理论力学

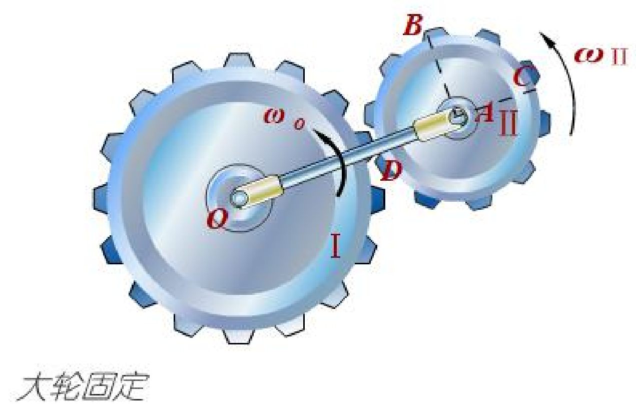
Engineering mechanics
Theoretical mechanics

运 动 学

第八章 刚体的平面运动

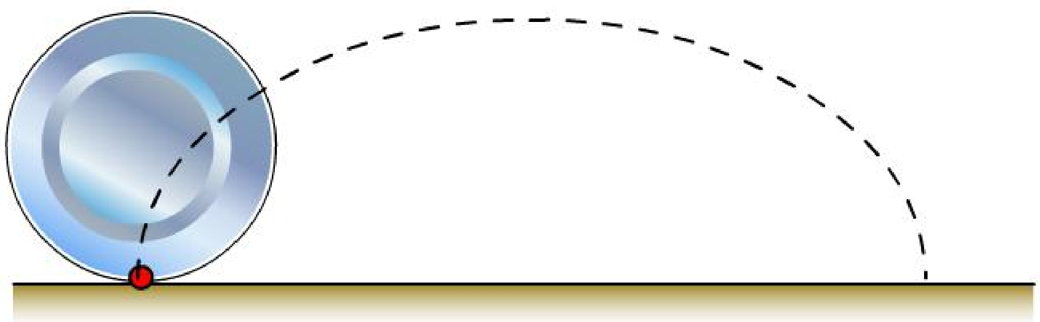
§ 8-1 刚体平面运动的概述和运动分解

1. 平面运动



刚体平面运动：行星齿轮

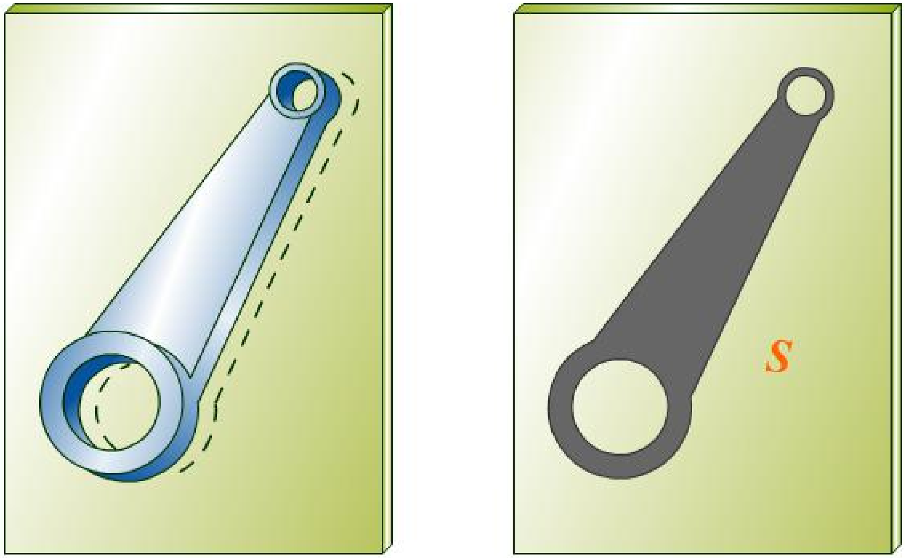
哈爾濱工業大學



刚体平面运动：车轮运动情况

在运动中，刚体上的任意一点与某一固定平面始终保持相等的距离，这种运动称为平面运动。

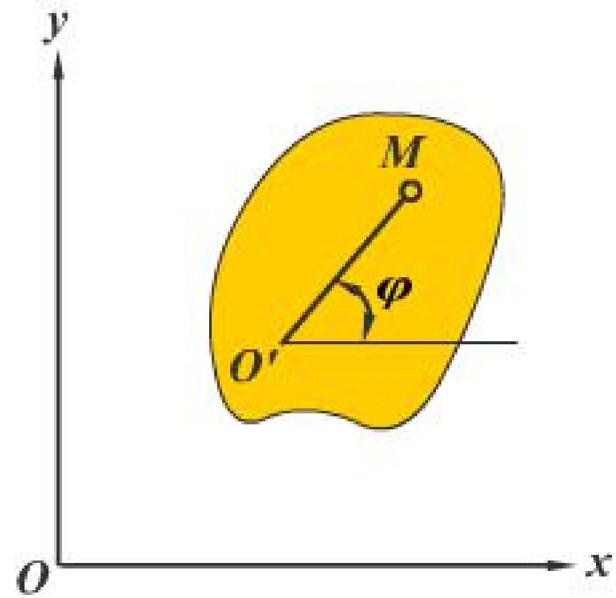
平面运动 ⟶ 平面图形的运动



(a) (b)

2. 运动方程

$$\begin{cases} x_{O'} = f_1(t) \\ y_{O'} = f_2(t) \\ \varphi = f_3(t) \end{cases}$$



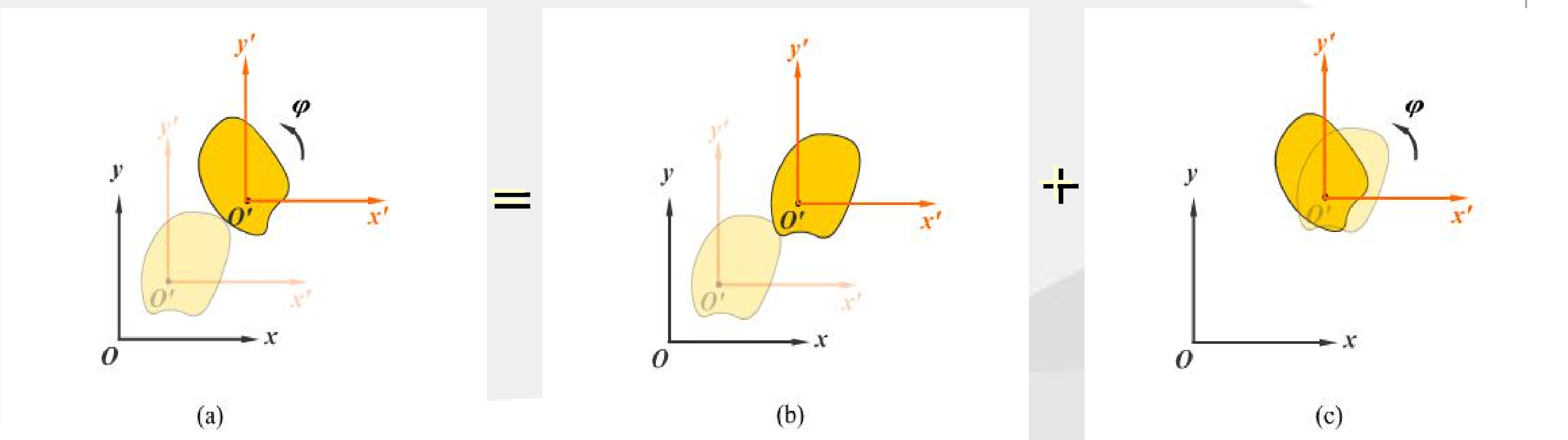
O' – 基点

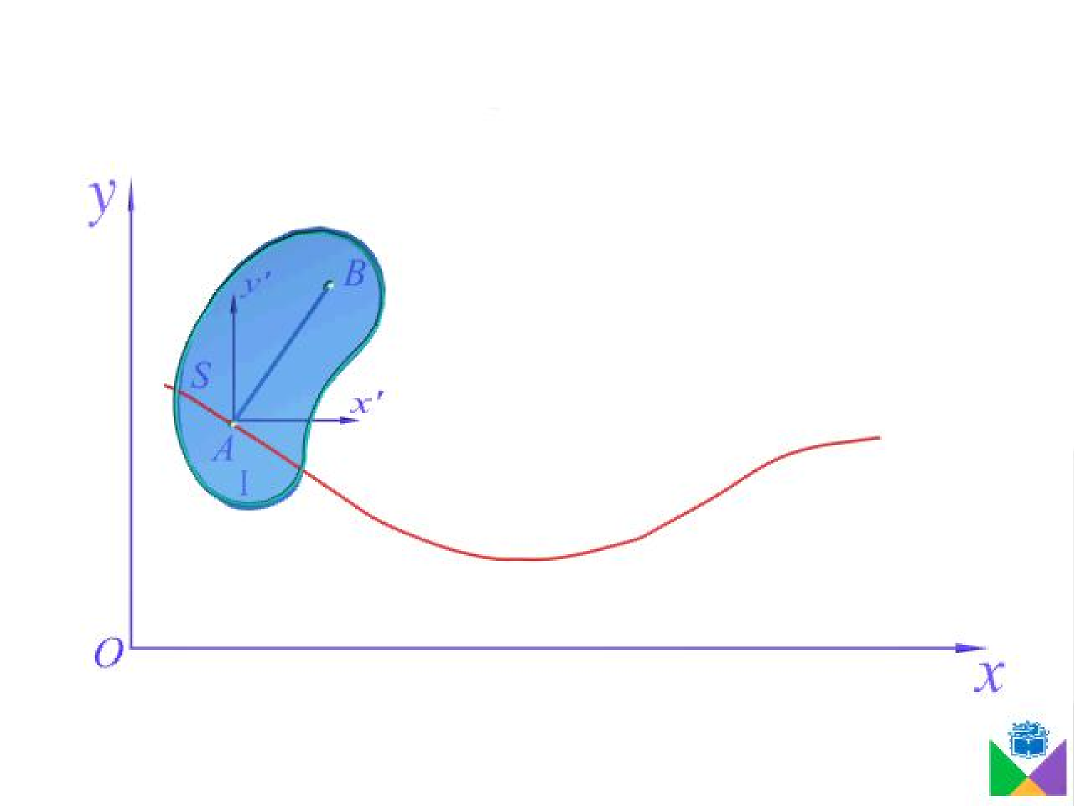
φ – 转角

3. 运动分析

$O'x'y'$ – 平移坐标系

平面运动 = 随 $O'x'y'$ 的平移+绕 O' 点的转动





一般刚体平面运动的分解

平面运动可取任意基点而分解为平移和转动，其中平移的速度和加速度与基点的选择有关，而平面图形绕基点转动的角速度和角加速度与基点的选择无关。

§8-2 求平面图形内各点速度的基点法

1. 基点法

动点：**M**

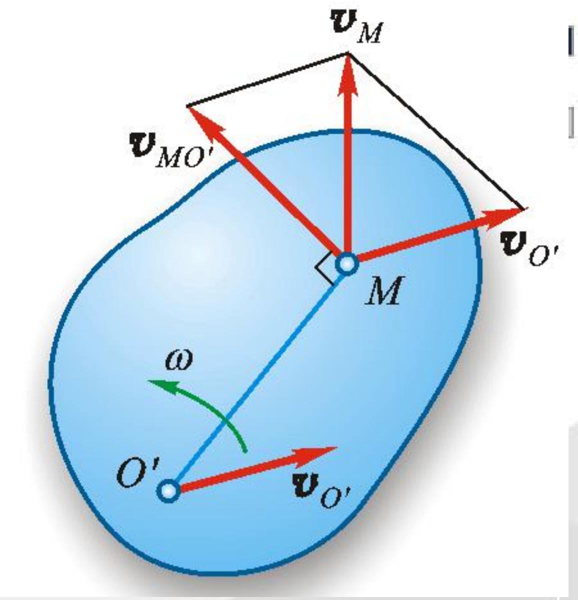
动系：$O'x'y'$ （平移坐标系）

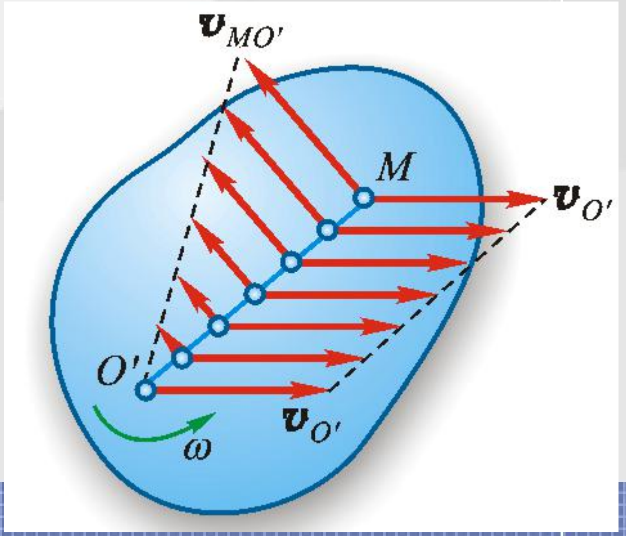
绝对运动 ： 待求

相对运动 ： 绕 O' 点的圆周运动

牵连运动 ： 平移

$$\vec{v}_M = \vec{v}_e + \vec{v}_r = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \overline{O'M}$$





平面图形内任一点的速度等于基点的速度与该点随图形绕基点转动速度的矢量和。

任意A，B两点

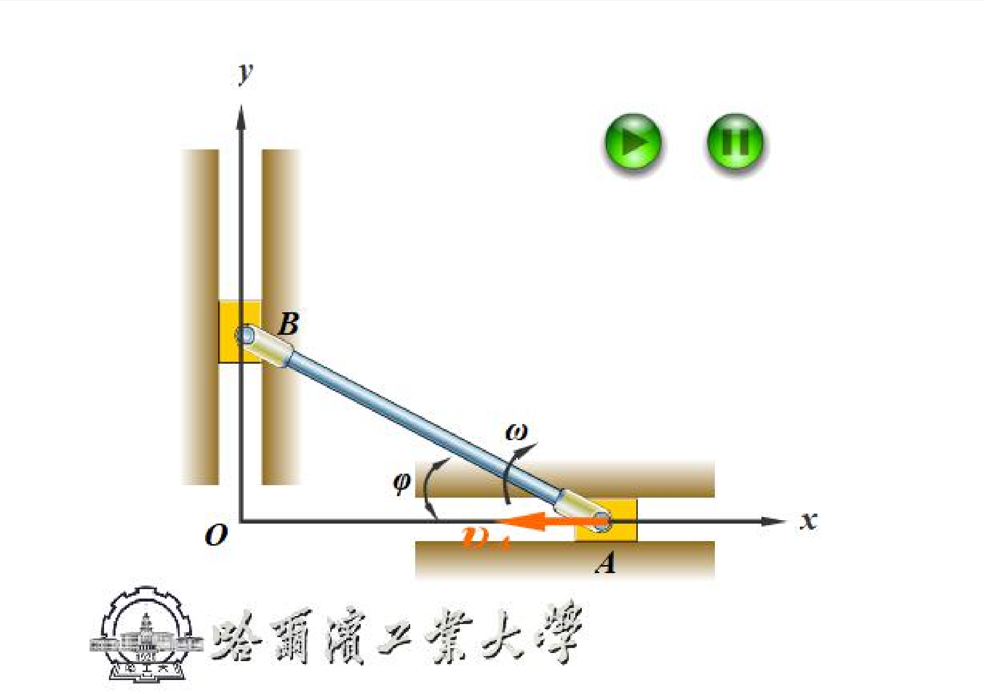
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

其中 $\vec{v}_{BA} = \begin{cases} \text{大小} \quad v_{BA} = AB \cdot \omega \\ \text{方向垂直于 } AB\text{，指向同 } \omega \end{cases}$

例8-1

已知：椭圆规尺的A端以速度v_A沿x 轴的负向运动，如图所示，$AB=l$。

求：B端的速度以及尺AB的角速度。



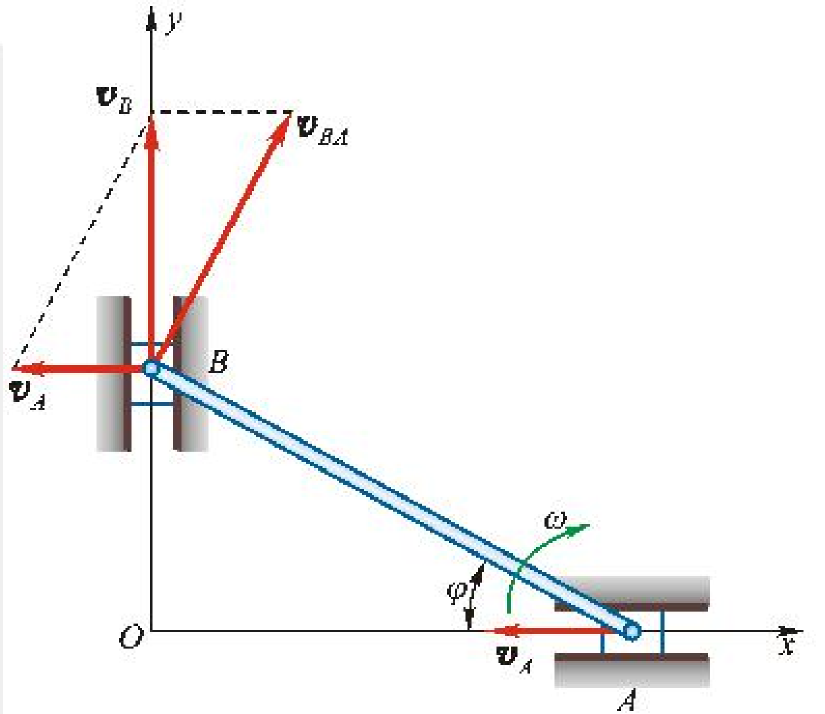
解： 1. AB作平面运动　　基点：A

2. $\overset{\smile}{v}_B = \overset{\smile}{v}_A + \overset{\smile}{v}_{BA}$

大小	?	v_A	?
方向	√	√	√

$$v_B = v_A \cot\varphi$$

$$v_{BA} = \frac{v_A}{\sin\varphi}$$

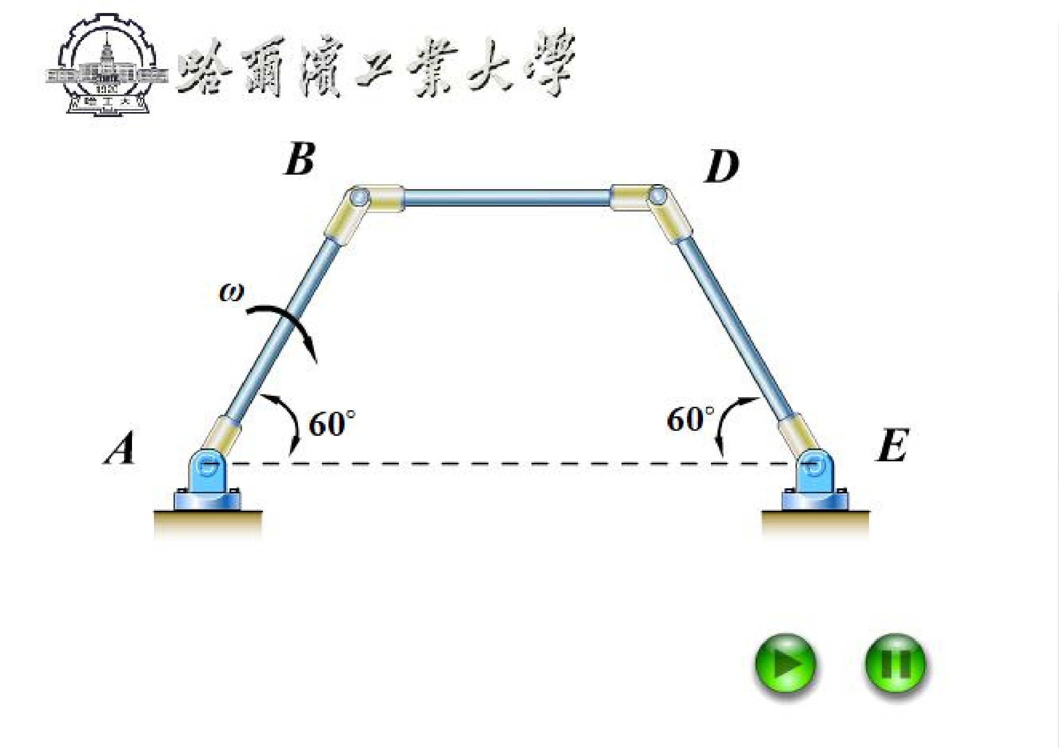


$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{l} = \frac{v_A}{l\sin\varphi}$$

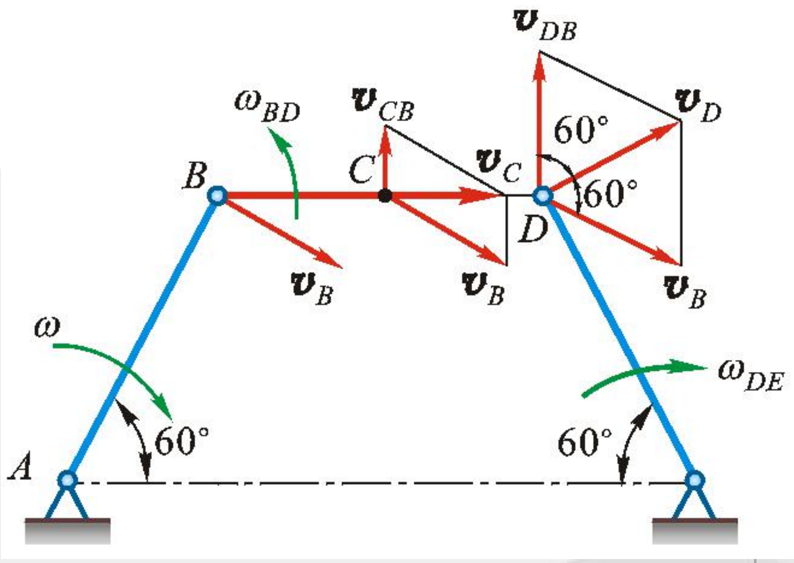
例8-2

已知：如图所示平面机构中，**AB=BD= DE= l=300mm**。在图示位置时，**BD∥AE**，杆**AB**的角速度为**ω=5rad/s**。

求：此瞬时杆**DE**的角速度和杆**BD**中点**C**的速度。



解： 1. BD作平面运动　　基点：B



2. $$v_D = v_B + v_{DB}$$

	v_D	v_B	v_{DB}
大小	?	ωl	?
方向	√	√	√

$$v_D = v_{DB} = v_B = \omega l$$

$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{DE} = \frac{v_B}{l} = \omega = 5\,\mathrm{rad/s} \qquad \omega_{BD} = \frac{v_{DB}}{BD} = \frac{v_B}{l} = \omega = 5\,\mathrm{rad/s}$$

3. $$v_C = v_B + v_{CB}$$

	v_C	v_B	v_{CB}
大小	?	ωl	$\omega_{BD} l/2$
方向	?	√	√

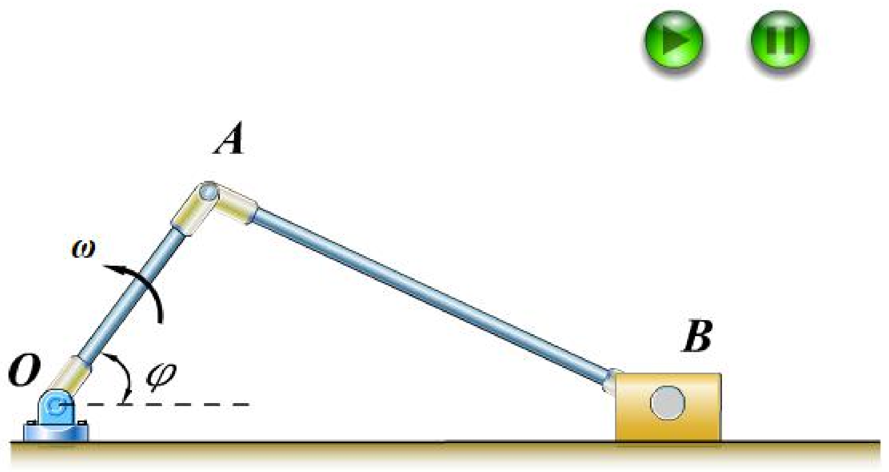
$$v_C = \sqrt{v_B^2 - v_{CB}^2} \approx 1.299\,\mathrm{m/s}$$

方向沿BD杆向右

例8-3

已知：曲柄连杆机构如图所示，$OA=r$, $AB=\sqrt{3}r$. 如曲柄OA以匀角速度ω转动。

求：当 $\varphi=0°,60°,90°$ 时点 B 的速度。



解： 1. AB作平面运动　基点：A

2. $\qquad v_B = v_A + v_{BA}$

大小　?　　ωr　　?

方向　√　　√　　√

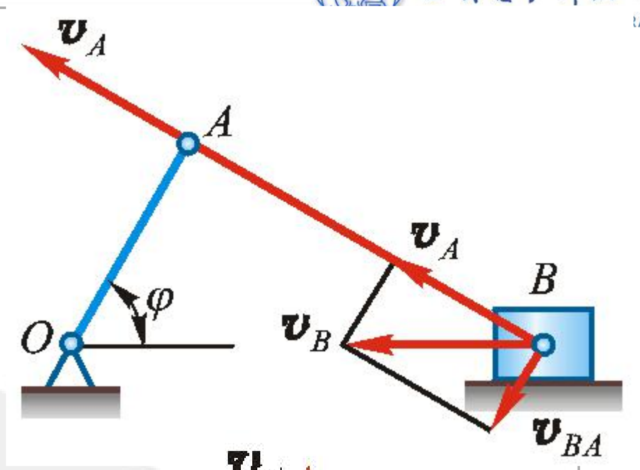
$\varphi = 60^\circ$

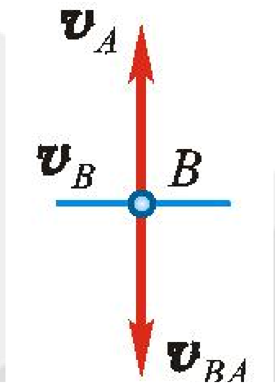
$v_B = v_A / \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}\omega r / 3$

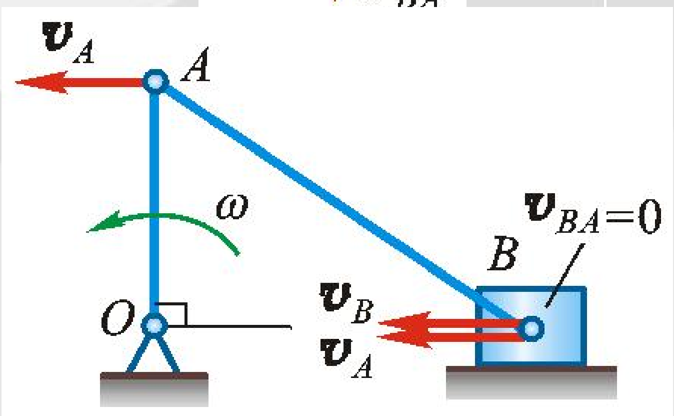
$\varphi = 0^\circ \qquad v_B = 0$

$\varphi = 90^\circ$

$v_B = v_A = \omega r, \quad v_{BA} = 0$



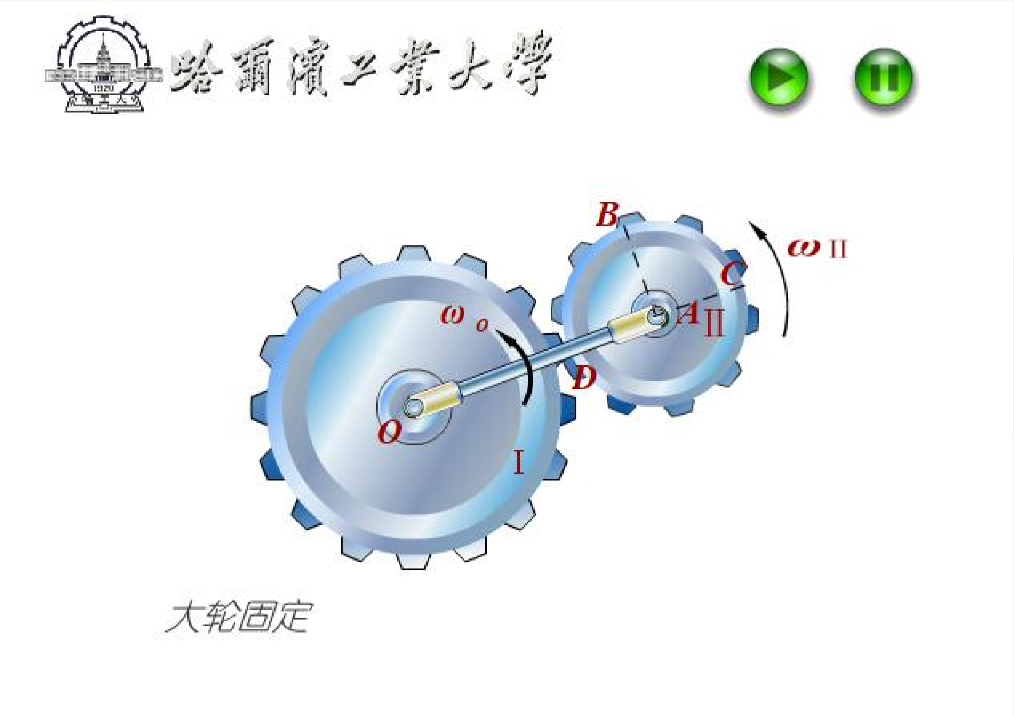




例8-4

已知：如图所示的行星轮系中，大齿轮Ⅰ固定，半径为r_1，行星齿轮Ⅱ沿轮Ⅰ只滚而不滑动，半径为r_2。系杆OA角速度为ω_O。

求：轮Ⅱ的角速度ω_{II}及其上B，C两点的速度。

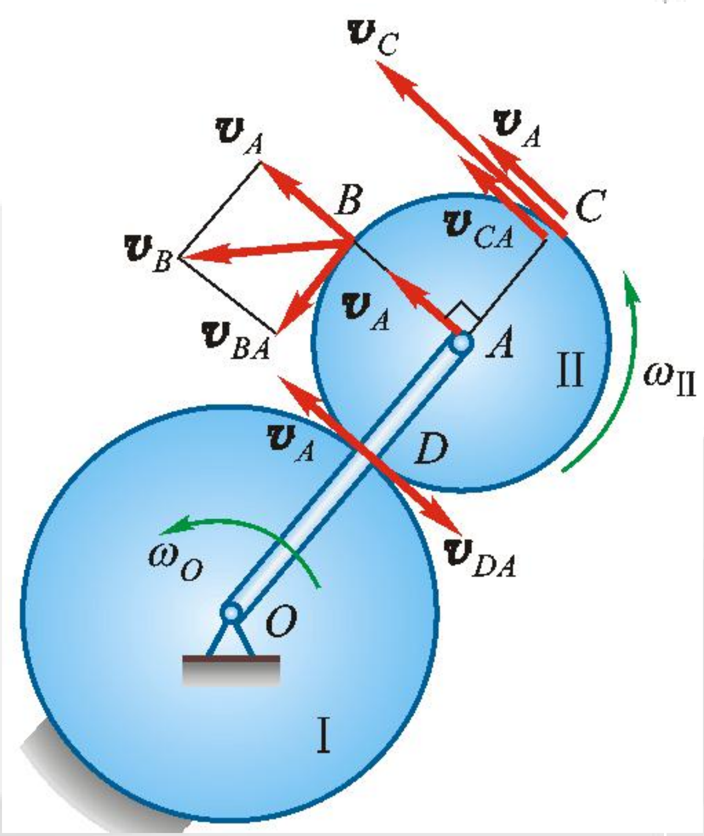


解： 1. 轮Ⅱ作平面运动　　基点：A

2. $\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{DA} = 0$

$$v_{DA} = v_A = \omega_O\left(r_1 + r_2\right)$$

$$\omega_{\mathrm{II}} = \frac{v_{DA}}{DA} = \frac{v_A}{r_2} = \omega_O\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)$$



3． $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$

	$\vec{v}_B$	$\vec{v}_A$	$\vec{v}_{BA}$
大小	?	$\omega_O\left(r_1 + r_2\right)$	$\omega_{\mathrm{II}} r_2$
方向	√	√	√

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2} = \sqrt{2}\omega_O\left(r_1 + r_2\right)$$

4. $\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}$　　$v_C = v_A + v_{CA} = 2\omega_O\left(r_1 + r_2\right)$

解题步骤：

1. 分析各物体的运动，哪些物体作平移，哪些作定轴转动，哪些作平面运动；

2. 研究作平面运动的物体上哪一点的速度大小方向均已知，哪一点的速度某一要素是已知的（通常是速度方向）；

3. 选定基点，则另一点速度可应用基点法公式求出，作速度平行四边形。注意：作图时要使另一点速度成为平行四边形对角线；

4. 利用几何关系，求解平行四边形中的未知量；

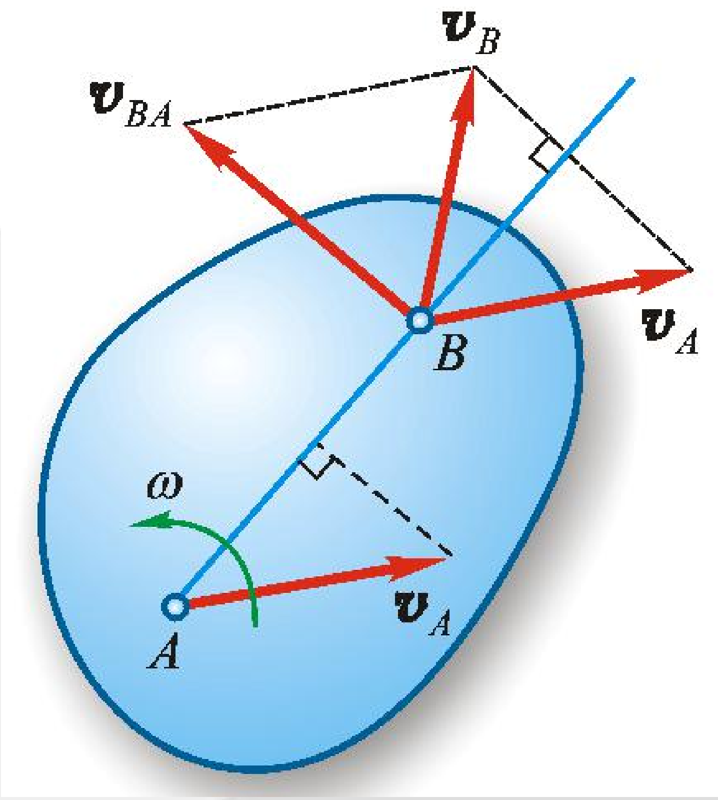
5. 如果需要再研究另一个作平面运动的物体，重复上述步骤。

2. 速度投影定理

由 $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$

沿***AB***连线方向上投影

$$\left(\vec{v}_B\right)_{AB} = \left(\vec{v}_A\right)_{AB}$$

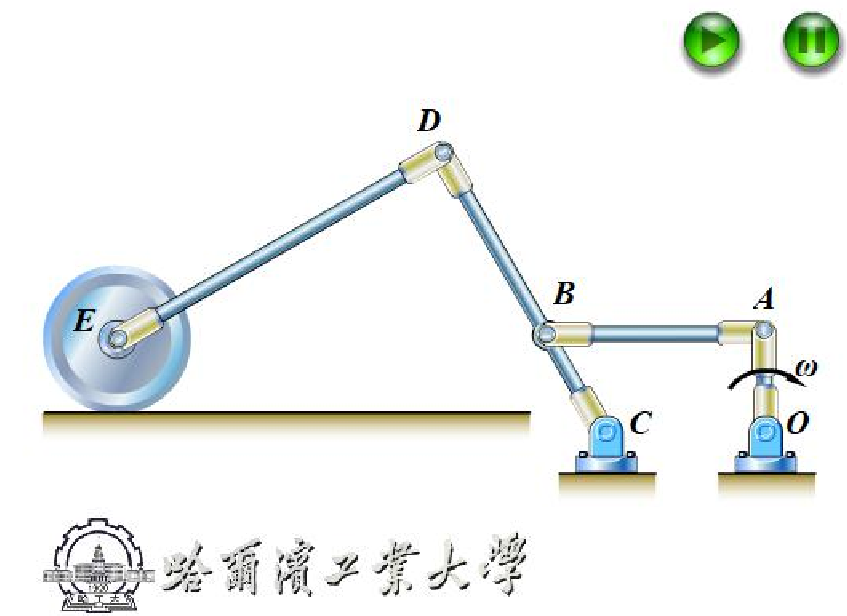


同一平面图形上任意两点的速度在这两点连线上的投影相等。

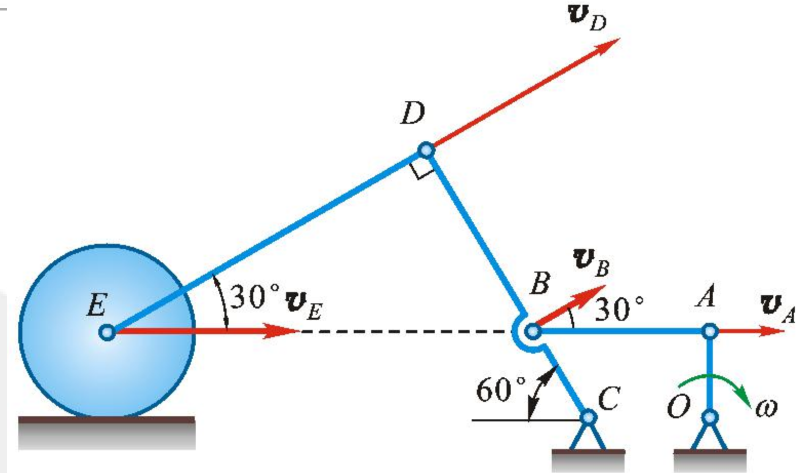
例8-5

如图所示的平面机构中，曲柄OA长100mm，以角速度ω=2rad/s转动。连杆AB带动摇杆CD，并拖动轮E沿水平面纯滚动。已知：CD=3CB，图示位置时A，B，E三点恰在一水平线上，且CD⊥ED。

求：此瞬时点E的速度。



解： 1. AB作平面运动



$$(v_B)_{AB} = (v_A)_{AB}$$

$$v_B \cos 30^\circ = \omega \cdot OA$$

$$v_B = \frac{\omega \cdot OA}{\cos 30^\circ} = 0.2309\,\mathrm{m/s}$$

2. CD作定轴转动，转动轴：C

$$v_D = \frac{v_B}{CB} \cdot CD = 3v_B = 0.6928\,\mathrm{m/s}$$

3. DE作平面运动

$$(v_E)_{DE} = (v_D)_{DE}$$

$$v_E \cos 30^{\square} = v_D$$

$$v_E = \frac{v_D}{\cos 30^{\square}} = 0.8\,\mathrm{m/s}$$

§ 8-3 求平面图形内各点速度的瞬心法

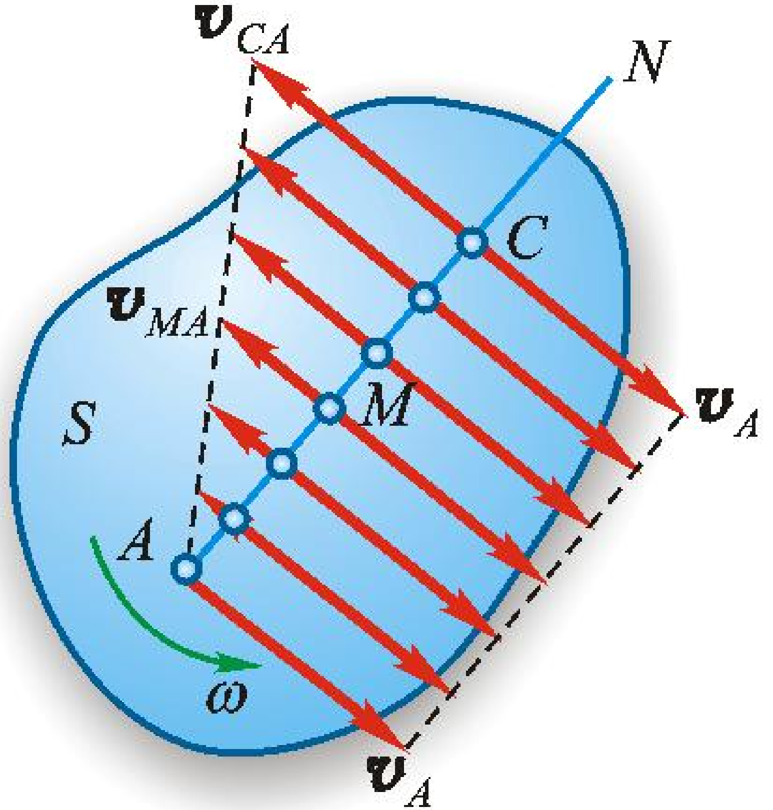
1. 定理

基点：A

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}$$

$$v_M = v_A - \omega \cdot AM$$

$$v_C = 0 \Rightarrow AC = \frac{v_A}{\omega}$$



一般情况下，在每一瞬时，平面图形上都唯一地存在一个速度为零的点，称为瞬时速度中心，简称速度瞬心。

注意：

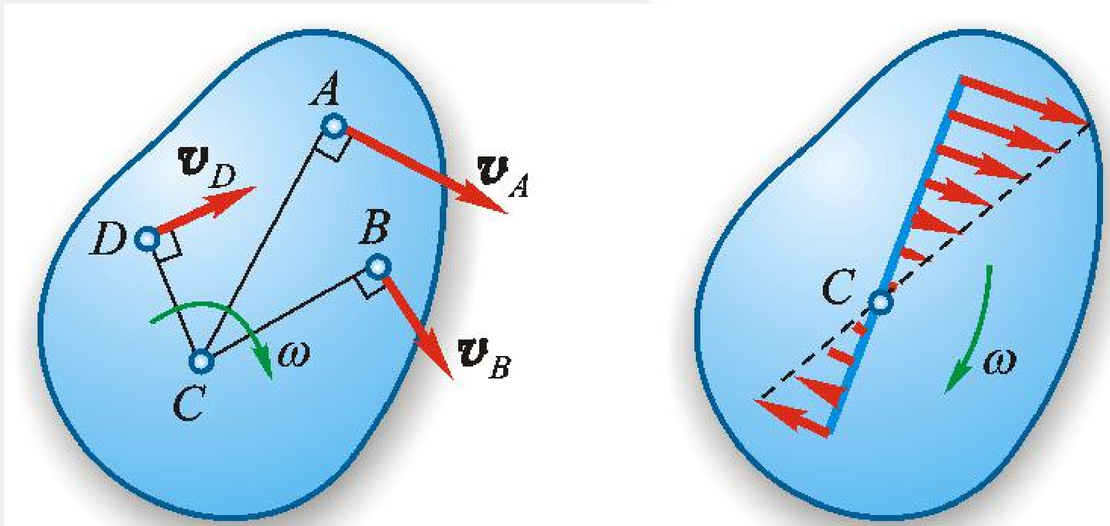
（1）速度瞬心，速度为零，加速度不为零，否则平面图形S静止；

（2）刚体做平面运动时，在每一个瞬时，图形内必有一点为速度瞬心（存在并且唯一），但是，不同瞬时，速度瞬心在图形内的位置不同；

（3）速度瞬心是对于一个刚体而言的，不同平面运动的构件，其速度瞬心不同，不能把几个构件组成的系统合在一起找速度瞬心。

2. 平面图形内各点的速度分布

基点:C



$$\vec{v}_M = \vec{v}_{MC} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CM}$$

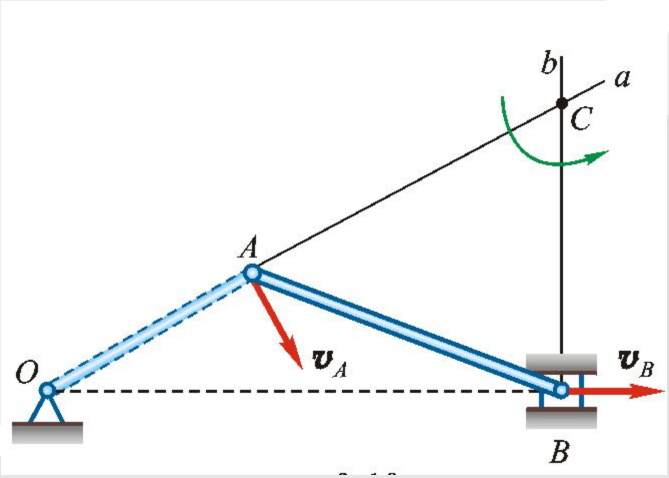
平面图形内任意点的速度等于该点随图形绕速度瞬心转动的速度。

3. 速度瞬心的确定方法

（1）已知平面图形内两点速度方向且不平行（大小可以相等或不等），速度瞬心的位置必在这两点速度的垂线上。

已知 $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ 的方向，

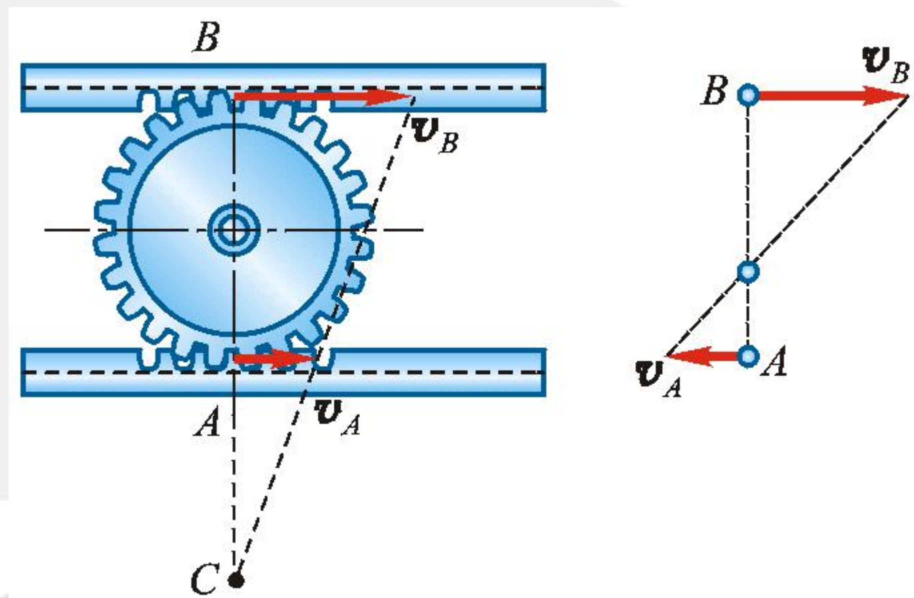
且 $\vec{v}_A$ 不平行于 $\vec{v}_B$ 。



（2）已知平面图形内两点速度平行但大小不等，且速度方向垂直于两点的连线，速度瞬心的位置在两速度矢端点连线与垂线的交点。

$\vec{v}_A // \vec{v}_B$，且 $\vec{v}_A, \vec{v}_B \perp \overline{AB}$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{v_A}{v_B}$$

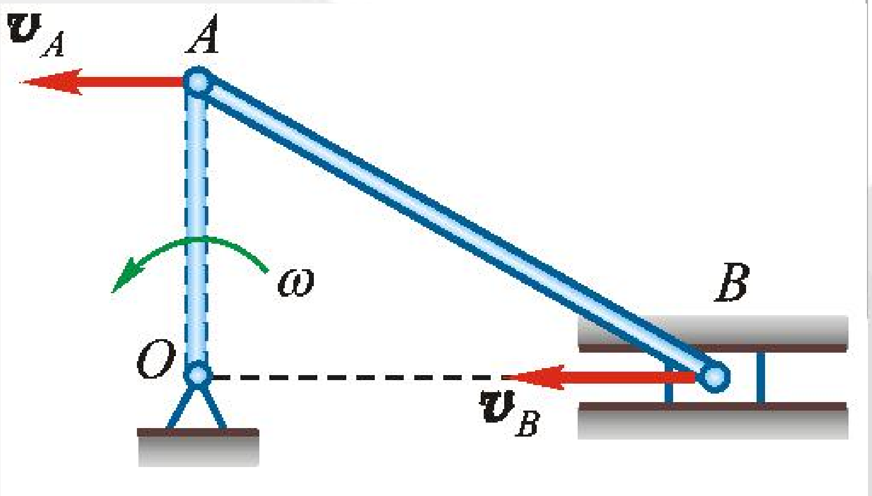


（3）已知平面图形内两点速度平行且大小相等，速度瞬心的位置在无穷远处。

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \text{因} \ \vec{v}_B = \vec{v}_A$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{BA} = 0 \Rightarrow \omega_{BA} = 0$$

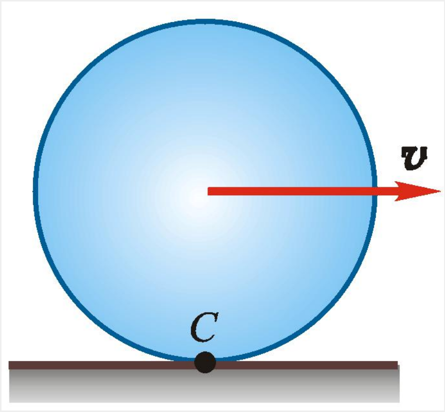
$$\Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A = \vec{v}_M$$

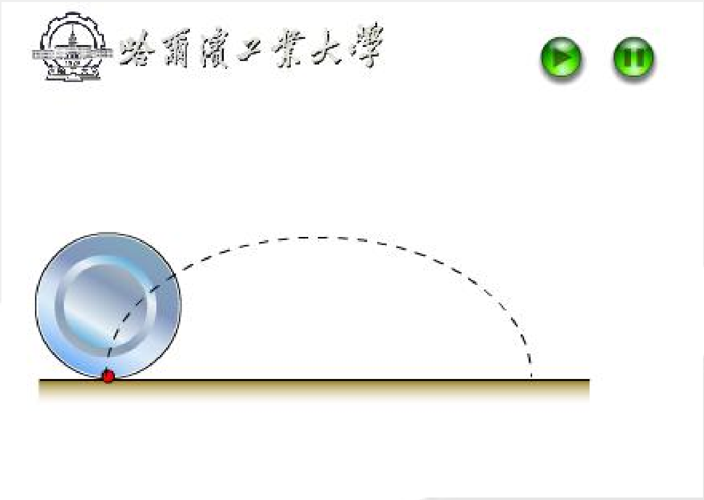


瞬时平移(瞬心在无穷远处)

在该瞬时，图形上各点的速度分布如同图形作平移一样，但此时，各点速度相同，加速度不同，轨迹不同；刚体角速度为零，角加速度不为零。

（4）纯滚动（只滚不滑），速度瞬心位于图形与固定面的接触处。





运动方程

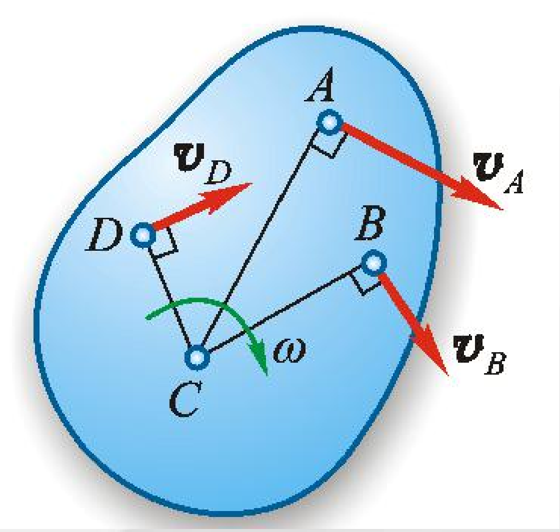
$$\begin{cases} x = r(\omega t - \sin\omega t) \\ y = r(1 - \cos\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = r\omega(1 - \cos\omega t) \\ v_y = r\omega\sin\omega t \end{cases}$$

$$v\big|_{\varphi=2k\pi} = 0 \Rightarrow \text{瞬心} = C$$

（5）已知平面图形内一点的速度大小与方向以及图形的角速度，可求速度瞬心。

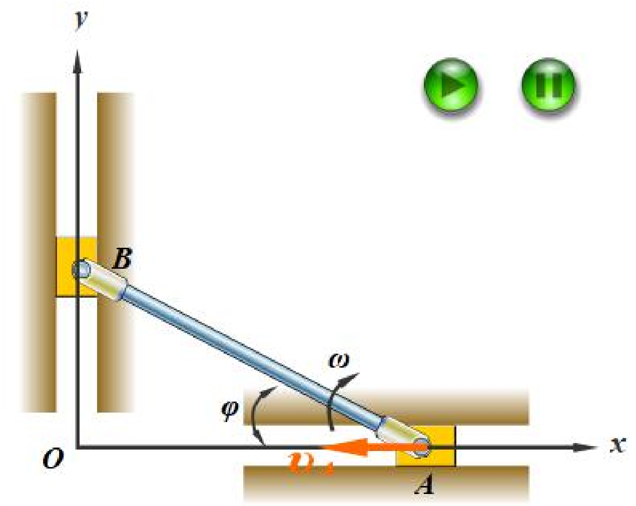
$$l_{AC}=\frac{v_A}{\omega}$$



例8-6

已知：椭圆规尺的*A*端以速度v_A沿x轴的负向运动，如图所示，AB=l。

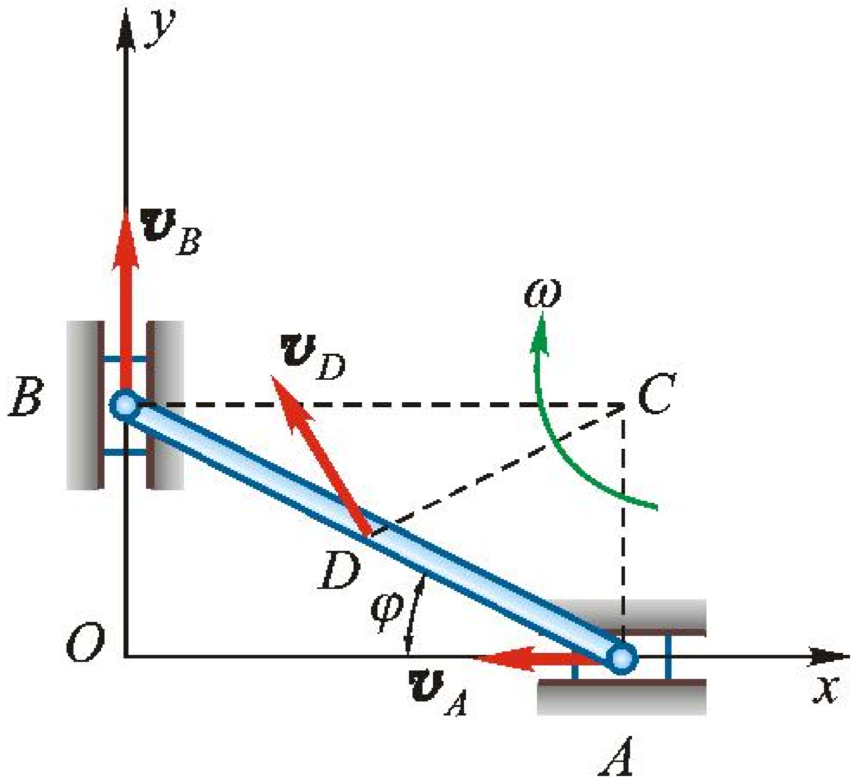
求：用瞬心法求B端的速度以及尺AB的角速度。



解： AB作平面运动，速度瞬心为点C。

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_A}{l\sin\phi}$$

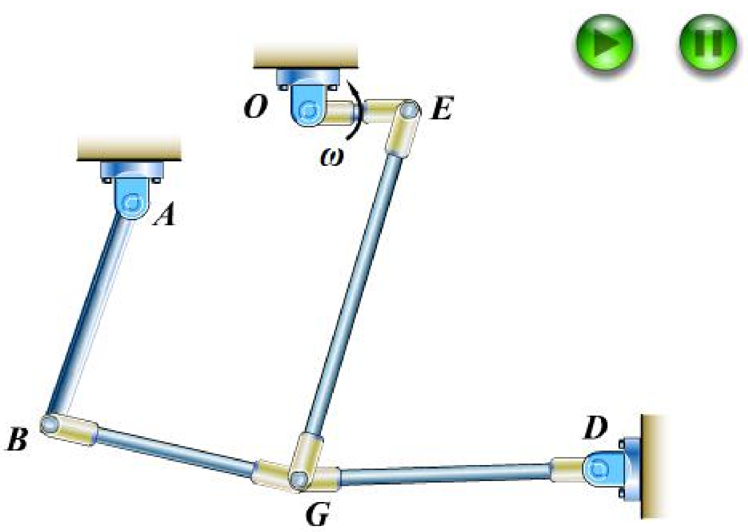
$$v_B = \omega \cdot BC = v_A \cot\phi$$



例8-7

已知：矿石轧碎机的活动夹板长600mm ，由曲柄OE借连杆组带动，使它绕A轴摆动，如图所示。曲柄OE长100 mm，角速度为10rad/s。连杆组由杆BG，GD和GE组成，杆BG和GD各长500mm。

求：当机构在图示位置时，夹板AB的角速度。



解：

1. 杆*GE*作平面运动，瞬心为 C_1。

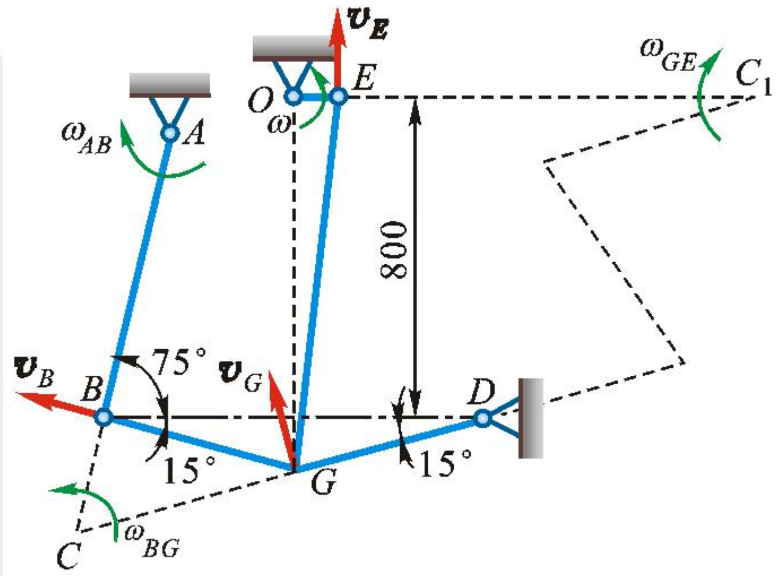
$$OG = 800\text{mm} + 500\text{mm}\sin 15^\circ = 929.4\text{mm}$$

$$EC_1 = OC_1 - OE = 3369\text{mm}$$

$$GC_1 = \frac{OG}{\sin 15^0} = 3591\text{mm}$$

$$\omega_{GE} = \frac{v_E}{EC_1} = \frac{\omega \cdot OE}{EC_1} = 0.2968\,\text{rad/s}$$

$$v_G = \omega_{GE} \cdot GC_1 = 1.066\,\text{m/s}$$



2. 杆BG作平面运动，瞬心为C。

$$\omega_{BG} = \frac{v_G}{GC} \qquad v_B = \omega_{BG} \cdot BC = v_G \cdot \frac{BC}{GC}$$

$$= v_G \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{AB} = \frac{v_B}{AB} = \frac{v_G \cos 60^\circ}{AB} = 0.888\,\text{rad/s}$$

§8-4 用基点法求平面图形内各点的加速度

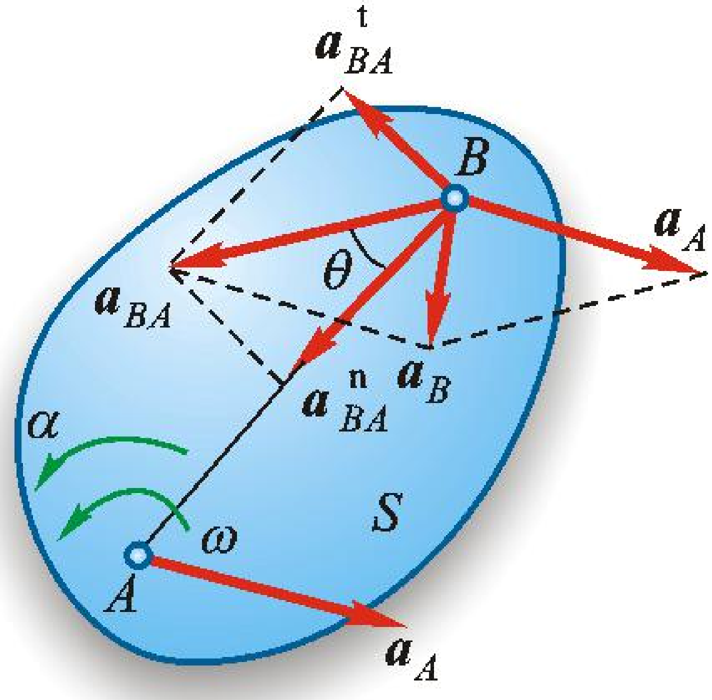
基点 ： A 　　　平移坐标系：$Ax'y'$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_e + \vec{a}_r^t + \vec{a}_r^n$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^t + \vec{a}_{BA}^n$$

$\vec{a}_{BA}^{\tau}$ $\begin{cases} \text{大小 } a_{BA}^t = AB \cdot \alpha \\ \text{方向垂直于 } AB \text{ ，指向同 } \alpha \end{cases}$

$\vec{a}_{BA}^{n}$ $\begin{cases} \text{大小 } a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB \\ \text{方向由 } B \text{ 指向 } A \end{cases}$

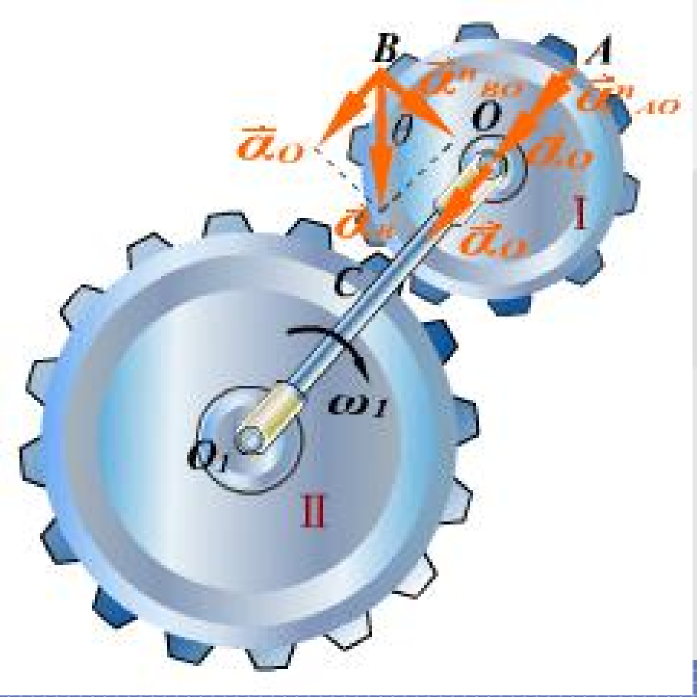


平面图形内任一点的加速度等于基点的加速度与该点随图形绕基点转动的切向加速度和法向加速度的矢量和。

例8-8

已知：如图所示，在外啮合行星齿轮机构中，系杆以匀角速度ω_1绕O_1转动。大齿轮固定，行星轮半径为r，在大轮上只滚不滑。设A和B是行星轮缘 上的两点，点A在O_1O的延长线上，而点B在垂直于O_1O的半径上。

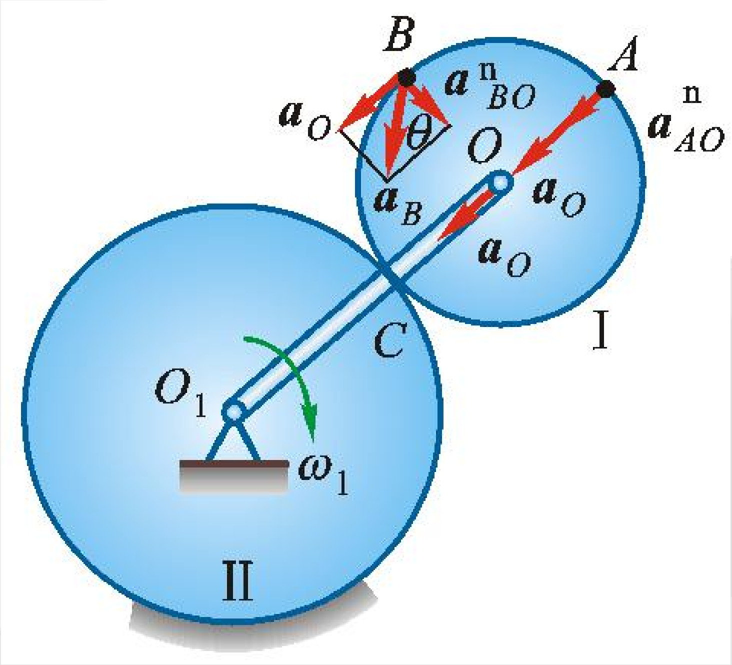
求：点A和B的加速度。



解：1. 轮 I 作平面运动，瞬心为 C。

$$\omega_2 = \frac{v_O}{r} = \frac{\omega_1 l}{r} \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = 0$$

2. 选基点为O



$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}^{\tau}_{AO} + \vec{a}^{n}_{AO}$$

大小	?	$l\omega_1^2$	0	$r\omega_2^2$
方向	?	√	√	√

$$a_A = a_O + a^{n}_{AO}$$

$$= l\omega_1^2 + \frac{l^2}{r}\omega_1^2$$

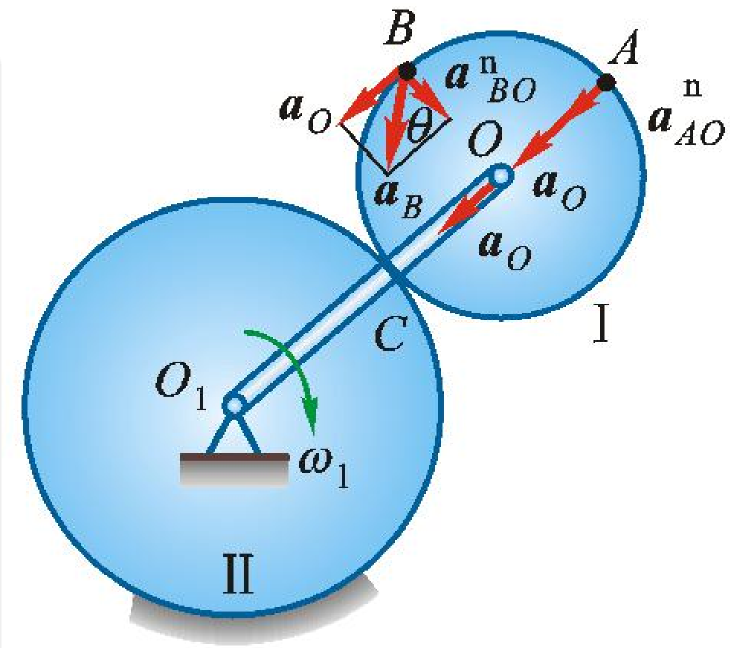
$$= l\omega_1^2(1 + \frac{l}{r})$$

3. $\vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{a}_{BO}^{t} + \vec{a}_{BO}^{n}$

	a_B	a_O	a_{BO}^{t}	a_{BO}^{n}
大小	?	$l\omega_1^2$	0	$r\omega_2^2$
方向	?	√	√	√

$$a_B = \sqrt{a_O^2 + \left(a_{BO}^{n}\right)^2} = l\omega_1^2\sqrt{1+\left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

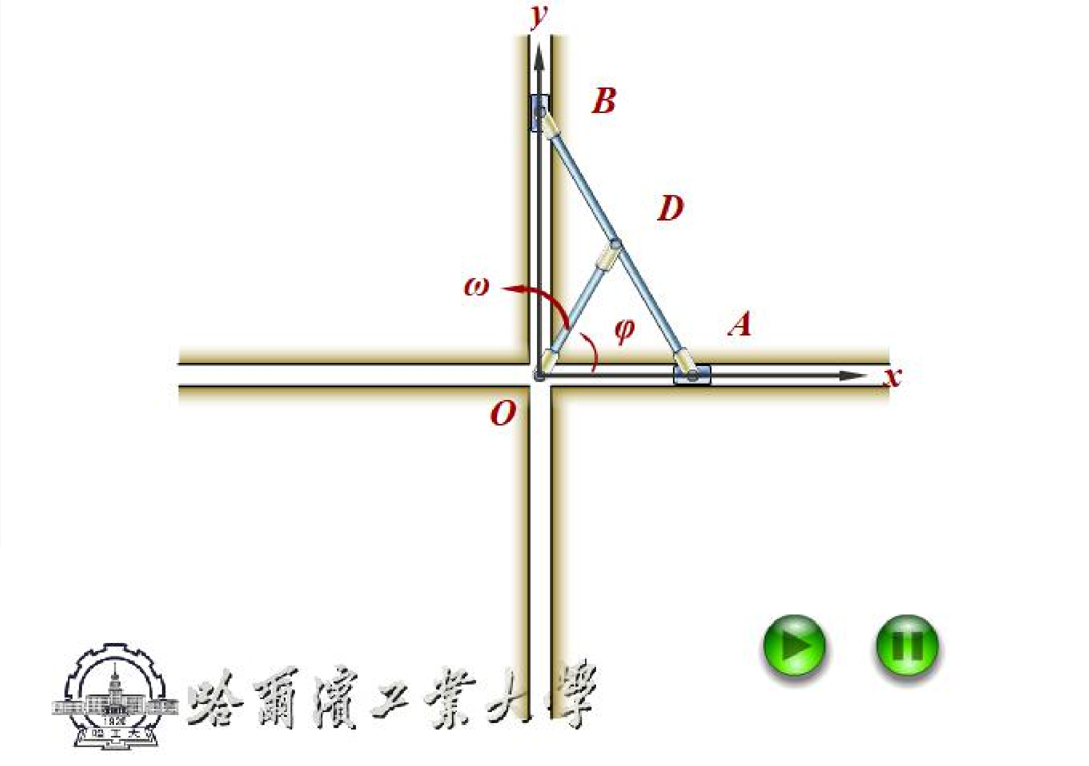
$$\theta = \arctan\frac{a_O}{a_{BO}^{n}} = \arctan\frac{r}{l}$$



例8-9

已知：如图所示，在椭圆规机构中，曲柄**OD**以匀角速度ω绕**O** 轴转动。**OD＝AD＝BD＝l**。

求：当 $\varphi=60°$时，尺**AB**的角加速度和点**A**的加速度。



解： 1. AB作平面运动，瞬心为 C。

$$\omega_{AB} = \frac{v_D}{CD} = \frac{\omega \cdot l}{l} = \omega$$

2.选D为基点

$$a_D = l\omega^2$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_D + \vec{a}_{AD}^{t} + \vec{a}_{AD}^{n}$$

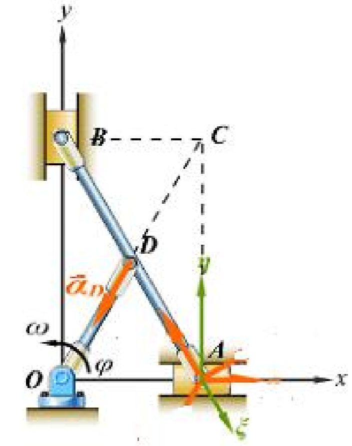
大小	?	$l\omega^2$	?	$l\omega^2$
方向	√	√	√	√

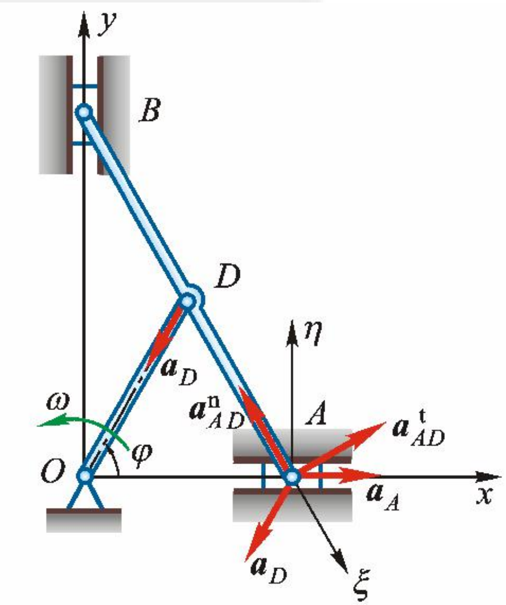
分别沿ξ 轴和η 轴投影

$$a_A \cos\varphi = a_D \cos(\pi - 2\varphi) - a_{AD}^{n}$$

$$0 = -a_D \sin\varphi + a_{AD}^{t} \cos\varphi + a_{AD}^{n} \sin\varphi$$

解得 $a_A = -l\omega^2$ $a_{AD}^{t} = 0$ $\alpha_{AB} = \dfrac{a_{AD}^{t}}{AD} = 0$

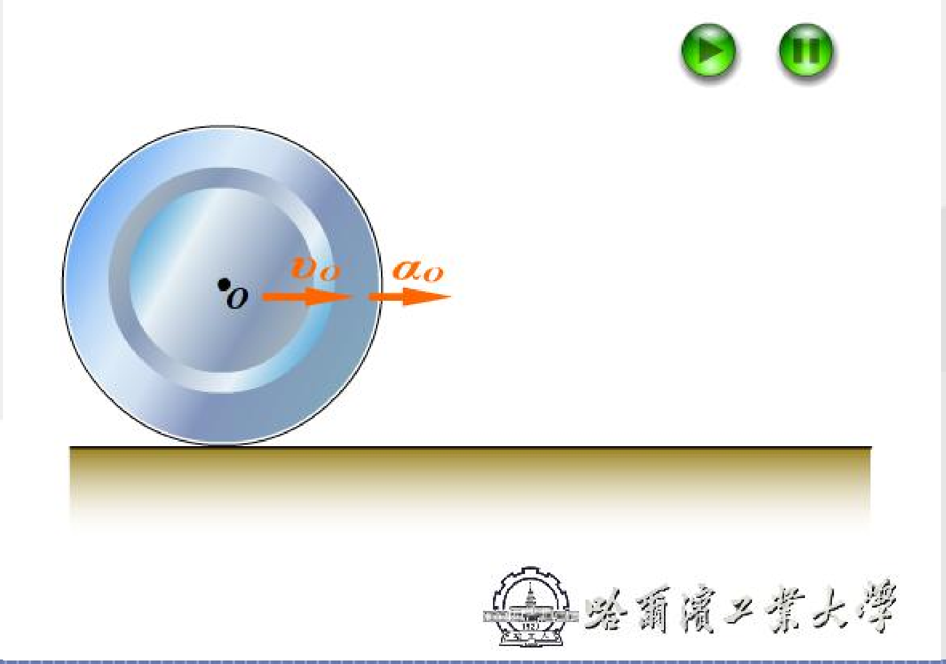




例8-10

已知：车轮沿直线滚动。已知车轮半径为R，中心$\boldsymbol{O}$的速度为 v_O ，加速度为 a_O ，车轮与地面接触无相对滑动。

求：车轮上速度瞬心的加速度。

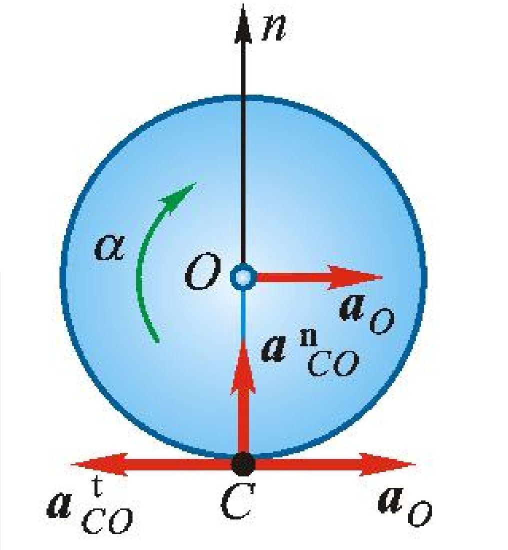


解： 1. 车轮作平面运动，瞬心为 C。

2. $\omega = \dfrac{v_O}{R}$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}v_O}{\mathrm{d}t} = \frac{a_O}{R}$$

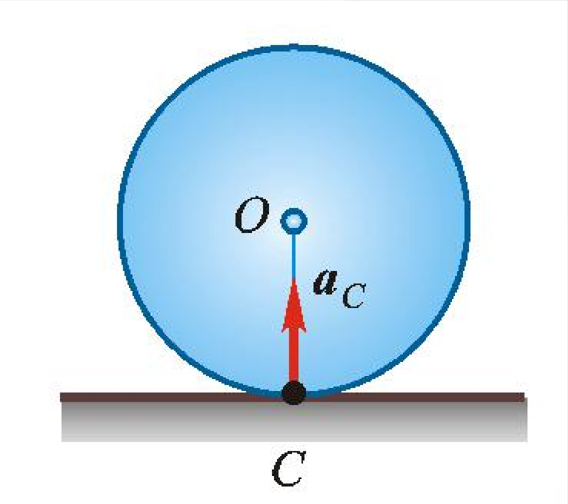
3. 选 O 为基点



$$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \vec{a}^{\mathrm{t}}_{CO} + \vec{a}^{\mathrm{n}}_{CO}$$

大小	?	a_O	$R\alpha$	$R\omega^2$
方向	?	√	√	√

$$a_C = a^{\mathrm{n}}_{CO} = R\omega^2$$



§8-5 运动学综合应用举例

1. 运动学综合应用 ： 机构运动学分析。

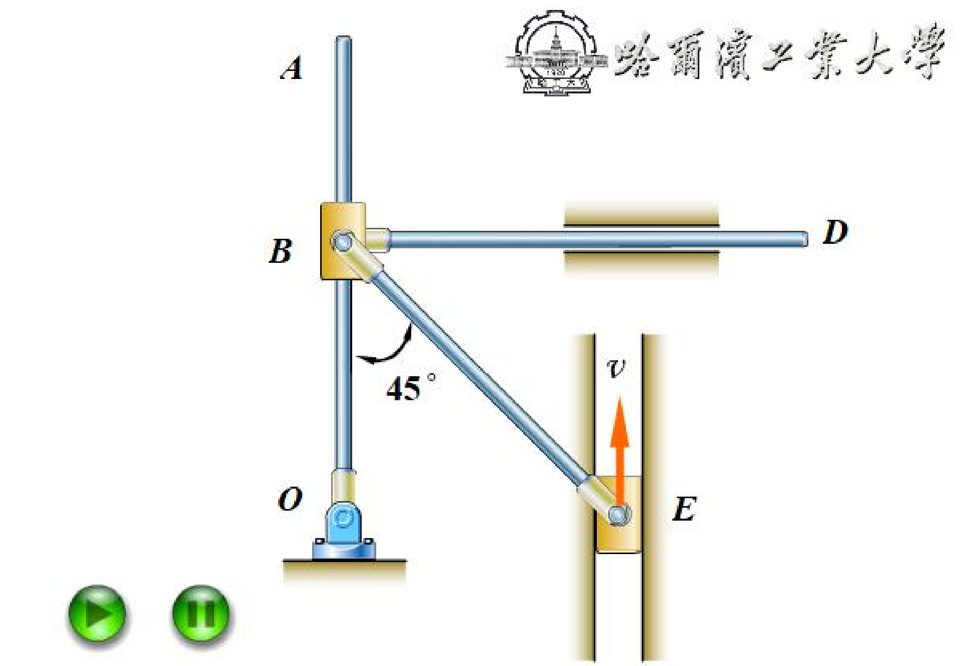
2. 已知运动机构 $\xrightarrow{\text{连接点运动学分析}}$ 未知运动机构

3. 连接点运动学分析 $\begin{cases} \text{接触滑动—(点)合成运动} \\ \text{铰链连接—（刚体）平面运动} \end{cases}$

例8-11

已知：图示平面机构，滑块*B*可沿杆*OA*滑动。杆*BE*与*BD*分别与滑块*B*铰接，*BD*杆可沿水平轨道运动。滑块*E*以匀速*v*沿铅直导轨向上运动，杆*BE*长为 $\sqrt{2}l$ 。图示瞬时杆*OA*铅直，且与杆*BE*夹角为45°

求：该瞬时杆*OA*的角速度与角加速度。



解： **1.杆BE作平面运动，瞬心在O点。**

$$\omega_{BE} = \frac{v}{OE} = \frac{v}{l} \qquad v_B = \omega_{BE} \cdot OB = v$$

取E为基点

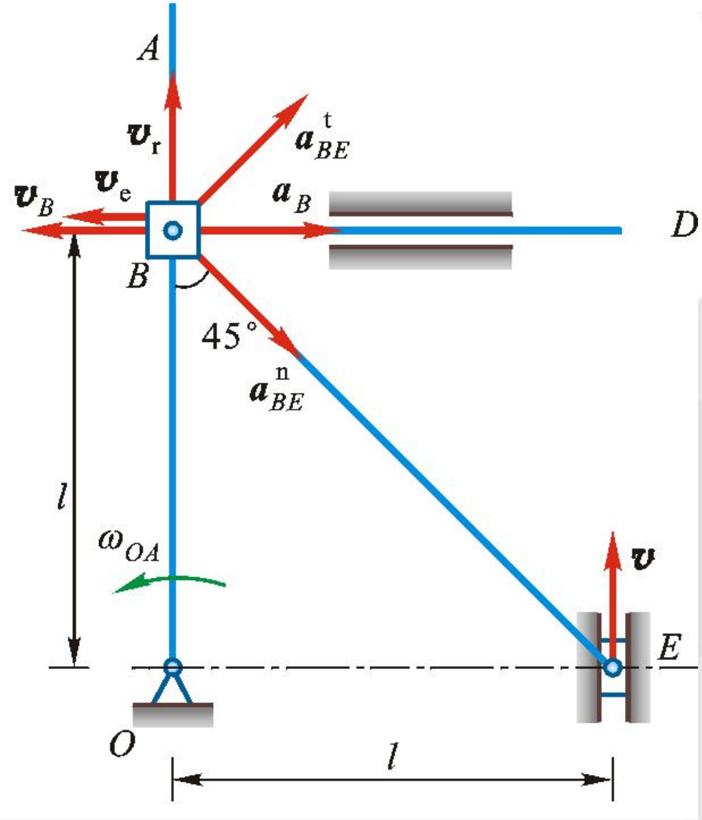
$$\vec{a}_B = \vec{a}_E + \vec{a}_{BE}^{t} + \vec{a}_{BE}^{n}$$

大小	?	0	?	$\omega_{BE}^2 \cdot BE$
方向	√	√	√	√

沿BE方向投影

$$a_B \cos 45^\circ = a_{BE}^{n} = \frac{\sqrt{2}v^2}{l}$$

$$a_B = \frac{a_{BE}^{n}}{\cos 45^\circ} = \frac{2v^2}{l}$$



2. 动点 ： 滑块B 动系 ： OA杆

绝对运动 ： 直线运动(BD)
相对运动 ： 直线运动(OA)
牵连运动 ： 定轴转动(轴O)

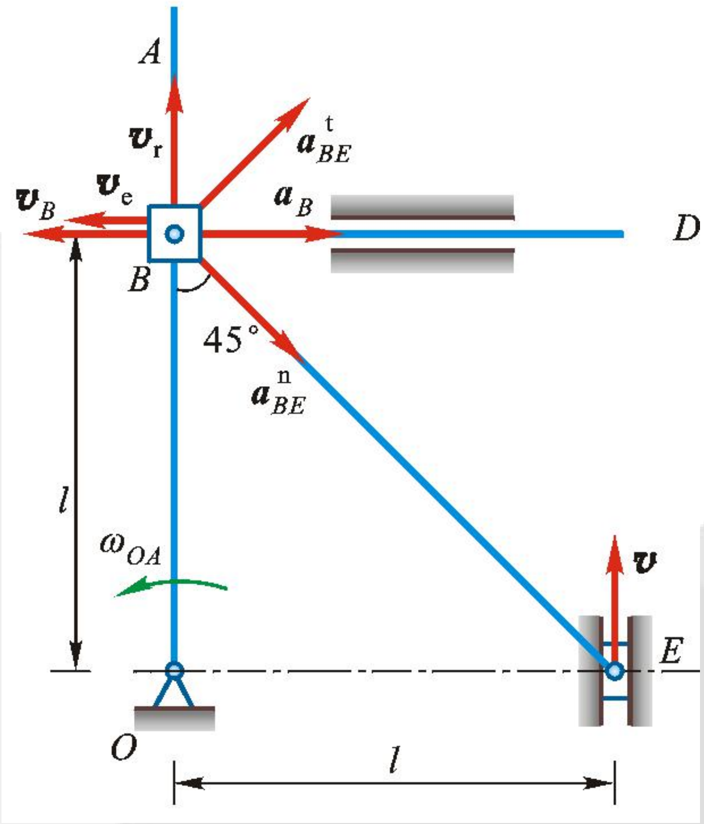
$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

大小	v	?	?
方向	√	√	√

沿BD方向投影

$$v_e = v_a = v$$

$$v_r = 0 \quad \omega_{OA} = \frac{v_e}{OB} = \frac{v}{l}$$



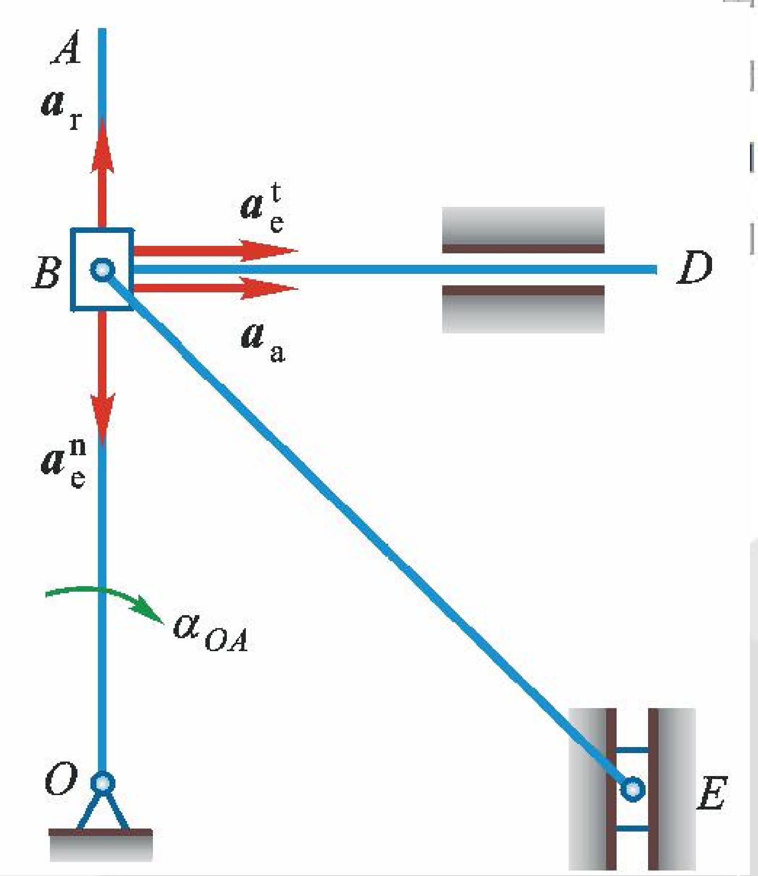
$$\vec{a}_{\mathrm{a}} = \vec{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} + \vec{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} + \vec{a}_{\mathrm{r}} + \vec{a}_{\mathrm{C}}$$

大小	$\frac{2v^2}{l}$	?	$\omega_{OA}^2 l$	?	0
方向	√	√	√	√	√

沿BD方向投影

$$a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} = a_{\mathrm{a}} = \frac{2v^2}{l}$$

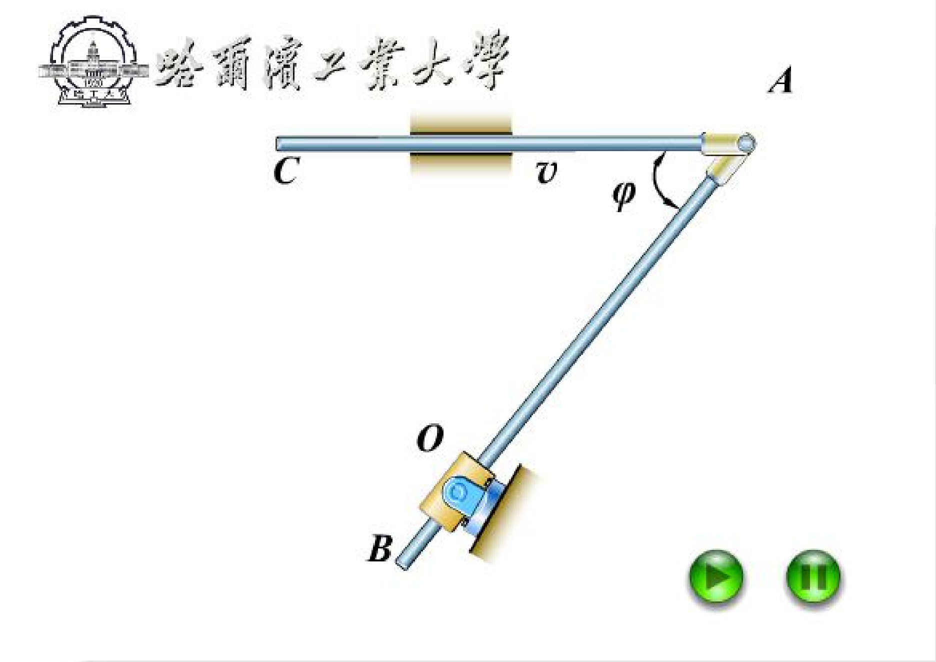
$$\alpha_{OA} = \frac{a_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}}}{OB} = \frac{2v^2}{l^2}$$



例8-12

已知：在图所示平面机构中，杆AC在导轨中以匀速v平移，通过铰链A带动杆AB沿导套O运动，导套O与杆AC距离为l。图示瞬时杆AB与杆AC夹角为$\varphi = 60^\circ$。

求：此瞬时杆**AB**的角速度及角加速度。

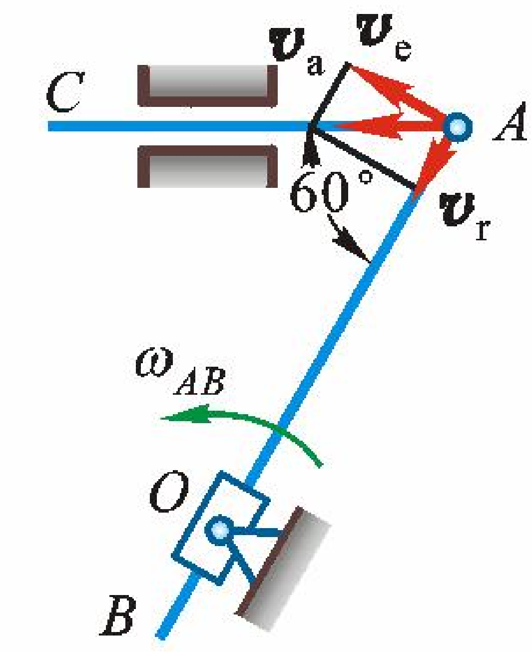


解： 1. 动点：铰链A　动系：套筒O

2. $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$　　$v_e = v_a \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} v$

大小　v　？　？

方向　√　√　√　　$v_r = v_a \cos 60^\circ = \dfrac{v}{2}$

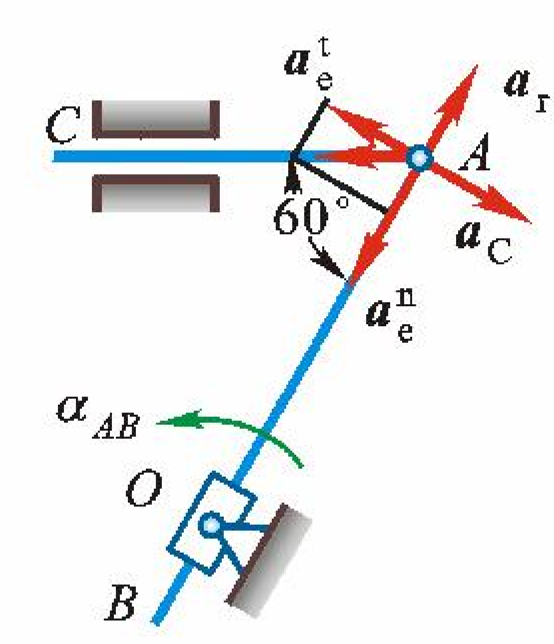


$$\omega_{AB} = \frac{v_e}{AO} = \frac{3v}{4l}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^t + \vec{a}_e^n + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

大小　0　？　$\omega_{AB}^2 \cdot AO$　？　$2\omega_e v_r$

方向　√　√　√　√　√



沿$\vec{a}_e^t$方向投影

$$0 = a_e^t - a_C$$

$$a_e^t = a_C = \frac{3v^2}{4l}$$　　$$\alpha_{AB} = \frac{a_e^t}{AO} = \frac{3\sqrt{3}v^2}{8l^2}$$

另解： 1. 取坐标系Oxy

2. A点的运动方程

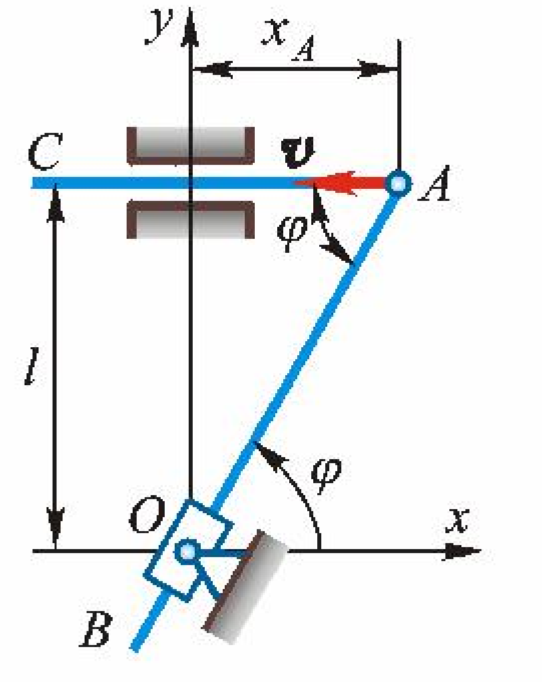
$$x_A = l\cot\varphi$$

3. 速度、加速度

$$\dot{x}_A = -l\dot{\varphi}/\sin^2\varphi = -v$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{l}\sin^2\varphi$$

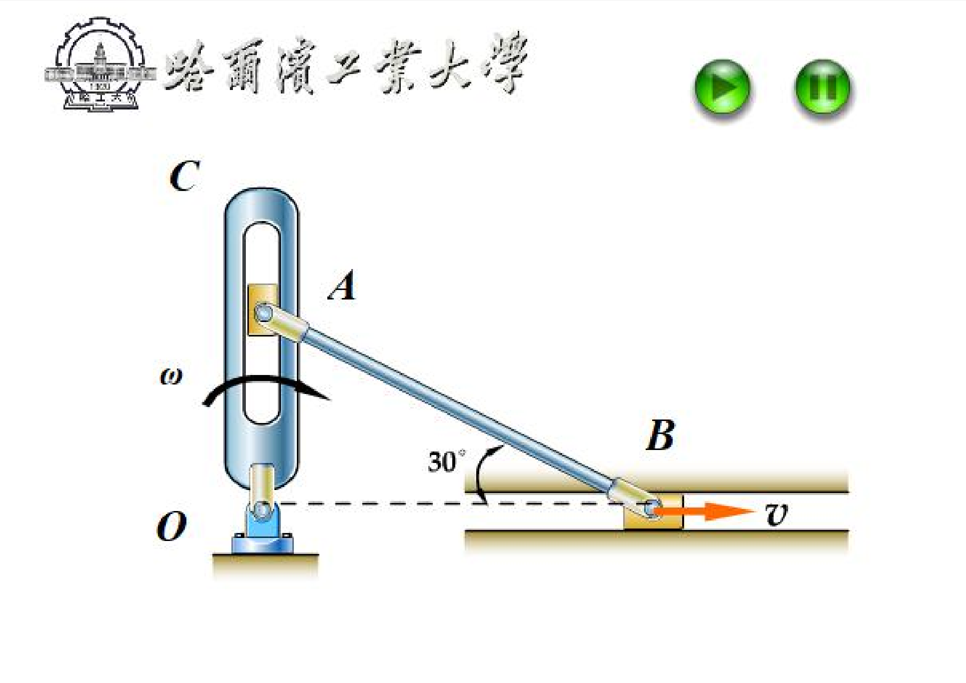
$$\ddot{\varphi} = \frac{v}{l}\sin 2\varphi\cdot\dot{\varphi} = \frac{v^2}{l^2}\sin^2\varphi\cdot\sin 2\varphi$$



当$\varphi = 60^0$时有 $\omega_{AB} = \dot{\varphi} = \dfrac{3v}{4l}$ $\alpha_{AB} = \ddot{\varphi} = \dfrac{3\sqrt{3}v^2}{8l^2}$

例8-13

已知：如图所示平面机构，*AB*长为*l*，滑块*A*可沿摇杆*OC*的长槽滑动。摇杆*OC*以匀角速度ω绕轴*O*转动，滑块*B*以匀速 $v = l\omega$ 沿水平导轨滑动。图示瞬时*OC*铅直，*AB*与水平线*OB*夹角为 30° 。



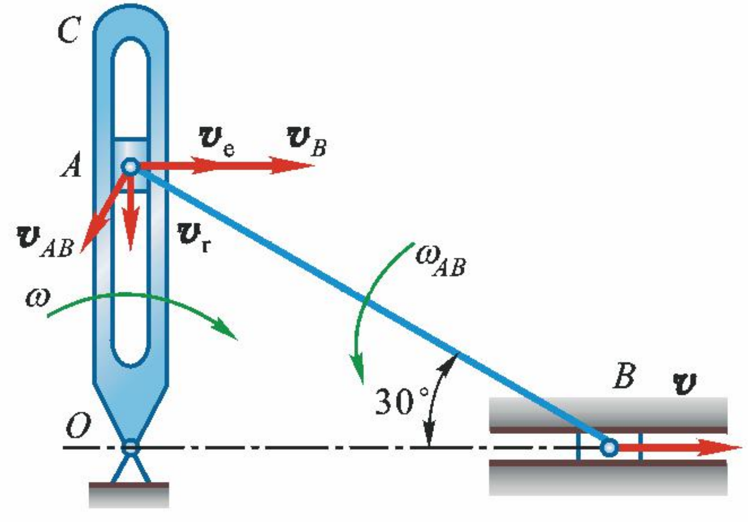
求：此瞬时*AB*杆的角速度及角加速度。

解：速度分析

1. 杆AB作平面运动，基点为B。

$$\vec{v}_A=\vec{v}_B+\vec{v}_{AB}$$

2. 动点 ：滑块 A，动系 ：OC 杆



$$\vec{v}_A=\vec{v}_e+\vec{v}_r=\vec{v}_B+\vec{v}_{AB}$$

	$\vec{v}_e$	$\vec{v}_r$	$\vec{v}_B$	$\vec{v}_{AB}$
大小	$\omega\cdot OA$	?	$l\omega$	?
方向	√	√	√	√

沿$\vec{v}_B$方向投影 $$v_B-v_{AB}\sin 30^{\circ}=v_{\mathrm{e}}=\frac{l\omega}{2}$$

$$v_{AB}=2\left(v_B-v_{\mathrm{e}}\right)=l\omega \qquad \omega_{AB}=\frac{v_{AB}}{l}=\omega$$

沿$\vec{v}_r$方向投影

$$v_{\mathrm{r}}=v_{AB}\cos 30^{0}=\frac{\sqrt{3}}{2}l\omega$$

加速度分析

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^{\mathrm{t}} + \vec{a}_{AB}^{\mathrm{n}}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{t}} + \vec{a}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}} + \vec{a}_{\mathrm{r}} + \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^{\mathrm{t}} + \vec{a}_{AB}^{\mathrm{n}}$$

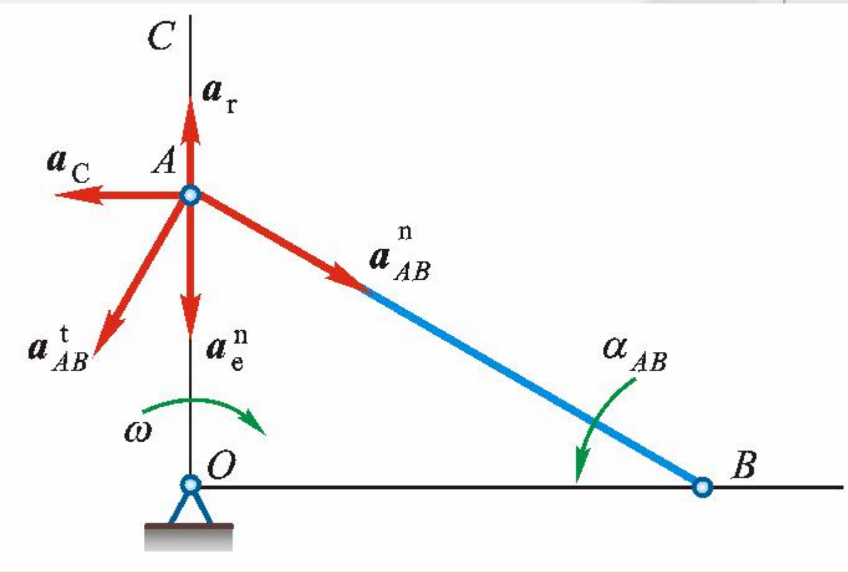
大小	0	$\dfrac{l\omega^2}{2}$	?	$2\omega v_{\mathrm{r}}$	0	?	$\omega_{AB}^2 l$
方向	√	√	√	√	√	√	√

沿$\vec{a}_C$方向投影

$$a_C = a_{AB}^{\mathrm{t}} \sin 30^\circ - a_{AB}^{\mathrm{n}} \cos 30^\circ$$

$$a_{AB}^{\mathrm{t}} = 3\sqrt{3} l\omega^2$$

$$\alpha_{AB} = \frac{a_{AB}^{\mathrm{t}}}{AB} = 3\sqrt{3}\omega^2$$

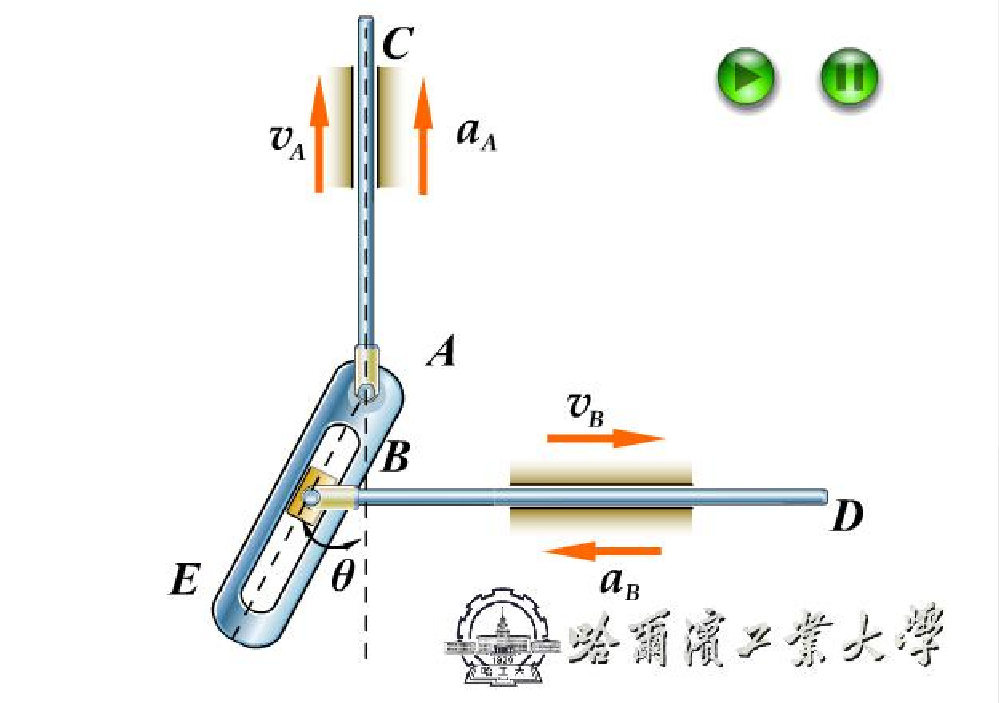


例8-14

如图所示平面机构中，杆*AC*铅直运动，杆*BD*水平运动，*A*为铰链，滑块*B*可沿槽杆*AE*中的直槽滑动。图示瞬时

$$AB = 60\text{mm}, \theta = 30^\circ, v_A = 10\sqrt{3}\text{mm/s}, a_A = 10\sqrt{3}\text{mm/s}^2,$$

$$v_B = 50\text{mm/s}, a_B = 10\text{mm/s}^2\text{。}$$



求：该瞬时槽杆*AE*的角速度 、角加速度及滑块*B*相对*AE*的加速度。

解：动点：滑块B　动系：杆AE

$$\vec{v}_{\mathrm{a}} = \vec{v}_{\mathrm{e}} + \vec{v}_{\mathrm{r}}$$

基点：A

$$\vec{v}_{\mathrm{e}} = \vec{v}_{B'} = \vec{v}_{A} + \vec{v}_{B'A}$$

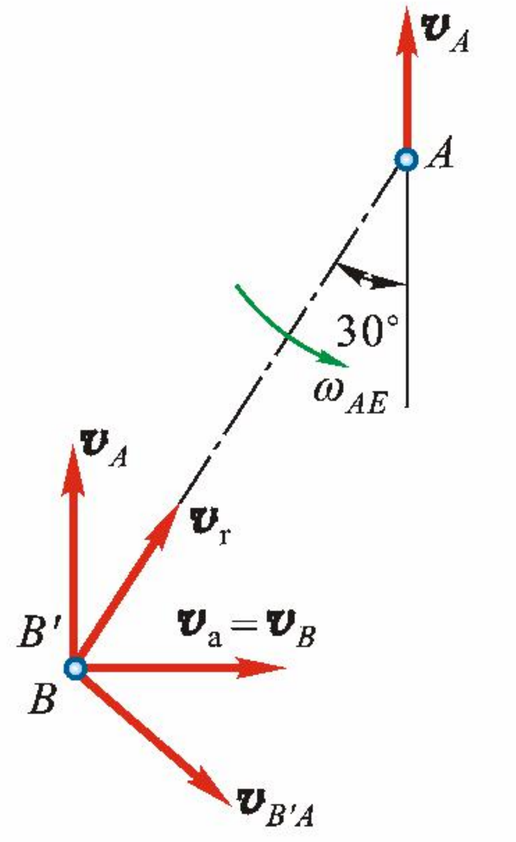
$$\vec{v}_{\mathrm{a}} = \vec{v}_{A} + \vec{v}_{B'A} + \vec{v}_{r}$$

$\vec{v}_{B'A}$:　$v_B \cos 30° = -v_A \cos 60° + v_{B'A}$

$\vec{v}_{\mathrm{r}}$:　$v_B \sin 30° = v_A \sin 60° + v_{\mathrm{r}}$

$$v_{\mathrm{r}} = 10\,\mathrm{mm/s}$$

$$\omega_{AE} = \frac{v_{B'A}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{rad/s}$$



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B'A}^{t} + \vec{a}_{B'A}^{n} + \vec{a}_{r} + \vec{a}_C$$

大小 a_B a_A ? $\omega_{AE}^2 \cdot AB$? $2\omega_{AE} v_r$

方向 √ √ √ √ √ √

沿 $\vec{a}_{B'A}^{t}$ 方向投影

$$-a_B \cos 30^\circ = -a_A \sin 30^\circ + a_{B'A}^{t} - a_C$$

沿 $\vec{a}_r$ 方向投影

$$-a_B \sin 30^\circ = a_A \cos 30^\circ + a_{B'A}^{n} + a_r$$

$$a_r = -65\,\mathrm{mm/s^2}$$

$$\alpha_{AE} = \frac{a_{B'A}^{t}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{rad/s^2}$$