# 第五章 一阶逻辑等值演算与推理

主要内容

- 一阶逻辑等值式与基本的等值式
- 置换规则、换名规则、代替规则
- 前束范式
- 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$及其推理规则

# 5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

**定义5.1** 设$A$, $B$是两个谓词公式, 如果$A \leftrightarrow B$是永真式, 则称$A$与$B$**等值**, 记作$A \Leftrightarrow B$, 并称$A \Leftrightarrow B$是**等值式**

基本等值式

第一组 命题逻辑中16组基本等值式的代换实例

例如，$\neg\neg\forall xF(x) \Leftrightarrow \forall xF(x)$,

$\forall xF(x) \rightarrow \exists yG(y) \Leftrightarrow \neg\forall xF(x) \vee \exists yG(y)$ 等

第二组

(1) 消去量词等值式

设$D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

受到全称量词约束的谓词为真，当且仅当该谓词对于所有个体常项均为真

① $\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$

② $\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)$

受到存在量词约束的谓词为真，当且仅当该谓词对于至少一个个体常项为真

# 基本等值式

**(2) 量词否定等值式**

① $\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$

有人不喜欢吃零食

② $\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x\neg A(x)$

没有不犯错的人

**(3) 量词辖域收缩与扩张等值式.**

$A(x)$ 是含 $x$ 自由出现的公式，$B$ 中不含 $x$

关于全称量词的：

① $\forall x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x)\vee B$

② $\forall x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x)\wedge B$

③ $\forall x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x)\rightarrow B$

④ $\forall x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\forall x A(x)$

# 基本等值式

关于存在量词的：

① $\exists x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee B$

② $\exists x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\wedge B$

③ $\exists x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\rightarrow B$

④ $\exists x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$

**(4) 量词分配等值式**

任何人都有手有脚⇔任何人都有手，并且任何人都有脚

① $\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

② $\exists x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

注意：$\forall$对$\vee$，$\exists$对$\wedge$无分配律

有人用左手吃饭或者用右手吃饭⇔
有人用左手吃饭，或者有人用右手吃饭

# 置换规则、换名规则、代替规则

## 1. 置换规则

设$\Phi(A)$是含$A$的公式, 那么, 若$A\Leftrightarrow B$, 则$\Phi(A)\Leftrightarrow\Phi(B)$.

## 2. 换名规则

设$A$为一公式，将$A$中某量词辖域中个体变项的所有约束出现及相应的指导变元换成该量词辖域中未曾出现过的个体变项符号，其余部分不变，设所得公式为$A'$，则$A'\Leftrightarrow A$.

$$\forall x\big(F(x)\rightarrow G(y)\big)\Leftrightarrow\forall z\big(F(z)\rightarrow G(y)\big)$$

## 3. 代替规则

设$A$为一公式，将$A$中某个个体变项的所有自由出现用$A$中未曾出现过的个体变项符号代替，其余部分不变，设所得公式为$A'$，则$A'\Leftrightarrow A$.

$$\forall x\big(F(x)\rightarrow G(y)\big)\Leftrightarrow\forall x\big(F(x)\rightarrow G(z)\big)$$

# 实例

**例1** 将下面命题用两种形式符号化, 并证明两者等值:

(1) 没有不犯错误的人

解 令$F(x)$: $x$是人, $G(x)$: $x$犯错误.

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ 或 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

$\Leftrightarrow \forall x\neg(F(x)\wedge\neg G(x))$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall x(\neg F(x)\vee G(x))$ 置换

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 置换

# 实例

**(2) 不是所有的人都爱看电影**

解 令$F(x)$：$x$是人，$G(x)$：$x$爱看电影.

$\neg\forall x(F(x)\to G(x))$ 或 $\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

$$\begin{aligned}
&\neg\forall x(F(x)\to G(x)) \\
\Leftrightarrow\ &\exists x\neg(F(x)\to G(x)) && \text{量词否定等值式} \\
\Leftrightarrow\ &\exists x\neg(\neg F(x)\vee G(x)) && \text{置换} \\
\Leftrightarrow\ &\exists x(F(x)\wedge\neg G(x)) && \text{置换}
\end{aligned}$$

# 实例

例2 将公式化成等值的不含既有约束出现、又有自由出现的个体变项：$\forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

解 $\forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists tG(x,t,z))$ 换名规则

$\Leftrightarrow \forall x\exists t(F(x,y,z)\rightarrow G(x,t,z))$ 辖域扩张等值式

或者

$\forall x(F(x,y,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x,u,z)\rightarrow\exists yG(x,y,z))$ 代替规则

$\Leftrightarrow \forall x\exists y(F(x,u,z)\rightarrow G(x,y,z))$ 辖域扩张等值式

# 实例

**例3** 设个体域$D=\{a,b,c\}$, 消去下述公式中的量词:

(1) $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$

解 $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$

$\Leftrightarrow (\exists y(F(a)\rightarrow G(y)))\wedge(\exists y(F(b)\rightarrow G(y)))\wedge(\exists y(F(c)\rightarrow G(y)))$

$\Leftrightarrow((F(a)\rightarrow G(a))\vee(F(a)\rightarrow G(b))\vee(F(a)\rightarrow G(c)))$

$\wedge((F(b)\rightarrow G(a))\vee(F(b)\rightarrow G(b))\vee(F(b)\rightarrow G(c)))$

$\wedge((F(c)\rightarrow G(a))\vee(F(c)\rightarrow G(b))\vee(F(c)\rightarrow G(c)))$

# 实例

解法二

$$\forall x \exists y(F(x) \to G(y))$$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \to \exists y G(y))$ 辖域缩小等值式

$$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \to G(a) \vee G(b) \vee G(c))$$

$$\Leftrightarrow (F(a) \to G(a) \vee G(b) \vee G(c))$$

$$\wedge (F(b) \to G(a) \vee G(b) \vee G(c))$$

$$\wedge (F(c) \to G(a) \vee G(b) \vee G(c))$$

解法三？

# 实例

(2) $\exists x \forall y F(x,y)$

$$\exists x \forall y F(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(F(x,a) \wedge F(x,b) \wedge F(x,c))$$

$$\Leftrightarrow (F(a,a) \wedge F(a,b) \wedge F(a,c))$$

$$\vee (F(b,a) \wedge F(b,b) \wedge F(b,c))$$

$$\vee (F(c,a) \wedge F(c,b) \wedge F(c,c))$$

# 练习1

1. 给定解释I如下:

(1) 个体域$D=\{2,3\}$

(2) $\bar{a}=2$

(3) $\bar{f}(x): \bar{f}(2)=3, \quad \bar{f}(3)=2$

(4) $\bar{F}(x): \bar{F}(2)=0, \quad \bar{F}(3)=1$

$\bar{G}(x,y): \bar{G}(2,2)=\bar{G}(2,3)=\bar{G}(3,2)=1, \quad \bar{G}(3,3)=0$

求下述在$I$下的解释及其真值:

$\forall x\exists y(F(f(x))\wedge G(y,f(a)))$

解 $\Leftrightarrow \forall xF(f(x))\wedge\exists yG(y,f(a))$

$\Leftrightarrow F(f(2))\wedge F(f(3))\wedge(G(2,f(2))\vee G(3,f(2)))$

$\Leftrightarrow F(3)\wedge F(2)\wedge(G(2,3)\vee G(3,3))$

$\Leftrightarrow 1\wedge 0\wedge(1\vee 0)\Leftrightarrow 0$

# 作业9

**习题5：2(1), 2(4), 5**

离散数

# 0920离散数学

09月20日 08:00 开始签到

长按识别小程序码，进行签到

# 5.2 一阶逻辑前束范式

定义5.2 设$A$为一个一阶逻辑公式，若$A$具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$$

则称$A$为前束范式，其中$Q_i$ ($1\le i\le k$)为$\forall$或$\exists$，$B$为不含量词的公式.

例如， $\forall x\neg(F(x)\wedge G(x))$

$\forall x\exists y(F(x)\rightarrow(G(y)\wedge H(x,y)))$ 是前束范式

而 $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$

$\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$ 不是前束范式，

# 前束范式存在定理

**定理5.1（前束范式存在定理）**

一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式

**例4** 求下列公式的前束范式

(1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

解 $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg(M(x)\wedge F(x)))$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x)\vee\neg F(x))$ （置换规则）

$\Leftrightarrow \forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$ （置换规则）

后两步结果都是前束范式，说明公式的前束范式不惟一.

# 求前束范式的实例

(2) $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

解 $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$ （量词分配等值式）

或

$\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$ （换名规则）

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$ （辖域扩张规则）

# 求前束范式的实例

(3) $\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$

解 $\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$

$\Leftrightarrow \forall zF(z)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$ （换名规则）

$\Leftrightarrow \exists z\exists y(F(z)\rightarrow(G(x,y)\wedge\neg H(y)))$ （辖域扩张）

或

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(z,y)\wedge\neg H(y))$ （代替规则）

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\rightarrow(G(z,y)\wedge\neg H(y)))$ （辖域扩张）

存在既是自由出现，又是约束出现的个体变项，则需要使用换名或代替规则

# 练习2

2.求下述公式的前束范式:

$\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))$

解　使用换名规则,

$\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall zF(z)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists z(F(z)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists z\exists y(F(z)\rightarrow(G(x,y)\wedge H(x,y)))$

使用代替规则

$\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(z,y)\wedge H(z,y))$

$\Leftrightarrow \exists x(F(x)\rightarrow\exists y(G(z,y)\wedge H(z,y))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\rightarrow(G(z,y)\wedge H(z,y)))$

# 5.3 一阶逻辑的推论理论

推理的形式结构

1. $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$

   若上式是永真式, 则称推理正确, 记作$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$

2. 前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$

   结论: $B$

# 推理定理

第一组 命题逻辑推理定理的代换实例

如, $\forall xF(x)\wedge\exists yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$

第二组 基本等值式生成的推理定理

如 $\neg\forall xF(x)\Rightarrow\exists x\neg F(x)$, $\exists x\neg F(x) \Rightarrow \neg\forall xF(x)$

第三组 其他常用推理定律

(1) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$

(2) $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

(3) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$

(4) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

注意（1、2）与量词分配律的区别

① $\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

② $\exists x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

# 推理定理（续）

(1) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$

(2) $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

(3) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$

(4) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

验证反方向推理不成立：
设论域为人类集合
（1,2）$A(x)$: $x$是男性， $B(x)$: $x$是女性
设论域为集合$\{1, 2, \ldots, 10\}$
（3,4）$A(x)$: $x \geq 5$, $B(x)$: $x \geq 6$

# 推理定理（续）

在论域$D=\{a_1,\ldots,a_n\}$中证明

$$(1)\quad \forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x\big(A(x)\vee B(x)\big)$$

证：

$$
\begin{aligned}
&\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\\
&\Leftrightarrow\big(A(a_1)\wedge\cdots\wedge A(a_n)\big)\vee\big(B(a_1)\wedge\cdots\wedge B(a_n)\big)\\
&\Leftrightarrow\big(A(a_1)\vee B(a_1)\big)\wedge\cdots\wedge\big(A(a_n)\vee B(a_n)\big)\wedge\cdots\\
&\Rightarrow\big(A(a_1)\vee B(a_1)\big)\wedge\cdots\wedge\big(A(a_n)\vee B(a_n)\big)\qquad\text{(化简律)}\\
&\Rightarrow\forall x\big(A(x)\vee B(x)\big)
\end{aligned}
$$

$$(2)\quad \exists x\big(A(x)\wedge B(x)\big)\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$$

证明方法类似

# 推理定理（续）

(3)　$\forall x\big(A(x) \to B(x)\big) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$

使用附加前提法证明：

$$\forall x\big(A(x) \to B(x)\big) \wedge \forall x A(x)$$

$$\Leftrightarrow \big(A(a_1) \to B(a_1)\big) \wedge \cdots \wedge \big(A(a_n) \to B(a_n)\big) \wedge \big(A(a_1) \wedge \cdots \wedge A(a_n)\big)$$

$$\Leftrightarrow \Big(\big(A(a_1) \to B(a_1)\big) \wedge A(a_1)\Big) \wedge \cdots \wedge \Big(\big(A(a_n) \to B(a_n)\big) \wedge A(a_n)\Big)$$

$$\Leftrightarrow \Big(\big(\neg A(a_1) \vee B(a_1)\big) \wedge A(a_1)\Big) \wedge \cdots \wedge \Big(\big(\neg A(a_n) \vee B(a_n)\big) \wedge A(a_n)\Big)$$

$$\Leftrightarrow \big(A(a_1) \wedge B(a_1)\big) \wedge \cdots \wedge \big(A(a_n) \wedge B(a_n)\big)$$

$$\Rightarrow B(a_1) \wedge \cdots \wedge B(a_n) \Leftrightarrow \forall x B(x)$$

# 推理定理（续）

(4) $\forall x\big(A(x)\to B(x)\big)\Rightarrow \exists xA(x)\to \exists xB(x)$

使用反证法：

$$\forall x\big(A(x)\to B(x)\big)\wedge\neg\big(\exists xA(x)\to\exists xB(x)\big)$$

$$\Leftrightarrow \forall x\big(A(x)\to B(x)\big)\wedge\exists xA(x)\wedge\neg\exists xB(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x\big(A(x)\to B(x)\big)\wedge\neg B(a_1)\wedge\cdots\wedge\neg B(a_n)\wedge\exists xA(x)$$

$$\Leftrightarrow \big(A(a_1)\to B(a_1)\big)\wedge\cdots\wedge\big(A(a_n)\to B(a_n)\big)\wedge\neg B(a_1)\wedge\cdots\wedge\neg B(a_n)\wedge\exists xA(x)$$

$$\Leftrightarrow \Big(\big(A(a_1)\to B(a_1)\big)\wedge\neg B(a_1)\Big)\wedge\cdots\wedge\Big(\big(A(a_n)\to B(a_n)\big)\wedge\neg B(a_n)\Big)\wedge\exists xA(x)$$

$$\Leftrightarrow \big(\neg A(a_1)\wedge\neg B(a_1)\big)\wedge\cdots\wedge\big(\neg A(a_n)\wedge\neg B(a_n)\big)\wedge\exists xA(x)$$

$$\Rightarrow \neg A(a_1)\wedge\cdots\wedge\neg A(a_1)\wedge\exists xA(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x\neg A(x)\wedge\exists xA(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg\exists xA(x)\wedge\exists xA(x)\Leftrightarrow 0$$

# 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$

**定义5.3 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$**定义如下:

1. 字母表. 同一阶语言$\mathscr{L}$ 的字母表
2. 合式公式. 同$\mathscr{L}$的合式公式
3. 推理规则:

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

(4) 假言推理规则

(5) 附加规则

(6) 化简规则

(7) 拒取式规则

# 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$

**(8) 假言三段论规则**

**(9) 析取三段论规则**

**(10) 构造性二难推理规则**

**(11) 合取引入规则**

**(12)结论否定引入（反证法）**

**(13)附加前提引入（附加前提法）**

**(14) ∃-规则**

**(15) ∃+规则**

**(16) ∀-规则**

**(17) ∀+规则**

# 量词消去引入规则

以下四个规则中：$x, y$是个体变项, $c$是个体常项

1. 全称量词消去规则(∀-)

$$\frac{\forall x A(x)}{\therefore A(y)} \quad \text{或} \quad \frac{\forall x A(x)}{\therefore A(c)}$$

使用条件：若$A(x)$含有$\forall y$或$\exists y$，则其辖域中不包含自由出现的$x$.

E.g., 令$A(x)$: $\exists y(x > y)$，则

$\forall x A(x) = \forall x \exists y(x > y)$不能使用上述规则消去$x$，否则将得到$\exists y(y > y) \Leftrightarrow 0$

# 量词消去引入规则

2. 全称量词引入规则(∀+)

$$\frac{A(y)}{\therefore \forall x A(x)}$$

使用条件: $y$不在任何前提中自由出现

要证明$\forall x A(x)$，只需要证明任意$A(y)$；为了保证不引入额外的约束，需要$y$不在前提中自由出现

# 量词消去引入规则

**3. 存在量词消去规则(∃-)**

$$\frac{A(y) \to B}{\therefore \exists x A(x) \to B}$$

使用条件: $y$不在前提自由出现，也不在$B$中出现

$$A(y) \to B \Rightarrow \forall x(A(x) \to B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \to B$$

# 量词消去引入规则

**4. 存在量词引入规则(∃+)**

$$\frac{A(y)}{\therefore \exists x A(x)} \quad \text{或} \quad \frac{B \to A(y)}{\therefore B \to \exists x A(x)}$$

$$\frac{A(c)}{\therefore \exists x A(x)} \quad \text{或} \quad \frac{B \to A(c)}{\therefore B \to \exists x A(x)}$$

**使用条件：若$A(y)$中含有$\forall x$，则其辖域内不含有自由出现的$y$；若$A(c)$中含有$\exists x$，则其辖域内不含有$c$**

$$A(0): \exists x(x > 0) \Leftrightarrow 1, D = \{0,1\}$$
$$\exists x A(x) \Leftrightarrow \exists x(x > x) \Leftrightarrow 0$$

∃-

$$\frac{A(y) \to B}{\therefore \exists x A(x) \to B}$$

使用条件: $y$不在前提中自由出现，也不在$B$中出现

∃+

$$\frac{B \to A(y)}{\therefore B \to \exists x A(x)}$$

使用条件:若$A(y)$中含有$\forall x$，则其辖域内不含有自由出现的$y$

# 构造推理证明的实例

例5 在自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$中构造下面推理的证明, 取个体域R:

任何自然数都是整数. 存在自然数. 所以, 存在整数.

解 设$F(x)$:$x$是自然数, $G(x)$:$x$是整数.

前提: $\forall x(F(x)\to G(x))$, $\exists xF(x)$

结论: $\exists xG(x)$

证明:

① $\forall x(F(x)\to G(x))$ 前提引入

② $F(y)\to G(y)$ ①$\forall$-

③ $F(y)\to\exists xG(x)$ ②$\exists$+

④ $\exists xF(x)\to\exists xG(x)$ ③$\exists$-

⑤ $\exists xF(x)$ 前提引入

⑥ $\exists xG(x)$ ④⑤假言推理

注: ③ ④顺序不能交换

# 构造推理证明的实例

例6 在自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$中构造下面推理的证明, 取个体域R:
不存在能表示成分数的无理数. 有理数都能表示成分数.
所以, 有理数都不是无理数.

解 设$F(x)$:$x$是无理数, $G(x)$:$x$是有理数, $H(x)$:$x$能表示成分数.

前提: $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$, $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论: $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

# 构造推理证明的实例

前提: $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x)), \forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论: $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

证明:

| | |
|---|---|
| ① $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$ | 前提引入 |
| ② $\forall x(\neg F(x)\vee\neg H(x))$ | ①置换 |
| ③ $\forall x(F(x)\rightarrow\neg H(x))$ | ②置换 |
| ④ $F(y)\rightarrow\neg H(y)$ | ③$\forall$- |
| ⑤ $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$ | 前提引入 |
| ⑥ $G(y)\rightarrow H(y)$ | ⑤$\forall$- |
| ⑦ $H(y)\rightarrow\neg F(y)$ | ④置换 |
| ⑧ $G(y)\rightarrow\neg F(y)$ | ⑥⑦假言三段论 |
| ⑨ $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$ | ⑧$\forall$+ |

# 重要提示

反例2. 前提: $\forall x(P(x)\to Q(x)), P(x)$

结论: $\forall xQ(x)$

证明:

| | |
|---|---|
| ① $\forall x(P(x)\to Q(x))$ | 前提引入 |
| ② $\forall y(P(y)\to Q(y))$ | ①换名 |
| ③ $P(x)\to Q(x)$ | ② $\forall$- |
| ④ $P(x)$ | 前提引入 |
| ⑤ $Q(x)$ | ③ ④假言推理 |
| ⑥ $\forall yQ(y)$ | ⑤ $\forall$+ |
| ⑦ $\forall xQ(x)$ | ⑥换名 |

取解释$I$: 个体域为Z,$\overline{P}(x)$: $x$为偶数,$\overline{Q}(x)$: $x$ 被2整除，$\sigma(x)=2$

在$I$下前提为真, 结论为假, 从而推理不正确

错误原因: 使用$\forall$+规则, 而$x$在前提的公式中自由出现.

# 练习3

**3.构造下面推理的证明:**

**(1) 前提：$\forall x(F(x)\to G(x)), \forall xF(x)$**

**结论：$\forall xG(x)$**

**证明：**

| | |
|---|---|
| ① $\forall x(F(x)\to G(x))$ | 前提引入 |
| ② $F(y)\to G(y)$ | ①$\forall -$ |
| ③ $\forall xF(x)$ | 前提引入 |
| ④ $F(y)$ | ③$\forall -$ |
| ⑤ $G(y)$ | ②④假言推理 |
| ⑥ $\forall xG(x)$ | ⑤$\forall +$ |

注：没有明确问题背景时，默认$F(x)$等为原子公式，不包含其他个体变项

# 练习3(续)

(2) 前提：$\forall x(F(x)\vee G(x)), \neg\exists xG(x)$

结论：$\exists xF(x)$

证明：用归谬法

| | |
|---|---|
| ① $\neg\exists xF(x)$ | 结论否定引入 |
| ② $\forall x\neg F(x)$ | ①置换 |
| ③ $\neg F(c)$ | ②$\forall-$ |
| ④ $\neg\exists xG(x)$ | 前提引入 |
| ⑤ $\forall x\neg G(x)$ | ④置换 |
| ⑥ $\neg G(c)$ | ⑤ $\forall-$ |
| ⑦ $\forall x(F(x)\vee G(x))$, | 前提引入 |
| ⑧ $F(c)\vee G(c)$ | ⑦ $\forall-$ |
| ⑨ $F(c)$ | ⑥⑧析取三段论 |
| ⑩ 0 | ③⑨合取 |

# 练习3(续)

(3)前提：$\forall x(F(x)\to G(x)), \forall x(G(x)\to H(x))$

结论：$\forall xF(x)\to\forall xH(x)$

证明: 用附加前提法

| | |
|---|---|
| ① $\forall xF(x)$ | 附加前提引入 |
| ② $F(y)$ | ①$\forall-$ |
| ③ $\forall x(F(x)\to G(x))$ | 前提引入 |
| ④ $F(y)\to G(y)$ | ③$\forall-$ |
| ⑤ $\forall x(G(x)\to H(x))$ | 前提引入 |
| ⑥ $G(y)\to H(y)$ | ⑤$\forall-$ |
| ⑦ $F(y)\to H(y)$ | ④⑥假言三段论 |
| ⑧ $H(y)$ | ②⑦假言推理 |
| ⑨ $\forall xH(x)$ | ⑧$\forall+$ |

# 练习4

**4.** 在自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$中，构造推理的证明.

人都喜欢吃蔬菜. 但不是所有的人都喜欢吃鱼. 所以, 存在喜欢吃蔬菜而不喜欢吃鱼的人.

解 令$F(x)$: $x$为人，$G(x)$: $x$喜欢吃蔬菜，$H(x)$: $x$喜欢吃鱼.

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)), \neg\forall x(F(x)\rightarrow H(x))$

结论：$\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$

# 练习4(续)

前提：$\forall x(F(x)\to G(x)), \neg\forall x(F(x)\to H(x))$

结论：$\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$

证明：用归谬法

| | |
|---|---|
| (1) $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$ | 结论否定引入 |
| (2) $\forall x\neg(F(x)\wedge G(x)\wedge\neg H(x))$ | (1)置换 |
| (3) $\neg(F(y)\wedge G(y)\wedge\neg H(y))$ | (2)$\forall-$ |
| (4) $G(y)\to \neg F(y)\vee H(y)$ | (3)置换 |
| (5) $\forall x(F(x)\to G(x))$ | 前提引入 |
| (6) $F(y)\to G(y)$ | (5)$\forall-$ |
| (7) $F(y)\to \neg F(y)\vee H(y)$ | (4)(6)假言三段论 |
| (8) $F(y)\to H(y)$ | (7)置换 |
| (9) $\forall x(F(x)\to H(x))$ | (8)$\forall+$ |
| (10) $\neg\forall x(F(x)\to H(x))$ | 前提引入 |
| (11) 0 | (9)(10)合取 |

# 作业10

**习题5：12(4,5)、15、24、25**

# 第五章 习题课

主要内容

- 一阶逻辑等值式

  基本等值式，置换规则、换名规则、代替规则
- 前束范式
- 推理的形式结构
- 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$

  推理定律、推理规则

# 基本要求

- 深刻理解并牢记一阶逻辑中的重要等值式, 并能准确而熟练地应用它们.
- 熟练正确地使用置换规则、换名规则、代替规则.
- 熟练地求出给定公式的前束范式.
- 深刻理解自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$的定义，牢记$N_{\mathscr{L}}$中的各条推理规则，特别是注意使用∀−、∀+、∃+、∃− 4条推理规则的条件.
- 能正确地给出有效推理的证明.