



KU Leuven  
Faculteit Ingenieurswetenschappen

# Numerieke Modelleren en Benadering

## Practicum 1

STIJN KUYPERS  
DRIES DE BACKER

Academiejaar 2015-2016

# 1 Projectoren en de QR factorisatie

## Opgave 1

Zij  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  en  $x \in \mathbb{R}^n$ , dan  $Px = \frac{x+Fx}{2}$  met  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de matrix die de elementen  $x_1$  en  $x_2$ ,  $x_3$  en  $x_4$ , ... omwisselt bij de vermenigvuldiging  $Fx$ . Dan:

$$Px = \frac{1}{2}(I + F)x \Leftrightarrow P = \frac{1}{2}(I + F) \quad (1)$$

\*  $P$  is een projector indien  $P$  vierkant(gegeven) en  $P$  idempotent ( $P^2 = P$ ). We hebben:

$$P^2 = \frac{1}{4}(I^2 + 2F + F^2) \quad (2)$$

Aangezien  $F$  het eerste en tweede element, het derde en vierde element enz... van een vector omwisselt, doet een tweede vermenigvuldiging met  $F$  deze permutatie terug teniet. Dus:  $F^2 = I$ . Dan:

$$P^2 = \frac{1}{4}(I + 2F + I) = \frac{1}{4}(2I + 2F) = \frac{1}{2}(I + F) = P \quad (3)$$

\*  $P$  is een orthogonale projector  $\Leftrightarrow P = P^*$ . We hebben:

$$P^* = \frac{1}{2}(I + F)^* = \frac{1}{2}(I^* + F^*) \quad (4)$$

We kunnen nagaan dat:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

zodat:

$$F^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

en dus:

$$P^* = \frac{1}{2}(I^* + F^*) = \frac{1}{2}(I + F) = P \quad (7)$$

waaruit volgt dat  $P$  een orthogonale projector is.

## Opgave 2

Een Householder transformatiematrix heeft de volgende structuur:

$$Q_k = \begin{bmatrix} I & \\ & F \end{bmatrix} \quad (8)$$

met  $I$  de  $(k-1) \times (k-1)$  eenheidsmatrix en  $F$  een  $(m-k+1) \times (m-k+1)$  unitaire Householder reflector. Deze structuur impliceert een karakteristieke veelterm van de vorm:

$$\det(\lambda I - Q_k) = (\lambda - 1)^k \cdot \det(\lambda I - F) \quad (9)$$

Voor  $k \geq 1$  hebben we dus steeds eigenwaarde 1 in het spectrum van  $Q_k$  met algebraïsche multipliciteit  $k$ . Aangezien dit rechtstreeks voortkomt uit het diagonaal zijn van  $\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}^T$ , is  $k$  eveneens de geometrische multipliciteit. Een diagonale matrix is immers nooit defectief. We kunnen dan  $k$  lineair onafhankelijke eigenvectoren vinden voor  $\lambda = 1$ . Dit is gemakkelijk te verifiëren. Neem gewoon:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots \quad v_k = \dots \quad (10)$$

Dan  $Q_k v_j = v_j$  ( $\forall j \leq k$ ). Deze vectoren spannen de ruimte  $\mathbb{R}^k$  op waartoe alle vectoren van de eerste  $k$  rijen van een matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  behoren (aangevuld tot dimensie  $m$  met nullen. Vermits elke kolomvector van  $A$  tot en met rij  $k$  (en vervolgens aangevuld met nullen tot dimensie  $m$ ) een lineaire combinatie is van bovenstaande  $v_j$  zal een vermenigvuldiging met  $Q_k$  neerkomen op een vermenigvuldiging met  $\lambda = 1$ . Householder laat dus de eerste  $k$  rijen van de matrix  $A$  ongemoeid zoals men hoopt te verwachten van een Householder transformatiematrix.

De Householder reflector  $F$  zal dan zorgen voor de nodige nullen zonder voorheen aangebrachte nullen te vernietigen.

## Opgave 3

### a deel a

Voor de uitwerking van de drie gevraagde functies verwijzen we naar de bijgevoegde MATLAB bestanden.

### b deel b

Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetur a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetur. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

## 2 Iteratieve Methoden

### Opgave 4

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

### Opgave 5

Het kan aangetoond worden dat het QR-algoritme equivalent is met simultane iteratie. Het QR-algoritme maakt (veelal) gebruik van het rayleighquotient bij zijn shifts. Rayleighiteratie gebruikt het rayleighquotient afgewisseld met inverse iteratie.

Zowel het QR-algoritme als simultane iteratie berekenen meerdere eigenwaarden. Rayleighquotientiteratie berekent slechts de grootste eigenwaarde.

### Opgave 6

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

### Opgave 7

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc

dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

## Opgave 8

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

## Opgave 9

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

## Opgave 10

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.