ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ГИДРОМЕХАНИКИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Осаждение частиц при одномерных течениях суспензии в пористых средах

Particle deposition in one-dimensional flows of suspension through porous media

Выполнил студент
624 группы
А.П.Волчанский

____
подпись студента

Научный руководитель:
доцент, кандидат ф.-м. наук
Н.Е.Леонтьев

____
подпись научного руководителя

Москва

2018

Содержание

1 Введение

Одной из важных современных отраслей механики сплошной среды является теория фильтрации. Прикладное значение знаний, полученных во время изучения этой дисциплины, обусловлено большим значением энергетических и природных ресурсов, необходимых для жизни современного человечества. Такие отрасли, как нефтедобыча и очистка воды от примесей, являются сегодня одними из лидирующих в мире.

В большинстве природных процессов фильтрация жидкости сквозь пористую среду происходит при наличии в жидкости мелких в масштабах течения частиц. Примерами таких течений могут быть течение загрязнённой воды сквозь очищающий слой фильтра, закачка пропанта в трещину после её создания методом гидроразрыва пласта.

Характерными особенностями таких задач являются движение мелких частиц в относительно высоких концентрациях, которое происходит со скоростями, равными скорости несущего флюида, и загрязнение фильтрующего пласта, которое сопровождается изменением пористости и других параметров.

Целью работы является изучение таких важных процессов для описания такой задачи, как отложение частиц на поверхности пористого скелета и их диффузия в процессе движения. Также исследуются различные модели течения жидкости и оседания частиц на поверхности порового пространства.

В данной работе была рассмотрена одномерная модель загрязнения пласта, где загрязнение моделируется кинетическим уравнением, отложение частиц зависит от скорости жидкости, пористости и концентрации частиц, а также были получены решения для функций пористости и концентрации частиц.

2 Обзор литературы

2.1 Фильтрация с осаждением

В природе процессы фильтрации [7] и [8] чаще всего протекают при наличии в текущем флюиде примесей, размеры которых много меньше, чем размеры пор породы. Участие этих примесей в засорении может сказываться как на течении жидкости как таковой, влияя на её эффективные механические параметры, так и на объёмной доле пор, что также меняет картину течения.

В статьях [2] и [3] рассмотрено влияние сопротивления жидкости и силы Архимеда на распределение частиц в ламинарном потоке несущей жидкости в течении внутри трещены гидроразрыва в приближении тонкого слоя. Распределение частиц полагается неоднородным, рассматривается двухфазная модель течения. В ходе работы проводится сравнение численной модели с упрощённой аналитической и с экспериментаьными данными.

В статье [1] рассматриваются различные долгосрочные эффекты влияния оседания примесей на пористый скелет, а также предлагается метод анализа подобных задач на больших временах с использованием рядов. В качестве результата получается асимптотическое решение задачи вблизи фронта концентрации.

В статье [4] рассматриваются различные виды зависимости скорости изменения пористого скелета из-за осаждения частиц на его поверхности и выноса их оттуда потоком флюида. Также в статье предлагается обобщение данных моделей при помощи эмпирических зависимостей. Уравнения основываются на уравнениях сплошной среды и статистических закономерностях, обобщающих эмпирические законы.

2.2 Фильтрация с диффузией

В статье [9] исследуется течение в высокопористых средах и обосновывается закон движения в подобном типе задач. Производится сравнение с экспериментальными данными и более простыми зависимостями.

В статье [5] рассматривается влияние диффузии сферических частиц на эффективную вязкость суспензии как целого. Выводится аналитическая модель и сравнивается с экспериментальными данными.

В статье [6] приводится описание исследования различных эффектов, связанных с диффузией частиц в потоке высококонцентрированной смеси, на различные характеристики течения. Рассматриваются две различные постановки задачи: течение Куэтта между двумя соосными вращающимися цилиндрами и течение в трубе под действием перепада давления. В этой работе выделяется три основных компоненты, описывающие диффузионный поток:

хаотическое движение частиц, соударение между частицами и диффузия из более вязких слоёв в менее вязкие. Полученные зависимости сравниваются с экспериментальными данными.

3 Основные уравнения

3.1 Определения теории фильтрации

Основное явление, изучаемое в этой работе — осаждение частиц на поверхности пористой среды. В ходе этого процесса частицы могут прикрепляться к пористому скелету, что влияет на течение жидкости и объём пустот в среде.

Пусть $\alpha(x^i, t)$ — объёмная концентрация взвешенных частиц, $m(x^i, t)$ — пористость, то есть отношение объёма пор к объёму малого участка среды.

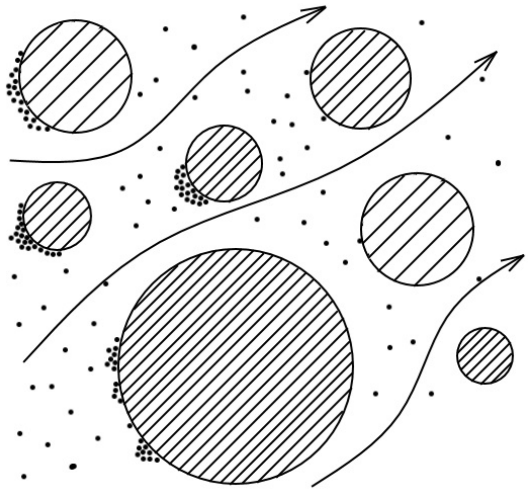

Рис. 1: Схема течения на уровне пор

Предполагается, что частицы имеют размер много меньше размера пор (во многих приложениях размер пор $d_{\text{ч}} \approx 1$ мкм), перемещаются только благодаря потоку жидкости, перемешивание отсутствует. Это означает, что скорость частиц равна скорости жидкости. Также предполагается, что жидкость и частицы — *несжимаемые*, $\rho_{\text{ч}} = const$, $\rho_{\text{жидк}} \equiv \rho = const$.

3.2 Законы сохранения массы

Как и в других разделах механики сплошной среды, в теории фильтрации действуют стандартные законы сохранения. Их можно записать для каждой из фаз, для флюида и для частиц.

Запишем закон сохранения массы для жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_V \rho m (1 - \alpha) \, dV = - \int\limits_\Sigma \rho u_n (1 - \alpha) \, d\sigma$$

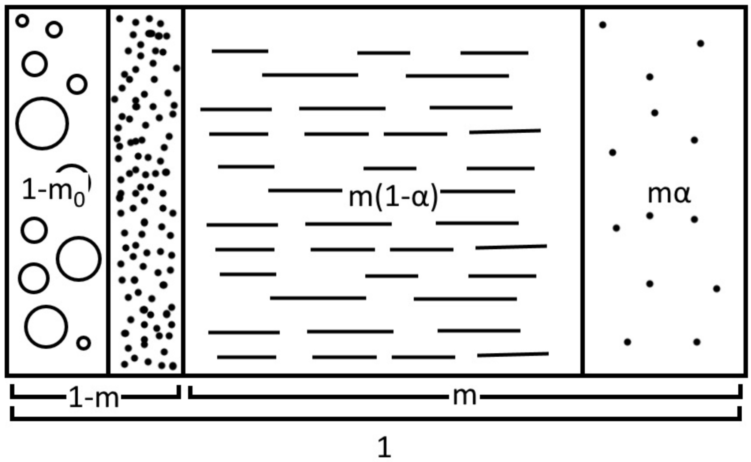

Рис. 2: Количество частиц в терминах α и m

Применяя стандартную технику перехода к дифференциальной форме, получим уравнение неразрывности для жидкой фракции:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m(1-\alpha)) + div((1-\alpha)\vec{u}) = 0 \tag{1}$$

Также можно выписать соотношение на разрыве:

$$[m(1-\alpha)]D - [(1-\alpha)u_n] = 0$$

или в эквивалентной форме:

$$[m(\alpha-1)]D - [\alpha u_n] = 0$$

Запишем аналогичный закон для частиц.

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho_{ч} m\alpha + \rho_{ч}((1-m) - 1 - m_0)dV = -\int\limits_\Sigma \rho_{ч}\vec{u}\alpha d\sigma$$

Здесь $m_0 = const$ — первоначально пласт однородный. Перепишем полученные равенства в виде уравнения неразрывности:

$$(m\alpha)_t - m_t + div(\alpha\vec{u}) = 0$$

$$(m\alpha)_t + div(\alpha\vec{u}) = m_t \tag{2}$$

Соотношение на разрыве:

$$[m\alpha - m]D - [\alpha u_n] = 0$$

Следствие: Складывая (1)+(2) получаем уравнение неразрывности для **всей** суспензии.

$$m_t + div\,\vec{u} = m_t$$
$$div\,\vec{u} = 0$$

Это уравнение можно использовать вместо (1) или (2) при решении системы уравнений.

3.3 Закон Дарси

В теории фильтрации используется экспериментальный закон Дарси, который связывает скорость и градиент давления. Этот закон можно получить как частное следствие закона Навье-Стокса при осреднении. Закон Дарси имеет вид:

$$-\vec{\nabla}P - \frac{\mu}{k}\vec{u} = 0 \tag{3}$$

В нашей постановке полагается, что массовых сил нет. В данной работе вязкость будет определяться в следующем виде: $\mu = \mu(\alpha) = \mu_0(1+C\alpha) \approx \mu_0$, $k = k(m)$

В этой работе во многих задачах (3) отщепляется от системы.

3.4 Кинетическое уравнение

В исследуемой задаче функция, описывающая отложение частиц, считается известной, мы будем полагать, что данная зависимость имеет следующий вид:

$$m_t = -f(|\vec{u}|, m, \alpha) \tag{4}$$

С учётом кинетического уравнения мы можем выписать полную систему уравнений для поставленной задачи.

$$\begin{cases} (m\alpha)'_t + (\alpha u)'_x = m'_t \\ u'_x = 0 \\ -P'_x - \dfrac{\mu}{k}u = 0 \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, \alpha) \end{cases}$$

3.5 Классификация системы уравнений

В системе 6 уравнений и 6 неизвестных, $m, \alpha, P, \vec{u}$

Выписав систему уравнений для одномерных течений, можно получить матрицы с коэффициентами при производных переменных по t (матрица A_{ij}) и по x (a_{ij}). Если при этом у характеристического уравнения $|A_{ij}x - a_{ij}| = 0$ все корни действительные, то система гиперболическая. Из этого следует, что уравнения в системе в характеристическом виде содержат производные по одному направлению (для каждого уравнения). Для нашей системы:

$$\begin{cases} (m\alpha)'_t + (\alpha u_0)'_x = m'_t \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, \alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\alpha'_t + \alpha m'_t + u_0\alpha'_x = m'_t \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\alpha'_t + (\alpha - 1)m'_t + u_0\alpha'_x = 0 \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, \alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\alpha'_t + u_0\alpha'_x = (\alpha - 1)f(|\vec{u}|, m, \alpha) \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, \alpha) \end{cases}$$

Можно разделить производные (в каждом уравнении производные вдоль своего направления), значит система гиперболическая.

4 Постановка задачи

4.1 Одномерное течение

В этой работе рассматривается одномерное течение жидкости с частицами сквозь пористую среду. Выпишем систему уравнений для одномерного течения:

$$\begin{cases} (m\alpha)'_t + (\alpha u)'_x = m'_t \\ u'_x = 0 \\ -P'_x - \dfrac{\mu}{k} u = 0 \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, \alpha) \end{cases}$$

Сделаем следующие предположения. Пусть скорость $u = u_0 = const$. Получили следующую систему:

$$\begin{cases} (m\alpha)_t + \alpha_x u_0 = m_t \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, \alpha) \end{cases}$$

Получившаяся в результате предположений система является квазилинейной и содержит две неизвестные.

4.2 Граничные условия

В задаче рассматриваются следующие граничные условия:

На входе в пласт положим заданной концентрацию частиц $\alpha|_{x=0} = \alpha_0(t)$ и, в частности, $\alpha_0 = const$

В начальный момент времени $t = 0$ считаем заданной пористость среды $m = m_0$, а концентрацию $\alpha = 0$ — внутри пористой среды первоначально **чистая** жидкость.

На выходе из пласта при $x = L$ условия не ставятся, что связано с поведением характеристик.

4.3 Начало закачки в пласт

На иллюстрации схематически показана зависимость m и α от координаты x в различные моменты времени t_i:

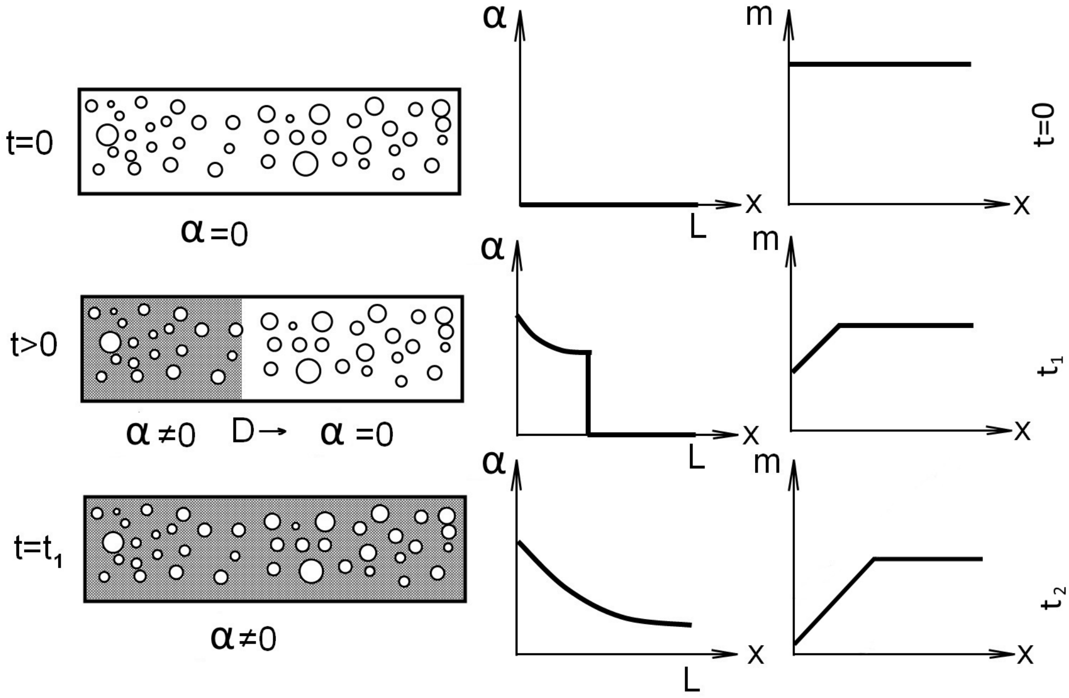

Рис. 3

5 Решение упрощённой задачи с конкретным уравнением засорения

5.1 Дополнительные предположения

Предположим, что $m \approx m_0$, то есть изменение пористости можно считать малым. Также можно предположить, что $\alpha \ll 1$ — концентрация мала. Тогда от уравнения

$$m_t\alpha + m\alpha + u_0\alpha_x = m_t$$

можно перейти к

$$m_0\alpha_t + u_0\alpha_x = m_t$$

Добавим в систему частный случай кинетического уравнения засорения: $m_t = -\gamma\alpha|u_0|$, где множитель $\alpha|u_0|$ пропорционален объёму жидкости, протекающей через данную точку, а $\gamma = const$ — экспериментальный коэффициент, который, например, в общем случае может зависеть от пористости. Далее мы проверим, что система имеет решение $\alpha = \alpha(x)$ за фронтом (не зависит от t, однако m от времени зависит).

В итоге получаем уравнение

$$\alpha'_t + \frac{u_0}{m_0}\alpha'_x = -\frac{\gamma\alpha|u_0|}{m_0}$$

Уравнению засорения соответствует характеристика $\dfrac{dx}{dt} = const$, а уравнению выше — $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{u_0}{m_0}$. Поскольку разрыв идёт вдоль второй характеристики, то от разрыва уходит только одна характеристика — условие эволюционности выполняется. Выпишем соотношение на разрыве: $[m(1-\alpha)]D - [(1-\alpha)u_n] = 0$, где $u_n = u_0$. Тогда: $m_0[1-\alpha]\frac{u_0}{m_0} - [1-\alpha]u_0 = 0$. Здесь мы пользуемся гипотезой $[m] = 0$, но возможны и другие ситуации.

Можно поставить следующую задачу: при заданной $\alpha|_{x=0} = \alpha_0$ найти решение $\alpha(x)$ за скачком, а также $m = m(x,t)$.

5.2 Решение поставленной задачи

Найдём решение уравнения вдоль характеристики $\dfrac{dx}{dt} = 0$:

$$\alpha_t + \frac{u_0}{m_0}\alpha_x = -\frac{\gamma\alpha|u_0|}{m_0}$$

Отсюда получаем $\dfrac{d\alpha}{dt} = -\dfrac{\gamma\alpha|u_0|}{m_0}$. $\displaystyle\int \frac{d\alpha}{\alpha} = -\int \frac{\gamma|u_0|}{m_0}dt$, откуда окончательно получаем

$$ln\ \alpha = -\frac{\gamma|u_0|}{m_0}t + C$$

Перепишем полученное решение в виде $ln\dfrac{\alpha}{\alpha_0} = -\dfrac{\gamma|u_0|}{m_0}(t - t_0)$. Так же, вспоминая, что мы искали решение вдоль характеристики, из $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{u_0}{m_0}$ можем получить $x = \dfrac{u_0}{m_0}(t-t_0)$. Это показывает, что найденное решение можно представить в виде $\alpha = \alpha_0 e^{-\gamma x}$, или

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_0 e^{-\gamma x}, & x < \frac{u_0}{m_0}t \\ 0, & x \geq \frac{u_0}{m_0}t \end{cases}$$

Представляя это решение в виде $\alpha = \alpha_0 e^{-\gamma \frac{u_0}{m_0}(t-t_0)}$, можно получить, что скорость разрыва $D = \dfrac{u_0}{m_0}$. Проверим выпонение условия баланса массы на скачке: $[m(1-\alpha)]D - [(1-\alpha)u_n] = 0$, откуда $m_0[1-\alpha]D - [1-\alpha]u_n = 0$. Так как $m_0 D - u_n = 0$, то отсюда следует $u = u_0 = const$

Величина γ имеет размерность $[\gamma] = \mathbf{1/м}$. Её можно трактовать как типичную длину засорения, так как величина α/α_0 падает в e раз на расстоянии $1/\gamma$ от начала координат.

Также у нас осталось уравнение $m_t = -\gamma u_0 \alpha$. С его помощью найдём решение

$$m = m|_{t=0} + \int\limits_0^t m_t dt = m_0 - \int\limits_0^t \gamma u_0 \alpha dt = \begin{cases} m_0 - \gamma u_0 \alpha(x)(t - \dfrac{x m_0}{u_0}), & x < \frac{u_0}{m_0}t \\ m_0, & x \geq \frac{u_0}{m_0}t \end{cases}$$

6 Решение задачи без упрощений

6.1 Полное уравнение.

Теперь получим решение в случае, когда уравнение неразрывности не упрощается. Имеем систему

$$\begin{cases}(m\alpha)_t + u_0\alpha_x & = m_t \\ m_t & = -\gamma u_0 \alpha\end{cases}$$

Подставляя второе в первое и раскрывая скобки, получим

$$\alpha_t + \frac{u_0}{m}\alpha_x = (\alpha - 1)\gamma\frac{u_0}{m}\alpha$$

Рассматривая характеристики $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{u_0}{m}$ и интегрируя соотношение, получаем $\displaystyle\int \frac{d\alpha}{\alpha^2 - \alpha} = \int \gamma dx = \int \frac{d(\alpha - 1)}{\alpha - 1} - \int \frac{d\alpha}{\alpha}$. Интегрируя и потенцируя, получаем окончательно выражение для α:

$$\alpha = \begin{cases}\dfrac{1}{1 - \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0}e^{\gamma x}}, & x < \frac{u_0}{m}t \\ 0, & x \geq \frac{u_0}{m}t\end{cases}$$

Теперь, зная решение для α, можно выразить m: $m = m|_{t=0} + \displaystyle\int\limits_0^t m_t dt =$

$$m_0 + \int\limits_0^t \gamma u_0 \alpha = m_0 + \int\limits_{\frac{xm_0}{u_0}}^t \gamma u_0 \frac{1}{1 - \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0}e^{\gamma x}} dt =$$

$$= \begin{cases} m_0 - \gamma u_0 \dfrac{1}{1 - \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0}e^{\gamma x}}(t - \dfrac{xm_0}{u_0}), & x < \frac{u_0}{m_0}t \\ m_0, & x \geq \frac{u_0}{m_0}t\end{cases}$$

Можно заметить, что полученное решение при $\alpha_0 \to 0$ переходит в полученное ранее выражение

$$\alpha = \frac{1}{1 - \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0}e^{\gamma x}} \approx \frac{\alpha_0}{e^{\gamma x}}$$

7 Решения в виде рядов

Существует метод поиска точных решений путём разложения общего уравнения в ряд по концентрации осаждённых частиц. Если полагать, что скорость отложения частиц не просто пропорциональна модулю скорости фильтрации, а есть некоторая функция пористости, то система переписывается следующим образом.

Обозначим концентрацию осаждённых частиц $s = (1 - m_0) - (1 - m)$. Тогда нашу систему можно записать как:

$$\begin{cases} (a(s)\alpha + s)_t + (b(s)\alpha)_x & = 0 \\ -(s)_t & = K(s)\alpha \end{cases}$$

Сопоставим коэффициенты, зависящие от s с обозначениями в решённых задачах. $a(s)$ — m, $b(s)$ — u_0, $K(s)$ — $-\gamma u_0$. Полученные этим способом функции s и α обобщают решение, полученное в рассмотренных предельных случаях.

Полагая $K(s) = \varepsilon\Lambda(s)$, где ε — малый параметр и раскаладывая функции $a(s)$, $b(s)$ и $\Lambda(s)$ в ряды по s в окрестности нуля. Это справедливо, так как всё ещё принята гипотеза о слабом засорении. Таким образом получим системы дифференциальных уравнений на коэффициенты рядов, решая которые можно получить решения необходимой точности в данном классе решений.

Решения ищутся в виде $s(x, t, \varepsilon) = \varepsilon s_1(x, t) + \varepsilon^2 s_2(x, t) + ...$

Выпишем эти системы для нескольких членов разложения:

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} (a_0\alpha_1 + a_1\alpha_0 s_1)_t + (b_0\alpha_1 + b_1\alpha_0 s_1)_x & = -\lambda_0\alpha_0 \\ -(s_1)_t & = -\lambda_0\alpha_0 \end{cases}$$

$$\varepsilon^2 : \begin{cases} (a_0\alpha_2 + a_1\alpha_1 s_1 + a_2\alpha_0 s_1^2 + a_1\alpha_0 s_2)_t + & \\ +(b_0\alpha_2 + b_1\alpha_1 s_1 + b_2\alpha_0 s_1^2 + b_1\alpha_0 s_2)_x & = -(\lambda_0\alpha_1 + \lambda_1\alpha_0 s_1) \\ -(s_2)_t & = -(\lambda_0\alpha_1 + \lambda_1\alpha_0 s_1) \end{cases}$$

Решая последовательно эти системы методом характеристик можно получить искомое решение с необходимой наперёд заданной точностью.

8 Расширенный класс решений

8.1 Система уравнений для обобщённого кинетического уравнения

Ранее рассмотренное кинетическое уравнение имело довольно простой вид, а именно $m_t = -u_0\gamma\alpha$, теперь мы попробуем придать ему более общий вид. Как отмечалось ранее, функция, характеризующая изменение пористости со временем, зависит от пористости в текущий момент времени. Пусть теперь кинетическое уравнение имеет вид $m_t = -F(m)\alpha$, где $F(m)$ — произвольная функция. Перепишем нашу систему уравнеий:

$$\begin{cases} (m\alpha)_t + u_0\alpha_x &= m_t \\ m_t &= -F(m)\alpha \end{cases}$$

В отличие от рассмотренных до этого задач, мы перейдём не к переменной α, а к переменной m. Пусть $G(m) = -\dfrac{1}{F(m)}$. Тогда

$$\Big(m\big(G(m)m_t - 1\big)\Big)_t + u_0\big(G(m)m_t\big)_x = 0$$

Докажем, что $\big(Gm_t\big)_x = \big(Gm_x\big)_t$.

Действительно, $\big(G(m)m_t\big)_x = G_m m_t m_x + G m_{tx} = \big(Gm_x\big)_t$, откуда следует, что в нашем уравнении можно поменять местами производные по времени и по координате, а именно, получим:

$$\Big(m\big(G(m)m_t - 1\big)\Big)_t + u_0\big(G(m)m_x\big)_t = 0$$

Данное уравнение можно проинтегрировать по времени. Получим:

$$m\big(G(m)m_t - 1\big) + u_0 G(m)m_x = \Phi(x)$$

где $\Phi(x)$ — произвольная функция.

Переписывая последнее уравнение, получим:

$$m_t + \frac{u_0}{m}m_x = \frac{m + \Phi(x)}{G(m)m}$$

Это уравнение гиперболическое. Решая его методом характеристик, можем получить выражение для пористости.

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} &= \dfrac{m+\Phi(x)}{G(m)m} \\ \\ \dfrac{dx}{dt} &= \dfrac{u_0}{m} \\ \\ m_t &= -F(m)\alpha \end{cases}$$

Решением одной из упрощённых задач было выражение для m. Обозначим

$$\theta = \frac{t - \frac{xm_0}{u_0}}{1 - \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0} e^{\gamma x}}$$

Тогда:

$$m = m_0 - \gamma u_0 \theta$$

Найдём такую функцию $\Phi(x)$, которая соответствует данному решению. $G(m) = -\frac{1}{\gamma u_0}$. Для удобства выпишем, чему равны производные этого решения:

$$m = m_0 - \gamma u_0 \theta (t - \frac{xm_0}{u_0})$$

$$m_t = -\gamma u_0 \theta$$

$$m_x = \gamma u_0 \theta \frac{m_0}{u_0} - \gamma u_0 (t - \frac{xm_0}{u_0}) \theta^2 \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0} e^{\gamma x} \gamma$$

Подставляя и приводя подобные, получим $\Phi(x) = -m_0$.

Теперь, имея всю необходимую информацию, можно попробовать решить расширенную систему уравнений, используя новые знания о функции $\Phi(x)$.

В системе, которую мы уже писали раньше, заменим производную по времени производной по координате, что справедливо, поскольку мы находимся на характеристике.

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dx} &= \dfrac{m+\Phi(x)}{G(m)u_0} \\ \\ \dfrac{dx}{dt} &= \dfrac{u_0}{m} \\ \\ m_t &= -F(m)\alpha \end{cases}$$

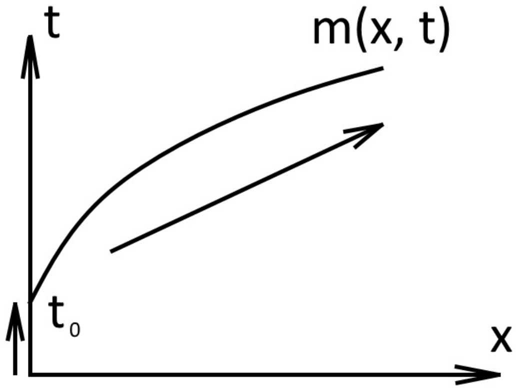

Рис. 4: Схема решения методом характеристик.

Запишем условия для нашей исходной задачи для функции $F(x)$ и граничные и начальные условия. Отсюда получается, что $G(x) = -\dfrac{1}{\gamma u_0}$, при $x = 0$ концентрация частиц постоянна и равна α_0, в начальный момент времени полагаем всюду пористость $m = m_0 = const$.

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dx} = -\gamma(m + \Phi(x)) \\ \\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{u_0}{m} \\ \\ m_t = -\gamma u_0 \alpha \end{cases}$$

Получим решение в некотором параметрическом виде. Ход решения изображён на рис. 4. Сначала мы найдём, какая пористость будет на искомой характеристике при $x = 0$ в момент времени $t = \hat{t}$. Решим первое уравнение в системе:

$$\frac{dm}{dx} = \gamma(m_0 - m)$$

$$\frac{d(m_0 - m)}{m_0 - m} = -\gamma dx$$

$$ln(m_0 - m) = -\gamma x + C$$

$$m_0 - m = e^c e^{-\gamma x}$$

Теперь выразим e^c через $m(\hat{t})$. На границе выполняется уравнение $m_t = -\alpha_0 \gamma u_0$. Его решение имеет вид:

$$m(x = 0, t) = -\alpha_0 \gamma u_0 t + m_0$$

Значит, в момент времени $\hat{t}$ мы имеем пористость на входе в пласт, равную $m(x=0,\hat{t}) = -\alpha_0\gamma u_0\hat{t} + m_0$.

Используем его для нахождения произвольной постоянной:

$$m_0 - m(x=0,\hat{t}) = \alpha_0\gamma u_0\hat{t} = e^c$$

Получили выражение для $m(x,\hat{t})$:

$$m = m_0 - \alpha_0\gamma u_0\hat{t}e^{-\gamma x}$$

Провести дальнейшую проверку планируется в последующей работе.

Вернёмся к этой задаче. Найдём $\Phi(x)$, если знаем, что решение имело вид $m = m_0 - \gamma u_0\frac{t-\frac{xm_0}{u_0}}{1-\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0}e^{\gamma x}}$.

На характиристике имели $\frac{dx}{dt} = \frac{u_0}{m}$, значит $x = \frac{u_0}{m}t + C$, тогда для кинетического уравнения $m_t = -\gamma u_0\alpha$ имеем:

$$m = m_0 - \gamma u_0\frac{C}{1-\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0}e^{\gamma x}}$$

$$\frac{dm}{dx} = -\gamma(m + \Phi(x))$$

Выпишем $\frac{dm}{dx}$:

$$\frac{dm}{dx} = -\gamma u_0 C\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0}\frac{e^{\gamma x}}{(1-\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0}e^{\gamma x})^2}$$

Подставляем всё в уравнение и получаем выражение для $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \gamma u_0\frac{C}{(1-\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0}e^{gammax})^2} - m_0$$

Проверка выполняется путём непосредственной подстановки полученной $\Phi(x)$ в исходное уравнение.

Параметр C указывает на конкретную кривую, на которой искалось решение.

9 Диффузия частиц в потоке в отсутствие оседания

9.1 Основные понятия

Далее рассмотрим другой эффект: диффузию частиц. Как показано в [6], это может происходить по нескольким причинам.

Пусть N_b — поток частиц, связанный с броуновским движением, который пропорционален градиенту концентрации.

N_μ — поток частиц, связанный с разницей в вязкости в различных слоях жидкости.

N_c — поток частиц, связанный со столкновением с другими объектами. В некоторых задачах рассматривается столкновение с частицами, мы же будем рассматривать столкновение с пористым скелетом.

Вообще говоря, механизмы диффузии крайне разнообразны. Их модели частично опираются на выводы из элементарной теории, частично получаются эмпирически. В данной работе используется эмпирический подход, то есть строится не противоречащая наблюдаемым в повседневной жизни явлениям модель, которая далее будет применяться для получения простых аналитических результатов.

Далее будут рассмотрены задачи в средах, похожих на вату или сетку, в которых пористость велика. Такое приближение рассматривается ввиду того, что диффузия в низкопористых средах является моделью, полученной в результате осреднения более сложных процессов, механизм которых сильно отличается от диффузии в течении жидкости. Будем считать, что геометрия такова, что не может препятствовать миграции частиц в каком-либо направлении (среда изотропна).

10 Основные формулы и уравнения фильтрации с диффузией

10.1 Уравнение движения Бринкмана

Ввиду того, что в рассмотрение вводятся среды, в которых пористость полагается большой, следует рассмотреть уравнение движение из [9], которое будем называть законом фильтрации (или уравнением) Бринкмана:

$$0 = -\vec{\nabla} p - \frac{\mu}{k}\vec{u} + \mu_1 \Delta \vec{u}$$

Основная причина рассмотрения другого уравнения движения заключается в том, что закон Дарси рассматривает только действие пористого скелета на жидкий объём ($\sim \mu v/k$), но не учитывает трение между слоями жидкости. По этой причине в уравнении движения оставляется член, связанный с вязким трением, а коэффициент μ_1 определяется в [9] по следующей формуле:

$$\mu_1 = \mu(1 + 2{,}5(1 - m))$$

.

10.2 Компоненты общего потока диффузии

Как уже говорилось выше, в этой работе рассматривается модель диффузии, которая может быть условно разделена на три составляющие:

1) Броуновское движение частиц, связанное с множеством факторов, в том числое с хаотичностью устройства вутренней геометрии среды, которая была до получения осреднённых величин в теории фильтриции.

$$\vec{N}_b = -D\vec{\nabla}\alpha$$

2) Диффузия, связанная со столкновением частиц с пористым скелетом. Получена из следующего соображения: этот член диффузии линейно зависит от вариации числа столкновений частиц со скелетом, поторая в свою очередь пропорцианальна градиенту скорости частиц. Таким образом можем записать, приняв за d характерный размер частиц пористого скелета или волокон:

$$\vec{N}_c = -Kd\vec{\nabla}(|u|\alpha)$$

3) Диффузия, связанная с переменной вязкостью (!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!)

11 Задача о течении в высокопористой среде

Рассмотрим подробнее задачу о течении в высокопористой среде, в которой используется уравнение Бринкмана.

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости сквозь высокопористую среду. Пусть частицы могут осаждаться на стенки пористой среды. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} div\,\vec{u} = 0 \\ -\vec{\nabla}p - \frac{\mu}{k}\vec{u} + \mu_1 \Delta\vec{u} = 0 \\ (m\alpha)_t + div(\alpha\vec{u}) = m_t + \cancelto{0}{D\Delta\alpha} \\ m_t = -\gamma\alpha|\vec{u}| \end{cases}$$

В этой задаче полагаем, что засорение скелета мало, все коэффициенты — постоянные.

Здесь мы рассмотрим следующую ситуацию: пусть скорость направлена по оси x, то есть

$$\vec{u} = u_0(y)\vec{e}_x$$

В этом приближении можем записать уравнение

$$m_0\alpha'_t + u_0\alpha'_x = m_t + D(\cancelto{\text{учёт диффузии в длинном тонком канале}}{\alpha''_{xx}} + \alpha''_{yy})$$

При $D = 0$ получаем известное уже нам решение $\alpha = \alpha_0 exp(-\gamma x)$, которое не зависит от y. Также, мы можем исследовать уравнение границы загрязнения:

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{u_0(y)}{m_0}$$

$$x_f = \frac{u_0(y)}{m_0}t = x_f(y,t)$$

Из последнего соотношения виден замечательный факт: со временем поверхность всё больше "размазывается".

Проверим условия на скачке:

$$\begin{cases} [m] = 0 \\ [m(\alpha - 1)]D - [\alpha u_n] = 0 \\ [u_n] = 0 \end{cases}$$

Найдём скорость распространения границы $f = x - \frac{u_0(y)}{m_0}t = 0$:

$$D = -\frac{f_t}{|\vec{\nabla}f|} = \frac{-\frac{u_0(y)}{m_0}}{\sqrt{1 + (\frac{u'_0(y)}{m_0}t)^2}} = \frac{u_0}{\sqrt{m_0^2 + (u'_0(y)t)^2}}$$

Найдём выражение для вектора нормали к поверхности раздела с "чистой"фазой:

$$\vec{n} = \frac{(1, -\frac{u_0'(y)}{m_0}t)}{\sqrt{1 + (\frac{u_0'(y)}{m_0}t)^2}} = \frac{(m_0, -u_0'(y)t)}{\sqrt{m_0^2 + (u_0'(y)t)^2}}$$

Используя полученные соотношения, проверим второе условие на скачке:

$$m_0[\alpha]\frac{u_0}{\sqrt{m_0^2 + (u_0'(y)t)^2}} - [\alpha]\frac{u_0(y)m_0}{\sqrt{m_0^2 + (u_0'(y)t)^2}} = 0$$

Отсюда видно, что условие баланса массы автоматически выполняется.

Теперь получим само решение для $u_0(y)$. Запишем систему уравнений в декартовой системе координат, обозначив $\vec{u} = (u_x, u_y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \cancelto{0}{\dfrac{\partial u_y}{\partial y}} = 0 \\ -\dfrac{\partial p}{\partial x} - \dfrac{\mu}{k}u_x + \mu_1\cancelto{0}{\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}} + \mu_1\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0 \\ -\dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\mu}{k}\cancelto{0}{u_y} + \mu_1\cancelto{0}{\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}} + \mu_1\cancelto{0}{\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}} = 0 \end{cases}$$

Отсюда видно, что:

1) Скорость зависит только от y.

2) Давление зависит только от x.

Во втором уравнении перенесём давление в одну часть, а скорости в другую, то есть:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu}{k}u_x + \mu_1\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

Тогда видно, что левая и правая часть зависят от разных переменных. Это значит, что обе они одновременно равны одной и той же постоянной, которую мы обозначим A. Отсюда получаем, что давление линейно зависит от x:

$$P = Ax + C$$

Выпишем уравнение для профиля скорости:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} - \frac{\mu}{k\mu_1}u_x - \frac{A}{\mu_1} = 0$$

Решение этого уравнения выглядит следующим образом:

$$u_x(y) = -\frac{Ak}{\mu} + C_1 exp\ (\sqrt{\frac{\mu}{\mu_1 k}} y) + C_2 exp\ (-\sqrt{\frac{\mu}{\mu_1 k}} y)$$

Величины C_1 и C_2 находятся из граничных условий. В этой задаче их два:

1) Условие симметрии на расстоянии h (ищем выражение для течения в канале)

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}|_{y=h} = 0$$

2) Условие Навье проскальзывания на границе $y = 0$:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}|_{y=0} = b u_x|_{y=0}$$

Отсюда находим C_1 и C_2. Обозначим $\alpha = \frac{\mu}{\mu_1 k}$. Тогда:

$$C_1 = \frac{Abk}{h(b - \alpha + e^{2h\alpha}(b + \alpha))}$$

$$C_2 = \frac{Abk}{h(b + \alpha + e^{-2h\alpha}(b - \alpha))}$$

[Построить графики с характерными параметрами, (b 0.1h)]

12 Заключение

В ходе работы была выписана система уравнений фильтрации для задачи течения суспензии сквозь пористую среду с эффектом отложения. Было получено два аналитических решения для системы уравнений. Было проведено знакомство с методами поиска решений путём разложения в ряд, а также была выполнена проверка этого метода на аналитическом решении. Была решена задача об обобщении кинетического уравнения, были получены параметры, соответствующие аналитическому решению. Также было проведено ознакомление с методом характеристик и с его помощью получены аналитические решения.

Список литературы

[1] Кузьмина Л.И., Осипов Ю.В., Асимптотика задачи фильтрации суспензии в поритой среде, Вестник МГСУ, 2015, №1, с. 54-62

[2] Боронин С.А., Осипцов А.А., Влияние миграции частиц на течение суспензии в трещине гидроразрыва, Известия Российской академии наук, Механика жидкости и газа, 2014, №2, с. 80-94

[3] Боронин С.А., Осипцов А.А., Двухконтинуальная модель течения суспензии в трещине гидроразрыва, Доклады Академии наук, 2010, том 431, №6, с. 758-761

[4] Civan F., Modified Formulations of Particle Deposition and Removal Kinetics in Saturated Porous Media, Transport in Porous Media, 2016, vol. 111, pp. 381-410

[5] Leighton D., Acrivos A., The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions, Journal of Fluid Mechanics, 1987, vol. 181, pp. 415-439

[6] Phillips R.J., Armstrong R.C., Brown R.A. et al., A constitutive equation for concentrated suspensions that accounts for shearinduced particle migration, Physics of Fluids, 1992, vol.4, pp. 30-40

[7] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М., Движение жидкостей и газов в природных пластах, М., Недра, 1984

[8] Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М., Подземная гидромеханика, М., Недра, 1993

[9] Brinkman H.C., A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles, Applied Scientific Research, 1949, Vol. 1, pp. 27-34

[10] Желтов Ю.П., Механика нефтегазового пласта, М., Недра, 1975