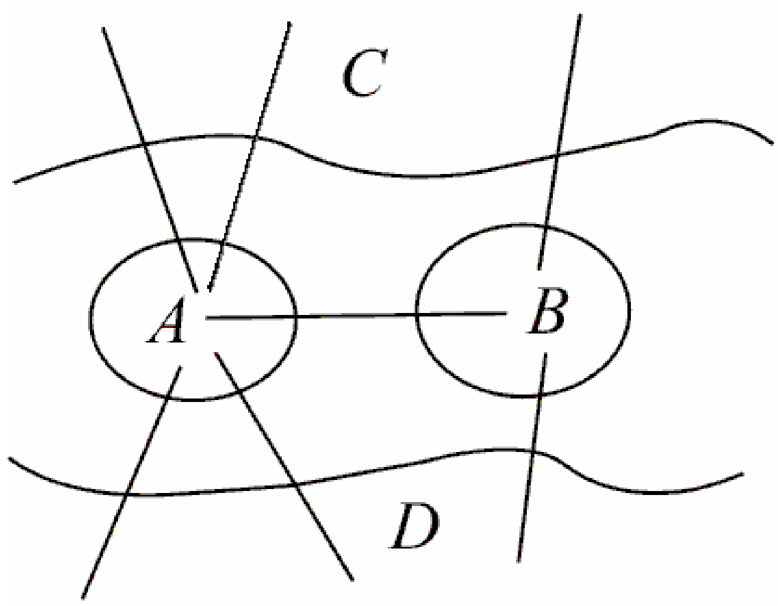
第十五章 欧拉图与哈密顿图

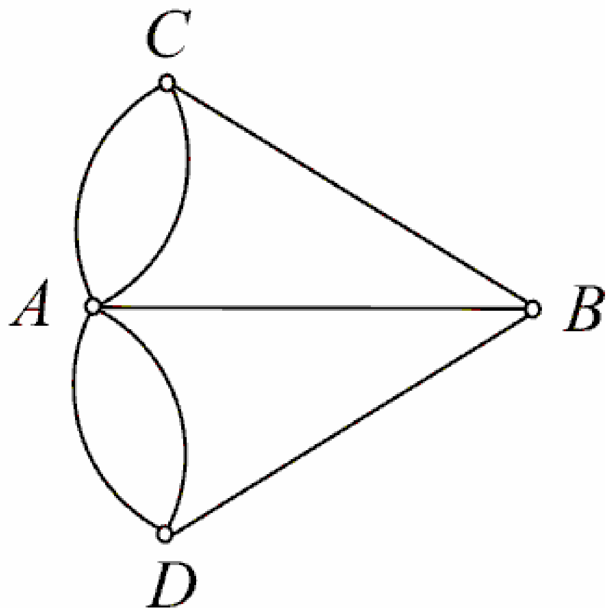
主要内容

- 欧拉图
- 哈密顿图
- 带权图与货郎担问题

15.1 欧拉图

历史背景：哥尼斯堡七桥问题与欧拉图





欧拉图定义

定义15.1

(1) 欧拉通路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.

(2) 欧拉回路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.

(3) 欧拉图——具有欧拉回路的图.

(4) 半欧拉图——具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

几点说明:

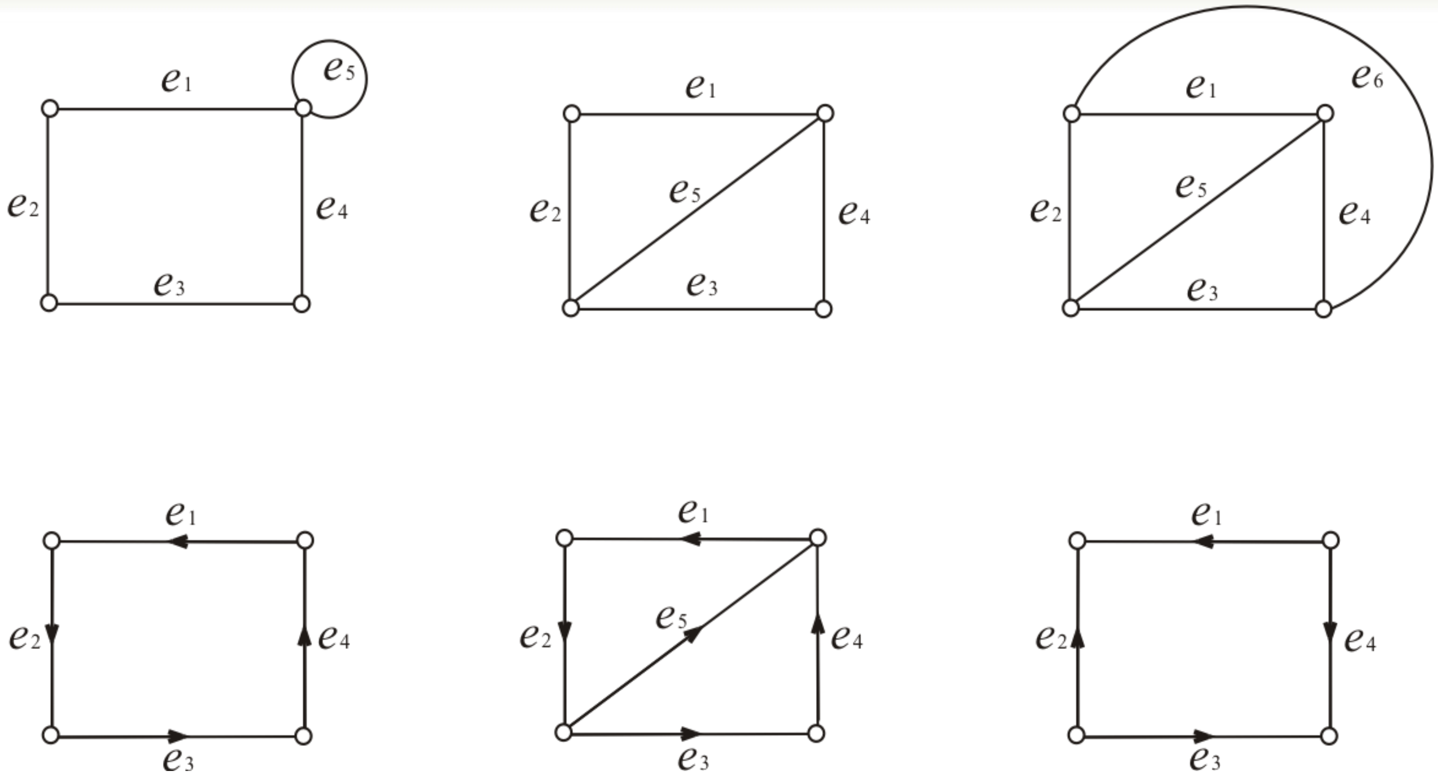
规定平凡图为欧拉图.

欧拉通路是生成的简单通路，欧拉回路是生成的简单回路.

环不影响图的欧拉性.

同一个顶点可以经过若干次.

欧拉图实例



上图中，(1) ,(4) 为欧拉图，(2),(5)为半欧拉图，(3),(6)既不是欧拉图，也不是半欧拉图. 在(3),(6)中各至少加几条边才能成为欧拉图？

无向欧拉图的判别法

定理15.1 无向图G是欧拉图当且仅当G连通且无奇度顶点.

证 若G为平凡图则显然成立. 下设G为n 阶m条边的无向图.

必要性 设C 为G 中一条欧拉回路.

(1) G 连通显然.

(2) $\forall v \in V(G)$，v在C上每出现一次获2度，所以v必然为偶度顶点.

无向欧拉图的判别法

充分性 对边数m做归纳法.

(1) m=1时，G为一个环，则G为欧拉图.

(2) 设$m \le k$（$k \ge 1$）时结论为真，$m=k+1$时如下证明：

由于G连通，且$\delta(G) \ge 2$，则G含有圈。

令C为某个圈；从G删除C中的边，可得连通分支$G'_1, \dots, G'_s$

设G'_i与C的公共顶点为v_{j_i},

显然$G'_1, \dots, G'_s$均不含奇度顶点，且边数$\le k$，根据假设有欧拉回路。

则G含有如下的欧拉回路：

$$v_{j_1} C_1 v_{j_1} \dots v_{j_2} C_2 v_{j_2} \dots v_{j_s} C_s v_{j_s} \dots v_{j_1}$$

其中C_i为G'_i中从v_{j_i}回到自身的欧拉回路。

欧拉图的判别法

定理15.2 无向图G是半欧拉图当且仅当G 连通且恰有两个奇度顶点.

证 必要性显然.

充分性（利用定理15.1）

设u, v为G中的两个奇度顶点，令

$$G' = G \cup (u, v)$$

则G'连通且无奇度顶点，由定理15.1知G'为欧拉图，因而存在欧拉回路C，令

$$\Gamma = C - (u, v)$$

则Γ为G中欧拉通路.

有向欧拉图的判别法

定理15.3 有向图D是欧拉图当且仅当D是强连通的且每个顶点的入度都等于出度.

定理15.4 有向图D是半欧拉图当且仅当D是单向连通的，且D中恰有两个奇度顶点，其中一个的入度比出度大1，另一个的出度比入度大1，而其余顶点的入度都等于出度.

定理15.5 G是非平凡的欧拉图当且仅当G是连通的且为若干个边不重的圈之并.

（证明方法类似于定理15.1）

例题

例1 设G是欧拉图，但G不是平凡图，也不是一个环，则$\delta(G) \geq 2$.

证 首先，证明G不含有桥：

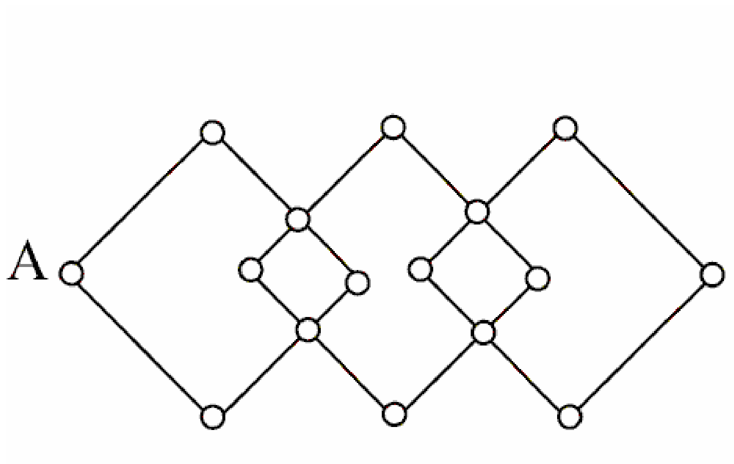
对G中的任何一个边e,由于e在欧拉回路上，则$G-e$存在欧拉通路，因此

$$p(G-e)=p(G)$$

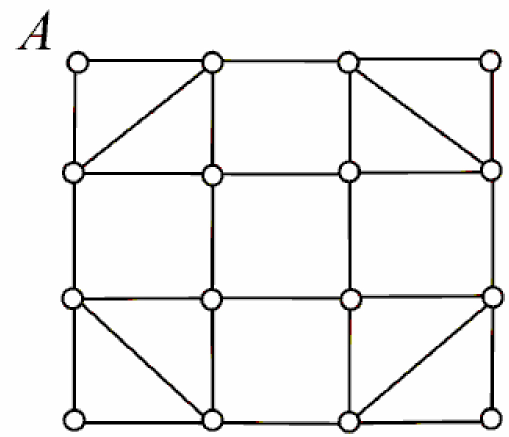
所以e不是桥。

其次，对任意$e=(u,v)$，从G删除e之后连通性不变，即u与v通过除e外的某个通路相连，因此$d(u) \geq 2, d(v) \geq 2$。根据e的任意性，可知所有顶点的度≥2.

例题



(1)



(2)

上图中，(1),(2)两图都是欧拉图，均从A点出发，如何一次成功地走出一条欧拉回路来？

Fleury算法

算法：

(1) 任取$v_0 \in V(G)$，令$P_0 = v_0$.

(2) 设$P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_i v_i$ 已经行遍，从子图

$G_i = G - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$中选取边$e_{i+1}$，且满足：

(a) e_{i+1}与v_i相关联；

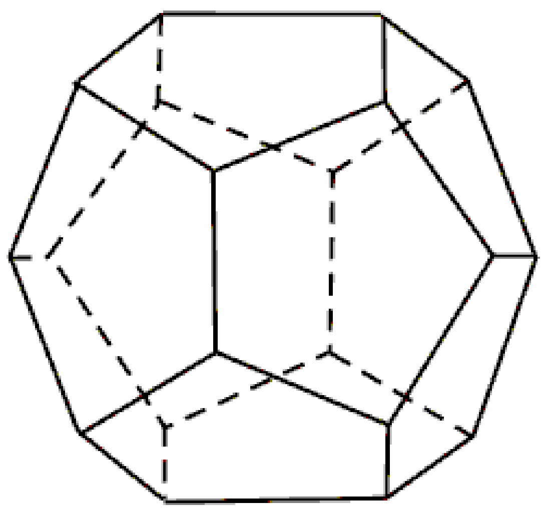
(b) 除非无别的边可供选择，否则e_{i+1}不应该为G_i的桥.

(3) 当 (2)不能再进行时，算法停止.

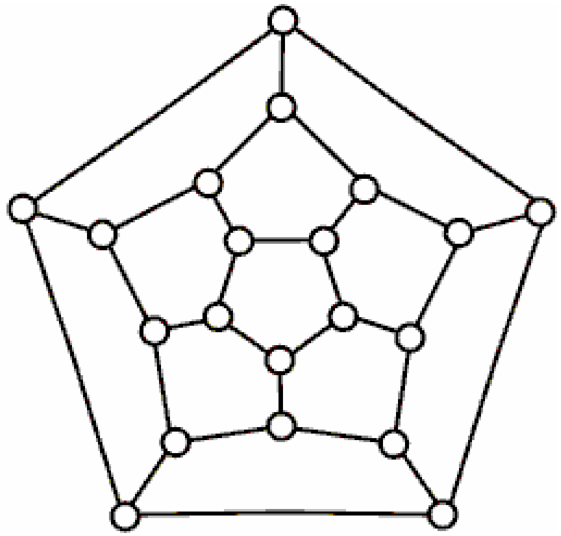
能不走桥就不走桥

15.2 哈密顿图

历史背景：哈密顿周游世界问题与哈密顿图



(1)



(2)

哈密顿图与半哈密顿图

定义15.2

(1) 哈密顿通路——经过图中所有顶点一次仅一次的通路.

(2) 哈密顿回路——经过图中所有顶点一次仅一次的回路.

(3) 哈密顿图——具有哈密顿回路的图.

(4) 半哈密顿图——具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图.

几点说明:

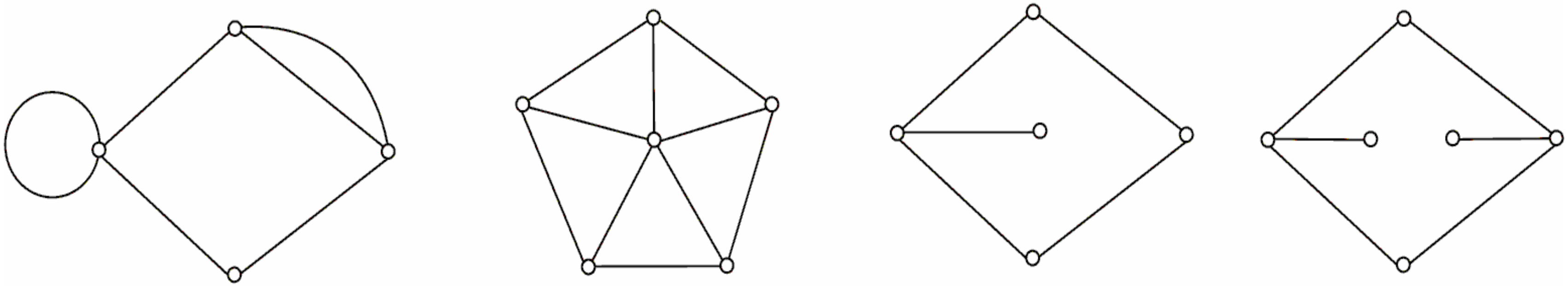
平凡图是哈密顿图.

哈密顿通路是初级通路，哈密顿回路是初级回路.

环与平行边不影响哈密顿性.

哈密顿图的实质是能将图中的所有顶点排在同一个圈上

实例



在上图中，

(1),(2) 是哈密顿图;

(3)是半哈密顿图;

(4)既不是哈密顿图，也不是半哈密顿图，为什么？

无向哈密顿图的一个必要条件

定理15.6 设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图，对于任意$V_1\subset V$且$V_1\neq\varnothing$，均有$p(G-V_1)\leq |V_1|$

证 设C为G中一条哈密顿回路

(1) $p(C-V_1)\leq |V_1|$ （V_1在C上互不相邻时等号成立）

(2) $p(G-V_1)\leq p(C-V_1)$ （$C\subseteq G$）

推论 设无向图$G=<V,E>$是半哈密顿图，对于任意的$V_1\subset V$且$V_1\neq\varnothing$均有$p(G-V_1)\leq |V_1|+1$

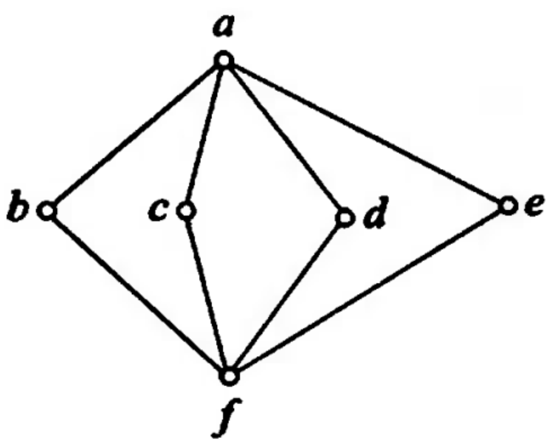
证 u,v为G中哈密顿通路的始点和终点，

令$G'=G\cup(u,v)$，则G'为哈密顿图. 于是

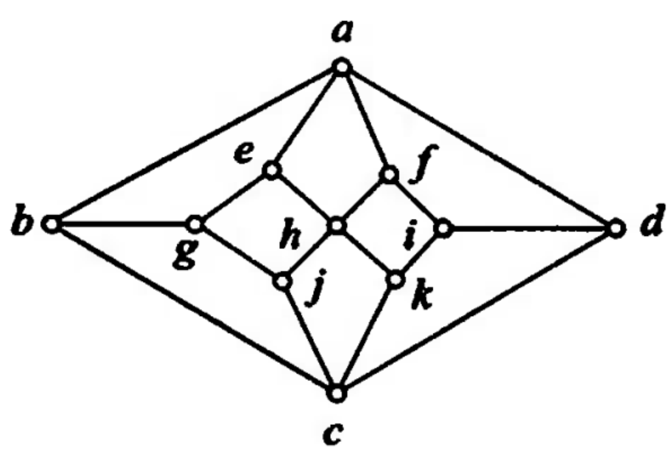
$$p(G-V_1)=p(G'-(u,v)-V_1)\leq p(G'-V_1)+1$$
$$\leq |V_1|+1$$

几点说明

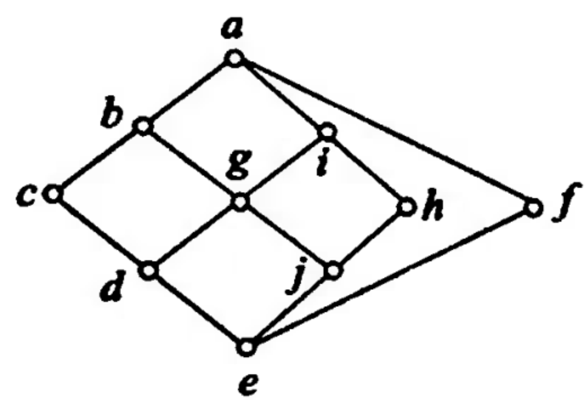
- 定理15.6中的条件是哈密顿图的必要条件，但不是充分条件（彼得松图）
- 由定理15.6立刻可知，$K_{r,s}$当$s > r$时不是哈密顿图. 易知$\forall r \geq 2, K_{r,r}$都是哈密顿图， $K_{r,r+1}$都是半哈密顿图.
- 常利用定理15.6判断某些图不是哈密顿图.



$K_{2,4}$



$K_{5,6}$



$K_{5,5}$

几点说明

例2 设G为n阶无向连通简单图，若G中有割点或桥，则G不是哈密顿图.

证 设v为割点，则 $p(G-v) \geq 2 > 1 = |\{v\}|$.

K_2有桥，它显然不是哈密顿图. 除K_2外，其他有桥的图（连通的）均有割点.

其实，本例对非简单连通图也对.

无向哈密顿图的一个充分条件

定理15.7 设G是n阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点u和v，均有

$$d(u)+d(v)\geq n-1 \qquad (*)$$

则G 中存在哈密顿通路.

证明思路:

(1) 由(*)知G连通

(2) 令$\Gamma=v_1\ldots v_l$为G中极大路径. 若$l=n$, 证毕.

(3) 否则，证G中存在过Γ上所有顶点的圈C，由(1) 知C外顶点存在与C上某顶点相邻顶点，从而得比Γ更长的路径，重复(2) –(3)，最后得G中哈密顿通路.

证明

关键步骤3的证明：

已知$\Gamma = v_1 \dots v_l$为G的极大路径，$l < n$，以下证明G中存在过Γ上所有顶点的圈C

(1)若$(v_1, v_l) \in E(G)$,则$C = \Gamma \cup (v_1, v_l)$

(2)若$(v_1, v_l) \notin E(G)$,设v_1与Γ上的k个点相邻，记为

$$v_2 = v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$$

显然$k \geq 2$，否则$d(v_1) = 1, d(v_l) \leq l - 2,$

$\Rightarrow d(v_1) + d(v_l) \leq l - 1 < n - 1$与条件矛盾

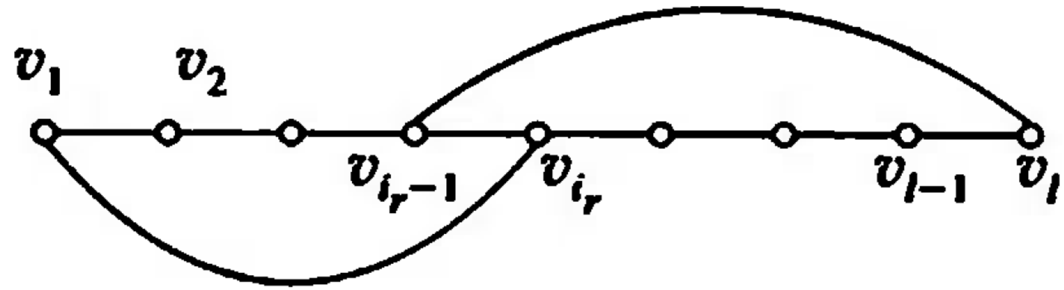
类似得，v_l至少与$v_{i_2-1}, v_{i_3-1}, \dots, v_{i_k-1}$之一相邻

否则$d(v_l) \leq l - 2 - (k - 1) = l - 1 - k$

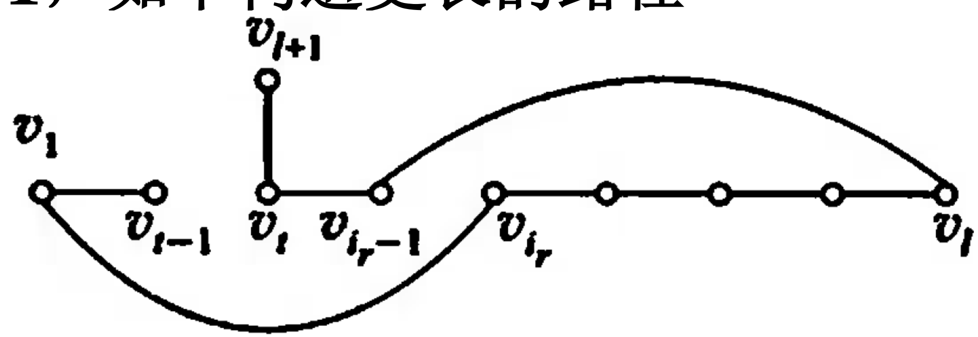
$\Rightarrow d(v_1) + d(v_l) \leq l - 1 < n - 1$与条件矛盾

假设v_l与v_{i_r-1}相邻，则有经过Γ上所有顶点的回路

$$C = v_1 v_2 \dots v_{i_r-1} v_l v_{l-1} \dots v_{i_r} v_1$$



(3)以下证明存在比Γ更长的路径。由于$l < n$
存在$v_{l+1} \in V(G) - V(C)$, v_{l+1}与v_t相邻, $v_t \in V(C)$
若$t < i_r - 1$，如下构造更长的路径



若$t \geq i_r$，可得到类似结果。
重复以上过程，将在有限步内得到长为n的极大路径（即哈密顿通路）

推论

推论 设G为n ($n\geq3$) 阶无向简单图，若对于G中任意两个不相邻的顶点u和v，均有

$$d(u)+d(v)\geq n \qquad (**)$$

则G为哈密顿图.

证明思路：由定理15.7得G中存在哈密顿通路$\Gamma=v_1\ldots v_n$。若$(v_1,v_n)\in E(G)$,得证. 否则用类似方法利用$(**)$证明存在过$v_1,\ldots,v_n$的圈(哈密顿回路).

几点说明

定理15.7是半哈密顿图的充分非必要条件.

长度为n–1（n≥4）的路径构成的图不满足（*）条件，但它显然是半哈密顿图.

定理15.7的哈密顿图的充分非必要条件.

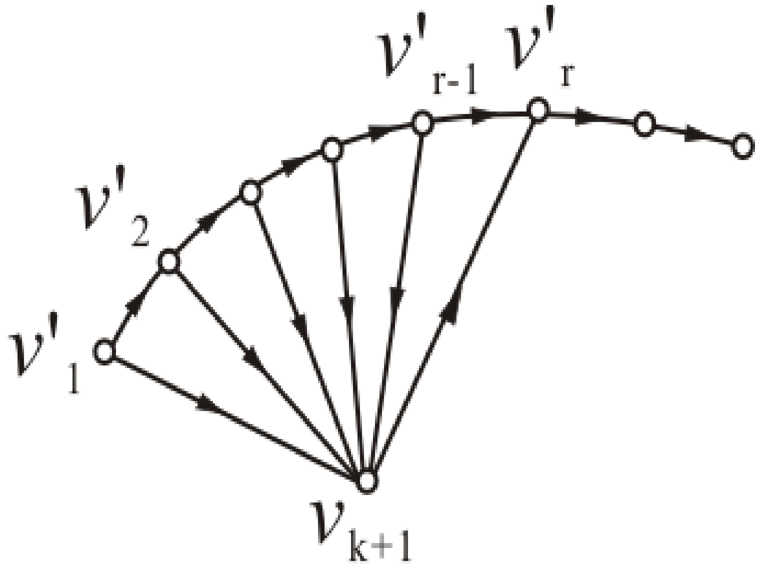
长为n的圈，不满足（**）条件，但它当然是哈密顿图.

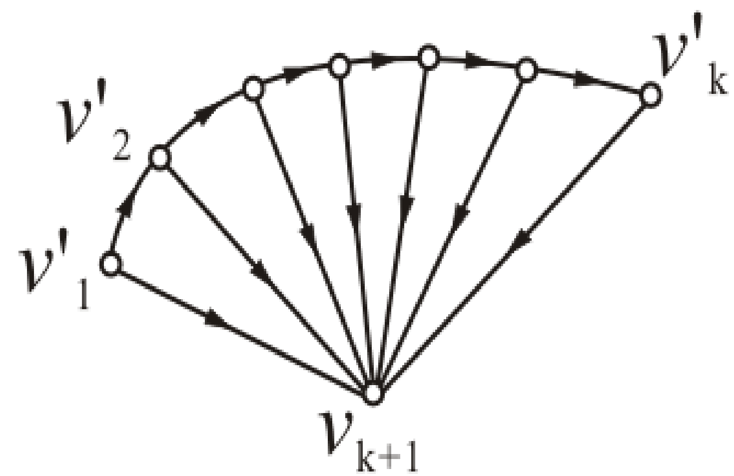
由定理15.7的推论可知，K_n（n≥3）均为哈密顿图.

有向哈密顿图的充分条件

定理15.9 若D为n（n≥2）阶竞赛图，则D中具有哈密顿通路

证明思路：注意，竞赛图的基图是无向完全图. 对n（n≥2）做归纳. 只需观察下面两个图.





判断某图是否为哈密顿图方法

判断某图是否为哈密顿图至今还是一个难题.

总结判断某图是哈密顿图或不是哈密顿图的某些可行的方法.

1. 观察出哈密顿回路.

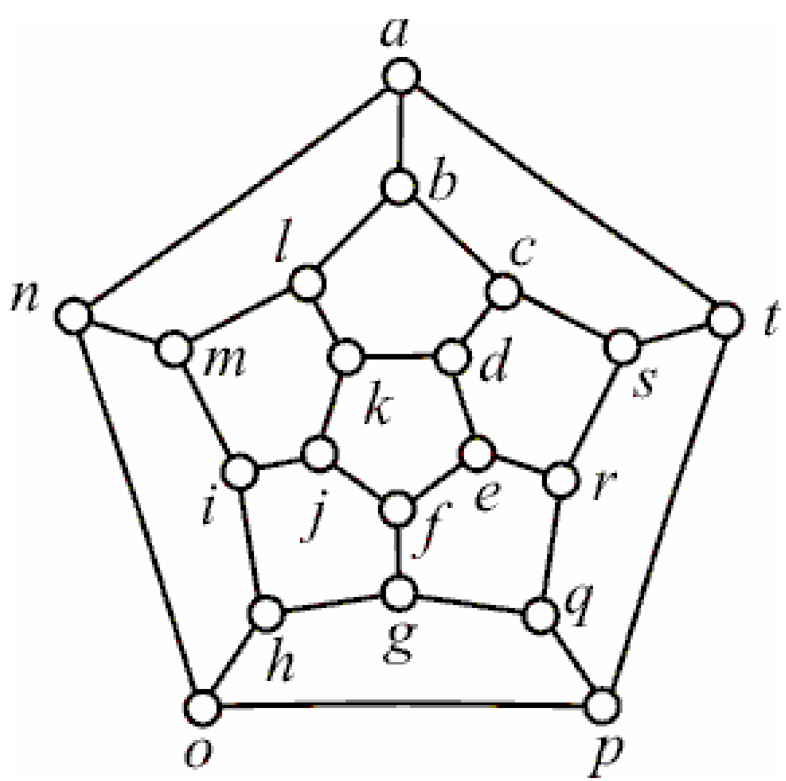
例3 下图(周游世界问题)

是哈密顿图

易知

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t a

为图中的一条哈密顿回路.



注意，此图不满足定理15.7

推论条件.

判断某图是否为哈密顿图方法

2．满足定理15.7推论的条件（**）.

例4 完全图K_n $(n\geq 3)$ 中任何两个顶点u,v，均有

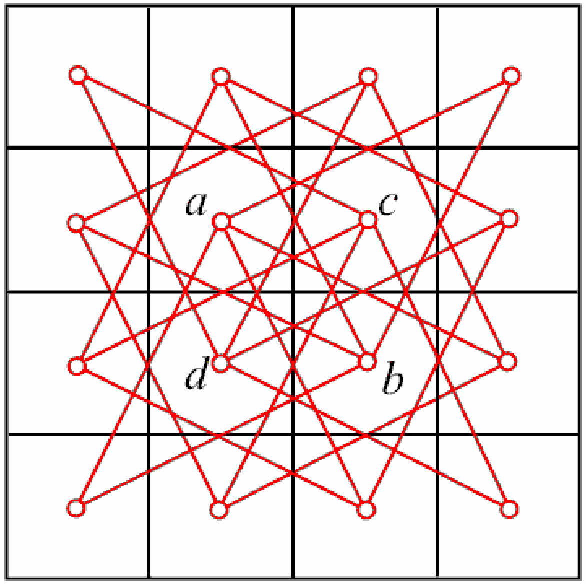
$$d(u)+d(v) = 2(n-1) \geq n \quad (n\geq 3),$$

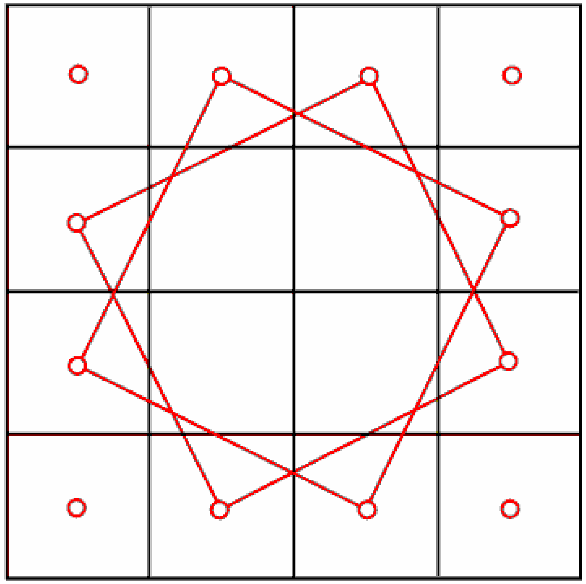
所以K_n为哈密顿图.

3．不满足定理15.6的条件的图不是哈密顿图.

例5 在四分之一国际象棋盘（4×4方格组成）上跳马无解.

在国际象棋盘上跳马有解.



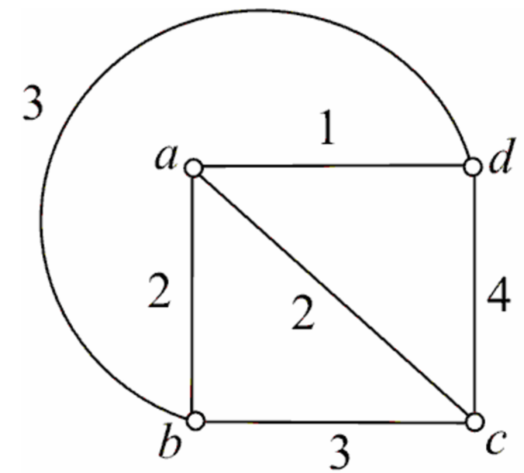


令$V_1=\{a, b, c, d\}$, 则 $p(G-V_1) = 6 >4$，由定理15.6可知图中无哈密顿回路.

在国际象棋盘上跳马有解，试试看.

15.3 最短路问题与货郎担问题

定义15.3 给定图$G = <V,E>$，(G为无向图或有向图)，设$W: E \to \mathbb{R}$ (R为实数集)，对G中任意边$e = (v_i,v_j)$ (G为有向图时，$e = <v_i,v_j>$)，设$W(e) = w_{ij}$，称实数w_{ij}为边e上的**权**，并将w_{ij}标注在边e上，称G为**带权图**，此时常将带权图G记作$<V,E,W>$.



子图的权：

设$G' \subseteq G$，G'的权（记作$W(G')$）定义为

$$W(G') = \sum_{e \in E(G')} w(e)$$

若G'为通路，则$W(G')$也称为该通路的**长度**

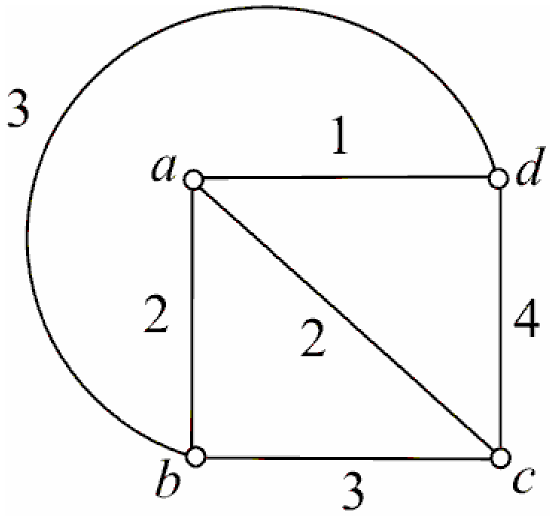
货郎担问题

TSP: travelling salesman problem

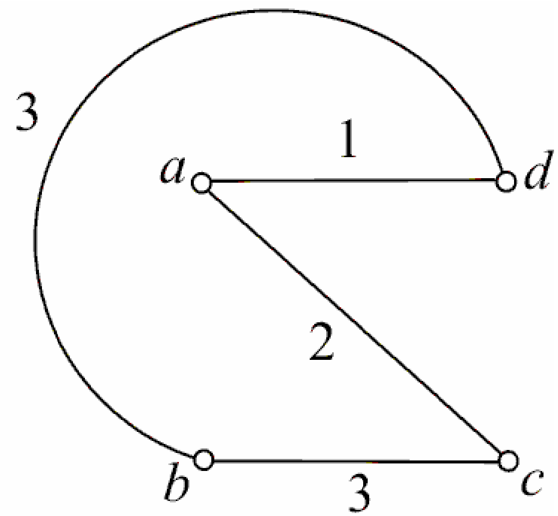
设$G=<V,E,W>$为一个n阶完全带权图K_n，各边的权非负，且有的边的权可能为∞. 求G中的一条最短的哈密顿回路.

K_n中有$n!$条不同的哈密顿回路（定义意义下）
穷举法的复杂度为$O(n!)$

例6 求图中(1) 所示带权图K_4中最短哈密顿回路.



(1)



(2)

解 $C_1= a\ b\ c\ d\ a$, $W(C_1)=10$

$C_2= a\ b\ d\ c\ a$, $W(C_2)=11$

$C_3= a\ c\ b\ d\ a$, $W(C_3)=9$

可见C_3 (见图中(2)) 是最短的，其权为9.

第十五章 习题课

主要内容

- 欧拉通路、欧拉回路、欧拉图、半欧拉图及其判别法
- 哈密顿通路、哈密顿回路、哈密顿图、半哈密顿图
- 带权图、货郎担问题

基本要求

- 深刻理解欧拉图、半欧拉图的定义及判别定理
- 深刻理解哈密顿图、半哈密顿图的定义.
- 会用哈密顿图的必要条件判断某些图不是哈密顿图.
- 会用充分条件判断某些图是哈密顿图. 要特别注意的是，不能将必要条件当作充分条件，也不要将充分条件当必要条件.

练习1

1. 设G为n（$n\geq 2$）阶无向欧拉图，证明G中无桥(见例1思考题)

方法一：直接证明法.

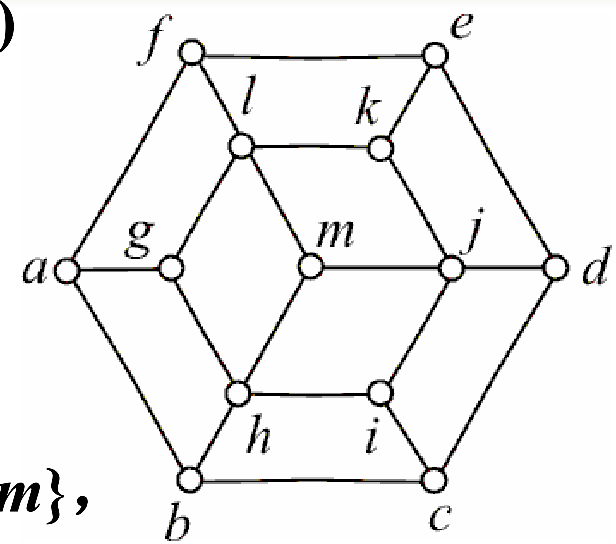
命题 (*)：设C为任意简单回路，e为C上任意一条边，则$C-e$连通.

证 设C为G中一条欧拉回路，任意的$e\in E(C)$，可知$C-e$是$G-e$的子图，由(*)知 $C-e$ 连通，所以e不为桥.

方法二：反证法. 利用欧拉图无奇度顶点及握手定理的推论. 否则，设$e=(u,v)$为G中桥，则$G-e$产生两个连通分支G_1, G_2，不妨设u在G_1中，v在G_2中. 由于从G中删除e时，只改变u,v的度数(各减1)，因而G_1与G_2中均只含一个奇度顶点，这与握手定理推论矛盾.

练习 2

2. 证明下图不是哈密顿图. (破坏必要条件)



方法一. 利用定理15.6,

取 $V_1 = \{a, c, e, h, j, l\}$，则

$$p(G-V_1) = 7 > |V_1| = 6$$

方法二. G为二部图，互补顶点子集

$V_1 = \{a, c, e, h, j, l\}$, $V_2 = \{b, d, f, g, i, k, m\}$,

$|V_1| = 6 \neq 7 = |V_2|$.

方法三. 利用可能出现在哈密顿回路上的边至少有n(n为阶数)条——这也是哈密顿图的一个必要条件，记为（*）.

此图中，$n = 13$，$m = 21$. 由于h, l, j 均为4度顶点，a, c, e为3度顶点，且它们关联边互不相同. 而在哈密顿回路上，每个顶点准确地关联两条边，于是可能用的边至多有

$21-(3\times2+3\times1) = 12$. 这达不到（*）的要求.

练习 3

3．某次国际会议8人参加，已知每人至少与其余7人中的4人有共同语言，问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座，使得每个人都与两边的人交谈？

解　图是描述事物之间关系的最好的手段之一.

做无向图$G=<V,E>$, 其中

$V=\{v|\ v$为与会者$\}$,

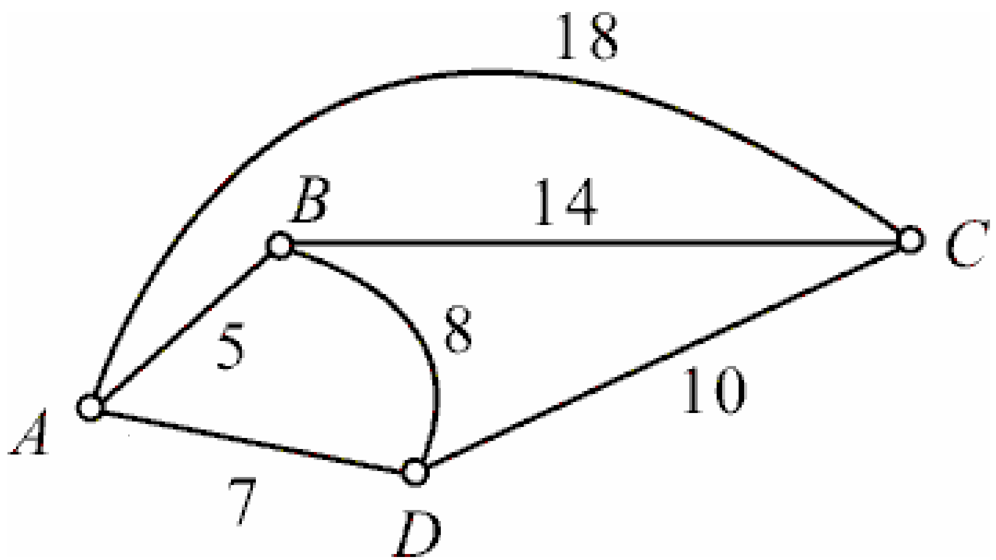
$E=\{(u,v)\mid u,v\in V$且u与v有共同语言，且$u\neq v\}$.

易知G为简单图且$\forall v\in V$, $d(v)\geq 4$，于是，$\forall u,v\in V$, 有$d(u)+d(v)\geq 8$，由定理15.7 的推论可知G为哈密顿图. 服务员在G中找一条哈密顿回路C，按C中相邻关系安排座位即可.

由本题想到的：哈密顿回图的实质是能将图中所有的顶点排在同一个圈中.

练习 4

4. 距离(公里) 如图所示. 他如何走行程最短?



最短的路为*ABCDA*，距离为36公里，其余两条各为多少?