数学
相思

“在尝试用一种纯粹理性主义来对高数进行归纳总结”

“在高资本社会，数学的唇正当存在被总结。”

20201229. 承认多元价值观 —— 伯林

目 录

- 通用背景、素养.
- 高数预备知识 《函数概念基础》

三大基本思路可组合

- 极限. 函数 / 数列
- 一元函数微分学.
- 一元函数积分学

概念
性质 ☆
计算 ☆
应用 ☆

- 多元函数微分学
- 二重积分.

数学下.

- 微分方程

Scanned with CamScanner

西电历年高数题型统计

① 选择题

② 判断题 . 小技巧: ① 多举反例
② 平常注意特例积累

③ 填空

④ 解答题

总体感受:

① 总体来说，还是基本思路比较多。但想达到很高水平，只需大量刷题。

② 在概念上考察还是比较多的。比如: 导数的概念、、连续与间断

数学思想:

所有数学的分析都是基于题目本身进行分析的 [结构转化]

① 多板块综合是正常的.

② 基本方法: 变形 eg. $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ eg. 题目出现数列: [可能用到数列求和思想]

$\boxed{\text{换元}}$: 整体视为新模块的思想

③ 关于绝对值的使用:

1°. 若本身 $a = b$. $\Rightarrow$ $|a| = |b|$.

2°. 若 $|a| = |b|$, 则去绝对值需要考虑.

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x^2-x|}} \Rightarrow$ 直接去绝对值 (分类)

④ 等式两边同时进行运算仍相等的情况

(1) 绝对相等时 求导、取积分. eg. $\int f(x)dx = \arctan x + C \xrightarrow{\text{取导}} f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

(2) "取 $\ln(\ )$"

⑤ 建模分析 = 函数分支 $\Rightarrow$ 数学的实际应用 $\Longrightarrow$ 数学建模的思想

⑥ 数学根本方向: 方程: 用/使条件成立, 从而求参

函数: 一个量与一个量变化关系

(注意: 只是能直接表达, 来建立方程/函数模型, 进而解题的不等思维上的题目

⑦ 无论什么时候. 极限 / 微积分 / 积分 (反积分) 微运算是函数根本应用

eg. $\int F(x)F'(x)dx = \int F(x)dF(x) = \frac{1}{2}F^2(x)$

⑧ 拿分: 补分步走

⑨ 多参式子处理：（作为一种基本的思路方式）

1°. 把非主元变量替换掉 eg. $f(t)=\lim_{x\to 0} t(1+x)^{\frac{2t}{x}} = \lim_{x\to 0} te^{2t}$

2° 分参进行运算. 在某些地方进行分参分析. eg. 之前考中的分参分析

⑩ 分参问题分析：建立新求参

找满足等式的参数. 直接找参数.

⑫ 根本数学方法：数学归纳法 ⟶ 要训练所以掌握这个方法

通用方法：变形

① 三角函数相关.

(i) 和差化积： 前4个

$$\begin{cases} \sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha-\sin\beta = \boxed{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} \\ \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

异 己 · 同 余

逆向使用 拆分成 $\boxed{多项式}$

常用来积积

正向使用凑积、便于求极限

eg $a>0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\sqrt{n+a}-\sin\sqrt{n}}{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cos\frac{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}{2}\sin\frac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n}}{2}}{a}$$

(ii) 万能公式：

$$\sin 2x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} \qquad \cos 2x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

$$\boxed{\tan\frac{t}{2}=\frac{\sin t}{1+\cos t}} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}$$

$$\boxed{\tan\frac{t}{2}=\frac{1-\cos t}{\sin t}} = \frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}$$

$\boxed{且.\ \csc x-\cot x=\frac{1-\cos t}{\sin t}}$ 积分时会用到

(iii) 常用： $\tan^2x+1=\sec^2x$

$1=\sin^2x+\cos^2x$ (拆成多项)

$\boxed{\sin^2x,\ \cos^2x \to \cos 2x + A}$ (降次扩角易积分)

$1+\sin 2x$

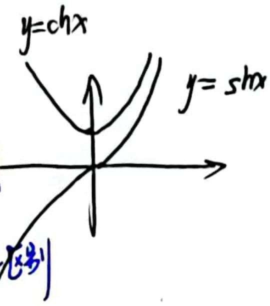
$=\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x$

② 多项式

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

③ 双曲线相关.

$$\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$



原函数

1° ~~$\mathrm{sh}^2x+\mathrm{ch}^2x=1$~~ $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$

$\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y$

$\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y+\mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y$ 的区别

2° 导数关系. $(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x \qquad (\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$

$(\mathrm{th}x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}$

$$\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$$

反函数

3° 反函数：

$$y=\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$
$$y=\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$
$$y=\mathrm{arth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

4° 反函数的导数：

$$(\mathrm{arsh}x)'=(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$(\mathrm{arch}x)'=(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$(\mathrm{arth}x)'=(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x})'=\frac{1}{1-x^2}$$

②不等式：

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

非主流巧妙变形

① $\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ （整式与分式之间的关系）

第一讲 高等数学预备知识

- 函数的概念与特性
  - 函数 $y=f(x)$
  - 反函数 $y=f^{-1}(x)$
  - 复合函数 $y=f[g(x)]$
  - 四种特性 — 重要结论
    - 有界性
    - 单调性
    - 奇偶性
    - 周期性
- 函数的图像

  客观世界中的3种表达函数

  - 直角坐标系下的图象 ($f(x,y)=0$)
    - 常见图象
      - 基本初等函数与初等函数
      - 分段函数
    - 图像变换
      - 平移变换
      - 对称变换
      - 伸缩变换
  - 极坐标系的图像 ($g(r,\theta)=0$)
    - 用描点法画常规图像
      - 心形线 (外摆线)
      - 玫瑰线
      - 阿基米德螺线
      - 伯努利双纽线
    - 用直角系观点画极坐标系下图像 ($r-\theta$)
  - 参数法—参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$
    - 摆线 (平摆线)
    - 星形线 (内摆线)

常用基础知识

- 数列
- 三角函数
- 指数运算法则
- 对数运算法则
- 一元二次方程基础
- 因式分解公式
- 阶乘与双阶乘
- 常用不等式

再补充

需要条件/方式：

① 根据函数形式（图像）确定一些正负

eg. $f(0)=f(2a)$. $F(x)=f(x)-f(x+a)$

时  $\Rightarrow$ $f(0)-f(a)$ 正负确定

故又 $F(0)=f(0)-f(a)$

$F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$

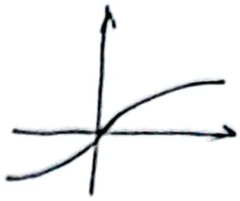
$\therefore$ $F(0)$ 与 $F(a)$ 必异号

$\therefore$ 在 $x\in(0,a)$ 之间. $\exists x_0\in[0,a]$. 使

$F(x_0)=0$. 即 $f(x_0)=f(x_0+a)$

例1.1.2. 求函数 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的表达式及其定义域

反双曲正弦



[分析] $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

① 导

$$(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\| $$

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\times\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$$

② 积

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

反复在题中出现，学多了心里才有数.

③ 反函

$e^{y}=x+\sqrt{x^2+1}$ ①'

$e^{-y}=-x+\sqrt{x^2+1}$ ②'

①'－②' $\Rightarrow e^{y}-e^{-y}=2x$

$\Rightarrow x=\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}$

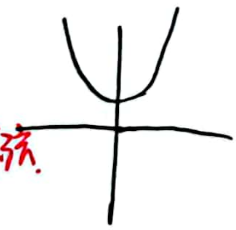
$x=f^{-1}(y)$

$\Rightarrow y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ 双曲正弦

④. $f(x)-f(-x)=0$ 奇

拓: $y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

悬链线 双曲余弦



法: $$\int_{-1}^{1}[\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\underbrace{x^2}_{(\frac{1}{3}x^3)'}]dx=0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

例1.1.3. 将下列各组函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 复合，求复合函数 $f[\varphi(x)]$

(1) $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\le 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$　　$\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geq 0\end{cases}$

$\Rightarrow f[\varphi(x)]$

① 广义化 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}2-\varphi(x), & \varphi(x)\le 0\\ \varphi(x)+2, & \varphi(x)>0\end{cases}$

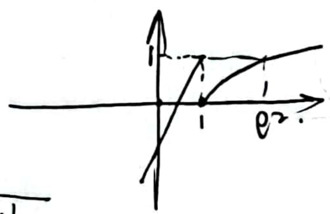
② 画图

③ 答案 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}2+x, & x\geq 0\\ x^2+2, & x<0\end{cases}$

练习1.1.1. 设 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geq 1\\ 2x-1, & x<1\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$

① 广义化 $f[f(x)]=\begin{cases}\ln\sqrt{f(x)}, & f(x)\geq 1\\ 2f(x)-1, & f(x)<1\end{cases}$

② 画图 $\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x$



③ $f[f(x)]=\begin{cases}\ln\sqrt{\frac{1}{2}\ln x}, & x\geq e^2\\ 2(\frac{1}{2}\ln x)-1, & 1\le x<e^2\\ 2(2x-1)-1, & x<1\end{cases}$

极限

意识.

① 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\square$ 是个运算思想，具体"$\square$"内是具体的内容

③ $x\to\infty$. $\Rightarrow$ $x\to+\infty$.. $x\to-\infty$

基本运算/过程：极限 →下面是函数极限所在方法的要点!!!（分别讨论求解）

思想：分析一种极限趋势的大小比较

函数极限（连续）

数列极限（离散）

常未填部分/单侧成法

（同除、同乘）

拆项、未知

具体变形，

当不能趋于0时，

常换元取倒。

直接公式变形 ← 直接本身变形 → （如：数列内部求 S_n，直接公式变形）

用定义（证明某极限存在）

用性质

唯一性 局部有界性 $\boxed{\text{（局部）保号性}}$ ※

运算规律

夹逼准则

单调有界准则

又是证明一般数列极限存在的重要方法

洛必达

泰勒公式（无穷小替换） $\frac{\sin x}{x}=1$ $(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

归结原则

无穷小比阶（其中要有分式上下不同 （$\infty=\frac{1}{0}$） 阶的比较）能拆也能用（取部分）

本质上两者可通用：

数列通过归结原则转化成函数.

函数也可以用单调有界来证极限存在.（抽象型）

Scanned with CamScanner

极限变形的通用思路 & 细节

① 上、下同乘，消 $\sqrt{\ }$、$\sqrt{\ }$

② 没法直接下得出结果，可以，以带极形式来分部表达

Scanned with CamScanner

其充要: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \Leftrightarrow$ 极限存在

最后求值前, 上下均为极限值

例① 经典用法强调 $\boxed{保号性 \to 脱帽法}$

eg. 设 $\lim \dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)^2} = -1$, 则函数在点 1 处取得极大值. (✓)

解:

$\because \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)^2} = -1 < 0$ 由极限保号性得 $\exists \delta>0$. 当 $x\in \mathring{U}(1,\delta)$ 时,

$\dfrac{f(x)-f(1)}{(x-1)^2} < 0 \quad \therefore f(x) < f(1)$ 则点 $x=1$ 处, 取极大值

例② 函数包括变限积分 → $\boxed{可用洛必达}$

计算: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$,

$\overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dt \cdot [\,e^{x^2}\,]}{xe^{2x^2}}$

$= 2\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$

$\overset{洛}{=} 2\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}}{(2x^2+1)e^{x^2}} = 2$

例③ 间断点, 如数极限 求经典题

eg. 讨论函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-xe^{nx}}{x+e^{nx}}$ 的连续性, 若有间断点, 判别其类型.

解

① $x<0$ 时. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-xe^{nx}}{x+e^{nx}} = \dfrac{1}{x}$

② $x>0$ 时. $f(x) \overset{同除 e^{nx}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{-nx}-x}{xe^{-nx}+1} = -x$

③ 当 $x=0$ 时, $f(x)=1$

时 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\infty$

$\therefore x=0$ 是第二类间断点

例④ 用极限定义来求/变形 如家化于特例函数考过

eg. 设函数 $f(x)$ 在实数 R 上有定义, 且对任何 x_1, x_2 有 $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 则 $f(x)$ 在 R 上连续且 $f(0)=0$

解:

① $x_1=x_2=0$. 得. $f(0)=0$

② 有: $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

③ 于是对 $\forall x_0 \in R$ 有

$0 = \lim\limits_{x-x_0\to 0} f(x-x_0) = \lim\limits_{x-x_0\to 0} [f(x) - f(x_0)]$

$= \lim\limits_{x-x_0\to 0} [f(x) - f(x_0)]$.

即: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

例5: 同例1. 极限经典用法续

eg. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续 且 $f(0)=0$. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{1-\cos x} = 2$, 则在 $x=0$ 处 $f(x)$ ——. 可导. 且 $f'(0)=0$、取得极小值

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}\cdot\frac{1}{x}=1.$$

分析左右导数： $\frac{f(x)}{x-0}\cdot\frac{1}{x}>0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-0}{x-0}\cdot\frac{1}{x^+}>0$ $\therefore \frac{f(x)-0}{x-0}>0.\therefore f'(x)>0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-0}{x-0}\cdot\frac{1}{x^-}<0$ $\therefore \frac{f(x)-0}{x-0}<0.$ $f'(x)<0$

故$x=0$处取得极小值.

求极限好题总结

① $x\to\infty$ 如何做？找中间变量

eg. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

$= e^{\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\ln(\frac{1}{x})}$

$= e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{-\ln x}{\frac{1}{x}}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to0^+}1\times\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}$

$= e^0$

$=1$

例2：乘积形式 → 通过构造分母来化简 / 特殊乘积形式

eg. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\quad(x\neq0)$

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\times2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}}$

$\underline{\underline{二倍角化简}}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}}$

$\underline{\underline{要学会提出极限存在且不为0的项}}\ \frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$

例3：主动构造 分式形式；利用 $\infty\cdot0$

eg. 确定常数 a, b，使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax-b)=0$

解：

① 先求出 a 需分离出

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}-a-\frac{b}{x}\right)=0$

$\because\ \infty\cdot0=0$

$\therefore\ \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}-a-\frac{b}{x}=0$

故 $-1-a=0$ 故 $a=-1$.

② 后求 b 直接分离求得的

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}-x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}+1\right)=0$

// 原答案求 b 是凑分母，时不大会故直接分离

用定义证明的例题

$\boxed{\text{关键：获得线性关系}}$

① $\forall \varepsilon>0$

②. 写距离 欲使 $|\underset{\lim}{f(x)} - A| < \varepsilon$

③ 反解 使之满足的条件 得 $X > g(\varepsilon)$ $x\to\infty$

$|x-a| < g(\varepsilon)$ $x\to a$

③ 写 取 $X=[g(x)]$ (有时+1)

则总有 故极限成立.

② 写 取 $0<|x-a|<\delta$ ($\delta=g(\varepsilon)$)

则极限成立.

另当 ε 取具体程度，可进一步求出具体 X 值

例1：先有变形，再列使之成立的条件

eg. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$

① $\because \sin x \le 1. \Rightarrow \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$

② 欲使 $\forall\varepsilon>0$, $|\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - 0| < \varepsilon$ 即：$\frac{1}{\sqrt{x}} \le \varepsilon$

③ 反解得：$X > \frac{1}{\varepsilon^2}$

④ 取 $X = \frac{1}{\varepsilon^2}$，则当 $x > X$ 时，有 $|\frac{\sin x}{\sqrt{x}} - 0| < \varepsilon$

例2：不好直接求 x 与 ε 线性关系，则主动找关系，

$\lim\limits_{x\to 2} (x^2-6x+10) = 2$.

解：① 找 ε.

$\because$ 要找 $|(x^2+6x+10)-2| < \varepsilon$ 的 ε. 且

$|x-2| < g(\varepsilon)$ 中 $g(\varepsilon)$ 极小.

本题 不好从 $|(x^2+6x+10)-2| < \varepsilon$ 中直接算出来

$\therefore$ 直接 先缩小个范围 $|x-2|<1$.（这个"1"可任选）

则 $|x-4| < 3$

$|(x^2+6x+10)-2| = |x-2||x-4| < 3|x-2| < \varepsilon$

令 $3|x-2| < \varepsilon$. 得 $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$

得到 $|x-2|$ 的值

② 取 $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$

则. $0 < |x-2| < \delta$，故存在

例3：涉及"∞" $\Leftrightarrow$ "$\frac{1}{0}$" 一个理解，并用极限概念来证。

e.g. 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

则 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$

解：

① 分析 "$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$" //注意趋于无穷的理解

对于任意常数 A. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) > A$ 均成立，

不妨取常数 $M=1$.

$\exists X_1 > 0$，当 $|x| > X_1$ 时 $|f(x)| > M = 1$.

② 分析条件2："$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) = 0$"

$\forall\varepsilon>0$，$\exists X_2 > 0$. 当 $|x| > X_2$ 时.

$|f(x)\cdot g(x) - 0| < \varepsilon$.

③ $\Rightarrow$ 推出结果

取公共部分（交集）. 使上面条件均满足.

$X = \max\{X_1, X_2\}$.

则 $|x| > X$ 时，恒有 $|g(x) - 0|$

$= \underbrace{|f(x)g(x)|}_{<\varepsilon} \underbrace{|\frac{1}{f(x)}|}_{\text{趋于}0} < \varepsilon$

$\therefore$ 证得：$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$

第3节 函数极限与连续性

已定式

①上下有化简，配凑成已定式

①取极限时 先作互换的一些项 然后自然消去

②极限是个数 分母某值

③极限是个状态 要思考这个状态

④难点 不同极限形式的区别与处理

- 函数极限（偏重计算）
  - 邻域
  - 定义
  - 性质
    - 唯一性
    - 局部有界性
    - 局部保号性
  - 七种未定式的计算（极 限 为 已定式）
    - 运算规则
    - 夹逼准则
    - 洛必达法则
    - 泰勒公式 ★★★
      - 公式
      - 展开原则
    - 归结原则 [数列与函数]
  - 无穷小比阶（重要）
  - 多种方法搭配使用
- 连续与间断
  - 连续点的应用
  - 间断点的定义与分类
    - 可去间断点
    - 跳跃间断点
    - 无穷间断点
    - 振荡间断点

极限的应用

给定义，求极限

补充：极限求法
- 已定式：利用连续性，函数的四则运算
- 未定式：转化成已定式的形式

一、函数极限

1.邻域

(1)一维 邻域 $U(x_0)$

δ邻域 $U(x_0,\delta)=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$

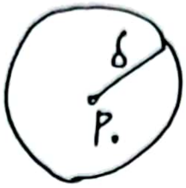
去心δ邻域: $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$

左右δ邻域　右δ邻域 $U^{+}(x_0,\delta)$

左 $U^{-}(x_0,\delta)$

(2)二维 δ邻域、

去心δ邻域:



区分: —— 区间

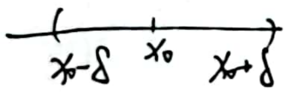
 区域

2.函数极限的定义

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使当$0<|x-x_0|<\delta$时, 恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$. ε-δ语言

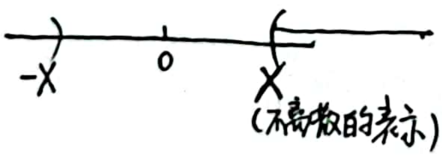
注: 在非记号处考虑、都要考虑左右的.

放大镜:



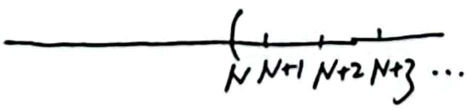
$x\to x_0$ $\begin{cases} x\to x_0^{+} ✓ \\ x\to x_0^{-} ✓ \end{cases}$

望远镜



$x\to\infty$ $\begin{cases} x\to+\infty ✓ \\ x\to-\infty ✓ \end{cases}$

类似.



$n\to\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$　$\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, 当$|x|>X$时, $|f(x)-A|<\varepsilon$

函数极限的充要条件:

注2: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$

脱帽法

如: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　$\sin x\sim x$，$x\to 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{x}=1+\alpha(x)$

即: $\alpha(x)=\dfrac{\sin x}{x}-1$ 这就叫误差

$\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{1}=0$

$-\frac{1}{2}x^2$

$x\to 0$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$　　$\boxed{\alpha(x)\text{与 2次方同阶}}$

3. 函数极限的性质:

唯一性: 存在即唯一

局部有界性　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在正常数 M 和 δ，使当 $0<|x-x_0|<\delta$，有 $|f(x)|\le M$ 核心

局部保号性　如果 $f(x)\to A(x\to x_0)$，且 $A>0$(或 $A<0$)，那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)

[证]　$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$. $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

$\Rightarrow -\beta< f(x)-A<\varepsilon$

$\Rightarrow A-\beta< f(x)< A+\beta$　　用条件

$\boxed{\text{取 }\varepsilon=\frac{A}{2}>0}\Rightarrow f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0$. 证毕　　推结论

取一个特殊值

$\lim$我 $=$ 你.

"即使你给我整个世界，我也只在你身边."

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \underset{(<0)}{>0}$，则 $x\to x_0$ 时，$f(x) \underset{(<0)}{>0}$ $\Rightarrow$ 脱帽法.

若 $f(x) \overset{(\le 0)}{\ge 0}$，存在 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ $\Big\}$ 则 $A \overset{(\le 0)}{\ge 0}$

戴帽法.

极限唯一性.

注:

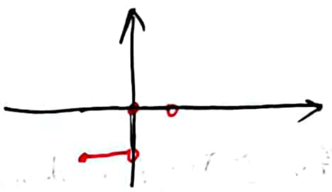
① $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$ 不存在，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=\boxed{+\infty}$，$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$，根据唯一性，得原极限不存在.

这个是不存在

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$ 不存在. $\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{-x}=-1\end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ 原极限不存在.

③ $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在

④ $\lim\limits_{x\to 0}[x]$ 不存在



$\lim\limits_{x\to0^+}[x]=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}[x]=-1$

例1.3.1. 设a为常数，且 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{\frac1x}-\pi}{e^{\frac2x}+1}+a\cdot\arctan\dfrac1x\right)$ 存在，求a的值，并计算此极限.

考真题改编

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{\frac1x}-\pi}{e^{\frac2x}+1}+a\cdot\arctan\frac1x\right)$$

part1: $\dfrac{e^{\frac1x}-\pi}{(e^{\frac1x})^2+1}=\dfrac{\dfrac{1}{e^{\frac1x}}-\dfrac{\pi}{(e^{\frac1x})^2}}{1+\dfrac{1}{(e^{\frac1x})^2}}=0$

part2: $a\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ 原式 $=\frac{\pi}{2}\cdot a$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-x}{e^{\frac{2}{x}}+1}+a\cdot\arctan\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\pi-\frac{\pi}{2}a$$

上面是用极限

故. $-\pi-\frac{\pi}{2}a=\frac{\pi}{2}a\to\boxed{a=-1}$

∴极限 $I=-\frac{\pi}{2}$

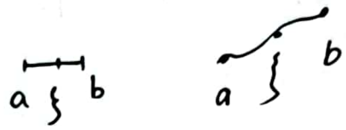
这个是列方程解（用极限的唯一性）

唯一性

2、局部有界性（不是极限单独有的）

?拉氏的作用是什么?

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$



1° 若 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)=$常数. ✓

2° 若 $f'(x)\to+\infty$，则 $f(x)\to+\infty$. ✓

变化率

$\boxed{\text{用导数控制函数}}$

例：用中值定理去解决问题. $f(x)$在有限区间(a,b)内有界，则$f(x)$在该区间内有界

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)\Rightarrow$$

$$|f(x)|=|f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)|$$

$$\leqslant|f(x_0)|+|f'(\xi)||x-x_0|$$

$$\leqslant|f(x_0)|+k(b-a)\overset{令}{=}M\quad ∴有界$$

导数在这个有界

比较有局限

例 1.3.2. 函数 $f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界

(真题)

重要是以考分析，~~积~~一般不分析本身性质。

特点，一定在边界 { 考点，思考多方面

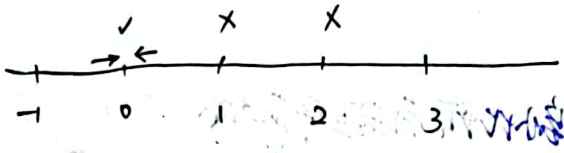
[先引例]

☆

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \text{存在} \\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \text{存在.} \\ f(x)\ \text{在}\ (a,b)\ \text{内连续}\end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\ \text{在}\ [a,b]\ \text{内有界}$$

有界 { 极限，连续

[分析] 分析边界的极限的大小，进而判断是否有界。⟶ 作图分析



$$\lim_{x\to0^-}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = -\frac{-\sin2}{(-1)\times4} = -\frac{\sin2}{4} \Rightarrow \text{得}\exists$$ [不论这个数多么古怪]

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}\frac{\sin(x-2)}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{\sin2}{4} \Rightarrow \text{得}\exists$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \frac{-\sin1}{\text{趋于}0}\ \infty \Rightarrow \text{无界}$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \infty \Rightarrow \text{无界}$$

分析: $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{|x|}{x}\frac{\sin(x-2)}{(x-1)(x-2)^2} = -1\times\frac{\sin(-3)}{(-2)\times9} = \frac{-\sin3}{18}$

4. 极限运算规律

前提

若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$ 那么：

加/减/数乘 ① $\lim[kf(x)\pm l g(x)] = k\lim f(x) \pm l\lim g(x) = kA\pm lB$.

乘 ② $\lim[f(x)\cdot g(x)] = \lim f(x)\cdot \lim g(x) = A\cdot B$ $\Rightarrow$ 2° $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$

3° 有界×无穷小 = 无穷小

除、 ③ $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$

④ 复合 = 嵌套

5. 夹逼准则

① $\boxed{g(x)\le f(x)\le h(x)}$ 适当同时放缩位置

② $\lim g(x)=A$，$\lim h(x)=A$

则 $\lim f(x)$ 存在，且 $\lim f(x)=A$

6. 洛必达法则.

$\boxed{\text{“}\frac{0}{0}\text{” 或 “}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}$ 洛必达有一定限度，不是非常好用

这句之后的无穷小比阶 有相互呼应之处 " 万物看似无规律，实则有内在规律。

注：洛必达失效的时候：

eg. $\lim\limits_{x\to} \dfrac{f(x)}{F(x)} == \lim\limits_{x\to} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$.

$A \Leftarrow A$ （A可为0或非零常数）

$A \Leftarrow \infty$

若 $\lim\limits_{x\to} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在，则洛必达失效.

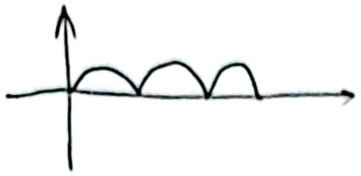
题：$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} == \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{1}$ 报告：极限不存在

失效 $\not\Leftarrow$ 存在...

事实上，$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

事实上，这里可直接约分

考研：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_a^x|\sin t|\,dt}{x}$ 连续积分，必可导



$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_a^x|\sin t|\,dt}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{1}$ 故洛必达失效

(注：这个问题有些难度，之后知识综合了，来考虑)

7.泰勒公式 → 泰勒展开，最后又快，又能前后抵 eg: $e^{\sin x}-e^{x}\sim\sin x-x\sim-\frac{1}{6}x^3$

思想：将 $f(x)=\sum a_n\cdot x^n$. 统一美

第一，泰勒公式熟稔于心 $(x\to0)$

奇 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$ —— 佩亚诺余项 微不足道… $\sin x=x-\frac{x^3}{6}$

偶 $\cos x=x^0-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}\cdot x^4+o(x^4)$ $\cos x=1-\frac{x^2}{2}$

(考2019). $x>0$时，$1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+\cdots=$ $\underline{\cos\sqrt{x}}$

数三

$\arcsin x=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$ $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ $\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$ $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+o(x^2)$

[注] $x-\sin x=\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

$\Rightarrow x-\sin x\approx\frac{1}{6}x^3$ (中学写法)

$\Rightarrow \boxed{x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3\ (x\to0)\ \text{等价替换}}$ ×

$狗-\sin 狗\sim\frac{1}{6}(狗)^3\ (狗\to0)$

再说一例：

(1) $\arcsin x - x = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

$\Rightarrow \arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3 \quad (x\to 0)$

(2) $x-\tan x \sim x-(x+\frac{x^3}{3}) = -\frac{x^3}{3}$

(2019). $x-\tan x$ 与 cx^k 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，则 $c=\underline{-\frac{1}{3}}$ $k=\underline{3}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{cx^k} = \frac{0}{0} = 1$$

$\frac{1}{6}\sin^3 x$

(08.10'). 真. $\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x - \sin(\sin x)]\sin x}{x^4} = \frac{1}{6}$

第二，要掌握高阶$\boxed{\text{无穷小}}$的计算规则.

部分无穷小替换前提条件：为乘积形式

常用的等价无穷小：先移、再用等价移小移项

当 $x\to 0$ 时，常用等价无穷小有：

$\sin x\sim x$. $\tan x\sim x$. $\arcsin x\sim x$, $\arctan x\sim x$

$\ln(1+x)\sim x$ $e^x-1\sim x$

$a^x-1\sim x\ln a$. $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

$(1+x)^a-1\sim ax$ → 再高阶就要用泰勒公式

① 有限个无穷小的和是无穷小.

② 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

③ 有限个无穷小的乘积是无穷小.

④ 无穷小的运算

设 m,n 均为正整数. 则

a. $o(x^m)\pm o(x^n) = o(x^l)$, $l=\min\{m,n\}$ (加减法时低阶吸收高阶)

b. $o(x^m)\cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$. (乘法时阶数累加)

$x^m\cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$

c. $o(x^m) = o(kx^m) = k\cdot o(x^m)$, $k\neq 0$ 且为常数 (非零常数相乘不影响阶数)

例: $o(x^3)+o(x^3) = o(x^3)$. $o(x^3)-o(x^3) = o(x^3)$

注：不要做数量运算.

实际可表达为

$o_1(x^3)-o_2(x^3) = o_3(x^3)$

第三，用泰勒公式求极限时，函数应展开到 x 的 n 次幂.

(1) $\frac{A}{B}$型，适用于"上下同阶原则"

只要能替换，则可都可替代 e.g. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}$ 可先2替换 $\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}$

(2) A-B型，适用于"幂次最低"原则

e.g. $\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\cos x=1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{x^4}{8}+o(x^4)$$

$$\Rightarrow \cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$

$$\Rightarrow \cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}\sim-\frac{1}{12}x^4 \quad x\to 0.$$

$x+\sin x\sim 2x$

$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$

真题：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{e^{x^4}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x+x)(\sin x-x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot\left(-\frac{1}{6}x^3\right)}{x^4}=-\frac{1}{3}$

$e^{x^4}-1\sim x^4$

8. 归结原则（海涅定理）（不用证）$\boxed{\text{数列与函数关联.}}$（不出现大学教材中，但考研考）

设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，则

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对任何 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$ $(x_0\neq x_n)$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ 存在.

不要单调

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在 $\Leftrightarrow$ $x_n\to x_0$ $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ 存在

（连续）　　（离散）

① "$\Leftarrow$" 往往用于证明不存在.

例 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

取 $x_n=\frac{1}{n\pi}\to 0$，$n\to\infty$；则有 $f(x_n)=0$. ，$f(x_n)=n\pi\cdot\boxed{\sin n\pi}\to 0$

取 $x_n'=\frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}\to 0$，$n\to\infty$，则 $f(x_n')=0$. 　$f(x_n')=(2n+\frac{1}{2})\pi\boxed{\sin(2n\pi+\frac{1}{2}\pi)}=(2n+\frac{1}{2})\pi\to\infty$

② "⇒" 去计算 ☆

归结原则 → 不断转换多种情况

例：1.3.14. 真题 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}$（n为正整数）　$\left(\frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{n^2}$

(一) 先证 函数极限存在

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \overset{1^\infty}{=\!=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\tan x}{x}}$

常取无穷小

u^v 幂指函数
$u^v = e^{v\ln u}$

$\ln(x+1)\sim x$, $x\to 0$
$\ln(1+g(x))\sim g(x)$, $g(x)\to 0$　考研最爱·中间变量

∴ 原式可有：<补条件> 没条件，也要创造条件

$\ln\left(1+\frac{\tan x}{x}-1\right)\sim\boxed{\frac{\tan x}{x}-1}$，$\frac{\tan x}{x}-1\to 0$

再例：$\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)\sim\boxed{\frac{\sin x}{x}-1}$，$\frac{\sin x}{x}\to 1$，$x\to 0$

$\frac{\tan x-x}{x}\sim\frac{x^3}{3}$
$\frac{\sin x-x}{x}\sim-\frac{1}{6}x^3$
泰勒公式再用

∴回归原题：原式 $= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\tan x-x}{x}} = e^{\frac{1}{3}}$

就是为了同阶而消去

(二) 然后证·数列成立.

取 $x_n=\frac{1}{n}$，$n\to\infty$，$x_n\to 0$；由归结原则 ⇒ $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}=e^{\frac{1}{3}}$

①幂指函数变形

②.泰勒公式中无穷小. $\ln(x+1)\sim x$ 的变形与应用.

小结：①函数常用 $x\to 0$ 取极限；而数列常用 $x\to\infty$ 取极限.

9. 无穷小比阶 → 必考题 <注意上下同阶比较>

设在自变量的同一变化中，$\lim\alpha(x)=0$ $\lim\beta(x)=0$ 且 $\beta(x)\neq0$ 则

① 若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$

② 若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小

☆③ 若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\neq0$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小

④ 若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小 记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$

⑤ 若 $\lim\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=c\neq0$，$k>0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小

考研三种极限、状态.

注：并不是任意2个无穷小都可进行比阶的。

$x\sin\frac{1}{x}\to0$

$x^2\to0$

但 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=$ 不存在.

考试：仔细思考基本函数变换趋势.

不存在极限不比阶.

2. 七种未定式的计算 ——基础就是:定式 ~~[illegible]~~

$\Big]\Rightarrow$ 不论定式还是未定式)都要转变。最后再看值存或不存在,得极限。

本节内容极其重要,它是高等数学计算的基础。高度重视,充分训练。

对于 $\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)$,自变量 x 的变化趋势共有六种情形:$x\to x_0^+$ $(x>x_0)$,$x\to x_0^-$ $(x<x_0)$,

$x\to x_0$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$,$x\to\infty$,在不必要进行区别时,统一记成"$x\to\cdot$"

(1) 化简是第一步,切记。是

① 提出极限不为0的因式。 eg. $e^{f(x)}-e^{g(x)}=e^{g(x)}[e^{f(x)-g(x)}-1]$

② 等价无穷小代换

③ 恒等变形(基本的恒等变形法如提公因式、拆项、合并,分子分母同除变量的最高次幂等。高级的恒等变形如变量代换,也叫换元法等)需要强调的是很多问题不化简就计算会复杂,甚至算不出结果。

(2) 判断极限结果类型 七种 All.

第一组: 基本 $\frac{0}{0}$. $\frac{\infty}{\infty}$ (无穷比阶)

来转变 $0\cdot\infty$ $=\begin{cases}\frac{0}{\frac{1}{\infty}} \ (=\frac{0}{0}) \\ \frac{\infty}{\frac{1}{0}} \ (=\frac{\infty}{\infty})\end{cases}$ 来转变 除法

注:设置分母有原则,简单因式才下放。

$\begin{cases}简单: x^a.\ e^{px} \\ 复杂: \ln x,\ \arcsin x,\ \arctan x.\end{cases}$

第二组:

$\infty-\infty$. 你通分 $\begin{cases}(1)\ 有分母则通分 \\ (2)\ 没分母,则创造分母来通分\end{cases}$ 和差化积

第三组.

∞^0. 0^0. 1^∞.

$u^v=e^{v\ln u}$

$\begin{cases}\infty^0 \longrightarrow e^{0\cdot\infty} \ \text{无穷大} \\ 0^0 \longrightarrow e^{0\cdot\infty} \ \text{无穷小} \\ 1^\infty \longrightarrow e^{\infty\cdot 0}\end{cases}$

…… "$\frac{0}{0}$" "$\frac{\infty}{\infty}$" "$0\cdot\infty$"

例 1.3.3. 求极限. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$ "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{洛}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot 2\cdot\frac{1}{x^3}}{100\cdot x^{99}} = \frac{1}{50}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{102}}$$

经验启发:

①洛必达使用之后.形式变得更复杂了。而硬不可使用.

②可用"倒数换元"来简化式子.[小变换技巧].

令 $\boxed{\frac{1}{x^2}} = \boxed{\frac{t}{1}}$

$$原式 = \lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{-50}} = \boxed{\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^{t}}} = 0$$ [求极限要理解那个过程]

处理之后再用洛必达.

例:1.3.6. 求极限. $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x)$ "$\infty,0$"

[分析]

$$\lim_{x\to-\infty} \underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{x}(\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\sqrt{x^2+100}+x})$$ 定性分析.

经验启发: 只根号.的处理方式:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

[解]. $原式 = \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot\dfrac{x^2+100-x^2}{\sqrt{x^2+100}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}$

$$\overset{x=-t}{=\!=} \lim_{t\to\infty}\frac{-100t}{\sqrt{t^2+100}+t} = \frac{-100}{\sqrt{1+\frac{100}{t^2}}+1} = -50$$

如：① $\lim\limits_{x\to0^+} x\cdot\ln x \doteq \lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \xlongequal[\text{洛}]{\frac{0}{0}} \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = -\lim\limits_{x\to0^+} x\ln^2 x$ (×) 复

② $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to0^+} x = 0$

例：1.3.7. 求极限 $\lim\limits_{x\to1^-} \ln x\cdot\ln(1-x)$ "$0\cdot\infty$"

①化简：等价无穷小.

$\lim\limits_{x\to1^-} \underset{\downarrow}{\ln x}\cdot\ln(1-x)$ $\ln x \sim x-1 \quad x\to1$

切了.

② 原式 $= \lim\limits_{x\to1^-}(x-1)\ln(1-x)$

$\xlongequal{\text{令}1-x=t} -\lim\limits_{t\to0^+} t\ln t = 0$

换元

以上极限基本是化简+洛必达，接下来看下泰勒.

例：1.3.8 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{\sin x-\tan x}$

补充：$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

[分析]. $x\to0$. $\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$\arcsin x = x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

$\arctan x = x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$\Rightarrow$ $\sin x-\tan x = -\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$

$\arcsin x-\arctan x = \frac{1}{2}x^3+o(x^3)$

∴ 原式 $= -1$

例1.3.9. 求 $I=\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\left[\frac{10}{x}\right]$. ⇒ 转换成夹逼形式

[分析] 直接分析 $\left[\frac{10}{x}\right]$ 的极限难以理解. 故套成

$$\frac{10}{x}-1<\left[\frac{10}{x}\right]\leqslant\frac{10}{x}$$

而有了不等式. 夹逼形式可见用处

① $x>0$, $\quad 10-x< x\left[\frac{10}{x}\right]\leqslant 10$

$x\to 0^{+}$. $\quad 10 \Rightarrow 10 \Leftarrow 10$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^{+}} x\left[\frac{10}{x}\right]=10$

② $x<0$ $\quad 10-x> x\left[\frac{10}{x}\right]\geqslant 10$

$x\to 0^{-}$. $\quad 10 > 10 \geqslant 10$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{10}{x}\right]=10$.

例1.3.10 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)$ ("∞−∞" ⟶用通分)

$$原式=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^4}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{1}{2}\sin 4x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-\frac{1}{2}\cos 4x\cdot 4}{12x^2}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2} \sim \frac{1}{2}(4x)^2$$

$\because 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

$$=\frac{1}{6}\times 8=\frac{4}{3}$$

基本功要扎实!

例1.3.11. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$ "$\infty-\infty$"

①先做倒代换 → 创造分母 → 通分

$$\text{原式} \xlongequal{x=\frac{1}{t}} \lim_{t\to0^+}\left(\frac{e^t-1}{t^2}-\frac{1}{t}\right)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-t-1}{t^2}$$

$x\to0$ 时 $\boxed{e^x-1-x=\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$ 有的同学为什么计算速度那么快，因为ta记得住.

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{2}$.

例1.3.12. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$ (∞^0)

$$\text{原式}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}}$$

$$\xlongequal{\text{洛}} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1}}$$

$$=1$$

☆. 补: $\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C=\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

例1.3.13、求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中n是给定的正整数. "$1^\infty$"

公式升级指导. $\lim u^v \xlongequal{1^\infty} e^{\lim v\boxed{\ln u}}=e^{\lim v\boxed{(u-1)}}$

$$\text{原式}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e}{x}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e}{x}\left(\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)}{n}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e}{x}\times\frac{1}{n}\times\left[(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)\right]}$$

$$=e^{\frac{e}{n}\lim\limits_{x\to0}(1+2+\cdots+n)}=e^{\frac{e}{n}\times\frac{(1+n)n}{2}}=e^{\frac{(1+n)e}{2}}$$

3、已知某一极限，求另一极限。【本质是极限的表达与转化】→ 解答题

例1.3.15. 如果 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{f(x)}=($ $)$

解法一：脱帽法.（通俗、普适的方法）

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=A$ （注意：存在只能是个数）

$\xRightarrow{\text{脱帽}}$ $\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=A+\alpha$. $\Rightarrow$

$f(x)=Ax^4+\alpha x^4-x+\sin x$

$\Rightarrow$ 反例仅（形式只是命题的一种手段.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{Ax^4+\alpha x^4-(x-\sin x)}{x^3}$$

$$=\underbrace{0+0}_{\text{无穷小代阶}}\underbrace{-\frac{1}{6}}_{\text{可求到精度}}$$

$$=-\frac{1}{6}$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{f(x)}=-6$.

解法二：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}\cdot x=A\cdot x=0$.（取极限处理）

即 $\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\dfrac{x-\sin x}{x^3}}_{\frac{1}{6}}+\dfrac{f(x)}{x^3}=0$

Scanned with CamScanner

"$\frac{0}{0}$" "∞" "..."

4. 已知极限反求参数.（反问题）（方程题）

例：1.3.16. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$. 求常数 $a.b$. 使用洛必达>

解[分析]. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-a)x-(\frac{1}{2}+b)x^2+o(x^2)}{x^2}=2\neq 0$. 同阶

$$\Rightarrow\begin{cases}1-a=0\\ -(\frac{1}{2}+b)=2\end{cases}\quad\begin{cases}a=1\\ b=-\frac{5}{2}\end{cases}$$

[注] $x-\ln(1+x)=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

$\Rightarrow x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2\sim 1-\cos x$

5. 无穷小比阶. 注意：等价是相当，同阶可以近似

例1.3.17 设当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则 $a.b=$（　　）

[解]

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(ax^2+bx+1)}{x^2}=0$$

$$\therefore\lim_{x\to 0}\frac{(1-b)x+(\frac{1}{2}-a)x^2+o(x^2)}{x^2}=0$$

$$\begin{cases}1-b=0\\ \frac{1}{2}-a=0\end{cases}\quad\begin{cases}b=1\\ a=\frac{1}{2}\end{cases}$$

例1.3.19 设 $\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)\sim-\frac{1}{2}x^2$

$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})\sim x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=x^{\frac{5}{6}}$

$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1=\frac{1}{3}x'$

低阶到高阶排序为：$\alpha_2.\alpha_3.\alpha_1$

洛必达的应用情况

① 抽象函数

e.g. 设$f''(x)$存在，求极限$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$

解：原式 $\underline{\underline{\text{洛}}}$ $\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}=2f''(x_0)$

罗尔定理.

难点：①难以识别；

②变形不好想

对策：多种尝试.

例1：变形.易与拉氏混

e.g. 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明：在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$.

解：原式$\Leftrightarrow$ $\{[f(x)-f(a)](b-x)\}'|_{x=\xi}=0$

令$F(x)=[f(x)-f(a)](b-x)$ 且. $F(b)=0$ $F(a)=0$

故$\exists\xi\in(a,b)$上.使得$F'(\xi)=0$

二.函数的连续与间断点 ⇒ 逐点的概念

6.函数的连续与间断

例1.3.20. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\le 0\\ e^x(\sin x+\cos x), & x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,则 $a=$ ______

[分析] 讨论间断,只看两类点:

① 分段函数的分段点.

② 函数的无定义点.

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)$$

$$f(0)=a,\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}e^x(\sin x+\cos x)=1,\quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2x+a)=a$$

$\therefore a=1$

例1.3.22. 设 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$,则 $f(x)$ ______.

[分析] $x=1$. $x=0$. 无定义 $f(1)$ 不∃

$f(0)$ 不∃.

① $\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{|x-1|}\sin 1=\sin 1\\ \displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{-(x-1)}\sin 1=-\sin 1\end{cases}$ $\therefore x=1$ 是跳跃间断点.

② $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{1}\sin x=\lim_{x\to 0}x\cdot\ln|x|=0$ $\therefore x=0$ 是可去间断点

连续与间断方面的题

注:
①可利用临界分析布局来判断不可连续

例1:

$y=\operatorname{sgn}(\sin\frac{\pi}{x})$ 的间断点

解:

~~当 $x=\frac{1}{k}$ (k=~~

① 分析

$$y=\begin{cases}1, & \sin\frac{\pi}{x}>0\\ 0, & \sin\frac{\pi}{x}=0\\ -1, & \sin\frac{\pi}{x}<0\end{cases}$$

② 分类间断点:

1° 当 $x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1,\pm2\cdots)$ 时, $\sin\frac{\pi}{x}=0$

因此,它们是第一类(可去的)间断点

2° 当 $x=0$,

$\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{\pi}{x}$ 不存在,故 $x=0$ 是第二类间断点

第二讲 数列极限.（离散函数的极限）

数列极限
- 引言.
- 用定义 ☆
- 用性质
  - 唯一性
  - 有界性
  - 保号性
- 用运算法则
- 用夹逼准则
- 用单调有界准则 ☆☆☆ ⇒ 压轴题考点.

极限存在准则

⇒ 求极限(或证明极限的存在性)（求解与证明，本质是一样的，只是一个结果未知，一个结果已知。）

数列 极限

数列极限

①用定义证明极限成立：

1° 基本思路

2° 会有放缩 ⇒ 目的为了解出分母 ε 的解

例1、子数列回推数列成立

e.g. 对于数列 $\{x_n\}$，若 $x_{2k-1} \to a\ (k\to\infty)$，

$x_{2k} \to a.\ (k\to\infty)$，证明：$x_n \to a\ (n\to\infty)$

解：①对子数列用~~放缩~~定义分析。

$x_{2k-1} \to a.\ (k\to\infty)$.

$\therefore \forall \varepsilon>0, \exists K_1$，当 $2k-1>2K_1-1$ 时，

$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$.

$x_{2k} \to a\ (k\to\infty)$

$\therefore \forall \varepsilon>0, \exists K_2$，当 $2k>2K_2$ 时，

$|x_{2k}-a|<\varepsilon$.

$x_{2k} \to a\ (k\to\infty)$

②取较大值定结果

取 $N=\max\{N_1, N_2\}$.

当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

即有 $x_n \to a\ (n\to\infty)$

1. 引导

证明极限：
① 先写距离．$|x_n - a|$ （这是个[illegible]，也是个条件）（也可作为证明结果）
② 反解出 n 的表达．$n > g(\varepsilon)$ （结论）→ 需得出 N，[illegible]
③ 取 $N = [g(\varepsilon)] + 1$ $(n > N)$

例 1.2.1．用定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=1$

$\forall \varepsilon > 0$

① 写距离 $\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right| < \varepsilon$

② $\frac{1}{n} < \varepsilon \xrightarrow[\text{反解}n]{} n > \frac{1}{\varepsilon}$

③ 取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$

$\forall \varepsilon > 0$ 故当 $n > N$ 时，就有 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 使

$$\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right| < \varepsilon \Rightarrow \text{证毕.}$$

习 1.2.1 用定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty} q^n = 0$（$q$ 为常数且 $|q|<1$）

$\forall \varepsilon > 0$

① 写距离 $|q^n - 0| < \varepsilon$．（不妨设 $\varepsilon < 1$）

② $|q^n| < \varepsilon \xrightarrow[\text{反解}n]{} n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$

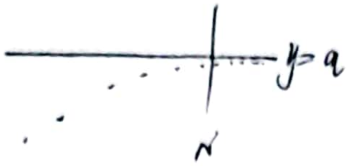
③ 取 $N = [\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}] + 1$

故．$n > N$ 时，$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，有 $|q^n - 0| < \varepsilon$．

故．$\lim\limits_{x\to\infty} q^n = 0$

2. 数列极限的定义

$\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$



过程

$x_n \to a.\ (n\to\infty)$

否则是发散的

常用语言：ε-N语言 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0.\ \exists N>0$时，当 $n>N$时 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

例1.1.2. 证明：若 $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = A$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} |a_n| = |A|$ 　已知 ⟶ 求[illegible]

[分析] $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0.\ \exists N>0$ 当 $n>N$时，恒有 $|a_n - A| < \varepsilon$

由不等式 $\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$ 　不等式证明 与 数列证明相结合

有. $|a_n| - |A| \le |a_n - A| < \varepsilon. \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to\infty} |a_n| = |A|$

考研 { 高中. 大学.

[注1] " $\Leftarrow$ " 这个般反推不成立.

[注2] ① 若 $A=0$，有 $\big||a_n| - 0\big| = |a_n - 0| < \varepsilon$，可互推 $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} |a_n| = 0}$

[注2] 数列收敛与其子数列收敛的关系.

$a_1,\ a_2 \cdots a_n, \cdots$

$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3} \cdots a_{n_k}.$

eg. $a_2 . a_4 . a_6 \cdots a_{2k}, \cdots$

$a_1\ a_3\ \cdots a_{2k-1}$

定理：若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则其任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛，且 $\lim a_{n_k} = \lim a_n$. 　注意用逆否. $A \Rightarrow B =$ [illegible]

Scanned with CamScanner

例如：对于数列 $\{(-1)^n\}$.

其收敛的子列，$\{(-1)^{2k}\}$：1, 1, 1, … ，$\{(-1)^{2k-1}\}$：-1, -1, …, -1 …

故其子列是发散的.

由此可得一个重要推论： $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} a_{2k} = a$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty} a_{2k-1} = a$

例：1.2.3. 证明：数列 $\{n^{(-1)^n}\}$ 极限存在.

[分析]. $\{n^{(-1)^n}\}$：$\frac{1}{1}, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6.$

$\frac{1}{2n-1}, 2n.$

从这个例题中可以看出，一定要学以不同复杂的数列，可以采用列举法.

取子列. $2, 4, 6, \cdots 2n, \cdots$

$\lim\limits_{x\to\infty} 2n = +\infty$ ∴发散

注：在数列中，$n\to\infty$. 是指 $+\infty$

∴故. 原数列发散。

3. 收敛数列的性质.

定理1~3：唯一性、有界性，保号性.

4. 极限运算的规则.

设 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{x\to\infty} y_n = b$. 则

① $\lim\limits_{x\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$

② $\lim\limits_{x\to\infty} x_n \cdot y_n = ab$,

③ 若 $b\neq 0$, $y_n \neq 0$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

例1.2.4. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}(a_n+b_n)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(a_n-b_n)=3$. 证明 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的极限存在. 并求出它们的极限值.

[分析] $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=1$

$\nRightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{x\to\infty} b_n = 1$

如：$a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^n + 1 \rightarrow a_n + b_n = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=3$

令 $u_n = a_n + b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

$v_n = a_n - b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 3$

又. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n) = 2\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1+3 = 4 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n) = 2\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1-3 = -2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -1$

5、夹逼准则：如果 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件

① $y_n \le x_n \le z_n\ (n=1,2,3\cdots)$；② $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$$\begin{array}{lccccc}
\text{夹：} & y_n & \le / < & x_n & \le / < & z_n \\
n\to\infty & \downarrow & & \Downarrow & & \downarrow \\
\text{逼：} & a & \Rightarrow & a & \Leftarrow & a
\end{array}$$

均可

网课经典例

例 1.2.5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$.

paper-tiger

$$\frac{n^2}{n^2+n} < \sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i} < \frac{n^2}{n^2+1}$$

这些不等式的研究可看作是基本的研究方法

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=1$

习 1.2.2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} & < & \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i}} & < & \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \\
\downarrow & & \Downarrow & & \downarrow \\
1 & \Rightarrow & 1 & \Leftarrow & 1
\end{array}$$

习 1.2.3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$ （真题）

$$\frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+n} < \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i} < \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1}$$

（只动分母不动分子）

变化思维：万变不离其宗、小处动手脚

$\frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2+n+n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i} \to \frac{1}{2}$，

$$\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{2}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

6、用单调有界准则（收敛数列的有界性）二（判定极限存在）

单调有界数列必有极限，即若数列 $\{x_n\}$ 单调增加（减少）且有上界（下界），则 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$ 存在

魏氏

考点 ① $x_{n+1}-x_n$? 0

数列比大小方法 ② $\frac{x_{n+1}}{x_n}$? 1

考点 $|x_n|\le M$

例：1.2.6 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a\,(a>0)$. $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{2}{a_n})$ 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，并求值

邻项变形递推/迭代式

☆ 只列递推/迭代式 $a_{n+1}=f(a_n)$.

一般 用单调有界准则

Exceptions can be found to any rule.

[分析] 证 $a_1=a>0$. 显然 $a_n>0$.

① 证明有界 有 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{2}{a_n})\geqslant\sqrt{2}$ 故 $\{a_n\}$ 有下界 $\sqrt{2}$ 不等式意识

② 证单调 又 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{2}{a_n})-a_n=\frac{2-a_n^2}{2a_n}\leqslant 0$ $(a_n>0,\ a_n\geqslant\sqrt{2})$

$\therefore a_{n+1}\leqslant a_n \Rightarrow \{a_n\}\downarrow$

由单调有界准则 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \xlongequal[\text{记为}]{\text{存在}} A$

求 由递推式 $\Rightarrow$ $A=\frac{1}{2}(A+\frac{2}{A})$ 不可省略 $\boxed{\text{取了极限}}$ 直接法求极限. 关于方程的区别

$\Rightarrow A^2=2$ $A=\pm\sqrt{2}$

但由于 $a_n\geqslant\sqrt{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=A\geqslant\sqrt{2}$ (保号性)

$(a_n-\sqrt{2})\geqslant 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-\sqrt{2})\geqslant 0$

$a_n\geqslant\sqrt{2}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\geqslant\sqrt{2}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2}$

Scanned with CamScanner

例1.2.7 设数列$\{x_n\}$满足 $0<x_1<\pi$, $x_{n+1}=\sin x_n$ $(n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限。(重要)

$$x_{n+1}=\sin x_n \quad (0<x_1<\pi)$$

【分析】 $x_{n+1}=\sin x_n<x_n$ 体现了不等式的放缩思维

下面用数学归纳法证明：

① $n=1$. $0<x_2=\sin x_1<x_1<\pi$

② 设 $0<x_n=\sin x_{n-1}<\pi$

③ 证. $0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<\pi$

故$\{x_n\}\downarrow$且有下界0

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n \xrightarrow[\text{记为}]{\text{存在}} A \Rightarrow A=\sin A$ 用运算规则表示了求极限

$\Rightarrow A$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}=0$

[注：此题本质是研究生所要学的一门数值分析为背景的题]

习1.2.4 设 $a_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{a_n\}$收敛

① $a_{n+1}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$

$\Rightarrow a_{n+1}=a_n+\frac{1}{(n+1)^2}>0. \Rightarrow \{a_n\}\uparrow$ 作差证单调↑

② $a_n=\frac{1}{1\times1}+\frac{1}{2\times2}+\cdots+\frac{1}{n\times n}$

~~$<(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$~~

$<1+\frac{1}{1\times2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}$

$=1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$

$=2-\frac{1}{n}<2.$ 上界

小结：已知数列本身可通过对通项本身进行放缩找出界（本质仍是不等关系）

☆. 1.2.6 设数列$\{a_n\}$满足$a_0=0$，$a_1=1$，$2a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，$(n=1,2,\cdots)$

二阶递推

(1) 证明：$a_{n+1}-a_n=(-\frac{1}{2})^n$，$n=1,2.$

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(一递阶段：直接计算法)

求出通项

(1) $a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1})$

(2) $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_1-a_0)+a_0$ 已知级数差找通项

$=(-\frac{1}{2})^{n-1}+(-\frac{1}{2})^{n-2}+\cdots+(-\frac{1}{2})^0$

$=1\times\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^n]$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{2}{3}$

夹逼定理

寻找夹逼来源：(找不等式)

① 直接变分母、分子变号进行而放缩

② 基础极限公式

[基础：用不等式放缩来找]

例1：已知 $|x_{n+1}-2| \le \frac{1}{2}|x_n-2|$

数列 $\{x_n\}$，$x_1>-2$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}$

求：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

解：

$\because 0 \le |x_n-2| \le \frac{1}{2}|x_{n-1}-2| \le \cdots \le \frac{1}{2^{n-1}}|x_1-2|$

令 $n\to\infty$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$

Scanned with CamScanner

数列小综合（从高考视角看）

例. 证明不等式

eg. 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1 > -2$，

$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$

(1) 证明：$|x_{n+1} - 2| \le \frac{1}{2}|x_n - 2|$

证明：

$$|x_{n+1} - 2| = |\sqrt{x_n + 2} - 2| = \frac{|(x_n + 2) - 4|}{\sqrt{x_n + 2} + 2}$$

$$= \frac{|x_n - 2|}{\sqrt{x_n + 2} + 2} \le \frac{1}{2}|x_n - 2|$$

直接放缩

数列与函数极限的关系.

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，正数列 x_n、y_n 收敛于零，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(-y_n)}{x_n+y_n}=f'(0).$$

五、证明题

1. **证明**　由导数定义知 $\lim\limits_{x_n\to 0}\dfrac{f(x_n)-f(0)}{x_n}=f'(0)$，所以

$$\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n}=f'(0)+\alpha(x_n),$$

其中 $\lim\limits_{x_n\to 0}\alpha(x_n)=0$；同理有 $\lim\limits_{y_n\to 0}\dfrac{f(-y_n)-f(0)}{-y_n}=f'(0)$，所以

$$\frac{f(-y_n)-f(0)}{-y_n}=f'(0)+\beta(y_n),$$

其中 $\lim\limits_{y_n\to 0}\beta(y_n)=0$. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(-y_n)}{x_n+y_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(0)+f(0)-f(-y_n)}{x_n+y_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{[f'(0)+\alpha(x_n)]x_n+[f'(0)+\beta(y_n)]y_n}{x_n+y_n}\\&=f'(0)+\lim_{n\to\infty}\alpha(x_n)\frac{x_n}{x_n+y_n}+\lim_{n\to\infty}\beta(y_n)\frac{y_n}{x_n+y_n}\\&=f'(0)+0+0=f'(0).\end{aligned}$$

一元函数微分学

一元函数微分学的计算

第十讲．一元函数微分学的概念与计算 → 之后一节为应用

- 概念
  - 引例
  - 导数的概念
    - 非分段点处：用导数公式
    - 分段点处：用定义
  - 微分的概念

- 导数与微分的计算
  - 四则计算
  - 分段函数的导数
  - 复合函数的导数与微分形式不变性
  - 反函数的导数
  - 参数方程所确定的函数的导数
  - 隐函数求导法
  - 对数求导法
  - 幂指函数求导法
  - 高阶导数
    - 归纳法
    - 莱布尼茨公式
    - 泰勒公式
  - 变限积分求导公式
  - 基本求导公式

还需要的能力：

①导数式构造：熟悉导数前后形式及各种运算——练！

一、概念

利用导数概念看其形式来判断

1. 导数 具体还是用导数基本形式来判断

注：连续不一定可导

注：$f'(\varphi(x)) \neq [f(\varphi(x))]'$

例1.4.1 证明：(1) 若$f(x)$是可导的偶函数，则$f'(x)$是奇函数. ★一定要记住！可直接使用.

(2) 若$f(x)$是可导的奇函数，则$f'(x)$是偶函数.

[分析] (1) 已知 $f(-x)=f(x)$ 证明：$f'(-x)=-f'(x)$

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+(-\Delta x))-f(x)}{-\Delta x}$$

定义法证明问题

$$=-f'(x)$$

例1.4.2 ★ 证明：若$f(x)$是可导的周期为T的周期函数，则$f'(x)$也是以T为周期的周期函数.

记住！可直接使用.

已知 $f(x+T)=f(x)$ 证明 $f'(x+T)=f'(x)$

$$f'(x+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

按极限定义写　　用条件替换

★例1.4.3 设$f(x)$是二阶可导的以2为周期的奇函数，且$f(\frac{1}{2})>0$，$f'(\frac{1}{2})>0$.

比较$f(-\frac{1}{2})$，$f'(\frac{3}{2})$与$f''(0)$的大小.

[分析] ① $f(x)$奇 $\Rightarrow$ $f'(x)$偶 $\Rightarrow$ $f''(x)$奇 $\Rightarrow$ $f''(0)=0$

② $f(-\frac{1}{2})=-f(\frac{1}{2})<0$

③ $f(x)$, $T=2$ $\Rightarrow$ $f'(x)$ $T=2$ $\Rightarrow$ $f'(\frac{3}{2})=f'(\frac{3}{2}-2)=f'(-\frac{1}{2})=f'(\frac{1}{2})>0$

总结：用奇偶性的关系，进而得出大小关系（与0比大小）

$\therefore f'(\frac{3}{2})>f''(0)>f(-\frac{1}{2})$

(2015). $(uv)'=u'v+uv'$

设 $u(x)$, $v(x)$ 为可导函数. 证 $(uv)'=u'v+uv'$

[分析] 令 $f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$(uv)'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)\overbrace{-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)\cdot v(x+\Delta x)}-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$=\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x+\Delta x)-u(x))}{\Delta x}}v(x+\Delta x)+\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(v(x+\Delta x)-v(x))}{\Delta x}}u(x)$$

$$=u'(x)\underline{v(x)}+v'(x)\cdot u(x)$$

注意:①函数连续性 $\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$

②用定义表达.

③ 加项、减项 $\Longleftarrow$ 主动

例1.4.4. 设 $\delta>0$. $f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上有定义, $f(0)=1$ 且满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)+2xf(x)}{x^2}=0.$$

将 $f(x)$ 与极限关联起来

题目 抽象 / 半具体半抽象 / 具体

证明: $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(0)$.

[分析]

① $\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1-2x)+2xf(x)]}{x^2}\cdot x^2=0\times 0=0$

具体化加项. (需要什么补什么)

② 可导 $\Rightarrow$ 连续 $\Rightarrow$ 有定义

只有定义, 不一定可导, 故得到连续不可明. 故先用泰勒公式处理极限

$\ln(1+(-2x)) = -2x - \frac{(-2x)^2}{2} + o(x^2) = -2x-2x^2+o(x^2)$

又 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)-1}{x}$

从极限中凑 $\frac{f(x)-1}{x}$

故原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2x-2x^2+2xf(x)+o(x^2)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2[f(x)-1]}{x}-2\right)=0$

$\therefore\ f(0)=1$

故导数存在且为1.

~~解~~

例1.4.5.

※【分析】 $\boxed{\text{若 } f(x) \text{ 在 } x=x_0 \text{ 处连续，且 } \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=A\ (\text{存在})\text{，则 } f(x_0)=0 \text{ 且 } f'(x_0)=A.}$

证明：① $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.（函数值=极限值）—连续的本质定义

$f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}(x-x_0)}=0$

思想（要什么加什么）※

②定义法，求导数

又 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A$

如：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2 \Rightarrow f(0)=0 \quad f'(0)=2$

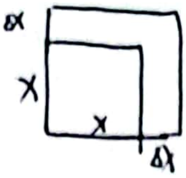
再如：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}$. $f(x)$ 连续 $\Rightarrow f(1)=0 \quad f'(1)=2$.

【分析】 $\boxed{\text{若 } \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x} \text{ 存在，则 } f(0)=0}$

①由连续性得：$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

② 又：$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}\cdot x=0$ $\quad\therefore$ ~~$f(x)=-f(-x)$~~ 原式 $=2f(0)=0$ 所以：

3. 微分. 微分也要在定义域前提下讨论



$$\Delta S = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 = \underbrace{2x\cdot\Delta x}_{主部} + \underbrace{o(\Delta x)}_{误差}$$

背景: $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$$= \underbrace{A\Delta x}_{线性主部} + \underbrace{o(\Delta x)}_{误差} \qquad \Delta x \to 0$$

线性主部 $=$ dy (y的微分)

微分: $\boxed{dy\big|_{x=x_0} = A\Delta x = y'(x_0)\cdot\Delta x = y'(x_0)\cdot dx}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = y'(x_0)}$

↓ 商　　↓ 拉格朗日

几何含义: ⇒ 用平的代替曲的,

用线性代替非线性的

~~本节常用求导:~~

二、导数与微分的计算

1. 四则运算

和：$[u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x)$　　$d[u(x)\pm v(x)] = du(x) + dv(x)$

积：$[u(x)v(x)w(x)]' = [u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x)]$

$d[u(x)v(x)] = u(x)dv(x) + v(x)du(x) \Rightarrow \int d(uv) = \int v du + \int u dv.$

$\Rightarrow \boxed{\int u dv = uv - \int du \cdot v}$ 积分分部公式

商：$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$，$v(x)\neq 0$

$d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{[v(x)]^2}$，$v(x)\neq 0$

2. 分段函数的导数

① 在分段点，用导数定义

设 $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \geq x_0 \\ f_2(x), & x < x_0 \end{cases}$；则 $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0}$，$f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f_2(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

根据 $f'_+(x_0) \overset{?}{=} f'_-(x_0)$ 来判定 $f'(x_0)$.

② 在非分段点，用导数公式求导（f_1, f_2 可导）

$x > x_0$，$f'(x) = f_1'(x)$.　$x < x_0$ $f'(x) = f_2'(x)$.

注：对于一个函数的研究，在某一点可讨论：① 是否连续；② 是否可导.

3. 复合函数的导数与微分形式不变性.

$\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]g'(x).$

$d\{f[g(x)]\} = f'[g(x)]g'(x)dx = f'[g(x)]dg(x) \Longrightarrow$

一阶微分形式不变性

$df(u) = f'(u)du$

$df(x) = f'(x)dx$

$df(\square) = f'(\square)d\square$

注：$\{f[g(x)]\}' = \frac{d\{f[g(x)]\}}{dx}$　　$f'[g(x)] = \frac{d\{f[g(x)]\}}{dg(x)}$

$\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]g'(x)$　　$f'[g(x)]$ 是个求导结果，无需进一步求导了.

$\Rightarrow (f(g(h(x))))' = f'[g(h(x))]g'(h(x))h'(x)$

例1.4.8. 设 $f(x)=\prod_{n=1}^{100}(\tan\frac{\pi x^n}{4}-n)$，则 $f'(1)=$ ______

[分析] $f(x)=(\tan\frac{\pi x}{4}-1)(\tan\frac{\pi x^2}{4}-2)\cdots(\tan\frac{\pi x^{100}}{4}-100)$

①先代第一项需识高级形式：发现 $x=1$，$\tan\frac{\pi}{4}-1=0$ 恒成立.

② 令 $(\tan\frac{\pi x^2}{4}-2)(\quad)\cdots(\quad)=g(x)$

$\Rightarrow f(x)=(\tan\frac{\pi x}{4}-1)g(x) \Rightarrow f'(x)=\sec^2\frac{\pi x}{4}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot g(x)+(\tan\frac{\pi x}{4}-1)\cdot g'(x)$

$f'(1)=\frac{\pi}{2}\cdot g(1)=\frac{\pi}{2}(-1)\cdot(-2)\cdots\cdots(-99)=-\frac{\pi}{2}99!$

例1.4.9. 设 $y=\ln|x|$，求 y'.

[分析]. $\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ \ln(-x), & x<0\end{cases}$

1°. $x>0$，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

2° $x<0$ ·$[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$

故 $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$ $(x\neq0)$

[注] $(\ln|u(x)|)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

例1.4.10.

已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq0\\ ax+b; & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求 a.b 值.

[分析]① $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 连续性：函数值 = 极限值：

$\therefore 0 \quad =0 \quad =\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=b$

②. $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{(ax+b)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{ax}{x}=a$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2-0}{x-0}=0$ 高阶无穷小

可导：左导 = 右导

Scanned with CamScanner

例1.4.12. 设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\ (a\neq 0)$. 求 $y'\big|_{x=0}$

定义域 $(-\infty,+\infty)$

解：$y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $\Rightarrow \int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

例1.4.13. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geq 1\\ 2x-1, & x<1\end{cases}$ 且 $y=f[f(x)]$，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=e}=$ ____.

解法一：先复合

$$f[f(x)]=\begin{cases} & x\geq e^2\\ \ln x-1, & 1\leq x<e^2\\ & x<1\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\Big|_{x=e}=\frac{1}{e}$$

解二：先直接求导

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=e}=(f[f(x)])'\Big|_{x=e}=f'[f(x)]\cdot f'(x)\Big|_{x=e}=f'[f(e)]\cdot f'(e)$$

$f(e)=\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 原式 $=f'(\frac{1}{2})f'(e)$

$f'(\frac{1}{2})=(2x-1)'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=2.$

$f'(e)=\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right)'\Big|_{x=e}=\frac{1}{2e}$

$\therefore$ 原式 $=2\times\frac{1}{2e}=\frac{1}{e}$

例1.4.14. 设 $y=e^{\sin(\ln x)}$ 求 dy 及 $\dfrac{dy}{dx}$.

$\therefore dy=de^{\boxed{\sin(\ln x)}}=e^{\sin(\ln x)}\cdot d(\sin(\ln x))$

$=e^{\sin(\ln x)}[\cos(\ln x)\cdot d\ln x$ 链式$]$

$=e^{\sin(\ln x)}\cdot\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx$

4. 反函数的导数

1) 设 $\boxed{y=f(x)\text{ 可导，且 } f'(x)\neq 0}$ 则存在反函数 $x=\varphi(y)$，且 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ 即 $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$

① $f'(x)$ 必保号(恒正或恒负)

⇒ $f(x)$ 必单调(↗或↘) 达布定理 (导函数零点定理)

数学细节很多.
反反复复.提升
客观世界与数学世界
有很大的不同

☆ (17例1.6.8)

② 注: $y=f(x) \to \frac{dy}{dx}$ ⇒ $\boxed{\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}}$ ☆.
只要导数不为0

$x=f(y) \to \frac{dx}{dy}$ ⇒ 则 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{dx}{dy}$ 也不为0

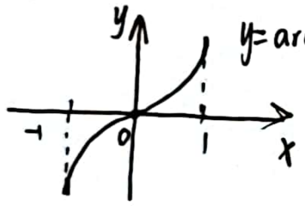
③ 方法: 1° 用互为反函数进行转换导数
2° 直接对 dy or dx 进行求导

例 1.4.15. 求下列函数的导数.

(1) $y=\arcsin x$, $-1<x<1$.

(2) $y=\arctan x$

解: (1)



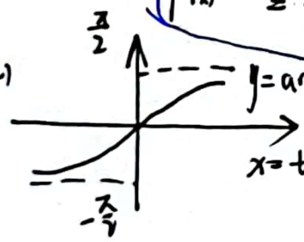
$y=\arcsin x$ $\quad y=f(x)$

$x=\sin y$ $\quad x=f(y)$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\overset{\text{再换成}x}{=}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

(2)



$y=\arctan x$ $\quad y=f(x)$

$x=\tan y$ $\quad x=\varphi(y)$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

例1.4.16

设 $y=f(x)$ 的反函数是 $x=\varphi(y)$，且 $f(x)=\int_1^{2x} e^{t^2}dt+1$，则 $\varphi''(1)=$ ___

[分析]. $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}=$

$f'(x)=\left(\int_1^{2x} e^{t^2}dt+1\right)'_x = e^{(2x)^2}\cdot 2 - e^{1^2}\times 0$

$\therefore \varphi'(y)=\frac{1}{2e^{4x^2}}$

求 $\varphi'(1)=$

$1=y=\boxed{\int_1^{2x} e^{(2x)^2}dt}+1$

令

$x=\frac{1}{2}$ 时 $y=1$

$\therefore \varphi'(y)=\frac{1}{2e^{4x^2}}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2e}$

2). 反函数的二阶导. [将对 x 的求导,变成对 y 的二阶导]

$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$ $\quad\left\{\begin{array}{l} f'(x)=y'_x \\ \varphi'(y)=x'_y \end{array}\right.$

1°. $f'(x)=y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{\varphi'(y)}=\frac{1}{x'_y}$

2°. $f''(x)=y''_{xx}$

$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\left(=\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dx} \overset{☆}{=\!=} \underset{对y求导}{\frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dy}}\cdot\underset{对x求导}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{x''_y}{(x'_y)^2}\cdot\frac{1}{x'_y}=-\frac{x''_y}{(x'_y)^3}$

概念辨析

$dx\cdot dx=\boxed{(dx)^2 \overset{记}{=\!=} dx^2}$ 叫微分的幂.	(先微分 再幂)
$2x\cdot dx=d(x^2)$ 叫幂的微分	(先幂, 再微分)

对 $y''_{xx}=-\frac{x''_y}{(x'_y)^3}$

$x''_{yy}=-\frac{y''_x}{(y'_x)^3}$

记

5. 参数方程所确定的函数的导数

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

一阶：$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y_t'}{x_t'} \stackrel{记}{=} u(t)$ ☆

二阶：$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt} = \frac{du/dt}{dx/dt} = \frac{u_t'}{x_t'}$ //注意二阶导后不要出错了

例 设 $y = y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t\sin t + \cos t \end{cases}$ (t 为参数) 确定，则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$ ____.

【分析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\sin t + t\cos t - \sin t}{\cos t} = t.$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{t_t'}{(\sin t)_t'} = \frac{1}{\cos t}.$$

$t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sqrt{2}$

6. 隐函数 —很难写出 $y-x$

$F(x,y) = 0$.

$F < {x \atop y} > x$

$F_x' \cdot 1 + F_y' \cdot y_x' = 0 \Rightarrow y_x' = -\frac{F_x'}{F_y'}$ 即 $\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x'}{F_y'}}$ 公式法求导

Tips: ①千万注意、对谁求导 eg. $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$ →对x求导

②隐函数求二阶导思路：
(一). 直接隐函导二次
(二). 一阶表达出 $y' = f(x,y)$ 再导.

例1.4.18. 设 $y = f(x)$ 是由方程 $\sin(yx) = \ln\frac{x+e}{y} + 1$ 确定的隐函数，求 $y'(0)$ 的值

$$\sin(xy) = \ln(x+e) - \ln y + 1$$

$$\xrightarrow[\text{求导}]{\text{对}x} \cos(xy)\cdot(y + xy') = \frac{1}{x+e} - \frac{1}{y}\cdot y'$$

step1: $x=0$, $y = e^2$. 这个y是代入原方程中得：$0 = 1 - \ln y + 1$, $y = e^2$

step2: $(e^2) = \frac{1}{e} - \frac{y'(0)}{e^2}$

$\Rightarrow y'(0) = e - e^4$

Scanned with CamScanner

☆7. 对数求导法.

例1.4.19. 设 $y=\sqrt[3]{\frac{(x+1)(2x-1)^2}{(4-3x)^5}}$. 求 y.

[分析]. $\ln y=\frac{1}{3}\cdot\left[\ln|x+1|+2\ln|2x-1|-5\ln|4-3x|\right]$ (注意是恒等变形)

$\xRightarrow[\text{求导}]{\text{对}x}$ $\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{2x-1}-\frac{5}{4-3x}\cdot(-3)\right)$

☆8. 幂指函数求导.

$$\boxed{u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}}$$

$(u^v)'=(e^{v\ln u})'=u^v\cdot\left(v'\ln u+v\cdot\frac{1}{u}\right)$

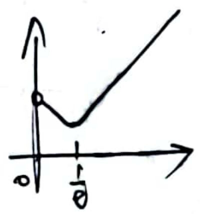
例1.4.20 求函数 $y=x^x$ 的导数.

[分析] $x^x=e^{x\ln x}$ $(x>0)$

$(x^x)'=(e^{x\ln x})'=\boxed{x^x\cdot(\ln x+1)}=0$. $x=\frac{1}{e}$ 左$\frac{1}{e}$. 右$\frac{1}{e}$.

$\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}x\ln x}=e^0=1$



拓

$x^{2x}=e^{2x\ln x}=(e^2)^{x\ln x}$

$(x^{2x})'=(x^{2x})'$

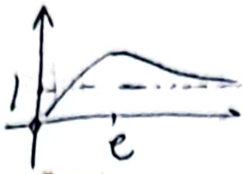
例: 1.4.21. 求 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 的导数.

[分析] $y=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$

$$y'=(x^{\frac{1}{x}})'=x^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)=x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)\overset{令}{=}0$$

$\Rightarrow x=e$ $\quad 0<x<e,$

$e<x.$



又 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\ln x}\to 0$

$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^0=1$

当 $x=e$. $y=\sqrt[e]{e}$

9. 高阶导数.

$y^{(n)}(x)$. $n\geq 2$. 叫做高阶导数. (目前是考试的)

(1) 用归纳法.

逐次求导, 探索规律, 得出通式

eg $(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n.$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)(-2)\cdots(-n)\cdot x^{-(n+1)}=(-1)^n n!\,x^{-(n+1)}$$

$$=(-1)^n\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}$$

$$(\ln x)^{(n)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$$

例 1.4.23. 求 $y=\sin x$ 的 n 阶导数.

$y'=(\sin x)'=\cos x \quad =\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$y''=(\cos x)'=-\sin x \quad =\sin(x+\frac{\pi}{2}\times 2)$

$\therefore y^{(n)}=\sin(x+\frac{\pi}{2}n)$

拓: $(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin(kx+\frac{\pi}{2}n)$ $\qquad (\cos kx)^{(n)}=k^n\cos(kx+\frac{\pi}{2}\cdot n)$

Scanned with CamScanner

复习：三角函数诱导公式

$\sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=\cos\alpha$

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$

令 $x=\pi\pm t$

$x=\frac{\pi}{2}\pm t$

Tips：①有些高阶导是要分类讨论的

$y=x\ln x$

$y'=\frac{1}{x}+1$

$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-2}\cdot(n-2)!}{x^{n-1}}\quad(n\geq 2)$

(2) 用高阶求导公式

$[u\pm v]^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$

$(u_1u_2\cdots u_n)'$ 之前学的

$(u_1u_2)^{(n)}=C_n^0u^{(n)}v^{(0)}+C_n^1u^{(n-1)}\cdot v^{(1)}+C_n^2u^{(n-2)}v^{(2)}+\cdots+C_n^n\cdot u^{(0)}v^{(n)}$

$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot u^{(n-k)}v^{(k)}$

例：$y=e^x\cos x$，求 $y^{(4)}$

$(e^x\cos x)^{(4)}=C_4^0e^x\cos x+$
$C_4^1e^x(-\sin x)+$
$C_4^2e^x(-\cos x)+$
$C_4^3e^x(\sin x)+$
$C_4^4e^x(\cos x)$

(3) 用泰勒公式

① $\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$ ⇒ 麦克劳林公式

$\sin x=\frac{f(0)}{0!}x^0+\frac{f'(0)}{1!}x'+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3$

②.已知公式.

(i) $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$

(ii) $\frac{1}{x+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots\quad(-1<x<1)$

(iii) $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots\quad(-1<x<1)$

(iv) $\ln(x+1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\quad(-1<x\le 1)$

(v) $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$

(vi) $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\quad(-\infty<x<+\infty)$

(vii) $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\quad\begin{cases}x\in(-1,1) & 当 a\le -1\\ x\in(-1,1] & 当 -1<a<1\\ x\in[-1,1] & 当 a>0\end{cases}$

③ 根据函数展开式的唯一性。比较①、②公式中的系数，可求得 $f^{(n)}(x_0)$ 或 $f^{(n)}(0)$
how?

例1.4.26. 设 $y=x^3\sin x$. 求 $y^{(6)}(0)$.

① $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$ $\quad n=6.\quad \frac{y^{(6)}(0)}{6!}x^6$

② $y=x^3\cdot(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots)$ //这样的拆是允许的，要注意程度把控

$=x^4-\frac{1}{6}x^6+\cdots$

③ 根据展开式的唯一性 $\Rightarrow\ \frac{y^{(6)}(0)}{6!}=-\frac{1}{6}$

$\therefore y^{(6)}(0)=-\frac{1}{6}\cdot 6!=-5!$

导数典例

导数理解：

eg. 某变量的变化率，就是某变量对时间求导

例1：凑导数形式进行求解

eg. 若 $f(1)=0$ 且 $f'(1)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2x+\cos x)}{(e^{x}-1)\tan x}$

解：

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)}{x^2}$$

识别图中，多联(猜)想。

$\lim\limits_{x\to 0}(\sin^2x+\cos x)=1$ 且 $f(1)=0$.

联想到凑导数的定义式.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin^2x+\cos x-1)-f(1)}{(\sin^2x+\cos x-1)}\times\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2}.$$

$$=f'(1)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot f'(1)$$

Scanned with CamScanner

高阶导数

①典型：$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$

$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$

$y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}$

$y = e^{ax}\sin bx$

$y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\sin(bx+n\varphi) \quad \varphi = \arctan\frac{b}{a}$

②注意分区间分析

例：归纳法之，导数的阶数间的关系。

eg 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = x-1+\int_0^x f(t)dt$，则高阶导数 $f^{(n)}(0) =$ ____.

解：

①先导，找规律。

$f'(x) = 1 + f(x)$

$f''(x) = f'(x)$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x). \quad (n \geq 2)$

②得：

$f^{(n)}(0) = f^{(n-1)}(0) \cdots = f'(x) = 1 + f(0) = 0+1 = 1$

例2：一种题型，存在最高阶，为多少。

设 $f(x) = 3x^3 + x^2|x|$，求使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n =$ ____.

分析

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3, & x \geq 0 \\ 2x^3, & x < 0 \end{cases}$$

//如果不是分段函数，那么直接求导即可

①：$f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2x^3 - 0}{x} = 0$

$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{4x^3 - 0}{x} = 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 12x^2, & x \geq 0 \\ 6x^2, & x < 0 \end{cases}$$

②：$f''_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{6x^2 - 0}{x - 0} = 0$

$f''_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{12x^2 - 0}{x - 0} = 0$

$$\Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 24x & x \geq 0 \\ 12x & x < 0 \end{cases}$$

③.

但是 $f'''_-(0) = 12 \quad f'''_+(0) = 24$

故，$f'''(0)$ 不存在

微分在近似运算中的应用

小技巧:

① 高阶函数巧妙求导

eg $S(x) = \frac{210}{3} \cdot \frac{x^3}{(x+1)^4}$

取ln).

设 $f(x) = 3\ln x - 4\ln(x+1)$

$f'(x) = \frac{3}{x} - \frac{4}{x+1}$

$= \frac{3-x}{x(x+1)} = \begin{cases} >0 & x<3 \\ =0 & x=3 \\ <0 & x>3 \end{cases}$

$\therefore$ $x=3$ 为 $f(x)$ 极大值

② 多因子相乘 $\longrightarrow$ 必有消

eg 设 $y(x) = (e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots\cdots(e^{nx}-n)$.

则 $y'(0) = \underline{(-1)^{n-1}(n-1)!}$

Scanned with CamScanner

微分在近似运算中的应用

① 变化量.

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$

② 求某点切线 $x = x_0+\Delta x$

$[f(x)-f(x_0)] = f'(x_0)(x-x_0)$

$\Rightarrow f(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

③ 某点周围函数.

$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

推论1 $(1+x)^\alpha = f(0)+f'(0)(x-0) \quad (x\to 0)$

$= 1+\alpha\cdot x$

推论2: 设 $a>0$, 且 $|b| \ll a^n$, 则

$\sqrt[n]{a^n+b} = a + \frac{1}{n}\cdot\frac{b}{a^{n-1}}$

eg.

当 $|x| \ll 1$ 时, 求 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 关于 x 的线性近似表达式

解:

$(x\to 0)$ $f(x) = f(0)+f'(0)(x-0)$

$\therefore f(x) = 1+(-1)(x-0) = 1-x$

微分在误差估计中的应用

①

$|A-a|$ 称 a 的绝对误差

$\frac{|A-a|}{|a|}$ 称 a 的相对误差

若 $|A-a| \le \delta_A$.

δ_A 称为测量A的绝对误差限

$\frac{\delta_A}{|a|}$ 称为测量A的相对误差限

② 误差传递公式 —— 一种计算方法

$$|\Delta y| \approx |dy| = |f'(x)| \cdot |\Delta x|$$
$$\le |f'(x)| \cdot \delta_x$$

故 y 的绝对误差限约为

$\delta_y \approx |f'(x)| \cdot \delta_x$. 传递公式.

例: 设测得圆钢截面的直径 $D = 60.0\,mm$, 测量 D 的绝对误差 $\delta_D = 0.05\,mm$. 欲利用公式 $A = \frac{\pi}{4}D^2$ 计算圆钢截面积, 试估计面积的误差.

分2个 绝对误差限　　再15 1个 相对误差限

解:

① A的绝对误差限约为

$$\delta_A = |A'| \cdot \delta_D$$
$$= \frac{\pi}{2} \cdot D \cdot \delta_D$$
$$\approx 4.715\,(mm)$$

② 相对误差限约为

$$\frac{\delta_A}{|A|} = \frac{\frac{\pi}{2}D \cdot \delta_D}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2} = \frac{2\delta_D}{D} = \frac{2 \times 0.05}{60.0} = 0.17\%$$

Scanned with CamScanner

几何：一元函数微分学 = 画函数图形

函数构建

- 宏观
  - 奇偶性 → 对称性
  - 定义域
  - 值域
  - 渐近线
  - 有界性
- 微观
  - 单调性：分段分析（注意 $y'=0$ 驻点，不可导点，无定义点）
  - 极值
  - 凹凸性（拐点）
  - 周期性
  - 曲率：$k=\frac{1}{\rho}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$　　若为圆：$k=\frac{1}{r}$
  - 切线

常用来：① 画图象
- ① 看奇偶（对称）
- ② 可疑点：
  - 无定义
  - $f'(x)=0$ 与不存在的点
  - $f''(x)=0$ 与不存在的点
- ③ 渐近线
- ④ 综合图象逐个检查并作图

② 求最值、范围

③ 会涉及：几乎所有的问题 e.g. 切线

几何-单调性.

①考法一：抽象函数 用定义和条件来直接证单调性.

eg. 设在[a,b]上 $f''(x)>0$. 证明函数 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 在 (a,b] 上是单调增加函数.

解：

①用导数表达：

$$\varphi'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-[f(x)-f(a)]}{(x-a)^2}$$

$$=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-a} \quad \xi\in(x,a)$$

[注：此处省略了 $f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$]

②条件：$f''(x)>0 \Rightarrow f'(x)\nearrow \Rightarrow f'(x)>f'(\xi)$

∴ $\varphi'(x)>0$ 即得证

小结：

本题思路为分析法，由结论回推所需条件

Scanned with CamScanner

几何- 极值

①间断点与极值的关系

$x=0$是极大值点。

②注意不可导点的分析

e.g. $y=(2x-5)\cdot\sqrt[3]{x^2}$ $y'=\frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$ 令$y'=0$

$x=1$. 且 $\boxed{x=0\text{不可导}}$ 从导函数这儿看

极大值$y(0)=0$ 极小值 $y(1)=3$

几何性质：凹凸性

① 思想：化多为少的思路 //抓主要矛盾

题型：求拐点

e.g. $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的一个拐点是（ ）

解：

令 $y=g(x)\cdot(x-3)^3$

$\Rightarrow y'=g'(x)(x-3)^3+g(x)\,3(x-3)^2$

$\Rightarrow y''=g''(x)(x-3)^3+g'(x)3(x-3)^2$

$\quad +3g'(x)(x-3)^2+g(x)\cdot 6(x-3)$

$y''|_{x=3}=0$

$\Rightarrow y'''=6g(x)$ $\qquad y'''|_{x=3}\neq 0$

几何：渐近线

铅垂
水平
斜：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$
$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$

可以 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$，2个方向

$\boxed{\text{一般方法：}}$

① 先找无定义点 x_0 求 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 是否为 ∞，若是，则铅直

② 求 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\+\infty\\-\infty}} f(x)$ 是否存在（为A），若A，则为水平

③ 若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\-\infty\\\infty}} f(x)=\infty$，则

$1°$. $k=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\-\infty\\\infty}}\frac{f(x)}{x}$ 是否为非零常数

若是，则

$2°$. $b=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\+\infty\\-\infty}}[f(x)-kx]$ 是否存在

若也是，则 $y=kx+b$ 为斜

Scanned with CamScanner

几何-切线

总:

①.高中思路-(直角坐标)

②.极坐标→转直角坐标、

好题想象

③ 不等式关系 $|f''(x)| \le 1$

$\therefore |f(0)| = \frac{1}{4} + \frac{|f''(\xi_1)|}{2} x_0^2 \le \frac{1}{4} + \frac{x_0^2}{2}$

$|f(1)| = \frac{1}{4} + \frac{|f''(\xi_2)|}{2}(1-x_0)^2 \le \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(1-x_0)^2$

④ 不等式关系 max.

$|f(0)| + |f(1)| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[x_0^2 + (1-x_0)^2] < 1$

例：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$|f''(x)| \le 1$，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值 $\frac{1}{4}$。证明：

$|f(0)| + |f(1)| < 1$.

证明：

① 有界/最大值定理：

范围：$f(x) \le M = \frac{1}{4}$

点：设此点为 x_0，$f'(x_0) = 0$，$f(x_0) = \frac{1}{4}$

② 泰勒展开：勾连 $f(x)$ 与 $f''(x)$.

在 x_0 点

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

$x=0$，$x=1$ 代入得：

$$f(0) = f(x_0) + f'(x_0)(0-x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x_0)^2$$

$$f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1-x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2$$

第6讲 中值定理 10'—1:22'　考点意识—常用21例.本身总结

本身较难

[多种应用也可以 相互作为条件]

微积分本身之中的 只能我用很少的话证.

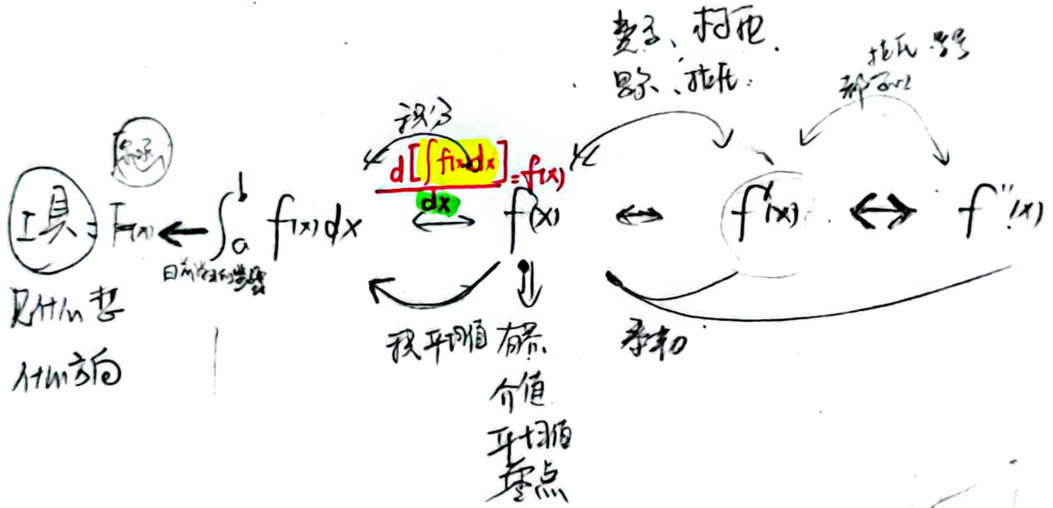
十大定理及其使用

- 定理1 — 有界与最值定理
- 定理2 — 介值定理
- 定理3 — 平均值定理 (离散)
- 定理4 — 零点定理
- 定理5 — 费马定理
- 定理6 — 罗尔定理.
- 定理7 — 拉格朗日中值定理
- 定理8 — 柯西中值定理
- 定理9 — 泰勒公式
- 定理10 — 积分中值定理 (连续)

$f(x)$　$f'(x)$　上述四中3.五.

$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ 与拉格朗日综合用

几者之间的关系



方法: 证明题. (都可以用来证明不等式)

1、涉及函数的中值定理

定理1（有界与最值定理）：$m \le f(x) \le M$，其中 m、M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 min 与 max.

一回事　　除若川常用　　　　　　　　　　　　　　搭配考用

定理2.（介值定理）：当 $m \le \mu \le M$. 存在 $\xi \in [a,b]$. 使 $f(\xi)=\mu$.

定理3（平均值定理）　当 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$ 时，在 $[x_1, x_n]$ 内至少存在一点 ξ，使

单独拿出来
课本无　　　　$\subset [a,b]$

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

平均值　　　　看到"+ + +"，叫想找平均值

定理4（零点定理）当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=0$

例1.6.1．平均值定理的证明

①．由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则必有 $m \le f(x) \le M$

即
$$m \le \left\{\begin{matrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{matrix}\right\} \le M$$

$$\Rightarrow \quad n\cdot m \le f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \le nM$$

$$\Rightarrow \quad m \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \le M.$$

$$f(\xi)=\mu.$$

例1.6.2．（定理10.（积分中值定理））设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

∵ 连续 $\Longrightarrow$ $m \le f(x) \le M$，由介值定理而证。

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M.$$

平均值 $\bar{f}$

小结:

平均值定理. $\begin{cases} 离散 & f(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \\ 连续 & f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \end{cases}$

2. 涉及导数(微分)的中值定理. ① 定理 ② 会证定理 ③ 例1.6.8 达布定理

定理5(费马定理). 若$f(x)$满足在x_0点处 ① 可导 ② 取极值. 则$f'(x_0)=0$.

用定义证明

证明: $f'(x_0) \triangleq \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

不妨设$x=x_0$为极大值点. $\Rightarrow f(x)-f(x_0) \le 0$

$x_0-\delta$ x_0 $x_0+\delta$

$x\to x_0^+$. $x-x_0>0$. $\longrightarrow$ $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0 \xRightarrow{\text{取极限}} \lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le$

$x\to x_0^-$. $x-x_0<0$ $\longrightarrow$ $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \xRightarrow{\text{取极限}} \lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$

$\because f(x)$在x_0处可导, 故 $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \Rightarrow f'(x_0)=0.$

3. 费马定理的使用

$\boxed{可导} + \boxed{极值} \Longrightarrow f'(x)=0$

一般有所满足. 区间内部.

例1.6.8 (导数零点定理 达布定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 证明当 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$ 时, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

不妨设 $f'_+(a)>0$, $f'_-(b)<0$

[分析] $f'_+(a) \triangleq \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$

$f'_-(b) \triangleq \lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$

重要定理/性质 复习强调: 极限保号.

①脱帽法 若 $\lim f(x)>0$ ($<$) $\Rightarrow$ $f(x)>0$ ($<$) 严格不等 (强逻辑)

②戴帽法: 若 $f(x)\geqslant 0$ ($\leqslant$) $\xRightarrow{\lim 存在}$ $\lim f(x)\geqslant 0$ ($\leqslant$) (弱逻辑)

$\Rightarrow$ $x\in$ [a, a+δ_1) $x\in(a, a+\delta_1)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$ $\Rightarrow$ $f(x)>f(a)$

$x\in$ (b-δ_2, b] $x\in(b-\delta_2, b)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$ $\Rightarrow$ $f(x)>f(a)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ 的最大值点取在 (a,b) 内

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow 极大值\\ 可导\end{array}\right\}\Rightarrow f'(x)=0$

☆复习相关知识

$f(x)$ 无 $\Rightarrow$ $f'(x)$ 保号 (恒正或恒负) $\Rightarrow$ $f(x)$ 严格单调

1

定理6（罗尔定理）

1.设 $f(x)$ 满足 ① 在 $[a,b]$ 上连续 → 查抗
② 在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.
③ $\boxed{f(a)=f(b)}$ ☆

条件　　　　结果

tips: ① 罗尔可多次使用

2.罗尔定理的使用.

(1) 常用乘积求导公式 $(uv)'=u'v+uv'$ 的逆用来构造辅助函数. eg $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^{x}}$

① $[f(x)\cdot f(x)]'=[f^2(x)]'=2f(x)\cdot f'(x)$ → 见 $f(x)\ f'(x)$，作 $F(x)=f^2(x)$

例1.6.4. 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$ 则 ________.

$f'\cdot f \Rightarrow$ 令 $F(x)=f^2(x)$

则 $F'(x)=2\cdot f(x)\cdot f'(x)>0 \Rightarrow F(x)\nearrow$

$\Rightarrow \sqrt{f^2(1)}>\sqrt{f^2(-1)}$

$\Rightarrow |f(1)|>|f(-1)|$

② $[f(x)\cdot f'(x)]'=[f'(x)]^2+f(x)f''(x)=0$

$\Leftrightarrow$

③ $[f(x)\cdot e^{\varphi(x)}]'=f'(x)\cdot e^{\varphi(x)}+f(x)\cdot e^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)=e^{\varphi(x)}[f'(x)+f(x)\cdot\varphi'(x)]$

eg $\varphi(x)=x \Rightarrow f'(\xi)+f(\xi)=0$ 　令 $F(x)=f(x)e^{x}$

$\varphi(x)=-x \Rightarrow f'(\xi)-f(\xi)=0$ 　令 $F(x)=f(x)\cdot e^{-x}$

$\varphi(x)=kx \Rightarrow f'(\xi)+kf(\xi)=0$ 　令 $F(x)=f(x)\cdot e^{kx}$

Scanned with CamScanner

例1.6.6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$.

试证：(1) 存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\eta)=\eta$；

(2) 对于任意 λ，$\exists\xi\in(0,\eta)$，使 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

【分析】 令 $F(x)=[f(x)-x]\cdot e^{-\lambda x}$

其中 $F(0)=0$，$F(\eta)=0$ $\xRightarrow{\text{罗尔}}$ 结论 $F'(x)=$ ______ $=0$

$\Rightarrow f'(\xi)-\lambda\cdot[f(\xi)-\xi]=1$

罗尔定理形式

只证(1)问：令 $G(x)=f(x)-x$. 证：$G(\eta)=0$

$G(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}>0$

$G(1)=f(1)-1=-1<0$

$\Rightarrow\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)$ 使 $G(\eta)=0$ 即 $f(\eta)=\eta$

零点存在定理

小结：要熟悉构造函数分析.（多队多种含义：eg 本题. 隐零点）

（一个为0，已知，一个用一问的 $F=0$）

考点：①零点不好找（零点定理） ②.导数逆构造 找 2个 $F=0$ $\Rightarrow$ 得 $F'=0$

例1.6.7. 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，$(0,3)$ 内二阶可导，且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$.

证明：(1) $\exists\eta\in(0,2)$，使得 $f(\eta)=f(0)$.

(2) $\exists\xi\in(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$

证明：

见到 $\int_a^b f(x)dx$ ⟨ 1) 积分中值定理 $f(\xi)(b-a)$ 定理1。
2) 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. 变成函数进行研究.

(1) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $F(0)=0$. $F(2)=2f(0)$

对 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上用拉氏 $\Rightarrow$

$F(2)-F(0)=F'(\eta)(2-0)$

注意：$F'(x)=f(x)$

$2f(0)=\int_0^2 f(t)dt = f(\eta)\cdot 2.$ $\eta\in(0,2)$

$\Rightarrow f(\eta)=f(0)$

联想强化：例1.6.2. 定理10 积分中值定理.

[注]

$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ $\xi\in[a,b]$ → 介值定理ξ在闭区间

$\boxed{\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)}$ $\xi\in(a,b)$ → 拉氏ξ在开区间

可直接使用.

令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b] \xRightarrow{拉}$

$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$ $\xi\in(a,b)$

$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

→ 按需选用 $\xi\in(a,b)$ 或 $\xi\in[a,b]$

⇒ 故该题第一问亦可这样写：⇒ 主动应用定理

$f(\eta)=\frac{\int_0^2 f(x)dx}{2-0}$ $\eta\in(0,2)$ → 允许使用开区间[知识结构所要求的拥有]

又 $f(0)=\frac{\int_0^2 f(x)dx}{2}$

$\therefore f(\eta)=f(0)$

(2) 又由 $\frac{f(2)+f(3)}{2}=f(\zeta)$ $\zeta\in[2,3]$ 离散的平均值定理

$f(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续

$\left.\begin{array}{l} m\le f(2)\le M \\ m\le f(3)\le M \end{array}\right\} \Rightarrow 2m\le f(2)+f(3)\le 2M \Rightarrow m\le \frac{f(2)+f(3)}{2}\le M.$

又 $\frac{f(2)+f(3)}{2}=f(\zeta)$ $\zeta\in[2,3]$

只是证明过程

又 $f(0)=\frac{f(2)+f(3)}{2}$

$\Rightarrow f(\zeta)=f(0).$

由 $f(0)=f(\eta)\Rightarrow f'(\xi_1)=0$ $\xi_1\in(0,\eta)$ 又 $f(\eta)=f(\zeta)\Rightarrow f'(\xi_2)$ $\xi_2\in(\eta,\zeta)$

$\Rightarrow f''(\xi)=0.\quad \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$

总思路：① 罗尔中值定理 $\Longrightarrow$ 得：$f(x_0)=0\quad f(x_1)=0\quad f''(x_2)=0$

$f_1'=0\qquad f_2'(0)$

$\Downarrow$

$f''=0.$

② 难点找2个相等的 $F(x)$ 相等。

本题使用 罗尔中值定理 + 反推法 $\Longrightarrow$ 找到相等函数 $\Rightarrow$ 推多阶导数

定理7（拉格朗日中值定理）

设 $f(x)$ 满足 $\begin{cases} ① \text{在} [a,b] \text{上连续} \\ ② \text{在} (a,b) \text{内可导} \end{cases}$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

或者写成

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Tips:

① 方向 $\begin{cases} \text{思路（考研 K 易/难）} \\ \text{做题数量} \uparrow \begin{cases} \text{熟练度} \\ \text{体系完善} \end{cases} \end{cases}$

② 做题

考研：$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$

① 见到 "$f-f$"，想拉格

② 见到 "f 与 f'" 想拉格

4. 拉格朗日中值定理的使用

例1.6.9. 设 $a>b>0$, $n>1$ 证明: $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

本题: 微分不等式之: 用中值定理证明不等式. [只用了一次拉氏]

[分析] 见到 "$f-f$"

令 $f(x)=x^n$. 在 $[b,a]$ 上用拉氏 $\Rightarrow$

$a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b)$, $\boxed{b^{n-1}<\xi^{n-1}<a^{n-1}\quad 放缩法.}$ ⇒ 此处为拉氏证不等式的关键所在

$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$

即: $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<n\cdot a^{n-1}\cdot(a-b)$

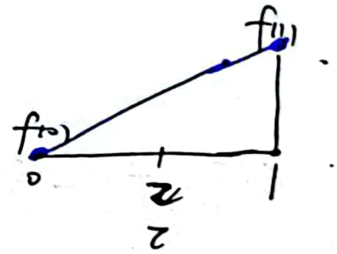
小结: $f(a)=f(b)\Rightarrow f'(\xi)=0$

$\Rightarrow f'(\xi)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

故: 拉 ⇒ 罗

下面题型是: 是在某区间内进一步折区间进行求解. (可以相加、可以相乘)

☆例1.6.11. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$. $f(1)=1$. 证明存在不同的 ξ_1. $\xi_2\in(0,1)$. 使得 $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=2$.



[分析]. 见到 f 与 f' ⇒ 拉.

难点: 不同 ⇒ 划分区间

$f(\tau)-f(0)=f'(\xi_1)(\tau-0)$ $\quad \xi_1\in(0,\tau)$

$f(1)-f(\tau)=f'(\xi_2)(1-\tau)$ $\quad \xi_2\in(\tau,1)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{f'(\xi_1)}=\dfrac{\tau-0}{f(\tau)-0}$, $\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{1-\tau}{1-f(\tau)}$

欲证: $\dfrac{\tau}{f(\tau)}+\dfrac{1-\tau}{1-f(\tau)}=2$ $\qquad$ 取 $f(\tau)=\frac{1}{2}$ 得成立.

[此处很主动寻找条件]

定理9（泰勒公式）

(1) 带拉格朗日余项的n阶泰勒公式

设$f(x)$在点x_0的某个邻域内$n+1$阶导数存在，则对该邻域内的任意点x，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

n阶 带 拉氏余项 的公式

最后一阶代入ξ

其中ξ介于x、x_0之间

例1.6.13. 设$f(x)$在区间$[-a,a]$上具有二阶连续导数，$f(0)=0$.

(1) 写出$f(x)$的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式

(2) 证明：存在$\eta\in[-a,a]$使得 $a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx \leftrightarrow f(x) \leftrightarrow f'(x) \leftrightarrow f''(x)$

ξ是端点的函数

(1) $f(x)=\cancel{f(0)}+f'(0)\cdot x+\frac{f''(\xi)}{2}\cdot(x-0)^2$ ξ介于0与x之间

(2) 对2侧作$[-a,a]$定积分：$\Rightarrow$ $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}\cancel{f'(0)x}\,dx+\int_{-a}^{a}\frac{f''(\xi)}{2}x^2dx$ [去$f'(0)$]

由二阶导数在$[-a,a]$上连续 $\Rightarrow$ $m\le f''(x)\le M$. [该部分思路：主动应用定理] $\Rightarrow m\le f''(\xi)\le M$.

$\Rightarrow \int_{-a}^{a}\frac{f''(\xi)}{2}x^2dx\in\left[\int_{-a}^{a}\frac{m}{2}x^2dx,\int_{-a}^{a}\frac{M}{2}x^2dx\right]\Rightarrow \frac{m}{3}a^3\le\int_{-a}^{a}f(x)dx\le\frac{M}{3}a^3\Rightarrow m\le\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)dx\le M$.

介值定理 $\exists\eta\in[-a,a]$，使$f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)dx$

(2) 带佩亚诺余项的n阶泰勒公式

设$f(x)$在点x_0处n阶可导，则存在x_0的一个邻域，对于该邻域内的任意点，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}\cdot f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

例：假设$f(x)$在$x=x_0$处二阶可导，$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)<0$，则证明$f(x)$在x_0处取极大值.

证：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$

由题目 $f''(x_0)<0$ 且 $(x-x_0)^2>0$

$\therefore f(x)-f(x_0)=0+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2\le0 \Rightarrow f(x)\le f(x_0)$

思路：利用泰勒进行简单放缩

例1.1.3. $f(x)$满足…证明：$\boxed{f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)dx}$ $f(0)=0$

总思路：通过介值定理连接. 积分与积分

[分析] $f(x)-f(0)=f'(\eta)(x-0)$ $0<\eta<1$ 即 $f(x)=f'(\eta)x \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f'(\eta)x\,dx$

又 $m\le f'(x)\le M$ 即：$m\le f'(\eta)\le M$ $\int_0^1 mx\,dx\le\int_0^1 f'(\eta)x\,dx\le\int_0^1 Mx\,dx$

$m\frac{1}{2}\le\boxed{2\int_0^1 f(x)dx}\le M\frac{1}{2}$

$\therefore \exists\xi\in[0,1]$. 使 $f'(\xi)=M$.

定理8（柯西中值定理）

设 $f(x)$, $g(x)$ 满足：
① 在 $[a,b]$ 上连续，
② 在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得
③ $g'(x)\neq 0$（可能的出题证）

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

→ 是同一个，但跟拉氏所得出来的

必要性：取 $g(x)=x$，则 $g'(x)=1\neq 0$

柯 $\Rightarrow$ 拉 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f'(\xi)}{1}$ → 罗

一般化　　居中　　特殊

怎么考？考得数学偏低，

目前考法，一个抽象，一个具体
$f(x)$　　$g(x)$

5. 柯西中值定理的使用（基本考法）→ 直接变形

例1.6.12. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi)$

$\boxed{\text{取 } g(x)=\ln x,\ g'(x)=\frac{1}{x}}$，$\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$ ⇒ 即得结论（基本一步到位）

考试分数不高的原因：
① 基本知识点不熟悉
② 同相关知识点占用了 ⇒ 拉氏占了柯氏位置 → 当然也都可能反

考查形式：微分等式与不等式

联想：高中导数大题中的四种形式

思路：是相像的，但也更深入了.

基本方法：

① 三种操作：不分离、全分离、半分离 [函数]

② 含参分析：

标参 — 等式

用参 — 不等式

③ 基本方法

- 凹凸性
- 性质 → 常数分离变形
- 泰勒

例题1：用凹凸性证明

$$x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2} \quad (x>0,\ y>0,\ x\neq y)$$

原式 $\Leftrightarrow \dfrac{x\ln x + y\ln y}{2} > \dfrac{x+y}{2}\ln\dfrac{x+y}{2}$

设 $f(u)=u\ln u$. $f'(u)=\ln u+1$. $f''(u)=\frac{1}{u}>0$

$\therefore$ $f(x)$ 为凹 $\therefore$ 得证.

例题2：用泰勒公式进行讨论方程的根。

设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二次可微，且满足条件 $f(a)=A>0$, $f'_+(a)<0$, $f''(x)\le 0\ (x>a)$

证明方程 $f(x)=0$ 在 $[a,+\infty)$ 内有唯一实根.

解：

(一) 存在性

① 将 $f(x)$ 在点 a 处作一阶泰勒展开.

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2$$

$\xi\in(a,x)$ //用到 $f(a).f'(x).f''(x)$ 的关系

② 由 $f'_+(a)<0$, $f''(x)<0\ (x>a)$ 易得

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ $\quad \exists b, f(b)<0$

$\exists\xi\in(a,b)\subset[a,+\infty)$ 使 $f(\xi)=0$

(二) 唯一性 (=单调性). //常这么证明

$f''(x)<0 \Rightarrow f'(x)\downarrow$

$f'_+(a)<0 \Rightarrow f'(x)<f'_+(a)<0$

$\therefore f(x)\downarrow$ $\therefore$ 唯一性

Scanned with CamScanner

泰勒公式的应用

例1：证明 e 是无理数

大考题 2. (1) 求 $f(x)=e^{2x}$ 的带拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林公式；

(2) 利用(1) 的结论导出 e 的展开式并由此证明 e 是无理数.

2. 证明 (1) 由 $f(x)=e^{2x}$ 得 $f^{(k)}(x)=2^k e^{2x}$，于是有

$$f^{(k)}(0)=2^k,$$

其中 $k=1, 2, 3, \cdots$，因此

$$f(x)=e^{2x}=1+\frac{2}{1!}x+\frac{2^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{2^n}{n!}x^n+\frac{2^{n+1}e^{2\xi}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中 ξ 介于 0 与 1 之间.

~~(2) 利用(1) 的结论~~可得 e 的展开式为

$$e=f\left(\frac{1}{2}\right)=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{2\xi}}{(n+1)!}\quad(\xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } 1 \text{ 之间}).$$

借助分式应为整数分式.

假设 e 是有理数，不妨设 $e=\frac{q}{p}$ ($p, q\in\mathbb{N}$，p 与 q 互质)，则

$$\frac{q}{p}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{2\xi}}{(n+1)!},$$

于是

$$n!\frac{q}{p}=n!+n!+\frac{n!}{2!}+\cdots+\frac{n!}{n!}+\frac{e^{2\xi}}{n+1}.$$

当 $n>p$ 时，上式等号左边 $n!\frac{q}{p}$ 为整数，及 $n!+n!+\frac{n!}{2!}+\cdots+\frac{n!}{n!}$ 是整数，但是当 $n\geqslant 2$ 时，由 $\frac{e^{2\xi}}{n+1}<\frac{3}{n+1}$ 知 $\frac{e^{2\xi}}{n+1}$ 不是整数，即上式等号右边不是整数，产生矛盾，因此 e 是无理数.

例2. 具体代值理解泰勒

eg. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上有三阶连续导数，且 $f(0)=1$，$f(2)=2$，$f'(1)=0$

证明：在开区间 $(0,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'''(\xi)=3$。

证明：

① 先在1处展开泰勒

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 \quad \xi\in(0,2)$$

$$\underline{\underline{f'(1)=0}}\quad f(1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3$$

② 将相关点代入 $x_1=0$，$x_2=2$.

$$1=f(0)=f(1)+\frac{f''(1)}{2!}+\frac{f'''(\xi)}{3!}(-1) \qquad 1^\circ$$

$$2=f(2)=f(1)+\frac{f''(1)}{2!}+\frac{f'''(\xi)}{3!}(1) \qquad 2^\circ$$

$2^\circ-1^\circ$：

$$2\cdot\frac{f'''(\xi)}{3!}=1$$

即：$f'''(\xi)=3$.

//代入值直接进行等式运算

第七讲 零点问题与微分不等式
(方程的根/微分不等式)
(交点问题)

本质是对函数图象的分析
(让你的视野更宽了)

零点问题.
- 零点定理(证存在性)
- 单调性(证唯一性)

多方法共用

- 罗尔原理 ☆
- 实系数奇次方程至少有一个实数根 ☆

小工具

微分不等式
- 用函数性质证明不等式
- 用常数变易化证明不等式. a,b → x (new)
- 用中值定理证明不等式 ※ (new).

一.零点问题 ①有 ②有几个 ③在什么范围有几个.

1.零点定理

→ 推广 ☆(a,b)内连续, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\beta$ 且 $\alpha\cdot\beta<0$

(直接用)

注: 说法: ∞ 也是一种不存在, 但数学专业教材让是种很大的数.

小特例

2.单调性(主要用于根的唯一性)

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调, 则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至多有一个根, 这里 a,b 可以是有限值也可以是无穷大.

⇕

$f'(x)$ 存在且 $\neq 0$

3.罗尔原话(罗尔的推论)

若 $f^{(n)}(x)=0$ 至多有 k 个根, 则 $f(x)=0$ 至多有 $k+n$ 个根.

⇒ 解释: $f^{(n)}(x)=0$ 至多 k 个根

降n阶 ↓ 加n个根 ↓

$f(x)=0$ $k+n$

例1.7.2. 证明方程 $2^x-x^2=1$ 有且仅有3个实根

令 $f(x)=2^x-x^2-1$

则 $f'(x)=\ln 2\cdot 2^x-2x$

$f''(x)=(\ln 2)^2\cdot 2^x-2$.

$f'''(x)=2^x(\ln 2)^3\neq 0$.

一直求,直到没根

故 $f'''(x)=0$ 至多0个根

$f(x)$ 至多3个根.

又.(观察法) → 若此拓展: 所有多项式均可以 根!!!

$f(0)=0$ $f(1)=0$ 再用零点定理 $f(2)=-1$ $f(5)>0$

∴ $f(\xi)=0$

4. 实系数奇次方程至少有一个实根

$x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$ 至少有一个实根

例1.7.3 若 $3a^2-5b<0$，则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$（　　）

$f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ 至少一个根

$f'(x)=5x^4+6ax^2+3b$　　$\Delta=(6a)^2-4\times5\times3b=36a^2-60b<0$ 无根

即 $f'(x)\neq0$　　至多一个根

$\Rightarrow f(x)=0$ 有且1个根

[主要考查形式] 含参分析

例1.7.4 设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点个数为（2个）

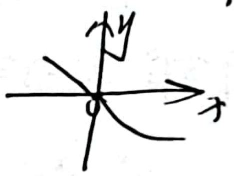
新考点：与高考一样，参数与自变量的分离变量分析.

例1.7.7 求方程 $k\arctan x-x=0$ 的不同实根的个数，其中 k 为参数.

$\boxed{令\ f(x)=k\arctan x-x\quad (奇)}$　则 $f'(x)=\frac{k}{x^2+1}-1=\frac{k-1-x^2}{1+x^2}$

不分离的考察.

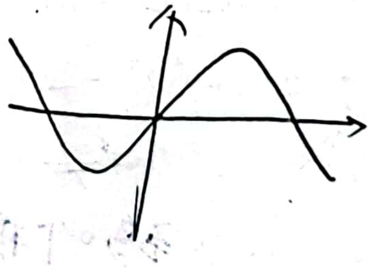
1° $k-1\le0$，即 $k\le1\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow$ 只有一个根



2° $k-1>0$，即 $k>1\Rightarrow$ 令 $f'(x)=0$ 则 $k-1-x^2=0\Rightarrow x=\sqrt{k-1}$

当 $0<x<\sqrt{k-1}$，$f'(x)>0\Rightarrow f(x)\uparrow$

当 $\sqrt{k-1}<x$　　$f'(x)<0\Rightarrow f(x)\downarrow$



$-\xi,0,\xi$.

二、微分不等式

1. 用函数性态(包括单调性、凹凸性和最值等)证明不等式 [构造函数图象]

一般地，会用如下：

(1) 若有 $f'(x)>0$，$a<x<b$，则 $f(a)\le f(x)\le f(b)$ ☆

① 若有 $f''(x)>0$，$a<x<b$，则有 $f'(a)\le f'(x)\le f'(b)$

① 若有 $f(a)>0$ 时，$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\uparrow$

② $<$ $\downarrow$

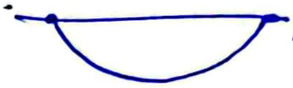
导数与不等式（自高考思路同）单调性

(2) 设 $f(x)$ 在 I 内有唯一极值点 x_0，则：

- 当 x_0 为极大值 $f''(x)<0$ / $f(x_0)\ge f(x)$ 最值
- 当 x_0 为极小值 $f''(x)>0$ / $f(x_0)\le f(x)$ $x\in I$.

new.

(3) 若有 $f''(x)>0$，$a<x<b$，$f(a)=f(b)=0$，则有 $f(x)<0$



凹凸性

new.

例1.7.8 证明当 $x>0$ 时 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$ //本题用单调性证不等式思路

令 $F(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$ //这种变形不提倡，因为形式复杂，不好证明

//一般要变形

$\Rightarrow$ 变形 $\sqrt{x(x+1)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<1$

$\frac{1}{x}=t \Rightarrow \ln(1+t)\sqrt{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}+1\right)}<1$

$\ln(1+t)\sqrt{1+t}<t$

令 $F(t)=t-\ln(1+t)\sqrt{1+t}>0$.　　$F(0)=0$.

则 $F'(t)>0 \Rightarrow F(t)\nearrow$

例1.7.9. 证明：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，有 $\sin x > \frac{2x}{\pi}$ //用凹凸性

$$f(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}$$
$$f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$$
$$f''(x) = -\sin x < 0$$

凹函数 $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow$

例1.7.10. 证明 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$　$-\infty<x<+\infty$ //用极值.

$$f(x) = 1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$$
$f''(0)>0 \Rightarrow$ 极小值（唯一 $\Rightarrow$ 最小）

$\therefore f(x) \geq f(0) = 0$

例1.7.11. 设 $0<a<b$. 证明 $\ln\frac{b}{a} > 2\frac{b-a}{a+b}$ //用常数变量化证明不等式

$\Rightarrow$ 证明 $\ln\frac{b}{a} > 2\frac{\frac{b}{a}-1}{1+\frac{b}{a}}$

令 $\frac{b}{a}=x$ //学习点：换元·可换单元，也可换二元的

$\ln x > 2\frac{x-1}{x+1}$.

2. 用常数变量化证明不等式

3. 用中值定理证明不等式.

要用拉氏和泰勒.

要用

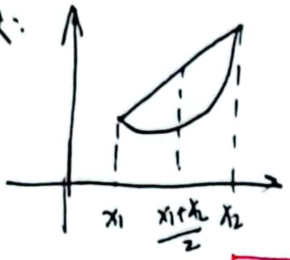
多为 $f(\xi)$

找同来证.

例1.7.14. 设$f(x)$在(a,b)内二阶可导，且$f''(x)>0$. 证明对于$\forall\, x_1, x_2\in(a,b)$且$x_1\neq x_2$及$\lambda\ (0<\lambda<1)$. 恒有$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2] < \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

☆ ~~方法~~:

几何意义:



$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$$

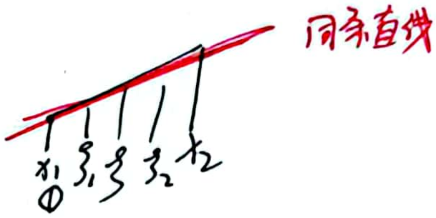
$$f\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right).$$

$$\boxed{(\lambda_1+\lambda_2=1),\ f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)}$$

法一: 拉格.

$f(x) - f'(x) - f''(x)$ 二层拉格

不妨设$x_1<x_2$. 则$\boxed{\xi=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}\in(x_1,x_2)$.



$$\begin{cases} f(\xi)-f(x_1)=f'(\xi_1)(\xi-x_1)=f'(\xi_1)(1-\lambda)(x_2-x_1) & ① \\ f(x_2)-f(\xi)=f'(\xi_2)(x_2-\xi)=f'(\xi_2)\lambda(x_2-x_1). & ② \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_1)=f(\xi)-f'(\xi_1)(\xi-x_1) \quad ③$$

$$f(x_2)=f(\xi)+f'(\xi_2)(x_2-\xi) \quad ④$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) &= \lambda[f(\xi)-f'(\xi_1)(\xi-x_1)]+(1-\lambda)[f(\xi)+f'(\xi_2)(x_2-\xi)] \\ &= f(\xi)+f'(\xi_2)(1-\lambda)(x_2-\xi)-f'(\xi_1)\lambda(\xi-x_1) \\ &= f(\xi)+f'(\xi_2)\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)-f'(\xi_1)\lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)\end{aligned}} \times$$

$①\times\lambda-(1-\lambda)\times②$:

$$\lambda f(\xi)-\lambda f(x_1)-[(1-\lambda)f(x_2)-(1-\lambda)f(\xi)]$$

$$=\lambda f'(\xi_1)(1-\lambda)(x_2-x_1)-(1-\lambda)f'(\xi_2)(\lambda)(x_2-x_1)$$

$$\Rightarrow f(\xi)-\lambda f(x_1)-(1-\lambda)f(x_2)=\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]$$

$$=\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)f''(\zeta)(\xi_1-\xi_2) \Rightarrow \text{二层拉格}$$

其中$\xi_1<\zeta<\xi_2$. 又$f''(\zeta)>0$. $\lambda(1-\lambda)>0$. $x_2-x_1>0$. $\xi_1-\xi_2<0$

$\therefore\ f(\xi)-\lambda f(x_1)-(1-\lambda)f(x_2)<0$ 即原式成立

法二：泰勒。 $f(x)-f'(x)-f''(x)$ 展开2项进行变形.(用题设 $f''(x)>0$ 来解)

记. $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$. $x, x_1, x_2\in(a,b)$

由泰勒公式

$$f(x_1)=f(x)+f'(x)(x_1-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x_1-x)^2$$

$$=f(x)+f'(x)(1-\lambda)(x_1-x_2)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x_1-x)^2.$$ ξ_1 介于 x 与 x_1 之间.

$$f(x_2)=f(x)+f'(x)(x_2-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x_2-x)^2$$

$$=f(x)+f'(x)\lambda(x_2-x_1)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x_2-x)^2.$$ ξ_2 介于 x 与 x_2 之间

于是.
$$\begin{aligned}\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)&=\lambda\left[f(x)+f'(x)(1-\lambda)(x_1-x_2)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x_1-x)^2\right]\\&+(1-\lambda)\left[f(x)+f'(x)\lambda(x_2-x_1)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x_2-x)^2\right]\\&=f(x)+\frac{\lambda f''(\xi_1)}{2}(x_1-x)^2+(1-\lambda)\frac{f''(\xi_2)}{2}(x_2-x)^2\\&>f(x).\end{aligned}$$

∴原式成立

拟录.

eg. 用定理1.2.6.

设$f(x)$在闭区间$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，且$f(3)$. $f(0)+f(1)+f(3)=3$. 证明：至少存在一点$\xi\in(0,3)$使得$f(\xi)=0$

解：

思路：

① 分析法：结论是$\exists x_0$使$f(x_0)=0$，像罗尔定理形式，可能要凑这个条件

② 综合法：遇到某个条件要思考哪些可以相关联，推出结论.

① 最值：$m\le\dfrac{f(0)+f(1)+f(3)}{3}\le M$

② 介值，$\exists\eta\in[0,2]$ 使$f(\eta)=1$

③ 罗尔. $f(\eta)=f(3)=1$.

$\exists\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$

使$f(\xi)=0$

一元函数积分学

一元函数积分学的概念与计算

总思想：这部分内容由于涉及数学变换之本质，策略只能是见招拆招，见招拆招。故情境可能比较多。⇒ 数学不只是推理，也需有前人的经验

由此可初步体会到数学本身的魅力与痛苦。

基本积分表 分析

① $\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C$. 特点：幂函数留底数.

② $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

③ $\int e^x dx = e^x + C$; $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a>0$且$a\neq 1$.

④ $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$; $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$; $\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + C$;

$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$;

$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$;

$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$.

$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$;

$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$. $\frac{1}{\cos x} + C$

$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$. $-\frac{1}{\sin x} + C$

要记和分式都带平方

$\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a^2}$

⑤ 分式 ⇓ 分母带平方+ $\frac{1}{\ +x^2}$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

$\frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$.

第一类换元法

算是很基本部分

⑥ 分式 ⇓ $\frac{1}{\sqrt{\ -x^2}}$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$ $(a>0)$

第一类换元法

基本积分表 分析

① $\int x^k\,dx = \frac{1}{k+1}\cdot x^{k+1} + C.$ 特点：幂函数保留底数.

② $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

③ $\int e^x\,dx = e^x + C$；$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$，$a>0$且$a\neq 1$.

④

积		微
$-\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$\cos x$	
$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\boxed{\tan x}$ 注意中间号	$\sec^2 x$
$\ln\lvert\sin x\rvert$	$\cot x$	$[-\csc^2 x]$
$\boxed{\ln\lvert\sec x+\tan x\rvert \;—\; \sec x}$		$\sec x\tan x$
$\ln\lvert\csc x-\cot x\rvert$	$\csc x$	$[-\csc x\cot x]$

$(\text{or. } \ln|\tan\frac{x}{2}|)$

↘ 微分方程中常见

遇见和分式都带平方

分式 ⇓ 分母带平方+ $\frac{1}{\quad +x^2}$

⑤ $\frac{1}{a}\int \frac{a}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$

$\frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$

$1+\frac{x^2}{a^2}$

第一类换元法

算是很基本部分

分式 ⇓ $\frac{1}{\sqrt{\quad -x^2}}$

⑥ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a>0)$

第一类换元法

Scanned with CamScanner

分式

$\frac{1}{\sqrt{x^2}}$

① $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$ （常见 $a=1$）

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$ $(|x|>|a|)$

（第二类换元法）

分式 ⇓ 分母带平方差

⑧ $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$

$\left(\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C\right)$ ⇒ 更是神思路：积拆差和（裂项）

（第一类换元法）

整式开根 ⑨ $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$ $(a>|x|\geq 0)$ （第二类换元法）

$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+C$

⑩ $\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$ $\left(\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right)$

$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$ $\left(\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\right)$

降次倍角化

$\int \underbrace{\tan^2 x}_{\sec^2 x-1}\,dx = \tan x - x + C$ $(\tan^2 x = \sec^2 x - 1)$

$\int \underbrace{\cot^2 x}_{\csc^2 x-1}\,dx = -\cot x - x + c$ $(\cot^2 x = \csc^2 x - 1)$

补充：巧妙求积.

$\int x\sin x = -(x\cos x - \sin x)$

$\int x\cos x = (x\sin x + \cos x)$

不定积分求法积累

态度：题目范围是开源，故按高中导式态度来积累，常做常新。

总纲：　目前只是积累基本形式 or 方法，来进行求解。

(一)

①基本积分表　+ 多种方法融合使用

(二) 变形

② 凑微分法（第一类换元法）（本质是变形）

③ 换元法（第二类换元法）（本质也是变形）

④ 分部积分法.

⑤ 有理函数的积分

⑥ 只变形、再凑元式（其实上面也是如此的）

这些是基础方法硬拆开说明的，在实践操作过程中，各种方法都是综合去考虑使用的。

附意识：

① 三角函数常转化　eg. $\int_0^{2\pi}(1+\cos t)^2(1-\cos t)=\int_0^{2\pi}(1+\cos t)\sin^2 t=\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\sin^2 t\cos t)dt$　本身的关系

$$=\boxed{\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt+\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,d\sin t}$$

变形+基本积分法 ⇒ 不断凑.

② 换元、整体思想要考虑

③ 整体不成则分开求　eg. $\iint(x^2-y^2)dxdy\longrightarrow$ 可能直接求 x^2，y^2 不太好做

则先求 $\iint x^2dxdy$，$\iint y^2dxdy$ 再结合在一起

凑微分法 总结

基本思想：$\int f[g(x)]g'(x)\,dx = \int f[g(x)]\,d[g(x)]$ 其实就是微分形式不变性.

都是 x 的

凑成相同常用的表达式

注：还可以多次凑 eg. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int 2\arcsin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x}}dx$

$= (\arcsin\sqrt{x})^2$

关键：

① 掌握好导数积分思想

② 熟悉基本微分/积分公式 + 一般求积分的微分形式（所有导数的逆用等）

③ 变形 [(i) 公式（同除、同乘）eg. $\boxed{同乘}$ $\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int\frac{1}{e^{2x}+1}de^x$

常见构造 乘 e^x

eg. $\boxed{同除}$ $\int f(x)dx = \frac{1}{\sin^2x+2\cos^2x}dx$

$= \frac{1\times\frac{1}{\cos^2x}}{(\sin^2x+2\cos^2x)\times\frac{1}{\cos^2x}}dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan x)+C$

(ii) 变式（类似裂项相消 → 拆开）公式

eg. $\frac{1}{xe^x(1+xe^x)} = \frac{1}{xe^x} - \frac{1}{1+xe^x}$

eg. $\int\cos x\cos\frac{x}{2}dx = \int(1-2\sin^2\frac{x}{2})\cos\frac{x}{2}dx$

(iii) 本身特征 eg. 三角函数方面：奇次幂凑微分　偶次幂倍角化(拆开)

利用恒等式　积化和差

常用凑微分公式.

$dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$. $a \neq 0$, $x^k dx = \frac{1}{k+1} d(x^{k+1})$, $k \neq -1$.

加3和前面相约为一,目标凑得

常见

基本幂可以变

$$x^{-2}dx = \frac{1}{x^2}dx = d(-\frac{1}{x})$$

$$x^{-1}dx = \frac{1}{x}dx = d(\ln x)$$

$$x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\sqrt{x}$$

$$x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}d(x^{\frac{3}{2}})$$

$$x^1 dx = x^1 dx = \frac{1}{2}dx^2.$$

$$\begin{cases} e^x dx = de^x \\ a^x dx = \frac{1}{\ln a} d(a^x), \quad a>0, a\neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x\,dx = d(-\cos x) \\ \cos x\,dx = d(\sin x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^{-2}x\,dx = \frac{1}{\sin^2 x}dx = \csc^2 x\,dx = d(-\cot x) \\ \cos^{-2}x\,dx = \frac{1}{\cos^2 x}dx = \sec^2 x\,dx = d(\tan x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1+x^2}dx = d(\arctan x) \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d(\arcsin x) \end{cases}$$

其它的: $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{d\tan x}{\tan x}$

变积分法实例分析

前言：某些积分形式复杂多样，故求积也变得比较复杂。所以列举出常见的变形难点，以供复习。

例1：$\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$

$= \int \frac{2dx}{\sin 2x}$

$= \int \csc 2x \, d(2x)$

$= \ln|\csc 2x - \cot 2x| + C$. //基本积分表

$= \ln|\tan x| + C$. //变形

小结：

一些基本少见变形要积累.

例2：关于三角函数：一般不易求原函，常降次 or 变形找原函

$$\int \cos^3 x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$

$$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

小练：

另外：注"积化和差"都分回去

公式。比如：$\int \sin 2x\cos 3x\,dx = \int (\frac{1}{2}\sin 5x - \frac{1}{2}\sin x)dx$

$\boxed{\text{例3：变形}} \rightarrow$ 三角的万能公式统一变量，并一二类换元法结合

例：课AP27 (7)

$$\boxed{\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}}$$ //非常量式子转化成同变量式子.

令 $t = \tan\frac{x}{2}$　　$x = 2\arctan t$

$dx = \frac{2}{t^2+1}dt$ //第二类换元

$$原式 = \int \frac{1}{2\cdot\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} \times \frac{2}{t^2+1}dt$$

$$= \int \frac{dt}{3t^2+2t+2}$$ //万能公式变形统一起

$$= \int \frac{d(3t+1)}{(3t+1)^2+5}$$ //第一类换元

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C$$

例：不太好想（分式凑微分）这种老师要掌握

~~解~~ eg. 求 $\int \left[\frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f''(x)\cdot f^2(x)}{f'^3(x)}\right]dx$

解：原式 $= \int \frac{f(x)}{f'(x)}\left[1 - \frac{f''(x)\cdot f(x)}{f'^2(x)}\right]dx$

$$= \int \frac{f(x)}{f'(x)} \times \frac{f'^2(x) - f''(x)\cdot f(x)}{f'^2(x)}dx$$

$$= \int \frac{f(x)}{f'(x)}\,d\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2 + C$$

第二类换元法 · 总述.

使用对象：常表现为 带根号的复杂因式

作用：尽管加了重积分因子，但是会化去根号 变得比较简单

思维结构：

① 三角函数代换. $(a>0)$ ①′(三角代换使用的三种情形) ②′注意考虑分类讨论⇒脱根号时

$\sqrt{a^2-x^2} \xrightarrow[\text{② 令 } x=\frac{1}{t}]{\text{① 令 } x=a\sin t,\ |t|<\frac{\pi}{2}\ \text{eg. 综A} P_{24}(2)}$ $a\cos t$

$\sqrt{a^2+x^2} \xrightarrow{\text{令 } x=a\tan t,\ |t|<\frac{\pi}{2}\ \text{eg. 综A(1)} P_{24}}$ $\sqrt{a^2(1+\tan^2 t)} = a\sec t$

$\sqrt{x^2-a^2}. \xrightarrow[\text{② 令 } x=\frac{1}{t}\ \text{eg. 习4-2.2.(37)}]{\text{① 令 } x=a\sec t\ \text{eg. 综A(3)} P_{24}}$

有时也用双曲代换 $ch^2x-sh^2x=1$

⇒ 拓：形如 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 可转化成 $\sqrt{\varphi(x)\pm a^2}$ 或 $\sqrt{a^2-x^2}$ 形式来求 ⇒ 凡根号下降次换元

② 一般式根式代换.

1° 令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$ / $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ / $\sqrt{ae^{kx}+c}$

2° 若既有 $\sqrt[n]{ax+b}$ 也有 $\sqrt[m]{ax+b}$ → 取 m.n 最小公倍数 l 令 $t=\sqrt[l]{ax+b}$

④ 倒代换整合：

被积分母 > 分子 高 2 次及以上，作倒代换. eg. 习题4-2.2(37); 课本 P204. 例24

$\frac{\text{分子}\ (小)}{\text{分母}\ (大)} = (\quad)$

第二类换元典例分析.

例1: $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$

令 $x=\sin t$ $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ $\sqrt{1-x^2}=\cos t$

$dx=\cos t\,dt$.

$$原式 = \int \frac{\cos t\,dt}{1+\cos t}$$

这经常成1:

$$= \int \frac{1+\cos t-1}{1+\cos t}\,dt$$

$$= \int \left(1-\boxed{\frac{1}{1+\cos t}}\right)dt$$

→ 没法直接找原函

$$= \int \left(1-\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)dt$$ 再变形

$$= t-\tan\frac{t}{2}+C$$

$$= t-\frac{1-\cos t}{\sin t}+C$$

小结:

变形不是一步就完,而是步步为营。

注意向着能被积出的角度来考虑

例2: 典例题.

$$\boxed{\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}}$$

令 $x=\sin t$. $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ $dx=\cos t\,dt$ // 正弦第二类换元

$$原式 = \int \frac{\cos t\,dt}{\sin t+\cos t}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\boxed{(\cos t+\sin t)+(\cos t-\sin t)}}{\sin t+\cos t}\,dt$$

// 三角函数 + 分式 变形特点

$$= \frac{1}{2}\int \left(1+\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t+\ln|\sin t+\cos t|\right)+C$$

例3: ~~三角函数代换, 分式~~

!经常是分母不可因式分解形式!

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\,dx$$

$$= \int \frac{x+1-2}{(x+1)^2+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d[(x+1)^2+2]}{(x+1)^2+2} - 2\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2}$$

例13: 极其复杂的变形过程(第二类+变形)

$$\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}dx$$

解:

令 $x=\tan t\ (-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$. $x^2+1=\sec^2 t$

$dx=\sec^2 t\,dt$

原式 $=\int \frac{\tan^3 t+1}{\sec^2 t}dt$

$=\int(\tan t\sin^2 t+\cos^2 t)dt$ //一般形式

$=\int(\frac{-\sin^2 t}{\cos t})d(\cos t)+\int\cos^2 t\,dt$

$=\int \frac{\cos^2 t-1}{\cos t}d(\cos t)+\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt$

同角公式+凑微分　　二倍角

$=\int(\cos t-\sec x)d(\cos t)+\int(\frac12+\frac{\cos 2t}{2})dt$

$=[\cos t-\ln|\cos t|]+[\frac t2+\frac12\sin 2t]+C$

$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac12\arctan x+\frac12\cdot\frac{x}{x^2+1}+C$

例4: 第二类换元中的分类讨论问题

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\qquad dx=-\frac{1}{t^2}dt$$

① $x>1$ 时,

原式 $\xlongequal{x=\frac1t}\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac1t\sqrt{\frac1{t^2}-1}}$

$=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

$=-\arcsin\frac1x+C$.

② $x<-1$ 时,

原式 $\xlongequal{x=\frac1t}\int\frac{-\frac1{t^2}dt}{\frac1t\sqrt{\frac1{t^2}-1}}$

$=\int\frac{-\frac1{t^2}dt}{\frac1t\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}}=\int\frac{-\frac1{t^2}dt}{\frac1t\cdot(-\frac1t)\sqrt{1-t^2}}$

$=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$=\arcsin\frac1x+C$

例5: 第二类换元中经典举例. 多注意!

$$I=\int\frac{dx}{(2x+1)\cdot\sqrt{3+4x-4x^2}}$$

由于 $\sqrt{3+4x-4x^2}=\sqrt{4-(2x-1)^2}$ 令 $2x-1=2\sin t$.

则: $I=\int\frac{\cos t\,dt}{(2\sin t+2)2\cos t}$ //随后都是三角变形

$=\frac14\int\frac{1}{\sin t+1}dt$ //同乘 $1-\sin t$ 进行变

$=\frac14\int\frac{1-\sin t}{\cos^2 t}dt$

$=\frac14\int(\sec^2 t-\tan t\sec t)dt$

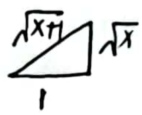
$=\frac14\tan t-\frac14\sec t+C$.

回代. $\frac{2x}{4\sqrt{3+4x-4x^2}}+C$

例6: 积累奇葩换元法.

$$\int\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$$

令 $t=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$　　$\sin t=\sqrt{\frac{x}{x+1}}$



∴ $\tan t=\sqrt{x}\Rightarrow x=\tan^2 t$

∴原式 $=\int t\,d(\tan^2 t)$ 随后分部积分

例：将整体作为倒代替

e.g. 求 $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$

解：原式 $= \int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{(x+1)^2-1}}$

令 $t = \frac{1}{x+1}$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} \times \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= -\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

$$= \int \frac{(1-t^2)-1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

$$= \int \sqrt{1-t^2}\, dt - \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} t\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t - \arcsin t + C$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1} + C$$

分部积分法 [总体方法不难，但难在变形 只能做一道积累一道]

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

难点1：变形之后会出现比较复杂的积分式

(能积 但是不好想)

难点2：分部之后有些比较的点、

e.g.

$$\int x\sin x\,dx = (x\cos x - \sin x) + C$$

$$\int \frac{x^2}{x-1}\,dx = \boxed{\frac{1}{2}(x+1)^2 + \ln(x-1)}$$

$$\int te^t\,dt = e^t(t-1)$$

e.g. 可消掉

$$\int (\arcsin^2 x)\,dx$$

//积分思路

$$= x(\arcsin x)^2 - \int x \cdot 2\arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= x(\arcsin x)^2 - \left[\int 2\arcsin x\, d(\sqrt{1-x^2})\right]$$

$$= x(\arcsin x)^2 - 2\left[\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x + \int \sqrt{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right]$$

//消去 $\sqrt{1-x^2}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 之后，直接求了

$$= x(\arcsin x)^2 - 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$$

Scanned with CamScanner

方法: ① uv的选取原则. $u \longleftrightarrow v$. 反 对 幂 指 三

(三)(指)

越导越简 求导 | 越积越快 找原函

② 表格法: 分部积分的推广公式.

$$\int u v^{(n+1)} dx = u v^{(n)} - u' \cdot v^{(n-1)} + u'' \cdot v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)} v + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v \, dx$$

eg. $\int \underbrace{(x^3+2x+6)}_{u} \underbrace{e^{2x}}_{v} dx$ // 这个函数有个3次, 易导, 但要导三次, 故比较麻烦

列表格:

→ 导

x^3+2x+6	$3x^2+2$	$6x$	6	0
e^{2x}	$\frac{1}{2}e^{2x}$	$\frac{1}{4}e^{2x}$	$\frac{1}{8}e^{2x}$	$\frac{1}{16}e^{2x}$

符号: $+$, $-$, $+$, $-$

→ 积

$$\therefore \text{原式} = +(x^3+2x+6)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - (3x^2+2)\cdot\left(\frac{1}{4}e^{2x}\right) + 6x\cdot\left(\frac{1}{8}e^{2x}\right) - 6\cdot\frac{1}{16}e^{2x} + \int 0\cdot\frac{1}{16}e^{2x}dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{17}{8}\right)\cdot e^{2x} + C$$

注: 在真正的考试过程中, 这些运算是大题中的一小步.

分部积分法典例

例1：方程思想 结合[积分再现]/所谓的循环式

$$\int \cos\ln x\,dx$$

原式 $= x\cos\ln x - \int x\,d\cos\ln x$

$\left(\int x\,d\cos\ln x = \int x\,(-\sin\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)$

$= x\cos\ln x + \int \sin\ln x\,dx$ //第一次分部

$= x\cos\ln x + \left[x\sin\ln x + \left(-\int \cos\ln x\,dx\right)\right]$

//第二次分部

$\therefore 2\int \cos\ln x\,dx = x\cos\ln x + x\sin\ln x$

即：$\int \cos\ln x\,dx = \frac{x}{2}(\cos\ln x + \sin\ln x) + C$

//方程思想.

例2：同乘分子分母来积分（经典思路例解）逆推分析

$$I = \int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x(1+\cos x\cdot e^{\sin x})}\,dx$$

注：形式复杂必有技巧妙配凑之处

由于 $(\cos x\cdot e^{\sin x})' = -\sin x\cdot e^{\sin x} + \cos^2 x\cdot e^{\sin x}$

$= e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$

则 $d(\cos x\, e^{\sin x}) = (\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x}\,dx$

$\therefore$

$$I = \int \frac{(\cos^2 x - \sin x)\cdot e^{\sin x}}{\cos x\cdot e^{\sin x}(1+\cos x\cdot e^{\sin x})}\,dx$$

$$= \int \frac{d(\cos x\cdot e^{\sin x})}{\cos x\cdot e^{\sin x}(1+\cos x\cdot e^{\sin x})}$$ //裂项了再进行下一步之

$$= \int\left[\frac{1}{\cos x\cdot e^{\sin x}} - \frac{1}{1+\cos x\cdot e^{\sin x}}\right]d(\cos x\cdot e^{\sin x})$$

$$= \ln\left|\frac{\cos x\cdot e^{\sin x}}{1+\cos x\cdot e^{\sin x}}\right| + C.$$

例3：积分抵消现象.

$$\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 dx$$

$= \int e^x\frac{1+x^2-2x}{(1+x)^2}\,dx$ //有理分式直接拆

$= \int e^x\frac{1}{1+x^2}\,dx - \int e^x\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx$

$= \int e^x\frac{dx}{1+x^2} + \int e^x\,d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$= \boxed{\int e^x\frac{dx}{1+x^2}} + \left[\frac{e^x}{1+x^2}\,\boxed{-\int\frac{de^x}{1+x^2}}\right]$

$= \frac{e^x}{1+x^2} + C.$

例4：分部的选择：不是将 e^x 放后面，而是将幂函数放后面，进而在后面相消掉

eg. $\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$

$= \int_0^1 xe^x\,d\left(-\frac{1}{x+1}\right)$

$= \left[-\frac{xe^x}{x+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^x(x+1)}{x+1}\,dx$

$= -\frac{e}{2} + [e^x]_0^1 = \frac{e}{2} - 1$

Scanned with CamScanner

例5：通过周期变换，进行凑约去

eg. $I=\int_0^{2\pi} x\cos^8 x\,dx$

解. 原式 $\xlongequal{t=2\pi-x} \int_{2\pi}^{0} (2\pi-t)\cos^8 t\,(-dt)$

$= \int_0^{2\pi} (2\pi-t)\cos^8 t\,dt$

$= 2\pi\int_0^{2\pi} \cos^8 t - t\int_0^{2\pi}\cos^8 t\,dt$

$\therefore\ I=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{2\pi}\cos^8 t$

$= \pi\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 t$

$= 4\pi\times\frac{7}{8}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$

$= \frac{35\pi^2}{64}$

例6：含自然数n的积分 通过分部积分建立递推公式.

eg. $I_n=\int \sin^n x\,dx \quad (n>1)$

解: $I_n=-\int \sin^{n-1}x\cdot d(\cos x)$

$\xlongequal{分部} -\left[\sin^{n-1}x\cdot\cos x-\int\cos x\,d(\sin^{n-1}x)\right]$

$= -\left[\sin^{n-1}x\cos x-\underline{\int\cos x\cdot(n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos x\,dx}\right]$

$(n-1)\int\cos^2 x\cdot\sin^{n-2}x\,dx$

$(n-1)\cdot\int(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,dx$

$(n-1)\int(\sin^{n-2}-\sin^n x)\,dx$

$\Rightarrow I_n=-\left[\sin^{n-1}\cos x-(n-1)(I_{n-2}-I_n)\right]$

$\therefore\ I_n=-\left[\frac{\sin^{n-1}x\cdot\cos x}{n}-\frac{n-1}{n}I_{n-2}\right]$

Scanned with CamScanner

有理函数的积分 [分式 $\frac{P_n(x)}{P_m(x)}$]

一、可以直接看出来是一般有理函数的形式 [eg. $\frac{x^n+x^n}{x^2+x^k}$, $\frac{x}{\sqrt{x-1}}$]

① 先化简 成 $\frac{低次}{高次}$ 的形式.（可凑微分法、大除法、分子加减相消）、拆分、换元、多项

② 基本形式（其它形式都转化成基本形式 比如 低次/低次）

$\frac{常}{一次}$、$\frac{一次}{二次}$、等可直接积分的形式；$\frac{一次}{一次}$ 直接拆（也是拆）

$\ln[\ \ ]$　$\ln[\ \ ]+(\arctan(\ \ ))$

$\frac{常数}{二次}$ → 可直接找原函

还有基本积分表中的ALL

二、表面不是分式 多项式

① 其它知识来转化而得 [常认: 含有很复杂的形式换元]

eg1: ① 三角函数常出现 $\boxed{\sin x}\ \boxed{\cos x}$ ⟹ $\boxed{\tan\frac{x}{2}}$　$\frac{\sin x}{}$　t^2] 多种换法

② 也可直接令 $t=\cos x$，$t=\tan x$ (出现 $\sin x$、$\cos x$　$\sin x\cos x$) $\cos x$

eg2: 复杂高次 直接换元成一般形式

③ 也有纯靠形式凑微分.

eg. $\int\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\ (ab\neq0)$.

$=\int\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{a^2\tan^2x+b^2}dx=\int\frac{d\tan x}{a^2\tan^2x+b^2}$

有理函数的积分（分式）

思想：拆分 成多项式
可加可差

延拓：如何处理分式（范围除不能用前面方法所处理的函数）

① 直接拆 eg. 习题4-2，2，(31) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx = \int \left[\frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} - \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\right]dx$ （注：也可第二类换元）

上下同次

直接求积 凑微分

分母带根式 ①直接拆开 ②基本积分表 ③第二类换元

② 加减分子，进行拆 eg. 习题4-2，2，(32) $\int \frac{x^3}{9+x^2}dx = \int \frac{x(x^2+9)-9x}{9+x^2}dx = \int \left(x - \frac{9}{2}\cdot\frac{2x}{9+x^2}\right)dx$

直接得 凑微分

③ 利用裂项相消思维：eg. 习题4-2，2，(33) $\int \frac{dx}{2x^2-1} = \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}\right]dx$

④ ★ 一般有理函数还是用公式来求.

Scanned with CamScanner

分式函数求积分

$= \left(\ln|\sec x+\tan x|-\sin x\right)\Big|_0^{\arctan\frac{R}{a}}$

$= -\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}+\ln\left(\frac{\sqrt{a^2+R^2}+R}{a}\right)$

例1：一般分式处理。分母不能正常因式分解 ⟶ 拆 → 配. ⇒ 其实由于此题太普遍性,故已成为一种经典技巧

$\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx$; //分母不可因式分解

原式 $=\int \frac{(x+1)-2}{(x+1)^2+2}dx$ ①

$=\frac{1}{2}\int \boxed{\frac{d[(x+1)^2+2]}{(x+1)^2+2}} - 2\int \boxed{\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2}}$ ②

凑一下　凑微分　再凑一下

$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)+C$

同类：练A.P25.(7)

例2：技巧：形式复杂了可以换元.

例3：多変形式 ⟶ 换元求解

eg. $\int_0^R \frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot d\rho$

$\frac{\rho=a\tan\theta}{d\rho=a\sec^2\theta d\theta}\int_0^{\arctan\frac{R}{a}}\frac{a^2\tan^2\theta}{a^2\sec^3\theta}a\sec^2\theta d\theta$

$=\int_0^{\arctan\frac{R}{a}} \tan\theta\cdot\sin\theta\, d\theta$

例. $\frac{\text{一次}}{\text{四次}}$ 高次处理方法 $\Rightarrow$ 要转化

49. 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$

并求其值

解:

总体 ① 证明一个式

② 应用该式

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}\xrightarrow{\text{令}t=\frac{1}{x}}\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{1+\frac{1}{t^4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx$$

$$\therefore\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}+\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$

$\frac{\text{二次}}{\text{四次}}$ 且上下同除次"
(次阶差别大)

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

// 不可拆开，只好记这种配凑形式

$$\therefore\text{原式}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}d\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Bigg|_{0^+}^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Scanned with CamScanner

综合题目分析

①总之，先化简（变形，拆分）

②含有复杂的原函变形（积分多样性）

③总体：要么拼凑法凑，要么分部积分求。

例1：

$$\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$$ // 含三角函数的式子

$$= \int x\, d(\tan\frac{x}{2}) + \int \tan\frac{x}{2}dx$$

// 左边分部积分法，右边直接变形使用

$$= \left(x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2}dx\right) + \int \tan\frac{x}{2}dx$$

//经验：直接以积分形式来消元，复杂形式不要摸的依据（部分相消）

$$= x\tan\frac{x}{2}$$

例2：

$$\int \frac{dx}{(1+e^x)^2} = \int \frac{1+e^x-e^x}{(1+e^x)^2}dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right)dx$$

$$= [x - \ln(e^x+1)] + \frac{1}{1+e^x} + C$$

//这些转了形式的原函，要么单独记，要么试着凑出来。

同类型：eg. $\int \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx = \frac{xe^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) + C$

例3：分段函数求不定积分

eg. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

则 $\int f(x)dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{x^3}{3} + \frac{1}{6} + C, & x > 1 \end{cases}$

注意：x=0时两者都要取值的值 ※

例4：再来一道三角函数的题。

eg. $$\int \frac{1+\sin x}{3+\cos x}dx$$

解：

$$原 = \int \frac{1}{3+\cos x}dx + \int \frac{\sin x}{3+\cos x}dx$$

// 可以拆成多项式来做

令 $u=\tan\frac{x}{2}$，$du = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx$

$$= \int \frac{1}{3+\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}} \times \frac{du}{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}} + (-\ln|3+\cos x|)$$

$$= \int \frac{1}{3+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \times \frac{2}{1+u^2}du$$

$$= \int \frac{1}{u^2+2}du - \ln|3+\cos x|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} - \ln|3+\cos x| + C$$

Scanned with CamScanner

例5: 再来一道三角函数题.

eg. 求 $\int \frac{\cos^3 x - 2\cos x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x} dx$

解:

原式 $= \int \frac{(\cos^2 x - 2)\cos x \, dx}{1+\sin^2 x + \sin^4 x}$ //分子凑项、来凑微分

$= \int \frac{\cos^2 x - 2}{1+\sin^2 x+\sin^4 x} d(\sin x)$

$= -\int \frac{(\sin^2 x+1)}{1+\sin^2 x+\sin^4 x} d(\sin x)$

$\xlongequal[\substack{dt=\cos x dx \\ = d\sin x}]{令 t=\sin x} -\int \frac{t^2+1}{t^4+t^2+1} dt$ //变成有理函数形式

//一般会考虑此时拆开，但此题次数是阶掉式下降. 故想到凑成凑微分

$= -\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}+1} dt$

$= -\int \frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+3}$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{t}\right) + C$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sin x - \frac{1}{\sin x}\right) + C$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin x} + C$

定积分概念与性质.

①关于定义的思路: <会考!>

$$\text{定积分} \xrightarrow{\text{拆}\to\text{求}\lim} n\text{项和}$$

凑成定积分 ← （n项和 → 定积分）

② 关于估计积分的思路

- 1° 分析单调性，找 max 与 min (直接分析值域)
- 2° 不等式放缩.(后面有例题)

③性质: 课本 (还有:保号性等等)

- 估值定理 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$
- 中值定理 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$
  [a,b]上连续.

例1: 积分中值 ⟶ 2层. <也求层积分[illegible]>

$$\int \longleftrightarrow f(x) \longleftrightarrow f'(x)$$

中值　　中值

[题] 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f'(x)\le 0$, $F(x)=\frac{1}{x-a}\cdot\int_a^x f(t)dt$

证明: 在(a,b)内有$F'(x)\le 0$

解:

①表达:

$$F'(x)=\frac{f(x)\cdot(x-a)-\int_a^x f(t)dt\cdot 1}{(x-a)^2}.$$

②处理形式.

$$\int_a^x f(t)dt = f(\xi)(x-a) \quad \xi\in[a,x]$$

$$f(x)-f(\xi) = f'(\eta)(x-\xi) \quad \eta\in[\xi,x]$$

$$\Rightarrow F'(x)=\frac{f'(\eta)(x-\xi)}{x-a} \quad \eta\in[\xi,x]$$

③ $x-\xi>0$, $x-a>0$ $\therefore F'(x)\le 0$

例2: 利用几何意义 / 定积分的有界性 来求值.(估计)

[题]. 估计 积分 $\int_2^0 e^{x^2-x}dx$ 的值.

解:

①找原函数

$f(x)=e^{x^2-x}$.

$f'(x)=(2x-1)e^{x^2-x}$　令$f'(x)=0$　$x=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)$ ↘ $\frac{1}{2}$ ↗.

且$f(0)=1$　$f(\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}}$　$f(2)=e^2$

∴原函有界: $e^{-\frac{1}{4}} \le f(x) \le e^2$

②进而: 积分有界

$$2e^{-\frac{1}{4}} \le \int_0^2 e^{x^2-x}dx \le 2e^2$$

$$\Rightarrow -2e^{-\frac{1}{4}} \le \int_2^0 e^{x^2-x}dx \le -2e^{-\frac{1}{4}}$$ // 搞定

例3: 用反证法纯证明　[反证套路]

[题] 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 证明:

(1)若在$[a,b]$上, $f(x)\ge 0$. 且$\int_a^b f(x)dx=0$, 则$[a,b]$上$f(x)\equiv 0$,

已知①　已知②　结论

(2)若在$[a,b]$上, $f(x)\ge 0$ 且 $f(x)\not\equiv 0$. 则$\int_a^b f(x)dx>0$

解：

(1)

① 假设结果不成立

$\Rightarrow$ 必有 $x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)>0$。

② 由于 $f(x)$ 在点 x_0 连续（局部保号的思想）

$\exists [c,d]\subseteq[a,b]$ $\therefore x\in[c,d]$ 时，

$f(x)\geq\frac{1}{2}f(x_0)>0$

$\therefore \int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx$

>0.

与已知矛盾．故成立

(2).

假设结论不成立，则 $\int_a^b f(x)dx=0$

由(1)得 $f(x)\equiv0$ 但题中 $f(x)\not\equiv0$.

即与已知矛盾，故此结论成立

例4：估计不等式的例题．(实验)

eg. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}}dx$

意识：此题形式比较复杂，故不好直接求，故要估计（冰山一角，所言极是）

解：$\frac{1}{\sqrt4}\leq\frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}}\leq\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

$x\in[0,1]$

估计：$\int_0^1\frac12dx\leq\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}}dx\leq\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

即：$\frac12\leq\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}}dx\leq\frac{\pi}{6}$

例5：积分中值．

eg. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是单调递减的连续函数，试证明对于任何 $q\in[0,1]$ 都有等式

$$\int_0^q f(x)dx\geq q\int_0^1 f(x)dx$$

证明：① 显然 $q=0$，$p=1$ 时结论成立

② 当 $q\in(0,1)$ 时，

$\int_0^q f(x)dx-q\int_0^1 f(x)dx$

$=\int_0^q f(x)dx-q\left[\int_0^q f(x)dx+\int_q^1 f(x)dx\right]$

$=(1-q)\int_0^q f(x)dx-q\int_q^1 f(x)dx$

$\xlongequal{积分中值}(1-q)f(\xi_1)(q-0)-q(1-q)f(\xi_2)$

$\xi_1\in[0,q]$

$\xi_2\in[q,1]$

$=q(1-q)\left[f(\xi_1)-f(\xi_2)\right]$ ① 转化成可以判定的式子 ② 且统一了参数

又 $\because f(x)$ 为单调递减函数

$\therefore$ 原式 ≥0.

例6：设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac23}^1 f(x)dx=f(0)$．证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 c，使得 $f'(c)=0$

① 积分中值定理．

$3\int_{\frac23}^1 f(x)dx=3\cdot f(\xi)(1-\frac23)=f(\xi)$.

② 罗尔定理

$f(x)$ 在 $[0,\xi]$ 上连续 $(0,\xi)$ 上可导．且 $f(\xi)=f(0)$

$\therefore$ 存在 $c\in(0,\xi)\subset(0,1)$，使 $f'(c)=0$

例7：定积分定义求极限

e.g. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n\cdot n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n(n+1)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=$ ______

解：

$$原式=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$$

$$\xlongequal{\frac{1}{\times n}}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\times\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$$

$$=2\sqrt{1+x}\Big|_0^1=2(\sqrt{2}-1)$$

定积分求法

除了结合不定积分求法，也有独有的特色，需要下功夫。

1. 微积分基本定理 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

2. 同不定积分求解法：
   - ①. 换元(第二类) ⇒ 注意 同时要 ①变上下界；② 中间；③后面被积部分；（保证单调性）
   - ② 分部积分法
   - ③ 凑微分(作为一种意识) ⇒ 也要变形 (eg. 同乘, 同除)

3. 借助几何的意义. eg、① 对称 → 奇偶性来转换（常用!!!） eg. 偶 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

   周期性: $\int_0^{2\pi}\cos\theta \, d\theta = 0$

   ②绝对值分正负(用区间判断正负)

   ③ 区间可分 → [结合周期性来考察] eg. $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

4. 常见技巧/措施/ 区间再现公式，华里士公式、积分再现、

   eg. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}$

   $= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x - \cos x)dx$

5. 反常积分（定积分推广）
   - 无限
   - 瑕点. eg. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx \neq -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2$ 要看收敛性！(几何意义)

   一定要先判断瑕!!! eg. $\int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$ ⇒ $x\to 1$ 不存在极限，反常积分发散.

常见技巧/情境总结

① 区间再现公式

$$\int_0^b f(x)\,dx = \int_a^b (a+b-x)\,dx$$

② "点火公式"/华里士公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\times\frac{n-3}{n-2}\times\cdots\frac{2}{3}\cdot 1 & n\text{为大于1的奇数} \\ \frac{n-1}{n}\times\frac{n-3}{n-2}\times\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & n\text{为正偶数} \end{cases}$$

eg. $I_m = \int_0^{\pi} x\sin^m x\,dx$ 设引

令 $x = \pi - t$，则 $dx = -dt$.

$$I_m = \int_{\pi}^{0} (\pi - t)\sin^m(\pi - t)(-dt)$$ //用周期换元

$$= -\int_{\pi}^{0} (\pi - t)\sin^m t\,dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi}\sin^m t\,dt - \int_0^{\pi} t\sin^m t\,dt$$ //积分再求积分，形式相同即可

$\therefore 2I_m = \pi\int_0^{\pi}\sin^m t\,dt \quad \therefore I_m = \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\pi}\sin^m t\,dt = \pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m t\,dt$

$$\therefore I_m = \begin{cases} \left[\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdot\cdots\frac{2}{3}\cdot 1\right]\cdot\pi & (n\text{为奇数}) \\ \left[\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}\cdot\cdots\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right]\cdot\pi & (n\text{为偶数}) \end{cases}$$

③ 换元要注意单调性，否用对称性

eg. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\,dx \neq \int_1^1 \frac{1}{1+t}\,\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\,dt$ （令 $t = \sqrt[3]{x^2}$）

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

好、难题一招鲜（定积分计算）

来源于习题课

(I). 计算 $\int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad n\in Z^+$.

解:

① 根号换元 → 典型三角换元 ⇒这样[illegible]

令 $x=\sin t$. $dx=\cos t\,dt$ $\quad 1-x^2=\cos^2 x$

且 $x: 0\to 1$ 时. $t: 0\to \frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ 原式 $=\int_0^1 (1-x^2)^n dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\, dt$

$=\left[\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1\right]$

$=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ [illegible]

(II) 换元法.（对象复杂）

求 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,dx$

解: 令 $\boxed{e^{-2x}=\sin t}$. 则 $x=-\ln\sin t$

$dx=-\frac{\cos t}{\sin t}\cdot dt$ $\quad x: 0\to \ln 2$, $t: \frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{6}$

// 凡是根号换成部分都可换元

原式 $=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos t\cdot\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right) dt$.

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\,dt$ // 三角[illegible]

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc t-\sin t)\,dt$

$=\left[\ln|\csc t-\cot t|+\cos t\right]\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(III) 不好想的一种换元 <[illegible]换元>

eg. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$

解: 令 $\boxed{\arcsin\sqrt{x}=t}$, $x=\sin^2 t$

$dx=2\sin t\cos t\,dt$

$x: \frac{1}{4}\to\frac{3}{4}$

$t: \frac{\pi}{6}\quad\frac{\pi}{3}$

原式 $=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{t\cdot[2\sin t\cdot\cos t]}{\sqrt{\sin^2 t\cdot\cos^2 t}}\,dt$

$=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} t\,dt$

$=t^2\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{4\pi^2}{4\times 9}-\frac{\pi^2}{36}=\frac{\pi^2}{12}$

(IV). 求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$

解: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\,dx$ // 这个要形变化

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\,dx$

// 一般去定积分都要先去掉根号

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$

$=[\sin x+\cos x]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+[-\cos x-\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=2(\sqrt{2}-1)$

(V). 分部积分辅助（多重凑形式）

eg. 设 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$

求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x)dx$

解:

$$原式=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)d(x-1)^3$$

$$=\frac{1}{3}(x-1)^3 f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 (x-1)^3 f'(x)dx$$

//把左边凑成 0 的形

$$=-\frac{1}{3}\int_0^1 (x-1)^3 e^{-(x-1)^2+1}dx$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1}d(x-1)^2$$

//再凑微分

$$=\frac{1}{6}(e-2)$$

(VI) 求 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$ =？

① $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x^2-x|}}=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{d(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$$

//上下齐次可直接凑 + 基积分表

$$=\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{\pi}{2}$$

② $\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$

$$=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{d(2x-1)}{\sqrt{(2x-1)^2-1}}$$

$$=\ln\left(2x-1+\sqrt{(2x-1)^2+1}\right)\Big|_1^{\frac{3}{2}}=\ln(2+\sqrt{3})$$

(VII)

(1)

$f(x)>0$

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2$$

当且仅当 $f(x)=\frac{1}{f(x)}$ 时成立

(2).

$$F(a)=\int_b^a\frac{dt}{f(t)}<0$$

$$F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$$

且 $F'(x)>0$

∴ ~~函数~~ $F(x)=0$ 在区间

(VI)

反常积分 相关思路&例题技巧

小结:

主动分步来做

① 基本求 lim or 瑕点 [前面基本方法]

→ 先判断是否收敛 再用"偶倍奇零"

② 含参分析

③ 用递推.

$= n\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$

即 $I_n = n \cdot I_{n-1}$

// 递推到极限 积分再积+倍数.

② 求首项

$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-0} \cdot x^0 dx = 1$

③ 求 I_n

$I_n = n \cdot I_{n-1} = n \cdot (n-1) I_{n-2} = n! \, I_0 = n!$

例1: 含参分析

当k为何值, 反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛?

当k为何值时, 该反常积分发散?

解:

① 按原函数原则, 分类讨论

当 $k=1$ 时,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^k} = \ln\ln x \Big|_2^{+\infty} = +\infty$$

当 $k \neq 1$ 时,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^k} = \frac{1}{1-k} (\ln x)^{1-k} \Big|_2^{+\infty}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-k}\left[-(\ln 2)^{1-k}\right] & k>1 \\ +\infty & k<1 \end{cases}$$

// 多段主动分离

例2: 用递推.

eg. $I_n = \int_0^{+\infty} x^n \cdot e^{-x} dx \quad (n \in N)$

① 积分运算推递推

解: $I_n = -\int_0^{+\infty} x^n d(e^{-x})$

$= -\left[\boxed{x^n \cdot e^{-x} \Big|_0^{+\infty}} - \int_0^{+\infty} e^{-x} d x^n \right]$

// 前面常为0, [illegible]

例3 典型 (含参分析)

eg. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$. 当 $p>1$ 时, 收敛; 当 $p \leq 1$ 时, 发散;

解:

当 $p=1$ 时,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \left[\ln|x|\right] \Big|_a^{+\infty} = +\infty$$

当 $p \neq 1$ 时,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right] \Big|_a^{+\infty}$$

$$= \begin{cases} +\infty & p<1 \\ -\frac{a^{1-p}}{1-p} & p>1 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

eg. $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$

例5: 转

① $q=1$. $\int_a^b \frac{dx}{x-a} = [\ln|x-a|]\Big|_{a^+}^{b} = +\infty$

② $q \neq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = \left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_{a^+}^{b}$$

$$= \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q} & q<1 \\ +\infty. & q>1. \end{cases}$$

例4: 有时通过换元, 反常积分和常义积分. 可以相互转化.【方法不同, 可以转向 不能积分】

eg. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$ (令 $x=\sin t$, $dx=\cos t\,dt$, $\sqrt{1-x^2}=\cos x$)

反常 $\longrightarrow$ 常义

eg. $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx$

$$= \int_0^1 \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{2+t^2} \quad (令\ t = x-\frac{1}{x})$$

综合应用

例1: 将积分当作常数进行求解

设 $f(x) = x - \int_0^\pi f(x)\cos x\,dx$.

解 令 $\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx = A$ 则 $f(x)=x-A$.

$\cos x f(x) = x\cos x - A\cos x$

$\int_0^\pi \cos x\, f(x)dx = \int_0^\pi x\cos x\,dx - \int_0^\pi A\cos x\,dx$

$A = \int_0^\pi (x-A)\cos x\,dx$

分部 $\Rightarrow A = (x-A)\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx$

$= -(-\cos x)\Big|_0^\pi = -2$

$\therefore f(x)=x+2$

例2: 求值 ⟶ 建立方程

设 $f(\pi)=2$, 且 $\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\sin x\,dx=5$. 求 $f(0)$.

解:

左 $= -\int_0^\pi f(x)d(\cos x) + \int_0^\pi \sin x\, d[f'(x)]$

//该部分

$= -\int_0^\pi f(x)d(\cos x) + \left[\sin x f'(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\,d(\sin x)\right]$

$= -\int_0^\pi f(x)d(\cos x) + \left[\sin x f'(x)\Big|_0^\pi - \underbrace{\int_0^\pi \cos x\, d f(x)}\right]$

$\Downarrow$

$\left(\cos x f(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f(x)\,d(\cos x)\right)$

$= \sin x f'(x)\Big|_0^\pi - \cos x f(x)\Big|_0^\pi$

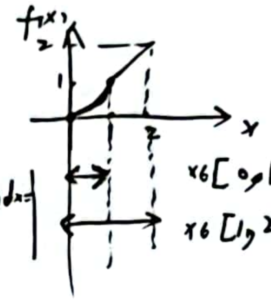
$= f(\pi) - f(0) = 5$

$\therefore f(0)=3$

例3: 分段函数 (变限积分)

注意: 分段函数要注意把临界前的部分加入求积.

[例] 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1) \\ x, & x\in[1,2] \end{cases}$. 求 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. 在 $[0,2]$ 上的表达式.



$\int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} x\in[0,1) & = \frac{1}{3}x^3 \\ x\in[1,2] & = \frac{1}{2}x^2 - 6 \end{cases}$

例4: 跨板块 反函数+定积分.

例. 设 $|f(x)| \le \pi$. 连续 $f'(x) \ge m > 0$. $(a \le x \le b)$. 证明:

$$\left|\int_a^b \sin f(x)\,dx\right| \le \frac{2}{m}$$

证明.

① 反函数:

$f'(x)>0$. $\therefore f(x)\uparrow$. 设 $A=f(a)$ $B=f(b)$

且有反函数

$0 < \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \le \frac{1}{m}$

② 不等系. $|f(x)| \le \pi$

$\Rightarrow -\pi < A < B \le \pi$

③ 励式转换

$$\left|\int_a^b \sin f(x)\,dx\right| \xlongequal{x=\varphi(y)} \left|\int_A^B \varphi'(y)\sin y\,dy\right|$$

$$\le \int_0^{\pi} \frac{1}{m}\sin y\,dy = \frac{2}{m}$$

一元函数积分学的几何应用

一、平面图形的面积

1. 直角坐标情形　　$A=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|dx$

2. 参数　　$A=\int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt$　　$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

3. 极坐标　　$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varphi^2(\theta)d\theta$　　$r=\varphi(\theta)$

二、平面曲线的弧长.（按形分析+基本图形要熟）如果是基本曲线要熟

1. 直角坐标.　　$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

2. 参数　　$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$　　$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$　$\alpha\le t\le\beta$

3. 极坐标　　$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$

三、已知平行截面面积的立体体积.

总思路：$V=\int_a^b \boxed{A(x)}\,\boxed{dx}$　　$A(x)$ 为截面面积

截面面积　沿垂直方向进行积分

1. 绕x轴旋转：$V=\int_a^b \boxed{\pi\cdot[f(x)]^2}\,dx$　　常为轴对称图形 or 好的表达

绕y轴旋转　$V=\int_c^d \boxed{\pi(\varphi(y))^2}\,dy$

2. 一般旋转体计算 ①柱壳 $V=\int_a^b dV=\boxed{2\pi\int_a^b xy}\,\boxed{dx}$　　$x\in(a,b)$　　形式简单，但积分可能会难

表面积 → 径厚

② 作差求减（常用于柱壳法构造过于麻烦，容易求出的情况）

一元函数积分学的物理应用

一、变力沿直线做功

$$W=\int_a^b F(x)\,dx$$

易错点 电场力做功 $W=\int_a^b \frac{kq}{r^2}dr = kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

水库阀 $G = m_s\cdot g = (\rho g s)$

二、流体侧压力

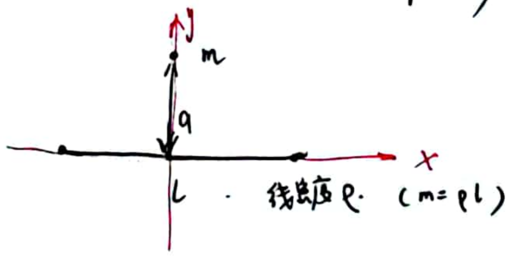
基本公式: 平行时: $P = pA = (g\rho h)\cdot A$.

不平行: 用微积分

三、引力问题.

点与点: $F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$ （or. $G\frac{m_1m_2}{r^2}$）

点与物体:



表示每个微

step1: 受力分析: $dF_{引} = k\cdot\frac{m\cdot \mu dx}{a^2+x^2}$

力的合成. $dF_y = -dF_{引}\cos\alpha$.

$dF_x = 0$

$\therefore F = \frac{2km\mu l}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$

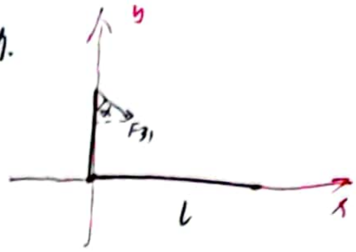
注: ① 当 $l\to\infty$. $F=\frac{2km\mu}{a}$

② 沿y轴向上移动, 克服引力做的功. 则有

$$dW = -\frac{2km\mu l}{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{4y^2+l^2}}dy \Rightarrow W = -2km\mu l\int_a^b \boxed{\frac{dy}{y\sqrt{4y^2+l^2}}}$$

上下字母替换 代换

③. 当点的位置不在中垂线上 那么需要考虑水平方向的力.



$$\begin{cases} dF_x = -dF\cos\alpha = -km\mu a\dfrac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ dF_y = dF\sin\alpha = +km\mu\dfrac{x\,dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = km\mu\cdot\int_0^l \dfrac{x\,dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} \\ F_y = - \end{cases}$$

★积分等式与不等式

（从某种程度上来说，这是题型的分布）

积分等式（本质：求积分+思维）

①积分中值定理

②夹逼准则

③用积分估

典例精讲

1. 用中值定理.（讨论）

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 不变号，证明：至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

证明过程：

设 $F(x) = \int_a^x f(t)g(t)\,dt$ 　　$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$

由柯西：

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

$$\Rightarrow \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)} = f(\xi)$$

∴ 原式得证.

eg. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $g(x) \neq 0$. 试证：至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

证一：用罗尔

令：$F(x) = \int_a^x g(x)dx \cdot \int_a^b f(x)dx - \int_a^x f(x)dx \int_a^b f(x)dx$

且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且可导.

$F(a) = F(b) = 0$ 　　∴ 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $F'(\xi) = 0$. 故原式成立.

证二：用柯西

设 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ 　　$G(x) = \int_a^x g(x)dx$

由柯西. $\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$ 　∴ 原式成立

2. 夹逼准则

"尽管手中有一些武(工具)了，但只是积分世界的冰山一角。

真正的积分世界十分精彩！ —— 张宇"

例1.10.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$

$$0<\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx<\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}\to 0$$

依夹逼，极限 = 0.

例1：求 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]$

解：将数列适当放大和缩小，以简化成积分和.

$$\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{多了}\boxed{\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n}\right)\frac{1}{n}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}<\boxed{\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}}_{少了\frac{1}{k}}}$$

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+\frac{1}{k}}$$

可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\underbrace{\sin\frac{k\pi}{n}}_{dy}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}}_{dx}=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$.

$\Longrightarrow$ 积分

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

利用夹逼准则 可知 $I=\frac{2}{\pi}$

3.积分法和求导法结合（本质也是去积）

处理方式

① 积分展开

② 求导

例1：设 $f(x)$ 为连续函数，证明：

$$\int_0^x f(t)(x-t)\,dt = \int_0^x\left(\int_0^t f(u)\,du\right)dt.$$

法一：对右边进行分部积分

$$\text{右边} = t\cdot\boxed{\int_0^t f(u)\,du}\Big|_0^x - \int_0^x t f(t)\,dt$$

参数是 t

$$=\left[x\int_0^x f(u)\,du - 0\cdot\int_0^0 f(u)\,du\right]$$

$$-\int_0^x t f(t)\,dt$$

$$=\int_0^x (x-t)f(t)\,dt \quad \text{// 识别变量}$$

∴ 得证.

法二：求导：

step1：

$$(\text{左})' = \left(x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x t f(t)\,dt\right)' \quad \text{// 有些需要拆开导}$$

$$=\left[\int_0^x f(t)\,dt + x\cdot f(x)\right] - \left[x f(x)\right]$$

$$=\int_0^x f(t)\,dt$$

$$\text{右}' = \int_0^x f(u)\,du \quad \text{// 加多层积分求导，注意参数表示}$$

step2：

$$(\text{左})' - (\text{右})' = 0$$

$$\Rightarrow \text{左} - \text{右} = C$$

令 $x=0$ 得 $C=0$ ∴ 得证

例2：多变量积分去积。

求：多项式 $f(x)$ 使之满足：

$$\int_0^1 f(xt)\,dt + \int_0^x f(t-1)\,dt = x^3+2x$$

解：

① 换元去除不定式 [积分—换元]

令 $u=xt$. $du = x\,dt$

$$\text{则 } \int_0^1 f(xt)\,dt = \int_0^x f(u)\,\frac{1}{x}\,du$$

故原式为：

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,du + \int_0^x f(t-1)\,dt = x^3+2x$$

$$\text{移项：} \int_0^x f(u)\,du + x\int_0^x f(t-1)\,dt = x^4+2x^2$$

② 运算、求导，[微分 → 二次导得 $f(x)$ 的次数]

$$f(x) + \left[\int_0^x f(t-1)\,dt + x\cdot f(x-1)\right] = 4x^3+4x$$

再导

$$f'(x) + \underline{f(x-1)} + \left[\underline{f(x-1)} + x f'(x-1)\right] = 12x^2+4$$

③ ★ 由于上面只是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 且右边最高次项为二次。故 $f(x)$ 为二次多项式！

设 $f(x) = ax^2+bx+c$ 主动猜出形式

$f'(x) = 2ax+b$

代入得，$a=3$. $b=4$. $c=1$

$$\Rightarrow f(x) = 3x^2+4x+1$$

例3：特殊类型：式子中含有积分，→求导得 $f'(x)=0$ → 原函数常数，则代值证明即可

eg. 证明：

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4} \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$$

解：

设 $f(x)=\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t} + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$

$f'(x)= x\cdot 2\sin x\cdot\cos x + x\cdot(-2\sin x)\cdot\cos x = 0$

$\therefore f(x)=C. \quad (0<x<\frac{\pi}{2})$

将 $x=\frac{\pi}{4}$ 代入得 $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$

∴原式得证

例4：有时候形式变形通常是求积分过程中用到的形式。故也可认为等式证明是求积分的过程。

eg. 若 $f(x)\in C[0,1]$，求证：

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx \quad ①$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx \quad ②$$

证明：

① $\boxed{换元}$ $x=\pi-t \quad dx=-dt$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \int_{\pi}^{0} (\pi-t) f(\sin t)(-1)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi-t) f(\sin t)\,dt$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t)\,dt$$

// 表明了换元（周期）得出相关式，以求得积分再积分情况

$\therefore \int_0^{\pi} t f(\sin t)\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt$

② 证明 ② = ③

已有

$$\boxed{\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(\sin x)\,dx$$

// 分部可由①得到来证明

$\xrightarrow{令 t=\pi-x} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx\right]\times 2$

综上，原式可证得

例5：积分式要求多 —— 用性质（奇函数）

选择一个常数 C，使

$$\int_a^b (x+c)\cos^{99}(x+c)\,dx = 0$$

解：

令 $t=x+c$，则

$$\int_a^b (x+c)\cos^{99}(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} t\cos^{99} t\,dt$$

∵被积函数为奇函数，故选择 c，使

$$a+c=-(b+c)$$

即：$c=-\frac{a+b}{2}$ 可使原式成立

例6：变形求解 [本质：先运算、再解方程]

eg. 求可微函数 $f(x)$（不恒为零）使满足

$$f^2(x) = \int_0^x f(t)\frac{\sin t}{2+\cos t}\,dt$$

解：

① 求导：//为了约去一些项

$$2\cancel{f(x)}\cdot f'(x) = \cancel{f(x)}\frac{\sin x}{2+\cos x}$$

② 由于 $f(x)$ 不恒为零，则

$$f'(x) = \frac{1}{2}\times\frac{\sin x}{2+\cos x}$$

//此后只剩 $f(x)$

∴ 两边积分得 $f(x) = -\frac{1}{2}\ln(2+\cos x) + C$

又 $f(0)=0$ //观察得 $C = \frac{1}{2}\ln 3$

∴ $f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2+\cos x}$

积分不等式.

① 函数单调性（最常用）

② 拉氏

③ 泰勒

④ 积分

⑤ 用凹凸性（较少）

积分不等式典例分析

1. 用函数单调性

例1.1a6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$. 证明：$\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geq (b-a)^2$

也是习题集的题

解：令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt \cdot \int_0^x \frac{1}{f(t)}dt - (x-a)^2 \quad x\in[a,b]$

$$F'(x) = f(x)\cdot\int_a^x \frac{dt}{f(t)} + \int_a^x f(t)dt \cdot \frac{1}{f(x)} - 2(x-a)$$

$$= \int_0^x \left[\frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} - 2\right]dx \geq \int_a^x (2-2)dt = 0$$

从而 $F(x)$ 单调增加，故 $F(b) \geq F(a) = 0$. 得证。

2、拉氏 //常要乘积用.

条件："$f(x)$一阶可导"且某一端点值较特殊（是0）

例1.1.9.8. 设$f(x)$在$[0,1]$上具有一阶连续导数且$f(0)=f(1)=0$. 证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}.$$

//需要$f(x)$与$f'(x)$ 所以用拉氏

证明：将区间$[0,1]$分成2个小区间$[0,x]$和$[x,1]$.

在$[0,x]$上对$f(x)$使用拉氏，得$f(x)-f(0)=f(x)=f'(\xi_1)(x-0)$. $\xi_1\in(0,x)$.

$$|f(x)|=|f'(\xi_1)|x$$

在$[x,1]$上对$f(x)$使用拉氏，得$f(1)-f(x)=-f(x)=f'(\xi_2)(1-x)$. $\xi_2\in(x,1)$

$$|f(x)|=|f'(\xi_2)|\cdot(1-x)$$

当$x\in[0,1]$时，记$M=\max\{|f'(x)|\}$ 则.

$$|f(x)|\le Mx,\quad |f(x)|\le M(1-x)$$

纯粹定义来列表达式

提，拉氏表达了，再转换进行运算

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| = \left|\int_0^x f(t)dt+\int_x^1 f(t)dt\right|$$

$$\le M\cdot\int_0^x t\,dt + M\cdot\int_x^1 (1-t)dt.$$

$$= M\cdot\left[\frac{x^2}{2}+\frac{(1-x)^2}{2}\right]$$

其中，根据基本不等式，$\min\left\{\frac{x^2}{2}+\frac{(1-x)^2}{2}\right\}=\frac{1}{4}$.

例：设$f(x)$在$[0,1]$上是单调递减的连续函数，试证明对于任何$q\in[0,1]$都有不等式

$$\int_0^q f(x)dx \ge q\int_0^1 f(x)dx$$

解：① 显然$q=0$，$q=1$成立

② $q\in(0,1)$时，

$$\int_0^q f(x)dx - q\int_0^1 f(x)dx = \int_0^q f(x)dx - q\left(\int_0^q f(x)dx+\int_q^1 f(x)dx\right)$$

$$=(1-q)\int_0^q f(x)dx - q\int_q^1 f(x)dx$$ （用积分中值定理）

3.泰勒式.

条件: "$f(x)$二阶可导"且某一端点值较简单(甚至为0)

例1.10.9. 设$f(x)$在$[0,2]$上二阶导数连续,且$f(1)=0$,当$x\in[0,2]$时,

记$M=\max\{|f''(x)|\}$,证明:$\left|\int_0^2 f(x)\,dx\right|\le\frac{1}{3}M$.

表示出$f''(x)$,然后

证明: 根据题目,选取其点$x_0=1$展开泰勒公式.

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2 \quad \xi\text{介于}x,1\text{之间}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x)dx=\boxed{f'(1)\int_0^2(x-1)dx}+\int_0^2\frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2dx. =\frac{1}{2}\int_0^2 f''(\xi)(x-1)^2dx$$

以向构想来算

$$\Rightarrow \left|\int_0^2 f(x)dx\right|\le\frac{1}{2}\int_0^2|f''(\xi)|(x-1)^2dx \quad \text{// 加了绝对值}$$

$$\le\frac{1}{2}M\int_0^2(x-1)^2dx=\frac{1}{3}M$$

4. 用积分法、// 基本方法：凑微、换元

例 1.10.10 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)=0$. 求证：

(1). $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)dx$;

(2) $\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \frac{1}{12}\max\limits_{0\le x\le 1}|f''(x)|$

解：

(1) $\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)d[f'(x)]$ // 凑微.

$= \frac{1}{2}x(x-1)f'(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)(2x-1)dx$ // 分部积分

$= -\frac{1}{2}\int_0^1 (2x-1)d[f(x)]$

$= -\frac{1}{2}\cdot(2x-1)\cdot f(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 f(x)dx$

由 $f(0)=f(1)=0 \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $(2x-1)f(x)\Big|_0^1=0$

∴ 结论成立

(2). 记 $M=\max\limits_{0\le x\le 1}\{|f''(x)|\}$. 则由(1)有

$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \frac{M}{2}\cdot\int_0^1 x(1-x)dx = \frac{M}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) = \frac{M}{12}$

5、用函数凹凸性来证（备选）

例. 设 $f''(x)>0$, $x\in[a,b]$，证明：

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\int_a^b f(x)\,dx\le(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

法一：左、右分别构造，用函数单调性证

法二：如上

因 $f''(x)>0$, $x\in[a,b]$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的，

从而曲线上任一点切线在曲线下方，连接任两点的弦在上方。

∴ 曲线在点 $\left[\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$ 的切线方程为

$$y=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

两点 $[a,f(a)]$，$[b,f(b)]$ 的弦的方程为

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

∴ 原函在两直线之间

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\le f(x)\le f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

在 $[a,b]$ 取积分

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le f(a)(b-a)+\int_a^b\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,dx$$

即可证得成立。

6. 其它不等式积分

①. 柯西-施瓦茨不等式.

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx$$

证明:

∵ 对 $\forall\lambda$ 有 $\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2 dx \geqslant 0$ 即:

$$\int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b 2f(x)\lambda g(x)dx + \int_a^b \lambda^2 g^2(x)dx \geqslant 0$$

要使之成立 即 $\Delta = 4\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 - 4\times\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \leqslant 0$

从而得证.

例. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)>0$. 证明:

$$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geqslant (b-a)^2$$

微分方程

基本思路

① $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{dx}{dy}$ 本质上是一样的

② 形式非对称，常换元！

一阶微分方程的求解

1. 可分离变量型。

①有特值，则有特解

②是否对复杂换元求解，这需要选择。

[能分离时先分解]

注：

例：有些变形会导致增or减解

eg. 求 $\frac{dy}{dx}=3x^2y$ 的通解

①变形+分离变量

$$\frac{dy}{y}=3x^2dx$$

②两边积分：$\ln|y|=x^3+C$

即：$y=\pm e^{x^3+C_1}=\pm e^{C_1}\cdot e^{x^3}$

$\xrightarrow{令C=e^{C_1}}$ $y=Ce^{x^3}$（C为任意常数）

[此时式子会分离变量丢失的解 $y=0$]

例：求下列微分方程的通解

$$y'=\sin^2(x-y+1)$$

①此时是形如：$y'=f(ax+by+c)$形式

例题，$\boxed{方法是换元，减少复杂运算}$

令 $u=x-y+1$，则 $u'=1-y'$

故有 $1-u'=y'$

故有：$1-u'=\sin^2 u$

②分离

$$1-\frac{du}{dx}=\sin^2 u$$

$$\frac{du}{dx}=\cos^2 u$$

$$\sec^2 u\,du=dx$$

③运算：(积分)

$$\tan u=x+C$$

即：$\tan(x-y+1)=x+C$

(要换了回来)

例3：二重换元

eg $y'+x=\sqrt{x^2+y}$

解：

① 一重换元：一阶线性、x,y不可分离

令 $u=\sqrt{x^2+y}$，则 $y=u^2-x^2$

$$dy=2u\,du-2x\,dx$$

原方程：$\left(2u\boxed{\frac{du}{dx}}-2x\right)+x=\boxed{u}$

$$\frac{du}{dx}-\frac{1}{2}-\frac{x}{2u}=0$$

② 二重换元：同样一阶线性、x,y不可分离

令 $\frac{u}{x}=v$，则 $u=xv$，即 $\frac{du}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

故 $v+x\frac{dv}{dx}-\frac{1}{2}-\frac{x}{2x\cdot v}=0$

$$v+x\frac{dv}{dx}-\frac{1}{2v}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x\,dv}{dx}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2v}-v=\frac{v+1-2v^2}{2v}$$

$$\frac{2v\,dv}{v+1-2v^2}=\frac{dx}{x}$$

两边积 $\boxed{\int\frac{2v}{-2v^2+v+1}dv}=\ln x$

有理式积分

$\therefore \frac{1}{3}\left[\ln|v-1|+\frac{1}{2}\ln|2v-1|\right]+\ln C_1=-\frac{1}{2}\ln|x|$

$$(v-1)^{\frac{1}{3}}(2v-1)^{\frac{1}{6}}C_1=|x|^{-\frac{1}{2}}$$

$$(v-1)^2(2v-1)C_1^6=|x|^{-3}$$

$\xrightarrow{v=\frac{u}{x},\ u=\sqrt{x^2+y}}$

$$(x^2+y)^{\frac{3}{2}}=x^3+\frac{3}{2}xy+C$$

Scanned with CamScanner

一阶线性微分方程

形如：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 。若$Q(x)=0$，则为齐次方程；若$Q(x)\neq0$，则为非齐次方程

绿色部分线性

main：$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$

$=\underbrace{Ce^{-\int P(x)dx}}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}_{\text{非齐次方程特解}}$

(当$Q(x)=0$时
也可直接代入值)

例1：也可以对"y"求，其它形式

① 变形一：成"x"

eg. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=y^2$ //取倒数移项整理

则 $x=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(\int y^2e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right)$

$=y\cdot\left(\int y\,dy+C\right)=y\left(\frac{1}{2}y^2+C\right)$

② 变形二：成"y^2"

eg. $y'=\frac{y^2-x}{2y(x+1)}$

$\Rightarrow 2y\cdot y'=\frac{1}{x+1}\cdot y^2-\frac{x}{x+1}$

则 $\frac{d(y^2)}{dx}-\frac{y^2}{1+x}=-\frac{x}{x+1}$

故用式得 $y^2=(x+1)\left(-\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}+C\right)$

(other) 常数变易法 $Q(x)\neq0$，则 y 必为 $u(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}$

例2：除了直接用公式，也可先求通解，用通解解特解。

eg. $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{5/2}$

解：

①.求通解

$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=0 \rightarrow \frac{dy}{2y}=\frac{dx}{x+1}$

$\ln|y|=2\ln|x+1|+\ln|C| \Rightarrow y=C(x+1)^2$

$C \rightarrow u(x)$

② 解特解：$u(x)$ 常数变易法

$\boxed{y=u(x+1)^2} \Rightarrow y'=u'(x+1)^2+2u(x+1)$

对应：

$y'-2u(x+1)=u'(x+1)^2$

$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}\cdot y=(x+1)^{5/2}$

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

$\therefore u'=(x+1)^{1/2}$ $\therefore u=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C$

$\therefore y=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C\right]$

例3 形式变形 伯努利方程（书後·代换求解）

① $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$

对应位置相消

$y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$

令 $z=y^{1-n}$ 　 $\dfrac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$

同乘 $(1-n)$ 换成 $\boxed{z}$

$\dfrac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$

例4: 有时候需要换元来做.

eg. 求一连续可导函数 $f(x)$ 满足以下

$f(x)=\sin x-\boxed{\int_0^x f(x-t)dt}$
积分换元

$\xrightarrow[du=-dt]{令u=x-t}$ $f(x)=\sin x-\int_0^x f(u)du$

求导: $f'(x)=\cos x-f(x)$

随后是一阶线性

例4: 当 $y'+P(x)y=q(x)$ 中, $q(x)$ 含有 y

则考虑换元.

e.g. $y'=y^2+2(\sin x-1)y+\sin^2x-2\sin x-\cos x+1$

解: 原式 $=y'=(y+\sin x-1)^2-\cos x$

令 $u=y+\sin x-1$ 　 $u'=y'+\cos x$

∴ 原方程 $u'-\cos x=u^2-\cos x$

$\frac{1}{u^2}du=dx$

积分 $-\frac{1}{u}=x+C$

即: $u=-\dfrac{1}{x+C}$

代入 $u=y+\sin x-1$.

∴ $y=1-\sin x-\dfrac{1}{x+C}$

Scanned with CamScanner

高阶微分方程

(阶数≥ 2)

①. 2阶可降阶微分方程. 二阶. 数学一会出 考察.

②. 高阶线性微分方程. { 解的结构.

可降阶的高阶微分方程

可降阶类型：

$y^{(n)} = f(x) \to$ 不断找原函

$y'' = f(x, y') \to$ 换元：$p = y'$ $\boxed{p' = y''}$（构造中间量）

$y'' = f(y, y') \to$ $p = y'$ $\boxed{p' = p\frac{dp}{dy}}$ $\left(p' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\right)$

$y'' = f(y') \to$

- 一般用 $y' = p(x)$
- 有时用 $y' = p(y)$ eg. $y'' = e^{-(y')^2}$

例1: 只含 y'' 和 y'，但仍用 $p'=\frac{dp}{dx}$

因为有 x 的赋值

eg. $y''-ay'=0$. $y|_{x=0}=0$. $y'|_{x=0}=-1$

解: ① 令 $y'=p$ 则 $y''=p'$.

原方程: $p'-ap^2=0$.

② 分变.

$$\frac{dp}{p^2}=a\,dx$$

③ 积分得: $-\frac{1}{p}=ax+1$.

又积分 $y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)+C_2$

代入 $y|_{x=0}=0$. 得 $C_2=0$

$\therefore y=-\frac{1}{a}\ln(ax+1)$

例2: 只含 $y^3\cdot y''$ ~~...~~ 降次数.

eg. $y^3 y''+1=0$. $y|_{x=1}=1$. $y'|_{x=1}=0$

解: $y''+\frac{1}{y^3}=0$.

① 构建 y'

$$y''\cdot 2y'+\frac{2y'}{y^3}=0$$

即: $\left(y'^2-\frac{1}{y^2}\right)'=0$

故 $y'^2-\frac{1}{y^2}+C=0$

② 代入 $y=1$, $y'=0$ 得: $y'=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$.

③ 之后分离变量可求 $-\sqrt{1-y^2}=\pm(x-1)$

$\therefore y=\sqrt{2x-x^2}$

高阶常系数线性微分方程

精析：只要不含 C_1, C_2 便是特解

② 特解 代入得 为特解 (3+1)

例1：高阶求解，非齐次。

e.g. $\begin{cases} y''' + 3y'' + 2y' = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

解：

①求齐次得：

$$r^3 + 3r^2 + 2r = 0$$

根为 $r_1 = 0 \quad r_2 = -1 \quad r_3 = -2$

∴通解：$Y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$

②设特解：$y^* = 1 \times A \times x$

代入原方程得：$y^* = \frac{1}{2}x$

③ 通解：

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{2}x$$

④ $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ 代入 得结果，$C_1 = -\frac{3}{4}$ $C_2 = 1$ $C_3 = -\frac{1}{4}$

$$y = -\frac{3}{4} + e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{1}{4}\left(-3 + 2x + 4e^{-x} - e^{-2x}\right)$$

例2：解的结构

验证 $y = \frac{1}{x}(C_1 e^x + C_2 e^{-x}) + \frac{e^x}{2}$（$C_1, C_2$ 是任意常数）是方程

$$xy'' + 2y' - xy = e^x$$

的通解。

验证：

①找解 $y_1 = \frac{e^x}{x}$ $y_2 = \frac{e^{-x}}{x}$，$y^* = \frac{e^x}{2}$

且 y_1, y_2 代入齐次中等于0.

说明 y_1, y_2 为齐次的2个解。

②验证2个解是否线性相关。

$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{-x}}$ 不是线性关系

故通解验证，$y_1 y_2$ 为对应的通解。

③同时将 y^* 代入函数等于 e^x.

说明 y^* 为函数的特解

④综上，该函数的解为

$$Y = C_1\frac{e^x}{x} + C_2\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^x}{2}$$

例3：n≥3阶方程的解

e.g. 真题18讲 P287. 例15.15

解：

① 依解反推原方程

1° 非齐次标准形式 $te^t \xrightarrow{\text{代表}} e^t$

2° 入为单复根 $\alpha \pm \beta i$ 时：由 $\sin 2t \to \cos 2t$

故特征根为 λ_1

故特征方程：$(\lambda-1)^2(\lambda^2+4)=0$

② 求其通解.

即：$\lambda^4-2\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0$

故微分方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''-8y'+4y=0$

其通解为 $y=(C_1+C_2t)e^t+[C_3\cos 2t+C_4\sin 2t]$

新部分：等式处理 <用极限、微分、积分来处理>

反馈：解答部分 or 类别　　会求极、会存微

联合：

①微分/积分应用：等式处理

②积分本身操作

例1：设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，且满足 $f(x)=1+\int_1^x \frac{1}{x}f(t)dt\ (x>0)$，求 $f(x)$.

解：

①转化/变形

由于

$$\underset{\text{原函数}}{\boxed{f(x)}}=1+\int_1^x\frac{1}{x}f(t)dt=\overset{\text{积分}}{\boxed{1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt}}$$

②求导

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)dt+\frac{1}{x}f(x)$$

$$=-\frac{1}{x}[f(x)-1]+\frac{1}{x}f(x)$$

//用导前式子直接替换.(求导积分关系) 消积分

$$=\frac{1}{x}$$

③再积得

$f(x)=\ln|x|+C$. //得到了 $f(x)$ 多个函数

又 $f(1)=1$. 因此：$f(x)=\ln|x|+1$

例2：①求导

②变系数二阶.

五、(8分) 设

轴上的截距等于 $\frac{1}{x}\int_0^x$

3. 设函数 $f(x)=\frac{x}{x^2}$

A $f(x)$ 有2个间断点

解：①切线

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x)$$

令 $X=0$. $Y=f(x)-xf'(x)$

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=f(x)-xf'(x)$$

②变形求导

上式两边同乘 x 并求导.

$$xf''(x)+f'(x)=0.$$

回顾：

二阶变系数：可降阶，可凑：

法1：缺x降阶

令 $p=f'(x)$　$p'=f''(x)$

原式可：$xp+p'=0$ //一阶线性

$$\frac{p}{dp}=-\frac{x}{dx}$$ //可分离变量

$$\ln p=-\ln x+\ln|C_1|$$

$$\therefore f'(x)=p=\frac{C_1}{x}$$

$$f(x)=C_1\ln|x|+C_2$$

法2：凑求导，

$$\frac{d[xf'(x)]}{dx}=0\quad\therefore xf'(x)=C_1$$

$$\therefore f(x)=C_1\ln|x|+C_2$$

例13: 2019.期末.压轴.奇葩变形:先拆,再导多次

eg. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数且 $f''(x)\le 0$, $F(x)=\int_0^1 f(y)|x-y|\,dy$, 其中 $0\le x\le 1$. 证明: $f(x)=\frac{1}{2}F''(x)$.

解: ①区间可加性

$$\because F(x)=\int_0^x f(y)(x-y)dy+\int_x^1 f(y)(x-y)dy$$

$$=x\int_0^x f(y)dy-\int_0^x y f(y)dy$$
$$+x\int_x^1 f(y)dy-\int_x^1 y f(y)dy$$

②对其求导

$$F'(x)=\left(\int_0^x f(y)dy+x\cdot f(x)\right)$$
$$-(xf(x))+\left(\int_x^1 f(y)dy+x\cdot(-f(x))\right)$$
$$+xf(x)$$

$$=\int_0^x f(y)dy-\int_x^1 f(y)dy.$$

③再求导

$$F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x)$$

$\xrightarrow{\text{自然结果}}$ $\frac{1}{2}F''(x)=f(x)$

Scanned with CamScanner

不等式处理 <用高么根本~~[?]~~来处理：构原函·积分>

例1：同济 2019 期末压轴

(2). $\int_0^1 f(x^2)dx \le f(\frac{1}{3})$.

解：

① 首先：需要一个$f(\frac{1}{3})$，故考虑泰勒展开

在 $x_0=\frac{1}{3}$ 处展开

$$f(x)=f(\tfrac{1}{3})+\frac{f'(\frac{1}{3})}{1}(x-\tfrac{1}{3})+\frac{f''(\frac{1}{3})}{2!}(x-\tfrac{1}{3})^2$$

$$\le f(\tfrac{1}{3})+f'(\tfrac{1}{3})(x-\tfrac{1}{3})$$

② 由于原积为 积分的原函. 故

$$f(x^2)\le f(\tfrac{1}{3})+f'(\tfrac{1}{3})(x^2-\tfrac{1}{3})$$ //换自变

$$\int_0^1 f(x^2)dx \le \int_0^1\left[f(\tfrac{1}{3})+f'(\tfrac{1}{3})(x^2-\tfrac{1}{3})\right]dx$$

$$=f(\tfrac{1}{3})$$

(4).

$$\cos 2^\circ = \cos\frac{\pi}{90} = 1 - \frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 - \cdots$$

$$|r_2| \le u_3 = \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 < 10^{-7}.$$

$$\therefore \cos 2^\circ = 1 - \frac{1}{2!}\times\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 \approx 0.9994.$$

2.

(1).

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx$$

$$= \int_0^{0.5}\left[1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \cdots + (-1)^n x^{4n} + \cdots\right]dx$$

$$= \left(x - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{13}x^{13} + \cdots\right)\Bigg|_0^{0.5}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\times\frac{1}{2^5} + \frac{1}{9}\times\frac{1}{2^9} - \frac{1}{13}\times\frac{1}{2^{13}} + \cdots$$

$$|r_3| \le u_4 = \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}} \approx 0.000009 < 10^{-4}$$

∴取3项.

$$原式 \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\times\frac{1}{2^5} + \frac{1}{9}\times\frac{1}{2^9} \approx 0.4940$$

(2).

因:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$(-1 < x < 1)$$

故:

$$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx$$

$$= \int_0^{0.5}\left[1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1} + \cdots\right]dx$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{9}\times\frac{1}{2^3} + \frac{1}{25}\times\frac{1}{2^5} - \frac{1}{49}\times\frac{1}{2^7} + \cdots$$

由于

$$|r_3| \le u_4 = \frac{1}{49}\times\frac{1}{2^7} \approx 0.0002 < 10^{-3}$$

∴取三项得.

$$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{9}\times\frac{1}{2^3} + \frac{1}{25}\times\frac{1}{2^5}$$

$$\approx 0.487$$

3.

(1). 令 $y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-0)^n$.

$y|_{x=0} =$

Scanned with CamScanner

① 作业本

② 30讲看技巧

③ 复习知识本

每种技巧

看免刷的能

看PPT记录

写法

西电特色：做优化问题

知识的全面性

高等数学Ⅱ

自己还会有一种主动的复习、刷题

科目本身特点：先接受它，再尝试消化

① 记结构+典题 → 再复习

② 掌握 练习册例题

③ 练习册题目

备考：根据实际情况，考前了就要把高数全看一遍

18讲

学习：上课记好结构、尽量同步练习册与作业本

随后了下课，要把练习册与作业本写完

注意：之后，就要提高学习！！！！

知识结构

第八章 空间解析几何与向量代数

- 理：向量、数量积、向量积
- 几何：点、线、面、体

第九章 多元函数微分法及其应用

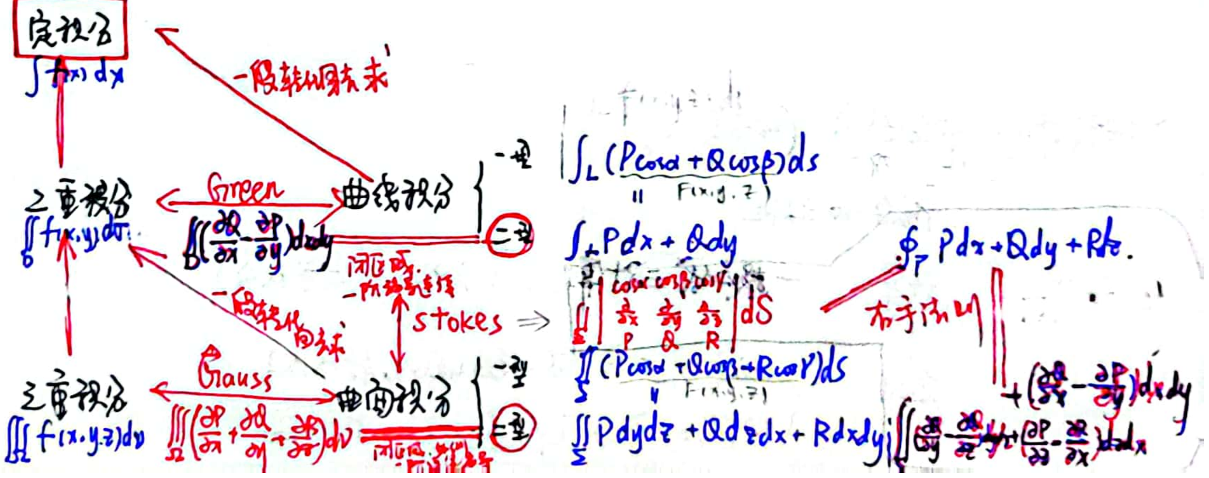
基本概念：
- 多元函数基本概念
- 极限
- 偏导、方向导数（连续性）（梯度）
- 全微分
- 连续

高阶导，链式导，隐函数求导 ← 一个方程；方程组（偏微分etc）

应用：
① 切线、法平面
② 极值、最值
- 无条件极值：多元函数、隐函数
- 条件极值：（拉格朗日乘数法）（边界上最值，闭区域上最值）

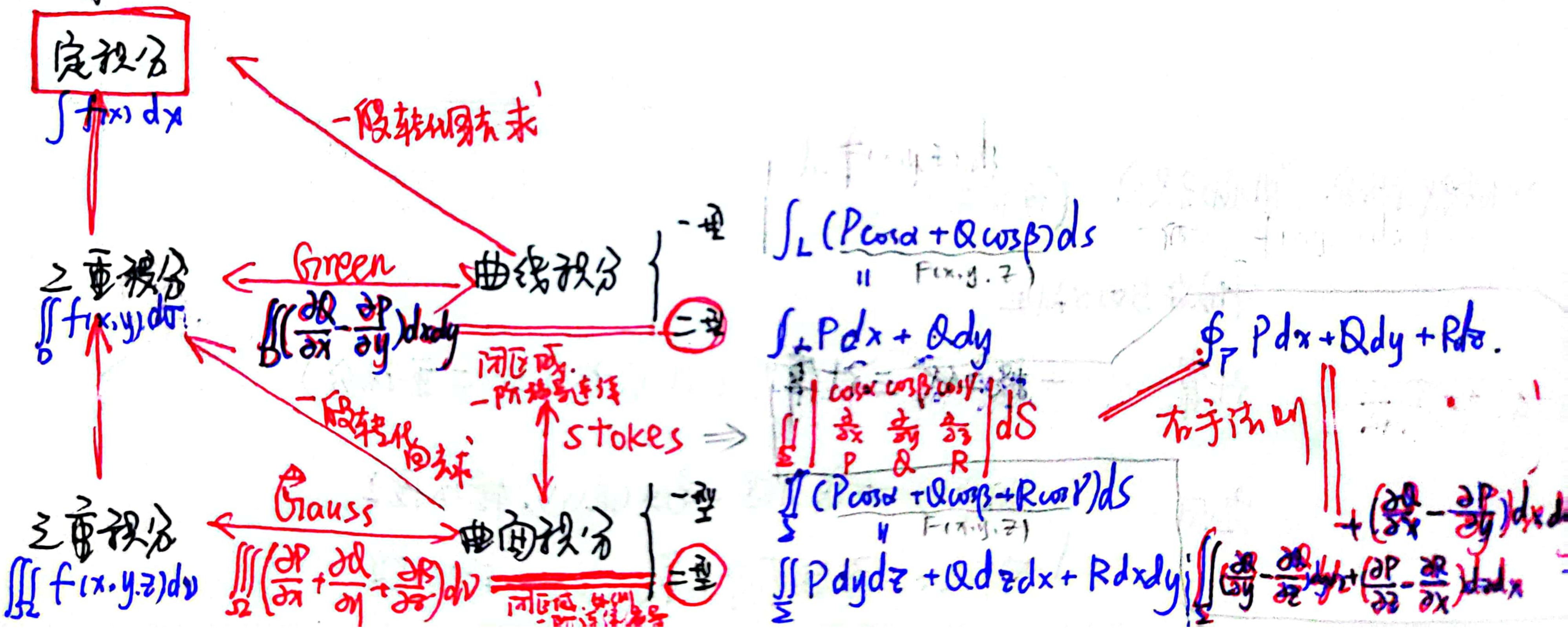
第十章 重积分 第十一章 曲面曲线积分

★ 积分路径图：



第十章 重积分 第十一章 曲面曲线积分

★ 积分路径图：



⇒ 二重积分：概念 { 和式极限
对称性 { 坐标面 / 轮换
二重积分比大小 { 用对称性 / 用保号性
周期性.

计算 { 直角坐标系 转序
极坐标系 转序
直极互化

应用： { 面积 $S=\iint_D d\sigma$
柱体体积 $V=\iint_{D_{xy}}|z(x,y)|d\sigma$
总质量 $m=\iint_D \rho(x,y)d\sigma$
重心坐标 → $\bar{x}=\dfrac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma}$
转动惯量： → $I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma$. $I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma$.
引力 → $\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$ $d\vec{F}=|dF|\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ → 用积分可得引力

⇒ 三重积分：概念、对称性 { 坐标面 / 轮换.

计算 { 直角坐标系 { 先一后二（先z后xy） / 先二后一（先xy后z） — 适用场合 / 计算方法
柱面坐标系 ═ 极坐标二重积分 + 定积分
球面坐标系 { 适用场合 / 计算方法

应用：体积、总质量、重心、转动惯量、引力

⇒ 曲线积分/曲面积分（华东主线）.

概念与对称性
计算 一投二代三计算（化定积分与二重积分）
应用： { 曲线：长度.质量.重心（形心）.转动惯量
曲面：面积.质量.重心（形心）.转动惯量.

第十二章. 无穷级数.

常数项级数的判敛.
- 定义 S_n.
- 判敛法.
  - 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. $u_n \geq 0$
  - 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$, $u_n > 0$
  - 任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. u_n符号无限制) 绝对/条件收敛
- 常用结论 (多与其他方法综合得出相应结论)

幂级数的
- 概念.
  - 收敛点与发散点.
  - 收敛域
- 具体型问题.
  - 对于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
  - 对于缺项幂级数. $\sum u_n(x)$)
- 抽象型问题
  - Abel 定理 ⇒ 考基本定理的使用
  - 结论1
  - 结论2 不太考

傅里叶级数.
- 狄利克雷收敛定理
- 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数展开式公式

⇒ Important

先导后积
先积后导
再合结论

$$\text{和函数} \underset{\text{求和}}{\overset{\text{展开}}{\rightleftarrows}} \text{级数.}$$

直接套公式
四则运算、求导、积分等变形结合

数学思维

①.逻辑

- 直线推理：$A \Rightarrow B \Rightarrow C$
- 执果索因：满足什么条件（B），使得……（A）存在

解法：若A，则需B什么条件，列出关系式，进而求解

② 运算思维　找某条件使：

$$\frac{2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$$

当分别平行时才成立.

③关于正负问题：要用草图。尤其在几何中尤为需要草图.

④.关于多变量的认识：高中认识的多元、变量关系，不是简单的函数，而是作为高层思维进行思考.

多元函数微分学

第八章 空间解析几何与向量代数[一定会结合立体空间判断]

核心：构建一种空间思维，先进行空间构想，随后用相关基础进行解释(答)

所有知识结构都

同时，一些基本的变形、系数、各种思想也是要有的

多尝试，画图辅助思考

注：① 下面的知识结构为课堂结构
② 用于基础知识的结构性掌握，便于随后复习所用

第一节
- 一、空间直角坐标
- 二、向量的坐标表示
- 三、向量的线性运算
- 四、向量的模、方向角、投影
  - 1、向量的模 与两点间距离公式
  - 2、方向角与方向余弦
  - 3、向量在轴上的投影与投影定理

概念基础/工具

向量代数

第二节
- 一、数量积 相乘为数
- 二、向量积 向量计算
- 三、混合积 行列式，结果为数

着力三元的吗？注意计算

1定义
2性质
3运算规律
4几何意义
5坐标表示

第三节 面
- 一、曲面方程与空间曲线方程的概念
- 二、① 平面的点法式方程 ⟶ ② 三点式方程：
- 三、③ 平面的一般方程 依比例分配到方程 → ④ 截距式方程
- 四、两平面的夹角
- 五、点到平面的距离

(x,y,z) 四点 (x_k,y_k,z_k) $k=1,2,3$

有：
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

相互也有关系（垂直、平行、距离）

第四节：线
- 一、几种直线基本方程
  - 一般方程
  - 对称式方程
  - 两点式方程
  - 参数方程 → ① 常用来求线面交点；② 一般先转成对称式再转参数
- 二、直线与直线夹角
- 三、直线与平面的夹角
- 四、$\boxed{\text{平面方程}}$：平面束
  已是平面方程了

第五节 曲面及方程

一、曲面方程研究的基本问题
二、旋转曲面 → 要会求旋转平面方
三、柱面 二维方程在三维中的体现 [只含2个变量]

基本变化

四、二次曲面(三元，且为2次)

1. 基本方法：截痕法、伸缩法
(代特殊值) (变化)

2. 六种基本类型

椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$

a=b 圆锥面

椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

a=b=c 球面

抛物面有两个：椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

a=b 旋转抛物面

双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$
(马鞍面)

有减号： 单叶双曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
(一个减号为单)
a=b 旋转单叶双曲面

双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
(2个减号为双)
b=c 旋转双叶双曲面

注：红色部分为旋转曲面的情况

第六节 空间曲线及其方程

一、空间曲线的一般方程 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

二、空间曲线的参数方程 e.g. 螺旋线

注：一般情况，参数方程没法表达过多的曲线，故常用一来作曲线方程

★重点方法：一般方程化参数方程 (注意标注t范围)

① 找中间参数，凑出符合条件的数。e.g. $x^2+y^2=1 \Rightarrow x=\cos t$ $y=\sin t$

② 令 $z=t$，进行反解，解出 x, y.

三、空间曲线在坐标面上的投影

先消某一元，再令该元=0.
(代入消元)

四、空间立体或曲面在坐标面上的投影

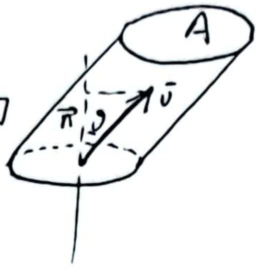
找最大外廓轮线，再与相应值(x or y or z)=0

//有时需结合具体问题具体分析。

//画图辅助

1. 向量积的物理应用

求单位时间内流过该平面域的流体的质量P(流体的密度为ρ).

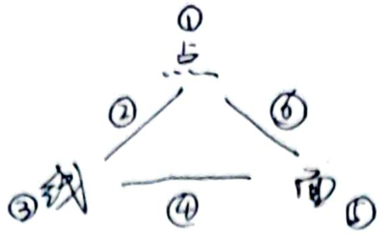


$$P = \rho \cdot \cancel{V}$$
$$= \rho \cdot A \cdot |\vec{v}| \cos\theta$$

2. 求法向量. new point.

$$\vec{\alpha} = \pm \frac{(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD})}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|}$$

距离问题:

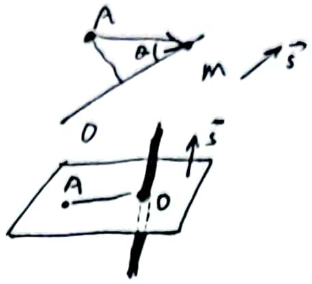


① 点点… easy $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

② 点线: 法1: $d=|\vec{AM}|\sin\theta$ 找2线

法2: $d=|AO|$ 面上点到直线

法3: $d=\dfrac{|\vec{s}\times\vec{MP_0}|}{|\vec{s}|}$ (三维时可求)



③ 线线: 常:异面直线: step1: 过l_1作与l_2平行的平面(平面束)

step2: l_2上任一点到平面距离即为所求

④ 线面 $\Longrightarrow$ 常转化为③
(一般线平行于面)

⑤ 面面 距离: $d=\dfrac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

⑥ 点面距离: $\boxed{d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$

异面直线间的公垂线

几何法
① 用向量积，求出公垂线方向向量 $\vec{s}$
② 作2个平面：2条直线分别与公垂线所成平面（向量积＋点法式）
定方向　过点
③ 两平面交线即为结果

代数法：设2个点 (x_1,y_1,z_1) (x_2,y_2,z_2)，满足 2组垂直 $(l_1\perp s,\ l_2\perp s)$
2条直线：4个方程

例：求直线 l_1：$\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$　l_2：$\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}$ 的公垂线方程

解：① 设 l 方程的方向向量为 $\vec{s}$.

已知 l_1 方向向量 $\vec{s_1}=(4,-3,1)$　$\vec{s_2}=(-2,9,1)$

$$\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -3 & 1\\ -2 & 9 & 2\end{vmatrix}=-15\vec{i}+(-10)\vec{j}+30\vec{k}$$

$\therefore \vec{s}=(-3,-2,6)$

②

法向量 $\vec{n_1}=\vec{s}\times(\vec{s_1}\times\vec{s_2})=5(-16,-27,-17)$.　$M_1(9,-2,0)\in l_1$

平面 π_1 方程：$-16(x-9)-27(y+2)-17(z-0)=0$

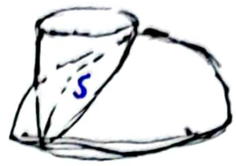
同理 π_2　$58x+6y+31z-20=0$

$\therefore$ 公垂线方程为 $\begin{cases}16x+27y+17z-90=0\\ 58x+6y+31z-20=0\end{cases}$

空间立体的投影

注意：公共部分与交线是不一样的

例. 设一立体，由上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与柱面 $x^2+y^2-ax=0$ 及平面 $z=0$ 所围成，如图.



(1) 求立体在 xoy 面和 zox 面上的投影

(2) 曲面S在 xoy 面上的投影.

解：

(1) 两曲面交线为

$$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax\le 0 \end{cases}$$ //相交是个面

① 即：交线在 xoy 面上投影方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2-ax=0 \\ z=0 \end{cases}$$ //上面投影一个方程无z，故直接写下来

即为在 xoy 上投影的边界曲线

⇒ 投影为 $\begin{cases} x^2+y^2-ax\le 0 \\ z=0 \end{cases}$ //这是一个范围

② 在 zox 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2+z^2\le a^2 \\ x\ge 0 \quad z\ge 0 \quad y=0 \end{cases}$$

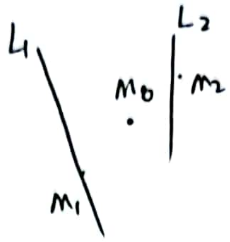
(2) $\begin{cases} x^2+y^2\le ax \\ z=0 \end{cases}$ //必须结合图形分析得出结果

解几典题

根本是不限制自己的思路去完成，找准一个几何关系，

例：求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases}y=2x\\z=x-1.\end{cases}$

$L_2:\begin{cases}y=3x-4\\z=2x-1\end{cases}$ 都相交的直线 L.



解：

① 先参数化

先求 M_1. M_2. 再写直线方程.

将 L_1. L_2 的方程化为参数方程

$L_1:\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=t-1\end{cases}$, $L_2:\begin{cases}x=t\\y=3t-4\\z=2t-1\end{cases}$

② 求交点.

设 L 与它的交点为

$M_1(t_1, 2t_1, t_1-1)$. $M_2(t_2, 3t_2-4, 2t_2-1)$

③ M_0. $M_1 M_2$ 三点共线.

$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M_1} // \overrightarrow{M_0M_2}$

$\Rightarrow \dfrac{t_1-1}{t_2-1}=\dfrac{2t_1-1}{(3t_2-4)-1}=\dfrac{(t_1-1)-1}{(2t_2-1)-1}$

$\Rightarrow t_1=0.\quad t_2=2.$

$\Rightarrow M_1(0,0,-1)\quad M_2(2,2,3)$

$L:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$

第九章 多元函数微分法及其应用

本质也是函数，与之前的一并体悟

研究范围

- 一、区域
  - 1.邻域：圆域，球邻域，去心邻域
  - 2.区域：
    - (1) 内点、外点、边界点
    - (2) 聚点
    - (3) 开区域及闭区域 〈连通，开闭与否〉 → 有界域
      ↳ 会有求连续域的题（=求不等式+图）
  - 3. n维空间

第一节 多元函数基本概念

- 二、多元函数的概念：⇒ 求函数：常用换元，求出函数，再用来求解
- 三、多元函数的极限：定义与一元函数类似 类比学习：唯一性，保号性，有界性，夹逼准则
  第一个研究对象
  ⇒ 判断无极限：$f(x,y)$ 趋向不同的值
  正面证极限用定义，反面用趋向任意确定值 e.g. x_0，$y=f(x)$ etc.
  ⇒ 区别：任意 > 无穷多个
  e.g. 虽沿直线 $y=kx$ 趋于任意方向当 $(x,y)\to(0,0)$ 时均有极限，但极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在（√）
  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$
  ⇒ 所有计算极限的方法同于一元极限但不用洛
- 四、多元函数的连续性：① 间断点，线：e.g. $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$
  在圆周 $x^2+y^2=1$ 上间断，间断线
  ② $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ ⇒ 连续

有界闭域上连续函数的性质

⇒ 也有几个类比定理：若 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续，则

(1) 有界性定理：$\exists k>0$，使 $|f(P)|\le k$，$P\in D$

(2) 最值定理：$f(P)$ 在 D 上取得最大值 M 及最小值 m.

(3) 介值定理：对任意 $\mu\in[m, M]$，$\exists Q\in D$，使 $f(Q)=\mu$.

(4) 一致连续性定理：$f(P)$ 必在 D 上一致连续.

⇒ 一切多元初等函数在定义区域内连续.

第二节 偏导数

多元函数微分法

一、偏导的定义及其算法及几何意义

要理解并记忆

空间中某曲线的切线斜率

偏导数 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ $\left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $f_x(x_0, y_0)$

eg. $f_x(x_0, y_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$

偏导函数 $f_x(x, y)$

注：① $\boxed{\dfrac{\partial z}{\partial x}}$ 是个整体符号。e.g. $\dfrac{\partial P}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial P}=-1$ 不能约去几个分子关系

但仍可写成 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{du}{dr}\cdot\dfrac{dr}{dx}$

② 分界点、不连续点的偏导数要用定义来算。其它的求直接求

比一元函数多些条件

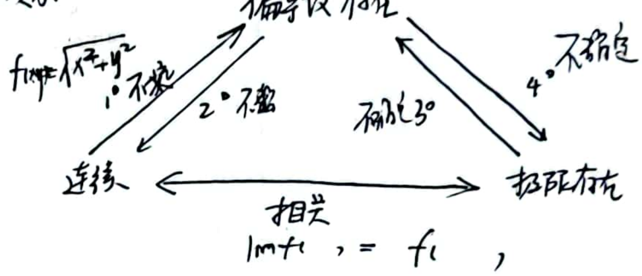
③ 注意 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处导数不存在

④ 若 $f(x,y)=f(y,x)$ 即具有轮换对称性

则有 $f_x(x,y)=\varphi(x,y)$

$f_y(x,y)=\varphi(y,x)$

⑤几组关系



先求后代
先代后求

到底有不存在 一般无区别 more example

$\Leftarrow$ 1° 3° $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$ 连续，但在 $f_x(0,0)$ 不存在

2° 4° $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在 //这个要与极限定义相关

即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续，但 $f(x,y)$ 的偏导存在

不在某个方向连续

1° 3° $f(x,y)=|x|+|y|$ 即为极限存在，但偏导不存在

二.高阶偏导数.

二阶 $f_{xy}(x,y)=\boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}$ …… → 特别的，当 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 为分界点的函数，且可导，则二阶除了可选用定义法，也可以也得直接按很来求.

三阶 $f_{xxx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$ 逐次求导法

注：$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 这结论并不一定成立. → 求导顺序问题.

定理1：若函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域内连续，则在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等

注：对于n元也成立.

注意：由于初等函数的偏导数仍为初等函数，而初等函数在其定义域内连续，故求初等函数的高阶偏导数可以选择方便的求导顺序

第三节 全微分

一.引例

二.全微分的概念 1.

① 函数的偏增量 $f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=f_x(x,y)\Delta x+o(\Delta x)$

② 函数的全增量 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta z$.

③ 全微分：$\boxed{\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)}$　看它是否为高阶无穷小.　$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

可 → 记作 $\boxed{dz=df=A\Delta x+B\Delta y}$ [redacted] 可微.

注意全微分时，可以Δx、Δy表示，也可用dx、dy表示

注：① $\Delta z-dz=o(\rho)$.　$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

② $\rho\to 0 \Leftrightarrow \Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$;

$\Leftrightarrow (\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$　(ρ与Δx、Δy的关系)

③ 若$\Delta z\approx dz$，则误差为$o(\rho)$

常用于证

定理1：[可微⇒连续]（反过来不一定）但不连续必不可微

定理2：（必要条件）. 若 $z=f(x,y)$ 可微，则必有 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

[可微⇒偏导存在]　但偏导不存在必不可微

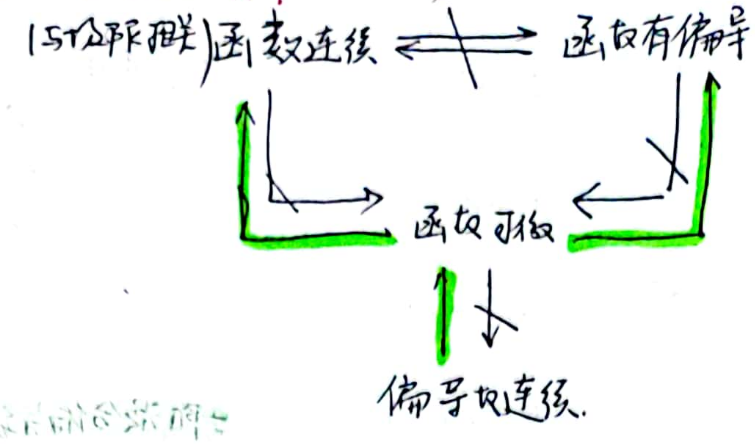
[故之后凡是求可微常用这个来求]

定理3：充分条件：若 $z=f(x,y)$ 的偏导 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在(x,y)连续，则函数在该点可微分

（而非必要）

[… 连续 ⇒ 可微分]

三. 几组重要关系 (即三个危险)



注: 连续 $\underset{\checkmark}{\overset{\text{不一定}}{\rightleftarrows}}$ 偏导 $\underset{\checkmark}{\overset{\text{不一定}}{\rightleftarrows}}$ 可微.

对于单元函数来说,

函数先连续 才可能 有导数,

(极限相关)
有了导数, 可称为可微.

对于多元函数来说,

函数, 先有连续 才可能 考虑可微

可单独判断, 若不行, 则用定义

※ 有时, 有偏导, 也可以直接讨论可微, 但偏导再加一条偏连续才判断

<主要是空间中某些特殊情况, 极连续(极限与函数值关系)与偏导分开考虑>

如果上面满足, 但偏导不连续, 则算 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\Delta z-(f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y)}{\rho}$

$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

注: 若求 dz 则分别对方程求 z_x 和 z_y 再写成 $dz=z_x\,dx+z_y\,dy$

第四节·多元复合函数的求导法则

一、一元函数复合求导法则.同理

二、多元复合函数求导的链式法则 ①分支不方向元 + 多阶

② "分段用乘 分叉用加 单路全导 叉路偏导"

1. 中间变量为一元函数情形 $z<\begin{matrix}u-t\\v-t\end{matrix}$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$$

不可微的(复合)→导数不一定不可导. ⇒老实地用链式求导吧!

2. 中间变量为多元函数的情形 $z<\begin{matrix}u<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\\v<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\end{matrix}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\quad\frac{\partial z}{\partial y\partial x}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dy}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy}$$

抽象函数. f_1' 表示第一个变量的一阶导

f_2' …… = …… —……

3. 其它情况/(不好学分级)

1) $z=f(u,v)$. $u=\varphi(x,y)$. $z<\begin{matrix}u<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\\v-y\end{matrix}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\boxed{\frac{dv}{dy}}$$ ※

2) $z=f(u,x,y)$ $u=\varphi(x,y)$. $z<\begin{matrix}u<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\\x\\y\end{matrix}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\underbrace{\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}}}_{f_2'}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\underbrace{\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}}}_{f_3'}$$

Scanned with CamScanner

4. 既有抽象，又有具体。（同之前）

三、多元复合函数的全微分形式不变性

$z=f(u,v)\quad u=\varphi(x,y)\quad v=\psi(x,y)$

$\xrightarrow{\text{复合}} z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]=z(x,y)$

若 u,v 为自变量：$dz=\boxed{\frac{\partial z}{\partial u}}du+\boxed{\frac{\partial z}{\partial v}}dv$

若 u,v 为中间变量：$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$

$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$

故有：$dz=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot(\qquad)+\frac{\partial z}{\partial v}(\qquad)$

第五节 隐函数的求导公式

注：用公式法时，必须注明原函为 $G(x,y,z)$ 而不能 $F(\frac{x}{z},\frac{y}{z})$ 这类复合样的

一、引例

二、一个方程的情形

（二元）隐函数存在定理1：若 $F(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 可微，且满足：

①. 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数。

②. $F(x_0,y_0)=0$

③. $F_y(x_0,y_0)\neq0$ 是封状态条件

则方程 $F(x,y)=0$ 在 x_0 的某邻域内可以确定一个单值连续函数 $y=f(x)$，满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有连续导数。$\frac{dy}{dx}=\frac{-F_x}{F_y}$ 当作函数来求偏导。

〈只需知道在该定理下，存在即可〉不要求进一步证明

注：

①. 若$F_x(x_0,y_0)\neq 0$. 则有. $F(x,y)=0$ 有唯一确定的 $x=f(y)$ 且 $\frac{dx}{dy}=-\frac{F_y}{F_x}$

② 求导公式可用全微分法推得(同高数I 隐函求导)

③ 二阶导数 —— 看作复合函数求导 ☆.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)=-\frac{(F_{xx}+F_{xy}\cdot dy/dx)\cdot F_y-F_x(F_{yx}+F_{yy}\,dy/dx)}{F_y^2}$$

⟹ 2种求法：① 把所(?)定理方法；② 直接方程两边求导.

(三元) 隐函数存在定理2：

若函数 $F(x,y,z)$ 满足.

① 在$P(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内具有连续偏导数

②. $F(x_0,y_0,z_0)=0$

③ $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点(x_0,y_0)某一邻域内唯一确定一个单值连续函数.

$z=f(x,y)$ 满足 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有连续偏导数.
二元函数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}\qquad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

注：也可利用全微分法进行求导。(同高数I，但注意. $z=z(x,y)$)

三、方程组的情形

隐函数存在定理3：

设函数 $F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$ 满足.

①. 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某邻域内具有连续的偏导数：

② $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$. $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$

③. $J\Big|_P=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}\neq 0$.

Scanned with CamScanner

则方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$，在 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某邻域内可唯一确定

一组单值连续函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，

2个函数，4个变量

并有

$F_x \ F_y \ F_u \ F_v$

$G_x \ G_y \ G_u \ G_v$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}$$

$$J=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix} \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}$$

注：方程个数 = 因变量个数

总变量个数 − 方程个数 = 自变量个数

三元自变量

第六节、多元函数微分法的几何应用

一、一元向量值函数及其导数

1、一元向量值函数的定义

给定数集 $D\subset R$，称映射 $\vec{f}: D\to R^n$ 为一元向量值函数.（简称向量值函数）. 记为

$$\vec{r}=\vec{f}(t), \quad t\in D$$

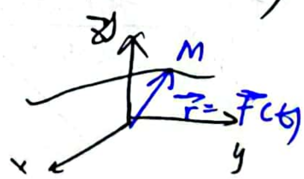
注① 向量值函数是数量值函数的推广

② 在 R^3 中，$\vec{f}(t)$ 三个分量函数 $\varphi(t)$，$\psi(t)$，$\omega(t)$ 则

$$\vec{f}(t)=\varphi(t)\vec{i}+\psi(t)\vec{j}+\omega(t)\vec{k}=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$$

图象：终端曲线 Γ

$$\vec{r}=\vec{f}(t)=(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$$



2. 向量值函数的极限、连续和导数 ~~都与各分量~~ ($R=3$ 为例)

极限：$\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\left(\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t),\ \lim\limits_{t\to t_0}\psi(t),\ \lim\limits_{t\to t_0}\omega(t)\right)$ 各分量求极限

$\Downarrow$

连续 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{f}(t_0)$

导数：$\vec{f}'(t)=(\varphi'(t),\ \psi'(t),\ \omega'(t))$ 正负：与 t 增大方向一致 各分量求导数

$$\overrightarrow{f'(t_0)}=\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t}$$

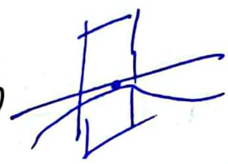
3. 向量值函数导数几何意义：

切向量：$\vec{T}=\vec{f}'(t_0)=(\varphi'(t_0),\ \psi'(t_0),\ \omega'(t_0))$

4. 向量值函数导数的物理意义

位置向量，速度向量，加速度向量

二、空间曲线的切线与法平面



参数式 (切点已知)

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}\\ \varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0\end{gathered}}$$

有了 $\vec{f}(t)$ $\begin{cases}\text{点向式可建立曲线的切线方程}\\ \text{点法式可建立曲线的法平面方程}\end{cases}$

1. 参数 or 解释式

注：若形如 $\begin{cases}y=\varphi(x)\\ z=\psi(x)\end{cases}$ 的方程也可参数式进行求解 (解释式)

2. 一般式情况

光滑曲线 Γ：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$

当 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$ 时，Γ 可表示为 $\begin{cases}x=x\\ y=\varphi(x)\\ z=\psi(x)\end{cases}$，曲线上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处

的切向量为 $\vec{T}=(1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0))=\left(1,\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}\right)\Big|_{x_0}$

切线方程：$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}}=\dfrac{y-y_0}{-\begin{vmatrix}F_x & F_z\\ G_x & G_z\end{vmatrix}}=\dfrac{z-z_0}{-\begin{vmatrix}F_y & F_x\\ G_y & G_x\end{vmatrix}}$

三.曲面的切平面与法线

前面讲过

1. 曲面的切平面：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

法线：$\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

特殊地，

$z=f(x,y)$

令 $F(x,y,z)=0$ 即：$f(x,y)=z$.

法向：$\vec{n}=(f_x, f_y, -1)$.

切平面：$\boxed{\overset{\Delta z}{z-z_0}=f_x(x_0,y_0)\overset{\delta x}{(x-x_0)}+f_y(x_0,y_0)\overset{\delta y}{(y-y_0)}}$

法线：$\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

2. 全微分的几何意义 —— 竖坐标的增量

3. 法向量的方向余弦，正常算就好

$\vec{n}=\left(-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1\right)$.

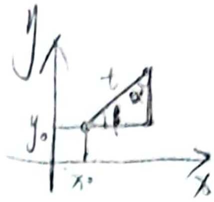
$\cos\alpha=\dfrac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$ $\quad\cos\beta=\dfrac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$ $\quad\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$

第七节 方向导数与梯度

1.方向导数 数.

定义: 若极限 $\lim\limits_{P\to P_0}\dfrac{f(P)-f(P_0)}{|PP_0|}$ 存在，则称为 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 沿方向 l 的方向导数。记作 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0(x_0,y_0)}$. $\dfrac{\partial z}{\partial l}\Big|_{P_0(x_0,y_0)}$.

令 $|P_0P|=t>0$，则射线 l: $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\cos\beta\end{cases}$



⇒沿 l 的方向导数为:

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0(x_0,y_0)}=\boxed{\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}}$$

非常用的定义式

也写作: $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

注: 推广至三元以及多元也是可以的

注: 线性函数在任一点沿某一方向的方向导数与起点无关、只与方向有关

注: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在沿任意方向的方向导数存在且相等，但偏导数不存在（左≠右）

概念区分 ⇒ 几何意义、可视化区分（用单独来区分）

偏导连续

⇓

可微

↙ ↓ ↘

连续　可偏导　有方向导数.

不沿坐标方向
会有一些关系

用可微的判断

定理1：设$z=f(x,y)$在P_0处可微，则$f(x,y)$在P_0沿任意方向l的方向导数存在。

且有 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$ 其中$\vec{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$为单位向量

$=(f_x,f_y)\cdot\vec{e_l}$

定理2："定理1的高维推广"

二、梯度（Gradient）

定义1：向量$\vec{G}=(f_x,f_y,f_z)$称为函数$f(x,y,z)$在点$P(x,y,z)$处的梯度向量

简称梯度。

$$\boxed{\operatorname{grad} f=(f_x,f_y,f_z)}=f_x\vec{i}+f_y\vec{j}+f_z\vec{k}=\nabla f(x,y,z)$$

定义2：（二元）。

注：$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ 为向量微分算子。

注：①增长最快的方向：$\max\left\{\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}\right\}=|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)|$

② 最慢：$\min\left\{\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}\right\}=-|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)|$

③ 方向导数与梯度：$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\operatorname{grad}(x_0,y_0)\cdot\vec{e_l}$

几何意义：

法向量 $(f_x,f_y)|_P=\operatorname{grad} f|_P$

单位法向量 $\vec{n}=\frac{(f_x(x,y),f_y(x,y))}{\sqrt{f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}$

梯度基本运算式：(类导数)

(1) $\operatorname{grad} C = \vec{0}$

(2) $\operatorname{grad} Cu = C \cdot \operatorname{grad} u$

(3) $\operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$

(4) $\operatorname{grad}(u \cdot v) = v \cdot \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$.

(5) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \cdot \operatorname{grad} u$.

三、物理意义

分 函数 $M(x,y,z) \to f(M)$ 数量场 温度场、密度场

向量函数 $M(x,y,z) \to \vec{F}(M)$ 向量场 力场、速度场

$\vec{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$

特殊 势函数 $\vec{F} = \operatorname{grad} f(M)$ 则称 $f(M)$ 为 $\vec{F}(M)$ 的势函数 势场

第八节. 多元函数的极值及其求法.

一、多元函数的极值.

定义: 若 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$

(或 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$)

则称函数在该点取得极大值(极小值). 极大值和极小值 为极值.

使函数取得极值的点称为极值点.

定理1: (必要条件) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数, 且在该点取得极值则. $f_x'(x_0,y_0)=0$. $f_y'(x_0,y_0)=0$.

说明: 使偏导数为0的点称为驻点, 但驻点不一定是极值点.

eg. $z=xy$ 有驻点 $(0,0)$, 但在驻点不取极值.

$z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 如何能简单求出来? 偏导不存在, 就很简单.

定理2: (充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内具有一阶连续和二阶连续偏导数. 且,

$f_x(x_0,y_0)=0$. $f_y(x_0,y_0)=0$

令. $A=f_{xx}(x_0,y_0)$ $B=f_{xy}(x_0,y_0)$ $C=f_{yy}(x_0,y_0)$

why不行?

$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$

则: ① 当 $AC-B^2>0$ 时, 具有极值 $\begin{cases} A<0 \text{时取极大值} & (\text{负定}) \\ A>0 \text{时取极小值} & (\text{正定}) \end{cases}$

即: $\begin{vmatrix} f_{xy} & f_y \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}$

② 当 $AC-B^2<0$ 时, 无极值

③ 当 $AC-B^2=0$ 时, 不确定, 需另行讨论. 比如: 函数仍值之类的

$\Rightarrow \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$ 半正定 → 极小、 半负定 → 极大 } 与优化设计 矩阵有关

f_x

注：当无法用解析，精确求出驻点或极值点。（梯度累专都行）

则用$\boxed{\text{极值方法}}$（即迭代）

eg. 最近很大的问题——深度学习，核心就是这个东西

二、最值应用问题。

（极）

可能最值点 { 驻点 / 边界点

极值问题 { 无条件极值（约束） 就是前面的，直接算驻点 / 条件极值 → 后面的

条件极值

方法一：（代入法）化成一元。

常用拉氏法

方法二：（拉格朗日乘数法）

$$\frac{dz}{dx}=f_x+f_y\frac{dy}{dx}=0$$

因 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ 故有 $f_x-f_y\frac{\varphi_x}{\varphi_y}=0$

记 $\frac{f_x}{\varphi_x}=\frac{f_y}{\varphi_y}=-\lambda$.

极值点必满足：
$$\begin{cases} f_x+\lambda\varphi_x=0\\ f_y+\lambda\varphi_y=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$$

⇒ 引入辅助函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ ①

Scanned with CamScanner

则极值点满足：$\begin{cases} F_x = f_x(x,y) + \lambda \varphi_x(x,y) = 0 \\ F_y = f_y + \lambda \varphi_y = 0 \\ F_\lambda = \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$ ②

注：若有多组限制条件 则可写成

$$L = x^2+y^2+z^2 + \lambda(\cancel{z} - x^2 - y^2) + \mu(x+y+z-1)$$

拉格朗日方程组的解法：

① 分别乘以 x, y, z，进行轮换对称式来求

② 两式直接相减

第九章 多元函数微分法及其应用 — 简略知识、简略结构

第一节 多元函数基本概念

- 平面点集的基本概念
- 极限：一个思路将2元当作整体作单元进行分析→回到上册
- 连续
- 偏导数 ⟹ 进一步一般化：$\boxed{\text{方向导数}}$（少许区别，方向导数是单向的）
- 可微：全微分 ↔ 偏导数的连续性

（注：之前的关系依然 {用定义；用已推得的结论}）

① 多元函数微分法则
- 链式法则
- 隐函数存在定理

② 几何应用

应用：多元函数的极值与最值
- 概念
- 无条件极值
  - 隐函数
  - 显函数
- 条件极值与拉格朗日乘数法
  - 闭区间边界上的最值 再看!!!
  - 闭区域上的最值

几组概念的考虑. //需要区分、//关于证明.

1. 概念:

极限、连续、偏导与方向导数、微分

2. 考虑:

本身: 需要知道本身概念.

之间: 通过概念和性质进行推导相关关系. (※)

3. 正面和反面来证明.

(正面: 存在; 反面: 不存在)

- 极限
  - 正面: 用定义 (证:极限为某值成立)
  - 反面: 取某两个方向不相同 (常考) (极限不存在) ② 当然,也很可能极限本身不存在 (∞, 振荡等)

应用

- 连续 (故其实也在考极限)
  - 正面: 具体函数: 那就直接用定义来证. 抽象常考过这种题 (一般需要一定的前提) 典型题目复习 P19. 五. (A)
  - 反面: 只需证 $f(x_0, y_0) \neq \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ //可能求极限的过程中会换元,但证明过程不可变
- 微分
  - 正面: 用那一套证明过程
  - 反面: 只要在那一套不完全正确即可了

关于极限求法的回顾（含多元）

通用 ①变形（分母有理化，有时去根号就直接可以求出了） ②某些不变的值，可以直接极限 = 函数值。

定义：给出极限值，问明如何使之成立。

性质：唯一性、保号性、有界性 —— 用于相关题目的预先，判断

运算规则：用于带走运算变形

夹逼准则：无法直接求极限则考虑夹逼准则。单元、多元都可以用。

本质是求极限要基于不等式，达到间接证明/逼近的特点

eg. $0 \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{1}{2} \times \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

无穷小等价条件的替换 ※. $1-\cos r \sim \frac{r^2}{2}$ $(r\to 0)$. $\ln(1+xy) \sim xy$ $\left(\begin{matrix}x\to\\y\to\end{matrix}\right)$

洛必达：多元函数中尚未规划　　$x\to 0,\ (1+x)^{\frac{1}{x}} \sim e$

无穷小 × 有界变量的乘积为无穷小

eg. $I=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^6}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot x^2+\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot y^4\right] = 0$

下面是在多元函数中求极限常见方法

①. 换元

作为函数极限求的方法里的之一，其在多元函数求极限中体现更广。常把多元函数替代为可求的单元函数，使得极限难度降低。

eg. $x^2+y^2 \longrightarrow r^2$ （化单元）

eg. $\begin{cases} x=\rho\sin\theta \\ y=\rho\cos\theta \end{cases}$ （通过中间量化解多余双元，使得极限更易算出结果）

（二元化一化） 常用于 ~~分式函数~~ 分式极限求解）

且常可讨论 $[0,2\pi]$ 每个角度的极限情况，可证极限不存在，

（即路径不唯一）

多元函数极限求值

题型：

①求极限

②证明极限不成立.(只要某方向极限不存在即可_反证法)

注：

仍会用到泰勒无穷小代换 eg. $1-\cos A=\frac{1}{2}A^2$

例1：求证·极限为某值. //用定义证+不等

设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$

求证：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

证明：

$\forall\varepsilon, \left|f(x,y)-0\right| \leq \left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|$

$\leq |x|+|y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}.$

//放缩至出现 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 的形式

故只需 $2\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$. 故 $\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时. 总有.

类似一元的一种形式

$\left|f(x,y)-0\right| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}<2\delta=\varepsilon$

故原式得证

注：$y=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$ 二重极限存在，但累次极限不存在

例2：换元：多元→一元进行求极限.

eg. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

因：$x^2y^2\leq\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$ //不等式为基本方法

令 $r^2=x^2+y^2$ // 换元也为基本方法

故原式 $\geq\frac{4(1-\cos r^2)}{r^6}$ 且 $1-\cos r^2\sim\frac{r^4}{2}$ $r\to 0$.

而 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{4(1-\cos r^4)}{r^6}=\lim\limits_{r\to 0}\frac{2r^4}{r^6}=+\infty$

∴ 原式 $=+\infty$

例3：换元：多元→引入其它变量进行求极限

eg. 函数 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

在 $(0,0)$ 处的极限

解：

取 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$，$\theta\in[0,2\pi]$

故. 原式极限

$=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^3\theta+\rho^3\sin^3\theta}{\rho^2}$

$=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho(\cos^3\theta+\sin^3\theta)=0.$

换：$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}$

$=\cos\theta\sin\theta$

故 无法求极限. 即：不存在极限

例4：上下同乘去同阶（上下都有根式）

eg. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$

解：原式 $= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(\sqrt{xy+1})^2-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$ //去根号 进行化简

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}$

例5：判断极限是否存在？

eg. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{\ln(1+xy)}{x+y}$ 是否存在

解：

无穷小代换 $\ln(1+xy) \sim xy$. $\boxed{取\ y=x^{\alpha}-x}$

//任取函数

极限取多个方向路径，且该路径存在

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{\ln(1+xy)}{x+y} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x+y}$

$\xlongequal{令y=x^{\alpha}-x} \lim\limits_{x\to0} \frac{x^{\alpha+2}-x^3}{x^{\alpha}}$

$= \lim\limits_{x\to0} (x^2-x^{3-\alpha}) = \begin{cases} -1, & \alpha=3 \\ 0, & \alpha<3 \\ \infty, & \alpha>3 \end{cases}$

故极限~~存~~不存在

例6：$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

在全平面上连续.

解：① 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 为初等函数，故连续

② 又 $0 \leq \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$

由夹逼准则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0)$

综上，函数在全平面连续.

// 常用不等式 $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$　　$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

例：求极限：$I = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^6}{x^2+y^2}$.

解：$I = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot x^2 + \frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot y^4\right] = 0$

无穷小因子分离 拆开 ⟶ 无穷小 × 有界 = 0

例题：有的直线同 $y=kx$ 求不出（不好求）；利用 $y=x$ 具体直线来求解

如果：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在

eg. 判断极限是否存在？$I = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$.

偏，多次同代.

解：

当点 $P(x,y)$ 沿 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，

$I = \lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}} \frac{x^3y}{x^6+y^2} = \lim\limits_{x\to0} \frac{kx^4}{x^6+kx^2}$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{kx^2}{x^4+k^2} = 0$

沿 $y=kx^2$

$y=kx^3$

$I = \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to kx^3}} \frac{x^3y}{x^6+y^2} = \lim\limits_{x\to0} \frac{kx^6}{x^6+k^2x^6} = \frac{k}{1+k^2}$

例题：

eg. 判断极限 $I=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}$ 不存在

奇：变成高阶，也可用 x^3

解：当点 $P(x,y)$ 沿 $y=kx$ 趋于 $O(0,0)$ 时，

$$I=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{x+kx}=0$$

当 $P(x,y)$ 沿 $y=-x+x^2$ 趋于 $O(0,0)$ 时，

$$I=\lim_{\substack{x\to0\\y=-x+x^2}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{\substack{x\to0\\y=-x+x^2}}\frac{-x^2+x^3}{x^2}=-1$$

两个极限不相等，故极限不存在

例：正面证明：$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续

eg. 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内两个偏导数存在且有界，证明 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续在续。

证明：

① 先利用全增量 =0 来得出可连续：

<注：当 $\lim\limits_{\rho\to0}\frac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\rho}=0$ 才可微>

由假定函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内两个偏导数存在且有界，设 $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 为该邻域中任意一点，考虑函数全增量。

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

$$=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]$$

②. ∵偏导存在且有界，

故相对应的上应用拉格朗日中值定理得，

$$\Delta z=\underbrace{f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)}_{\text{某处的导}}\Delta x+f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

其中 $0<\theta_1<1$，$0<\theta_2<1$

③. 表达式化并替换后，再求极限分析

故：

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta z=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}[(\quad)\Delta x+(\quad)\Delta y]=0$$

// 有界 × 无穷小，

故 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续。

例：多元函数求极限。上下有理化

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4-(x+y+4)}{xy(4+\sqrt{xy+4})}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4}$$

偏导数

例1: 经典求偏导的题目

① 经典求法

② 轮换对称

③ 涉及到定义求

④ 函数不连续，但偏导存在

eg. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

求 $f(x,y)$ 的偏导数.

解:

①当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,

$$f_x(x,y)=\frac{y(x^2+y^2)-xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

由于轮换对称性

$$f_y(x,y)=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

②当 $x^2+y^2=0$ 时,

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

同理 $f_y(0,0)=0$

注: 此函数极限不存在, 但偏导数存在

这个已证过了

例2: 高阶偏导典型.

eg.

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq 0\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\cancel{f_{xy}(0,0)=1.\ f(0,0)=1}$

解: $f_x(x,y)=\begin{cases}y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\dfrac{4x^3y^3}{(x^2+y^2)}\\ 0\end{cases}$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}$$

$$=\frac{-\Delta y-0}{\Delta y}=-1$$

同理有 $f_{yx}(0,0)=1$

∴ 此题中 $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$

例13：隐函数与偏导内容结合

eg、假设 $z=f(u)$. 又方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)dt$

确定 u 是 x, y 的函数，其中 $f(u)$, $\varphi(u)$ 可微，

$P(t)$, $\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$. 求 $p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}$

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+$$

其中. $\left(\int_y^x p(t)dt\right)'=p(x)\cdot p'(x)-p(y)\cdot y'$.

全微分的证明存在（这部分不仅依靠需要一定时间去练）

① 会有一定的步骤，基础为全微分的定理理解。

② 几组关系也很重要

③ 步骤：

step1：$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的连续。

若不可连续，则不可微；

若可连续 则下一步

step2：判断 $f_x'(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$ 是否存在，若这两个偏导只有一个不存在，则不可微。

否则，下一步

step3：判断

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta z - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

若极限为零，函数在该点可微且。

$$dz = f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy.$$

例1：$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

解：不可微.

因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续

例2：$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

~~也同理~~

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,y)-f(0,0)}{\Delta x} \text{ 不存在}$$

例3：

$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0. \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho} = \lim\limits_{\rho\to 0} \rho\cos\theta\sin\theta$

无穷小 有界

//辅助换元法

(2)

$f_x(0,0)=0$. $f_y(0,0)=0$.

(3)

而 $\Delta z = f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y = 0$

故求 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \dfrac{\Delta z-(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y)}{\rho}$

$= \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \boxed{\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 不存在

$\therefore \Delta z-(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y)\neq o(\rho)$ $\therefore$ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微

例1: 该例偏导存在、不连续，但原函仍可微.

eg. 证明:
$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处偏导存在，但偏导数不连续，可微.

① 在点 $(0,0)$ 处偏导存在.

证:
$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x^2}=0.$$
同理 $f_y(0,0)=0$

② 偏导数不连续

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,
$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$
$$f_y(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

当 (x,y) 沿 $y=0$ 趋于 $(0,0)$ 时有
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}f_x(x,y)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right)$$

极限不存在.

∴ $f_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续

③ 但
$$\Delta z=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right)\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

又有 $f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y=0$

$$\because \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-\left(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y\right)}{\rho}$$
$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\underbrace{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}_{\text{无穷小}}\cdot\underbrace{\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}_{\text{有界}}=0$$

$\therefore \Delta z-\left(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y\right)=o(\rho)$

∴ $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微.

(3). 微分法:

$$\begin{cases} u\,dx + x\,du - (y\,dv - v\,dy) = 0 \\ u\,dy + y\,du + v\,dx + x\,dv = 0 \end{cases}$$

例

eg. 设 $\begin{cases} ux - yv = 0 \\ yu + xv = 1. \end{cases}$ 确定 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y). \end{cases}$

求. $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$.

(1)公式法 常规记

$F_x = u$ $F_y = -v$. $F_u = x$ $F_v = -y$

$G_x = v$ $G_y = u$ $G_u = y$ $G_v = x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} u & -y \\ v & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} x & -v \\ y & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}}$$

(2) 直接法: 直接在方程两边求导 .可能快

$$\begin{cases} u + x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ y\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + v + x\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

例：确定正数σ使曲面 $xyz=\sigma$ 与球面

$x^2+y^2+z^2=a^2$. 在点$M(x_0, y_0, z_0)$. 相切

解：

①分别求法向

$\vec{n_1}=(y_0z_0, x_0z_0, x_0y_0)$

$\vec{n_2}=(x_0, y_0, z_0)$

法向量平行

②∵ $\vec{n_1} \parallel \vec{n_2}$

$$\frac{y_0z_0}{x_0}=\frac{x_0z_0}{y_0}=\frac{x_0y_0}{z_0}$$

故 $x_0^2=y_0^2=z_0^2$.

③又∵在球面上

$x^2+y^2+z^2=a^2$ 故 $x_0^2=y_0^2=z_0^2=\frac{a^2}{3}$.

在曲面上

$\therefore \sigma=x_0y_0z=\frac{a^3}{3\sqrt{3}}$

小结：本质基本条件+一些简单代数运算

关于多元函数的一些综合题型/新题型

特点：结合极坐标进行综合分析

$$f \left\langle \begin{array}{l} x \left\langle \begin{array}{l}\theta\\ \rho\end{array}\right. \\ y \left\langle \begin{array}{l}\theta\\ \rho\end{array}\right. \end{array}\right.$$

这是结构图

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot(-\sin\theta)\cdot\rho+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\rho\cos\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \rho}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\sin\theta$$

变形后：原式成立

例1：求导，加了换元（本质是加了一组中间函数）

设函数 $u=f(x,y)$ 具有一阶连续的偏导数，

试证明：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

其中 (ρ,θ) 为极坐标.

解：①复函：自主判断

由于 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 可得 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，

$\theta=\arctan\frac{y}{x}$.

而 $u=f(x,y)$ 又可视作 ρ 及 θ 的函数：

$$u=f(x,y)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=F(\rho,\theta).$$

因而 $u=f(x,y)$ 要看作由 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta=\arctan\frac{y}{x}$.

及 $u=F(\rho,\theta)$ 复合而成

② 换元之后复合求导.

$$f \left\langle \begin{array}{l} \rho \left\langle \begin{array}{l}x\\ y\end{array}\right. \\ \theta \left\langle \begin{array}{l}x\\ y\end{array}\right. \end{array}\right.$$

依照中·左右·进行确定

其实都函数。左侧是老师PPT上的名师记

例2：

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，

且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial z^2}=0$$

(1) 证明：$u\cdot f''(u)+f'(u)=0$

//基本求导

(2) 若 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，求 $f(u)$

解：

①题面：函数代初值

②用了第一问的条件

③.二次微分方程 → 换元求解

令 $p=f'(u)$ 故有 $\frac{dp}{p}=-\frac{1}{u}du$，积分得，

$$\ln|p|=-\ln u+\ln|C| \Rightarrow p=f'(u)=\frac{C_1}{u}$$

$$\Rightarrow f(u)=C_1\ln u+C_2$$

由 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，得 $C_1=1$，$C_2=0$

故 $f(u)=\ln y$

例3：拉普拉斯方程

eg. $f(\xi,\eta)$ 具有连续的二阶偏导数，满足拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}=0$

注：不是所有都满足，还需具体推导

eg 设 $z=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$，其中 φ,ψ 具有2阶连续偏导，则（$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$）

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'+\psi'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\varphi''+\psi''$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'+\psi'(-1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi''+\psi''$$

故 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

例4：给极限求最值

1. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的某个领域内连续，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$$

则下述四个选项中正确的是（ ）。

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点。

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

(D) 无法判断

解：

令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，则由题设

$$f(x,y)=xy+\rho^4+o(\rho^4)$$ //极限符数

即：极限成立，是作于判断上式正负号 推断 极值正负。

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$\rho\to 0$。

由于 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 附近的值主要由 xy 决定，而 xy 在 $(0,0)$ 附近符号不定，故点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点，即应选 (A)

隐函数组之多元函数求导 实例.

例一:

$$\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$$

求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$

法一:

方程两端直接对x求导，有

(x, y 自变量，u, v 因变量)

$$\begin{cases} 1 = e^u\frac{\partial u}{\partial x} + \sin v\frac{\partial u}{\partial x} + u\cos v\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = e^u\frac{\partial u}{\partial x} - \left[\cos v\frac{\partial u}{\partial x} + u\cdot(-\sin v)\frac{\partial v}{\partial x}\right] \end{cases}$$

即:

$$\begin{cases} (e^u+\sin v)\frac{\partial u}{\partial x} + u\cos v\frac{\partial v}{\partial x} = 1 & ① \\ (e^u-\cos v)\frac{\partial u}{\partial x} + u\sin v\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 0 & ② \end{cases}$$

解方程组即可.

如 ①×sin v. ②×cos v. 两式相减

得: $\left[(e^u+\sin v)\sin v - (e^u - \cos v)\right]\frac{\partial u}{\partial x} = \sin v$

得: $\frac{\partial u}{\partial x} = \cdots\cdots$

代入 ① 或 ② 可得 $\frac{\partial v}{\partial x}$

对方程两端直接对y求导. 可得:

$\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

法二:

講解見曲線切線

第?節

克萊姆法:

原式

$$\begin{cases} x - e^u - u\sin v = 0 \\ y - e^u + u\cos v = 0 \end{cases}$$

$F_x = 1$ $F_y = 0$ $F_u = -e^u - \sin v$ $F_v = -u\cos v$

$G_x = 0$ $G_y = 1$ $G_u = -e^u + \cos v$ $G_v = u(-\sin v)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{-e^u+\cos v}{(-e^u-\sin v)u(-\sin v) - (-u\cos v)\times(-e^u+\cos v)}$$

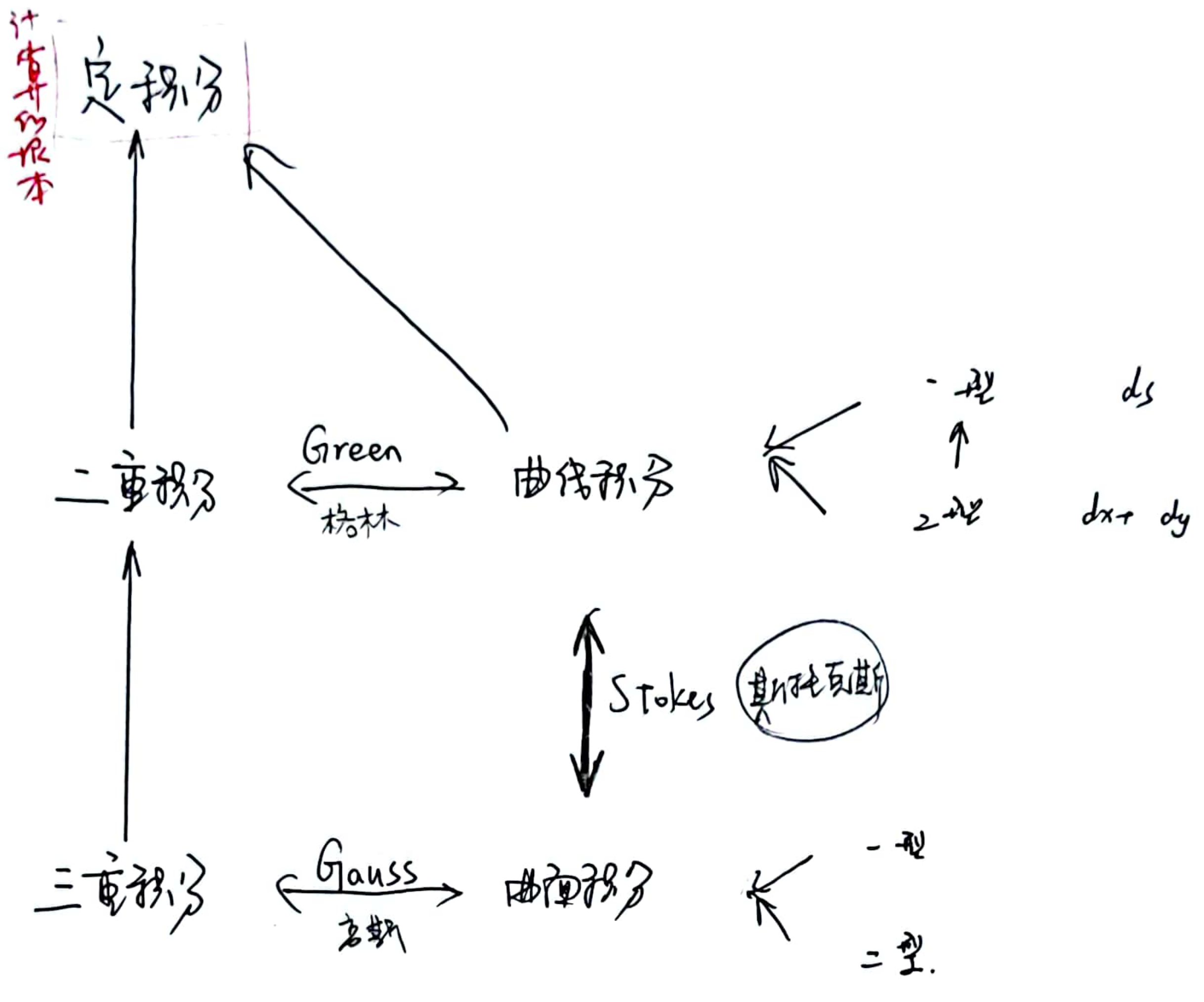
⋮

其它同理.

Scanned with CamScanner

重积分

积分关系路径图


计算的根本
定积分
二重积分
Green
格林
曲线积分
一型
ds
二型
dx+dy
Stokes
斯托克斯
三重积分
Gauss
高斯
曲面积分
一型
二型.

二重积分本章的方法小结:

①直角坐标系 + 极坐标、求法

注意: 1°分割求法、选取原则，互化.

2°. 直角坐标 积分次序 <当前积分次序 没法求出结果>

其它点:

①. $\iint\limits_D f_1(x)f_2(y)\,dxdy = \left[\int_a^b f_1(x)\,dx\right]\left[\int_c^d f_2(y)\,dy\right]$ //独立事件概率

②注意利用积分简化: $\boxed{\text{奇偶性}}$

③ 绝对值、分段函数 → 分出

④常用积分积累: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

⑥ 与几何思维结合: 对所求目标进行立体思维.

第十章 重积分

一旦涉及反积分
则要回到高阶工具
(eg. 常见形式，点火试号)

12436

第一节 二重积分的概念与性质

一、问题的提出.

1. 求曲顶柱体的体积

类似定积分的思想. "分割、近似、求和、取极限"

2. 平面薄板的质量

总体上，有2种方法。一种是老师所讲的 分块求问题，另一种是 元素（微分）法的理解

二、二重积分的概念、

1. 定义: 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数.

① 将闭区域 D 任意分成 n 个闭区域 $\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$

② 设 $\Delta\sigma_k$ 表示第 k 个小区域 ΔD_k 的面积

在每个 ΔD_k 上任取一点 $(\xi_k, \eta_k) \in \Delta D_k$.

作乘积 $f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k=1,2,\cdots n)$

③ 并作和 $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$.

④ 如果当各小闭域的直径中最大值 λ 趋于零时，

这和式的极限存在，则称此为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$$

注: ① 各小区域直径最大值 指 $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\{d_k\}$.

$d_k = \max\limits_{P,Q\in D} \rho(P,Q)$, 其中 ρ 是欧式距离

② 在二重积分的定义中，对闭区域的划分是任意的

3°. 二重积分可记作 $\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy}$

2. 二重积分的几何意义

1°. 一般地，$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$ 为曲顶柱体体积的代数和.

2°. 特别地，如果 $f(x,y)=1$，$(x,y)\in D$，则

$$\sigma=\iint\limits_D 1\,d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma$$

为D的面积.

3°. 二重积分存在性定理

定理1：若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域D上连续，则 $f(x,y)$ 在D上可积.

定理2：若有界函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域D上除去有限个点或有限条光滑曲线外都连续，则 $f(x,y)$ 在D上可积.

三、二重积分的性质.（这些很重要、是所有变形的前提）

性质1：（线性性）

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\,d\sigma$$

$$=\alpha\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma+\beta\iint\limits_D g(x,y)\,d\sigma.$$ 其中 $\alpha.\beta$ 为常数.

性质2：（关于积分区域的可加性）

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,d\sigma.$$

其中 D_1. D_2 无公共内点.

性质3：（保序性）

若在D上 $f(x,y)\geq 0$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma\geq 0$.

推论1：若在D上，$f(x,y)\geq g(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma\geq\iint\limits_D g(x,y)\,d\sigma$.

推论2：特别的；由于 $-|f(x,y)|\leq f(x,y)\leq|f(x,y)|$ 故 $\left|\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma\right|\leq\iint\limits_D|f(x,y)|\,d\sigma$.

性质4（估值性质）

设 $M=\max\limits_{D} f(x,y)$，$m=\min\limits_{D} f(x,y)$，D的面积为 σ.

则有

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\,d\sigma \le M\sigma$$

通过放缩来变化
可得出积分的范围

性质5（中值性质）

设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域D上连续，σ 为D的面积，
则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

性质6（对称性）※

关于y轴对称，

关于x轴对称，

关于x,y对称

关于直线 $y=x$ 对称，$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(y,x)\,d\sigma$.（轮换对称性

eg. $I=\iint_D (\cos y^2+\sin x^2)\,d\sigma$　$D:\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$

∵D关于 $y=x$ 对称，且区域满足 $\iint_D \cos y^2\,d\sigma = \iint_D \cos x^2\,d\sigma$. $\iint_D \sin y^2\,d\sigma = \iint_D \cos x^2\,d\sigma$

第三节. 二重积分的计算.

⇒ 直角坐标求法.

修正之后的结论.

X型区域与Y型区域 。(若不是这2种类，则加分割线)

基本方法已知：还有技巧方法

① 积分次序的改变：

先积x，后积y

先积y 后积x

适用：① 当前次序无法积分出结果

③. $\iint_D f_1(x)\cdot f_2(x)\,dxdy = [\int_a^b f_1(x)dx][\int_a^b f_2(y)dy]$

③ 奇偶性、对称性化简

④ 绝对值
分段函数 ⇒ 画图分段，来计算

⑤ 轮换对称性

补充，常用积分:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

⇒ 极坐标下.

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

在极坐标中，

$\rho=$常数 $\Longleftrightarrow$ 圆. $\theta=$常数 $\Longleftrightarrow$ 射线

用极坐标易于表示:

圆域、扇形、圆环、扇环等.

比如: $D=\{(\rho,\theta)\mid a\le\rho\le b,\ \alpha\le\theta\le\beta\}$

为何引入极坐标 → 更好算.

① 积分区域易于用极坐标表示、

② 当被积函数用极坐标表示. (eg. $f(x^2+y^2)$, $f(\frac{y}{x})$, $f(\frac{x}{y})$)

面积元素. $d\sigma=\rho\cdot d\rho\, d\theta$

直角与极坐标转化:

$$\iint_D f(x,y)\,dx=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\cdot d\rho\, d\theta$$

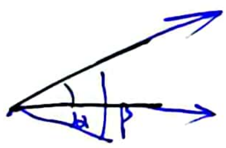
方法: ① 作图 ② 分析 θ. ρ 范围

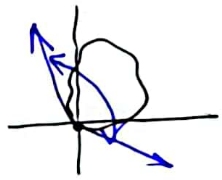
具体情况要具体分析.

此时要分块

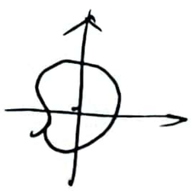
① 极点在D之外、

② 极点在D边界上 注意角度





③ 极点在D的边界内 $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\rho(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\cdot\rho\cdot d\rho$.



环: $0\le\theta\le2\pi$ $\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)$

小结：二重积分的计算步骤及注意事项

1° 画出积分域

2° 选择坐标系

直角

极坐标

- 域边界应尽量多为坐标线
- 被积函数关于坐标变量易分离（不好分离的话，需用经典积分形式进行积分）

3° 确定积分序

- 积分域分块要少
- 累次定积分好算

目的：注意利用对称性

补 4° 写出积分限

- 图示法
- 不等式

（先积一条线，后扫积分域）

二重积分的些好题

eg. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\le y\le 1\\ 0\le x\le 1}} x^2e^{-y^2}d\sigma = \int_0^1 e^{-y^2}dy\cdot\int_0^y x^2dx$ // 先分部分

$\displaystyle = \int_0^1 e^{-y^2}\frac{1}{3}y^3dy$

$\displaystyle = \frac{1}{6}\cdot\int_0^1 y e^{-y^2}dy^2$

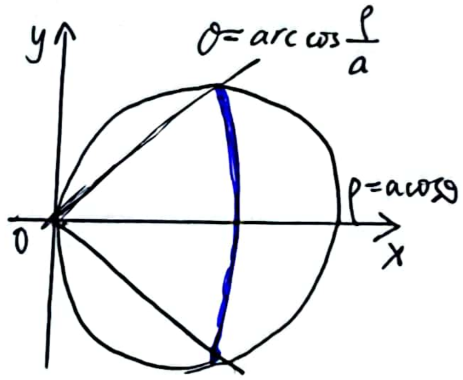
$\displaystyle \xlongequal{令 t=y^2} \frac{1}{6}\cdot\int_0^1 te^{-t}dt$ // 换元

$\displaystyle = -\frac{1}{6}\left[te^{-t}\Big|_0^1 + e^{-t}\Big|_0^1\right] = \frac{1}{6}\left[1-\frac{2}{e}\right]$

eg. 经典极坐标换积分次序.

eg. $\displaystyle I = \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta}_{扫角度}\ \underbrace{\int_0^{a\cos\theta} f(\rho,\theta)d\rho}_{找任一极线}$ $(a>0)$.

$\displaystyle I = \underbrace{\int_0^a d\rho}_{扫长度}\cdot\underbrace{\int_{-\arccos\frac{\rho}{a}}^{\arccos\frac{\rho}{a}} f(\rho,\theta)d\theta}_{找任意角度}$



三.重积分本身的方法小结

本身 + 积分区域

画图

主要形式

- 直角坐标:
  1. 投影法 (先一后二). 先Z后XY. 做投影穿线法
  2. 截面法 (先二后一) 先XY后Z. 定限截面法
  3. 三次积分法 (一次一次一次)
- 柱面坐标系: ① $dv = \rho \cdot d\rho \cdot d\theta \cdot dz$

  (三重积分 → 化为一元定积分)

  ② $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

  一般一次一次一次积分

- 球面坐标系: ① $dv = r^2\sin\varphi \cdot dr\,d\varphi\,d\theta$

  ② $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} r \in [0, +\infty) \\ \varphi \in [0, \pi] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$ → 从公式中推导

注: 其中涉及到二重积分: 可直接用二重积分思路来做.

二、三重积分的计算

1、利用直角坐标计算三重积分

方法

1. 投影法 (先一后二) <-一般是z，相对复杂)
   z　xy
2. 截面法 (先二后一) ⇒ 可推广、一般可行、选取
3. 三次积分法 (一次一次一次)

其中小技巧(当然包含所有单元积分的技巧，此处只是进一步提醒)

① 凑微分 $\cdots\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y,z)\,dz = \cdots\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y,z)\,d(\underbrace{1-z+x+y}_{\text{都是常数}})$

例 截面法典型思路

① 常规的 直先2个变量积，第三个变量积。

② 会有变形，使得用截面法更适于种情况

1°

2°

例. 计算: $I=\iiint_\Omega (x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy\,dz$. Ω 由 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z=1$, $z=4$ 构成

第三节 三重积分：算任意形的立体与体积

一、三重积分的概念

1.定义：①分割

②求积

③求和

④取极限

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\cdot dv = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

2、三重积分存在的充分条件.

$f(x,y,z)$在区域Ω上连续，则三重积分$\iiint_D f(x,y,z)\,dv$一定存在.

3、三重积分的几何意义

$$\iiint_{\Omega} 1\,dv = V_{\Omega}$$

4. 三重积分的性质

1)线性性质. 分开可加. 常数可提外面

2).可加性性质 区域可分

3).不等式性质

4)估值性质

5)积分中值

6)对称性性质

复杂函数常考虑

该方法

2.利用柱面坐标计算三重积分

设$M(x,y,z)\in R^3$. 将x,y用极坐标 ρ,θ 代替, 则(ρ,θ,z)就称为点M的柱面坐标。直角坐标与柱面坐标的关系:

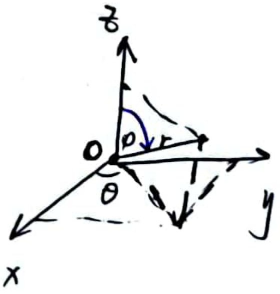
$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta & 0\le\rho<+\infty \\ y=\rho\sin\theta & 0\le\theta\le 2\pi \\ z=z & -\infty<z<+\infty \end{cases}$$

转换 $\boxed{dv=\rho\, d\rho\, d\theta\, dz}$ 注意:转换要有前提

适用范围
①方程简单
②用柱面坐标表示时更加简单。如含x^2+y^2.

顺序:
可先积z,后积x,y
也可先积xy,后积z.
依先简单后复杂来定

3.利用球面坐标计算三重积分



1)设点$M(x,y,z)$,则(r,φ,θ)称为点M的球面坐标

2)
$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta & 0\le r\le+\infty \\ y=r\sin\varphi\sin\theta & 0\le\varphi\le\pi \\ z=r\cos\varphi & 0\le\theta<2\pi \end{cases}$$

$x^2+y^2=r^2\sin^2\varphi$. $x^2+y^2+z^2=r^2$

转换. $\iiint\limits_{\Omega} F(r,\varphi,\theta)\cdot r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$

第四节 重积分的应用

元素法：
- 曲面面积
- 物体质心
- 物体的转动惯量
- 物体的引力
- 体积

一、曲面的面积（二重积分）

光滑曲面：$S: z=f(x,y),(x,y)\in D$.

D：有界闭区域．

$z=f(x,y)$．在D内具有连续的一阶偏导．

其中：小块曲面面积 ΔA 记 dA．

设在D上投影为 $d\sigma$ 则

$d\sigma=\cos\gamma\, dA$．　有 $\boxed{\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}}$

$\Rightarrow$ 面积元素 $dA=\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,d\sigma$．

则再积分即可．

注：坐标轴换了也是一样

二、物体的质心

平面上有n个质点，位于(x_k, y_k). m_k $(k=1,2,3\cdots,n)$.

该质点系的质心坐标.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{M_y}{M} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{M_x}{M}$$

M_y — 对y轴的静力矩.

M_x — 对x轴的静力矩

⇒ 平面薄片区域D. 面密度. $\mu = \mu(x,y)$. 求平面质心坐标. ~~$\mu(x,y)$~~

x轴静力矩. $M_x = \iint_D dM_x = \iint_D y \cdot \mu d\sigma$.

y $\quad M_y = \iint_D dM_y = \iint_D x \mu d\sigma$.

$$M = \iint_D \mu d\sigma.$$

质心坐标. $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint x\mu \cdot d\sigma}{\iint_D \mu d\sigma}$ $\quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\mu d\sigma}{\iint_D \mu d\sigma}$

μ为常数. 得D的形心坐标

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x d\sigma}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\iint_D y d\sigma}{A}$$ 其中A表示D的面积

同理有: 立体空间质心.

$$\bar{x} = \frac{\iiint_\Omega x \mu dv}{\iiint_\Omega \mu dv} \qquad \bar{y} = \frac{\iiint_\Omega y \mu dv}{\iiint_\Omega \mu dv}, \qquad \bar{z} = \frac{\iiint_\Omega z \mu dv}{\iiint_\Omega \mu dv}$$

三、 转动惯量

质点的转动惯量 质点 $P(x,y)$ 质量为 m

平面薄片的转动惯量：平面薄片占有区域 D. 面密度 $\mu=\mu(x,y)$.

求平面对坐标轴的转动惯量.

$$dI_x = y^2\mu d\sigma \qquad dI_y = x^2\mu d\sigma$$

$$I_x = \iint_D y^2\mu\, d\sigma \qquad I_y = \iint_D x^2\mu\, d\sigma$$

⇒ 立体转动惯量:

$$I_x = \iiint_\Omega (y^2+z^2)\mu dv \qquad I_y = \iiint_\Omega (x^2+z^2)\mu dv \qquad I_z = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\mu dv$$

四、物体的引力

设物体所占空间区域 Ω、密度 $\mu(x,y,z)$ 连续，求物体对位于物体外一点、$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的单位质点的引力.?

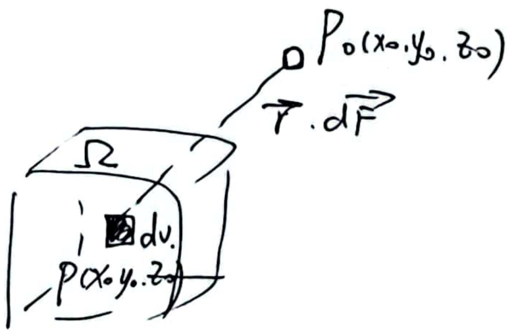
设引力 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$.

取小块区域：dv. $P(x,y,z)$ 是其内一点.

小块区域质量. $\mu(x,y,z)\,dv$.

方向. $\vec{r} = \overrightarrow{P_0P} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

大小. $|d\vec{F}| = G\frac{\mu dv}{r^2}$



Scanned with CamScanner

$$d\vec{F} = |d\vec{F}| \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = G \cdot \frac{\mu dv}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$= \left(G\mu \frac{x-x_0}{r^3} dv,\ G\mu \frac{y-y_0}{r^3} dv,\ G\mu \frac{z-z_0}{r^3} dv \right)$$

再积分得: F_x, F_y, F_z 三个方向的力度

五、立体体积 (已在前面提到, 属于基本应用)

第十一章 曲线积分与曲面积分

$\boxed{\text{整合：积分ALL}}$

部分与整体
相乘整合来看

注意 (同11-1) 题目
出题的时候有一套
一定要按 1T 这样去写了

分 → 积

⇓

已经分了 线(段)、平面、立体

还未考虑：曲线、曲面 (不实是补充，但仍有难度)

曲线：有方向、无方向
曲面：有方向、无方向

最终也是换成前面的可算积分

第一节：对弧长的曲线积分

一、问题的引入

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$

二、对弧长的曲线积分的概念和性质

1. 概念

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k \xlongequal{\text{记作}} \int_\Gamma f(x,y,z)ds$$

注：① $f(x,y,z)$ → 表密度 → 算质量
　　　　　　　→ 表高度 → 算柱面

② 闭曲线：则记为 $\oint_L f(x,y)ds$

Scanned with CamScanner

二、性质：

① 线性可加性

② 分域性（把区域分成 n 段来求）

③ 长度：$\int_\Gamma ds = l$（l 为曲线弧 Γ 的长度）

④ 保号性

三、对弧长的曲线积分的计算

① 若 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 参数方程给出

：相当于一个“换元” ⇒ $\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

一定　二代　三换

① 与方向无关
② 下限小上限大

上限永远小于下限 ($\alpha<\beta$)

② 若 L 由方程 $y=y(x)$，($a\le x\le b$) 给出，则 $ds=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$ （一般有自方程给出）

即：$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$

若 L 由方程 $x=x(y)$，($c\le y\le d$) 给出，则 $ds=\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy$

$\int_L f(x,y)ds = \int_c^d f(x(y),y)\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy$

③ 若 L 由方程 $\rho=\rho(\theta)$，或 $\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$ 极坐标方程给出 $\alpha\le\theta\le\beta$ 给出，$ds=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$

注意：应用条件

$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta,\ \rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$

④ 推广——空间曲线 Γ 的参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$（空间参数方程给出），$(\alpha\le t\le\beta)$ 则 $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$

$\int_L f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$

四、对弧长曲线积分的应用 $\begin{cases} \text{质心} \\ \text{转动惯量} \\ \text{引力} \end{cases}$

1. xoy平面曲线弧L对x轴及y轴的转动惯量

$$I_x = \int_L y^2 \mu(x,y)\,ds \qquad I_y = \int_L x^2 \mu(x,y)\,ds.$$

2. 曲线弧的质点坐标.

$$\bar{x} = \frac{\int_L x\,\mu(x,y,z)\,ds}{\int_L \mu(x,y,z)\,ds} \qquad \bar{y} = \frac{\int_L y\,\mu(x,y,z)\,ds}{\int_L \mu(x,y,z)\,ds} \qquad \bar{z} = \frac{\int_L z\,\mu(x,y,z)\,ds}{\int_L \mu(x,y,z)\,ds}$$

第二节 对坐标的曲线积分

一、对坐标的曲线积分概念与性质

1.引：解决方法："分割"→"近似"→"求和"→"取极限"

2.概念：

设L为xoy平面内从A到B的一条有向光滑曲线，函数$P(x,y)$、$Q(x,y)$在L上有界。

(1)任意分割：$L=\sum_{i=1}^{n}\widehat{M_{i-1}M_i}$，$i=1,2,\cdots,n$.

(2)$\forall(\xi_i,\eta_i)\in\widehat{M_{i-1}M_i}$：作乘积 $P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i$

(3)求和：$\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i$

(4)取极限：$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i \xlongequal{\text{记作}} \int_L P(x,y)\cdot dx$.

称极限值为$P(x,y)$在有向曲线L上对坐标x的曲线积分

同理对y方向有 $\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i \xlongequal{\text{记作}} \int_L Q(x,y)dy$.

第二类曲线积分
考察的对象 也可以是沿x,y方向的分量

注：①.存在条件：当$P(x,y)$、$Q(x,y)$在光滑曲线弧L上连续时，第二类曲线积分存在

②组合条件：

$$\int_L P(x,y)dx+\int_L Q(x,y)dy=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

③.物理意义：变力做功

④.可推广至多元积分

⑤向量表示：与物理做功表示类似

3.性质：

① 线性

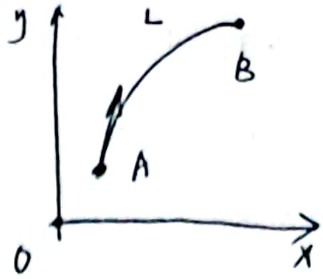
② 区域可分成有向区域

③ 区域反向变号：$\int_{L^-}\vec F(x,y)d\vec r=-\int_L\vec F(x,y)d\vec r$

注：①注意积分弧段的方向；② 由性质3知：不能性质、中值定理对第二类积分一般不成立

③ 定积分是第二类曲线积分的特例

二、对坐标的曲线积分的计算法



定理：设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ $((x,y)\in L)$ 连续，有向曲线光滑。

曲线弧 $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$t:\alpha\to\beta$。若 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$

上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则对坐标的曲线积分存在。

且 $\int_L P(x,y)\,dx=\int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)\,dt$，

$\int_L Q(x,y)\,dy=\int_\alpha^\beta Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\,dt$.

曲线积分 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 对参数的定积分

即：$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta \{\underline{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)}\}dt$.

二定限（注意方向）　一代换：直接换元

正逆：若 3个符号

特殊地：① $\psi'(t)=1$，则可看作定积分

② 可推广：至三元函数

$\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$

$=\int_\alpha^\beta P[\varphi(t),\psi(t),w(t)]\cdot\varphi'(t)dt$

$+Q[\varphi(t),\psi(t),w(t)]\cdot\psi'(t)dt$

$+R[\varphi(t),\psi(t),w(t)]\,w'(t)\,dt$.

注：① 路径不同、积分结果相同。也有时，路径不同，结果不同。

It

第三节 格林公式及其应用

一、格林公式 //本质是 曲线积分 与 二重积分 的转换和和解

1.闭区域的分类： 单连通区域、复连通区域

区域边界的方向： <u>左正、右负</u>

2.格林公式：

定理1：设闭区域D由分段光滑的曲线L围成，若函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在D上具有一阶连续偏导数。

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L P dx + Q dy$$ //格林公式

其中L是区域D的取正向的边界曲线

3、格林公式的应用

①计算曲线积分

②计算二重积分

③利用曲线积分计算曲面区域的面积. $\boxed{A=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx}$

二

三、两类曲线积分之间的联系

前提：

设有向光滑曲线弧 L 以 A 到 B，其参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t: a \to b$$

切向量 $\vec{\tau} = (\varphi'(t), \psi'(t))$，

① $a<b$，　$\cos\alpha = \dfrac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$　　$\cos\beta = \dfrac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$

② $a>b$：　$\cos\alpha = -\boxed{}$　　$\cos\beta = -\boxed{}$

m　$\alpha = (1.0.5)$

故：

① $\boxed{a<b}$ $\boxed{a>b}$ $\int_L P(x,y) + Q(x,y)dy \xlongequal{\ \ b} \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$　结果统一

类似空间中，也有

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

$\downarrow$ 令 $\vec{A} = (P, Q, R)$，$d\vec{r} = (dx, dy, dz)$

$\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$\int_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{\tau}ds$$

$\downarrow$ 记 $\vec{A}$ 在 τ 上的投影为 A_τ.

$$\int_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma A_\tau ds$$

二、二元函数全微分求积.

定理3：设 (1) G是单连通域

(2) 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$. 在G内具有一阶连续偏导数，

则在G内存在二元函数 $u(x,y)$，且 $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

且. $\int_A^B Pdx + Qdy = \int_A^B du$

格林公式：

① $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \Longleftrightarrow$ 对闭曲线 $\oint_C Pdx+Qdy=0$

非闭曲线 $\boxed{\int Pdx+Qdy}$ $\boxed{\text{在C内积分路径无关}}$ + P.Q.在G中具有一阶连续偏导数

$\boxed{\text{对全微分}}$ $\boxed{du=Pdx+Qdy}$

$\Rightarrow \int_{(0,0)}^{(x,y)} du=\int_0^x Pdx+\int_0^y Qdy$

② $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$ 无论封闭(或~~不封闭~~) 都是一般规律

三、全微分方程

微分方程：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ ①.

若方程左端恰好是某一个函数$u(x,y)$的全微分：

$$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

则称①为全微分方程.

如果方程①的左端是函数$u(x,y)$的全微分，那么：

$$u(x,y)=C.$$

就是全微分方程①的隐式通解.

※ 直接求全微分方程

例：求解. $(5x^4+3xy^2-y^3)dx+(3x^2y-3xy^2+y^2)dy=0$ //图中为对称形式

法一：

STEP1：$\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=6xy-3y^2$. 故这是全微分方程 验证成功

STEP2：取$x_0=y_0=0$，则有

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(5x^4+3xy^2-y^3)dx+(3x^2y-3xy^2+y^2)dy.$$ //曲线积分

$$=\int_0^x 5x^4dx+\int_0^y(3x^2y-3xy^2+y^2)dy$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^2+\frac{1}{3}y^3$$

STEP3：故 方程通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C.$$

法二：凑微分法

$$左=\left(dx^5+y^2d\frac{3x^2}{2}-y^3dx\right)+\left(x^2d\frac{3y^2}{2}-xdy^3+d\frac{1}{3}y^3\right)$$

$$=d(x^5+\tfrac{1}{3}y^3)-dxy^3+d\tfrac{3}{2}x^2y^2$$ //全微分可利用 $vdu+udv$ 的思路来解

$$=d(x^5+\tfrac{1}{3}y^3-xy^3+\tfrac{3}{2}x^2y^2)\qquad 右=dC.$$

故有相同结果

例：确定常数λ，使右半平面 $x>0$ 内向量值函数 $\vec{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\vec{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\vec{j}$

为某个二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并求 $u(x,y)$.

STEP1:

解：记 $P(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}$.

$Q(x,y)=-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}$.

曲[illegible]. 切[illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] 再看

[illegible]不计算[illegible] [illegible]计算方法

简要到底怎么样？

有[illegible]新电影

为什么[illegible]，以及了它？

我们[illegible]太[illegible]了，我们不能[illegible]、禁锢

认识一个人也许是痛苦的，就像[illegible]

一些反思，一些思绪，[illegible]，

对，我觉得我有一种[illegible]的体验。

第四节 对面积的曲面积分

(学会一种变形方法，变形至直角坐标中，进行相除)

一、引例

二、概念与性质

1.定义：设 $u=f(x,y,z)$ ($(x,y,z)\in\Sigma$ (光滑曲面))，有界.

(1) 任意分割 Σ：$\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$；

(2) $\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$：$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta S_i$

(3) 求和：$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

(4) 取极限：$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\boxed{f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i}}_{\text{积分和式}}$ 存在 $\stackrel{\text{记作}}{=\!=}$ $\iint_{\Sigma}\overbrace{f(x,y,z)}^{\text{被积函数}}\underbrace{dS}_{\text{面积元素}}$

Σ：积分曲面

对面积的曲面积分：第一类曲面积分

2. 存在的充分条件：若 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续，则对面积的曲面积分存在

3.性质：① 可加性 (面积可加性) $(\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2)$

② 线性可加性.

③ 面积 $\iint_{\Sigma}1\cdot dS=\Sigma$.

④ 具有不等式性质和曲面积分中值定理

三、计算方法.

情形：$\Sigma: z=z(x,y)$.

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}}f(x,y,\underline{z(x,y)})\underline{\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,\underbrace{dxdy}_{d\sigma}}$$ 化为二重积分

$\iint dS$：曲面面积

$\iint dxdy$：投影面积

一投：将曲面 Σ 向 xoy 面投影，得 D_{xy}

二代：z 代 $z(x,y)$.

三换：$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\cdot dxdy$

$$\boxed{\text{其 } d\sigma=dxdy=\cos\gamma\, dS}$$

情况2： $y=y(x,z)$.

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS=\iint_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\underbrace{\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}}_{\frac{1}{\cos\beta}}\,dx\,dz.$$

情况3： $x=x(y,z)$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS=\iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\cdot\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dy\,dz$$

第五节 对坐标的曲面积分

一、有向曲面及曲面元素的投影.

曲面分类：
- 双侧曲面
- 单侧曲面、：莫比乌斯带.

二、对坐标的曲面积分的概念与性质

1. 引例：思路"分割、近似，求和，取极限"

2. 定义：$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy} \xlongequal{记作} \iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy$

3. 性质：

① 积分曲面的可加性：$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$.

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}(\qquad)+\iint\limits_{\Sigma_2}(\qquad).$$

② 如果Σ^-表示与Σ取相反侧的有向曲面，则：

$$\iint_{\Sigma^-} (\qquad) = -\iint_{\Sigma} (\qquad)$$

三、对坐标的曲面积分的计算法

定理：设光滑曲面 $\Sigma: z = z(x,y)$，$(x,y) \in D_{xy}$，取上侧，$R(x,y,z)$是Σ上的连续函数，则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy = \iint_{D_{xy}} P(x,y,z(x,y))\,dydz.$$

四、两类曲面积分的关系

类比曲线：$\int_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz = \int_{\Gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds$

曲面 $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy = \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma\,dS$

$\Rightarrow$ 得计算公式．有Σ：$z=z(x,y)$ 上侧 $\vec{n} = (-z_x, -z_y, 1)$． 为什么取?

$\cos\alpha = \frac{-z_x}{\sqrt{\ }}$　$\cos\beta = \frac{-z_y}{\sqrt{\ }}$　$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{\ }}$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

$$= \iint_{\Sigma} \left(P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + R\right) dxdy$$

$\boxed{\cos\gamma\, dS}$

$$= \iint_{\Sigma} (-z_x P - z_y Q + R)\,dxdy$$

Σ上侧取正号

下侧取负号

第六节. 高斯公式 通量和散度

一、高斯公式 (Gauss) 闭曲面Σ, 取外侧. 在Ω上具有一阶连续偏导数

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\oiint_{\Sigma}P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

$$=\oiint_{\Sigma}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)dS$$

其中$\cos\alpha$. $\cos\beta$, $\cos\gamma$是Σ在点(x,y,z)的法向量的方向余弦。

无穷级数

简述：

无穷级数是研究有次序的可数无穷个函数的和的收敛性及其极限值的方法。

级数是研究函数的一个重要工具，在理论和实际应用中都处于重要作用：这是因为：一方面能借助级数表示许多常用的非初等函数，微分方程的解就常用级数表示；另一方面又可将函数表示为级数，从而借助级数去研究函数，例如用幂级数研究非初等函数，以及进行近似运算等

第十二章 无穷级数

第一讲. 常数项级数的概念与性质

一、常数项级数的概念.

$\boxed{\text{定义1}}$: 给定数列 $\{u_n\}$, 由该数列构成的表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

称为常数项级数, 简称为级数. 记 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

注① u_1: 首项 u_n: 一般项(通项)

② 有限和式: $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$, 称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项部分和

部分和数列: 数列 $\{S_n\}$ $S_1, S_2 \cdots S_n \cdots$ 称为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列

$\boxed{\text{定义2}}$: 收敛: 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 s, 即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = s$$

并称级数的和为 s, 记为.

$$S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

发散: 若 $\{S_n\}$ 极限不存在, 则发散

注① $\boxed{\text{收敛时}}$, 称差值: $r_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$ 为级数的余项.

显然 $\lim_{n\to\infty} r_n=0$. 通常 $\lim_{n\to\infty} r_n=0$, 通常可近似计算 $S\approx S_n$

绝对误差. $|r_n|=|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots|$

② 记忆: $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \cdot (a\neq 0)$ $\begin{cases} \text{收敛}, \text{和为} \dfrac{a}{1-q}, & |q|<1 \\ \text{发散}, & |q|\geq 1 \end{cases}$

二、收敛级数的基本性质.

性质1：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和S，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 也收敛，且其和为 ks.

非零常数

倍乘

性质2：若级数分别收敛于 s 和 σ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，其和为 $s \pm \sigma$

可加

推论：2级数中一个收敛，一个发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必发散.

推论：2级数都发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 不一定收敛，也不一定发散。

性质3：在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的敛散性.✓

性质4：收敛级数任意加括号后所成的级数仍收敛，且其和不变.

性质5（级数收敛的必要条件）.如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，那么其一般项趋于零，

即 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

推论：若一般项不趋于0，则级数必发散

第二讲·常数项级数的审敛法(一)

一、正项级数及其审敛法.

定义1：若 $u_n \geq 0$，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数.

定理1：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界
$\Longleftrightarrow$

(基本判别定理)

定理2：比较审敛法.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，且 $u_n \leq v_n \ (n=1,2,3)$，则有

发散 则 v_n 也发散

则 u_n 也收敛 $\Leftarrow$ 收敛

⇒推论：

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是2个正项级数，且存在 $N \in Z^+$

对一切 $n \geq N$，有 $u_n \leq k v_n \ (k>0)$，则有

收敛 ← 收敛

发散 → 发散

$$\boxed{\text{常用：P级数. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{收敛}, & p>1 \\ \text{发散}, & p \leq 1 \end{cases}}$$

定理3：（比较审敛法的极限形式）.

设2个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$. 则有

(1) 当 $0 < l < +\infty$，2级数同时收敛或发散. //同阶无穷小
(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{v_n}$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{u_n}$ 也收敛 // u_n 比 v_n 无穷小
(3) 当 $l = +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{v_n}$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{u_n}$ 也发散 // u_n 与 v_n 无穷大

除3阶无穷小的分析方法

定理4：（比值审敛法，达朗贝尔判别法）.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ ($\rho \geq 0$). 则

(1) $\rho < 1$：级数收敛.
(2) $\rho > 1$. 或 $\rho = +\infty$ 级数发散.
(3) $\rho = 1$. 不确定.

定理5：（根值审敛法，柯西判别法）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \geq 0$，则.

(1) 当 $\rho < 1$ 时，级数 ~~发散~~ 收敛
(2) 当 $\rho > 1$ 或 $\rho = +\infty$，级数发散
(3) 当 $\rho = 1$ 时 级数可能收敛也可能发散.

定理6.（极限审敛法）. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，在比较审敛法中，特别取 $v_n=\frac{1}{n^p}$

可得如下结论：

$$\lim_{n\to\infty} n^p \cdot u_n = l. \begin{cases} p\le 1,\ 0<l\le+\infty & \Rightarrow \sum u_n \text{ 发散} \\ p>1,\ 0\le l<+\infty & \Rightarrow \sum u_n \text{ 收敛} \end{cases}$$

二、交错级数及其审敛法

定义1：称各项~~绝对~~正负相间的无穷级数为交错级数，其一般形式为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$

或 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$. 其 $u_n>0$. $n=1,2,\cdots$

eg 失效：无法判断单调性

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=(-1)^n\frac{[\sqrt{n}-(-1)^n]}{[\sqrt{n}+(-1)^n][\sqrt{n}-(-1)^n]}$$

$$=\frac{(-1)^n[\sqrt{n}-(-1)^n]}{n-1}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}$$

故：无法判断 则进一步化简 再判断是否收敛 or 发散

定理1：（莱布尼茨定理）. 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件

1). $u_n\ge u_{n+1}$ $(n=1,2,3\cdots)$;

2). $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，其和 $S\le u_1$，其余项 r_n 绝对值 $|r_n|\le u_{n+1}$

注：这个条件是充分而非必要。有些级数不满足此条件，但仍收敛。比如 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{2^n}\right)$

三、绝对收敛与条件收敛.

定理2：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 所对应的绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 ; $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{ 发散} \cancel{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 发散}}$.

注：其推导过程构造的技巧要记住.

若比值审敛法与根值审敛法判断的发散，则该结论成立

定义2：条件收敛：

绝对收敛：

典例：判断敛散性

(1) 判断递加性

e.g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$

//判断其敛散，若其发散，则可以有这种形式。比如此处，证明其发散（常常）

$u_n=\frac{e^n n!}{n^n}$ $\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n n!}{n^n}}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1 \quad (n=1,2\cdots) \quad \therefore u_n>u_{n-1}>\cdots>u_1=e.$

u_n 一直递增，即 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$。

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$ 发散.

(2) e.g. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n^2+2n}$

$$\frac{1}{n^3+3n^2+2n}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] \quad (n=1,2\dots)$$

//分母每一项相邻 ⟹ 拆开，三项相乘拆项

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]\xlongequal{\text{裂后}}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

//求和公式

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore$ 原级数收敛，和为 $1/4$.

//原部分和 取极限 ⟶ 可得定值，即收敛

(3). 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln(1-\frac{1}{n^2})$ 的$\boxed{\text{敛散性}}$.

解：$\because \ln(1-\frac{1}{n^2})=\ln\frac{n^2-1}{n^2}=\ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln n$ //先将项拆开，便于求和相消

$$\therefore S_n=\sum_{k=2}^{n}\ln(1-\frac{1}{k^2})\xlongequal{\text{展开消项}}\ln(1+\frac{1}{n})-\ln 2$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n=-\ln 2.$

小结：直接拆项求和，取极限

第四节 幂级数

一、函数项级数的概念

1. 函数项级数的概念

定义1：设 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 为定义在区间 I 上的函数列，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$

为定义在区间上的函数项无穷级数。

2. 函数项级数的收敛域与发散域

定义2：对 $x_0 \in I$，若常数项 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，称 x_0 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点，所有收敛点的全体称其收敛域。

- - - — 发散 · — ——— 发散点， - · ·

· · - - - - 发散域

3. 函数项级数的和函数及余项

定义3：设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 I，则

取定 $x_0 \in I$. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = s(x_0)$

对于 $\forall x \in I \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = s(x)$

称为 $s(x)$ 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在收敛域 I 上的和函数，即

$$\boxed{s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in I}$$

$\Rightarrow$ 级数的前 n 项的部分和：$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$

$\Rightarrow$ 级数的余项 $r_n(x) = s(x) - S_n(x)$ $x \in I$

则在收敛域上有 $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = s(x)$ ，$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$

二、幂级数及其收敛性

1. 定义:

2. 收敛性:

定理1.(Abel定理):

3. 收敛半径、收敛区间、收敛域.

規定：

(1) 考幂函数.

4. 收敛半径的求法

定理2：若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ 或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$，$a_n \neq 0$ $(n=0,1,2\ldots$

前提：缺项无阶数

则.

(1) 当 $\rho\neq 0$ 时 $R=\frac{1}{\rho}$

(2) 当 $\rho = 0$ 时，$R=+\infty$

(3). 当 $\rho=+\infty$ 时，$R=0$

eg. 典型：①$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$　　$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=0$　$\Rightarrow$ 全发散

②.$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$　　$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right|=+\infty$，$\Rightarrow$ 全收敛.　$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

三、幂级数的运算及和函数的性质

1.幂级数的运算

$\boxed{\text{定理3:}}$ 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_1. R_2. 令 $R=\min\{R_1, R_2\}$

加法运算

$\boxed{\text{定理4:}}$

乘法运算

2.幂级数的和函数的性质

第五讲 函数展开成幂级数

一、泰勒（Taylor）级数

设函数$f(x)$在$U(x_0)$内具有任意阶导数，如果存在幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$在其收敛域内以$f(x)$为和函数，此时称$f(x)$在$x_0$点能展开幂级数。即$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，$x\in U(x_0)$

讨论

(1) 存在性：

若能展开：$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$ $\quad x\in U(x_0)$

根据幂级数求导得

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)!a_{n+1}(x-x_0)+\frac{(n+2)!}{2!}a_n(x-x_0)^2+\cdots$$

于是$f^{(n)}(x_0)=n!a_n$。因此：$a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ $\quad(n=0,1,2\cdots)$

$f(x)$在点x_0的泰勒系数

(2) 唯一性。

定义：幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$称函数$f(x)$在$x_0$点的泰勒级数。

展开式：$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. $\quad x\in U(x_0)$

称为函数$f(x)$在x_0点的泰勒级数。

(三). 收敛于? 不一定f.

Eg.: $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0. \end{cases}$ 在$x=0$点具有任意阶导数

且. $f^{(n)}(0)=0$ ~~对~~ $(n=0,1,2..)$

$f(x)$在$x=0$的泰勒级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} 0\cdot x^n$.

其和函数 $S(x)=0$. $x\in(-\infty,+\infty)$. $x\neq 0$时 $S(x)\neq f(x)$

∴ $f(x)$在$x=0$点.不能展开为泰勒级数

⇒定理: $f(x)$在$U(x_0)$有n阶导数. 则. $f(x)$在该邻域内能展开Taylor ⟺ $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$

二、函数展开成幂级数

1. 直接展开法.

将 $f(x)$ 在 x_0 点展开为幂级数的步骤:

(1) 求 $f(x_0)$. $f'(x_0)$. $f''(x_0)\cdots f^{(n)}(x_0)$, ...

(2) 写出幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$, 并求出收敛半径R;

(3) 判别在收敛区间 $(-R,R)$ 内是否有 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$. $\begin{cases}\text{是} & \text{可以展开}\\ \text{否} & \text{不能展开}\end{cases}$

例1: $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$ 即: $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

例2: $\sin x=\sum_{n=}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$ $x\in(-\infty,+\infty)$

2. 间接展开法

① 利用一些函数的已知展开式 (常数项) 去凑、去积累

② 通过幂级数 四则运算, (加减. 拆分)

变量代换 先求整体、再代替

恒等变形

逐项积分

逐项微分 $\cos x=(\sin x)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\cdot x^{2n}$.

注:

① 有时, 也用于求定积分. $\{$ ① 把被积函数幂级数展开

常见函数的幂级数展开式.

和

函数 = 级数.

每项的关系.

$\frac{1}{1+x}$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n$. $\quad x\in(-1,1)$

[积分 $\Rightarrow$ $\ln(x+1)$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}$] $x\in(-1,1]$ 注:会写lg函数的级数

$\frac{1}{1-x}$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty}\cdot x^n$ $\quad x\in(-1,1)$

e^x $\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $\quad x\in(-\infty,+\infty)$

$\sin x$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$ $\quad x\in(-\infty,+\infty)$

求导 $\Rightarrow$ $\cos x$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}$.

推广: $(1+x)^m$. $(m>0)$ $\quad 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cdot x^3+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$

$x\in[-1,1]$

eg. $m=-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ $\quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}x^n$. $\quad x\in(-1,1]$

$\frac{1}{1+x}$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

$\ln(1+x)$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$

$\sin x$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\quad \cos x$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

e^x

① 典例示范

$f(x)=(1+x)^m$ 展成 x 的幂级数　　课本例6　　[illegible]

P289

$$f(x)=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots \quad R=1$$

② [illegible] → $\boxed{\text{[illegible]技巧}}$!!!

第六讲 函数的幂级数展开式的应用

背景：

幂级数：一般形式简单，便于微分、积分运算

便于数值分析和计算

可用于函数值的近似计算，表示非初等函数，解微分方程

一、近似计算：揭示了某种条件中，从模拟到函数的本质特征

(1) 两类问题：

1) 给定精度，确定项数，并求函数的近似值（例1）

2) 给定项数，求近似值，并估计精度（例2）

> 通过估计余项的值，确定项数或精度

方法：

交错 $|r_n| \le u_{n+1}$ $(u_{n+1}>0)$ // 相对于交错只多了一个绝对值

非交错，则放大余项中的各项，使之成为等比级数或其他易求和的级数，从而估计误差

(2) 推广：近似计算定积分的近似值.（对幂级数逐项积分）

例：计算：ln2的近似值，使误差精确到 10^{-4}.

解：已知

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (-1 < x \le 1)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (-1 \le x < 1)$$

// 直接余项 $< 10^{-4}$. 会到后 $n+1$ 项，不好取。故转换方法。

求估值

$$\Rightarrow \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots\right) \quad (-1 < x < 1)$$

令 $\frac{1+x}{1-x} = 2$ 得 $x = \frac{1}{3}$ 来代入级数中去.

$$\Rightarrow \ln 2 = 2\cdot\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \cdots\right)$$

分析精度

在上述展开式中取前4项.

$$\therefore |r_4| < \frac{2}{3^{11}}\left(1 + \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \cdots\right) = \frac{2}{3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4\cdot 3^9}$$ 此时符合要求

推广：$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots\right)$ 中令 $x = \frac{1}{2n+1}$.（n 为正整数）.

得 $$\ln\frac{n+1}{n} = 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5 + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow \ln(n+1) = \ln n + 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5 + \cdots\right)$$

应用：$\ln 5 = \ln 4 + 2\cdot\left(\frac{1}{9} + \left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5 + \cdots\right) \approx 1.6094$

二、解微分方程·近似计算

1. 一阶方程. $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, $y|_{x=x_0}=y_0$

要求：$f(x,y)$是x,y的多项式。 解法：令$y=y_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$. 求$a_n$

eg. $\frac{dy}{dx}=-x-y$ $y|_{x=0}=2$.

解：

$y=2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-0)^n \Rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty}n a x^{n-1}$

故: $\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1}=y'=-x-(2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n)$

左 $a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$

||

右 $-2+(-1+a_1)x-a_2x^2-a_3x^3+\cdots$

$\Rightarrow a_1=-2$ $2a_2=(-1+a_1)=$

$3a_3=-a_2$

比较系数解得 $\Rightarrow$ $y=2-2x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n \Rightarrow y=1-x+e^{-x}$

$n=1$. $a_1=-x-2+a_0$.

$n=2$. $2a_2x=-x-2+a_2\cdot x^2$

2. 二阶齐次线性方程. $y''+P(x)y'+q(x)y=0$.（不是常系数的二阶）

要求: $P(x)$. $q(x)$ 能展开成幂级数. 解法: 令$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 求$a_n$

eg. $y''-xy=0$ $y|_{x=0}=0$. $y'|_{x=0}=1$.

解: 令$y=x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$. $\Rightarrow y'=1+\sum_{n=2}^{\infty}n a_n x^{n-1}$ $y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$.

$=x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$ $=1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3$ $=2\cdot1\cdot a_2+3\cdot2a_3x+4\cdot3\cdot a_4x^2+\cdot$

代入得 $xy=x^2+a_2x^3+a_3x^4+a_4x^5$

$2a_2+3\cdot2a_3x+(4\cdot3a_4-1)x^2+(5\cdot4\cdot a_5-a_2)x^3+$

$+\cdots+[(n+2)(n+1)a_{n+2}-a_{n-1}]x^n+\cdots=0$

三、欧拉公式.

前提

对复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+iv_n)$ ①

①′ 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=v$，则称①收敛，其和为 $u+iv$

②′ 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n+iv_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n^2+v_n^2}$ 收敛，则称①绝对收敛.

定义 复变量 $z=x+iy$ 的指数函数为

$$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots \quad (|z|<+\infty)$$

易证该复数项级数在整个平面上收敛。

当 $y=0$ 时，它与实指数函数 e^x 的幂级数展开式一致

当 $x=0$ 时，

$$e^{iy}=1+iy+\frac{1}{2!}(iy)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(iy)^n+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{4!}y^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n}\cdots\right)+i\left(y-\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{5!}y^5-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}y^{2n-1}+\cdots\right)$$

$$=\cos y+i\sin y$$

$$\Rightarrow\begin{cases}e^{ix}=\cos x+i\sin x\\ e^{-ix}=\cos x-i\sin x\end{cases}\quad\xLeftrightarrow{\text{欧拉公式}}\quad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$$

⇒利用欧拉公式 可得到复数的指数形式：

$$z=x+iy=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho\cdot e^{i\theta}$$

其 $\rho=|z|$ 是 z 的模，$\theta=\arctan\frac{y}{x}$ 是 z 的辐角 $(\arg z)$

极 最美公式
$$e^{i\pi}+1=0$$

$$\Rightarrow |e^{x+iy}|=|e^x(\cos y+i\sin y)|=e^x \quad (x,y\in R)$$

即：复变量指数函数 e^{x+iy} 的模是 e^x，辐角为 y 的复数.

欧拉公式揭示了三角函数与复变量指数函数之间的联系

第七讲：傅里叶级数

注：更多关于傅里叶变换与级数的内容，可在信号与系统、数学物理方法等里面查看

一、三角级数引入　三角函数系的正交性（前提：可积性）

一种特殊函数的形式．

- 若干个以2π为周期的正弦函数叠加得到一个以2π为周期的正弦函数．
- 无穷多个同周期的正弦函数相加，就得到无穷级数．

$$A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin(k\omega t+\varphi_k)$$

如果收敛，和函数是一个更一般的以2π为周期的函数

⇒展开：

$$A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin(k\omega t+\varphi_k)$$

$$=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_n\sin\varphi_n\cos n\omega t+A_n\cos\varphi_n\sin n\omega t\right]$$

$$\frac{a_0}{2}\qquad a_n\qquad x\qquad b_n\qquad x$$

定义：形如 $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ 的函数项级数，叫 $\boxed{\text{三角级数}}$

定义：若 $\int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)\,dx = 0$，称两个函数 $u(x)$ $v(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上正交

引理：三角函数系 1，$\cos x$ $\sin x$，$\cos 2x$ $\sin 2x$，…，$\cos nx$ $\sin nx$，… 中任意 2 个不同函数在区间 $[-\pi,\pi]$ 上正交。

注：因为上面都是 2π 为周期的，所以积分区间可以换为 $[0,2\pi]$，或任意长度为 2π 的区间

二、以 2π 为周期的函数展开成傅立叶级数

1. 傅里叶系数的计算：

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且能展开成三角级数，即：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

假设 $f(x)$ 可积，且右边逐项积分。

(1) 上式两端在 $[-\pi,\pi]$ 积分得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx}_{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\underbrace{\cos nx}_{0} + b_n\underbrace{\sin nx}_{0})$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0\pi \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

(2) 用 $\cos nx$ 同乘上式 2 端，再在 $[-\pi,\pi]$ 上积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx}_{0} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[a_k\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx}_{k\neq n\text{ 时为 }0} + b_k\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,dx}_{0}\Big]$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = a_n\pi \quad \text{即：} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

综上. $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$

$$\boxed{\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad (n=(0)\ 1,2\cdots)\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,3\cdots)\end{aligned}}$$

定义为.傅里叶系数.

傅里叶级数: $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

2.收敛定理.

如果以2π为周期的函数f(x)在一个周期上可积,则可以求出傅里叶系数(级数)

⇒ (收敛条件.狄利克雷充分条件).

设.f(x)是以2π为周期的函数,若它满足.

(1)在一个以周期内连续、或只有有限个第一类间断点.

(2)在一个周期内至多存在有限个极值点.

则.f(x)的傅里叶级数.收敛,且有.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases}f(x), & x\text{为连续点}\\ \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}, & x\text{为间断点}.\end{cases}$$

$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx$

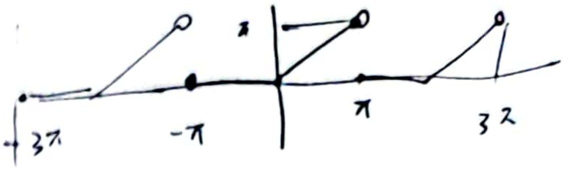
$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$

定义：若 $\int^{\pi} u(x)v(x)\,dx=0$，称两个函数 $u(x)$ $v(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上正交

eg. $f(x)$ 以 2π 为周期，在 $(-\pi,\pi)$ 满足

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ x & 0\le x<\pi\end{cases}$$



解：

① 当 $x\neq(2k-1)\pi$，$f(x)$ 傅里叶级数收敛于 $f(x)$.

② $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{\pi}{2}$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cdot d\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\cdot\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}=\begin{cases}0 & n=2k\\ \frac{-2}{(2k-1)^2\pi} & n=2k-1\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+0=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\therefore f(x)=\underbrace{\frac{\pi}{4}+\frac{-2}{\pi}\cos x+\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+\frac{-2}{9\pi}\cos 3x\ \cdots}_{S(x)}\qquad x\neq(2k-1)\pi$$

$\Rightarrow$ $S(10\pi)=0$　$S(101\pi)=\frac{\pi}{2}$

3. 正弦级数、余弦级数 // 特殊傅里叶展开式

若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的奇函数，

$f(x)\cos nx$ 是奇函数 $\rightarrow a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=0$

$f(x)\sin nx$ 是偶 $\rightarrow b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

则：奇函数 $f(x)$ 的傅里叶级数为正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

同理，余弦级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$

Q1:

$(-\pi,\pi)$

点 $(-\pi, \ )$ $(0,\pi)$ 处何

如何表示级数？按周期因素的一样

三、$[-\pi,\pi]$ 上函数展开成傅里叶级数.

例: $f(x)=|x|$, $x\in[-\pi,\pi]$ 展开成傅里叶级数.

解: 可推得

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

Q2: 试 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$ 不可求?

应用: 用此展式可求出几个常数项级数的和.

1° 取 $x=0$ 时，$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots\right]$

$\therefore\ 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$.

2°. more.

$\sigma=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ $\qquad$ $\sigma_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$

$\sigma_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots$ $\qquad$ $\sigma_3=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots$

$\because\ \sigma_2=\frac{\sigma}{4}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{4}$ $\quad$ $\sigma_2=\frac{\sigma_1}{3}=\frac{\pi^2}{24}$ $\quad$ $\sigma=\sigma_1+\sigma_2=\frac{\pi^2}{6}$ $\quad$ $\sigma_3=\sigma_1-\sigma_2=\frac{\pi^2}{12}$

四、$[0,\pi]$上展成正弦级数或余弦级数.

eg. 将 $f(x)=x+1$. $x\in[0,\pi]$.

(1). 展成正弦级数.

① $f(x)$奇延拓 $\Rightarrow$ 周期延拓 $\Rightarrow$ 由收敛定理 $\begin{cases} x=0,\ x=\pi. \text{ 收敛到零.} \\ (0,\pi) \text{ 收敛到 } f(x). \end{cases}$

②

$$b_n=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi (x+1)\sin nx\,dx$$ (只求$(0,\pi)$的)

$$=\begin{cases} \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(\pi+2)}{n}. & n\text{为奇} \\ \frac{2-\pi}{\pi n}. & n\text{为偶}. \end{cases}$$

∴当 $x\in(0,\pi)$时, $$x+1=\frac{2}{\pi}\cdot\left[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{\pi+2}{3}\sin 3x-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\cdots\right]$$

(2) 展成余弦级数.

①. 偶延拓 $\Rightarrow$ 周期延拓 $\Rightarrow$ 由收敛 $\{\ x\in[0,\pi]$ 全收敛于 $f(x)$

② $$a_0=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi (x+1)dx=\frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^\pi=\pi+2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi\cdot(x+1)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]=\begin{cases} -\frac{4\times 1}{\pi n^2}. & n\text{为奇} \\ 0. & n\text{为偶} \end{cases}$$

∴ $x\in[0,\pi]$时, $$x+1=\frac{\pi+2}{2}+\left(-\frac{4}{\pi}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

第八讲. 一般周期函数的傅里叶级数.

一、一般周期函数的傅里叶级数.

周期为 $2l$ 的函数 $\xrightarrow{x=\frac{l}{\pi}z}$ 周期为 2π 的 $F(z)$ $\left(= f(\frac{l}{\pi}z)\right)$

⇓ 傅里叶级数.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \xleftarrow{z=\frac{\pi}{l}x} F(z) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx. \quad n=0,1,2\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx. \quad n=1,2\cdots$$

其它性质完全类比于 $(-\pi,\pi)$ 的傅里叶级数的性质

注:

① 区间 $[a,b]$ 上展开傅里叶. ∵ 先将函数周期延拓为 $b-a$. 再展开

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}x\,dx$$

$$b_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}x\,dx.$$

$l=\frac{b-a}{2}$