...en National du Brevet de Technicien Supérieur-Session de juin 2013
...alité/Option : ELT-ENR-MEB-CIR-MEI-MSE-MAB-BAT-GEG-TPU-Autres
Epreuve : Mathématiques   Durée : 3 heures

EXERCICE 1

PARTIE A : résolution d'une équation différentielle.

On admet que la fonction C est solution de l'équation différentielle :

(E): $y'+0{,}3y=36$

1) Résoudre l'équation différentielle : $(E_1): \ y'+0{,}3y=0$
2) Déterminer la solution constante de l'équation différentielle (E).
3) En déduire les solutions de (E) et donner la fonction C solution qui vérifie C(0)=0.

PARTIE B : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(t)=120\left(1-e^{-0{,}3.t}\right)$.

a) Chercher les variations de f sur $[0;+\infty[$.
b) Déterminer la limite de f en $+\infty$; que peut-on en déduire sur sa courbe représentative ?
c) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthogonal (unité : 1,5 cm pour une unité en abscisse et 1 mm pour une unité en ordonnée).
d) Calculer la valeur moyenne de f sur [2 ; 12[et en donner une ...aleur approchée à une unité près.

...RCICE 2

...outes les parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE A : probabilité conditionnelle.

On rappelle qu'un événement E se réalise sachant qu'un événement F (de probabilité non nulle) est réalisée se note $P_F(E)$=P(E inter F)/P(F).

A la suite d'une campagne de vaccination lancée par l'organisation mondiale de la santé (OMS) pour lutter contre une pandémie, on estime que, dans une population donnée, il ne reste plus que 1% de personnes non vaccinées.

D'après une étude, on estime également que 95% des vaccinées sont immunisées contre le virus de la pandémie et que 20% des personnes non vaccinées sont naturellement immunisées contre ce virus.

On choisit au hasard une personne dans la population concernée.

- On note A l'événement : « la personne choisit est vaccinée » ;
- Et B : « la personne choisie est immunisée contre le virus ».

1) Montrer que la probabilité que la personne choisie soit immunisée contre le virus est égale à 0,9425.
2) Calculer la probabilité que la personne choisie ait été vaccinée sachant qu'elle est immunisée contre le virus. Arrondir au millième.

PARTIE B : statistique

Le tableau statistique ci-dessous donne la distribution des étudiants d'une classe de 2[eme] année de BTS suivant leurs poids et leurs tailles.

x_i	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
y_i	135	140	147	153	150	153	152	152	152	158	160

x_i : Poids ; y_i : Taille

1) Donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.
2) Donner une estimation de la taille d'une étudiante qui pèse 63 kg.
3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.

Correction
Session de juin-juillet 2013

EXERCICE 1

On admet que la fonction C est solution de : (E): $y'+0,3y=36$

1) Résolvons l'équation différentielle : (E_1): $y'+0,3y=0$

Cette équation différentielle a pour équation caractéristique :

$r+0,3=0 \Leftrightarrow r=-0,3$ c'est-à-dire $\boxed{y=Ke^{-0,3t}, K\in\mathbb{R}}$

2) Déterminons la solution constante de l'équation (E).

Posons : $y=a \Leftrightarrow y'=0$

Donc $0,3a=36 \Leftrightarrow a=120$. Ainsi $\boxed{y=120}$

3) Déduisons les solutions de (E) et la fonction C qui vérifie C(0)=0.

Les solutions de (E) sont les sommes des solutions de l'équation homogène et de la solution constante.

Donc $C(x)=K.e^{-0,3t}+120$. Or $C(0)=0 \Leftrightarrow K=-120$

D'où $\boxed{C(x)=120\left[1-e^{-0,3t}\right]}$

PARTIE B : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(t)=120\left(1-e^{-0,3.t}\right)$

a) Cherchons les variations de f sur $[0;+\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et sa dérivée est :

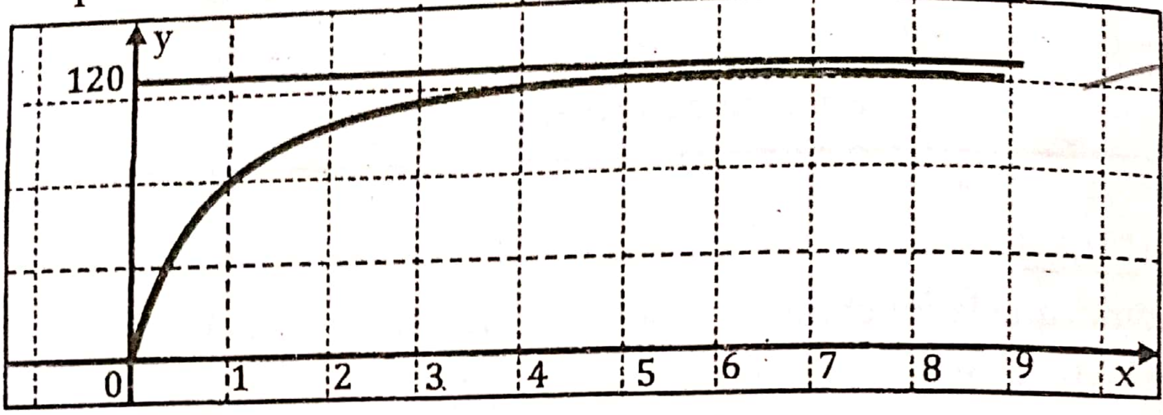
$f'(t)=36e^{-0,3.t}>0$. Donc la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$.

Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty} 120\left(1-e^{-0,3.t}\right)=120.$

Donc la droite d'équation y = 120 est asymptote horizontale à la courbe de f.

c) Représentons graphiquement la fonction f dans un repère.



d) Calculons la valeur moyenne de f sur [2 ; 12] et en donnons une valeur approchée à une unité près.

On a : $\bar{f} = \frac{1}{12-2}\int_2^{12} f(t)dt \Leftrightarrow \bar{f} = \frac{120}{10}\int_2^{12}\left(1-e^{-0,3.t}\right)dt$

$$\Leftrightarrow \bar{f} = 12\left[t + \frac{10}{3}e^{-0,3t}\right]_2^{12}$$

Donc $\boxed{\bar{f} = 12\left[10 + \frac{10}{3}\left(e^{-3,6} - e^{-0,6}\right)\right]}$.

Ainsi une valeur approchée de $\bar{f}$ est 99,1 cm à une unité près.

EXERCICE 2

PARTIE A : probabilité conditionnelle.

D'après l'énoncé, $P(A) = 1\% \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 99\%$, $P_A(B) = 95\%$ et $P_{\overline{A}} = 20\%$

1) Montrons que P(B) = 0,9425.

On a : $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \Leftrightarrow P(B) = \left((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)\right)$

Dans ce cas, $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})$

Ainsi, $P(B) = 0,95 \times 0,99 + 0,2 \times 0,01 = 0,9425$

Donc $\boxed{P(B) = 0,9425}$

2) Calculons la probabilité que la personne choisie ait été vaccinée sachant qu'elle est immunisée contre le virus. Arrondir au millième.

- D'après la formule de Bayes, $\boxed{P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}}$

En appliquant numériquement, on obtient : $\boxed{P_B(A)=0,998}$

PARTIE B : statistique

Donnons une équation de la droite de régression de y en x.

- Calcul des moyennes ;

On a : $\boxed{\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{11}x_i} \Leftrightarrow \overline{x}=\frac{605}{11}$ c'est-à-dire $\boxed{\overline{x}=55}$

De même, $\boxed{\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{11}y_i} \Leftrightarrow \overline{y}=\frac{1652}{11}$ c'est-à-dire $\boxed{\overline{y}=150,182}$

- Calcul des variances ;

On a : $\boxed{V(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{11}x_i^2-\overline{x}^2} \Leftrightarrow V(x)=\frac{33385}{11}-3025=10$

De même, $\boxed{V(y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{11}y_i^2-\overline{y}^2} \Leftrightarrow V(y)=48,51$

Donc $\boxed{V(x)=10 \text{ et } V(y)=48,51}$

- Calcul de la covariance ;

On a : $\boxed{cov(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{11}x_iy_i-\overline{xy}}$ c'est-à-dire $\boxed{cov(x,y)=19,2727}$

Ainsi, $\boxed{y=\frac{cov(x,y)}{V(x)}(x-\overline{x})+\overline{y}} \Leftrightarrow y=\frac{19,2727}{10}(x-55)+150,182$

D'où $\boxed{y=1,92727x+44,18015}$

Donnons une estimation de la taille pour un poids 63 kg.

On a : $x=64 \Leftrightarrow y=1,92727\times 64+44,18015=165,6$

Donc d'une étudiante qui pèse 63 kg a une taille d'environ 165,6 cm.

3) Calculons le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.

On a : $r_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{V(x).V(y)}} \Leftrightarrow r_{xy} = \frac{19,2727}{\sqrt{48,51 \times 10}}$ c'est-à-dire $\boxed{r_{xy} = 0,87}$