第五部分 图论

本部分主要内容

- 图的基本概念
- 欧拉图、哈密顿图
- 树
- 平面图
- 支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色

第十四章 图的基本概念

主要内容

- 图
- 通路与回路
- 图的连通性
- 图的矩阵表示
- 图的运算

预备知识

- 多重集合——元素可以重复出现的集合
- 无序积——$\boldsymbol{A\&B} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{B}\} = \boldsymbol{B\&A}$

14.1 图

定义14.1 无向图$G = \langle V,E \rangle$, 其中

(1) $V \neq \varnothing$为顶点集，元素称为顶点（结点）

(2) E为$V\&V$ 的多重子集，其元素称为无向边，简称边

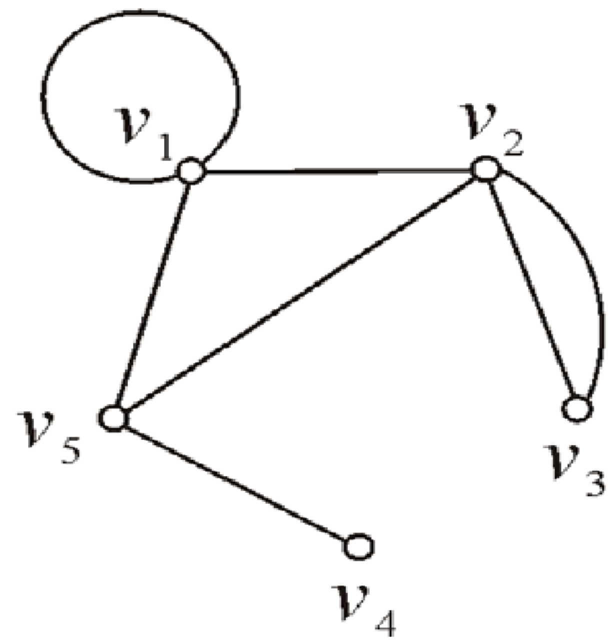
实例

设

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$,

$E = \{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$

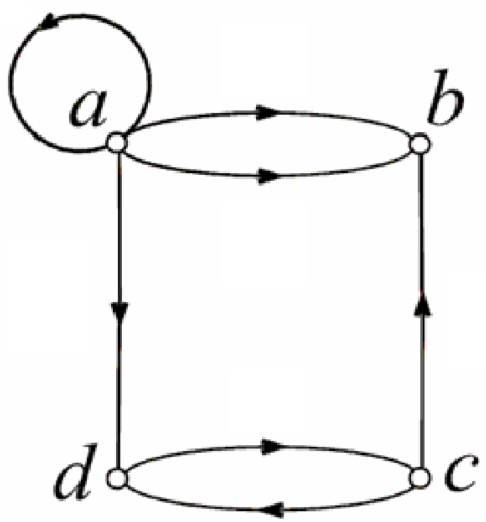
则 $G = \langle V,E \rangle$为一无向图



有向图

定义14.2 有向图$D=\langle V,E\rangle$, 只需注意E是$V\times V$的多重子集

下图表示的是一个有向图，试写出它的V和E



$$V=\{a,b,c,d\}$$
$$E=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle c,b\rangle,\langle d,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$$

注意：图的数学定义与图形表示是一一对应的

相关概念

- 图

  ① 可用G泛指图（无向的或有向的）、D专指有向图

  ② $V(G), E(G), V(D), E(D)$

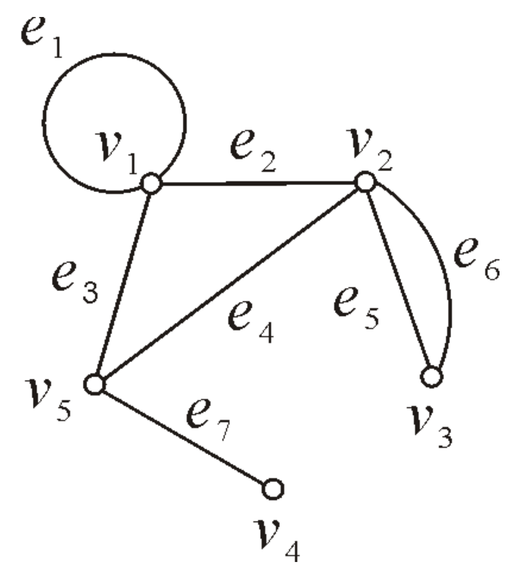
  ③ n阶图：$|V| = n$
- 有向图：$E \subseteq V \times V$
- 零图：$|E| = 0$
- n 阶零图N_n 与平凡图N_1
- 空图$\varnothing$

相关概念

- 标定图：对每一个顶点和边进行编号
- 无向图中顶点与边的关联关系

对于$e_k = (v_i, v_j) \in E$，称v_i与e_k关联、 v_j与e_k关联， v_i和v_j为e_k的端点

v_i(或v_j)与e_k关联次数$=\begin{cases} 1 & v_i \neq v_j \\ 2 & v_i = v_j \end{cases}$



e_k是环当且仅当$v_i = v_j$

v_i与v_j相邻$\Leftrightarrow (v_i, v_j) \in E$

e_i与e_j相邻

$\Leftrightarrow \exists v(v \in V \land v$是$e_i$的端点$\land v$是$e_j$的端点$)$

相关概念

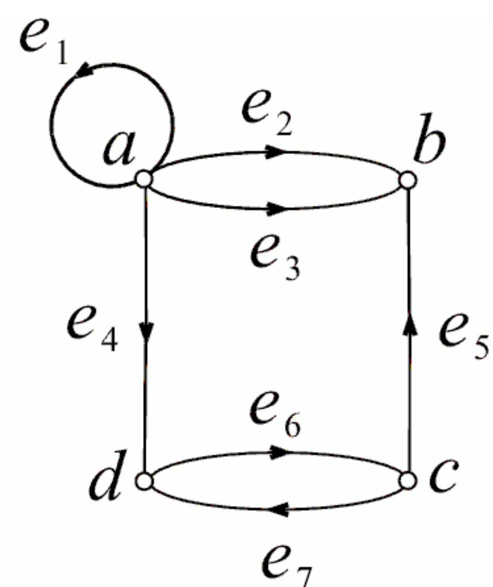
- 有向图中顶点与边的关联关系

对于$e_k = \langle v_i, v_j \rangle \in E$，称$v_i$与$e_k$关联、 v_j与e_k关联， v_i和v_j为e_k的端点，其中v_i为始点、v_j为终点

e_k是环当且仅当$v_i = v_j$

v_i与v_j相邻$\Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle \in E \vee \langle v_j, v_i \rangle \in E$

e_i与e_j相邻 $\Leftrightarrow$ e_i的终点是e_j的始点$\vee$ e_j的终点是e_i的始点



- 孤立点：没有和任何边关联的点
- 有向图的基图：
  把所有有向边改成无向边之后的图

相关概念

- 邻域与关联集

① $v \in V(G)$ (G为无向图)

v的邻域 $N(v)=\{u \mid u \in V(G) \wedge (u,v) \in E(G) \wedge u \neq v\}$

v的闭邻域 $\overline{N}(v)=N(v) \cup \{v\}$

v 的关联集 $I(v)=\{e \mid e \in E(G) \wedge e\text{与}v\text{关联}\}$

② $v \in V(D)$ (D为有向图)

v的后继元集 $\Gamma_D^+(v)=\{u \mid u \in V(D) \wedge \langle v,u \rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$

v的先驱元集 $\Gamma_D^-(v)=\{u \mid u \in V(D) \wedge \langle u,v \rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$

v的邻域 $N_D(v)=\Gamma_D^+(v) \cup \Gamma_D^-(v)$

v的闭邻域 $\overline{N}_D(v)=N_D(v) \cup \{v\}$

多重图与简单图

定义14.3

(1) 无向图中的平行边及重数

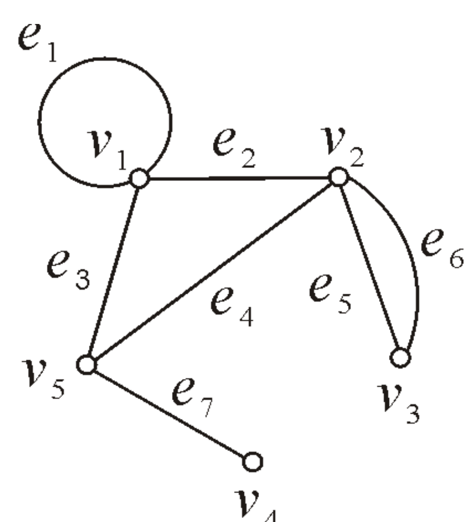
（关联一对顶点的边多于1条）

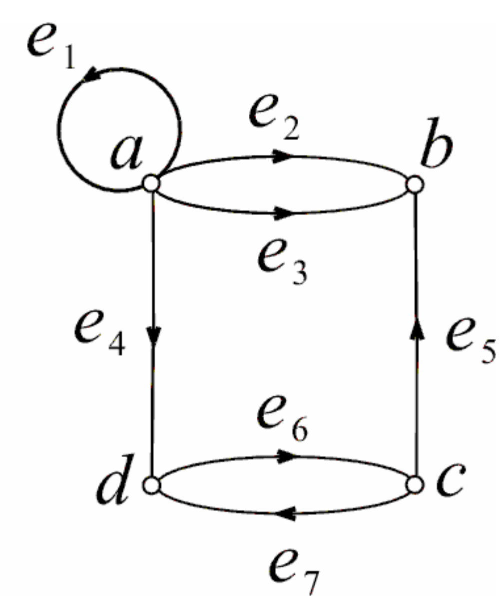
(2) 有向图中的平行边及重数（注意方向性）

（关联一对顶点的边多于1条，且始点、终点相同）

(3) 多重图：含平行边

(4) 简简单图：不含平行边和环





顶点的度数

定义14.4

(1) 设G=<V,E>为无向图, $\forall v \in V$, v的**度数**（简称度）$d(v)$

$$d(v) = v\text{作为某个边的端点的次数}$$

(2) 设D=<V,E>为有向图, $\forall v \in V$,

v的**出度**$d^+(v) = v$ 作为某个边的始点的次数

v的**入度**$d^-(v) = v$ 作为某个边的终点的次数

v的**度**$d(v) = d^+(v) + d^-(v)$

(3) G的**最大度**$\Delta(G) = \max_{v\in V}\{d(v)\}$

G的**最小度**$\delta(G) = \min_{v\in V}\{d(v)\}$

顶点的度数

定义14.4 (续)

(4) D的最大度$\Delta(D)=\max_{v\in V}\{d(v)\}$

D的最小度$\delta(D)=\min_{v\in V}\{d(v)\}$

D的最大出度$\Delta^+(D)=\max_{v\in V}\{d^+(v)\}$

D的最小出度$\delta^+(D)=\min_{v\in V}\{d^+(v)\}$

D的最大入度$\Delta^-(D)=\max_{v\in V}\{d^-(v)\}$

D的最小入度$\delta^-(D)=\min_{v\in V}\{d^-(v)\}$

(5) 奇度顶点与偶度顶点

握手定理

定理14.1 设$G=<V,E>$为任意无向图，$V=\{v_1,\dots,v_n\}, |E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2m$$

证 G中每条边 (包括环) 均有两个端点，所以在计算G中各顶点度数之和时，每条边均提供2度，m 条边共提供 $2m$ 度.

定理14.2 设$D=<V,E>$为任意有向图，$V=\{v_1,\dots,v_n\}, |E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2m,$$

$$\sum_{i=1}^{n} d^+(v_i)=\sum_{i=1}^{n} d^-(v_i)=m$$

握手定理推论

推论 任何图 (无向或有向) 中，奇度顶点的个数是偶数.

证 设$G=<V,E>$为任意图，令

$$V_1=\{v\,|v\in V\wedge d(v)\text{为奇数}\}$$
$$V_1=\{v\,|v\in V\wedge d(v)\text{为偶数}\}$$

则$V_1\cup V_2=V, V_1\cap V_2=\emptyset$，由握手定理可知

$$2m=\sum_{v\in V}d(v)=\sum_{v\in V_1}d(v)+\sum_{v\in V_2}d(v)$$

由于$2m,\sum_{v\in V_2}d(v)$均为偶数，所以$\sum_{v\in V_1}d(v)$为偶数，但因为V_1中顶点度数为奇数，所以$|V_1|$必为偶数.

握手定理应用

例1 无向图G有16条边，3个4度顶点，4个3度顶点，其余顶点度数均小于3，问G的阶数n为几？

解

设除3度与4度顶点外，还有x个顶点$v_1, v_2, \ldots, v_x$， 则

$$d(v_i) \leq 2，i = 1, 2, \ldots, x,$$

于是得不等式

$$2 \times 16 = 32 \leq 3 \times 4 + 4 \times 3 + 2x$$

得 $x \geq 4$, 阶数 $n \geq 4+4+3=11$.

图的度数列

1 . $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为无向图$G$的顶点集，称$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$为$G$的度数列

2. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为有向图$D$的顶点集，

D的度数列：$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

D的出度列：$d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

D的入度列：$d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$

3. 非负整数列$d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$是可图化的$\Leftrightarrow$存在图$G$以$d$为度数列。

非负整数列$d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$是可简单图化的$\Leftrightarrow$存在简单图$G$以$d$为度数列。

易知：(2, 4, 6, 8, 10)，(1, 3, 3, 3, 4) 是可图化的，后者又是可简单图化的，而(2, 2, 3, 4, 5)，(3, 3, 3, 4) 都不是可简单图化的，特别是后者也不是可图化的

图的同构

定义14.5(无向图) 设G_1=<V_1,E_1>, G_2=<V_2,E_2>为两个无向图，若存在双射函数$f: V_1 \to V_2, \forall v_i, v_j \in V_1$

$$(v_i, v_j) \in E_1 \Leftrightarrow \left(f(v_i), f(v_j)\right) \in E_2$$

并且(v_i, v_j)与$\left(f(v_i), f(v_j)\right)$的重数相同，则称$G_1$与$G_2$是同构的，记作$G_1 \cong G_2$.

定义14.5 (有向图) 设D_1=<V_1,E_1>, D_2=<V_2,E_2>为两个有向图，若存在双射函数$f: V_1 \to V_2, \forall v_i, v_j \in V_1$

$$<v_i, v_j> \in E_1 \Leftrightarrow <f(v_i), f(v_j)> \in E_2$$

并且$<v_i, v_j>$与$<f(v_i), f(v_j)>$的重数相同，则称D_1与D_2是同构的，记作$D_1 \cong D_2$.

图的同构

图之间的同构关系具有自反性、对称性和传递性.

两个图同构的必要条件:

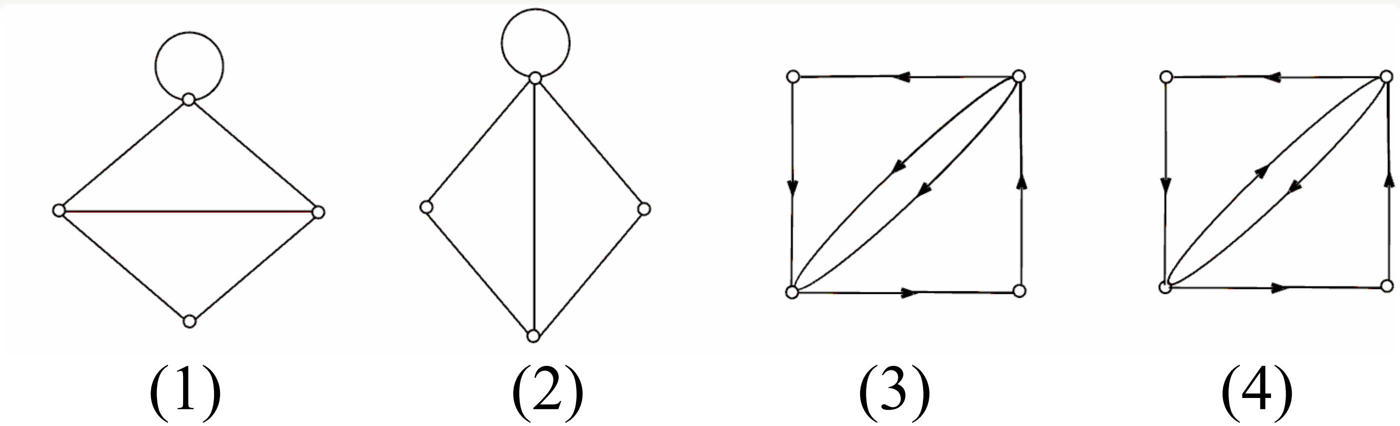
① 边数相同，顶点数相同;

② 度数列相同;

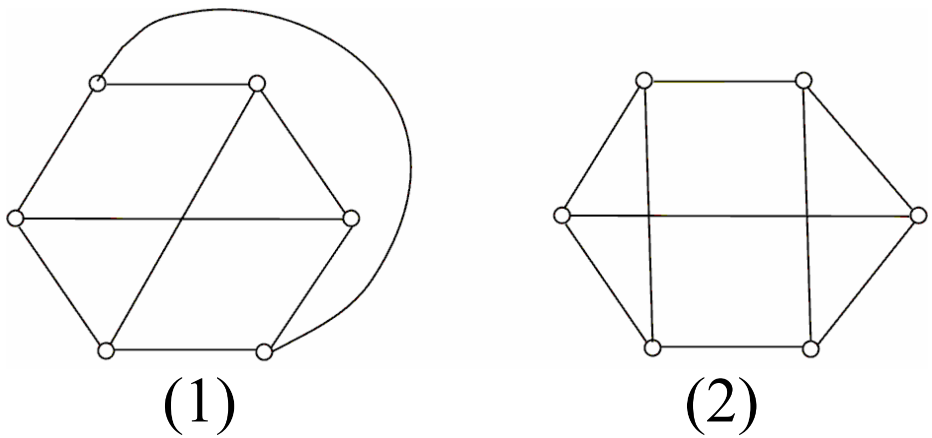
③ 对应顶点的关联集及邻域的元素个数相同

判断两个图同构是个难题

图同构的实例



图中，**(1)**与**(2)**不同构（度数列不同），**(3)**与**(4)**也不同构.



思考：图中**(1)**与**(2)**的度数列相同，它们同构吗？为什么？

n 阶完全图与竞赛图

定义14.6

(1) n (n≥1) 阶无向完全图——每个顶点与其余顶点均相邻的无向简单图，记作K_n.

性质：边数$m=\frac{n(n-1)}{2}, \Delta=\delta=n-1$

(2) n (n≥1)阶有向完全图——每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的有向简单图.

性质：边数$m=n(n-1)$,

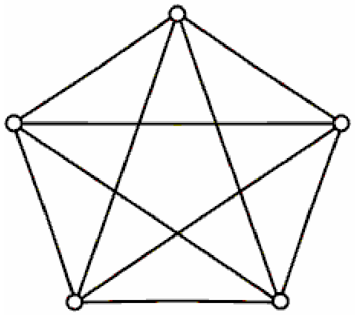
$\Delta=\delta=2(n-1), \Delta^{+}=\delta^{+}=\Delta^{-}=\delta^{-}=n-1$

(3) n (n≥1) 阶竞赛图——基图为K_n的有向简单图.

性质：边数$m=\frac{n(n-1)}{2}, \Delta=\delta=n-1$

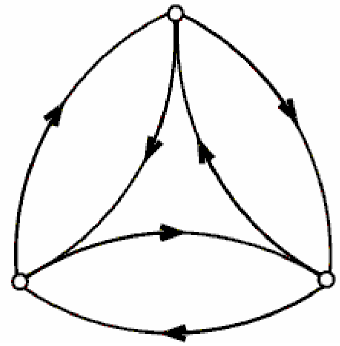
n 阶 k 正则图

K_5



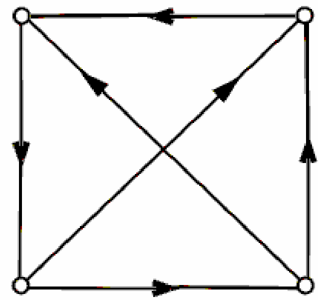
(1)

3阶有向完全图



(2)

4阶竞赛图.



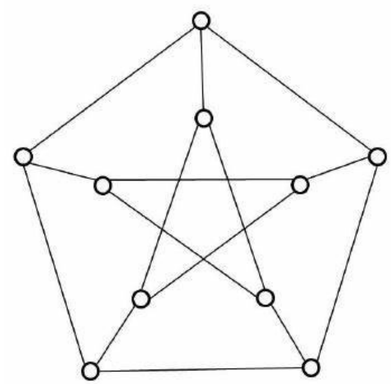
(3)

定义14.7　k正则图: $\Delta = \delta = k$的无向简单图

性质：n 阶k正则图的边数$m = \frac{nk}{2}$

K_n是n阶$n-1$正则图，

彼得松图是3正则图



彼得松图

子图

定义14.8 $G=<V,E>$, $G'=<V',E'>$

(1) G'为G的子图，G为G'的母图，记为$G' \subseteq G$：

$$G' \subseteq G \Leftrightarrow V' \subseteq V \wedge E' \subseteq E$$

(2) G'为G的生成子图$\Leftrightarrow G' \subseteq G \wedge V' = V$

(3) G'为G的真子图$\Leftrightarrow G' \subseteq G \wedge (V' \subset V \vee E' \subset E)$

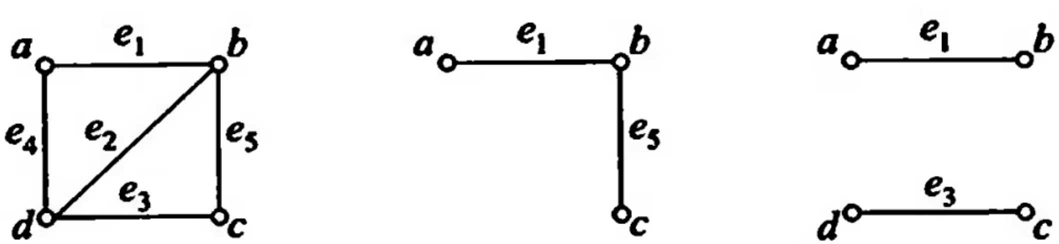
子图

定义14.8（续） $G=<V,E>$, $G'=<V',E'>$

(4)对V的非空子集V', V'的**导出子图**（记作$G[V']$）：
以V'为顶点集、以两个端点都在V'中的所有边为边集的图

$$\text{即}G[V']\text{的边集}=\begin{cases} E\cap(V'\&V') & G\text{为无向图} \\ E\cap(V'\times V') & G\text{为有向图} \end{cases}$$

(5)对E的非空子集E'的**导出子图**（记作$G[E']$）：
以E'为边集，以E'中的边所关联的顶点为顶点集的图
即$G[E']$的顶点集$=\{v|\exists e(e\in E'\wedge v\text{与}e\text{关联})\}$

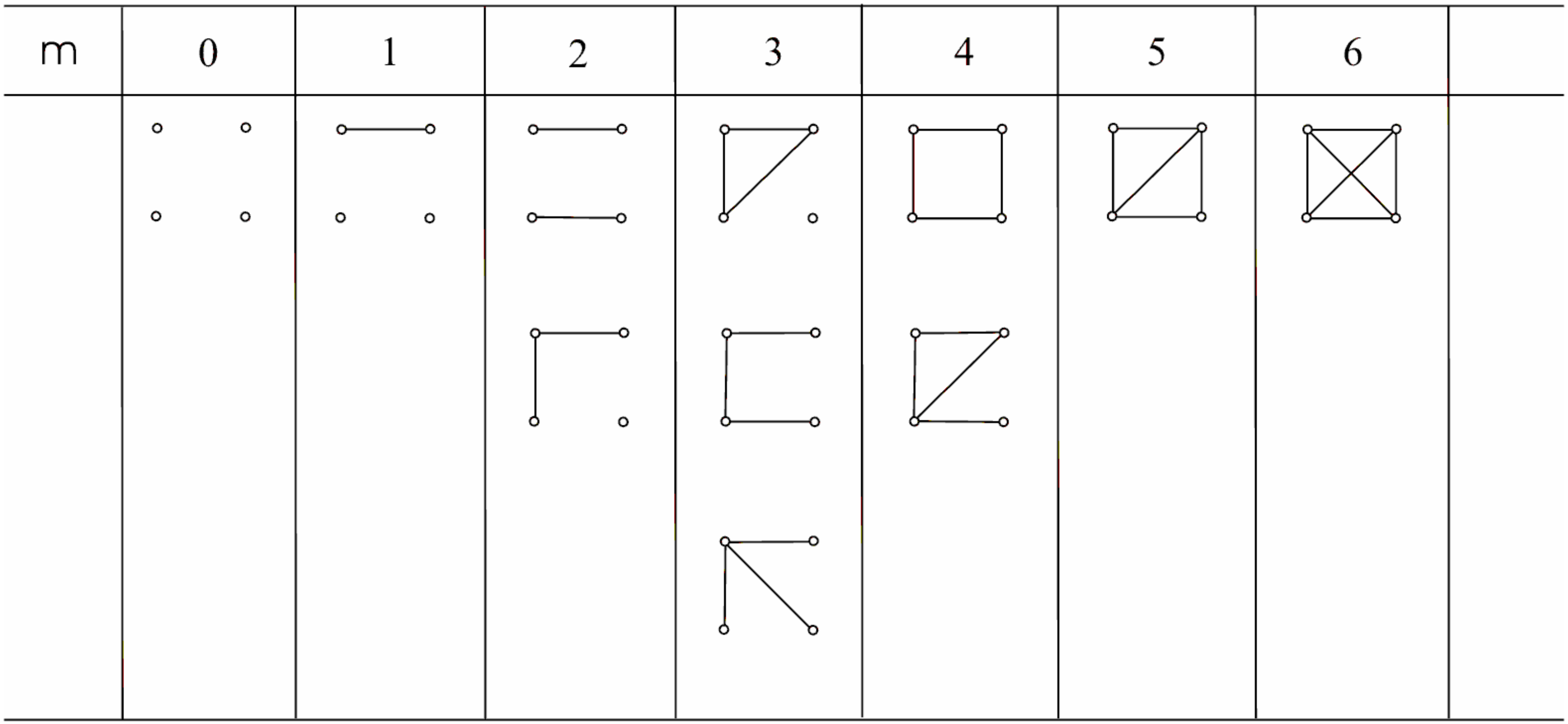


(a) (b) (c)

(b)是(a)的{a,b,c}导出子图
(c)是(a)的{e_1,e_3}导出子图

实例

例2 画出K_4的所有非同构的生成子图



补图

定义14.9 设$G=<V,E>$为n阶无向简单图，以V为顶点集，以所有使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为G的补图，记作$\overline{G}$.

$G \cong \overline{G} \Leftrightarrow G$是自补图.

相对于K_4, 求上面图中所有图的补图，并指出哪些是自补图.

问：互为自补图的两个图的边数有何关系？

作业

习题14：4、5、12、19、24

14.2 通路与回路

定义14.11 对标定图$G=<V,E>$（无向或有向），G中顶点与边的交替序列

$$\Gamma = v_{i_0}e_{i_1}v_{i_1}e_{i_2}v_{i_2}\dots e_{i_l}v_{i_l}$$

其中$v_{i_{j-1}}, v_{i_j}$是e_{i_j}的端点.

(1) 称Γ为通路；若 $v_{i_0} = v_{i_l}$，称Γ为回路，l为回路长度

(2) 若所有边各异， Γ为简单通路；又若$v_{i_0} = v_{i_l}$,Γ为简单回路

(3) Γ中所有顶点各异，则称Γ为初级通路(路径)；又若除$v_{i_0} = v_{i_l}$，所有的顶点各不相同且所有的边各异，则称Γ为初级回路(圈)

(4) 复杂通路与回路：有边重复出现

初级通路：点和边都不重复；简单通路：边不重复
初级通路也是简单通路；

几点说明

表示法

① 定义表示法

② 只用边表示法$\Gamma = e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_l}$

③ 只用顶点表示法（在简单图中）$\Gamma = v_{i_0}v_{i_1}\dots v_{i_l}$

④ 混合表示法

环是长为1的圈，两条平行边构成的圈长度为2，无向简单图中的圈长度≥3，有向简单图中的圈长度≥2.

不同的圈（以长度≥3的为例）

① 定义意义下（由标定的顶点与边的序列）

无向图：图中长度为l（l≥3）的圈，定义意义下为$2l$个

有向图：图中长度为l（l≥3）的圈，定义意义下为l个

② 长度相同的圈是同构的

试讨论l=3和l=4的情况

通路与回路的长度

定理14.5 在n 阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到 v_j存在长度小于或等于$n-1$ 的通路.

证明思路：若通路长度超过$n-1$，则必然包含一个回路，删去该回路将减少长度。

推论 在 n 阶图G中，若从顶点v_i到 v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于或等于$n-1$的初级通路（路径）.

定理14.6 在一个n 阶图G中，若存在 v_i到自身的回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于 n 的回路.

推论 在一个n 阶图G中，若存在 v_i到自身的简单回路，则一定存在长度小于或等于n 的初级回路.

14.3 图的连通性

无向图的连通性

(1) 顶点之间的连通关系：G=<V,E>为无向图

① u与v连通(记作u~v)⇔若u与v之间有通路

② ~是V上的等价关系

(2) G的连通性与连通分支

① G连通⇔对任意的$u, v \in V$有u~v

② 若$V/\sim = \{V_1, \ldots, V_k\}$，称$G[V_1], \ldots, G[V_k]$为连通分支，其个数$k$称为$G$的连通分支数，记为$p(G) = k$

若$p(G) = 1$则G是连通的

短程线与距离

(3) 短程线与距离

① u与v之间的**短程线**：$u\sim v$，u与v之间长度最短的通路

② u与v之间的**距离**：$d(u,v)$——短程线的长度

③ $d(u,v)$的性质：

$$\begin{cases} d(u,v) \geq 0 \wedge (d(u,v) = 0 \leftrightarrow u = v) \\ d(u,v) = d(v,u) \\ d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w) \end{cases}$$

若u,v不连通$\Rightarrow d(u,v) = \infty$

无向图的连通度

1. 删除顶点及删除边

$G-v$ ——从G中将v及关联的边去掉

$G-V'$ ——从G中删除V'中所有的顶点

$G-e$ ——将e从G中去掉

$G-E'$ ——删除E'中所有边

定义14.16-14.17 $G=<V,E>$, $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$

V'为点割集$\Leftrightarrow$

$$p(G-V') > p(G) \wedge \forall V''\big(V'' \subset V' \rightarrow p(G) = p(G-V'')\big)$$

v为割点$\Leftrightarrow \{v\}$为点割集 删除后导致连通分支数增大的最小顶点集

E'为边割集$\Leftrightarrow$

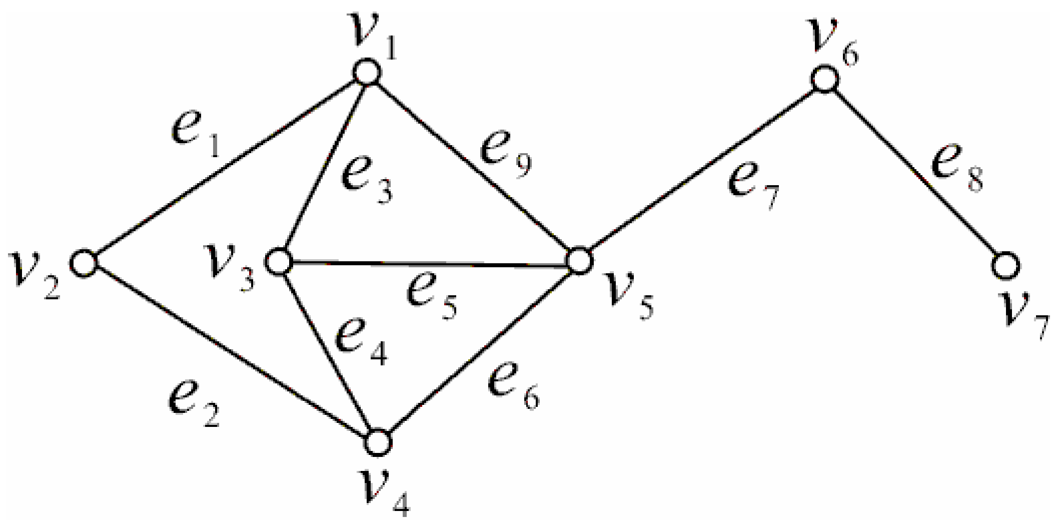
$$p(G-E') > p(G) \wedge \forall E''\big(E'' \subset E' \rightarrow p(G) = p(G-E'')\big)$$

e是割边（桥）$\Leftrightarrow \{e\}$为边割集 删除后导致连通分支数增大的最小边集

点割集与割点

例3 $\{v_1,v_4\}$，$\{v_6\}$是点割集，v_6是割点. $\{v_2,v_5\}$是点割集吗？

$\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$，$\{e_8\}$等是边割集，e_8是桥，$\{e_7,e_9,e_5,e_6\}$ 是边割集吗？



几点说明：

- K_n中无点割集，N_n中既无点割集，也无边割集.
- 若G 连通，E'为边割集，则 $p(G-E')=2$，V'为点割集，则 $p(G-V')\geq 2$

点连通度与边连通度

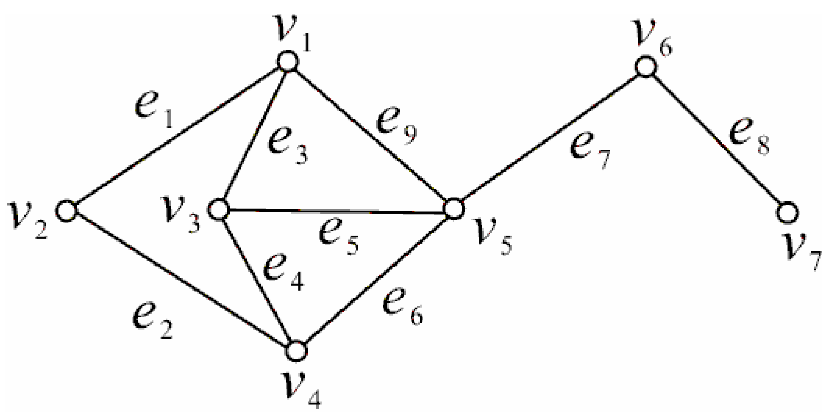
定义14.18 G为连通非完全图

点连通度$\kappa(G) = \min\{|V'| \mid V'$为点割集$\}$

规定$\kappa(K_n) = n-1$

G非连通$\Rightarrow \kappa(G) = 0$

$\kappa(G) \geq k \Rightarrow$称$G$为 k-连通图



定义14.19 设G为连通图

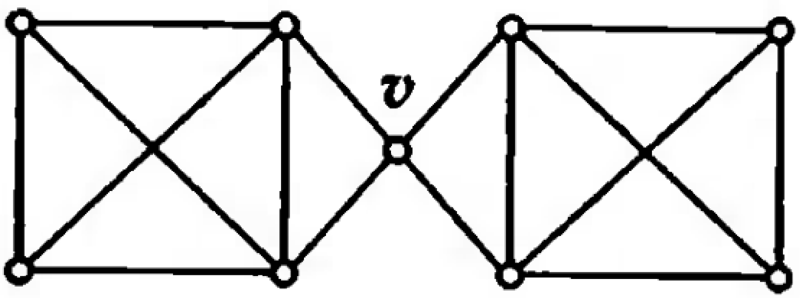
边连通度$\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E'$为边割集$\}$

G非连通$\Rightarrow \lambda(G) = 0$

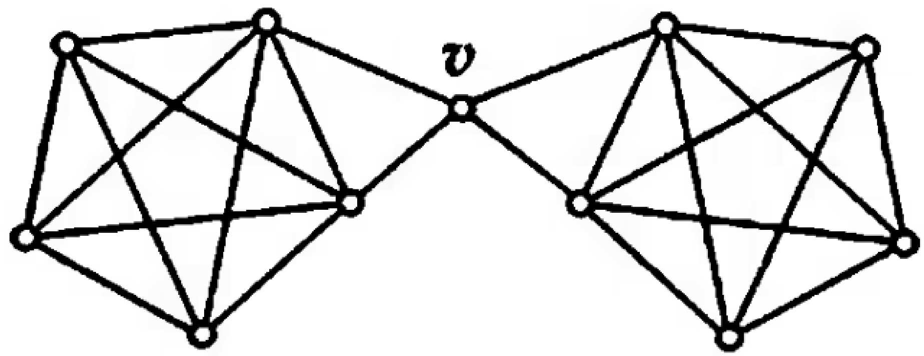
$\lambda(G) \geq r \Rightarrow$称$G$是 r 边-连通图

图中， $\kappa = \lambda = 1$，它是1-连通图 和 1边-连通图

例



$\kappa = 1, \lambda = 2, \delta = 3$



$\kappa = 1, \lambda = 2, \delta = 4$

定理7.5 对无向简单G，有$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$

证：先证明$\lambda(G) \le \delta(G)$

若G为N_1，则$\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G) = 0$

若G不为N_1，取$v \in V, d(v) = \delta(G)$，

令E'为v的关联集，则删除E'必定增大连通分支数，

因此$\lambda(G) \le |E'| = d(v)$

再证明$\kappa(G) \le \lambda(G)$

若$\lambda(G) = 0$，则$G = N_1$或G不连通，此时有$\kappa(G) = 0 = \lambda(G)$

若G连通且不是N_1，假设存在E'为边割集且$|E'| < \kappa(G)$，则在E'中删除至多$|E'|$个顶点就能使G不连通，因此有$\kappa(G) \le |E'|$，得到矛盾。

有向图的连通性

定义14.20 $D=<V,E>$为有向图

$u \to v$（u可达v）——u到v有通路

$u \leftrightarrow v$（u与v相互可达）

性质

$\to$具有自反性($u \to u$)、传递性

$\leftrightarrow$具有自反性、对称性、传递性

短程线与距离类似于无向图中

$d<u,v>$表示从u到v的距离

$d<u,v>$不具备对称性

有向图的连通性及分类

定义14.22 $D=<V,E>$为有向图

D弱连通——基图为无向连通图

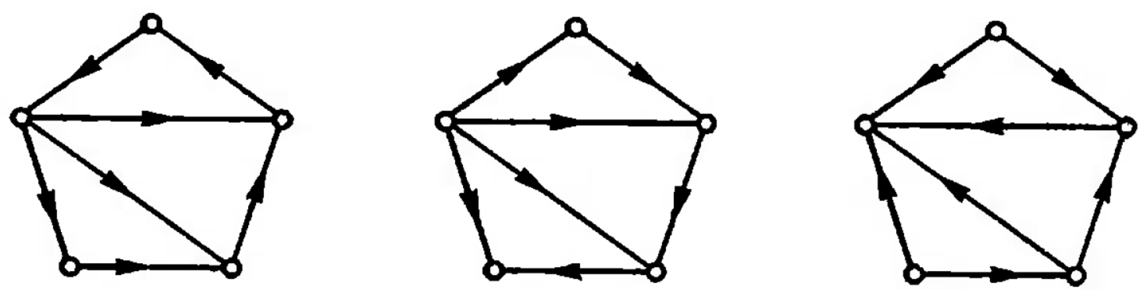
D单向连通——$\forall u,v\in V, u\to v$或$v\to u$

D强连通——$\forall u,v\in V, u\leftrightarrow v$

易知，强连通⇒单向连通⇒弱连通

定理14.8 D强连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路

定理14.9 D单向连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路



(a) (b) (c)

有向图的连通性及分类

定理14.8 D强连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路

证：充分性显然成立。以下证明必要性：

令$V=\{v_1,\ldots,v_n\}$，令Γ_i为从v_i到v_{i+1}的通路$(i\in\{1,\ldots,n-1\})$，令Γ_n为从v_n到v_1的通路。

根据强连通性，有$\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$均存在，因此连$\Gamma_1,\ldots,\Gamma_{n-1},\Gamma_n$得到一条回路，且经过每个顶点至少一次。

有向图的连通性及分类

定理14.9 D单向连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路

证：充分性显然成立。

假设$P = v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_l}$为$D$中经历不同顶点数最多的通路。

任取不在P上的顶点x：

Case I: 若P上任意一点均不可达x，则x可达v_{i_1}，因此构造通路$P' = x\ldots v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_l}$，比$P$经历更多的顶点，矛盾。

Case II: 记P上最后一个可达x的顶点为u，若$u = v_{i_l}$，则构造$P' = v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_l}\ldots x$，比$P$经历更多的顶点，矛盾。

Case III:若$u = v_{i_j}, j < l$，则x可达$v_{i_{j+1}}$，因此构造

$$P'' = v_{i_1}v_{i_2}\ldots v_{i_j}\ldots x\ldots v_{i_{j+1}}\ldots v_{j_l},$$

比P经历更多的顶点，矛盾

扩大路径法

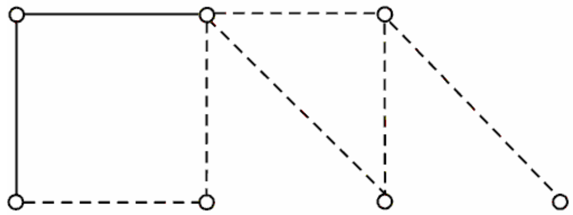
无向图中

设$G=<V,E>$为 n 阶无向图，$E\neq\varnothing$. 设 Γ_l为G中一条路径，若此路径的始点或终点与通路外的顶点相邻，就将它们扩到通路中来，继续这一过程，直到最后得到的通路的两个端点不与通路外的顶点相邻为止. 设最后得到的路径为Γ_{l+k}（长度为 l 的路径扩大成了长度为 $l+k$ 的路径），称Γ_{l+k}为“极大路径”，称使用此种方法证明问题的方法为“扩大路径法”.

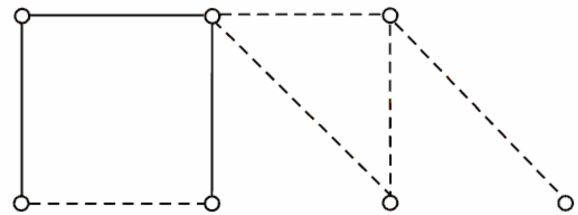
有向图中类似讨论，只需注意，在每步扩大中保证有向边方向的一致性.

实例

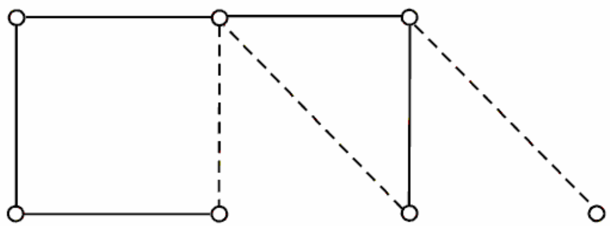
(1)



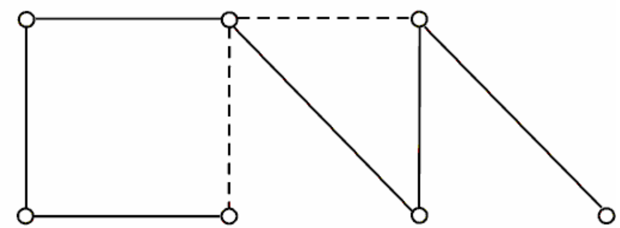
(2)



(3)



(4)



由某条路径扩大出的极大路径不惟一，极大路径不一定是图中最长的路径

上图中，(1)中实线边所示的长为2的初始路径Γ，(2),(3),(4)中实线边所示的都是它扩展成的极大路径.

扩大路径法的应用

例4 设 G 为 n（n≥3）阶无向简单图，$\delta(G) \geq 2$，证明G 中存在长度$\delta(G)+1$ 的圈.

证 不妨设G为连通图。

令$\Gamma = v_0 v_1 \ldots v_l$为极大路径。则$l \geq \delta(G)$。

v_0不与Γ外的顶点相邻，但v_0与至少$\delta(G)$个顶点相邻，因此在Γ上可以找到除了v_1外的$\delta(G)-1$个顶点与v_0相邻。设v_x是其中离v_0最远的，则$v_0 v_1 \ldots v_x v_0$为圈，且长度≥$\delta(G)+1$。

二部图

定义14.23 设 $G=<V,E>$为一个无向图，若能将 V分成 V_1和V_2 ($V_1 \cup V_2=V$，$V_1 \cap V_2=\varnothing$)，使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于V_1，另一个属于V_2，则称 G 为二部图 (或称二分图、偶图等)，称V_1和V_2为互补顶点子集，常将二部图G记为$<V_1,V_2,E>$.

又若G是简单二部图，V_1中每个顶点均与V_2中所有的顶点相邻，则称G为完全二部图，记为 $K_{r,s}$，其中$r=|V_1|$，$s=|V_2|$.

注意，n 阶零图为二部图.

二部图的判别法

定理14.10 无向图G=<V,E>是二部图当且仅当G中无奇圈

必要性显然，以下为证明充分性的思路。

对给定$v_0 \in V$，令

$$V_1 = \{v|d(v,v_0)\text{为偶数}\}, \qquad V_2 = V - V_1$$

只需证明任意$e \in E$，其端点一个在V_1，另一个在V_2；

反证法证明V_1中任意两点不相邻

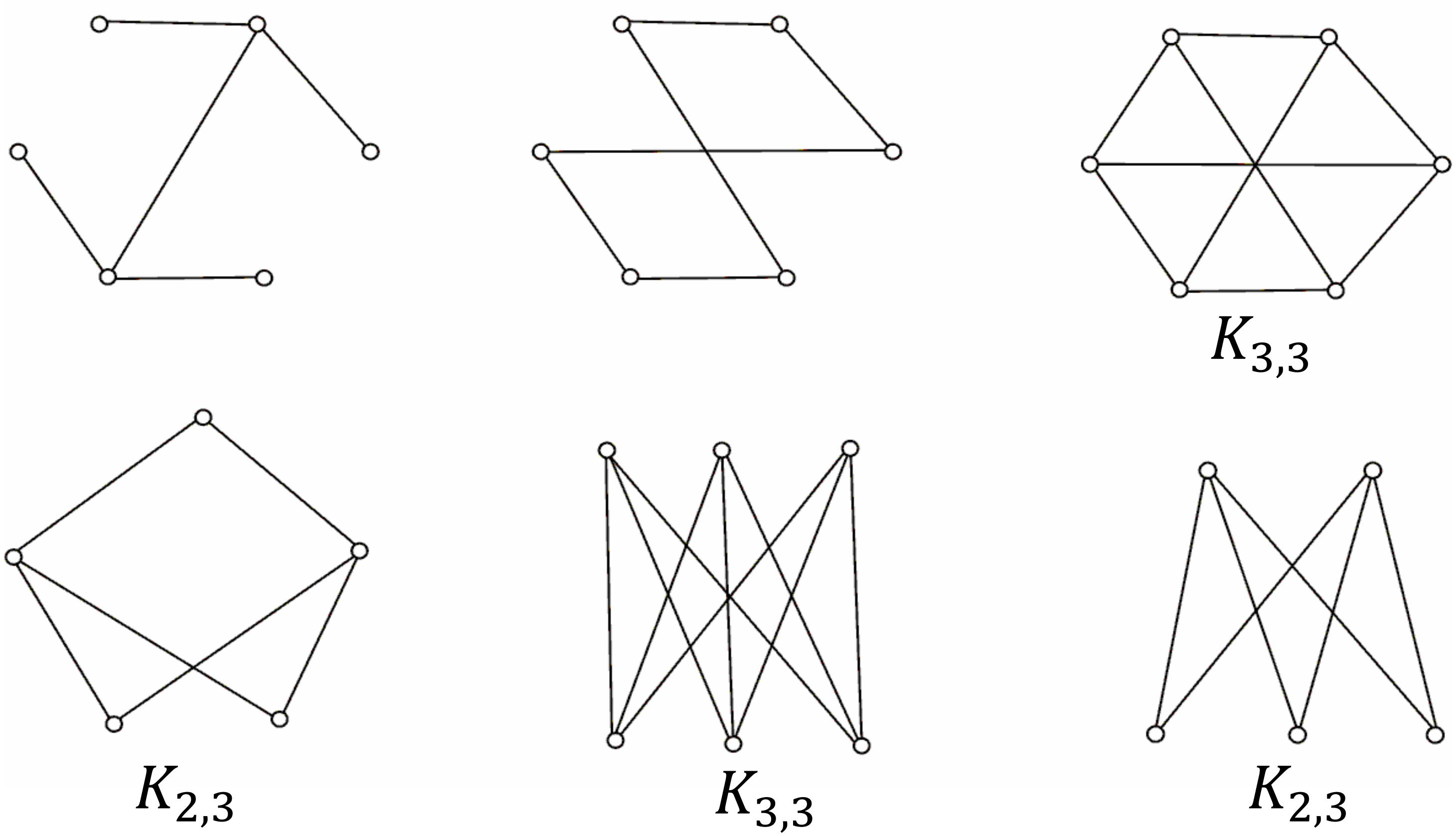
假设$u, w \in V_1, (u, w) \in E$，则考虑回路：$u \ldots v_0 \ldots wu$

其长度为奇数。该回路为奇圈、或包含奇圈，得到矛盾。

类似可证V_2中任意两点不相邻

二部图的判别法

由定理14.10可知图9中各图都是二部图，哪些是完全二部图？哪些图是同构的？



作业

习题14：21、23、39、43

14.4 图的矩阵表示

定义14.24 无向图$G=\langle V,E\rangle$，$|V|=n$，$|E|=m$，令 m_{ij}为 v_i 与 e_j 的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为G 的关联矩阵，记为$M(G)$.

性质

(1) $$\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2 \quad (j = 1,2,\ldots,m)$$

(2) $$\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

(3) $$\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$$

(4) 平行边的列相同

有向无环图的关联矩阵

定义14.25 有向无环图D=<V,E>，称 $(m_{ij})_{n\times m}$为D的**关联矩阵**，记为$M(D)$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1\,, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0\,, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1\,, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

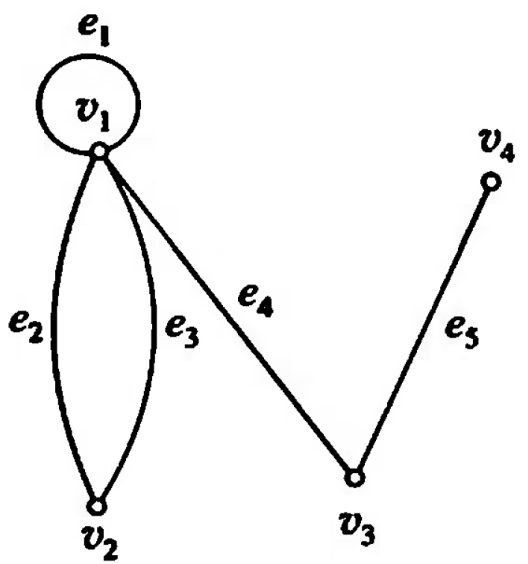
性质

1. $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=0$

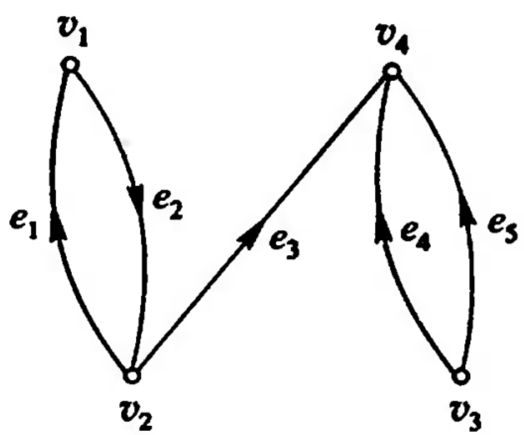
2. $\sum_{j=1}^{m}\mathbb{I}\{m_{ij}=1\}=d^{+}(v_i)\,,\sum_{j=1}^{m}\mathbb{I}\{m_{ij}=-1\}=d^{-}(v_i)$

3. $\sum_{i,j} m_{ij}=0$

4. 平行边对应的列相同



$$M(G)=\begin{bmatrix}2&1&1&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

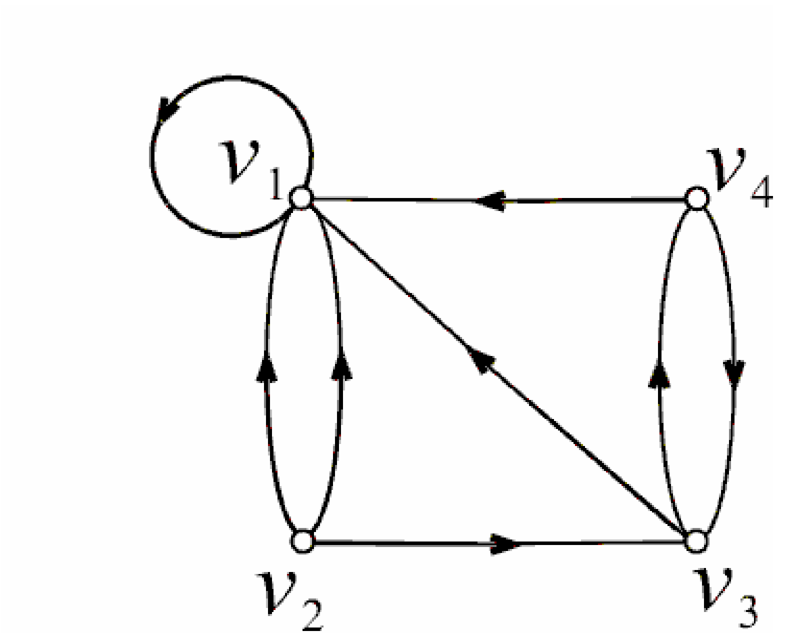


$$M(D)=\begin{bmatrix}-1&1&0&0&0\\1&-1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&-1&-1&-1\end{bmatrix}$$

有向图的邻接矩阵

定义14.26 设有向图D=<V,E>, $V=\{v_1,\dots,v_n\}$, 令$a_{ij}^{(1)}$为顶点v_i邻接到顶点v_j边的条数，称矩阵$\left(a_{ij}^{(1)}\right)_{n\times n}$为$D$的邻接矩阵，记作$A(D)$或$A$.

$a_{ij}^{(1)}=v_i$到v_j长度为1的通路的个数



$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

有向图的邻接矩阵

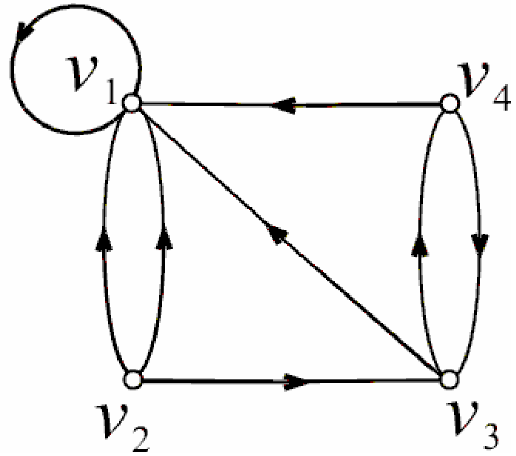
邻接矩阵的性质

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n$

(3) $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m = D$中长为1的通路数

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)} = D$中长为 1 的回路数



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

邻接矩阵的应用

定理14.11 设 A为有向图 D 的邻接矩阵，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为顶点集，则 A 的 l 次幂 $A^l = \left(a_{ij}^{(l)}\right)_{n\times n}$ 中

- $a_{ij}^{(l)}$为D中v_i到v_j长度为 l 的通路数
- $a_{ii}^{(l)}$为D中v_i回到自己的长度为l的回路数
- $\sum_{i,j} a_{ij}^{(l)}$为D中长为l的通路总数
- $\sum_i a_{ii}^{(l)}$为D中长为l的回路总数

Proof sketch: $A^l = A^{l-1}A$

$$\Rightarrow a_{ij}^{(l)} = [A^l]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A^{l-1}]_{ik}[A]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(l-1)} a_{kj}^{(1)}$$

邻接矩阵的应用

推论 设$\boldsymbol{B_l = A + A^2 + \cdots + A^l (l \geq 1)}$, 则$\boldsymbol{B_l}$中元素

- $[\boldsymbol{B_l}]_{ij}$为$\boldsymbol{D}$中从$\boldsymbol{v_i}$到$\boldsymbol{v_j}$长度不超过$\boldsymbol{l}$的通路数
- $[\boldsymbol{B_l}]_{ii}$为$\boldsymbol{D}$中$\boldsymbol{v_i}$回到自身长度不超过$\boldsymbol{l}$的回路数
- $[\boldsymbol{B_\infty}]_{ij} \neq \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{v_i}$到$\boldsymbol{v_j}$存在通路

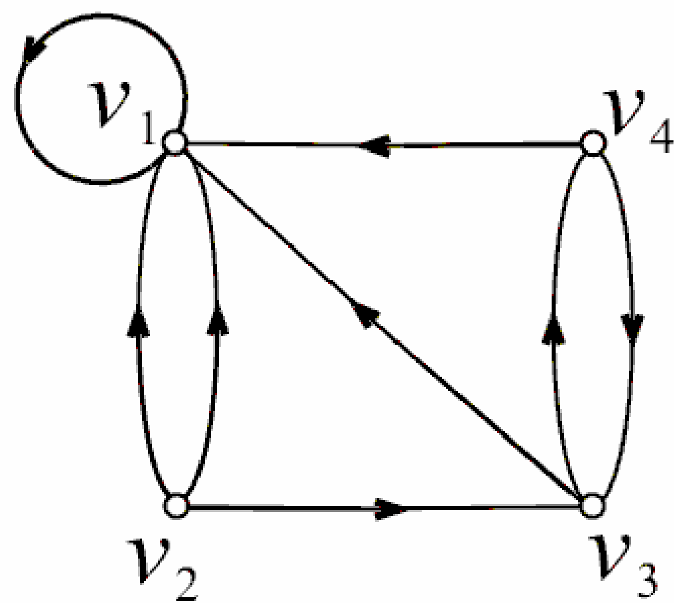
应用：对$\boldsymbol{n}$阶图，计算$\boldsymbol{B_n}$或$\boldsymbol{B_\infty}$可判断任意两点是否存在通路

实例

例5 有向图D如图所示，求 A, A^2, A^3, A^4，并回答诸问题：

(1) D 中长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

(2) D 中长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？



实例求解

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

(1) D中长度为1的通路为8条，其中有1条是回路.

D中长度为2的通路为11条，其中有3条是回路.

D中长度为3和4的通路分别为14和17条，回路分别为1与3条.

(2) D中长度小于等于4的通路为50条，其中有8条是回路.

有向图的可达矩阵

定义14.27 设$D=<V,E>$为有向图. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

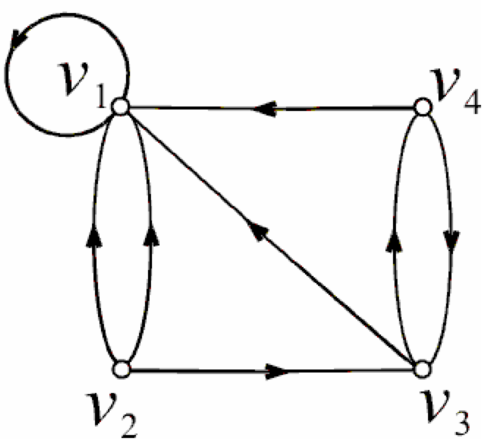
$$p_{ij} = \mathbb{I}\{v_i\text{可达}v_j\}$$

称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为D的可达矩阵，记作$P(D)$，简记为P.

由于$\forall v_i \in V$，$v_i \leftrightarrow v_i$，所以$P(D)$主对角线上的元素全为1.

由定义不难看出, D 强连通当且仅当 $P(D)$为全1矩阵.

下图所示有向图 D 的可达矩阵为



$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

作业

习题14：45、46

第十四章 习题课

主要内容

- 无向图、有向图、关联与相邻、简单图、完全图、正则图、子图、补图；握手定理与推论；图的同构
- 通路与回路及其分类
- 无向图的连通性与连通度
- 有向图的连通性及其分类
- 图的矩阵表示

基本要求

- 深刻理解握手定理及推论的内容并能灵活地应用它们
- 深刻理解图同构、简单图、完全图、正则图、子图、补图、二部图的概念以及它们的性质及相互之间的关系
- 记住通路与回路的定义、分类及表示法
- 深刻理解与无向图连通性、连通度有关的诸多概念
- 会判别有向图连通性的类型
- 熟练掌握用邻接矩阵及其幂求有向图中通路与回路数的方法，会求可达矩阵

练习1

1．9阶无向图*G*中，每个顶点的度数不是5就是6. 证明*G*中至少有5个6度顶点或至少有6个5度顶点.

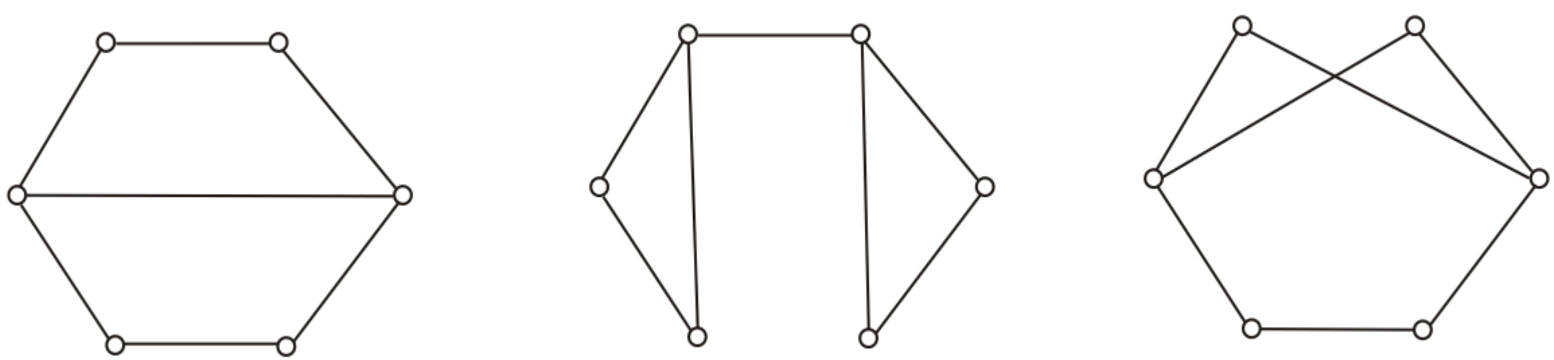
证　反证法

否则，由握手定理推论可知，“*G*至多有4个5度顶点并且至多有4个6度顶点”，这与*G*是 9 阶图矛盾.

练习2

2．数组2, 2, 2, 2, 3, 3能简单图化吗？若能，画出尽可能多的非同构的图来.

只要能画出6 阶无向简单图，就说明它可简单图化. 下图的4 个图都以此数列为度数列，它们彼此不同构，都是K_6的子图.



练习3

3．设D=<V,E>为有向简单图，已知$\delta(D) \geq 2, \delta^+(D) > 0, \delta^-(D) > 0$, 证明$D$中存在长度$\geq \max\{\delta^+, \delta^-\} + 1$的圈.

用扩大路径法证明.

不妨设$\delta^- > \delta^+$. 设$\Gamma = v_0 v_1 \dots v_l$为极大路径，
则v_0的先驱必然在Γ上，又由于D是简单图，因此这些先驱互不相同，即Γ上除v_0外至少有$d^-(v_0)$个点，因此$l \geq d^-(v_0) \geq \delta^-$。设$\Gamma$上$v_0$的前$\delta^-$个先驱分别为$v_{i_1}, \dots, v_{i_{\delta^-}}$，则

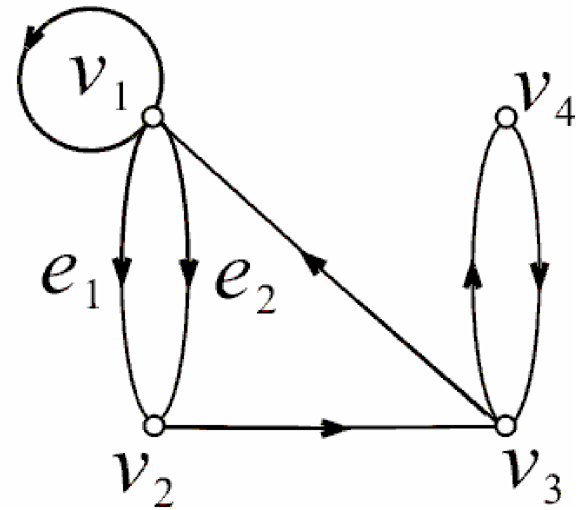
$$v_0 \dots v_{i_1} \dots v_{i_2} \dots v_{i_{\delta^-}} v_0$$

即为长度$\geq \delta^- + 1$的圈。

当$\delta^- \leq \delta^+$时证明方法类似。

练习4

4．有向图D如图所示，回答下列诸问：



(1) D中有几种非同构的圈？

(2) D中有几种非圈非同构的简单回路？

(3) D是哪类连通图？

(4) D中v_1到v_4长度为1,2,3,4的通路各多少条？其中几条是非初级的简单通路？

(5) D中v_1到v_1长度为1,2,3,4的回路各多少条？讨论它们的类型.

(6) D中长度为4的通路（不含回路）有多少条？

(7) D中长度为4的回路有多少条？

(8) D中长度≤4的通路有多少条？其中有几条是回路？

(9) 写出D的可达矩阵.

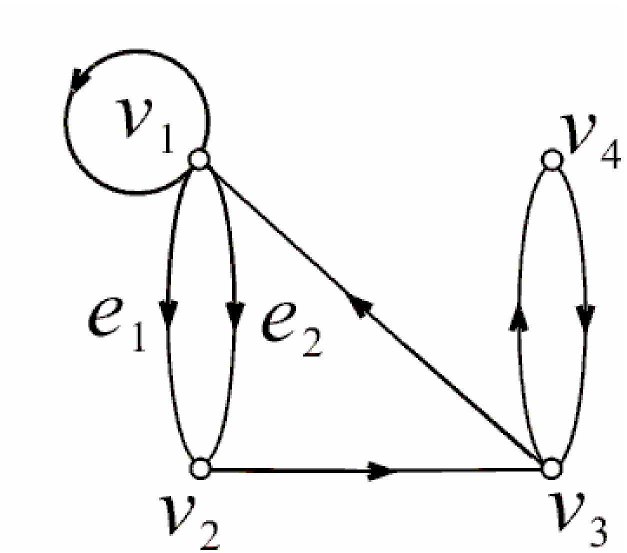
解答

(1) D中有3种非同构的圈，长度分别为1,2,3，请画出它们的图形.

(2) D中有3种非圈的非同构的简单回路，它们的长度分别为4,5,6. 请画出它们的图形来.

(3) D是强连通的（为什么？）

为解(4)—(8)，只需先求D的邻接矩阵的前4次幂.

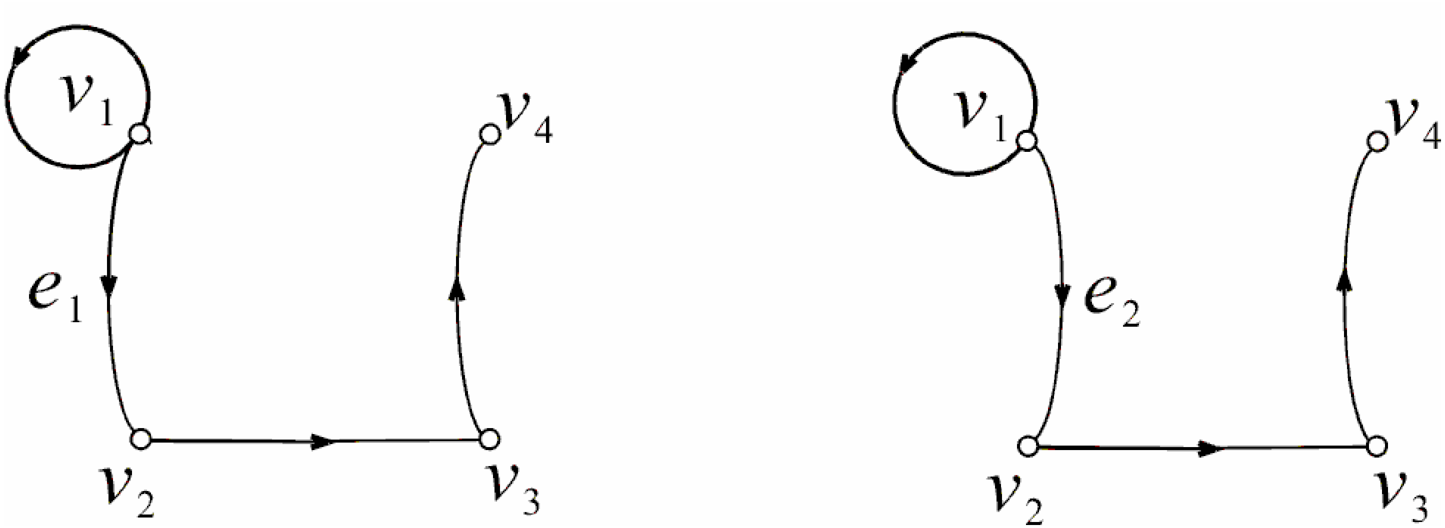


$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&2&2&0\\1&0&0&1\\1&2&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}3&2&2&2\\1&2&1&0\\2&2&2&1\\1&2&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}5&6&4&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{bmatrix}$$

解答

(4) v_1到v_4长度为1,2,3,4的通路数分别为0,0,2,2. 其中只有长度为4的两条是非初级的简单通路（定义意义下），见下图所示.



解答

(5) v_1到v_1长度为1,2,3,4的回路数分别为1,1,3,5. 其中长度为1的是初级的(环)；长度为2的是复杂的；长度为3的中有1条是复杂的，2条是初级的；长度为4的有1条是复杂的，有4条是非初级的简单回路. 请在图中行遍以上各回路.

(6) 长度为4的通路(不含回路)为33条.

(7) 长度为4的回路为11条.

(8) 长度≤4的通路88条，其中22条为回路.

(9) 4×4的全1矩阵.