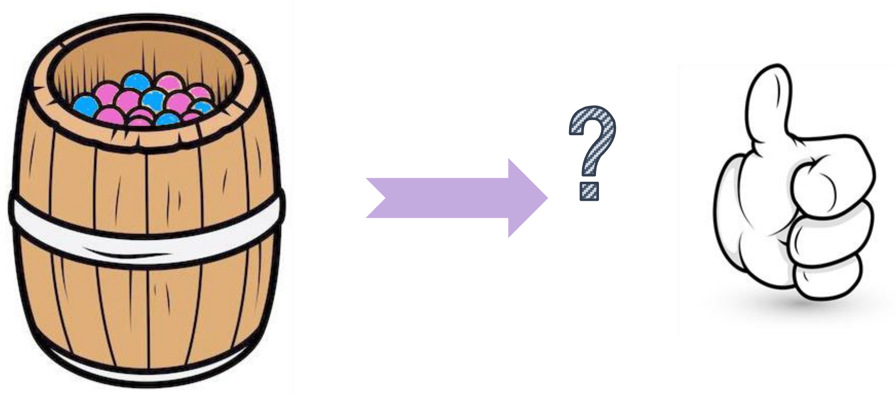
第1章 概率论的基本概念



概率论与数理统计是研究**随机现象**统计规律性的一门学科。

概率论

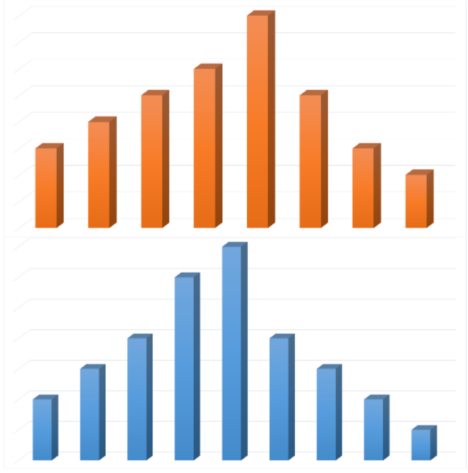


已知桶内球颜色比例，猜猜手中球的颜色？

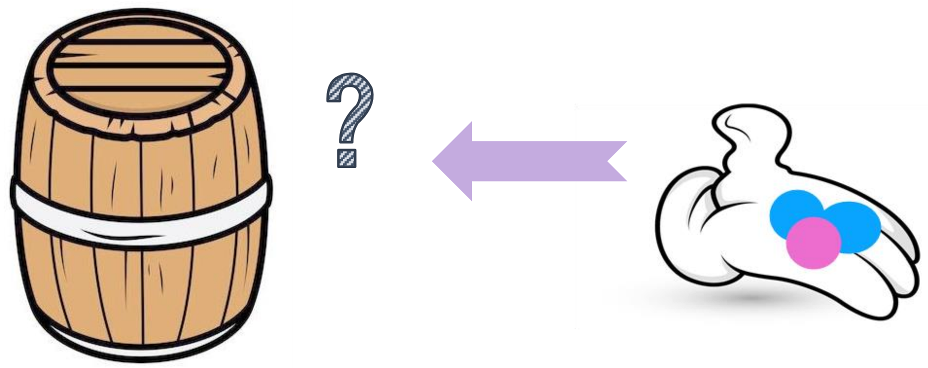
F
B

Probability

Given model,
predict data



数理统计



不断统计摸出球的颜色，推断：

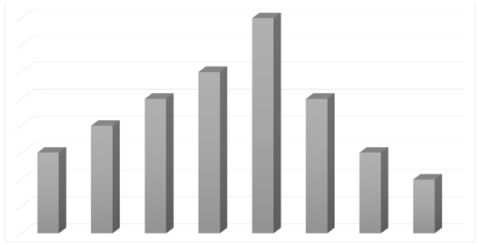
* 桶内球颜色的比例（参数估计）

*是否可认为红蓝比例为1:2？（假设检验）

?

Statistics

Given data,
predict model



为什么学习

(i) 基本数学的分支，理论、方法有独特之处，感悟数学之美

(ii) 生活中无处不在

“猜你喜欢”（大数据）、弹窗、杀毒、人脸登陆、*Siri*、浏览器、输入法……

(iii) 为专业课程、科研领域的探究打下基础

数据分析的工具，每一位从事理工和经管的人的必修课

实验数据分析、微观纳观——宏观、科学前沿

人工智能（AI）、机器学习、数据挖掘、目标跟踪……

概率论

5 大数定律及中心极限定理

数理统计

1 概率论的基本概念
2 随机变量及其分布
3 多维随机变量及其分布
4 随机变量的数字特征

随机事件
概率
随机变量
分布函数
数字特征

大数定律

⟷

中心极限定理

样本
统计量
抽样分布
参数估计
假设检验

6 数理统计的基本概念
7 参数估计
8 假设检验

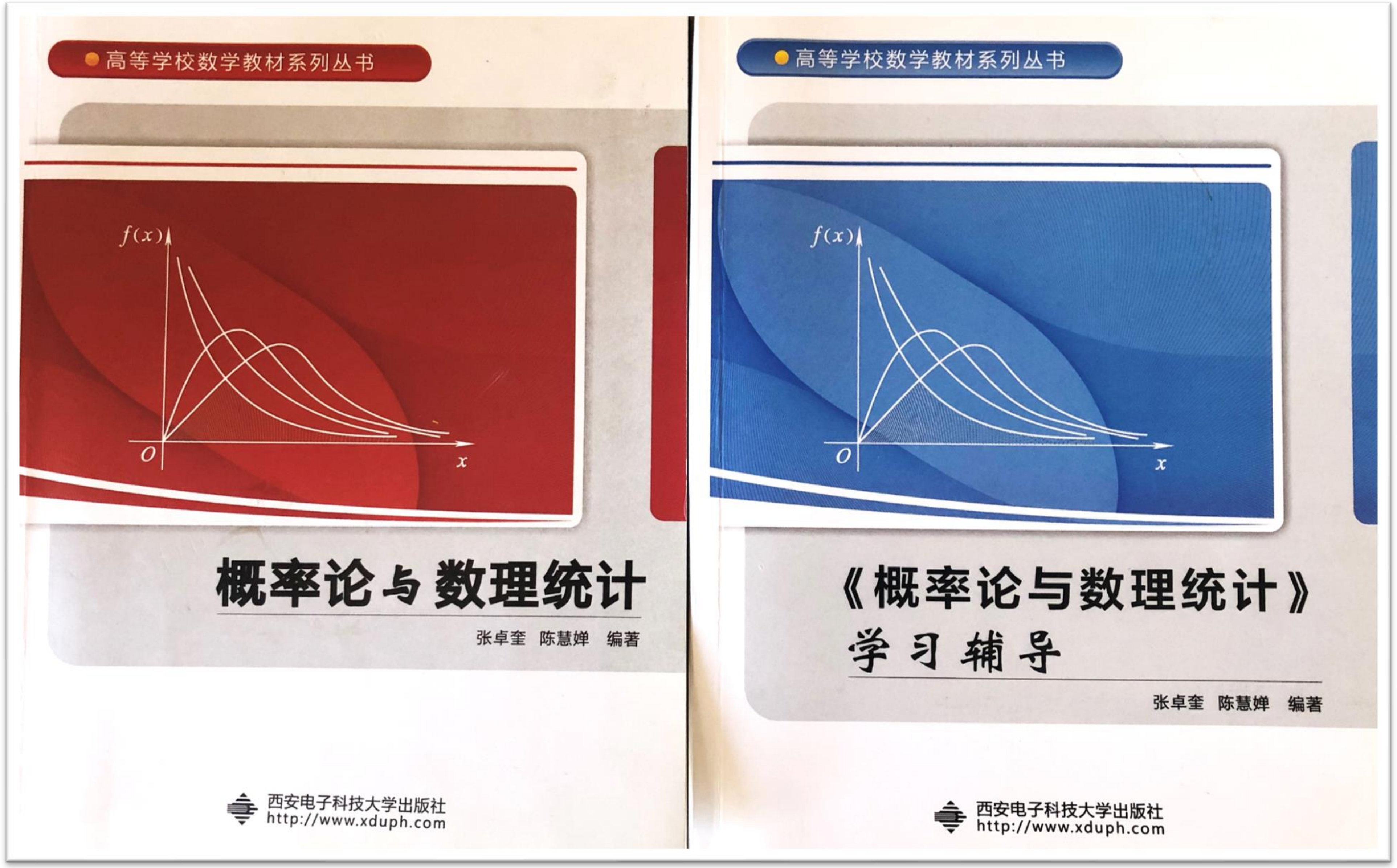
X

$g(X_1, X_2, \dots X_n)$

研究随机现象的一门科学 **“随机”**

“数据” 基于概率论处理数据的方法

课程教材



参考教材

考核方式：

期末卷面70%

平时30%：平时作业10%，课堂测试20%

1.1

概率论发展简史

起源：17世纪数学家对赌博问题的研究

- Pascal和Fermat两位数学家：赌本问题

赌本问题：甲、乙两人各一百元，赌完五局，五战三胜，三盘后甲：乙=2:1，赌博因故而终止，如何分赌本？

发展：

- 19世纪初　Bernouli和Laplace给出古典概率的定义

- 1900　Hibert在世界数学家大会上提出23个有名的问题，第6个问题是建立概率论的公理体系。

“借助公理来研究那些在其中数学起重要作用的物理科学：首先是概率和力学。”

- 1933　苏联Kolmogorov正式提出概率论的公理体系。

1.2

随机试验、 随机事件、 样本空间

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

确定性现象 VS 随机现象

确定性现象：在一定条件下必然出现

向上抛出的物体会掉落到地上；

太阳从东边升起；

微积分：线性代数

随机现象：在一定条件下可能出现多种结果，而在试验之前无法预知其确切的结果。

抛硬币是否正面向上；

明天的天气状况；

买了彩票是否中奖。

概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科。

随机试验

针对随机现象的观察、记录、试验（广义）

例 1—1 掷一枚硬币，观察正面 H 和反面 T 出现的情况。

例 1—2 掷一枚硬币三次，观察正面 H 和反面 T 出现的情况。

例 1—3 掷一枚骰子，观察出现的点数。

例 1—4 袋中装有 5 只球，其中 3 只红球， 2 只白球，从袋中任取 1 只球，观察取出的球的颜色。

例 1—5 在一批产品中任取 1 件，观测它的寿命。

随机试验

具有三个特点：

1.可以在相同条件下重复进行

可重复

2.每次试验的可能结果不止一个，且事先知道所有可能出现的结果

预知全部可能性

3.进行试验前并不知道哪个试验结果会发生

试验前不确定

基本事件（样本点）：随机试验E中每一个单一的结果

- 提问：“硬币抛三次恰好出现两次正面向上”的事件是否是基本事件？

样本空间

定义：随机试验E的所有基本事件所构成的集合称为E的样本空间，记为Ω或S，样本空间中元素的个数没有限制，可以是可数的、不可数的、无限的。

- 例：
  - 一枚硬币抛一次 S={正面，反面}
  - 记录一城市一日中发生交通事故次数 S={0, 1, 2, …}
  - 记录某地一昼夜最高温度x，最低温度y

    $S=\{(x, y) \mid T0 \leqslant y \leqslant x \leqslant T1\}$
  - 记录一批产品的寿命x $S=\{ x \mid a \leqslant x \leqslant b \}$

随机事件

随机事件（事件）： 由一个或若干个基本事件组成的随机试验的一个结果，通常用英文大写字母A，B，C表示，或用{ }表示。

例：观察173路公交车西电站候车人数 $S=\{0, 1, 2, \cdots\}$

记 $A=\{$至少有10人候车$\}=\{10, 11, 12, \ldots\}\subset S$，A为随机事件，A可能发生，也可能不发生。

- 必然事件 Ω ：在随机试验中必然会发生的事件，包含所有样本点。
- 不可能事件 Φ：在随机试验中不可能发生的事件，不包含任何样本点。

1.3

随机事件的关系和运算

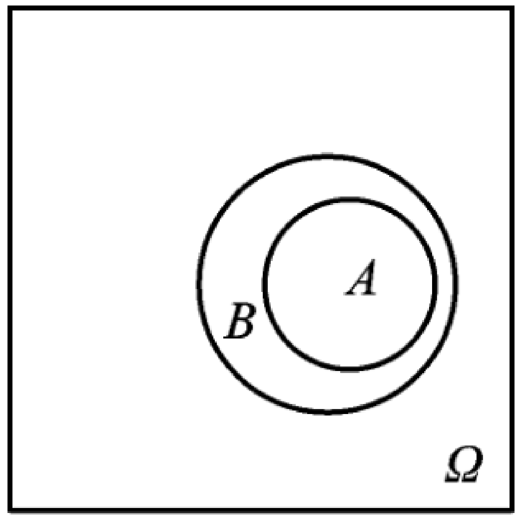
- 事件之间的关系
- 事件之间的运算
- 运算律

随机事件的关系（包含关系）

$A\subset B$:事件A发生一定导致B发生

事件B包含事件A，

事件A包含于事件B



$A\subset B$

（用文氏图分析）

- 例：
  - ✓记A={明天天晴}，B={明天无雨}

    $$\Rightarrow B\supset A$$

  - ✓记A={至少有10人候车}，B={至少有5人候车}

    $$\Rightarrow B\supset A$$

  - ✓一枚硬币抛两次，A={第一次是正面}，B={至少有一次正面}

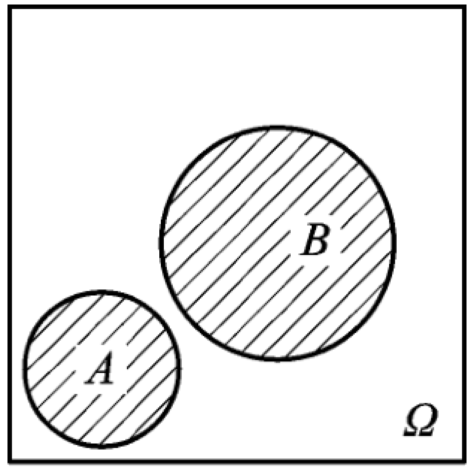
    $$\Rightarrow B\supset A$$

随机事件的关系（相等关系）

$$A=B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$

随机事件的关系（互不相容关系）

- ✓当AB=Φ时，称事件A与B不相容的。
- ✓无公共部分

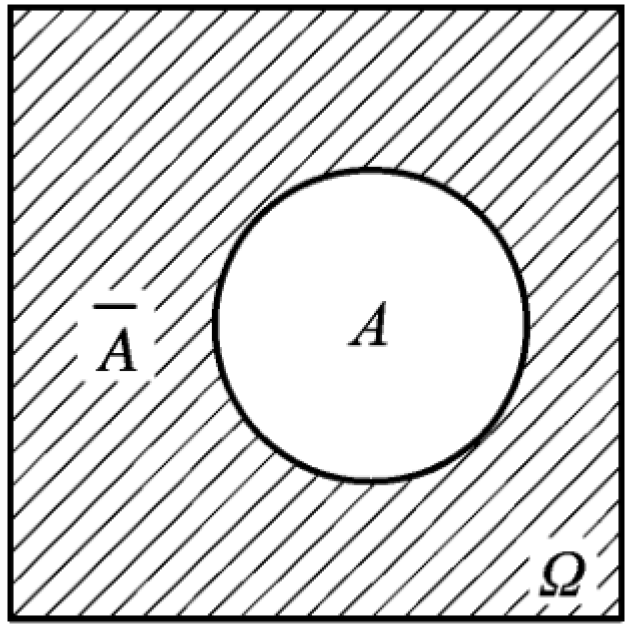


$A \cap B = \varnothing$

随机事件的关系（对立关系、逆事件）

✓ A的逆事件记为$\bar{A}$或A^c, $\begin{cases} A\cup\bar{A}=\Omega \\ A\bar{A}=\varnothing \end{cases}$, 若$\begin{cases} A\cup B=\Omega \\ AB=\varnothing \end{cases}$, 称$A,B$互逆、互斥

✓对立事件与原事件无公共部分

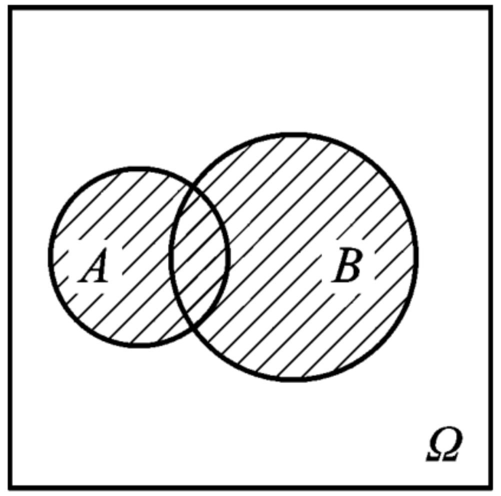


$A\cap\bar{A}=\varnothing, A\cup\bar{A}=\Omega$

对立事件 $B=\bar{A}=\Omega-A$

不可写为$\bar{A}=1-A$

事件的和（和事件）



$A \cup B$

✓ A与B的和事件，记为 $A \cup B$

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B \}$$

{事件A发生或事件B发生}

{事件A和B中至少有一个发生}

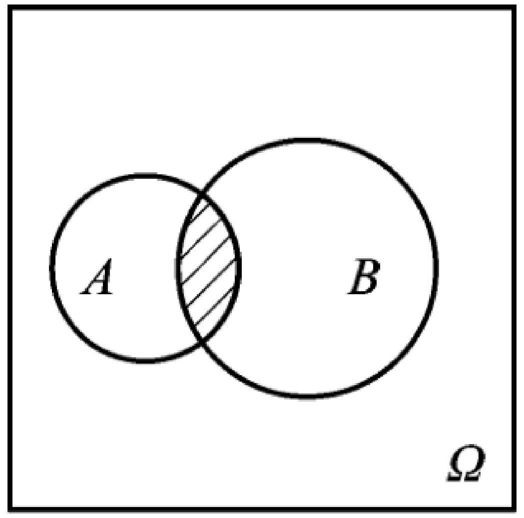
事件的积（积事件）

✓ A与B的积事件，记为 $A\cap B, AB$

$$A\cap B=\{\, x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B \,\}$$

{事件A发生且事件B发生}

{事件A和B同时发生}



$A\cap B$

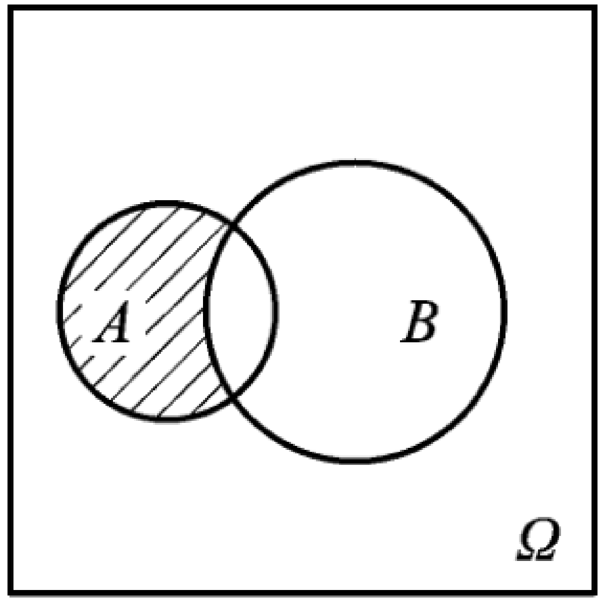
$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$：$A_1, A_2, \cdots A_n$至少有一发生

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$：$A_1, A_2, \cdots A_n$同时发生

事件的差（差运算）

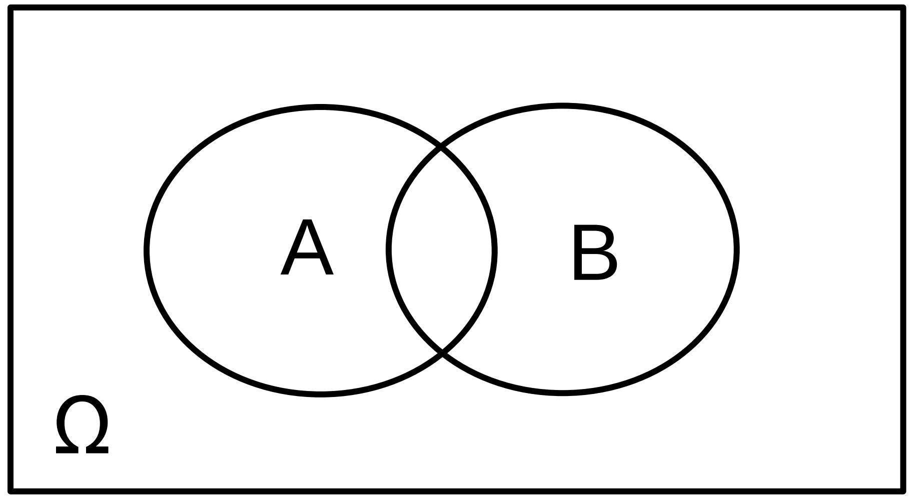
✓ $A-B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$

{事件A发生而事件B不发生}



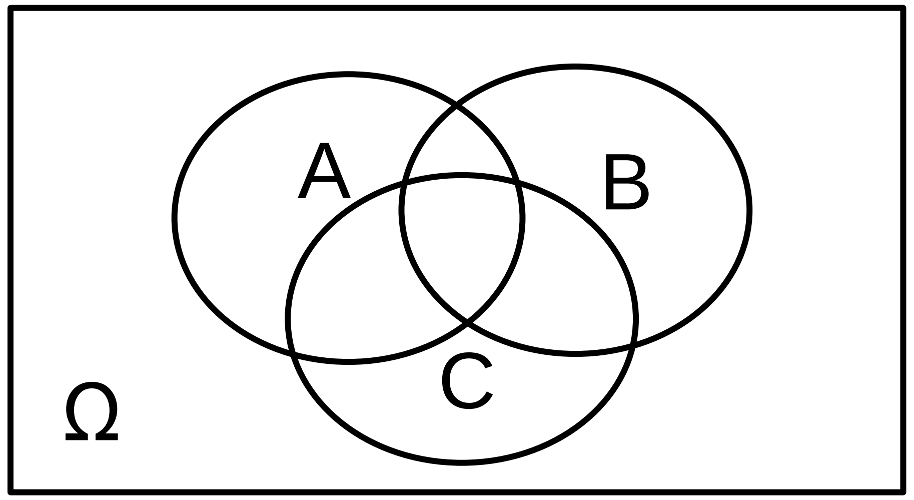
$A-B$

$$\boxed{A-B=A\overline{B}=A-AB}$$



$$A \cup B = (A-B) \cup AB \cup (B-A)$$

$$= A\bar{B} \cup AB \cup \bar{A}B$$



$$A \cup B \cup C = ?$$

意义：把n个有公共部分的事件的和变成n个没有公共部分的事件的和，有利于今后计算事件发生可能性大小。

随机事件的运算律

- **吸收律：** 若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$， $AB = A$。
- **交换律：** $A \cup B = B \cup A$， $AB = BA$。
- **结合律：** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$， $A(BC) = (AB)C$。
- **分配律：** $A(B \cup C) = AB \cup AC$， $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$。 分配律是符合的
- **对偶律：** De Morgen对偶法则

➢De Morgen对偶法则

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}$$

$$=\{A_1, A_2, \ldots A_n \text{中至少一个发生}\}^C$$

$$=\{A_1, A_2, \ldots A_n \text{都不发生}\}$$

$$=\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n$$

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \ldots \cup \bar{A}_n$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \cdots \cup \bar{A}_n;$$

$\overline{\text{同时发生}}$=对立事件至少有一个发生

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n;$$

积事件的逆等于逆的和事件

$\overline{\text{至少有一个发生}}$=对立事件的同时发生

和事件的逆等于逆的积事件

$B=\{A_1, A_2, \ldots A_n$中至少k个事件发生$\}$ $\bar{B}=?$

$B=\{A_1, A_2, \ldots A_n$中至多k个事件发生$\}$ $\bar{B}=?$

1.4

概率（Probability）的定义

随机试验最大的特点是其结果的不确定性。

在随机现象的研究中，不仅要知道可能发生的事件，更重要的是要研究事件发生的*可能性的大小*，因而需要把这个可能性用一个合适的数来表征，而这个数就是我们所要讨论的事件的概率。

概率是随机事件发生可能性大小的数字表征

概率是事件的函数

如何数值表征一个事件在一次试验中发生的可能性大小？

分析某些事件一次试验发生的可能性（概率），往往需要进行多次重复试验，统计该事件发生的次数（频数）及其占总次数的比值（频率）

概率的统计定义　　频率 VS 概率

首先引入频率，它描述的是事件发生的频繁程度。

定义：把含有事件A的随机试验独立重复做n次

记$f_n(A)=n_A/n$;

其中　n_A ——A发生的次数（频数）

n ———总试验次数

$f_n(A)$ – A在这n次试验中发生的频率。

问题：能否用频率来代替概率?

抛硬币的例子（抛硬币出现正面的频率）

n越大，频率越稳定

表 1

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

抛硬币的例子（抛硬币出现正面的频率）

表 2

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

重要规律

大量的实验表明，当重复实验的次数n逐渐增大时，频率fn(A)呈现出稳定性，逐渐稳定于某个常数。这种“频率稳定性”即通常所说的**统计学规律**。

西安电子科技大学
XIDIAN UNIVERSITY

π的小数位的数字对0~9是等可能的

1872年英国人Shix. W将π算到707位

1945年法格逊核对其结果发现数字7太少，认为其结果不正确，果然只有前527位正确

计算机出现后，计算了π的前100万位小数，发现各个数字出现的频率相同

2019年谷歌工程师Emma Haruko lwaoli利用云计算资源计算出的34.1万亿位