

Theoretische Informatik 1

Fabian Heymann

31.10.2014

1 Mathematische Grundlagen

Definition 1. Eine **Menge**¹ ist die Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte zu einem Ganzen.

(Frei nach Georg Cantor)

Definition 2. Diese Objekte heißen **Elemente**² der Menge.

Wir benennen Mengen typischerweise mit Großbuchstaben und Elemente, die selbst keine Mengen sind, mit Kleinbuchstaben.

Zur Definition von Mengen stehen folgende Schreibweisen zur Verfügung:

- Aufzählung aller Elemente der Menge (nur bei endlichen Mengen möglich):
 $A := \{0, 1, 7, 42\}$
Oder Angabe einer eindeutigen Folge:
 $A' = \{5, 6, 7, \dots\} = \text{„Menge der natürlichen Zahlen } > 4\text{“}$
 $A'' = \{7, 8, 9, \dots, 42\} = \text{„Menge der natürlichen Zahlen } > 6 \text{ und } < 43\text{“}$
- Eindeutige Beschreibung aller Elemente:
 $B := \{x : \exists n \in \mathbb{N} : 2n = x\} \hat{=} \text{„Menge aller durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen“}$
- Bei Teilmengen der reellen Zahlen, die Intervallschreibweise:
 $C := (-2; 4] = \{x : -2 < x \leq 4\}$

¹eng. set

²eng. elements

Einige besondere Zahlenmengen:

- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\} \hat{=}$ „Menge der natürlichen Zahlen“
- $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\} = \mathbb{N} \cup -(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \hat{=}$ „Menge der ganzen Zahlen“
- $\mathbb{Q} := \{\frac{x}{y} : x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \hat{=}$ „Menge der rationalen Zahlen“
- $\mathbb{R} \hat{=}$ „Menge der reellen Zahlen“ (was auch immer das sein soll)
- $\mathbb{C} \hat{=}$ „Menge der komplexen Zahlen“ (nicht Teil dieser Vorlesung)

Das Elementzeichen \in beschreibt die Zugehörigkeit eines Elements zu einer Menge:

- $0 \in \{0, 1, 2\}$
- $0 \in \mathbb{N}$
- $0 \notin \{2, 3, 4\}$

Definition 3. Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt **leere Menge**³ \emptyset .

Definition 4. Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M bezeichnen wir als **Kardinalität**⁴ (Mächtigkeit) $|M|$ der Menge.

Beispiele:

- $A := \{0, 1, 2, 3, 4\}; |A| = 5$
- $B := \emptyset; |B| = 0$
- $C := \{\emptyset\}; |C| = 1$

Definition 5. Eine Menge B heißt **Teilmenge**⁵ einer Menge A genau dann, wenn jedes Element der Menge B auch Element der Menge A ist.

Schreibweise: $B \subseteq A$

Formell: $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall b \in B : b \in A$

³eng. empty set

⁴eng. cardinality

⁵eng. subset

Definition 6. Zwei Mengen A und B heißen **einander gleich**⁶ genau dann, wenn A eine Teilmenge von B und B eine Teilmenge von A ist.

Schreibweise: $A = B$

Formell: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow \forall b \in B : b \in A \wedge \forall a \in A : a \in B$

Definition 7. Eine Menge B heißt **echte Teilmenge**⁷ einer Menge A genau dann, wenn B Teilmenge von A und B nicht gleich A ist.

Schreibweise: $B \subset A$

Formell: $B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \neq B \Leftrightarrow \forall b \in B : b \in A \wedge A \neq B$

Satz 1. Eigenschaften der Teilmengenrelation

(1) Die Teilmengenrelation ist **reflexiv**: $A \subseteq A$

(2) Die Teilmengenrelation ist **transitiv**: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$

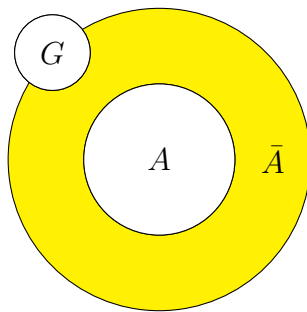
(Ohne Beweis)

Satz 2. Die leere Menge \emptyset ist Teilmenge jeder Menge.

Dies folgt direkt aus der Definition der Teilmengenrelation.

Definition 8. Sei G eine Menge und $A \subseteq G$. Die Menge \bar{A} , die alle Elemente aus G enthält, die nicht in A liegen, heißt **Komplementärmenge**⁸ zu A bezüglich G .

Formell: $a \in \bar{A} \Leftrightarrow a \in G \wedge a \notin A$



⁶eng. equal

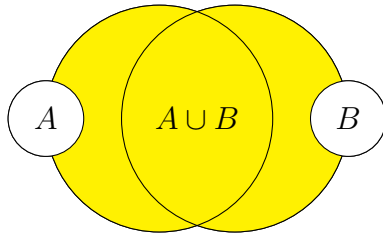
⁷eng. strict subset

⁸eng. complement

Definition 9. Seien A und B Mengen. Die Menge, die alle Elemente aus A und B enthält, heißt **Vereinigungsmenge**⁹ von A und B .

Schreibweise: $A \cup B$

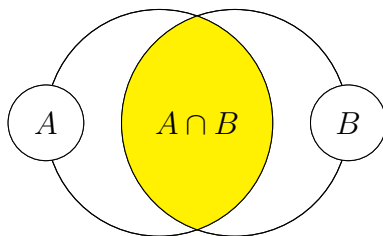
Formell: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$



Definition 10. Seien A und B Mengen. Die Menge, die alle Elemente enthält, die sowohl in A als auch in B enthalten sind, heißt **Durchschnittsmenge**¹⁰ von A und B .

Schreibweise: $A \cap B$

Formell: $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$



Beispiel:

$$A := \{0, 1, 5, 7\}$$

$$B := \{0, 1, 3, 12\}$$

$$\Rightarrow A \cup B = \{0, 1, 3, 5, 7, 12\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{0, 1\}$$

⁹eng. union

¹⁰eng. intersection

Satz 3. *Eigenschaften von Schnitt und Vereinigung:*

Seien A, B, C Mengen in einer Grundmenge G , so gilt:

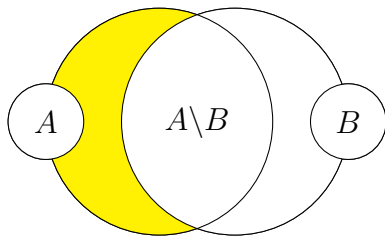
- (1) $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$
- (2) $A \cap \emptyset = \emptyset$
- (3) $A \cap A = A$
- (4) $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- (5) $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativgesetz)
- (6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativgesetz)
- (7) $A \subseteq B \implies A \cap B = A$
- (8) $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
- (9) $A \cup \emptyset = A$
- (10) $A \cup A = A$
- (11) $A \cup \bar{A} = G$
- (12) $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativgesetz)
- (13) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Assoziativgesetz)
- (14) $A \subseteq B \implies A \cup B = B$
- (15) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (Distributivgesetz)
- (16) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (Distributivgesetz)
- (17) $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$ (Gesetz von de Morgan)
- (18) $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ (Gesetz von de Morgan)

Definition 11. Seien A und B Mengen. Die Menge, die alle Elemente von A enthält, die nicht auch in B liegen, heißt **Differenzmenge**¹¹ von A und B .

Schreibweise: $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

Formell: $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

Anmerkung: im Allgemeinen: $A \setminus B \neq B \setminus A$



¹¹eng. difference

Satz 4. *Eigenschaften der Differenz:*

Seien A, B, C Mengen, so gilt:

(1) $A \cap B = \emptyset \implies A \setminus B = A$

(2) $A \subseteq B \implies A \setminus B = \emptyset$

Im Allgemeinen gelten jedoch weder Assoziativität noch Kommutativität:

(3) $A \setminus B \neq B \setminus A$

(4) $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$

Definition 12. *Seien A und B Mengen. Ein Zahlenpaar (Tupel) (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ heißt **geordnetes Paar**¹² von Elementen aus den Mengen A und B .*

*Die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ heißt **cartesisches Produkt**¹³ $A \times B$ der Mengen A und B .*

Formell: $A \times B := \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$

Weiterhin definieren wir für eine Menge M :

(1) $M \times \emptyset = \emptyset$

(2) $\emptyset \times M = \emptyset$

Satz 5. *Distributivgesetze des cartesischen Produkts:*

Seien A, B, C Mengen, so gilt:

(1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(2) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

(3) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(4) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(5) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

(6) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

Definition 13. *Zwei Mengen A und B heißen **disjunkt**¹⁴, wenn Sie keine gemeinsamen Elemente enthalten.*

Formell: A und B disjunkt $\Leftrightarrow \nexists x : x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

¹²eng. ordered pair

¹³eng. cartesian product

¹⁴eng. disjoint

Definition 14. Um zwei Mengen disjunkt zu vereinigen, weisen wir jeder Menge eine eindeutige natürliche Zahl zu und vereinigen die cartesischen Produkte der Mengen mit den zugehörigen natürlichen Zahlen.

Formell: $A + B := (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$

Definition 15. Sei A eine Menge. Die **Potenzmenge**¹⁵ von A , $P(A)$, ist die Menge aller Teilmengen von A .

Formell: $P(A) := \{B : B \subseteq A\}$

Beispiel:

Sei $A := \{a, b, c\}$

$\implies P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Satz 6. Drei wichtige eigenschaften der Potenzmenge:

Sei A eine Menge, so gilt:

(1) $|A| = n \implies |P(A)| = 2^n$

(2) $\forall A : \emptyset \in P(A)$

(3) $\forall A : A \in P(A)$

¹⁵eng. power set