第四部分 组合数学

组合数学的研究内容

- 组合存在性
- 组合计数
- 组合枚举
- 组合优化

本书的内容

- 基本的组合计数公式
- 递推方程与生成函数

第十二章 基本的组合计数公式

主要内容

- 加法法则与乘法法则
- 排列与组合
- 二项式定理与组合恒等式
- 多项式定理

12.1 加法法则与乘法法则

- 加法法则
- 乘法法则
- 分类处理与分步处理

加法法则

加法法则：事件A有 m 种产生方式，事件 B 有n 种产生方式，则 “事件A或B” 有 $m+n$ 种产生方式.

使用条件：事件 A 与 B 产生方式不重叠(不存在某个产生方式，使得A或B同时产生)

适用问题：分类选取

推广：事件 A_1有 p_1种产生方式，事件 A_2有 p_2种产生方式，…, 事件 A_k有 p_k 种产生的方式，则 “事件A_1或 A_2 或 … A_k” 有 $p_1+p_2+\ldots+p_k$ 种产生的方式.

乘法法则

乘法法则：事件A有 m 种产生方式，事件 B 有n 种产生方式，则 “事件A与B” 有 $m\,n$ 种产生方式.

使用条件：事件 A 与 B 产生方式彼此独立

适用问题：分步选取

推广：事件 A_1有 p_1种产生方式，事件 A_2有 p_2种产生方式，…, 事件 A_k 有 p_k 种产生的方式，则 “事件A_1与 A_2 与 … A_k” 有 $p_1 p_2 \ldots p_k$ 种产生的方式.

例：Ipv4网址计数

32位地址　网络标识+主机标识

(1) A类：最大网络；　B类：中等网络；　C：小网络；

(2) 限制条件：

1111111在A类中的netid部分无效

hostid部分不允许全0或全1

A	0	netid (7位) 2^7-1	hostid (24位) $2^{24}-2$		
B	1	0	netid (14位) 2^{14}	hostid (16位) $2^{16}-2$	
C	1	1	0	netid (21位) 2^{21}	hostid (8位) 2^8-2

$$(2^7-1)(2^{24}-2)+2^{14}(2^{16}-2)+2^{21}(2^8-2)$$

解答

netid　　hostid

A类：0+7位，　24位

B类：10+14位，　16位

C类：110+21位，　8位

限制条件：1111111在A类中的netid部分无效

hostid部分不允许全0或全1

A类：netid 2^7-1, hosted $2^{24}-2$，

$$N_A = 127 \cdot 16777214 = 2130706178$$

B类：netid 2^{14}, hosted $2^{16}-2$，

$$N_B = 16384 \cdot 65534 = 1073709056$$

C类：netid 2^{21}, hosted 2^8-2,

$$N_C = 2097152 \cdot 254 = 532676608$$

$$N = N_A + N_B + N_C = 3737091842$$

分类处理与分步处理

- 分类处理：对产生方式的集合进行划分，分别计数，然后使用加法法则
- 分步处理：一种产生方式分解为若干独立步骤，对每步分别进行计数，然后使用乘法法则
- 分类与分步结合使用
  先分类，每类内部分步
  先分步，每步又分类

例：关系计数

例1 设A为 n 元集，问
(1) A上的自反关系有多少个？

(1) 在自反关系矩阵中，主对角线元素都是1，其他位置的元素可以是1，也可以是0，有2种选择. 这种位置有n^2-n个，根据乘法法则，自反关系的个数 2^{n^2-n}

例：关系计数

例1 设A为 n 元集，问

(2) A上的对称关系有多少个？

(2) 考虑对称关系的矩阵$M_R = \{r_{ij}\}$. 分三步考虑：

1. 所有对角线元素r_{ii}可取0或1，因此有2^n种方法；

2. 所有对角线上方元素r_{ij}(其中$i < j$)可取0或1，因此有$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$种方法；

3. 所有对角线下方元素r_{ji} (其中$i < j$)必须等于r_{ij}，因此只有1种方法。

总方法数为： $2^n \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 1 = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

解答

例1 设A为 n 元集，问

(3) A上的反对称关系有多少个？

(3) 第一步考虑对角线元素，共2^n种取值的可能；

第二步考虑每一对对称的非对角线元素r_{ij}与r_{ji}，其中$i<j$。

其取值有三种可能：

$$\begin{cases} r_{ij}=1 \\ r_{ji}=0 \end{cases}, \begin{cases} r_{ij}=0 \\ r_{ji}=1 \end{cases}, \begin{cases} r_{ij}=0 \\ r_{ji}=0 \end{cases}$$

因此非对角线元素共有$3^{\frac{n(n-1)}{2}}$种取值方法。

根据乘法法则，不同的关系矩阵有$3^{\frac{n(n-1)}{2}}2^n$种。

解答

例1 设A为 n 元集，问

(4) A上的双射函数有多少个？

(4) 设$A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$，任何A上的函数 $f:A\to A$具有下述形式：

$$f=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle,\ldots,\langle x_n,y_n\rangle\}$$

其中每个y_i（$i=1,2,\ldots,n$）有n种可能的选择，根据乘法法则，有n^n个不同的函数. 若 f 是双射的，那么y_1确定以后，y_2只有$n-1$种可能的取值 ,…, y_n只有1种取值. 构成双射函数的方法数是$n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$.

练习1：基本的组合计数

1. 求1400的不同的正因子个数.

解　1400的素因子分解式是

$$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

1400的任何正因子都具有下述形式：

$$2^i \cdot 5^j \cdot 7^k，\text{其中 } 0 \le i \le 3,\ 0 \le j \le 2,\ 0 \le k \le 1.$$

根据乘法法则，1400的正因子数是 i, j, k 的选法数

$$N=(1+3)(1+2)(1+1)=24.$$

12.2 排列与组合

选取问题：设 n 元集合 S，从 S 中选取 r 个元素.

根据是否有序，是否允许重复, 将该问题分为四个子类型

	不重复选取	重复选取
有序选取	集合的排列	多重集的排列
无序选取	集合的组合	多重集的组合

集合的排列

定义12.1 设S为n元集，

(1) 从 S 中有序选取的 r 个元素称为 S 的一个 r 排列，S 的不同 r 排列总数记作 $P(n,r)$ 或P_n^r

(2) $r=n$的排列是S的全排列.

(3) 从 S 中无序选取的 r 个元素称为 S 的一个 r 组合，S 的不同 r 组合总数记作 $C(n,r)$或C_n^r或$\binom{n}{r}$

定理1.1 设n, r为自然数，规定0!=1，则

(1) $$P(n,r)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-r)!} & n\geq r\\ 0 & n<r\end{cases}$$

S的r组合就是其r元子集

(2) $$C(n,r)=\begin{cases}\dfrac{P(n,r)}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!} & n\geq r\\ 0 & n<r\end{cases}$$

证明

下面考虑 $n \geq r$ 的情况.

(1) 排列的第一个元素有 n 种选择的方式. 排列的第二个元素有$n-1$种选法, …, 第 r 个元素的方式数 $n-r+1$. 根据乘法法则，总的选法数为

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

(2) 分两步构成 r 排列. 首先无序地选出r个元素，然后再构造这r个元素的全排列. 无序选择r个元素的方法数是$C(n,r)$; 针对每种选法，能构造 $r!$个不同的全排列. 根据乘法法则, 不同的 r 排列数满足 $P(n, r)=C(n,r)\ r!$

组合数$C(n,r)$也称为二项式系数，记作$\binom{n}{r}$

推论

推论 设n, r为正整数，则

(1) $C(n,r) = \frac{n}{r}C(n-1, r-1)$

(2) $C(n,r) = C(n, n-r)$

(3) $C(n,r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$ Pascal公式

证明方法：根据定义；归纳；组合分析

例 证明 $C(n,r) = C(n, n-r)$

证 设 $S=\{1, 2, \ldots, n\}$是n元集合，对于S 的任意 r 组合 $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$，都存在一个$S$ 的 $n-r$ 组合$S-A$与之对应. 显然不同的 r 组合对应了不同的 $n-r$ 组合，反之也对，因此 S 的 r 组合数恰好与 S 的 $n-r$ 组合数相等.

例 证明 $C(n,r) = C(n-1,r-1)+C(n-1,r)$

证：考虑任务“从n个不同的球中取r个”，显然有$C(n,r)$种不同方法。

现在考虑一种不同的解决策略，该策略分两种情况：

1. 需要取出的r个球中包含了1号球
2. 需要取出的r个球中不包含了1号球

Case 1等价于“先取出1号球，再从$2\sim n$号球中取$r-1$个球”，有$C(n-1,r-1)$种方法

Case 2等价于“从$2\sim n$号球中取r个球”，有$C(n-1,r)$种方法

该分类选球策略的方法数应当与直接从n个球中选择r个的方法是一样的。因此有$C(n,r) = C(n-1,r-1)+C(n-1,r)$

组合计数的应用

例3 排列26个字母，使得 a 与 b 之间恰有7个字母，求方法数.

解 固定a 和 b, 中间选7个字母，有2 $P(24,7)$种方法，将它看作大字母与其余17个字母全排列有18！种，共

$$N = 2\,P(24,7)\;18!$$

例4 把 $2n$ 个人分成 n 组，每组2人，有多少分法?

解 相当于$2n$ 不同的球放到 n 个相同的盒子，每个盒子2个，设放置方法为N

则$N \cdot n!$为把$2n$ 不同的球放到 n 个不同的盒子的方法数，

因此$N \cdot n! = C(2n,2)C(2n-2,2)\ldots C(2,2)$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{n!}C(2n,2)C(2n-2,2)\ldots C(2,2)$$

$$= \frac{1}{n!}\frac{2n!}{(2n-2)!\;2}\frac{(2n-2)!}{(2n-4)!\;2}\cdots\frac{2!}{0!\;2} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

练习2：基本的组合计数

2．把10个不同的球放到6个不同的盒子里，允许空盒，且前2个盒子球的总数至多是4，问有多少种方法?

解 根据前两个盒子含球数k对放法分类，其中 k=0,1,2,3,4.
对于给定的 k，再分步处理计算放球的方法数：

① 从10个球中选k个球，有$C(10,k)$选法；

② 把选好的k个球分到2个盒子里，每个球可以有2种选择，有2^k种分法；

③ 剩下的 $10-k$个球分到其他4个盒子里有4^{10-k}种分法.

根据乘法法则，使得前两个盒子含k个球的放法数是

$$C(10,k)\,2^k\,4^{10-k}$$

最后使用加法法则对k求和，就得到所求的方法数是

$$\sum_{k=0}^{4} C(10,k)2^k4^{10-k}$$

一一对应的技巧

例5 从$S=\{1, 2, \ldots, n\}$中选择 k 个不相邻的数，有多少种方法?

解：设$1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_k \le n$

构造$b_i = a_i - (i-1)$，容易验证

$$1 \le b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_k \le n-k+1$$

注意到：$b_i = b_{i+1} \Leftrightarrow a_i = a_{i+1} - 1$，即$\{b_1, \ldots, b_k\}$中存在重复的元素当且仅当存在$i$使得$a_i$与$a_{i+1}$相邻。因此若$a_1, \ldots, a_k$均不相邻，则$\{b_1, \ldots, b_k\}$为集合，且为$\{1, 2, \ldots, n-k+1\}$ 的子集。

从$\{1, \ldots, n\}$中选择不相邻的$a_1, \ldots, a_k$等价于从$\{1, \ldots, n-k+1\}$中选择出可以相邻的$b_1, \ldots, b_k$，其方法数为$C(n-k+1, k)$。

多重集的排列与组合

定义12.2 多重集 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$，$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$ 表示 S 中元素的总数.

(1) 从S 中有序选取的r个元素称为多重集 S 的一个 r 排列. $r=n$ 的排列称为 S 的全排列

(2) 从 S 中无序选取的 r 个元素称作多重集 S 的一个r 组合

注意:

- 多重集中元素的重复度，$0 < n_i \leq \infty$, 当$n_i = \infty$，表示a_i重复选取的次数没有限制
- S的子集通常表示为:

$$X=\{x_1\cdot a_1, x_2\cdot a_2, \ldots, x_k\cdot a_k\}, \text{其中} 0 \leq x_i \leq n_i$$

当$x_1 + \cdots + x_k = r$时，该子集为S的一个r组合

多重集的排列计数

定理12.2 设$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$为多重集，

(1) S 的全排列数是 $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$

(2) 若$r\le n_i$，$i=1,2,\ldots,k$，那么S 的 r 排列数是 k^r

证明 (1) 有$C(n,n_1)$ 种方法放a_1，有$C(n-n_1,n_2)$种方法a_2,有 $C(n-n_1-n_2,n_3)$种方法a_3, 以此类推，根据乘法法则：

$$
\begin{aligned}
&C(n,n_1)C(n-n_1,n_2)\ldots C(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1},n_k)\\
&=\frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\ldots\frac{(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!\ \ 0!}\\
&=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}
\end{aligned}
$$

(2) r 个位置中的每个位置都有 k 种选法，由乘法法则得 k^r

多重集的组合

定理12.3 多重集 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$，$0<n_i\leq+\infty$
当 $r\leq n_i$, S的r 组合数为$N = C(k + r-1, r)$

证明 一个 r 组合为$\{x_1\cdot a_1, x_2\cdot a_2, \ldots, x_k\cdot a_k\}$，其中

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r, x_i \in \mathrm{N}$$

不定方程

重要结论：

该方程的每个非负整数解恰好为多重集$\{(k-1)\cdot 0, r\cdot 1\}$的某个全排列：

$$N = \frac{(r+k-1)!}{r!\,(k-1)!} = C(k+r-1, r)$$

原因：上述多重集的任意全排列总是具有如下形式：

$$\underbrace{1 \ldots 1}_{x_1}\ 0\ \underbrace{1 \ldots 1}_{x_2}\ 0 \ldots 0\ \underbrace{1 \ldots 1}_{x_k}$$

多重集的组合

定理12.3 多重集 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$，$0<n_i\le+\infty$

当 $r\le n_i$, S的r 组合数为$N = C(k+r-1, r)$

方法二. 分步计数+归纳：显然$k=1$时成立；假设上述定理对任意k成立，现在考虑

$$S' = \{n_1\cdot a_1, \ldots, n_k\cdot a_k, n_{k+1}\cdot a_{k+1}\}$$

的r组合数。欲证其为$C(k+r, r)$。

首先选择j个a_{k+1}放入组合中，然后从多重集S中选择$r-j$个元素放入，则其方法数为$C(k+r-j-1, r-j)$

因此S'的r组合数为

$$\sum_{j=0}^{r} C(k+r-j-1, r-j) = \sum_{j=0}^{r}\binom{k+j-1}{j} = \binom{k+r}{r}$$

因此得证

练习3：基本的组合计数

3． 由m个A和n个B构成序列，其中m, n为正整数，$m \le n$. 如果要求每个A后面至少紧跟着1个B, 问有多少个不同的序列?

方法一. 先放 n 个B，只有1种方法. 然后，在每个B之前的n个位置中选择 m 个位置放A, 有$C(n,m)$种方法.

方法二. 先放 m 个AB，只有1 种方法. 把每个AB 看作隔板，m 个隔板构成 $m+1$个空格，在空格中放入 $n-m$ 个B. 这相当于方程

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{m+1} = n-m$$

的非负整数解的个数，因此

$$N=C(n-m+m+1-1,n-m)=C(n,n-m)=C(n,m)$$

作业

习题12：5、27

12.3 二项式定理与组合恒等式

主要内容

- 二项式定理
- 组合恒等式
- 非降路径问题

二项式定理

定理12.4 设 n 是正整数，对一切 x 和 y

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

证明方法：数学归纳法、组合分析法.

证 当乘积被展开时其中的项都是下述形式：$x^i y^{n-i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. 而构成形如 $x^i y^{n-i}$ 的项，必须从 n 个 $(x+y)$ 中选 i 个提供 x，其它的 $n-i$ 个提供 y. 因此，$x^i y^{n-i}$ 的系数是 $\binom{n}{i}$，定理得证.

二项式定理的归纳证明

$$(x+y)^{n+1}=(x+y)(x+y)^n=(x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1}$$

$$=\binom{n}{0}x^1y^n+\binom{n}{1}x^2y^{n-1}+\cdots+\binom{n}{n-1}x^ny^1+\binom{n}{n}x^{n+1}y^0$$

$$+\binom{n}{0}x^0y^{n+1}+\binom{n}{1}x^1y^n+\cdots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}y^2+\binom{n}{n}x^ny^1$$

$$=\binom{n}{0}x^0y^{n+1}+\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right)x^1y^n+\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right)x^2y^{n-1}+\cdots$$

$$+\left(\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right)x^ny^1+\binom{n}{n}x^{n+1}y^0$$

$$=\binom{n+1}{0}x^0y^{n+1}+\binom{n+1}{1}x^1y^n+\binom{n+1}{2}x^2y^{n-1}+\cdots+\binom{n+1}{n}x^ny^1$$

$$+\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^0$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}$$

二项式定理的应用

例6 求在$(2x-3y)^{25}$的展开式中$x^{12}y^{13}$的系数.

解 由二项式定理

$$(2x+(-3y))^{25}=\sum_{i=0}^{25}\binom{25}{i}(2x)^{25-i}(-3y)^{i}$$

令$i=13$ 得到展开式中$x^{12}y^{13}$的系数，即

$$\binom{25}{13}2^{12}(-3)^{13}=-\frac{25!}{13!\,12!}2^{12}3^{13}$$

组合恒等式：递推式

1. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

2. $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

3. $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

证明方法：公式代入、组合分析

应用：

1式用于化简

2式用于求和时消去变系数

3式用于求和时拆项（两项之和或者差），然后合并

组合恒等式：基本求和式

4. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n \quad n\in \mathrm{N}$, 5. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0 \quad n\in \mathrm{N}$

证明公式4. 方法：二项式定理或者组合分析.

设$S=\{1,2,\ldots,n\}$，下面计数S 的所有子集.

一种方法就是分类处理，n元集合的 k子集个数是$\binom{n}{k}$

根据加法法则，子集总数是 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

另一种方法是分步处理，为构成 S 的子集A，每个元素有 2 种选择，根据乘法法则，子集总数是2^n.

恒等式:变上项求和

6. $\sum_{l=0}^{n}\binom{l}{k}=\binom{n+1}{k+1}, \quad n,k\in\mathrm{N}$

证明　组合分析. 令$S=\{a_1, a_2, \ldots , a_{n+1}\}$为$n+1$元集合. 等式右边是 S 的 $k+1$子集数. 考虑另一种分类计数的方法. 将所有的 $k+1$元子集分成如下$n+1$类:

第1类：含a_1, 剩下 k个元素取自$\{a_2,\ldots,a_{n+1}\}$　$\binom{n}{k}$

第2类：不含a_1,含a_2, 剩下k个元素取自$\{ a_3, \ldots , a_{n+1}\}$　$\binom{n-1}{k}$

……

不含$a_1, a_2, \ldots, a_n$, 含a_{n+1},剩下k个元素取自空集　$\binom{0}{k}$

由加法法则公式得证

恒等式:乘积转换式

7. $\binom{n}{r}\binom{r}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$

证明：从n元全集S中选出k元子集A和r元子集B，且满足$A \subseteq B$

方法1：先选出集合B，再从B中选出A

方法2：先选出集合A，再从$S-A$中选出$B-A$从而拼出B

m个红球取k个

n个白球取$r-k$个

m个红球+n个白球共取r个

8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}$ $\quad m,n,r\in\mathrm{N},\quad r\le\min(m,n)$

令$r=n$

9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\binom{m+n}{m}$ $\quad m,n\in\mathrm{N}$

证明思路：考虑集合$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$. 等式右边计数了从这两个集合中选出r个元素的方法. 将这些选法按照含有A中元素的个数 k 进行分类，$k=0,1,\ldots,r$. 然后使用加法法则.

应用：恒等式求和

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$$

证明（求导法）：

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$$ 求导

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$$ 令$x=1$

$$= \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$$

应用：恒等式求和

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$$

证明（归纳法）：$n=0$时显然成立；以下对n归纳

$$\sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n}{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)\binom{n}{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$= n2^{n-1} + n2^{n-1} + 2^{n} = (n+1)2^{n}$$

应用：恒等式求和

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

证明（分析法）：假设集合$A = \{x_1, \dots, x_n\}$

等式左边为A所有子集的元素的个数之和；

在这些子集中，x_1出现的次数为$A - \{x_1\}$的子集数（2^{n-1}）

x_2出现的次数为$A - \{x_2\}$的子集数（2^{n-1}）

以此类推，所有元素一共出现$n2^{n-1}$次

应用：恒等式求和

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

证明：

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \quad \text{消去变系数}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} kn \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^{n} [(k-1)+1] \binom{n-1}{k-1} \quad \text{常量外提}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} (k-1) \binom{n-1}{k-1} + n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} + n2^{n-1} \quad \text{变限}$$

$$= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$$

组合恒等式解题方法小结

证明方法：

- 已知恒等式带入
- 二项式定理
- 幂级数的求导、积分
- 归纳法
- 组合分析

求和方法：

- **Pascal**公式
- 级数求和
- 观察和的结果，然后使用归纳法证明
- 利用已知的公式

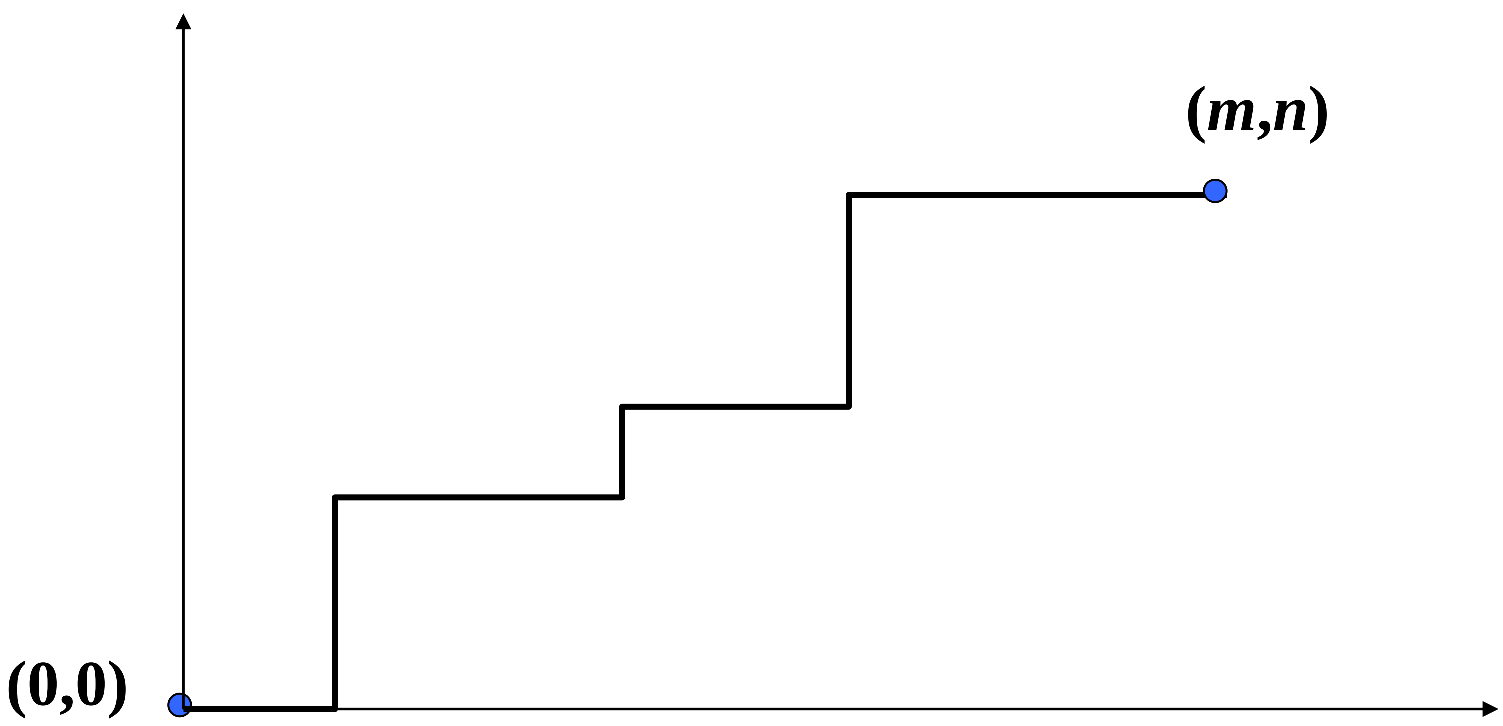
非降路径的计数

(0,0) 到 (m,n) 的非降路径数：$C(m+n, m)$

(a,b) 到 (m,n)的非降路径数：

等于 (0,0) 到 $(m-a,n-b)$ 的非降路径数

(a,b) 经过 (c,d) 到 (m,n) 的非降路径数：乘法法则



限制条件的非降路径数

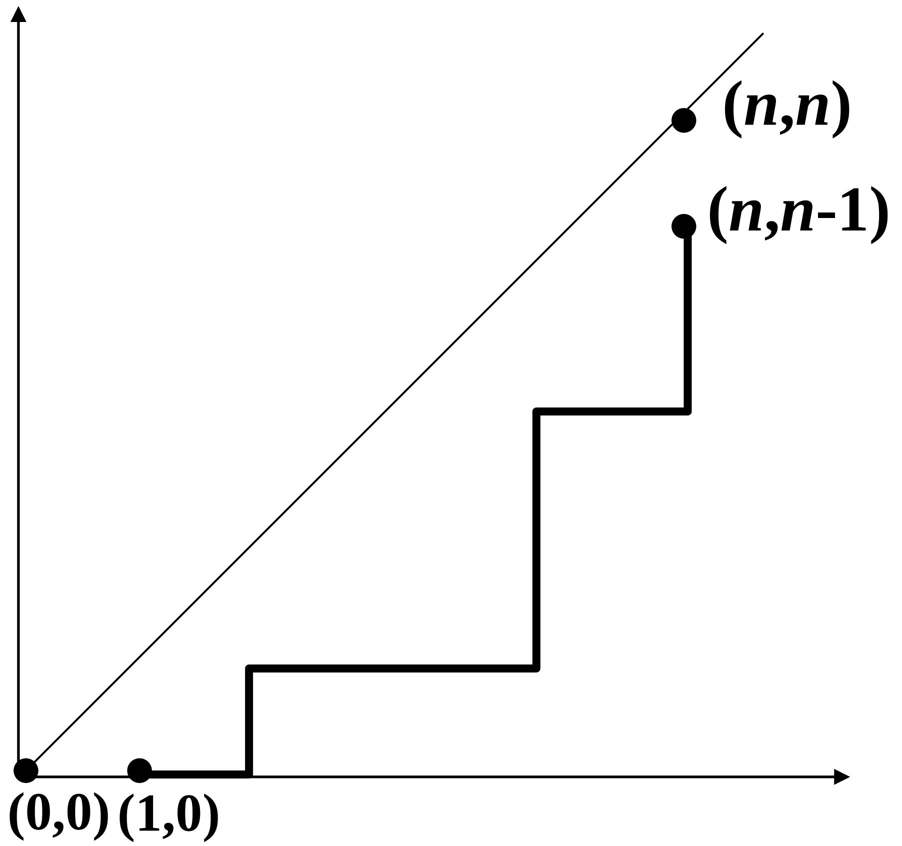
从(0,0)到 (n,n)不接触对角线的非降路径数 N

N_1: 从(0,0) 到 (n,n) 下不接触对角线非降路径数

N_2: 从(1,0)到$(n,n–1)$下不接触对角线非降路径数

N_0: 从(1,0)到$(n,n–1)$ 的非降路径数

N_3: 从(1,0)到$(n,n–1)$ 接触对角线的非降路径数



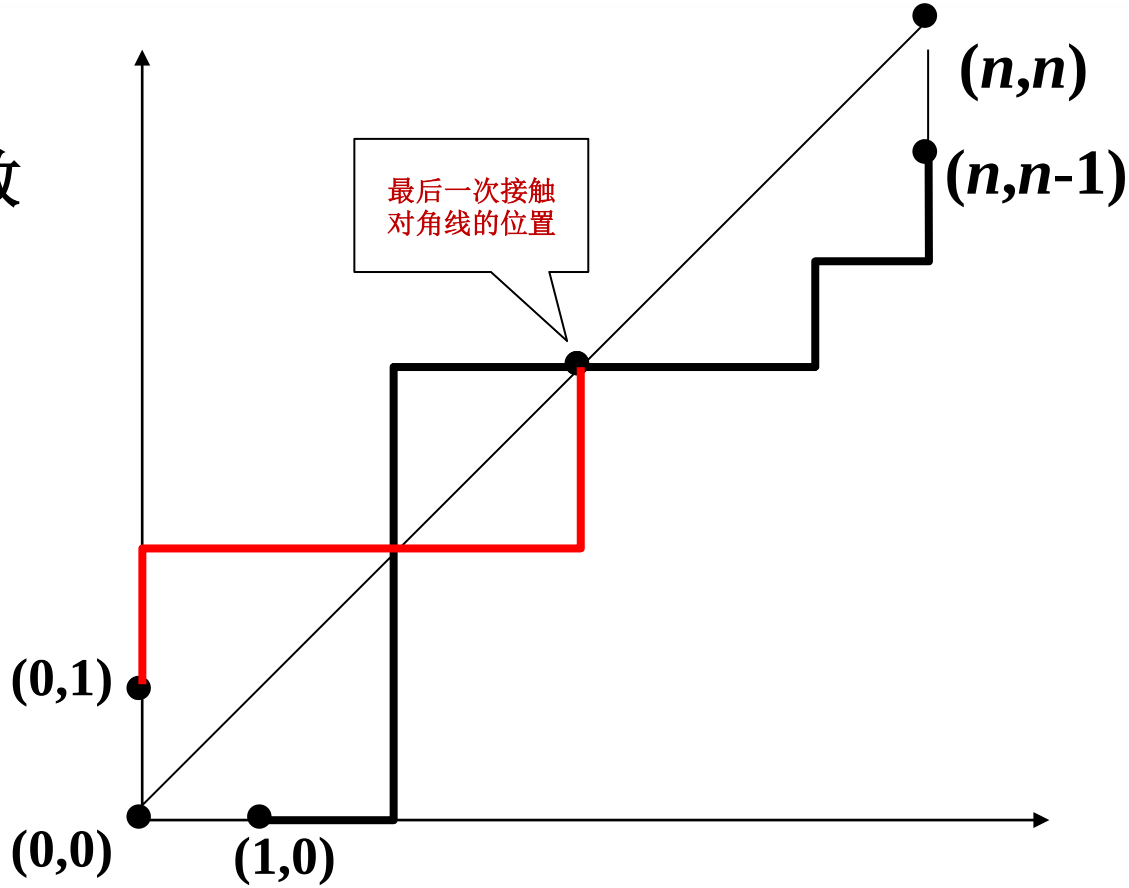
关系: $N=2N_1=2N_2=2[N_0 – N_3]$

一一对应

N_3: 从(1,0)到$(n,n-1)$接触对角线的非降路径数

N_4: 从(0,1)到$(n,n-1)$无限制条件的非降路径数

关系：$N_3=N_4$



$$N = 2[N_0 - N_3]$$

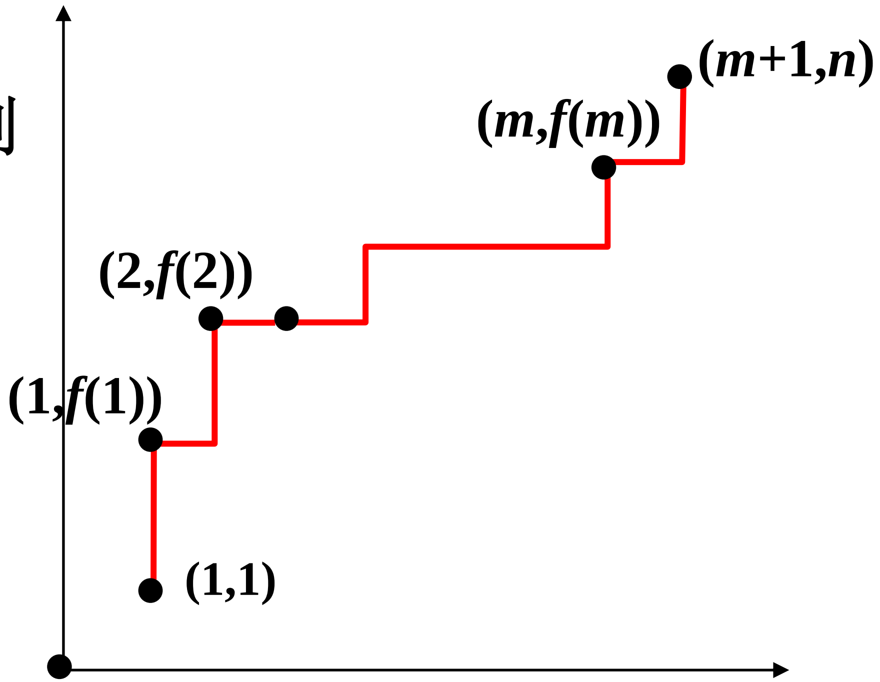
$$= 2[N_0 - N_4] = 2\left[\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}\right] = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

应用:单调函数计数

例7 $A=\{1,2,\ldots,m\}$, $B=\{1,2,\ldots,n\}$,

A到B单调递增函数个数是从(1,1)到$(m+1,n)$ 的非降路径数：

$$\binom{m+n-1}{m}$$



路径构造方法：

从$(1,1)$到$(m+1,n)$共需走$m+n-1$步；选择其中m步向右走，方法数为$C(m+n-1,m)$。

以下证明每一条这样的路径对应一个单调递增函数：

设第i次准备向右走时的坐标为(x_i,y_i)，其中$i\in\{1,\ldots,m\}$。

构造函数$f=\{\langle x_1,y_1\rangle,\ldots,\langle x_m,y_m\rangle\}$。

显然$x_1=1,x_2=2,\ldots,x_m=m$，即$\mathrm{dom}f=A$。

又由于路径非降，有$1\le y_1\le y_2\le\cdots\le y_m$。

此外，由于向上走了$n-1$步，因此$y_m\le n$，即$\mathrm{ran}f\subseteq\{1,2,\ldots,n\}=B$。

因此f是从A到B的单调递增函数。

应用:单调函数计数

例7 $A=\{1,2,\ldots,m\}$, $B=\{1,2,\ldots,n\}$,

A到B的严格单调递增函数个数：$C(n,m)$

构造方法:

严格单调递增函数必有以下形式

$$\begin{cases} f=\{\langle 1,y_1\rangle,\langle 2,y_2\rangle,\ldots,\langle m,y_m\rangle\} \\ 1\le y_1<y_2<\cdots<y_m\le n \end{cases}$$

因此取集合B的一个m组合，记为$\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$，对其中的元素排序，假设排序结果为$a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_m}$，令$y_1=a_{i_1},y_2=a_{i_2},\ldots,y_m=a_{i_m}$，可得一个严格单调递增函数。因此严格单调递增函数与 B 的 m 组合一一对应，其总数为$C(n,m)$。

栈输出的计数

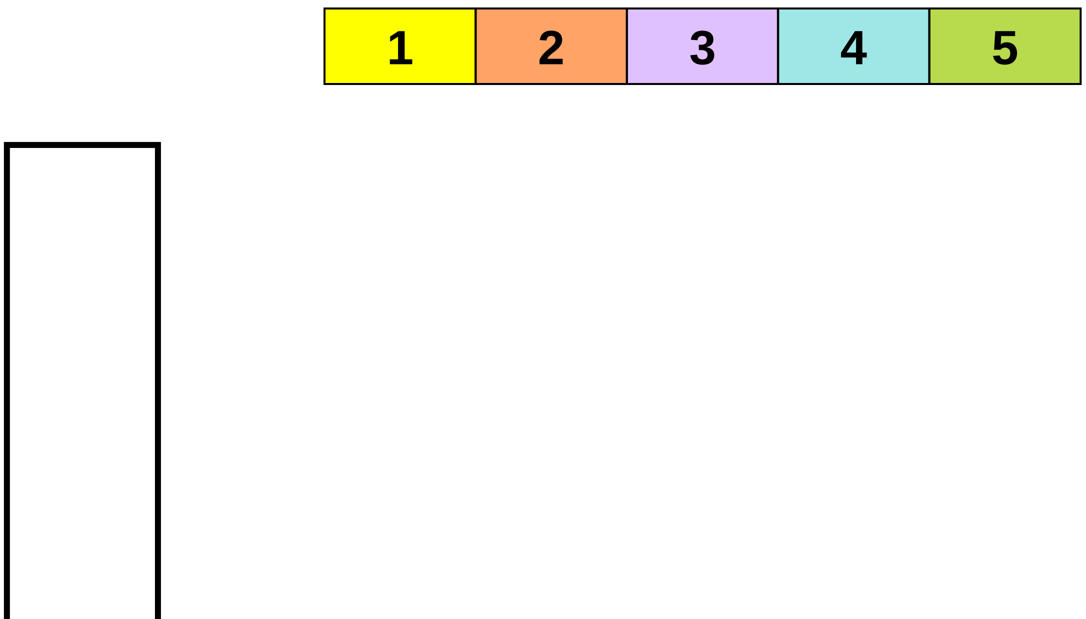
例8 将1, 2, … , n 按照顺序输入栈，有多少个不同的输出序列？

分析：出栈序列是 n个push，n个pop的排列，
排列中任何前缀的push个数不少于pop的个数，
等于从(0,0)到 (n,n) 的不穿过对角线的非降路径数

栈输出的计数

输入： 1, 2, 3, 4, 5,   输出 ：3, 2, 4, 1, 5

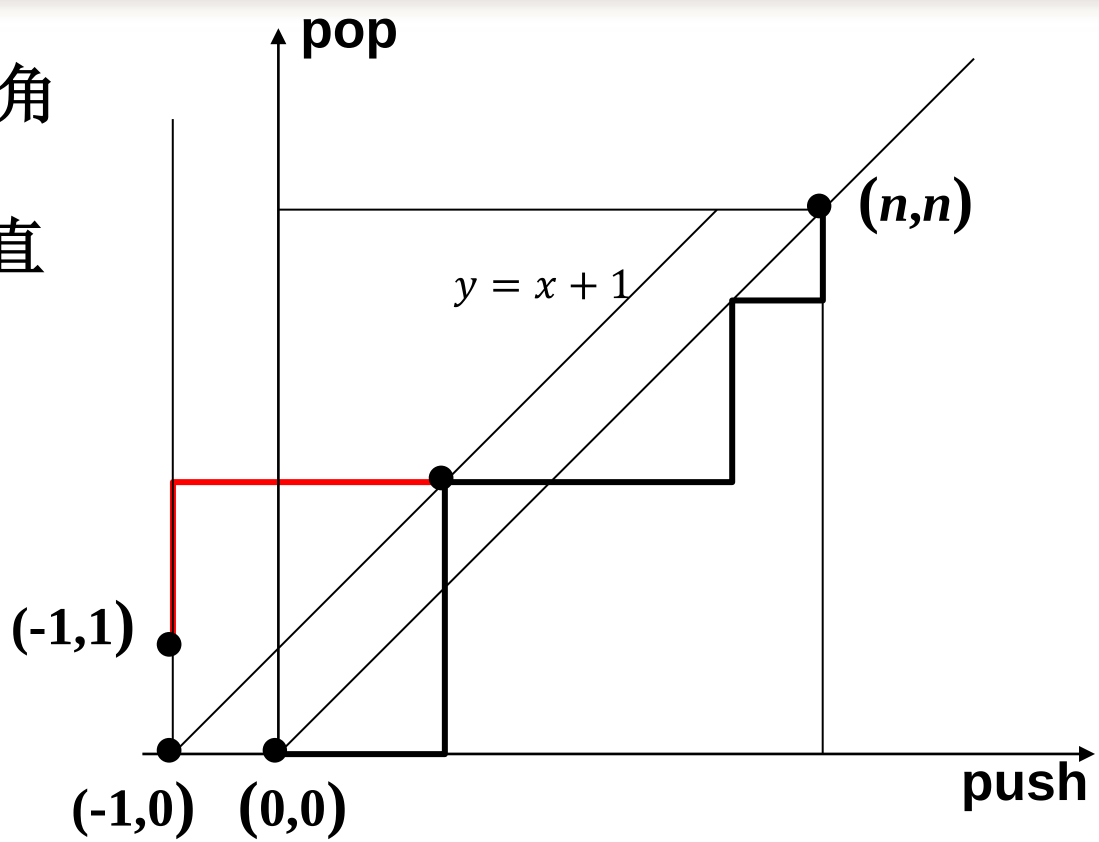
push,push,push,pop,pop,push,pop,pop,push,pop



栈输出的计数

从(0,0)到 (n,n) 的穿过对角线的非降路径数
=从 (0,0)到 (n,n) 的接触直线 $y = x + 1$ 的非降路径
=从 (-1,1) 到 (n,n) 的非降路径= $C(2n,n-1)$

从 (0,0)到 (n,n) 的非降路径总数为 $C(2n,n)$



$$N = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

12.4 多项式定理

定理12.5 设n为正整数，x_i为实数，$i=1, 2, \ldots, t$.

$$(x_1+\cdots+x_t)^n=\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_t=n\\ n_1,\ldots,n_t\in\mathbb{N}}}\binom{n}{n_1\,n_2\ldots n_t}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}$$

其中$\binom{n}{n_1\,n_2\ldots n_t}:=\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}$称为“多项式系数”

证明 展开式中的项$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}$是如下构成的:

在n个因式中选n_1个贡献x_1,从剩下$n-n_1$个因式选n_2个贡献x_2, …, 从剩下的$n-n_1-n_2-\ldots-n_{t-1}$个选n_t个因式贡献x_t.

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{t-1}}{n_t}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}=\binom{n}{n_1\,n_2\ldots n_t}$$

12.4 多项式定理

证明（归纳）：对$t\in\{1,2\}$显然成立；以下对t归纳

$$(x_1+\cdots+x_{t+1})^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x_1+\cdots+x_t)^{n-i}x_{t+1}^i$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_t\\=n-i}}\binom{n-i}{n_1\ \dots\ n_t}x_1^{n_1}\dots x_t^{n_t}\right)x_{t+1}^i$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!\,(n-i)!}\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_t\\=n-i}}\frac{(n-i)!}{n_1!\dots n_t!}\left(x_1^{n_1}\dots x_t^{n_t}x_{t+1}^i\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_t\\=n-i}}\frac{n!}{n_1!\dots n_t!\,i!}\left(x_1^{n_1}\dots x_t^{n_t}x_{t+1}^i\right)$$

Let $i=n_{t+1}$

$$=\sum_{n_1+\cdots+n_{t+1}=n}\frac{n!}{n_1!\dots n_t!\,n_{t+1}!}x_1^{n_1}\dots x_{t+1}^{n_{t+1}}$$

推论

推论1 多项式展开式中不同的项数为方程

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_t = n$$

的非负整数解的个数 $C(n+t-1,n)$

推论2
$$\sum \binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t} = t^n$$

例9 求 $(2x_1-3x_2+5x_3)^6$ 中 $x_1^3 x_2 x_3^2$ 的系数.

解 由多项式定理得

$$\binom{6}{3\ 1\ 2} 2^3 \cdot (-3) \cdot 5^2 = \frac{6!}{3!\,1!\,2!} 8 \cdot (-3) \cdot 25 = -36000$$

多项式系数

符号 $\binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_t} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\dots n_t!}$

组合意义

- 多项式系数
- 多重集 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \dots, n_t\cdot a_t\}$ 的全排列数
- n个不同的球放到 t 个不同的盒子使得第一个盒子含n_1个球，第二个盒子含n_2个球，…，第 t 个盒子含 n_t 个球的方案数

作业

习题12：18、22（3）、24（4,5）

第十二章 习题课

主要内容

基本计数

- 计数法则：加法法则、乘法法则
- 计数模型：选取问题、非降路径问题、方程的非负整数解问题
- 处理方法：分类处理、分步处理、一一对应思想

计数符号

- 组合数或二项式系数 $C(m,n)$：组合恒等式
- 排列数 $P(m,n)$
- 多项式系数 $\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_t}$
- 二项式定理与多项式定理

基本要求

- 能够熟练使用加法法则与乘法法则
- 熟悉和应用基本的组合计数模型：

  选取问题

  不等方程的解

  非降路径
- 熟悉二项式定理与多项式定理
- 能证明组合恒等式并对二项式系数进行求和
- 了解多项式系数及其相关公式

练习4

4. 设 S 是 n 元集，N 表示满足 $A\subseteq B\subseteq S$ 的有序对<A,B>的个数，用二项式定理证明$N=3^n$

方法一. 令$|A|=k$，按照 $k=0,1,\ldots,n$ 将有序对<A,B>分类.

给定 k，选 A方法数是$C(n,k)$；
选 B 中剩下的 $n-k$ 个元素, 每个元素有2 种选法，有2^{n-k}个不同的 B 集合. 由乘法法则，这样的<A,B>有$C(n,k)2^{n-k}$个，再使用加法法则和二项式定理，从而得到

$$N=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)2^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)\,1^k2^{n-k}=(1+2)^n=3^n$$

方法二. S中的每个元素可以有3种选法：同时加入A和B，不加入 A 但加入B，A 和 B 都不加入； 因此，n 个元素总共3^n种选法.

练习5

5. 证明 $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}=2^{n-1}(n+2)$

方法一. 利用已知等式

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}, \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n}$$

将上述两式相加得

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}=2^{n-1}(n+2)$$

练习5

方法二 利用积分

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}x^k$$

$$\int_0^x f(x)dx=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}=x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=x(1+x)^n$$

$$f(x)=(1+x)^n+xn(1+x)^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}=f(1)=2^n+n2^{n-1}=2^{n-1}(n+2)$$

练习6

6. 求和 $\sum_{k=0}^{m}\binom{n-m+k}{k}$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n-m+k}{k}=\binom{n-m+0}{0}+\binom{n-m+1}{1}+\dots+\binom{n}{m}$$

$$=\left[\binom{n-m+1}{0}+\binom{n-m+1}{1}\right]+\binom{n+m+2}{2}+\dots+\binom{n}{m}$$

$$=\left[\binom{n-m+2}{1}+\binom{n-m+2}{2}\right]+\binom{n-m+3}{3}+\dots+\binom{n}{m}$$

$$=\dots=\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m}$$