

1 Varmajafnvægi

1.1

Skrifa `matlab`-forrit sem finnur nálgunarlausn á Sturm-Liouville-verkefninu (1.1) með Galerkin-aðferð og þúfugrunnföllum, þar sem gert er ráð fyrir að p megi vera ósamfellt og að hægri hliðin megi innihalda punktuppsprettu.

Lausn: Forritið er svona útlítandi

```
function c=Galerkinadferd(p,q,f,x,alpha,beta,gamma,r,Q)

N=length(x);
h=x(2:N)-x(1:N-1);
m=(x(2:N)+x(1:N-1))/2;
pm=p(m);
qm=q(m);
fx=f(x);

A=zeros(N,3);
b=zeros(N,1);

A(2:N-1,2) = pm(1:N-2)./h(1:N-2)+pm(2:N-1)./h(2:N-1)+(h(1:N-2).*qm(1:N-2)+h(2:N-1).*qm(2:N-2))./h(1:N-1)+h(2:N-1).*qm(1:N-1)/6;
A(2:N,1) = -pm(1:N-1)./h(1:N-1)+h(1:N-1).*qm(1:N-1)/6;
A(1:N-1,3) = A(2:N,1);
b(2:N-1) = (h(1:N-2).*(fx(1:N-2)+2*fx(2:N-1))+h(2:N-1).*(2*fx(2:N-1)+fx(3:N)))/6;

if beta(1) == 0
    A(1,2) = alpha(1);
    A(1,3) = 0;
    b(1) = gamma(1);
else
    A(1,2) = pm(1)/h(1)+h(1)*qm(1)/3+p(x(1))*alpha(1)/beta(1);
    b(1) = h(1)*(2*fx(1)+fx(2))/6+p(x(1))*gamma(1)/beta(1);
end

if beta(2) == 0
    A(N,1) = 0;
    A(N,2) = alpha(2);
    b(N) = gamma(2);
else
    A(N,2) = pm(N-1)/h(N-1)+h(N-1)*(qm(N-1)/3+(p(x(N))*alpha(2)/beta(2)));
    b(N) = h(N-1)*(fx(N-1)+2*fx(N))/6+p(x(N))*gamma(2)/beta(2);
end

if ~isempty(r)
```

```

m=length(r);
for j=1:m
    i=max(find(x<=r(j)));
    b(i-1)=b(i-1)+Q(j)*(1-(r(j)-x(i-1))/(x(i)-x(i-1)));
    b(i) = b(i)+Q(j)*(r(j)-x(i-1))/(x(i)-x(i-1));
end
end

c=tridiagonal_solve(A,b);

```

1.2

Rökstyðjið að aðferð Galerkins virki með ósamfelld p eins og lýst er hér að framan. Það eina sem þarf að gera að sýna að hlutheildunin sem liggur til grundvallar aðferðinni virki í þessu tilfelli þegar p er ósamfelld eins og lýst er hér að framan.

Lausn:

1.3

Gerið grein fyrir því hvernig punktuppsprettarnar eru meðhöndlaðar í forritinu. Sýnið með einni keyrslu hvaða áhrif það hefur á lausn ef punktuppsprettu er bætt við hægri hliðina.

Lausn: Við höfum gert ráð fyrir að hægri hliðin f í afleiðujöfnunni sé samfelld. Getum líka bætt við það liðum sem eru margfeldi fasta og Dirac-deltafalls. Slíkir liðir lýsa orkuuppsprettum í stökum punktum. Dirac-fallið í punktinum r táknum við með δ_r . Eina reiknireglan sem við þurfum að kunna er að

$$\int_c^d \delta_r(x) \varphi(x) dx = \varphi(r)$$

fyrir sérhvert fall φ á grennd um lokaða bilið $[c, d]$ og sérhvern punkt $r \in [c, d]$. Af þessu leiðir að ef $r = x_k$ er einn af punktinum í skipitingu á bilinu $[a, b]$ og φ_j er þúfugrunnfallið númer j , þá er

$$\int_a^b \delta_{x_k}(x) \varphi_j(x) dx = \varphi_j(x_k) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Í forritinu bætum við við punktuppsprettunum við hægri hlið fylkisins sem við erum búnin að búa til áður með eftirfarandi.

```

for j=1:m
    i=max(find(x<=r(j)));
    b(i-1)=b(i-1)+Q(j)*(1-(r(j)-x(i-1))/(x(i)-x(i-1)));
    b(i) = b(i)+Q(j)*(r(j)-x(i-1))/(x(i)-x(i-1));
end

```

1.4

Finnið sjálf heppilegt sýnidæmi til þess að prófa hvort forritið virki rétt. Kannið hvort skekkjan í nálguninni er $O(h^2)$, þar sem h táknar billengd í jafnri skiptingu með því að prófa forritið í sýnidæminu með fjölda bila $N=2,4,8,\dots$

Lausn: Heppilegt sýnidæmi sem við fundum er í heimaðæmum 8.1. Byrjum á því að skilgreina breyturarnar.

```
p = @(x) x;  
q = @(x) 1./x;  
f = @(x) -2 + 0.*x;  
u=@(x) x.*log(x)-x;  
x = [1:1/3:2];  
alpha=[0,1];  
beta = [-1,-2];  
gamma=[0,-2];  
r=2;  
Q=0;
```

Köllum svo á fallið.

```
>> galerkinadferd_2(@(x)x,@(x)(1./x),@(x)-2+0.*x,[1:1/3:2],[0,1],[-1,-2],[0,-2],2,0)
```

```
ans =
```

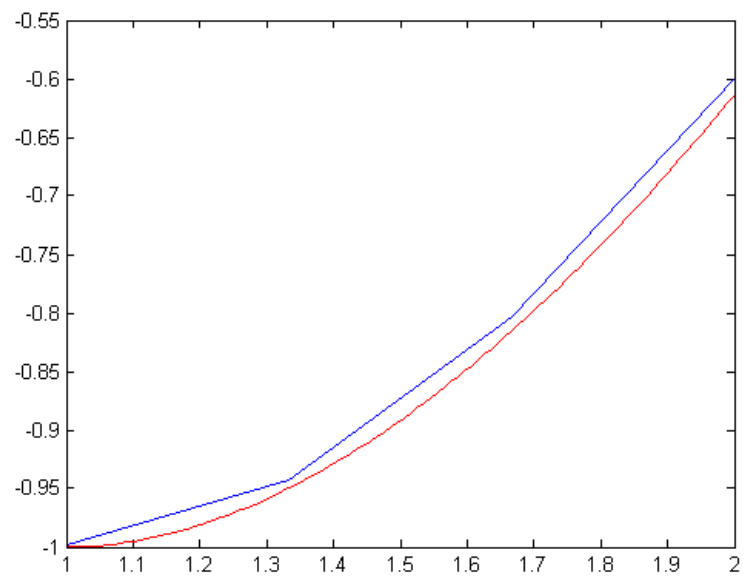
```
-0.9977  
-0.9424  
-0.8039  
-0.5987
```

Plottum svo upp.

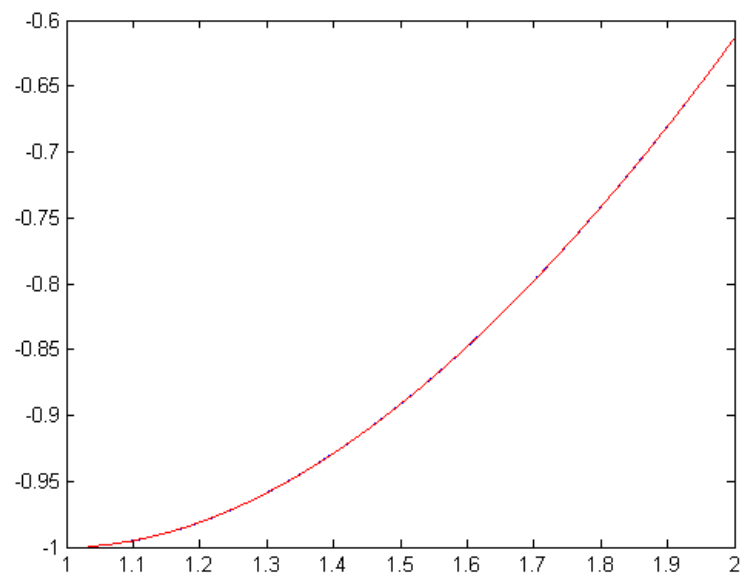
```
>> plot(linspace(1,2,4),ans)  
>> hold on  
>> plot(linspace(1,2,100),u(linspace(1,2,100)),'r')
```

Fáum þá út fallið og nálgunarfallið.

Sjáum hér að nálgunin er góð enn ef að við fjölgum bilunum þá verður hún ennþá meira nákvæm. Sjáum hér að neðan mynd þar sem bilin eru orðin 1000 og þá eru línurnar tvær svo gott sem samliggjandi.



Mynd 1: Mynd af fallinu og nálguninni.



Mynd 2: Mynd af fallinu og nálguninni.

2 Straujárnið hennar Mömmu

2.1

Skrifið matlab-forrit sem notar forritið ykkar `Galerkinadferd` úr síðasta lið til þess að finna nálgun á lausn þessa verkefnis. Notið fjögurra punkta skiptingu $x_0 = a, x_1 = s, x_2 = r$ og $x_3 = b$. Framkvæmið fastapunktsítrekunina þar til endurbítin í ítrekuninni er innan við 1%. Markmiðið er að þið prófið ykkur áfram með að stilla gildið á Q þannig að út komi hitastigið $u(b) \approx 200C$. (Hámarksaflið í venulegu straujárni er 1200-1500W.) Þegar þetta gildi á Q er fundið eigði þi ða teikna upp hitastigið sem fall af x .

Lausn: Byrjum á því að skilgreina allar breytur.

```
h1 = 5;
h2 = 50;
e = 0.2;
sigma = 5.669*10^-8;
T0 = 298;
T1 = 298;
l1 = 0.1;
l2 = 140;
gamma1 = h1*T0;
a = 0;
s = 0.008;
r = 0.01;
b = 0.016;
x = [0, 0.0008, 0.01, 0.016];
q = @(x) x.*0;
p = @(x) l1 + (l2 - l1)*(x >= r); %þetta er heavisidelidur
f = @(x) x.*0;
beta = [0.1,140]; %l1,l2
Q = 235/0.024;
Q_0 = Q/0.024;
v=[473];
skekkja = 1;
```

Nú keyrum við eftirfarandi forrit og fáum út hitastig.

```
while skekkja>0.01
    %itra galerkin til að haekka hk
    hk=h2+e*sigma*(v(end) +T1)*(v(end)^2+T1^2);
    gamma=[h1*T0,hk*T1];
    alpha=[h1,hk];
    v1=v(end);
    v = galerkinadferd_2( p,q,f,x,alpha,beta,gamma,r,Q );
```

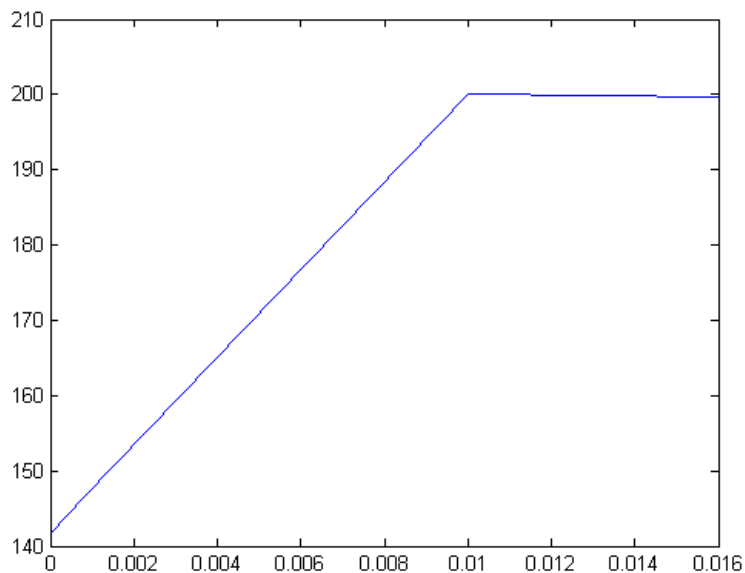
```

skekka=abs(v1-v(end))/v1;
end
disp(v(end))
plot(x,(v-273))

472.6239

```

Sjáum að hitastigið sem kemur út er í kelvingráðunum og því drögum við frá 273 til að fá út hitastigið í celsíus $472.6239 - 273 = 199.6239$ og við tökum okkur það bessaleyfi að námunda það upp í 200°C og svo plottum við einnig mynd þar sem við sjáum hitastigið á grafi.



Mynd 3: Hitastigsmynd af straujárninu hennar Mömmu.

Sjáum á ferlinu að hitastigið hækkar hratt upp og svo helst það í sirka 200°C .

2.2

Leysið verkefnið aftur með gildið á Q sem þið fundið, en sleppið geislunarliðnum. Þetta þýðir að þið eigið að setja $\epsilon = 0$. Hver er munurinn á lausnunum? Er nauðsynlegt að taka tillit til geislunarliðarins.

Lausn:

við keyrum nákvæmlega sama í gegn í Matlab nema við breytum einni breytu þannig að $e=0$ þá sjáum við að myndin breytist og hitastigið skekkist um sirka

8°C

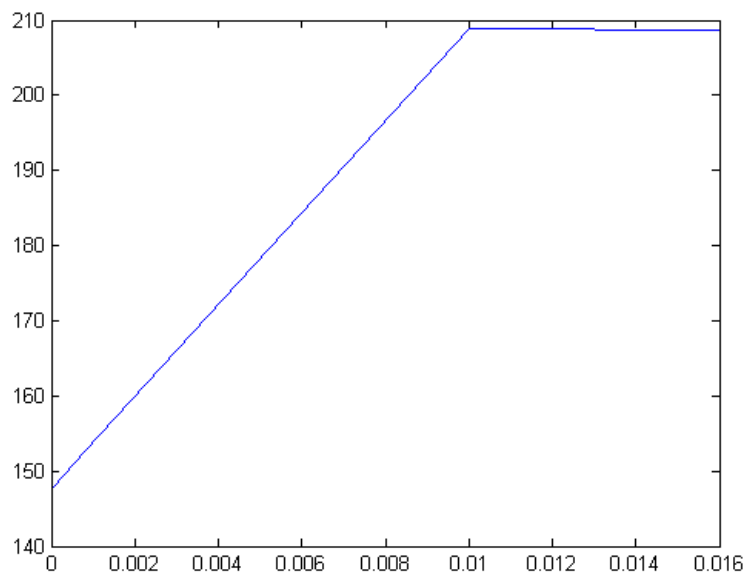
481.5692

```
>> 481.5692-273
```

ans =

208.5692

Nú skulum við skoða myndina. SJáum að hún er alveg eins nema bara með



Mynd 4: Hitastigsmynd af straujárninu hennar Mömmu.

öðruvísi hitastig.

2.3

Útskýrið hvað gerist ef tekin er finni skiptinn

Lausn:

Ef tekin er finni skipting þá koma gildi sem eru einfaldlega nær 200°C.

3 Dirichlet verkefnið á rétthyrningi

3.1

Útfæra Dirichletverkfni í `matlab`.

Lausn:

```
function [W,A,RHS]=Dirichletverkefni(a,b,c,d,p,q,f,gamma,P,Q,R,U,h)
%Author: Andri Freyr Thorgeirsson, Erna Gudrun Thorsteinsdottir og
%      Rikhardur Thor Rognvaldsson

% Breytur

% Setja upp reikninetid
M=(b-a)/h+1;          % Fjoldi hnitpunkta i x att
N=(d-c)/h+1;          % Fjoldi hnitpunkta i y att
% Skilgreinum staerd fylkis og haegri handar
A=zeros(M*N,M*N);    % Fylkid okkar er jafn stort og fjoldi punkta
RHS=zeros(M*N,1);    % Haegri hlid hefur somu staerd og fylkid en er vigur
ki = 1;               % Dummy breyta fyrir visun i Rs
kj = 1;               % Dummy breyta fyrir visun i Qs
%Setjum gildi i fylki og haegri hlid
%Byrjum a því að finna nalgunargildi á R og Q
x_vigur = linspace(a,b,M);
y_vigur = linspace(c,d,N);
r_hnit=NaN;
p_hnit=NaN;
if ~isempty(R)
    r_hnit = zeros(length(R(1,:)),length(R(:,1)));
    for i = 1:length(R(:,1))
        r_hnit(i,1) = min(find(x_vigur>=R(i,1)));
        r_hnit(i,2) = min(find(y_vigur>=R(i,2)));
    end
end
if ~isempty(P)
    p_hnit = zeros(length(P(1,:)),length(P(:,1)));
    for j = 1:length(P(:,1))
        p_hnit(j,1) = min(find(x_vigur>=P(j,1)));
        p_hnit(j,2) = min(find(y_vigur>=P(j,2)));
    end
end

for n=1:N
    for m=1:M

        % Vid kjosum að rada T_m,n þar sem fyrst er n=1 og m hækkar frá 1 til M,
```



```

% Thvi naest haekkum vid n i 2 og haekkum m fra 1 til M, haekkum tha n i 3 og
% haekkum m fra 1 til M og svo framvegis thar til m is jafnt M

s=m+M*(n-1);          % Numer linu fylkis sem samsvarar m,n
s_m_plus1=m+1+M*(n-1); % Numer linu fylkis sem samsvarar m+1,n
s_m_minus1=m-1+M*(n-1); % Numer linu fylkis sem samsvarar m-1,n
s_n_plus1=m+M*(n+1-1); % Numer linu fylkis sem samsvarar m,n+1
s_n_minus1=m+M*(n-1-1); % Numer linu fylkis sem samsvarar m,n-1
x = a+(m-1)*h;
y = c+(n-1)*h;
x_half = a+(m-1)*(h/2);
y_half = c+(n-1)*(h/2);
% Viðbót 2 - fast gildi í ákveðnum punkti

% Jaðarskilyrði - u = gamma
% Skilyrði: (n==1) -> Viljum skoda nedstu linuna kassans
% Skilyrði: (n==N) -> Viljum skoda efstu linuna kassans
% Skilyrði: (m==1) -> Viljum skoda vinstri hlid kassans
% Skilyrði: (m==M) -> Viljum skoda haegri hlid kassans
if (m==1) || (M==m) || (n==1) || (N==n)
    A(s,s) = 1;
    RHS(s) = gamma(x,y);
    fprintf('Jadarpunktur n=%.0f , m = %.0f\n',n,m)
end

% Innri hnulpunktar kassans - jafna 22.3
% Skilyrði: (n>1) -> Viljum ekki skoda nedstu linuna
% Skilyrði: (m>n) -> Viljum lenda haegra megin vid vinstri
%
% hlidarlinu thrihyrningsins
% Skilyrði: (m<M-n+1) -> Viljum lenda vinstra megin vid haegri
%
% hlidarlinu thrihyrningsins
% Skilyrði: (n<N) -> Viljum ekki lenda i topppunktinum.
if (n>1) && (m>1) && (m<M) && (n<N)
    A(s,s) = ((p(x_half+h,y)+p(x_half-h,y)+p(x,y_half-h)+p(x,y_half+h))/h^2)+
    A(s,s_m_plus1) = -p(x_half+h,y)/h^2; %p_j,r
    A(s,s_m_minus1) = -p(x_half-h,y)/h^2; %p_j,l
    A(s,s_n_plus1) = -p(x,y_half+h)/h^2; %p_j,t
    A(s,s_n_minus1) = -p(x,y_half-h)/h^2; %p_j,s
    RHS(s) = f(x,y);
    fprintf('Innripunktur n=%.0f , m = %.0f\n',n,m)
    if ~isnan(p_hnit)
        if m == p_hnit(kj,1) && p_hnit(kj,2) == n && kj<=length(P(:,1))
            RHS(s) = f(x,y)+sum(Q(kj)/h^2);
            kj=kj+1;
        end
    end
end

```

```

        fprintf('Sérstöðupunktur - Punktuppspretta x=%.2f , y = %.2f , n=
    end
    end
end
if ki<=length(R(:,1))
    if m == r_hnit(ki,1) && r_hnit(ki,2) == n
        A(s,:) = 0;
        A(s,s) = 1;
        RHS(s) = U(ki);
        ki = ki+1;
        fprintf('Sérstöðupunktur - FAST GILDI x=%.2f , y = %.2f , n=%.2f , m
        disp(A(s,:))
    end
end
end
end
%Finnum lausn
A_sparse=sparse(A);
W_list=A_sparse\RHS;    % Thetta er vigur með hitastigum rodudum eins og vid til-
% greindum ad ofan
T_grid=zeros(N,M);
for n=1:N
    for m=1:M
        s=m+M*(n-1);    % Numer linu fylkis sem samsvarar m,n
        T_grid(n,m) = W_list(s); % Setjum inn gildi sem samsvarar
        % gildi fyrir thrihyrninginn okkar.
    end
end
end
W=T_grid;

```

3.2

Útskýrið hvers vegna uppsprettuliðirnir eru meðhöndlaðir með því að setja $b_j = f(x_j, y_k) + h^{-2}$ ef (x_j, y_j) er sá punktur netsins sem næstur er P_s . **Lausn:** Við erum með net með uppsprettupunkti. En til þess að geta fundið hann þá þurfum við að vita fyrirframstaðsetingu á uppsprettupunktinum. Það gerum við með eftirfarandi. við vitum að $-\nabla(p\nabla u) + qu = f + Q\delta_{P_s}$ ef uppsprettupunkturinn δ_{P_s} er í aðeins einum fyrirfram þekktum punkti þá vitum við að $\int \int \delta_{P_s}(x, y) dA = 1$ svo ef við heildum yfir jaðarinn í kringum punktuppsprettuna þá fá um við út $\dots + q_i * h^2 = f_i * h^2 + Q_s$ Síðan stöðlum við þessa jöfnu með því að deila öllu með h^2 og þá fáum við út $b_i = f_i + \frac{Q_s}{h^2}$

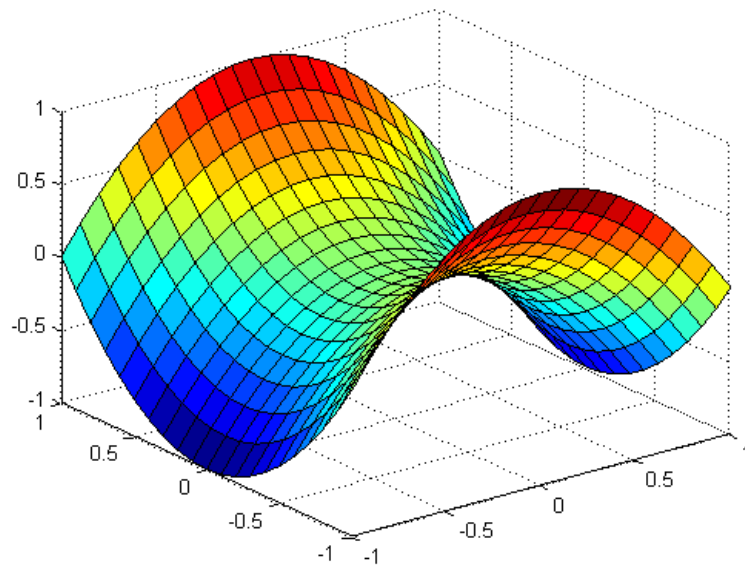
3.3

Þið þurfið að sannfæra ykkur um forritið reikni rétt. Tökum t.d. fallið $u(x, y) = x^2 - y^2$ veljið $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$, og $\gamma(x, y) = x^2 - y^2$ á öllum jaðrinum, þá eigið þið að fá nálgunarfall sem er nánast eins og rétta lausnin. **Lausn:** byrjum á því að skilgreina breytur okkar.

```
a=-1;
b=1;
c=-1;
d=1;
gamma=@(x,y) x.^2-y.^2;
p=@(x,y) 1;
q=@(x,y) 0;
f=@(x,y) 0;
h= 0.1;
```

Köllum svo á fallið:

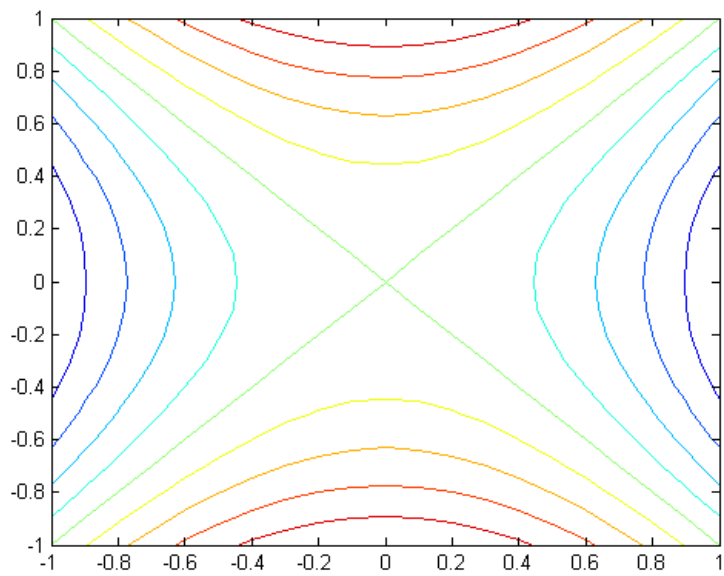
```
>> [W,A,RHS]=Dirichletverkefni(a,b,c,d,p,q,f,gamma,[1,1],[0],[1,0],[1],0.1)
>> surf(linspace(a,b,length(W(:,1))),linspace(c,d,length(W(1,:))),W');
```



Mynd 5: Söðulmynd

Þessi liður gefur okkur svo contour af fallinu.

```
>> contour(linspace(a,b,length(W(:,1))),linspace(c,d,length(W(1,:))),W');
```



Mynd 6: Contour-mynd af Söðulmynd

3.4

Notið forritið ykkar til að þess að taka svæðið á $D] -1,1[x[-1,1[$, og reikna út og teikna upp lausinina á

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ \alpha = 1, \beta = 0, \gamma(x, y) = \begin{cases} 5 \max\{\cos(\pi y), 0\}, x = \pm 1, \\ 5 \max\{\cos(\pi y), 0\}, y = \pm 1. \end{cases} \end{cases}$$

Setjið teikningu af grafi lausnarinnar í skýrsluna.

Lausn:

Byrjum á því að skilgreina breyturarnar.

```
a=-1;
b=1;
c=-1;
d=1;
gamma= @(x,y) x.^2-y.^2;
p=@(x,y) 1;
q=@(x,y) 0;
f=@(x,y) 0;
h= 0.1;
```

Svo köllum við á fallið:

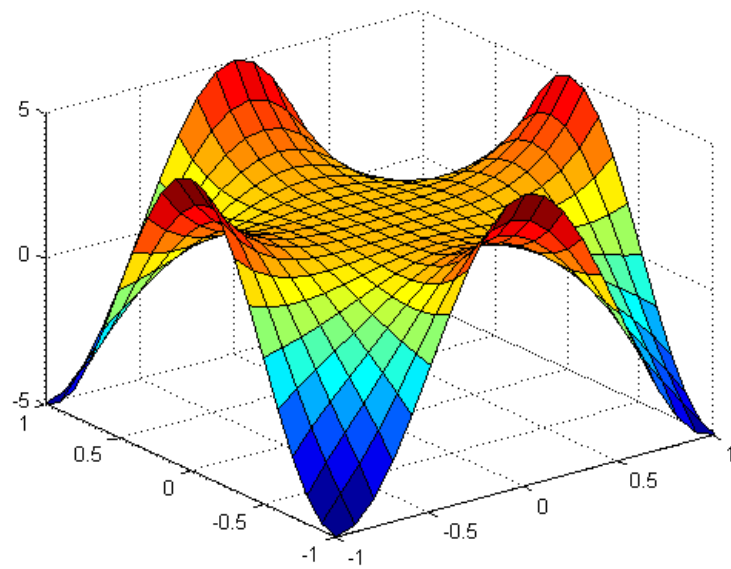
```
>> [W,A,RHS]=Dirichletverkefni(a,b,c,d,p,q,f,gamma,[],[],[],0.1)
>> surf(linspace(a,b,length(W(:,1))),linspace(c,d,length(W(1,:))),W');
```

Sjáum að myndin líkist kirkjunni í Kópavogi.

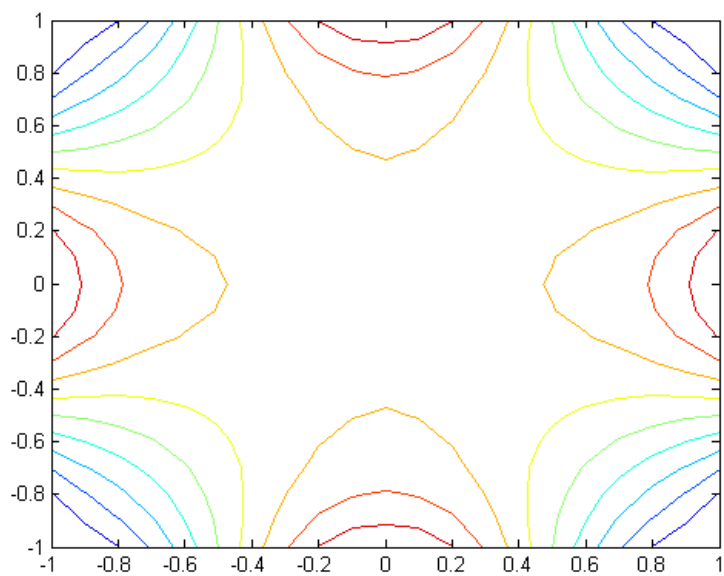
Köllum svo aftur á fallið til að fá contour-mynd.

```
>> contour(linspace(a,b,length(W(:,1))),linspace(c,d,length(W(1,:))),W');
```

Fáum þá út myndina.



Mynd 7: Guðshúsið í Kópavogi



Mynd 8: Countour-mynd af Guðshúsinu í Kópavogi

3.5

Líkið eftir Hróarskeldutjaldinu. Útskýrið hvaða formúlur þið notað og setjið myndi skýrsluna.

Lausn:

Byrjum á því að skilgreina eftirfarandi breytur:

```
a=-2;  
b=2;  
c=-0.5;  
d=2;  
gamma=@(x,y) hroarskelda_gamma(x,y);  
p = @(x,y) 1+0.*x+0.*y;  
q = @(x,y) 0+0.*x+0.*y;  
f = @(x,y) 0+0.*x+0.*y;  
h=0.1;
```

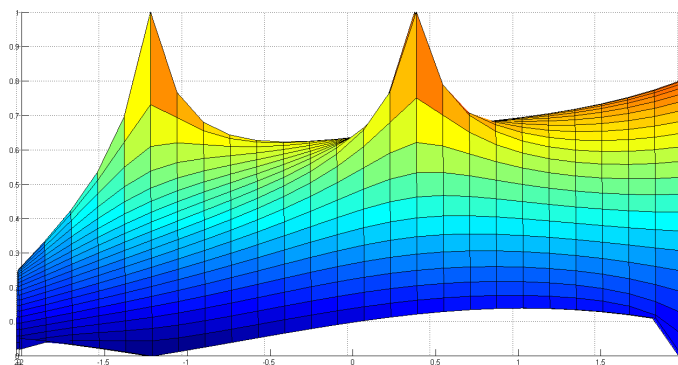
Aukaforritið `hroarskelda_gamma.m` er hægt að finna í viðauka hér að neðan.

Við köllum svona á forritið til að fá eftirfarandi mynd:

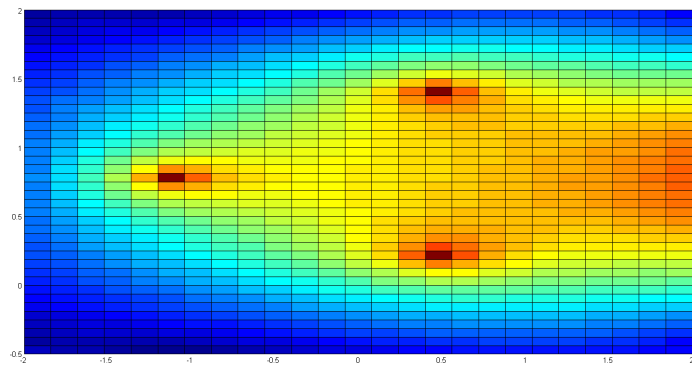
```
>>[W,A,RHS]=Dirichletverkefni(a,b,c,d,p,q,f,gamma,[],[0],[0,0;-0.9,1;0.9,1],[1,1,1],  
>> surf(linspace(a,b,length(W(:,1))),linspace(c,d,length(W(1,:))),W');
```

Sjáum hér að ofan hvað `a,b,c,d,p,q,f,gamma` er skilgreint sem.

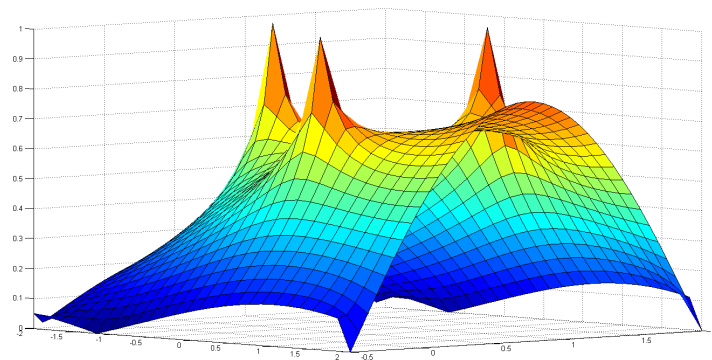
Við völdum að þar sem punktuppsprettarnar myndu byrja væru hnitin `[0,0]`, `[-0.9,1]`, `[0.9,1]` síðan hvað "magnitude-ið" væri á þessum punktuppsprettum en allar höfðu þær styrkinn 1. Út kom þá eftirfarandi myndir.



Mynd 9: Hróarskeldutjaldið á hlið



Mynd 10: Hróarskeldutjaldið ofan frá



Mynd 11: Hróarskeldutjaldið í allri sinni dýrð.

3.6

Hannið nýtt tjald til þess að setja upp við Arnarhól á menningarnótt í Reykjavík. Útskýrið hönnunina og setjið mynd í skýrsluna.

Lausn:

4 Lágmarksfletir

4.1

$(x, y) = \sqrt{\cosh(x)^2 - y^2}$ uppfyllir hlutafleiðujöfnuna fyrir lágmarksflöt. Notið það á rétthyrningnum $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$ til þess að kanna hvort forritið reiknar.

Lausn: Byrjum á því að skilgreina allar breytur.


```

a=0;
b=1;
c=-1;
d=1;
gamma = @(x,y) sqrt(cosh(x).^2-y.^2);
p = @(x,y) -1+0.*x+0.*y;
q = @(x,y) 0+0.*x+0.*y;
f = @(x,y) 0+0.*x+0.*y;
[W_dummy,A,RSH] = Dirichletverkefni(a,b,c,d,p,q,f,gamma,[],[],[],[],0.02);
W0 = Dirichletverkefni(a,b,c,d,p,q,f,gamma,[],[],[],[],0.02);
k=1;
eps=0.01;
kmax = 5;
error = 2*eps;

```

Því næst keyrum við eftirfarandi forrit í matlab lagmarksflotur.m er hægt að finna í viðauka.

```

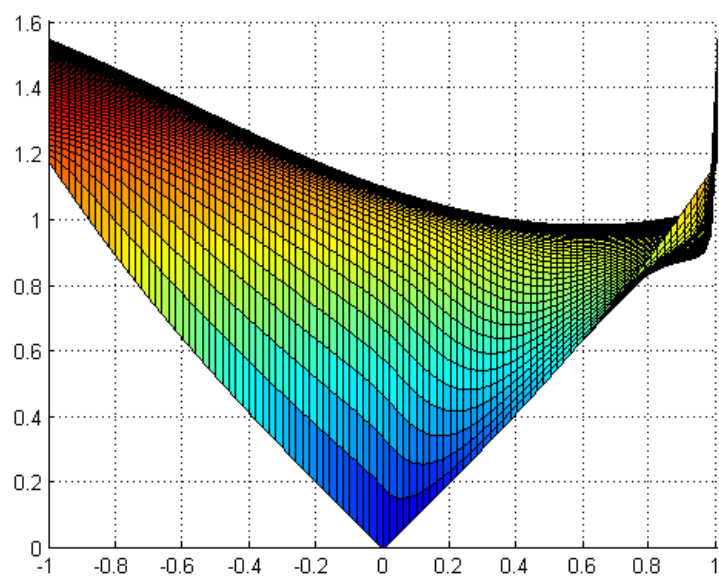
while(error > eps && k < kmax)
    W1=lagmarksflotur(a,b,c,d,p,q,f,gamma,[],[],[],[],0.02,W0');
    error = max(max(abs(W1-W0)));
    W0 = W1;
    k=k+1;
end

>> surf(linspace(a,b,length(W1(:,1))),linspace(c,d,length(W1(1,:))),W1');

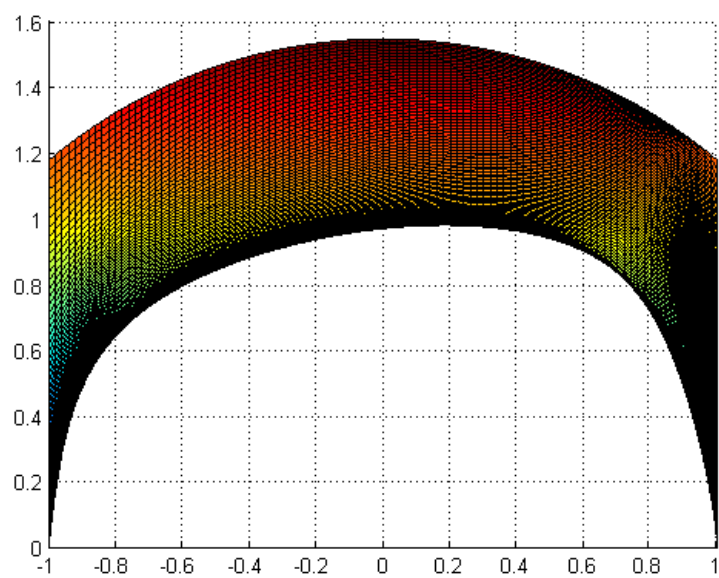
næst plottum við myndina.
Köllum á contour-mynd af fallinu.

>> contour(linspace(a,b,length(W1(:,1))),linspace(c,d,length(W1(1,:))),W1');

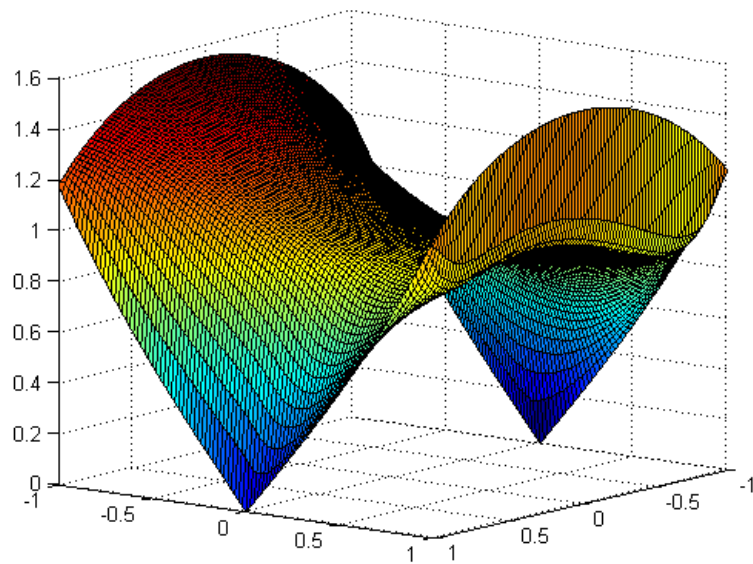
```



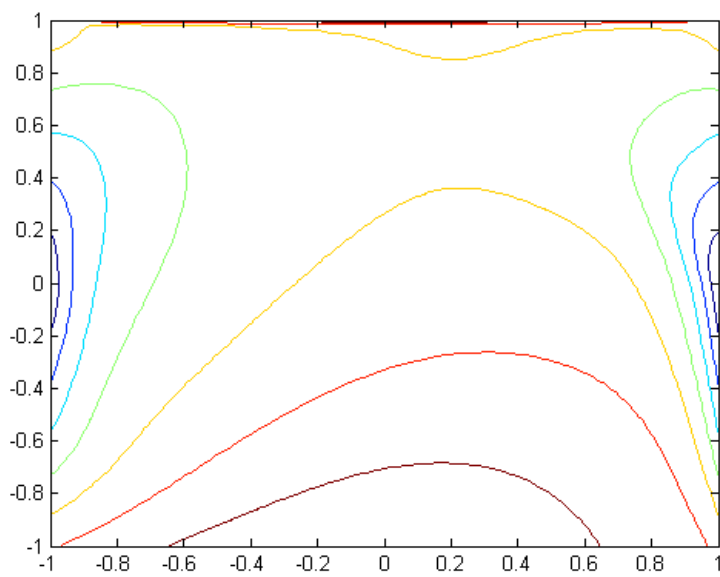
Mynd 12: Hliðarmynd af fletinum.



Mynd 13: Framan á flötinn.



Mynd 14: Flöturinn



Mynd 15: Contour-mynd af fletinum.

4.2

Gerð grein fyrir stærð netsins sem þið notið, hvaða þolmörk þið notið til þess að stöðva ítrekunina og hversu langan tíma keyrslan tók á tölvunni ykkar.

Stærð netsins hjá okkur er $W1=101 \times 101$. Polmörkin sjáum við í eftirfarandi kóða

```
while(error > eps && k < kmax)
    W1=lagmarksflotur(a,b,c,d,p,q,f,gamma,[],[],[],[],0.02,W0');
    error = max(max(abs(W1-W0)));
    W0 = W1;
    k=k+1;
end
```

Sjáum að við keyrum þetta 5x í gegn. Notum `tic toc` skipunina til að finna út nákvæma tímasetningu og hún er 6.787692 sekúndur.

4.3

Berið saman á mynd hver munurinn er á því sem fékkst út í upphafsskrefinu og lokaskrefinu. Þetta má einfaldlega gera með því að teikna upp mismuninn.

4.4

Keyrið forritið með dæmið ykkar um Hróarskeldutjaldið eða Arnarhólstjaldið. Hver er munurinn á lausninni á jöfnunni fyrir lágmarksflöt miðað við graf lausnarinnar á Laplace-jöfnu með sömu jaðarskilyrðum. Setjið fallega mynd á forsíðuna.

11. april 2015