中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学一（I）》(A 卷)

学年学期:	2015–2016 学年第 1 学期	姓　　名:	______
学　院/系:	数学学院	学　　号:	______
考试方式:	闭卷	年级专业:	______
考试时长:	120 分钟	班　　别:	______

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者, 不授予学士学位.”

以下为试题区域, 共 14 道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答

1. (8 分) 设 $a_n = n\left(\frac{1}{n^2+\pi} + \frac{1}{n^2+2\pi} + \dots + \frac{1}{n^2+n\pi}\right)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解析

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi} < a_n < \frac{n^2}{n^2+\pi},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}} = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}} = 1,$$

由夹逼定理,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

2. (8 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

解析

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to0}\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(1+\sin x)}}$$

考察极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3(1+\sin x)}$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(1+\sin x)}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\sin x)}\\
=&\frac{x+\frac{x^3}{3}-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+o\left(x^3\right)}{x^3}\times 1\\
=&\frac{\frac{1}{2}x^3+o\left(x^3\right)}{x^3}\\
=&\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(1+\sin x)}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

3. (8 分) 计算积分 $\displaystyle\int e^x\arctan\left(e^{-x}\right)\mathrm{d}x$.

解析

$$\begin{aligned}
\int e^x\arctan\left(e^{-x}\right)dx=&\int\arctan\left(e^{-x}\right)de^x\\
=&e^x\arctan\left(e^{-x}\right)-\int\frac{e^x}{1+e^{-2x}}\cdot\left(-e^{-x}\right)dx\\
=&e^x\arctan\left(e^{-x}\right)+\int\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx\\
=&e^x\arctan\left(e^{-x}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(e^{2x}+1\right)}{1+e^{2x}}\\
=&e^x\arctan\left(e^{-x}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)+C
\end{aligned}$$

4. (8 分) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x$.

解析 由于 $f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}|\sin x|$ 是周期为 π 的周期函数, 故

$$\begin{aligned}
\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x=&\sqrt{2}\int_0^{100\pi}|\sin x|\mathrm{d}x\\
=&\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x+\sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x+\cdots\\
&+\sqrt{2}\int_{99\pi}^{100\pi}|\sin x|\mathrm{d}x\\
=&100\sqrt{2}\int_0^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x\\
=&100\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x\\
=&200\sqrt{2}
\end{aligned}$$

5. (8 分) 求双曲抛物面 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=2z$ 与平面 $x+y+z=6$ 的交线在 $P(4,0,2)$ 处的切线方程.

解 **解法一**

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=2z\\ x+y+z=6\end{cases}$

分别对 x 求导得到 $\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{2}{9}yy'=2z'\\ 1+y'+z'=0\end{cases}$ ……………………………… 本步骤 4 分, 累计 4 分

代入 $P(4,0,2)$ 得到 $\begin{cases}2=2z'\\ 1+y'+z'=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y'=-2\\ z'=1\end{cases}$ …… 本步骤 2 分, 累计 6 分

故切线方向为 $(1,-2,1)$

切线方程为 $\frac{x-4}{1}=\frac{y-0}{-2}=\frac{z-2}{1}$ ……………………………… 本步骤 2 分, 累计 8 分

解法二

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=2z$ 在 $P(4,0,2)$ 处的切平面方程为

$\left(\frac{1}{2}\times 4,-\frac{2}{9}\times 0,-2\right)\cdot(x-4,y-0,z-2)=0.$ …………………… 本步骤 4 分, 累计 4 分

即 $x-z-2=0$ ……………………………… 本步骤 2 分, 累计 6 分

切线方程为 $\begin{cases}x-z-2=0\\ x+y+z=6\end{cases}$ ……………………… 本步骤 2 分, 累计 8 分

6. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有二阶导数, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$

解析

由题设条件知, 有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2(0<\theta<1).$$

又由 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+\left(x+\frac{f(x)}{x}\right)\right]^{\frac{1}{x+f(x)/x}\frac{x+f(x)/x}{x}}=e^3,$$

知 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=1, \lim\limits_{x\to0}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]\frac{1}{x}=3,$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0,$

即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{f(0)}{x}+f'(0)+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2\right]=0.$

知 $f(0)=0, f'(0)=0, f(x)=\frac{f''(\theta x)}{2}x^2 \quad (0<\theta<1).$

又由 $\lim\limits_{x\to0}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]\frac{1}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(0)}{x^2}+\frac{f'(0)}{x}+\frac{f''(\theta x)}{2}\right]=3,$$

知 $\lim\limits_{x\to0}f''(\theta x)=4\Rightarrow f''(0)=4.$

7. (8 分) 将给定的正数 12 分成三个非负数 $x, 2y, 3z$ 之和, 使得 xy^2z^3 最大。

解析

设 $u=xy^2z^3$,

$F(x,y,z;\lambda)=\ln x+2\ln y+3\ln z+\lambda(x+y+z-12)$ ················ 本步骤 4 分, 累计 4 分

由 $\begin{cases} F_x=\frac{1}{x}+\lambda=0 \\ F_y=\frac{2}{y}+\lambda=0 \\ F_z=\frac{3}{z}+\lambda=0 \\ F_\lambda=x+y+z=12 \end{cases}$ ···················· 本步骤 1 分, 累计 5 分

解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$ ························· 本步骤 2 分, 累计 7 分

由于平面 $x+y+z=12$ 在第一卦限的边界上，总有 $u=0$，而在第一卦限内必有 $u>0$，且 u 在第一卦限中连续，故必有最大值，且最大值一定在第一卦限中取得

因此 $x=y=z=2$ 是使得 $u=xy^2z^3$ 达到最大值的的点。

最大值为 64 ·· 本步骤 1 分, 累计 8 分

8. (8 分) 设 $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x-1}$, 求该函数

(1) (4 分) 的单调区间和极值

(2) (2 分) 所确定曲线的凸凹区间;

(3) (2 分) 所确定曲线的渐近线.

解析 定义域为 $x\neq 1$

$y'=\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$

$y''=\dfrac{8}{(x-1)^3}$

$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(3,+\infty)$

$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,1)$ 和 $(1,3)$

函数极大值为 $f(-1)=-8$, 极小值为 $f(3)=0$

$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 为凸函数，$(1,+\infty)$ 为凹函数，无拐点

$x=1$ 为 $f(x)$ 的垂直渐近线。

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2-6x+9}{x^2-x}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-x=\frac{x^2-6x+9-x^2+x}{x-1}=-5$$

直线 $y=x-5$ 也是 $f(x)$ 的渐进线。

9. (8 分) 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $x=3$ 处的带皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式, 并写出 $f^{(n)}(3)$ 的值.

解析 设 $t=x-3$

将函数在 $t=0$ 出展开

$$\begin{aligned}\frac{1}{(t+3)^2}&=(3+t)^{-2}\\&=\frac{1}{9}\left(1+\frac{t}{3}\right)^{-2}\\&=\frac{1}{9}\left(1-\frac{2}{3}t+\frac{(-2)(-3)}{2}\left(\frac{t}{3}\right)^2+\cdots+\frac{(-2)(-3)(-n-1)}{n!}\left(\frac{t}{3}\right)^n+o(t^n)\right.\\&=\frac{1}{9}\left(1-\frac{2}{3}t+\frac{t^2}{3}+\cdots+\frac{(n+1)!(-1)^n}{n!3^n}t^n+o(t^n)\right.\\&=\frac{1}{9}-\frac{2}{27}t+\frac{t^2}{27}+\cdots+\frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}}t^n+o(t^n)\\&=\frac{1}{9}-\frac{2(x-3)}{27}+\frac{(x-3)^2}{27}-\frac{4}{243}(x-3)^3+\cdots+\frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}}(x-3)^n+o((x-3)^n)\end{aligned}$$

$$\therefore f^{(n)}(3)=\frac{(-1)^n(n+1)n!}{3^{n+2}}$$

10. (8 分) 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin x\sin y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性, 偏导数的存在性及可微性.

解析

$$0\leqslant |f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{x\sin x\sin y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant |y|\to 0.$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=f(0,0)=0$, $f(x,y)$在$x>0,y=0$ 连续

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{0}=0.$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{0}=0.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)\cdot x-f_y(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x\sin x\sin y-0-0-0}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

当(x,y) 沿着$y=kx$ 趋向于$(0,0)$时

$$\lim_{\substack{x=0\\ y=kx}}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}|x|^3}\text{不存在}$$

故$f(x,y)$在$(0,0)$处不可微

11. (5 分) 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

解析 $0\leqslant\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}0=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}=0$

由夹逼定理

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0$$

12. (5 分) 若方程 $e^z=xyz$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解析

$$e^z \cdot z_x = yz + xyz_x$$
$$z_x = \frac{yz}{e^z - xy}.$$
$$e^z \cdot z_x^2 + e^z \cdot z_{xx} = yz_x + yz_x + xyz_{xx}.$$
$$z_{xx} = \frac{2yz_x - e^z z_x^2}{e^z - xy} = \frac{(2e^z - 2xy - ze^z)\, y^2 z}{(e^x - xy)^3}$$

13. (5 分) 求经过直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ 且平行于直线 $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$ 的平面方程

解析 所求平面是由直线 l_1

的一个点 $M_1(1,0,0)$ 和一个方向向量 $\vec{v}(2,1,-1)$ 以及直线 l_2 的一个方向向量 $\vec{u}(2,1,-2)$ 确定的平面,

因此平面 π 的方程是 $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y & 1 & 1 \\ z & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$

即 $x - 2y - 1 = 0.$

14. (5 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内有二阶导数, 且有 $f(a) = f(b) = 0, f(c) > 0,$ $(a < c < b)$, 证明: 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f''(\xi) < 0.$

解析 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上连续, 在 (a,c) 内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi_1 \in (a,c)$, 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} > 0.$$

$f(x)$ 在 $[c,b]$ 上也满足拉格朗日中值定理的条件, 因此存在 $\xi_2 \in (c,b)$, 使得

$$f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} < 0.$$

$f'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上仍满足拉格朗日中值定理的条件, 故存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, 使得

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0.$$