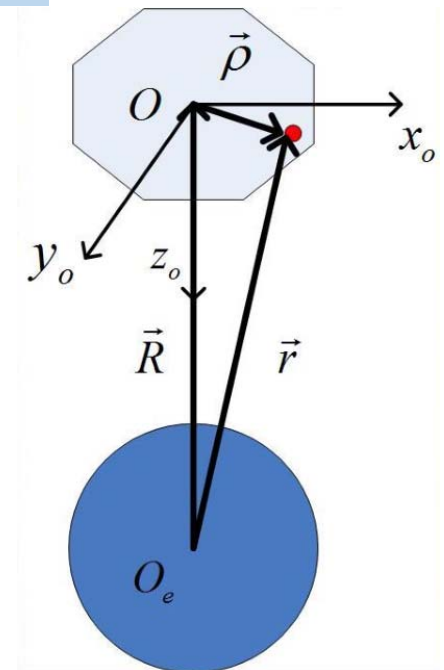
$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) dm$$

$$I_y = \int_m (x^2 + z^2) dm$$

$$I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$$

$$\frac{\mu}{R_0^3} \int_m \frac{3\vec{R} \cdot \vec{\rho}}{R_0^2} \vec{\rho} \times \vec{R} dm = \frac{3\mu}{R_0^5} \begin{bmatrix} (I_z - I_y) R_y R_z \\ (I_x - I_z) R_x R_z \\ (I_y - I_x) R_x R_y \end{bmatrix}$$





□ 航天器重力梯度力矩的标量形式，即  $\vec{M}_g$  在坐标系  $Oxyz$  上的投影为：

$$\begin{aligned}M_{gx} &= \frac{3\mu}{R_0^5} (I_z - I_y) R_y R_z = \frac{3\mu}{2R_0^3} (I_z - I_y) \sin 2\varphi \cos \theta \\M_{gy} &= \frac{3\mu}{R_0^5} (I_x - I_z) R_x R_z = \frac{3\mu}{2R_0^3} (I_z - I_x) \cos^2 \varphi \sin 2\theta \\M_{gz} &= \frac{3\mu}{R_0^5} (I_y - I_x) R_x R_y = \frac{3\mu}{2R_0^3} (I_x - I_y) \sin \theta \sin 2\varphi\end{aligned}$$



□ 若航天器的轨道角速度某时刻为  $\omega_0$ ，此时轨道角动量满足：

$$R_0^2 \omega_0 = \sqrt{\mu R_0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0^3}}$$

□ 得到重力梯度力矩的另一表达形式：

$$M_{gx} = \frac{3}{2} \omega_0^2 (I_z - I_y) \sin 2\varphi \cos \theta$$

$$M_{gy} = \frac{3}{2} \omega_0^2 (I_z - I_x) \cos^2 \varphi \sin 2\theta$$

$$M_{gz} = \frac{3}{2} \omega_0^2 (I_x - I_y) \sin \theta \sin 2\varphi$$





- 当星体的姿态是对地定向,  $\theta, \varphi, \psi$  均为小角度时,  $|\theta|, |\varphi|, |\psi| \ll 1$ , 略去高阶微量进一步简化:

$$\vec{M} = 3\omega_0^2 \begin{bmatrix} (I_z - I_y)\varphi \\ (I_z - I_x)\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

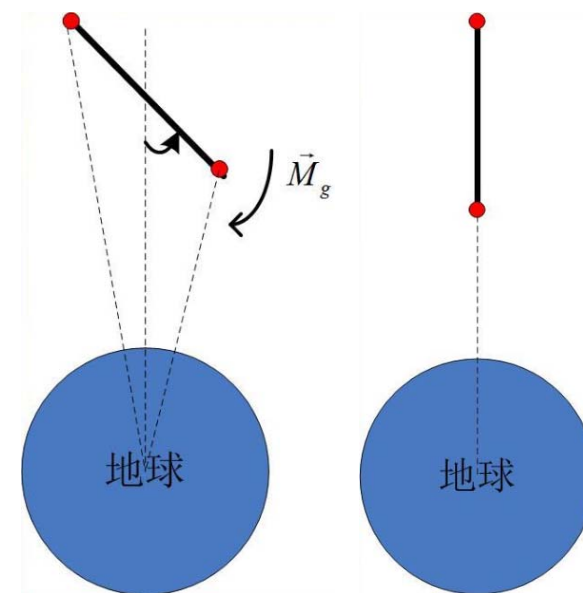
- ◆ 以上结果对于其他天体(即中心引力体)及其卫星也适用, 差别仅在于  $\mu$  的数值不同。



$$\vec{M}_g = \frac{3}{2} \omega_0^2 \begin{bmatrix} (I_z - I_y) \sin 2\varphi \cos \theta \\ (I_z - I_x) \cos^2 \varphi \sin 2\theta \\ (I_x - I_y) \sin \theta \sin 2\varphi \end{bmatrix}$$

## □ 重力梯度力矩的性质：

- 重力梯度力矩随高度的增加而减小
- 重力梯度力矩与航天器的质量分布有关
- 重力梯度力矩与航天器的角位置有关





## □ 航天器的姿态动力学方程：

$$I_x \ddot{\phi} + (I_y - I_z - I_x) \omega_0 \dot{\psi} + (I_y - I_z) \omega_0^2 \phi = M_x$$

$$I_y \ddot{\theta} = M_y$$

$$I_z \ddot{\psi} - (I_y - I_z - I_x) \omega_0 \dot{\phi} + (I_y - I_x) \omega_0^2 \psi = M_z$$



## □ 小角度条件下：

$$\vec{M} = 3\omega_0^2 \begin{bmatrix} (I_z - I_y)\phi \\ (I_z - I_x)\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_x \ddot{\phi} + (I_y - I_z - I_x) \omega_0 \dot{\psi} + 4(I_y - I_z) \omega_0^2 \phi = 0$$

$$I_y \ddot{\theta} + 3\omega_0^2 \theta (I_x - I_z) = 0$$

$$I_z \ddot{\psi} - (I_y - I_z - I_x) \omega_0 \dot{\phi} + (I_y - I_x) \omega_0^2 \psi = 0$$



□ 当偏航和滚动通道为弱耦合时：

$$I_x \ddot{\phi} + (I_y - I_z - I_x) \omega_0 \dot{\psi} + 4(I_y - I_z) \omega_0^2 \phi = 0$$

$$I_y \ddot{\theta} + 3\omega_0^2 \theta (I_x - I_z) = 0$$

$$I_z \ddot{\psi} - (I_y - I_z - I_x) \omega_0 \dot{\phi} + (I_y - I_x) \omega_0^2 \psi = 0$$



$$I_x \ddot{\phi} + 4(I_y - I_z) \omega_0^2 \phi = 0$$

$$I_y \ddot{\theta} + 3(I_x - I_z) \omega_0^2 \theta = 0$$

$$I_z \ddot{\psi} + (I_y - I_x) \omega_0^2 \psi = 0$$

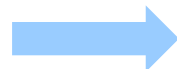


□ 要使得系统稳定，必须有：

$$\Omega_x^2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \frac{4(I_y - I_z)\omega_0^2}{I_x} > 0$$

$$\Omega_y^2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \frac{3(I_x - I_z)\omega_0^2}{I_y} > 0$$

$$\Omega_z^2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \frac{(I_y - I_x)\omega_0^2}{I_z} > 0$$

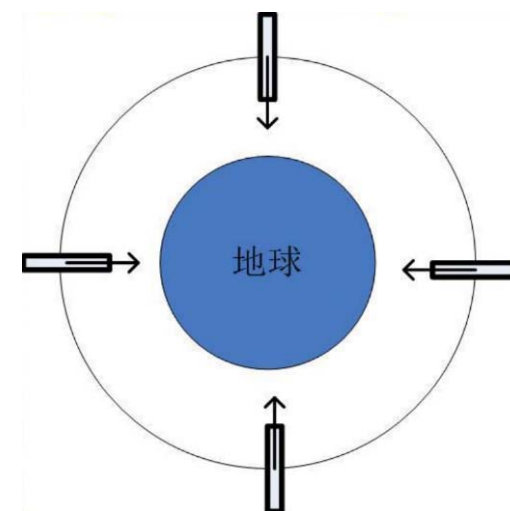


$$I_y > I_x > I_z$$



$$I_y > I_x > I_z$$

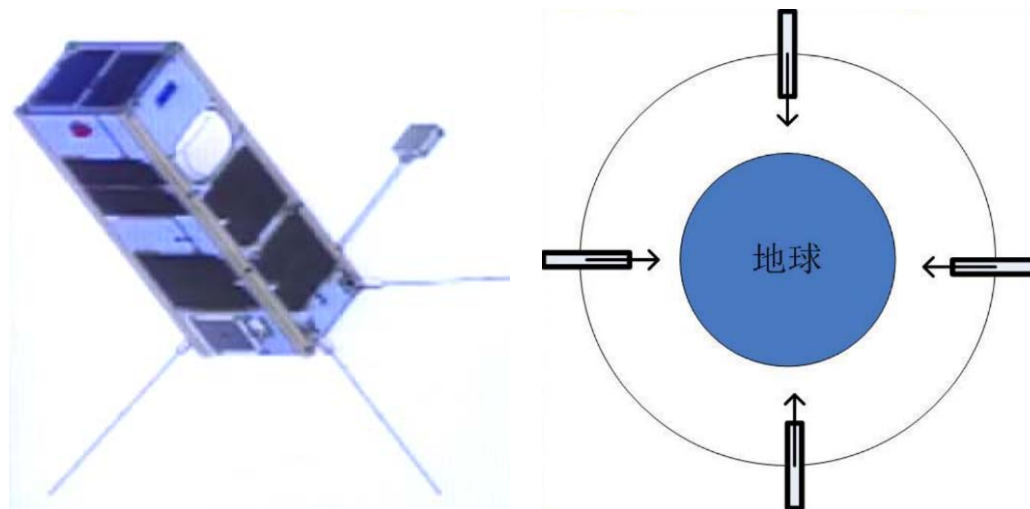
- 航天器在重力梯度力矩的作用下，其最终稳定姿态一定是最小主惯量轴沿着航天器质心与地心的连线，最大主惯量轴垂直于轨道平面，次大主惯量轴处于轨道平面内。
- 如果要利用重力梯度稳定卫星对地观测，那么卫星在结构上一定要保证观测轴是卫星的最小惯量轴，这样才可能保证观测器始终对地定向。





$$I_y > I_x > I_z$$

- 仅约束了航天器姿态重力梯度稳定时的各主惯量轴的位置，未约束主惯量轴的方向。因此至少从这一点可以看出，上式确定的稳定姿态是不惟一的。

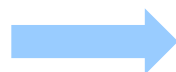




$$\ddot{\varphi} + \Omega_x^2 \varphi = 0$$

$$\ddot{\theta} + \Omega_y^2 \theta = 0$$

$$\ddot{\psi} + \Omega_z^2 \psi = 0$$



$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\Omega_x} \sin \Omega_x t + \varphi_0 \cos \Omega_x t$$

$$\theta = \frac{\dot{\theta}_0}{\Omega_y} \sin \Omega_y t + \theta_0 \cos \Omega_y t$$

$$\psi = \frac{\dot{\psi}_0}{\Omega_z} \sin \Omega_z t + \psi_0 \cos \Omega_z t$$

- 航天器在重力梯度力矩的作用下，其各通道的姿态运动均是在平衡姿态周围无阻尼振荡，称之为天平动。





✓ 天平动的自然频率：

$$\Omega_x = 2\omega_0 \sqrt{\frac{(I_y - I_z)}{I_x}}, \quad \Omega_y = \omega_0 \sqrt{\frac{3(I_x - I_z)}{I_y}}, \quad \Omega_z = \omega_0 \sqrt{\frac{I_y - I_x}{I_z}}$$

✓ 天平动周期：

$$T_x = \frac{T_0}{2} \sqrt{\frac{I_x}{I_y - I_z}}, \quad T_y = T_0 \sqrt{\frac{I_y}{3(I_x - I_z)}}, \quad T_z = T_0 \sqrt{\frac{I_z}{I_y - I_x}}$$

➤  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  为航天器的轨道周期。



- 若某些航天器的结构设计使得各主惯量轴惯量满足  $I_y = I_x + I_z$ ，则天平动频率就相应为：

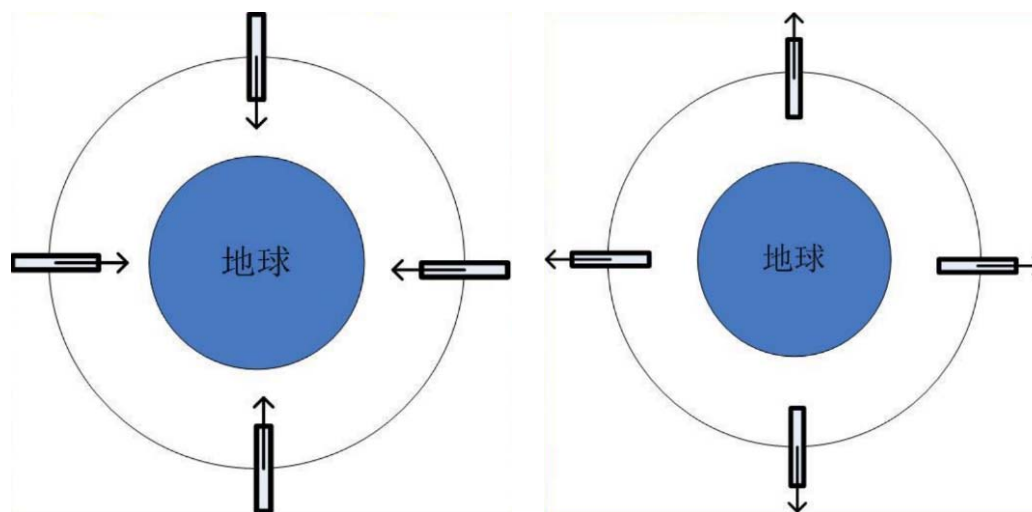
$$\Omega_x = 2\omega_0, \quad \Omega_y = \omega_0 \sqrt{\frac{3(I_x - I_z)}{I_y}}, \quad \Omega_z = \omega_0$$

- 此时以整数倍轨道角速度  $\omega_0$  振荡的偏航和滚动通道运动将出现共振，这是要尽可能避免的。



□ 在设计重力梯度稳定航天器时应解决三个问题：

- 增大起稳定作用的恢复力矩和限制扰动力矩：使得航天器能够在重力梯度为主的恢复力矩作用下保持一定的对地定向精度；
- 捕获重力场：为了使航天器进入预定的重力梯度稳定状态，航天器在入轨后必须首先捕获地球重力场；
- 阻尼天平动：由于天平动周期非常长，恢复力矩又很小，因此给阻尼技术实现带来较大困难。





西安电子科技大学  
XIDIAN UNIVERSITY



# THANKS



13389281325



dzhfeng@xidian.edu.cn

