Homework

Андрей Ильин, БЭК182

7 июня 2020 г.

Midterm exam 2017-2018
AECBA BBCEB BBCCA BBCCC ABCBA EA?AC

1. По свойству дисперсий:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

$$(\mathbb{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + \mathbb{E}(X))^2 = 10$$

   $\mathbb{P}(X^2 \geqslant 100)$ похоже на неравенство Маркова. $X^2 \geqslant 0$ всегда, следовательно, можем использовать эквивалент формуле из следствия неравенства.

   Получаем верхнюю границу диапозона:

$$\mathbb{P}(X^2 \geqslant 100) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X^2)}{100} = 0.1$$

   Следовательно, $\mathbb{P}(X^2 \geqslant 100)$ лежит в диапазоне $[0, 0.1]$

   Ответ: A

2. Так как ξ имеет распределение Пуассона, поэтому:

$$\mathbb{E}(\xi) = \lambda$$

$$\mathrm{Var}\,\xi) = \lambda$$

   По свойству дисперсий:

$$\mathrm{Var}(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2$$
$$\mathbb{E}(\xi^2) = \mathrm{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = \lambda + \lambda^2 = \lambda \cdot (1 + \lambda)$$

   Ответ: E

3. По формуле:

$$\mathrm{Corr}(X + Y, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X + Y, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X + Y) \cdot \mathrm{Var}(Y)}} = \frac{6}{\sqrt{7 \cdot 9}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\cdot\mathrm{Cov}(X,Y) = 4+9+2\cdot(-3) = 7$$

$$\mathrm{Cov}(X+Y,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,Y) = -3+9 = 6$$

Ответ: C

4. Функция плотности для любой случайной величины с нормальным распределением:

   $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

   У случайных величин со стандартным нормальным распределением $\sigma = 1$ и $\mu = 0$. При подстановке значений получаем ответ B.

   Ответ: B

5. Так как величина распределена равномерно по площади треугольника с координатами точек $(0;0), (0;4), (2;0)$:

   $$f_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{S} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

   Ответ: A

6. По определению события A, B и C независимы в совокупности, если

   $$\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$$

   Ответ: B

7. При построении графика функции плотности ξ получается прямоугольник с высотой $\frac{1}{4}$ Площадь всего прямоугольника (от 0 до 4) должна быть равна одному, т. к. интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ от функции плотности равен 1 по определению.

   $$\mathbb{P}(\xi \in [3,6]) = \frac{1}{4}$$

   Ответ: B

8. X, Y – случайные величины

   $$\mathbb{P}(X=-5) = \ldots = \mathbb{P}(X=5) = \frac{1}{11}$$

   $$\mathbb{P}(Y=-1) = \mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{3}$$

   Для $X + Y^2 = 2$ имеется всего три случая:

   $$Y=-1, X=1$$

$$Y = 0, X = 2$$

$$Y = 1, X = 1$$

Случайные величины независимые, следовательно

$$\mathbb{P}(X + Y^2 = 2) = \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{1}{11}$$

Ответ: C

9. Зная, что один сектор равен $\frac{\pi}{3}$ найдем число секторов:

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$$

Все точки точки круга равновероятны, следовательно:

$$\mathbb{P}(\text{«попадет в красный»}) = \frac{1}{6}$$

Ответ: E

10. По формуле:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$0.6 = 0.3 + \mathbb{P}(B) - 0.2$$

Соответственно:

$$\mathbb{P}(B) = 0.5$$

Ответ: B

11. Используя свойства дисперсии:

$$\mathrm{Var}(2X - Y + 1) = 4 \cdot \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 4 \cdot \mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{Var}(2X - Y + 1) = 4 \cdot 4 + 9 - 4 \cdot (-3) = 37$$

Ответ: B

12. Согласно ЗБЧ:

$$\underset{n \to +\infty}{\mathrm{plim}} \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n} = \mathbb{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = 1$$

Ответ: B

13. Условная функция плотности:

$$f\left(x \mid y=\frac{1}{2}\right)=\frac{f\left(x,\frac{1}{2}\right)}{f_y\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{6x\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=2x$$

$$f_y(y)=\int_0^1 6\cdot x\cdot y^2dx=3\cdot x^2\cdot y^2\big|_0^1=3\cdot y^2, y\in[0;1]$$

$$f_y\left(\frac{1}{2}\right)=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

Ответ: C

14. В условии пропущено, чему равно n. Без этого можно подогнать любой ответ. Пусть $n=100$.

$X_1, X_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены

$$\mathbb{E}(X_i)=4$$

$$\operatorname{Var}(X_i)=100$$

$$\mathbb{P}(\bar{X}_n\leqslant 5)-?$$

$$\bar{X}\sim\mathbb{N}\left(4,\frac{100}{100}\right)$$

По таблице для нормального распределения:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-4}{\sqrt{1}}\leqslant\frac{5-4}{1}\right)=\mathbb{P}(\mathbb{Z}\leqslant 1)=0.8413$$

Ответ: C

15. Используя свойства ковариации:

$$\operatorname{Cov}(X+2Y,2X+3)=\operatorname{Cov}(X+2Y,2X)=\operatorname{Cov}(X,2X)+\operatorname{Cov}(2Y,2X)$$

$$\operatorname{Cov}(X+2Y,2X+3)=2\cdot\operatorname{Cov}(X,X)+4\cdot\operatorname{Cov}(X,Y)=2\cdot 4+4\cdot(-3)=-4$$

Ответ: A

16. Используя свойства математического ожидания:

$$\mathbb{E}((X-1)Y)=\mathbb{E}(XY-Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(Y)=\operatorname{Cov}(X,Y)+\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)-\mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}((X-1)Y)=-3+(-2)-2=-7$$

Ответ: B

17. По условию задачи, величина X_i зависит от выпадемого на кубике значения следующим образом:

    $X_i = 1$, если выпала «6». $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{6}$

    $X_i = 0$, иначе. $\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{5}{6}$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0)$$
$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_1 + X_2 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 0 \cap X_1 + X_2 = 1)}{X_1 + X_2 = 1}) = \frac{1}{2}$$

    Аналогично для $\mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_1 + X_2 = 1)$, также равной $\frac{1}{2}$

    Условный закон X_1 совпадает с распределением Бернулли с $p = \frac{1}{2}$

    Ответ: B

18. X и Y – независимые случайные величины

$$X + Y \sim \mathbb{N}(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y), \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y))$$

$$X + Y \sim \mathbb{N}(3{,}7)$$

    Используя таблицу для нормального распределения:

$$\mathbb{P}(X + Y \leqslant 3) = \mathbb{P}\left(\frac{X + Y - 3}{\sqrt{7}} < \frac{3 - 3}{\sqrt{7}}\right) = (\mathbb{Z} \leqslant 0) = \frac{1}{2}$$

    Ответ: C

19. Имеется 5 кнопок:

    $i = 1{,}2{,}3 \quad \mathbb{P}(x_i = 6) = \frac{1}{2}$ (честные кубики)

    $i = 4 \quad \mathbb{P}(x_i = 6) = \frac{1}{2}$ (с увеличенной вероятностью выпадения 6)

    $i = 5 \quad \mathbb{P}(x_i = 6) = \frac{1}{10}$ (с увеличенной вероятностью выпадения 1)

$$\mathbb{P}(i = 1{,}2{,}3 \mid «6») = \frac{\mathbb{P}(i = 1{,}2{,}3 \cap «6»)}{\mathbb{P}(«6»)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{30}}{\frac{11}{50}} = \frac{5}{11}$$

    Ответ: C

20. A) $1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 < 0$

    B) $1 \cdot 9 - 4 \cdot 4 < 0$

    C) $9 \cdot 6 - 7 \cdot 7 > 0$

    D) Не может быть отрицательной

    E) Должна быть симметричной

    Ответ: C

21. Используя свойства математического ожидания:

$$\mathbb{E}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = \alpha\,\mathbb{E}(X) + (1-\alpha)\,\mathbb{E}(Y) = -\alpha + 2\cdot(1-\alpha) = 0$$
$$2 - 3\cdot\alpha = 0$$
$$\alpha = \frac{2}{3}$$

Ответ: A

22. ξ имеет биноминальное распределение

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = (1-p)^n = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

Ответ: B

23. Распределение Пуассона с $\lambda = 4$

$$\mathbb{P}(x = k) = \lambda^k \cdot \frac{e^{-\lambda}}{k!}$$
$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(k = 0) = 1 - e^{-4}$$

Ответ: C

24. ξ имеет распределение Бернулли

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \mathrm{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = p\cdot(1-p) + p^2 = p$$

Ответ: B

25. ξ имеет экспоненциальное распределение

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$
$$\mathrm{Var}(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \mathrm{Var}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Ответ: A

26. Зная, что один сектор равен $\frac{\pi}{3}$ найдем число секторов:

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$$

$$\mathbb{P}(\text{«попадет в красный»}) = \mathbb{P}(\text{«попадет в синий»}) = \frac{1}{6}$$

Невозможно попасть одновременно в две доли, следовательно, событие A и событие B несовместны.

Ответ: E

27.

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 x \cdot y \cdot 6 \cdot x \cdot y^2 dxdy = \int_0^1 2 \cdot x^3 \cdot y^3 \Big|_0^1 dy = \frac{2 \cdot y^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Ответ: A

28. Используя свойства дисперсии:

$$\operatorname{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = \alpha^2 \operatorname{Var}(X) + (1-\alpha)^2 \operatorname{Var}(Y) + 2 \cdot \operatorname{Cov}(X,Y) \cdot \alpha \cdot (1-\alpha)$$

$$\operatorname{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = 4 \cdot \alpha^2 + 9 \cdot (1-\alpha)^2 - 6 \cdot \alpha \cdot (1-\alpha) = 4 \cdot \alpha^2 + 9 - 18 \cdot \alpha + 9 \cdot \alpha^2 - 6 \cdot \alpha + 6 \cdot \alpha^2$$

$$\operatorname{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) = 19 \cdot \alpha^2 - 24 \cdot \alpha + 9$$

Находим точку минимума:

$$\alpha^* = \frac{24}{38} = \frac{12}{19}$$

Ответ: F (нет верного ответа)

29.

$$\mathbb{P}(\text{«без багажа»}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(\text{«с рюкзаком»} \mid \text{«без багажа»}) = 0.5$$

$$\mathbb{P}(\text{«с рюкзаком»} \mid \text{«с багажом»}) = \frac{55}{150}$$

$$\mathbb{P}(\text{«без рюкзака»}) = \mathbb{P}(\text{«без рюкзака»} \mid \text{«без багажа»})\,\mathbb{P}(\text{«без багажа»}) +$$

$$+\mathbb{P}(\text{«без рюкзака»} \mid \text{«с багажом»})\,\mathbb{P}(\text{«с багажом»}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{95}{150} \cdot \frac{3}{4} = 0.6$$

Ответ: A

30. По условию:

$$\mathbb{E}(X) = 2$$

$$\operatorname{Var}(X) = 6$$

$\mathbb{P}(|X-2| \leqslant 10)$ - похоже на неравенство Чебышева, но знак неравенства в другую сторону

$$\mathbb{P}(|X-2| \geqslant 10) \leqslant \frac{\operatorname{Var}(X)}{100}$$

$$\mathbb{P}(|X-2| \leqslant 10) \geqslant 1 - \frac{\operatorname{Var}(X)}{100} = 0.94$$

Ответ: C