第十章

动　量　定　理

§10-1 动量与冲量

1. 动量

质点的动量 $m\vec{v}$

质点系的动量 $\vec{p}=\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$

$$\begin{cases} p_x=\sum_{i=1}^{n} m_i v_{ix}=\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i \\ p_y=\sum_{i=1}^{n} m_i v_{iy}=\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{y}_i \\ p_z=\sum_{i=1}^{n} m_i v_{iz}=\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{z}_i \end{cases}$$

问题： 如何用简便方法计算刚体或刚体系的动量？

质心 $\vec{r}_c=\dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$ $\Rightarrow$ $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t}=\sum m_i \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}=\sum m_i \vec{v}_i$

即 $\vec{p}=m\vec{v}_c$

2. 冲量

常力的冲量 $\vec{I} = \vec{F}t$

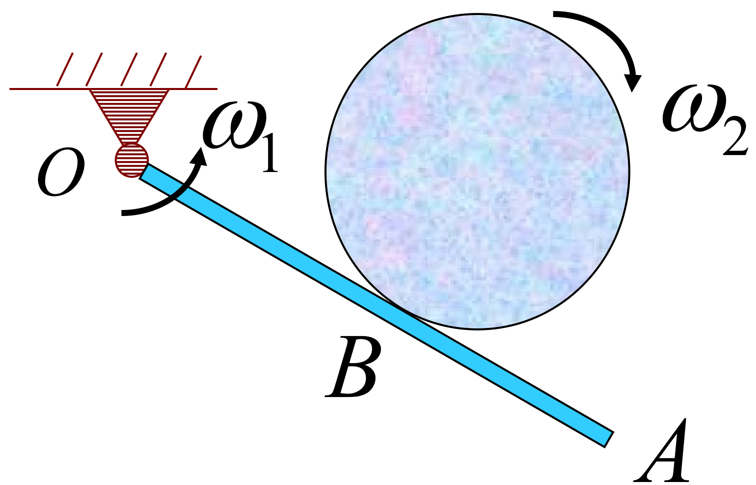
变力的元冲量 $\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\mathrm{d}t$

在 $t_1 \sim t_2$ 内的冲量 $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$

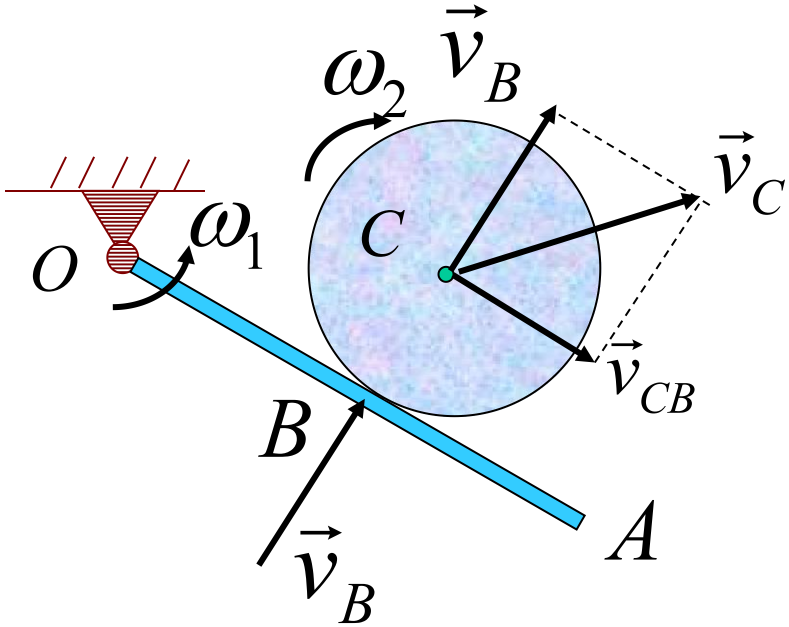
例10－1

已知：均质圆盘在OA杆上纯滚动，m＝20kg， R＝100mm，OA杆的角速度为 $\omega_1=1\text{rad/s}$ ，圆盘相对于OA杆转动的角速度为$\omega_2=4\text{rad/s}$,$OB=100\sqrt{3}\text{mm}$ 。

求：此时圆盘的动量。



解：



$$v_B = \omega_1 \cdot OB = 100\sqrt{3}\,\text{mm/s}$$

$$v_{CB} = (\omega_2 - \omega_1) \cdot R = 300\,\text{mm/s}$$

$$\Downarrow$$

$$v_C = \sqrt{v_B^2 + v_{CB}^2} = 200\sqrt{3}\,\text{mm/s}$$

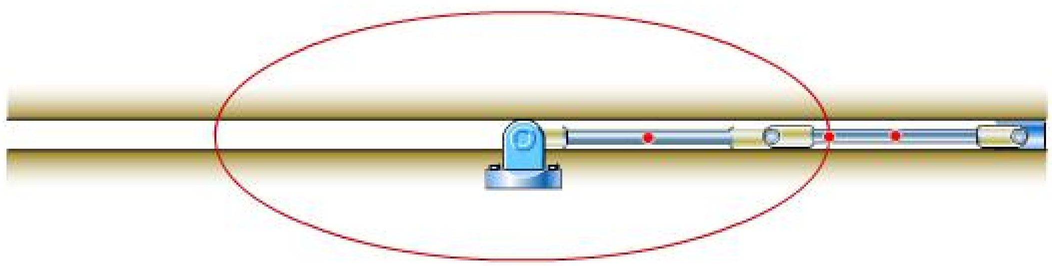
$$\vec{p} = m\vec{v}_C \quad \Rightarrow \quad p = 6.93\,\text{N}\cdot\text{s}$$

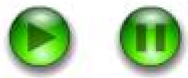
例10-2

已知：ω为常量，均质杆$OA = AB = l$，两杆质量皆为m_1，

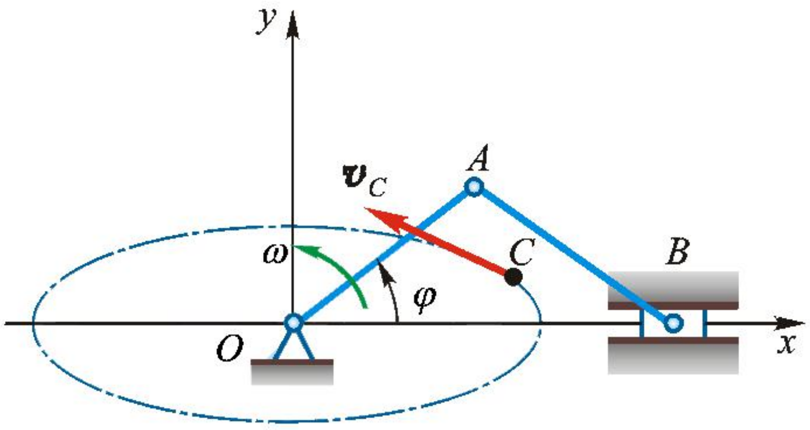
滑块 B 质量 m_2.

求：质心运动方程、轨迹及系统动量.





解:设 $\varphi = \omega t$，质心运动方程为



$$x_C = \frac{m_1 \frac{l}{2} + m_1 \frac{3l}{2} + 2m_2 l}{2m_1 + m_2} \cos \omega t$$

$$= \frac{2(m_1 + m_2)}{2m_1 + m_2} l \cos \omega t$$

$$y_C = \frac{2m_1 \frac{l}{2}}{2m_1 + m_2} \sin \omega t = \frac{m_1}{2m_1 + m_2} l \sin \omega t$$

消去 t 得轨迹方程

$$[\frac{x_c}{2(m_1 + m_2) l / (2m_1 + m_2)}]^2 + [\frac{y_c}{m_1 l / (2m_1 + m_2)}]^2 = 1$$

系统动量沿*x*, *y*轴的投影为:

$$p_x = mv_{Cx} = m\dot{x}_C = -2(m_1 + m_2)l\omega \sin\omega t$$

$$p_y = mv_{Cy} = m\dot{y}_C = m_1 l\omega \cos\omega t$$

系统动量的大小为:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = l\omega\sqrt{4(m_1 + m_2)^2 \sin^2 \omega t + m_1^2 \cos^2 \omega t}$$

§10-2 动量定理

1. 质点的动量定理

$$\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\vec{F} \quad 或 \quad \mathrm{d}(m\vec{v})=\vec{F}\mathrm{d}t$$

——质点动量定理的微分形式

即质点动量的增量等于作用于质点上的力的元冲量.

在 $t_1 \sim t_2$ 内，速度由 $\vec{v}_1 \sim \vec{v}_2$，有

$$m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\vec{I}$$

——质点动量定理的积分形式

即在某一时间间隔内，质点动量的变化等于作用于质点的力在此段时间内的冲量.

2. 质点系的动量定理

外力: $\vec{F}_i^{(e)}$,　　内力: $\vec{F}_i^{(i)}$

内力性质: $\boxed{\sum \vec{F}_i^{(i)} = 0}$ $\boxed{\sum \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(i)}) = 0}$ $\boxed{\sum \vec{F}_i^{(i)} \mathrm{d}t = 0}$

质　点: $\mathrm{d}(m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_i^{(e)} \mathrm{d}t + \vec{F}_i^{(i)} \mathrm{d}t$

质点系: $\sum \mathrm{d}(m_i \vec{v}_i) = \sum \vec{F}_i^{(e)} \mathrm{d}t + \sum \vec{F}_i^{(i)} \mathrm{d}t$

$\Longrightarrow$ $\mathrm{d}\vec{p} = \sum \vec{F}_i^{(e)} \mathrm{d}t = \sum \mathrm{d}\vec{I}_i^{(e)}$　　或　$\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_i^{(e)}$

——质点系动量定理的微分形式

即质点系动量的增量等于作用于质点系的外力元冲量的矢量和;或质点系动量对时间的导数等于作用于质点系的外力的矢量和.

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}=\sum F_x^{(\mathrm{e})} \qquad \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t}=\sum F_y^{(\mathrm{e})} \qquad \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t}=\sum F_z^{(\mathrm{e})}$$

——质点系动量定理微分形式的投影式

$$\vec{p}_2-\vec{p}_1=\sum_{i=1}^{n}\vec{I}_i^{(\mathrm{e})}$$

——质点系动量定理的积分形式

即在某一时间间隔内，质点系动量的改变量等于在这段时间内作用于质点系外力冲量的矢量和.

$$p_{2x}-p_{1x}=\sum I_x^{(\mathrm{e})} \qquad p_{2y}-p_{1y}=\sum I_y^{(\mathrm{e})} \qquad p_{2z}-p_{1z}=\sum I_z^{(\mathrm{e})}$$

——质点系动量定理积分形式的投影式

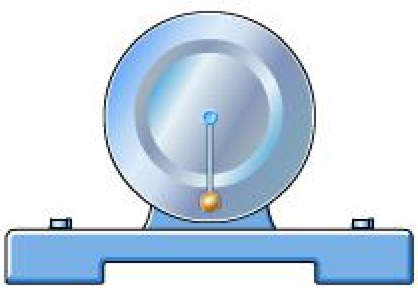
3．质点系动量守恒定律

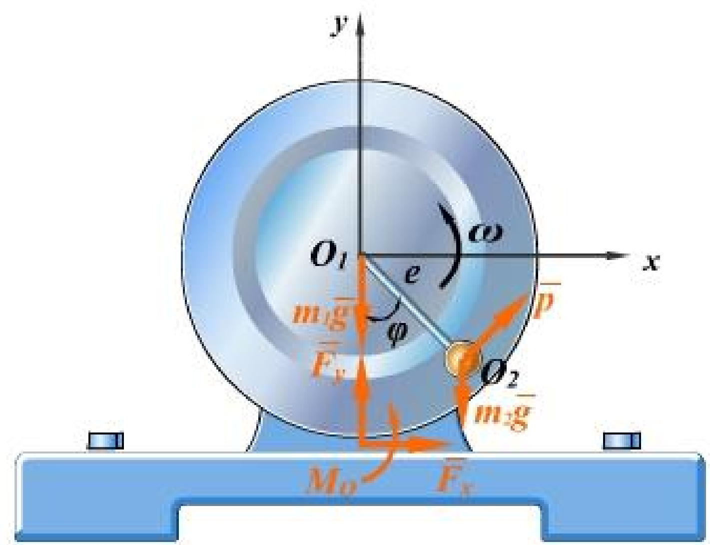
若 $\sum \vec{F}^{(e)}\equiv 0$，$\vec{p}$ =恒矢量

若 $\sum F_x^{(\mathrm{e})}\equiv 0$，$p_x$= 恒量

例10-3

电动机外壳固定在水平基础上, 定子和外壳的质量为 m_1, 转子质量为m_2. 定子和机壳质心 O_1 , 转子质心 O_2 , $O_1O_2=e$, 角速度 ω 为常量. 求基础的水平及铅直约束力.



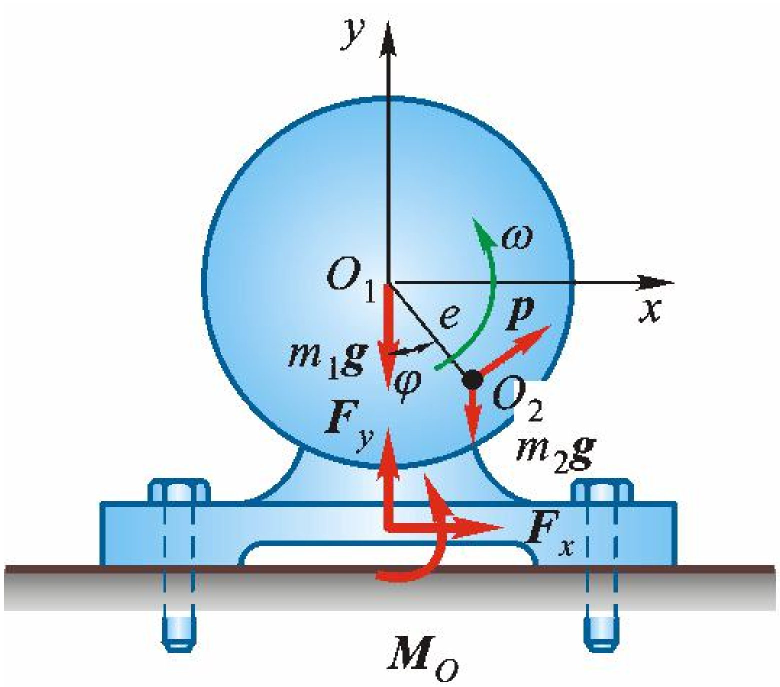


解：

$$p = m_2 \omega e$$

$$p_x = m_2 \omega e \cos\omega t$$

$$p_y = m_2 \omega e \sin\omega t$$



由

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = F_x$$

$$\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = F_y - m_1 g - m_2 g$$

得

$$F_x = \boxed{-m_2 e \omega^2 \sin\omega t}$$

$$F_y = (m_1 + m_2) g + \boxed{m_2 e \omega^2 \cos\omega t}$$

动约束力

附加动约束力

例10-4

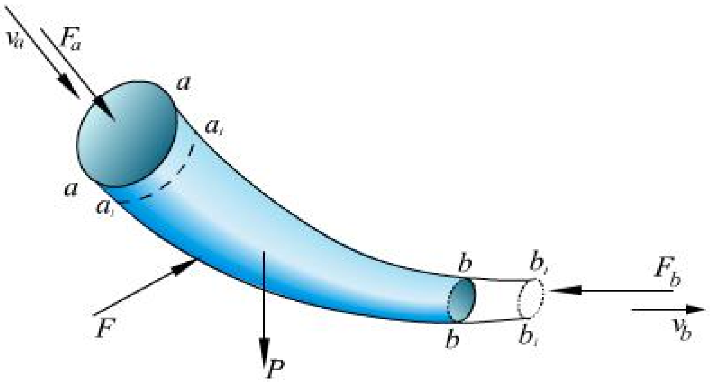
流体在变截面弯管中流动, 设流体不可压缩, 且是定常流动. 求管壁的附加动约束力.

解: $\mathrm{d}t$ 内流过截面的质量及动量变化为

$$\vec{p}-\vec{p}_0=\vec{p}_{a_1b_1}-\vec{p}_{ab}=(\vec{p}_{bb_1}+\vec{p}_{a_1b})-(\vec{p}_{a_1b}+\vec{p}_{aa_1})$$

$$=\vec{p}_{bb_1}-\vec{p}_{aa_1}$$

$$=q_V\rho\mathrm{d}t(\vec{v}_b-\vec{v}_a)$$



流体受外力如图,

由动量定理, 有

$$q_V\rho\mathrm{d}t(\vec{v}_b-\vec{v}_a)=(\vec{P}+\vec{F}_a+\vec{F}_b+\vec{F})\mathrm{d}t$$

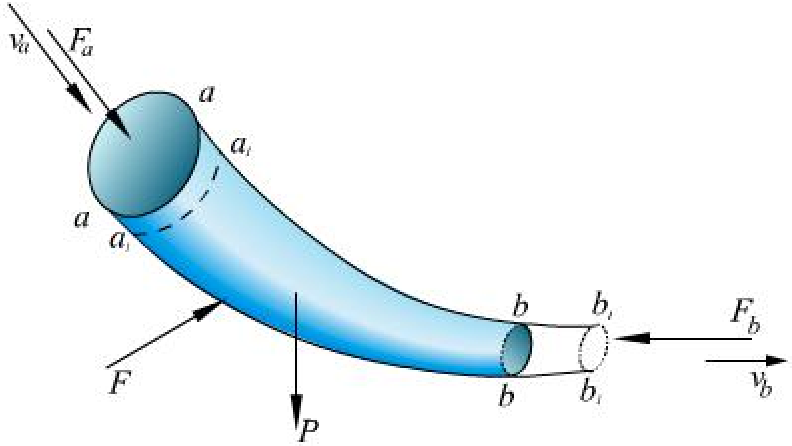
即 $$q_V\rho\ (\vec{v}_b-\vec{v}_a)=\vec{P}+\vec{F}_a+\vec{F}_b+\vec{F}$$

设 $$\vec{F}=\vec{F}'+\vec{F}''$$

$\vec{F}'$ 为静约束力；　　$\vec{F}''$ 为附加动约束力

由于 $$\vec{P}+\vec{F}_a+\vec{F}_b+\vec{F}'=0$$

得 $$\vec{F}''=q_V\rho(\vec{v}_b-\vec{v}_a)$$



10-3　质心运动定理

由
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}_C)=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

得
$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(\mathrm{e})}$$
或
$$m\vec{a}_C=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(\mathrm{e})}$$

——质心运动定理

质点系的质量与质心加速度的乘积等于作用于质点系外力的矢量和.

问题： 内力是否影响质心的运动?

质心运动定理与动力学基本方程有何不同?

在直角坐标轴上的投影式为:

$$ma_{Cx}=\sum F_x^{(e)} \qquad ma_{Cy}=\sum F_y^{(e)} \qquad ma_{Cz}=\sum F_z^{(e)}$$

在自然轴上的投影式为:

$$m\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=\sum F_t^{(e)} \qquad m\frac{v_C^2}{\rho}=\sum F_n^{(e)} \qquad 0=\sum F_b^{(e)}$$

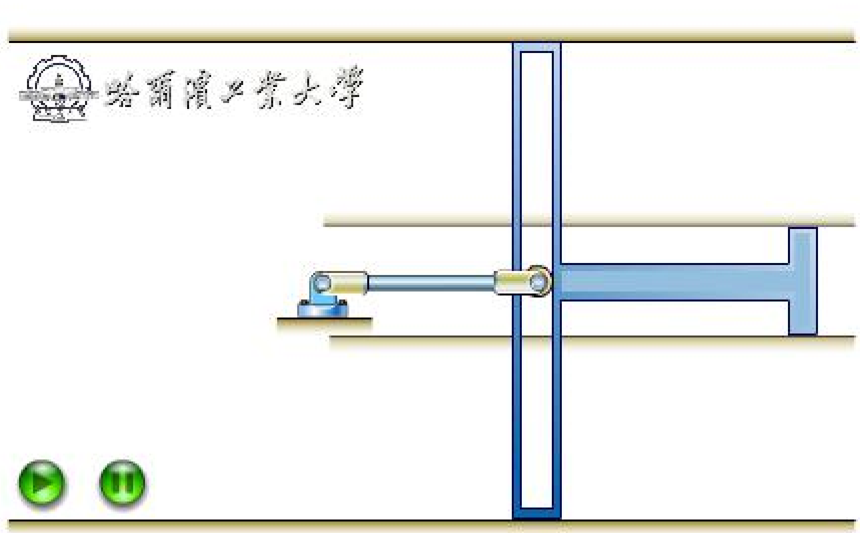
质心运动守恒定律

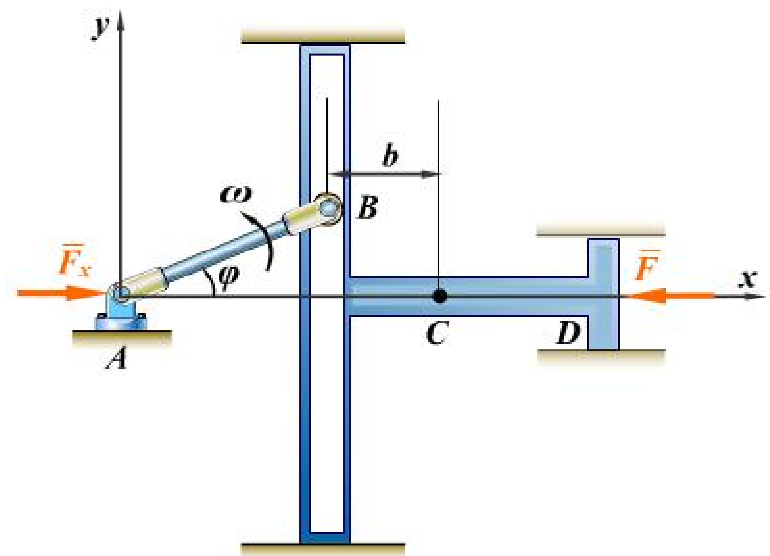
若 $\sum \vec{F}^{(e)} \equiv 0$ 则 $\vec{v}_C =$ 常矢量

若 $\sum F_x^{(e)} \equiv 0$ 则 $v_{Cx} =$ 常量

例10-5

均质曲柄AB长为r, 质量为m_1, 假设受力偶作用以不变的角速度 ω转动, 并带动滑槽连杆以及与它固连的活塞D, 如图所示. 滑槽、连杆、活塞总质量为m_2, 质心在点C. 在活塞上作用一恒力F. 不计摩擦及滑块B的质量, 求: 作用在曲柄轴A 处的最大水平约束力F_x.





解: 如图所示 $$(m_1+m_2)a_{Cx}=F_x-F$$

$$x_C=\left[m_1\frac{r}{2}\cos\varphi+m_2(r\cos\varphi+b)\right]\cdot\frac{1}{m_1+m_2}$$

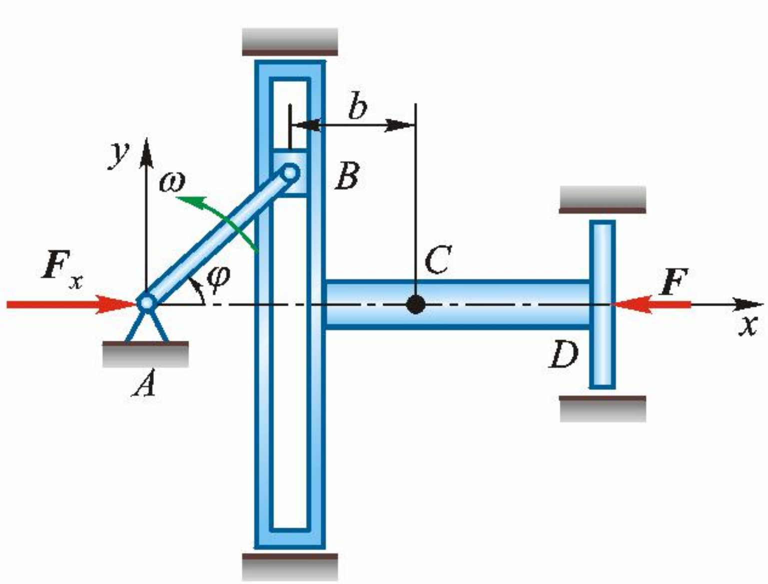
$$a_{Cx}=\frac{\mathrm{d}^2x_C}{\mathrm{d}t^2}=\frac{-r\omega^2}{m_1+m_2}\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)\cos\omega t$$

应用质心运动定理, 解得

$$F_x=F-r\omega^2\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)\cos\omega t$$

显然, 最大水平约束力为

$$F_{\max}=F+r\omega^2\left(\frac{m_1}{2}+m_2\right)$$

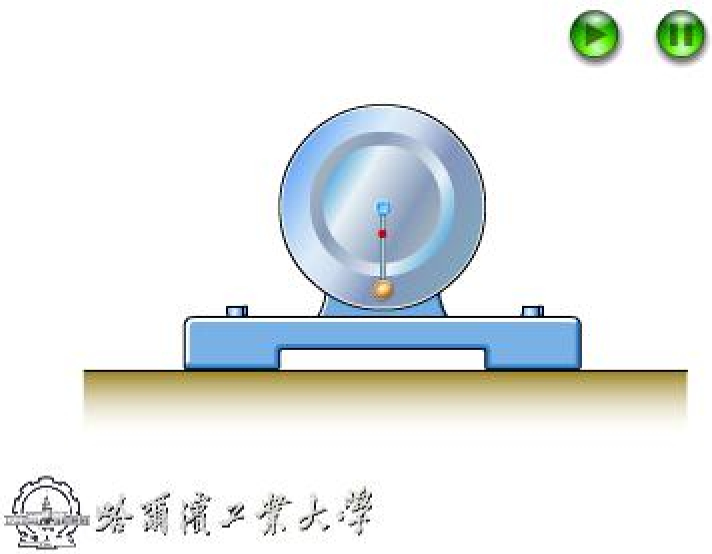


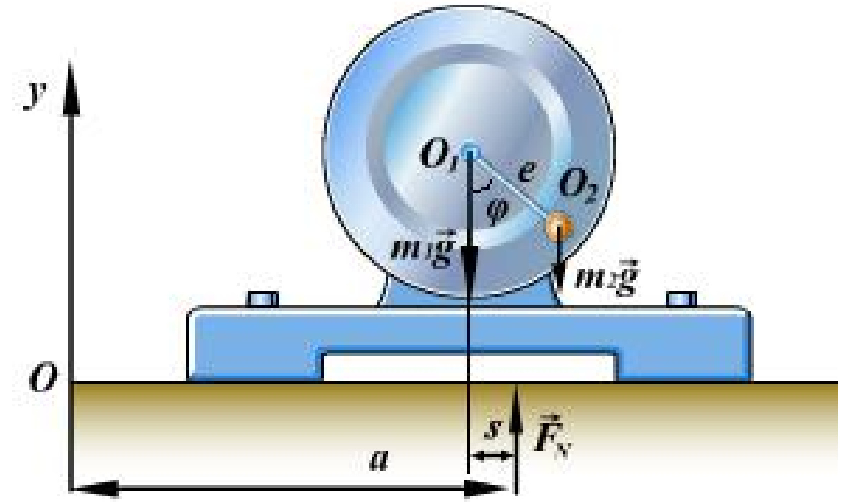
例 10-6

已知：地面水平, 光滑, m_1 , m_2 , e ,初始静止,

$\omega =$ 常量.

求:电机外壳的运动.





解: 设 $$x_{C_1}=a$$

$$x_{C_2}=\frac{m_1(a-s)+m_2(a+e\sin\varphi-s)}{m_1+m_2}$$

由 $x_{C_1}=x_{C_2}$

得 $$s=\frac{m_2}{m_1+m_2}e\sin\varphi$$