静电场基本内容总结

1. 库仑定律：处在静止状态的两个点电荷，在真空（空气）中的相互作用力

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$

$\vec{r}^{\,0}$ 由施力电荷指向受力电荷

2. 电场

（1） 电场强度定义 $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0}$ q_0 检验电荷电量

（2）点电荷的电场强度 $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0}$

$\vec{r}^{\,0}$ 由场源电荷指向场点

（3）电场强度叠加原理

点电荷系的电场 $$\vec{E}=\sum_k \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_k}{r_k^2}\vec{r}_k^{\,0}$$

连续分布带电体 $$\vec{E}=\int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}^{\,0}$$

3. 电通量和高斯定理

（1）电通量 $$\Phi_e=\int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

（2）高斯定理 $$\Phi_e=\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i(\text{内})$$

4. 静电场的环路定理和电势

（1）环路定理 $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$

——场强的环流为零

（2）电势能 q_0 在电场中某点 a 的电势能：

$$W_a = A_{a"0"} = \int_a^{"0"} q_0 \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

（3）电势 $u_a = \dfrac{W_a}{q_0} = \displaystyle\int_a^{"0"} \vec{E}\cdot d\vec{l}$

（4）点电荷的电势 $u_a = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

（5）电势叠加原理 $u_a = \displaystyle\int_V \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$

（6）电势差 $u_{ab} = u_a - u_b$

5. 电场与电势的关系

（1）积分形式 $u_a = \int_a^{"0"} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

（2）微分形式 $\vec{E} = -(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}) = -\mathrm{grad}(u)$

6. 静电场中的导体和介质

（1） 导体静电平衡的条件

（2）静电平衡导体上的电荷分布 $q_{内} = 0$ $\vec{E}_{表} = \frac{\sigma_{表}}{\varepsilon_0}\vec{n}$

（3）电场中电介质的极化，束缚电荷

电介质中场强为：$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

（4）电位移矢量：$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$

（5）介质中的高斯定理 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$

7. 电容和静电能

（1）电容器的电容 $C=\dfrac{Q}{\Delta u}$

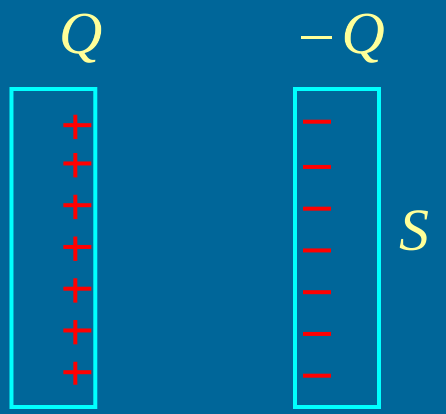
（2）电容器中存储的静电能 $W=\dfrac{Q^2}{2C}=\dfrac{1}{2}CU^2=\dfrac{1}{2}QU$

（3）电场的能量密度 $w_e=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2$

（3）电场的能量

$$W=\int w_e dV=\int \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV$$

例：计算两块导体板的相互作用力



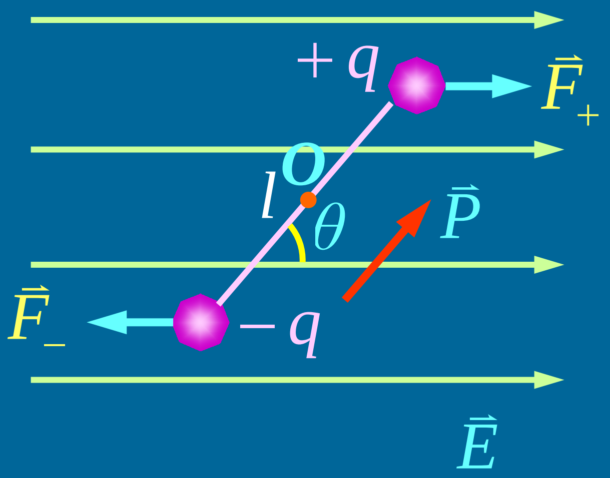
解：以其中一块导体板为研究对象

另一块导体板的电场为外电场

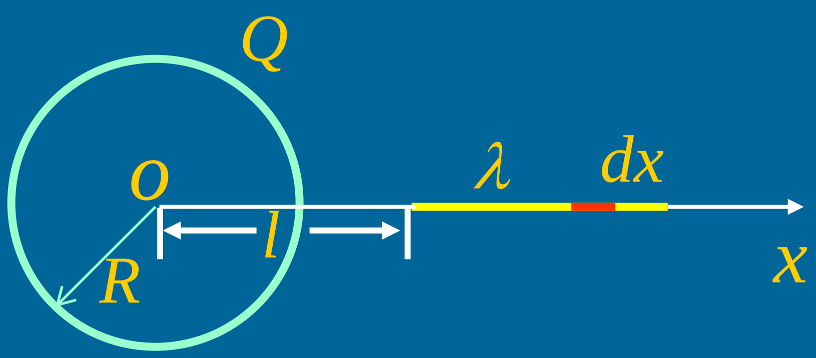
$$F=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}Q=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

例：电偶极子在均匀外电场中的电势能

$$\begin{aligned}W&=W_-+W_+\\&=-qU_-+qU_+=-q(U_--U_+)\\&=-qEl\cos\theta\\&=-PE\cos\theta\\&=-\vec{P}\cdot\vec{E}\end{aligned}$$



例：均匀带电球面（*R*，*Q*），均匀带电直线段（*l* ,*λ*），沿径向放置，设电荷分布固定，求：均匀带电直线段在电场中的电势能



解：

$$dq = \lambda dx$$

均匀带电球面在*x*处的电势

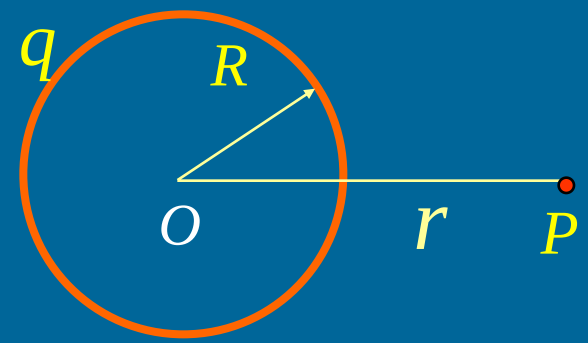
$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

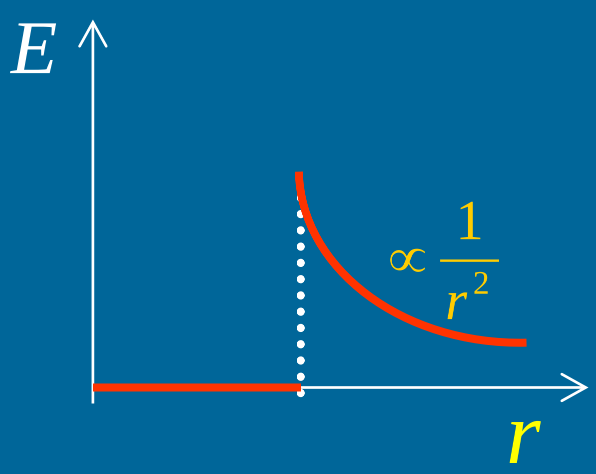
$$dW = Udq = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}\lambda dx$$

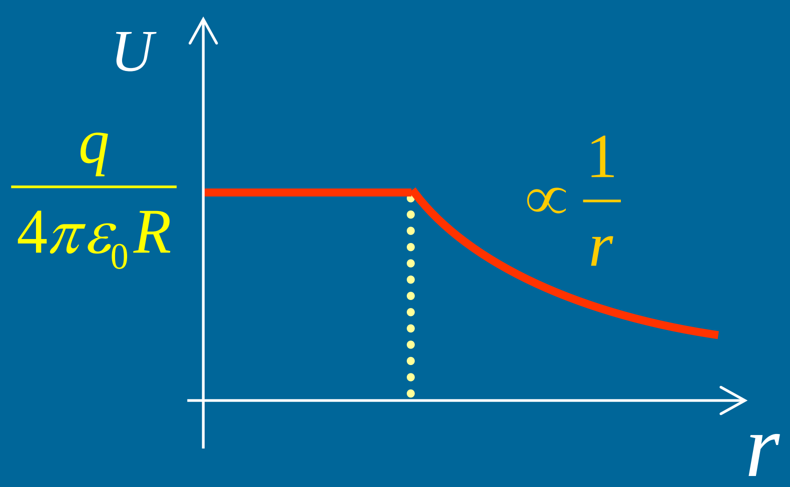
$$W = \int dW = \int_l^{2l} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}\lambda dx = \frac{\lambda Q}{4\pi\varepsilon_0}\ln 2$$

例 ：均匀带电球面，***R*，*q*** 。

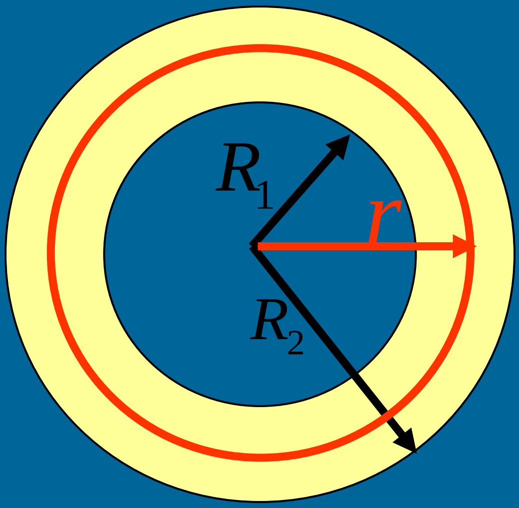
求:电场中任一点的场强和电势。







例　图示为一个均匀带电的球层，其电荷体密度为ρ，球层内表面半径为 R_1,外表面半径为R_2 ，设无穷远处为电势零点，求:球层中半径为 **r** 处的电势。



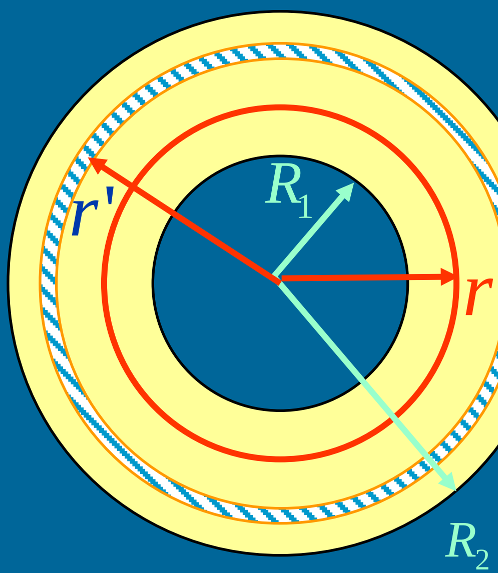
解：**r** 处的电势等于以 **r** 为半径的球面以内的电荷在该处产生的电势 U_1 和球面以外的电荷产生的U_2之和，即

$$U = U_1 + U_2$$

$$U_1 = \int_{R_1}^{r} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_1^{\,3}\right)\rho}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r^2 - \frac{R_1^3}{r}\right)$$

为计算以 **r** 为半径的球面外电荷产生的电势，在球面外取 $r' \to r' + dr'$ 的薄层，其电量为：$dq = \rho \cdot 4\pi r'^2 dr'$



它对薄层内任一点产生的电势为：

$$dU_2 = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r'} = \frac{\rho r' dr'}{\varepsilon_0}$$

$$U_2 = \int dU_2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\int_r^{R_2} r' dr' = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - r^2\right)$$

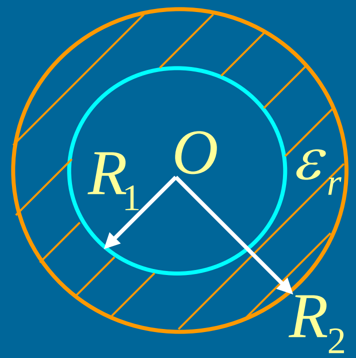
全部电荷在半径为 **r** 处产生的电势为:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r^2 - \frac{R_1^3}{r}\right) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - r^2\right)$$

$$= \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(3R_2^2 - r^2 - \frac{2R_1^3}{r}\right)$$

例：如图，导体球半径为$\boldsymbol{R_1}$，外包一层电介质外半径为$\boldsymbol{R_2}$，介电常数为ε_r

求：电容



解：

$$E=\begin{cases}0 & r<R_1\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} & R_1<r<R_2\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R_2\end{cases}$$

导体球的电势 $U=\int_{R_1}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{R_1}^{R_2}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}dr+\int_{R_2}^{\infty}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{\varepsilon_r}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})+\frac{1}{R_2}]$$

$$C=\frac{Q}{U}\quad=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1R_2}{R_2-R_1+\varepsilon_r R_1}$$

例 如图所示, 球形电容器的内、外半径分别为R_1和R_2，所带电荷为$\pm Q$．若在两球壳间充以电容率为ε的电介质，问此电容器贮存的电场能量为多少？

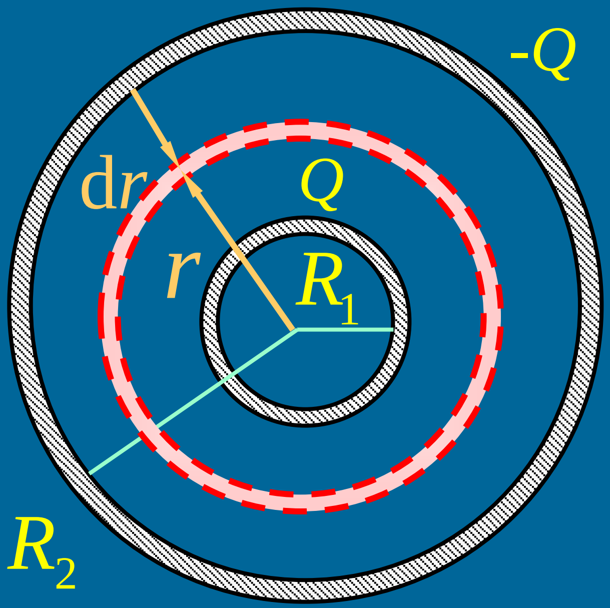
解 $$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}$$

$$w_\mathrm{e}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}$$

$$\mathrm{d}W_\mathrm{e}=w_\mathrm{e}\mathrm{d}V=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon r^2}\mathrm{d}r$$

$$W_\mathrm{e}=\int\mathrm{d}W_\mathrm{e}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$



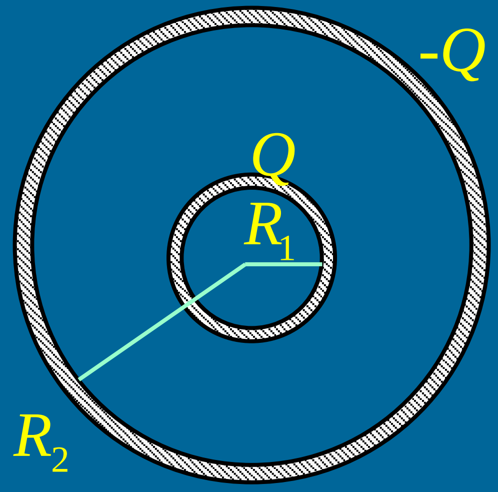
讨 论 $$W_e=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

1) $$W_\mathrm{e}=\frac{Q^2}{2C}$$

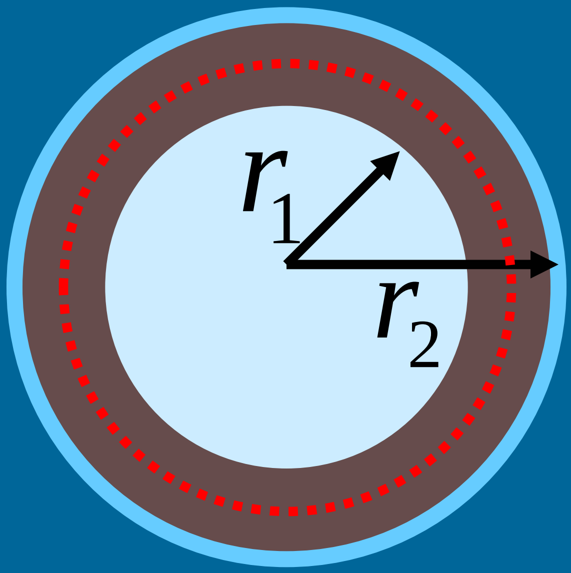
$$C=4\pi\varepsilon\frac{R_2R_1}{R_2-R_1}$$ （球形电容器）

2) $R_2\to\infty$ $$W_\mathrm{e}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R_1}$$

（孤立导体球）



有一根单芯电缆，电缆芯的半径为 r_1，外面套有半径为 r_2 的同轴薄铅圆筒，其间充满相对介电常数为 $\varepsilon_r = 2.3$ 的各向同性均匀电介质，电缆芯与铅圆筒间的相对电压为 U，求：长为 l 的电缆贮存的静电能。



解： 由高斯定理得：$E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$

（λ未知，可从给出的电压值推出）

$$\because U = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} dr$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \ln\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \lambda = \ldots$$

$$\therefore E = \frac{U}{r\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}$$

$$w = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{2}E^2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r U^2}{2[\ln(r_2/r_1)]^2}\frac{1}{r^2}$$

$$W = \int w\, dV = \int w 2\pi r l dr = \frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon_r U^2 l}{\ln(r_2/r_1)}$$

例　一电容为C的空气平行板电容器，接上端电压 U为定值的电源充电，在电压保持连接的情况下，试求把两个极板间距离增大至n 倍时，外力所作的功。

解：因保持电源连接，两极板间电势差保持不变

电容值由 $$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}\to C'=\frac{\varepsilon_0 S}{nd}=\frac{C}{n}$$

电容器存储的电场能量为：

$$W=\frac{CU^2}{2}\to W'=\frac{C'U^2}{2}=\frac{CU^2}{2n}$$

$$\Delta W=W'-W=\frac{U^2}{2}\left(\frac{C}{n}-C\right)=\frac{1}{2}CU^2\frac{1-n}{n}<0$$

拉开极板过程中，电容器上带电量（$Q=CU$）由Q减至Q'

电源作功为：$A_1=(Q'-Q)U=(C'U-CU)U=\left(\frac{C}{n}-C\right)U^2$

$$=CU^2\left(\frac{1-n}{n}\right)<0$$

设拉开极板过程中，外力作功 A_2 ，根据功能原理：

$$\text{外力功}A_2+\text{电源功}A_1=\text{电场能量的增量}\Delta W$$

$$\therefore A_2=\Delta W-A_1=\frac{1}{2}CU^2\frac{1-n}{n}-CU^2\frac{1-n}{n}=\frac{1}{2}CU^2\frac{n-1}{n}>0$$

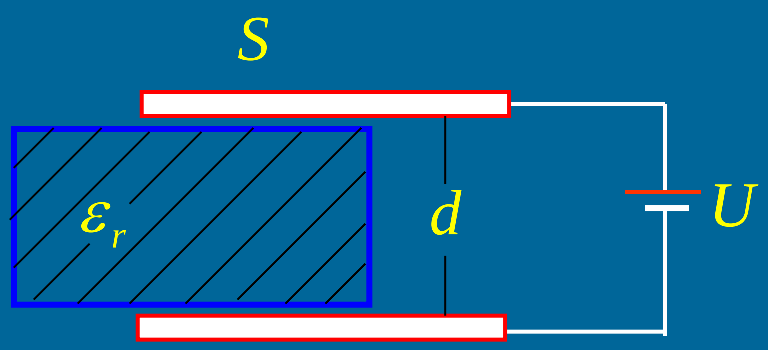
拉开极板过程中，外力作正功。

➢**讨论：**接上题，断开电源，试求把两个极板间距离增大至**n** 倍时，外力所作的功。

功能原理 $$A_{\text{外力}}=\Delta W=\frac{Q^2}{2C'}-\frac{Q^2}{2C}$$

$$=\frac{Q^2}{2C}n-\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q^2}{2C}(n-1)=\frac{1}{2}CU^2(n-1)>0$$

例：如图，平板电容器和电源连接，将一厚为d 介电常数为ε_r的介质板插入电容器



求：（1）电场能量变化

（2）电源的功

（3）电场对介质板作的功

解：（1）$$\Delta W=\frac{1}{2}C'U^2-\frac{1}{2}C_0U^2$$

$$=\frac{1}{2}U^2(\varepsilon_r C_0-C_0)=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 SU^2}{d}(\varepsilon_r-1)$$

（2）$$A_{电源}=U\Delta Q=U(C'U-CU)=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{d}(\varepsilon_r-1)$$

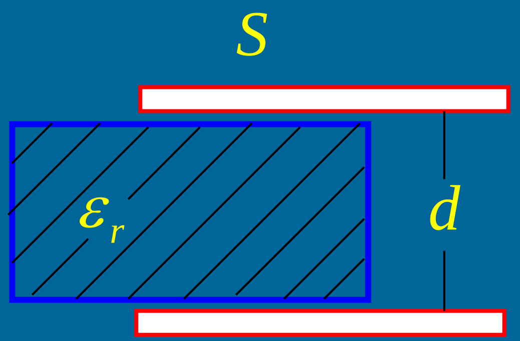
（3）$$A_{电源}=\Delta W+A_{电场}$$

$$A_{电场}=A_{电源}-\Delta W=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 SU^2}{d}(\varepsilon_r-1)$$

例：接上题，断开电源后，再插入介质板

求：（1）电场能量变化

（2）电场对介质板作的功



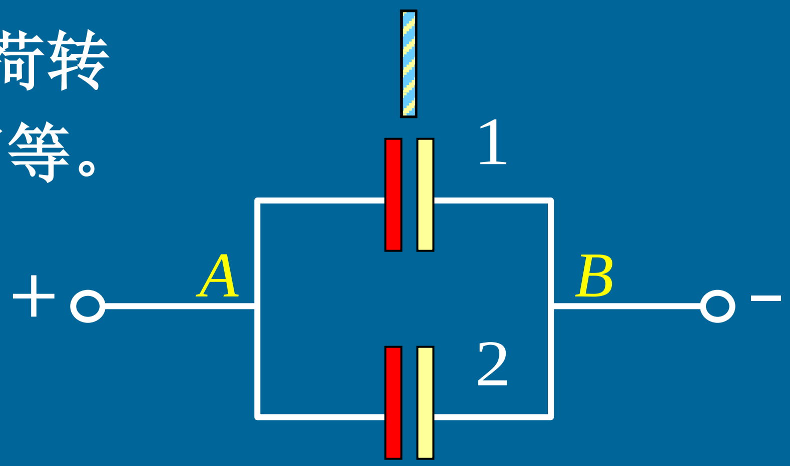
解：（1）$\Delta W=\dfrac{Q^2}{2C'}-\dfrac{Q^2}{2C_0}$

$$=\frac{Q^2}{2\varepsilon_r C_0}-\frac{Q^2}{2C_0}=\frac{Q^2}{2C_0}(\frac{1}{\varepsilon_r}-1)$$

$$=-\frac{1}{2}C_0U^2(1-\frac{1}{\varepsilon_r})=-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}U^2(1-\frac{1}{\varepsilon_r})$$

（2）$A_{电场}=-\Delta W=\dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}U^2(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r})$

例 如图所示1和2是完全相同的电容器，将其充电后与电源断开，再将各向同性电介质插入电容器1，则电容器2的电压U_2和电场能量W_2如何变化？（增大或减小）



解：断开电源后1和2极板间有电荷转移，但AB两点间两电容器电压相等。

介质插入前有：$\begin{cases} Q_1 = C_0 U \\ Q_2 = C_0 U \end{cases}$ (1)

介质插入后有：$\begin{cases} Q_1' = \varepsilon_r C_0 U' \\ Q_2' = C_0 U' \end{cases}$ (2)

由电荷守恒定律：$Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2'$ (3)

联立（1）（2）和（3）式有：$U' = \dfrac{2U}{1+\varepsilon_r} < U$ 减小

$$W_2 = \frac{1}{2} C_0 U'^2$$ 减小

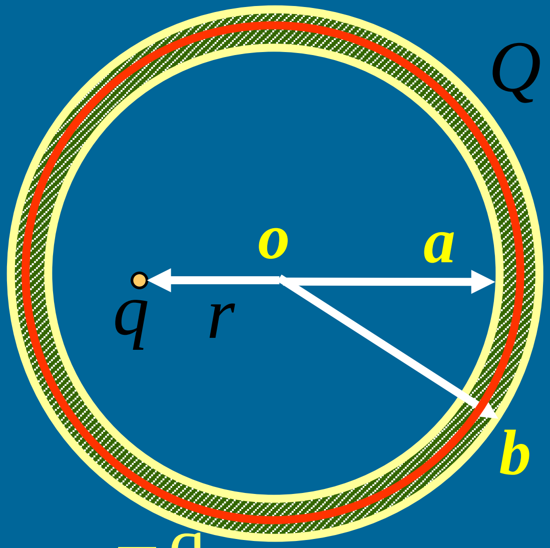
例：如图所示，一内半径a外半径b的导体球壳，带电Q，在球壳空腔中距球心r 处有一点电荷q，设无穷远处电势为零，试求:（1）球壳内外表面上的电荷

（2）球心o处，由球壳内表面上电荷产生的电势

（3）球心o处的总电势

解:（1）取图示高斯面

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{i内} = 0$$



知球壳内表面上电荷$-q$

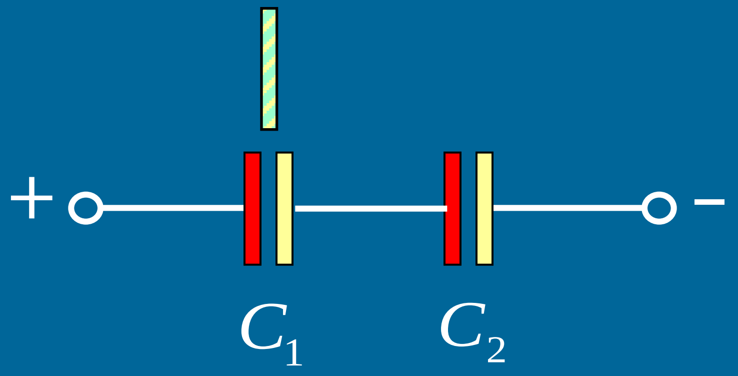
由电荷守恒知外表面$Q+q$

（2）将球壳内表面电荷分成电荷元dq

$$U_{0内表面} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\int dq = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

（3） $$U_{总} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

例 如图所示1和2是完全相同的电容器，若将各向同性电介质插入电容器1，则电容器1的电容和电容器组总电容如何变化？（增大或减小）



解：介质插入后有：

$C_1' = \varepsilon_r C_1$ 增大

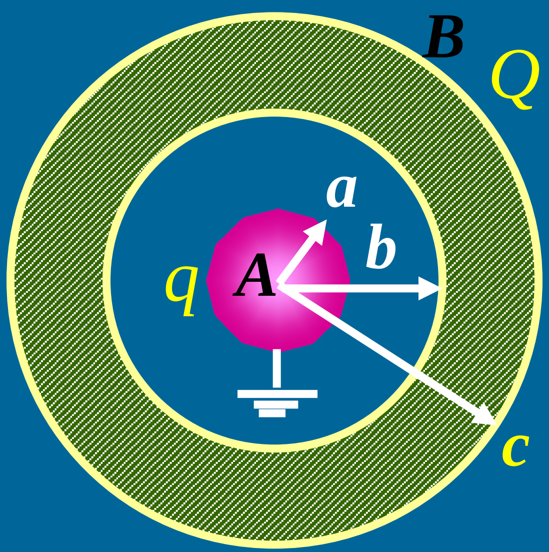
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$ 增大

例：A，B为导体，A带电q，B带电Q，令A接地，A上的电量变为：

$(A)\quad 0$ $\qquad\qquad$ $(B)\quad -\dfrac{a}{c}Q$

$(C)\quad -\dfrac{ab}{c(b-a)}Q$

$(D)\quad -\dfrac{ab}{ab+c(b-a)}Q$

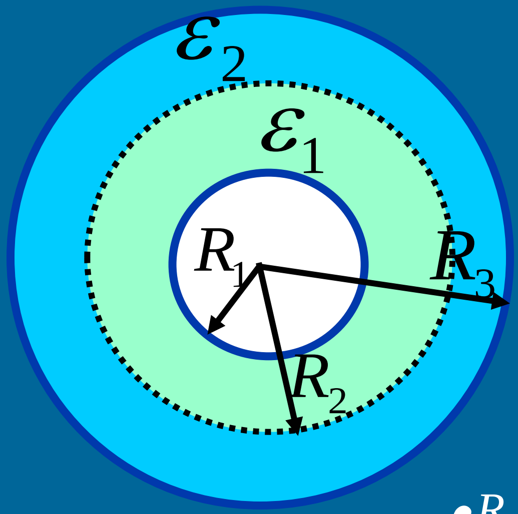


解：设A上带电q'

$$U_A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q'}{a}+\frac{-q'}{b}+\frac{q'+Q}{c}\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad q'=-\frac{ab}{ab+c(b-a)}Q$$

例：同轴电缆，内外导体半径为R_1和R_2，其间充有两层电介质，其介电常数分别为 ε_1、ε_2 (如图)，电势差为U，若使两层电介质中最大场强相等，其条件如何？并求此种情况下电缆单位长度的电容。



解：设电缆单位长度带电为 λ

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1 r} \qquad (R_1 \le r \le R_2)$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2 r} \qquad (R_2 \le r \le R_3)$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_1 dr + \int_{R_2}^{R_3} E_2 dr = \frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2}\right)$$

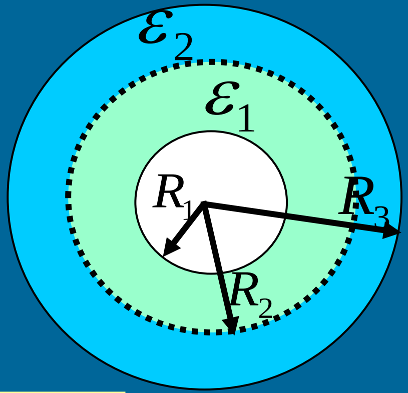
$$\lambda = \frac{2\pi U}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2}\right)}$$

$$E_1 = \frac{U}{\varepsilon_1 r(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2})} \qquad E_2 = \frac{U}{\varepsilon_2 r(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2})}$$

显然 E_1 在 $r = R_1$ 处，E_2 在 $r = R_2$ 处各为最大值

$$E_{1\max} = \frac{U}{\varepsilon_1 R_1(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2})} \qquad E_{2\max} = \frac{U}{\varepsilon_2 R_2(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2})}$$

若使 $E_{1\max} = E_{2\max}$ 则 $\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$



电缆每单位长度的电容为

$$C = \frac{\lambda}{U} = \frac{2\pi}{(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2})} = \frac{2\pi}{(\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{R_3}{R_2})}$$