

# 中山大学本科生期末考试

考试科目：《线性代数》(A卷)

学年学期：2017学年第1学期 姓名：\_\_\_\_\_学号：\_\_\_\_\_  
 学院/系：数学学院 学院：\_\_\_\_\_年级专业：\_\_\_\_\_  
 考试方式：闭卷 任课教师：\_\_\_\_\_  
 考试时长：120分钟 成绩评定：\_\_\_\_\_阅卷教师：\_\_\_\_\_

《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

-----以下为试题区域，共2道大题，总分100分，考生请在试卷上作答-----

## 一、填空题(共5小题，每小题3分，共15分)

1. 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ ，则  $A$  的逆矩阵  $A^{-1} =$  \_\_\_\_\_.
2. 设  $A$  为3阶矩阵， $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵，且  $|A| = 3$ ，则  $|2A^*| =$  \_\_\_\_\_.
3. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ，则齐次线性方程组  $Ax = 0$  解空间的空间维数为 \_\_\_\_\_.
4. 设3阶矩阵  $A$  与  $B$  相似，且  $A$  的特征值为  $-1, 1, 2$ ；则行列式  $|B^2 + B - E| =$  \_\_\_\_\_.
5. 设对称矩阵  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & k \\ 0 & k & -9 \end{pmatrix}$  为负定矩阵，则  $k$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

二、计算题(共8小题，第1-3小题各8分，第4-6小题各10分，第7小题13分，第8小题18分，共85分)注：要写出必要的计算和推理过程

8分) 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$  的值。

8分) 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  的逆矩阵。



3. (8分) 判断矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  能否相似对角阵, 并说明原因。

$$\text{特征值 } \lambda = 1, 2, 3 \text{ 互不相同, 故 } A \text{ 可相似对角化.}$$

4. (10分) 已知向量组  $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ , 求该向量组的秩和一个最大无关组, 并把其余向量用此最大无关组线性表示。

(10分) 设线性方程组  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & s \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ , 问  $s, t$  为何值时:

- (1) 方程组无解; (2) 方程组有唯一解; (3) 方程组有无穷多解。

(10分) 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 5 \end{cases}$$

的通解。

7. (13分) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ,

- (1) 求可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  为对角阵(8分);
- (2) 计算  $A^{2018}$ (5分)。



8. (18分) 设  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ , 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

- (1) 求正交阵  $P$ , 使得作正交变换  $x = Py$  后二次型化为标准形, 并请写出该标准形(14分);
- (2) 判断该二次型的正定性(2分);
- (3) 求当  $\|x\| = 1$  时, 二次型  $f$  的最大值(2分)。