

Homework

Андрей Ильин, БЭК182

6 июня 2020 г.

1 Midterm exam 2017-2018

1.1 Вопрос 1

Условие:

$$\mathbb{E}(X) = 2$$

$$\text{Var}(X) = 6$$

$$\mathbb{P}(X^2 \geq 100) - ?$$

Решение:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

$$(\mathbb{E}(X))^2 = \text{Var}(X) + \mathbb{E}(X^2) = 10$$

$$\mathbb{P}(X^2 \geq 100) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{100} = 0.1 \Rightarrow [0, 0.1]$$

Ответ: А

1.2 Вопрос 2

Так как распределение Пуассона, то:

$$\mathbb{E}(\xi) = \lambda$$

$$\text{Var} \xi = \lambda$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \text{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = \lambda + \lambda^2 = \lambda \cdot (1 + \lambda)$$

Ответ: Е

1.3 Вопрос 3

$$\text{Corr}(X + Y, Y) = \frac{\text{Cov}(X + Y, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X + Y) \cdot \text{Var}(Y)}} = \frac{6}{\sqrt{7 \cdot 9}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \cdot \text{Cov}(X, Y) = 4 + 9 + 2 \cdot (-3) = 7$$

$$\text{Cov}(X + Y, Y) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, Y) = -3 + 9 = 6$$

Ответ: С

1.4 Вопрос 4

Ответ: В

1.5 Вопрос 5

Так как величина распределена равномерно по площади треугольника

$$f_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{S} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Ответ: А

1.6 Вопрос 6

Ответ: В

1.7 Вопрос 7

$$\mathbb{P}(\xi \in [3, 6]) = \frac{1}{4}$$

Площадь всего прямоугольника (от 0 до 4) должна быть равна одному, т. е. интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ от функции плотности равен 1 по определению.

Ответ: В

1.8 Вопрос 8

X, Y - случайные величины

$$\mathbb{P}(X = -5) = \dots = \mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{11}$$

$$\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{3}$$

Всего три случая:

$$Y = -1 \Rightarrow X = 1$$

$$Y = 0 \Rightarrow X = 2$$

$$Y = 1 \Rightarrow X = 1$$

$$\text{СВ независимые} \Rightarrow \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{1}{11}$$

Ответ: С

1.9 Вопрос 9

$$\frac{2\pi}{\pi} = 6 \text{ частей}$$

$$\mathbb{P}(\text{попадет в красный}) = \frac{1}{6}$$

Ответ: Е

1.10 Вопрос 10

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$0.6 = 0.3 + \mathbb{P}(B) - 0.2$$

$$\mathbb{P}(B) = 0.5$$

Ответ: В

1.11 Вопрос 11

$$\text{Var}(2 \cdot X - Y + 1) = 4 \cdot \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 4 \cdot \text{Cov}(X, Y) =$$

$$= 4 \cdot 4 + 9 - 4 \cdot (-3) = 37$$

Ответ: В

1.12 Вопрос 12

$$\text{plim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} = \mathbb{E}(X^2) = \text{Var}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = 1$$

Ответ: В

1.13 Вопрос 13

Условная функция плотности:

$$f(x|y = \frac{1}{2}) = \frac{f(x, \frac{1}{2})}{f_y(\frac{1}{2})} = \frac{6 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = 2 \cdot x$$

$$f_y(\frac{1}{2}) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$$

$$f_y(y) = \int_0^1 6 \cdot x \cdot y^2 dx = 3 \cdot x^2 \cdot y^2 \Big|_0^1 = 3 \cdot y^2, y \in [0; 1]$$

Ответ: C

1.14 Вопрос 14

В условии пропущено, чему равно n . Без этого можно подогнать любой ответ. Пусть $n = 25$.

X_1, X_2, \dots независимы и одинаково распределены

$$\mathbb{E}(X_i) = 4$$

$$\text{Var}(X_i) = 100$$

$$\mathbb{P}(\overline{X}_n \leq 5) = ?$$

$$\overline{X} \rightarrow N(4, \frac{100}{25})$$

$$\mathbb{P}(\frac{\overline{X}-4}{\sqrt{4}} \leq \frac{5-4}{2}) = \mathbb{P}(\mathbb{Z} \leq \frac{1}{2}) \rightarrow \text{смотреть в таблицу}$$

1.15 Вопрос 15

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X + 2Y, 2X + 3) &= \text{Cov}(X + 2Y, 2X) = \text{Cov}(X, 2X) + \text{Cov}(2Y, 2X) = \\ &= 2 \cdot \text{Cov}(X, X) + 4 \cdot \text{Cov}(X, Y) = 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = -4 \end{aligned}$$

Ответ: A

1.16 Вопрос 16

$$\mathbb{E}((X - 1)Y) = \mathbb{E}(XY - Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y) =$$

$$\text{Cov}(X, Y) + \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y) = -3 + (-2) - 2 = -7$$

Ответ: B

1.17 Вопрос 17

$$X_i = 1, \text{ если "6"}. \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{6}$$

$$X_i = 0, \text{ иначе}. \mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{5}{6}$$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$$

1.18 Вопрос 18

X и Y - независимые случайные величины

$$X + Y \sim N(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y), \text{Var}(X) + \text{Var}(Y))$$

$$X + Y \sim N(3, 7)$$

$$\mathbb{P}(X + Y \leq 3) = \mathbb{P}(\frac{X+Y-3}{\sqrt{7}} < \frac{3-3}{\sqrt{7}}) = (\mathbb{Z} \leq 0) = \frac{1}{2}$$

Ответ: C

1.19 Вопрос 19

5 кнопок:

$i = 1, 2, 3 \quad \mathbb{P}(x_i = 6) = \frac{1}{2}$ (честные кубики)

$i = 4 \quad \mathbb{P}(x_i = 6) = \frac{1}{2}$ (с увеличенной вероятностью выпадения 6)

$i = 5 \quad \mathbb{P}(x_i = 6) = \frac{1}{10}$ (с увеличенной вероятностью выпадения 1)

$$\mathbb{P}(i = 1, 2, 3 | "6") = \frac{\mathbb{P}(i=1,2,3 \cap "6")}{\mathbb{P}("6")} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{50}}{\frac{11}{50}} = \frac{3}{11}$$

Ответ: C

1.20 Вопрос 20

E) Не симметрична

D) Отрицательна (-1)

A) $1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 < 0$

B) $1 \cdot 9 - 4 \cdot 4 < 0$

C) $9 \cdot 6 - 7 \cdot 7 > 0$

Ответ: C

1.21 Вопрос 21

$$\mathbb{E}(\alpha X + (1 - \alpha)Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + (1 - \alpha) \mathbb{E}(Y) = -\alpha + 2 \cdot (1 - \alpha) = 0$$

$$2 - 3 \cdot \alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

Ответ: A

1.22 Вопрос 22

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = (1 - p)^n = \frac{1}{4}^2 = \frac{1}{16}$$

Ответ: B

1.23 Вопрос 23

$$\mathbb{P}(x = k) = \lambda^k \cdot \frac{\exp\{-\lambda\}}{k!}$$

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(k = 0) = 1 - \exp\{-4\}$$

Ответ: C

1.24 Вопрос 24

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \text{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = p \cdot (1 - p) + p^2 = p$$

Ответ: B

1.25 Вопрос 25

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var}(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \text{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Ответ: A

1.26 Вопрос 26

$\frac{2\pi}{3} = 6$ частей

$\mathbb{P}(\text{попадет в красный}) = \mathbb{P}(\text{попадет в синий}) = \frac{1}{6}$

Невозможно попасть одновременно в две доли \Rightarrow событие А и событие В несовместны

Ответ: Е

1.27 Вопрос 27

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 x \cdot y \cdot 6 \cdot x \cdot y^2 dx dy = \int_0^1 2 \cdot x^3 \cdot y^3 \Big|_0^1 dy = \frac{2 \cdot y^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Ответ: А

1.28 Вопрос 28

$$\begin{aligned} \text{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) &= \alpha^2 \text{Var}(X) + (1-\alpha)^2 \text{Var}(Y) + 2 \cdot \text{Cov}(X, Y) \cdot \alpha \cdot (1-\alpha) = \\ &= 4 \cdot \alpha^2 + 9 \cdot (1-\alpha)^2 - 6 \cdot \alpha \cdot (1-\alpha) = 4 \cdot \alpha^2 + 9 - 18 \cdot \alpha + 9 \cdot \alpha^2 - 6 \cdot \alpha + 6 \cdot \alpha^2 = 19 \cdot \alpha^2 - 24 \cdot \alpha + 9 \\ \alpha^* &= \frac{24}{38} = \frac{12}{19} \end{aligned}$$

Ответ: F (нет верного ответа)

1.29 Вопрос 29

$$\mathbb{P}(\text{без багажа}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(\text{с рюкзаком} | \text{без багажа}) = 0.5$$

$$\mathbb{P}(\text{с рюкзаком} | \text{с багажом}) = \frac{55}{150}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{без рюкзака}) &= \mathbb{P}(\text{без рюкзака} | \text{без багажа}) \mathbb{P}(\text{без багажа}) + \mathbb{P}(\text{без} \\ &\text{рюкзака} | \text{с багажом}) \mathbb{P}(\text{с багажом}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{95}{150} \cdot \frac{3}{4} = 0.6 \end{aligned}$$

Ответ: А

1.30 Вопрос 30

$$\mathbb{E}(X) = 2$$

$$\text{Var}(X) = 6$$

$\mathbb{P}(|X - 2| \leq 10)$ - похоже на неравенство Чебышева, но знак неравенства в другую сторону

$$\mathbb{P}(|X - 2| \geq 10) \leq \frac{\text{Var}(X)}{100}$$

$$\mathbb{P}(|X - 2| \leq 10) \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{100} = 0.94$$

Ответ: С