中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学一（I)》(A 卷)

学年学期: 2021–2022 学年第 1 学期　　姓　　名: ____________

学　院/系: 数学学院　　学　　号: ____________

考试方式: 闭卷　　年级专业: ____________

考试时长: 120 分钟　　班　　别: ____________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条: “考试作弊者, 不授予学士学位.”

以下为试题区域, 共 15 道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答

1. (8 分) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\alpha x}{\tan\beta x}$

解析

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\tan\beta x}\quad(\beta\neq0)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\alpha x}{\beta x}$$
$$=\frac{\alpha}{\beta}$$

2. (8 分) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{(1-\cos x)\sin x}$

解析

$$\tan x-x\sim\frac{x^3}{3},1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\sin x\sim x$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{(1-\cos x)\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{1}{2}x^2\cdot x}$$
$$=\frac{2}{3}$$

3. (8 分) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$.

解析

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}-1\right)(2x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3(2x-1)}{3x-1}}=e^{2}.$$

4. (8 分) 证明 $\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\dfrac{\pi}{2}$。

解析 $(\arcsin\alpha)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos\alpha)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arcsin\alpha+\arccos\alpha)'=0$

所以 $\arcsin\alpha+\arccos\alpha$ 是一个定值,

而 $\arcsin 0+\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$

所以 $\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

5. (8 分) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$

解析

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}+\cdots+\frac{n}{n+n}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\\
&=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\\
&=\ln(1+x)|_0^1\\
&=\ln 2
\end{aligned}$$

6. (8 分) 已知 $y\sin x-\cos(x-y)=0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解析

$$y'\sin x+y\cos x+\sin(x-y)(1-y')=0$$

$$y'(\sin x-\sin(x-y))=-y\cos x-\sin(x-y)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$$

7. (8 分) 求过点 $(2,0,-3)$ 且与两平面 $2x-2y+4z+7=0$, $3x+y-2z+5=0$ 垂直的平面方程。

解析

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(0,16,8)=8(0,2,1)$$

$$2y+(z+3)=0$$

$$2y+z+3=0$$

8. (10 分) 证明当 $e<a<b<e^2$ 时,$(b-a)\dfrac{2}{e^2}<\ln^2 b-\ln^2 a<\dfrac{4}{e}(b-a)$

解析 令 $f(x)=\ln^2 x$, 在 $[a,b]$ 上由拉格朗日中值定理

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}=f'(\xi)=\frac{2\ln\xi}{\xi}(a<\xi<b)$$

$\because \mathrm{e}<a<\xi<b<\mathrm{e}^2$

$\therefore 1<\ln\xi<2,\ \dfrac{1}{e^2}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

即 $\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}<\dfrac{2\ln\xi}{\xi}<\dfrac{4}{\mathrm{e}}$

故 $\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}<\dfrac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}<\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

$(b-a)\dfrac{2}{e^2}<\ln^2 b-\ln^2 a<\dfrac{4}{e}(b-a)$

9. (10 分) 设 $f(x)=\begin{cases}\sin\left(\ln\left(x^2-1\right)^2\right) & ,x\le 0 \\ \dfrac{\sin(\pi x)}{x(x^2+2x-3)} & ,x>0\end{cases}$, 分析它的所有间断点及其类型。

解析 (分析)

$f(x)$ 在 $x<0$ 和 $x>0$ 为初等函数表达式, 在有定义的区间上连续, 因此, 在函数没有定义的点及分段点找间断点。

(1)

在分段点 $x=0$ 处,

$$f\left(0^{-}\right)=\lim_{x\to 0^-}\sin\ln\left(x^2-1\right)^2=\sin\ln\left[\lim_{x\to 0^-}\left(x^2-1\right)^2\right]=\sin\ln 1=0$$

$$f\left(0^{+}\right)=\lim_{x\to 0^+}\pi\times\frac{\sin\pi x}{\pi x}\times\frac{1}{(x+3)(x-1)}=-\frac{\pi}{3}$$

$$f\left(0^{-}\right)\neq f\left(0^{+}\right)$$

故 $x=0$ 是第一类 (跳跃型) 间断点。

(2)

$x<0$ 时, $f(x)$ 在 $x=-1$ 处无定义.

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\sin\ln\left(x^2-1\right)^2$ 不存在 $(\neq\infty)$

故 $x=-1$ 是第二类 (振荡型) 间断点.

(3)

$x>0$ 时, $f(x)=\dfrac{\sin \pi x}{x(x+3)(x-1)}$ 在 $x=1$ 处无定义

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x(x+3)(x-1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi(x-1)}{\pi x(x+3)(x-1)}\times(-\pi)\\ &= -\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

故 $x=1$ 是第一类 (可去型) 间断点.

10. (10 分) 设 $y=e^x, x=1, y=\sqrt{1-x^2}$ 围成的区域为区域 A.

(1) (4 分) 求区域 A 的面积。

(2) (6 分) 求区域 A 绕 y 轴旋转所形成的旋转体的体积

(1) **解析**

$$\begin{aligned}&\int_0^1 e^x \mathrm{d}x-\pi\times 1^2\times\frac{1}{4}\\ =&e-1-\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(2) **解析** 设 V_1 为 $y=e^x$、y 轴, x 轴, $x=1$ 围成区域所得旋转体的体积

$$\begin{aligned}V_1 &= 2\pi\int_0^1 xe^x \mathrm{d}x\\ &= 2\pi\int_0^1 x\mathrm{d}\left(e^x\right)\\ &= 2\pi\left(xe^x|_0^1-\int_0^1 e^x\mathrm{d}x\right)\\ &= 2\pi(e-e+1)\\ &= 2\pi\end{aligned}$$

设 V_2 为 $y=\sqrt{1-x^2}$, x 轴, y 轴围成区域所得旋转体的体积

$$V_2=\frac{2}{3}\times\pi\times 1^3=\frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore V=V_1-V_2=\frac{4}{3}\pi$$

11. (8 分) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

解析

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x + x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x(\text{奇函数对称区间积分值为零})$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

设$x = \sin t$

$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{6} - \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

12. (10 分) 用定义证明 $\lim\limits_{x\to a} x^3 = a^3$。

解　**解法一**　设 $|x-a| < \frac{a}{2}$,

$\therefore \frac{a}{2} < x < \frac{3a}{2}$

$f(x) = |x^2 + ax + a^2| < f(\frac{3a}{2}) = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{3}{2}a\cdot a + a^2$,

当 $x \in \dot{U}(a,\delta)$ 时，即 $|x-a| < \delta$ 时,

$$\left|x^3 - a^3\right| = |x-a|\left|x^2 + ax + a^2\right| < |x-a|\left(\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{3}{2}a\cdot a + a^2\right)$$

$$< \frac{19}{4}a^2\varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0$, 取$\delta = \min\left\{\frac{4\varepsilon}{19a^2}, \frac{a}{2}\right\}$

当$0 < |x-a| < \delta$时

$\left|x^3 - a^3\right| < \varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to a} x^3 = a^3$

解法二

$$\left|x^2-a^3\right|=|x-a|\left|x^2+ax+a^2\right|$$

$$\text{设}|x-a|<1,\ \text{则}x\in(a-1,a+1)$$

$$f(x)=|x^2+ax+a^2|<\max\{f(a-1),f(a+1)\}$$

$$=\max\left\{\left|(a-1)^2+a^2-a+a^2\right|,\left|(a+1)^2+2a^2+a\right|\right\}$$

$$=\max\left\{\left|3a^2-3a+1\right|,\left|3a^2+3a+1\right|\right\}$$

$$\left|x^3-a^3\right|<|x-a|\times\max\left\{\left|3a^2-3a+1\right|,\left|3a^2+3a+1\right|\right\}$$

$$\text{对}\forall\varepsilon>0,\text{取}\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{|3a^2-3a+1|},\frac{\varepsilon}{|3a^2+3a+1|},\ 1\right\}$$

$$\text{当}0<|x-a|<\delta\text{时}$$

$$\left|x^3-a^3\right|<\varepsilon$$

$$\therefore\lim_{x\to a}x^3=a^3$$

13. (8 分) 求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+x+1}{(x+1)^2}$ 的渐近线。

解析

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x+1}{x(x+1)^2}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+x+1}{(x+1)^2}-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+1}{(x+1)^2}=-2$$

立即得出 $y=f(x)$ 有渐近线 $y=x-2$.

又因为 $\lim f(x)=-\infty$, 所以 $x=-1$ 是其垂直渐近线.

14. (10 分) $a_1=\sqrt{2},a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ldots\ldots,a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$ 为数列 $\{a_n\}$

证明:

(1)$\{a_n\}$ 极限存在。

(2) 求 $\{a_n\}$ 的极限值。

解析 (1) 设 $a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}}_{n\text{个根号}}$, 则 a_n 单调上升;

(2)$a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$

(3) $a_1\le 2$, 如果 $a_{n-1}\le 2$, 则 $a_n\le 2$, 根据数学归纳法, $a_n\le 2$;

(4) 根据实数公理, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在 (单调有界序列必有极限), 设为 A;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2+\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}}$, $A=\sqrt{2+A}$, $A^2=2+A$, $A^2-A-2=0$, $A=2$;

15. (12 分) 设 $f(x)$ 连续，$g(x)=\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数)。

(1) (6 分) 求 $g'(x)$。

(2) (6 分) 讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

解析 令 $u=tx$,

则

$$g(x)=\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,$$

$$g'(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u(x\neq 0)$$

由

$$\lim_{n\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$$

意味着

$$f(0)=0,g(0)=0$$

$$\begin{aligned}g'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}\\&=\frac{A}{2}\end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}g'(x)&=\lim_{x\to 0}[\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u]\\&=A-\frac{1}{2}A\\&=g'(0),\end{aligned}$$

故 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。