Homework

Андрей Ильин, БЭК182

6 июня 2020 г.

Midterm exam 2017-2018
AECBA BBCEB BBCCA BBCCC ABCBA EA?AC

1. Условие:

$$\mathbb{E}(X) = 2$$

$$\text{Var}(X) = 6$$

$$\mathbb{P}(X^2 \geqslant 100) - ?$$

   Решение:

   По свойству дисперсий:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

$$(\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(X))^2 = \text{Var}(X) + \mathbb{E}(X))^2 = 10$$

   Получаем верхнюю границу диапозона:

$$\mathbb{P}(X^2 \geqslant 100) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X^2)}{100} = 0.1 \Rightarrow [0, 0.1]$$

   Ответ: A

2. Так как ξ имеет распределение Пуассона, то:

$$\mathbb{E}(\xi) = \lambda$$

$$\text{Var}\,\xi) = \lambda$$

   По аналогии с первым:

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \text{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = \lambda + \lambda^2 = \lambda \cdot (1 + \lambda)$$

   Ответ: E

3. По формуле:

$$\mathrm{Corr}(X+Y,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X+Y,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X+Y)\cdot \mathrm{Var}(Y)}} = \frac{6}{\sqrt{7\cdot 9}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\cdot \mathrm{Cov}(X,Y) = 4+9+2\cdot(-3) = 7$$

$$\mathrm{Cov}(X+Y,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Y) = -3+9 = 6$$

   Ответ: C

4. Функция плотности для любой случайной величины с нормальным распределением:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

   У случайных величин со стандартным нормальным распределением $\sigma = 1$ и $\mu = 0$. При подстановке значений получаем ответ B

   Ответ: B

5. Так как величина распределена равномерно по площади треугольника с координатами точек $(0;0), (0;4), (2;0)$:

$$f_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{S} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

   Ответ: A

6. По определению события A, B и C независимы в совокупности, если:

$$\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$$

   Ответ: B

7. При построении графика функции плотности ξ получается прямоугольник с высотой $\frac{1}{4}$ Площадь всего прямоугольника (от 0 до 4) должна быть равна одному, т. к. интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ от функции плотности равен 1 по определению.

$$\mathbb{P}(\xi \in [3,6]) = \frac{1}{4}$$

   Ответ: B

8. X, Y - случайные величины

$$\mathbb{P}(X=-5)=\dots=\mathbb{P}(X=5)=\frac{1}{11}$$

$$\mathbb{P}(Y=-1)=\mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{3}$$

Для $X+Y^2=2$ имеется всего три случая:

$$Y=-1\Rightarrow X=1$$

$$Y=0\Rightarrow X=2$$

$$Y=1\Rightarrow X=1$$

Случайные величины независимые $\Rightarrow \mathbb{P}(X+Y^2=2)=\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3}\cdot 3=\frac{1}{11}$
Ответ: C

9. Зная, что один сектор равен $\frac{\pi}{3}$ найдем число секторов:

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$$

Все точки точки круга равновероятны, следовательно:

$$\mathbb{P}(\text{попадет в красный})=\frac{1}{6}$$

Ответ: E

10. По формуле:

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$$

$$0.6=0.3+\mathbb{P}(B)-0.2$$

Соответственно:

$$\mathbb{P}(B)=0.5$$

Ответ: B

11. Используя свойства дисперсии:

$$\mathrm{Var}(2X-Y+1)=4\cdot\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)-4\cdot\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{Var}(2X-Y+1)=4\cdot 4+9-4\cdot(-3)=37$$

Ответ: B

12. Согласно ЗБЧ:

$$\operatorname*{plim}_{n\to+\infty} \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n} = \mathbb{E}(X^2) = \operatorname{Var}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = 1$$

Ответ: B

13. Условная функция плотности:

$$f\Big(x \mid y = \frac{1}{2}\Big) = \frac{f(x,\frac{1}{2})}{f_y(\frac{1}{2})} = \frac{6x \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = 2x$$

$$f_y(y) = \int_0^1 6 \cdot x \cdot y^2 dx = 3 \cdot x^2 \cdot y^2 \Big|_0^1 = 3 \cdot y^2, y \in [0;1]$$

$$f_y\Big(\frac{1}{2}\Big) = 3 \cdot \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{3}{4}$$

Ответ: C

14. В условии пропущено, чему равно n. Без этого можно подогнать любой ответ. Пусть $n = 100$.

$X_1, X_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены

$$\mathbb{E}(X_i) = 4$$

$$\operatorname{Var}(X_i) = 100$$

$$\mathbb{P}(\overline{X_n} \leqslant 5) - ?$$

$$\overline{X} \sim \mathbb{N}(4, \frac{100}{100})$$

По таблице для нормального распределения:

$$\mathbb{P}(\frac{\overline{X} - 4}{\sqrt{1}} \leqslant \frac{5-4}{1}) = \mathbb{P}(\mathbb{Z} \leqslant 1) = 0.8413$$

Ответ: C

15. Используя свойства ковариации:

$$\operatorname{Cov}(X + 2Y, 2X + 3) = \operatorname{Cov}(X + 2Y, 2X) = \operatorname{Cov}(X, 2X) + \operatorname{Cov}(2Y, 2X)$$

$$\operatorname{Cov}(X + 2Y, 2X + 3) = 2 \cdot \operatorname{Cov}(X,X) + 4 \cdot \operatorname{Cov}(X,Y) = 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = -4$$

Ответ: A

16. Используя свойства математического ожидания:

$$\mathbb{E}((X-1)Y) = \mathbb{E}(XY-Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}((X-1)Y) = -3 + (-2) - 2 = -7$$

Ответ: B

17. $X_i = 1$, если "6". $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{6}$
$X_i = 0$, иначе. $\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{5}{6}$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0)$$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_1 + X_2 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 0 \cap X_1 + X_2 = 1)}{X_1 + X_2 = 1}) = \frac{1}{2}$$

Аналогично для $\mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_1 + X_2 = 1)$

Условный закон X_1 совпадает с распределением Бернулли с $p = \frac{1}{2}$

Ответ: B

18. X и Y - независимые случайные величины

$$X + Y \sim \mathbb{N}(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y), \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y))$$

$$X + Y \sim \mathbb{N}(3{,}7)$$

Используя таблицу для нормального распределения:

$$\mathbb{P}(X + Y \leqslant 3) = \mathbb{P}\Big(\frac{X+Y-3}{\sqrt{7}} < \frac{3-3}{\sqrt{7}}\Big) = (\mathbb{Z} \leqslant 0) = \frac{1}{2}$$

Ответ: C

19. 5 кнопок:
$i = 1{,}2{,}3 \quad \mathbb{P}(x_i = 6) = \frac{1}{2}$ (честные кубики)
$i = 4 \quad \mathbb{P}(x_i = 6) = \frac{1}{2}$ (с увеличенной вероятностью выпадения 6)
$i = 5 \quad \mathbb{P}(x_i = 6) = \frac{1}{10}$ (с увеличенной вероятностью выпадения 1)

$$\mathbb{P}(i = 1{,}2{,}3 \mid \text{"6"}) = \frac{\mathbb{P}(i = 1{,}2{,}3 \cap \text{"6"})}{\mathbb{P}(\text{"6"})} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{30}}{\frac{11}{50}} = \frac{5}{11}$$

Ответ: C

20. E) Должна быть симметричной

    D) Не может быть отрицательной

    A) $1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 < 0$

    B) $1 \cdot 9 - 4 \cdot 4 < 0$

    C) $9 \cdot 6 - 7 \cdot 7 > 0$

    Ответ: C

21. Используя свойства математического ожидания:

$$\mathbb{E}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = \alpha\,\mathbb{E}(X) + (1-\alpha)\,\mathbb{E}(Y) = -\alpha + 2 \cdot (1-\alpha) = 0$$

$$2 - 3 \cdot \alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

    Ответ: A

22. ξ имеет биноминальное распределение

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = (1-p)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

    Ответ: B

23. Распределение Пуассона с $\lambda = 4$

$$\mathbb{P}(x = k) = \lambda^k \cdot \frac{e^{-\lambda}}{k!}$$

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(k = 0) = 1 - e^{-4}$$

    Ответ: C

24. ξ имеет распределение Бернулли

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \mathrm{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = p \cdot (1-p) + p^2 = p$$

    Ответ: B

25. ξ имеет экспоненциальное распределение

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{Var}(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \mathrm{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

    Ответ: A

26. Зная, что один сектор равен $\frac{\pi}{3}$ найдем число секторов:

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$$

$$\mathbb{P}(\text{попадет в красный}) = \mathbb{P}(\text{попадет в синий}) = \frac{1}{6}$$

Невозможно попасть одновременно в две доли $\Rightarrow$ событие A и событие B несовместны

Ответ: E

27.

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 x \cdot y \cdot 6 \cdot x \cdot y^2 dxdy = \int_0^1 2 \cdot x^3 \cdot y^3 \Big|_0^1 dy = \frac{2 \cdot y^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Ответ: A

28. Используя свойства дисперсии:

$$\operatorname{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = \alpha^2 \operatorname{Var}(X) + (1-\alpha)^2 \operatorname{Var}(Y) + 2 \cdot \operatorname{Cov}(X,Y) \cdot \alpha \cdot (1-\alpha)$$

$$\operatorname{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = 4 \cdot \alpha^2 + 9 \cdot (1-\alpha)^2 - 6 \cdot \alpha \cdot (1-\alpha) = 4 \cdot \alpha^2 + 9 - 18 \cdot \alpha + 9 \cdot \alpha^2 - 6 \cdot \alpha + 6 \cdot \alpha^2$$

$$\operatorname{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = 19 \cdot \alpha^2 - 24 \cdot \alpha + 9$$

Находим точку минимума:

$$\alpha^* = \frac{24}{38} = \frac{12}{19}$$

Ответ: F (нет верного ответа)

29.

$$\mathbb{P}(\text{без багажа}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(\text{с рюкзаком} \mid \text{без багажа}) = 0.5$$

$$\mathbb{P}(\text{с рюкзаком} \mid \text{с багажом}) = \frac{55}{150}$$

$$\mathbb{P}(\text{без рюкзака}) = \mathbb{P}(\text{без рюкзака} \mid \text{без багажа})\,\mathbb{P}(\text{без багажа}) +$$

$$+\,\mathbb{P}(\text{без рюкзака} \mid \text{с багажом})\,\mathbb{P}(\text{с багажом}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{95}{150} \cdot \frac{3}{4} = 0.6$$

Ответ: A

30. По условию:

$$\mathbb{E}(X) = 2$$

$$\mathrm{Var}(X) = 6]$$

$\mathbb{P}(|X-2| \leqslant 10)$ - похоже на неравенство Чебышева, но знак неравенства в другую сторону

$$\mathbb{P}(|X-2| \geqslant 10) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{100}$$

$$\mathbb{P}(|X-2| \leqslant 10) \geqslant 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{100} = 0.94$$

Ответ: C