

# 基于先验水深和鞍形结构的分区域多波束海底地形探测

## 摘要

测线布设是多波束海洋地形探测的关键。本文通过几何分析推导出多波束测深系统的覆盖宽度和相邻条带之间的重叠率，进而对测量船测线簇的布设进行几何建模。首先，通过对前三个问题的逐步递进分析，发现**沿等深线的方向**是测线布设的最优选择。其次，基于海水深度数据对该海域的海底地貌进行**曲面拟合**。拟合曲面的等深线图呈现出一定的几何特性。本文基于等深线的**鞍形结构**和两簇走向的分布特点，对待测区域做了几何划分。

针对问题一，首先结合条带的覆盖宽度与换能器开角、海域中心处的海水深度和坡度等的三角关系，得出条带的覆盖宽度的解析表达式；对于相邻条带之间重叠率的计算，根据题目给出的重叠率的定义，将条带覆盖宽度的投影长度代入得出海底坡面的重叠率计算公式；最后，本文计算出测线距中心点处的距离不同时的结果数据，分析有关规律。

针对问题二，考虑将问题二化为问题一来求解，首先推导已知测线方向夹角的情况下下线面角的求法，由此得出覆盖宽度线与水平面的夹角以及测线在海底坡面上的投影与水平面的夹角，计算出不同位置的海水深度。然后利用问题一中的覆盖宽度求解公式进行求解。最后计算出题目给出的情形下的覆盖宽度，并求出重叠率，分析其规律，作为问题三的分析基础。

针对问题三，考虑首先根据重叠率的限制以及随位置变化的规律来限制测线方向夹角的范围，然后使用迭代搜索的方法在该范围内寻找最优的测线方向夹角。最终得出当测线方向夹角为 **90 度**，相邻条带之间的重叠率为 **10%** 的情形下，测线的长度最短，总长度为 **66 海里**。

针对问题四，首先基于海水深度数据对该海域的海底地貌进行了**曲面拟合**。海底地貌的拟合曲面的等深线图呈现出一定的几何特性。从等深线图的整体结构上看，呈现出明显的鞍形结构。从等深线图的曲线方向上看，有东西向和西南东北向两簇。本文基于**等深线的鞍形结构**和两簇走向的分布特点，对待测区域做了几何划分。接着定义测线的总长度、漏测海区占总待测海域面积的百分比以及重叠率超过 20% 部分的总长度的计算方式。最后在每一个区域内结合第三问的模型结果得出测线方向。计算得出，本文求解出的测线的总长度：**215.88 海里**、漏测海区占总待测海域面积的百分比 **6.414%**、重叠率超过 20% 部分的总长度为 **23.35 海里**。

本文的亮点有：1. 体现了微积分中以直代曲的近似思想。问题四中基于概率论的分位数思想寻找倾斜平面以近似代替真实海底曲面，简化测量船的测线布设问题。2. 基于沿等深线布设的思想，将倾斜平面上的最优测线布设方案，从直线推广到曲面上，具备可推广性。3. 深刻利用了等深线分布的几何特性，根据鞍形的整体排布，划分曲面上的待测区域。

**关键词：** 多波束测深；几何推导；先验水深；鞍形结构

## 一、问题重述

### 1.1 问题的背景

单波束测深是一种利用声波在水中传播的特性，通过发送一束声波信号，测量该信号返回的时间来计算出水深的一项技术，通常被用于海洋地理调查、海底地形测绘和海洋资源勘探等领域。多波束测深技术是在单波束测深的基础上发展起来的，通过同时发射多个声波来扫描水下的目标物体。相比传统的单波束测深技术，多波束测深能够提供更高的测量效率和更准确的测量结果。但是，多波束测深技术受到真实海底地形起伏的影响，在测深过程中仍会存在漏测问题和测深重叠率高的问题，从而影响测量效率。因此，合理布设测线位置是解决上述测深问题的关键。

### 1.2 问题的提出

**问题一：**已知海底坡面与水平面的夹角、换能器开角和海域中心处的海水深度，建立数学模型求解多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率。

**问题二：**考虑测深在三维情形下，已知海域的长度、宽度、坡度以及测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角  $\beta$  的不同值和多波束换能器的开角，建立数学模型求解多波束测深覆盖宽度。

**问题三：**已知海域的长度、宽度、坡度、中心海水深度以及多波束换能器的开角，建立数学模型，设计一组测量长度最短、可完全覆盖整个待测海域的测线，且相邻条带之间的重叠率满足 10%-20% 的要求。

**问题四：**根据题目所给的某海域单波束测量的测深数据，设计测线满足：(1) 尽可能不漏测；(2) 相邻条带之间的重复率尽量控制在 20% 以下；(3) 测线长度尽可能短。设计完测线后，计算：(1) 测线总长度；(2) 漏测海区占总待测海域面积的占比；(3) 在重叠区域中，重叠率超过 20% 部分的总长度。

## 二、模型假设

1. 假设测船在测深过程中匀速行驶。
2. 将测船视为质点，即不考虑测船的形状。
3. 问题四中不考虑海底坡面的急剧变化。
4. 声波传播速度不受海水密度的影响，即假设海水密度均匀。

### 三、符号的定义与说明

符号	意义
$W$	覆盖宽度
$D$	海水深度
$\alpha$	海底坡度
$\theta$	换能器开角
$\vec{a}$	坡面法向的水平投影的方向
$\vec{b}$	测线方向
$\beta$	测线方向与坡面法向的水平投影的夹角
$\gamma$	覆盖宽度及水平面的夹角/ $^{\circ}$
$\varphi$	测线在海底坡面上的投影与水平面的夹角

注：未列出的以及重复的符号均以首次出现处为准

### 四、问题一模型的建立与求解

#### 4.1 问题一分析

本问要求在已知海底坡面与水平面的夹角、换能器开角和海域中心处的海水深度的情况下，建立数学模型求解多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间的重叠率。由于本题所需考虑的问题在二维平面，所以本文结合平面几何的基本原理，利用各条边与各个角的几何关系以及三角正余弦定理，构建关系式，计算出多波束测深的覆盖宽度。再利用题目所给出的重叠率的定义，求解相邻条带之间的重叠率。

#### 4.2 问题一覆盖宽度模型的建立

考虑到问题一为二维平面上的几何问题，因此本文根据几何数学原理构建关系式来求解。首先，本文将测船质点设为点  $P$ ，以换能器  $\theta$  夹角发射的声波与海底坡面的交点设为点  $Q$  和点  $R$ ，经过测船的竖直垂线与坡面的交点为点  $M$ ，经过  $Q$ 、 $R$  两点作  $PM$  及延长线的垂线于点  $H_1$  和  $H_2$ ，海水深度  $PM$  为  $D$ ，记  $QM$  为  $W_1$ ， $RM$  为  $W_2$ ， $\angle QPM = \angle RPM = \frac{\theta}{2}$ ，具体如图 1 所示。根据平行线间的同位角定理可知  $\angle MQH_1 = \angle MRH_1 = \alpha$ ，则在  $\triangle QMH_1$  和  $\triangle RMH_2$  根据三角函数关系可知，

$$MH_1 = W_1 \sin \alpha, \quad (1)$$

$$QH_1 = W_1 \cos \alpha, \quad (2)$$

$$MH_2 = W_2 \sin \alpha, \quad (3)$$

$$RH_2 = W_2 \cos \alpha. \quad (4)$$

于是  $PH_1$  和  $PH_2$  为

$$PH_1 = D + W_1 \sin \alpha, \quad (5)$$

$$PH_2 = D - W_2 \sin \alpha. \quad (6)$$

则在  $\triangle PQH_1$  和  $\triangle PRH_2$  中由三角函数关系可知,

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{QH_1}{PH_1} = \frac{W_1 \cos \alpha}{D + W_1 \sin \alpha}, \quad (7)$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{RH_2}{PH_2} = \frac{W_2 \cos \alpha}{D - W_2 \sin \alpha}. \quad (8)$$

于是, 由公式 (7) 和公式 (8) 可解出  $W_1$  和  $W_2$  分别为

$$W_1 = \frac{D \tan \frac{\theta}{2}}{\cos \alpha - \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2}}, \quad (9)$$

$$W_2 = \frac{D \tan \frac{\theta}{2}}{\cos \alpha + \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2}}. \quad (10)$$

因此, 总体的覆盖宽度  $W$  为

$$W = W_1 + W_2 = D \tan \frac{\theta}{2} \left( \frac{1}{\cos \alpha - \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos \alpha + \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2}} \right). \quad (11)$$

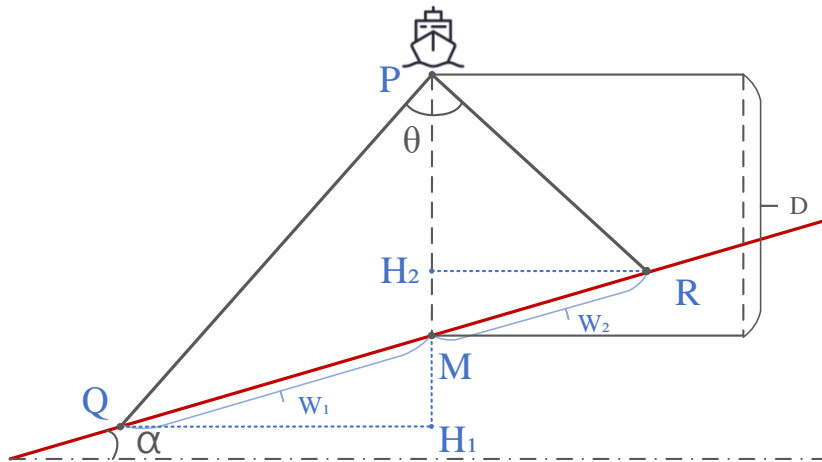


图 1 问题一覆盖宽度模型示意图

### 4.3 问题一海水深度和重叠率模型的建立

对于一条测线上距离中心点为  $\Delta x$  的点，根据重叠率的定义，重叠率与相邻两条测线的间距  $d$  和条带的覆盖宽度  $W$  有关，相邻两条测线的间距  $d$  题目中已给出，对于第  $i$  个测船的海水深度  $D_{xi}$ ，由图 2 中的几何关系及三角关系可知，

$$D_{xi} = D_0 \pm \Delta x \tan \alpha. \quad (12)$$

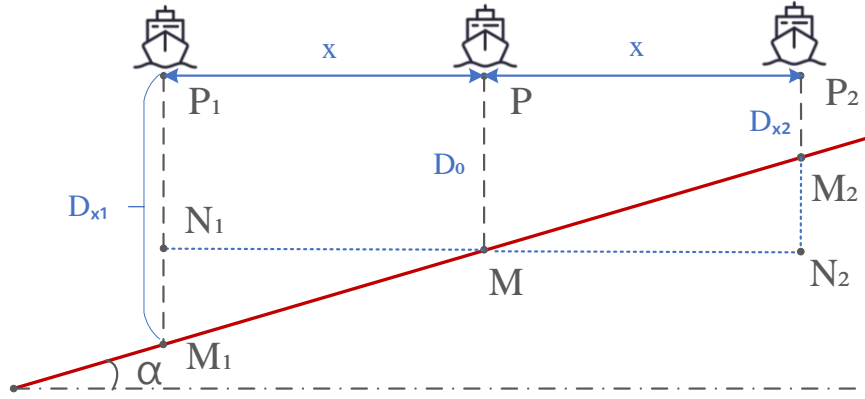


图 2 问题一海水深度求解示意图

式 (12) 中：较中心点海水深度大时取“+”，较中心点海水深度小时取“-”，则根据公式 (11) 可知第  $i$  个测船条带的覆盖宽度  $W_{xi}$  为，

$$W_{xi} = (D_0 \pm \Delta x \tan \alpha) \tan \frac{\theta}{2} \left( \frac{1}{\cos \alpha - \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos \alpha + \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2}} \right). \quad (13)$$

则根据题目所给的重叠率公式可知，

$$\eta = 1 - \frac{d}{(D_0 \pm \Delta x \tan \alpha) \tan \frac{\theta}{2} \left( \frac{1}{\cos \alpha - \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos \alpha + \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2}} \right) \cos \alpha}. \quad (14)$$

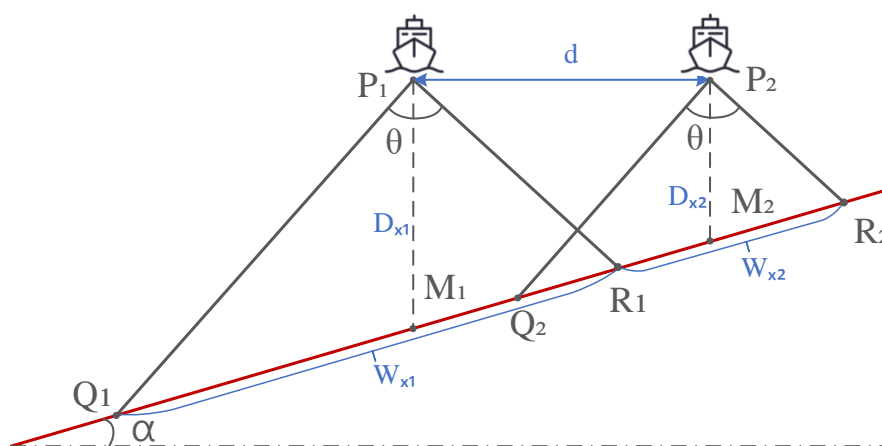


图 3 问题一重叠率求解示意图

#### 4.4 问题一模型的求解结果

根据上述模型，利用 Matlab 软件求解得到如下结果。

表 1 问题一的计算结果

测线距中心点 处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
海水深度/m	90.9487	85.7116	80.4744	75.2372	70	64.7628	59.5256	54.2884	49.0513
覆盖宽度/m	315.8133	297.6276	279.4418	261.2560	243.0703	224.8845	206.6987	188.5130	170.3272
与前一条测线 的重叠率/%	-	32.7789	28.4042	23.4205	17.6911	11.0350	3.2076	-6.1299	-17.4613

结果显示，覆盖宽度随海水深度的减小而减小。随着海水深度变浅，条带覆盖宽度也变小，当海水深度越变时，条带覆盖宽度也变大，与实际情况相符。对于与前一条测线的重叠率而言，从第二条测线开始，其重叠率随着海水深度的减小也呈现减小的趋势，而当测线距中心点处的距离为正向 600m 和 800m 时，重叠率为负值，说明在该处会因为海水深度过浅而出现漏测的情况。

## 五、 问题二模型的建立与求解

### 5.1 问题二分析

本问从问题一的二维平面推广到了三维立体问题，同样要求在已知海域的长度、宽度、坡度以及测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角  $\beta$  的不同值、换能器开角和海域中心处的海水深度的情况下，建立数学模型求解多波束测深覆盖宽度。考虑到

夹角  $\beta$  的取值不同会有不同的结果，所以本文先根据不同的夹角  $\beta$  分为 4 种情况分别讨论求解多波束测深覆盖宽度，再根据立体几何关系，引入覆盖宽度及水平面的夹角  $\gamma$ ，进而将问题二的立体几何问题转换为问题一的平面几何问题，从而简化问题，更易于求解。

## 5.2 问题二模型的建立

针对问题二，本文首先考虑不同线面角的求解方法，再根据空间几何关系分别建立模型。

### 5.2.1 线面角的求解方法

根据题意，坡面夹角为  $\alpha$ ，设测线覆盖宽度与水平面的夹角  $\gamma$ ，向量  $\vec{a}$  表示坡面法向在水平面上投影的方向，向量  $\vec{b}$  表示测线方向，则向量  $\vec{a}$  和向量  $\vec{b}$  的夹角即为  $\beta$ ，向量  $\vec{b} \perp$  面  $AOC$ ，记  $OA$  和  $OC$  分别为  $h$  和  $l$ 。

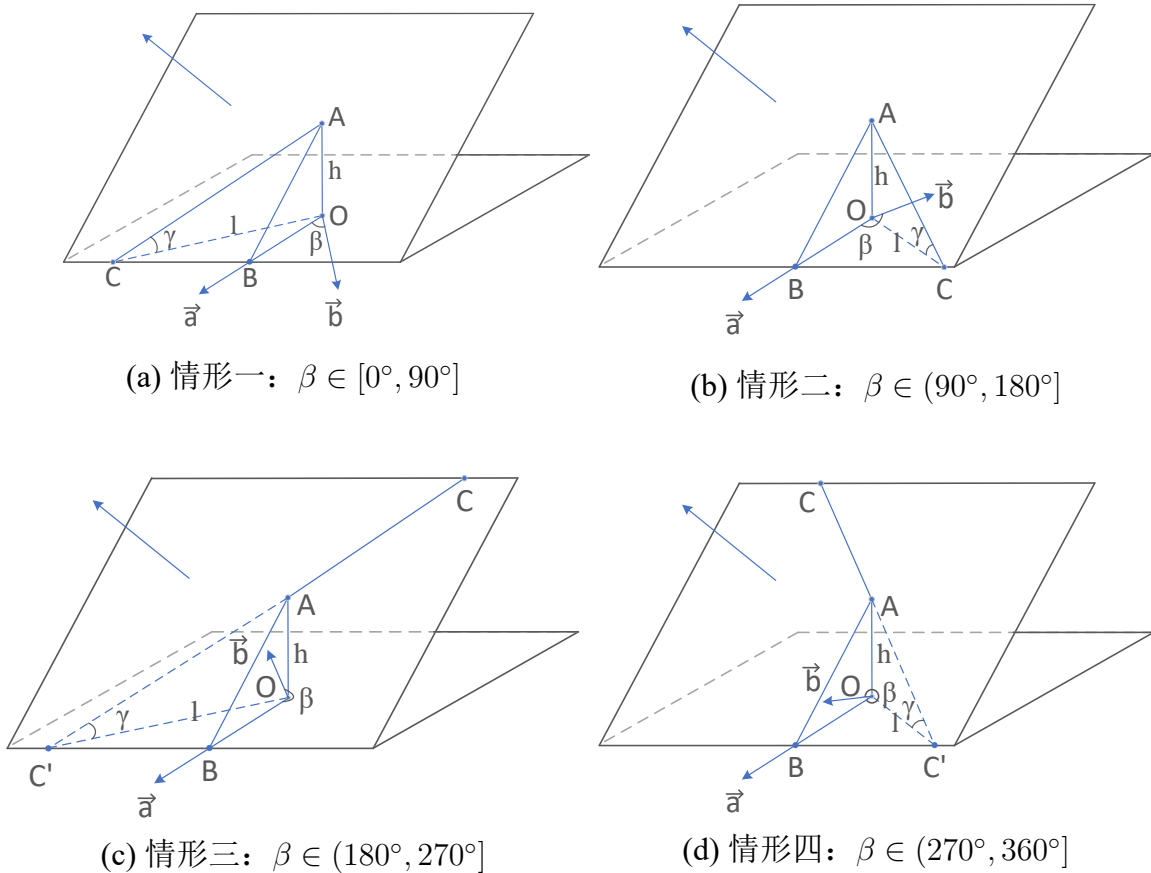


图 4 测线方向夹角的四种情形

**(1) 情形一**，当  $\beta \in [0^\circ, 90^\circ]$ ，则由图 4(a) 的角度关系以及垂直于面的直线可垂直于面内的任意一条直线可知

$$\angle OCB = \beta. \quad (15)$$



在  $\triangle AOB$ 、 $\triangle BOC$  和  $\triangle AOC$  中，由三角关系

$$OB = \frac{h}{\tan \alpha}, \quad (16)$$

$$\tan \gamma = \frac{h}{l}, \quad (17)$$

于是

$$\sin \beta = \frac{OB}{l} = \frac{h/\tan \alpha}{l}. \quad (18)$$

联立公式 (16)(17)(18)，可求得夹角  $\gamma$

$$\gamma = \arctan(\sin \beta \tan \alpha). \quad (19)$$

**(2) 情形二**，当  $\beta \in (90^\circ, 180^\circ]$ ，则由图 4(b) 的角度关系以及垂直于面的直线可垂直于面内的任意一条直线可知

$$\angle OCB = \pi - \beta. \quad (20)$$

在  $\triangle AOB$ 、 $\triangle BOC$  和  $\triangle AOC$  中，由三角关系

$$OB = \frac{h}{\tan \alpha}, \quad (21)$$

$$\tan \gamma = \frac{h}{l}, \quad (22)$$

于是

$$\sin(\pi - \beta) = \frac{OB}{l} = \frac{h/\tan \alpha}{l}. \quad (23)$$

联立公式 (21)(22)(23)，可求得夹角  $\gamma$

$$\gamma = \arctan(\sin(\pi - \beta) \tan \alpha). \quad (24)$$

**(3) 情形三**，当  $\beta \in (180^\circ, 270^\circ]$ ，则由图 4(c) 的角度关系并作  $AC$  的反向延长线，发现与情况一一致，此时可得

$$\angle OCB = \beta - \pi, \quad (25)$$

$$\gamma = \arctan(\sin \beta - \pi \tan \alpha). \quad (26)$$

**(4) 情形四**，当  $\beta \in (270^\circ, 360^\circ]$ ，则由图 4(d) 的角度关系并作  $AC$  的反向延长线，发现与情况二一致，此时可得

$$\angle OCB = -\beta, \quad (27)$$

$$\gamma = \arctan(\sin(-\beta) \tan \alpha). \quad (28)$$

综上所述，我们可以发现夹角  $\gamma$  可根据  $\beta$  的不同取值分为以下两种情况

$$\gamma = \begin{cases} \arctan(\sin \beta \tan \alpha), \beta \in [0^\circ, 180^\circ) \\ \arctan(\sin(-\beta) \tan \alpha), \beta \in [180^\circ, 360^\circ) \end{cases}. \quad (29)$$

### 5.2.2 问题二覆盖宽度模型的构建

考虑到问题二为三维立体几何问题，本文作图构建模型。覆盖宽度线与水平面的夹角为  $\gamma$ ，将测线在海底坡面上的投影与水平面的夹角设为  $\varphi$ ，具体如图 5、图 6 所示。由于求解角度  $\varphi$  的推导过程与推导  $\gamma$  的方式类似，得出  $\varphi$  的计算结果如下：

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(\cos \beta \tan \alpha), \beta \in [0^\circ, 90^\circ] \cup (270^\circ, 360^\circ] \\ \arctan(-\cos \beta \tan \alpha), \beta \in (90^\circ, 270^\circ] \end{cases}. \quad (30)$$

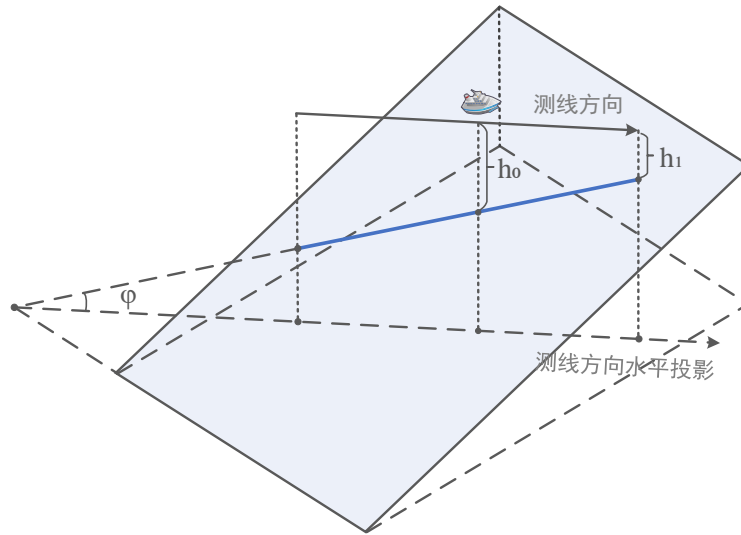


图 5 问题二测线方向海水深度示意图

根据图 6，由问题一公式 (12) 可得到海水深度  $D$  的表达式为

$$D = \begin{cases} D_0 + \Delta x \tan \varphi, \beta \in [0^\circ, 90^\circ] \cup (270^\circ, 360^\circ] \\ D_0 - \Delta x \tan \varphi, \beta \in (90^\circ, 270^\circ] \end{cases}. \quad (31)$$

最终，根据问题一求解覆盖宽度的公式 (13) 可知

$$W = D \tan \frac{\theta}{2} \left( \frac{1}{\cos \gamma - \sin \gamma \tan \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos \gamma + \sin \gamma \tan \frac{\theta}{2}} \right). \quad (32)$$

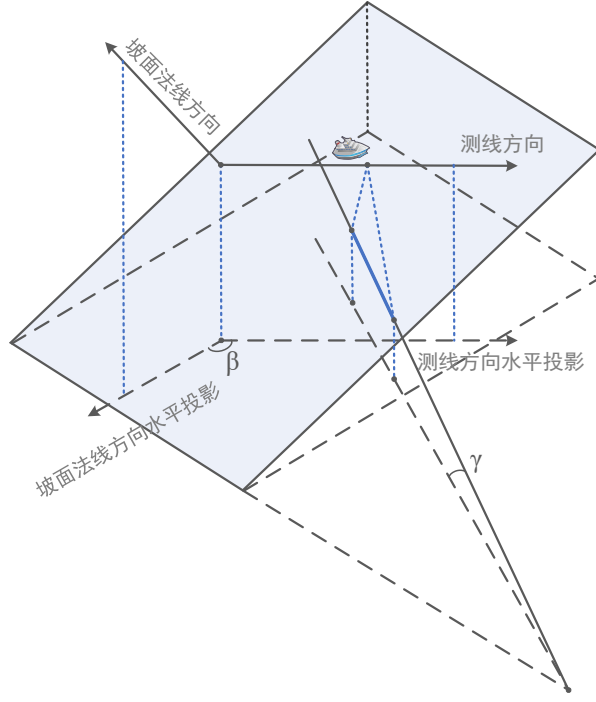


图 6 问题二测线覆盖宽度模型示意图

### 5.2.3 问题二模型总述

综上所述，问题二的覆盖宽度汇总如下：

$$W = D \tan \frac{\theta}{2} \left( \frac{1}{\cos \gamma - \sin \gamma \tan \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos \gamma + \sin \gamma \tan \frac{\theta}{2}} \right),$$

其中：

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \gamma = \arctan(\sin \beta \tan \alpha) \\ \varphi = \arctan(\cos \beta \tan \alpha), \beta \in [0^\circ, 90^\circ] \\ D = D_0 + \Delta x \tan \varphi \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \gamma = \arctan(\sin \beta \tan \alpha) \\ \varphi = \arctan(-\cos \beta \tan \alpha), \beta \in (90^\circ, 180^\circ] \\ D = D_0 - \Delta x \tan \varphi \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \gamma = \arctan(\sin(-\beta) \tan \alpha) \\ \varphi = \arctan(-\cos \beta \tan \alpha), \beta \in (180^\circ, 270^\circ] \\ D = D_0 - \Delta x \tan \varphi \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \gamma = \arctan(\sin(-\beta) \tan \alpha) \\ \varphi = \arctan(\cos \beta \tan \alpha), \beta \in (270^\circ, 360^\circ] \\ D = D_0 + \Delta x \tan \varphi \end{array} \right. \end{array} \right. . \quad (33)$$

5.3 问题二模型的求解结果

本文根据上述构建的模型，利用 Matlab 软件求解在不同测线方向夹角和不同测量船距海域中心处距离下的覆盖宽度，具体结果如下表 2 所示。

表 2 问题二的计算结果

覆盖宽度/m		测量船距海域中心处的距离/海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线 方向 夹角 / $^{\circ}$	0	415.6922	466.0738	516.4554	566.8370	617.2186	667.6001	717.9817	768.3633
	45	416.1915	451.8656	487.5397	523.2137	558.8878	594.5619	630.2359	665.9100
	90	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919
	135	416.1915	380.5175	344.8434	309.1693	273.4952	237.8212	202.1471	166.4730
	180	415.6922	365.3106	314.9290	264.5474	214.1658	163.7842	113.4027	63.0211
	225	416.1915	380.5175	344.8434	309.1693	273.4952	237.8212	202.1471	166.4730
	270	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919	416.6919
	315	416.1915	451.8656	487.5397	523.2137	558.8878	594.5619	630.2359	665.9100

由表 2 可知，当测线方向夹角  $\beta$  为  $90^{\circ}$  和  $270^{\circ}$  时，无论测量船距离海域中心处的距离为多少，测线覆盖宽度均为 416.6919m，符合实际情况；当测线方向夹角  $\beta$  为  $0^{\circ}$  时，测线覆盖宽度随测量船距海域中心处的距离的增大而增大，符合实际情况；除了测线方向夹角  $\beta$  为  $0^{\circ}$  的情况，剩余测线方向夹角下的覆盖宽度与测线方向夹角为  $180^{\circ}$  时的覆盖宽度呈现对称分布，符合本节上述模型中所分析的过程。

根据问题一公式 (14) 以及问题二公式 (29) 求解重叠率得到如下结果。

表 3 重叠率  $\eta$  的计算结果

与前一条测线的重叠率/%		测量船距海域中心处的距离/海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线方向 夹角 / $^{\circ}$	0	0.5189	0.5709	0.6127	0.6471	0.6760	0.7004	0.7214	0.7397
	45	0.5194	0.5573	0.5897	0.6177	0.6421	0.6636	0.6826	0.6996
	90	0.5199	0.5199	0.5199	0.5199	0.5199	0.5199	0.5199	0.5199
	135	0.5194	0.4743	0.4199	0.3530	0.2686	0.1589	0.0105	-0.2016
	180	0.5189	0.4525	0.3649	0.2440	0.0661	-0.2211	-0.7636	-2.1735
	225	0.5194	0.4743	0.4199	0.3530	0.2686	0.1589	0.0105	-0.2016
	270	0.5199	0.5199	0.5199	0.5199	0.5199	0.5199	0.5199	0.5199
	315	0.5194	0.5573	0.5897	0.6177	0.6421	0.6636	0.6826	0.6996

由表 3 可知，当测线方向夹角  $\beta$  为  $90^{\circ}$  和  $270^{\circ}$  时，无论测量船距离海域中心处的

距离为多少，与前一条测线的重叠率均为 0.5199，符合实际情况；当测线方向夹角  $\beta$  为  $0^\circ$  时，与前一条测线的重叠率随测量船距海域中心处的距离的增大而增大，符合实际情况；除了测线方向夹角  $\beta$  为  $0^\circ$  的情况，剩余测线方向夹角下的重叠率与测线方向夹角为  $180^\circ$  时的重叠率呈现对称分布，符合本节模型中所分析的过程。

## 六、问题三模型的建立与求解

### 6.1 问题三分析

本问在问题二的基础上将局部小区域推广为一个面积较大的海域，同样要求在已知海域的长度、宽度、坡度、海域中心处的海水深度以及换能器开角的情况下，设计一组测线，使得其长度最短又能覆盖整片海域，且相邻条带之间的重叠率满足 10%-20% 的要求。本文首先确定一条测线方向夹角  $\beta$  值，考虑在海域边界处同时满足重叠率的约束，从而排除一些  $\beta$  夹角，然后求出理想的测线方向夹角最后结合测线长度最短这一目标来求解测线间距。

### 6.2 满足条件的最优测线模型的建立与求解

针对问题三的满足条件的最优测线模型，本文首先考虑满足条件的测线方向夹角  $\beta$ ，排除不满足条件的  $\beta$  值，然后在满足条件的测线方向夹角范围内寻找最短的测线长度。本文在查阅大量文献后发现，在目前进行的水深测量中主要采用平行测线<sup>[6]</sup>，所以本文也采用平行测线进行测深。

#### 6.2.1 测线方向夹角 $\beta$ 值的确定

由于测线方向夹角决定着一条测线的走向，同时也就决定了条带的形状，考虑先通过重叠率的约束分析得出测线方向夹角的范围。

无论测线方向夹角  $\beta(0^\circ < \beta < 360^\circ)$  为多少，总有测线与上边界或者下边界相交，否则必定会在上边界或者下边界处发生漏测，而上边界上的点海水深度最浅为  $D_{min}$ ，下边界上的点海水深度最深为  $D_{max}$ ，所以，当  $\beta$  确定时，覆盖宽度  $W_{min}$  和  $W_{max}$  对应于  $D_{min}$  和  $D_{max}$ ，那么对于重叠率的定义式： $\eta = 1 - d/W$ ，当  $d$  恒定时，重叠率  $\eta_{min}$  和  $\eta_{max}$  对应于覆盖宽度  $W_{min}$  和  $W_{max}$ 。因此，重叠率的约束只需计算某一  $\beta$  取值下的最小值  $\eta_{min}$  和最大值  $\eta_{max}$ ，其他位置的重叠率  $\eta$  介于  $\eta_{min}$  和  $\eta_{max}$  之间，则令  $10\% < \eta_{min} < \eta_{max} < 20\%$ 。

设一测线方向与坡面法向投影的夹角  $\beta$  值，在边界海水深度最浅处保证重叠率大于 10%，通过计算判断此时的测线方向上的条带最宽处的重叠率是否小于 20%，排除掉其重叠率大于 20% 的  $\beta$  角度值。即首先根据公式 (14) 和 (29) 计算出重叠率为 10% 时在边

界上最浅水深处的间距，然后根据此间距计算出在最深水深处的重叠率，再解出重叠率为 20% 的边界值为  $82.3324^\circ$ ，即  $\beta$  的取值范围为  $[82.3324^\circ, 90^\circ]$ ，最后在  $[82.3324^\circ, 90^\circ]$  情况下计算测线长度使之达到最短。部分测线方向夹角  $\beta$  下  $\eta_{max}$  的数据如下表 4 所示。

表 4  $\eta_{min} = 10\%$  时在各个测线方向夹角  $\beta$  下的  $\eta_{max}$

测线方向夹角 $\beta/^\circ$	80	82	84	86	88	90
$\eta_{max}$	0.2280	0.2041	0.1793	0.1537	0.1273	0.1

### 6.2.2 确定测线间距

在确定了  $\beta$  的取值后，问题三的测线间距部分求解模型即可类似于问题一中的模型，根据问题一中的公式 (12)，可以得到第  $i$  条测线上的海水深度  $D_i$

$$D_{i+1} = D_i + d_i \tan \alpha. \quad (34)$$

当重叠率越小时，测线的间距越大，从而需要的测线条数越少，即测量长度越短，则取重叠率  $\eta$  为 10%

$$\eta_i = 1 - \frac{d_i}{W_i \cos \alpha} = 0.1. \quad (35)$$

则根据问题一公式 (13) 可以得到第  $i$  条测线的覆盖宽度  $W_i$  为

$$W_i = D_i \tan \frac{\theta}{2} \left( \frac{1}{\cos \alpha - \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos \alpha + \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2}} \right). \quad (36)$$

---

#### Algorithm 1: 最优测线间隔搜索

---

- 1 **Step1:** 确定第一条测线与边界的间距  $d_1$ .
  - 2 **Step2:** While  $\sum_{i=1}^n d_i < length$
  - 3     更新迭代次数.
  - 4     根据公式 (34)(35)(36)，计算下一条测线与上一条测线的间距  $d_i$ .
  - 5     直到循环终止.
  - 6 **Step3:** 输出间距  $d_i$  与测线的条数和长度.
- 

表 5 确定测线方向夹角和最优测线间距

测线方向夹角 $\beta/^\circ$	83	84	85	86	87	88	89	90
测线总长度/海里	66.4956	66.3635	66.2521	66.1612	66.0906	66.0402	66.0101	66

在不同的测线方向夹角  $\beta$  下搜索出的测线总长度如表 5 所示，从表 5 中的数据可

以分析出，测线总长度随着测线方向夹角  $\beta$  的增加而减少，所以最短的测线总长度在  $\beta = 90^\circ$  时取到，此时最短测线总长度为 66 海里。

### 6.3 最短测线总长度求解及结果展示

当测线方向夹角为 90 度时， $\alpha$  的值为  $1.5^\circ$ ，采用章节 6.2.2 中算法 1 搜索最优测线间距并求出测线总长度。

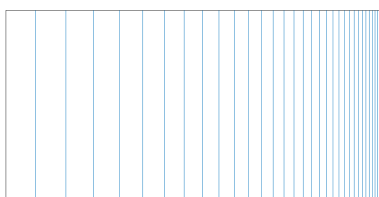


图 7 最短测线总长度求解结果图

测线位置的示意图如图 7。当测线方向夹角为 90 度，且重叠率为 10% 时，测线的长度最短。测线总条数为 33 条，总长度为 66 海里。可以看出在水深较大处，条带的覆盖宽度较大，从而测线的间距较大；而水深较小处，条带的覆盖宽度较小，从而测线的间距较小，测线十分密集。

## 七、问题四模型的建立与求解

### 7.1 问题四分析

本问综合问题一、二、三在作了进一步提升，将问题推广到了一个海底地形起伏复杂的真实海域。题目给出了该海域单波束测量的测深数据，分析数据可知，测线为该海域南北或东西方向的平行线，每间隔 0.02 海里测量一次海底深度。问题四要求基于先验水深设计多波束测量船的测量布线，首先基于海水深度数据对该海域的海底地貌进行了曲面拟合。海底地貌的拟合曲面的等深线图呈现出一定的几何特性。本文基于等深线的鞍形结构和两簇走向的分布特点，对待测区域做了几何划分。接着定义测线的总长度、漏测海区占总待测海域面积的百分比以及重叠率超过 20% 部分的总长度的计算方式。最后在每一个区域内结合第三问的模型结果得出测线方向。

7.2 海底曲面拟合与几何划分

以单波束测深数据作为先验数据，对海底的地形进行多项式拟合，得到的拟合曲面方程为三次曲面方程，具体结果如下公式 (37) 所示

f(x,y) = -24.4 + 14.4x + 4y - 14.4x^2 - 3.2xy - 3.2y^2 + 3.2x^2y. (37)

海底地形曲面拟合优度如表 6 所示。

表 6 拟合优度表

参数	SSE	R 方	DEF	调整 R 方	RMSE
拟合优度	0.4174	1.0000	50441	1.0000	0.0029

根据表 6，该曲面拟合的 R 方为 1，RMSE 接近于 0，说明拟合效果很好，可以将海底地形视为曲面。

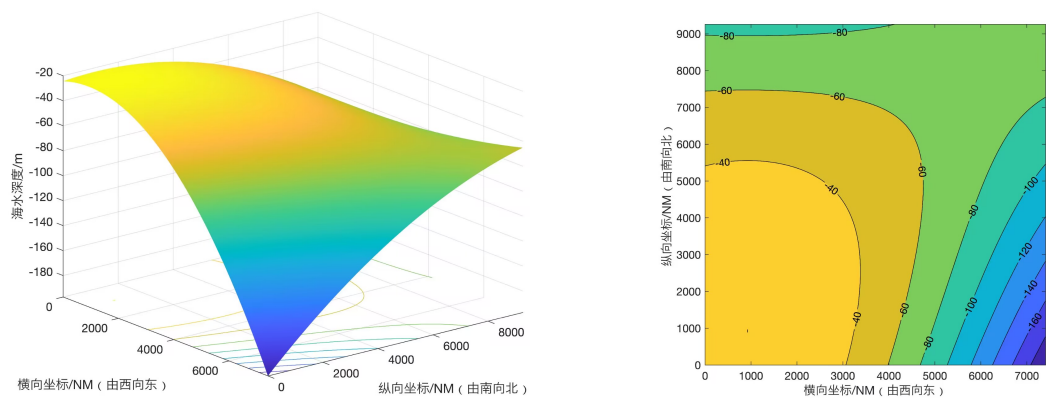


图 8 海底坡面拟合图

海底地貌的拟合曲面的等深线图呈现出一定的几何特性。从等深线图的整体结构上看，呈现出明显的鞍形结构。从等深线图的曲线方向上看，有东西向和西南东北向两簇。本文基于等深线的鞍形结构和两簇走向的分布特点，对待测区域做了几何划分。

斜线是为了利用等深线的鞍形结构和两簇走向的分布特点，水平直线与竖直直线既保证了斜线划分的准确性，又便于计算利用矩形海域分析结果。具体划分方式如图 9 所示，其中横轴与纵轴的单位为海里。



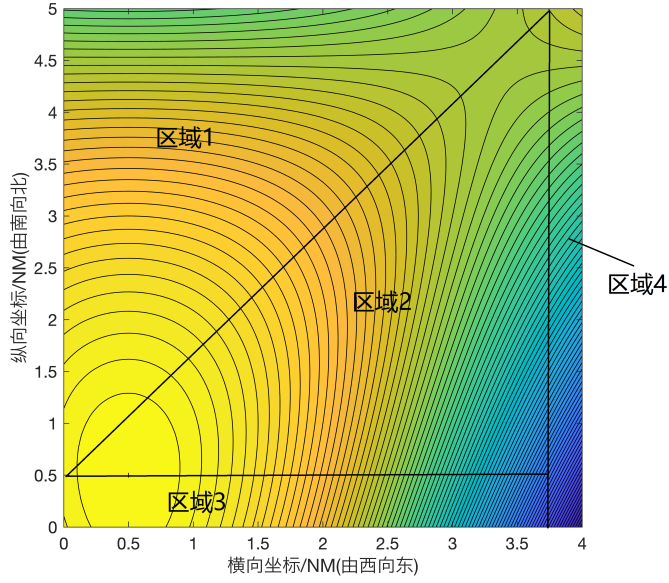


图 9 海底曲面几何划分示意图

图 9 中的横轴与纵轴的单位为海里。

区域 1 划分：(0, 0.5)、(0, 5)、(3.75, 5) 三点构成的区域。

区域 2 划分：(0, 0.5)、(3.75, 0.5)、(3.75, 5) 三点构成的区域。

区域 3 划分：(0, 0)、(0, 0.5)、(3.75, 0)、(3.75, 0.5) 四点构成的区域。

区域 4 划分：(3.75, 0)、(4, 0)、(3.75, 5)、(4, 5) 四点构成的区域。

### 7.3 矩形区域的测线方向确定

首先求出该矩形区域中心的法向量  $(N_x, N_y, N_z)$ ，则该法向量在水平面上的投影为  $(N_x, N_y)$ 。若  $\left| \frac{N_x}{N_y} \right| \geq 1$ ，则可将该区域的等深线近似看作与南北 (纵坐标) 方向平行，反之可将该区域的等深线近似看作与东西 (横坐标) 方向平行。

遍历该矩形区域，所有深度的上四分位数和下四分位数分别作为近似斜坡的最深处和最浅处，分别为  $h_{max}$  和  $h_{min}$ ，则该斜坡的角度为

$$\alpha = \arctan \frac{h_{max} - h_{min}}{length}. \quad (38)$$

其中  $length$  是坡面长度的投影距离。将该斜坡的等深线近似看作整个矩形区域的等深线。

由问题 3 的结论，在分割的矩形区域中，要使测线长度尽可能短，测线应平行于等深线且近似状态下应保持重叠率恒为 10%。该区域内测线总长度的计算方法与问题 3 一致。

对区域内的每一条测线以  $e = 1\text{m}$  为步长进行遍历，计算在测线方向上的每一点的

真实重叠率  $\eta_r$ 、真实覆盖宽度  $W_r$  和在近似斜坡上的覆盖宽度  $W_s$ 。当  $\eta_r > 0.2$  时，认为在这段步长上覆盖率大于 20%，当  $W_s < W_r$  时，认为在这段步长上存在漏测：

$$\Delta W = W_r - W_c. \quad (39)$$

则在这个区域内重叠区域大于 20% 的总长度为

$$\sum_{\eta_r > 0.2} e. \quad (40)$$

漏测海区占总待测海域面积的百分比为

$$\sum_{W_s < W_r} \Delta W \cdot e. \quad (41)$$

#### 7.4 问题四求解

综合本节的模型，利用 Matlab 软件得到测线的总长度为 215.88 海里，漏测海区占总待测海域面积的百分比 6.414%，重叠率超过 20% 部分的总长度 23.35 海里。

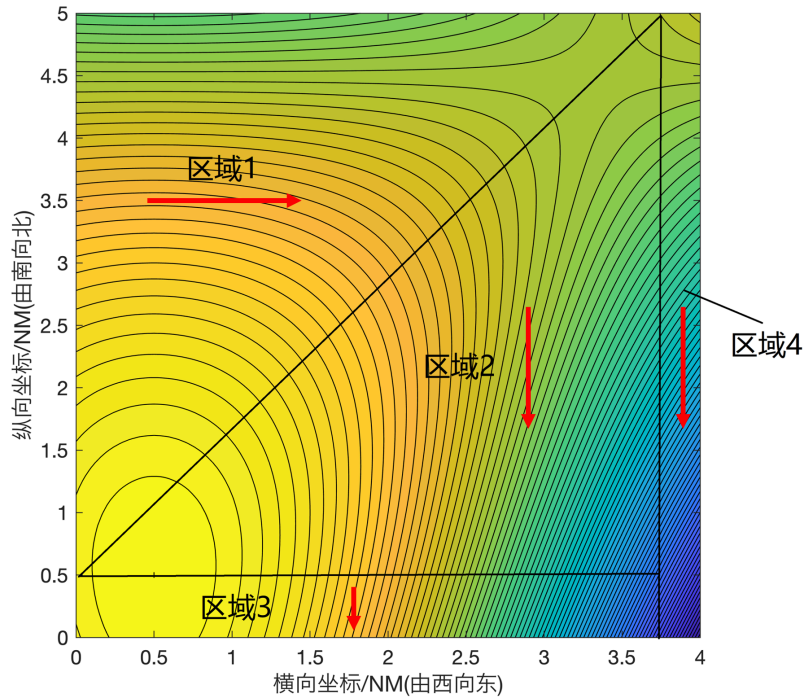


图 10 测船测线方向示意图

根据图 10 可以看出，测船测线方向与等高线平行，区域 1 的测线方向为水平方向，区域 2、区域 3、区域 4 的测线方向为竖直方向，与问题一二三研究得出的结论一致。

## 八、模型分析

### 8.1 模型的优点分析

1. 体现了微积分中以直代曲的近似思想。问题四中基于概率论的分位数思想寻找倾斜平面以近似代替真实海底曲面，简化测量船的测线布设问题。
2. 基于沿等深线布设的思想，将倾斜平面上的最优测线布设方案，从直线推广到曲面上，具备可推广性。
3. 深刻利用了等深线分布的几何特性，根据鞍形的整体排布，划分曲面上的待测区域。

### 8.2 模型的缺点及改进

1. 问题四缺少对实际的多波束测深时可能发生的偏差的分析，可以进一步加入对高度急剧变化的海底的分析以及测线的调整。
2. 对于问题四可以考虑更加细化的几何划分。

### 8.3 模型的推广

本文提出的模型从基本的几何关系出发，可以在此基础上加入更多参数的影响，推理简便，可推广至更多的测线布设以及多波束测深问题。

## 参考文献

- [1] 王茂枚,周广宇,陈楠等. 基于高分辨率的多波束测量方案研究 [J]. 水利水电技术 (中英文),2021,52(S2):385-389.
- [2] 张旭,叶小心,洪德玫. 多波束系统在长江航道测量中的测线布设方法研究 [J]. 中国水运. 航道科技,2017(01):52-55.
- [3] 王风帆,马永. 极地海洋多波束测量测线布设系统设计及实现 [J]. 海洋信息技术与应用,2023,38(03):158-162+186.
- [4] 王启,刘胜旋,关永贤. 浅水多波束测深资料处理关键技术探讨 [J]. 海洋测绘,2021,41(2):29-33.
- [5] 王舒文,刘晓东,曹金亮,等. 深水多波束测深声纳多条带探测模式研究与实现 [J]. 海洋测绘,2022,42(2):22-27.
- [6] 李家彪. 多波束勘测原理技术与方法 [M]. 海洋出版社,1999.
- [7] Xiaoping Shi.Underwater Terrain Measurement Based on Unmanned Measurement Ship Multi-Beam Bathymeter[J].International Conference on Intelligent Control, Measurement and Signal Processing (ICMSP),2023.
- [8] Cassandra Bongiovanni, Heather A. Stewart, Alan J. Jamieson.High-resolution multibeam sonar bathymetry of the deepest place in each ocean[J].Geoscience Data Journal,2021.
- [9] GuiQing Zheng, YongHong Wang.Primary controlling factors of global ocean trench depth and its linkage with subduction zone kinematics[J].Geomorphology,2023.

## 附录 A 支撑材料列表

1. code\_01 文件夹: 第 1 问 MATLAB 代码
2. code\_02 文件夹: 第 2 问 MATLAB 代码、各位置的值和值
3. code\_03 文件夹: 第 3 问 MATLAB 代码、结果可视化图片
4. code\_04 文件夹: 第 4 问 MATLAB 代码、数据信息、结果可视化图片
5. result1.xlsx: 表 1 中所列位置的指标值
6. resul2.xlsx: 表 2 中所列位置多波束测深的覆盖宽度

## 附录 B 问题一—matlab 源程序

```
1 clear;
2 clc;
3 % 参数设置
4 D0 = 70;
5 theta = 120/180*pi;
6 alpha = 1.5/180*pi;
7 w = [];
8 D = [];
9 for x = -800:200:800
10 d = D0 - x*tan(1.5/180*pi);
11 D = [D, d];
12 w1 = d*tan(theta/2) * (1/(cos(alpha)-sin(alpha)*tan(theta/2)));
13 w2 = d*tan(theta/2) * (1/(cos(alpha)+sin(alpha)*tan(theta/2)));
14 w = [w, w1 + w2];
15 end
16 ita = (1 - 200./(w*cos(alpha))) .*100;
17 disp(D);
18 disp(w);
19 disp(ita);
```

## 附录 C 问题二—matlab 源程序

```
1 clear;
2 clc;
3 D0 = 120;
4 alpha = 1.5/180*pi;
5 theta = 120/180*pi;
6 W = [];
7 ita = [];
```

```

8  for deltax = 0:0.3:2.1
9  Wy = [];
10 itaY = [];
11 for beta = 0:45:315
12 if 0 <= beta && beta <= 90
13 gamma1 = atan(sin(beta/180*pi) * tan(alpha));
14 gamma2 = atan(cos(beta/180*pi) * tan(alpha));
15 D = D0 + deltax*sin(gamma2)*1852;
16 elseif 90 < beta && beta <= 180
17 gamma1 = atan(sin(beta/180*pi) * tan(alpha));
18 gamma2 = atan(-cos(beta/180*pi) * tan(alpha));
19 D = D0 - deltax*sin(gamma2)*1852;
20 elseif 180 < beta && beta <= 270
21 gamma1 = atan(-sin(beta/180*pi) * tan(alpha));
22 gamma2 = atan(-cos(beta/180*pi) * tan(alpha));
23 D = D0 - deltax*sin(gamma2)*1852;
24 elseif 270 <= beta && beta <= 360
25 gamma1 = atan(-sin(beta/180*pi) * tan(alpha));
26 gamma2 = atan(cos(beta/180*pi) * tan(alpha));
27 D = D0 + deltax*sin(gamma2)*1852;
28 end
29 w1 = D*tan(theta/2) * (1/(cos(gamma1)-sin(gamma1)*tan(theta/2)));
30 w2 = D*tan(theta/2) * (1/(cos(gamma1)+sin(gamma1)*tan(theta/2)));
31 Wy = [Wy; w1 + w2];
32 itaY = [itaY; 1 - 200/((w1+w2)*cos(gamma1))];
33 end
34 W = [W, Wy];
35 ita = [ita, itaY];
36 end

```

## 附录 D 问题三—matlab 源程序

```

1 %% 临界值求解
2 clear;
3 clc;
4 % 参数设置
5 length = 2*1852;
6 width = 4*1852;
7 alpha = 1.5/180*pi;
8 theta = 120/180*pi;
9 D0 = 110;
10 % 初始状态
11 D = D0 - width/2*tan(alpha);
12 hmax = D0 + width/2*tan(alpha);

```

```

13 deltax = width/2;
14 %% 计算临界情况
15 syms beta;
16 gamma1 = atan(sin(beta/180*pi) * tan(alpha));
17 gamma2 = atan(cos(beta/180*pi) * tan(alpha));
18 D = D0 - deltax*sin(gamma2);
19 w1 = D*tan(theta/2) * (1/(cos(gamma1)-sin(gamma1)*tan(theta/2)));
20 w2 = D*tan(theta/2) * (1/(cos(gamma1)+sin(gamma1)*tan(theta/2)));
21 w = w1 + w2;
22 d = (1 - 0.1)*w*cos(gamma1);
23
24 deltax = -width/2;
25 gamma1 = atan(sin(beta/180*pi) * tan(alpha));
26 gamma2 = atan(cos(beta/180*pi) * tan(alpha));
27 D = D0 - deltax*sin(gamma2);
28 w1 = D*tan(theta/2) * (1/(cos(gamma1)-sin(gamma1)*tan(theta/2)));
29 w2 = D*tan(theta/2) * (1/(cos(gamma1)+sin(gamma1)*tan(theta/2)));
30 w = w1 + w2;
31 ita = 1 - d/(w*cos(gamma1));
32 x = double(solve(ita==0.2));
33 disp("求解的临界值为: ")
34 disp(double(x));
35
36 %% 最优值求解
37 clear;
38 len = 2*1852;
39 width = 4*1852;
40 alpha = 1.5/180*pi;
41 theta = 120/180*pi;
42 D0 = 110;
43 %% 初始状态
44 pos = [];
45 sumx = 0;
46 x0 = (D0 - width/2*tan(alpha))*sqrt(3);
47 h = D0 - (width/2-x0)*tan(alpha);
48 pos = [pos, x0];
49 sumx = sumx + x0;
50 %% 循环
51 while true
52 syms w x d
53 eqn = [d == h + x*tan(alpha),...
54 x == 0.9*w*cos(alpha),...
55 w == d*tan(theta/2) * (1/(cos(alpha)-sin(alpha)*tan(theta/2)))+...
56 d*tan(theta/2) * (1/(cos(alpha)+sin(alpha)*tan(theta/2)))];
57 answ = solve(eqn, [w, x, d]);
58 pos = [pos, double(answ . x)];
59 sumx = sumx + double(answ . x);

```

```

60 h = double(answ . d);
61 disp("深度: "+num2str(h) + " 覆盖宽度: " + num2str(double(answ . w))+ " 与上一条的间隔" + double(
    answ . x));
62 if sumx + h*sin(theta/2/180*pi)*cos (alpha/180*pi)/sin(28.5/180*pi) >= width
63 break
64 end
65 end
66 disp("测线总长度: "+num2str(2*length(pos)) + "海里")

```

## 附录 E 问题四—matlab 源程序

问题四代码见附件。