**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Факультет прикладной математики и информатики**

Лабораторная работа № 6

**Методы Данилевского, Крылова, вращений и степенной для решения проблемы собственных значений.**

Вариант 9

**Выполнил:**

Дронченко Дмитрий Иванович

2 курс, 7 группа

**Преподаватель:**

Будник Анатолий Михайлович

**Метод Данилевского**

**Постановка задачи**

1. Преобразовать исходную матрицу к симметрической.
2. Привести матрицу к форме Фробениуса.
3. Вывести собственные значения матрицы.
4. Вывести векторы Y.
5. Вывести собственные векторы матрицы.
6. Анализ результатов.

**Описание**

Суть метода Данилевского заключается в преобразовании исходной матрицы A в подобную ей матрицу Фробениуса по формуле:

P = B1-1B2-1...Bn-1-1ABn-1...B2B1 = B-1AB

где Bi получена из единичной матрицы заменой элементов (n-i) строки (i = 1...n) на:

bn-i,j = ,

bn-i,n-i = , i = 1...n, j = 0...n

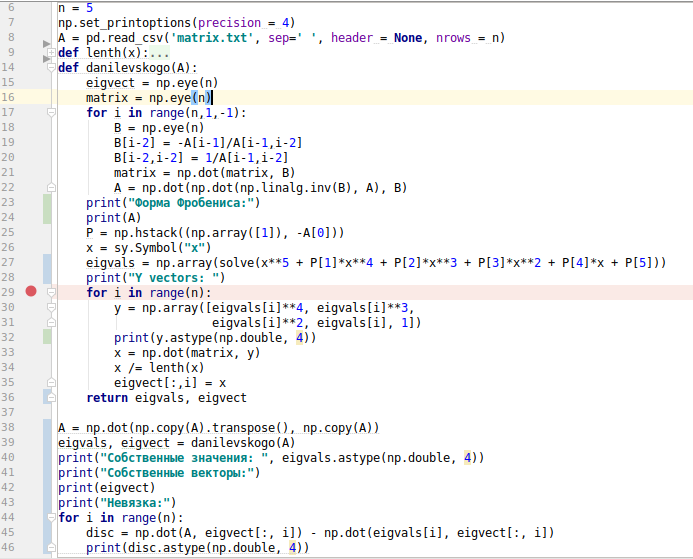
Далее по полученным коэффициентам (первой строке матрицы Фробениуса) составим и решим характеристическое уравнение. Корни данного уравнения – собственные значения исходной матрицы: .

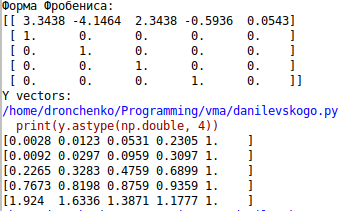
Собственные векторы вычисляются по следующей формуле:

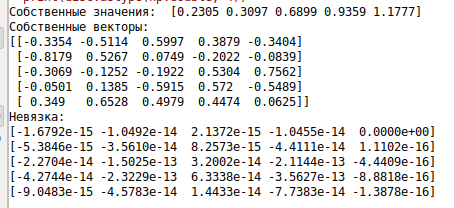
После чего проводится нормирование по формуле:

xi = i = 0...(n-1)

**Листинг программы:**

**Результаты:**

****

****

**Метод Крылова**

**Постановка задачи**

1. Преобразовать исходную матрицу к симметрической.

2. Найти коэффициенты характеристического уравнения.

3. Вывести собственные значения матрицы.

4. Вывести собственные векторы матрицы.

5. Анализ результатов.

**Описание**

Основан на использовании минимального многочлена матрицы, аннулирующего собственный вектор.

Построение собственного многочлена:

Рассмотрим произвольный вектор . Пусть

Тогда последующие (n-1) векторов будут вычислены следующим образом:

*,*

Вычисления будем продолжать до тех пор, пока не получим вектор, являющийся линейной комбинацией всех предшествующих векторов:

—предельно возможная комбинация. Запишем в координатном виде:

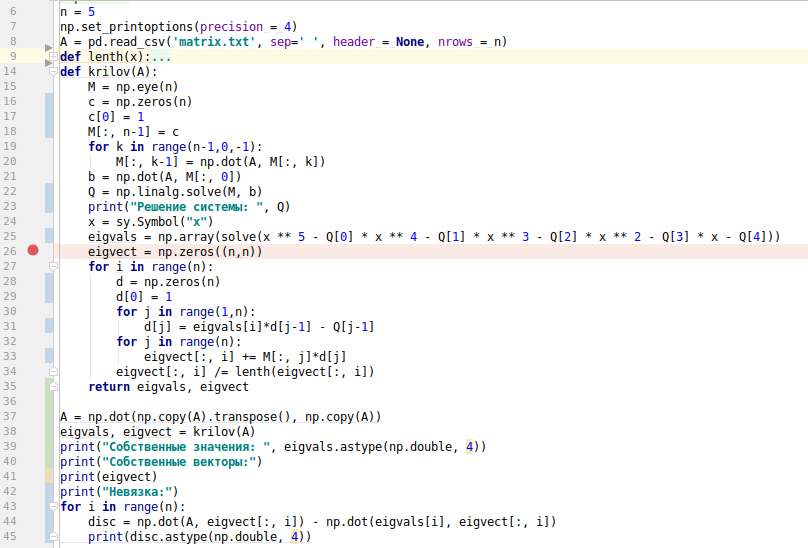
Найдём коэффициенты характеристического уравнения q1...qn, решив данную систему. Из него вычислим собственные значения матрицы (корни характеристического уравнения).

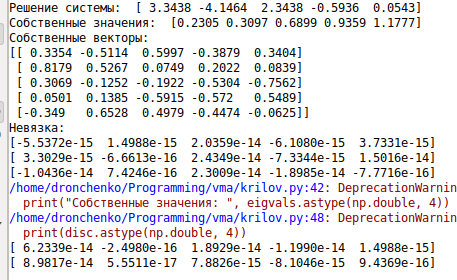
Построение собственных векторов:

После чего нормируем полученные векторы по формуле:

xi = i = 1...n

**Листинг программы:**

**Результаты:**

****

**Вывод:**

Сложность метода Крылова Q(n) = O(n4), метода Данилевского Q(n) = О(n3). То есть МК более затратный чем МД. Собственные векторы в методах совпадают. Метод Крылова точнее метода Данилевского. ||невязки|| МК = 9.4528е-14, ||невязки|| МД = 6.9965е-13.

**Метод Вращений**

**Постановка задачи**

1. Преобразовать исходную матрицу к симметрической.

2. Задать точность.

3. Вывести собственные значения матрицы.

4. Вывести собственные векторы матрицы.

5. Вывести количество итераций, необходимых для достижения заданной точности.

6. Анализ результатов.

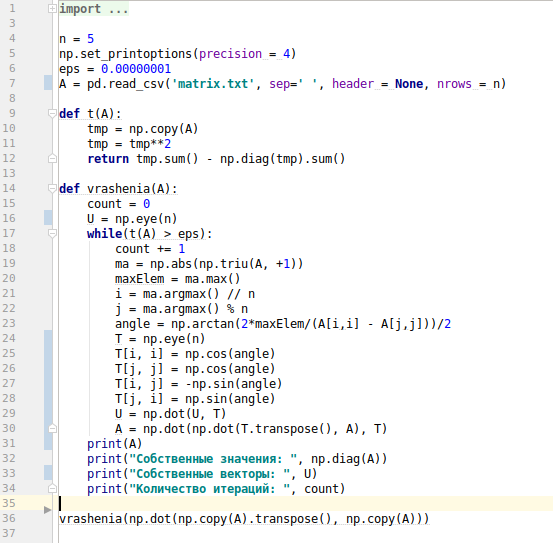
**Описание**

Преобразуем исходную матрицу к симметрической при помощи действий, описанных в методе квадратного корня решения СЛАУ. По полученной матрице будем строить последовательность подобных преобразований с матрицей Гивенса. Рассмотрим действия, производимые за одну итерацию:

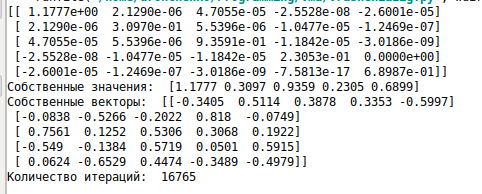
1. В матрице () выберем наибольший по модулю над диагональный элемент: .
2. Строим матрицу Гивенса исходя из индексов : .
3. Образуем
4. Проверяем меру близости матрицы к диагональному виду по следующему критерию: Итерации будут продолжаться до тех пор, пока , где – заданная точность.

После окончания итерационного процесса будем иметь диагональную матрицу A с собственными значениями на диагонали и матрицу столбцы которой являются собственными векторами:

**Листинг программы:**

****

**Результаты:**

****

**Вывод:**

Данный метод позволяет найти все собственные значения матрицы и соответствующие им векторы. Метод позволяет нам найти собственные значения и векторы с заданной точностью, т. к. метод итерационный.

Вектор невязки

**Степенной метод**

**Постановка задачи**

1. Преобразовать исходную матрицу к симметрической.

2. Задать начальное приближение для собственного вектора и точность вычислений.

3. Получить максимальное собственное значение и соответствующий ему вектор.

4. Вывести число итераций, выполненных в ходе программы.

5. Вывести невязку.

6. Анализ результатов.

**Описание**

Пусть матрица A имеет n линейно независимых собственных векторов и собственные значения матрицы A таковы, что . Будем искать λ1 и соответствующий этому собственному значению вектор.

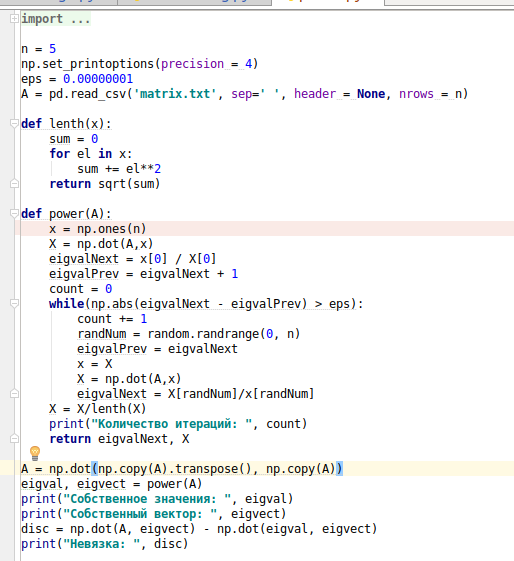
1. Выбрать произвольное начальное приближение собственного вектора x0. Положить k = 0.

2. Найти x1 = Ax(0), λ1 = , где . Положить k = 1.

3. Вычислить хk+1 = Ax(k) и λk+1 = .

4. Если , процесс завершить и положить λ = λk+1. Иначе положить k = k+1.

**Листинг программы:**

****

**Результаты:**

