《离散数学》尹宝林版 图论部分

第九章 基本概念

9.1 有向图及无向图

定义 9.1 有向图 D 是一有序偶 $\langle V,A\rangle$，即 $D=\langle V,A\rangle$，其中 V 是一非空集合，A 是 V 中的一个二元关系，分别称 V 和 A 是有向图 D 的顶点的集合和弧的集合. V 中的元素是有向图 D 的顶点，A 中的元素是有向图 D 的弧.

定义 9.2 无向图 G 是一有序偶 $\langle V,E\rangle$，即 $G=\langle V,E\rangle$，其中 V 是一非空集合，E 是 V 中元素的无序偶的集合，分别称 V 和 E 是图 G 的顶点的集合和边的集合. V 中的元素是图 G 的顶点，E 中的元素是图 G 的边，并将连接顶点 u 和 v 的边记为 $e=(u,v)$.

一个无自环并且无平行弧（或无平行边）的图，称为简单图. 如无特殊说明，以后所讨论的图都将是简单图，并且是有限简单图.

定义 9.3 设有两个无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 和 $G'=\langle V',E'\rangle$. 如果在它们的顶点集合之间存在一个双射的映射 $\tau:V\to V'$，并且当且仅当边 $e=(u_i,u_j)\in E$ 时才有边 $e'=(\tau(u_i),\tau(u_j))\in E'$，则称图 G 和 G' 是同构的.

同构是图族上的一个等价关系，因此可以按照同构关系把图族划分为等价类. 同一等价类中的图除了各顶点的标记可以不同之外，可以视为同一个图. 因此，对于图 G 为真的任何图论命题，对于同构于 G 的任何图也必为真.

9.2 图的基本结构

定义 9.4 在有向图 $D=\langle V,A\rangle$ 中，对于任何顶点 u，将 u 的引出弧的条数称为 u 的引出次数，并记为 $od(u)$；将 u 的引入弧的条数称为 u 的引入次数，并记为 $id(u)$. 顶点 u 的引出次数与引入次数之和，称为 u 的次数，并记为 $d(u)$，即

$$d(u)=od(u)+id(u)$$

在无向图的情况下，与顶点 u 相连接的边的条数称为 u 的次数，并表示为 $d(u)$.

定理 9.1 对于一个具有顶点集合 $V=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 的 (n,m) 图，

$$\sum_{i=1}^{n}d(u_i)=2m \tag{1}$$

9.3 子图

定义 9.5 设有两个图 $G=\langle V,E\rangle$ 和 $G_s=\langle V_s,E_s\rangle$. 如果 $V_s\subseteq V$ 并且 $E_s\subseteq E$，则称 G_s 为 G 的子图，并表示为 $G_s\subseteq G$.

定义 9.6 设 $G_s = \langle V_s, E_s \rangle$ 和 $G'_s = \langle V'_s, E'_s \rangle$ 是 $G = \langle V, E \rangle$ 的两个子图.如果 E'_s 是 E_s 相对于 E 的补集(即 $E'_s = E - E_s$),并且 V'_s 是与 E'_s 中的边关联的顶点的集合(如果 G 中有孤立顶点未包含在 V_s 中,则应包含在 V'_s 中),则称 G'_s 是 G_s 相对于 G 的补图,或简称 G'_s 是 G_s 的补图.

定义 9.7 设 $G_s = \langle V_s, E_s \rangle$ 是图 $G = \langle V, E \rangle$ 的子图.如果 G_s 包含了 E 中所有关联于 V_s 中的顶点的边,即若

$$E_s = \{e \mid e = (u,v) \in E \wedge u \in V_s \wedge v \in V_s\},$$

则称 G_s 为 V_s 所导出的子图,或简称图 G 的导出子图.

定义 9.8 设 $G_s = \langle V_s, E_s \rangle$ 是图 $G = \langle V, E \rangle$ 的子图.如果 G_s 包含了 G 的所有顶点,即若 $V_s = V$,则称 G_s 为 G 的生成子图.

9.4 连通性

定义 9.9 在有向图 $D = \langle V, A \rangle$ 中,把弧的一个序列 $(a_1, a_2, \cdots, a_t)$ 称为一条通路,其中 $a_i \in A$ 并且 $a_i = \langle u_i, u_{i+1} \rangle (u_i \in V,\ i = 1,2,\cdots,t)$.

由上述定义可知,通路中除最后一条弧外,每条弧的终点都是下一条弧的始点,而除了第一条弧外,每条弧的始点都是前一条弧的终点.也就是说,通路是一个每条弧的方向都一致向后的弧的序列.

对于有向图的一条通路,如果每条弧的出现不超过一次,则称该通路为简单通路;如果每个顶点的出现不超过一次(从而每条弧的出现也不超过一次),则称该通路为基本通路.基本通路一定是简单通路.

定义 9.10 如果存在从顶点 u 到顶点 v 的通路,则说顶点 u 可以到达顶点 v.

定理 9.2 如果从顶点 u 可以到达顶点 v,则存在从 u 到 v 的基本通路.

定义 9.11 在有向图 $D = \langle V, A \rangle$ 中,一条半通路是弧的一个序列 $(a_1, a_2, \cdots, a_t)$,其中 $a_i \in A$ 并且 $a_i = \langle u_i, u_{i+1} \rangle$ 或者 $a_i = \langle u_{i+1}, u_i \rangle$, $u_i \in V, i = 1,2,\cdots,t$.

定义 9.12 如果存在从顶点 u 到顶点 v 的半通路,则说顶点 u 连接到顶点 v.

显然,如果 u 连接到 v,则 v 也连接到 u,因为将从 u 到 v 的半通路反向,便是从 v 到 u 的半通路.

定义 9.13 设 u 和 v 是有向图 $D = \langle V, A \rangle$ 中的任意两个顶点.定义从 u 到 v 的距离是从 u 到 v 的最短通路的长度,记为 $d(u,v)$.如果不存在从 u 到 v 的通路,则将从 u 到 v 的距离定义为 $d(u,v) = \infty$.

要注意,可能存在若干条从 u 到 v 的通路,它们有相同的最短长度.

定理 9.3 如果 u 可以到达 v 并且 v 可以到达 w,则

$$d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$$

定理 9.4 在一个具有 n 个顶点的有向图中,任何基本通路的长度都不超过 $n-1$,而任何基本回路的长度都不超过 n.

定义 9.14 一个有向图 $D = \langle V, A \rangle$,如果对它的每一对顶点 u 和 v,可以从 u 到达 v 并且可以从 v 到达 u,则称 D 为强连通的.

定义 9.15 一个有向图 $D = \langle V, A \rangle$,如果对于它的每一对顶点 u 和 v,或者可以从 u 到达 v,或者可以从 v 到达 u,则称 D 为单向连通的.

定义 9.16 一个有向图 $D = \langle V, A \rangle$,如果对于它的每一对顶点 u 和 v, u 和 v 是连接的,则称 D 为弱连通的.

定义 9.17 一个有向图 $D = \langle V, A \rangle$,如果它不是弱连通的,则称 D 为不连通的.

定义 9.18 一个有向图 $D=\langle V,A\rangle$，如果它不是弱连通的，就说它是 0 度连通的；如果它是弱连通的但不是单向连通的，就说它是 1 度连通的；如果它是单向连通的但不是强连通的，就说它是 2 度连通的；如果它是强连通的，就说它是 3 度连通的.

完备通路是通过有向图中所有顶点的一条通路；类似地，完备半通路和完备回路分别是通过所有顶点的一条半通路和一条回路.

定理 9.5 有向图 D 有一条完备回路当且仅当它是强连通的.

定理 9.6 有向图 D 有一条完备通路当且仅当它是单向连通的.

定理 9.7 有向图 D 有一条完备半通路当且仅当它是弱连通的.

9.5 顶点基和强分图

定义 9.19 在有向图 $D=\langle V,A\rangle$ 中，设有顶点子集 $B\subseteq V$. 如果不在 B 中的每个顶点都可以从 B 的某个顶点到达，或者说可以从 B 到达，并且 B 是极小的，则称 B 为 D 的一个顶点基. 这里“极小”的含义是，不再有 B 的真子集具有上述性质.

定义 9.20 在有向图 $D=\langle V,A\rangle$ 中，一个极大强连通导出子图，称为 D 的一个强连通分图或强分图. 这里“极大”的含义是，对该子图再加入其他顶点，它便不再是强连通的.

为了简便，就用导出强分图的顶点集合来表示强分图. 如在图 9.23 的有向图 D_{12} 中，$\{u,v,w\}$，$\{x\}$，$\{y\}$，$\{t\}$ 都是强分图.

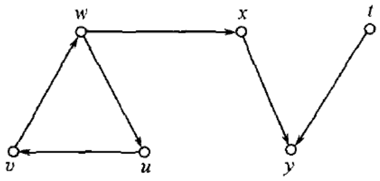

图 9.23 强分图

定理 9.8 在一有向图 $D=\langle V,A\rangle$ 中，每一个顶点在一个且仅在一个强分图中.

定义 9.21 设有向图 $D=\langle V,A\rangle$ 有强分图 $K_1,K_2,\cdots,K_p$，按如下要求构造一个新的有向图 D^*

(1) D^* 的顶点集合 $V(D^*)=\{K_1,K_2,\cdots,K_p\}$；

(2) 当且仅当 $i\neq j$ 并且对于某些顶点 $u\in K_i$ 及 $v\in K_j$，在 D 中存在 u 到 v 的弧时，在 D^* 中从 K_i 到 K_j 画一条弧.

这样得到的有向图 D^* 称为有向图 D 的压缩.

定理 9.9 有向图 D 的压缩 D^* 是无回路图，即 D^* 中没有回路.

定理 9.10 一个无回路有向图具有一个唯一的顶点基，它由所有无引入弧的顶点所组成.

定理 9.11 设 D^* 是有向图 D 的压缩，B^* 是 D^* 的唯一顶点基，则 D 的顶点基是由 D 在 B^* 中的每一个强分图中的一个顶点所组成的集合 B.

定理 9.12 一个有向图的任何顶点基具有相同数目的顶点.

第十章　通路问题

10.1　最短通路

定义 10.1　在带权有向图 D 中,一条通路的长度是这条通路所经过的各条弧的长度之和,即:如果 P 是 D 中的一条通路,并且 P 所含的弧的集合也用 P 表示,则 P 的长度 $l(P)$ 为

$$l(P) = \sum_{a \in P} l(a)$$

定义 10.2　在带权有向图 D 中,给定一个称为始点的顶点 v 和一个称为终点的顶点 w,如果 P 是从 v 到 w 的通路中长度最小的通路,则称 P 为从 v 到 w 的最短通路,并称其长度 $l(P)$ 为从 v 到 w 的距离,表示为 $d(v,w) = l(P)$.

10.2　关键通路

定义 10.3　在一给定的工序流线图中,设从发点 u_1 到事件 u_j 有 m 条通路 $P_1, P_2, \cdots, P_m (m \geqslant 1)$, $t(P_i)$ 表示通路 P_i 上各个作业所用的时间之和(即构成通路 P_i 的各条弧上的权值之和,$i = 1,2,\cdots,m$),则称 $t(P_1), t(P_2), \cdots, t(P_m)$ 中的最大值为事件 u_j 的最早完成时间,表示为 $TE(u_j)$,即

$$TE(u_j) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \{t(P_i)\}$$

定义 10.4　在一给定的工序流线图中,每一事件 u_j 有一个最迟完成时间,它是完成该事件所需时间的最大值,使得用这个最大时间完成该事件后,不会增加整个计划的最早完成时间. 事件 u_j 的最迟完成时间表示为 $TL(u_j)$.

显然,收点 u_n 的最迟完成时间与最早完成时间应相等,即 $TL(u_n) = TE(u_n)$. 对于不是收点的任一事件 u_j,设从 u_j 到收点 u_n 有 l 条通路 $P'_1, P'_2, \cdots, P'_l (l \geqslant 1)$, $t(P'_i)$ 表示通路 P'_i 上各个作业所用的时间之和(即构成通路 P'_i 的各条弧上的权值之和,$i = 1,2,\cdots,l$),则根据定义 10.4 可知,u_j 的最迟完成时间等于整个计划的最早完成时间减去 $t(P'_1), t(P'_2), \cdots, t(P'_l)$ 中的最大值,即

$$TL(u_j) = TE(u_n) - \max_{1 \leqslant i \leqslant l} \{t(P'_i)\} \tag{1}$$

定义 10.5　在一给定的工序流线图中,从发点到收点的这样一条通路称为关键通路,在这条通路的各个顶点上,其 TE 值与 TL 值相等,并且各弧的权值之和有最大值.

第十一章　图的矩阵表示

11.1　邻接矩阵

定义 11.1　设 $D = \langle V, A\rangle$ 是一有向图，$V = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$. 我们称矩阵 $\boldsymbol{M} = (m_{ij})$ 是 D 的邻接矩阵，如果

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当} \langle u_i, u_j\rangle \in A \text{ 时} \\ 0, & \text{当} \langle u_i, u_j\rangle \notin A \text{ 时} \end{cases}$$

定理 11.1　设 $D = \langle V, A\rangle$ 是有向图，$V = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，并设 $\boldsymbol{M} = (m_{ij})$ 是 D 的邻接矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{M}^l (l = 1, 2, 3, \cdots)$ 中第 i 行第 j 列的元素，等于从 u_i 到 u_j 长度为 l 的通路的条数.

证明　对 l 用数学归纳法进行证明，并设 $\boldsymbol{M}^l = (m_{ij}^{(l)})$. 当 $l = 1$ 时，显然定理成立. 现在设当 $l = k$ 时定理成立，证明 $l = k + 1$ 时定理成立.

一方面，$\boldsymbol{M}^{k+1} = (m_{ij}^{(k+1)})$，另一方面，$\boldsymbol{M}^{k+1} = \boldsymbol{M}^k \boldsymbol{M}$，而 $\boldsymbol{M}^k = (m_{ij}^{(k)})$，所以

$$m_{ij}^{(k+1)} = \sum_{r=1}^{n} m_{ir}^{(k)} m_{rj}$$

在上面的求和式中，对于任何确定的 r，当且仅当 $m_{ir}^{(k)} \geqslant 1$ 和 $m_{rj} = 1$ 时，$m_{ir}^{(k)} m_{rj} \geqslant 1$，否则 $m_{ir}^{(k)} m_{rj} = 0$. 而 $m_{ir}^{(k)} \geqslant 1$ 和 $m_{rj} = 1$ 意味着，从 u_i 到 u_r 有 $m_{ir}^{(k)}$ 条长度为 k 的通路并且从 u_r 到 u_j 有一条弧，从而 $m_{ir}^{(k)} m_{rj}$ 的值意味着从 u_i 到 u_j 有 $m_{ij}^{(k)}$ 条长度为 $k + 1$ 的通路，这些通路的倒数第二个顶点都是 u_r. 因此，令 $r = 1, 2, \cdots, n$，计算和式的值，$m_{ij}^{(k+1)}$ 就等于从 u_i 到 u_j 的长度为 $k + 1$ 的通路的条数. 所以，对于 $l = k + 1$ 定理成立，于是定理得证.　　证毕.

定义 11.2　设 $G = \langle V, E\rangle$ 是一无向图，$V = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$. 我们称矩阵 $\boldsymbol{M} = (m_{ij})$ 是 G 的邻接矩阵，如果

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当} (u_i, u_j) \in E \text{ 时} \\ 0, & \text{当} (u_i, u_j) \notin E \text{ 时} \end{cases}$$

定理 11.2　设 $G = \langle V, E\rangle$ 是无向图，$V = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，并设 $\boldsymbol{M} = (m_{ij})$ 是 G 的邻接矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{M}^l (l = 1, 2, 3, \cdots)$ 中第 i 行第 j 列上的元素和第 j 行第 i 列上的元素，等于 u_i 和 u_j 之间的长度，等于 l 的链的条数.

11.2　有向图的可达性矩阵

定义 11.3　设 $D = \langle V, A\rangle$ 是一有向图，$V = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，我们称 $\boldsymbol{R} = (r_{ij})$ 是 D 的可达性矩阵，如果

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } u_i \text{ 可以到达 } u_j \text{ 时} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

定理 11.3 设有向图 D 有 n 个顶点,$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 分别是 D 的可达性矩阵和邻接矩阵,则

$$\boldsymbol{R} = B(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^2 + \cdots + \boldsymbol{M}^{n-1}) = B[(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M})^{n-1}]$$

这里 $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵,B 是布尔函数.

证明 先证第一个等式. 如果从 u_i 可以到达 u_j,则 $\boldsymbol{R}$ 中 $r_{ij} = 1$. 根据第九章的定理9.2和定理9.4,这时一定存在从 u_i 到 u_j 的基本通路,并且其长度不超过 $n-1$. 因此,至少有某个 $l(1 \leqslant l \leqslant n-1)$ 使 $\boldsymbol{M}^l$ 的第 i 行第 j 列上的元素 $m_{ij}^{(l)} \geqslant 1$,从而使 $B(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^2 + \cdots + \boldsymbol{M}^{n-1})$ 中第 i 行第 j 列上的元素为 1,与 r_{ij} 相等. 如果 u_j 从 u_i 不可达,则 $\boldsymbol{R}$ 中 $r_{ij} = 0$. 这时从 u_i 到 u_j 不存在任何通路,因此对于任何 $\boldsymbol{M}^l(l = 1,2,\cdots,n-1)$,其第 i 行第 j 列上的元素 $m_{ij}^{(l)}$ 均为 0,从而 $B(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^2 + \cdots + \boldsymbol{M}^{n-1})$ 中第 i 行第 j 列上的元素也为 0,与 r_{ij} 相等.

为了证明第二个等式,可以将 $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M})^{n-1}$ 展开:

$$(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M})^{n-1} = \boldsymbol{I} + \mathrm{C}_{n-1}^{1}\boldsymbol{M} + \mathrm{C}_{n-1}^{2}\boldsymbol{M}^2 + \cdots + \mathrm{C}_{n-1}^{n-1}\boldsymbol{M}^{n-1}$$

该展开式与 $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^2 + \cdots + \boldsymbol{M}^{n-1}$ 相比,其相应的第 i 行第 j 列上的元素显然或者都是 0 或者都是非零值,再根据布尔函数 B 的定义,便知 $B(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^2 + \cdots + \boldsymbol{M}^{n-1})$ 与 $B[(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M})^{n-1}]$ 相等,从而可知 $\boldsymbol{R} = B[(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M})^{n-1}]$ 成立. 证毕.

定理 11.4 设 $\boldsymbol{R} = (r_{ij})$ 是有向图 D 的可达性矩阵,并设 $\boldsymbol{R}^2 = (s_{ij})$,则

(1) 包含顶点 u_i 的强分图,由 $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行(或列)中等于 1 的元素对应的顶点所确定;

(2) 在包含顶点 u_i 的强分图中,顶点的数目等于 s_{ii}.

证明 (1) 顶点 u_i 可以到达 u_j,当且仅当 $r_{ij} = 1$;顶点 u_j 可以到达 u_i,当且仅当 $r_{ji} = 1$. 因此,u_i 和 u_j 是互相可达的,当且仅当 $r_{ij}r_{ji} = 1$. 而 $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = (r_{ij}r_{ji})$,所以矩阵 $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 中第 i 行(或列)中等于 1 的元素所对应的顶点和 u_i 同属一个强分图.

(2) $s_{ii} = \sum\limits_{k=1}^{n} r_{ik}r_{ki}$,这里 n 是 D 的顶点数. 对于任何确定的 k,当且仅当 $r_{ik}r_{ki} = 1$ 时,u_i 和 u_k 是互相可达的. 因此,和式 $\sum\limits_{k=1}^{n} r_{ik}r_{ki}$ 中有几个这样的 k,也即 s_{ii} 的值是几,就有几个顶点和 u_i 可以互达,所以 s_{ii} 等于包含顶点 u_i 的强分图的顶点数目. 证毕.

$$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

11.3 关联矩阵

定义 11.4 设 $D = \langle V, A \rangle$ 是一有向图,并且不是零图,$V = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$,$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$,我们称 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 是 D 的关联矩阵,如果

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } u_i \text{ 是弧 } a_j \text{ 的始点时} \\ -1, & \text{当 } u_i \text{ 是弧 } a_j \text{ 的终点时} \\ 0, & \text{当 } u_i \text{ 不是弧 } a_j \text{ 的端点时} \end{cases}$$

定义 11.5 设 $G=\langle V,E\rangle$ 是一无向图,并且不是零图,$V=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_p\}$,我们称 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是 G 的关联矩阵,如果

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当 } u_i \text{ 是 } e_j \text{ 的端点时}\\ 0, & \text{当 } u_i \text{ 不是 } e_j \text{ 的端点时}\end{cases}$$

第十二章　树

12.1　树的一般定义

定义 12.1　一个无向图 T,如果连通且无圈,则称 T 为树.

定理 12.1　设 T 是树,则在 T 的任何两个不同的顶点之间有唯一的一条基本链.若在 T 的两个不邻接的顶点之间加上一条边 e,则图 $T+e$ 仅有一个圈.

定理 12.2　设树 T 是一个(n,m) 图,则 $m=n-1$.

定理 12.3　在非平凡树 T 中至少存在两个次数为 1 的顶点.

定理 12.4　设 T 是非平凡(n,m) 无向图,则下面五种说法是等价的.

(1) T 是树.

(2) T 连通且无圈.

(3) T 的每一对顶点之间有唯一的一条基本链.

(4) T 连通且 $m=n-1$.

(5) T 无圈且 $m=n-1$.

12.2　根树与有序树

定义 12.2　若一个有向树有一个引入次数为0 的顶点,而所有其他顶点的引入次数都为 1,则称该有向树为根树.引入次数为 0 的顶点称为树根.

定义 12.3　在根树中,称引出次数为 0 的顶点为树叶,称树根和树叶以外的其他顶点为分支顶点.任何顶点的级,是从树根出发到该顶点的通路的长度.

定义 12.4　若根树的顶点或弧都已指定次序,则称这样的根树为有序树.

12.3　二元树

定义 12.5　若根树中每一个顶点的引出次数都小于或等于 m,则称这种根树为 m 元树.若每一个顶点的引出次数都等于 m 或0,则称这种根树为完全 m 元树.在 m 元树中,若任何顶点的 m 个(或少于 m 个)儿子分别有 m 个位置,则称这样的 m 元树为位置 m 元树.

定义 12.6　使权

$$m(T)=\sum_{i=1}^{t}P_i l_i$$

取最小值的带权二元树,称为最优二元树.

定理 12.5　设 $P_1\leqslant P_2\leqslant\cdots\leqslant P_t$,存在一个带权 $P_1,P_2,\cdots,P_t$ 的最优二元树,使得带权 P_1 和 P_2 的树叶为兄弟.

定理 12.6　设 $P_1\leqslant P_2\leqslant\cdots\leqslant P_t$,$T$ 是带权 $P_1+P_2,P_3,\cdots,P_t$ 的二元树.为 T 中带权 P_1+P_2 的树叶增加两个分别带权 P_1,P_2 的儿子,得到带权 $P_1,P_2,\cdots,P_t$ 的新二元树 T'.那么,T 是带权 $P_1+P_2,P_3,\cdots,P_t$ 的最优二元树当且仅当 T' 是带权 $P_1,P_2,\cdots,P_t$ 的最优二元树.

12.4 生成树

定义 12.7 如果无向图 G 的一个生成子图 T 是树，则称 T 是图 G 的一个生成树.

定理 12.7 **设无向图 G 是连通的，则 G 至少有一个生成树.**

定义 12.8 设 G 是带权连通无向图，在 G 的所有生成树中，权值最小的树称为 G 的最小生成树.

12.5 割集

定义 12.9 设 $G=\langle V,E\rangle$ 为连通无向图. 如果 G 中有边集合 $E'\subseteq E$，把 E' 中的所有边去掉将使图 G 分离为两个连通分支，但去掉 E' 的任一真子集，图仍将是连通的，则称边集合 E' 为图 G 的一个割集.

定理 12.8 一个圈和任何生成树的补至少有一条共同边.

定理 12.9 一个割集和任何生成树至少有一条共同边.

定理 12.10 任何一个圈和任何一个割集都有偶数条(包括零条)共同边.

定理 12.11 给定图 G 的生成树 T_G. 对于 T_G，设 $D=\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 是一个基本割集，其中 e_1 是树枝，$e_2,e_3,\cdots,e_k$ 是弦，则 e_1 包含在对应于 $e_i(i=2,3,\cdots,k)$ 的基本圈里，但 e_1 不包含在任何其他的基本圈里.

定理 12.12 给定图 G 的生成树 T_G. 对于 T_G，设 $C=(e_1,e_2,\cdots,e_k)$ 是一个基本圈，其中 e_1 是弦，$e_2,\cdots,e_k$ 是树枝，则 e_1 包含在对应于 $e_i(i=2,3,\cdots,k)$ 的基本割集中，但 e_1 不包含在任何其他的基本割集中.

第十三章　穿程问题

13.1　欧拉图

定义 13.1　无向图 G 中的一条闭合链，若穿过 G 中的每条边一次且仅一次，则称这样的闭合链为欧拉圈. 具有欧拉圈的图称为欧拉图.

定理 13.1　当且仅当连通无向图 G 的每个顶点都是偶顶点时，图 G 是欧拉图.

定义 13.2　若无向图 G 中存在两顶点 u_i 和 u_j，有一条连接 u_i 和 u_j 的非闭合链，它穿过 G 中的每条边一次且仅一次，则称这样的链为欧拉链.

定理 13.2　在连通无向图 G 中，当且仅当只有 u_i 和 u_j 是奇顶点时，存在连接 u_i 和 u_j 的欧拉链.

对于有向图，存在与定理 13.1 类似的结论：当且仅当强连通有向图 D 的每一个顶点的引入次数和引出次数相等时，图 D 是欧拉图. 同样，可以定义有向图中的欧拉通路并得出与定理 13.2 类似的结论.

13.2　哈密顿图

定义 13.3　无向图 G 中穿过每个顶点一次且仅一次的圈，称为哈密顿圈，具有哈密顿圈的图称为哈密顿图.

定义 13.4　无向图 G 中穿过每个顶点一次且仅一次的非闭合链，称为哈密顿链. 有向图 D 中穿过每个顶点一次且仅一次的非闭合通路，称为哈密顿通路.

定理 13.3　设 G 是具有 n 个顶点的连通无向图. 若 G 中每一对顶点的次数之和大于或等于 $n-1$，则 G 中存在一条哈密顿链.

定理 13.4　在一个有向完全图中必存在一条哈密顿通路.

第十四章　二分图的匹配问题

14.1　基本概念

定义 14.1　设 $G = \langle V,E \rangle$ 是一个无向图，如果可以把 V 划分为两个非空子集 X 和 Y，使得同一个子集中的任何两个顶点都不邻接，则称图 G 为一个二分图. 子集 X 和 Y 称为 G 的互补顶点子集.

定理 14.1　非平凡无向图 G 的所有圈的长度都是偶数当且仅当 G 是一个二分图.

定义 14.2　设 $G = \langle V,E \rangle$ 是一个二分图，如果 E 的一个子集 M 中的任何两条边都不相邻，则称 M 为二分图 G 的一个匹配.

14.2　二分图的最大匹配

定义 14.3　设 M 是二分图 G 的一个匹配. 如果 G 中有这样一条基本链，链中任何相邻的两条边中恰有一条属于 M，则称这样的链为关于 M 的交错链，或简称交错链.

定义 14.4　若一条交错链的两个端点是非饱和顶点，则称该交错链为可扩充链.

定理 14.2　设 M 是二分图 G 的一个匹配，当且仅当 G 中不存在关于 M 的可扩充链时，M 是 G 的最大匹配.

14.3　从 X 到 Y 的匹配

设 U 是 X 的一个子集，用 $\Gamma(U)$ 表示 U 的邻域，即与 U 中的顶点邻接的所有顶点的集合. 显然，$\Gamma(U) \subseteq Y$.

定理 14.3　设 G 是一个具有互补顶点子集 X 和 Y 的二分图. 当且仅当对于 X 的任意子集 U，满足如下的相异性条件

$$\#\Gamma(U) \geqslant \#U \tag{1}$$

时，存在 G 的从 X 到 Y 的匹配.

定理 14.4　设 G 是具有互补顶点子集 X 和 Y 的二分图. 如果能找到一个正整数 t，使对 X 的任何顶点 x 有 $d(x) \geqslant t$，对 Y 的任何顶点 y 有 $d(y) \leqslant t$，则图 G 存在从 X 到 Y 的匹配. 定理中的条件称为“t 条件”.

第十五章　平面图及色数

15.1　平面图

定义 15.1　若能将一个无向图 G 这样画在平面上：G 的边在顶点之外没有任何交叉，则称 G 为平面图；否则称 G 为非平面图.

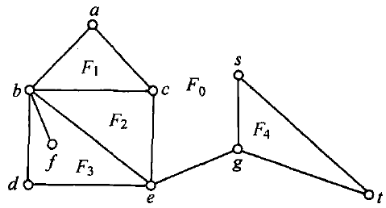

图 15.6　平面图的面

定理 15.1　对于具有 k 个面的 (n,m) 连通平面图 G，下面的等式（称为欧拉公式）恒成立：

$$n - m + k = 2 \tag{1}$$

定义 15.2　设 G 是一个平面图，如果连接 G 的任意两个不邻接顶点 u 和 v，都会使 $G+(u,v)$ 变成非平面图，则称 G 是极大平面图.

定理 15.2　设 G 是至少具有三个顶点的极大平面图，则 G 的任何一个面都是 K_3.

综合以上讨论可知，对于任何一个至少具有三个顶点的 (n,m) 简单连通平面图 G，下面的关系式恒成立：

$$m \leqslant 3n - 6 \tag{3}$$

应当注意，关系式(3) 只是一个必要条件而不是充分条件，不满足(3) 式的连通图一定是非平面图，然而满足(3) 式的连通图未必是平面图. 例如 $K_{3,3}$，$n=6$，$m=9$，$3\times 6-6=12$，(3) 式成立，但 $K_{3,3}$ 是一个非平面图. 为了判别 $K_{3,3}$ 的非平面性，再利用欧拉公式，推导出另外一个关系式.

$$m \leqslant 2n - 4 \tag{4}$$

因此，对于每个面的周界包含四条或更多条边的连通平面图，关系式(4) 恒成立.

如果像图 15.9(a) 所示那样，在图的边上插入一个新的次数为 2 的顶点，使一条边分成两条边；或者像图 15.9(b) 所示那样，对关联于同一个次数为 2 的顶点的两条边，将这个顶点去掉，使两条边合为一条边，这样做显然不会改变图的平面性. 由此可以引申出如下的定义：两个图 G_1 和 G_2 称为是同胚的，如果它们是同构的，或者通过反复插入和（或）除去次数为 2 的顶点，它们能变成同构的图. 例如，任何两个圈图是同胚的，又如图 15.9(c) 中的两个图是同胚的.

定理 15.3(库拉托夫斯基定理)　图 G 是平面图,当且仅当它不含同胚于 $K_{3,3}$ 或 K_5 的子图.

15.2　色数

定义 15.3　设 G 是一个平面图,具有 k 个面 $F_1,F_2,\cdots,F_k$,其中包括无限面.称按如下方法构造的一个图 G^* 是 G 的对偶图:

(1) 在 G 的每个面 F_i 的内部取一点 f_i,作为 G^* 的一个顶点;

(2) 对应于 G 的任意一条边 e,

① 如果 e 是 G 的两个面 F_i 和 $F_j(i\neq j)$ 的公共边,则与 e 交叉着连接一条 G^* 的边 (f_i,f_j);

② 如果 e 仅是 G 中一个面 F_j 周界上的边(悬挂边或桥),则与 e 交叉着连接一个 G^* 的自环 (f_i,f_i).

定义 15.4　对给定无向图 G 的顶点进行涂色,如果每个顶点只涂一种颜色并且任何两个邻接的顶点涂的颜色不相同,则称为图的一个正常着色.正常着色图 G 所必需的最少的颜色数,表示为 $\chi(G)$,称为图 G 的色数.

对于零图 G,$\chi(G)=1$;

对于具有 n 个顶点的完全图 K_n,因为任何两个顶点都是邻接的,所以 $\chi(K_n)=n$;

若图 G 是具有 n 个顶点的一个圈(圈图),则

$$\chi(G)=\begin{cases}2, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}\\ 3, & \text{当 } n \text{ 为奇数时}\end{cases}$$

现在还没有一个简单的方法可以确定任何一个图 G 的色数,但是韦尔奇(Welch)和鲍威尔(Powell)提出了一个简单的算法(称为韦尔奇 - 鲍威尔算法),可以对任何一个图 G 进行正常着色.算法的步骤是:

(1) 将图 G 的顶点按次数递减的顺序进行排列(如果有些顶点的次数相同,排序可能不唯一);

(2) 用一种颜色涂染序列中第一个顶点,然后将这种颜色依次涂染与已涂该色的顶点不邻接的每一顶点;

(3) 余下的未涂色的顶点构成一个新的顶点序列.换一种与前边均不相同的颜色,对这个新序列按照与步(2)类似的方法进行涂色,重复这个过程,直至所有的顶点都已涂色.

定理 15.4(五色定理)　设 G 为任一平面图,则 $\chi(G)\leqslant 5$.