



主要内容

- 一阶逻辑命题符号化
 - 个体词、谓词、量词
 - 一阶逻辑命题符号化
- 一阶逻辑公式及其解释
 - 一阶语言
 - 合式公式
 - 合式公式的解释
 - 永真式、矛盾式、可满足式



凡是偶数都能够被2整除。6是偶数，所以6能够被2整除。



三要素：个体词、谓词、量词

个体词——所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体

个体常项：具体的事物，用 a, b, c 表示

个体变项：抽象的事物，用 x, y, z 表示

个体域(论域)——个体变项的取值范围

有限个体域，如 $\{a, b, c\}, \{1, 2\}$

无限个体域，如 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{R}, \dots$

全总个体域——由宇宙间一切事物组成



谓词——表示个体词性质或相互之间关系的词

(1) $\sqrt{2}$ 是有理数	F : “.....是有理数”	$F(\sqrt{2})$
(2) x 是无理数	G : “.....是无理数”	$G(x)$
(3) 小王和小李同岁	H : “.....与.....同岁”	$H(a, b)$
(4) x 与 y 具有关系 L	L : “.....与.....具有关系 L ”	$L(x, y)$



谓词——表示个体词性质或相互之间关系的词

谓词常项 如, $F(a)$: a 是人

谓词变项 如, $F(x)$: x 具有性质 F

n ($n \geq 1$) 元谓词: 定义在论域上的 n 元函数

一元谓词($n=1$)——表示性质

多元谓词($n \geq 2$)——表示事物之间的关系

如, $L(x,y)$: x 与 y 有关系 L , $L(x,y)$: $x \geq y$, ...

0元谓词——不含个体变项的谓词, 即命题常项

谓词+个体词可构成命题



量词——表示数量的词

全称量词 \forall : 表示所有的. “所有的”、“一切的”、“任取”

$\forall x$: 对个体域中所有的 x

如, $\forall x F(x)$ 表示个体域中所有的 x 具有性质 F

$\forall x \forall y G(x, y)$ 表示个体域中所有的 x 和 y 有关系 G

存在量词 \exists : 表示存在, 有一个.

$\exists x$: 个体域中有一个 x

如, $\exists x F(x)$ 表示个体域中有一个 x 具有性质 F

$\exists x \exists y G(x, y)$ 表示个体域中存在 x 和 y 有关系 G

$\forall x \exists y G(x, y)$ 表示对个体域中每一个 x 都存在一个 y 使得 x 和 y 有关系 G

$\exists x \forall y G(x, y)$ 表示个体域中存在一个 x 使得对每一个 y ,
 x 和 y 有关系 G



例1 将命题符号化

- (1) 墨西哥位于北美洲
- (2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数
- (3) 如果 $2>3$, 则 $3<4$

解：在命题逻辑中：

- (1) p , p 为墨西哥位于北美洲（真命题）
- (2) $p \rightarrow q$, 其中, p : $\sqrt{2}$ 是无理数, q : $\sqrt{3}$ 是有理数. 是假命题
- (3) $p \rightarrow q$, 其中, p : $2>3$, q : $3<4$. 是真命题



在一阶逻辑中：

(1) $F(a)$ ，其中， a ：墨西哥， $F(x)$ ： x 位于北美洲。

(2) $F(\sqrt{2}) \rightarrow G(\sqrt{3})$

其中， $F(x)$ ： x 是无理数， $G(x)$ ： x 是有理数

(3) $F(2, 3) \rightarrow G(3, 4)$ ，其中， $F(x, y)$ ： $x > y$ ， $G(x, y)$ ： $x < y$



例 2 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 人都爱美

(2) 有人用左手写字

论域不同，符号化的结果可能不同

个体域分别为

(a) D 为人类集合

(b) D 为全总个体域

解 (a) (1) $\forall xG(x)$, $G(x)$: x 爱美

(2) $\exists xG(x)$, $G(x)$: x 用左手写字

(b) $F(x)$: x 为人, $G(x)$: x 爱美

(1) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

(2) $\exists x(F(x) \wedge G(x))$



例3 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 正数都大于负数

(2) 有的无理数大于有的有理数

解 注意：题目中没给个体域，一律用全总个体域

(1) 令 $F(x)$: x 为正数, $G(y)$: y 为负数, $L(x,y)$: $x > y$

$$\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow L(x,y))$$

(2) 令 $F(x)$: x 是无理数, $G(y)$: y 是有理数, $L(x,y)$: $x > y$

$$\exists x \exists y (F(x) \wedge G(y) \wedge L(x,y))$$



例4 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 没有不呼吸的人

(2) 不是所有的人都喜欢吃糖

解 (1) $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 呼吸

$$\neg \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

(2) $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 喜欢吃糖

$$\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

$$\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$



例5 设个体域为实数域, 将下面命题符号化

- (1) 对每一个数 x 都存在一个数 y 使得 $x < y$
- (2) 存在一个数 x 使得对每一个数 y 都有 $x < y$

解 $L(x, y): x < y$

- (1) $\forall x \exists y L(x, y)$
- (2) $\exists x \forall y L(x, y)$

注意: \forall 与 \exists 不能随意交换

显然(1)是真命题, (2)是假命题



2. 在一阶逻辑中将下列命题符号化

(1) 大熊猫都可爱

设 $F(x)$: x 为大熊猫, $G(x)$: x 可爱

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

(2) 有人爱发脾气

设 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 爱发脾气

$$\exists x(F(x) \wedge G(x))$$

(3) 说所有人都爱吃面包是不对的

设 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 爱吃面包

$$\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \text{ 或 } \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$$



(4) 没有不爱吃糖的人

设 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 爱吃糖

$\neg \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$ 或 $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

(5) 任何两个不同的人都不一样高

设 $F(x)$: x 是人, $H(x,y)$, x 与 y 相同, $L(x,y)$: x 与 y 一样高

$\forall x(F(x) \rightarrow \forall y(F(y) \wedge \neg H(x,y) \rightarrow \neg L(x,y)))$

或 $\forall x \forall y(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg H(x,y) \rightarrow \neg L(x,y))$

(6) 不是所有的汽车都比所有的火车快

设 $F(x)$: x 是汽车, $G(y)$: y 是火车, $H(x,y)$: x 比 y 快

$\neg \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x,y))$

或 $\exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge \neg H(x,y))$



习题4: 3、4、5



定义4.1 设 L 是一个非逻辑符号集合, 由 L 生成的一阶语言 \mathcal{L} 的字母表包括下述符号:

非逻辑符号

- (1) 个体常项符号: $a, b, c, \dots, a_i, b_i, c_i, \dots, i \geq 1$
- (2) 函数符号: $f, g, h, \dots, f_i, g_i, h_i, \dots, i \geq 1$
- (3) 谓词符号: $F, G, H, \dots, F_i, G_i, H_i, \dots, i \geq 1$

逻辑符号

- (4) 个体变项符号: $x, y, z, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, i \geq 1$
- (5) 量词符号: \forall, \exists
- (6) 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- (7) 括号与逗号: $(,), ,$



定义4.2 \mathcal{L} 的项的定义如下:

- (1) 个体常项和个体变项是项.
- (2) 若 $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是任意的 n 元函数, t_1, t_2, \dots, t_n 是任意的 n 个项, 则 $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是项.
- (3) 所有的项都是有限次使用(1),(2)得到的

如, $a, x, x+y, f(x), g(x,y)$ 等都是项

项构成的函数仍然是项

定义4.3 设 $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 \mathcal{L} 的任意 n 元谓词, t_1, t_2, \dots, t_n 是 \mathcal{L} 的任意 n 个项, 则称 $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是 \mathcal{L} 的原子公式.

如, $F(x, y), F(f(x_1, x_2), g(x_3, x_4))$ 等均为原子公式

项构成的真值函数是原子公式



定义4.4 \mathcal{L} 的合式公式（简称公式）定义如下：

- (1) 原子公式是合式公式.
- (2) 若 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式
- (3) 若 A, B 是合式公式，则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式
- (4) 若 A 是合式公式，则 $\forall xA, \exists xA$ 也是合式公式
- (5) 有限次地应用(1)—(4)形成的符号串是合式公式.

如, $F(x), F(x) \vee \neg G(x, y), \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

$\exists x \forall y (F(x) \rightarrow G(y) \wedge L(x, y))$ 等都是合式公式

原子公式是公式，量词+公式是公式，联结词+公式是公式



定义4.5 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中, 称 x 为**指导变元**, A 为相应量词的**辖域**. 在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中, x 的所有出现都称为**约束出现**, A 中不是约束出现的其他变项均称为是**自由出现**的.

例如, $\forall x(F(x,y) \rightarrow G(x,z))$, x 为指导变元, $(F(x,y) \rightarrow G(x,z))$ 为 $\forall x$ 的辖域, x 的两次出现均为约束出现, y 与 z 均为自由出现

又如, $\exists x(F(x,y,z) \rightarrow \forall y(G(x,y) \wedge H(x,y,z)))$, $\exists x$ 中的 x 是指导变元, 辖域为 $(F(x,y,z) \rightarrow \forall y(G(x,y) \wedge H(x,y,z)))$. $\forall y$ 中的 y 是指导变元, 辖域为 $(G(x,y) \wedge H(x,y,z))$. x 的3次出现都是约束出现, y 的第一次出现是自由出现, 后2次是约束出现, z 的2次出现都是自由出现



定义4.6 若公式 A 中不含自由出现的个体变项，则称 A 为**封闭的公式**，简称**闭式**。

例如， $\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$ 为闭式，
而 $\exists x (F(x) \wedge G(x, y))$ 不是闭式



定义4.7 设 \mathcal{L} 是 L 生成的一阶语言, \mathcal{L} 的**解释** I 由4部分组成:

- (a) 非空个体域 D_I .
- (b) 对每一个个体常项符号 $a \in L$, 有一个 $\bar{a} \in D_I$, 称 \bar{a} 为 a 在 I 中的解释.
- (c) 对每一个 n 元函数符号 $f \in L$, 有一个 D_I 上的 n 元函数 $\bar{f} : D_I^n \rightarrow D_I$, 称 \bar{f} 为 f 在 I 中的解释.
- (d) 对每一个 n 元谓词符号 $F \in L$, 有一个 D_I 上的 n 元谓词常项 \bar{F} , 称 \bar{F} 为 F 在 I 中的解释.

设公式 A , 取个体域 D_I , 把 A 中的个体常项符号 a 、函数符号 f 、谓词符号 F 分别替换成它们在 I 中的解释 \bar{a} 、 \bar{f} 、 \bar{F} , 称所得到的公式 A' 为 A 在 I 下的**解释**, 或 A 在 I 下**被解释成** A' .



例6 给定解释 I 如下:

(a) 个体域 $D=\mathbf{R}$

(b) $\bar{a} = 0$

(c) $\bar{f}(x, y) = x + y, \quad \bar{g}(x, y) = x \cdot y$

(d) $\bar{F}(x, y) : x = y$

写出下列公式在 I 下的解释, 并指出它的真值.

(1) $\exists x F(f(x, a), g(x, a))$

$\exists x (x + 0 = x \cdot 0)$ 真

(2) $\forall x \forall y (F(f(x, y), g(x, y)) \rightarrow F(x, y))$

$\forall x \forall y (x + y = x \cdot y \rightarrow x = y)$ 假

(3) $\forall x F(g(x, y), a)$

$\forall x (x \cdot y = 0)$ 真值不定, 不是命题



定义4.7（续） 设 \mathcal{L} 是 L 生成的一阶语言, \mathcal{L} 的解释 I 下的赋值 σ :
对每一个自由出现的个体变项 x 指定一个值 $\sigma(x) \in D_I$

I 及其赋值 σ 下的**解释**: 先将 A 在 I 下解释为 A' , 然后在将 A' 中所有自由出现的个体变项 x 替换为 $\sigma(x)$ 。



给定解释 I 及 I 下的赋值 σ

- 个体域 $D = N$
- $\bar{a} = 0$
- $\bar{f}(x, y) = x + y, \bar{g}(x, y) = x \cdot y$
- $\bar{F}(x, y): x = y$
- $\sigma(x) = 1, \sigma(y) = 2, \sigma(z) = 3$

$F(f(x, y), g(x, y))$ 解释为 “ $(1 + 2) = (1 \cdot 2)$ ”

$F(f(x, a), y) \rightarrow F(g(x, y), z)$ 解释为 “ $((1 + 0) = 2) \rightarrow ((1 \cdot 2) = 3)$ ”

后文中将“解释”和“赋值”统称为“解释”



定理4.1 闭式在任何解释下都是命题

注意: 不是闭式的公式在解释下可能是命题, 也可能不是命题.

定义4.8 若公式 A 在任何解释下均为真, 则称 A 为**永真式(逻辑有效式)**. 若 A 在任何解释下均为假, 则称 A 为**矛盾式(永假式)**. 若至少有一个解释使 A 为真, 则称 A 为**可满足式**.

几点说明:

永真式为可满足式, 但反之不真

判断公式是否是可满足的(永真式, 矛盾式)是不可判定的



定义4.9 设 A_0 是含命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n 的命题公式, A_1, \dots, A_n 是 n 个谓词公式, 用 $A_i (1 \leq i \leq n)$ 处处代替 A_0 中的 p_i , 所得公式 A 称为 A_0 的**代换实例**.

例如, $F(x) \rightarrow G(x), \forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)$ 等都是 $p \rightarrow q$ 的代换实例.

定理4.2 重言式的代换实例都是永真式, 矛盾式的代换实例都是矛盾式.

判断公式类型的方法:

1. 检查是否是某个重言式或矛盾式的代换实例
2. 根据定义, 检查是否有某个解释使公式成真或成假



例7 判断下列公式中，哪些是永真式，哪些是矛盾式？

(1) $\forall x F(x) \rightarrow (\exists x \exists y G(x, y) \rightarrow \forall x F(x))$

重言式 $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ 的代换实例，故为永真式.

(2) $\neg(\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)) \wedge \exists y G(y)$

矛盾式 $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$ 的代换实例，故为永假式.

(3) $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$

解释 I_1 : 个体域 \mathbf{N} , $F(x): x > 5$, $G(x): x > 4$, 公式为真

解释 I_2 : 个体域 \mathbf{N} , $F(x): x < 5$, $G(x): x < 4$, 公式为假

结论: 非永真式的可满足式



5. 证明下列公式为永真式:

$$(1) (\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)) \wedge \forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)$$

$(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$ 的代换实例

$$(2) \forall x (F(x) \rightarrow (F(x) \vee G(x)))$$

设 I 是任意的一个解释, 对每一个 $x \in D_I$,

$F(x) \rightarrow (F(x) \vee G(x))$ 恒为真



习题4: 11、12、14



主要内容

- 个体词、谓词、量词
- 一阶逻辑命题符号化
- 一阶语言 \mathcal{L}
 - 项、原子公式、合式公式
- 公式的解释
 - 量词的辖域、指导变元、个体变项的自由出现与约束出现、闭式、解释
- 公式的类型
 - 永真式(逻辑有效式)、矛盾式(永假式)、可满足式



- 准确地将给定命题符号化
- 理解一阶语言的概念
- 深刻理解一阶语言的解释
- 熟练地给出公式的解释
- 记住闭式的性质并能应用它
- 深刻理解永真式、矛盾式、可满足式的概念, 会判断简单公式的类型



3. 给定解释 I 如下:

(a) 个体域 $D=\mathbf{N}$

(b) $\bar{a}=2$

(c) $\bar{f}(x, y) = x + y$, $\bar{g}(x, y) = x \cdot y$

(d) $\bar{F}(x, y): x = y$

说明下列公式在 I 下的涵义, 并讨论真值

(1) $\forall x F(g(x, a), x)$

$\forall x (2x = x)$ 假

(2) $\forall x \forall y (F(f(x, a), y) \rightarrow F(f(y, a), x))$

$\forall x \forall y (x + 2 = y \rightarrow y + 2 = x)$ 假



$$(3) \forall x \forall y \exists z F(f(x, y), z)$$

$$\forall x \forall y \exists z (x + y = z) \quad \text{真}$$

$$(4) \exists x \forall y \forall z F(f(y, z), x)$$

$$\exists x \forall y \forall z (y + z = x) \quad \text{假}$$

(3), (4) 说明 \forall 与 \exists 不能随意交换

$$(5) \exists x F(f(x, x), g(x, x))$$

$$\exists x (x + x = x \cdot x) \quad \text{真}$$



4. 证明下面公式既不是永真式，也不是矛盾式：

(1) $\exists x(F(x) \wedge G(x))$

解释1: $D_1 = \mathbb{N}$, $F(x)$: x 是偶数, $G(x)$: x 是素数, 真

解释2: $D_2 = \mathbb{N}$, $F(x)$: x 是偶数, $G(x)$: x 是奇数, 假

(2) $\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$

解释1: $D_1 = \mathbb{Z}$, $F(x)$: x 是正数, $G(x)$: x 是负数, $H(x, y)$: $x > y$
真

解释2: $D_2 = \mathbb{Z}$, $F(x)$: x 是偶数, $G(x)$: x 是奇数, $H(x, y)$: $x > y$
假