

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ГИДРОМЕХАНИКИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

**Осаждение частиц при одномерных течениях
суспензии в пористых средах**

**Particle deposition in one-dimensional flows of
suspension through porous media**

Выполнил студент
624 группы
А.П.Волчанский

подпись студента

Научный руководитель:
доцент, кандидат ф.-м. наук
Н.Е.Леонтьев

подпись научного руководителя

Москва

2018

Содержание

1	Введение	4
2	Обзор литературы	5
2.1	Фильтрация с осаждением	5
2.2	Фильтрация с диффузией	5
3	Основные уравнения	7
3.1	Определения теории фильтрации	7
3.2	Законы сохранения массы	7
3.3	Закон Дарси	9
3.4	Кинетическое уравнение	9
3.5	Классификация системы уравнений	10
4	Постановка задачи	11
4.1	Одномерное течение	11
4.2	Граничные условия	11
4.3	Начало закачки в пласт	12
5	Решение упрощённой задачи с конкретным уравнением засорения	13
5.1	Дополнительные предположения	13
5.2	Решение поставленной задачи	13
6	Решение задачи без упрощений	15
6.1	Полное уравнение.	15
7	Решения в виде рядов	16
8	Расширенный класс решений	17
8.1	Система уравнений для обобщённого кинетического уравнения .	17
9	Диффузия частиц в потоке в отсутствие оседания	21
9.1	Основные понятия	21
10	Основные формулы и уравнения фильтрации с диффузией	22
10.1	Уравнение движения Бринкмана	22
10.2	Компоненты общего потока диффузии	22
11	Задача о течении в высокопористой среде	23

1 Введение

Одной из важных современных отраслей механики сплошной среды является теория фильтрации. Прикладное значение знаний, полученных во время изучения этой дисциплины, обусловлено большим значением энергетических и природных ресурсов, необходимых для жизни современного человечества. Такие отрасли, как нефтедобыча и очистка воды от примесей, являются сегодня одними из лидирующих в мире.

В большинстве природных процессов фильтрация жидкости сквозь пористую среду происходит при наличии в жидкости мелких в масштабах течения частиц. Примерами таких течений могут быть течение загрязнённой воды сквозь очищающий слой фильтра, закачка пропанта в трещину после её создания методом гидроразрыва пласта.

Характерными особенностями таких задач являются движение мелких частиц в относительно высоких концентрациях, которое происходит со скоростями, равными скорости несущего флюида, и загрязнение фильтрующего пласта, которое сопровождается изменением пористости и других параметров.

Целью работы является изучение таких важных процессов для описания такой задачи, как отложение частиц на поверхности пористого скелета и их диффузия в процессе движения. Также исследуются различные модели течения жидкости и оседания частиц на поверхности порового пространства.

В данной работе была рассмотрена одномерная модель загрязнения пласта, где загрязнение моделируется кинетическим уравнением, отложение частиц зависит от скорости жидкости, пористости и концентрации частиц, а также были получены решения для функций пористости и концентрации частиц.

2 Обзор литературы

2.1 Фильтрация с осаждением

В природе процессы фильтрации [7] и [8] чаще всего протекают при наличии в текущем флюиде примесей, размеры которых много меньше, чем размеры пор породы. Участие этих примесей в засорении может сказываться как на течении жидкости как таковой, влияя на её эффективные механические параметры, так и на объёмной доле пор, что также меняет картину течения.

В статьях [2] и [3] рассмотрено влияние сопротивления жидкости и силы Архимеда на распределение частиц в ламинарном потоке несущей жидкости в течении внутри трещины гидроразрыва в приближении тонкого слоя. Распределение частиц полагается неоднородным, рассматривается двухфазная модель течения. В ходе работы проводится сравнение численной модели с упрощённой аналитической и с экспериментальными данными.

В статье [1] рассматриваются различные долгосрочные эффекты влияния оседания примесей на пористый скелет, а также предлагается метод анализа подобных задач на больших временах с использованием рядов. В качестве результата получается асимптотическое решение задачи вблизи фронта концентрации.

В статье [4] рассматриваются различные виды зависимости скорости изменения пористого скелета из-за осаждения частиц на его поверхности и выноса их оттуда потоком флюида. Также в статье предлагается обобщение данных моделей при помощи эмпирических зависимостей. Уравнения основываются на уравнениях сплошной среды и статистических закономерностях, обобщающих эмпирические законы.

2.2 Фильтрация с диффузией

В статье [9] исследуется течение в высокопористых средах и обосновывается закон движения в подобном типе задач. Производится сравнение с экспериментальными данными и более простыми зависимостями.

В статье [5] рассматривается влияние диффузии сферических частиц на эффективную вязкость суспензии как целого. Выводится аналитическая модель и сравнивается с экспериментальными данными.

В статье [6] приводится описание исследования различных эффектов, связанных с диффузией частиц в потоке высококонцентрированной смеси, на различные характеристики течения. Рассматриваются две различные постановки задачи: течение Куэтта между двумя соосными вращающимися цилиндрами и течение в трубе под действием перепада давления. В этой работе выделяется три основных компоненты, описывающие диффузионный поток:

хаотическое движение частиц, соударение между частицами и диффузия из более вязких слоёв в менее вязкие. Полученные зависимости сравниваются с экспериментальными данными.

3 Основные уравнения

3.1 Определения теории фильтрации

Основное явление, изучаемое в этой работе — осаждение частиц на поверхности пористой среды. В ходе этого процесса частицы могут прикрепляться к пористому скелету, что влияет на течение жидкости и объём пустот в среде.

Пусть $\alpha(x^i, t)$ — объёмная концентрация взвешенных частиц, $m(x^i, t)$ — пористость, то есть отношение объёма пор к объёму малого участка среды.

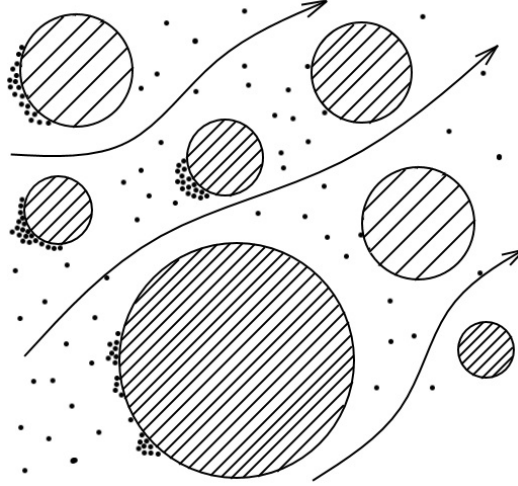


Рис. 1: Схема течения на уровне пор

Предполагается, что частицы имеют размер много меньше размера пор (во многих приложениях размер пор $d_p \approx 1$ мкм), перемещаются только благодаря потоку жидкости, перемешивание отсутствует. Это означает, что скорость частиц равна скорости жидкости. Также предполагается, что жидкость и частицы — *несжимаемые*, $\rho_f = \text{const}$, $\rho_{\text{жидк}} \equiv \rho = \text{const}$.

3.2 Законы сохранения массы

Как и в других разделах механики сплошной среды, в теории фильтрации действуют стандартные законы сохранения. Их можно записать для каждой из фаз, для флюида и для частиц.

Запишем закон сохранения массы для жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho m (1 - \alpha) dV = - \int_{\Sigma} \rho u_n (1 - \alpha) d\sigma$$

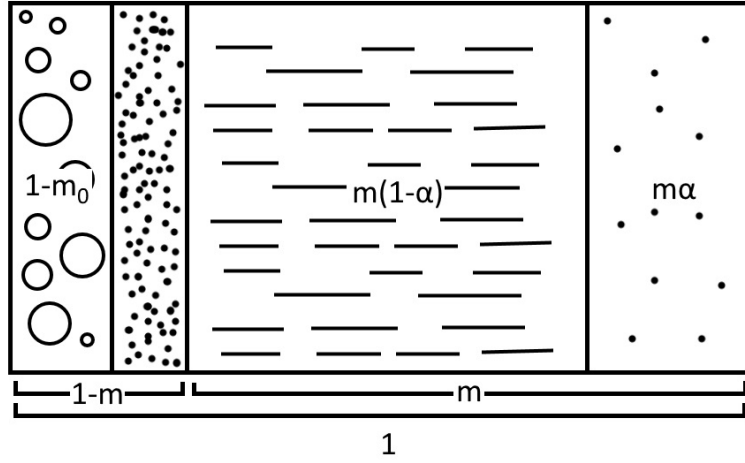


Рис. 2: Количество частиц в терминах α и m

Применяя стандартную технику перехода к дифференциальной форме, получим уравнение неразрывности для жидкой фракции:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m(1 - \alpha)) + \text{div}((1 - \alpha)\vec{u}) = 0 \quad (1)$$

Также можно выписать соотношение на разрыве:

$$[m(1 - \alpha)]D - [(1 - \alpha)u_n] = 0$$

или в эквивалентной форме:

$$[m(\alpha - 1)]D - [\alpha u_n] = 0$$

Запишем аналогичный закон для частиц.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_{\text{ч}} m \alpha + \rho_{\text{ч}} ((1 - m) - 1 - m_0) dV = - \int_{\Sigma} \rho_{\text{ч}} \vec{u} \alpha d\sigma$$

Здесь $m_0 = \text{const}$ — первоначально пласт однородный. Перепишем полученные равенства в виде уравнения неразрывности:

$$\begin{aligned} (m\alpha)_t - m_t + \text{div}(\alpha\vec{u}) &= 0 \\ (m\alpha)_t + \text{div}(\alpha\vec{u}) &= m_t \end{aligned} \quad (2)$$

Соотношение на разрыве:

$$[m\alpha - m]D - [\alpha u_n] = 0$$

Следствие: Складывая (1)+(2) получаем уравнение неразрывности для **всей** суспензии.

$$\begin{aligned}m_t + \operatorname{div} \vec{u} &= m_t \\ \operatorname{div} \vec{u} &= 0\end{aligned}$$

Это уравнение можно использовать вместо (1) или (2) при решении системы уравнений.

3.3 Закон Дарси

В теории фильтрации используется экспериментальный закон Дарси, который связывает скорость и градиент давления. Этот закон можно получить как частное следствие закона Навье-Стокса при осреднении. Закон Дарси имеет вид:

$$-\vec{\nabla} P - \frac{\mu}{k} \vec{u} = 0 \quad (3)$$

В нашей постановке полагается, что массовых сил нет. В данной работе вязкость будет определяться в следующем виде: $\mu = \mu(\alpha) = \mu_0(1+C\alpha) \approx \mu_0$, $k = k(m)$

В этой работе во многих задачах (3) отщепляется от системы.

3.4 Кинетическое уравнение

В исследуемой задаче функция, описывающая отложение частиц, считается известной, мы будем полагать, что данная зависимость имеет следующий вид:

$$m_t = -f(|\vec{u}|, m, \alpha) \quad (4)$$

С учётом кинетического уравнения мы можем выписать полную систему уравнений для поставленной задачи.

$$\begin{cases} (m\alpha)'_t + (\alpha u)'_x = m'_t \\ u'_x = 0 \\ -P'_x - \frac{\mu}{k} u = 0 \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, \alpha) \end{cases}$$

3.5 Классификация системы уравнений

В системе 6 уравнений и 6 неизвестных, m, α, P, \vec{u}

Выписав систему уравнений для одномерных течений, можно получить матрицы с коэффициентами при производных переменных по t (матрица A_{ij}) и по x (a_{ij}). Если при этом у характеристического уравнения $|A_{ij}x - a_{ij}| = 0$ все корни действительные, то система гиперболическая. Из этого следует, что уравнения в системе в характеристическом виде содержат производные по одному направлению (для каждого уравнения). Для нашей системы:

$$\begin{cases} (m\alpha)'_t + (\alpha u_0)'_x = m'_t \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, \alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\alpha'_t + \alpha m'_t + u_0\alpha'_x = m'_t \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, \alpha) \end{cases}$$
$$\begin{cases} m\alpha'_t + (\alpha - 1)m'_t + u_0\alpha'_x = 0 \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, \alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\alpha'_t + u_0\alpha'_x = (\alpha - 1)f(|\vec{u}|, m, \alpha) \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, \alpha) \end{cases}$$

Можно разделить производные (в каждом уравнении производные вдоль своего направления), значит система гиперболическая.

4 Постановка задачи

4.1 Одномерное течение

В этой работе рассматривается одномерное течение жидкости с частицами сквозь пористую среду. Выпишем систему уравнений для одномерного течения:

$$\begin{cases} (m\alpha)'_t + (\alpha u)'_x = m'_t \\ u'_x = 0 \\ -P'_x - \frac{\mu}{k}u = 0 \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, \alpha) \end{cases}$$

Сделаем следующие предположения. Пусть скорость $u = u_0 = \text{const}$. Получили следующую систему:

$$\begin{cases} (m\alpha)_t + \alpha_x u_0 = m_t \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, \alpha) \end{cases}$$

Получившаяся в результате предположений система является квазилинейной и содержит две неизвестные.

4.2 Граничные условия

В задаче рассматриваются следующие граничные условия:

На входе в пласт положим заданной концентрацию частиц $\alpha|_{x=0} = \alpha_0(t)$ и, в частности, $\alpha_0 = \text{const}$

В начальный момент времени $t = 0$ считаем заданной пористость среды $m = m_0$, а концентрацию $\alpha = 0$ — внутри пористой среды первоначально **чистая** жидкость.

На выходе из пласта при $x = L$ условия не ставятся, что связано с поведением характеристик.

4.3 Начало закачки в пласт

На иллюстрации схематически показана зависимость m и α от координаты x в различные моменты времени t_i :

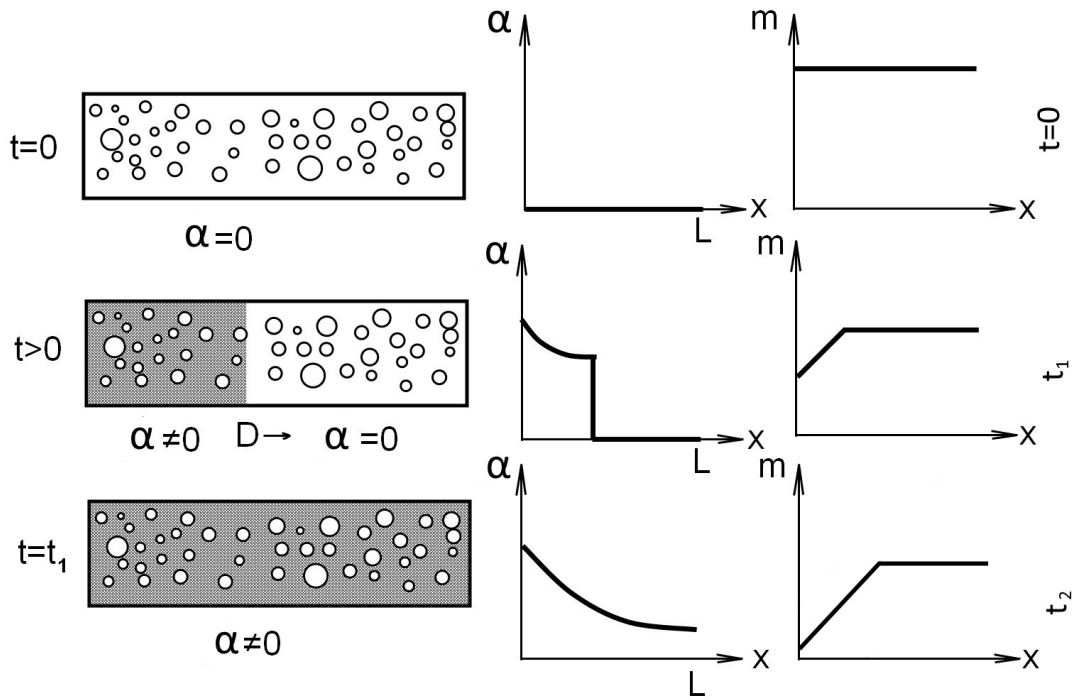


Рис. 3

5 Решение упрощённой задачи с конкретным уравнением засорения

5.1 Дополнительные предположения

Предположим, что $m \approx m_0$, то есть изменение пористости можно считать малым. Также можно предположить, что $\alpha \ll 1$ — концентрация мала. Тогда от уравнения

$$m_t \alpha + m \alpha + u_0 \alpha_x = m_t$$

можно перейти к

$$m_0 \alpha_t + u_0 \alpha_x = m_t$$

Добавим в систему частный случай кинетического уравнения засорения: $m_t = -\gamma \alpha |u_0|$, где множитель $\alpha |u_0|$ пропорционален объёму жидкости, протекающей через данную точку, а $\gamma = \text{const}$ — экспериментальный коэффициент, который, например, в общем случае может зависеть от пористости. Далее мы проверим, что система имеет решение $\alpha = \alpha(x)$ за фронтом (не зависит от t , однако m от времени зависит).

В итоге получаем уравнение

$$\alpha'_t + \frac{u_0}{m_0} \alpha'_x = -\frac{\gamma \alpha |u_0|}{m_0}$$

Уравнению засорения соответствует характеристика $\frac{dx}{dt} = \text{const}$, а уравнению выше — $\frac{dx}{dt} = \frac{u_0}{m_0}$. Поскольку разрыв идёт вдоль второй характеристики, то от разрыва уходит только одна характеристика — условие эволюционности выполняется. Выпишем соотношение на разрыве: $[m(1 - \alpha)]D - [(1 - \alpha)u_n] = 0$, где $u_n = u_0$. Тогда: $m_0[1 - \alpha]\frac{u_0}{m_0} - [1 - \alpha]u_0 = 0$. Здесь мы пользуемся гипотезой $[m] = 0$, но возможны и другие ситуации.

Можно поставить следующую задачу: при заданной $\alpha|_{x=0} = \alpha_0$ найти решение $\alpha(x)$ за скачком, а также $m = m(x, t)$.

5.2 Решение поставленной задачи

Найдём решение уравнения вдоль характеристики $\frac{dx}{dt} = 0$:

$$\alpha_t + \frac{u_0}{m_0} \alpha_x = -\frac{\gamma \alpha |u_0|}{m_0}$$

Отсюда получаем $\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\gamma\alpha|u_0|}{m_0}$. $\int \frac{d\alpha}{\alpha} = -\int \frac{\gamma|u_0|}{m_0} dt$, откуда окончательно получаем

$$\ln \alpha = -\frac{\gamma|u_0|}{m_0}t + C$$

Перепишем полученное решение в виде $\ln \frac{\alpha}{\alpha_0} = -\frac{\gamma|u_0|}{m_0}(t - t_0)$. Так же, вспоминая, что мы искали решение вдоль характеристики, из $\frac{dx}{dt} = \frac{u_0}{m_0}$ можем получить $x = \frac{u_0}{m_0}(t - t_0)$. Это показывает, что найденное решение можно представить в виде $\alpha = \alpha_0 e^{-\gamma x}$, или

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_0 e^{-\gamma x}, & x < \frac{u_0}{m_0}t \\ 0, & x \geq \frac{u_0}{m_0}t \end{cases}$$

Представляя это решение в виде $\alpha = \alpha_0 e^{-\gamma \frac{u_0}{m_0}(t-t_0)}$, можно получить, что скорость разрыва $D = \frac{u_0}{m_0}$. Проверим выполнение условия баланса массы на скачке: $[m(1 - \alpha)]D - [(1 - \alpha)u_n] = 0$, откуда $m_0[1 - \alpha]D - [1 - \alpha]u_n = 0$. Так как $m_0D - u_n = 0$, то отсюда следует $u = u_0 = \text{const}$

Величина γ имеет размерность $[\gamma] = \mathbf{1}/\mathbf{м}$. Её можно трактовать как типичную длину засорения, так как величина α/α_0 падает в e раз на расстоянии $1/\gamma$ от начала координат.

Также у нас осталось уравнение $m_t = -\gamma u_0 \alpha$. С его помощью найдём решение

$$m = m|_{t=0} + \int_0^t m_t dt = m_0 - \int_0^t \gamma u_0 \alpha dt = \begin{cases} m_0 - \gamma u_0 \alpha(x)(t - \frac{xm_0}{u_0}), & x < \frac{u_0}{m_0}t \\ m_0, & x \geq \frac{u_0}{m_0}t \end{cases}$$

6 Решение задачи без упрощений

6.1 Полное уравнение.

Теперь получим решение в случае, когда уравнение неразрывности не упрощается. Имеем систему

$$\begin{cases} (m\alpha)_t + u_0\alpha_x &= m_t \\ m_t &= -\gamma u_0\alpha \end{cases}$$

Подставляя второе в первое и раскрывая скобки, получим

$$\alpha_t + \frac{u_0}{m}\alpha_x = (\alpha - 1)\gamma\frac{u_0}{m}\alpha$$

Рассматривая характеристики $\frac{dx}{dt} = \frac{u_0}{m}$ и интегрируя соотношение, получаем $\int \frac{d\alpha}{\alpha^2 - \alpha} = \int \gamma dx = \int \frac{d(\alpha - 1)}{\alpha - 1} - \int \frac{d\alpha}{\alpha}$. Интегрируя и потенцируя, получаем окончательно выражение для α :

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{1 - \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0}e^{\gamma x}}, & x < \frac{u_0}{m}t \\ 0, & x \geq \frac{u_0}{m}t \end{cases}$$

Теперь, зная решение для α , можно выразить m : $m = m|_{t=0} + \int_0^t m_t dt =$

$$\begin{aligned} m_0 + \int_0^t \gamma u_0 \alpha &= m_0 + \int_{\frac{xm_0}{u_0}}^t \gamma u_0 \frac{1}{1 - \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0}e^{\gamma x}} dt = \\ &= \begin{cases} m_0 - \gamma u_0 \frac{1}{1 - \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0}e^{\gamma x}} \left(t - \frac{xm_0}{u_0}\right), & x < \frac{u_0}{m_0}t \\ m_0, & x \geq \frac{u_0}{m_0}t \end{cases} \end{aligned}$$

Можно заметить, что полученное решение при $\alpha_0 \rightarrow 0$ переходит в полученное ранее выражение

$$\alpha = \frac{1}{1 - \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0}e^{\gamma x}} \approx \frac{\alpha_0}{e^{\gamma x}}$$

7 Решения в виде рядов

Существует метод поиска точных решений путём разложения общего уравнения в ряд по концентрации осажждённых частиц. Если полагать, что скорость отложения частиц не просто пропорциональна модулю скорости фильтрации, а есть некоторая функция пористости, то система переписывается следующим образом.

Обозначим концентрацию осаждённых частиц $s = (1 - m_0) - (1 - m)$. Тогда нашу систему можно записать как:

$$\begin{cases} (a(s)\alpha + s)_t + (b(s)\alpha)_x &= 0 \\ -(s)_t &= K(s)\alpha \end{cases}$$

Сопоставим коэффициенты, зависящие от s с обозначениями в решённых задачах. $a(s) = m$, $b(s) = u_0$, $K(s) = -\gamma u_0$. Полученные этим способом функции s и α обобщают решение, полученное в рассмотренных предельных случаях.

Полагая $K(s) = \varepsilon \Lambda(s)$, где ε — малый параметр и раскладывая функции $a(s)$, $b(s)$ и $\Lambda(s)$ в ряды по s в окрестности нуля. Это справедливо, так как всё ещё принята гипотеза о слабом засорении. Таким образом получим системы дифференциальных уравнений на коэффициенты рядов, решая которые можно получить решения необходимой точности в данном классе решений.

Решения ищутся в виде $s(x, t, \varepsilon) = \varepsilon s_1(x, t) + \varepsilon^2 s_2(x, t) + \dots$

Выпишем эти системы для нескольких членов разложения:

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} (a_0\alpha_1 + a_1\alpha_0 s_1)_t + (b_0\alpha_1 + b_1\alpha_0 s_1)_x &= -\lambda_0\alpha_0 \\ -(s_1)_t &= -\lambda_0\alpha_0 \end{cases}$$

$$\varepsilon^2 : \begin{cases} (a_0\alpha_2 + a_1\alpha_1 s_1 + a_2\alpha_0 s_1^2 + a_1\alpha_0 s_2)_t + \\ + (b_0\alpha_2 + b_1\alpha_1 s_1 + b_2\alpha_0 s_1^2 + b_1\alpha_0 s_2)_x &= -(\lambda_0\alpha_1 + \lambda_1\alpha_0 s_1) \\ -(s_2)_t &= -(\lambda_0\alpha_1 + \lambda_1\alpha_0 s_1) \end{cases}$$

Решая последовательно эти системы методом характеристик можно получить искомое решение с необходимой наперёд заданной точностью.

8 Расширенный класс решений

8.1 Система уравнений для обобщённого кинетического уравнения

Ранее рассмотренное кинетическое уравнение имело довольно простой вид, а именно $m_t = -u_0\gamma\alpha$, теперь мы попробуем придать ему более общий вид. Как отмечалось ранее, функция, характеризующая изменение пористости со временем, зависит от пористости в текущий момент времени. Пусть теперь кинетическое уравнение имеет вид $m_t = -F(m)\alpha$, где $F(m)$ — произвольная функция. Перепишем нашу систему уравнений:

$$\begin{cases} (m\alpha)_t + u_0\alpha_x &= m_t \\ m_t &= -F(m)\alpha \end{cases}$$

В отличие от рассмотренных до этого задач, мы перейдём не к переменной α , а к переменной m . Пусть $G(m) = -\frac{1}{F(m)}$. Тогда

$$\left(m(G(m)m_t - 1)\right)_t + u_0(G(m)m_t)_x = 0$$

Докажем, что $(Gm_t)_x = (Gm_x)_t$.

Действительно, $(G(m)m_t)_x = G_m m_t m_x + G m_{tx} = (Gm_x)_t$, откуда следует, что в нашем уравнении можно поменять местами производные по времени и по координате, а именно, получим:

$$\left(m(G(m)m_t - 1)\right)_t + u_0(G(m)m_x)_t = 0$$

Данное уравнение можно проинтегрировать по времени. Получим:

$$m(G(m)m_t - 1) + u_0 G(m)m_x = \Phi(x)$$

где $\Phi(x)$ — произвольная функция.

Переписывая последнее уравнение, получим:

$$m_t + \frac{u_0}{m}m_x = \frac{m + \Phi(x)}{G(m)m}$$

Это уравнение гиперболическое. Решая его методом характеристик, можем получить выражение для пористости.

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = \frac{m + \Phi(x)}{G(m)m} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{u_0}{m} \\ m_t = -F(m)\alpha \end{cases}$$

Решением одной из упрощённых задач было выражение для m . Обозначим

$$\theta = \frac{t - \frac{xm_0}{u_0}}{1 - \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0} e^{\gamma x}}$$

Тогда:

$$m = m_0 - \gamma u_0 \theta$$

Найдём такую функцию $\Phi(x)$, которая соответствует данному решению. $G(m) = -\frac{1}{\gamma u_0}$. Для удобства выпишем, чему равны производные этого решения:

$$\begin{aligned} m &= m_0 - \gamma u_0 \theta \left(t - \frac{xm_0}{u_0} \right) \\ m_t &= -\gamma u_0 \theta \\ m_x &= \gamma u_0 \theta \frac{m_0}{u_0} - \gamma u_0 \left(t - \frac{xm_0}{u_0} \right) \theta^2 \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0} e^{\gamma x} \gamma \end{aligned}$$

Подставляя и приводя подобные, получим $\Phi(x) = -m_0$.

Теперь, имея всю необходимую информацию, можно попробовать решить расширенную систему уравнений, используя новые знания о функции $\Phi(x)$.

В системе, которую мы уже писали раньше, заменим производную по времени производной по координате, что справедливо, поскольку мы находимся на характеристике.

$$\begin{cases} \frac{dm}{dx} = \frac{m + \Phi(x)}{G(m)u_0} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{u_0}{m} \\ m_t = -F(m)\alpha \end{cases}$$

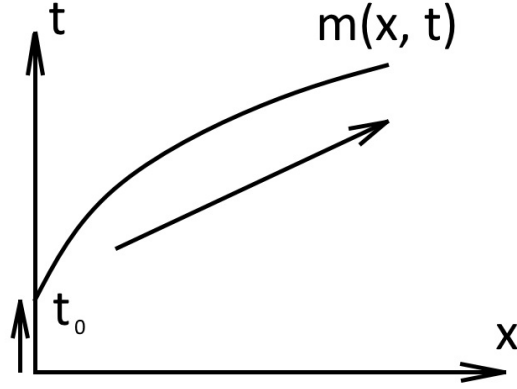


Рис. 4: Схема решения методом характеристик.

Запишем условия для нашей исходной задачи для функции $F(x)$ и граничные и начальные условия. Отсюда получается, что $G(x) = -\frac{1}{\gamma u_0}$, при $x = 0$ концентрация частиц постоянна и равна α_0 , в начальный момент времени полагаем всюду пористость $m = m_0 = \text{const}$.

$$\begin{cases} \frac{dm}{dx} = -\gamma(m + \Phi(x)) \\ \frac{dx}{dt} = \frac{u_0}{m} \\ m_t = -\gamma u_0 \alpha \end{cases}$$

Получим решение в некотором параметрическом виде. Ход решения изображён на рис. 4. Сначала мы найдём, какая пористость будет на искомой характеристике при $x = 0$ в момент времени $t = \hat{t}$. Решим первое уравнение в системе:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dx} &= \gamma(m_0 - m) \\ \frac{d(m_0 - m)}{m_0 - m} &= -\gamma dx \\ \ln(m_0 - m) &= -\gamma x + C \\ m_0 - m &= e^c e^{-\gamma x} \end{aligned}$$

Теперь выразим e^c через $m(\hat{t})$. На границе выполняется уравнение $m_t = -\alpha_0 \gamma u_0$. Его решение имеет вид:

$$m(x = 0, t) = -\alpha_0 \gamma u_0 t + m_0$$

Значит, в момент времени \hat{t} мы имеем пористость на входе в пласт, равную $m(x=0, \hat{t}) = -\alpha_0 \gamma u_0 \hat{t} + m_0$.

Используем его для нахождения произвольной постоянной:

$$m_0 - m(x=0, \hat{t}) = \alpha_0 \gamma u_0 \hat{t} = e^c$$

Получили выражение для $m(x, \hat{t})$:

$$m = m_0 - \alpha_0 \gamma u_0 \hat{t} e^{-\gamma x}$$

Выразим \hat{t} , зная искомое решение (из которого мы получили $\Phi(x)$):

$$m_0 - \gamma u_0 \alpha_0 \hat{t} = m_0 - \gamma u_0 \frac{t - x \frac{m_0}{u_0}}{1 - \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0} e^{\gamma x}}$$

Выразим \hat{t} :

$$\hat{t} = \frac{e^{\gamma x} (t - x \frac{m_0}{u_0})}{\alpha_0 - (\alpha_0 - 1) e^{\gamma x}}$$

9 Диффузия частиц в потоке в отсутствие оседания

9.1 Основные понятия

Далее рассмотрим другой эффект: диффузию частиц. Как показано в [6], это может происходить по нескольким причинам.

Пусть N_b — поток частиц, связанный с броуновским движением, который пропорционален градиенту концентрации.

N_μ — поток частиц, связанный с разницей в вязкости в различных слоях жидкости.

N_c — поток частиц, связанный со столкновением с другими объектами. В некоторых задачах рассматривается столкновение с частицами, мы же будем рассматривать столкновение с пористым скелетом.

Вообще говоря, механизмы диффузии крайне разнообразны. Их модели частично опираются на выводы из элементарной теории, частично получаются эмпирически. В данной работе используется эмпирический подход, то есть строится не противоречащая наблюдаемым в повседневной жизни явлениям модель, которая далее будет применяться для получения простых аналитических результатов.

Далее будут рассмотрены задачи в средах, похожих на вату или сетку, в которых пористость велика. Такое приближение рассматривается ввиду того, что диффузия в низкопористых средах является моделью, полученной в результате осреднения более сложных процессов, механизм которых сильно отличается от диффузии в течении жидкости. Будем считать, что геометрия такова, что не может препятствовать миграции частиц в каком-либо направлении (среда изотропна).

10 Основные формулы и уравнения фильтрации с диффузией

10.1 Уравнение движения Бринкмана

Ввиду того, что в рассмотрение вводятся среды, в которых пористость предполагается большой, следует рассмотреть уравнение движение из [9], которое будем называть законом фильтрации (или уравнением) Бринкмана:

$$0 = -\vec{\nabla}p - \frac{\mu}{k}\vec{u} + \mu_1\Delta\vec{u}$$

Основная причина рассмотрения другого уравнения движения заключается в том, что закон Дарси рассматривает только действие пористого скелета на жидкий объём ($\sim \mu v/k$), но не учитывает трение между слоями жидкости. По этой причине в уравнении движения оставляется член, связанный с вязким трением, а коэффициент μ_1 определяется в [9] по следующей формуле:

$$\mu_1 = \mu(1 + 2,5(1 - m))$$

.

10.2 Компоненты общего потока диффузии

Как уже говорилось выше, в этой работе рассматривается модель диффузии, которая может быть условно разделена на три составляющие:

1) Броуновское движение частиц, связанное с множеством факторов, в том числе с хаотичностью устройства внутренней геометрии среды, которая была до получения осреднённых величин в теории фильтрации.

$$\vec{N}_b = -D\vec{\nabla}\alpha$$

2) Диффузия, связанная со столкновением частиц с пористым скелетом. Получена из следующего соображения: этот член диффузии линейно зависит от вариации числа столкновений частиц со скелетом, которая в свою очередь пропорциональна градиенту скорости частиц. Таким образом можем записать, приняв за d характерный размер частиц пористого скелета или волокон:

$$\vec{N}_c = -Kd\vec{\nabla}(|u|\alpha)$$

3) Диффузия, связанная с переменной вязкостью (!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!)

11 Задача о течении в высокопористой среде

Рассмотрим подробнее задачу о течении в высокопористой среде, в которой используется уравнение Бринкмана.

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости сквозь высокопористую среду. Пусть частицы могут осаждаться на стенки пористой среды. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{u} = 0 \\ -\vec{\nabla} p - \frac{\mu}{k} \vec{u} + \mu_1 \Delta \vec{u} = 0 \\ (m\alpha)_t + \operatorname{div}(\alpha \vec{u}) = m_t + D \Delta \alpha^0 \\ m_t = -\gamma \alpha |\vec{u}| \end{cases}$$

В этой задаче полагаем, что засорение скелета мало, все коэффициенты — постоянные.

Здесь мы рассмотрим следующую ситуацию: пусть скорость направлена по оси x , то есть

$$\vec{u} = u_0(y) \vec{e}_x$$

В этом приближении можем записать уравнение

$$m_0 \alpha'_t + u_0 \alpha'_x = m_t + D (\overset{\text{учёт диффузии в длинном тонком канале}}{\alpha''_{xx} + \alpha''_{yy}})$$

При $D = 0$ получаем известное уже нам решение $\alpha = \alpha_0 \exp(-\gamma x)$, которое не зависит от y . Также, мы можем исследовать уравнение границы загрязнения:

$$\begin{aligned} \frac{dx_f}{dt} &= \frac{u_0(y)}{m_0} \\ x_f &= \frac{u_0(y)}{m_0} t = x_f(y, t) \end{aligned}$$

Из последнего соотношения виден замечательный факт: со временем поверхность всё больше "размазывается".

Проверим условия на скачке:

$$\begin{cases} [m] = 0 \\ [m(\alpha - 1)]D - [\alpha u_n] = 0 \\ [u_n] = 0 \end{cases}$$

Найдём скорость распространения границы $f = x - \frac{u_0(y)}{m_0} t = 0$:

$$D = -\frac{f_t}{|\vec{\nabla} f|} = \frac{-\frac{u_0(y)}{m_0}}{\sqrt{1 + (\frac{u'_0(y)}{m_0} t)^2}} = \frac{u_0}{\sqrt{m_0^2 + (u'_0(y) t)^2}}$$

Найдём выражение для вектора нормали к поверхности раздела с "чистой" фазой:

$$\vec{n} = \frac{(1, -\frac{u'_0(y)}{m_0}t)}{\sqrt{1 + (\frac{u'_0(y)}{m_0}t)^2}} = \frac{(m_0, -u'_0(y)t)}{\sqrt{m_0^2 + (u'_0(y)t)^2}}$$

Используя полученные соотношения, проверим второе условие на скачке:

$$m_0[\alpha] \frac{u_0}{\sqrt{m_0^2 + (u'_0(y)t)^2}} - [\alpha] \frac{u_0(y)m_0}{\sqrt{m_0^2 + (u'_0(y)t)^2}} = 0$$

Отсюда видно, что условие баланса массы автоматически выполняется.

Теперь получим само решение для $u_0(y)$. Запишем систему уравнений в декартовой системе координат, обозначив $\vec{u} = (u_x, u_y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\mu}{k}u_x + \mu_1 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\mu}{k}u_y + \mu_1 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

Отсюда видно, что:

- 1) Скорость зависит только от y .
- 2) Давление зависит только от x .

Во втором уравнении перенесём давление в одну часть, а скорости в другую, то есть:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu}{k}u_x + \mu_1 \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

Тогда видно, что левая и правая часть зависят от разных переменных. Это значит, что обе они одновременно равны одной и той же постоянной, которую мы обозначим A . Отсюда получаем, что давление линейно зависит от x :

$$P = Ax + C$$

Выпишем уравнение для профиля скорости:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} - \frac{\mu}{k\mu_1}u_x - \frac{A}{\mu_1} = 0$$

Решение этого уравнения выглядит следующим образом:

$$u_x(y) = -\frac{Ak}{\mu} + C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{\mu}{\mu_1 k}} y\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\mu}{\mu_1 k}} y\right)$$

Величины C_1 и C_2 находятся из граничных условий. В этой задаче их два:

1) Условие симметрии на расстоянии h (ищем выражение для течения в канале)

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}\bigg|_{y=h} = 0$$

2) Условие Навье проскальзывания на границе $y = 0$:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}\bigg|_{y=0} = bu_x\bigg|_{y=0}$$

Отсюда находим C_1 и C_2 . Обозначим $\alpha = \frac{\mu}{\mu_1 k}$. Тогда:

$$C_1 = \frac{Abk}{h(b - \alpha + e^{2h\alpha}(b + \alpha))}$$

$$C_2 = \frac{Abk}{h(b + \alpha + e^{-2h\alpha}(b - \alpha))}$$

[Построить графики с характерными параметрами, (b 0.1h)]

12 Заключение

В ходе работы была выписана система уравнений фильтрации для задачи течения суспензии сквозь пористую среду с эффектом отложения. Было получено два аналитических решения для системы уравнений. Было проведено знакомство с методами поиска решений путём разложения в ряд, а также была выполнена проверка этого метода на аналитическом решении. Была решена задача об обобщении кинетического уравнения, были получены параметры, соответствующие аналитическому решению. Также было проведено ознакомление с методом характеристик и с его помощью получены аналитические решения.

Список литературы

- [1] Кузьмина Л.И., Осипов Ю.В., Асимптотика задачи фильтрации суспензии в пористой среде, Вестник МГСУ, 2015, №1, с. 54-62
- [2] Боронин С.А., Осипцов А.А., Влияние миграции частиц на течение суспензии в трещине гидроразрыва, Известия Российской академии наук, Механика жидкости и газа, 2014, №2, с. 80-94
- [3] Боронин С.А., Осипцов А.А., Двухконтинуальная модель течения суспензии в трещине гидроразрыва, Доклады Академии наук, 2010, том 431, №6, с. 758-761
- [4] Civan F., Modified Formulations of Particle Deposition and Removal Kinetics in Saturated Porous Media, Transport in Porous Media, 2016, vol. 111, pp. 381-410
- [5] Leighton D., Acrivos A., The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions, Journal of Fluid Mechanics, 1987, vol. 181, pp. 415-439
- [6] Phillips R.J., Armstrong R.C., Brown R.A. et al., A constitutive equation for concentrated suspensions that accounts for shearinduced particle migration, Physics of Fluids, 1992, vol.4, pp. 30-40
- [7] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М., Движение жидкостей и газов в природных пластах, М., Недра, 1984
- [8] Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М., Подземная гидромеханика, М., Недра, 1993
- [9] Brinkman H.C., A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles, Applied Scientific Research, 1949, Vol. 1, pp. 27-34
- [10] Желтов Ю.П., Механика нефтегазового пласта, М., Недра, 1975