中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学一(I)》(A 卷)

学年学期:	2017–2018 学年第 1 学期	姓　　名:	
学　院/系:	数学学院	学　　号:	
考试方式:	闭卷	年级专业:	
考试时长:	120 分钟	班　　别:	

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者,不授予学士学位.”

以下为试题区域,共 14 道大题,总分 100 分,考生请在答题纸上作答

1. (8 分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

解析 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=0.$

2. (8 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to0+}x^{\sin x}$

解析 由洛必达法则可得 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\sin x\ln x}$

$$=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}}}=\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to0^+}e^{-\tan x}=1$$

3. (8 分) 计算积分 $\int_0^x \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$.

解析

$$\begin{aligned}&\int_0^x \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\=&x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^x-\int_0^x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\\=&x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+1.\end{aligned}$$

4. (8 分) 求函数 $y=\sin x(0\le x\le\pi)$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的侧面积。

解析

$$
\begin{aligned}
&2\pi\int_0^{\pi}\sin(x)\sqrt{\cos^2 x+1}dx\\
=&-2\pi\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}d(\cos x)\\
=&2\pi\int_{\pi}^{0}\sqrt{1+\cos^2 x}d(\cos x)\text{令}u=\cos x\\
=&2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+u^2}du\\
=&4\pi\int_0^{1}\sqrt{1+u^2}du\\
=&4\pi\left[u\sqrt{1+u^2}\Big|_0^1-\int_0^1 ud\left(\sqrt{1+u^2}\right)\right]\\
=&4\pi\left[u\sqrt{1+u^2}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}du\right]\\
=&4\pi\left[u\sqrt{1+u^2}\Big|_0^1-\int_0^1\sqrt{1+u^2}du+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du\right]\\
=&2\pi\left(\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\sqrt{2}\right)
\end{aligned}
$$

5. (8 分) 求过点 $M(0,1,2)$ 且与直线 $\begin{cases}2x-z+1=0\\x+y-2=0\end{cases}$ 垂直的平面方程。

解析

$$
\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&0&-1\\1&1&0\end{vmatrix}
=(1,-1,2)
$$

又因为平面过 $M(0,1,2)$,
所以平面的方程为 $x-(y-1)+2(z-2)=0$
即 $x-y+2z-3=0$

6. (8 分) 在曲线 $C: y=1-x^2(x>0)$ 上点 P 处作 C 的切线, 该切线与两坐标轴交与 A,B 两点

(1) (4 分) 试确定点 P 的位置, 使得 A,B 两点与坐标原点 O 所围的三角形 $\triangle OAB$ 的面积最小

(2) (2 分) 求 P 点的切线方程

(3) (2 分) 求曲线 C 与 x 轴、y 轴所围图形的面积。

(1) **解析** 设所求点 P 的坐标为 $\left(m,1-m^2\right)$, 于是, 曲线在该点处的切线方程为

$$
y-\left(1-m^2\right)=-2m(x-m)
$$

分别令 $x=0, y=0$, 得到切线与坐标轴的交点坐标为 $(0, 1+m^2)$, $\left(\frac{1+m^2}{2m}, 0\right)$,
于是所求三角形的面积为

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+m^2}{2m} \cdot \left(1+m^2\right) = \frac{\left(1+m^2\right)^2}{4m}$$

对 m 求导, 得

$$S' = \frac{2\left(1+m^2\right) \cdot 2m \cdot m - \left(1+m^2\right)^2}{4m^2} = \frac{3m^4+2m^2-1}{4m^2}$$

令 $S'=0$, 解得唯一驻点 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

由题意, 函数 $S=\frac{\left(1+m^2\right)^2}{4m}$ 在 $(0,+\infty)$ 内最小值存在, 且驻点唯一。

因此, 当 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 所求面积最小。

于是所求点 P 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\right)$。

(2) **解析** 切线方程为 $2\sqrt{3}x+3y-4=0$

(3) **解析** $\int_0^1 1-x^2 = \frac{2}{3}$

面积为 $\frac{2}{3}$

7. (8 分) 设 $z = y\cos(ax+by)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

解析

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(ax+by) - by\sin(ax+by)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -a\sin(ax+by) - aby\cos(ax+by)$$

8. (8 分) 求曲线 $y=3e^{-x^2}$ 的凹凸区间、拐点及渐近线。

解析 $y' = -6xe^{-x^2}$

$y'' = -6e^{-x^2} + 3\times(-2x)(-2x)e^{-x^2} = \left(12x^2-6\right)e^{-x^2}$

当 $y''=0$ 即 $4x^2-2=0, x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y''>0$ 时 $x\in\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

$y''<0$ 时 $x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

所以凹区间是 $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 凸区间是 $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$y\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3e^{-\frac{1}{2}}$ 所以拐点是 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 3e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 3e^{-\frac{1}{2}}\right)$

水平渐近线为 x 轴

9. (8 分) 将函数 $f(x) = x^2\ln(3+x)$ 在 $x = 0$ 处展开为带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式。

解析

$$
\begin{aligned}
& x^2\ln(3+x) \\
= & \left[\ln 3 + \ln\left(1+\frac{x}{3}\right)\right]x^2 \\
= & \left(\ln 3 + \frac{x}{3} - \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^2}{2} + \frac{(\frac{x}{3})^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(\frac{x}{3})^n}{n}\right)x^2 \\
= & \ln 3 \times x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{18} + \frac{x^5}{81} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n+2}}{3^n \times n} + o\left(x^{n+2}\right)
\end{aligned}
$$

10. (8 分) 求函数 $u = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$ 在条件 $x+y+z = \frac{\pi}{2}, (x, y, z > 0)$ 下的极值和极值点。

解析 由拉格朗日公式，令 $F(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z + 2k(x+y+z) = 0$

则

$$F'(x) = \sin y \sin z \cos x + 2k = 0$$

$$F'(y) = \sin x \sin z \cos y + 2k = 0$$

$$F'(z) = \sin x \sin y \cos z + 2k = 0$$

联立 $x+y+z = \frac{\pi}{2}$ 解方程

从而可知, $x = y = z = \frac{\pi}{2}$,

所以极值点为 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$

故 $u = \sin x \sin y \sin z = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

11. (5 分) 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处的连续性、一阶偏导数和一阶微分的存在性。

解析 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

$$
\begin{aligned}
& \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
= & \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2 x \sin x}{r}
\end{aligned}
$$

$$=\lim_{r\to 0} r^2\cos^2 x\sin x$$

$$\because \cos^2 x\sin x \text{有界}$$

于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0.$$

因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

因为关于 x 的偏导数

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0,$$

同样得关于 y 的偏导数

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}0=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

$$0\leqslant\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant|y|\to 0$$

$$\therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

所以在$(0,0)$可微

12. (5 分) 设 $z=f\left(x^2-y^2,e^{xy+x}\right)$, f 的二阶偏导数连续, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解析

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+\mathrm{e}^{x+xy}f_2'(y+1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-f_1'2y+xf_2'\mathrm{e}^{xy+x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{xy+x}f^{(0,1)}+x(y+1)\mathrm{e}^{xy+x}f^{(0,1)}+(y+1)e^{xy+x}\left(x\mathrm{e}^{xy+x}f^{(0,2)}-2yf^{(1,1)}\right)+2x\left(x\mathrm{e}^{xy+x}f^{(1,1)}-2yf^{(2,0)}\right)$$

13. (5 分) 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[-a, a](a>0)$ 上连续, $g(x)$ 为偶函数, $f(x)$ 满足 $f(x)+f(-x)=A$(A 为常数), 证明:

$$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = A\int_{0}^{a} g(x)dx$$

并利用该等式计算积分 $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+e^{\frac{1}{x}}}dx$ 的值.

解析 证 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x$

因

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x &\overset{x=-t}{=} \int_{a}^{0} f(-t)g(-t)\mathrm{d}(-t)\\ &= \int_{0}^{a} f(-t)g(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x &= \int_{0}^{a} f(-x)g(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]g(x)\mathrm{d}x\\ &= A\int_{0}^{a} g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, g(x) = x^2$ (偶函数). 则

$$f(x)+f(-x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = 1$$

于是,

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

14. (5 分) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 在区间 $(0,1)$ 可导, 且 $f(1)=0$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)+\frac{1}{\xi}f(\xi)=0$.

解析 证将结论改写为 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=,$), 则只要证明 $[xf(x)]'|_{x=\xi}=0$ 成立即可.

作辅助函数 $F(x)=xf(x)$, 显然 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 在区间 $(0,1)$ 可导, $F(0)=F(1)=0$, 满足罗尔定理的条件,

则存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 即 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$,

所以 $f'(\xi)+\frac{1}{\xi}f(\xi)=0$.