第二章 控制系统的数学模型

拉普拉斯变换复习

一、定义：

正变换：
$$F(s) \overset{\text{def}}{=} \int_{0-}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

反变换：
$$f(t) \overset{\text{def}}{=} \left[\frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\,\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s\right]\varepsilon(t)$$

$$f(t) \leftrightarrow \mathrm{F(s)}$$

二、几种典型函数的拉普拉斯变换

1、单位阶跃函数

$$f(t)=1(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{s}$$

2、单位斜坡函数

$$f(t)=\begin{cases}t & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{s^2}$$

3、等加速度函数

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2 & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{s^3}$$

复习：拉普拉斯变换

4、单位脉冲函数

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

5、指数函数

$$f(t)=\begin{cases} e^{at} & t \geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \leftrightarrow \frac{1}{s-a}$$

复习：拉普拉斯变换

6、正弦函数

$$f(t)=\begin{cases}\sin(\omega t) & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}\leftrightarrow\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

余弦函数

$$f(t)=\begin{cases}\cos(\omega t) & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}\leftrightarrow\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

三、常用基本性质

1、线性性质

$$af_1(t)+a_2f_2(t)\longleftrightarrow a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$$

2、微分性质

$$f'(t)\longleftrightarrow sF(s)-f(0\_)$$

$$f^{(n)}(t)\longleftrightarrow s^nF(s)-\sum_{m=0}^{n-1}s^{n-1-m}f^{(m)}(0\_)$$

若f(t)为因果信号，则 $f^{(n)}(t)\longleftrightarrow s^nF(s)$

复习：拉普拉斯变换

3、积分性质

$$\left(\int_{0-}^{t}\right)^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \longleftrightarrow \frac{1}{s^{n}}F(s)$$

$$f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \longleftrightarrow s^{-1}F(s)+s^{-1}f^{(-1)}(0_{-})$$

4、延时性质

$$f(t-\tau) \longleftrightarrow e^{-s\tau}F(s)$$

5、复频移性质

$$e^{at}f(t) \longleftrightarrow F(s-a)$$

复习：拉普拉斯变换

6、卷积定理

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(s)F_2(s)$$

7、初值定理与终值定理

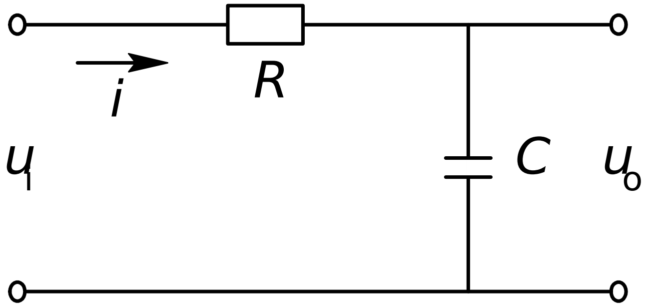
初值定理 $$f(0_+) = \lim_{t \to 0_+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

终值定理 $$f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

2.3 传递函数

一、传递函数的概念和定义

设RC电路如图所示，输入电压为$u_i(t)$，输出电压为$u_o(t)$。



$$RC\frac{du_o}{dt}+u_o=u_i$$

令$RC=T$，上式改写为

$$T\frac{du_o}{dt}+u_o=u_i$$

设初始状态为零，对上式进行拉氏变换，得到：

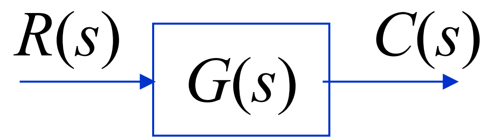
$$TsU_o(s)+U_o(s)=U_i(s)$$

2.3 传递函数

$$TsU_o(s)+U_o(s)=U_i(s)$$

$$(Ts+1)U_o(s)=U_i(s)$$

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\boxed{\frac{1}{Ts+1}}$$



$$G(s)=\left.\frac{C(s)}{R(s)}\right|_{\text{零初始条件下}}$$

<u>定义</u>：零初始条件下，系统输出量的拉普拉斯变换与输入量的拉普拉斯变换之比称为该系统的传递函数。

2.3 传递函数

一般形式:

设线性定常系统（元件）的微分方程是:

$$a_n \frac{d^{(n)}y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{(n-1)}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)$$

$$= b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)$$

$y(t)$为系统的输出，$r(t)$为系统的输入，则零初始条件下，对上式两边取拉普拉斯变换，得到系统的传递函数为:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

分母中s的最高阶次n即为系统的阶次。

$$D(s)=a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0$$

$D(s)=0$即是系统的特征方程。

二、传递函数的标准形式

1.首1标准型（零极点形式）

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{K^*\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=\frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

式中，$s=z_i(i=1,2\mathrm{L}\ \ m)$是$N(s)=0$的根，称为传递函数的零点；

$s=p_i(i=1,2\mathrm{L}\ \ n)$是特征方程$D(s)=0$的根，称为特征根；

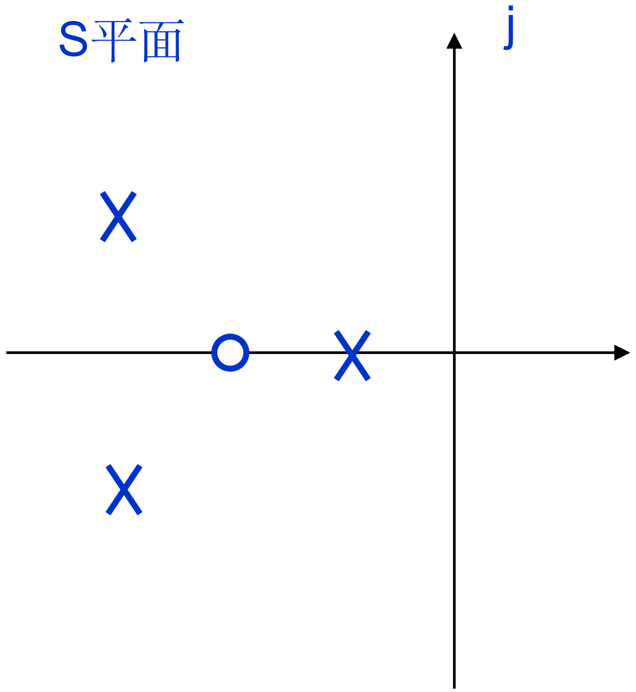
$s=p_i(i=1,2\mathrm{L}\ \ n)$也是传递函数的极点。

$K^*=b_m/a_n$称为传递系数（或根轨迹增益）。

2.3 传递函数

将零极点标在s平面上，称为传递函数的<u>零极点分布图</u>。通常，零点用“○”表示，极点用“×”表示。

零点和极点可以是实数或共轭复数。



2.尾1标准型（典型环节形式）

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=K\cdot\frac{\prod_{k=1}^{m_1}(\tau_k s+1)\prod_{l=1}^{m_2}(\tau_l^2 s^2+2\zeta\tau_l s+1)}{s^v\prod_{i=1}^{n_1}(T_i s+1)\prod_{j=1}^{n_2}(T_j^2 s^2+2\zeta T_j s+1)}$$

式中每一个因子对应一个典型环节。

τ_k, T_i称为时间常数。

K称为系统增益，简称“增益”。

$$G(0)=K=\frac{K^*\prod_{j=1}^{m}\left(-z_j\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(-p_i\right)}=\frac{b_0}{a_0}$$

例1:已知系统闭环传递函数。

$$\Phi(s)=\frac{30(s+2)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

(1)求系统的增益;
(2)求系统的微分方程;
(3)画出系统的零、极点分布图 。

三、传递函数的性质

(1)传递函数与微分方程一一对应；

(2)传递函数只取决于系统本身的结构和参数，而与输入和初始条件等外部因素无关；

(3)传递函数描述了系统的外部特性。不提供系统的内部物理结构的有关信息；

(4)传递函数是复变量s的有理分式，具有复变函数的所有性质。因为实际系统总是存在惯性的，并且能源功率有限，所以实际系统传递函数的分母阶次大于等于分子阶次，即n≥m。

(5)未经特别说明，分子分母不含相消因子；

(6)传递函数一旦确定，系统在一定的输入信号下的动态特性就确定了。

(7)传递函数的拉氏反变换即为系统的单位冲激响应。

四、传递函数的局限性

(1)传递函数实在零状态下定义的，因此只反映系统的零状态下的动态特性，不能反映非零状态下系统的全部运动规律；

(2)传递函数只适合于描述单输入-单输出系统；

(3)传递函数是由拉普拉斯变换定义的，拉普拉斯变换是一种线性变换，只适用于线性定常系统。

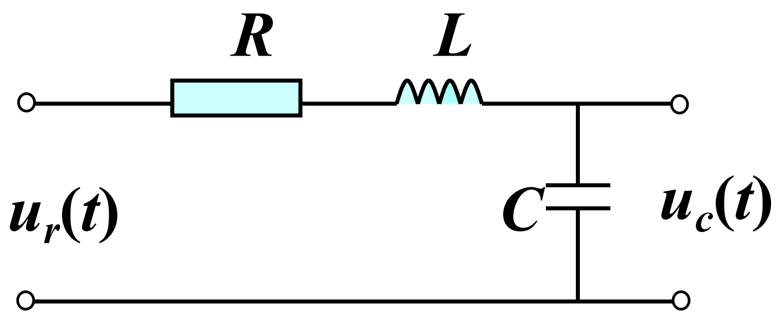
五、传递函数的求法

（1）根据系统的微分方程求传递函数

首先列写出系统的微分方程或微分方程组， 然后在零初始条件下求各微分方程的拉氏变换， 将它们转换为s域的代数方程组， 消去中间变量， 得到系统的传递函数。

2.3 传递函数

例2:RLC电路。



解：列写系统的微分方程：

$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}+RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=u_r(t)$$

设初始状态为零，对上式进行拉氏变换，得到：

$$LCs^2U_c(s)+RCsU_c(s)+U_c(s)=U_r(s)$$

$$(LCs^2+RCs+1)\ \ U_c(s)=U_r(s)$$

根据传递函数的定义，可得***RLC***电路的传递函数为：

$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

（2） 电路网络的复阻抗法

在电路中有三种基本的阻抗元件： 电阻、 电容、电感。 流过这三种阻抗元件的电流i与电压u的关系是

电阻： $u = Ri$ ；

电容： $i = C\dfrac{du}{dt}$ ；

电感： $u = L\dfrac{di}{dt}$ 。

2.3 传递函数

对以上各等式两边作拉氏变换（零初始条件），得:

电阻: $U(s)=RI(s)$

电阻$\boldsymbol{R}$的复阻抗仍为$\boldsymbol{R}$。

电容: $I(s)=sCU(s)$

$$U(s)=\frac{1}{sC}I(s)$$

电容**C**的复阻抗为**1/(sC)**。

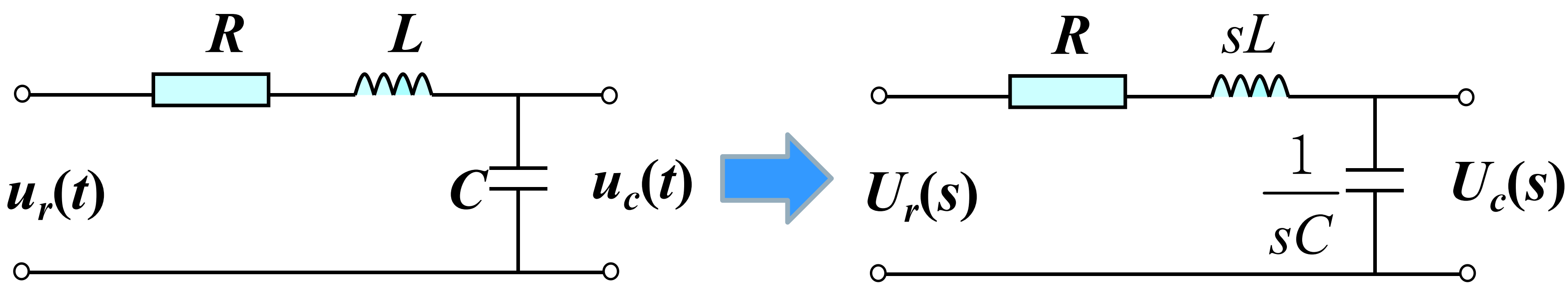
电感: $U(s)=sLI(s)$

电感**L**的复阻抗为**sL**。

2.3 传递函数

复阻抗在电路中经过串联、 并联， 组成各种复杂电路， 其等效阻抗的计算和一般电阻电路完全一样。通过复阻抗的概念可以直接写出一个电路的传递函数， 省掉了微分方程的推导和计算过程， 从而减小了计算量。

例3:RLC电路。



解： 画出电路的s域模型。

$$U_c(s)=\frac{\frac{1}{sC}}{R+sL+\frac{1}{sC}}U_r(s)=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}U_r(s)$$

整理得

$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

Thank You !