第十六章 树

主要内容

- 无向树及其性质
- 生成树
- 根树及其应用

16.1 无向树及其性质

定义16.1

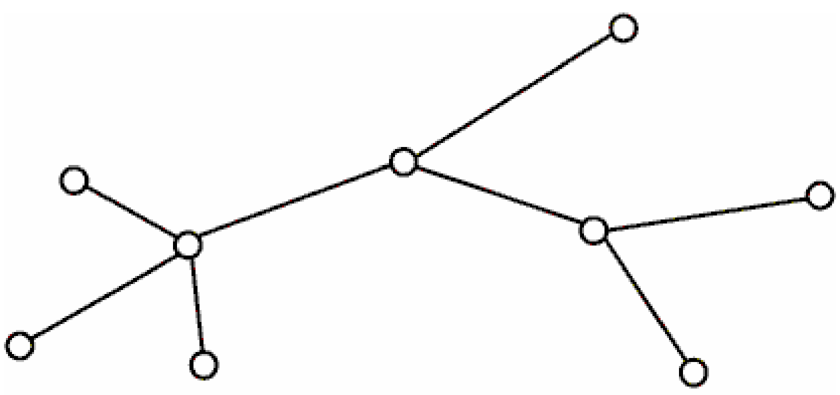
(1) 无向树——连通无回路的无向图

(2) 平凡树——平凡图

(3) 森林——至少由两个连通分支（每个都是树）组成

(4) 树叶——1度顶点

(5) 分支点——度数≥2的顶点



无向树的等价定义

定理16.1 设$G=\langle V,E\rangle$是n阶m条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无回路且 $m = n-1$.

(4) G 是连通的且 $m = n-1$.

(5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥.

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

证明思路

(1) G 是树⇒(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

反证法：若路径不惟一必有回路.

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径⇒(3) G 中无回路且 $m = n-1$.

先反证法证明无回路：若G中有回路，则回路上任意两点之间的路径不惟一.

再归纳证明$m=n-1$：

$n=1$正确. 设$n \le k$时对，证$n=k+1$时也对：取G中边e，

$G-e$有且仅有两个连通分支G_1,G_2.

$n_1, n_2 \le k \Rightarrow$由归纳假设$m_1 = n_1 - 1, m_2 = n_2 - 1$

$$\Rightarrow m = m_1 + m_2 + 1 = n - 1$$

证明思路

(3) G 中无回路且 $m = n-1 \Rightarrow$(4) G 是连通的且 $m = n-1$.

只需证明G连通：

若G有s个连通分支，第i个连通分支是树，且$m_i = n_i - 1$

$$m = \sum_{i=1}^{s} m_i = \sum_{i=1}^{s} (n_i - 1) = n - s$$

给定条件$m = n - 1$时，必有$s = 1$。

证明思路

(4) G 连通且 $m = n-1 \Rightarrow$ (5) G 连通且 G 中任何边均为桥.

需额外证明以下命题（习题14第50题）
“G 是 n 阶 m 条边的无向连通图，则$m \geq n-1$”. （P）

证明：$n = 1$时为平凡图，显然成立。以下归纳证明$n > 1$时的情况：
$\forall v \in V(G)$,设$G - v$有连通分支$G_1, \ldots, G_s$，根据归纳，可假设$m_i \geq n_i - 1$
此时

$$m_1 + \cdots + m_s \geq n_1 + \cdots + n_s - s = n - 1 - s$$

又由于$d(v) \geq s$，可知$m = m_1 + \cdots + m_s + d(v)$，
综上可得$m \geq m_1 + \cdots + m_s + s \geq n - 1$

证明：

$\forall e \in E$, $G-e$只有$n-2$条边，由命题P可知$G-e$不连通，故e为桥.

证明思路

(5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥$\Rightarrow$(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

证明：由(5)易知G为树，由(1)$\Rightarrow$(2)知，$\forall u,v\in V$（$u\neq v$），u到v有惟一路径，加新边(u,v)得惟一的一个圈.

(6)$\Rightarrow$(1) G是树.

显然G连通，因此G是树.

无向树的性质

定理16.2 设T是n阶非平凡的无向树，则T中至少有两片树叶.

证 设T有x片树叶，由握手定理及定理16.1可知，

$$2(n-1)=\sum_{i=1}^{n} d(v_i) \geq x+2(n-x)$$

由上式解出$x \geq 2$.

例题

例1 已知无向树T中有1个3度顶点，2个2度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树.

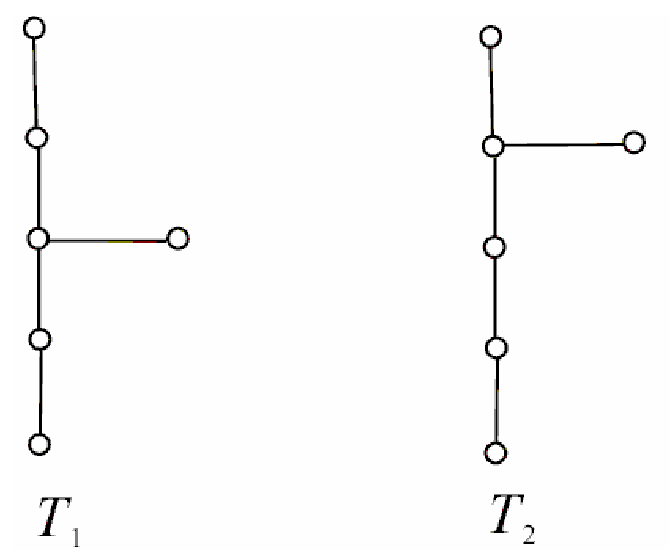
解 解本题用树的性质$m=n-1$，握手定理.

设有x片树叶，于是 $n = 1+2+x = 3+x$,

$$2m = 2(n-1) = 2\times(2+x) = 1\times3+2\times2+x$$

解出$x = 3$，故T有3片树叶.

T 的度数列应为 1, 1, 1, 2, 2, 3，易知3度顶点与1个2度顶点相邻与和2个2度顶点均相邻是非同构的，因而有2棵非同构的无向树T_1, T_2，如图所示.



例题

例2 已知无向树T有5片树叶，2度与3度顶点各1个，其余顶点的度数均为4，求T的阶数n，并画出满足要求的所有非同构的无向树.

解 设T的阶数为n, 则边数为$n-1$，4度顶点的个数为$n-7$.

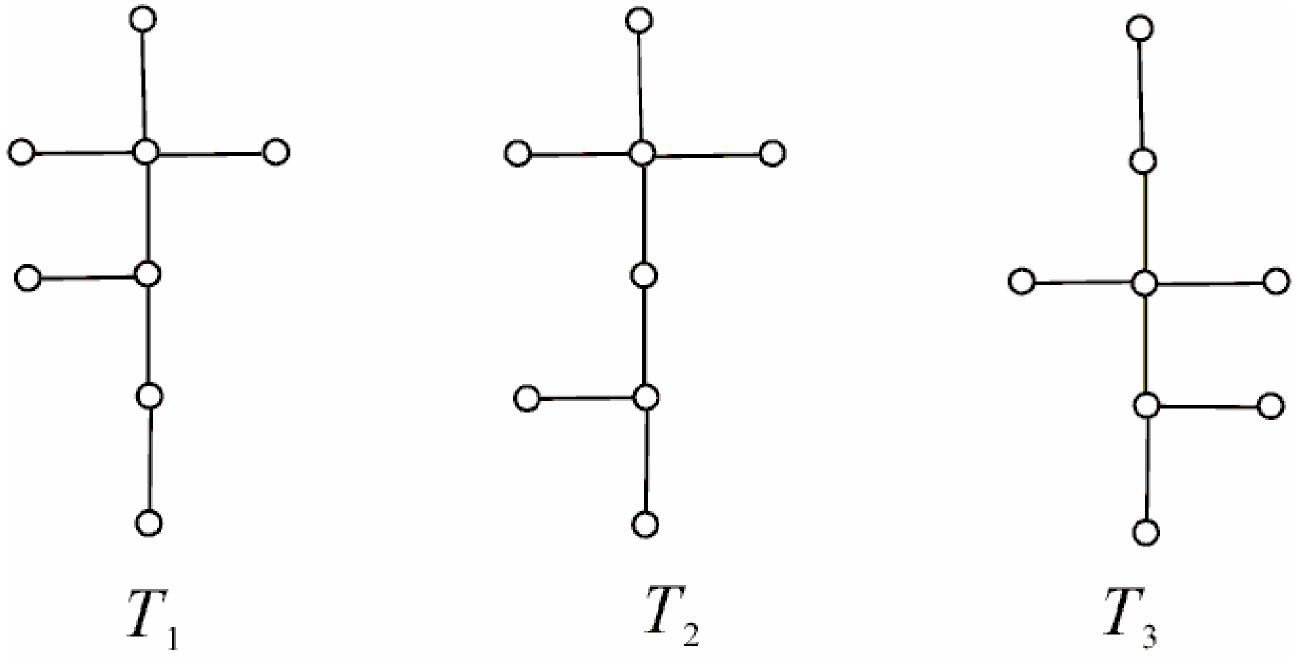
由握手定理得

$$2m = 2(n-1) = 5\times1+2\times1+3\times1+4(n-7)$$

解出$n = 8$，4度顶点为1个.

例题

T的度数列为1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4，共有3棵非同构的无向树，如图所示.



作业

习题16：2、3、5、18 （留作复习用，不用交作业）

16.2 生成树

定义16.2 设G为无向图

(1) G的树——T 是G 的子图并且是树

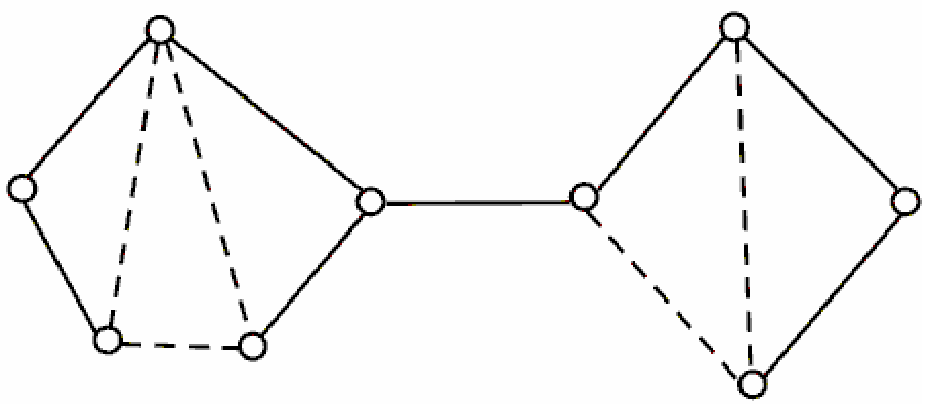
(2) G的生成树——T 是G 的生成子图并且是树

(3) 生成树T的树枝——T 中的边

(4) 生成树T的弦——G中不在T 中的边

(5) 生成树T的余树$\overline{T}$ ——全体弦组成的集合的导出子图

$\overline{T}$不一定连通，也不一定不含回路，如图所示



生成树存在条件

定理16.3 无向图G具有生成树当且仅当G连通.

证 必要性显然.

充分性可用破圈法证明（在任意一个圈上删除任意一条边，直到图不含圈为止）

推论1 G为n阶m条边的无向连通图，则$m \geq n-1$.

推论2 生成树T的余树$\overline{T}$的边数为$m-n+1$.

推论3 $\overline{T}$为G的生成树T的余树，C为G中任意一个圈，则C与$\overline{T}$一定有公共边.

证 否则，C中的边全在T中，这与T为树矛盾.

最小生成树

定义16.5 *T*是$G=<V,E,W>$的生成树

(1) 生成树的权 $W(T)$——T各边权之和

(2) 最小生成树——G的所有生成树中权最小的

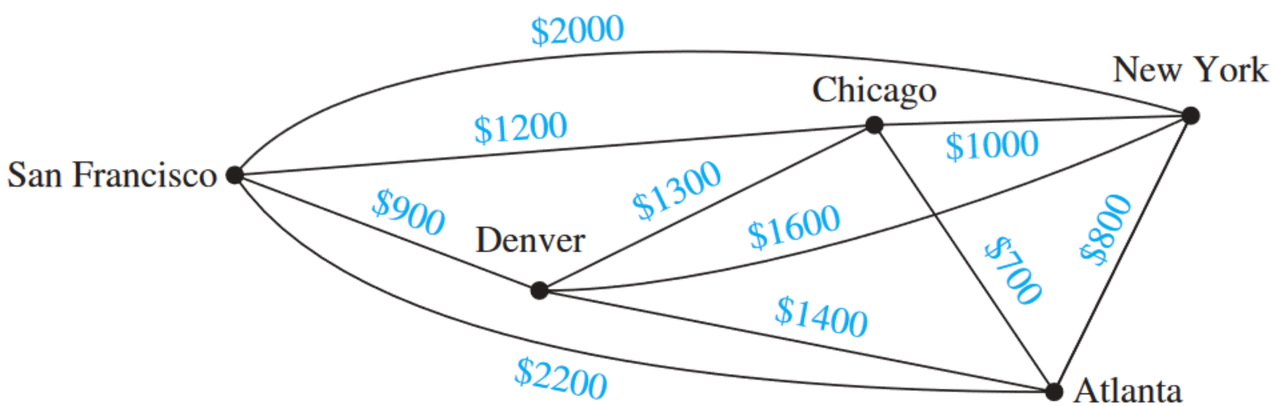


FIGURE 1 A weighted graph showing monthly lease costs for lines in a computer network.

最小生成树

避圈法（Kruskal）设G=<V,E,W>，将G中非环边按权从小到大排序：$e_1, e_2, e_3, \ldots$

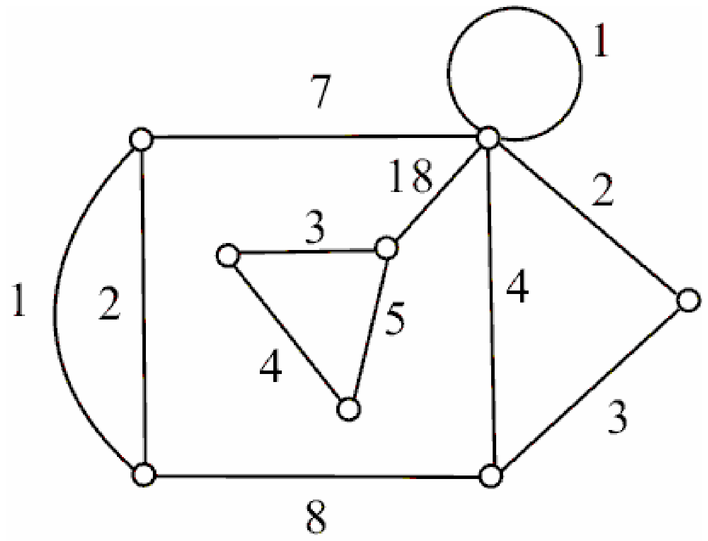
(1) 取$T = \{e_1\}$

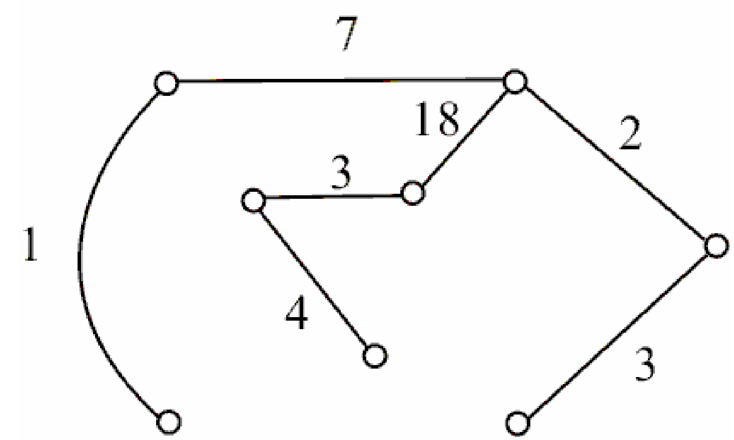
(2) 检查e_2，若$T \cup e_2$不含回路，取$T \leftarrow T \cup e_2$

(3) 再检查e_3,…, 直到$|T| = |V| - 1$为止.

实例

例4 求图的一棵最小生成树.





Kruskal算法运行过程中*T*不一定是树（可能不连通）

所求最小生成树如图所示，*W*(*T*)=38.

Prim 算法设G=<V,E,W>，

(1) $T=\{e_1\}$，其中e_1为权重最小的非环边
(2) 令e为与T中顶点关联的边中权重最小的边
(3) 若$T\cup e$不含有回路，则$T\leftarrow T\cup e$,否则丢弃e
重复以上过程直到T成为生成树

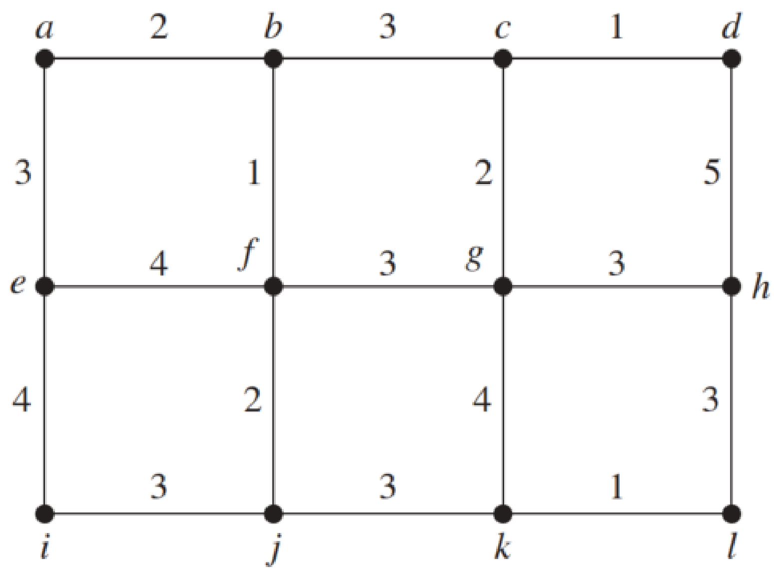


FIGURE 3 A weighted graph.

Choice	Edge	Weight
1	$\{b, f\}$	1
2	$\{a, b\}$	2
3	$\{f, j\}$	2
4	$\{a, e\}$	3
5	$\{i, j\}$	3
6	$\{f, g\}$	3
7	$\{c, g\}$	2
8	$\{c, d\}$	1
9	$\{g, h\}$	3
10	$\{h, l\}$	3
11	$\{k, l\}$	1
	Total:	24

Prim

Choice	Edge	Weight
1	$\{c, d\}$	1
2	$\{k, l\}$	1
3	$\{b, f\}$	1
4	$\{c, g\}$	2
5	$\{a, b\}$	2
6	$\{f, j\}$	2
7	$\{b, c\}$	3
8	$\{j, k\}$	3
9	$\{g, h\}$	3
10	$\{i, j\}$	3
11	$\{a, e\}$	3
	Total:	24

Kruskal

作业

习题16：25

16.3 根树及其应用

定义16.6 有向树：基图为无向树的有向图

(1) T 为根树——T 中一个顶点入度为0，其余的入度均为1.

(2) 树根——入度为0的顶点

(3) 树叶——入度为1，出度为0的顶点

(4) 内点——入度为1，出度不为0的顶点

(5) 分支点——树根与内点的总称

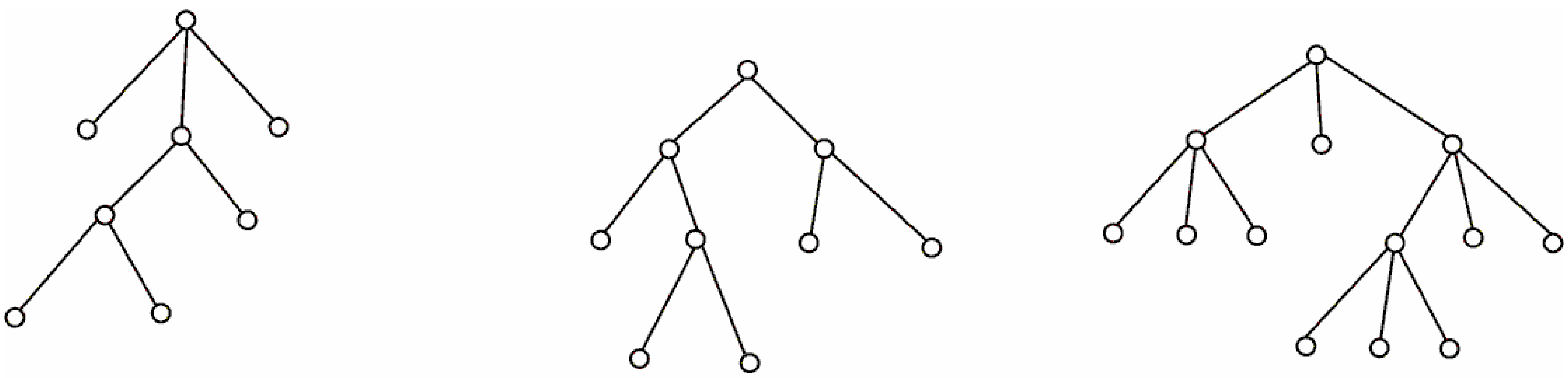
(6) 顶点v的层数——从树根到v的通路长度

(7) 树高——T 中层数最大顶点的层数

(8) 平凡根树——平凡图

根树实例

根树的画法——树根放上方，省去所有有向边上的箭头



家族树与根子树

定义16.7 T 为非平凡根树

(1) 祖先与后代

对$v \neq u$, v是u的祖先$\Leftrightarrow$ u是v的后代$\Leftrightarrow$ v可达u

(2) 父亲与儿子

v是u的父亲$\Leftrightarrow$ u是v的儿子$\Leftrightarrow$$< v, u > \in E(T)$

(3) 兄弟

v和u是兄弟$\Leftrightarrow$ v和u有相同的父亲

定义16.8 设v为根树T中任意一顶点，称v及其后代的导出子图为以v为根的根子树.

根树的分类

(1) T 为有序根树——同层上顶点标定次序的根树

(2) 分类

r 叉树——每个分支点至多有r 个儿子

r 叉正则树——每个分支点恰有r 个儿子

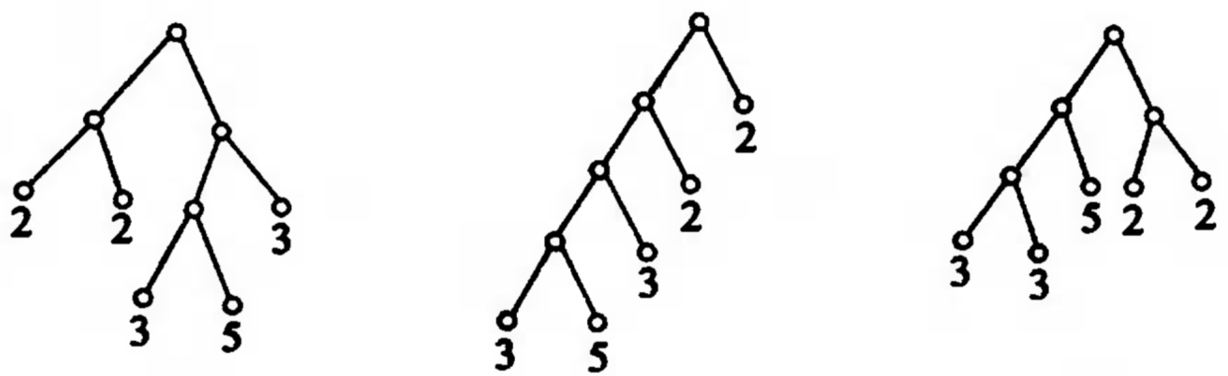
r 叉完全正则树——树叶层数相同的r叉正则树

最优二叉树

定义16.9 设2叉树T有t片树叶$v_1, \dots, v_t$，权分别为$w_1, \dots, w_t$，称

$$W(T) = \sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i)$$

为T的权，其中$l(v_i)$是v_i的层数. 在所有有t片树叶、带$w_1, \dots, w_t$的2叉树中，权最小的2叉树称为**最优2叉树**.



T_1 T_2 T_3

$W(T_1) = 2\times2 + 2\times2 + 3\times3 + 5\times3 + 3\times2 = 38$

$W(T_2) = 3\times4 + 5\times4 + 3\times3 + 2\times2 + 2\times1 = 47$

$W(T_3) = 3\times3 + 3\times3 + 5\times2 + 2\times2 + 2\times2 = 36$

最优二叉树

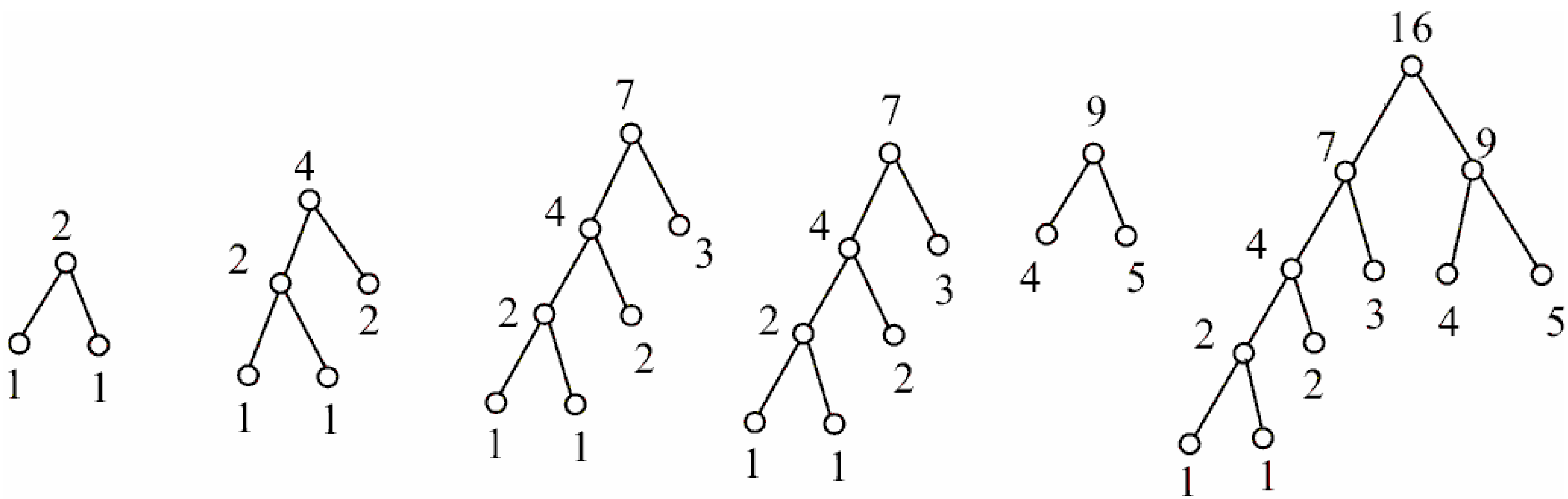
求最优树的算法—— **Huffman算法**

给定实数$w_1 \le w_2 \le \cdots \le w_t$.

1. 令$\mathcal{F}$为包含t个平凡树的森林，这些树分别标记权值 $w_1, \ldots, w_t$
2. 找出$\mathcal{F}$中树根权值最小的两棵树，将它们合并成一颗大树，且新的树根权值标记为原先两个小树的权值之和
3. 重复第2步，直到$\mathcal{F}$中仅剩一棵树，则该树为最优二叉树T。

$W(T)$ =所有分支点标记的权值之和

例 5 **求带权为1, 1, 2, 3, 4, 5的最优树.**



$$\boldsymbol{W(T) = 38}$$

证明：$W(T)$ =所有分支点权值之和

使用归纳：

假设有树T_1, T_2，叶子分别带权$w_1^{[1]}, \dots, w_{t_1}^{[1]}$和$w_1^{[2]}, \dots, w_{t_2}^{[2]}$，叶子层数分别为$l_1^{[1]}, \dots, l_{t_1}^{[1]}$和$l_1^{[2]}, \dots, l_{t_2}^{[2]}$

设

$W(T_1) = T_1$分支点权值之和；

$W(T_2) = T_2$分支点权值之和

构造T为T_1和T_2的合并

$$W(T)=\sum_{i=1}^{t_1}\left(l_i^{[1]}+1\right)w_i^{[1]}+\sum_{i=1}^{t_2}\left(l_i^{[2]}+1\right)w_i^{[2]}$$

$$=\sum_{i=1}^{t_1}l_i^{[1]}w_i^{[1]}+\sum_{i=1}^{t_2}l_i^{[2]}w_i^{[2]}+\sum_{i=1}^{t_1}w_i^{[1]}+\sum_{i=1}^{t_2}w_i^{[2]}$$

$$=T_1\text{分支点权值之和}+T_2\text{分支点权值之和}+\sum_{i=1}^{t_1}w_i^{[1]}+\sum_{i=1}^{t_2}w_i^{[2]}$$

$$=T\text{分支点权值之和}$$