① PPT 总结

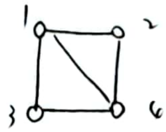
② 小册

③ matlab

④回顾：矩阵初等变换的精髓

线性代数

Q1：那个接点的问题？



$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Q2：再复习时，注意、小结与思考题

总体对线思路

一. 矩阵

①. 所有的证明题最考思维 ⟶ 会考基本逻辑: $\boxed{\text{反证法}}$

Scanned with CamScanner

一般可能会用到的公式:

①

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \cdots + a^2 + a + 1) \Rightarrow A^m - E = (A-E)(A^{m-1} + \cdots + A + E)$$

矩阵及应用

第一节 高斯消元法和矩阵的概念

- 1.高斯消元法
  - 1.1 概述
  - 1.2 二元、三元线性方程组解的几何意义
  - 1.3 高斯消元法与阶梯形方程组
- 2.矩阵的概念
  - 2.1 矩阵的定义
  - 2.2 7种特殊矩阵
    - n阶方阵
    - 行/列矩阵
    - 对角矩阵
    - 零矩阵
    - 单位矩阵
    - 上/下三角形矩阵
  - 2.3 同型矩阵和相等矩阵
  - 2.4 矩阵的应用
  - 2.5 线性变换

第二节 矩阵的运算

新的数学基本封装元素

↓

可推广至

① 多项式

② 二项式

③ 线性方程组

- 加/减：~~一般无特殊情况~~
- 数乘：~~不能交换~~

加/减、数乘：线性运算

- 乘法 ①不能交换位置 ② E乘任何都为所求对象
  - ③ 特别若A是n阶，则 $A^k=\underbrace{A\cdot A\cdot A\cdots A}_{k个A}$ 　 $(A^k)^m=A^{km}$ 　 $A^mA^n=A^{m+n}$
- $\boxed{转置}$：独特运算方式

可理解

$(A^T)^T=A$ // 来回转

$\boxed{(A+B)^T=A^T+B^T}$ $\Rightarrow (A_1+A_2+\cdots+A_n)^T=A_1^T+A_2^T+\cdots+A_n^T$

$(\lambda A)^T=\lambda A^T$

$(AB)^T=B^TA^T$ $\Rightarrow (A_1A_2A_3\cdots A_n)^T=A_n^T\cdots A_2^TA_1^T$

$R(A^T)=R(A)$ // 矩阵的秩

$\pm A=A^T$

↓

对称矩阵与反对称矩阵

共轭矩阵. $\begin{bmatrix}3 & 2+i\\ 2-i & 1\end{bmatrix}$

(1) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$

(2) $\overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\cdot\overline{A}$

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

第三节 可逆矩阵

一、相关概念引入 $A\cdot A^{-1}=E$

二、逆矩阵的相关条件和性质

$b=Ax \Rightarrow x=A^{-1}b$ 是对的

初等变换

① 可用待定系数求、公式 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

② 对角式 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}$

反对角也是这样；其他地方有0也成立

③ $(A^{-1})^{-1}=A$；$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$；$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$，

若A、B为同阶方阵，且可逆，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ $(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_1^{-1}$

$EA=AE$

第四节 矩阵分块法

只是一个方法，便于理解矩阵和深入求解矩阵

一、矩阵的分块

二、分块矩阵的运算规则

与一般矩阵运算

- $A+B$ 加/减 注意用相同分块分同型矩阵
- $\lambda\cdot A$ 数乘
- $A\cdot B$ 分块的要注意 → 特殊 $\boxed{\text{分块对角阵}}$
- 转置：转2次：先转块，再转块数[本质，直接转就行]
- 求逆：若 $A=\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3\end{pmatrix} \to A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & A_3^{-1}\end{pmatrix}$

其它正常求

$A=\begin{bmatrix} & & A_1 \\ & A_2 & \\ A_3 & & \end{bmatrix}$

$A^{-1}=\begin{bmatrix} & & A_3^{-1} \\ & A_2^{-1} & \\ A_1^{-1} & & \end{bmatrix}$

常凑成这样的形式，便于求逆

第五节 初等变换与初等矩阵

一、矩阵的初等变换

[多为行变换 少见为列变换]

- 可对调两行 $r_i \leftrightarrow r_j$（列：$c_i \leftrightarrow c_j$）
- 乘k倍 $r_i\times k$
- 将k倍元素再与其它相加减 r_i+kr_j

- 反身性 $A\sim A$ //前后等价性
- 对称性 若 $A\sim B$，则 $B\sim A$
- 传递性 若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$

(梯矩阵：零矩阵也是梯矩阵；最简形梯矩阵

性质/定理：① 任意 $m\times n$ 矩阵A总可以经初等变换化为梯矩阵及最简形，

⇒ 最简形是唯一的

二、初等矩阵

一、概念 $E(i,j)$ $E(i(k))$ $E(i,j(k))$

$\boxed{\text{左乘行变，右乘列变}}$

二、初等矩阵的应用

初等变换 ⇒ 初等矩阵是可逆矩阵

n阶方矩阵具有以下命题等价

① A是可逆矩阵

② 线性方程组 $Ax=0$ 只有零解

④ A可以表示为有限个初等矩阵的乘积

$\Rightarrow (A\vdots E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E\vdots A^{-1})$

$(A\vdots B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E\vdots A^{-1}B)$

$\left(\frac{A}{C}\right) \longrightarrow \left(\frac{E}{CA^{-1}}\right)$

第六节 线性方程的解 [这是一种有趣的表示方法，也是理解线性方程组什么的一个角度]

一、线性方程组有解的判定条件

若 $R(A) \neq R(\bar{A})$，则无解

定理3：n元线性方程组解的情况：

① 有解的充要条件 $R(A)=R(\bar{A})$

② 有唯一解的充要条件 $R(A)=R(\bar{A})=n$

③ 有无穷多解的充要条件 $R(A)=R(\bar{A})<n$

定理4：n元齐次线性方程组 $\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & \cdots & a_{1n}x_n \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & & a_{mn}x_n \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$ 有非零解的充要条件是它的系数矩阵A的秩 $R(A)<n$，即：行列式 $=0$

⇒ $\boxed{\text{求解过程}}$

法一：

$Ax=b \Rightarrow \tilde{A}$（增广矩阵）$\xrightarrow[\text{化简}]{\text{初等变换}}$ 行阶梯型矩阵 → 判断是否有解

$Ax=0$

- $R(A)\neq R(\bar{A})$ 无解
- $R(A)=R(\bar{A})=n$
  - $R(A)=R(\bar{A})<n$ 有无穷解 or 非零解
  - $R(A)=R(\bar{A})=n$ 有唯一解 or 只有零解

⇒最后结果：通解 + 特解

法二：当小时可用求逆矩阵的方法进行求解线性方程组

思想：线性代数的思想、

① 主动用线代语言来表达线代思路

09. 设A是n阶可逆矩阵，且每一行元素之和都等于5，矩阵A^{-1}的每一行元素之和等于____.

$$A\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\5\\5\end{bmatrix}$$ //引入$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$来表示

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

所：$\frac{1}{5}$

矩阵运算的总结:

1 一般: 加(减)法①、数乘②、乘法③、行列式运算④.

上标运算: 幂运算⑤、逆运算⑥、转置运算⑦、伴随运算⑧

注: 无秩的相关运算

注:

①乘法: 空间位置不能变、时间次序能变.

②上标: 1° 脱括号, 变位置.

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$(AB)^k = A(BA)^{k-1} B$$

2° 任意两个上标运算可以调换位置.

$$(A^\alpha)^\beta = (A^\beta)^\alpha$$

③ 公式表:

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
①								
②								
③								
④								
⑤								
⑥	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
⑦								
⑧								

矩阵的运算

认识：基本运算规则在书上，以下是重难点

分析。切记运算规则十分重要。

难点：A^n

① 求 A^2 A^3 ⟶ 数学归纳法 $(\alpha\cdot\beta^T)^{100}$

② 分列x来，找其中1个简单的 $\boxed{行\times列=数}$ ✗ 2° 含对角阵的题目

③ 对角矩阵求法，对角线乘化 e.g. $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \lambda_2^n & \\ & & \lambda_n^n \end{bmatrix}$

④. ~~含有四解~~ 对2点：可拆成2个矩阵 ...

例1：求 A^n，目前只求 A^2，A^3，找规律即可。

补充1：矩阵多项式

n阶方程阵A的m次多项式：

$$f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_{m-1}A + \underline{a_mE}$$

常数项

eg. $f(x) = x^2 - 5x + 6$. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ 求 $f(A)$.

解：$f(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^2 - 5\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + 6$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

核：将矩阵A当作一个变量进行变换使用，和之前的数字为一个意思。

补充2：形式，线性方程组的矩阵形式。

利用矩阵乘法。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可表示成简洁的矩阵形式 $AX = b$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

例2：有时甚至求逆也会有技巧，需要本抽象思维，进行求解

eg. 求 $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 的逆

解：

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & & & & & 1 & 0 & 0 & \cdots & \\ 1 & 1 & & & & 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & 1 & & & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & & & & & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right] \uparrow$$

∴ 从下往上依次减以前行列结果

故有 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$

例3：运用基本运算规则进行一般运算

例4：求A^n最难：可拆成2个矩阵的和.

eg.

证明：$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & C_n^2\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$

方法一 $A = \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 即$A=\lambda E+B$ //拆开

$$A^n = C_n^0(\lambda E)^n \cdot B^0 + C_n^1(\lambda E)^{n-1}\cdot B^1 + C_n^2(\lambda E)^{n-2}\cdot B^2$$

//拆开后，借助二项式进行展开，可能伴有消元

（其中，$B^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$）

故原式得证.

求可逆的应用

故有 $A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A$

注:这部分考法很多

①.结合与基本运算的公式的联系与区别

② 可以回顾些练习册上的原题

例:设A、B都是n阶方阵,且A+B可逆,证明:

(1) $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆,求逆.

(2) $A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A$.

证明: //本质都是 $E = A\cdot A^{-1}$

(1)

$$\begin{aligned} A^{-1}+B^{-1} &= A^{-1}+EB^{-1} \quad \text{//对B乘E} \\ &= A^{-1}+A\cdot A^{-1}B^{-1} \\ &= A^{-1}(E+AB^{-1}) \\ &= A^{-1}(BB^{-1}+AB^{-1}) \\ &= A^{-1}(A+B)\cdot B^{-1} \quad \text{先转化} \end{aligned}$$

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B \quad \text{//再求逆}$$

(2) //两~~题~~题之间都有联系

由第一问有: $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = (A+B)^{-1}\cdot A\cdot B$

$$\begin{aligned} A^{-1}+B^{-1} &= E\cdot A^{-1}+B^{-1} \quad \text{//对A乘E} \\ &= B^{-1}B\cdot A^{-1}+B^{-1} \\ &= B^{-1}\cdot(BA^{-1}+E) \\ &= B^{-1}(BA^{-1}+AA^{-1}) \\ &= B^{-1}(B+A)A^{-1} \end{aligned}$$

逆矩阵的应用 —— 解矩阵方程

$AX=B \qquad X=A^{-1}B \qquad (A \vdots B) \rightarrow (E \vdots A^{-1}B)$

$XC=B \qquad X=BC^{-1} \qquad \begin{pmatrix} C \\ \hdashline B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E \\ \hdashline BC^{-1} \end{pmatrix}$

$AXC=B \qquad X=A^{-1}BC^{-1}$

例：用直接求逆来求结果(三阶)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

关于对称矩阵的典题(证明题)
——置换应用

总结：

① 找到钱(?) ：如下例子 含有PPT 但不包含讲册外部
② 待到册打印.

⇒总体 还是用定义 + 运算规律

例1：设 A、B均为n阶对称矩阵，证明 AB为对称矩阵充分必要条件是AB=BA.

证明：

必要性：∵ $A^T=A$. $B^T=B$

又∵ $\boxed{AB=(AB)^T}$

∴ $\boxed{AB=(AB)^T=B^TA^T=BA}$

得证

充分性：∵ $A^T=A$、$B^T=B$

又∵ $\boxed{AB=BA}$

∴ $\boxed{(AB)^T=B^TA^T=BA=AB}$

得证.

例2：设n为奇数，则n阶反称矩阵A的行列式等于零。证明：// 与行列阵相结合 <再看>

证明：

∵ A是反称矩阵

∴ $A^T=-A$

∴ $\underbrace{|A|=|A^T|}_{\text{转置大小不变}}=|-A|=(-1)^n|A|=-|A|$

∴ $|A|=0$

例3：

设列矩阵 $X=(x_1,x_2,x_3\cdots x_n)^T$ 满足 $X^TX=1$，E为n阶单位矩阵，$H=E-2\cdot X\cdot X^T$，证明 H是对称矩阵，且 $HH^T=E$.

证明：

① 直接用转置定义

∵ $H^T=(E-2\cdot X\cdot X^T)^T$

$=E^T-2(X\cdot X^T)^T$

$=E^T-2\cdot X\cdot X^T$

$=E-2\cdot X\cdot X^T$

∴ H是对称矩阵

② 直接列式子.

$\underbrace{HH^T=H^2}_{\text{转置}}=\underbrace{(E-2X\cdot X^T)^2}_{\text{代入式子}}$

$=E^2-4\times X\times X^T+4(XX^T)(XX^T)$

$=E^2-4\times X\times X^T+4\cdot X\cdot\underline{(X^TX)}\cdot X^T$

① 按顺序是线代的特点、
② 依题目条件转化

$=E^2-4XX^T+4XX^T=E$

例4：证明任一n阶矩阵A都可表示成对称矩阵与反对称矩阵之和

证明：

设 $C=A+A^T$

则 $C^T=(A+A^T)^T=A^T+A=C$

$\therefore$ C为对称矩阵，所以 $C/2$ 也是对称矩阵

设 $B=A-A^T$，则 $B^T=(A-A^T)^T=A^T-A=-B$

$\therefore$ B为反对称矩阵，所以 $B/2$ 也是反对称矩阵

上面出现了对称与反对称矩阵

而 $A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}=\frac{C}{2}+\frac{B}{2}$

关于初等变换

eg. 若$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$. $P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. 那么

初等方阵

$P^{2005}A\cdot P^{2004}=$ ______.

$E=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\xleftrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=P.$

$\xleftrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=P$

左乘行变. 右乘列变

故 只进行了行一次变换

即: $\begin{bmatrix}3&4\\1&2\end{bmatrix}$

秩:

① $R(A_n)<n$ 为降秩 $\Longleftrightarrow |A|=0$ ※

② ab行列式 $=[(n-1)b+a](a-b)^{n-1}$

③ $A_{m\times n}\cdot B_{n\times s}=0 \Rightarrow R(A)+R(B)\leq n$

④ $R(AP)\leq R(A)$ or $R(P)$

⑤ $R(A_n)\leq n$

⑥ A为n阶矩阵 $R(A^*)=\begin{cases} n & R(A)=n \\ 1 & R(A)=n-1 \\ 0 & R(A)<n-1 \end{cases}$

注意:fr可逆矩阵 ×B 不影响

例1 秩与行列式结合

已知矩阵 $\begin{bmatrix} k & 2 & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 & 2 \\ 2 & 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & 2 & k \end{bmatrix}$,且 $R(A)=3$ 则k=___

降秩.

故 $|A|=0$

且有公式 $|A|=(6+k)(k-2)^3=0$

$k=-6$ 或 $k=2$.

当 $k=2$时, $R(A)=1$

当 $k=-6$时. $R(A)=3$ 故 $k=-6$

例2: 已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, B为3阶非零矩阵,且 $AB=0$,则 t=___

$A_3B_3=0 \Rightarrow R(A)+R(B)\leq 3$

$R(A)\leq 3-R(B)$

又 ∵ $B\neq 0$. 即 $R(B)>0$

$\boxed{R(A)<3}$、A降秩阵

$|A|=0$.

$|A|=t+8+18-(-6t)-8+3=0$

$7t+21=0 \quad t=-3$

例3: 设A是n阶矩阵,若对任意n维列向量b,线性方程组 $Ax=b$ 均有解,则A的秩是:______

解

向量b选为 $e_1, e_2, \cdots e_n$.

∵ $Ax=e_1$ 有解. 设 ξ_1 是 $Ax=e_1$ 之解. $A\xi_1=e_1$

$Ax=e_2$ 有解. 设 ξ_2 是 $Ax=e_2$ 之解 $A\xi_2=e_2$

⋮

$Ax=e_n$ 有解. 设 ξ_n 是 $Ax=\xi_n$ 之解. $A\xi_n=e_n$

横的是向列结?

$\Rightarrow [A\xi_1, A\xi_2, \cdots A\xi_n]=[e_1, e_2, \cdots e_n]$

$[\quad]^T=[\quad]^T$

怎么理解?是转置前后对应相等吗?

$A[\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n]=[e_1, e_2 \cdots e_n]$

$A\cdot P = E$ 合并之后也是[,]?

//矩阵拆分再合并(分块)

$n=R(E)=R(AP)\leq R(A)=n$

故 $R(A)=n$.

线性方程组的应用

② $\underset{m\times n}{R(A)}+\underset{n\times s}{R(B)}\le n$

刘老师讲义 P20.

方阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&3&2\\2&1&t\\-2&1&-1\end{bmatrix}$，B是三阶非零方阵，且 $AB=0$，

则 $t=?$

解：

$\because B\neq0$、$AB=0$. 设 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)^T$

$\therefore\begin{cases}A\beta_1=0\\A\beta_2=0\\A\beta_3=0\end{cases}$　　$\because B\neq0\Rightarrow Ax=0$ 有非零解

A不分块，直接来是的，　　$\therefore R(A)<3$ 为什么不是等于0.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&3&2\\2&1&t\\-2&1&t\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&t-3\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore t=3$

拓：$\boxed{AB=0}$

① $A[\beta_1,\beta_2,\beta_3\cdots\beta_n]=0$

$[A\beta_1,A\beta_2\cdots A\beta_n]=0$

$A\beta_1=0\quad A\beta_2=0\quad A\beta_n=0$

B所有列向量都是 $Ax=0$ 之解.

线性方程组的矩阵表示

—— 方阵矩阵的典型应用

典型

例1. 求解线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=0 \\ x_1-x_2+3x_3=1 \\ x_1-x_2-x_3=2. \end{cases}$

解，记 $(A,b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$，$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

则原方程化为. $A\cdot x=b$

$\because |A|=8\neq 0 \quad \therefore \boxed{x=A^{-1}b}$

又 $A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$x=A^{-1}\cdot b=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ -\frac{9}{8} \\ \frac{-2}{8} \end{pmatrix}$

$\therefore x_1=\frac{5}{8} \quad x_2=-\frac{9}{8} \quad x_3=-\frac{1}{4}$

例2：

设 λ, μ 为参数，问线性方程组

$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+\mu x_2+x_3=3 \\ x_1+2\mu x_2+x_3=4 \end{cases}$ 何时有唯一解？

何时无解？何时有无穷多解？并在有无穷多解时，求出通解.

解，

注意化为最简形式

$\tilde{A}=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 4 \\ 1 & \mu & 1 & 3 \\ 1 & 2\mu & 1 & 4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & \mu & 1 & 3 \\ 0 & \mu & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda\mu & 1-\lambda & 4-3\lambda \end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix} 1 & \mu & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 4-2\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda-1)\mu & 1-4\mu+2\lambda\mu \end{bmatrix}$

(1) 唯一解：$(\lambda-1)\mu\neq 0$ 即 $\lambda\neq 1$ 且 $\mu\neq 0$

$\to R(A)=R(\tilde{A})=3.$

(2) 无解：$\begin{cases} 1-4\mu+2\lambda\mu\neq 0 \\ (\lambda-1)\mu=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \mu=0 \\ \lambda=1 \text{ 且 } \mu\neq\frac{1}{2} \end{cases}$ 或

$\to R(A)\neq R(\tilde{A})$

(3). 有无穷多解.

$\begin{cases} 1-4\mu+2\lambda\mu=0 \\ (\lambda-1)\mu=0 \end{cases}$ 即：$\lambda=1$ 且 $\mu=\frac{1}{2}$

$\to R(A)<R(\tilde{A})$

故 $x=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k\in R)$

注意、不同方程组解的情况，这个是依据 $R(A)$ 与 $R(\tilde{A})$ 的关系来看的

行列式 （偏向n阶）

2.1. 行列式的概念及性质

2.1.1.

二阶 三阶行列 ⟶ 可用于求解方程（这个很重要）

注：其概念可用于求解线性方程组。

$x_1 = -\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ $x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

则有

要：$\begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + b_2 = 0 \end{cases}$ 且 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$

2.1.2. n阶行列式

一、全排列 与逆序数.

全排列：元素所有 种数为n!

逆序数：只有奇偶性 —— 奇排列 偶排列

12345 ⟶ 顺

32 51 4：逆 逆 逆 —— 逆序数为3

例题1：要会求无限次数的逆序数
方法：从第一个开始依次写出来，再求和

对换：定理1：对换一次改变排列的奇偶性

注：一阶行列式 $|a|$ 与绝对值符号 不要搞混

二、n阶行列式 <行列式按行列展开>

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

行确定，算列的逆序数

$$\sum (-1)^{\tau(i_1, i_2, \cdots, i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

$\tau(n, n-1, \cdots, 2, 1)$

行列结合：上、下三角行列式 代替形式

$$D = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

⇒列记忆. $D = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} a_{p_3 3} \cdots a_{p_n n}$

$\begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ & a_{2,n-1} & \\ a_{n1} & & \end{vmatrix}$

Q. $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ $\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

2.1.3. 行列式的性质

一、行列式的性质

转置 ①. 行列式的转置与原行列式结果一样　　$D^T=D$

交换 ② 互换行列式的两行(两列)，行列式变号。　$D=-D'$

推论：故若行列式有2行(列)完全相同（对应元素），则此行列式为0.

提取 ③ 行列式某行(列)公因子可以提到行列式外面　※ 与矩阵的不同

注：下面是矩阵　即 $|kA|=k^n|A|$ ✓

拆分 ④ 若行列式的第i行(列)的每个元素都可以表示两数之和，则该行列式可表示为两个行列式之和。

加倍变换 ⑤ 把行列式的第j行(列)元的k倍加到第i行(列)对应元上，行列式值不变。

※ 行：$c_i+k\times c_j$
　 列：$r_i+k\times c_j$

二、行列式性质应用举例

基本方法：三角化（一般四阶以上）

主要手段：① 行列式性质 r_i+kr_j

② 分块操作　注意方向　$\begin{vmatrix} D_1 & 0 \\ & D_2 \\ & & D_3 \end{vmatrix}$　$D=D_1D_2D_3$

注：若 $\begin{vmatrix} & D_1 \\ D_2 & \end{vmatrix}$ 要交换成 $\begin{vmatrix} D_1 & \\ & D_2 \end{vmatrix}$ 再进行计算

行列式：① 直接用定义　$\begin{vmatrix} 0 & A_m \\ B_n & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{m\times n}|A_m||B_n|$

② 用性质：一般先用性质进行化简　有些是初等变换

2.1.3. 行列式的性质

一、行列式的性质

转置 ①. 行列式的转置与原行列式结果一样 $D^T=D$

交换 ② 互换行列式的两行(两列)，行列式变号。$D=-D'$

推论：故若行列式有2行(列)完全相同(或成比例)，则此行列式为0.

提取 ③. 行列式某行(列)公因子可以提到行列式符号外面 ※ 与矩阵的不同点

注：反过来也可以 即：$|kA|=k^n|A|$

拆分 ④. 若行列式的第i行(列)的每个元素都可以表示两数之和，

则该行列式可表示为两个行列式之和.

初等变换 ⑤ 把行列式的第j行(列)元的k倍加到第i行(列)对应元上，行列式值不变。

※ 行：$c_i+k\times c_j$

列：$r_i+k\times c_j$

二、行列式性质应用举例

基本方法：三角化 (一般四阶以上)

主要手段：① 行列式性质. r_i+kr_j

② 分块操作 注意方向

$$\begin{vmatrix} D_1 & 0 \\ & D_2 \ \ D_3 \end{vmatrix}$$

$D=D_1 \cdot D_2 \cdot D_3$

注：若 $\begin{vmatrix} & D_1 \\ D_2 & \end{vmatrix}$ 先交换成 $\begin{vmatrix} D_1 & \\ & D_2 \end{vmatrix}$ 再进行计算

$\begin{vmatrix} O & A_m \\ B_n & O \end{vmatrix} = (-1)^{m\times n}|A_m||B_n|$

总结：

求行列式：① 直接用定义

② 用性质：一般先用性质进行化简 | 再考虑初等变换

2.2. 行列式的计算 —— 行列式按行(列)展开 → 高阶化低阶的重要工具

一、余子式与代数余子式

基本概念：✓

↓

例：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

定理1.2

定理3：n阶行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和

定理4：n阶行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和 $\boxed{\text{等于零}}$。

eg 证明范德蒙德 (vandermonde) 行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

eg. $|A^*| = |A|^{n-1}$ 　解 已知 $A \cdot A^* = |A| \cdot E$ 则 $|A||A^*| = \big||A|E\big|$

$|A^*| = |A|^{n-1}$

2.3. 行列式的应用

① 逆矩阵的求解
② 克拉默法则 → 求解线性方程组
③ 本身的性质与运算

1. 伴随矩阵

若 $|A| \neq 0$ 才有逆矩阵　$\boxed{BE=EB}=B$

定理：$A \cdot A^* = A^* A = |A| \cdot E \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$　要能主动使用

⇒ 推论1：若 $AB=E$ (或 $BA=E$)，则 $B=A^{-1}$.

⇒ 推论2：若A可逆，且 $AB=AC$，则 $B=C$.

⇒ 推论3：若A可逆，$(|A| \neq 0)$，则 $|A^*| = |A|^{n-1}$

2. 克拉默(Cramer)法则 (用行列式角度来看线性方程组求解)

1. 2个条件

① 方程个数 = 未知量的个数.

② 系数行列式不等于0，(注：D=0 ⇐ 齐次线性方程组有非零解)
针对非齐次 则有唯一解

(特殊化，对于任意齐次线性方程组，若 D=0 有非零解。D≠0，则对齐次线性方程组无意义。
本身一定有零解，)

注：

(1). 克拉默法则： 线性方程组的解 $\xleftarrow{\text{关系}}$ 已知系数与常数项

(2) 不足：一般来说，计算量较大

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E \\ \hline B \cdot A^{-1} \end{pmatrix}$$

例：设 $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$.

若 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同的零点.

证明：$f(x)$ 是零多项式

证明：

① 由于 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同的零点，说明方程

$f(x)=0$ 有 $n+1$ 个根。即转化成 $n+1$ 阶齐

次线性方程组.

$$\begin{cases} c_0+c_1a_1+c_2a_1^2+\cdots+c_na_1^n=0 \\ \vdots \\ c_0+c_1a_{n+1}+c_2a_{n+1}^2+\cdots+c_na_{n+1}^n=0 \end{cases}$$

② 令 $D_{n+1}=0$

即 $\prod\limits_{1\le i<j\le n+1}(a_j-a_i)\neq 0$

所：依克拉默法则得原方程只有一个解

③. 再用克拉默法则求解得

$c_0=c_1=\cdots=c_n=0 \Rightarrow f(x)$ 为零多项式

（结构定义理解）行列式运算法则

注：行列式运算 请有2个方面 一个方面是行列式的运算，另一个方面是应用行列式（克拉默法则）。现在对行列式运算进行一个总结。当然也包含行列式与矩阵综合，再得出非一般行列式的题目。

思路（用2个方面进行表述）
- 积累知识点：包含知识点与特殊结论、公式
- 解题思路

展开：

积累知识点：　　　及相关基本运算思路

① 基本的概念、性质。（可以为有行列式按行列定理展开公式）

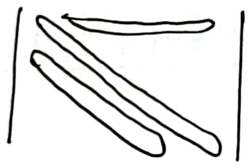
② 常用行列式 上下三角行列式、特殊三角分块行列式、范德蒙行列式（例册11. 注意变形）

③ 余子式与代数余子式 ⟹ 来表达相应的行列式

解题思路：

① 三角化法：（备注：练习册上三角化的题目有：4.5、7.9、10、12）

1°

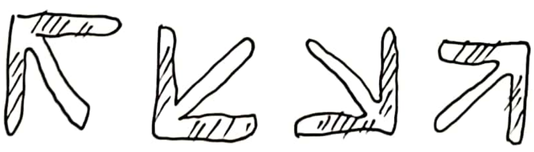


则 相邻主对角"相减" 变 三角化

2° ab 行列式：每行（列）和相等：（7.9.10）

则 加一起 再除和 得到 相同的项（一般为1），再相减 得到三角化

3° 形如



行列式，

则 将任一阴影部分乘 相应倍数 消去另一阴影部分，再行列 三角化行列式。

②升阶法（或加边法）

适用：同列同次行列式．．典例．第6个

例：step1：利用行列式运算规律，保留前后一致性．

step2：$\boxed{\text{初等变换}}$ 列拆成、得到．若干个行列式．

行 再行变换、消去"-1"．最后得到结果．

③递推法：典例（19．20）

技巧：展开法：1°．代余子式．对应项的结果．

2°．加减项．

④．数学归纳法：

1°．最小单位成立．．

2°．假设 $n-1$ 成立．（可能也会有 $n-2$ 成立）推得出 n 成立．

（这里包含递推的思想）

综合题的思维小结

① 矩阵可作为 $g(x)$ 的元素代入，从而进行相关数学运算

② 矩阵·线代的核心思路：

用矩阵表达线代关系。(比如：线性方程组)

综合：行列式运算.

矩阵行列式运算（好题）

例：

$$\left| (2A)^* - (-A)^{-1} \right|$$

$$= \left| \frac{|2A|}{2A} + A^{-1} \right|$$

$$= \left| \frac{2^3|A|}{2} \cdot A^{-1} + A^{-1} \right|$$

$$= \left| 5 \cdot A^{-1} \right|$$

$$= 5^3 \times \frac{1}{|A|} = 125$$

Scanned with CamScanner

第三章 向量空间架构

第一节 n维向量（概念性的表述）基础出

- 一、n维向量的表示
- 二、线性方程组的向量表示
- 三、向量组（与矩阵） 相互等价的关系 ⇒ 简单的一次关系

基本表示方法

第二节 向量组的线性相关性

- 线性组合
- 线性表出
  - 能表出
  - 不能表出
- 类比 非齐次线性方程组
- 线性相关性
  - 相关
  - 无关
- 类比
- 判定定理 ⟶ 把老师讲义搞好到 | OK了.

第三节 向量组的秩

- 等价向量组
- 秩 之间的一些关系

第四节 向量空间

- 概念、基、维数、坐标、子空间
- 基变换与坐标变换

第五节 欧氏空间 R^n

- 描述
  - 内积
  - 长度
  - 夹角
- 正交向量组
- 规范正交基
- 正交矩阵、正交变换

第三章 向量空间 以需要扎实地复习，为多对比地复习 仔细对待例题

第一节 n维向量

一、n维向量的概念 → 一行的矩阵换了个说法

定义：n个有次序的数 $a_1, a_2 \cdots a_n$ 所组成的数组，记为 $\alpha=(a_1, a_2 \cdots a_n)$，

或 $\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为n维向量，数 a_i 称为第i个分量.($i=1,2,\cdots n$)

(在数学里面，一定要理解每个概念中的含义)

分量为实数的向量称为实向量.

分量为复数　　　　　复向量.

$\boxed{\text{n维向量}(0,0,0\cdots 0)\text{称为零向量，记作}\mathbf{0}.}$

全体n维向量构成的集合，记作 R^n.

二、n维向量的表示方法.

向量写成一行，称为行向量，记作 $\vec{a}, \vec{b}, \alpha, \beta$
- - - - - - 列 - - - - - -

) 一样的，表示的不同，定义会有区别，好看一个行，一个列.

注①行向量与列向量总被看作不同的向量.

②.行/列向量.按矩阵的运算法则进行运算.

三、线性方程组的向量表示

$$\boxed{\left\{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}} x_1 & & \boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ \\ \\ a_{mn} \end{matrix}} x_n & = b \\ & & & = b \\ & & & \vdots \\ & & & = b \end{matrix}\right.}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b}$$

也可反写：$b = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n$ 往往解读为线性表示.

四、向量组及其与矩阵的关系

若干个同维数的列向量(或同维数的行向量)，所组成的集合叫做向量组。

eg. $(1,2,3)$，$(-1,2,3)$ ⟶ 行向量组

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ … ⟶ 列向量组

⇒ 矩阵与向量组的关系(1)

$\boxed{\text{矩阵 } A=(a_{ij})_{m\times n} \text{ 有n个m为}}$

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & & & & a_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

向量组 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 称为矩阵A的列向量组。同理，也有行向量组

⇒ 矩阵与向量组的关系(2)

由有限个(同维数的)向量所组成的向量组可以构成一个矩阵，

n个m维列向量所构成的向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$，构成一个 $m\times n$ 矩阵，

$$A=(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$$

同理，也可以组成一个矩阵
用行向量

第二节. 向量组的线性相关性

一、线性组合，线性表示 详情5第二节知识点

定义：设 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m, \beta$ 是 n 维向量。

若存在一组数 $k_1, k_2, \cdots k_m$ 使.

$$\boxed{\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m}$$

称为 β 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 的线性组合。

也称 β 可由 $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性表示，即线性表出

注：1. $0 = 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 \cdots + 0\cdot\alpha_n$. 零向量可由向量组表示、

2、 n 维向量组

$\varepsilon_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T$

$\varepsilon_2 = (0, 1, \cdots, 0)^T$

$\cdots$

$\varepsilon_n = (0, 0, \cdots, 1)^T$. 称为 n 维基本单位向量 R^n 中任意向量

$\alpha = (a_1, a_2, \cdots a_n)^T$ 可由线性表示。

3. 补充：线性表示中，$R(\beta) \leq R(\alpha)$

定理1. 向量 b 能由向量组 $A: a_1, a_2 \cdots a_m$ 线性表示的充分必要条件是

(1) 线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = b$. 有解.

b 可由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow Ax = b$ 有解

(2) $R(A) = R(B)$.

其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m)$. $B = (\alpha_1, \alpha_2 \cdots a_m, b)$

n 维向量能由 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 唯一线性表示的充要条件是 $R(A) = R(B) = m$.

二、线性相关性的概念

定义：给定向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$.

如果存在一组不全为零的数 $k_1, k_2 \cdots k_m$.

使得：$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$.

则称向量组A是线性相关的，否则称它线性无关。（只有2种情况）

eg. $b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $b_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 最典型线性无关

注①向量组只包含一个向量α时，若 $\alpha = 0$ 则说α线性相关；$\alpha \neq 0$，则说α线性无关。

②包含零向量的任何向量组是线性相关的。

例2：设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，证明向量组

$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$. $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$ $\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$ 也线性无关.

证：设有数 x_1, x_2, x_3，使 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$

则. $x_1(\alpha_1 + \alpha_2) + x_2(\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_1)x_3 = 0$

即：$(x_1 + x_3)\alpha_1 + (x_1 + x_2)\alpha_2 + (x_2 + x_3)\alpha_3 = 0$

因向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

通过系数为0代入解方程组，判断线性是否只有0

故只有系数全为零方程成立.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$ 由于 $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{vmatrix} = 2 \neq 0$

故方程只有零解 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$，即向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关

例3 证明：如果向量组的部分向量线性相关，那么这个向量组就线性相关。

证明：设向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_m$

不妨设其中一部分 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关。

即存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$.

从而：$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+0\alpha_{s+1}+\cdots+0\cdot\alpha_m=0$. 因 $k_1, k_2, \cdots, k_s, 0, \cdots, 0$ 这 m 个数也不全为零。

故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_m$ 线性相关

> 向量组部分线性相关，则整体也线性相关。
> 整体线性无关，则任一部分也线性无关

三、线性相关性的判定

定理2. 设 $m\times n$ 矩阵，则.

(1) 矩阵 A 的列向量组线性相关的充要条件是 $R(A)<n$

(无关) $R(A)=n$

(2) 行 相关 $R(A)<m$

(无关) $R(A)=m$

推论1：若 A 为方阵，则 A 的行(列)向量组线性相关的充要条件是 A 的行列式等于零

(奇异矩阵)

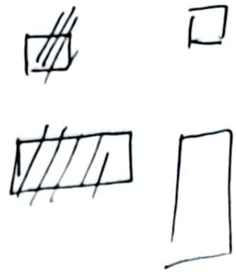
是否可推广?

推论2：当 $m>n$ 时，m 个 n 维向量组成的向量组.

$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 一定线性相关.

Scanned with CamScanner

推论3：设有2个向量组



$T_1: \alpha_j=(a_{1j}, a_{2j}, a_{3j} \cdots a_{rj})^T \quad (j=1,2,\cdots m)$

$T_2: \beta_j=(a_{1j}, a_{2j} \cdots a_{rj}, a_{r+1,j}, \cdots, a_{nj}) \quad (j=1,2\cdots m)$

若向量组T_1线性无关，则T_2也线性无关。

反之……相关，……相关。

证明：设矩阵$A=(\alpha_1 \cdots \alpha_m)$. $B=(\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_m)$

① ∵A是B的前r行组成.

∴$R(A) \le R(B)$

② ∵A为线性无关　　∴$R(A)=m$

③ ∵B只有m列　　∴$R(B) \le m$

综上 $R(B)=m$.

∴B线性无关.

注：① T_2添加元素的位置不影响后结论的成立.

② 注意. 这个是行向量 ∴与例3结论作区分.

四、线性无关、线性相关与线性表示的关系

定理3. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ $(m\geq 2)$ 线性相关的充要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中至少有一个向量可由其 $m-1$ 个向量线性表示

证明：①充分性：设 α_1 可由 $\alpha_2 \cdots \alpha_m$ 表示，则 $\alpha_1 = k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 + \cdots + k_{m-1}\alpha_m$.

则 $(-1)\alpha_1 + k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 + \cdots + k_{m-1}\alpha_m = 0$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关

②必要性：设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$.

不妨设 $k_1 \neq 0$.

则 $\alpha_1 = (-\frac{k_2}{k_1})\alpha_2 + (-\frac{k_3}{k_1})\alpha_3 + \cdots + (-\frac{k_m}{k_1})\alpha_m$.

$\therefore \alpha_1$ 可由 $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_m$ 表示.

定理4 设向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，而向量组 $B: \alpha_1, \cdots, \alpha_m, b$ 线性相关，则向量 b 必能由向量组 A 线性表示，且表示式唯一.

证明 ①存在

$\because$ 组 B 线性相关 $\rightarrow$ $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m + kb = 0$.

$\because \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关. $\therefore k \neq 0$.

$\therefore b = (-\frac{k_1}{k})\alpha_1 + (-\frac{k_2}{k})\alpha_2 + \cdots + (-\frac{k_m}{k})\alpha_m$

②唯一性

设 $b = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m$.

$b = \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \cdots + \mu_m\alpha_m$.

$(\mu_1 - \lambda_1)\alpha_1 + (\mu_2 - \lambda_2)\alpha_2 + \cdots + (\mu_m - \lambda_m)\alpha_m = 0$.

$\because \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 线性无关 $\therefore \mu_1 = \lambda_1, \cdots, \mu_m = \lambda_m$

第3节 向量组的秩

1. 等价向量组. 向量组之间的线性表示

定义: 设有两个向量组. $A: \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 与 $B: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

若向量组B中每个向量向可由向量组A线性表示, 则称向量B可由向量组A线性表示;

若向量组A与向量B可以相互线性表示, 则称向量组A与向量组B等价.

性质:

(1) 反身性

(2). 对称性

(3) 传递性

⇒ 推: 向量组的线性表示具有传递性

定理 若 $A \xrightarrow{r} B$. 则A的行向量组与B的行向量组等价.

若 $A \xrightarrow{c} B$. 则A的列向量组与B的列向量组等价

2. 线性表示中的系数矩阵.

设有2个向量组 $T_1: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$; $T_2: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$. T_1 能由 T_2 线性表示, 即

对每个向量 α_j $(j=1,2,\cdots,m)$. 存在数 $k_{1j}, k_{2j}, \cdots, k_{nj}$ 使.

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) \cdot K$$

3. 下面给出2个定理.

定理5 若向量组 $T_1: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 可由向量组 $T_2: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 线性表示, 且 $m>n$,

则向量组 T_1 线性相关.

what means?

下5期再看

2. 线性表示中的系数矩阵

设有2个向量组 $T_1: \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$；$T_2: \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n$. T_1 能由 T_2 线性表示，

即对每个向量 α_j $(j=1,2,\cdots m)$ 存在 $k_{1j}, k_{2j}, \cdots k_{nj}$. 使

$$(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m) = (\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n) K.$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nm} \end{pmatrix}$$

其中, K 为系数矩阵

目前基本了解，这个系数矩阵的概念，暂时可以跳过了.

3. 下面给出2个定理

定理5：若向量组 $T_1: \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 可由向量组 $T_2: \beta_1, \beta_2, \beta_3 \cdots \beta_n$ 线性表示，且 $m>n$

则向量组 T_1 线性相关.

推理1：若向量组 $T_1: \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 可由向量组 $T_2: \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$ 线性表示，且向量组 T_1 线性无关，则 $m \le n$.

推理2：若向量组 $T_1: \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ 和向量组 $T_2: \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n$ 线性无关且等价，则其所含的向量个数相等，即 $m=n$.

定理6：矩阵A经初等~~矩阵~~行变换化为B，则A与B的任何对应的列向量构成列向量组有相同的线性组合关系

线性（初等变换），变换前后线性关系不变。

4.向量组的极大线性无关组及秩　在最多线性无关的向量组中找

定义5：设有向量组A：α_i 如果在向量组A中存在r个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 满足

(1) 向量组 A_0：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关

(2) 向量组A中每一个向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，

即：任意r+1(如果有)个向量线性相关；

则称向量组 A_0 是向量组A的一个极大线性无关组.(简称极大无关组)

定义6：向量组 A_0 中所含向量的个数r称为向量组的秩.

向量组A：$\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩记作 $R(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，$R(A)$.

$\boxed{\text{只含0向量的向量组的秩规定为0.}}$

找一组的极大线性无关组，需先将其等变换成对应形式，再求解。

(1) 向量组的极大无关组不唯一，但所含的向量个数相同.

(2) 向量组的极大无关组与向量组等价　→　典例：

设 $(a_1,a_2)=\begin{pmatrix}2&3\\0&-2\\-1&1\\3&-1\end{pmatrix}$，$(b_1,b_2)=\begin{pmatrix}-3&4\\6&-4\\-5&3\\9&-5\end{pmatrix}$

证 (a_1,a_2) 与 (b_1,b_2) 等价

证：只需 $R(b_1,b_2)=R(a_1,a_2)=2$

又 $\because (a_1\,a_2\,b_1\,b_2)\to\begin{pmatrix}-1&1&-5&3\\0&1&-3&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore R(a_1,a_2,b_1,b_2)=2$. //用秩

$\therefore a_1a_2$ 和 b_1b_2 都是组 $a_1\,a_2\,b_1\,b_2$ 最大无关组 //来找最大无关组且最大无关组等价

(3) 向量组的极大无关组是该向量组中含向量最多的无关组

(4) 向量组的任何2个极大无关组等价

(5). { 初等行变换保持矩阵列向量组间的线性关系
初等列变换保持矩阵行向量组间的线性关系

从而有个重要结论(最大无关组的求法)

若 D_r 是矩阵A的一个最高阶非零子式，则

D_r 所在的r列即是列向量组的一个最大无关组。

D_r 所在的r行即是行向量组的一个最大无关组

补充定义：除之前提到的一般矩阵的关系、(or一般向量的关系)

在m×n矩阵A中任取k行k列($k\le m,k\le n$)，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在A中所处的位置次序而得的k阶行列式，称为~~行列式~~矩阵的A的k阶子式。

$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&-1&-2&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{1 2 4 列}]{\text{取1 2 3 行}}\begin{vmatrix}1&2&4\\5&6&8\\9&-1&-3\end{vmatrix}$.

且．m×n矩阵中A不为0的最高阶非零子式的阶数，称为矩阵A的秩，记为R(A).

5. 矩阵的秩与向量组的秩的关系。//矩阵与向量组之间相互转换的关系

定理7. 矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩。

证 设 $A=(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m)$，$R(A)=r$。　　⓪ 前提矩阵秩为r

则A中至少有一个r阶子式 $D_r \neq 0$，则 D_r 所在r列线性无关。　　① 得列线性无关

又由A中所有r+1（若有）阶子式均为零、[从行列式角度来思考]

知A中任意r+1（若有）个列向量都线性相关。　　② 得其它组可能有线性相关

因此 D_r 所在的r列是A的列向量组的一个最大无关组。

所以列向量组的秩等于 $r=R(A)$。　　③ 得线性无关最大组 得向量组的秩。

类似可证A的行向量组的秩也为 $R(A)$

定理8：若向量组B能由向量组A线性表示，则 $R(B)\leq R(A)$　　//定理5的延伸。

$B=A\cdot K$

推论1. 等价的向量组的秩相等

推论2：设 $C_{m\times n}=A_{m\times s}\cdot B_{s\times n}$，则

$$R(C)\leq R(A).\quad R(C)\leq R(B)$$

即：$\boxed{R(AB)\leq \min\{R(A), R(B)\}}$

推论3：设向量组B是向量组A的部分组，若向量组B线性无关，且向量组A能由向量组B线性表示，则向量组B是向量组A的一个最大无关组。

$R(A)\geq R(B)=r$　　$R(B)=r$.　　$R(A)\leq R(B)=r$

第四节 n维空间向量

一、向量空间的概念

定义1：设V为n维向量的集合，如果集合V非空，且集合V对加法及数乘两种运算封闭，那么就称集合V为$\boxed{\text{向量空间}}$

即对一种运算的封闭
本质是检验向量方向

定义2：若有向量集合 $V \neq \emptyset$，$\forall \alpha, \beta \in V, \lambda \in R$
有 $\alpha+\beta \in V$，$\lambda\alpha \in V$.
则称集合V为向量空间

注：① 类似的，n维向量空间的全体 R^n 也是一个向量空间.

② $V=\{0\}$ 也是一个向量空间 称为零空间

5.

例4. 设 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m \in R^n$. 集合 $V=\{x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m \mid \lambda_i \in R\}$. 是一个向量空间

解: 设 $x_1 = \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m \in V$

$x_2 = k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m \in V$.

则.

$(x_1+x_2) = (\lambda_1+k_1)\alpha_1+(\lambda_2+k_2)\alpha_2+\cdots+(\lambda_m+k_m)\alpha_m \in V$.

$kx_1 = k\lambda_1\alpha_1+k\lambda_2\alpha_2+\cdots+k\lambda_m\alpha_m \in V$.

这个向量空间记做 $L[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m]$, 称为由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 生成的向量空间

多个向量生成的空间

二. 子空间

定义. 设 V_1, V_2 都是向量空间, 若 $V_1 \subset V_2$. 则称 V_1 是 V_2 的子空间.

本质是说明

是否包含, 是否可线性表示

一组量和另一组量

一般是一组向量构成的空间

一般是向量组构成的空间

三、向量空间的基与维数

矩阵 → 向量组 → 向量空间

秩 秩 维数

定义：设V是一个向量空间，若m个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m \in V$满足

(1) $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$线性无关

(2) V中任一向量都可由$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$线性表示

则称向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$是V的一组基，m称为V的维数，记作$\dim V$，即$\dim V = m$.

(1) 只含有零向量的向量空间称为0维向量空间，因为没有基，维数规定为0。

(2) 区分：

	矩阵	向量组	向量空间
不同概念下	秩	秩	维数
不同说法	最高阶非零子式	极大线性无关组	基

(3) 若把向量空间V看作向量组，那么V的基就是向量组的最大无关组，V的维数就是向量组的秩。

(4) 基不唯一，m维向量空间V中任意m个线性无关的向量都是向量空间V的基

(5) 若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是向量空间V的一个基，则V可表示为

$$V = \{x \mid x = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_r\alpha_r, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r \in R\} = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$$

(6) 任何n维向量构成的向量空间的维数都不超过n.　$V = \{x \mid x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i, \lambda_i \in R\}$

$[a, 0, 0, 0]$

$a \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$

$$V = \left\{ x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a+b+c+d=0 \right\}$$

四. 向量在基下的坐标

定义10　设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是m维向量空间V的一组基. 对 $\beta \in V$, 有

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m$$

那么组合系数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 构成的向量 $(x_1, x_2, \cdots x_m)^T$ 称为 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 下的坐标.

注: 向量空间V的基确定之后, V中向量在该基下的坐标是唯一的。不同基下的坐标一般是不同的。

例7. 设 $a_1 = (2, 2, -1)$　$a_2 = (2, -1, 2)$　$a_3 = (-1, 2, 2)$　$b_1 = (1, 0, -4)$, $b_2 = (4, 3, 2)$

验证 $\underline{a_1, a_2, a_3}$ 是 $\underline{R^3 \text{的一个基}}$。求 R^3 中向量 b_1, b_2 在这个基下的坐标.

找37 线性无关即可

解:

$$(A \vdots B) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & \vdots & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & \vdots & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & \vdots & -4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

因初等行变换不改变矩阵向量组的线性关系

故 a_1, a_2, a_3 线性无关, 所以是 R^3 的一组基.

$b_1 = \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{3}a_2 - a_3$　　b_1 坐标 $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -1)^T$

$b_2 = \frac{4}{3}a_1 + a_2 + \frac{2}{3}a_3$　　b_2 坐标 $(\frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3})^T$

五. 向量空间V中不同基之间的关系. (坐标转换关系) // 比较像之前的矛阵矩阵

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 是m维向量空间的两组基,

则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 可由基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示. 设表出式为:

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{m1}\alpha_m \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{m2}\alpha_m \\ \cdots\cdots \\ \beta_m = a_{1m}\alpha_1 + a_{2m}\alpha_2 + \cdots + a_{mm}\alpha_m \end{cases} \quad (1) \Rightarrow (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m) = \underline{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)}A \quad (2)$$

则称A为由基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 的过渡矩阵.

称(1), (2)式为由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 到 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 的基变换公式

六.同一向量在不同基下的坐标之间的关系

设V中向量在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_m$ 下的坐标分别为 $(x_1,x_2,\cdots x_m)^T$ 与 $(y_1,y_2,\cdots y_m)^T$,则有.

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{bmatrix} \qquad \beta=(\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_m)\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix}=(\beta \quad)$$

$$\Rightarrow \alpha=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_m)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)A\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix}$$

则: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}$ 称为向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$ 与基 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_m$ 下的 $\boxed{\text{坐标变换公式}}$ 要记住!

$$(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_m)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)A$$ // 不同基的关系

第五节 欧氏空间 R^n

一、内积的定义与性质

定义1： 设 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$ 和 $\beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ 是任意2个n维向量，称

$$(\alpha, \beta)= a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

为向量 α 和 β 的内积

定义了内积的向量空间 R^n 称为欧几里得(Euclid)空间，简称欧氏空间。

$$[x, y]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

说明：① n维向量的内积是数量积的推广。

② 如果x,y都是列向量，内积可用矩阵符号表示。 $[x, y]=x^Ty$

x.y 行. $[x, y]=x\cdot y^T$

二、内积

(1) 对称性： $(\alpha, \beta)=(\beta, \alpha)$.

(2) 线性性 $(k\alpha+l\beta, \gamma)=k(\alpha, \gamma)+l(\beta, \gamma)$

$\Rightarrow (k\alpha, \gamma)=k(\alpha, \gamma)$

$\Rightarrow (\alpha+\beta, \gamma)=(\alpha, \gamma)+(\beta, \gamma)$

(3) 非负性. $(\alpha, \alpha)\geq 0$. 当且仅当 $\alpha=0$ 时，$(\alpha, \alpha)=0$

(4). 柯西-施瓦茨(Cauchy - Schwarz)不等式：

$$(\alpha, \beta)^2\leq(\alpha, \alpha)(\beta, \beta).$$

这里，$\alpha, \beta, \gamma\in R^n$. k, l是任意实数

证明方法一次

二、向量的长度及性质

定义12 设有n维向量$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，令

$$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

为向量α的长度（或范数）

向量长度具有下列性质：

1. 非负性：当$\alpha\neq 0$时，$\|\alpha\|>0$；当$\alpha=0$时，$\|\alpha\|=0$
2. 齐次性：$\|k\alpha\|=|k|\,\|\alpha\|$
3. 三角不等式：$\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$

当$\|\alpha\|=1$时，即长度为1的向量，称α为单位向量。

$$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=1\Rightarrow(\alpha,\alpha)=1.$$

若$\alpha\neq 0$，$\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$是与$\alpha$同方向的单位向量，称为$\alpha$的单位化向量

三、n维向量的夹角

定义13：设α与β是n维非零向量，称

$$\theta=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\,\|\beta\|}$$

为n维向量α与β的夹角。

$$\frac{3+2+1\cdot 2+3}{\sqrt{1+4+4+9}\sqrt{9+1+25+1}}=\frac{18}{3\sqrt{2}\cdot 6}$$

四、正交向量组的概念及求法

1. 正交的概念

当$(\alpha,\beta)=0$时，称向量α与β正交。

显然，零向量与任何向量均正交；其余向量均？

2. 正交向量组的概念

若(1) 向量$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$均为非零向量

(2) 向量$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$两两正交

则称向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$是一个正交向量组

Scanned with CamScanner

3. 正交向量组的性质.

定理9: 若R^n中n维向量组$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r$是一个正交向量组, 则$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r$线性无关

证: 设有$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$使.

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0$$

用α_i对上式两端做内积, 得

$$(\alpha_i, \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r)$$

$$=\lambda_1(\alpha_i,\alpha_1)+\lambda_2(\alpha_i,\alpha_2)+\cdots+\lambda_r(\alpha_i,\alpha_r)=\lambda_i(\alpha_i,\alpha_i)=0$$

$(\alpha_i,\alpha_i)\neq 0$, 从而有$\lambda_i=0$, 故. $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r$线性无关.

4. 向量空间的正交基

定义14: 若(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是向量空间V的一个基

(2). $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r$是一个正交向量组

则称$\alpha_1\alpha_2,\cdots\alpha_r$为~~是单位向量, 则称$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r$~~向量空间V的正交基.

特别的: 若$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r$为单位向量, 则称$\alpha_1, \alpha_2\cdots\alpha_r$是向量空间V的一个标准正交基. 或规范正交基

例: 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$R^n$的一组标准正交基, 求向量$\beta$在于基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标:

解: 设$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$.

$\Rightarrow(\beta,\alpha_j)=k_j$.

故β在标准正交基$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$下的坐标的第j个分量为$k_j=(\beta,\alpha_j)$. $j=1,2,\cdots,n$.

5. 求规范正交基的方法（Schmidt 正交化方法）考试概率较大。

施密特 Schmidt 正交化过程

(1) 正交化

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \cdot \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \cdot \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \cdot \beta_2$$

……

$$\beta_r = \alpha_r - \frac{(\alpha_r, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \cdot \beta_1 - \cdots - \frac{(\alpha_r, \beta_{r-1})}{(\beta_{r-1}, \beta_{r-1})} \cdot b_{r-1}$$

(2) 单位化

$$e_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} \quad \cdots\cdots \quad e_r = \frac{\beta_r}{\|\beta_r\|}$$

五、正交矩阵与正交变换

定义15：若n阶方阵A满足 $A^T A = E$（即 $A^{-1} = A^T$），则称A为正交矩阵。

正交矩阵：

(1) $|A| = \pm 1$.

(2) 若A为正交矩阵，则 A^T，A^{-1}，A^* 也是正交矩阵

$$A^T (A^T)^T = (A^T A)^T = E$$

$$(A^{-1})^T \cdot A^{-1} = (A^T)^{-1} \cdot A^{-1} = (AA^T)^{-1} = E.$$

$$(A^*)^T \cdot A^* = (A^{-1} \cdot |A|)^T \cdot A^{-1} |A| = |A|^2 \cdot (A^{-1})^T \cdot A^{-1} = E$$

(3) 若A、B为正交矩阵，则AB也是正交矩阵

$A^T \cdot A = E$. $B^T B^T = E$

$$(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T E \cdot B = E$$

(4) 方阵A为正交矩阵的充要条件是A的列（行）向量是 R^n 的一组标准正交基。

定理10. 设列向量 $\alpha, \beta \in R^n$. A 为 n 阶~~矩阵~~正交矩阵，则 ① $A\alpha, A\beta \in R^n$

且 ② $(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$. ③ $\|\alpha\| = \|A\alpha\|$, ④ $\langle A\alpha, A\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$

Scanned with CamScanner

二、齐次方程组的结构

1. 基础解系.

定义16：设向量$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$均为齐次线性方程组

第四章 相似矩阵

第一部分 相似矩阵
- 4.1 方阵的特征值与特征向量
- 4.2 相似矩阵
- 4.3 实对称矩阵的相似矩阵
- 4.4 二次型简介

第一节：

一、特征值与特征向量的概念。

定义：

说明：

1.

2. 降秩矩阵 A .（$|A|=0$）→ $Ax=0$. ⇒ $Ax=0 \cdot x$. ⇒ 降秩矩阵必有特征值 $\lambda=0$.

3、n阶方阵A的特征值，就是使齐次线性方程组. $(\lambda E-A)x=0$. 有非零解的 λ 值。

即为使 $|\lambda E-A|=0$ 的值。

二、特征值与特征向量的性质

定理1：设n阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则有

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

第2节 相似矩阵

一、相似矩阵与相似变换的概念

定义：设 A、B 都是 n 阶矩阵，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}A\cdot P = B$$

二、相似矩阵与相似变换的性质

(1) 等价关系

(1) 反身性 ：A 与 A 本身

(2) 对称性 ：若 $A\sim B$，则 $B\sim A$

(3) 传递性 若 $A\sim B$、$B\sim C$，则 $A\sim C$.

定理6：若 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则 A 与 B 的特征多项式相同，A 与 B 的特征值亦相同

注：该定理可以是必要条件

$|P^{-1}||P|=1$ P.

(2) 其他性质

若 $A\sim B$，n 阶矩阵，则

(1) $R(A)=R(B)$

(2) $|A|=|B|$

(3) A 与 B 迹相同 ？

(4) 若 A 可逆，则 B 可逆，且 $A^{-1}\sim B^{-1}$

(5) $kA\sim kB$，$A^m\sim B^m$ （k 为任一常数，m 为任一整数）

(6) 若 $f(x)$ 为任一多项式，则 $f(A)$ 与 $f(B)$ 相似

⇒ 关于对角阵：其特征值是对角线所有元素。

推论：若n阶方阵 A与对角矩阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$ 相似。

则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 即是A的所有特征值。

三、利用相似变换 将方阵对角化。

PCA
试分析

定义3：如果n阶方阵A相似于对角矩阵Λ，则称A可以对角化。

定理7：n阶矩阵A与对角矩阵（即A能对角化）的充要条件是A有n个线性无关的特征向量，

把n个特征向量写下

推论1：若n阶矩阵A有n个特征值，互不相等，则A必可对角化 ？

说明：A特征方程 有重根，则A不一定有n个线性无关特征向量，从而A不一定对角化
若能找到…………，则西…可对角化

推论2：n阶矩阵A可对角化的充要条件是A的每个r重特征值恰好有r个线性无关的特征向量

Scanned with CamScanner

第三节 实对称矩阵的对角化

一、实对称矩阵的性质.

$(A = A^T)$

复习: 反对称矩阵: 设主对角线 对称且相互为相反数, 主对角线全为0.
$(A = -A^T)$

定理8: 实对称矩阵的特征值均为实数.

定理9: 设A为实对称矩阵, 则A的属于不同特征值的特征向量必正交。

定理10. 设A为n阶实对称矩阵, 则必有正交矩阵Q, 使 $Q^TAQ = Q^{-1}AQ = \Lambda$,

其中Λ是A的n个特征值为对角元素的对角矩阵, 即

同一件事儿

$$Q^TAQ = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

推论1: 设A为n阶实对称矩阵, λ是A的r重特征值, 则A必有r个对应于特征值λ的线性无关的特征向量.

推论2: n阶实对称矩阵A, 存在n个正交单位特征向量使

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

二、利用正交矩阵将实对称矩阵对角化的方法.

其步骤为:

① 求A的特征值.

② 由$(A-\lambda E)x=0$. 求出A的特征向量.(基础解系)

③ 将特征向量正交化(组内进行) [由定理9保证]

④ 将特征向量单位化(全部进行)

⑤ 构造正交矩阵Q和对角矩阵Λ.

4.5. 正定二次型

定理3.（惯性定理）. n元实二次型 $f=x^TAx$. 无论用怎样的可逆线性变换化为标准形，其标准形中正、负平方项的项数是唯一确定的，它们分别为二次型的秩.

定义3：实二次型 $f=x^TAx$ 的标准形中.

正平方项的项数 p 称为二次型 f 的正惯性指数；

负平方项的项数 q 称为二次型 f 的负惯性指数.

它们的差 $p-q$ 称二次型 f 的符号差

$\boxed{1}$ 正交变换法

回顾 由于对任意的实对称矩阵 A，总有正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 即 $P^{T}AP=\Lambda$.

定理2：任给二次型 $f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\ (a_{ij}=a_{ji})$，总有正交~~矩阵~~变换 $x=Py$，使 f 化为标准形：

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值，正交矩阵 P 的 n 列是 A 的对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 的 n 个正交单位特征向量。

⇒ 流程：① 表示成 $f=x^TAx$.

② 求出特征值和特征向量

③ 将特征向量正交化和单位化，得 $C=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$.

④ $x=Cy$，则 f 的标准形：$f=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$

$\boxed{2}$ 拉格朗日配方法.

利用代数公式，将二次型配成完全平方式的方法.

⇒ 步骤.

① 若二次型含有 x_i 的平方项，则先把含有 x_i 的乘积项集中，然后配方；再对其余变量同样进行，直到都配成平方项为止；经过非退化线性变换，就得到标准形，

② 若二次型中不含有平方项，但是 $a_{ij}\neq 0$ $(i\neq j)$ 即存在 x_ix_j 项，则先作可逆线性变换：

$$\begin{cases} x_i=y_i-y_j \\ x_j=y_i+y_j \\ x_k=y_k. \end{cases} \quad (k=1,2,\cdots,n\ 且\ k\neq i,j)$$

化二次型为含有平方项的二次型，然后再按1中方法配方

eg. 化 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ 的标准形

解: 原式 $= (x_1 + x_2 + x_3)^2 [- x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3] + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$

$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_2x_3$

$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2$.

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

定义2：设 A、B 为 n 阶方阵，如果存在 n 阶方阵 C，使 $C^TAC=B$，则 A 与 B 合同，记作 $A \simeq B$

三个性质：①反身性 $A \simeq A$ ②对称性 $A \simeq B$，$B \simeq A$ ③传递性：$A \simeq B$，$B \simeq C$ 则 $A \simeq C$

定理1：任何可逆矩阵 C，令 $B=C^TAC$，如果 A 为对称矩阵，则 B 也为对称矩阵，且 $R(A)=R(B)$

6.2.3. 初等变换法

线性空间部分笔记缺失了，当时好像主要集中在ppt上的学习了

eg. $f = x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 8x_2x_3$

解. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 + r_1 \\ c_3 + c_1}]{\substack{r_2 - 2r_1 \\ c_2 - 2c_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 + 2c_2]{r_3 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\quad \Lambda = C^T A C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

令 $x = Cy$，则 $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2$