Решение системы линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональной матрицей.

1. Исходная задача.

Рассматривается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & & & & \\ & & a_4 & b_4 & c_4 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & \\ & & & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

Запишем исходную систему в координатной форме:

$$\begin{aligned} & b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1, \\ & a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ & a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n. \end{aligned} \tag{1}$$

2. Метод прогонки.

Метод прогонки основан на сведении исходной системы к верхнетреугольному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & L_2 & & & & & & & \\ & 1 & L_3 & & & & & & \\ & & 1 & L_4 & & & & & \\ & & & 1 & L_5 & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & L_{n-1} & \\ & & & & & & & 1 & L_n \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \\ M_{n+1} \end{pmatrix}$$

где числа L_i, M_i, называемые прогоночными коэффициентами, подлежат определению.

Запишем искомую систему в координатной форме:

$$(2) \qquad \begin{aligned} & x_i + L_{i+1} x_{i+1} = M_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ & x_n = M_{n+1}. \end{aligned}$$

1. Найдём коэффициенты L_2, M_2. Для этого рассмотрим первое уравнение системы (1):

$$b_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1.$$

Если $b_1 \neq 0$, то рассматриваемое уравнение можно записать в виде

$$x_1 + L_2 x_2 = M_2,$$

где

$$L_2 = \frac{c_1}{b_1}, \quad M_2 = \frac{d_1}{b_1}.$$

2. Последовательно для $i = 2, \dots, n-1$ будем искать коэффициенты L_{i+1} и M_{i+1}, предполагая, что коэффициенты L_2, M_2, L_3, M_3, …, L_i, M_i, уже найдены. Для этого рассмотрим i-ое уравнение системы (1):

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i.$$

Подставим в это уравнение равенство $x_{i-1} + L_i x_i = M_i$:

$$a_i(M_i - L_i x_i) + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i;$$

$$(b_i - a_i L_i) x_i + c_i x_{i+1} = d_i - a_i M_i.$$

Если $b_i \neq a_i L_i$, то рассматриваемое уравнение можно записать в виде

$$x_i + L_{i+1} x_{i+1} = M_{i+1},$$

где

$$L_{i+1} = \frac{c_i}{b_i - a_i L_i}, \quad M_{i+1} = \frac{d_i - a_i M_i}{b_i - a_i L_i}.$$

3. Наконец, найдём M_{n+1}. Для этого рассмотрим последнее уравнение системы (1):

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n.$$

Подставим в это уравнение равенство $x_{n-1} + L_n x_n = M_n$:

$$a_n(M_n - L_n x_n) + b_n x_n = d_n;$$

$$(b_n - a_n L_n) x_n = d_n - a_n M_n.$$

Если $b_n \neq a_n L_n$, то рассматриваемое уравнение можно записать в виде

$$x_n = M_{n+1},$$

где

$$M_{n+1} = \frac{d_n - a_n M_n}{b_n - a_n L_n}.$$

4. Принимая во внимание то предположение, что $a_1 = c_n = 0$, запишем общие формулы для определения коэффициентов L_i, M_i:

$$L_{i+1} = \frac{c_i}{b_i - a_i L_i}, \quad M_{i+1} = \frac{d_i - a_i M_i}{b_i - a_i L_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Коэффициенты L_i, M_i вычисляем парами, проверяя при этом выполнение условия $b_i \neq a_i L_i$. Процедура вычисления коэффициентов L_i, M_i называется прямым ходом метода прогонки.

5. Обратный ход метода прогонки сводится к вычислению неизвестных x_i по формулам:

$$x_n = M_{n+1},$$

$$x_i = M_{i+1} - L_{i+1} x_{i+1}, \quad i = n-1, \ldots, 1.$$

3. Пример неустойчивого метода.

1. Решение исходной системы (1) ищем в виде

(3) $$x_i = y_i + K z_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где y_i, z_i удовлетворяют следующим системам:

(4) $$\begin{aligned} & y_1 = 0, \\ & b_1 y_1 + c_1 y_2 = d_1, \\ & a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i, \quad i = 2, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

и

(5) $$\begin{aligned} & z_1 = 1, \\ & b_1 z_1 + c_1 z_2 = 0, \\ & a_i z_{i-1} + b_i z_i + c_i z_{i+1} = 0, \quad i = 2, \ldots, n-1, \end{aligned}$$

а константа K ищется из условия

(6) $$a_n \left(y_{n-1} + K z_{n-1} \right) + b_n \left(y_n + K z_n \right) = d_n.$$

Несложно видеть, что при выполнении условий (4)–(6) решение (3) удовлетворяет исходной системе (1).

2. Системы (4) и (5) решаем по следующим алгоритмам:

$$\begin{aligned} & y_1 = 0, \\ & y_2 = \frac{d_1}{c_1}, \\ & y_{i+1} = \frac{d_i - a_i y_{i-1} - b_i y_i}{c_i}, \quad i = 2, \ldots, n-1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & z_1 = 1, \\ & z_2 = -\frac{b_1}{c_1}, \\ & z_{i+1} = -\frac{a_i z_{i-1} + b_i z_i}{c_i}, \quad i = 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Несложно видеть, что решение может быть найдено только в том случае, если все коэффициенты c_i отличны от нуля.

3. Константа K может быть найдена по формуле

$$K = \frac{d_n - a_n y_{n-1} - b_n y_n}{a_n z_{n-1} + b_n z_n}.$$

4. Тестовый пример.

1. Система уравнений:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2. Система уравнений, приведённая к верхнетреугольному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Точное решение:

$$x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Постановка задачи для лабораторной работы.

1. **(А)** Реализовать классы/процедуры:

- для работы с векторами (сложение, вычитание, скалярное умножение, вычисление нормы как максимальной по модулю компоненты, считывание из файла / с экрана, вывод в файл / на экран);
- для работы с трёхдиагональными матрицами (сложение, вычитание, умножение на вектор, считывание из файла / с экрана, вывод в файл / на экран; при задании матриц предусматривать, что $a_1 = c_n = 0$).

2. Реализовать методы/процедуры вычисления вектора x по заданным векторам a, b, c и d двумя различными способами: методом прогонки **(А)** и неустойчивым методом **(В)**.

3. Способы задания входных данных:

- **(А)** из файла (размерность системы n также задаётся из файла);
- **(А)** случайными числами (в этом случае размерность системы n задаётся не из файла, а с клавиатуры).

4. Режимы работы:

- **(А)** основной режим:
  - на входе – векторы a, b, c, d;
  - на выходе – найденный вектор x;
- **(А)** режим тестирования:
  - на входе – векторы a, b, c, а также x^* — заранее известное точное решение;
  - вычисляется соответствующий точному решению x^* вектор правой части d;
  - вектор решения x вычисляется, как и в общем случае, по векторам a, b, c и d;
  - на выходе – (помимо найденного вектора x) погрешность $\|x^*-x\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i^*-x_i|$.

5. Составить таблицу погрешностей двух рассматриваемых методов.

- 1 столбец — размерность системы $n=10, 20, \ldots$;
- 2 столбец — погрешность метода прогонки **(А)**;
- 3 столбец — погрешность неустойчивого метода **(В)**.

Литература:

1. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. — Москва : Наука, 1978. — 512 с.
2. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения / Дж. Деммель. — Москва : Мир, 2001. — 435 с.
3. Вержбицкий В.М. Вычислительная линейная алгебра / В. М. Вержбицкий. — Москва : Высшая школа, 2009. — 351 с.
4. Гудович Н. Н. Избранные вопросы курса численных методов. Выпуск 3. Интерполяция кубическими сплайнами / Н. Н. Гудович. — Воронеж : ВГУ, 2002.