中山大学本科生期末考试

考试科目:《线性代数》(B 卷)

学年学期: **2021–2022** 学年第 **1** 学期　　姓　　名: ____________

学　院/系: 数学学院　　学　　号: ____________

考试方式: 闭卷　　年级专业: ____________

考试时长: **120** 分钟　　班　　别: ____________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者, 不授予学士学位.”

以下为试题区域, 共 10 道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答

一、判断题。

1. 设 A 为 n 阶方阵，满足 $|A|=0$，则 $|A^*|=0$。 (√)

解析:

$|A^*|=|A|^{n-1}=0$

2. 设 A、B 均为 n 阶方阵，则 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$. (×)

解析:

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2+B\times A-A\times B\neq A^2-B^2$(矩阵乘法不具有交换律)

3. 若 A、B 为同型矩阵，则 A 与 B 等价当且仅当 $R(A)=R(B)$. (√)

4. 假设 n 维向量 a_1 是 a_2 与 a_3 的线性组合，则 a_3 必是 a_1 与 a_2 的线性组合。 (×)

5. 设 A 为 n 阶方阵，则 A 与 A^T 的特征值相等。 (√)

解析:

$|A^T-\lambda E|=|A^T-\lambda E^T|=|(A-\lambda E)^T|=|A-\lambda E|$

二、计算行列式 $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$ 的值，并写出必要的步骤。

解:

将第 i 行减去第一行 $(i=2,3\cdots n)$, 得到

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a-x & x-a & 0 & \dots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix}$$

再将第一列依次加上第 i 列 $(i=2,\cdots,n)$

$$\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \dots & a \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix}$$

所以行列式的值为 $[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$

三、求 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，写出必要的步骤。（10 分）

解:

$|\boldsymbol{A}|=2$, 故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在.

$$\boldsymbol{A}_{11}=-4,\quad \boldsymbol{A}_{21}=2,\quad \boldsymbol{A}_{31}=0$$

$$\boldsymbol{A}_{12}=-13,\quad \boldsymbol{A}_{22}=6,\quad \boldsymbol{A}_{32}=-1$$

$$\boldsymbol{A}_{13}=-32,\quad \boldsymbol{A}_{23}=14,\quad \boldsymbol{A}_{33}=-2$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

四、设 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$, 其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 $E+A+A^2+A^3+A^4+A^5$.

解:

$$\because AP = PB$$

$$\therefore APP^{-1} = A = PBP^{-1}$$

$$\because P = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 21 & 20 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 43 & 44 \\ -11 & -12 \end{bmatrix}$$

$$E + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 = \begin{bmatrix} 84 & 84 \\ -21 & -21 \end{bmatrix}$$

五、已知线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有无穷多解，求 λ，并求方程组的通解。

解:

由于系数矩阵是方阵, 由克拉默法则知, 它有唯一解的充要条件是系数行列式 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. 由

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

即当 $\lambda \neq 1$, 且 $\lambda \neq -2$ 时, $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 所以此时方程组有唯一解。
当 $\lambda = 1$ 时, 方程组所对应的增广矩阵可化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1\times(-1)]{r_2+r_1\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

此时 $R(\overline{\boldsymbol{A}}) = R(\boldsymbol{A}) = 1$, 方程组有无穷多个解, 取 x_2, x_3 为自由变量, 即得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

令 $x_2 = c_1, x_3 = c_2$, 并把上式写成向量形式的解

$$x = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(c_1, c_2 \text{ 为任意实数}\right).$$

六、设向量组 $\alpha_1 = (1,1,3,1)^T, \alpha_2 = (-1,1,-1,3)^T, \alpha_3 = (5,-2,8,-9)^T, \alpha_4 = (-1,3,1,7)^T$, 求该向量组的一个最大无关组并用它表示其余向量。
解:
以向量组为列向量组成 A, 应用初等行变换化为最简形式.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -14 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B},$$

可知, α_1, α_2 为向量组的一个极大无关组。
所以 $\alpha_3 = \dfrac{3}{2}\alpha_1 - \dfrac{7}{2}\alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2$
七、已知四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为它的三个解, 且满足 $\alpha_1 = (1,-1,2,-3)^T$, $\alpha_2 + 2\alpha_3 = (4,6,3,2)^T$, 求该线性方程组的通解。
解:
设线性方程组为 $Ax = b$, 首先根据方程组解向量为 4 维向量知 $n = 4$(1 分),
而 $R(A) = 3$。于是 $n - R(A) = 4 - 3 = 1$, 故 $Ax = 0$ 的基础解系有一个向量。(2 分)
$A[(\alpha_2 + 2\alpha_3) - 3\alpha_1] = b + 2b - 3b = 0,$

$$\beta = (\alpha_2 + 2\alpha_3) - 3\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

所以通解为 $c\begin{pmatrix}1\\9\\-3\\11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-3\end{pmatrix}$

八、设三阶矩阵 A 的特征值为 1,2,3,对应特征值 1,2,3 的特征向量分别为 $a_1=(1,1,1)^T,a_2=(1,0,1)^T,a_3=(0,1,1)^T$, 求矩阵 A。

解:

解: 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&1&2\\-2&-1&4\end{pmatrix}$$

九、求正交变换 $x=Py$, 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 化为标准型, 并写出该标准型。

解: 二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}$ 由特征方程

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\-2&-\lambda&-2\\0&-2&-1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(3-\lambda)(3+\lambda)$$

解得特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$

对应于 $\lambda_1=0$ 求解 $Ax=0$, 由

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解得一个特征向量为

$$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

对应于 $\lambda_2 = 3$ 求解 $(A-3E)x=0$, 由

$$A-3E=\begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&-3&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解得一个特征向量为

$$\beta_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

对应于 $\lambda_3 = 3$ 求解 $(A+3E)x=0$, 由

$$A+3E=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解得一个特征向量为

$$\beta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}$$

单位化得

$$p_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$p_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$p_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ 则 P 是正交阵，且

$$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$$

从而作正交变换 $x = Py$ 二次型化为标准型

$$3y_2^2 - 3y_3^2$$

十、设 n 维非零列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 满足对于任意的 $i \neq j$, 有 $\alpha_i^T A\alpha_j = 0$, 其中 A 为实对称正定矩阵，证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关。解:

设存在一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 满足 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = O$,

取任意一个 α_i 在等式两边同左乘 $\alpha_i^T A$

得到 $\alpha_i^T Ak_1\alpha_1 + \cdots + \alpha_i^T Ak_i\alpha_i + \cdots + \alpha_i^T Ak_n\alpha_n = 0(*)$,

根据题意 $\alpha_i^T A\alpha_j = 0(i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$,

所以 $(*)$ 式可化为 $k_1\alpha_i^T A\alpha_1 + \cdots + k_i\alpha_i^T A\alpha_i + \cdots + k_n\alpha_i^T A\alpha_n = k_i\alpha_i^T Aa_i = 0$,

又因为 A 是 n 阶正定矩阵,

所以对于非零向量 α_i 必有 $\alpha_i^T Aa_j \neq 0$,

由此可得 $k_i = 0(i = 1, 2, \cdots, n)$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关。