Homework

Андрей Ильин, БЭК182

7 июня 2020 г.

Midterm exam 2017-2018 AECBA BBCEB BBCCA BBCCC ABCBA EA?AC

1. По свойству дисперсий:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

$$(\mathbb{E}(X^2) = \operatorname{Var}(X) + \mathbb{E}(X))^2 = 10$$

 $\mathbb{P}(X^2\geqslant 100)$ похоже на неравенство Маркова. $X^2\geqslant 0$ всегда, следовательно, можем использовать эквивалент формуле из следствия неравенства.

Получаем верхнюю границу диапозона:

$$\mathbb{P}(X^2 \geqslant 100) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X^2)}{100} = 0.1$$

Следовательно, $\mathbb{P}(X^2 \geqslant 100)$ лежит в диапазоне [0,0.1]

Ответ: А

2. Так как ξ имеет распределение Пуассона, поэтому:

$$\mathbb{E}(\xi) = \lambda$$

$$Var \xi$$
) = λ

По свойству дисперсий:

$$Var(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = Var(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = \lambda + \lambda^2 = \lambda \cdot (1 + \lambda)$$

Ответ: Е

3. По формуле:

$$Corr(X+Y,Y) = \frac{Cov(X+Y,Y)}{\sqrt{Var(X+Y) \cdot Var(Y)}} = \frac{6}{\sqrt{7} \cdot 9} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot Cov(X,Y) = 4 + 9 + 2 \cdot (-3) = 7$$

$$Cov(X + Y,Y) = Cov(X,Y) + Cov(Y,Y) = -3 + 9 = 6$$

Ответ: С

4. Функция плотности для любой случайной величины с нормальным распределением:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

У случайных величин со стандартным нормальным распределением $\sigma=1$ и $\mu=0$. При подстановке значений получаем ответ B.

Ответ: В

5. Так как величина распределена равномерно по площади треугольника с координатами точек (0;0),(0;4),(2;0):

$$f_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{S} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Ответ: А

6. По определению события А, В и С независимы в совокупности, если

$$\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$$

Ответ: В

7. При построении графика функции плотности ξ получается прямоугольник с высотой $\frac{1}{4}$ Площадь всего прямоугольника (от 0 до 4) должна быть равна одному, т. к. интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ от функции плотности равен 1 по определению.

$$\mathbb{P}(\xi \in [3,6]) = \frac{1}{4}$$

Ответ: В

8. X, Y — случайные величины

$$\mathbb{P}(X = -5) = \dots = \mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{11}$$

$$\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{3}$$

Для $X + Y^2 = 2$ имеется всего три случая:

$$Y = -1, X = 1$$

$$Y = 0, X = 2$$

$$Y = 1, X = 1$$

Случайные величины независимые, следовательно

$$\mathbb{P}(X+Y^2=2) = \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{1}{11}$$

Ответ: С

9. Зная, что один сектор равен $\frac{\pi}{3}$ найдем число секторов:

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$$

Все точки точки круга равновероятны, следовательно:

$$\mathbb{P}($$
«попадет в красный» $)=rac{1}{6}$

Ответ: Е

10. По формуле:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$0.6 = 0.3 + \mathbb{P}(B) - 0.2$$

Соответственно:

$$\mathbb{P}(B) = 0.5$$

Ответ: В

11. Используя свойства дисперсии:

$$\operatorname{Var}(2X - Y + 1) = 4 \cdot \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) - 4 \cdot \operatorname{Cov}(X, Y)$$

$$Var(2X - Y + 1) = 4 \cdot 4 + 9 - 4 \cdot (-3) = 37$$

Ответ: В

12. Согласно ЗБЧ:

$$\operatorname{plim}_{n \to +\infty} \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} = \mathbb{E}(X^2) = \operatorname{Var}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = 1$$

Ответ: В

13. Условная функция плотности:

$$f\left(x \mid y = \frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(x, \frac{1}{2}\right)}{f_y\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{6x \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = 2x$$

$$f_y(y) = \int_0^1 6 \cdot x \cdot y^2 dx = 3 \cdot x^2 \cdot y^2 \Big|_0^1 = 3 \cdot y^2, y \in [0; 1]$$

$$f_y\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Ответ: С

14. В условии пропущено, чему равно n. Без этого можно подогнать любой ответ. Пусть n=100.

 X_{1}, X_{2}, \dots независимы и одинаково распределены

$$\mathbb{E}(X_i) = 4$$

$$\operatorname{Var}(X_i) = 100$$

$$\mathbb{P}(\bar{X}_n \leq 5) - ?$$

$$\bar{X} \sim \mathbb{N}\left(4, \frac{100}{100}\right)$$

По таблице для нормального распределения:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-4}{\sqrt{1}}\leqslant \frac{5-4}{1}\right)=\mathbb{P}(\mathbb{Z}\leqslant 1)=0.8413$$

Ответ: С

15. Используя свойства ковариации:

$$Cov(X + 2Y, 2X + 3) = Cov(X + 2Y, 2X) = Cov(X, 2X) + Cov(2Y, 2X)$$
$$Cov(X + 2Y, 2X + 3) = 2 \cdot Cov(X, X) + 4 \cdot Cov(X, Y) = 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = -4$$

Ответ: А

16. Используя свойства математического ожидания:

$$\mathbb{E}((X-1)Y) = \mathbb{E}(XY-Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y) = \operatorname{Cov}(X,Y) + \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)$$
$$\mathbb{E}((X-1)Y) = -3 + (-2) - 2 = -7$$

Ответ: В

17. По условию задачи, величина X_i зависит от выпадемого на кубике значения следующим образом:

$$X_i = 1$$
, если выпала «6». $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{6}$

$$X_i = 0$$
, иначе. $\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{5}{6}$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0)$$
$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_1 + X_2 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 0 \cap X_1 + X_2 = 1)}{X_1 + X_2 = 1}) = \frac{1}{2}$$

Аналогично для $\mathbb{P}(X_1=0 \mid X_1+X_2=1)$, также равной $\frac{1}{2}$

Условный закон X_1 совпадает с распределением Бернулли с $p=\frac{1}{2}$

Ответ: В

18. X и Y – независимые случайные величины

$$X+Y \sim \mathbb{N}(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y), \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y))$$

$$X + Y \sim \mathbb{N}(3.7)$$

Используя таблицу для нормального распределения:

$$\mathbb{P}(X+Y \leqslant 3) = \mathbb{P}\left(\frac{X+Y-3}{\sqrt{7}} < \frac{3-3}{\sqrt{7}}\right) = (\mathbb{Z} \leqslant 0) = \frac{1}{2}$$

Ответ: С

19. Имеется 5 кнопок:

$$i=4$$
 $\mathbb{P}(x_i=6)=\frac{1}{2}$ (с увеличенной вероятностью выпадения 6)

$$i=5$$
 $\mathbb{P}(x_i=6)=\frac{1}{10}$ (с увеличенной вероятностью выпадения 1)

$$\mathbb{P}(i=1,2,3\mid *6*) = \frac{\mathbb{P}(i=1,2,3\cap *6*)}{\mathbb{P}(*6*)} = \frac{\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{30}}{\frac{11}{50}} = \frac{5}{11}$$

Ответ: С

- 20. A) $1 \cdot 1 2 \cdot 2 < 0$
 - B) $1 \cdot 9 4 \cdot 4 < 0$
 - C) $9 \cdot 6 7 \cdot 7 > 0$
 - D) Не может быть отрицательной
 - Е) Должна быть симметричной

Ответ: С

21. Используя свойства математического ожидания:

$$\mathbb{E}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = \alpha \mathbb{E}(X) + (1-\alpha)\mathbb{E}(Y) = -\alpha + 2 \cdot (1-\alpha) = 0$$
$$2 - 3 \cdot \alpha = 0$$
$$\alpha = \frac{2}{3}$$

Ответ: А

22. ξ имеет биноминальное распределение

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = (1 - p)^n = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

Ответ: В

23. Распределение Пуассона с $\lambda=4$

$$\mathbb{P}(x=k) = \lambda^k \cdot \frac{e^{-\lambda}}{k!}$$

$$\mathbb{P}(X\geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(k=0) = 1 - e^{-4}$$

Ответ: С

24. ξ имеет распределение Бернулли

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \text{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = p \cdot (1-p) + p^2 = p$$

Ответ: В

25. ξ имеет экспоненциальное распределение

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$
$$Var(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \operatorname{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Ответ: А

26. Зная, что один сектор равен $\frac{\pi}{3}$ найдем число секторов:

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 6$$

$$\mathbb{P}($$
«попадет в красный» $)=\mathbb{P}($ «попадет в синий» $)=rac{1}{6}$

Невозможно попасть одновременно в две доли, следовательно , событие ${\bf A}$ и событие ${\bf B}$ несовместны.

Ответ: Е

27.

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 x \cdot y \cdot 6 \cdot x \cdot y^2 dx dy = \int_0^1 2 \cdot x^3 \cdot y^3 \Big|_0^1 dy = \frac{2 \cdot y^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Ответ: А

28. Используя свойства дисперсии:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) &= \alpha^2 \operatorname{Var}(X) + (1-\alpha)^2 \operatorname{Var}(Y) + 2 \cdot \operatorname{Cov}(X,Y) \cdot \alpha \cdot (1-\alpha) \\ \operatorname{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) &= 4 \cdot \alpha^2 + 9 \cdot (1-\alpha)^2 - 6 \cdot \alpha \cdot (1-\alpha) = 4 \cdot \alpha^2 + 9 - 18 \cdot \alpha + 9 \cdot \alpha^2 - 6 \cdot \alpha + 6 \cdot \alpha^2 \\ \operatorname{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) &= 19 \cdot \alpha^2 - 24 \cdot \alpha + 9 \end{aligned}$$

Находим точку минимума:

$$\alpha^* = \frac{24}{38} = \frac{12}{19}$$

Ответ: F (нет верного ответа)

29.

$$\mathbb{P}(\text{«без багажа»}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(\text{«с рюкзаком»} \mid \text{«без багажа»}) = 0.5$$

$$\mathbb{P}(\text{«с рюкзаком»} \mid \text{«с багажом»}) = \frac{55}{150}$$

 $\mathbb{P}(\text{«без рюкзака»}) = \mathbb{P}(\text{«без рюкзака»} \mid \text{«без багажа»}) \, \mathbb{P}(\text{«без багажа»}) + \mathbb{P}(\text{«без рюкзака»}) \mid \text{«с багажом»}) \, \mathbb{P}(\text{«с багажом»}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{95}{150} \cdot \frac{3}{4} = 0.6$

Ответ: А

30. По условию:

$$\mathbb{E}(X) = 2$$

$$Var(X) = 6$$

 $\mathbb{P}(|X-2|\leqslant 10)$ - похоже на неравенство Чебышева, но знак неравенства в другую сторону

$$\mathbb{P}(|X-2| \geqslant 10) \leqslant \frac{\operatorname{Var}(X)}{100}$$

$$\mathbb{P}(|X - 2| \le 10) \ge 1 - \frac{\text{Var}(X)}{100} = 0.94$$

Ответ: С