中山大学 2020 高等数学一期末考试试题答案

一、1、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right) \qquad (1\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}\right) \qquad (3\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}\right) \qquad (5\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{ln(1+x)+2}\right)=\frac{1}{2} \qquad (6\text{ 分})$$

2、设$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\neq 0$，求$a$、$b$、$c$

解：因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\neq 0$，所以$b=0$.　　（2 分）

按洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^3/x} \qquad (3\text{ 分})$$

$$\overset{\text{所以}a=1}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}=c\neq 0. \qquad (6\text{ 分})$$

所以$b=0$，$a=1$，$c=\frac{1}{2}$

3、$\int\arctan\sqrt{x}\,dx$

解：做变量替换$t=\sqrt{x}$，则　　（2 分）

$$\int\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int\arctan t\mathrm{d}t^2=t^2\arctan t-\int t^2\mathrm{d}\arctan t$$

$$=t^2\arctan t-\int\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=t^2\arctan t-\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \qquad (6\text{ 分})$$

$$=\left(t^2+1\right)\arctan t-t+\mathrm{C}=\left(x+1\right)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\mathrm{C}$$

4、

$\int_0^n (x-[x])dx$

$x-[x]$是周期为1的函数 (2分)

$\int_0^n (x-[x])dx = n\int_0^1 (x-[x])dx$ (4分)

$= n\int_0^1 xdx = \frac{n}{2}$ (6分)

二、求通过直线L_1:$\begin{cases} x-2z-4=0 \\ 3y-z+8=0 \end{cases}$，且与直线

$L_2: x-1=y+1=z-3$平行的平面方程

解：设平面方程式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

由直线的法向量可知：$(1,1,1)\cdot(A,B,C)=0, A+B+C=0$ （3 分）

直线 1 可知：$(1,0,-2)\times(0,3,-1)=(6,1,3)$ （6 分）

所以：$(A,B,C)\cdot(6,1,3)=0, 6A+B+3C=0$ （8 分）

所以：$2(x-x_0)+3(y-y_0)-5(z-z_0)=0$

任取一点得到 $2(x-2)+3(y+3)-5(z+1)=0$

故平面方程是 $2x+3y-5z=0.$ （9 分）

三、1、求函数$z=\arctan\frac{y}{x}$的全微分dz

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}dx+\frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}dy=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$ （6 分）

2、证明函数$u=\frac{1}{r}$满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

证：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial x}=-\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{x}{r}=-\dfrac{x}{r^3}$， （3 分）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}. \quad （6 分）$$

由函数关于自变量的对称性,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3r^2}{r^5}=0. \quad （8 分）$$

四、已知$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，$-1\le x\le 1$，设函数$f(x)=\int_0^x t^2\arctan t\,dt$，求$f(x)$在$x=0$点的泰勒公式中$x^6$的系数

第一种方法：

$f'(x)=x^2\arctan x$ (4)

$=x^2(x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3))$

$=x^3-\dfrac{x^5}{3}+o(x^5)$ (6)

则 $f(x)=\int_0^x(t^3-\dfrac{t^5}{3}+o(t^5))dt$ (10)

$=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^6}{18}+o(x^6)$

x^6系数是$-\dfrac{1}{18}$ (12)

第二种方法：

$f(x)=\int_0^x t^2\arctan t dt$

$\int t^2\arctan t dt=\frac{t^3}{3}\arctan t-\int\frac{t^3}{3}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt$　　(3分)

$=\frac{t^3}{3}\arctan t-\frac{1}{3}\int(t-\frac{t}{1+t^2})dt$

$=\frac{t^3}{3}\arctan t-\frac{t^2}{6}+\frac{1}{6}\int\frac{dt^2}{1+t^2}$　　(5分)

$=\frac{t^3}{3}\arctan t-\frac{t^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(1+t^2)+C$　　(6分)

则 $f(x)=\frac{x^3}{3}\arctan x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)$　　(7分)

f在$x=0$处的泰勒展开式是 (展开到x^6)

$f(x)=\frac{x^3}{3}(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3))-\frac{x^2}{6}+$

$\frac{1}{6}(x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+o(x^6))$　　(10分)

$=\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{18}+o(x^6)$

所以 x^6系数是$-\frac{1}{18}$　　(12分)

五、设函数$f(x)=\frac{x^2}{x-1}$，求(1)此函数的单调性与极值点；(2)此函数的凸凹区间；(3) 此函数的渐近线

(1)

$y'=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$　　(2分)

$y'>0$时，$x<0$或$x>0$，单调递增区间是$(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$，　　(3分)

$y'<0$时，$0<x<1$或$1<x<2$，单调递减区间是$(0,1)$，$(1,2)$，　　(4分)

$y'=0$时，$x=0$或2，极值点是$x=0$或$x=2$　　(5分)

(2)

$y''=\frac{2}{(x-1)^3}$　　(3分)

$y''>0$时，$x>1$，凹区间是$(1,+\infty)$　　(4分)

$y''<0$时，$x<1$，凸区间是$(-\infty,1)$　　(5分)

(3)

f 在 x=1 处无定义，x=1 是一条垂直渐进线 （2 分）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x-1)}=1$$ （3 分）

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1$$ （4 分）

所以$y=x+1$是斜渐近线。 （5 分）

六、讨论二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点(0,0)处一阶偏导数和全微分是否存在？

解：$\because f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,\ 0)-f(0,\ 0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$ （2 分）

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0+\Delta y,\ 0)-f(0,\ 0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

$\therefore f(x,y)$ **在 (0,0) 处**一阶偏导数存在，且 $f_x(0,0)=0$，$f_y(0,0)=0$. （4 分）

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}==\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$ （8 分）

$\because \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\dfrac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\Delta x}{\Delta x^2+\Delta x^2}=\dfrac{1}{2}\neq 0$, （10 分）

$$\therefore \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\neq 0$$

故$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]\neq o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$，

因此，$\boldsymbol{f(x,y)}$ 在 **(0,0)** 处不可微. （12 分）

七、(1) 叙述混合积的几何意义；

(2) 设$f(x)$、$g(x)$、$h(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，

令 $\vec{F}(x)=(f(x),g(x),h(x))$，由混合积定义函数

$D(x) = \vec{F}(x) \cdot (\vec{F}(a) \times \vec{F}(\mathrm{b}))$，证明存在$c \in (a,\mathrm{b})$，$D'(c) = 0$；

(3) 证明结论(2)是柯西中值定理的推广

(1) 向量$\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$的混合积的几何意义是：

$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$等于$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$张成的平行六面体的体积 （4 分）

（2）向量$\vec{F(a)}$，$\vec{F(a)}$，$\vec{F(b)}$共面，

则 D(a)=0，同理 D(b)=0. （2 分）

显然 D(x)在[a,b]上连续，在(a,b)上可导。

由罗尔定理得，$\exists c \in (a, b)$，使得$D'(c) = 0$ （4 分）

（3）

$$D(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}$$

（1 分）

当$h(x) \equiv 1$时，

$$D(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix}$$

（3 分）

$$= f(x)(g(a) - g(b)) - g(x)(f(a) - f(b)) + (f(a)g(b) - g(a)f(b))$$

$D'(x) = f'(x)(g(a) - g(b)) - g'(x)(f(a) - f(b))$ （5 分）

由结论(2)知，$\exists c$，使得$D'(c) = 0$

即

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad （如果 g'(x) \neq 0），$$

这是柯西中值定理 （6 分）