6:10

6:53

40分钟

课室名称：________ 座位号：________ 任课教师：________ 姓名：________ 专业：________ 学号：________ 年级：________ 学院：________

装 订 密 封 线

中山大学本科生期末考试

考试科目：《线性代数》

学年学期：2019 学年第 1 学期　　　　学院/系：数学学院

考试方式：闭卷　　　　考试时长：120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分数										
签名										

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

------- 以下为试题区域，共九道大题，总分 100 分。学生请在试卷上作答。 ------

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$　$A^*=|A|A^{-1}$

$2A^*=2\times\frac{1}{2}A^{-1}=A^{-1}$

~~$2A^*=2\frac{1}{|A|}A^{-1}=4A^{-1}$~~

$|A^{-1}|=2$

$\frac{1}{3}A^{-1}-A^{-1}=-\frac{2}{3}A^{-1}$

$(-\frac{2}{3})^3\,2=-\frac{16}{27}$

得分

一、填空题（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1.设A是3阶方阵，$|A|=\frac{1}{2}$，则$|(3A)^{-1}-2A^*|=$ $-\frac{16}{27}$。

2.设方阵A满足$A^2+A-6E=0$，则$(A+4E)^{-1}=$ $-\frac{1}{6}(A-3E)$。

另一种答案：$\frac{1}{6}(A-3E)$　$-\frac{1}{6}A+\frac{1}{2}E$

$$\begin{array}{r} A\ \ -3E \\ A+4E\,\overline{)\,A^2+A-6E} \\ A^2+4A \\ \hline -3A-6E \\ -3A-12E \\ \hline 6E \end{array}$$

3.设$a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$，$a_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix}$，$a_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\7\\-1\end{pmatrix}$，$a_5=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\4\end{pmatrix}$，则$a_1$，$a_2$，$a_3$，$a_4$，$a_5$是 线性相关

个数 5

维数 4

（填“线性相关”或“线性无关”）。

4.设3阶矩阵A与B相似，且A的特征值为1,2,3，则行列式$|B^2+B-E|=$ 55。

$\lambda^2+\lambda-1$　1

$4+2-1$　5

$9+3-1$　11

5.设A为3阶矩阵，且秩$R(A)=2$，矩阵$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&2&0\\-7&8&3\end{pmatrix}$，则$R(AB)=$ 2。

得分

二、（共 1 小题，每小题 8 分，共 8 分）

设$A=\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&2&-2\\-1&3&2\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$。

$$(A\ E)=\begin{pmatrix}2&1&-3&1&0&0\\1&2&-2&0&1&0\\-1&3&2&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&-2&0&1&0\\2&1&-3&1&0&0\\-1&3&2&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3+r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&-2&0&1&0\\0&-3&1&1&-2&0\\0&5&0&0&1&1\end{pmatrix}\underset{r_2\leftrightarrow r_3}{\overset{r_3\div5}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&-2&0&1&0\\0&1&0&0&\frac15&\frac15\\0&-3&1&1&-2&0\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3+3r_2}{\overset{r_1-2r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-2&0&\frac35&-\frac25\\0&1&0&0&\frac15&\frac15\\0&0&1&1&-\frac75&\frac35\end{pmatrix}\overset{r_1+2r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2&-\frac{11}{5}&\frac45\\0&1&0&0&\frac15&\frac15\\0&0&1&1&-\frac75&\frac35\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-\frac{11}{5}&\frac45\\0&\frac15&\frac15\\1&-\frac75&\frac35\end{pmatrix}\ \checkmark$$

得分

三、（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

设向量组A：

$a_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$，$a_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$a_4=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\1\end{pmatrix}$，$a_5=\begin{pmatrix}2\\6\\4\\-1\end{pmatrix}$，求向量组$A$的秩和一个最大无关组，并将其余向量用这个最大无关组表示。

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}\overset{r_2-r_1}{\sim}\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\0&1&1&2&4\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4+r_2}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&3&3\end{pmatrix}\underset{r_3\div3}{\overset{r_3\leftrightarrow r_4}{\sim}}\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad(4分)$$

$$\underset{r_1+r_2}{\overset{r_1\div(-1)}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&1&1&2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{r_2-2r_3}{\overset{r_1-r_3}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad(6分)$$

$R(A)=3$，a_1,a_2,a_4 为最大无关组，$a_3=a_1+a_2$

$a_5=a_1+2a_2+a_3$

（结果4分，每个1分）

给分点：

① $(A \quad E) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 给2分

② $(A \quad E)$ 在通过行变换努力的往 $(E, ?)$ 上化简 总给4分

③ 剩下的4分，根据错的多少来给.

要求：

① 在出错的地方画"______"

② 全对要打"✓"

方法二：

$A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|} \longrightarrow$ 2分

$|A| = 5 \longrightarrow$ 2分

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -11 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{11}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & -\frac{7}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

课室名称：________ 座位号：________
任课教师：________
姓名：________
专业：________
学号：________ 学院：________
年级：________
装 订 密 封 线

得分

四、（共 1 小题，每小题 12 分，共 12 分）

已知线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ 3x_1-x_2-sx_3+15x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=t \end{cases}$$

，问s和t为何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多个解？并在有无穷多解的情况下求解。

$$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -s & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & t \end{pmatrix} \underset{\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-r_1}}{\overset{r_2-r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -6-s & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 9 & t-1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4+3r_2}{\overset{r_3+2r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2-s & \cancel{6}\ 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & t+\cancel{5} \end{pmatrix}$$

12 $\quad$ 4t+12

(5分)

6 $\quad$ 2t+10

① $2-s\neq 0 \quad R(A)=R(A,b)=4$ 唯一解.

② $2-s=0$

$$(A,b)\underset{r_4-3r_3}{\overset{r_4\times 4}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cancel{4t+24}\ 2t-2 \end{pmatrix}$$

$t\neq 1$ 无解

$t=1 \quad R(A)=R(A,b)=3$ 有无穷多个解.

$$(A,b)\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c\in R$$

$$\begin{cases} x_1=-8 \\ x_2+2x_3=3 \\ x_4=2 \end{cases}$$

唯一解，无解，无穷多个解给对参数每个2分，无穷解的解1分.

$s\neq 2$ 唯一解

$s=2$ 且 $t\neq 1$ 无解

$s=2 \quad t=1$ 无穷多个解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c\in R$$

得分

五、（共 1 小题，每小题 8 分，共 8 分）

设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&x\\1&0&0\end{pmatrix}$，问$x$为何值时，矩阵$A$可对角化。

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 1\\ 2 & 1-\lambda & x\\ 1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\ [\lambda^2-1]$$
$$= -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$\lambda_1=\lambda_2=1 \qquad \lambda_3=-1$ （5分）

$\Rightarrow R(A-E)=1$

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&0&x\\1&0&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&x+2\\0&0&0\end{pmatrix}$$ （7分）

$x+2=0 \qquad x=-2$ （8分）

则当 $x=-2$ 时，A可对角化.

课室名称：________ 座位号：________

任课教师：________

姓名：________

专业：________

学号：________

年级：________ 学院：________

装 订 密 封 线

得分

六、（共 1 小题，每小题 8 分，共 8 分）

设向量组a_1，a_2，a_3线性无关，且$b_1=a_1$，$b_2=a_1+a_2$，$b_3=a_1+a_2+a_3$，证明向量组b_1，b_2，b_3线性无关。

$$(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=K}$$ (4分)

K可逆 $\Rightarrow R(b_1, b_2, b_3) = R(a_1, a_2, a_3)$ (6分)

(5分)

由于 a_1, a_2, a_3 线性无关，则 $R(a_1, a_2, a_3) = 3$ (7分)

$\Rightarrow R(b_1, b_2, b_3) = 3$

则 b_1, b_2, b_3 线性无关. (8分)

方法二：

设 $k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 = 0$ (2分)

即 $k_1 a_1 + k_2(a_1 + a_2) + k_3(a_1 + a_2 + a_3) = 0$

即 $(k_1 + k_2 + k_3) a_1 + (k_2 + k_3) a_2 + k_3 a_3 = 0$ (4分)

因为 a_1, a_2, a_3 线性无关. (要给理由)

则 $\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$ (6分)

解得 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ (8分)

则 b_1, b_2, b_3 线性无关.

得分

七、（共 1 小题，每小题 8 分，共 8 分）

设a_1，a_2，a_3为4元非齐次线性方程组$Ax=b$的3个解向量，且$R(A)=3$，

$a_1+a_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$，$a_2+a_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，求该方程组的通解。

$n-R(A)=4-3=1$

则 $Ax=0$ 的基础解系中含1个向量 （2分）

且 $(a_1+a_2)-(a_2+a_3)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的解

则 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ （4分）

$\frac{1}{2}(a_1+a_2)=\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\\2\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$ 为 $Ax=b$ 的解 （6分）

或 $\frac{1}{2}(a_2+a_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{3}{2}\\2\end{pmatrix}$ 为 $Ax=b$ 的解

或者其它形式的解，这里结果不唯一

则该方程组的通解为

$$x=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\\2\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}\quad c\in R$$ （8分）

课室名称：________ 座位号：________ 任课教师：________ 姓名：________ 专业：________ 学号：________ 学院：________ 年级：________

装 订 密 封 线

得分

八、（共 1 小题，每小题 13 分，共 13 分）

设矩阵$A=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，

(1)求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角阵；

(2)计算A^n。

(1)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}3-\lambda & 8\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-1)-8$$

$$=\lambda^2-4\lambda+3-8 = \lambda^2-4\lambda-5$$

$$=(\lambda-5)(\lambda+1)$$

$\lambda_1=5 \quad \lambda_2=-1$ (2分)

$\lambda_1=5$

$$(A-5E)=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 1 & -4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad p_1=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix} \quad (4分)$$

$\lambda_2=-1$

$$(A+E)=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad p_2=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix} \quad (6分)$$

$$P=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad (8分)$$

(2)

$$A=P\Lambda P^{-1}, \quad A^n = P\Lambda^n P^{-1} = \begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\frac{1}{6}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix} \quad (10分)$$

$$=\begin{pmatrix}4\times 5^n & -2\times(-1)^n\\ 5^n & (-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\times 5^n+2\times(-1)^n & 8\times 5^n-8\times(-1)^n\\ 5^n-(-1)^n & 2\times 5^n-4\times(-1)^n\end{pmatrix}$$

$$或 \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\times 5^n+\frac{1}{3}\times(-1)^n & \frac{4}{3}\times 5^n-\frac{4}{3}\times(-1)^n\\ \frac{1}{6}\times 5^n-\frac{1}{6}\times(-1)^n & \frac{1}{3}\times 5^n-\frac{2}{3}\times(-1)^n\end{pmatrix}$$

(13分)

或 $P=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

得分

九、（共 1 小题，每小题 13 分，共 13 分）

设矩阵$A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$，求正交矩阵$P$和对角阵$\Lambda$，使得$P^{-1}AP=\Lambda$。

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}3-\lambda&2&2\\2&3-\lambda&2\\2&2&3-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}7-\lambda&2&2\\7-\lambda&3-\lambda&2\\7-\lambda&2&3-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}7-\lambda&2&2\\0&1-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(7-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$\lambda_1=\lambda_2=1 \quad \lambda_3=7$ (3分)

$\lambda_1=\lambda_2=1$

$$A-E=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$x_1=-x_2-x_3$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ (5分)

$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ (7分)

$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ $1+1+4$ (9分)

$\lambda_3=7$

$$A-7E=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&2&-4\\0&-6&6\\0&6&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$x_1=x_3$
$x_2=x_3$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (10分)

$\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (11分)

$$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$ (12分)

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&7\end{pmatrix}$$ (13分)