中山大学《概率论与数理统计》2019-2020 学年第二学期期末试卷

满分 100 分

一、填空题（每题 3 分，共 42 分）

1．设 $P(A)=0.3,\quad P(A\cup B)=0.8,$ 若 A 与 B 互斥，则 $P(B)=$____________；A 与 B 独立，则 $P(\bar{B})=$____________；若 $A\subset B$，则 $P(\bar{A}B)=$____________。

2．在电路中电压超过额定值的概率为 p_1，在电压超过额定值的情况下，仪器烧坏的概率为 p_2，则由于电压超过额定值使仪器烧坏的概率为____________；

3．设随机变量 X 的密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，则使 $P\{X>a\}=P\{X<a\}$ 成立的常数 $a=$__________；$P\{0.5<X<1.5\}=$____________；

4．如果 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	1	2	3
1	1/6	1/9	1/18
2	1/3	α	β

则α,β应满足的条件是__$0\le\alpha\le1,0\le\beta\le1,\alpha+\beta=1/3$___，若$X$与$Y$独立，$\alpha=$__________，

$\beta=$____________，$E(X+3Y-1)=$____________。

5．设$X\sim B(n,p)$，且$EX=2.4,\quad DX=1.44,$ 则$n=$__________，$p=$_________。

6．设$X\sim N(a,\sigma^2)$，则$Y=\dfrac{X-3}{2}$服从的分布为________________。

7．测量铝的比重16次，得$\bar{x}=2.705,\quad s=0.029$，设测量结果服从正态分布$N(a,\sigma^2)$，参数$a,\sigma^2$未知，则铝的比重$a$的置信度为95%的置信区间为______________________。

二、（12分）设连续型随机变量X的密度为：

$$\varphi(x)=\begin{cases}ce^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le0\end{cases}$$

（1）求常数c；

（2）求分布函数$F(x)$；

（3）求$Y=2X+1$的密度$\varphi_Y(y)$

三、（15分）设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}c, & 0<x<1,\quad 0<y<x\\ 0, & 其它\end{cases}$$

（1）求常数c；　　（2）求X与Y的边缘密度$\varphi_X(x),\varphi_Y(y)$；

（3）问X与Y是否独立？为什么？

（4）求$Z=X+Y$的密度$\varphi_Z(z)$；　　（5）求$D(2X-3Y)$。

四、（11 分）设总体 X 的密度为

$$\varphi(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

其中$\theta>-1$是未知参数，$(X_1,\ldots,X_n)$是来自总体 X 的一个样本，求

（1） 参数θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$；

（2） 参数θ的极大似然估计量$\hat{\theta}_2$；

五、（10 分）某工厂的车床、钻床、磨床和刨床的台数之比为 9:3:2:1，它们在一定时间内需要修理的概率之比为 1:2:3:1，当有一台机床需要修理时，求这台机床是车床的概率。

六、（10 分）测定某种溶液中的水份，设水份含量的总体服从正态分布$N(a,\sigma^2)$，得到的 10 个测定值给出$\bar{x}=0.452,\quad \tilde{s}=0.037$，试问可否认为水份含量的方差$\sigma^2=0.04$？（$\alpha=0.05$）

附表：

$\chi^2_{0.05}(10)=3.94,\quad \chi^2_{0.025}(10)=3.247,\quad \chi^2_{0.05}(9)=3.325,\quad \chi^2_{0.05}(9)=2.7,$

$\chi^2_{0.975}(10)=20.483,\quad \chi^2_{0.975}(9)=19.023,\quad \chi^2_{0.95}(10)=18.307,\quad \chi^2_{0.95}(9)=16.919,$