第二部分　集合论

第六章　集合代数

主要内容

- 集合的基本概念

  属于、包含

  幂集、空集

  文氏图等

- 集合的基本运算

  并、交、补、差等

- 集合恒等式

  集合运算的算律、恒等式的证明方法

6.1 集合的基本概念

1. 集合定义

集合没有精确的数学定义

理解：由离散个体构成的整体称为集合，称这些个体为集合的元素

常见的数集：N, Z, Q, R, C 等分别表示自然数、整数、有理数、实数、复数集合

2. 集合表示法

枚举法----通过列出全体元素来表示集合

谓词表示法----通过谓词概括集合元素的性质

实例：

枚举法 自然数集合 N={0,1,2,3,…}

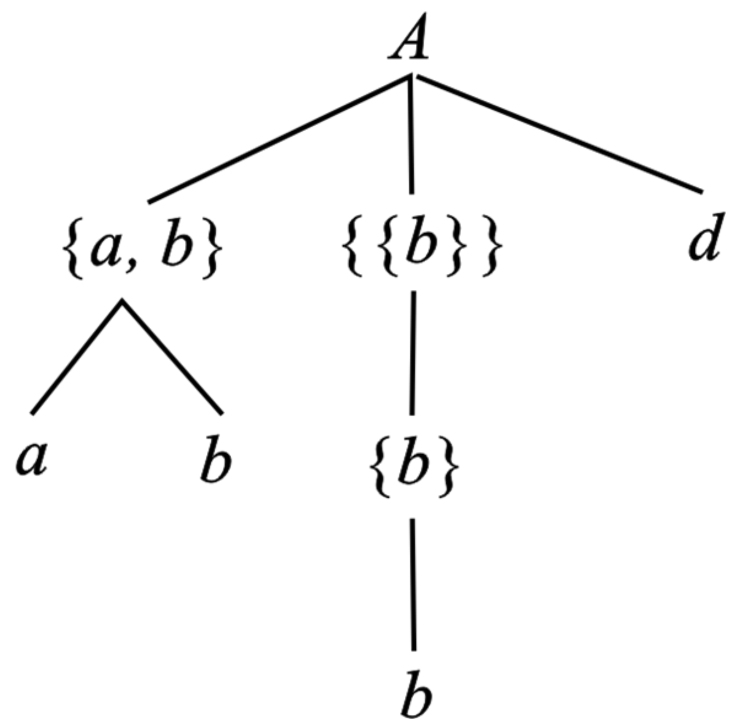
谓词法 $S=\{ x \mid x$是实数，$x^2-1=0\}$

元素与集合

1. 集合的元素具有的性质
   无序性：元素列出的顺序无关
   相异性：集合的每个元素只计数一次
   确定性：对任何元素和集合都能确定这个元素是否为该集合的元素
   任意性：集合的元素也可以是集合

2. 元素与集合的关系
   隶属关系：$\in$或者$\notin$

3. 集合的树型层次结构
   $A=\{\ \{a, b\}, \{\{b\}\}, d\ \}$



$d \in A$, $a \notin A$

集合与集合

集合与集合之间的关系：$\subseteq, =, \nsubseteq, \neq, \subset, \not\subset$

定义6.1 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in B)$

"A包含于B"、"B包含A"、"A是B的子集"

定义6.2 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

"A与B相等"

定义6.3 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

"A是B的真子集"

$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$$

思考：$\neq$ 和 $\not\subset$ 的定义、 $\in$ 和 $\subseteq$ 的区别

空集、全集和幂集

1. **定义6.4 空集** $\varnothing$：不含有任何元素的集合

实例： $\{ x \mid x \in R \land x^2+1=0 \}$

定理6.1 空集是任何集合的子集。

证： 对于任意集合A，

$$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in \varnothing \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T\ (\text{恒真命题})$$

推论 $\varnothing$是惟一的

空集、全集和幂集

n元集：具有n个元素的集合　　　　（一元集也称单元集）

$|A|$表示A中元素的个数

n元集有多少个不同的子集？

例：

$\{a\}$的所有子集为:

$$\emptyset, \{a\}$$

$\{a, b\}$的所有子集为:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$$

$\{a, b, c\}$的所有子集为:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

n元集有2^n个不同的子集

空集、全集和幂集

2. 定义6.5 幂集：$P(A)=\{\, x \mid x \subseteq A \,\}$

   实例：$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$，　$P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

   计数：如果 $|A|=n$，则 $|P(A)|=2^n$.

3. 定义6.6 全集 E：包含了所有集合的集合

   全集具有相对性：与问题有关，不存在绝对的全集

练习1

1．判断下列命题是否为真

(1) $\varnothing\subseteq\varnothing$

(2) $\varnothing\in\varnothing$

(3) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$

(4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$

(5) $\{a, b\}\subseteq\{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

(6) $\{a, b\}\in\{a, b, c, \{a, b\}\}$

(7) $\{a, b\}\subseteq\{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

(8) $\{a, b\}\in\{a, b, \{\{a,b\}\}\}$

解　(1)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)为真，其余为假.

6.2 集合的运算

初级运算

定义6.7 并 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

交 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

相对补 $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

定义6.8 对称差 $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) = A \cup B - A \cap B$

定义6.9 绝对补 $\sim A = E - A$

"A和B不相交"： $A \cap B = \varnothing$

并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{ x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{ x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}$$

广义运算

1. 集合的广义并与广义交

定义6.10 广义并 $\cup A = \{ x \mid \exists z (z \in A \wedge x \in z)\}$

A中元素的并集（即，A中元素的元素组成的集合）

定义6.11 广义交 $\cap A = \{ x \mid \forall z (z \in A \rightarrow x \in z)\}$

A中元素的交集

实例

$\cup\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1,2,3\}$

$\cap\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1\}$

$\cup\{\{a\}\}=\{a\}$， $\cap\{\{a\}\}=\{a\}$

$\cup\{a\}=a$， $\cap\{a\}=a$

关于广义运算的说明

2. 广义运算的性质

(1) $\cup\varnothing=\varnothing$，$\cap\varnothing$无意义

(2) 单元集$\{x\}$的广义并和广义交都等于x

(3) 广义运算减少集合的层次（括弧减少一层）

(4) 广义运算的计算：一般情况下可以转变成初级运算

$$\cup\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$$

$$\cap\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$$

3. 引入广义运算的意义

可以表示无数个集合的并、交运算，例如

$$\cup\{\{x\} \mid x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}$$

这里的 R 代表实数集合.

运算的优先权规定

2 类运算：初级运算$\cup$, $\cap$, $-$, $\oplus$,

优先顺序由括号确定，默认按从左向右进行

1 类运算：广义运算、~运算、幂集运算,

运算由右向左进行

混合运算：1 类运算优先于2 类运算

例1 $A=\{\{a\},\{a,b\}\}$，计算$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$.

解：

$$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$$
$$=\cap\{a,b\}\cup(\cup\{a,b\}-\cup\{a\})$$
$$=(a\cap b)\cup((a\cup b)-a)$$
$$=(a\cap b)\cup(b-a)=b$$

练习2

2．设

$S_1=\{1, 2, \ldots, 8, 9\}$， $S_2=\{2, 4, 6, 8\}$

$S_3=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ $S_4=\{3, 4, 5\}$

$S_5=\{3, 5\}$

确定在以下条件下X是否与$S_1,\ldots,S_5$中某个集合相等？如果是，又与哪个集合相等？

（1）若 $X\cap S_5=\varnothing$ S_2

（2）若 $X\subseteq S_4$但 $X\cap S_2=\varnothing$ S_5

（3）若 $X\subseteq S_1$且 $X\nsubseteq S_3$ S_1, S_2, S_4

（4）若 $X-S_3=\varnothing$ S_3, S_5 注：$X-A=\emptyset \Leftrightarrow X\subseteq A$

（5）若 $X\subseteq S_3$ 且 $X\nsubseteq S_1$ 找不到这样的X

解答

解

(1) 和S_5不交的子集不含有3和5，因此 $X=S_2$.

(2) S_4的子集只能是S_4和S_5. 由于与S_2不交，不能含有偶数，因此 $X=S_5$.

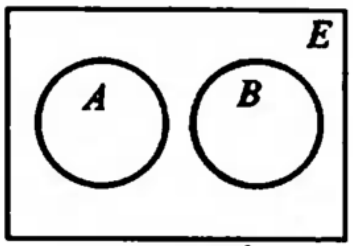
(3) S_1, S_2, S_3, S_4和S_5都是S_1的子集，不包含在S_3的子集含有偶数，因此 $X=S_1, S_2$或S_4.

(4) $X-S_3=\varnothing$意味着 X是S_3的子集，因此 $X=S_3$或 S_5.

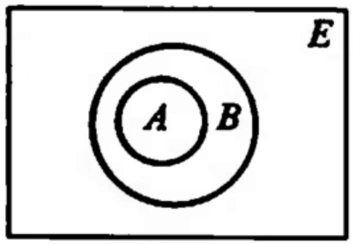
(5) 由于S_3是S_1的子集，因此这样的X不存在.

6.3 有穷集合元素的计数

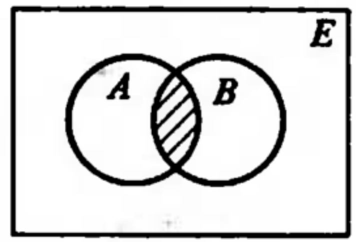
文氏图　　方框：全集；圆：集合；阴影区域：集合运算的结果



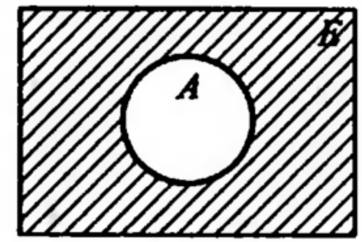
$A\cap B=\varnothing$



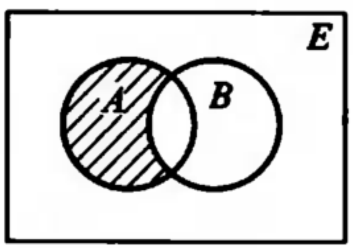
$A\subset B$



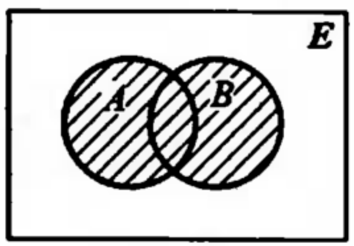
$A\cap B$



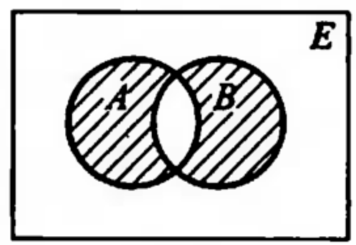
$\sim A$



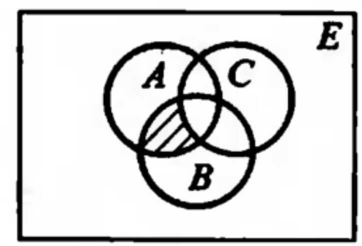
$A-B$



$A\cup B$



$A\oplus B$



$(A\cap B)-C$

方法一：文氏图

例2 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5和6整除，也不能被8整除的数有多少个？

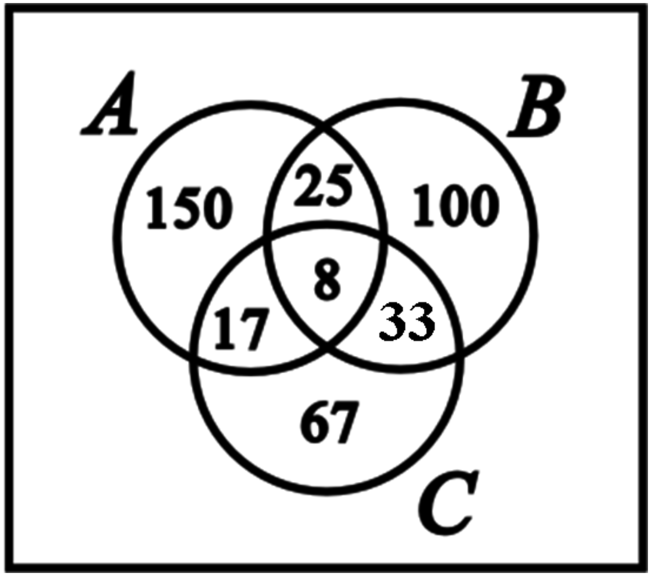
解 定义以下集合：

$S=\{x \mid x\in Z \wedge 1\le x\le 1000\}$

$A=\{x \mid x\in S \wedge x\text{可被5整除}\}$

$B=\{x \mid x\in S \wedge x\text{可被6整除}\}$

$C=\{x \mid x\in S \wedge x\text{可被8整除}\}$



画出文氏图，填入相应数字，得

$N=1000-(200+100+33+67)=600$

包含排斥原理

当存在一个默认的全集$\boldsymbol{E}$时，通常令：$\overline{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$

注意：$\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}}$，$\overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}}$

$$\begin{aligned}
&\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}} = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{x} \in \overline{\boldsymbol{A}} \wedge \boldsymbol{x} \in \overline{\boldsymbol{B}}\} \\
&= \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{B}\} \\
&= \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} \wedge \neg(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B})\} \\
&= \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}\} \\
&= \overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}}
\end{aligned}$$

类似可证$\overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}}$

包含排斥原理

已知：$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, $|\overline{A}| = |E| - |A|$

包含排斥原理：用于计算多个集合的补集的交集的元素个数

两个集合的情形：
$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = |E| - |A \cup B| = |E| - |A| - |B| + |A \cap B|$

三个集合的情形：
$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\overline{A \cup B} \cap \overline{C}| = |E| - |A \cup B| - |C| + |(A \cup B) \cap C|$
$= |E| - |A| - |B| + |A \cap B| - |C| + |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$
$= |E| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$

如何推广？

包含排斥原理

定理6.2 包含排斥原理

$$
\begin{aligned}
&\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right| \\
&= |E| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} \left|A_i \cap A_j\right| \\
&- \sum_{1 \le i < j < k \le n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}
$$

设集合E上定义了n条性质，其中具有第 i 条性质的元素构成子集A_i, 那么集合中不具有任何性质的元素数可通过上式计算

包含排斥原理

推论

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

实例

例2 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5和6整除，也不能被8整除的数有多少个？

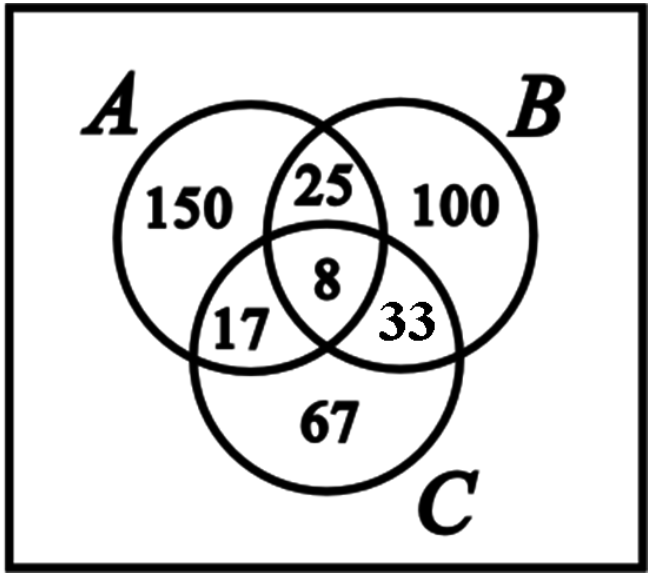
解 定义以下集合：

$S=\{x \mid x\in Z \wedge 1\le x\le 1000\}$

$A=\{x \mid x\in S \wedge x$可被5整除$\}$

$B=\{x \mid x\in S \wedge x$可被6整除$\}$

$C=\{x \mid x\in S \wedge x$可被8整除$\}$



实例

方法二

$|S| = 1000$

$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200,\ |B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166,\ |C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$

$|A\cap B| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6) \rfloor = \lfloor 1000/33 \rfloor = 33$

$|A\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,8) \rfloor = \lfloor 1000/40 \rfloor = 25$

$|B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(6,8) \rfloor = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$

$|A\cap B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6,8) \rfloor = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$

$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}|$

$= 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8 = 600$

欧拉函数

例3 求欧拉函数$\phi(n)$的值.

$\phi(n)$表示$\{0,1,\ldots,n-1\}$中与n互素的数的个数.规定$\boldsymbol{\phi(1)=1}$

例：$\boldsymbol{\phi(12)=4}$，因为与12互素的有$\mathbf{1,5,7,11}$.

令$\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}_+$, 其素因子分解记为$\boldsymbol{n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}}$

令$\boldsymbol{A_i=\{x|0\le x<n\wedge p_i}$能整除$\boldsymbol{x\}}$，则

$$\boldsymbol{\phi(n)=\left|\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_k}\right|}$$

由于$\boldsymbol{p_1,\ldots,p_k}$为素因子：

$$\boldsymbol{|A_i|=\frac{n}{p_i},\qquad \left|A_i\cap A_j\right|=\frac{n}{p_ip_j},\qquad \left|A_i\cap A_j\cap A_l\right|=\frac{n}{p_ip_jp_l}}$$

欧拉函数（续）

$$\phi(n)=\left|\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_k}\right|$$
$$=n-\left(\frac{n}{p_1}+\cdots+\frac{n}{p_k}\right)+\left(\frac{n}{p_1p_2}+\frac{n}{p_1p_3}+\cdots+\frac{n}{p_{k-1}p_k}\right)$$
$$+\cdots+(-1)^k\frac{n}{p_1p_2\dots p_k}$$
$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

实例：$\phi(60)=60\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=16$

与60互素的正整数有16个：1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59.

错位排列计数

例4 错位排列：对全排列$i_1 i_2 \dots i_n$

满足$i_j \neq j$，$j = 1, \dots, n$的全排列的个数

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

S为$\{1, 2, \dots, n\}$全排列的集合，$A_i = \{$第i位为i的全排列$\}$，则

$$|A_i| = (n-1)!\,,\quad |A_i \cap A_j| = (n-2)!$$

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!$ 以此类推

$$D_n = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}|$$
$$= n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - \dots + (-1)^n C_n^n 0!$$
$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \approx \frac{n!}{e}$$

作业11

习题6： 6、8、15、22(3,5)

6.4 集合恒等式

课本P100-101, eqs 6.1-6.23

1. 只涉及一个运算的算律：
   交换律、结合律、幂等律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C$ $=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C$ $=A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

来源于析取与合取的基本等值式

集合算律

2．涉及两个不同运算的算律：

分配律、吸收律

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)$ $=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

集合算律

3． 涉及补运算的算律：

德摩根律，双重否定律

	$-$	$\sim$
德摩根律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

集合算律

4．涉及全集和空集的算律：

	$\varnothing$	E
矛盾律、排中律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定律	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

集合证明题

证明方法：命题演算法、等式置换法

命题演算证明法的书写规范 (以下的X和Y代表集合公式)

(1) 证$X\subseteq Y$

任取x，$x\in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in Y$

(2) 证$X=Y$

方法一 分别证明 $X\subseteq Y$ 和 $Y\subseteq X$

方法二

任取x，$x\in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x\in Y$

注意：在使用方法二的格式时，必须保证每步推理都是充分必要的

集合等式的证明

方法一：命题演算法

例5 证明$A\cup(A\cap B) = A$ （吸收律）

证 任取x,

$$x\in A\cup(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A\vee x\in A\cap B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B) \Leftrightarrow x\in A$$

因此得 $A\cup(A\cap B) = A$.

例6 证明 $A-B = A\cap\sim B$

证 任取x,

$$x\in A-B \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B \Leftrightarrow x\in A\cap\sim B$$

因此得 $A-B = A\cap\sim B$

等式代入法

方法二：等式置换法

例7 假设交换律、分配律、同一律、零律已经成立，证明吸收律.

证

$$
\begin{aligned}
& A\cup(A\cap B) \\
&= (A\cap E)\cup(A\cap B) && \text{（同一律）} \\
&= A\cap(E\cup B) && \text{（分配律）} \\
&= A\cap E && \text{（零律）} \\
&= A && \text{（同一律）}
\end{aligned}
$$

涉及等值的证明

例8 证明 $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

①　②　③　④

证 ①⇒②

显然$B\subseteq A\cup B$，下面证明$A\cup B\subseteq B$.

任取x,

$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A\vee x\in B \Rightarrow x\in B\vee x\in B \Leftrightarrow x\in B$

因此有$A\cup B\subseteq B$. 综合上述②得证.

②⇒③

$A\cap B=A\cap(A\cup B)=A$

证明

例8 证明$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B=B \Leftrightarrow A \cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

①　②　③　④

③⇒④

假设$A-B \neq \varnothing$, 即存在x,

$$x \in A - B$$
$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$
$$\Rightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin B$$
$$\Leftrightarrow 0$$

④⇒①

证明逆否命题：假设$A \subseteq B$不成立，那么存在x

$$x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A-B \Rightarrow A-B \neq \varnothing$$

作业12

习题6：31、35、45

练习3

3. 一个班50个学生，在第一次考试中有26人得5分，在第二次考试中有21人得5分. 如果两次考试中都没有得5分的有17人，那么两次考试都得5分的有多少人?

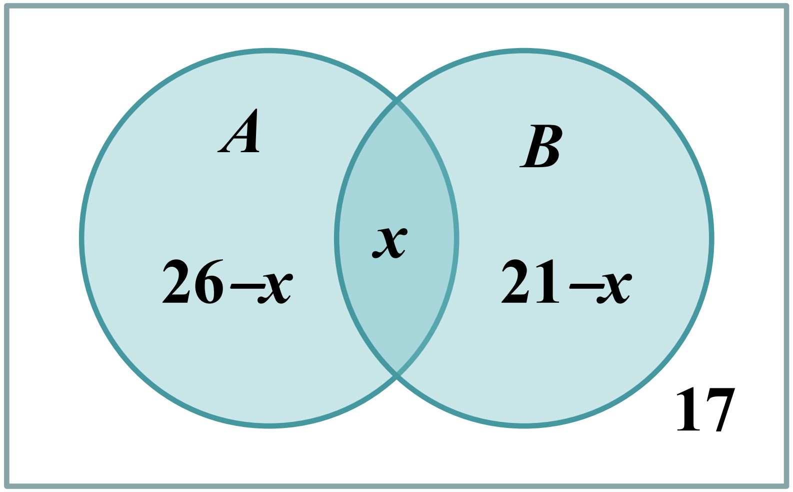
求解

方法一：文氏图填图法

第一次得5分学生：集合A
第二次得5分学生：集合B
全班学生：全集 E

$$(26-x)+x+(21-x)+17=50$$

$x=14.$



文氏图

求解

方法二：使用包含排斥原理.

A、B和全集E设定同上. 那么有

$$|E|=50,\ |A|=26,\ |B|=21$$

根据包含排斥原理有

$$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|E|-(|A|+|B|)+|A\cap B|$$

代入得：

$$|A\cap B|=|\overline{A}\cap\overline{B}|-|E|+|A|+|B|$$

$$=17-50+26+21=14$$

练习4

4. 判断以下命题的真假，并说明理由.

（1）$A-B=A \Leftrightarrow B=\varnothing$ 假，反例：$A=\{1\}, B=\{2\}$

（2）$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ 真

（3）$A\oplus A=A$ 假，反例：$A=\{1\}$

（4）如果$A\cap B=B$，则$A=E$. 假，反例：$A=\{1,2\}, B=\{2\}$

（5）$A=\{x\}\cup x$，则 $x\in A$且$x\subseteq A$. 真

练习5

5．证明 $A \cup B = A \cup C \wedge A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$

方法一：恒等变形法

$$B = B\cap(B\cup A) = B\cap(A\cup B)$$
$$= B\cap(A\cup C) = (B\cap A)\cup(B\cap C)$$
$$= (A\cap C)\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap C$$
$$= (A\cup C)\cap C = C$$

方法二：反证法.

假设 $B \neq C$，则存在 x 使得$x\in B$且$x\notin C$, 或 使得$x\in C$且$x\notin B$.

不妨设为前者.

若x属于A，则x属于$A\cap B$ 但x不属于$A\cap C$，与已知矛盾；

若x不属于A，则x属于$A\cup B$但x不属于$A\cup C$，也与已知矛盾.

解答

方法三：利用已知等式通过运算得到新的等式.

由已知等式可以得到

$$(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup C)-(A\cap C)$$

即

$$A\oplus B=A\oplus C$$

从而有

$$A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)$$

根据结合律得

$$(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C$$

由于$A\oplus A=\varnothing$, 化简上式得$B=C$.

练习6

6．设A,B为集合，试确定下列各式成立的充分必要条件：

(1) $A-B=B$

$$A=B=\emptyset$$

(2) $A-B=B-A$

$$A=B$$

(3) $A\cap B=A\cup B$

$$A=B$$

(4) $A\oplus B=A$

$$B=\emptyset$$

解答

解

(1) $A-B=B \Leftrightarrow A=B=\varnothing$. 求解过程如下：

由$A-B=B$得

$$(A\cap\sim B)\cap B = B\cap B$$

化简得$B=\varnothing$. 再将这个结果代入原来的等式得$A=\varnothing$. 从而得到必要条件$A=B=\varnothing$.

再验证充分性. 如果$A=B=\varnothing$成立，则$A-B=\varnothing=B$也成立.

(2) $A-B=B-A \Leftrightarrow A=B$. 求解过程如下：

充分性是显然的，下面验证必要性. 由$A-B=B-A$得

$$(A-B)\cup A=(B-A)\cup A$$

从而有$A=A\cup B$, 即$B\subseteq A$. 同理可证$A\subseteq B$.

解答

(3) $A\cap B=A\cup B \Leftrightarrow A=B$. 求解过程如下：

充分性是显然的，下面验证必要性. 由$A\cap B=A\cup B$得

$$A\cup(A\cap B) = A\cup(A\cup B)$$

化简得$A=A\cup B$，从而有$A\subseteq B$. 类似可以证明$B\subseteq A$.

(4) $A\oplus B=A \Leftrightarrow B=\varnothing$. 求解过程如下：

充分性是显然的，下面验证必要性. 由$A\oplus B = A$得

$$A\oplus(A\oplus B) = A\oplus A$$

根据结合律有

$$(A\oplus A)\oplus B = A\oplus A$$

即 $\varnothing\oplus B = \varnothing$, 就是$B = \varnothing$.