第二章 控制系统的数学模型

2.4 典型环节

1）比例环节（放大环节、无惯性环节）：

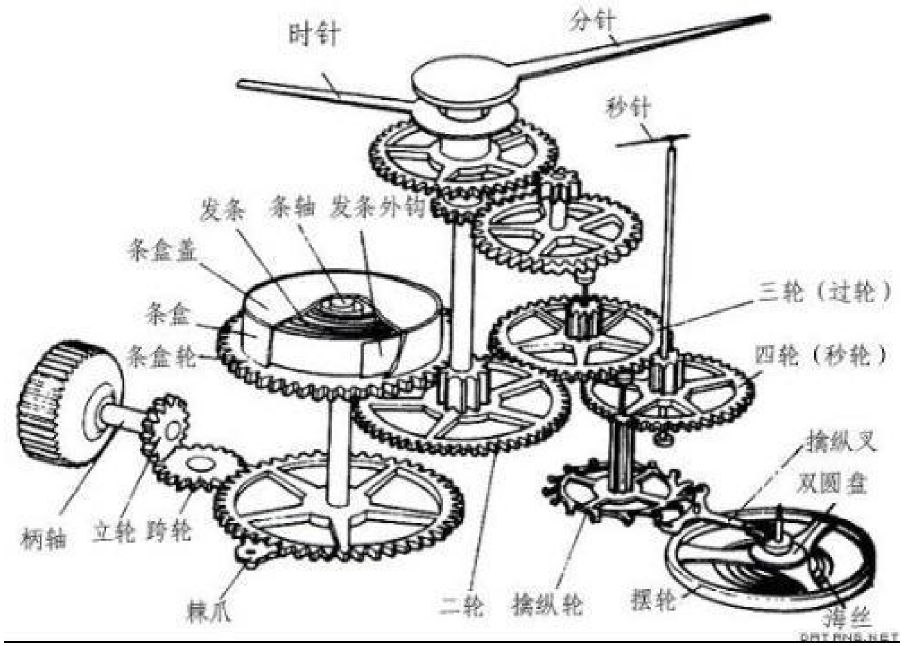
$$y(t) = Kr(t)$$

式中 K——环节的放大系数，为一常量。

传递函数为：$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = K$$

特点：输入输出量成比例，无失真和时间延迟。

实例：电位器，电阻分压器，无变形无间隙的齿轮传动比，测速发电机电压和转速之间的关系，无惯性运算放大器等。

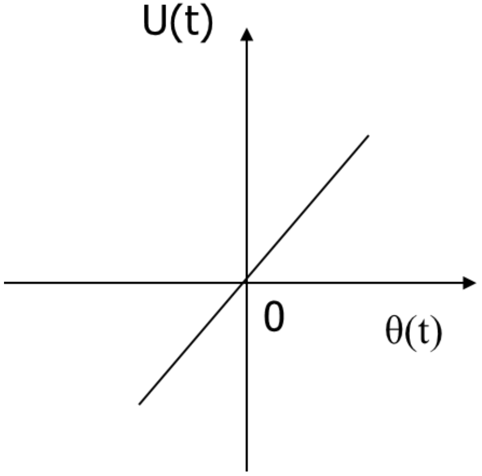


电位器：电位器是一种把线位移（直线型电位器）或角位移（旋转型电位器）变换为电压量的装置。

忽略非线性因素，空载时，电位器的电刷位移θ(t)与输出电压u(t)的关系：

$$u(t) = k_1\theta(t) \qquad k_1 = \frac{E}{\theta_{\max}}$$

式中：**E**：电源电压；
k_1：传递系数；
θ_{max}：电位器最大角位移



$$G(s) = \frac{U(s)}{\theta(s)} = k_1$$

2.4 典型环节

测速发电机：用来测量角速度，并将角速度转换成电压量。

$$u(t) = k_t \omega(t)$$

以角速度为输入量

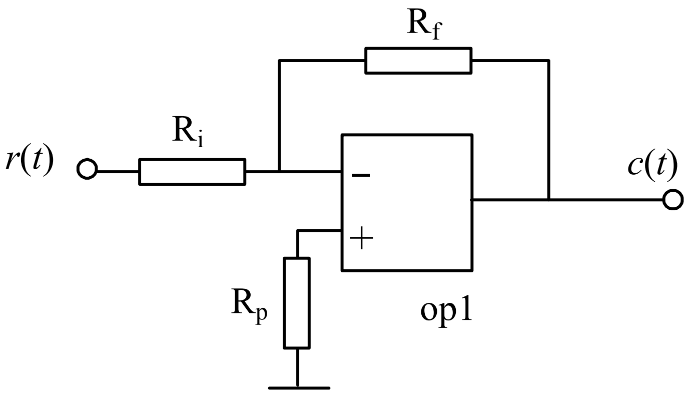
对上式取拉氏变换：

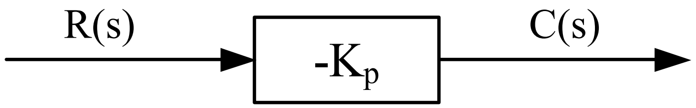
$$G(s) = \frac{U(s)}{\omega(s)} = k_t$$

以$\omega(t)$为输入量

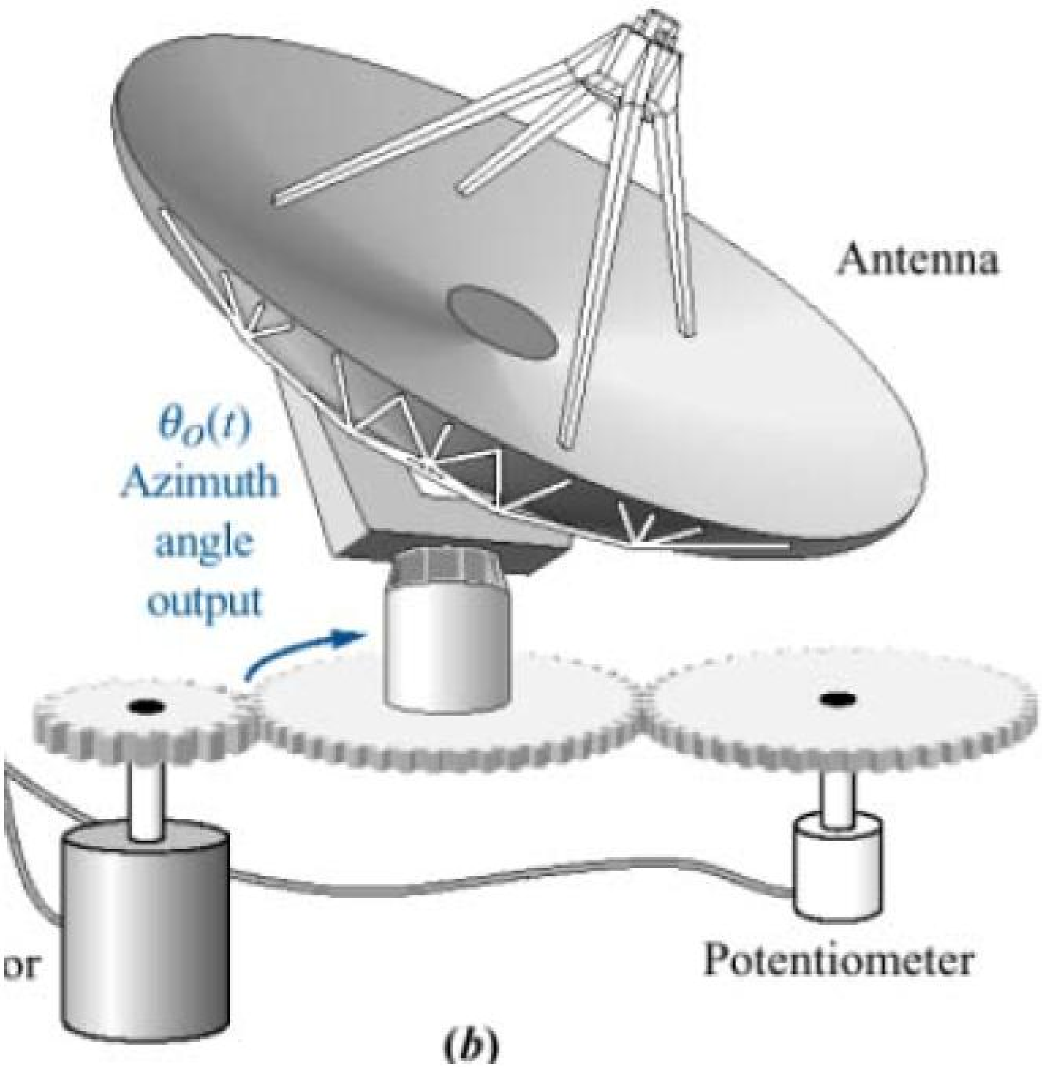
式中：k_t :比例系数

比例环节：





齿轮:



2）惯（惰）性环节：

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=r(t)$$

传递函数为：$G(s)=\dfrac{Y(s)}{R(s)}=\dfrac{1}{Ts+1}$

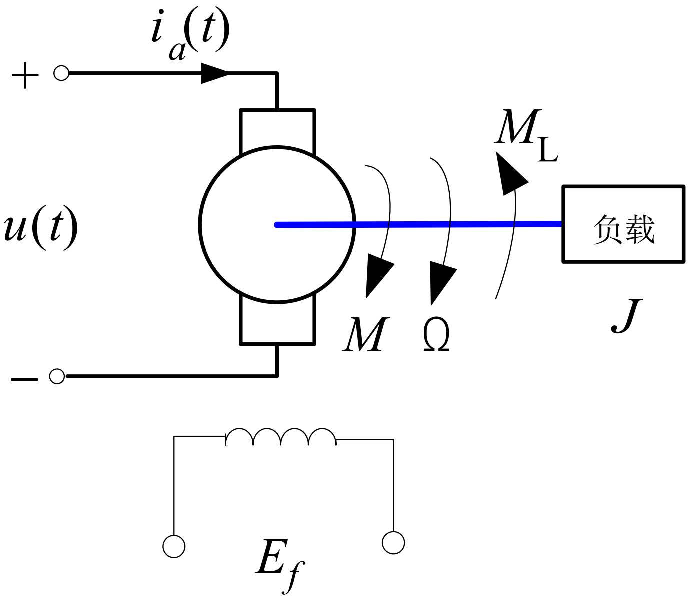
式中 T——环节的时间常数。

特点：含一个储能元件，对突变的输入,其输出不能立即复现，输出无振荡。

实例：RC网络，直流伺服电动机，液位。

2.4 典型环节

伺服电动机

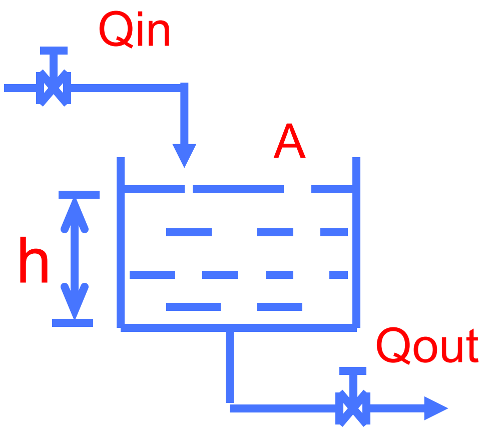


$$T_e T_m \frac{\mathrm{d}^2\Omega}{\mathrm{d}t^2} + T_m \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} + \Omega = \frac{1}{C_e} u_a - \frac{T_m}{J} M_L - \frac{T_e T_m}{J} \frac{\mathrm{d}M_L}{\mathrm{d}t}$$

通常，电动机的电枢电路电感L_a较小和粘性摩擦系数f较小时，二者对系统的动态影响可以忽略不计，可以简化为

$$T_m \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} + \Omega = \frac{1}{C_e} u_a \qquad G(s) = \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_e}{T_m s + 1}$$

液位控制槽



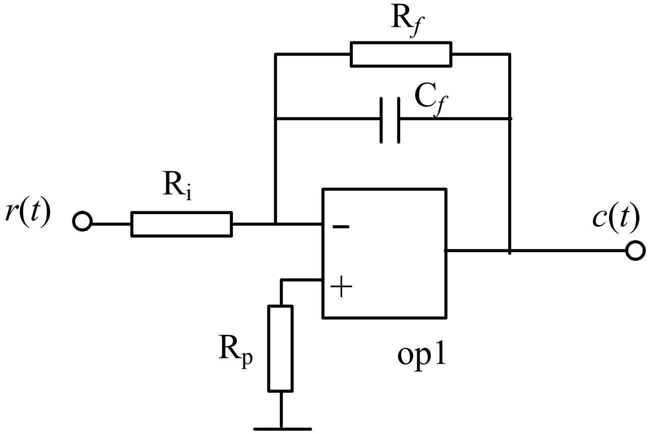
$$A\frac{dh}{dt}+\beta\sqrt{h}=Q_{in}$$

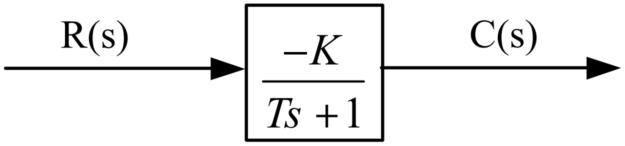
线性化:

$$AR\frac{dh}{dt}+h=RQ_{in}$$

$$G(s)=\frac{H(s)}{Q_{in}(s)}=\frac{R}{Ts+1}$$

例5:一阶惰性环节。



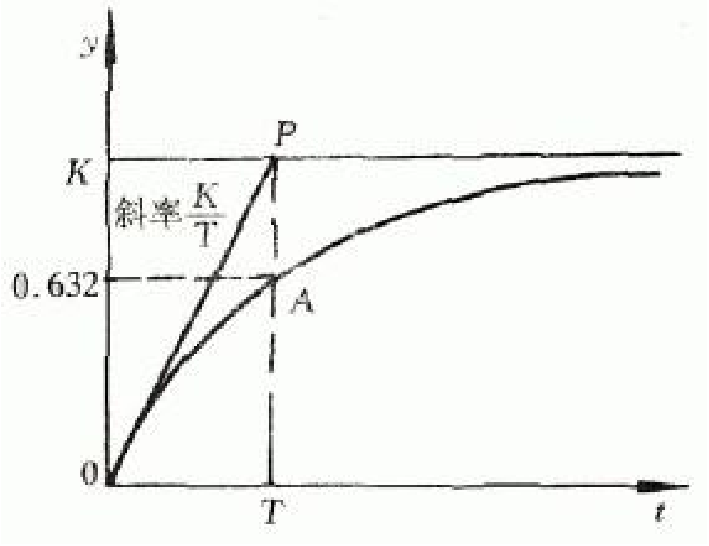


一阶惰性环节单位阶跃响应曲线：

$$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$$

$$Y(s)=G(s)R(s)=\frac{K}{Ts+1}\frac{1}{s}$$

$$y(t)=K(1-e^{-\frac{1}{T}t})$$



3） 积分环节：

$$y(t)=\int r(t)dt$$

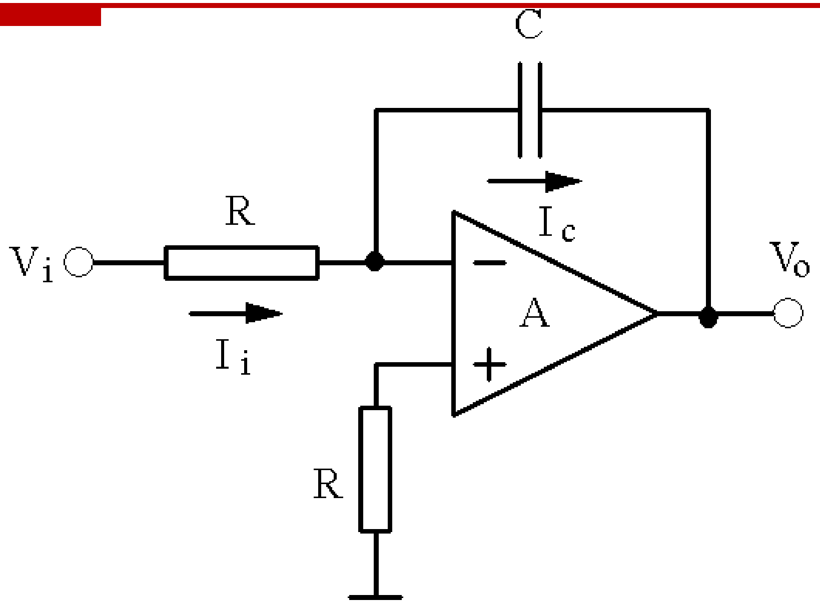
传递函数为：$G(s)=\dfrac{Y(s)}{R(s)}=\dfrac{1}{s}$

特点：输出量与输入量的积分成正比例，当输入消失，输出具有记忆功能。

实例：电动机角速度与角度间的关系，积分器等。

积分器

$$\frac{dV_o}{dt}=-\frac{1}{RC}V_i$$



$$G(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=-\frac{1}{Ts}$$

4）理想微分环节：

$$y(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

传递函数为：$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = s$$

特点：输出量正比输入量变化的速度，能预示输入信号的变化趋势。

实例：测速发电机。

测速发电机：

$$u(t) = k_t \omega(t)$$ 以角速度为输入量

$$\because \omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

则：$$u(t) = k_t \frac{d\theta(t)}{dt}$$ 以角位移为输入量

$$G(s) = \frac{U(s)}{\theta(s)} = k_t s$$ 以$\theta(t)$为输入量

5）（一阶）微分环节：

$$y(t)=\frac{dr(t)}{dt}+r(t)$$

传递函数为：$G(s)=\dfrac{Y(s)}{R(s)}=s+1$

特点：理想微分环节在实际系统的体现。

实例：RL电路。

6）二阶微分环节：

$$y(t)=\tau^2\frac{d^2r(t)}{dt^2}+2\zeta\tau\frac{dr(t)}{dt}+r(t),0<\zeta<1$$

传递函数为：$G(s)=\dfrac{Y(s)}{R(s)}=\tau^2s^2+2\zeta\tau s+1$

式中 τ——环节的时间常数。

特点：输出量与输入量成二阶微分关系。

实例：RLC电路。

7）振荡环节：

$$T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\zeta T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=r(t)$$

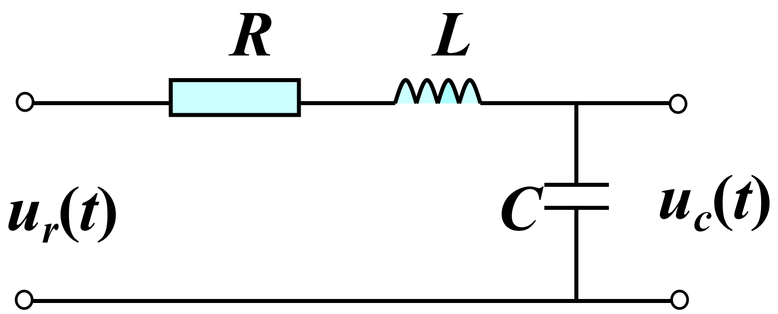
传递函数为：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}(0<\zeta<1)$$

特点：环节中有两个独立的储能元件，并可进行能量交换，其输出出现振荡。

实例：RLC电路，弹簧质量阻尼器系统。

RLC电路:

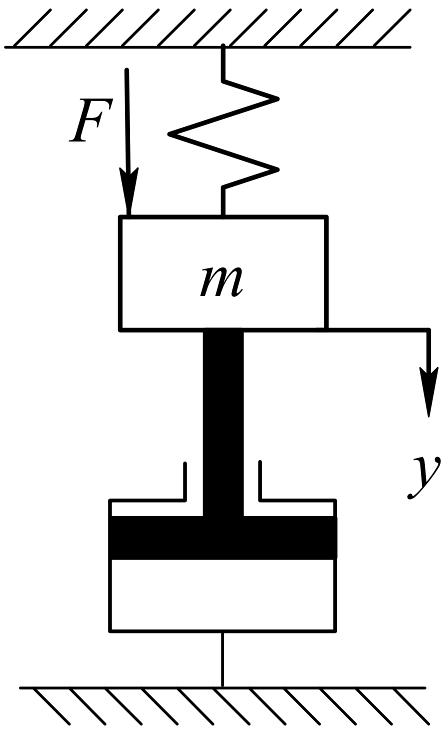


$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

弹簧阻尼机械减震系统：

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+f\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=F(t)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+fs+k}$$



不同ξ值时二阶系统单位阶跃响应：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}(0<\zeta<1)$$

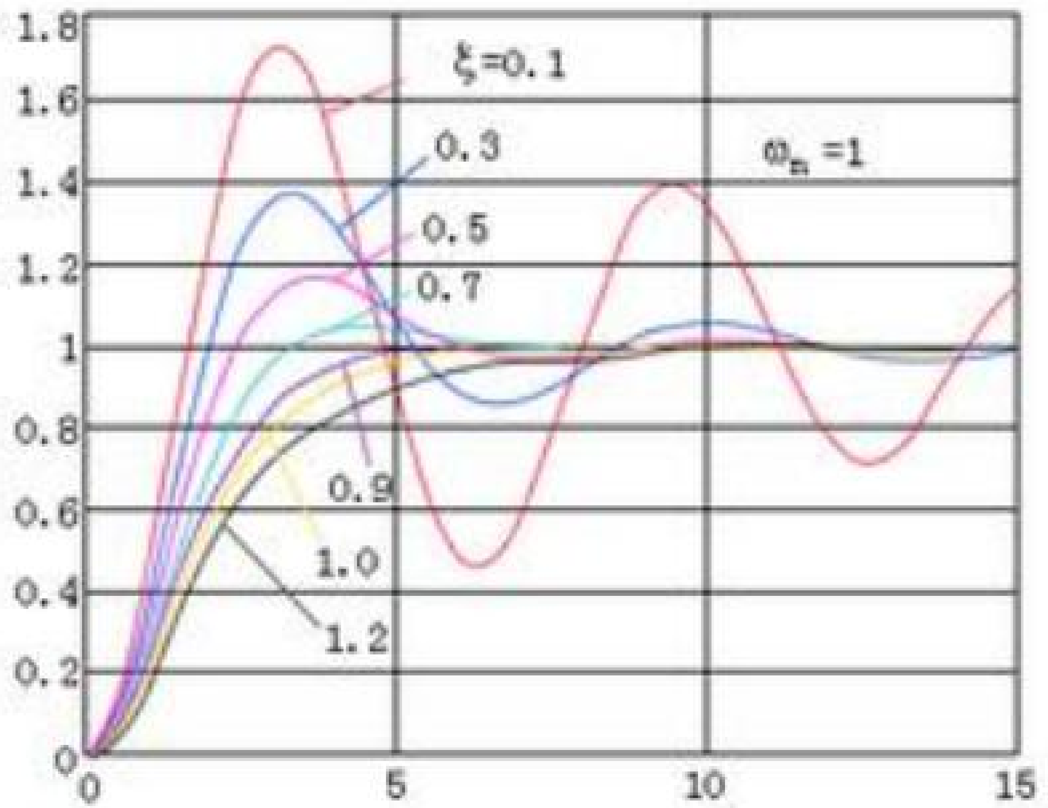
$$Y(s)=R(s)G(s)$$

$$=\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n{}^2}{(s+\zeta\omega_n+j\omega_d)(s+\zeta\omega_n-j\omega_d)}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}-\frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2}$$

不同ξ值时二阶系统单位阶跃响应：

$$y(t)=L^{-1}\left[Y(s)\right]=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t+\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right),\ t\geq 0$$



8）延迟环节：

$$y(t)=r(t-\tau)$$

传递函数为： $G(s)=\dfrac{Y(s)}{R(s)}=e^{-\tau s}$

式中 τ——延迟时间

特点：输出量能准确复现输入量，但须延迟一固定的时间间隔。

实例：管道压力、流量等物理量，网络。

按泰勒(Tayor)级数展开得

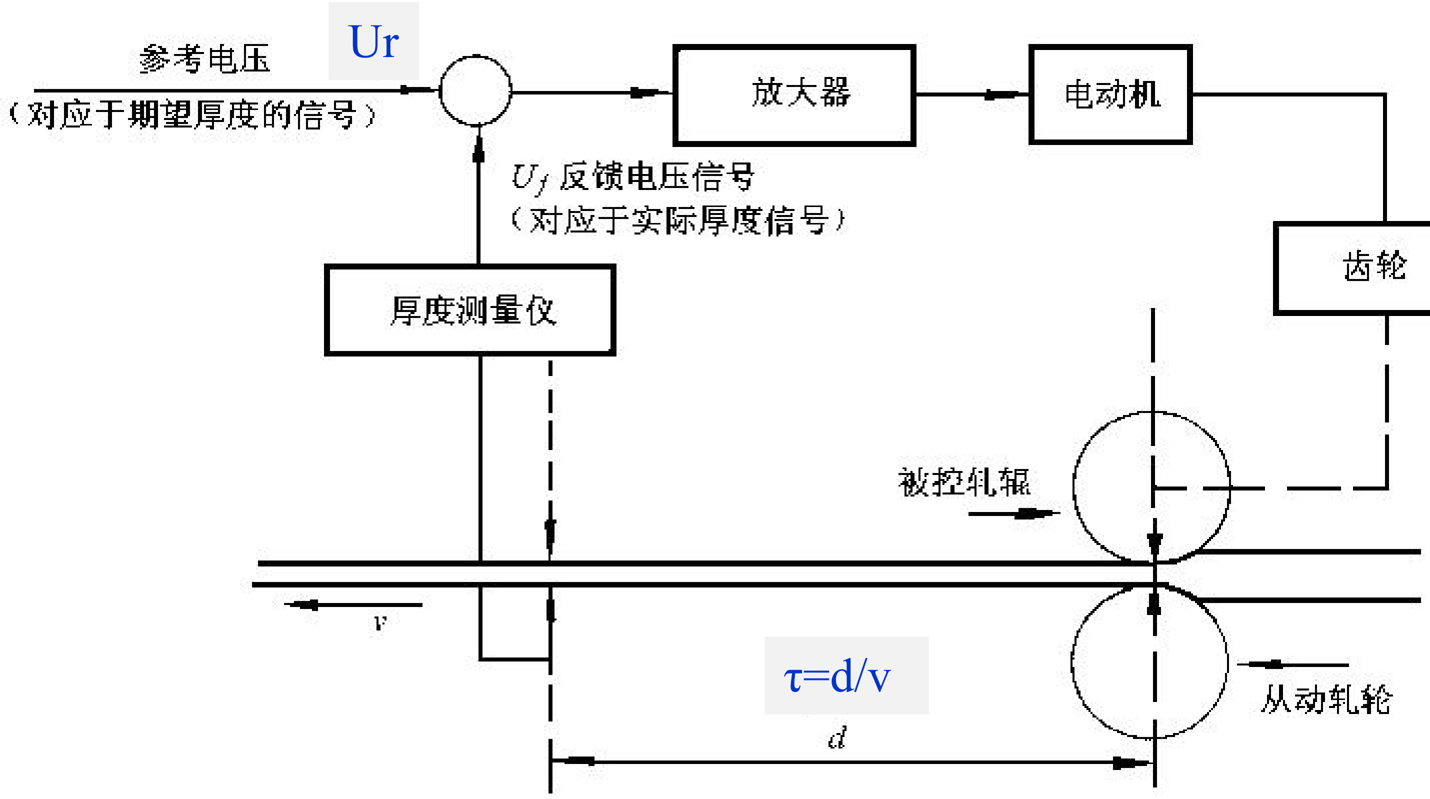
$$e^{\tau s}=1+\tau s+\frac{\tau^2 s^2}{2!}+\frac{\tau^3 s^3}{3!}+\cdots$$

当延迟τ比较小时，忽略高次项

$$G(s)=e^{-\tau s}\approx\frac{1}{1+\tau s}$$

上式表明，在延迟时间很小的情况下，延迟环节可用一个小惯性环节来代替。

举例：一钢板轧机如图，若轧机轧辊中心线到厚度测量仪的距离为d (这段距离无法避免)，设轧钢的线速度为v，则测得实际厚度的时刻要比轧制的时刻延迟τ（τ=d/v）。



2.4 典型环节

举例：

① 液压油从液压泵到阀控油缸间的管道传输产生的时间上的延迟。

② 热量通过传导因传输速率低而造成的时间上的延迟。

③ 晶闸管整流电路，当控制电压改变时，由于晶闸管导通后即失控，要等到下一个周期开始后才能响应，这意味着，在时间上也会造成延迟(对单相全波电路，平均延迟时间 τ=5ms；对三相桥式，τ=1.7ms)。

④ 各种传送带(或传送装置)因传送造成的时间上的延迟。

⑤ 从切削加工状况到测得结果之间的时间上的延迟。

◆ 以下系统由什么典型环节组成?

$$G(s)=\frac{K(3s+1)}{s(5s+1)(s^2+2s+8)}$$

比例	微分	积分	惯性	振荡

Thank You !