第七章 二元关系

主要内容

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分
- 偏序关系

7.1 有序对与笛卡儿积

定义7.1 由两个元素 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组称为**有序对**，记作 $<x,y>$.

有序对性质:

(1) 有序性 $<x,y> \neq <y,x>$ （当$x\neq y$时）

(2) $<x,y>$与$<u,v>$相等的充分必要条件是

$$<x,y>=<u,v> \Leftrightarrow x=u \wedge y=v.$$

笛卡儿积

定义7.2 设A,B为集合，A与B的**笛卡儿积**记作$A\times B$，且

$$A\times B = \{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}.$$

例1 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$

$A\times B=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 1,c\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 2,c\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 3,c\rangle\}$

$B\times A=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle,\langle a,3\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,3\rangle\}$

$A=\{\varnothing\}$, $B=\varnothing$

$P(A)\times A = \{\langle\varnothing,\varnothing\rangle, \langle\{\varnothing\},\varnothing\rangle\}$

$P(A)\times B = \varnothing$

笛卡儿积的性质

(1) 不适合交换律

$$A\times B \neq B\times A \quad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$$

(2) 不适合结合律

$$(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing,\ C\neq\varnothing)$$

(3) 对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C) \qquad (B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C) \qquad (B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$$

(4) 若 A 或 B 中有一个为空集，则 $A\times B$ 就是空集.

$$A\times\varnothing = \varnothing\times B = \varnothing$$

(5) 若 $|A| = m$, $|B| = n$, 则 $|A\times B| = mn$

性质证明

证明 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

证 任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in A\times(B\cup C) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge y\in B\cup C \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C) \\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in A\times B\vee <x,y>\in A\times C \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)
\end{aligned}
$$

所以有$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

实例

例2

(1) 证明$A=B,C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C = B\times D$是否推出 $A=B,C=D$? 为什么？

解 (1) 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in A\times C$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C$$

$$\Rightarrow x\in B\wedge y\in D$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in B\times D$$

(2) 不一定.反例如下：

$A=\{1\}$，$B=\{2\}$, $C = D = \varnothing$, 则$A\times C = B\times D$但是$A \neq B$.

7.2 二元关系

定义7.3 如果一个集合满足以下条件之一：

(1) 集合非空, 且它的元素都是有序对

(2) 集合是空集

则称该集合为一个**二元关系**, 简称为关系，记作R.

如果$\langle x,y\rangle\in R$, 可记作xRy；如果$\langle x,y\rangle\notin R$, 则记作$x\not R y$

实例：$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle a,b\rangle\}$, $S=\{\langle 1,2\rangle,a,b\}$.

R是二元关系, 当a, b不是有序对时，S不是二元关系

根据上面的记法，可以写$1R2$, aRb, $a\not R c$等.

A到B的关系与A上的关系

定义7.4

设A,B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做**从A到B的二元关系**，当$A=B$时则叫做**A上的二元关系**.

例3　$A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, 定义：

$R_1=\{<0,2>\}$，$R_2=A\times B$，$R_3=\varnothing$，$R_4=\{<0,1>\}$

R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系,

R_3 和 R_4 也是A上的二元关系.

计数：$|A|=n$, $|A\times A|=n^2$, $A\times A$的子集有2^{n^2}个. 所以 A上有 2^{n^2}个不同的二元关系.

例如 $|A| = 3$，则 A上有$=512$个不同的二元关系.

A上重要关系的实例

定义7.5 设 A 为集合,

(1) $\varnothing$是A上的关系，称为**空关系**

(2) **全域关系** $E_A = \{\langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in A\} = A\times A$

恒等关系 $I_A = \{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$

小于等于关系 $L_A = \{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\le y\}$, A为实数子集

整除关系 $D_B = \{\langle x,y\rangle \mid x,y\in B \wedge x\text{整除}y\}$, B为非0整数子集

包含关系 $R_{\subseteq} = \{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\subseteq y\}$, A是集合族.

实例

例如, A={1, 2}, 则

$E_A = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$

$I_A = \{<1,1>,<2,2>\}$

例如 $A = \{1, 2, 3\}$, 则

$L_A = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$

$D_A = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$

例如 $A = P(\{a, b\}) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 则 A上的包含关系是

$R_\subseteq = \{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>,$
$<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$

类似的还可以定义:

大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等.

关系的表示

1. 关系矩阵

若$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$B=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，$R$是从$A$到$B$的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [\, r_{ij} \,]_{m\times n}$, 其中

$r_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle x_i, y_j\rangle \in R$. 反之$r_{ij} = 0$

2. 关系图

若$A= \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$R$是$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R=\langle A, R\rangle$, 其中$A$为结点集，$R$为边集. 如果$\langle x_i,x_j\rangle$属于关系$R$，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

注意：

- 关系矩阵适合表示从A到B的关系或A上的关系（A,B为有穷集）
- 关系图适合表示有穷集A上的关系

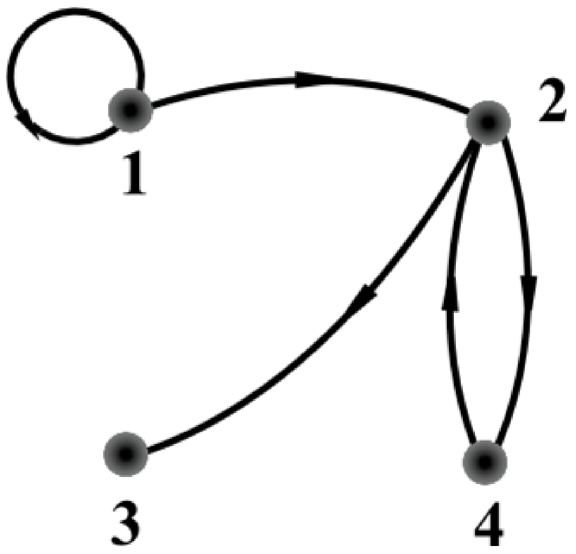
实例

例4

$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$,

R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$



作业13

习题7：4、12

7.3 关系的运算

关系的基本运算

定义7.6 关系的定义域、值域与域分别定义为

$\mathrm{dom}R = \{ x \mid \exists y (<x,y> \in R) \}$ 所有有序对第一个元素组成的集合

$\mathrm{ran}R = \{ y \mid \exists x (<x,y> \in R) \}$ 所有有序对第二个元素组成的集合

$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$

例5 $R=\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>\}$, 则

$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$

关系运算(逆与合成)

定义7.7 关系的**逆**运算

$$R^{-1} = \{ \langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \}$$

定义7.8 关系的**合成**运算（右复合）

$$R\circ S = \{ \langle x, z\rangle \mid \exists y\, (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S) \}$$

例6 $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$R^{-1} = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$R\circ S = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

$S\circ R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

合成的图示法

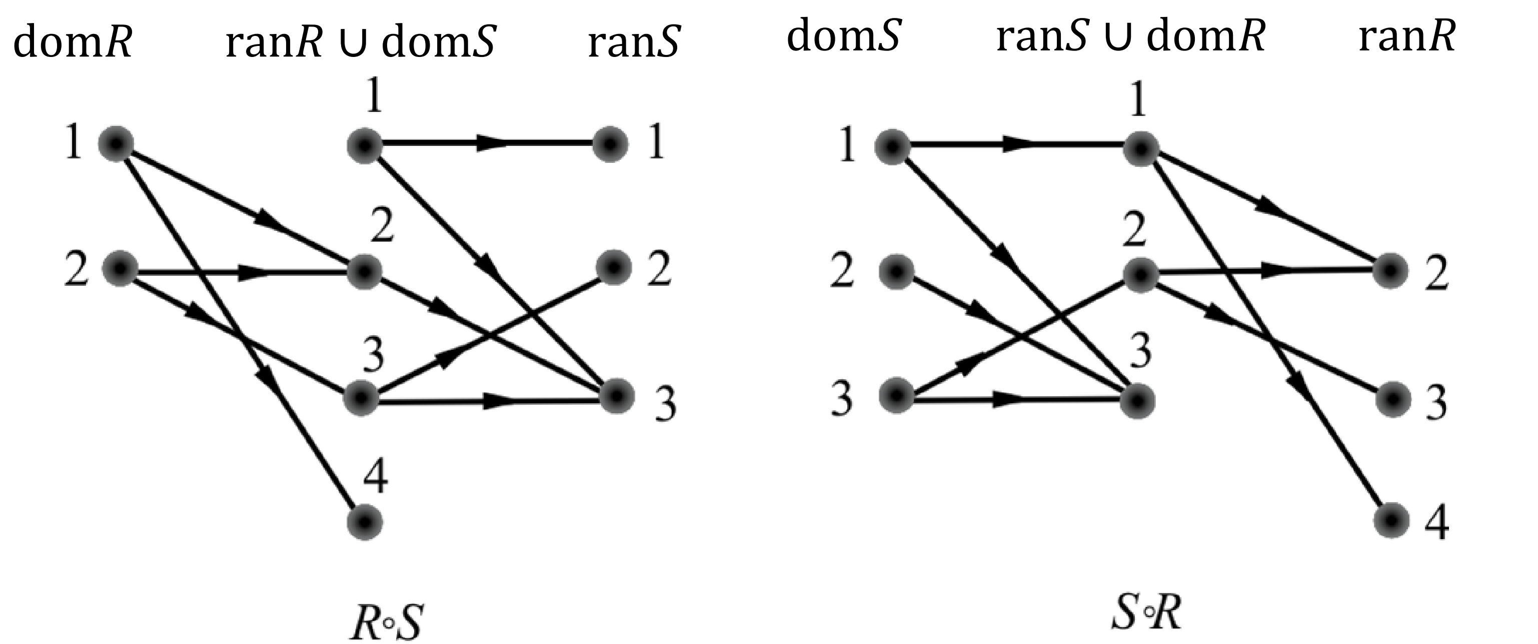
利用图示（不是关系图）方法求合成

$\boldsymbol{R} = \{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$

$\boldsymbol{S} = \{<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

$\boldsymbol{R\circ S} = \{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

$\boldsymbol{S\circ R} = \{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$



关系运算(限制与像)

定义7.9 设R为二元关系, A是集合

(1) R在A上的限制记作 $R\upharpoonright A$, 其中

$$R\upharpoonright A = \{ <x,y> \mid xRy \wedge x \in A \}$$

(2) A在R下的像记作$R[A]$, 其中

$$R[A]=\mathrm{ran}(R\upharpoonright A)= \{y \mid \exists x(<x, y> \in R \wedge x \in A)\}$$

说明:

- R在A上的限制 $R\upharpoonright A$是 R 的子关系，即 $R\upharpoonright A \subseteq R$
- A在R下的像 $R[A]$ 是 $\mathrm{ran}R$ 的子集，即 $R[A] \subseteq \mathrm{ran}R$

任取y, $y \in R[A] \Rightarrow \exists x(< x, y > \in R\upharpoonright A)$

$\Rightarrow \exists x(xRy \wedge x \in A) \Rightarrow \exists x(xRy) \wedge \exists x(x \in A) \Rightarrow \exists x(xRy) \Rightarrow y \in \mathrm{ran}R$

实例

例7 设$R=\{<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$, 则

$R\restriction\{1\} = \{<1,2>,<1,3>\}$

$R\restriction\varnothing = \varnothing$

$R\restriction\{2,3\} = \{<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$

$R[\{1\}] = \{2,3\}$

$R[\varnothing] = \varnothing$

$R[\{3\}] = \{2\}$

关系运算的性质

定理7.1 设F是任意的关系, 则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 (1) 任取$<x,y>$, 由逆的定义有

$$<x,y>\in(F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in F^{-1} \Leftrightarrow <x,y>\in F.$$

所以有$(F^{-1})^{-1}=F$.

(2) 任取x,

$$x\in \mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \exists y(<y,x>\in F) \Leftrightarrow x\in \mathrm{ran}F$$

所以有 $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$.

同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

关系运算的性质

定理7.2 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证 (1) 任取$<x,y>$,

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in(F\circ G)\circ H \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x,t>\in F\circ G \wedge <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(\exists s\,(<x,s>\in F \wedge <s,t>\in G) \wedge <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,\exists s\,(<x,s>\in F \wedge <s,t>\in G \wedge <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s\,(<x,s>\in F \wedge \exists t\,(<s,t>\in G \wedge <t,y>\in H)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s\,(<x,s>\in F \wedge <s,y>\in G\circ H) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\circ(G\circ H)
\end{aligned}
$$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

证明

(2) 任取$<x,y>$,

$$<x,y> \in (F \circ G)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow <y,x> \in F \circ G$$
$$\Leftrightarrow \exists t\,(<y,t> \in F \wedge <t,x> \in G)$$
$$\Leftrightarrow \exists t\,(<t,x> \in G \wedge <y,t> \in F)$$
$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in G^{-1} \wedge <t,y> \in F^{-1})$$
$$\Leftrightarrow <x,y> \in G^{-1} \circ F^{-1}$$

所以 $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

关系运算的性质

定理7.3 设R为A上的关系, 则

$$R\circ I_A = I_A\circ R = R$$

证　任取$<x,y>$

$$<x,y>\in R\circ I_A$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in R \land <t,y>\in I_A)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in R \land t=y \land y\in A)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in R$$

因此$R\circ I_A = R$，同理可证$I_A\circ R = R$

关系运算的性质

定理7.4

(1) $F\circ(G\cup H) = F\circ G\cup F\circ H$ (2) $(G\cup H)\circ F = G\circ F\cup H\circ F$

(3) $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$ (4) $(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F\cap H\circ F$

只证 (3) 任取$<x,y>$,

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in F\circ(G\cap H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G\cap H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G\wedge <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,((<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G)\wedge(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in H)) \\
\Rightarrow\ & \exists t\,(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in G)\wedge\exists t\,(<x,t>\in F\wedge <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\circ G\wedge <x,y>\in F\circ H \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\circ G\cap F\circ H
\end{aligned}
$$

所以有 $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$

推广

定理7.4 的结论可以推广到有限多个关系

$$R\circ(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n)=R\circ R_1\cup R\circ R_2\cup\ldots\cup R\circ R_n$$

$$(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n)\circ R=R_1\circ R\cup R_2\circ R\cup\ldots\cup R_n\circ R$$

$$R\circ(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n)\subseteq R\circ R_1\cap R\circ R_2\cap\ldots\cap R\circ R_n$$

$$(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n)\circ R\subseteq R_1\circ R\cap R_2\circ R\cap\ldots\cap R_n\circ R$$

关系运算的性质

定理7.5 设F为关系, A, B为集合, 则

(1) $F\upharpoonright(A\cup B) = F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$

(2) $F[A\cup B] = F[A]\cup F[B]$

(3) $F\upharpoonright(A\cap B) = F\upharpoonright A\cap F\upharpoonright B$

(4) $F[A\cap B] \subseteq F[A]\cap F[B]$

证明

证 只证 (1) 和 (4).

(1) 证明：$F\upharpoonright(A\cup B)=F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$

任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in F\upharpoonright(A\cup B) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\wedge x\in A\cup B \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\wedge(x\in A\vee x\in B) \\
\Leftrightarrow\ & (<x,y>\in F\wedge x\in A)\vee(<x,y>\in F\wedge x\in B) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\upharpoonright A\vee<x,y>\in F\upharpoonright B \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B
\end{aligned}
$$

所以有$F\upharpoonright(A\cup B)=F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$.

证明

(4) 证明$F[A\cap B]\subseteq F[A]\cap F[B]$

任取y,

$$
\begin{aligned}
& y\in F[A\cap B] \\
\Leftrightarrow\ & \exists x\,(<x,y>\in F\wedge x\in A\cap B) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x\,(<x,y>\in F\wedge x\in A\wedge x\in B) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x\,((<x,y>\in F\wedge x\in A)\wedge(<x,y>\in F\wedge x\in B)) \\
\Rightarrow\ & \exists x\,(<x,y>\in F\wedge x\in A)\wedge\exists x\,(<x,y>\in F\wedge x\in B) \\
\Leftrightarrow\ & y\in F[A]\wedge y\in F[B] \\
\Leftrightarrow\ & y\in F[A]\cap F[B]
\end{aligned}
$$

所以有$F[A\cap B]\subseteq F[A]\cap F[B]$.

关系的幂运算

定义7.10

设 R 为 A 上的关系, n为自然数, 则 R 的 n 次幂定义为:

(1) $R^0 = I_A = \{ <x,x> \mid x \in A \}$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意:

- 对于A上的任何关系 R_1 和 R_2 都有 $R_1^0 = R_2^0 = I_A$
- 对于A上的任何关系 R 都有 $R^1 = R$

逻辑矩阵乘法

假设$A, B \in \{0, 1\}^{n\times n}$

标准矩阵乘法：

$$[AB]_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj}$$

使用逻辑加法的矩阵乘法：

$$[AB]_{ij} = A_{i1}B_{1j} \vee A_{i2}B_{2j} \vee \cdots \vee A_{in}B_{nj}$$

or

$$[AB]_{ij} = \mathbb{I}\{A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} > 0\}$$

幂的求法

对n元集$A=\{x_1,\dots,x_n\}$上的关系R，令M为其矩阵表示，则R^i的关系矩阵为M^i，其中

$$M^i=\underbrace{M\,M\quad\cdots\quad M\,M}_{i\text{个矩阵}}=M^{i-1}\,M$$

以上矩阵乘法均为逻辑矩阵乘法

证明：

$i=0$时M^0为单位阵，因此是$R^0=I_A$的矩阵表示

以下假设$i\geq 1$时M^{i-1}是R^{i-1}的矩阵表示，拟对i归纳

$$M_{jk}^i=\left[M^{i-1}\,M\right]_{jk}=M_{j1}^{i-1}M_{1k}\vee\cdots\vee M_{jn}^{i-1}M_{nk}$$

$M_{jk}^i\Leftrightarrow\exists l\left(l\in\{1,\dots,n\}\wedge M_{jl}^{i-1}M_{lk}\right)$

$\Leftrightarrow\exists l\left(l\in\{1,\dots,n\}\wedge M_{jl}^{i-1}\wedge M_{lk}\right)$

$\Leftrightarrow\exists x_l\left(x_l\in A\wedge<x_j,x_l>\in R^{i-1}\wedge<x_l,x_k>\in R\right)$

$\Leftrightarrow<x_j,x_k>\in R^{i-1}\circ R=R^i$

设$A=\{a,b,c\},R=\{<a,b>,<b,a>,<c,b>,<c,c>\}$
求R^i的关系矩阵

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix},M^0=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$M^3=M^2M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

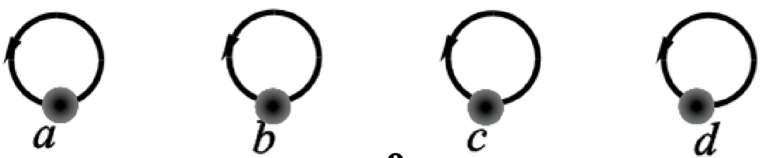
$$M^4=M^3M=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=M^2$$

$M^2=M^4=M^6=\cdots$

$M^3=M^5=M^7=\cdots$ 即$\{R^i\}$具有周期性

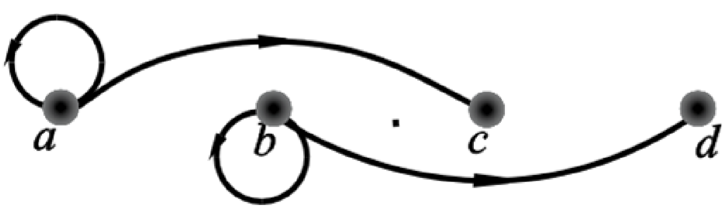
关系图（较少用）

设$A = \{a,b,c,d\}$, $R = \{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$,
$R^0, R^1, R^2, R^3, \ldots$的关系图如下图所示.

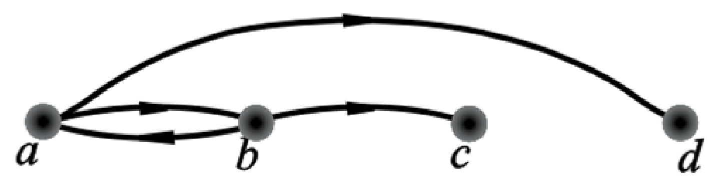


R^0

R^1



$R^2=R^4=\ldots$



$R^3=R^5=\ldots$

记关系R和R^n的关系图分别为G与G'，则G与G'有相同的结点集。且若G中存在一条长为n的路径连接v与u，则G'中包含边(v,u)

幂运算的性质

定理7.6 设 A 为 n 元集, R 是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

证 R的任意次幂都A上的关系,

由于$|A|=n$, A上的不同关系只有 2^{n^2}个.

列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots, R^{2^{n^2}}, \ldots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$

幂运算的性质

定理7.7 设 R 是 A上的关系，$m, n\in$N, 则

(1) $R^m\circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的$m\in$N, 施归纳于n.

若n=0, 则有

$$R^m\circ R^0 = R^m\circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设 $R^m\circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m\circ R^{n+1} = R^m \circ(R^n \circ R) = (R^m \circ R^n)\circ R = R^{m+n}\circ R = R^{m+n+1} ,$$

所以对一切$m,n\in$N 有 $R^m\circ R^n = R^{m+n}$.

证明

(2) 对于任意给定的$m\in$N, 施归纳于n.

若n=0, 则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m\times 0}$$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$, 则有

$$\begin{aligned}(R^m)^{n+1} &= (R^m)^n \circ R^m \\ &= (R^{mn}) \circ R^m \\ &= R^{mn+m} = R^{m(n+1)}\end{aligned}$$

所以对一切$m,n\in$N 有 $(R^m)^n = R^{mn}$.

幂运算的性质

定理7.8 设R是A上的关系，

若存在自然数 $s, t\ (s<t)$ 使得 $R^s=R^t$，则

(1) 对任何 $k\in N$有 $R^{s+k} = R^{t+k}$　$\{R^k\}_{k=0}^{\infty}$呈现周期性

(2) 对任何 $k, i\in N$有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 $p = t-s$　周期

(3) 令$S = \{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$，则对于任意的 $q\in N$ 有$R^q\in S$

证 (1) $R^{s+k} = R^s\circ R^k = R^t\circ R^k = R^{t+k}$

(2) 对k归纳. 若k=0，则有　$R^{s+0p+i} = R^{s+i}$

假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中$p = t-s$，则

$$R^{s+(k+1)p+i} = R^{s+kp+i+p} = R^{s+kp+i}\circ R^p$$

$$= R^{s+i}\circ R^p = R^{s+p+i} = R^{s+t-s+i} = R^{t+i} = R^{s+i}$$

由归纳法命题得证.

证明

(3) 任取 $q \in \mathrm{N}$,

若 $q < t$, 显然有 $R^q \in S$,

若$q \geq t$, 则存在自然数 k 和 i 使得

$$q = s+kp+i,\ \text{其中} 0 \leq i \leq p-1.$$

于是

$$R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$$

而

$$s+i \leq s+p-1 = s+t-s-1 = t-1$$

从而证明了 $R^q \in S$.

作业14

习题7：14、16

7.4 关系的性质——自反与反自反

定义7.11 设 R 为A上的关系,

(1) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow<x,x>\in R)$, 则称 R 在 A 上是自反的.

(2) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow<x,x>\notin R)$, 则称 R 在 A 上是反自反的.

实例:

自反:全域关系E_A, 恒等关系I_A, 小于等于关系L_A, 整除关系D_A

反自反:实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系.

$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$$

$$R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$$

$$R_3=\{<1,3>\}$$

R_2 自反,R_3 反自反,R_1既不是自反的也不是反自反的.

空集同时是自反和反自反的

对称与反对称

定义7.12 设 R 为 A上的关系,

(1) 若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge <x,y> \in R \rightarrow <y,x> \in R)$, 则称 R 为 A上对称的关系.

(2) 若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge <x,y> \in R \wedge <y,x> \in R \rightarrow x=y)$, 则称 R 为 A上的反对称关系.

实例:

对称关系：全域关系E_A, 恒等关系I_A ,空关系$\varnothing$

反对称关系：恒等关系I_A , 空关系$\varnothing$

对称与反对称

判断对称：对所有$<x, y> \in R$，都应该有$<y, x> \in R$

判断反对称：若存在某个$<x, y> \in R$且$x \neq y$，有$<y, x> \in R$，则该关系不具有反对称性

设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$，　$R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_3=\{<1,2>,<1,3>\}$，　$R_4=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$

R_1：对称和反对称；R_2：只有对称；R_3：只有反对称；

R_4：不对称、不反对称

传递性

定义7.13 设R为A上的关系, 若

$$\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge<x,y>\in R\wedge<y,z>\in R\rightarrow<x,z>\in R),$$

则称 R 是A上的传递关系.

实例： A上的全域关系 E_A,恒等关系 I_A和空关系 $\varnothing$，小于等于和小于关系，整除关系，包含与真包含关系

设 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$$

$$R_2=\{<1,2>,<2,3>\}$$

$$R_3=\{<1,3>\}$$

R_1和R_3是A上的传递关系, R_2不是A上的传递关系.

关系性质成立的充要条件

定理7.9 设R为A上的关系, 则

(1) R 在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R 在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R 在A上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

(4) R 在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R 在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

证明

证明

(1) R 在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

必要性

若$I_A \subseteq R$不成立，则存在$<x,y> \in I_A \wedge <x,y> \notin R$

$$\Rightarrow x = y \wedge <x,y> \notin R \Rightarrow <x,x> \notin R$$

$\Rightarrow R$不是自反关系

充分性.

任取x, 有

$$x \in A \Rightarrow <x,x> \in I_A \Rightarrow <x,x> \in R$$

因此 R 在A上是自反的.

证明

(2) R 在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

必要性.

任取$x, y \in A$,

$$<x,y> \in I_A \Rightarrow x = y \Rightarrow <x,y> \notin R$$

$$<x,y> \in R \Rightarrow <x,y> \notin I_A$$

因此有$R \cap I_A = \varnothing$

充分性.

任取$x \in A$, 由于$<x,x> \in I_A$

$$R \cap I_A = \emptyset \Rightarrow <x,x> \notin R$$

因而有R 在A上反自反

证明

(3) R 在A上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

必要性.

任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in R \Rightarrow <y,x>\in R \Leftrightarrow <x,y>\in R^{-1}$$

$$<x,y>\in R^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in R \Rightarrow <x,y>\in R$$

所以 $R = R^{-1}$

充分性.

任取$<x,y>$, 由$R = R^{-1}$得

$$<x,y>\in R \Leftrightarrow <y,x>\in R^{-1} \Rightarrow <y,x>\in R$$

所以R在A上是对称的

证明

(4) R 在A上反对称当且仅当 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

必要性. 任取$<x,y>$, 有

$$<x,y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow <x,y>\in R\wedge <x,y>\in R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge <y,x>\in R \Rightarrow x=y \wedge x,y\in A$$

$$\Rightarrow <x,y>\in I_A$$

这就证明了$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

充分性. 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in R\wedge <y,x>\in R$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in R\wedge <x,y>\in R^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in R\cap R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in I_A \Leftrightarrow x=y$$

从而证明了R在A上是反对称的.

证明

(5) R 在A上传递当且仅当 $R\circ R \subseteq R$

必要性.

任取$<x,y>$有

$$<x,y>\in R\circ R$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in R\wedge <t,y>\in R)$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R$$

所以 $R\circ R \subseteq R$

充分性.

任取$<x,y>,<y,z>\in R$, 则

$$<x,y>\in R\wedge <y,z>\in R$$

$$\Rightarrow <x,z>\in R\circ R \Rightarrow <x,z>\in R$$

所以 R 在 A上是传递的

关系性质的三种等价条件

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i \neq j$, 则$r_{ji}=0$	M^2中1位置, M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	若两点之间有边, 则是一对方向相反的边	若两点之间有边,则是一条有向边	点x_i到x_j有边, x_j到x_k有边, 则x_i到x_k也有边

关系的性质和运算之间的联系

表7.2

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

掌握证明方法!!!

作业15

习题7：20(1)，23(a)

关系性质的证明方法

1. 证明R在A上自反

任取x,

$x \in A \Rightarrow$ ………………………………… $\Rightarrow \langle x,x\rangle \in R$

前提　　　　推理过程　　　　结论

2. 证明R在A上对称

任取$\langle x,y\rangle$,

$\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow$ ………………………………… $\Rightarrow \langle y,x\rangle \in R$

前提　　　　推理过程　　　　结论

关系性质的证明方法

3. 证明R在A上反对称

任取$<x,y>$，

$$<x,y>\in R\wedge<y,x>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow x=y$$

前提　　　　推理过程　　　　结论

4. 证明R在A上传递

任取$<x,y>,<y,z>$，

$$<x,y>\in R\wedge<y,z>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow <x,z>\in R$$

前提　　　　推理过程　　　　结论

7.5 关系的闭包

主要内容

- 闭包定义
- 闭包的构造方法

  集合表示

  矩阵表示

  图表示
- 闭包的性质

闭包定义

实现自反/对称/传递性的最小超集

定义7.14 设R是非空集合A上的关系, R的自反(对称或传递)闭包是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:

(1) R'是自反的(对称的或传递的)

(2) $R \subseteq R'$

(3) 对A上任何包含R的自反(对称或传递)关系R'' 有$R' \subseteq R''$

R的自反闭包记作$r(R)$, 对称闭包记作$s(R)$, 传递闭包记作$t(R)$.

闭包定义

定理7.10 设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R)=R\cup R^0$

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

证. (1)

a. 显然$R\subseteq R\cup R^0$, 因此$R\cup R^0$是R的超集。

b. $I_A=R^0\subseteq R\cup R^0$, 因此$R\cup R^0$是自反的。

c. 设R''是A上包含R的自反关系, 则有$R\subseteq R''$和$R^0=I_A\subseteq R''$.
从而有$R\cup R^0\subseteq R''$。即任意包含R的自反关系都包含$R\cup R^0$。

综上，$r(R)=R\cup R^0$.

闭包定义

（2） $s(R)=R\cup R^{-1}$

证.

a. 显然$R \subseteq R \cup R^{-1}$

b. 任取$x, y \in A$

$$< x, y > \in R \cup R^{-1} \Leftrightarrow xRy \vee xR^{-1}y \Leftrightarrow yR^{-1}x \vee yRx$$

$$\Leftrightarrow < y, x > \in R \cup R^{-1} \Leftrightarrow < x, y > \in \left(R \cup R^{-1}\right)^{-1}$$

因此$R \cup R^{-1} = \left(R \cup R^{-1}\right)^{-1}$，即具有对称性

c. 设R''为包含R的对称关系，任取$x, y \in A$

$$xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx \Rightarrow yR''x \Leftrightarrow x(R'')^{-1}y \Rightarrow xR''y$$

因此有$R^{-1} \subseteq R''$，又由于$R \subseteq R''$，有$R \cup R^{-1} \subseteq R''$

综上有，$s(R) = R \cup R^{-1}$

证明

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

a. 先证 $R\cup R^2\cup\ldots$传递.

任取$<x,y>,<y,z>$, 则

$\Rightarrow \exists t\,(<x,y>\in R^t)\wedge\exists s(<y,z>\in R^s)$

$\Rightarrow \exists t\,\exists s\,(<x,y>\in R^t\wedge<y,z>\in R^s)$

$\Rightarrow \exists t\,\exists s\,(<x,z>\in R^t\circ R^s)$

$\Rightarrow \exists t\,\exists s\,(<x,z>\in R^{t+s})$

$\Rightarrow <x,z>\in R\cup R^2\cup\ldots$

从而证明了$R\cup R^2\cup\ldots$是传递的.

b. 然后证对任意包含R的传递关系R'，均有$R\cup R^2\cup\cdots\subseteq R'$

任取$<x,y>\in R\cup R^2\cup\cdots$, 存在正整数$i$,

$<x,y>\in R^i$

$\Rightarrow \exists z_1\ldots\exists z_{i-1}(<x,z_1>\in R\wedge<z_1,z_2>\in R\wedge\cdots\wedge<z_{i-2},z_{i-1}>\in R\wedge<z_{i-1},y>\in R)$

$\Rightarrow \exists z_1\ldots\exists z_{i-1}(<x,z_1>\in R'\wedge<z_1,z_2>\in R'\wedge\cdots\wedge<z_{i-2},z_{i-1}>\in R'\wedge<z_{i-1},y>\in R')$

$\Rightarrow <x,y>\in R'$

从而$R\cup R^2\cup\cdots\subseteq R'$。因此$R\cup R^2\cup\cdots$是包含$R$的具有传递性的最小集合。

说明：对有穷集$A(|A|=n)$上的关系，(3)中的并最多需要计算到R^n

闭包的矩阵表示和图表示

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r , M_s 和 M_t 则

$M_r=M+E$

$M_s=M+M'$

$M_t=M+M^2+M^3+\ldots$

E 是单位矩阵, M'是 转置矩阵，相加时使用逻辑加.

闭包的矩阵表示和图表示

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为G, G_r, G_s, G_t,
则先设置$G_r = G_s = G_t = G$ ，然后通过以下方式添加新的边：

(1) 考察G_r 的每个顶点, 若没环就在G_r中加一个环

(2) 考察G_s的每条边, 若有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i \neq j$, 则在G_s 中加一条 x_j 到 x_i 的反向边

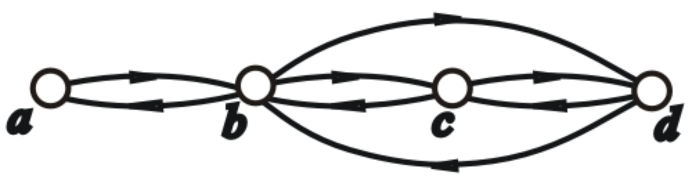
(3) 在G中考察每个顶点 x_i, 找 x_i 可达的所有顶点 x_j (允许$i=j$), 如果在G_t中没有从 x_i 到 x_j 的边, 就加上这条边

实例

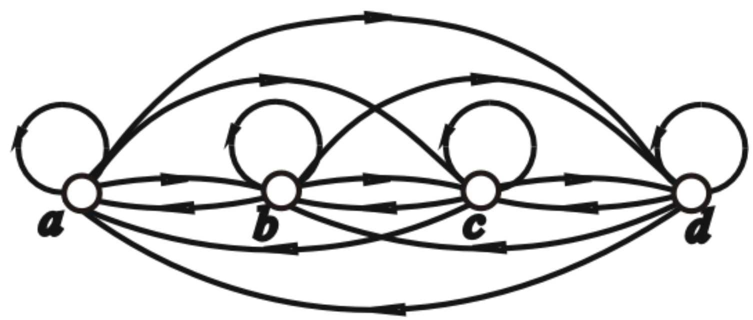
例9 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$, R和$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.

R

$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

闭包的性质

定理7.11 设R是非空集合A上的关系, 则

(1) R是自反的当且仅当 $r(R)=R$.

(2) R是对称的当且仅当 $s(R)=R$.

(3) R是传递的当且仅当 $t(R)=R$.

证明 略

闭包的性质

定理7.12 设R_1和R_2是非空集合A上的关系，且 $R_1 \subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证(3)： a. 首先用归纳法证明$R_1^i \subseteq R_2^i$对任意$i \geq 1$成立

当$i = 1$时显然成立，以下假设对$i \geq 1$有$R_1^i \subseteq R_2^i$，

任取$<x, y> \in R_1^{i+1}$，由于$R_1^{i+1} = R_1^i \circ R_1$，因此

$\exists t\left(<x, t> \in R_1^i \wedge <t, y> \in R_1\right)$

$\Rightarrow \exists t\left(<x, t> \in R_2^i \wedge <t, y> \in R_2\right) \Rightarrow <x, y> \in R_2^i \circ R_2 = R_2^{i+1}$

故而有$R_1^i \subseteq R_2^i$对任意$i \geq 1$成立

b. 由于$t(R_1) = R_1 \cup R_1^2 \cup \cdots$，$t(R_2) = R_2 \cup R_2^2 \cup \cdots$，

对任意$<x, y> \in t(R_1)$，存在$s \geq 1$

$$<x, y> \in R_1^s \Rightarrow <x, y> \in R_2^s \Rightarrow <x, y> \in t(R_2)$$

因此有$t(R_1) \subseteq t(R_2)$

闭包的性质

定理7.13 设R是非空集合A上的关系,

(1) 若R是自反的, 则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的

(2) 若R是对称的, 则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的

(3) 若R是传递的, 则 $r(R)$ 是传递的.

传递关系的对称闭包可能不具有传递性。如果需要进行多个闭包运算，传递放在对称之后运算。

比如求R的自反、对称、传递的闭包，记为 $tsr(R)$，有$tsr(R)=t\left(s\left(r(R)\right)\right)$。

类似可定义$rts(R)=r\left(t\left(s(R)\right)\right)$以及$trs(R)=t\left(r\left(s(R)\right)\right)$。可以验证：

$$tsr(R) = rts(R) = trs(R)$$

作业16

习题7：26(2)、29(2)

7.6 等价关系与划分

主要内容

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应

等价关系的定义与实例

定义7.15 设R为非空集合上的关系. 如果R是自反的、对称的和传递的, 则称R为A上的等价关系. 设 R 是一个等价关系, 若 $<x,y>\in R$, 称 x等价于y, 记做$x\sim y$.

实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义A上的关系R:

$$R=\{<x,y>|\ x,y\in A\wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)\}$$

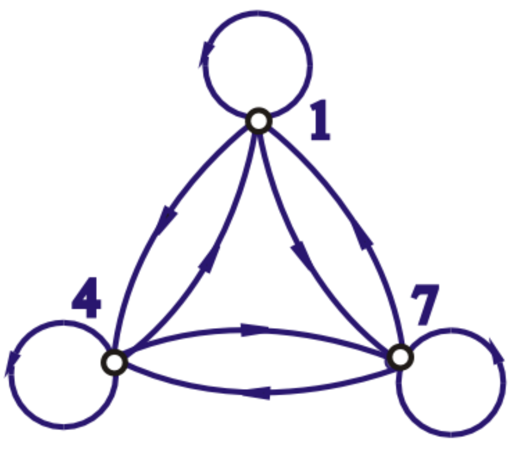
其中$x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$叫做 x与 y 模3相等, 即x除以3的余数与y除以3的余数相等. 不难验证 R 为A上的等价关系, 因为

(1) $\forall x\in A$, 有 $x\equiv x\ (\mathrm{mod}\ 3)$

(2) $\forall x,y\in A$, 若$x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, 则有$y\equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$

(3) $\forall x,y,z\in A$, 若$x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, $y\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$, 则有$x\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$

等价关系的实例



模 3 等价关系的关系图

等价类定义

定义7.16 设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \land xRy\}$$

称$[x]_R$为x关于R的等价类, 简称为x的**等价类**, 简记为$[x]$或$\bar{x}$

实例 $A=\{1, 2, \ldots, 8\}$上模3等价关系的等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

等价类的性质

定理7.14 设R是非空集合A上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$是A的非空子集

(2) $\forall x,y \in A$, 如果 xRy, 则 $[x] = [y]$

(3) $\forall x,y \in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$与$[y]$不交

(4) $\cup\{[x] \mid x \in A\} = A$

证 (1) 由定义, $\forall x \in A$有$[x] \subseteq A$. 又$x \in [x]$, 即$[x]$非空.

(2) 任取 z, 则有

$$z \in [x] \Rightarrow \langle x,z\rangle \in R \Rightarrow \langle z,x\rangle \in R$$

$$\langle z,x\rangle \in R \wedge \langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \langle z,y\rangle \in R \Rightarrow \langle y,z\rangle \in R$$

从而证明了$z \in [y]$. 综上所述必有 $[x] \subseteq [y]$. 同理可证 $[y] \subseteq [x]$. 这就得到了$[x] = [y]$.

证明

(3) 假设 $[x]\cap[y]\neq\varnothing$, 则存在 $z\in[x]\cap[y]$, 从而有$z\in[x]\wedge z\in[y]$, 即$<x,z>\in R\wedge<y,z>\in R$成立. 根据$R$的对称性和传递性必有$<x,y>\in R$, 与 $x\not R y$矛盾

(4) 先证明$\cup\{[x]|x\in A\}\subseteq A$

$y\in\cup\{[x]\|x\in A\}$	
$\Leftrightarrow\exists z(z\in\{[x]\|x\in A\}\wedge y\in z)$	广义并的定义: $\cup B=\{x\|\exists z(z\in B\wedge x\in z)\}$
$\Rightarrow\exists z\exists x(z=[x]\wedge x\in A\wedge y\in z)$	由于$\{[x]\|x\in A\}$里面的元素都是A中某个元素x的等价类
$\Rightarrow\exists x(x\in A\wedge y\in[x])$	置换
$\Rightarrow\exists x([x]\subseteq A\wedge y\in[x])$	定理7.14(1):$x\in A\Rightarrow[x]\subseteq A$
$\Rightarrow y\in A$	集合包含关系基本性质

当A为有限集时，有一个更简单的证明：假设$A=\{x_1,\dots,x_n\}$

$y\in\cup\{[x]\|x\in A\}$	
$\Leftrightarrow y\in[x_1]\cup[x_2]\cup\cdots\cup[x_n]$	置换
$\Rightarrow\exists i(i\in\{1,2,\dots,n\}\wedge y\in[x_i])$	集合并运算基本性质：$x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B$
$\Rightarrow\exists i(i\in\{1,2,\dots,n\}\wedge y\in A)$	根据定理7.14(1):$[x_1]\subseteq A\wedge\cdots\wedge[x_n]\subseteq A$
$\Rightarrow y\in A$	

证明

(4)续上页: 再证明$A \subseteq \cup \{[x]|x \in A\}$

$y \in A$

$\Rightarrow y \in [y] \wedge y \in A$ 定理7.14(1),对任意的y有 $y \in [y]$

$\Rightarrow y \in [y] \wedge [y] \in \{[x]|x \in A\}$ $\{[x]|x \in A\}$表示A中所有元素的等价类的集合，因此其中必然存在$[y]$(因为$y \in A$)

$\Rightarrow y \in \cup \{[x]|x \in A\}$ 广义并的定义

商集与划分

定义7.17 设 R 为非空集合A上的等价关系, 以 R 的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的**商集**, 记做A/R,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$，A关于模3等价关系R的商集为

$$A/R = \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$$

A关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{8\}\}, \quad A/E_A = \{\{1,2,\ldots,8\}\}$$

定义7.18 设A为非空集合, 若A的子集族$\pi(\pi \subseteq P(A))$满足:

(1) $\varnothing \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y(x,y \in \pi \land x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

(3) $\cup \pi = A$

则称π是A的一个**划分**, 称π中的元素为A的**划分块**.

划分实例

例10 设 $A=\{a, b, c, d\}$, 给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$如下：

$\pi_1=\{\{a, b, c\},\{d\}\}$

$\pi_2=\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$

$\pi_3=\{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$

$\pi_4=\{\{a, b\}, \{c\}\}$

$\pi_5=\{\varnothing,\{a, b\}, \{c, d\}\}$

$\pi_6=\{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$

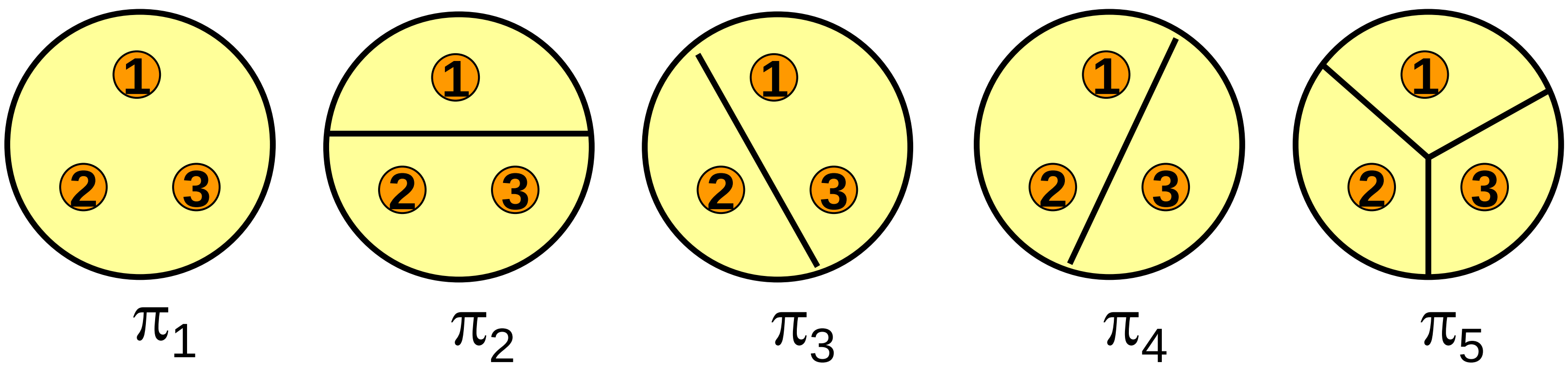
则 π_1和 π_2是A的划分, 其他都不是A的划分.

等价关系与划分的对应关系

商集与划分是一一对应的

例11 给出 $A=\{1,2,3\}$上所有的等价关系

解 先做出A的划分, 从左到右分别记作 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$.



π_1对应 E_A, π_5 对应 I_A, π_2, π_3 和 π_4分别对应 R_2, R_3和 R_4.

$$R_2=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}\cup I_A$$
$$R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}\cup I_A$$
$$R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}\cup I_A$$

练习5

5．设R是A上的二元关系，设

$$S = \{<a,b> \mid \exists c(<a,c>\in R \land <c,b>\in R)\}.$$

证明如果R是等价关系，则S也是等价关系。

证 R是A上的等价关系.

(1) 证自反 任取x,

$$x\in A \Rightarrow <x,x>\in R \Rightarrow <x,x>\in R\land<x,x>\in R \Rightarrow <x,x>\in S$$

(2) 证对称 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in S \Rightarrow \exists c(<x,c>\in R\land<c,y>\in R)$$

$$\Rightarrow \exists c\,(<c,x>\in R\land<y,c>\in R) \Rightarrow <y,x>\in S$$

(3) 证传递 任取$<x,y>$, $<y,z>$,

$$<x,y>\in S \land <y,z>\in S$$

$$\Rightarrow \exists c\,(<x,c>\in R\land<c,y>\in R) \land \exists d\,(<y,d>\in R\land<d,z>\in R)$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\land<y,z>\in R \Rightarrow <x,z>\in S$$

7.7 偏序关系

主要内容

- 偏序关系
  偏序关系的定义
  偏序关系的实例
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特殊元素及其性质
  极大元、极小元、最大元、最小元
  上界、下界、最小上界、最大下界

定义与实例

定义7.19

偏序关系：非空集合A上的自反、反对称和传递的关系，记作$\preccurlyeq$. 设$\preccurlyeq$为偏序关系, 如果 $<x, y> \in \preccurlyeq$, 则记作 $x \preccurlyeq y$, 读作 x“小于或等于” y.

x“小于” y:

$$x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$$

实例

集合A上的恒等关系 I_A是 A上的偏序关系.

小于或等于关系, 整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

相关概念

定义7.20 设 R 为非空集合A上的偏序关系,

(1) $x, y\in A$, x与y可比 $\Leftrightarrow$ $x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$

(2) 任取元素 x 和 y, 可能有下述几种情况发生:

$x \prec y$， $y \prec x$, $x=y$, x与y不是可比的

定义7.21 R 为非空集合A上的偏序关系,

(1) $\forall x,y\in A$, x与y都是可比的，则称R为全序（或线序）

实例：数集上的小于等于关系是全序关系,整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义7.22 $x,y\in A$, 如果 $x\prec y$ 且不存在 $z\in A$ 使得 $x\prec z\prec y$, 则称 y 覆盖x.

例如{1,2,4,6}集合上整除关系, 2覆盖1, 4和6覆盖2, 4不覆盖1.

偏序集与哈斯图

定义7.23 集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$一起叫做**偏序集**, 记作$<A,\preccurlyeq>$.

实例: $<Z,\leq>$, $<P(A),R_{\subseteq}>$

哈斯图: 利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图

与关系图的区别

(1) 结点上不再画环

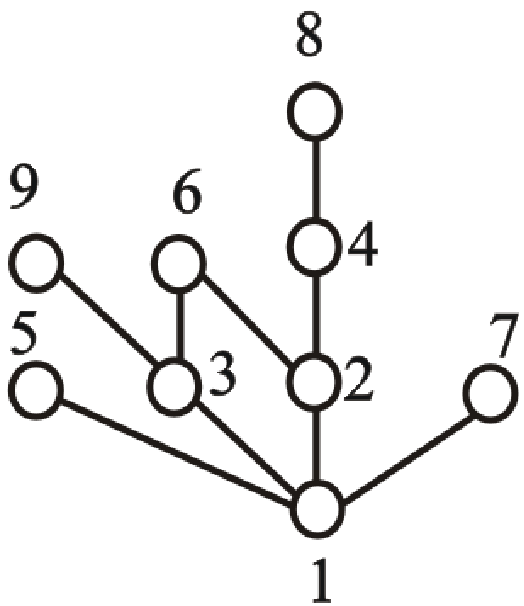
(2)具有覆盖关系的两个结点之间连边

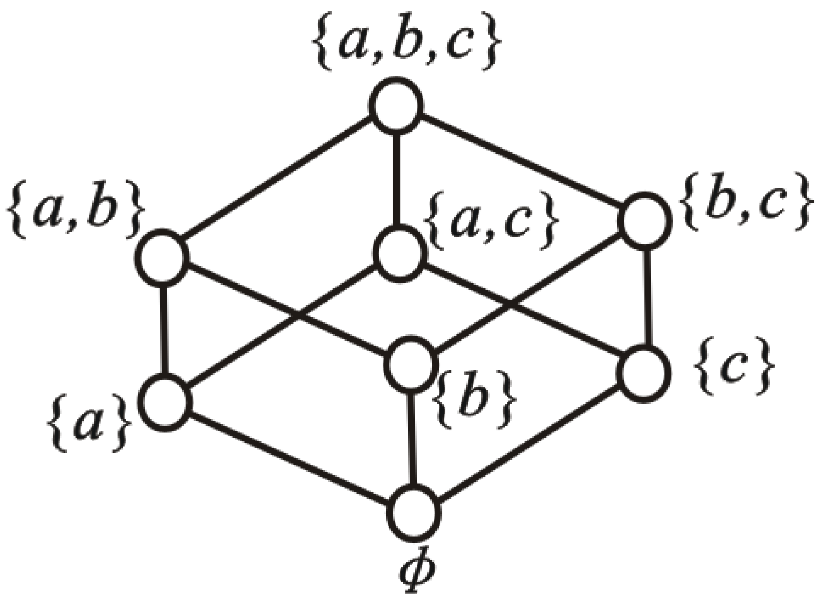
(3)边上不再标注方向，仅使用结点位置表示序关系：当两个元素间有边时，位置低的元素小于等于位置高的元素。

两个元素之间有边，当且仅当上方的元素覆盖下方的元素

实例

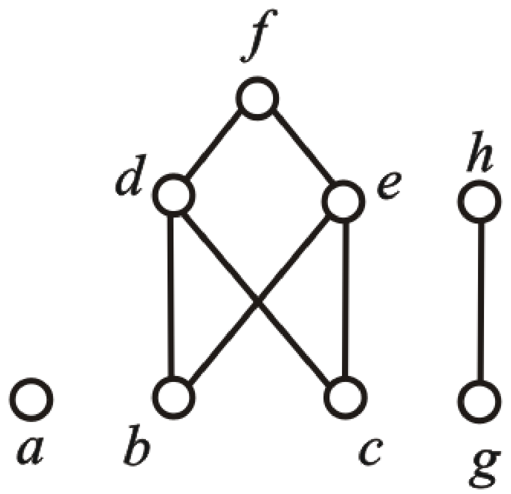
例12 偏序集<{1,2,3,4,5,6,7,8,9}, $R_{整除}$>和<$P(\{a,b,c\}),R_{\subseteq}$>的哈斯图.





实例

例13 已知偏序集$<A,R>$的哈斯图如下图所示, 试求出集合A和关系R的表达式.



解 $A=\{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$

$R=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}\cup I_A$

偏序集中的特殊元素

定义7.24 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立, 则称 y 为B的最小元

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立, 则称 y 为B的最大元

(3) 若$\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为B的极小元

(4) 若$\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为B的极大元

- B中的最小元/最大元与B中所有元素均可比
- y是B中的极小元，当且仅当B中与y可比的元素里没有比y更小的

性质：

(1) 对于有穷集，极小元和极大元一定存在，可能存在多个.

(2) 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.

(3) 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.

(4) 孤立结点既是极小元，也是极大元.

偏序集中的特殊元素

定义7.25 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$

(1) 若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$成立, 则称$y$为$B$的上界

(2) 若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$成立, 则称$y$为$B$的下界

(3) 令$C = \{y \mid y$为B的上界$\}$, C的最小元为B的最小上界或上确界

(4) 令$D = \{y \mid y$为B的下界$\}$, D的最大元为B的最大下界或下确界

性质:

(1) 下界、上界、下确界、上确界不一定存在

(2) 下界、上界存在不一定惟一

(3) 下确界、上确界如果存在，则惟一

(4) 集合的最小元是其下确界，最大元是其上确界；反之不对.

(5) B的下界/上界不一定属于B

实例

例14　设偏序集$\langle A, \preccurlyeq \rangle$，求$A$的极小元、最小元、极大元、最大元，设$B=\{b,c,d\}$, 求$B$的下界、上界、下确界、上确界.

解

极小元：a, b, c, g；

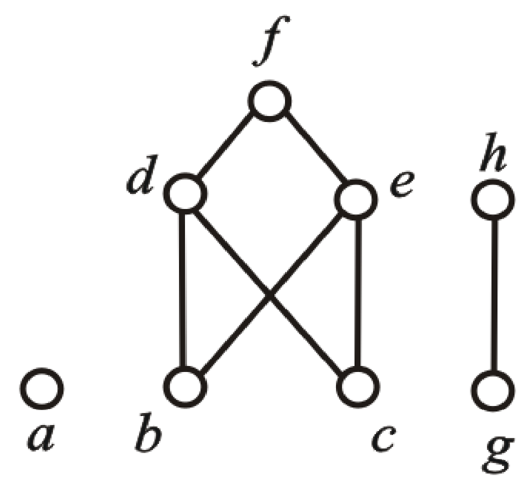
极大元：a, f, h；

没有最小元与最大元.

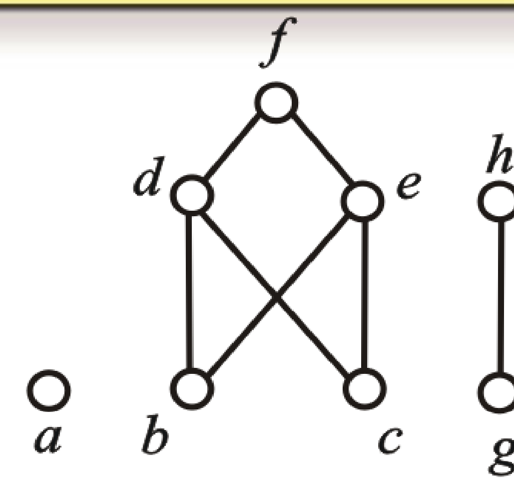
B的下界和最大下界都不存在；

上界有 d 和 f,

最小上界为 d.



说明



<u>为什么b是$B=\{b,c,d\}$的极小元？</u>

b是B的极小元

$\Leftrightarrow \forall x(x\in B\land x\preccurlyeq b\to x=b)$

$\Leftrightarrow (a\in B\land a\preccurlyeq b\to a=b)\land(b\in B\land b\preccurlyeq b\to b=b)$

$\quad\land(c\in B\land c\preccurlyeq b\to c=b)\land(d\in B\land d\preccurlyeq b\to d=b)$

$\quad\land\cdots\land(h\in B\land h\preccurlyeq b\to h=b)$

$\Leftrightarrow (0\to 0)\land(1\to 1)\land(0\to 0)\land\cdots\land(0\to 0)$

$\Leftrightarrow 1$

同理可证明，b是$A=\{a,b,\ldots,h\}$的极小元。

<u>为什么f是B的上界？</u>

f是B的上界

$\Leftrightarrow \forall x(x\in B\to x\preccurlyeq f)$

$\Leftrightarrow (a\in B\to a\preccurlyeq f)\land(b\in B\to b\preccurlyeq f)\land(c\in B\to c\preccurlyeq f)$

$\quad\land(d\in B\to d\preccurlyeq f)\land(e\in B\to e\preccurlyeq f)\land\cdots\land(h\in B\to h\preccurlyeq f)$

$\Leftrightarrow (0\to 0)\land(1\to 1)\land(1\to 1)\land(1\to 1)\land(0\to 1)\land\cdots$

$\Leftrightarrow 1$

实例

例15 设X为集合, $A=P(X)-\{\varnothing\}-\{X\}$, 且$A\neq\varnothing$. 若$|X|=n$, $n\geq 2$. 问:

(1) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 是否存在最大元?

(2) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 是否存在最小元?

(3) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 中极大元和极小元的一般形式是什么? 并说明理由.

解 (1) $<A, R_{\subseteq}>$ 不存在最小元和最大元.

(2) $<A, R_{\subseteq}>$ 的极小元就是 X 的所有单元集, 即$\{x\}$, $x\in X$.

(3) $<A, R_{\subseteq}>$ 的极大元恰好比 X 少一个元素, 即$X-\{x\}$, $x\in X$.

作业17

习题7：38、43(1)、46(1)、47

第七章 习题课

主要内容

- 有序对与笛卡儿积的定义与性质
- 二元关系、从A到B的关系、A上的关系
- 关系的表示法：关系表达式、关系矩阵、关系图
- 关系的运算：定义域、值域、域、逆、合成、限制、像、幂
- 关系运算的性质：A上关系的自反、反自反、对称、反对称、传递的性质
- A上关系的自反、对称、传递闭包
- A上的等价关系、等价类、商集与A的划分
- A上的偏序关系与偏序集

基本要求

- 熟练掌握关系的三种表示法
- 能够判定关系的性质（等价关系或偏序关系）
- 掌握含有关系运算的集合等式
- 掌握等价关系、等价类、商集、划分、哈斯图、偏序集等概念
- 计算$A \times B$, dom R, ran$R$, fld$R$, R^{-1}, $R \circ S$, R^n , $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$
- 求等价类和商集A/R
- 给定A的划分π，求出π所对应的等价关系
- 求偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、上确界、下确界
- 掌握基本的证明方法

  证明涉及关系运算的集合等式

  证明关系的性质、证明关系是等价关系或偏序关系

练习1

1. 设$A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{\langle x,y\rangle \mid x, y\in A$且$x+2y \le 6 \}$,

$S = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle\}$,

求:

(1) R的集合表达式

(2) R^{-1}

(3) dom R, ran R, fld R

(4) $R\circ S$, R^3

(5) $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$

解答

(1) $R = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>\}$

(2) $R^{-1} = \{<1,1>, <2,1>, <1,2>, <2,2>, <1,3>\}$

(3) $\mathrm{dom}R = \{1, 2, 3\}$, $\mathrm{ran}R = \{1,2\}$, $\mathrm{fld}R = \{1, 2, 3\}$

(4) $R\circ S = \{<1,2>, <1,3>, <2,2>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

$R^3 = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,2>\}$

(5) $r(R) = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,3>\}$

$s(R) = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>, <2,2>, <3,1>, <1,3>\}$

$t(R) = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,2>\}$

练习2

2． 设$A=\{1,2,3,4\}$，在$A\times A$上定义二元关系R：

$$<<x,y>,<u,v>>\in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$$

求R导出的划分.

$$A\times A=\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <2,4>,<3,1>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <4,1>, <4,2>, <4,3>, <4,4>\}$$

根据 $<x,y>$ 中的 $x+y = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 将A划分成等价类：

$$A/R=\{\{<1,1>\}, \{<1,2>,<2,1>\}, \{<1,3>, <2,2>, <3,1>\}, \{<1,4>, <2,3>, <3,2>, <4,1>\}, \{<2,4>, <3,3>, <4,2>\}, \{<3,4>, <4,3>\}, \{<4,4>\}\}$$

练习3

3．设R是Z上的模 n 等价关系, 即

$$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y (\bmod n),$$

试给出由R确定的Z的划分π.

解　设除以 n 余数为 r 的整数构成等价类 $[r]$，则

$$[r] = \{ kn+r \mid k \in Z \},\ r = 0, 1, \ldots, n-1$$

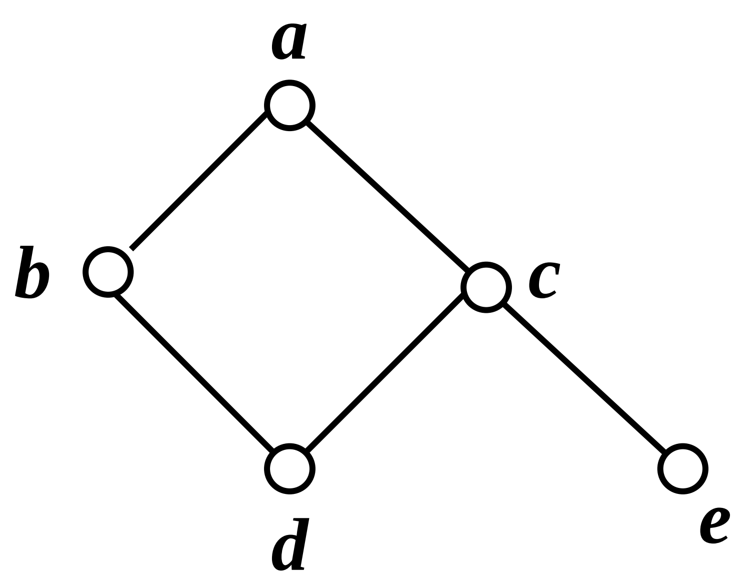
$$\pi = \{ [r] \mid r = 0, 1, \ldots, n-1 \}$$

练习4

4．设偏序集 $\langle A, R\rangle$ 的哈斯图如图所示.

(1) 写出A和R的集合表达式

(2) 求该偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元



解

(1) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$R = \{\langle d,b\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,c\rangle, \langle e,c\rangle, \langle e,a\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,a\rangle\}\cup I_A$

(2) 极大元和最大元是a,

极小元是d, e;

没有最小元.

练习6

6．设偏序集$<A,R>$和$<B,S>$，定义$A\times B$上二元关系T:

$$<x,y>T<u,v> \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$$

证明T为偏序关系.

证 (1) 自反性 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in A\times B \Rightarrow x\in A\wedge y\in B \Rightarrow xRx\wedge ySy \Rightarrow <x,y>T<x,y>$$

(2) 反对称性 任取$<x,y>$,$<u,v>$

$$<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<x,y> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRx \wedge vSy$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRx) \wedge (ySv \wedge vSy) \Rightarrow x=u \wedge y=v$$

$$\Rightarrow <x,y>=<u,v>$$

(3) 传递性 任取$<x,y>$,$<u,v>$, $<w,t>$

$$<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<w,t> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRw \wedge vSt$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRw) \wedge (ySv \wedge vSt) \Rightarrow xRw \wedge ySt$$

$$\Rightarrow <x,y>T<w,t>$$

关系等式或包含式的证明方法

- 数学归纳法（主要用于幂运算）
- 证明中用到关系运算的定义和公式, 如:

$x \in \mathrm{dom}R \Leftrightarrow \exists y(<x,y> \in R)$

$y \in \mathrm{ran}R \Leftrightarrow \exists x(<x,y> \in R)$

$<x,y> \in R \Leftrightarrow <y,x> \in R^{-1}$

$<x,y> \in R \circ S \Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in R \land <t,y> \in S)$

$<x,y> \in R\upharpoonright A \Leftrightarrow x \in A \land <x,y> \in R$

$y \in R[A] \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \land <x,y> \in R)$

$r(R) = R \cup I_A$

$s(R) = R \cup R^{-1}$

$t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots$