西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

第7章 参数估计

7.3 区间估计

区间估计步骤：

1）找出一个待估参数θ的良好的点估计 θ（多数是通过最大似然估计）。

2）构造一个 $\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$ 与θ的函数 $W\left(\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n),\theta\right)$ 其分布与θ无关，不含未知参数。

W称为枢轴量。

可见枢轴量的三个特点：①包含样本；②包含待估参数；
③分布与θ无关，不含未知参数。

（其实就是构造一个已知分布的统计量，使之包含θ 和 θ）

3）根据置信水平，利用 $P(a \le W \le b) = 1-\alpha$ 再由分布函数的上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位点求得

置信区间，这样的估计方法叫做枢轴变量法。

四、两样本正态总体方差比的区间估计

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^{\ 2}) \qquad (X_1, \ldots, X_{n_1})$

$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^{\ 2}) \qquad (Y_1, \ldots, Y_{n_2})$

$\mu_1 \ \ \mu_2$ 未知

$\hat{\sigma}_1^{\ 2} = S_1^2 \qquad \hat{\sigma}_2^{\ 2} = S_2^2$ 两者独立

$$\frac{\hat{\sigma}_1^{\ 2}}{\hat{\sigma}_2^{\ 2}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \qquad \frac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}} \in \left(a\frac{S_1^2}{S_2^2}, b\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) \qquad 0 < a < 1 < b$$

$$P\left\{\frac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}} \in \left(a\frac{S_1^2}{S_2^2}, b\frac{S_1^2}{S_2^2}\right)\right\} = 1-\alpha \rightarrow P\left\{a\frac{S_1^2}{S_2^2} \le \frac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}} \le b\frac{S_1^2}{S_2^2}\right\} = P\left\{\frac{1}{b} \le \boxed{\frac{S_1^2/\sigma_1^{\ 2}}{S_2^2/\sigma_2^{\ 2}}} \le \frac{1}{a}\right\} = 1-\alpha$$

$\sim F(n_1-1, n_2-1)$

$$\rightarrow a = \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)}, b = \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)} \qquad \therefore b = F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)$$

$\dfrac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}}$ 的置信水平为1-α的置信区间为：

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)\right)$$

大样本情况 $(n\to\infty)$ ：

随n增加，$t_\alpha(n)$单调减少。

σ^2未知 $d=\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

当n>45时，无表可查 $n\to\infty$ t分布 → N分布

$$d\sim\frac{S}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

例： 事件A在每次试验中发生的概率为p,n次独立实验，事件A发生的次数为n_A，求p的1-α置信区间。

1） $\hat{p}=\dfrac{n_A}{n}$ $\quad n_A \sim B(n,p)$ $\quad E(\hat{p})=E(\dfrac{n_A}{n})=\dfrac{np}{n}=p$

$\therefore \dfrac{n_A}{n}$ 是p的无偏估计

2） $\hat{p}$ 标准化后近似服从N(0,1) $\quad D(\hat{p})=\dfrac{p(1-p)}{n}$ $\quad D(n_A)=np(1-p)$

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$ 枢轴量

3） $P\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le \dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha \quad \Rightarrow p\in(\hat{p}\pm\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}})$

区间内有p如何处理？

法1 用$\hat{p}$ 代替p： $\left(\hat{p}\pm\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

法2 解一元二次不等式

五、单侧置信区间

只关心μ的上界$\overline{X}+d$ 或下界 $\overline{X}-d$

$P(\mu<\overline{X}+d)=1-\alpha$　　单侧置信上限

$$\Rightarrow P(\overline{X}-\mu>-d)=1-\alpha$$

$$P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>-\frac{d}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<-\frac{d}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=\alpha$$

由于N(0,1)对称 $\Rightarrow P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{d}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=\alpha$

$$\Rightarrow d=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_\alpha$$

则单侧置信区间 $\left(-\infty,\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_\alpha\right)$

同理：$P(\mu>\overline{X}-d)=1-\alpha\Rightarrow d=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_\alpha$

单侧置信下限为：$\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_\alpha$　置信区间 $\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_\alpha,+\infty\right)$

若 σ^2未知 $\sigma\to S$　$Z_\alpha\to t_\alpha(n-1)$

例1： 设一批零件内径服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ ，μ,σ^2 均未知，抽取16个配件，平均内径 $\bar{x}=3.05mm$ 样本标准差S=0.4mm。

则 μ 的置信水平为0.90的置信区间为（ 2.875, 3.255 ）

σ^2 的置信水平为0.90的置信区间为（ 0.096, 0.331 ）

$t_{0.05}(15)=1.7531, \chi^2_{0.05}(15)=24.996, \chi^2_{0.95}(15)=7.261$

例2： 总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ ，σ^2 已知，$(X_1,\dots,X_n)$为来自总体X的一个样本，若样本容量n不变，则当μ的置信区间长度L变长时，置信度1-α（ A ）。

A、变大　　B、变小　　C、不变　　D、不能确定

西安電子科技大學
XIDIAN UNIVERSITY

第8章　假设检验

8.1 问题的提出及几个基本概念

检验：

参数检验：总体分布已知，里面若干参数未知，检验参数是否为原先设定的数。
非参数检验：总体分布未知，检验其中参数。

假设检验的基本概念

H_0 表示一个假设　　　原假设或零假设

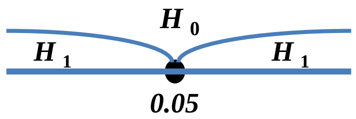
特点：①原来就有的假设；
②经过长期实践认为是正确的。

例如：次品率：H_0：$p=0.05$　　H_0：$p\le 0.06$　　H_0：$p\ge 0.05$

假设检验就是通过样本来回答 H_0 是正确还是错误。

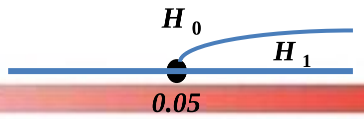
把事先规定好的假设称为对立假设（备择假设）设为 H_1

H_0：$p=0.05$　　H_1：$p\neq 0.05$



双侧检验

H_1：$p>0.05$



单侧检验

例： 某饮料厂自动流水线上灌装饮料。正常生产情况下，每瓶饮料的容量 $X \sim N(500,10^2)$，有人觉得每瓶容量变化，流水线运行不正常，抽取9瓶，测得平均值 $\bar{x}=492$，问此断言是否正确？

$$H_0: \mu = 500, \qquad H_1: \mu \neq 500$$

要根据样本判断是H_0成立还是H_1成立。

接受H_0　　拒绝H_0

如何检验上述假设？　要给定一个接受或拒绝原假设的准则。

从总体中抽取一个样本 $X_1,\ldots,X_n$，用最大似然估计 $\overline{X}$ 估计μ（无偏估计）。

$\overline{X}$ 与μ_0的偏差 $\left|\overline{X}-\mu_0\right|$ 不应太大，若太大，则不利于H_0，应拒绝H_0。

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

衡量 $\left|\overline{X}-\mu_0\right|$ 的大小归结到衡量 $\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|$ 的大小。

令： $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 检验统计量

可以事先确定一个常数 τ ，称为临界点，当$|T|$的取值大于该临界点时拒绝H_0。

即：样本满足 $W=\{|T|\geq\tau\}$时拒绝H_0，否则接受。称W为拒绝域。

一个拒绝域对应一个检验方法，问题是τ应取多大？

有可能遇到两类错误:

	实际情况	
决策	H_0成立	H_1成立
接受H_0	不犯错	第II类错误（存伪）
拒绝H_0	第I类错误（弃真）	不犯错

在控制第I类错误的基础上，尽量少犯第II类错误。

显著性水平

取一个小常数α，$P_{H_0}\{|T|\geq\tau\}\leq\alpha$将犯第I类错误的可能性（概率）控制在一定限度内。

显著性水平不是唯一的，如果α是一个显著性水平，则任意大于α的数都是显著性水平。

通常采用显著性水平最小的那一个。

这种只对犯第I类错误的概率加以控制，不考虑第II类错误的概率检验，称为显著性检验。

什么作为原假设，什么作为对立假设？ **H_0和H_1的地位是不平等的**

①站在保护原假设的立场上。

原假设是经过长期实践，除非有足够的证据才放弃原假设，因此在没有充分证据下，认为原假设是正确的。

②接受H_0不能说明H_0一定正确，只能说明到目前为止没有足够的证据说明H_0不对，所以接受原假设（假设检验的精髓）。

拒绝H_0意味着有充分证据说明H_0不对，而接受H_0只是含糊的概念。

假设检验的原则：

1）把久经考验的放在H_0，将受保护的对家置为原假设。

2）把你需要的结论放在H_1。

一个完整的假设检验：

① $H_0: \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta \neq \theta_0$ 双边检验

② $H_0: \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta > \theta_0$

③ $H_0: \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta < \theta_0$

④ $H_0: \theta \leq \theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta > \theta_0$

⑤ $H_0: \theta \geq \theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta < \theta_0$

右边检验（侧）

左边检验（侧）

单边检验

假设检验的一般步骤 （显著性水平为α）

例： 某饮料厂自动流水线上灌装饮料。正常生产情况下，每瓶饮料的容量 $X \sim N(500, 10^2)$，有人觉得每瓶容量变化，流水线运行不正常，抽取9瓶，测得平均值 $\bar{x} = 492$，问此断言是否正确？

能否在显著性水平0.05下认为饮料 的平均容量变化？

第一步：根据实际问题提出，判断双边单边；

$$H_0: \ \mu = \mu_0 = 500 \qquad H_1: \ \mu \neq \mu_0$$

第二步：求出未知参数θ的一个较优的点估计 $\hat{\theta}$：　$\hat{\mu} = \overline{X}$

（思想：一个好的点估计应该满足一个优良检验的主要依据）

第三步：寻找一个检验统计量$T(X_1 \ldots X_n)$，使得当 $\theta = \theta_0$时T的分布已知，从而容易得到这个分布的分位数作为检验的临界值。

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

假设检验的一般步骤

第四步：以检验统计量T为基准，根据对立假设的实际意义，寻找检验拒绝域。

$$P\left\{\left|T\right| \geq \tau \mid H_0\right\} = \alpha$$

即：$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq \tau\right\} = \alpha \qquad \Rightarrow \tau = Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

∴检验的拒绝域为：$$\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

第五步：取样（通过样本观测值）计算检验统计量的样本值，如落在拒绝域中则拒绝原假设，否则接受H_0。

$$\alpha = 0.05,\quad Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96,\quad n=9,\quad \overline{x} = 492,\quad \sigma = 10$$

$$\left|T\right| = 2.4 > 1.96$$

即样本落在拒绝域内，从而可在显著性水平0.05下拒绝原假设，认为饮料的平均容量变化。

例：对θ进行假设检验，若在显著性水平α=0.05接受原假设“H_0： $\mu=\mu_0$”，则在显著性水平α=0.025下（*C*）。

A. 拒绝H_0

*B.*接受H_0且接受域相同

*C.*接受H_0但接受域不同

*D.*可能接受H_0可能拒绝H_0

8.2 正态总体均值和方差的假设检验

假设检验的一般步骤 （显著性水平为α）

第一步：根据实际问题提出，判断双边单边；

第二步：求出未知参数θ的一个较优的点估计 $\hat{\theta}$：

第三步：寻找一个检验统计量$T(X_1 \ldots X_n)$，使得当 $\theta=\theta_0$时T的分布已知，从而容易得到这个分布的分位数作为检验的临界值。

第四步：以检验统计量T为基准，根据对立假设的实际意义，寻找检验拒绝域。

第五步：取样（通过样本观测值）计算检验统计量的样本值，如落在拒绝域中则拒绝原假设，否则接受H_0。

一、单样本正态总体均值和方差的检验

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 样本 $(X_1 \dots X_n)$ 显著性水平α

1）σ^2已知时，μ的检验

i. 双边 $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$

ii. $\hat{\mu} = \overline{X}$

iii. $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

iv. $|T|$要小，当$|T|$较大时不利于原假设。

∴拒绝域形式为 $\{|T| > \tau\}$

$P\{|T| > \tau\} = \alpha \Rightarrow \tau = Z_{\frac{\alpha}{2}}$

拒绝域为：$\left\{|T| \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$

即当观测值$(x_1 \dots x_n)$满足：

$$\left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right| \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}$$ 时拒绝H_0

单边 $H_0: \mu \leq \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$

右边检验

若H_1真，$\overline{x}$偏大，T偏大。

∴拒绝域形式 $\{T > \tau\}$

$P\{T > \tau\} = \alpha \quad \rightarrow \{T > Z_\alpha\}$

左边检验 $H_0: \mu \geq \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$

$\overline{x}$小时有利于H_1，T偏小，拒H_1。

∴拒绝域形式 $\{T < \tau\}$

$P\{T < \tau\} = \alpha \rightarrow \{T < -Z_\alpha\}$

以上三个检验 称为Z检验。

一、单样本正态总体均值和方差的检验

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$　　样本（$X_1 \dots X_n$）　　显著性水平α

1）σ^2已知时，μ的检验

i. 双边　$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$

ii. $\hat{\mu} = \overline{X}$

iii. $T = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

iv. $|T|$要小，当$|T|$较大时不利于原假设。

∴拒绝域形式为 $\{|T| > \tau\}$

$$P\{|T| > \tau\} = \alpha \Rightarrow \tau = Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

拒绝域为：$\left\{|T| \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$

即当观测值$(x_1 \dots x_n)$满足：

$$\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}$$ 时拒绝H_0

2）σ^2未知时，μ的检验

i. 双边　$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$

ii. $\hat{\mu} = \overline{X}$

iii：$T = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

iv：拒绝域为：

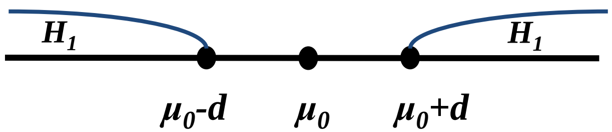
$$\left\{|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$$

小结：单正态总体均值的检验准则：

双边

$|\overline{X}-\mu_0| \ge d$ 拒绝 H_0

$|\overline{X}-\mu_0| < d$ 接受 H_0

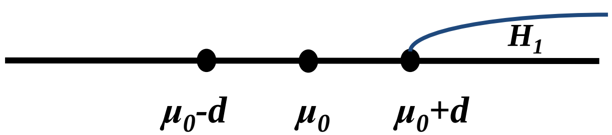


$$d=\begin{cases} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}} & \sigma^2\text{已知} \\ \dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) & \sigma^2\text{未知} \\ \dfrac{S}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}} & n\text{很大（}n>50\text{）} \end{cases}$$

单边（右边）

$|\overline{X}-\mu_0| \ge d$ 拒绝 H_0

$|\overline{X}-\mu_0| < d$ 接受 H_0



$$d=\begin{cases} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha} & \sigma^2\text{已知} \\ \dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1) & \sigma^2\text{未知} \\ \dfrac{S}{\sqrt{n}}Z_{\alpha} & n\text{很大（}n>50\text{）} \end{cases}$$

左边同理

西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY

例： 钓鱼绳，说明书上自然强度超过15kg/cm³，取10根，平均14.62kg/cm³，S= 0.5kg/cm³,以α=0.05， α=0.01检验产品是否与说明书相符。

解： $H_0: \mu \geq 15 \leftrightarrow H_1: \mu < 15$ 单边

检验统计量 $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 拒绝域为： $\{T < -t_\alpha(9)\}$

α=0.05 $\dfrac{14.62\text{-}15}{0.5/\sqrt{10}} = \dfrac{-0.38}{0.5/\sqrt{10}} = -2.4 < -1.8331$ 拒绝H_0

α=0.01 $\dfrac{14.62\text{-}15}{0.5/\sqrt{10}} = \dfrac{-0.38}{0.5/\sqrt{10}} = -2.4 > -2.8214$ 接受H_0