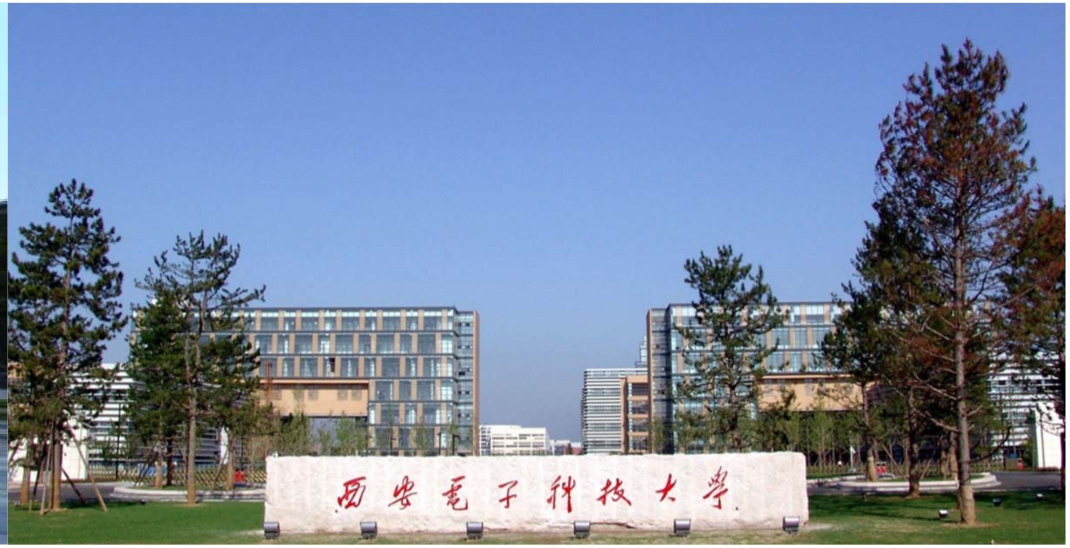
西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

航天器控制原理



冯冬竹
电话：13389281325
邮箱：dzhfeng@xidian.edu.cn
空间科学与技术学院 导航控制系

目录

CONTENTS

航天器的姿态运动学和动力学

第二讲 · 航天器的姿态动力学

- 01 动量矩定理
- 02 姿态动力学方程

质点

- 力$\vec{F}$对点O的力矩：

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

方向垂直于质点的矢径和力所组成的平面，其指向按右手规则确定。

- 质点动量$m\vec{v}$对点O的动量矩：

$$\vec{m}_o(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}$$

方向垂直于质点的矢径和动量所组成的平面，其指向由右手规则确定。

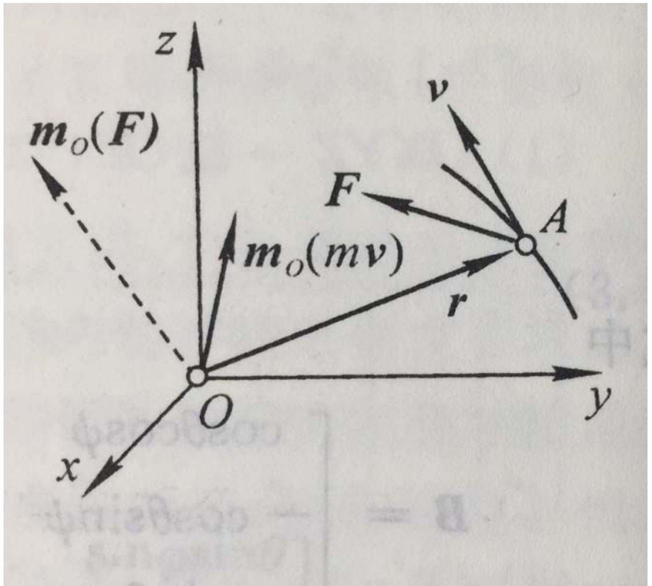


图 3.6 动量矩定理

动量矩定理

- 静力学指出，力对于通过点O的任一轴的矩，等于它对点O的矩在该轴上的投影：

$$\vec{m}_x(\vec{F})=\left[\vec{m}_o(\vec{F})\right]_x \quad \vec{m}_y(\vec{F})=\left[\vec{m}_o(\vec{F})\right]_y \quad \vec{m}_z(\vec{F})=\left[\vec{m}_o(\vec{F})\right]_z$$

- 动量矩具有量纲：

$$\left[\text{动量矩}\right]=\left[\text{长度}\right]\left[\text{质量}\right]\frac{\left[\text{长度}\right]}{\left[\text{时间}\right]}=\left[\text{质量}\right]\left[\text{长度}\right]^2\left[\text{时间}\right]^{-1}$$

- 国际单位制中，动量矩的常用单位：

$$\text{千克}\cdot\text{米}^2\cdot\text{秒}^{-1}\left(kg\cdot m^2\cdot s^{-1}\right)$$

- 设坐标系*Oxyz*是固定直角坐标系，以矢径$\vec{r}$与牛顿第二定律的方程作叉乘，有：

$$\vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\vec{r}\times\vec{F}$$

- 等号右端就是力$\vec{F}$对原点*O*的矩 $\vec{m}_o(\vec{F})$，左端可以改造为：

$$\vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})-\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left[\vec{m}_o(m\vec{v})\right]=\vec{m}_o(\vec{F})$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{m}_o(m\vec{v})\right]=\vec{m}_o(\vec{F})$$

◆ 质点对任意固定点的动量矩对时间的导数，等于该质点所受的力对同一点的矩。这就是质点的动量矩定理。

➢ 若 $\vec{m}_o(\vec{F})=0$，则 $\vec{m}_o(m\vec{v})$ 是常矢量。

◆ 若质点所受的合力对某固定点的矩恒等于零，则质点对同一点的动量矩守恒。该结论说明了质点动量矩守恒的条件。

质点系

- 对质点系内每个质点写出动量矩方程，然后相加，得：

$$\sum \frac{d}{dt}[\vec{m}_o(m\vec{v})] = \frac{d}{dt}\left[\sum \vec{m}_o(m\vec{v})\right] = \sum \vec{m}_o(\vec{F})$$

- 末等号左端方括号中是整个质点系对固定点O的动量矩 $\vec{H}_o$：

$$\vec{H}_o = \sum \vec{m}_o(m\vec{v})$$

- 等号右端等于质点系所受合外力对点O之矩的矢量和 $\vec{M}_o$。

$$\vec{M}_o = \sum \vec{m}_o(\vec{F})$$

动量矩定理

➢ 内力成对地出现，它们对任一点之矩的矢量和恒等于零。于是有：

$$\frac{d\vec{H}_o}{dt}=\sum\vec{m}_o(\vec{F})=\vec{M}_o$$

◆ 质点系对任一固定点的动量矩对时间的导数，等于该质点系所受全体外力对同一点之矩的矢量代数和。这就是质点系动量矩定理。

➢ 特殊情况：若 $\sum\vec{m}_o(\vec{F})=0$，则 $\vec{H}_o$ 是常矢量。

◆ 若质点系所受合外力对固定点的矩的矢量和恒等于零，则质点系对同一点的动量矩守恒。这个结论表明了质点系动量矩守恒的条件。

- 航天器的姿态运动是指其绕自身质心的转动。当航天器被看作为刚体时，其姿态动力学方程就可以直接从刚体的动量矩定理导出。

- 选取航天器本体坐标系*Oxyz*的原点，即航天器质心*O*作为基准点，则航天器的动量矩为：

$$\vec{H} = \int_m \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} dm$$

式中，$\vec{r}$ 是刚体内质量元dm相对于质心的矢径；$d\vec{r}/dt$是质量元dm在空间相对于质心的速度矢量；m为航天器的总质量。

- 航天器在空间的旋转角速度为$\vec{\omega}$，动量矩为$\vec{H}$，作用在航天器相对于质心O的合外力矩为$\vec{M}$。将$\vec{\omega},\vec{H},\vec{r},\vec{M}$在本体坐标系中表示为：

$$\begin{cases} \vec{\omega}=\omega_x\vec{i}+\omega_y\vec{j}+\omega_z\vec{k} \\ \vec{H}=h_x\vec{i}+h_y\vec{j}+h_z\vec{k} \\ \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \\ \vec{M}=m_x\vec{i}+m_y\vec{j}+m_z\vec{k} \end{cases}$$

式中，$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$是航天器本体坐标系各轴的单位矢量，系数是相应矢量沿各坐标轴的分量。

- 由于刚体在空间中以角速度 $\vec{\omega}$ 进行旋转，所以与其固连的本体坐标系的各轴方向也在相应变化。

$$\vec{H} = h_x\vec{i} + h_y\vec{j} + h_z\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \dot{h}_x\vec{i} + \dot{h}_y\vec{j} + \dot{h}_z\vec{k} + h_x\frac{d\vec{i}}{dt} + h_y\frac{d\vec{j}}{dt} + h_z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

姿态动力学方程

- 泊松公式：

$$\frac{d\vec{i}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{i}\qquad\frac{d\vec{j}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{j}\qquad\frac{d\vec{k}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{k}$$

- 根据动量矩定理得：

$$\vec{M}=\frac{d\vec{H}}{dt}=\dot{\vec{H}}+\vec{\omega}\times\vec{H}$$

姿态动力学方程

➢ 由于：

$$\vec{\omega}\times\vec{H}=(\omega_y h_z-\omega_z h_y)\vec{i}+(\omega_z h_x-\omega_x h_z)\vec{j}+(\omega_x h_y-\omega_y h_x)\vec{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{M}&=M_x\vec{i}+M_y\vec{j}+M_z\vec{k}\\&=(\dot{h}_x+\omega_y h_z-\omega_z h_y)\vec{i}+(\dot{h}_y+\omega_z h_x-\omega_x h_z)\vec{j}+(\dot{h}_z+\omega_x h_y-\omega_y h_x)\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{cases}M_x=\dot{h}_x+\omega_y h_z-\omega_z h_y\\M_y=\dot{h}_y+\omega_z h_x-\omega_x h_z\\M_z=\dot{h}_z+\omega_x h_y-\omega_y h_x\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}M_x\\M_y\\M_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{h}_x\\\dot{h}_y\\\dot{h}_z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-\omega_z&\omega_y\\\omega_z&0&-\omega_x\\-\omega_y&\omega_x&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_x\\h_y\\h_z\end{bmatrix}$$

欧拉力矩方程式

姿态动力学方程

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

➢ 若刚体内各质量元相对于质心的位置不变：

$$\vec{H} = \int_m \vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}dm \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \int_m \vec{r}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)dm$$

➢ 利用矢量叉乘公式，有：

$$\begin{aligned}\vec{r}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = &\left[\omega_x(y^2+z^2)-\omega_y(xy)-\omega_z(xz)\right]\vec{i}\\ &+\left[-\omega_x(xy)+\omega_y(x^2+z^2)-\omega_z(yz)\right]\vec{j}\\ &+\left[-\omega_x(xy)+\omega_y(yz)+\omega_z(x^2+y^2)\right]\vec{k}\end{aligned}$$

姿态动力学方程

$$\begin{cases} h_x = \int_m \left[\omega_x (y^2 + z^2) - \omega_y (xy) - \omega_z (xz) \right] dm \\ h_y = \int_m \left[-\omega_x (xy) + \omega_y (x^2 + z^2) - \omega_z (yz) \right] dm \\ h_z = \int_m \left[-\omega_x (xy) + \omega_y (yz) + \omega_z (x^2 + y^2) \right] dm \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_x = \int_m (y^2 + z^2) dm \\ I_y = \int_m (x^2 + z^2) dm \\ I_z = \int_m (y^2 + x^2) dm \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{xy} = \int_m (xy) dm \\ I_{yz} = \int_m (yz) dm \\ I_{xz} = \int_m (xz) dm \end{cases}$$

- I_x, I_y, I_z 分别为刚体绕 Ox, Oy, Oz 轴的转动惯量；I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} 为惯量积。

姿态动力学方程

$$\vec{H}=\int_m \vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\,dm \Rightarrow \begin{cases} h_x = I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ h_y = -I_{xy}\omega_z + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ h_z = -I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_z\omega_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \overset{def}{\Rightarrow} \mathbf{I} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

I：惯性矩阵

- 如果$I_{xy}=I_{yz}=I_{xz}=0$，则该坐标系称为主轴坐标系，Ox, Oy, Oz轴就是刚体的主惯量轴。

- 如果取航天器的本体坐标系为主轴坐标系，则有：

$$\begin{cases} h_x = I_x\omega_x \\ h_y = I_y\omega_y \\ h_z = I_z\omega_z \end{cases}$$

- 代人欧拉力矩方程，并忽略质量变化，得到基于本体坐标系的航天器的姿态动力学方程组：

$$\begin{cases} M_x = I_x\dfrac{d\omega_x}{dt} + \omega_y\omega_z\left(I_z - I_y\right) \\ M_y = I_y\dfrac{d\omega_y}{dt} + \omega_x\omega_z\left(I_x - I_z\right) \\ M_z = I_z\dfrac{d\omega_z}{dt} + \omega_x\omega_y\left(I_y - I_x\right) \end{cases}$$

欧拉动力学方程

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

THANKS

13389281325

dzhfeng@xidian.edu.cn