

中山大学《概率论与数理统计》2020-2021

学年第二学期期末试卷

满分 100 分

一、 填空题 (每空 3 分 , 共 45 分)

1、 已知 $P(A) = 0.92$, $P(B) = 0.93$, $P(B|\bar{A}) = 0.85$, 则 $P(A|\bar{B}) =$ _____ $P(A \cup B) =$ _____

2、 设事件 A 与 B 独立, A 与 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$, A 发生且 B 不发生的概率与 B 发生且 A 不发生的概率相等, 则 A 发生的概率为: _____;

3、 一间宿舍内住有 6 个同学, 求他们之中恰好有 4 个人的生日在同一个月份的概率: _____; 没有任何人的生日在同一个月份的概率 _____;

4、 已知随机变量 X 的密度函数为: $\varphi(x) = \begin{cases} Ae^x, & x < 0 \\ 1/4, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$ 则常数 $A =$ _____, 分布函数 $F(x) =$ _____, 概率 $P\{-0.5 < X < 1\} =$ _____;

5、 设随机变量 $X \sim B(2, p)$ 、 $Y \sim B(1, p)$, 若 $P\{X \geq 1\} = 5/9$, 则 $p =$ _____, 若 X 与 Y 独立, 则 $Z = \max(X, Y)$ 的分布律: _____;

与 Y 独立, 则 $Z = \max(X, Y)$ 的分布律: _____;

6、 设 $X \sim B(200, 0.01)$, $Y \sim P(4)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则 $D(2X - 3Y) =$ _____, $\text{COV}(2X - 3Y, X) =$ _____;

7、 设 X_1, X_2, \dots, X_5 是总体 $X \sim N(0, 1)$ 的简单随机样本, 则当 $k =$ _____ 时,

$$Y = \frac{k(X_1 + X_2)}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}} \sim t(3);$$

8、 设总体 $X \sim U(0, \theta)$ $\theta > 0$ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为其样本, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 为样本均值, 则 θ 的矩估计量为: _____。

9、 设样本 X_1, X_2, \dots, X_9 来自正态总体 $N(a, 1.44)$, 计算得样本观察值 $\bar{x} = 10$, 求参数 a 的置信度为 95% 的置信区间: _____;

二、 计算题 (35 分)

1、 (12 分) 设连续型随机变量 X 的密度函数为：

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求：1) $P\{|2X-1| < 2\}$ ；2) $Y = X^2$ 的密度函数 $\varphi_Y(y)$ ；3) $E(2X-1)$ ；

2、 (12 分) 设随机变量 (X, Y) 的密度函数为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1/4, & |y| < x, 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- 1) 求边缘密度函数 $\varphi_X(x), \varphi_Y(y)$ ；
- 2) 问 X 与 Y 是否独立？是否相关？
- 3) 计算 $Z = X + Y$ 的密度函数 $\varphi_Z(z)$ ；

3、 (11 分) 设总体 X 的概率密度函数为：

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \quad \theta > 0$$

X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 X 的简单随机样本。

1) 求参数 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}$;

2) 验证估计量 $\hat{\theta}$ 是否是参数 θ 的无偏估计量。

三、 应用题 (20 分)

1、(10 分) 设某人从外地赶来参加紧急会议 , 他乘火车、轮船、汽车或飞机来的概率分别是 $3/10$, $1/5$, $1/10$ 和 $2/5$ 。如果他乘飞机来 , 不会迟到 ; 而乘火车、轮船或汽车来 , 迟到的概率分别是 $1/4$, $1/3$, $1/2$ 。现此人迟到 , 试推断他乘哪一种交通工具的可能性最大 ?

2 . (10 分) 环境保护条例 , 在排放的工业废水中 , 某有害物质不得超过 0.5% , 假定有害物质含量 X 服从正态分布。现在取 5 份水样 , 测定该有害物质含量 , 得如下数据 :

0.530% , 0.542% , 0.510% , 0.495% , 0.515%

能否据此抽样结果说明有害物质含量超过了规定 ($\alpha = 0.05$) ?