# Résolution du problème de la clique maximum par extraction de sous-graphes triangulés et d'arcs circulaires

Duc-Cuong Dang, Aziz Moukrim

# Résolution du problème de la clique maximum par extraction de sous-graphes triangulés et d'arcs circulaires

Duc-Cuong Dang[1], Aziz Moukrim[1]

Université de Technologie de Compiègne
UMR CNRS 6599, BP 20529, 60205 Compiègne, France
{duc-cuong.dang, aziz.moukrim}@hds.utc.fr

**Mots-clés** : *clique maximum, extraction de sous-graphes, graphes d'arcs circulaires, graphes triangulés, algorithme mémétique.*

## 1 Introduction

Nous nous intéressons au problème de la clique maximum (PCM) où il s'agit de déterminer un sous-ensemble de sommets $S$ de cardinalité maximum dans un graphe $G = (V, E)$, tel que les sommets de $S$ soient deux à deux adjacents. Le PCM est un problème NP-Difficile [2]. Pour résoudre le PCM, nous proposons d'opérer de la façon suivante : nous cherchons une permutation $\pi$ des sommets de $V$ telle que les sommets d'une clique maximum se trouvent l'un à côté de l'autre. Une telle recherche se fait par un algorithme mémétique (MA) et l'extraction de la clique se fait par trois algorithmes exploitant des sous-graphes de structure particulière de $G$ associés à $\pi$.

## 2 Extraction de sous-graphes d'arcs circulaires

Etant donnée une permutation $\pi$ de l'ensemble des sommets du graphe $G$, une extraction *naïve* est de complexité $O(|V|.|E|)$. Nous avons proposé une autre extraction plus efficace utilisant les sous-graphes d'arcs circulaires. Pour une séquence $\pi$ des sommets de $G$ et pour tout entier $i$ de 1 à $n$, nous notons $I_i^\pi$ le plus grand intervalle commençant par le sommet $\pi[i]$ tel que tous les sommets $\pi[i+l]$ de $I_i^\pi$ $(l > 0)$ soient adjacents à $\pi[i]$ dans $G$. Si l'intervalle $I_i^\pi$ comprend le dernier sommet de $\pi$, il est prolongé par $J_i^\pi$ commençant par le premier sommet de la permutation selon le même principe. On note $G^\pi$ le graphe d'arcs circulaires engendré par $\{I_i^\pi \cup J_i^\pi, 1 \leq i \leq |V|\}$. Nous montrons que $G^\pi$ est un sous-graphe de $G$. Comme la recherche d'une clique maximum dans ces graphes d'arcs circulaires est de complexité $O(|V| + |E|)$[3], nous avons une procédure pour extraire de façon optimale une clique maximum du sous-graphe $G^\pi$ associé à la permutation $\pi$. Nous appelons cet algorithme CAG. La figure 1.d en donne une illustration.

## 3 Extraction de sous-graphes triangulés

L'extraction de sous-graphes triangulés pour la résolution du PCM a été étudiée dans [1] et [5]. Nous adaptons ces méthodes pour une permutation donnée $\pi$. L'idée est de considérer un *schéma d'élimination parfait* (une permutation $\pi$) du sous-graphe à extraire. Ce sous-graphe est extrait au fur et à mesure que l'on parcourt $\pi$ en intégrant les sommets ou les arêtes de $G$. Nous notons ces deux algorithmes respectivement VMTG and EMTG selon que l'on intègre

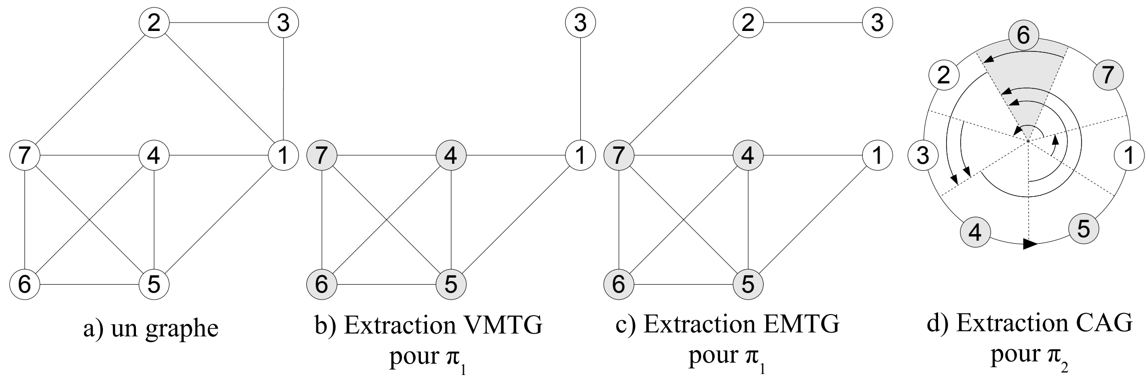


FIG. 1 – Extraction de sous-graphes triangulés pour $\pi_1 = (3, 2, 6, 7, 1, 5, 4)$ et extraction de sous-graphes d'arcs circulaires pour $\pi_2 = (4, 5, 1, 7, 6, 2, 3)$.

les sommets ou les arêtes. Ils ont aussi une complexité de $O(|V| + |E|)$. Les figures 1.b et 1.c en donnent deux illustrations.

## 4 Algorithme mémétique et exéprimentations

Un algorithme génétique est utilisé comme schéma global pour trouver la bonne séquence $\pi$ donnant la meilleure solution identifiée avec un des trois algorithmes CAG, VMTG et EMTG. Chaque solution identifiée est améliorée en faisant appel à une procédure de recherche locale. Les algorithmes utilisés dans la recherche locale sont basés sur des heuristiques itératives d'éjection et de complétion. Pour garder la taille de la population fixée, l'insertion d'un nouvel individu implique l'éjection de l'individu ayant la plus mauvaise évaluation dans la population.

Après plusieurs tests sur les instances de DIMACS, nous avons retenu les paramètres suivants pour notre algorithme mémétique : la taille de la population est fixée à 40, l'algorithme s'arrête au bout de $20.|V|$ itérations consécutives sans amélioration du meilleur individu et chaque nouvel individu issu du processus de croisement est amélioré par la recherche locale avec une probabilité de $pm = 1 - iter/itermax$ ($iter$ est le nombre d'itérations consécutives sans amélioration et $itermax$ est le nombre maximal d'itérations consécutives sans amélioration). Nous avons testé nos algorithmes sur 34 instances ciblées du benchmark DIMACS. MA avec l'extraction EMTG nous permet de trouver un ensemble de cliques de 2859 sommets. Le plus grand nombre de sommets trouvés pour ces intances par les autres méthodes de la littérature à notre connaissance est 2856 [4]. MAs avec les extractions CAG et VMTG trouvent 2854 et 2855 sommets.

## Références


[1] E. Balas and C. Yu. Finding a maximum clique in an arbitary graph. *SIAM Journal of Computing*, 15 :1054–1068, 1986.

[2] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability : A guide to the Theory of NP-Completeness.* Freeman, San Francisco, CA, USA, 1979.

[3] M. C. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs (Annals of Discrete Mathematics, Vol 57).* North-Holland Publishing Co., 2004.

[4] W. Pullan. Phased local search for the maximum clique problem. *Journal of Combinatorial Optimization*, 12 :303–323, 2006.

[5] J. Xue. Edge-maximal triangulated subgraphs and heuristics for the maximum clique problem. *Network*, 24 :109–120, 1994.