《离散数学》尹宝林版 集合论部分

第五章 集合的基本概念及其运算

5.1 集合与元素

集合通常有两种表示方法：抽象法和枚举法。枚举法是指把集合中所有元素全部列举出来，所有元素用｛ ｝括起来，元素之间用逗号分开。抽象法通过给出集合的代表元素所必须满足的条件来确定属于这个集合的全部元素。

定义 5.1 （抽象原则）任给一个性质 P,那么就确定了一个集合 A,A 的元素恰好是具有性质 P 的对象，也就是说集合 A 正是由具有性质 P 的所有对象构成的整体，即 $A=\{x \mid P(x)\}$.

每给定一个性质 P,就确定一个集合 A,A 是由具有性质 P 的客体组成的. 另一方面，集合 A 中的每一个元素都具有性质 P,即

$$\forall x(P(x) \leftrightarrow x \in A) \text{ 或 } \forall x(P(x) \leftrightarrow x \in \{x \mid P(x)\})$$

5.2 集合间的相等和包含关系

定义 5.2 设 A,B 为任意两集合，当且仅当 A,B 两集合都含有相同的元素时，称 A,B 两集合相等，并记为 $A=B$.

集合的相等定义有时又称为外延性公理. 用逻辑表达式表示为

$$(A=B) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B) \text{ 或}$$

$$(A=B) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \in A)$$

其中 $\Leftrightarrow$ 表示当且仅当.

定义 5.3 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 为 B 的子集，也称 A 包含于 B 或 B 包含 A,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.

定义 5.4 设 A,B 为两个集合. 如果 $A \subseteq B$ 并且 $A \neq B$,则称集合 A 为 B 的真子集，也称 A 真包含于 B,或 B 真包含 A,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

定理 5.1 设 A,B 是两个集合，$A=B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 并且 $B \subseteq A$.

推论 对任意集合 A,$A \subseteq A$.

定理 5.2 设 A,B 和 C 都是集合，若 $A \subseteq B$ 并且 $B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$.

定义 5.5 在集合的研究中，如果所讨论的集合都是某一固定集合 U 的子集，则称集合 U 为全域集合或全集，记作 U.

定义 5.6 不含有任何元素的集合称为空集，用 $\varnothing$ 表示.

定理 5.3 设 $\varnothing$ 是一个空集，A 是一个任意集合，则 $\varnothing \subseteq A$.

定理 5.4 空集是唯一的.

5.3 幂集

定义 5.7 集合 A 的全部子集的集合称为 A 的幂集,用$\rho(A)$ 表示,即 $\rho(A)=\{X\mid X\subseteq A\}$,或$\rho(A)=\{X\mid(\forall t)(t\in X\rightarrow t\in A)\}$.

空集 $\varnothing$ 的幂集仅含有元素 $\varnothing$,因此 $\rho(\varnothing)=\{\varnothing\}$.

单元集 $S_1=\{a\}$ 的幂集为 $\rho(S_1)=\{\varnothing,\{a\}\}=\{\varnothing,S_1\}$.

二元集 $S_2=\{a,b\}$ 的幂集为 $\rho(S_2)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},S_2\}$.

定义 5.8 有穷集合 A 的元素个数称为 A 的基数,记为 $\#A$.

定理 5.5 设 A 是一个 n 元集合,A 具有基数 $\#A$,则$\#\rho(A)=2^{\#A}$.

（证明方法：使用二进制编码）

5.4 集合的运算

定义 5.9 设 A 和 B 是两个集合.

(1) 集合 A 和 B 的交集,记为 $A\cap B$.

$$\begin{aligned}A\cap B&=\{x\mid x\text{ 既是 }A\text{ 的元素又是 }B\text{ 的元素}\}\\&=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}\end{aligned}$$

(2) 集合 A 和 B 的并集,记为 $A\cup B$.

$$\begin{aligned}A\cup B&=\{x\mid x\text{ 或是 }A\text{ 的元素或是 }B\text{ 的元素}\}\\&=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}\end{aligned}$$

(3) 集合 A 和 B 的差集,记为 $A-B$,又称 B 在 A 中的相对补集或 B 关于 A 的相对补集.

$$\begin{aligned}A-B&=\{x\mid x\text{ 是 }A\text{ 的元素,但 }x\text{ 不是 }B\text{ 的元素}\}\\&=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}\end{aligned}$$

定义 5.10 若集合 A 和 B 没有公共元素,即 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 和 B 是不相交的.

定义 5.11 设 C 是一个集合的聚合,如果 C 中任何两个不同的元素都是不相交的,则称该聚合为不相交的聚合,不相交聚合的元素称为互不相交的元素.

定义 5.12 设 U 是全集,A 是 U 的子集,A 关于 U 的相对补集 $U-A$,称为 A 的绝对补集,通常就称为补集,并记作 $\sim A$.

定义 5.13 设 A 和 B 是任意两集合. A 和 B 的对称差集记为 $A+B$,则

$$A+B=(A-B)\cup(B-A)$$

或

$$A+B=(A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A)$$

定理 5.7 设 A 是全集 U 的任意子集,则同一律成立:

$$A\cup\varnothing=A$$
$$A\cap U=A$$

定理 5.8 设 A 是全集 U 中任意子集,则否定律成立:

$$A\cup\sim A=U$$
$$A\cap\sim A=\varnothing$$

定理 5.9 设 A 和 B 是全集 U 的子集. $B=\sim A$ 当且仅当 $A\cup B=U$ 和 $A\cap B=\varnothing$.

定理 5.10(德 · 摩根定律) 设 A 和 B 是全集 U 中任意子集,则

(1) $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$

(2) $\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

定理 5.11 设 A 和 B 是全集 U 的子集. 下列四个关系等价:

(1) $A \subseteq B$

(2) $A \cup B = B$

(3) $A \cap B = A$

(4) $A - B = \varnothing$

5.5 有穷集的计数原理

引理 若 A 和 B 是有穷集合,且 $A \cap B = \varnothing$,则

定理 5.12 若 A 和 B 是有穷集合,则

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

推论 若 A、B 和 C 是有穷集合,则

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

5.6 集合的归纳定义法

定义 5.16 设 Σ 是字母表,则 Σ^* 定义是

(1) 基础语句:$\varepsilon \in \Sigma^*$

(2) 归纳语句:若 $x \in \Sigma^*$ 和 $a \in \Sigma$,则 $xa \in \Sigma^*$

(3) 极限语句:集合 Σ^* 含有经过有限次应用语句(1) 和(2) 构造出来的元素.

定理 5.14 设 A 和 B 是 Σ^* 的子集,且设 m 和 n 是任意自然数,则

(1) $A^m A^n = A^{m+n}$

(2) $(A^m)^n = A^{mn}$

(3) $A \subseteq B \to A^n \subseteq B^n$

定义 5.21 设 A 是 Σ^* 的子集,则集合 A^* 定义为

$$A^* = \cup \{A^n \mid n \text{ 是自然数}\}$$

即

$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \cdots$$
$$= \{\varepsilon\} \cup A \cup A^2 \cdots$$

集合 A^* 称为星闭包或简称 A 的闭包.

集合 A^+ 定义为

$$A^+ = A^1 \cup A^2 \cup \cdots$$

A^+ 称为 A 的正闭包.

$x \in A^+$ 当且仅当存在正整数 $n \in \mathbf{N}$, $x \in A^n$.

$x \in A^*$ 当且仅当存在 $n \in \mathbf{N}$, $x \in A^n$.

由 $\varnothing$ 和 $\varnothing^*$ 定义可知,$\varnothing^* = \{\varepsilon\} \cup \varnothing^1 \cup \varnothing^2 \cup \varnothing^3 \cup \cdots = \{\varepsilon\}$,即 $\varnothing^+ = \varnothing$.

定理 5.15　设 A 和 B 是 Σ 上的语言，$n \in \mathbf{N}$，则下述关系成立：

(1) $A^* = \{\varepsilon\} \cup A^+$

(2) $A^n \subseteq A^*$, $n \geqslant 0$

(3) $A^n \subseteq A^+$, $n \geqslant 1$

(4) $A \subseteq AB^*$

(5) $A \subseteq B^*A$

(6) $(A \subseteq B) \to (A^* \subseteq B^*)$

(7) $(A \subseteq B) \to (A^+ \subseteq B^+)$

(8) $AA^* = A^*A = A^+$

(9) $\varepsilon \in A \to A^* = A^+$

(10) $(A^*)^* = A^*A^* = A^*$

(11) $(A^*)^* = (A^+)^* = A^*$

(12) $(A^+)^+ = A^+$

5.7　有序偶和笛卡尔乘积

定义 5.22　任给两个对象 x,y，将它们按规定的顺序构成的序列，称之为有序偶，记为 $\langle x,y\rangle$. 有序偶具有其自身特点：

(1) 有序偶有第一个元和第二个元之分，如 $\langle a,b\rangle$，其中 a 称为有序偶 $\langle a,b\rangle$ 的第一个元，b 称为有序偶 $\langle a,b\rangle$ 的第二个元.

(2) 有序偶与二元集或偶集在概念和性质上都有根本的不同. 如：

$$\langle a,b\rangle \neq \langle b,a\rangle \qquad \langle a,a\rangle \neq \langle a\rangle$$

而

$$\{a,b\} = \{b,a\} \qquad \{a,a\} = \{a\}$$

定理 5.16　有序偶的唯一性定理为

$$\langle u,v\rangle = \langle x,y\rangle \text{ 当且仅当 } u = x \text{ 和 } v = y$$

定义 5.24　集合 A 和 B 的笛卡儿乘积 $A \times B$ 定义为

$$A \times B = \{\langle x,y\rangle \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

定义 5.25　设 A_i 是集合 $(i = 1,2,\cdots,n)$，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的笛卡儿乘积

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

并且

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle \mid x_i \in A_i\}$$

笛卡儿乘积 $A \times A \times \cdots \times A$ 可用 A^n 表示.

第六章 关系

6.1 关系及其性质

定义 6.1 任何有序偶的集合称为二元关系.

从 X 到 Y 的关系 R 满足 $R \subseteq X \times Y$. 若 $\langle x,y\rangle \in R$,则表示成 xRy,读作"x 与 y 有关系 R". 若 $\langle x,y\rangle \notin R$,则表示成 $x\bar{R}y$,读作"x 与 y 不存在关系 R".

定义 6.2 设任一关系 R,R 中所有有序偶 $\langle x,y\rangle$ 的第一个元的集合,称为 R 的定义域,记作 $\mathrm{dom}(R)$;第二个元的集合,称为 R 的值域,记作 $\mathrm{ran}(R)$,即

$$\mathrm{dom}(R) = \{x \mid (\exists y)(\langle x,y\rangle \in R)\}$$
$$\mathrm{ran}(R) = \{y \mid (\exists x)(\langle x,y\rangle \in R)\}.$$

设 X 和 Y 是任意两个集合,对于 X 到 Y 的关系 R,有 $\mathrm{dom}(R) \subseteq X$ 和 $\mathrm{ran}(R) \subseteq Y$. 如果 $X = Y$,则 R 是 X 到 X 的关系,或称 R 是 X 上的关系. 如图 6.2 所示(X 到 Y 的关系用 S 表示).

集合 $X \times X$ 称为 X 上的全域关系,记作 U_X;作为 $X \times X$ 的子集的空集 $\varnothing$,称为 X 上的空关系;还可以定义 X 上的恒等关系,记作 I_X:

$$U_X = \{\langle x_i,x_j\rangle \mid x_i,x_j \in X\}$$
$$I_X = \{\langle x_i,x_i\rangle \mid x_i \in X\}$$

定义 6.3 设 R 是非空集合 X 上的二元关系.

(1) R 是自反的,若对每个 $x \in X$ 都有 xRx, 即

$$\langle x,x\rangle \in R$$

R 是自反的 $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in X \to xRx)$.

(2) R 是反自反的,若对每个 $x \in X$,都有 $x\bar{R}x$,即 $\langle x,x\rangle \notin R$.

R 是反自反的 $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in X \to x\bar{R}x)$.

(3) R 是对称的,若对于 X 中任何 $x,y \in X$,如果有 xRy,则必定有 yRx.

R 是对称的 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in X \land y \in X \land xRy \to yRx)$.

(4) R 是反对称的,若对于 X 中任何 $x,y \in X$,如果 xRy 和 yRx,则必有 $x = y$.

R 是反对称的 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in X \land y \in X \land xRy \land yRx \to x = y)$.

(5) R 是传递的,若对于任何 $x,y,z \in X$,如果 xRy 和 yRz,则必有 xRz.

R 是传递的 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in X \land y \in X \land z \in X \land xRy \land yRz \to xRz)$.

集合 X 上的关系 R 是自反的，即每个元素其自身都有 R 关系；其关系矩阵的主对角线元素均为 1，而在它的关系图中每个顶点都有自环.

集合 X 上的关系 R 是反自反的，反自反关系的关系矩阵的主对角线元素均为 0，而在反自反关系的关系图中，任意顶点都没有自环. 要注意存在着这样的关系 R：它既不是自反的，也不是反自反的；它的关系矩阵主对角线上元素有 0 也有 1；它的关系图中有的顶点有自环，有的顶点没有自环.

集合 X 上的关系 R 是对称的，其关系矩阵元素对称于主对角线，在其关系图中任意两个顶点或者无弧、或者有两条相反方向的弧. 而反对称关系的关系矩阵对称于主对角线的元素至多有一个为 1，在其关系图上任意两个顶点间至多有一条弧. 对于仅有自环而没有其他弧的关系图，既是对称的又是反对称的.

集合 X 上的关系 R 是传递的，从关系矩阵不易看出传递关系的特征. 从关系图来看，一个传递关系的关系图，如果任意两个顶点 x, y 有一条路径，则从 x 到 y 必有一条弧.

6.2 关系的运算

定义 6.4 设 R 和 S 表示从 X 到 Y 的两个关系，则 $R\cap S, R\cup S, R-S, \sim R$ 也都表示从 X 到 Y 的关系，并且

$$x(R\cap S)y \Leftrightarrow xRy \wedge xSy$$
$$x(R\cup S)y \Leftrightarrow xRy \vee xSy$$
$$x(R-S)y \Leftrightarrow xRy \wedge x\bar{S}y$$
$$x(\sim R)y \Leftrightarrow x\bar{R}y$$

应注意，补集运算是相对于全集的运算. 显然，新确定的关系是从集合 X 到集合 Y 的关系.

定义 6.5 设 R 是从 X 到 Y 的关系，S 是从 Y 到 Z 的关系，则称 X 到 Z 的一个关系 $R\circ S$ 为 R 和 S 的复合关系，即

$$R\circ S=\{\langle x,z\rangle \mid x\in X\wedge z\in Z\wedge(\exists y)(y\in Y\wedge xRy\wedge ySz)\}$$

定理 6.1 设 R,S,P 分别是从 X 到 Y，Y 到 Z，Z 到 W 的关系，则 $(R\circ S)\circ P=R\circ(S\circ P)$.

定义 6.6 设 R 是 X 上的二元关系，$n\in\mathbf{N}$，则 R 的 n 次幂，表示为 R^n 定义如下：

(1) R^0 是集合 X 上的恒等关系.

$$R^0=I_X=\{\langle x,x\rangle \mid x\in X\}$$

(2) $R^{n+1}=R^n\circ R$

容易证明，若 $m,n\in\mathbf{N}$，有

(1) $R^m\circ R^n=R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n=R^{mn}$

定义 6.7 设 R 是从 X 到 Y 的关系. 它的逆关系记作 R^{-1}，是 Y 到 X 的关系. 其中 R^{-1} 包含所有 R 中有序偶的逆序偶，即

$$R^{-1}=\{\langle y,x\rangle \mid x\in X\wedge y\in Y\wedge xRy\}$$

由逆关系的定义可知 $(R^{-1})^{-1}=R$，R^{-1} 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_{R^{-1}}$ 为 $\boldsymbol{M}_R$ 的转置矩阵. 把 R 的关系图中每条弧线反向就可得到 R^{-1} 的关系图.

定理 6.2 设 R 是 X 到 Y 的关系，S 是 Y 到 Z 的关系，则有

$$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}.$$

定义 6.8 设 R 是集合 X 上的二元关系，关系 R' 称为自反（对称，传递）闭包，满足下述三个条件：

(1) R' 是自反的（对称的、传递的）；

(2) $R\subseteq R'$；

(3) 对于任何自反的（对称的、传递的）关系 R''，如果有 $R\subseteq R''$，则 $R'\subseteq R''$.

一般用 $r(R)$，$s(R)$，$t(R)$ 分别表示 R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包.

条件（1）表明新的关系所具备的性质；条件（2）说明新关系是在旧关系基础上形成的；条件（3）说明仅加入使新关系具备某种性质的最小数目有序偶，R′ 是有这种性质的最小的集合.

如何构成关系的闭包呢？可以用关系图来考察. 例如，一个关系图表示一个自反关系，当且仅当图的每个顶点有自环，如果 D 是 R 在集合 X 上的关系图，把自环加到图 D 中没有自环的顶点上，就能够构成 R 的自反闭包 r(R). 在图 D 上也可以考察对称闭包和传递闭包.

下面的几条定理说明了三种闭包与 R 之间的关系.

定理 6.3 设 R 是在集合 X 上的二元关系，则 $r(R)=R\cup I_X$，其中 I_X 是集合 X 上的恒等关系.

引理 设 R 是在集合 X 上的二元关系，R 是对称的，当且仅当 $R=R^{-1}$.

定理 6.4 设 R 是集合 X 上的二元关系，则

$$s(R)=R\cup R^{-1}$$

定理 6.5 设 R 是在集合 X 上的二元关系，则 $t(R)=\bigcup_{n=1} R^n=R^1\cup R^2\cup R^3\cdots$

定理 6.6 设 R 是集合 X 上的二元关系，X 有 n 个元素，则 $t(R)=\bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

6.3 次序关系

在集合上存在着一种关系，它可以用来比较集合中某些元素的先后，这就是次序关系.

定义 6.9 集合 X 上的关系 R 称为 X 上的偏序关系或偏序，当且仅当 R 是自反的、反对称的和传递的，即 R 满足：

(1) $(\forall x)(x\in X\rightarrow xRx)$

(2) $(\forall x)(\forall y)(x\in X\wedge y\in X\wedge xRy\wedge yRx\rightarrow x=y)$

(3) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\in X\wedge y\in X\wedge z\in X\wedge xRy\wedge yRz\rightarrow xRz)$

用"$\leqslant$"符号来表示偏序，这里"$\leqslant$"符号并不单纯意味着实数集合上的"小于或等于关系"，而是表示符合上述性质的任何偏序关系. 如果 $x,y\in X$，xRy，R 是偏序，记为 $x\leqslant y$，称"x 小于或等于 y"或"x 在 y 之前".

由于偏序是自反的，所以偏序关系的定义域是整个集合. 如果 $\leqslant$ 是 P 上的偏序，那么有序偶 $\langle P,\leqslant\rangle$ 表示偏序集合.

定义 6.10 设 $\langle P,\leqslant\rangle$ 是一个偏序集合. 如果对于每一个 $x,y\in P$，或者有 $x\leqslant y$，或者有 $y\leqslant x$，则称 $\leqslant$ 为 P 上的全序或线序，并称 $\langle P,\leqslant\rangle$ 为全序集合或链，即

$$(\forall x)(\forall y)(x\in P\wedge y\in P\rightarrow x\leqslant y\vee y\leqslant x).$$

对于偏序集合 $\langle P,\leqslant\rangle$，如果两元素 $x,y\in P$，或者有 $x\leqslant y$ 或者有 $y\leqslant x$，就说 P 的元素 x 和 y 是可比的.

如果 R 是 P 上的偏序，那么容易看出，R 的逆关系 R^{-1} 也是 P 上的偏序. 如果 R 用 $\leqslant$ 表示，则 R^{-1} 用 $\geqslant$ 表示. 这意味着，如果 $\langle P,\leqslant\rangle$ 是偏序集合，则 $\langle P,\geqslant\rangle$ 也是偏序集合，并且称 $\langle P,\geqslant\rangle$ 是 $\langle P,\leqslant\rangle$ 的对偶.

定义 6.11 R 是集合 X 上的严格偏序关系，当且仅当 R 是反自反的和传递的，即 R 满足：

(1) $(\forall x)(x\in X\rightarrow x\bar{R}x)$;

(2) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\in X\wedge y\in X\wedge z\in X\wedge xRy\wedge yRz\rightarrow xRz)$.

严格偏序 R 用符号 $<$ 表示，在定义中没有列举反对称条件，这是因为从反自反的和传递的关系可以推出反对称性.

当同时使用 $\leqslant$ 和 $<$ 时，有

$$<\cup I_X=\leqslant \text{ 且 } \leqslant -I_X=<$$

在偏序集合 $\langle P,\leqslant\rangle$ 中，对于任何两个元素 $x,y\in P$，如果 $x<y$ 并且不存在任何别的元素 $z\in P$，使得 $x<z$ 和 $z<y$，则称元素 y 遮盖元素 x.

y 遮盖 $x\Leftrightarrow x<y\wedge(\forall z)(x\leqslant z\wedge z\leqslant y\rightarrow x=z\vee z=y)$.

有时也称元素 x 是 y 的"紧邻前元".

偏序集合可以用一般的关系图表示，但通常用简化的关系图来表示，这种关系图称为偏序集合图或哈斯图. 哈斯图具体画法如下：集合的每一个元素用一个点表示，对于$x,y \in P$，如果$x < y$，则点x画在点y之下，并且如果y遮盖x就在x和y之间画一条直线. 在哈斯图中省略了自环，并约定弧的指向向上，不画箭头.

定义 6.12　设$\langle A, \leqslant \rangle$是偏序集合，并且$B \subseteq A$.

(1) 设$b \in B$，若对于所有的$b' \in B$都有$b' \leqslant b$，则称元素b为集合B的最大元.

(2) 设$b \in B$，若对于所有的$b' \in B$都有$b \leqslant b'$，则称元素b为集合B的最小元.

也就是说，b是B中的最大元$\Leftrightarrow b \in B \wedge (\forall b')(b' \in B \rightarrow b' \leqslant b)$；

b是B中的最小元$\Leftrightarrow b \in B \wedge (\forall b')(b' \in B \rightarrow b \leqslant b')$.

由定义可知，如果最大元存在，它一定是唯一的，最小元的情况也是如此. 有时可能最小元或最大元都不存在. 如果画出一个偏序集合的哈斯图，就不难看出是否存在最小元或最大元.

在有穷集合的线序或链中，最大元或最小元总是存在的.

定义 6.13　设$\langle A, \leqslant \rangle$是偏序集合，且$B \subseteq A$.

(1) 若$b \in B$而且没有$b' \in B$的元素，使得$b < b'$，则称b为B中的极大元.

(2) 若$b \in A$，对每一个$b' \in B$，都有$b' \leqslant b$，则称元素b是B的上界.

(3) 若$b \in A$是B的一个上界，对每一个B的上界b'，有$b \leqslant b'$，则称b是B的最小上界或上确界.

可用类似的方法定义极小元、下界、最大下界或下确界.

从定义可知，极小元和极大元不一定是唯一的. 不同的极小元是不可比的，不同的极大元也是不可比的. 对于集合上的线序或链，极小元也是最小元，极大元也是最大元.

定义 6.14　一个偏序集合$\langle P, \leqslant \rangle$，如果它的每一个非空子集都有一个最小元，则称$\leqslant$关系为良序的，$\langle P, \leqslant \rangle$称为良序集合.

如果$\langle P, \leqslant \rangle$是良序的，则对任何$A \subseteq P, A \neq \varnothing$，$A$中存在着一个元素$y$，使得对于所有$x \in A$，有$y \leqslant x$.

由定义可知，每一个良序集合是一个全序集合. 这是因为对任何子集，特别是对$\{x,y\}$对偶集，必定有x或者y作为它的最小元，因此，对集合的任意两个元素x,y，必有$x \leqslant y$或$y \leqslant x$. 当然，每一个全序集合不一定是良序的，但有穷的全序集合一定是良序的.

(1) 自然数集合上的关系"$\leqslant$"是有序的，且是良序的，它有最小元素0，并且任意子集有最小元. 自然数集合上的关系"$\geqslant$"不是良序的，因为它没有最小元素.

(2) $\langle \mathbf{I}, \leqslant \rangle$是全序集合，但不是良序的，它没有最小元素.

6.4　等价关系、划分及其它

定义 6.15　设A是非空集合S的子集的聚合，对于每个$B \in A$，有$B \neq \varnothing$，并且$\cup A = S$，则称集合A是S的一个覆盖.

定义 6.16　设A是非空集合S的覆盖，若$B, C \in A$，且$B \neq C$，则$B \cap C = \varnothing$，称集合A是S的一个划分，并把A中的元素称为划分块或块. 划分中块的个数称为秩.

集合的划分可用图解表示. 若集合A用平面上的一个封闭区域表示，用线分成若干个不相重叠的部分，在图中的每个部分对应于一个划分的块，如图 6.14 所示. 图中集合S划分成A_1, A_2, A_3, A_4，$A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$为$S$的划分，它的秩为4.

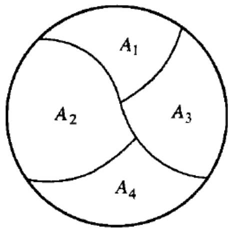


图 6.14　集合的划分图

定义 6.17 设 R 是非空集合 X 上的关系. 如果 R 是自反的、对称的和传递的,则称 R 是等价关系.

当 R 是集合 X 上的等价关系时,则 R 的定义域 $\mathrm{dom}(R)$ 是集合 X 本身.

等价关系的关系图有以下几个特征:

(1) 由于 R 是自反的,每个顶点有一个自环;

(2) 由于 R 是对称的,若从顶点 a 到 b 有弧,则从 b 到 a 必有弧;

(3) 由于 R 是传递的,若从顶点 a 到 b 有一条路径,则从 a 到 b 必有一条弧.

例如,实数集合上的相等关系、全集的幂集上全集的各子集之间的相等关系、三角形集合中三角形的相似关系、命题逻辑公式之间的等值关系,这些关系都是等价关系.

定理 6.7 任何集合 $X \subseteq \mathbf{I}$ 上的模等价关系是等价关系.

定义 6.18 设 R 是集合 X 上的等价关系,对于任何 $x \in X$,集合 $[x]_R \subseteq X$ 定义如下:

$$[x]_R = \{y \mid y \in X \land xRy\}$$

称 $[x]_R$ 为由 x 所代表的等价类.

由定义可知,$[x]_R$ 是由集合 X 上与 x 有 R 等价关系的所有元素所组成的集合.

性质 R 是 X 上的等价关系,X 上各元素的等价类有:

(1) $x \in [x]_R$,且 $[x]_R \neq \varnothing$;

(2) $[x]_R = [y]_R$ 当且仅当 xRy;

(3) 若任意 $x, y \in X$, $x\bar{R}y$, 则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$;

(4) $\bigcup\limits_{x \in X} [x]_R = X$.

定理 6.8 设 R 是非空集合 X 上的等价关系. R 等价类的集合 $\{[x]_R \mid x \in X\}$ 是 X 的一个划分.

用 X/R 来表示等价类的集合,并称 X/R 为 X 模 R 的商集,或记为 $X(\mathrm{mod}R)$.

定理 6.9 设 C 是非空集合 X 上的一个划分,若 xRy,当且仅当 x, y 在同一划分块中,则 R 必定是等价关系.

第七章 函数

7.1 基本概念

定义 7.1 设f是一个关系. 如果只要$\langle x,y_1\rangle \in f$且$\langle x,y_2\rangle \in f$,就有$y_1 = y_2$,则称$f$为函数. 如果函数$f$是集合$X$到集合$Y$的关系,并且$\mathrm{dom}(f) = X$,则称$f$为$X$到$Y$的函数,记为$f:X \to Y$.

可以看出,为了使一个关系成为函数f,根据定义,此关系必须满足两个附加条件:

(1) 处处有定义

对于每个$x \in X$,都存在某个$y \in Y$与之对应,即f的定义域必须是X,而不能是X的真子集. 这叫做在X中处处有定义.

(2) 单值性

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((\langle x,y\rangle \in f \land \langle x,z\rangle \in f) \to y = z)$$

定义 7.2 对于函数$f:X \to Y$,如果$\langle x,y\rangle \in f$,则称x为自变量,y是函数f在x处的值;也称y为在f作用下x的象,而称x为y的一个象源. 通常用$y = f(x)$表示$\langle x,y\rangle \in f$.

函数有关的术语和关系的术语是一致的. 若f是X到Y的一个函数,则称X为f的定义域,即$\mathrm{dom}(f) = X$. f的值域用$\mathrm{ran}(f)$表示,$\mathrm{ran}(f) \subseteq Y$,有时也用$f(X)$表示$f$的值域. f的值域定义为

$$\mathrm{ran}(f) = \{y \mid (\exists x)(x \in X \land y = f(x))\}$$

定义 7.3 设函数$f:X \to Y$,又$A \subseteq X$,则$f \cap (A \times Y)$是从A到Y的函数,称为f受限制于A,记为$f|A$. 又称f为$f|A$的开拓. $f|A$也可表示为

$$f|A = \{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y\rangle \in f \land x \in A\}$$

应注意$f|A:A \to Y$是这样一个函数:对于任何$a \in A$,$f|A(a) = f(a)$,$\mathrm{dom}(f|A) = A$,而$\mathrm{dom}(f) = X$,显然,$\mathrm{dom}(f|A) \subseteq \mathrm{dom}(f)$.

定义 7.4 设函数$f:X \to Y$,X'是定义域X的子集. 集合$\{f(x) \mid x \in X'\}$称为X'在f下的象,记为$f(X')$. 整个定义域的象$f(X)$称为函数f的象,即f的值域.

定义 7.5 设f是从集合X到集合Y的关系. 如果对每个$x \in \mathrm{dom}(f)$,存在唯一的$y \in Y$,使$\langle x,y\rangle \in f$,则称f为X到Y的偏函数.

由偏函数的定义可知,对任意的$x \notin \mathrm{dom}(f)$,$f(x)$的值没有定义.

为了区别偏函数和函数,有时把函数称为全函数. 通常所说的函数即指全函数.

7.2 函数的复合

定义 7.6 设$f:X \to Y$和$g:Y \to Z$是两个函数. 复合关系

$$g \circ f = \{\langle x,z\rangle \mid (x \in X) \land (z \in Z) \land (\exists y)(y \in Y \land y = f(x) \land z = g(y))\}$$

称为函数f和g的复合.

定理 7.1 设$f:X \to Y$,$g:Y \to Z$,则函数的复合$g \circ f$是一个从X到Z的函数,且对所有的$x \in X$,$(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

定理 7.2 I_X和I_Y是恒等函数,函数$f:X \to Y$,则:

$$f \circ I_X = I_Y \circ f = f$$

定理 7.3 设有函数 $f:X\to Y, g:Y\to Z$ 及 $h:Z\to W$，则函数的复合具有可结合性，即

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f=h\circ g\circ f$$

定义 7.7 若 $f:X\to X$，则函数 f 能够对自身复合任意多次. 用于 f 对其自身的多次复合的归纳定义如下：

(1) $f^0(a)=I_X(a)$

(2) $f^{n+1}(a)=f(f^n(a))$

7.3 特殊性质的函数

定义 7.8 设 f 是一个函数，$f:X\to Y$.

(1) 若对于每个 $y\in Y$，都存在 x 且有 $y=f(x)$，则称 f 是满射的，即

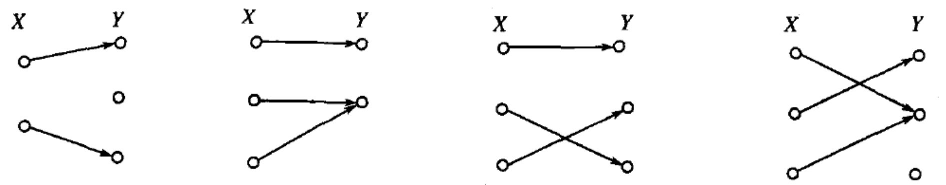
$$f\text{是满射的}\Leftrightarrow \forall y(y\in Y\to \exists x(x\in X\wedge f(x)=y)).$$

(2) 若对任意的 $x_1,x_2\in X$ 有 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$，则称 f 是单射的，即

$$f\text{是单射的}\Leftrightarrow \forall x_1\forall x_2(x_1\in X\wedge x_2\in X\wedge f(x_1)=f(x_2)\to x_1=x_2).$$

(3) 若 f 既是满射的又是单射的，则称 f 是双射的.

具有上述特性的函数分别称为满射函数、单射函数、双射函数.



(a) 单射而不满射　(b) 满射而不单射　(c) 双射　(d) 不满射也不单射

图 7.8　函数图解

定义 7.9 设函数 $f:X\to Y$. 如果对于所有的 $x\in X$，存在某一个 $y\in Y$，使得 $f(x)=y$，即 $f(X)=\{y\}$，则称 f 为常值函数.

定理 7.4 设 $f:X\to Y$ 是双射函数，则其逆关系 f^{-1} 也是双射函数，并且 $f^{-1}:Y\to X$.

定义 7.10 设 $f:X\to Y$ 是一个双射函数. 称 f 的逆关系 f^{-1} 为 f 的反函数.

定理 7.5 如果 $f:X\to Y$ 是双射的，则

$$f^{-1}\circ f=I_X \text{ 及 } f\circ f^{-1}=I_Y$$

定理 7.6 设 $f:X\to Y$ 及 $g:Y\to X$，$g=f^{-1}$ 当且仅当 $g\circ f=I_X$ 及 $f\circ g=I_Y$.

定理 7.7 设 $f:X\to Y$ 及 $g:Y\to Z$，且 f 和 g 都是双射函数，则有 $g\circ f$ 也是双射函数，且有

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}.$$

设 F_X 表示所有从 X 到 X 上的双射函数的集合，它有如下一些性质：

(1) 对于任何 $f,g\in F_X$，$f\circ g$ 及 $g\circ f$ 也在 F_X 中，称这个性质为复合运算的闭包性.

(2) 对于任何 $f,g,h\in F_X$，$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.

(3) 对于任何 $f\in F_X$，$f\circ I_X=I_X\circ f=f$.

(4) 对于每一个 $f\in F_X$，存在反函数 $f^{-1}\in F_X$，使得

$$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I_X.$$

7.4 集合的特征函数

定义 7.11 设 U 是全集,A 是 U 的子集,A 的特征函数 $\Psi_A : U \to \{0,1\}$,

$$\Psi_A(x) = \begin{cases} 1, & 若\ x \in A \\ 0, & 若\ x \notin A \end{cases}$$

其图如图 7.9 所示.

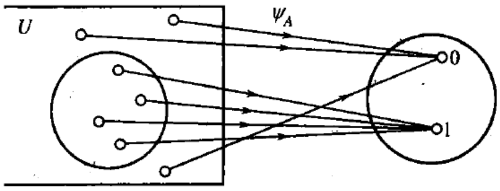


图 7.9 特征函数图

下面列出特征函数的一些性质. 这些性质说明了怎样利用集合的特征函数来确定集合的关系.

设 A 与 B 是全集 U 的任意两个子集,则对于所有 $x \in U$,下列关系成立:

(1) $\forall x(\Psi_A(x) = 0) \Leftrightarrow A = \varnothing$

(2) $\forall x(\Psi_A(x) = 1) \Leftrightarrow A = U$

(3) $\forall x(\Psi_A(x) \leqslant \Psi_B(x)) \Leftrightarrow A \subseteq B$

(4) $\forall x(\Psi_A(x) = \Psi_B(x)) \Leftrightarrow A = B$

(5) $\Psi_{A \cap B}(x) = \Psi_A(x) \cdot \Psi_B(x)$

(6) $\Psi_{A \cup B}(x) = \Psi_A(x) + \Psi_B(x) - \Psi_{A \cap B}(x)$

(7) $\Psi_{\sim A}(x) = 1 - \Psi_A(x)$

(8) $\Psi_{A - B}(x) = \Psi_{A \cap \sim B}(x) = \Psi_A(x) - \Psi_{A \cap B}(x)$

上式中的 $+$, $-$ 和 $\cdot$ 分别是算术中的加法、减法和乘法运算符. 与集合连用的 $=$, $\cup$, $\cap$ 和 $\sim$ 等符号也与通常集合运算中的意义相同.

第八章　自然数和基数

8.1　自然数及数学归纳法

定义 8.1　0 是自然数,并且 0 等于空集 $\varnothing$,即 $0 = \varnothing$.

定义 8.2　对于任意集合 A,它的后继集合 A^+ 定义为

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

$\varnothing$ 是空集,它的后继集合 $\varnothing^+$,$(\varnothing^+)^+$,$((\varnothing^+)^+)^+$ 分别是

$$\varnothing^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$$

$$(\varnothing^+)^+ = \varnothing^+ \cup \{\varnothing^+\} = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

$$((\varnothing^+)^+)^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$
$$= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}.$$

定义 8.3　自然数集合 $\mathbf{N}$ 归纳定义如下.

(1) 基础语句:$\varnothing \in \mathbf{N}$　$(0 = \varnothing)$.

(2) 归纳语句:若 $n \in \mathbf{N}$,则 $n^+ = n \cup \{n\} \in \mathbf{N}$.

(3) 极限语句:只有有限次使用(1) 和(2) 得到的元素才属于 $\mathbf{N}$.

按照自然数的定义,自然数集合有元素 $\varnothing$,$\{\varnothing\}$,$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ 等,也可用数字 0,1,2,3 表示. 按照自然数的集合定义可知,$n = \{0,1,2,3,\cdots,n-1\}$.

定义给出了生成元 $\varnothing$,其归纳步骤是一个后继函数 σ,即

$$\sigma(n) = n^+ = n \cup \{n\} \text{ 或 } \sigma = \{\langle n, n^+\rangle \mid n \in \mathbf{N}\}$$

函数 $\sigma: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$,显然满足:

(1) $\varnothing \notin \mathrm{ran}(\sigma)$.

(2) σ 是一对一的,即 σ 是单射函数.

(3) 若 $n^+ = m^+$,则 $n = m$.

上述自然数集合的定义满足1889年Peano提出的自然数公理. Peano自然数公理表述如下:

(1) 0 是自然数,即 $0 \in \mathbf{N}$.

(2) 若 $n \in \mathbf{N}$,则恰存在一个自然数 n^+ 称之为 n 的后继数.

(3) 没有这样的 $n \in \mathbf{N}$,使得 $n^+ = 0$.

(4) 如果 $n^+ = m^+$,则 $n = m$.

(5) 若子集 $S \subseteq \mathbf{N}$,且具有性质

　a. $0 \in S$;

　b. 如果 $n \in S$,那么 $n^+ \in S$,

则 $S = \mathbf{N}$.

性质　(1) 传递性. 若 $n_1 \in n_2$ 且 $n_2 \in n_3$,则 $n_1 \in n_3$.

(2) 三歧性. 对于任何两个自然数 n_1, n_2,下列三式恰有一个成立:

$$n_1 \in n_2, n_1 = n_2, n_2 \in n_1.$$

(3) 良基性. 不存在一个自然数的无穷序列 $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_i, n_{i+1}, \cdots$ 使得 $n_{i+1} \in n_i$.

由自然数的定义可知,对于每一个自然数,比它小的自然数总是有穷个,并且

$$0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \cdots$$

$$0 \subset 1 \subset 2 \subset 3 \subset \cdots$$

定义 8.4　设 $<$ 是自然数上的"小于"关系,$n_1 < n_2$. 当且仅当 $n_1 \in n_2$.

数学归纳法(第一数学归纳法):

设 $P(n)$ 是自然数集合上的性质(或谓词),如果能证明:

a. $P(0)$ 是真;

b. 对任何 $m \in \mathbf{N}, P(m) \Rightarrow P(m^+)$,

则对所有 $n \in \mathbf{N}, P(n)$ 为真.

第二数学归纳法:

第二数学归纳法是一种更强形式的数学归纳法,它在证明对于所有自然数 $x, P(x)$ 为真时,使用下述步骤:先假设对所有 $k < n$, $P(k)$ 是真,推出 $P(n)$ 为真,则 $(\forall x)P(x)$ 为真,即

$$(\forall n)((\forall k)(k < n \to P(k)) \to P(n)) \Rightarrow (\forall x)P(x)$$

显然,上述推论前提中包含了 $P(0)$ 为真. 因为,若 $n = 0, k < 0$ 是假,对每个 $k \in \mathbf{N}$ 蕴涵 $k < 0 \to P(k)$ 为真,推出 $(\forall k)(k < 0 \to P(k))$ 是真. 因此 $(\forall k)(k < 0 \to P(k)) \to P(0)$ 等价于 $P(0)$. 因此两个原理的假设是等价的.

8.2 基数

定义 8.5 两个集合 A 和 B 是等势的,当且仅当 A 和 B 的元素之间是一一对应的,记作 $A \sim B$.

A 和 B 元素之间是一一对应的, 即存在一个双射函数 f: $A \to B$.

等势是集合族上的等价关系,它把集合族分割为等价类. 等势关系有自反性、对称性和传递性,即对于任何集合 A, B, C:

(1) $A \sim A$;

(2) 若 $A \sim B$,则 $B \sim A$;

(3) 若 $A \sim B, B \sim C$,则 $A \sim C$.

定义 8.6 集合是有穷的,当且仅当它与某个自然数等势,否则就是无穷的.

定理 8.1 任意有穷集合 A 唯一地与一个自然数等势.

定义 8.7 对于任意有穷集合 A,存在唯一的自然数 n,使得 $A \sim n$,称 n 为 A 的基数,记为 $\#A$.

定义 8.8 设 F 是集合族, $\sim$ 是 F 上的等势关系. 关系 $\sim$ 在 F 上的等价类称为基数. 对于任何 $A \in F$, A 所属的等价类用 $\#A$ 表示,称之为 A 的基数.

对于 $A, B \in F, \#A = \#B \Leftrightarrow A \sim B$.

当上述基数的定义用于有穷集合时,不是用它的等价类来表示,而是用等价类中的特殊元素自然数 n 来表示的,它可以看做该等价类的典型代表.

定义 8.9 任何与自然数集合等势的集合称为可数无穷集合.

可数无穷集合的基数,用希伯来文的第一个字母 $\aleph$ 加下标 0 表示,即 $\aleph_0$,读作阿列夫零.

定义 8.10 如果一个集合是有限的或可数无穷的,称之为可数集合;如果一个集合是无穷的而且不是可数的,称之为不可数集合.

定理 8.2 任何无穷集合必含有可数无穷子集.

定理 8.3 可数无穷集合的无穷子集是可数无穷的.

定理 8.4 实数集合 R 是不可数的.

定义 8.11 对于集合 A、B,B 胜过 A 或 A 领先于 B,当且仅当有一个从 A 到 B 的单射 f,即 A 与 B 的子集等势,记为 $A \preccurlyeq B$. 如图 8.5 所示.

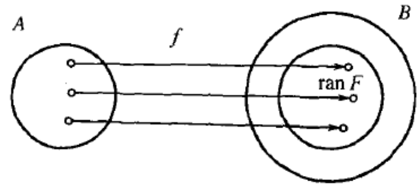


图 8.5 $A \preccurlyeq B$ 图

定义 8.12 对于集合 A、B,若 $A \preccurlyeq B$ 且 A 不等势 B,称 B 严格胜过 A,记为 $A \prec B$.

定义 8.13 若 $\#A = \alpha$, $\#B = \beta$,且 $A \preccurlyeq B$,则称 α 小于或等于 β,记为 $\alpha \leqslant \beta$.

定义 8.14 若 $\#A = \alpha$,$\#B = \beta$,且 $A \prec B$,则称 α 小于 β,记为 $\alpha < \beta$.

根据定义,关系 $\preccurlyeq$ 和 $\leqslant$ 既是自反的,又是传递的,同时也是反对称的. 在任何情况下,这两个关系都是偏序关系. 能够证明它们是各自集合上的全序关系. 这样,对于任何集合 A 和 B,或者有 $A \preccurlyeq B$ 或者有 $B \preccurlyeq A$.

定理 8.5 对于任意集合 A,$A \prec \rho(A)$,$\rho(A)$ 是 A 的幂集.

还有一个问题,有基数在 $\aleph_0$ 和 $C = 2^{\aleph_0}$ 之间的集合吗?著名的连续统假设认为:不存在 k,使得 $\aleph_0 < k < 2^{\aleph_0}$. 这个假设迄今还未被证实或否定,仍是数学家们探讨的一个课题.