最终稿高等数学一上期末考试A卷

共13道大题

一、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$ （8分）

解：该极限是“∞-∞”型，故通分化商。当 $x\to 0$ 时，$e^{-x}-1\sim -x$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)-(1-e^{-x})}{x(1-e^{-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)-(1-e^{-x})}{x^2}$$

$$\overset{\text{"洛”}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(x+x^2-1+e^{-x})'}{(x^2)'}\overset{\text{"洛”}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x-e^{-x})'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2+e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)-(1-e^{-x})}{x(1-e^{-x})}\overset{\text{"洛”}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(x+x^2-1+e^{-x})'}{(x(1-e^{-x}))'}\overset{\text{"洛”}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x-e^{-x})'}{(1-e^{-x}+xe^{-x})'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+e^{-x}}{e^{-x}+e^{-x}-xe^{-x}}=\frac{3}{2}$$

二、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n-1}{\sqrt{n^4+n^3+2}}$。 （8分）

解：该极限是“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{\sqrt{n^4+n^3+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^4}}}=3$$

三、求方程 $y\sin x-\cos\left(x^2+y\right)=3$ 所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$。 （8分）

解：方程两边对 x 求导，得 $\dfrac{dy}{dx}\sin x+y\cos x+\sin\left(x^2+y\right)\cdot\left(2x+\dfrac{dy}{dx}\right)=0$，

化简，得 $\left[\sin x+\sin\left(x^2+y\right)\right]\dfrac{dy}{dx}=-y\cos x-2x\sin\left(x^2+y\right)$ ，

解得 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y\cos x+2x\sin\left(x^2+y\right)}{\sin x+\sin\left(x^2+y\right)}$。

四、求不定积分 $\int\sqrt{e^x-2}\mathrm{d}x$ 。 （8分）

解：令 $t=\sqrt{e^x-2}$,则$e^x-2=t^2$, $x=\ln\left(t^2+2\right)$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln\left(t^2+2\right)=\dfrac{2t}{t^2+2}\mathrm{d}t$。

$$\int\sqrt{e^x-2}\mathrm{d}x=\int t\cdot\frac{2t}{t^2+2}\mathrm{d}t=2\int\frac{(t^2+2)-2}{t^2+2}\mathrm{d}t=2\left(\int\mathrm{d}t-2\int\frac{1}{t^2+2}\mathrm{d}t\right)$$

$$=2\left(t-\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C=2\left(\sqrt{e^x-2}-\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{e^x-2}}{\sqrt{2}}\right)+C$$ 。

五、求定积分 $\int_0^{2\pi}x\cos^2 x\mathrm{d}x$ （8 分）

解： $\int_0^{2\pi}x\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x\left(1+\cos 2x\right)dx=\frac{x^2}{4}\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x\cos 2xdx$，

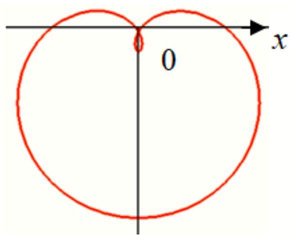
根据分部积分法，得

$$\int_0^{2\pi}x\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x\cdot d\sin 2x=\frac{1}{2}x\sin 2x\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2xdx=\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{2\pi}=0,$$

故 $\int_0^{2\pi}x\cos 2xdx=\pi^2$ 。

六、求极坐标系下的封闭曲线 $\rho=a\sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$ 的全长，其中 $a>0$.（8 分）

解：令由 $\rho=a\sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right)\ge 0,\ a>0$，得 $\sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right)\ge 0$，$0\le\frac{\theta}{3}\le\pi$，$0\le\theta\le 3\pi$ 。



$$\frac{d\rho}{d\theta}=3a\sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\frac{1}{3}=a\sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

$$ds=\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}d\theta$$

$$=\sqrt{\left(a\sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)^2+\left(a\sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)^2}d\theta$$

$$=\sqrt{\sin^6\frac{\theta}{3}+\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}d\theta$$

$t=\frac{\theta}{3}$, 则 $\theta=3t,\ d\theta=3dt$. 当 θ=0 时，$t=0$；当 θ=3π 时，$t=\pi$.

$$s=a\int_0^{3\pi}\sqrt{\sin^6\frac{\theta}{3}+\sin^4\frac{\theta}{3}\cos^2\frac{\theta}{3}}d\theta$$

$$=a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\theta}{3}d\theta=3a\int_0^{\pi}\sin^2 tdt=\frac{3}{2}a\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)dt$$

$$=\frac{3}{2}a\left[\int_0^{\pi}1\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2td(2t)\right]=\frac{3}{2}\left(a\pi-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{3}{2}\pi a$$

七． 求原点到曲面 $(x-y)^2+z^2=1$ 的最短距离.（8 分）

解： 设 $P(x,y,z)$ 是 $(x-y)^2+z^2=1$ 上任意一点,则问题就是在条件

$\phi(x,y,z)=(x-y)^2+z^2-1$ (1) 下，求函数 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的最小值.即

$d^2=x^2+y^2+z^2$ 最小值。作拉格朗日函数

$L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda[(x-y)^2+z^2-1]$

求其对 x,y,z,λ 的一阶偏导数，并使之为零，得到

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z)=2x+\lambda(2x-2y)=0 \\ L'_y(x,y,z)=2y+\lambda(-2x+2y)=0 \\ L'_z(x,y,z)=2z+\lambda 2z=0 \\ L'_\lambda(x,y,z)=x^2-2xy+y^2+z^2-1=0 \end{cases} \text{化简得} \begin{cases} x=-\lambda(x-y), & (1) \\ y=\lambda(x-y), & (2) \\ z(1+\lambda)=0, & (3) \\ (x-y)^2+z^2=1, & (4) \end{cases}$$

因为x,y,z都不为零,由(2)式可得

1）当 $\lambda=0$ 时，由(1)(2)(3)式可得 $x=0,y=0,z=0$ 不在 $(x-y)^2+z^2=1$ 上，

故舍去$x=0,y=0,z=0$。

2）当 $\lambda=-1$ 或 $x=y$ 时，由(1)(2)式可得 $x=0,y=0,$ 由(4)式可得 $z=\pm1,$

$d_1=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$

3）当 $\lambda\neq0,\lambda\neq-1,x\neq y$ 时，z=0. 由(1)÷(2)式可得 $x=-y,$ 由(4)式可得 $4x^2=1$，

$x=\pm\frac{1}{2},y=\mp\frac{1}{2}$，$d_2=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。因此，原点到曲面 $(x-y)^2+z^2=1$ 的最短

距离 $d_{\text{nix}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

八． 求函数 $f(x)=x^3e^{-x}$ 的极值点与极值、拐点和渐近线.（8 分）

解：（1） 函数 f(x)的定义域$(-\infty,+\infty)$。

（2）求单调区间和极值。

$$f'(x)=(x^3e^{-x})'=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}=x^2(3-x)e^{-x}$$

令$f'(x)=x^2(3-x)e^{-x}=0$，解得 $x=0$，$x=3$； $f(3)=3^3e^{-3}=\frac{27}{e^3}$

极值可疑点$x=0$，$x=3$将函数 f(x)的定义域$(-\infty, +\infty)$分成三个区间，列表讨论如下令$f'(x)=x^2(3-x)e^{-x}=0$，

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	↗	不是极值	↗	极大值 $\frac{27}{e^3}$	↘

$f(x)$在$(-\infty, 3)$上是单调递增的，在$(3,+\infty)$上是单调递减的，没有极值小值，

极大值 $f(3)=3^3e^{-3}=\frac{27}{e^3}$。

（3）求凹凸区间和拐点。

$$f''(x)=\left((3x^2-x^3)e^{-x}\right)'=(6x-3x^2)e^{-x}-(3x^2-x^3)e^{-x}=x(x^2-6x+6)e^{-x}$$

令$f''(x)=x(x^2-6x+6)e^{-x}=0$，解得$x=0, x=3\pm\sqrt{3}$

拐点可疑点$x=0, x=3\pm\sqrt{3}$将函数 f(x)的定义域$(-\infty, +\infty)$分成四个区间，列表讨论如下

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,3-\sqrt{3})$	$3-\sqrt{3}$	$(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$	$3+\sqrt{3}$	$(3+\sqrt{3},+\infty)$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	∩	拐点	∪	拐点	∩	拐点	∪

$f(x)$在$(-\infty,0)$上是凸的，在$(0, +\infty)$上是凹的，拐点$x=0, x=3\pm\sqrt{3}$或$(0,0)$,

$(3\pm\sqrt{3},(3\pm\sqrt{3})^3e^{-(3\pm\sqrt{3})})$。

（4）求渐近线。

1）因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}==\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=0$,

所以$y=0$是$f(x)=x^3e^{-x}$的一条水平渐近线。

定义：如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ （b 为常数），

那么 $y=b$ 就是 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线。

注：将 $x\to x\to\infty$ 换成 $x\to+\infty$，或 $x\to-\infty$ 也成立。

2）因为 $f(x)$ 定义域是 $(-\infty,+\infty)$，所以 $y=f(x)$ 无铅直渐近线.

定义：如果 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$（或 $+\infty$，或 $-\infty$），

那么 $x=x_0$ 是 $y=f(x)$ 的一条铅直渐近线.

注：将 $x\to x_0$ 换成 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 也成立。

3）$\because k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$

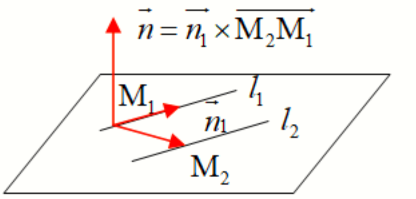
故无斜渐近线.

定义：如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\neq 0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=b$，（$k,b$ 为常数），

那么 $y=kx+b$ 是 $y=f(x)$ 的一条斜直渐近线.

注：将 $x\to x\to\infty$ 换成 $x\to+\infty$，或 $x\to-\infty$ 也成立。

九． 求通过两直线 $l_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ 和 $l_2:\dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-2}$ 的平面方程.（8 分）



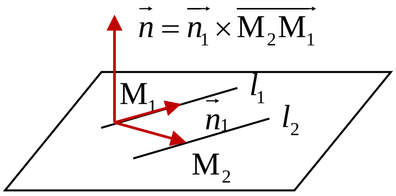
解：直线 $l_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ 的方向向量为

$\vec{n}_1=\{2,-1,1\}$，点 $M_1(1,-1,-1)$；

直线 $l_2:\dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-2}$ 的方向向量为

$\vec{n}_2=\{-4,2,-2\}$，点 $M_2(-2,2,0)$；

$\because \dfrac{-4}{2}=\dfrac{2}{-1}=\dfrac{-2}{1}$，$\therefore \vec{n}_1\parallel\vec{n}_2$



$\overrightarrow{M_2M_1}=\{-2-1,2+1,0+1\}=\{-3,3,1\}$

取所求平面的法向量为

$$\vec{n}=\vec{n_1}\times\overrightarrow{\mathrm{M}_2\mathrm{M}_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ -3 & 3 & 1\end{vmatrix}=\{-1-3,-(2+3),6-3\}=\{-4,-5,3\}$$

所求平面的方程为$-4(x+2)-5(y-2)+3(z-0)=0$

即$4x+5y+3z-2=0$。

十、求函数$F(x,y,z)=\dfrac{yz}{x^2}$在$M(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1)$处沿曲面$x^2+2y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$的外法线的方向导数。（8 分）

解：令$G(x,y,z)=x^2+2y^2+\dfrac{z^2}{4}-1,$则

$$G_x^{'}(x,y,z)=2x,\ G_y^{'}(x,y,z)=4y,\ G_x^{'}(x,y,z)=\frac{z}{2},$$

$$G_x^{'}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)=2x\Big|_{x=1/2}=1,\ G_y^{'}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)=4y\Big|_{y=1/2}=2,\ G_x^{'}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)=\frac{z}{2}\Big|_{z=1}=\frac{1}{2},$$

曲面$x^2+2y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$在$M(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1)$处的切平面的法向量为

$$\vec{n}=\left\{G'_x(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1),G'_y(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1),G'_z(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)\right\}=\left\{1,2,\frac{1}{2}\right\},\quad |\vec{n}|=\sqrt{1^2+2^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}。$$

$$\vec{n}^0=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{2}{\sqrt{21}},\frac{4}{\sqrt{21}},\frac{1}{\sqrt{21}}\right\},$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}},\cos\beta=\frac{4}{\sqrt{21}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{21}}.$$

$$F_x^{'}(x,y,z)=yz(\frac{1}{x^2})_x^{'}=-\frac{2yz}{x^3},\ F_y^{'}(x,y,z)=\frac{z}{x^2},\ F_z^{'}(x,y,z)=\frac{y}{x^2},$$

$$F_x^{'}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)=-\frac{2yz}{x^3}\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)}=-8,\ F_y^{'}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)=\frac{z}{x^2}\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)}=4,\ F_z^{'}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)=\frac{y}{x^2}\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)}=2,$$

所以，函数$F(x,y,z)=\dfrac{yz}{x^2}$在$M(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1)$处沿曲面$x^2+2y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$的外法线的方向导数为

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \vec{n}}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)}=\left.(\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma)\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)}=-8\cdot\frac{2}{\sqrt{21}}+4\cdot\frac{4}{\sqrt{21}}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{21}}=\frac{2}{\sqrt{21}}.$$

十一、讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy|^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在(0,0)处的连续性、偏导函数的存在性以及 $f(x,y)$ 在(0,0)处的可微性。

解：（1）讨论函数 $f(x,y)$ 在(0,0)处的连续性.

$$\because |xy|^{\frac{3}{2}}\leq\left[2(x^2+y^2)\right]^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}},$$

$\therefore 0\leq\dfrac{|xy|^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}\leq 2\sqrt{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\to 0,\ (x,y)\to(0,0)$ 根据夹逼定理，得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$$

因此，函数 $f(x,y)$ 在(0,0)处连续。

（2）讨论函数 $f(x,y)$ 的偏导函数的存在性.

1)当 $(x,y)=(0,0)$ 时， $f(0,0)$=0

$$f_x^{'}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{|\Delta x\cdot 0|^{\frac{3}{2}}}{(\Delta x)^2+0^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{(\Delta x)^3}=0$$

$$f_y^{'}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{|\Delta y\cdot 0|^{\frac{3}{2}}}{(\Delta y)^2+0^2}-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{(\Delta y)^3}=0$$

2)当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$f(x,y)=\frac{|xy|^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}=\begin{cases}\dfrac{(xy)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}, xy>0,\\ -\dfrac{(xy)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}, xy<0.\end{cases}$$

(i)当 $xy>0$ 时，

$$f_x^{'}(x,y)=y^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}\right)_x^{'}=y^{\frac{3}{2}}\frac{(x^{\frac{3}{2}})_x^{'}\left(x^2+y^2\right)-x^{\frac{3}{2}}\left(x^2+y^2\right)_x^{'}}{(x^2+y^2)^2}=y^{\frac{3}{2}}\frac{\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}\left(x^2+y^2\right)-x^{\frac{3}{2}}\left(2x+0\right)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=y^{\frac{3}{2}}\frac{x^{\frac{1}{2}}[3\left(x^2+y^2\right)-4x^2]}{2(x^2+y^2)^2}=\frac{(xy^3)^{\frac{1}{2}}(3y^2-x^2)}{2(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y^{'}(x,y)==\frac{(x^3y)^{\frac{1}{2}}(3x^2-y^2)}{2(x^2+y^2)^2}$$

(ii)当 $xy<0$ 时， $f(x,y)=-\frac{(xy)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}$,

$$f_x^{'}(x,y)=-y^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}\right)_x^{'}==-\frac{(xy^3)^{\frac{1}{2}}(3y^2-x^2)}{2(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y^{'}(x,y)==-\frac{(x^3y)^{\frac{1}{2}}(3x^2-y^2)}{2(x^2+y^2)^2}$$

$$f_x^{'}(x,y)=-y^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}\right)_x^{'}==-\frac{(xy^3)^{\frac{1}{2}}(3y^2-x^2)}{2(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y^{'}(x,y)==-\frac{(x^3y)^{\frac{1}{2}}(3x^2-y^2)}{2(x^2+y^2)^2}$$

$$f_x^{'}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|xy^3|^{\frac{1}{2}}(3y^2-x^2)}{2(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$f_y^{'}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x^3y|^{\frac{1}{2}}(3x^2-y^2)}{2(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

（3）讨论函数 $f(x,y)$ 在(0,0)处的可微性.

因为当取 $\Delta y=k\Delta x$ 时， $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y=k\Delta x}}\left[\frac{\left|\Delta x\cdot\Delta y\right|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right]^3=\lim\limits_{\Delta x\to0}\left[\frac{\left|k\right|^{\frac{1}{2}}\left|\Delta x\right|}{\left|\Delta x\right|\sqrt{1+k^2}}\right]^3=\frac{\left|k\right|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+k^2)^3}}$

取不同的 k，则极限值不同。

所以，

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-[f_x^{'}(0,0)\cdot\Delta x+f_y^{'}(0,0)\cdot\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-[f_x^{'}(0,0)\cdot\Delta x+f_y^{'}(0,0)\cdot\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\dfrac{\left|\Delta x\cdot\Delta y\right|^{\frac{3}{2}}}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}-0}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[\frac{\left|\Delta x\cdot\Delta y\right|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right]^3\text{不存在。}$$

因此，函数 $f(x,y)$ 在(0,0)处不可微。

十二. 求 $(1+\cos x)^2$ 在点 $x=0$ 的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒展式，并求 $f^{(n)}(0)$ 的值.（6 分）

解法一： $f(x)=(1+\cos x)^2=1+2\cos x+\cos^2 x=1+2\cos x+\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=\frac{3}{2}+2\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$

$\because (\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),\text{且}(\cos 2x)^{(n)}=2^n\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),n=1,2,\cdots$

$\therefore f^{(n)}(x)=(\frac{3}{2})^{(n)}+2(\cos x)^{(n)}+\frac{1}{2}(\cos 2x)^{(n)}=2\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}\cdot 2^n\cos(2x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$$=2\left[\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})+2^{n-2}\cos(2x+n\cdot\frac{\pi}{2})\right]$$

$$\therefore f^{(n)}(0)=2\left[\cos(n\cdot\frac{\pi}{2})+2^{n-2}\cos(n\cdot\frac{\pi}{2})\right]=2(1+2^{n-2})\cos(n\cdot\frac{\pi}{2})=\begin{cases}(-1)^m 2(1+2^{n-2}),n=2m,\\ \quad 0,\qquad n=2m-1,\end{cases}m=1,2,\cdots,$$

即 $f(0)=(1+\cos 0)^2=4$， $f'(0)=0$， $f''(0)=-4$， $f'''(0)=0$， $f^{(4)}(0)=10$，

$$\cdots,f^{(n)}(0)=2(1+2^{n-2})\cos(n\cdot\frac{\pi}{2})=\begin{cases}(-1)^m 2(1+2^{2m-2}),n=2m,\\ \quad 0,\qquad n=2m-1,\end{cases}m=1,2,\cdots,$$

根据函数 $f(x)$ 的带有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式

$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n),(x\to 0)$，得

$$f(x)=(1+\cos x)^2=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k 2(1+2^{2k-2})}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2m+1}),(x\to 0)$$

$$\text{即}f(x)=4-\frac{4}{2!}x^2+\frac{10}{4!}x^4+\cdots+\frac{(-1)^m 2(1+2^{2m-2})}{(2m)!}x^{2m}+o(x^{2m+1}),(x\to 0)$$

解法二：$\because \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1}),\ (x\to 0)$

$$\therefore \cos 2x = 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \frac{2^8 x^8}{8!} + \cdots + (-1)^m \frac{2^{2m} x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}),\ (x \to 0)$$

故 $f(x) = (1+\cos x)^2 = 1 + 2\cos x + \cos^2 x = 1 + 2\cos x + \frac{1}{2}(1+\cos 2x) = \frac{3}{2} + 2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$

$$= 4 - \frac{4}{2!}x^2 + \frac{10}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^m 2(1+2^{2m-2})}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m+1}), (x \to 0)$$

十三．设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$。令 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)}\,dt$，

证明： 1、$F'(x) \ge 2$；

2、方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.（6 分）

证明： 1、$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt + \frac{d}{dx}\int_b^x \frac{1}{f(t)}\,dt = f(x) + \frac{1}{f(x)} \ge 2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}} = 2$

2、证明 （1）先证方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内至少有一个根.

由 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$。得函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 且

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt + \int_b^a \frac{1}{f(t)}\,dt = -\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt < 0,$$

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^b \frac{1}{f(t)}\,dt = \int_a^b f(t)\,dt > 0,$$

根据零点定理，知方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内至少有一个根。

（2）再证方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内至多有一个根.

反证法：假如方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内至少有两个不同的根, 则由罗尔定理,在 (a,b) 内 $F'(x)$ 至少存在一个零点, 这与 $F'(x)\ge 2$ 矛盾. 这说明该方程在 (a,b) 内至多有一个根.

综合（1）（2）得，方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.