

《离散数学》屈婉玲版 数理逻辑部分

第一章 命题逻辑基本概念

1.1 命题与联结词

能判断真假的陈述句称为命题。命题所表达的判断结果称为命题的真值。真值只取两个值：真或假。任何命题的真值都是唯一的。判断给定的句子是否为命题，首先应判定它是否为陈述句，其次判断它是否有唯一真值。

（注意：猜想、未发生事件等，如果满足上述条件，仍然属于命题。悖论无法判断真值，不属于命题。）

简单命题/原子命题：不能被分解成更简单的陈述句的命题。

复合命题：由简单陈述句通过联结词联结而成的陈述句。

形式语言：完全由符号所构成的语言。

定义 1.1 设 p 为命题，复合命题“非 p ”（或“ p 的否定”）称作 p 的否定式，记作 $\neg p$ 。符号 \neg 称作否定联结词。规定 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假。

定义 1.2 设 p, q 为两个命题，复合命题“ p 并且 q ”（或“ p 与 q ”）称为 p 与 q 的合取式，记作 $p \wedge q$ 。 \wedge 称作合取联结词。规定 $p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真。

定义 1.3 设 p, q 为两个命题，复合命题“ p 或 q ”称作 p 与 q 的析取式，记作 $p \vee q$ 。 \vee 称作析取联结词。规定 $p \vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假。

此处需要注意“相容或 $p \vee q$ ”和“排斥或 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ ”之间的区别。

定义 1.4 设 p, q 为两个命题，复合命题“如果 p ，则 q ”称为 p 与 q 的蕴涵式，记作 $p \rightarrow q$ ，并称 p 是蕴涵式的前件， q 为蕴涵式的后件。 \rightarrow 称作蕴涵联结词。并规定 $p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假。

定义 1.5 设 p, q 为两个命题，复合命题“ p 当且仅当 q ”称作 p 与 q 的等价式，记作 $p \leftrightarrow q$ ， \leftrightarrow 称作等价联结词。规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假。

表 1.1 联结词 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 的定义

p q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0 0	1	0	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	1	1	1	1

1.2 命题公式及其赋值

命题变项/命题变元：真值可以变化的陈述句。

定义 1.6 (1) 单个命题变项和命题常项是合式公式,并称为原子命题公式.

(2) 若 A 是合式公式,则 $(\neg A)$ 是合式公式.

(3) 若 A, B 是合式公式,则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 是合式公式.

(4) 有限次地应用(1)~(3)形成的符号串是合式公式.

合式公式也称作命题公式或命题形式,简称为公式.

定义 1.7 (1) 若公式 A 是单个的命题变项,则称 A 为 0 层公式.

(2) 称 A 是 $n+1$ ($n \geq 0$) 层公式是指下面情况之一.

(a) $A = \neg B$ ①, B 是 n 层公式;

(b) $A = B \wedge C$, 其中 B, C 分别为 i 层和 j 层公式,且 $n = \max(i, j)$ ②;

(c) $A = B \vee C$, 其中 B, C 的层次及 n 同(b);

(d) $A = B \rightarrow C$, 其中 B, C 的层次及 n 同(b);

(e) $A = B \leftrightarrow C$, 其中 B, C 的层次及 n 同(b).

(3) 若公式 A 的层次为 k . 则称 A 是 k 层公式.

例如, $(\neg p \wedge q) \rightarrow r, (\neg(p \rightarrow \neg q)) \wedge ((r \vee s) \leftrightarrow \neg p)$ 分别为 3 层和 4 层公式.

定义 1.8 设 p_1, p_2, \dots, p_n 是出现在公式 A 中的全部命题变项,给 p_1, p_2, \dots, p_n 各指定一个真值,称为对 A 的一个赋值或解释.若指定的一组值使 A 为 1,则称这组值为 A 的成真赋值;若使 A 为 0,则称这组值为 A 的成假赋值.

不难看出,含 n ($n \geq 1$) 个命题变项的公式共有 2^n 个不同的赋值.

定义 1.9 将命题公式 A 在所有赋值下取值情况列成表,称作 A 的真值表.

定义 1.10 设 A 为任一命题公式.

(1) 若 A 在它的各种赋值下取值均为真,则称 A 为重言式或永真式.

(2) 若 A 在它的各种赋值下取值均为假,则称 A 为矛盾式或永假式.

(3) 若 A 不是矛盾式,则称 A 为可满足式.

从定义不难看出以下几点.

1. A 是可满足式的等价定义是: A 至少存在一个成真赋值.

2. 重言式一定是可满足式,但反之不真.若公式 A 是可满足式,且它至少存在一个成假赋值,

则称 A 为非重言式的可满足式.

3. 真值表可用来判断公式的类型.

(1) 若真值表最后一列全为 1,则公式为重言式.

(2) 若真值表最后一列全为 0,则公式为矛盾式.

(3) 若真值表最后一列中至少有一个为 1,则公式为可满足式.

第二章 命题逻辑等值演算

2.1 等值式

定义 2.1 设 A, B 是两个命题公式, 若 A, B 构成的等价式 $A \leftrightarrow B$ 为重言式, 则称 A 与 B 是等值的, 记作 $A \Leftrightarrow B$.

定义中的符号 \Leftrightarrow 不是联结符, 它是用来说明 A 与 B 等值 ($A \leftrightarrow B$ 是重言式) 的一种记法, 因而 \Leftrightarrow 是元语言符号. 不要将 \Leftrightarrow 与 \leftrightarrow 混为一谈, 同时也要注意它与一般等号 “=” 的区别.

1. 双重否定律

$$A \Leftrightarrow \neg \neg A \quad (2.1)$$

2. 幂等律

$$A \Leftrightarrow A \vee A, \quad A \Leftrightarrow A \wedge A \quad (2.2)$$

3. 交换律

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, \quad A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A \quad (2.3)$$

4. 结合律

$$\begin{aligned} (A \vee B) \vee C &\Leftrightarrow A \vee (B \vee C) \\ (A \wedge B) \wedge C &\Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C) \end{aligned} \quad (2.4)$$

5. 分配律

$$\begin{aligned} A \vee (B \wedge C) &\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (\vee \text{ 对 } \wedge \text{ 的分配律}) \\ A \wedge (B \vee C) &\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad (\wedge \text{ 对 } \vee \text{ 的分配律}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

6. 德摩根律

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B, \quad \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \quad (2.6)$$

7. 吸收律

$$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, \quad A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A \quad (2.7)$$

8. 零律

$$A \vee 1 \Leftrightarrow 1, \quad A \wedge 0 \Leftrightarrow 0 \quad (2.8)$$

9. 同一律

$$A \vee 0 \Leftrightarrow A, \quad A \wedge 1 \Leftrightarrow A \quad (2.9)$$

10. 排中律

$$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1 \quad (2.10)$$

11. 矛盾律

$$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0 \quad (2.11)$$

12. 蕴涵等值式

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B \quad (2.12)$$

13. 等价等值式

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \quad (2.13)$$

14. 假言易位

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A \quad (2.14)$$

15. 等价否定等值式

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B \quad (2.15)$$

16. 归谬论

$$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A \quad (2.16)$$

等值演算：由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程。

在等值演算过程中,要使用下述重要规则.

置换规则 设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式, $\Phi(B)$ 是用公式 B 置换 $\Phi(A)$ 中 A 的所有出现后得到的命题公式. 若 $B \Leftrightarrow A$, 则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.

2.2 析取范式与合取范式

定义 2.2 命题变项及其否定统称作文字. 仅由有限个文字构成的析取式称作简单析取式. 仅由有限个文字构成的合取式称作简单合取式.

$p, \neg q; p \vee \neg p, \neg p \vee q$ 和 $\neg p \vee \neg q \vee r, p \vee \neg p \vee r$ 都是简单析取式, 分别由 1 个文字, 2 个文字和 3 个文字构成.

$\neg p, q; p \wedge \neg p, p \wedge \neg q$ 和 $p \wedge q \wedge \neg r, \neg p \wedge p \wedge q$ 都是简单合取式, 分别由 1 个文字, 2 个文字和 3 个文字构成. 注意, 一个文字既是简单析取式, 又是简单合取式.

定理 2.1 (1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式.
(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式.

定义 2.3 由有限个简单合取式的析取构成的命题公式称作析取范式. 由有限个简单析取式的合取构成的命题公式称作合取范式. 析取范式与合取范式统称作范式.

析取范式的一般形式为 $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_s$, 其中 $A_i (i=1, 2, \cdots, s)$ 为简单合取式; 合取范式的一般形式为 $B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_t$, 其中 $B_j (j=1, 2, \cdots, t)$ 为简单析取式. 例如, $(p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee p$ 为析取范式, $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge r \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s)$ 为合取范式. $\neg p \wedge q \wedge r$ 既是由一个简单合取式构成的析取范式, 又是由 3 个简单析取式构成的合取范式; 类似地, $p \vee \neg q \vee r$ 既是由 3 个简单合取式构成的析取范式, 又是由一个简单析取式构成的合取范式.

定理 2.2 (1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式.
(2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式.

定理 2.3 (范式存在定理) 任一命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式.
求给定公式范式的步骤为:

1. 消去联结词 $\rightarrow, \leftrightarrow$.
2. 用双重否定律消去双重否定符, 用德摩根律内移否定符.
3. 使用分配律: 求析取范式时使用 \wedge 对 \vee 的分配律, 求合取范式时使用 \vee 对 \wedge 的分配律.

定义 2.4 在含有 n 个命题变项的简单合取式 (简单析取式) 中, 若每个命题变项和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次, 而且命题变项或它的否定式按照下标从小到大或按照字典顺序排列, 称这样的简单合取式 (简单析取式) 为极小项 (极大项).

由于每个命题变项在极小项中以原形或否定形式出现且仅出现一次, 因而 n 个命题变项共可以产生 2^n 个不同的极小项. 每个极小项都有且仅有一个成真赋值. 若极小项的成真赋值所对应的二进制数等于十进制数 i , 就将这个极小项记作 m_i . 类似地, n 个命题变项共可产生 2^n 个不同的极大项, 每个极大项只有一个成假赋值, 将其对应的十进制数 i 做极大项的角标, 记作 M_i .

表 2.3 含 p, q 的极小项与极大项

极小项			极大项		
公 式	成真赋值	名 称	公 式	成假赋值	名 称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

极小项与极大项有由下面定理给出的关系:

定理 2.4 设 m_i 与 M_i 是命题变项含 p_1, p_2, \dots, p_n 的极小项和极大项, 则

$$\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \neg M_i \Leftrightarrow m_i$$

下面给出主析取范式(主合取范式)的定义:

定义 2.5 所有简单合取式(简单析取式)都是极小项(极大项)的析取范式(合取范式)称为主析取范式(主合取范式).

定理 2.5 任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是唯一的.

求主析取范式时, 先求出析取范式, 若某个简单合取式不是极小项, 则求出它们的派生极小项, 方法是使用 $A = A \wedge 1 = A \wedge (p \vee \neg p)$ 插入缺少的变元.

求主合取范式时, 类似的, 通过使用 $A = A \vee 0 = A \vee (p \wedge \neg p)$ 插入缺少的变元.

主析取范式有以下三个重要作用:

1. 求公式的成真赋值与成假赋值.

若公式 A 中含 n 个命题变项, A 的主析取范式含 s ($0 \leq s \leq 2^n$) 个极小项, 则 A 有 s 个成真赋值, 它们是所含极小项角标的二进制表示, 其余 $2^n - s$ 个赋值都是成假赋值. 例如, 例 2.8 中,

2. 判断公式的类型.

设公式 A 中含 n 个命题变项, 容易看出:

(1) A 为重言式当且仅当 A 的主析取范式含全部 2^n 个极小项.

(2) A 为矛盾式当且仅当 A 的主析取范式不含任何极小项. 此时, 记 A 的主析取范式为 0.

(3) A 为可满足式当且仅当 A 的主析取范式中至少含一个极小项.

3. 判断两个命题公式是否等值.

设公式 A, B 共含有 n 个命题变项, 按 n 个命题变项求出 A 与 B 的主析取范式 A' 与 B' . 若 $A' = B'$, 则 $A \Leftrightarrow B$, 否则 $A \not\Leftrightarrow B$.

对于主合取范式还要说明以下两点:

1. 由主析取范式求主合取范式.

设公式 A 含 n 个命题变项. A 的主析取范式含 s ($0 < s < 2^n$) 个极小项, 即

$$A = m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \dots \vee m_{i_s}, \quad 0 \leq i_j \leq 2^n - 1, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

没出现的极小项为 $m_{j_1}, m_{j_2}, \dots, m_{j_{2^n-s}}$, 它们的角标的二进制表示为 $\neg A$ 的成真赋值, 因而 $\neg A$ 的主析取范式为

$$\neg A = m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \dots \vee m_{j_{2^n-s}}$$

由定理 2.4 可知

$$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow \neg \neg A \\ &\Leftrightarrow \neg (m_{j_1} \vee m_{j_2} \vee \dots \vee m_{j_{2^n-s}}) \\ &\Leftrightarrow \neg m_{j_1} \wedge \neg m_{j_2} \wedge \dots \wedge \neg m_{j_{2^n-s}} \\ &\Leftrightarrow M_{j_1} \wedge M_{j_2} \wedge \dots \wedge M_{j_{2^n-s}} \end{aligned}$$

这就由公式的主析取范式直接求出它的主合取范式.

2. 重言式与矛盾式的主合取范式.

矛盾式无成真赋值, 因而矛盾式的主合取范式含全部 2^n (n 为公式中命题变项个数) 个极大项. 而重言式无成假赋值, 主合取范式不含任何极大项, 规定重言式的主合取范式为 1. 至于可满足式, 它的主合取范式中极大项的个数一定小于 2^n .

上述第 2 点性质需要与主析取范式对照理解.

2.3 联结词的完备集

定义 2.6 称 $F: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ 为 n 元真值函数.

表 2.8 2 元真值函数

$p \quad q$	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

$p \quad q$	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

定义 2.7 设 S 是一个联结词集合, 如果任何 $n(n \geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含 S 中的联结词构成的公式表示, 则称 S 是联结词完备集.

定理 2.6 $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$ 是联结词完备集.

证 因为任何 $n(n \geq 1)$ 元真值函数都与唯一的一个主析取范式等值, 而在主析取范式中仅含联结词 \neg, \wedge, \vee , 所以 $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$ 是联结词完备集.

推论 以下联结词集都是联结词完备集.

- (1) $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$
- (2) $S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- (3) $S_3 = \{\neg, \wedge\}$
- (4) $S_4 = \{\neg, \vee\}$
- (5) $S_5 = \{\neg, \rightarrow\}$

第三章 命题逻辑的推理理论

3.1 推理的形式结构

定义 3.1 设 A_1, A_2, \dots, A_k 和 B 都是命题公式, 若对于 A_1, A_2, \dots, A_k 和 B 中出现的命题变项的任意一组赋值, 或者 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 为假, 或者当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 为真时 B 也为真, 则称由前提 A_1, A_2, \dots, A_k 推出结论 B 的推理是有效的或正确的, 并称 B 为有效的结论.

关于定义 3.1 还需做以下几点说明.

1. 由前提 A_1, A_2, \dots, A_k 推出结论 B 的推理是否正确与诸前提的排列次序无关, 前提是一个有限的公式集合. 设前提为集合 Γ , 将由 Γ 推出 B 的推理记为 $\Gamma \vdash B$. 若推理是正确的, 则记为 $\Gamma \models B$, 否则记为 $\Gamma \not\models B$. 这里称 $\Gamma \vdash B$ 或 $\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \vdash B$ 为推理的形式结构.

2. 设 A_1, A_2, \dots, A_k, B 中共出现 n 个命题变项, 对于任一组赋值 $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ ($\alpha_i = 0$ 或 1 , $i = 1, 2, \dots, n$), 前提和结论的取值情况有以下 4 种.

(1) $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 为 0, B 为 0;

(2) $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 为 0, B 为 1;

(3) $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 为 1, B 为 0;

(4) $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ 为 1, B 为 1.

由定义 3.1 可知, 只要不出现情况 (3), 推理就是正确的, 因而判断推理是否正确, 就是判断是否会出现情况 (3).

3. 由上面的讨论可知, 推理正确并不能保证结论 B 一定成立, 因为前提可能就不成立. 这与人们通常对推理的理解是不同的, 通常认为只有在正确的前提下推出正确的结论才是正确的推理. 而在这里, 如果前提不正确, 不论结论正确与否, 都说推理正确.

定理 3.1 命题公式 A_1, A_2, \dots, A_k 推出 B 的推理正确当且仅当

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B$$

为重言式.

由定理 3.1, 由前提 A_1, A_2, \dots, A_k 推出 B 的推理的形式结构

$$\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \vdash B \quad (3.1)$$

等同于蕴涵式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \rightarrow B \quad (3.2)$$

其中推理前提的合取式成了蕴涵式的前件, 结论成了蕴涵式的后件. 推理正确

$$\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \models B \quad (3.3)$$

等同于

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \Rightarrow B \quad (3.4)$$

其中 \Rightarrow 同 \Leftrightarrow 一样是一种元语言符号, 表示蕴涵式为重言式.

有一些重要的重言蕴涵式,称作推理定律.下面给出 9 条推理定律,它们是:

- | | |
|--|-------------|
| 1. $A \Rightarrow (A \vee B)$ | 附加律 |
| 2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$ | 化简律 |
| 3. $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ | 假言推理 |
| 4. $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ | 拒取式 |
| 5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ | 析取三段论 |
| 6. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$ | 假言三段论 |
| 7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ | 等价三段论 |
| 8. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ | 构造性二难 |
| $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \Rightarrow B$ | 构造性二难(特殊形式) |
| 9. $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$ | 破坏性二难 |

其中 A, B, C, D 等是元语言符号,表示任意的命题公式.

若一个推理的形式结构与某条推理定律对应的蕴含式一致,则不用证明就可断定这个推理是正确的,只需说明用了某条推理规律即可。

第四章 一阶逻辑基本概念

4.1 一阶逻辑命题符号化

个体词、谓词和量词是一阶逻辑命题符号化的三个基本要素。

4.2 一阶逻辑公式及解释

所谓一阶语言,是用于一阶逻辑的形式语言,而一阶逻辑就是建立在一阶语言基础上的逻辑体系。

定义 4.1 设 L 是一个非逻辑符号集合,由 L 生成的一阶语言 \mathcal{L} 的字母表包括下述符号.

非逻辑符号

(1) L 中的个体常项符号,常用 a, b, c, \dots 或 $a_i, b_i, c_i, \dots (i \geq 1)$ 表示.

(2) L 中的函数符号,常用 f, g, h, \dots 或 $f_i, g_i, h_i, \dots (i \geq 1)$ 表示.

(3) L 中的谓词符号,常用 F, G, H, \dots 或 $F_i, G_i, H_i, \dots (i \geq 1)$ 表示.

逻辑符号

(4) 个体变项符号: $x, y, z, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots (i \geq 1)$.

(5) 量词符号: \forall, \exists .

(6) 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

(7) 括号与逗号: $(,), ,$.

定义 4.2 \mathcal{L} 的项定义如下.

(1) 个体常项符号和个体变项符号是项.

(2) 若 $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 元函数符号, t_1, t_2, \dots, t_n 是 n 个项,则 $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用(1),(2)得到的.

定义 4.3 设 $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 \mathcal{L} 的 n 元谓词符号, t_1, t_2, \dots, t_n 是 \mathcal{L} 的 n 个项,则称 $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是 \mathcal{L} 的原子公式.

例 4.5 中的 1 元谓词 $F(x), G(y)$, 2 元谓词 $H(x, y), L(x, y)$ 等都是原子公式.

定义 4.4 \mathcal{L} 的合式公式定义如下.

(1) 原子公式是合式公式.

(2) 若 A 是合式公式,则 $(\neg A)$ 也是合式公式.

(3) 若 A, B 是合式公式,则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式.

(4) 若 A 是合式公式,则 $\forall xA, \exists xA$ 也是合式公式.

(5) 只有有限次地应用(1)~(4)构成的符号串才是合式公式.

\mathcal{L} 的合式公式也称作谓词公式,简称为公式.

定义 4.5 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中,称 x 为指导变元, A 为量词的辖域. 在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中, x 的所有出现都称作约束出现, A 中不是约束出现的其他变项均称作自由出现.

定义 4.6 设 A 是任意的公式,若 A 中不含自由出现的个体变项,则称 A 为封闭的公式,简称作闭式.

定义 4.7 设 \mathcal{L} 是由 L 生成的一阶语言, \mathcal{L} 的解释 I 由下面 4 部分组成.

(a) 非空个体域 D_I

(b) 对每一个个体常项符号 $a \in L$, 有一个 $\bar{a} \in D_I$, 称 \bar{a} 为 a 在 I 中的解释.

(c) 对每一个 n 元函数符号 $f \in L$, 有一个 D_I 上的 n 元函数 $\bar{f}: D_I^n \rightarrow D_I$, 称 \bar{f} 为 f 在 I 中的解释.

(d) 对每一个 n 元谓词符号 $F \in L$, 有一个 D_I 上的 n 元谓词常项 \bar{F} , 称 \bar{F} 为 F 在 I 中的解释.

I 下的赋值 σ : 对每一个个体变项符号 x 指定 D_I 中的一个值 $\sigma(x)$.

设公式 A , 规定: 在解释 I 和赋值 σ 下,

1. 取个体域 D_I ,
2. 若 A 中含个体常项符号 a 就将它替换成 \bar{a} ,
3. 若 A 中含函数符号 f 就将它替换成 \bar{f} ,
4. 若 A 中含谓词符号 F 就将它替换成 \bar{F} ,
5. 若 A 中含自由出现的个体变项符号 x 就将它替换成 $\sigma(x)$,

把这样所得到的公式记作 A' . 称 A' 为 A 在 I 下的解释, 或 A 在 I 下被解释成 A' .

定义 4.9 设 A_0 是含命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n 的命题公式, A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个谓词公式, 用 $A_i (1 \leq i \leq n)$ 处处代替 A_0 中的 p_i , 所得公式 A 称为 A_0 的代换实例.

例如, $F(x) \rightarrow G(x), \forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)$ 都是 $p \rightarrow q$ 的代换实例.

定理 4.1 重言式的代换实例都是永真式, 矛盾式的代换实例都是矛盾式.

第五章 一阶逻辑等值演算与推理

5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

定义 5.1 设 A, B 是一阶逻辑中任意两个公式, 若 $A \leftrightarrow B$ 是永真式, 则称 A 与 B 等值, 记作 $A \Leftrightarrow B$. 称 $A \Leftrightarrow B$ 是等值式.

由于命题逻辑中的重言式的代换实例都是一阶逻辑中的永真式, 因而第二章的 16 组等值式模式给出的代换实例都是一阶逻辑的等值式模式. 除此之外, 人们还证明了下面重要的等值式:

1. 消去量词等值式

设个体域为有限集 $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 则有

$$\begin{aligned} (1) \quad & \forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n) \\ (2) \quad & \exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n) \end{aligned} \quad (5.1)$$

2. 量词否定等值式

设公式 $A(x)$ 含自由出现的个体变项 x , 则

$$\begin{aligned} (1) \quad & \neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \\ (2) \quad & \neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x) \end{aligned} \quad (5.2)$$

可以如下直观解释式(5.2). 对于(1), “并不是所有的 x 都有性质 A ”与“存在 x 没有性质 A ”是一回事. 对于(2), “不存在有性质 A 的 x ”与“所有 x 都没有性质 A ”是一回事.

3. 量词辖域收缩与扩张等值式

设公式 $A(x)$ 含自由出现的个体变项 x , B 不含 x 的自由出现, 则

$$\begin{aligned} (1) \quad & \forall x (A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B \\ & \forall x (A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B \\ & \forall x (A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B \\ & \forall x (B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \exists x (A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B \\ & \exists x (A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B \\ & \exists x (A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B \\ & \exists x (B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x) \end{aligned} \quad (5.4)$$

4. 量词分配等值式

设公式 $A(x), B(x)$ 含自由出现的个体变项 x , 则

$$\begin{aligned} (1) \quad & \forall x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \\ (2) \quad & \exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \end{aligned} \quad (5.5)$$

2. 换名规则

设 A 为一公式, 将 A 中某量词辖域中的一个约束变项的所有出现及相应的指导变元全部改成该量词辖域中未曾出现过的某个个体变项符号, 公式中其余部分不变, 将所得公式记作 A' , 则 $A' \Leftrightarrow A$.

5.2 一阶逻辑前束范式

与析取范式/合取范式类似, 在一阶逻辑中, 公式也有范式形式。

定义 5.2 具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_kx_kB$$

的一阶逻辑公式称作前束范式,其中 $Q_i(1 \leq i \leq k)$ 为 \forall 或 \exists , B 为不含量词的公式.

例如, $\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$

$$\forall x \forall y \exists z (F(x) \wedge G(y) \wedge H(z) \rightarrow L(x, z))$$

等都是前束范式,而

$$\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge H(x, y)))$$

$$\exists x (F(x) \wedge \forall y (G(y) \rightarrow H(x, y)))$$

等不是前束范式.

定理 5.1 (前束范式存在定理) 一阶逻辑中的任何公式都存在等值的前束范式.

公式的前束范式是不唯一的.

5.3 一阶逻辑的推理理论

在一阶逻辑中称永真式的蕴涵式为推理定律. 若一个推理的形式结构是推理定律,则这个推理是正确的.

推理定律有下面几组来源.

第一组 命题逻辑推理定律的代换实例. 例如:

$$\forall x F(x) \wedge \forall y G(y) \Rightarrow \forall x F(x)$$

$$\forall x F(x) \Rightarrow \forall x F(x) \vee \exists y G(y)$$

分别为命题逻辑中化简律和附加律的代换实例,它们都是推理定律.

第二组 由基本等值式生成的推理定律. 5.1 节中给出的两组等值式中的每个等值式都可以生成两个推理定律. 例如,由双重否定律可生成

$$\forall x F(x) \Rightarrow \neg \neg \forall x F(x)$$

$$\neg \neg \forall x F(x) \Rightarrow \forall x F(x)$$

由量词否定等值式可以生成

$$\neg \forall x F(x) \Rightarrow \exists x \neg F(x)$$

$$\exists x \neg F(x) \Rightarrow \neg \forall x F(x)$$

第三组 一些常用的重要推理定律.

$$(1) \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$$

$$(2) \exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

$$(3) \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$$

$$(4) \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$$

等等.

1. 全称量词消去规则 (简记为 \forall -)

$$\frac{\forall x A(x)}{\therefore A(y)} \text{ 或 } \frac{\forall x A(x)}{\therefore A(c)}$$

其中 x, y 是个体变项符号, c 是个体常项符号,且在 A 中 x 不在 $\forall y$ 和 $\exists y$ 的辖域内自由出现.

由于 $\forall x F(x) \rightarrow F(y)$ 和 $\forall x F(x) \rightarrow F(c)$ 是永真式 (见例 4.10), 这条规则是显然的. 这里要求在 A 中 x 不在 $\forall y$ 和 $\exists y$ 的辖域中自由出现, 是因为如果在 A 中 x 在 $\forall y$ 和 $\exists y$ 的辖域中自由出现, 这时在 A 中约束出现的 y 可能与自由出现的 x 有某种联系, 而导致 $A(y)$ 不真. 后面将会给出例子说明.

2. 全称量词引入规则(简记为 $\forall+$)

$$\frac{A(y)}{\therefore \forall x A(x)}$$

其中 y 是个体变项符号,且不在 Γ 的任何公式中自由出现.

这条规则的意思是,为了证明 $\forall x A(x)$ 为真,只需要任取一个 y ,证明 $A(y)$ 为真. 为了保证 y

的任意性,要求 y 与前提中的条件无关,即 y 不在 Γ 的任何公式中自由出现.

3. 存在量词消去规则(简记为 $\exists-$)

$$\begin{array}{c} \exists x A(x) \\ \frac{A(y) \rightarrow B}{\therefore B} \end{array} \quad \text{或} \quad \frac{A(y) \rightarrow B}{\therefore \exists x A(x) \rightarrow B}$$

$$\begin{array}{c} \exists x A(x) \\ \frac{A(c) \rightarrow B}{\therefore B} \end{array} \quad \text{或} \quad \frac{A(c) \rightarrow B}{\therefore \exists x A(x) \rightarrow B}$$

其中 y 是个体变项符号,且不在 Γ 的任何公式和 B 中自由出现. c 是个体常项符号,且不在 Γ 的任何公式和 A, B 中出现.

4. 存在量词引入规则(简记为 $\exists+$)

$$\frac{A(y)}{\therefore \exists x A(x)} \quad \text{或} \quad \frac{B \rightarrow A(y)}{\therefore B \rightarrow \exists x A(x)}$$

$$\frac{A(c)}{\therefore \exists x A(x)} \quad \text{或} \quad \frac{B \rightarrow A(c)}{\therefore B \rightarrow \exists x A(x)}$$

其中 x, y 是个体变项符号, c 是个体常项符号,并且在 A 中 y 和 c 分别不在 $\forall x, \exists x$ 的辖域内自由出现和出现.

由于 $F(y) \rightarrow \exists x F(x)$ 和 $F(c) \rightarrow \exists x F(x)$ 是永真式(见例 4.10),这条规则是显然的. 两对表述也是等价的. 要求在 A 中 y 和 c 不在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中自由出现的原因也和 $\forall-$ 规则中的一样.