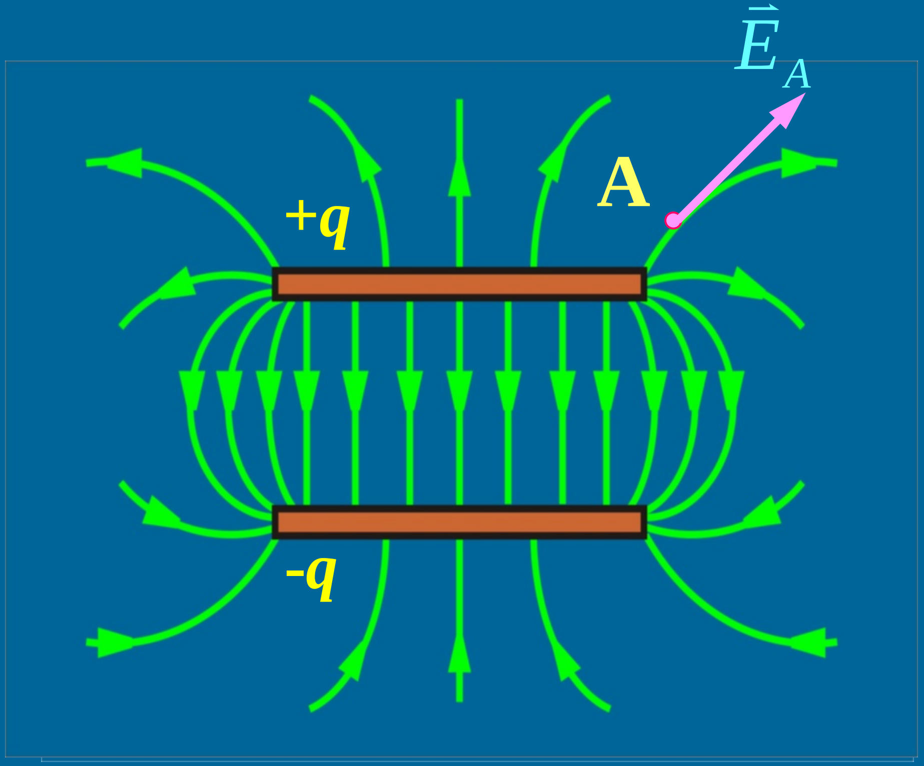
§ 10.3　电通量　　高斯定理

一. 电场线（电力线）

反映电场强度的分布

电场线上每一点的切线方向反映该点的场强方向，电场线的疏密反映场强大小。

$$E = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S_{\perp}}$$



- 电场线的特点:

(1) 由正电荷指向负电荷或无穷远处

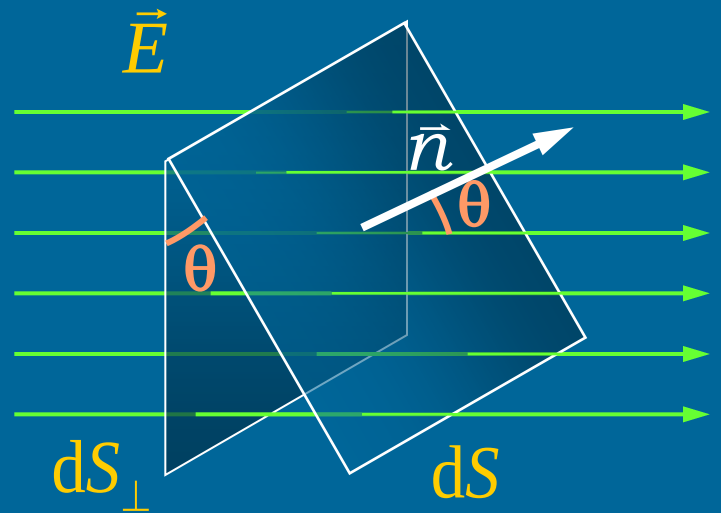
(2) 电场线是非闭合曲线

(3) 电场线不相交

二. 电通量

穿过任意曲面S 的电场线条数称为穿过该面的电通量。Φ_e

1. 均匀场中

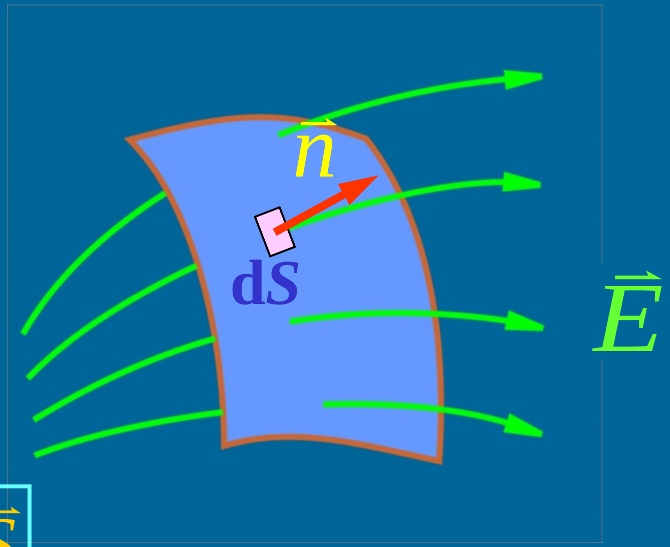


$$\mathrm{d}\Phi_e = E\mathrm{d}S_\perp = E\cos\theta\mathrm{d}S$$

定义 $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{n}$

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

2. 非均匀场中



$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\boxed{\Phi_e = \int \mathrm{d}\Phi_e = \int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

对闭合曲面 $$\boxed{\Phi_e = \oint \mathrm{d}\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

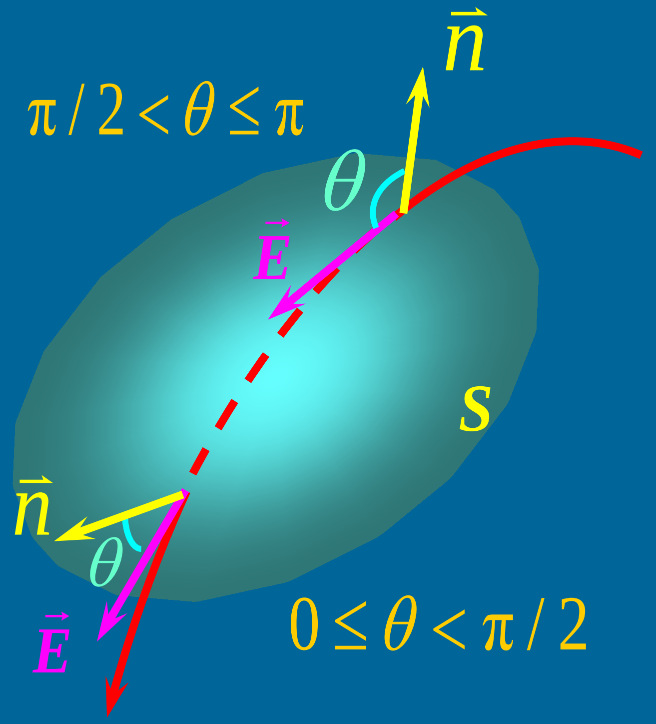
讨论

(1) $\mathrm{d}\vec{S}$ 方向的规定：
- 非闭合曲面 —— 凸为正，凹为负
- 闭合曲面 —— 向外为正，向内为负

(2) 电通量是代数量，无方向，但有正负
- $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ —— $\mathrm{d}\Phi_e$ 为正
- $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ —— $\mathrm{d}\Phi_e$ 为负

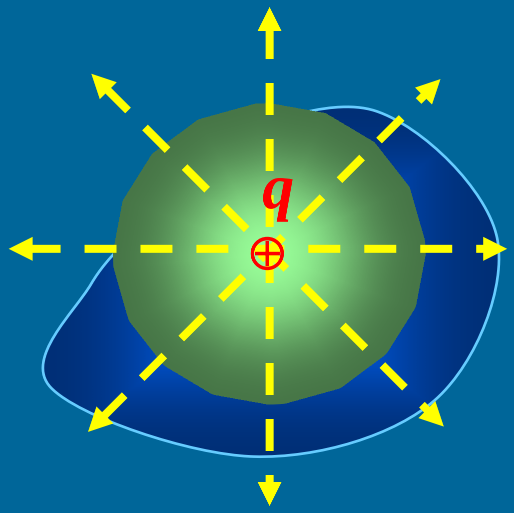
穿入的电场线 $\mathrm{d}\Phi_e < 0$

穿出的电场线 $\mathrm{d}\Phi_e > 0$



三. 高斯定理

1 取半径 r 的球面包围 q



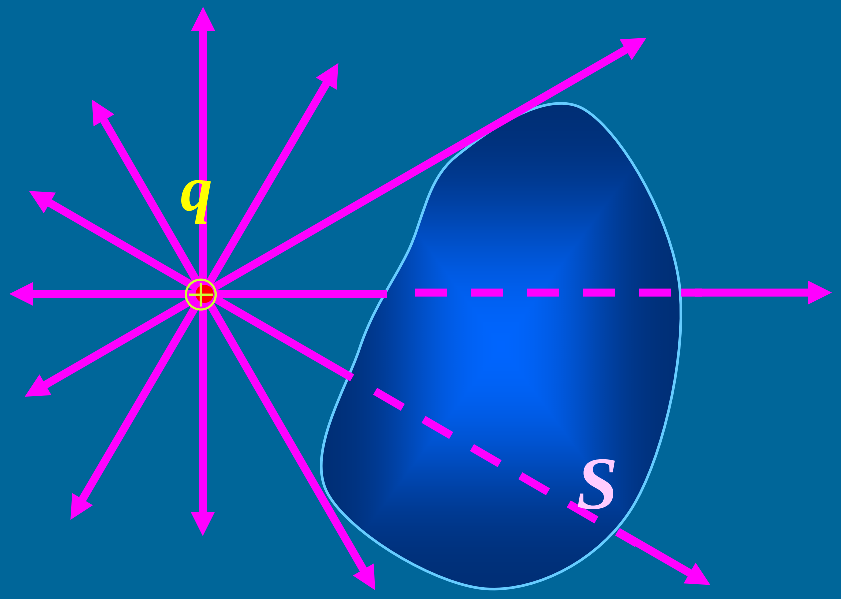
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\mathrm{d}S = E\oint_S \mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}q$$

2 取任意闭合曲面包围 q

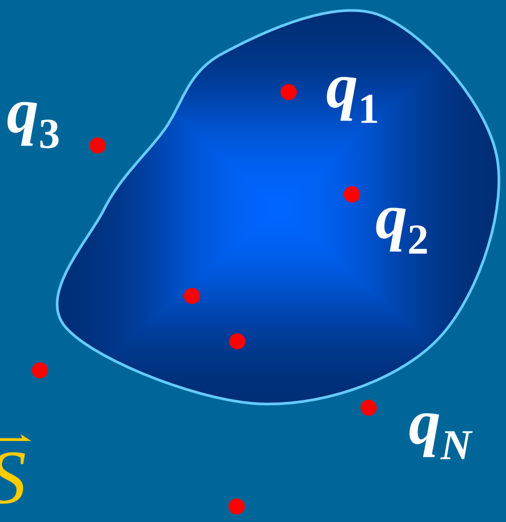
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}q$$

3 q 在曲面外时



$$\Phi_e = 0$$

4 当存在多个电荷



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \oint_S \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \oint_S \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \cdots + \oint_S \vec{E}_N \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_{i内}$$

高斯定理

$$\boxed{\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_{i内}}$$

真空中的任意静电场中，穿过任一闭合曲面的电通量，等于该曲面内包围的电量的代数和除以 ε_0

该闭合曲面常称为高斯面

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_{i内}$$

说明 1. 反映静电场的性质—— 有源场

正电荷是电场线的源头 负电荷是电场线的尾闾

2. 高斯定理表达式中右端是闭合面内电量代数和，左端的电场强度是整个空间所有电荷（包括闭合曲面内、外）产生的。

3. 计算具有对称分布的带电体系（其场强分布也具有相应的对称性）的场强

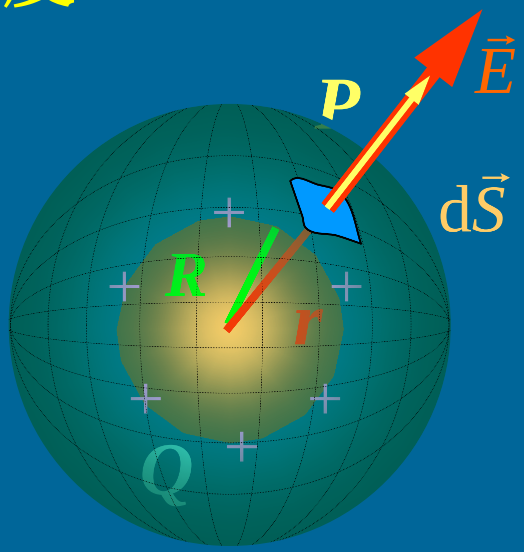
求解条件：能找到恰当的高斯面，使 $E\cos\theta$ 从积分式中提出来。

常见类型： 场源电荷分布 $\left\{\begin{array}{l}\text{球对称性}\\ \text{轴对称性}\\ \text{面对称性}\end{array}\right.$

四. 用高斯定理求特殊带电体的电场强度

例 均匀带电球面，总电量为Q，半径为R

求 电场强度分布



解 对球面外一点P：

取过场点 P 的同心球面为高斯面

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\mathrm{d}S = E\oint_S \mathrm{d}S = E4\pi r^2$$

根据高斯定理

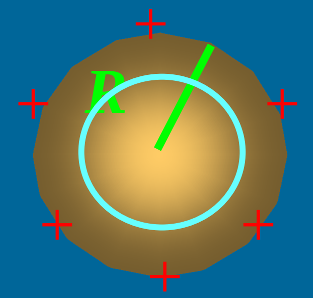
$$E4\pi r^2 = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

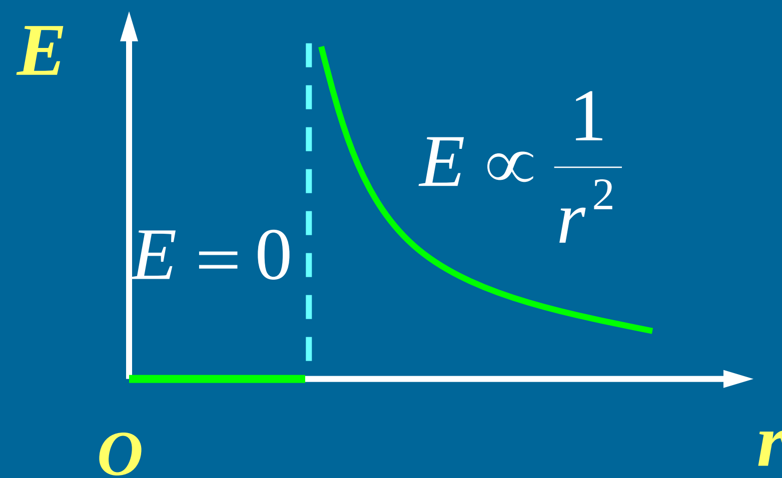
$$r > R \quad \sum_i q_i = Q \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

对球面内一点：

$$r < R \quad \sum_i q_i = 0$$

$$\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$$





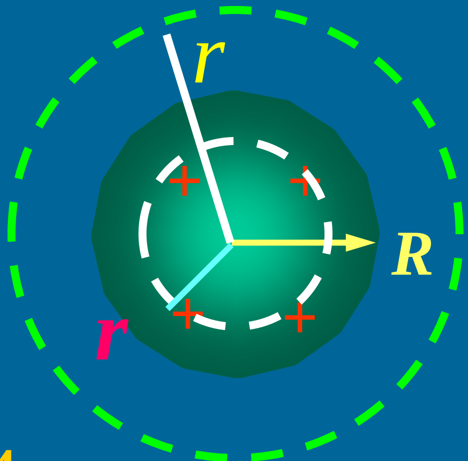
电场分布曲线

例 已知球体半径为R，带电量为q（电荷体密度为ρ）

求 均匀带电球体的电场强度分布

解 球外$(r \geq R)$

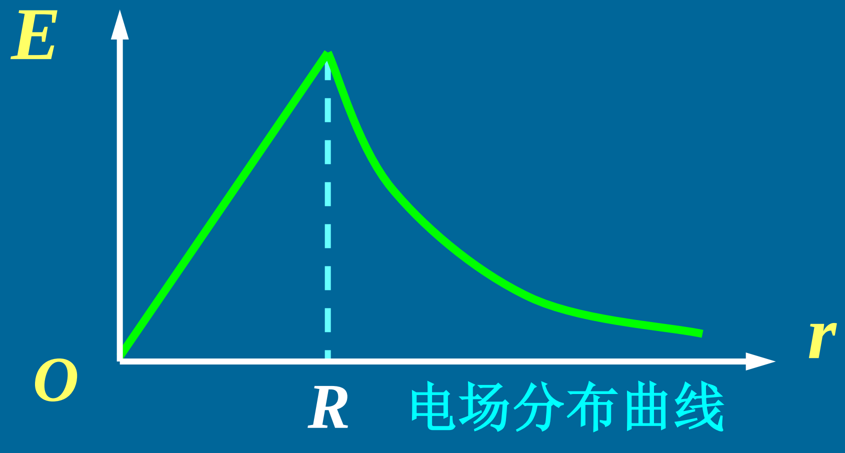
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{r}^{\,0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\vec{r}^{\,0}$$



球内$(r < R)$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}q' = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r$$



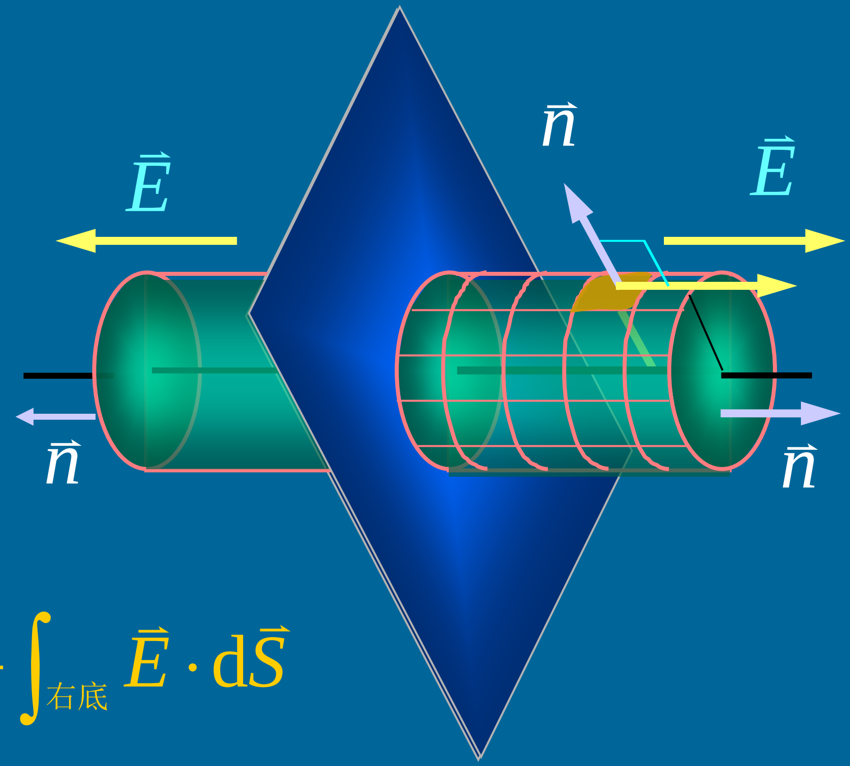
电场分布曲线

例 已知“无限大”均匀带电平面上电荷面密度为 σ

求 电场强度分布

解 电场强度分布具有面对称性

选取一个圆柱形高斯面



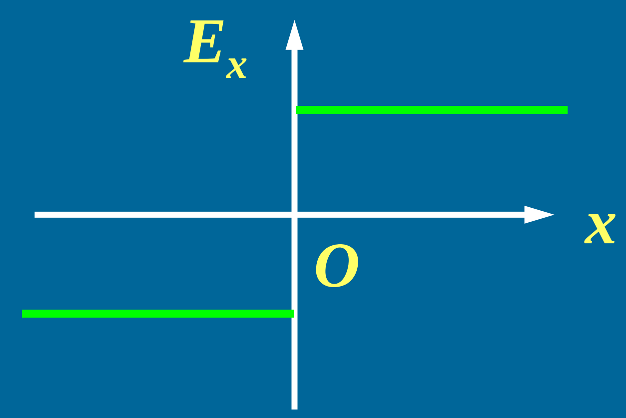
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{侧} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{左底} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{右底} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= 0 + ES + ES = 2ES$$

根据高斯定理有

$$2ES = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

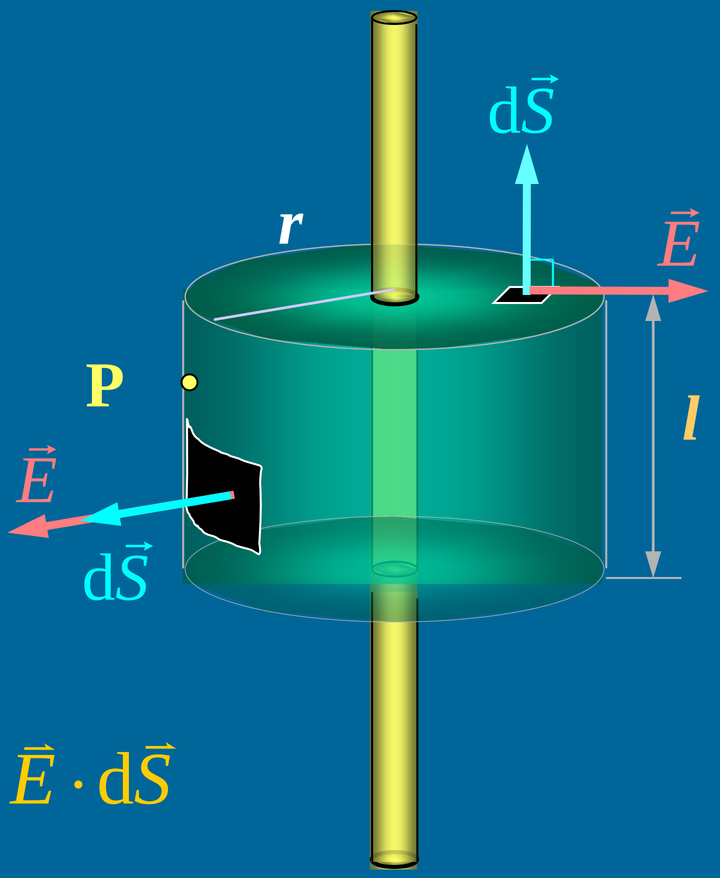


例 已知“无限长”均匀带电直线的电荷线密度为$+\lambda$

求 距直线r 处一点P 的电场强度

解 电场分布具有轴对称性

过P点作一个以带电直线为轴，以l 为高的圆柱形闭合曲面S 作为高斯面



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{侧} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{上底} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{下底} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

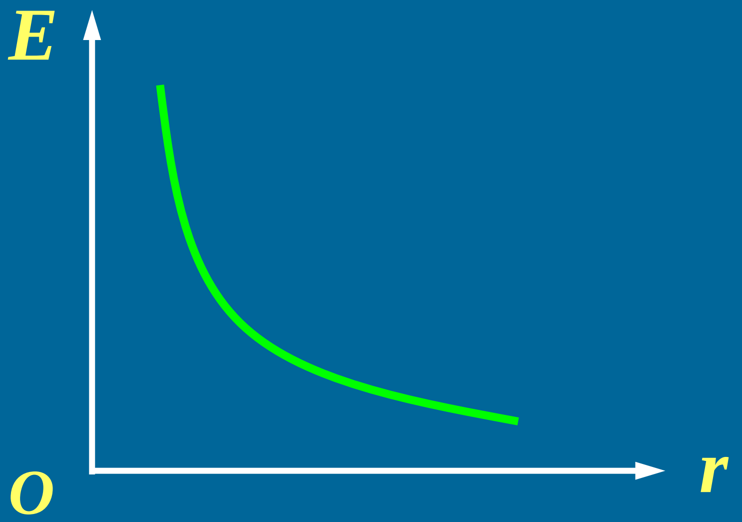
$$= \int_{侧} E\mathrm{d}S = E\int_{侧} \mathrm{d}S = E \cdot 2\pi r \cdot l$$

根据高斯定理得

$$E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{1}{\varepsilon_0}\lambda l$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

电场分布曲线



- 用高斯定理求电场强度的步骤：

(1) 分析电荷对称性；

(2) 根据对称性取高斯面；

* 高斯面必须是闭合曲面

* 高斯面必须通过所求的点

* 高斯面的选取使通过该面的电通量易于计算

(3) 根据高斯定理求电场强度。

总结

1. 电场线

2. 电通量

3. 高斯定理

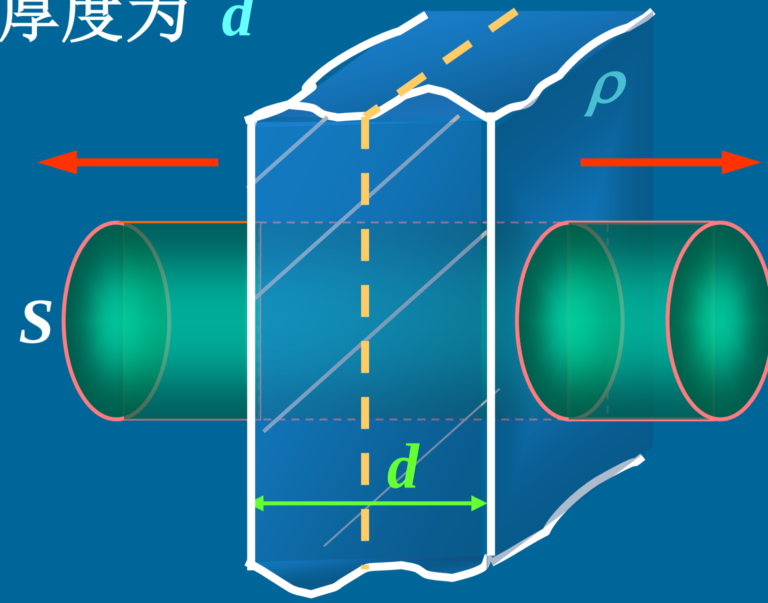
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_{i内}$$

真空中的任意静电场中，穿过任一闭合曲面的电通量，等于该曲面内包围的电量的代数和除以 ε_0

例 已知无限大板电荷体密度为ρ，厚度为 d

求 电场场强分布

解 选取如图的圆柱面为高斯面

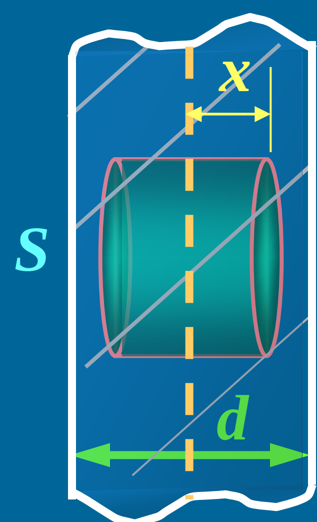


板外：

$$2ES = \frac{\rho S d}{\varepsilon_0}$$

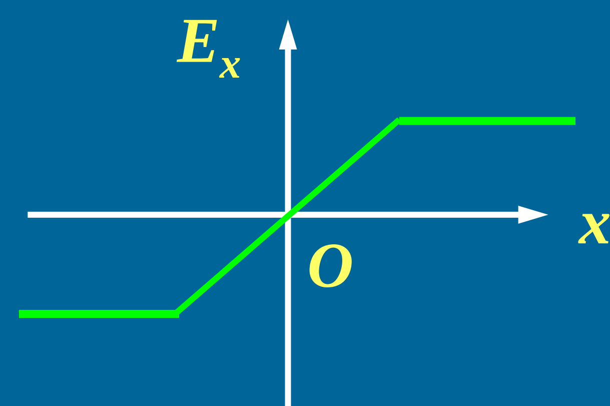
$$E_{外} = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

板内：



$$2ES = \frac{\rho S \cdot 2x}{\varepsilon_0}$$

$$E_{内} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$



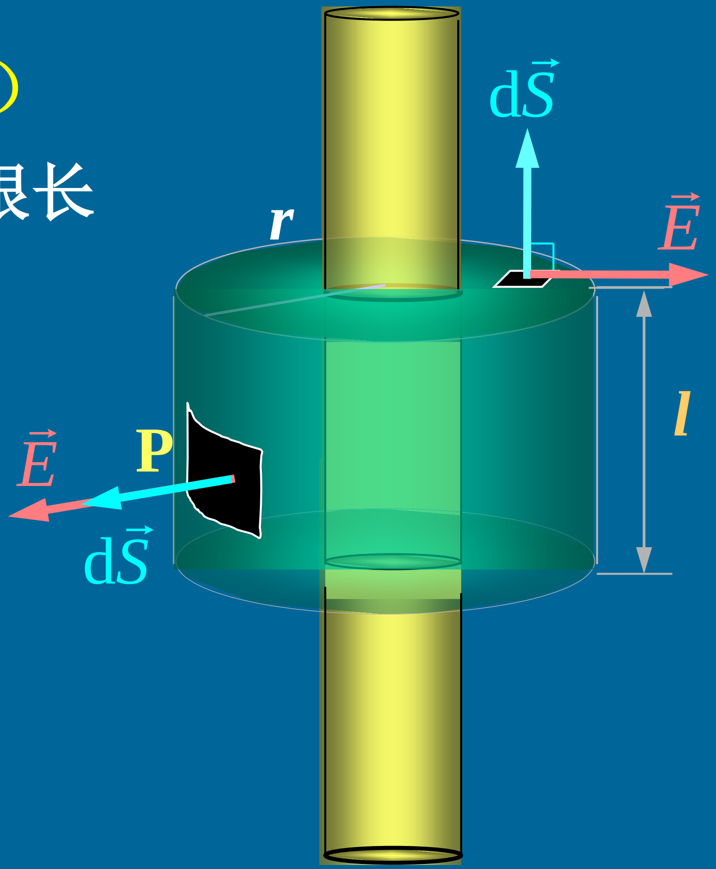
求：无限长带电圆柱面的电场分布。

（圆柱半径为***R***，单位长度带电量为λ）

解：由电荷分布轴对称且圆柱面为无限长可知电场分布具有轴对称性

$$r > R$$

过***P***点作一个与带电圆柱面共轴、高为***l*** 的圆柱形高斯面



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{侧} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{上底} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{下底} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{侧} E\mathrm{d}S = E\int_{侧} \mathrm{d}S = E \cdot 2\pi r \cdot l$$

根据高斯定理得 $E \cdot 2\pi r \cdot l = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \lambda l$ $\quad E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

$r < R$ $\quad E \cdot 2\pi r \cdot l = 0 \quad \Rightarrow E = 0$

$$E = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$