XIDIAN UNIVERSITY

第四章 随机变量的数字特征

随机变量的分布函数、分布律和概率密度是随机变量概率特性最完整的刻画，但它们在实际中是不易得到的。

因而人们转而讨论随机变量某些侧面或某些方面取值的特征，这就是随机变量的数字特征，它在理论和实际应用中都很重要。

4.1 数学期望

1、数学期望的定义

离散型随机变量的数学期望

定义1 设X是离散型随机变量，其分布律为：$P(X=x_i)=p_i,\ i=1,2,\cdots$

如果级数 $\sum_i x_i p_i$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_i x_i p_i$ 的和为随机变量 X 的数学期望（期望）或均值，记为 $E(X)$ 或 EX，即：

$$EX=\sum_i x_i p_i$$

注： 1、 $E(X)$是一个数，非随机。

2、 X 只取有限个值时，$E(X)$就是一个加权平均值。与一般的平均值不同，它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正的平均值，也称均值.

3、随机变量的数学期望与一般变量的算术平均值不同.

连续型随机变量的数学期望

定义2 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 的值为随机变量 X 的数学期望（期望）或均值，记为$E(X)$或 EX，即：

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$

数学期望$E(X)$完全由随机变量X的概率分布决定

例1 设$X \sim U(a,b)$,求$E(X)$.

解 X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

X的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad =\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{b-a}I_{(a,b)}(x)dx$$

$$=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

即数学期望位于区间(a,b)的中点.

例2 设随机变量 X 服从参数为 n、p 的二项分布，即 $X \sim B(n, p)$，求 EX。

解 由于 $X \sim B(n, p)$，因此 X 的分布律为

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=0,1,2,\cdots,n, \quad q=1-p$$

从而

$$EX=\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)}$$

$$=np(p+q)^{n-1}$$

$$=np$$

例3 设随机变量 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布，即 $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$，求 EX。

解 由于 $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$ ，因此 X 的分布律为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\cdots$$

从而

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda}=\lambda$$

例4 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求 EX。

解 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$， $-\infty<x<\infty$

从而 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$ ，令 $t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t+\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\mu$$

2、数学期望的性质

性质 1（线性性） 设$X_1,\cdots$，X_n为随机变量，$C_1,\cdots,C_n$为一组常数，

则： $$E(\sum_{i=1}^{n}C_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}C_iE(X_i)$$

$EC=C$ 常数的期望就是自身，恒定值的期望仍是原值。

$E[E(C)]=C$ $E[E(X)]=EX$

性质 2 若X,Y 是相互独立的随机变量且期望 EX,EY 和 $E(XY)$ 都存在，

则： $E(XY)=EX\cdot EY$ 。但反之不成立。

性质 3（随机变量函数的数学期望）

若 $Y = g(X_1,\cdots,X_P)$，$(X_1,\cdots,X_P) \sim f(x_1,\cdots,x_P)$

则：$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1,\cdots,x_P) f(x_1,\cdots,x_P) dx_1 \cdots dx_P$

注：

性质3的重要意义就在于当我们求 EY 时，不必求得 Y 的分布律或概率密度，而只需利用 X 的分布律或概率密度。

性质 3 （随机变量函数的数学期望）

设离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X=x_i)=p_i,\ i=1,2,\cdots,\quad y=g(x)$ 为已知的连续函数，如果级数 $\sum_i g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则 $Y=g(X)$ 的数学期望为：

$$EY=Eg(X)=\sum_i g(x_i)p_i$$

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，$y=g(x)$ 为已知的连续函数，如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则 $Y=g(X)$ 的数学期望为：

$$EY=Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

性质 3（随机变量函数的数学期望）

设二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律为 $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, \quad i, j=1,2\cdots$ $z=g(x,y)$ 为已知的连续函数，如果级数 $\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则：

$$EZ=Eg(X,Y)=\sum_i g(x_i,y_j)p_{ij}$$

设二维连续型随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为$f(x,y)$， $z=g(x,y)$ 为已知的连续函数，如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛，则：

$$EZ=Eg(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

性质 3（随机变量函数的数学期望）

若 $Y = g(X_1,\cdots,X_P)$，$(X_1,\cdots,X_P) \sim f(x_1,\cdots,x_P)$

则：$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1,\cdots,x_P)f(x_1,\cdots,x_P)dx_1\cdots dx_P$

若$X\ Y$独立，$(X,Y)\sim f_X(x)f_Y(y)$，$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dxdy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy$$

$$=E(X)E(Y)$$

性质 4 若$X\ge Y$（X-Y是非负的随机变量），则$E(X)\ge E(Y)$。

利用期望的性质计算期望

回到例2 ： $X \sim B(n,p)$，求 EX。

解： $X \sim B(n, p)$，则 X 表示n重伯努里试验中的“成功” 次数。

若设 $X_i = \begin{cases} 1 & \text{如第}i\text{次试验成功} \\ 0 & \text{如第}i\text{次试验失败} \end{cases}$ $i=1,2,\ldots,n$

则： $X = X_1+X_2+\ldots+X_n$

因为： $P(X_i=1)=p$，$P(X_i=0)=1-p$

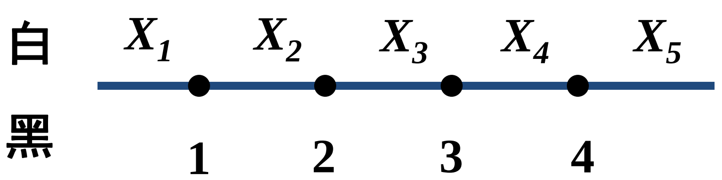
$$E(X_i)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$$

所以： $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np$

要点： ①看清X的含义；②可以分解为n个随机变量的和；③利用线性性。

例5 11只白猫，4只黑猫关在一起，一只一只放出，求第一只黑猫出来之前白猫的平均数。

解 第一只黑猫出来之前 白猫只数的可能性（0,1，···，11）。



$$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5=11$$

判断 $P(X_1=k)$ 与 $P(X_2=k)$ 哪个大？

因为：第一只黑猫出来之前出来2只白猫的可能性与第2只黑猫出来之前出来2只白猫的可能性一样大。

即：$P(X_1=k)=P(X_2=k)$，$X_1\cdots X_5$ 同分布。所以 $E(X_1)=E(X_5)$

$$E(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)=5E(X_1)=E(11)=11\Rightarrow E(X_1)=\frac{11}{5}$$

例6 r个人在一楼进电梯，共n层，每个乘客在任一层下电梯的概率相同，若某曾无乘客下则电梯不停。设X：电梯停的次数，求$E(X)$。

解 设 $X_i=\begin{cases}0 & 第i层无人下\\ 1 & 第i层有人下\end{cases}\qquad i=1,\cdots,n$

$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 设每个人是否下电梯相互独立。

$$P(X_i=0)=(1-\frac{1}{n})^r$$

$$P(X_i=1)=1-(1-\frac{1}{n})^r$$

X_i	0	1
P	$(1-\frac{1}{n})^r$	$1-(1-\frac{1}{n})^r$

$$E(X_i)=1-(1-\frac{1}{n})^r$$

$$\therefore E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=nE(X_i)=n\left[1-(1-\frac{1}{n})^r\right]$$

4.2 方差、标准差和矩

甲乙两人做实验，对同一物理量进行测量，测了三次。

甲： 99 100 101

乙： 90 100 110 $E(X_{甲})=E(X_{乙})=100$

但直观上，甲测得好。

因此不仅需要考虑均值，还要考虑随机变量X所有可能值与均值$E(X)$的偏差的大小。如何衡量偏差大小的程度？

$E\{|X-E(X)|\}$ 能度量随机变量与其均值E(X)的偏离程度.

但由于上式带有绝对值,运算不方便,通常用量 $E\{[X-E(X)]^2\}$

来度量随机变量X与其均值E(X)的偏离程度.

这个数字特征就是我们这一讲要介绍的方差。它是表征随机变量X围绕均值波动程度的量。

1、方差的定义

设X是一个随机变量，若$E[X-E(X)]^2$存在，称 $E[X-E(X)]^2$为 X 的方差。记为D(X)，即 $D(X)=E[X-E(X)]^2$

称$\sqrt{D(X)}$ 为随机变量X的标准差或均方差。记为：$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

2、随机变量方差的计算

设随机变量X的期望$E(X)=\mu$，$DX=E\left[X-E(X)\right]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x$

$$D(X)=E[X-E(X)]^2=E[X^2-2X\cdot EX+(EX)^2]$$

$$=EX^2-2EX\cdot EX+(EX)^2 \quad =EX^2-(EX)^2$$

对离散型随机变量：$P(X=x_i)=p_i$，$i=1,2,\cdots,$

$$DX=E\left[X-E(X)\right]^2=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-\mu)^2 p_i=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2 p_i-(\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i)^2=EX^2-(EX)^2$$

2、随机变量方差的计算

设 $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$，求 DX。

解 X 的分布律为 $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$， $k=0,1,2,\cdots$

已求得 $EX=\lambda$，而 $EX^2=\sum\limits_{k=0}^{\infty}k^2\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\dfrac{\lambda^k}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda}$

令 $t=k-1$

$$=\lambda\sum_{t=0}^{\infty}(t+1)\frac{\lambda^t}{t!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$=\lambda\left(\sum_{t=0}^{\infty}t\frac{\lambda^t}{\mathrm{t}!}\mathrm{e}^{-\lambda}+\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\lambda^t}{\mathrm{t}!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right)$$

$$=\lambda(\lambda+1)$$

故 $DX=EX^2-(EX)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$

2、随机变量方差的计算

设 $X \sim U(a, b)$，求 DX。

解 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$EX=\frac{a+b}{2} \qquad EX^2=\int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx=\frac{1}{b-a} \frac{1}{3}(b^3-a^3)=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

设 $X \sim E(\lambda)$，求 DX。

解 随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x \le 0\end{cases}$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=\int_0^{+\infty} xd(e^{-\lambda x})$$

$$=\left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\lambda}$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty} x^2 de^{-\lambda x}=\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}$$

故 $DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{\lambda^2}$

2、随机变量方差的计算

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求 DX。

解 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

已求得 $EX=\mu$，$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$ $\quad t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$$

故 $EX^2=\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t+2\mu\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}t\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t+\mu^2\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$

$$=\sigma^2+\mu^2$$

从而 $DX=EX^2-(EX)^2=\sigma^2+\mu^2-\mu^2=\sigma^2$