

目录简要

1. 问题概述
2. 提出假设
3. 模型建立和求解
4. 参考资料

问题概述

题目

医生给病人开处方时必须注明两点: **服药的剂量和服药的时间间隔**. 超剂量的药品会对身体产生严重不良后果, 甚至死亡, 而剂量不足, 则不能达到治病的目的. 已知患者服药后, 随时间推移, 药品在体内逐渐被吸收, 发生生化反应, 也就是体内药品的浓度逐渐降低. **药品浓度降低的速率与体内当时药品的浓度成正比**. 当服药量为 A 、服药间隔为 T , 试分析体内药的浓度随时间的变化规律.

题目分析

如题, 这是一道有关变化率的问题, 可以采用 **微分方程模型** 进行求解. 我们将人体的循环系统和其它系统看成一个房室, 药物的摄取过程就类似于与房室做交互.

作出假设

为了更加方便地对题目做出解答，我们做出以下假设：

- 药品浓度降低的速率与体内当时药品的浓度成正比；
- 药物的吸收速率与体内未吸收的药物浓度成正比；
- 药物在体内是均匀分布的；
- 药物的摄取是瞬时的；

模型建立和求解

根据假设以及题目要求，我们记：

A 为每次摄入的药物的量

x 为生物循环系统中的药物含量

y 为生物消化系统（或者组织液）中的药物含量

k 为生物体内药物减少速率

T 为服药间隔

单周期内的药物含量变化

我们假设每次服药到下一次服药为一个周期 T . 对于每一个周期而言，药物在人体内含量的变化率满足下面这个动态平衡：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \left(\frac{dy}{dt}\right) - k_1 x \\ \frac{dy}{dt} &= -k_2 y\end{aligned}$$

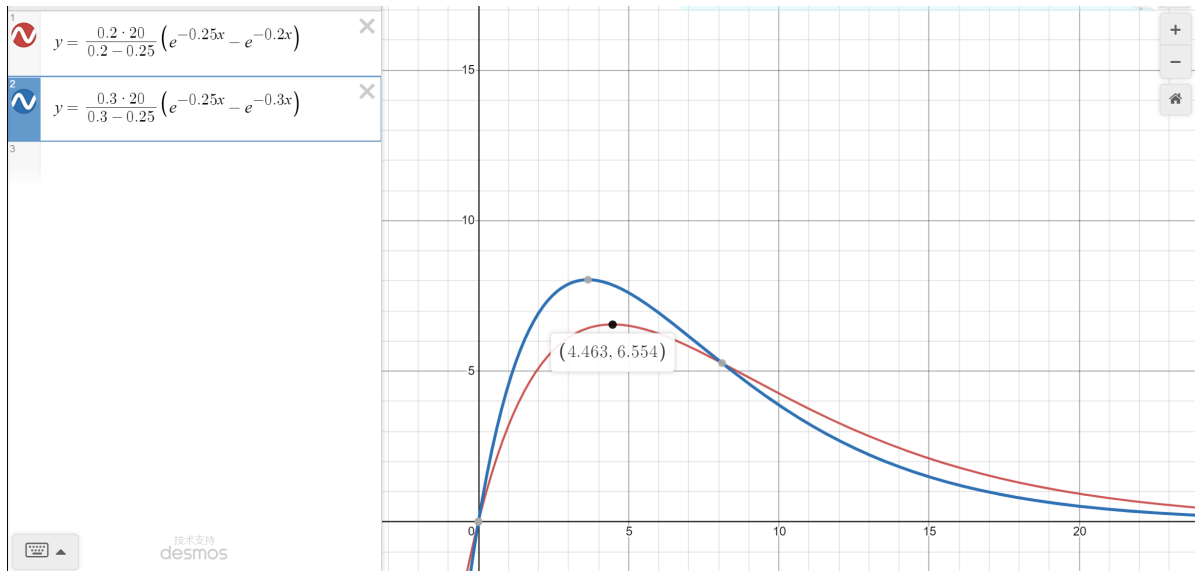
据此可以解出：

$$y(t) = De^{-k_2 t}$$

$$x(t) = \frac{k_2 D}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

其中， D 为每个周期开始时人体内未吸收的药物的含量

我们可以通过指定参数画出单次周期内药物含量的走势。如图，蓝色线表示吸收系数小于排出系数，红线表示吸收系数大于排除系数。可以发现，两只线的大致走向相似。



多周期中药物含量变化

有前面的分析我们可以知道：在经过一个服药周期后，体内和体外的药物含量分别为：

$$x(T) = \frac{k_2 D}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 T} - e^{-k_2 T})$$

$$y(t) = De^{-k_2 T}$$

在摄取药物之后，体内的药物含量近似不变，未吸收的药物含量变化为：

$$y(t) = De^{-k_2 T} + A$$

即对于下一个周期来说：我们自然地发现每个周期开始的时候药物的初始含量是不同的，他们满足：

$$D_{n+1} = D_n e^{-k_2 T} + A$$

这是一个简单的线性递推模型，我们可以从中解出 D 的通解如下：

$$D_n = e^{-nk_2 T} (D_1 + b) - b$$

$$\text{其中： } b = \frac{A}{e^{-k_2 T} - 1}$$

将这个结果再次带回至原来的式子中，我们就得到了最终的模型：

$$x_n(t) = \frac{k_2 e^{-nk_2 T} (D_1 + b) - b}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

$$y_n(t) = e^{-k_2(nT+t)} (D_1 + b) - b e^{-k_2 t}$$

$$\text{其中： } b = \frac{A}{e^{-k_2 T} - 1}, 0 < t < T$$

参考资料

[药物一般进入体内多长时间开始发挥作用？](#)