



主要内容

函数的定义与性质

- 函数定义
- 函数性质

函数运算

- 函数的逆
- 函数的合成

双射函数与集合的基数



主要内容

函数定义与相关概念

- 函数定义
- 函数相等
- 从 A 到 B 的函数 $f:A \rightarrow B$
- B^A
- 函数的像与完全原像

函数的性质

- 单射、满射、双射函数的定义与实例
- 构造双射函数

某些重要的函数



定义8.1 设 F 为二元关系, 若 $\forall x \in \text{dom}F$ 都存在唯一的 $y \in \text{ran}F$ 使 xFy 成立, 则称 F 为**函数**

对于函数 F , 如果有 xFy , 则记作 $y=F(x)$, 并称 y 为 F 在 x 的**值**.

例 $F_1 = \{ \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \langle x_3, y_2 \rangle \}$

不允许有两个有序对使得其第一个元素相同而第二个元素不同

$F_2 = \{ \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_1, y_2 \rangle \}$

F_1 是函数, F_2 不是函数

定义8.2 设 F, G 为函数, 则

$$F=G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$$

如果两个函数 F 和 G **相等**, 一定满足下面两个条件:

(1) $\text{dom}F = \text{dom}G$

(2) $\forall x \in \text{dom}F = \text{dom}G$ 都有 $F(x) = G(x)$

函数 $F(x) = (x^2 - 1)/(x + 1)$, $G(x) = x - 1$ 不相等, 因为 $\text{dom}F \subset \text{dom}G$.



定义8.3 设 A, B 为集合, 如果

f 为函数, $\text{dom}f=A$, $\text{ran}f\subseteq B$,

则称 f 为**从A到B的函数**, 记作 $f: A\rightarrow B$.

例 $f: N\rightarrow N$, $f(x)=2^x$ 是从 N 到 N 的函数,

$g: N\rightarrow N$, $g(x)=2$ 也是从 N 到 N 的函数.

定义8.4 所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A , 符号化表示为

$$B^A = \{ f \mid f: A \rightarrow B \}$$

对 A 中的每一个元素 x , $f(x)$ 都有 n 种不同的取值可能。

$$|A|=m, |B|=n, \text{ 且 } m, n>0, |B^A|=n^m$$

$$A=\emptyset, \text{ 则 } B^A=B^\emptyset=\{\emptyset\}$$

$$A\neq\emptyset \text{ 且 } B=\emptyset, \text{ 则 } B^A=\emptyset^A=\emptyset$$



例1 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, 求 B^A .

对 A 中的每一个元素赋予一个 B 中的值

解 $B^A=\{f_0, f_1, \dots, f_7\}$, 其中

$$f_0 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle\}$$

$$f_1 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$f_2 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle\}$$

$$f_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$f_4 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle\}$$

$$f_5 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$f_6 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle\}$$

$$f_7 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$



定义8.5 设函数 $f: A \rightarrow B, A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$

(1) A_1 在 f 下的像 $f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}$, 函数的像 $f(A)$

(2) B_1 在 f 下的完全原像 $f^{-1}(B_1) = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$

注意:

- 函数值与像的区别: 函数值 $f(x) \in B$, 像 $f(A_1) \subseteq B$
- 一般说来 $f^{-1}(f(A_1)) \neq A_1$, 但是 $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$

例 设 $f: N \rightarrow N$, 且 $f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{若 } x \text{ 为偶数} \\ x+1 & \text{若 } x \text{ 为奇数} \end{cases}$

令 $A = \{0, 1\}, B = \{2\}$, 那么有

$$f(A) = f(\{0, 1\}) = \{f(0), f(1)\} = \{0, 2\}$$

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\{2\}) = \{1, 4\}$$



定义8.6 设 $f: A \rightarrow B$,

- (1) 若 $\text{ran}f=B$, 则称 $f:A \rightarrow B$ 是**满射**的
- (2) 若 $\forall y \in \text{ran}f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x)=y$, 则称 $f:A \rightarrow B$ 是**单射**的
- (3) 若 $f:A \rightarrow B$ 既是满射又是单射的, 则称 $f:A \rightarrow B$ 是**双射**的

例2 判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

- (1) $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 2x - 1$
- (2) $f:\mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$, \mathbb{Z}^+ 为正整数集
- (3) $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$
- (4) $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$
- (5) $f:\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = (x^2 + 1)/x$, 其中 \mathbb{R}^+ 为正实数集.



解

(1) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + 2x - 1$

在 $x=1$ 取得极大值0. 既不是单射也不是满射的

(2) $f: \mathbf{Z}^+ \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \ln x$

是单调上升的, 是单射的. 但不满射, $\text{ran} f = \{\ln 1, \ln 2, \dots\}$.

(3) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$

是满射的, 但不是单射的, 例如 $f(1.5) = f(1.2) = 1$

(4) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$

是满射、单射、双射的, 因为它是单调函数并且 $\text{ran} f = \mathbf{R}$

(5) $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = (x^2 + 1)/x$

有极小值 $f(1) = 2$. 该函数既不是单射的也不是满射的



例3 对于给定的集合 A 和 B 构造双射函数 $f:A \rightarrow B$

(1) $A=[0,1], B=[1/4,1/2]$

令 $f:[0,1] \rightarrow [1/4,1/2], f(x)=(x+1)/4$

(2) $A=\mathbb{Z}, B=\mathbb{N}$

将 \mathbb{Z} 中元素以下列顺序排列并与 \mathbb{N} 中元素对应:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \end{array}$$

这种对应所表示的函数是:

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$



$$(3) A = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right], B = [-1, 1]$$

$$f(x) = \sin x$$

思考: $R \rightarrow [-1, 1]$



定义8.7

- (1) 设 $f:A \rightarrow B$, 如果存在 $c \in B$ 使得对所有的 $x \in A$ 都有 $f(x)=c$, 则称 $f:A \rightarrow B$ 是常函数.
- (2) 称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的恒等函数, 对所有的 $x \in A$ 都有 $I_A(x)=x$.
- (3) 设 $\langle A, \leq \rangle, \langle B, \leq \rangle$ 为偏序集, $f:A \rightarrow B$, 如果对任意的 $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$, 就有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 f 为单调递增的; 如果对任意的 $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$, 就有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 f 为严格单调递增的. 类似的也可以定义单调递减和严格单调递减的函数



3. 对于以下集合 A 和 B , 构造从 A 到 B 的双射函数 $f:A \rightarrow B$

(1) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$

(2) $A=(0,1)$, $B=(0,2)$

(3) $A=\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0\}$, $B=\mathbb{N}$

(4) $A=\mathbb{R}$, $B=\mathbb{R}^+$

解

(1) $f=\{<1,a>, <2,b>, <3,c>\}$

(2) $f:A \rightarrow B$, $f(x)=2x$

(3) $f:A \rightarrow B$, $f(x)=-x-1$

(4) $f:A \rightarrow B$, $f(x)=e^x$



1. 证明 $f:A \rightarrow B$ 是满射的方法: 任取 $y \in B$, 找到 x (即给出 x 的表示) 或者证明存在 $x \in A$, 使得 $f(x)=y$.

2. 证明 $f:A \rightarrow B$ 是单射的方法

方法一 $\forall x_1, x_2 \in A$,

$$\begin{array}{ccccc} f(x_1)=f(x_2) & \Rightarrow & \dots & \Rightarrow & x_1=x_2 \\ \text{推理前提} & & \text{推理过程} & & \text{推理结论} \end{array}$$

方法二 $\forall x_1, x_2 \in A$,

$$\begin{array}{ccccc} x_1 \neq x_2 & \Rightarrow & \dots & \Rightarrow & f(x_1) \neq f(x_2) \\ \text{推理前提} & & \text{推理过程} & & \text{推理结论} \end{array}$$

3. 证明 $f:A \rightarrow B$ 不是满射的方法: 找到 $y \in B, y \notin \text{ran} f$

4. 证明 $f:A \rightarrow B$ 不是单射的方法: 找到 $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1)=f(x_2)$



4. 设 $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $f(\langle x, y \rangle) = \langle x + y, x - y \rangle$
证明 f 是双射函数.

证 任取 $\langle u, v \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, 存在 $\langle \frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \rangle$ 使得

$f\left(\langle \frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2} \rangle\right) = \langle u, v \rangle$, 因此 f 是满射的

对于任意的 $\langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, 有

$$f(\langle x, y \rangle) = f(\langle u, v \rangle)$$

$$\Leftrightarrow \langle x + y, x - y \rangle = \langle u + v, u - v \rangle$$

$$\Leftrightarrow x + y = u + v \wedge x - y = u - v$$

$$\Leftrightarrow x = u \wedge y = v$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$$

因此 f 是单射的.



习题8: 11、26



主要内容

- 复合函数基本定理
- 函数的复合运算与函数性质
- 反函数的存在条件
- 反函数的性质



定理8.1 设 F, G 是函数, 则 $F \circ G$ 也是函数, 且满足

$$(1) \text{ dom}(F \circ G) = \{x \mid x \in \text{dom} F \wedge F(x) \in \text{dom} G\}$$

$$(2) \forall x \in \text{dom}(F \circ G) \text{ 有 } F \circ G(x) = G(F(x))$$

证 先证明 $F \circ G$ 是函数.

因为 F, G 是关系, 所以 $F \circ G$ 也是关系.

任取 $x \in \text{dom}(F \circ G)$, 若有 $xF \circ Gy_1$ 和 $xF \circ Gy_2$, 则

$$\langle x, y_1 \rangle \in F \circ G \wedge \langle x, y_2 \rangle \in F \circ G$$

$$\Rightarrow \exists t_1 (\langle x, t_1 \rangle \in F \wedge \langle t_1, y_1 \rangle \in G) \wedge \exists t_2 (\langle x, t_2 \rangle \in F \wedge \langle t_2, y_2 \rangle \in G)$$

$$\Rightarrow \exists t_1 \exists t_2 (t_1 = t_2 \wedge \langle t_1, y_1 \rangle \in G \wedge \langle t_2, y_2 \rangle \in G) \quad (F \text{ 为函数})$$

$$\Rightarrow y_1 = y_2 \quad (G \text{ 为函数})$$

所以 $F \circ G$ 为函数



以下证 $\text{dom}(F \circ G) = \{x \mid x \in \text{dom}F \wedge F(x) \in \text{dom}G\}$

即 $x \in \text{dom}(F \circ G) \Leftrightarrow x \in \text{dom}F \wedge F(x) \in \text{dom}G$

任取 x , $x \in \text{dom}(F \circ G)$

$$\Rightarrow \exists y (\langle x, y \rangle \in F \circ G)$$

$$\Rightarrow \exists y \exists t (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in G)$$

$$\Rightarrow \exists t (x \in \text{dom}F \wedge t = F(x) \wedge t \in \text{dom}G)$$

$$\Rightarrow x \in \text{dom}F \wedge F(x) \in \text{dom}G$$

任取 x , $x \in \text{dom}F \wedge F(x) \in \text{dom}G$

$$\Rightarrow \langle x, F(x) \rangle \in F \wedge \langle F(x), G(F(x)) \rangle \in G$$

$$\Rightarrow \langle x, G(F(x)) \rangle \in F \circ G \quad (*)$$

$$\Rightarrow x \in \text{dom}(F \circ G)$$

所以(1) 得证

另由(*), 可知 $F \circ G(x) = G(F(x))$, 所以(2) 得证



推论1 设 F, G, H 为函数, 则 $(F \circ G) \circ H$ 和 $F \circ (G \circ H)$ 都是函数, 且

$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$$

证 由上述定理和运算满足结合律得证.

推论2 设 $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C$, 则 $f \circ g:A \rightarrow C$, 且 $\forall x \in A$ 都有

$$f \circ g(x) = g(f(x))$$

证 由上述定理知 $f \circ g$ 是函数, 且

$$\begin{aligned}\text{dom}(f \circ g) &= \{x \mid x \in \text{dom}f \wedge f(x) \in \text{dom}g\} \\ &= \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B\} = A\end{aligned}$$

$$\text{ran}(f \circ g) \subseteq \text{rang} \subseteq C \quad \text{How to prove?}$$

因此 $f \circ g:A \rightarrow C$, 且 $\forall x \in A$ 有 $f \circ g(x) = g(f(x))$



定理8.2 设 $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C$

- (1) 如果 $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C$ 是满射的, 则 $f \circ g:A \rightarrow C$ 也是满射的
- (2) 如果 $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C$ 是单射的, 则 $f \circ g:A \rightarrow C$ 也是单射的
- (3) 如果 $f:A \rightarrow B, g:B \rightarrow C$ 是双射的, 则 $f \circ g:A \rightarrow C$ 也是双射的

证

- (1) 任取 $c \in C$, 由 $g:B \rightarrow C$ 的满射性, $\exists b \in B$ 使得 $g(b)=c$.
对于这个 b , 由 $f:A \rightarrow B$ 的满射性, $\exists a \in A$ 使得 $f(a)=b$.
由合成定理有

$$f \circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

从而证明了 $f \circ g:A \rightarrow C$ 是满射的



(2) 假设存在 $x_1, x_2 \in A$ 使得

$$f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$$

由合成定理有

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

因为 $g: B \rightarrow C$ 是单射的, 故 $f(x_1) = f(x_2)$. 又由于 $f: A \rightarrow B$ 是单射的, 所以 $x_1 = x_2$. 从而证明 $f \circ g: A \rightarrow C$ 是单射的.

(3) 由(1)和(2)得证.

注意: 定理逆命题不为真, 即如果 $f \circ g: A \rightarrow C$ 是单射(或满射、双射)的, 不一定有 $f: A \rightarrow B$ 和 $g: B \rightarrow C$ 都是单射(或满射、双射)的.

定理8.3 设 $f: A \rightarrow B$, 则 $f = f \circ I_B = I_A \circ f$ (证明略)



考虑集合 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $C=\{c_1, c_2, c_3\}$. 令

$$f=\{ \langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, \langle a_3, b_3 \rangle \}$$

$$g=\{ \langle b_1, c_1 \rangle, \langle b_2, c_2 \rangle, \langle b_3, c_3 \rangle, \langle b_4, c_3 \rangle \}$$

$$f \circ g=\{ \langle a_1, c_1 \rangle, \langle a_2, c_2 \rangle, \langle a_3, c_3 \rangle \}$$

那么 $f:A \rightarrow B$ 和 $f \circ g:A \rightarrow C$ 是单射的, 但 $g:B \rightarrow C$ 不是单射的.

考虑集合 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3\}$, $C=\{c_1, c_2\}$. 令

$$f=\{ \langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, \langle a_3, b_2 \rangle \}$$

$$g=\{ \langle b_1, c_1 \rangle, \langle b_2, c_2 \rangle, \langle b_3, c_2 \rangle \}$$

$$f \circ g=\{ \langle a_1, c_1 \rangle, \langle a_2, c_2 \rangle, \langle a_3, c_2 \rangle \}$$

那么 $g:B \rightarrow C$ 和 $f \circ g:A \rightarrow C$ 是满射的, 但 $f:A \rightarrow B$ 不是满射的.



反函数存在的条件

- (1) 任给函数 F , 它的逆 F^{-1} 不一定是函数, 只是一个二元关系.
- (2) 任给单射函数 $f:A \rightarrow B$, 则 f^{-1} 是函数, 且是从 $\text{ran}f$ 到 A 的双射函数, 但不一定是从 B 到 A 的双射函数
- (3) 对于双射函数 $f:A \rightarrow B$, f^{-1} 是从 B 到 A 的双射函数.

定理8.4 设 $f:A \rightarrow B$ 是双射的, 则 $f^{-1}:B \rightarrow A$ 也是双射的.

证明思路:

先证明 $f^{-1}:B \rightarrow A$, 即 f^{-1} 是函数, 且 $\text{dom}f^{-1}=B$, $\text{ran}f^{-1}=A$.

再证明 $f^{-1}:B \rightarrow A$ 的双射性质.

对于双射函数 $f:A \rightarrow B$, 称 $f^{-1}:B \rightarrow A$ 是它的反函数.



证 a. 因为 f 是函数, 所以 f^{-1} 是关系, 且

$$\text{dom } f^{-1} = \text{ran } f = B, \quad \text{ran } f^{-1} = \text{dom } f = A$$

b. 对于任意的 $x \in B = \text{dom } f^{-1}$, 假设有 $y_1, y_2 \in A$ 使得

$$\langle x, y_1 \rangle \in f^{-1} \wedge \langle x, y_2 \rangle \in f^{-1}$$

成立, 则由逆的定义有

$$\langle y_1, x \rangle \in f \wedge \langle y_2, x \rangle \in f$$

根据 f 的单射性可得 $y_1 = y_2$, 从而证明了 f^{-1} 是从 B 到 A 的函数。

c. 若存在 $x_1, x_2 \in B$ 使得 $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2) = y$, 从而有

$$\langle x_1, y \rangle \in f^{-1} \wedge \langle x_2, y \rangle \in f^{-1}$$

$$\Rightarrow \langle y, x_1 \rangle \in f \wedge \langle y, x_2 \rangle \in f \Rightarrow x_1 = x_2, \quad \text{即 } f^{-1} \text{ 为单射。}$$

由 $\text{ran } f^{-1} = A$ 知 f^{-1} 是满射的. 因此 f^{-1} 为从 B 到 A 的双射函数



定理8.5

(1) 设 $f:A \rightarrow B$ 是双射的, 则 $f^{-1} \circ f = I_B$, $f \circ f^{-1} = I_A$

(2) 对于双射函数 $f:A \rightarrow A$, 有 $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_A$

证明: (1) 由于 $f:A \rightarrow B$ 是双射, 因此 $f^{-1}:B \rightarrow A$ 是双射,

由合成基本定理知 $f^{-1} \circ f$ 是 B 上的双射

任取 $x, y \in B$,

$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle \in f^{-1} \circ f \\ \Rightarrow & \exists t (\langle x, t \rangle \in f^{-1} \wedge \langle t, y \rangle \in f) \\ \Rightarrow & \exists t (\langle t, x \rangle \in f \wedge \langle t, y \rangle \in f) \\ \Rightarrow & x = y \Rightarrow \langle x, y \rangle \in I_B \\ & \langle x, y \rangle \in I_B \\ \Rightarrow & x = y \\ \Rightarrow & \exists t (t \in A \wedge f(t) = x = y) \\ \Rightarrow & \exists t (t \in A \wedge t = f^{-1}(x) \wedge f(t) = y) \\ \Rightarrow & f(f^{-1}(x)) = y \Rightarrow \langle x, y \rangle \in f^{-1} \circ f \end{aligned}$$

因此有 $f^{-1} \circ f = I_B$, 类似可证 $f \circ f^{-1} = I_A$



例5 设 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) = x + 2$$

求 $f \circ g, g \circ f$. 如果 f 和 g 存在反函数, 求出它们的反函数.

$$f \circ g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases}$$

$$g \circ f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$g \circ f(x) = \begin{cases} (x + 2)^2 & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 不是双射的, 不存在反函数.

$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是双射的, 它的反函数是

$$g^{-1}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g^{-1}(x) = x - 2$$



习题8: 19



主要内容

- 集合的等势及其性质
- 重要的等势或不等势的结果
- 集合的优势及其性质
- 集合的基数
- 可数集



定义8.8 设 A, B 是集合, 如果存在着从 A 到 B 的双射函数, 就称 A 和 B 是**等势**的, 记作 $A \approx B$. 如果 A 不与 B 等势, 则记作 $A \not\approx B$.

集合等势的实例

例6 (1) $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$.

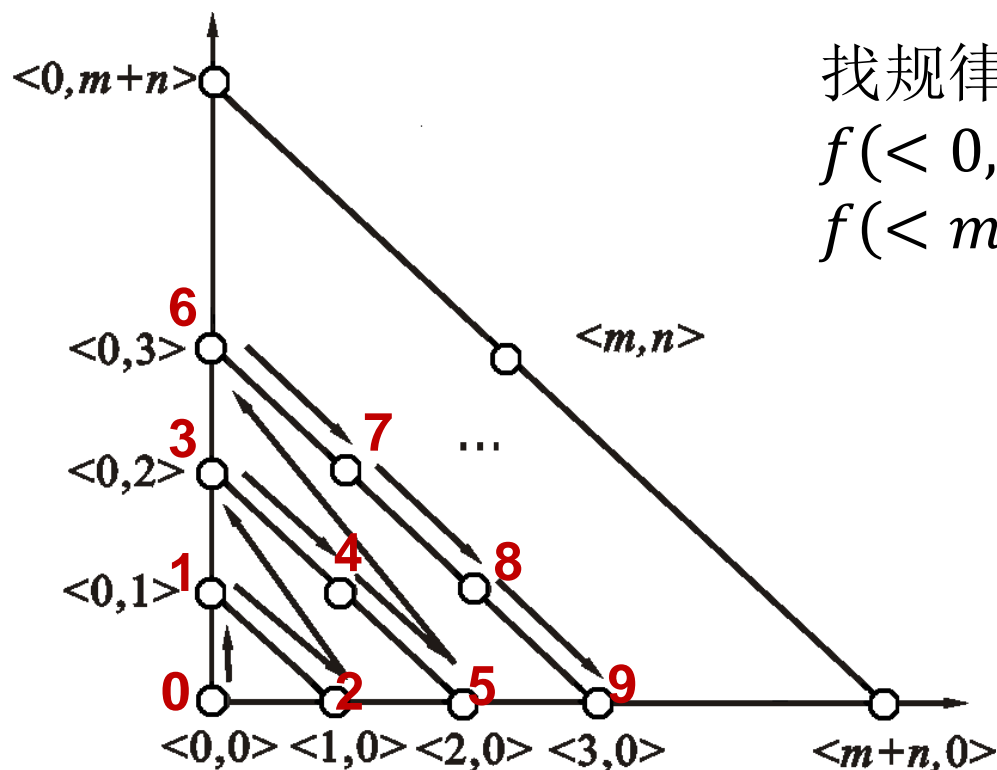
$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

则 f 是 \mathbb{Z} 到 \mathbb{N} 的双射函数. 从而证明了 $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$.

\mathbb{Z} :	0	-1	1	-2	2	-3	3 ...
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
\mathbb{N} :	0	1	2	3	4	5	6 ...



$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 中所有的元素排成有序图形



找规律:

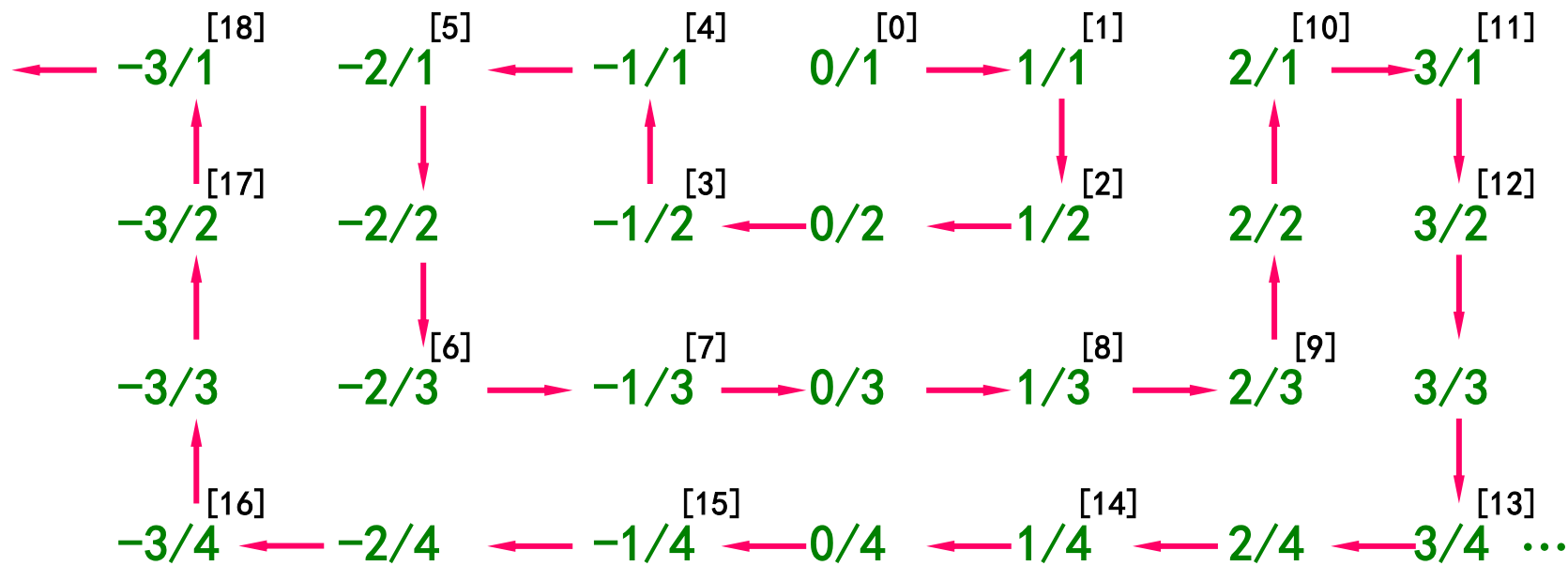
$$f(\langle 0, n \rangle) = 1 + 2 + \dots + n$$

$$f(\langle m, n \rangle) = m + f(\langle 0, m + n \rangle)$$

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(\langle m, n \rangle) = \frac{(m + n + 1)(m + n)}{2} + m$$



$\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$. 双射函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, 其中 $f(n)$ 是 $[n]$ 下方的有理数.





(4) $(0,1) \approx \mathbf{R}$. 其中实数区间 $(0,1) = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge 0 < x < 1\}$. 令

$$f : (0,1) \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \tan \pi \frac{2x-1}{2}$$

(5) 对任何 $a, b \in \mathbf{R}, a < b$, $[0,1] \approx [a,b]$, 双射函数 $f: [0,1] \rightarrow [a,b]$,
 $f(x) = (b-a)x + a$

类似地可以证明, 对任何 $a, b \in \mathbf{R}, a < b$, 有 $(0,1) \approx (a,b)$.



定理8.6 设 A, B, C 是任意集合,

- (1) $A \approx A$
- (2) 若 $A \approx B$, 则 $B \approx A$
- (3) 若 $A \approx B$, $B \approx C$, 则 $A \approx C$.

证明思路: 利用等势的等义.

- (1) I_A 是从 A 到 A 的双射
- (2) 若 $f:A \rightarrow B$ 是双射, 则 $f^{-1}:B \rightarrow A$ 是从 B 到 A 的双射.
- (3) 若 $f:A \rightarrow B$, $g:B \rightarrow C$ 是双射, 则 $f \circ g:A \rightarrow C$ 是从 A 到 C 的双射



等势结果

- $\mathbf{N} \approx \mathbf{Z} \approx \mathbf{Q} \approx \mathbf{N} \times \mathbf{N}$
- 任何实数区间都与实数集合 \mathbf{R} 等势

不等势的结果:

定理8.7 (康托定理)

(1) $\mathbf{N} \not\approx \mathbf{R}$; (2) 对任意集合 A 都有 $A \not\approx P(A)$

证明不要求掌握



定义8.10 设 a 为集合, 称 $a \cup \{a\}$ 为 a 的**后继**, 记作 a^+ , 即 $a^+ = a \cup \{a\}$.

如下定义自然数:

$$0 = \emptyset$$

$$1 = 0^+ = \emptyset^+ = \{\emptyset\} = \{0\}$$

$$2 = 1^+ = \{\emptyset\}^+ = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$$

$$3 = 2^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$$

...

$$n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

...

自然数的相等与大小, 即对任何自然数 n 和 m , 有

$$m = n \Leftrightarrow m \approx n, \quad m < n \Leftrightarrow m \in n$$



定义8.11

- (1) 一个集合是**有穷**的当且仅当它与某个自然数等势；
- (2) 如果一个集合不是有穷的, 就称作**无穷集**.

实例:

- (1) $\{a, b, c\}$ 是有穷集, 因为 $3 = \{0, 1, 2\}$, 且 $\{a, b, c\} \approx \{0, 1, 2\} = 3$
- (2) \mathbf{N} 和 \mathbf{R} 都是无穷集, 因为没有自然数与 \mathbf{N} 和 \mathbf{R} 等势

利用自然数的性质可以证明: 任何有穷集只与惟一的自然数等势.

**定义8.12**

(1) 对于有穷集合 A , 称与 A 等势的那个惟一的自然数为 A 的**基数**, 记作 $\text{card}A$ (也可以记作 $|A|$)

$$\text{card}A = n \Leftrightarrow A \approx n$$

(2) 自然数集合 \mathbf{N} 的基数记作 \aleph_0 , 即

$$\text{card}\mathbf{N} = \aleph_0 \quad \text{阿列夫零}$$

(3) 实数集 \mathbf{R} 的基数记作 \aleph , 即

$$\text{card}\mathbf{R} = \aleph \quad \text{阿列夫}$$



定义8.9 设 A, B 是集合, 如果存在着从 A 到 B 的单射函数, 就称 B 优势于 A 的, 记作 $A \preceq B$.



定义8.13 设 A, B 为集合, 则

(1) $\text{card}A = \text{card}B \Leftrightarrow A \approx B$

(2) $\text{card}A \leq \text{card}B \Leftrightarrow A \preceq B$

(3) $\text{card}A < \text{card}B \Leftrightarrow A \preceq B \wedge A \not\approx B$ (B 真优势于 A)

常见结论:

$$\text{card } \mathbb{Z} = \text{card } \mathbb{Q} = \text{card } \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \aleph_0$$

$$\text{card } P(\mathbb{N}) = \text{card } 2^{\mathbb{N}} = \text{card } [a, b] = \text{card } (c, d) = \aleph$$

$$\aleph_0 < \aleph$$

$$\text{card } A < \text{card } P(A)$$

其中 $2^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$



不存在最大的基数. 将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到:

$$0, 1, 2, \dots, n, \dots, \aleph_0, \aleph, \dots$$

其中:

$0, 1, 2, \dots, n, \dots$ 是全体自然数, 是有穷基数.

\aleph_0, \aleph, \dots 是无穷基数, \aleph_0 是最小的无穷基数, \aleph 后面还有更大的基数, 如 $\text{card}P(\mathbf{R})$ 等.



定义8.14 设 A 为集合, 若 $\text{card}A \leq \aleph_0$, 则称 A 为**可数集**或**可列集**.

实例:

$\{a, b, c\}$, 5 , 整数集 \mathbb{Z} , 有理数集 \mathbb{Q} , $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 等都是可数集,
实数集 \mathbb{R} 不是可数集, 与 \mathbb{R} 等势的集合也不是可数集.

对于任何的可数集, 它的元素都可以排列成一个有序图形. 换句话说, 都可以找到一个“数遍”集合中全体元素的顺序.

可数集的性质:

- 可数集的任何子集都是可数集.
- 两个可数集的并是可数集.
- 两个可数集的笛卡儿积是可数集.
- 可数个可数集的笛卡儿积仍是可数集.
- 无穷集 A 的幂集 $P(A)$ 不是可数集



例9 求下列集合的基数

(1) $T = \{x \mid x \text{ 是单词 “BASEBALL” 中的字母}\}$

(2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 9 \wedge 2x = 8\}$

(3) $C = P(A), A = \{1, 3, 7, 11\}$

解 (1) 由 $T = \{B, A, S, E, L\}$ 知 $\text{card}T = 5$

(2) 由 $B = \emptyset$, 可知 $\text{card}B = 0$.

(3) 由 $|A| = 4$ 可知 $\text{card}C = \text{card}P(A) = |P(A)| = 2^4 = 16$.



例10 设 A, B 为集合, 且 $\text{card} A = \aleph_0$, $\text{card} B = n$, n 是自然数, $n \neq 0$.

求 $\text{card } A \times B$.

因为 $\text{card } A = \aleph_0$, $\text{card } B = n$, 所以 A, B 都是可数集.

根据性质(3) 可知 $A \times B$ 也是可数集, 所以

$$\text{card } A \times B \leq \aleph_0$$

显然当 $B \neq \emptyset$ 时,

$$\text{card } A \leq \text{card } A \times B,$$

这就推出

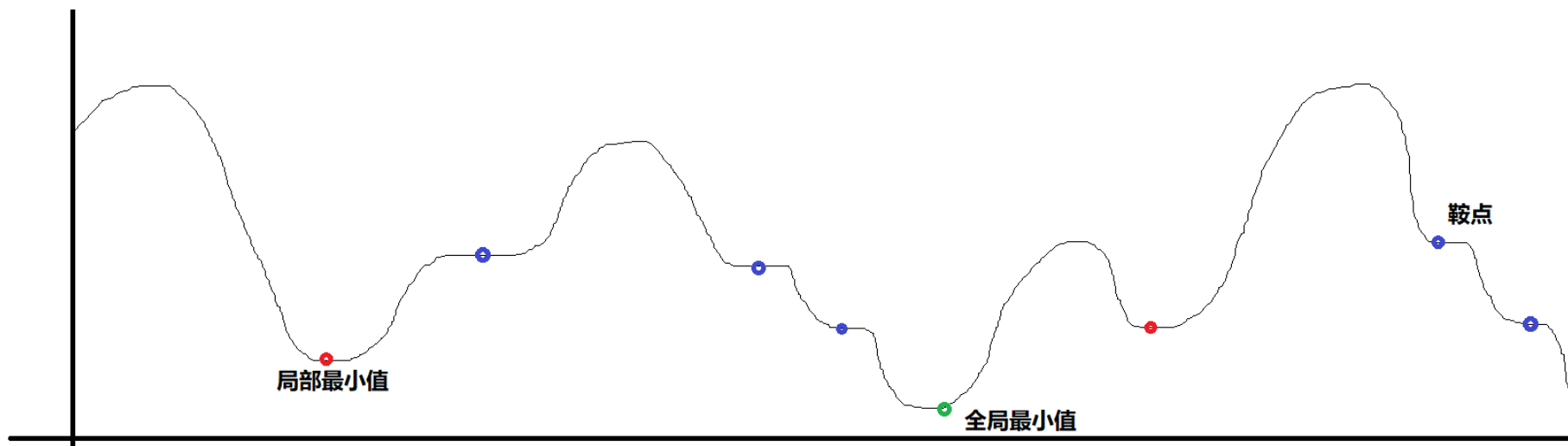
$$\aleph_0 \leq \text{card } A \times B$$

综合上述得到

$$\text{card } A \times B = \aleph_0.$$



深度学习的训练曲线



$$\{\text{局部最小值点}\} \approx \{\text{全局最小值点}\} \prec \{\text{鞍点}\}$$



主要内容

- 函数，从 A 到 B 的函数 $f:A \rightarrow B$, B^A , 函数的像与完全原像
- 函数的性质：单射、满射、双射函数
- 重要函数：恒等函数、常函数、单调函数、集合的特征函数、自然映射
- 集合等势的定义与性质
- 集合优势的定義与性质
- 重要的集合等势以及优势的结果
- 可数集与不可数集
- 集合基数的定义



- 给定 f, A, B , 判别 f 是否为从 A 到 B 的函数
- 判别函数 $f:A \rightarrow B$ 的性质（单射、满射、双射）
- 熟练计算函数的值、像、复合以及反函数
- 证明函数 $f:A \rightarrow B$ 的性质（单射、满射、双射）
- 给定集合 A, B , 构造双射函数 $f:A \rightarrow B$
- 能够证明两个集合等势
- 能够证明一个集合优势于另一个集合
- 知道什么是可数集与不可数集
- 会求一个简单集合的基数



1. 给定 A, B 和 f , 判断是否构成函数 $f:A \rightarrow B$. 如果是, 说明该函数是否为单射、满射、双射的. 并根据要求进行计算.
- (1) $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{6,7,8,9,10\},$
 $f=\{<1,8>, <3,9>, <4,10>, <2,6>, <5,9>\}.$
- (2) A, B 同(1), $f=\{<1,7>, <2,6>, <4,5>, <1,9>, <5,10>\}.$
- (3) A, B 同(1), $f=\{<1,8>, <3,10>, <2,6>, <4,9>\}.$
- (4) $A=B=\mathbf{R}, f(x)=x^3$
- (5) $A=B=\mathbf{R}^+, f(x)=x/(x^2+1).$
- (6) $A=B=\mathbf{R} \times \mathbf{R}, f(<x,y>)=<x+y, x-y>, \text{ 令}$
 $L=\{<x,y> | x,y \in \mathbf{R} \wedge y=x+1\}, \text{ 计算 } f(L).$
- (7) $A=\mathbf{N} \times \mathbf{N}, B=\mathbf{N}, f(<x,y>)=|x^2-y^2|. \text{ 计算 } f(\mathbf{N} \times \{0\}), f^{-1}(\{0\})$



- (1) 能构成 $f:A \rightarrow B$, $f:A \rightarrow B$ 既不是单射也不是满射, 因为 $f(3)=f(5)=9$, 且 $7 \notin \text{ran} f$.
- (2) 不构成 $f:A \rightarrow B$, 因为 f 不是函数. $\langle 1, 7 \rangle \in f$ 且 $\langle 1, 9 \rangle \in f$, 与函数定义矛盾
- (3) 不构成 $f:A \rightarrow B$, 因为 $\text{dom } f = \{1, 2, 3, 4\} \neq A$
- (4) 能构成 $f:A \rightarrow B$, 且 $f:A \rightarrow B$ 是双射的
- (5) 能构成 $f:A \rightarrow B$, $f:A \rightarrow B$ 既不是单射的也不是满射的. 因为该函数在 $x=1$ 取极大值 $f(1)=1/2$. 函数不是单调的, 且 $\text{ran} f \neq \mathbb{R}^+$.
- (6) 能构成 $f:A \rightarrow B$, 且 $f:A \rightarrow B$ 是双射的.

$$f(L) = \{\langle 2x+1, -1 \rangle \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{-1\}$$
- (7) 能构成 $f:A \rightarrow B$, $f:A \rightarrow B$ 既不是单射的也不是满射的. 因为

$$f(\langle 1, 1 \rangle) = f(\langle 2, 2 \rangle) = 0, 2 \notin \text{ran} f.$$

$$f(\mathbb{N} \times \{0\}) = \{n^2 - 0^2 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$f^{-1}(\{0\}) = \{\langle n, n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$$



5. 设 A, B 为二集合, 证明: 如果 $A \approx B$, 则 $P(A) \approx P(B)$

证 因为 $A \approx B$, 存在双射函数 $f: A \rightarrow B$, 反函数 $f^{-1}: B \rightarrow A$
构造关系 $g = \{ \langle T, f(T) \rangle \mid T \subseteq A \}$

可知 $\text{dom } g = P(A)$

$$\text{ran } f = \{ f(T) \mid T \subseteq A \} = \{ \{ f(t) \mid t \in T \} \mid T \subseteq A \} \subseteq P(B)$$

首先证明 $g: P(A) \rightarrow P(B)$

显然, 若 $\langle T, S_1 \rangle \in g$ 且 $\langle T, S_2 \rangle \in g$,

则 $S_1 = f(T) = S_2$, 即证明了 g 是从 $P(A)$ 到 $P(B)$ 的函数



其次证明 g 满射：对于任何 $S \in P(B)$, 由于 $\text{ran } f^{-1} = A$, 有 $f^{-1}(S) = \{f^{-1}(s) | s \in S\} \subseteq A$, 即 $f^{-1}(S) \in P(A) = \text{dom } g$, 此时

$$\begin{aligned} g(f^{-1}(S)) &= g(\{f^{-1}(x) | x \in S\}) = f(\{f^{-1}(x) | x \in S\}) \\ &= \{f(f^{-1}(x)) | x \in S\} = \{x | x \in S\} = S \end{aligned}$$

因此 g 满射.

以下证明 g 的单射性.

$$\begin{aligned} g(T_1) = g(T_2) &\Rightarrow f(T_1) = f(T_2) \\ &\Rightarrow f^{-1}(f(T_1)) = f^{-1}(f(T_2)) \\ &\Rightarrow \{f^{-1}(f(t_1)) | t_1 \in T_1\} = \{f^{-1}(f(t_2)) | t_2 \in T_2\} \\ &\Rightarrow \{t_1 | t_1 \in T_1\} = \{t_2 | t_2 \in T_2\} \Rightarrow T_1 = T_2 \end{aligned}$$

因此 g 是双射, 所以 $P(A) \approx P(B)$.



方法一：直接构造从 A 到 B 的双射, 即定义一个从 A 到 B 的函数 $f:A \rightarrow B$, 证明 f 的满射性, 证明 f 的单射性

方法二：利用定理8.8, 构造两个单射 $f:A \rightarrow B$ 和 $g:B \rightarrow A$. 即定义函数 f 和 g , 证明 f 和 g 的单射性

方法三：利用等势的传递性

方法四：直接计算 A 与 B 的基数, 得到 $\text{card } A = \text{card } B$.

注意:

- 以上方法中最重要的是方法一.
- 证明集合 A 与自然数集合 \mathbb{N} 等势的通常方法是: 找到一个“数遍” A 中元素的顺序.



6. 已知 $A=\{n^7|n\in\mathbb{N}\}$, $B=\{n^{109}|n\in\mathbb{N}\}$, 求下列各题:

(1) Card A

(2) Card B

(3) $\text{card}(A\cup B)$

(4) $\text{card}(A\cap B)$

解 (1) 构造双射函数 $f:\mathbb{N}\rightarrow A, f(n)=n^7$, 因此 $\text{card } A=\aleph_0$

(2) 构造双射函数 $g:\mathbb{N}\rightarrow A, g(n)=n^{109}$, 因此 $\text{card } B=\aleph_0$

(3) 可数集的并仍旧是可数集, 因此 $\text{card}(A\cup B)\leq \aleph_0$,
但是 $\text{card}(A\cup B)\geq \text{card } A=\aleph_0$, 从而得到

$$\text{card}(A\cup B)=\aleph_0.$$

(4) 因为7与109互素, $\text{card}(A\cap B)=\{n^{7\times 109} \mid n\in\mathbb{N}\}$,
与(1)类似得到 $\text{card}(A\cap B)=\aleph_0$



7. 已知 $\text{card}A=\aleph_0$, 且 $\text{card}B<\text{card}A$, 求 $\text{card}(A-B)$

8

解 由 $A-B\subseteq A$ 得到 $\text{card}(A-B)\leq \text{card}A$, 即

$$\text{card}(A-B)\leq \aleph_0$$

由 $\text{card}B<\text{card}A$ 可知 B 为有穷集, 即存在自然数 n 使得

$$\text{card}B=n.$$

假设 $\text{card}(A-B)<\aleph_0$, 那么存在自然数 m , 使得

$$\text{card}(A-B)=m$$

从而得到

$$\text{card}A = \text{card}((A-B)\cup B) \leq n+m,$$

与 $\text{card}A=\aleph_0$ 矛盾. 因此,

$$\text{card}(A-B)=\aleph_0.$$