



## 第四章 根轨迹法

4.1 根轨迹与根轨迹方程

4.2 绘制根轨迹的基本法则

4.3 系统闭环零极点分布与阶跃响应的关系

4.4 控制系统的根轨迹分析法

4.5 根轨迹校正

4.6 广义根轨迹



## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

### 4.4 控制系统的根轨迹分析法

控制理论的两大任务：

系统分析：画根轨迹，进行性能分析；

系统综合：利用根轨迹校正系统。

- ❖ 分析参数变化对系统稳定性的影响；
- ❖ 分析系统的瞬态和稳态性能；
- ❖ 由给定参数确定闭环系统极点的位置；
- ❖ 根据性能要求确定系统的参数；
- ❖ 对系统进行校正。

分析系统的性能

根轨迹校正



## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

### 一、 条件稳定系统的分析

**例1：** 设开环系统传递函数为： $G_o(s) = \frac{K^*(s^2 + 2s + 4)}{s(s+4)(s+6)(s^2 + 1.4s + 1)}$

试绘制根轨迹并讨论使闭环系统稳定时 $K^*$ 的取值范围。

**解：**根据绘制根轨迹的步骤，可得：

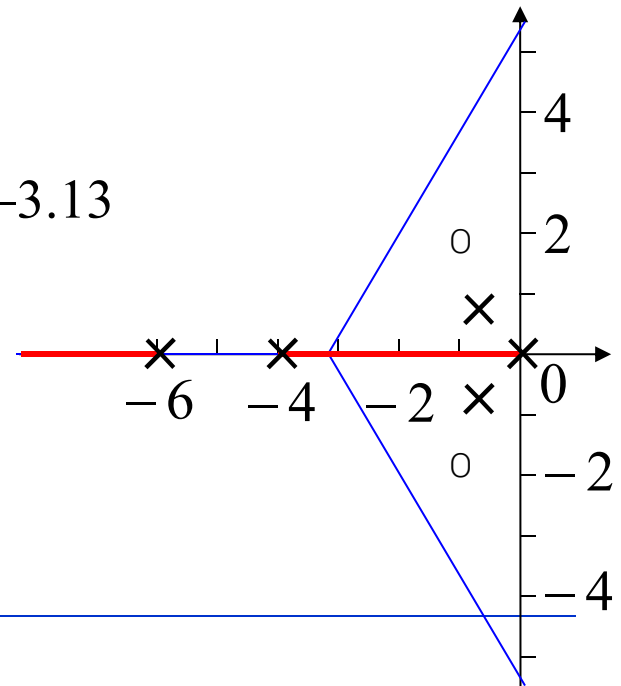
➤ 开环极点：0, -4, -6,  $-0.7 \pm j0.714$ ，零点： $-1 \pm j1.732$

➤ 渐进线：与实轴的交点：

$$\sigma_a = \frac{\sum p_j - \sum z_i}{n - m} = \frac{-4 - 6 - 1.4 + 2}{3} = -3.13$$

$$\text{倾角: } \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \pm \frac{\pi}{3}, \pi$$

➤ 实轴上根轨迹区间： $(-\infty, -6), [-4, 0]$





## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

► 分离会合点:

$$\text{分离角: } \theta_d = \frac{\pi}{2}$$

$$N(s) = s^2 + 2s + 4,$$

$$N'(s) = 2s + 2$$

$$D(s) = s^5 + 11.4s^4 + 39s^3 + 43.6s^2 + 24s$$

$$D'(s) = 5s^4 + 45.6s^3 + 117s^2 + 87.2s + 24$$

$$\text{由: } N'(s)D(s) - N(s)D'(s)$$

$$= 3s^6 + 30.8s^5 + 127.4s^4 + 338.4s^3 + 531.2s^2 + 348.8s + 96 = 0$$

可以求得分离点  $s = -2.3557$ 。

```
>> roots(conv([2 2],[1 11.4 39 43.6 24 0])-conv([5 45.6 117 87.2 24],[1 2 4]))
```

```
ans =
```

```
-5.1108
```

```
-0.9001 + 2.5589i
```

```
-0.9001 - 2.5589i
```

```
-2.3557
```

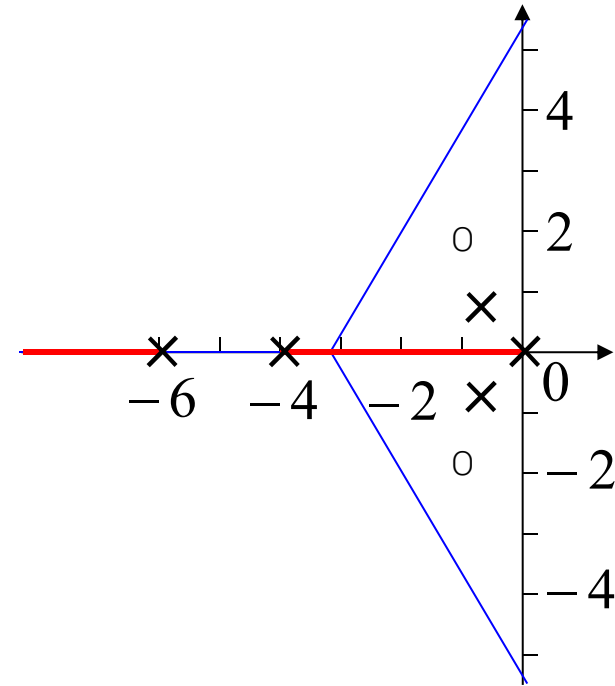
```
-0.5000 + 0.3335i
```

```
-0.5000 - 0.3335i
```



## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

近似求法：分离点在 $[-4, 0]$ 之间。



$s$	0	-0.5	-1	-1.5	-2.0	-2.5	-3	-3.5	-4
$K^*$	0	1.628	3	5.971	8.80	9.375	7.457	3.949	0

$K^*$  的最大值为9.375，这时 $s=-2.5$ ，是近似分离点。



## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

➤ 出射角:  $\theta_{p_{1,2}} = \mp 55^\circ$ , 入射角:  $\theta_{z_{1,2}} = \pm 103^\circ$

➤ 与虚轴的交点和对应的增益值:

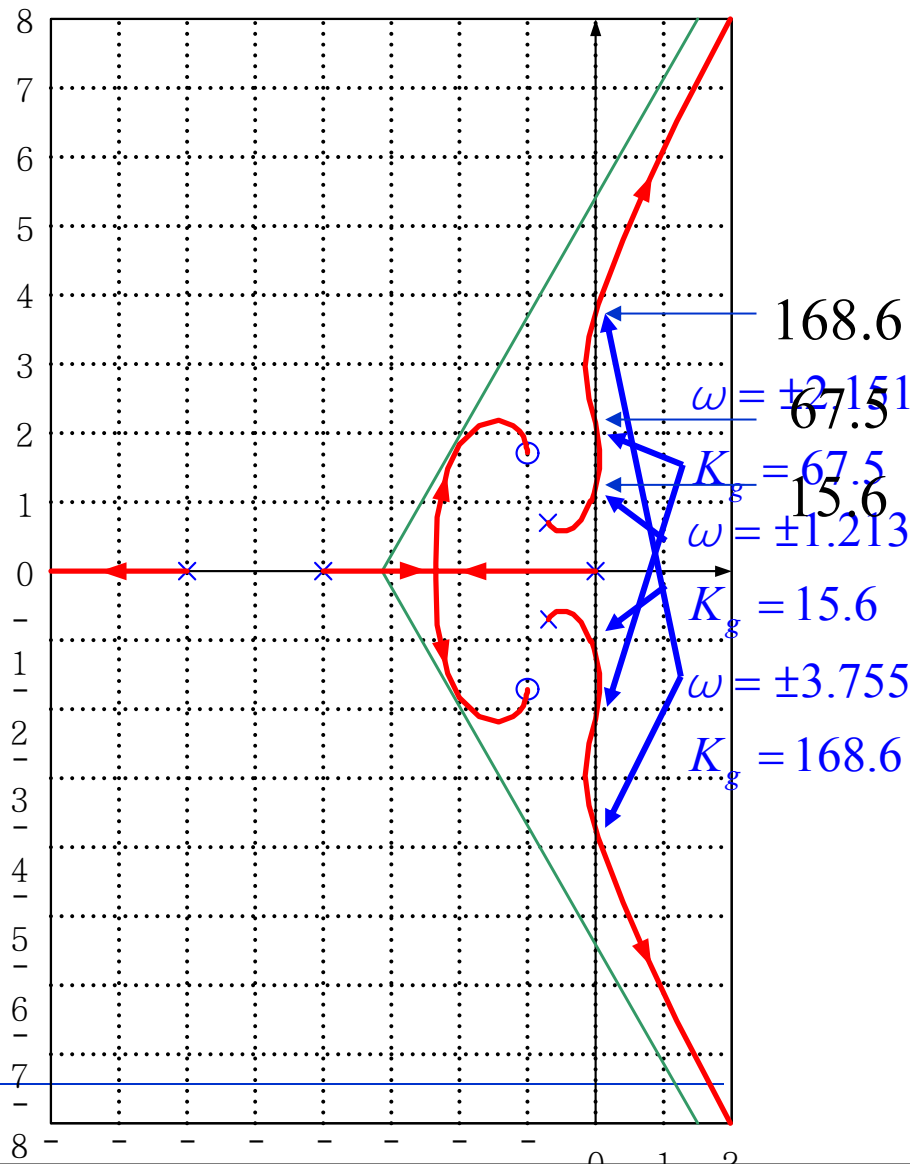
$$\omega_c = \begin{cases} \pm 1.213 \\ \pm 2.151 \\ \pm 3.755 \end{cases} \quad K_c^* = \begin{cases} 15.6 \\ 67.5 \\ 168.6 \end{cases}$$

画出根轨迹如图所示。

由图可知: 当  $0 < K^* < 15.6$   
和  $67.5 < K^* < 168.6$  时, 系统是稳定的;

当  $K^* > 168.6$  和  $15.6 < K^* < 67.5$   
时, 系统是不稳定的。

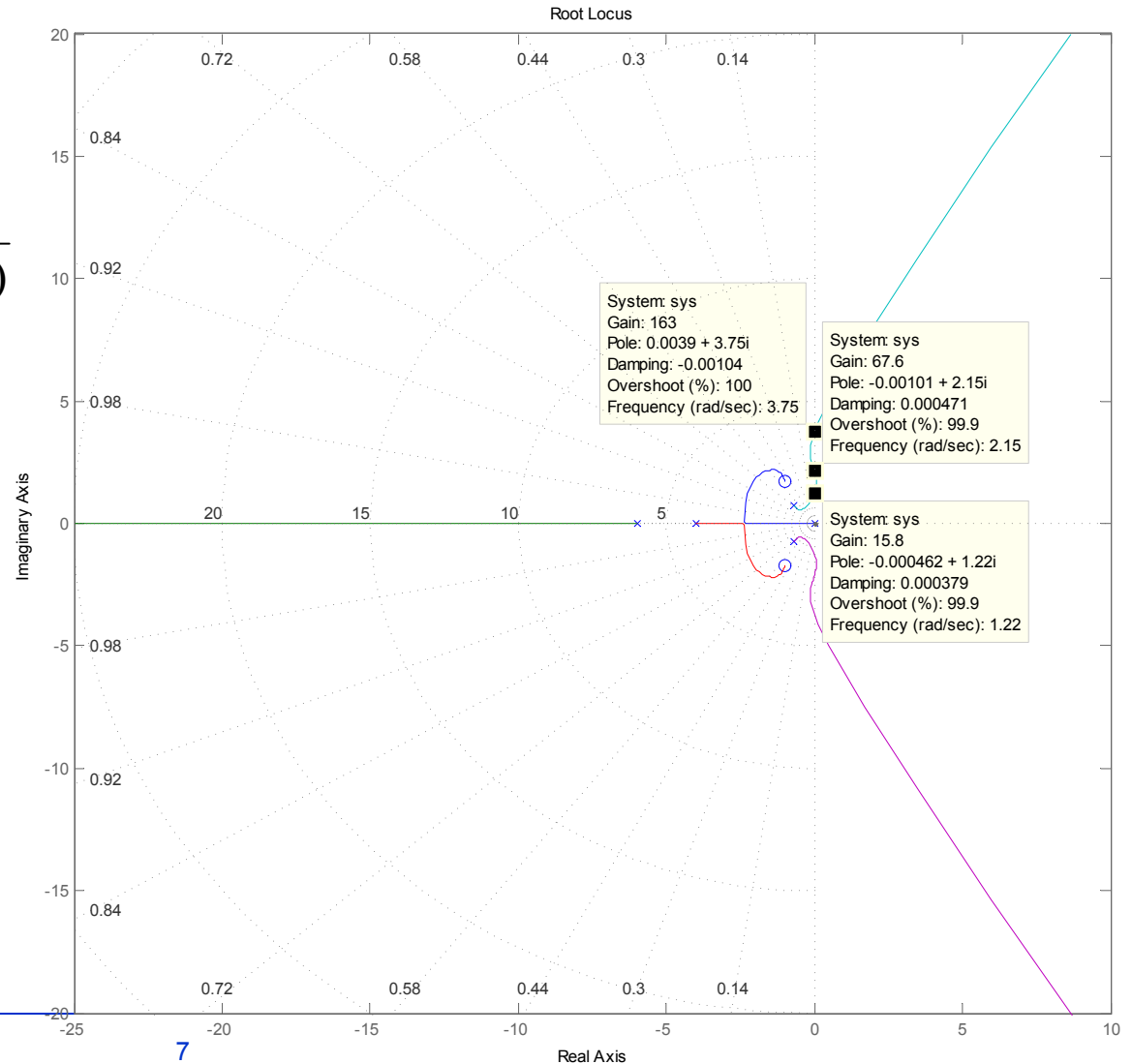
这种情况称为条件稳定系统。





```
rlocus([1 2 4],[ conv(conv(conv([1 0],[1 4]),[1 6]),[1 1.4 1])])
```

$$G_o(s) = \frac{K^*(s^2 + 2s + 4)}{s(s + 4)(s + 6)(s^2 + 1.4s + 1)}$$





## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

**条件稳定系统：**参数在一定的范围内取值才能使系统稳定，这样的系统叫做**条件稳定系统**。

下面的系统就是条件稳定系统的例子：

❖ 开环非最小相位系统，其闭环系统的根轨迹必然有一部分在 $s$ 的右半平面；

❖ **注：**对于**闭环系统**，如果它的开环传递函数极点和零点的实部都小于或等于零，则称它是**最小相位系统**；如果开环传递函数中有正实部的零点或极点，或有延迟环节，则称系统是**非最小相位系统**。

❖ 具有正反馈的环节。

条件稳定系统的工作性能往往不能令人满意。在工程实际上，应注意参数的选择或通过适当的校正方法消除条件稳定问题。



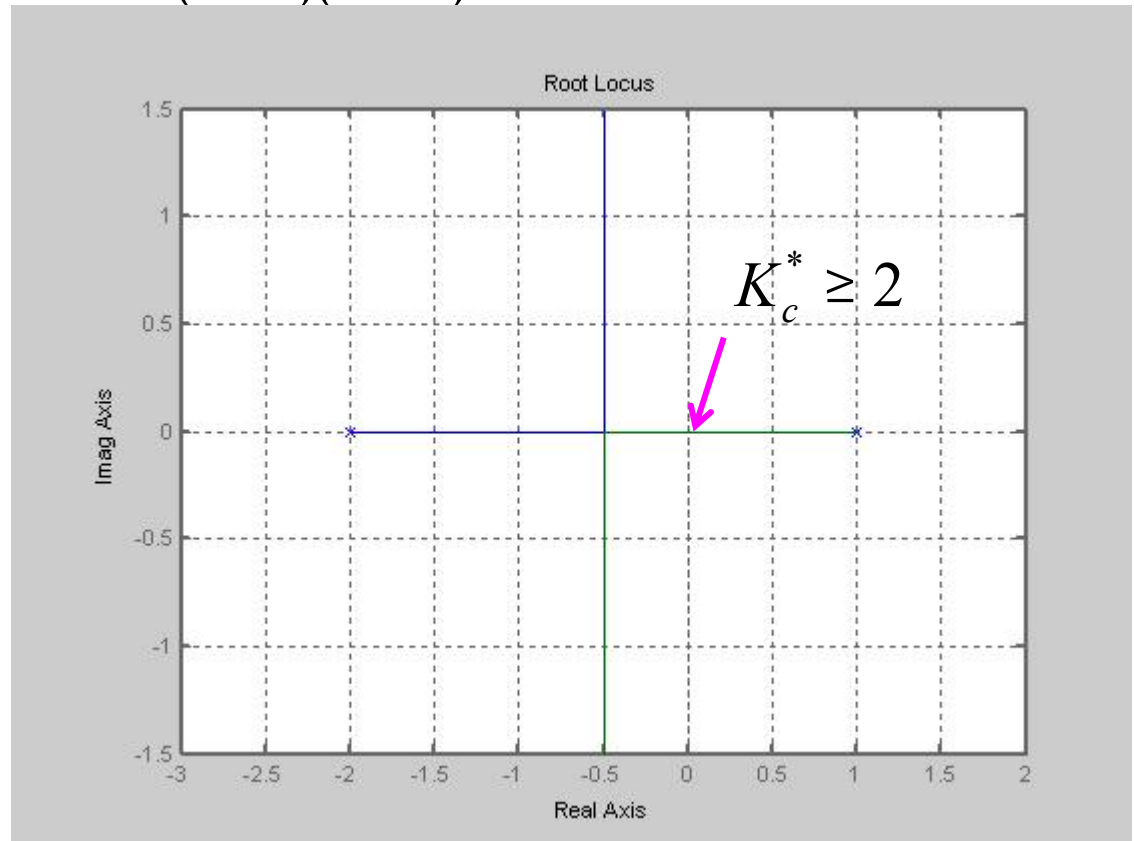


## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

**例2:**非最小相位系统:  $G_o(s) = \frac{K^*}{(s-1)(s+2)}$  , 试确定使系统稳定时的增益值。

**解:** 根轨迹如右:

有闭环极点在右半平面, 系统是不稳定的。显然稳定临界点在原点。该点的增益临界值为  $K_c^*$  。



闭环特征方程为:  $s^2 + s - 2 + K^* = 0$  , 当  $s=0$  时,  $K_c^* = 2$  , 所以, 系统稳定的条件是:  $K_c^* \geq 2$



## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

### 二、瞬态性能分析和开环系统参数的确定

利用根轨迹可以清楚的看出开环根轨迹增益或其他开环系统参数变化时，闭环系统极点位置及其瞬态性能的改变情况。

以二阶系统为例：开环传递函数为  $G_o(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$

闭环传递函数为  $\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

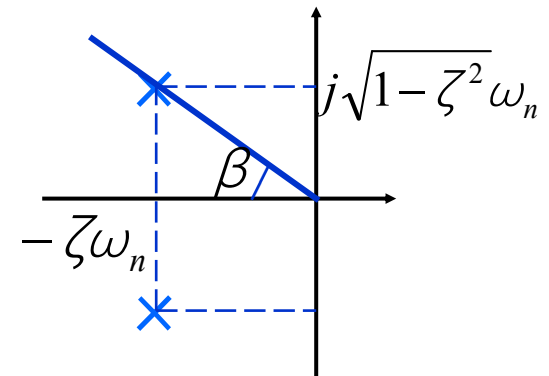
共轭极点为：  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$

在s平面上的分布如右图：

闭环极点的张角  $\beta$  为：

$$\beta = \arccos \zeta$$

所以  $\beta$  称为**阻尼角**。斜线称为**等阻尼线**。



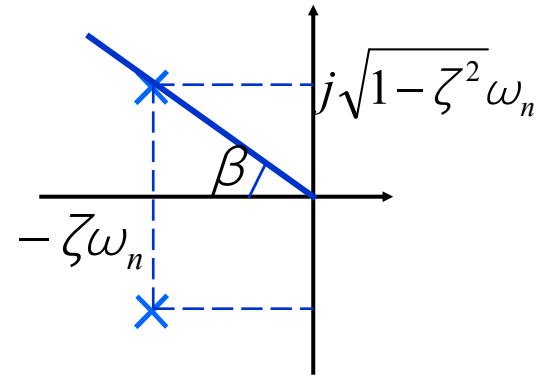


## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

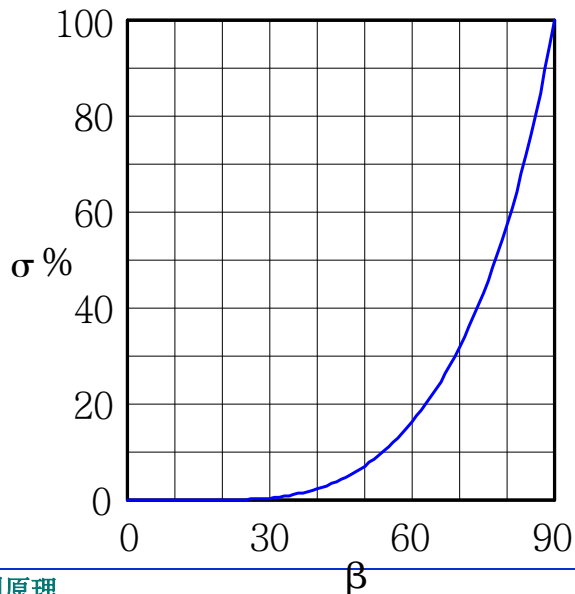
闭环二阶系统的主要的性能指标是超调量和调整时间。这些性能指标和闭环极点的关系如下：

$$\sigma\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = e^{-\pi \cot \beta} \times 100\%$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3}{\sigma} \quad (-\sigma \text{ 为极点实部})$$

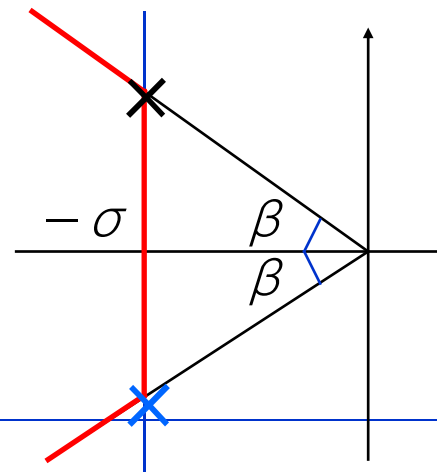


$\sigma\%$ 和 $\beta$  的关系如下图



若闭环极点落在下图中红线包围的区域中，则有：

$$\sigma\% \leq e^{-\pi \cot \beta} \text{ 和 } t_s \leq \frac{3}{\sigma}$$

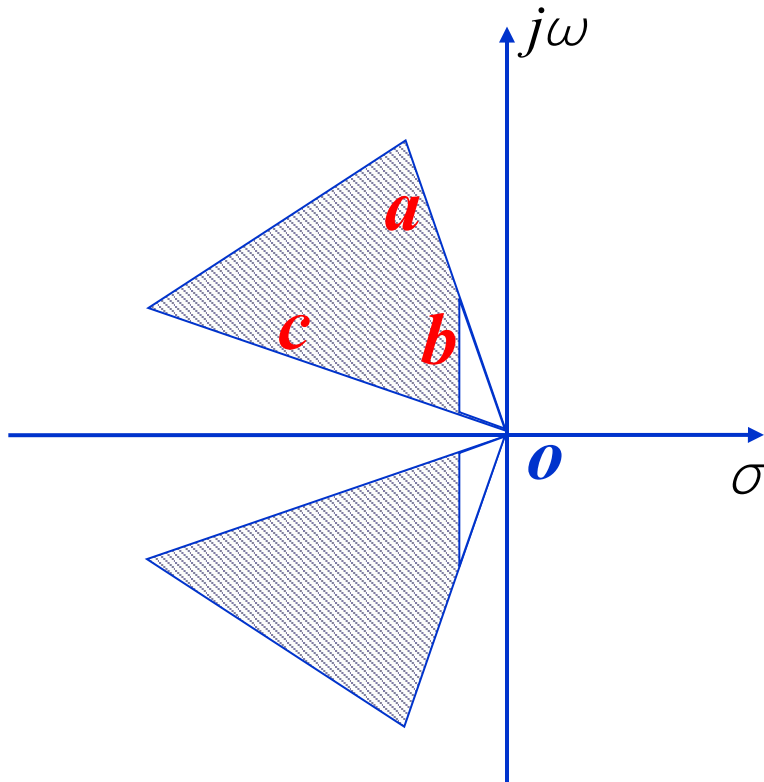




## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

### 小 结

- ❖ 利用根轨迹解决工程问题，实际上是根据系统性能指标的要求，求出主导极点在 $s$ 平面的分布区域。



$a$ -超调量  
 $b$ -调整时间  
 $c$ -调整时间，上升时间



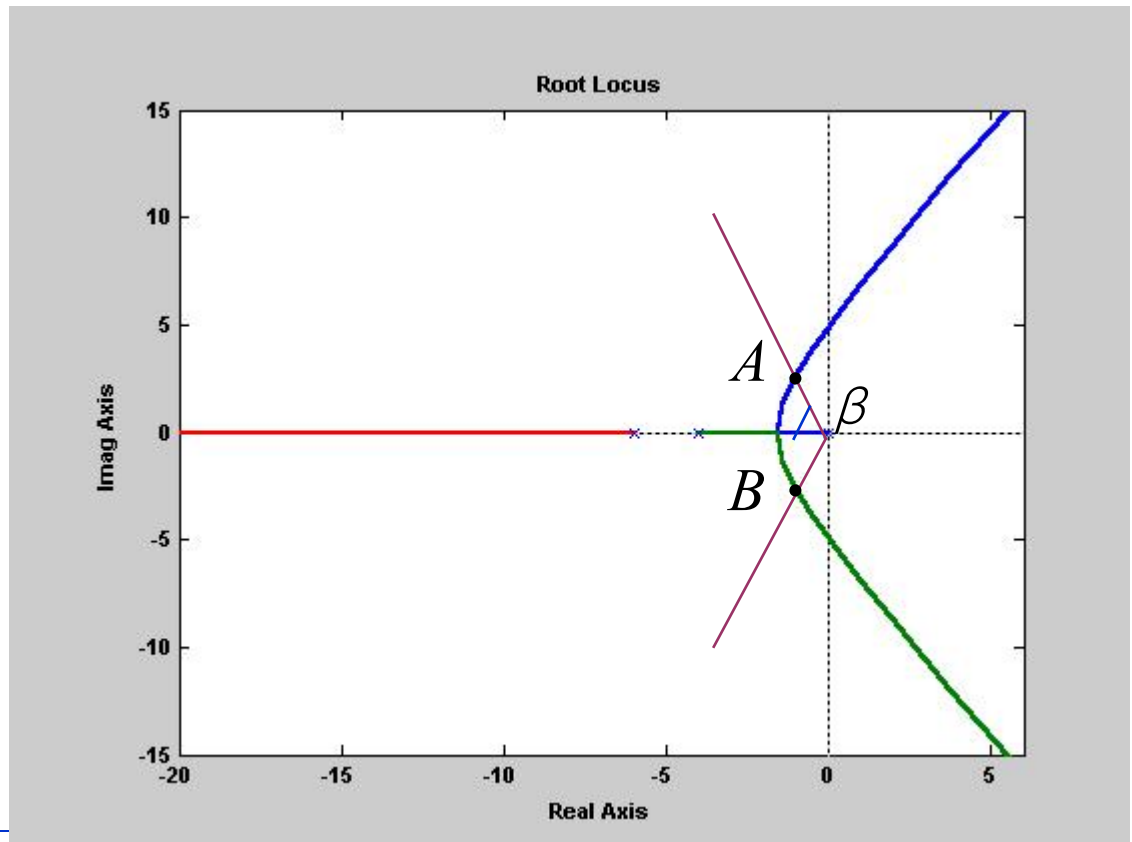
## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

上述结论也可应用于具有主导极点的高阶系统中。如下例：

**例3:**单位反馈系统的开环传递函数为：
$$G_o(s) = \frac{K^*}{s(s+4)(s+6)}$$

若要求闭环单位阶跃响应的最大超调量  $\sigma\% \leq 18\%$ ，试确定开环放大系数。

**[解]:** 首先画出根轨迹如右。由图可以看出：根轨迹与虚轴的交点为  $+j5, -j5$ ，这时的临界增益  $K_c^* = 240$  当  $K^* > 240$  时，闭环系统不稳定。





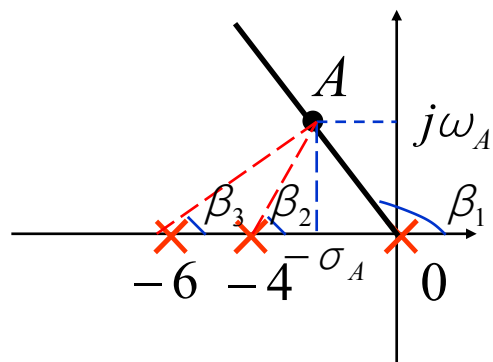
## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

这是一个三阶系统，从根轨迹上看出，随着 $K^*$ 的增加，主导极点越显著。所以可以用二阶系统的性能指标近似计算。

下面计算超调量和阻尼角的关系。由于：

$$\sigma\% = e^{-\pi \cot \beta} \times 100\%, \quad \text{当 } \sigma\% \leq 18\% \text{ 时解得: } \beta \leq 61.37^\circ$$

在根轨迹图上画两条与实轴夹角为 $\beta = 60^\circ$ 的直线，与根轨迹交与A、B两点。则A、B两点就是闭环共轭主导极点，这时系统的超调量小于18%。通过求A、B两点的坐标，可以确定这时的根轨迹增益 $K^*$ ，进而求得开环放大系数 $K$ 。



设A点坐标为： $-\sigma_A + j\omega_A$ ，则：

$$\frac{\omega_A}{\sigma_A} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \quad (1)$$

相角条件为： $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi$

$$120^\circ + \arctan \frac{\omega_A}{4 - \sigma_A} + \arctan \frac{\omega_A}{6 - \sigma_A} = \pi \quad (2)$$



## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

由(1), (2)式解得:  $\sigma_A = 1.2, \omega_A = 2.1$  共轭主导极点为:  $s_{1,2} = -1.2 \pm j2.1$ 。  
也可令  $s = x + j\sqrt{3}x$  代入特征方程  $s^3 + 10s^2 + 24s + K^* = 0$

实部方程  $-8x^3 - 20x^2 + 24x + K^* = 0$  解得:  $x = -1.2, s = -1.2 \pm j2.1$

虚部方程  $20\sqrt{3}x^2 + 24\sqrt{3}x = 0$   $K^* = 43.776$

开环传递函数以  $G_o(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{\prod_{j=1}^n (T_j s + 1)}$  的形式表示时,  $K$  称为开环放大系数。

显然  $K$  与  $K^*$  的关系为:  $K = \frac{K^* \left| \prod z_i \right|}{\left| \prod p_j \right|}$ , 式中  $p_j$  不计 0 极点。

所以, 开环放大系数:  $K = \frac{43.776}{4 \times 6} = 1.824$

由于闭环极点之和等于开环极点之和, 所以另一个闭环极点为:  $s_3 = -7.6$ 。该极点是共轭复极点实部的 6 倍多。



## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

**例4：**单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_o(s) = \frac{K^*}{(s+1)^2(s+4)^2}$$

1. 画出根轨迹;
2. 能否通过选择 $K^*$ 满足最大超调量 $\sigma\% \leq 5\%$ 的要求?
3. 能否通过选择 $K^*$ 满足调节时间 $t_s \leq 2$ 秒的要求?
4. 能否通过选择 $K^*$ 满足位置误差系数 $K_p \geq 10$ 的要求?

**解：** 1. 画根轨迹

① 实轴无根轨迹

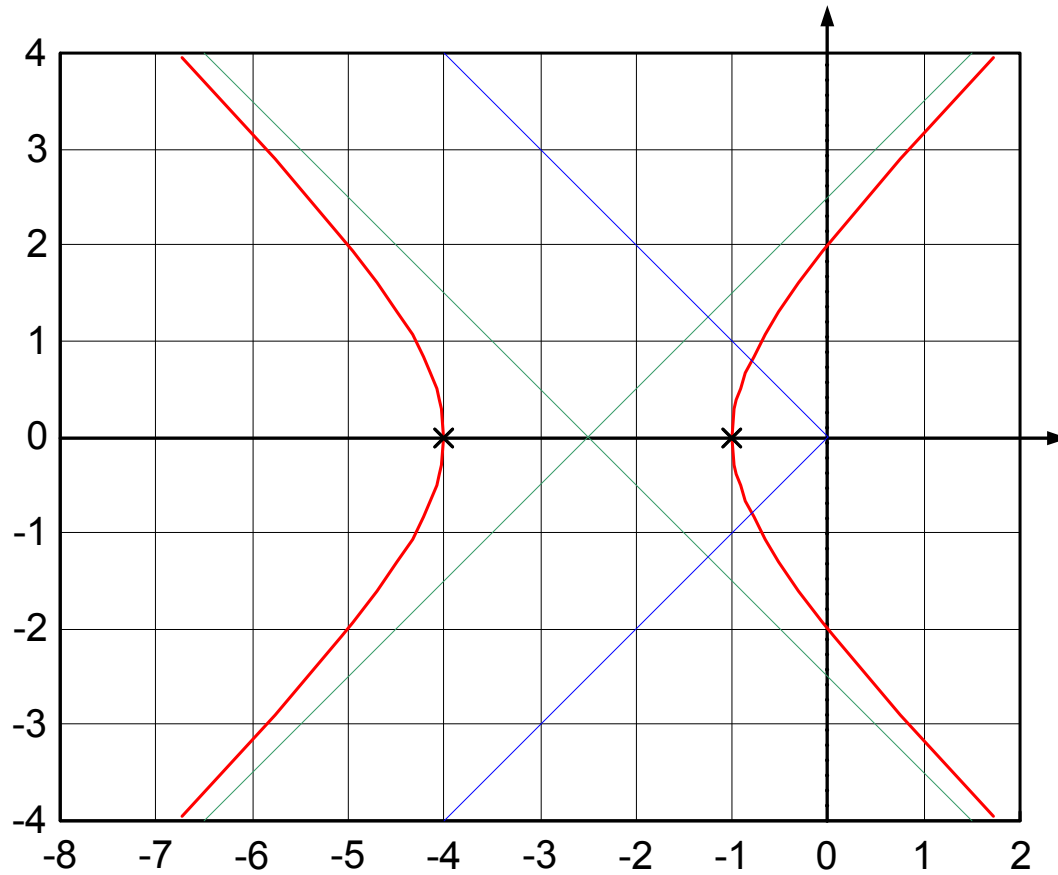
② 渐近线  $\sigma_a = -2.5$ ,  $\varphi_a = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$

③ 与虚轴交点  $\omega_c = \pm 2$   $K_c^* = 100$





## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能





## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

2. 能否通过选择 $K^*$ 满足最大超调量 $\sigma\% \leq 5\%$ 的要求?

当取阻尼角为 $45^\circ$ 的主导极点时,  $\sigma\% \leq 5\%$ 的要求。

由根轨迹可见阻尼角为 $45^\circ$ 的线与根轨迹相交, 可求得极点为 $s = -0.8 + 0.8j$ , 另一对极点为 $s = -4.2 + 0.8j$ 。相差5.25倍, 所以极点 $s = -0.8 + 0.8j$ 满足主导极点的要求。

3. 能否通过选择 $K^*$ 满足调节时间 $t_s \leq 2$ 秒的要求?

要求 $t_s \leq 2$ 秒, 即要求 $3/(\zeta\omega_n) \leq 2$ ,  $\zeta\omega_n \geq 1.5$ 。由根轨迹可知主导极点的实部 $< 1$ , 所以不能通过选择 $K^*$ 满足 $t_s \leq 2$ 秒的要求。

4. 能否通过选择 $K^*$ 满足位置误差系数 $K_p \geq 10$ 的要求?

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = \frac{K_c^*}{16} = \frac{100}{16} = 6.25$$

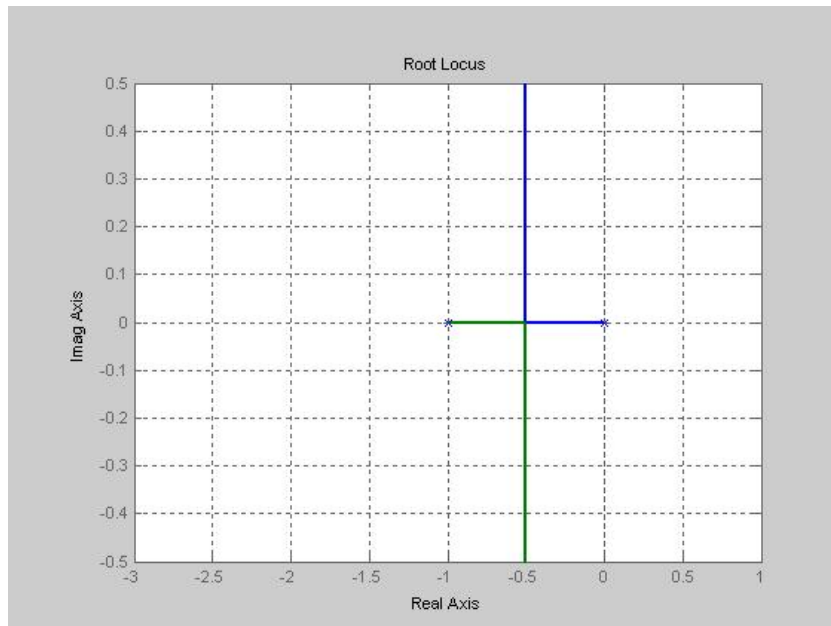
所以不能通过选择 $K_g$ 满足 $K_p \geq 10$ 的要求。



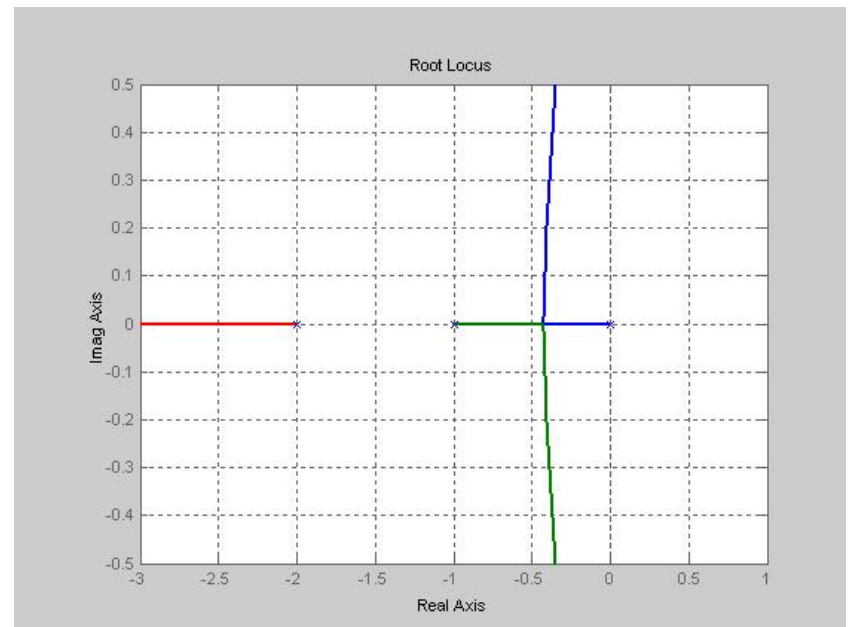
## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

**特别说明：** 开环零、极点对根轨迹形状的影响是值得注意的。

□ 一般说，开环传递函数在s左半平面增加一个极点将使原根轨迹右移。从而降低系统的相对稳定性，增加系统的调整时间。



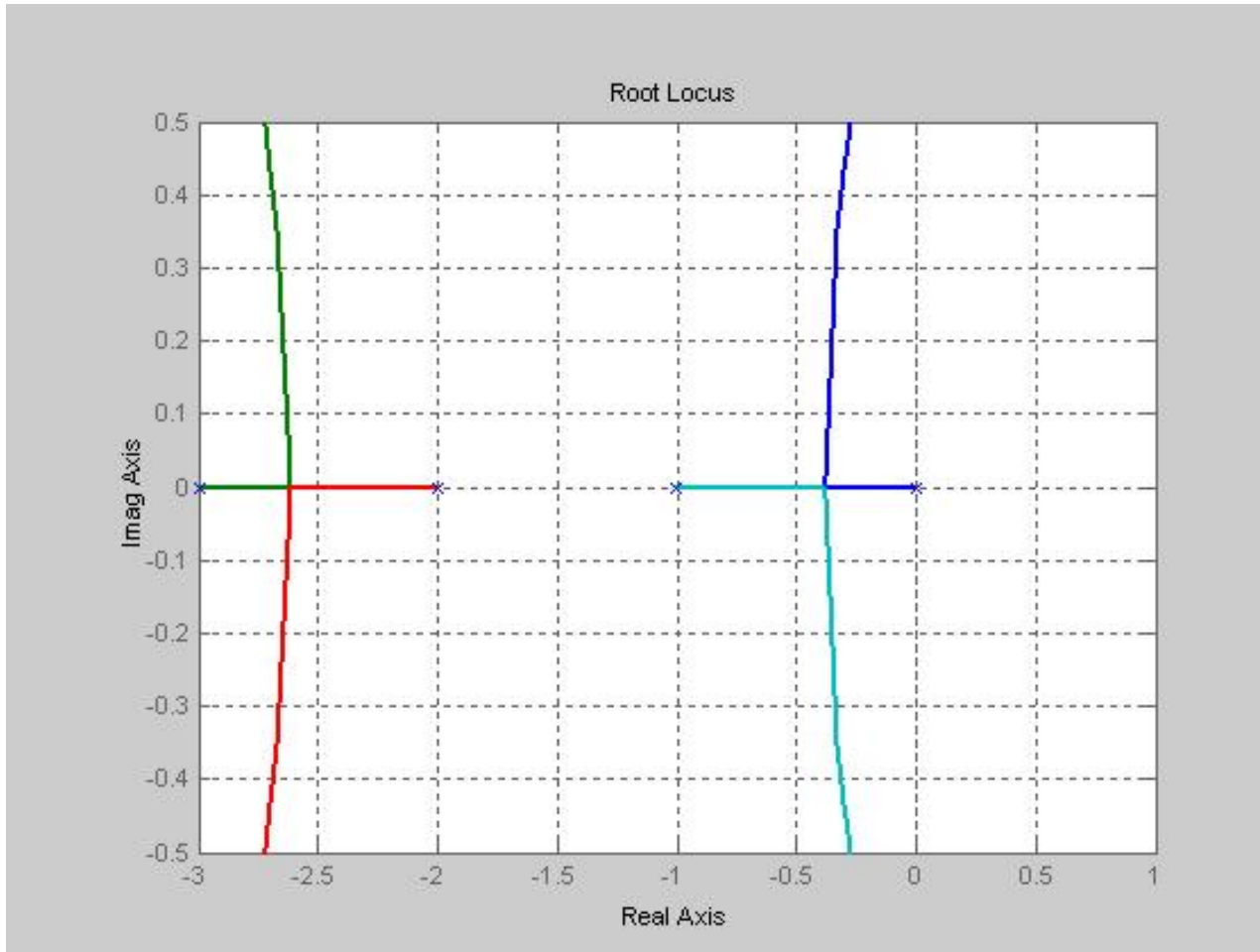
$$G_o(s) = \frac{K^*}{s(s+1)}$$



$$G_o(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$



## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

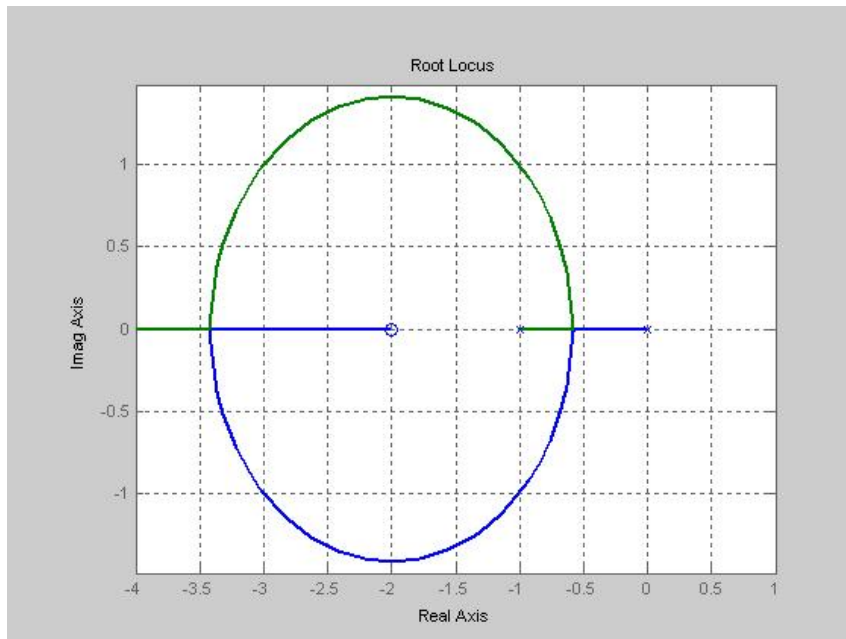


$$G_o(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

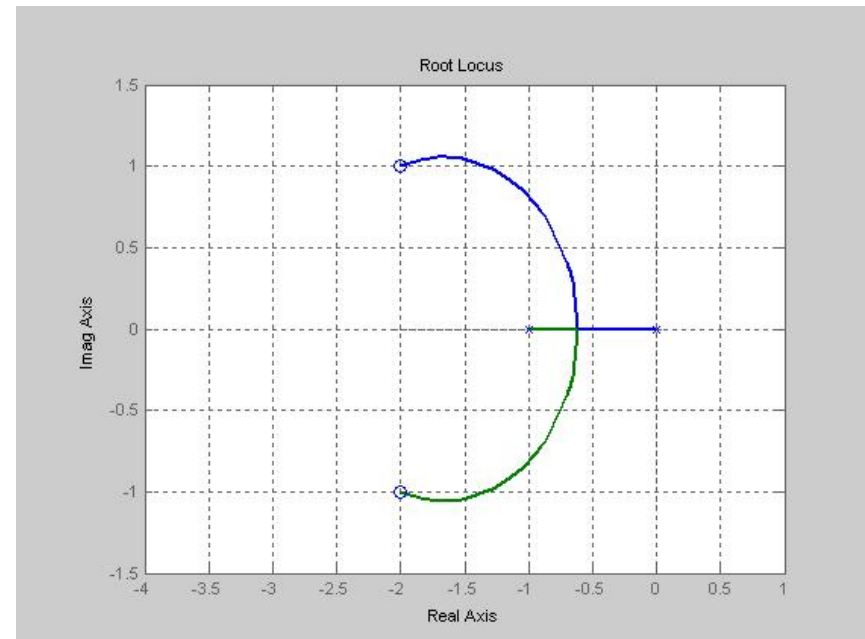


## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

□ 若在开环传递函数中增加一个零点，则原根轨迹向左移动。从而增加系统的稳定性，减小系统响应的调整时间。



$$G_o(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$$



$$G_o(s) = \frac{K^*(s+2-j1)(s+2+j1)}{s(s+1)}$$

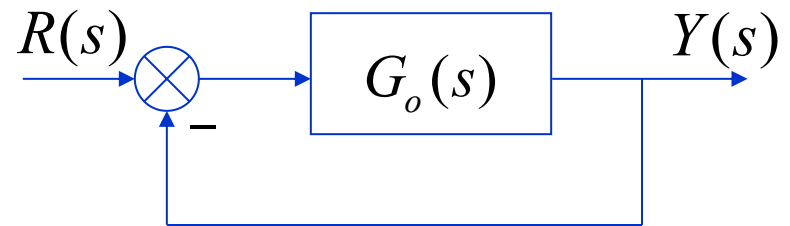


## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

### 三、利用根轨迹解决工程问题

#### 1、求增益的稳定边界

$$G_o(s) = \frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$



解：闭环系统的特征方程为：

$$D(s) = s(s+1)(s+2) + K^* = s^3 + 3s^2 + 2s + K^* = 0$$

将  $s = j\omega$  代入得：  $D(j\omega) = -j\omega^3 - 6\omega^2 + j5\omega + K^* = 0$

$$\therefore \begin{cases} -3\omega^2 + K^* = 0 \\ -\omega^3 + 2\omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K_c^* = 6 \end{cases} \text{ or } \begin{cases} \omega = 0 \\ K_c^* = 0 \end{cases} \text{ (舍去)}$$



## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

### 2、满足单调过渡过程的增益

【例】要求系统的暂态响应为单调过程，即  $\sigma\% = 0$ ，求  $k$  的取值范围。

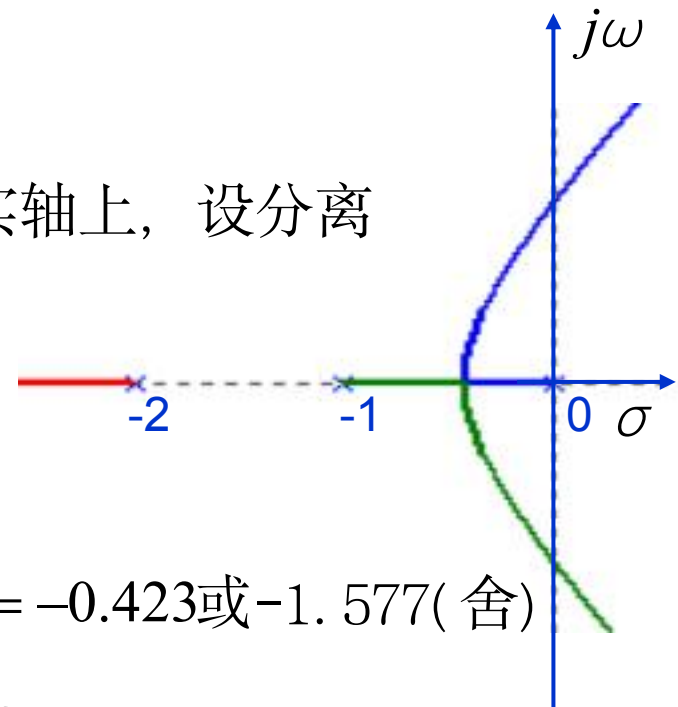
$$G_o(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

解：欲使系统单调过渡，则闭环极点必位于实轴上，设分离点为  $d$ ，由分离点公式

$$\sum \frac{1}{d - p_i} = \sum \frac{1}{d - z_i}$$

$$\text{得 } \frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+2} = 0 \Rightarrow 3d^2 + 6d + 2 = 0 \Rightarrow d = -0.423 \text{ 或 } -1.577 \text{ (舍)}$$

利用模条件，得此时  $k = 0.385$ ，因此， $0 < k < 0.385$ 。





## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

### 3、满足一定调节时间的控制参数（增益）。

要求单位负反馈系统响应衰减振荡， $t_s \leq 12s (\Delta = 0.05)$ ，求 $k$ 的取值。

$$G_o(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\text{解: } t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \leq 12s \Rightarrow \zeta\omega_n \geq 0.25$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$$

系统闭环特征方程为： $s(s+1)(s+2)+k=0$

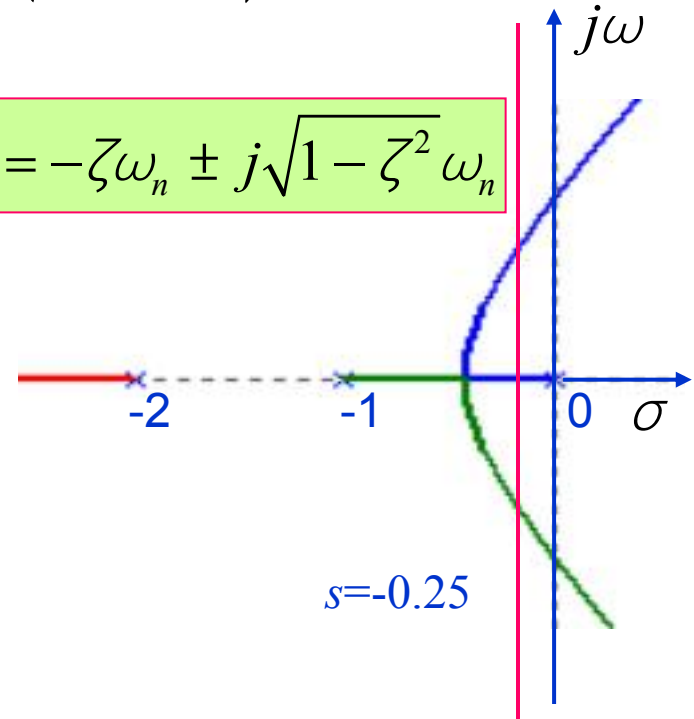
$s$ 坐标平面的虚轴左移0.25， $s' = s + 0.25 \Rightarrow$

$s = s' - 0.25$ ，代入特征方程

$$(s' - 0.25)(s' + 0.75)(s' + 1.75) + k = 0$$

$s' = j\omega$ 代入

$$\begin{cases} -2.25\omega^2 - 0.328 + k = 0 \\ -\omega^2 + 0.688 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{0.688} \\ k = 1.875(k_{\max}) \end{cases}$$







## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

### 4、满足超调量要求的系统增益。

【例】要求系统欠阻尼过渡，且  $\sigma\% \leq 20\%$ ，求  $k$  的取值范围。

$$G_o(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

解：由于  $\sigma\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$ ，所以  $\sigma\% \leq 20\% \Rightarrow \zeta = \cos\theta \geq 0.456$

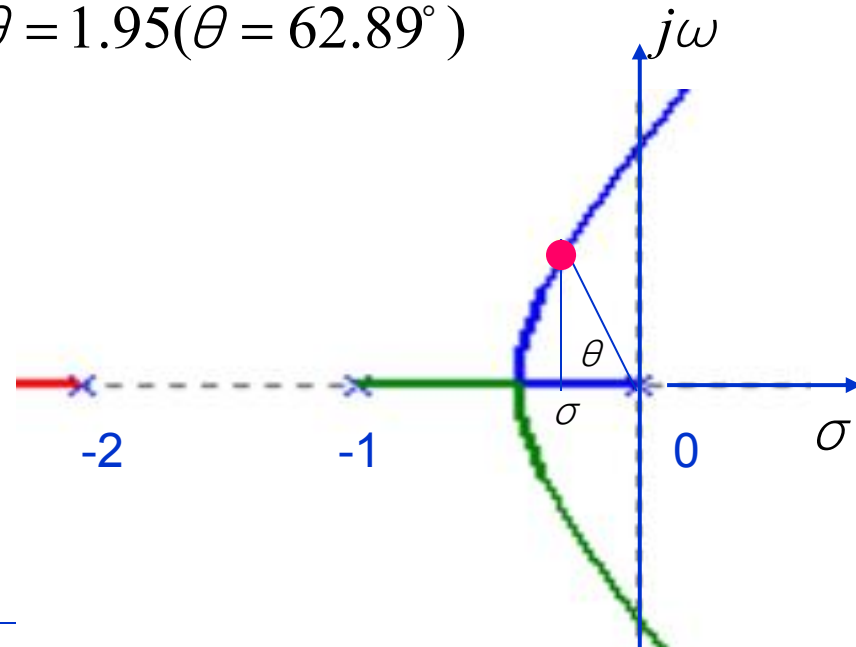
求满足要求的临界点增益  $k_c$ ，因  $\tan\theta = 1.95 (\theta = 62.89^\circ)$

令  $s = \sigma + j\sigma \tan\theta = \sigma + j1.95\sigma$ ，

代入特征方程  $s(s+1)(s+2) + k = 0$

可求得  $k_c = 1.16, \sigma = -0.32$

所以  $0.385 < k \leq 1.16$ 。





## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

### 四、用Matlab绘制根轨迹

**例5：**系统的开环传递函数为： $G_o(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ ，试利用Matlab画出系统的根轨迹。

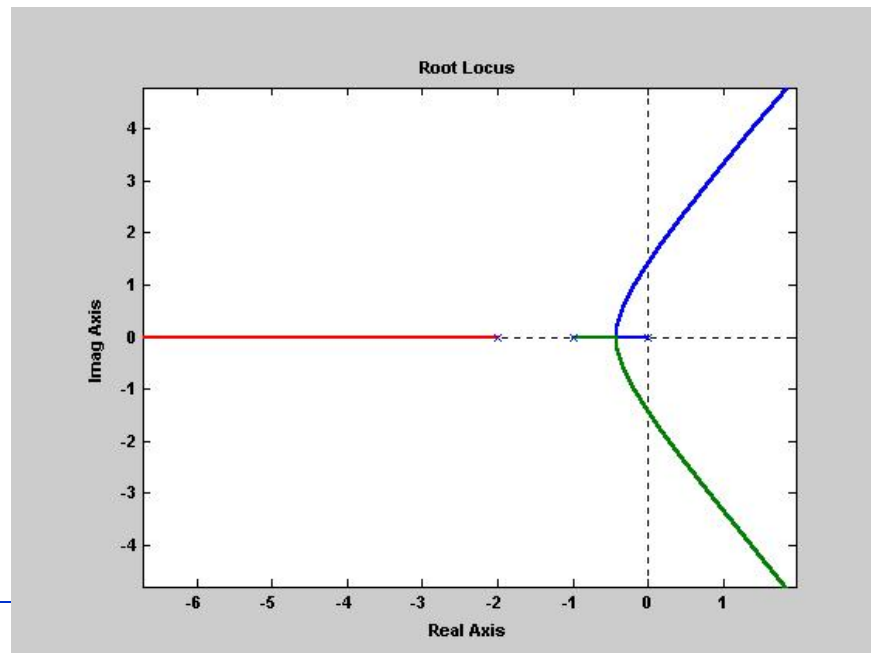
**解：**打开Matlab,创建一个m文件，输入下列程序片段：

`num=[0 0 0 1];`%开环传递函数分子系数，降幂排列

`den=[1 3 2 0];`%开环传递函数分母系数，降幂排列

`rlocus(num,den);`

运行，可得到根轨迹：





## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

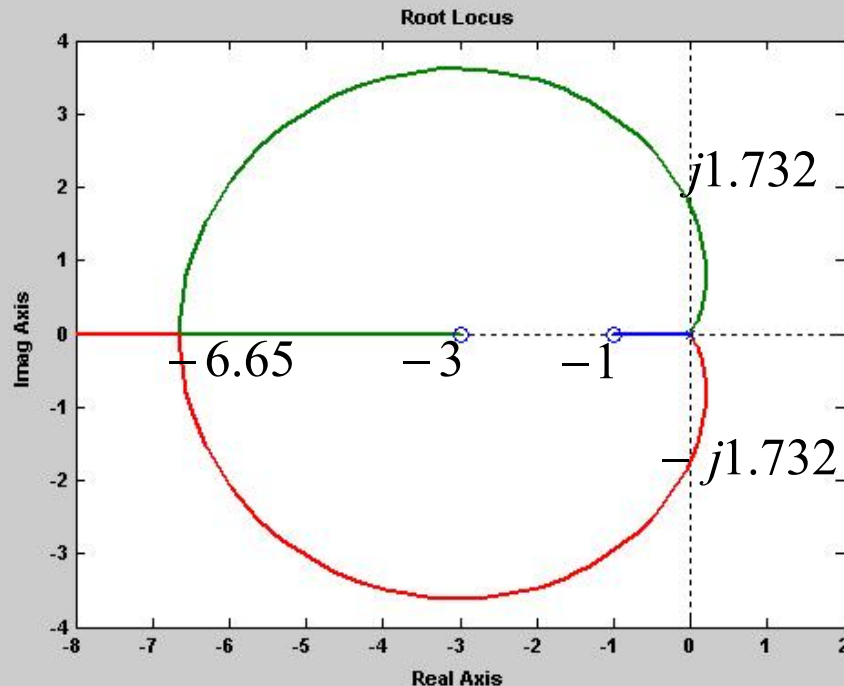
例6:已知系统开环传递函数为

$$G_o(s) = \frac{K^*(s+1)(s+3)}{s^3}$$

- (1) 画出系统的根轨迹;
- (2) 计算使系统稳定的 $K^*$ 值范围;
- (3) 计算系统对于斜坡输入的稳态误差。

解: (1) 画根轨迹:

```
num=[0 1 4 3];  
den=[1 0 0 0];  
r=rlocus(num,den);  
rlocus(num,den);  
hold on;  
plot(r,'LineWidth',2);  
axis([-8 2 -4 4]);
```





## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

□ 会合分离点：由方程  $N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 0$

$$\text{得 } s^2 + 8s + 9 = 0$$

$$\text{解得 } s_{1,2} = -4 \pm 2.65$$

$s_1 = -6.65$  在根轨迹上，因此是会合点。  $s_2 = -1.35$  不在根轨迹上，舍去。

□ 求出射角：  $\theta_p = \pm 180^\circ(2k+1)$ ，得  $\theta_p = \pm 60^\circ, 180^\circ$ 。

该系统有三条根轨迹，一条从原点起始，终止于开环零点-1处；另两条从原点以  $\pm 60^\circ$  的出射角起始，分别终止于-3和无穷零点处。



## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

### □ 求与虚轴交点

系统特征方程为  $s^3 + K^*s^2 + 4K^*s + 3K^* = 0$

劳斯表为

$s^3$	1	$4K^*$
$s^2$	$K^*$	$3K^*$
$s^1$	$4K^* - 3$	0
$s^0$	$3K^*$	

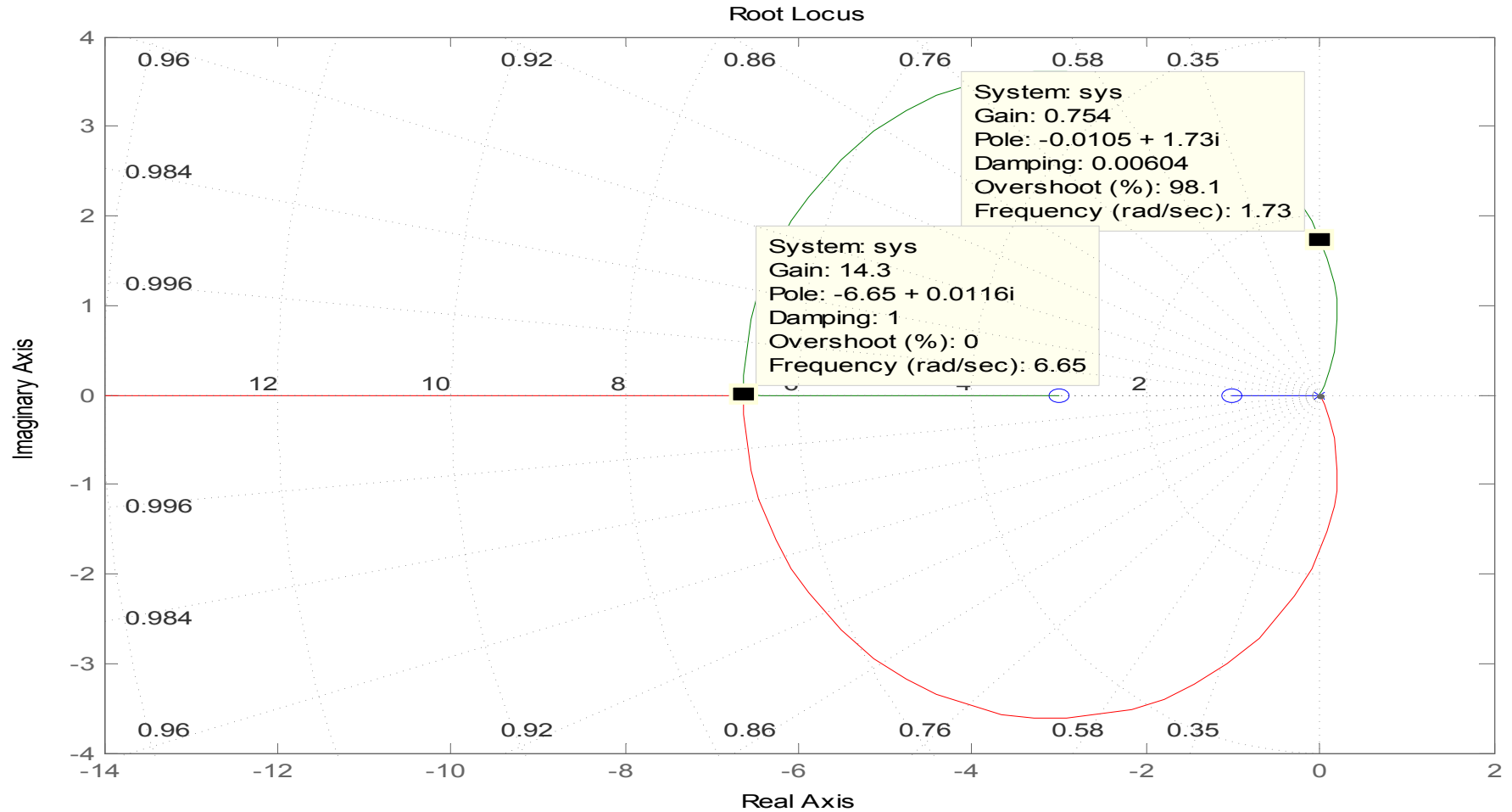
当  $K^* = \frac{3}{4}$  时，由辅助方程  $K^*s^2 + 3K^* = 0$ ，可求出根轨迹与虚轴的交点为  $\pm j\sqrt{3}$ 。

(2) 由劳斯表可知当  $K^* > \frac{3}{4}$  时，系统稳定。

(3) 系统含有三个积分环节，属Ⅲ型系统，Ⅲ型系统对于斜坡输入的稳态误差为零。



## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能





## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

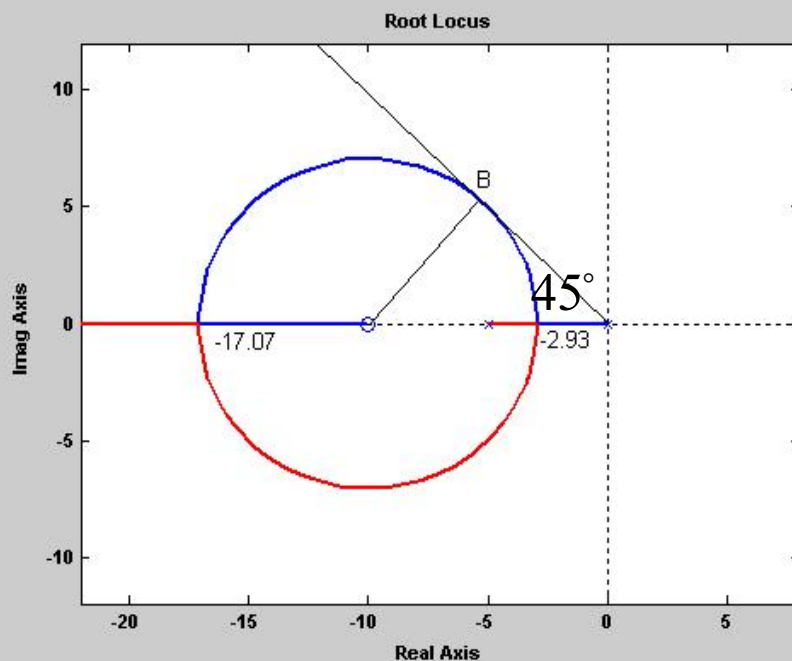
**例7:** 已知单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K^*(s+10)}{s(s+5)}$

(1) 画出系统的根轨迹; (2) 计算当增益 $K^*$ 为何值时, 系统的阻尼比 $\zeta$ 是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , 并求此时系统的闭环特征根; (3) 分析 $K^*$ 对系统性能的影响, 并求系统最小阻尼比所对应的闭环极点。

**解:**

□ 画根轨迹

分离 (会合) 点分别为-2.93和-17.07, 分离 (会合) 角为90度。根轨迹为圆, 如图所示。




$$\sigma_B(5 + K^*) + 10K^* + j(2\sigma_B^2 + 5\sigma_B + K^*\sigma_B) = 0$$
$$\begin{cases} \sigma_B(5 + K^*) + 10K^* = 0 \\ 2\sigma_B + 5 + K^* = 0 \end{cases}$$

由图可知当 $K^* = 5$ 时直线OB与圆相切, 系统的阻尼比 $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  特征根为 $-5 \pm j5$ 。







## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

□ 对于分离点  $-2.93$ ，由幅值条件可知

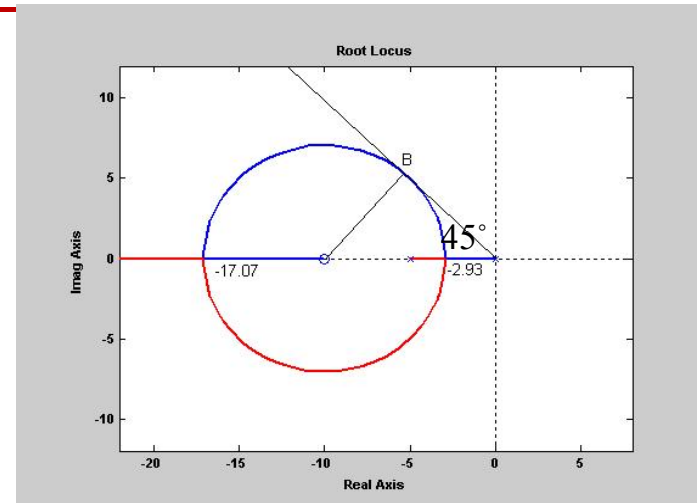
$$K_1^* = \frac{2.93 \times |5 - 2.93|}{|10 - 2.93|} = 0.858$$

对于会合点  $-17.07$ ，有

$$K_2^* = \frac{17.07 \times |5 - 17.07|}{|10 - 17.07|} = 29.14$$

由根轨迹图可知，当  $0 < K^* < 0.858$  时，闭环系统有一对不等的负实数极点，其瞬态响应呈过阻尼状态。当  $0.858 < K^* < 29.14$  时，闭环系统有一对共轭复数极点，其瞬态响应呈欠阻尼状态。当  $29.14 < K^* < \infty$  时，闭环系统又有一对不等的负实数极点，瞬态响应又呈过阻尼状态。

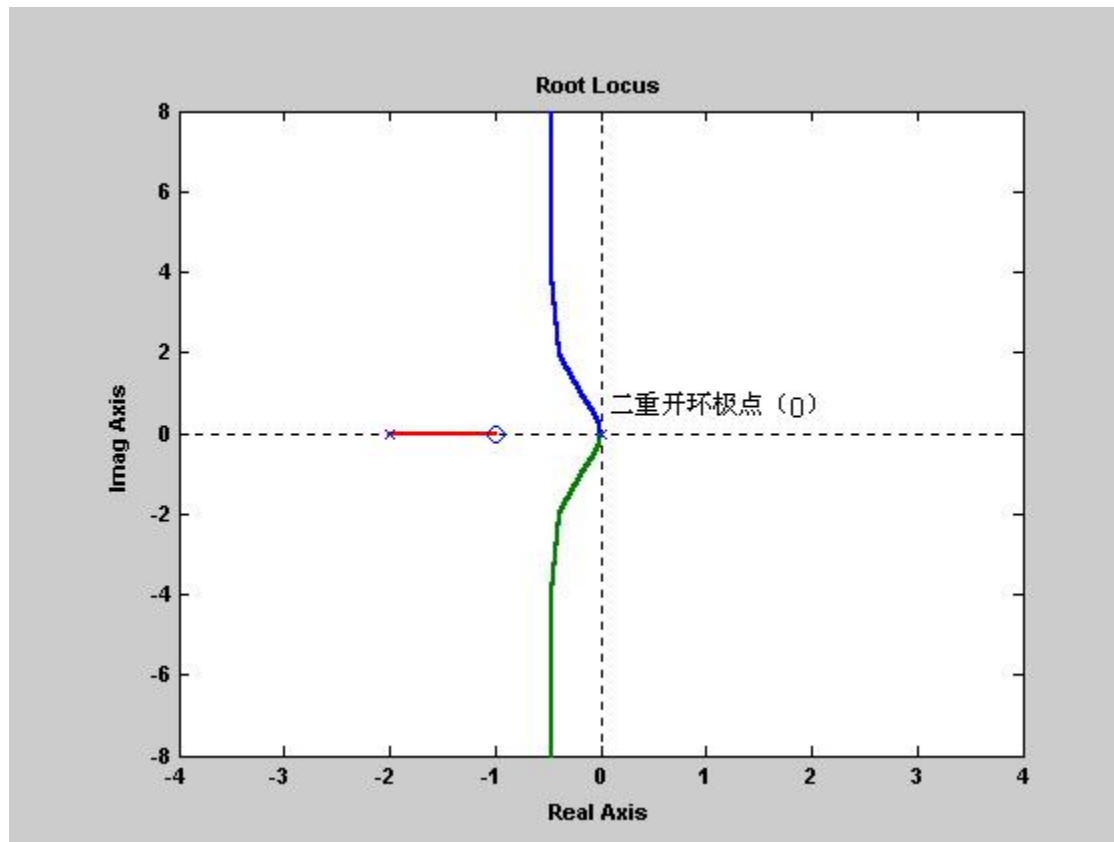
□ 由坐标原点作根轨迹圆的切线，此切线就是直线OB，直线OB与负实轴夹角的余弦就是系统的最小阻尼比，由上可知，此时系统的闭环极点为  $-5 \pm j5$ 。





## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

**例8:** 设系统A和B有相同的被控对象，且有相同的根轨迹，如下图所示。已知系统A有一个闭环零点，系统B没有闭环零点。试求系统A和B的开环传递函数和它们所对应的闭环方块图。





## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

**解：**①由于两系统的根轨迹完全相同，因而它们对应的开环传递函数和闭环特征方程式也完全相同。由上页图可知系统A和B的开环传递函数为：

$$G_o(s) = \frac{K^*(s+1)}{s^2(s+2)}$$

特征方程为：

$$D(s) = s^2(s+2) + K^*(s+1)$$

②系统A和B的闭环传递函数分别为：

$$\begin{aligned}\Phi_A(s) &= \frac{K^*(s+1)}{D(s)} = \frac{K^*(s+1)}{s^2(s+2) + K^*(s+1)} & \Phi_B(s) &= \frac{K^*}{D(s)} = \frac{K^*}{s^2(s+2) + K^*(s+1)} \\ &= \frac{\frac{K^*(s+1)}{s^2(s+2)}}{1 + \frac{K^*(s+1)}{s^2(s+2)}} & &= \frac{\frac{K^*}{s^2(s+2)}}{1 + \frac{K^*(s+1)}{s^2(s+2)}}\end{aligned}$$

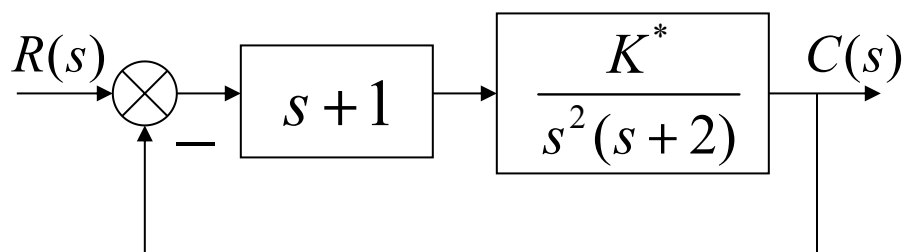


## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

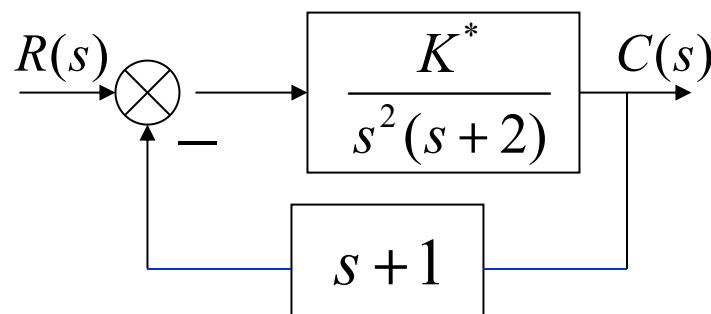
由此可知，系统A是一单位反馈系统，前向通路的传递函数

为： $\frac{K^*(s+1)}{s^2(s+2)}$ 。系统B的前向通路传递函数为： $\frac{K^*}{s^2(s+2)}$ ，反馈通路传递函数为： $(s+1)$ 。由于系统A和B有相同的被控对象，因此，

系统的A的前向通路传递函数可写为： $(s+1) \cdot \frac{K^*}{s^2(s+2)}$ ，闭环方块图如下图（a）所示，系统B的闭环方块图如下图（b）所示。



图(a) A系统



图(b) B系统

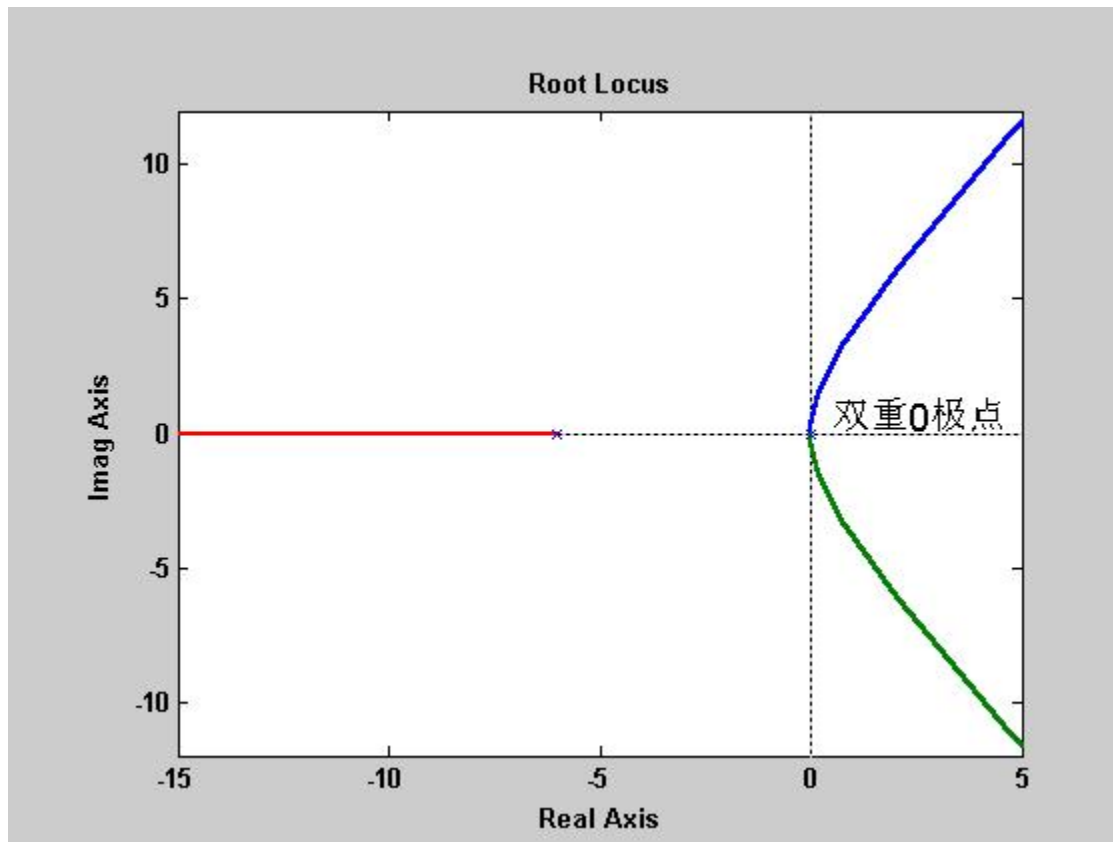
根轨迹相同的系统，开环传递函数和闭环极点都相同，但闭环零点却不一定相同。



## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

**例9:**已知单位反馈系统的根轨迹如下图所示。

- (1) 写出该系统的闭环传递函数；
- (2) 试用适当的方法使系统在任意 $K^*$ 值时均处于稳定的状态。





## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

解：① 由根轨迹图知系统的开环传递函数为： $G(s) = \frac{K^*}{s^2(s+6)}$   
单位反馈系统的闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{K^*}{s^2(s+6) + K^*} = \frac{K^*}{s^3 + 6s^2 + K^*}$$

② 当在系统中加入比例微分控制时，开环传递函数增加了一个零点，此时：

$$G(s) = \frac{K^*(s+a)}{s^2(s+6)}$$

这时渐近线与实轴的夹角为： $\pm 90^\circ$  只要渐近线与负实轴相交，系统的根轨迹就在左半S平面。因此有：

$$\sigma_a = \frac{6-a}{2} > 0, \text{ 所以 } 0 < a < 6.$$

**提示：**

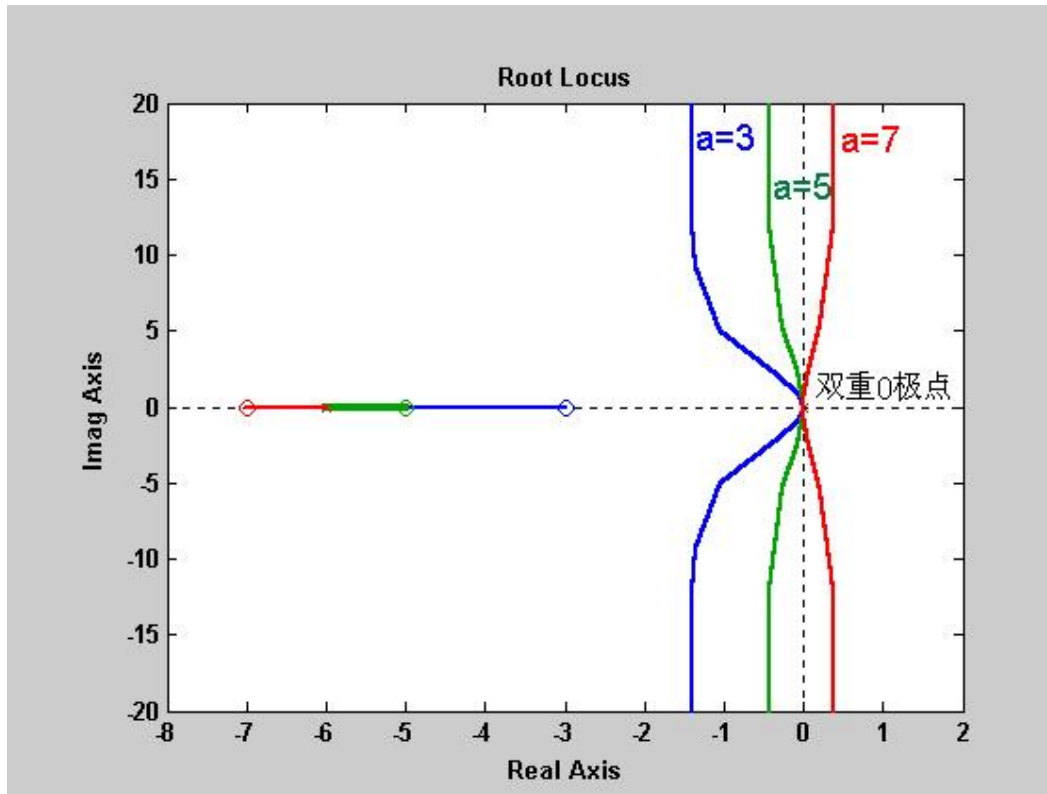
① 加入比例微分控制后，系统增加了开环零点。

② 系统加入零点后，将使根轨迹左移，有利于系统的稳定性。



## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

从下图可以看出： $a$ 越小，根轨迹越左，稳定性越好。 $a < 6$ 时，根轨迹全部在 $s$ 左半平面。 $a = 6$ 时，根轨迹有一部分在虚轴上。 $a > 6$ 时，根轨迹有一部分在 $s$ 右半平面。



```
clear all;  
num1=[0 0 1 3];  
den1=[1 6 0 0];  
num2=[0 0 1 5];  
den2=[1 6 0 0];  
num3=[0 0 1 7];  
den3=[1 6 0 0];  
h1=tf(num1,den1);  
h2=tf(num2,den2);  
h3=tf(num3,den3);  
rlocus(h1,h2,h3)
```



## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

### 小 结

#### □ 条件稳定系统的分析

— 临界稳定增益的确定;

#### □ 瞬态性能分析和开环系统参数的确定

— 阻尼角和等阻尼线;

— 超调量、调整时间与闭环极点的关系;

— 根据性能指标确定二阶及高阶系统的开环放大系数;

— 开环零、极点对根轨迹形状的影响。

#### □ 用Matlab绘制根轨迹的方法





## 4.4 利用根轨迹分析控制系统的性能

---

Thank You !