西安電子科技大學

《航天器姿态控制调研》

课 程 报 告

题目：航天器姿态控制调研

学院：空间科学与技术学院 专业：空间科学与技术(钱学森班)

学号：________ 班级：________

姓名：________

完成时间：2022 年 10 月 20 日

目录

一、选题目的

航天器设计的最重要问题之一是姿态稳定和控制。由于航天器的任务及其对姿态的要求变化很大，故姿态稳定和控制是个很广泛的问题。此外，从发射阶段到在轨运行之间的程序相当复杂，因此，姿态控制所涉及的学科很多，它综合了数学、动力学及控制理论等不同学科。本文对四种常用的姿态参数：方向余弦矩阵，欧拉角，欧拉轴/角以及修正罗德里戈参数进行了调研，归纳总结出它们的定义和数学模型，适用范围以及优缺点。

二、姿态参数、适用范围与优缺点

2.1 方向余弦矩阵

2.1.1 定义

方向余弦矩阵是由两组不同标准正交基的基底向量之间的方向余弦所形成的矩阵。通常一个矢量 V 在某个坐标系内可用矢量的坐标和该坐标系的标准正交基来表示。例如，一个矢量在直角 X Y Z 坐标系下的坐标为(a , b , c)，则 V = a i + b j + c k。这里的 i , j , k 即为坐标系的标准正交基，分别是 X Y Z 三轴的单位矢量，模值均为 1。

方向余弦矩阵可以用来表达一组标准正交基与另一组标准正交基之间的转化关系，也可以用来表达一个向量对于另一组标准正交基的方向余弦。换句话说，方向余弦矩阵可以表示两个坐标系间的角位置关系，也可以表示一个向量相对于一个坐标系的角位置。

2.1.2 数学模型

使用国际通用的 x, y, z 来表示三维空间的三个轴，使用 b 表示本体坐标系，使用 r 表示参考坐标系。两组坐标系之间组成的方向余弦。

$$
\begin{aligned}
A_{xx} &= x_b \cdot x_r \quad & A_{xy} &= x_b \cdot y_r \quad & A_{xz} &= x_b \cdot z_r \\
A_{yx} &= y_b \cdot x_r \quad & A_{yy} &= y_b \cdot y_r \quad & A_{yz} &= y_b \cdot z_r \\
A_{zx} &= z_b \cdot x_r \quad & A_{zy} &= z_b \cdot y_r \quad & A_{zz} &= z_b \cdot z_r
\end{aligned}
$$

由此，在参考系中描述本体坐标坐标轴$x_b\ y_b\ z_b$，

$$
\begin{aligned}
x_b &= A_{xx} x_r + A_{xy} y_r + A_{xz} z_r \\
y_b &= A_{yx} x_r + A_{yy} y_r + A_{yz} z_r \\
z_b &= A_{zx} x_r + A_{zy} y_r + A_{zz} z_r
\end{aligned}
$$

将式中的各个系数提取出来，组成矩阵形成了方向余弦阵

$$A_{br} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix}$$

由于方向余弦矩阵A_{br}完全确定了坐标系 b 相对参考坐标系 r 的方位，具有唯一性，因此可以用来描述卫星的姿态，故又称为姿态矩阵。

2.1.3 适用范围

方向余弦阵通过矩阵的方式将卫星三轴姿态与星传感器等测出的值联系起来，但是方向余弦阵存在九个余弦数，会导致计算过程中运算量较大，数据不易处理。但是一般在卫星姿态控制仿真过程中还是会使用其参与姿态转换的过程。目前在航天器姿态处理过程中多用方向余弦矩阵进行矢量或并矢的坐标变换，在研究多自由度的机器人动力学和运动学时有时采用方向余弦矩阵作为姿态参数来描述姿态变化。

2.1.4 优缺点

使用方向余弦矩阵作为姿态参数的优点是：进行坐标变换时代数计算比较简单，不涉及三角函数计算，其导数矩阵具有紧凑的形式。缺点为方向余弦矩阵即使给定了其中三个独立参数，也不能唯一确定方向余弦矩阵，即存在多组解；另外其几何直观性差，不够直观，因而在实际应用中并不常使用。

2.2 欧拉角

2.2.1 定义

在人造卫星研制过程中，为了能够快速简便地表达出卫星的三轴姿态，能够直接利用星传感器等测量出的三轴姿态，并用这些参数描述姿态动力学方程，大多数人选择使用欧拉角来进行表示。

欧拉定理是欧拉角(Euler Angles)描述法的原理来源，即刚体 B 绕固定点相对于参考坐标系 A 的任何角位移，可以通过绕某一固定直线的转动（即一个简单转动）而得到。因此，某一参考坐标系想要通过欧拉转动得到卫星本体坐标系，需要分别绕三个轴旋转某一角度来得到卫星本体坐标系，每一次绕某个轴旋转的角度就是这个轴的欧拉角，这样便定义了欧拉角的具体几何意义。

欧拉角是用来确定定点转动刚体位置的 3 个一组独立角参量，由章动角θ、旋进角Ψ和自转角φ组成，为欧拉首先提出而命名。

所有的刚体转动或者两个坐标系之间的关系都可以由若干次基元旋转来实现。坐标轴绕其某个轴的旋转称为基元旋转。对应绕某个轴的角度即为欧拉角。如下图基元旋转。

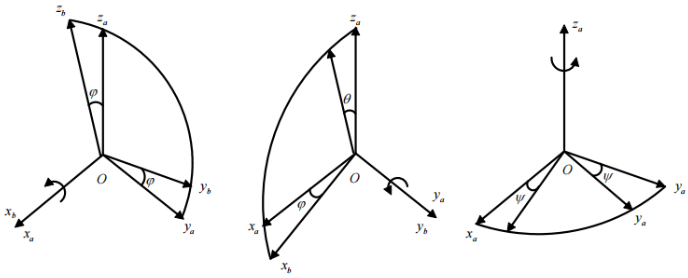

图 1 坐标系的基元旋转

静态定义：对于在三维空间里的一个参考系，任何坐标系的取向，都可以用三个欧拉角来表现。参考系又称实验室参考系，是静止不动的。而坐标系则固定于刚体，随着刚体的旋转而旋转。

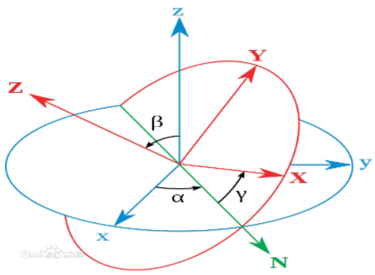

图 2 实验室参考系

如图，设定 xyz-轴为参考系的参考轴。称 xy-平面与 XY-平面的相交为交点线，用 N 表示。则 zxz 顺归的欧拉角可以静态地这样定义：
α 是 x-轴与交点线的夹角，β 是 z-轴和 Z-轴的夹角，γ 是交点线与 X-轴的夹角。

但对于夹角的顺序和标记，夹角的两个轴的指定，没有任何常规。因此，每当使用欧拉角时，必须明确地表示出夹角的顺序，指定其参考轴。

动态定义

我们可以给予欧拉角两种不同的动态定义。一种是绕着固定于刚体的坐标轴的三个旋转的复合；另外一种是绕着实验室参考轴的三个旋转的复合。

2.2.2 数学模型

对于绕 X、Y、Z 轴旋转 α 角的方向余弦阵如下式。

$$R_X(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix},R_Y(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & -\sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix},R_Z(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

姿态矩阵的确定是通过三个轴的方向余弦阵相乘得到的。显然，最后得到的姿态矩阵由绕三个轴旋转的先后顺序确定，转动顺序一般分为两种：

第一类：某一次的旋转顺序与另外两次的旋转顺序不同，最后得到某一姿态矩阵。

第二类：三次旋转分别围绕不同的轴旋转，不需要按照 X 轴、Y 轴、Z 轴的顺序进行。

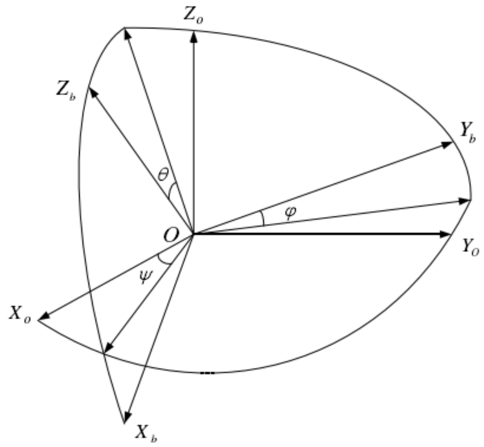

图 3 欧拉角示意图

描述三轴稳定航天器或其它三轴控制的飞机、导弹和舰船等情况下，一般采用 Z-X-Y 非对称旋转，通常称 X,Y,Z 轴分别为航天器的滚动轴、俯仰轴和偏航轴，绕 X,Y,Z 轴旋转的欧拉角称为:滚动角(φ)，俯仰角(θ)，偏航角(Ψ)。三个欧拉角的几何意义如下：

滚动角(φ)：航天器俯仰轴Y_b与其在当地水平面投影的夹角；

俯仰角(θ)：航天器滚动轴X_b与其在当地水平面投影的夹角；

偏航角(Ψ)：航天器滚动轴X_b 在当地水平面的投影与滚动轴X_o的夹角。

将轨道坐标系按 Z-X-Y 旋转得到本体坐标系，则姿态矩阵为

$$R_{ZXY}(\psi,\varphi,\theta)=R_Y(\theta)R_X(\varphi)R_Z(\psi)$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi-\sin\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\theta\sin\psi+\sin\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\theta\cos\varphi\\ -\sin\psi\cos\varphi & \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\\ \sin\theta\cos\psi+\cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \sin\theta\sin\psi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi & \cos\theta\cos\varphi\end{bmatrix}$$

上式中若 φ=90°，式可写为

$$R_{ZXY}(\psi,\varphi,\theta)=R_Y(\theta)R_X(\varphi)R_Z(\psi)=\begin{bmatrix}\cos(\theta+\psi) & \sin(\theta+\psi) & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \sin(\theta+\psi) & -\cos(\theta+\psi) & 0\end{bmatrix}$$

这样，旋转阵就由三个自由度退化为一个自由度，出现了奇异。这就是欧拉角的奇点。当三个欧拉角都为小量时，式 2-2 以欧拉角表示的姿态矩阵可简化为

$$R_{ZXY}(\psi,\varphi,\theta)=R_Y(\theta)R_X(\varphi)R_Z(\psi)=\begin{bmatrix}1 & \psi & -\theta\\ -\psi & 1 & \varphi\\ \theta & -\varphi & 1\end{bmatrix}$$

由姿态矩阵解算欧拉角φ，θ，Ψ得：

$$\psi = \arctan\left[-\frac{A_{yx}}{A_{yy}}\right], \quad \varphi = \arcsin\left[A_{yz}\right], \quad \theta = \arctan\left[-\frac{A_{xz}}{A_{zz}}\right]$$

2.2.3 适用范围

欧拉角是卫星姿态控制算法等研发过程中最广泛应用的一种姿态表示方法，它能直接表示出角度，具有明显的几何意义。一般用于陀螺仪和自旋航天器中，具有较明显的优势。

同时欧拉角广泛地被应用于经典力学中的刚体研究和量子力学中的角动量研究。不仅如此，它还可以用来描述 3D 游戏轴物体的姿态、导弹及卫星的姿态，是惯性导航中描述载体姿态的一种很重要的方法。

2.2.4 优缺点

优点：

（1）欧拉角由三个角度组成，直观，容易理解，它能直接表示出角度，具有明显的几何意义。；

（2）可以进行从一个方向到另一个方向旋转大于 180 度的角度。

缺点：

（1）欧拉角是不可传递的，旋转的顺序影响旋转的结果，不同的应用又可能使用不同的旋转顺序，旋转顺序无法统一；

（2）3 个旋转的角度不受限制，即取值范围是（-inf,inf）；

（3）可能造成万向节死锁；

（4）采用欧拉角描述方法，并且在测量过程中产生的角度数据存储较难，会在某个角度产生奇异值，不同的旋转顺序，其奇异角度也不同。所以使用欧拉角描述法至少需要两组欧拉角来避开奇异值，导致需要有大量的空间来存储数据，较为麻烦。

2.3 欧拉轴/角

2.3.1 定义

为克服奇异问题，可采用四元数描述航天器姿态问题。四元数定义为一种超复数。

根据欧拉有限转动定理，坐标系$\mathrm{S_a}$绕欧拉轴 e 转动角度ϕ就可实现与任意坐标系$\mathrm{S_b}$重合。欧拉轴 e 与在$\mathrm{S_a}$系中的分量分别为e_x，e_y，e_z，因而$\mathrm{S_b}$相对于$\mathrm{S_a}$的取向（或者姿态）可以完全由e_x，e_y，e_z，ϕ完全确定，也就是用姿态四元数完全确定，即

$$Q = q_0 + q_1 \mathrm{i} + q_2 \mathrm{j} + q_3 \mathrm{k}$$

式中，$q_0 = \cos\frac{\phi}{2}, q_1 = e_x \sin\frac{\phi}{2}, q_2 = e_y \sin\frac{\phi}{2}, q_3 = e_z \sin\frac{\phi}{2}$

姿态四元数的四个元素并不是独立的，满足如下的约束条件：

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$$

由该约定条件可以看出，四元数自由度为 3，存在冗余信息。

2.3.2 数学模型

四元数法姿态矩阵计算如下：

(1)初始四元数的确定

$$\begin{bmatrix} \lambda(0) \\ p_1(0) \\ p_2(0) \\ p_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\psi_0}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\gamma_0}{2} + \sin\frac{\psi_0}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\gamma_0}{2} \\ \cos\frac{\psi_0}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\gamma_0}{2} - \sin\frac{\psi_0}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\gamma_0}{2} \\ \cos\frac{\psi_0}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\gamma_0}{2} + \sin\frac{\psi_0}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\gamma_0}{2} \\ \sin\frac{\psi_0}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\gamma_0}{2} - \cos\frac{\psi_0}{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\gamma_0}{2} \end{bmatrix}$$

(2)四元数标量部分与矢量部分 λ、p^1、p^2、p^3 的实时计算，输入信号为陀螺仪的数字输出信号 $\Delta\theta = \int_t^{t+\Delta_t} \omega_{ib}\,\mathrm{d}t$，其中 i 为 x,y,z。计算方法采用二阶龙格库塔法：

$$\begin{cases} K_1 = \Omega_b(t)q(t) \\ Y = q(t) + T\Omega_b(t)q(t) \\ K_2 = \Omega_b(t+T)Y \\ q(t+T) = q(t) + (T/2)*\left(K_1 + K_2\right) \end{cases}$$

(3)姿态矩阵的实时计算，确定姿态矩阵 $\mathbf{C}_E^b$，输入为 λ（n）、p^1（n）、p^2（n）、p^3（n）。计算公式：

$$\mathbf{C}_E^b = \begin{bmatrix} \lambda^2 + p^2 - p^2 - p^2 & 2\left(p^1p^2 + \lambda_{p3}\right) & 2\left(p^1p^3 - \lambda_{p^2}\right) \\ 2\left(p^1p^2 - \lambda_{p3}\right) & \lambda^2 + p^2 - p^2 - p^2 & 2\left(p^2p^3 + \lambda_{p1}\right) \\ 2\left(p^1p^3 + \lambda_{p^2}\right) & 2\left(p^2p^3 - \lambda_{p1}\right) & \lambda^2 + p^2 - p^2 - p^2 \end{bmatrix}$$

简易为：

$$\mathbf{C}_E^b = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

(4)载体姿态角计算，以确定姿态角θ、Ψ、γ，输入为 T_{11}（n）、T_{12}（n）、T_{13}（n）、T_{23}（n）、T_{33}（n）。计算公式：

$$\begin{cases} \theta = -\arcsin\left(T_{13}(n)\right) \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{T_{12}(n)}{T_{11}(n)}\right) \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{T_{23}(n)}{T_{33}(n)}\right) \end{cases}$$

(5)方向余弦矩阵为

$$\mathbf{C}_E^b = \begin{bmatrix} \cos\psi_{\cos}\theta & \sin\psi_{\cos}\theta & -\sin\theta \\ \cos\psi_{\sin}\theta_{\sin}\gamma - \sin\psi_{\cos}\gamma & \sin\psi_{\sin}\theta\sin\gamma + \cos\psi_{\cos}\gamma & \cos\theta\sin\gamma \\ \cos\psi_{\sin}\theta_{\cos}\gamma + \sin\psi_{\sin}\gamma & \sin\psi_{\sin}\theta_{\cos}\gamma - \cos\psi_{\sin}\gamma & \cos\theta_{\cos}\gamma \end{bmatrix}$$

2.3.3 适用范围

姿态四元数可以应用于刚体研究中，也应用于卫星、航天器、飞行器、导弹的姿态研究中，也可以应用于 3D 物体姿态研究中。

在对卫星进行姿态运算时使用四元数能够避免奇异性问题，而且不涉及数学运算。和方向余弦阵相比，将方向余弦阵的九个变量简化成了四个变量，极大地减少了运算量。所以在卫星三轴姿态控制仿真系统中，一般将四元数代入到姿态动力学方程和姿态运动学方程中，对姿态动力学模型进行递推计算。

2.3.4 优缺点

优点：存储空间小，计算效率高；四元旋转不存在万向节锁问题。四元数姿态矩阵微分方程只要解 4 个一阶微分方程式组即可，比方向余弦姿态矩阵微分方程式计算量有明显减少，能满足工程实践中对实时性的要求。使用四元数能够避免奇异性问题。

缺点：四元数的数字表示不直观；单个四元数不能表示在任何方向上超过 180 度的旋转。

2.4 修正罗德里格参数

2.4.1 定义

基于罗德里格参数在Φ接近±π时，参数会接近无限大的缺点，提出修正的罗德里格参数（Modified Rodrigues Parameters,MRPs），其定义为

$$\underline{\rho}^* \triangleq \underline{e}\tan\frac{\Phi}{4} = \frac{\sin(\Phi/2)}{1+\cos(\Phi/2)}\underline{e} = \frac{1}{1+\cos(\Phi/2)}\underline{q}$$

根据定义可知，修正的罗德里格参数只有在欧拉轴转角为±2π才会变为奇异点，而实际应用中飞行器相对参考坐标系的欧拉轴转角不需要表示到±2π。

2.4.2 数学模型

（1）与主旋转矢量关系

设主旋转矢量中主轴为$\hat{e}$，主角度为Φ，则修正罗德里格参数$\hat{q}$可由两者导出：

$$\hat{\sigma}=\hat{e}\tan\frac{\Phi}{4}$$

在主角度Φ小于π时，可认为：

$$\hat{\sigma}=\hat{e}\frac{\Phi}{4}$$

（2）与欧拉四元数的关系

由定义式：

$$\sigma_i=\frac{\beta_i}{1+\beta_0},i=1,2,3$$

反向关系：

$$\beta_0=\frac{1-\hat{\sigma}^T\hat{\sigma}}{1+\hat{\sigma}^T\hat{\sigma}}$$

$$\beta_i=\frac{2\sigma_i}{1+\hat{\sigma}^T\hat{\sigma}}$$

（3）与经典罗德里格参数的关系

设经典罗德里格参数为$\hat{q}$，则转化关系为：

$$\hat{q}=\frac{2\hat{\sigma}}{1-\hat{\sigma}^T\hat{\sigma}}$$

$$\hat{\sigma}=\frac{\hat{q}}{1+\sqrt{1+\hat{q}^T\hat{q}}}$$

（4）与方向余弦矩阵关系

方向余弦矩阵用修正罗德里格参数表示：

$$[C]=[I]+\frac{8[\tilde{\sigma}]^2-4\left(1-\hat{\sigma}^T\hat{\sigma}\right)[\tilde{\sigma}]}{\left(1+\hat{\sigma}^T\hat{\sigma}\right)^2}$$

其中[I]为单位阵。

2.4.3 适用范围

修正罗德里格参数在航天器姿态控制、跟踪控制及误差动力学方面都有广泛应用。

2.4.4 优缺点

由修正罗德里格斯参数定义，当 $\beta_0=-1$ 时定义式分母为 0，此时出现奇点。$\beta_0=-1$ 对应于主角度 $\Phi=\pm 2\pi$。由于正转或反转 360 度与没有旋转结果等效，故可不考虑该情况。在数值计算中，常通过设计伴影集来避免。

三、参考文献

[1] 李由. 卫星快速姿态机动控制方法研究[D].哈尔滨工业大学,2017.

[2] 雷仲谋,吕振铎.非线性自抗扰控制器在航天器姿态控制系统中的应用[J].航天控制,2000(04):34-39.DOI:10.16804/j.cnki.issn1006-3242.2000.04.006.

[3] 李立涛,荣思远.航天器姿态动力学与控制. 哈尔滨工业大学航天工程系