

Homework

Андрей Ильин, БЭК182

7 июня 2020 г.

Midterm exam 2017-2018

АЕСВА ВВСЕВ ВВССА ВВССС АВСВА ЕА?АС

1. По свойству дисперсий:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

$$(\mathbb{E}(X^2) = \text{Var}(X) + \mathbb{E}(X))^2 = 10$$

$\mathbb{P}(X^2 \geq 100)$ похоже на неравенство Маркова. $X^2 \geq 0$ всегда \Rightarrow используем эквивалент формуле из следствия неравенства.

Получаем верхнюю границу диапозона:

$$\mathbb{P}(X^2 \geq 100) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{100} = 0.1 \Rightarrow [0, 0.1]$$

Ответ: А

2. Так как ξ имеет распределение Пуассона, то:

$$\mathbb{E}(\xi) = \lambda$$

$$\text{Var } \xi = \lambda$$

По свойству дисперсий:

$$\text{Var}(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \text{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = \lambda + \lambda^2 = \lambda \cdot (1 + \lambda)$$

Ответ: Е

3. По формуле:

$$\text{Corr}(X + Y, Y) = \frac{\text{Cov}(X + Y, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X + Y) \cdot \text{Var}(Y)}} = \frac{6}{\sqrt{7 \cdot 9}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \cdot \text{Cov}(X, Y) = 4 + 9 + 2 \cdot (-3) = 7$$

$$\text{Cov}(X + Y, Y) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, Y) = -3 + 9 = 6$$

Ответ: С

4. Функция плотности для любой случайной величины с нормальным распределением:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

У случайных величин со стандартным нормальным распределением $\sigma = 1$ и $\mu = 0$. При подстановке значений получаем ответ В

Ответ: В

5. Так как величина распределена равномерно по площади треугольника с координатами точек $(0; 0)$, $(0; 4)$, $(2; 0)$:

$$f_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{S} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Ответ: А

6. По определению события А, В и С независимы в совокупности, если:

$$\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

Ответ: В

7. При построении графика функции плотности ξ получается прямоугольник с высотой $\frac{1}{4}$. Площадь всего прямоугольника (от 0 до 4) должна быть равна одному, т. к. интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ от функции плотности равен 1 по определению.

$$\mathbb{P}(\xi \in [3,6]) = \frac{1}{4}$$

Ответ: В

8. X, Y - случайные величины

$$\mathbb{P}(X = -5) = \dots = \mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{11}$$

$$\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{3}$$

Для $X + Y^2 = 2$ имеется всего три случая:

$$Y = -1 \Rightarrow X = 1$$

$$Y = 0 \Rightarrow X = 2$$

$$Y = 1 \Rightarrow X = 1$$

Случайные величины независимые $\Rightarrow \mathbb{P}(X + Y^2 = 2) = \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{1}{11}$

Ответ: С

9. Зная, что один сектор равен $\frac{\pi}{3}$ найдем число секторов:

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$$

Все точки точки круга равновероятны, следовательно:

$$\mathbb{P}(\text{«попадет в красный»}) = \frac{1}{6}$$

Ответ: Е

10. По формуле:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$0.6 = 0.3 + \mathbb{P}(B) - 0.2$$

Соответственно:

$$\mathbb{P}(B) = 0.5$$

Ответ: В

11. Используя свойства дисперсии:

$$\text{Var}(2X - Y + 1) = 4 \cdot \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 4 \cdot \text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Var}(2X - Y + 1) = 4 \cdot 4 + 9 - 4 \cdot (-3) = 37$$

Ответ: В

12. Согласно ЗБЧ:

$$\text{plim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} = \mathbb{E}(X^2) = \text{Var}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = 1$$

Ответ: В

13. Условная функция плотности:

$$f\left(x \mid y = \frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(x, \frac{1}{2}\right)}{f_y\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{6x \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = 2x$$

$$f_y(y) = \int_0^1 6 \cdot x \cdot y^2 dx = 3 \cdot x^2 \cdot y^2 \Big|_0^1 = 3 \cdot y^2, y \in [0; 1]$$

$$f_y\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Ответ: С

14. В условии пропущено, чему равно n . Без этого можно подогнать любой ответ. Пусть $n = 100$.

X_1, X_2, \dots независимы и одинаково распределены

$$\mathbb{E}(X_i) = 4$$

$$\text{Var}(X_i) = 100$$

$$\mathbb{P}(\overline{X_n} \leq 5) - ?$$

$$\overline{X} \sim N\left(4, \frac{100}{100}\right)$$

По таблице для нормального распределения:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\overline{X} - 4}{\sqrt{1}} \leq \frac{5 - 4}{1}\right) = \mathbb{P}(Z \leq 1) = 0.8413$$

Ответ: С

15. Используя свойства ковариации:

$$\text{Cov}(X + 2Y, 2X + 3) = \text{Cov}(X + 2Y, 2X) = \text{Cov}(X, 2X) + \text{Cov}(2Y, 2X)$$

$$\text{Cov}(X + 2Y, 2X + 3) = 2 \cdot \text{Cov}(X, X) + 4 \cdot \text{Cov}(X, Y) = 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = -4$$

Ответ: А

16. Используя свойства математического ожидания:

$$\mathbb{E}((X-1)Y) = \mathbb{E}(XY - Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y) = \text{Cov}(X, Y) + \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}((X-1)Y) = -3 + (-2) - 2 = -7$$

Ответ: В

17. $X_i = 1$, если «6». $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{6}$
 $X_i = 0$, иначе. $\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{5}{6}$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0)$$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_1 + X_2 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 0 \cap X_1 + X_2 = 1)}{X_1 + X_2 = 1} = \frac{1}{2}$$

Аналогично для $\mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_1 + X_2 = 1)$

Условный закон X_1 совпадает с распределением Бернулли с $p = \frac{1}{2}$

Ответ: В

18. X и Y - независимые случайные величины

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y), \text{Var}(X) + \text{Var}(Y))$$

$$X + Y \sim \mathcal{N}(3, 7)$$

Используя таблицу для нормального распределения:

$$\mathbb{P}(X + Y \leq 3) = \mathbb{P}\left(\frac{X + Y - 3}{\sqrt{7}} < \frac{3 - 3}{\sqrt{7}}\right) = (\mathbb{Z} \leq 0) = \frac{1}{2}$$

Ответ: С

19. 5 кнопок:

$$i = 1, 2, 3 \quad \mathbb{P}(x_i = 6) = \frac{1}{2} \text{ (честные кубики)}$$

$$i = 4 \quad \mathbb{P}(x_i = 6) = \frac{1}{2} \text{ (с увеличенной вероятностью выпадения 6)}$$

$$i = 5 \quad \mathbb{P}(x_i = 6) = \frac{1}{10} \text{ (с увеличенной вероятностью выпадения 1)}$$

$$\mathbb{P}(i = 1, 2, 3 \mid \text{«6»}) = \frac{\mathbb{P}(i = 1, 2, 3 \cap \text{«6»})}{\mathbb{P}(\text{«6»})} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{11}{50}} = \frac{5}{11}$$

Ответ: С

20. Е) Должна быть симметричной

Д) Не может быть отрицательной

$$\text{А) } 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 < 0$$

$$\text{В) } 1 \cdot 9 - 4 \cdot 4 < 0$$

$$\text{С) } 9 \cdot 6 - 7 \cdot 7 > 0$$

Ответ: С

21. Используя свойства математического ожидания:

$$\mathbb{E}(\alpha X + (1 - \alpha)Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + (1 - \alpha) \mathbb{E}(Y) = -\alpha + 2 \cdot (1 - \alpha) = 0$$

$$2 - 3 \cdot \alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

Ответ: А

22. ξ имеет биномиальное распределение

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = (1 - p)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

Ответ: В

23. Распределение Пуассона с $\lambda = 4$

$$\mathbb{P}(x = k) = \lambda^k \cdot \frac{e^{-\lambda}}{k!}$$

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(k = 0) = 1 - e^{-4}$$

Ответ: С

24. ξ имеет распределение Бернулли

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \text{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = p \cdot (1 - p) + p^2 = p$$

Ответ: В

25. ξ имеет экспоненциальное распределение

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var}(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \text{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Ответ: А

26. Зная, что один сектор равен $\frac{\pi}{3}$ найдем число секторов:

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$$

$$\mathbb{P}(\text{«попадет в красный»}) = \mathbb{P}(\text{«попадет в синий»}) = \frac{1}{6}$$

Невозможно попасть одновременно в две доли \Rightarrow событие А и событие В несовместны

Ответ: Е

27.

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 x \cdot y \cdot 6 \cdot x \cdot y^2 dx dy = \int_0^1 2 \cdot x^3 \cdot y^3 \Big|_0^1 dy = \frac{2 \cdot y^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Ответ: A

28. Используя свойства дисперсии:

$$\text{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = \alpha^2 \text{Var}(X) + (1-\alpha)^2 \text{Var}(Y) + 2 \cdot \text{Cov}(X, Y) \cdot \alpha \cdot (1-\alpha)$$

$$\text{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = 4 \cdot \alpha^2 + 9 \cdot (1-\alpha)^2 - 6 \cdot \alpha \cdot (1-\alpha) = 4 \cdot \alpha^2 + 9 - 18 \cdot \alpha + 9 \cdot \alpha^2 - 6 \cdot \alpha + 6 \cdot \alpha^2$$

$$\text{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = 19 \cdot \alpha^2 - 24 \cdot \alpha + 9$$

Находим точку минимума:

$$\alpha^* = \frac{24}{38} = \frac{12}{19}$$

Ответ: F (нет верного ответа)

29.

$$\mathbb{P}(\text{«без багажа»}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(\text{«с рюкзаком»} \mid \text{«без багажа»}) = 0.5$$

$$\mathbb{P}(\text{«с рюкзаком»} \mid \text{«с багажом»}) = \frac{55}{150}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{«без рюкзака»}) &= \mathbb{P}(\text{«без рюкзака»} \mid \text{«без багажа»}) \mathbb{P}(\text{«без багажа»}) + \\ &+ \mathbb{P}(\text{«без рюкзака»} \mid \text{«с багажом»}) \mathbb{P}(\text{«с багажом»}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{95}{150} \cdot \frac{3}{4} = 0.6 \end{aligned}$$

Ответ: A

30. По условию:

$$\mathbb{E}(X) = 2$$

$$\text{Var}(X) = 6$$

$\mathbb{P}(|X-2| \leq 10)$ - похоже на неравенство Чебышева, но знак неравенства в другую сторону

$$\mathbb{P}(|X-2| \geq 10) \leq \frac{\text{Var}(X)}{100}$$

$$\mathbb{P}(|X-2| \leq 10) \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{100} = 0.94$$

Ответ: C