卡尔曼滤波的定义：卡尔曼滤波是一种高效率的递归滤波器（自回归滤波器），他能够从一系列的不完全以及包含噪声的测量中，估计动态系统的状态。应用到此处，手机的陀螺仪，加速度计以及磁罗盘的数据是时域上具有高斯白噪声特性的数据，通过建立数学模型，得到手机姿态的最优估计。

由于手机这三个Motion传感器采集的数据对手机的运动描述是有限的，并且包含系统噪声以及环境噪声，通过对手机的位置（通过积分得到的）物体位置会有偏差，为了是这个误差达到最小，就引入了卡尔曼滤波。由于手机的位置、速度以及加速度信息在任何时候都有噪声，卡尔曼滤波利用目标的动态信息，通过最优化原理去掉噪声的影响，得到一个关于手机位置的比较优的估计。这个估计对于应用的不同主要分为三种：对当前目标位置的估计（滤波）；对手机将来位置的估计（也叫预测），也可以是对过去位置的估计（通过插值或者平滑）。

卡尔曼滤波的基本动态模型：KF建立在线性代数以及隐马尔科夫模型的基础上。他的基本动态系统可以用一个马尔科夫链来表示，这个马尔科夫链建立在一个被高斯白噪声干扰的线性算子上面。系统的状态可以用一个元素为实数的向量来表示。随着离散时间的每一个增加，这个线性算子就会作用在当前的状态上，通过运算产生一个新的状态，并且引入一些新的噪声，如果有控制信号，控制信息也会被加入。同时，英一个受噪声干扰的线性算子产生出这些隐含状态的可见输出。

为了从一系列有噪声的观察数据中用卡尔曼滤波器估计出被观察过程的内部状态，通过在卡尔曼滤波的框架下建立物理模型。换而言之，对于每一步k，定义矩阵，，以及。于是卡尔曼滤波器的模型假设k时刻的真实状态是同（k-1）时刻的状态演化而来，符合下面的公式：

其中

是作用在手机上一个时刻状态上的变量变换模型（雅可比矩阵）

是过程噪声，并且假定其为均值为零的高斯白噪声，具有协方差矩阵为的多元正态分布

在时刻k，与真实状态相对应的观测满足下面的式子：

其中是观测模型，它把真实状态空间映射成观测空间，而是观测噪声，也是均值为零的高斯白噪声，其协方差矩阵同样服从正态分布。

在运行这个滤波器需要设置初始状态，初始状态以及每一时刻的噪声{}都认为是相互独立的。

在此期间，KF是一种递归的估计，只需要知道上一时刻状态的估计值以及当前状态的观测值就可以计算出当前时刻状态的估计值，也因此不需要记录观测或者估计的历史信息。这个与其他滤波器最大的不同就是不需要像低通滤波器等频域滤波器那样，需要在频域上设计再转换到时域上实现。

手机的状态主要有下面两个变量来表示：

，在时刻k状态的估计；

，后验估计误差协方差矩阵，是用来度量估计值的精确程度。

于是，对于KF的操作主要包括两个阶段：预测与更新。在预测阶段，滤波器采用上一时刻的状态估计，结合当前的观测做出对当前状态的估计。在更新阶段，滤波器利用对当前状态的观测值优化在预测阶段获得的预测值，来获得一个更为精确的估计值。

其中预测通过以下公式来实现：

预测状态

预测估计协方差矩阵

更新通过计算下面三个量来实现

测量余量

测量余量的协方差

得到的最优卡尔曼增益

通过上面求解的结果来更新滤波器的状态x和预测p

更新之后的状态估计

更新之后的协方差估计

其中上述式子的不变量有：

由于从手机的加速度计是手机坐标系下的瞬时加速度，磁罗盘是获得的手机在周围环境的具有噪声的绝对的手机的轴角数据，陀螺仪获得的是较为准确的手机角速度信息，所以我们的EKF滤波器的状态可以设计为：

其中Position，Velocity，Accelerate均为世界坐标系下的运动信息数据，Pose表示当前手机的姿态。并且每一个数据为这样的一个在欧式空间里的一个向量，对于前三个分别表示通过坐标投影下的在世界坐标系下x轴, y轴,以及z轴上的位置、速度以及加速度数据，对于Pose表示当前的姿态的分别围绕x轴、y轴，z轴转过的轴角

观测设计为：

其中Accelerate是手机坐标系下加速度计数据回传的数据，Magnitude是三轴磁罗盘传感器回传的数据以及Gyroscope是陀螺仪回传的数据，并且他们也都是一个数据为这样的一个在欧式空间里的一个向量，分别表示对应的正交分解在不同轴上的加速度、角偏移以及瞬时角速度。

为了方便计算，将状态向量中的元素简化记为：

则当前时刻t的状态为：

上一时刻t-1的状态为：

初始时刻状态为：

从状态到的更新过程通过物理学的运动模型可以得到：

其中表示状态更新的时间间隔。

这里面的Pose是手机当前的姿态，数据为，其中x表示roll，y表示pitch，z表示yaw。这里的Pose表示一个旋转，即从世界坐标系到手机坐标系的旋转。也可以采用四元数来表示，那么数据将为，虽然形式不同，但是表达的意义均为从世界坐标系到手机坐标系的旋转。

将手机获得的观测（测量）矩阵简化为：

那么，状态则可以通过下面的公式计算得出：

其中R表示从世界坐标系到手机坐标系的旋转矩阵。下面给出从欧拉角到旋转矩阵以及从四元数到旋转矩阵的推导公式：

1. 欧拉角到旋转矩阵

其中：

1. 四元数到旋转矩阵

通过以上分析发现，对于状态向量的更新，其中的数据流结构如下：



通过数据流分析，在状态S1，S2以及S3与滤波器不存在耦合关系，即可以将上述模型进分解、化简得到如下模型：



左边的位置计算过程可与右侧EKF相互独立分别进行计算。由此，EKF的数据更新部分由此更新为通过Z1，Z2以及Z3三种传感器数据求解手机姿态的问题，手机定位则化简为由已知手机机身坐标系下的三轴加速度以及手机姿态，通过坐标系变换求取手机在世界坐标系下的各个坐标轴投影的加速度进而通过求解微分方程获得手机的速度、位移信息。

1. 基于EKF数据融合算法的手机姿态求解

此处涉及此种方法定位的基础：使用传感器数据。在Android智能手机里面提供了三种基础的运动跟踪传感器：

1. 加速度传感器测量的是手机任意时刻的加速度信息，返回一个手机坐标系下的三个轴的加速度信息，但是加速度由于传感器特性导致数据信息十分粗糙，下面是通过加速度信息计算的手机关于X轴旋转的角度信息：



1. 陀螺仪测量的是旋转，返回的数据信息是在手机坐标系下的旋转角度矢量。陀螺仪的输出数据结果十分平滑，对于比较微小的旋转信息十分具有代表性。陀螺仪可以被用来估计手机当前姿态，通过在每一个时间戳修正其历史数据，结合一个新的角度旋转向量。通过积分的方式获取手机当前姿态可以比较好的工作，但是存在累计误差。即当积分一段时间之后，即使将手机静止放置，得到的数据依然存在偏移。并且通过将手机恢复到初始姿态，通过积分得到的数据不能很好的得到最初的姿态数据信息。下图是通过陀螺仪数据积分得到的手机围绕X轴的旋转信息：



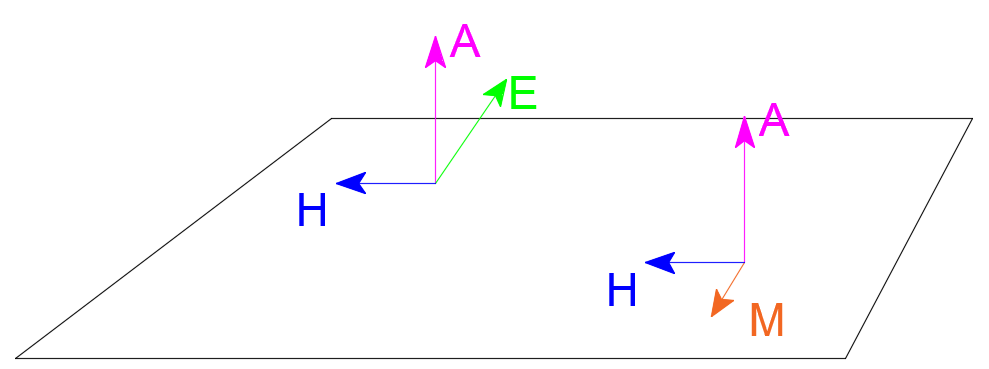
1. 磁罗盘传感器测量的是磁场，返回的是一个手机周围环境的近磁场（包含地球磁场）向量。这个传感器类似于一个指南针，可以获得手机的朝向信息，与手机加速度计结合可以得到手机的姿态，因为可以通过磁罗盘数据向量弥补加速度计无法求解得出的手机yaw角信息。但是磁罗盘的数据极其容易手到手机周围的磁场干扰，包括手机内部的电子电路产生的电磁场。

每一个传感器都有自身的优点和缺点，陀螺仪不知道全局下的信息，然而加速度计的噪声又十分严重并且没有yaw角信息。传感器融合的目的是采用每一个传感器数据信息并且将传感器之间互相取长补短，得到一个更为可靠的结果。

由于加速度传感器的数据矢量始终受到地球重力影响，方向指向失重方向，即与地心方向相反，另外通过使用磁罗盘，可以得到手机朝向与正南方向上的旋转矢量。为方便计算，记为A，为E由此，可以通过下面的式子求解第三个轴的方向旋转信息：

则旋转矩阵R（从东北天坐标系到手机坐标系的转换）为：

可以通过下图来证明：



即通过将加速度获得的与朝向地心的旋转角度矢量信息与磁罗盘获得的与正南方向的旋转角度矢量进行单位化并且进行叉乘，即可得到手机姿态与正东方向的旋转角度矢量。从而得到手机姿态与正东、正北以及指向天空的坐标系（东北天坐标系）的旋转矩阵。

由于旋转矩阵为的矩阵，过程运算比较繁琐，所以考虑将其转换成更为简洁的旋转描述方法上面去，因此考虑采取欧拉角或者四元数来进行计算。

首先，欧拉角的描述仅为三个值：roll，pitch和yaw，相比于四元数的四个值而言，更为简洁明确容易理解：分别为当前姿态绕x轴，y轴以及z轴旋转的角度。但是欧拉角有一非常严重的缺点，也就是他的奇异值问题，又叫万向锁。由于物体旋转过程中坐标轴随着物体做相同的转动，所以目前手机的运动属于动态的欧拉角。当手机的yaw角先旋转45°，然后pitch旋转90°，最后的结果与先pitch旋转90°与再roll旋转45°的结果是等价的。可以通过证明得到，一旦pitch角旋转±90°，就会导致第一次旋转yaw与等价，整个旋转表示系统被限制在只能绕竖直旋转轴旋转，从而丢失了一个维度，也因此这种±90°的第二次旋转使得第一次和第三次旋转轴相同的现象，称为万向锁。除此之外，当表达3D旋转，旋转顺序对于欧拉角来说十分重要，所以也有了不同的情况：

1. 不同旋转角的组合次序
2. 相对于旋转物体的坐标系和绝对坐标系
3. 左右旋转以及右手旋转
4. 不同旋转角的标记名字
5. 使用欧拉角表达的两个旋转之间的过程是非线性的

由于种类之多导致没有一个被广泛接收的标准来表达欧拉角，虽然欧拉角可以直观表示手机的姿态，但是在运算过程中遇到万向锁直接导致结果出错以及上面一些特征，所以在过程运算引入四元数，通过四元数来进行过程姿态计算。

四元数主要是用来表示一个三维的旋转，与欧拉角不同，四元数是一个四维空间的向量，由四个变量组成，其中一个是一个实数来表达旋转，记为w，另外三个变量为虚数，来表示三个正交的维度i，j以及k，这三个虚部的平方根为-1，所以四元数可以由下面式子表达：

在上一步，通过使用加速度计与磁罗盘得到手机噪声比较严重的姿态对应的旋转矩阵，下面给出将旋转矩阵转化为四元数的公式推导：

由于旋转矩阵R满足以下条件：

1. 该矩阵是通过三个向量组合而成的
2. 组成矩阵的特征值以及行列式均为+1
3. 该矩阵表示一个纯粹的旋转特征

所以该矩阵为正交矩阵，所以将的正交矩阵转化成四元数过程为：

同时，通过陀螺仪得到的手机旋转向量表示手机在每一个轴当前旋转的角速度，通过乘上时间间隔即可得到手机在采样间隔的每一个轴所旋转过的角度，称之为轴角。即手机围绕x，y以及z轴旋转之后的角度，此阶段的可以通过下面方式来计算:

其中

1. a表示旋转的角度
2. x，y，z表示旋转角度在每一个轴上的投影。

所以更直观的理解，四元数中i表示一个关于x轴的旋转，j表示一个关于y轴的一个旋转，k表示一个关于z轴旋转，均为180°，其中若表示一个关于x轴旋转了360°。

手机姿态的通过四元数更新，可以通过四元数乘法进行状态更新，适用于通过陀螺仪来更新手机姿态：

将通过加速度计与磁罗盘数据解算手机姿态获得的手机关于绝对坐标系（也称东北天坐标系）的旋转，通过陀螺仪累计得到的手机当前姿态旋转为，下面开始设计EKF数据融合器。

首先通过前期计算，我们的简化之后的观测有两个：以及，这作为滤波器的输入，同时我们需要的手机姿态q，作为滤波器需要维护的状态，这个这状态也是我们用以求解手机绝对坐标系下的重要依据。

算法流程如下：



其中，初始化部分尤为重要，由于需要初始化4个部分，即初始化状态矩阵、初始化模型、计算雅可比矩阵以及初始化Q、R矩阵。在解算手机姿态这个模型中，主要采取的模型为互补滤波模型，由下面公式表示：

其中和分别表示不同传感器采集数据的来源，单位保持一致的情况下，采用和表示对其两个数据源的置信度，其中。

由于这里面采取的用以描述手机姿态的四元数，即得到的是两个描述手机姿态的，以及。

1. 手机定位算法设计

RK4算法：

令初值问题表述如下。

则，对于该问题的RK4由如下方程给出：

其中

这样，下一个值由现在的值加上时间间隔（h）和一个估算的斜率的乘积所决定。该斜率是以下斜率的加权平均：

是时间段开始时的斜率；

是时间段中点的斜率，通过欧拉法采用斜率k1来决定y在点tn + h/2的值；

也是中点的斜率，但是这次采用斜率k2决定y值；

是时间段终点的斜率，其y值用k3决定。

当四个斜率取平均时，中点的斜率有更大的权值：

RK4法是四阶方法，也就是说每步的误差是h5阶，而总积累误差为h4阶。