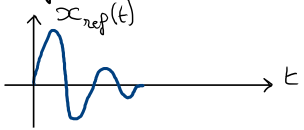
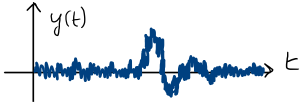
Corrélation et convolution

Repartons de l'exemple concret du radar. On a vu qu'une solution pour mesurer le délai entre un signal de référence x_{ref}  et son écho y  était de comparer x_{ref} avec toutes les versions $y(t-T)$ de l'écho y pour toutes les translations T possible et de définir le délai comme la valeur de T qui maximise la ressemblance (autrement dit, le produit scalaire) entre x_{ref} et $y(t-T)$

Donc mathématiquement, on s'attend à manipuler une fonction $T \mapsto \langle x_{ref}(t), y(t-T)\rangle$

$\Rightarrow$ Cette fonction s'appelle fonction d'intercorrélation entre x_{ref} et y

<u>Remarque</u> : la notation $\langle x_{ref}(t), y(t-T)\rangle$ est un abus de notation puisque le produit scalaire agit ici sur des signaux (x_{ref}) et non leur valeur à l'instant t ($x_{ref}(t)$). En toute logique, il faudrait définir $y_T : t \mapsto y(t-T)$ le signal y translaté de T, et appliquer le produit scalaire sur x_{ref} et y_T donc $T \mapsto \langle x_{ref}, y_T\rangle$ (c'est bien une fonction de T)

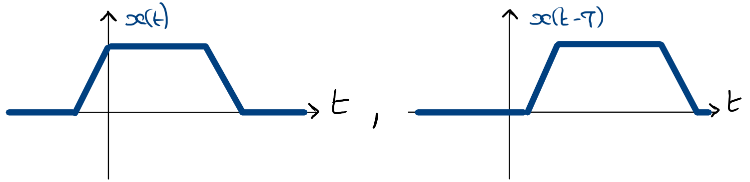
Mais cette notation étant moins explicite, on s'autorisera à écrire $\langle x_{ref}(t), y(t-T)\rangle$, en gardant bien à l'esprit la nature des objets sur lesquels s'applique le produit scalaire (des signaux / fonctions d'un espace vectoriel, et non des valeurs scalaires réelles ou complexes ...)

Mais avant d'étudier la fonction d'intercorrélation, simplifions un peu le problème en posant $y = x_{ref}$

Définition : Soit un signal $x \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. On appelle fonction d'autocorrélation du signal x la fonction

$$\boxed{\Gamma_{xx} : \tau \mapsto \langle x(t), x(t-\tau) \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, \overline{x(t-\tau)}\, dt}$$

$\Gamma_{xx}(\tau)$ = similarité (produit scalaire) entre x et x translaté de τ (retard si $\tau > 0$, avance si $\tau < 0$)

$= \langle$  $\rangle$

Quelques propriétés découlant de cette définition :

$\ast$ $x \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \Rightarrow |\Gamma_{xx}(\tau)| < +\infty \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$ (évident avec ce qui suit)

$\ast$ $\Gamma_{xx}(0) = \langle x(t), x(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \|x\|^2 = E_x$ ($< +\infty$ puisque $x \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$)

$\ast$ Γ_{xx} est à symétrie hermitienne : $\Gamma_{xx}(-\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\,\overline{x(t+\tau)}\,dt = \int_{\mathbb{R}} x(u-\tau)\,\overline{x(u)}\,du = \overline{\int_{\mathbb{R}} x(u)\,\overline{x(u-\tau)}\,du} = \overline{\Gamma_{xx}(\tau)}$

$\rightarrow$ Si x est à valeurs réelles ($x(t) \in \mathbb{R}\ \forall t$), alors $\Gamma_{xx}(-\tau) = \Gamma_{xx}(\tau)$: l'autocorrélation est paire

* L'autocorrélation est maximale en 0 : $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $|\Gamma_{xx}(\tau)| \leq \Gamma_{xx}(0)$ $(= E_x)$

→ la ressemblance d'un signal est maximale lorsqu'il est comparé à lui même plutôt qu'à une version décalée de lui même

<u>Preuve</u> : On utilise l'inégalité de Cauchy-Swartz ($\forall x, y$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| . \|y\|$) sur la définition de l'autocorrélation

→ $|\Gamma_{xx}(\tau)| = |\langle x(t), x(t-\tau)\rangle| \leq \|x(t)\| . \|x(t-\tau)\|$

on utilise ici le même abus de notation que pour $\langle x(t), x(t-\tau)\rangle$: ce qu'on manipule ici n'est pas la norme de la valeur $x(t)$ (resp. $x(t-\tau)$), mais bien la norme du signal x (resp. $x_\tau : t \mapsto x(t-\tau)$)

On sait que $E_x = \|x\|^2$ → $\|x\| = \sqrt{E_x}$

Idem, $\|x_\tau\| = \|x(t-\tau)\| = \sqrt{E_x}$

on ne change pas l'énergie du signal si on le décale

Donc $|\Gamma_{xx}(\tau)| \leq \sqrt{E_x}\sqrt{E_x} = E_x = \Gamma_{xx}(0)$

ça se redémontre facilement : $\|x(t-\tau)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |x(t-\tau)|^2 dt$

changement de variable
$u = t-\tau \Leftrightarrow t = u+\tau$
$dt = du$

$= \int_{\mathbb{R}} |x(u)|^2 du = E_x$

Et pour les signaux périodiques ? En particulier si x est T-périodique, alors $x(t-T) = x(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, donc $\Gamma_{xx}(T) = \langle x(t), x(t-T)\rangle = \langle x(t), x(t)\rangle = \Gamma_{xx}(0) = \Gamma_{xx}(nT)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, et donc l'autocorrélation devrait être aussi périodique... Non ?

Alors oui et non...

Non, car dans la définition précédente $\Gamma_{xx}(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{x(t-\tau)}dt$, x est un signal d'énergie finie ($x \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$). Et on a déjà vu que tout signal périodique non nul n'est pas d'énergie finie ($E_x = +\infty$), mais de puissance moyenne finie ($P_x < +\infty$)

Au final, la seule chose dont on a besoin pour définir l'autocorrélation, c'est d'un produit scalaire

Et ça tombe bien, puisqu'on en a déjà définit un dans $\mathcal{L}^{pm}(\mathbb{R})$: $\langle , \rangle : \mathcal{L}^{pm}(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}^{pm}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\overline{y(t)}dt$$

$\Rightarrow$ Il suffit juste de remplacer l'autre formule du produit scalaire par celle ci lorsque l'on travaille avec des signaux de puissance moyenne finie:

Soit $x \in \mathcal{L}^{pm}(\mathbb{R})$, l'autocorrélation de x est $\boxed{\Gamma_{xx} : \tau \mapsto \langle x(t), x(t-\tau) \rangle = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\overline{x(t-\tau)}dt}$

Les propriétés précédentes restent évidemment vraie (si on remplace E_x par P_x)

$\to$ $\Gamma_{xx}(0) = \langle x(t), x(t) \rangle = P_x$

$\to$ Γ_{xx} reste à symétrie hermitienne (si $x(t) \in \mathbb{C}$) / paire (si $x(t) \in \mathbb{R}$)

$\to$ $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $|\Gamma_{xx}(\tau)| \leq \Gamma_{xx}(0)$

Si de plus, x est T-périodique, alors :

→ Γ_{xx} est également T-périodique (logique, si on décale x d'une période T, on le resuperpose à lui même)

→ la définition se simplifie en $\Gamma_{xx} : \tau \mapsto \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\overline{x(t-\tau)}\,dt$ $\left(= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)\overline{x(t-\tau)}\,dt\right)$, en suivant le même raisonnement que celui qui nous avait amené à conclure que la puissance moyenne d'un signal T-périodique s'obtient en ne la calculant que sur une période (et non pour $T \to +\infty$ comme dans la définition du produit scalaire dans $\mathcal{L}^{pm}(\mathbb{R})$)

<u>Au final</u> : on peut se contenter de retenir que $\Gamma_{xx}(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau)\rangle$, et on prendra garde à bien identifier l'espace ($\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}^{pm}(\mathbb{R})$) auquel appartient le signal x avec lequel on travaille :

- $x \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ $\qquad \Gamma_{xx}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{x(t-\tau)}\,dt$ et $\Gamma_{xx}(0) = E_x$
- $x \in \mathcal{L}^{pm}(\mathbb{R})$ $\qquad \Gamma_{xx}(\tau) = \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\overline{x(t-\tau)}\,dt$ et $\Gamma_{xx}(0) = P_x$
- $x \in \mathcal{L}^{pm}(\mathbb{R})$ et x T-périodique $\qquad \Gamma_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\overline{x(t-\tau)}\,dt$ et $\Gamma_{xx}(0) = \Gamma_{xx}(nT) = P_x$, $n \in \mathbb{Z}$ → Γ_{xx} T-périodique

On peut donc maintenant s'attaquer au cas où $y \neq x$

<u>Définition</u>: Soient $x, y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. On appelle fonction d'intercorrélation des signaux x et y la fonction

$$\boxed{\Gamma_{xy} : \tau \longmapsto \langle x(t), y(t-\tau) \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, \overline{y(t-\tau)}\, dt}$$

Sans aucune surprise, $\Gamma_{xy}(\tau) = \lim\limits_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, \overline{y(t-\tau)}\, dt$ si $x, y \in \mathcal{L}^{pm}(\mathbb{R})$ et $\Gamma_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, \overline{y(t-\tau)}\, dt$ si x et y sont tous les deux T-périodiques (⚠ de même période)

Dans tous les cas, $\Gamma_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle$ donc Γ_{xy} mesure la ressemblance entre x et y decalé de τ

Pas de propriétés particulières pour Γ_{xy} (en fait si, mais on les verra plus tard, après avoir vu la convolution et la transformée de Fourier)

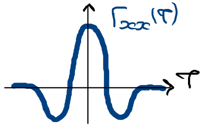
Ceci dit, on peut maintenant traiter l'exemple du signal radar du début jusqu'à la fin.

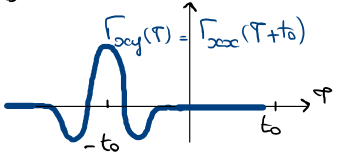
1) Dans le cas sans bruit : $x_{écho} = x_{ref}(t - t_0)$ avec $t_0 > 0$ un delai inconnu que l'on cherche à estimer
(pour simplifier les notations, on appelle $x \equiv x_{ref}$ et $y \equiv x_{écho}$)
Que vaut Γ_{xy} ?

$\rightarrow \Gamma_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle = \langle x(t), x((t-t_0)-\tau) \rangle = \langle x(t), x(t-(t_0+\tau)) \rangle = \Gamma_{xx}(t_0+\tau)$

$\rightarrow \Gamma_{xy}$ est donc une version decalée vers la gauche de t_0 de Γ_{xx}

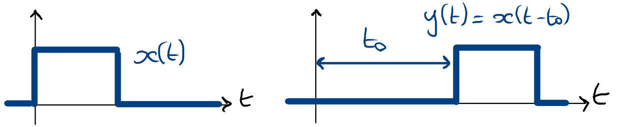
$\rightarrow \Gamma_{xx}$ étant maximale en 0, Γ_{xy} est donc maximale en $-t_0$





Pour déterminer le délai t_0 inconnu entre x et y (avec $y(t) = x(t-t_0)$), il s'agit donc de

1) calculer l'intercorrélation Γ_{xy} entre x et y
2) rechercher l'instant τ_{max} où Γ_{xy} est maximale : $\tau_{max} = \underset{\tau}{\operatorname{argmax}}\, \Gamma_{xy}(\tau)$
3) $\boxed{t_0 = -\tau_{max}}$ $t_0 > 0$ puisque retard, donc $\tau_{max} < 0$



→ et c'est logique, il faut décaler y d'un facteur t_0 vers la gauche pour que la ressemblance avec x soit maximale → $\tau_{max} = -t_0 < 0$

2) Dans le cas avec bruit : $x_{écho}(t) = x_{ref}(t-t_0) + \eta(t)$ avec $\eta(t)$ un bruit <u>indépendant</u> du signal
(idem, appelons $y \equiv x_{écho}$ et $x \equiv x_{ref}$) (en général considéré "blanc gaussien", ie $\eta(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$)

Pour traiter rigoureusement ce cas, il faudrait étendre la notion de produit scalaire pour des signaux aléatoires (appelés processus stochastiques) mais cela nous mènerait un peu trop loin

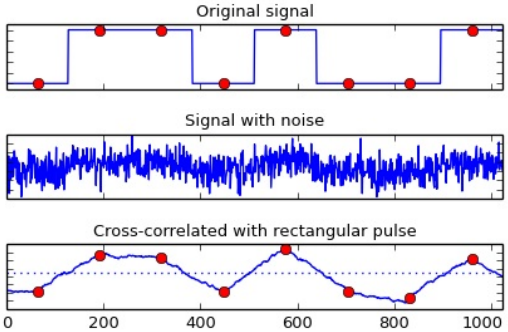
On peut quand même tenter le calcul de Γ_{xy} "pour voir"

$\rightarrow \Gamma_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau)\rangle = \langle x(t), x(t-t_0-\tau) + \eta(t-\tau)\rangle = \langle x(t), x(t-(t_0+\tau))\rangle + \langle x(t), \eta(t-\tau)\rangle = \Gamma_{xx}(t_0+\tau) + \Gamma_{x\eta}(\tau)$

Or, le bruit η étant indépendant du signal x, on peut montrer que $\Gamma_{x\eta}(\tau) = 0 \ \forall \tau \in \mathbb{R}$

$\rightarrow \Gamma_{xy}(\tau) = \Gamma_{xx}(t_0+\tau)$, ce qui ramène au cas précédent

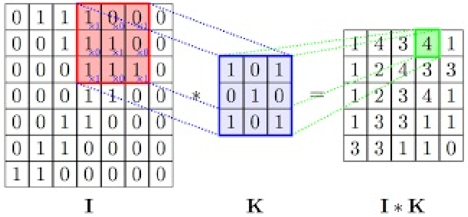
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Le bruit n'a donc en théorie aucun impact sur l'estimation de } t_0 \text{ par intercorrélation !}}$



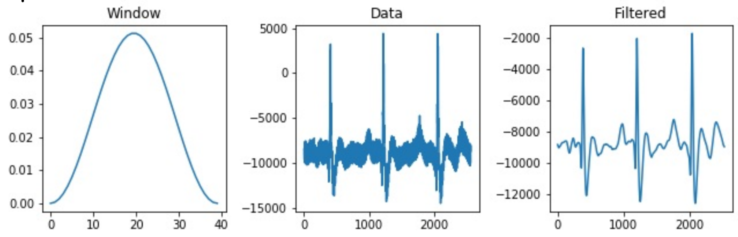
D'une manière générale, la fonction d'intercorrélation s'avère très utile en traitement du signal pour des opérations de reconnaissance de formes. Dans ce cas, l'un des deux signaux joue le rôle de template et tous les maximas de la fonction d'intercorrélation signalent une occurrence du template au sein du signal analysé.

Produit de convolution

Tout le monde a forcément entendu parler aujourd'hui du produit de convolution (aussi appelé la convolution), puisque c'est l'opération au coeur des réseaux de neurones convolutionnels.



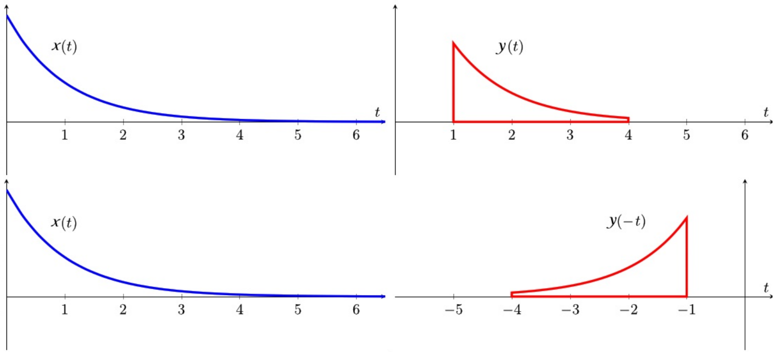
Mais cette opération bizarre entre deux tableaux de valeurs n'est que la représentation 2D discrète d'une opération mathématique à la base définie pour des fonctions.
Plus particulièrement (et c'est d'ailleurs le rôle qu'il joue dans les CNNs), le produit de convolution est la représentation mathématique de la notion de filtre linéaire => c'est l'opération qui permet de modéliser le filtrage.



Notamment grâce au théorème de Plancherel que l'on verra plus tard quand on parlera de la transformée de Fourier, le produit de convolution est un incontournable de la théorie du signal

Soient x et y deux signaux. Le produit de convolution $(x*y)$ de x et de y est définit par

$$\boxed{\begin{aligned} x*y : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ T &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} x(t)\, y(T-t)\,dt \end{aligned}}$$

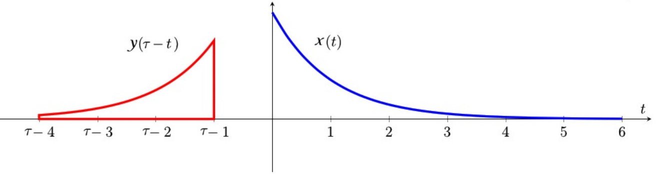


Autrement dit

→ on prend deux signaux x et y

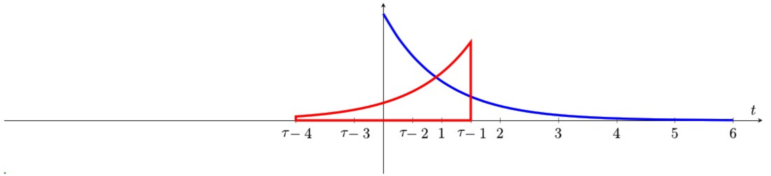
→ on transforme y en $y^- : t \mapsto y(-t)$ (symétrie par rapport à Oy)

→ on décale y^- vers la gauche d'un facteur T : $y(-t) \to y(-t+T) = y(T-t)$

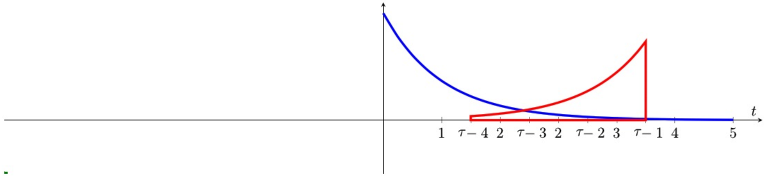


→ pour cette valeur T fixée, on calcule l'aire du produit entre x et y retourné et décalé : $\int_{\mathbb{R}} x(t)\, y(T-t)\,dt$

$\Rightarrow$ c'est la valeur du produit de convolution pour la variable T fixée : $\int_{\mathbb{R}} x(t)\, y(T-t)\,dt = (x*y)(T)$



→ Lorsque T varie, $y(T-t)$ "glisse" le long de l'axe Ox, et la valeur $\int_{\mathbb{R}} x(t)\, y(T-t)\,dt$ est calculée pour chaque valeur de $T \in \mathbb{R}$



y joue le rôle de "fenêtre glissante" à travers laquelle on observe x $\Rightarrow$ le produit de convolution peut se voir comme la généralisation de la moyenne glissante pour des fonctions.

Quelques propriétés en vrac du produit de convolution: $(x*y)(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, y(\tau - t)\, dt$

* **Existence** : Si $x, y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $(x*y)$ existe et $(x*y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (conséquence du théorème de Fubini)

* **Commutativité** : le produit de convolution est commutatif : $\boxed{x*y = y*x}$ $\left(\int_{\mathbb{R}} x(t)\, y(\tau-t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} x(\tau-t)\, y(t)\, dt \ \forall \tau \in \mathbb{R}\right)$

* **Bilinéarité** : $x*(y+\lambda z) = x*y + \lambda(x*z)$

* **Associativité** : $x*(y*z) = (x*y)*z$

$\Big\}$ propriétés de l'intégrale

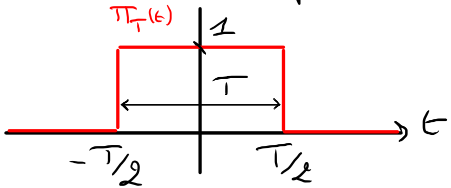
* **Élément neutre** : il existe une certaine fonction n telle que $\forall x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $x*n = n*x = x$ (on verra laquelle plus tard)

* **Symétries** : si x et y sont des signaux pairs ou impairs
  - → $x*y$ est pair si x et y sont de même parité (pair/pair ou impair/impair)
  - → $x*y$ est impair si x et y sont de parité contraire

* **Dérivation** : Si x et y sont dérivables et $x, x', y, y' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $x*y$ est dérivable et
$$\boxed{(x*y)' = (x'*y) = (x*y')}$$

Exemple de calcul du produit de convolution d'une porte de largeur T Π_T avec elle même

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \forall t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



On peut se lancer brutalement dans le calcul $(\Pi_T * \Pi_T)(\tau) = \int \Pi_T(t)\Pi_T(\tau - t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} \Pi_T(\tau - t)dt$

puisque $\Pi_T(t) = 0 \ \forall |t| > \frac{T}{2}$

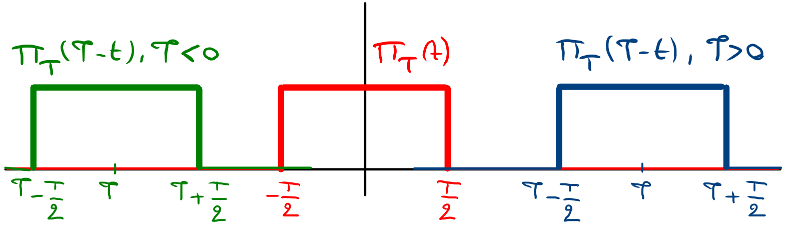
Et il faudrait étudier, en fonction de la valeur de τ, quelle proportion de $\Pi_T(\tau - t)$ tombe dans $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ $\Rightarrow$ rien d'insurmontable, mais c'est quand même un peu pénible...

Autre solution : on réfléchit un peu et on fait un dessin.

Puisque une porte est fixe ($\Pi_T(t)$) et l'autre glisse sur l'axe des abscisses ($\Pi_T(\tau - t)$), il y a deux cas de figure :

1) Soit $\Pi_T(t)$ et $\Pi_T(\tau - t)$ ne se chevauchent pas, auquel cas $(\Pi_T * \Pi_T)(\tau) = 0$
2) Soit $\Pi_T(t)$ et $\Pi_T(\tau - t)$ se chevauchent (no shit...)

Cas n°1 : pas de chevauchement



Si $\tau > 0$, pas de chevauchement entre $\Pi_T(t)$ et $\Pi_T(\tau - t)$ si

$$\tau - \frac{T}{2} > \frac{T}{2} \Rightarrow \tau > T$$

Si $\tau < 0$, pas de chevauchement entre $\Pi_T(t)$ et $\Pi_T(\tau - t)$ si

$$\tau + \frac{T}{2} < -\frac{T}{2} \Rightarrow \tau < -T$$

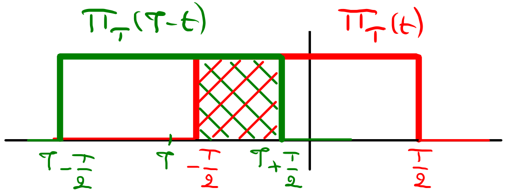
$\Rightarrow$ pas de chevauchement si $\boxed{|\tau| > T}$

Cas n°2 : chevauchement

→ maximal si $\tau = 0$ (les deux portes sont totalement superposées l'une sur l'autre)

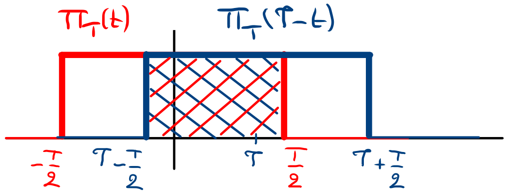
$$\Rightarrow (\Pi_T * \Pi_T)(\tau = 0) = \int_{-T/2}^{T/2} \Pi_T(t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} 1\,dt = T$$

→ partiel sinon



$\tau < 0$ $(\Pi_T * \Pi_T)(\tau)$ = aire du chevauchement

$$\rightsquigarrow (\Pi_T * \Pi_T)(\tau) = \int_{-T/2}^{\tau + T/2} 1\,dt = \tau + \frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right) = \underline{\tau + T}$$



$\tau > 0$ $(\Pi_T * \Pi_T)(\tau)$ = aire du chevauchement

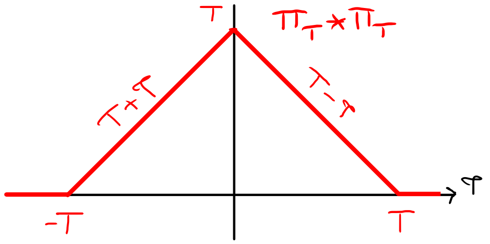
$$\rightsquigarrow (\Pi_T * \Pi_T)(\tau) = \int_{\tau - T/2}^{T/2} 1\,dt = \frac{T}{2} - \left(\tau - \frac{T}{2}\right) = \underline{T - \tau}$$

<u>Au final</u> : $(\Pi_T * \Pi_T)(\tau) = 0 \quad \forall |\tau| > T$

$(\Pi_T * \Pi_T)(0) = T$

$(\Pi_T * \Pi_T)(\tau) = \tau + T$ si $-T < \tau < 0$

$(\Pi_T * \Pi_T)(\tau) = T - \tau$ si $0 < \tau < T$



Le support de la convolution est toujours plus large que celui des deux fonctions convoluées

Lien entre convolution et intercorrélation

À la vue des deux formules $\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t-\tau)}dt$ et $(x*y)(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y(\tau-t)dt$, ça se ressemble pas mal, on doit pouvoir trouver un lien entre ces opérations

Soient x et y des signaux d'énergie finie : $x, y \in \underbrace{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}_{\text{pour l'existence de l'intercorrélation}} \cap \underbrace{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})}_{\text{pour l'existence de la convolution}}$

On va partir de $x*y$ pour essayer de retrouver Γ_{xy}

$$(x*y)(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y(\tau-t)dt$$

En notant $y^- : t \mapsto y(-t)$ le symétrique de y par rapport à l'axe des ordonnées

$$\rightarrow (x*y^-)(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^-(\tau-t)dt = \int_{\mathbb{R}} x(t)y(t-\tau)dt$$

Ne reste donc plus qu'à introduire le conjugué

$$\rightarrow (x*\overline{y^-})(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t-\tau)}dt = \Gamma_{xy}(\tau) \implies \boxed{\Gamma_{xy} = (x*\overline{y^-})}$$

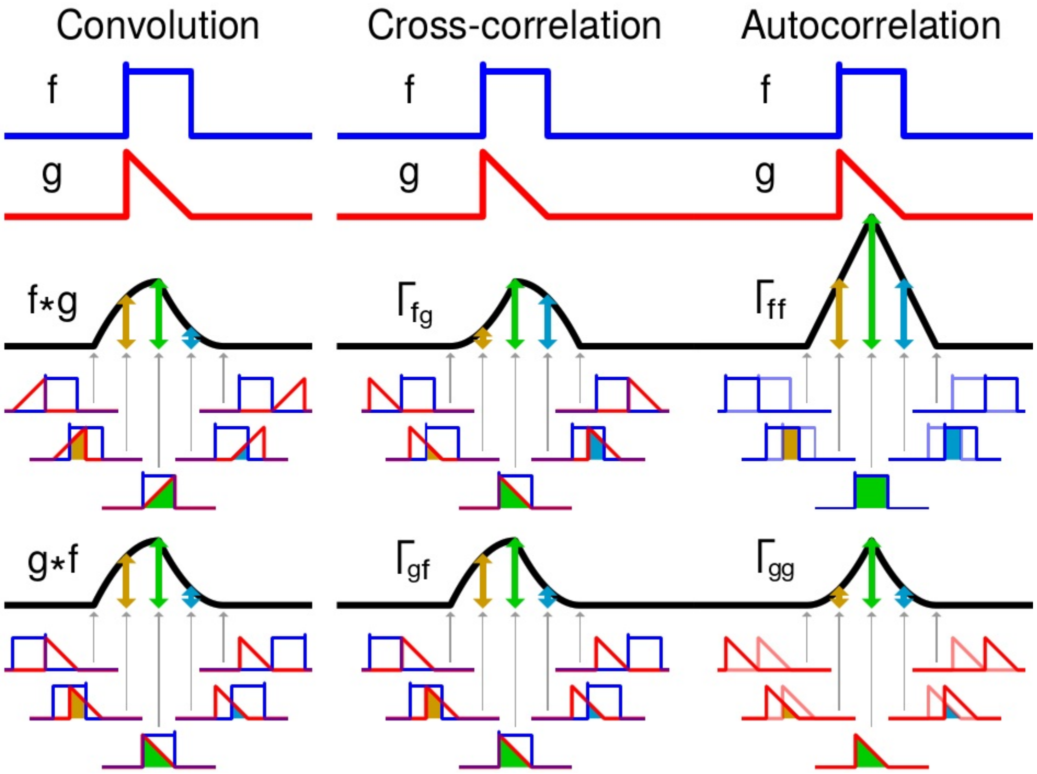
Si y est à valeurs réelles $y(t) \in \mathbb{R}$, $\overline{y(t)} = y(t) \implies \boxed{\Gamma_{xy} = (x*y^-)}$ $\rightarrow$ intercorrélation de x et y $\iff$ convolution de x et y retourné

En résumé

* **Autocorrélation** : $\Gamma_{xx}(\tau) = \langle x(t), x(t-\tau) \rangle$
$= \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{x(t-\tau)}dt$
  - → $x \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$
  - → $\Gamma_{xx}(0) = E_x$
  - → Γ_{xx} paire
  - → Γ_{xx} mesure la ressemblance de x avec lui même
  - → si x T-périodique, Γ_{xx} T-périodique aussi

⚠ pas la même formule de produit scalaire

* **Intercorrélation** : $\Gamma_{xy}(\tau) = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle$
$= \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{y(t-\tau)}dt$
  - → $x, y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$
  - → ressemblance entre x et y
  - → pas commutatif : $\Gamma_{xy} \neq \Gamma_{yx}$
  - → utile en pratique pour de la reconnaissance de motif dans un signal



* **Convolution** : $(x * y)(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y(\tau - t)dt$
  - → $x, y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
  - → commutatif : $(x * y) = (y * x)$
  - → utile en pratique pour toutes les opérations de filtrage
  - → moyenne pondérée glissante d'une fonction vue au travers d'une autre
  - → liée à l'intercorrélation : $\Gamma_{xy} = (x * \overline{y^-})$