中山大学高等数学A期末考试试卷

2016~2017 学年第 2 学期　　　　**考试科目：高等数学 A**

考试类型：（闭卷）考试　　　　**考试时间： 120 分钟**

学号__________姓名__________年级专业__________

题号	一	二	三	四	总分
得分					
评阅人					

得分	

一、填空题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．二元函数 $z=\ln(y^2-2x+1)$ 的定义域为__________。

2．设向量 $a=(2,1,2)$，$b=(4,-1,10)$，$c=b-\lambda a$，且 $a\perp c$，则 $\lambda=$__________。

3．经过 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$ 且平行于 x 轴的平面方程为__________。

4．设 $u=x^{yz}$，则 $du=$__________。

5．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$，当 p 满足__________条件时级数条件收敛。

得分	

二、单项选择题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．微分方程 $2(xy+x)y'=y$ 的通解是　　（　　）

A． $y=Ce^{2x}$　　B． $y^2=Ce^{2x}$

C． $y^2e^{2y}=Cx$　　D． $e^{2y}=Cxy$

2．求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=$　　（　　）

A． $\frac{1}{4}$　　B． $-\frac{1}{2}$　　C． $-\frac{1}{4}$　　D． $\frac{1}{2}$

3．直线 $L:\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$ 和平面 $\pi:3x-2y+7z-8=0$ 的位置关系是　　（　　）

A．直线 L 平行于平面 π　　B．直线 L 在平面 π 上

C. 直线L垂直于平面π　　　　D. 直线L与平面π斜交

4. D是闭区域$\{(x,y)\mid a^2\le x^2+y^2\le b^2\}$，则$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=$　　（　　）

A. $\frac{\pi}{2}(b^3-a^3)$　　B. $\frac{2\pi}{3}(b^3-a^3)$　　C. $\frac{4\pi}{3}(b^3-a^3)$　　D. $\frac{3\pi}{2}(b^3-a^3)$

5. 下列级数收敛的是　　（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{n^2+1}$　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$

得分	

三、**计算题**（本大题共7小题，每小题7分，共49分）

1. 求微分方程$y'+y=e^x$满足初始条件$x=0$，$y=2$的特解。

2. 计算二重积分$\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$，其中$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1, x+y\ge 1\}$。

3. 设$z=z(x,y)$为方程$2\sin(x+2y-3z)=x-4y+3z$确定的隐函数，求$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$。

4. 求曲线积分 $\int_L (x+y)dx+(x-y)dy$ ，其中 L 沿 $x^2+y^2=a^2(x\ge 0, y\ge 0)$ ，逆时针方向。

5. 计算 $\iint_D y^5\sqrt{1+x^2-y^6}\,dxdy$ ，其中 D 是由 $y=\sqrt[3]{x}$ ，$x=-1$ 及 $y=1$ 所围成的区域。

6. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性，并指出是条件收敛还是绝对收敛。

7. 将函数 $\frac{1}{(1-x)(2-x)}$ 展开成 x 的幂级数，并求其成立的区间。

得分	

四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1．抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离。

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n nx^n}{(n+1)!}$ 的和函数。

3. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有连续导数，且 $f(0)=1$，$g(0)=0$，L 为平面上任意简单光滑闭曲线，取逆时针方向，L 围成的平面区域为 D，已知

$$\int_L xydx+[yf(x)+g(x)]dy=\iint_D yg(x)d\sigma，$$

求 $f(x)$ 和 $g(x)$。

参考答案

1.5CM

一、**填空题**（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1. $\{(x,y)\mid y^2-2x+1>0\}$　2. 3

3. $9y-z-2=0$　4. $yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln x dy+yx^{yz}\ln x dz$　5. $0<p\le 1$

二、**单项选择题**（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1. C　2. C　3. C　4. B　5. A

三、**计算题**（本大题共7小题，每小题7分，共49分）

1. 求微分方程 $y'+y=e^x$ 满足初始条件 $x=0$，$y=2$ 的特解。

解：先求 $y'+y=0$ 的通解，得 $y=C_1e^{-x}$ ………………2 分

采用常数变易法，设 $y=h(x)e^{-x}$，得 $y'=h'(x)e^{-x}-h(x)e^{-x}$ ………3 分

代入原方程得 $h'(x)e^{-x}-h(x)e^{-x}+h(x)e^{-x}=e^x$ ………………4 分

得 $h(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C$ ………………5 分

故通解为 $y=\frac{1}{2}e^x+Ce^{-x}$ ………………6 分

将初始条件 $x=0$，$y=2$ 带入得 $C=\frac{3}{2}$，故特解为 $y=\frac{1}{2}e^x+\frac{3}{2}e^{-x}$ …………7 分

2. 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1, x+y\ge 1\}$。

解：设 $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$ ………………1 分

则 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\le r\le 1$ ………………3 分

所以 $\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1}\frac{r\cos\theta+r\sin\theta}{r^2}rdr$ ………………5 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta-1)d\theta$ ………………6 分

$=\frac{4-\pi}{2}$ ………………7 分

3. 设 $z=z(x,y)$ 为方程 $2\sin(x+2y-3z)=x-4y+3z$ 确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$。

解：设 $F(x,y,z)=x-4y+3z-2\sin(x+2y-3z)$ ………………1 分

$F_x=1-2\cos(x+2y-3z)$, $F_y=-4-4\cos(x+2y-3z)$, $F_z=3+6\cos(x+2y-3z)$

………………4 分

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{3[1+2\cos(x+2y-3z)]}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{4\cos(x+2y-3z)+4}{3[1+2\cos(x+2y-3z)]}$ ……6 分

所以

$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$ ………………7 分

4. 求曲线积分 $\int_L (x+y)dx+(x-y)dy$，其中 L 沿 $x^2+y^2=a^2(x\ge 0, y\ge 0)$，逆时针方向。

解：圆的参数方程为：$x=a\cos t$, $y=a\sin t\ (0\le t\le \frac{\pi}{2})$ ……………1 分

$\int_L (x+y)dx+(x-y)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos t+a\sin t)da\cos t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos t-a\sin t)da\sin t$ ……3 分

$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2t-\sin 2t)dt$ ………………4 分

$=\frac{a^2}{2}[\sin 2t+\cos 2t]_0^{\frac{\pi}{2}}$ ………………6 分

$=-a^2$ ………………7 分

（本题也可以利用“曲线积分与路径无关”来解）

5. 计算 $\iint_D y^5\sqrt{1+x^2-y^6}dxdy$，其中 D 是由 $y=\sqrt[3]{x}$，$x=-1$ 及 $y=1$ 所围成的区域。

解：$D=\{(x,y)\,|\,\sqrt[3]{x}\le y\le 1, -1\le x\le 1\}$ ………………1 分

$\iint_D y^5\sqrt{1+x^2-y^6}dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{\sqrt[3]{x}}^{1}y^5\sqrt{1+x^2-y^6}dy$ ………………2 分

$=-\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}[(1+x^2-y^6)^{\frac{3}{2}}]_{\sqrt[3]{x}}^{1}dx$ ………………4 分

$= -\frac{1}{9}\int_{-1}^{1}(|x|^3-1)dx$ ………………5 分

$= -\frac{2}{9}\int_{0}^{1}(x^3-1)dx$ ………………6 分

$= \frac{1}{6}$ ………………7 分

6. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$的敛散性，并指出是条件收敛还是绝对收敛。

解：$\left|\frac{(-1)^n n}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ ………………1 分

$\frac{1}{\sqrt{n}}(n\to\infty)$ ………………3 分

所以级数发散。………………4 分

又

$\frac{(-1)^n n}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = (-1)^n(1-\frac{1}{n+1})\frac{1}{\sqrt{n}}$ ………………5 分

$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}}$ ………………6 分

显然，交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{n}}$都收敛，所以原级数收敛。因此是条件收敛。………………7 分

7. 将函数$\frac{1}{(1-x)(2-x)}$展开成x的幂级数，并求其成立的区间。

解：$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$ ………………2 分

而$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n$，$|x|<1$ ………………3 分

$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}[1+\frac{x}{2}+(\frac{x}{2})^2+ \quad] \quad (|x|<2)$ ………………4 分

所以$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = 1+x+x^2+ \quad -\frac{1}{2}[1+\frac{x}{2}+(\frac{x}{2})^2+ \quad]$ ………………5 分

$=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})x^n$ ………………6 分

成立范围 $|x|<1$ ………………7 分

四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离。

解：设椭圆上任一点 P 的坐标为 $P(x,y,z)$， P 点满足抛物面和平面方程。原点到这椭圆上任一点的距离的平方为 $x^2+y^2+z^2$， ………………1 分

构造拉格朗日函数

$F=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1)$ ………………2 分

$$\begin{cases} F_x=2x+2x\lambda+\mu=0 \\ F_y=2y+2y\lambda+\mu=0 \\ F_z=2z-\lambda+\mu=0 \\ F_\lambda=x^2+y^2-z=0 \\ F_\mu=x+y+z-1=0 \end{cases}$$ ………………4 分

解得 $x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3})$ ………………5 分

得两个驻点为 $P_1=(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}), P_2=(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3})$

…………………6 分

所以最短距离为 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$，最短距离为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$ ………………7 分

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n nx^n}{(n+1)!}$ 的和函数。

解：因为 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，所以 $e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$， ………………1 分

$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n nx^n}{(n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1-1)x^n}{(n+1)!}$ ………………2 分

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!}$ ………………3 分

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}=e^{-x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)!}=-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$=-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}=-\frac{1}{x}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}-1\right] \quad (x\neq 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 5\text{ 分}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}e^{-x}$$

所以

$$S(x)=e^{-x}-\frac{1}{x}(1-e^{-x})(x\neq 0)$$

故 $S(x)=e^{-x}-\frac{1}{x}(1-e^{-x}) \qquad (x\neq 0) \cdots\cdots 6$ 分

当 $x=0$ 时，$S(x)=0$。$\cdots\cdots\cdots 7$ 分

另解：

当 $x\neq 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n x^n}{(n+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^x x^n dx\right]$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n x^n}{(n-1)!}\right]dx=-\frac{1}{x}\int_0^x x\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}\right]\right\}dx$$

$$=-\frac{1}{x}\int_0^x x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}dx$$

$$=-\frac{1}{x}\int_0^x xe^{-x}dx$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x xde^{-x}$$

$$=\frac{1}{x}\left(xe^{-x}+e^{-x}-1\right)$$

$$=e^{-x}+\frac{1}{x}e^{-x}-\frac{1}{x}$$

当 $x=0$ 时，$S(x)=0$。

3. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有连续导数，且 $f(0)=1$，$g(0)=0$，L 为平面上任意简单光滑闭曲线，取逆时针方向，L 围成的平面区域为 D，已知

$$\oint_L xydx+[yf(x)+g(x)]dy=\iint_D yg(x)d\sigma,$$

求 $f(x)$ 和 $g(x)$。

解：由格林公式得

$\iint\limits_D [yf'(x)+g'(x)-x]dxdy=\iint\limits_D yg(x)dxdy$ ………………2 分

即 $\iint\limits_D [yf'(x)+g'(x)-x-yg(x)]dxdy=0$ ………………3 分

由于区域的任意性， $yf'(x)+g'(x)-x-yg(x)=0$ ………………4 分

又由于 y 的任意性，有 $f'(x)=g(x)$， $g'(x)=x$ ……………5 分

又由 $f(0)=1$， $g(0)=0$ 得， $g(x)=\frac{x^2}{2}$ ………………6 分

所以 $f(x)=\frac{x^3}{6}+1$ ………………7 分