中山大学本科生期末考试

考试科目：《高等数学（一）》

学年学期：2020 学年第 1 学期　　姓　名：____________

学 院/系：数学学院（珠海）　　学　号：____________

考试方式：闭卷　　年级专业：____________

考试时长：120 分钟　　班　别：____________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

------------以下为试题区域，共七道大题，总分 100 分,考生请在答题纸上作答------------

一、完成下列计算（**共 4 小题，每题6分，共 24分**）

1、 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$

2、 设$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\neq 0$，求$a$、$b$、$c$

3、$\int \arctan\sqrt{x}\,dx$

4、$\int_0^n (x-[x])\,dx$，其中n是正整数，$[x]$是不超过x的最大整数

二、求通过直线L_1:$\begin{cases} x-2z-4=0 \\ 3y-z+8=0 \end{cases}$，且与直线

L_2: $x-1=y+1=z-3$平行的平面方程 （**9分**）

三、完成如下各题

1、求函数$z=\arctan\frac{y}{x}$的全微分dz （6分）

2、证明函数$u=\frac{1}{r}$满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ （8分）

四、已知$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，$-1\le x\le 1$，设函数$f(x)=\int_0^x t^2\arctan t\,dt$，求$f(x)$在$x=0$点的泰勒公式中$x^6$的系数 （12分）

五、设函数$f(x)=\frac{x^2}{x-1}$，求(1)此函数的单调性与极值点；(2)此函数的凸凹区间；(3) 此函数的渐近线 （15分）

六、讨论二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\ne 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点(0,0)处一阶偏导数和全微分是否存在？（12分）

七、(1) 叙述混合积的几何意义；（4分）

(2) 设$f(x)$、$g(x)$、$h(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，令$\vec{F}(x)=(f(x),g(x),h(x))$，由混合积定义函数

$D(x)=\vec{F}(x)\cdot(\vec{F}(a)\times\vec{F}(b))$，证明存在$c\in(a,b)$，$D'(c)=0$；（4分）

(3) 证明结论(2)是柯西中值定理的推广 （6分）