2.4 随机变量函数的分布

设 X 是随机变量，其概率密度为 $f_X(x)$，如果 $Y=g(X)$仍是随机变量，那么怎样确定 Y 的概率密度呢?

定义： 设 X 是随机变量， $y=g(x)$为已知的连续函数，则称 $Y=g(X)$为随机变量 X的函数，简称随机变量函数。

显然，随机变量函数仍是随机变量。

例 例如，若要测量一个圆的面积，总是测量其半径，半径的测量值可看作随机变量X，若已知X分布，则Y服从什么分布？

已知X具有分布如表格，且设$Y=X^2$, 求Y的分布。

X	-1	0	1
P	0.2	0.5	0.3

解 Y的所有可能取值为0, 1

$$P(Y=0)=P(X=0)=0.5$$

$$P(Y=1)=P\{(X=1)\cup(X=-1)\}=P(X=1)+P(X=-1)=0.5$$

即找出：$\{Y=0\}$ 的等价事件$\{X=0\}$；$\{Y=1\}$的等价事件$\{X=1\}$ 或$\{X=-1\}$

例 离散型随机变量X的分布律为：

X	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$

$Y=X^2$

Y	0	1	4
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

连续型随机变量函数的分布：

一、g(x)为单调函数：

定理： 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$， $y=g(x)$严格单调可微，则 Y 的概率密度为：

$$f_Y(y)=\begin{cases} f[h(y)]\left|h'(y)\right|, & y\in I \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中： $x=h(y)$是 $y=g(x)$的反函数；I 是使得 $f_X(h(y))>0$， $h(y)$和 $h'(y)$有意义的 y的集合。

证明： 设Y的分布函数为 $F_Y(y)$，则：

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(\mathrm{X})\le y)$$

若g(.)为单调递增，上式 $=P(\mathrm{X}\le g^{-1}(y))=P(X\le h(y))=F_X(h(y))$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=F_X[h(y)]'\cdot h'(y)=f_X[h(y)]\cdot h'(y)$$

若g(.)为单调递减，导数小于零，而概率密度肯定为正值，

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=F_X[h(y)]'\cdot h'(y)=f_X[h(y)]\cdot\left|h'(y)\right|$$

例1：设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求$Y = aX + b\ (a \neq 0)$的分布。

解： 随机变量X的概率密度为：$f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty < x < \infty$

$$y = g(x) = ax + b \Rightarrow x = h(y) = \frac{y-b}{a}，\quad h'(y) = \frac{1}{a}$$

∴ Y的概率密度为：

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)，\quad -\infty < y < +\infty$$

即：

$$f_y(y) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\therefore \quad Y = aX + b \sim N\left(a\mu + b, (a\sigma)^2\right)$$

如果 $g(x)$ 不是单调函数，该如何处理？

XIDIAN UNIVERSITY

二、g(x)是无单调性的函数：

定理给出的公式(称为公式法)只适合于 $y=g(x)$为严格单调可微的情况。

当 $y=g(x)$非严格单调可微时，可以先求出 Y 的分布函数 $F_Y(y)$，然后对 $F_Y(y)$求导，得到 Y 的概率密度 $f_Y(y)$。

例：设 X 具有概率密度 $f_X(x)$，求 $Y=X^2$ 的概率密度。

设 Y 和 X 的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(x)$

当 $y>0$ 时,

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

当 $y\le 0$ 时,

$$F_Y(y)=0$$ 因为 $Y=X^2\ge 0$

求导可得:

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}-f_X(-\sqrt{y})\frac{1}{-2\sqrt{y}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right], & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

一般性：

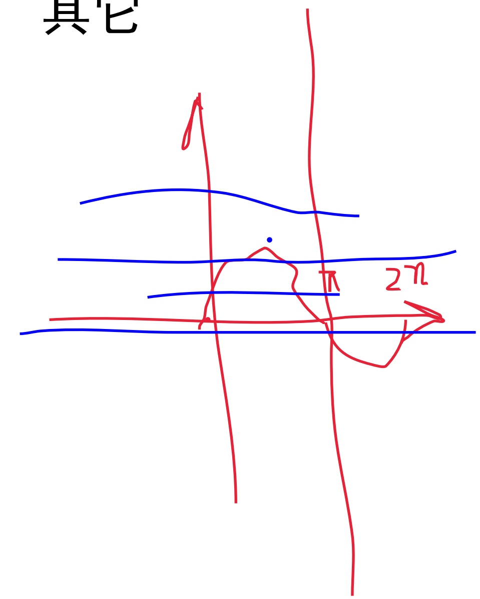
$Y=g(X)$，$X\sim f_X(x)$，$g(\cdot)$ **是无单调性的函数，求** $F_Y(y)$ 、 $f_Y(y)$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)$$

$$=\int_{g(x)\le y} f(x)dx$$

例2：设随机变量X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2} & \underline{0<x<\pi} \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

求 $Y=\sin X$ 的密度函数。



解： $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sin X\le y)=\displaystyle\int_{\sin x\le y} f(x)dx$

$$=\int_{\sin x\le y}\frac{2x}{\pi^2}I_{(0,\pi)}(x)dx=\int_{\substack{\sin x\le y\\ 0<x<\pi}}\frac{2x}{\pi^2}dx$$

当 $y<0$ 或 $y>1$时, $\boxed{f_Y(y)=0}$

当 $0<y<1$ 时,

$$F_Y(y)=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx$$

$$=\frac{1}{\pi^2}x^2\Big|_0^{\arcsin y}+\frac{1}{\pi^2}x^2\Big|_{\pi-\arcsin y}^{\pi}$$

得： $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

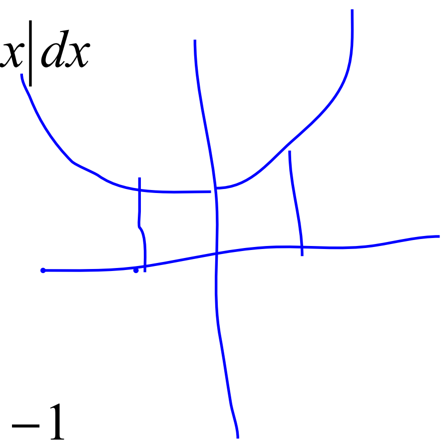
$$=\frac{1}{\pi^2}[(\arcsin y)^2+\pi^2-(\pi-\arcsin y)^2]$$

求密度函数，先求分布函数，根据g(x)的形式决定积分区域，再积分

例3： 设随机变量X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}|x| & -1<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，$Y=X^2+1$

求 $f_Y(y)$。

解： $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2+1\le y)=\displaystyle\int_{x^2+1\le y} f(x)dx=\int_{\substack{x^2+1\le y\\ -1<x<1}}|x|dx$



当 $y>2$ 或 $y<1$时，　$f_Y(y)=0$

当$1\le y\le 2$ 时，原式 $=\displaystyle\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}}|x|\,dx=2\int_0^{\sqrt{y-1}}x\,dx=y-1$

$f_Y(y)=F_Y'(y)=1$

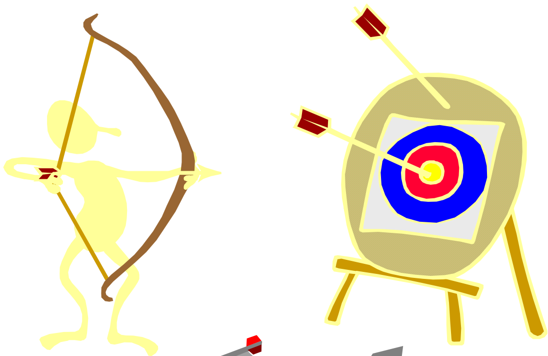
故Y的概率密度为：$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 1\le y\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

第三章 多维随机变量及其分布

3.1 随机向量及其分布

到现在为止，我们只讨论了一维随机变量及其分布，但有些随机现象用一个随机变量来描述还不够，而需要用几个随机变量来描述。



如： 测量身高体重（H,W）、判断健康情况

在打靶时, 命中点的位置是由一对*r . v*（两个坐标）来确定的。

检测钢的成分（含C、S、P的量）

飞机的重心在空中的位置是由三个r . v（三个坐标）来确定的等等。

3.1 随机向量及其分布

定义： 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为同一样本空间 Ω 的随机变量，则称 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为随机向量，n为维数。

研究方法：以二维随机变量为主，兼顾n维。

随机向量的分布

1. 二维离散型随机变量

定义： (二维离散型随机变量的联合分布律) 设(X， Y)是二维离散型随机变量，(X,Y) 可能的取值为 (x_i,y_j) ，则称

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

为(X， Y)的联合分布律，或随机变量 X 和 Y 的联合分布律。

也可用表格来表示随机变量X和Y的联合分布律。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$

二维离散型随机变量(X,Y)的分布律具有性质：

$$\begin{cases} p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \cdots \\ \sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \end{cases}$$

例1：袋中有3个白球，4个黑球，无放回地从中摸两次，记：

$$X=\begin{cases}1 & \text{第一次摸出白球}\\ 0 & \text{第一次摸出黑球}\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1 & \text{第二次摸出白球}\\ 0 & \text{第二次摸出黑球}\end{cases}$$

求（X,Y）的分布律。

解：

$$P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0|X=0)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$$

$$P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1|X=0)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$$

$$P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0|X=1)=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{7}$$

$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1|X=1)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$$

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

对于二维离散型随机变量，如何求联合分布律?

第一步：确定（X,Y）所有可能值;

第二步：求 p_{ij}

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j|X=x_i)$$

若X、Y相互独立 $p_{ij}=P(X=x_i)P(Y=y_j)$

$$P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1\,|X=0)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$$

第三步：验证所有概率之和是否为1

$$\sum p_{ij}=1$$

2. 二维联合分布函数

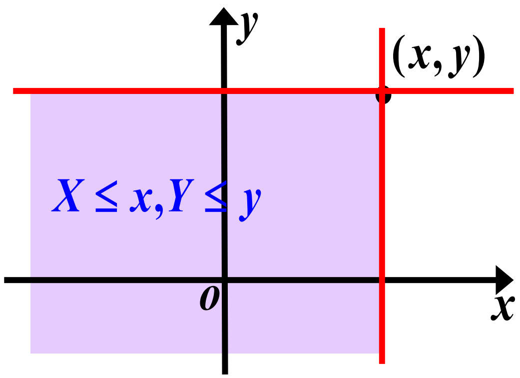
定义： 设 （X,Y）是二维随机变量,称二元函数

$$F(x,y)=P\{X\le x,\ Y\le y\},\ x,\ y\in \mathrm{R}$$

为二维随机变量(X,Y)的分布函数，或称为随机变量X和Y的联合分布函数。

二维随机变量联合分布函数的意义：

将(X,Y)看成是平面上随机点的坐标，则分布函数$F(x,y)$在点(x,y)处的函数值是随机点(X,Y)落在以(x,y)为顶点的左下方的无穷矩形区域内的概率。



性质1： 对于一个固定的变量 x 或者 y，$F(x, y)$是关于另一个变量y或者x的单调不减函数。即：对任意固定的y，当 $x_1 < x_2$时 $F(x_1, y) \le F(x_2, y)$

对任意固定的x，当 $y_1 < y_2$时 $F(x, y_1) \le F(x, y_2)$

性质2： $0 \le F(x, y) \le 1$， x，$y \in$ R，且：

对任意固定的 $y \in R$, $F(-\infty, y) = 0$,

对任意固定的 $x \in R$, $F(x, -\infty) = 0$,

$F(-\infty, -\infty) = 0$ ， $F(+\infty, +\infty) = 1$ 。

只要x，y中有一个趋于 -∞，即为 0； x，y 都要趋于 +∞ 才是 1。

性质3： $P(a < X \le b, c < Y \le d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$

性质4： $F(x,y)$ 分别关于 x，y 右连续，即：

对于任意固定的 y， $F(x, y)$关于 x 右连续，$F(x+0, y)=F(x, y)$

对于任意固定的 x， $F(x, y)$关于 y 右连续，$F(x, y+0)=F(x, y)$

对于二维离散型随机变量，已知联合分布律 p_{ij} ，如何求联合分布函数?

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij}$$

过点 (x_i,y_j) 作平行于x，y轴的直线，将平面分成若干区域，

将每个区域及左、下边区域内所有 $p_{ij}\neq 0$ 的点相加。

例：

$X \backslash Y$	0	1
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{3}$	0
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{2}{3}$

3、连续型随机向量的概率密度函数

二维连续型随机向量的定义

设(X, Y)是二维随机变量，其联合分布函数为$F(x, y)$， 如果存在非负可积函数$f(x, y)$，使得：

$$F(x, y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)dudv, \quad x, y \in R$$

则称(X, Y)为二维连续型随机变量，称$f(x, y)$为(X, Y)的联合概率密度函数，简称联合概率密度。

二维连续型随机向量联合概率密度的性质

性质 1　$f(x,y)\ge 0$ （ x , y ∈ R)，直接由定义可得。

性质 2　$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dudv = 1$ ，由$F(+\infty,+\infty)=1$及定义立得。

性质 3　$P\{(X,Y)\in(-\infty,x]\times(-\infty,y]\} = F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$

$$\boxed{P((X,Y)\in G) = \iint_G f(x,y)dxdy}$$

性质 4　在 $f(x,y)$ 的连续点上，$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x} = f(x,y)$

例 1 已知二维连续型随机变量(X, Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

，求(X, Y)的联合分布函数。

解： 当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，$F(x,y)=0$ ，当 $x\ge 1$, $y\ge 1$ 时，$F(x,y)=1$

当 $0\le x<1,\ y\ge 1$ 时，$F(x,y)=\int_0^x\int_0^1 f(u,v)dudv=\int_0^x\int_0^1 4uvdudv=x^2$

当 $x\ge 1, 0\le y<1$ 时，$F(x,y)=\int_0^1\int_0^y f(u,v)dudv=\int_0^1\int_0^y 4uvdudv=y^2$

当 $0\le x<1$, $0\le y<1$ 时，$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y f(u,v)dudv=\int_0^x\int_0^y 4uvdudv=x^2y^2$

即(X, Y)的联合分布函数为：

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0\\ x^2, & 0\le x\le 1, y\ge 1\\ y^2, & x\ge 1, 0\le y\le 1\\ x^2y^2, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 1, & x\ge 1, y\ge 1\end{cases}$$

例 2 设二维连续型随机变量(X, Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0<x<2, 2<y<4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

试求：(1) 常数k；(2) $P(X<2, Y<3)$；(3) $P(X<1.5)$；(4) $P(X+Y\leq 4)$。

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$，得 $1=\int_2^4 dy\int_0^2 k(6-x-y)dx = k\int_2^4\left[(6-y)x-\frac{x^2}{2}\right]_0^2 dy$

$$=k\int_2^4(12-2y-2)dy = k[10y-y^2]_2^4 = 8k，故\ k=\frac{1}{8}$$

(2) $P(X<1,Y<3)=\int_2^3 dy\int_0^1 \frac{1}{8}(6-x-y)dx = \frac{1}{8}\int_2^3\left[(6-y)x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy = \frac{1}{8}\int_2^3(\frac{11}{2}-y)dy=\frac{3}{8}$

(3) $P(X<1.5)=\int_2^4 dy\int_0^{1.5}\frac{1}{8}(6-x-y)dx = \frac{1}{8}\int_2^4\left[(6-y)x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{1.5} dy = \frac{1}{8}\int_2^4(\frac{63}{8}-\frac{3}{2}y)dy=\frac{27}{32}$

(4) $P(X+Y\leq 4)=\iint\limits_{x+y\leq 4} f(x,y)dxdy = \int_2^4 dy\int_0^{4-y}\frac{1}{8}(6-x-y)dx = \frac{1}{8}\int_2^4\left[(6-y)x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{4-y} dy$

$$=\frac{1}{8}\int_2^4\left[(6-y)(4-y)-\frac{(4-y)^2}{2}\right]dy=\frac{2}{3}$$

例 3 设二维连续型随机变量(X, Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{xy}{3}, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求：(1) $P(X+Y\ge 1)$ ；(2) $F(x,y)$。

解：(1) $P(X+Y\ge 1)=1-P(X+Y<1)$

$$=1-\iint_G x^2+\frac{xy}{3}dxdy=1-\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x^2+\frac{xy}{3}dy=1-\int_0^1\left(x^2y+\frac{x}{6}y^2\right)\Big|_0^{1-x}dx=\frac{65}{72}$$

(2) 当 $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$ 时，有：$\int_0^x\int_0^y x^2+\dfrac{xy}{3}dxdy$

当 $x\ge 1,\ 0\le y\le 2$ 时，有：$\int_0^1\int_0^y x^2+\dfrac{xy}{3}dxdy$

…

$$F(x,y)=\begin{cases} \dfrac{yx^3}{3}+\dfrac{x^2y^2}{12} & 0\le x<1, 0\le y<2 \\ \dfrac{y}{3}+\dfrac{y^2}{12} & x\ge 1, 0\le y<2 \\ \dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{3} & 0\le x<1, y\ge 2 \\ 1 & x\ge 1, y\ge 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$