

中山大学本科生期末考试

考试科目：《高等数学一(II)》

学年学期：2020 学年第二学期

姓 名：_____

学 院/系：数学学院

学 号：_____

考试方式：闭卷

年级专业：_____

考试时长：120 分钟

班 别：_____

警示

《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

-----以下为试题区域，共 12 道大题，总分 100 分，考生请在答题纸上作答-----

一、确定实数 α 的范围，使函数 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^\alpha \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ ，在 $(0, 0)$ 处

可微。(12分)

二、计算曲线积分 $\oint_L (xy^2 - \sin y) dy - (\cos x + x^2 y) dx$ ，其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 4$ ，积分方向为沿 L 逆时针方向。(12分)

三、设三角形的周长为定值 $2p$ ，求三边长使绕一边旋转所得到的旋转体体积最大。(12分)

四、求微分方程 $y \ln y dx + (x - \ln y) dy = 0$ 的通解。(8分)

五、求微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + \frac{dy}{dx}$ 的通解。(8分)

六、求微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = e^x + \cos x$ 的通解。(8分)

七、判断级数 $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \dots$ 是收敛还是发散的。(6分)

八、根据 $a(a > 0)$ 的值讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)^a$ 是收敛还是发散的。(6分)

九、函数项级数: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$, 证明: (1) 在任意闭区间 $[-M, M]$ (M 为大于0的给定的常数) 上一致收敛; (2) 在 $(-\infty, \infty)$ 不一致收敛。(8分)

十、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{4n}$ 的收敛半径。(6分)

十一、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和函数。(6分)

十二、求函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式。(8分)