Fortgeschrittene Funktionale Programmierung in Haskell

Universität Bielefeld, Sommersemester 2015

Jonas Betzendahl & Stefan Dresselhaus

Übersicht I

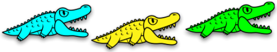
Alligator Eggs

Idee & Bilder: Bret Victor
http://worrydream.com/AlligatorEggs/

Wir betrachten heute ein Spiel, das gleichzeitig bunt und putzig ist und uns erlaubt, etwas interessantes zu lernen! Es gibt. . .

Wir betrachten heute ein Spiel, das gleichzeitig bunt und putzig ist und uns erlaubt, etwas interessantes zu lernen! Es gibt...

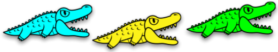
- **Hungrige Alligatoren**

  Hungrige Alligatoren sind hungrig! Sie fressen alles, was ihnen vor's Maul kommt. Sie bewachen aber außerdem ihre Familien.

Wir betrachten heute ein Spiel, das gleichzeitig bunt und putzig ist und uns erlaubt, etwas interessantes zu lernen! Es gibt...

- **Hungrige Alligatoren**

  Hungrige Alligatoren sind hungrig! Sie fressen alles, was ihnen vor's Maul kommt. Sie bewachen aber außerdem ihre Familien.

- **Alte Alligatoren**

  Diese Alligatoren haben genug gegessen und bewachen nur noch ihre Familien.

Wir betrachten heute ein Spiel, das gleichzeitig bunt und putzig ist und uns erlaubt, etwas interessantes zu lernen! Es gibt. . .

- **Hungrige Alligatoren**

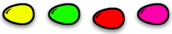
  Hungrige Alligatoren sind hungrig! Sie fressen alles, was ihnen vor's Maul kommt. Sie bewachen aber außerdem ihre Familien.

- **Alte Alligatoren**

  Diese Alligatoren haben genug gegessen und bewachen nur noch ihre Familien.

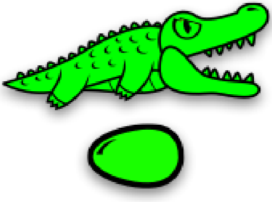
- **Alligatoreier**

  Aus Eiern schlüpfen demnächst neue Alligatorfamilien.

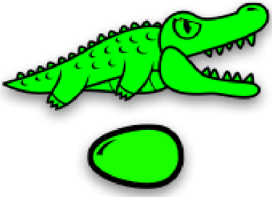
Familien

Alligatoren kommen in Familien daher. Hier ist eine:



Familien

Alligatoren kommen in Familien daher. Hier ist eine:



Hier ist noch nicht viel zu sehen, was wirklich interessiert.

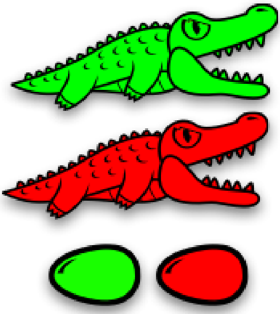
Nur ein grüner Alligator, der sein grünes Ei bewacht.
Ist er nicht süß?

Familien

Hier ist eine weitere Familie, dieses Mal mit mehr Mitgliedern.

Familien

Hier ist eine weitere Familie, dieses Mal mit mehr Mitgliedern.



Ein grüner und ein roter Alligator bewachen ein grünes und ein rotes Ei.

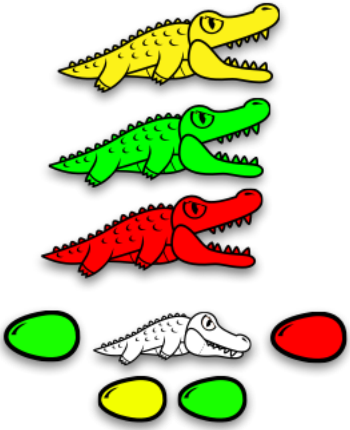
Oder anders formuliert:
Ein grüner Alligator bewacht einen roten Alligator und der rote Alligator bewacht die zwei Eier.

Familien

Dieses Mal haben wir eine richtige Großfamilie:

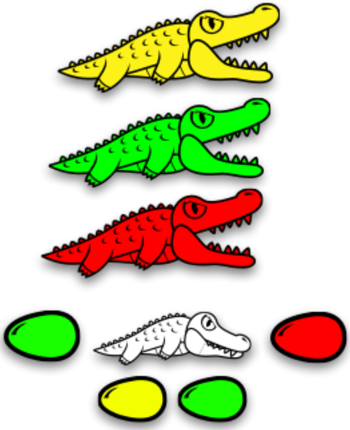
Familien

Dieses Mal haben wir eine richtige Großfamilie:



Familien

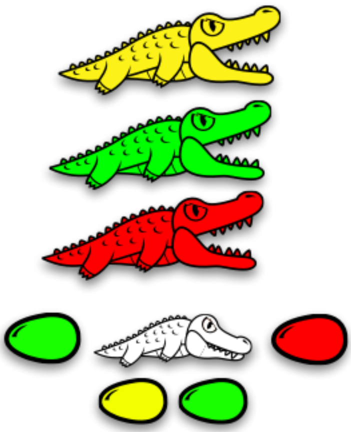
Dieses Mal haben wir eine richtige Großfamilie:



Hier haben wir drei hungrige Alligatoren, die Wache halten. Einen gelben, einen grünen und einen roten.

Familien

Dieses Mal haben wir eine richtige Großfamilie:

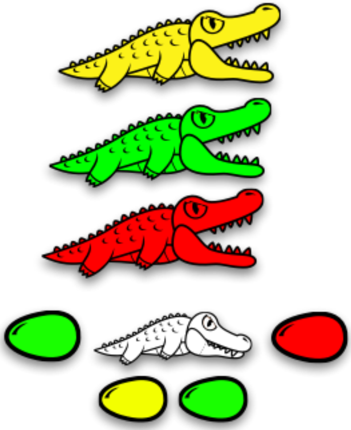


Hier haben wir drei hungrige Alligatoren, die Wache halten. Einen gelben, einen grünen und einen roten.

Sie bewachen drei Dinge: Ein grünes Ei, einen alten Alligator und ein rotes Ei.

Familien

Dieses Mal haben wir eine richtige Großfamilie:

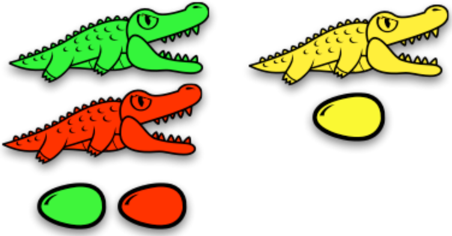


Hier haben wir drei hungrige Alligatoren, die Wache halten. Einen gelben, einen grünen und einen roten.

Sie bewachen drei Dinge: Ein grünes Ei, einen alten Alligator und ein rotes Ei.

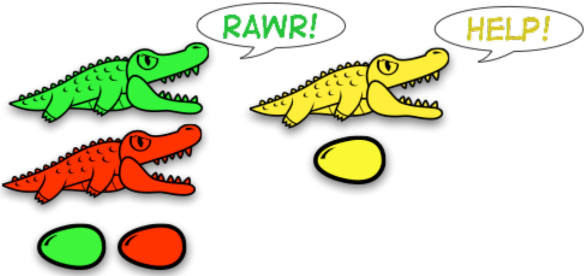
Der alte Alligator hingegen bewacht ein gelbes und ein grünes Ei.

Fressen und gefressen werden



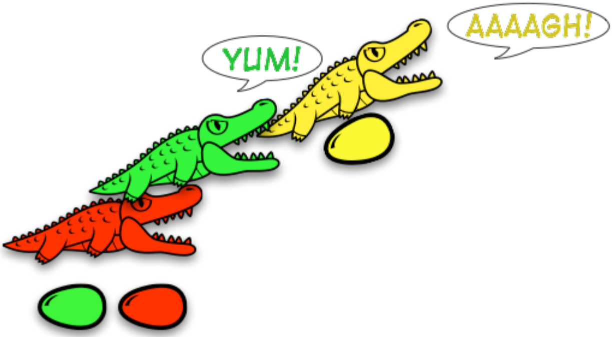
Hier wird es etwas ungemütlicher. Wir sehen hier zwei Familien nebeneinander.

Fressen und gefressen werden



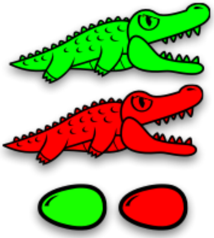
Hier wird es etwas ungemütlicher. Wir sehen hier zwei Familien nebeneinander. Der grüne Alligator ist *sehr* hungrig. . .

Fressen und gefressen werden



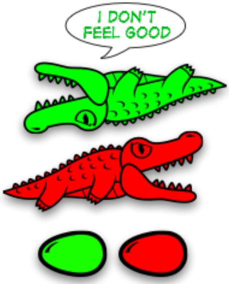
Hier wird es etwas ungemütlicher. Wir sehen hier zwei Familien nebeneinander. Der grüne Alligator ist *sehr* hungrig...

Fressen und gefressen werden



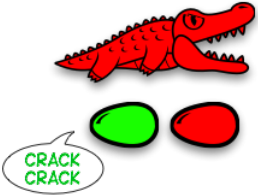
Der grüne Alligator hat die komplette gelbe Familie gefressen.

Fressen und gefressen werden



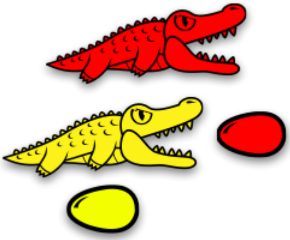
Der grüne Alligator hat die komplette gelbe Familie gefressen. Das war allerdings zu viel für seinen Magen. Er hat sich überfressen und stirbt.

Fressen und gefressen werden



Was übrig bleibt ist der rote Alligator. Jetzt wo sein grüner Freund gestorben ist, fängt jedoch das grüne Ei an, zu schlüpfen.

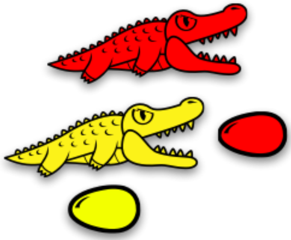
Fressen und gefressen werden



Was übrig bleibt ist der rote Alligator. Jetzt wo sein grüner Freund gestorben ist, fängt jedoch das grüne Ei an, zu schlüpfen.

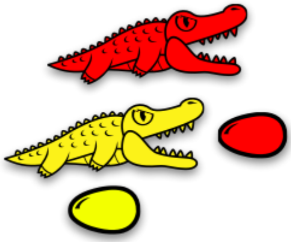
Es schlüpft *exakt*, was der grüne Alligator gerade gegessen hat. Das Wunder des Lebens!

Fressen und gefressen werden



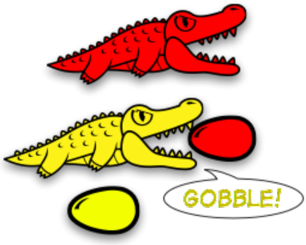
Was übrig bleibt ist der rote Alligator. Jetzt wo sein grüner Freund gestorben ist, fängt jedoch das grüne Ei an, zu schlüpfen.
Es schlüpft *exakt*, was der grüne Alligator gerade gegessen hat.
Das Wunder des Lebens!

Fressen und gefressen werden



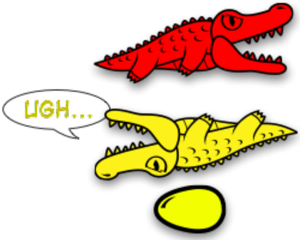
Jetzt ist also eine neue gelbe Familie geschlüpft.

Fressen und gefressen werden



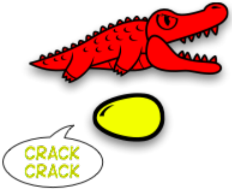
Jetzt ist also eine neue gelbe Familie geschlüpft. Allerdings ist dieser gelbe Alligator auch ziemlich hungrig. . .

Fressen und gefressen werden



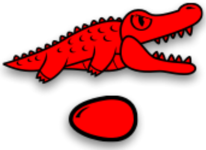
Jetzt ist also eine neue gelbe Familie geschlüpft. Allerdings ist dieser gelbe Alligator auch ziemlich hungrig...
Nachdem er das rote Ei gefressen hat, ist allerdings auch sein Magen schon zu voll und ihn ereilt das gleiche Schicksal wie den grünen Alligator.

Fressen und gefressen werden



Jetzt ist also eine neue gelbe Familie geschlüpft. Allerdings ist dieser gelbe Alligator auch ziemlich hungrig. . .
Nachdem er das rote Ei gefressen hat, ist allerdings auch sein Magen schon zu voll und ihn ereilt das gleiche Schicksal wie den grünen Alligator. Und auch aus diesem Ei schlüpft, was gerade gegessen wurde.

Fressen und gefressen werden



Jetzt ist also eine neue gelbe Familie geschlüpft. Allerdings ist dieser gelbe Alligator auch ziemlich hungrig. . .
Nachdem er das rote Ei gefressen hat, ist allerdings auch sein Magen schon zu voll und ihn ereilt das gleiche Schicksal wie den grünen Alligator. Und auch aus diesem Ei schlüpft, was gerade gegessen wurde.
Hier endet das Drama, da es nichts mehr zum Fressen gibt.

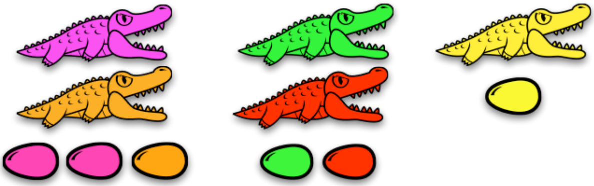
Die Essensregel

Wir können jetzt eine erste „formale“ Regel für dieses System aufstellen:

Die Essensregel

Wir können jetzt eine erste „formale“ Regel für dieses System aufstellen:

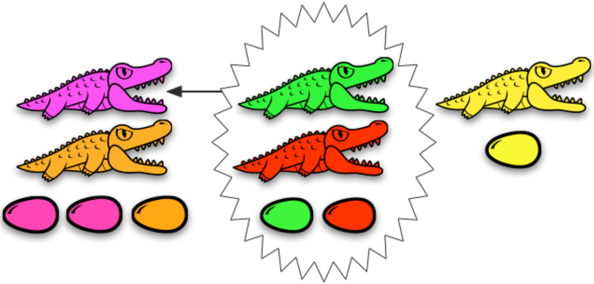
Wenn wir Alligatorfamilien nebeneinander haben, . . .



Die Essensregel

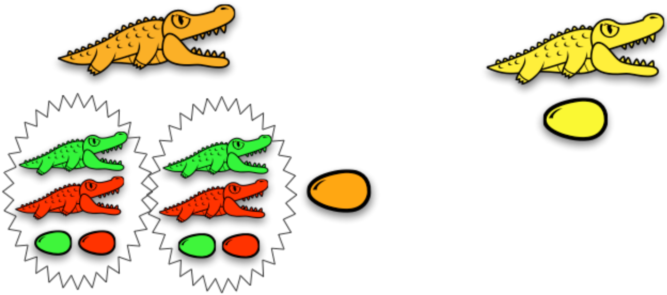
Wir können jetzt eine erste „formale“ Regel für dieses System aufstellen:

Wenn wir Alligatorfamilien nebeneinander haben, frisst der Alligator links oben die Familie rechts neben ihm.

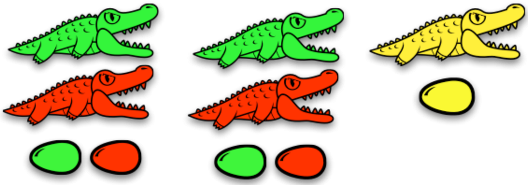


Die Essensregel

Wenn wir Alligatorfamilien nebeneinander haben, frisst der Alligator links oben die Familie rechts neben ihm. Dieser Alligator stirbt. Bewacht seine Familie jedoch Eier seiner Farbe, schlüpft aus *jedem* dieser Eier, was er gerade noch verspeist hat.

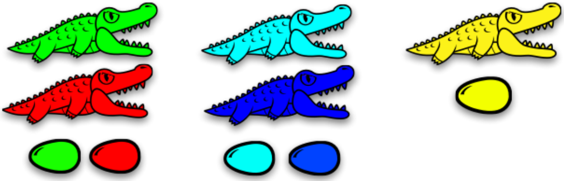


Die Farbenregel



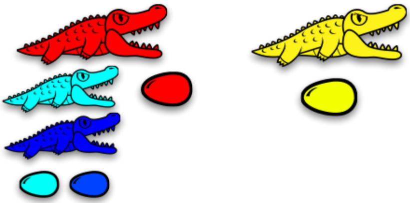
Setzen wir das Beispiel fort, frisst Orange Gelb und wir verbleiben mit dieser Konstellation. Jetzt gibt es allerdings ein Problem.

Die Farbenregel



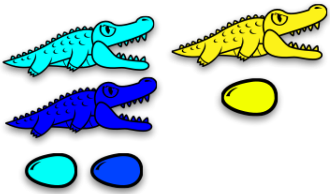
Setzen wir das Beispiel fort, frisst Orange Gelb und wir verbleiben mit dieser Konstellation. Jetzt gibt es allerdings ein Problem. Bevor ein Alligator eine Familie essen kann, in der eine Farbe vorkommt, die auch eins seiner Familienmitglieder hat, müssen die Farben geändert werden.

Die Farbenregel



Setzen wir das Beispiel fort, frisst Orange Gelb und wir verbleiben mit dieser Konstellation. Jetzt gibt es allerdings ein Problem. Bevor ein Alligator eine Familie essen kann, in der eine Farbe vorkommt, die auch eins seiner Familienmitglieder hat, müssen die Farben geändert werden.
Dann können wir essen. . .

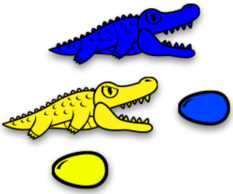
Die Farbenregel



Setzen wir das Beispiel fort, frisst Orange Gelb und wir verbleiben mit dieser Konstellation. Jetzt gibt es allerdings ein Problem. Bevor ein Alligator eine Familie essen kann, in der eine Farbe vorkommt, die auch eins seiner Familienmitglieder hat, müssen die Farben geändert werden.

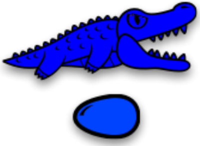
Dann können wir essen und essen...

Die Farbenregel



Setzen wir das Beispiel fort, frisst Orange Gelb und wir verbleiben mit dieser Konstellation. Jetzt gibt es allerdings ein Problem. Bevor ein Alligator eine Familie essen kann, in der eine Farbe vorkommt, die auch eins seiner Familienmitglieder hat, müssen die Farben geändert werden.
Dann können wir essen und essen und essen. . .

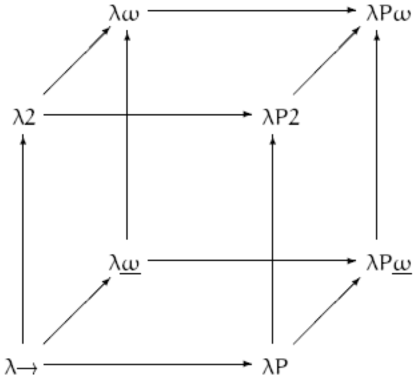
Die Farbenregel



Setzen wir das Beispiel fort, frisst Orange Gelb und wir verbleiben mit dieser Konstellation. Jetzt gibt es allerdings ein Problem. Bevor ein Alligator eine Familie essen kann, in der eine Farbe vorkommt, die auch eins seiner Familienmitglieder hat, müssen die Farben geändert werden.
Dann können wir essen und essen und essen, bis alles weg ist.

λ-Kalkül & λ-Würfel

Was ist ein Lambdakalkül und warum interessiert mich das?


λω
λPω
λ2
λP2
λω
λPω
λ→
λP

```
(++) : Vect m a -> Vect n a -> Vect (m + n) a
(++) []      ys = ys
(++) (x::xs) ys = x :: xs ++ ys
```

Back to the roots:

Monads & Categories

Zum Abschluss wollen wir noch ein besonders bekanntes Meme der Haskell-Community genauer unter die Lupe nehmen. Den Satz:

„Monaden sind Monoide in der Kategorie der Endofunktoren."

Zum Abschluss wollen wir noch ein besonders bekanntes Meme der Haskell-Community genauer unter die Lupe nehmen. Den Satz:

> *„Monaden sind Monoide in der Kategorie der Endofunktoren."*

…dafür werden wir allerdings einen kleinen Abstecher in die Mathematik benötigen.

Eine kurze Erinnerung:

`Monad` ist eine Typklasse in `Haskell`, die die Implementation von `return` und »= (Bind) voraussetzt. Insbesondere ist jeder Typ in `Monad` ebenfalls in `Applicative` und `Functor`.

```
class Applicative m => Monad m where
    return :: a -> m a
    (>>=)  :: m a -> (a -> m b) -> m b
```

Eine kurze Erinnerung:

`Monad` ist eine Typklasse in `Haskell`, die die Implementation von `return` und »= (Bind) voraussetzt. Insbesondere ist jeder Typ in `Monad` ebenfalls in `Applicative` und `Functor`.

```
class Applicative m => Monad m where
    return :: a -> m a
    (>>=)  :: m a -> (a -> m b) -> m b
```

Besonders beliebt: `Identity`, `[]`, `IO`, `Maybe`...

Definition:

Sei M eine Menge und $\circ$ eine (abgeschl.) binäre Relation auf M (d.h. $\circ : M \times M \rightarrow M$). Dann heißt $(M, \circ)$ *Monoid*, wenn $\circ$ die folgenden zwei Axiome beachtet:

Definition:

Sei M eine Menge und $\circ$ eine (abgeschl.) binäre Relation auf M (d.h. $\circ : M \times M \to M$). Dann heißt $(M, \circ)$ *Monoid*, wenn $\circ$ die folgenden zwei Axiome beachtet:

- (ass) $\forall a, b, c \in M: \ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

Definition:
Sei M eine Menge und $\circ$ eine (abgeschl.) binäre Relation auf M (d.h. $\circ : M \times M \to M$). Dann heißt $(M, \circ)$ *Monoid*, wenn $\circ$ die folgenden zwei Axiome beachtet:

- `(ass)` $\forall a, b, c \in M: \ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- `(ide)` $\exists e \in M$ sodass $\forall a \in m: \ e \circ a = a \circ e = a$

Definition:

Sei M eine Menge und $\circ$ eine (abgeschl.) binäre Relation auf M (d.h. $\circ : M \times M \to M$). Dann heißt $(M, \circ)$ *Monoid*, wenn $\circ$ die folgenden zwei Axiome beachtet:

- `(ass)` $\forall a, b, c \in M : \; (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- `(ide)` $\exists e \in M$ sodass $\forall a \in m : \; e \circ a = a \circ e = a$

Beliebte Monoide:

Definition:
Sei M eine Menge und $\circ$ eine (abgeschl.) binäre Relation auf M (d.h. $\circ : M \times M \to M$). Dann heißt $(M, \circ)$ *Monoid*, wenn $\circ$ die folgenden zwei Axiome beachtet:

- $\texttt{(ass)}$ $\forall a, b, c \in M : \ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- $\texttt{(ide)}$ $\exists e \in M$ sodass $\forall a \in m : \ e \circ a = a \circ e = a$

Beliebte Monoide:

- $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot), (\{\bot, \top\}, \texttt{AND}), (\{\bot, \top\}, \texttt{OR}) \ldots$

Definition:
Sei M eine Menge und $\circ$ eine (abgeschl.) binäre Relation auf M (d.h. $\circ : M \times M \to M$). Dann heißt $(M, \circ)$ *Monoid*, wenn $\circ$ die folgenden zwei Axiome beachtet:

- `(ass)` $\forall a, b, c \in M: \; (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- `(ide)` $\exists e \in M$ sodass $\forall a \in m: \; e \circ a = a \circ e = a$

Beliebte Monoide:

- $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot), (\{\bot, \top\}, \texttt{AND}), (\{\bot, \top\}, \texttt{OR}) \ldots$
- Gegeben eine Menge A, $\mathcal{P}(A)$ entweder mit $\cap$ oder $\cup$

Definition:

Sei M eine Menge und $\circ$ eine (abgeschl.) binäre Relation auf M (d.h. $\circ : M \times M \to M$). Dann heißt $(M, \circ)$ *Monoid*, wenn $\circ$ die folgenden zwei Axiome beachtet:

- `(ass)` $\forall a, b, c \in M: \ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- `(ide)` $\exists e \in M$ sodass $\forall a \in m: \ e \circ a = a \circ e = a$

Beliebte Monoide:

- $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot), (\{\bot, \top\}, \texttt{AND}), (\{\bot, \top\}, \texttt{OR}) \ldots$
- Gegeben eine Menge A, $\mathcal{P}(A)$ entweder mit $\cap$ oder $\cup$
- Jede Menge mit nur einem Element formt einen trivialen Monoid mit der trivialen Relation.

Kategorientheorie

Worum geht es bei Kategorientheorie?

Und was ist mit Funktoren?

Und was ist mit Funktoren?

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein *Funktor F* ist eine Abbildung von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, die folgende Bedingungen einhält:

Und was ist mit Funktoren?

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein *Funktor F* ist eine Abbildung von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, die folgende Bedingungen einhält:

- F bildet jedes $X \in Obj(\mathcal{C})$ auf ein $F(X) \in Obj(\mathcal{D})$ ab.

Und was ist mit Funktoren?

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein *Funktor F* ist eine Abbildung von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, die folgende Bedingungen einhält:

- F bildet jedes $X \in Obj(\mathcal{C})$ auf ein $F(X) \in Obj(\mathcal{D})$ ab.
- F bildet jedes $f \in Hom(\mathcal{C})$ auf ein $F(f) \in Hom(\mathcal{D})$ ab, sodass folgendes gilt:

Und was ist mit Funktoren?

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein *Funktor F* ist eine Abbildung von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, die folgende Bedingungen einhält:

- F bildet jedes $X \in Obj(\mathcal{C})$ auf ein $F(X) \in Obj(\mathcal{D})$ ab.
- F bildet jedes $f \in Hom(\mathcal{C})$ auf ein $F(f) \in Hom(\mathcal{D})$ ab, sodass folgendes gilt:
    - $F(id_X) = id_{F(X)}$

Und was ist mit Funktoren?

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein *Funktor F* ist eine Abbildung von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, die folgende Bedingungen einhält:

- F bildet jedes $X \in Obj(\mathcal{C})$ auf ein $F(X) \in Obj(\mathcal{D})$ ab.
- F bildet jedes $f \in Hom(\mathcal{C})$ auf ein $F(f) \in Hom(\mathcal{D})$ ab, sodass folgendes gilt:
  - $F(id_X) = id_{F(X)}$
  - $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)\ \forall f : X \to Y, g : Y \to Z$

Und was ist mit Funktoren?

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein *Funktor F* ist eine Abbildung von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, die folgende Bedingungen einhält:

- F bildet jedes $X \in Obj(\mathcal{C})$ auf ein $F(X) \in Obj(\mathcal{D})$ ab.
- F bildet jedes $f \in Hom(\mathcal{C})$ auf ein $F(f) \in Hom(\mathcal{D})$ ab, sodass folgendes gilt:
  - $F(id_X) = id_{F(X)}$
  - $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \; \forall f : X \to Y, g : Y \to Z$

Man sagt auch oft, dass Funktoren wegen ihrer Eigenschaften *strukturerhaltend* sind.

Und was ist mit Funktoren?

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein *Funktor F* ist eine Abbildung von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$, die folgende Bedingungen einhält:

- F bildet jedes $X \in Obj(\mathcal{C})$ auf ein $F(X) \in Obj(\mathcal{D})$ ab.
- F bildet jedes $f \in Hom(\mathcal{C})$ auf ein $F(f) \in Hom(\mathcal{D})$ ab, sodass folgendes gilt:
  - $F(id_X) = id_{F(X)}$
  - $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \; \forall f : X \to Y, g : Y \to Z$

Man sagt auch oft, dass Funktoren wegen ihrer Eigenschaften *strukturerhaltend* sind.

Ein Funktor heißt *Endo*funktor, einfach wenn $\mathcal{C} = \mathcal{D}$.

Fügen wir also zusammen, was wir gelernt haben:

Fügen wir also zusammen, was wir gelernt haben:

- Wir betrachten eine Kategorie, nennen, wir sie $\mathcal{C}$.

Fügen wir also zusammen, was wir gelernt haben:

- Wir betrachten eine Kategorie, nennen, wir sie $\mathcal{C}$.
- Die Objekte von $\mathcal{C}$, sind Endofunktoren, also Abbildungen von weiteren Kategorien auf sich selbst.

„Monaden sind Monoide in der Kategorie der Endofunktoren.“


That's all Folks!