

Strategie Analyse Monopoly

1.1	Einleitung und Motivation
	<p>Das Brettspiel Monopoly: Seit 1935 ein klassiker unter den Gesellschaftsspielen¹, doch handelt es sich eher um eine Strategiespiel, oder wie viel Glück ist tatsächlich involviert? Gibt es die ultimative Strategie um jedes Spiel zu dominieren? Welche Straßen sollte man taktisch am besten kaufen? Inspiriert von einem Video des Kanals "Stand-up Maths"² möchte ich mich diesen in Fragen in der folgenden Spielanalyse einmal selber widmen.</p>
1.2	Vorgehensweise
	<p>Den Ausgang aller Überlegungen bildet die Realisation, dass die Spielfelder, auch wenn die Züge pro Runde gegen unendlich streben, nicht gleich häufig erreicht werden. Dies kann mit den Ereignis- und Gemeinschaftskarten, sowie dem Feld "Gehen Sie in das Gefängnis" begründet werden. Durch die Karten wie "Rücke vor bis auf Los" verändert sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Um nun allerdings die absolute Wahrscheinlichkeit für jedes Feld zu bestimmen bedarf es aufwendigeren Methoden. Im wesentlichen bietet sich dabei entweder eine induktive oder empirische Vorgehensweise an. Erste umfasst die Analyse der Übergangswahrscheinlichkeiten von jedem Feld zu jedem anderen Feld mittels Markov-Ketten, die Andere Möglichkeit stellt eine Monte-Carlo Simulation mittels Computer dar.</p> <p>Für letzteres habe ich mich entschieden. Gerade wenn die Fragestellungen an das System komplexer werden ist eine Anpassung deutlich leichter möglich als bei konkreten Berechnungen. Außerdem erschien es mir insgesamt leichter eine Simulation zu entwickeln.</p>
1.3	Besonderheiten des Spiels
	<p>Zwei Besonderheiten, die mir nicht bewusst waren sind zum Einen das so genannte Speeding, welches einen Spieler ins Gefängnis versetzt, sobald dieser 3 Doppel hintereinander gewürfelt hat, zum Anderen die Möglichkeit vom Ereignisfeld, durch die Karte "Gehe 3 Felder zurück", auf ein Gemeinschaftsfeld zu gelangen, sodass die Spielfigur innerhalb eines Zuges bis zu 3 mal versetzt werden kann. Außerdem wird ein verbrauchter Kartenstapel, entgegen meiner Annahme, nicht neu gemischt, sondern verbleibt, auch nach vollständigem Aufbrauchen in der Eingangsreihenfolge.</p>
2.1	Überblick und Umfang der Simulation
	<p>Das Programm ist in Javascript geschrieben und repliziert alle für die Bewegung des Spielers relevanten Regeln. Dies umfasst:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Mischen der Kartenstapel zu Beginn des Spiels - Mit 2 Würfeln würfeln <ul style="list-style-type: none"> - Den Spieler bei 3 Paschen hintereinander ins Gefängnis sperren - Den Spieler beim Auftreffen auf ein Ereignis- oder Gemeinschaftsfeld die Aktion der Karte ausführen lassen - Den Spieler beim Auftreffen auf das "Gehen Sie in das Gefängnis" Feld ins Gefängnis setzen - Den Spieler bei einem Pasch aus dem Gefängnis freilassen <ul style="list-style-type: none"> - ansonsten beim Dritten Fehlwurf freilassen

¹ https://de.wikipedia.org/wiki/Monopoly#Erste_Ausgabe_1936

² "The Mathematics of Winning Monopoly" <https://www.youtube.com/watch?v=ubQXz5RBBtU> (Hannah Fry, Matt Parker)

Nicht beachtet werden:

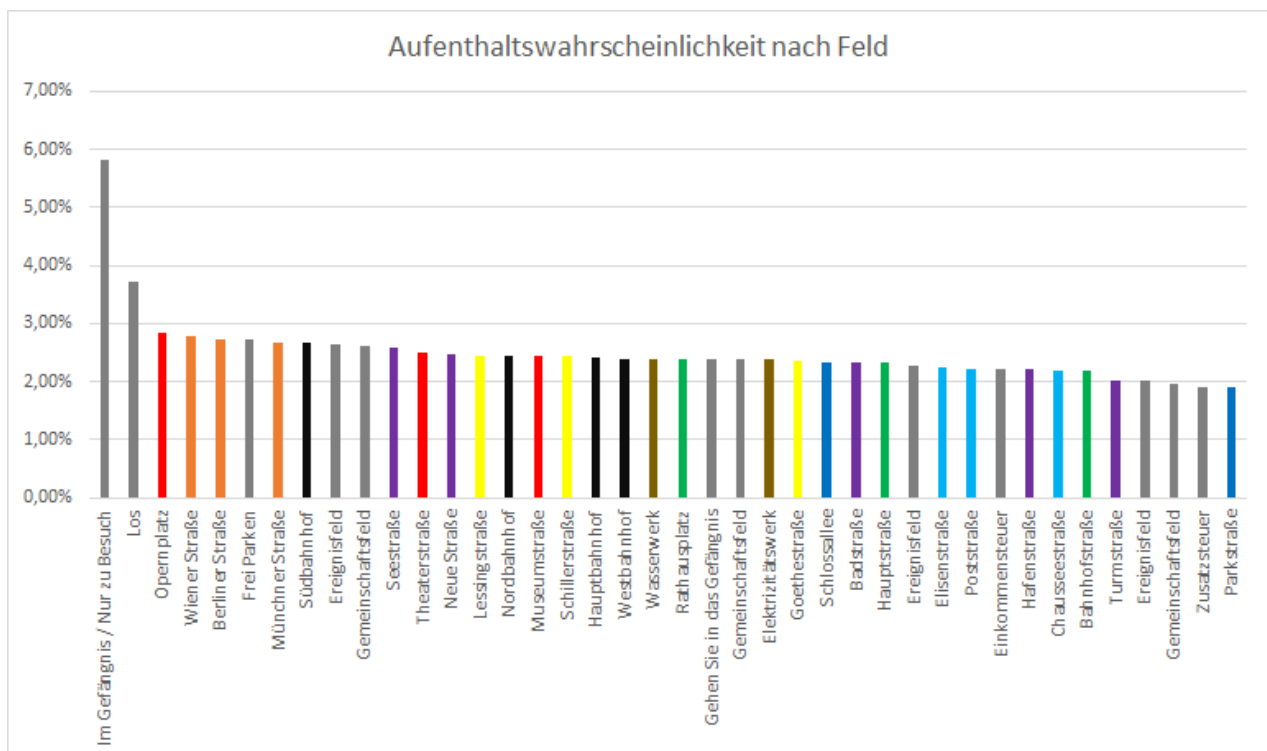
- jegliche Regeln die über die Spielerbewegung hinaus gehen, also:
 - Kaufen
 - Zahlen von Strafen
 - Zahlen von Mieten
 - Bauen von Häusern
 - ...
- Eventuell gezogene "Du kommst aus dem Gefängnis frei" Karten zur Verkürzung der Haft

Da das Programm objektorientiert programmiert wurde, existiert für jedes Spielobjekt eine eigene Klasse (Spielbrett, Würfel, Karten, Spieler), die Hilfsfunktionen für den Ablauf des Spiels implementiert. Die Hauptlogik findet jedoch im Spiel Controller (Game.js) statt und ist dort auch durch Kommentare erläutert. Der übergeordnete Code in index.js kümmert sich um die Simulation von mehreren Spielen, und die Klasse Logger.js ist dafür verantwortlich die einzelnen Aktionen im Spiel zu tracken bzw. Logs über etwa die Häufigkeit von Besuchen der einzelnen Felder zu erstellen.

Der Programmcode ist unter <https://github.com/DreiDe/monopoly-simulation> auffindbar

2.2 Ergebnisse der Simulation

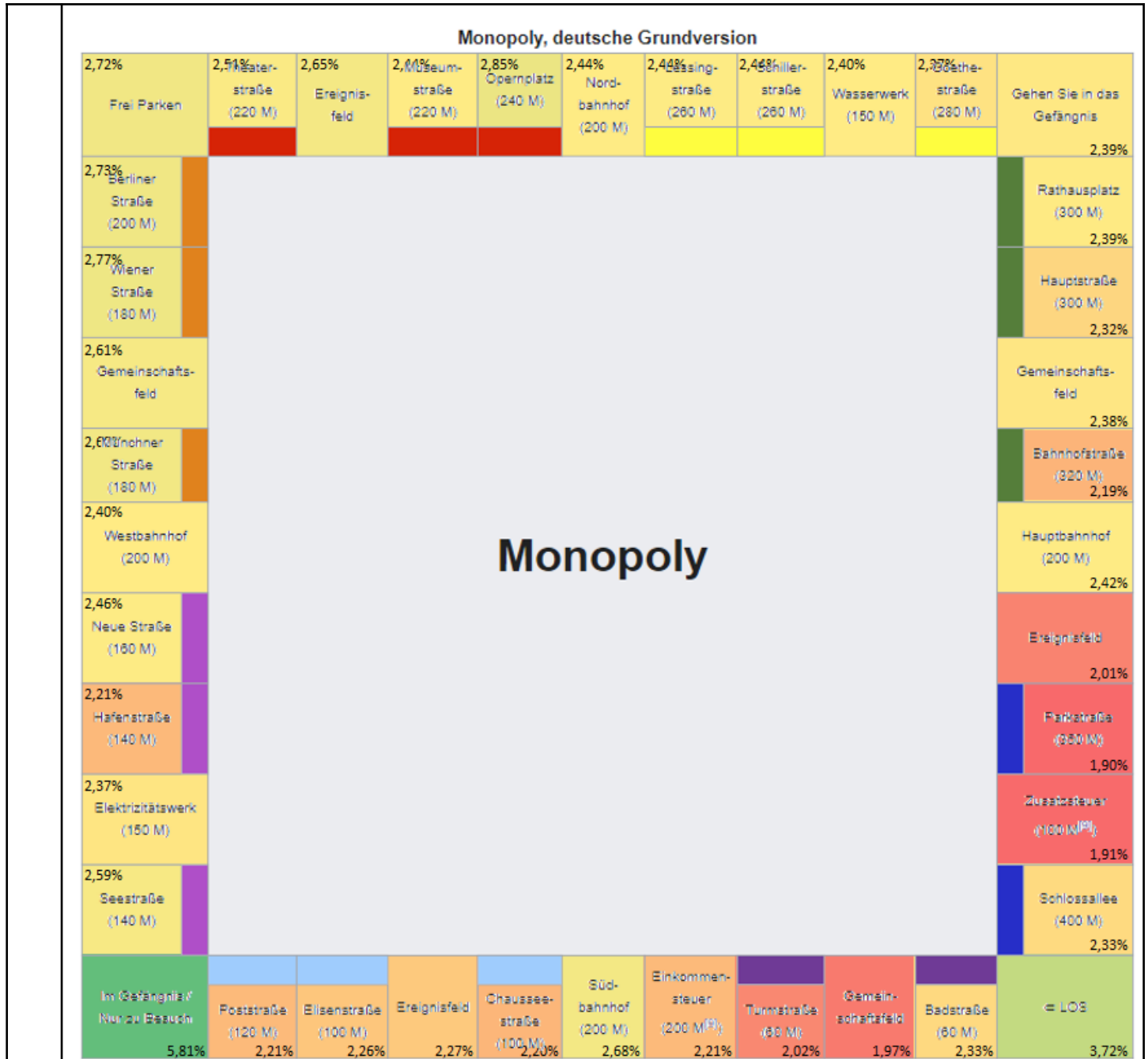
Damit die Ergebnisse auch statistisch haltbar sind, muss natürlich eine hohe Zahl an Simulationen (Spiele) durchgeführt werden, um ein aussagekräftiges Ergebnis zu erhalten. Ich habe mich für $n=1.000.000$ Experimente mit jeweils 100 Würfeln des Spielers entschieden. Die gesamte Dauer der Simulation betrug so etwa 37s und es wurden insgesamt 102.719.689 Feldwechsel durchgeführt.



[1] Aufenthaltswahrscheinlichkeit nach Feld, Straßenzüge farblich abgehoben

Name	P				
Im Gefängnis / Nur zu Besuch	5,81%	Lessingstraße	2,44%	Hauptstraße	2,32%
Los	3,72%	Nordbahnhof	2,44%	Ereignisfeld	2,27%
Opernplatz	2,85%	Museumstraße	2,44%	Elisenstraße	2,26%
Wiener Straße	2,77%	Schillerstraße	2,44%	Poststraße	2,21%
Berliner Straße	2,73%	Hauptbahnhof	2,42%	Einkommensteuer	2,21%
Frei Parken	2,72%	Westbahnhof	2,40%	Hafenstraße	2,21%
Münchner Straße	2,68%	Wasserwerk	2,40%	Chausseestraße	2,20%
Südbahnhof	2,68%	Rathausplatz	2,39%	Bahnhofstraße	2,19%
Ereignisfeld	2,65%	Gehen Sie in das Gefängnis	2,39%	Turmstraße	2,02%
Gemeinschaftsfeld	2,61%	Gemeinschaftsfeld	2,38%	Ereignisfeld	2,01%
Seestraße	2,59%	Elektrizitätswerk	2,37%	Gemeinschaftsfeld	1,97%
Theaterstraße	2,51%	Goethestraße	2,37%	Zusatzsteuer	1,91%
Neue Straße	2,46%	Schlossallee	2,33%	Parkstraße	1,90%
		Badstraße	2,33%		

[2] Wertetabelle der Aufenthaltswahrscheinlichkeit (P) nach Feld



[3] Monopoly-Feld auf Basis von³ mit hinterlegter Heatmap (Grün häufig, Rot selten)

2.3 Auswertung der Ergebnisse

Wie sich zeigt, ist das Gefängnis das mit Abstand am häufigsten besuchte Feld. Entsprechend werden auch die Straßen, die um den Erwartungswert 7 der Augensumme liegen Vergleichsweise oft erreicht. Da das Verlassen des Gefängnisses mit einem Pasch jedoch relativ gesehen deutlich häufiger vorkommt, ist das Gemeinschaftsfeld mit 2,61% nicht das Wahrscheinlichste.

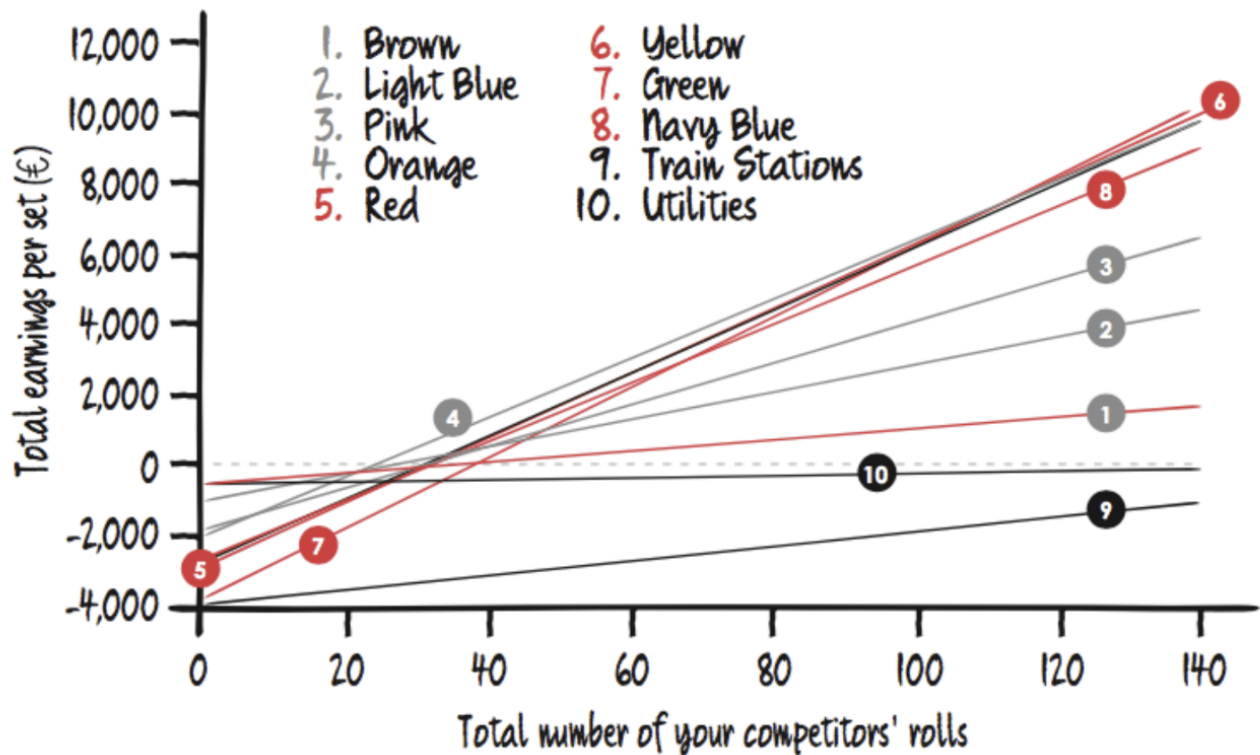
Weil es in Monopoly jedoch wichtig ist nicht nur einzelne Straßen, sondern ganze Straßenzüge zu kaufen, um später auch Häuser bauen zu können, lohnt es sich auch deren kumulierte Wahrscheinlichkeit zu betrachten.

³ <https://de.wikipedia.org/wiki/Monopoly>

9,94%	8,19%	7,80%	7,26%	7,24%	6,90%	6,67%	4,35%	4,24%

[4] Wahrscheinlichkeiten gruppiert nach Straßentrakten. Schwarz stellt die Bahnhöfe dar. Ansonsten repräsentieren die Farben jeweils die Feld Farben.

Wirklich spannend wird es aber erst wenn man diese Werte nun noch mit den Kosten und den erwarteten Mieten verrechnet, sodass man den Zeitpunkt einer "Break-Even" Situation abschätzen und auf Grund dessen strategisch kaufen kann. Dies verdeutlicht die folgende Grafik:

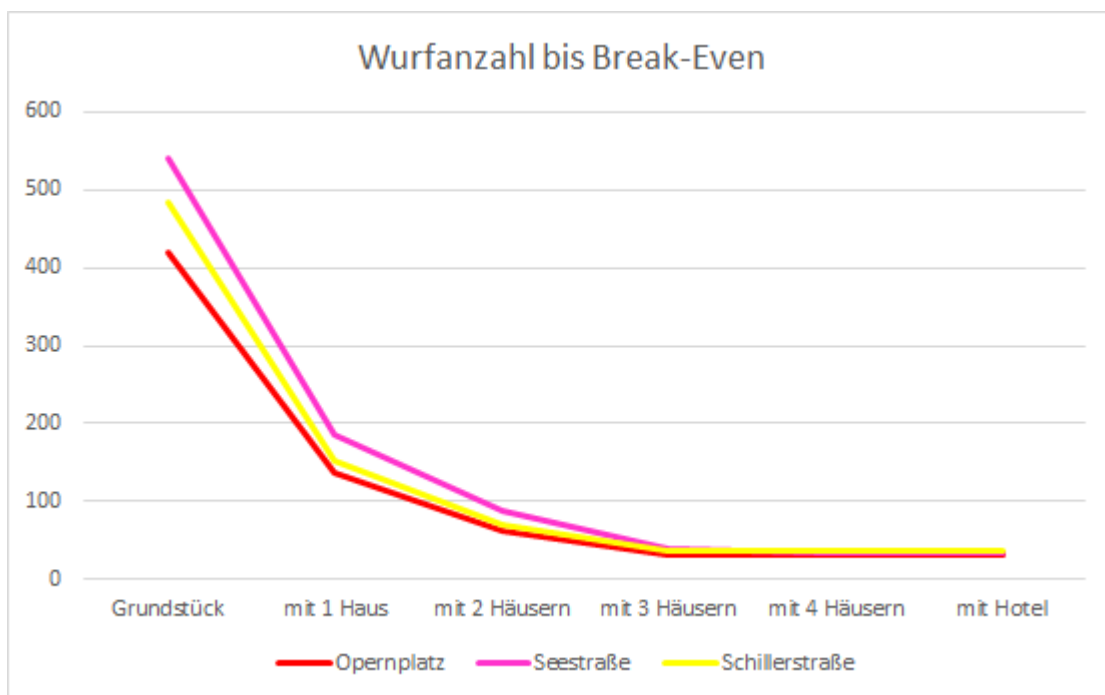


[5] Benötigte Würfelanzahl um ein Straßenzug mit 3 Häusern pro Feld zu refinanzieren.⁴

So zeichnet sich auch hier die orange Feldreihe als besonders lukrativ ab. Während ihr Anfangs Investment nicht riesig ist, ist es gleichzeitig die Farbe, die mit den wenigsten gegnerischen Würfeln die Kosten wieder ausgleicht, und dabei sogar noch annähernd das gleiche Wachstumspotential wie die teureren Straßen (7) behält. Dahingegen erweisen sich die Bahnhöfe und das Elektrizitäts-/Wasserwerk als äußerst schlechte Investments, die ihre Kosten nur sehr langsam zurück erwirtschaften. Am Anfang des Spiels können Sie zwar eine gute Sicherheit darstellen, allerdings sollten diese Karten auf Dauer eher abgestoßen werden.

Sind die in [5] angenommenen 3 Häuser pro Feld aber überhaupt das Optimum?

⁴ <https://www.dropbox.com/s/sme0ezqsb69yg7k/Hannah-monopoly-plots.pdf>



[6] Wurfanzahl bis Break-Even bei unterschiedlichen Straßenkategorien und Häuser Zahlen

Das Diagramm lässt eindeutig erkennen, dass zumindest bei dieser Stichprobe von 3 Straßen, das Bauen von mehr als 3 Häusern bzw. einem Hotel, fast keinen Einfluss mehr auf die Würfelanzahl hat um die Ausgaben wieder zurückzuholen. Die Mehrkosten für ein Upgrade der Immobilien werden kaum durch die nur gering ansteigende Miete kompensiert. Bis zum dritten Haus hingegen ist ein massiver Zugewinn ersichtlich, der beinahe exponentiell verläuft.

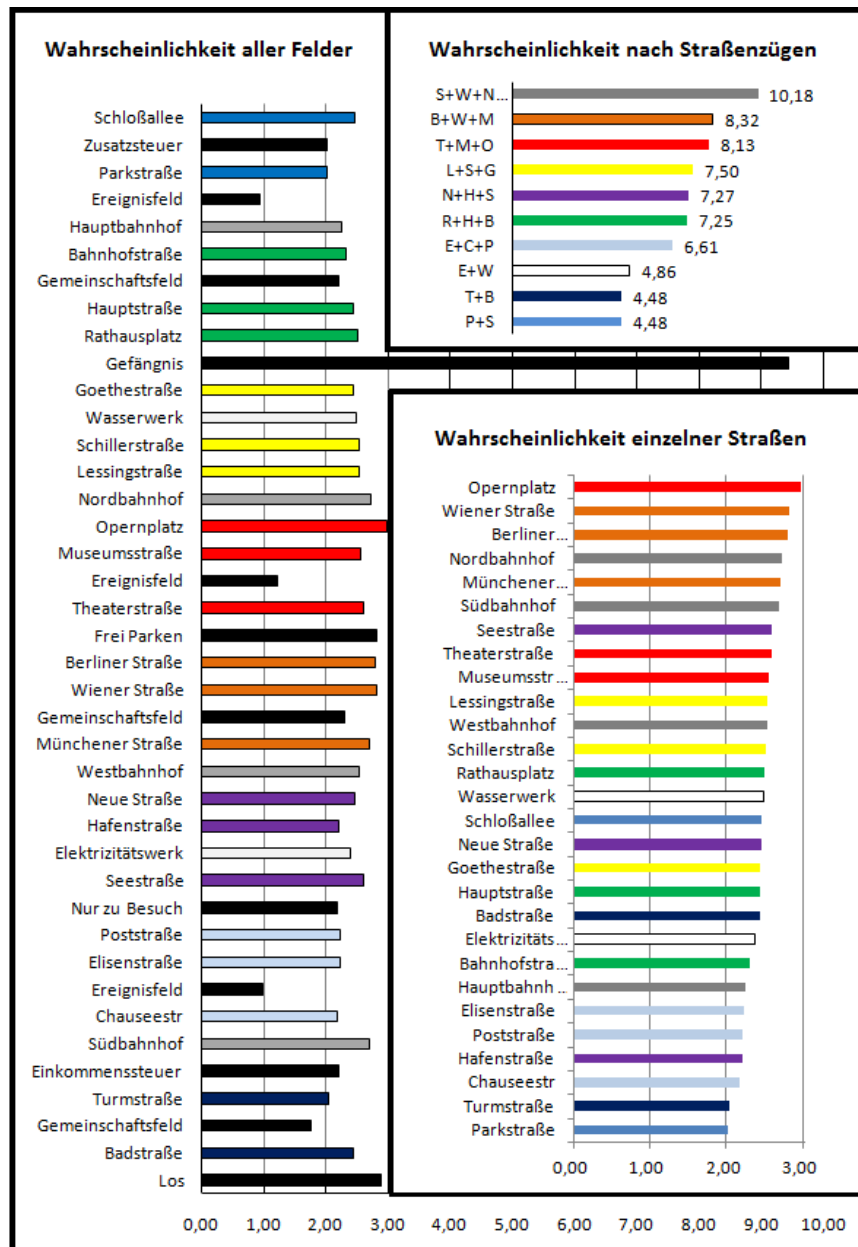
Die oben aufgeführten Werte ergeben sich durch:

$$=(\text{Grundstückspreis} + \text{Hausanzahl} \cdot \text{Hauskosten}) / \text{Miete} \cdot (1 / \text{Wahrscheinlichkeit des Feldes})$$

Alle Grafiken und Rechnungen lassen sich auch nochmal in der Excel Datei unter

<https://github.com/DreiDe/monopoly-simulation/blob/master/Monopoly.xlsx>

2.4 Vergleich mit der Literatur



[7]
Die unterschiedliche
Chancenverteilung des
Spielfeldes, dient als taktische
Basis der Monopoly Strategie.
[Quelle: Tenié, visuell
aufbereitet]⁵

⁵ <https://monopoly-regeln.de/monopoly-strategie/>



Es fällt auf, dass meine Simulation leicht von den Referenzen [7] und [8] abweicht. So fällt vor allem auf, dass meine Wahrscheinlichkeit für das Feld "Gehen Sie in das Gefängnis" signifikant höher ist, als in [8]. Außerdem ist der Prozentsatz, der auf die Ereignis- und Gemeinschaftsfelder entfällt bei mir auch leicht erhöht.

Dies lässt sich vor allem damit begründen, dass die referenzierten Modelle lediglich die Wahrscheinlichkeit angeben auf einem bestimmten Feld zu Enden. Folglich wird das Feld "Gehen Sie in das Gefängnis" nie mitgezählt, da ein Zug auf dieses Feld immer im Gefängnis selbst endet. Ähnlich verhält es sich auch bei den Ereignisfeldern, deren Karten ja auch eine Bewegung des Spielers zur Folge haben können. Insgesamt kommt es so bei meiner Simulation zu mehr besuchten Feldern bei gleicher Anzahl an Würfeln. Dies hat zur Folge, dass auch die normalen Straßen eine etwas niedrigere Bewertung erhalten.

Was die angeführten Modelle auch nicht mit berücksichtigen, ist die Möglichkeit durch das Würfeln von einem Pasch wieder aus dem Gefängnis freizukommen. Demnach wird nicht das 7. Feld nach dem Gefängnis am häufigsten erreicht, sondern die Streuung ist größer. Möglicherweise wirkt sich dieser Effekt auch noch auf nachfolgende Felder aus.

Theoretisch ist auch noch eine andere Monopoly Version als Fehlerquelle denkbar. Zwar nehme ich eigentlich an, dass die von mir genutzte "Koblenz" Version 1:1 dieselben Ereigniskarten und Gemeinschaftskarten besitzt, wie auch die Standard-Version, allerdings konnte ich dies nicht verifizieren.

Grundsätzlich kommt meine Modellerung ja auch auf sehr ähnliche Ergebnisse. So sind die besten Straßenzüge identisch und auch die am meisten und am seltensten Besuchten Felder stimmen überein. Lediglich im Mittleren Bereich gibt es einige Abweichungen in den Prozentsätzen und der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Selbst bei weiteren Modellen die man im Internet findet, stimmen diese aber meist nicht überein.

2.5 Grenzen des Modells

⁶ <https://www.dropbox.com/s/sme0ezqsb69yg7k/Hannah-monopoly-plots.pdf>

	<p>Das Modell deckt insgesamt nur einen kleinen Teil der möglichen Fälle des Spiels ab. Während sich die statistischen Wahrscheinlichkeiten für ROI und Feld Häufigkeit noch berechnen lassen, wird dies spätestens für die Zwischenmenschlichen Interaktionen schwierig bis unmöglich. Fragen wie “Zu welchem Preis werden Grundstücke untereinander verkauft?”, “Würfele ich mich aus dem Gefängnis frei oder zahle ich eine Strafe?” sowie auch die psychologischen Effekte wie “Wie verändert sich das Handeln wenn Hypotheken auf den Grundstücken liegen?”, lassen sich mit einem statischen Verfahren nicht lösen. Teils können solche komplexeren Fragestellungen allerdings mit der Hilfe von Künstlicher Intelligenz, Neuronalen Netzen bzw. Deep Learning Algorithmen beantwortet werden, indem etwa zwei Computer gegeneinander antreten und dadurch stetig ihre Strategie verbessern, so wie dies bereits mit Schachcomputern oder dem Google Experiment “AlphaGo”⁷ gelungen ist.</p> <p>Auf die Verhaltensweisen in verschiedenen Situationen während des Spiels kann zudem mittels des psychologischen Teilbereichs der Spieltheorie eine tiefergehende Analyse erfolgen, bei der sich sicherlich noch weitere vorteilhafte Strategien herauskristallisieren würden.</p>
3.1	Regeln um das nächste Spiel zu dominieren
	<p>Simple Regeln um sich einen strategischen Vorteil im Spiel zu verschaffen:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Vor allem die roten und orangen Felder kaufen - Nicht mehr als 3 Häuser auf ein Feld bauen, sodass die anderen Spieler durch die begrenzte Hauszahl blockiert werden und der ROI (Return on Investment) maximal ist. - Wenn sich ein Spieler 7 Felder hinter dem eigenen befindet möglichst sofort ein Haus dort bauen, da 7 die am häufigsten gewürfelte Zahl ist. - Obwohl die “Schlossallee” an sich einen guten ROI hat, wird sie in der Kombination mit der “Parkstraße”, die am aller Seltensten erreicht wird, zu einer Falle. <p>Damit diese Tipps bis zum nächsten Spiel auch nicht verloren gehen, gibt die Seite “monopoly-regeln”⁸ passende Eselsbrücken:</p> <p>„Keine Sau kommt auf Blau!“ „Kaufe Orange und Rot, dann ist die Miete schnell im Lot!“</p>

Weitere Referenzen:

Mein Code findet sich hier: <https://github.com/DreiDe/monopoly-simulation>

Die Ausgabe einer Spielsimulation hier:

<https://github.com/DreiDe/monopoly-simulation/blob/master/Spielelog.txt>

<https://ichi.pro/de/oh-die-orte-an-die-du-im-monopol-gehen-wirst-165665328389079>

<https://www.dropbox.com/s/f5xndyafuj2cmpn/monopoly-v1.py>

<https://holderied.de/monopoly/>

https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/math/math-ausbildung-dam/images/maturaarbeiten/Maturaarbeiten_2018/herold-monopoly.pdf

⁷ <https://deepmind.com/research/case-studies/alphago-the-story-so-far>

⁸ <https://monopoly-regeln.de/monopoly-strategie/>