第八章　假设检验

§1 假设检验的基本思想与基本概念　§2 单正态总体参数的假设检验

§3 双正态总体参数的假设检验

一、单项选择题

（1）解应选（A）。

由于显著性水平α越小，接受域的范围就越大，也就是说在显著性水平$\alpha=0.01$下的接受域包含了在显著性水平$\alpha=0.05$下的接受域，若在$\alpha=0.05$下接受H_0，即检验统计量的样本值落入在显著性水平$\alpha=0.05$下的接受域内，则检验统计量的样本值也一定落入在显著性水平$\alpha=0.01$下的接受域内，因此在显著性水平$\alpha=0.01$下必接受H_0，故选（A）。

（2）解应选（B）。

由于当σ^2未知时，单正态总体均值的右边检验的接受域为$\dfrac{\bar{x}-1}{s/\sqrt{n}}\in(-\infty,\ t_\alpha(n-1))$，即$\bar{x}<1+\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$，又由于$\alpha=0.05$，因此其拒绝域为$\bar{x}\geq 1+\dfrac{s}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)$，故选（B）。

（3）解应选（D）。

由于显著性水平α越小，接受域的范围就越大，因此在显著性水平$\alpha=0.01$下的接受域包含了在显著性水平$\alpha=0.05$下的接受域，从而在显著性水平0.05下的拒绝域与在显著性水平0.01下的接受域和拒绝域的交集都不空，从而可能接受也可能拒绝H_0，故选（D）。

（4）解应选（C）。

由第二类错误的定义知，第二类错误是指存伪错误，即H_0不真接受H_0，故选（C）。

二、填空题

（1）解应填$T=\dfrac{\sqrt{n(n-1)}\bar{X}}{Q}$。

由于当σ^2未知时，单正态总体均值的双边检验选择的检验统计量为

$$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

又由于$\mu_0=0$，$S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}=\dfrac{Q}{\sqrt{n-1}}$，因此

$$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{\frac{Q}{\sqrt{n-1}}}=\frac{\sqrt{n(n-1)}\bar{X}}{Q}$$

故填$T=\dfrac{\sqrt{n(n-1)}\bar{X}}{Q}$。

（2）解应填$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$，自由度为$n$的$\chi^2$。

由于当μ已知时，单正态总体方差的双边检验选择的检验统计量为

$$\chi^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n)$$

因此假设检验选择的统计量为$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$，当$H_0$为真时，检验统计量服从自由度为$n$的$\chi^2$

分布，故填$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}$，自由度为$n$的$\chi^2$。

三、解（i）需检验

$$H_0:\mu=20,\ H_1:\mu\neq 20$$

（ii）选择检验统计量

$$U=\frac{\bar{X}-20}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

（iii）由于$\alpha=0.05$，因此临界点为$\pm z_{\frac{\alpha}{2}}=\pm1.96$，从而接受域为$(-1.96,\ 1.96)$；

（iv）由于$n=5,\ \sigma=1,\ \bar{x}=19.6$，因此检验统计量$U$的样本值为

$$u=\frac{19.6-20}{1/\sqrt{5}}=-0.89$$

（v）由于$u=-0.89\in(-1.96,1.96)$，因此接受H_0，即生产过程正常。

四、解（i）需检验

$$H_0:\sigma\le 0.005,\ H_1:\sigma>0.005$$

~

（ii）选择检验统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{0.005^2}\sim\chi^2(n-1)$$

（iii）由于 $\alpha=0.05$， $n=9$，因此临界点为 $\chi^2_\alpha(n-1)=\chi^2_{0.05}(8)=15.507$，从而接受域为 $(0,\ 15.507)$；

（iv）由于 $n=9,\ s=0.007$，因此检验统计量 χ^2 的样本值为

$$\chi^2=\frac{(9-1)\times0.007^2}{0.005^2}=15.68$$

（v）由于 $\chi^2=15.68\notin(0,\ 15.507)$，因此拒绝 H_0，即可以认为这批导线的标准差显著地偏大。

五、解（i）需检验

$$H_0:\sigma\geq0.04\%,\ H_1:\sigma<0.04\%$$

（ii）选择检验统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{(0.04\%)^2}\sim\chi^2(n-1)$$

（iii）由于 $\alpha=0.05,n=10$，因此临界点为 $\chi^2_{1-\alpha}(n-1)=\chi^2_{0.95}(9)=3.325$，从而接受域为

$$(3.325,+\infty)$$

（iv）由于 $n=10,s=0.037\%$，因此检验统计量 χ^2 的样本值为

$$\chi^2=\frac{(10-1)\times(0.037\%)^2}{(0.04\%)^2}=7.701$$

（v）由于 $\chi^2=7.701\in(3.325,+\infty)$，所以接受 H_0，即可以认为 $\sigma\geq0.04\%$。

六、解（i）需检验

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,\ H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

（ii）选择检验统计量

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

（iii）由于 $\alpha = 0.01$，$n_1 = 8$，$n_2 = 9$，因此临界点为 $\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1)} = \dfrac{1}{F_{0.005}(8,7)} = \dfrac{1}{8.68}$，

$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.005}(7,8) = 7.69$，从而接受域为 $(\dfrac{1}{8.68}, 7.69)$；

（iv）由于 $s_1^2 = 0.29$，$s_2^2 = 0.34$，因此检验统计量 F 的样本值为

$$f = \frac{0.29}{0.34} = 0.8529$$

（v）由于 $f = 0.8529 \in (\dfrac{1}{8.68}, 7.69)$，因此接受 H_0，即可以认为机器 A 和机器 B 加工的精度无显著的差异。

七、解 设第一批棉纱的断裂强力 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，第二批棉纱的断裂强力 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，分两步检验：

（1）第一步需检验方差。

（i）需检验

$$H_{01}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2,\ H_{11}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

（ii）选择检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

（iii）由于 $\alpha = 0.05$，$n_1 = 200$，$n_2 = 100$，因此临界点为 $\dfrac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1)} = \dfrac{1}{F_{0.025}(99,199)} = \dfrac{1}{1.33}$，

$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.025}(199,99) = 1.395$，从而接受域为 $(\dfrac{1}{1.33}, 1.395)$；

（iv）由于 $s_1 = 0.218$，$s_2 = 0.198$，因此检验统计量 F 的样本值为

$$f = \frac{0.218^2}{0.198^2} = 1.2122$$

（v）由于 $f = 1.2122 \in (\dfrac{1}{1.33}, 1.395)$，因此接受 H_{01}，即可以认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$。

（2）第二步需检验均值。

（i）需检验

$$H_{02}: \mu_1 = \mu_2,\ H_{12}: \mu_1 \neq \mu_2$$

（ii）选择检验统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_{\omega}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

其中$S_{\omega}=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2-(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$；

（iii）由于$\alpha=0.05$，$n_1=200$，$n_2=100$，因此临界点为$\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)=\pm t_{0.025}(298)=\pm1.96$，从而接受域为$(-1.96,\ 1.96)$；

（iv）由于$n_1=200$，$n_2=100$，$\overline{x}=0.532$，$\overline{y}=0.576$，$s_1=0.218$，$s_2=0.198$，因此

$$s_{\omega}=\sqrt{\frac{(200-1)\times0.218^2+(100-1)\times0.198^2}{200+100-2}}=0.2116$$

从而检验统计量T的样本值为

$$t=\frac{0.532-0.576}{0.2116\times\sqrt{\frac{1}{200}+\frac{1}{100}}}=-1.6978$$

（v）由于$t=-1.6978\in(-1.96,\ 1.96)$，因此接受$H_{02}$，即可以认为两批棉纱的断裂强力无显著的差异。

~