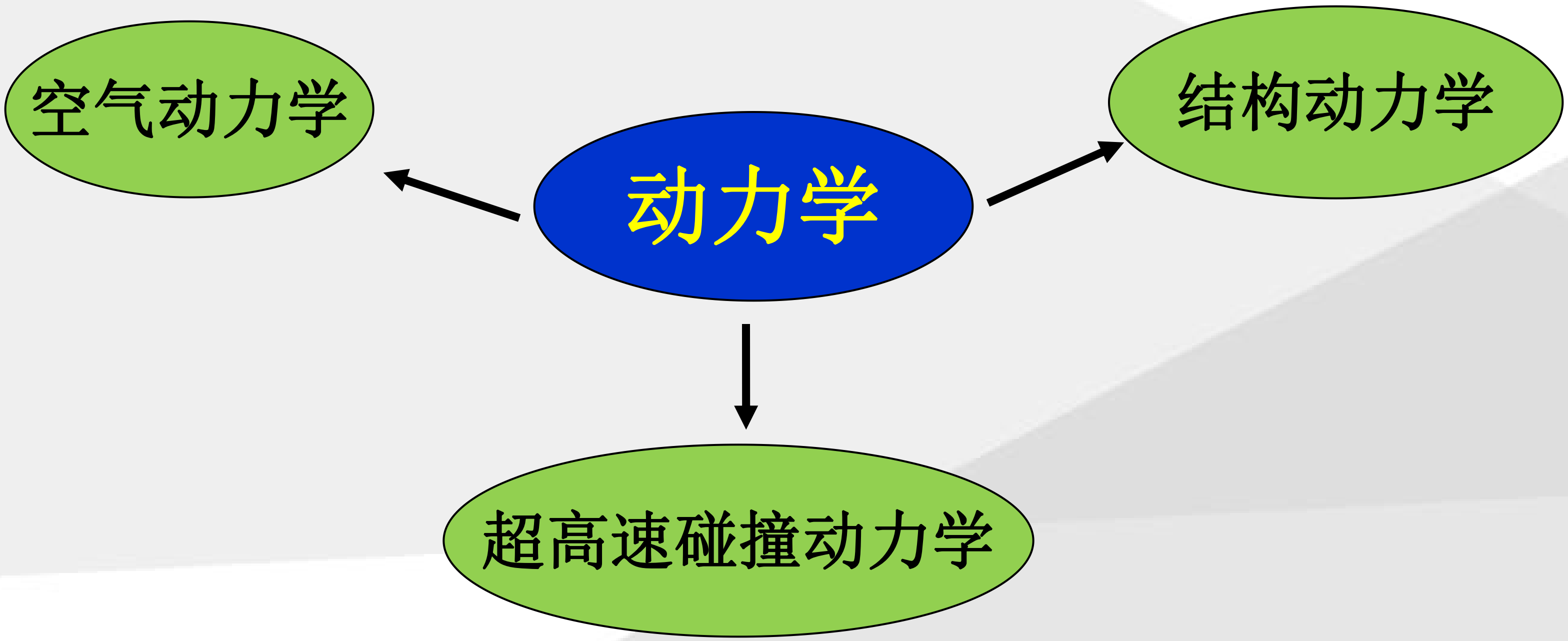
理论力学

Engineering mechanics
Theoretical mechanics

动 力 学

动力学：研究物体的机械运动与作用力之间的关系。



…………

动力学的抽象模型

质点：具有一定质量而几何形状和尺寸大小可忽略不计的物体。

→ 质点动力学

质点系：由几个或无限个相互有联系的质点组成的系统。

→ 质点系动力学

刚体：特殊质点系，可看作由无数个质点组成，其中任意两点之间的距离保持不变。

本篇的基本内容

- 质点动力学的基本方程
- 动量定理，质心运动定理
- 动量矩定理，定轴转动刚体的转动微分方程
  刚体的平面运动微分方程
- 动能定理，机械能守恒定律
- 动静法——达朗贝尔原理
- 虚位移原理

动 力 学

第九章 质点动力学的基本方程

§9-1　动力学的基本定律

第一定律（*惯性定律*）

不受力作用的质点，将保持静止或作匀速直线运动。

第二定律（力与加速度之间关系定律）

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

第三定律（作用与反作用定律）

两个物体间的作用力与反作用力总是大小相等,方向相反,沿着同一直线,且同时分别作用在这两个物体上。

→ 惯性参考系

§9-2 质点的运动微分方程

质点动力学第二定律

$$m\vec{a}=\sum\vec{F}_i$$

或
$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\sum\vec{F}_i$$

—矢量形式的质点运动微分方程

1. 在直角坐标轴上的投影

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\sum F_x,\quad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\sum F_y,\quad m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=\sum F_z$$

2. 在自然轴上的投影

由 $\vec{a} = a_{\mathrm{t}}\vec{\tau} + a_{\mathrm{n}}\vec{n}, a_{\mathrm{b}} = 0$

有 $$ma_{\mathrm{t}} = \sum F_{\mathrm{t}}, m\frac{v^2}{\rho} = \sum F_{\mathrm{n}}, 0 = \sum F_{\mathrm{b}}$$

3. 质点动力学的两类基本问题

第一类问题：已知运动求力.

第二类问题：已知力求运动.

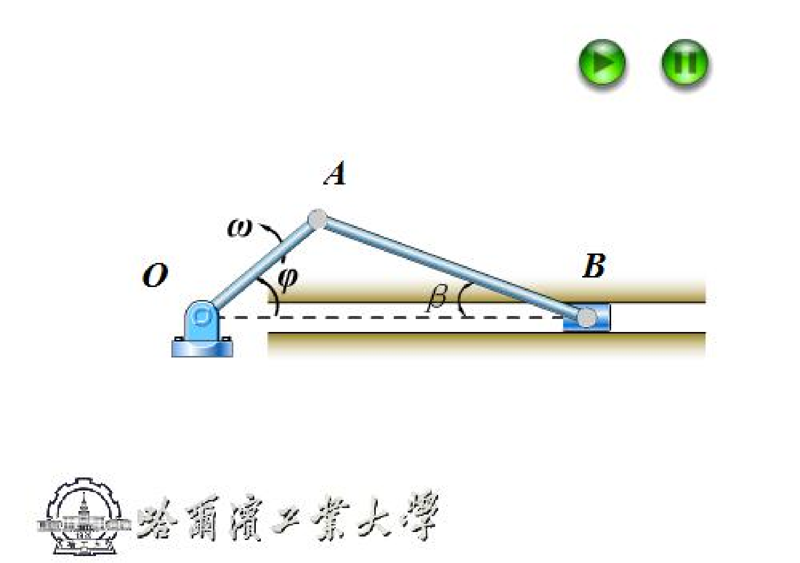
混合问题：第一类与第二类问题的混合.

例9-1

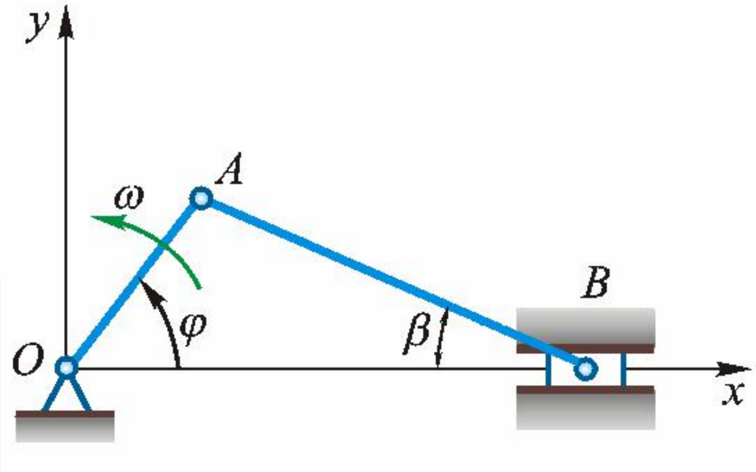
已知：曲柄连杆机构如图所示. 曲柄OA以匀角速度ω转动, $OA=r$, $AB=l$, 当 $\lambda = r/l$ 比较小时, 以O 为坐标原点, 滑块B 的运动方程可近似写为

$$x = l\left(1-\frac{\lambda^2}{4}\right)+r\left(\cos\omega t+\frac{\lambda}{4}\cos 2\omega t\right)$$

如滑块的质量为m，忽略摩擦及连杆AB的质量, 试求当 $\phi=\omega t=0$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 时，连杆AB所受的力.



解： 研究滑块 $ma_x = -F\cos\beta$



其中

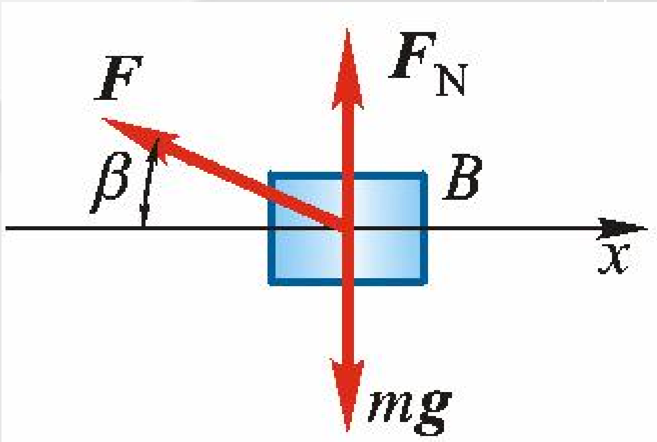
$$a_x = \ddot{x} = -r\omega^2(\cos\omega t + \lambda\cos 2\omega t)$$

当 $\varphi = 0$时，$a_x = -r\omega^2(1+\lambda)$，且$\beta = 0$

$$\Rightarrow \quad F = mr\omega^2(1+\lambda)$$

当$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$时， $a_x = r\omega^2\lambda$ 且 $\cos\beta = \sqrt{l^2 - r^2}/l$

$$mr\omega^2\lambda = -F\sqrt{l^2 - r^2}/l$$



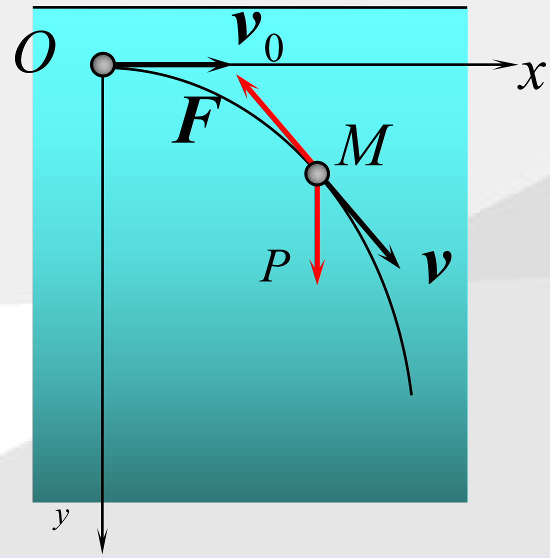
$$\Rightarrow \quad F = -mr^2\omega^2/\sqrt{l^2 - r^2}$$

属于动力学第一类问题。

例9-2

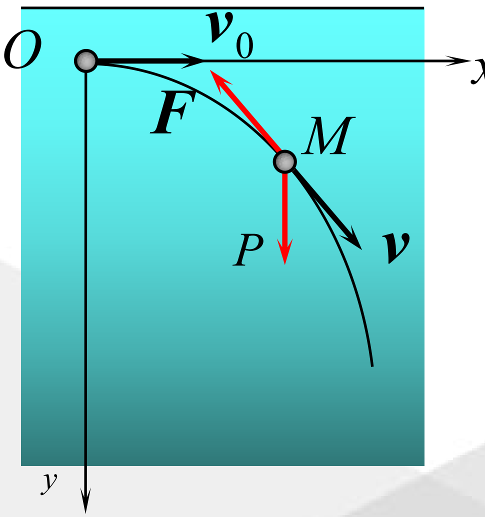
已知：小球质量为m，在静止的水中缓慢下沉，初速度沿水平方向，大小为v_0 。水的阻力为 $\boldsymbol{F} = -\mu \boldsymbol{v}$，$\mu$ 为粘滞系数，如图所示。水的浮力忽略不计。

求:小球的运动速度和运动规律。



解:
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-\mu v_x,\quad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=mg-\mu v_y$$

由 $t=0$ 时 $v_x=v_0 \quad v_y=0$



积分
$$\int_{v_0}^{v_x}\frac{1}{v_x}\mathrm{d}v_x=-\int_0^t\frac{\mu}{m}\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{v_y}\frac{1}{\frac{mg}{\mu}-v_y}\mathrm{d}v_y=\int_0^t\frac{\mu}{m}\mathrm{d}t$$

$$v_x=v_0e^{-\frac{\mu}{m}t}\qquad v_y=\frac{mg}{\mu}(1-e^{-\frac{\mu}{m}t})$$

由 $t=0$ 时，$x=y=0$ 积分

$$\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t v_0e^{-\frac{\mu}{m}t}\mathrm{d}t$$

$$\int_0^y\mathrm{d}y=-\int_0^t\frac{mg}{\mu}(1-e^{-\frac{\mu}{m}t})\mathrm{d}t$$

$$x=v_0\frac{m}{\mu}(1-e^{-\frac{\mu}{m}t})$$

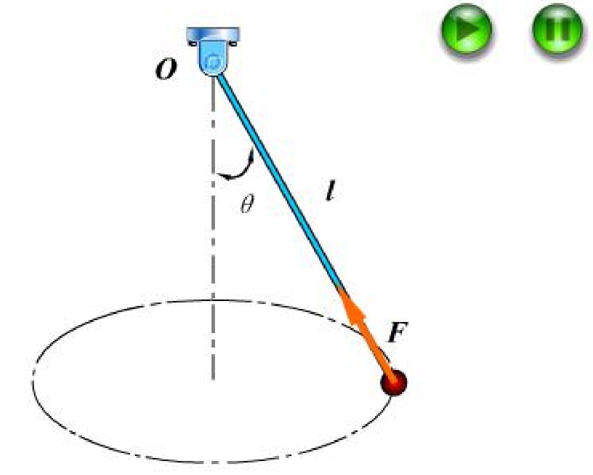
$$y=\frac{mg}{\mu}t-\frac{m^2g}{\mu^2}(1-e^{-\frac{\mu}{m}t})$$

属于第二类基本问题。

例9-3

已知：一圆锥摆，如图所示。质量m=0.1kg 的小球系于长 l=0.3 m 的绳上，绳的另一端系在固定点O，并与铅直线成 $\theta = 60^\circ$ 角。

求：如小球在水平面内作匀速圆周运动，小球的速度与绳的张力。



解： 研究小球

$$m\frac{v^2}{\rho}=F\sin\theta$$

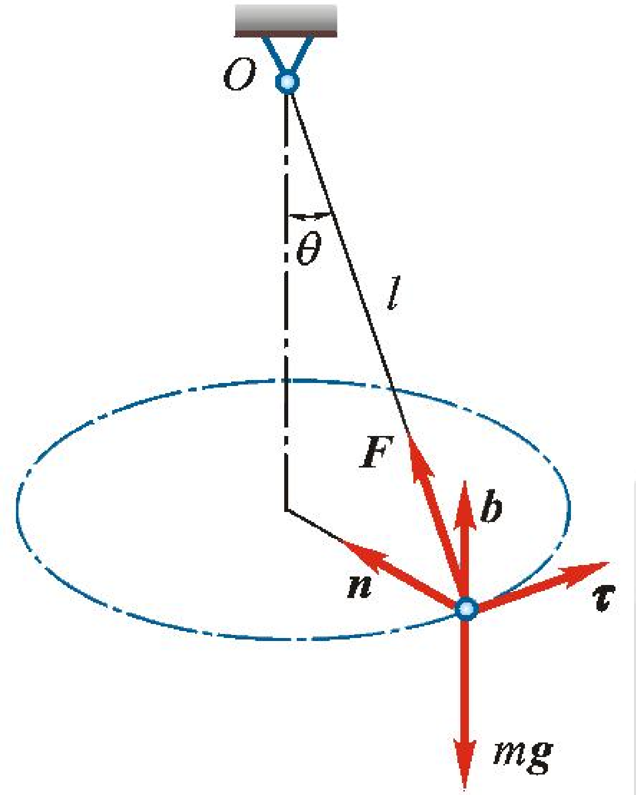
$$F\cos\theta-mg=0$$

其中 $\rho=l\sin\theta$

$$F=\frac{mg}{\cos\theta}=1.96\text{N}$$

$$v=\sqrt{\frac{Fl\sin^2\theta}{m}}=2.1\,\text{m}/\text{s}$$

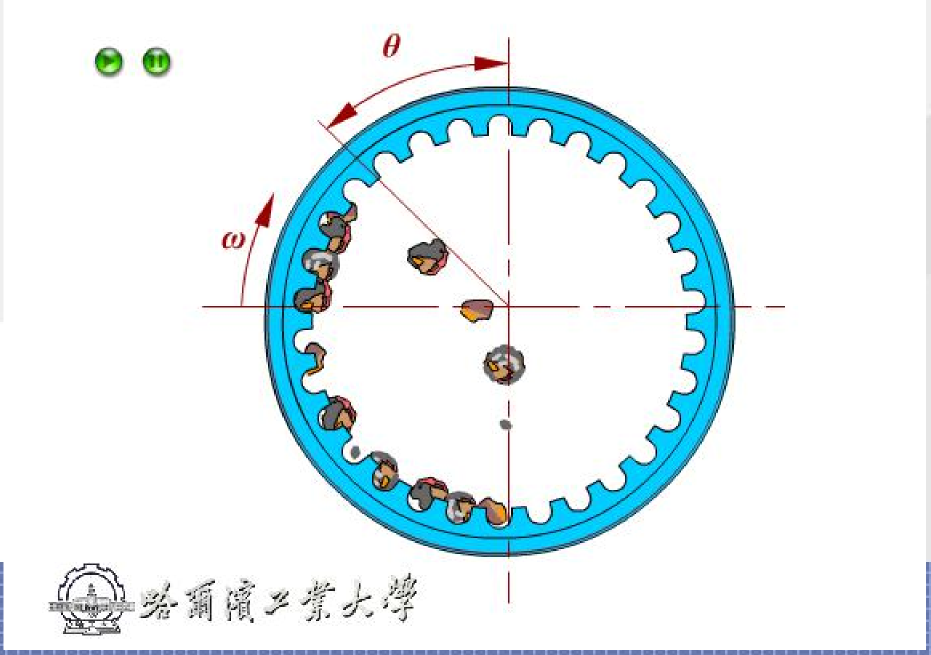
属于混合问题。



例9-4

已知：粉碎机滚筒半径为 R，绕通过中心的水平轴匀速转动，筒内铁球由筒壁上的凸棱带着上升。为了使小球获得粉碎矿石的能量，铁球应在 $\theta=\theta_0$ 时才掉下来。

求：滚筒每分钟的转数 n 。



解： 研究铁球

$$m\frac{v^2}{R} = F_N + mg\cos\theta$$

其中 $v = \frac{\pi n}{30} R$

当 $\theta = \theta_0, F_N = 0$ 时，解得

$$n = 9.549\sqrt{\frac{g}{R}\cos\theta_0}$$

当 $n \geq 9.549\sqrt{\frac{g}{R}}$ 时，球不脱离筒壁。