一、求数列极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$，其中 $p>0$.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\frac{1}{n}\\&=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}.\end{aligned}$$

二、设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-2021)$，求 $f'(0)$.

解 $f'(x)=(-1)(-2)\cdot\ldots\cdot(-2021)=-2021!$.

三、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos^2 x}^{1}\sqrt{1+t^2}dt}{x^2}$.

$\sqrt{(1+\cos x)(1-\cos x)}$

解（方法一） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos^2 x}^{1}\sqrt{1+t^2}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\xi^2}\left(1-\cos^2 x\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\xi^2}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}x^2}{x^2}=\cancel{\dfrac{1}{2}}.$ $\sqrt{2}$

其中 $\xi\in\left[\cos^2 x,1\right]$，当 $x\to 0$ 时，$\xi\to \cancel{0}$.

（方法二）用洛必达求极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos^2 x}^{1}\sqrt{1+t^2}dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sqrt{1+\cos^4 x}\cdot 2\cos x(-\sin x)}{2x}=\cancel{\frac{1}{2}}\quad \sqrt{2}$$

四、设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，求 a.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{x+2a}{x-a}-1\right)}\\&=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{x+2a}{x-a}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{3a}{x-a}\right)}=e^{3a}=8,a=\ln 2.\end{aligned}$$

五、设 $y=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$，求 y 的 n 阶导数.

解 $y=\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$，于是

$$y^{(\mathrm{n})}=(-1)^n\left[\frac{1}{(x+2)^{n+1}}-\frac{1}{(x+3)^{n+1}}\right]\cdot n!$$

六、 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ 是否存在，说明理由.

解 用极坐标， $\lim\limits_{(x,y)\to 0}\frac{x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\cos^2 x\sin^2 x$，因为 $\rho\to 0$，$\left|\cos^2 x\sin^2 x\right|\le 1$，无穷小量与有界量相乘是无穷小量，所以原极限等于 0.

七、讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{2^t-1}{2^t+1}=1$， $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{2^t-1}{2^t+1}=-1$，

$\because\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，所以函数不连续.

八、求不定积分：$\int(\arcsin x)^2dx$.

解 令 $t=\arcsin x$， $x=\sin t$，则

$$\begin{aligned}&\int(\arcsin x)^2dx=\int t^2d\sin t=t^2\sin t-2\int t\sin tdt\\&=t^2\sin t+2\int td\cos t\\&=t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t+C\\&=t^2\sin t+2t\sqrt{1-\sin^2 t}-2\sin t+C\\&=x\arcsin^2 x+2t\sqrt{1-x^2}-2x+C\end{aligned}$$

九、设 $f''(x_0)$ 存在，证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)+f\left(x_0-h\right)-2f\left(x_0\right)}{h^2}=f''\left(x_0\right).$$

证明 用洛必达法则，之后再用导数的定义，

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)+f\left(x_0-h\right)-2f\left(x_0\right)}{h^2}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f'\left(x_0+h\right)-f'\left(x_0-h\right)}{2h}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'\left(x_0+h\right)-f'\left(x_0\right)}{h}+\frac{f'\left(x_0-h\right)-f'\left(x_0\right)}{-h}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f'\left(x_0+h\right)-f'\left(x_0\right)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f'\left(x_0-h\right)-f'\left(x_0\right)}{-h}\right]\\
&=f''\left(x_0\right).
\end{aligned}$$

也可以用局部泰勒公式证明. 因为 $f''\left(x_0\right)$ 存在，则当 $x\to x_0$ 时，

$$f(x)=f(x_0)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{1}{2}f''\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^2+o\left(x-x_0\right)^2$$

所以

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'\left(x_0\right)h+\frac{1}{2}f''\left(x_0\right)h^2+o\left(h^2\right)$$

$$f(x_0-h)=f(x_0)-f'\left(x_0\right)h+\frac{1}{2}f''\left(x_0\right)h^2+o\left(h^2\right)$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)+f\left(x_0-h\right)-2f\left(x_0\right)}{h^2}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f''\left(x_0\right)h^2+o\left(h^2\right)}{h^2}\\
&=\lim_{h\to 0}\left[f''\left(x_0\right)+\frac{o\left(h^2\right)}{h^2}\right]\\
&=f''\left(x_0\right).
\end{aligned}$$

十、证明 $\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\sin x}$，其中 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

证明 设 $f(x)=\tan x\sin x-x^2$，则当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，

$$
\begin{aligned}
f^{'}(x) &= \sec^2 x \sin x + \tan x \cos x - 2x \\
&= \sec^2 x \sin x + \sin x - 2x \\
&= \tan x\left(\frac{1}{\cos x} + \cos x\right) - 2x \\
&> x \cdot 2 - 2x = 0
\end{aligned}
$$
，

所以函数在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 严格单调上升， $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，

$$f(x) = \tan x \sin x - x^2 > f(0) = 0,$$

即 $\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}$.

十一、 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，证明存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$2\xi\left[f(b) - f(a)\right] = \left(b^2 - a^2\right) f^{'}(\xi).$$

解 令 $F(x) = \left(b^2 - a^2\right) f(x) - \left(f(b) - f(a)\right) x^2$，则

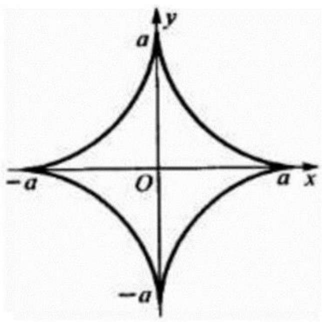
$$F^{'}(x) = \left(b^2 - a^2\right) f^{'}(x) - 2\left(f(b) - f(a)\right) x,$$

在 $[a,b]$ 运用罗尔定理，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $F^{'}(\xi) = 0$，即

$$2\xi\left[f(b) - f(a)\right] = \left(b^2 - a^2\right) f^{'}(\xi).$$

十二、 计算由星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, (a > 0)$ 围成的图形的面积.

解 $dx = -3a\cos^2 t \sin t dt$，



$$
\begin{aligned}
A &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\left|dx\right| \\
&= 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt \\
&= 12a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt\right) \\
&= 12a^2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{3}{8}a^2\pi.
\end{aligned}
$$

十三、　求平面的方程，该平面过直线$\begin{cases} 4x-y+3z-3=0 \\ -2x+2y-3z=0 \end{cases}$，且与 xOy 坐标面垂直.

解（方法一） 直线的方向：

$$
\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -3i+6j+6k = 3(-1,2,2),
$$

设所求平面的方程是 $Ax+By+Cz+D=0$，则平面的法方向与直线垂直，于是

$$-A+2B+2C=0;$$

与坐标面 xOy 垂直，则

$$C=0$$

解得 $C=0$， $A=2B$。 所以 $(2,1,0)$ 是法方向。

易见 $(1,1,0)$ 是直线上的一点，根据平面的点法式，该平面的方程为

$$2(x-1)+(y-1)=0,\ .$$

即 $2x+y-3=0$.

（方法二）利用线性代数中的平面束方程，可以设所求的平面为

$$\lambda(4x-y+3z-3)+\mu(-2x+2y-3z)=0,$$

其中 λ,μ 为不同时为 0 的常数。该平面的法方向为

$$(4\lambda-2\mu,-\lambda+2\mu,3\lambda-3\mu),$$

根据题设的垂直条件，$3\lambda-3\mu=0$，即 $\lambda=\mu$。于是所求平面方程为

$(4x-y+3z-3)+(-2x+2y-3z)=0$， $2x+y-3=0$。

十四、　利用局部泰勒公式，求函数 $y=e^{-x^2}$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数.

解　取整数 $N>n$，已知 $e^x=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}x^k+o\left(x^N\right)$，则

$$e^{-x^2}=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{k!}x^{2k}+o\left(x^{2N}\right)$$

当 n 为偶数时，x^n 的系数为 $\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$，$\frac{y^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$，$y^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$；

当 n 为奇数时，x^n 的系数为 0，$y^{(n)}(0)=0$.

十五、　立体 V 由平面 $z=1$ 和椭圆锥面 $z=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$ 围成，求立体 V 的体积.

解　1、用水平面 $z=z_0$ 截椭圆锥面 $z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$，得一椭圆，

$$\frac{x^2}{\left(z_0a\right)^2}+\frac{y^2}{\left(z_0b\right)^2}=1,$$

该椭圆的面积为 $\pi\left(z_0a\right)\cdot\left(z_0b\right)=\pi abz_0^2$.

2、已知平行截面，求立体的体积：

$$V=\int_0^1\pi abz^2dz=\frac{1}{3}\pi ab.$$