

# 2020 春季线性代数期末考试答案与评分标准

一、 计算行列式  $\begin{vmatrix} a & 2 & 2 & 2 \\ 2 & a & 0 & 0 \\ 2 & 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ , 其中  $a \neq 0$ , 写出必要计算过程. (8 分)

解:  $\begin{vmatrix} a & 2 & 2 & 2 \\ 2 & a & 0 & 0 \\ 2 & 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按} r_1 \text{ 展开}} a \times \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3 \text{ 分})$

$$= a^4 - 2 \times 2a^2 + 2 \times (-2a^2) - 2 \times 2a^2 \quad (4 \text{ 分}) = a^4 - 12a^2 \quad (1 \text{ 分})$$

注: 本题的化简及计算方法并不唯一 (各种展开、化简、行列变换为上下三角行列式等方法), 方法完全准确但计算错误者可酌情得到 4~6 分。

二、 计算矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  的逆矩阵, 写出必要的计算过程 (8 分)

解: 此题推荐用分块矩阵方法, 但也可以使用初等变换法或伴随矩阵法来解决。

**方法一:** 矩阵分块法, 用  $2 \times 2$  的矩阵进行分块, 可以表示为  $A = \begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}$ , 此时有结论  $A^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$ 。

(也可代入验证, 3 分)。其中,  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3 \times 1 - 1 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \times 3 - 1 \times 1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分}), \text{ 故 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

注: 考生如果使用了错误的分块矩阵求逆公式, 导致右上角与左下角写反, 可以得到 4 分

**方法二:** 初等变换法, 考虑

$$(A, E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \leftrightarrow r_3 \\ r_2 \leftrightarrow r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_4 - \frac{2}{3}r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - r_2 \\ r_4 \times 3 \\ r_3 - r_4 \\ r_3 \div 3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ 分})$$

因此, 由于  $A \sim E$ , 可知  $A$  可逆, 且  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ 分})$

注: 如果考生使用伴随矩阵法, 准确计算  $|A|$  可以得到 3 分, 各个元素的计算可以酌情给分, 但最终结果错误的, 得分不超过 6 分。

三、 判断矩阵  $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$  能否相似于对角阵, 并说明理由. (8 分)

解：首先计算 $A$ 的特征值， $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (3-\lambda)(2-\lambda)^2$ ，所以特征值为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 。(2分)

考虑2重特征根 $\lambda = 2, A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，可以得到的线性无关的特征向量仅有

1个 $\vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。(或基础解系仅有一个向量)(4分)

因为2重特征根无法对应两个线性无关的特征向量，所以原矩阵 $A$ 不能相似于对角阵(2分)

注：(1) 本题如果没有计算步骤，只写出了可对角化当且仅当 $A$ 存在3个线性无关的特征向量，可得2分。

(2) 特征向量 $\vec{p}$ 无需具体求出。

四、(共10分) 设3阶方阵 $A$ 的特征值为 $-1, 1, 2$ ，已知 $B = A^2 - A^{-1} - E$ ，且 $AC = B - 2C$

(1) 求矩阵 $B$ 的所有特征值(5分)

(2) 计算 $|3C|$ (5分)

解：(1) 设 $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} - 1$ ，(2分) 根据特征值的对应关系，分别代入即可得 $f(-1) = 1 - (-1) - 1 = 1, f(1) =$

$1 - 1 - 1 = -1, f(2) = 4 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{2}$ 。故 $B$ 的三个特征值分别为 $1, -1, \frac{5}{2}$ 。(3分)

(2) 对 $AC = B - 2C = B - 2EC$ ，进行移项、合并同类项，有 $AC + 2EC = B = (A + 2E)C$ 。1(1分)

因为 $A + 2E$ 的三个特征值为 $1, 3, 4$ (1分)，故 $|A + 2E| = 12$ ， $A + 2E$ 可逆，且 $C = (A + 2E)^{-1}B$ 。(1分)

因此 $|C| = \frac{|B|}{|A+2E|} = -\frac{\frac{5}{2}}{12} = -\frac{5}{24}$ ，(1分) 而 $|3C| = 3^3 \times |C| = -\frac{45}{8}$ (1分)

注：(1) 本题第二问如果漏掉论证 $A + 2E$ 的可逆性可酌情扣掉1分。

(2) 本题如果假设 $A$ 为对角阵并计算无误的，可以得到6分。

五、当 $s, t$ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + sx_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = t \end{cases}$ 无解、存在唯一解或存在无穷多解？并在方程存在无穷多解

时，求方程的通解。(12分)

解：本题的系数矩阵为方阵，考虑其行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & s & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3s + 2 + 2 - 4 - 3 - s = 2s - 3$ ，因此当 $s \neq \frac{3}{2}$

时，系数矩阵可逆，线性方程组必然存在唯一解。(3分)

当 $s = \frac{3}{2}$ 时，增广矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1, r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & t-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \times 2, r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & t-3 \end{pmatrix}$ (3分)

此时，若 $s = \frac{3}{2}$ 且 $t \neq 3$ ，会有 $R(A) = 2 < 3 = R(B)$ ，方程组无解。(2分)

而当 $s = \frac{3}{2}$ 且 $t = 3$ 时， $R(A) = 2 = R(B) < 3$ ，方程组存在无穷多解。(2分)

此时， $B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，即 $\begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ ，令 $x_3 = c$ ，可得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-1 \\ -2c+2 \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，其中，

$c$ 为任意常数(4分)

注：本题也可以直接对增广矩阵做初等行变换，可得 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & s & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & t-1 \\ 0 & 0 & 3-2s & st-s-t \end{pmatrix}$ ，再

根据 $s = \frac{3}{2}$ 与否以及 $t$ 的分类进行讨论即可。变换过程需规范无争议(如 $r_3 \div s$ 这种不被允许), 否则可酌情扣分。

六、 已知向量组 $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ , 求该向量组的秩和一个最大无关组, 并把其

余向量用此最大无关组线性表示. (12分)

$$\text{解: 设 } A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_1]{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 - r_3]{\substack{r_2 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 \div (-3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 - r_3]{\substack{r_3 \div (-2) \\ r_4 + r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4) \quad (6\text{分})$$

由 $A$ 的行最简型知向量组 $A$ 的秩为3(1分), 最大无关组为 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 。(2分), 因为 $\vec{b}_4 = 2\vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$ , 由矩阵行等价的关系可知 $\vec{a}_4 = 2\vec{a}_2 - 3\vec{a}_3$ 。(3分) (注: 本题的秩与最大无关组可以通过行阶梯型或子式判断得到)

七、 已知线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的系数矩阵 $A$ 的秩 $R(A) = 2$ , 且 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有三个特解 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ 满足 $\eta_1 + \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, 2\eta_2 -$

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{求对应齐次线性方程组 } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ 的基础解系. (10分)}$$

解: 首先根据方程组解向量为4维向量知 $n = 4$ (1分), 而 $R(A) = 2$ 。于是 $n - R(A) = 4 - 2 = 2$ , 故 $A\vec{x} = \vec{0}$ 的基础解系有两个向量。(2分)代入 $A[(\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2) - 2(2\vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_1)] = 3A\vec{\eta}_1 - 3A\vec{\eta}_2 = 3\vec{b} - 3\vec{b} = \vec{0}$ , 因此 $\vec{\xi}_1 =$

$$(\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2) - 2(2\vec{\eta}_2 - \vec{\eta}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ 就是对应齐次方程组的一个特解(3分), 另一方面, } A[(\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2) - 2\vec{\eta}_3] =$$

$$A\vec{\eta}_1 + A\vec{\eta}_2 - 2A\vec{\eta}_3 = \vec{b} + \vec{b} - 2\vec{b} = \vec{0}, \text{ 因此, } \vec{\xi}_2 = (\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2) - 2\vec{\eta}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ 就是对应齐次方程组的另一个特解}$$

$$(3\text{分}). \text{ 因为 } \vec{\xi}_1 \text{ 与 } \vec{\xi}_2 \text{ 线性无关, 两个根据上述讨论, 可知基础解系为 } \vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (1\text{分})$$

注: (1) 本题需要提到 $\vec{\xi}_1$ 与 $\vec{\xi}_2$ 的线性无关, 因为比较明显所以可以不论证。没有提到的可以扣1分。

(2) 本题正确答案的表述不唯一, 常见答案可能还有 $(1, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 2, 3)^T$ 以及它们的线性组合。

(3) 本题也可以通过先计算 $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2$ 来间接计算基础解系, 根据步骤与结果的准确性酌情给分即可。

八、 设对称阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ , 求正交阵  $P$ , 使  $P^T A P = \Lambda$  为对角矩阵, 并计算  $A^n$  ( $n$  为正整数). (17分)

解: 首先计算  $A$  特征值, 考虑  $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 + (2-\lambda)r_1} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda^2-4\lambda+3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$$= - \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\lambda \\ \lambda^2-4\lambda+3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \lambda^2-4\lambda+3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(-\lambda^2+5\lambda-4) = -(\lambda-4)(\lambda-1)^2$$

所以有  $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ . (4分)

对于  $\lambda_1 = 4, A - 4E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 + 2r_2]{r_2 \div (-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 有基础解系  $\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (1分), 进行单位化后可取  $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (1分)

对于  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1, A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 有基础解系  $\vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (1分),  $\vec{\xi}_3 =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (1分), 对  $\vec{\xi}_3$  正交化, 有  $\vec{\xi}_3 = \vec{\xi}_3 - \frac{[\vec{\xi}_3, \vec{\xi}_2]}{[\vec{\xi}_2, \vec{\xi}_2]} \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$  (1分) 后进行单位化后可取  $\vec{p}_2 =$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (1分),  $\vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . (1分)

此时, 取正交阵  $P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ , 则  $P^T A P = P^{-1} A P = \Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . (1分)

而  $A^n = P \Lambda^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$  (2分)

$$= \begin{pmatrix} -\frac{4^n}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{4^n}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{4^n}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4^n+2}{3} & \frac{4^n-1}{3} & \frac{-4^n+1}{3} \\ \frac{4^n-1}{3} & \frac{4^n+2}{3} & \frac{-4^n+1}{3} \\ \frac{-4^n+1}{3} & \frac{-4^n+1}{3} & \frac{4^n+2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 1-4^n \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 1-4^n \\ 1-4^n & 1-4^n & 4^n+2 \end{pmatrix} \quad (3分)$$

注: 本题如果最后通项表达式  $P$  与  $P^{-1}$  位置颠倒, 最后步骤可酌情给予1分。

九、（共15分，每小题3分）判断下列命题是否正确，如正确请证明之，如不正确请举出反例，仅判断正确不提供证明与解释的得1分。

(1) 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵，若 $A^2 = O$ ，则 $A$ 不可逆。

(2) 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵，若 $A$ 不可逆，则 $A$ 的伴随矩阵 $A^* = O$ 。

(3) 若 $m \times n$ 阶矩阵 $A$ 满足 $R(A) = n$ ，则线性方程组 $Ax = b$ 一定存在唯一解。

(4) 若向量组 $a_1, a_2$ 线性无关， $a_2, a_3$ 线性无关， $a_1, a_3$ 线性无关，则向量组 $a_1, a_2, a_3$ 线性无关。

(5) 若 $A$ 为实对称矩阵且 $A$ 的特征值全为1，则 $A = E$ 。

(1) 解：命题正确(1分，答“可逆”或“不一定可逆”的不得分)，对 $A^2 = O$ 两边取行列式，有 $|A|^2 = |O| = 0$ 。(1分)因此得到 $|A| = 0$ ，所以 $A$ 不可逆，命题正确。(1分)

注：这一问也可以通过反证法，或证明三个特征值都为0来证明 $A$ 不可逆。

(2) 解：命题不正确(1分)，如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (反例正确1分)， $|A| = 0$ 所以不可逆，但 $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ ，所以 $A^* \neq O$ ，命题不成立。(论证正确1分)

(3) 解：命题不正确(1分)，如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1分)，此方程组无解。(1分)

注：仅描述方程组可能无解，没有举出反例的，本题得到2分。

(4) 解：命题不正确(1分)，如 $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，不难证明这三个向量两两线性无关，但三个向量因为仅为2维向量，一定线性相关。(2分)

(5) 解：命题正确(1分)，因为对称阵 $A$ 一定可以对角化，若 $A$ 的特征值全为1，则 $A$ 相似于 $E$ (1分)，即存在可逆矩阵 $P$ ，使得 $A = PEP^{-1} = PP^{-1} = E$ 。故命题正确。(1分)