Rezolvarea numerică a ecuaţiilor neliniare

Radu T. Trîmbiţaş

16 mai 2021

1 Ecuaţii neliniare în $\mathbb{R}$

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dorim să aproximăm o soluţie sau toate soluţiile ecuaţiei $f(x) = 0$. Vom prezenta câteva metode importante.

1.1 Metoda Newton-Raphson (a tangentei)

Determină o soluţie a ecuaţiei $f(x) = 0$, dându-se o aproximaţie iniţială p_0.

Intrare. Funcţia f, derivata sa f', o aproximaţie iniţială p_0; eroarea ε; numărul maxim de iteraţii N_0.

Ieşire. O soluţie aproximativă p sau un mesaj de eroare.

P1. $i := 1$.

P2. While $i \le N_0$ execută paşii P3-P6.

  P3. $p := p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$; {Calculează p}

  P4. If $|p - p_0| < \varepsilon$ then

    Returnează p; {Succes}

  P5. $i := i + 1$;

  P6. $p_0 := p$; {actualizează p}

P7. {eşec} eroare('precizia nu poate fi atinsă cu numărul dat de iteraţii').

Stop.

Observaţie. În plus faţă de

$$|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon$$

putem utiliza drept criteriu de oprire

$$|p_n - p_{n-1}| < \varepsilon |p_n|, \quad p_n \neq 0,$$

sau

$$|f(p_n)| < \varepsilon.$$

Exemplu numeric. Fie ecuaţia $x = \cos x$. Punem $f(x) = \cos x - x$. Ecuaţia noastră are o soluţie în $[0, \pi/2]$, care poate fi obţinută ca punct fix al lui $g(x) = \cos x$ (vezi figura 1). Deoarece $f'(x) = -\sin x - 1$, iteraţia Newton este

$$p_n = p_{n-1} - \frac{\cos p_{n-1} - p_{n-1}}{-\sin p_{n-1} - 1}, \qquad n \geq 1.$$

Ca valoare de pornire se poate alege $p_0 = \pi/4$. Valorile calculate se dau în tabela următoare

n	p_n	n	p_n
0	0.7853981635	3	0.7390851332
1	0.7395361337	4	0.7390851332
2	0.7390851781	5	0.7390851332

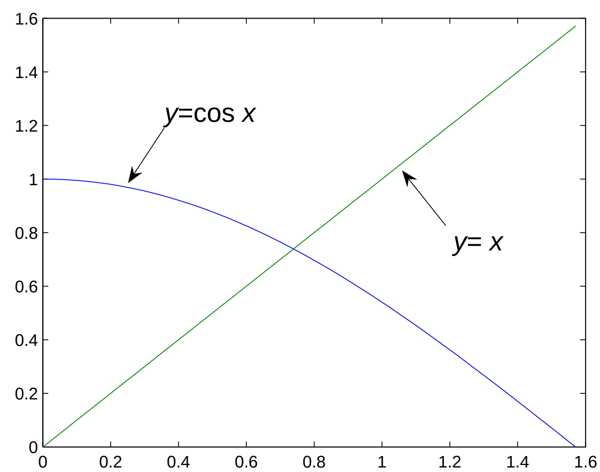

Figura 1: Ecuaţia $\cos x = x$

1.2 Metoda secantei

Determină o soluţie a ecuaţiei $f(x) = 0$, dându-se aproximaţiile iniţiale p_0 şi p_1.

Intrare. Funcţia f, aproximaţiile iniţiale p_0 şi p_1; eroarea ε; numărul maxim de iteraţii N_0.

Ieşire. Soluţia aproximativă p sau un mesaj de eroare.

P1. $i := 2$; $q_0 := f(p_0)$; $q_1 := f(p_1)$;

P2. while $i \leq N_0$ execută paşii P3-P6.

P3. $p := p_1 - \frac{q_1(p_1-p_0)}{q_1-q_0}$;

P4. if $|p - p_1| < \varepsilon$ then
returnează p; {succes}

P5. $i := i + 1$;

P6. $p_0 := p_1; q_0 := q_1;\ \ p_1 := p$; $q_1 := f(p)$;

P7. {eşec} eroare('precizia nu poate fi atinsă cu numărul dat de iteraţii').
Stop.

Examplu numeric. Considerăm din nou ecuaţia $\cos x - x = 0$. Ca valori de pornire alegem $p_0 = 0.5$ and $p_1 = \pi/4$. Calculele se dau în tabela de mai jos:

n	p_n
0	0.5
1	0.7853981635
2	0.7363841390
3	0.7390581394
4	0.7390851492
5	0.7390851334

1.3 Metoda lui Steffensen

Determină o soluţie a ecuaţiei $p = g(p)$, dându-se o aproximaţie iniţială p_0.

Intrare. Funcţia f, valoarea de pornire p_0; eroarea ε; numărul maxim de iteraţii N_0.

Ieşire. Soluţia aproximativă p sau un mesaj de eroare.

P1. $i := 1$.

P2. While $i \leq N_0$ execută paşii P3-P6.

P3.

$$\begin{aligned} p_1 &:= g(p_0); \quad \{\text{calculează } p_1^{(i-1)}\} \\ p_2 &:= g(p_1); \\ p &:= p_0 - \frac{(p_1 - p_0)^2}{p_2 - 2p_1 + p_0}; \ \{\text{calculează } p_0^{(i)}\} \end{aligned}$$

P4. if $|p - p_0| < \varepsilon$ then
returnează p; {success}
P5. $i := i + 1$;
P6. $p_0 := p$; {actualizează p}
P7. {eşec} eroare('precizia nu poate fi atinsă cu numărul dat de iteraţii').
Stop.

Exemplu numeric. Pentru a rezolva ecuaţia $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$, o rescriem sub forma $x^3 + 4x^2 = 10$ şi obţinem

$$x = g(x), \qquad g(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}}.$$

Luând $p_0 = 1.5$ avem succesiv

k	p_0	p_1	p_2
0	1.5	1.348399725	1.367376372
1	1.365265224	1.365225534	
2	1.365230013	1.365230583	

1.4 Probleme

1) Implementaţi metodele Newton, secantă, Steffensen şi metoda aproximațiilor succesive.

2 Sisteme de ecuaţii neliniare

Fie

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Dorim să rezolvăm ecuaţia (sistemul neliniar) $f(x) = 0$.

2.1 Metoda lui Newton

Formula iterativă este

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \left[f'(x^{(n)})\right]^{-1} f(x^{(n)}), \tag{2}$$

unde $f'(x^{(n)})$ este jacobianul lui f în punctul $x^{(n)}$.

Algoritmul.

Intrare. f, f', ε(toleranţa), valoarea de pornire $x^{(0)}$ şi numărul maxim de iteraţii N.

Ieşire. O aproximare a rădăcinii sau un mesaj de eroare.

$n := 0$;

repeat

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \left[f'(x^{(n)})\right]^{-1} f(x^{(n)}); \qquad n := n + 1;$$

until

$$\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\| < \varepsilon$$

or „s-a depăşit numărul maxim de iteraţii“.

2.2 Metoda aproximaţiilor succesive

Transformăm ecuaţia noastră într-una de forma $x = \varphi(x)$. Căutăm φ de forma $\varphi(x) = x - \Lambda f(x)$. Avem

$$\varphi'(x^{(0)}) = 0 \Longrightarrow \Lambda = -\left[f'\left(x^{(0)}\right)\right]^{-1}.$$

Algoritmul.

Intrare: f, ε (toleranţa), valoarea de pornire x_0 şi numărul maxim de iteraţii N.

Ieăşire: O aproximare a rădăcinii sau un mesaj de eroare: ”precizia dorită nu poate fi atinsă în N iteraţii”.

Repeat

$$x^{(n+1)} = \varphi\left(x^{(n)}\right)$$

until $\left\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\right\| < \varepsilon$ or „s-a depăşit numărul maxim de iteraţii“.

2.3 Probleme

1. Implementaţi metoda lui Newton şi metoda aproximaţiilor succesive.

2.4 Probleme practice

1. Rezolvaţi sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1. \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$$

2. Rezolvaţi numeric sistemul

$$\begin{cases} 9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 36 = 0, \\ x^2 - 2y^2 - 20z = 0, \\ x^2 - y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$$

utilizând metoda lui Newton şi metoda aproximaţiilor succesive. *Indicaţie.* Sunt 4 soluţii. Valori bune de pornire $[\pm 1, \pm 1, 0]^T$.