写在前面：

- 本文档旨在对线性代数中的基本内容进行总结，列出重要的概念、定义及定理，但通常忽略定理的证明过程.
- 本文档主要引用自《线性代数及其应用》（戴维·C.雷等著，机械工业出版社，原书第5版），但其中还穿插了编者个人的理解.
- 本文档的内容会不定期更新.

第一章 线性代数中的线性方程组

1.1 线性方程组

- 线性方程组的定义、解、解集，两个线性方程组的等价性
- 线性方程组的解有三种情况：无解、有唯一解、有无穷多解
- 线性方程组的相容性与不相容性
- 线性方程组的**系数矩阵**与**增广矩阵**
- **初等行变换**
    - 倍加变换
    - 对换变换
    - 倍乘变换
- 两个矩阵称为**行等价**的，若其中一个矩阵可以经一系列初等行变换成为另一个矩阵.
- 行变换是**可逆**的.
- 若两个线性方程组的增广矩阵是行等价的，则它们具有相同的解集.

1.2 行化简与阶梯形矩阵

本节正式提出高斯消去法，它可用来解任意线性方程组.同时该算法也可以回答解的存在性问题.

- 阶梯形矩阵的定义
    - 每一非零行都在每一零行之上
    - 某一行的先导元素（最左非零元素）所在的列位于前一行先导元素的右边
    - 某一先导元素所在列下方都是零
- 简化（行）阶梯形矩阵，除了满足上述三点，还满足
    - 每一非零行的先导元素是 1
    - 每一先导元素 1 是该元素所在列的唯一非零元素
- 任何非零矩阵都可以行化简变为阶梯形矩阵.
- **定理 1.1**（简化阶梯形矩阵的唯一性）：每个矩阵行等价于**唯一**的简化阶梯形矩阵.
- 行化简算法
    - 第一步，由最左的非零列开始，这是一个主元列
    - 第二步，在主元列中选取一个非零元素作为主元
    - 第三步，倍加变换，使主元下方的元素变为 0
    - 第四步，对剩下的子矩阵使用上述三步，直到没有非零行
    - 第五步，由最右边的主元开始，把每个主元上方的各元素变为 0.若某个主元不是 1，用倍乘变换把它变成 1.

- **基本变量/先导变量**是线性方程组增广矩阵等价的简化阶梯形的主元列对应的变量，其它变量称为**自由变量**.
- **定理 1.2**（存在与唯一性定理）
    - 线性方程组相容的充分必要条件是增广矩阵的最右列不是主元列.
    - 若线性方程组相容，则它的解可能有两种情形
        - 当没有自由变量时，有唯一解.
        - 若至少有一个自由变量，则有无穷多解.此时基本变量可用一个或多个自由变量表示，由此得到通解.

1.3 向量方程

线性代数的一个主要思想是研究可以表示为某一固定向量集合 $\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ 的线性组合的所有向量. $\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ 的所有线性组合所成的集合用记号 $Span\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ 表示，称为由 $\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ 所**生成/张成的** $\mathbb{R}^n$ **的子集**.要判断某个向量是否属于这一子集，实际上就是判断一个向量方程是否有解.

1.4 矩阵方程 $Ax = b$

线性代数中的一个基本思想是把向量的线性组合看作矩阵（由向量构成）与向量（由系数构成）的积.

- 矩阵方程与对应的向量方程有相同的解集，又与增广矩阵的线性方程组有相同的解集.
- 矩阵方程 $Ax = b$ 有解当且仅当 b 是 A 的各列的线性组合.
- **定理 1.4**：设 A 是 $m \times n$ 矩阵，下列命题等价
    - 对 $\mathbb{R}^m$ 中的**每一个** b，方程 $Ax = b$ 有解
    - $\mathbb{R}^m$ 中的每个 b 都是 A 的列的一个线性组合
    - A 的各列生成 $\mathbb{R}^m$
    - A 在每一行都有一个主元位置

1.5 线性方程组的解集

- 一个线性方程组称为**齐次**的，若它可写成 $Ax = 0$ 的形式.
- 齐次线性方程组至少有一个解，即全零解，它称为平凡解.
- 齐次线性方程组有非平凡解，当且仅当方程组至少有一个自由变量. 因为如果它只有唯一解，那么唯一解一定是零解. 一旦它有其它解，那么它有无穷多解，此时至少有一个自由变量.
- 齐次线性方程组总可以表示为若干个解向量的生成子集.若唯一解是零向量，则只有平凡解. 若方程组只有一个自由变量，那么解集是通过原点的一条直线.
- **定理 1.6**：设方程组 $Ax = b$ 对某个 b 是相容的，p 为一个特解，则 $Ax = b$ 的解集是所有形如 $w = p + v_h$ 的向量的集，其中 v_h 是齐次方程 $Ax = 0$ 的任意一个解.该定理说明，若 $Ax = b$ 有解，则解集可由 $Ax = 0$ 的解集平移向量 p 得到，其中 p 是 $Ax = b$ 的任意一个特解.

1.7 线性无关

引入线性相关概念的动机：考察齐次线性方程组的平凡解是否是唯一解.

- $$\mathbb{R}^n \text{ 中一组向量}\{v_1, \cdots, v_p\}\text{称为线性无关的，若向量方程 } x_1v_1 + \cdots + x_pv_p = \mathbf{0} \text{ 仅有平凡解.}$$
  $$\text{这组向量称为线性相关的，若存在不全为零的系数，使 } \sum c_iv_i = \mathbf{0}$$

- 矩阵 A 的各列线性无关，当且仅当方程 $Ax=0$ 仅有平凡解.
- 只含一个向量的集合线性无关当且仅当该向量不是零向量.单个零向量是线性相关的.
- 两个向量的集合线性相关，当且仅当其中一个向量是另一个向量的倍数.
- **定理 1.7**（线性相关集的特征）：两个或多个向量的集合线性相关，当且仅当其中**至少有一个**向量是其他向量的线性组合.
- 事实上，若向量组 S 线性相关，且 $v_1 \neq 0$，则某个 v_j 是它前面向量的线性组合.
- **定理 1.8**：若一个向量组的个数超过每个向量的维度，那么这个向量组线性相关.
- **定理 1.9**：若向量组 S 包含零向量，则它线性相关.
- 线性相关的集合意义：如果某个向量在其它向量生成的空间上，则该组向量线性相关.

1.8 线性变换介绍

矩阵作用于一个向量，将其变换为另一个向量.每个矩阵变换都是线性变换.

- 矩阵 A 是 $m \times n$ 的矩阵，它把 $\mathbb{R}^n$ 中的每个向量 x 映射到 $\mathbb{R}^m$ 中的一个向量 $T(x)$.
- 集 $\mathbb{R}^n$ 称为 T 的定义域，集 $\mathbb{R}^m$ 称为 T 的余定义域（或取值空间）.
- 用矩阵变换描述存在性与唯一性问题：唯一性问题，即 b 是否是唯一的像？存在性问题，即是否存在 x 使它的像为 c？
- 几类具有明确集合意义的矩阵变换
    - 投影变换：方阵，只有主对角线上分布元素 1
    - 剪切变换：方阵，它将线段映射成为线段，将顶点映射成为顶点，而底不变
    - 旋转变换
- 线性变换的定义：（1）$T(u+v)=T(u)+T(v)$ （2）$T(c\mathbf{u})=c\,T(\mathbf{u})$，即线性变换保持向量的加法运算与标量乘法运算.
- 线性变换将零向量映射到零向量.

1.9 线性变换的矩阵

从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的每一个线性变换实际上都是一个矩阵变换 $x \mapsto Ax$，而且变换 T 的重要性质都归结为 A 的性质.

寻找矩阵 A 的关键是知道下列事实：T 完全由它对 $n \times n$ 单位矩阵的各列的作用所决定. 这句话的本质是，知道了线性变换对基向量的作用效果，就知道了对所有向量的作用效果.只要知道了 x 和基向量的线性关系，以及经过 T 作用后的基向量的坐标，就能直接写出 x 经 T 变换后的坐标，因此就能直接写出这一线性变换所对应的矩阵 A. 这一性质可总结为下列定理：

定理 1.10：设 $T:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ 为线性变换，则存在唯一的 $m \times n$ 矩阵 A，使得对 $\mathbb{R}^n$ 中的一切 x，有 $T(x)=Ax$.

且有：$A=[T(e_1)\ \cdots\ T(e_n)]$，其中 e_j 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位矩阵的第 j 列.

这一矩阵 A 称为**线性变换 T 的标准矩阵**.

之所以称之为标准矩阵，是因为其将单位正交基作为定义域的基向量，此时，x 的坐标即是其与正交基之间的线性关系. 将 A 作用于 x，就相当于将经过线性变换之后的 $T(e_i)$ 作用于 x 相对于正交基的各分量.

定理 1.11：线性变换是一一对应的，当且仅当 $Ax=0$ 仅有平凡解. 这是因为，欲使 $Ax=b$ 有唯一解，$Ax=b$ 不能有自由变量，此时 $Ax=0$ 仅有平凡解.

定理 1.12：

（1）T 把 $\mathbb{R}^n$ 映射到 $\mathbb{R}^m$，当且仅当 A 的列生成 $\mathbb{R}^m$；这是因为，它等价于 $Ax=b$ 对每个 b 都相容，由定理 1.4 得证.

（2）T 是一对一的，当且仅当 A 的列线性无关. 由定理 1.11 和 1.7 节得证.

第二章 矩阵代数

学会矩阵的代数运算后，我们分析和解方程的能力将会大大提高.

2.1 矩阵运算

- 一般情况下，$AB \neq BA$.
- 若 $AB=AC$，一般情况下，$B=C$ 并不成立.
- 若 $AB=\mathbf{0}$，一般情况下，不能断定 $A=\mathbf{0}$ 或 $B=\mathbf{0}$.
- A^0 被解释为单位矩阵
- 矩阵的转置的性质
    - $(A^T)^T=A$
    - $(A+B)^T=A^T+B^T$
    - $(rA)^T=rA^T$
    - $(AB)^T=B^TA^T$

2.2 矩阵的逆

需要指出的是，仅对方阵研究矩阵的逆. 这是为什么呢？

对于任意矩阵 A，如果存在矩阵 C 和 D，使得 $CA=I$ 且 $AD=I$，那么可以证明，A 必是方阵，且 $C=D$.

- 一个 $n\times n$ 方阵 A 是可逆的，若存在一个 $n\times n$ 矩阵 C 使 $AC=CA=I$.
- 若 A 可逆，那么它的逆是唯一的，记为 A^{-1}，于是 $A^{-1}A=I$ 且 $AA^{-1}=I$.
- 不可逆矩阵称为奇异矩阵. 可逆矩阵称为非奇异矩阵.
- 逆矩阵可用于解线性方程组. **定理 2.5**：若 A 是可逆矩阵，则方程 $Ax=b$ 有唯一解 $x=A^{-1}b$.
- 逆矩阵的性质
    - 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆且 $(A^{-1})^{-1}=A$.
    - 若 A 和 B 都是可逆矩阵且维数相同，则 AB 也可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
    - 若 A 可逆，则 A^T 也可逆，且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.
- 初等矩阵
    - 把单位矩阵进行一次初等行变换，就得到初等矩阵.
    - 初等矩阵有三类，分别对应三种初等行变换：倍加矩阵（单位矩阵+一个数）、交换矩阵（交换单位矩阵）、倍乘矩阵（主对角线某元素倍乘）.
    - 若对矩阵 A 进行某种初等行变换，相当于将对应的初等矩阵 E 作用于（左乘）矩阵 A，其中 E 是由单位矩阵进行相同的行变换所得.
    - 行变换是可逆的，因此初等矩阵也是可逆的. 对于初等矩阵 E ，有*同一类型*的另一行变换把 E 变回 I，因此有同一类型的初等矩阵 F，使得 $FE=I$. 同时，由于二者对应于互逆的变换，因此也有 $EF=I$.

- **定理 2.7**：$n \times n$ 矩阵 A 是可逆的，当且仅当 A 行等价于单位矩阵 I_n，这时，把 A 化简为单位矩阵的一系列初等行变换同时把单位矩阵变为 A^{-1}. 也即，如果 $E_pE_{p-1}\cdots E_1A = I_n$，那么 $A^{-1} = E_pE_{p-1}\cdots E_1$.
- 由定理 2.7 可以得到一个求逆矩阵的算法：既然将 A 和单位矩阵施以同样的行变换，在 A 变为单位矩阵的同时，单位矩阵变为 A^{-1}，那么可以将 A 和单位矩阵并列，同时进行行变换. 即对增广矩阵 $[A \ \ I]$ 进行化简，若 A 行等价于 I，即能够化简为单位矩阵，那么 $[A \ \ I]$ 行等价于 $[I \ \ A^{-1}]$.

2.3 可逆矩阵的特征

本节对上文的各知识点融会贯通，总结为以下定理：

定理 2.8（可逆矩阵定理）：设 A 为 $n \times n$ 矩阵，则下列命题等价

- A 是可逆矩阵
- A 行等价于 $n \times n$ 单位矩阵
    - 由定理 2.7 可得
- A 有 n 个主元位置
    - 说明 A 行等价于单位矩阵
- 方程 $Ax = \mathbf{0}$ 仅有平凡解
    - 此时方程组没有自由变量，说明 A 满秩
- A 的各列线性无关
    - 与 A 满秩等价
- 线性变换 $x \mapsto Ax$ 是一对一的
    - 与 A 满秩等价
- 对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意 b，方程 $Ax = b$ 至少有一个解
    - 由定理 1.4 可得
- A 的各列生成 $\mathbb{R}^n$
    - 由定理 1.4 可得
- 线性变换 $x \mapsto Ax$ 把 $\mathbb{R}^n$ 映上到 $\mathbb{R}^n$
    - 由定理 1.4 可得
- 存在 $n \times n$ 矩阵 C，使 $CA = I$
- 存在 $n \times n$ 矩阵 D，使 $AD = I$
- A^T 是可逆矩阵
    - 由逆矩阵的性质可得
- A 的列向量构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个基
- Col $A = \mathbb{R}^n$
- dim Col $A = n$
- rank $A = n$
- Nul $A = \{\mathbf{0}\}$
- dim Nul $A = 0$

由上述定理可得出：若 A 和 B 都为方阵，且 $AB = I$，则 A 和 B 都是可逆的，$B = A^{-1}$，$A = B^{-1}$.

既然已经讨论了可逆矩阵，那么自然而然就要讨论可逆线性变换. 一个线性变换 T 是可逆的，如果存在从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的函数 S，使得对任意 x，都有 $S(T(x)) = T(S(x)) = x$. 下面的定理指出，如果存在这样的 S，那么它是唯一的，而且它必是线性变换.

定理 2.9：设 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为线性变换，A 为 T 的标准矩阵，则 T 可逆当且仅当 A 可逆，这时由 $S(x) = A^{-1}x$ 定义的线性变换函数 S 是满足定义的唯一函数.

由此可知，如果线性变换 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一对一的，那么 A 的各列是线性无关的，因此 A 可逆，故 T 可逆.

2.5 矩阵因式分解

矩阵 A 的因式分解是把 A 表示为两个或更多个矩阵的乘积.

2.8 $\mathbb{R}^n$ 的子空间

设置 2.8 节和 2.9 节是为了使初学者能更好地进入第 4 章.

子空间对加法和标量乘法封闭. $\mathbb{R}^n$ 中的一个子空间是 $\mathbb{R}^n$ 中的集合 H，它具有以下三个性质：

- $\mathbf{0} \in H$
- $\forall u, v \quad u + v \in H$
- $\forall u$ 和数 c，$c\mathbf{u} \in H$

有两个平凡的子空间：$\mathbb{R}^n$自身、零子空间.

矩阵 A 的列空间是 A 的各列的线性组合的集合，记作 $ColA$，它和 $Span\{a_i \dots\}$ 相同. 需要注意的是，$ColA$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，但仅当 A 的列生成 $\mathbb{R}^m$ 时，才有 $ColA$ 等于 $\mathbb{R}^m$.

当线性方程组写成 $Ax = b$ 的形式时，A 的列空间是使方程组有解的向量 b 的集合. 这可以理解为：x 是 A 的各列向量的系数，b 是A 的各列向量乘以系数的线性组合，自然也在该空间中.

矩阵 A 的零空间是齐次方程 $Ax = 0$ 的所有解的集合，记为 Nul A.

定理 2.12：$m \times n$ 矩阵 A 的零空间是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

$\mathbb{R}^n$ 中子空间 H 的一组基是 H 中一个线性无关集，它生成 H.

求出方程 $Ax = 0$ 的解集的参数向量形式实际上就是确定 Nul A 的基. 这一点在后文还会提到.

定理 2.13：矩阵 A 的主元列构成 A 的列空间的基. 需要指出的是，主元列是指原始矩阵 A 的数，而非它的阶梯形的数.

2.9 维数与秩

- 坐标向量的概念：已经得到子空间 H 的一组基 $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \cdots, b_p\}$，向量 x 相对于 $\mathcal{B}$ 的坐标就是反映线性组合关系的权系数.
- 非零子空间 H 的**维数**（记为 dim H）是 H 的任意一个基的向量个数. 零子空间的维数定义为 0.
- 矩阵 A 的**秩**（记为 rank A）是 A 的列空间的维数. 它也等于 A 的主元列的个数.
- **定理 2.14（秩定理）**：如果一个矩阵 A 有 n 列，那么有：rank A + dim Nul $A = n$. 此定理在后文还会详细解释.
- **定理 2.15（基定理）**：设 H 是 $\mathbb{R}^n$ 的 p 维子空间，H 中的任何恰好由 p 个元素组成的线性无关集构成 H 的一个基. 并且，H 中任何生成 H 的 p 个向量集也构成 H 的一个基.

第三章 行列式

为什么要引入行列式？本章首先指出，通过计算行列式的值可以判断矩阵是否可逆.

3.1 行列式介绍

- 行列式的递归定义：令 A_{ij} 表示矩阵 A 删去第 i 行和第 j 列后得到的子矩阵，则 $\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}\det A_{1j}$
- 若进一步定义**余因子**：$C_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$，则有**定理 3.1**：方阵 A 可以按任意行或任意列展开：$\det A=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}C_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}C_{kj}$，上式分别给出了按第 i 行展开和按第 j 列展开的方式. 此定理在计算含许多 0 的行列式时很有用.
- 三角阵的行列式等于主对角线上元素的乘积.

3.2 行列式的性质

- 初等行变换对行列式的值的影响
    - 倍加变换：行列式的值不变
    - 对换变换：行列式的值变为原来的相反数
    - 倍乘变换：倍乘 k，行列式的值变为原来的 k 倍，此性质可用于提取某一行的公因子
- **定理 3.4**：方阵 A 是可逆的当且仅当 $\det A\neq 0$，根据此定理可得出：若 A 的各列/各行线性相关，则其行列式为 0. 特别地，若其某两行或某两列相等，则它的行列式为 0.
- **定理 3.5**：$|A|=|A^T|$，这说明行列式的列变换与行变换具有相同的效果.
- **定理 3.6**：$|AB|=|A||B|$. 注意，此定理只对乘法适用，对加法不适用.

3.3 克拉默法则

首先指出，克拉默法则对于手工计算没有太大的帮助，它更多地被用于理论计算中.

定理 3.7：设 A 是 n 阶可逆方阵，则方程 $Ax=b$ 的唯一解可由下式给出：$x_i=|A_i(b)|\,/\,|A|$，其中 $A_i(b)$ 表示 A 中第 i 列向量由 b 替换得到的矩阵.

定理 3.8：设 A 是可逆矩阵，则有 $A^{-1}=\frac{adj\ A}{|A|}$. 其中，伴随矩阵 $\operatorname{adj} A$ 是矩阵 A 的*余因子矩阵*的转置. 需要指出的是，此式通常为理论工具，实际上很少使用此式计算逆矩阵.

定理 3.10：对于由二阶或三阶方阵确定的线性变换，矩阵的行列式的值表明了有限封闭区域内面积（二阶）或体积（三阶）经过线性变换之后改变的比值.

第四章 向量空间

在第 1 章和第 2 章中种植的数学种子将在这一章中生长并且开始开花. ——《线性代数及其应用》

4.1 向量空间与子空间

一个**向量空间**是由一些被称为向量的对象构成的非空集合 V，在这个集合上定义了两个运算，称为加法和标量乘法，服从以下公理，这些公理必须对 V 中所有向量及所有标量均成立.

- 加法满足封闭性
- 标量乘法满足封闭性
- 向量的加法满足交换律
- 向量的加法满足结合律
- 存在一个零向量，使得 $u+0=u$
- 对于任意向量 u，存在一个向量 $-u$，使得 $u+(-u)=0$
- $c(u+v)=cu+cv$
- $(c+d)u=cu+du$
- $c(du)=(cd)u$

- $1u = u$

可以证明，上述公理中的零向量和负向量存在且唯一.

向量空间 V 的一个子空间是 V 的一个满足下列三条性质的子集 H：存在零向量、对加法封闭、对标量乘法封闭.

容易引起误会的是，$\mathbb{R}^2$ 不是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间，前者甚至不是后者的子集，但若将 $\mathbb{R}^3$ 中某一维的坐标改为 0，则它是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

定理 4.1：若下列 v_i 均在向量空间 V 中，则 $\text{Span}\{v_1, \cdots, v_p\}$ 是 V 的一个子空间.

4.2 零空间、列空间和线性变换

在线性代数的应用中，$\mathbb{R}^n$ 的子空间通常由以下两种方式产生：（1）作为齐次线性方程组的解集；（2）作为某些确定向量的线性组合的集合.

零空间的引入与齐次线性方程组有关. 事实上，它就是方程组的解空间.

定义矩阵 A 的**零空间** $\text{Nul}\ A = \{x : x \in \mathbb{R}^n, Ax = \mathbf{0}\}$. $\text{Nul}\ A$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中通过线性变换 $x \mapsto Ax$ 映射到 $\mathbb{R}^m$ 中的零向量的全体向量 x 的集合.

定理 4.2：$m \times n$ 矩阵 A 的零空间是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间.

如何得到 $m \times n$ 矩阵的零空间的基？首先，得到矩阵的简化阶梯形矩阵，将非主元列作为自由变量，一共得到 $n - rank\ A$ 个自由变量. 然后，用自由变量表示基本变量，得到若干个系数向量，它的个数等于自由变量的个数. 这些系数向量就是零空间的基.

如何得到 $m \times n$ 矩阵的列空间的基？见定理 2.13.

定义矩阵 A 的**列空间** $\text{Col}\ A = \text{Span}\{a_1, \cdots, a_n\}$，它是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间. 注意到，$\text{Col}\ A$ 中的每一个向量都是 A 的列向量的线性组合，设该线性组合的系数向量为 x，那么 $\text{Col}\ A$ 中的向量即为 Ax. 于是有 $\text{Col}\ A = b : b = Ax, x \in \mathbb{R}^n$. 这意味着列空间就是线性变换的值域.

至此，有必要将 $\text{Nul}\ A$ 和 $\text{Col}\ A$ 进行对比，尤其是它们的维数：

- 零空间需要使 Ax 有效，因此零空间的维数是矩阵的列数 n
- 列空间是由矩阵的列向量生成的，它的维数就是列向量的维数，即矩阵的行数 m
- $\text{Nul}\ A$ 的维数是方程 $Ax = 0$ 中自由变量的个数
- $\text{Col}\ A$ 的维数是 A 中主元列的个数

判断一个向量 u 是否属于某个矩阵的零空间或列空间：

- 若 $Au = 0$，则 u 属于 A 的零空间，这可以直接通过计算判断
- 若 $Ax = u$ 是相容的，则 u 属于 A 的列空间，这可以通过将 $[A \quad u]$ 化简为阶梯形判断

下图展示了二者的详细对比信息.

表 4-1　对 $m \times n$ 矩阵 A，$\text{Nul}\ A$ 与 $\text{Col}\ A$ 之间的对比

$\text{Nul}\ A$	$\text{Col}\ A$
1. $\text{Nul}\ A$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间.	1. $\text{Col}\ A$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间.
2. $\text{Nul}\ A$ 是隐式定义的，即仅给出了一个 $\text{Nul}\ A$ 中向量必须满足的条件 $(A\boldsymbol{x} = \mathbf{0})$.	2. $\text{Col}\ A$ 是显式定义的，即明确指出如何构建 $\text{Col}\ A$ 中的向量.
3. 求 $\text{Nul}\ A$ 中的向量需要时间，需要对 $[A \quad \mathbf{0}]$ 作行变换.	3. 容易求出 $\text{Col}\ A$ 中的向量. A 的列就是 $\text{Col}\ A$ 中的向量，其余的可由 A 的列表示出来.
4. $\text{Nul}\ A$ 与 A 的元素之间没有明显的关系.	4. $\text{Col}\ A$ 与 A 的元素之间有明显的关系，因为 A 的列就在 $\text{Col}\ A$ 中.
5. $\text{Nul}\ A$ 中的一个典型向量 $\boldsymbol{v}$ 具有 $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ 的性质.	5. $\text{Col}\ A$ 中一个典型向量 $\boldsymbol{v}$ 具有方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ 是相容的性质.
6. 给定一个特定的向量 $\boldsymbol{v}$，容易判断 $\boldsymbol{v}$ 是否在 $\text{Nul}\ A$ 中. 仅需计算 $A\boldsymbol{v}$.	6. 给定一个特定的向量 $\boldsymbol{v}$，弄清 $\boldsymbol{v}$ 是否在 $\text{Col}\ A$ 中需要时间，需要对 $[A \quad \boldsymbol{v}]$ 作行变换.
7. $\text{Nul}\ A = \{\mathbf{0}\}$ 当且仅当方程 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 仅有一个平凡解.	7. $\text{Col}\ A = \mathbb{R}^m$ 当且仅当方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 对每一个 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ 有一个解.
8. $\text{Nul}\ A = \{\mathbf{0}\}$ 当且仅当线性变换 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ 是一对一的.	8. $\text{Col}\ A = \mathbb{R}^m$ 当且仅当线性变换 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ 将 $\mathbb{R}^n$ 映上到 $\mathbb{R}^m$.

线性变换的**核**是所有满足 $T(u) = 0$ 的向量 u 的集合. 线性变换的**值域**是所有具有形式 $T(x)$ 的向量的集合.

如果线性变换是由一个矩阵变换得到的，则它的核就是该矩阵的零空间，它的值域就是该矩阵的列空间.

4.3 线性无关集和基

令 H 是向量空间 V 的一个子空间，V 中的向量集 $\mathcal{B}=\{b_1,\cdots,b_p\}$ 称为 H 的**一个基**，如果

- $\mathcal{B}$ 是一组线性无关集
- $H=Span\{b_1,\cdots,b_p\}$

定理 4.5（生成集定理）：令 S 是 V 中的向量集，$H=Span\{S\}$

- 若 S 中的某一向量是 S 中其余向量的线性组合，则 S 中去掉该向量后形成的集合仍然可以生成 H
- 若 $H\neq\{\mathbf{0}\}$，则 S 的某一子集是 H 的一个基

4.5 向量空间的维数

定理 4.9：若向量空间 V 具有一组基 $\mathcal{B}$，则 V 中任意包含多于 n 个向量的集合一定线性相关.

定理 4.10：若向量空间 V 有一组基含有 n 个向量，则 V 的每一组基一定恰好含有 n 个向量.

如果已有一组基有 n 个向量，那么由定理 4.9 可以推出，多于 n 个向量的集合一定不是基. 又假设存在某组基有少于 n 个向量，那么由定理 4.9 可以得出不存在含有 n 个向量的基，与事实矛盾，由此得出定理 4.10.

若 V 由一个有限集生成，则 V 称为有限维的，V 的**维数**写成 $\dim V$，是 V 中基向量的个数. 零向量空间的维数定义为 0. 如果 V 不是由一组有限集生成，则 V 称为无穷维的.

定理 4.11：H 是有限维向量空间 V 的子空间，H 中任意一个线性无关集均可以扩充成为 H 的一个基，且有 $\dim H\leqslant\dim V$.

定理 4.12（基定理）：令 V 是一个 p 维向量空间，$p\geqslant 1$，V 中任意含有 p 个元素的线性无关集必然是 V 的一个基. 任意含有 p 个元素且生成 V 的集合自然也是 V 的一个基.

4.6 秩

矩阵 A 中线性无关列的最大个数和线性无关行的最大个数是一致的，它被称为矩阵的秩.

定理 4.13：若两个矩阵 A 和 B 行等价，则它们的行空间相同. 若 B 是阶梯形矩阵，则 B 的非零行构成 A 的行空间的基、同时也构成 B 的行空间的基.

定义：矩阵 A 的秩即 A 的列空间的维数.

定理 4.14（秩定理）：$m\times n$ 矩阵 A 的列空间和行空间的维数相等，这个公共的维数是 A 的秩，它还等于 A 的主元列的个数，且满足方程 $\text{rank } A+\dim \text{Nul } A=n$，这个公式可以通俗地理解为：{主元列个数}+{非主元列个数}={列的个数}.

4.7 基的变换

定理 4.15：设 $\mathcal{B}=\{b_1,\cdots,b_n\}$ 和 $\mathcal{C}=\{c_1,\cdots,c_n\}$ 是向量空间 V 的基，则存在一个 $n\times n$ 矩阵 $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}}$ 使得

$$[x]_{\mathcal{C}}=\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}}[x]_{\mathcal{B}}$$

$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}}$ 的列是基 $\mathcal{B}$ 中向量的 $\mathcal{C}$ - 坐标向量，即

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}}=\begin{bmatrix}[b_1]_{\mathcal{C}} & [b_2]_{\mathcal{C}} & \cdots & [b_n]_{\mathcal{C}}\end{bmatrix}$$

该矩阵称为由 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{C}$ 的坐标变换矩阵. 它的逆矩阵为反方向的坐标变换矩阵.

上述定理的通俗解释为：先把 $\mathcal{B}$ 变为 $\mathcal{C}$，变换的矩阵就是 $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{C}$ 下的坐标，再将该矩阵作用与 x 相对于 $\mathcal{B}$ 的坐标，就得到了 x 相对于 C 的坐标.

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的基变换，有两种情况：一是从标准基变换至非标准基；二是非标准基之间的变换.

从标准基变换到非标准基，坐标变换矩阵就是直接将非标准基作为列向量的矩阵.

两个非标准基之间互相转换，需要先求出一个基相对于另一个基的坐标，这实际上就是解线性方程组.