中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学一（I)》(A 卷)

学年学期: **2016–2017** 学年第 **1** 学期　　姓　　名: ______

学　院/系: 数学学院　　学　　号: ______

考试方式: 闭卷　　年级专业: ______

考试时长: **120** 分钟　　班　　别: ______

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者,不授予学士学位.”

以下为试题区域,共 14 道大题,总分 100 分,考生请在答题纸上作答

1. (8 分) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos\left(e^x+e^{-x}-2\right)}{x^4}$

解析　由泰勒公式:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{1-\cos\left(e^x+e^{-x}-2\right)}{x^4}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{1-\left(1-\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)^2}{2!}+\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)^4}{4!}+o\left(x^5\right)\right)}{x^4}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)^2}{2}-\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)^4}{24}}{x^4}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}\right)^2-\frac{1}{24}\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}\right)^2\cdot\left(e^x+e^{-x}-2\right)^2.
\end{aligned}$$

考虑极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$, 由洛必达法则:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1.$$

所以,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{1-\cos\left(e^x+e^{-x}-2\right)}{x^4}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}\right)^2-\frac{1}{24}\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}\right)^2\cdot\left(e^x+e^{-x}-2\right)^2\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\times0\\
&=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2. (8 分) 求定积分: $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| \mathrm{d}x$

解析 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{e}}^{1} |\ln x| \mathrm{d}x + \int_{1}^{e} |\ln x| \mathrm{d}x.$

因为当 $\frac{1}{e} < x < 1$ 时, $\ln x < 0$,

这时 $|\ln x| = -\ln x$; 当 $x \geqslant 1$ 时, $\ln x \geqslant 0$, 这时 $|\ln x| = \ln x$.

于是

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| \mathrm{d}x = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x \, \mathrm{d}x + \int_{1}^{e} \ln x \, \mathrm{d}x,$$

分别用分部积分法求右端两个积分.

$$-\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x \, \mathrm{d}x = -x \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1} x \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} + x \Big|_{\frac{1}{e}}^{1} = 1 - \frac{2}{e},$$

$$\int_{1}^{e} \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x \Big|_{1}^{e} - x \Big|_{1}^{e} = 1,$$

最后得

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| \mathrm{d}x = 2 - \frac{2}{e}.$$

3. (8 分) 求不定积分: $\int \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \mathrm{d}x$

解析

$$\begin{aligned}
\int \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \mathrm{d}x &= \int \frac{xe^{x}}{(1+e^{x})^2} \mathrm{d}x \\
&= -\int x \mathrm{d} \frac{1}{1+e^{x}} \\
&= -\frac{x}{1+e^{x}} + \int \frac{1}{1+e^{x}} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{x}{1+e^{x}} + \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{x}{1+e^{x}} - \int \frac{\mathrm{d}(e^{-x})}{e^{-x}+1}
\end{aligned}$$

对 $\int \frac{\mathrm{d}(e^{-x})}{e^{-x}+1}$ (令 $e^{-x} = t$)

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} \\
&= \ln(t+1) + C \\
&= \ln(e^{-x}+1) + C
\end{aligned}$$

$$\therefore \int \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \mathrm{d}x = -\frac{x}{1+e^{x}} - \ln(e^{-x}+1) + C$$

4. (8 分) 求通过 y 轴且与平面 $9x - 4y - 2z - 1 = 0$ 垂直的平面方程。

解析 该平面经过 $(0,0,0)$，

该平面的法向量为 $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & -4 & -2 \end{vmatrix} = (-2,0,-9)$

方程为 $-2x-9z=0$

5. (8 分) 设 $f(x)=\begin{cases} \sin\left(\ln\left(x^2-1\right)^2\right) & ,x\le 0 \\ \dfrac{\sin(\pi x)}{x(x^2+2x-3)} & ,x>0 \end{cases}$，分析它的所有间断点及其类型。

解析 (分析) $f(x)$ 在 $x<0$ 和 $x>0$ 为初等函数表达式, 在有定义的区间上连续, 因此, 在函数没有定义的点及分段点找间断点。

(1) 在分段点 $x=0$ 处,

$$f\left(0^-\right)=\lim_{x\to 0^-}\sin\ln\left(x^2-1\right)^2=\sin\ln\left[\lim_{x\to 0^-}\left(x^2-1\right)^2\right]=\sin\ln 1=0$$

$$f\left(0^+\right)=\lim_{x\to 0^+}\pi\times\frac{\sin\pi x}{\pi x}\times\frac{1}{(x+3)(x-1)}=-\frac{\pi}{3}$$

$f\left(0^-\right)\neq f\left(0^+\right)$, 故 $x=0$ 是第一类 (跳跃型) 间断点。

$x<0$ 时, $f(x)$ 在 $x=-1$ 处无定义.

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\sin\ln\left(x^2-1\right)^2$ 不存在 $(\neq\infty)$

故 $x=-1$ 是第二类 (振荡型) 间断点.

$x>0$ 时, $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x(x+3)(x-1)}$ 在 $x=1$ 处无定义

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}f(x)&=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x(x+3)(x-1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi(x-1)}{\pi x(x+3)(x-1)}\times(-\pi)\\&=-\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

故 $x=1$ 是第一类 (可去型) 间断点.

6. (8 分) 设 $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$，讨论 $f(x)$ 的单调区间以及极值点，凸凹区间以及拐点，并求出 $f(x)$ 的渐近线。

解析 定义域为 $x\neq 1$

$y'=\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$

$y''=\dfrac{8}{(x-1)^3}$

$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(3,+\infty)$

$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,1)$ 和 $(1,3)$

函数极大值为 $f(-1)=-2$, 极小值为 $f(3)=6$

$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 为凸函数，$(1,+\infty)$ 为凹函数，无拐点

$x=1$ 为 $f(x)$ 的垂直渐近线。

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2+3}{x^2-x}=1$$
$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-x=\frac{x^2+3-x^2+x}{x-1}=1$$

直线 $y=x+1$ 也是 $f(x)$ 的渐进线。

7. (8 分) 设 $z=f(x,y)$ 由方程 $xy+yz+xz=1$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解析 两边同时对 x 求偏导，得 $y+y\frac{\partial z}{\partial x}+z+x\frac{\partial z}{\partial x}=0$, 因此 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y+z}{x+y}$, 由对称性可得 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+z}{x+y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}(x+y)-(y+z)}{(x+y)^2}=-\frac{-\frac{y+z}{x+y}(x+y)-y-z}{(x+y)^2}=\frac{2y+2z}{(x+y)^2}.$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)(x+y)-(y+z)}{(x+y)^2}=-\frac{\left(1-\frac{x+z}{x+y}\right)(x+y)-y-z}{(x+y)^2}=\frac{2z}{(x+y)^2}.$$

8. (8 分) 设 $y=x^3+\frac{1}{12x}$, 求函数从 $x=1$ 到 $x=2$ 上的弧长。

解析 $s=\int_1^2\sqrt{\frac{1}{144\,x^4}+9\,x^4+\frac{1}{2}}dx=\frac{169}{24}$

9. (8 分) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y\sin\left(x^2\right)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0).\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 讨论在 (0,0) 点的连续性，偏导性和可微性

解析

$$0 \leqslant \left|\frac{y\sin\left(x^2\right)}{x^2+y^2}\right| \leqslant \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \leqslant y \to 0$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin\left(x^2\right)}{x^2+y^2} = 0$$

$\therefore f(x,y)$在$(0,0)$连续

$$f_x(0,0) = \frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \frac{0-0}{\Delta y} = 0.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\frac{y\sin(x^2)}{x^2+y^2}-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y\sin\left(x^2\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{yx^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{kx^3}{(k^2+1)^{\frac{3}{2}}x^3}$$

$$=\frac{k}{(k^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

所以在$(0,0)$不可微

10. (8 分) 设曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ 求 L 在点 $(1,-1,2)$ 处的切线以及 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$

解析 将方程两边分别关于 z 求导, 得 $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=z, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-1$, 解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\frac{z+2y}{2(x-y)}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{z+2x}{2(y-x)}.$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right|_{(1,-1,2)}=\frac{2-2}{2(1+1)}=0, \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right|_{(1,-1,2)}=-1.$$

切线方程为 $-(y+1)+(z-2)=0$ 即 $-y+z-3=0$

11. (5 分) 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1,2)$ 处, 沿着这抛物线在该点偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

解析 先求抛物线 $y^2=4x$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方向.

设切线与 x 轴正向夹角为 α.

方程 $y^2=4x$ 两边对 x 求导, 得 $2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4$, 故 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{2}{y}\right|_{(1,2)}=\frac{2}{2}=1.$

由导数的几何意义 $\tan\alpha = 1$, 可知 $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
又

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+y}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+y}, \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = \frac{1}{3}$$

. 所以所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)} = \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

12. (5 分) 求 $x\arctan x$ 在 $x=0$ 处的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式。

解析

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^x \left[1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o\left(x^{2n}\right)\right]\mathrm{d}x \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore x\arctan x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^6 + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

13. (5 分) 设 $f(x, x+y, x+y+z) = 0$ 且 F 一阶连续可偏导，函数 $z = z(x,y)$, 求 $z = z(x,y)$ 的全微分。

解析 $\mathrm{d}z = -\frac{f_1' + f_2' + f_3'}{f_3'}\mathrm{d}x - \frac{f_2' + f_3'}{f_3'}\mathrm{d}y.$

14. (5 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 上二阶可导。且满足 $f(1) = f(2) = 0$
证明: 在 $(0,2)$ 内存在 ξ, 使得 $2f'(\xi) + \xi f''(\xi) = 0$.

解析 设 $F(x) = xf(x)$
$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$(0,1)$ 上可导，$F(0) = F(1)$。
$\therefore \exists\xi_1 \in (0,1)$ 使得 $F'\left(\xi_1\right) = 0$，$F(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续,$(1,2)$ 上可导，$F(1) = F(2)$
$\exists\xi_2 \in (1,2)$ 使得 $F'\left(\xi_2\right) = 0$
$F'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上连续,(ξ_1, ξ_2) 上可导, $F'\left(\xi_1\right) = F'\left(\xi_2\right)$
$\therefore \exists\xi \in \left(\xi_1, \xi_2\right) \in (0,2)$ 使得 $F''(\xi) = 0$ 即 $2f'(\xi) + \xi f''(\xi) = 0$