2020下学期高数一期末考试答案

一、级数敛散性

1、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$　5分

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，故该级数绝对收敛。　**5分**

2、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$　5分

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，即通项不趋于零，故该级数发散。　**5分**

3、$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$　8分

由于$\frac{1}{n\ln n}$是单调递减趋于零的，由莱布尼茨判别法，　**3分**

级数是收敛的。因为积分

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=[\ln(\ln x)]|_2^{\infty}=\infty,$$

由积分判别法可知级数发散，原级数条件收敛。　**8分**

二、设曲线积分$\int_L(f(x)-e^x)\sin y\,dx-f(x)\cos y\,dy$与路径无关，其中$f(x)$有连续的一阶导函数，且$f(0)=0$，求$f(x)$。12分

由于曲线积分与路径无关，

$$P=(f(x)-e^x)\sin y,\quad Q=-f(x)\cos y,$$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$知 $-f'(x)\cos y=(f(x)-e^x)\cos y$　**6分**

$\Rightarrow f'(x)+f(x)=e^x.$　**8分**

$$f(x)=e^{-\int 1dx}\left[\int e^x\cdot e^{\int 1dx}dx+C\right]$$

$= e^{-x}[\int e^{2x}dx + C]$

$= e^{-x}\left[\frac{1}{2}e^{2x} + C\right] = \frac{1}{2}e^{x} + Ce^{-x}$

$f(0) = 0$，得$C = -\frac{1}{2}$， **11 分**

故$f(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$。 **12 分**

三、求$I = \oiint_{S^+}(x^3 + y^3)dydz + (y^3 + z^3)dzdx + (z^3 + x^3)dxdy$， 其中$S^+$为球面$x^2 + y^2 + z^2 = 1$，方向是外侧。12 分

使用高斯公式，有

$I = 3\iiint_{\Omega}(x^2 + y^2 + z^2)\ dV$。 **6 分**

使用球坐标

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \qquad y = r\sin\varphi\sin\theta, \qquad z = r\cos\varphi,$$

则有$dV = r^2\sin\varphi\ dr\,d\varphi\,d\theta$。 **9 分**

所以积分为$I = 3\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^4\,dr$

$= 3 * 2\pi * 2/5 = 12\pi/5$。 **12 分**

四、求微分方程$y'' + y = x\cos(2x) + 2021$的通解。12 分

1. 先求解齐次方程通解。齐次方程

$$y'' + y = 0$$

的特征方程为$\lambda^2 + 1 = 0$， 对应特征根为$\lambda = \pm i$，对应的通解

为$y_1 = C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$，　其中$C_1$和$C_2$为任意常数。 **3 分**

2. 由于 2i 不是方程对应的齐次方程特征根，故

$$y'' + y = x\cos(2x)$$

有如下形式的特解

$y_2 = (Ax + B)\cos(2x) + (Cx + D)\sin(2x)$ **6 分**

代入上述方程可得

$(-3Ax - 3B + 4C)\cos(2x) + (-3Cx - 3D - 4A)\sin(2x) =$

$x\cos(2x)$ **9 分**

比较系数可得

$A = -1/3,\ B = C = 0, D = 4/9$

于是得此处特解

$y_2 = -[x\cos(2x)]/3 + 4\sin(2x)/9$ **10 分**

3. 方程$y'' + y = 2021$的一个特解是$y_3 = 2021$。

故原方程通解为

$y = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) - \frac{[x\cos(2x)]}{3} + \frac{4\sin(2x)}{9} + 2021$。**12 分**

五、已知幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}x^{2n}$，

1、求收敛半径与收敛域；　4 分

2、求和函数；　10 分

3、求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$。　2 分

1、设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}x^{2n}$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n-1)}|=1$，故级数收敛半径为 1 **2 分**

且$x=\pm1$时，由莱布尼茨判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$收敛，所以$f(x)$的定义域为$[-1,1]$ **4 分**

2、当$x\in(-1,1)$时，对$f(x)$逐项求导，有：

$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(-1)^n}{n(2n-1)}x^{2n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)}x^{2n-1}$ **2 分**

$f''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{2}{1+x^2}$ **4 分**

故：$f'(x)=2\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=2\arctan x$ **6 分**

$f(x)=2\int_0^x\arctan t dt=2x\arctan x-\ln(1+x^2)(-1<x<1)$

8 分

由于$f(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$为偶函数，在$x=\pm1$上有意义，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)}x^{2n}$在$x=\pm1$上收敛， **9 分**

故$f(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)(-1\le x\le1)$ **10 分**

3、令$x=1$，级数和是$\frac{\pi}{2}-\ln2$。 **2 分**

六、求函数$g(y)=\int_{2y}^{y^2}e^{-yx^2}dx$的导函数。 8 分

因为e^{-yx^2}及$\frac{\partial}{\partial y}(e^{-yx^2})=-x^2e^{-yx^2}$在全平面上连续，$2y$及$y^2$在（-∞，+∞）上可导， **2 分**

所以$g'(y)=-\int_{2y}^{y^2}x^2e^{-yx^2}dx+2ye^{-y^5}-2e^{-4y^3}$。 **8 分**

七、1、证明广义积分$I=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}x^4dx$收敛，

其中常数$a>0$；　　　　　　　　　　　　　　　　8 分

2、求广义积分I的值；　　　　　　　　　　　　　8 分

3、利用Γ函数与 B 函数求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}$，其中$\binom{2n}{n}$是组合数。

6 分（已知$\int\frac{1}{x^2+b^2}dx=\frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b}+C$，$b\neq 0$）

1、$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}x^4dx=\int_0^1 e^{-ax^2}x^4dx+\int_1^{+\infty} e^{-ax^2}x^4dx$ **3 分**

前一项是连续函数的积分，后一项也收敛：

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-ax^2}x^4}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^6}{e^{ax^2}}=0$（洛必达法则）

故x充分大时，$e^{-ax^2}x^4<\frac{1}{x^2}$**，**　　　　　　　　　　　　**6 分**

而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$收敛，故$\int_1^{+\infty} e^{-ax^2}x^4dx$收敛，

所以广义积分收敛。　　　　　　　　　　　　　　**8 分**

2、令$ax^2=t$，$x=\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{t}$，$dx=\frac{dt}{2\sqrt{a}\sqrt{t}}$.　　　　　　**3 分**

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}x^4dx$$

$=\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\sqrt{\frac{t}{a}}\right)^4\frac{dt}{2\sqrt{a}\sqrt{t}}$

$=\frac{1}{2a^2\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} t^{3/2}e^{-t}dt$　　　　　　　　　　　　**5 分**

$=\frac{1}{2a^2\sqrt{a}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2a^2\sqrt{a}}\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{3\sqrt{\pi}}{8a^2\sqrt{a}}$。　　　　　　　　　　　　　　　　**8 分**

3、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n!}{n(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{B}(n+1,n)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 t^n(1\text{-t})^{n-1}dt$。 **3 分**

因为$0\le t^n(1-t)^{n-1}\le(\frac{1}{4})^{n\text{-}1}$,

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}t^n(1-t)^{n-1}$在[0,1]上一致收敛。

从而原式$=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}t^n(1-t)^{n-1}\,dt$ **5 分**

$=\int_0^1\frac{t}{t^2-t+1}dt=\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)|_0^1+$

$\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{(\text{t-1/2})^2+3/4}dt=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ 。 **6 分**