Theoretische Informatik 1

Fabian Heymann

31.10.2014

1 Mengenlehre

Definition 1. *Eine* **Menge**[1] *ist die Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte zu einem Ganzen.*
(Frei nach Georg Cantor)

Definition 2. *Diese Objekte heißen* **Elemente**[2] *der Menge.*

Wir benennen Mengen typischerweise mit Großbuchstaben und Elemente, die selbst keine Mengen sind, mit Kleinbuchstaben.
Zur Definition von Mengen stehen folgende Schreibweisen zur Verfügung:

- Aufzählung aller Elemente der Menge (nur bei endlichen Mengen möglich):
  $A := \{0, 1, 7, 42\}$
  Oder Angabe einer eindeutigen Folge:
  $A' := \{5, 6, 7, ...\} =$ „Menge der natürlichen Zahlen > 4“
  $A'' := \{7, 8, 9, ..., 42\} =$ „Menge der natürlichen Zahlen > 6 und < 43“

- Eindeutige Beschreibung aller Elemente:
  $B := \{x : \exists n \in \mathbb{N} : 2n = x\} \hat{=}$ „Menge aller durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen“

- Bei Teilmengen der reelen Zahlen, die Intervallschreibweise:
  $C := (-2; 4] = \{x : -2 < x \leq 4\}$

[1] eng. set
[2] eng. elements

Einige besondere Zahlenmengen:

- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, ...\} \hat{=}$ „Menge der natürlichen Zahlen"
- $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, ...\} = \mathbb{N} \cup -(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \hat{=}$ „Menge der ganzen Zahlen"
- $\mathbb{Q} := \{\frac{x}{y} : x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \hat{=}$ „Menge der rationalen Zahlen"
- $\mathbb{R} \hat{=}$ „Menge der reelen Zahlen" (was auch immer das sein soll)
- $\mathbb{C} \hat{=}$ „Menge der komplexen Zahlen" (nicht Teil dieser Vorlesung)

Das Elementzeichen $\in$ beschreibt die Zugehörigkeit eines Elements zu einer Menge:

- $0 \in \{0, 1, 2\}$
- $0 \in \mathbb{N}$
- $0 \notin \{2, 3, 4\}$

Definition 3. *Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt* **leere Menge**[3] $\varnothing$.

Definition 4. *Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M bezeichnen wir als* **Kardinalität**[4] *(Mächtigkeit)* **|M|** *der Menge.*

Beispiele:

- $A := \{0, 1, 2, 3, 4\}; |A| = 5$
- $B := \varnothing; |B| = 0$
- $C := \{\varnothing\}; |C| = 1$

Definition 5. *Eine Menge B heißt* **Teilmenge**[5] *einer Menge A genau dann, wenn jedes Element der Menge B auch Element der Menge A ist.*
Schreibweise: $B \subseteq A$
Formell: $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall b \in B : b \in A$

[3] eng. empty set
[4] eng. cardinality
[5] eng. subset

Definition 6. *Zwei Mengen A und B heißen* **einander gleich**[6] *genau dann, wenn A eine Teilmenge von B und B eine Teilmenge von A ist.*
Schreibweise: $A = B$
Formell: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow \forall b \in B : b \in A \wedge \forall a \in A : a \in B$

Definition 7. *Eine Menge B heißt* **echte Teilmenge**[7] *einer Menge A genau dann, wenn B Teilmenge von A und B nicht gleich A ist.*
Schreibweise: $B \subset A$
Formell: $B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \neq B \Leftrightarrow \forall b \in B : b \in A \wedge A \neq B$

Satz 1. *Eigenschaften der Teilmengenrelation*

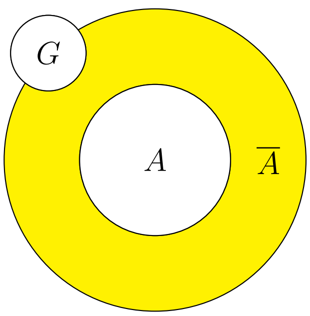
(1) Die Teilmengenrelation ist **reflexiv**: $A \subseteq A$

(2) Die Teilmengenrelation ist **transitiv**: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$

(Ohne Beweis)

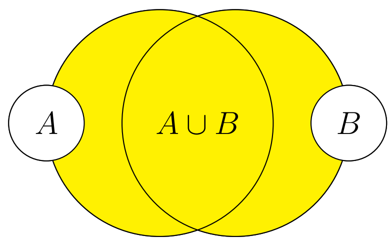
Satz 2. *Die leere Menge $\varnothing$ ist Teilmenge jeder Menge.*
Dies folgt direkt aus der Definition der Teilmengenrelation.

Definition 8. *Sei G eine Menge und $A \subseteq G$. Die Menge $\overline{A}$, die alle Elemente aus G enthält, die nicht in A liegen, heißt* **Komplementärmenge**[8] *zu A bezüglich G.*
Formell: $a \in \overline{A} \Leftrightarrow a \in G \wedge a \notin A$

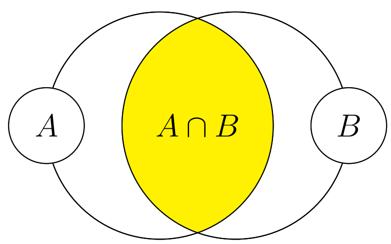


[6] eng. equal
[7] eng. strict subset
[8] eng. complement

Definition 9. *Seien A und B Mengen. Die Menge, die alle Elemente aus A und B enthält, heißt* **Vereinigungsmenge**[9] *von A und B.*
Schreibweise: $A \cup B$
Formell: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$



Definition 10. *Seien A und B Mengen. Die Menge, die alle Elemente enthält, die sowohl in A als auch in B enthalten sind, heißt* **Durchschnittsmenge**[10] *von A und B.*
Schreibweise: $A \cap B$
Formell: $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$



Beispiel:

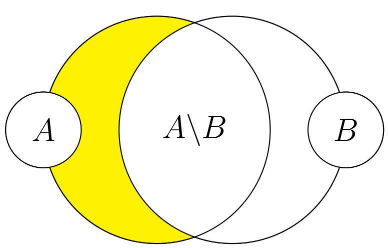
$A := \{0, 1, 5, 7\}$
$B := \{0, 1, 3, 12\}$
$\implies A \cup B = \{0, 1, 3, 5, 7, 12\}$
$\implies A \cap B = \{0, 1\}$

---

[9] eng. union
[10] eng. intersection

Satz 3. *Eigenschaften von Schnitt und Vereinigung:*
Seien A, B, C Mengen in einer Grundmenge G, so gilt:
(1) $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$
(2) $A \cap \varnothing = \varnothing$
(3) $A \cap A = A$
(4) $A \cap \overline{A} = \varnothing$
(5) $A \cap B = B \cap A$ *(Kommutativgesetz)*
(6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(Assoziativgesetz)*
(7) $A \subseteq B \implies A \cap B = A$
(8) $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$
(9) $A \cup \varnothing = A$
(10) $A \cup A = A$
(11) $A \cup \overline{A} = G$
(12) $A \cup B = B \cup A$ *(Kommutativgesetz)*
(13) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(Assoziativgesetz)*
(14) $A \subseteq B \implies A \cup B = B$
(15) $(A \cap B) \cup C) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ *(Distributicgesetz)*
(16) $(A \cup B) \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ *(Distributicgesetz)*
(17) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ *(Gesetz von de Morgan)*
(18) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ *(Gesetz von de Morgan)*

Definition 11. *Seien A und B Mengen. Die Menge, die alle Elemente von A enthält, die nicht auch in B liegen, heißt* **Differenzmenge**[11] *von A und B.*
Schreibweise: $A \backslash B = A \cap \overline{B}$
Formell: $x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$
Anmerkung: im Allgemeinen: $A \backslash B \neq B \backslash A$



[11]eng. difference

Satz 4. *Eigenschaften der Differenz:*
Seien A, B, C Mengen, so gilt:
(1) $A \cap B = \varnothing \implies A \backslash B = A$
(2) $A \subseteq B \implies A \backslash B = \varnothing$
Im Allgemeinen gelten jedoch weder Assoziativität noch Kommutativität:
(3) $A \backslash B \neq B \backslash A$
(4) $(A \backslash B) \backslash C \neq A \backslash (B \backslash C)$

Definition 12. *Seien A und B Mengen. Ein Zahlenpaar (Tupel) (a, b) mit* $a \in A$ *und* $b \in B$ *heißt* **geordnetes Paar**[12] *von Elementen aus den Mengen A und B.*

Die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ *und* $b \in B$ *heißt* **cartesisches Produkt**[13] $A \times B$ *der Mengen A und B. Anstelle von* $A \times A$ *schreiben wir auch* A^2*.*
Formell: $A \times B := \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$

Weiterhin definieren wir für eine Menge M:
(1) $M \times \varnothing = \varnothing$
(2) $\varnothing \times M = \varnothing$

Satz 5. *Distributivgesetze des cartesischen Produkts:*
Seien A, B, C Mengen, so gilt:
(1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
(2) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
(3) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
(4) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
(5) $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$
(6) $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$

Definition 13. *Zwei Mengen A und B heißen* **disjunkt**[14]*, wenn Sie keine gemeinsamen Elemente enthalten.*
Formell: A und B disjunkt $\Leftrightarrow \nexists x : x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

[12] eng. ordered pair
[13] eng. cartesian product
[14] eng. disjoint

Definition 14. *Um zwei Mengen disjunkt zu vereinigen, weisen wir jeder Menge eine eindeutige natürliche Zahl zu und vereinigen die cartesischen Produkte der Mengen mit den zugehörigen natürlichen Zahlen.*
Formell: $A + B := (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$

Definition 15. *Sei A eine Menge. Die* **Potenzmenge**[15] *von A, P(A), ist die Menge aller Teilmengen von A.*
Formell: $P(A) := \{B : B \subseteq A\}$

Beispiel:
Sei A := $\{a, b, c\}$
$\implies P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Satz 6. *Drei wichtige Eigenschaften der Potenzmenge:*
Sei A eine Menge, so gilt:
(1) $|A| = n \implies |P(A)| = 2^n$
(2) $\forall A : \varnothing \in P(A)$
(3) $\forall A : A \in P(A)$

[15] eng. power set

2 Relationen und Funktionen

Definition 1. *Seien A und B Mengen. Eine Teilmenge des cartesischen Produkts $r \subseteq A \times B$ heißt* **Relation** *von A in B. Eine Teilmenge $r' \subseteq A^2$ nennen wir eine Relation in A.*
Alternative Schreibweise: $arb :\Leftrightarrow (a, b) \in r$

Die Relation $r := \{(x, x) : x \in A\} \subseteq A^2 = id_A$ heißt **Identität**. *Dementsprechend gilt: $x id_A y \Leftrightarrow x = y \in A$.*

Definition 2. *Ist $r \subseteq A \times B$ eine Relation, dann heißt $D_r := \{a \in A : \exists b \in B : arb\}$ der* **Definitionsbereich** *(auch dom(r) geschrieben) und $W_r := \{b \in B : \exists a \in A : arb\}$ der* **Wertebereich** *der Relation.*

Definition 3. *Sei $r \subseteq A^2$ eine Relation. r heißt*
(1) **reflexiv** $:\Leftrightarrow \forall a \in A : ara$
(2) **transitiv** $:\Leftrightarrow \forall a_1, a_2, a_3 \in A : a_1ra_2 \wedge a_2ra_3 \implies a_1ra_3$
(3) **symmetrisch** $:\Leftrightarrow \forall a_1, a_2 \in A : a_1ra_2 \implies a_2ra_1$
(4) **antisymmetrisch** $:\Leftrightarrow \forall a_1, a_2 \in A : a_1ra_2 \wedge a_2ra_1 \implies a_1 = a_2$
(5) **Halbordnung**, *wenn r reflexiv (1), transitiv (2) und antisymmetrisch (4) ist*
(5) **Äquivalenzrelation**, *wenn r reflexiv (1), transitiv (2) und symmetrisch (3) ist*

Definition 4. *Eine Relation $r \subseteq A \times B$ heißt* **rechtseindeutig** *(manchmal nur eindeutig geschrieben), falls gilt:*
$\forall a \in A : \forall b_1, b_2 \in B : arb_1 \wedge arb_2 \implies b_1 = b_2$
Eine (totale) **Funktion** *oder* **Abbildung** *f: $A \to B$ ist eine rechtseindeutige Relation $f \subseteq A \times B$ mit $D_f = A$. Eine solche Abbildung ordnet also jedem $a \in A$ einen eindeutig bestimmten Wert $b \in B$ zu:*
$f(a) = b :\Leftrightarrow arb \Leftrightarrow (a, b) \in f$
Eine **partielle Funktion** *$f' : A \to B$ ist eine rechtseindeutige Relation $f \subseteq A \times B$ mit $D_f \subseteq A$, also eine Funktion, die nicht notwendigerweise an jeder Stelle der Ausgangsmenge definiert ist.*

Definition 5. *Eine Abbildung f: $A \to B$ heißt*
(1) **injektiv** $:\Leftrightarrow \forall a_1, a_2 \in A : (f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2)$
(1) **surjektiv** $:\Leftrightarrow \forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$
(1) **bijektiv** $:\Leftrightarrow \forall b \in B : \exists! a \in A : f(a) = b$*, also wenn f injektiv und surjektiv ist*

Definition 6. *Für eine bijektive Abbildung f: $A \to B$ definieren wir die* **Umkehrfunktion** *(die zu f inverse Abbildung) durch*
$f^{-1} : B \to A, f^{-1}(b) = (a \in A : f(a) = b)$
(Da f eine Bijektion ist, ist dieser Wert immer eindeutig bestimmt)

Definition 7. *Seien A, B, C Mengen und f: $A \to B$ sowie g: $B \to C$ Abbildungen. Wir nennen die Abbildung*
$g \circ f : A \to C, x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$
die Komposition von f und g. In dieser Vorlesung schreiben wir auch f;g.