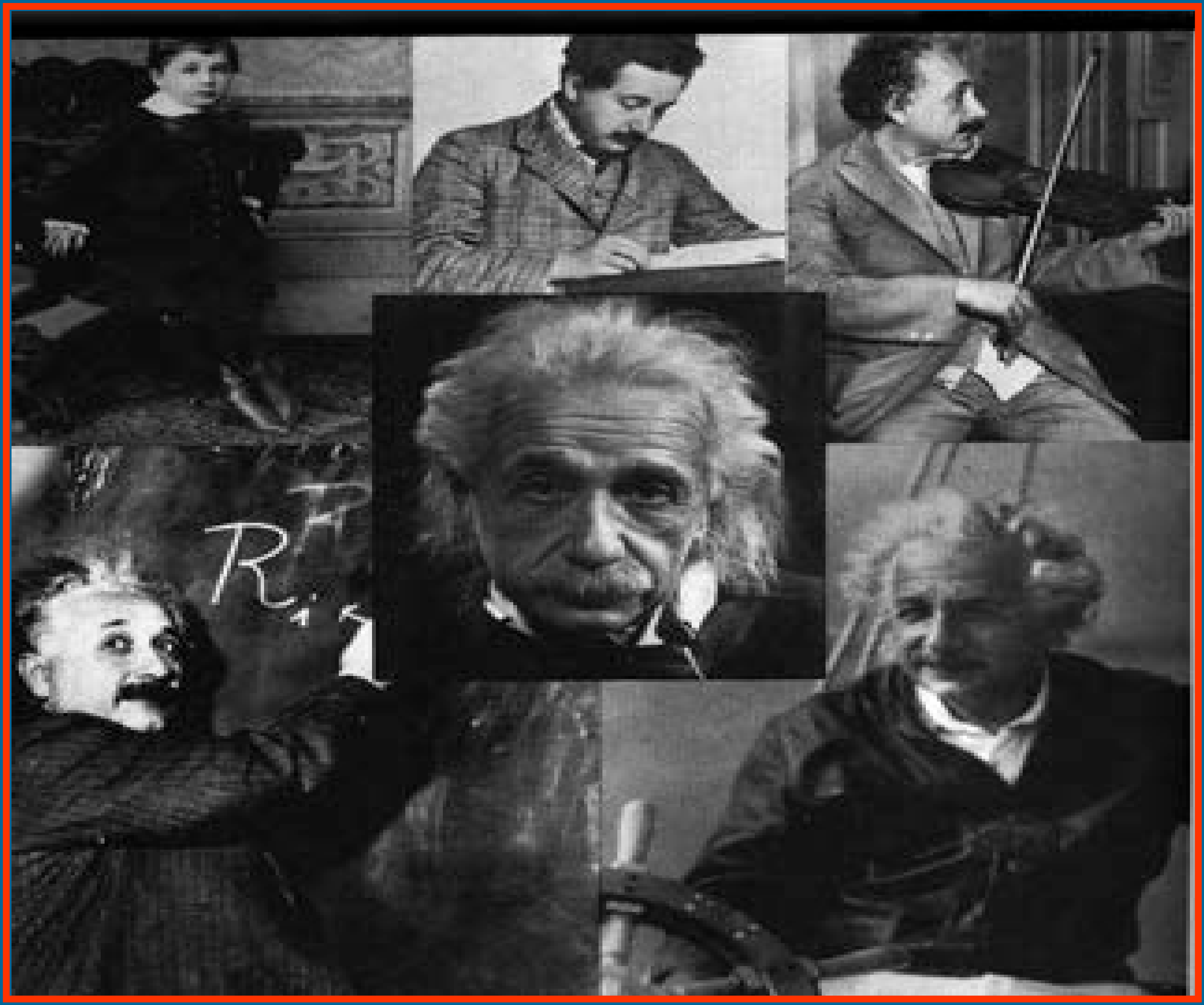
第十五章　狭义相对论



爱因斯坦　20世纪最伟大的物理学家，1879年3月14日出生于德国乌尔姆，1900年毕业于瑞士苏黎世联邦工业大学。1905年，爱因斯坦在科学史上创造了史无前例的奇迹。这一年的3月到9月半年中，利用业余时间发表了 6 篇论文，在物理学 3 个领域作出了具有划时代意义的贡献 — 创建了光量子理论、狭义相对论和分子运动论。

爱因斯坦在1915年到1917年的3年中，还在 3 个不同领域做出了历史性的杰出贡献 — 建成了广义相对论、辐射量子理论和现代科学的宇宙论。

爱因斯坦获得 1921 年的诺贝尔物理学奖

牛　顿　力　学
麦克斯韦电磁场理论
热力学与经典统计理论

19世纪后期，经典物理学的三大理论体系使经典物理学已趋于成熟。

两朵小乌云

- 迈克耳逊——莫雷“以太漂移”实验
- 黑体辐射实验

狭义相对论
量子力学

近代物理学的两大支柱，逐步建立了新的物理理论。

强调

- 近代物理不是对经典理论的补充，而是全新的理论。
- 近代物理不是对经典理论的简单否定。

§15.1 经典力学的相对性原理
伽利略变换

一. 绝对时空观

空间 反映物质运动的广延性，时间 则表征物质运动的持续性。和经典力学相应的时空观称为绝对时空观。

绝对时间
绝对空间 } 绝对的、数学的、与物质的存在和运动无关且空间与时间彼此独立、互不相关

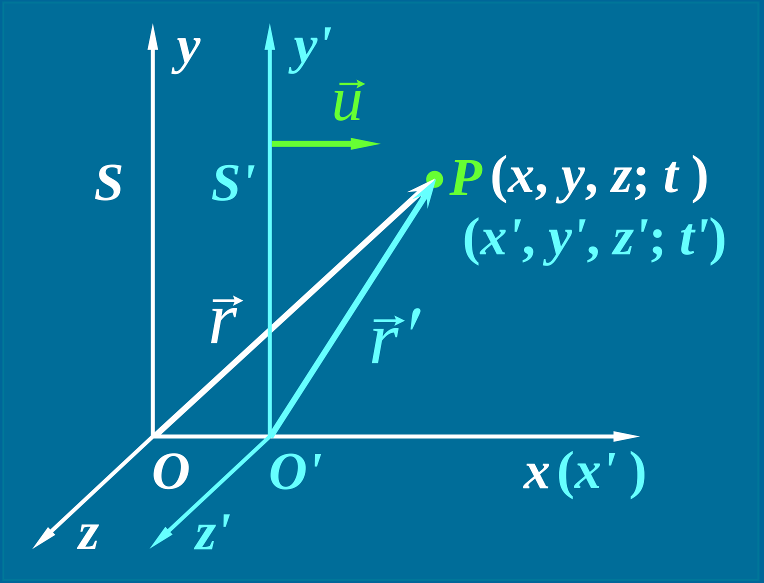
二. 经典力学的相对性原理

在所有惯性系中，物体运动所遵循的力学规律是相同的，具有相同的数学表达形式。或者说，对于描述力学现象的规律而言，所有惯性系是等价的。

三. 伽利略变换 在两个惯性系中描述同一物理事件

$o'x'y'z'$ 和$oxyz$ 分别与惯性系S'和S固结在一起，对应坐标轴相互平行，且x轴重合。S'相对于S 以恒定速度u 沿x轴正向运动。在起始时刻，S , S' 系重合， t 时刻，物体到达 P 点

S	S'
$x\ y\ z$	$x'\ y'\ z'$
t	t'



伽利略变换式

正变换	$x' = x - ut \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$
逆变换	$x = x' + ut' \quad y = y' \quad z = z' \quad t = t'$

伽利略变换式

正变换 $x' = x - ut \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$

逆变换 $x = x' + ut' \quad y = y' \quad z = z' \quad t = t'$

由定义 $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{v}' = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t'} \qquad \vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{a}' = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t'}$

并注意到 $t' = t$

分量式

$$\begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \qquad \begin{cases} a'_x = a_x - \mathrm{d}u/\mathrm{d}t \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} \xrightarrow{u\ \text{是恒量}} \begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases}$$

速度变换和加速度变换式为

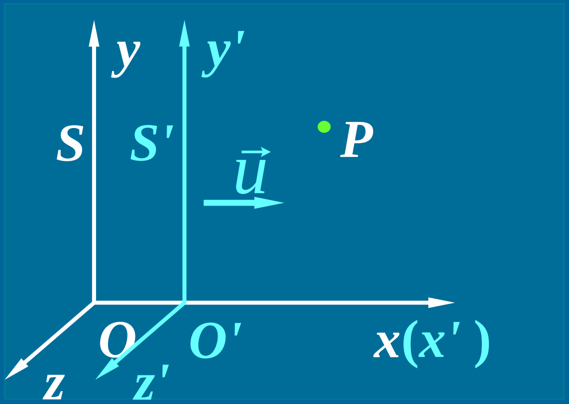
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \qquad \vec{a}' = \vec{a}$$

§ 15.2 狭义相对论的两个基本假设

一. 伽利略变换的困难

- Maxwell 电磁场方程组不服从伽利略变换

光是一种电磁波，由Maxwell方程组得到光在真空中传播的速度：



$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 2.998 \times 10^8 \ \mathrm{m/s}$$

c 是一个恒量

但由伽利略变换知：一光源固定在S 系中，在 S 系中观察沿各个方向的速度都是c，而在 S' 系中测得，沿 x' 轴正向的光速 $c-u$，沿 x' 负向的光速 $c+u$

- 迈克耳逊 – 莫雷实验的零结果

迈克耳逊 - 莫雷利用干涉仪装置设计出一个精巧的实验，实验结果却证明了在所有惯性系中，真空中光沿各个方向的传播速度都等于c

1905年，A. Einstein首次打破了绝对时空观念，提出了狭义相对论的两个基本假设，并在此基础上建立起狭义相对论。

二. 狭义相对论的两个基本假设

1. 光速不变原理

在所有的惯性系中，光在真空中的传播速率具有相同的值

$$\boxed{c = 299\,792\,458\ \mathrm{m/s}}$$

包括两个意思：

- 光速不随观察者的运动而变化
- 光速不随光源的运动而变化

2. 狭义相对论的相对性原理

一切物理规律在所有惯性系中具有相同的形式

所有惯性系都完全处于平等地位，没有任何理由选某一个参考系，把它置于特殊的地位。

讨论

(1) Einstein 相对性原理 是 Newton力学相对性原理的发展

(2) 光速不变原理与伽利略的速度合成定理针锋相对

(3) 时间和长度等的测量

- 在牛顿力学中，与参考系无关
- 在狭义相对论力学中，与参考系有关

爱因斯坦根据这两个基本假设建立了新的坐标变换关系

——洛伦兹变换

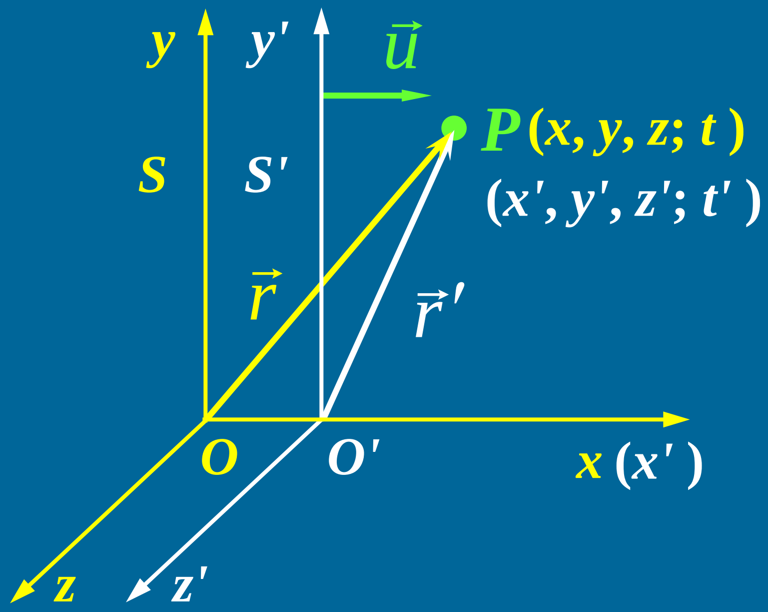
§ 15.4 洛伦兹变换

一. 洛伦兹变换

洛伦兹坐标变换式的推导

时空变换关系必须满足

- 两个基本假设
- 速率远小于真空中的光速，新时空变换能退化到伽利略变换



设某事件在S系的坐标为（x, y, z, t），S'系的坐标为（x', y', z', t'）

起始时坐标原点重合

y轴 // y'轴　　z轴 // z'轴

两参考系沿y z方向没有相对运动

$\therefore y' = y \qquad z' = z$

设
$$\begin{cases} x' = a_1 x + a_2 t & (1) \\ y' = y & (2) \\ z' = z & (3) \\ t' = b_1 x + b_2 t & (4) \end{cases}$$

设 $\begin{cases} x' = a_1 x + a_2 t & (1) \\ y' = y & (2) \\ z' = z & (3) \\ t' = b_1 x + b_2 t & (4) \end{cases}$

S'系坐标原点o'，在S'系中$x' \equiv 0$，在S系中t时刻$x = ut$

代入(1)式，得：$a_2 = -a_1 u$

$$\therefore x' = a_1(x - ut) \qquad (5)$$

根据光速不变原理，t 时刻，对惯性系 S 有

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

对惯性系 S' 有 $\quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 \qquad (6)$$

(1)(2)(3)(4)(5)(6)连立
$$\begin{cases} a_1^2 - c^2 b_1^2 = 1 \\ u a_1^2 + c^2 b_1 b_2 = 0 \\ u^2 a_1^2 - c^2 b_2^2 = -c^2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad a_1 = b_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \overset{令 u/c=\beta}{=\!=\!=} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$b_1 = \frac{-u}{c^2\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{-u}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\boxed{\begin{cases} x' = \dfrac{x-ut}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t-(u/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}}$$

$$\boxed{其逆变换为 \begin{cases} x = \dfrac{x'+ut'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t'+(u/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}}$$

讨论 关于洛仑兹变换应注意以下几点：

(1)洛仑兹变换是同一个事件在两个惯性系中的时空坐标之间的关系。

(2) 空间测量与时间测量相互影响，相互制约。

	S	S'
事 件 1	(x_1, y_1, z_1, t_1)	(x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)
事 件 2	(x_2, y_2, z_2, t_2)	(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2)
空间间隔	$\Delta x = x_2 - x_1$ $\Delta y = y_2 - y_1$ $\Delta z = z_2 - z_1$	$\Delta x' = x'_2 - x'_1$ $\Delta y' = y'_2 - y'_1$ $\Delta z' = z'_2 - z'_1$
时间间隔	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta t' = t'_2 - t'_1$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Delta y' = \Delta y \quad \Delta z' = \Delta z \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - u\Delta x / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

逆变换式

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + u\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Delta y = \Delta y' \quad \Delta z = \Delta z' \quad \Delta t = \frac{\Delta t' + u\Delta x'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(3) 当 $u << c$ 洛伦兹变换简化为伽利略变换式

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad x' = x - ut$$

$$t' = \frac{t-(u/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow \quad t' = t$$

(4) 由于事件的时空坐标不能为虚数，由洛仑兹变换可以看出，两个惯性系之间的相对运动速度不能大于真空中的光速，即真空中的光速 c 是各种物体运动的极限速度

$u > c \quad \sqrt{1-u^2/c^2}$ 为虚数（洛伦兹变换失去意义）

例　地面观察者测得地面上A、B 两地相距 $8.0\times10^{6}m$ ，一列火车从A匀速运动到B，历时2.0S，有一飞船相对地面以$0.6c$得速度飞行，飞行方向沿AB方向。求飞船中的观察者测得列车由A 到B 运行的路程、时间 和速度。

解：取地面为S 系，飞船为S' 系。AB方向为 x 轴和 x' 轴正方向，　$u=0.6c$

设“列车从A出发”为事件1，

“列车到达B”为事件2，

在S系中

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 8.0\times10^{6}m，\quad \Delta t = t_2 - t_1 = 2.0s$$

列车运行速度：$\upsilon = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{8.0\times10^{6}}{2.0} = 4.0\times10^{6}m/s$

飞船在参照系S'中，两个事件的空间间隔和时间间隔

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{8.0\times10^6 - 0.6\times3\times10^8\times2.0}{\sqrt{1-0.6^2}} = -4.40\times10^8 m$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \left(u/c^2\right)\Delta x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{2.0-0.6\times8.0\times10^6/(3\times10^8)}{\sqrt{1-0.6^2}} = 2.48s$$

$\Delta x'$和$\Delta t'$就是飞船中观察者测得的列车的位移和运行时间

列车的速度为：

$$\upsilon' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{-4.40\times10^8}{2.48} = -1.774\times10^8 m/s \approx -0.59c$$

$\Delta x' < 0$和$\upsilon' < 0$，表明在飞船中观测，列车是沿x'轴负向由A向B运动的，经历的路程为$4.40\times10^8 m$，时间为$2.48s$，速率为$0.59c$。

§ 15.5 狭义相对论的速度变换定理

由洛仑兹坐标变换

$$\mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - u\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \qquad \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z \qquad \mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t - \frac{u}{c^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

定义 $\upsilon_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t \qquad \upsilon_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t \qquad \upsilon_z = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$

$\upsilon'_x = \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t' \qquad \upsilon'_y = \mathrm{d}y'/\mathrm{d}t' \qquad \upsilon'_z = \mathrm{d}z'/\mathrm{d}t'$

得 $$\upsilon'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x - u\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - \frac{u}{c^2}\mathrm{d}x} = \frac{\upsilon_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x}$$

$$\upsilon'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y\sqrt{1-\beta^2}}{\mathrm{d}t - \frac{u}{c^2}\mathrm{d}x} = \frac{\upsilon_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x} \qquad \upsilon'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}z\sqrt{1-\beta^2}}{\mathrm{d}t - \frac{u}{c^2}\mathrm{d}x} = \frac{\upsilon_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x}$$

$$v'_x=\frac{v_x-u}{1-\frac{u}{c^2}v_x}\qquad v'_y=\frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{u}{c^2}v_x}\qquad v'_z=\frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{u}{c^2}v_x}$$

同理写出速度的逆变换式

$$v_x=\frac{v'_x+u}{1+\frac{u}{c^2}v_x'}\qquad v_y=\frac{v_y'\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+\frac{u}{c^2}v_x'}\qquad v_z=\frac{v_z'\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+\frac{u}{c^2}v_x'}$$

可证明

在低速条件下狭义相对论速度变换退化为伽利略变换。

例 飞船 A , B 相对于地面分别以 $0.6c$ 和 $0.8c$ 的速度相向而行。

求 (1) 飞船 A 上测得地球的速度；

(2) 飞船 A 上测得飞船 B 的速度；

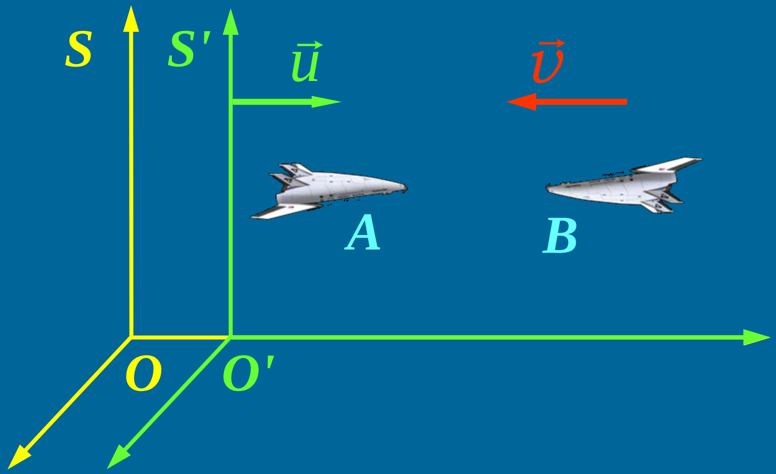
(3) 地面上测得飞船 A 和飞船 B 的相对速度。

解 设地面为 S 系，飞船 A 为 S' 系

(1) 根据运动的相对性，飞船 A 上测得地球的速度为: $-0.6c$

(2) S' 系相对与 S 系的速度为 $u = 0.6c$. 依题意飞船 B 在 S 系中的速度 $\upsilon_x = -0.8c$，

由洛仑兹速度变换，S' 系(飞船 A)测得飞船 B 的速度为



$$\upsilon_x' = \frac{\upsilon_x - u}{1 - \upsilon_x u / c^2}$$

$$= \frac{-0.8c - 0.6c}{1 + 0.8 \times 0.6c / c^2} = -0.94c$$

(3) 地面上测得飞船 A 和飞船 B 的相对速度为

$$0.6c + 0.8c = 1.4c$$

- 在相对论中，物质的运动速度不会超过真空中的光速 c，是指某观察者看到的所有物体相对于它的速度不会超过 c. 在地面上观测飞船 A 和飞船 B 的相对速度是地面看到的其它两物体的相对速度，它不是某一物体对地面的速度，因此不受极限速度的限制。

总结

1. 洛仑兹变换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - (u/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

其逆变换为
$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + ut'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + (u/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

2. 空间测量与时间测量相互影响，相互制约

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Delta y' = \Delta y \quad \Delta z' = \Delta z \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - u\Delta x / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + u\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Delta y = \Delta y' \quad \Delta z = \Delta z' \quad \Delta t = \frac{\Delta t' + u\Delta x' / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

3. 速度变换定理

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x} \qquad \upsilon'_y = \frac{\upsilon_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x} \qquad \upsilon'_z = \frac{\upsilon_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}\upsilon_x}$$

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2}\upsilon'_x} \qquad \upsilon_y = \frac{\upsilon'_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + \frac{u}{c^2}\upsilon'_x} \qquad \upsilon_z = \frac{\upsilon'_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + \frac{u}{c^2}\upsilon'_x}$$