作业本

对应PPT

大学物理 I

补：

要能及时调动体系内的东西进行解题

(分析的过程，把每个点都写清楚) 选择比较好判断

提升 more

力学：
- 质点运动学
- 质点和质点系动力学（含能量的解释 动量）
- 刚体力学（要会表达）专指转动部分

一般这里的力学也是指的是理论力学/刚体力学

注：天体物理等物理领域也会进行涉及 eg.第二宇宙速度

振动波动

光学

热学

问题再问老师

Scanned with CamScanner

数学思维（高层思维）

向量：多维运动

极限：① $t\to\infty$ 表示 $x=x(t)$ 最终位置. ② 关于F，（$F\to\infty$）可归去其它力

导数与微分：瞬时.

不同物理之间关系式的合理转化. ※ 上A P15.3

注意 要用到微积分内容 很重要

积分：变化量

三角函数.

$\boxed{\text{消参思想：求某二量之间的关系式}}$

另外，在物理中注意、，用概念、+数学方法 可得出$\boxed{\text{相应的题目结论}}$很重要!!!

Scanned with CamScanner

物理大题思路

（依高中物理修订）

前提：数学分析增多了，但依旧尝试去理解运动。大学物理的运动更多元了，运动表达式也丰高

贯穿始终

step1：析状态（点，力） 动力

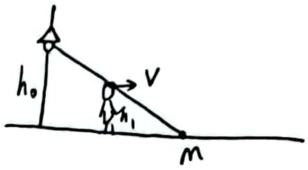
step2：三个观点　　运动学/动力学

能量（功）

动量

振动

step3：几何观点　　e.g.



已知人速度v. 求影子移动速度

$$\frac{v}{v_M}=\frac{h_0-h_1}{h_0}$$

即：$v_m=\dfrac{h_0}{h_0-h_1}v$.

Scanned with CamScanner

质点运动学

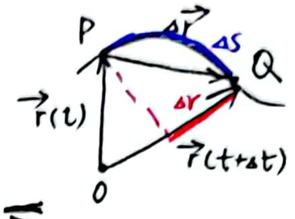
质点运动学.

基本

1.1 质点、参照系、坐标系

1. 质点
2. 参照系（坐标系）
3. 确定质点相对参考系位置的方法
   - ①坐标法.
   - ②位矢法.
   - ③自然法. —看轨迹.
4. 运动学方程

1.2 描述质点运动的物理量



1. 位置矢量(位矢) $\vec r=\vec r(t)$
2. 位移. $\Delta\vec r=\vec r(t+\Delta t)-\vec r(t)$
   位移大小. $|\Delta\vec r|=\overline{PQ}$
   位矢大小增量 $\Delta r=r(t+\Delta t)-r(t)=\overline{QO}-\overline{PO}$
   弧长/路程: $\Delta S=\widehat{PQ}=s(t)$
   特别地, $\lim\limits_{\Delta t\to0}|\Delta\vec r|=\lim\limits_{\Delta t\to0}\Delta s\Rightarrow|d\vec r|=ds\neq dr$.
3. 速度
   - 平均速度 $\bar{\vec v}=\frac{\Delta\vec r}{\Delta t}$ //平均速度
   - (瞬时)速度 $\vec v=\frac{d\vec r}{dt}=$

   速率
   - 平均速率. $\bar v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$
   - (瞬时)速率 $v=\frac{ds}{dt}=|\vec v|$ //等于每个瞬时的速度大小
4. 加速度
   - 平均 $\bar{\vec a}=\frac{\Delta\vec v}{\Delta t}$
   - 瞬时. $\vec a=\frac{d\vec v}{dt}$. // $a_t=\frac{dv}{dt}$, $a_n=\frac{v^2}{\rho}$

   注: $\Delta\vec v=\vec v(t+\Delta t)-\vec v(t)$
   速率增量: $\Delta v=v(t+\Delta t)$…

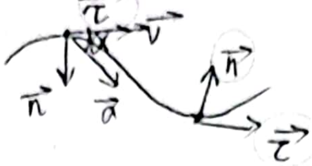
1.3 $\vec r$. $\Delta\vec r$ $\vec v$ $\vec a$ 在直角坐标系中的表示

1. 位矢. $\vec r=x\vec i+y\vec j+z\vec k$. $r=|\vec r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
   $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
2. 位移: $\Delta\vec r=\vec r(t+\Delta t)-\vec r(t)=\Delta x\vec i+\Delta y\vec j+\Delta z\vec k$
   ↓求微
3. 速度: $\vec v=\frac{dx}{dt}\cdot\vec i+\frac{dy}{dt}\vec j+\frac{dz}{dt}\cdot\vec k$
   ↓求微
4. 加速度: $\vec a=\frac{d^2x}{dt^2}\vec i+\frac{d^2y}{dt^2}\vec j+\frac{d^2z}{dt}\cdot\vec k$

在求解问题中，注意数学上的求解顺序.

1.4. 用自然坐标表示平面曲线运动中的速度和加速度

引入描述量



$\frac{d\vec{\tau}}{d\theta}=\vec{n}$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt}=\frac{d\vec{\tau}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\vec{n}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot v$$

$\boxed{\text{其中有: } tg\alpha=\frac{a_n}{a_t}}$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d(v\vec{\tau})}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+\frac{d\vec{\tau}}{dt}v$$

今后描述加速度 $=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\cdot\vec{n}$

要从2个方向来考虑 $=\vec{a_t}+\vec{a_n}$

1.5 不同坐标系中的速度与加速度变换定理简介（相对运动）

大学学著 概念性东西 理解基础和过程

速度: $\vec{V}_{B对A}=\vec{V_B}-\vec{V_A}$

相对速度 = 绝对速度 - 牵连速度

加速度: $\vec{a}_{B对A}=\vec{a_B}-\vec{a_A}$

相对加速度 = 绝对加速度 - 牵连加速度

$\rho=R$.

1.6. 圆周运动的角量表示.

角量与线量的关系.

① 对比:

ω_0	ω	θ_0	θ	$\Delta\theta$	α
v_0	v	x_0	x	Δx	β
↑	↑	↑	↑		↑

与运动学方程一对应

②这里只是引入新概念，实际上分析时仍依据运动总思路分析 不要局限思维

基础: $a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{d(R\omega)}{dt}=R\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}=R\beta$ 角加速度 rad/s²

$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{v^2}{R}=\omega^2R.$

（注:这里只是特殊情况，更普遍的还是分解分析）

讨论: ① $\boxed{\omega\text{不变}}$（即:无 $\boxed{\text{角加速度}}$） $\beta=\frac{d\omega}{dt}=0$

$\boxed{\text{角位移}}$ $\omega=\frac{d\theta}{dt}\Longrightarrow d\theta=\omega dt\quad\int_{\theta_0}^{\theta}d\theta=\int_0^t\omega dt$

$\Delta\theta=\theta-\theta_0=\omega t$

② $\boxed{\omega\text{会变}}$（有 $\boxed{\text{角加速度}}$） $\beta=\frac{d\omega}{dt}\neq0$

$\beta=\frac{d\omega}{dt}\Longrightarrow d\omega=\beta dt\Longrightarrow\omega-\omega_0=\beta t$

$\boxed{\text{角位移}}$ $\Delta\theta=\theta-\theta_0=\omega_0t+\frac{1}{2}\beta t^2$

推: $\omega^2-\omega_0^2=2\beta(\theta-\theta_0)$

质点运动学 数学求解形式简要探讨

自变量的变化 → 根是因变量的变化

基本要求 { 标量（一维）、矢量（一般化）

（只涉 x, v, a 三者）

运动学三大英坐量，知一求二，微积分加定义。

（角度）
①运动方程

降维

②速度（角速度）　③加速度（角加速度）

其自变量可以是 t　x　s　均有 $v.s$ 等

若自变量不单一，则以数学表达式为根据进行解题

下面是已知其一，求另外2个的求解思路

已知：① ：直接依次降维 $x=f(t) \rightarrow v=\dfrac{dx}{dt} \rightarrow a=\dfrac{dv}{dt}$

已知：②： $v=v(t)$ // 一维直线：微分：$a=\dfrac{dv}{dt}$

依定义：$v=\dfrac{dx}{dt} \xrightarrow{\text{积分}} \int_{x_0}^{x} dx=\int_0^t v(t)dt$，即：$x-x_0=\int_0^t v(t)dt$.

$v=v(x)$ // 一维直线：

求 a：定义微分. $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv(x)}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=v(x)\dfrac{dv(x)}{dx}$

求 x：积分依定义：$v=\dfrac{dx}{dt}=v(x) \xrightarrow{\text{积分}} \int_{x_0}^{x}\dfrac{dx}{v(x)}=\int_0^t dt$ 可 $x=x(t)$

注意求解的部分，表达式不是很相同

$v=v(s)$ // 曲线.

求 a：依定义+微分变换 $\boxed{a_t=\dfrac{dv}{dt}}=\dfrac{dv(s)}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dt}=v(s)\dfrac{dv(s)}{ds}$，　$\boxed{a_n=\dfrac{v^2}{\rho}}$

相当于切向　　　固定计算方法

求 s：依定义+积分：$v=\dfrac{ds}{dt}=v(s) \xrightarrow{\text{积分}} \int\dfrac{ds}{v(s)}=\int dt \Rightarrow s=s(t)$

$\vec{v}=\vec{v}(t)$ // 位矢

求 $\vec{a}$：微分定义 $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$.

求 $\vec{r}$：定义+积分：$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}(t) \xrightarrow{\text{积}} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}=\int_0^t \vec{v}(t)dt$ 即：$\vec{r}=\vec{r}_0+\int_0^t \vec{v}(t)dt$

求的长度也不一样

已知③： $\vec{a}=\vec{a}(t)$ // 位矢.

求 $\vec{v}$：$\boxed{\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\vec{a}(t)}$，依定义+积分

求 $\vec{v}$：$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v}=\int_0^t \vec{a}(t)dt$ 即：$\vec{v}=\vec{v}_0+\int_0^t \vec{a}(t)dt$

求 $\vec{r}$：再积分 $\vec{r}=\vec{r}(t)$

$a=a(t)$ //一维直线

求 a. v. x：作定積分求

$$a=\frac{dv}{dt}=a(t) \xrightarrow{\text{积}} \int_{v_0}^{v} dv=\int_0^t a(t)dt \xrightarrow{\text{积}} x=x(t)$$

$a=a(v)$. //一维直线

求 v：定义+积分 $a=\frac{dv}{dt}=a(v) \xrightarrow{\text{积}} \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{a(v)}=\int_0^t dt$

求 x：v 的定积 $\xrightarrow{\text{积}} x=x(t)$

$a=a(x)$ //一维直线

求 v：定义+积分 $a=\frac{dv}{dt}=a(x)$ //因为有3个变量无法可积，故用数学处理(换元)

//使式能够简化

$$a=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\cdot\frac{dv}{dx}=a(x)$$

$$\xrightarrow{\text{积分}} \int_{v_0}^{v} v\,dv=\int_{x_0}^{x} a(x)dx \xrightarrow{\text{再积}} x=x(t)$$

对于圆周运动．描述量常为 $\theta\rightarrow w\rightarrow\beta$ t．速度．加速度

（为标量的 ／ 的标 ／ 已确定在圆周运动 ／ 可转化出来）

知 θ． $\theta=\theta(t)$． $w=\frac{d\theta(t)}{dt}$ $\beta=\frac{dw}{dt}$ $v=wR$． $a_t=R\cdot\beta$ $a_n=w^2R$

知 w $w=w(t)$． 求 β $\beta=\frac{dw}{dt}$．

求 θ：积分． $w=\frac{d\theta}{dt}=w(t)$． 即 $d\theta=wdt \xrightarrow{\text{积分}} \int_{\theta_0}^{\theta}d\theta=\int_0^t w(t)dt$，$\theta-\theta_0=\int_0^t w(t)$

$\boxed{w=w(\theta)}$ 求 β：$\beta=\frac{dw}{dt}=\frac{dw}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=w\frac{dw}{d\theta}$ //转成了 w-θ 的关系．

自变为 θ，常忘 t

求 θ． $w=\frac{d\theta}{dt}=w(\theta) \xrightarrow{\text{积}} \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{w(\theta)}=\int_0^t dt \Rightarrow \theta=\theta(t)$

后面自变是 t 才对应．故用换元来解题

知 β $\beta=\beta(t)$． 求 w：$\beta=\frac{dw}{dt}=\beta(t) \xrightarrow{\text{积}} \int_{w_0}^{w}dw=\int_0^t\beta(t)dt$．

故 $w=w_0+\int_0^t\beta(t)dt$

求 θ：再积分

$\boxed{\beta=\beta(\theta)}$ 求 $w=w(\theta)$：$\beta=\frac{dw}{dt}=\beta(\theta) \xrightarrow{\text{换元}} \frac{dw}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\beta(\theta) \Rightarrow \frac{dw}{d\theta}\cdot w=\beta(\theta)$．

$\xrightarrow{\text{积}} \int_0^t w\,dw=\int_{\theta_0}^{\theta}\beta(\theta)d\theta$． 有 $\frac{1}{2}w^2-\frac{1}{2}w_0^2=\int_{\theta_0}^{\theta}\beta(\theta)d\theta$．

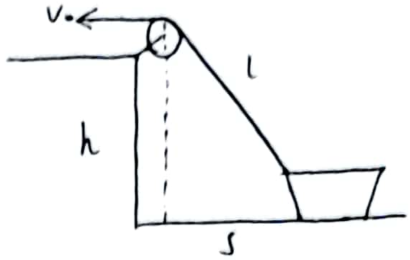
求 θ． ：再积分

$\beta=\beta(w)$． 求 w． ：$\beta=\frac{dw}{dt}=\beta(w)$． $\int_{w_0}^{w}\frac{dw}{\beta(w)}=\int_0^t dt \Rightarrow w=w(t) \Rightarrow \theta=\theta(t)$

典型好题：

上A P14-1.

已知 h. v_0. 求离岸边 s 时船速和加速度



解：

①′

列状态： $v_0=-\frac{dl}{dt}$ ① //注意这个收绳，相对于船为负（反向）

$v=\frac{ds}{dt}$ ②

几何关系（含变量） $h^2+s^2=l^2$ ③（其中 h^2 为常数）

②′ 求 v

一切式子

数学处理． $\boxed{求微分}$ //重点．大物对关系直接启用数学处理，这是一大特点、

对③： $2s\cdot\frac{ds}{dt}=2l\cdot\frac{dl}{dt}$ //代入关系式、不再是单一的基础式子了

代入 v. v_0 得： $v=-v_0\frac{l}{s}=-\frac{\sqrt{s^2+h^2}}{s}v_0$ //发现这过程中 l 被换掉了．

③′ 求 a： 列状态（定义式） $a=\frac{dv}{dt}$ //常从一切数学角度列式子了

$a=\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$ （数学）（物理） //结合物理与数学意义进行合理转化

常数　复合函数

$=\left(-v_0\cdot\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2s\cdot s}{\sqrt{s^2+h^2}}-\sqrt{s^2+h^2}}{s^2}\right)\times\left(\frac{-\sqrt{s^2+h^2}}{s}\cdot v_0\right)$

$=-\frac{v_0^2h^2}{s^3}$

质点和质点系动力学

质点和质点系动力学

第1章 牛顿运动定律 —— 三大运动定律

注意：表功要写成矢量

第2章 国际单位制和量纲
- 一、国际单位制（SI）
- 二、量纲

第三章 惯性系和非惯性系
- 一、惯性系与非惯性系
- 二、惯性力

为了完整，故提出这个概念。

第四章 功 功能定理

一、功

1. 恒力的功 $A = Fs\cos\theta = \vec{F}\cdot\vec{s}$ 注意正负功 ※

2. 功的一般定义：（这是根本）$\boxed{元功：dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F\cos\theta\, ds}$ 变积分元 $A = \int_a^b \vec{F}\, d\vec{r}$

注意(1) 合力：$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \cdots + \vec{F_n}$ 的功，$A = \int_a^b (\vec{F_1} + \vec{F_2} + \cdots + \vec{F_n})\, d\vec{r}$

$= A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ //代数和

(2) 具体计算方法：

①. 对弧长的积分：$A = \int_{a(L)}^{b} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{a(L)}^{b} F\cos\theta\, \underset{标量}{ds}$

②对坐标的积分：

$\left.\begin{array}{l}\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \\ d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

$A = \int_a^b (L)\, F_x dx + F_y dy + F_z dz$

(3) 曲线运动 + 恒力 做功.

$A = \int_a^b (L)\, \vec{F} d\vec{r} = \vec{F}\cdot\Big(\int_a^b (L)\, \underset{向量}{d\vec{r}}\Big) = \vec{F}\cdot \underset{向量}{\overrightarrow{ab}}$

3.功率: $P=\frac{dA}{dt}$　$J\cdot s^{-1}=W$.　ML^2T^{-3}

$$=\frac{\vec F d\vec r}{dt}=\vec F\cdot\vec v=Fv\cos\theta$$ ($\vec F\perp\vec v$ 则 $P=0$)

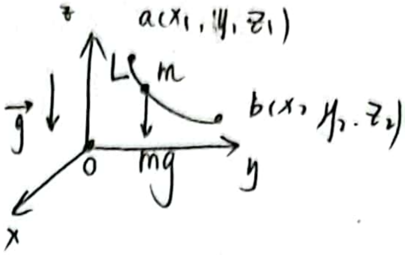
二、几种常见力的功.

1.重力的功

$\vec F=-mg\vec k$

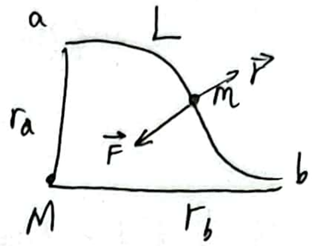
$$A=\int_{a(L)}^{b}\vec F\cdot d\vec r=\int_{z_1}^{z_2}F_z dz=\int_{z_1}^{z_2}-mg\,dz$$

$$=-mg(z_2-z_1)$$



2.引力的功.

$$\vec F=-\frac{GmM}{r^2}\cdot\frac{\vec r}{r}$$



$$A=\int_{r_a(L)}^{r_b}\vec F d\vec r$$

$$=\int_a^b(L)-\frac{GMm}{r^2}\cdot\frac{\vec r}{r}\cdot d\vec r$$

$\vec r\cdot d\vec r=rdr$.　$$\int_{r_a}^{r_b}(L)-\frac{GMm}{r^2}\cdot dr=\frac{GmM}{r}\Big|_{r_a}^{r_b}=GmM\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\right)$$

靠近,正,远离负,功

推导: $\vec r\cdot d\vec r=r\cdot dr$.

一般. $d(\vec A\cdot\vec B)=d\vec A\cdot\vec B+\vec A d\vec B$.

特殊 $\Longrightarrow$ $d(\vec A\cdot\vec A)=(d\vec A)\vec A+\vec A(d\vec A)=2\vec A d\vec A$?　①

又 $\vec A\cdot\vec A=|\vec A|^2=A^2$.　故 $d(\vec A\cdot\vec A)=d(A^2)=2AdA$　②

由①②得: $\vec A\cdot d\vec A=AdA$

3.弹力的功

$\vec F=-kx\vec i$　　$F=-kx$

$$A=\int_a^b(L)\vec F\cdot d\vec r=\int_{x_a}^{x_b}Fdx=\int_{x_a}^{x_b}(-kx)dx=-\frac{1}{2}k(x_b^2-x_a^2)$$

4.摩擦力的功: 与路径有关

三、功能定理. 完全和高中一样, 只是多了数学表达, 更精准了.

1. 质点的动能定理:

推导: 微分式: $dA = \vec{F}d\vec{r} = m\vec{a}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}dt = m\vec{v}d\vec{v} = d(\frac{1}{2}mv^2)$

积分 $A = \Delta(E_k) = \Delta\frac{1}{2}mv^2$.

2. 质点系的动能定律:

微分: $dE_k = dA^{外} + dA^{内}$

积分: $\Delta E_k = A^{外} + A^{内}$

注: ① 只用于惯性系
② $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = 0$. $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i \neq 0$

3. 关于合力做功.

单质点: $W_合$ = 功的代数和

质点系: $W_合$ 无意义, 注意只能计算各个力的功, 然后对功求和.
尤其是耗散力.

第五、势能、功能原理、机械能守恒定律

一、保守力、保守力场 → 才有

二、势能

算势能: $E_p(M) = \int_M^R \vec{F}d\vec{r}$ 末(标准点) 初始点

(R为零势能点, M为物体所在位置)

注意一些典型的参考点,

三、功能原理. 这是所有的根本) 其实还是如同高中 但具体的各个部分计算要会辨别

$A_{外} + A^{内} = \Delta E_k = E_2 - E_1$

$A_{外} + (A^{保内} + A^{非保内})$

系统外 / 弹力 重力 引力 / 耗散力 e.g. f

特别的. $A_{外} + A^{非保内} = 0$, 则系统机械能守恒

注 ① 只适用于惯性系.
② 守恒是始终保持不变.

第六节. 动量冲量 动量形式

一、质点的动量定理. (动量定理只适用于惯性系)

微分形式推导：$\vec{F}=m\vec{a}=m\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$

$\boxed{动量}$ $\vec{p}=m\vec{v}$. $kg\cdot m s^{-1}$. MLT^{-1}

注：合动量.可拆作x.y.z方向，分别求，再求合矢

★注意：矢量方向

$\boxed{动量定理}$ $\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}$ (微商形式)

$d\vec{p}=\vec{F}dt$ (微分形式)　$\vec{F}dt$：合外力的元冲量.

$\boxed{冲量}$ $\int_{p_1}^{p_2}d\vec{p}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt \Rightarrow \Delta\vec{p}=\vec{p_2}-\vec{p_1}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$

定义. $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$. (积分形式)

$\bar{F}=\dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ (差商形式)

注：$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt \neq \int_{t_1}^{t_2}F\,dt$

令F：$\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\cdots+\vec{F_n}$

$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F_1}+\vec{F_2}+\cdots+\vec{F_n})dt=\vec{I_1}+\vec{I_2}+\cdots+\vec{I_n}$ //合外力的冲量

力的平均值. $\bar{F}=\dfrac{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt}{t_2-t_1}$

注：动量：可表示为大小+方向. or. 表示为直角坐标系分形式 $a\vec{i}+b\vec{j}$

二、质点系的动量定理 (只适用于惯性系)

m_i：合外力 $\vec{F_i}$. 合内力 $\vec{f_i}$. 合力 $\vec{F}+\vec{f_i}$

故 $d\vec{P_i}=d(\vec{F_i}+\vec{f_i})dt=\vec{F_i}dt+\vec{f_j}dt.$ $(i=1,2,\cdots n)$

$\Rightarrow$再求和：$\sum d\vec{P_i}=\sum\vec{F_i}dt+\sum\vec{f_j}dt$

$d(\sum\vec{P_i})=(\sum\vec{F_i})dt+(\sum\vec{f_j})dt \rightarrow$ 同样也有4种形式

第七节. 动量守恒定律. (只适用惯性系)

新的意义：

① 在 $d\vec{P}=\vec{F}dt$ 中，若 $\vec{F}=0 \Rightarrow d\vec{P}=0 \Rightarrow \vec{P}=\vec{C}$

$$\boxed{\sum m_i\vec{v_i}=\vec{C}\ \text{：动量守恒定律.}}$$

② 若某方向上，$\vec{F}$ 的投影为零，则在该方向上的动量守恒

$F_x=0 \quad \sum m_i V_{ix}=C$

注：动量守恒是系统总动量保持不变

经典题目思考

例：单位矢量·表示力的方向 → 分离出大小的方法.

eg. 质量为m的质点在力 $\vec{F}=k\frac{\vec{r}}{r^3}$ 作用下运动，质点在 $r=r_0$ 处~~无相对速~~无初速度释放．求质点在无穷远处的速度

解：

$\because \vec{F}=k\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$ //重点理解处

故 $\underbrace{F=\frac{k}{r^2}}_{矢量式}=\underbrace{ma}_{决定式}=\underbrace{m\frac{dv}{dt}}_{定义式}$

⇒ 整理成可积分形式

$$\frac{dv}{dt}=\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

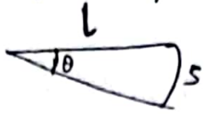
→ 换元·统一变量 $\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{r^2}$

即：$v\cdot dv=\frac{k}{m}\frac{1}{r^2}\cdot dr$

两边积分 $\frac{1}{2}v^2=\frac{k}{m}\cdot\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_0}^{\infty}=\frac{k}{mr_0}$

即：$v=\sqrt{2k/(mr_0)}$

例：三角关系中的step 3：$\frac{ds}{d\theta}=l$



$\boxed{l\theta=s}$

eg. 绳长 l，一端固定，另一端系一质量为m的小球，在水平位置将小球无初速度释放．求：小球转过θ角时的速率及绳中张力

解：

(1)

step1：分析受力．

$F_t=mg\cos\theta=m\frac{dv}{dt}.$

$F_n=T-mg\sin\theta=m\frac{v^2}{l}.$

step2：进行运算求解（微积分）

$\frac{dv}{dt}=g\cos\theta.$

→ 换元，统一成可积分：

$\boxed{\frac{dv}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=g\cos\theta}$ 经典应用

$\int_0^v v\,dv=\int_0^\theta gl\cos\theta\,d\theta$

→ 积分得：$\frac{1}{2}v^2=gl\sin\theta.$

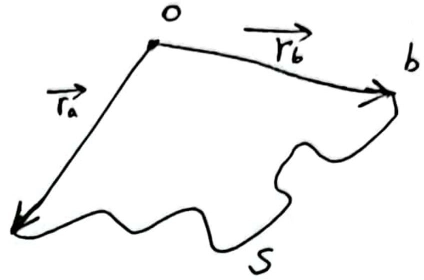
$v=\sqrt{2gl\sin\theta}$

另外，这其实就是动能定理啊喂!!!

(2) 绳张力：$T=mg\sin\theta+m\frac{v^2}{l}=3mg\sin\theta$

例：关键变换的例题

eg. 如图3-5所示.质点在力F的作用下，由位置a点运动到b点，经过的路程为s，a、b两点的位置矢径分别为$\vec{r_a}$，$\vec{r_b}$。如果F的变化规律分别为$F_1=k\vec{r}^0$（$\vec{r}^0$为位置矢径方向上的单位矢量），$F_2=k\vec{v}^0$（$\vec{v}^0$为速度方向上的单位矢量）．试求两种力F_1和F_2在该过程中所做的功。



解：

由功的定义：//直接求功

$dA=\vec{F}\cdot d\vec{r}$

① $dA_1=k\vec{r}^0\cdot d\vec{r}=k\cdot\frac{d\vec{r}}{dr}\cdot d\vec{r}=k\frac{dr}{dr}\cdot dr=\boxed{k\,dr}$ ✓

$\int_{r_a}^{r_b}dA_1=\int_{r_a}^{r_b}k\,dr$ 即 $A_1=k(r_b-r_a)$

② $dA_2=k\vec{v}^0\cdot d\vec{r}=k\cdot\frac{\vec{v}}{v}\cdot d\vec{r}=k\frac{\vec{v}}{v}\cdot\boxed{\vec{v}\,dt}=k\frac{|\vec{v}|^2}{v}dt=k|\vec{v}|\,dt=k\,ds$

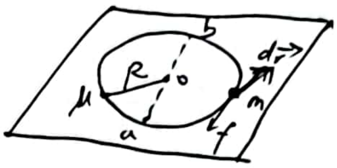
路程定义的求积形式

$\int_{s_a}^{s_b}dA_2=\int_{s_a}^{s_b}k\,ds$ 即 $A_2=k(s_b-s_a)=kS$

功. 动能定理.

例：计算质点从a到b移动半个圆周时所受摩擦力的功，设质点与桌面的摩擦系数μ为常数。

解：



∵ $\vec{f}$ 不是恒力，故不可用 $\vec{f}\cdot\vec{ab}$ 计算

∴ $A=\int_{a\,(L)}^{b}\vec{f}\cdot d\vec{r}=\int_{a\,(L)}^{b} f\cos\theta\, ds=\int_{a\,(L)}^{b}\mu mg\cdot(-1)\,ds=-\mu mg\pi R$

力学限制模型回顾——弹簧

弹力 ①不突变 → 弹簧相连物体，加速度不相互影响

②在平衡点，存在有简谐运动 —— 对称性

典例 习题册上册B. P26. (二). 1.

动量基本模型 小结

引入恢复系数：$e = \dfrac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$　　$v_2 - v_1 \to \Delta v_{分}$：分离速度；$v_{10} - v_{20} \to \Delta v_{接}$：接近速度

e只与材料有关

e的范围：$1 \geq e \geq 0$

- $e=0$. 完非弹
- $0<e<1$. 非完弹
- $e=1$ 完弹

(1) 完全弹性碰撞.

$$\begin{cases} m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{cases}$$

化简：

相除　$v_{01} + v_1 = v_{02} + v_2$

速度差：　$v_{01} - v_{02} = v_2 - v_1$

故

$$v_1 = 2v_{共} - v_{01} = \frac{2(m_1 v_{01} + m_2 v_{02})}{m_1 + m_2} - v_{01}$$

or.

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{(m_1 - m_2) v_{01} + 2 m_2 v_{02}}{m_1 + m_2} \\ v_2 = \dfrac{(m_2 - m_1) v_{02} + 2 m_1 v_{01}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

(2) 完全非弹性碰撞

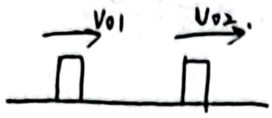
$$\begin{cases} m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = (m_1 + m_2) v_{共} \\ \Delta E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{共}^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2\right) \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_{01} - v_{02})^2.$$

特例：① 人船模型：$v_{02} = v_{01} = 0$，且接触变化 $\boxed{含微积分}$ 大学特色!!!

② 反冲势能板：$v_{01} = v_{02} = 0$. 不接触.　$v_1 = \sqrt{\dfrac{2 m_2 E}{m_1 (m_1 + m_2)}}$　$v_2 = \sqrt{\dfrac{2 m_1 E}{m_2 (m_1 + m_2)}}$

(3). 非完全弹性碰撞 (知道即可) 简略 ✓



ΔE_k 损失, 不共速

$$\begin{cases} m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \Delta E_k. \end{cases}$$

引入 $e = \frac{v_2 - v_1}{v_{01} - v_{02}}$: $\begin{cases} v_1 = v_{01} - (1+e) \frac{m_2 (v_{01} - v_{02})}{m_1 + m_2} \\ v_2 = v_{02} - (1+e) \frac{m_1 (v_{02} - v_{01})}{m_1 + m_2} \end{cases}$ 把 v_1, v_2 代入得

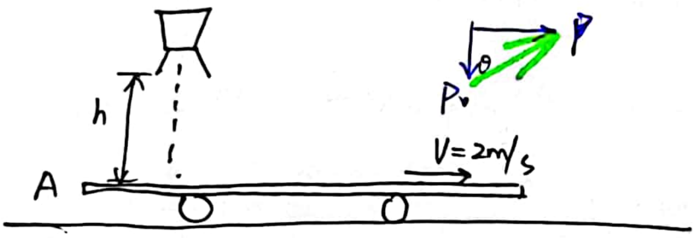
$$\Delta E_k = -\frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{01} - v_{02})^2 (1 - e^2)$$

动量定理例题

①.分方向

例1: $h=0.5m$. 流量 $q_m=40kg/s$. A: $v=2m/s$ 向右

求:煤块对A的作用力的大小和方向.(不计相对传送带静止的煤块的质量)



解:

① 先计算传送带对煤块的作用力

设Δt时间内, $\Delta m = q_m \Delta t$.

$\boxed{\text{落在A上前 } v_0=\sqrt{2gh}. \quad P_0=\Delta m v_0. \quad P\downarrow \qquad \text{之后} \quad P=\Delta m V \quad P\rightarrow}$

$$\Rightarrow |\Delta \vec{P}| = \sqrt{P_0^2+P^2} = \Delta m\sqrt{v_0^2+v^2} = q_m \Delta t\sqrt{v_0^2+v^2}$$

$$|\vec{F}| = \left|\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}\right| = q_m\sqrt{v_0^2+v^2} = 149N$$

$$\tan\theta = \frac{P}{P_0} = \frac{v}{\sqrt{2gh}} \qquad \theta = 32.3^\circ.$$

② 牛三: 煤块→A 的作用力与$|\vec{F}|$大小相等方向相反

动量守恒 · 综合

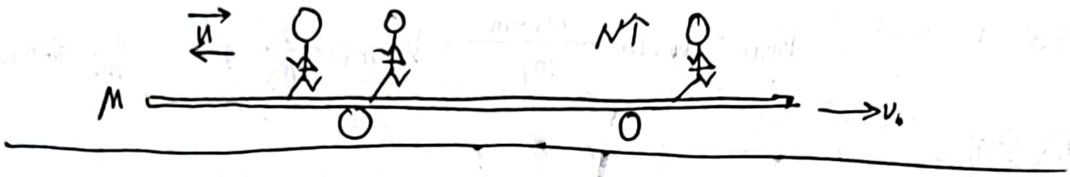
综合点：

① 与能量综合

② 与数学思维相综合

与数学思维结合：数学归纳

例：质量为 M 的平板车，在平板面上无摩擦滑动，有 N 个人，质量均为 m，站在车上。开始，车以 v_0 向右运动，后来，人相对车以 u 向左跑
(相对速度)



求证：(1) N 个人同时跳离车后，车速 $V = v_0 + \frac{Nm}{M+Nm} \cdot u$.

(2). N 个人相继跳离车后，车速 $V_N' = v_0 + \frac{mu}{M+Nm} + \frac{mu}{M+(N-1)m} + \cdots + \frac{mu}{M+m}$

证：(1) 设同时跳车后，车速为 V

$$(M+Nm)v_0 = MV + Nm(V-u) \Rightarrow V = v_0 + \frac{Nm}{M+Nm} \cdot u$$

(2) 设第一个人跳离车后，车速为 v_1'

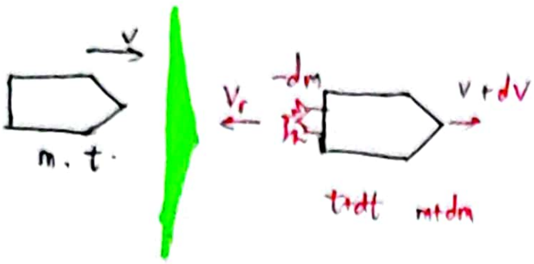
$$(M+Nm)v_0 = [M+(N-1)m]v_1' + m\cdot(-u+v_1') \Rightarrow v_1' = v_0 + \frac{mu}{M+Nm}$$

第二个人跳离车后速度为 v_2'

$$[M+(N-1)m]v_1' = [M+(N-2)m]v_2' + m(-u+v_2') \Rightarrow v_2' = v_1' + \frac{mu}{M+(N-1)m}.$$

数学归纳法：原式成立.

例1 火箭飞行原理



$$mV = (m+dm)(V+dV) + (-dm)\cdot(-V_r+V+dV) \quad ①$$

$$\Rightarrow mdV + V_r dm = 0 \Rightarrow dV = -V_r\frac{dm}{m} \xrightarrow{积分} \int_0^V dV = \int_{m_0}^{m} (-V_r)\frac{dm}{m}.$$

即有: $V = -V_r\ln\frac{m}{m_0} = V_r\ln\frac{m_0}{m}$. $m\downarrow$ $V\uparrow$

又. $m_0 = m_s + m'$. ② (m_s: 箭壳及卫星质量 : m': 燃料质量. 燃料燃烧完后, $m_0=m_s$)

故将②代入①中得. $V_{max} = V_r\cdot\ln\frac{m_s+m'}{m_s} = V_r\cdot\ln(1+\frac{m'}{m_s})$. $\frac{m'}{m_s}$ 称为质量比

故分析:

V_{max} 由 V_r 及 m'/m_s 决定.

一般 $V_r \approx 4km/s$.

地球轨道: $V_{max}\approx 8km/s$. $m'/m_s = e^2-1 \approx 7$

目前: $m'/m_s = 15$. $V_{max}\approx 11km/s$

考虑到地球引力及空气摩擦力 $V_{max}\approx 7km/s$

一般二维碰撞

例: 一个小球与另一个质量相等的静止小球发生~~碰撞~~非对心弹性碰撞, 试证明碰撞后两小球的方向互相垂直.

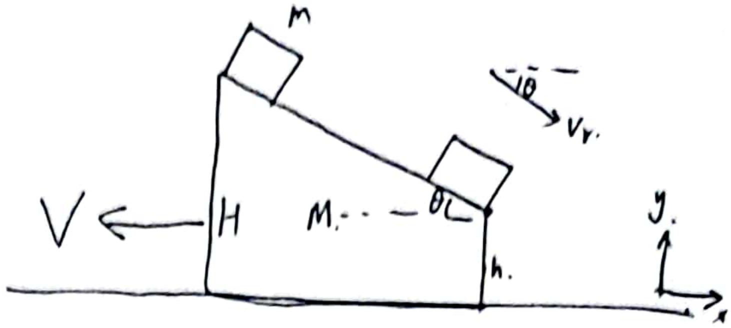
$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_0^2+0 = \frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2 \\ m\vec{v_0}+0 = m\vec{v_1}+m\vec{v_2} \end{cases} \quad 即: \begin{cases} v_0^2 = v_1^2+v_2^2 \\ \vec{v_0} = \vec{v_1}+\vec{v_2} \end{cases}$$

故只有当 $\vec{v_1}\perp\vec{v_2}$ 时, 才可满足2个球撞后相互垂直

例：非完全弹性碰撞典例 · 重且一般计算过程.

已知 m. M. H. h, θ. 所有接触面均光滑.

求：m. M. 脱离接触时. M的速度及 m. 对 M. 的速度（绝对速度. 及相对速度）



解：①列速度关系

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{V} \rightarrow \begin{cases} v_x = v_r \cos\theta - V \\ v_y = -v_r \sin\theta \end{cases}$$

②列关系、

水平动量：$mv_x - MV = 0$

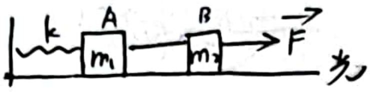
能量：$mg(H-h) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}MV^2$.

解得 $V = m\sqrt{\dfrac{2g(H-h)\cos^2\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}}$ $\quad v_r = \sqrt{\dfrac{2g(H-h)(M+m)}{M+m\sin^2\theta}}$ （未写解过程）

基础受力分析

例：恒力F，m_1自平衡位置由静止开始运动。

求：AB系统受合外力为零时的速度，以及此过程中A_F、A_T



解：

AB：力：$F=kx \Rightarrow x=\frac{F}{k}$　故 $A_F=F\cdot x=\frac{F^2}{k}$.

对AB：动能：

$$A_F=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2+\frac{1}{2}kx^2$$

$$v=\frac{F}{\sqrt{F(m_1+m_2)}}$$

A_T 也是对A 功

例：单位密度 / 长度比例 → 看密度.

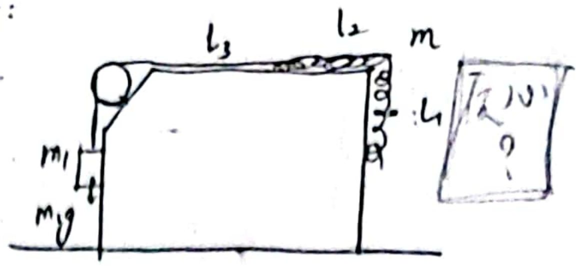
链条 $m=10kg$. $l=40cm$. $l_1=l_2=20cm<l_3$.

$m_1=10kg$.

求：

链条全部滑到桌面时，系统的速度与加速度

解：



$$m_1gl_1=\frac{1}{2}mg\cdot\frac{1}{2}l_1+\frac{1}{2}(m_1+m)v^2.$$

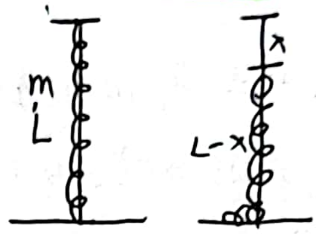
$$\left[m_1gl_1=0+\frac{1}{2}(m_1+m)v^2-\left(-\frac{1}{2}mg\cdot\frac{1}{2}l_1\right)\right]$$

又 $m=m_1$

故 $v=\sqrt{\frac{3}{8}gl}=1.21\,m/s$　　$m_1g=(m_1+m)a$，$a=\frac{g}{2}=4.9\,m/s^2$

同类题：m.L 的链条。

求下落x时链条对地面的作用力。



解：

法一：

① 静压力：$F_0=x\rho g=\frac{x\,mg}{L}$　压是线密度

② $(dm\cdot g-F_1')dt=dm(0-v)$　二阶无穷小略去

$=dm\sqrt{2gx}$

$$F_1'=\frac{dm}{dt}\sqrt{2gx}=\rho\frac{dx}{dt}\sqrt{2gx}$$

$$=\rho\,2gx=\frac{2mgx}{L}$$

故 $F=F_0+F_1'=\frac{3mgx}{L}$

法二：$P=(L-x)\rho V$

$$mg-F'=\boxed{\frac{dP}{dt}=\frac{d}{dt}[(L-x)\rho V]}$$

微商形式

$$=-\frac{dx}{dt}\cdot\rho V+(L-x)\rho\frac{dV}{dt}$$

$$=-\rho V^2+(L-x)\rho g$$

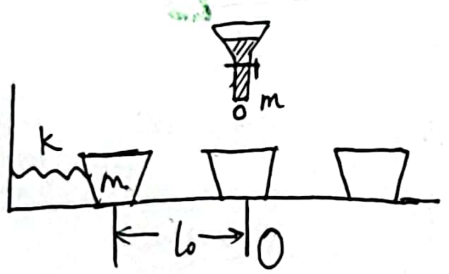
$$=-\rho 2gx+mg-x\rho g$$

$$F'=3\rho g x=\frac{3mgx}{L}\qquad F=F'=\frac{3mgx}{L}$$

例：容器自O点（平衡位置）左端l_0处，从静止开始运动每经过一次O点，从上方滴入一质量为m的油滴。

求(1). 滴入n滴后，容器运动到距O点的最远距离；

(2). 第n+1滴与第n滴的时间间隔



解：

(1)

第一部分/阶段：到O点。

机械能守恒：$\frac{1}{2}kl_0^2=\frac{1}{2}MV^2$.

第二阶段，滴入容器中。

每次经过O点，动量守恒。 $MV=(M+nm)V'$

↓

机械能~~守恒~~（一般化）：$\frac{1}{2}(M+nm)V'^2=\frac{1}{2}kx^2$

第n次滴入最远距离 $x=\sqrt{M/(M+nm)}\cdot l_0$

(2)

$$t_{n+1}-t_n=\frac{1}{2}T_n$$

又 $T_n=2\pi\sqrt{\frac{m_{总}}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{(M+nm)}{k}}$

//按结论来算周期

例：~~综合联用~~

刚体力学

刚体力学知识结构.

基础: 刚体. 平动. 转动: 定轴转动运动学

θ	类比 x.
w.	类比 v.
$\vec{\beta}$.	类比 a.

又引入. 力矩 $\cdot M = \vec{r}\times\vec{F} = r\cdot F\cdot \sin\varphi$. 类比. F.

转动惯量. $I = \int r^2 dm$. 类比 m

研究: 转动.

①. $\vec{M} = I.\vec{\beta}$ 类比 =

② 功能 能 动能 $\frac{1}{2}Iw^2$.

势能: 质心所在位置 (即: 若恒力做功直接按定义式)

功: $dA = \vec{F}d\vec{r} = F\cos\alpha ds = \boxed{F\cos\alpha\cdot r}\boxed{d\theta} = M d\theta$. 类比 $W = F\ s$

③角动量. $\Delta\vec{L} = \vec{M}dt$. 类比: $\vec{I} = \vec{F}t$

当 $\vec{M}=0$ 时 $\boxed{角动量守恒}$

$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{P} = rP\sin\theta$ 给了概念、 类比 P

对转动刚体来说: $\vec{P} = I\cdot\vec{\omega}$ 类比 P

刚体力学

第一节 刚体定轴转动运动学

一、刚体：任意2个质点间相对位置不变。。 刚体的运动＝平动＋转动

1. 平动：

(质点系 or 刚体)：质心运动定理

定义：质心C对应位矢 $\vec{r_c} = \frac{\sum m_i \vec{r_i}}{\sum m_i}$

(质量连续分布时，$\vec{r_c} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$)

质心速度

$$\vec{V_c} = \frac{d\vec{r_c}}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r_i}}{dt}}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{V_i}}{dt}$$

系统动量

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v_i} = (\sum m_i)\vec{V_c} = M\vec{V_c} \quad M 质点系质量.$$

<u>注：系统动能：</u>

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m v_i^2 \neq \frac{1}{2} M v_c^2.$$

质心运动定理：

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = d(M\vec{V_c}) = M\frac{d\vec{V_c}}{dt}. \quad 令 \vec{a_c} = \frac{d\vec{V_c}}{dt}. ：质心加速度$$

$$\boxed{\vec{F} = M\vec{a_c} \quad 质心运动定理}$$

2. 转动：各点绕同一直线作圆周运动

二、定轴转动运动学

1、定轴转动的特点：书本

2. 定轴转动的角量描述

(1) Δt, $\Delta\theta$：角位移，rad.

(2) $t \sim t+dt$，$d\theta$

角速度：$\omega = \frac{d\theta}{dt}$. rad/s

n：转/分、r/min. $\omega = 2\pi \cdot \frac{n}{60}$

(3). $t \sim t+dt$. dw. 角加速度：$\beta = \frac{dw}{dt}$. rad/s^2.

- 匀速转动：$\Delta\theta = wt$
- 匀变速转动：$w = w_0 + \beta t$. $\Delta\theta = w_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$. $w^2 - w_0^2 = 2\beta\Delta\theta$

3. 角量和线量的关系.

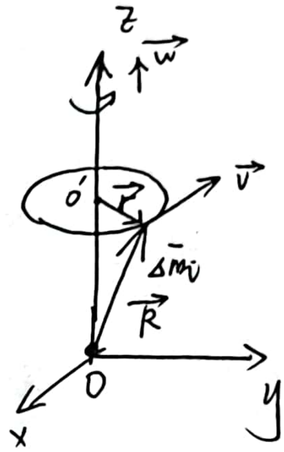
$w r_i = v_i$

$\beta r_i = a_{it}$

$w^2 r_i = a_{in}$

4. 定.角速度.矢量 $\vec{w}$. <一般限制到了2个方向>

- 大小：$= w$
- 方向：右手螺旋.
  - $\vec{w}$ 沿 $\vec{z}$. → $w>0$
  - $\vec{w}$ 沿 $\vec{z}$ 反 → $w<0$



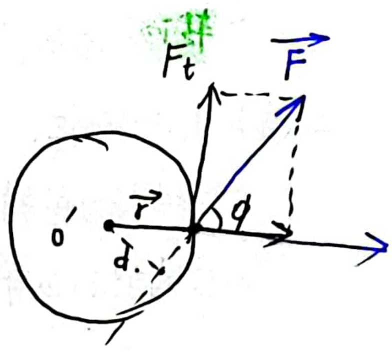
角加速度矢量 $\vec{\beta} = \frac{d\vec{w}}{dt}$

- 大小：$= \beta$
- 方向 右手
  - $\vec{\beta}$ 沿 z 方向 → $\beta > 0$
  - $\vec{\beta}$ 沿 z 反向 → $\beta < 0$

⇒ 在定轴转动中有

$$\boxed{\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r} = \vec{w} \times \vec{R}}$$ 运用叉乘

第二节：力矩



定义：力 $\vec{F}$ 对 z 轴的力矩 $M = \begin{cases} Fr\sin\varphi \\ Fd \ (d: 力臂) \ 矢: \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \\ r \cdot F_t \end{cases}$

这三个是等价的。

方向：$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1$

定轴转动，$M>0$，沿 z 轴正方向；$M<0$，沿 z 轴负向。

注：① 若 $\vec{F}$ 不在其作用点的转动平面内，则分解。

$F_{\parallel}$：不贡献力矩0.

$F_{\perp}$：$M(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F_{\perp}}$

② 同一个力对不同的轴的力矩一般不同

③ 合力矩等于分力矩之和：$\vec{M} = \vec{M_1} + \vec{M_2} + \cdots + \vec{M_n}$ → 每个力的位矢都不一样，因此不能求合力!!!

or 标量式（定轴转动）$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$

刚体：合力矩＝力矩之和≠合力的力矩

④ 重力的，求力矩等于全部质量集中于重心处的。$\vec{M} = \vec{r_G} \times \vec{G}$

第三节 转动惯量

离散 / 均匀

一、定义：

r_i：Δm_i 对 z 轴的转动惯量.

$\Delta m_i r_i^2$：Δm_i 对 z 轴的转动惯量

$I = \sum \Delta m_i r_i^2$：刚体对 z 轴的转动惯量.

$\rho dV = \rho dx dy dz$

单位：$kg\,m^2$. ML^2

$I = \int \rho r^2 dx dy dz = \int (x^2+y^2+z^2)$

$= \int z^2 dz \boxed{\iint (x^2+y^2) dx dy}$

不均匀分布 → 可相加

对于：质量连续分布，则 $\boxed{求和变积分}$ ※记住 + 应用 → 考题就直接求转动惯量

$I = \int r^2 dm$
- 三维 $\int r^2 d(\rho V) = \int r^2 \rho\, dV$
- 两维 $\int r^2 d(\sigma S) = \int r^2 \sigma\, dS$
- 一维 $\int r^2 d(\lambda l) = \int r^2 \lambda\, dl$

ρ 质量体密度　dV 体元体积
σ 质量面密度　dS 面元面积，
λ 质量线密度　dl 线元长度

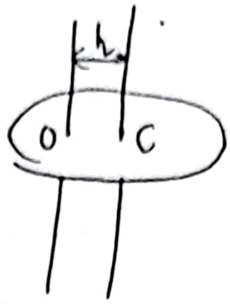
这种要作为思想记心

注：① 影响转动惯量的因素：
- 刚体的总质量　$\lambda = \frac{m}{2\pi R}$
- 质量分布　$\int dm = \int_0^{2\pi R} \frac{m}{2\pi R} dl$
- 轴的位置 ※这个会考：说明质量相对转轴的分布

② $\boxed{回转转动惯量的回转半径}$

二、两个定理

1、平行轴定理

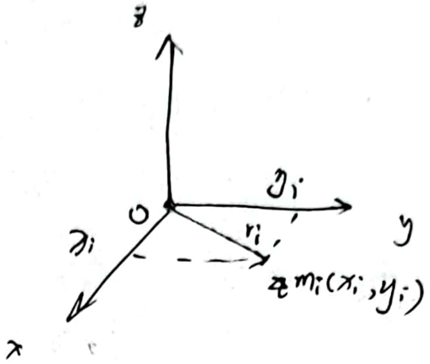


$I_o = I_c + mh^2$ C: 质心

$mh^2 > 0$, $I_o > I_c$

I_c 最小

2、薄板的垂直轴定理



$I_z = \sum \Delta m_i r_i^2$

$= \sum \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2)$ //勾股

$= \sum \Delta m_i x_i^2 + \sum \Delta m_i y_i^2$

$= I_y + I_x$

第四节 刚体定轴的转动定律

一、推导

$\vec{F_i} + \vec{f_i} = \Delta m_i \vec{a_i}$

$F_{it} + f_{it} = \Delta m_i \boxed{a_{it}} = \Delta m_i \boxed{r_i \beta}$ 从角加速的 a切关系

乘力矩

$\sum r_{it} F_{it} + \sum r_i f_{it} = (\sum \Delta m_i r_i^2)\beta$

M 合外力矩　　0　　I

F=ma 类比 与牛二 ✓

$$\boxed{M = I\beta = I\frac{d\omega}{dt}}$$

$$\vec{M} = I\vec{\beta} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

注: ① M、I 对同一转轴而言

可解决两类问题

② 已知 $\theta = \theta(t)$, 求 $M = I\beta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$

已知M及初始条件, 求 β, ω, $\theta = \theta(t)$

二、物理意义.

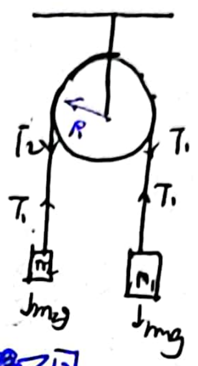
$\vec{M} = I\vec{\beta}$ ⇌ $\vec{F} = m\vec{a}$

I：刚体转动惯性大小的量度

m：平动惯性大小的量度

典例. 均质圆盘 (m, R). $m_1 > m_2$. 阿特武德机

求：盘的 β，m_1，m_2 的加速度 a.



解：

step1: 力分析

平移. $\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \end{cases}$ //注意，圆盘不是轻质故2绳不同拉力

转动: $T_1R - T_2R = I\vec{\beta} = \frac{1}{2}mR^2 \beta$

step3: $a = R\beta$ //辅助，补充方程

解方程：

$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}mR\beta = \frac{1}{2}ma.$

$m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m)a.$

则 $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g$ $\qquad \beta = \dfrac{a}{R} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} \cdot \dfrac{g}{R}$

拓展讨论：

(1) 若 $m = 0$. 则 $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$ $\quad T_1 = T_2$

(2) 考虑轴承摩擦 $T_1R - T_2R - M_f = I\beta$

(3). 若顺时针有主动力 $M_主 + [T_1R - T_2R - M_f] = I\beta$

第五节 刚体定轴转动中的动能

一、力矩的功

在 dt 内 $|d\vec{r}|$，$d\theta$，ds。

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F\cos\alpha\, ds$$

$(\because F_t = F\cos\alpha.)$

$$\Rightarrow dA = \underbrace{F_t\, r\,d\theta}_{s=r\theta} = M\,d\theta$$

$\theta_1 \to \theta_2$：$A = \int dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta$.　（类比平动：$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} \to A = \int_{a(L)}^{b} \vec{F}\cdot d\vec{r}$）

推：

若同时受 n 个力，则 $dA = dA_1 + \cdots dA_n$ 的代数和

说明：

(1) 力矩的功 ═ 力的功 → 叫法问题.

(2) 功率 $P = \frac{dA}{dt} = \frac{M\,d\theta}{dt} = M\omega$.　（推：$P = \vec{F}\cdot\vec{v}$ 也可推导出 $P = M\omega$）

二、刚体的转动动能

$$\boxed{\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2} = \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2.$$

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \boxed{\frac{1}{2}I\omega^2} \quad \sim \quad \frac{1}{2}mv^2$$

三、刚体定轴转动动能定理

合外力矩 M.　dt．$d\theta$

$$dA^{外} = M\,d\theta = I\beta\,d\theta = I\frac{d\omega}{dt}\cdot\omega\,dt = I\omega\,d\omega = d\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) = dE_k.$$

推广

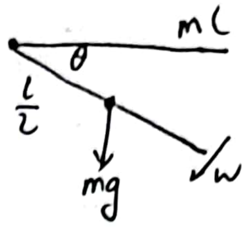
$$\begin{cases} dA^{外} = dE_k & \text{动能定理（微分）} \\ A^{外} = \Delta E_k & \text{动能定理（积分）} \end{cases}$$

注：

$$\begin{cases} \text{质点系：} A^{内} \neq 0 \Rightarrow \Delta E_k = A^{外} + A^{内} \\ \text{刚体：} A^{内} = 0 \Rightarrow \Delta E_k = A^{外} \end{cases}$$

四、刚体的動势能＝全部集中在质心时的動势能
对于刚体或包括刚体的系统
若只有保守内力作功，机械能守恒

典例：求杆由水平位置无初速释放，转动θ角时的ω



解、
(一) 机械能守恒
O：重力势能零点

$$0=\frac{1}{2}I\omega^2+\left(-mg\frac{l}{2}\sin\theta\right)$$

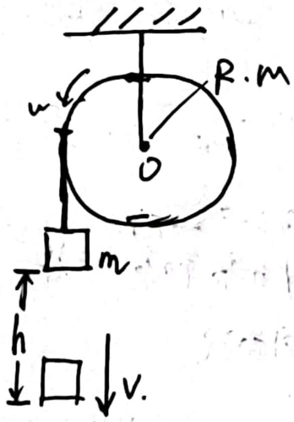
$$I=\frac{1}{3}ml^2$$

解得：$\omega=\sqrt{3g\,l\sin\theta/l}$

(二). 动能定理

$$A=\int_0^\theta M\,d\theta=\int_0^\theta mg\frac{l}{2}\cos\theta\,d\theta=mg\frac{l}{2}\sin\theta=\Delta E_k=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2$$ 同上.

典例：均质圆盘 (M,R) 可绕水平轴无摩擦转动.
求：物体m下降h时的速度



解：
step2 $mgh=\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}\boxed{\frac{1}{2}MR^2}\cdot\omega^2$

step3: $V=\omega R$.

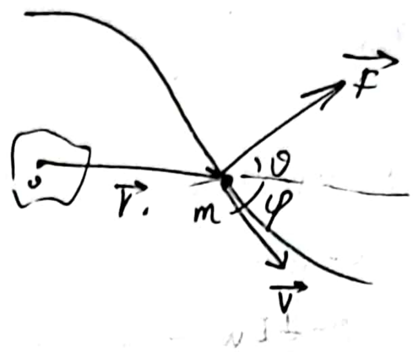
解得：$V=\sqrt{\dfrac{4mgh}{M+2m}}$

第六节 角动量定理和角动量守恒定律

刚体

一、质点对固定点的 L.

定义：质点对O点的角动量.



$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$$

$$L=r\cdot P\sin\theta=mV\sin\varphi$$

$(kg\cdot m^2 s^{-1})$. ML^2T^{-1}

其次力矩： $M=\vec{r}\vec{F}=r\cdot F\sin\theta$.

又 $\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\dfrac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{P})=\underbrace{\boxed{\dfrac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{P}+\vec{r}\times\dfrac{d\vec{P}}{dt}}}$ = $\vec{V}\times m\vec{V}+\vec{r}\times\vec{F}$ $=\vec{r}\times\vec{F}$

叉乘微分 分开加

即：有角动量定理： $\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$.

(也有： $d\vec{L}=\vec{M}dt$. $\vec{M}dt$ 称元冲量矩； $\Delta\vec{L}=\underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}dt}_{冲量矩}$. $Nm\cdot s$. ML^2T^{-1}.)

特别地，

若 $\vec{M}=0$，则有 $\dfrac{d\vec{L}}{dt}=0\Rightarrow\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}=\vec{C}$，即：角动量守恒定律

典例：

证明开普勒第二定律：以恒星到行星的矢径在相同的时间内扫过相同面积.

证明：∵ 合外力只受引力作用，故以恒星为固定点、合外力矩 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=0$

∴角动量守恒、$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{V}=\vec{C}$ 取模 $rV\sin\varphi=C'$

又∵ 在 dt 内，面积 $dA=\frac{1}{2}\cdot r\cdot dh=\frac{1}{2}r\cdot(ds)\cdot\sin\varphi$

同除以 dt： $\dfrac{dA}{dt}=\dfrac{1}{2}r\cdot\dfrac{ds}{dt}\cdot\sin\varphi=\dfrac{1}{2}r\cdot V\sin\varphi=\dfrac{C'}{2}$

故为常数

多物体

二. 质点系对固定点的.

m_i: 动量 $\vec{P_i} = m_i\vec{v_i}$

角动量 $\vec{L_i} = \vec{r_i} \times \vec{P_i}$

定义: 质点系对O点的角动量.

$$\vec{L} = \sum \vec{L_i} = \sum \vec{r_i} \times \vec{P_i}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\sum \vec{r_i} \times \vec{F_i}}_{\text{合内力矩为0}} + \underbrace{\sum \vec{r_i} \times \vec{F_i}}_{\text{合外力矩}}$$

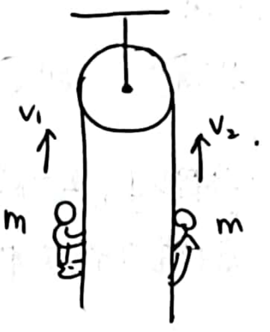
故. $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{外} \Leftrightarrow d\vec{L} = \vec{M}^{外} \cdot dt \Leftrightarrow \Delta\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}^{外}\, dt$

特别地, 有角动量守恒定律

$\vec{M}^{外} = 0$. $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \sum \vec{L_i} = \vec{C}$

典例:

2猴、质量同. 距地面高度相同, 一猴爬另一猴不爬。请问, 谁先达滑轮



拉力力矩 可抵消

解: $\because \vec{M}^{外} = 0$

$\therefore$ 角动量守恒 即: $R m v_1 - R m v_2 = 0$

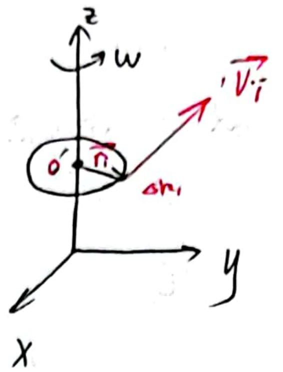
故 $v_1 = v_2$, 同时达滑轮

三.刚体对定轴的～

令$v=w.r.$

推导的一种情况下常例(常见)

即:将讨论中加入了转动惯量



Δm_i对z轴的角动量.

$$\vec{L_i}=\vec{r_i}\times\vec{P_i}=\vec{r_i}\times\Delta m\vec{V_i}$$

其大小: $|\vec{r_i}\times\Delta m_i\vec{V_i}| \xlongequal[\theta=90^\circ]{\text{切向}} r_i\Delta m_i v_i \xlongequal{v_i=wr_i} \Delta m_i r_i w$

综上:

刚体对z轴的角动量. 如右图做单独判断(运动员)

$$\vec{L}=\sum\Delta m_i r_i^2\vec{w}=I\vec{w}$$ 类比: $\vec{P}=m\cdot\vec{v}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=I\frac{d\vec{w}}{dt}=I\vec{\beta}=\vec{M}$$ 类比: $\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}=ma$

$$\Leftrightarrow \Delta\vec{L}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,dt$$

特别地

① 若$\vec{M}=0$,则$\vec{L}=\vec{C}$ 即:角动量守恒定律

② 非刚体,I一般随时间变化. $\vec{M}=I\vec{\beta}$不成立.
角动量定理及角动量守恒定律仍成立.

③ 定轴转动:省略箭头,要分大小

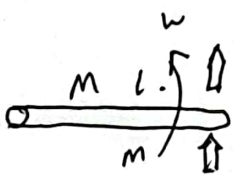
$$\frac{dL}{dt}=M.\quad dL=M.dt\quad \Delta L=\int_{t_1}^{t_2}M\,dt.$$ 三种形式

$L=C.$ ($\vec{M}=0$时 L)　　$L=Iw$　　$M=I\beta$ (与定轴配合)

典例: 水平面内,均质杆.(M.l). →一转动体,一平动刚体

子弹(m.v)击穿杆的自由端.后速度变为$\frac{V}{2}$

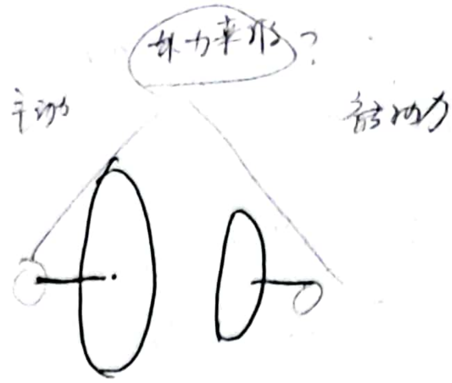
求:杆转动角速度



解: 角动量守恒 $\boxed{mVL=m\frac{V}{2}\cdot L+\frac{1}{3}Ml^2w}$　　$w=\frac{3mV}{2Ml}$

Scanned with CamScanner

典例2：两个转动体一共轴



$r_A = 0.2m$. $m_A = 2kg$. $\omega_{0A} = 50\ rad\cdot s^{-1}$

$r_B = 0.1m$ $m_B = 4kg$ $\omega_{0B} = 200\ rad\cdot s^{-1}$

求. AB对心结合后 共同的角速度 ω.

AB受到的冲量矩 机械能损失

Q1：

$$I_A \omega_{0A} + I_B \omega_{0B} = (I_A + I_B)\omega.$$

且 $I_A = \frac{1}{2} m_A r_A^2$ $\quad I_B = \frac{1}{2} m_B r_B^2$

故有：$\omega = \dfrac{I_A \omega_{0A} + I_B \omega_{0B}}{I_A + I_B} = 100\ rad\cdot s^{-1}$

Q2：

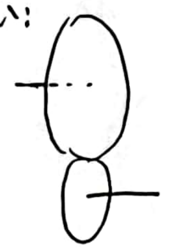
$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} M_A dt = \Delta L_A = I_A\omega - I_A\omega_{0A} = 2N\cdot m\cdot s \\ \int_{t_1}^{t_2} M_B dt = \Delta L_B = I_B\omega - I_B\omega_{0B} = -2N\cdot m\cdot s \end{cases}$$

这是必然，等大相反的

Q3：

$$\Delta E = \frac{1}{2}(I_A + I_B)\omega^2 - \frac{1}{2} I_A \omega_{0A}^2 - \frac{1}{2} I_B \omega_{0B}^2 = -150J$$

由此注意：

①  这样角动量不守恒

② . 只适用于惯性系，且时时刻刻.

③ 区分
- 单个质点 ： 合力矩 = 力矩的和 = 合力的力矩
- 质点系 ： ≠ 合力的力矩（作用点不同）

④

对于质点系，

内力：$\sum \vec{F_i} = 0$.

↓

冲量：$\sum \vec{F_i}\, dt = 0$

力矩：$\sum \vec{M_i}^{内} = 0$

↓

冲量矩：$\sum \vec{M_i}\, dt = 0$

[illegible]

功：$\sum \vec{F_i}\, d\vec{r_i} \neq 0$　但 对刚体：$\sum \vec{F_i}\, d\vec{r_i} = 0$

典例3：类比人转转盘 → 联立去联用内外用

人沿转台边缘相对转台转动一周

求：相对于地面，人和转台各转动多少度？

解：以人转动方向为正方向.

人：$R\cdot mv = R\cdot m\omega R$

台：$R\cdot m\omega R - \frac{1}{2}MR^2\Omega = 0$. ①

$\xrightarrow{积分}$ $2m\int_0^t \omega\, dt = M\int_0^t \Omega\, dt$.　得：$2m\theta = M\cdot\beta$.

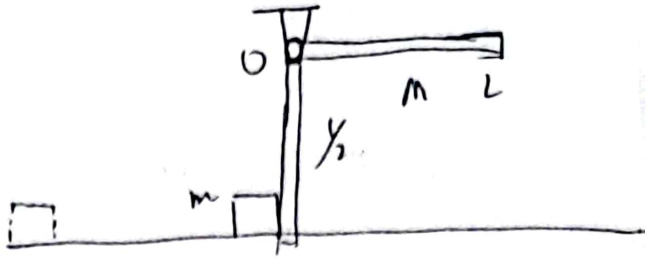
$\theta + \beta = 2\pi$ ②

联立得　$\theta = \frac{2\pi M}{M+2m}$　　$\beta = \frac{4\pi m}{2m+M}$

典例4：均质杆可在竖直面内转动

求：均质杆与木块完全非弹性碰撞后，

木块滑行的距离



解：

第一阶段：木杆下来：(转动刚体的列式)

$$Mg\cdot\frac{l}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}Ml^2\right)\cdot w^2$$

$$w=\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

第二阶段：碰撞瞬间合外力矩为0，角动量守恒

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{3}Ml^2\right)\cdot w=\left(\frac{1}{3}Ml^2\right)w'+m\cdot v\cdot l\\ \dot{v}=\dot{w}'l\end{cases}$$

// 由完全非弹性碰撞得速度关系

得：木块：$v=\frac{M}{M+3m}\cdot\sqrt{3gl}$

第三阶段：木块平动.

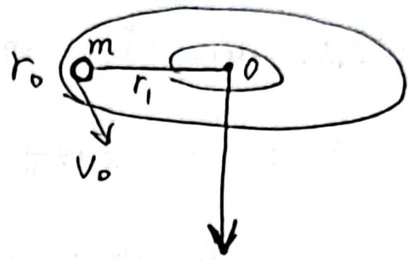
$$\begin{cases}a=-\frac{f}{m}.\\ s=\frac{v^2}{2a}\end{cases}$$

得：$s=\left(\frac{M}{M+3m}\right)^2\cdot\frac{3l}{2\mu}.$

Scanned with CamScanner

习题课(刚体力学)

例:



解、(1). 小球对O点角动量守恒. //确实要看清这种情况下,合外力矩为0!

$$mv_0r_0 = mv_1r_1 \Rightarrow v_1 = \frac{r_0}{r_1}v_0 \qquad \omega_1 = \frac{v_1}{r_1} = \frac{r_0v_0}{r_1^2}$$

(2)

$$A = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{r_0^2}{r_1^2} - 1\right)$$

功能定理

//能量从功的角度来分析

例:类阿特伍德机

证明: $m_B = \dfrac{Ja_A + m_Ar_A^2(g + a_A)}{r_Ar_Bg - r_B^2a_A}$

证明

相当对三者进行分析

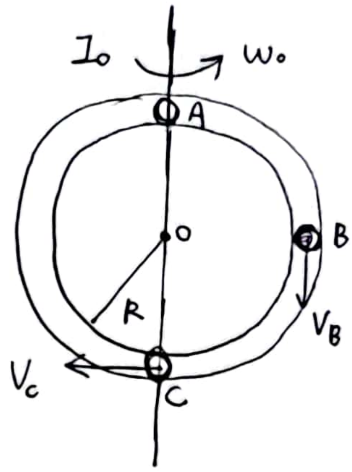
对B: $m_Bg - T_B = m_Ba_B$

对A: $T_A - m_Ag = m_Aa_A$

二 转动定律: $\boxed{T_Br_B - T_Ar_A = J\beta}$ 多了一个转轴

定义: $a_B = r_B\beta$, $a_A = r_A\beta$

例:



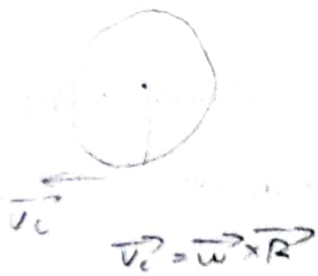
解:

B:

C: 角动量守恒: $I_0\omega_0 = I_0\omega \rightarrow \omega=\omega_0$

初末机械能守恒 $\frac{1}{2}I_0\omega^2+mgR=\frac{1}{2}I_0\omega^2+\frac{1}{2}mv_c^2-mgR$ (以O点为势能零点)

$V_c=\sqrt{4gR}$



例:

解: ① 解 $\vec{r}\times\vec{F}$ 困难

注: ds上: $\frac{F}{\pi R^2}$ 力密度 $\frac{F}{\pi R^2}ds$

阻力: $df=\mu\frac{F}{\pi R^2}\cdot ds$

$d\vec{M}=\vec{r}\times d\vec{f}$? 怎么求

$\boxed{dM=rdf=r\cdot\mu\cdot\frac{F}{\pi R^2}ds}$

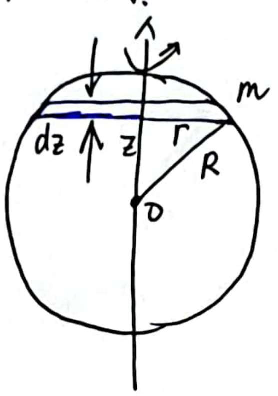
转动惯量

① 积分求法

② 记住常见形体转动惯量

例：均匀球体对其直径的转动惯量.

解：



思路：

在圆盘的基础上，进行进一步思考，而视从其微元而形成.

解：

对于圆盘：$\boxed{dI=\frac{1}{2}r^2dm}$ 将每个圆盘作为微元，利用圆盘的公式

① 球体：

$dV=\pi r^2dz$. $dm=\rho dV=\rho\pi r^2 dz$.

$\rho=\dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

② 根据定义：

积分主体

$I=\int dI=\int\frac{1}{2}\cdot r^2 dm=\int\frac{1}{2}r^2\cdot\rho\pi r^2dz$

$=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}\rho\pi(R^2-z^2)^2dz$

$=\int_0^R\rho\pi(R^2-z^2)^2dz$

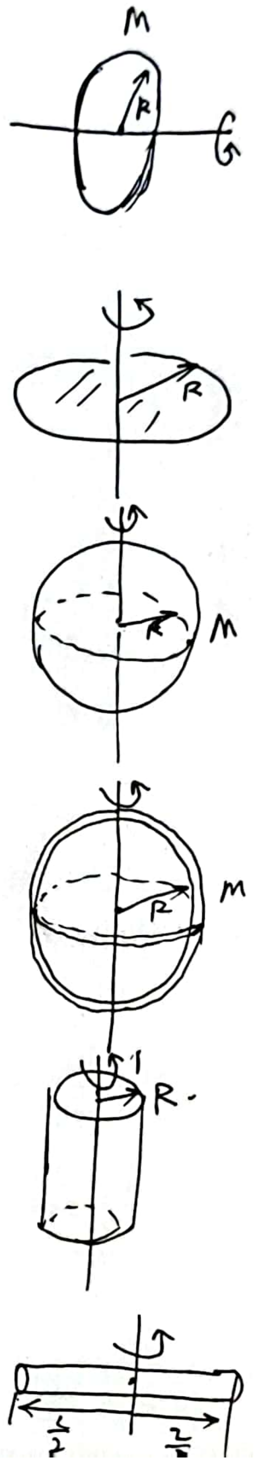
$=\int_0^R\rho\pi(R^4-2R^2z^2+z^4)dz$

$=\rho\pi(R^5-\frac{2}{3}R^5+\frac{1}{5}R^5)$

$=\frac{2}{5}mR^2$

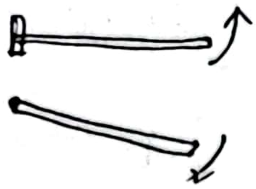
推：

环	MR^2	
盘	$\frac{1}{2}MR^2$	
球体	$\frac{2}{5}MR^2$	
球壳	$\frac{2}{3}MR^2$	
圆柱体	$\frac{1}{2}MR^2$	
均质细杆	$\frac{1}{12}ML^2$	



Scanned with CamScanner

$\frac{1}{3}ml^2$



振动 波动

振动波动结构

机械振动

- 简谐振动运动学
- 简谐振动动力学、能量
- 简谐振动的合成
- 阻尼振动、受迫振动的共振（*）

机械波

- 机械波的产生与传播
- 波速、波长 波的周期和频率
- 波动方程（波函数）
- 波的能量
- 惠更斯原理
- 波的干涉
- 驻波
- 多普勒效应

机械振动基础

第一节 简谐振动运动学（以弹簧振子为中心，进行研究，运动和力）

一、定义：$x = A\cos(\omega t+\varphi)$ (SI)　$A>0$，$\omega>0$，φ：常数 —— 简谐振动方程

(eg. 正弦交流电 $u = U_m\cos(\omega t+\varphi)$)

二、描述简谐运动的物理量

1. $|x|\le A$．A：振幅
2. $T=\frac{2\pi}{\omega}>0$．周期
3. 频率：ν．单位．Hz．$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$
4. $\omega=2\pi\nu$．ω=圆频率．单位．rad/s（角频率）

由振动系统的性质

⇒ 三种常用的标准形式

$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$=A\cos(2\pi\nu t+\varphi)$

$=A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\varphi)$

相位，$\Phi(t)=\omega t+\varphi$．位相：$t=0$．φ初相 → 由初始条件决定

振动的三要素：
- A
- ω（或ν或T）
- φ

三、振动曲线（位移时间曲线）

三种画法：
① 描点法
② 旋转矢量法
③ 平移法　坐标变换

$F=-kx$，$F=ma$ ⇒ $\omega^2=k/m$

$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$F=-kx$

$=-\omega^2 m x$

$64\pi^2\cdot 0.01$

四、由一步讨论：周期、位相

周期 → 会找到时间

位相 → 是决定质点振动状态的物理量．

五 进一步讨论 谐振质点的速度和加速度．

位移：$x=A\cos(\omega t+\varphi)$

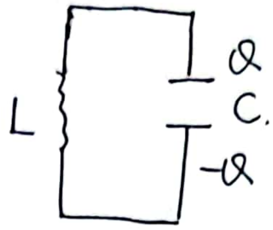
速度 $v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

加速度：$a=\frac{dv}{dt}=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi)$

由此可推出: $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ —— 简谐微分方程

⇒ 可应用:

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{1}{LC}Q=0 \quad 得: \omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$



注:简谐振微分方程中因素前的系数是大于0的系数.

六、进一步讨论: $\boxed{2个简谐振动的关系}$: 超前、滞后、同相、反相.

前提:频率相同

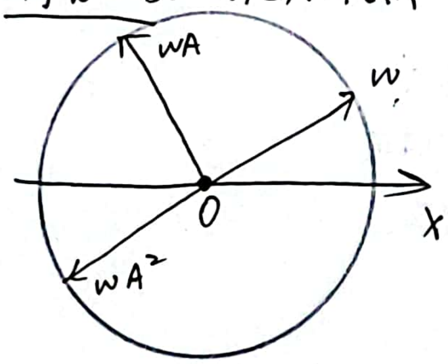
$$\begin{cases} x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

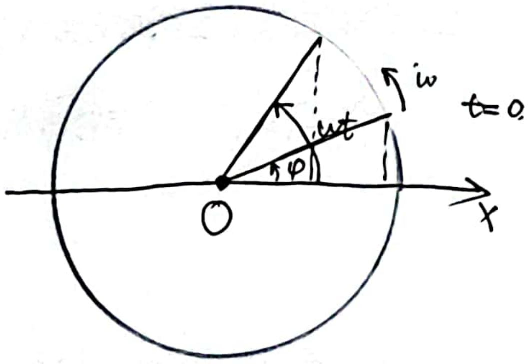
$\Phi_2-\Phi_1=\varphi_2-\varphi_1=\Delta\varphi$.

- 超前: 若 $\Delta\varphi>0$, 则 2比1超前 $\Delta\varphi$
- 滞后: 若 $\Delta\varphi<0$, 则 2比1滞后 $\Delta\varphi$

- 同相: 若 $\Delta\varphi=\pm2k\pi$ $(k=0,1,2\cdots)$ 同相
- 反相: 若 $\Delta\varphi=\pm(2k+1)\pi$ $(k=0,1,2\cdots)$ 反相

七、简谐运动.旋转矢量表示法





x-v-a 关系

八、振幅、初相与初条件的关系

$$\begin{cases} x_0=A\cos\varphi \\ v_0=-\omega A\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow ① A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \cos\varphi=\frac{x_0}{A}.$$

任意时刻均成立

九. 要能使振动曲线确定/画出振动方程 (A, ω, φ)

Scanned with CamScanner

机械振动：大题型 弹簧

关于力

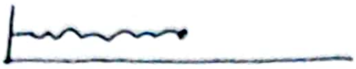
$k=k_1+k_2$　　　　$k=k_1+k_2$　　　　$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$

并联　　　　串联

第2节 简谐振动动力学

典型模型举例

一、弹簧振子 (k, m)



$$F=-kx=ma=m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0} \quad \left(\frac{k}{m}>0\right)$$

$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ $\quad$ 注：频率or周期仅由振动系统决定.

推广地，同时竖直or水平弹簧均满足该振子.

二、单摆.

相对弹簧振子. $F=-mg\sin\theta$ $=ma_t=ml\beta=ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0} \quad (当\theta较小时,\ \sin\theta\to\theta)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0.$$

取 $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$ $\quad T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

另外，引入.

角位移：$\theta=\theta_m\cos(\omega t+\varphi)$

角速度：$\Omega=\frac{d\theta}{dt}=-\omega\theta_m\sin(\omega t+\varphi)$

三、复摆.

取逆时针为正.

$$-mg\sin\theta\cdot h=I\vec{\beta}=I\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{mgh}{I}\sin\theta=0 \quad (当\theta较小时,\ \sin\theta\to\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{mgh}{I}\theta=0.} \qquad \omega=\sqrt{\frac{mgh}{I}} \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

四、简谐运动的能量

以弹簧. $x=A\cos(\omega t+\varphi)$. $V=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$ 为例.

则有 $\begin{cases} E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\cdot\left(\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)\right)\xlongequal{k=m\omega^2}\frac{1}{2}k\cdot A^2\sin^2(\omega t+\varphi) \\ E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k\left(A^2\cos^2(\omega t+\varphi)\right) \end{cases}$

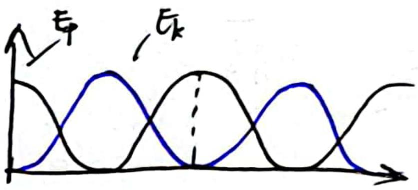
故 $E=E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2$. $(E\propto A^2)$

注: ① E_k. E_p. E 的频率为振动频率的2倍.

② 平均值. $(\overline{E_k}=\overline{E_p})$

$\begin{cases} \overline{E_k}=\frac{1}{T}\int_0^T E_k\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)\,dt=\frac{1}{T}\times\frac{1}{2}kA^2\cdot\int_0^T\frac{1}{2}\left[1-\cos(2\omega t+2\varphi)\right]dt=\frac{1}{4}kA^2 \\ \overline{E_p}=\frac{1}{T}\int_0^T E_p\,dt=\frac{1}{4}kA^2 \end{cases}$

③ 能量时间曲线. 两者反相位!



第3节. 简谐运动的合成

一、同方向同频率振动的合成

$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ $x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

$x=x_1+x_2=A\cos(\omega t+\varphi)$

$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$ $\tan\varphi=\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$

若 $\varphi_2-\varphi_1=\pm2k\pi.(k=0,1,2\cdots)$ 同相. $A=A_1+A_2$ 最大

若 $\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi\ (k=0,1,2)$ 反相. $A=|A_1-A_2|$ 最小

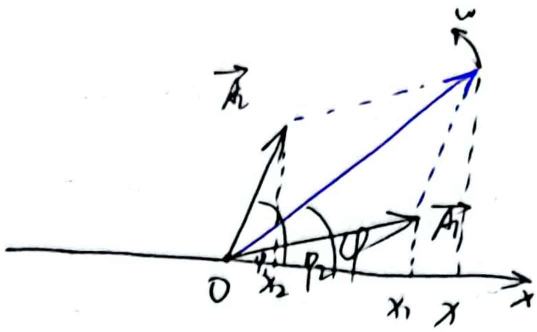
$\sin\varphi$	+	+	−	−
$\cos\varphi$	+	−	−	+

旋转矢量法（投影） $\vec{A}=\vec{A_1}+\vec{A_2}$

$x=x_1+x_2=A\cos(\omega t+\varphi)$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$



二、同方向不同频率简谐运动的合成

$x_1=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$ $x_2=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$

$\Delta\Phi=\Phi_2-\Phi_1=(\omega_2-\omega_1)t+\varphi_2-\varphi_1$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos[(\omega_2-\omega_1)t+(\varphi_2-\varphi_1)]}$$

合振动不是简谐振动.

A变化的周期. $\tau=\dfrac{2\pi}{|\omega_2-\omega_1|}$ ：拍的周期.

A变化的频率： $\nu=\dfrac{1}{\tau}=\dfrac{|\omega_2-\omega_1|}{2\pi}=|\nu_2-\nu_1|$ ∴称拍频.

A的变化表现为振动强弱的变化；这种现象称为"拍".

注：

李春艳老师：越美丽的东西越有趣.

① 令 $A_1=A_2$

$x=x_1+x_2=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_1\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$

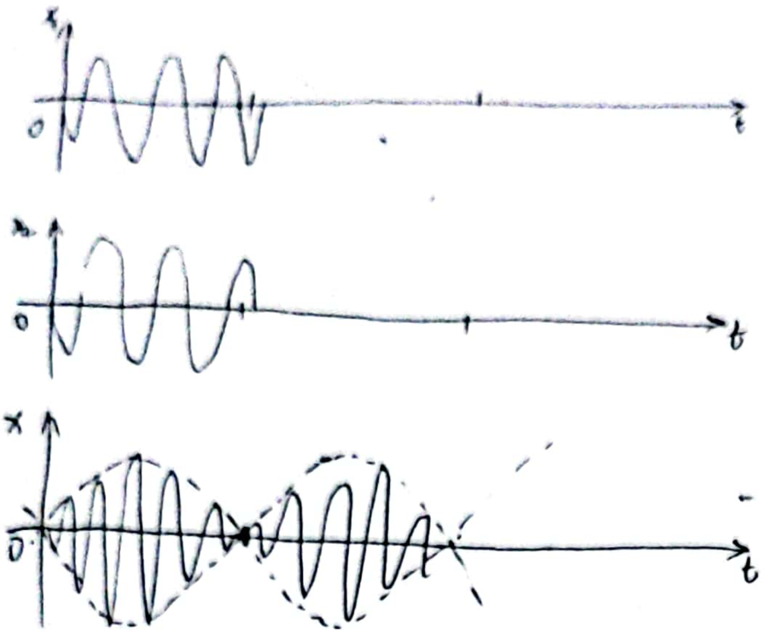
$=2A_1\cos\left(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t+\dfrac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\dfrac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right)$

$\dfrac{\omega_2+\omega_1}{2}>\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}$ → $A=\left|2A_1\cos\left(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t+\dfrac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\right|$?why.

拍周期 $\tau=\dfrac{\pi}{\left|\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right|}=\dfrac{2\pi}{|\omega_2-\omega_1|}$ 拍频. $\nu=\dfrac{1}{\tau}=\dfrac{|\omega_2-\omega_1|}{2\pi}=|\nu_2-\nu_1|$

② $|\nu_2-\nu_1|$ 较小时，"拍"现象才比较明显

③ 从 x-t 曲线上看"拍"现象.



三、相互垂直~~自~~简谐运动的合成.

1. 同频率:

$x=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$　　$y=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$.

位移: $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$

轨迹方程: $\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$ (椭圆方程)

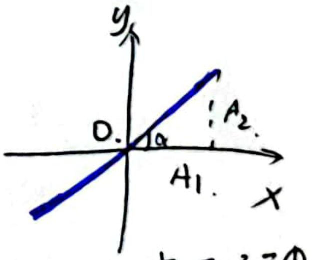
若

(1). $\varphi_2-\varphi_1=0$.　$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}=0$　$\boxed{\left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0}$.

$y=\frac{A_2}{A_1}x$.　$tg\alpha=\frac{A_2}{A_1}$.

$$\begin{cases} x=A_1\cos(\omega t+\varphi) \\ y=A_2\cos(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

$s=\pm\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cos(\omega t+\varphi)$



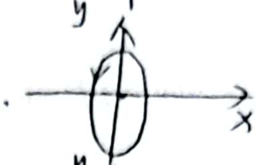
合振幅 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$

∴ 任意方向的一个简谐运动，某些椭圆运动和某些圆周运动可以分解为2个相互垂直同频率的简谐运动

(2) $\varphi_2-\varphi_1=\pi$ $y=\frac{A_2}{A_1}x$. $y=-\frac{A_2}{A_1}x$

(3) $\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ $\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$. $(A_2>A_1)$

(4) $\varphi_2-\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$. $\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$. $(A_2>A_1)$



(3)(4)若: $A_2=A_1$. $x^2+y^2=A^2$.

(5) $\varphi_2-\varphi_1=$其它值、斜椭圆

"任意一个简谐运动、某些椭圆运动和某些圆周运动 可以分解为2个相互垂直同频率的简谐振动"；

2. 不同频率

(1) 频率相差较小时，轨迹不稳定。

(2) 频率相差较大时，$\boxed{\text{如果 } \omega_2/\omega_1 \text{ 为整数比}}$，轨迹是稳定的闭合曲线：李萨如图形。
形状由 ω_2/ω_1 及 φ_1 φ_2 决定。

(3) $\boxed{\omega_2/\omega_1 \text{ 不是整数比}}$，轨迹永不闭合，合成运动是非周期运动

"任何复杂的振动都可以看作两个或多个简谐振动的合成"

第四节 阻尼振动 受迫振动 共振

一、阻尼振动。 二、受迫振动 三、共振。

例: 均质细杆. (l, m). 弹簧 k.

求振动周期.

解. 重力 mg 向下.

θ 较小时, ~~弹~~ $F = kl\sin\theta$ 向右. 取以逆时针为正.

分析力矩 $M = -mg\frac{l}{2}\sin\theta - kl\sin\theta \cdot l$.

$\because M = I\beta = \frac{1}{3}ml^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$

化简: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3mg+6kl}{2ml}\sin\theta = 0$.

θ 较小时. $\sin\theta \approx \theta$. 则 $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3mg+6kl}{2ml}\theta = 0$

$\omega = \sqrt{\frac{3mg+6kl}{2mL}}$ $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2mL}{3mg+6kl}}$

Scanned with CamScanner

机械波

第一节 机械波的产生和传播

振动的传播过程称为波动.

1. 机械波　2. 电磁波　3. 几率波（物质波）

电磁波和几率波的传播不需要媒质

波动的特征：

干涉、衍射、遵守相同的传播规律

用类似的微分方程描述

一、机械波的产生

(1) 波源　(2) 弹性媒质

注：(1) 媒质中质点不前进；

(2) 波动传播的是波源的振动状态，并伴随有能量的传播，振动状态的传播可以用位相的传播描述。

二、横波、纵波.

1. 振动方向 ⊥ 波传播方向

2. …… // …… eg. 声波

三. 波的几何描述.

1. 波(阵)面，波前

2. 波线：波的传播方向

四、简谐波。

e.g. 球面简谐波、平面简谐波

特点：各点作同频率的简谐运动，振动频率等于波源振动的频率

第二节 波速、波长、波的周期和频率

一、波速。

仅由媒质特性决定 弹性 / 惯性

⇒

1°. 液和气体（内部只能传播纵波）

纵波. $c=\sqrt{B/\rho}$

体变弹性模量 密度

2°. 固体

横波 $c=\sqrt{G/\rho}$

切变弹性模量

纵波 $c=\sqrt{Y/\rho}$

杨氏弹性模量

3°. 绳子或弦线

横波：$c=\sqrt{T/\mu}$

张力 质量线密度

二、波长、波的周期和频率

(基本). ※ $T_{波} = T_{振}$

三、C、λ、ν 关系: $\nu = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$

注: 1° 波速由媒质决定，ν由波源决定，λ由两者决定

2° 对于给定的弹性媒质，存在一个频率上限

第三节 波动方程 (波函数)

一、平面简谐波的振动方程

$y_0 = A\cos(\omega t+\varphi) \dashrightarrow y(x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{c})+\varphi]$ 时间差

$= A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$ 占比差 ※

$= A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ct-x)+\varphi]$ 位移差

二、波函数的物理意义 (略) easy

注:

① 正、反方向 ~~简单考虑这个~~ 能够分析出区别

② 会求质点的振动速度和加速度

$y(x,t) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{c})+\varphi]$

$V = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin[\omega(t-\frac{x}{c})+\varphi]$

$a = \frac{\partial V}{\partial t} = -\omega^2 A\cos[\omega(t-\frac{x}{c})+\varphi]$ 注意: V 与 c 的区别

③ 注: 对横波、纵波都适用.

横波 y、v、a ⊥ X轴. 纵波 y、v、a // X轴

④.波动微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi\right] = -\omega^2 y$$

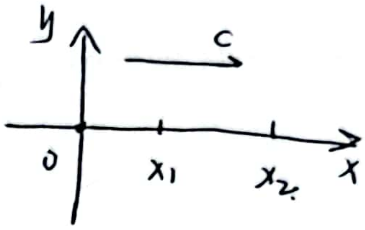
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\omega}{c} A\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi\right] \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi\right] = -\frac{\omega^2}{c^2} y$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$　一沿x轴传播的波动微分方程

$\Rightarrow$三维. $\xi(x,y,z,t)$　t时刻.(x,y,z)处质点的位移.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

⑤.同时刻波线上两点位相的比较



$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi\right]$$

t. x_1: $\varphi(x_1,t) = \omega\left(t-\frac{x_1}{c}\right)+\varphi$

x_2: $\varphi(x_2,t) = \omega\left(t-\frac{x_2}{c}\right)+\varphi$

波程差: $\Delta\varphi = \varphi(x_2,t) - \varphi(x_1,t) = -\frac{\omega}{c}(x_2-x_1) = -\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta x$

第4节 波的能量

一、波的能量密度

绳上横波

张力 T 质线密度 μ

线元：

$$E_k=\frac{1}{2}\Delta m v^2=\frac{1}{2}\Delta m\cdot\omega^2A^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi\right]$$

‖ 形变推导

$$E_p=\frac{1}{2}\Delta m\cdot\omega^2A^2\cdot\sin^2\cdot\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi\right]$$

均为周期函数，且 $E_k=E_p$

同相同步

$$E=E_k+E_p=\Delta m\,\omega^2A^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi\right]$$

注：

① 能量传播速度也为 c. [波速含义：振动状态传播的速度，位相传播速度，质元振动的速度，能量传播速度]

② 平衡位置 $\xrightarrow{E\downarrow}$ 最大位移；最大位移 $\xrightarrow{E\uparrow}$ 平衡位置

③ 无限大各向同性均匀介质也成立

设质体积元密度 $\Delta m=\rho\Delta V$

$$E=E_k+E_p=\boxed{\rho\cdot\Delta V}\boxed{\omega^2A^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi\right]}$$

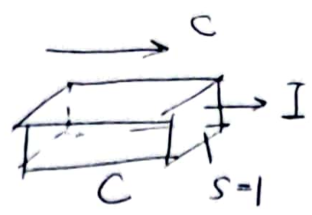
能量密度 $w=\frac{E}{\Delta V}=\boxed{\rho\,\omega^2A^2}\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi\right]$

平均能量密度 $\overline{w}=\frac{1}{T}\cdot\int_0^T w\,dt=\boxed{\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2}$ $\Rightarrow w_{max}=2\overline{w}$

$$I=\overline{w}\,c$$

二、能流密度（波的强度）

单位时间内通过与波的传播方向相垂直的单位面积的平均能量



基本 $I=\frac{P}{S}$

$I=\overline{W}c=\frac{1}{2}\cdot\rho\omega^2A^2c.$

矢量式 $\vec{I}=\overline{W}\vec{c}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\vec{c}.$ $I\propto A^2$

三、平面和球面谐波的振幅

1. 平面谐波，

$I_1S=I_2S$

通过的能量相同 $\left(\frac{1}{2}\cdot\rho\omega^2A_1^2c\right)S=\left(\frac{1}{2}\rho\omega^2A_2^2c\right)\cdot S$ $A_1=A_2$

$y(x,t)=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi\right]$

2. 球面谐波

$I_1S_1=I_2S_2$

$\frac{1}{2}\rho\omega^2A_1^2c\,4\pi r_1^2=\frac{1}{2}\rho\omega^2A_2^2c\cdot4\pi r_2^2\Rightarrow A_1r_1=A_2r_2$ $A\propto\frac{1}{r}$ $I\propto\frac{1}{r^2}$

$\xi(\vec{r},t)=A(r)\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+\varphi\right]$

设 A_0. $r_0=1$. 则 $A_0r_0=A(r)\cdot r$.

则 $\xi(\vec{r},t)=\frac{A_0}{r}\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)+\varphi\right]$

第5节 惠更斯原理

一、惠更斯原理（1690年）

子波

二、波的反射（衍射）

①波的传播方向的变化 —— 惠更斯可解析

②波的强度 （目前无法解释）

第6节 波的干涉

一、波的独立传播原理、和叠加原理

二、波的干涉

1. 现象

2. 相干条件

$\boxed{\text{同振向，同频率、位相差恒定}}$

3. 定量分析.

2振动. $\begin{cases} y_1 = A_1\cos\left[\omega\left(t-\frac{r_1}{c}\right)+\varphi_1\right] \\ y_2 = A_2\cos\left[\omega\left(t-\frac{r_2}{c}\right)+\varphi_2\right] \end{cases}$

$$y = y_1+y_2 = A_1\cos\left[\omega\left(t-\frac{r_1}{c}\right)+\varphi_1\right] + A_2\cos\left[\omega\left(t-\frac{r_2}{c}\right)+\varphi_2\right]$$

① $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$

② $I \propto A^2$. $I = I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi$

③ $\Delta\varphi = \left[\omega\left(t-\frac{r_2}{c}\right)+\varphi_2\right]-\left[\omega\left(t-\frac{r_1}{c}\right)+\varphi_1\right] = \varphi_2-\varphi_1-\frac{\omega}{c}(r_2-r_1)$

$= \varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$ 两列波在P点的位相差

④ 波程差. $\delta = r_2-r_1$

⑤ 干涉

加强 $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$. $k=0,1,2\cdots$

$A=A_1+A_2$. 最大. $I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}$ 干涉加强

相消 $\Delta\varphi=\pm(2k+1)\pi$. $k=0,1,2\cdots$

$A=|A_1-A_2|$ 最小. $I=I_1+I_2-2\sqrt{I_1I_2}$. 干涉相消

如果 $\varphi_1=\varphi_2$, $\Delta\varphi=-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$

特别地, $\varphi_1=\varphi_2$, 则 $\Delta\varphi=-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$. 相应条件要记住.

4. (1) 干涉是强度最大或最小, 而不是合位移最大或最小.

(2) 位相差恒定要求两波源在观察时间内持续~~振~~振动.

(3) $\Delta\varphi$由两部分组成

(4) 干涉后, 波的能量重新分布

第7节 驻波

一、驻波的产生及特点

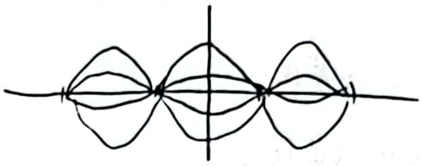
① 特点：(1) 波形定居.　　(2) 振幅为零 → 波节
振幅最大 → 波腹.

(3) 波形随时间周期性变化　　(4). 没有振动状态和能量的定向传播

② 产生驻波的条件：

等振幅、同振向，同频率、位相差恒定，沿相反方向传播.

二、驻波波函数.



假设.原点处初相为零.

$y_1 = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$.　　$y_2 = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$

$$y = y_1 + y_2 = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) + A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi t}{T}.}$$

以cos为标准形式方程　波长为了一半

① 物理意义：　x 给定，表示x处质点的合振动方程

t给定，给出x轴上各点在t时合振动波形曲线方程

② $A' = \left|2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|$.　　当 $\frac{2\pi x}{\lambda} = k\pi$.. $x = k\frac{\lambda}{2}$. $k=0,\pm1,\pm2$. 此时 $A' = 2A$ 为

③ 相邻两波腹距离 $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$

• 波腹. $x = \frac{k}{2}\lambda$. $k=0,\pm1,\pm2$.

④ 相邻两波节. $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$

波节　$x = \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$. $k=0,\pm1,\pm2$

Scanned with CamScanner

③ 驻波没有能量的定向传播。

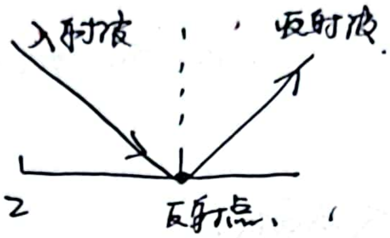
④ 运动特点：

驻波是分段振动，两波节之间的部分可称为一段。

同一段上各点振动同相，相邻两段振动反相。

附：$v=\frac{\partial y}{\partial t}$ $a=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

三、半波损失及反射波相位



概念 ① 反射点既参与入射波的振动，

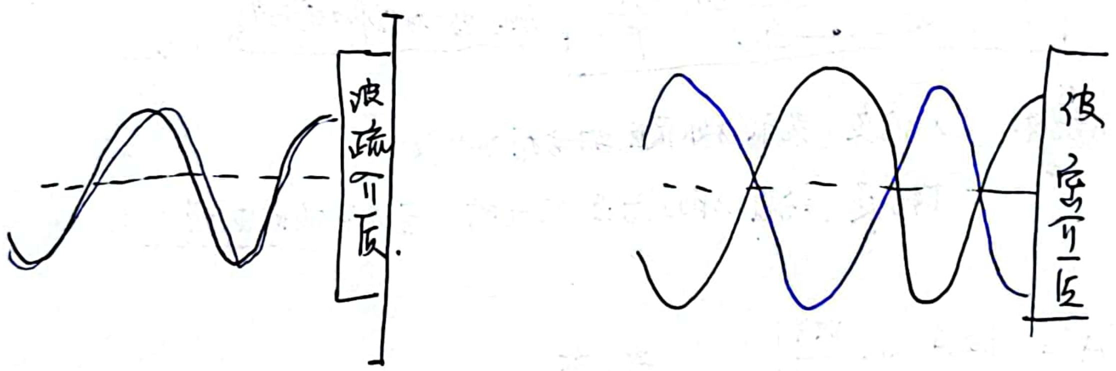
也参加反射波的振动。

② { 波密媒质
  { 波疏媒质

波密媒质 → 波疏媒质时，反射波与入射波在反射点的振动同相

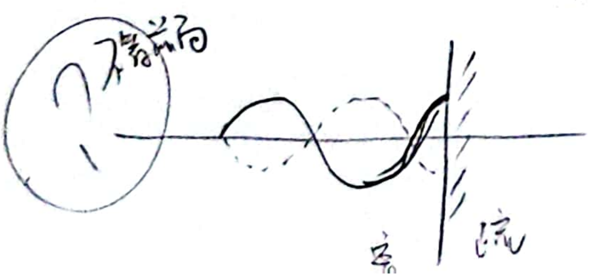
疏 → 密 时， 反相

$n_1>n_2$. 无半波损失（波腹） $n_1<n_2$ 有半波损失（波节）

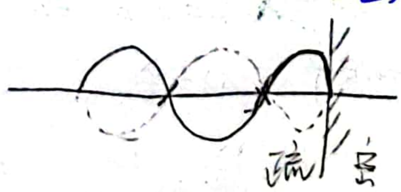


无半波损失，波腹，自由端 有半波损失，波节，固定端

固有认为



即相差为π，（波程差为$\frac{\lambda}{2}$），半波损失



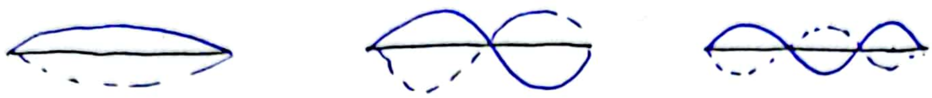
四、波源物体上驻波及其不连续频谱

波源物体的振动要达到稳定状态、

必须在自身上形成驻波式的振动.（分段振动）

驻波条件：$L = n\cdot\frac{\lambda}{2}$ $\quad n=1,2,3\cdots$

即



又有 $c=\sqrt{T/\mu}$.

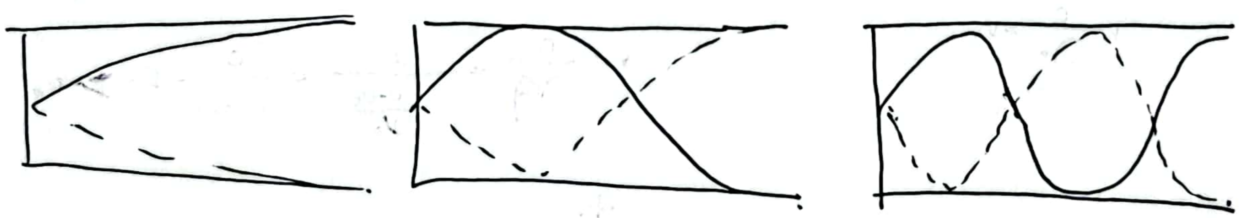
则 $\nu_n=\frac{c}{\lambda_n}=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$, $n=1,2,3\cdots$

$n=1$时，ν_1称为基频；另外、倍频、二次谐频、三次谐频等.

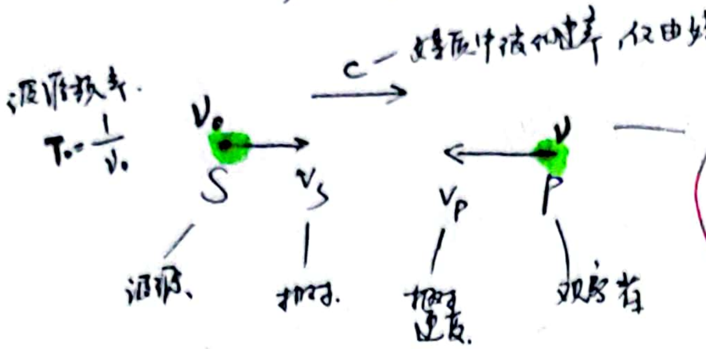
☑. 改变基频的方法.

(1)改变L； (2)改变T.

☑. 另外、$L=(2n-1)\frac{\lambda}{4}$. $n=1,2,3\cdots$ 也是驻波条件



第8节 多普勒效应



观察者接收到波的频率 $= \dfrac{\text{波通过观察者的速率}}{\text{观察者处的波长}}$

一、静止波源发出的波长.

前

相对媒质运动的波源发射的波长

1. 运动波源前方的波长 　靠近

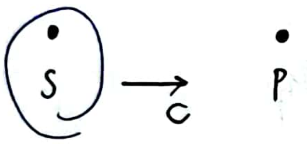
$$\lambda_{前} = \lambda_0 - v_s T_0 = \frac{c}{\nu_0} - \frac{v_s}{\nu_0} = \frac{c - v_s}{\nu_0}$$

2. 运动波源后方的波长 　远离

$$\lambda_{后} = \lambda_0 + v_s T_0 = \frac{c}{\nu_0} + \frac{v_s}{\nu_0} = \frac{c + v_s}{\nu_0}$$

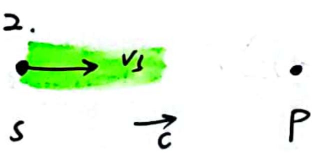
二、各种情况的接收频率.

1.



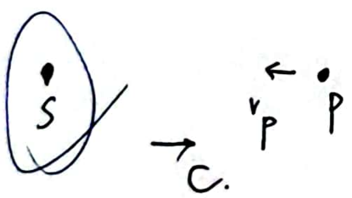
$$\nu = \frac{c}{\lambda_0} = \nu_0$$

2.



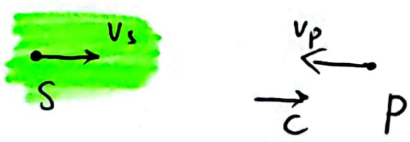
$$\nu = \frac{c}{\lambda_{前}} = \frac{c}{\frac{c - v_s}{\nu_0}} = \frac{c}{c - v_s}\,\nu_0 > \nu_0$$

3.



$$\nu = \frac{c + v_p}{c}\,\nu_0 \quad > \nu_0$$

4.



$$\nu = \frac{c + v_p}{\frac{c - v_s}{\nu_0}} = \frac{c + v_p}{c - v_s} \cdot \nu_0$$

5.

$$V = \frac{c}{c + V_s} V_0 < V_0$$

6

$$V = \frac{c - V_p}{V + V_s} V_0$$

7.

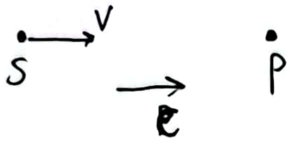
$$V = \frac{c - V_p}{c - V_s} \cdot V_0$$

8.

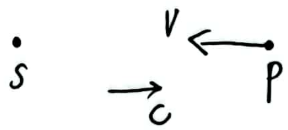
$$V = \frac{c + V_p}{c + V_s} \cdot V_0$$

注：

(1) 波源运动与观察者不等价.



$$V = \frac{c}{c - V} \cdot V_0.$$



$$V = \frac{c + V}{c} \cdot V_0$$

(2) V_s、V_p、c，都是对地量.

光 学

光学的发展

宏观来看

光学
- 几何光学
- 物理光学
  - 波动光学
  - 量子光学

现代光学：非线性光学、傅里叶光学

前沿课题：激光...

⇒ 波动光学基础

第1节 光源、光的单色性和相干性

一、光是电磁波.

光场 电场

变化电磁场的传播. 可用 $\vec{E}$, $\vec{H}$ 描述, $\boxed{\vec{E}:\text{光矢量}}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right].$$

其中 $\boxed{\omega = 2\pi\nu}$ 圆频率（ν 频率）. $\boxed{c = \lambda\nu}$ 光速.

⇒ $\vec{E}$ 的作用方向 $\perp \vec{c}$，横波. 光强（或光的能流密度）$\boxed{I \propto E_0^2}$

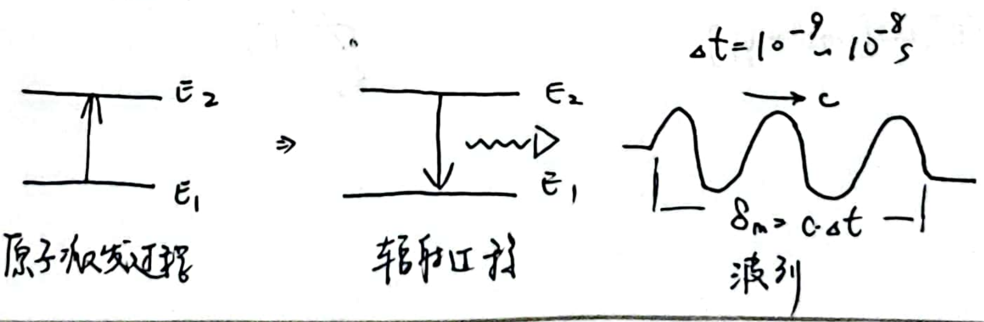
⇒ 可见光波长. 4000~7600. Å $\boxed{400\sim760\text{nm}}$

二、光源.

① 定义：发光的物体称为光源

② 发光机理：

now



分类：以激发方式：

热光源：利用热能激发的光源，白炽灯

冷光源：电致发光、光致发光和化学发光

以辐射方式

普通光源：以自发辐射为主 ⟶ 发光特性：(1)间歇性；(2)独立性.

激光光源：以受激辐射为主

普通光源的发光特性：(1)间歇性；(2)独立性

三、光的单色性.

包含多种频率的光：$\boxed{复色光}$

具有单一频率的光：单色光、准单色光. $\Delta\nu$ 或 $\Delta\lambda$：谱线宽度.

$\delta_m = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ (相干长度). $\Delta\lambda\downarrow . \delta_m\uparrow$. 严格的单色光. $\Delta\lambda\to 0.\ \delta_m\to\infty$

获得单色光的方法：

(1)棱镜色散 (2)滤光片 (3).单色光源. (4)激光

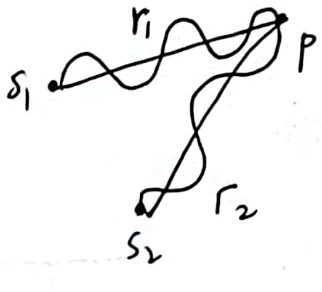
四、光的相干条件（和机械波是一样的）

两列电磁波或光波在空间相遇. 合场强 $\vec{E}=\vec{E_1}+\vec{E_2}$. $E^2=E_1^2+E_2^2+2\vec{E_1}\cdot\vec{E_2}$

$I=I_1+I_2+2\vec{E_1}\cdot\vec{E_2}$ 干涉项.

$\vec{E_{S_1}}=\vec{E_{10}}\cos[\omega_1 t+\varphi_1]$

$\vec{E_{S_2}}=\vec{E_{20}}\cos[\omega_2 t+\varphi_2]$



● 下列三个条件的任何一个出现时，干涉项 $\boxed{2\vec{E_1}\cdot\vec{E_2}=0}$

(1) $\vec{E_1}\perp\vec{E_2}$.

(2) $\omega_1\neq\omega_2$.

(3). $\omega_1=\omega_2$. $\varphi_2-\varphi_1=f(t)$. 时间内随机变化. → 没有择!

此时，合光强 $I=I_1+I_2$ —— 非相干迭加

o. 同振动，同频率、位相差恒定的两列光波的迭加:

合光强: $\boxed{I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi}$ → why?

$\boxed{\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)}$ 两列光波在P点的位相差. $\boxed{\delta=r_2-r_1 \text{ 光程差}}$

进一步讨论:

$\Delta\varphi=\pm2k\pi$. $(k=0,1,2,\cdots)$. $I=I_1+I_2+2I_1I_2$. 干涉加强.

$\Delta\varphi=\pm(2k+1)\pi$. $(k=0,1,2\cdots)$ $I=I_1+I_2-2I_1I_2$. 干涉相消.

⇒ 特别地. $\boxed{\varphi_1=\varphi_2}$ $\boxed{\Delta\varphi=-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)}$

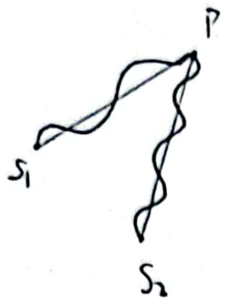
干涉加强 $\delta=r_2-r_1=\pm k\lambda$. $(k=0,1,2\cdots)$

干涉相消 $\delta=r_2-r_1=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$. $(k=0,1,2\cdots)$

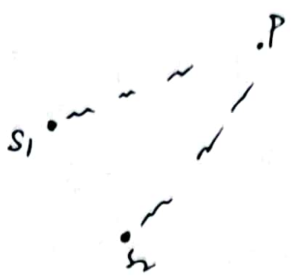
注: 不管是相干迭加, 还是非相干迭加, 都满足场强迭加原理

第2节. 杨氏双缝干涉

一、普通光源与机械光源的区别



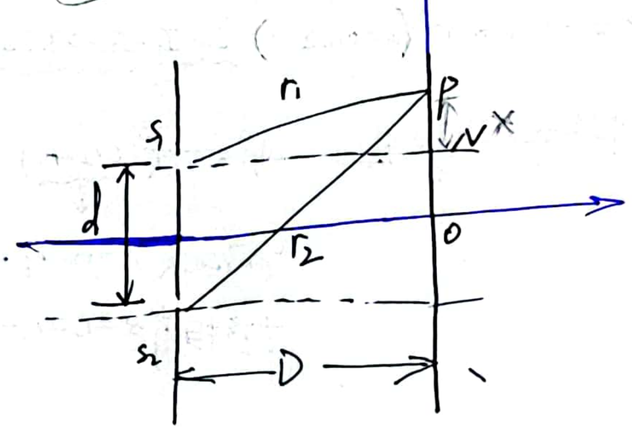
两个同振向同频率持续振动的两个机械源的初相 φ_1, φ_2. 初相差 $\varphi_2-\varphi_1$, 及相位差~~是恒定的~~.
$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$ 是恒定的。



两列光波: (1) 振向可能不同, (2) 频率可能不同.
(3) 初相~~可能不同~~ φ_1, φ_2, 初相差 $\varphi_2-\varphi_1$ 及相位差
$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$. 不是恒定的. 不满足相干条件

故只有同一个波分列成2个波才能得到相干光
常用方法有: $\boxed{(1)分波面法}$ $\boxed{(2)分振幅法}$.

二、杨氏双缝干涉



波长为λ的单色光, 小孔S,
单色球面波, 小孔 S_1, S_2.
$\varphi_1=\varphi_2$. 相干光, 相干光源
屏上将形成明暗相间的条纹.

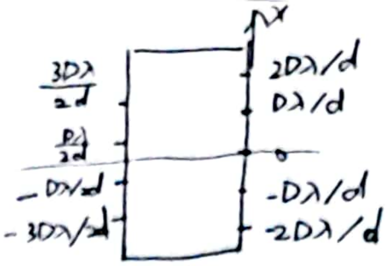
解: ① $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=-\frac{2\pi}{\lambda}\delta=\pm 2k\pi$ $(\delta=r_2-r_1=k\lambda)$ $\boxed{明纹}$.

$\Delta\varphi=-\frac{2\pi}{\lambda}\delta=\pm(2k+1)\pi$ $(\delta=r_2-r_1=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2})$ 暗纹

② $\delta=r_2-r_1=\frac{d}{D}x$. (推导过程略)

$\Rightarrow \delta=r_2-r_1=\frac{d}{D}\cdot x=\pm 2k\frac{\lambda}{2}$. 明纹中心坐标 $x=\pm k\frac{D}{d}\lambda$. $k=0,1,2\ldots$

$\Rightarrow \delta=r_2-r_1=\frac{d}{D}x=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$. 暗纹中心坐标, $x=\pm\frac{(2k+1)}{2}\cdot\frac{D}{d}$ $k=0,1,2\ldots$



① k：干涉级：

明暗条纹在屏上的分布：第0级明纹：中央明纹

讨论：

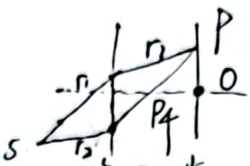
① 相邻明/暗条纹中心间距 $\Delta x = D\lambda/d$

若增加间距：D↑ d↓ λ↑

② 小孔在垂直板面方向上移(2个小孔) 位置（左右）

光路差不变 不移动

向下移动，条纹如何变化



③ λ不同，条纹间距不同，用白光做双缝干涉，屏上呈彩色干涉条纹，中央仍是白色。

红 紫 白 紫 红

n ——→ 多

n↑ f↑ λ↓

特别注意：最先发生重叠的是某一级的红色条纹和高一级的紫色条纹

$x_{红} = k\frac{D}{d}\lambda_{红} = x_{紫} = (k+1)\frac{D}{d}\lambda_{紫}$ 即：$k\lambda_{红} = (k+1)\lambda_{紫}$

7600 4000

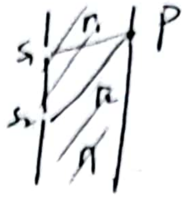
比如：k=1 红 k=2 紫

第3节 光程和光程差.

双缝干涉

① n相同情况:

$\varphi_1=\varphi_2$, 则 $\Delta\varphi=-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)$



$\boxed{\lambda=\frac{c}{\nu}}$ 光在真空中的波长

r_1 r_2 几何路程

透明介质 折射率 $n=\frac{c}{v}$

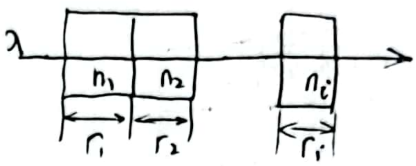
介质中光波长: $\lambda'=\frac{v}{\nu}=\frac{c}{n\nu}=\frac{\lambda}{n}$

$$\boxed{\Delta\varphi=-\frac{2\pi}{\lambda'}(r_2-r_1)=-\frac{2\pi n}{n\lambda'}(r_2-r_1)=-\frac{2\pi}{\lambda}(nr_2-nr_1)}$$

② 引入光程:

光程 $\Delta=nr$.

多介质: 光程 $=\sum_i n_i r_i$



讨论.

① 真空 $\Delta=r$

② 光程差 $\delta=\Delta_2-\Delta_1$. 位相差 $\Delta\varphi=-\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\delta$.

③ 在相同时间内,若光在介质中走过的几何路程为r,

则光在真空中走过的几何路程为nr.

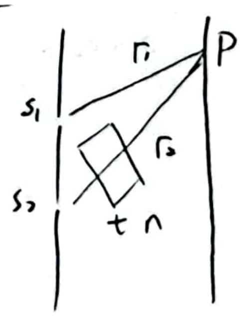
⇒ 光在介质中走过的r的路程产生的位相变化

= 光在真空中走过nr的路程产生的位相变化.

④ 光程: 光在介质中走过的路程折合成光在真空中走过的路程.

采用光程的概念后,光的波长必须采用光在真空中的波长.

例: 双缝干涉,在光路2上放一个厚度为t,折射率为n的玻璃片



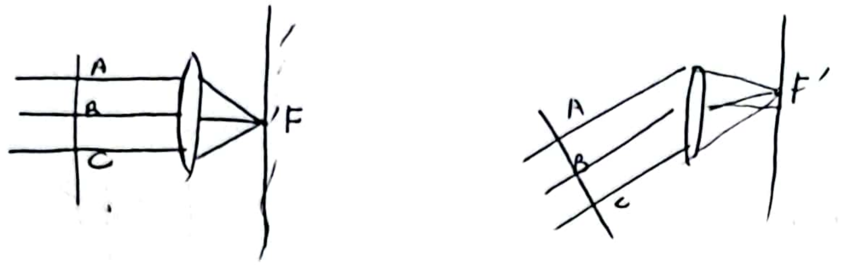
$$\delta=[(r_2-t)+\overset{\text{光程}}{nt}]-\overset{\text{真空光程}}{r_1}=r_2-r_1+(n-1)t$$

$$\Delta\varphi=-\frac{2\pi}{\lambda}\delta=-\frac{2\pi}{\lambda}\boxed{r_2-r_1+(n-1)t}$$

λ: 真空中波长

⑤ 不同光线通过透镜要改变传播方向，会不会引起附加光程差？不会！

入
平行光

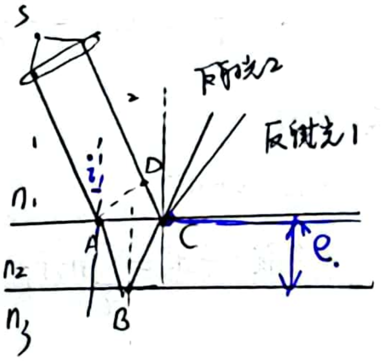


从平行光的同相面算起，到会聚点之间，所有的光线等光程，透镜只改变光的传播方向，而不引起附加光程差。

第4节 薄膜干涉

等厚干涉 重点

等倾干涉 不怎么讲了



一、等厚干涉的一般理论

1.光路图

$\boxed{\text{厚度不均匀薄膜 } n_2}$

薄膜上下表面产生的2束反射光，在薄膜上表面相遇相干叠加

2.光程差：

$$\delta = n_2(\overline{AB}+\overline{BC}) - n_1\overline{DC} + \langle\frac{\lambda}{2}\rangle$$ 要分析情况来加半波损失.

$$\Rightarrow \delta = 2e\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i}$$ i:入射角

∵反射. ∴考虑半波损失的情况（反射光）

$n_2>n_1,n_3$. 光线2有半波损失 光线1有 → 只加$\frac{\lambda}{2}$

$n_2<n_1,n_3$. ∵2无...... 光线1无 → 只加$\frac{\lambda}{2}$.

$n_1<n_2<n_3$

$n_1>n_2>n_3$

→ 故不加$\frac{\lambda}{2}$

顺序不加半波长

3.等厚干涉条纹　　i一定，$\delta=\delta(e)$

$$\delta = 2e\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i} + \langle\frac{\lambda}{2}\rangle = \begin{cases} k\lambda, & k\in N \quad 加强干涉 \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2}, & k\in N \quad 相减干涉 \end{cases}$$

注:

① k：干涉级，k的取值应保证$e\geq 0$

② 干涉条纹形状与薄膜等厚线形状相同.

③ 用日光照射薄膜，呈现彩色条纹.

④ 从薄膜上方看到的是反射光的干涉

⇒ 透射光光程差：$\delta' = 2e\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i} + \underline{\langle\langle\frac{\lambda}{2}\rangle\rangle}$

表示情况与反射光情况相反.

例: 用日光垂直照射空气中$e=0.40\ \mu m$，折射率为1.50的玻璃片. 求可见光范围，哪些波长的光反射加强，哪些波长的光透射加强

解:

① 反射加强条件：$\delta = 2e\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i}+\frac{\lambda}{2} = 2n_2e+\frac{\lambda}{2} = k\lambda$.

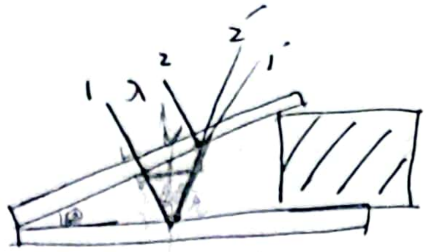
即 $\lambda=\frac{4n_2e}{2k-1}$　$k=3$.　$\lambda=0.48\ \mu m$

② 透射加强条件. $\delta=2e\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i}=2n_2e=k\lambda$　$\lambda=\frac{2n_2e}{k}$.

$k=2$. $\lambda=0.60\ \mu m$; $k=3$, $\lambda=0.40\ \mu m$　//可能不只一种情况

二. 几种重要的薄膜干涉

1. 劈尖干涉



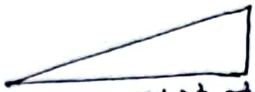
空气劈尖

用波长λ的单色光垂直照射劈尖

$\delta = 2e\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2 i} + \langle \frac{\lambda}{2} \rangle$.

其中空气劈尖. $i=0$, $n_2=1$. $\therefore \delta = 2e + \frac{\lambda}{2}$

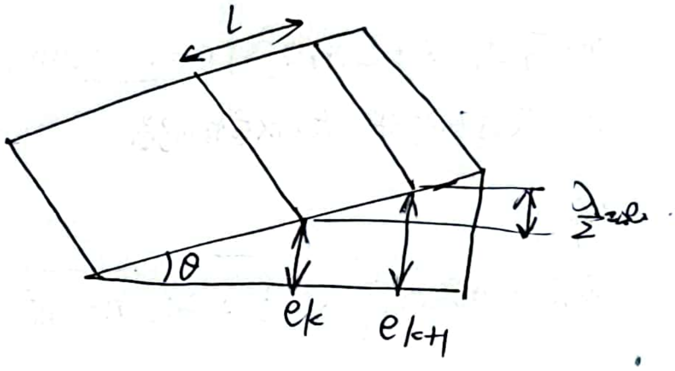
玻璃劈尖. $\delta = 2e \cdot n + \frac{\lambda}{2}$


玻璃劈尖

①
对空气劈尖:

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = \begin{cases} k\lambda & k=1,2,3\cdots \quad \text{明纹} \rightarrow e = \frac{2k-1}{4}\lambda \quad \frac{1}{4}\lambda \quad \frac{3}{4}\lambda \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & k=0,1,2\cdots \quad \text{暗纹} \rightarrow e = \frac{1}{2}k\lambda. \quad 0 \quad \frac{1}{2}\lambda. \end{cases}$$

② 明暗纹是平行棱边的直线.



$\Delta e = \lambda/2$

$l = \Delta e/\sin\theta = \frac{\lambda}{2\sin\theta}$

$\theta\downarrow$, $l\uparrow$, 条纹易分辨; $\theta\uparrow$ $l\downarrow$.

③ 用途: 已知λ, 测 l, 求θ;

已知θ, 测 l, 求λ;

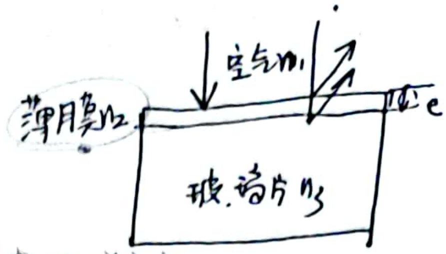
检测玻璃表面是否平整 。 —— 弯向右 ~~左凸右凹; 凹下凸向右~~ 左凹右凸 → 看所弯纹的位置

棱边处是一暗纹, 是半波损失的有力证据

④ 若比较: 空气中玻璃劈尖 $\boxed{\Delta e = \frac{\lambda}{2n} \quad l = \frac{\lambda}{2n\sin\theta}}$

其他介质细节
也会考

2. 增透膜与增反膜



反射光的光程差：$\delta=2n_2e+<\frac{\lambda}{2}>$

分析：
$$\begin{cases}\delta=(2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{(增透)}\\ \delta=2k\cdot\frac{\lambda}{2} & \text{(增反)}\end{cases}$$

(增透)——反射的光最少，即增透膜

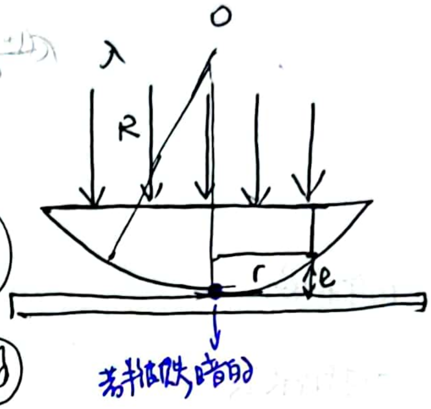
(增反)——反射的光最多

$(2k+1)\frac{\lambda}{2}=2ne+\frac{\lambda}{2}$　　$e=\frac{k\lambda}{2n}$

$(2k+1)\frac{\lambda}{2}=2ne$　　$e=\frac{(2k+1)\lambda}{4n}$

3. 牛顿环

属于等厚干涉



$$\delta=2e+\frac{\lambda}{2}=\begin{cases}k\lambda & k=1,2,3\cdots & \text{明纹(加强)}\\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & k=0,1,2,3\cdots & \text{暗纹(减弱)}\end{cases}$$

一般都是加$\frac{\lambda}{2}$的

注①k是干涉级.

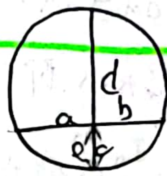
②空气薄膜的等厚线是圆环，条纹是圆环.

明纹下空气薄膜厚度差：$e=\frac{2k-1}{4}\lambda$

暗…………$e=\frac{1}{2}k\lambda$

上面推导下来的

③ $r^2=e\cdot(2R-e)\approx 2eR$　(注:可直接推出 也用相交弦定理



ab=cd)

加上几何关系

$\Rightarrow e=\frac{r^2}{2R}$

$\Rightarrow \delta=2e+\frac{\lambda}{2}=\frac{2r^2}{2R}+\frac{\lambda}{2}=\boxed{\frac{r^2}{R}+\frac{\lambda}{2}}$

明环半径：$r=\sqrt{(k-\frac{1}{2})\lambda R}$　　$k=1,2,3\cdots$

暗环半径：$r=\sqrt{k\lambda R}$　　$k=0,1,2$

中心为暗条纹、内疏外密. $k\uparrow$ $r\uparrow$.

条纹分布不均匀，向外越来越密

④ 在水中. $\delta=2n_水e+\frac{\lambda}{2}$　$\Rightarrow r_明=\sqrt{(k-\frac{1}{2})\lambda R/n_水}$　　$r_暗=\sqrt{k\lambda R/n_水}$

⑤ 

条纹向中心收缩

第5节 麦克尔逊干涉仪

几个概念：

一、相干长度

① 只有当光程差 $\delta < \delta_m$ 时，才能产生干涉现象。

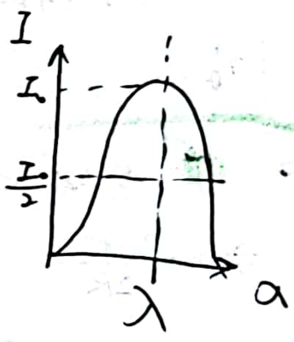
② 波列长度 δ_m = 相干长度。

③ $\frac{\delta_m}{c} = \Delta t$ 相干时间

④ δ_m 与 $\Delta\lambda$ 的关系

I 最大处，即 $I = I_0$ 处对应的波长 λ 为中心波长，中心波长

$I = \frac{I_0}{2}$ 处波长范围。



$\Delta\lambda$：谱线宽度

频率宽度 $\Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda$．（$\nu = \frac{c}{\lambda}$，$\Delta\nu \neq \frac{c}{\Delta\lambda}$）

当 $\Delta\nu$ or $\Delta\lambda$ 越小，光的单色性越好。

$\Delta\nu = \frac{1}{\Delta t}$ $\delta_m = c\Delta t = \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{c}{c\cdot\Delta\lambda}\lambda^2 = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ $\Delta\lambda\downarrow$ $\delta_m\uparrow$

$\Delta\lambda \to 0$．$\delta_m \to \infty$

二、分波面法和分振幅法

杨氏　　　　薄膜干涉

洛埃　　　　迈克尔逊干涉仪

不形成条纹　　形成条纹

第6节、光的衍射 惠更斯-菲涅耳原理

一、光的衍射分类.

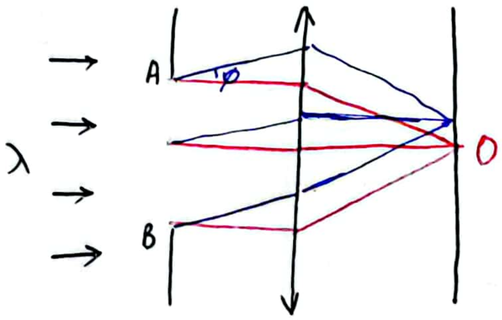
1. 菲涅耳衍射
2. 夫琅和费衍射

二、惠更斯-菲涅耳原理.

第7节. 单缝夫琅和费衍射.

一、光路图

φ 衍射角



所有光的光程差为0.

二、衍射花样.

衍射…

干涉…

三、菲涅尔半波带法.

光程差：$\delta = \overline{BC} = a\sin\varphi$

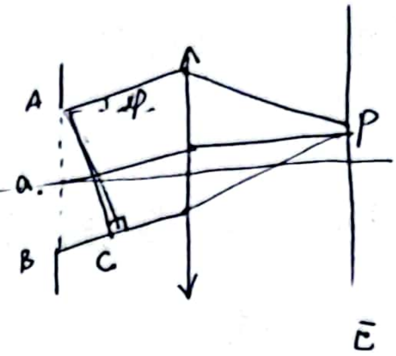
波带宽度 $\Delta S = \dfrac{\lambda/2}{\sin\varphi} = \dfrac{\lambda}{2\sin\varphi}$

狭缝被分割为波带的数目：$N = \dfrac{a}{\Delta S} = \dfrac{2a\sin\varphi}{\lambda}$

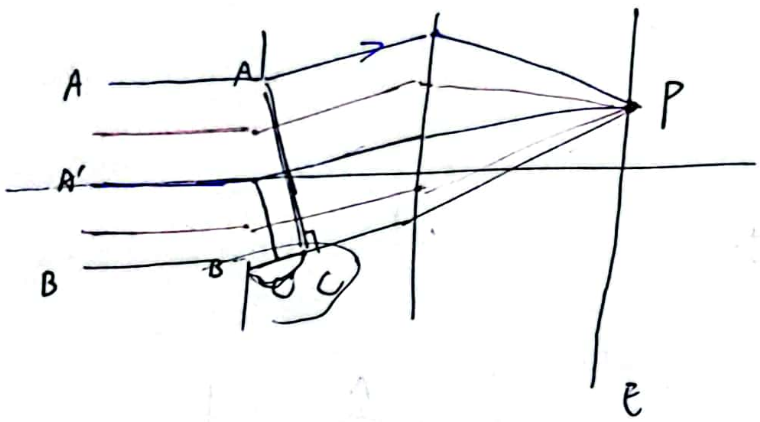
1°. 设φ满足条件

$\delta = \overline{BC} = a\sin\varphi = \dfrac{\lambda}{2}$.

⇒ P仍有亮度.



2°. 设φ.满足 · $\delta = \overline{BC} = a\sin\varphi = \lambda$. ⇒ 永远是暗点

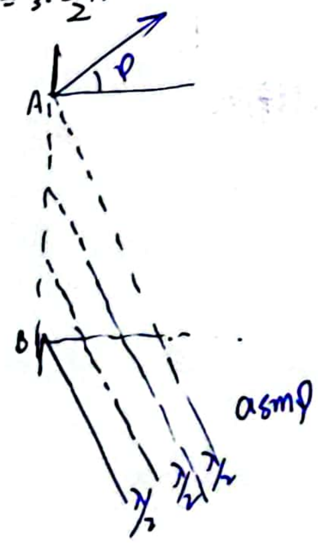


A点、和A'点到P点 $\delta = \dfrac{\lambda}{2}$

⇒任取=相邻点到P: $\delta = \dfrac{\lambda}{2}$

⇒ P永为相消点、

3° $a\sin\varphi = 3\cdot\dfrac{\lambda}{2}$.



总结 ·

衍射图样

小结 狭缝被分割为波带的数目

$N = \dfrac{a}{\Delta S} = \dfrac{2a\sin\varphi}{\lambda} = \pm 2k$. $k=1,2,3\cdots$ 暗纹.

$\Rightarrow \boxed{\delta = a\sin\varphi = \pm k\lambda}$ 暗纹中心

$N = \dfrac{2a\sin\varphi}{\lambda} = \pm(2k+1)$ $k=1,2,3\cdots$ 明纹

$\Rightarrow \boxed{\delta = a\sin\varphi = \pm\dfrac{(2k+1)}{2}\lambda}$ 明纹中心

$\boxed{k = 衍射级}$

$\boxed{明纹强度来自一个半波带的贡献}$

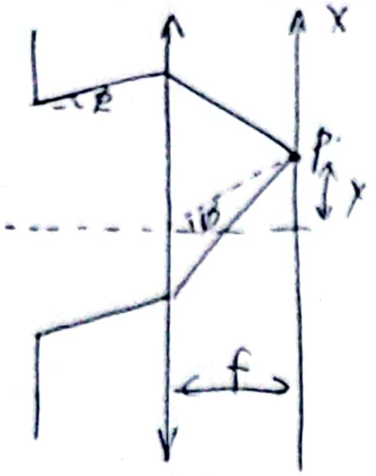
宽度：$N = \dfrac{BC}{\lambda/2} = \dfrac{a\sin\varphi}{\lambda/2}$ $\Delta S = \dfrac{\lambda}{2\sin\theta}$

$N\uparrow$ $\varphi\uparrow$ $k\uparrow$ $\Delta S\downarrow$

半波带面积$\downarrow$. 明纹强度$\downarrow$

特别地. $a\sin\varphi = 0$. 中央明纹. 故一般只能看到中央明纹及周围若干级明暗纹.

2.条纹在中心在屏上的$\boxed{位置}$与$\boxed{宽度}$



$$\boxed{x = f\tan\phi \approx f\cdot\sin\phi}$$

中心宽度. $f\frac{\lambda}{a}$

衍射角ϕ 不同状态(明、暗纹)所对应的大小.

暗纹: $x = f\cdot(\pm\frac{k\lambda}{a})$ $k=1,2,3\dots$

中心: $x=0$ → 宽度:两暗纹之差. $\Delta x_0 = 2\cdot\frac{f\lambda}{a} = \frac{2f\lambda}{a}$

明纹: $x = f\cdot(\pm(2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{a})$. $k=1,2,3\dots$

第k级明纹宽度: $\Delta x_k = (k+1)\frac{f\lambda}{a} - k\frac{f\lambda}{a} = \frac{f\lambda}{a}$ (相邻暗纹相差)

故 $\boxed{中央明纹} = 2\times\boxed{第k级明纹宽度}$

分析:

① λ一定: a↑, Δx↓. (~~a≫λ~~)

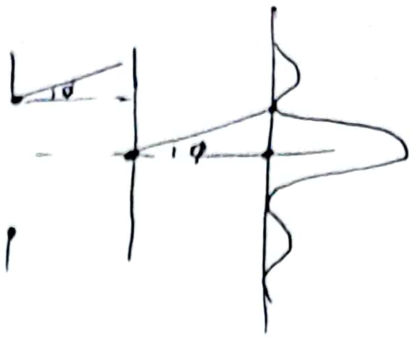
② a≫λ, 衍射效应不明显, a↓, 衍射效应越显著 (但a也不能过小)

③ 对比 a一定, λ不同, Δx也不同. eg. 白光现象: 中央白色, 两侧为彩色条纹

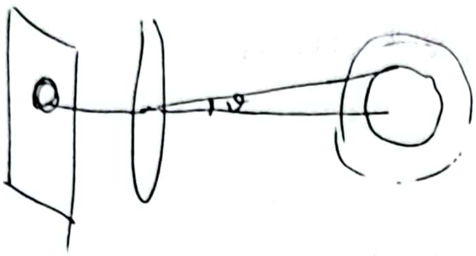
3. 半角宽：

中心到第一级暗纹

$\phi = \arcsin\frac{\lambda}{a} \approx \frac{\lambda}{a}$



4. 圆孔的夫琅禾费衍射



根据瑞利判据

爱里斑的半角宽：

$\theta = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D}$

注：① 狭缝上下移动，条纹位置不变

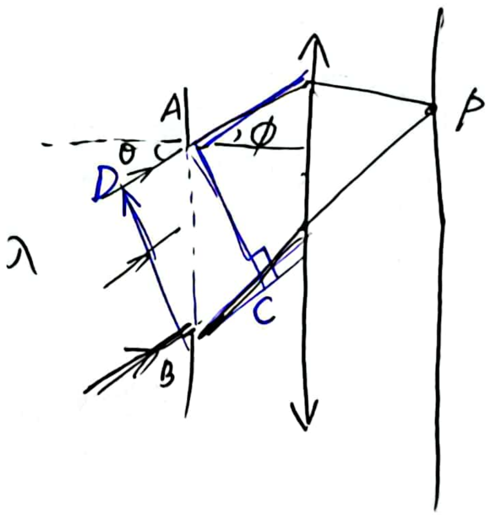
② 透镜上下移动，条纹跟着移动

例：斜入射的衍射方程。

$\delta = \overline{BC} - \overline{AD} = a\sin\phi - a\sin\theta$ 明一亮化

$\delta = \pm k\lambda \quad k=1,2,3\cdots$ 暗纹

$\delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad k=1,2,3\cdots$ 明纹



中央明纹：$a\sin\phi - a\sin\theta$，当$\phi=\theta$，位于透镜焦点上方

Scanned with CamScanner

第8节. 光学仪器的分辨率

两个光源对小孔的张角恰好等于一个艾里斑的半角宽.

$\boxed{\text{最小分辨角}}$ $\delta\varphi = 1.22\frac{\lambda}{D}$.

$\boxed{\text{光学仪器~~最主~~的分辨本领:}}$ $\boxed{R = \frac{1}{\delta\varphi}}$ D↑, λ↓ 时. 分辨率越高

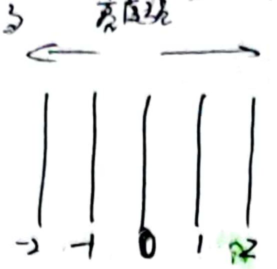
(分辨率)

$\Longrightarrow R = \frac{D}{1.22\lambda}$. $R \propto D$. $R \propto \frac{1}{\lambda}$

第9节. 光栅衍射 　光→多个狭缝　多缝干涉

前导

分类 { 透射光栅 ✓ / 反射光栅

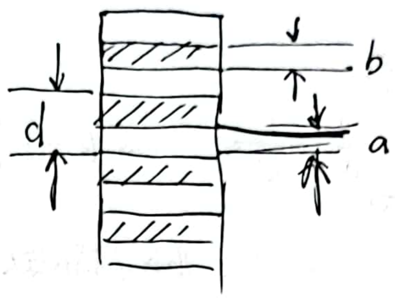


衍射条纹特点: 细而明亮

一、光栅常数.

刻痕宽度为b, 狭缝宽度为a

$d = a+b$. : 光栅常数 · $\boxed{(\text{Å}) \Rightarrow 10^{-10}m}$



eg. 在1cm长的玻璃片上刻一万条刻痕

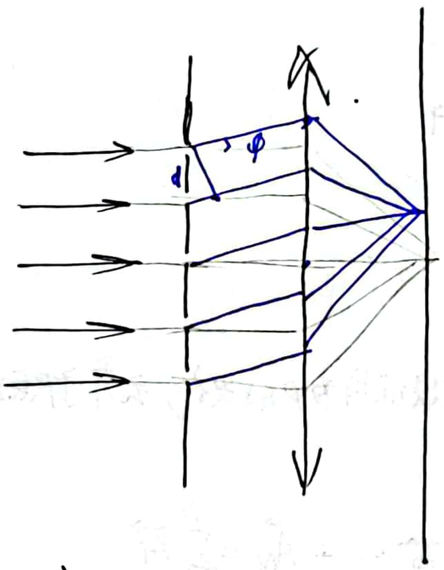
$d = 10^{-2} / 10^{4} = \boxed{10^{-6} m}$

单位长　~~光栅常数~~ 单位长的刻痕数目

二、光栅方程

干涉方面考虑

任一个: 相邻两狭缝发出的衍射角为φ的光线到达P的光程差.



光栅方程 $\delta = d\sin\varphi = \pm k\lambda \quad k=0,1,2..$

注: ① 此方程只记主极大条纹

② k: 主极大级次. k=0时, 0级主极大或中央明纹

③ $|\sin\varphi| \le 1 \Rightarrow k_{max} < \frac{d}{\lambda}$ (注: k只取整数部分)

三、缺级.

光栅衍射是单缝衍射和多缝干涉的综合效果.

⇒干涉：干涉 $d\sin\varphi=k\lambda$

⇒再考虑：单缝衍射暗纹条件. $a\sin\varphi=k'\lambda$ $k'=\pm1,\pm2,\pm3\cdots$

↳综合条：会有缺级现象：在光栅方程为主极大的地方实际上是暗纹的现象

e.g.具体计算.

相比 $\frac{d}{a}=\frac{k}{k'}$ ⇒ $k=\frac{d}{a}k'$. $(k'=\pm1,\pm2\cdots)$.

(同一角度对应光线)

①若 $\frac{d}{a}=3$. $k=3k'$. 由此可确定缺级位置.

②同样 由缺级位置也可确定 $\frac{d}{a}$.

下面为一个新对象讨论

四、暗纹条件 $\boxed{\text{光是矢量相加!!}}$

N缝.

每个狭缝发出倾角为φ的光线，会聚于P点进行相干迭加：

$$\vec{A}=\vec{A_1}+\vec{A_2}+\cdots+\vec{A_N}=\sum_{i=1}^{N}\vec{A_i}$$

注：①每个 A_i 大小同

②相邻 $\vec{A_i}$ 位相差 $\Delta\varphi$ 相同. ⇒ $\delta=d\sin\varphi$

$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\delta=\frac{2\pi d\sin\varphi}{\lambda}$

③此运算符合矢量运算. like:

若矢量多边形恰好形成一个或若干个闭合多边形，则：$\vec{A}=0$，P点为个暗纹.

⇒相当于：$N\Delta\varphi=\pm m2\pi$ ($m\in I$) $\boxed{m\neq kN}$ $k=0,1,2..$

综上得

$$\frac{N\cdot 2\pi}{\lambda}\cdot d\sin\varphi = \pm m\cdot 2\pi \quad 其中 m\neq kN$$

即 $$Nd\sin\varphi=\pm m\lambda \quad 其中 m\neq kN$$

讨论: 为什么 $m\neq kN$?

角度(1) $m=kN \Rightarrow Nd\sin\varphi=\pm kN\lambda \Rightarrow d\sin\varphi=\pm k\lambda$. 光栅方程.

角度(2) $m=kN \Rightarrow N\Delta\varphi=\pm kN\cdot 2\pi \Rightarrow \Delta\varphi=\pm k\cdot 2\pi$ 相位差为2π

角度(3) $m=kN \Rightarrow \Delta\varphi=\pm k\cdot 2\pi$ $\vec{A}$: $\vec{A_1}\ \vec{A_2} \rightarrow \cdots \vec{A_N}$ 矢量图示法

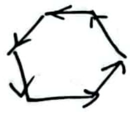
讨论: 具体m讨论.

m:	0	1	2 ...	N−1.	N.	N+1	2N−1.	2N	2N+1.
	X				X			X	
	k=0.				k=1.			k=2	
	0级主极大.				1级主极大			2级主极大.	

注: ① 两相邻主极大条纹之间有(N−1)个暗纹。在暗纹之间,有N−2个次极大.

② 例: N=6 的光栅. $N\Delta\varphi=\pm m\cdot 2\pi$ $m=1,2,\cdots,5$时矢量多边形闭合

展开看. $m=1.\ \Delta\varphi=\frac{\pi}{3}$

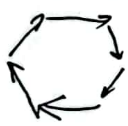


$m=2\ \Delta\varphi=\frac{2\pi}{3}$. 三角形

$m=3\ \Delta\varphi=\pi$

$m=4.\ \Delta\varphi=\frac{4\pi}{3}$ 三角形

$m=5\ \Delta\varphi=\frac{5\pi}{3}$



③ N=2时也成立. 且N↑, 主极大条纹越细越亮

五. 衍射光谱 具体的位置

$d\sin\varphi = \pm k\lambda$.

① 主极大条纹的坐标: $x = f\cdot\tan\varphi \approx f\sin\varphi = \pm k\frac{\lambda}{d}\cdot f$ $k=0.1.2\cdots$

② 相邻两个主极大条纹间距: $\Delta x = f\frac{\lambda}{d} \Rightarrow d$一定. $\lambda\uparrow. \Delta x\uparrow$

eg. 用白光做实验, 中央亮级为白色亮条纹, 两侧为彩色光谱

→ 干涉. 衍射区别.

① 干涉. 衍射 都是波的相干叠加

② 干涉: 一般是指两束或几束光的相干叠加 → 干涉用求和

衍射: 无穷多个子波的相干叠加. $\xrightarrow{计算方法}$ 衍射用积分. 新前端

第10节. X射线衍射 (了解)

0.1 Å ~ 100 Å

第11节. 自然光与偏振光

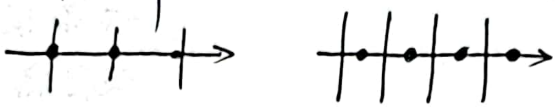
一、自然光

自然光在垂直传播方向的平面内:

①沿任何一个方向的光振动都不比其它方向占优势 ||均匀分布

②光的能量沿各个方向均匀分布

③自然光可以分解为2个相互垂直,彼此独立,振幅相同的振动

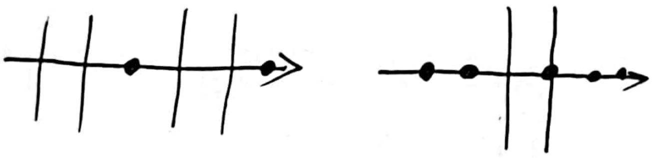


二、偏振光

1. 完全偏振光(线偏振光、平面偏振光)

⇒振动面:传播方向与振动方向决定的平面

2、部分偏振光

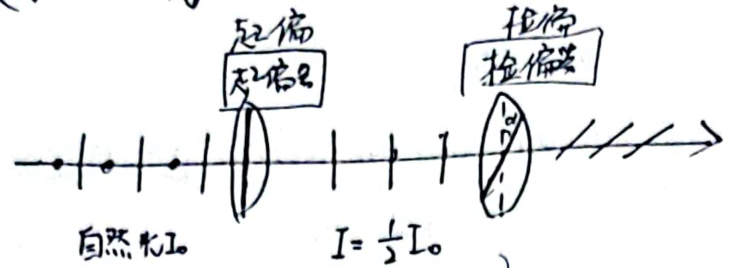


注:具有偏振现象是横波的特征,纵波没有偏振现象

第12节 偏振片、马吕斯定律

一、偏振片：只让某一方向的光振动通过

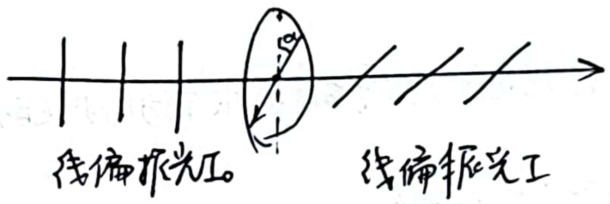
以入偏振化方向（起偏方向）↕.



线偏振光通过偏振片，
旋转偏振片，透射光强明暗交替变化

注：自然光通过偏振片变为线偏振光，旋转偏振片，透射光强不变

二、马吕斯定律



线偏振光通过一个偏振片后，
透射光强I与入射光强I_0，
之间满足 $\boxed{I=I_0\cos^2\alpha}$

注：若入射光是自然光 $I=\frac{1}{2}I_0$

注：

入射光 { 线偏振光 / 自然光 / 部分偏振光 } → 旋转偏振片，透射光 { 明暗交替变化 / 光强不变 / 强弱交替变化 }

注3：除了马吕斯定律外，有些偏振片本身也能吸收能量（这就看题中信息）

第13节 反射和折射光的偏振

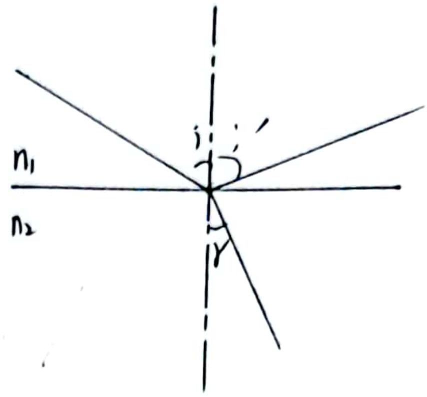
基础概念.

① 入射面: ∏ (入射线、法线)

② 反射定律: $i' = i$

③ 折射定律: $n_1 \sin i = n_2 \sin \gamma$

④ 反射光: ⊥振动多于∥振动 | 都是部分偏
折射光: ∥ · · · 多 · ⊥ · · ·



⑤. 当 $i = i_0 = \arctan\frac{n_2}{n_1}$ 时, 反射光为完全偏振光, $\boxed{\text{只含⊥振动}}$

布儒斯特角 (起偏角)

⟺. $\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1}$: 布儒斯特定律

注:

(1) $i = i_0$ 时 ① 反射光 只反射部分⊥振动, 不反射 ~~部分~~ ∥振动.

② 折射光 仍是部分偏振光

(2) $i = i_0$. $\boxed{\text{反射光线⊥折射光线}}$ why $\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin i_0}{\cos i_0}$

(3). 自然光以布儒斯特角照射玻璃片堆. 可使折射光为完全偏振光, 折然光中只剩下 ∥ 振动

波动习题课

	驻波	行波
波形	定居 随时间周期变化	以c前进 不随时间周期变化
运动 振幅	沿波线周期变化 有波腹、波节	沿波线不变 无波腹、波节
位相	同一段上各点同相 相邻两段反相	沿波线逐点落后
能量 能量	没有定向传播	能量以c传播 $I=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2c$

热学概述

1. 研究对象

由大量微观粒子组成的宏观体系

$N_A = 6.02 \times 10^{23}$

2. 研究内容

研究热现象、热运动的规律及其微观本质

3、研究方法

(1) 热力学方法：宏观理论，由实验现象

优点：普遍性和可靠性

缺点：无法阐明热运动的微观本质

(2) 统计物理方法：微观理论、微观结构、模型、统计原理

优点：能够阐明热运动的微观本质

缺点：近似性

4. 平衡态

在不受外界影响下，系统宏观性质不随时间变化的状态称为平衡态

⇒ 判断平衡态的2个条件：

(1) 系统宏观性质不随时间变化

(2) 系统不受外界影响，系统与外界没有物质与能量交换

注意：(1) 理想概念

(2) 宏观：宏观性质不随时间变化，没有宏观物理和化学过程，和外界没有物质和能量交换

微观：动态平衡

5. 宏观体系状态的描述方法

(1) 宏观描述：用宏观物理量对体系的状态加以描述。理想气体平衡态：P、V、T

$PV=\nu RT$ —理想气体方程

ν：摩尔数，SI：$R=8.31\,(J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1})$：普适气体恒量。

(2) 微观描述：

分子：速度 $\vec{v}$，动量 $\vec{p}=m\vec{v}$、平动动能 $E_k=\frac{1}{2}mv^2$

描述分子运动状态的物理量：微观量。

通过对每个分子运动状态的说明从而对整个体系状态加以描述的方法：微观描述。

体系的宏观量是由某些微观量的统计平均值决定

气体动理论 核心总结 $T=273.15+t$ $1atm=1.013\times10^5 Pa$

前提:

1. 理想气体物态方程.

$PV=\frac{M}{m}RT$ （M→总量，m→摩尔质量） $P=nkT$

（一般 $\nu=\frac{M}{m}=\frac{N}{N_A}$）   （$n=\frac{N}{V}$, $k=\frac{R}{N_A}$）

R一般为 8.31 J/(mol·K) $N_A=6.02\times10^{23}$ k一般为 1.38×10^{-23}

2. 理想气体的压强公式

$p=\frac{2}{3}n\bar{\varepsilon}$ $=\frac{1}{3}nmv^2$

（$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}mv^2$）

3. 理想气体分子的平均平动动能与温度关系.

$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{3}{2}kT$ （注: $E=N\times\bar{\varepsilon}$）单位体积中平动动能

4. 分子速率 三个统计值 必考

(1) 最概然速率(最可能速率): $v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$

(2) 平均速率: $\bar{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$

(3) 方均根速率: $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$

对单个分子来看   对一摩尔单位(N_A)分子来看的

$R=k\cdot N_A$

$\mu=m\cdot N_A$

m: 单个分子质量

许多公式 容易混淆 要熟记!! 最好推导过

(4) 平均速度: $\bar{\vec{v}}=0$

预习 5. 能量均分定理　理想气体的内能

① 如果气体分子有 i 个自由度，则分子的平均动能为：$\bar{\varepsilon}=\frac{i}{2}kT$

② 内能 $= \nu \cdot \frac{i}{2}RT$

$\nu = \frac{m}{M}$

6. 气体分子平均碰撞次数和平均自由程

平均碰撞频率：($\bar{z}$)　　$\bar{z}=\sqrt{2}\pi d^2\bar{v}n=\sqrt{2}\pi d^2\bar{v}\cdot\frac{p}{kT}$

平均自由程　($\bar{\lambda}$)　　$\bar{\lambda}=\frac{\bar{v}}{\bar{z}}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$

$p=n\cdot kT$　　$=\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$

气体分子运动论

第1节. 分子运动论的基本观点. （考判断）

一、宏观物体是由大量微观粒子（原子、分子）组成.

分子与分子之间有空隙.

二、物体的分子在永不停息地作无规则运动.

布朗运动：<u>分子无规则热运动的反映.</u>

① 只与温度有关

② 无规则并无规律.

三、分子之间有相互作用力.

分子之间有吸引力 ⎫
…… 排斥力 ⎭ ⇒ 分子力 ⎫
分子热运动 ⎭ 矛盾.

$\boxed{\text{物态由这一矛盾决定}}$

第2节 统计规律及其特征 （基本概念）

总体

在相同的实验条件下，总是得出相同的实验结果。

确定性现象，动力规律。

在相同的实验条件下，可以产生多种不同的实验结果，

每种实验结果以确定的概率出现，随机现象，统计规律。

规律特征

① 研究每一种实验结果出现的概率是多少

② 大量随机现象集体出来的规律

③ 存在起伏或涨落。

统计平均值

设X是某个物理量，N次观测，每次的观测值 $x_1, x_2 \cdots x_N$.

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N}=\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}x_i$$

第3节 理想气体的压强与温度

一、理想气体微观模型

1.单个分子可视为质点并遵守力学规律

2.分子与分子之间，分子与器壁之间的碰撞视为完全弹性的

3.除碰撞瞬间，分子作自由运动。（历史上，曾有人试图用经典力学研究热力学）.

二、统计假设（对大量分子无规则热运动的一般化）

→在没有外力场的条件下，假设：

1.容器中任一位置处，单位体积内的分子数不比其它位置占优势。

2.分子沿任一方向的运动不比其它方向占优势

⇒根据统计假设：

(1).气体分子数密度处处相同。 $\boxed{n=\frac{N}{V}=\frac{dN}{dV}}$

dV：宏观足够小、微观足够大　关于微元的新理解

(2). $\vec{v_i}=v_{ix}\vec{i}+v_{iy}\vec{j}+v_{iz}\vec{k}$. $(i=1,2,\cdots,N)$,

①分子平均速度

$$\bar{v}=\frac{1}{N}\sum\vec{v_i}=\left(\frac{1}{N}\sum v_{ix}\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{N}\sum v_{iy}\right)\vec{j}+\left(\frac{1}{N}\sum v_{iz}\right)\vec{k}=\bar{v}_x\vec{i}+\bar{v}_y\vec{j}+\bar{v}_z\vec{k}$$

若 $\bar{v}=0$，则 $\bar{v}_x=0$，$\bar{v}_y=0$，$\bar{v}_z=0$

②分子速率平方的平均值

$$\overline{v^2}=\frac{1}{N}\sum v_i^2=\frac{1}{N}\sum\left(v_{ix}^2+v_{iy}^2+v_{iz}^2\right)=\frac{1}{N}\sum v_{ix}^2+\frac{1}{N}\sum v_{iy}^2+\frac{1}{N}\sum v_{iz}^2=\overline{v_x^2}+\overline{v_y^2}+$$

$$\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}$$

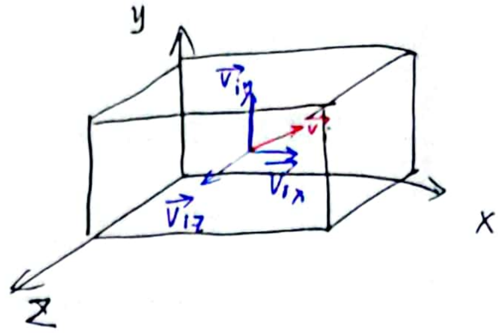
第2节 统计规律及其特征 （要求理解）

三、理想气体压强

前提 N个同种理想气体分子

① 分子质量：m

分子 i：$v_i = v_{ix}\vec{i} + v_{iy}\vec{j} + v_{iz}\vec{k}$



分子与右侧面一次碰撞：碰撞前 mv_{ix}，碰撞后 $-mv_{ix}$　$\Delta p = -2mv_{ix}$.

给右侧面冲量：$2mv_{ix}$

… 二次碰撞时间间隔：$\frac{2l_1}{v_{ix}}$

⇒单位时间内，分子i与右侧面碰撞的次数 $\frac{1}{\frac{2l_1}{v_{ix}}} = \frac{v_{ix}}{2l_1}$.

给予右侧的冲量：$2mv_{ix} \cdot \frac{v_{ix}}{2l_1} = \frac{mv_{ix}^2}{l_1}$.

② 所有分子给予右侧面的冲量：$\sum \frac{mv_{ix}^2}{l_1}$　　$I=Ft$

③ 气体对右侧面压力 $F = \sum \frac{mv_{ix}^2}{l_1}$.

然后

压强：$p = \frac{F}{S} = \frac{\sum \frac{mv_{ix}^2}{l_1}}{l_2 l_3} = \frac{Nm}{V} \cdot \left(\frac{1}{N} \cdot \sum v_{ix}^2\right) = nm \cdot \overline{v_x^2} = n \cdot m \cdot \frac{\overline{v^2}}{3} = \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{1}{2} m\overline{v^2} = \frac{2}{3} n \cdot \bar{E}_k$

又 $\bar{E}_k = \frac{1}{2} m\overline{v^2}$：分子的平均平动动能

⇒ $\boxed{p = \frac{2}{3} n \bar{E}_k}$ 理想气体压强公式

说明

①. 与容器~~形状~~形状无关

②. 考虑到分子之间碰撞仍然成立.

③ 对混合理想气体也成立，$n = n_1 + n_2 + \cdots$

④. 压强是大量气体分子对器壁碰撞的平均结果

四.温度

由. $\begin{cases} PV=\nu RT \\ P=\frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_k} \end{cases} \Rightarrow (\frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_k})\cdot V=\nu RT$. $\frac{2}{3}N\overline{\varepsilon_k}=\nu RT$

$$\overline{\varepsilon_k}=\frac{3}{2}\frac{\nu R}{N}\cdot T=\frac{3}{2}\cdot\frac{R}{N_A}\cdot T.$$

又定义: $k=\frac{R}{N_A}=\frac{8.31}{6.02\times10^{23}}=1.38\times10^{-23}$ J/K. 玻耳兹曼常数

综上有: $\boxed{\overline{\varepsilon_k}=\frac{3}{2}kT.}$ (理想气体温度公式)

(热力学温度)

说明:

(1). $\overline{\varepsilon_k}\propto T$. 与气体种类无关

eg. T相同: $\overline{\varepsilon_{kO_2}}=\overline{\varepsilon_{kH_2}}=\overline{\varepsilon_{kHe}}=\cdots=\frac{3}{2}kT$

(2) 温度是分子平均动能的量度.

是表征大量分子无规则热运动的剧烈程度的物理量.

(3). 如果$T=0$, $\overline{\varepsilon_k}=0$, 所有分子停止运动. (×).

"绝对零度不可能到达"

$T\neq0$. $\overline{\varepsilon}\neq0$. 分子永不停息地无规则运动

(4) 方均根速率.

$\begin{cases} \overline{\varepsilon_k}=\frac{1}{2}mv^2 \\ \overline{\varepsilon_k}=\frac{3}{2}kT. \end{cases} \Rightarrow \overline{v^2}=\frac{3kT}{m}$ (也写成: $\bar{v}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$. $\frac{k=\frac{R}{N_A}}{\mu=m\cdot N_A=M.}$ $\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$)

m: 气体分子质量.

μ: 气体分子的摩尔质量

T(273K)	H_2	O_2	N_2	空气
$\sqrt{\overline{v^2}}$	1830	461	493	483

(5). 压强另一个公式：

$p=\frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_k}=\frac{2}{3}n\cdot\frac{3}{2}kT=nkT$

$k=\frac{R}{N_A}$

$p=nkT$ — 理想气体状态方程.（比 $PV=\nu RT$ 适用范围广泛.）

单位体积 / 物质的量

气体分子数密度 $n=\frac{N}{V}$

eg. 推导道尔顿分压定律：混合气体压强等于各种气体分压强之和.

解：T相同. $\overline{\varepsilon_{k1}}=\overline{\varepsilon_{k2}}=\cdots=\overline{\varepsilon_k}$

总分子数密度：$n=n_1+n_2+\cdots$

$p=\frac{2}{3}n\cdot\overline{\varepsilon}=\frac{2}{3}(n_1+n_2+\cdots)\overline{\varepsilon_k}$

$\therefore p=p_1+p_2+\cdots$

④. 压强是大量气体分子对器壁碰撞的平均结果

第4节. 能量按自由度均分原理. 理想气体内能 (简写)

前言:

考虑到分子结构. 分子运动: 平动, 转动, 振动.

分子能量 ∴平动动能、转动动能、振动动能(略)

一、自由度: 确定物体的空间位置所需要的独立坐标变量数目.

eg. (x,y). $x^2+y^2=R^2$. 即自由度为1.

1. 质点的自由度:

① 在三维空间自由运动, 自由度为3

② 平面/曲面. 自由度2

③ 直线/曲线 1

④ 固定 0

2. 刚体的自由度.

① 三维空间运动 = 质心平动 + 绕过质心的瞬时轴的转动

质心平动: 3个

绕过质心的瞬时轴的转动: 3个
- 轴 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 2个
- 转动: 1个

∴ 自由度为6

② 定点转动: 3自由度

3. 气体分子自由度

1. 把原子看作质点，原子间距不变（刚性分子）

	分子结构	平动自由度 t	转动自由度 r	总自由度 i = t + r
单原子分子	•	3	0	3
双	o—o	3	2	5
多	△	3	3	6

二、能量按自由度均分定律（这里是动能）

$\bar{\varepsilon}_k = \frac{3}{2}kT \qquad \bar{\varepsilon}_k = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_x^2} + \frac{1}{2}m\overline{v_y^2} + \frac{1}{2}m\overline{v_z^2} = \frac{3}{2}kT$

∵ 分子不偏向于一方 ∴ $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$

∴ $\frac{1}{2}m\overline{v_x^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_y^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{2}kT\right) = \frac{1}{2}kT$

⇒ 在温度为T的平衡状态下，由于气体分子的无规则热运动，使得任何一种运动都不比其它运动占优势，对于分子的每一个可能的自由度，气体分子的平均动能都相等，都等于 $\frac{1}{2}kT$.

应用：

单分子	$3\times\frac{1}{2}kT$	$= \frac{3}{2}kT$
双分子	$5\times\frac{1}{2}kT$	$= \frac{5}{2}kT$
多分子	$6\times\frac{1}{2}kT$	$= 3kT$

三、理想气体内能

- 内能 = 所有分子的动能 + 分子之间相互作用势能

- 理想气体：内能 = 所有分子的动能之和。

展开

设理想气体分子总数为 N，每个气体分子自由度为 i

理想气体内能.

$$E = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i = N \cdot \left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i\right) = N \cdot \bar{\varepsilon} = N \cdot \frac{i}{2} kT = N \cdot \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{N_A} \cdot T$$

$$= \frac{i}{2} \cdot \nu R T.$$

应用

单原子分子理想气体：	$\frac{3}{2} \nu R T$
双	$\frac{5}{2} \nu R T$
多	$3 \nu R T$

Scanned with CamScanner

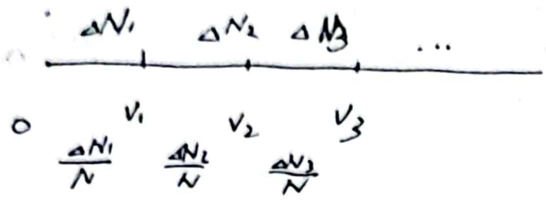
把原子看作质点、原子间距不变（刚性分子）

第5节 麦克斯韦分子速率分布律（速率分布）

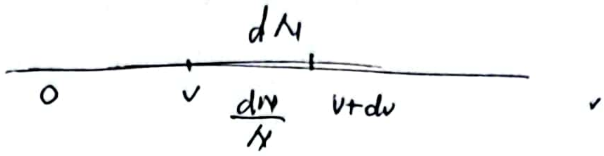
一、走一步.

偶然：单个分子的速率可以取0～∞之间的任何数值.

必然：平衡状态下，大量气体分子按照速率的分布遵守完全确定的统计规律.



速率区间 $v \sim v+dv$



分析：① $dv\uparrow$ $dN\uparrow$

$\frac{dN}{N}\uparrow$ $\frac{dN}{N} \propto dv$.

② dv 同，$\frac{dN}{N}$ 与速率区间在哪(速率 v 附近)有关.

eg. 如速率在 $100\sim100+dv$ 和 $200\sim200+dv$ 中 $\frac{dN}{N}$ 不同

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dN}{N} = f(v)\,dv.}$$

$f(v)$：分子速率分布函数

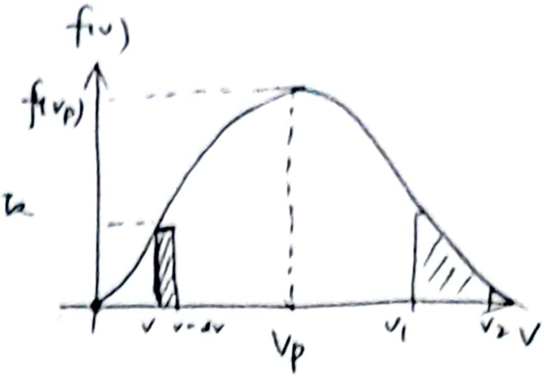
$f(v)=\frac{dN}{N\,dv}$. 在速率 v 附近，单位速率区间中分子数占总分子数的比率.

理：$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot v^2\, e^{-\frac{1}{2}mv^2/kT}$$

[麦克斯韦分子速率分布函数]

Scanned with CamScanner

二、速率分布曲线



1. 窄条面积、

$\boxed{f(v)\cdot dv} = \frac{dN}{N}$　　速率在v~v+dv之间分子数占总分子数的比率

2. 宽窄面积、

$\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv = \int_{v_1}^{v_2}\frac{dN}{N} = \frac{\Delta N}{N}$　(曲线下面积有意义)

3. 曲线下的总面积

$\int_0^{\infty} f(v)dv = \int_0^{\infty}\frac{dN}{N} = 1$.　归一化

4. $v=0$ 及 $v\to\infty$. $f(v)=0$

5. v_p：最可几速率，曲线极值条件 $\frac{df(v)}{dv}=0$

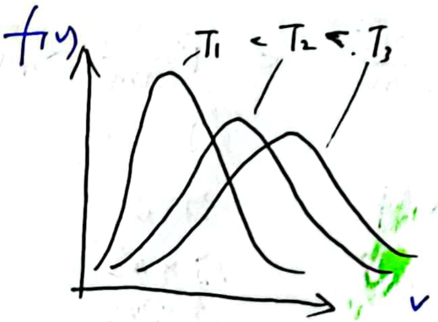
$\frac{df(v)}{dv} = 0 \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$　　$\mu = \frac{mR}{k} = \frac{mR}{\frac{R}{N_A}} = mN_A$

$\frac{k}{m} = \frac{R}{\mu}$

此时. $f(v_p) = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{8m}{\pi kT}}$

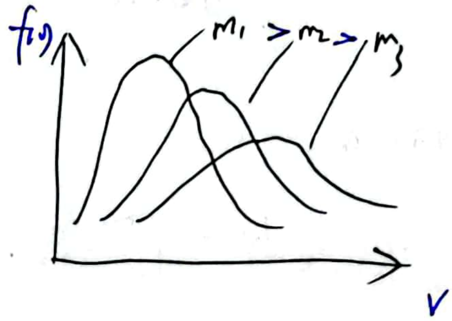
6. T对曲线的影响（同种理想气体）

$T\uparrow$. $v_p\uparrow$. $f(v_p)\downarrow$.



7. m对曲线的影响.（T相同）

$m\uparrow$. $v_p\downarrow$. $f(v_p)\uparrow$



Scanned with CamScanner

三、几个平均值

1. 平均速率， $\bar{v}=\dfrac{\text{全部分子速率之和}}{\text{分子总数}}$

解：v~v+dv 之间分子数：dN

分子速率之和：vdN

则全部分子速率之和：$\int_0^{\infty} v\,dN$.

$$\therefore \bar{v}=\frac{1}{N}\int_0^{\infty} v\,dN=\int_0^{\infty}\frac{v}{N}dN=\int_0^{\infty} v\cdot f(v)\,dv=\boxed{\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}}$$

2. $\overline{v^2}=\dfrac{\text{全部分子速率平方之和}}{\text{分子总数}}$

$$\therefore \overline{v^2}=\frac{1}{N}\int_0^{\infty} v^2 dN=\int_0^{\infty} v^2\cdot f(v)\,dv=\frac{3kT}{m}$$

即有 $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\dfrac{3kT}{m}}=\sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$

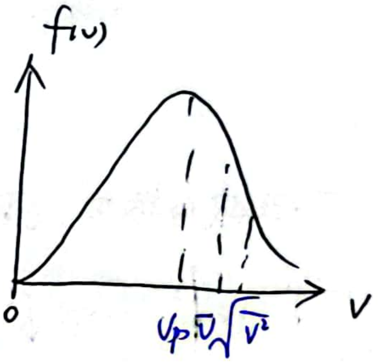
3. 比较.

$$v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}<\bar{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}<\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

讨论速率分布问题

讨论分子碰撞问题

计算分子平均平动动能



4. 平均平动动能

$$\overline{\varepsilon_k}=\frac{1}{N}\int_0^{\infty}\varepsilon_k\,dN=\int_0^{\infty}\varepsilon_k\cdot f(v)\,dv=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}mv^2\cdot f(v)\,dv=\frac{3}{2}kT$$

5. 相关求法. 【速率 v 的任意函数 $g(v)$】的平均值.

$$\bar{g}=\int_0^\infty g(v)f(v)\,dv.$$

eg.

$f(v)dv$. $v\sim v+dv$. 比率

$N\cdot f(v)\,dv$ $v\sim v+dv$ 分子数.

$\int_0^{v_p} f(v)\,dv$ $0\sim v_p$ 的分子数比率.

$\int_{v_1}^{v_2} N f(v)\,dv$ $v_1\sim v_2$ 的分子数.

$\Downarrow$

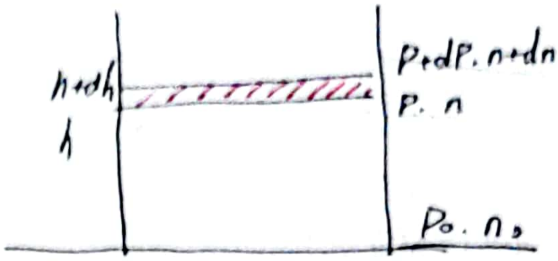
$\int_0^\infty N\cdot f(v)\,dv$ $0\sim\infty$ (即全部) 分子数

$\int_0^\infty \frac{1}{2}mv^2\cdot f(v)\,dv$ 分子的平均平动动能

$\int_{v_1}^{v_2} N\cdot \frac{1}{2}mv^2 f(v)\,dv$ $v_1\sim v_2$ 的分子的平动动能 和

第6节 玻耳兹曼分布律 (空间位置分布)

一、重力场中粒子的粒子数密度n分布



解：大气，平衡态，温度T

公式：$PV=\nu RT$（无外加力成立）⇒ 不成立

$p=nkT$ 成立

表示：$dP=-\rho g\,dh$ $\xrightarrow{\text{推导得}}$ $kT\,dn=-n\cdot m\cdot g\,dh$

$dP=kT\,dn$

空气质量密度 $\rho=nm$

空气分子质量

$$\int_{n_0}^{n}\frac{dn}{n}=\int_0^h-\frac{mg}{kT}\,dh$$

$$\ln\frac{n}{n_0}=-\frac{mg}{kT}\cdot h$$

分子数密度与高度 ⟹

$$\boxed{n=n_0e^{-\frac{mgh}{kT}}=n_0e^{-\frac{\mu gh}{RT}}}$$

$h\uparrow,\ n\downarrow$

再计算/应用：气压强

$$P=nkT=n_0kT\,e^{-\frac{\mu gh}{RT}}=\boxed{P_0e^{-\frac{mgh}{kT}}}=P_0e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$$ 等温气压公式

$h\uparrow,\ P\downarrow$，可制成：高度计

不变

二、玻耳兹曼分布律

(由来)

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}} = n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}}$$

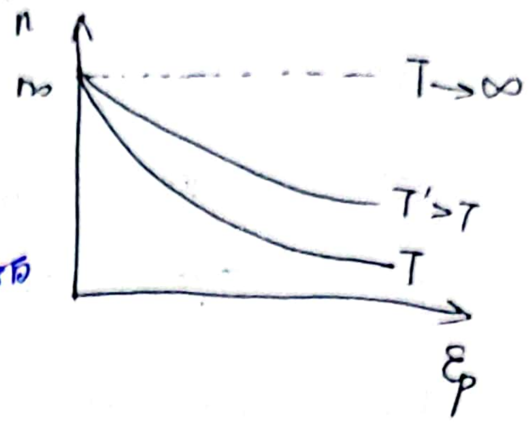
→ 分子势能

(适用于任意保守力场)

只需求 E_p 按照相应表达式即可

↓ 势能零点处的分子数密度

(分析)



$E_p\uparrow, n\downarrow$; $T\uparrow, n\downarrow$; $T\to\infty, n\to n_0$

外力场有使分子聚集在势能较低处的趋势 ⇒

分子热运动有使分子趋向均匀分布的趋势 ⇐

两者作用，使~~气~~气体分子形成了一种平衡的非均匀分布

取一个体积元：$dN = n\cdot dV \xrightarrow{代入有} n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}}\, dxdydz$

在三维中 $dV = dxdydz$

结论 ⇒ 玻耳兹曼分布律：气体分子按空间位置的分布规律.

推广一种思想：从已知推未知

我们描述一个运动：可以描述其 (r, v)

$x \to x+dx,\ y+dy,\ z+dz$

$v \to v_x+dv_x,\ v_y+dv_y,\ v_z+dv_z$

$\xrightarrow[玻\cdots曼]{麦\cdots率}$ $dN = C\cdot e^{\frac{\varepsilon}{kT}}\, dxdydz\cdot dv_x dv_y dv_z$

即可描述分子的运动

第7节 分子碰撞和平均自由程

例1：O_2 分子平均速率.

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\mu \pi}} \approx 445\ m/s$$

300K

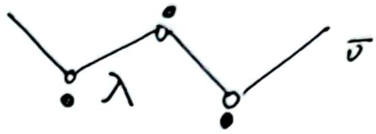
$32\times10^{-3}kg$

→ 但为什么我们闻到远处来的香味要一段时间 这与碰撞有关

一、平均自由程

λ 自由程：一个分子接连2次和其它分子碰撞之间自由运动的路程

$\bar{\lambda}$ 平均自由程：$\bar{\lambda} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i$



二、平均碰撞频率

碰撞频率 Z：一个分子在单位时间内与其它分子碰撞的次数。

平均碰撞频率 $\bar{Z} = N$

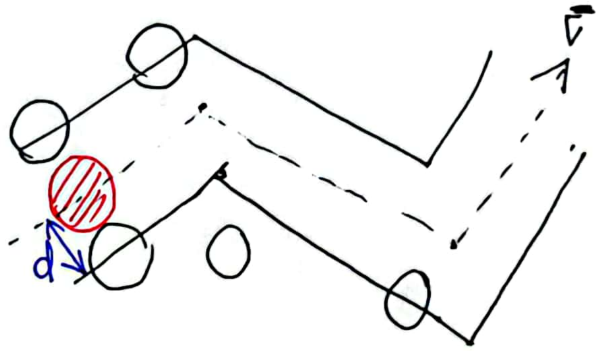
$\bar{v}$：一分子在单位时间内走过的平均路程 $\boxed{\bar{v} = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i}$ 与 $\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ 相同

$\Rightarrow \boxed{\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}}}$

三、$\bar{Z}$、$\bar{\lambda}$ 的计算

$\bar{Z} = n \cdot \pi d^2 \bar{v}$

分子数密度. X体积



修正 → 过程不要求掌握

$\boxed{\bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 \bar{v} n}$

$\Rightarrow \boxed{\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}}$

$\bar{\lambda} \propto \frac{1}{d^2} \cdot \bar{\lambda} \propto \frac{1}{n}$

$\bar{\lambda}$ 与 $\bar{v}$ 无关

~~均行程~~

$p=nkT$. $\bar{\lambda}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2\cdot\frac{p}{kT}}$

$\begin{cases} p\text{一定}.\ \bar{\lambda}\propto T \\ T\text{一定}.\ \bar{\lambda}\propto\frac{1}{p} \end{cases}$

Scanned with CamScanner

热力学基础

第一节 几个基本概念

一、系统和外界

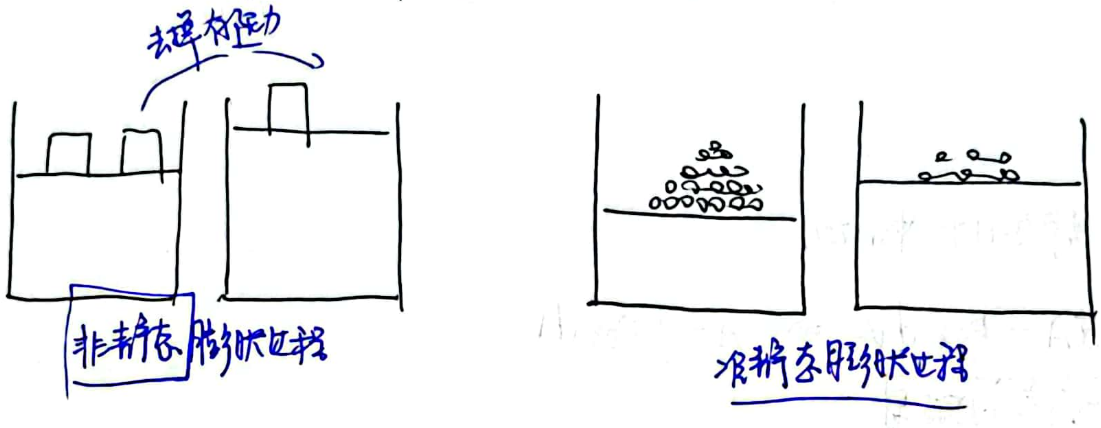
系统或体系：确定为研究对象的宏观物体系。

外界或环境：系统以外的物体

二、准静态过程

系统状态随时间的变化：$\boxed{\text{热力学过程}}$

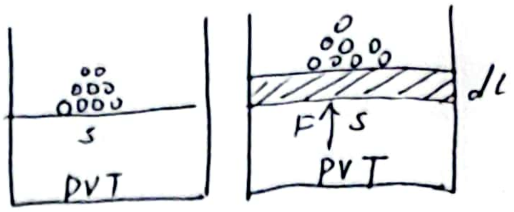
准静态过程：如果一个过程进行的无限缓慢，体系所经历的每一个中间态都无限接近于平衡态。



三、功

改变系统状态的方式：$\boxed{\text{(1) 作功}}$ $\boxed{\text{(2) 热交换}}$

1. 无摩擦准静态过程中的功.



推导: $dV = S\,dl$

$F = pS$

整合: $\boxed{dA = F\,dl = pS\,dl = p\,dV}$

体积功: 对气体、液体和固体的准静态膨胀和压缩过程都成立.

讨论:

(1) 体积膨胀, $dV>0$, $dA>0$, 体系对外界做功

(2) 体积被压缩, $dV<0$, $dA<0$ ······ 受功

(3) 有限准静态过程. $V_1 \to V_2$

$$A=\int dA=\int_{V_1}^{V_2} p\,dV \Rightarrow p=p(T,V).\quad A=\int_{a(L)}^{b}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

2. 非静态过程中的功.

公式: $đA = p_{外}\,dV \Rightarrow A=\int p_{外}\,dV$

一切非静态过程

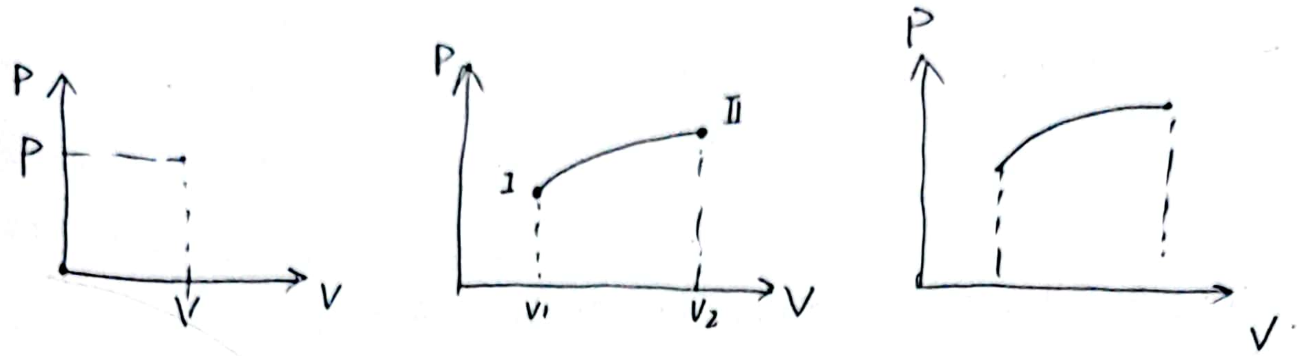
讨论: 若气体向真空膨胀. $p_{外}=0$. $A=0$

注: 功A是过程量. 不是状态量. 与p, V, T, E不同

元功: $đA$, dp, dV, dT, dE

四、平衡态、准静态过程、功的几何表示.

理想气体. $PV=\nu RT$.



点：平衡态

有向曲线：准静态过程.

I→II：膨胀

面积：准静态过程的功

(只有PV图上面积表示功)

五、内能.

= 所有分子动能 + 所有分子的相互作用势能.

说明：状态量（用状态量来表示）

$$\boxed{E=E(T,V)\ \overset{理想}{=\!=}\ \frac{i}{2}\nu RT.}$$

对一般 E 与 T 相关

$E=E(T)=\frac{i}{2}\nu RT.$

$\Delta E=\frac{i}{2}\nu RT_2-\frac{i}{2}\nu RT_1=\frac{i}{2}\nu R\,\Delta T$

常用量

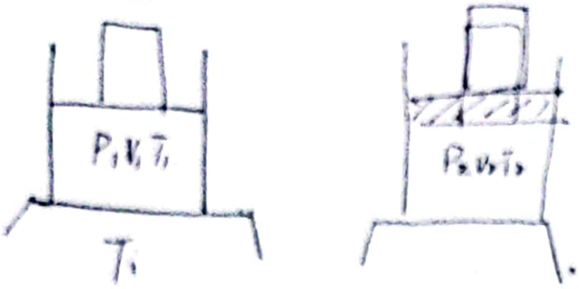
$$\boxed{E\ \overset{PV=\nu RT}{=\!=\!=}\ \frac{i}{2}\cdot PV.}$$

常用量

$\therefore \Delta E=\frac{i}{2}(P_2V_2-P_1V_1)$

Scanned with CamScanner

六、热量



由温差引起的能量交换过程，热交换过程中热传递过程所交换的能量：能量Q

$Q>0$，体系吸热（从外界吸）

$Q<0$，体系放热（向外界放）

⇒ 如果2个物体的温差是有限值，热交换过程是非静态的。
只有当2个物体的温差为一无穷小量dT时，热交换才是准静态的。

⇒ $\boxed{\text{热量是过程量：} đQ}$

功和热能的共同点：①都是体系与外界交换的能量

② 都可以改变体系的状态

③ 都是"过程量"，单位J

区别：宏观：功：是通过体系和外界的宏观相对位移实现的

热交换：与宏观位移无关

微观：功：是外界物体分子有规则运动能量与体系分子无规则热运动能量的交换

热：是外界物体分子无规则热运动能量与体系分子无规则热运动能量的交换

第二节. 热力学第一定律及其应用.

一、热一律

提出 能量守恒与转化定律: $Q = \Delta E + A$

膨胀 $A>0$, 系统对外界做正功

压缩 $A<0$, 外界对系统做功 / 系统对外做负功)

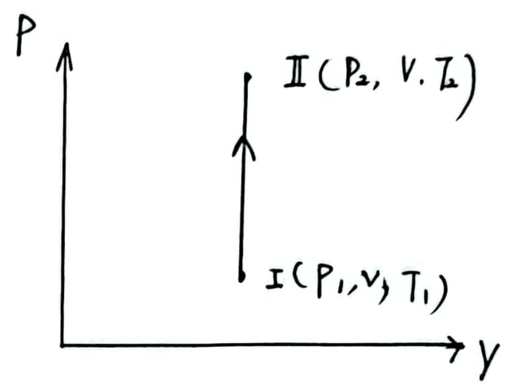
说明: ① 适用于任何过程.

② 若为元过程, 则 $đQ = dE + dA$.

③ 准静态过程: $đQ = dE + PdV \xrightarrow{积分} Q = \Delta E + \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$

二、理想气体的等值过程

1. $V=C$. (等容过程)



展开: $A = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = 0$.

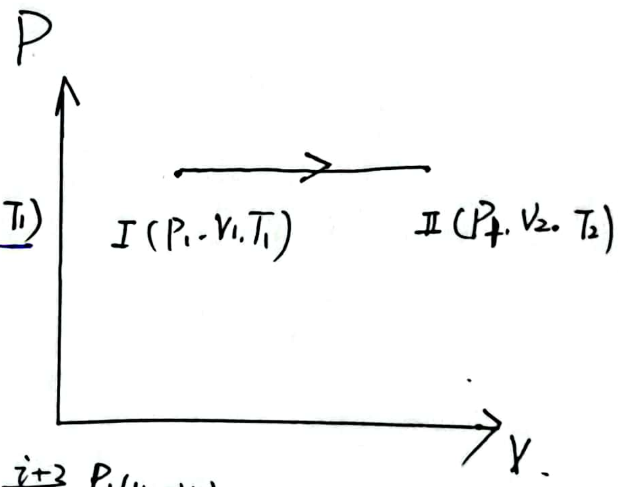
$\Delta E = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1)$

$= \frac{i}{2}(P_2V_2 - P_1V_1)$

$= \frac{i}{2}(P_2 - P_1)V$.

$\boxed{\Rightarrow Q_V = \Delta E + A_V = \Delta E.}$

2. $P=C$. (等压过程).



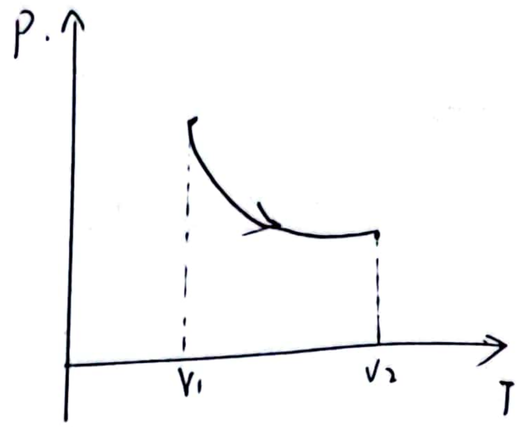
展开: $A = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = \underline{P_1(V_2 - V_1)} \overset{or}{=} \underline{\nu R(T_2 - T_1)}$

$\Delta E = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1)$

$= \frac{i}{2}P_1(V_2 - V_1)$

$\Rightarrow Q_p = \Delta E + A_p = \frac{i+2}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{i+2}{2}P_1(V_2 - V_1)$

3. $T=C$（等温过程）.



图形

曲线 $pV=\nu RT=C$

做功：$A_T=\int_{V_1}^{V_2} p\,dV=\int \frac{\nu RT}{V}dV$

$=\nu RT\ln\frac{V_2}{V_1}$

$\Delta E=0$.（与温度的单值函数）

$\Rightarrow Q_T=\Delta E+A_T=\nu RT\cdot\ln\frac{V_2}{V_1}=\nu RT\cdot\ln\frac{p_1}{p_2}$.

Scanned with CamScanner

第3节 热容

一、定义：体系经历一个元过程，$đQ$，dT

热容：$C' = \frac{đQ}{dT}$ "过程量"，SI：J/K

⇒推广 摩尔热容：$C = \frac{C'}{\nu}$ $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$ （比较不同物质的能力）

比热容：$c = \frac{C'}{M_{(质量)}}$ $J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$ （比较同一物质的能力）

⇒关系 $C' = \nu C = Mc$ ⇒ $C = \frac{M}{\nu} c = \mu c$

讨论

① 若 $đQ$，dT 同号，$C' > 0$，异号：$C' < 0$

② 等温过程 $dT = 0$，若 $đQ > 0$，$C' \to \infty$；若 $đQ < 0$，$C' \to -\infty$

③ 绝热过程 $đQ = 0$，$C' = 0$

⇒ C' 的范围 $\boxed{-\infty < C' < +\infty}$

二、热量的计算 ① 热一律；② 用热容（C'，C，c）

$$đQ = C'dT = \nu C dT = Mc dT$$

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C' dT = \int_{T_1}^{T_2} \nu C dT = \int_{T_1}^{T_2} Mc dT$$

三、两个常用的物理量：（以下公式适用于一般情况）

① 定容摩尔热容 $C_v = \frac{1}{\nu}\frac{dQ_v}{dT} \rightarrow dQ_v = \nu C_v dT$

$Q_v = \int_{T_1}^{T_2} \nu C_v dT$

② 定压摩尔热容 $C_p = \frac{1}{\nu}\cdot\frac{dQ_p}{dT} \rightarrow dQ_p = \nu C_p dT$

$Q_p = \int_{T_1}^{T_2} \nu C_p dT$

进一步

四、理想气体的 C_v、C_p

① $C_v = \frac{1}{\nu}\cdot\frac{dQ_v}{dT} = \frac{1}{\nu}\cdot\left(\frac{dE}{dT}\right)_v = \frac{1}{\nu}\cdot\frac{i}{2}\nu R = \frac{iR}{2}$

② $C_p = \frac{1}{\nu}\cdot\frac{dQ_p}{dT} = \frac{1}{\nu}\cdot\left(\frac{dE + PdV}{dT}\right)_p = \frac{1}{\nu}\cdot\left(\frac{dE}{dT} + P\frac{dV}{dT}\right)_p$

$= \frac{1}{\nu}\left[\frac{i}{2}\nu R + P\cdot\frac{\nu R}{P}\right] = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R$

$\Rightarrow C_p > C_v$. $C_p - C_v = R$. 迈耶公式

$\Rightarrow \frac{C_p}{C_v} = \gamma$：比热比

理想气体：$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \boxed{\frac{\frac{i+2}{2}R}{\frac{i}{2}R}} = \frac{i+2}{i} > 1$

$= \boxed{\frac{C_v + R}{C_v}} =$

⇒ 小结:

	i	$C_v\ (\frac{i}{2}R)$	$C_p\ (\frac{i+2}{2}R)$	γ
单	3	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	$\frac{5}{3}$
双	5	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	$\frac{7}{5}$
多	6	$3R$	$4R$	$\frac{4}{3}$

⇒ 理想气体的内能计算

$\boxed{C_v = \frac{i}{2}R}$ $E = \frac{i}{2}\nu RT = \nu C_v T$

eg ① 理想气体 I → II . $\Delta E = \nu C_v(T_2 - T_1) = \nu C_v \Delta T$ ⇒ $\Delta E = \nu C_v \Delta T$ 适用于理想

② 元过程: $dE = \nu C_v dT$ ⇒ $dE = \nu C_v dT$ 气体的任何过程.

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{eg ③}\quad dQ_V = \nu C_v dT \\ &dQ_p = \nu C_p dT \end{aligned}}$$

★

第4节 理想气体绝热过程

前提：

绝热过程：系统在与外界没有热交换的条件下所进行的过程.

$$đQ=0 \quad Q=0$$

一、准静态绝热过程

$$\boxed{\begin{array}{c} đQ = dE + đA = 0 \\ \Downarrow \qquad \Downarrow \\ \nu C_v dT \quad PdV \end{array}} \Rightarrow \nu C_v dT + PdV = 0$$

$$\Downarrow$$

$$dT = -\frac{P}{\nu C_v} dV$$

$\Rightarrow$ $\boxed{由 PV=\nu RT}$

$\Rightarrow$ $PdV + VdP = \nu R dT$ （两边微分）

$$PdV + VdP = \nu R\left(-\frac{P}{\nu C_v}dV\right) = -\frac{R}{C_v}PdV$$

关键步骤 加入γ

$$\left(1+\frac{R}{C_v}\right)PdV + VdP = 0. \qquad \gamma PdV + VdP = 0$$

$$\gamma\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0. \qquad \gamma\ln V + \ln P = C \Rightarrow \ln(V^\gamma \cdot P) = C$$

$$\Rightarrow \boxed{P\cdot V^\gamma = e^C = C_1} \text{ —— 绝热过程方程（泊松方程）}$$

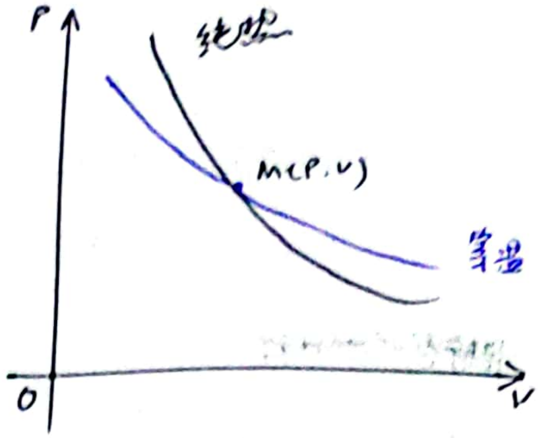
$$C_1 = PV^\gamma = (PV)V^{\gamma-1} = (\nu RT)\cdot V^{\gamma-1} \quad \therefore TV^{\gamma-1} = C_2.$$

$$C_1 = PV^\gamma = P^\gamma P^{1-\gamma}V^\gamma = (\nu RT)^\gamma \cdot P^{1-\gamma} \quad \therefore P^{1-\gamma}\cdot T^\gamma \text{ 取倒} \rightarrow P^{\gamma-1}\cdot T^{-\gamma} = C_3.$$

小结：$PV^\gamma = C_1 \qquad TV^{\gamma-1} = C_2 \qquad P^{\gamma-1}T^{-\gamma} = C_3$

➡ 分析绝热曲线的 P-V 图示.

(推导) $PV^\gamma = C_1$. $P = \frac{C_1}{V^\gamma}$



(分析)

法一:

① 等温过程. $PV = \nu RT = C'$ $P = \frac{C'}{V}$

② 分析交点, 斜率.

$$\left(\frac{dP}{dV}\right)_T = -\frac{C'}{V^2} = -\frac{C'}{V}\cdot\frac{1}{V} = -\frac{P}{V}$$

$$\left(\frac{dP}{dV}\right)_{Q=0} = -\gamma\frac{C_1}{V^{\gamma+1}} = -\gamma\frac{C_1}{V^\gamma}\cdot\frac{1}{V} = -\gamma\frac{P}{V}$$

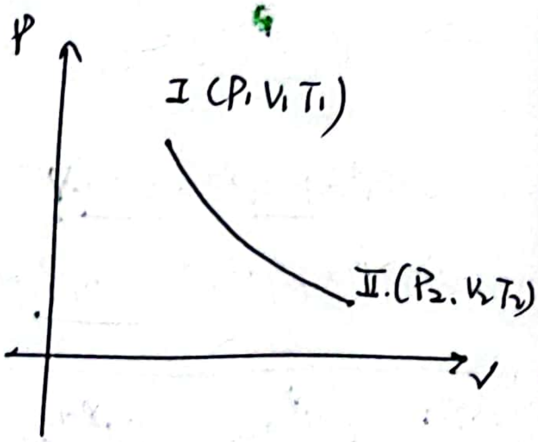
$$\therefore \left|\left(\frac{dP}{dV}\right)_{Q=0}\right| > \left|\left(\frac{dP}{dV}\right)_T\right|.$$

法二:

$P = nkT$. 等温膨胀过程 $V\uparrow$. $n\downarrow$ T不变 $P\downarrow$

绝热膨胀过程 $T\downarrow$. $P\Downarrow$.

➡ 功的计算



方法一: $Q=0$.

$\Delta E = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}(P_2V_2 - P_1V_1)$

$A = -\Delta E$.

方法二: $Q=0$

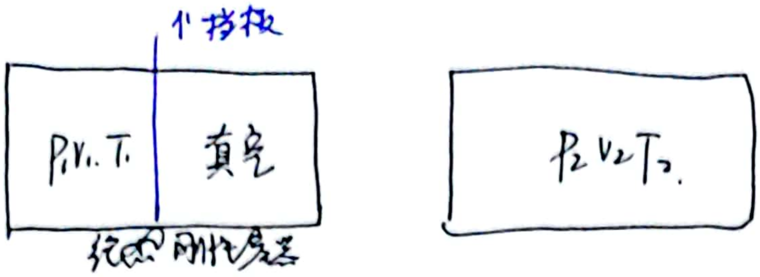
$$A = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = \int_{V_1}^{V_2}\frac{C_1}{V^\gamma}dV = \frac{C_1}{1-\gamma}\cdot V^{1-\gamma}\Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{C_1}{1-\gamma}\cdot\left(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}\right)$$

$$\underline{\underline{P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma = C_1}}\ \frac{1}{\gamma-1}(P_1V_1 - P_2V_2)$$

$\Delta E = -A$.

? $-\frac{1}{\gamma-1}(P_1V_1 - P_2V_2) = -\frac{i}{2}(P_2V_2 - P_1V_2) \Rightarrow \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{\gamma-1}$

二、绝热自由膨胀



分析：

① $Q=0$，$A=0$，$\Delta E=0$，膨胀前后内能不变，对真实气体也成立。（因为只是内部做功）

② 理想气体 有 $E=E(T)$，$\Delta E=0$，$E_1=E_2$，$T_1=T_2$。 $P_1V_1=\nu RT_1$ $P_2V_2=\nu RT_2$

$E=\frac{i}{2}\nu RT$

$2V_1=V_2 \Longrightarrow P_2=\frac{1}{2}P_1$

注：

① 中间过程不是平衡态，→ 理想气体状态方程不成立] 故只在初末用 $PV=\nu RT$

始末状态温度相等 → 但不是等温过程

② 绝热过程，而非准静态。即泊松方程不成立。 $P_1V_1=P_2V_2$ 形式上与等温类似

第五节 循环过程 $\Longrightarrow$ $\Delta E=0$

一、循环过程：体系经历一系列变化后又回到初始状态的过程。

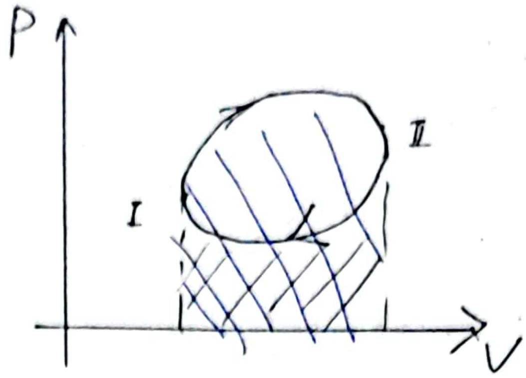
① 特征 $\Delta E=0$.

② $Q=A$ 净热 = 净功

③ 热机. 工作物质.

工作过程：循环过程

④ 准静态循环过程对应闭合曲线



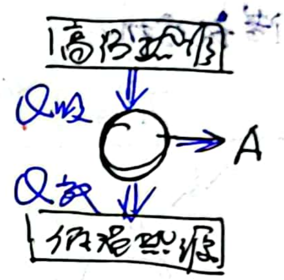
PV 所围面积 = 净功（要求代数和，故加绝对值）

⇒ 若顺时针. $A>0$, 正循环（热机循环）. 热机 吸热

逆… $A<0$. 逆循环（致冷循环） 致冷机 放热

二、循环效率. $Q_{吸} - Q_{放} = A$

1. 正循环. $Q_{吸} = A + Q_{放}$.

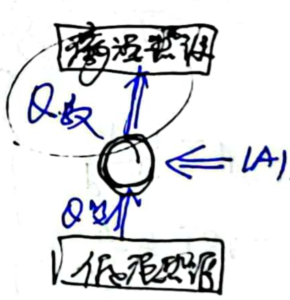


⇒ 热机效率: $\eta = \frac{A}{Q_{吸}} = \frac{Q_{吸}-Q_{放}}{Q_{吸}} = 1-\frac{Q_{放}}{Q_{吸}}$

⇒ $0 \le \eta \le 1$, $\eta\uparrow$ 热机效率越好

2. 逆循环

$A<0$. $Q_{吸} - Q_{放} = -|A|$. ⇒ $Q_{吸} + |A| = Q_{放}$



⇒ 致冷系数: $w = \frac{Q_{吸}}{|A|} = \frac{Q_{吸}}{Q_{放}-Q_{吸}}$

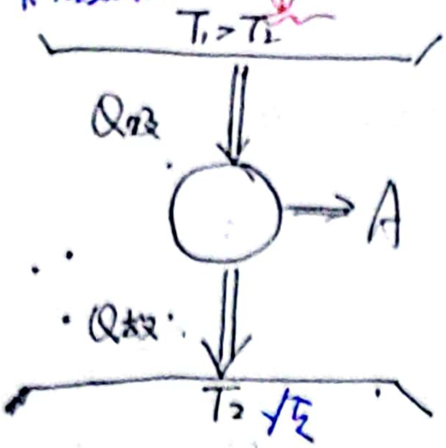
⇒ $w \ge 0$. $w\uparrow$ 致冷效率越好

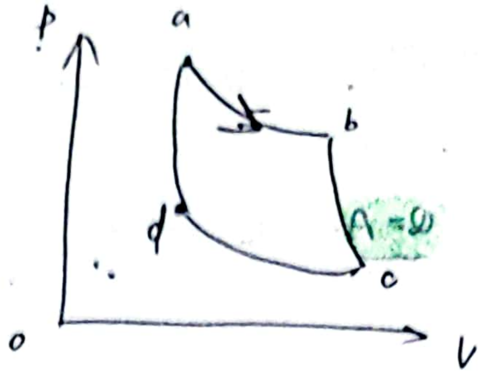
注: 分子 $Q_{吸}$ 只计算从低温热库吸收热量

分母 $Q_{吸}$ 需计算全部吸热 ?

三. 卡诺循环：两热源. 准静态循环. 2个等温 + 2个绝热

(一) 卡诺热机 热





推导

正值：$Q_{吸} = \nu R T_1 \ln\frac{V_b}{V_a}$

$Q_{放} = \nu R T_2 \ln\frac{V_c}{V_d}$ （取正）

$$\eta = \frac{A}{Q_{吸}} = 1 - \frac{Q_{放}}{Q_{吸}} = 1 - \frac{\nu R T_2 \ln\frac{V_c}{V_d}}{\nu R T_1 \ln\frac{V_b}{V_a}}$$

bc: $T_1 V_b^{\gamma-1} = T_2 V_c^{\gamma-1}$ ①

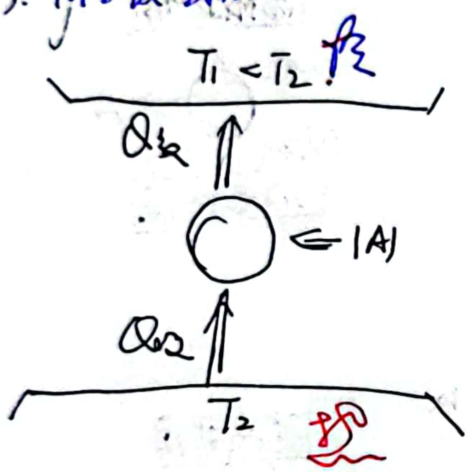
da: $T_1 V_a^{\gamma-1} = T_2 V_d^{\gamma-1}$ ②

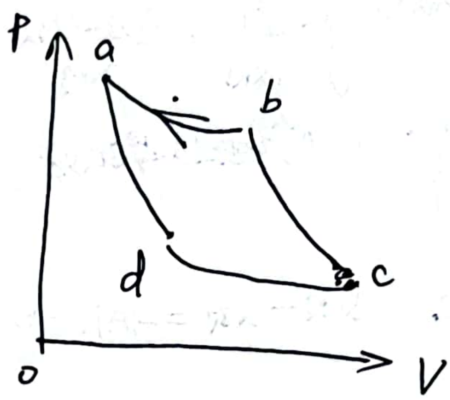
①/②: $\left(\frac{V_b}{V_a}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_c}{V_d}\right)^{\gamma-1}$

$\gamma-1 \neq 0 \Rightarrow \frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}$

结论. $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

(二). 卡诺致冷机





$Q_{吸} = \nu R T_2 \ln\frac{V_c}{V_d}$

$Q_{放} = \nu R T_1 \ln\frac{V_b}{V_a}$

$$\Rightarrow w = \frac{Q_{吸}}{|A|} = \frac{Q_{吸}}{Q_{放} - Q_{吸}} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

(讨论)：T_1固定，$T_2\downarrow$ $w\downarrow$

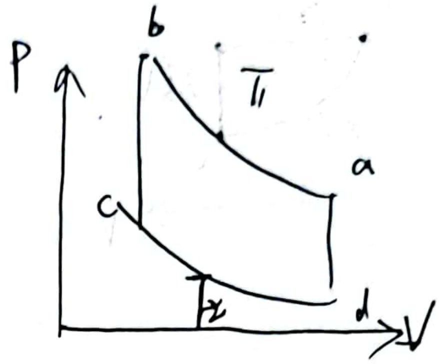
如：$T_1=300K$，$T_2=270K$

$T_2=250K$

$T_2=100K$

T_1固定，$T_2\to0$，$w\to0$，$Q_{吸}=w|A|\to0$

绝对零度不可能到达



(经典例题)

例1：逆向.斯特林循环 的致冷系数.

两个等温+2个等体过程

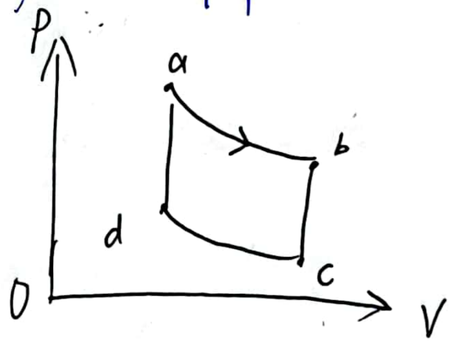
无做功只有吸热　　只有做功，没有内能变化

解：$|A|=\nu RT_1\ln\frac{V_a}{V_b}-\nu RT_2\ln\frac{V_d}{V_c}$

$Q_{吸}=\nu RT_2\ln\frac{V_d}{V_c}$

$$\boxed{w=\frac{Q_{吸}}{|A|}=\frac{T_2}{T_1-T_2}}$$

与结果与卡诺循环类似（一样）



例2：奥托（内燃机）循环的热机效率.

两个等容过程+2个绝热过程

$\Delta E=0$.

分析：由吸放热：$Q_{吸}=\nu C_v(T_a-T_b)$　$Q_{放}=\nu C_v(T_b-T_c)$

① $\eta=\frac{A}{Q_{吸}}=1-\frac{Q_{放}}{Q_{吸}}=1-\frac{T_b-T_c}{T_a-T_d}$

② 又依绝热方程 得：$\Longrightarrow$ $\frac{T_b-T_c}{T_a-T_d}=\frac{T_c}{T_d}=\left(\frac{V_d}{V_c}\right)^{\gamma-1}=\frac{1}{\left(\frac{V_c}{V_d}\right)^{\gamma-1}}$ 令$\frac{V_c}{V_d}=\delta$ 压缩

$\eta=1-\frac{1}{\delta^{\gamma-1}}$　$\delta\uparrow$，$\eta\uparrow$

讨论：T_1固定，$T_2\downarrow$ $w\downarrow$

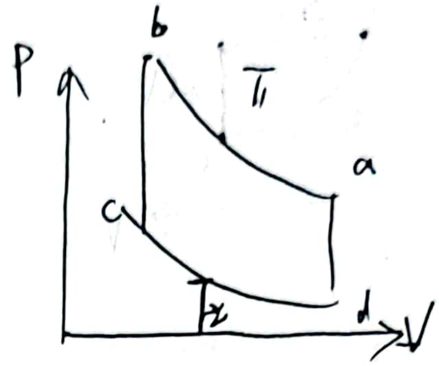
如：$T_1=300K$．$T_2=270K$

$T_2=200K$

$T_2=100K$．

T_1固定．$T_2\to 0$．$w\to 0$．$Q_吸=w|A|\to 0$

绝对零度不可能到达



例题

例1：逆向．斯特林循环的致冷系数．

两个等容 + 2个等温过程

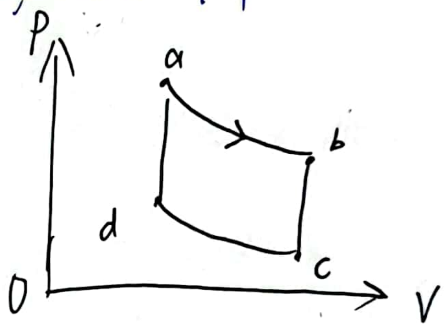
无做功只有内能　　只有做功，没有内能变化

解：$|A|=\nu RT_1\ln\frac{V_a}{V_b}-\nu RT_2\ln\frac{V_d}{V_c}$．

$Q_吸=\nu RT_2\ln\frac{V_d}{V_c}$．

$$\boxed{w=\frac{Q_吸}{|A|}=\frac{T_2}{T_1-T_2}}$$

与结果与卡诺循环类似．(一样)



例2：奥托(内燃机)循环的热机效率．

两个等容过程 + 2个绝热过程

$\Delta E=0$．

解：由吸热过程：$Q_吸=\nu C_v(T_a-T_b)$　$Q_放=\nu C_v(T_b-T_c)$

① $\eta=\frac{A}{Q_吸}=1-\frac{Q_放}{Q_吸}=1-\frac{T_b-T_c}{T_a-T_d}$．

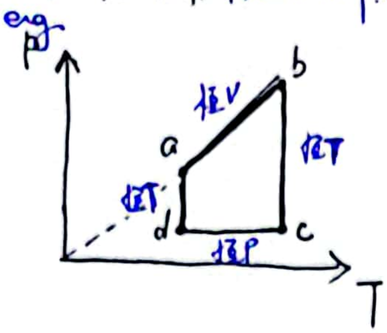
② 又依绝热方程得：$\Longrightarrow \frac{T_b-T_c}{T_a-T_d}=\frac{T_c}{T_d}=\left(\frac{V_d}{V_c}\right)^{\gamma-1}=\frac{1}{\left(\frac{V_c}{V_d}\right)^{\gamma-1}}$　令$\frac{V_c}{V_d}=\delta$压缩比

$\eta=1-\frac{1}{\delta^{\gamma-1}}$　$\delta\uparrow$．$\eta\uparrow$

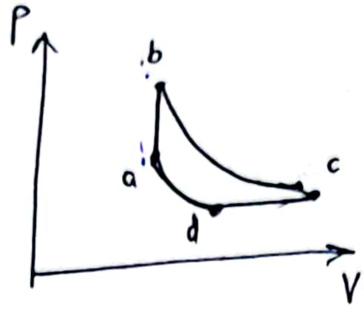
招 PT和TV、PV的转换

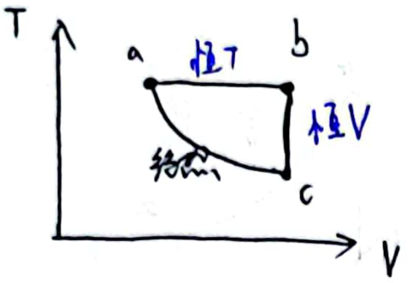
原理：PV=νRT. 依公式分析 函图分析

eg.

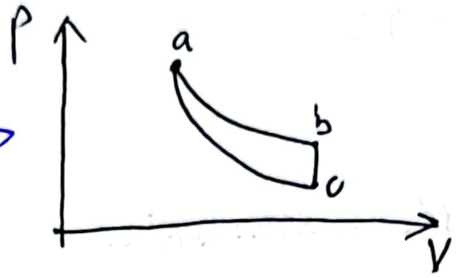


⇒





⇒



第6节 热力学第二定律.

一、开尔文表述. 热机效率

$$\eta = \frac{A}{Q_{吸}} = 1 - \frac{Q_{放}}{Q_{吸}}$$

讨论

① 如果 $\eta > 1$, $A > Q_{吸}$. $\Longrightarrow$ "第一类永动机是不可能制成".

② 如果 $\eta = 1$, $A = Q_{吸}$ ($Q_{放} = 0$). 单一热源热机

eg 海水温度降低1K, 释放的能量 ≈ 10^{14} t 标准煤的燃烧值.

$\Rightarrow$ $\eta = 1$的热机: "第二类永动机不可能制成的"

$\Rightarrow$ 1851年、开尔文表述: "不可能从单一热源吸热并使之完全转化为功而不引起其它变化" (不能理解为"热不能完全转化为功")

eg. 理想气体等T膨胀过程 $V\uparrow$ $P\downarrow$. 单一热源热机是不可能制成的

$\Rightarrow$ 热功转化有条件: 功热转化无条件.

即: 热功转化具有一定的方向性.

二、克劳修斯表述

1850年, 克劳修斯表述: 热量不能自动地由低温物体传向高温物体

不可能把热量由低温物体传向高温物体而不引起其他变化

不能理解为"热量不能由低温物体传向高温物体"

即: 热传递过程具有方向性.

2017.6 — 2018.6 — 2019.6 — 2020.6 — (2020.12)

大一 大二 大三 (大四)

学位

三、两种表述的等价性.

违反开尔文表述 $\Longleftrightarrow$ 违反克劳修斯表述

第7节 可逆过程与不可逆过程

定义

过程P. | 体系 A→B $\xrightarrow{逆向}$ B→A 则P为可逆过程
| 环境 C→D D→C

注:

(1). 可逆过程 ≠ 可以逆向进行的过程

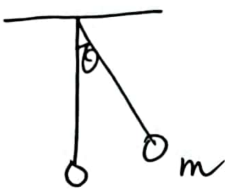
(2). 不可逆过程 ≠ 不能逆向进行的过程 ⇒只要不是可逆 则定为不可逆过程

(3) 可逆过程 $\xLeftrightarrow{不一定}$ 循环过程

体系+环境 体系

eg. 不可逆举例:

① 空气中的单摆



② 有限温差热传导过程. 是不可逆过程

任何一个非静态过程 都是不可逆过程.

③ 理想气体绝热自由膨胀. 不可逆

小结 ①任何一个实际发生的过程都是不可逆过程

②' 孤立体系、自发过程 —— 沿单方向进行 的不可逆过程

③' 无摩擦+准静态 才是可逆过程.

第8节 卡诺定理

(1) 在高温热源 T_1 和低温热源 T_2 2个恒定热源之间工作一切可逆热机，其效率都相同，都等于理想气体可逆卡诺热机效率。 $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

(2) 在高温热源 T_1 和低温热源 T_2 2个恒定热源之间工作的一切不可逆热机，其效率都不可能大于可逆热机的效率。 $\eta < 1 - \frac{T_2}{T_1}$

综上. $\eta \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$. ① = ：只对可逆热机成立

② $1 - \frac{T_2}{T_1}$ 是一切热机效率的最高上限

第9节. 热力学第二定律的统计意义. 熵的概念