Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Курсовая работа

Одномерные течения суспензии в пористой среде с учётом отложения частиц

One-dimensional flows of suspension with consideration of particle deposition

Механико-математический факультет МГУ
Кафедра гидромеханики

Научный руководитель:

Н.Е. Леонтьев

Работу выполнил:

студент группы **524**

Андрей Волчанский

Москва 2017

Содержание

1 Введение

В большинстве природных процессов фильтрация жидкости сквозь пористую среду происходит в условиях наличия в жидкости мелких в масштабах течения частиц. Примерами таких течений могут быть течение загрязнённой воды сквозь очищающий слой фильтра, закачка пропанта в трещину в задаче о гидроразрыве.

Характерными особенностями таких задач являются движение маленьких частиц в относительно высоких концентрациях, которое происходит со скоростями, равными скорости несущего флюида и загрязнение фильтрующего пласта, которое сопровождается изменением пористости и других параметров. В данной работе была рассмотрена одномерная модель загрязнения пласта, где загрязнение моделируется кинетическим уравнением, отложение частиц зависит от скорости жидкости, пористости и концентрации частиц, а также были получены решения для функций пористости и концентрации частиц.

2 Основные уравнения

2.1 Определения теории фильтрации

Вспомним некоторые элементы теории фильтрации и добавим новое понятие — осаждение.

Осаждение — процесс прилипания мелких частиц, содержащихся в фильтруемой жидкости, к скелету пористой среды.

Пусть $\alpha(x^i, t)$ — объёмная концентрация взвешенных частиц, $m(x^i, t)$ — пористость, то есть отношение объёма пор к объёму малого участка среды.

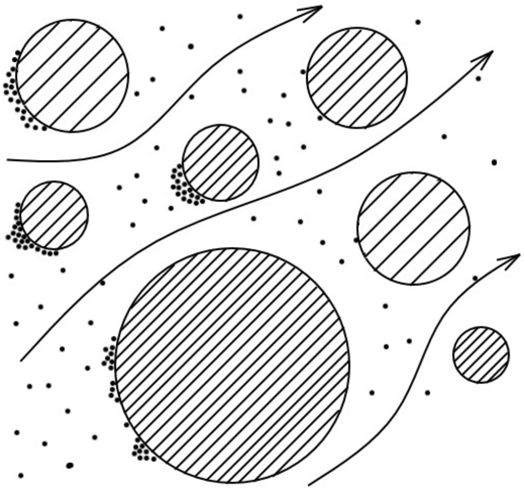

Рис. 1: Схема течения на уровне пор

Гипотеза. Частицы имеют размер много меньше размера пор (во многих приложениях размер пор $d_ч \approx 1$ мкм), перемещаются только благодаря потоку жидкости, перемешивание отсутствует. Значит, скорость частиц равна скорости жидкости. Предполагается, что жидкость и частицы — *несжимаемые.* $\rho_ч = const,\ \rho_{жидк} \equiv \rho = const$

2.2 Законы сохранения массы

Как и в других разделах механики сплошной среды, в теории фильтрации действуют стандартные законы сохранения. Их можно записать для каждой из фаз, для флюида и для частиц.

Запишем закон сохранения массы для жидкости:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho m(1-\alpha)\,dV = -\int\limits_\Sigma \rho u_n(1-\alpha)\,d\sigma$$

Применяя стандартеную технику перехода к дифференциальной форме, получим уравнение неразрывности для жидкой фракции:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m(1-\alpha)) + div((1-\alpha)\vec{u}) = 0 \tag{1}$$

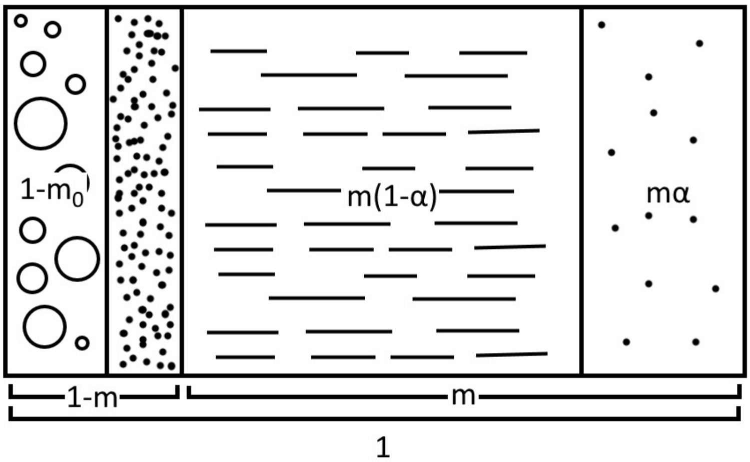

Рис. 2: Количество частиц в терминах α и m

Также можно выписать соотношение на разрыве:

$$[m(1-\alpha)]D - [(1-\alpha)u_n] = 0$$

или в эквивалентной форме:

$$[m(\alpha-1)]D - [\alpha u_n] = 0$$

Запишем аналогичный закон для частиц.

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho_ч m\alpha + \rho_ч((1-m) - 1 - m_0)dV = -\int\limits_\Sigma \rho_ч \vec{u}\alpha d\sigma$$

Здесь $m_0 = const$ — первоначально однородный пласт. Перепишем полученные равенства в виде уравнения неразрывности:

$$(m\alpha)_t - m_t + div(\alpha\vec{u}) = 0$$

$$(m\alpha)_t + div(\alpha\vec{u}) = m_t \tag{2}$$

Соотношение на разрыве:

$$[m\alpha - m]D - [\alpha u_n] = 0$$

Следствие: Складывая (1)+(2) получаем уравнение неразрывности для **всей** суспензии.

$$m_t + div\ \vec{u} = m_t$$

$$div\ \vec{u} = 0$$

Это уравнение можно использовать вместо (1) или (2) при решении системы уравнений.

2.3 Закон Дарси

В теории фильтрации используется экспериментальный закон Дарси, который связывает скорость и градиент давления. Этот закон можно получить как частное следствие закона Навье-Стокса при осреднении. Закон Дарси имеет вид:

$$-\vec{\nabla}P - \frac{\mu}{k}\vec{u} = 0 \tag{3}$$

В нашей постановке полагается, что массовых сил нет. Приведём известные зависимости для вязкости: $\mu = \mu(\alpha) = \mu_0(1 + C\alpha) \approx \mu_0, \quad k = k(m)$

Обычно (3) отщепляется от системы.

2.4 Кинетическое уравнение

В исследуемой задаче функция, описывающая отложение частиц, считается известной, мы будем полагать, что данная зависимость имеет следующий вид:

$$m_t = -f(|\vec{u}|, m, |\vec{\nabla}P|, \alpha) \tag{4}$$

С учётом кинетического уравнения мы можем выписать полную систему уравнений для поставленной задачи.

$$\begin{cases} (m\alpha)'_t + (\alpha u)'_x = m'_t \\ u'_x = 0 \\ -P'_x - \dfrac{\mu}{k}u = 0 \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, |\vec{\nabla}P|, \alpha) \end{cases}$$

2.5 Классификация системы уравнений

В системе 6 уравнений и 6 неизвестных, $m, \alpha, P, \vec{u}$

Выписав систему уравнений для одномерных течений, можно получить матрицы с коэффициентами при производных переменных по t (матрица A_{ij}) и по x (a_{ij}). Если при этом у характеристического уравнения $|A_{ij}x - a_{ij}| = 0$ все корни действительные, то система гиперболическая. Иначе говоря, если уравнения отделятся друг от друга в смысле производных неизвестной величины. Для нашей системы:

$$\begin{cases} (m\alpha)'_t + (\alpha u_0)'_x = m'_t \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, |\vec{\nabla}P|, \alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\alpha'_t + \alpha m'_t + u_0\alpha'_x = m'_t \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, |\vec{\nabla}P|, \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\alpha'_t + (\alpha - 1)m'_t + u_0\alpha'_x = 0 \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, |\vec{\nabla}P|, \alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\alpha'_t + u_0\alpha'_x = (\alpha - 1)f(|\vec{u}|, m, |\vec{\nabla}P|, \alpha) \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, |\vec{\nabla}P|, \alpha) \end{cases}$$

Можно разделить производные (в каждом уравнении производные вдоль своего направления), значит система гиперболическая.

3 Постановка задачи

3.1 Одномерное течение

В этой работе рассматривается одномерное течение жидкости с частицами сквозь пористую среду. Выпишем систему уравнений для одномерного течения:

$$\begin{cases} (m\alpha)'_t + (\alpha u)'_x = m'_t \\ u'_x = 0 \\ -P'_x - \dfrac{\mu}{k}u = 0 \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, |\vec{\nabla}P|, \alpha) \end{cases}$$

Сделаем следующие предположения. Пусть скорость $u = q(t)$ — функция времени t, а так же $q = q_0 = const (= u_0)$. Получили следующую систему:

$$\begin{cases} (m\alpha)_t + \alpha_x u_0 = m_t \\ m_t = -f(|\vec{u}|, m, |\vec{\nabla}P|, \alpha) \end{cases}$$

Получившаяся в результате предположений система является квазилинейной и содержит две неизвестные.

3.2 Граничные условия

В задаче рассматриваются следующие граничные условия:

На входе в пласт положим заданной концентрацию частиц $\alpha|_{x=0} = \alpha_0(t)$ и, в частности, $= const$

В начальный момент времени $t = 0$ считаем заданной пористость среды $m = m_0$, а концентрацию 0 — внутри пористой среды первоначально **чистая** жидкость.

На выходе из пласта при $x = L$ условия не ставятся, что связано с поведением характеристик.

3.3 Начало закачки в пласт

Приведём иллюстрацию процесса для переменных m и α соответственно:

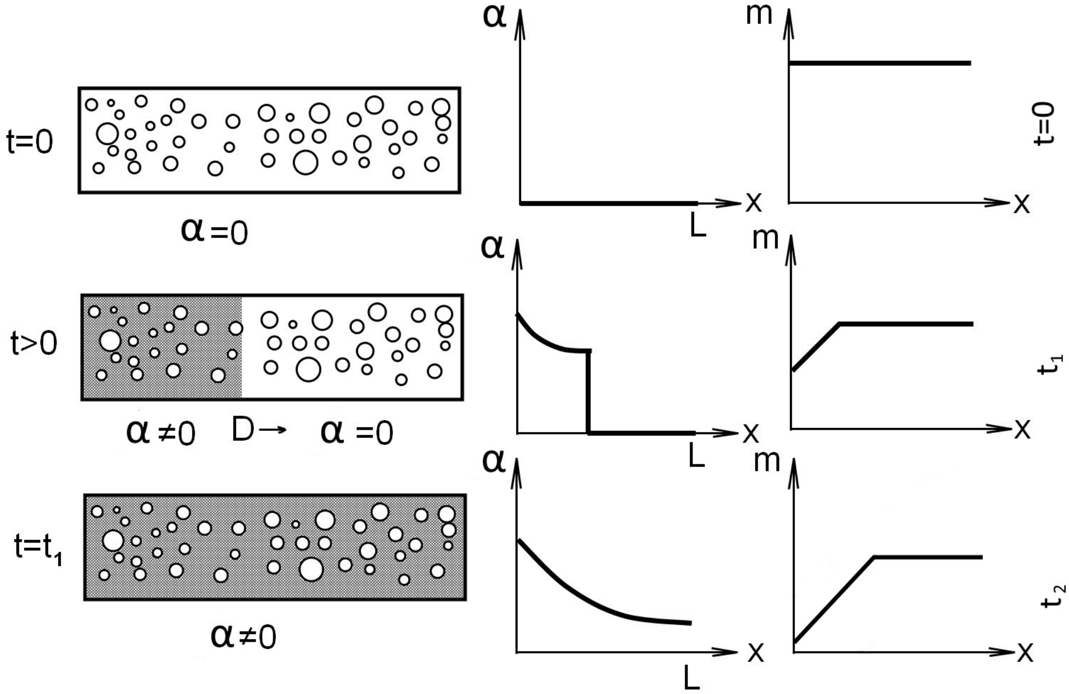

Рис. 3

4 Решение упрощённой задачи с конкретным уравнением засорения

4.1 Дополнительные предположения

Предположим, что $m \approx m_0$, то есть изменение пористости можно считать малым. Также можно предположить $\alpha \ll 1$ — концентрация мала. Тогда от уравнения

$$m_t\alpha + m\alpha + u_0\alpha_x = m_t$$

можно перейти к

$$m_0\alpha_t + u_0\alpha_x = m_t$$

Добавим в систему частный случай кинетического уравнения засорения: $m_t = -\gamma\alpha|u_0|$, где множитель $\alpha|u_0|$ пропорционален объёму жидкости, протекающей через данную точку, а $\gamma = const$ — экспериментальный коэффициент, который, например, в общем случае может зависеть от пористости. Далее мы проверим, что есть решение $\alpha = \alpha(x)$ за фронтом (не зависит от t, однако m от времени зависит).

В итоге получаем уравнение

$$\alpha'_t + \frac{u_0}{m_0}\alpha'_x = -\frac{\gamma\alpha|u_0|}{m_0}$$

Уравнению засорения соответствует характеристика $\dfrac{dx}{dt} = const$, а уравнению выше — $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{u_0}{m_0}$. Поскольку разрыв идёт вдоль второй характеристики, то от разрыва уходит только одна характеристика — закон сохранения массы выполняется. Выпишем соотношение на разрыве: $[m(1-\alpha)]D - [(1-\alpha)u_n] = 0$, где $u_n = u_0$. Тогда: $m_0[1-\alpha]\frac{u_0}{m_0} - [1-\alpha]u_0 = 0$. Здесь мы пользуемся гипотезой $[m] = 0$, но возможны и другие ситуации.

Итак, можно поставить следующую задачу: при заданной $\alpha|_{x=0} = \alpha_0$ найти решение $\alpha(x)$ за скачком, а также $m = m(x,t)$.

4.2 Решение поставленной задачи

Найдём решение уравнения вдоль характеристики $\dfrac{dx}{dt} = 0$:

$$\alpha_t + \frac{u_0}{m_0}\alpha_x = -\frac{\gamma\alpha|u_0|}{m_0}$$

Отсюда получаем $\dfrac{d\alpha}{dt} = -\dfrac{\gamma\alpha|u_0|}{m_0}$. $\displaystyle\int \frac{d\alpha}{\alpha} = -\int \frac{\gamma|u_0|}{m_0}dt$, откуда окончательно получаем

$$ln\ \alpha = -\frac{\gamma|u_0|}{m_0}t + C$$

Перепишем полученное решение в виде $ln\dfrac{\alpha}{\alpha_0} = -\dfrac{\gamma|u_0|}{m_0}(t - t_0)$. Так же, вспоминая, что мы искали решение вдоль характеристики, из $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{u_0}{m_0}$ можем получить $x = \dfrac{u_0}{m_0}(t - t_0)$. Это показывает, что найденное решение можно представить в виде $\alpha = \alpha_0 e^{-\gamma x}$, или

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_0 e^{-\gamma x}, & x < \frac{u_0}{m_0}t \\ 0, & x \geq \frac{u_0}{m_0}t \end{cases}$$

Представляя это решение как $\alpha = \alpha_0 e^{-\gamma \frac{u_0}{m_0}(t-t_0)}$, можно получить, что скорость разрыва $D = \dfrac{u_0}{m_0}$. Проверим выпонение условия баланса массы на скачке: $[m(1-\alpha)]D - [(1-\alpha)u_n] = 0$, откуда $m_0[1-\alpha]D - [1-\alpha]u_n = 0$. Так как $m_0 D - u_n = 0$, то отсюда следует $u = u_0 = const$

Размерность величины γ имеет вид $[\gamma] = \mathbf{1/м}$. Её можно трактовать как типичную длину засорения, так как величина α/α_0 падает в e на расстоянии $1/\gamma$ от начала координат.

Также у нас осталось уравнение $m_t = -\gamma u_0 \alpha$. С его помощью найдём решение

$$m = m|_{t=0} + \int\limits_0^t m_t dt = m_0 - \int\limits_0^t \gamma u_0 \alpha dt = \begin{cases} m_0 - \gamma u_0 \alpha(x)(t - \dfrac{x m_0}{u_0}), & x < \frac{u_0}{m_0}t \\ m_0, & x \geq \frac{u_0}{m_0}t \end{cases}$$

5 Решение задачи без упрощений

5.1 Полное уравнение.

Теперь получим решение в случае, когда $m = m(x,t)$ Имеем систему

$$\begin{cases}(m\alpha)_t + u_0\alpha_x & = m_t\\ m_t & = -\gamma u_0 \alpha\end{cases}$$

Подставляя второе в первое и раскрывая скобки, получим

$$\alpha_t + \frac{u_0}{m}\alpha_x = (\alpha-1)\gamma\frac{u_0}{m}\alpha$$

Рассматривая характеристики $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{u_0}{m}$ и интегрируя соотношение, получаем $\displaystyle\int \frac{d\alpha}{\alpha^2-\alpha} = \int \gamma dx = \int \frac{d(\alpha-1)}{\alpha-1} - \int \frac{d\alpha}{\alpha}$. Интегрируя и потенцируя, получаем окончательно выражение для α:

$$\alpha = \begin{cases}\dfrac{1}{1-\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0}e^{\gamma x}}, & x < \frac{u_0}{m}t\\ 0, & x \geq \frac{u_0}{m}t\end{cases}$$

Теперь, зная решение для α, можно выразить m: $m = m|_{t=0} + \displaystyle\int\limits_0^t m_t dt = m_0 + \int\limits_0^t \gamma u_0 \alpha =$

$$m_0 + \int\limits_{\frac{xm_0}{u_0}}^{t} \gamma u_0 \frac{1}{1-\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0}e^{\gamma x}} dt =$$

$$= \begin{cases} m_0 - \gamma u_0 \dfrac{1}{1-\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0}e^{\gamma x}} = (t - \dfrac{xm_0}{u_0}), & x < \frac{u_0}{m_0}t\\ m_0, & x \geq \frac{u_0}{m_0}t\end{cases}$$

Можно заметить, что полученное решение при $\alpha_0 \to 0$ переходит в полученное ранее выражение

$$\alpha = \frac{1}{1-\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0}e^{\gamma x}} \approx \frac{\alpha_0}{e^{\gamma x}}$$

6 Решения в виде рядов

Существует метод поиска точных решений путём разложения общего уравнения в ряд по концентрации осаждённых частиц. Если полагать, что скорость отложения частиц не просто пропорциональна модулю скорости фильтрации, а есть некоторая функция пористости, то система переписывается следующим образом.

Обозначим концентрацию осаждённых частиц $s = (1 - m_0) - (1 - m)$. Тогда нашу систему можно записать как:

$$\begin{cases} (a(s)\alpha + s)_t + (b(s)\alpha)_x & = 0 \\ -(s)_t & = K(s)\alpha \end{cases}$$

Сопоставим коэффициенты, зависящие от s с обозначениями в решённых задачах. $a(s)$ — m, $b(s)$ — u_0, $K(s)$ — $-\gamma u_0$. Полученные этим способом функции s и α расширяют класс решений, полученных в рассмотренных предельных случаях.

Полагая $K(s) = \varepsilon\Lambda(s)$, где ε — малый параметр и раскаладывая функции $a(s)$, $b(s)$ и $\Lambda(s)$ в ряды по s в окрестности нуля. Это справедливо, так как всё ещё принята гипотеза о слабом засорении. Таким образом получим системы дифференциальных уравнений на коэффициенты рядов, решая которые можно получить решения необходимой точности в данном классе решений.

Решения ищутся в виде $s(x,t,\varepsilon) = \varepsilon s_1(x,t) + \varepsilon^2 s_2(x,t) + ...$

Выпишем эти системы для нескольких членов разложения:

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} (a_0\alpha_1 + a_1\alpha_0 s_1)_t + (b_0\alpha_1 + b_1\alpha_0 s_1)_x & = -\lambda_0\alpha_0 \\ -(s_1)_t & = -\lambda_0\alpha_0 \end{cases}$$

$$\varepsilon^2 : \begin{cases} (a_0\alpha_2 + a_1\alpha_1 s_1 + a_2\alpha_0 s_1^2 + a_1\alpha_0 s_2)_t + & \\ +(b_0\alpha_2 + b_1\alpha_1 s_1 + b_2\alpha_0 s_1^2 + b_1\alpha_0 s_2)_x & = -(\lambda_0\alpha_1 + \lambda_1\alpha_0 s_1) \\ -(s_2)_t & = -(\lambda_0\alpha_1 + \lambda_1\alpha_0 s_1) \end{cases}$$

Решая последовательно эти системы методом характеристик можно получить искомое решение с необходимой наперёд заданной точностью.

7 Расширенный класс решений

7.1 Система уравнений для обобщённого кинетического уравнения

Ранее рассмотренное кинетическое уравнение имело довольно простой вид, а именно $m_t = -u_0\gamma\alpha$, теперь мы попробуем придать ему более общий вид. Как отмечалось ранее, функция, характеризующая изменение пористости со временем зависит от пористости в текущий момент времени. Пусть теперь кинетическое уравнение имеет вид $m_t = -F(m)\alpha$, где $F(m)$ — произвольная функция. Перепишем нашу систему уравнеий:

$$\begin{cases} (m\alpha)_t + u_0\alpha_x & = m_t \\ m_t & = -F(m)\alpha \end{cases}$$

В отличие от рассмотренных до этого задач, мы перейдём не к переменной α, а к переменной m. Пусть $G(m) = -\dfrac{1}{F(m)}$. Тогда

$$\Big(m\big(G(m)m_t - 1\big)\Big)_t + u_0\big(G(m)m_t\big)_x = 0$$

Докажем, что $\big(Gm_t\big)_x = \big(Gm_x\big)_t$.
$\big(G(m)m_t\big)_x = G_m m_t m_x + Gm_{tx} = \big(Gm_x\big)_t$, откуда следует, что в нашем уравнении можно поменять местами производные по времени и по координате, а именно, получим:

$$\Big(m\big(G(m)m_t - 1\big)\Big)_t + u_0\big(G(m)m_x\big)_t = 0$$

Данное уравнение можно проинтегрировать по времени. Получим следующее:

$$m\big(G(m)m_t - 1\big) + u_0 G(m)m_x = \Phi(x)$$

где $\Phi(x)$ — произвольная функция.

Переписывая последнее уравнение, получим:

$$m_t + \frac{u_0}{m}m_x = \frac{m + \Phi(x)}{G(m)m}$$

Это уравнение гиперболическое. Решая его методом характеристик можем получить выражение для пористости.

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} & = \dfrac{m + \Phi(x)}{G(m)m} \\ \\ \dfrac{dx}{dt} & = \dfrac{u_0}{m} \\ \\ m_t & = -F(m)\alpha \end{cases}$$

Решением одной из упрощённых задач было выражение на m:

$$m = m_0 - \gamma u_0 \frac{t - \frac{xm_0}{u_0}}{1 - \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0}e^{\gamma x}} = m_0 - \gamma u_0 \theta$$

Найдём такую функцию $\Phi(x)$, которая соответствует данному решению. $G(m) = -\frac{1}{\gamma u_0}$. Для удобства выпишем, чему равны производные этого решения:

$$m = m_0 - \gamma u_0 \theta (t - \frac{x m_0}{u_0})$$
$$m_t = -\gamma u_0 \theta$$
$$m_x = \gamma u_0 \theta \frac{m_0}{u_0} - \gamma u_0 (t - \frac{x m_0}{u_0}) \theta^2 \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_0} e^{\gamma x} \gamma$$

Подставляя и приводя подобные, получим $\Phi(x) = -m_0$.

Теперь, имея всю необходимую информацию, можно попробовать решить расширенную систему уравнений, используя новые знания о функции $\Phi(x)$.

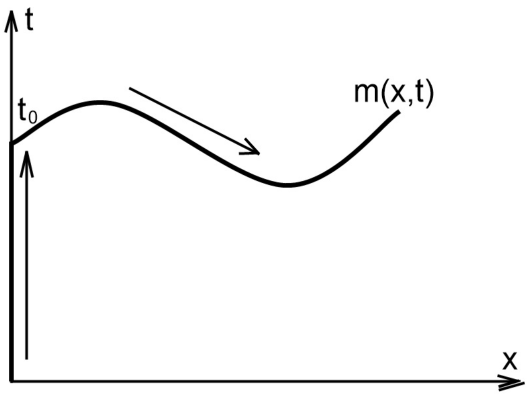

Рис. 4: Схема решения методом характеристик.

В системе, которую мы уже писали раньше, заменим производную по времени производной по координате, что справедливо, поскольку мы находимся на характеристике.

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dx} &= \dfrac{m + \Phi(x)}{G(m) u_0} \\ \\ \dfrac{dx}{dt} &= \dfrac{u_0}{m} \\ \\ m_t &= -F(m)\alpha \end{cases}$$

Запишем условия для нашей исходной задачи на функцию $F(x)$ и граничные и начальные условия. Отсюда получается, что $G(x) = -\dfrac{1}{\gamma u_0}$, при $x = 0$ концентрация частиц постоянна и равна α_0, в начальный момент времени полагаем всюду пористость $m = m_0 = const$.

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dx} = -\gamma(m + \Phi(x)) \\ \\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{u_0}{m} \\ \\ m_t = -\gamma u_0 \alpha \end{cases}$$

Получим решение в некотором параметрическом виде. Ход решения изображён на рис. 4. Сначала мы найдём, какая пористость будет на искомой характеристике при $x = 0$ в момент времени $t = \hat{t}$. Решим первое уравнение в системе:

$$\frac{dm}{dx} = \gamma(m_0 - m)$$

$$\frac{d(m_0 - m)}{m_0 - m} = -\gamma dx$$

$$ln(m_0 - m) = -\gamma x + C$$

$$m_0 - m = e^c e^{-\gamma x}$$

Теперь выразим e^c через $m(\hat{t})$. На границе выполняется уравнение $m_t = -\alpha_0 \gamma u_0$. Его решение имеет вид:

$$m(x = 0, t) = -\alpha_0 \gamma u_0 t + m_0$$

Значит, в момент времени $\hat{t}$ мы имеем пористость на входе в пласт равную $m(x = 0, \hat{t}) = -\alpha_0 \gamma u_0 \hat{t} + m_0$.

Используем его для нахождения произвольной постоянной:

$$m_0 - m(x = 0, \hat{t}) = \alpha_0 \gamma u_0 \hat{t} = e^c$$

Получили выражение для $m(x, \hat{t})$:

$$m = m_0 - \alpha_0 \gamma u_0 \hat{t} e^{-\gamma x}$$

Провести дальнейшую проверку планируется в последующей работе.

8 Заключение

В ходе работы была выписана система уравнений фильтрации для задачи течения суспензии сквозь пористую среду с эффектом отложения. Былло получено два аналитических решения для системы уравнений. Было проведено знакомство с методами поика решений путём разложения в ряд, а также была выполнена проверка этого метода на аналитическом решении. Была решена задача об обобщении кинетического уравнения, были получены параметры, соответствующие аналитическому решению. Также было проведено ознакомление с методом характеристик и с его помощью получены аналитические решения.

Список литературы

[1] Кузьмина Л.И., Осипов Ю.В., Асимптотика задачи фильтрации суспензии в поритой среде, Вестник МГСУ, 2015, №1, с. 54-62

[2] Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М., Движение жидкостей и газов в природных пластах, М., Недра, 1984

[3] Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М., Подземная гидромеханика, М., Недра,1993