第一章　矩阵及应用

一、计算和证明题

基本运算

~~1.~~ 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{bmatrix}$，求 $3AB-2A$ 及 $A^{T}B$.

(1) $AB=\begin{bmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{bmatrix}$ $3AB=\begin{bmatrix}0&15&24\\0&-15&18\\6&27&0\end{bmatrix}$ $2A=\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&-2\\2&-2&2\end{bmatrix}$ $3AB-2A=\begin{bmatrix}-2&13&22\\-2&-17&20\\4&29&-2\end{bmatrix}$

(2). $A^T=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$ $A^TB=\begin{bmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{bmatrix}$

基本运算

★ ~~2.~~ 计算下列矩阵的乘积：

(1) $\begin{bmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\2\\1\end{bmatrix}$；

$=\begin{bmatrix}35\\6\\49\end{bmatrix}$

(2) $[1,2,3]\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$；

$=3+4+3=10$

(3) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} [-1, 2]$；

$$= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$；

$$= \begin{bmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

(5) $[x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$；

$$= [a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \quad a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \quad a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= [a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2]$$

$$= [a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3]$$

Scanned with CamScanner

(6) $\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&-2&3\\0&0&0&-3\end{bmatrix}$.

$$=\begin{bmatrix}1&2&-1&-7\\0&1&2&-4\\0&0&-4&3\\0&0&0&-9\end{bmatrix}$$

基本运算的证明

3. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}$，问：

(1) $AB=BA$ 成立吗？

(2) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 成立吗？

(3) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 成立吗？

(1) $AB=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\4&6\end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&8\end{bmatrix}$ ∴ $AB\neq BA$ 不成立.

(2) 不成立. $(A+B)^2\neq A^2+B^2+2AB$

(3) 不成立：$(A+B)(A-B)=A^2+B^2+(-AB)+BA\neq A^2-B^2$.

求A^n

4. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0\\\lambda&1\end{bmatrix}$，求 A^2，A^3，…，A^k.

(1) $A^2=\begin{bmatrix}1&0\\\lambda&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\\lambda&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{bmatrix}$

$A^3=\begin{bmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\\lambda&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3\lambda&1\end{bmatrix}$

λ

$1+\lambda\cdot\lambda$

$1+\lambda\cdot(1+\lambda\cdot\lambda)$

⋮

列出n项　求规律

$A^k=\begin{bmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{bmatrix}$

求A^n 5. ★（1）已知 $A=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[3\ \ -2\ \ 1]$，求 A^n；

法一：分别展开：$A=\begin{bmatrix}3&-2&1\\6&-4&2\\9&-6&3\end{bmatrix}$　$A^2=\begin{bmatrix}6&-4&2\\12&-8&4\\18&-12&2\end{bmatrix}$

法二：全列出来找化简规律，$A^n=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}([3\ -2\ 1]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix})[3,-2\ \ 1]\cdots\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix})[3,-2\ \ 1]$

$=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}2^{n-1}\cdot[3-2\ 1]=2^{n-1}A$

（2）计算 $\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}^n$.

$A^2=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\lambda_1^2&&&\\&\lambda_2^2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^2\end{bmatrix}$

由此推得：

$A^n=\begin{bmatrix}\lambda_1^n&&&\\&\lambda_2^n&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^n\end{bmatrix}$

求逆

★6. 求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $(ad-bc\neq 0)$；

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}$$

设 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\cancel{A\cdot A^{-1}=E}\ \Rightarrow\ A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$；

① $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -5 \end{vmatrix}=-5+0-4-0-0-(-3)=-6$

② $A^{*}=\cancel{\begin{bmatrix} -5 & -10 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}=\begin{bmatrix} -5 & -2 & -1 \\ +10 & -2 & +2 \\ -1 & +2 & 1 \end{bmatrix}$

③ $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -10 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；

① $|A|=1+0+0-0-0-0=1.$

② $A^{*}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

③ $A^{-1}=\frac{A^{*}}{|A|}=\frac{1}{1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{bmatrix}$ $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \neq 0)$;

$\because A \cdot A^{-1} = E$

$\therefore$ 可直接得 $\begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \lambda_3^{-1} & \\ & & & \lambda_4^{-1} \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix}$.

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & -1 & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$

7. 用求逆矩阵的方法解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2. \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

$$(A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $Ax = b$ $\therefore x = A^{-1}b$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 即：$x_1 = 1$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$

逆矩阵的应用：解矩阵方程

★8. 解下列矩阵方程：

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$；

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

注：左乘换
　　右乘竖

(2) $X \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$；

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3}, & 5, & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

9. 利用逆矩阵解下列线性方程组：

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

$$(A:b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

设 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $\therefore X = A^{-1}b$ 即：$x_1 = 1$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$

(2) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$.

$$(A\vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

故 $x_1 = 9$ $x_2 = 2$ $x_3 = 5$

基本分块与求可逆矩阵的方法

★10. (1) 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都可逆，求 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$ 的逆矩阵；

~~$A \cdot A^{-1} = E$ $B \cdot B^{-1} = E$~~

依据反对角矩阵性质可得

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$$

(2) 利用分块矩阵，求 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 的逆，其中 $a_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$.

将A分块如下 $A = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \hline a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$

故 $A^{-1} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^{-1} \\ \hline a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{array}\right]$

求A^n ★11. 设 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 $P=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，$\Lambda=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，求 A^{11}.

对角阵

由 $P^{-1}AP=\Lambda$ 得，$A=P\Lambda P^{-1}$

故得，$A^{11}=(P\Lambda P^{-1})(P^{-1}\Lambda P)\cdots(P\Lambda P^{-1})$

$=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P\cdot P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1}$ //红色部分均为E

$=P\Lambda^{11}P^{-1}$

$=P\begin{bmatrix}(-1)^{11} & 0\\ 0 & 2^{11}\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2024\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2731 & 2732\\ -683 & -684\end{bmatrix}$

题型：一个方程等式，求多项。

运算过程用矩阵本身指点

★12. 已知 $B=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，且 $AB=A+E$，求 A. //要熟练掌握

$AB-A=E$

$A\cdot(B-E)=E$ //移出所求对象

$\therefore A=(B-E)^{-1}$

$B-E=\begin{bmatrix}0 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$[B,E]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$

$\xrightarrow[r_2/-3]{r_1/2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$

$\therefore (B-E)^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

综上，$A=(B-E)^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

应用：对称矩阵

13. 设 A，B 为 n 阶矩阵，且 A 为对称矩阵，证明 B^TAB 也是对称矩阵.

$\because A$ 为对称矩阵 故 $A^T=A$

$\therefore (B^TAB)^T=\underbrace{B^T\cdot(B^TA)^T}_{\text{乘法运算}}=B^T\cdot\underbrace{A^TB}_{\text{第二次乘法运算}}=B^TAB$ //直接用定义进行求解

$(AB)^T\cdot B=B^TA^TB=B^TAB$

证明：关于对称的问题

14. 设 A、B 都是 n 阶对称矩阵，证明 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

必要：$A^T=A \quad B^T=B$

$(AB)^T=AB$

故 $AB=(AB)^T=B^TA^T=AB$

充分：$A^T=A \quad B^T=B$

$AB=BA$

故 $AB=BA=B^TA^T=(AB)^T.$

求 A^n

另一种题型

★15. 证明：(1) $\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & C_n^2\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{bmatrix}$;

矩阵求高次幂三大类

① $(\alpha\cdot\beta^T)^{100}$ 秩为一的矩阵

② 矩阵可对角化的情况

$P^{-1}AP=\Lambda$

$A=P\Lambda P^{-1}$

$A^{100}=(P\Lambda P^{-1})^{100}$

③ 特殊，可拆成2矩阵的和

$A=\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ 即：$A=\lambda E+B$

$A^n=C_n^0(\lambda E)^nB^0+C_n^1(\lambda E)^{n-1}B^1+C_n^2(\lambda E)^{n-2}B^2$ //最后发现只有3项

$B^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad B^3=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore A^n=\begin{bmatrix}\lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & C_n^2\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}^n=E+\frac{1}{3}(4^n-1)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$.

证明：前提：$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^n=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 1\ 1)\cdots\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1,1,1)=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

开始：$\boxed{\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}^n=\left[E+\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right]^n}=\sum_{k=0}^{n}C_n^kE^{n-k}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^k=\boxed{\sum_{k=1}^{n}C_n^kE^{n-k}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^k+E}$

可拆开

凑出目标形式

$\sum_{k=1}^{n}C_n^kE^{n-k}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^k=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\cdot3^{k-1}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}+E$

$=\frac{1}{3}\boxed{\sum_{k=0}^{n}C_n^k(3^k-1)}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}+E=\frac{1}{3}(4^n-1)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

关于对称的证明 ★16. 设 A 为 n 阶对称矩阵，B 为 n 阶反对称矩阵，证明：

(1) A^2、B^2 都是对称矩阵；

(2) $AB-BA$ 是对称矩阵，$AB+BA$ 是反对称矩阵.

(1) $(A^2)^T=(A\cdot A)^T=A^TA^T=AA \quad (B^2)^T=B^TB^T=B^2$

(2) $(AB-BA)^T=B^TA^T-A^TB^T=\cancel{AB}-BA+AB=AB-BA$

$(AB+BA)^T=B^TA^T+A^TB^T=-AB-BA=-(AB+BA)$

关于对称矩阵的 17. 设 A 为 n 阶方阵，证明 A 可表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和.

设 $B=A+A^T$. 为对称矩阵. $C=A-A^T$ 为反对称矩阵

故 $A=\frac{B}{2}+\frac{C}{2}$

关于可逆矩阵的求解 ★18 设 A、B 及 $A+B$ 都为 n 阶可逆矩阵，证明 $A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A$.

证明: $AA^{-1}=E \quad BB^{-1}=E \quad (A+B)(A+B)^{-1}=E$

$A(A+B)^{-1}B$

$=(B^{-1}(A+B)A^{-1})^{-1}$ 用求逆进行换位

又 $\because A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}+E\cdot B^{-1}$

$=A^{-1}+A\cdot A^{-1}B^{-1}$

$=A^{-1}(E+AB^{-1})$

$=A^{-1}(BB^{-1}+AB^{-1})$

$=A^{-1}(A+B)\cdot B^{-1}$

同理. $A^{-1}+B^{-1}=B^{-1}(A+B)\cdot A^{-1}$

通过中间桥梁得出结论

故 $A(A+B)^{-1}B=(B^{-1}(A+B)A^{-1})^{-1}=(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=(A^{-1}(A+B)B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$

证明可逆，求逆. ★ ~~19~~. (1) 若 $A^3+2A^2+A-E=O$，证明 A 可逆，求 A^{-1}；

$$A(A^2+2A+E)=E$$ //这步只是提括号，但位置不变

$$(A^2+2A+E)A=E$$ //这步换位置，反考思维：当括号内每个元素和括号外相乘的位置影响

$$\Rightarrow A^{-1}=A^2+2A+E=(A+E)^2$$ //其实不论左乘还是右乘结果都可得出来

(2) 若 $A^2-A-4E=O$，证明 $A+E$ 可逆，并求其逆.

$$(A-2E)(A+E)=2E$$

~~而由 $(A+E)(A-2E)=2E$~~ //因为是和E乘，所以可反向

故. $(A+E)^{-1}=\frac{1}{2}(A-2E)$

★ ~~20~~. 设 A 是 n 阶方阵且 $A^m=O$（m 为正整数）. 证明：$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{m-1}$.

$$A^m-E=-E\Rightarrow (A-E)(A^{m-1}+\cdots+A^2+A)=-E$$

~~$(E+A)^m=C_m^m A^m+C_m^{m-1}E\cdot A^{m-1}+C_m^{m-2}E^2A^{m-2}+\cdots+C_m^1E^{m-1}A+C_m^0E^m$~~

$$\therefore (E-A)(A^{m-1}+\cdots+A^2+A+E)=E$$

已知有.

$a^2-1=(a-1)(a+1)$

$a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$

$a^m-1=(a-1)\cdot(a^{m-1}+\cdots+a^2+a+1)$

$\Rightarrow$ 直接

$$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{m-1})=E-A^m=E$$

$$(E+A+A^2+\cdots+A^{m-1})(E-A)=E-A^m=E$$

$$\therefore (E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{m-1}$$

注：[ ][ ] = [ ] [ ]] = 数.

“基本运算的证明，小心a”
“运算的推导.”

★21. 设 A 是 n 阶方阵 $A=E-\alpha\alpha^T$，其中 α 为 n 维非零列向量，证明：

(1) $A^2=A$ 的充要条件是 $\alpha^T\alpha=1$；

(2) 若 $\alpha^T\alpha=1$，则 A 不可逆.

(1) 充分：$\alpha^T\alpha=1 \Rightarrow A^2=A$ 首先证充分

$A^2=(E-\alpha\alpha^T)^2=E-2\alpha\cdot\alpha^T+\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T$ //用条件消

$=E-\alpha\cdot\alpha^T$ //用题目条件

$=A$

必要：$A^2=A \Rightarrow \alpha^T\alpha=1$

证：$A^2=(E-\alpha\alpha^T)(E-\alpha\alpha^T)=E-\alpha\alpha^T$

已知 $A^2=A$ 即：$E-2\alpha\cdot\alpha^T+\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=E-\alpha\alpha^T$

$\alpha^T\alpha\cdot\alpha\alpha^T=\alpha\alpha^T$ //将其提到前面

即：$\alpha^T\alpha=1$

(2) 反证：

假设 A 可逆，则 A^{-1} 存在

$\alpha^T\alpha=1 \Rightarrow A^2=A$ //已有

$A^2\cdot A^{-1}=A\cdot A^{-1}$

$A=E$ //得到结果

又 $A=E-\alpha\alpha^T$

由①②得：$\alpha\alpha^T=0$

这与题设不相等

故 A 不可逆.

本题考点：矩阵的基本表达

★22. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，x 是 $n\times 1$ 矩阵，证明 $AB=O$ 的充要条件是 B 的每一列都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解.

这题：用矩阵等式来表述线性代数的本质

m [ ] n n [ ] s

$A_{m\times n}B_{n\times s}=O \Leftrightarrow$ B 的每一列都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解

必要：

$\because AB=A(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots\beta_s)=(A\beta_1,A\beta_2\cdots A\beta_s)=O$

$\therefore A\beta_i\ (i=1,2,3\cdots s)=0$ 即 B 每一列都是 $Ax=0$ 的解

充分：$A\beta_i\ (i=1,2\cdots s)=0$，则 $AB=A(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s)=0$

$(1+\lambda)(1-\lambda)=1-\lambda^2$

$(1+\lambda+\lambda^2)\cdot(1-\lambda)=1-\lambda^3$

$(1+\lambda+\lambda^2+\cdots+\lambda^{m-1})\cdot(1-\lambda)=1-\lambda^m$

求秩：初等变换

★23. 利用初等行变换求下列矩阵的秩：

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 6 & 8 & 23 & -6 & 8 \end{bmatrix}$；

原式 $\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_1\times\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

故，秩为2.

(2) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 & 10 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$；

原式 $\xrightarrow{r_1\times\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-r_4 \\ r_4-r_2}]{r_2-r_3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{r_3-\frac{1}{2}r_2 \\ r_4+3r_3}]{r_2-2r_3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

∴ 秩为

原式 $\xleftrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -2 & 10 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-r_2 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 秩为2

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 & 2 & -6 \\ -3 & 6 & -9 & -3 & 9 \end{bmatrix}$.

原式 $\xrightarrow[\substack{r_3+2r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ~~故秩~~为1.

求方程解，有多少解

会这几种解法即可

★24. 求方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解.

$Ax=0$. $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & +2 & 0 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_4+r_2\times 2]{r_3-r_2\times 5} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 10 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4+r_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{4}]{r_4\times(-\frac{1}{6})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$x=k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $k\in R$

解: $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 选x_4为自由变量，当$x_4=k$时.

$x_1=0$
$x_2=k$
$x_3=2k$
$x_4=k$

齐次

★25. 求方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-3x_3+5x_4=0 \end{cases}$ 的通解.

方程系数矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

选 x_3、x_4 为自由变量. 当 $\begin{cases} x_3=k_1 \\ x_4=k_2 \end{cases}$

则. $\begin{cases} x_1=4k_1-4k_2 \\ x_2=3k_2-5k_1 \\ x_3=k_1 \\ x_4=k_2 \end{cases}$ 也写成 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

~~注意区分 这种~~

非齐次

★26. 求方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=1 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4=6 \\ x_1+2x_2-4x_3-4x_4=-1 \end{cases}$ 的通解. 非齐次线性方程组 → 而增广矩阵

$[A,b]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -6 & -6 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

①分析通解:齐次方程. $k_1\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(k_1,k_2\in R)$

②再取特解. $x_3=x_4=0$. 则有 $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

综上,方程组通解.

$k_1\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

27. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值及所有公共解.

本题特点：
① 方程联立
② 分类分析
③ 矩阵秩与方程组解的关系

非齐次 先列增广矩阵.

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{array}\right]=B$$

由于系数阵秩与增广矩阵的秩是一致的，且有解 故有 $(a-1)(a-2)=0$ // 总有解的处理

接下来分类

$a=1$ $A=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ 则通解为 $k_1\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$a=2$ $A\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ 则通解为 $\cancel{k_1\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ //注意每个矩阵的秩也能变化

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

★28. 设 λ,μ 为参数，问线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+\mu x_2+x_3=3 \\ x_1+2\mu x_2+x_3=4 \end{cases}$ 何时有唯一解？何时无解？何时有无穷多解？并在有无穷多解时，求出通解. //这部分需要好好仂底

解：$A=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 4 \\ 1 & \mu & 1 & 3 \\ 1 & 2\mu & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ~~$\xrightarrow{r_1\cdot\frac{1}{\lambda}} \begin{bmatrix} 1 & \lambda^{-1} & \lambda^{-1} & 4\lambda^{-1} \\ 1 & \mu & 1 & 3 \\ 1 & 2\mu & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-r_2]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & \lambda^{-1} & \lambda^{-1} & 4\lambda^{-1} \\ 0 & \mu-\lambda^{-1} & 1-\lambda^{-1} & 3-4\lambda^{-1} \\ 0 & \mu & 0 & 1 \end{bmatrix}$~~

$\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_2]{r_1\leftrightarrow r_2,\ r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 1 & 3 \\ 0 & \mu & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \mu & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 4-2\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda-1)\mu & 1-4\mu+2\lambda\mu \end{bmatrix}$

故唯一解：$(\lambda-1)\mu\neq0$. 即：$\lambda\neq1$ 且 $\mu\neq0$ $\rightarrow R(A)=R(\bar{A})=3$

故无解：$\begin{cases}(\lambda-1)\mu=0 \\ 1-4\mu+2\lambda\mu\neq0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\mu=0 \\ \lambda=1 \text{ or } \mu=\frac{1}{2}\end{cases}$ $\rightarrow R(A)\neq R(\bar{A})$

无穷解：$\begin{cases}(\lambda-1)\mu=0 \\ 1-4\mu+2\lambda\mu=0\end{cases}$ 即：$\lambda=1$ 且 $\mu=\frac{1}{2}$ $\rightarrow R(A)<R(\bar{A})$ $x=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

二、填空题

$(A-2E)B=A^T$

29. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&2&1\\0&3&2\\0&0&1\end{bmatrix}$，$AB=A^T+2B$，则 $B=$ $\begin{bmatrix}3&-6&27\\2&-1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

30. 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\end{bmatrix}$，则 $A+2B=$ $\begin{bmatrix}3&3&7\\-1&-3&7\end{bmatrix}$.

31. 已知矩阵 A，B，$C=(c_{ij})_{s\times n}$，满足 $AC=CB$，则 A 与 B 分别是 __s__ 阶和 __n__ 阶矩阵.

32. 设 A 为 n 阶矩阵，存在两个不相等的 n 阶矩阵 B，C，使 $AB=AC$，那么 A 一定是 __不可逆__ 矩阵.（填"可逆"或"不可逆"）

行列式为零 $A(B-C)=0$

33. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}$，$B=A^2-3A+2E$，则 $B^{-1}=$ $\begin{bmatrix}0&-1\\1&-2\end{bmatrix}$.

34. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2+2A+3E=O$，则 $A^{-1}=$ $-\frac{1}{3}(A+2E)$.

凑出了一种关系 利用以含A

35. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $(A+3E)^{-1}(A^2-9E)=$ $\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$.

36. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\-1&2&2&5\\1&-1&1&3\end{bmatrix}$，则 A 的逆矩阵 $A^{-1}=$ $\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&2&0&0\\19&-30&3&-5\\-7&11&-1&2\end{bmatrix}$.

★37. 设 A 是 n 阶可逆矩阵，且每一行元素之和都等于 5，矩阵 A^{-1} 的每一行元素之和等于 $\frac{1}{5}$.

$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\5\\5\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=5A^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

① 善于用矩阵等式来描述线代语言
② 善于把线代数语言翻译成矩阵语言

★38. 若 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，则 $P^{2005}AP^{2004}=$ $\begin{bmatrix}3&4\\1&2\end{bmatrix}$.

行列相当于行了一次变换

初等矩阵

左行右列 变换

39. 已知 $f(x)=x^2-3x+5$，$A=\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix}$，则 $f(A)=$ $\begin{bmatrix}a^2-3a+5&0\\0&b^2-3b+5\end{bmatrix}$

40. 设 $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&1&-1\\-3&2&4\\0&6&1\end{bmatrix}$，则 $X=$ $\begin{bmatrix}-3&4&2\\5&-1&1\\0&1&6\end{bmatrix}$.

具体看下 结合49一起再看!!!

41. 已知 $\alpha^T=(1,2,3)$，$\beta^T=(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9})$，设 $A=\alpha\beta^T$，则 $A^n=$ $\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{9}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{9}\\1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

基本运算 → 求n阶 (找规律)

42. 设 $a=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$，$A=ab^{T}$，则 $A^{2010}=$ $\begin{bmatrix}3&1\\-6&-2\end{bmatrix}$

43. 设 $A=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&4&3\\0&2&1\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=$ $\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&-2\end{bmatrix}$

44. 设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\-2&0&0\\1&3&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-1&3\\4&3&2\end{bmatrix}$，且满足 $XA=X+B$，则 $X=$ ______. $\begin{bmatrix}18&10&3\\8&3&2\end{bmatrix}$

★45. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$，$B$ 为 3 阶矩阵，且 $AB=O$，那么：

(1) 当 $t\neq 6$ 时，$R(B)$ ≤ 1.

(2) $t=6$ 时，$R(B)$ ≤ 2

★46. 已知矩阵 $\begin{bmatrix}k&2&2&2\\2&k&2&2\\2&2&k&2\\2&2&2&k\end{bmatrix}$，且 $R(A)=3$，则 $k=$ -6.

★47. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{bmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 $t=$ -3.

★48. 设 A 是 n 阶矩阵，若对任意 n 维列向量 b，线性方程组 $Ax=b$ 均有解，则矩阵 A 的秩是 n.

三、选择题

★49. 设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{bmatrix}$，$P_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，则必有（ C ）.

(A) $AP_1P_2=B$　　(B) $AP_2P_1=B$

(C) $P_1P_2A=B$　　(D) $P_2P_1A=B$

50. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，$B=(1,1)$，则 $AB=$（ D ）.

(A) 0　　(B) $(1,\ -1)$

(C) $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}$

下列矩阵中(C)不满足 $A^2=-E$.

(A) $\begin{bmatrix}1 & -2\\1 & -1\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}-1 & -2\\1 & 1\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & -1\end{bmatrix}$

设 A,B 为 n 阶矩阵，下列运算正确的是(D).

(A) $(AB)^k=A^kB^k$　　(B) $AB=BA$

(C) $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$　　(D) 若 A 可逆，$k\neq 0$，则 $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$

53. 设 A 是方阵，若有矩阵关系式 $AB=AC$，则必有(D).

(A) $A=O$　　(B) $B\neq C$ 时，$A=O$

(C) $A\neq O$ 时，$B=C$ 整理!　　(D) A 可逆时，$B=C$

54. 以下结论正确的是(C).

(A) 若 A 为 n 阶方阵，则 $A-A^{\mathrm{T}}$ 是对称矩阵

(B) 若 $A^2=O$，则 $A=O$

(C) 若 A 为对称矩阵，则 A^2 也是对称矩阵　$(A^2)^T=(A^T)^2=A^2$

(D) 对任意的同阶方阵 A,B，有 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

55. 设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2+A-5E=O$，则 $(A+2E)^{-1}=$(C).

(A) $A-E$　　(B) $E+A$

(C) $\frac{1}{3}(A-E)$　　(D) $\frac{1}{3}(A+E)$

$A^2+A-3E=2E+A$

$A(A+2E)$

$A(A+2E)-(2E+A)=3E$

$(A-E)(A+2E)=3E$

56. 设 A,B 均为 n 阶方阵，下面结论正确的是(B).

(A) 若 A,B 均可逆，则 $A+B$ 可逆

(B) 若 A,B 均可逆，则 AB 可逆

(C) 若 $A+B$ 可逆，则 $A-B$ 可逆

(D) 若 $A+B$ 可逆，则 A,B 均可逆

$(AB)^{-1}\cdot AB=B^{-1}A^{-1}AB=E$

57. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$，则 A^{-1} 等于(B).

(A) $\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\0 & \frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\0 & \frac{1}{3} & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

可逆矩阵!!!

$AB=BA=E$ 则 $A=B^{-1}$

$C^{-1}B^{-1}A^{-1}=E$

★58. 设 A, B, C 为同阶方阵，且 $ABC=E$，则下列各式中不成立的是(D).

(A) $C(AB)=E$ ✓　　(B) $(B^{-1}A^{-1})C^{-1}=E$

(C) $(BC)A=E$ ✓　　(D) $C^{-1}A^{-1}B^{-1}=E$

59. 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵，则必有(B).

(A) $A+B$ 可逆　　(B) AB 可逆

(C) $A-B$ 可逆　　(D) $AB+BA$ 可逆

$(AB+BA)^{-1}$

60. 下列矩阵中，不是初等矩阵的是(B).

(A) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$

★61. 设 A, B 为同阶可逆方阵，则(D).　⟺ A,B等价

(A) $AB=BA$

(B) 存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$

(C) 存在可逆矩阵 C，使 $C^{T}AC=B$

(D) 存在可逆矩阵 P, Q，使 $PAQ=B$ ✓

其它选项不好证明，故只选D

★62. 设 A 为3阶矩阵，将矩阵 A 的第一行加到第三行得到矩阵 B，再将 B 的第三列的 -1 倍加到第一列得到 C，设 $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，写出 A, C, P 三个矩阵的关系等式(D).

(A) $PAP=C$　　(B) $P^{-1}AP=C$

(C) $PAP^{T}=C$　　(D) $PAP^{-1}=C$

★63. 非齐次线性方程组 $Ax=b$，其中 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $R(A)=r$，则(B). 概念

(A) 当 $m=n$ 时方程组有解　　(B) 当 $m=r$ 时方程组有解 ✓

(C) 当 $m<n$ 时方程组有解　　(D) 当 $m>n$ 时方程组无解

★64. 非齐次线性方程组 $Ax=b$，其中 A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $R(A)=r$，则(B).

(A) 当 $n=r$ 时方程组有唯一解　　(B) 当 $R([A, b])=r+1$ 时方程组无解 ✓

(C) 当 $m<n$ 时方程组有无穷多组解　　(D) 当 $m>n$ 时方程组无解

65. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则线性方程组 $(BA)x=0$ (C.D)

(A) 当 $m>n$ 时只有零解　　(B) 当 $m<n$ 时只有零解

(C) 当 $m>n$ 时有非零解　　(D) 当 $m<n$ 时有非零解

$R(B)$

$R(BA)\le R(A)$

66. 设 A 为 n 阶方阵，b 是非零 n 维列向量，分析以下命题并确定(C).

① 若 $Ax=b$ 有唯一解，则 $Ax=0$ 只有零解；✓

② 若 $Ax=b$ 有无穷多组解，则 $Ax=0$ 有非零解；✓

③ 若 $Ax=0$ 只有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解；✓

④ 若 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多组解。// $Ax=b$ 可能无解

(A) 只有①正确　　(B) 只有①和②正确

$n>r \to n>r$

(C) 只有①、②和③正确　　　　(D) 4 个命题都正确

★ 67. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，b 是非零 m 维列向量，分析以下 4 个命题并确定(B).

① 若 $Ax=b$ 有唯一解，则 $Ax=0$ 只有零解；√

② 若 $Ax=b$ 有无穷多组解，则 $Ax=0$ 有非零解；√

③ 若 $Ax=0$ 只有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解；× 可能无解

④ 若 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多组解。×

(A) 只有①正确　　　　(B) 只有①和②正确

(C) 只有①、②和③正确　　　　(D) 4 个命题都正确

A与b 的列维 不一定 相同

$R(A)=n \Rightarrow R(A)=R(A,b)=n$

③ eg. $\begin{cases} x_1+x_2=10 \\ x_1-x_2=2 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2=0 \\ 2x_1+3x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=10 \\ x_1-x_2=2 \\ \boxed{2x_1+x_2=2} \end{cases}$ 无解

①.等价有传递性.

$A\to\cdots\to B$, $C\to\cdots\to B$ $\Rightarrow$ A与C等价

② 若A可逆，则A与E等价

$[A,E]\to\cdots\to[E,A^{-1}]$

③ 若A可逆，则$A=P_1P_2\cdots P_i$，其中P_i为初等矩阵. $i=1\cdots$

53.

$$\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}=$$

58. $AB=BA=E$ 当 $AB=E$. $B^{-1}=A$ $A^{-1}=B$

$$(A\ \ 0)\begin{pmatrix}E_n & B\\ 0 & E_n\end{pmatrix}=(A,\ AB)$$

$$R(AB)\leq R(A\,\vdots\,AB)=R(A\ .0)=R(A)$$

$$\begin{matrix}R(A)\\R(B)\end{matrix}=n$$

$$(A\cdot B)\cdot C=E \qquad A(B\cdot C)=E \qquad C^{-1}\cdot(B^{-1}A^{-1})=E$$

61.

① 等价具有传递性: $A\to\cdots\to B$, $C\to\cdots\to B$ $\Rightarrow$ A与C等价

② 若A可逆, 则A与E等价.

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\qquad\left[\begin{array}{cc:cc}1&2&1&0\\2&4&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{cc:cc}1&2&1&0\\0&0&-2&1\end{array}\right]$$

$\boxed{\begin{matrix}1&2\\0&0\end{matrix}}$ 无对应的E

③ 若A可逆, 则 $A=P_1P_2\cdots P_e$ 其中 P_i 为初等方阵. $i=1\cdots e$

61. 设A,B为同阶可逆方阵,则

与E等价

与E等价

A与B等价

$P_1P_2\cdots P_n A \quad Q_1Q_2\cdots Q_m = B$

对应可逆矩阵

62.

$A \xrightarrow{r_3+r_1} B \xrightarrow{c_3-c_3}$

$E \xrightarrow{r_3+r_1} P$ (叫它P)　$E \xrightarrow{c_1-c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Q = P^{-1}$

$P \cdot A = B \qquad BQ = C.$

$PAQ = C$

63.

补:

$Ax=b$ 解. 无解. $R(A) \neq R(A|b)$

唯一 / 无穷 $R(A) = R(A|b)$ $= A$列 / $< A$列

$\boxed{\text{子(满)矩阵行满秩} \Rightarrow Ax=b \text{ 有解}}$

eg. $[A \vdots b] \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$

$r(A) = r$

$r \geq n$

$r \leq m < n$

$r \geq n$

$Ax=0$

$r \leq m$, n

$n-r$

2,4

第二章　行列式与线性方程组 done

一、计算和证明题

展开式 1. 求行列式 $D_4=\begin{vmatrix}5x & 1 & 2 & 3\\ x & x & 1 & 2\\ 1 & 2 & x & 3\\ x & 1 & 2 & 2x\end{vmatrix}$ 的展开式中 x^3 和 x^4 的系数.

$$D_4 \overset{c_1-c_2}{=\!=} \begin{vmatrix}5x-1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & x & 1 & 2\\ -1 & 2 & x & 3\\ x-1 & 1 & 2 & 2x\end{vmatrix} \overset{c_1-\frac{1}{2}c_4}{=\!=} \begin{vmatrix}5x-2.5 & 1 & 2 & 3\\ -1 & x & 1 & 2\\ -2.5 & 2 & x & 3\\ -1 & 1 & 2 & 2x\end{vmatrix}$$

//先将x放在对角线上 //初等变换前后行列式一样

由行列式运算规律得: x^4系数为10，x^3系数为-5.

代数余子式展开 2. 计算行列式的值 $\begin{vmatrix}a & -1 & 0 & 0\\ 1 & b & -1 & 0\\ 0 & 1 & c & -1\\ 0 & 0 & 1 & d\end{vmatrix}$. //注意:基本行列式运算规则

$(-1)^{1+2}\times(-1)$

$$原式 = a\cdot\begin{vmatrix}b & -1 & 0\\ 1 & c & -1\\ 0 & 1 & d\end{vmatrix} + (-1)^{2}\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & c & -1\\ 0 & 1 & d\end{vmatrix}$$

$(-1)^{3}(-1)$

$$= a(bcd+(-1)(-d)-b) + 1\times(cd-1) = abcd-abd+cd-1$$

行列运算 3. 计算行列式的值 $\begin{vmatrix}ab & -ac & -ae\\ -bd & cd & -de\\ -bf & -cf & -ef\end{vmatrix}$.

$$原式 = abcd(-ef) + [-bd\cdot(-cf)\cdot(-ae)] + (-ac)\times(-de)(-bf)$$
$$-(-ae)cd(-bf) - (-ac)(-bd)\cdot(-ef) - (ab)(-de)(-cf)$$
$$= -4abcdef$$

第二章 行列式与线性方程组 done

一、计算和证明题

展开式 1. 求行列式 $D_4=\begin{vmatrix}5x & 1 & 2 & 3\\ x & x & 1 & 2\\ 1 & 2 & x & 3\\ x & 1 & 2 & 2x\end{vmatrix}$ 的展开式中 x^4 和 x^3 的系数.

$$D_4 \xlongequal{C_1-C_2} \begin{vmatrix}5x-1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & x & 1 & 2\\ -1 & 2 & x & 3\\ x-1 & 1 & 2 & 2x\end{vmatrix} \xlongequal{C_1-\frac{1}{2}C_4} \begin{vmatrix}5x-2.5 & 1 & 2 & 3\\ -1 & x & 1 & 2\\ -2.5 & 2 & x & 3\\ -1 & 1 & 2 & 2x\end{vmatrix}$$

//先将x放在对角线上 //初等变换前后行列式一样

由行列式运算规律得: x^4系数为10，x^3系数为-5.

代数余子式展开 2. 计算行列式的值 $\begin{vmatrix}a & -1 & 0 & 0\\ 1 & b & -1 & 0\\ 0 & 1 & c & -1\\ 0 & 0 & 1 & d\end{vmatrix}$. //注意:基本行列式运算规则

$(-1)^{1+2}\times(-1)$

$$\text{原式}=a\cdot\begin{vmatrix}b & -1 & 0\\ 1 & c & -1\\ 0 & 1 & d\end{vmatrix}+(-1)^2\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & c & -1\\ 0 & 1 & d\end{vmatrix}$$

$$=a\left(bcd+(-1)(-d)-b\right)+1\times(cd-1)=abcd-abd+cd-1$$

行列式运算 3. 计算行列式的值 $\begin{vmatrix}ab & -ac & -ae\\ -bd & cd & -de\\ -bf & -cf & -ef\end{vmatrix}$.

$$\text{原式}=abcd(-ef)+[-bd\cdot(-cf)\cdot(-ae)]+(-ac)\times(-de)(-bf)$$
$$-(-ae)cd(-bf)-(-ac)(-bd)\cdot(-ef)-(ab)(-de)(-cf)$$
$$=-4abcdef$$

Scanned with CamScanner

★4. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2-n & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$.

结合该特征:

①. 消去最下面红色部分的数，得到上三角行列式

但注意次序，从后往前，消的是前面的.

$$D_n \xrightarrow[i=n-1,\, n-2,\, \cdots,\, 1]{c_i + c_{i+1}} \begin{vmatrix} \frac{(1+n)\cdot n}{2} & \cdots & \cdots & 2n-1 & n \\ & -1 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1-n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \cdot (n-1)!$$

同第4题 5. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解: $$D_n \xrightarrow[i=1,2,\cdots,n]{c_{i+1} + c_i} \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & & & & \\ & -a_2 & 0 & & & \\ & & -a_3 & 0 & & \\ & & & \ddots & 0 & \\ & & & & -a_n & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \cdots & n & n+1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \cdot \underbrace{a_1 a_2 \cdots a_n}_{n个} \cdot (n+1)$$

同列同数行列式

★6. 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1+a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$.

① 加边法

n阶同行列式运算规律 保留前后推导性

$$\text{原行列式}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1+a_n \\ 0 & a_2 & a_2 & \cdots & 1+a_{n-1} & a_n \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & 1+a_1 & a_2 & & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

加一行

$\frac{(n-1)n}{2}$

② 运算变换 "方形"

$$D\xrightarrow[i=2,\cdots,n+1]{r_i-r_1}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & & & & & 1 \\ -1 & & & & 1 & \\ -1 & & & \iddots & & \\ -1 & & 1 & & & \\ -1 & 1 & & & & \end{vmatrix}\xrightarrow[i=2,\cdots,n+1]{c_1+c_i}\begin{vmatrix} \times & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & & & & 1 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & 1 & \\ 0 & 1 & & & \end{vmatrix}$$

1 2 3 ⋯ n+1

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(1+\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)$$

表ab行列式

★7. 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

$$D_n\xrightarrow[i=1,2,4,\cdots,n]{r_i-r_3}\begin{vmatrix} -2 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & n-3 \end{vmatrix}$$

$=(-2)\times(-1)\times3\times1\times2\times\cdots\times(n-3)$

$=6\times(n-3)!$

★8. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 n 维列向量，$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \cdots, \beta_n = \alpha_n + \alpha_1$，方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，$B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$，如果 $|A| = 1003$，求 $|B|$ 的值.

☆ 学会用矩阵表达向量

$$\underbrace{[\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_n]}_{B} = \underbrace{[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n]}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}}_{P}$$

"三杠一星行列式"

故：$B = A \times P$

然后：两边行列式直接乘，$|B| = |A \cdot P| = |A|\cdot|P|$

$|B| = |A| \cdot |P| = 1003 \times (1 + (-1)^{n+1})$ // 可以直接乘

故 $|B| = \begin{cases} 2006 & (n\text{为奇数}) \\ 0 & (n\text{为偶数}) \end{cases}$

"ab矩阵行列式" ★9. 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 4 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & 4 & 3 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

☆ 记公式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{i=2\cdots n \\ r_1 \div [(n-1)b+a]}]{r_1 + r_i} [(n-1)b+a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

和 $(n-1)b+a$

$$\xlongequal[i=2\cdots n]{r_i - b r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & a-b & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & a-b \end{vmatrix} \cdot [(n-1)b+a] = [(n-1)b+a] \cdot (a-b)^{n-1}$$

故行列式 $= [(n-1) \times 4 + 3] \times 1 = 4n-1$

Scanned with CamScanner

1. 计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a-1 \end{vmatrix}$.

①第一行，消成1
②.去其它行，常先变三角

原式 $\xrightarrow[i=2\cdots n.]{r_1+r_i}\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ -1 & a-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1/a} a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a-1 \end{vmatrix}$

$= a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a\cdot a^{n-1} = a^4.$

★1. 计算 n 阶行列式(其中 $a_i\neq 0$，$i=1, 2, \cdots, n$)　范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ a_1^{n-2}b_1 & a_2^{n-2}b_2 & a_3^{n-2}b_3 & \cdots & a_n^{n-2}b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1b_1^{n-2} & a_2b_2^{n-2} & a_3b_3^{n-2} & \cdots & a_nb_n^{n-2} \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & b_3^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

行变形

$$(a_1\cdots a_n)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} & & \frac{b_n}{a_n} \\ (\frac{b_1}{a_1})^2 & (\frac{b_2}{a_2})^2 & & (\frac{b_n}{a_n})^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\frac{b_1}{a_1})^{n-1} & (\frac{b_2}{a_2})^{n-1} & & (\frac{b_n}{a_n})^{n-1} \end{vmatrix}$$

~~范德蒙行列式形式~~

$$= (a_1\cdots a_n)^{n-1}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{n-1} = \left[\prod_{n\geq i>j\geq 1}\left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right)\right](a_1\cdots a_n)^{n-1}.$$

四种行列式

$-\frac{b}{a_2}$ $-\frac{b}{a_3}$ $-\frac{b}{a_n}$

★12. 已知 $\prod_{i=2}^{n} a_i \neq 0$，计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & & & \\ b & & a_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b & & & & a_n \end{vmatrix}$.

上三角行列式

方法为：化成三角形

$$D \xrightarrow[i=2\cdots n]{c_1+\frac{-b}{a_i}c_i} \begin{vmatrix} (x) & b & b & \cdots & b \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$(x)=a_1-\frac{b^2}{a_2}-\frac{b^2}{a_3}-\cdots-\frac{b^2}{a_n}$$

$$=\left(a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{b^2}{a_i}\right)\prod_{i=2}^{n}(a_i)$$

★13. 已知 4 阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$，求 $-A_{41}-A_{42}-2A_{43}-2A_{44}$，其中 A_{4j} 为行列式 D_4 的第 4 行第 j 个元素的代数余子式. $=-D_4$

考点：代数余子式相关 + 基础对应行列式

原式 $=-D_4$.

用第一个消后面的数

$$\text{故求}D_4 \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-3r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4} \cdot - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3-4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=-\left(1\times1\times(-2)\times(-3)\right)=-6$$

~~4.~~ λ 和 μ 为何值时，齐次方程组 $\begin{cases}\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0\end{cases}$ 有非零解？

从行列式的角度来看，有非零解 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} = 0$.

故. $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 0 & \mu & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 - \lambda r_2} \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda\mu & 1-\lambda \\ 1 & \mu & 1 \\ 0 & \mu & 0 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & \mu & 1 \\ 0 & 1-\lambda\mu & 1-\lambda \\ 0 & \mu & 0 \end{vmatrix} = \mu \cdot (1-\lambda) = 0$

即当 $\mu = 0$ ~~或~~ $\lambda = 1$ 时. 原方程组有非零解.

~~5.~~ 齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 + a x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + a x_3 + b x_4 = 0\end{cases}$ 有非零解时，a，b 必须满足什么条件？

系数矩阵 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & a & b \end{vmatrix} = 0$

原式 $\xlongequal[\substack{r_3 - r_1 \\ r_4 - r_1}]{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & -4 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & b-a \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 + \frac{1}{4} \times (a-1) r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & -4 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (b-a) + \frac{1}{4}(a-1)(1-a) \end{vmatrix}$

故. $-4 \times \left[(b-a) + \frac{1}{4}(a-1)(1-a)\right] = 0$ 　~~$(a-b)\cdot[4+a-1]=0$ $a=b=-3$~~

$4b = a^2 + 2a + 1$

16. 求三次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$，使得 $f(-1)=0$，$f(1)=4$，$f(2)=3$，$f(3)=16$.

$$\begin{cases} a_0+(-a_1)+a_2-a_3=0 \\ a_0+a_1+a_2+a_3=4 \\ a_0+2a_1+4a_2+8a_3=3 \\ a_0+3a_1+9a_2+27a_3=16 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = \cancel{1\times(2-4)(2-8)(4-8)+(-1)\times(1-4)(1-8)(4-8)} \cancel{+1\times(1-2)(1-8)(2-8)+(-1)\times(1-2)(1-4)(2-4)=-48+84-42+6}$$

$$=(2-3)\times(1-3)\times(-1-3)(1-2)(-1-2)(-1-1)=-8\times3\times(-2)=48$$

$$D_0=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \\ 16 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}=336 \quad D_1=0 \quad D_2=-240 \quad D_3=96$$

17. 求出使一平面上三个点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 位于同一直线上的充分必要条件.

设~~平面上点~~一条直线 $ax+by+c=0$.

$$\begin{cases} ax_1+by_1+c=0 \\ ax_2+by_2+c=0 \\ ax_3+by_3+c=0 \end{cases}$$

要使在同一条直线上，则三线都使 (a,b,c) 均只有非零解.

即有：
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_3y_2+x_2y_1+x_1y_3)=0$$

18. 证明 $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$.

法一：直接算

法二：用性质来变换.

$$原式 \overset{c_1-c_3}{\underset{c_2-c_3}{=}} \begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 2a-2b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 \\ 2(a-b) & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^3$$

★19. 证明 $D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix} = (ad-bc)^n$. "拆洋葱" ⟹ 展开

$$D_{2n} = a \underset{\downarrow \; d \cdot D_{2\cdot(n-1)}}{\overset{(D_1)}{M_{11}}} + b \cdot (-1)^{1+2n} \cdot \underset{\downarrow \; c \cdot D_{2\cdot(n-1)}}{\overset{(D_2)}{M_{1n}}}$$

$$= (ad-bc) \cdot \underline{D_{2(n-1)}}$$

~~表示~~

★20. 证明 $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{n} a_i$，其中 $a_i \neq 0$，$i=1, 2, 3, \cdots, n$.

列和相等.

数学归纳法 + 递推

① 当 $n=2$ 时，可直接验算结论成立。

② 再假定 $n-1$ 阶行列式结论成立，进而证明阶数为 n 时结论也成立.
按 D_n 的最后一列，把 D_n 拆成两个 n 阶行列式，相加 即：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \underline{a_1a_2\cdots a_{n-1}} + a_nD_{n-1}.$$

假设. $D_{n-1} = a_1a_2\cdots a_{n-1}\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}\right)$ 成立.

则有 $D_n = \underline{a_1a_2\cdots a_{n-1}} + a_n\left[a_1a_2\cdots a_{n-1}\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}\right)\right]$

$$= a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n\left(\frac{1}{a_n}+1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}\right)$$

$$= \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}a_i$$

注：展开式：① 加减法 ② 用展开定理来算

Scanned with CamScanner

二、填空题

$1+2+3=6$

21. $\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{vmatrix} = $ <u>24</u>，$\begin{vmatrix} & & & 1_{14} \\ & & 2_{23} & \\ & 3_{32} & & \\ 4_{41} & & & \end{vmatrix} = $ <u>24</u>.

$4\times(-1)^{5}\cdot(-6)=24$

★22. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = $ <u>$(-1)^{n+1}n!$</u>.

★23. n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & & & \\ & a & b & & \\ & & a & \ddots & \\ & & & \ddots & b \\ b & & & & a \end{vmatrix} = $ <u>$a^n + (-1)^{n+1}\cdot b^n$</u>.

"= 杠一(n) 行列式"

24. 求行列式 $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix} = $ <u>2000</u>.

25. 已知 3 阶行列式中第 2 列元素依次为 1、2、3，其对应的余子式依次为 3、2、1，则该行列式的值为 <u>-2</u>.

21 22 23

1 -2 3 $1\times(-3)+2\times2+3\times(-1)=-6+4=$

26. 若行列式 $D = \begin{vmatrix} -8 & 7 & 4 & 3 \\ 6 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -7 & 5 \end{vmatrix}$，则 D 中第一行元素的代数余子式之和为 <u>0</u>.

27. 行列式 $D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = $ <u>-1080</u>.

$= \left| -2 \cdot A \cdot B \right| = -8|A||B|$

28. 设 A, B 是 3 阶方阵，已知 $|A|=-1$，$|B|=2$，则 $\begin{vmatrix} 2A & A \\ 0 & -B \end{vmatrix} =$ $+16$.

①先展开 $g(x)$ ②再代入 A

★29. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$g(x)=\begin{vmatrix} x & -1 \\ -3 & x+2 \end{vmatrix}$，则 $g(A)=$ $\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

※会矩阵乘

30. 设 α, β, γ 为 3 维列向量，记矩阵 $A=(\alpha,\beta,\gamma)$，$B=(\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\alpha)$，若 $|A|=3$，则 $|B|=$ 6.

线性相关 关系相互转

★31. 已知 3 阶矩阵 A 的行列式 $\det(A)=3$，则 $\det((3A)^{-1}-A^{*})=$ $-\frac{8^3}{24}$.

① $|kA_n|=k^n|A|$ ② $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$

★32. 设 A_1 是 m 阶矩阵，A_2 是 n 阶矩阵，则 $|A|=\begin{vmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{vmatrix}=$ $(-1)^{mn}|A_1||A_2|$.

③ $|A^{-1}|=|A|^{-1}$ ④ $AA^{*}=|A|\cdot E$ ※ $\Rightarrow A^{*}=|A||A^{-1}|$

$A^{*}=|A|\cdot A^{-1}$

33. 设 $D=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix}$，则元素 a_{32} 的余子式 $M_{32}=$ -26，代数余子式 $A_{32}=$ 26.

34. 如果行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 1 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 中第 2 行第 1 列的代数余子式 $A_{21}=5$，则 $a=$ $\cancel{-15}$ -5.

$-(-a-10)=5$

$a=-15$

35. 排列 $n, n-1, \cdots, 2, 1$ 的逆序数是 $\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}$ $\frac{n(n-1)}{2}$；五阶行列式有一项是 $a_{32}a_{25}a_{44}a_{53}a_{11}$，它的符号是 正.

3 2 4 5 1　5

2 5 4 3 1　7

三、选择题

36. 设 A, B 为 n 阶方阵，满足等式 $AB=O$，则必有(C).

(A) $A=O$ 或 $B=O$

(B) $A+B=O$

(C) $|A|=0$ 或 $|B|=0$

(D) $|A|+|B|=0$

37. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $|A|=2$，则 $||A|A^{T}|=$ (C).

$2^n|A^T|$

(A) 2^n　(B) 2^{n-1}

(C) 2^{n+1}　(D) 4

38. 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix} = 0$，则 $x =$ (C).

(A) 2　　(B) -2

(C) 3　　(D) -3

39. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$ 根的个数是(C)

$(18+4x+3x^2)-(2x^2+9x+12)$

$= x^2-5x+6$

$\Delta = 25-4\cdot 6 = 1$

(A) 0　　(B) 1

(C) 2　　(D) 3

★40. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & x \\ 1 & 4 & 4 & x^2 \\ 1 & -8 & 8 & x^3 \end{vmatrix} = 0$ 的根为(B).

$(x-2)(x+2)(x-1)(2+2)(-2-1)$

$= (x^2-4)(x-1)$

(A) 1，2，3　　(B) 1，2，-2

(C) 0，1，2　　(D) 1，-1，2

41. 下列构成六阶行列式展开式的各项中，取“+”的有(AD).

(A) $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$　　8　$(-1)^8$

(B) $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$　　5　$(-1)^5$

(C) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$　　$\Rightarrow 6$　$\Rightarrow 5$　$(-1)^{11}$

(D) $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$　　6

★42. $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} =$ (C).

(A) 8　　(B) 2

(C) 0　　(D) -6

方法：基本化简方法

43. 若 $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$，则 $|A|$ 中 x 的一次项系数是(D).

$(-1)^{4}x\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

(A) 1　　(B) -1

(C) 4　　(D) -4

$(-1+(-1)+1)-(1+1+1)$

$= -1-3 = -4$

44. 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于（　　）.

$a_1(a_2a_3a_4 - a_4b_2b_3)$

$b_1(-b_2b_3b_4 + a_2a_3b_4)$

$D = a_2a_3[a_4a_1 - b_1b_4] + b_2b_3(b_1b_4 - a_1a_4)$

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$　　(B) $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$

(C) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$　　(D) $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$

45. 如果 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$，则方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + b_2 = 0 \end{cases}$ 的解是（ B ）.

(A) $x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

$-1 = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

(B) $x_1 = -\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

应改为：

$x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} -b_1 & -a_{12} \\ -b_2 & -a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix}} = \dfrac{(-1)^2 \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{-1}$

(C) $x_1 = \begin{vmatrix} -b_1 & -a_{12} \\ -b_2 & -a_{22} \end{vmatrix}$，$x_2 = \begin{vmatrix} -a_{11} & -b_1 \\ -a_{21} & -b_2 \end{vmatrix}$

(D) $x_1 = \begin{vmatrix} -b_1 & -a_{12} \\ -b_2 & -a_{22} \end{vmatrix}$，$x_2 = -\begin{vmatrix} -a_{11} & -b_1 \\ -a_{21} & -b_2 \end{vmatrix}$

$x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & -b_1 \\ a_{21} & -b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix}} = \dfrac{-\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{-1}$

46. 以下结论正确的是（ C ）.

(A) 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ ×

(B) 若 $\boldsymbol{A}^2 = 0$，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ ×

(C) 若 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}^2$ 也是对称矩阵 √

(D) 对任意的同阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$ ×

47. 若三阶行列式 D 的第三行的元素依次为 1、2、3，它们的余子式分别为 2、3、4，则 D =（ B ）.

31 32 33

(A) -8　　(B) 8

(C) -20　　(D) 20

$1\times2 + 2\times(-3) + 3\times(+4)$
$= 2 - 6 + 12 = 14 - 6 = 8$

48. 设 $|\boldsymbol{A}|$ 是四阶行列式，且 $|\boldsymbol{A}| = -2$，则 $||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}|$ =（ D ）.

(A) 4　　(B) 8

(C) 2^5　　(D) -2^5

$(-2)^4|A| = (-2)^5 = -(8\times4)$

49. 满足下列条件的行列式不一定为零的是（ A ）.

A

(A) 行列式的转置行列式刚好等于自己

(B) 行列式中有两行(列)元素完全相同

(C) 行列式中有两行(列)元素成比例 √

(D) 行列式中零元素的个数大于 $n^2 - n$ 个

50. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = m$，$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} = n$，则行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} \end{vmatrix}$ 等于（　　）.

(A) $m+n$　　(B) $-(m+n)$

(C) $n-m$　　(D) $m-n$

★ 51. 设 A 为 n 阶方阵，则 $|A|=0$ 的必要条件是（ B ）.

(A) A 的两行(或列)元素对应成比例

(B) A 中必有一行为其余行的线性组合

(C) A 中有一行元素全为零

(D) 任一行为其余行的线性组合

Scanned with CamScanner

齐次方程组解的情况

$Ax=0$

$m\times n$

(由于影响只有 A 故讨论 A)

① A 满秩

$Ax=0$

对于方阵

对于x：⟺ 只有零解.

对于A：
- 列向量：必线性无关
- 行向量：
  - 若 $m=n$ → 行向量线性无关 → $|A|\neq 0$
  - 若 $m>n$ → 行向量线性相关 → 不讨论行列式.(即不是方阵)

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2=0 \\ 2x_1+x_2=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$R=2$

$$\xrightarrow{r_2-r_1}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]\xrightarrow{r_1-r_2}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

② A 降秩

$Ax=0$

对于x ⟺ 有非零解

对于A：
- 列向量：线性相关
- 行向量：必然 $m\geq n>R$ 必线性相关

当 $m=n$ → $|A|=0$

非齐次方程组解的情况.

$$\underset{m\times n}{A}x=\underset{s\times 1}{b}$$

$$m\left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right]_{n}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_s\end{bmatrix}$$

① $R(A)\neq R(\bar{A})$. $\boxed{\text{无解}}$

② $R(A)=R(\bar{A})$. $\boxed{\text{有解}}$

Scanned with CamScanner

第三章　n 维向量与向量空间

一、计算和证明题

考点：n维向量的运算.

1. 已知 $2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}=(6,6,10,28)^T$，$3\boldsymbol{\alpha}+5\boldsymbol{\beta}=(9,3,2,12)^T$，求 $\boldsymbol{\beta}$.

$-[3\times(2\alpha+3\beta)-2\times(2\alpha+5\beta)]$

$=(0,-12,-26,-60)^T$

2. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\beta}_1-2\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\gamma}=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$，那么 $\boldsymbol{\gamma}$ 如何由 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

考点：线性表出 基本考点

$\gamma=2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3$

$2\beta_1-\beta_2 \quad \beta_1+2\beta_2 \quad 3\beta_1-2\beta_2$

$=14\beta_1-4\beta_2$

考点：向量表出形式（包括秩、矩阵变换）与线性相关的判定

判断秩

★ 3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_4$ 线性无关，判断向量组 $\boxed{\beta_j = 1^{j-1}\alpha_1 + 2^{j-1}\alpha_2 + 3^{j-1}\alpha_3 + 4^{j-1}\alpha_4, j = 1, 2, 3, 4}$ 的线性相关性.

向量的表示形式

解 $\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \\ \beta_2 = \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4 \\ \beta_3 = 1\alpha_1+4\alpha_2+9\alpha_3+16\alpha_4 \\ \beta_4 = \alpha_1+8\alpha_2+27\alpha_3+64\alpha_4 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)}_{B} = \underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1^2 & 1^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \end{bmatrix}}_{\text{范德蒙 } P}$

思路Tips：
①要求了则先写出来发多种情况
②要能够将矩阵表示出方程组.

$|P| \neq 0 \Rightarrow P$ 可逆

$\Rightarrow B \cdot P^{-1} = A$ B可以线性表示A. $R(B) \geq R(A) = 4$ ✓

$\Rightarrow$ 故 $R(B)$ 也为4. 故 ~~所向无关~~ 线性无关 //用秩来判断线性相关

考点：关于这些的秩与极大无关组的求法

★ 4. 求向量组 $\beta_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\end{bmatrix}$，$\beta_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\2\\-2\end{bmatrix}$，$\beta_3 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\\8\end{bmatrix}$ 的秩与所有极大无关组.

STEP1：先成一个向量组.（基本方法）

$$B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

STEP2：写出秩

$R = 2$

STEP3：找全极大无关组. //相应列对应的基

$\beta_1\beta_2$　　$\beta_2\beta_3$　　$\beta_1\beta_3$

考点：定理与判断性质的应用

★ 5. 证明：n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关的充要条件是任何 n 维向量都可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示.

证 ① 必要 用定理 $\because$ $\boxed{\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n}$ 线性无关　设 b 是任何一 n 维向量

$\because$ $n+1$ 个 n 维向量必相关. $\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_n . b$ 线性相关

则 b 一定可由 $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 线性表示.

//证必要用了一个定理

② 充分 用秩来证 $\because$ 任一向量可由 $\alpha_1 . \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 线性表示

$\therefore$ e_i 可由 $\underbrace{\alpha_1 . \alpha_2 \cdots \alpha_n}_{A}$ 线性表示. $E(e_1, e_2 \cdots e_n)$ // n 维基本向量组

$\underbrace{(i=1,\cdots,n)}_{E}$

$n \geq R(A) \geq R(E) = n$ 故 A 为满秩. 即线性无关

//证充分. 用了：满秩 $\Leftrightarrow$ 线性无关互换

考点：秩

6. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的秩为 r_1，向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的秩为 r_2，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的秩为 r_3，向量组 $\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \cdots, \alpha_n+\beta_n$ 的秩为 r_4. 证明：

(1) $\max(r_1, r_2) \leqslant r_3$；

(2) $r_3 \leqslant r_1 + r_2$；

(3) $r_4 \leqslant r_3$.

STEP1：写成向量组.

$A = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$　r_1

$B = (\beta_1 . \beta_2, \cdots \beta_n)$　r_2

$C = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n, \beta_1\, \beta_2 \cdots \beta_n)$　r_3

$D = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \cdots, \alpha_n+\beta_n)$　r_4

$C = (A \vdots B)$

$D = (A+B)$

STEP2：根据矩阵的性质解决. //直接用性质来解决.

① $\max\{R(A). R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A)+R(B)$

② $R(A+B) \leq R(A)+R(B)$

$\max\{R_A, R_B\} \leq R(C) \leq R(A)+R(B)$

$R(D) \leq R(A)+R(B)$

$R(A,B) \le R(A)+R(B)$

$R(A\pm B) \le R(A)+R(B)$

$R(A)+R(B)-n \le R(A\cdot B) \le \min\{R(A),R(B)\}$

考点：秩的性质.

★ 7. 设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$，证明：

(1) 秩 $R(\boldsymbol{A})\le 2$；

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $R(\boldsymbol{A})<2$.

若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=0$，则 $R(A)+R(B)\le n$

~~(1) 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$~~

(1) 解：① $R(A+B)\le R(A)+R(B)$

② $\begin{cases} R(AB)\le R(A) \\ R(AB)\le R(B)\end{cases}$ 秩越乘越小

③ $R(A_{m\times n})\le m$

$R(A_{m\times n})\le n$

有 $\boxed{R(A)=R(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le R(\alpha\alpha^T)+R(\beta\beta^T)}$

又 $R(\alpha\alpha^T)\le R(\alpha)\le 1$　$R(\beta\cdot\beta^T)\le R(\beta)\le 1$

$\therefore R(A)\le 2$

(2) $\because \alpha,\beta$ 线性相关 $\therefore$ 一定存在不全为零的 k_1,k_2 使 $k_1\alpha+k_2\beta=0$

不妨设 $k_1\ne 0$. $\alpha=-\frac{k_2}{k_1}\beta$ 代入 A 中，$A=(-\frac{k_2}{k_1}\beta)\left[(-\frac{k_2}{k_1})\beta\right]^T+\beta\beta^T=(\frac{k_2^2}{k_1^2}+1)\beta\cdot\beta^T$

考点：2个定理

★ 8. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，证明 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

$R(A)\le$ 则 $R(A)<$

解：① 部分与整体定理.

② 一个向量与一个向量组的定理

$\left.\begin{array}{l}\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_n \text{ 无关}\\ \alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_n\beta \text{ 相关}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\beta\text{ 一定由 }\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\text{ 唯一的线性表示}}$

有：$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性无关 则

$\alpha_1\alpha_2\beta$ 线性相关 $\rightarrow$ $\boxed{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta\text{ 也线性相关}}$

则 β 可由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性表示

必要

9. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为 m 个 m 维列向量，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 也为 m 个 m 维列向量，已知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，证明 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性无关的充分必要条件是矩阵 $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$ 与矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 等价.

充分

充分性：已知向量组 $\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性无关 $R(A)=m$

① ③ 且 A、B 等价 则 $R(B)=m$ // 等价,秩相同

故向量组 $\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_m$ 也线性无关.

必要性：已知 A、B 都为 m 个 m 行 1 列向量且线性无关

① ②

$\because$ $\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 和 $\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_m$ 均为 m 维向量空间的基.

故这组向量等价 → 都为基故 2 个等价

于是矩阵 $B=(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m)$ 与矩阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 等价

10. 已知向量 $\alpha_1 = (1, 3, 4, -2)^T$，$\alpha_2 = (2, 1, 3, t)^T$，$\alpha_3 = (3, -1, 2, 0)^T$，求：
(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关时的 t 值； // 通过线性相关 $R<n$ 来体现
(2) 当 $t = 2$ 时，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一个极大线性无关组.

(1) $$A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6-2(t+4) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 6-2(t+4)=0 \quad t=-1$

(2) $t=2$ 时 $R=3$. 即：$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 本身为极大线性无关组

★11. 设 $V=\{x=(x_1,x_2,x_3)^T \mid x_1-x_2+2x_3=0,\ x_1,x_2,x_3\in \mathbf{R}\}$，证明 V 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间，并求 V 的一组基. 由几个向量组成的空间.

考点：
1.1 证明向量空间与子空间
1.2 求基的方法

Q1：证明 V 是 R^3 的一个子空间 ~~并求V的~~ 方法：加法，数乘封闭

令 $\alpha\in V$. $\beta\in V$. 即：　$\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$　$\beta=(b_1,b_2,b_3)$

有. $a_1+2a_2+2a_3=0$
$b_1-b_1+2b_3=0$

$\alpha+\beta=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)^T$. 则有：$(a_1+b_1)-(a_2+b_2)+2(a_3+b_3)=0$ 即 $\alpha+\beta\in V$

//通过加法表示出来，然后证明符合条件，则加法封闭

同理. $k\alpha\in V$. 故 V 是一个向量空间.

又 对于 $\forall\alpha\in V$. 有 $\alpha\in R^3$ 得证.

Q2：根据 V 的定义，V 的基为线性方程组 $x_1-x_2+2x_3=0$ 的基础解系

$n-R=3-1=2$　∴V 的一组基为. $\xi_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$　$\xi_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$　~~再理解V的一组基~~

考点：求解过渡矩阵的基本方法

★12. 设 $\mathbf{R}^3$ 的两组基为

$$\alpha_1=(1,1,1)^T,\ \alpha_2=(1,0,-1)^T,\ \alpha_3=(1,0,1)^T$$
$$\beta_1=(1,2,1)^T,\ \beta_2=(2,3,4)^T,\ \beta_3=(3,4,3)^T$$

求从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵.

STEP1：核心思想：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}x&x&x\\x&x&x\\x&x&x\end{bmatrix}$　横向右乘为过渡矩阵

$$B=A\cdot P$$

向量组 ⇓ 列出转成矩阵

STEP2：表达出 $P=A^{-1}B$　目标 求解对象

即：求 $[A,B]\xrightarrow{行}[E,A^{-1}B]$　得 $P=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}$

回归详情

即：$\begin{bmatrix}1&1&1&1&2&3\\1&0&0&2&3&4\\1&-1&1&1&4&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&2&3&4\\1&1&1&1&2&3\\1&-1&1&1&4&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&0&0&2&3&4\\0&1&1&-1&-1&-1\\0&-1&1&-1&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3/2]{\substack{r_3+r_2\\r_2-r_3}}\begin{bmatrix}1&0&0&2&3&4\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&-1\end{bmatrix}$

考点：求过渡矩阵

//核心：构建=基之间的系数矩阵，再求解矩阵

13. 设 $\mathbf{R}^4$ 中的两组基分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 和 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$，$\mathbf{R}^4$ 中一个向量 ξ 在这两组基下的坐标分别为 $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$，$(y_1, y_2, y_3, y_4)^T$。已知有以下坐标变换关系：

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ y_3 = x_2 + x_3 \\ y_4 = x_3 + x_4 \end{cases}$$

求基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的过渡矩阵 → 注意方向

解：STEP1：$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$

理解

$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$ //先通过基底表示出两者的关系（再通过坐标之间的关系来解题）

STEP2：故 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$ 其中 A 为从 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 到 $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ 的过渡矩阵

即 A 为其系数矩阵。则有：$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + y_2 \\ x_3 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_4 = -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \end{cases}$ 故 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

考点：正交矩阵的性质

14. 设 $\alpha = (1, -2, 1)^T$，$A = E + k\alpha\alpha^T$，其中 $k \neq 0$，如果 A 是正交矩阵，求 k 值。

~~$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}(1, -2, 1) =$~~

$\alpha^T\alpha = [1 \ -2 \ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1+4+1 = 6$

$A^TA = (E + k\alpha\alpha^T)^T(E + k\alpha\alpha^T) = (E^T + k\alpha\alpha^T)(E + k\alpha\alpha^T)$

$= E + 2k\alpha\alpha^T + k^2\alpha\boxed{\alpha^T\alpha}\alpha^T$

又 $\alpha^T\alpha = 6$ //用了矩阵结合律来化简/降阶

又∵ $A^TA = E + 2k\alpha\alpha^T + 6k^2\alpha\alpha^T = E$ //用正交矩阵的性质

故 $(2k + 6k^2)\alpha\alpha^T = 0$ //转了为

∴ $2k + 6k^2 = 0$

又∵ $k \neq 0$ ∴ $k = -\frac{1}{3}$

15. 设 x 为 n 维非零列向量，令 $H = E - 2\frac{xx^T}{x^Tx}$，证明：$H$ 是对称的正交矩阵.

证对称 $H^T=H$.

$H^T = \left(E - 2\cdot xx^T (x^Tx)^{-1}\right)^T = E^T - 2\cdot (x^{-1})^T \cdot x^{-1} (x^T)^T x^T$

$= E - 2\cdot (x^T)^{-1} \cdot x^{-1}\, x \cdot x^T$

又 $\because (xx^T)^{-1} = [(x^Tx)^{-1}]^T$

则：$H^T = H$

证正交 $H^T\cdot H = E$

$HH^T = \left(E - 2\frac{xx^T}{x^Tx}\right)\left(E - 2\cdot\frac{xx^T}{x^Tx}\right)$

$= E - 4\times\frac{xx^T}{x^Tx} + 4\times\frac{xx^T}{x^Tx}$ 线性相乘

$= E$

$4\cdot\frac{\cancel{xx^T}}{x^Tx}\cdot\frac{xx^T}{x^Tx}$

16. 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{bmatrix} b \\ b+1 \\ b \end{bmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ b+1 \end{bmatrix}$，$\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，分析 a 和 b 满足何种关系时，

(1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表示；$\Leftrightarrow [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$ 满秩

(2) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不唯一线性表示；$\Leftrightarrow [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$ 降秩

(3) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. $\Leftrightarrow [\alpha_1\alpha_2\alpha_3]$ 与 $[\beta]$ 无线性关系 $\Rightarrow$ 前2者秩不相等

STEP1：放在一个向量组中.

$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \beta] = \begin{bmatrix} a & b & 2 & 1 \\ a & b+1 & 2 & 1 \\ a & b & b+1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} a & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \end{bmatrix}$

行变换列关系不变

STEP2：取得到的

(1) $\begin{cases} a\neq 0 \\ b-1\neq 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a\neq 0 \\ b-1=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} a=0 \\ b-1\neq 0 \end{cases}$

17. 已知方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ \lambda x_1+x_2+3x_3+\mu x_4=1 \end{cases}$，其对应齐次线性方程组的解空间维数是 2，求：

$4-R=2$

（1）系数矩阵 A 的秩 $R(A)=$ 2 .

（2）λ，μ 的值及方程组的通解.

(2) ① 求 λ. μ:

$$[A,b]=\begin{bmatrix} 1&1&1&1&-1\\ 4&3&5&-1&-1\\ \lambda&1&3&\mu&1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-\lambda r_1]{r_2-4r_1} \begin{bmatrix} 1&1&1&1&-1\\ 0&-1&1&-5&3\\ 0&1-\lambda&3-\lambda&\mu-\lambda&1+\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-(1-\lambda)r_2]{-r_2} \begin{bmatrix} 1&1&1&1&-1\\ 0&1&-1&5&-3\\ 0&0&4-2\lambda&\mu+4\lambda-5&4-2\lambda \end{bmatrix}$$

令 $R(\bar{A})=2$. 则 $\begin{cases} 4-2\lambda=0 \\ \mu+4\lambda-5=0 \\ 4-2\lambda=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \lambda=2 \\ \mu=-3. \end{cases}$

② 方程组的通解：

$$\begin{bmatrix} 1&1&1&1&-1\\ 0&1&-1&5&-3\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1&0&2&-4&2\\ 0&1&-1&5&-3\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

则通解：$k_1\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}4\\-5\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\\0\\0\end{bmatrix}$

★ 18. 求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为：$\xi_1=(1,2,3,4)^T$，$\xi_2=(4,3,2,1)^T$.

STEP1: 设所求齐次线性方程组为 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0$.

把向量 $\xi_1=(1,2,3,4)^T$. $\xi_2=(4,3,2,1)^T$ 带入方程组 //应用基础解系

有. $\begin{cases} a_1+2a_2+3a_3+4a_4=0 \\ 4a_1+3a_2+2a_3+a_4=0 \end{cases}$ 解下来要求 $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$

接下解齐次线性方程组

$$B=\begin{pmatrix} 1&2&3&4\\ 4&3&2&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&-1&-2\\ 0&1&2&3 \end{pmatrix}$$

令 $\begin{pmatrix}a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 得.

$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$ 即 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_1-3x_2+x_4=0 \end{cases}$ 此题答案不唯一

考法：给出相应的基础解的形式 [解] ★ 19. 设 $A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 1 & 3\\ 9 & -5 & 2 & 8\end{bmatrix}$，求一个 4×2 矩阵 B，使得 $AB=O$，且 $R(B)=2$．

求其基础解系

法一：待定系数法．不推

法二：线性方程组角度

① 令 $B=(\beta_1,\beta_2)$　∵ $AB=0$ 即：$A(\beta_1,\beta_2)=0$ ‖未说方程

即：$A\beta_1=0$．$A\beta_2=0$

∴ $Ax=0$ 的解向量满足 β_1．β_2

② 又∵ $R(B)=2$．

∴ β_1．β_2 线性无关．

③ 对 求 $Ax=0$．　$A\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{8} & -\frac{11}{8}\end{bmatrix}$

得 $\xi_1=(\frac{1}{8},+\frac{5}{8},1,0)^T$　$\beta_2(-\frac{1}{8},\frac{11}{8},0,1)^T$．　也可乘8倍

求非齐次线性方程组的解 ★ 20. 设三元一次非齐次方程组 $\boxed{Ax=b}$ 的系数矩阵的秩为 2，且它的三个解向量 η_1，η_2，η_3 满足 $\eta_1+\eta_2=(3,1,-1)^T$，$\eta_1+\eta_3=(2,0,-2)^T$，求 $\boxed{Ax=b \text{ 的通解}}$.

pre 非具体．非齐次线性方程组 = $Ax=0$ 通解 + $Ax=b$ 特解

解空间维度 ‖ 基础解系含向量个数

STEP1 通解：$Ax=0$．解空间维数 $=3-2=1$

$\xi=(\eta_1+\eta_2)-(\eta_1+\eta_3)$ 一定是 $Ax=0$ 的解

[验证：$A[(\eta_1+\eta_2)-(\eta_1+\eta_3)]=A\eta_1+A\eta_2-A\eta_1-A\eta_3=b+b-b-b=0$]

∴ 通解为　$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

STEP2：特解　$\frac{1}{2}(3,1,-1)$

综上：通解为．$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$

Scanned with CamScanner

求非齐次方程组通解 $R(A)=3$

★ 21. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\beta}$ 为 4 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_4 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$，求非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解，其中 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$.

$Ax=0$ 通解　　$Ax=\beta$ 特解

$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\beta$

故 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ 是 $Ax=\beta$ 的特解

$4-3=1$

故只有一个基础解系.

$2\alpha_1+0\cdot\alpha_2-1\cdot\alpha_3-\alpha_4=0$

$\underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}_{A}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}=0$

// 要会等式与方程之间转化

// 故 $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 是 $Ax=0$ 之解

综上 $x=k\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$　$k\in R$.

$|B|=[1\cdot 0+\overbrace{(-4a)+3}^{13-4a}]-[\overbrace{-4+3a+10}^{6+3a}]=7-7a=0$

找条件 这方程组

★ 22. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶非零矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 2 & a\\ 2 & 3 & 5\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，求 a 及齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解.

复习：$A\cdot B=O$ ① $\Rightarrow$ $A[b_1, b_2, b_3]=0$ 即 $[Ab_1, Ab_2, Ab_3]=0$ $\begin{cases}Ab_1=0\\Ab_2=0\\Ab_3=0\end{cases}$ b_i 是 $Ax=0$ 之解

② $R(A)+R(B)\le 3 \Rightarrow R(A)\le 3-R(B)$

若 $R(B)=3$，$R(A)=0$，但 $R(A)\ne 0$，故 $R(B)\ne 3$

$\therefore R(B)=2$，则 $R(A)\le 1$，又 $R(A)\ne 0$ $\therefore R(A)=1$

即 $|B|=0$，得 $a=1$

$\therefore$ 由 $AB=0 \Longrightarrow \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的 2 个解

又 $R(A)=1$ $\therefore$ 基础解系的个数为 $3-1=2$ 个. 故由上已找到.

$\therefore x=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}$　$k_1 k_2\in R$.

知识回顾：①基础解系： $Ax=0$ 解空间的基，就是这个基础解系，其个数为 $n-R(A)$

②一个向量与一个向量组：$\alpha_1\cdots\alpha_n$ 无关，且 $\alpha_1\cdots\alpha_n\beta$ 相关 $\Rightarrow\beta$ 一定可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots$ 线性表示

③反证法：假设要证明的逆命题正确，推出……矛盾，说明假设是错的

④ 2个向量组等价 $\Longrightarrow$ 等秩（单向）

⑤ 满秩 $\Longleftrightarrow$ 无关

线性无关的证明 假设法

★ 23. 设 η 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，证明：

(1) $\eta,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；

(2) $\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$ 线性无关.

(1) 采取反证法：设 $\eta,\xi_1,\xi_2\cdots\xi_{n-r}$ 线性相关

又有 $\xi_1\cdots\xi_{n-r}$ 是一组基础解系，则线性无关

$\Rightarrow\eta$ 一定可由 $\xi_1\ \xi_2\cdots\xi_{n-r}$ 线性表示.

$\eta=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$. 则 η 就是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解

又有 η 是 $Ax=b$ 的解，故与已知矛盾。原假设不成立.

(2). 设(1)中向量组为B，(2)中向量组为C。若BC等价，则题目可证.

C可以线性表示B；B也可线性表示C. 则 BC 等价

$\therefore\ \eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\eta+\xi_3,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$ 线性无关.

★ 24. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，b 是 m 维列向量，证明： //不是很好记住

(1) $R(A^TA)=R(A)$；

(2) 线性方程组 $A^TAx=A^Tb$ 必有解. 比较难 $\Rightarrow$ 非齐次线性方程组 $\Rightarrow R(A^TA)\triangleq R(A^TA,A^Tb)$

$n\times m\ \ m\times n\ \ n\times 1$

(1) 想证明 $A^TAx=0$ 与 $Ax=0$ 同解 $\Longleftrightarrow R(A^TA)=R(A)$

$n\times m\ \ m\times n$ $\quad m\times n$ 维数相同

$n\times n$. $\quad n-R(A)$

$n-R(A^TA)=$

(i) 设 ξ 是 $Ax=0$ 之解. $A\xi=0$ 两边乘 A^T. $A^TA\xi=A^T0\Rightarrow A^TA\xi=0$

$\therefore\ \xi$ 是 $A^TAx=0$ 之解

(ii) 设 η 是 $A^TAx=0$ 之解. $A^TA\eta=0$ 两边乘 η^T $\eta^TA^TA\eta=\eta^T0\Rightarrow(A\eta)^T(A\eta)=0$

$\Rightarrow\|A\eta\|^2=0$

$A\eta=0$. η 是 $Ax=0$ 之解

故此，$A^TAx=0$ 与 $Ax=0$ 同解 $\therefore R(A^TA)=R(A)$

(2) $R(AA^T)\leq R(A^TA,A^Tb)=R(A^T(A,b))$ //分块矩阵的乘法结合 $\leq R(A^T)=R(A^TA)$ 第(1)问

由夹逼得：$R(AA^T)=R(A^TA,A^Tb)$. 则线性方程组 $A^TAx=A^Tb$ 必有解

Scanned with CamScanner

考点：证明 性质 用了求证的 转换的技巧

值得反复琢磨

25. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，已知 B 的秩 $R(B)=n$. 证明：$R(AB)=R(A)$.

$n\le s$

证明：$R(AB)=R(A) \Longleftrightarrow (AB)^TX=0$ 与 $A^Tx=0$ 同解，即有相同解空间

AB：$m\times s$，A：$m\times n$

STEP1：设 ξ 是 $A^Tx=0$ 的解，即 $A^T\xi=0$，

那么 $B^TA^Tx=0 \Rightarrow (AB)^T\xi=0$ 即 ξ 也是 $(AB)^Tx=0$ 的解.

STEP2：① 设 η 是 $(AB)^Tx=0$ 的解，即 $(AB)^T\eta=0$ 即有 $B^TA^T\eta=0$ 转化成线性关系，好为之后变化做铺垫

则有 向量 $A^T\eta$ 是方程组 $B^Tx=0$ 的解

② 又 $\because R(B)=n$ ∴ 方程组 $B^Tx=0$ 只有零解.

故 $A^T\eta=0$ 成立 ∴ η 也是 $A^Tx=0$ 的解

★26. 若 A 为 n 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，证明：

$$R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n \\ 1, & R(A)=n-1 \\ 0, & R(A)<n-1 \end{cases}$$

注：矩阵的秩与伴随矩阵的秩的关联 ⇒ 最好当行行求

① 若 $R(A)=n$，$|A|\ne 0$.

$\boxed{A\cdot A^*=|A|E}$ 伴随矩阵公式

$|A\cdot A^*|=||A|E_n|$

$|A|\cdot|A^*|=|A|^n|E|$

$\Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1}|E|\ne$

∴ A^* 可逆

∴ $R(A^*)=n$

② $R(A)=n-1$ 降秩. $\Rightarrow |A|=0$.

又依据 $A\cdot A^*=|A|E=0$. ∴ $\boxed{R(A)+R(A^*)\le n}$ 关于秩的认识

$\Rightarrow \underline{R(A^*)\le n-(n-1)=1}$

$R(A^*)\le 1 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{0} \\ 1 \end{cases}$ → $R(A)=n-1$. ⇒ A 的最高阶非零子式阶数 $=n-1$

A 的 $n-1$ 阶子式

A 的某个元素的余子式 $\ne 0$

⇒ …… 代数余子式 $\ne 0$

⇒ 伴随矩阵 行列式 $\ne 0$

③ $R(A)<n-1$. A 的所有 $n-1$ 阶子式的行列式都为0.

Scanned with CamScanner

27. 设 A,B 为 n 阶矩阵，证明：$R(AB-E)\leqslant R(A-E)+R(B-E)$。

考点：秩的几个形式性质

证明：

$\because AB-E=AB-A+A-E$ //通过加减来训练

$=A(B-E)+A-E$ //凑出了题中形式

$\therefore R(AB-E)=R\big(A(B-E)+A-E\big)$

$\leqslant R(A(B-E))+R(A-E)$ //拆开和大于合在一起的

$\leqslant R(B-E)+R(A-E)$ //乘积内部小于单个的

关于秩的证明

★28. 若 n 阶方阵 A 满足 $\boxed{A^2=A}$，证明：$R(A)+R(A-E)=n$.

① STEP: $A^2-A=A(A-E)=0$

$\boxed{\text{复习：若}A\cdot B=0\text{ 则 }R(A)+R(B)\leqslant n}$

$\therefore R(A)+R(A-E)\leqslant n$

② STEP: 需证 $n\leqslant R(A)+R(A-E)$

$\boxed{\text{复习：}R(A)+R(B)\geqslant R(A+B)}$

$R(A)+R(A-E)=R(A)+R(E-A)$ （相当于差了一个 -1 倍）

$\boxed{\text{复习：}R(K\cdot A)\ (k\neq 0)=R(A)}$

$\geqslant R[A+(E-A)]=R(E)=n$

$\therefore R(A)+R(A-E)\geqslant n$ $\therefore$ 综上所述 $R(A)+R(A-E)=n$

考点、秩的性质

★ 29. 设矩阵 A 为 $m\times n$，且 $R(A)=m$，证明：若 $BA=O$，则 $B=O$

$s\times m$ $m\times n$

$\because BA=0$ 则 $R(B)+R(A)\le m$ // 非方阵可以看相邻下标

$\Rightarrow R(B)\le m-R(A)$

$R(B)\le 0$

且秩本身 ≥ 0

$\therefore R(B)=0$

又∵只有零矩阵的秩才为零.

$\therefore B=0$

考点回顾：$A_{m\times n}\cdot B_{n\times s}=0 \quad \therefore R(A)+R(B)\le n$

考点：秩与线性方程组的关系

★ 30. 设 α 为 n 维列向量，$\alpha^T\alpha=1$，矩阵 $A=E-\alpha\alpha^T$，证明：$R(A)<n$.

关系的角度转换

采用将秩与方程组解相关联的思想，即

讨论 $Ax=0$ 有非零解 $\Longrightarrow R(A)<n$

①两乘 α

$A=(E-\alpha\alpha^T)$

$\Rightarrow A\alpha=(E-\alpha\alpha^T)\alpha.$

$A\alpha=\alpha-\alpha=0 \Rightarrow$ $\boxed{\alpha\text{是 }Ax=0\text{ 之解向量}}$

②看 $\alpha^T\alpha=1$ 又∵ $\alpha^T\alpha=1$ // 内积长度为1

$\therefore \alpha\ne 0$

★31. 设 A 是 $m\times s$ 矩阵，B 是 $s\times n$ 矩阵，且 $AB=O$，证明：$R(A)+R(B)\leqslant s$.

$A\cdot B=0$ [illegible]

$A\cdot B=0$.

$A[b_1,b_2\cdots b_n]=0$

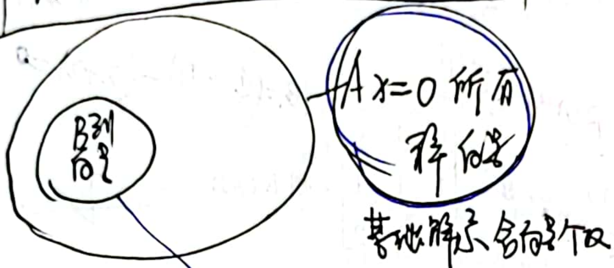
$[Ab_1,Ab_2,\cdots,Ab_n]=0$

$\left.\begin{array}{l}Ab_1=0\\ Ab_2=0\\ \vdots\\ Ab_n=0\end{array}\right\}$ b_i是$Ax=0$之解 $i=1,\cdots,n$

关键点：

$Ax=0$ 中，x 解向量空间的秩

$\Rightarrow$ 基础解系的个数 //即 [illegible]



$\therefore R(B)\leqslant S-R(A)$

$\Downarrow$

$R(A)+R(B)\leqslant S$

二、填空题

线性相关性判断

32. t ≠3 时，$\beta=(-1,5,5t)$ 可由 $\alpha_1=(1,1,2)$，$\alpha_2=(2,t,4)$，$\alpha_3=(t,3,6)$ 线性表示. 可看为列向量

33. 向量组 $(a,b,c)^T$，$(b,c,d)^T$，$(a,a,a)^T$，$(c,b,c)^T$ 线性相关（填写："线性相关""线性无关"或"线性相关性无法判断"）

34. (1) 设齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解，则 A 的行向量组 线性相关性无法判断；A 的列向量组 线性无关（填写："线性相关""线性无关"或"线性相关性无法判断"）

(2) 设 A 为 n 阶矩阵，且齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解，则 A 的行向量组 线性无关，A 的列向量组 线性无关.（填写："线性相关""线性无关"或"线性相关性无法判断"）

★35. A、B 为两个非零矩阵，且 $AB=O$，则 A 的行向量组 无法判断，A 的列向量组 线性相关，B 的行向量组 线性相关，B 的列向量组 线性无法判断（填写："线性相关""线性无关"或"线性相关性无法判断"）

基与坐标

36. 设 $\alpha_1=(1,2,3)^T$，$\alpha_2=(3,2,1)^T$，$\alpha_3=(1,1,1)^T$，求由它们构成向量空间的一组基为 $\alpha_1\alpha_2$ 或 $\alpha_2\alpha_3$ 或 $\alpha_1\alpha_3$ 考点：基的概念、 $|\alpha_1\alpha_2\alpha_3|=0\Rightarrow$ 其中两个.

37. 向量 $\beta=(2,3)^T$ 在 R^2 的一组基 $\alpha_1=(1,1)^T$，$\alpha_2=(0,-1)^T$ 下的坐标为 $(2,-1)^T$. //注意坐标的表示 考点：基与坐标

线性方程组的关系

★38. 设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 是正交矩阵，且 $b=(1,0,0)^T$，$a_{11}=1$，则线性方程组 $Ax=b$ 的解为 $[1,0,0]^T$ 正交的单位向量

★39. 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零，且 A 的秩为 $n-1$，则齐次线性方程组

$x_1+x_2-x_3=0$
$2x_1+x_2+x_3=0$
$m\geq n$

$Ax=0$ 的通解为 $k[1,1,\cdots,1]^T$.

40. A 的列向量组线性无关，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 有解 且只有零解；非齐次线性方程组 $Ax=b$ 解的情况无法判断（填写："有解""无解"或"解的情况无法判断"）

41. 若齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解，则 A 的行向量组 线性相关性无法判断；若非齐次线性方程组 $Ax=b$ 无解，则 A 的所有列向量和 b 构成的向量组 线性相关性无法判断（填写："线性相关""线性无关"或"线性相关性无法判断"）

$Ax=b$

解 $Ax=b$

★ 42. 设 α_1，α_2，α_3 是四元一次非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量，且 $R(A)=3$，已知：$\alpha_1+3\alpha_2=(1,2,3,4)^T$，$2\alpha_2+\alpha_3=(4,3,2,1)^T$，则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解是 $k\begin{bmatrix}-13\\-6\\1\\8\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$

★ 43. 设三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{bmatrix}$，若 A 的伴随矩阵的秩等于1，则 a，b 满足的条件是 $a+2b=0$. $a\neq b$

$3+2\leq R(AB)+3$

$|B|=(4+0)-(2+2)=0$

?. 44. 设 A 为 4×3 矩阵且 A 的秩 $R(A)=3$，$B=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}$，则 $R(AB)=$ 2 .

$R(AB)\leq2$

★ 45. 设 A 为三阶矩阵，A 的每行元素之和都为0，且 $R(A)=2$，设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，且 $\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=\beta$，则非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解是 $k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$

秩与矩阵

46. n 阶方阵 A 的秩为 $n-1$，则其伴随矩阵的秩为 1 .

47. 已知 ξ_1，ξ_2 是 n 元方程组 $Ax=0$ 的线性无关解向量，则其系数矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 的秩为 0 .

$n-R\geq2$ $\therefore R\leq n-2$

48. 设 A 为 n 阶矩阵($n>2$)，A^* 是 A 的伴随矩阵，若对任意 n 维列向量 ξ 均有 $A^*\xi=0$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系含有向量个数 k 应该满足关系：$1<k\leq n$

$A^*=0$
$R<n-1$

★ 49. 已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*\neq O$，η_1，η_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同解。则对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系含有 1 个解向量. n 2

$n-R=k$
$n-k=R<n$

复习：$Ax=b$ 2个不同解 $\eta_1-\eta_2$ 是 $Ax=0$ 之解

★ 50. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&2&-1\\2&1&0\\k&-2&5\end{bmatrix}$，$B$ 是三阶非零矩阵，已知任意三维列向量 ξ 都是齐次线性方程组 $ABx=0$ 的解，则常数 $k=$ 1 .

e_i 是 $ABx=0$ 之解

$E=(e_1,e_2\cdots e_n)$
$ABE=0\Rightarrow AB=0$
$\Rightarrow B$ 所有列向量是 $Ax=0$ 之解
$\Rightarrow$ 有非零解 $\Rightarrow|A|=0$

极轻易 价值

三、选择题

51. 设齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解，则(B).

(A) A 的列向量线性无关　　(B) A 的列向量线性相关

(C) A 的行向量线性无关　　(D) A 的行向量线性相关

考点：基本

★ 52. 若向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关，α_1，α_2，α_4 线性相关，则(C).

(A) α_1 必可由 α_2，α_3，α_4 线性表示

法：反例/特例排除。eg. 设 $\alpha_4=\alpha_1$ 则 BD 不成立.
假 $\alpha_4=\alpha_2$，则 A $\Leftrightarrow$ α_1 必可由 α_2，α_3，[illegible]

Scanned with CamScanner

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示

(C) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

(D) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

I: $(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4+\alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$　$|A|=0$

★ 53. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则向量组Ⅰ: $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 和向量组Ⅱ: $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ (A)

(A) 向量组Ⅰ线性相关；向量组Ⅱ线性无关

(B) 向量组Ⅰ线性无关；向量组Ⅱ线性相关

(C) 向量组Ⅰ和向量组Ⅱ均线性相关

(D) 向量组Ⅰ和向量组Ⅱ均线性无关

Ⅱ: $(\quad) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

54. 向量组Ⅰ: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ: $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则(B)．

(A) 若 $r<s$，向量组Ⅰ必定线性相关

(B) 若 $r>s$，向量组Ⅰ必定线性相关

(C) 若 $r<s$，向量组Ⅱ必定线性相关

(D) 若 $r>s$，向量组Ⅱ必定线性相关

$(\alpha_1 \cdots \alpha_r) = (\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_s) A$　$\boxed{r>s}$

★ 55. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{\gamma}=(c_1, c_2, c_3)$，则三条直线 $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ 以及 $a_3x+b_3y+c_3=0$（其中 $a_i^2+b_i^2\neq 0, i=1,2,3$）交于一点的充要条件是(C)．

$\Leftrightarrow$ 三个直线代表的方程组有唯一解

$\begin{cases}a_1x+b_1y=-c_1\\a_2x+b_2y=-c_2\\a_3x+b_3y=-c_3\end{cases}$　$R\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\\a_3&b_3\end{pmatrix}=2$

(A) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性相关

(B) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性相关，且 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关

(D) $R(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = R(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

$R(\bar{A})=R(A)=2$、α, β 线性无关，α, β, C 线性相关

★ 56. 设 m 行 n 列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m ($m<n$)，则下面结论不正确的是(B)．

(A) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有解　$A_{m\times n}x=b$ 行满秩 $\Rightarrow$ 有解 √对

(B) $\boldsymbol{A}$ 的任意一个 m 阶子式不等于 0 ✗

(C) $\boldsymbol{A}$ 通过初等列变换必定可以化为 $(\boldsymbol{E}_m, \boldsymbol{O})$ 的形式　$A=[\xi_1\ \xi_2 \cdots \xi_m \mid 0, 0, 0]$，$E=(e_1, e_2 \cdots e_m)$

(D) 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　$A^TB^T=O \Rightarrow$ B^T 列向量是 $A^Tx=0$ 解向量，$R(A)=m$，$R(A^T)=m$，所有 B^T 都为零向量

★ 57. 向量 $\boldsymbol{\alpha}=(-4, 2, 6)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2, 1, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 1, 2)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-2, 1, 2)$ 下的坐标(B)．

$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \Rightarrow x=\boxed{A^{-1}\alpha}$，$\alpha=Ax$

(A) $(2, 1, -1)^T$　　(B) $(-1, 2, 1)^T$

(C) $(3, 2, -1)^T$　　(D) $(1, 2, 1)^T$

$[A, \alpha] \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&\vdots&-1\\0&1&0&\vdots&2\\0&0&1&\vdots&1\end{bmatrix}$

★ 58. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$R(\boldsymbol{A})=n-1$，且 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个不同的解向量，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 (A)．

基础解系一定不能是零向量　求方程组的基本形式

(A) $k\boldsymbol{\xi}_1, k\in\mathbf{R}$　　(B) $k(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2), k\in\mathbf{R}$

(C) $k(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2), k\in\mathbf{R}$　　(D) 以上都正确

59. 设 3 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个解为 $\boldsymbol{\alpha}=(1, 0, 2)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(1, -1, 3)^T$，

A 的秩是 2，则对于任意常数 k, k_1, k_2，方程组 $Ax=0$ 的通解可表为（ C ）.

(A) $k_1(1,0,2)^T+k_2(1,-1,3)^T$ (B) $(1,0,2)^T+k(1,-1,3)^T$

(C) $k(0,1,-1)^T$ (D) $k(2,-1,5)^T$

★ 60. 设 A 为 n 阶矩阵，$r(A)=n-1$，A_{ij} 是 $|A|$ 的代数余子式，且 $A_{nn}\neq 0$，A^* 为 A 的伴随矩阵. 分析以下命题并确定（ D ）.

① $|A|=|A^*|=0$； ✓

② $r(A^*)=1$； ✓

$n-R(A)=1$

③ $k(A_{n1},A_{n2},\cdots,A_{nn})^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解，k 是任意常数； ✓

④ A 的前 $n-1$ 个列向量是齐次线性方程组 $A^*x=0$ 的一组基础解系.

(A) 只有①正确 (B) 只有①和②正确

(C) 只有①、②和③正确 (D) 4 个命题都正确

$A^*A=|A|E$

$A^*A=0$

∴ A 的列向量是 $A^*x=0$ 的

$\Rightarrow n-R(A^*)=n-1$

① $R(A^*)=\begin{cases} n & R(A)=n \\ 1 & R(A)=n-1 \\ 0 & R(A)<n-1 \end{cases}$

③ $\boxed{AA^*=A^*A=|A|E}$ 刻在脑子里 ×20

∵ $|A|=0$ ∴ $\boxed{A^*A=0}$ ∴ A^* 的列向量为 $Ax=0$ 的解

又∵ $n-R(A)=1$ ∴ 只找一个即可

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Longrightarrow A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{nn} \end{bmatrix}$

又已知 $A_{nn}\neq 0$ ∴ 先这一列的

5.7

$$= [(6t+4t+12)] - [2t^2 + \cancel{\ } + 12] \neq 0$$

$$= 10t - 24 - 2t^2 \neq 0$$

$$-t^2 + 5t - 6 = 0$$

$$t \neq 2 \text{ 且 } t \neq 3$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 5t \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & 4 \\ t & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

33.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & b \\ c & d & c \end{vmatrix} = (ac^2 + bcd + cb^2) - (c^3$$

$$(abc + ac^2 + abd) - (acd + ac^2 + ab^2)$$

$$\begin{pmatrix} a & b & a & c \\ b & c & a & b \\ c & d & a & c \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - \frac{c}{a} r_1]{r_2 - \frac{b}{a} r_1} \begin{pmatrix} a & b & a & c \\ 0 & c - \frac{b^2}{a} & a-b & b - \frac{bc}{a} \\ 0 & d - \frac{b^2}{a} & a-b & c - \frac{bc}{a} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & a & b & c \\ 0 & a-b & c - \frac{b^2}{a} & b - \frac{bc}{a} \\ 0 & a-b & d - \frac{b^2}{a} & c - \frac{bc}{a} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} a & a & b & c \\ 0 & a-b & c - \frac{b^2}{a} & b - \frac{bc}{a} \\ 0 & 0 & c-d & c - bc \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

40.

$R(AB) \le R(A) + R(B)$.

~~R(B)~~.

$|B| = 4 - 4 = 0$

$B \xrightarrow{r_1 - r_2 \times 2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$R(B) = 2$.

三、

1、

32.

①转换：向量线性表示 $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\begin{matrix}Ax=b\\ \text{方程有解}\end{matrix}}$ $\boxed{(\alpha_1^T\alpha_2^T\alpha_3^T)x=\beta}$

β能被$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$线性表示 $\Longleftrightarrow$ $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 有解.

② $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & t & -1 \\ 1 & t & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 5t \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1\ \ -r_2-2r_1]{} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & t & -1 \\ 0 & t-2 & 3-t & 6 \\ 0 & 0 & 6-2t & 5t+2 \end{array}\right)$

其系数矩阵行列式 $|\ \ |\neq 0$时，即满秩，$(t-2)(6-2t)\neq 0$. $(t\neq 2$, 且$t\neq 3$

β能表示 $(\alpha_1^T\alpha_2^T\alpha_3^T)$.

③分类讨论.

~~t=2时.~~

t=2时. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-2r_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 此时. $R(A)=R(\bar{A})$ 有解且能表示

t=3 $\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{array}\right)$ 此时. $R(A)\neq R(\bar{A})$，此时β不能被表出.

综上. 在$t\in R$中，只有$t\neq 3$时成立

35.☆.

交换① $\boxed{\text{若} \underset{m\times n}{A}\underset{n\times s}{B}=0 \text{ 则 } R(A)+R(B)\leq n}$

② $\boxed{\underset{m\times n}{A}\underset{n\times s}{B}=0.}$

$A[b_1, b_2, \cdots, b_s]=0$

$[Ab_1, Ab_2, \cdots, Ab_s]=0 \Rightarrow Ab_1=0\ \ Ab_2=0\cdots\ Ab_s=0$

$\boxed{\therefore\ b_i \text{ 是 } Ax=0 \text{ 之解}}$

$\because AB=0$ $\therefore B$的所有列向量都是$Ax=0$之解向量

$\because B\neq 0$ $\therefore \boxed{Ax=0 \text{ 有非零解}}$ $\therefore R(A)<A$列向量个数.

Scanned with CamScanner

$(AB)^T=0^T$

$\therefore\ B^TA^T=0$

$\because\ A^T$列向量是B^Tx的之解

又$\because A^T\neq 0$ $\therefore B^Tx=0$有非零解

$\therefore B^T$列向量组线性相关 $\longrightarrow$ B行向量组相关

36.

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&-8\\0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-4r_3}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&-1&-2\end{pmatrix}$$

$R=2$

7.

$\beta=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. $2\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

$X=\square\alpha_1+\square\alpha_2$

38.☆.

复习: ① $A^T A=E$

$A^T=A^{-1}$.

② $A=\begin{bmatrix}a_{11}&x&y\\a_{21}&x&x\\a_{31}&x&x\end{bmatrix}$

单位向量

对: $Ax=b$ 来说, 若 A满秩 (or 正交 or 可逆) 则其解唯一。⇒ 到头来还是讲解线性关系

$\therefore$ 线性方程组可直接表示 $\boxed{x=A^Tb}$

$\therefore x=A^Tb$

又 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&*&*\\0&*&*\end{bmatrix}$

"*"不确定了

$\therefore x=A^Tb=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&*&*\\0&*&*\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

39. ☆.

①

先特殊：

带进去
一下.

$$\overset{3\times3}{\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\4 & 3 & -7\\-1 & -2 & 3\end{bmatrix}}\overset{3\times1}{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

//直接联系矩阵相乘.得到如图关系.

$\Rightarrow$推广： $A\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$

② 看 $Ax=0$. → 基础解系有：$n-(n-1)=1$（个）.

$\Rightarrow$结合①②得：$A\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$ 得.解：$\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$即为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

∴ 通解为 $k\cdot[1,1,1\ldots1]^T$

42. ☆.

$Ax=b$ 通解 $\begin{cases}Ax=0 \text{ 通解}\\ Ax=b \text{ 特解}\end{cases}$

①通解：

$Ax=0$. 通解：基础解系有 $n-R(A)=4-3=1$（个）.

$A\alpha_1=b \quad A\alpha_2=b \quad A\alpha_3=b$

凑题目形式：$A(\alpha_1+3\alpha_2)=A\alpha_1+3A\alpha_2=b+3b=4b$ —— ①

$A(2\alpha_2+\alpha_3)=2A\alpha_2+A\alpha_3=2b+b=3b$ —— ②

//为了得出 $A\cdot x=0$ 中的 x. 只用上述条件来凑 相应的形式.

∴ ①×3 − ②×4. $A[3\times(\alpha_1+3\alpha_2)-4\times(2\alpha_2+\alpha_3)]=0$

即：$3(\alpha_1+3\alpha_2)-4\times(2\alpha_2+\alpha_3)$ 即为我们所求的 $Ax=0$ 之解. 即：$\begin{bmatrix}-13\\-6\\1\\8\end{bmatrix}$

② ∴特解：$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$

综上：$k\cdot\begin{bmatrix}-13\\-6\\1\\8\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$ $k\in R$

二、选择

线性代数练习册

k_1, k_2，方程组 $Ax=0$ 的通解可表为(C

$-1, 3)^T$ (B) $(1, 0, 2)^T + k(1, -1,$

53. 方法一

1 2 3

0 0

43.

$R(\text{方程式}) = n-1 = 2 \Rightarrow |A| = 0$

$|A| = (a-b)^2 \cdot (2b+a) = 0$

$\boxed{a=b \text{ or. } a=-2b}$

$A = \begin{bmatrix} a & a & c \\ a & a & c \\ a & a & a \end{bmatrix}$ $R(A) = \begin{cases} 1 & a \neq 0 \\ 0 & a = 0 \end{cases}$

$\therefore a+2b=0$

44

45题

$Ax=0$ 通解 $\rightarrow 3-2=1$

$A \cdot \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$Ax=\beta$. $A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \beta$

Scanned with CamScanner

三、解

53.

方法一

$(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_4+\alpha_1)$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$$

$|A| = (-1)^2 \times |1| + (-1)^5 \times 1 \times 1 = 0$

$\Rightarrow$ 相当于 ~~线性无关~~ 有非零解

$(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_4-\alpha_1)$

$$= (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A| \neq 0$

方法二 令 $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = E \longrightarrow$ 自己特殊表示

57. $3-2=1 \rightarrow$ 基 $\alpha-\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

第四章　相似矩阵与二次型

一、计算和证明题

★ 1. 求矩阵的特征值与特征向量 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{bmatrix}$. $\boxed{令 Ax=\lambda x 的解}$

Q1: 解: $|A-\lambda E|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda&2&3\\2&1-\lambda&3\\3&3&6-\lambda\end{vmatrix}=0$　在 $f(\lambda)=a_3\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$

$\lambda_1=0\quad \lambda_2=-1.\quad \lambda_3=9$

Q2: 解: ① 当 $\lambda=0$ 时, $(A-0E)x=0$　$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-3\\0&-6&-3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

∴特征向量 $k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $k\neq0$. $k\in R$.

② $\lambda=1$ 时. $(A+E)x=0$　$\begin{bmatrix}2&2&3\\2&2&3\\3&3&7\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 特征向量 $k\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $k\neq0$. $k\in R$

③ $\lambda=9$ 时, $(A-9E)x=0$, $\begin{bmatrix}-8&2&3\\2&-8&3\\3&3&-3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&10&-5\\0&-10&5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$k\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ $k\neq0$. $k\in R$.

考点: ab型矩阵 求特征值 和特征向量

★ 2. 求矩阵的特征值与特征向量 $A=\begin{bmatrix}3&2&2&2\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{bmatrix}$.

$|A-\lambda E|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}3-\lambda&2&2&2\\2&3-\lambda&2&2\\2&2&3-\lambda&2\\2&2&2&3-\lambda\end{vmatrix}=0$

又: 几何重数 = 代数重数 = 3

∴ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3$

又: $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=tr(A)$

∴ $\lambda_4=12-(3)=9$

∴ 当 $\lambda_4=9$ 时, $\boxed{(A-9E)x=0}$

解得 $k_4\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$

① 先求一个: $\lambda=(a-b)=3-2=1$

$(A-1E)x=0$

$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\ & & & \end{bmatrix}$　$4-1=3$.　$k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

$k_1k_2k_3$ 不同时为 0, 且 $k_1,k_2,k_3\in R$

★ 3. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$，
(1) 求矩阵 A 的特征值；
(2) 证明 $E+A$ 为可逆矩阵.

(1). $A^2-A=0$

$A\cdot(A-E)=0$ //矩阵运算(若提)

$|A|\cdot|A-E|=0$ //取行后进行行列式运算

则有：$|A|=0$ 或 $|A-E|=0$

0是A的特征值　1是A的特征值

(2)

复习：

①若 α 是 A 的特征值

则 $f(\alpha)$ 是 $f(A)$ 的特征值

特征值：

$A<\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$

$E+A<\begin{matrix}1+0=1\\1+1=2\end{matrix}$　∴ $E+A$ 为可逆矩阵

②若 $f(A)=0$，则 A 的特征值一定是 $f(\lambda)=0$ 的根

4. 若矩阵 A 与 B 相似，C 与 D 相似，证明 $\begin{bmatrix}A & O\\O & C\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}B & O\\O & D\end{bmatrix}$ 相似.

设 $B=P^{-1}AP$　$D=Q^{-1}C\cdot Q$

$$\begin{bmatrix}B & O\\O & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P^{-1}AP & O\\O & Q^{-1}CQ\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}P^{-1} & O\\O & Q^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & O\\O & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P & O\\O & Q\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}P & O\\O & Q\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}A & O\\O & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P & O\\O & Q\end{bmatrix}$$

$$=\cancel{\begin{bmatrix}A & O\\O & C\end{bmatrix}}$$

★ 5. 已知3阶方阵A的特征值为 1，1，2，求 $|A-E|$，$|A+2E|$，$|A^2+2A-3E|$．

① $|A^2+2A-3E|$ 特征值 $1^2+2\times1-3=0$ $2^2+2\times2-3=5$

则 $|\ \ |=0\times0\times5=0$

② $|A-E|$ 特征值 $1-1=0$ $2-1=1$

则 $|A-E|=0\times1=0$

③ $|A+2E|$ 特征值 $1+2=3$ $2+2=4$

$\therefore |A+2E|=36$

★ 6. 设 $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{bmatrix}$，求 A^{100}．

相似对角化问题

$P^{-1}AP=\Lambda \Rightarrow A=P\Lambda P^{-1} \Rightarrow A^{100}=(P\Lambda P^{-1})^{100}$
$=P\Lambda^{100}P^{-1}$

①.求特征值 $|A-\lambda E|=0$ $\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ -4 & 3-\lambda\end{vmatrix}$
$=(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=2.\ \lambda_3=-1$

②求特征向量：当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时 解方程组 $(A-2E)x=0$ $\begin{bmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$ $P_1\begin{bmatrix}1\\4\\0\end{bmatrix}$ $P_2\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}$

当 $\lambda_3=-1$ 时 $(A+E)x=0$. $\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ $P_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

令 $P=(P_1,P_2,P_3)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$

$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -1\end{bmatrix}$

$A=P\Lambda P^{-1}$

$\therefore A^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}$

$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^{100} & & \\ & 2^{100} & \\ & & (-1)^{100}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3}\\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4-2^{100} & 2^{100}-1 & 2^{100}-1\\ 0 & 3\times2^{100} & 0\\ 4-2^{102} & 2^{100}-1 & 2^{102}-1\end{bmatrix}$

★7. 设方阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}5 & & \\ & y & \\ & & -4\end{bmatrix}$ 相似，求 x，y 的值.

相似 ⇒ 5大特征：①等价；②特征值相等；③迹相等；④行列式等；⑤秩

$|A-\lambda E|=0$

列方程的依据

⇒ 运用③：$1+x+1=5+y-4$

④：$|A|=|B|$ ⇒ $|A|=x-16-16-(16x+4+4)$

$|B|=-20y$ → $-15x-40=-20y$

$\boxed{3x+8=4y}$

$\therefore \begin{cases}x=4\\ y=5\end{cases}$

★8. 设方阵 $A=\begin{bmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{bmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$ 相似，求：

(1) a，b 的值；

(2) 可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

(1) ① $|A|=|\Lambda|$ ⇒ $1+ab+ab-1-a^2-b^2=0$ $\boxed{a=b}$

② $|A-1E|=0$ ⇒ $\begin{vmatrix}0 & a & 1\\ a & 0 & b\\ 1 & b & 0\end{vmatrix}=0$ $ab+ab=0$

$\therefore a=b=0$

(2) $\boxed{对角化}$

①求特征值. $|A-\lambda E|=0$ $\lambda_1=0$ $\lambda_2=1$ $\lambda_3=2$

②求特征向量. 当 $\lambda_1=0$ 时，$Ax=0$. $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}x=0$. $P_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

当 $\lambda_2=1$ 时 $(A-E)x=0$ $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}x=0$ → $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$. $P_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

当 $\lambda_3=3$ 时，$(A-2E)x=0$ $\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$ → $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$ $P_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

$P=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$

③即使得 $P^{-1}AP=\Lambda$

Scanned with CamScanner

对称

★ 9. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$，求正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

求出结果，再变成正交（单位矩阵）

① 特征值 $|A-\lambda E|=0$　$\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&-1\\-1&2-\lambda&-1\\-1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=0$　$\lambda=3$　$(A-\lambda E)x=0$

代数重数 = 几何重数 = 2

[只有实对称阵才相等!!]

有 $\lambda_1=\lambda_2=3$

且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=tr(A)$　$\lambda_3=0$

② 当 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 时，$(A-3E)x=0$　$\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}$　$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}a\\a\\b\end{pmatrix}$ 且 $2a+b=0$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\lambda_3=0$ 时，$Ax=0$．当A为实对称矩阵 ⇒ 属于不同特征值的特征向量一定垂直

③ $Q=\left[\ \ \right]$ 则 $[\,]$，此时 $Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{bmatrix}3&&\\&3&\\&&0\end{bmatrix}$

10. 已知 n 阶可逆矩阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，求 $E-A^*$ 的全部特征值及 $|E-A^*|$.

①　$A^*=|A|\cdot A^{-1}$．伴公式

$\therefore Ax=\lambda x\Rightarrow\frac{1}{\lambda_i}x=A^{-1}x$　$\therefore\lambda_i'=\frac{1}{\lambda_i}$

$A^*x=\lambda' x\Rightarrow\frac{|A|}{\lambda_i}x=A^*x$　$\therefore\lambda_i'=\frac{|A|}{\lambda_i}$

$(E-A^*)x=\lambda_i''x\Rightarrow\lambda_i''=1-\frac{|A|}{\lambda_i}$

$\lambda(E-A^*)_i=1-\frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}{\lambda_i}=1-\prod_{k\neq i}\lambda_k$

② $|E-A^*|$

$|E-A^*|=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\prod_{k\neq i}\lambda_k\right)$

11. 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 6，3，3，特征值 6 对应的特征向量为 $x_1=(1,1,1)^T$，求矩阵 A. 通过对角阵反求原矩阵

① 与 (1,1,1) 正交向量 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ $(1,1,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$ $3-1=2$

$P_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ $P_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

行入 $\lambda=6$ 时 ~~行特征向量~~ $P_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $\therefore P=(P_1P_2P_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

② $\therefore P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{bmatrix}$ $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}$

$=\begin{bmatrix}6&-3&-3\\6&3&0\\6&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}$

又 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列}}\begin{bmatrix}E\\BA^{-1}\end{bmatrix}$ 原式 $=\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$

★12. 设 λ_1，λ_2 是矩阵 A 的两个不同特征值，x_1，x_2 分别为其对应的特征向量，证明 x_1+x_2 不是 A 的特征向量.

反证法：设 x_1+x_2 是 A 的属于 λ_3 的特征向量

则：$A(x_1+x_2)=\lambda_3(x_1+x_2)$ 即 $Ax_1+Ax_2=\lambda_3x_1+\lambda_3x_2$

$\because Ax_1=\lambda_1x_1$ $Ax_2=\lambda_2x_2$ 代入上式得

$(\lambda_1-\lambda_3)x_1+(\lambda_2-\lambda_3)x_2=0$

又 $\because \lambda_1\neq\lambda_2$. $\therefore x_1, x_2$ 线性无关.

$\therefore \boxed{\lambda_1-\lambda_3=0.\quad \lambda_2-\lambda_3=0}$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ 与题设矛盾.

$\therefore$ 假设不成立 $\therefore x_1+x_2$ 不是 A 的特征向量

★ 13. 设 $A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&b&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$，已知 $|A|=-1$，A 的伴随矩阵 A^* 的特征值 λ_0 对应的特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$，求 λ_0 和 b 的值.

① $|A|=-4b+3+2b-(10)=-1$　$b=-3$. 则 $A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$

② 又有 $A^*\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\lambda_0\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$　$\boxed{AA^*=A^*\cdot A=|A|\cdot E}$ 转化成

A

$|A|\cdot E\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}=\lambda_0 A\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$ ⇒ $-1\cdot\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}=\lambda_0\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$　$\lambda_0=1$

代数重数=1 → 几何重数不会超过代数重数，即几何重数=1

★ 14. 设 n 阶方阵 A 有 n 个互不相同的特征值，证明 $AB=BA$ 的充分必要条件是 A 的任意一个特征向量都是 B 的特征向量.

必要性： $AB=BA$ ⟹ $Ax_i=\lambda x_i$，且 $Bx_i=\mu x_i$

设 x_1 是 A 属于 λ_1 的特征向量 ⟹ $Ax_1=\lambda_1 x_1$

$BAx_1=B\lambda_1 x_1$

$A(Bx_1)=\lambda_1(Bx_1)$　即：Bx_1 是 A 属于 λ_1 的特征向量

① 当 $Bx_1=0$，

$\boxed{Bx_1=0x_1}$ ⟹ x_1 是矩阵 B 属于 0 的特征向量.

② 当 $Bx_1\neq0$，

$\boxed{x_1\text{与}Bx_1\text{相关}}$　$Bx_1=\mu_1x_1$

充分性：$Ax_i=\lambda_1x_i$　$Bx_i=\mu x_i$　∵ A 有 n 个不同特征值 → 对特征向量线性无关

→ 必然可对角化 ∴ $P^{-1}\cdot A\cdot P=\Lambda$　$P^{-1}\cdot B\cdot P=V$

$A=P\Lambda P^{-1}$　$B=PVP^{-1}$

$AB=P\Lambda P^{-1}PVP^{-1}=P\Lambda VP^{-1}$　$BA=PVP^{-1}P\Lambda P^{-1}=PV\Lambda P^{-1}$

注：对角阵乘法可交换

Scanned with CamScanner

★15. 已知 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 均为非零向量，且 $\alpha^T\beta=0$，$A=\alpha\beta^T$，试求：

(1) A^2；

(2) A 的特征值与特征向量；

(3) $\boxed{\text{证明 } A \text{ 不可对角化} \Longleftrightarrow A\text{有}n\text{个线性无关特征向量}}$

(1). $A^2=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T$ 又 $(\alpha^T\beta)^T=\beta^T\alpha=0$

$\therefore A^2=0$

(2) $R(A)=R(\alpha\beta^T)\le R(\alpha)=1$ 若$n=1$ 则 $\alpha=a_1\neq0$, $\beta=b_1\neq0$ 则 $a_1b_1\neq0$ 故 $n\neq1$.

$\therefore$ $n>1$ 又 $R(A)=1$ $\therefore |A|=0 \Longleftrightarrow 0$是$A$的特征值.

属于0的特征值的特征向量 $Ax=0$. $R(A)=1$.

代数重数 $\geq$ 几何重数 $=n-1$.

$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=tr(A)$. $\underbrace{0+0+\cdots+0}_{n-1}+\lambda_n=tr(A)$

16. 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 表示为矩阵形式并求其秩.

$$A=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}(b_1\ b_2\cdots b_n)=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\\vdots & & & \\a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix}$$

$tr(A)=(\alpha,\beta)=0$

$\therefore$ $tr(A)=0$，$\lambda_n=0$.

$\therefore$ $\boxed{0\text{是}A\text{的}n\text{重特征值}}$.

$A\to\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ & & & \end{bmatrix}$ $\therefore$ $k_1\begin{bmatrix}b_2\\-b_1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}b_3\\0\\-b_1\\\vdots\end{bmatrix}\cdots k_{n-1}\begin{bmatrix}b_n\\\vdots\\-b_1\end{bmatrix}$

(3) 由(2)得. A不满秩 即不可对角化 $k_1\cdots k_{n-1}$. 不同时为0

16. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\,x_2\,x_3)\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\-2 & 2 & -2\\0 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ $\therefore R=2$

17. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，证明：如果对任意 n 维列向量 x，都有 $x^T Ax = 0$，则 $A = O$.

思路：由特殊到一般

取 $x^T = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$，则 $x^T A x = \underline{a_{ii} = 0}$ ⇒ 即A对角元全为0

取 $x^T = (0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0, 1, \cdots, 0)$ 则 $x^T A x = a_{ii} + a_{jj} + a_{ij} + a_{ji}$

$\xrightarrow[\text{实对称}]{a_{ij}=a_{ji}} a_{ii} + a_{jj} + 2a_{ij} = 0$

又 ∵ $a_{ii} = a_{jj} = 0$ ∴ $a_{ij} = 0$

$A = P^T B P$

综上，$A = O$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

★ 18. 用正交变换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_3$ 为标准形，并求所用的正交变换. [x换成y]

核心：仍是特征值 特征解

$[x] = P[y]$

① $x = Py$ $f = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 其 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

② $f = x^T A x$

$|A - \lambda E| = 0$ $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 1$ $\lambda_3 = 4$

当 $\lambda_1 = 0$. $Ax = 0$. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

当 $\lambda_2 = 0$. $(A-E)x = 0$. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$

当 $\lambda_3 = 4$. $(A-4E)x = 0$ $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

③ $\boxed{f = x^T A x}$ $\boxed{x = Py}$ ∴ $f = (Py)^T A (Py) = y^T (P^T A P) y = y^T (P^T A P) y = y^T \Lambda y$

$= 0 \cdot y_1^2 + b \cdot y_2^2 + 4 \cdot y_3^2$

配方法的体现

19. 用配方法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_3$ 为标准形.

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2(x_1-x_3)^2 + x_2^2$$

$y_1 = \frac{1}{2}(x_1 - x_3)$

令 $\begin{cases} x_1 - x_3 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{f = 2y_1^2 + y_2^2}$$ ✓

★ 20. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_1x_3\ (a > 0)$ 通过正交变换化成标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$，求参数 a 及所用的正交变换.

//这就是所谓 正交变换法

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ 且A特征值1,2,5.

$|A| = 18 - 2a^2 = 1\times2\times5 = 10$. 得 $a^2 = 4$. 由 $a>0$ $\underline{a=2}$

对于A特征值 $\lambda_1 = 1$. $(E-A)x=0$ $P_1 = (-1,0,1)^T$

$\lambda_2 = 2$ $(2E-A)x=0$ $P_2 = (0,1,0)^T$

$\lambda_3 = 5$. $(5E-A)x=0$ $P_3 = (1,0,1)^T$

又∵实对称矩阵各特征向量正交 ∴只需单位化即得

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$$

则所求变换为 $x = Qy$

★ 21. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2bx_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换化为标准形 $f=y_2^2+2y_3^2$，试求参数 a,b 及所用的正交变换.

① $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

且 $\Lambda=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$

② $|A|=-(a-b)^2=0\times1\times2=0\Rightarrow a=b$

③ $|A-\lambda E|=0$ 也成立

$\lambda=1$. $|A-E|=0.\Rightarrow 2a^2=0.\quad a=0\Rightarrow b=0$

将 $\lambda_1=0$. $\lambda_2=1$. $\lambda_3=2$ 代入得. $P_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $P_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $P_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}^T$ $Q=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$

21 | 求得 $a=b=0$，且正交变换矩阵 $=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$

22. 已知二次曲面方程 $x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3=1$ 经正交变换 $x=Qy$ 化为椭圆柱面方程 $y_2^2+4y_3^2=1$，试求参数 a,b 及所用的正交变换矩阵 Q.

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=1$　　$A=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$　$\begin{cases}1+a+1=\mathrm{tr}(A)=1+4\\|A|=0\times1\times4=0\end{cases}$

$a=3,\ b=1.$

A 的特征值为 $\lambda_1=0$ $\lambda_2=1$. $\lambda_3=4$.

$|A-\lambda E|=0$. 得 3个特征向量 $P_1=(-1,0,1)^T$ $P_2=(1,-1,1)^T$. $P_3=(1,2,1)^T$

$\therefore\ Q=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\0&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$

$\therefore\ Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&4\end{bmatrix}$

证明正定：顺序主子式均 >0

23. 讨论当 t 取何值时，矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & t & 1\\ t & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1-t\end{bmatrix}$ 是正定的.

∵ 若正定，其顺序主子式 >0. 推出

∴ $P_1=1>0$

$D_2=2-t^2>0 \Rightarrow |t|<\sqrt{2}$

$D_3=t(t+1)(t-2)>0 \Rightarrow t\in(-1,0)$

得 $t\in(-1,0)$.

24. 若实二次型 $x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$ 是正定二次型，求 t 的取值范围.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & t\\ 0 & t & 3\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} P_1=1 \\ D_2=2-1=1>0 \\ D_3=1-t^2=(1+t)(1-t)>0 \Rightarrow t\in(-1,1). \end{cases}$$

山职大题：将线性代数转化至二次型来表示空间(曲面)

★ 25. 设二次型 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz$，求：

(1) 一个正交变换，将 f 化为标准形，并求 $f=a^2$ 表示什么曲面；

(2) 平面 $x+y+z=b$ 被 $f=a^2$ 所截下部分的面积.

(1) ① $f(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x^TAx$

$|A-\lambda E|=0$. 显然易看出 有 $\lambda=\frac{3}{2}$. $(A-\frac{3}{2}E)x=0$

$\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}a\\a\\b\end{bmatrix}\rightarrow a+b+a=0$, $2a=-b$

$\therefore\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$

代数方程. 系数矩阵 几何重数=2.

~~当 $\lambda_3=0$~~ 又 $\because$ $\lambda_3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=tr(A)=1+1+1=3$ $\therefore\lambda_3=0$ → 一般也是用和来表

当 $\lambda_3=0$. $Ax=0$. 得: $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$. $\boxed{x=Py}\Rightarrow P=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$

$\therefore f=x^TAx=(Py)^TA(Py)=y^T(P^TAP)y=y^T\Lambda y=\frac{3}{2}x_1^2+\frac{3}{2}y_1^2+0\cdot z_1^2$

~~26. 设 A 为 n 阶正定矩阵，证明 $|A+E|>1$.~~

② $\boxed{令.\ \frac{3}{2}x_1^2+\frac{3}{2}y_1^2+0\cdot z_1^2=a^2.}$ $\left(\frac{x_1}{\sqrt{\frac{2}{3}}a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{\sqrt{\frac{2}{3}}a}\right)^2=1$

(2) $x+y+z=b=(1,1,1)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(1,1,1)\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\sqrt{3}z_1=b$

⇒ 在同一平面内 可投影: $\pi\cdot(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a)\times(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times a)=\frac{2\pi}{3}a^2$

---

26. $\because A$ 的特征值 $\lambda>0$. 则 $A+E$ 特征值为 $1+\lambda>1$.

故. $|A+E|>1$

考法：已知正定进行转化

27. 设 A 为正定矩阵，证明 A^{-1}，A^*，A^m（m 为正整数）均为正定矩阵.

$\because A$ 正定 $\therefore A=A^T$

$\therefore$ ① $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$

② $(A^*)^T=(|A|\cdot A^{-1})^T=|A|\cdot A^{-1}=A^*$

③ $(A^m)^T=(A^T)^m=A^m$

均对称

考点：证明正定：对称 + $x^TAx>0$

28. 设 A 为 $m\times n$ 阶实矩阵，$R(A)=n$，证明 A^TA 是正定矩阵.

$m\geq n$

① 先证对称

$(A^TA)^T=A^TA$ $\therefore$ 对称

② 再证 $x\neq 0$. $x^TAx>0$

$\forall x\neq 0$ $f=x^T\cdot A^TA\cdot x=(Ax)^T\cdot Ax=\|Ax\|^2>0$

$\therefore A^TA$ 是正定矩阵

考点：证明正定：对称 + $x\neq 0$，$x^TBx>0$

先证对称

★ 29. 设 A 为 $m\times n$ 阶实矩阵，$B=\lambda E+A^TA$，证明：当 $\lambda>0$ 时，B 为正定矩阵.

$n\times m$ $m\times n$

① $B^T=(\lambda E+A^TA)^T=(\lambda E)^T+(A^TA)^T=\lambda E+A^TA=B.$

② 任取 $x\neq 0$（列向量）

$$x^TBx = x^T(\lambda E+A^TA)x = \lambda\, x^Tx+(Ax)^T(Ax)$$

$$= \underbrace{\lambda\,\|x\|^2}_{>0}+\underbrace{\|Ax\|^2}_{\|Ax\|^2\geqslant 0}$$

$\because \lambda>0$

$\therefore x^TBx>0$

$\therefore B$ 正定.

$$\begin{array}{ccc} 1\times 3 & 3\times 3 & 3\times 1 \\ (y_1\ y_2\cdots y_n) & \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_n\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\end{array}$$

★ 30. 设 $f=x^TAx$ 为 n 元实二次型，$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值，证明 $\forall x\neq 0$ 都有

瑞利商

$$\boxed{\lambda_1\leqslant\frac{x^TAx}{x^Tx}\leqslant\lambda_n}$$

$$(y_1, y_2\cdots y_n)\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=y_1^2+y_2^2+\cdots+$$

设经 $x=Qy$，将 $f=x^TAx$ 化成关于 y 的标准型 $y^T\Lambda y$，则

$$\frac{x^TAx}{x^Tx}=\frac{y^T\Lambda y}{y^Ty}=\frac{\sum a_i y_i^2}{\sum y_i^2}$$

$x^Tx=y^TQ^TQy=y^Ty$

瑞利商的本质

$$\lambda_1=\frac{\lambda_1\sum y_i^2}{\sum y_i^2}\leqslant\frac{\sum\lambda_i y_i^2}{\sum y_i^2}\leqslant\frac{\lambda_n\sum y_i^2}{\sum y_i^2}=\lambda_n$$

喜欢中心

二、填空题

31. 若 n 阶方阵 A 满足 $A^2=E$，则 A 的特征值为 ± 1 .

32. 若 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A$，则 A 的特征值为______.

$A\cdot(A-E)=0$ 取行列式 $|0E-A|\cdot|E-A|=0$ ∴特征值为0或1

33. 若 n 阶方阵 A 满足 $A^2-2A=3E$，则 A 的特征值为 3或-1 .

34. 已知矩阵 A 的行列式 $|A|=3$，且 A 有一个特征值为 5，则矩阵 A^{-1} 有特征值 $\frac{1}{5}$ ；矩阵 A^* 有特征值 $\frac{3}{5}$.

$A^*=|A|\cdot A^{-1}$

★35. 设 n 阶矩阵 A 的所有元素都为 2，则矩阵 A 的特征值为 $0,\ 2n$.

★36. A 为 2 阶矩阵，且 α_1，α_2 为 2 维线性无关列向量，$A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则 A 的特征值为 $0,1$.

方法：直接求

★37. 设 n 阶矩阵 A 的特征值互不相同，且 $|A|=0$。那么 $R(A)=$ $n-1$.

38. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1，3，-2，则 $|A^2+2A-5E|=$ 100 .

$A^2+2A-5E$ 的特征值是：$1^2+2\times1-5=-2$；$9+2\times3-5=10$；$4-2\times2-5=-5$

★39. 已知 4 阶矩阵 A 满足：$R(3E+A)=1$，则 -3 是 A 的 3 重特征值.

代数重数 ≥ 几何重数

★40. 已知 α 是实对称阵 A 的属于特征值 3 的特征向量，则矩阵 $P^{-1}AP$ 属于特征值 3 的特征向量是 $P^{-1}\alpha$.

★41. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 的秩为 4，正惯性指数为 3，则其规范形为 ______.

$f(\cdots)=y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2+0\cdot y_5^2$

42. 二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 通过正交变换 $x=Qy$ 化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+3y_3^2$，则二次型 $g(x)=x^{\mathrm{T}}A^{-1}x$ 经过正交变换 $x=Qy$ 将化为标准形 $y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+\frac{1}{3}y_3^2$.

43. 已知 A 为 n 阶实对称矩阵，A 的特征值分别为 $\frac{1}{n}$，$\frac{2}{n}$，…，1，则当 λ $<\frac{1}{n}$ 时

$A-\lambda E$ 为正定矩阵.

$x=Py$ $\quad x^T=y^TP^T \quad x^TAx=y^TP^TA\cdot Py$

44. 设 A 是实对称矩阵，将二次型 $f(x)=x^TAx$ 化为 $f(y)=y^TA^{-1}y$ 的线性变换为 只有当 $P=A^{-1}$ 时可，$x=A^{-1}y$ 才使得其成立

★ 45. 设 $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型，则 t 的取值 $\left(-\frac{4}{5},0\right)$

三、选择题

$$f=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}1&t&-1\\t&1&2\\-1&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$1-t^2>0 \quad 1>t^2$

$(5-2t\cdot2)-(1+4+5t^2)>0$

$-4t-5t^2>0$

$5t^2+4t<0$

$t(5t+4)<0$

46. 已知 A 为 n 阶可逆阵，则与 A 必有相同特征值的矩阵是（ C ）.

(A) A^{-1} (B) A^2

(C) A^T (D) A^*

$|\lambda E-A|=|(\lambda E-A)^T|=|\lambda E-A^T|$

47. 设 λ_0 是矩阵 A 的特征方程的 3 重根，A 的属于 λ_0 的线性无关的特征向量的个数为 k，则必有（ A ）.

代数重数 $\geq$ n 几何重数

(A) $k\leqslant3$ (B) $k<3$

(C) $k=3$ (D) $k>3$

48. 设 A 为 n 阶矩阵，则以 0 为特征值是 $|A|=0$ 的（ A ）.

(A) 充分必要条件 (B) 必要而非充分条件

(C) 充分而非必要条件 (D) 既非充分也非必要条件

49. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，A 的全部特征值为 0，1，1，则齐次线性方程组 $(E-A)x=0$ 的基础解系所含解向量的个数为（ C ）.

(A) 0 (B) 1

(C) 2 (D) 3

50. 已知 A 是 4 阶矩阵，且 $R(3E-A)=2$，则 $\lambda=3$ 是 A 的（ C ）.

(A) 一重特征值 (B) 二重特征值

(C) 至少是二重特征值 (D) 至多是二重特征值

$|3E-A|=0$ 代数 $\geq$ 几何 2

51. 若 A 与 B 相似，则（ C ）.

(A) A 与 B 都相似于对角阵

(B) A 与 B 有相同的特征值与特征向量

(C) A、B 有相同的特征方程 即 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=0$

(D) $A-\lambda E=B-\lambda E$

★ 52. 已知三阶方阵 A 的特征值为 1，-1，2，则只有 0 解的方程是（ C ）.

$\boxed{|A-\lambda E|=0}$

(A) $(A+E)x=0$ (B) $(A-E)x=0$

(C) $(A+2E)x=0$ (D) $(A-2E)x=0$

$\because |A+2E|\neq0$

$rA \cdot B$ 当A的某行有一个满秩时 → $A \cdot B = 0$

等于另外一个矩阵的秩 → 有5字

★ 53. 若 A 与 B 相似，则以下不成立的是（B）.

(A) A 与 B 有相同的特征值 ✓

(B) A 与 B 有相同的特征向量 ✗ 不一定

(C) A 与 B 等价 ✓

(D) A 与 B 的行列式相等 ✓

54.
∵ λ_1 λ_2 为A的特征值
x_1 x_2 为对应的特征值.
∴ $\lambda_1 x_1 = Ax_1$ $\lambda_2 x_2 = Ax_2$
$k_1 k_2$ 不可以同时为零. ∴排除A
对于D. $k_1 \neq 0$. $k_2 = 0$. $k_1 x_1 = x$

54. λ_1，λ_2 都是 n 阶矩阵 A 的特征值，$\lambda_1 \neq \lambda_2$，且 x_1 和 x_2 分别是对应于 λ_1 和 λ_2 的特征向量，当 k_1，k_2 满足何条件时，$x = k_1x_1 + k_2x_2$ 必是矩阵 A 的特征向量（D）.

(A) $k_1 = 0$ 且 $k_2 = 0$ （P可逆）

(B) $k_1 \neq 0$，$k_2 \neq 0$

$\lambda_1 k_1 x_1 = A k_1 x_1$ 成立

(C) $k_1k_2 \neq 0$ $A = P^T B \cdot P$

(D) $k_1 \neq 0$ 而 $k_2 = 0$

55. 设 n 阶矩阵 A 与 B 合同，则（C）.

$A = T^T \cdot B \cdot T$

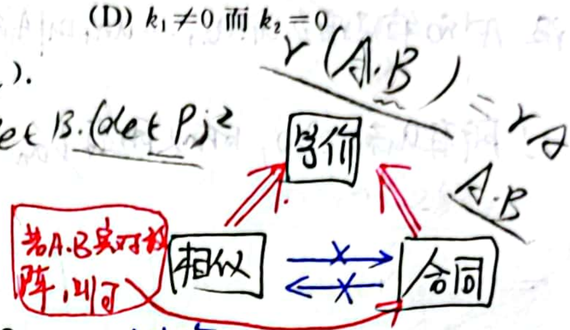
$P^T = P^{-1}$

(A) $|A| = |B|$ ✗ $\det P^T \cdot \det B \cdot (\det P)^2$

(B) A 与 B 的特征值相同 ✗

(C) $R(A) = R(B)$ ✓

(D) A 与 B 相似 未必



★ 56. 设 A，B 为 n 阶矩阵，那么（B）.

等价：$PA \cdot Q = B$ （P.Q可逆） P.Q 都要初等矩阵
相似：$P^{-1}AP = B$ （P可逆） P与特征值无关
合同：$P^TAP = B$ （P可逆） P与特征向量有关

(A) 若 A，B 合同，则 A，B 相似 ✗

(B) 若 A，B 相似，则 A，B 等价 ✓

(C) 若 A，B 等价，则 A，B 合同 ✗

(D) 若 A，B 相似，则 A，B 合同 ✗

★ 57. 设 A 是 n 阶正定矩阵，则下列结论不正确的是（B）.

正定矩阵
① $x \neq 0$. $x^TAx > 0$
② $a_{ii} > 0$
③ $|A| > 0$ $tr(A) > 0$.
④ $R(A) = n$
⑤ 顺序主子式 > 0
⑥ 与E合同
⑦ 正惯性指数 $= n$
⑧ 主对角线元素都是正

(A) 二次型 x^TAx 的负惯性指数为 0 ✓

(B) $R(A) < n$ ✗

$rA = r(P^T B P)$
$= rB$

(C) A 合同于 E ✓

(D) $|A| > 0$ ✓

★ 58. 若 A 为 n 阶实对称矩阵，且二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^TAx$ 正定，则下列结论不正确的是（D）.

$A_1, A_2 \cdots A_{n-1}$ A_n

(A) A 的特征值全为正 ✓

(B) A 的一切顺序主子式全为正 ✓

(C) A 的主对角线上的元素全为正 ✓

(D) 对一切 n 维列向量 x，x^TAx 全为正

不能包括0

59. 设 A，B 都是 n 阶实对称矩阵，则 A 与 B 合同的充分必要条件是（D）.

(A) A 与 B 都与对角矩阵合同

(B) A 与 B 的秩相同 ⇒ 由于A与B合同，必有 $C^TAC = B$. 因此 $R(A) = R(C^TAC) = R(B)$，

但反之，不成立。✗

不:$A\times 7^0$

(C) A 与 B 的特征值相同

(D) A 与 B 的正、负惯性指数都相同

$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2$

$c_i > 0$

60. n 阶实对称矩阵 A 为正定矩阵的充分必要条件是(C).

主子式大于0 充要

(A) A 的所有 k 级子式都为正

(B) A 的所有特征值都不为负

(C) A^{-1} 为正定矩阵

(D) $R(A)=n$ n只是必要条件.

$A = P^T (E) P = P^T \cdot P$

$A^{-1} = P^{-1} \cdot (P^T)^{-1} = \cancel{P^{-1} P}$

设 A^{-1} 的特征值为 $a_1, a_2, \cdots a_n$, 则 A 的特征值为 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}$.

∵ 所有 a_n 都大于0, 所以所有 $1/a_n$ 大于0. $= P^{-1} \cdot I (P^{-1})^T$

a_1 $a_2 \times \frac{1}{a_2}$ $\sqrt{a_2}$ $\sqrt{a_3}$ a_n

$(y_i)^2$

大于0

$[x_1 \cdots x_n]$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$x_i x_j$ 对于

$x_i = k_{i1} y_1 + k_{i2} y_2 \cdots + k_{in} y_n$

$f(y)$

$f(y) = \sum_{i=1}^{n} k y_i^2$

参考答案

第一章 矩阵及应用

矩阵知识图谱

一、计算和证明题

1. $3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 13 & 22\\ -2 & -17 & 20\\ 4 & 29 & -2\end{bmatrix}$. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 5 & 8\\ 0 & -5 & 6\\ 2 & 9 & 0\end{bmatrix}$.

2. (1) $\begin{bmatrix}35\\ 6\\ 49\end{bmatrix}$; (2) 10; (3) $\begin{bmatrix}-2 & 4\\ -1 & 2\\ -3 & 6\end{bmatrix}$;

矩阵的乘法

(4) $\begin{bmatrix}6 & -7 & 8\\ 20 & -5 & -6\end{bmatrix}$;

(5) $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$;

(6) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 5 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -4\\ 0 & 0 & -4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -9\end{bmatrix}$.

3. (1) $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$; (2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$; (3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

4. $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2\lambda & 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2\lambda & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3\lambda & 1\end{bmatrix}$

下面利用数学归纳法证明：$A^k=\begin{bmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{bmatrix}$.

当 $k=1$ 时，显然成立，假设 k 时成立，则 $k+1$ 时，有

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{bmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\\lambda&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\(k+1)\lambda&1\end{bmatrix}$$

由数学归纳法原理知：$A^k=\begin{bmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{bmatrix}$.

5. (1) $A^n=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[3\quad -2\quad 1]\cdots\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[3\quad -2\quad 1]$

$$=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}(2)^{n-1}[3\quad -2\quad 1]=2^{n-1}A;$$

1-5(1)

(2) $\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\lambda_1^n&&&\\&\lambda_2^n&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^n\end{bmatrix}$.

6. (1) $A^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{d}{ad-bc}&-\dfrac{b}{ad-bc}\\-\dfrac{c}{ad-bc}&\dfrac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}$;

(2) $A^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}5&2&1\\-10&2&-2\\1&-2&-1\end{bmatrix}$;

矩阵的逆*

用初等行变换求矩阵的逆

(3) $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&7\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$;

(4) $A^{-1}=\begin{bmatrix}\lambda_1^{-1}&&&\\&\lambda_2^{-1}&&\\&&\lambda_3^{-1}&\\&&&\lambda_4^{-1}\end{bmatrix}$;

(5) $A^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$;

(6) $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&&\\-1&1&&&\\&-1&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&-1&1\end{bmatrix}$.

7. $(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

8. (1) $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$；　(2) $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\dfrac{8}{3} & 5 & -\dfrac{2}{3} \end{bmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$；　(4) $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

1 - 8

9. (1) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$；　(2) $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0. \\ x_3 = 3 \end{cases}$

10. (1) $\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1} \\ a_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

1 - 10

11. 已知 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$，故 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，所以 $\boldsymbol{A}^{11} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{11}\boldsymbol{P}^{-1}$.

$\boldsymbol{P}^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$，而 $\boldsymbol{\Lambda}^{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{bmatrix}$

故

$$\boldsymbol{A}^{11} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{4}{3} \\ -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2731 & 2732 \\ -683 & -684 \end{bmatrix}$$

1 - 11

12. $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2^{-1} & 0 \\ -3^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1 - 12

13. 已知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$，则

$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$$

14. 已知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$，证明：

充分性：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}$$

即 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵.

必要性：

$$(AB)^{T}=AB\Rightarrow B^{T}A^{T}=AB\Rightarrow BA=AB$$

15. (1) 因为 $\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}=\lambda E+\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

所以

$$\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}^n=(\lambda E)^n+C_n^1(\lambda E)^{n-1}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+C_n^2(\lambda E)^{n-2}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2$$

$$=(\lambda)^nE+C_n^1(\lambda)^{n-1}E\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}+C_n^2(\lambda)^{n-2}E\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^n&C_n^1\lambda^{n-1}&C_n^2\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&C_n^1\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{bmatrix}$$

1-15(1)

(2) 因为 $\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}=E+\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=E+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}$

又因为 $\left[\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\right]^n=\left[\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\right]^n=3^{n-1}\cdot\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\quad(n\geqslant1)$

1-15(2)

所以

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}^n=\left[E+\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\right]^n=E+\sum_{k=1}^{n}C_n^kE^{n-k}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}^k$$

$$=E+\sum_{k=1}^{n}C_n^k3^{k-1}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=E+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k3^k-1\right)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$=E+\frac{1}{3}(4^n-1)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

16. (1) $(A^2)^T=A^TA^T=A^2$，$(B^2)^T=B^TB^T=B^2$

(2) $(AB-BA)^T=B^TA^T-A^TB^T=-BA+AB$

$(AB+BA)^T=B^TA^T+A^TB^T=-BA-AB=-(AB+BA)$

17. 设 $C=A+A^T$，则 C 为对称矩阵；

设 $B=A-A^T$，则 B 为反对称矩阵，而 $A=B+C$.

18. $A(A+B)^{-1}B=(B^{-1}(A+B)A^{-1})^{-1}=(B^{-1}+A^{-1})^{-1}$

$=(A^{-1}(A+B)B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$

1-16　　1-18　　矩阵各种运算规律的归纳　　1-19

19. (1) 因为

$$A(A^2+2A+E)=E$$
$$(A^2+2A+E)A=E$$

所以

$$A^{-1}=A^2+2A+E=(A+E)^2$$ EA = AE · X

(2) 因为

$$(A-2E)(A+E)=2E$$
$$(A+E)(A-2E)=2E$$

所以

$$(A+E)^{-1}=\frac{1}{2}(A-2E)$$

20. 因为

$$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{m-1})=E-A^m=E$$
$$(E+A+A^2+\cdots+A^{m-1})(E-A)=E-A^m=E$$

所以

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{m-1}$$

1-20

21. (1) $(E-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^2=E-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$

$$=E-(2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$

$$A^2=A\Leftrightarrow 2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$$

(2) 因为 $A^2=A$，若 A 可逆，在等式两边左乘 A^{-1}，得 $A=E$，即 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=O$. 这与 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维非零列向量矛盾，所以假设不成立.

22. 因为 $AB=A(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=(A\boldsymbol{\beta}_1,A\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,A\boldsymbol{\beta}_s)=O$，所以 $A\boldsymbol{\beta}_i=0(i=1,2,\cdots,s)$，$B$ 的每一列都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解.

若 $A\boldsymbol{\beta}_i=0(i=1,2,\cdots,s)$，则 $AB=A(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=O$.

1-21　　1-22　　用矩阵等式描述线性代数语言

23. 用初等行变换把矩阵化为行阶梯矩阵，观察非零行数即为秩.

(1) 2;

(2) 2;

(3) 1.

1-23

24. 把方程组系数矩阵化为行最简形：

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 0 & -3\\ 1 & -4 & 3 & -2\end{bmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

1-24

选 x_4 为自由变量，当 $x_4=k$ 时，通解为 $k\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}$，$k\in\mathbf{R}$.

25. 把方程组系数矩阵化为行最简形：

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -3 & 5\end{bmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -4 & 4\\ 0 & 1 & 5 & -3\end{bmatrix}$$

选 x_3，x_4 为自由变量，当 $\begin{cases}x_3=k_1\\x_4=k_2\end{cases}$ 时，通解为

$$\begin{cases}x_3=4k_1-4k_2\\x_3=-5k_1+3k_2\\x_3=k_1\\x_4=k_2\end{cases}$$

1-25

也可以写成向量和的形式：

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}4\\-5\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-4\\3\\0\\1\end{bmatrix}\quad(k_1,k_2\in\mathbf{R})$$

26. 把方程组增广矩阵化为行最简形：

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4\\ 4 & 3 & -1 & -1 & 6\\ 1 & 2 & -4 & -4 & -1\end{bmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -3 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

1-26

先分析对应齐次方程组 $Ax=0$ 的通解为

$$k_1\begin{bmatrix}-2\\3\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-2\\3\\0\\1\end{bmatrix},\quad(k_1,k_2\in\mathbf{R})$$

再写出非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，取

$$\begin{cases}x_3=0\\x_4=0\end{cases}$$

则有 $\begin{bmatrix}3\\-2\\0\\0\end{bmatrix}$，故方程组通解为

$$k_1\begin{bmatrix}-2\\3\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-2\\3\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\-2\\0\\0\end{bmatrix}\quad(k_1,k_2\in\mathbf{R})$$

27. 因为所求的公共解，即为联立方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}$$

的解.

对方程组增广矩阵施以初等行行变换，有

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{bmatrix}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&1&1-a\\0&1&0&a-1\\0&0&a-1&1-a\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{array}\right]=\boldsymbol{B}$$

由于方程组有解，故系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，于是 $(a-1)(a-2)=0$，即 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时，有

$$\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

因此，公共解为 $\boldsymbol{x}=k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$k\in\mathbf{R}$.

当 $a=2$ 时，有

$$\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&1&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

因此，公共解为 $\boldsymbol{x}=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

28. 对方程组的增广矩阵作初等行变换

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}\lambda&1&1&4\\1&\mu&1&3\\1&2\mu&1&4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&\mu&1&3\\0&\mu&0&1\\0&1-\lambda\mu&1-\lambda&4-3\lambda\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&\mu&1&3\\0&1&1-\lambda&4-2\lambda\\0&0&(\lambda-1)\mu&1-4\mu+2\lambda\mu\end{bmatrix}$$

1 - 28

所以，(1) 当 $(\lambda-1)\mu\neq0$，即 $\lambda\neq1$ 且 $\mu\neq0$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\mathbf{A}})=3$，方程组有唯一解.

(2) 当 $(\lambda-1)\mu=0$ 且 $1-4\mu+2\lambda\mu\neq 0$，即 $\lambda=1$ 且 $\mu\neq 1/2$ 或 $\mu=0$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\tilde{\boldsymbol{A}})=3$，所以方程组无解.

(3) 当 $\lambda=1$ 且 $\mu=1/2$ 时，原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_3=2 \\ x_2=2 \end{cases}$$

于是，方程组的通解为

$$x=\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\quad (k\in\mathbf{R})$$

二、填空题

29. $\begin{bmatrix}-4 & -12 & -3\\ 4 & 7 & 2\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix}3 & 3 & 7\\ -1 & -3 & 7\end{bmatrix}$

31. s，n

32. 不可逆

33. $\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

34. $-\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})$

35. $\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 19 & -30 & 3 & -5\\ -7 & 11 & -1 & 2\end{bmatrix}$

37. $\frac{1}{5}$

38. $\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix}a^2-3a+5 & 0\\ 0 & b^2-3b+5\end{bmatrix}$

40. $\begin{bmatrix}-3 & 4 & 2\\ 5 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 6\end{bmatrix}$

1-37

1-38

41. $\begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/9 \\ 2/3 & 1/3 & 2/9 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$

42. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$

43. $\begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

44. $\begin{bmatrix} 18 & 10 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

45. (1) $\leqslant 1$；(2) $\leqslant 2$

46. $k=-6$　　47. $t=-3$　　48. n

1-45　1-46　1-47　1-48

三、选择题

49. (C)　50. (D)　51. (C)　52. (D)　53. (D)　54. (C)　55. (C)　56. (B)
57. (B)　58. (D)　59. (B)　60. (B)　61. (D)　62. (D)　63. (B)　64. (B)
65. (D)　66. (C)　67. (B)

1-49　1-53　1-58　1-61　1-62

1-63　1-64　1-67

第三章　n 维向量与向量空间

n 维向量与向量空间图谱

一、计算和证明题

1. 因为 $6\boldsymbol{\alpha}+9\boldsymbol{\beta}=(18,18,30,84)^{\mathrm{T}}$，$6\boldsymbol{\alpha}+10\boldsymbol{\beta}=(18,6,4,24)^{\mathrm{T}}$，所以 $\boldsymbol{\beta}=(0,-12,-26,-60)^{\mathrm{T}}$．

2. $\boldsymbol{\gamma}=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3=2(2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+3(\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2)+4(3\boldsymbol{\beta}_1-2\boldsymbol{\beta}_2)=19\boldsymbol{\beta}_1-4\boldsymbol{\beta}_2$

3. $$[\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_4]=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_4]\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\\1&4&16&64\end{bmatrix}$$

记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$．

由范德蒙行列式可知，$R(\boldsymbol{C})=4$．因为 $R(\boldsymbol{A})=4$，所以 $R(\boldsymbol{B})=4$，故题述向量组线性无关．

3-3

4. $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$

$$=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&1\\3&2&0\\1&-2&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

所以 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$，极大无关组为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 或 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3$ 或 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$．

3-4

5. 充分性：已知任何 n 维向量都可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，则 n 维基本单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，所以向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 等价．故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关．

3-5

必要性：已知 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 构成 n 维向量空间的一组基．因此任何 n 维向量都可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示．

6. 假设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$

$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$

$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$

$\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n)$

根据矩阵秩的性质可得：$\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$，于是(1)、(2)得证．

根据矩阵秩的性质可得 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$，于是(3)得证．

7. (1) $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant R(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+R(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant 2\boldsymbol{a}$.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则存在不全为零的数 k_1,k_2，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$．不妨假设 $k_2\neq 0$，则 $\boldsymbol{\alpha}=-\left(\dfrac{k_1}{k_2}\right)\boldsymbol{\beta}\triangleq k\boldsymbol{\beta}$．于是

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=R((1+k^2)\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})<2$$

3-7

8. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关．又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，于是 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示．

9. 充分性：已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关且 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$，因此 $R(\boldsymbol{A}) = m$. 又因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)$ 等价，所以 $R(\boldsymbol{B}) = m$. 故向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 也线性无关.

3-8

必要性：已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 都为 m 个 m 维列向量且线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 均为 m 维向量空间的基，故这两组向量等价. 于是，矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$ 等价.

10. (1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关 $\Rightarrow R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) < 3$

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & t & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & t+4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & t+4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & t+4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6-2(t+4) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 6 - 2(t+4) = 0 \Rightarrow t = -1$

(2) 当 $t = 2$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 自身就是它的极大无关组.

11. 假设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{V}$，则有 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{V}$ 和 $k\boldsymbol{x}_1 \in \boldsymbol{V}$，故 $\boldsymbol{V}$ 是一个向量空间。又由 $\boldsymbol{V}$ 的定义可知，$\boldsymbol{V}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间。根据 $\boldsymbol{V}$ 的定义可知，$\boldsymbol{V}$ 的基即为线性方程组 $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ 的基础解系，因此 $\boldsymbol{V}$ 的一组基为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3-11

12. 因为 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{B}$，$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{C}$，其中

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

3-12

所以 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}$，其中

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

即为从基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵.

13. 已知

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

P_1, P_2 的过渡矩阵. 又由题述坐标变换公式可得

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + y_2 \\ x_3 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_4 = -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \end{cases}$$

即

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

14. 提示：因为 $A^{T}A = (E + k\alpha\alpha^{T})^{T}(E + k\alpha\alpha^{T}) = E + k\alpha\alpha^{T} + k\alpha\alpha^{T} + k^{2}\alpha\alpha^{T}\alpha\alpha^{T}$，所以 $\alpha^{T}\alpha = 6$，又因为 $A^{T}A = E + (2k + 6k^{2})\alpha\alpha^{T} = E$，所以 $2k + 6k^{2} = 0$ 且 $k \neq 0$，即 $k = -\dfrac{1}{3}$.

15. 因为 $H = H^{T}$，所以 H 为对称矩阵. 又因为

$$HH^{T} = \left(E - 2\frac{xx^{T}}{x^{T}x}\right)\left(E - 2\frac{xx^{T}}{x^{T}x}\right) = E - 4\frac{xx^{T}}{x^{T}x} + 4\frac{xx^{T}}{x^{T}x} = E$$

所以 H 为对称的正交矩阵.

16. $\tilde{A} = \begin{bmatrix} a & b & 2 & 1 \\ a & b+1 & 2 & 1 \\ a & b & b+1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & 0 \end{bmatrix}$

(1) 当 $a \neq 0$，$b \neq 1$ 时，β 可由 α_1，α_2，α_3 唯一线性表示；

(2) 当 $b = 1$，a 为任意值时，β 可由 α_1，α_2，α_3 不唯一线性表示；

(3) 当 $a = 0$，$b \neq 1$ 时，β 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表示.

17. (1) $R(A) = 4 - 2 = 2$；

(2) $[A, b] \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 4-2\lambda & \mu+4\lambda-5 & 4-2\lambda \end{bmatrix}$

由 $R(A) = 2$，知 $\lambda = 2$，$\mu = -3$. 把增广矩阵化为行最简形：

$$[A, b] \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则通解为

$$k_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (k_1, k_2 \in \mathbf{R})$$

18. 设所求齐次线性方程组为 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$，把向量 $\xi_1 = (1, 2, 3, 4)^{T}$，$\xi_2 = (4, 3, 2, 1)^{T}$ 带入该方程组，于是有新的齐次线性方程组：

$\begin{cases} a_1+2a_2+3a_3+4a_4=0 \\ 4a_1+3a_2+2a_3+a_4=0 \end{cases}$，$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3 - 18

新的齐次线性方程组基础解系为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则所求齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_1-3x_2+x_4=0 \end{cases}$$

此题答案不唯一.

19. 求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

3 - 19

所以，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)$.

20. 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 基础解系所含向量个数为 $3-2=1$.

显然 $(\eta_1+\eta_2)-(\eta_1+\eta_3)=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，$\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)=\frac{1}{2}(3,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

3 - 20

$$k(1,1,1)^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}(3,1,-1)^{\mathrm{T}}\quad(k\in\mathbf{R})$$

21. $R(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只含有 $4-3=1$ 个解向量 $\boldsymbol{\eta}=(2,0,-1,-1)$，特解 $\boldsymbol{\xi}=(1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

3 - 21

22. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，$R(\boldsymbol{A})<3$。又因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 且 $R(\boldsymbol{B})\geqslant 2$，所以 $R(\boldsymbol{A})=1$，于是 $\boldsymbol{B}$ 的前两列就是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 通解中的两个解向量.

23. (1) 令 $\boldsymbol{T}_1:\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$，根据题意，$\boldsymbol{A\xi}_i=\boldsymbol{0}$，$i$ 为 $1\sim n-r$，因此 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 不能线性表示向量 $\boldsymbol{\eta}$，又因为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关，可得向量组 $\boldsymbol{T}_1$ 线性无关.

(2) 令 $\boldsymbol{T}_2:\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$，显然向量组 $\boldsymbol{T}_1$ 与向量组 $\boldsymbol{T}_2$ 等价。由(1)可知，$\boldsymbol{T}_1$ 线性无关，因此 $\boldsymbol{T}_2$ 也线性无关.

3 - 22　　3 - 23(1)　　3 - 23(2)　　3 - 24

24. (1) 证明方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0$ 同解.

设 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，即 $\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{0}$，那么自然 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\xi}$ 也是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

设 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}$，用 $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}$ 乘以等式两端，有 $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}=0$，$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta})=0$，则 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}\|=0$，故有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}=0$，即 $\boldsymbol{\eta}$ 也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(2)因为 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\max\{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\}\leqslant R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})$

又因为 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}))\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}),R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\}=R(\boldsymbol{A})$

所以 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.

25. 证明方程组 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解.

设 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$，$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\xi}$ 也是 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

设 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，即 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}$ 是方程组 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解；又因为 $R(\boldsymbol{B})=n$，所以方程组 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}=0$，即 $\boldsymbol{\eta}$ 也是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

26. (1) 当 $R(\boldsymbol{A})=n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，所以

$$R(\boldsymbol{A}^{*})=R(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})=R(\boldsymbol{A}^{-1})=n$$

(2) 当 $R(\boldsymbol{A})=n-1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 至少存在一个 $n-1$ 阶非零子式. 由定义可知 $R(\boldsymbol{A}^{*})\geqslant 1$. 又由 $R(\boldsymbol{A})=n-1$ 可得 $|\boldsymbol{A}|=0$，从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，所以 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}^{*})\leqslant n$，即 $R(\boldsymbol{A}^{*})\leqslant 1$，故 $R(\boldsymbol{A}^{*})=1$.

(3) 当 $R(\boldsymbol{A})<n-1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式全为0. 由 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的定义可知 $\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{O}$，所以 $R(\boldsymbol{A}^{*})=0$.

27. 因为

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$$

所以

$$\begin{aligned}R(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})&=R(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\\&\leqslant R(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}))+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\\&\leqslant R(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\end{aligned}$$

28. 因为

$$\boldsymbol{A}^{2}=\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=0\Rightarrow R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n$$

又因为

$$\max\{R(\boldsymbol{A}),R(-\boldsymbol{E})\}\leqslant R(\boldsymbol{A},-\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$$

所以

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$$

29. 由已知可得，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$ 且 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})=m<n$，所以线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，于是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

30. 因为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$，所以 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$；又因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解. 故 $R(\boldsymbol{A})<n$.

31. 把矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按列分块 $\boldsymbol{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，知 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. 而方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含向量个数为 $s-R(\boldsymbol{A})$，而 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 可以由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系线性表示，故有 $R(\boldsymbol{B})\leqslant s-R(\boldsymbol{A})$，即 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant s$.

3-26 3-28 3-29 3-30 3-31

二、填空题

32. $t \neq 3$

33. 线性相关

34. (1) 线性相关性无法判断；线性无关 (2) 线性无关；线性无关

35. 线性相关性无法判断；线性相关；线性相关；线性相关性无法判断

36. α_1，α_2 或 α_1，α_3 或 α_2，α_3

37. $(2, -1)^T$

38. $x = (1, 0, 0)^T$

39. $k(1, 1, \cdots, 1)^T$

40. 有解；解的情况无法判断

41. 线性相关性无法判断；线性相关性无法判断

42. $k(-13, -6, 1, 8)^T + \frac{1}{4}(1, 2, 3, 4)$

43. $a + 2b = 0$，$a \neq 0$

44. 2

45. $k(1, 1, 1)^T + (1, -1, 2)^T$

46. 1

47. 0

48. $2 \leqslant k \leqslant n$

49. 1

50. 1

3-35 3-38 3-39 3-42

3-43 3-45 3-49 3-50

三、选择题

51. (B) 52. (C) 53. (A) 54. (B) 55. (C)

56. (B) 57. (B) 58. (C) 59. (C) 60. (D)

3-52　3-53　3-55　3-56

3-57　3-58　3-60

第五章　MATLAB解线性代数问题

MATLAB初步　MATLAB与线性代数的基本运算　利用MATLAB解线性代数问题

一、填空题

1. a=[1, 2, 3, 4]
   b=[7, 0, 1, 0]
   a * b′
2. A=[−8, 3, 0; −5, 9, 0; −2, 15, 0]
   B=[5, 3, 1; 1, −3, −2; −5, 2, 1]
   X=A * B^−1
3. B=[1, −2, 0; 2, 1, 0; 0, 0, 2]
   A=(B−eye(3))^−1 * B
4. A=[1, 2, 3, 4, 5;
   2, 3, 4, 5, 1;
   3, 4, 5, 1, 2;
   4, 5, 1, 2, 3;
   5, 1, 2, 3, 4]

A^5

A^−1

5-2

① 复数域上矩阵 A,B 合同 $\Longleftrightarrow$ $rA=rB$

② 实数域上矩阵 A,B 合同 $\Longleftrightarrow$ A,B 具有同样的正惯性指数

$m+n+p$ 阶

典范形式

参考答案

第二章 行列式与线性方程组

$k_1x_1^2+k_2x_2^2+k_3x_3^2=1$

$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}y^2=1$

行列式思维导图

$y_1=\sin x_1-\cos x_2$

$y_2=\cos x_1+\sin x_2$

2-1

$\mathrm{diag}(c_1,c_2,\dots$

一、计算和证明题

1. D_1 展开式中含 x^3 项有

$$(-1)^{\tau(2134)}\cdot x\cdot 1\cdot x\cdot 2x+(-1)^{\tau(4231)}\cdot x\cdot x\cdot x\cdot 3$$
$$=-2x^3+(-3x^3)$$
$$=-5x^3$$

D_1 展开式中含 x^4 项有

$p_1y_1^2+p_2y_2^2=1$

$$(-1)^{\tau(1234)}\cdot 2x\cdot x\cdot x\cdot 2x=10x^4$$

2. $$\begin{vmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ 1 & b & -1 & 0 \\ 0 & 1 & c & -1 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} b & -1 & 0 \\ 1 & c & -1 \\ 0 & 1 & d \end{vmatrix}+(-1)^2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & c & -1 \\ 0 & 1 & d \end{vmatrix}$$
$$=a\left[b\begin{vmatrix} c & -1 \\ 1 & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & d \end{vmatrix}\right]+cd+1$$
$$=abcd+ab+ad+cd+1$$

3. $$\begin{vmatrix} ab & -ac & -ae \\ -bd & cd & -de \\ -bf & -cf & -ef \end{vmatrix}=abcdef\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$=-4abcdef$$

2-4

4. $(-1)^{n+1}\dfrac{(n+1)!}{2}$

5. $$D\overset{r_{i+1}+r_i}{\underset{i=1,2,\cdots,n}{=}}\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n+1 \end{vmatrix}=(-1)^n(n+1)\prod_{i=1}^{n}a_i$$

6. 将 D 的各列全部加到第一列，再将第一列的公因子提出，可得

$$D=\left(1+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1+a_n\\ 1 & a_2 & \cdots & 1+a_{n-1} & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ 1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n\end{vmatrix}$$

2-6

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(1+\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$$

7. 将第 3 行乘以 -1 加到其他所有行中得

$$D_n=\begin{vmatrix}-2 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & n-3\end{vmatrix}=6(n-3)!$$

2-7

8. $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

2-8

其中，$|\boldsymbol{P}|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}=\begin{cases}2, & n\text{ 为奇数}\\ 0, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

故 $|\boldsymbol{B}|=\begin{cases}2006\ (n\text{ 为奇数})\\ 0\ (n\text{ 为偶数})\end{cases}$

9. $D_n\xlongequal[\substack{\vdots\\ c_1+c_n}]{\substack{c_1+c_2\\ c_1+c_3}}\begin{vmatrix}3n+1 & 3 & \cdots & 3 & 3\\ 3n+1 & 4 & \cdots & 3 & 3\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 3n+1 & 3 & \cdots & 4 & 3\\ 3n+1 & 3 & \cdots & 3 & 4\end{vmatrix}$

2-9

$$\xlongequal[r_n - r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ \vdots}} \begin{vmatrix} 3n+1 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3n+1$$

10. $$D \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ -1 & a-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4+r_1}} a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= a^4.$$

11. 行列式的各列提取因子 $a_j^{n-1}(j=1, 2, \cdots, n)$，然后应用范德蒙行列式，有

$$D_n = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_3}{a_3} & \cdots & \frac{b_n}{a_n} \\ \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 & \left(\frac{b_3}{a_3}\right)^2 & & \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_3}{a_3}\right)^{n-1} & \cdots & \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{n-1} \end{vmatrix}$$

2 - 11

$$= (a_1 a_2 \cdots a_n)^{n-1} \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} \left(\frac{b_i}{a_i} - \frac{b_j}{a_j}\right)$$

12. $$D \xlongequal[i=2, 3, \cdots, n]{c_1 - \frac{b}{a_i} c_i} \begin{vmatrix} a_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{b^2}{a_i} & b & b & & b \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{vmatrix}$$

2 - 12

$$= \left(a_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{b^2}{a_i}\right) \prod_{i=2}^{n} a_i$$

13. 行列式按第 4 行展开

$$D = 1A_{41} + 1A_{42} + 2A_{43} + 2A_{44}$$

所以

$$-A_{41} - A_{42} - 2A_{43} - 2A_{44} = -D = 6$$

2－13

14. 因为 $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} = 0$，即 $\mu(1-\lambda) = 0$，故 $\mu = 0$ 或 $\lambda = 1$ 时，方程组有非零解.

15. 该齐次线性方程组有非零解，a，b 需满足

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & a & b \end{vmatrix} = 0$$

即 $(a+1)^2 = 4b$.

16. 根据题意有

$$\begin{aligned} f(-1) &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ f(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 4 \\ f(2) &= a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 3 \\ f(3) &= a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 16 \end{aligned}$$

这是关于四个未知数 a_0，a_1，a_2，a_3 的一个线性方程组，其系数矩阵的行列式为范德蒙行列式，即

$D = 48$，$D_0 = 336$，$D_1 = 0$，$D_2 = -240$，$D_3 = 96$. 故得 $a_0 = 7$，$a_1 = 0$，$a_2 = -5$，$a_3 = 2$. 于是所求的多项式为 $f(x) = 7 - 5x^2 + 2x^3$.

17. 设平面上的直线方程为 $ax + by + c = 0$ （a，b 不同时为 0），则有

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}$$

式中 a，b，c 为未知数的三元齐次线性方程组，其有非零解的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

即为三点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 位于同一直线上的充分必要条件.

18. $$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_1-c_3}{\underset{c_2-c_3}{=}} \begin{vmatrix} (a+b)(a-b) & b(a-b) & b^2 \\ 2(a-b) & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (a+b)(a-b) & b(a-b) \\ 2(a-b) & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

19. 对 D_{2n} 按第一行展开，得

$$D_{2n}=a\begin{vmatrix} a & & & & & & b & 0\\ & \ddots & & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & & \\ & & c & d & & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & & \\ c & & & & & & d & 0\\ 0 & & & & & & 0 & d\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} 0 & a & & & & & b\\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a & b & & \\ & & & c & d & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & c & & & & & d\\ c & 0 & & & & & 0\end{vmatrix}$$

$$=ad\cdot D_{2(n-1)}-bc\cdot D_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-1)}$$

据此递推下去，可得

$$\begin{aligned}D_{2n}&=(ad-bc)D_{2(n-1)}=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}\\&=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_2=(ad-bc)^{n-1}(ad-bc)\\&=(ad-bc)^n\end{aligned}$$

故 $D_{2n}=(ad-bc)^n$.

20. 对行列式的阶数 n 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，可直接验算结论成立，然后假定 $n-1$ 阶行列式结论成立，进而证明阶数为 n 时结论也成立.

按 D_n 的最后一列，把 D_n 拆成两个 n 阶行列式相加：

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 0\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_n\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_nD_{n-1}$$

但由归纳假设

$$D_{n-1}=a_1a_2\cdots a_{n-1}\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}\right)$$

从而有

$$D_n=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_na_1a_2\cdots a_{n-1}\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}\right)$$

$$=a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}a_i$$

2-19

2-20

二、填空题

21. 24，24

22. $(-1)^{n-1}n!$

23. $a^n+(-1)^{n-1}b^n$

24. 2000

2-22 2-23

25. -2

26. 0

27. -1080

28. 16

29. $\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

30. 6

31. $-512/81$

32. $(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|$

33. -26；26

34. -5

35. $\dfrac{n(n-1)}{2}$；正

2 - 29　　2 - 31

2 - 32

三、选择题

36. (C)　37. (C)　38. (C)　39. (C)　40. (B)　41. (A)和(D)
42. (C)　43. (D)　44. (D)　45. (B)　46. (C)　47. (B)　48. (D)
49. (A)　50. (D)　51. (B)

2 - 40　　2 - 42　　2 - 51

第四章　相似矩阵与二次型

相似矩阵与二次型图谱

一、计算和证明题

4 - 1

1. 因为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-9) = 0$$

所以，$\lambda_1 = 9$，$\lambda_2 = 0$，$\lambda_3 = -1$．将 λ_i 分别代入 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，解之可得

$\lambda_1 = 9$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = k_1(1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$，$k_1 \neq 0$；

$\lambda_2 = 0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2 = k_2(1, 1, -1)^{\mathrm{T}}$，$k_2 \neq 0$；

$\lambda_3 = -1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3 = k_3(1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$，$k_3 \neq 0$.

2. 因为

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3(\lambda - 9) = 0$$

4-2

所以，$\lambda_1 = 9$，$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$. 将 λ_i 分别代入 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，解之可得

$\lambda_1 = 9$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = k_1(1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$k_1 \neq 0$；

$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2 = k_2(-1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}} + k_3(-1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}} + k_4(-1, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$，$k_2, k_3, k_4$ 不同时为 0.

3. (1) 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，由 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ 有 $\lambda^2 = \lambda$，所以 $\lambda = 0, 1$；

(2) $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1 + \lambda = 1, 2$，因无 0 特征值，故 $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 可逆.

4. 设 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}$，则

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q} \end{bmatrix}$$

4-3

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}$$

5. $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda = 1, 1, 2$，则 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E}$ 的特征值分别为

4-5

$\lambda - 1 = 0, 0, 1$，故 $|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}| = 0$.

$\lambda + 2 = 3, 3, 4$，故 $|\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}| = 36$.

$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0, 0, 5$，故 $|\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E}| = 0$.

6. 因为

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -4 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

4-6

所以，$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$，$\lambda_3 = -1$. 将 λ_i 分别代入 $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，解之可得

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{p}_1 = (1, 4, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2 = (1, 0, 4)^{\mathrm{T}}$.

$\lambda_3 = -1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\4&0&0\\0&4&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$，从而有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{100}&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{100}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}2^{100}&&\\&2^{100}&\\&&(-1)^{100}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4-2^{100}&-1+2^{100}&-1+2^{100}\\0&3\cdot2^{100}&0\\4-2^{102}&-1+2^{100}&-1+2^{102}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

7. 由题意知

$$\begin{cases}x+2=y+1\\-15x-40=-20y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}$$

4 - 7

8. (1) 由题意知

$$|\boldsymbol{A}|=-(a-b)^2=0\Rightarrow a=b$$

又因为 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，所以

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|_{a=b}=2a^2=0\Rightarrow a=b=0$$

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda=0,1,2$ 分别代入 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，解得特征向量 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ 有

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_3)=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

4 - 8

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

9. $$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&-1\\-1&2-\lambda&-1\\-1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-3)^2=0$$

4 - 9

所以，$\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=0$.

将 λ_i 分别代入 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，解之可得 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，规范正交化有

$$\boldsymbol{q}_1=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{q}_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$\lambda_3=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，规范化有

$$\boldsymbol{q}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$$

所以，令

$$Q=(q_1q_2q_3)=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

有

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 0\end{bmatrix}$$

10. $E-A^*$ 的特征值为

$$1-\frac{|A|}{\lambda_i}=1-\frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}{\lambda_i}=1-\prod_{k\neq i}\lambda_k$$

所以

$$|E-A^*|=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\prod_{k\neq i}\lambda_k\right)$$

11. 因为 A 为实对称，所以特征值 6 与 3 的特征向量正交.

设特征值 3 的特征向量为 $x=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\langle x_1,x\rangle=0$，即 $y_1+y_2+y_3=0$.

解之有

$$x_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ x_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

从而，令

$$P=(x_1x_2x_3)=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

4-11

有

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

12. 反证：设 x_1+x_2 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量，则

$$A(x_1+x_2)=\lambda(x_1+x_2)$$

4-12

又因为

$$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$$

所以

$$\lambda(x_1+x_2)=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$$

即

$$(\lambda-\lambda_1)x_1+(\lambda-\lambda_2)x_2=\mathbf{0}$$

因为 x_1，x_2 线性无关，所以有 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$，与题设矛盾. 故 x_1+x_2 不是 A 属于特征值 λ 的特征向量.

13. 由题意知 $|\boldsymbol{A}| = -4b + 3 + 2b - 10 = -1$，所以 $b = -3$。

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 特征值为 $|\boldsymbol{A}|/\lambda$。又因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 特征向量相同，所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \lambda = -1$$

故

$$\lambda_0 = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda} = 1$$

14. 充分性：设 $\boldsymbol{x}_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 分别属于特征值 λ_i 和 μ_i 的特征向量。因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i 互不相同，所以 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 线性无关。构造可逆矩阵 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\cdots\boldsymbol{x}_n)$，对 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}^{-1}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$、$\boldsymbol{\Sigma}$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个特征值排成的对角阵，因此

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{P}^{-1}, \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$$

因为 $\boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{\Sigma}$ 均为 n 阶对角阵，所以有 $\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Lambda}$，从而有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$。

4－14

必要性：设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，又设 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$$

若 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，显然 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量。又因为 λ 是单特征值，所以 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 可由 $\boldsymbol{x}$ 线性表示：

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x}$$

故 $\boldsymbol{x}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 μ 的特征向量。

若 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，所以 $R(\boldsymbol{B}) < n$，$\boldsymbol{B}$ 有 0 特征值。又因为 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{x}$，所以 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的属于 0 特征值的特征向量。

综上所述，$\boldsymbol{A}$ 的特征向量都是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量。

15. (1) $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O}$；

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，则 $\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征值。

由 $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，代入 $\lambda = 0$ 有：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$。

因为 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 为标量且 $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$，所以有 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$，即

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$$

4－15

又因为 $\boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{0}$，所以方程基础解系含 $n-1$ 个解向量。不妨设 $b_1 \neq 0$，则

$$x_1 + \frac{b_2}{b_1}x_2 + \cdots + \frac{b_n}{b_1}x_n = 0$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{p}_1 = (b_2, -b_1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{p}_2 = (b_3, 0, -b_1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{p}_{n-1} = (b_n, 0, \cdots, 0, -b_1)^{\mathrm{T}}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为 $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{p}_1 + k_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + k_{n-1}\boldsymbol{p}_{n-1}$， $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ 不同时为 0；

$(-2\ \ 2\ \ -2)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 2 $\quad(1+0,\ -2-2,\ 0-2)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$1\times3 \qquad 3\times1$

$(1+0)+0+(0-2)$

(3) 由(2)知，A 仅有 $n-1$ 个线性无关特征向量，故不可对角化.

16. $f(x_1, x_2, x_3)=(x_1 x_2 x_3)\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ $\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}$ $\qquad \begin{matrix}1 & -2 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & -1 & -1\end{matrix}$

101

$1\times3 \qquad 3\times3 \qquad 3\times1$

故秩为 2.

17. 取 $x^T=(0, \cdots, 1, \cdots, 0)$，则 $x^TAx=a_{ii}=0$，i 为 $1\sim n$，即 A 对角元全为 0；

取 $x^T=(0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0, 1, \cdots, 0)$，则 $x^TAx=a_{ii}+a_{jj}+2a_{ij}=2a_{ij}=0$，$a_{ij}=0$，$i\neq j$. 故 $A=O$.

18. 二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & -2\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ -2 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)=0$$

4 - 18

所以，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=0$.

将 λ_i 分别代入 $(A-\lambda_i E)x=0$，解之可得：

$\lambda_1=1$ 的特征向量为 $p_1=(0, 1, 0)^T$，规范化有 $q_1=(0, 1, 0)^T$；

$\lambda_2=4$ 的特征向量为 $p_2=(1, 0, -1)^T$，规范化有 $q_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$；

$\lambda_3=0$ 的特征向量为 $p_3=(1, 0, 1)^T$，规范化有 $q_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$；

令

$$Q=(q_1 q_2 q_3)=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}, x=Qy$$

有 $f=y_1^2+4y_2^2$.

19. 配方法：

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3)&=2x_1^2+x_2^2+2x_3^2-4x_1x_3\\&=2^2x_1-4x_1x_3+2x_3^2+x_2^2\\&=2(x_1-x_3)^2+x_2^2\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}x_1-x_3=y_1\\x_2=y_2\\x_3=y_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=y_1+y_3\\x_2=y_2\\x_3=y_3\end{cases}$$

或

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

有 $f = 2y_1^2 + y_2^2$.

20. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix}$，有 $18 - 2a^2 = 10$，解得 $a^2 = 4$，由条件 $a > 0$，得 $a = 2$.

4 - 20

对于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1$，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，得

$$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故属于特征值 1 的特征向量为 $(-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

对于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_2 = 2$，解齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，得

$$2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故属于特征值 2 的特征向量为 $(0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

对于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_3 = 5$，解齐次线性方程组 $(5\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，

$$5\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故属于特征值 5 的特征向量为 $(1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

将这 3 个特征向量分别单位化，得到

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}, (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

令 $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$，则所用的正交变换为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$.

21. 由题意知

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}$$

4 - 21

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

由 $|A| = -(a-b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$.

又因为 1 是 A 的特征值，所以 $|A-E|_{a=b} = 2a^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$.

将 A 的特征值 $\lambda = 0, 1, 2$ 分别代入 $(A-\lambda E)x = 0$，解得特征向量分别为

$$p_1 = (-1, 0, 1)^T, \ p_2 = (0, 1, 0)^T, \ p_3 = (1, 0, 1)^T$$

正交规范化为

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

所求正交变换为 $x = Qy$.

22. 曲面方程左边的二次型的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

依题意，A 的特征值为 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 4$，所以 $1 + a + 1 = \mathrm{tr}(A) = 0 + 1 + 4$，$|A| = 0$，解之得 $a = 3$，$b = 1$.

A 的特征值 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 4$ 对应的特征向量分别为

$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

单位化后，得

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ q_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

故所用的正交变换矩阵

$$Q = (q_1 q_1 q_1) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

23. $D_1 = 1 > 0$

$D_2 = 2 - t^2 > 0 \Rightarrow |t| < \sqrt{2}$

$D_3 = t(t+1)(t-2) > 0$，由 D_2 结果知 $t - 2 < 0$，故需 $-1 < t < 0$.

综上所述，当 $-1 < t < 0$ 时 A 正定.

24. $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&t\\0&t&1\end{bmatrix}$

$D_1=1>0$

$D_2=2-1=1>0$

$D_3=1-t^2=(1+t)(1-t)>0,\ -1<t<1$

所以，正定的条件为 $-1<t<1$.

25. (1) $A=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$

4 - 25

其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{3}{2}$，$\lambda_3=0$；

$\lambda_1=\lambda_2=\frac{3}{2}$ 对应的特征向量为

$$p_1=(-2,1,1)^T,\ p_2=(0,-1,1)^T$$

正交规范化为

$$q_1=\left(\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T$$

$$q_2=\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$$

$\lambda_3=0$ 对应的特征向量为：$p_3=(1,1,1)^T$，规范化为

$$q_3=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$$

令 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=(q_1\quad q_2\quad q_3)\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}$，$f=\frac{3}{2}x_1^2+\frac{3}{2}y_1^2$，故 $f=\frac{3}{2}x_1^2+\frac{3}{2}y_1^2=a^2$ 为一圆柱面.

(2) 所截取下的面积为 $\frac{2}{3}\pi a^2$.

26. 设 A 的特征值为 $\lambda>0$，则 $A+E$ 特征值为 $1+\lambda>1$，故 $|A+E|>1$

27. 因 A 正定，故 $A^T=A$，从而 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$，$(A^*)^T=(|A|A^{-1})^T=|A|A^{-1}=A^*$，$(A^m)^T=(A^T)^m=A^m$ 均对称.

设 A 的特征值为 $\lambda>0$，则它们的特征值分别为 $1/\lambda$，$|A|/\lambda$，λ^m 均大于 0，故均正定.

28. 由 A 的对称性有 $(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$，故 A^TA 为对称阵，又 $\forall x\neq 0$，$f=x^TA^TAx=(Ax)^TAx=\|Ax\|^2>0$ （$Ax\neq 0$，否则若 $Ax=0$，而 $x\neq 0$ 知其有非 0 解，故 $R(A)<n$，与题设矛盾）.

29. 显然，$B^T=(\lambda E+A^TA)^T=\lambda E+A^TA=B$，$B$ 为对称阵.

又 $\forall x\neq 0$，

$f=x^TBx=x^T(\lambda E+A^TA)x=\lambda x^Tx+(Ax)^TAx=\lambda\|x\|^2+\|Ax\|^2$

上式求和中，第 1 项>0，第 2 项$\geqslant 0$，所以有 $f>0$.

4-29

30. 设经正交变换 $x=Qy$ 将 x^TAx 化为关于 y 的标准形 $y^T\Lambda y$，则

$$\frac{x^TAx}{x^Tx}=\frac{y^T\Lambda y}{y^Ty}=\frac{\sum\lambda_i y_i^2}{\sum y_i^2}$$

4-30

显然

$$\lambda_1=\frac{\lambda_1\sum y_i^2}{\sum y_i^2}\leqslant\frac{\sum\lambda_i y_i^2}{\sum y_i^2}\leqslant\frac{\lambda_n\sum y_i^2}{\sum y_i^2}=\lambda_n$$

二、填空题

31. $+1,-1$　32. 1，0　33. -1，3

34. 1/5，3/5　35. 0，$2n$　36. 0，1

37. $n-1$　38. 100　39. 至少 3　40. $P^{-1}\alpha$

41. $f=z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_4^2$　42. $y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+\frac{1}{3}y_3^2$

43. $\lambda<\frac{1}{n}$

44. $x=A^{-1}y$　45. $-\frac{4}{5}<t<0$

4-35　4-36　4-37　4-39

4-40　4-41　4-45

三、选择题

46. (C)　47. (A)　48. (A)　49. (C)　50. (C)　51. (C)　52. (C)　53. (B)

54. (D)　55. (C)　56. (B)　57. (B)　58. (D)　59. (D)　60. (C)

4-52　4-53　4-56　4-57　线性代数各章节内容的联系　4-58