第五章 频率响应法

5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

- 通过频率特性曲线获得稳态性能指标
- 频率域性能指标
- 频率域特性指标与时域瞬态指标的关系

一、稳态性能指标分析：

如果通过频率特性曲线能确定系统的无差度阶数 ν（即积分环节的个数）和开环放大系数K的话，则可求得系统的稳态误差。

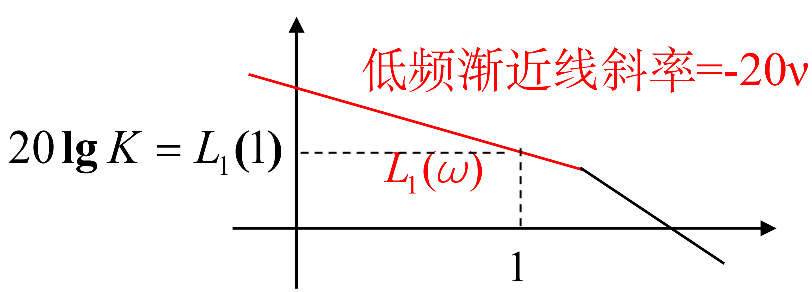
在波德图上，低频渐近线的斜率 λ 和 ν 的关系如下：

由 $\lambda=-20\nu(dB/Dec)$，可求得 ν 值；也可由 $\varphi(\omega)|_{\omega\to 0}=-\nu\cdot\dfrac{\pi}{2}$ ，求 ν。

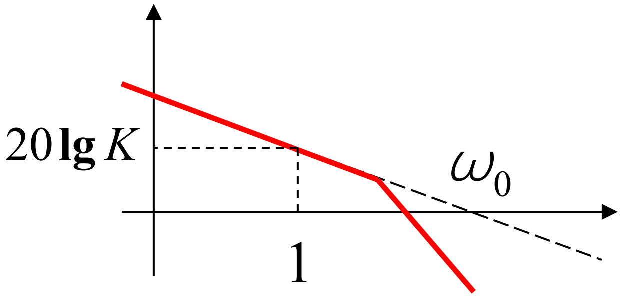
开环放大系数K的求法有两种：

①低频渐近线为： $L_1(\omega)=20\lg\left|\dfrac{k}{(j\omega)^{\nu}}\right|=20\lg K-20\nu\lg\omega$

当 $\omega=1$ 时，有：$L_1(1)=20\lg K$ ，故：$K=10^{\frac{L_1(1)}{20}}$



②当$\nu \geq 1$时，K也可由$L_1(\omega)$与横轴的交点 ω_0来求。



当$\omega = \omega_0$时，$L(\omega_0) = 0$， 有：

$$0 = 20\lg K - 20\nu\lg\omega_0, \therefore K = \omega_0^{\nu}$$

二、时域性能指标

在时域分析中，性能指标一般是最大超调量σ%、调节时间t_s、峰值时间t_p等。

1. 对一阶系统而言，性能指标只有t_s。

$$t_s \approx \begin{cases} 4T, & \text{当}\,\Delta = 2\%\text{时} \\ 3T, & \text{当}\,\Delta = 5\%\text{时} \end{cases}$$

2. 对二阶系统而言，系统可根据阻尼系数ζ的不同分为：

① 无阻尼系统(ζ=0)

② 欠阻尼系统(0<ζ<1)

③ 临界阻尼系统(ζ=1)

④ 过阻尼系统(ζ>1)

5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

② 对典型欠阻尼二阶系统而言，性能指标与系统的特征参数有关。欠阻尼二阶系统的特征参数是阻尼系数ζ和无阻尼震荡频率ω_n。

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$\sigma\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

$$t_s \approx \begin{cases} \dfrac{4}{\zeta\omega_n}, & \text{当}\Delta = 2\%\text{时} \\ \dfrac{3}{\zeta\omega_n}, & \text{当}\Delta = 5\%\text{时} \end{cases}$$

③ 对临界阻尼二阶系统而言，性能指标只有t_s。

$$t_s \approx \begin{cases} \dfrac{5.84}{\omega_n}, & \text{当}\Delta = 2\%\text{时} \\ \dfrac{4.75}{\omega_n}, & \text{当}\Delta = 5\%\text{时} \end{cases}$$

5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

④ 对过阻尼二阶系统而言，性能指标只有t_s。

当阻尼系数$1<\zeta<1.25$时，设$T_1>T_2$

$$t_s \approx \begin{cases} 4.2T_1 & \Delta = 2\% \\ 3.3T_1 & \Delta = 5\% \end{cases}$$

当阻尼系数$\zeta>1.25$时，设$T_1>T_2$

$$t_s \approx \begin{cases} 4T_1 & \Delta = 2\% \\ 3T_1 & \Delta = 5\% \end{cases}$$

3. 对高阶系统，如果有**主导极点**存在，也可利用上述公式进行计算。

三、频域性能指标

（一）、开环频率特性性能指标

① 幅值稳定裕度 $K_g(L_g)$

系统开环相频特性为－180°时，系统开环频率特性幅值的倒数定义为幅值稳定裕度。所对应的频率ω_g称为相角穿越频率。即$K_g=1/A(\omega_g)$， ω_g满足$\varphi(\omega_g)=-180°$。实际中常用对数幅值稳定裕度$L_g=-20\lg A(\omega_g)$。

② 相角稳定裕度γ

系统开环频率特性的幅值为1时，系统开环频率特性的相角与180°之和定义为相角稳定裕度，所对应的频率ω_c称为幅值穿越频率或系统截止频率。即$\gamma=180°+\varphi(\omega_c)$， ω_c满足$A(\omega_c)=1$

（二）、闭环频率特性性能指标

设单位反馈系统的开环传递函数和开环频率特性为

$$G(s)=\frac{K}{s^{\nu}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m}(1+\tau_i s)}{\prod_{j=1}^{n-\nu}(1+T_j s)}\qquad G(j\omega)=\frac{K}{(j\omega)^{\nu}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m}(1+\tau_i\omega j)}{\prod_{j=1}^{n-\nu}(1+T_j\omega j)}$$

闭环传递函数和频率特性可表示为:

$$\Phi(s)=\frac{G_K(s)}{1+G_K(s)}=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(1+\tau_i s)}{s^{\nu}\prod_{j=1}^{n-\nu}(1+T_j s)+K\prod_{i=1}^{m}(1+\tau_i s)}$$

$$\Phi(j\omega)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(1+\tau_i\omega j)}{(j\omega)^{\nu}\prod_{j=1}^{n-\nu}(1+T_j\omega j)+K\prod_{i=1}^{m}(1+\tau_i\omega j)}$$

$$M(\omega)=\left|\Phi(j\omega)\right|$$

5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

① 零频值 M(0)：闭环幅频特性的零频值

在单位阶跃输入信号时，根据终值定理，可得系统时域的响应终值

$$c(\infty)=\lim_{t\to\infty}c(t)=\lim_{s\to 0}s\,\Phi(s)\frac{1}{s}=\lim_{\omega\to 0}\left|\Phi(\omega)\right|=M(0)$$

系统的稳态误差为

$$e_{ssr}=1-M(0)$$

当v=0时 $M(0)=\dfrac{K}{1+K}<1$ $\qquad e_{ssr}=1-M(0)=\dfrac{1}{1+K}$

K越大稳态误差越小，M(0)越接近于1。

当v>0时 $M(0)=1$ $\qquad e_{ssr}=1-M(0)=0$

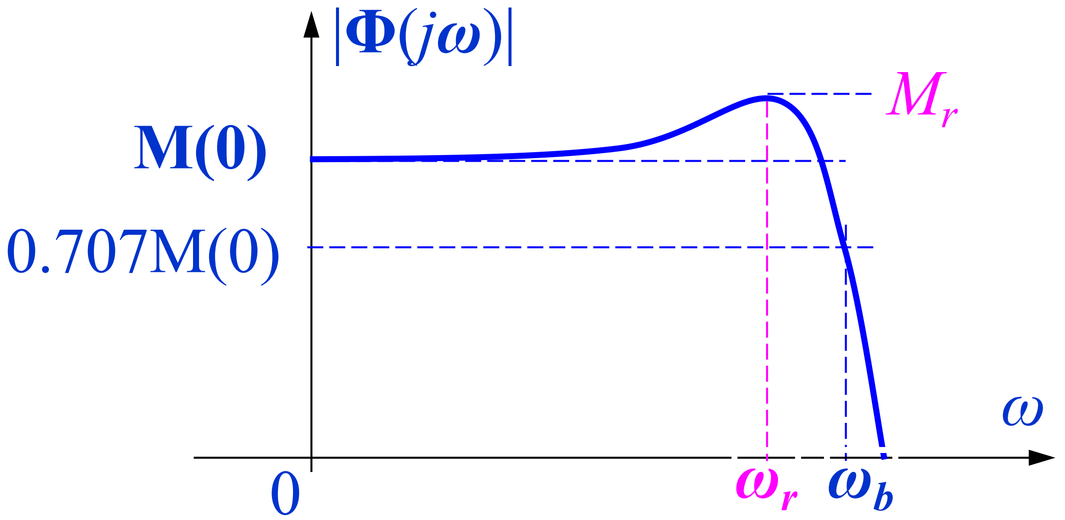
所以对单位反馈系统而言，可根据闭环频率特性的零频值M(0)来确定系统的稳态误差。

5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

② 谐振峰值M_r：系统闭环频率特性幅值的最大值。

③ 谐振频率ω_r：系统闭环频率特性幅值出现最大值时的频率。

④ 系统带宽和带宽频率ω_b：设 $M(j\omega)$为系统的闭环频率特性，当幅频特性$|M(j\omega)|$下降到 $\frac{\sqrt{2}}{2}|M(0)|$时，对应的频率 ω_b称为带宽频率。频率范围 $\omega\in[0,\ \ \omega_b]$称为系统带宽。



三、频率特性的重要性质

1. 频率尺度与时间尺度的反比关系

若有两个系统的频率特性$\Phi_1(j\omega)$和$\Phi_2(j\omega)$有如下关系

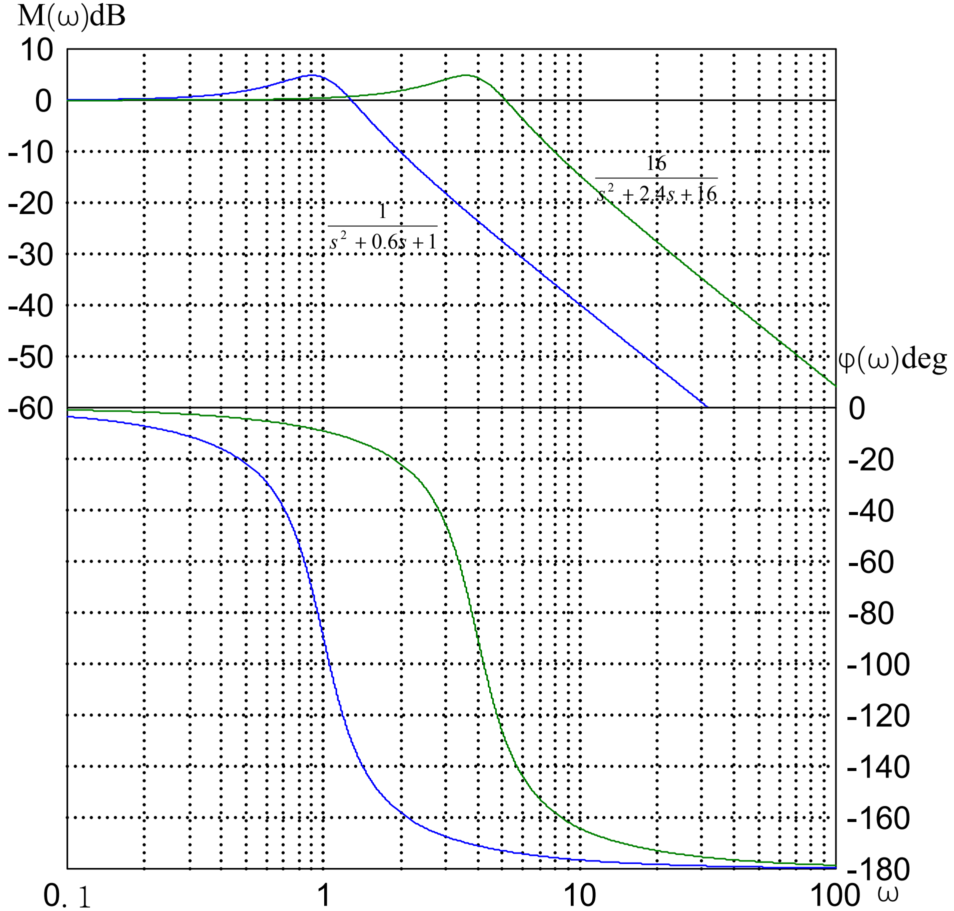
$$\Phi_1(j\omega)=\Phi_2(j\frac{\omega}{a}) \qquad a>0$$

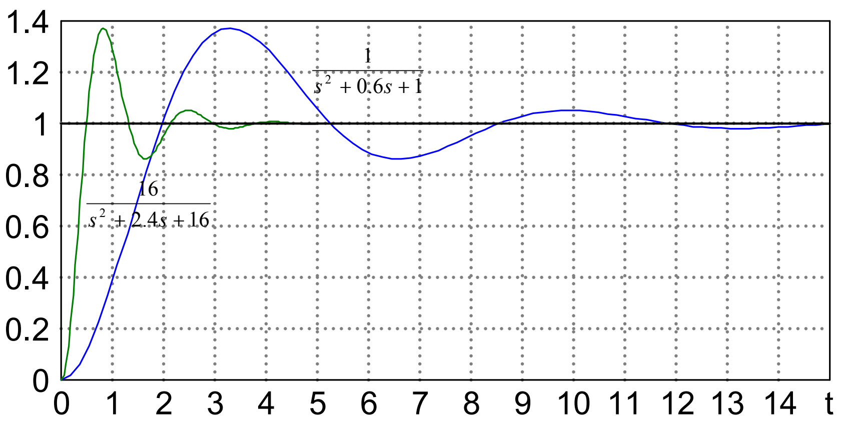
则两个系统的阶跃响应有如下关系

$$h_1(t)=h_2(at)$$

说明：闭环频率特性展宽多少倍，输出响应将加快多少倍。

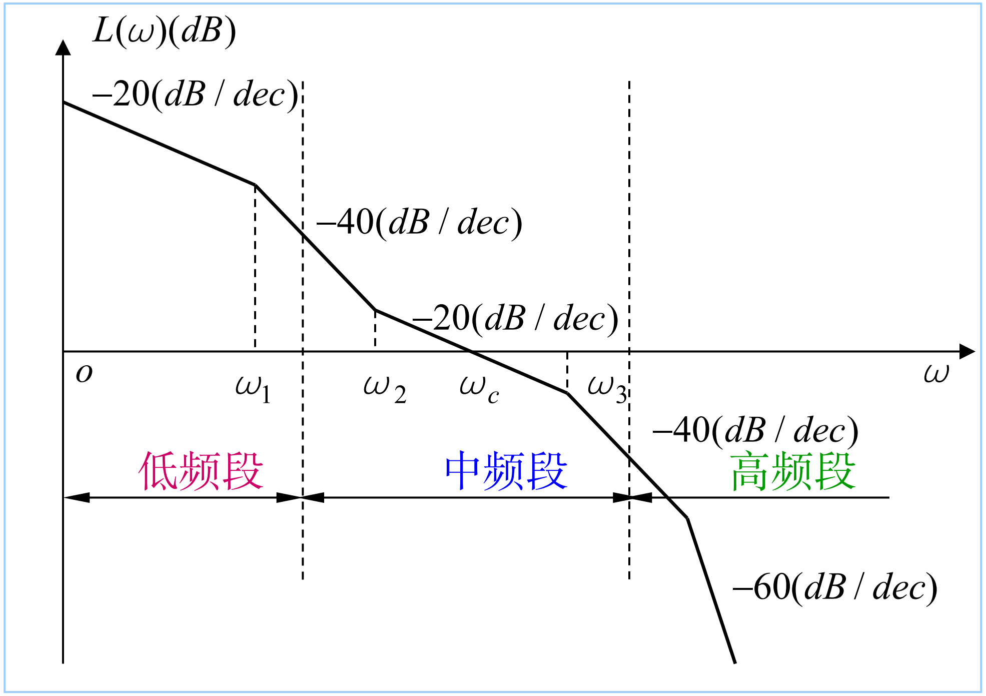
5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系





2. 开环频率特性与闭环系统性能的关系

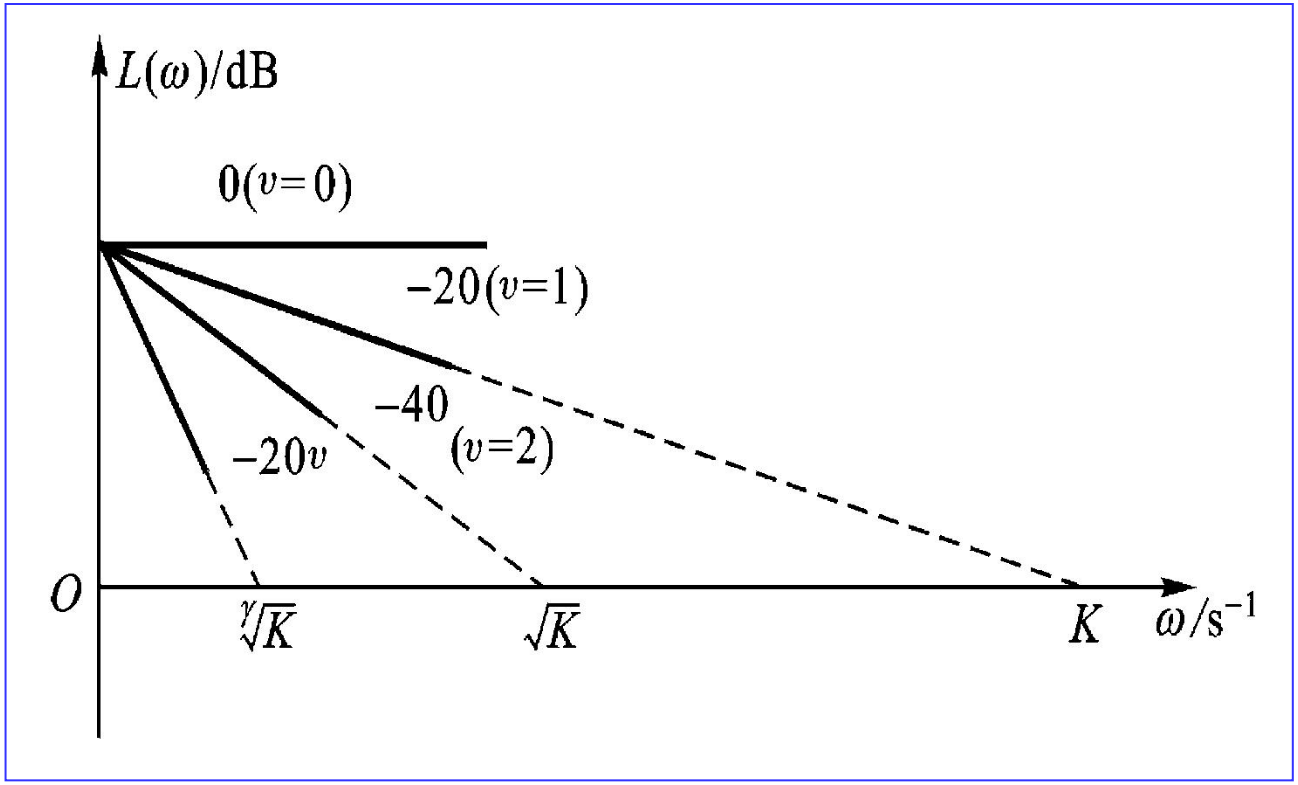
在分析控制系统的开环对数幅相频率特性时，习惯上将频率范围分为三个频段：低频段、中频段和高频段。其中低频段反映了控制系统的静态特性；中频段则反映了系统的动态特性；高频段则主要反映了系统的抗干扰能力，对动态性能影响不大。



5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

低频段(远低于幅值穿越频率的区域)， 表征了闭环系统的稳态特性;

主要参数：开环增益K,型别v



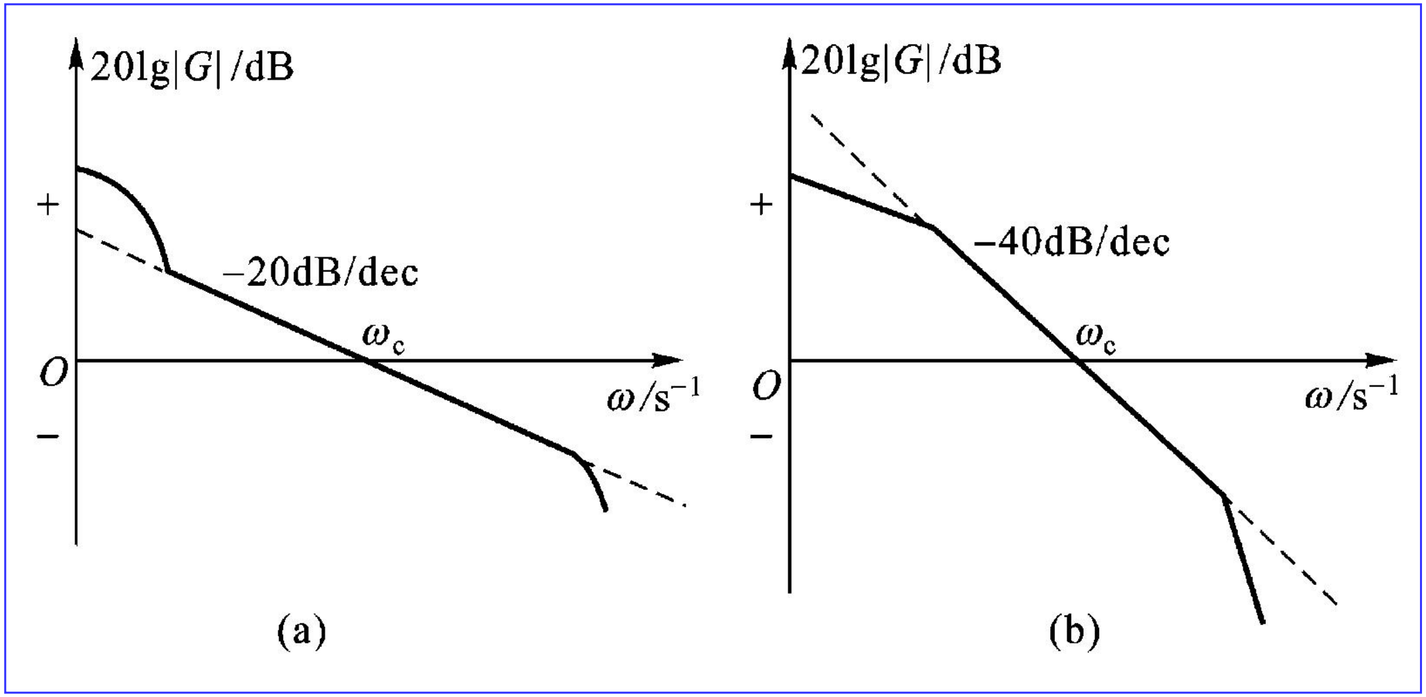
5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

中频段(靠近幅值穿越频率的区域)，表征了闭环系统的稳定性和瞬态性能。

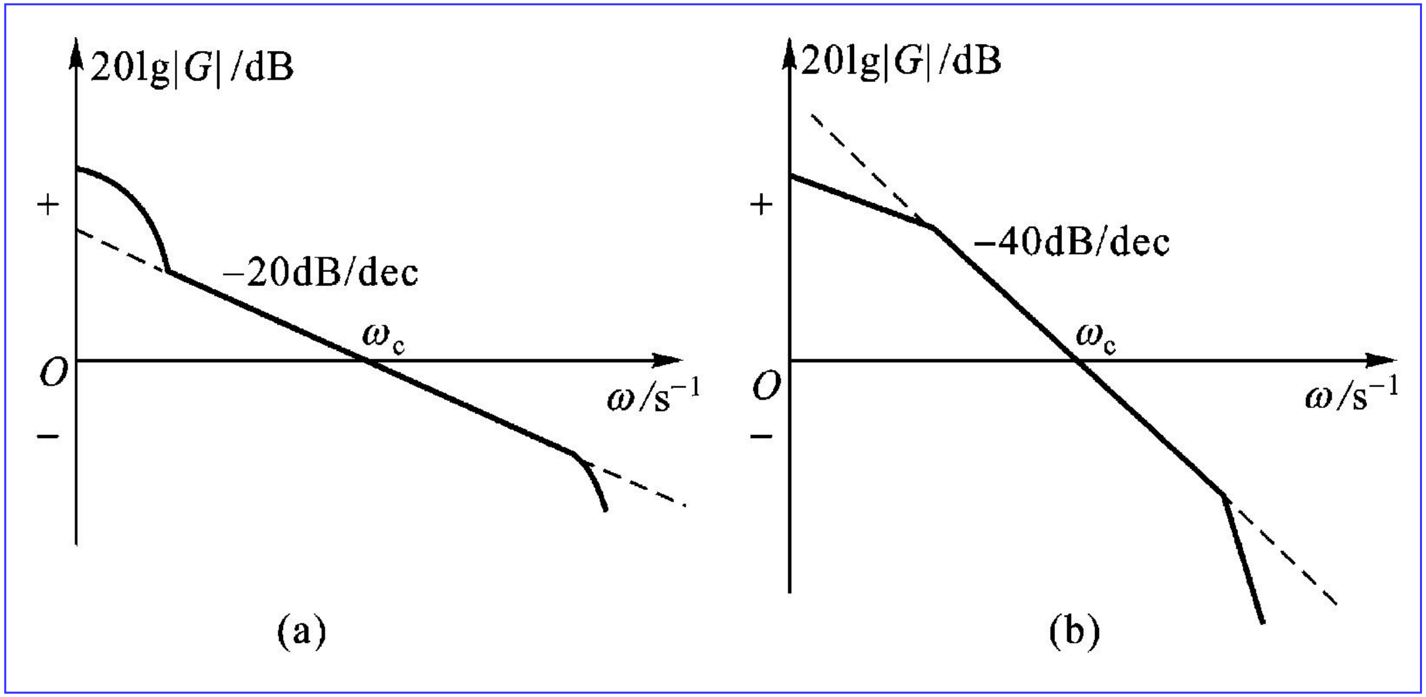
主要参数：剪切频率ω_c、相位裕量γ和中频宽度h。

中频宽度h一般定义在斜率等于－20dB/dec且靠近ω_c处：

$$h=\frac{\omega_3}{\omega_2}$$



➤ 一般要求最小相位系统的开环对数幅频特性在ω_c处的斜率等于-20dB/dec。如果在该处的斜率等于或小于为-40dB/dec，则对应的系统可能不稳定，或者系统即使稳定，但因相位裕量较小，系统的稳定性也较差。



5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

高频段(远高于幅值穿越频率的区域)，直接反映了系统对输入高频干扰信号的抑制能力；希望高频段分贝值低，抗干扰能力强。

$$|\Phi(j\omega)| = \left|\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}\right| \approx |G(j\omega)|$$

三个频段的划分并没有严格的确定准则，但是三频段的概念，为直接运用开环特性判别稳定的闭环系统的动态性能指出了原则和方向。

Note：

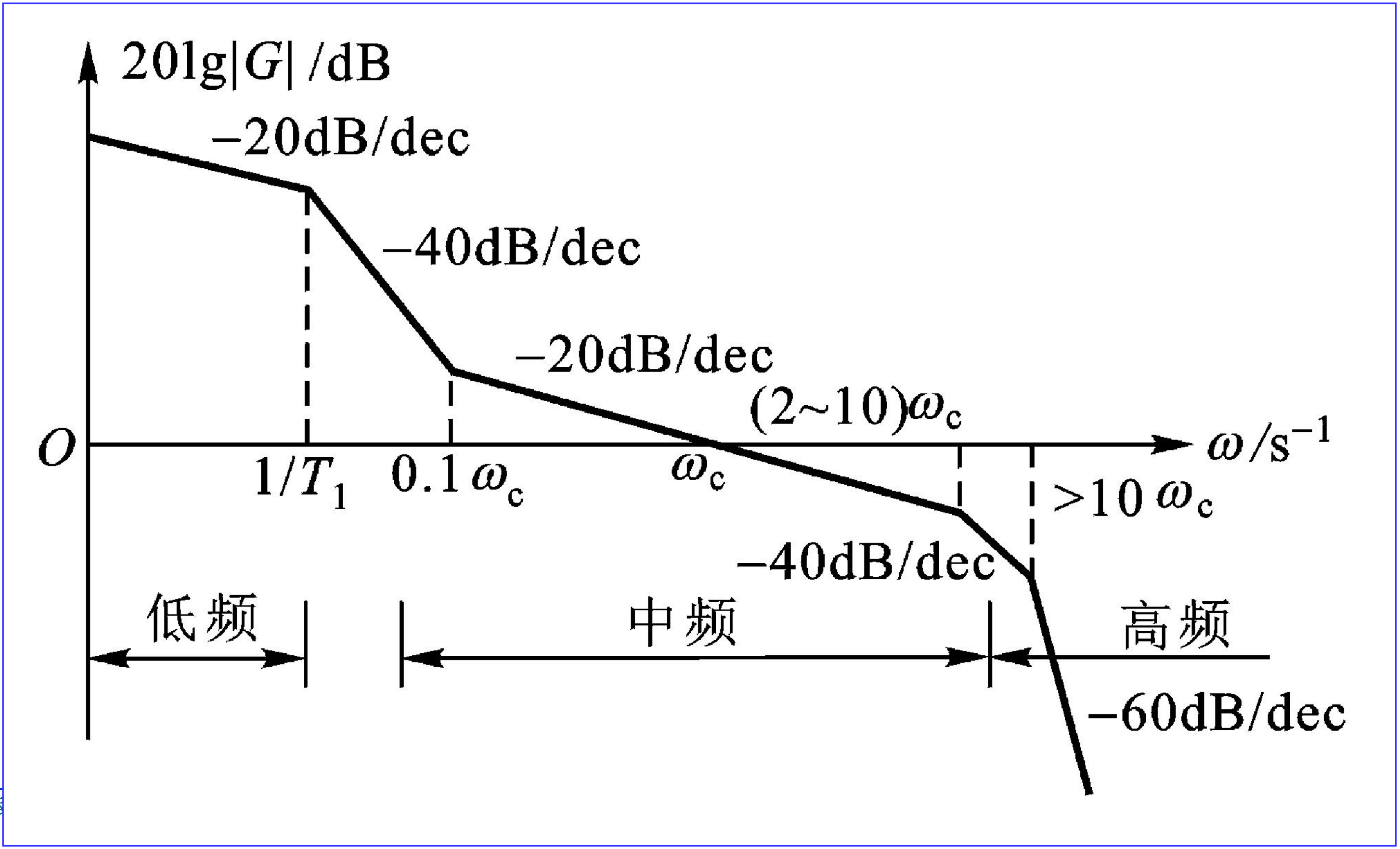
① 各频段分界线没有明确的划分标准；

② 与无线电的“低”、“中”、“高”频概念不同；

③ 不能以是否以-1斜率穿越0dB线判定闭环系统是否稳定；

④ 只适用于单位反馈的最小相位系统。

系统开环对数幅频渐近特性曲线



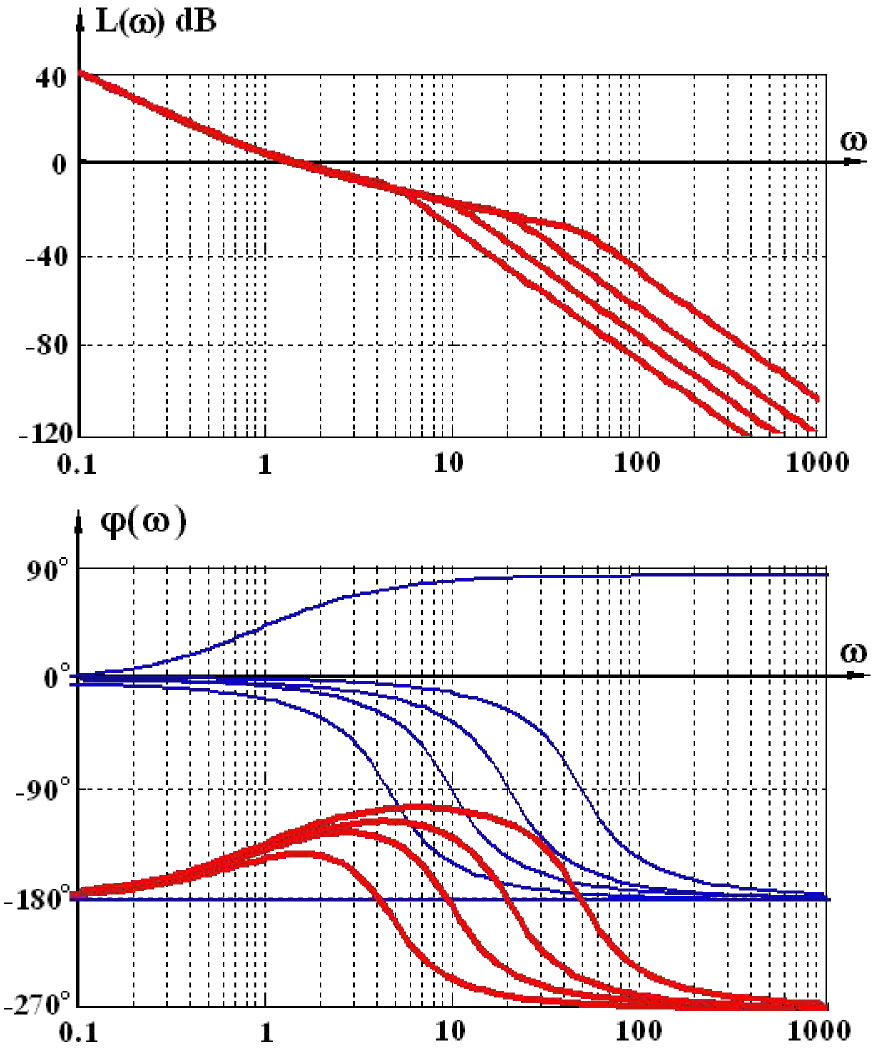
例1 最小相角系统 φ (ω) ~ L(ω) 之间的对应关系 (K=1)

$$G_1(s)=\frac{K(s+1)}{s^2[(\frac{s}{5})^2+(\frac{s}{5})+1]}$$

$$G_2(s)=\frac{K(s+1)}{s^2[(\frac{s}{10})^2+(\frac{s}{10})+1]}$$

$$G_3(s)=\frac{K(s+1)}{s^2[(\frac{s}{20})^2+(\frac{s}{20})+1]}$$

$$G_4(s)=\frac{K(s+1)}{s^2[(\frac{s}{50})^2+(\frac{s}{50})+1]}$$



时域因果性与频域希尔伯特性对应关系

因果系统的冲激响应满足 $\boxed{h(t)=h(t)u(t)}$

$$H(j\omega)=R(\omega)+jX(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left\{\left[R(\omega)+jX(\omega)\right]*\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]\right\}$$

希尔伯特变换对

$$\boxed{\begin{cases}R(\omega)=\dfrac{1}{\pi}X(\omega)*\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{X(\lambda)}{\omega-\lambda}d\lambda\\ X(\omega)=-\dfrac{1}{\pi}R(\omega)*\dfrac{1}{\omega}=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R(\lambda)}{\omega-\lambda}d\lambda\end{cases}}$$

5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

- 可逆的因果稳定系统是最小相位系统。最小相位系统的对数幅度函数与相位函数构成一个希尔伯特变换对，即

$$\begin{cases} \ln\left|H(j\omega)\right| = \dfrac{1}{\pi}\varphi(j\omega) * \dfrac{1}{\omega} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\varphi(j\lambda)}{\omega-\lambda}d\lambda \\ \varphi(j\omega) = -\dfrac{1}{\pi}\ln\left|H(j\omega)\right| * \dfrac{1}{\omega} = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\ln\left|H(j\lambda)\right|}{\omega-\lambda}d\lambda \end{cases}$$

四、典型二阶系统的频域指标与瞬态性能指标的关系

典型二阶系统开环传递函数为： $G_k(s)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\zeta\omega_n)}$

开环频率特性为： $G_k(j\omega)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{(j\omega)(j\omega+2\zeta\omega_n)}$

开环幅频特性为： $A(\omega)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{\sqrt{(\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}$

开环相频特性为： $\varphi(\omega)=-90°-\arctan\dfrac{\omega}{2\zeta\omega_n}=-180°+\arctan\dfrac{2\zeta\omega_n}{\omega}$

令A(ω)=1，可求得幅值穿越频率 $\omega_c=\omega_n\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}$

代入φ(ω)，得 $\varphi(\omega_c)=-180°+\arctan\dfrac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}}$

系统的**相角裕量** $\gamma=\arctan\dfrac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}}$

5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

闭环传递函数为： $\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$

闭环频率特性为： $\Phi(j\omega)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^{\ 2}}$

闭环幅频特性为： $M(\omega)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{\sqrt{(\omega_n^{\ 2}-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}}$

令 $\dfrac{dM}{d\omega}=0$ ， 可得当 $0<\zeta<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时

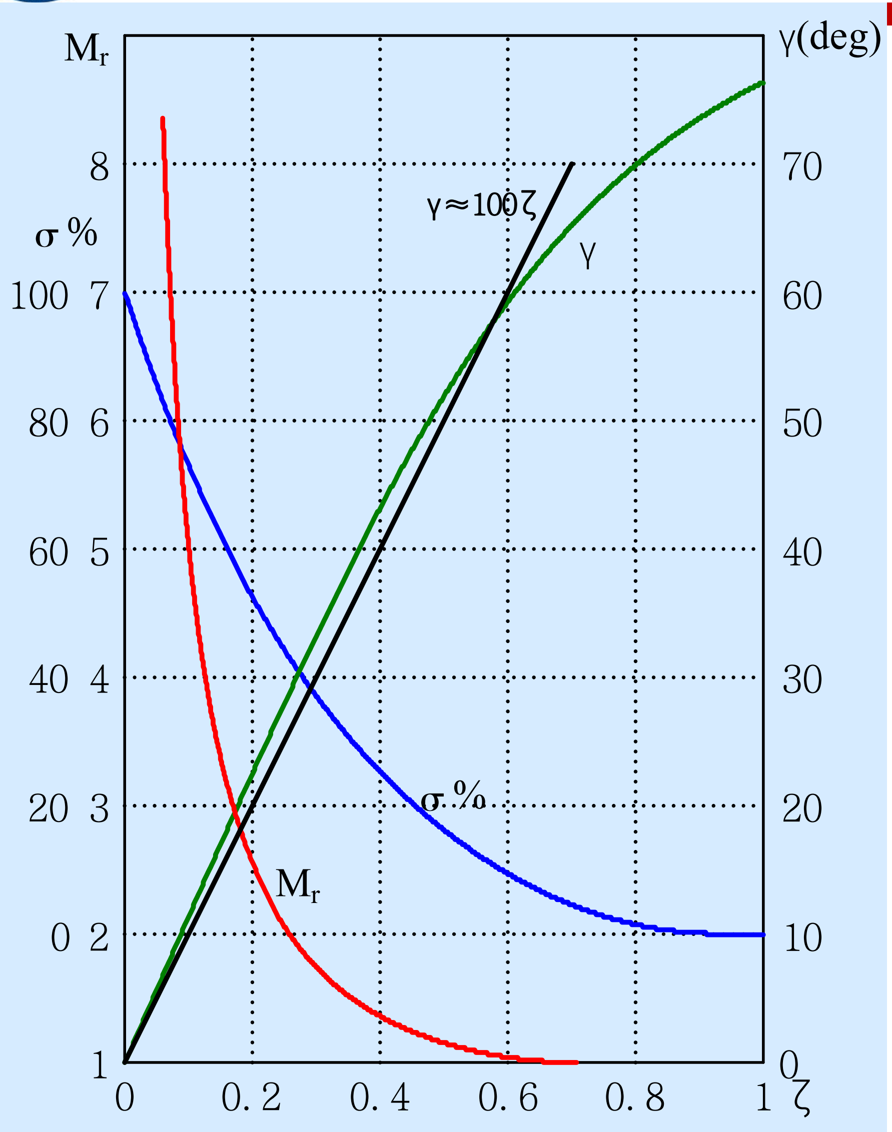
$$\boxed{\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}}$$

$$\boxed{M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

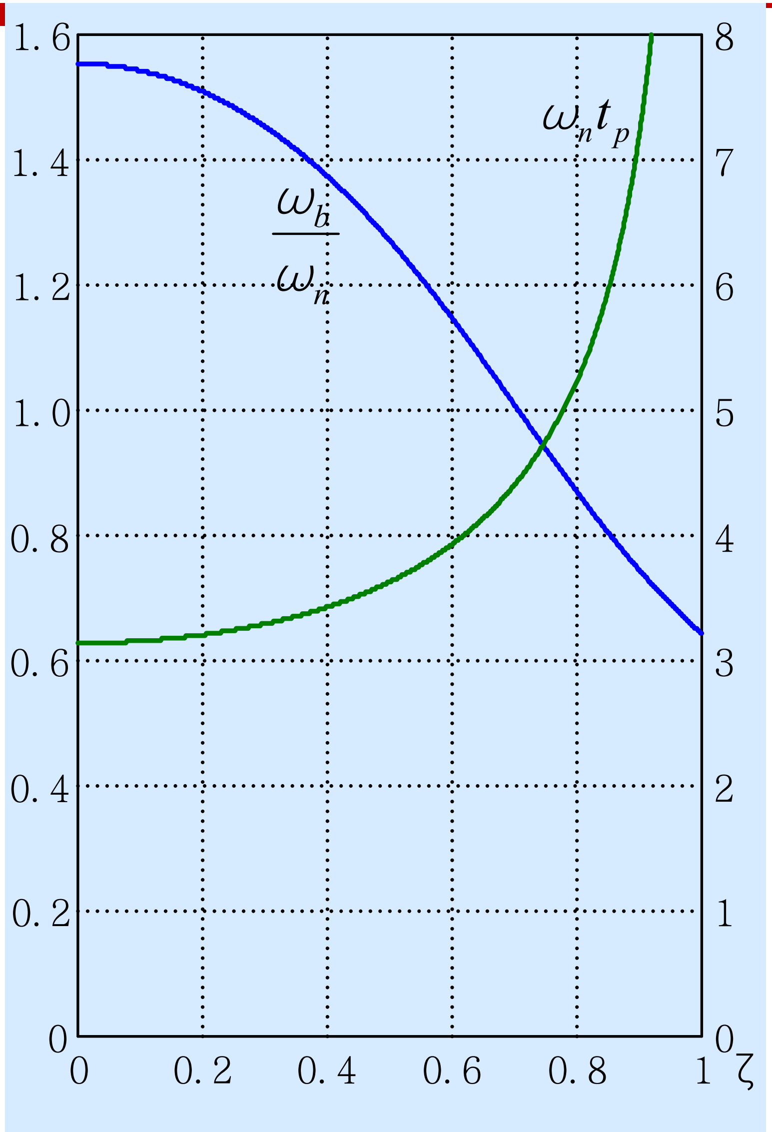
令 $M(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}M(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时， 可得带宽频率 ω_b

$$\boxed{\omega_b=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}}$$

5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

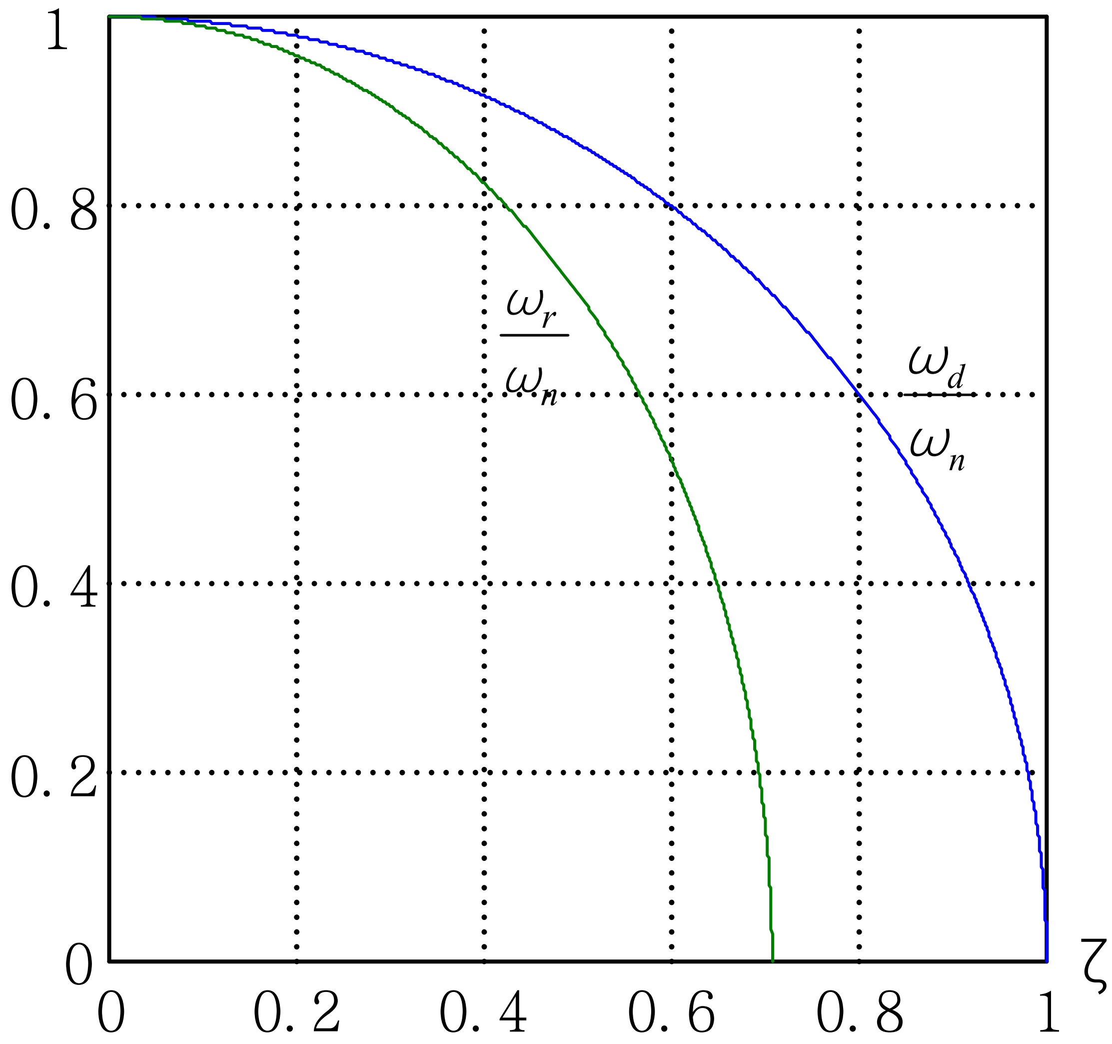


σ %、M_r和γ与ζ的关系



ω_n和ω_b与ζ的关系

5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系



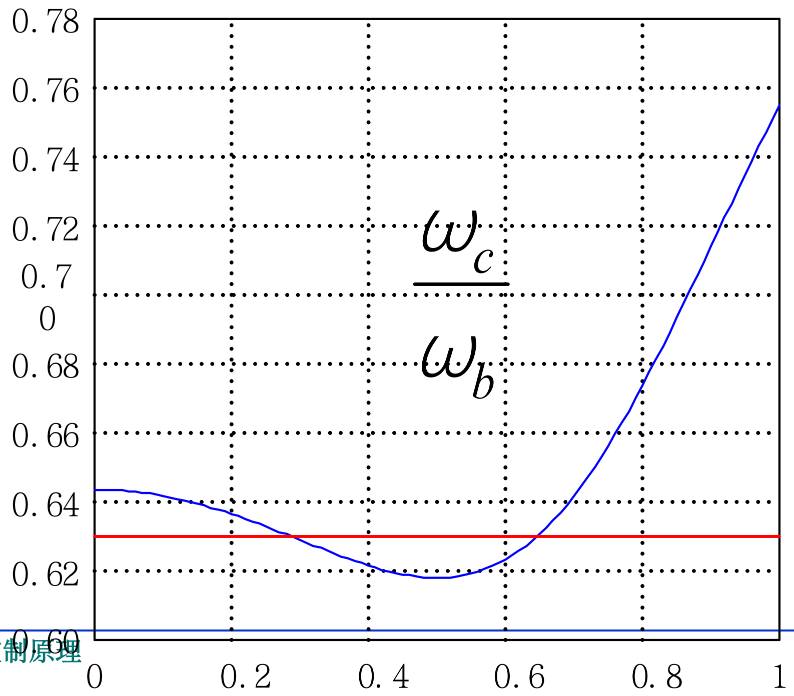
ω_r和ω_d与ζ的关系

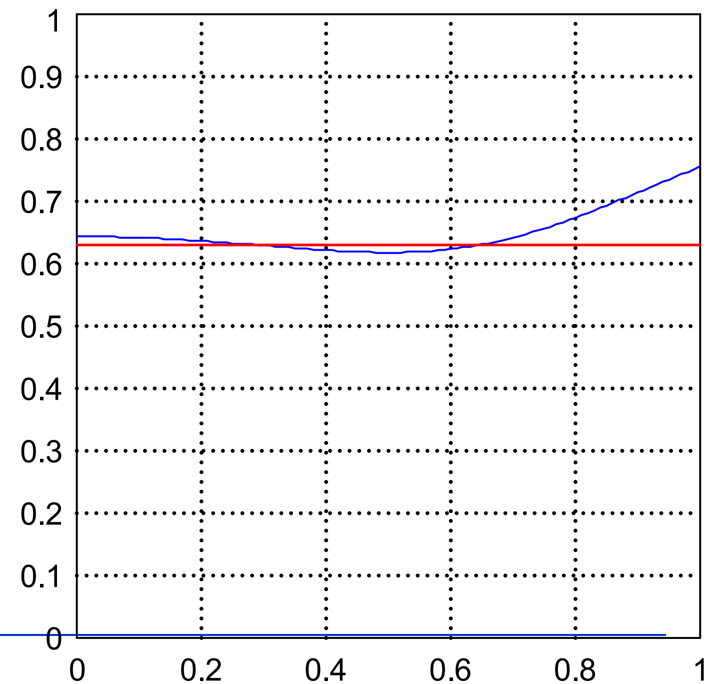
5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

$$\frac{\omega_c}{\omega_b} = \sqrt{\left(\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2\right) \Big/ \left(\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}-1+2\zeta^2\right)}$$

$\omega_c \approx 0.63\omega_b$

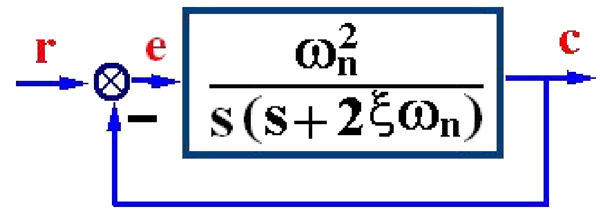
ζ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
γ	0	12	24	35	45	53	61	65.2	72	75	78
ωc/ωb	0.644	0.642	0.636	0.629	0.622	0.618	0.623	0.644	0.674	0.714	0.755





5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

$$\left.\begin{aligned}\gamma &= \arctan\frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}} \\ \sigma\% &= e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\end{aligned}\right\} \quad \gamma \Leftrightarrow \xi \Leftrightarrow \sigma\%$$

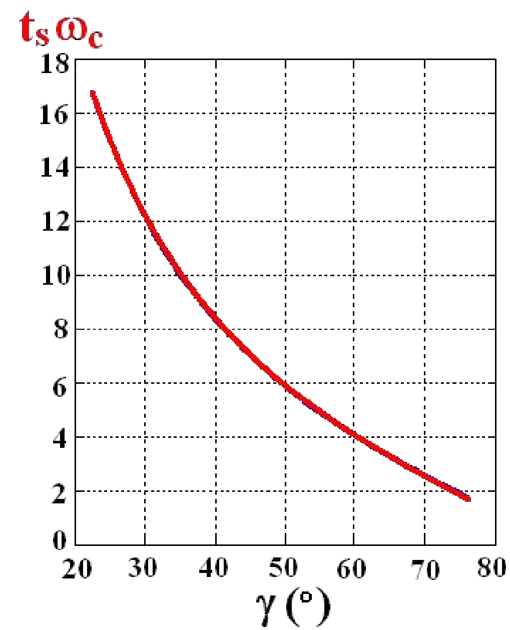


$$G(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

$$t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n}$$

$$t_s\omega_c = \frac{3.5}{\xi}\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}$$

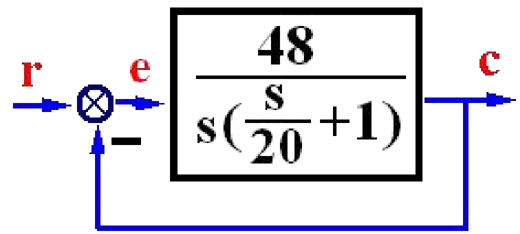
$$= 7\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}}{2\xi} = \frac{7}{\tan\gamma}$$

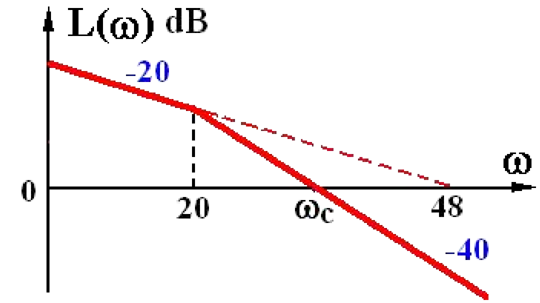


5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

例1 已知系统结构图，求ωc，并确定σ%, ts。

解. 绘制L(ω)曲线





$$\omega_c=\sqrt{20\times 48}=31$$

$$\gamma=180^\circ-90^\circ-\arctan\frac{31}{20}$$

$$=90^\circ-57.2^\circ=32.8^\circ$$

$$\sigma\%\ \underset{\xi=0.29}{\overset{\gamma=32.8^\circ}{=}}\ 37\%$$

$$t_s\omega_c=\frac{7}{\tan\gamma}=10.85$$

$$t_s=\frac{10.85}{\omega_c}=0.35$$

按时域方法:

$$G(s)=\frac{48}{s(s/20+1)}=\frac{48\times 20}{s(s+20)}$$

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{960}{s^2+20s+960}$$

$$\begin{cases}\omega_n\sqrt{960}=31\\ \xi=\dfrac{20}{2\times 31}=0.3226\end{cases}$$

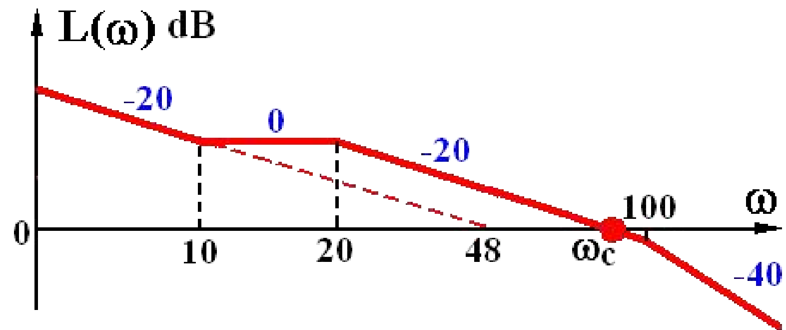
$$\sigma\%=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}=35.3\%$$

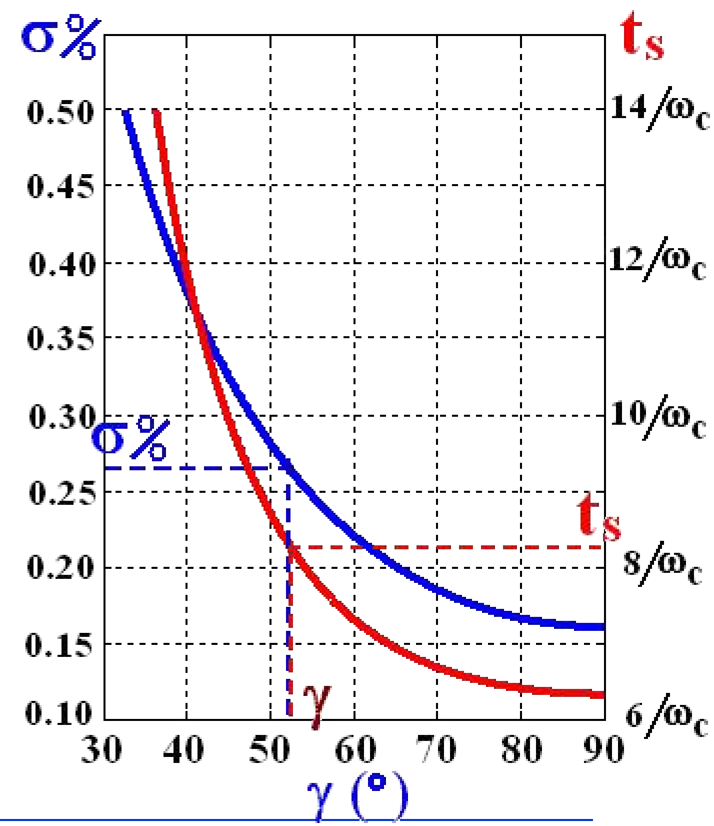
$$t_s=\frac{3.5}{\xi\omega_n}=\frac{3.5}{10}=0.35$$

(2) 高阶系统

$$\begin{cases} \sigma\% = \left[0.16 + 0.4\left(\dfrac{1}{\sin\gamma} - 1\right)\right] \times 100\% \\ t_s = \dfrac{\pi}{\omega_c}\left[2 + 1.5\left(\dfrac{1}{\sin\gamma} - 1\right) + 2.5\left(\dfrac{1}{\sin\gamma} - 1\right)^2\right] \end{cases}$$

$$(35^\circ \le \gamma \le 90^\circ)$$





$$L(\omega) \Rightarrow \omega_c \Rightarrow \gamma \xrightarrow[\text{P173 图5-56}]{} \sigma\%$$

$$\omega_c \Rightarrow t_s = \frac{a}{\omega_c}$$

5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

例： 一系统的开环传递函数为

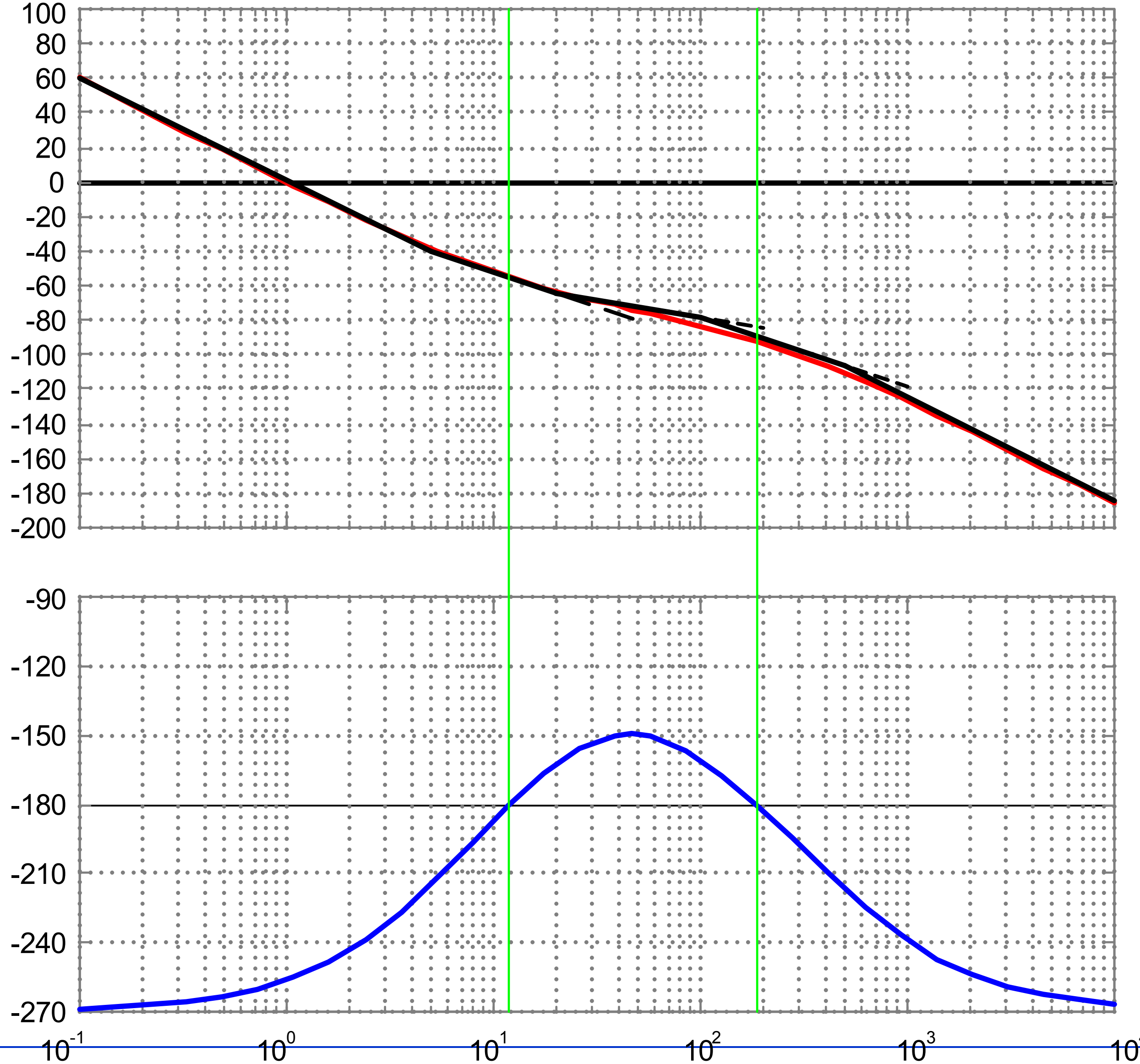
$$G_K(s)=\frac{K(1+0.2s)(1+0.05s)}{s^3(1+0.01s)(1+0.002s)}$$

当K=1时

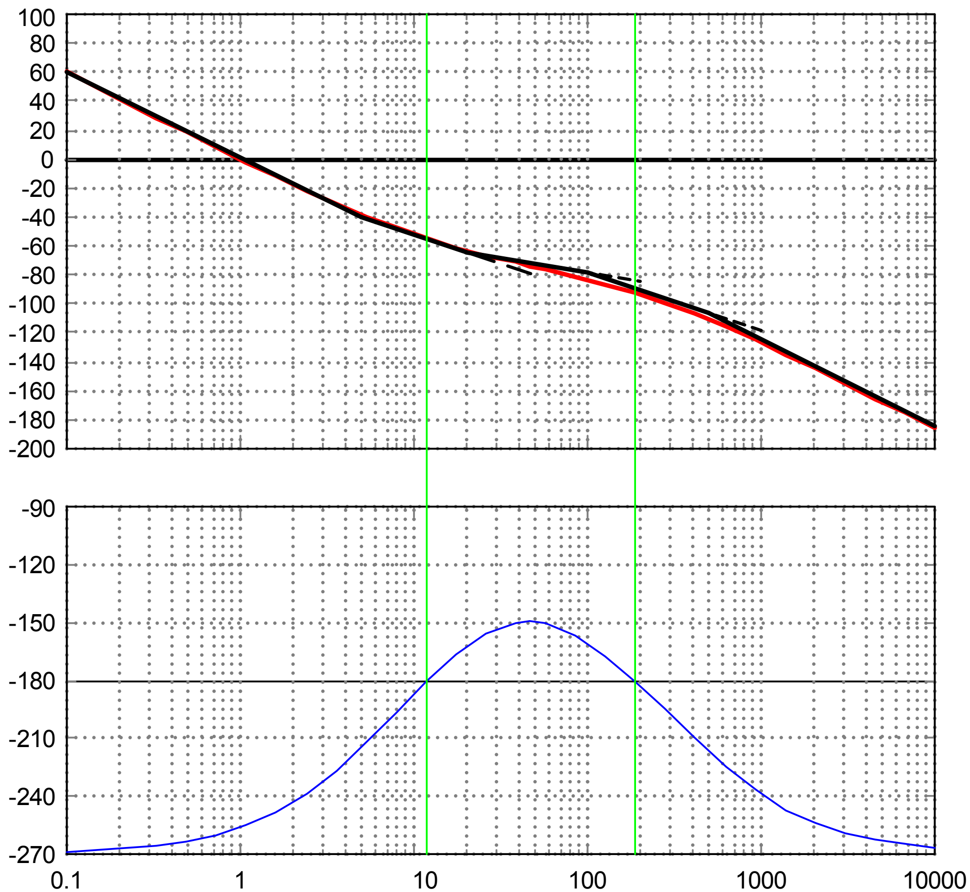
$$L(\omega)=20\lg K+20\lg\sqrt{1+(0.2\omega)^2}+20\lg\sqrt{1+(0.05\omega)^2}$$
$$-60\lg\omega-20\lg\sqrt{1+(0.01\omega)^2}-20\lg\sqrt{1+(0.002\omega)^2}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan(0.2\omega)+\arctan(0.05\omega)-270^\circ-\arctan(0.01\omega)-\arctan(0.002\omega)$$

5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系



5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系



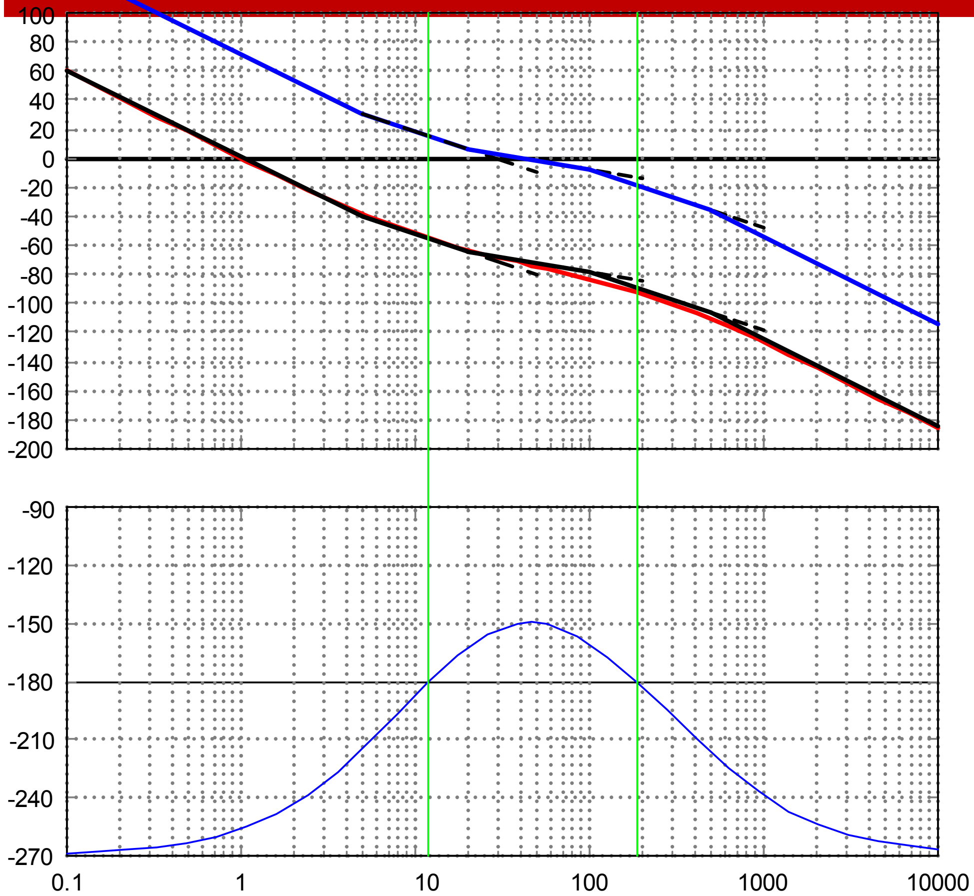
此时，$\omega_c=1$，$\varphi(\omega_c)<-180°$，系统不稳定

改变K值，就可改变ω_c值，从而改变$\varphi(\omega_c)$及γ值。

一般而言，当$L(\omega)$在ω_c处的斜率处于-20dB/dec时，系统是稳定的；当$L(\omega)$在ω_c处的斜率处于-40dB/dec时，系统可能稳定也可能不稳定，即使稳定，γ也是较小的；当$L(\omega)$在ω_c处的斜率处于-60dB/dec时，系统则肯定是不稳定的。

为使系统具有一定的相位裕量在系统设计时，应使ω_c处于$L(\omega)$的斜率-20dB/dec的段内。

5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系



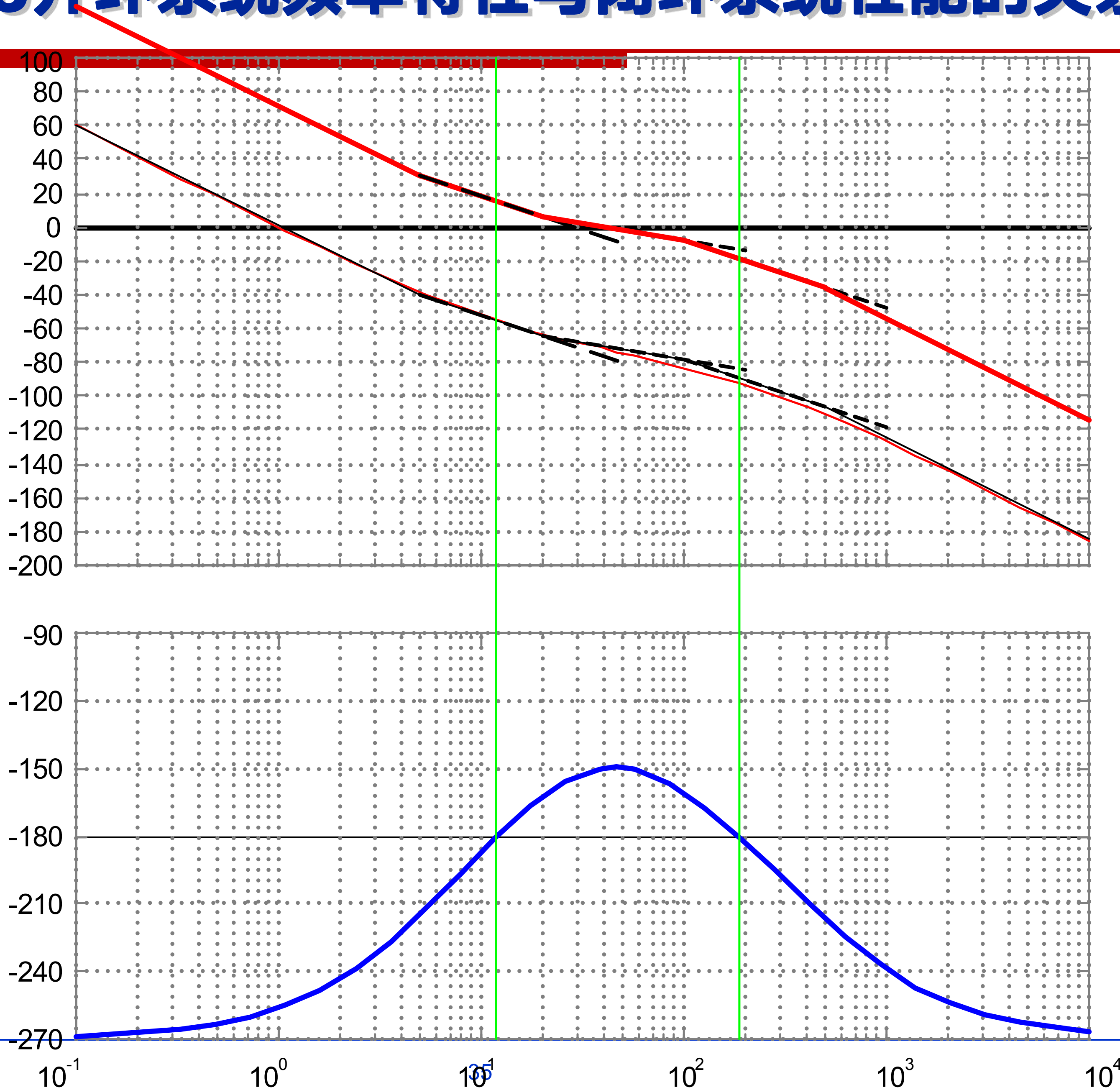
此时，$\omega_c=1$，$\varphi(\omega_c)<-180°$，系统不稳定

改变K值，就可改变ω_c值，从而改变$\varphi(\omega_c)$及γ值。

一般而言，当$L(\omega)$在ω_c处的斜率处于-20dB/dec时，系统是稳定的；当$L(\omega)$在ω_c处的斜率处于-40dB/dec时，系统可能稳定也可能不稳定，即使稳定，γ也是较小的；当$L(\omega)$在ω_c处的斜率处于-60dB/dec时，系统则肯定是不稳定的。

为使系统具有一定的相位裕量在系统设计时，应使ω_c处于$L(\omega)$的斜率-20dB/dec的段内。

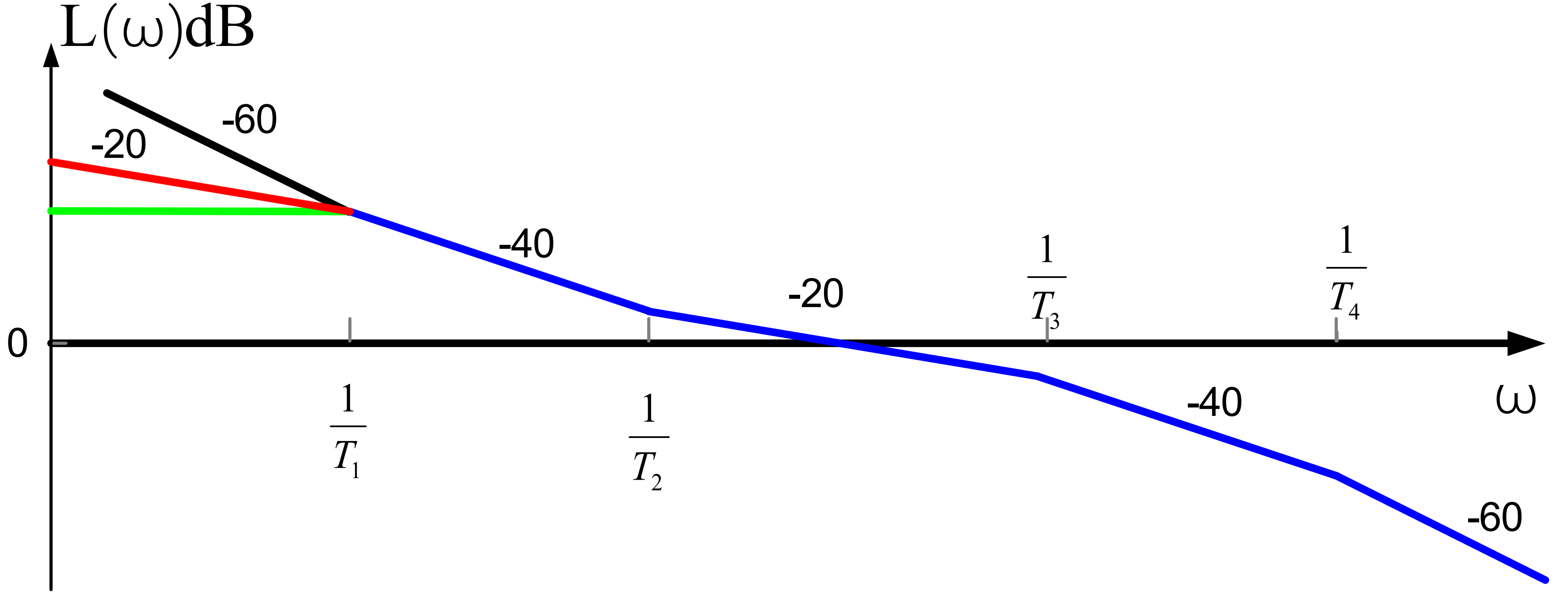
5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系



5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

$$G_K(s)=\frac{K(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$$

$$G_K(s)=\frac{K(\frac{a}{\omega_c}s+1)}{s(\frac{ab}{\omega_c}s+1)(\frac{1}{c\omega_c}s+1)(\frac{1}{cd\omega_c}s+1)}$$



5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

当a≥2， b≥2， c≥2， d≥1，闭环系统性能可用下式估计

$$t_s \approx (6 \sim 8)\frac{1}{\omega_c} \qquad \sigma\% \approx \frac{0.64+0.16h}{h-1}$$

式中h为中频段宽度， $h=\frac{T_2}{T_3}$

开、闭环频率性能指标有如下关系

$$\gamma = \arcsin\frac{h-1}{h+1} \qquad M_r = \frac{h+1}{h-1} \qquad h = \frac{M_r+1}{M_r-1} \qquad M_r = \frac{1}{\sin\gamma}$$

闭环系统性能也可用下式估计

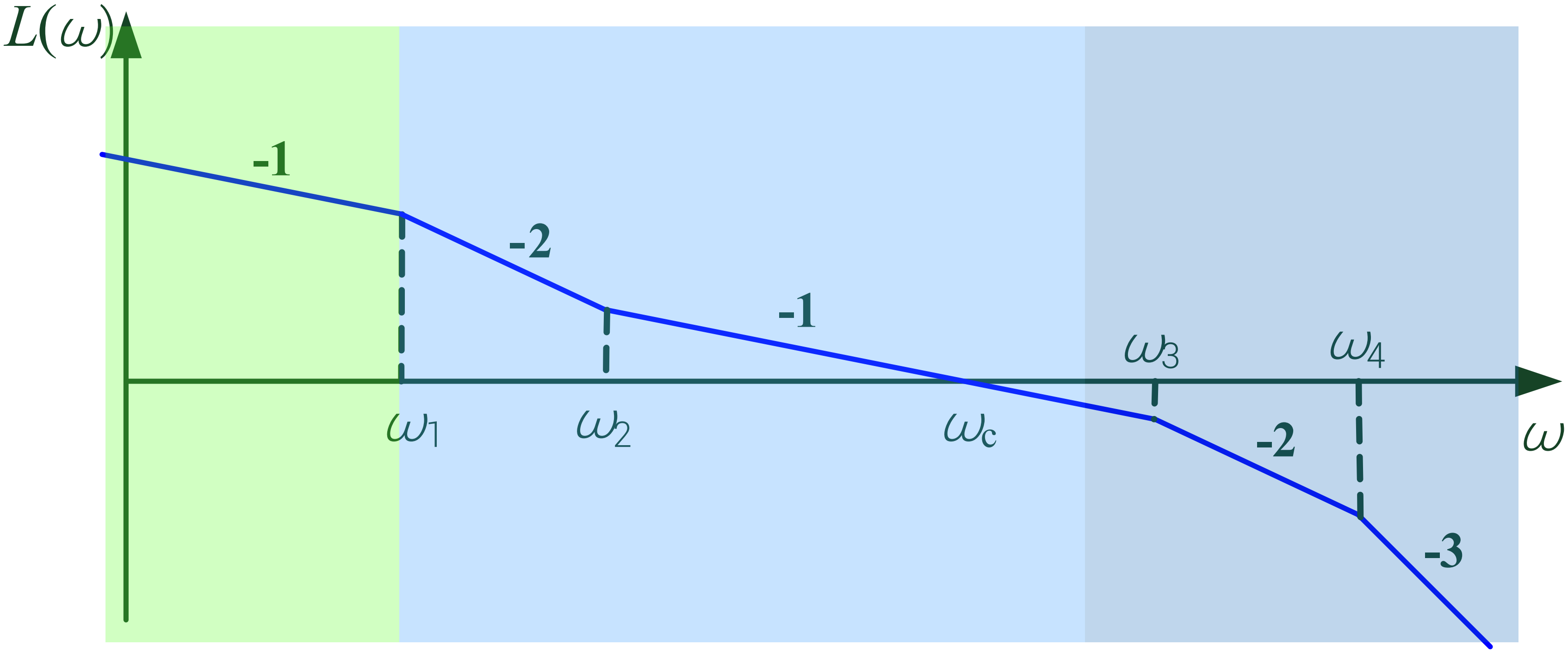
$$\sigma\% \approx 0.16 + 0.4(M_r-1) \qquad 1 \le M_r \le 1.8$$

$$t_s \approx \frac{k\pi}{\omega_c} \qquad k = 2+1.5(M_r-1)+2.5(M_r-1)^2 \qquad 1 \le M_r \le 1.8$$

5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

‘三频段’理论

- $L(\omega)$低频渐近线与系统稳态误差的关系
- $L(\omega)$中频段特性与系统动态性能的关系
- $L(\omega)$高频段特性与系统抗高频干扰能力的关系



5.6开环系统频率特性与闭环系统性能的关系

$L(\omega)$

频段	对应性能		希望形状
低频段	开环增益 K；系统型别 v	稳态误差 e_{ss}	陡，高
中频段	截止频率 ω_c；相角裕度 γ	动态性能：$\sigma\%$，t_s	缓，宽
高频段	系统抗高频干扰的能力		低，陡

三频段理论并没有为我们提供设计系统的具体步骤，但它给出了调整系统结构、改善系统性能的原则和方向

Note：

① 各频段分界线没有明确的划分标准；

② 不能以是否以-20dB/dec斜率穿越0dB线判定闭环系统是否稳定；

③ 只适用于单位反馈的最小相位系统。

$$\begin{matrix} L(\omega) \\ \varphi(\omega) \end{matrix} \xrightarrow{\text{最小相角}} G(s) \xrightarrow{\text{单位反馈}} \Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \Longrightarrow \text{动态性能}$$

小结

- 稳态性能

  开环放大系数的求解

  稳态误差

- 时域性能指标

- 频域性能指标

  开环：幅值稳定裕度，相角稳定裕度

  闭环：零频值，谐振峰值，谐振频率， 系统带宽和带宽频率

- 频率特性与系统性能的关系

- 典型二阶系统的频域指标与瞬态性能指标的关系

Thank You !