

Riassunto Algebra e Geometria

Maicol Battistini

4 aprile 2025

Indice

1	Unità 1 - Lezioni 1, 2	3
1.1	Insiemi	3
1.2	Funzioni e applicazioni	3
1.3	Numeri complessi	6
1.4	Campo e spazio vettoriale	6
1.5	Combinazione e Indipendenza lineare	7
1.6	Base e dimensione	9
1.6.1	Completamento e estrazione di una base	10
2	Unità 2 - Lezioni 3, 4	11
2.1	Approfondimenti sulle basi	11
3	Unità 3 - Lezioni 5, 6, 7	14
3.1	Approfondimento sulle funzioni	14
3.2	Isomorfismi	17
4	Unità 4 - Lezioni 8, 9	22
4.1	Matrici	22
4.1.1	Operazioni tra matrici	22
4.1.2	Prodotto riga per colonna tra matrici	23
4.1.3	Proprietà associativa	23
4.1.4	Matrice identità	24
4.1.5	Matrice inversa	24
4.1.6	Matrici associate ad un'applicazione lineare	24
4.1.7	Matrici invertibili	27
4.1.8	Rango di una matrice	28
4.1.9	Cambiamenti di base	28
4.1.10	Similitudine tra matrici quadrate	29
4.1.11	Conseguenze del teorema del rango	29
5	Unità 5 - Lezioni 10, 11, 12	30
5.1	Metodo di Gauss	30
5.2	Algoritmo di Gauss-Jordan	31
5.3	Determinante di una matrice	32
5.3.1	Determinante e matrice inversa	35
5.3.2	Esercizio parametrico	36
5.4	Matrici e sistemi lineari	37
5.5	Applicazioni alla geometria analitica	39
5.5.1	Retta passante per due punti	39
5.5.2	Piano passante per tre punti	40
6	Unità 6 - Lezioni 13, 14, 15	41
7	Unità 7 - Lezioni 16, 17	51
7.1	Forme bilineari e prodotti scalari	51

8	Unità 8 - Lezioni 18, 19, 20	56
8.1	Isometrie	58

1 Unità 1 - Lezioni 1, 2

1.1 Insiemi

Definizione 1.1: Relazione di un insieme

Una relazione su un insieme A è un sottoinsieme R di $A \times A$.
Scrivo $a_1 R a_2$ se $(a_1, a_2) \in R$ e dico “ a_1 è in relazione con a_2 ”

Definizione 1.2: Relazione di equivalenza

Una relazione R è una relazione di equivalenza se valgono le seguenti proprietà:

Riflessiva: $a R a \forall a \in A$

Simmetrica: $a R b \Rightarrow b R a$

Transitiva: $a R a, b R c \Rightarrow a R c$

Definizione 1.3: Congruenza

$$\mathbb{Z} = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$$

Sia $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$

$$a \equiv b (n)$$

“ a è congruo a b modulo n ”

se $a - b$ è multiplo di n (cioè $\exists h \mid a - b = hn$)

Esempi:

$$8 \equiv 23(5)$$

$$8 \not\equiv 17(5)$$

$$4 \equiv 10, 16, -2, -8(6)$$

$$4 \not\equiv 13(6)$$

Osservazione. Essere congrui modulo n è una relazione di equivalenza

Dimostrazione. Dimostro le tre proprietà della relazione di equivalenza:

Riflessiva:

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a \equiv a(n) \text{ perchè } a - a = 0 = 0 \cdot n$$

Simmetrica:

se $a \equiv b(n)$, allora $b \equiv a(n)$ perchè se $a - b = hn \Rightarrow b - a = -hn$

Transitiva:

se $a \equiv b(n)$ e $b \equiv c(n)$, allora $a \equiv c(n)$ perchè se $a - b = hn$ e $b - c = kn$, allora $a - c = (a - b) + (b - c) = (h + k)n$

1.2 Funzioni e applicazioni

$$f : X \rightarrow Y$$

$$f(a) = b$$

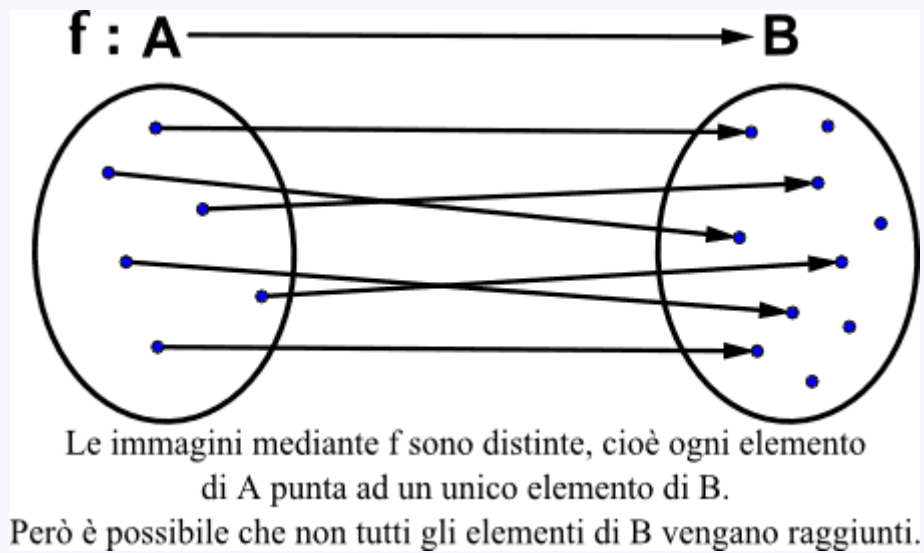
f è una applicazione se ad ogni $a \in X$ corrisponde uno e un solo $b \in Y$

Definizione 1.4: Funzione iniettiva

Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è iniettiva se:

$$\forall x_1, x_2 \in X \mid x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ovvero: “due elementi distinti di X vengono mandati in elementi distinti di Y ”

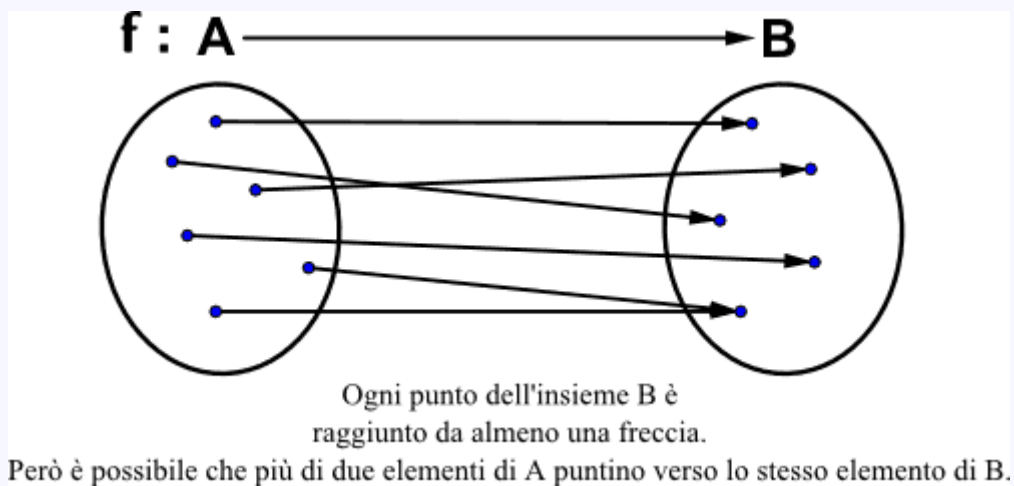


Definizione 1.5: Funzione suriettiva

Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è suriettiva se:

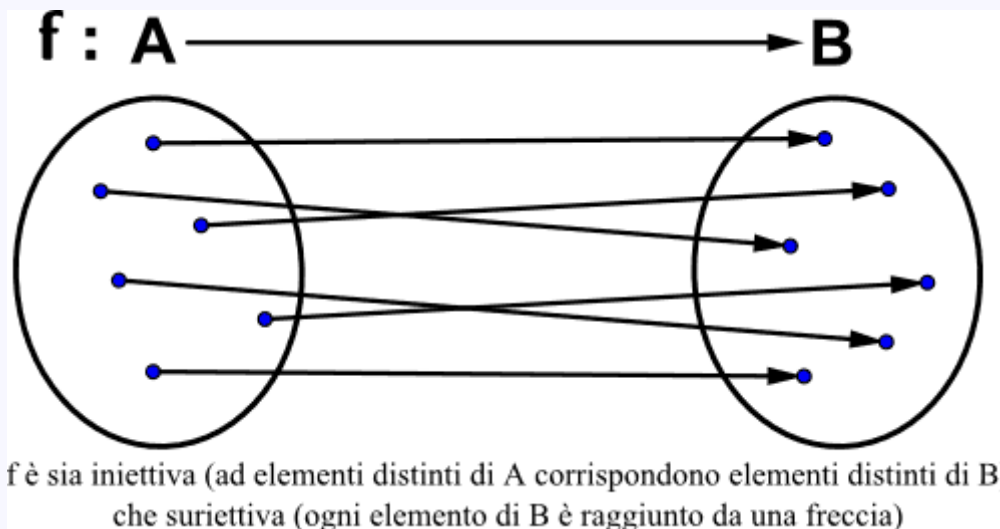
$$Y = \text{Im } f = \{y \in Y \mid \exists x \in X \mid f(x) = y\}$$

Ovvero: “ogni elemento di Y è immagine di almeno un elemento di X ”

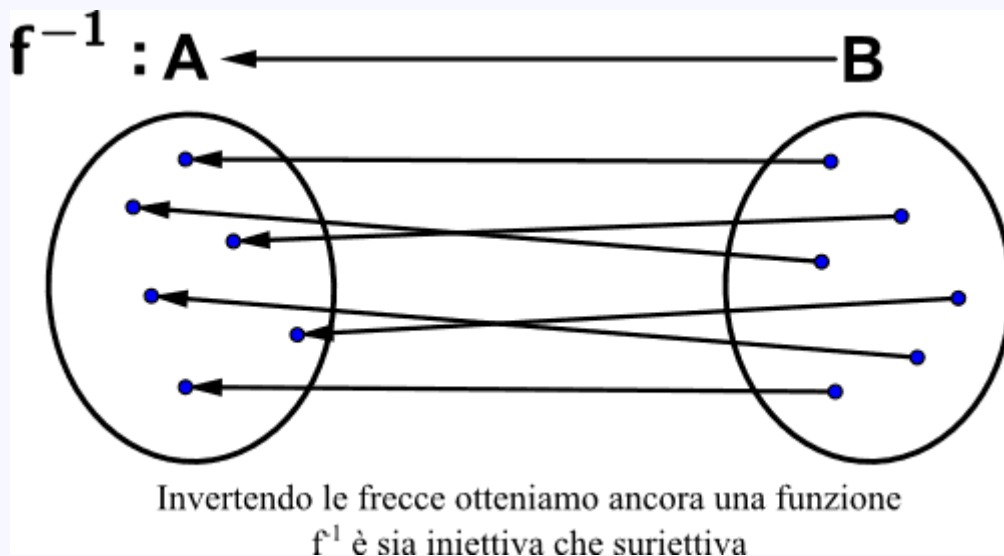


Definizione 1.6: Funzione biunivoca

Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è biunivoca se è iniettiva e suriettiva, cioè se per ogni $y \in Y$ esiste un solo $x \in X$ tale che $f(x) = y$



Esempio. Una funzione biunivoca è invertibile, cioè $\exists f^{-1} : Y \rightarrow X$ tale che $f^{-1} \circ f = Id_X$ e $f \circ f^{-1} = Id_Y$



Esempio.

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^2$$

Iniettiva? No, perchè $f(-1) = f(1) = 1$

Suriettiva? No, perchè $Im f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} \neq \mathbb{R}$

Biunivoca? No, perchè non è iniettiva e non è suriettiva

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$$

Nota: $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$

Iniettiva? No, perchè $f(-1) = f(1) = 1$

Suriettiva? Sì, perchè $Im f = \mathbb{R}^+$

Biunivoca? No, perchè non è iniettiva

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

Iniettiva? Sì, perchè $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Suriettiva? No, perchè $Im f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} \neq \mathbb{R}$

Biunivoca? No, perchè non è suriettiva

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$$

Iniettiva? Sì, perchè $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Suriettiva? Sì, perchè $Im f = \mathbb{R}^+$

Biunivoca? Sì, perchè è iniettiva e suriettiva

Inversa: $\exists f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f^{-1}(y)$ è l'unico $x \in \mathbb{R}^+$ tale che $f(x) = y$ (cioè $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$)

1.3 Numeri complessi

Definizione 1.7: Numero complesso

Un numero complesso è un numero della forma:

$$z = a + ib$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e i è l'unità immaginaria, cioè $i^2 = -1$.

Un numero complesso rientra nell'insieme dei numeri complessi, indicato con \mathbb{C} .

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

In questo modo $x^2 + 1 = 0$ è risolto da $x = \pm i$. Ogni elemento non nullo di \mathbb{C} ha l'inverso:

$$z = a + ib \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

perchè:

$$z \cdot z^{-1} = (a + ib) \cdot \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

Teorema 1.1: Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni equazione polinomiale a coefficienti in \mathbb{C} ha soluzioni in \mathbb{C} .

1.4 Campo e spazio vettoriale

Definizione 1.8: Campo

Un campo è un insieme K con due operazioni **somma** e **prodotto**, commutative e associative, con proprietà distributiva, elementi neutri 0 e 1, opposto di ogni elemento e inverso di ogni elemento non nullo.

- Ogni elemento di X ha un opposto $-x$.
- Ogni elemento di $X \neq 0$ ha un inverso x^{-1} .

Esempio. \mathbb{N}, \mathbb{Z} non sono campi, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sono campi.

Esempio. \mathbb{Z}_5 è un campo? Cioè è vero che se $[a] \neq [0]$ allora $\exists [b] \mid [a] \cdot [b] = [1]$?

$$[2] \cdot [3] = [6] = [1] \Rightarrow [2]^{-1} = [3], [3]^{-1} = [2]$$

$$[4] \cdot [4] = [16] = [1] \Rightarrow [4]^{-1} = [4]$$

Quindi, \mathbb{Z}_5 è un campo.

Esempio. \mathbb{Z}_4 è un campo?

$$[2] \cdot [2] = [4] = [0] \Rightarrow \text{l'inverso non esiste}$$

$$[2] \cdot [0] = [0] \neq [1] \Rightarrow \text{l'inverso non esiste}$$

Quindi, \mathbb{Z}_4 non è un campo.

Osservazione. \mathbb{Z}_p è un campo se p è un numero primo.

Definizione 1.9: Spazio vettoriale

Sia K un campo. Uno spazio vettoriale su K è un insieme V con due operazioni:

Somma $+$: $\forall v_1, v_2 \in V \rightarrow v_1 + v_2 \in V$

Prodotto per scalare \cdot : $\forall a \in K, \forall v \in V \rightarrow a \cdot v \in V$

tali che valgano le seguenti proprietà:

Somma: Associativa, Commutativa, Elemento neutro 0, Elemento opposto $-v$

Prodotto per scalare: Associativa, Distributiva rispetto alla somma, Elemento neutro 1

Dato uno spazio vettoriale V su un campo K , gli elementi di V sono detti **vettori** e gli elementi di K sono detti **scalari**.

Definizione 1.10: Sottospazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K . Un sottospazio vettoriale di V è un sottoinsieme U di V non vuoto (cioè $0 \in U$) che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalare, cioè:

$$u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$$

$$a \in K, u \in U \Rightarrow a \cdot u \in U$$

Esempio. Sia $K = \mathbb{R}$ e $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$ è un sottospazio vettoriale di V perchè dati $v_1 = (x, 2x), v_2 = (x', 2x') \in U$ e $a \in \mathbb{R}$:

Non vuoto $0 = (0, 0) \in U$

Somma $v_1 + v_2 = (x + x', 2x + 2x') = (x + x', 2(x + x')) \in U$

Prodotto $a \cdot v_1 = a \cdot (x, 2x) = (a \cdot x, a \cdot 2x) = (a \cdot x, 2a \cdot x) \in U$

1.5 Combinazione e Indipendenza lineare

Definizione 1.11: Combinazione lineare

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Diciamo che $v \in V$ è una combinazione lineare di v_1, v_2, \dots, v_n se:

$$\exists a_1, a_2, \dots, a_n \in K \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

Esempio. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, v_1 = (2, 0), v_2 = (0, -1), v = (1, 3)$ è una combinazione lineare di v_1 e v_2 perchè:

$$\frac{1}{2} v_1 + (-3) v_2 = (1, 0) + (0, 3) = (1, 3) = v$$

Se non li vedo ad occhio, posso risolvere il sistema per cercare i coefficienti:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = (2a_1, 0) + (0, -a_2) = (2a_1, -a_2) = (1, 3)$$

$$\begin{cases} 2a_1 = 1 \\ -a_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = -3 \end{cases}$$

Esempio. $u_1 = (1, 0), u_2 = (-1, 0), u = (1, 3)$ NON è una combinazione lineare di u_1 e u_2 perchè $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1 u_1 + a_2 u_2 = (2a_1, 0) + (-a_2, 0) = (2a_1 - a_2, 0) = (1, 3)$ non ha soluzione:

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 = 1 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

Infatti $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1 u_1 + a_2 u_2 \neq u$

Definizione 1.12: Span

Uno spazio vettoriale V è detto **generato** da un insieme di vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ se ogni $v \in V$ è una combinazione lineare di tali vettori. In questo caso V è detto **span** di v_1, v_2, \dots, v_n e si scrive:

$$V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$

Esempio. $V = \mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}, v_1 = (2, 0, 0, 0), v_2 = (0, 1, -1, 0)$

$$\begin{aligned} U = \langle v_1, v_2 \rangle &= \{(a_1 v_1 + a_2 v_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(2a_1, 0, 0, 0) + (0, a_2, -a_2, 0) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(2a_1, a_2, -a_2, 0) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \mid \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Esempio. $V = \mathbb{R}[x] = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$
 $p_1 = x, p_2 = x^2, q = 2x^2 - 7x$ è una combinazione lineare di p_1 e p_2 perchè $q = 2x^2 - 7x = 2x^2 - 7x + 0 \cdot x = 2x^2 - 7x + 0 \cdot x^2$
 $h = 3x^3 - 8x, l = 2x^2 + 3$ non sono combinazioni lineari di p_1 e p_2 perchè $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1 p_1 + a_2 p_2 \neq h, l$.
 Il sottospazio vettoriale generato da p_1 e p_2 è $\langle p_1, p_2 \rangle = \{a_1 p_1 + a_2 p_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \{a_1 x + a_2 x^2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$, ovvero tutti i polinomi di grado ≤ 2 con termine noto nullo.

Osservazione. Un sottoinsieme non vuoto U di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V se e solo se U contiene tutte le combinazioni lineari dei suoi elementi (infatti, dati $u_1, u_2 \in U$ e $u_1 + u_2 \in U$ e $a \in K$ sono combinazioni lineari particolari)

Definizione 1.13: Indipendenza lineare

Un insieme di vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ è detto **linearmente indipendente** se nessuno di loro è combinazione lineare degli altri o, equivalentemente, l'unica combinazione lineare che dà come risultato il vettore nullo è quella in cui tutti i coefficienti sono nulli:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Invece, è detto **linearmente dipendente** se esiste almeno un vettore che è combinazione lineare degli altri.

Esempio. $v_1 = (2, 0), v_2 = (-1, 0)$ sono linearmente dipendenti perchè $v_1 = -2v_2$ (v_1 è combinazione lineare di v_2), ovvero:

$$\exists a_1 = 1, a_2 = 2 \mid a_1 v_1 + a_2 v_2 = 1 \cdot (2, 0) + (2) \cdot (-1, 0) = (0, 0)$$

Esempio. $u_1 = (2, 0), u_2 = (0, -1)$ sono linearmente indipendenti perchè $a_1 u_1 \neq u_2 \forall a_1 \in \mathbb{R}$, ovvero:

$$\begin{aligned} a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0 &\Leftrightarrow (2a_1, -a_2) = (0, 0) \\ \begin{cases} 2a_1 = 0 \\ -a_2 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.6 Base e dimensione

Definizione 1.14: Base

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K .

Un insieme di vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ è detto **base** di V se sono linearmente indipendenti e generano V , cioè:

$$V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$

Esempio. $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (2, 1)$ generano V ma non sono linearmente indipendenti perchè $v_3 = 2v_1 + v_2$. Invece $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ sono linearmente indipendenti e generano V ($a_1v_1 + a_2v_2 = (a_1, a_2)$), quindi sono una base di V .

Esempio. $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (2, 1)$, $v_2 = (1, -3)$ sono una base di V ? Verifichiamolo:

Linearmente indipendenti? $a_1v_1 + a_2v_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$

$$a_1(2, 1) + a_2(1, -3) = (0, 0)$$

$$(2a_1 + a_2, a_1 - 3a_2) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 - 3a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

Generano V ? Ovvero che ogni $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si scrive come combinazione lineare di v_1 e v_2 .

$$(x, y) = a_1(2, 1) + a_2(1, -3)$$

$$(x, y) = (2a_1 + a_2, a_1 - 3a_2)$$

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 = x \\ a_1 - 3a_2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{3x-y}{7} \\ a_2 = \frac{x+y}{7} \end{cases}$$

Quindi, $\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R} \mid a_1v_1 + a_2v_2 = v$.

Quindi $v_1 = (2, 1)$, $v_2 = (1, -3)$ sono una base di \mathbb{R}^2 .

Esempio. Dire se $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ sono una base di \mathbb{R}^3

Passo 1 Verifico se sono linearmente indipendenti, ovvero se è vero che se $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = (0, 0, 0) \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$

$$a_1(1, 1, 0) + a_2(0, 1, 1) + a_3(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$(a_1 + a_3, a_1 + a_2, a_2 + a_3) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Sì perchè l'unica soluzione è quella in cui tutti i coefficienti sono nulli. Quindi, v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

Passo 2 Verifico se generano \mathbb{R}^3 , ovvero se $\forall v \in \mathbb{R}^3, \exists a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \mid v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$

$$(a_1 + a_3, a_1 + a_2, a_2 + a_3) = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = x \\ a_1 + a_2 = y \\ a_2 + a_3 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 = x - z \\ a_1 + a_2 = y \\ a_3 = z - a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 = x + y - z \\ -2a_2 = x - y + z \\ a_3 = z + \frac{x-y-z}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{x+y-z}{2} \\ a_2 = \frac{x-y-z}{2} \\ a_3 = \frac{x-y+z}{2} \end{cases}$$

Quindi esiste una soluzione per ogni $v \in \mathbb{R}^3$, quindi v_1, v_2, v_3 generano \mathbb{R}^3 . Di conseguenza, v_1, v_2, v_3 sono una base di \mathbb{R}^3 .

Esempio. Dire se $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (-1, 0, 1)$, $u_3 = (2, 1, -1)$ sono una base di \mathbb{R}^3

Passo 1 Verifico se sono linearmente indipendenti

$$\begin{aligned}
 a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 &= (0, 0, 0) \\
 a_1(1, 3, 2) + a_2(-1, 0, 1) + a_3(2, 1, -1) &= (0, 0, 0) \\
 (a_1 - a_2 + 2a_3, 3a_1 + a_3, 2a_1 - a_2 - a_3) &= (0, 0, 0) \\
 \begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 = 0 \\ 3a_1 + a_3 = 0 \\ 2a_1 - a_2 - a_3 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 = 0 \\ 3a_2 - 5a_3 = 0 \\ 3a_2 - 5a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 5 \\ a_3 = -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

No perchè esiste una soluzione in cui non tutti i coefficienti sono nulli. Quindi u_1, u_2, u_3 non sono linearmente indipendenti.

Passo 2 Verifico se generano \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}
 a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 &= (x, y, z) \\
 (a_1 - a_2 + 2a_3, 3a_1 + a_3, 2a_1 - a_2 - a_3) &= (x, y, z) \\
 \begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 = x \\ 3a_1 + a_3 = y \\ 2a_1 - a_2 - a_3 = z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 + 2a_3 = x \\ 3a_2 - 5a_3 = y - 3x \\ 3a_2 - 5a_3 = z - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = y - 3x - z + 2x \Leftarrow x + z = y \\ \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

Facendo combinazioni lineari di u_1, u_2, u_3 si ottengono solo vettori di $\mathbb{R}^3 \mid x+z=y$, quindi u_1, u_2, u_3 non generano \mathbb{R}^3 .

Definizione 1.15: Coordinate

a_1, a_2, \dots, a_n sono dette **coordinate** di v rispetto alla base v_1, v_2, \dots, v_n .

Esempio. Trovare le coordinate di $v = (-4, -8)$ rispetto alla base $v_1 = (2, 1), v_2 = (1, -3)$ di \mathbb{R}^2 . Basta trovare gli unici $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tali che $a_1 v_1 + a_2 v_2 = v$:

$$\begin{aligned}
 a_1(2, 1) + a_2(1, -3) &= (-4, -8) \\
 (2a_1 + a_2, a_1 - 3a_2) &= (-4, -8) \\
 \begin{cases} 2a_1 + a_2 = -4 \\ a_1 - 3a_2 = -8 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

1.6.1 Completamento e estrazione di una base

Se si hanno dei vettori linearmente indipendenti che non generano V , si può “**completarli a una base**”, cioè aggiungere altri vettori fino ad ottenere una base.

Esempio. $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0)$ sono linearmente indipendenti ma non generano \mathbb{R}^3 : $\langle v_1, v_2 \rangle = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$

Aggiungendo $v_3 = (0, 0, 1)$ si ottiene una base di \mathbb{R}^3 : $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^3$.



v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti perchè $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$. v_3 poteva essere qualsiasi vettore con $z \neq 0$

Se invece si hanno dei vettori che generano V si può “**estrarne una base**”, cioè rimuovere dei vettori linearmente dipendenti fino ad ottenere una base.

Esempio. $V = \mathbb{R}^2, v_1 = (1, 0), v_2 = (2, 0), v_3 = (0, 1), v_4 = (2, 5)$ generano V ma non sono linearmente indipendenti perchè $v_4 = 2v_1 + 5v_3$ e $v_2 = 2v_1$. Scartando v_2 e v_4 si ottiene una base di \mathbb{R}^2 : $\langle v_1, v_3 \rangle = \mathbb{R}^2$. Un'altra estrazione possibile sarebbe stata $\langle v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^2$.

2 Unità 2 - Lezioni 3, 4

2.1 Approfondimenti sulle basi

Teorema 2.1: Teorema delle coordinate

Un insieme di vettori v_1, v_2, \dots, v_n è una base di uno spazio vettoriale V se e solo se ogni vettore $v \in V$ può essere scritto in modo unico come combinazione lineare di v_1, v_2, \dots, v_n , ovvero:

$$\forall v \in V, \exists! a_1, a_2, \dots, a_n \in K \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$



Nota: Il simbolo $\exists!$ vuol dire “esiste ed è unico”.

Dimostrazione. Dimostrazione del teorema delle coordinate per i due versi:

\Rightarrow Siano v_1, v_2, \dots, v_n una base di V , cioè generano V e sono linearmente indipendenti.

Quindi, $\forall v \in V, \exists a_1, a_2, \dots, a_n \in K \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$.

Per dimostrare l'unicità, supponiamo che esistano $b_1, b_2, \dots, b_n \in K \mid v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n$.

Sottraendo, $0 = v - v = (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \dots + (a_n - b_n)v_n$.

Poichè v_1, v_2, \dots, v_n sono linearmente indipendenti, allora $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \dots = a_n - b_n = 0 \Rightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$. Per cui, a_1, a_2, \dots, a_n sono uniche.

\Leftarrow Per ipotesi $\forall v \in V, \exists! a_1, a_2, \dots, a_n \in K \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$.

Dunque v_1, v_2, \dots, v_n generano V e, poichè $0 \in V$, gli unici coefficienti pesibili sono $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Per cui, v_1, v_2, \dots, v_n sono linearmente indipendenti. e quindi sono una base di V .

Teorema 2.2: Teorema della dimensione

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K . Tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi, detto **dimensione** di V e indicato con $\dim V$.

Teorema 2.3: Teorema di completamento ed estrazione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $\dim V = d$.

Allora:

1. Qualunque insieme linearmente indipendente di V è composto da $k \leq d$ vettori. Posso completare l'insieme a una base di V aggiungendo $d - k$ vettori.
2. Qualunque insieme che genera V è composto da h vettori con $h \geq d$. Posso estrarre una base di V selezionando d vettori.

Corollario 2.1

Se V ha $\dim n$, un insieme v_1, v_2, \dots, v_n è linearmente indipendente se e solo se genera V .

Esempio. Determinare la dimensione di \mathbb{R}^3

Una base di \mathbb{R}^3 è formata da tre vettori linearmente indipendenti che generano \mathbb{R}^3 .

Ad esempio, $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)$ è una base di \mathbb{R}^3 e quindi $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Definizione 2.1: Base canonica

Una base è detta **canonica** se è formata dai vettori della base standard, cioè:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^n &\rightarrow \text{Base canonica} \\
\mathbb{R}^1 &\rightarrow (1) \\
\mathbb{R}^2 &\rightarrow (1, 0), (0, 1) \\
\mathbb{R}^3 &\rightarrow (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \\
\mathbb{R}^4 &\rightarrow (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \\
\mathbb{R}^n &\rightarrow (1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)
\end{aligned}$$

Esempio. Determinare una base canonica di \mathbb{R}^3

Una base canonica di \mathbb{R}^3 è formata dai vettori $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Dato però il vettore $(3/2, 7, 4)$, determinare le sue coordinate rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned}
(3/2, 7, 4) &= a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) \\
(3/2, 7, 4) &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\
(3/2, 7, 4) &= (a_1, a_2, a_3) \\
&\begin{cases} a_1 = 3/2 \\ a_2 = 7 \\ a_3 = 4 \end{cases}
\end{aligned}$$

Osservazione. Uno spazio vettoriale ha tante basi diversi. Le coordinate di un vettore rispetto a una base dipendono dalla base scelta.

Definizione 2.2: Forma cartesiana e parametrica

Sia U un sottospazio di dimensione $\dim U = k$ in uno spazio V di dimensione $\dim V = n$ con $(k \leq n)$.

In forma parametrica U esprime tutti i suoi vettori in funzione di k parametri.

In forma cartesiana U esprime tutti i suoi vettori in funzione di $n - k$ equazioni cartesiane.

Esempio. Dati $V = \mathbb{R}^5, v_1 = (1, 2, 0, 0, 1), v_2 = (0, 0, 1, 0, -1)$ posso scrivere il sottospazio generato da v_1 e v_2 in forma cartesiana e parametrica.

Forma cartesiana $U = \langle v_1, v_2 \rangle = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_2 = 2x_1, x_4 = 0, x_5 = x_1 - x_2\}$

Forma parametrica $U = \langle v_1, v_2 \rangle = \{tv_1 + sv_2 \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \{(t, 2t, s, 0, t - s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

In questo caso $\dim U = 2$ perchè v_1, v_2 sono linearmente indipendenti e generano U . Nella forma parametrica, t e s sono detti **parametri** mentre in quella cartesiana è individuata da 3 ($5 - 2$) equazioni cartesiane.

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e

$$\begin{aligned}
U &= \langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle = \{t(1, 1, 0) + s(0, 0, 1) \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \{(t, t, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\} \\
W &= \langle (1, 0, 0), (0, 1, -1) \rangle = \{a(1, 0, 0) + b(0, 1, -1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a, b, -b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Calcolare $U \cap W$.

Per calcolare l'intersezione tra due sottospazi vettoriali, trasformo i vettori in forma cartesiana:

$$\begin{aligned}
U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\} \\
W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -z\}
\end{aligned}$$

A questo punto, calcolo l'intersezione tra le due equazioni:

$$U \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y, y = -z\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = -z\}$$

In forma parametrica:

$$U \cap W = \{t(1, 1, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Le dimensioni di U e W sono rispettivamente 2 e 2, quindi $\dim(U \cap W) = 1$.

Proposizione. Siano U e W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V . Allora $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale di V . In altri termini, “l’intersezione di due sottospazi è un sottospazio”.

Dimostrazione. Siano $u_1, u_2 \in U \cap W, u_1, u_2 \in U$ e U è un sottospazio vettoriale, quindi $u_1 + u_2 \in U$. Analogamente, $u_1, u_2 \in W$ e W è un sottospazio vettoriale, quindi $u_1 + u_2 \in W$. Quindi, $u_1 + u_2 \in U \cap W$.

Allo stesso modo si dimostra che $\forall a \in K, u \in U \cap W \Rightarrow a \cdot u \in U \cap W$.

Osservazione. In generale, l’unione di due sottospazi vettoriali ($U \cup W$) non è un sottospazio vettoriale.

Esempio. $V = \mathbb{R}^2, U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}, W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$

L’unione è $U \cup W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 0\}$

Se prendiamo un vettore di ogni sottospazio possiamo facilmente dimostrare che $U \cup W$ non è un sottospazio vettoriale.

$$u = (0, 1) \in U, w = (1, 0) \in W \Rightarrow u + w = (0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin U \cup W$$

Definizione 2.3: Somma di sottospazi

Siano U e W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V . La somma di U e W è il sottospazio vettoriale $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$.

Proposizione. $U + W$ è un sottospazio vettoriale di V .

Dimostrazione. Se $u_1, u_2 \in U + W \Rightarrow \exists w_1, w_2 \in W, u_1, u_2 \in U \mid v_1 = u_1 + w_1, v_2 = u_2 + w_2$.

$$v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$$

Si nota che $u_1 + u_2 \in U$ e $w_1 + w_2 \in W$.

Allo stesso modo si dimostra che $\forall a \in K, v \in U + W \Rightarrow a \cdot v \in U + W$.

Esempio. Dati $V = \mathbb{R}^4, U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = 0, x_4 = 0\}, W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0, x_4 = 0\}$

Calcolare $U + W$.

Passo 1 Scrivere U e W in forma parametrica

$$\begin{aligned} U &= \{(a, b, 0, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\} & \dim U &= 2 \\ W &= \{(0, t, s, 0) \mid t, s \in \mathbb{R}\} & \dim W &= 2 \end{aligned}$$

Passo 2 Calcolare $U + W$

$$\begin{aligned} U + W &= \{u + w \mid u \in U, w \in W\} = \{(a, b, 0, 0) + (0, t, s, 0) \mid a, b, t, s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a, b + t, s, 0) \mid a, b, t, s \in \mathbb{R}\} & \dim U + W &= 3 \end{aligned}$$

In forma cartesiana, $U + W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0 \vee x_4 = 0\}$.

Teorema 2.4: Formula di Grassman

Siano U e W due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V . Allora

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Dimostrazione. Sia v_1, v_2, \dots, v_k una base di $U \cap W$.

Completiamola a una base di U : $v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_m$.

Completiamo ora v_1, v_2, \dots, v_k a una base di W : $v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_n$.

Si può verificare che $v_1, v_2, \dots, v_k, u_1, u_2, \dots, u_m, w_1, w_2, \dots, w_n$ è una base.

Perciò $\dim(U \cap W) = l, \dim U = l + m, \dim W = l + n, \dim(U + W) = l + m + n$.

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2, x_4 = 0\}$, $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = -x_2, x_4 = 0\}$

$$U \cap W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = -x_2 = 0, x_4 = 0\} = \{(0, 0, x_3, 0) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Una possibile base di $U \cap W$ è $(0, 0, 1, 0)$, quindi $\dim(U \cap W) = 1$.

Una possibile base di U è $(1, 1, x_3, 0), (0, 0, 0, 1)$, quindi $\dim U = 2$.

Una possibile base di W è $(1, -1, x_3, 0), (0, 0, 0, 1)$, quindi $\dim W = 2$.

Per la formula di Grassman, $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$. In effetti, una base di $U + W$ è data da v_1, u_1, w_1 , cioè $U + W = \{tu + su, rw, t, s, r \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0, t, 0), (s, s, 0, 0), (r, -r, 0, 0) \mid t, s, r \in \mathbb{R}\} = \{(s + r, s - r, t, 0) \mid t, s, r \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}$.

Definizione 2.4: Somma diretta

La somma di due sottospazi $U + W$ è detta **diretta** se $U \cap W = \{0\}$. In tal caso, si scrive $U \oplus W$.

Proposizione. U, W formano una somma diretta \Leftrightarrow ogni vettore $v \in U \oplus W$ può essere scritto in modo unico come somma di un vettore $u \in U$ e un vettore $w \in W \Leftrightarrow$ l'unione di una base di U e una base di W è una base di $U \oplus W$.

Dimostrazione. Dimostriamo entrambe le implicazioni:

\Rightarrow Se $V = U \oplus W$ allora $V = U + W$, quindi $\forall v \in V \exists u \in U, w \in W \mid v = u + w$.

Supponiamo che $\exists u' \in U, w' \in W \mid v = u' + w' = u + w \Rightarrow u - u' = w - w'$ in cui $u - u' \in U$ e $w - w' \in W$.

Tuttavia, dato che $U \cap W = \{0\}$, allora $u - u' = w - w' = 0 \Rightarrow u = u', w = w'$. Viceversa se ogni v si scrive in modo unico, la somma deve essere diretta per lo stesso ragionamento.

\Leftarrow Se u_1, \dots, u_n è una base di U e w_1, \dots, w_m è una base di W , allora ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = u + w$ con $u \in U, w \in W$. Quindi: $v = (a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) + (b_1 w_1 + \dots + b_m w_m)$, perciò $u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m$ è una base di V . Similmente il viceversa.

Esempio. $V = \mathbb{R}^2, U = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}, W = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$U \cap W = \{0\}$. D'altra parte, ogni $(x, y) \in V$ si scrive in modo unico come $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$.

Quindi $V = U + W = U \oplus W$.

Una base di U è $(1, 0)$, una base di W è $(0, 1)$, quindi una base di V è $(1, 0), (0, 1)$.

Esempio. $V = \mathbb{R}^3, U = \{(x, y, z) \mid z = 0\}, W = \{(x, y, z) \mid x = 0\}$

$U \cap W = \{(x, y, z) \mid z = 0, x = 0\} \neq \{(0, 0, 0)\}$.

Quindi $V = U + W$ ma $V \neq U \oplus W$.

Infatti, ogni vettore di V si scrive come somma di un vettore di U e un vettore di W , ma non in modo unico.

Ad esempio, $(2, 7, -3) = (2, 7, 0) + (0, 0, -3) = (2, 0, 0) + (0, 7, -3)$.

3 Unità 3 - Lezioni 5, 6, 7

3.1 Approfondimento sulle funzioni

Definizione 3.1: Applicazione lineare

Siano V e U due spazi vettoriali su un campo K . Un'applicazione $f : V \rightarrow U$ è **lineare** se valgono entrambe le proprietà:

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(v_1) + f(v_2) & \forall v_1, v_2 \in V \\ f(a \cdot v) &= a \cdot f(v) & \forall a \in K, \forall v \in V \end{aligned}$$

Oppure, equivalentemente, f è lineare $\Leftrightarrow \forall v_1, v_2 \in V, \forall a_1, a_2 \in K$:

$$f(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2)$$

Esempio. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (2z, x + y)$ è lineare?

Dati due vettori $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ e uno scalare $a \in \mathbb{R}$, verifico se le operazioni sono compatibili:

Somma:

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (2(z_1 + z_2), x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \\ f(v_1) + f(v_2) &= (2z_1, x_1 + y_1) + (2z_2, x_2 + y_2) = (2z_1 + 2z_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \\ &= (2(z_1 + z_2), x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \end{aligned}$$

Prodotto per scalare:

$$\begin{aligned} f(a \cdot v) &= f(ax, ay, az) = (2az, ax + ay) \\ a \cdot f(v) &= a \cdot (2z, x + y) = (2az, ax + ay) \end{aligned}$$

Quindi f è lineare, dato che i risultati coincidono.

Esempio. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x, y^2)$ è lineare?

Dati due vettori $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e uno scalare $a \in \mathbb{R}$, verifico se le operazioni sono compatibili:

Somma:

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2(x_1 + x_2), (y_1 + y_2)^2) = (2(x_1 + x_2), y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2) \\ f(v_1) + f(v_2) &= (2x_1, y_1^2) + (2x_2, y_2^2) = (2(x_1 + x_2), y_1^2 + y_2^2) \end{aligned}$$

Prodotto per scalare:

$$\begin{aligned} f(a \cdot v) &= f(ax, ay) = (2ax, (ay)^2) \\ a \cdot f(v) &= a \cdot (2x, y^2) = (2ax, ay^2) \end{aligned}$$

Quindi f non è lineare, dato che i risultati non coincidono.

Esempio. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (0, x + y, 1)$ è lineare?

Dati due vettori $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e uno scalare $a \in \mathbb{R}$, verifico se le operazioni sono compatibili:

Somma:

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (0, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), 1) = (0, x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 1) \\ f(v_1) + f(v_2) &= (0, x_1 + y_1, 1) + (0, x_2 + y_2, 1) = (0, x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 2) \end{aligned}$$

Prodotto per scalare:

$$\begin{aligned} f(a \cdot v) &= f(ax, ay) = (0, ax + ay, 1) \\ a \cdot f(v) &= a \cdot (0, x + y, 1) = (0, ax + ay, a) \end{aligned}$$

Quindi f non è lineare, dato che i risultati non coincidono.

Sia $f: V \rightarrow U$ un'applicazione lineare. f è suriettiva $\Leftrightarrow \text{Im } f = U$.

Proposizione. $\text{Im } f$ è un sottospazio vettoriale di U .

Dimostrazione. $\text{Im } f = \{u \in U \mid \exists v \in V \mid f(v) = u\}$.

Siano $u_1, u_2 \in \text{Im } f$, quindi $\exists v_1, v_2 \in V \mid f(v_1) = u_1$ e $f(v_2) = u_2$.

Allora $u_1 + u_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$, quindi $u_1 + u_2 \in \text{Im } f$ (un elemento di V è mandato in $u_1 + u_2$).

Allo stesso modo, $\forall a \in K, u \in \text{Im } f \Rightarrow \exists v \in V \mid f(v) = u \Rightarrow f(av) = a \cdot f(v) = a \cdot u \in \text{Im } f$.

Quindi $\text{Im } f$ è un sottospazio vettoriale di U .

Definizione 3.2: Nucleo di un'applicazione lineare

Sia $f : V \rightarrow U$ un'applicazione lineare. Il **nucleo** di f è l'insieme dei vettori di V che risultano in 0 dopo l'applicazione di f :

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

Proposizione. $\ker f$ è un sottospazio vettoriale di V .

Dimostrazione. Devo verificare che le proprietà di un sottospazio vettoriale siano rispettate, sapendo che, dato un $v \in \ker f$, per definizione $f(v) = 0$:

$\ker f$ non è vuoto perchè $0 \in \ker f$ (dato che $f(v - v) = f(v) - f(v) = 0$).

Se $v_1, v_2 \in \ker f \Rightarrow$ anche $v_1 + v_2 \in \ker f$, perchè $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0$.

Se $v \in \ker f$ e $a \in \mathbb{K} \Rightarrow f(av) = af(v) = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow av \in \ker f$.

Quindi $\ker f$ è un sottospazio vettoriale di V .

Proposizione. f è iniettiva $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$

Dimostrazione. Dimostriamo entrambi i versi:

\Rightarrow Devo dimostrare che se f è iniettiva allora $\ker f = \{0\}$.

Dalla precedente dimostrazione, $f(0) = 0$ è sempre vero, quindi $0 \in \ker f$. Se esistesse un altro $v \in V$ tale che $f(v) = 0$, contraddirebbe la definizione di iniettività. Quindi $\ker f = \{0\}$.

\Leftarrow Devo dimostrare che se $\ker f = \{0\}$ allora f è iniettiva.

Quindi, supponiamo che $\ker f = \{0\}$. Vogliamo mostrare che se $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$.

Dato che f è lineare e sappiamo che $f(v_1) = f(v_2)$, $f(v_1) - f(v_2) = 0 \Rightarrow f(v_1 - v_2) = 0$.

Quindi $v_1 - v_2 \in \ker f = \{0\} \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$.

Di conseguenza, f è iniettiva per definizione.

Esempio. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$ è iniettiva?

Devo verificare se $\ker f = \{0\}$.

$$f(x, y) = (x + y, 2x + 2y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi $\ker f = \{0\}$ e f è iniettiva. Inoltre, $\text{Im } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Teorema 3.1: Teorema del rango

Sia $f : V \rightarrow U$ un'applicazione lineare. Allora:

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \text{Im } f$$

Dimostrazione. Sia v_1, v_2, \dots, v_k una base di $\ker f$ e completiamola a una base di V :

$v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$.

Sia $u \in \text{Im } f$, cioè $u \in U$ e $\exists v \in V \mid f(v) = u$.

Poichè $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ sono una base di V , $\exists! a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ per il teorema delle coordinate.

Quindi $u = f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_k f(v_k) + a_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + a_n f(v_n)$.

Cioè $\forall u \in \text{Im } f \exists! a_{k+1}, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid u = a_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + a_n f(v_n)$, infatti $f(v_1) = f(v_2) = \dots = f(v_k) = 0$ perchè $v_1, v_2, \dots, v_k \in \ker f$.

Quindi $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono linearmente indipendenti e formano una base di $\text{Im } f$. Perciò $\dim \ker f = k$, $\dim V = n$, $\dim \text{Im } f = n - k$.

Esempio. $V = \mathbb{R}^3 = U$, $f : V \rightarrow U$, $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$ è iniettiva o suriettiva? Qual'è la dimensione di $\ker f$? Definire anche $\operatorname{Im} f$.

Devo verificare se $\ker f = \{0\}$.

Formalmente, $\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\} = \{(x, y, z) \in V \mid f(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \in V \mid x = y = z\} = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Quindi, $\dim \ker f = 1 \neq 0$, quindi f non è iniettiva.

Per il teorema del rango, $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$, quindi $\dim \operatorname{Im} f = \dim V - \dim \ker f = 3 - 1 = 2 \neq 3$, quindi f non è suriettiva.

Troviamo $\operatorname{Im} f$: Troviamo una base di $\ker f$: $v_1 = (1, 1, 1)$. Completiamolo ora a una base di V : $v_2 = (1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0)$.

$f(v_1) = (0, 0, 0)$, $f(v_2) = (1, 0, -1)$, $f(v_3) = (-1, 1, 0)$.

$f(v_2), f(v_3)$ sono linearmente indipendenti e non nulli, quindi formano una base di $\operatorname{Im} f$.

Quindi $\operatorname{Im} f = \{t(1, 0, -1) + s(-1, 1, 0) \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \{(t - s, s, -t) \mid t, s \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in V \mid x + y + z = 0\}$.

Esempio. $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $U = V$, $f : V \rightarrow U$, $f(p(x)) = p'(x) = 2ax + b$. Trovare $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro dimensioni.

$\operatorname{Im} f = \{\text{polinomi di grado } \leq 1\} = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.

$\ker f = \{p(x) \in V \mid p'(x) = 0\} = \{ax^2 + bx + c \mid 2ax + b = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0\} = \{c \mid c \in \mathbb{R}\}$.

Quindi $\dim \ker f = 1$, $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

Per il teorema del rango, $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = 1 + 2 = 3$.

Proposizione. Conseguenze del teorema del rango, data un'applicazione lineare $f : V \rightarrow U$:

1. Se $\dim V > \dim U$, f non è iniettiva.
2. Se $\dim V < \dim U$, f non è suriettiva.
3. Se $\dim V = \dim U$, allora f è iniettiva $\Leftrightarrow f$ è suriettiva.

Dimostrazione. Dimostriamo i tre punti:

1. $\dim \ker f = \dim V - \dim \operatorname{Im} f \geq \dim V - \dim U > 0 \Rightarrow \ker f \neq \{0\}$.
Quindi f non è iniettiva.
2. $\dim \operatorname{Im} f = \dim V - \dim \ker f < \dim U \Rightarrow \operatorname{Im} f \neq U$.
Quindi f non è suriettiva.
3. $\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim U$
Se f è iniettiva, $\dim \ker f = 0$, quindi $\dim \operatorname{Im} f = \dim U$ cioè $\operatorname{Im} f = U$ e f è suriettiva.
Viceversa, se f è suriettiva, $\dim \operatorname{Im} f = \dim U$, quindi $\dim \ker f = 0$ e f è iniettiva.

3.2 Isomorfismi

Definizione 3.3: Isomorfismo

Un'applicazione lineare è chiamata **isomorfismo** se è biunivoca.

Esempio. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$ è un isomorfismo?

Devo verificare se f è lineare e se è biunivoca.

Linearità Dati due vettori $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e uno scalare $a \in \mathbb{R}$, verifico se le operazioni sono compatibili:

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \\ f(v_1) + f(v_2) &= (x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2) = ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \end{aligned}$$

$$f(a \cdot v) = f(ax, ay) = (ax + ay, ax - ay) = a(x + y, x - y) = a \cdot f(v)$$

$$a \cdot f(v) = a \cdot (x + y, x - y) = (ax + ay, ax - ay) = f(ax, ay)$$

Quindi f è lineare.

Iniettività Devo verificare se $\text{Ker } f = \{0\}$.

$$f(x, y) = (x + y, x - y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi $\text{Ker } f = \{0\}$ e f è iniettiva.

Suriettività Devo verificare se $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$.

$$\text{Im } f = \{(x + y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

Quindi f è suriettiva.

Quindi f è lineare e biunivoca, quindi è un isomorfismo.

Osservazione. Una applicazione lineare $f : V \rightarrow U$ è un isomorfismo $\Leftrightarrow \text{ker } f = \{0\}$ e $\text{Im } f = U$.

Definizione 3.4: Isomorfismo di spazi vettoriali

Due spazi vettoriali V e U su un campo K si dicono **isomorfi** se esiste un isomorfismo $f : V \rightarrow U$ e scriviamo $V \cong U$.

Proposizione. "Essere isomorfi" è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione. Devo verificare che la relazione sia riflessiva, simmetrica e transitiva:

Riflessività Se V è uno spazio vettoriale, allora $f : V \rightarrow V, f(v) = v$ è un isomorfismo (V è isomorfo a se stesso).

Simmetria Se V è isomorfo a U , allora esiste un isomorfismo $f : V \rightarrow U$.

Allora $f^{-1} : U \rightarrow V$ è un isomorfismo, quindi U è isomorfo a V .

Transitività Se V è isomorfo a U e U è isomorfo a W , allora esistono due isomorfismi $f : V \rightarrow U$ e $g : U \rightarrow W$.

Allora la composizione $g \circ f : V \rightarrow W$ è un isomorfismo, quindi V è isomorfo a W .

Esempio. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{K}[x]_{\leq 2} = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}, U = \mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}, f : V \rightarrow U, f(ax^2 + bx + c) = (a, b, c)$ è un isomorfismo?

f è lineare, iniettiva e suriettiva, quindi è un isomorfismo.

Quindi V e U sono isomorfi, quindi $V \cong U$.

Proposizione. 1. La composizione di applicazioni lineari è un'applicazione lineare.

2. La composizione di isomorfismi è un isomorfismo.

3. L'applicazione inversa di un isomorfismo è un isomorfismo.

Dimostrazione. Siano $f : V \rightarrow U, g : U \rightarrow W$ due applicazioni lineari.

1. Devo verificare che la composizione $g \circ f : V \rightarrow W$ sia lineare, ovvero $\forall v_1, v_2 \in V, a \in K$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(v_1 + v_2) &= g(f(v_1 + v_2)) = g(f(v_1) + f(v_2)) = g(f(v_1)) + g(f(v_2)) \\ &= (g \circ f)(v_1) + (g \circ f)(v_2) \\ (g \circ f)(av) &= g(f(av)) = g(af(v)) = ag(f(v)) = a(g \circ f)(v) \end{aligned}$$

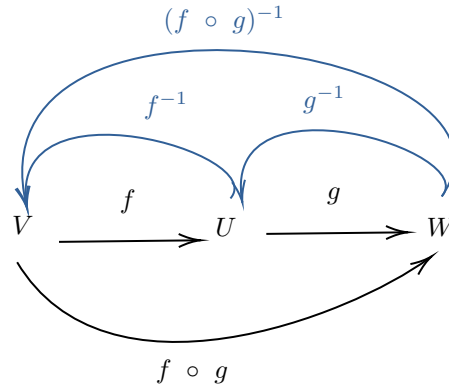
Quindi $g \circ f$ è lineare.

2. Dalla definizione, la composizione di applicazioni iniettive è iniettiva e la composizione di applicazioni suriettive è suriettiva.

Infatti, se f e g sono iniettive allora $\text{ker } f = \{0\}, \text{ker } g = \{0\} \Rightarrow \text{ker}(g \circ f) = \text{ker } g \circ \text{ker } f = \{0\}$.

Analogamente, se f e g sono suriettive allora $\text{Im } f = U, \text{Im } g = W \Rightarrow \text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g \circ \text{Im } f = W$. Quindi $g \circ f$ è iniettiva e suriettiva (biunivoca), ovvero è un isomorfismo.

3. Sappiamo che se f è biunivoca, allora esiste f^{-1} . Mostriamo che se f è lineare, anche f^{-1} lo è:
 Siano $u_1, u_2 \in U$, vogliamo mostrare che $f^{-1}(u_1 + u_2) = f^{-1}(u_1) + f^{-1}(u_2)$.
 Poichè f è biunivoca, $\exists! v_1, v_2 \in V \mid f(v_1) = u_1$ e $f(v_2) = u_2$.
 Allora $f^{-1}(u_1 + u_2) = f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = f^{-1}(u_1) + f^{-1}(u_2)$.
 Analogamente $\forall a \in \mathbb{K}, u \in U, \exists v \in V \mid f(v) = u, f^{-1}(au) = f^{-1}(af(v)) = f^{-1}(f(av)) = av = af^{-1}(u)$.



Esempio. Dire se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + y, x - y)$ è un isomorfismo e, se sì, calcolare f^{-1} .
 $\ker f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0)\}$, cioè:

$$f(x, y) = (2x + y, x - y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x + x = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

Quindi $\ker f = \{0\}$ e f è iniettiva.

Dalla dimensione dell'immagine, $\dim \operatorname{Im} f = \dim V - \dim \ker f = 2 - 0 = 2$ (dal teorema del rango),
 quindi $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ e f è suriettiva.

Quindi f è un isomorfismo.

Calcoliamo f^{-1} , ovvero cerchiamo l'unico $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(x, y) = (t, s)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) = (2x + y, x - y) = (t, s) &\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = t \\ x - y = s \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{t+s}{3} \\ y = \frac{t-2s}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi $f^{-1}(t, s) = \left(\frac{t+s}{3}, \frac{t-2s}{3}\right)$.

Teorema 3.2: Teorema dell'estensione lineare

Siano V, U spazi vettoriali su un campo K e v_1, v_2, \dots, v_n una base di V , u_1, u_2, \dots, u_n vettori di U .

Allora esiste un'unica applicazione lineare $f : V \rightarrow U$ tale che $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2, \dots, f(v_n) = u_n$.

Dimostrazione. Sia $v \in V$. Poichè v_1, v_2, \dots, v_n sono una base di V , $\exists! a_1, a_2, \dots, a_n \in K \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$.

Per la linearità $f(v) = f(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \dots + a_n f(v_n) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$.

Quindi f esiste ed è unica (associa univocamente ogni $v \in V$ a un $u \in U$).

Esempio. $V = \mathbb{R}^2 = U, v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1), v = (3, 1), u_1 = 2v_1 - v_2, u_2 = 3v_1 - 2v_2$.

Sia $f : V \rightarrow U$ tale che $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$.

Calcolare $f(v)$.

Sapendo che $v = a_1v_1 + a_2v_2$, calcoliamo a_1 e a_2 :

$$v = (3, 1) = a_1(1, 1) + a_2(1, -1) \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 3 \\ a_1 - a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Quindi $v = 2v_1 + 1v_2$.

Calcoliamo $f(v)$:

$$f(v) = f(2v_1 + v_2) = 2f(v_1) + f(v_2) = 2u_1 + u_2 = 2(2v_1 - v_2) + (3v_1 - 2v_2) = (7v_1 - 4v_2)$$

Quindi $f(v) = 7v_1 - 4v_2 = (3, 11)$.

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^2, l_1 = (1, 0), l_2 = (0, 1)$, dire se esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : V \rightarrow V$ tale che $f(l_1) = (2, 1), f(l_2) = (-1, 3)$.

Poichè l_1, l_2 è una base di V , per il teorema dell'estensione lineare esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : V \rightarrow V$ tale che $f(l_1) = (2, 1), f(l_2) = (-1, 3)$. In effetti ogni vettore $v = (x, y) \in V$ si può scrivere come $v = xl_1 + yl_2$ e quindi $f(v) = xf(l_1) + yf(l_2) = x(2, 1) + y(-1, 3) = (2x - y, x + 3y)$.

Esempio. Siano $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, v_1 = (2, -1), v_2 = (4, -2)$. Esiste un'unica applicazione lineare tale che $f(v_1) = (1, 0), f(v_2) = (3, -1)$?

Osserviamo che $v_2 = 2v_1$, quindi $f(v_2) = 2f(v_1)$. Ma $f(v_2) = (3, -1) \neq 2(1, 0) = (2, 0)$.

Quindi non esiste un'unica applicazione lineare che soddisfi le condizioni.

Esempio. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, v_1 = (2, -1), v_2 = (4, -2)$. Esiste un'applicazione lineare tale che $f(v_1) = (1, 1), f(v_2) = (2, 2)$? Se sì, è unica?

Osserviamo che $v_2 = 2v_1$, quindi $f(v_2) = 2f(v_1)$: le condizioni sono soddisfatte.

Completiamo v_1 a una base di \mathbb{R}^2 : v_1, v_2 è una base di \mathbb{R}^2 .

Per ogni scelta di v_2 non esiste un'unica applicazione lineare che soddisfi le condizioni (per il teorema dell'estensione lineare), ma ce ne sono infinite.

Il teorema dell'estensione lineare indica che per sapere chi è f è sufficiente conoscere cosa fa sui vettori di una base di V .

Esempio. $V = \mathbb{R}^2, U = \mathbb{R}^2, v_1 = (3, -2)$. Esiste una e una sola applicazione lineare $f : V \rightarrow U$ tale che $f(v_1) = l_1 = (1, 0)$?

Osserviamo che v_1 non è una base di V , quindi non posso applicare il teorema dell'estensione lineare.

Infatti, posso completare v_1 a una base di V , ad esempio $v_1 = (3, -2), v_2 = (1, 1)$.

So che $f(v_1) = (1, 0)$ ma $f(v_2)$ può essere scelto arbitrariamente (ad esempio $f(v_2) = (0, 1)$ o $f(v_2) = (1, 1)$).

Quindi f esiste ma non è unica.

Esempio. $V = \mathbb{R}^3, U = \mathbb{R}^3, v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (2, 3, 0)$.

Dire se esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : V \rightarrow U$ tale che $f(v_1) = (1, 1, 0), f(v_2) = (0, 0, 1), f(v_3) = (5, 5, 7)$.

Osserviamo che $v_3 = 2v_1 + 3v_2$, quindi $f(v_3) = 2f(v_1) + 3f(v_2)$. Di conseguenza, v_1, v_2, v_3 non è una base di V .

Quindi, se f esiste ed è lineare, $(5, 5, 7) = f(v_3) = 2f(v_1) + 3f(v_2) = 2(1, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = (2, 2, 3)$, che non è possibile.

Quindi non esiste un'applicazione lineare f che soddisfi le condizioni.

Esiste invece un'applicazione lineare $g : V \rightarrow U$ tale che $g(v_1) = (1, 1, 0), g(v_2) = (0, 0, 1), g(v_3) = (2, 2, 3)$?

Sì, infatti $g(v_3) = 2g(v_1) + 3g(v_2) = 2(1, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = (2, 2, 3)$, ma non è unica.

Posso infatti completare v_1, v_2 a una base di V , ad esempio $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_4 = (0, 0, 1)$ e posso scegliere $g(v_4)$ arbitrariamente.

Teorema 3.3: Isomorfismi e basi

Un'applicazione lineare è un isomorfismo \Leftrightarrow manda basi in basi.

Cioè se $f : V \rightarrow U$ è un isomorfismo e v_1, v_2, \dots, v_n è una base di V , allora $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ è una base di U .

Dimostrazione. Dimostriamo entrambi i versi dell'implicazione:

\Rightarrow Sia $f : V \rightarrow U$ un isomorfismo e v_1, v_2, \dots, v_n sia una base di V . Si vuole dimostrare che $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ è una base di U .

Sia $u \in U$. Poichè f è un isomorfismo, $\exists! v \in V \mid f(v) = u$.

Poichè v_1, v_2, \dots, v_n è una base di V , $\exists! a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$.

Poichè f è lineare, $u = f(v) = f(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \dots + a_n f(v_n)$.

Quindi $\forall u \in U \exists! a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid u = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \dots + a_n f(v_n)$.

Quindi $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ è una base di U .

\Leftarrow Sia $f : V \rightarrow U$ un'applicazione lineare, e v_1, v_2, \dots, v_n sia una base di V e sia $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ una base di U .

Si vuole dimostrare che f è un isomorfismo, cioè che $\forall u \in U \exists! v \in V \mid f(v) = u$.

Per il teorema delle coordinate $\exists! a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid u = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \dots + a_n f(v_n) = f(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n)$, perchè $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ è una base di U .

Poichè f è lineare, $u = f(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n)$.

Poichè a_1, \dots, a_n esistono e sono unici, $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ è unico.

Quindi $v \in V \mid f(v) = u$, quindi f è un isomorfismo.

Esempio. Dati $v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1), u_1 = (0, 2), u_2 = (-1, 0)$, dire se:

1. Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$. Se esiste, è unica?
2. f è un isomorfismo?
3. $f(v_1), f(v_2)$ è una base?

Soluzione:

1. Poichè v_1, v_2 è una base di \mathbb{R}^2 , esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$.
2. Poichè u_1, u_2 è una base di \mathbb{R}^2 , f è un isomorfismo.
3. Poichè $l_1 = (0, 0), l_2 = (-1, 0)$ è una base e poichè f è un isomorfismo e manda basi in basi, $f(v_1), f(v_2)$ è una base.

Esempio. 1. Esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$ dove $v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1), u_1 = (-1, 2), u_2 = (2, -4)$?

2. In tal caso, f è un isomorfismo?
3. Trovare $\text{Im } f$ e $\text{Ker } f$.

Soluzione:

1. Poichè v_1, v_2 è una base di \mathbb{R}^2 , esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2$.
2. Poichè u_1, u_2 non è una base di \mathbb{R}^2 , f non è un isomorfismo. Si può verificare che $u_2 = 2u_1$, quindi non sono linearmente indipendenti (quindi non è una base).
3. Sia $v \in \mathbb{R}^2$. Poichè v_1, v_2 è una base di \mathbb{R}^2 , $\exists! a_1, a_2 \in \mathbb{R} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 \Rightarrow f(v) = a_1 u_1 + a_2 u_2 = a_1(-1, 2) + a_2(2, -4) = (-a_1 + 2a_2, 2a_1 - 4a_2)$.
Quindi $\text{Im } f = \{f(v), v \in V\} = \{(-a_1 + 2a_2, 2a_1 - 4a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \{(-t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
Poichè $\dim \text{Im } f = 1$, per il teorema del rango $\dim \text{Ker } f = 2 - 1 = 1$, quindi $\text{Ker } f$ è dato da una equazione cartesiana in \mathbb{R}^2 .
Poichè $u_2 = -2u_1$, cioè $2u_1 + u_2 = 0$ allora $f(2v_1 + v_2) = 2f(v_1) + f(v_2) = 2u_1 + u_2 = 0$, quindi $2v_1 + v_2 = (3, 1) \in \text{Ker } f$.
Dunque $\text{Ker } f = \langle (3, 1) \rangle = \{(3s, s) \mid s \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0\}$.

Corollario 3.1: Isomorfismo e dimensione

Due spazi vettoriali su K con la stessa dimensione sono isomorfi tra loro.

Dimostrazione. Siano V e U due spazi vettoriali su un campo K con $\dim V = \dim U = n$. Inoltre, siano v_1, v_2, \dots, v_n una base di V e u_1, u_2, \dots, u_n una base di U .

Per il teorema dell'estensione lineare, esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : V \rightarrow U$ tale che $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2, \dots, f(v_n) = u_n$.

Per il teorema dell'isomorfismo e basi f è un isomorfismo.

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^n$ e $U = \mathbb{R}[x]_{<n} = \mathbb{R}[x]_{\leq n-1} = \{\text{polinomi di grado } \leq n-1\} \Leftrightarrow \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}\}$. Base di V : $l_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), l_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, l_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

Base di U : $u_1 = 1, u_2 = x, u_3 = x^2, \dots, u_n = x^{n-1}$.

Esiste un'unica applicazione lineare $f : V \rightarrow U$ tale che $f(l_1) = u_1, f(l_2) = u_2, \dots, f(l_n) = u_n$ e tale f è un isomorfismo.

Esempio. Sia $V = M_{2,3}(\mathbb{R}) = \{\text{matrici } 2 \times 3 \text{ a coefficienti in } \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$.

V è uno spazio vettoriale rispetto alla somma coefficiente per coefficiente e al prodotto per uno scalare.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{1}{2} & 11 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 33 \\ 3 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Qual'è la dimensione di V ?

Cerchiamo una base di V . Sia $l_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, l_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, l_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, l_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, l_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ è una base di V perchè $\forall \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \in V \exists! (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \mid \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} = al_1 + bl_2 + cl_3 + dl_4 + el_5 + fl_6$.

Quindi $\dim V = 6$ e V è isomorfo a \mathbb{R}^6 .

4 Unità 4 - Lezioni 8, 9

4.1 Matrici

4.1.1 Operazioni tra matrici

$$M_{2,3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

$M_{2,3}(\mathbb{R})$ è lo spazio vettoriale delle matrici 2×3 a coefficienti reali.

La somma è data da:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d+d' & e+e' & f+f' \end{pmatrix}$$

Il prodotto per uno scalare è dato da:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}$$

$M_{2,3}(\mathbb{R})$ con queste operazioni è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Che dimensione ha?

Matrici elementari

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$, e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Queste matrici sono linearmente indipendenti e generano $M_{2,3}(\mathbb{R})$.
Quindi $\dim M_{2,3}(\mathbb{R}) = 6$ e $M_{2,3}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^6$. Infatti:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = a \cdot e_{1_1} + b \cdot e_{1_2} + c \cdot e_{1_3} + d \cdot e_{2_1} + e \cdot e_{2_2} + f \cdot e_{2_3}$$

Inoltre, $M_{2,3}(\mathbb{R})$ è isomorfo a \mathbb{R}^6 .

4.1.2 Prodotto riga per colonna tra matrici

$$M \in M_{r,s}(\mathbb{R}), N \in M_{s,t}(\mathbb{R})$$

Per calcolare il prodotto $M \cdot N$ è necessario che il numero di colonne di M sia uguale al numero di righe di N .

Esempio.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M \cdot N &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -4 \\ 6 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nota: $M \cdot N \in M_{r,t}(\mathbb{R})$.

In generale, il prodotto $M \cdot N$ è una matrice $r \times t$ e ha alla i -esima riga e j -esima colonna l'elemento:

$$(M \cdot N)_{ij} = \sum_{k=1}^s M_{ik} \cdot N_{kj}$$

4.1.3 Proprietà associativa

$$M \in M_{r,s}(\mathbb{R}), N \in M_{s,t}(\mathbb{R}), R \in M_{t,u}(\mathbb{R})$$

$$(MN)R = M(NR)$$

dove:

- $(MN)R \in M_{r,u}(\mathbb{R})$;
- $M(NR) \in M_{r,u}(\mathbb{R})$;

Esempio.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} MN &= \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & (MN)R &= \begin{pmatrix} 8 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ NR &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (MN)R &= \begin{pmatrix} 8 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.1.4 Matrice identità

Definizione 4.1: Matrice identità

La matrice identità I_n è la matrice quadrata $n \times n$ che ha 1 sulla diagonale principale e 0 altrove. Ad esempio su \mathbb{R}^3 :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osservazione.

$$M \in M_{r,s}(\mathbb{R})$$

$$MI_s = I_r M = M$$

Esempio.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$MI_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M$$

$$I_2 M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M$$

4.1.5 Matrice inversa

Definizione 4.2: Matrice invertibile

Una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è invertibile se esiste una matrice $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tale che:

$$AB = BA = I_n$$

La matrice B è chiamata matrice inversa di A .

Esempio. Mostriamo che la matrice A è invertibile utilizzando la matrice B come matrice inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Quindi A è invertibile e B è la matrice inversa di A .

Osservazione. Un'applicazione lineare $f : V \rightarrow U$ è un isomorfismo \Leftrightarrow è invertibile, cioè $\exists f^{-1} : U \rightarrow V \mid f \circ f^{-1} = id_u$ e $f^{-1} \circ f = id_v$. In altre parole, se A è la matrice di f in una base v_1, v_2, \dots, v_n di V allora f è invertibile $\Leftrightarrow A$ è invertibile, cioè esiste una matrice A^{-1} tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ (A^{-1} è la matrice di f^{-1}).

4.1.6 Matrici associate ad un'applicazione lineare

Definizione 4.3: Matrice associata ad un'applicazione lineare

Sia $f : V \rightarrow U$ un'applicazione lineare. Siano B una base di V e C una base di U . La **matrice associata** ad f rispetto alle basi B e C è la matrice $M_C^B(f)$ che ha nella colonna j le coordinate dell'immagine del j -esimo vettore della base B rispetto alla base C :

Esempio. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(x, y, z) = (x + y, y - z)$.

Date le basi canoniche E^3 e E^2 di \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 , la matrice associata ad f rispetto a queste basi è:

$$M_{E^2}^{E^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0, 0) = (1, 0) = 1e_1 + 0e_2 \\ f(e_2) &= f(0, 1, 0) = (1, 1) = 1e_1 + 1e_2 \\ f(e_3) &= f(0, 0, 1) = (0, -1) = 0e_1 - 1e_2 \end{aligned}$$

Se aggiungiamo una nuova base $C = ((1, 1), (1, -1))$ di \mathbb{R}^2 , la matrice associata ad f rispetto a E^3 e C è:

$$M_C^{E^3}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0, 0) = (1, 0) = \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1) + 0(0, 0) \\ f(e_2) &= f(0, 1, 0) = (1, 1) = \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1) + 0(0, 0) \\ f(e_3) &= f(0, 0, 1) = (0, -1) = \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1) + (-\frac{1}{2})(0, 0) \end{aligned}$$

Per il teorema dell'estensione lineare, la matrice associata ad f rispetto alle basi B e C determina univocamente f .

Osservazione. La matrice ottenuta dipende dalle basi scelte. Se scelgo basi diverse, ottengo matrici diverse.

Esempio. $V = \mathbb{R}^3, U = \mathbb{R}^2, f: V \rightarrow U, f(x, y, z) = (2x + y, x - 3z)$.

Consideriamo la base $v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (0, 1, 1)$ di V e la base $u_1 = (0, -1), u_2 = (2, 0)$ di U .

Scriviamo la matrice associata ad f rispetto a queste basi.

Calcoliamo $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= f(1, -1, 0) = (2 \cdot 1 + (-1), 1 \cdot (-1)) = (1, -1) = -1u_1 + \frac{1}{2}u_2 \\ f(v_2) &= f(2, 1, 0) = (2 \cdot 2 + 1, 2 - 3 \cdot 0) = (5, 2) = -2u_1 + \frac{5}{2}u_2 \\ f(v_3) &= f(0, 1, 1) = (2 \cdot 0 + 1, 0 - 3 \cdot 1) = (1, -3) = -2u_1 + \frac{1}{2}u_2 \end{aligned}$$

Quindi la matrice associata ad f rispetto alle basi scelte è:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matrice associata e prodotto tra matrici Sia $f: V \rightarrow U$ un'applicazione lineare e siano B e C due basi di V e U rispettivamente.

La matrice associata ad f rispetto a B e C è la matrice $A = M_C^B(f)$. Per calcolare $f(v)$ per ogni $v \in V$ si può calcolare $A \cdot v$, in quanto le coordinate di v rispetto alla base C si ottengono tramite il prodotto tra la matrice associata e il vettore v .

Esempio. $V = \mathbb{R}^3, U = \mathbb{R}^2, f: V \rightarrow U, f(x, y, z) = (2x + y, x - 3z)$.

$$A = M_{E^2}^{E^3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare $f(2, 3, 1)$.

$$f(2, 3, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Quindi $f(2, 3, 1) = (5, 2)$.

Esempio. $id : V \rightarrow V$ con $id(v) = v \ \forall v \in V$. Sia B una base di V . Chi è $M_B^B(id)$?

$$M_B^B(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

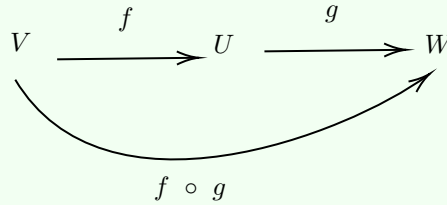
Infatti:

$$id(v_1) = v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3$$

$$id(v_2) = v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3$$

$$id(v_3) = v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3$$

Teorema 4.1: Teorema della composizione



Siano B una base di V , C una base di U e D una base di W .

Siano $M_C^B(f)$ e $M_D^C(g)$ le matrici associate rispettivamente ad f e g rispetto a B, C e C, D .

Allora la matrice associata alla composizione $g \circ f$ rispetto a B e D è data da:

$$M_D^B(g \circ f) = M_D^C(g) \cdot M_C^B(f)$$

Dimostrazione. $v = (x_1, \dots, x_n)_B \in V$. $f(v) = ?$.

$M_C^B(f)$ ha le colonne $f(v_1), \dots, f(v_3)$, quindi moltiplicandolo per v otteniamo:

$$M_C^B(f) \cdot v = M_C^B(f) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Quindi $f(v) = (y_1, \dots, y_m)_C$.

$$M_D^C(g) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

Quindi $g(f(v)) = (z_1, \dots, z_r)_D$. Ora sostituiamo i due risultati:

$$M_D^C(g) \cdot M_C^B(f) \cdot v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

Per la proprietà associativa del prodotto tra matrici, possiamo scrivere:

$$M_D^C(g \circ f) \cdot v = (M_D^C(g) \cdot M_C^B(f)) \cdot v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

Esempio. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(x, y) = (2x - y, x + y)$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $g(x, y) = (x - y, y + 3x)$. Calcolare la matrice associata alla composizione $g \circ f$ rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^2 .

La matrice associata ad f rispetto alla base canonica è:

$$M_E^f(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice associata ad g rispetto alla base canonica è:

$$M_E^g(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice associata alla composizione $g \circ f$ rispetto alla base canonica è:

$$M_E^{g \circ f}(g \circ f) = M_E^g(g) \cdot M_E^f(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Osservazione. $M_C^B(f)$ è invertibile e $M_C^B(f)^{-1} = M_C^B(f^{-1})$.

4.1.7 Matrici invertibili

Proposizione. $f : U \rightarrow V$ è un isomorfismo \Leftrightarrow la matrice associata ad f rispetto a B e C ($M_C^B(f)$) è invertibile.

Dimostrazione.

\Rightarrow Se f è un isomorfismo, allora esiste un'applicazione lineare $g : V \rightarrow U$ tale che $g \circ f = id_U$ e $f \circ g = id_V$.

La matrice associata ad g rispetto a C e B è $M_B^C(g) = M_C^B(f)^{-1}$.

Infatti:

$$M_B^C(g) \cdot M_C^B(f) = M_B^C(g \circ f) = M_B^B(id_U) = I_n$$

\Leftarrow Se $M_C^B(f)$ è invertibile, allora esiste una matrice A^{-1} tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Definiamo $g : V \rightarrow U$ in modo che le immagini dei vettori di C abbiano le coordinate rispetto a B date da A^{-1} , ovvero vogliamo $M_B^C(g) = A^{-1}$.

Utilizzando la composizione:

$$M_B^C(g) \cdot M_C^B(f) = M_C^C(g \circ f)$$

dove $M_C^C(f) = A \cdot A^{-1} = I_n$. Quindi $f \circ g = id$.

Teorema 4.2: Invertibilità

Una matrice quadrata A $n \times n$ è invertibile \Leftrightarrow le sue colonne sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Poniamo $f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^n$ e $M_E^E(f) = A$. Per la proprietà precedente, A è invertibile $\Leftrightarrow f$ è un isomorfismo.

Per il teorema isomorfismi e basi, f è un isomorfismo \Leftrightarrow le colonne di A sono linearmente indipendenti.

Esempio. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. I vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono linearmente

indipendenti, perchè $av_1 = \begin{pmatrix} 2a \\ a \end{pmatrix} \neq v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ quindi v_1, v_2 sono una base. Per il teorema precedente,

A è invertibile. In effetti esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(1, 0) = (2, 1)$ e $f(0, 1) = (5, 3)$. La sua matrice è A , perchè $f(1, 0) = v_1 = 2l_1 + l_2$ e $f(0, 1) = v_2 = 5l_1 + 3l_2$,

ovvero $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Se $v \in \mathbb{R}^2$ allora $v = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xl_1 + yl_2$ e $f(v) = xf(l_1) + yf(l_2) =$

$xv_1 + yv_2 = (2x + 5y, x + 3y)$. In effetti $f(x, y) = (2x + 5y, x + 3y)$ è invertibile.

Sia $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid u = f(v)$ cioè $u = (2x + 5y, x + 3y) = (a, b)$. Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 5y = a \\ x + 3y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3a-5b}{1} \\ y = \frac{2b-a}{1} \end{cases} \Rightarrow (3a - 5b, 2b - a)$$

Quindi $\forall u \in \mathbb{R}^2 \exists! v = (x, y) \mid f(v) = u$ ovvero $f^{-1}(u) = (3a - 5b, -a + 2b)$.

Quindi la matrice di f^{-1} è $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Esempio. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$. I vettori $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = -2v_1$ non sono linearmente dipendenti. Quindi per il teorema dell'Invertibilità, A non è invertibile.

In effetti l'unica applicazione tale che $f(l_1) = v_1$ e $f(l_2) = v_2$ è $f(x, y) = (-x + 2y, 3x - 6y)$.

Inoltre, $\text{Ker } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 0y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2y\}$ quindi $\dim \ker f = 1$

e $\dim \text{Im } f = 2 - 1 = 1$. Per questo f non è iniettiva, nè suriettiva e quindi non è invertibile, cioè $\nexists f^{-1} \mid f \circ f^{-1} = id = f^{-1} \circ f$. Quindi non esiste una matrice A^{-1} tale che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$.

4.1.8 Rango di una matrice

Definizione 4.4: Rango di una matrice

Il rango di una matrice A qualunque è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti.

Esempio. $rK \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2$, $rK \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = 1$, $rK \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, $rK \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2$.

Proposizione. Una matrice A $n \times n$ è invertibile \Leftrightarrow il suo rango è massimo, cioè $rK(A) = n$.

Esempio. $V = \mathbb{R}[x]_{<4}$, $d : V \rightarrow V, p(x) \mapsto p'(x)$ nella base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$.

La matrice di d è $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $rK(D) = 3$. I vettori colonna non sono linearmente indipendenti perchè $v_1 = 0$.

Quindi D non è invertibile cioè non esiste D^{-1} . Inoltre, d non è un isomorfismo.

4.1.9 Cambiamenti di base

Sia $f : V \rightarrow U$ un'applicazione lineare e siano B, B' due basi di V e C, C' due basi di U .

La matrice associata ad f rispetto a B e C è $M_C^B(f)$, mentre la matrice associata ad f rispetto a B' e C' è $M_{C'}^{B'}(f)$.

Se B' è una base di V e C' è una base di U , allora la matrice associata ad f rispetto a B' e C' è data da:

$$M_{C'}^{B'}(f) = M_{C'}^C(f) \cdot M_C^B(f) \cdot M_B^{B'}(v)$$

dove $M_B^{B'}(v)$ è la matrice del cambiamento di base da B a B' .

Esempio. Siano $b_1 = (0, 1, 1), b_2 = (1, 1, 0), b_3 = (0, 0, 1)$. $B = (b_1, b_2, b_3)$ è una base di \mathbb{R}^3 .

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $M_E^B(f) = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ 44 & -5 \\ 31 & -6 \end{pmatrix}$.

a. Verificare che $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Basta calcolare $f(b_1), f(b_2), f(b_3)$:

$$f(b_1) = f(0, 1, 1) = (0, 1, 1) = 3(0, 1, 1) + 1(1, 1, 0) + (-4)(0, 0, 1)$$

$$f(b_2) = f(1, 1, 0) = (1, 3, -1) = 3(0, 1, 1) + 1(1, 1, 0) + (-4)(0, 0, 1)$$

$$f(b_3) = f(0, 0, 1) = (4, -5, -6) = (3)(0, 1, 1) + (4)(1, 1, 0) + (-5)(0, 0, -2)$$

b. Determinare $M_E^E(f)$.

$$\begin{aligned}
M_E^E(f) &= M_E^B(f) \cdot M_B^B(v) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2(3) + (-4)(-2) + (1)(0) \\ (-2)(-4) + (-1)(-2) + (3)(0) \\ (3)(-2) + (1)(-2) + (-6)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4.1.10 Similitudine tra matrici quadrate

Definizione 4.5: Matrici simili

Due matrici A, A' $n \times n$ si dicono simili se esiste una matrice $n \times n$ invertibile H tale che:

$$A' = H^{-1} \cdot A \cdot H$$

Esempio.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$ sono simili perchè $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Data M precedente e $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, M e I_2 non sono simili perchè $\forall B, B^{-1} \cdot I_2 \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_2 \neq M$.

Proposizione. Due matrici simili rappresentano uno stesso endomorfismo (un'applicazione lineare $f : V \rightarrow V$ in cui dominio e codominio coincidono) rispetto a basi diverse.

Dimostrazione. Siano A, A' due matrici simili e sia H la matrice invertibile tale che $A' = H^{-1} \cdot A \cdot H$. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $M_E^E(f) = A$.

(cioè f è l'endomorfismo che manda i vettori della base canonica nelle colonne di A).

Sia B la base data dalle colonne di H (ricordiamo che se H è invertibile, le sue colonne formano una base), cioè $H = M_E^B(f)$.

$$\begin{aligned}
A' &= H^{-1} \cdot A \cdot H \\
M_B^B(f) &= H^{-1} \cdot M_E^E(f) \cdot H
\end{aligned}$$

Quindi $M_B^B(f) = A'$.

4.1.11 Conseguenze del teorema del rango

Corollario 4.1: Teorema del rango per le righe

$$rK(A) = rK(A^T)$$

Corollario 4.2: Rango di una matrice e immagine

$$rK(A) = \dim \operatorname{Im} f$$

Il corollario precedente è una conseguenza del teorema del rango per le righe perchè data una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un'applicazione lineare, allora $M_E^E(f) = A$, cioè $f(e_i) = i$ -esima colonna di A

Osservazione. $\ker f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$, quindi $\dim \ker f = n - rk(A)$ (n – il numero di equazioni indipendenti).

Possiamo anche verificarlo con la formula di Grassmann:

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f \Rightarrow n = \dim rk(A) + (n - rk(A))$$

Definizione 4.6: Matrice a scala

Una matrice $A \in M_{m,n}(K)$ è a scala se:

- Le righe nulle di A sono tutte in fondo alla matrice.
- Il primo coefficiente non nullo di ogni riga non nulla è più a destra del primo coefficiente non nullo della riga precedente.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ è a scala.}$$

Osservazione. Se A è una matrice a scala, il rango di A è uguale al numero di righe non nulle.

Definizione 4.7: Matrice trasposta

La matrice trasposta A^T di una matrice A è la matrice ottenuta scambiando le righe con le colonne, cioè facendo una riflessione rispetto alla diagonale principale.

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$

Osservazione. Per come è definito il prodotto riga per colonna tra matrici, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

5 Unità 5 - Lezioni 10, 11, 12

5.1 Metodo di Gauss

Esempio. Risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = -1 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Passo 1 Sommo a ciascuna equazione (dalla seconda in poi) la prima moltiplicata per un coefficiente tale che il termine x_1 nelle altre equazioni si annulli.

R1	$2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$
$-2R1 + R2$	$0x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -3$
$R1 + R3$	$0x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2$
$-\frac{1}{2}R1 + R4$	$0x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 0x_4 = 1$

Passo 2 Vado avanti di una equazione. Non tocco più la prima e neanche la seconda, ma sommo a ciascuna equazione (dalla terza in poi) la seconda moltiplicata per un coefficiente tale che il termine

x_2 nelle altre equazioni si annulli.

$$\begin{array}{ll} \text{R1} & 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ \text{R2} & x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -3 \\ 2\text{R2} + \text{R3} & \mathbf{0x_2} - 8x_3 - 7x_4 = -4 \\ -\frac{3}{2}\text{R2} + \text{R4} & \mathbf{0x_2} + 8x_3 + \frac{15}{2}x_4 = 6 \end{array}$$

Passo 3 Vado avanti di una equazione. Non tocco più la prima, la seconda e neanche la terza, ma sommo a ciascuna equazione (dalla quarta in poi) la terza moltiplicata per un coefficiente tale che il termine x_3 nelle altre equazioni si annulli.

$$\begin{array}{ll} \text{R1} & 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ \text{R2} & -5x_3 - 5x_4 = -3 \\ \text{R3} & -8x_3 - 7x_4 = -4 \\ \text{R3} + \text{R4} & \mathbf{0x_3} + \frac{1}{2}x_4 = 2 \end{array}$$

Passo 4 Finite le equazioni per trovare la soluzione del sistema, risalgo dall'ultima risolvendo le equazioni e sostituendo le incognite di volta in volta:

$$\begin{array}{ll} \text{R4} & \frac{1}{2}x_4 = 2 \Rightarrow x_4 = 4 \\ \text{R3} & -8x_3 - 7 \cdot 4 = -4 \Rightarrow x_3 = 1 \\ \text{R2} & -5 \cdot 1 - 5 \cdot 4 = -3 \Rightarrow x_2 = 17 \\ \text{R1} & 2x_1 - 17 + 1 + 2 \cdot 4 = 1 \Rightarrow x_1 = -3 \end{array}$$

Ho trovato così l'unica soluzione del sistema: $x_1 = -3, x_2 = 17, x_3 = 1, x_4 = 4$.

Quando ci sono infinite soluzioni, il metodo di gauss permette di trovare una soluzione generale.

5.2 Algoritmo di Gauss-Jordan

Sia A una matrice $m \times n$ invertibile. Dalla matrice $(A|I_n)$ si può ottenere la matrice $(I_n|A^{-1})$ applicando l'algoritmo di Gauss. Allora $B = A^{-1}$.

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Costruisco la matrice $(A|I_2)$ fino ad ottenere $(I_n|B)$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) &\Rightarrow \begin{array}{l} \text{R1} \\ -\frac{2}{3}\text{R1} + \text{R2} \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \frac{1}{3}\text{R1} \frac{3}{2}\text{R2} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \end{array} \right) \\ &\Rightarrow \text{R1} - \frac{5}{3}\text{R2} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Quindi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{3} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, che è uguale a quella ottenuta con $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{cof}(A)^T$.

5.3 Determinante di una matrice

Definizione 5.1: Determinante di una matrice

Il determinante di una matrice è una funzione $\det : M_{n,n}(K) \rightarrow K$ tale che $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{rk}(A) = n \Leftrightarrow A$ è invertibile.

Matrici 1×1 , $A = (a)$: È invertibile $\Leftrightarrow a \neq 0$, quindi $A^{-1} = (a^{-1})$ e $\det A = a$, ovvero il suo unico elemento.

Matrici 2×2 , $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: Poniamo $\det A = ad - bc$.

Matrici $n \times n$: Per $n > 1$, riduciamo il calcolo del determinante al determinante di matrici più piccoli mediante la **regola di Laplace**:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

dove $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e A_{ij} è la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A cancellando la riga i e la colonna j .

Oppure possiamo utilizzare le righe:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

Approfondimento sulle matrici 2×2 Verifichiamo che si ha $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ è invertibile, o equivalentemente $\det A = 0 \Leftrightarrow A$ non è invertibile.

\Rightarrow Sia $\det A = ad - bc = 0$, vogliamo quindi mostrare che $\text{rk}(A) < 2$ cioè che le righe di A sono linearmente dipendenti.

Consideriamo la prima riga $r_1 = (a, b)$:

- se $(a, b) = (0, 0)$ allora r_1 è la riga nulla e quindi $\text{rk}(A) < 2$.
- se $(a, b) \neq (0, 0)$ allora abbiamo $a \neq 0$ oppure $b \neq 0$. Nel caso in cui $a \neq 0$, si ha $d = \frac{bc}{a}$ e quindi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{bc}{a} \end{pmatrix}$. Da qui poniamo $\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \alpha \cdot a$ e $d = \frac{bc}{a} = \alpha \cdot b$. Quindi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha \cdot a & \alpha \cdot b \end{pmatrix}$ e quindi la seconda riga è un multiplo della prima, quindi $\text{rk}(A) < 2$.

\Leftarrow Supponiamo che le due righe siano linearmente indipendenti, cioè che A sia invertibile, cioè che $(a, b) = \alpha \cdot (c, d)$: Allora $\det \begin{pmatrix} \alpha \cdot c & \alpha \cdot d \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha^2 \cdot (ad - bc) = 0$.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & 11 & 9 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= 0 \cdot \det A^{(1,2)} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \det A^{(2,2)} + 0 \cdot \det A^{(3,2)} + 0 \cdot \det A^{(4,2)} = \\ &= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 4 \cdot \det 1 = 8 \end{aligned}$$

Dato che $\det A = 8 \neq 0$, A è invertibile.

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Calcoliamo il determinante di A utilizzando la seconda colonna:

$$\begin{aligned} \det A &= -a_{12} \cdot \det A^{(1,2)} + a_{22} \cdot \det A^{(2,2)} - a_{32} \cdot \det A^{(3,2)} \\ &= -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det A^{(2,2)} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= -2(4 \cdot 2 - 5 \cdot 1) - 3(1 \cdot 5 - 3 \cdot 4) \\ &= -6 + 21 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Definizione 5.2: Proprietà della funzione determinante

Alternante Il determinante cambia segno se scambiamo due righe o due colonne, ovvero $\det A' = -\det A$ se A' è la matrice trasformata.

Multilineare Siano A, B due matrici che hanno tutte le colonne uguali tranne la colonna j . Sia C la matrice che ha le colonne diverse da j uguali a quelle di A e la colonna j di C è a volte la colonna j di A più b volte la colonna j di B .

Quindi $C_{ij} = a \cdot A_{ij} + b \cdot B_{ij}$ e $\det C = a \cdot \det A + b \cdot \det B$.

La stessa cosa vale anche per le righe.

Determinante dell'identità $\det I_n = 1$.

Determinante della trasposta $\det A = \det A^T$.

Invertibilità $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ è invertibile.

Osservazione. Il determinante è l'unica funzione $f : M_{n,m}(K) \rightarrow K$ che soddisfa le prime tre proprietà.

Osservazione. Se moltiplico una riga di A per un numero k , il determinante di A viene moltiplicato per k :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -8 & -10 & -12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \det B = -2 \cdot \det A \end{aligned}$$

Osservazione. La trasformazione elementare di Gauss (cioè sommare a una riga un multiplo di un'altra) non cambia il determinante, quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow R_2 - R_1 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = \det A$$

Per la multilinearità: $\det C = \det A - \det B = \det A$ con $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Proposizione. Il determinante di una matrice a scala è il prodotto dei coefficienti sulla diagonale principale.

Dimostrazione.

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = a \cdot \det \begin{pmatrix} b & f \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \cdot b \cdot c$$

Esempio. Verificare se i seguenti vettori formano una base di \mathbb{R}^4 :

$$v_1 = (-3, 7, 2, 1), v_2 = (0, 2, 0, 0), v_3 = (0, 11, -1, 0), v_4 = (4, 9, 3, 0)$$

Soluzione utilizzando il determinante:

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & 11 & 9 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow \text{è invertibile}$$

$\Leftrightarrow v_1, v_2, v_3, v_4$ sono linearmente indipendenti \Leftrightarrow sono una base di \mathbb{R}^4 .

Teorema 5.1: Teorema di Binet

Date A e B due matrici $n \times n$, si ha:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Osservazione. NON è vero che $\det(A + B) = \det A + \det B$.

Corollario 5.1: Determinante di una matrice inversa

Se A è invertibile, allora $\det A^{-1} = \det(A)^{-1}$.

Dimostrazione. Per il teorema di Binet, $\det A \cdot \det A^{-1} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det I_n = 1$. \square

Corollario 5.2: Determinante di due matrici simili

Se due matrici A e B sono simili, allora hanno lo stesso determinante: $\det A = \det B$.

Dimostrazione. Se A e A' sono simili, allora $\exists H$ invertibile tale che $A' = H^{-1} \cdot A \cdot H$. Quindi $\det A' = \det(H^{-1}) \cdot \det A \cdot \det H = \det A$. \square

Osservazione. Se due matrici hanno determinanti diversi, allora non sono simili.

Definizione 5.3: Determinante di un'applicazione lineare

Data $f : V \rightarrow V$ un'applicazione lineare, definiamo $\det(f) = \det(A)$ dove A è la matrice di f rispetto a una base di V . Per la proposizione precedente, il determinante non dipende dalla base scelta. Inoltre, se f è un isomorfismo, allora $\det(f) \neq 0$.

Prodotto vettoriale

Definizione 5.4: Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ è un vettore $\in \mathbb{R}^3$ definito come il determinante della matrice formata dai tre vettori:

$$\underline{u} \wedge \underline{v} = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \underline{l}_1 & \underline{l}_2 & \underline{l}_3 \end{pmatrix}$$

dove \underline{l} è un vettore unitario (cioè di modulo 1) che non appartiene al piano generato da \underline{u} e \underline{v} .

Esempio. $\underline{u} = (1, 3, 0)$, $\underline{v} = (2, -5, 1)$.

Calcoliamo il prodotto vettoriale $\underline{u} \wedge \underline{v}$:

$$\begin{aligned} \underline{u} \wedge \underline{v} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ \underline{l}_1 & \underline{l}_2 & \underline{l}_3 \end{pmatrix} = \underline{l}_1(3 \cdot 1 - 0 \cdot (-5)) - \underline{l}_2(1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) + \underline{l}_3(1 \cdot (-5) - 3 \cdot 2) \\ &= \underline{l}_1(3) - \underline{l}_2(1) + \underline{l}_3(-11) = (3, -1, -11) \end{aligned}$$

Osservazione. Il vettore $\underline{u} \wedge \underline{v}$ è perpendicolare al piano individuato da \underline{u} e \underline{v} in \mathbb{R}^3 , se sono linearmente indipendenti.

Calcolo delle equazioni di un sottospazio utilizzando il determinante e il rango Sia V un sottospazio di \mathbb{R}^n generato da k vettori linearmente indipendenti $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_k$.

Caso 1: $k = n - 1$ Sia $n = 4$ e $U = \{(1, 0, 2, 1), (2, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\}$.

Un vettore generico (x, y, z, t) appartiene a V se e solo se è combinazione lineare dei 3 vettori della base, ovvero:

$$rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 0$$

Facciamo lo sviluppo rispetto alla quarta riga:

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \\ &= -x \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - z \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -x + 2y - 2z + t(4 + 1) = -x + 2y - 2z + 5t = 0 \end{aligned}$$

Caso 2: $k < n - 1$ Sia $n = 4$ e $U = \{(1, 2, 0, 1), (3, 1, 2, 0)\}$.

$\dim U = 2 \Rightarrow$ il sottospazio V è generato da $4 - 2 = 2$ equazioni.

Un vettore generico (x, y, z, t) appartiene a V se e solo se è combinazione lineare dei 2 vettori della base, ovvero:

$$rk \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 2$$

Riduciamo la matrice a scala:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{matrix} R_2 - 3R_1 \\ R_3 - xR_1 \end{matrix} \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & y - 2x & z & t - x \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow 5R_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 5(y - 2x) & 5z & 5(t - x) \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow R_3 + (y - 2x)R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5z + 2(y - 2x) & 5(t - x) - 3 \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{cases} 5z + 2(y - 2x) = 0 \\ 5(t - x) - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y + 5z = 0 \\ x - 3y + 5t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

5.3.1 Determinante e matrice inversa

Teorema 5.2: Determinante e matrice inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{cof}(A)^T$$

dove $\text{cof}(A)$ è la matrice dei cofattori di A , ovvero:

$$\text{cof}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$$

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Determinare l'inversa.

1. Verifichiamo se è Invertibile. $\det A = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow A$ è invertibile.
2. Calcoliamo la matrice dei cofattori:

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Calcoliamo l'inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{cof}(A)^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Possiamo verificare che l'inversa è corretta moltiplicando A per A^{-1} (e verificando che il risultato sia la matrice identità):

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-\frac{1}{2}) & 3 \cdot (-\frac{5}{2}) + 5 \cdot \frac{3}{2} \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-\frac{1}{2}) & 2 \cdot (-\frac{5}{2}) + 4 \cdot \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Il determinante permette di formulare anche una regola per calcolare il **prodotto vettoriale**, cioè un'operazione $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(u, v) = u \wedge v$, molto usata in fisica. Se $u = (a_1, a_2, a_3)$ e $v = (b_1, b_2, b_3)$, allora $u \wedge v = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix} = l_1(a_2b_3 - a_3b_2) - l_2(a_1b_3 - a_3b_1) + l_3(a_1b_2 - a_2b_1)$.

Esempio. $(1, 2, 3) \wedge (-1, 0, 2) = (4, -5, 2)$.

Il prodotto vettoriale eredita le proprietà del determinante:

- Altalenante: $u \wedge v = -v \wedge u$.
- Multilineare: $(au + bv) \wedge w = a(u \wedge w) + b(v \wedge w)$.

5.3.2 Esercizio parametrico

Esempio. Al variare del parametro t , determinare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & t \\ 0 & 1 & 2 \\ t & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = 0 + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & t \\ t & -2 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ t & -1 \end{pmatrix} = -6 - t^2 - 2(-3 + 2t) = -6 - t^2 + 6 - 4t = -t^2 - 4t = -t(t + 4).$$

- Se $t \neq 0, -4 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow rk(A) = 3$. A è invertibile.
- Se $t = 0, -4, rk(A) < 3$:

$$- t = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow rk(A) = 2. \text{ (I vettori colonna 1 e 2 sono linearmente indipendenti).}$$

$$- t = -4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow rk(A) = 2. \text{ (I vettori colonna 1 e 2 sono linearmente indipendenti).}$$

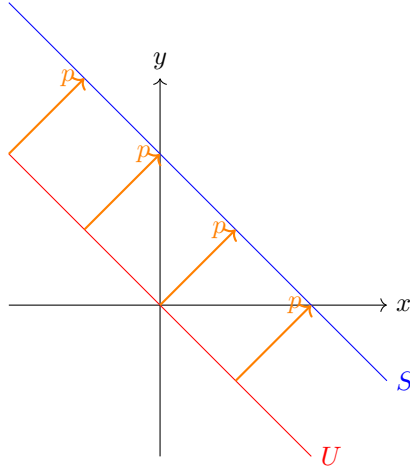
Esempio. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, calcolare la dimensione di Im e Ker dell'applicazione $f_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f_t(x, y, z) = (3x - 2y + tz, y + 2z, tx - y - 27)$. Nella base canonica $l_1 = (1, 0, 0), l_2 = (0, 1, 0), l_3 = (0, 0, 1)$, la matrice di f_t è $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & t \\ 0 & 1 & 2 \\ t & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Quindi, se $t \neq 0, -4 \Rightarrow \dim \text{Im} f_t = rk(A) = 3$ e $\dim \ker f_t = 3 - 3 = 0 \Rightarrow f_t$ è un isomorfismo. Se $t = 0, -4 \Rightarrow \dim \text{Im} f_t = rk(A) = 2$ e $\dim \ker f_t = 3 - 2 = 1 \Rightarrow f_t$ non è né iniettiva né suriettiva.

Definizione 5.5: Sottospazio affine

Un sottoinsieme S di \mathbb{K}^n è un sottospazio affine di dimensione d di \mathbb{K}^n se è ottenuto traslando un sottospazio vettoriale U di dimensione d , cioè se $\exists p \in \mathbb{K}^n$ e un sottospazio vettoriale $U \subseteq \mathbb{K}^n$ tale che $S = \{p + u \mid u \in U\}$.

Esempio. Consideriamo in \mathbb{R}^2 $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ e $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$. Disegno:



U è un sottospazio vettoriale, S non lo è.
 $S = \{p + u \mid u \in U\}$, cioè S è ottenuto traslando U di $p = (1, 1)$. S è quindi un sottospazio affine di \mathbb{R}^2 , di dimensione 1. In forma parametrica:

$$U = \{(t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$S = \{(t, -t) + (1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(t+1, 1-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Osservazione. Il vettore p non è unico, altri vettori p che traslano U in S sono $(2, 0)$, $(0, 2)$, ottenendo un diverso $S = \{(t+2, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ e $S = \{(t, 1-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Teorema 5.3: Sistema lineare omogeneo associato

Sia $Ax = b$ un sistema lineare e A la matrice $m \times n$ dei coefficienti.

Consideriamo il sistema lineare omogeneo associato $Ax = 0$. Allora:

1. L'insieme U delle soluzioni del sistema omogeneo è un sottospazio vettoriale di \mathbb{K}^n di dimensione $n - \text{rk}(A)$.
2. L'insieme S delle soluzioni del sistema non omogeneo, se non è vuoto, è un sottospazio affine di \mathbb{K}^n di dimensione $n - \text{rk}(A)$, ottenuto traslando U con qualsiasi $p \in S$ cioè $S = \{p + u \mid u \in U\}$.

Dimostrazione. Verifichiamo i due punti:

1. Siano $u_1, u_2 \in U$ (cioè $Au_1 = 0, Au_2 = 0$, quindi $A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2 = 0 + 0 = 0$). Analogamente, se $u \in U$ e $k \in \mathbb{K}$, allora $A(ku) = kAu = k0 = 0$, quindi $ku \in U$. Alla luce di questi risultati, U è un sottospazio vettoriale di \mathbb{K}^n .
2. Sia $u \in U$ (cioè $Au = 0$) e $p \in S$ (cioè $Ap = b$). Allora $u + p \in S$ perchè $A(u + p) = Au + Ap = 0 + b = b$, quindi $\{p + u \mid u \in U\} \subseteq S$.
 Siano $p, p' \in S$ (cioè $Ap = b, Ap' = b$); allora $A(p - p') = Ap - Ap' = b - b = 0$, cioè $p - p' \in U$. Quindi $p' = p + u$ con $u \in U$, cioè $S \subseteq \{p + u \mid u \in U\} \Rightarrow S = \{p + u \mid u \in U\}$.

5.4 Matrici e sistemi lineari

Consideriamo un sistema lineare di m equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Il sistema può essere riscritto nella forma matriciale $A \cdot x = B$ dove:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e si chiamano rispettivamente matrice dei coefficienti, vettore delle incognite e vettore dei termini noti.

Osservazione. La scrittura di un sistema $Ax = b$ è comoda anche per svolgere rapidamente il metodo di Gauss.

Esempio. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ -x + y - 2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Inizio a fare le operazioni secondo il metodo di Gauss:

$$\begin{array}{l} R1 \\ -2R1 + R2 \\ R1 + R3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} R1 \\ R2 \\ -\frac{3}{5}R2 + R3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{6}{5}z = -\frac{2}{5} \Rightarrow z = -\frac{2}{3} \\ -5y + 3z = 1 \Rightarrow -5y + 3 \cdot (-\frac{2}{3}) = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x + 2y - z = 1 \Rightarrow x + 2 - (-\frac{2}{3}) = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Proposizione. Metodo di Cramer: Sia $Ax = b$ un sistema di n equazioni in n incognite (A è una matrice $n \times n$).

Allora se $\det A = 0$, la soluzione del sistema non esiste o non è unica.

Se $\det A \neq 0$, allora la soluzione del sistema esiste, è unica ed è data da:

$$x = A^{-1} \cdot b = \det(A)^{-1} \cdot \text{cof}(A)^T \cdot b$$

Dimostrazione. Se $\det A = 0$, allora A non è invertibile e quindi l'applicazione $X \mapsto A \cdot X$ non è biunivoca (per qualche b non esiste x tale che $A \cdot x = b$ oppure esistono più x che soddisfano $A \cdot x = b$, ovvero la soluzione non esiste o non è unica). Se invece $\det A \neq 0$, allora esiste A^{-1} e $A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$ è l'unica soluzione del sistema.

Esempio. Risolvere: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = 7 \end{cases}$ Calcolo il determinante: $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0$.

Quindi il sistema non ha soluzione o ha infinite soluzioni.

Esempio. Risolvere: $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 2x + 4y = -1 \end{cases}$ Calcolo il determinante: $\det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 12 - 10 = 2 \neq 0$ (la soluzione è unica per ogni b).

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - \frac{5}{2} \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \frac{5}{2} \\ 2 - \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Tuttavia il metodo di Cramer funziona solo per matrici quadrate $m = n$ ed è computazionalmente costoso.

Teorema 5.4: Teorema di Rouché-Capelli

Sia $Ax = b$ un sistema di m equazioni in n incognite e $A|b$ la matrice ottenuta aggiungendo la colonna b alla matrice A . Allora il sistema ammette almeno una soluzione se e solo se $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b)$.

Dimostrazione. Se $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b)$, b è combinazione lineare dei vettori colonna di v_1, v_2, \dots, v_n di A cioè $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in K \mid b = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$.

$$\text{Quindi } A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \text{ ha la soluzione } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Se invece $\text{rk}(A|b) > \text{rk}(A)$, allora il sistema non ha soluzione (perchè b non è combinazione lineare dei vettori colonna di A).

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$

Trovare x tale che $Ax = b$.

$$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{array} \right).$$

$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|b) = 1$, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette soluzione, cioè $\exists x_1, x_2 \mid \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$

$$\text{Cioè } \exists x_1, x_2 \mid \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ -2x_1 + 4x_2 = -6 \end{cases} \quad \text{cioè il sistema ammette soluzioni.}$$

Esempio. Trovare, se esiste, un polinomio di grado ≤ 2 tale che $p(2) = 0, p(1) = 3, p(0) = 1, p(-1) = 2$.

Sia $p(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ a + b + c = 3 \\ c = 1 \\ a - b + c = 2 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{rk}(A) = 3, \text{rk}(A|b) = 4 \text{ perchè } \det A|b = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 28 \neq 0.$$

Quindi per il teorema di Rouché-Capelli il sistema non ha soluzione.

5.5 Applicazioni alla geometria analitica

5.5.1 Retta passante per due punti

Consideriamo due punti $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ in $\mathbb{R}^2, P_1 \neq P_2$. Trovare la retta che passa per P_1 e P_2 . Una retta in \mathbb{R}^2 è data dall'equazione $ax + by = c$. Si vuole quindi trovare a, b, c .

Osservazione. Se $ax + by = c$ è l'equazione di una retta, anche $2ax + 2by = 2c$ lo è. Quindi a, b, c non sono univoci.

Esempio. $P_1(1, 3), P_2(3, 2)$.

La retta passante per P_1 e P_2 è data da $ax + by = c$.

$$\begin{cases} a + 3b = c \\ 3a + 2b = c \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & c \\ 3 & 2 & c \end{array} \right) \Rightarrow \begin{matrix} R1 \\ R2 - 3R1 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & c \\ 0 & -7 & -2c \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} -7b = -2c \Rightarrow b = \frac{2}{7}c \\ a + 3 \cdot \frac{2}{7}c = c \Rightarrow a = \frac{5}{7}c \end{cases}$$

Quindi: $S = \{(\frac{1}{7}t, \frac{2}{7}t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$

5.5.2 Piano passante per tre punti

Consideriamo tre punti $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3)$ in \mathbb{R}^3 , P_1, P_2, P_3 non allineati. Trovare il piano che passa per P_1, P_2, P_3 . Un piano in \mathbb{R}^3 è dato dall'equazione $ax + by + cz = d$. Si vuole quindi trovare a, b, c, d .

Esempio. $P_1 = (1, 0, 0), P_2 = (0, 1, 1), P_3 = (2, 0, -1)$.

La retta passante per P_1, P_2, P_3 è data da $ax + by + cz = d$.

$$\begin{cases} a + b = d \\ b + c = d \\ 2a - c = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = t \\ b = d - c = 0 \\ c = -d + 2a = t \\ d = t \end{cases}$$

Quindi: $S = \{(t, 0, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Una equazione del piano è $x + z = 1$.

Osservazione. p è un sottospazio affine di dimensione 2 di \mathbb{R}^3 . S è un sottospazio affine di dimensione 1 di \mathbb{R}^4 .

Esempio. $P_1 = (2, 0, -1), P_2 = (3, 1, 0), P_3 = (4, 2, 1)$.

La retta passante per P_1, P_2, P_3 è data da $ax + by + cz = d$.

$$\begin{cases} 2a - c = d \\ 3a + b = d \\ 4a + 2b + c = d \end{cases} \Rightarrow \text{gauss} \begin{cases} 2a - c = d \\ b + \frac{3}{2}c = -\frac{1}{2}d \\ 2b + 3c = -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - c = d \\ b + \frac{3}{2}c = -\frac{1}{2}d \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{c+d}{2} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}s \\ b = -\frac{1}{2}d - \frac{3}{2}c = -\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}s \\ c = s \\ d = t \end{cases}$$

Quindi: $S = \{(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}s, -\frac{1}{2}t, -\frac{3}{2}t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. Abbiamo ottenuto un sottospazio affine di dimensione 2 perchè P_1, P_2, P_3 sono allineati, quindi P non è unico.

Definizione 5.6: Sottospazi in geometria analitica

- Un punto in \mathbb{R}^n è un sottospazio affine di dimensione 0.
- Una retta in \mathbb{R}^n è un sottospazio affine di dimensione 1.
- Un piano in \mathbb{R}^n è un sottospazio affine di dimensione 2.

Dati due punti distinti di \mathbb{K}^n , esiste un'unica retta che li contiene.

Dati tre punti non allineati di \mathbb{K}^n , esiste un unico piano che li contiene. Se invece i tre punti sono allineati, esistono infiniti piani che li contengono.

Esempio. Determinare la retta passante per i punti $P(3, 1, -1), Q(2, 2, 1)$.

$$\overrightarrow{PQ} = (2 - 3, 2 - 1, 1 - (-1)) = (-1, 1, 2).$$

Quindi la retta è data da $\{P + t\overrightarrow{PQ}, t \in \mathbb{R}\} = \{(3, 1, -1) + t(-1, 1, 2), t \in \mathbb{R}\} = \{(3 - t, 1 + t, -1 + 2t), t \in \mathbb{R}\}$. Posso esprimere la retta $r = \{3 - t, 1 + t, -1 + 2t\}$ anche tramite equazioni cartesiane con $x = 3 - t, y = 1 + t, z = -1 + 2t$.

$$\begin{cases} x + y = 4 (= 3 - t + t + 1) \\ 2x + z = 5 (= 6 - 2t - 1 + 2t) \end{cases}$$

Bastano due equazioni ($\dim \mathbb{R}^3 - \dim M = 3 - 1 = 2$) per determinare la retta, ma non sono uniche, perchè ci sono infiniti piani che passano per una retta.

Esempio. Trovare l'intersezione della retta $r = \{3 - t, t + 1, 2t - 1\}$ con il piano di equazione $x + 2y - z = 3$.

Trovo t sostituendo x, y, z con le equazioni della retta:

$$\begin{aligned} 3 - t + 2(t + 1) - (2t - 1) &= 3 \\ (3 - t) + 2(t + 1) - (2t - 1) &= 3 \\ 3 - t + 2t + 2 - 2t + 1 &= 3 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

Sostituendo in r ho il punto di intersezione: $(3 - 3, 3 + 1, 2 \cdot 3 - 1) = (0, 4, 5)$.

Esempio. Trovare la retta r' parallela alla retta $r = \{3 - t, t + 1, 2t - 1\}$ e passante per il punto $P(5, -2, 3)$.

Se r' è parallela a r , allora avrà lo stesso vettore di direzione $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ di r . Inoltre, poichè r' passa per P , allora $r' = \{P' + t\vec{v}, t \in \mathbb{R}\} = \{(5, -2, 3) + t(-1, 1, 2), t \in \mathbb{R}\} = \{(-t + 5, t - 2, 2t + 3), t \in \mathbb{R}\}$.

Esempio. Trovare, se esiste, l'intersezione tra la retta $r = \{3 - t, t + 1, 2t - 1\}$ e il piano $x + 2y - z = 3$ e la retta $r'' = \{(2s - 1, 3s + 1, s + 5), s \in \mathbb{R}\}$.

Se esiste un punto di intersezione esistono $t, s \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{cases} 3 - t = 2s - 1 \\ t + 1 = 3s + 1 \\ 2t - 1 = s + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - 3s = 2s - 1 \\ t = 3s \\ 6s - 1 = s + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 5s \\ t = 3s \\ 6 = 5s \end{cases}$$

Quindi non c'è soluzione: r, r'' sono parallele e non si intersecano. D'altra parte, non sono paralleli perchè i vettori di direzione $(-1, 1, 2)$ e $(2, 3, 1)$ non sono l'uno il multiplo dell'altro. In questo caso, r, r'' sono sghembe.

Esempio. Sia $K = \mathbb{Z}_3$. Trovare tutti gli elementi del piano di K di equazione $2x + y + z = 1$. Osserviamo che poichè $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, allora ha $3^3 = 27$ elementi e un piano in esso avrà $3^2 = 9$ elementi. $p = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{2}, \bar{1})\}$.

Esempio. Trovare tutti i polinomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ tali che $\begin{cases} p(1) = 4 \\ p'(1) = 1 \\ p''(1) = -2 \end{cases}$.

Sappiamo che $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Costruisco il sistema calcolando le derivate:

$$\begin{cases} p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ p''(x) = 6ax + 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 4 \\ 3a + 2b + c = 1 \\ 6a + 2b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = t \\ b = -1 - 3t \\ c = 3t + 3 \\ d = -t + 2 \end{cases}$$

L'insieme dei polinomi che verificano queste condizioni è $\{tx^3 + (-1 - 3t)x^2 + (3t + 3)x + (-t + 2), t \in \mathbb{R}\}$.

Se invece cerco un polinomio che, oltre a soddisfare le condizioni precedenti, verifichi anche $p'''(1) = -6$, allora la soluzione è unica: $p'''(x) = 6a$, quindi $6a = -6 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow t = -1$ e sostituendo $p(x) = -x^3 + 2x^2 + 3$.

Esempio. Trovare il piano passante per i punti $P_0(1, 0, 1), P_1(2, -1, 0), P_2(-1, 1, 1)$. Per prima cosa trovo i vettori di direzione:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \overrightarrow{P_0P_1} = (2 - 1, -1 - 0, 0 - 1) = (1, -1, -1) \\ \vec{v}_2 &= \overrightarrow{P_0P_2} = (-1 - 1, 1 - 0, 1 - 1) = (-2, 1, 0) \end{aligned}$$

Quindi il piano è dato da $\{P_0 + t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2, t, s \in \mathbb{R}\} = \{(1, 0, 1) + t(1, -1, -1) + s(-2, 1, 0), t, s \in \mathbb{R}\} = \{(1 + t - 2s, -t + s, 1 - t), t, s \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$.

6 Unità 6 - Lezioni 13, 14, 15

Definizione 6.1: Endomorfismo

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} . Un'applicazione lineare $f : V \rightarrow V$ è detta endomorfismo di V .

Definizione 6.2: Matrice diagonale

Una matrice $D(n \times n)$ è detta **diagonale** se $d_{ij} = 0 \forall i \neq j$ (cioè se è nulla al di fuori della diagonale principale).

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Osservazione. Due matrici diagonali sono semplici da moltiplicare tra loro:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} e_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$DE = \begin{pmatrix} d_{11}e_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}e_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}e_{nn} \end{pmatrix}$$

Inoltre, $\det D = d_{11}d_{22}\dots d_{nn}$ e se $\det D \neq 0$ (cioè $d_i \neq 0 \forall i$) allora D è invertibile e $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_{nn}} \end{pmatrix}.$

Inoltre $\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, D^m = \begin{pmatrix} d_{11}^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^m \end{pmatrix}.$

Definizione 6.3: Autovettore

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo. Un vettore $v \in V, v \neq 0$ è detto **autovettore** di f se $f(v) = \lambda v$ per un certo $\lambda \in \mathbb{K}$ (detto **autovalore** di f).

Esempio. $f(x, y) = (2y, 2x)$

- l_1 non è un autovettore perchè $f(l_1) = f(1, 0) = 2l_2 = (0, 2) \neq \lambda(1, 0)$.
- l_2 non è un autovettore perchè $f(l_2) = f(0, 1) = 2l_1 = (2, 0) = 2(0, 1)$.
- $v_1 = (1, 1)$ è un autovettore di autovalore 2 perchè $f(v_1) = f(1, 1) = (2, 2) = 2(1, 1) = 2v_1$.
- $v_2 = (1, -1)$ è un autovettore di autovalore -2 perchè $f(v_2) = f(1, -1) = (-2, 2) = -2(1, -1) = -2v_2$.

Matrici di f :

Base l_1, l_2	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	Non è diagonale
Base v_1, v_2	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	È diagonale

Osservazione. Se $f : V \rightarrow V$ è un endomorfismo e v_1, v_2, \dots, v_n è una base di V composta da autovettori di f allora:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ f(v_2) &= \lambda_2 v_2 = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0v_n \\ &\vdots \\ f(v_n) &= \lambda_n v_n \end{aligned}$$

Quindi la matrice di f rispetto alla base v_1, v_2, \dots, v_n è diagonale:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Passi generali per rispondere alle domande "Si può diagonalizzare f ?", "Si può trovare una base di V in cui la matrice di f è diagonale?", "esiste una base di V composta da autovettori di f ?"

1. Trovare gli autovalori di f (se esistono).
2. Per ogni autovalore λ trovare gli autovettori corrispondenti.

Definizione 6.4: Polinomio caratteristico

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Il polinomio $p(\lambda) = \det(f - \lambda I)$ è detto **polinomio caratteristico** di f .

Teorema 6.1: Autovalori e polinomio caratteristico

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Allora $\lambda_i \in K$ è un autovalore di f se e solo se $p(\lambda_i) = 0$.

Dimostrazione. λ_i è un autovalore di f se e solo se esiste un vettore $v \neq 0 \in V$ tale che $f(v) = \lambda_i v$. Quindi $f(v) = \lambda_i v \Leftrightarrow (f - \lambda_i I)(v) = 0 \Leftrightarrow \exists v \neq 0 \in \ker(f - \lambda_i I) \Leftrightarrow \ker(f - \lambda_i I) \neq \{0\} \Leftrightarrow f - \lambda_i I$ non è iniettiva e quindi non è invertibile $\Leftrightarrow \det(f - \lambda_i I) = 0 \Leftrightarrow p(\lambda_i) = 0$.

Esempio. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2y, 2x)$. Scrivo la matrice di f in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0) = (0, 2) = 0(1, 0) + 2(0, 1) = 2e_2 \\ f(e_2) &= f(0, 1) = (2, 0) = 2(1, 0) + 0(0, 1) = 2e_1 \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

Quindi gli autovalori di f sono $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$.

Per definizione gli autovettori sono i vettori $v \neq 0$ tali che $f(v) = \lambda v$, quindi, dato un vettore $v = (x, y)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2v \\ (2y, 2x) &= (2x, 2y) \\ \begin{cases} 2y = 2x \\ 2x = 2y \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases} \Rightarrow y = x \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di f sono i vettori (x, x) , $x \in \mathbb{R}$, ad esempio $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$,
Analogamente per $\lambda_2 = -2$ dato un vettore $v = (x, y)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -2v \\ (2y, 2x) &= (-2x, -2y) \\ \begin{cases} 2y = -2x \\ 2x = -2y \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow y = -x \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di f sono i vettori $(x, -x)$, $x \in \mathbb{R}$, ad esempio $(1, -1)$, $(2, -2)$, $(3, -3)$,

Esempio. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x, -4x - 2y - 8z, -4z)$.

Scrivo la matrice di f in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0, 0) = (2, -4, 0) = 2e_1 - 4e_2 + 0e_3 \\ f(e_2) &= f(0, 1, 0) = (0, -2, 0) = 0e_1 - 2e_2 + 0e_3 \\ f(e_3) &= f(0, 0, 1) = (0, 0, -4) = 0e_1 + 0e_2 - 4e_3 \\ A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)(-4-\lambda) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -4 \end{aligned}$$

Troviamo gli autovettori per ciascun autovalore, dato un vettore $v = (x, y, z)$:

- $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda_1 v \Rightarrow (2x, -4x - 2y - 8z, -4z) = (2x, 2y, 2z) \\ \begin{cases} 2x = 2x \\ -4x - 2y - 8z = 2y \\ -4z = 2z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 4y = -4x \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di f per $\lambda_1 = 2$ sono i vettori $(x, -x, 0)$, ad esempio $(1, -1, 0)$, $(2, -2, 0)$, $(3, -3, 0)$,

- $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda_2 v \Rightarrow (2x, -4x - 2y - 8z, -4z) = (-2x, -2y, -2z) \\ \begin{cases} 2x = -2x \\ -4x - 2y - 8z = -2y \\ -4z = -2z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ -2y = -2x \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di f per $\lambda_2 = -2$ sono i vettori $(0, y, 0)$, ad esempio $(0, 1, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 3, 0)$,

- $\lambda_3 = -4$:

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda_3 v \Rightarrow (2x, -4x - 2y - 8z, -4z) = (-4x, -4y, -4z) \\ \begin{cases} 2x = -4x \\ -4x - 2y - 8z = -4y \\ -4z = -4z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ -2y + 8z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4z \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di f per $\lambda_3 = -4$ sono i vettori $(0, 4z, z)$, ad esempio $(0, 4, 1)$, $(0, 8, 2)$, $(0, 12, 3)$,

Possiamo verificare che $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 4, 1)$ sono una base di \mathbb{R}^3 composta da autovettori di f . Sappiamo già da $f(v) = \lambda v$ che la matrice di f rispetto a questa base è diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Tuttavia, se il polinomio caratteristico non ha i suoi zeri in \mathbb{K} , allora non è detto che esistano autovettori.

Esempio. $K = \mathbb{Q}$, $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$, $f(x, y) = (2y, x)$, $\mathbb{Q} = \{ \text{numeri razionali} \}$.

Scrivo la matrice di f in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0) = (0, 1) = 0e_1 + 1e_2 \\ f(e_2) &= f(0, 1) = (2, 0) = 2e_1 + 0e_2 \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Quindi $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ non può essere diagonalizzata, ma può essere diagonalizzata in \mathbb{R}^2 (perchè $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$).

Esempio. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, -x)$. Scrivo la matrice di f in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0) = (0, -1) = 0e_1 - 1e_2 \\ f(e_2) &= f(0, 1) = (1, 0) = 1e_1 + 0e_2 \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i \notin \mathbb{R}$$

Quindi $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ non può essere diagonalizzata, ma può essere diagonalizzata in \mathbb{C}^2 (perchè $i \in \mathbb{C}$). Troviamo gli autovettori per ciascun autovalore, dato un vettore $v = (x, y)$:

- $\lambda_1 = i$:

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda_1 v \Rightarrow (y, -x) = (iy, -ix) \\ \begin{cases} y = iy \\ -x = -ix \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = ix \\ x = iy \end{cases} \Rightarrow y = ix \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di f per $\lambda_1 = i$ sono i vettori (x, ix) , $x \in \mathbb{R}$, ad esempio $(1, i)$, $(2, 2i)$, $(3, 3i)$,

- $\lambda_2 = -i$:

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda_2 v \Rightarrow (y, -x) = (-iy, -ix) \\ \begin{cases} y = -iy \\ -x = -ix \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = -ix \\ x = -iy \end{cases} \Rightarrow y = -ix \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di f per $\lambda_2 = -i$ sono i vettori $(x, -ix)$, $x \in \mathbb{R}$, ad esempio $(1, -i)$, $(2, -2i)$, $(3, -3i)$,

Definizione 6.5: Autospazio

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} , $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo e $\lambda_i \in \mathbb{K}$ un autovalore di f .
L'**autospazio** di f relativo all'autovalore λ_i è l'insieme $V_{\lambda_i} = \{v \in V \mid f(v) = \lambda_i v\}$.

Proposizione. 1. V_{λ_i} è un sottospazio vettoriale di V .

2. Se $\lambda_i \neq \lambda_j$ allora $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$.

Dimostrazione. 1. Se $v, u \in V_{\lambda_i}$ (cioè $f(v) = \lambda_i v$ e $f(u) = \lambda_i u$) allora $f(v + u) = f(v) + f(u) = \lambda_i v + \lambda_i u = \lambda_i(v + u)$, quindi $v + u \in V_{\lambda_i}$. Inoltre se $a \in \mathbb{K}$, $f(av) = af(v) = a\lambda_i v = \lambda_i(av)$, quindi $av \in V_{\lambda_i}$.

2. Sia $v \in V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$. Allora $\lambda_i v = f(v) = \lambda_j v \Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j)v = 0 \Rightarrow v = 0$.

Definizione 6.6: Molteplicità algebrica e geometrica

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} , $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo e $\lambda_i \in \mathbb{K}$ un autovalore di f .
La **molteplicità geometrica** di λ_i è la dimensione dell'autospazio V_{λ_i} , cioè $m_g(\lambda_i) = \dim V_{\lambda_i}$.
La **molteplicità algebrica** di λ_i è la sua molteplicità come soluzione dell'equazione $p(\lambda) = 0$, cioè quante volte λ_i annulla il polinomio caratteristico $p(\lambda)$.

Esempio. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (3x + y, 3y)$.

Scrivo la matrice di f in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$:

$$f(e_1) = f(1, 0) = (3, 0) = 3e_1 + 0e_2$$

$$f(e_2) = f(0, 1) = (1, 3) = 1e_1 + 3e_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)^2$$

Calcolo la molteplicità algebrica di $\lambda = 3$:

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda = 3$$

$$m_a(3) = 2 \text{ (perchè annulla 2 volte } p(x))$$

Troviamo gli autovettori per $\lambda = 3$, dato un vettore $v = (x, y)$:

$$f(v) = \lambda v \Rightarrow (3x + y, 3y) = (3x, 3y)$$

$$\begin{cases} 3x + y = 3x \\ 3y = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 3y = 3y \end{cases}$$

Quindi gli autovettori di f per $\lambda = 3$ sono i vettori $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, ad esempio $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$,
L'autospazio V_3 è quindi $V_3 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) = 3v\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$.

La molteplicità geometrica di $\lambda = 3$ è $m_g(3) = \dim V_3 = 1$.

Proposizione. Sia λ_i un autovalore di $f : V \rightarrow V$. Allora $1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$.

Dimostrazione. $m_g(\lambda_i) \geq 1$ perchè se $m_g(\lambda_i) = 0$ allora $V_{\lambda_i} = \{0\}$ e quindi non ci sarebbero vettori $v \in V, v \neq 0$ tali che $f(v) = \lambda_i v$ e quindi λ_i non sarebbe un autovalore di f , contraddicendo la definizione stessa di autovalore.

Sia ora $h = m_g(\lambda_i) = \dim V_{\lambda_i}$ e mostriamo che $m_a(\lambda_i) \geq h$.

Presa una base $\{v_1, v_2, \dots, v_h\}$ di V_{λ_i} , completiamola ad una base di V aggiungendo v_{h+1}, \dots, v_n . Scriviamo la matrice di f rispetto a questa base:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda_i v_1 = \lambda_i v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ f(v_2) &= \lambda_i v_2 = 0v_1 + \lambda_i v_2 + \dots + 0v_n \\ &\vdots \\ f(v_h) &= \lambda_i v_h = 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_i v_h \\ f(v_{h+1}) &= \lambda_i v_{h+1} = a_{1,h+1}v_1 + a_{2,h+1}v_2 + \dots + a_{h,h+1}v_h + \lambda_i v_{h+1} \\ &\vdots \\ f(v_n) &= \lambda_i v_n = a_{1,n}v_1 + a_{2,n}v_2 + \dots + a_{h,n}v_h + \lambda_i v_n \end{aligned}$$

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda_i - \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{1,h+1} \\ 0 & \lambda_i - \lambda & \cdots & 0 & a_{2,h+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & a_{h,h+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Quindi $\det(A - \lambda I_n) = (\lambda_i - \lambda)^h \cdot q(\lambda)$, dove $q(\lambda)$ è un polinomio di grado $n - h$. Quindi il fattore $(\lambda_i - \lambda)^h$ è presente nel polinomio caratteristico $p(\lambda)$ almeno h volte, cioè $m_a(\lambda_i) \geq h$.

Teorema 6.2: Criterio di diagonalizzabilità

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ i suoi autovalori. f è diagonalizzabile se e solo se valgono le seguenti due condizioni:

1. $\lambda_i \in \mathbb{K}$ per ogni $i = 1, 2, \dots, k$, ovvero tutti gli autovalori sono nel campo.
2. $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ per ogni $i = 1, 2, \dots, k$, ovvero la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica per ogni autovalore.

Dimostrazione. Supponiamo che valga la condizione 1, cioè $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t \in \mathbb{K}$ e consideriamo gli autospazi $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_t}$.

Sia $U = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t}$, cioè U è la somma diretta degli autospazi (perchè $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$ se $\lambda_i \neq \lambda_j$).

Sia \mathcal{B}_1 una base di V_{λ_1} , \mathcal{B}_2 una base di V_{λ_2} , ..., \mathcal{B}_t una base di V_{λ_t} ; quindi poichè la somma è diretta $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_t$ è una base di U . Quindi $\dim U = \dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_t} = m_g(\lambda_1) + m_g(\lambda_2) + \dots + m_g(\lambda_t)$.

D'altra parte $\dim V = m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) + \dots + m_a(\lambda_t)$.

Se vale la condizione 2 allora $\dim U = \dim V$ e quindi $U = V$ e quindi \mathcal{B} è una base di V composta da autovettori di f e quindi la matrice di f rispetto a \mathcal{B} è diagonale.

Se non vale la condizione 2 allora $\dim U = m_g(\lambda_1) + m_g(\lambda_2) + \dots + m_g(\lambda_t) < m_a(\lambda_1) + m_a(\lambda_2) + \dots + m_a(\lambda_t) = \dim V$ e quindi \mathcal{B} non è una base di V . Posso completare \mathcal{B} ad una base di V ma i vettori che aggiungo non sono autovettori di f e quindi la matrice di f rispetto a \mathcal{B} non è diagonale.

Osservazione. Se valgono 1 e 2 la dimostrazione ci fornisce un algoritmo esplicito per trovare la base di autovettori di V : basta unire le basi degli autospazi.

Esempio. Consideriamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $f : V \rightarrow V$, $f(x, y, z) = (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z)$. Trovare, se possibile, una base di \mathbb{R}^3 in cui la matrice di f è diagonale.

Scrivo la matrice di f in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0, 0) = (1, 3, 6) = 1e_1 + 3e_2 + 6e_3 \\ f(e_2) &= f(0, 1, 0) = (-3, -5, -6) = -3e_1 - 5e_2 - 6e_3 \\ f(e_3) &= f(0, 0, 1) = (3, 3, 4) = 3e_1 + 3e_2 + 4e_3 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

Quindi gli autovalori di f sono $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4$ con molteplicità algebrica rispettivamente $m_a(-2) = 2, m_a(4) = 1$.

Troviamo gli autovettori per $\lambda_1 = -2$, dato un vettore $v = (x, y, z)$:

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = -2v\} \\ f(v) = \lambda_1 v &\Rightarrow (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z) = (-2x, -2y, -2z) \\ \begin{cases} x - 3y + 3z = -2x \\ 3x - 5y + 3z = -2y \\ 6x - 6y + 4z = -2z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y + 3z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \\ 6x - 6y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow x + z = y \Rightarrow m_g(-2) = 2 \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di f per $\lambda_1 = -2$ sono i vettori $(x, x+z, z), x, z \in \mathbb{R}$, ad esempio $(1, 1, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 0), \dots$. Di conseguenza la base $\mathbb{B}_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ è la base di V_{λ_1} .

Troviamo gli autovettori per $\lambda_2 = 4$, dato un vettore $v = (x, y, z)$:

$$\begin{aligned} V_{\lambda_2} &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 4v\} \\ f(v) = \lambda_2 v &\Rightarrow (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z) = (4x, 4y, 4z) \\ \begin{cases} x - 3y + 3z = 4x \\ 3x - 5y + 3z = 4y \\ 6x - 6y + 4z = 4z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -6x = -3z \\ -6x = -3z \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 2x \end{cases} \Rightarrow m_g(4) = 1 \end{aligned}$$

Quindi gli autovettori di f per $\lambda_2 = 4$ sono i vettori $(t, t, 2t), t \in \mathbb{R}$, ad esempio $(1, 1, 2), (2, 2, 4), (3, 3, 6), \dots$. Di conseguenza la base $\mathbb{B}_2 = \{(1, 1, 2)\}$ è la base di V_{λ_2} .

Per il teorema di diagonalizzabilità f è diagonalizzabile se e solo se $m_a(-2) = m_g(-2)$ e $m_a(4) = m_g(4)$, cioè se e solo se $m_a(-2) = 2 = m_g(-2)$ e $m_a(4) = 1 = m_g(4)$.

La base di autovettori di f è quindi $\mathcal{B} = \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 2)\}$. In questa base la matrice di f è diagonale:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= -2v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\ f(v_2) &= 0v_1 - 2v_2 + 0v_3 \\ f(v_3) &= 0v_1 + 0v_2 + 4v_3 \\ D &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esempio. Dati $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f(x, y, z, w) = (y, z, w, 0)$. Dire se f è diagonalizzabile e in caso affermativo trovare una base di autovettori.

Scrivo la matrice di f in una base qualsiasi, ad esempio quella canonica $e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)$:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4 \\ f(e_2) &= f(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0) = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4 \\ f(e_3) &= f(0, 0, 1, 0) = (0, 1, 0, 0) = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4 \\ f(e_4) &= f(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 0) = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 + 0e_4 \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-\lambda)^3 = \lambda^4$$

Quindi l'unico autovalore di f è $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica $m_a(0) = 4$.

$f(x, y, z, w) = 0 \cdot (x, y, z, w) \Rightarrow (y, z, w, 0) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow y = z = w = 0$. Quindi l'autospazio $V_{\lambda_1} = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid f(v) = 0v\} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y = z = w = 0\} = \{(x, 0, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ con base $\{e_1\} = \{(1, 0, 0, 0)\} \Rightarrow m_g(0) = 1$.

Per il teorema di diagonalizzabilità f è diagonalizzabile se e solo se $m_a(0) = m_g(0)$, cioè se e solo se $4 = 1$, che è falso.

Quindi f non è diagonalizzabile.

Definizione 6.7: Endomorfismo nilpotente

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo.

f si dice **nilpotente** se esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $f^n = 0$, cioè $f \circ f \circ \dots \circ f(v) = 0 \forall v \in V$.

Definizione 6.8: Matrice nilpotente

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$.

A si dice **nilpotente** se esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $A^n = 0$, cioè $A \cdot A \cdot \dots \cdot A = 0$ (la matrice ha tutti gli elementi nulli).

Teorema 6.3: Endomorfismo nilpotente non diagonalizzabile

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo.

Se f è nilpotente allora f non è diagonalizzabile.

Dimostrazione. Sia λ un autovalore di f e sia v un autovettore relativo ad λ , cioè $f(v) = \lambda v$.

Poichè f è nilpotente esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $f^n = 0$, cioè $f \circ f \circ \dots \circ f(v) = 0$, in particolare $f^n(v) = 0$.

D'altra parte $f^n(v) = f^{n-1}(\lambda v) = \lambda f^{n-1}(v) = \dots = \lambda^n v$.

Quindi $\lambda^n = 0$ (perchè $f^n(v) = 0$) e quindi $\lambda = 0$.

Quindi l'unico autovalore di f è $\lambda = 0$. Di conseguenza, se f fosse diagonalizzabile, avrebbe come matrice una matrice diagonale con tutti gli elementi nulli, cioè la matrice nulla, che è assurdo.

Esempio. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ è una matrice non diagonalizzabile. A si può scrivere come somma di una matrice diagonalizzabile (anzi già diagonale) e di una matrice nilpotente:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A quindi non è nilpotente ma non si diagonalizza.

Definizione 6.9: Blocco di Jordan

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice non diagonalizzabile.

Un **blocco di Jordan** di A è una matrice quadrata $J \in M_k(\mathbb{K})$ della forma:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

dove λ è l'autovalore di A e k è la molteplicità geometrica di λ .

In sostanza, un blocco di Jordan è una matrice diagonale con tutti gli elementi uguali a λ e con una riga di 1 sulla diagonale superiore.

$p(\lambda) = (\lambda_i - \lambda) \cdot \det J_{\lambda_i, n-1} = \dots = (\lambda_i - \lambda)^n \Rightarrow$ l'unico autovalore di J è λ_i e la molteplicità algebrica è $m_a(\lambda_i) = n$. $\forall n > 1 J_{\lambda_i, n}$ non è diagonalizzabile. Notiamo che $J_{\lambda_i, 1}$ è somma di una matrice diagonale e di una matrice nilpotente.

Esempio. $J_{7,3} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ è un blocco di Jordan di ordine 3. Controllare se è diagonalizzabile:

$$p(\lambda) = \det(J_{7,3} - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)^3 \Rightarrow \lambda_1 = 7 \Rightarrow m_a(7) = 3$$

$$V_7 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid J_{7,3}(x_1, x_2, x_3) = 7(x_1, x_2, x_3)\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 \\ 7x_2 \\ 7x_3 \end{pmatrix}\}$$

$\Rightarrow \begin{cases} 7x_1 + x_2 = 7x_1 \\ 7x_2 + x_3 = 7x_2 \\ 7x_3 = 7x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ Quindi $V_7 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $m_g(7) = 1 \Rightarrow J_{7,3}$ non è diagonalizzabile.

Teorema 6.4: Decomposizione canonica di Jordan

Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ gli autovalori di f .

Allora:

1. f è somma di una applicazione diagonalizzabile f_d e di una applicazione nilpotente f_n . Tale decomposizione $f = f_d + f_n$ è unica e f è diagonalizzabile se e solo se $f_n = 0$.
2. Esiste una base di V in cui la matrice di f è la forma canonica di Jordan (dove per ciascun autovalore λ_i si hanno $m_g(\lambda_i)$ blocchi di Jordan, la cui somma delle dimensioni è $m_a(\lambda_i)$).

$$\begin{pmatrix} J_{\lambda_1, n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2, n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{\lambda_k, n_k} \end{pmatrix}$$

Esempio. Supponiamo di avere $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ con autovalori $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$ con molteplicità algebrica rispettivamente $m_a(7) = 3, m_a(3) = 2, m_a(-2) = 1$. Supponiamo inoltre che tutte le molteplicità geometriche siano -1 (quindi f non è diagonalizzabile).

Per il teorema della decomposizione canonica di Jordan, esiste una base di \mathbb{R}^6 in cui la matrice di f è:

$$\begin{pmatrix} J_{7,3} & 0 & 0 \\ 0 & J_{3,2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{-2,1} \end{pmatrix}$$

Esempio. Sia $V = \mathbb{K}[x]_{\leq 3} = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{K}\}$. Consideriamo l'endomorfismo $f : V \rightarrow V$ definito da $f(p(x)) = p'(x)$, cioè la derivata di $p(x) = b + 2cx + 3dx^2$. Dire se f è diagonalizzabile. $d^4(p(x)) = 0 \forall p(x)$ di grado ≤ 3 . $d'' = 0, d \neq 0 \Rightarrow d$ non è diagonalizzabile.

7 Unità 7 - Lezioni 16, 17

7.1 Forme bilineari e prodotti scalari

Definizione 7.1: Forma bilineare

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} .

Una **forma bilineare** su V è una funzione $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ che è lineare rispetto ad entrambe le variabili, cioè:

1. $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z) \quad \forall x, y, z \in V$
2. $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z) \quad \forall x, y, z \in V$
3. $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) = f(x, \lambda y) \quad \forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{K}$

Esempio. $V : \mathbb{R}^2, \beta(v, u) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2, v = (x_1, x_2), u = (y_1, y_2), v' = (x'_1, x'_2)$. Verificare se β è una forma bilineare.

$$\beta(v + v', u) = 2(x_1 + x'_1)y_1 + (x_1 + x'_1)y_2 + 3(x_2 + x'_2)y_1 - (x_2 + x'_2)y_2 = 2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 2x'_1y_1 + x'_1y_2 + 3x'_2y_1 - x'_2y_2 = \beta(v, u) + \beta(v', u).$$

Analogamente si verifica che $\beta(v, u + u') = \beta(v, u) + \beta(v, u')$.

$$\beta(av, u) = 2(ax_1)y_1 + (ax_1)y_2 + 3(ax_2)y_1 - (ax_2)y_2 = a(2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2) = a\beta(v, u).$$

Analogamente si verifica che $\beta(v, au) = a\beta(v, u)$.

Quindi β è una forma bilineare.

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^2$ su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e sia $v = (x_1, x_2), u = (y_1, y_2)$.

Verificare se $\beta(v, u) = x_1y_1 + x_2y_2$ è una forma bilineare.

$$\beta(av, u) = (ax_1)(ay_1) + y_1y_2 = a^2x_1y_1 + a^2x_2y_2 = a^2\beta(v, u) \neq a\beta(v, u).$$

Quindi β non è una forma bilineare.

Definizione 7.2: Forma bilineare simmetrica

Una forma bilineare $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ si dice **simmetrica** se $\beta(v, u) = \beta(u, v) \quad \forall v, u \in V$. Una forma bilineare $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ si dice **antisimmetrica** se $\beta(v, u) = -\beta(u, v) \quad \forall v, u \in V$.

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^2$ su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e sia $v = (x_1, x_2), u = (y_1, y_2)$.

1. Verificare se $\beta(v, u) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 4x_2y_2$ è simmetrica.

$$\beta(u, v) = 2y_1x_1 - 3y_1x_2 - 3y_2x_1 + 4y_2x_2 = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 4x_2y_2 = \beta(v, u).$$

Quindi β è simmetrica.

2. Verificare se $\beta(v, u) = x_1y_2 - x_2y_1$ è antisimmetrica.

$$\beta(u, v) = y_1x_2 - y_2x_1 = -x_1y_2 + x_2y_1 = -\beta(v, u).$$

Quindi β è antisimmetrica.

Osservazione. $\beta = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$

3. Verificare se $\beta(v, u) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1$ è simmetrica o antisimmetrica.

$$\beta(u, v) = 2y_1x_2 - 3y_2x_1 = 2x_2y_1 - 3x_1y_2 \neq \beta(v, u) \neq -\beta(v, u).$$

Quindi β non è simmetrica né antisimmetrica. Lo si può vedere anche con un esempio numerico:

$$\beta((1, 0), (1, 1)) = 2, \beta((1, 1), (1, 0)) = -3.$$

4. Può esistere una forma bilineare che sia sia simmetrica che antisimmetrica?

$$\beta(v, u) = \beta(u, v) = -\beta(v, u) \Rightarrow \beta(v, u) = -\beta(v, u) \Rightarrow 2\beta(v, u) = 0 \Rightarrow \beta(v, u) = 0 \quad \forall v, u \in V.$$

Quindi solo la forma bilineare nulla è sia simmetrica che antisimmetrica.

Osservazione. Ogni forma bilineare β si può scrivere come somma di una forma bilineare simmetrica β_s e di una forma bilineare antisimmetrica β_a :

$$\begin{aligned}\beta(v, u) &= \beta_s(v, u) + \beta_a(v, u) \\ \beta_s(v, u) &= \frac{\beta(v, u) + \beta(u, v)}{2} \\ \beta_a(v, u) &= \frac{\beta(v, u) - \beta(u, v)}{2}\end{aligned}$$

Definizione 7.3: Matrice di una forma bilineare

la matrice di una forma bilineare $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ rispetto ad una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di V è la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ tale che $a_{ij} = \beta(v_i, v_j)$.

Osservazione. Se $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n, u = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$ allora $\beta(v, u) = (a_1, a_2, \dots, a_n)A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Esempio. Sia $v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1)$ una base di $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta(v, u) = x_1y_1 + 2x - 1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$ una forma bilineare su V . Trovare la matrice di β rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$.

$$\begin{aligned}\beta(v_1, v_1) &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5 \\ \beta(v_1, v_2) &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = -3 \\ \beta(v_2, v_1) &= -3 \\ \beta(v_2, v_2) &= 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = -7 \\ A &= \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Definizione 7.4: Matrice simmetrica e antisimmetrica

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice **simmetrica** se $A = A^T$ e si dice **antisimmetrica** se $A = -A^T$.

Esempio. 1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ è simmetrica.

2. $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ è antisimmetrica.

3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ non è nè simmetrica nè antisimmetrica.

Osservazione. Una forma bilineare β è simmetrica se e solo se la sua matrice rispetto ad una base è simmetrica. Analogamente, una forma bilineare β è antisimmetrica se e solo se la sua matrice rispetto ad una base è antisimmetrica.

Definizione 7.5: Matrici congruenti

Due matrici A, M si dicono **congruenti** se esiste una matrice invertibile B tale che $A = B^T M B$.

Teorema 7.1: Matrici congruenti e forme bilineari

Due matrici A, M sono congruenti se e solo se rappresentano la stessa forma bilineare rispetto a basi diverse.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ due basi di V . Siano $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$ e $u = b_1v_1 + \dots + b_nv_n = y_1u_1 + \dots + y_nu_n$.

Sia B la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' , cioè $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Allora $\beta(v, u) = (a_1 \ \cdots \ a_n) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (x_1 \ \cdots \ x_n) B^T A B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \ \cdots \ x_n) M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Osservazione. Se β è simmetrica si può sempre trovare una base diagonalizzante.

Teorema 7.2: Diagonalizzazione di una forma bilineare simmetrica

Sia $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica.

Allora esiste una base \mathcal{B} di V tale che la matrice di β rispetto a \mathcal{B} è diagonale.

In altre parole, se A è una matrice simmetrica allora esiste una matrice diagonale che è congruente ad A .

Dimostrazione. Definiamo una base qualsiasi di $V : \mathcal{B} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$.

1. Se $\beta(w_1, w_1) \neq 0$ vado allo step 2.

Se $\beta(w_1, w_1) = 0$ ma esiste i tale che $\beta(w_i, w_i) \neq 0$ allora scambio w_1 con w_i e vado allo step 2.

Se $\beta(w_i, w_i) = 0 \ \forall i \neq 1$ allora cerco i, j tali che $\beta(w_i, w_j) \neq 0$ e scambio w_1 con $w_i + w_j$, w_2 con w_j , w_i con w_1 e w_j con w_2 e vado allo step 2.

2. Dal passo 1, $\beta(w_1, w_1) \neq 0$. Definiamo una nuova base w'_1, w'_2, \dots, w'_n tale che $w'_1 = w_1$ e $w'_i = w_i - \frac{\beta(w_i, w_1)}{\beta(w_1, w_1)} w_1 \ \forall i \neq 1$.

In questo modo $\beta(w'_i, w'_1) = \beta(w_i, w_1) - \frac{\beta(w_i, w_1)}{\beta(w_1, w_1)} \beta(w_1, w_1) = 0 \ \forall i \neq 1$.

Ora w'_1 non lo tocco più e riapplico il passo 1 e passo 2 a w'_2, \dots, w'_n .

Dopo $n - 1$ iterazioni si ottiene una base u_1, u_2, \dots, u_n tale che la matrice β rispetto a tale base è diagonale.

Teorema 7.3: Teorema di Sylvester

Sia $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica.

Esiste una base u_1, u_2, \dots, u_n di V tale che la matrice di β rispetto a tale base è diagonale con r elementi 1, s elementi -1 e $n - r - s$ elementi 0. I numeri r, s dipendono solo da β e non dalla base scelta e sono detti **segnatura** di β .

Dimostrazione. Per il teorema di diagonalizzazione esiste una base v_1, v_2, \dots, v_n tale che la matrice di β rispetto a tale base è diagonale.

Quindi:

$$\beta(v_i, v_i) > 0 \ \forall i = 1, 2, \dots, r$$

$$\beta(v_i, v_i) < 0 \ \forall i = r + 1, r + 2, \dots, r + s$$

$$\beta(v_i, v_i) = 0 \ \forall i = r + s + 1, r + s + 2, \dots, n$$

Consideriamo la base $u_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\beta(v_i, v_i)|}} & \text{se } i \leq r + s \\ v_i & \text{se } i > r + s \end{cases}$

così che $\beta(u_1, u_1) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1, 2, \dots, r \\ -1 & \text{se } i = r + 1, r + 2, \dots, r + s \\ 0 & \text{se } i = r + s + 1, r + s + 2, \dots, n \end{cases}$.

Teorema 7.4: Teorema di Sylvester per le forme quadratiche

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{C} e sia β una forma bilineare simmetrica su V . Allora esiste una base u_1, u_2, \dots, u_n di V tale che la matrice di β rispetto a tale base è diagonale del tipo:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

dove r è il rango della matrice.

Dimostrazione. Come nella dimostrazione precedente, salvo che $\forall i = r+1, r+2, \dots, r+s$ si ha $\beta(v_i, v_i) = 0$. Definisco $u_i = \frac{1}{\sqrt{|\beta(v_i, v_i)|}} v_i$ così che $\beta(u_i, u_i) = (\frac{1}{\sqrt{|\beta(v_i, v_i)|}})^2 \beta(v_i, v_i) = 1$.

Corollario 7.1: Congruenza e segnatura

Due matrici simmetriche A, B sono congruenti su \mathbb{R} se e solo se hanno la stessa segnatura. Sono invece congruenti su \mathbb{C} se e solo se hanno lo stesso rango.

Esempio. Le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ sono congruenti su \mathbb{C} perchè hanno entrambe rango 2 ma non sono congruenti su \mathbb{R} perchè hanno segnature diverse (rispettivamente 2, 0 e 1, 1).

Definizione 7.6: Forma quadratica

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e sia $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica. La **forma quadratica** associata a β è la funzione $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ definita da $q(v) = \beta(v, v) \forall v \in V$.

Osservazione. Data q posso ricostruire β , perchè $\beta(v, u) = \frac{1}{2}(q(v+u) - q(v) - q(u))$.

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^2, v = (x_1, x_2), u = (y_1, y_2), \beta(v, u) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2$. La forma quadratica associata a β è $q(v) = \beta(v, v) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2$.

Osservazione. Si chiama forma quadratica perchè $\forall a \in \mathbb{K}, q(av) = a^2q(v)$. Se $q(0) = \beta(0, 0) = 0$

Definizione 7.7: Forma quadratica definita positiva, negativa, semidefinita, indefinita

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e sia $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma quadratica. q è:

- **definita positiva** se $q(v) > 0 \forall v \neq 0, v \in V$
- **definita negativa** se $q(v) < 0 \forall v \neq 0, v \in V$
- **semidefinita positiva** se $q(v) \geq 0 \forall v \in V$
- **semidefinita negativa** se $q(v) \leq 0 \forall v \in V$
- **indefinita** se esistono $v_1, v_2 \in V$ tali che $q(v_1) > 0$ e $q(v_2) < 0$

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^2, v = (x_1, x_2)$.

- $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ è definita positiva, perchè $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0 \forall x_1, x_2 \neq 0$.
- $q(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ è definita negativa, perchè $q(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 < 0 \forall x_1, x_2 \neq 0$.
- $q(x_1, x_2) = x_1^2$ è semidefinita positiva, perchè $q(x_1, x_2) = x_1^2 \geq 0 \forall x_1, x_2$, ma $q(0, 1) = 0$.
- $q(x_1, x_2) = -x_1^2$ è semidefinita negativa, perchè $q(x_1, x_2) = -x_1^2 \leq 0 \forall x_1, x_2$, ma $q(0, 1) = 0$.
- $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ è indefinita, perchè $q(1, 0) = 1 > 0$ e $q(0, 1) = -1 < 0$.

- $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 9x_2^2 + 6x_1x_2$ è semidefinita positiva, perchè $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 9x_2^2 + 6x_1x_2 = (x_1 + 3x_2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 = -3x_2 \forall x_1, x_2$. Dunque ad esempio $q(-3, 1) = 0$.

Osservazione. • q è definita positiva se e solo se la segnatura di β è $(n, 0)$, ovvero esiste una base in cui la matrice di β è I_n .

- q è definita negativa se e solo se la segnatura di β è $(0, n)$.
- q è semidefinita positiva se e solo se la segnatura di β è $(r, n-r)$ con $r \leq n$.
- q è semidefinita negativa se e solo se la segnatura di β è $(n-r, r)$ con $r \leq n$.
- q è indefinita se e solo se la segnatura di β è (r, s) con $r, s \neq 0$.

Definizione 7.8: Matrice hessiana

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} e sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di n variabili, derivabile due volte.

Dato $v \in \mathbb{R}^n$, la **matrice hessiana** di f in v è la matrice $Hf(v) \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(v)$.

Se le derivate seconde sono continue allora $Hf(v)$ è simmetrica.

Inoltre, se $Hf(v)$ è:

- definita positiva allora f ha un minimo locale in v
- definita negativa allora f ha un massimo locale in v
- indefinita allora f ha un punto di sella in v

Definizione 7.9: Prodotto scalare

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .

Un **prodotto scalare** su V è una forma bilineare simmetrica $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ che è definita positiva.

Esempio. • $V = \mathbb{R}^n, v = (x_1, x_2, \dots, x_n), u = (y_1, y_2, \dots, y_n), \beta(v, u) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ è un prodotto scalare standard. Infatti, la sua matrice nella base canonica è I_n .

- $V = \{\text{funzioni } [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}, \beta(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ è un prodotto scalare? No, la funzione è bilineare e simmetrica ma non è definita positiva perchè $\beta(f, f) = \int_a^b f^2(x)dx \geq 0$ ma $\beta(f, f) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \forall x \in [a, b]$.
- $U = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}, \beta(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ è un prodotto scalare? Sì, perchè è bilineare, simmetrica e definita positiva perchè sia $t \neq 0$ allora $\exists p \in]a, b[$ tale che $f(p) \neq 0$ e quindi $\int_a^b f^2(x)dx > 0$.

Definizione 7.10: Versore

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e sia $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ un prodotto scalare.

Un vettore $v \in V$ si dice **versore** se $\beta(v, v) = 1$. Inoltre, v, u sono ortogonali se $\beta(v, u) = 0$.

Un insieme di vettori sono **ortonormali** se sono versori tra loro ortogonali, cioè se $\forall i, j, \beta(V_i, V_j) =$

$$\begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Teorema 7.5: Base e prodotto scalare

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e sia $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ un prodotto scalare.

Allora esiste una base ortonormale di V rispetto a β .

Dimostrazione. Per il teorema di Sylvester, poichè il prodotto scalare è una forma bilineare simmetrica, esiste una base v_1, v_2, \dots, v_n tale che la matrice di β rispetto a tale base è diagonale con r elementi 1, s elementi -1 e $n - r - s$ elementi 0.

Poichè è definita positiva, la segnatura è $(n, 0)$, quindi $r = n$ e $s = 0$, cioè la matrice è I_n .

$$\text{Dunque } (V_i, V_j) = (I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

8 Unità 8 - Lezioni 18, 19, 20

Proposizione. Il prodotto scalare di due vettori è uguale al prodotto scalare standard dei vettori delle loro coordinate rispetto ad una base ortonormale.

Dimostrazione. Sappiamo che, se β è una forma lineare e A è la sua matrice rispetto a una base v_1, v_2, \dots, v_n , e se $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ e $u = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n$, allora $\beta(v, u) =$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Ora, se β è un prodotto scalare e v_1, v_2, \dots, v_n è una base ortonormale, allora $A = I_n$ e quindi $(v, u) =$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) I_n \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Proposizione. Se v_1, v_2, \dots, v_n sono vettori tra loro ortogonali, allora sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Supponiamo che $(v_i, v_j) = 0$ per $i \neq j$ e vogliamo mostrare che se $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$ allora $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

In effetti, per ogni $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ abbiamo che $(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n, v_i) = a_1 (v_1, v_i) + a_2 (v_2, v_i) + \dots + a_n (v_n, v_i) = a_i (v_i, v_i) = 0$. Quindi $(v_i, a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = (v_i, 0) = 0$

Esempio. Consideriamo la forma bilineare su \mathbb{R}^2 , $v = (a_1, a_2)$, $u = (b_1, b_2)$ e $\beta(v, u) = a_1 b_1 + 5a_2 b_2 + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1$.

β è un prodotto scalare?

Osserviamo che è bilineare e simmetrica perchè $\beta(v, u) = a_1 b_1 + 5a_2 b_2 + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 = a_1 b_1 + 5a_2 b_2 + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 = \beta(u, v)$.

è definita positiva?

Nella base canonica, la matrice di β è $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Ponendo $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = e_2 - 2e_1 = -2e_1 + e_2 = (-2, 1)$, abbiamo che $\beta(v_1, v_2) = 0$ e $\beta(v_2, v_2) = 1$.

Nella base $\{v_1, v_2\}$, la matrice di β è I_2 , di conseguenza la segnatura di β è $(2, 0)$ e quindi β è definita positiva, cioè è un prodotto scalare.

Proposizione. Disuguaglianza di Carichy-Schwartz

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e sia $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ un prodotto scalare.

Allora $\forall v, u \in V$ vale che $|\beta(v, u)| \leq \sqrt{\beta(v, v)} \sqrt{\beta(u, u)}$ e l'uguaglianza vale se e solo se v e u sono linearmente dipendenti.

Definizione 8.1: Angolo convesso

L'angolo convesso tra $v, u \in V$ è $\theta = \arccos \left(\frac{\beta(v, u)}{\sqrt{\beta(v, v)} \sqrt{\beta(u, u)}} \right)$.

Definizione 8.2: Distanza euclidea

La distanza euclidea tra due punti $P, Q \in \mathbb{R}^n$ è $d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$.

Esempio. $P = (3, 1), Q = (5, 0)$. Calcolare la distanza euclidea tra P e Q .
 $d(P, Q) = \sqrt{(3-5)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

Teorema 8.1: Proprietà distanza euclidea

La distanza euclidea gode delle seguenti proprietà:

1. $d(P, Q) \geq 0$ e $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$
2. $d(P, Q) = d(Q, P) \forall P, Q \in V$
3. $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q) \forall P, Q, R \in V$ (disuguaglianza triangolare)

Dimostrazione. 1. Poichè un prodotto scalare è definito positivo, $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}) \geq 0$ e quindi $\|\overrightarrow{PQ}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow P = Q$.

2. Se $a \in \mathbb{R}, \|av\| = \sqrt{(av, av)} = \sqrt{a^2(v, v)} = |a|\sqrt{(v, v)} = |a|\|v\|$.
 In particolare, se $a = -1, d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{QP}\| = d(Q, P)$.

3. $d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}\| \leq \|\overrightarrow{PR}\| + \|\overrightarrow{RQ}\| = d(P, R) + d(R, Q)$.

4. Se $v, w \in V, \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ perchè $\|v+w\|^2 = (v+w, v+w) = (v, v) + 2(v, w) + (w, w) \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$. In particolare per $v = \overrightarrow{PR}, w = \overrightarrow{RQ}, v+w = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} \leq \overrightarrow{PQ}$.

Definizione 8.3: Sottospazio ortogonale

Sia U un sottospazio vettoriale. Il **sottospazio ortogonale** di U è $U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in U, \beta(v, u) = 0\}$.

Osservazione. Se $v_1, v_2, \dots, v_n \in U^\perp$ allora $(v_1, u) = 0, (v_2, u) = 0, \dots, (v_n, u) = 0 \forall u \in U$ e quindi $(v_1 + v_2, u) = (v_1, u) + (v_2, u) = 0 \Rightarrow v_1 + v_2 \in U^\perp$. Analogamente, se $v \in U^\perp$ e $a \in \mathbb{K}$ allora $(av, u) = a(v, u) = 0 \Rightarrow av \in U^\perp$.

Osservazione. Osserviamo anche che $U \cap U^\perp = \{0\}$, infatti se $u \in U, U^\perp$ allora $(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$.

Inoltre, se u_1, u_2, \dots, u_n è una base di U allora $U^\perp \Leftrightarrow (v, u_1) = 0, (v, u_2) = 0, \dots, (v, u_n) = 0$.
 Quindi, se $\dim U = k$ allora $\dim V = n, \dim U^\perp = n - k$ (è descritto da k equazioni cartesiane).
 Pertanto, $V = U \oplus U^\perp$.

Esempio. $V = \mathbb{R}^5, U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in V \text{ tale che } x_1 - 2x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = x_2 + x_5\}$.
 $U = \{(2t, t, 0, t+s, s), s, t \in \mathbb{R}\}$.

Una base di U è $u_1 = (2, 1, 0, 1, 0), u_2 = (0, 0, 0, 1, 1)$.

Rispetto al prodotto scalare standard, $U^\perp = \{v \in V \mid (v, u) = 0 \forall u \in U\} = \{v \in V \mid (v, u_1) = 0, (v, u_2) = 0\}$.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Quindi $\dim U^\perp = 5 - 2 = 3$ e $U^\perp = \{\frac{a-c}{2}, c, b, -a, a \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Esempio. Trovare in $V = \mathbb{R}^2$ la retta r perpendicolare a $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$ e passante per il punto $P = (2, 3)$.

Rispetto al prodotto scalare standard, $U = \langle u_1 = (2, -1) \rangle \Rightarrow U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid (v, u_1) = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$.

La retta r è parallela a U^\perp e passante per $P = (2, 3)$, quindi $r = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 2 \cdot 2 - 3 = 1\}$.

L'equazione di r è $2x - y = 1$.

8.1 Isometrie

Definizione 8.4: Isometria

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e sia $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ un prodotto scalare.
Un'applicazione lineare $f : V \rightarrow V$ è un'**isometria** se preserva il prodotto scalare, cioè $(f(v), f(u)) = (v, u) \forall v, u \in V$.

Osservazione. "Isometria" = "stessa misura"

Proposizione. f è un isometria $\Leftrightarrow \forall v, u \in V, \|f(v)\| = \|v\|$.

Dimostrazione. \Rightarrow Se f è un'isometria, allora $\|f(v)\| = \sqrt{(f(v), f(v))} = \sqrt{(v, v)} = \|v\|$.

\Leftarrow Dati $v, u \in V$, calcoliamo $\|v+u\|^2 - \|v-u\|^2 = (v+u, v+u) - (v-u, v-u) = 4(v, u) \Rightarrow (v, u) = \frac{\|v+u\|^2 - \|v-u\|^2}{4}$.

Quindi se f conserva la norma $(v, u) = \frac{\|f(v)+f(u)\|^2 - \|f(v)-f(u)\|^2}{4} = \frac{\|v+u\|^2 - \|v-u\|^2}{4} = (f(v), f(u))$.

Esempio. Sia $V = \mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare standard. Dato $v = (x, y) \in V$, consideriamo l'applicazione $f : V \rightarrow V$ definita da $f(x, y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)$.
 f è un'isometria?

Sì, perchè $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\|f(v)\| = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y)^2 + (-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}x^2 - xy + \frac{3}{4}y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|v\|$.

Osservazione. Una isometria conserva le distanze

Proposizione. Se f è un'isometria, allora f conserva gli angoli.

Dimostrazione. In effetti, l'angolo convesso tra v, u è:

$$\arccos\left(\frac{(v, u)}{\sqrt{(v, v)}\sqrt{(u, u)}}\right) = \arccos\left(\frac{(f(v), f(u))}{\|f(v)\|\|f(u)\|}\right)$$

che è l'angolo convesso tra $f(v), f(u)$.

Osservazione. Non vale il contrario, cioè se f conserva gli angoli non è detto che sia un'isometria.

Teorema 8.2: Isometrie e isomorfismo

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e sia $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ un prodotto scalare.
Allora $f : V \rightarrow V$ è un'isometria se e solo se è un isomorfismo.

Dimostrazione. Sia V uno spazio vettoriale con un prodotto scalare e sia $f : V \rightarrow V$ un'isometria rispetto a quel prodotto scalare.

Mostriamo prima che f è iniettiva.

Poichè un prodotto scalare è definito positivo, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Ora, se $v \in \ker f$ allora $f(v) = 0 \Rightarrow \|f(v)\| = 0$ ma poichè f è un'isometria, $\|f(v)\| = \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \ker f = \{0\}$.

Quindi f è iniettiva.

Mostriamo ora che f è suriettiva: per il teorema del rango, $\dim \operatorname{Im} f = \dim V - 0$ e quindi f è suriettiva.

Esempio. Non vale il contrario, cioè se f è un isomorfismo non è detto che sia un'isometria.

Definizione 8.5: Matrice ortogonale

Una matrice A è **ortogonale** se $A^t A = I_n$.

Esempio. $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ è ortogonale perchè $A^t A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Osservazione. A è ortogonale se e solo se le colonne di A formano una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

Teorema 8.3: Basi ortonormali e matrice del cambio di base

ia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} .

Sia v_1, v_2, \dots, v_n una base ortonormale di V . Allora sia v'_1, v'_2, \dots, v'_n un'altra base ortonormale di V se e solo se la matrice del cambio di base è ortogonale.

Dimostrazione. Poichè v_1, v_2, \dots, v_n è una base ortonormale, cioè $(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$, allora la

matrice di tale prodotto scalare in base v_1, v_2, \dots, v_n è I_n .

Quindi se B è la matrice del cambio di base, la matrice del prodotto scalare in base v'_1, v'_2, \dots, v'_n è $B^t I_n B = B^t B = I_n$.

Quindi B è ortogonale.

Teorema 8.4: Isometrie e basi ortogonali

na applicazione lineare $f : V \rightarrow V$ è un'isometria se e solo se manda basi ortonormali in basi ortonormali.

Dimostrazione. \Rightarrow Sia f una isometria e sia v_1, v_2, \dots, v_n una base ortonormale di V .

Allora $(f(v_i), f(v_j)) = (v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$, cioè $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ è una base ortonormale di V .

\Leftarrow Sia v_1, v_2, \dots, v_n una base ortonormale di V tale che $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ è una base ortonormale di V .

Si vuole mostrare che f è un'isometria.

Dati $v, u \in V$, scriviamo $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ e $u = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n$.

Poichè f è lineare, $f(v) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + \dots + a_n f(v_n)$ e $f(u) = b_1 f(v_1) + b_2 f(v_2) + \dots + b_n f(v_n)$.

Allora $(v, u) = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = (f(v), f(u)) \quad \forall v, u \in V$ cioè f è un'isometria.

Teorema 8.5: Isometrie e matrici ortogonali

n'applicazione lineare $f : V \rightarrow V$ è un'isometria se e solo se la sua matrice in una qualsiasi base ortonormale è ortogonale.

Dimostrazione. Sia v_1, v_2, \dots, v_n una base ortonormale di V e sia A la matrice di f in tale base, cioè:

$$f(v_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n$$

$$f(v_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n$$

$$\vdots$$

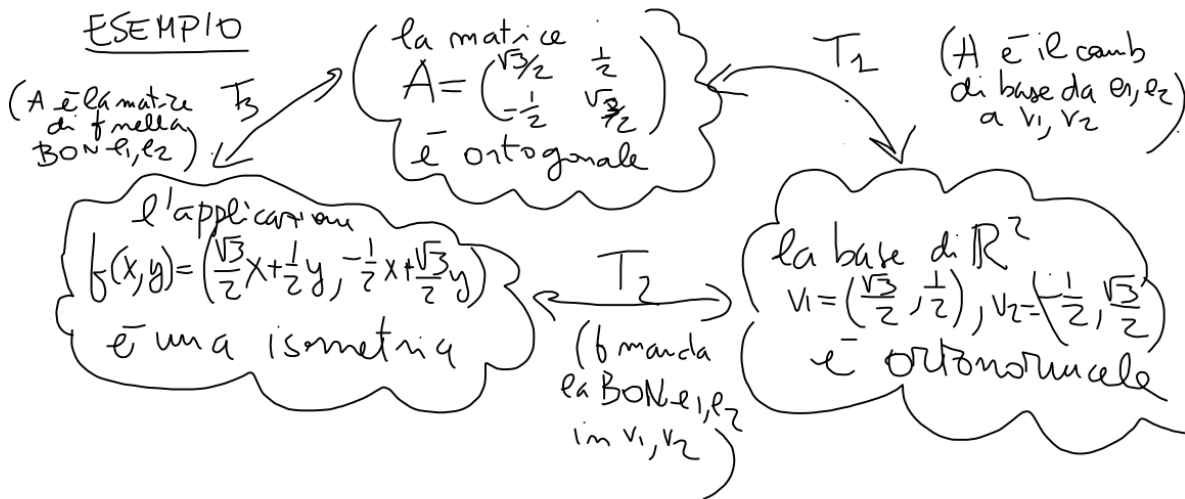
$$f(v_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(f(v_i), f(v_j)) = (a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \dots + a_{ni}v_n, a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \dots + a_{nj}v_n) = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{ni}a_{nj} = (v_i, v_j) = (AA^T)_{ij}.$$

Quindi $f(f(v_i), f(v_j)) = (v_i, v_j) \Rightarrow AA^T = I_n$. f è un'isometria se e solo se $f(v_i), \dots, f(v_n)$ è una base ortonormale di V se e solo se A è ortogonale.

Quindi $\Leftrightarrow (f(v_i), f(v_j)) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow A^T A = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow A^T A = I_n \Leftrightarrow A \text{ è ortogonale.}$



Esempio. $V = \mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare standard.

$f : V \rightarrow V$ definita da $f(x, y) = (z, x, y)$. f è un'isometria?

Sì perchè $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} = \|(z, x, y)\|$.

Osservazione. Le nozioni di base ortonormale e isometria dipendono dal prodotto scalare su V .

Proposizione. Sia f un'isometria. Allora $\det f = \pm 1$.

Dimostrazione. Fissiamo una base ortonormale v_1, v_2, \dots, v_n di V .

In tale base la matrice A di f è ortogonale, cioè $A^T A = I_n$.

$1 = \det I_n = \det(A^T A) = \det A^T \det A = (\det A)^2 \Rightarrow \det A = \pm 1$.

Osservazione. Non vale l'inversa!

Proposizione. Sia $f : V \rightarrow V$ un'isometria e λ un suo autovalore. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\lambda = \pm 1$.

Dimostrazione. Se λ è un autovalore di f allora $\exists v \in V, v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda v$ e quindi $\|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| = \|v\| \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

Osservazione. Può succedere che una isometria $f : V \rightarrow V$ abbia autovalori non reali (ad esempio, numeri complessi).