第十三章 递推方程与生成函数

主要内容

- 递推方程的定义及实例
- 递推方程的公式解法
- 递推方程的其他解法
- 生成函数及其应用
- 指数生成函数及其应用

13.1递推方程的定义及实例

定义13.1 设序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, 简记为$\{a_n\}$. 一个把 a_n 与某些个a_i $(i<n)$ 联系起来的等式叫做关于序列 $\{a_n\}$ 的**递推方程**. 当给定递推方程和适当的初值就唯一确定了序列.

Fibonacci数列： 1，1，2，3，5，8，…，记作$\{f_n\}$.

递推方程 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

初值 $f_0 = 1$，$f_1 = 1$

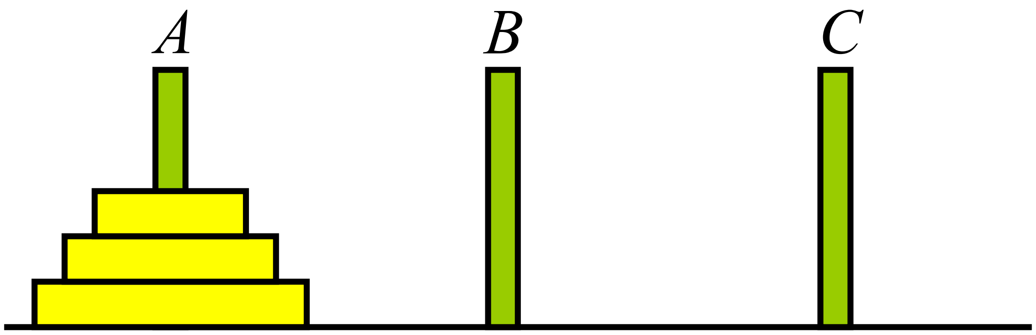
阶乘计算数列： 1，2，6，24，5！，…，记作$\{F(n)\}$

递推方程 $F(n) = nF(n-1)$

初值 $F(1) = 1$

Hanoi塔

例1 Hanoi 塔



算法 Hanoi (A,C,n)
1. if n=1 then move (A,C)
2. else
3. Hanoi (A,B,n–1)
4. move (A,C)
5. Hanoi (B,C,n–1)

移动n个盘子的总次数为$T(n)$. 因此得到递推方程

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$
$$T(1) = 1$$

$$T(1) = 1, T(2) = 3, T(3) = 7, T(4) = 15, \ldots$$

观察可知, 递推方程的解为：$T(n) = 2^n - 1$

Fibonacci数列

例2 Fibonacci数列：

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

递推方程

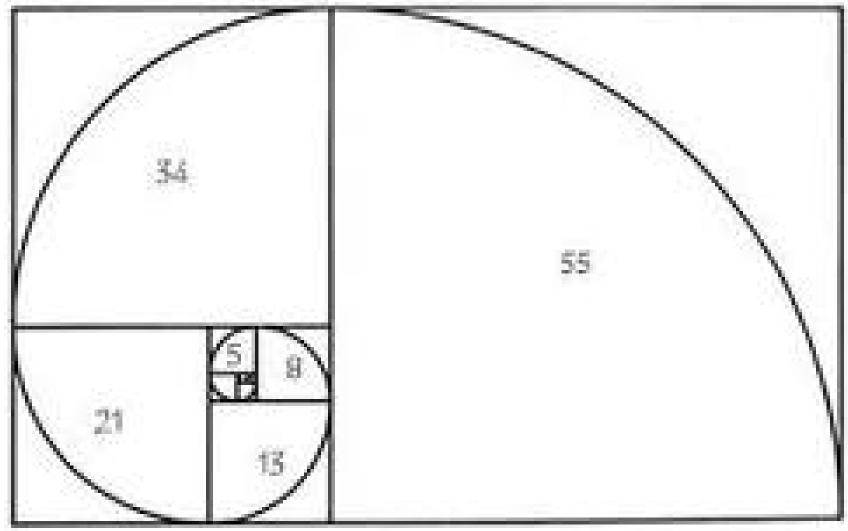
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_0=1,\ f_1=1$$

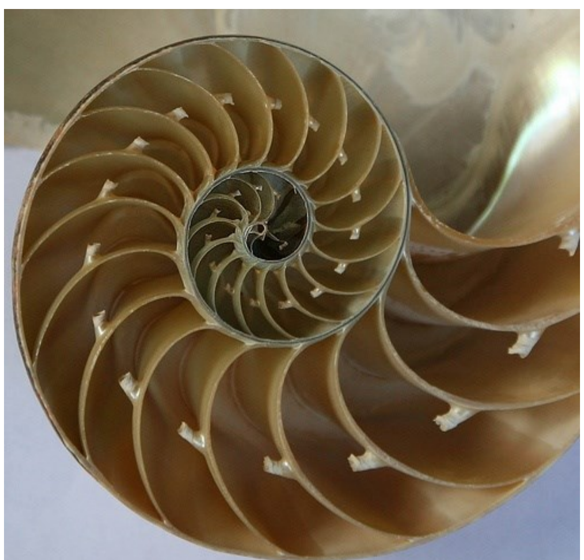
数学家Fibonacci
意大利1170-1240

解：

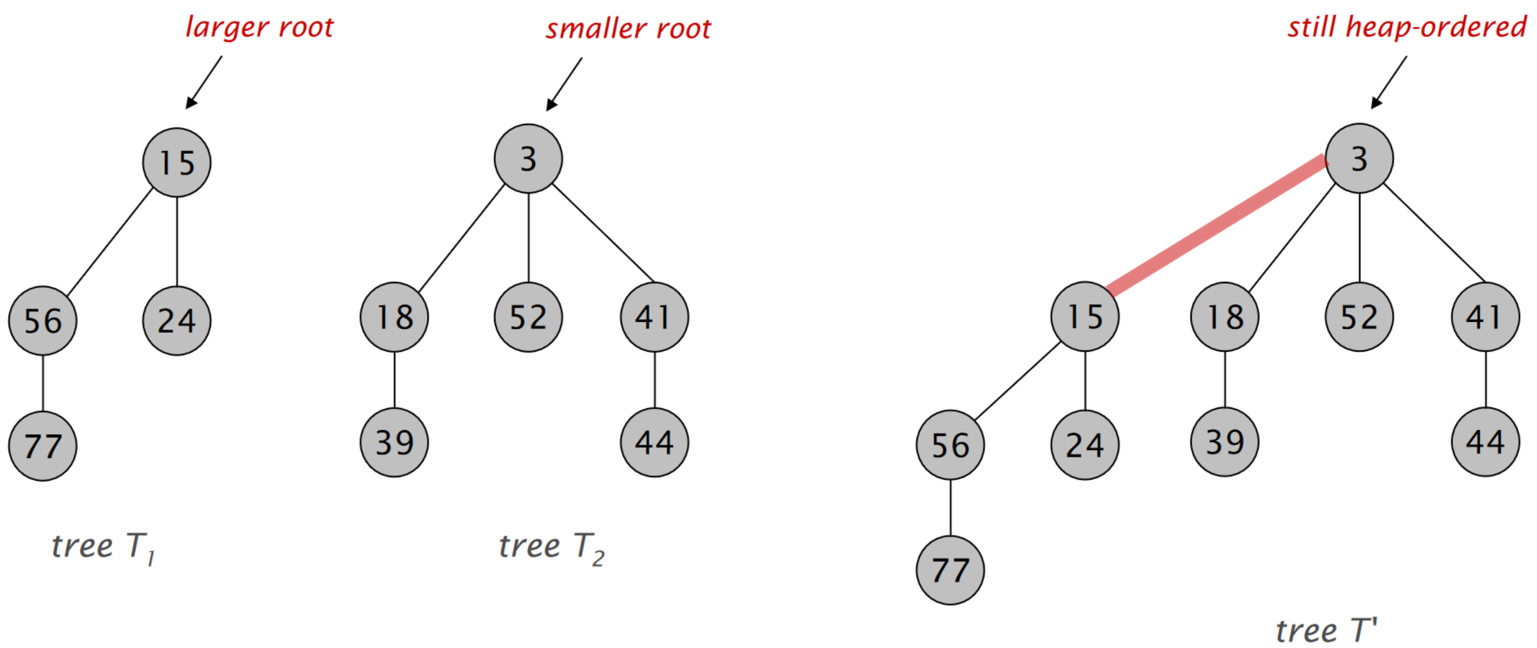
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

自然界的Fibonacci数列





计算机中的Fibonacci数列



Binomial heap, Fibonacci heap

13.2 递推方程的公式解法

- 特征方程、特征根
- 递推方程的解与特征根的关系
- 无重根下通解的结构
- 求解实例
- 有重根下通解的结构
- 求解实例

常系数线性齐次递推方程

定义13.2 常系数线性齐次递推方程的标准形：

$$\begin{cases} H(0)=b_0, H(1)=b_1, H(2)=b_2, \ \ldots\ , H(k-1)=b_{k-1} \\ H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\ldots-a_kH(n-k)=0 \end{cases}$$

序列的第n项可由它之前的k项线性表示

其中 $a_1, a_2, \ldots, a_k$为常数，$a_k \neq 0$

称为 k 阶常系数线性齐次递推方程

$b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ 为 k 个初值

实例：Fibonacci 数列的递推方程

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_0 = 1,\ f_1 = 1 \end{cases}$$

特征方程与特征根

$$\begin{cases} H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\ldots-a_kH(n-k)=0 \\ H(0)=b_0, H(1)=b_1, H(2)=b_2, \ldots, H(k-1)=b_{k-1} \end{cases}$$

定义13.3 特征方程

$$x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \cdots - a_k = 0$$

k 阶常系数线性齐次递推方程的特征方程是一个 k 阶线性方程。特征方程的根称为递推方程的 **特征根**

实例:

递推方程 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

特征方程 $x^2 - x - 1 = 0$

特征根 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

递推方程解与特征根的关系

定理13.1 设 q 是非零复数，则 q^n 是递推方程的解当且仅当 q 是它的特征根.

q^n是递推方程的解

$\Leftrightarrow q^n - a_1q^{n-1} - a_2q^{n-2} - \ldots - a_kq^{n-k} = 0$

$\Leftrightarrow q^{n-k}(q^k - a_1q^{k-1} - a_2q^{k-2} - \ldots - a_k) = 0$

$\Leftrightarrow q^k - a_1q^{k-1} - a_2q^{k-2} - \ldots - a_k = 0$ （因为$q\neq 0$）

$\Leftrightarrow q$ 是它的特征根

定理13.2 设 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 是递推方程的解，c_1,c_2为任意常数, 则 $c_1h_1(n)+c_2h_2(n)$ 也是这个递推方程的解.

推论 若 $q_1, q_2, \ldots, q_k$ 是递推方程的特征根，则 $c_1q_1^n + c_2q_2^n + \ldots + c_kq_k^n$ 是该递推方程的解，其中$c_1, c_2, \ldots, c_k$ 是任意常数.

无重根下通解的结构

定义13.4 若对常系数线性齐次递推方程的每个解 $h(n)$ 都存在一组常数$c_1',c_2',\ldots, c_k'$ 使得

$$h(n) = c_1'q_1^n+c_2'q_2^n+\ldots+c_k'q_k^n$$

成立，则称 $c_1q_1^n + c_2q_2^n + \ldots + c_kq_k^n$ 为该递推方程的**通解**

如果每一个解都可以表示为$q_1^n,\ldots,q_k^n$的某个线性组合，则将$q_1^n,\ldots,q_k^n$的任意线性组合称为通解

定理13.3 设$q_1, q_2, \ldots, q_k$是常系数线性齐次递推方程不等的特征根，则

$$H(n)= c_1q_1^n + c_2q_2^n + \ldots + c_kq_k^n$$

为该递推方程的通解.

递推方程的解与$(c_1,\ldots,c_k)$一一对应
递推方程的解不会存在其他非线性形态
注意前提：特征方程不存在重根

一般解法

对给定的序列$\{H(0), H(1) \dots\}$

- 得到递推方程的标准型
- 写出特征方程$x^k - a_1 x^{k-1} - \cdots - a_k = 0$
- 求出特征根，假设为$q_1, \dots, q_k$

确认没有重根

- 设$H(n) = c_1 q_1^n + \cdots + c_k q_k^n$
- 根据初始解构造方程组

$$b_0 = H(0) = c_1 + \cdots + c_k$$
$$b_1 = H(1) = c_1 q_1 + \cdots + c_k q_k$$
$$\vdots$$
$$b_{k-1} = H(k-1) = c_1 q_1^{k-1} + \cdots + c_k q_k^{k-1}$$

- 求解上述方程组，得到$c_1, \dots, c_k$
- 得到结论

实例

例3 **Fibonacci 数列：**

$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$，特征根为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

通解为 $$f_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

代入初值 $f_0=1, f_1=1$, 得 $$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

解得 $$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

解是 $$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

有重根的情况

例4 $\begin{cases} H(n)-4H(n-1)+4H(n-2)=0 \\ H(0)=0, \quad H(1)=1 \end{cases}$

解 特征方程 $x^2-4x+4=0$

通解 $H(n)=c_1 2^n + c_2 2^n = c2^n$

代入初值得：

$$\begin{cases} c=0 \\ 2c=1 \end{cases}$$

c 无解.

问题：两个解线性相关

有重根下的通解结构

定理13.4 设 $q_1, q_2, \ldots, q_t$ 是递推方程的不相等的特征根，且 q_i 的重数为 e_i，$i=1, 2, \ldots, t$，令

$$H_i(n) = \underbrace{\left(c_{i_1} + c_{i_2}n + \ldots + c_{i_{e_i}}n^{e_i-1}\right)}_{\text{关于}n\text{的}e_i-1\text{阶多项式}} q_i^n$$

那么通解为:

$$H(n) = \sum_{i=1}^{t} H_i(n)$$

如果q为e重特征根，则$q^n, nq^n, \ldots, n^{e-1}q^n$均为特征方程的解（证明略）

求解实例

例5 求解以下递推方程

$$\begin{cases} H(n)-3H(n-1)+4H(n-3)=0 \\ H(0)=1, H(1)=0, H(2)=0 \end{cases}$$

解 特征方程 $x^3-3x^2+4=0$，特征根$-1, 2, 2$

通解为 $$H(n)=(c_1+c_2 n)2^n+c_3(-1)^n$$

其中待定常数满足以下方程组

$$\begin{cases} c_1+c_3=1 \\ 2c_1+2c_2-c_3=0 \\ 4c_1+8c_2+c_3=0 \end{cases} \Rightarrow \quad c_1=\frac{5}{9}, c_2=-\frac{1}{3}, c_3=\frac{4}{9}$$

原方程的解为 $$H(n)=\frac{5}{9}2^n-\frac{1}{3}n2^n+\frac{4}{9}(-1)^n$$

常系数线性非齐次递推方程求解

- 递推方程的标准型
- 通解结构
- 特解的求法

  多项式函数

  指数函数

  组合形式

递推方程的标准型及通解

定理13.5 非齐次递推方程的标准型：

$$H(n)-a_1H(n-1)-\cdots-a_kH(n-k)=f(n)$$

其中$n\geq k, a_k\neq 0, f(n)\neq 0$

若$\overline{H(n)}$是对应齐次方程的通解，$H^*(n)$是一个特解，则

$H(n)=\overline{H(n)}+H^*(n)$是上述非齐次方程的通解。

证 代入验证, $H(n)$是解. 下面证明任意解 $h(n)$ 为某个齐次解与特解$H^*(n)$之和. 由于$h(n)$和$H^*(n)$都是解：

$$\begin{cases} h(n)-a_1h(n-1)-\cdots-a_kh(n-k)=f(n) \\ H^*(n)-a_1H^*(n-1)-\cdots-a_kH^*(n-k)=f(n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(h(n)-H^*(n)\right)-a_1\left(h(n-1)-H^*(n-1)\right)-\cdots$$

$$-a_k\left(h(n-k)-H^*(n-k)\right)=0$$

可知$h(n)-H^*(n)$为对应的齐次方程的通解。即$h(n)$可表示为$H^*(n)$与齐次方程的一个解之和。

特解的形式：多项式

如果 $f(n)$为l次多项式，则特解一般也是l次多项式

特例：若特征根为1，则需要提高特解的阶数

实例

例7 Hanoi塔

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$T(1) = 1$$

解

(1)求齐次方程$T(n) - 2T(n-1) = 0$的通解

特征方程$q - 2 = 0 \Rightarrow q = 2$为特征根，因此

齐次方程具有通解$\overline{T(n)} = c2^n$

(2)求特解：令特解为$T^*(n) = p$

代入递推方程：$p = 2p + 1 \Rightarrow p = -1$

(3)非齐次方程的通解

$$T(n) = \overline{T(n)} + T^*(n) = c2^n - 1$$

代入初值$T(1) = 1$得 $c = 1$，因此$T(n) = 2^n - 1$

插入排序的最差时间复杂度

例6 顺序插入排序算法

算法 InsertSort(A,n)

1. for $j \leftarrow 2$ to n do
2. $\quad x \leftarrow A[j]$
3. $\quad i \leftarrow j-1$
4. $\quad$ while $i>0$ and $A[i]>x$ do // 行4-7将$A[j]$插入$A[1..j-1]$
5. $\quad\quad A[i+1] \leftarrow A[i]$
6. $\quad\quad i \leftarrow i-1$
7. $\quad A[i+1] \leftarrow x$

第i次迭代开始前，前i项已经排好序；第i次迭代将$A[i+1]$插入到前i项中的合适位置

对n个数排序⇔先对前$n-1$个数排序，然后将第n个插入到前$n-1$个数字中的合适位置

特征根为1时需要注意的问题

$$\begin{cases} W(n) = W(n-1) + n - 1 \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

(1)齐次递推方程特征方程：$q - 1 = 0 \Rightarrow$特征根为$q = 1$

齐次方程通解为$\overline{W(n)} = cq^n = c$

(2)设特解为$W^*(n) = p_1 n + p_2$

则带入递推方程得：

$W^*(n) = W^*(n-1) + n - 1$

$\Rightarrow p_1 n + p_2 = p_1(n-1) + p_2 + n - 1$

$\Rightarrow 0 = -p_1 + n - 1$

$\Rightarrow$无常数解

Why?　特解的最高次项被消去

Fix?　提高特解的次数（乘以n）

提高特解次数

$$\begin{cases} W(n) = W(n-1) + n - 1 \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

(1)齐次递推方程特征方程：$q - 1 = 0 \Rightarrow$特征根为$q = 1$

齐次方程通解为$\overline{W(n)} = cq^n = c$

(2)设特解为$W^*(n) = p_1 n^2 + p_2 n$

则带入递推方程得：

$$W^*(n) = W^*(n-1) + n - 1$$

$$\Rightarrow p_1 n^2 + p_2 n = p_1 (n-1)^2 + p_2 (n-1) + n - 1$$

$$\Rightarrow 0 = -2p_1 n + p_1 - p_2 + n - 1$$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = -\frac{1}{2}$$

(3) 非齐次方程的通解为

$$W(n) = \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n + c$$

代入$W(1) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow W(n) = \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n$

特解的形式:指数

$f(n)$为指数函数 β^n，若β是 e 重特征根($e \geq 0$)，则特解为$Pn^e\beta^n$，其中P为待定常数.

例8 $\begin{cases} a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 2^n \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 5 \end{cases}$

解 齐次递推方程具有2重特征根2，因此设特解为$a_n^* = Pn^2 2^n$

代入递推方程得

$$Pn^2 2^n - 4P(n-1)^2 2^{n-1} + 4P(n-2)^2 2^{n-2} = 2^n$$

$\Rightarrow P = \frac{1}{2}$，故递推方程通解为

$$a_n = (c_1 + nc_2)2^n + \frac{1}{2}n^2 2^n$$

代入初值$a_0 = 1, a_1 = 5$得：$c_1 = c_2 = 1$

故递推方程的解为：

$$a_n = 2^n + n2^n + n^2 2^{n-1}$$

若非齐次项为指数与多项式的组合形式，则特解也为指数与多项式两种情况下的特解的组合

$f(n) = \beta^n + g(n)$

- β是 e 重特征根($e \geq 0$)
- $g(n)$为l次多项式，则

则特解为$Pn^e\beta^n + \gamma_0 + \gamma_1 n + \cdots + \gamma_l n^l$

（若特征根为1，则仍然需要提高特解中多项式部分的阶数）

作业

习题13： 6、7

13.3 递推方程的其他解法

- 换元法
- 迭代归纳法
- 应用实例

换元法

思想：通过换元转化成常系数线性递推方程

例9 二分归并排序的最坏时间复杂度分析

算法 **Mergesort** (A,p,r) // 对数组A的下标p到r之间的数排序

1. **if** $p<r$
2. **then** $q\leftarrow\lfloor(p+r)/2\rfloor$ //q为p到r的中点
3. Mergesort(A,p,q)
4. Mergesort$(A,q+1,r)$
5. Merge(A,p,q,r) // 把排序数组$A[p..q]$与$A[q+1..r]$归并.

Merge过程归并两个 $n/2$规模的子数组至多用 n-1次比较

求解

$$\begin{cases} W(n) = 2W(n/2) + n - 1, n = 2^k \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

解　令$H(k) = W(2^k)$，则

$$H(k) = 2H(k-1) + 2^k - 1, H(0) = 0$$

齐次递推方程具有1重特征根2，因此设特解为

$$H^*(k) = p_1 k 2^k + p_2$$

代入递推方程，得$p_1 = p_2 = 1$

因而通解为$H(k) = c2^k + k2^k + 1$

由$H(0) = 0$得$c = -1$，故$H(k) = -2^k + k2^k + 1$

将k变换为n：$W(n) = -n + n\log n + 1$

迭代归纳法：归并排序

$$\begin{cases} W(n) = 2W(n/2) + n - 1,\ n = 2^k \\ W(1) = 0 \end{cases}$$

解 $W(n) = 2W(2^{k-1}) + 2^k - 1$

$$\begin{aligned}
&= 2\left(2W(2^{k-2}) + 2^{k-1} - 1\right) + 2^k - 1 \\
&= 2^2W(2^{k-2}) + 2^k - 2 + 2^k - 1 \\
&= 2^2\left(2W(2^{k-3}) + 2^{k-2} - 1\right) + 2^k - 2 + 2^k - 1 \\
&= 2^3W(2^{k-3}) + 2^k - 2^2 + 2^k - 2 + 2^k - 1 \\
&\ldots \\
&= 2^kW(1) + k2^k - \left(2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1\right) \\
&= k2^k - 2^k + 1 \\
&= n\log n - n + 1
\end{aligned}$$

错位排列的递推方程

记$1, 2, \ldots, n$的错位排列数为D_n，考虑先分类计数方法：

1. 第一位数可取$2, \ldots, n$，因此可分为$n-1$类；
2. 考虑第一位取2的情形，此时再分为两类情形：
   (a) 第二位为1，则第$3 \sim n$位应为$3, 4, \ldots, n$的错位排列，方法数为D_{n-2}
   (b) 第二位不是1，则第$2 \sim n$位应为$1, 3, 4, \ldots, n$的错位排列，方法数为D_{n-1}
3. 显然当第一位取$j > 2$的方法数与取2的方法数是一致的，因此

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

$$D_1 = 0, D_2 = 1$$

迭代归纳法：错位排列

例10 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}), D_1 = 0, D_2 = 1$

解：
$$\begin{aligned} D_n - nD_{n-1} &= -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}) \\ &= (-1)^2(D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}) \\ &= \cdots \\ &= (-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1) = (-1)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_n &= nD_{n-1} + (-1)^n \\ &= n\left((n-1)D_{n-2} + (-1)^{n-1}\right) + (-1)^n \\ &= n(n-1)\left((n-2)D_{n-3} + (-1)^{n-2}\right) + n(-1)^{n-1} + (-1)^n \\ &= \cdots \\ &= n!\,D_1 + \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\frac{n!}{(n-j)!} = n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!} \end{aligned}$$

快速排序算法

算法 Quicksort (A,p,r) // p 和 r 分别表示A首和末元素下标

1. if $p < r$
2. then $q \leftarrow$Partition(A, p, r) // 划分为$A[p..q-1]$和$A[q+1..r]$
3. $A[p] \leftrightarrow A[q]$
4. Quicksort($A,p,q-1$)
5. Quicksort($A,q+1,r$)

算法 Partition(A,p,r)

1. $x \leftarrow A[p]$ //选首元素作为轴
2. $i \leftarrow p-1$
3. $j \leftarrow r+1$
4. while true do
5. repeat $j \leftarrow j-1$
6. until $A[j] < x$ //$A[j]$是从后找的第一个比x小元素
7. repeat $i \leftarrow i+1$
8. until $A[i] > x$ //$A[i]$是从前找的第一个比x大的元素
9. if $i < j$ // 继续搜索$A[i]$到$A[j]$之间的范围
10 then $A[i] \leftrightarrow A[j]$ // $A[i]$与$A[j]$交换，回到行4
11. else return j //结束While循环

实例

27	99	0	8	13	64	86	16	7	10	88	25	90
	i										j	
27	25	0	8	13	64	86	16	7	10	88	99	90
					i				j			
27	25	0	8	13	10	86	16	7	64	88	99	90
						i		j				
27	25	0	8	13	10	7	16	86	64	88	99	90
							j	i				
16	25	0	8	13	10	7	27	86	64	88	99	90

平均时间复杂度分析

假设当前待排序的数字规模为n，

若轴为第k小的元素，则划分后得到规模分别为$k-1$和$n-k$的两个子问题，则共需比较次数为：

$$T(k-1)+T(n-k)+n-1$$

平均比较次数定义为

$$T(n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(T(k-1)+T(n-k)+n-1\right)$$

$$T(1)=T(0)=0$$

整理得到

$$\begin{cases} T(n)=\dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}T(k)+n-1, n\geq 2 \\ T(1)=0 \end{cases}$$

平均情况时间复杂度分析

使用差消法求解：

$$T(n)=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}T(k)+n-1, n\geq 2, T(1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} nT(n)=2\sum_{k=1}^{n-1}T(k)+n(n-1) \\ (n-1)T(n-1)=2\sum_{k=1}^{n-2}T(k)+(n-1)(n-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow nT(n)-(n-1)T(n-1)=2T(n-1)+2(n-1)$$

$$\Rightarrow \frac{T(n)}{n+1}=\frac{T(n-1)}{n}+\frac{2(n-1)}{n(n+1)}=\frac{T(n-1)}{n}+\frac{4}{n+1}-\frac{2}{n}$$

平均情况时间复杂度分析

$$\frac{T(n)}{n+1}=\frac{T(n-1)}{n}+\frac{4}{n+1}-\frac{2}{n}$$

$$=\frac{T(n-2)}{n-1}+\frac{4}{n}-\frac{2}{n-1}+\frac{4}{n+1}-\frac{2}{n}$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{T(1)}{2}+4\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

根据不等式

$$\log(n+1)\le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\le 1+\log n$$

有:

$$4\log(n+2)-6-2\log n\le\frac{T(n)}{n+1}\le 2\log(n+1)$$

$$\Rightarrow T(n)=\Theta(n\log n)$$

分治算法的时间分析

$T(n)$ 为算法对规模为 n 的输入的时间复杂度, a为子问题个数, $\frac{n}{b}$为子问题规模, $d(n)$为问题分割和重新合成的工作量

$$\begin{cases} T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + d(n) & n = b^k \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + d(n) = a^2T\left(\frac{n}{b^2}\right) + ad\left(\frac{n}{b}\right) + d(n)$$

$$= \ldots$$

$$= a^kT\left(\frac{n}{b^k}\right) + a^{k-1}d\left(\frac{n}{b^{k-1}}\right) + a^{k-2}d\left(\frac{n}{b^{k-2}}\right) + \ldots + ad\left(\frac{n}{b}\right) + d(n)$$

$$= a^k + \sum_{i=0}^{k-1} a^i d\left(\frac{n}{b^i}\right)$$

$$= n^{\log_b a} + \sum_{i=0}^{k-1} a^i d\left(\frac{n}{b^i}\right)$$

分治算法的时间分析（续）

- $d(n) = c$

$$T(n) = \begin{cases} n^{\log_b a} + c\dfrac{a^k - 1}{a - 1} = O\left(n^{\log_b a}\right) & a \neq 1 \\ 1 + kc = O(\log_b n) & a = 1 \end{cases}$$

- $d(n) = cn$

$$T(n) = n^{\log_b a} + cn\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{a}{b}\right)^i$$

$$= \begin{cases} O(n) & a < b \\ n + cnk = O(n\log_b n) & a = b \\ n^{\log_b a} + cn\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^k - 1}{\frac{a}{b} - 1} = O\left(n^{\log_b a}\right) & a > b \end{cases}$$

Complexity of Matrix Multiplication

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$$

metric: number of floating-point number operations
operation: a scalar multiplication followed by an addition

Vanilla method

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} b_{kj} \Rightarrow O(N)$$

overall complexity $O(N^3)$

Matrix Multiplication via Divide and Conquer

Assume $N = 2^n$ for simplicity

$$N = 2^n \left\{ \underbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ \hline \end{array}}_{N = 2^n} \right. \times \begin{array}{|c|c|} \hline B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \\ \hline \end{array}$$

- $C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$
- $C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$
- $C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$
- $C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$

Get 8 sub-tasks, each taking $T\left(\frac{N}{2}\right)$ operations

Combining them takes $O(N^2)$ operations

$$\Rightarrow T(N) = 8T\left(\frac{N}{2}\right) + O(N^2), T(1) = 1$$

$$\Rightarrow T(N) = O\left(N^{\log_2 8}\right) = O(N^3)$$

Strassen's Method

$$\begin{array}{|c|c|}\hline A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ \hline\end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \\ \hline\end{array}$$

$$P_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$$
$$P_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$$
$$P_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$$
$$P_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11})$$
$$P_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$$
$$P_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12})$$
$$P_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$$

$$C_{11} = P_1 + P_4 - P_5 + P_7$$
$$C_{12} = P_3 + P_5$$
$$C_{21} = P_2 + P_4$$
$$C_{22} = P_1 - P_2 + P_3 + P_6$$

Reduce to 7 sub-tasks!

$$T(N) = 7T\left(\frac{N}{2}\right) + O(N^2), T(1) = 1$$

$$\Rightarrow T(N) = O\left(N^{\log_2 7}\right) \approx O\left(N^{2.807}\right)$$

作业

习题13：33

13.4 生成函数及其应用

- 牛顿二项式系数与牛顿二项式定理
- 生成函数的定义
- 生成函数的应用

牛顿二项式系数

定义13.5 设 r 为实数，n为整数，引入形式符号

$$\binom{r}{n} = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ \dfrac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!} & n > 0 \end{cases}$$

称为牛顿二项式系数.

实例

$$\binom{-2}{5} = \frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)}{5!} = -6$$

$$\binom{1/2}{4} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!} = \frac{-5}{128}$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3\,!} = 4$$

牛顿二项式定理

定理13.6 （牛顿二项式定理）

设α为实数，则对一切实数x, y，$|x| < |y|$，有

$$(x+y)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n y^{\alpha-n}, \quad 其中\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

若$\alpha = -m$，其中m为正整数，那么

$$\binom{\alpha}{n} = \binom{-m}{n} = \frac{(-m)(-m-1)\ldots(-m-n+1)}{n!}$$

$$= \frac{(-1)^n m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!} = (-1)^n \binom{m+n-1}{n}$$

重要展开式

令$x = -z$，$y = 1$:

$$(1-z)^{-m} = \frac{1}{(1-z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{n} z^n \qquad |z| < 1$$

常用展开式：$(|z| < 1)$

$$m = 1, \quad \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots$$

$$m = 2, \quad \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$$

重要展开式

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-2}{n-1} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1} n} x^n$$

证：

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1(-3)(-5)\ldots(3-2n)}{n!\,2^n} x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot (2n-3)}{n!\,2^n} x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{n!\,2^n\left(2\cdot 4\cdot \ldots\cdot (2n-2)\right)} x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{n!\,2^n 2^{n-1}(n-1)!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n-2}{n-1} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1} n} x^n$$

生成函数定义

定义13.6 设序列$\{a_n\}$，构造形式幂级数

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

称$G(x)$为序列$\{a_n\}$的**生成函数**.

例：$\{C(m,n)\}$的生成函数为

$$G(x) = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots = \sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}x^l = (1+x)^m$$

例：$k \in Z_+, \{k^n\}$的生成函数为

$$G(x) = 1 + kx + k^2x^2 + k^3x^3 + \cdots = \frac{1}{1-kx}$$

由序列求生成函数

例14 求序列$\{a_n\}$的生成函数

(1) $a_n = 7\cdot 3^n$　　(2) $a_n = n(n+1)$

解

(1) $G(x) = 7\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = 7\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n = \dfrac{7}{1-3x}$

(2)

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n+1}\right)'$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}\right)' - \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2x^{n+1}\right)'$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}\right)'' - \left(\frac{2x}{1-x}\right)' = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' - \left(\frac{2x}{1-x}\right)' = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

由生成函数求序列通项

例15 已知 $\{a_n\}$ 的生成函数为

$$G(x)=\frac{2+3x-6x^2}{1-2x}$$

求a_n

解

$$G(x)=\frac{2+3x-6x^2}{1-2x}=\frac{2}{1-2x}+3x$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n+3x=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n+3x$$

$$a_n=\begin{cases}2^{n+1}, & n\neq 1\\ 2^2+3=7, & n=1\end{cases}$$

生成函数的应用

- 求解递推方程
- 计数多重集的 r 组合数
- 不定方程的解
- 整数拆分

求解递推方程

例16 $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0, a_0 = 1, a_1 = -2$

解

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \ldots$$
$$-5xG(x) = -5a_0x - 5a_1x^2 - 5a_2x^3 - 5a_3x^4 \ldots$$
$$6x^2G(x) = 6a_0x^2 + 6a_1x^3 + 6a_2x^4 \ldots$$

$$\Rightarrow (1 - 5x + 6x^2)G(x) = a_0 + (a_1 - 5a_0)x$$

$$\Rightarrow G(x) = \frac{1-7x}{1-5x+6x^2} = \frac{5}{1-2x} - \frac{4}{1-3x}$$
$$= 5\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - 4\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$$
$$\Rightarrow a_n = 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n$$

求解递推方程

例17
$$\begin{cases} h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}, & n \geq 2 \\ h_1 = 1 \end{cases}$$

解：设 $\{h_n\}$的生成函数为$H(x)$

$$H^2(x) = \left(h_1 x + h_2 x^2 + \cdots\right)\left(h_1 x + h_2 x^2 + \cdots\right)$$

$$= h_1^2 x^2 + (h_1 h_2 + h_2 h_1) x^3 + \left(h_1 h_3 + h_2^2 + h_3 h_1\right) x^4 + \cdots$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} = \sum_{n=2}^{\infty} h_n x^n$$

$$= H(x) - h_1 x = H(x) - x$$

求解递推方程

$$H^2(x) - H(x) + x = 0,$$

$$H(x) = \frac{1 - (1 - 4x)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} (-4x)^n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^{2n}} \binom{2n-2}{n-1} (-1)^n 2^{2n} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

$$h_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$ 第n个Catalan数

栈的输出计数

考虑$A=\{1,2,\dots,n\}$的一个入栈、出栈序列

push/pop的配对： 若push操作将元素x压入栈，则将x弹出栈的pop操作称为与push相配对的pop。

- A的每一个出栈序列都对应n组配对的push/pop
- 任意一组配对的push/pop之间的子串中，push和pop必须配对出现

push 1
push 2
push 3
pop 3
pop 2
pop 1
push 4
push 5
pop 5
pop 4

设$T(n)$为总的方法数，考虑**先分类再分步**的计数：

1. 考虑第一个push与其相配对的pop之间子串
2. 设该子串包含了k组配对的push/pop，则该子串为A的k元子集的入栈、出栈序列，总数为$T(k)$
3. 考虑与第一个push配对的pop操作之后的子串，必然为A的$n-1-k$元子集的入栈、出栈序列，总数为$T(n-1-k)$
4. 按$k\in\{0,1,\dots,n-1\}$分类累加：

$$T(n)=\sum_{k=0}^{n-1}T(k)T(n-1-k),T(0)=1$$

Fibonacci数列的生成函数

$f_0 = 1, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

$$\begin{cases} g(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \cdots \\ \quad g(x)x = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \cdots \\ \qquad g(x)x^2 = x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \cdots \end{cases}$$

第一行减去第二行和第三行

$$\Rightarrow g(x)\left(1 - x - x^2\right) = 1$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

Fibonacci数列递推方程的解

$$g(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}-x}+\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}+x}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{2}{\sqrt{5}-1}\frac{1}{1-\frac{2}{\sqrt{5}-1}x}+\frac{2}{\sqrt{5}+1}\frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{5}+1}x}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{2}{\sqrt{5}-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}x\right)^n+\frac{2}{\sqrt{5}+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}+1}x\right)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1}x^n\right\}$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

多重集的 r 组合数

令$S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$的 r 组合数为b_r
则$\{b_r\}$的生成函数为

$$G(y) := (1 + y + \dots + y^{n_1})(1 + y + \dots + y^{n_2}) \dots (1 + y + \dots + y^{n_k})$$

b_r为带约束的不定方程

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r \\ x_i \le n_i, i = 1, \dots, k \end{cases} \qquad (*)$$

的非负整数解的个数

$G(y)$中的y^r可写成$y^r = y^{x_1+x_2+\cdots+x_k}, x_i \in \{0, \dots, n_i\}$，对应$(*)$的一个非负整数解。因此$y^r$的系数就是$(*)$的非负整数解个数。

实例

例18 $S=\{3\cdot a, 4\cdot b, 5\cdot c\}$ 的10 组合数

解：生成函数$G(y)$

$$=(1+y+y^2+y^3)(1+y+y^2+y^3+y^4)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$$

$$=(1+2y+3y^2+4y^3+4y^4+3y^5+2y^6+y^7)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$$

$$=(1+\ldots+3y^{10}+2y^{10}+y^{10}+\ldots)$$

$N=6$

组合方案

$\{a, a, a, b, b, b, b, c, c, c\}$, $\{a, a, a, b, b, b, c, c, c, c\}$,

$\{a, a, a, b, b, c, c, c, c, c\}$, $\{a, a, b, b, b, b, c, c, c, c\}$,

$\{a, a, b, b, b, c, c, c, c, c\}$, $\{a, b, b, b, b, c, c, c, c, c\}$

不定方程解的个数

无约束不定方程$x_1+x_2+\cdots+x_k=r, x_i\in N$

设解的个数为b_r，则$\{b_r\}$的生成函数为$G(y)=\frac{1}{(1-y)^k}$

$$
\begin{aligned}
G(y) &= \frac{1}{(1-y)^k} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-k)(-k-1)\ldots(-k-r+1)}{r!}(-y)^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(k)(k+1)\ldots(k+r-1)}{r!}(-1)^r y^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r}y^r = \sum_{r=0}^{\infty}b_r y^r
\end{aligned}
$$

推广的不定方程

带上下界约束的不定方程

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k = r \\ l_i \le x_i \le n_i \end{cases} \qquad (*)$$

解的个数的生成函数为

$$G(y) = \left(y^{l_1} + y^{l_1+1} + \ldots + y^{n_1}\right)\left(y^{l_2} + y^{l_2+1} + \ldots + y^{n_2}\right) \cdots \left(y^{l_k} + y^{l_k+1} + \ldots + y^{n_k}\right)$$

证明思路：

$$G(y) = y^{l_1+\cdots+l_k} \underbrace{\left(y^0 + y^1 + \ldots + y^{n_1-l_1}\right) \ldots \left(y^0 + y^1 + \ldots + y^{n_k-l_k}\right)}_{H(y)}$$

$H(y)$中$y^{r-l_1-\cdots-l_k}$项系数为方程

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k = r - l_1 - \cdots - l_k \\ 0 \le x_i \le n_i - l_i \end{cases}$$

整数解的个数。也是$(*)$整数解的个数。

即，$G(y)$中y^r的系数为$(*)$ 整数解的个数

推广的不定方程

带系数的无约束不定方程

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_kx_k = r \qquad (\#)$$

非负整数解的个数的生成函数：

$$G(y) = (1 + y^{p_1} + y^{2p_1} + \ldots)(1 + y^{p_2} + y^{2p_2} + \ldots)$$
$$\ldots(1 + y^{p_k} + y^{2p_k} + \ldots)$$

证明：假设上述结论对k成立，即$G(y)$中y^r的系数为(#)的解数，考虑方程

$$p_1x_1 + \cdots + p_{k+1}x_{k+1} = r \qquad (*)$$

则对给定x_{k+1}, $(*)$的解数为$G(y)$中$y^{r-p_{k+1}x_{k+1}}$的系数

$(*)$的解数 $= \sum_{x_{k+1}} G(y)$中$y^{r-p_{k+1}x_{k+1}}$的系数 $= \sum_{x_{k+1}} y^{p_{k+1}x_{k+1}}G(y)$中$y^r$的系数

$= G(y)(1 + y^{p_{k+1}} + y^{2p_{k+1}} + \ldots)$中$y^r$的系数 $\Rightarrow$ 原假设在$k+1$时也成立

作业

习题13：17、18、21

13.5 指数生成函数及其应用

- 指数生成函数的定义与实例
- 指数生成函数的应用

指数生成函数的定义与实例

定义13.7 设$\{a_n\}$为序列，称

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$$

为$\{a_n\}$的**指数生成函数**.

例19 $m\in Z_+, a_n=P(m,n), \{a_n\}$的指数生成函数为

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P(m,n)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n=(1+x)^m$$

例20 $b_n=1$, 则$\{b_n\}$的指数生成函数为

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

应用：多重集排列计数

定理13.7 设 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$为多重集，则 S 的 r 排列数的指数生成函数为

$$G_e(x) = f_{n_1}(x) f_{n_2}(x) \ldots f_{n_k}(x)$$

$$f_{n_i}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n_i}}{n_i!} \quad i = 1, \ldots, k$$

Proof sketch: The rth order term of $G_e(x)$ is given by

$$\sum \prod_{i=1}^{k} \frac{x^{m_i}}{m_i!} = \sum \frac{x^r}{m_1! \, m_2! \ldots m_k!} = \frac{x^r}{r!} \boxed{\sum \boxed{\frac{r!}{m_1! \, m_2! \ldots m_k!}}}$$

where the sum is over all integer solutions of $m_1 + \cdots + m_k = r, m_i \in \{0, \ldots, n_i\}$.

#permutations of $\{m_1 \cdot a_1, \ldots, m_k \cdot a_k\}$

Step 1. fix a subset of size r
Step 2. count the permutations of this subset
Step 3. sum over all possible subsets

$\Rightarrow$#r-permutations of S

应用：多重集排列计数

定理13.7 设 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \dots, n_k\cdot a_k\}$为多重集，则 S 的 r 排列数的指数生成函数为

$$G_e(x) = f_{n_1}(x)f_{n_2}(x)\ \dots\ f_{n_k}(x)$$

$$f_{n_i}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n_i}}{n_i!} \quad i = 1, \dots, k$$

令$b_{i,j} = \mathbb{I}\{S$的r排列里可以出现j个$a_i\}$

则f_{n_i}是$\{b_{i,0}, b_{i,1}, \dots\}$的指数生成函数

可以通过修改$\{b_{i,0}, b_{i,1}, \dots\}$添加其他约束!

实例

例21 由1, 2, 3, 4 组成的五位数中，要求1出现不超过2次，但不能不出现，2出现不超过1次，3出现可达3次，4出现偶数次. 求这样的五位数个数.

解:

$$G_e(x)=\left(x+\frac{x^2}{2!}\right)(1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)$$

$$=x+5\frac{x^2}{2!}+18\frac{x^3}{3!}+64\frac{x^4}{4!}+215\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

$$\Rightarrow N=215$$

实例

例22 用红、白、蓝三色对 $1\times n$ 的方格涂色，要求偶数个为白色，问有多少方案？

解 设方案数为a_n

$$G_e(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\ e^{2x}=\frac{1}{2}e^{3x}+\frac{1}{2}e^x$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}3^n\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad=\frac{3^n+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$a_n=\frac{3^n+1}{2}$$

作业

习题13：27、28

第十三章 习题课

主要内容

- 递推方程的求解方法：公式法、换元法、迭代归纳法、生成函数法
- 递推方程与递归算法
- 生成函数的应用：计算多重集的 r 组合数、确定不定方程的整数解个数、计算拆分方案数、求解递推方程
- 指数生成函数的应用：计算多重集的 r 排列数
- 常用的计数符号：组合数、排列数、多项式系数、错位排列数、Fibonacci数
- 基本计数模型：选取问题、不定方程的解、非降路径、正整数拆分、放球等

基本要求

- 能够使用递推方程求解计数问题
- 能够使用生成函数或指数生成函数求解计数问题
- 掌握 **Fibonacci**数的定义、组合意义以及相关的公式.

练习1

1. 已知 $a_0=0, a_1=1, a_2=4, a_3=12$ 满足递推方程 $a_n+c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}=0$，求 c_1 和 c_2.

根据已知条件得到

$$\begin{cases} a_3+c_1a_2+c_2a_1=0 \\ a_2+c_1a_1+c_2a_0=0 \end{cases}$$

代入a_0,a_1,a_2,a_3的值得到

$$\begin{cases} 12+4c_1+c_2=0 \\ 4+c_1=0 \end{cases}$$

解得 $c_1=-4, c_2=4$.

练习2

2．求解递推方程

$$\begin{cases} na_n + (n-1)a_{n-1} = 2^n, \quad n \ge 1 \\ a_0 = 273 \end{cases}$$

用换元法. 令$b_n=na_n$, 代入原递推方程得 $\begin{cases} b_n + b_{n-1} = 2^n \\ b_0 = 0 \end{cases}$

用公式法解得

$$b_n = -\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{2^{n+1}}{3}$$

从而得到

$$\begin{cases} a_n = -\frac{2}{3n}(-1)^n + \frac{2^{n+1}}{3n}, n \ge 1 \\ a_0 = 273 \end{cases}$$

练习3

3．确定序列$\{a_n\}$的生成函数，其中$a_n = \binom{n}{3}$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6} n(n-1)(n-2)x^n$$

$$= \frac{1}{6} x^3 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$= \frac{1}{6} x^3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \right)' = \frac{1}{6} x^3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \right)'' = \frac{1}{6} x^3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)'''$$

$$= \frac{1}{6} x^3 \left(\frac{1}{1-x} \right)'''$$

$$= \frac{x^3}{(1-x)^4}$$

练习4

4．已知 $A(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ 是序列$\{a_n\}$的生成函数，求a_n.

$$令A(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}=\frac{Ax+B}{(1-x)^2}+\frac{C}{1+x}$$

$$则\begin{cases} B+C=1 \\ A+C=0 \\ A+B-2C=0 \end{cases} \Rightarrow A=-\frac{1}{4}, B=\frac{3}{4}, C=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A(x)=-\frac{1}{4}\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{3}{4}\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+x}$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}+\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

$$a_0=1, a_n=-\frac{1}{4}n+\frac{3}{4}(n+1)+\frac{1}{4}(-1)^n=\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(-1)^n$$

$$\Rightarrow a_n=\begin{cases} \frac{1}{2}n+1 & n为偶数 \\ \frac{1}{2}n+\frac{1}{2} & n为奇数 \end{cases}$$

练习5

5．求下列 n 阶行列式的值 d_n

$$d_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

方程 $\begin{cases} d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2} \\ d_1 = 2, \quad d_2 = 3 \end{cases}$

解得 $d_n=n+1$.

练习6

6. 平面上有 n 条直线，它们两两相交且没有三线交于一点，问这 n 条直线把平面分成多少个区域？

设平面上已经有$n-1$条直线. 当加入第n条直线时，它与平面上的前$n-1$条直线交于$n-1$个点. 这些点将第n条直线分割成n段，每段都增加一个区域，共增加n个区域，因此得到递推方程

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

练习7

7．用三个1、两个2、五个3可以组成多少个不同的四位数？如果这个四位数是偶数，那么又有多少个？

$$A_e(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)$$

其中x^4的系数为$71\cdot\frac{x^4}{4!}\Rightarrow a_4=71.$

若为偶数，则最后一位为2，则前三位最多只能有一个2：

$$A_e(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)(1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right)$$

x^3的系数为$20\cdot\frac{x^3}{3!}\Rightarrow a_3=20$