

Serie matemática

De Wikipedia, la enciclopedia libre

En matemáticas, una **serie** es la generalización de la noción de suma aplicada a los términos de una sucesión matemática. Informalmente, es el resultado de sumar los términos:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \ldots$$

lo que suele escribirse en forma más compacta con el símbolo de sumatorio:

$$S = \sum_{i=1}^n a_i$$

El estudio de las series consiste en la evaluación de la suma de un número finito *n* de términos sucesivos, y mediante un paso al límite identificar el comportamiento de la serie a medida que *n* crece indefinidamente.

Una secuencia o cadena «finita», tiene un primer y último término bien definidos; en cambio en una **serie infinita**, cada uno de los términos suele obtenerse a partir de una determinada regla o fórmula, o por algún algoritmo. Al tener infinitos términos, esta noción suele expresarse como *serie infinita*, pero a diferencia de las sumas finitas, las series infinitas requieren de herramientas del análisis matemático para ser debidamente comprendidas y manipuladas. Existe una gran cantidad de métodos para determinar la naturaleza de convergencia o no-convergencia de las series matemáticas, sin realizar explícitamente los cálculos.

Índice

- 1 Tipos de series
 - 1.1 Sumas parciales
 - 1.2 Convergencia
- 2 Ejemplos
- 3 Convergencia de series
- 4 Véase también
- 5 Referencias
- 6 Enlaces externos

Tipos de series

Sumas parciales

Para cualquier sucesión matemática $\{a_n\}$ de números racionales, reales, complejos, funciones, etc., la *serie asociada* se define como la suma formal ordenada:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

La **sucesión de sumas parciales** $\{S_k\}$ asociada a una sucesión $\{a_n\}$ está definida para cada *k* como la suma de la sucesión $\{a_n\}$ desde *a*₁ hasta *a*_{*k*} :

$$S_k = \sum_{i=1}^k a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

Muchas de las propiedades generales de las series suelen enunciarse en términos de las sumas parciales asociadas.

Convergencia

Por definición, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ **converge** al límite L si y sólo si la sucesión de sumas parciales asociada S_k converge a L . Esta definición suele escribirse como

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad \Leftrightarrow \quad L = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$$

Ejemplos

- Una serie geométrica es aquella en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante, llamada *razón* r . En este ejemplo, la razón $r = 1/2$:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

En general, una serie geométrica es convergente, sólo si $|z| < 1$, a:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} az^n = \frac{a}{1-z}$$

- La serie armónica es la serie

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

La serie armónica es divergente.

- Una serie alternada es una serie donde los términos cambian de signo:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

- Una serie telescópica es la suma $\sum a_n$, donde $a_n = b_n - b_{n+1}$:

$$S = \sum_{n=0}^N (b_n - b_{n+1})$$

La convergencia de dicha serie y su suma se pueden calcular fácilmente, ya que:

$$S_N = (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots + (b_{N-1} - b_N) + (b_N - b_{N+1}) = b_0 - b_{N+1}$$

- Una serie hipergeométrica es una serie de la forma:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{con} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$$

Convergencia de series

Véanse también: Serie convergente y Serie divergente.

Una serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ se dice que *es convergente* (o que *converge*) si la sucesión S_N de sumas parciales tiene un límite finito. Si el límite de S_N es infinito o no existe, se dice que la serie diverge. Cuando este límite existe, se le llama *suma de la serie*.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N a_i$$

Si todos los a_n son cero para n suficientemente grande, la serie se puede identificar con una suma finita. El estudio de la convergencia de series, se centra en las propiedades de las series infinitas que incluyen infinitos términos no nulos. Por ejemplo, el número periódico

$$S_n = 0.111111\dots$$

tiene como representación decimal, la serie

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

Dado que estas series siempre convergen en los números reales (ver: espacio completo), no hay diferencia entre este tipo de series y los números decimales que representan. Por ejemplo, $0.111\dots$ y $\frac{1}{9}$; o bien $1=0.9999\dots$

Véase también

- Serie de Taylor
- Serie de Laurent
- $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$
- Series trigonométricas
- Fórmula de Faulhaber
- Serie convergente
- Límite de una sucesión
- Anexo:Series matemáticas

Referencias

- K.R. Stromberg, T.J. Bromwich; K. Knopp, A. Zygmund, N.K. Bari (2001), «Series» (http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Series&oldid=13797), en Hazewinkel, Michiel, *Encyclopaedia of Mathematics* (en inglés), Springer, ISBN 978-1556080104.
- Weisstein, Eric W. «Series» (http://mathworld.wolfram.com/Series.html). En Weisstein, Eric W. *MathWorld* (en inglés). Wolfram Research.
- A history of the calculus (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/The_rise_of_calculus.html) (en inglés).

Enlaces externos

- Apuntes_UPM (http://www.dma.fi.upm.es/gies/informates/Calculo/calculo_6_2_2.pdf)

Obtenido de «https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Serie_matemática&oldid=98714668»

Categoría: Series matemáticas

- Se editó esta página por última vez el 28 abr 2017 a las 16:23.
- El texto está disponible bajo la Licencia Creative Commons Atribución Compartir Igual 3.0; pueden aplicarse cláusulas adicionales. Al usar este sitio, usted acepta nuestros términos de uso y nuestra política de privacidad.

Wikipedia® es una marca registrada de la Fundación Wikimedia, Inc., una organización sin ánimo de lucro.