

中山大学本科生期末考试

考试科目：《线性代数》(A 卷)

学年学期：2018–2019 学年第 1 学期

姓 名：_____

学 院/系：数学学院

学 号：_____

考试方式：闭卷

年级专业：_____

考试时长：120 分钟

班 别：_____

警示

《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

以下为试题区域，共 10 道大题，总分 100 分，考生请在答题纸上作答

一、填空题

1. 排列 4321 是 (偶排列) (填入 “奇排列” 或 “偶排列”)

2. 设 $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 则 $A^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

3. 设 A 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 2$, 则 $|2A^*| = (32)$

解析:

$$|2A^*| = 2^3 |A^*| = 8 \times |A|^2 = 32$$

4. 设 A 列数为 3, $R(A) = 2$, 且方程组 $Ax = b$ 有两个不相等的特解 η_1, η_2 , 则其通解为 $(c(\eta_1 - \eta_2) + \eta_1)$

解析:

A 列数为 3, 所以 $Ax = b$ 为三元线性方程组, 又因为 $R(A) = 2$ 故 $Ax = 0$ 的基础解系有一个向量, 通解为 $c(\eta_1 - \eta_2) + \eta_1$

5. 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶矩阵且 $R(A) = n - 2$, 则 $R(A^*) = (0)$

解析:

由题意 A 的所有 $n - 1$ 阶子式都为 0, 由伴随矩阵定义可知 $A^* = 0$, 所以 $R(A^*) = 0$

6. 已知 3 阶方阵 A 的特征值分别为 0, 1, -1, 则 $|A^2 + A - 2E| = (0)$

解析: 设 A 的特征值为 λ , 则 $A^2 + A - 2E$ 的特征值为 $\lambda^2 + \lambda - 2$

即 -2, 0, -2,

$$|A^2 + A - 2E| = -2 \times 0 \times (-2) = 0$$

7. 设有向量组 a_1, a_2, a_3 , 则向量组

$$b_1 = a_1 - a_2, b_2 = a_2 - a_3, b_3 = a_3 - a_1$$

的线性关系是 (线性相关) (填入 “线性相关”、“线性无关” 或 “不能确定”)

解析:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(a_1, a_2, a_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [b_1, b_2, b_3]$$

$$\det(A) = 0, \therefore R(A) < 3$$

$$\therefore R([b_1, b_2, b_3]) < R(A) < 3$$

所以 $[b_1, b_2, b_3]$ 线性相关

8. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵且 $m > n$, 则矩阵 $C_1 = AB$ (不可逆), 矩阵 $C_2 = BA$ (不能确定) (填入 “不可逆”、“可逆” 或 “不能确定”)

解析:

$$C_1 \text{ 为 } m \text{ 阶方阵, } C_2 \text{ 为 } n \text{ 阶方阵, } R(A) < n, R(B) < n, R(C_1) < \min\{R(A), R(B)\} \leq n < m,$$

$\therefore C_1$ 不可逆

$$R(A) < n, R(B) < n, R(C_1) < \min\{R(A), R(B)\} \leq n$$

$\therefore C_2$ 不确定。

9. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 A 的特征值有 (1), 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 矩阵 A (不可) 对角化. (填入 “可” 或 “不可”)

二、(共 8 分) 计算行列式
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

解:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

三、(共 8 分) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} .

解:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

四、(共 10 分) 设有向量组 A :

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

求 A 的一个最大无关组, 并把其余向量用最大无关组线性表示.

解:

以向量组为列向量组成 A , 应用初等行变换化为最简形式.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可知, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为向量组的一个极大无关组.

所以 $\alpha_4 = -4\alpha_1 - 3\alpha_2, \alpha_5 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$

五、考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

求出此方程的通解并写出其对应的齐次方程组的一个基础解系.

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{通解为 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{基础解系为 } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

六、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. (共 6 分) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 是对角阵.

2. (共 4 分) 求 A^n , 其中 n 是正整数.

解:

(1) 由特征方程

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

解得特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

对应于 $\lambda_1 = 1$ 求解 $(A - 1E)x = 0$, 由

$$A - E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得一个特征向量为

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

对应于 $\lambda_2 = 2$ 求解 $(A - 2E)x = 0$, 由

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得一个特征向量为

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

取 $P = (p_1, p_2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 则 P 为可逆阵, 且

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

七、

1. (共 14 分) λ 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}.$$

(1) 无解; (2) 有唯一解; (3) 有无限多解并求出方程的通解.

解:

系数矩阵 \mathbf{A} 的行列式为

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \rightarrow (\lambda + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1}(\lambda + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

当 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 时, 即当 $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$ 时, $R(\mathbf{A}) = 3$, 方程组有惟一解;

当 $\lambda = 1$ 时, 增广矩阵成为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见, $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B}) = 1 < 3$, 于是方程组有无限多解. 因同解方程为 $x_1 = -x_2 - x_3 + 1$,

$$\text{故通解为 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

$$\text{当 } \lambda = -2 \text{ 时, } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

可见 $R(\mathbf{A}) = 2, R(\mathbf{B}) = 3, R(\mathbf{A}) \neq R(\mathbf{B})$, 于是方程组无解.

2. (共 8 分) 考虑二次型

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3$$

求正交变换 $x = Py$ 使得 $f(y) = f(y_1, y_2, y_3)$ 是标准形.

解:

二次型矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1-\lambda \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1+\lambda & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 1+\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(-\lambda(1+\lambda)+2) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2) \end{aligned}$$

$\therefore A$ 的特征值为: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$. 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 解方程 $(A - \lambda E)x = 0$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系: $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 将 ξ_1, ξ_2 正交化得 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

将 η_1, η_2 单位化得

$$p_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

当 $\lambda_3 = -2$ 时, 解方程 $(A + 2E)x = 0$

$$\begin{aligned} A + 2E &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

得基础解系: $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位化得

$$p_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

得到正交矩阵 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, \therefore 所求正交变换 $x = Py$ 得

$$f(x_1, x_2, x_3)|_{x=Py} = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2.$$