I202B, Union-find

J. Vander Meulen C. Damas

Avril 2018

Représenter des partitions d'un intervalle $E = [0 \ldots n[$

- Soit un intervalle fini E

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Représenter des partitions d'un intervalle $E = [0 \ldots n[$

- Soit un intervalle fini E

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

- On veut représenter et manipuler des partitions de E

$$\boxed{0 \quad 3 \quad 6 \quad 7} \quad \boxed{2} \quad \boxed{1 \quad 4 \quad 5}$$

À partir d'une partition initiale de E

- $\Big\{\{e\} \mid e \in E\Big\}$
- $\Big\{\{0\}, \{3\}, \{6\}, \{7\}, \{2\}, \{1\}, \{4\}, \{5\}\Big\}$
- C'est la relation identité abordée durant le cours de mathématiques du bloc 1.

On veut pouvoir

- Fusionner deux parties de la partition

$$\Big\{\{0\},\{3\},\{6\},\{7\},\{2\},\{1\},\{4\},\{5\}\Big\}$$

On veut pouvoir

- Fusionner deux parties de la partition

$$\Big\{\{0,3\},\{6\},\{7\},\{2\},\{1\},\{4\},\{5\}\Big\}$$

On veut pouvoir

- Fusionner deux parties de la partition

$$\Big\{\{0,3\},\{6,7\},\{2\},\{1\},\{4\},\{5\}\Big\}$$

On veut pouvoir

- Fusionner deux parties de la partition

$$\Big\{\{0,3,6,7\},\{2\},\{1\},\{4\},\{5\}\Big\}$$

On veut pouvoir

- Fusionner deux parties de la partition

$$\Big\{\{0,3,6,7\},\{2\},\{1\},\{4,5\}\Big\}$$

On veut pouvoir

- Fusionner deux parties de la partition

$$\Big\{\{0,3,6,7\},\{2\},{\color{red}\{1,4,5\}}\Big\}$$

On veut pouvoir

- Fusionner deux parties de la partition

$$\Big\{\{0,3,6,7\},\{2\},\{1,4,5\}\Big\}$$

- Répondre à la question :

Deux éléments appartiennent-ils à la même partie ?

$$\Big\{\{0,3,{\color{red}6},7\},\{2\},\{1,{\color{red}4},5\}\Big\} \Rightarrow \mathrm{Non}$$

On veut pouvoir

- Fusionner deux parties de la partition

$$\Big\{\{0, 3, 6, 7\}, \{2\}, \{1, 4, 5\}\Big\}$$

- Répondre à la question :

Deux éléments appartiennent-ils à la même partie ?

$$\Big\{\{\textcolor{red}{0}, 3, \textcolor{red}{6}, 7\}, \{2\}, \{1, 4, 5\}\Big\} \Rightarrow \mathrm{Oui}$$

On veut pouvoir

- Fusionner deux parties de la partition

$$\Big\{\{0,3,6,7\},\{2\},\{1,4,5\}\Big\}$$

- Répondre à la question :

Deux éléments appartiennent-ils à la même partie ?

$$\Big\{\{\textcolor{red}{0},3,\textcolor{red}{6},7\},\{2\},\{1,4,5\}\Big\} \Rightarrow \mathrm{Oui}$$

- Compter le nombre d'éléments d'une partie

$$\#\{0,3,6,7\} = 4$$

Les représentants des parties

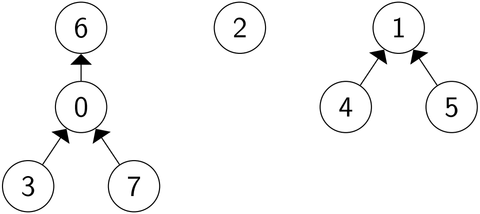
Pour des raisons algorithmiques :

chaque partie est associée à un représentant

$$\Big\{\{0,3,6,7\},\{2\},\{1,4,5\}\Big\}$$

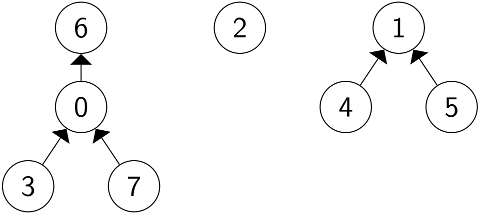
Une partition d'un intervalle E est représentée abstraitement par une forêt

$$\big\{\{0,3,6,7\},\{2\},\{1,4,5\}\big\}$$



Une partition d'un intervalle E est représentée concrètement par une tableau

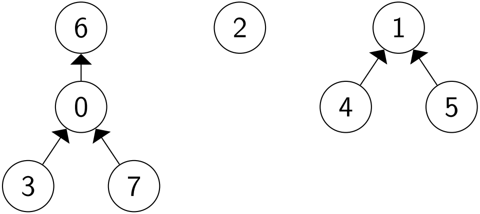
$$\big\{\{0,3,6,7\},\{2\},\{1,4,5\}\big\}$$



# du sous-arbre	3	3	1	1	1	1	4	1	0
indice parent	6	-1	-1	0	1	1	-1	0	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	

Une partition d'un intervalle E est représentée concrètement par une tableau

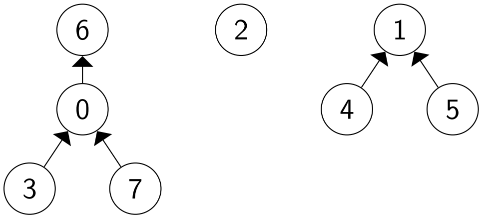
$$\Big\{\{0,3,6,7\},\{2\},\{1,4,5\}\Big\}$$



# du sous-arbre	3	3	1	1	1	1	4	1	0
indice parent	6	-1	-1	0	1	1	-1	0	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	

Une partition d'un intervalle E est représentée concrètement par une tableau

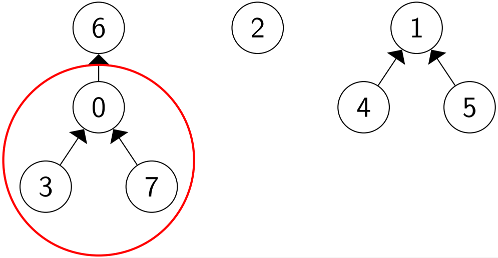
$$\Big\{\{0,3,6,7\},\{2\},\{1,4,5\}\Big\}$$



# du sous-arbre	3	3	1	1	1	1	4	1	0
indice parent	6	-1	-1	0	1	1	-1	0	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	

Une partition d'un intervalle E est représentée concrètement par une tableau

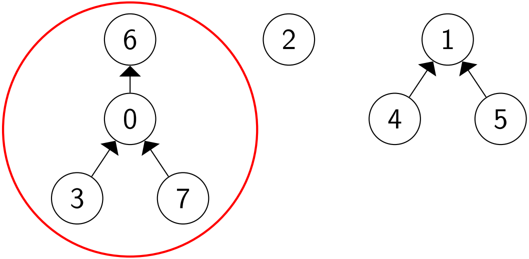
$$\left\{\{0, 3, 6, 7\}, \{2\}, \{1, 4, 5\}\right\}$$



# du sous-arbre	3	3	1	1	1	1	4	1	0
indice parent	6	-1	-1	0	1	1	-1	0	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	

Une partition d'un intervalle E est représentée concrètement par une tableau

$$\left\{\{0,3,6,7\},\{2\},\{1,4,5\}\right\}$$

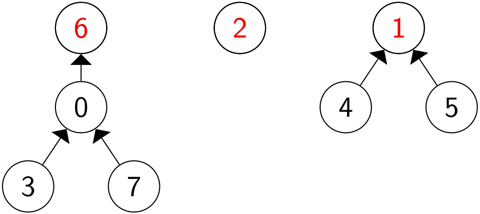


# du sous-arbre	3	3	1	1	1	1	4	1	0
indice parent	6	-1	-1	0	1	1	-1	0	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	

Une partition d'un intervalle E est représentée abstraitement par une forêt

- Les racines des arbres sont les représentants des $\neq$ parties

- $\big\{\{0,3,6,7\},\{2\},\{1,4,5\}\big\}$



# du sous-arbre	3	3	1	1	1	1	4	1	0
indice parent	6	-1	-1	0	1	1	-1	0	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	

Description de la structure

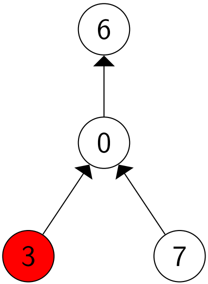
Représentation

Algorithmes

Application

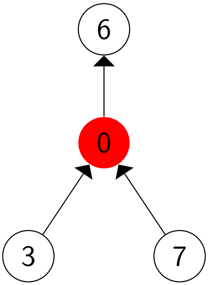
Trouver la racine d'un arbre

Une première opération interne, à partir d'un noeud de départ, on remonte jusqu'à la racine.



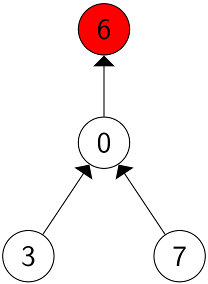
Trouver la racine d'un arbre

Une première opération interne, à partir d'un noeud de départ, on remonte jusqu'à la racine.



Trouver la racine d'un arbre

Une première opération interne, à partir d'un noeud de départ, on remonte jusqu'à la racine.



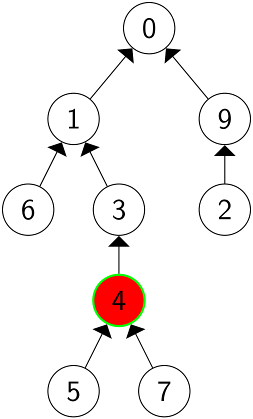
Trouver le représentant de la partie d'un nombre n (find)

- 1) Trouver la racine R de l'arbre auquel le noeud N associé au nombre n appartient.

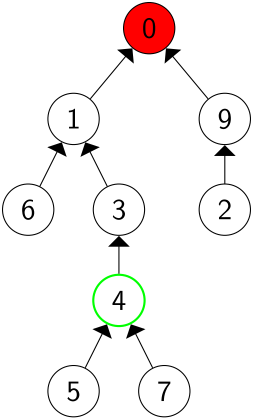
  Le nombre associé à la racine R est le représentant de la partie du nombre n

- 2) Compresser le chemin allant de la racine de R à N

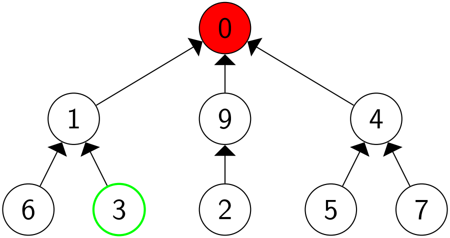
Trouver le représentant de la partie du nombre 4



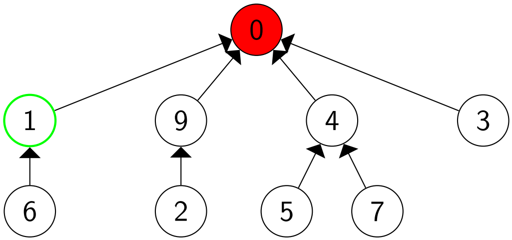
Trouver le représentant de la partie du nombre 4



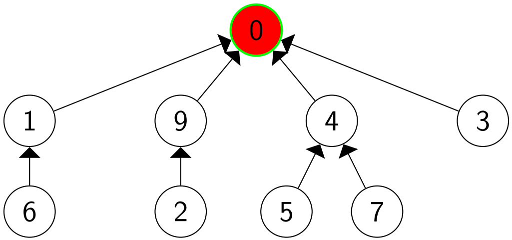
Trouver le représentant de la partie du nombre 4



Trouver le représentant de la partie du nombre 4



Trouver le représentant de la partie du nombre 4



Pour compter le nombre d'éléments d'une partie P à laquelle un nombre n appartient

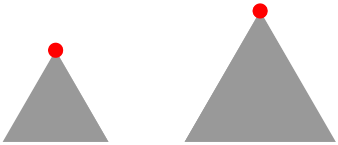
- $\#\{0, 3, 6, 7\} = 4$
- On trouve le représentant de la partie P (find)
- Ensuite, on trouve trivialement la taille de cette partie dans le tableau qui représente l'arbre de la partie P

Pour vérifier si deux nombres n_1 et n_2 appartiennent à la même partie

- $\Big\{\{0, 3, 6, 7\}, \{2\}, \{1, 4, 5\}\Big\} \Rightarrow \mathrm{Non}$
- $\Big\{\{0, 3, 6, 7\}, \{2\}, \{1, 4, 5\}\Big\} \Rightarrow \mathrm{Oui}$
- On trouve les représentants des deux parties de n_1 et de n_2
- Ensuite, on vérifie que ces deux représentants sont les mêmes

Pour fusionner deux parties P_1 et P_2 de la partition (union)

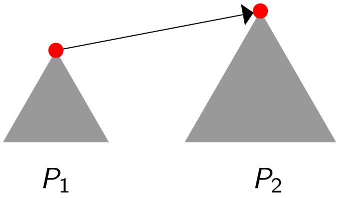
- On trouve les représentants des deux parties P_1 et P_2



P_1 P_2

Pour fusionner deux parties P_1 et P_2 de la partition (union)

- On trouve les représentants des deux parties P_1 et P_2
- On « attache » la plus petite partie à la plus grande



Complexité

Si $E = [0..n[$ et que l'on effectue m opérations find ou union :

$$\mathcal{O}(\alpha(n)m)$$

où

- α est la fonction inverse de la fonction d'Ackermann
- α est une fonction qui croît extrêmement lentement

Complexité

Si $E = [0..n[$ et que l'on effectue m opérations find ou union :

$$\mathcal{O}(\alpha(n)m)$$

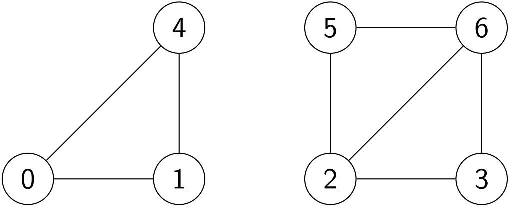
où

- α est la fonction inverse de la fonction d'Ackermann
- α est une fonction qui croît extrêmement lentement

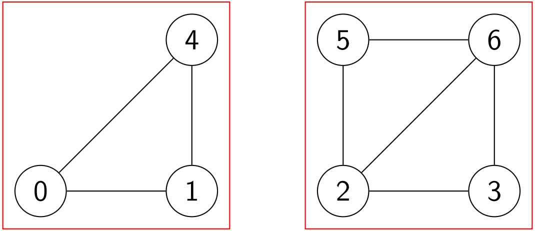
En pratique

$$\approx \mathcal{O}(m)$$

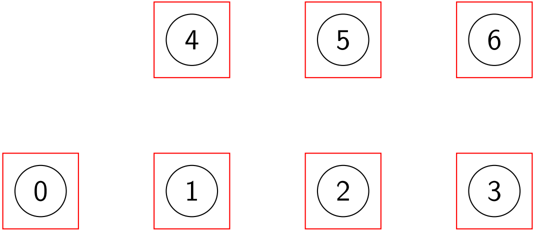
Composantes fortement connexes d'un graphe



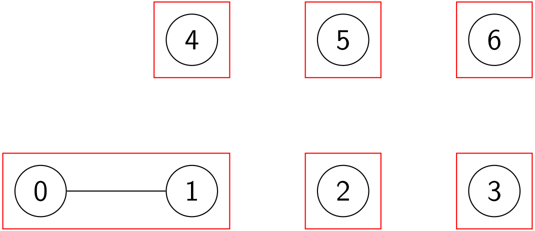
Composantes fortement connexes d'un graphe



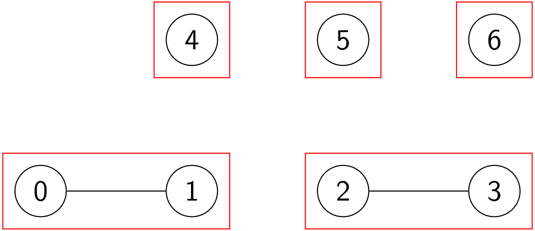
Composantes connexes d'un graphe



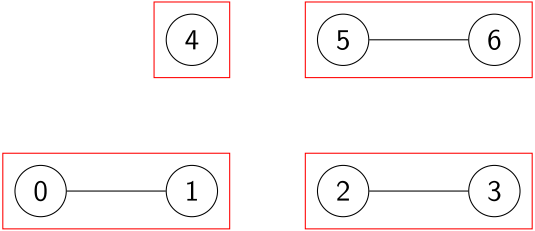
Composantes connexes d'un graphe



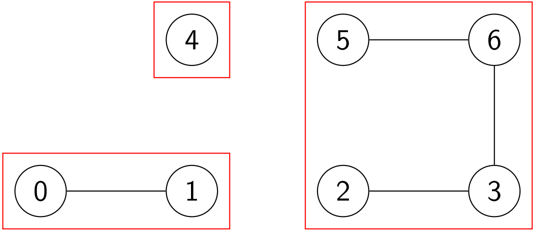
Composantes connexes d'un graphe



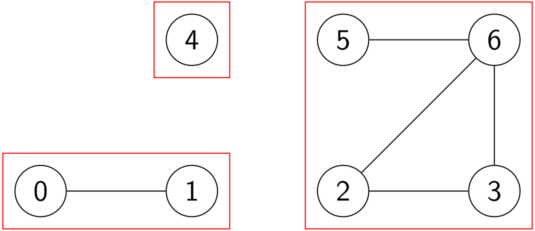
Composantes connexes d'un graphe



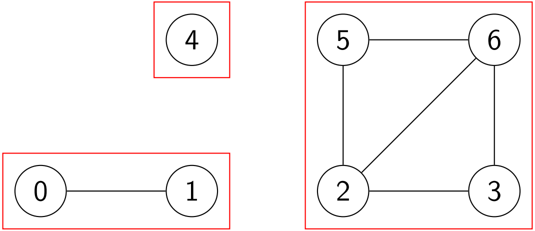
Composantes connexes d'un graphe



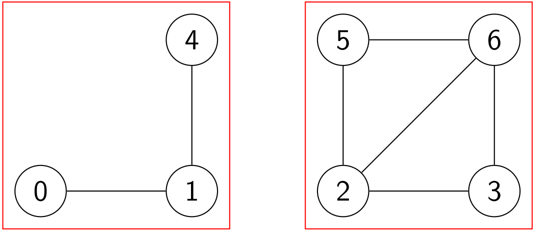
Composantes connexes d'un graphe



Composantes connexes d'un graphe



Composantes connexes d'un graphe



Composantes connexes d'un graphe