中山大学本科生期末考试

考试科目：《线性代数》(A卷答案)

学年学期：2017学年第1学期　　姓　名：________　学　号：________

学院/系：数学学院　　学　院：________　年级专业：________

考试方式：闭卷　　任课教师：________

考试时长：120分钟　　成绩评定：________　阅卷教师：________

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

---------以下为试题区域，共2道大题，总分100分,考生请在试卷上作答---------

一、填空题(共5小题，每小题3分，共15分)

不对即0分

1. 设$A=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$，则$A$的逆矩阵$A^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}}$.

2. 设A为3阶矩阵，A^*为A的伴随矩阵，且$|A|=3$，则$|2A^*|=$ $\underline{\quad 72 \quad}$.

3. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\0&2&0&1&8\\0&0&1&1&4\end{pmatrix}$，则齐次线性方程组$Ax=0$解空间的空间维数为$\underline{\quad 2 \quad}$.

4. 设3阶矩阵A与B相似，且A的特征值为$-1,1,2$；则行列式$|B^2+B-E|=$ $\underline{\quad -5 \quad}$.

5. 设对称矩阵$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-4&k\\0&k&-9\end{pmatrix}$为负定矩阵，则$k$的取值范围是$\underline{\quad (-6,6) \quad}$.

二、计算题(共8小题，第1-3小题各8分，第4-6小题各10分，第7小题13分，第8小题18分，共85分)注：要写出必要的计算和推理过程

1. (8分)计算行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&4&6\\0&0&1&0\\2&4&3&5\\5&3&1&2\end{vmatrix}$的值。

解：

$$D=-\begin{vmatrix}1&2&6\\2&4&5\\5&3&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&6\\0&0&-7\\5&3&2\end{vmatrix}=-7\begin{vmatrix}1&2\\5&3\end{vmatrix}=49$$

结果错 至少扣 2分 (少于 ~~(一半当数)~~ 一半).

中间错 4分

酌情 $\boxed{\text{方法正确，运算错误}}$

$\frac{A^*}{|A|}$ (2分) ← $\boxed{(4分)}$ < 每行2分 / 结果2分

← (2分)

结果错扣2分完。

2. (8分)求矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\2&-2&0&-1\\1&2&2&1\\1&2&3&2\end{pmatrix}$的逆矩阵。

解：

$$(A,E)=\begin{pmatrix}1&1&2&1&1&0&0&0\\2&-2&0&-1&0&1&0&0\\1&2&2&1&0&0&1&0\\1&2&3&2&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&1&1&0&0&0\\0&-4&-4&-3&-2&1&0&0\\0&1&0&0&-1&0&1&0\\0&1&1&1&-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&0&1&0\\0&1&1&1&-1&0&0&1\\0&-4&-4&-3&-2&1&0&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&0&1&0\\0&0&1&1&0&0&-1&1\\0&0&-4&-3&-6&1&4&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&0&1&0\\0&0&1&1&0&0&-1&1\\0&0&0&1&-6&1&0&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&0&7&-1&0&-4\\0&1&0&0&-1&0&1&0\\0&0&1&0&6&-1&-1&-3\\0&0&0&1&-6&1&0&4\end{pmatrix}$$

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0&0&-5&1&2&2\\0&1&0&0&-1&0&1&0\\0&0&1&0&6&-1&-1&-3\\0&0&0&1&-6&1&0&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-4&1&1&2\\0&1&0&0&-1&0&1&0\\0&0&1&0&6&-1&-1&-3\\0&0&0&1&-6&1&0&4\end{pmatrix}$$

则$A^{-1}=\begin{pmatrix}-4&1&1&2\\-1&0&1&0\\6&-1&-1&-3\\-6&1&0&4\end{pmatrix}$.

[无列变换]. [(任意)] 分别各2

错误方法（后不给分）

3. (8分)判断矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&3&0\\1&0&4\end{pmatrix}$能否相似对角阵，并说明原因。

[结果]. (2分)

A不能相似对角化。

由特征方程

$$|A-\lambda|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\-1&3-\lambda&0\\1&0&4-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(\lambda-2)^2=0$$

解得特征值$\lambda_1=2$ (2重根), $\lambda_2=4$. (5分) (答案1分).

对应于$\lambda_1=2$, 求解$(A-2E)x=0$,由于

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

特向 (个数2分) 分

知$R(A-2E)=2<3$. 从而只能解得1个线性无关特征向量

$$p_1=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}. \qquad (7分)$$

(对角解 1分)

即2重特征值$\lambda_1=2$只对应1个线性无关特征向量，故A没有3个线性无关特征向量，因此A不能相似对角化。

(8分)

4. (10分)已知向量组$a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\5\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}2\\4\\1\\3\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\4\end{pmatrix}$, $a_4=\begin{pmatrix}2\\9\\2\\7\end{pmatrix}$, 求该向量组的秩和一个最大无关组,并把其余向量用此最大无关组线性表示。

解: 由于

阶梯 3分

最简 5分

$$A = (a_1,a_2,a_3,a_4)=\begin{pmatrix}1&2&3&2\\2&4&1&9\\1&1&1&2\\5&3&4&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad(5分)$$

秩: 4分

则$R(A)=R(a_1,a_2,a_3)=3$. 故向量组的秩为3; a_1,a_2,a_3是一个最大无关组, 且

(8分)

组: 4分

$$a_4=a_1+2a_2-a_3.\qquad(10分)$$

表示 2分

(过程)

5. (10分)设线性方程组$\begin{pmatrix}1&1&2\\4&5&10\\2&3&6\\1&2&s\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}1\\3\\t\\0\end{pmatrix}$, 问$s,t$为何值时:

(1) 方程组无解; (2) 方程组有唯一解; (3) 方程组有无穷多解。

解: 记方程组为$Ax=b$. 由于

$$(A,b) = \begin{pmatrix}1&1&2&1\\4&5&10&3\\2&3&6&t\\1&2&s&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&2&-1\\0&1&2&t-2\\0&1&s-2&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&2&-1\\0&0&s-4&0\\0&0&0&t-1\end{pmatrix}\qquad(4分)$$

4

则$2\le R(A)\le R(A,b)\le 4$.

(1) 方程组无解, 则$R(A)<R(A,b)$, 即$R(A,b)=R(A)+1$. 从而有$\begin{cases}R(A)=2,\\R(A,b)=3\end{cases}$ 或$\begin{cases}R(A)=3,\\R(A,b)=4\end{cases}$ 故有

$$\begin{cases}s-4=0\\t-1\neq 0\end{cases}\quad 或\quad\begin{cases}s-4\neq 0\\t-1\neq 0\end{cases}$$

解得$t\neq 1$.

(6分) 2

(2) 方程组有唯一解, 则$R(A)=R(A,b)=3$. 从而

$$\begin{cases}s-4\neq 0\\t-1=0\end{cases},\quad 解得\begin{cases}s\neq 4\\t=1\end{cases}\qquad(8分)$$

2

(3) 方程组有无穷多解, 则$R(A)=R(A,b)=2<3$. 从而

$$\begin{cases}s-4=0\\t-1=0\end{cases},\quad 解得\begin{cases}s=4\\t=1\end{cases}\qquad(10分)$$

2

6. (10分)求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4 &= 5 \end{cases}$$

的通解。

解: 由于增广矩阵

$$B = (A,b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & -7 & 5 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (5分)$$

则$R(A) = 2 < 4$. 故取x_3, x_4为自由未知数. 令$x_3 = k_1$, $x_4 = k_2$ 解得通解为

$$x = k_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R}). \qquad (10分)$$

多2 补试 4

结构错 3分

7. (13分)设矩阵$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

(1)求可逆矩阵P, 使得$P^{-1}AP$为对角阵(8分);

(2) 计算A^{2018}(5分)。

解: (1) 由特征方程

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

向量一个扣2分 两个 3分 全错 5分

~~答案错 2分~~

(每错一个特征扣一分). (2分)

解得特征值$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$.

对应于$\lambda_1 = -1$, 求解$(A + E)x = 0$.由

特征值各一分

$$A + E = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得对应的1个线性无关特征向量

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (4分)$$

特向各2分 (1+1)

对应于$\lambda_2 = 2$, 求解$(A - 2E)x = 0$.由

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而解得对应的1个线性无关特征向量

$$p_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (6分)$$

取$P = (p_1, p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 则$P$为可逆阵, 且

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 2 \end{pmatrix}. \qquad (8分)$$

(矩阵 2分)

(1题2√
给5)

求逆
(2分)

(2) 由(1)知, $A = P\Lambda P^{-1}$, 且$P^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (10分)

从而有

$$\begin{aligned} A^{2018} &= P\Lambda^{2018}P^{-1} && (11分) \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2018} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-2^{2020} & -4+2^{2020} \\ 1-2^{2018} & -4+2^{2018} \end{pmatrix} && (13分) \end{aligned}$$

结果错扣2分

8. (18分)设$x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

(1) 求正交阵P, 使得作正交变换$x = Py$后二次型化为标准形, 并请写出该标准形(14分);
(2) 判断该二次型的正定性(2分);
(3) 求当$\|x\| = 1$时, 二次型f的最大值(2分)。

矩阵2分

解: (1) 二次型的矩阵为$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. (2分)

由特征方程

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$$

解得特征值$\lambda_1 = 4$(2重根), $\lambda_2 = 1$. 特征值各1分 (5分)
对应于$\lambda_1 = 4$, 求解$(A - 4E)x = 0$.由

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得2个线性无关特征向量

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ 各1分

进行施密特正交化过程，令

$$\eta_1 = \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

正交化
2分

$$\eta_2 = \xi_2 - \frac{[\xi_2, \eta_1]}{[\eta_1, \eta_1]}\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

进行单位化,

$$p_1 = \frac{\eta_1}{\|\eta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p_2 = \frac{\eta_2}{\|\eta_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$ (9分)

单位化
各1分

11.

对应于$\lambda_2 = 1$, 求解$(A-E)x = 0$. 由

$$A - E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得1个线性无关特征向量

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1分).

进行单位化，

$$p_3 = \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(12分)

8

令$P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. (13分)

$x_1 = y_1$
$x_2 = -$
$x_3 = -$

则P是正交阵，且

$$P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

(列出正确1分)

(11项各对位).

从而作正交变换$x = Py$, 二次型化为标准形

$$4y_1^2 + 4y_2^2 + y_3^2.$$ (14分)

(2) 由于对称阵A的特征值全为正,则A为正定阵, (不写理由扣1分) (15分)

从而二次型为正定二次型。 (16分)

(3) 由于正交变换是保长度的，故问题转化为当$\|y\| = 1$时，二次型$f = 4y_1^2 + 4y_2^2 + y_3^2$的最大值。又由于

$$f \le 4(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 4\|y\|^2 = 4$$

且$f(1,0,0) = 4$, (17分)

因此，二次型的最大值是4. (18分)

(不写理由1分)

$x^T (A^T)^T AB\, x > 0$

(最大值)

等于

满.

(才 $B^T A^T AB$ 才)

C5 Q3 结论

$y^T (A^T A)\, y > 0$