§10.9 静电场中的电介质

一. 电介质的特点

电介质是电阻率很大，导电能力很差的物质。

主要特征：它的原子或分子中，电子与原子核的结合力很强，电子处于束缚状态。电介质中的带电粒子在电场中会发生原子大小范围的位移，当静电平衡时电介质的表面层或内部会出现极化电荷。

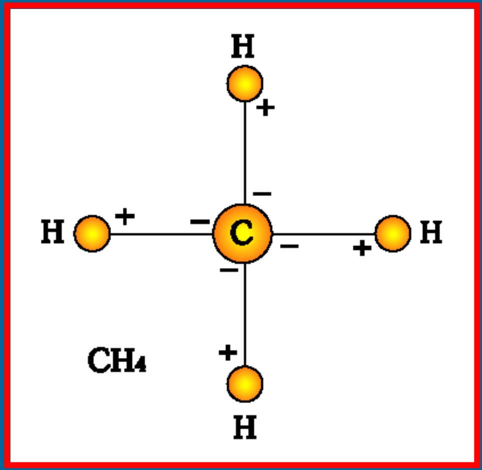
二. 电介质种类

(1) 无极分子电介质

分子的正负电荷中心重合，偶极矩为零，如

H_2、N_2、CH_4

$\vec{p} = 0$

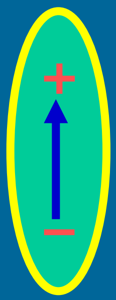


无极分子

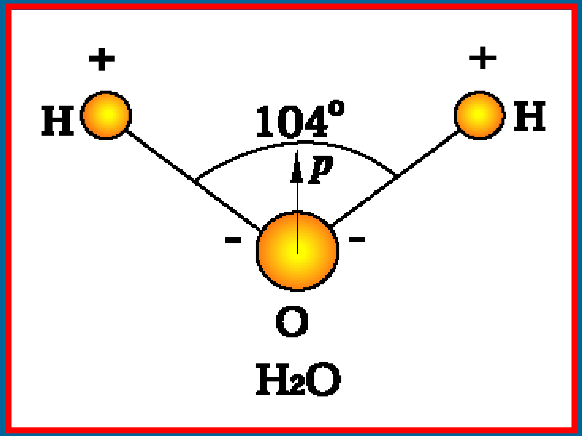
(2) 有极分子电介质

分子中的正负电荷中心不重合, 可视为一个电偶极子

如 H_2O ， **HCL**



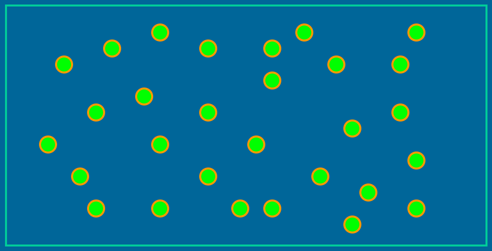
$$\vec{p} = q\vec{l}$$



有极分子

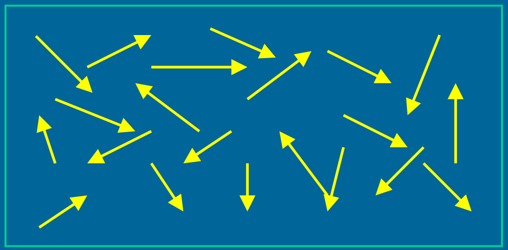
三. 电介质的极化 束缚电荷

无外场时（无规则热运动）



(无极分子电介质)

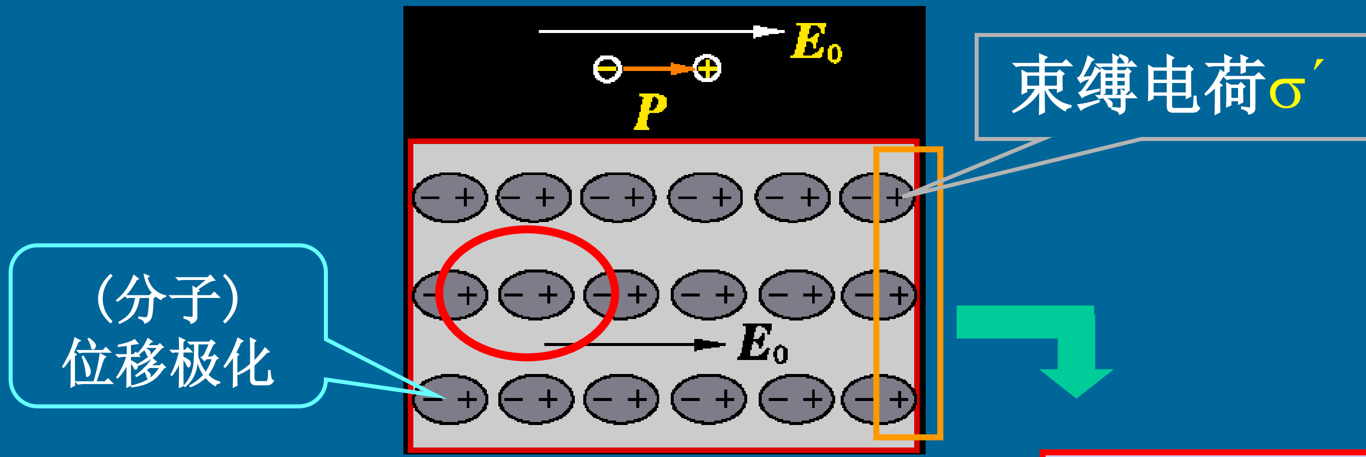
整体对外不显电性

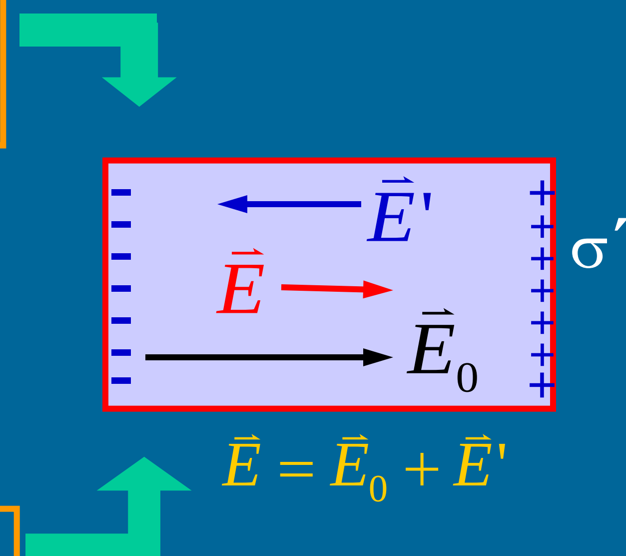


(有极分子电介质)

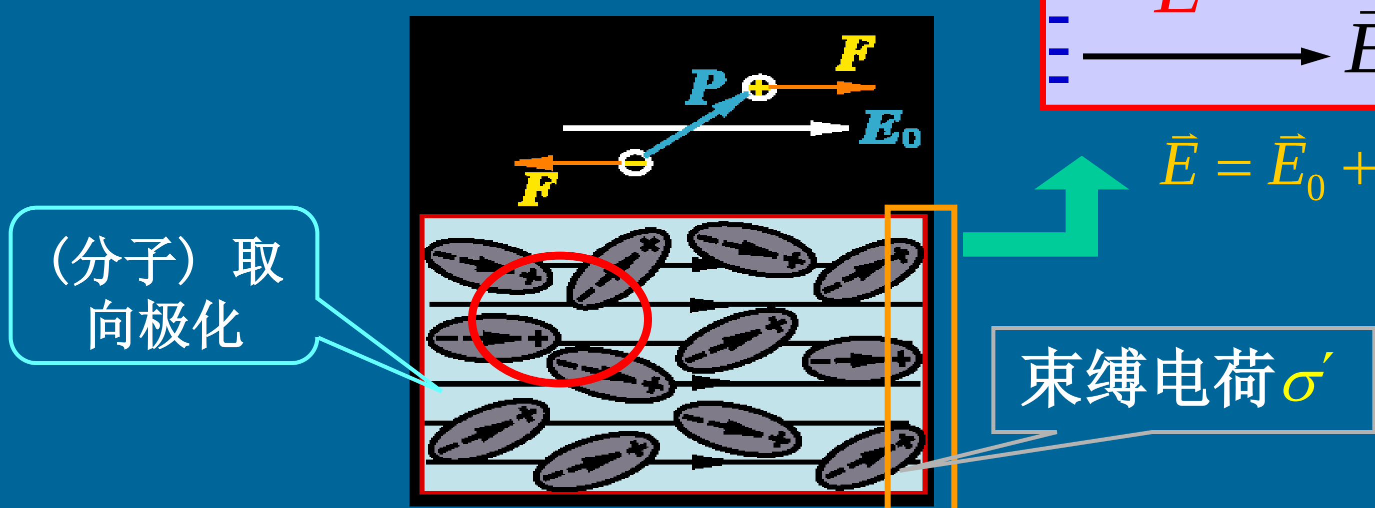
有外场存在时

- 无极分子电介质——位移极化（正负电荷的中心微小的相对位移形成电偶极矩并沿外电场方向排列）



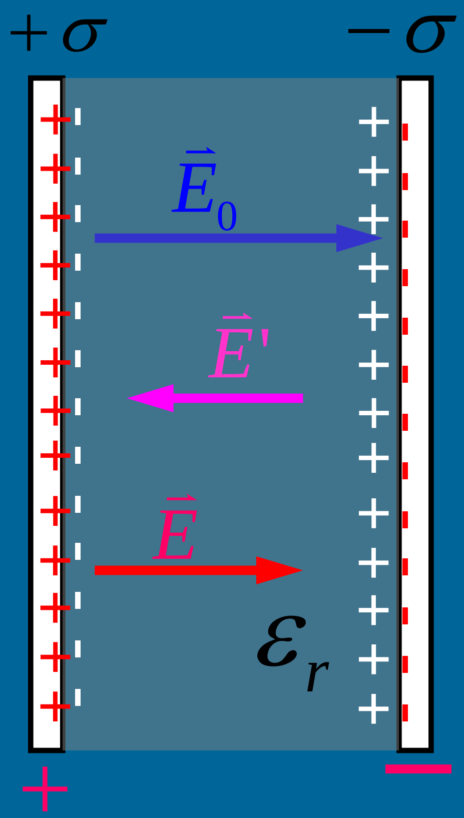


- 有极分子电介质——取向极化



四.电介质中的高斯定理

（以充满各向同性均匀电介质的平行板电容器电场为例，将真空中的高斯定理推广到介质中）



如图，平行板电容器充满均匀电介质，内部场强为：

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$$

大小为：$E=E_0-E'=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}-\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$

实验表明：$E=\dfrac{E_0}{\varepsilon_r}$

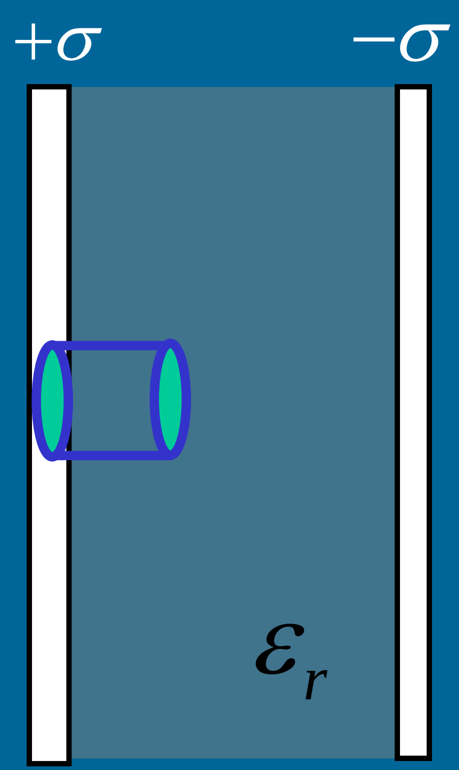
ε_r ——相对介电常数 无量纲量

$$\therefore \frac{\sigma}{\varepsilon_0}-\frac{\sigma'}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_r}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

即 $\sigma'=\sigma\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)$

——自由电荷和极化电荷间关系

取一圆柱形高斯面，有：$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = (\sigma S - \sigma' S)/\varepsilon_0$



把$\sigma' = \sigma\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r}\right)$代入

$$\therefore \quad \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$\oint_S \varepsilon_0\varepsilon_r \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sigma S = q$$

引入一个描述电场的辅助量

电位移矢量：$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}}$

$$\boxed{\Rightarrow \oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q}$$ ——介质中的高斯定理

与电通量的定义类似，定义 $\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ 为通过高斯面的电位移通量

介质中的高斯定理 ：通过高斯面的电位移通量等于高斯面所包围的自由电荷的代数和，与极化电荷及高斯面外电荷无关。

说明：1. $\vec{D}$ 矢量起于正自由电荷，止于负自由电荷。

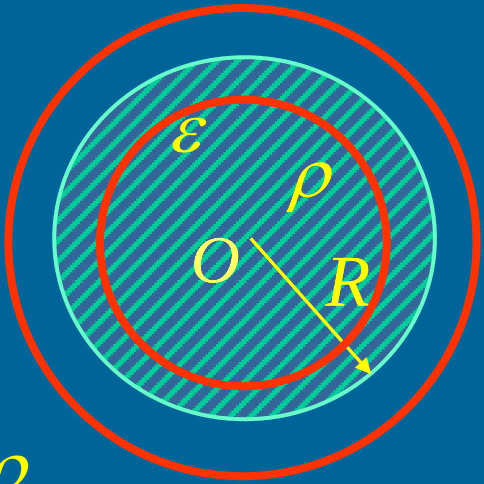
$\vec{E}$ 矢量起于各种正电荷，止于各种负电荷。

2 $\vec{D}$ 无明显物理意义，但引入它后使电介质中的高斯定理中没有出现极化电荷，给应用带来方便

五.电介质中高斯定理的应用

例：介质球 R ，均匀带电 ρ ，介电常数ε ，球外为真空

求：$\vec{D}$ $\vec{E}$ ，画出 $D \sim r$ $E \sim r$ 曲线



解：(1) $r < R$

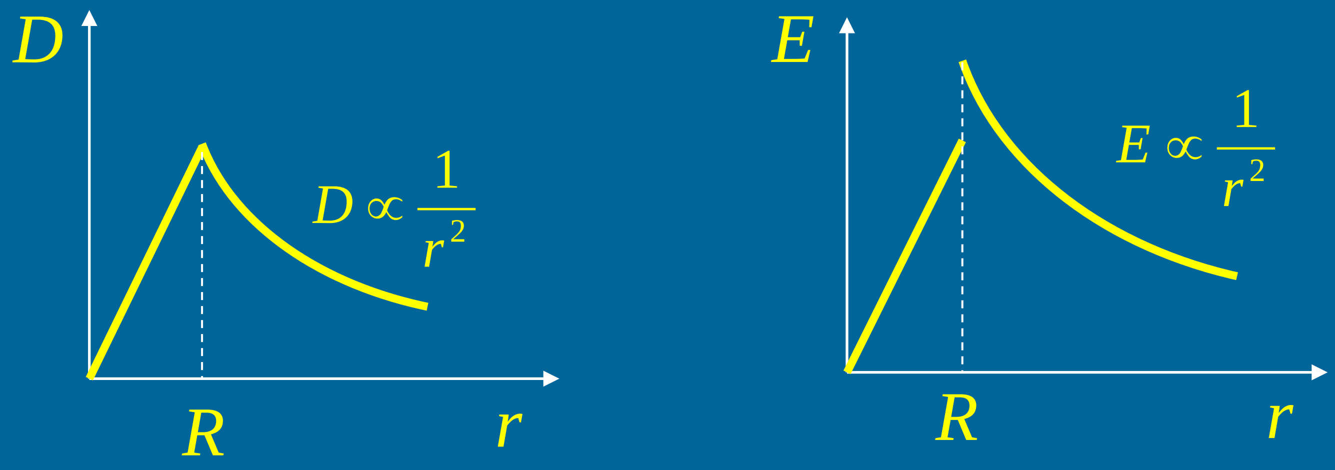
$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = D4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow D = \frac{\rho}{3} r \quad \Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\rho}{3\varepsilon} r$$

(2) $r > R$

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = D4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 = Q$$

$$\Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad \Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

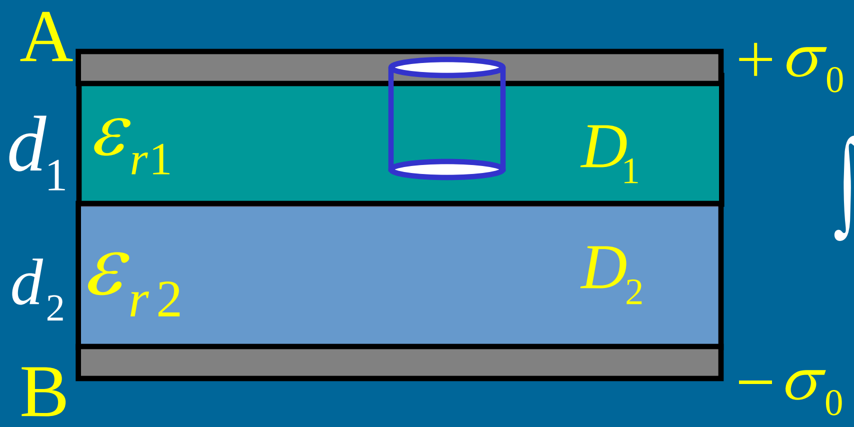


除非特别指明，不要把带电体看作介质或导体，应按真空对待介电常数用 ε_0 ，电荷应理解为自由电荷

例： 一电容器带电密度$\pm\sigma_0$，面积为S， 之间有二层均匀介质 $\varepsilon_{r1},\varepsilon_{r2}$， 厚度为 $d_1, d_2 << S$

求：介质中 $\vec{E}_1$ $\vec{E}_2$ U_{AB}

思路：从$\pm\sigma_0 \to \vec{D} \to \vec{E} \to U$



$$解: \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sigma_0 S'$$

$$\int_{上} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{侧} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{下} \vec{D}_1\cdot d\vec{S} = \sigma_0 S'$$

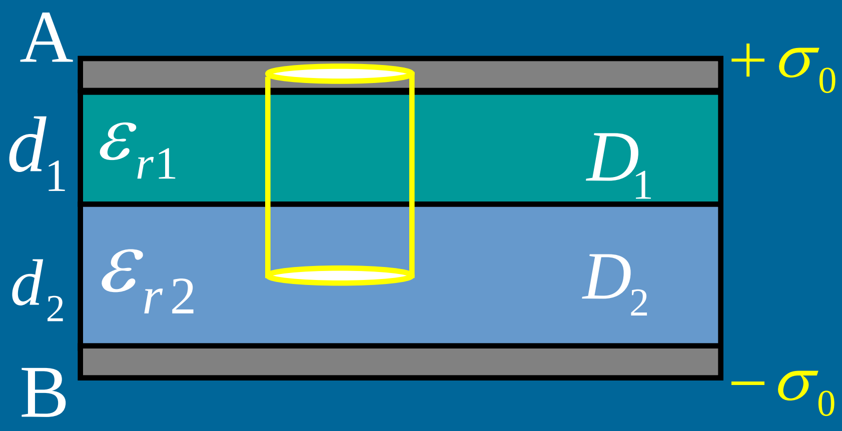
$$D_1 S' = \sigma_0 S' \qquad \therefore D_1 = \sigma_0$$

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}$$

$$E_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}}$$

同理 $\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = D_2 S' = \sigma_0 S'$

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}$$



$$\therefore U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= E_1 d_1 + E_2 d_2$$

$$= \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} d_1 + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} d_2$$

电容　电容器

一 孤立导体的电容

为了定量的比较不同的孤立导体容纳电荷的能力，引入电容C。

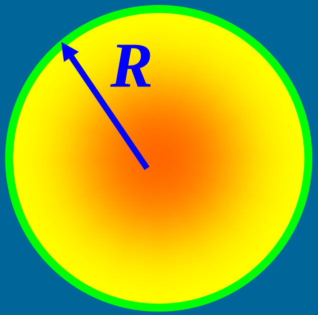
定义：当导体的电压为 1 伏时，导体所能容纳的电荷量，称为导体的电容。$C=\dfrac{q}{U}$

单位：$1\text{法拉}=\dfrac{1\text{库仑}}{1\text{伏特}}$　　$1\text{F}=10^{6}\mu\text{F}=10^{12}\text{pF}$

求半径为R 的孤立导体球的电容.

电势为　$u=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

电容为　$C=4\pi\varepsilon_0 R$



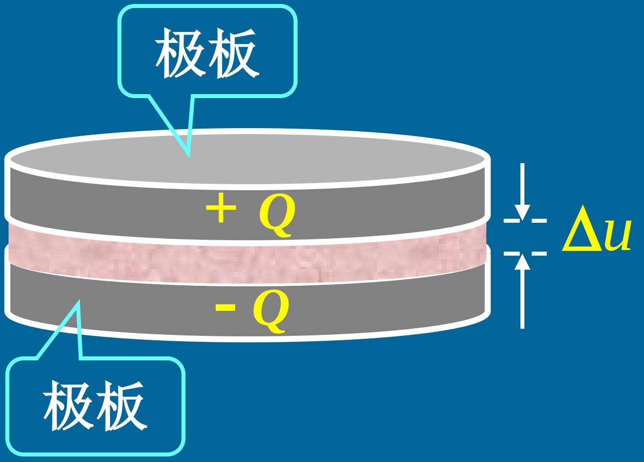
注意：电容只与导体的几何因素和介质有关，与导体是否带电无关

二. 电容器的电容

通常，由彼此绝缘相距很近的两导体构成电容器。

使两导体极板带电 $\pm Q$

两导体极板的电势差 Δu



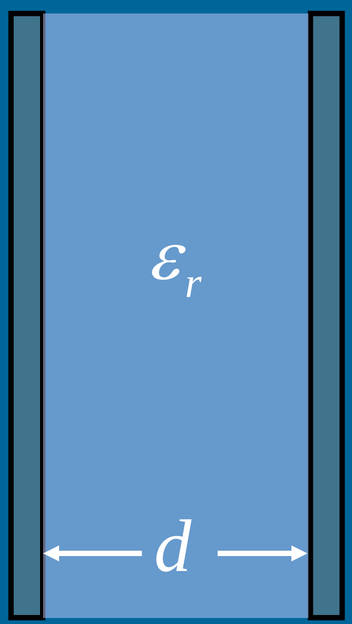
电容器的电容定义为：$\boxed{C = \dfrac{Q}{\Delta u}}$

- 电容器电容的大小取决于极板的形状、大小、相对位置以及极板间介质与所带电量无关。

- 电容器电容的计算

$$Q \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow \Delta u \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta u}$$

1　平行板电容器



两块金属平行板$S \gg d^2$，中间充有均匀介质，ε_r

设两板分别带电$\pm q$　　$\sigma = \pm \dfrac{q}{S}$　　$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \mathrm{d}l = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} d$$

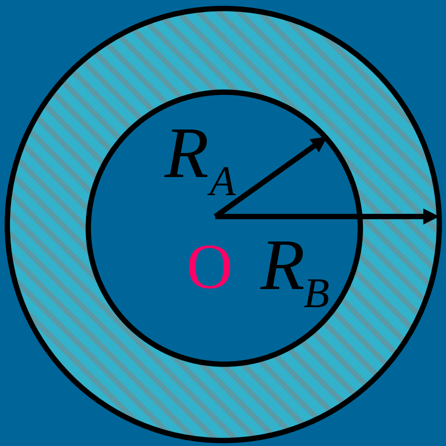
$$\therefore C = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{\sigma S}{\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$

注：**C** 只与电容器的形状(**S, d**)、介质($\boldsymbol{\varepsilon_r}$) 有关，而与其带电与否无关。

讨论：　若是空气电容器：　$\varepsilon_r = 1$　　$C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

加入介质后：　$C = \varepsilon_r C_0$

2　球形电容器



二个半径分别为 R_A、R_B 的**同心球壳**间充有均匀介质，相对介电常数为 ε_r

设分别带电　$\pm q$

两球壳间的电场　$E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$

$$U_{AB} = \int_{R_A}^{R_B} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

$$\therefore C = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_A R_B}{R_B - R_A}$$

总结

1. 电介质中的高斯定理

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q$$

电位移矢量： $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$

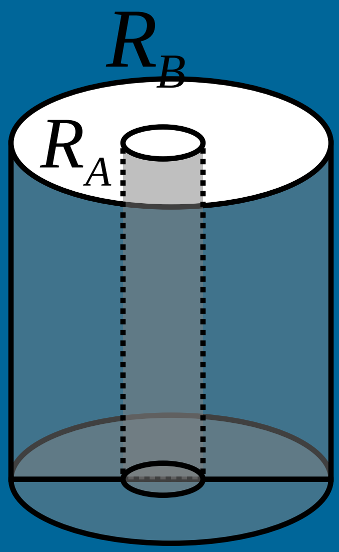
2. 孤立导体的电容

$$C = \frac{q}{U}$$

3. 电容器的电容

$$C = \frac{Q}{\Delta u}$$

3　同轴柱形电容器



二同轴圆柱极板，已知 R_A、R_B ，长L（L>>R），二极板间充有介质 ε_r ，设单位长度上的电荷为 $\pm\lambda$

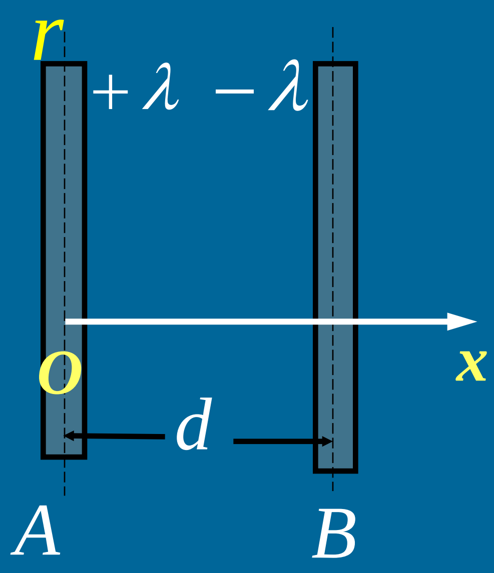
两极间的任一点　$E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$

$$U_{AB} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_\mathbf{B}}{R_A}$$

$$C = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{\lambda L}{\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\dfrac{R_B}{R_A}} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\dfrac{R_B}{R_A}}$$

4　分布电容

求：半径为 r，相距为 d 的二无限长导线间单位长度的电容。$d >> r$



设 A、B分别带电 $\pm\lambda$

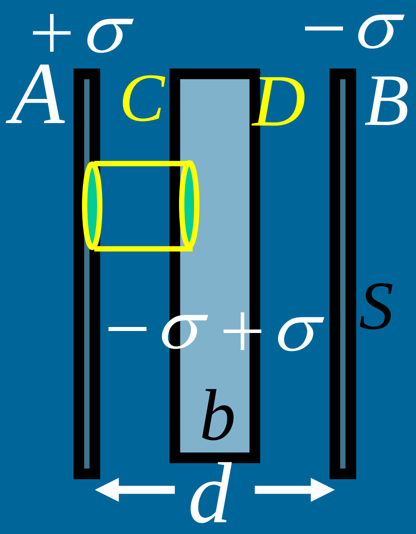
$$U_{AB} = \int_r^{d-r} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_r^{d-r} \left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (d-x)}\mathrm{d}x \right]$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-r}{r} \approx \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{r}$$

$$\therefore C = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{\lambda}{\dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{d}{r}} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{d}{r}}$$

例： 平板电容器，中间插一金属板CD，求：电容



解：

设AB二板带电$\pm\sigma$，金属板CD带感应电荷 $\pm\sigma'$

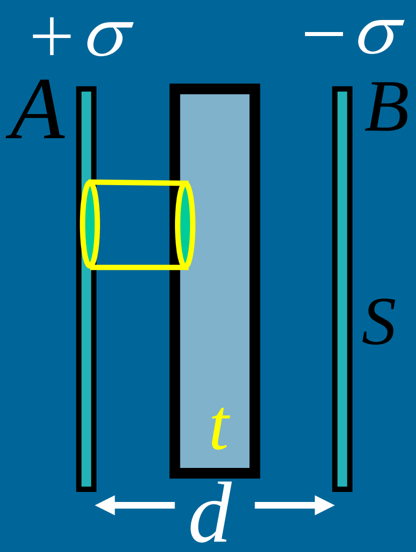
利用高斯定理可证明 $\sigma' = -\sigma$

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_C^D \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_D^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left|AC\right| + 0 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left|DB\right| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-b)$$

$$C = \frac{q}{U_{AB}} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-b)} = \frac{\varepsilon_0 S}{d-b}$$

例： 平板电容器，中间插一厚度为 t 的各向同性介质板，介电常数为 ε_r，求：电容



解：

$$E_1 = E_3 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$U = E_2 t + E_1 (d - t)$$

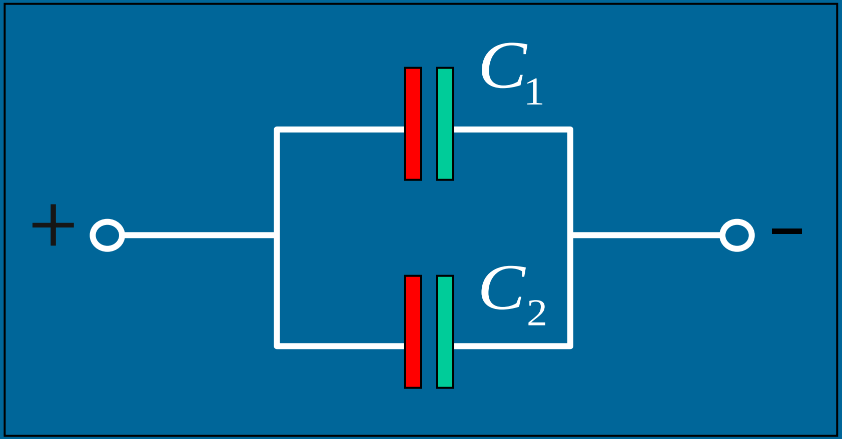
$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{t}{\varepsilon_r} + d - t\right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{(t/\varepsilon_r) + d - t} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{t + (d - t)\varepsilon_r}$$

三　电容器的并联和串联

1 电容器的并联

$$C = C_1 + C_2$$



2 电容器的串联

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$