FORMATIVA - cadeias de Markov em tempo discreto

Importar as bibliotecas que serão usadas.

In [1]:
```
import numpy as np
```

Exercício 1

Paulo está de bom humor (BH), mais ou menos (MM) ou de mau humor (MH). Se ele está BH hoje, então estará BH, MM e MH amanhã, com as seguintes probabilidades: 0,5, 0,4, 0,1. Se ele está MM hoje, então estará BH, MM e MH amanhã com as seguintes probabilidades: 0,3, 0,4, 0,3. se ele está MH hoje, então ele estará BH, MM, e MH com as seguintes probabilidades: 0,2, 03, 0,5. O humor do Pulo pode ser modelado por uma CMTD com a seguinte matriz de transição:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

a) Calcule a probabilidade de Paulo estar de mau humor hoje e ficar de humor mais ou menos daqui a 3 dias
Dica: A probabilidade desejada estará será uma transição de mau humor (estado 3) para mais ou menos (estado 2) em 3 dias. Ou seja, o valor da probabilidade pode ser encontrado terceira linha da segunda coluna da matriz P elevada à terceira potência.

In [2]:
```
P = np.array([[0.5, 0.4, 0.1],[0.3, 0.4, 0.3],[0.2, 0.3, 0.5]], dtype=np.
P3 = np.linalg.matrix_power(P,3)
print(P3)
print(P3[2,1])
print('Probabilidade de Paulo estar de mau humor hoje e ficar de humor ma
```

```
[[0.356 0.378 0.266]
 [0.336 0.37  0.294]
 [0.322 0.364 0.314]]
0.364
Probabilidade de Paulo estar de mau humor hoje e ficar de humor mais ou m
enos daqui a 3 dias: 0.3640
```

b) Calcule a matriz A, o vetor B e o vetor PI do regime permanente do humor do Paulo. Calcular as probabilidades no regime permanente da CMTD representada pela seguinte matriz de

In [3]:
```
A = np.array([[-0.5, 0.3, 0.2], [0.4, -0.6, 0.3], [0.1, 0.3, -0.5], [1, 1
B= np.array([0, 0, 0, 1] , dtype=np.float64)

A_pinv = np.linalg.pinv(A)
PI = np.dot(A_pinv,B)
print(PI)
```

```
[0.33870968 0.37096774 0.29032258]
```

Exercício 2

Implementar uma função cmtdP para calcular o estado permanente de uma cadeia de Markov em tempo discreto.
A função recebe como argumento a matriz de probabilidades de um passo (P)

Algoritmo:

- Testa se a matriz está corretamente construída

Matriz quadrada e probabilidades de uma linha tem que somar 1

- Calcula matriz A

n = dimensão de A
A = Transposta(P) - Identidade (usar np.transpose e np.identity)
A = A concatenada com vetor de 1s de tamanho n (usar np.vstack para concatenar)

- Calcula vetor B

B = vetor de zeros de tamanho n concatenado com [1] (usar np.hstack para concatenar)

- Calcular o vetor PI

Usar a função np.linalg.pinv para calcular PI

In [4]:
```python
# Função cmtdP
def cmtdP(P):
    [r,c] = P.shape
    if ((r != c) | np.all(np.sum(P, 1) != 1)):
        raise Exception('Matriz P invalida!')

    n = P.shape[0]
    A = np.transpose(P) - np.identity(n)

    ones = np.ones(n)
    A = np.vstack((A, ones))

    zeros = np.zeros(n)
    B = np.hstack((zeros, [1]))

    A_pinv = np.linalg.pinv(A)
    PI = np.dot(A_pinv,B)

    return PI
```

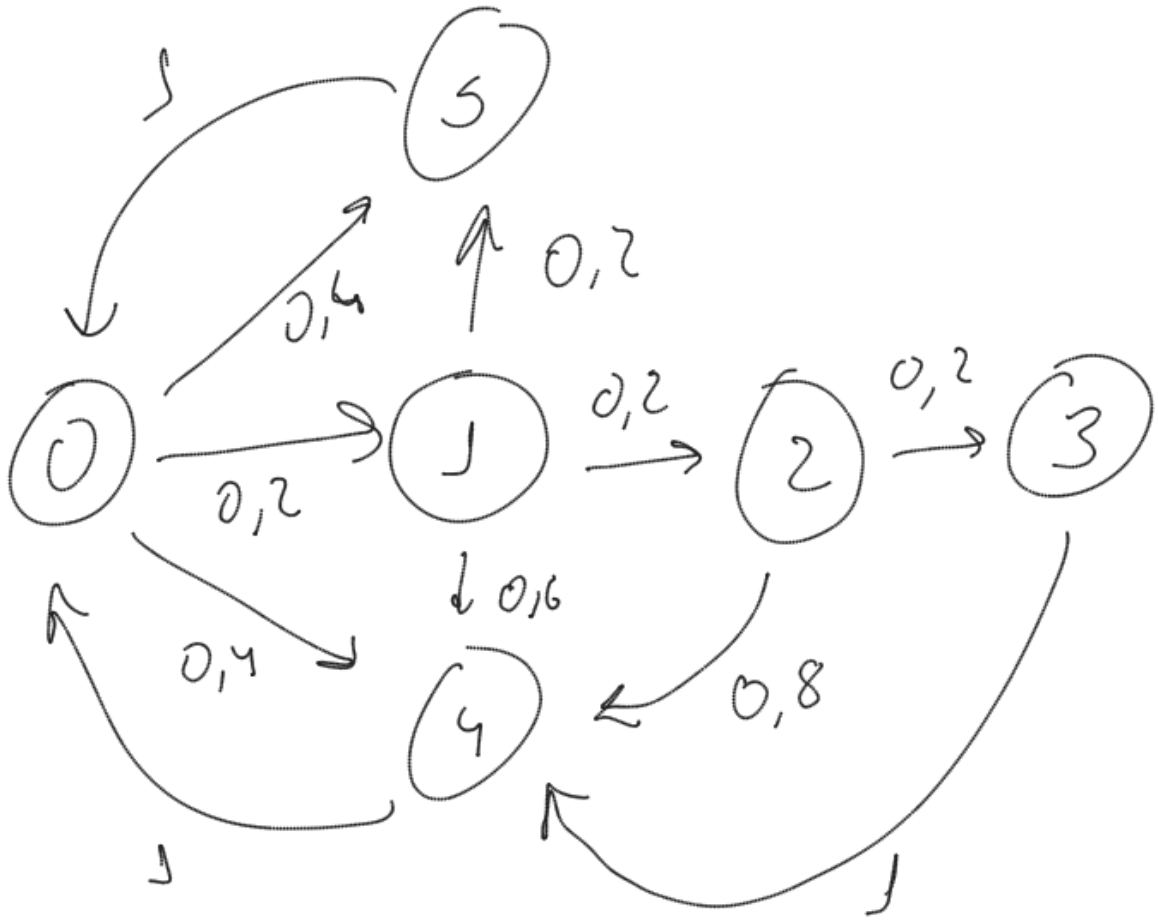
In [5]:
```python
# Testar o seu código
# Se a implementação estiver correta o resultado deve ser [0.33870968 0.3

P = np.array([[0.5, 0.4, 0.1], [0.3, 0.4, 0.3], [0.2, 0.3, 0.5]], dtype=n
print(cmtdP(P))
```

```
[0.33870968 0.37096774 0.29032258]
```

Exercício 3

Pedro e Natália formam o casal perfeito, com apenas um probleminha: quem lava a louça hoje? Na maior parte das vezes ambos são voluntários, mas de vez em quando a louça fica para o dia seguinte. A Natália observou que os fatos ocorrem, mais precisamente, da seguinte maneira: (i) Quando não há louça acumulada, Natália e Pedro se apresentam na mesma proporção, mas em uma a cada cinco vezes, a louça fica para o dia seguinte. (ii) Quando a louça está um dia acumulada, Natália se apresenta três vezes mais do que Pedro, mas em uma a cada cinco vezes, a louça fica para o dia seguinte. (iii) Quando a louça está dois dias acumulada, apenas Natália se apresenta, mas em uma a cada cinco vezes, a louça fica para o dia seguinte. (iv) Quando a louça está três dias acumuladas, a Natália sempre se apresenta.

Calcular a matriz P e usar a função cmtdP para calcular o vetor de probabilidades do regime permanente.



In [6]:
```
# Coloque aqui as probabilidades da matriz de transição de 1 passo
P = np.array([[0.0, 0.2, 0.0, 0.0, 0.4, 0.4],
              [0.0, 0.0, 0.2, 0.0, 0.6, 0.2],
              [0.0, 0.0, 0.0, 0.2, 0.8, 0.0],
              [0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0],
              [1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0],
              [1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]],
             dtype=np.float64)

# Imprimir o resultado
print(cmtdP(P))

# Se a sua matriz estiver correta você deve obter o seguinte resultado
# [0.44483986 0.08896797 0.01779359 0.00355872 0.24911032 0.19572954]
```

```
[0.44483986 0.08896797 0.01779359 0.00355872 0.24911032 0.19572954]
```

In [ ]: