Satz: Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind wieder abzählbar.

Beweis:
Durch Umsortieren ist leicht zu erkennen, dass gilt:

(1): $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{N} \times \{n\})$

Sei nun B_i $(i \in \mathbb{N})$ eine Familie abzählbarer Mengen.

(2): $\forall i \in \mathbb{N} : B_i$ abzählbar $\implies \exists f_i : B_i \to \mathbb{N} : f_i$ injektiv

(3): $\bigcup\{B_i : i \in \mathbb{N}\} = \sum\{B_i - \bigcup\{B_j : j < i\} : i \in \mathbb{N}\}$

Da dies jeweils Teilmengen sind, gilt:

(4): $(2) \wedge (3) \implies \forall i \in \mathbb{N} : \exists g_i : (B_i - \sum\{B_j : j < i\}) \to (\mathbb{N} \cup \{i\}) : g_i$ injektiv

Somit können wir die disjunkte Vereinigung komponentenweise nach $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abbilden:

(5): $(1) \wedge (4) \implies \exists h : \sum\{B_i - \bigcup\{B_j : j < i\} : i \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} : h$ injektiv

(6): $(3) \wedge (5) \implies \exists h : \bigcup\{B_i : i \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} : h$ injektiv

Jetzt verwenden wir noch die injektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aus Aufgabenteil 2:

(7): $(6) \implies \exists h;\varphi : \bigcup\{B_i : i \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N} : h;\varphi$ injektiv

(8): $(7) \implies \bigcup\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar. $\square$