马尔萨斯人口问题

Q1：我们今天放弃马尔萨斯模型而至少要考虑Logistic模型的原因是什么？

现实原因 ： 马尔萨斯模型已经不能解决当今的人口问题。

通过马尔萨斯模型我们可以得到：

- 人口的增长应该呈指数式增长，但是食物产量却只能以算术级数上升。由此可知，人口的增长应该会被限制。

理论原因： 人口增长率是一个常数的假设已经不成立了。

在马尔萨斯的年代，当时的资源可以维持人口的自然增长。但是在当下，人口的变化显然会与人口量相关，增长率一定是随时间变化的值。而且，现在的人口量已经毕竟环境可以容纳的极限环境容纳量。

Q2： 连续的Logistic模型（微分方程形式）的解与离散的Logistic模型（数列迭代的形式）的解相比，那个的性态更复杂？这又说明了什么呢？

Logistic模型：

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-r(t-t_0)}}$$

$$C = \frac{K - P_0}{P_0}$$

离散化的**Logistic**模型：

$$N_{t+1} = (1+r)N_t - \frac{r}{k}N_t^2$$

综上，在形态上，显然，微分方程形式的连续性模型表达式要更加复杂。

但是，在模型的性质上，微分方程形式的连续性模型会更加容易分析。我们可以很轻易地到当人口初值处于不同状态时模型的走向。而离散化的模型在后续的分析中会出现混沌现象，无法很好地用模型去解决实际问题。

通过这个实例，我们可以看出：

- 连续性模型在结果表达上更加复杂，但是有相应 完备的 的分析手段
- 离散化的模型虽然表达十分简便，但是 缺少相应的工具 去做进一步的模型分析。

Q3： 如果我们将人口模型对应一般种群生长模型考虑地再复杂些，例如考虑多个种群共存，并彼此存在相互竞争时，相应的数学模型又该如何改进？

> 种群的种间关系：
>
> - 捕食： 此消彼长
> - 竞争： 相互抑制 或 一方有利，另一方被淘汰
> - 互利共生： 相互依赖，相互依存
> - 寄生： 一方受益，一方受害，甚至引起寄主患病或死亡。

Logistic模型的不足之处：

在现实上来说，相互竞争的种群，他们的种群密度往往不会向环境容纳量逼近。

究其原因，对于多个种群相互竞争而言，我们可以发现：

假设种群增长率与种群密度呈线性关系已经不再适用。因此，我们需要对这个假设进行修正。

假设的修正与尝试

根据诸多理论研究我们发现，种群间的竞争往往发生在食物等环境资源有限的情况下，并且会产生两种结果：相互抑制或者一方占优势，另一方占劣势乃至灭亡。为了讨论简单，我们首先以两个种群相互竞争为例，尝试对假设进行修正。

通过上面的描述，我们可以发现如何衡量环境资源的使用情况和种群增长率之间的关系称为这个问题的根本。

我们可以设想：

> 假设两个物种发生竞争，他们使用的应该是同一类自然环境。因此，两个种群的种群密度都会对环境的使用情况产生影响。因此，我们可以定义：
>
> 环境使用状况：
>
> $$O(t)=(1-\frac{P_1(t)}{K_1}-\frac{P_2(t)}{K_2})$$

据此，我们可以对Logistic模型做出以下改进：

$$\frac{dP_1(t)}{dt}=r_1\times P_1(t)\times O(t)$$
$$\frac{dP_2(t)}{dt}=r_2\times P_2(t)\times O(t)$$

虽然模型的解如下：我们很难去分析

$$\left\{\frac{\partial x(t)}{\partial t} = a\, x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{b} - \frac{y(t)}{c}\right), \frac{\partial y(t)}{\partial t} = e\, y(t)\left(1 - \frac{x(t)}{b} - \frac{y(t)}{c}\right)\right\}$$

ODE classification

System of nonlinear differential equations

Alternate forms

$$\left\{x'(t) = -\frac{a\, x(t)\,(-b\, c + x(t)\, c + b\, y(t))}{b\, c}, y'(t) = -\frac{e\, y(t)\,(-b\, c + x(t)\, c + b\, y(t))}{b\, c}\right\}$$

$$\left\{x'(t) = -\frac{a\, x(t)\,(x(t) - b)}{b} - \frac{a\, x(t)\, y(t)}{c}, y'(t) = \frac{e\,(b - x(t))\, y(t)}{b} - \frac{e\, y(t)^2}{c}\right\}$$

$$\left\{x'(t) = a\left(x(t)\left(1 - \frac{y(t)}{c}\right) - \frac{x(t)^2}{b}\right), y'(t) = \left(e - \frac{e\, x(t)}{b}\right) y(t) - \frac{e\, y(t)^2}{c}\right\}$$

Alternate forms assuming a, b, c, and t are positive

$$\{a\, x(t)\,(b\,(y(t) - c) + c\, x(t)) + b\, c\, x'(t) = 0, e\, y(t)\,(b\,(y(t) - c) + c\, x(t)) + b\, c\, y'(t) = 0\}$$

$$\left\{\frac{a\, x(t)\,(c - y(t))}{c} = \frac{a\, x(t)^2}{b} + x'(t), e\, y(t)\left(\frac{x(t)}{b} - 1\right) + \frac{e\, y(t)^2}{c} + y'(t) = 0\right\}$$

Expanded form

Step-by-step solution

$$\left\{x'(t) = -\frac{a\, x(t)^2}{b} + a\, x(t) - \frac{a\, y(t)\, x(t)}{c}, y'(t) = -\frac{e\, y(t)^2}{c} - \frac{e\, x(t)\, y(t)}{b} + e\, y(t)\right\}$$

Differential equation solutions

$$y(t) = k_1\left(x \mapsto \int_1^x \frac{1}{\xi\,(b\, k_1\, \xi^{e/a} - c\, \xi + b\, c)}\, d\xi\right)^{(-1)}\left(\frac{a\, t}{b\, c} + k_2\right)^{e/a}$$

$$\frac{a\, t}{b\, c} + k_2 = \int_1^{x(t)} \frac{1}{\xi\,(b\, k_1\, \xi^{e/a} + b\, c - c\, \xi)}\, d\xi$$

但是我们依然可以从中看出一点问题：

我们把两个方程做差可以得到：

$$\frac{d(P_1(t) - P_2(t))}{dt} = O(t)(r_1P_1(t) - r_2P_2(t))$$
$$\frac{d(P_1(t) - P_2(t))}{dt} = (1 - \frac{P_1(t)}{K_1} - \frac{P_2(t)}{K_2})(r_1P_1(t) - r_2P_2(t))$$

当在种群发展的早期时，种群间的竞争力完全是靠物种的初值和自然增长率决定的。而当种群发展到一定程度，环境的的使用情况趋近饱和时，种群数量差的改变就会停滞，即两个种群的种群密度差都保持不变。这显然不符合事实。甚至，种群的数量也不会再改变。

因此，我们可以判断出：这个模型的问题出现在环境利用趋近于饱和时，也就是环境的利用率的定义出现了问题。

因此，我们需要再一次对这个模型进行修正。

洛特卡-沃尔泰拉（**Lotka-Volterra**）模型

为了让种群在环境使用接近饱和时依然保持竞争，我们需要对环境使用状况的定义进行进一步修改。它引入了竞争系数作为参数：

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = r_1 \times P_1(t) \times (1 - \frac{P_1(t)}{K_1} - \beta\frac{P_2(t)}{K_2})$$
$$\frac{dP_2(t)}{dt} = r_2 \times P_2(t) \times (1 - \alpha\frac{P_1(t)}{K_1} - \frac{P_2(t)}{K_2})$$

其中，

- α：物种2对物种1的竞争系数，即每个P2个体所占用的空间相当于α个P1个体所占用空间。
- β：物种1对物种2的竞争系数，即每个P1个体所占用的空间相当于β个P2个体所占用空间。

通过这样的修正，我们就可以描述物种之间在环境使用率达到很高的情况下的竞争关系。在竞争的过程中，由于K1、K2、α 以及 β 的数值不同，可能会产生如下四种结果：

	1抑制2（$K1 > K2/\beta$）	1不能抑制2（$K1 < K2/\beta$）
2抑制1（$K2 > K1/\alpha$）	都有可能得胜	2总是得胜
2不能抑制1（$K2 < K1/\alpha$）	1总是得胜	不能抑制对方(稳定平衡)

通过这样的解释，两个种群的竞争关系就能得到很好的解决了。

模型的拓展：三种群的古典**Gause-Lotka-Volterra**（**GLV**）系统

那么，当种群的数量进一步增多的时候，同样的，我们可以得到这样的方程组：

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = r_i \times P_i(t) \times [1 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} P_j(t)]$$

详见：

[《三种竞争种群的古典Gause-Lotka-Volterra系统》《生物数学报10卷4期》王进良]