**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE**

**Fakulta informatiky a informačných technológií**

Evidenčné číslo: FIIT-100241-96933

# Generátor úloh z analytickej geometrie v rovine – Kužeľosečky

**Bakalárska práca**

Študijný program: informatika (konverzný)
Študijný odbor: informatika
Školiace pracovisko: Ústav informatiky, informačných systémov a softvérového inžinierstva
Vedúci záverečnej práce: Mgr. Milada Omachelová, PhD.

**Bratislava 2022** **Peter Kúdela**

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Ústav informatiky, informačných systémov a softvérového inžinierstva

Fakulta informatiky a informačných technológií
Akademický rok: 2021/2022
Evidenčné číslo: FIIT-100241-96933

# ZADANIE BAKALÁRSKEJ PRÁCE

| | |
|---|---|
| Študent: | **Peter Kúdela** |
| ID študenta: | 96933 |
| Študijný program: | informatika (konverzný) |
| Študijný odbor: | informatika |
| Vedúca práce: | Mgr. Milada Omachelová, PhD. |
| Vedúci pracoviska: | doc. Ing. Valentino Vranić, PhD. |

Názov práce: **Generátor úloh z analytickej geometrie v rovine – Kužeľosečky**

Jazyk, v ktorom sa práca vypracuje: slovenský jazyk

Špecifikácia zadania:

Pri vyučovaní matematiky je potrebné riešiť veľké množstvo príkladov. Ich počet v zbierkach je však obmedzený. Generátory takýchto úloh sú vítanou pomocou pre študentov aj učiteľov. Na webe je však takýchto aplikácií veľmi málo. Pri ich tvorbe je možné naučiť sa efektívne využiť funkcionálne programovanie i technologickú podporu, ktorá obsahuje Computer Algebra System. Analyzujte dostupné technológie na vytvorenie takéhoto generátora. V rámci vybranej technológie/jazyka navrhnite algoritmy inverzného výpočtu pre daný problém s požiadavkou kompletne pokryť všetky typové úlohy z danej oblasti. Výber technológie je potrebné zdôvodniť. Navrhnite samostatnú aplikáciu, ktorá bude implementovať vybrané metódy a algoritmy a výsledky porovnajte s ručným riešením príkladov. Vyhodnoťte správnosť implementácie algoritmov a definujte silné a slabé stránky generátora. Od generátora sa vyžaduje výstup vo forme vygenerovaného príkladu a jeho kompletného riešenia v čitateľnom (user friendly) tvare (ideálne MathML, traditional math alebo TeX) a aj grafický výstup.

Rozsah práce: 40

| | |
|---|---|
| Termín odovzdania bakalárskej práce: | 16. 05. 2022 |
| Dátum schválenia zadania bakalárskej práce: | 23. 11. 2021 |
| Zadanie bakalárskej práce schválil: | doc. Ing. Valentino Vranić, PhD. – garant študijného programu |

# Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že predloženú záverečnú prácu som vypracoval samostatne pod vedením vedúceho záverečnej práce, s použitím odbornej literatúry a ďalších informačných zdrojov, ktoré sú citované v práci a uvedené v zozname použitej literatúry. Ako autor záverečnej práce ďalej prehlasujem, že som v súvislosti s jej vytvorením neporušil autorské práva tretích osôb.

podpis študenta

# Anotácia


Slovenská technická univerzita v Bratislave

FAKULTA INFORMATIKY A INFORMAČNÝCH TECHNOLÓGIÍ

| | |
|---|---|
| Študijný program: | informatika (konverzný) |
| Autor: | Peter Kúdela |
| Bakalárska práca: | Generátor úloh z analytickej geometrie v rovine – Kuželosečky - Parabola |
| Vedúci bakalárskej práce: | Mgr. Milada Omachelová, PhD. et PhD |

Máj 2022



V práci budeme vytvárať generátor úloh týkajúcich sa paraboly, ktorý bude užívateľom ponúkať možnosť výberu obtiažnosti a typu zadania, ako aj možnosť zobraziť/schovať krokové riešenie a grafické zobrazenie jeho výsledku. Postupne opíšeme všetky typy úloh, ktoré budú v generátore. Taktiež uvedieme ukážkové príklady a opíšeme, ako generujeme ich výsledky. Okrem generovania zadaní a ich riešení, generátor bude taktiež v učiteľskom móde umožňovať generovanie pracovných listov. Učitelia si budú môcť vybrať aké druhy úloh a zadaní chcú na spomínanom pracovnom liste. Cieľom je teda vytvoriť aplikáciu, ktorá bude užívateľsky príjemná a umožní užívateľom dôkladne precvičiť zručnosti v konkrétnom obore matematiky (Kužeľosečky-parabola), ako aj uľahčí prácu pri tvorbe zadaní zo strany učiteľa.

# Annotation

Slovak University of Technology Bratislava

FACULTY OF INFORMATICS AND INFORMATION TECHNOLOGIES

Degree course: Informatics (conversion programme with a foundation year)

Author: Peter Kúdela

Bachelor's Thesis: Generator of analytic geometry problems – Conic sections – Parabola

Supervisor: Mgr. Milada Omachelová, PhD. et PhD

Máj 2022

In our work, we will be creating a parabola related problem generator. When generating an assignment for a problem, the generator will offer a choice of difficulty and type, as well as a choice to show/hide a step-by-step solution and a graphic representation of its solution. We will go through all types of problems that will be in the generator, we will show example problems and describe just how we will be generating their solutions. Other than generating assignments and their solutions, the generator will also allow generation of worksheets in teacher mode. Teachers will get to choose what types and difficulties of problems they want on said worksheet. The goal is to create a user-friendly application, which will allow users to thoroughly practice their skills when it comes to this specific part of mathematics (conic sections - parabola) as well as make creating worksheets easier for teachers.

# Obsah

# Úvod

Naším cieľom v tejto práci bude pomôcť, ako učiteľom, tak aj študentom matematiky vzdelávať sa poskytnutím nami vytvoreného edukačného nástroja. Náš softvér by mal študentom umožniť cibriť svoje znalosti pomocou samoštúdia, a učiteľom uľahčiť prácu pri tvorení jednotlivých zadaní a testov.

Tento cieľ chceme dosiahnuť vytvorením z užívateľskej perspektívy prívetivého, obsahom a funkcionalitou rozsiahleho generátora úloh týkajúceho sa matematickej oblasti kužeľosečky, konkrétne parabol. Takýchto generátorov zatiaľ neexistuje mnoho (a aj tie väčšinou majú svoje nedostatky, najčastejšie im chýba ukážka postupu riešenia), a preto si myslíme, že je dôležité sa tejto problematike venovať.

Hotový softvér by mal príklady stavať pomocou náhodne vygenerovaných čísiel a aplikovania operácií, nebude teda príklady brať z už existujúcej banky príkladov.

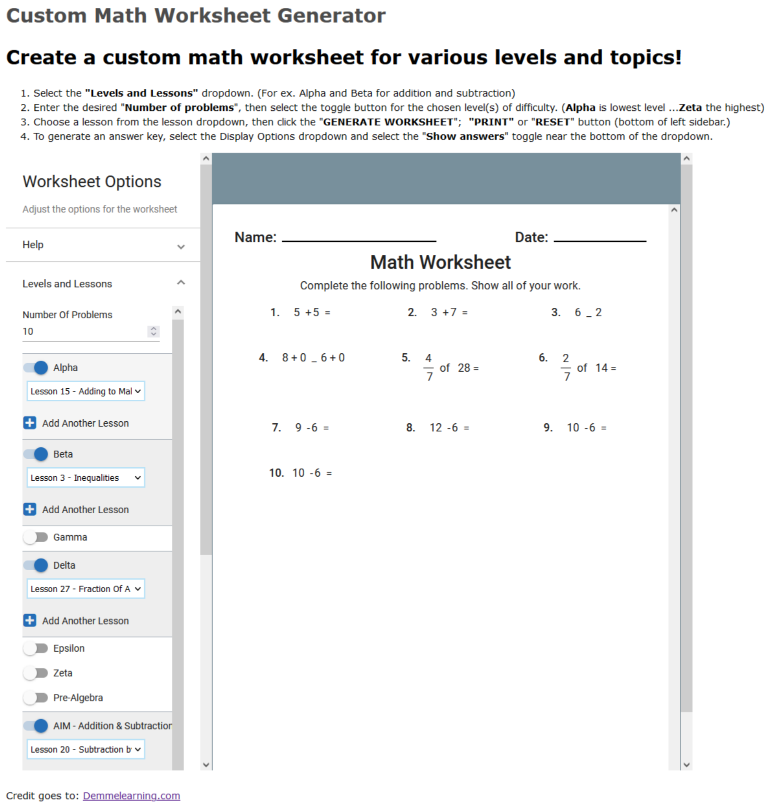
V práci sa najprv pozrieme na už existujúce aplikácie a porovnáme ich, s naším zámerom. Ďalej zdôvodníme výber nástrojov, ktoré použijeme na tvorbu nášho generátora. Nasledovne ho navrhneme (vizuálnu aj funkcionálnu stránku) a nakoniec zhrnieme výsledky našej práce.

# 1. Existujúce generátory

Pred tým, ako sa začneme zaoberať tvorbou nášho generátora, by bolo vhodné zrealizovať prieskum trhu, na ktorý sa chceme dostať. Budeme sa teda snažiť systematicky analyzovať už existujúce generátory. [7] Tento prieskum nám umožní identifikovať nedostatky už existujúcich produktov s rovnakou funkcionalitou. Taktiež nám dali možnosť inšpirovať sa riešeniami.

## 1.1 Math Goodies

Jeden z takýchto už existujúcich generátorov je tvorený firmou Math Goodies. Tento generátor pracovných listov funguje prijateľne, no generuje úlohy len pre jednoduché zadania. Zadania pre ročníky jeden až osem. Pri týchto príkladoch nie je ani potrebné mať krokové riešenie, pretože riešenia zväčša zaberú jeden krok. Generátor však riešenia neposkytuje vôbec. Pre nás zaujímavou časťou tohto generátora je používateľské rozhranie, spôsob voľby typov príkladov je veľmi prirodzený a nebolo ho potrebné dlho skúmať nato, aby sme vygenerovali pracovný list aký chceme. Na rozdiel od tohto generátora bude ten náš obsahovať úplne krokové riešenie. Taktiež bude obsahovať možnosť generovať úlohy vyššej úrovne obtiažnosti.

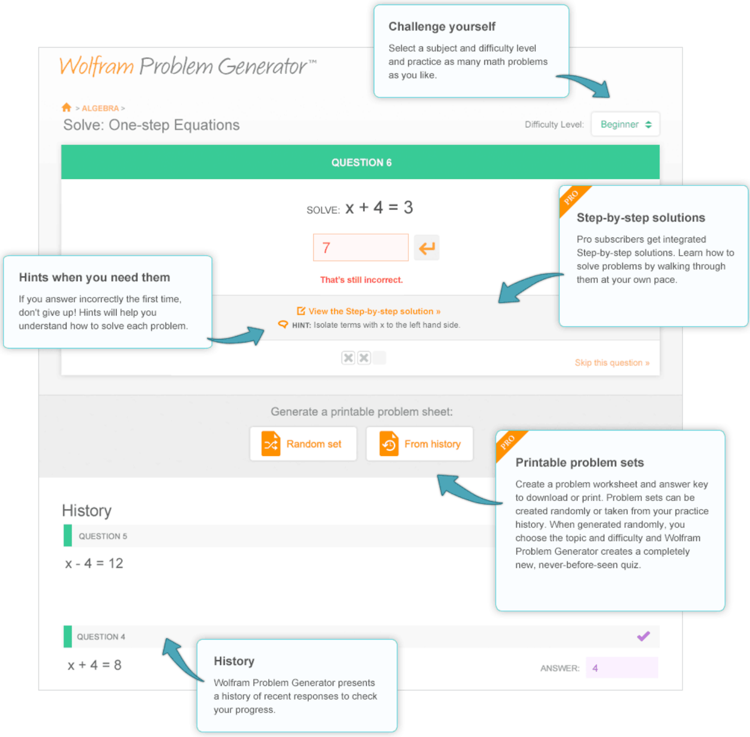



Obr. 1.1: Math Goodies™ generátor [1]

## 1.2 Wolfram Problem Generator

Namiesto vyberania príkladov z databázy, Wolfram Problem Generator™ich priebežne generuje. Vďaka tomu dokáže vytvárať vždy nové pracovné listy. [5]

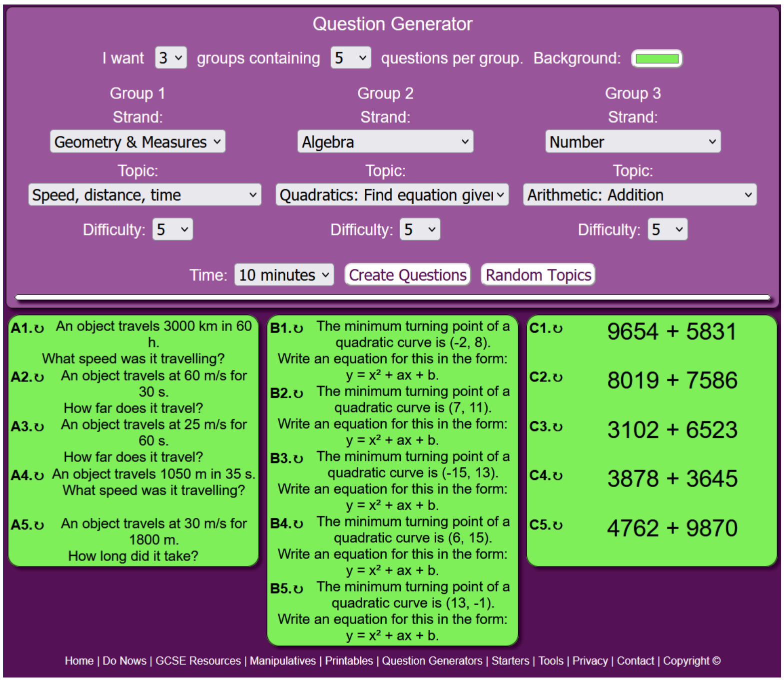
Wolfram Problem Generator™je zo všetkých generátorov nášmu zámeru najbližšie. Obsahuje veľké množstvo typov zadaní, z širokého výberu okruhov a matematických celkov, ako aritmetika, teória množín, algebra, kalkulus alebo aj štatistika. Príklady majú tri obtiažnosti a výsledky (v spoplatnenej verzií) obsahujú aj riešenie krok za krokom. Taktiež obsahuje možnosť (v spoplatnenej verzií) vygenerovať a vytlačiť pracovný list. Náš generátor však prináša možnosť generovať špecifické zadania, ako napríklad "Nájdi parabolu pomocou troch bodov".




Obr. 1.2: Wolfram Problem Generator (©2021 Wolfram Alpha LLC, 2021) [5]

## 1.3 Mathsbot.com

Mathsbot je na pohľad veľmi prívetivý generátor vytvorený učiteľom matematiky Jonathanom Hallom. Ako ostatné, obsahuje rôzne typy generátorov, možnosti výberu okruhov, počtu príkladov a obtiažnosti. Najväčším nedostatkom tohto generátora je neprítomnosť funkcionality ukázať postup, ako sa dostať k výsledkom. Spôsob zobrazenia vygenerovaných úloh môže tiež pôsobiť chaoticky, generátor sekcie príkladov vkladá do blokov na obrazovke. Funkcia vytlačenia na papier tento vzhľad nijako neupravuje, čo vedie k netradičnému dizajnu papiera so zadaniami.




Obr. 1.3: Mathsbot.com [2]

# 2. Prečo Mathematica

V tejto kapitole sa budeme venovať odôvodneniu, prečo sme sa rozhodli programovať náš generátor práve v Mathematice. Na vytvorenie takéhoto generátora by bolo možné použiť rôzne množstvo kombinácií iných systémov, jazykov a prostredí, no zo všetkých sme si vybrali použiť práve softvérový systém Mathematica. Na to, aby sme pochopili prečo je toto rozhodnutie v poriadku sa potrebujeme najprv pozrieť na iné možnosti, ktoré sme mali.

## 2.1 Javascript

JavaScript na prvý pohľad vyzerá, ako dosť prívetivá možnosť, obsahuje rozsiahlu matematickú knižnicu s funkciami, s ktorými by bolo možné generovať príklad podobne dobre, ako v Mathematice. Na vizualizáciu rovníc a grafov by bolo možné použiť napríklad knižnicu Plotly. Atraktivita JavaScriptu pre tvorbu nášho generátora však nespočíva v tom, ako dobre vie pracovať s matematickými výrazmi, ale v tom, aká je jeho flexibilita pri vytváraní používateľských rozhraní. JavaScript je používaný, ako client-side jazyk pre 97.6% webových stránok. [10] Za pomoci frameworku ako React, Vue alebo Svelte v kombinácií s CSS, by sme boli schopní relatívne jednoducho naprogramovať pekné užívateľské rozhranie za nie príliš dlhý čas. Keďže však tvoríme aplikáciu a nie webovú stránku, mohli by sme využiť Electron. Electron je framework, ktorý umožňuje bežať JavaScript kódu v aplikácii. V práci JavaScript používať nebudeme. Mathematica má vstavané funkcie, ktoré nám umožňujú tvoriť používateľské rozhrania a tým, že ho tvoríme priamo v Mathematice sa vyhneme nadbytočnému kroku, kde by sme náš Mathematica kód používali, ako back-end api pre Electron aplikáciu. No využitie Mathematici na back-end a JavaScriptu na front-end by bolo zaujímavou alternatívou pre náš generátor.

## 2.2 Python

Podobne, ako JavaScript, Python má taktiež vstavanú matematickú knižnicu s názvom numpy, ktorá by pre naše potreby, čo sa matematických operácií týka, postačovala. Na vizualizáciu dát by sa dala opäť využiť knižnica Plotly, no najväčším problémom pri vytváraní generátora v Pythone by bola práve tvorba grafického rozhrania. Určite by sa dala nájsť knižnica, ktorá by nám to umožnila no Python nie je práve vyhľadávaný pre tvorbu používateľských rozhraní.

## 2.3 Ostatné

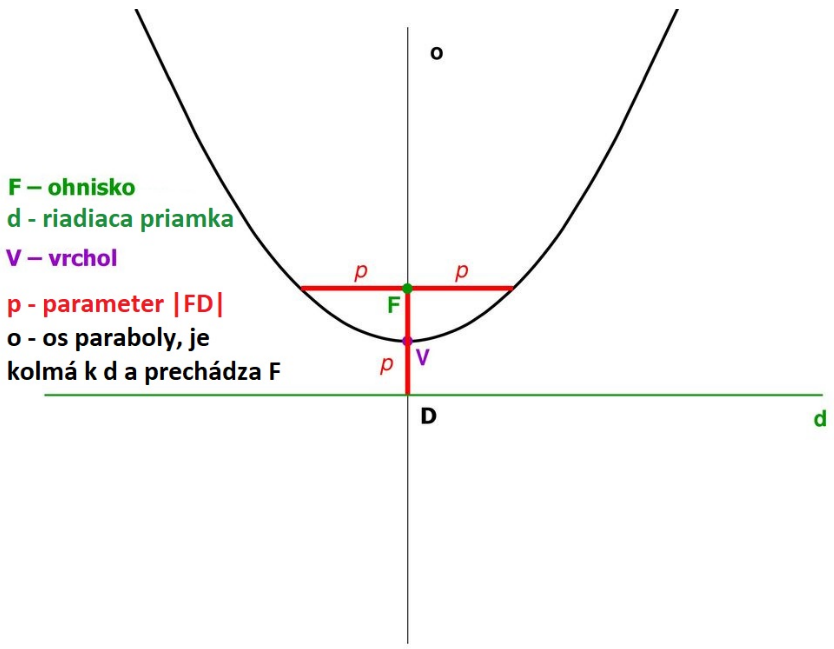
Pre úplnosť stručne zhrnieme niektoré ostatné možnosti. Napísať generátor v jazyku C by bolo príliš komplikované pre to, že je to nízko úrovňový jazyk. Java by mohla byť zaujímavým výberom, no už len preto, že generátor plánujeme tvoriť funkcionálne nie objektovo nie je vyhovujúca. Taktiež tvorba používateľských rozhraní v týchto jazykoch by bola pomerne nepríjemná.

## 2.4 Mathematica

Najväčším rozdielom medzi doteraz spomínanými prostrediami a Mathematicou je, že Mathematica bola priamo vytvorená na manipuláciu s matematickými operáciami, ich grafickým zobrazovaním a dokonca má aj rozsiahlu funkcionalitu pre tvorbu používateľských rozhraní. Použitím Mathematici zaisťujeme, že sa vyhneme veľkému množstvu problémov týkajúcich sa hľadania externých riešení s pomocou knižníc, alebo aj problémov s dátovými typmi.

# 3. Parabola

Pre účeli našej práce si potrebujeme vysvetliť niektoré základné pojmy týkajúce sa paraboly. Prvý pojem, ktorý si objasníme je os súmernosti paraboly (os paraboly). Táto pomyselná priamka rozdeľuje parabolu na dve symetrické časti. Je kolmá na riadiacu priamku paraboly. Riadiacu priamku v literatúre zvyčajne označujeme $d$. Riadiaca priamka spolu s ohniskom paraboly definujú tvar paraboly. Ohnisko sa v parabole zvyčajne označuje veľkým písmenom $F$. Parabola je definovaná ako množina bodov $X$, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od daného bodu $F$ a danej priamky $d$. [9]




Obr. 3.1: Parabola [4]

## 3.1 Vyjadrenia paraboly

Parabolu môžeme vyjadriť rôznymi tvarmi funkcií. V tejto podkapitole si ich ukážeme a vysvetlíme. Spôsob zapisovania rovníc prebraný z [3].

### 3.1.1 Vyjadrenie paraboly všeobecnou kvadratickou funkciou

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (o \equiv +y) \tag{3.1}$$

$$y = -ax^2 + bx + c \qquad (o \equiv -y) \tag{3.2}$$

$$x = ay^2 + bx + c \qquad (o \equiv +x) \tag{3.3}$$

$$x = -ay^2 + bx + c \qquad (o \equiv -x) \tag{3.4}$$

Kvadratická rovnica vo všeobecnom tvare je vyjadrená, ako $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Člen $ax^2$ nazývame kvadratický člen, $bx$ lineárny člen a $c$ absolútny člen. $a, b, c$ sú koeficienty kvadratickej rovnice. Pokiaľ však dáme rovnicu do rovnosti s $y$ a nie s nulou, získame tak jedno z vyjadrení funkcie paraboly, a to funkciu (3.1). [13] V tomto tvare funkcia reprezentuje parabolu, ktorá má os rovnobežnú so súradnicovou osou $y$ a riadiacu priamku rovnobežnú so súradnicovou osou $x$. Pokiaľ by sme chceli vyjadriť parabolu, ktorá má os rovnobežnú so súradnicovou osou $x$, potrebujeme vymeniť hodnoty $x$ a $y$ čím dostaneme funkciu (3.3). Táto funkcia má os rovnobežnú so súradnicovou osou $x$ a riadiacu priamku rovnobežnú so súradnicovou osou $y$. Ako vidíme z vyššie uvedených rovníc, smer paraboly (či je otočená v kladnom alebo zápornom smere súradnicovej osi) záleží na znamienku kvadratického člena.

### 3.1.2 Rozklad na koreňové činitele

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad (o \equiv +y) \tag{3.5}$$

$$y = -a(x - x_1)(x - x_2) \qquad (o \equiv -y) \tag{3.6}$$

$$x = a(y - y_1)(y - y_2) \qquad (o \equiv +x) \tag{3.7}$$

$$x = -a(y - y_1)(y - y_2) \qquad (o \equiv -x) \tag{3.8}$$

O koreňoch $x_1$, $x_2$ všeobecnej kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, prípadne normovanej kvadratickej rovnice $x^2 + px + q = 0$ platí:

$$x_1 + x_2 = -b/a$$

$$x_1.x_2 = c/a$$

Ak má kvadratická rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ korene $x_1, x_2$, tak platí
$ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2)$. Výrazy $x - x_1, x - x_2$ sa nazývajú koreňové činitele. [13]

Koreňmi v uvedenej citácií sa myslia priesečníky s číselnými osami. Hodnota $a$ reprezentuje koeficient paraboly. Ako už bolo spomínané v podkapitole 3.1.1, ak dáme rovnicu do rovnosti s premennou reprezentujúcou vertikálnu číselnú os, dostaneme funkciu vyjadrujúcu parabolu, toto platí aj pre rozklady na koreňové činitele. Z týchto rovníc dostaneme funkcie (3.5) až (3.8).

### 3.1.3 Vrcholové vyjadrenie

$$(x-m)^2 = 2p(y-n) \qquad (o \equiv +y) \tag{3.9}$$

$$(x-m)^2 = -2p(y-n) \qquad (o \equiv -y) \tag{3.10}$$

$$(y-n)^2 = 2p(x-m) \qquad (o \equiv +x) \tag{3.11}$$

$$(y-n)^2 = -2p(x-m) \qquad (o \equiv -x) \tag{3.12}$$

Ak je bod $V[m,n]$ vrchol paraboly, kladné číslo $2p$ jej parameter a os paraboly $o$ rovnobežná s kladným smerom osi y, tak 3.9 je vrcholová rovnica paraboly. [13]

### 3.1.4 Parametrické vyjadrenie

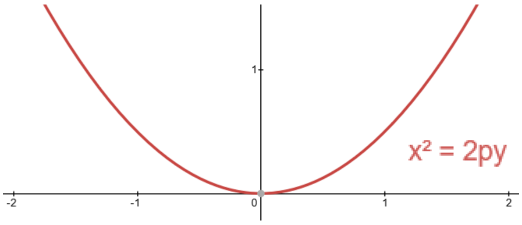
$$x^2 = 2py, \qquad p > 0, \qquad (o \equiv +y) \tag{3.13}$$

$$x^2 = -2py, \qquad p > 0, \qquad (o \equiv -y) \tag{3.14}$$

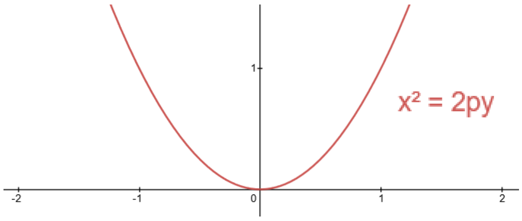
$$y^2 = 2px, \qquad p > 0, \qquad (o \equiv +x) \tag{3.15}$$

$$y^2 = -2px, \qquad p > 0, \qquad (o \equiv -x) \tag{3.16}$$

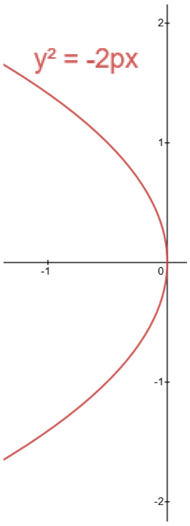
V parametrickom vyjadrení paraboly sa nachádza parameter $p \in \mathbb{R}$, tento parameter reprezentuje vzdialenosť ohniska F od riadiacej priamky paraboly $d$. Z tohto vzťahu tiež vyplýva, že $p/2$ je vzdialenosť vrchola paraboly od jej ohniska.[12] Na grafickom zobrazení paraboly sa to zobrazuje tak, že čím väčšia absolútna hodnota $p$, tým „širšia" parabola.



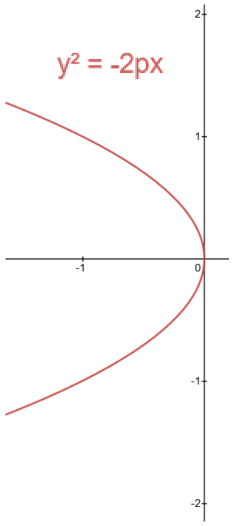

Obr. 3.2: $p = 1, (o \equiv +y)$



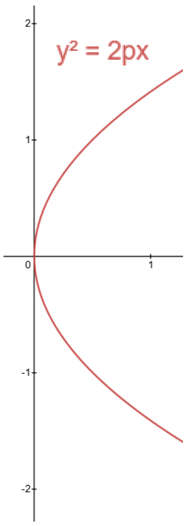

Obr. 3.5: $p = 0.5, (o \equiv +y)$



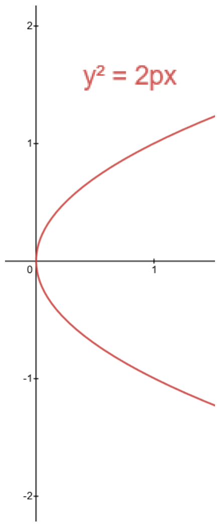

Obr. 3.3: $p = 1, (o \equiv -x)$



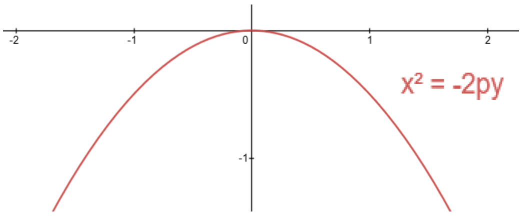

Obr. 3.6: $p = 0.5, (o \equiv -x)$



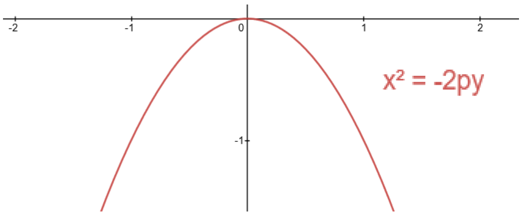

Obr. 3.4: $p = 1, (o \equiv +x)$




Obr. 3.7: $p = 0.5, (o \equiv +x)$




Obr. 3.8: $p = 1, (o \equiv -y)$




Obr. 3.9: $p = 0.5, (o \equiv -y)$

# 4. Generované úlohy

V generátore bude možnosť výberu z desiatich typov problémov pri ktorých sa ďalej dá vybrať aj obtiažnosť. Náš generátor bude schopný tvoriť úlohy typov:

- Prevody rovníc
- Priesečníky so súradnicovými osami
- Vrchol paraboly
- Rovnica daná ohniskom a riadiacou priamkou
- Rovnica daná tromi bodmi
- Rovnica daná bodom a vrcholom
- Vzájomná poloha bodu a paraboly
- Vzájomná poloha dvoch parabol
- Vzájomná poloha paraboly a priamky
- Dotyčnica paraboly

## 4.1 Prevody rovníc

Tento typ úlohy sa skladá z prevodov kvadratických rovníc medzi rozkladom na koreňové činitele (vzorec (3.5)), všeobecným vyjadrením (vzorec (3.1)) a vrcholovým vyjadrením (vzorec (3.9)).

**Príklad:**

Napíš parabolu $m$ ako súčin koreňových činiteľov.

$m$: $y = 5x^2 - 45x + 70$

**Riešenie:**

$$y = 5x^2 - 45x + 70 \qquad \text{/Vyjmeme 5 pred zátvorku}$$
$$y = 5(x^2 - 9x + 14) \qquad \text{/Rozložíme na súčin koreňových činiteľov}$$
$$y = 5(x - 2)(x - 7)$$

**Príklad:**

Nápíš rovnicu paraboly $m$ vo vrcholovom tvare.

$m$: $y = x^2 - 14x + 55$

**Riešenie:**

Pripočítame nulu vo vhodnom tvare kôli úprave na štvorec.

$$y = x^2 - 2 * 7x + 55 \qquad / + 7^2 - 7^2$$
$$y = x^2 - 2 * 7x + 7^2 - 7^2 + 55$$
$$y = (x^2 - 2 * 7x + 49) - 49 + 55 \qquad \text{/Upravíme na úplný štvorec}$$
$$y = (x - 7)^2 + 6 \qquad / - 6$$
$$y - 6 = (x - 7)^2$$

## 4.2 Priesečníky so súradnicovými osami

Na to, aby sme našli priesečníky s jednotlivými číselnými osami, potrebujeme nahradiť správnu premennú vo vyjadrení paraboly za nulu. Ak chceme totiž nájsť miesta kde parabola pretína súradnicovú os $y$, potrebujeme nájsť bod/body na parabole kde $x = 0$. Naopak ak chceme nájsť bod/body kde parabola pretína os $x$, bude premenná $y = 0$. Pri nahrádzaní premennej reprezentujúcej číselnú os, ktorá je kolmá na os našej paraboly máme dve možné riešenia. Jedným je rozklad na koreňové činitele, ktorý je už obsiahnutý v generátore prvého typu (prevody rovníc). Druhým spôsobom je vypočítanie pomocou vzorca. Vzorec vyzerá nasledovne:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \tag{4.1}$$

kde $D$ reprezentuje diskriminant, vzorec pre diskriminant je

$$D = b^2 - 4ac \tag{4.2}$$

Hodnoty $a, b, c$ sú vysvetlené v kapitole 3.1.1. Najjednoduchšie to však bude pochopiť na príklade, preto nasleduje ukážka príkladu na hľadanie priesečníkov s osou $x$:

**Pomocou rozkladu na koreňové činitele**

**Príklad:**

Urči priesečníky paraboly $m$ s osou $x$.

$m$: $y = 5x^2 - 45x + 70$

**Riešenie:**

Priesečníky s osou $x$ majú $y$-ovú súradnicu vždy nulovú.

$0 = 5x^2 - 45x + 70$ $\quad / \div 5$

$0 = 5(x^2 - 9x + 14)$ $\quad$ /Rozložíme na súčin koreňových činiteľov

$0 = 5(x - 2)(x - 7)$

Priesečníky sú v bodoch $[2, 0]$ a $[7, 0]$

**Použitím vzorca s diskriminantom**

**Príklad:**

Urči priesečníky paraboly $m$ s osou $x$.

$m$: $y = 5x^2 - 45x + 70$

**Riešenie:**

Priesečníky s osou $x$ majú $y$-ovú súradnicu vždy nulovú.

$0 = 5x^2 - 45x + 70 \qquad / \div 5$

$0 = 5(x^2 - 9x + 14)$

Výpočet diskriminantu.

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-9)^2 - 4 * 1 * 14$

$D = 81 - 56$

$D = 25$

Výpočet koreňov

$x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$x_1, x_2 = \dfrac{9 \pm \sqrt{25}}{2}$

$x_1, x_2 = \dfrac{9 \pm 5}{2}$

$x_1 = \dfrac{4}{2}$

$x_1 = 2$

$x_2 = \dfrac{14}{2}$

$x_2 = 7$

Priesečníky sú v bodoch $[2, 0]$ a $[7, 0]$

**Príklad:**

Urči priesečníky paraboly $m$ s osou $y$.

$m$: $y = 5x^2 - 45x + 70$

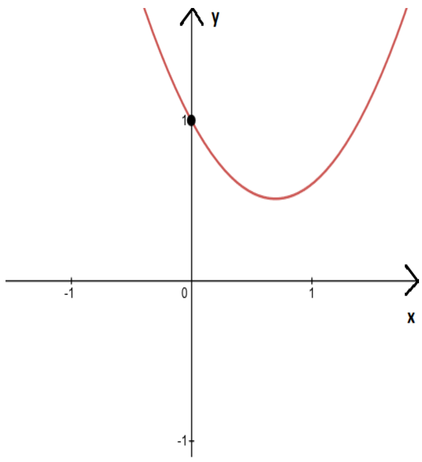
**Riešenie:**

Priesečníky s osou $y$ majú $x$-ovú súradnicu vždy nulovú.

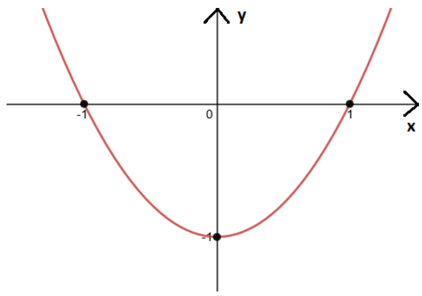
$y = 5 * 0^2 - 45 * 0 + 70$

$y = 70$

Priesečník je v bode $[0, 70]$




Obr. 4.1: Priesečníky, ak sa vrchol nachádza v kladnom smere osi $x, (o \equiv y)$




Obr. 4.2: Priesečníky, ak sa vrchol nachádza v zápornom smere osi $x, (o \equiv y)$

**Obtiažnosti:**

- **Ľahká:** Parabola bude zadaná rozkladom na koreňové činitele, pri riešení stačí vedieť, ktoré čísla vo vyjadrení reprezentujú priesečníky.
- **Stredná:** Parabola bude zadaná všeobecným vyjadrením. Priesečníky bude

treba dopočítať diskriminantom, alebo prevodom. Stačia priesečníky s osou $x$.

- **Ťažká:** Parabola bude zadaná vo všeobecnom tvare. Je potrebné vypočítať priesečníky s osou $x$ aj $y$.

## 4.3 Vrchol paraboly

Podobne, ako v predchádzajúcom type úlohy, tento má isté prekrytie s prvým typom (kapitola 4.1), a to preto, že jedným z možných spôsobov nájdenia vrcholu paraboly je jej upravenie na vrcholový tvar (viac v kapitole 3.1.3). Druhý spôsob, ako sa dopátrať k súradniciam vrchola paraboly je využitie vzorca

$$V[\frac{-b}{2a}, V_y] \tag{4.3}$$

pre súradnicu $x$. [11] Premenné použité vo vzorci sú bližšie vysvetlené v kapitole 3.1.1. Druhú súradnicu potom môžeme dopočítať vložením nášho výsledku do pôvodnej rovnice nasledovne:

$$V_y = a(V_x)^2 + bV_x + c \tag{4.4}$$

**Príklad:**

Nájdi vrchol paraboly $m$ pomocou vzorca, aj pomocou prevodu na vrcholový tvar.
$m$: $y = x^2 - 8x + 10$

**Riešenie:**

**Pomocou prevodu:**

$y = x^2 - 2 * 4x + 10 \qquad / + 4^2 - 4^2$

$y = x^2 - 2 * 4x + 4^2 - 4^2 + 10 \qquad$ /Upravíme na štvorec

$y = (x - 4)^2 - 6 \qquad / + 6$

$y + 6 = (x - 4)^2$

Vrchol je bod $[4, -6]$

**Pomocou vzorca:**

$y = x^2 - 8x + 10 \qquad$ /Dosadíme do vzorca $V[\frac{-b}{2a}, V_y]$

$V_x = \frac{-(-8)}{2 * 1}$

$V_x = \frac{8}{2}$

$V_x = 4 \qquad$ /Výsledok dosadíme do pôvodnej rovnice paraboly

$V_y = V_x^2 - 8V_x + 10$

$V_y = 4^2 - 8 * 4 + 10$

$V_y = 16 - 32 + 10$

$V_y = -6$

Vrchol je bod $[4, -6]$

**Obtiažnosti:**

- **Ľahká:** Parabola bude zadaná vo vrcholovom tvare, pri riešení stačí vedieť, ktoré čísla vo vyjadrení reprezentujú súradnice vrchola.

- **Stredná:** Parabola bude zadaná vo všeobecnom tvare. Je potrebné vypočítať súradnice vrchola pomocou vzorca alebo prevodom na vrcholový tvar.
- **Ťažká:** Parabola bude zadaná vo všeobecnom tvare. Je potrebné vypočítať súradnice vrchola oboma spôsobmi.

## 4.4 Rovnica daná ohniskom a riadiacou priamkou

$$d : y = -3 \implies (o \parallel x) \implies F[V_x, V_y + \frac{p}{2}] \implies V[F_x, F_y - \frac{p}{2}]$$

Vyššie uvedené vzorce sú len odvodenia z už nám známych vzťahov. Riadiaca priamka je rovnobežná s osou $x$, os paraboly je teda rovnobežná s osou $y$. Taktiež vidíme že riadiaca priamka je na $y$-ovej osi nižšie, ako ohnisko. Parabola je otočená v kladnom smere. Okrem toho vieme, že $x$-ová súradnica ohniska bude rovnaká, ako $x$-ová súradnica vrchola paraboly. $y$-ovú súradnicu potrebujeme dopočítať pomocou parametra $p$. Ako už vieme z podkapitoly 3.1.4, $p$ reprezentuje vzdialenosť ohniska od riadiacej priamky, preto nám stačí odpočítať hodnotu $q$ (riadiaca priamka má vždy tvar $y = q$) z riadiacej priamky od $y$-ovej súradnice ohniska paraboly.

**Príklad:**

Vyjadri rovnicu paraboly, ktorej ohniskom je bod $F$ a riadiacou priamkou je $d$ vo vrcholovom tvare.

$F[3, 1]$

$d : y = -3$

**Riešenie:**

$p$ reprezentuje vzdialenosť riadiacej priamky od ohniska.

Riadiaca priamka je rovnobežná s osou $x$, $p$ dostaneme

odpočítaním hodnoty $q$ z priamky $d$ od hodnoty $F_y$.

$p = 1 - (-3)$

$p = 4$

Dopočítame vrchol.

$F[3, 1], p = 4$

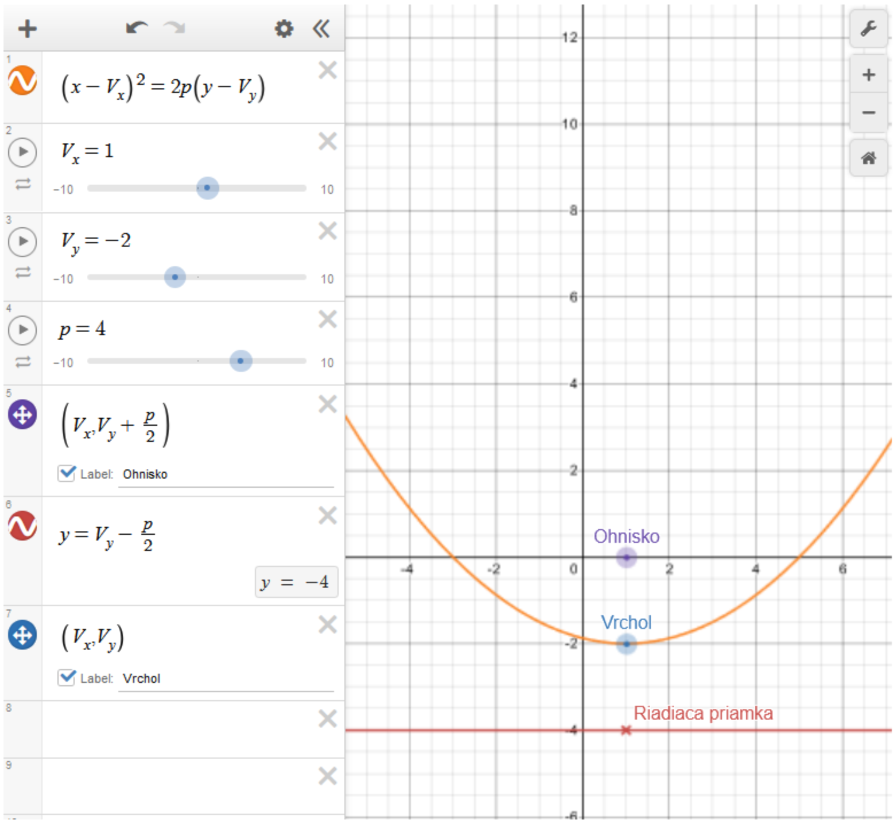
$V[F_x, F_y - \frac{p}{2}]$

$V[3, 1 - \frac{4}{2}]$

$V[3, -1]$

Dosadíme vypočítané V a p do vrcholového vyjadrenia paraboly.

$(x - 3)^2 = 8(y + 1)$




Obr. 4.3: Vizualizácia v Desmos

**Obtiažnosti:**

- **Ľahká:** Riadiaca priamka rovnako ako ohnisko bude zadaná v príklade.
- **Stredná:** Riadiaca priamka bude daná vzdialenosťou k priamke zadanej v príklade (toto bude viesť ku dvom možným správnym výsledkom). Ohnisko bude zadané v príklade.
- **Ťažká:** Riadiaca priamka bude zadaná v príklade v smernicovom tvare. Ohnisko bude zadané ako priesečník dvoch priamok zadaných v smernicovom tvare v príklade.

## 4.5 Rovnica daná tromi bodmi

Na vyriešenie takéhoto typu úlohy budeme potrebovať riešiť sústavu troch rovníc o troch neznámych. Najlepšie to pochopíme na príklade.

**Príklad:**

Nájdi parabolu na ktorej ležia nasledujúce body: $A[-2,8], B[0,5], C[8,13]$

**Riešenie:**

Z bodov si najprv potrebujeme zostaviť systém rovníc vo všeobecnom tvare:

$$a(-2)^2 + b(-2) + c = 8$$

$$a(0)^2 + b(0) + c = 5$$

$$a(8)^2 + b(8) + c = 13$$

Ďalej riešime sústavu:

$$a(-2)^2 + b(-2) + c = 8$$

$$a(0)^2 + b(0) + c = 5 \qquad c = 5$$

$$a(8)^2 + b(8) + c = 13$$

$$a(-2)^2 + b(-2) = 3$$

$$a(8)^2 + b(8) = 8$$

$$-b = 3 - 4a$$

$$b = -\frac{3}{2} + 2a$$

$$64a + 8(-\frac{3}{2} + 2a) = 8$$

$$64a - 12 + 16a = 8$$

$$80a = 20$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$$b = -\frac{3}{2} + 2 * \frac{1}{4}$$

$$b = -1$$

Z toho vyplýva, že: $a = \frac{1}{4}, b = -1, c = 5$. Výsledná parabola má tvar:

$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 5$

**Obtiažnosti:**

Tento druh príkladu obtiažnosti nemá, sám o sebe je už dosť zložitý.

## 4.6 Rovnica daná bodom a vrcholom

Pri tomto type úloh potrebujeme dopočítať parameter $p$. Na to už máme všetky potrebné informácie takže nám len stačí vybrať správnu rovnicu podľa zadaného smeru, a dosadiť vrchol a bod doň.

**Príklad:**

Nájdi vrcholovú rovnicu paraboly $m$, ktorá je určená vrcholom $V$ a prechádza bodom $B$.

$V[-1, -3]$

$B[0, 0]$

**Riešenie:**

Vyber rovnicu podľa otočenia

| | |
|---|---|
| $(x - V_x)^2 = 2p(y - V_y)$ | /Dosadíme vrchol $V[-1, -3]$ |
| $(x + 1)^2 = 2p(y + 3)$ | /Dosadíme bod $B[0, 0]$ |
| $(0 + 1)^2 = 2p(0 + 3)$ | |
| $1 = 2p * 3$ | $/ \div 6$ |
| $p = \frac{1}{6}$ | /Dosadíme $p$ do $(x + 1)^2 = 2p(y + 3)$ |
| $(x + 1)^2 = 2 * \frac{1}{6}(y + 3)$ | |
| $(x + 1)^2 = \frac{1}{3}(y + 3)$ | |

**Obtiažnosti:**

- **Ľahká:** Výsledná parabola bude požadovaná vo vrcholovom tvare. Bod na parabole bude v zadaní.
- **Stredná:** Výsledná parabola bude požadovaná vo všeobecnom tvare (pridaná obtiažnosť, pretože je po výpočte potrebné rovnicu paraboly previesť na všeobecný tvar). Bod na parabole bude v zadaní.
- **Ťažká:** Výsledná parabola bude požadovaná vo všeobecnom tvare. Bod na parabole zadaný ako priesečník dvoch priamok.

## 4.7 Vzájomná poloha bodu a paraboly

Pri jednoduchej obtiažnosti v tomto type úlohy stačí dosadiť zadané body do rovnice paraboly aby sme zistili, či sa bod nachádza na nej.

**Príklad:**

Zisti, či body $A$ a $B$ ležia na parabole $m$.

$A[0, -4]$

$B[2, 6]$

$m : y = -x^2 - 2x - 4$

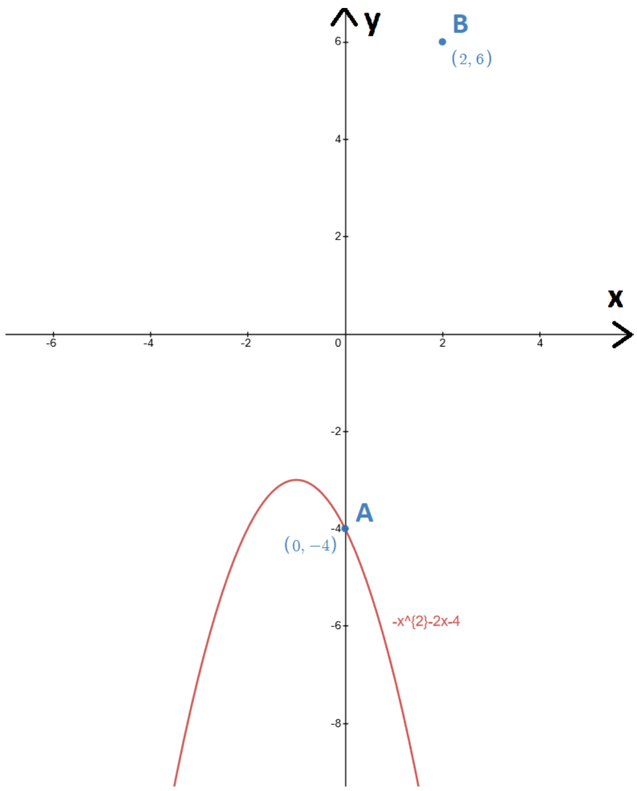
**Riešenie:**

$$y = -x^2 - 2x - 4 \qquad \text{/Dosadíme bod } A[0, -4]$$
$$-4 = -0^2 - 2 * 0 - 4$$
$$-4 = -4$$

Rovnosť platí takže bod sa nachádza na parabole.

$$y = -x^2 - 2x - 4 \qquad \text{/Dosadíme bod } B[2, 6]$$
$$6 = 2^2 + 2 * 2 - 4$$
$$6 = 4 + 4 - 4$$
$$6 \neq 4$$

Rovnosť neplatí takže bod sa nenachádza na parabole.




Obr. 4.4: Grafické zobrazenie príkladu

Ťažká obtiažnosť bude spočívať v hľadaní bodu na parabole podľa jeho vzdialenosti od ohniska. Na to, aby sme našli všetky body dané vzdialenosťou od ohniska potrebujeme najprv zistiť rovnicu riadiacej priamky. Na to potrebujeme vypočítať hodnotu $p$ a vrchol paraboly, následne zostaviť rovnicu riadiacej priamky pomocou vzorca $y = V_y - \frac{p}{2}$. Ďalej potrebujeme zostaviť pomocnú pomyselnú priamku, ktorú získame posunutím našej riadiacej priamky. Posúvanie sa realizuje pripočítaním konštanty k rovnici priamky. Potom postupujeme rovnako, ako pri predchádzajúcom type úloh a hľadáme priesečníky priamky a paraboly. Taktiež vieme, že oba priesečníky budú mať rovnakú $y$-ovú súradnicu (hľadaný bod môžeme nájsť podobne, ako v predošlom type úloh dosadením vypočítanej $x$-ovej súradnice do rovnice paraboly). Pri tomto kroku je dôležité dávať si pozor na smer paraboly. Ak je napríklad parabola otočená do záporného smeru $y$-ovej osi, potrebujeme riadiacu priamku posúvať do záporného smeru.

**Príklad:**

Nájdi body na parabole $m$, ktorých vzdialenosť od ohniska $F$ je $d$.

$d : 29$

$x^2 = 16y$

**Riešenie:**

$$x^2 = 16y \qquad /\text{Podľa vzorca } x^2 = 2py \text{ je } V[0,0], p = 8$$

Keďže už vieme hodnotu $p$ a vrchol našej paraboly, môžeme zostaviť rovnicu riadiacej priamky. Tú zistíme pomocou vyššie spomínaného vzorca $y = V_y - \frac{p}{2}$.

$$d : y = 0 - \frac{8}{2}$$
$$d : y = -4$$

Teraz, keď už máme zostavenú rovnicu riadiacej priamky, potrebujeme ju posunúť správnym smerom vzhľadom k orientácie paraboly. Keďže parabola je otočená v kladnom smere osi $y$, riadiacu priamku posúvame v kladnom smere osi $y$ o hľadanú vzdialenosť.

$$p : y = -4 + 29$$
$$p : y = 25 \qquad /\text{Nájdeme priesečníky paraboly } x^2 = 16y \text{ a priamky } y = 25$$
$$x^2 = 16 * 25$$
$$x^2 = 400$$
$$x_1 = 20, x_2 = -20$$

Dosadíme jeden z výsledkov do pôvodnej rovnice.

$$x^2 = 16y$$
$$20^2 = 16y$$
$$400 = 16y$$
$$25 = y$$

Body vzdialené o $d = 29$ od ohniska sú $A[20, 25]$ a $B[-20, 25]$

**Obtiažnosti:**

- **Ľahká:** Úloha spočíva len v zistení, či sa bod nachádza na parabole.
- **Stredná:** Rovnaká ako ľahká obtiažnosť, no bod je reprezentovaný ako priesečník dvoch priamok, ktoré budú v zadaní.
- **Ťažká:** Zadanie je nájsť bod so špecifickou vzdialenosťou od ohniska zadanej paraboly.

## 4.8 Vzájomná poloha dvoch parabol

Pri tomto type príkladu budeme hľadať priesečníky dvoch parabol. To dosiahneme riešením sústavy rovníc tvorenej z našich dvoch parabol. Nasleduje ukážka príkladu.

**Príklad:**

Nájdi priesečníky parabol $y = 2x^2 + 2x - 3$ a $y = x^2 + 2x + 1$

**Riešenie:**

Dosaď y z prvej rovnice do druhej

$$2x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 \qquad / - x^2 - 2x + 3$$

$$x^2 = 4 \qquad /\text{Odmocni}$$

$$x_1 = -2,\ x_2 = 2 \qquad /\text{Dosaď } x \text{ do jednej z rovníc}$$

Dosaď $x = -2$

$$y = 2 * (-2)^2 + 2(-2) - 3$$

$$y = 8 - 4 - 3$$

$$y = 1 \qquad \text{Prvý priesečník } P_1 = [-2, 1]$$

Dosaď $x = 2$

$$y = 2 * 2^2 + 2 * 2 - 3$$

$$y = 8 + 4 - 3$$

$$y = 9 \qquad \text{Druhý priesečník } P_2 = [2, 9]$$

**Obtiažnosti:**

- **Ľahká:** Obe zadané rovnice budú v rovnakom tvare.

- **Stredná:** Rovnice budú zadané v rôznych tvaroch.

- **Ťažká:** Jedna z parabol bude zadaná tromi bodmi (rovnako ako v kapitole 4.5)

## 4.9 Vzájomná poloha paraboly a priamky

Rovnako ako v predchádzajúcej podkapitole 4.8, tento typ budeme riešiť pomocou sústavy rovníc.

**Príklad:**

Nájdi priesečníky paraboly $m$ a priamky $k$.

$m : y = x^2 + 2x + 1$

$k : y = 3x + 1$

**Riešenie:**

Dosaď $y$ z prvej rovnice do druhej

$$\begin{aligned}
&3x + 1 = x^2 + 2x + 1 && / - 3x - 1 \\
&0 = x^2 - x && /\text{Vyjmi } x \text{ pred zátvorku} \\
&0 = x(x - 1) && \\
&x = 0 \lor x = 1 && \text{Dosaď } x \text{ do jednej z rovníc}
\end{aligned}$$

Dosaď $x = 0$ do priamky $y = 3x + 1$.

$$\begin{aligned}
&y = 3 * 0 + 1 && \\
&y = 1 && \text{Prvý priesečník } P_1[0, 1]
\end{aligned}$$

Dosaď $x = 1$ do priamky $y = 3x + 1$.

$$\begin{aligned}
&y = 3 * 1 + 1 && \\
&y = 4 && \text{Druhý priesečník } P_2[1, 4]
\end{aligned}$$

**Obtiažnosti:**

- **Ľahká:** Zadaná priamka prechádza len jedným bodom.
- **Stredná:** Zadaná priamka prechádza dvomi bodmi.
- **Ťažká:** Priamka je zadaná ako kolmica alebo rovnobežka k inej danej priamke a prechádzajúca zadaným bodom.

## 4.10 Dotyčnica k parabole

Pre jednoduchú obtiažnosť zadania bude potrebné nájsť rovnicu dotyčnice v smernicovom tvare a to nasledovne:

**Príklad:**

Nájdi rovnicu dotyčnice paraboly $m$.Dotyčnica prechádza bodom $P$.

$m : y = x^2 + 2x + 1$

$P[1, 4]$

**Riešenie:**

Každá priamka prechádzajúca bodom $P$ má tvar (v smernicovom vyjadrení) $(y - P_y) = m(x - P_x)$. Na to, aby sme našli také m, pre ktoré je priamka dotyčnicou k parabole potrebujeme počítať sústavu rovníc priamky a paraboly. [8]

$$y = x^2 + 2x + 1$$
$$(y - 4) = m(x - 1)$$

---

$$y = x^2 + 2x + 1$$
$$y = mx - m + 4$$

---

$$x^2 + 2x + 1 = mx - m + 4$$
$$x^2 + 2x - mx + m - 3 = 0$$
$$x^2 + (2 - m)x + (m - 3) = 0$$

Po riešení sústavy substitučnou metódou nám vznikla kvadratická rovnica kde kvadratickým členom je neznáma $x$. Postupujeme teda použitím diskriminantu (vzorec (4.2)).

$$D = (2 - m)^2 - 4(m - 3)$$
$$D = 4 - 4m + m^2 - 4m + 12$$
$$D = m^2 - 8m + 16$$

Pri počítaní diskriminantu nám vyšla ďalšia kvadratická rovnica s kvadratickým členom $m$. Na dopočítanie hodnoty $m$ nám stačí nájsť korene tejto rovnice použitím vzorca (4.1).

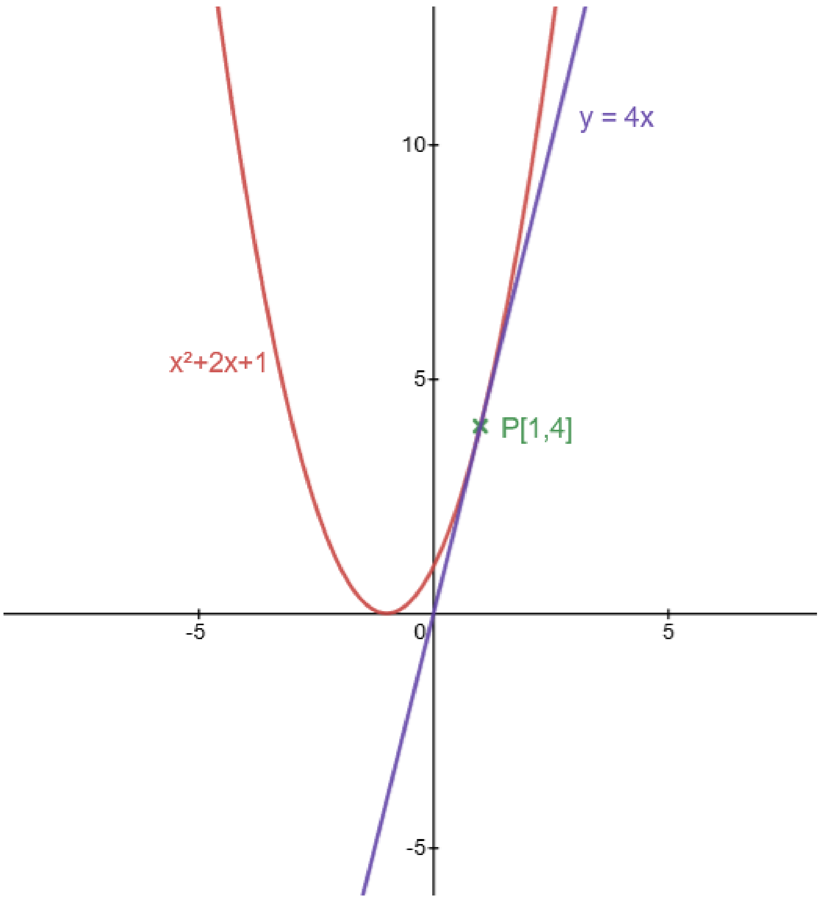
$$D = 64 - 4 * 16$$

$$D = 0$$

$$m = \frac{8}{2}$$

$$m = 4$$

Už nám len stačí hodnotu $m$ dosadiť do pôvodného vyjadrenia priamky, a to $(y - 4) = m(x - 1)$. Rovnica dotyčnice paraboly $y = x^2 + 2x + 1$ prechádzajúcej bodom $[1, 4]$ je $y = 4x$.




Obr. 4.5: Grafické zobrazenie príkladu

**Obtiažnosti:**

- **Ľahká:** Zadaná parabola a rovnica priamky, ku ktorej má dotyčnica byť rovnobežná.
- **Stredná:** Zadaná parabola a bod na nej, ktorým má dotyčnica prechádzať.
- **Ťažká:** Zadaná parabola a dve priamky, ktorých priesečník je bod, ktorým má dotyčnica prechádzať.

# 5. Návrh generátorov zadaní

V tejto kapitole sa bližšie pozrieme na to, akým spôsobom sa budú jednotlivé zadania generovať.

## 5.1 Prevody rovníc

Na generovanie takéhoto zadania začneme výsledkom príkladu a vygenerujeme rovnicu, ktorá už je rozložená na koreňové činitele. Na to potrebujeme vygenerovať dve náhodné čísla. Tieto čísla budú reprezentovať priesečníky so súradnicovou osou. Tieto priesečníky budeme generovať z číselného rozsahu $\langle -7, 7 \rangle$. Koeficient paraboly (viac o koeficiente v príklade rozkladom kvadratického polynómu na súčin koreňových činiteľov v podkapitole 3.1.2), bude generovaný, ako celé číslo z rozsahu $\langle -3, 0) \cup (0, 3 \rangle$. Tieto rozsahy neboli zvolené náhodne. Po dlhom zvažovaní a prepočítavaní príkladov s ich hraničnými hodnotami sme sa rozhodli, že bude najlepšie, ak rozsah $a$ bude generovaný z užšieho intervalu. Dôvodom je, že väčšie rozsahy by viedli k priveľkým koeficientom rovníc a zložitému výpočtu.

*Hraničné prípady:*

**Korene sú rovnaké:** Rovnicu rozloženú na koreňové činitele (3.5) zobrazujeme ako $a(x + \text{koreň})^2$

**Ak $a = 1$:** Koeficient nezobrazujeme

*Pseudokód:*

1. Generuj hodnoty $x_1, x_2, a$
2. Počítaj koeficienty všeobecného vyjadrenia paraboly
3. Dosaď hodnoty do všeobecného vyjadrenia paraboly

4. Dosaď rovnicu do znenia zadania

## 5.2 Priesečníky so súradnicovými osami

Generátor pre tento typ úlohy bude fungovať rovnako, ako generátor z podkapitoly 5.1. Keďže v ňom generujeme rovnice s celočíselnými koreňmi, môžeme si byť istí, že aj priesečník s číselnou osou $y$, bude mať celočíselný výsledok. Tento priesečník totiž vieme dostať aj vynásobením hodnôt $a, x_1, x_2$ z rovnice (3.5).

## 5.3 Vrchol paraboly

Na to, aby sme vygenerovali tento typ príkladu tak, aby mal celočíselný výsledok, potrebujeme začať generovaním samotného vrchola. Súradnice vrchola môžeme definovať nasledovne: $V_x, V_y \in \mathbb{Z}, V_x, V_y \in \langle -20, 20 \rangle$. Rozsah $\langle -20, 20 \rangle$ sme zvolili preto, aby konečné zadanie neobsahovalo zbytočne veľké čísla. Cieľom generátora je môcť si precvičiť pochopenie princípu príkladu, nie mechanické počítanie s veľkými číslami. Vygenerovaný vrchol následne vložíme do rovnice vo vrcholovom tvare (vzorec (3.9)) a pomocou operácií z prvého generátora ho upravíme na všeobecný tvar rovnice, ten už považujeme za hotové zadanie.

*Pseudokód:*

1. Generuj hodnoty $V_x, V_y, p$

2. Dosaď hodnoty do vrcholového vyjadrenia paraboly

3. Dosaď rovnicu do znenia zadania

## 5.4 Rovnica daná ohniskom a riadiacou priamkou

Budeme potrebovať generovať vrchol a hodnotu $p$, ohnisko sa bude nachádzať na $[V_x, V_y + p/2]$. Rovnica priamky bude $y = V_y - \frac{p}{2}$. Vrchol môžeme generovať rovnako, ako v generátore z kapitoly 4.3. Parameter $p$ môže byť z rozsahu $p \in \mathbb{Z}, p \in \langle -10, 0) \cup (0, 10\rangle, p \mod 2 == 0$. Chceme ale, aby vychádzali celé čísla, preto potrebujeme, aby bol parameter vždy párny.

*Pseudokód:*

1. Generuj hodnoty $V_x, V_y, p$
2. Počítaj súradnice ohniska
3. Počítaj hodnotu $q$ riadiacej priamky
4. Dosaď súradnice ohniska a rovnicu riadiacej priamky do znenia zadania

## 5.5 Rovnica daná tromi bodmi

Na generovanie takéhoto typu zadania začneme generovaním ľubovolnej paraboly. Po jej vygenerovaní budeme prechádzať jej $x$-ové hodnoty a hľadať celočíselné $y$-ové súradnice pokým nenájdeme tri takéto body. Tieto body budú tvoriť zadanie úlohy.

*Pseudokód:*

1. Generuj hodnoty $V_x, V_y, p$
2. Vytvor z nich vyjadrenie funkcie paraboly
3. Vytvor prázdny list **body**

4.

**While** len(body) $<3$ **Do**

Prechádzaj parabolu.

**If** (obe súradnice sú celé čísla **And** kombinácia **Not In** body) **Then**

body += kombinácia súradníc

**Else**

**Loop**

5. Dosaď súradnice bodov do znenia zadania

## 5.6 Rovnica daná bodom a vrcholom

Na generovanie takéhoto príkladu stačí generovať vrchol paraboly. Generovanie vrchola sme už používali v predchádzajúcich kapitolách. Náhodný bod budeme hľadať rovnakým spôsobom, ako v predošlom generátore.

*Pseudokód:*

1. Generuj hodnoty $V_x, V_y, p$
2. Vytvor z nich vyjadrenie funkcie paraboly
3. Vytvor premennú **bod**

4.

**While** !bod **Do**

Prechádzaj parabolu.

**If** (obe súradnice sú celé čísla) **Then**

bod = kombinácia súradníc

**Else**

**Loop**

5. Dosaď súradnice vrcholu a generovaného bodu do znenia zadania

## 5.7 Vzájomná poloha bodu a paraboly

Pri generovaní týchto úloh potrebujeme náhodne generovať rovnicu paraboly. Môžeme ju generovať v ľubovoľnom tvare. Následne môžeme vyberať bod z paraboly tak, aby sme si boli istí, že sa na nej nachádza, alebo generovať náhodné súradnice (bod ktorý sa na parabole nenachádza). Kód bude rovnaký, ako v predchádzajúcej kapitole 5.6.

Pri príklade na spôsob hľadania bodu na parabole podľa jeho vzdialenosti od ohniska nám stačí vygenerovať ľubovoľnú parabolu a nasledovne prechádzať jej celočíselné $x$-ové súradnice dokiaľ nenájdeme bod s dvomi celočíselnými súradnicami. $y$-ovú súradnicu potom pripočítame k hodnote $p$, čím dostaneme vzdialenosť ktorú v zadaní budeme požadovať.

## 5.8 Vzájomná poloha dvoch parabol

Pri generovaní úloh zameraných na priesečníky je potrebné začať práve s priesečníkmi. Pomocou týchto dvoch zvolených vygenerovaných bodov sme schopní generovať nekonečne veľa rovníc parabol, ktoré nimi prechádzajú. Teória braná zo [6]. Priesečníky môžu byť generované v intervale $B_1, B_2 \in \langle -10, 10 \rangle$, interval neobsahuje zbytočne veľké čísla, čím dovoľuje riešiteľovi zamerať sa na princíp príkladu. Nasleduje ukážka generovania príkladu:

**Priesečníky** $P_1[-2, 1]$ **a** $P_2[2, 9]$ Vložme do všeobecného tvaru kvadratickej rovnice

$$1 = 4a - 2b + c$$

$$9 = 4a + 2b + c$$

Vyjadrime $c$ z oboch

$$c = 1 + 2b - 4a$$
$$c = 9 - 4a - 2b$$

Vyjadrenia $c$ dajme do rovnosti a upravme

$$1 + 2b - 4a = 9 - 4a - 2b$$
$$4b = 8$$
$$b = 2$$

Nájdené $b$ vložme do jedného z pôvodných vyjadrení $c$

$$c = 1 + 2 * 2 - 4a$$
$$c = 5 - 4a$$

Nájdené hodnoty $b$ a $c$ vložme do všeobecnej rovnice paraboly

$$y = ax^2 + 2x + (5 - 4a)$$

Z tejto rovnice môžeme generovať ľubovoľné množstvo parabol, ktoré prechádzajú nami zvolenými body.

## 5.9 Vzájomná poloha paraboly a priamky

Podobne, ako v predchádzajúcom generátore, začneme generovaním dvoch bodov, ktoré reprezentujú priesečníky priamky a paraboly. Pri situáciách, kde budeme chcieť generovať príklady, v ktorých má priamka dva priesečníky s parabolou najprv potrebujeme vyjadriť priamku. Keď že už máme dva body s ktorými budeme pracovať, postupujeme podľa ukážky:

**Priesečníky** $P_1 = [0, 1]$ **a** $P_2 = [1, 4]$

Body najprv dosadíme do parametrickej rovnice priamky

$$
\begin{aligned}
&y = ax + c \\
&P_1 : 1 = c \\
&P_2 : 4 = a + c
\end{aligned}
$$

Ďalej riešime sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych

$$
\begin{aligned}
&4 = a + 1 && / - 1 \\
&3 = a
\end{aligned}
$$

Všetky neznáme už máme vypočítané, teraz ich vložíme do parametrickej rovnice priamky

$$
\begin{aligned}
&y = ax + c \\
&y = 3x + 1
\end{aligned}
$$

Takto sme vygenerovali rovnicu priamky pre naše zadanie, ostáva rovnica paraboly. Generovanie parabol prechádzajúcich dvomi bodmi sme už vysvetlili v predchádzajúcom generátore, kapitola 5.8.

## 5.10 Dotyčnica paraboly

Pri generovaní takéhoto zadania nám stačí náhodne vygenerovať parabolu a ľubovoľnú dotyčnicu k nej v smernicovom tvare a celočíselnou smernicou. Dotyčnicu môžeme generovať náhodným výberom $x$-ovej súradnice ich prieniku a nasledovným dopočítaním $y$-ovej súradnice a jej smernice. Je isté, že smernica bude celočíselná, pokiaľ budeme generovať celočíselnú súradnicu $x$ bodu prieniku a premenné $a$ a $b$ zo všeobecného vyjadrenia paraboly. Namiesto toho, aby sme generovali $x$-ovú súradnicu z pevne daného intervalu, budeme interval posúvať na základe lokácie vrchola paraboly. Predídeme tak prípadom, kde $y$-ová súradnica priesečníku bude príliš veľká hodnota.

*Pseudokód:*

1. Generuj hodnoty $V_x, V_y, p$
2. Vytvor z nich vyjadrenie funkcie paraboly
3. Vytvor premennú **bod**
4.

**While** !bod **Do**

    Prechádzaj parabolu.

    **If** (obe súradnice sú celé čísla) **Then**

        bod = kombinácia súradníc

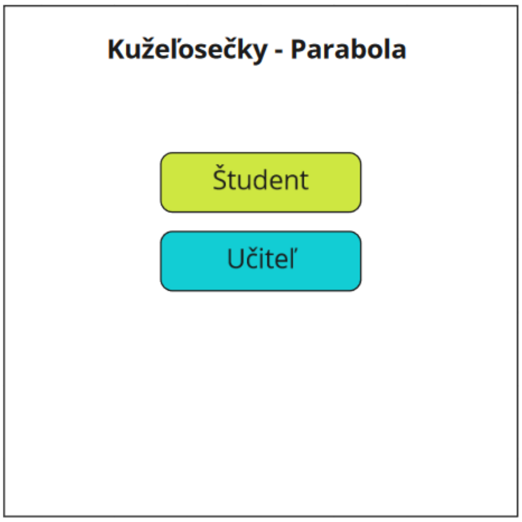
    **Else**

        **Loop**

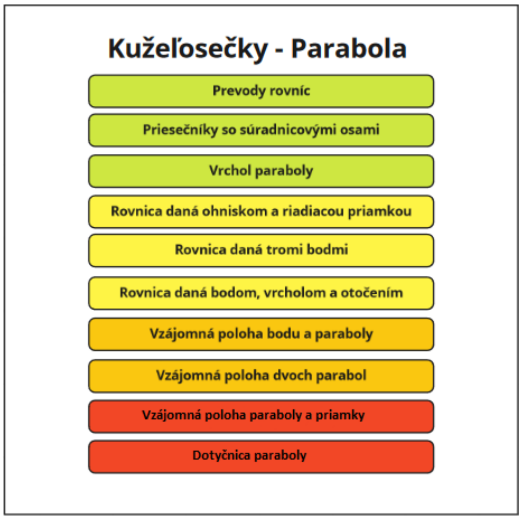
5. Dosaď rovnicu paraboly a nájdený bod do znenia zadania

# 6. UI návrh

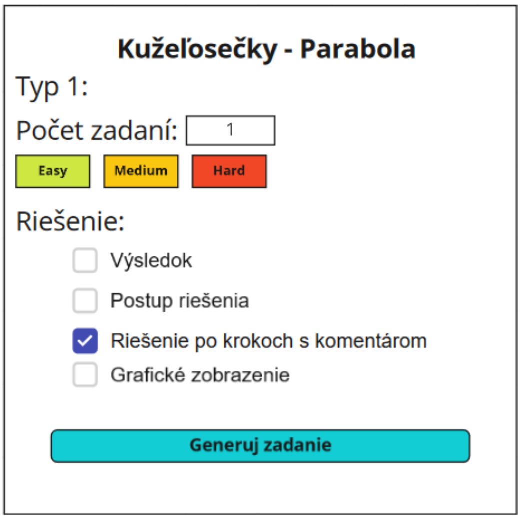
Ešte pred tým, ako začneme generátor programovať, by bolo vhodné navrhnúť používateľské rozhranie. Keďže je tento generátor jeden z viacerých tvorených na našej univerzite, pre ich jednotnosť a pohodlnosť používania sme sa zhodli na jednom používateľskom rozhraní navrhnutom kolegyňou Erikou Váczlavovou. Nasledujú upravené wireframy pre našu aplikáciu.



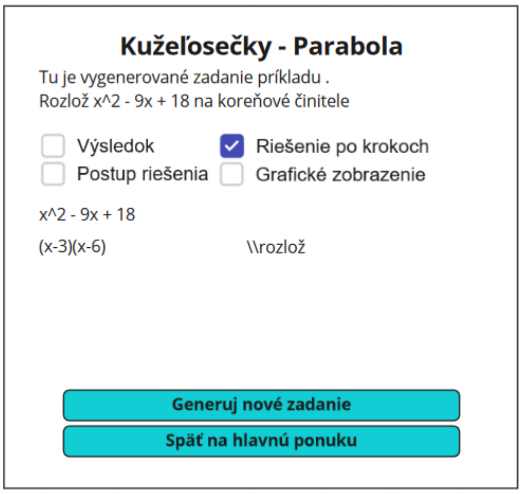

Obr. 6.1: Úvodná stránka



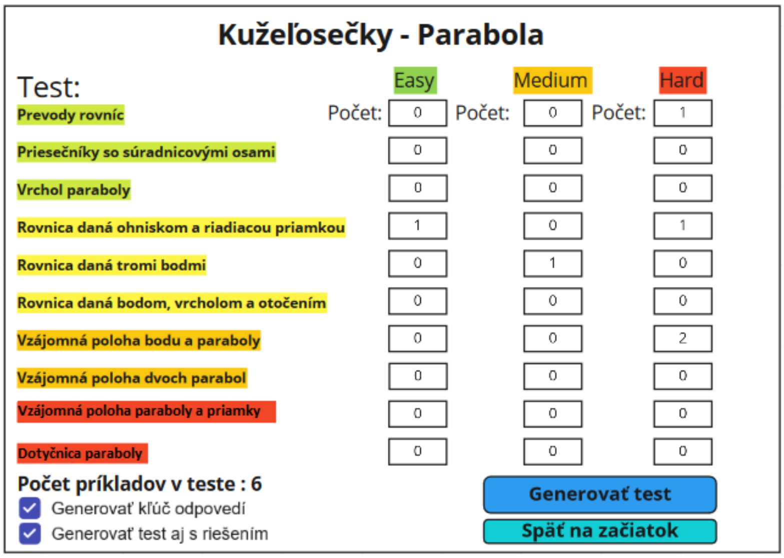

Obr. 6.2: Rozhranie študent/Výber typu úlohy




Obr. 6.3: Generovanie jedného typu príkladov




Obr. 6.4: Vygenerované riešenie




Obr. 6.5: Generovanie pracovného listu vo voľbe učiteľ

### Úvodná stránka

Tu si užívateľ bude môcť vybrať, či chce ďalej postupovať ako učiteľ, alebo študent. Ak užívateľ vyberie možnosť učiteľ, bude presmerovaný na stránku *Generovanie pracovného listu*. Ak užívateľ vyberie možnosť študent, bude presmerovaný na stránku *Výber typu úloh*.

### Výber typu úloh

Tu si užívateľ môže vybrať, aký typ úlohy sa bude generovať, po jeho výbere bude presmerovaný ná stránku *Generovanie jedného typu príkladov.*

### Generovanie jedného typu príkladov

Tu si užívateľ vyberie, čo všetko chce zobraziť pri generovaní samotného príkladu. Napríklad či chce rovno zobraziť kroky riešenia, výsledok, komentár ku krokom a grafické zobrazenie. Po špecifikovaní zobrazenia môže kliknúť na tlačidlo "Generuj zadanie"čím bude presmerovaný na *Vygenerované riešenie.*

### Vygenerované riešenie

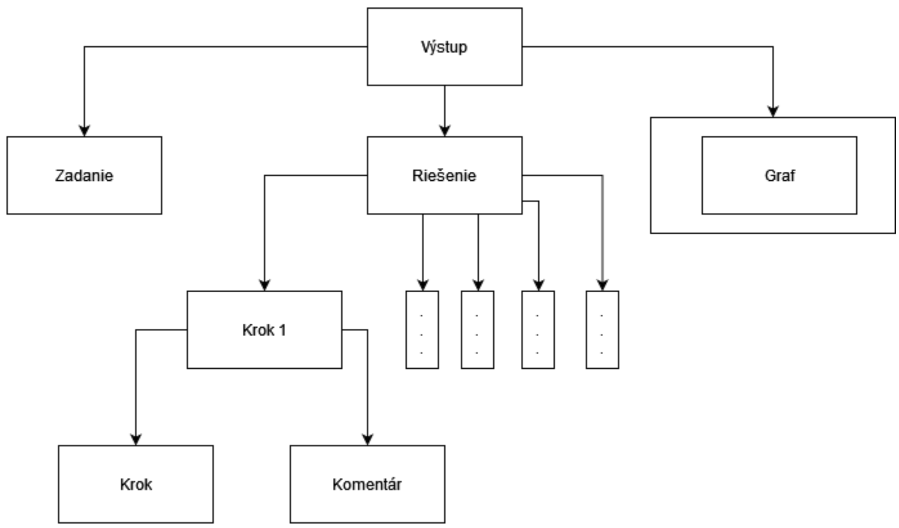
Tu bude zobrazený samotný vygenerovaný príklad a všetko ostatné, čo si užívateľ zvolil ukázať (riešenie, grafické zobrazenie atď.). Ďalej môže kliknúť na tlačidlo "Generuj nové zadanie"čím proces zopakuje a s rovnakými nastaveniami vygeneruje nový príklad, a môže kliknúť na tlačidlo "Späť na hlavnú ponuku", čím sa vráti na stránku *Úvodná stránka.*

### Generovanie pracovného listu

Tu môže užívateľ zvoliť množstvo, typy a obtiažnosť príkladov, ktoré budú tvoriť písomku.

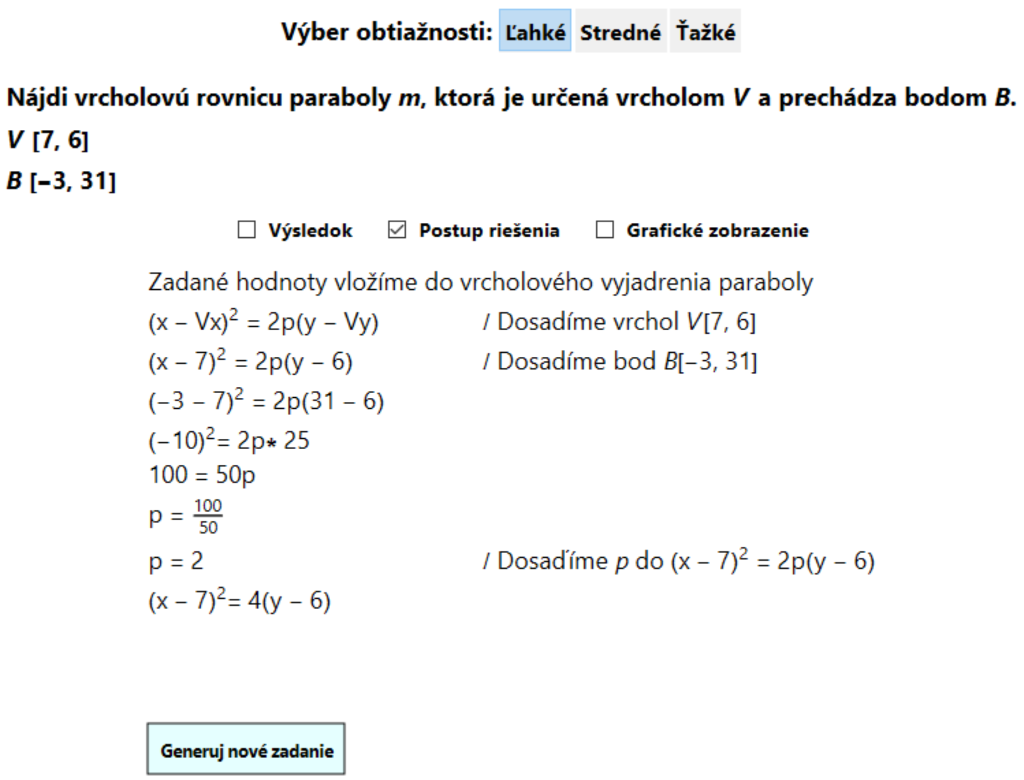
# 7. Softvérové riešenie

V tejto kapitole opíšeme výslednú aplikáciu. V aplikácií sa nachádza 28 funkcií reprezentujúcich 10 druhov generátorov a ich 3 náročnosti (Jeden z nich náročnosti nemá). Každá funkcia vracia objekt v nasledovnom formáte:



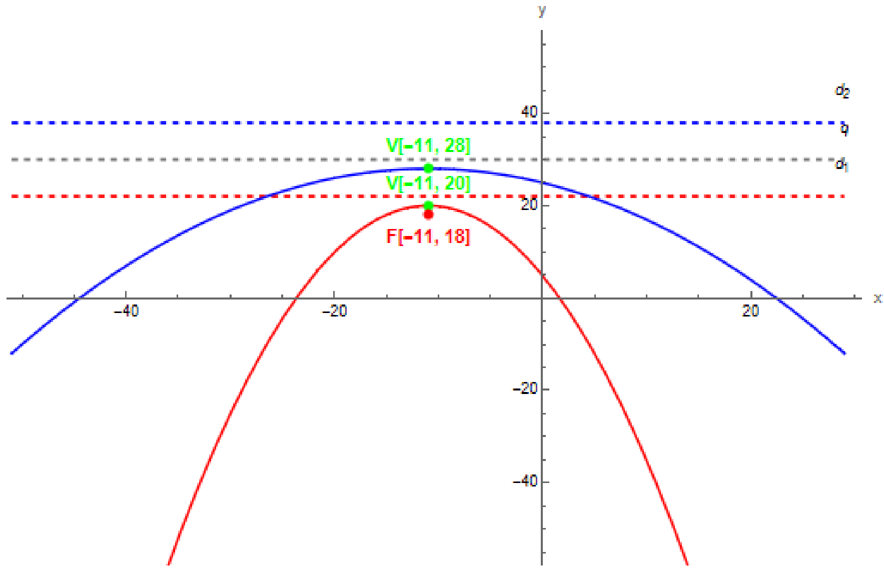

Obr. 7.1: Štruktúra výstupu funkcií

Takýto formát výstupu nám umožňuje ho pomerne jednoducho spracovať do používateľského rozhrania. Už vygenerované zadanie s postupom môže vyzerať nasledovne:




Obr. 7.2: Vygenerované zadanie a postup s krokmi

Okrem toho, že pomocou našej aplikácie vie užívateľ generovať náhodné zadania, toto krokové riešenie je oproti počítaniu ručne s perom na papier okamžite k dispozícií. No pravdepodobne najťažšie reprodukovateľnou časťou výsledku je grafické zobrazenie. Užívateľ má ku každému vygenerovanému príkladu prehľadné, farebne odlíšené grafické zobrazenie.




Obr. 7.3: Grafické zobrazenie dvoch parabol s rovnakým ohniskom a ich riadiacich priamok


Obr. 7.4: Grafické zobrazenie prieniku dvoch parabol

# 8. Testovanie

Aplikácia bola otestovaná dvomi osobami z rôznych záujmových skupín. Prvou osobou je študent vysokej školy. Výsledky boli nasledovné:

Študent pochválil užívateľské prostredie aplikácie, keďže to bol študent informatiky, snažil sa ho rozbiť extenzívnym klikaním na všetky tlačítka. Užívateľské rozhranie však fungovalo, ako malo a nič sa na ňom nepokazilo. Zvolil jeden z generátorov a prečítal zadanie. Bola mu položená otázka, či porozumel čo sa od neho požaduje v riešení. Odpovedal pozitívne. Prečítal si krokový postup riešenia, k žiadnemu z krokov nemal nijaké pripomienky. Nakoniec sa pozrel na grafické zobrazenie výsledku. Grafické zobrazenie sa mu veľmi páčilo. Tento proces opakoval pre pár ďalších generátorov s podobným výsledkom.

Druhá osoba, ktorá aplikáciu testovala bol študent strednej školy. Veľká časť tohto testovania prebehla podobne, ako pri študentovi vysokej školy. Pre nás zaujímavými časťami boli však moment, kedy sa aplikácia pokúsila deliť nulou v jednom z generátorov (problém už je opravený). Taktiež študent nepoznal termíny ako ohnisko a riadiaca priamka, ostatné príklady však chápal v poriadku.

# 9. Záver

Generátory zadaní nie sú zatiaľ veľmi rozšíreným typom aplikácie vo svete. Každý z nás je, alebo bol niekedy vo svojom živote študentom a matematiku študoval. Každému sa taktiež stalo, že už nemal aké príklady precvičiť v nejakej konkrétnej problematike, preto aplikácia, ako je tá, ktorú sme teraz vytvorili by nám v minulosti prišla veľmi užitočná. Obsahuje grafické zobrazenie riešení problémov, ktoré by bolo zdĺhavé kresliť rukou. Vytvorili sme generátor zadaní, ktorý príklady neberie z databázy, ale vytvára ich pomocou generátora náhodných čísiel a šikovným programovaním čím zaručuje originalitu generovaných príkladov. Obsahuje veľké množstvo typov zadaní (28) len pre paraboly, pokrýva teda veľkú časť typov zadaní, ktoré sa v tejto problematike môžu objaviť. V budúcnosti by tento generátor mohol byť súčasťou väčšieho generátora, pokrývajúceho viac, ako sú paraboly a kužeľosečky.

# Literatúra


[1] Math Goodies. *Math Goodies$^{TM}$*. 2020. URL: https://www.mathgoodies.com/worksheets/generator (cit. 31. 10. 2021).

[2] Jonathan Hall. *Mathsbot.com*. 2021. URL: https://mathsbot.com/ (cit. 31. 10. 2021).

[3] Antonín Hlaváček. *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky pro přípravu pracujících ke studiu na vysokých školách*. Státní pedagogické nakladatelství, 1971.

[4] RNDr. Jiří Kocourek. *KUŽELOSEČKY 4. Parabola*. 2021. URL: https://slideplayer.cz/slide/13329083/ (cit. 22. 11. 2021).

[5] Wolfram Alpha LLC. *Wolfram Problem Generator*. 2021. URL: https://www.wolfram.com/mathematica/ (cit. 31. 10. 2021).

[6] Illustrative Mathematics. *Finding Parabolas through Two Points*. 2016. URL: https://tasks.illustrativemathematics.org/content-standards/tasks/379 (cit. 16. 12. 2021).

[7] Y. McGivern. *The Practice of Market Research: An Introduction*. Prentice Hall/Financial Times, 2009. ISBN: 9780273717072. URL: https://books.google.sk/books?id=vdR-c0vKOSEC.

[8] Dave Peterson. *Tangents Without Calculus*. 2018. URL: https://www.themathdoctors.org/tangents-without-calculus/ (cit. 16. 02. 2022).

[9] Josef Polák. *Středoškolská matematika v úlohách II*. Spoločnosť Prometheus, 1999. ISBN: 8071961663.

[10] Q-Success. *w3techs.com, Web Technology Surveys*. 2009. URL: https://w3techs.com/technologies/details/cp-javascript (cit. 21. 11. 2021).

[11] Varsity Tutors. *The Vertex of a Parabola*. 2021. URL: https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/topics/vertex-of-a-parabola (cit. 04. 02. 2022).

[12] RNDr. Viera Vodičková. *Parabola a jej analytické vyjadrenie*. 2021. URL: https://www.galeje.sk/web_object/9524.pdf (cit. 19. 11. 2021).

[13] Petra Červinková. *Zmaturuj z matematiky*. Didaktis, 2004. ISBN: 8089160018.

# Príloha A

# Implementačný manuál

V tejto prílohe sa bližšie pozrieme na to, ako boli niektoré vybrané časti generátorov implementované.

## A.1 Generovanie paraboly

Keďže je naša práca zameraná na paraboly, pravdepodobne najdôležitejšou časťou implementácie je vedieť generovať náhodné paraboly v rôznych vyjadreniach. Paraboly v kóde vyjadrujeme buď pomocou súradníc vrcholu a parametra z vrcholového vyjadrenia paraboly, alebo koeficientov $a$, $b$ a $c$ zo všeobecného vyjadrenia paraboly. V niektorých prípadoch však potrebujeme vyjadrenia obe, preto najprv náhodne generujeme súradnice vrcholu paraboly a jej parameter $p$, a následne z nich vyjadrujeme koeficienty $a$, $b$ a $c$ matematicky, ako je vidieť na nasledujúcom obrázku.

```
p = (RandomChoice[DeleteCases[Range[-3,3], 0]]*2)^-1;
Vx = RandomInteger[{-7,7}];
Vy = RandomInteger[{-7,7}];
a =(2p)^-1;
b =-2*Vx*(2p)^-1;
c =(Vx^2 +2p*Vy)*(2p)^-1;
```

Obr. A.1: Generovanie náhodnej paraboly

Ďalej je tiež potrebné spomenúť, že v zadaniach, kde chceme mať celočíselné koeficienty vo všeobecnom vyjadrení paraboly potrebujeme parameter $p$ umocniť konštantou -1.

### A.1.1 Rozsahy

Pri generovaní náhodnej paraboly našim spôsobom je potrebné zvážiť, z akých rozsahov budeme náhodné čísla generovať. Po dlhej úvahe o tom, aké veľké by tieto rozsahy mali byť, sme dospeli k optimálnym intervalom pre väčšinu našich generátorov. $\langle -7, 7\rangle$ pre obe súradnice vrcholu. $\langle -3, 0) \cup (0, 3\rangle$ pre parameter rovnice. Tieto rozsahy neboli zvolené náhodne. Po dlhom zvažovaní a prepočítavaní príkladov s ich hraničnými hodnotami sme sa rozhodli, že bude najlepšie, ak parameter $p$ bude generovaný, ako menšie celé číslo. Dôvodom je, že väčšie rozsahy by viedli k priveľkým číslam. Pre parameter sme sa rozhodli pre menšie číslo, väčšie čísla by komplikovali riešenie v neželanom smere.

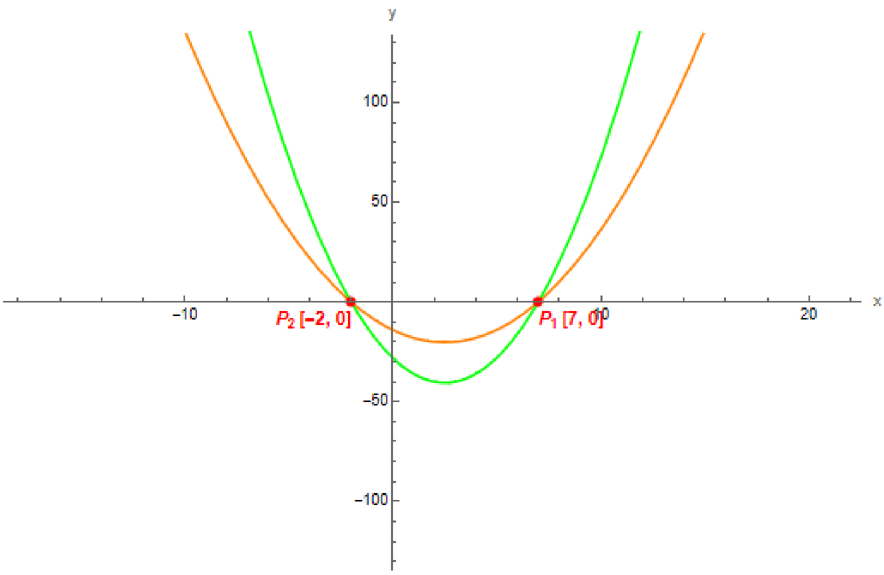
Nie všetky generátory tieto rozsahy dodržujú. Pre generátor, ako napríklad "Rovnica daná ohniskom a riadiacou priamkou"nie je problém mať väčší rozsah, pretože sa v ňom pracuje len s vrcholovým vyjadrením paraboly. Vďaka tomu postup nevedie k priveľkým číslam, ani ak je rozsah, z ktorého čísla generujeme väčší. Preto sme sa pre tento generátor rozhodli generovať súradnice vrcholu z rozsahu $\langle -20, 20\rangle$, a parameter z rozsahu $\langle -5, 0) \cup (0, 5\rangle$.

### A.1.2 Generovanie rovnice paraboly z dvoch bodov

Ďalšou zaujímavou časťou programovania našich generátorov bolo generovanie náhodných parabol prechádzajúcich dvomi konkrétnymi bodmi. Začali sme generovaním súradníc dvoch náhodných bodov, ktorými paraboly budú prechádzať. Následne sme využili vstavanú funkciu Solve, na počítanie sústavy dvoch rovníc o troch neznámych a vyjadrenie koeficientu $a$. Ďalej sme generovali dva rozličné náhodné koeficienty $a$, ktoré sme dosadili do vyjadrenia $a$ z funkcie Solve. Týmto procesom sme dostali pre každé z generovaných koeficientov $a$ hodnoty koeficientov $b$ a $c$.

```
p1x =  RandomInteger[{-10, 10}];
p1y = RandomInteger[{-10, 10}];
p2x = RandomChoice[DeleteCases[Range[-10,10], p1x]];
p2y = RandomInteger[{-10, 10}];
f[a_]=Solve[{p1y== a*(p1x^2) +b*p1x +c, p2y== a*(p2x^2) +b*p2x +c },{b,c}];
a1 = RandomChoice[DeleteCases[Range[-3,3], 0]];
a2 = RandomChoice[DeleteCases[Range[-3,3], 0|a1]];
b1 = f[a1][[1]][[1]][[2]];
c1 = f[a1][[1]][[2]][[2]];
b2 = f[a2][[1]][[1]][[2]];
c2 = f[a2][[1]][[2]][[2]];
V1 = vertex[a1, b1, c1];
V2 = vertex[a2, b2, c2];
```

Obr. A.2: Generovanie parabol z dvoch bodov




Obr. A.3: Grafické zobrazenie dvoch parabol generovaných z dvoch bodov

## A.2 Generovanie bodov na parabole

Pre účely generovanie niektorých zo zdaní budeme potrebovať hľadať body s celočíselnými súradnicami nachádzajúce sa na danej parabole. Tým, že paraboly generujeme s celočíselnými koeficientami, alebo celočíselnými súradnicami vrchola a celočíselným parametrom, ak dosadíme ľubovolnú celočíselnú súradnicu $x$ do do funkcie našej paraboly, dostaneme celočíselnú súradnicu $y$. Kód pre generovanie troch rôznych náhodných bodov bude preto vyzerať nasledovne.

```
While[Length[points] ≠ 3,
  temp = RandomInteger[{Vx-10, Vx+10}];
  If[!ContainsAny[points, {{temp, f[temp] }}],
    points = Append[points, {temp, f[temp]}]
  ]
];
```

Obr. A.4: Generovanie náhodných bodov na parabole. $f$ reprezentuje funkciu paraboly.

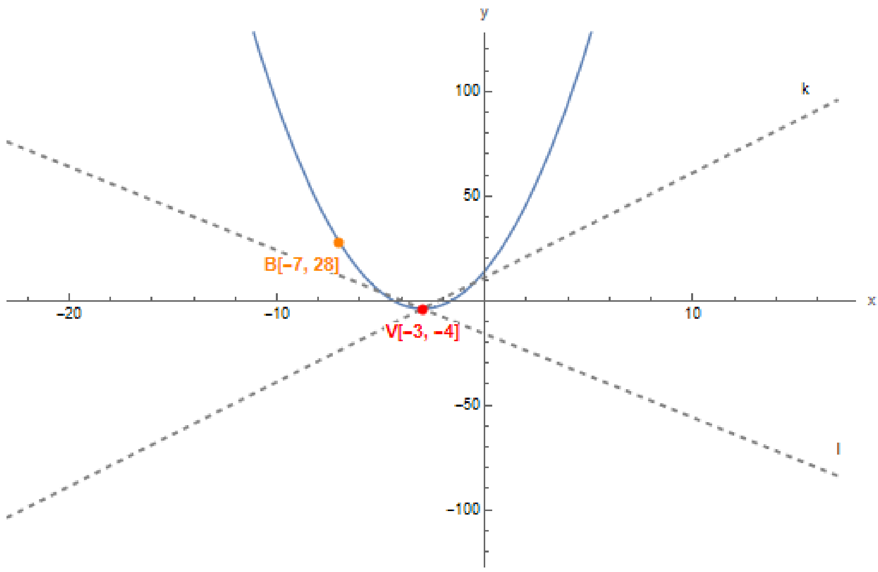
## A.3 Priesečníky priamok

V niektorých typoch našich generátorov sa zadanie mení tak, že namiesto toho, aby bol bod v zadaní uvedený ho je treba dopočítať a je určený ako priesečník dvoch priamok. Keďže bod už vygenerovaný máme, potrebujeme generovať dve odlišné priamky, ktoré ním prechádzajú. Pre jednoduchosť sme sa rozhodli používať smernicové vyjadrenie priamok. Začneme generovaním dvoch rôznych hodnôt $m$ (smernica priamky) a následne k nim dopočítame konštanty $q$ (posunutie). Takýmto spôsobom dostaneme dve rôzne priamky ktorých priesečníkom je náš daný bod. Kód vyzerá nasledovne:

```
p = RandomChoice[DeleteCases[Range[-5,5], 0]]*2;
Vx = RandomInteger[{-20,20}];
Vy = RandomInteger[{-20,20}];
d = Vy-(p/2);
F = {Vx, Vy+(p/2)};
m1 = RandomChoice[DeleteCases[Range[-5,5], 0]];
m2 = RandomChoice[DeleteCases[Range[-5,5], 0|m1]];
c1 = F[[2]]-(m1*F[[1]]);
c2 = F[[2]]-(m2*F[[1]]);
priamka1=StringForm[If[c1>0, "y = ``x + ``", "y = ``x  ``"], m1, c1];
priamka2=StringForm[If[c2>0, "y = ``x + ``", "y = ``x  ``"], m2, c2];
```

Obr. A.5: Generovanie priamok ktorých priesečník je ohnisko $F$

a grafická ukážka vrcholu tvoreného priesečníkom priamok




Obr. A.6: Vrchol ako priesečník generovaných priamok

# Príloha B

# Užívateľská príručka

**Návod na spustenie**

Pre spustenie našej aplikácie je najprv potrebné mať nainštalovaný softvérový systém Mathematica. Ďalej sa stačí riadiť nasledovnými krokmi:

- otvorte **.nb** súbor
- v hornej lište otvorte menu **evaluation**
- zvolte možnosť **evaluate notebook**
- scrollujte na úplný koniec programu
- tu už by ste mali vidieť užívateľské rozhranie

**Návod na používanie**

Najprv treba vybrať medzi rozhraním študent a žiak. Potom druh generátora, z ktorého chcete generovať zadania. Po vybraní konkrétneho generátora sa zobrazí možnosť obtiažnosti a výber, čo všetko má byť zobrazené (výsledok, krokové riešenie, graf). Možnosti zobrazenia pre každý príklad sa dajú zmeniť aj po jeho generovaní. Po nastavení voľby, kliknite na tlačidlo **Generuj**. V novom okne sa zobrazí všetko čo ste si zvolili, máte taktiež možnosť ukázať skryté časti, ktoré ste nevybrali. Ďalej môžete generovať nové zadanie rovnakého typu (môžete si však zvoliť iné možnosti zobrazovania, alebo obtiažnosti), alebo sa vrátiť na výber generátorov tlačidlom **Späť**.

# Príloha C

# Plán práce

### BP1

#### Týždeň 1-3

Študovanie problematiky, čítanie matematickej teórie.

#### Týždeň 4-6

Navrhovanie a konzultovanie druhov zadaní.

#### Týždeň 7-9

Písanie teoretickej časti práce.

#### Týždeň 10-13

Konzultácie a refaktorovanie teoretickej časti práce.

### BP2

#### Týždeň 1-3

Zoznamovanie sa so systémom Mathematica a programovanie prvého druhu generátora.

#### Týždeň 4-6

Programovanie ďalších generátorov (1 až 2 týždenne).

#### Týždeň 7-9

Programovanie ďalších generátorov a refaktorovanie už hotových generátorov (forma grafov, delenie nulou, formulácia niektorých krokov).

#### Týždeň 10-13

Posledné refaktorovanie implementácie, refaktorovanie písomnej práce a dopisovanie posledných kapitol.