

ВСЕОБЩАЯ ТЕТРАДЬ

Содержание

Лекции Колдунова Л.М. по современной оптики	2
1 Лекция 1	2
2 Лекция 2	3
3 Лекция 3	5
4 Лекция 4	6
6 Лекция 6	8
8 Лекция 8	11
Семинары Зябловского А.А. по теории поля	12
1 Семинар по теории поля 25.03.2021	12
2 Семинар по теории поля 01.04.2021	12
3 Семинар по теории поля 08.04.2021	14
4 Семинар по теории поля 15.04.2021	15
5 Семинар по теории поля 22.04.2021	17
6 Семинар по теории поля 29.04.2021	18
Лекции в Российском Квантовом Центре	21
1 Лекция от 25.04.2021	21

Лекции Колдунова Л.М. по современной оптики

1 Лекция 1

Лектор — Л.М.Колдунов

Геометрическая оптика \subset волновая оптика \subset эм-оптика \subset квантовая оптика.

Уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho_{\text{out}} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{out}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \mathbf{j}_{\text{out}} &= 0 \quad \rho_{\text{out}} = 0\end{aligned}$$

Покрутим уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Получаем уравнение электромагнитной волны:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

Получаем решение вида

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad -k^2 \mathbf{E} + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \omega^2 \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu}$$

Уравнение Эйконала

Имеем постулаты геометрической оптики:

1. Свет распространяется в виде лучей;
2. Среда характеризуется показателем преломления n : $c_{\text{среды}} = c/n$;
3. $\int n dl \rightarrow \min$.

Def 1.1. *Оптическим путём* назовём $S = \int_A^B n(\mathbf{r}) dl$

Найдём ход лучей в предположении, что $n(\mathbf{r})$:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad E(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \exp(ik_0 \underbrace{\Phi(\mathbf{r})}_{\text{Эйконал}} - i\omega t).$$

Взяв \mathbf{E} одномерным посчитаем в лоб лапласиан:

$$\Delta E = \Delta a \exp() - a(\mathbf{r}) k_0^2 |\operatorname{grad} \Phi|^2 \exp() + i(2k_0 (\operatorname{grad} a, \operatorname{grad} \Phi) + k_0 \Delta \Phi) \exp()$$

Сначала вещественную часть:

$$\Delta a \exp() - a(\mathbf{r}) k_0^2 |\operatorname{grad} \Phi|^2 \exp() + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 a \exp() = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\operatorname{grad} \Phi|^2 = \frac{1}{a k_0^2} \Delta a + n^2.}$$

Теперь будем считать верным предположение:

$$|\lambda \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}| \ll |\frac{\partial a}{\partial x}|, \quad |\lambda \frac{\partial a}{\partial x}| \ll a, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Получаем в приближении уравнение Эйконала:

$$|\operatorname{grad} \Phi| = n. \quad (1.2)$$

Выражение $\omega t - k_0 \Phi = \text{const}$ задаёт *Волновой фронт*.

$$\operatorname{grad} \Phi = n \mathbf{s}, \quad |\mathbf{s}| = 1 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} = n.$$

$$\omega dt - k_0 d\Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega dt = k_0 d\Phi = k_0 \frac{d\Phi}{ds} ds = k_0 n ds.$$

Принцип Ферма

Пусть Φ — задано однозначно: $\text{grad } \Phi = n\mathbf{s}$. Возьмём интеграл по замкнутому контуру:

$$\oint n(\mathbf{s}, d\mathbf{l}) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \int_{ACB} n(\mathbf{s}, d\mathbf{l}) = \int_{ADB} n(\mathbf{s}, d\mathbf{l}).$$

Но $\mathbf{s} \cdot d\mathbf{l} = s dl = dl$ на ACB . Тогда и получим выражение, доказывающее принцип Ферма:

$$\int_{ACB} n dl = \int_{ADB} n \mathbf{s} \cdot d\mathbf{l} \leq \int_{ADB} n dl.$$

Приведём пару примеров: (Колдунов гнём зеркало)

Траектория луча

Было соотношение, что: $m\mathbf{s} = \text{grad } \Phi$. Для траектории: $\mathbf{s} = d\mathbf{r}/dl$. Тогда для градиента (который d/dl):

$$n \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \text{grad } \Phi \quad \frac{d}{dl} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) = \frac{d}{dl} \text{grad } \Phi = \text{grad } \frac{d\Phi}{dl} = \text{grad } n \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dl} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) = \text{grad } n.$$

Получили уравнение луча. Давайте теперь возьмём однородную среду:

$$n = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = \mathbf{a}l + \mathbf{b}.$$

Теперь возьмём:

$$\frac{d}{dl}(n\mathbf{s}) = \text{grad } n \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{s} \frac{dn}{dl} + n \frac{d\mathbf{s}}{dl} = \nabla n \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathbf{N}}{R} = \frac{1}{n} \left(\nabla n - \mathbf{s} \frac{dn}{dl} \right)$$

Домножим последнее выражение скалярно на \mathbf{N} :

$$0 < \frac{N^2}{R} = \frac{(\mathbf{N}, \nabla n)}{n} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{N}, \nabla n) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Луч поворачивает!}$$

((Пример про слоистую среду))

Уравнение луча в параксиальном приближении

((картинка))

$$n(y) \cos \theta(y) = n(y dy) \cos \theta(y + dy) = \left(n(y) + \frac{dn}{dy} \Delta y \right) \cos \left(\theta(y) + \frac{d\theta}{dy} \Delta y \right) = \left(n(y) + \frac{dn}{dy} \Delta y \right) \left(\cos \theta - \sin \theta(y) \frac{d\theta}{dy} \Delta y \right).$$

То есть получаем, что

$$\frac{dn}{dy} \cos \theta(y) = n(y) \sin \theta(y) \frac{d\theta}{dy} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = \tan \theta \frac{d\theta}{dy} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Пример параболической зависимости $n^2 = n_0^2(1 - \alpha^2 y^2)$ SELFOC.

$$\alpha y \ll 1 \quad y''_{xx} = \frac{1}{n_0(1 - \alpha^2 y^2)^{1/2}} \frac{dn}{dy} = \frac{-n_0 \alpha^2 y}{n_0(1 - \alpha^2 y^2)} = -\alpha^2 y. \quad \Rightarrow \quad y''_{xx} + \alpha^2 y = 0.$$

Такое вещество используют при создании стекловолокна, суть в том, что при заходе в канал под разными углами скорость примерно одна и та же распространения.

((забыли про мнимую часть!!!!))

2 Лекция 2

Матричная оптика

Луч можно характеризовать его координатой y и углом к оптической оси x . То есть $\{y_1, \theta_1\} < - > \leftrightarrow \{y_1, n_1, \theta_1\}$, и $n\theta = v$. Таким образом:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & n_1 \theta_1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перемещения

В ходе перемещения:

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta_1 \\ y_2 = y_1 + l\theta_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Или же второй вариант, который встречается в литературе:

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta_1 n \\ y_2 = y_1 + (l/n)\theta_1 n \end{cases} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Матрица преломления на сферической поверхности

Пусть луч падает из среды с показателем преломления n_1 в n_2 . Запишем условие падения:

$$n_1 \beta_1 = n_2 \beta_2, \quad \beta_1 = \theta_1 + \alpha, \quad \beta_2 = \theta_2 + \alpha, \quad n_1(\theta_1 + \alpha) = n_2(\theta_2 + \alpha), \quad \alpha = y_1/R.$$

$$v_2 = v_1 + \frac{n_1 - n_2}{R} y_1 \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Или ещё в литературе она может встретиться как:

$$v_2 = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 + \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} y_1 \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

Общий подход

Пусть у нас есть какая-то система, части которой мы знаем как преобразуют луч по отдельности, то есть все матрицы преобразований знаем. Получаем матричное выражение с перемножением матриц:

$$M_3 M_2 M_1 \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

По факту теперь имеем и какую-то матрицу в которой очень хочется понять значение её коэффициентов.

1. $D = 0$. Означает, что луч у нас идёт в фокальной плоскости.
2. $B = 0$. Тогда наша изображение: $y_2 = Ay_1$. Так называемые *сопряженные плоскости*. И A называется коэффициентом *поперечного увеличения*.
3. $C = 0$. Тогда наша изображение: $y_2 = B\theta_1$. D в этом случае называется коэффициентом. Тако случай называется телескопическим.

Перейдём у примерам.

Пример 0

Для тонкой линзы с двумя радиусами кривизны – внешним и внутренним:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{nR_2} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{nR_1} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{nR_2} + \frac{1-n}{nR_1} & 1 \end{pmatrix}$$

В левом нижнем углу у нас стоит *оптическая сила системы*: $(n-1)(1/R_1 - 1/R_2)$.

Пример 1

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{b}{F} & b + a(1 - \frac{b}{F}) \\ -\frac{1}{F} & 1 - \frac{a}{F} \end{pmatrix}$$

Таким образом получаем формулу линзы занулив левый верхний элемент:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \quad (1.5)$$

Задача 2 (см) файл

Только размер предмета не как в задаче – а 2 мм.

Какие матрицы запишем: сначала распространяемся, потом преломляемся, и наконец снова распространяемся.

$$\begin{pmatrix} 1 & x/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{7.8} & 15 - \frac{x}{0.78} \\ -0.2 & -2 \end{pmatrix}$$

Снова $B = 0$ и решаем уравнение: $15 - \frac{x}{0.78} = 0$, откуда $x = 11.7$ см. Коэффициент увеличения $A = 1 - \frac{11.7}{0.78} = -0.5$.

Задача 4 (см) файл

Снова думаем — преломляемся—распространение—преломляемся—распространяемся.

$$\begin{pmatrix} 1 & F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(1-n) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2R \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2F(n-1) + (n-2)R}{nR} & \frac{-nF + 2F + 2R}{n} \\ \frac{2-2n}{nR} & \frac{2}{n} - 1 \end{pmatrix}$$

И так $A = 0$ значит $-2F(n-1) = R(n-2)$, откуда $F = R \frac{2-n}{2(n-1)}$.

Задача 11 (см) файл

На самом деле это задача из Овчинкина 1.32.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l}{F_2} & l \\ -\frac{1}{F_2} - \frac{l}{F_1} & 1 - \frac{l}{F_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - lP_2 & l \\ -P_1 - (1-lP_1)P_2 & 1 - lP_1 \end{pmatrix}.$$

Про увеличения:

$$\frac{d}{dn}((n-1)(G_1 + G_2) - (n-1)^2 l G_1 G_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (G_1 + G_2) - 2(n-1)l G_1 G_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{1}{2(n-1)} \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right)$$

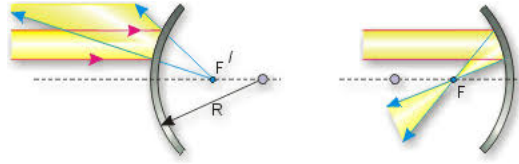
Или же

$$l = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(n-1)G_1} + \frac{1}{(n-1)G_2} \right) = \frac{F_1 + F_2}{2}.$$

3 Лекция 3

Обобщение на случай отражения

В прошлый раз у нас было матрица T (1.3) и матрица P (1.4).



Возьмём теперь зеркало, посмотрим на отражение для выгнутого зеркала (слева) и напомним матрицу отражения.

$$n_1 = n, n_2 = -n \quad \rightsquigarrow \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-n}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

для вогнутого же (справа) заодно выпишем сразу все матрицы, которые у нас есть:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 1

Допустим шёл луч и упал на плоскопараллельную пластину и пошёл внутри неё змейкой.

$$\begin{pmatrix} 1 & h/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & hN/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 13

Описываем жизнь нашего луча умножением матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2R}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2R}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n-4}{nR} & -\frac{4R}{n} \\ \frac{2(n-2)}{nR} & \frac{n-4}{n} \end{pmatrix}$$

Периодические оптические системы

Пусть у нас оптическая ячейка уже после перемножения всех матриц характеризуется в итоге матрицей 2×2 , с элементами A, B, C, D . У периодической системы такая ячейка встречается m раз:

$$\begin{pmatrix} y_m \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} y_{m+1} \\ v_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} y_m \\ v_m \end{pmatrix}$$

Получаем уравнения:

$$\begin{cases} y_{m+1} = Ay_m + Bv_m \\ v_{m+1} = Cy_m + Dv_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_m = \frac{y_{m+1} - Ay_m}{B} \Rightarrow v_{m+1} = \frac{y_{m+2} - Ay_{m+1}}{B} \\ y_{m+2} - Ay_{m+1} = BCy_m + D(y_{m+1} - Ay_m) \end{cases}$$

Получили уравнение на y :

$$y_{m+2} - (A + D)y_{m+1} + (AD - BC)y_m = 0 \Rightarrow y_m = y_0 h^m \Rightarrow h^2 - (A + D)h + 1 = 0$$

Заменяя $A + D = 2b$, получаем три случая на детерминант: $h_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - 1}$.

1. $|b| < 1$: Тогда $h_{1,2} = e^{i\varphi} \Rightarrow y_m = \alpha_1 e^{im\varphi} + \alpha_2 e^{-im\varphi} = y_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_0)$.

Заметим, что y_m периодичен, только если $\varphi/2\pi$ – рациональное число.

Пример 2

Дана система линз: $\uparrow -d - \uparrow -d - \uparrow$. Матрицы прохождения луча:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -1/F & 1 - d/F \end{pmatrix}$$

Получаем, что устойчиво когда:

$$b = \frac{2 - d/F}{2} \rightsquigarrow |b| < 1 \rightsquigarrow 0 < \frac{b}{F} < 4.$$

Посмотрим случаи:

1. $d = F$: тогда $b = 1/2$, и тогда $b = \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$;
2. $d = 2F$: тогда $b = 0$;
3. $d = 0$: тогда $d = 4F$.

Оптический резонатор

Пусть у нас есть два зеркала: $(-L-)$. Матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b = (A + D)/2 = 2 \underbrace{\left(1 + \frac{L}{R_1}\right)}_{g_1} \underbrace{\left(1 + \frac{L}{R_2}\right)}_{g_2} - 1.$$

Можно рассмотреть различные типы резонаторов:

1. Плоский;
2. Симметричный конфокальный;
3. Симметричный концентрический.

4 Лекция 4

Оптика пучков

Что у нас есть. У нас есть волновое уравнение!

$$\nabla^2 E - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$$

Получаем уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2 f e^{-i\omega t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} (-1)\omega^2 f e^{-i\omega t} = 0 \Rightarrow \nabla^2 f + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} f = 0.$$

Таким образом:

$$\nabla^2 f + \varepsilon k_0^2 f = 0 \quad (1.6)$$

Если рассматривать полну идущую от точечного источника, то вблизи мы будем ее считать *сферической* чуть дальше — *параболической*, и совсем далеко — *плоской*.

Выберем ось z на которой поместим точечный источник. Теперь $f = \frac{A}{r} \exp(ikr)$.

На расстоянии ρ от оси точка на волновом фронте лежит на $r^2 = \rho^2 + z^2$. Приблизительно в предположении $z \gg \rho$: $r \approx z + \frac{\rho^2}{2z}$. То есть в порядке малости выпишем:

$$\textcircled{1} r \simeq z, \quad \textcircled{2} r \simeq \frac{2\pi}{\lambda} \left(z + \frac{\rho^2}{2z} + \dots \right) = \frac{2\pi}{\lambda} z + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho^2}{2z}.$$

Второй вот порядок и называют параболическим: $f = \frac{A}{z} \exp(ikz + ik \frac{\rho^2}{2z})$.

Параксиальное приближение

Имеем ситуацию: $f(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(ikz)$. Будем требовать:

$$\frac{\partial A}{\partial z} \lambda \ll A \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial z} \ll \frac{A}{\lambda} \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial z} \ll A \cdot k.$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \lambda \ll \frac{\partial A}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll \frac{\partial A}{\partial z} \cdot k.$$

И так волновое уравнение, с заменой $k^2 = \varepsilon \omega^2 / c^2$:

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial z} e^{ikz} + A \cdot ik e^{ikz}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} e^{ikz} + 2A'_z ik e^{ikz} - Ak^2 e^{ikz}.$$

Теперь всё это в волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial z} ik - Ak^2 + \nabla^2 A + Ak^2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial z} ik + \nabla^2 A = 0.$$

И с нашим приближением получаем *параксиальное уравнение Гельмгольца* (может мы где-то знак потеряли).

$$\nabla^2 A + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0. \quad (1.7)$$

Надо проверить, подставится будет ли решением уравнения сверху выражение:

$$f(r) = \frac{A}{z} \exp \left(-ikz - ik \frac{\rho^2}{2z} \right) \Rightarrow f(r) = A(r) e^{-ikz}, \quad A(r) = \frac{A}{z} \exp \left(-ik \frac{\rho^2}{2z} \right).$$

Решение таким образом при таком f .

$$f(r) = \frac{A}{z + iz_0} \exp \left(-ikz - ik \frac{\rho^2}{2(z + iz_0)} \right) \quad z \rightarrow q(z) = z + iz_0.$$

Тут введен q -параметр и *Рэлеевская длина* — z_0 .

Мы знаем, что $\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + iz_0} = \frac{z - iz_0}{z^2 + z_0^2}$. Подставляем:

$$f(r) = A \left(\frac{z}{z^2 + z_0^2} - i \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} \right) \exp \left(-ikz - ik \frac{\rho^2}{2} \frac{z - iz_0}{z^2 + z_0^2} \right).$$

$$f(r) = A \left(\frac{z}{z^2 + z_0^2} - i \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} \right) \exp \left(-\frac{k\rho^2}{2} \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} \right) \exp \left(-ikz - ik \frac{\rho^2 z_0}{z^2 + z_0^2} \right).$$

Выпишем:

$$-\frac{2\pi}{2} \frac{\rho^2 z_0}{\lambda(z^2 + z_0^2)} = i \frac{\rho^2}{\frac{\lambda}{z_0 \pi} (z^2 + z_0^2)} \quad \text{обозначим: } W^2(z) = \frac{\lambda z_0}{\pi} \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right), \quad R(z) = z \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right).$$

Тогда получаем:

$$f(r) = A \left(\frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi W^2(z)} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)} \right) \exp \left(-ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} \right).$$

$$f(r) = \frac{A}{iz} \frac{W_0}{W(z)} \exp \left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)} \right) \exp \left(-ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\xi(z) \right),$$

где $W_0 = W(0)$, а $\xi(z) = \arctan \frac{z}{z_0}$. Обычно в первом члене ещё обозначают $A_0 = A/iz_0$.

Интенсивность

$$I = \langle |S| \rangle_t = \langle \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon} E^2 \rangle = \frac{cn}{4\pi} \langle E^2 \rangle = \frac{cn}{8\pi} E_0^2.$$

И для всех будет прекрасней, для всех будет полезней не таскать коэффициент:

$$I \propto E_0^2 \quad I \propto E^2 \quad I = E^2 \left[\frac{B^2}{M^2} \right],$$

сокращать на размерный коэффициент очень круто, поэтому запомним, что размерность $[I] = \frac{\text{Дж}}{\text{с см}}$.

Таким образом со всеми предположениями:

$$I = A_0^2 \frac{W_0^2}{W^2(z)} \exp\left(-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right).$$

Это называется *Гаусовой интенсивностью*. Читатель может построить её самостоятельно.

Мощность

$$P = \int_0^\infty I(\rho) 2\pi \rho d\rho = \frac{1}{2} I_0 (\pi W_0^2).$$

И в построенном читателями графике в предыдущем пункте если посмотреть на ширину полосы под распределением, то можно заметить, что $\rho_0 = W(z)$, в связи с чем $W(z)$ называют *радиусом пучка*.

Посмотрим, что у нас с нашим радиусом творится:

$$W(z) = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi} \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)},$$

если пытливый читатель построит и этот график, то он (график) пересечет $z = 0$ в $W(0) = W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}}$.

Асимптотически он будет стремиться к прямой с коэффициентом наклона: $\theta \approx \sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_0}} = \frac{W_0}{z_0}$.

Для примера если взять лазер $\lambda_0 = 633$ нм, с $2W_0 = 2$ см, то *глубина резкости* будет: $2z_0 = 1$ км. Если же $2W_0 = 2$ мкм, то уже всё будет потоньше: $2z_0 = 1$ нм.

6 Лекция 6

Уширение спектральных линий

Естественная ширина линии

В нашем случае это квантовое определение, которому мы прикрутим классические колёса. А именно, возьмём модель осциллятора, то есть атом излучает как:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} \omega_0^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

И решение соответственно:

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} (\cos \omega t + \frac{\gamma}{2\omega} \sin \omega t), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Будем считать, что затухание у нас слабое:

$$\gamma \ll \omega_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t.$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Имеем итог "амплитуду" преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x_0 e^{-\gamma t} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x_0 e^{-\gamma t} e^{i(\omega_0 + \omega)t} dt = \\ &= \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-\gamma t + i(\omega_0 - \omega)t}}{i(\omega_0 - \omega) - \gamma} + \underbrace{\frac{e^{-\gamma t + i(\omega_0 + \omega)t}}{i(\omega_0 + \omega) - \gamma}}_{\rightarrow 0} \right) \Big|_0^\infty = \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi} (i(\omega_0 - \omega) - \gamma)}. \end{aligned}$$

Но узнавать что-то мы ведь можем только про интенсивность:

$$I = \frac{x_0^2}{8\pi((\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2)}.$$

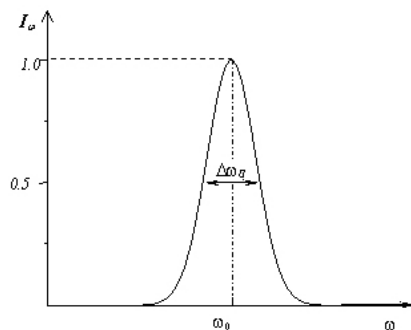
Ширина профиля $I(\omega)$ порядка 10^9 .

Доплеровское уширение

При движении детектируемого источника на/от вас фиксируемая частота будет:

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{v_x}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_0(1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}).$$

То есть сколько-то атомов летит с одной скоростью на вас, сколько-то перпендикулярно вам но с большей скорости. Таким образом имеет место Гауссово распределение этих атомов по скоростям. Соответственно больше всего тех, кто вообще не движется в проекции на вашу ось.



Поговорим теперь про распределения:

$$v_0^2 = \frac{2rT}{m} \quad \Rightarrow \quad dN = N \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2 c^2}{\omega_0^2 v_0^2}\right) \frac{c}{\omega_0} d\omega.$$

Столкновительное уширение

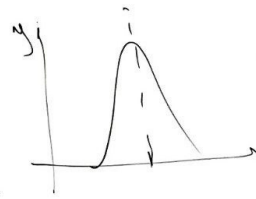
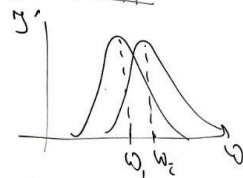
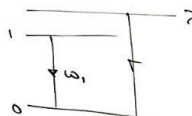
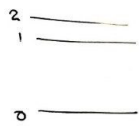
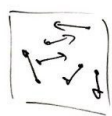
Времяпролётное уширение

Внутريدоплеровская спектроскопия

Постановка задачи: есть атомы в коробку, которые носятся туда-сюда, а мы такие берём и посылаем пучок (ну или следим за пучок оттуда). Пусть мы нашли две линии, но из-за доплеровского уширения, если линии близки, то они неплохо так сольются, и различить их будет трудно.

⊗ Внутридоплеровская спектроскопия

Постановка задачи



Квантовая механика для самых маленьких: что умеет делать электрон?

Для сечения σ (вероятность что-то сделать) про переходы электронов на уровни в них под/без действия внешнего излучения ответ:

- электрон умеет поглощать фотончик $h\nu$;
- электрон умеет вынужденно излучать;
- электрон умеет спонтанно излучать;
- электрон умеет не излучать.

Кинематические уравнения (скоростные)

Для двух уравнений, количество электронов на уровне: n_1 и n_2 . Для характерных времен b – безизлучательного процесса и c – спонтанного процесса.

$$\dot{n}_2 = -\frac{n_2}{\tau_b} - \frac{n_2}{\tau_c} \quad \Rightarrow \quad n_2 = n_{20} \exp\left(-\frac{t}{\tau_b} - \frac{t}{\tau_c}\right).$$

Если есть поток фотонов $F = \frac{I}{h\nu}$, который побуждает переходить электроны и с верхнего на нижний и наоборот:

$$\dot{n}_1 = -F\sigma n_1 + F\sigma n_2 + \frac{n_2}{\tau_b}.$$

$$\dot{n}_2 = F\sigma n_1 - F\sigma n_2 - \frac{n_2}{\tau_b}.$$

Для $n_1 + n_2 = N$:

$$\dot{n}_1 = -F\sigma n_1 + F\sigma n_2 + \frac{n_2}{\tau_b} + \frac{N}{\tau_b} - \frac{n_1}{\tau_b} \quad \Rightarrow \quad \dot{n}_1 + n_1 \left(2\sigma F + \frac{1}{\tau_b}\right) = N\sigma F + \frac{N}{\tau_b}.$$

Таким образом:

$$n_1 = N \frac{\sigma F + \frac{1}{\tau_b}}{2\sigma F + \frac{1}{\tau_b}} = N \frac{F + \frac{1}{\sigma\tau_b}}{2F + \frac{1}{\sigma\tau_b}}.$$

А теперь если сказать, что то, сколько приходит и сколько уходит равны, потому что просто больше некому излучаться и поглощать, то:

$$0 = -n_1\sigma F + n_2\sigma F + \frac{n_2}{\tau_b}$$

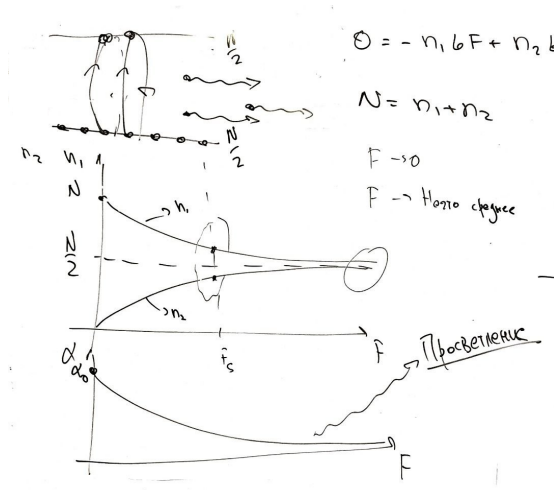
Обозначим как что-то характерное $F_s = \frac{1}{\sigma\tau_b}$, тогда имеем

$$n(F) = N \frac{F + F_s}{2F + F_s}.$$

И введем ещё такую величину на веру: коэффициент поглощения – $\alpha = n_1\sigma - n_2\sigma$. Почему так удобно:

$$dF = -(n_1\sigma - n_2\sigma)Fdz.$$

Наконец. Если есть среда, которая, например поглощает красный свет, но мы будем всё больше увеличивать падающий поток, то рано или поздно атомов не хватит на поглощение и материал *просветлится*.



Напрягаемся в последний раз. Много слушаем и узнаем про провал Лэмба.

8 Лекция 8

Модуляця добротности

4-детиломина-детилобензилоникел

Оптика фотонных кристаллов

Семинары Зябловского А.А. по теории поля

1 Семинар по теории поля 25.03.2021

Про мультипольное разложение

Берем вторую пару уравнений Максвелла

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = -\frac{4\pi}{c} J^\nu, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0.$$

Перепишем в терминах векторного потенциала поля:

$$\partial_\mu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = -\frac{4\pi}{c} J^\nu \Rightarrow \partial^\nu \partial_\mu A^\mu - \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = -\frac{4\pi}{c} J^\nu$$

Воспользуемся калибровкой Лоренца, то есть $\partial_\mu A^\mu = 0$. Тогда наше уравнение становится супер приятным, запишем его через оператор Даламбера:

$$\partial_\mu \partial^\mu = \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Помня, что $J^\nu = (c\rho, \mathbf{J})$, получаем:

$$\square \varphi = 4\pi\rho \quad \square \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (2.8)$$

Если мы говорим про электростатику, то $\rho \neq f(t)$, тогда получаем уравнение Лапласа:

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho.$$

Решать будем с помощью функции Грина, для лапласиана и даламбертиана соответственно:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$
$$\varphi(x) = \int G(x, x') f(x') dx' \Rightarrow \varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = \frac{Q}{r} + \frac{d\mathbf{r}}{r^3} + \frac{r_\alpha r_\beta D_{\alpha\beta}}{2r^5} + \dots \quad (2.9)$$

Здесь введено очень удобное обозначение:

$$\mathbf{d} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3r - \text{дипольный момент.}$$

$$D_{\alpha\beta} = \int \rho(r) (3r_\alpha r_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) d^3r - \text{квадрупольный момент.}$$

Соответственно, не в нашей задаче, но в магнитостатике, аналогично:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{L}(\mathbf{r}')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

Проведя определенные выкладки можно получить интенсивность излучения системы зарядов в общем случае:

$$I = \frac{2|\ddot{\mathbf{d}}|^2}{3c^3} + \frac{2|\ddot{\boldsymbol{\mu}}|^2}{3c^3} + \frac{\ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{D}_{\alpha\beta}}{180c^5} + \dots$$

2 Семинар по теории поля 01.04.2021

С прошлого семинара помним (2.9). А также выражение для величин: \mathbf{d} , $D_{\alpha\beta}$ и $Q = \int \rho(\mathbf{r}) d^3r$. Ещё нам понадобится выражение для октуполя:

$$O_{\alpha\beta\gamma} = \int \rho(\mathbf{r}) (15r_\alpha r_\beta r_\gamma - 3r_\alpha \delta_{\beta\gamma} - 3r_\beta \delta_{\alpha\gamma} - 3r_\gamma \delta_{\alpha\beta} r^2) d^3r.$$

Опустим причины появления такого *чудного* выражения, скажем только что октуполь войдёт в разложение для скалярного потенциала как:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = \frac{Q}{r} + \frac{d\mathbf{r}}{r^3} + \frac{r_\alpha r_\beta D_{\alpha\beta}}{2r^5} + \frac{O_{\alpha\beta\gamma} r_\alpha r_\beta r_\gamma}{6r^7} + \dots \quad (2.10)$$

Вот мы вводим всё новые члены разложения, но давайте же наконец посмотрим на их свойства. Начнём с квадрупольного момента:

$$D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}, \quad D_{\alpha\beta} \delta^{\alpha\beta} = \int \rho(\mathbf{r}) (3r_\alpha r_\beta \delta^{\alpha\beta} - r^2 \delta_{\alpha\beta} \delta^{\alpha\beta}) d^3r = 0.$$

Таким образом у квадрупольного момента, с получившимися ограничивающими его свойствами, существует 5 независимых элементов.

Теперь про октупольный момент. У него вообще есть 27 компонент, но сколько же из них независимы. Вариантов когда:

1. все индексы разные $O_{\alpha\beta\gamma}$ всего 6, но из-за индифферентности к перестановкам, они сводятся к 1;
2. все индексы одинаковые $O_{\alpha\alpha\alpha}$ всего 3;
3. Две равны и одна отлична: $O_{\alpha\alpha\beta}$ всего 18, но опять из-за перестановок их независимых остается 6.

Итого уже сократили возможное количество независимых переменных к 10.

Теперь свёртками мы можем получить ещё связи и ещё больше сократить число независимых переменных.

$$O_{\alpha\beta\gamma}\delta^{\alpha\beta} = \int \rho(\mathbf{r})(15r_\alpha r_\beta r_\gamma \delta^{\alpha\beta} - 3r_\alpha \delta_{\beta\gamma} \delta^{\alpha\beta} - 3r_\beta \delta_{\alpha\gamma} \delta^{\alpha\beta} - 3r_\gamma \delta_{\alpha\beta} \delta^{\alpha\beta} r^2) d^3r = \int \rho(\mathbf{r})(15r^2 r_\gamma - 3r_\gamma r^2 - 3r_\gamma r^2 - 9r^2 r_\gamma) d^3r = 0.$$

Таким образом, по паре каждых компонент свертка – нуль, то есть ещё 3 условия налагаются на выражение для октупольного момента, оставляя всего **7** независимых компонент.

Задача 11

Задача аксиально симметрична относительно оси Oz , дан потенциал:

$$v(r, 0) = v_0 \left(1 - \frac{r^2 - a^2}{r\sqrt{r^2 + a^2}} \right), \quad r > a.$$

Хочется узнать $v(r, \theta)$ –? при условии, что $r \gg a$.

Соответственно раскладываем в ряд, раз $r \gg a$, и получаем:

$$v(z, 0) = v_0 \left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{-1/2} \right) \simeq v_0 \left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{2z^2} \right) \right) = v_0 \left(\frac{3a^2}{2z^2} - \frac{a^4}{2z^4} \right).$$

С другой стороны по теории должно было бы получиться разложение (2.10). Сравнивая степени в разложении получаем:

$$Q = 0, \quad D_{zz} = 0, \quad d_z = \frac{3a^2}{2}v_0, \quad 0_{zzz} = -3a^4v_0.$$

Теперь применим аксиальную симметрию: $\mathbf{d} = \int \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}d^3r$. В дипольном моменте компоненты $d_x = d_y = 0$, что мы получаем так же как в упражнении про усреднение $\rho(x, y) = \rho(-x, -y)$.

Далее $D_{\alpha\alpha} = 0$, значит $D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$ то есть $D_{xx} = -D_{yy}$, но в силу аксиальной симметрии такое возможно лишь если $D_{xx} = D_{yy} = 0$.

Наконец $O_{\alpha\alpha\beta} = 0$. То есть $O_{xxz} + O_{yyz} + O_{zzz} = 0$, тогда получаем:

$$O_{xxz} = O_{yyz} = -\frac{O_{zzz}}{2} = \frac{3a^4}{2}v_0$$

$$O_{xzx} = O_{yzy} = O_{zxx} = O_{zyy} = \frac{3a^4}{2}v_0$$

Вариант со всеми разными: $O_{xyz} = \int \rho(x, y, z)(15xyz)d^3r = 0$, так как $\rho(x) = \rho(-x)$. И поэтому же $O_{xxx} = O_{yyy} = 0$.

И не взятые ещё:

$$O_{zzx} = O_{zzy} = O_{xzz} = O_{yzz} = O_{zxx} = O_{zyz} = 0.$$

$$O_{xxy} = O_{yyx} = O_{xyx} = O_{yxy} = O_{yxx} = O_{xyy} = 0.$$

Теперь давайте, как нас просят в задаче, подставим $z = r \cos \theta$:

$$v_0(r, \theta) = \frac{3a^2v_0 \cos \theta}{2} \frac{1}{r^2} + \left(-\frac{a^4v_0}{2r^4} \cos^3 \theta + \frac{3O_{xxz}xxz}{6r^7} + \frac{3O_{yyz}yyz}{6r^7} \right) = \frac{3a^2v_0 \cos^2 \theta}{2} \frac{1}{r^2} + \frac{\left(\frac{3}{4} \cos \theta \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \cos^3 \theta \right)}{r^4} a^4v_0.$$

/так как по сферической замене: $xxz = r^3 \cos \theta \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$, $yyz = r^3 \cos \theta \sin^2 \theta \sin^2 \varphi$

Задача 10

Нас просят найти дипольный момент двух полусфер. Так как нас спросили только про дипольный момент, а про распределение зарядов не спросили, то мы последнее и не будем находить.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi^{(l)}.$$

Известно что (ЛЛШ §41 его лучше прочитать, потому как мне лень техать выражения для всех величин тут) :

$$\varphi^{(l)} = \sum_a e_a \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} D_l^{(m)} Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{r_a^l}{R_0^{l+1}}. \quad (2.11)$$

Любой скалярный потенциал мы всегда можем разложить по сферическим гармоникам:

$$\varphi(z) = \sum_{l,m} c_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) R(z).$$

На сфере: $R = z$:

$$\begin{aligned} \varphi(r) = \begin{cases} \Phi_0, & z > 0 \\ -\Phi_0, & z < 0 \end{cases} \rightsquigarrow \int \varphi(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sin \theta d\theta d\varphi = i \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \theta \varphi(r) \sin \theta d\theta d\varphi = \\ = i \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left(- \int_0^{\pi/2} \Phi_0 \cos \theta d \cos \theta + \int_{\pi/2}^\pi \Phi_0 \cos \theta d \cos \theta \right) = 2\Phi_0 \pi i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(- \frac{\cos^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos^2 \theta}{2} \Big|_{\pi/2}^\pi \right). \end{aligned}$$

Мы получили, что из (2.11) взяв как и в выводе формулы до $l = 1$:

$$2\pi i \Phi_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{r} D_l^m = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} i d_z \frac{1}{r} \Rightarrow d_z = r \frac{3\Phi_0}{2}.$$

Занятно, но решая ту же задачу на семинаре четвертой парой 08.04 мы получили ответ:

$$d_z = \frac{3}{2} R^2 \Phi_0 \Leftrightarrow \varphi^{(l)} = \sum_a e_a \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} D_l^{(m)} Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{1}{R_0^{l+1}},$$

думается, что это из-за отличия в вот этой формуле (2.11). И вроде бы сейчас он правдивее и совпадает с ЛЛШ.

3 Семинар по теории поля 08.04.2021

Вспоминаем, что было (2.8). Таким образом у нас есть $\rho(t)$ и $\mathbf{J}(t)$. Разложим соответствующие потенциалы (компоненты четыре-потенциала):

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'.$$

Сразу идём в нулевое приближение:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c})}{cr} d^3 \mathbf{r}' = \frac{1}{rc} \sum_a e_a \mathbf{v}_a = \frac{1}{rc} \sum_a e_a \dot{\mathbf{r}}_a = \frac{1}{rc} \frac{d}{dt} \left(\sum_a e_a \mathbf{r}_a \right) = \frac{\dot{\mathbf{d}}(t - \frac{r}{c})}{cr}.$$

Воспользуемся калибровкой Лоренца:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c \operatorname{div} \mathbf{A}.$$

Далее, собственно приходим к напряженностям:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Дифференцируем:

$$\mathbf{E} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n}\dot{\mathbf{d}}) - \dot{\mathbf{d}}}{r^3} + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\dot{\mathbf{d}}) - \dot{\mathbf{d}}}{cr^2} + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}) - \ddot{\mathbf{d}}}{c^2 r}, \quad \mathbf{H} = \frac{[\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{d}}]}{cr^2} + \frac{[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]}{c^2 r}.$$

Если у нас $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos(\omega t)$, то при дифференцировании у нас там вылезет волновой вектор $k = \omega/c$. Далее будем работать в приближении $kr \gg 1$ – так называемая волновая зона. Таким образом умеем:

$$\mathbf{H} = \frac{[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]}{c^2 r} \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}) - \ddot{\mathbf{d}}}{c^2 r}.$$

Покажем, что $\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \perp \mathbf{n}$:

$$(\mathbf{n}\mathbf{H}) = \frac{1}{c^2 r} (\mathbf{n}[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]) = 0, \quad (\mathbf{n}\mathbf{E}) = \frac{1}{c^2 r} [(\mathbf{n}\mathbf{n})(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}) - (\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}})] = 0,$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] = \frac{1}{c^2 r} [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]] = \frac{1}{c^2 r} [\mathbf{n}(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}) - \ddot{\mathbf{d}}(\mathbf{n}\mathbf{n})] = \mathbf{E}.$$

Для Пойтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} [[\mathbf{H} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{H}] = -\frac{c}{4\pi} (\mathbf{H}(\mathbf{n}\mathbf{H}) - \mathbf{n}|\mathbf{H}|^2) = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{H}|^2 \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{n}.$$

Тогда интенсивность излучения от точечного источника через поверхность, видимую под телесным углом $d\Omega$:

$$dI = R^2 d\Omega \mathbf{nS} = \frac{cR^2}{4\pi} |\mathbf{H}|^2 d\Omega.$$

Задача 15

Пусть есть плоскость Oxz , и диполь направлен под углом θ_d к оси Oz . Воспользуемся методом изображений и зеркально под проводящей плоскостью Oxy расположим второй диполь, заменяющий её.

$$\mathbf{d}_1 = d(\mathbf{e}_z \cos \theta_d + \mathbf{e} \sin \theta_d), \quad \mathbf{d}_2 = d(\mathbf{e}_z \cos \theta_d - \mathbf{e}_x \sin \theta_d).$$

Здесь введены единичные векторы, и также ещё введём на будущее \mathbf{r} вектор на точку наблюдения из середины координат, \mathbf{n} – единичный по этому направлению.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - L\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + L\mathbf{e}_z.$$

Тут $2L$ – расстояние между диполями, будем работать в приближении $r \gg L$. Тогда примерно $\mathbf{r}_1 \parallel \mathbf{r}_2 \parallel \mathbf{n}$. И соответственно $r = (\mathbf{r}\mathbf{n})$, а остальные:

$$r_1 = (\mathbf{r}_1\mathbf{n}) = r - L(\mathbf{e}_z\mathbf{n}), \quad r_2 = (\mathbf{r}_2\mathbf{n}) = r + L(\mathbf{e}_z\mathbf{n}).$$

И для $d_{1,2}(t - \frac{r_{1,2}}{c})$

$$\mathbf{d}_1 = d(\mathbf{e}_z \cos \theta_d + \mathbf{e} \sin \theta_d) \cos(\omega t - kr_1), \quad \mathbf{d}_2 = d(\mathbf{e}_z \cos \theta_d - \mathbf{e}_x \sin \theta_d) \cos(\omega t - kr_2),$$

колеблющегося гармонически (по условию):

$$\mathbf{H} = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}_1 \times \mathbf{n}]}{c^2 r_1} + \frac{\ddot{\mathbf{d}}_2 \times \mathbf{n}}{c^2 r_2} = \frac{-\omega^2 d}{c^2 r} \left(([\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}] \cos \theta_d + [\mathbf{e}_x \times \mathbf{n}] \sin \theta_d) \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} r_1) + ([\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}] \cos \theta_d + [\mathbf{e}_x \times \mathbf{n}] \sin \theta_d) \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} r_2) \right)$$

Очень хочется упростить:

$$\cos(\omega t - kr_1) = \cos(\omega t - kr + kL(\mathbf{e}_z\mathbf{n})) = \cos(\omega t - kr) \cos(kL(\mathbf{e}_z\mathbf{n})) - \sin(\omega t - kr) \sin(kL(\mathbf{e}_z\mathbf{n})).$$

$$\cos(\omega t - kr_2) = \cos(\omega t - kr - kL(\mathbf{e}_z\mathbf{n})) = \cos(\omega t - kr) \cos(kL(\mathbf{e}_z\mathbf{n})) + \sin(\omega t - kr) \sin(kL(\mathbf{e}_z\mathbf{n})).$$

Тогда возвращаемся к выражению для H :

$$\mathbf{H} = \frac{-2\omega^2 d}{c^2 r} ([\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}] \cos \theta_d \cos(\omega t - kr) \cos(kL(\mathbf{e}_z\mathbf{n})) - [\mathbf{e}_x \times \mathbf{n}] \sin \theta_d \sin(\omega t - kr) \sin(kL(\mathbf{e}_z\mathbf{n}))).$$

4 Семинар по теории поля 15.04.2021

Продолжаем решать задачу...

Имея выражение для вектора Пойтинга, как было показано выше:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{H}|^2 \mathbf{n}, \quad dI = r^2 \mathbf{S} n d\Omega.$$

Усредняя по периоду:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kz) dt = \frac{1}{2}.$$

Таким образом усреднением для вектора Пойтинга мы получаем:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \frac{2\omega^4 d^2}{c^4 r^2} (|[\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}]|^2 \cos^2 \theta_d \cos^2(kL(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n})) + |[\mathbf{e}_x \times \mathbf{n}]|^2 \sin^2 \theta_d \sin^2(kL(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}))) \mathbf{n}.$$

Соответственно для интенсивности излучения получаем:

$$dI = \frac{\omega^4 d^2}{2\pi c^3} (|[\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}]|^2 \cos^2 \theta_d \cos^2(kL(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n})) + |[\mathbf{e}_x \times \mathbf{n}]|^2 \sin^2 \theta_d \sin^2(kL(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}))) d\Omega.$$

В задаче на это интегрировать не просим, нам достаточно просто посмотреть предельные случаи:

- $L \ll \lambda$, тогда получаем: $dI \simeq \frac{\omega^4 d^2}{2\pi c^3} |[\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}]|^2 \cos^2 \theta_d d\Omega$.

$$I = \int dI = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\omega^4 d^2}{2\pi c^3} |[\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}]|^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta_d \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{-\omega^4 d^2}{c^3} \cos^2 \theta_d \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \cos \theta = \frac{2}{3} \frac{\omega^4 d^2}{c^3} \cos^2 \theta_d.$$

После усреднения получим:

$$\langle I \rangle = \frac{2|\ddot{d}|^2}{3c^3} = \frac{\omega^4 d^2}{3c^3}.$$

- Теперь $L \gg \lambda$, тогда

$$I = \int dI = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\omega^4 d^2}{2\pi c^3} \sin^2 \theta \cos^2(kL \cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\omega^4 d^2}{c^3} \int_0^1 (1-x^2) \cos^2(kLx) dx = \frac{\omega^4 d^2}{3c^3}.$$

Задача 16

Значит есть разноименные заряды, один будем характеризовать индексами "1 а другой "2". Будем работать в системе центра инерции:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{R}_{\text{центра инерции}} = 0.$$

Тогда не сложно вычислить:

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right), \quad \mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}.$$

Ну и как мы показывали для излучения диполя: $I = 2|\ddot{\mathbf{d}}|^2/(3c^3)$. В нашем случае:

$$\mathbf{d} = e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2 = \left(\frac{e_2 m_1 - e_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \mathbf{r} = q\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2q^2 \ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3}.$$

Введем $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Посмотрим на энергию, излучаемую за один период:

$$\delta \varepsilon = I \cdot T_{\text{период}} = I \frac{2\pi r}{v}.$$

Будем работать в предположении, что $\delta \varepsilon \ll \varepsilon$. Воспользуемся теоремой Вириала:

$$2\langle T \rangle = n\langle u \rangle, \quad T = \frac{\mu v^2}{2}, \quad \mu v^2 = -\frac{e_1 e_2}{r} \quad \rightsquigarrow \quad u = \frac{e_1 e_2}{r}.$$

Таким образом $v = \sqrt{|e_1 e_2|/\mu^2}$, тогда опять к энергии:

$$\delta \varepsilon = \frac{2q^2 \ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3} \frac{\pi r^{3/2} \mu^{1/2}}{|e_1 e_2|^{1/2}} = \frac{2q^2 |e_1 e_2|^{3/2}}{3c^3 \mu^{3/2} r^{5/2}} \pi = \frac{|e_1 e_2|}{2r} \frac{4\pi q^2}{3|e_1 e_2|} \underbrace{\frac{|e_1 e_2|^{3/2}}{c^3 \mu^{3/2} r^{3/2}}}_{(v/c)^3} = \varepsilon \left(\frac{v}{c}\right)^3 \frac{4\pi q^2}{3|e_1 e_2|} \ll \varepsilon.$$

Теперь на нас интересует $r(t)$. Знаем, что $\varepsilon = \frac{e_1 e_2}{2r}$.

$$I = -\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{d\varepsilon}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{e_1 e_2}{2r^2} \dot{r} = \frac{2q^2 \ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3},$$

подставляем сюда Кулона $\mu \ddot{\mathbf{r}} = \frac{e_1 e_2}{r^2}$, а он выполняется, так как за один оборот не очень много энергии теряется:

$$\frac{e_1 e_2}{2r^2} \dot{r} = \frac{2q^2 (e_1 e_2)^2}{3c^3 \mu^2 r^4} \quad \rightsquigarrow \quad r^2 \dot{r} = \frac{4q^2 (e_1 e_2)}{3c^3 \mu^2} = \frac{1}{3} \frac{dr^3}{dt}.$$

Не сложно тогда получается:

$$r = \left(r_0^3 + \frac{4\theta^2 (e_1 e_2)}{c^3 \mu^2} t \right)^{1/3}, \quad t_{\text{пад}} = \frac{r_0^3 \mu^2 c^3}{4q^2 (e_1 e_2)}.$$

Для атома время падения электрона на него $t \sim 10^{-8}$ секунды, и действительно в классической теории поля атомы с электронами стабильно существовать не могут.

Задача 17

Два заряда у нас сталкиваются, излучают и летят обратно, нас интересует процесс излучения. Будем считать, что $v \ll c$. Воспользуемся выведенной формулой $I = 2|\ddot{\mathbf{d}}|^2/3(c^3)$. И всё так же живём в системе центра инерции, как в прошлой задаче.

$$\mathbf{d} = e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2 = \left(\frac{e_2 m_1 - e_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \mathbf{r} = q\mathbf{r}.$$

Давайте рассмотрим случай, когда $e_2 m_1 \neq e_1 m_2$. Тогда у нас не появляется лишних нулей, $I = \frac{2q^2 \ddot{\mathbf{r}}^2}{ec^3}$. И, собственно, для энергии имеем:

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = \frac{2q^2}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\mathbf{r}}^2 dt = \frac{2q^2}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{r}} d\dot{\mathbf{r}}$$

Опять, работая с предположением: $\varepsilon_{\text{изл}} \ll \varepsilon_{\text{полная}}$, воспользуемся законом кулона. Ещё нам, для выражения скорости понадобится закон сохранения энергии:

$$\frac{\mu v_{\infty}^2}{2} = \frac{\mu v^2}{2} + \frac{e_1 e_2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{(e_1 e_2)^2}{r^2} = \frac{\mu^2}{4} (v_{\infty}^2 - v^2)^2,$$

что при подстановке в закон Кулона:

$$\ddot{r} = \frac{e_1 e_2}{\mu r^2} = \frac{(e_1 e_2)^2}{r^2} \frac{1}{\mu(e_1 e_2)} = \frac{\mu}{4(e_1 e_2)} (v_\infty^2 - v^2)^2.$$

Теперь мы готовы взять наш интеграл:

$$\varepsilon = \frac{q^2 \mu}{6c^3(e_1 e_2)} \int_{-v_\infty}^{v_\infty} (v_\infty^2 - v^2) dv = \frac{\mu q^2}{6c^3(e_1 e_2)} \left(v_\infty^4 v - \frac{2v^3}{3} v_\infty^2 + \frac{v^5}{5} \right) \Big|_{-v_\infty}^{v_\infty} = \frac{8\mu q^2}{45c^3(e_1 e_2)} v_\infty^5 = \left(\frac{\mu v_\infty^2}{2} \right) \left(\frac{v_\infty}{c} \right)^3 \frac{16q^2}{45(e_1 e_2)} \ll \frac{\mu v_\infty^2}{2}.$$

Так и показали, что $\varepsilon \ll \varepsilon_{\text{полн}}$.

5 Семинар по теории поля 22.04.2021

Теперь рассмотрим второй случай:

$$Q = 0, \quad e_2 m_1 = e_1 m_2 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2|\ddot{\mathbf{d}}|^2}{3c^3} + \frac{2|\ddot{\boldsymbol{\mu}}|^2}{3c^3} + \frac{\ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{D}_{\alpha\beta}}{180c^5} + \dots$$

То есть:

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_{j=1}^2 \frac{e_j}{c} [\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_j \parallel \mathbf{v}_j.$$

$$D_{\alpha\beta} = e_1 (3r_\alpha^{(1)} r_\beta^{(1)} - \delta_{\alpha\beta} (r^{(1)})^2) + e_2 (3r_\alpha^{(2)} r_\beta^{(2)} - \delta_{\alpha\beta} (r^{(2)})^2).$$

По компонентам:

$$\begin{aligned} D_{xy} &= (3xy - \delta_{12} r^2) = 0, & D_{xz} &= 0, & D_{yz} &= 0 \\ D_{xx} &= e_1 (3r_1^2 - r_1^2) + e_2 (3r_2^2 - r_2^2) = \frac{2(e_1 m_2^2 + e_2 m_1^2)}{(m_1 + m_2)^2} r^2 = 2qr^2. \end{aligned}$$

Оставшиеся просто:

$$D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_{yy} = D_{zz} = -\frac{D_{xx}}{2} = -qr^2.$$

Тогда в интенсивность подставим третьи производные этой красоты:

$$I = \frac{\ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{D}_{\alpha\beta}}{180c^5} = \frac{6q^2 (\ddot{r}^2)^2}{180c^5}$$

Хочется что-то сделать с этой третьей производной, ну что ж, попробуем:

$$\frac{d^3 r^2}{dt^3} = 2 \ddot{r} \dot{r} + 6 \ddot{r} \dot{r}. \quad \ddot{r} = \frac{d}{dt} \dot{r}.$$

Но из закона Кулона:

$$m\ddot{r} = \frac{e_1 e_2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \dot{r} = -2 \frac{e_1 e_2}{mr^3} \dot{r} = -\frac{2}{r} \left(\frac{e_1 e_2}{mr^2} \right) \dot{r} = -\frac{2\ddot{r}}{r}.$$

А что, неплохо так упростилось:

$$\frac{d^3 r^2}{dt^3} = -\frac{4}{r} \ddot{r} \dot{r} + 6 \ddot{r} \dot{r} = 2 \ddot{r} \dot{r}.$$

Здорово! Теперь излученную энергию мы, вроде бы, сможем высчитать:

$$\varepsilon_{\text{изл}} = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = \frac{2q^2}{15c^5} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{r}^2 \dot{r}^2 dt = \int_{-v_\infty}^{v_\infty} \ddot{r}^2 \dot{r} d\dot{r},$$

как в прошлый раз предполагаем, что $\varepsilon_{\text{изл}} \ll \varepsilon_{\text{полн}}$. Что вроде бы как понятно, потому как сейчас у нас энергия ещё меньше чем в прошлый раз должна быть. Но всё равно наше предположение потребует проверки.

Берем закон сохранения энергии и закон Кулона:

$$\frac{\mu v_\infty^2}{2} = \frac{\mu v^2}{2} + \frac{e_1 e_2}{r}, \quad \ddot{r} = \frac{e_1 e_2}{\mu r^2}.$$

Возводим ЗСЭ в квадрат и находим член, как в законе Кулона, заменяя его на \ddot{r} , а именно:

$$\ddot{r} = \frac{\mu}{4e_1 e_2} (v_\infty^2 - v^2)^2.$$

И теперь наш интеграл легко берется, потому как это просто полным:

$$\varepsilon = \frac{2q^2}{15c^5} \int_{-v_\infty}^{v_\infty} \frac{\mu}{4e_2 e_1} (v_\infty^2 - v^2)^2 v^2 dv = \frac{\mu q^2}{30c^5 e_1 e_2} \left(\frac{v_\infty^4 v^3}{3} - \frac{2v_\infty^2 v^5}{5} + \frac{v^7}{7} \right) \Big|_{-v_\infty}^{v_\infty} = \frac{16}{3150} \frac{\mu q^2}{e_1 e_2 c^5} v_\infty^7$$

Надо показать, что наше предположение верно, то есть что полученная энергия много меньше энергии столкновения.

вающихся частиц:

$$\varepsilon = \left(\frac{\mu v_\infty^2}{2} \right) \left(\frac{q^2}{e_1 e_2} \right) \frac{32}{3150} \left(\frac{v_\infty}{c} \right)^5 \ll \frac{\mu v_\infty^2}{2}.$$

Задача 18

У нас есть некий электрон летящий по окружности. Магнитное поле пусть направлено $\mathbf{H} = (0, 0, H)$. И у нас релятивистский случай $v \rightarrow c$.

Пренебрегаем излучением:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}].$$

Изменение энергии при $E = 0$ будет:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = e\mathbf{v}\mathbf{E} = 0.$$

То есть константа, а значит:

$$\varepsilon = \gamma mc^2 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \text{const}.$$

Тогда далее жить намного удобнее, найдем радиус орбиты:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma m \dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}].$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{e}{mc\gamma}[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{H}], \quad \mathbf{v}_0 = \frac{e}{mc\gamma}[\mathbf{r}_0 \times \mathbf{H}] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \frac{e}{\gamma mc}[\mathbf{r} \times \mathbf{H}]$$

Тогда имеем радиус и циклотронную частоту:

$$R = \frac{\gamma mc}{eH}v, \quad \Omega = \frac{eH}{\gamma mc}.$$

Далее достаточно большой блок теории – нужны запаздывающие потенциалы, но мы будем пытаться обойтись без них, введем на веру *потенциалы Лиенара-Вихерта*:

$$\varphi = \frac{e}{R(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c})}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{R(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c})}.$$

Переходим в мгновенную систему отсчета K' :

$$\mathbf{v}' = (0, 0, 0); \quad \mathbf{v}(0, v, 0); \quad \mathbf{H}(0, 0, H); \quad \mathbf{E} = (0, 0, 0).$$

Тогда, зная как преобразуются компоненты поля:

$$E'_\parallel = E_\parallel = 0, \quad H'_\parallel = H_\parallel = 0.$$

$$\mathbf{E}'_\perp = \gamma \left(\mathbf{E}_\perp - \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right), \quad \mathbf{H}'_\perp = \gamma \left(\mathbf{H}_\perp - \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{E}] \right).$$

Таким образом получаем:

$$\mathbf{H}' = (0, 0, \gamma H), \quad \mathbf{E}' = (-\beta \gamma H, 0, 0).$$

Тогда в новой системе отсчета движение описывается как:

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = e\mathbf{E}' + \underbrace{\frac{e}{c}[\mathbf{v}' \times \mathbf{H}']}_0 = \underbrace{\dot{\gamma}' m \mathbf{v}'}_0 + \gamma' m \dot{\mathbf{v}}' \quad \Rightarrow \quad m \dot{\mathbf{v}}' = e\mathbf{E}'.$$

$$\ddot{\mathbf{r}}' = -\frac{e\beta\gamma H}{m}\mathbf{e}_x \quad \ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{r}}' = -\frac{e^2\beta\gamma H}{m}\mathbf{e}_x.$$

Тогда интенсивность излучения:

$$I' = \frac{2|\ddot{\mathbf{d}}'|^2}{3c^3} = \frac{2e^4\beta^2\gamma^2 H^2}{3m^2 c^3}.$$

Но в то же время $I' = -d\varepsilon'/dt'$ и $I = -d\varepsilon/dt$. счастью наше преобразование нам даёт, что $x' = y' = z' = 0$, и главное – $t = \gamma t'$. И большая удача, что преобразование четыре импульса системы тоже даёт нам $p'_x = p'_y = p'_z = 0$, и самое главное – $\varepsilon = \gamma\varepsilon'$. Тогда и $I = I'$, по замечанию выше.

6 Семинар по теории поля 29.04.2021

Оценим теперь для последней задачи характерную длину волны излучения. Работали в предположении $v \ll c$, и у нас $\ddot{\mathbf{d}} \parallel \ddot{\mathbf{r}}$.

Чтобы не тратить целую пару на вывод, а предоставить работу лектору, сразу напишем формулу:

$$1 - \frac{v}{c} \cos \theta = z(\theta),$$

где $z(\theta = 0)$ будем минимумом. Далее

$$z(\theta) = 2z(0) \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{v}{c} \cos \theta = 2 \left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Если же теперь $v/c \rightarrow 1$, тогда $\theta \rightarrow 0$, и имеем в приближении наше уравнение:

$$1 - \frac{v}{c} + \frac{v}{c} \frac{\theta^2}{2} = 2 - 2\frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad \theta^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma^{-2}.$$

Для оценки получили, что $\theta \sim \gamma^{-1}$. Время которое частица излучает: $\Delta t_{\text{изл}} = \frac{\theta}{2\pi} T$.

То есть если t_1 – время, когда диполь начал излучать, а t_2 – время, когда закончил, то длина $l = (t_2 - t_1)v$, а длина фотона $l_{\text{фот}} = (t_2 - t_1)c$. Тогда

$$\Delta = l_{\text{фот}} - l = (c - v)(t_2 - t_1) = (c - v)\Delta t_{\text{изл}}.$$

А время, которое детектирует детектор $\Delta t_{\text{дет}} = \Delta l/c$. Таким образом:

$$\Delta t_{\text{дет}} = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \Delta t_{\text{изл}} \simeq \frac{1}{2} \gamma^{-2} \Delta t_{\text{изл}}.$$

И в итоге $\Delta t_{\text{дет}} \sim \frac{\theta}{2\pi} \gamma^{-2} T \sim \gamma^{-3} T$.

Из фурье анализа $\omega \Delta t_{\text{дет}} \simeq 2\pi$. Тогда $\omega \simeq \gamma^3 \Omega$, где Ω – циклотронная частота. Которая в свою очередь где-то примерно порядка $\omega \sim 10^{20} \text{ с}^{-1}$.

Задача 20

Имеем что? $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{e}_x$ и $\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{e}_y$. Запишем вектор Пойтинга для такой рассеянной волны:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{H}|^2 \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{n}.$$

Вдали от источника, как мы обсуждали выполняется $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ и равны по модулю.

Для интенсивности имеем

$$dI = \mathbf{n} S r^2 d\Omega = S_0 d\sigma,$$

где ввели дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma$, а $S_0 = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_0|^2$.

Внутри идеально проводящего шара $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{0}$. Рассмотрим конкретно электрическое поле в центре шара с плотностью заряда $\rho(\theta, \phi)$, взяв закон Кулона:

$$\mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \int \frac{\rho(\theta, \phi)(-\mathbf{r})}{r^3} dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) - \underbrace{\frac{1}{r^3} \int \rho(\theta, \phi) \mathbf{r} dS}_{\mathbf{d}} = 0.$$

Соответственно получаем: $\mathbf{d} = \mathbf{E}_0 r^3 \cos(\omega t)$.

Теперь берем Био-Савара

$$\mathbf{H}_0 \cos(\omega t) + \int \frac{[\mathbf{J} \times (-\mathbf{r})]}{cr^3} dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_0 \cos(\omega t) + \frac{2}{r^3} \int \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{J}}{2c} dS = 0.$$

И аналогично $\boldsymbol{\mu} = -\frac{\mathbf{H}_0 r^3}{2} \cos(\omega t)$.

В волновой (зоне) будет верно, что

$$\mathbf{H}_d = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r}, \quad \mathbf{H}_\mu = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \ddot{\boldsymbol{\mu}}) - \ddot{\boldsymbol{\mu}}}{c^2 r}.$$

Таким образом вектор Пойтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{H}_d + \mathbf{H}_\mu|^2 \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi c^4 r^2} (|\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}|^2 + (\mathbf{n} \cdot \ddot{\boldsymbol{\mu}})^2 + |\ddot{\boldsymbol{\mu}}|^2 + 2([\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \ddot{\boldsymbol{\mu}}) - 2(\ddot{\boldsymbol{\mu}} \cdot [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]) - 2(\mathbf{n} \cdot \ddot{\boldsymbol{\mu}})^2) \mathbf{n}.$$

Будем разбираться по очереди: $[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n} = 0$.

Далее: $[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]_\alpha [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^\alpha = |\ddot{\mathbf{d}}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{d}})^2$.

Теперь вроде как немного упростилось:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c^3 r^2} (|\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \ddot{\boldsymbol{\mu}})^2 + |\ddot{\boldsymbol{\mu}}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \ddot{\boldsymbol{\mu}})^2 - 2(\ddot{\boldsymbol{\mu}} \cdot [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}])) \mathbf{n}.$$

И теперь по формулам выше найдём сечение:

$$d\sigma = \frac{\omega^4 r^6}{c^4} \cos^2(\omega t) (|\mathbf{e}_x|^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x)^2 + \frac{1}{4} |\mathbf{e}_y|^2 - \frac{1}{4} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y)^2 - (\mathbf{e}_y [\mathbf{e}_x \times \mathbf{n}])) d\Omega = \boxed{\frac{\omega^4 r^6}{2c^4} \left(\frac{5}{4} - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos \theta \right) d\Omega}$$

А теперь, как нас просят задаче, мы это возьмём и проинтегрируем!

$$\sigma = 2\pi \frac{\omega^4 r^6}{2c^4} \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) = \frac{5\pi}{3} \frac{\omega^4}{2c^4} r^6.$$

Лекции в Российском Квантовом Центре

1 Лекция от 25.04.2021

Про охлаждение лазерами

Для нас будет очень важна фазовая плотность. В осях px на элементарный объем приходится ровно $2\pi\hbar$.

$$N = \int \frac{d^3x d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{N}{V} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT} \right)^{3/2} e^{-p^2/2mT}.$$

Таким образом фазовая плотность примерно:

$$\frac{N}{V} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT} \right)^{3/2} \equiv \frac{N}{V} \lambda_{dB}^3$$

Для начала возьмем нормальное распределение:

$$N(v) = v^2 e^{-mv^2/T}.$$

И если наиболее вероятной скорости соответствовало что-то вроде $v = \sqrt{T/m}$. И наша цель сдвинуть этот пик как можно ближе к нулю.

Домашнее задание 1.1. Оценить:

- фазовую плотность азота в атмосфере при нормальных температурах
- фазовую плотность атомов лития при температуре 100 мК и межчастичном расстоянии 1 мкм.

Простейший вариант описывающий охлаждения (замедление) атома светом, это посветить светом навстречу летящему атому, чтобы уменьшить его скорость. Будем смотреть на модель двухуровневого атома, который возбуждается на частоте ω_{laser} . Атом кушает фотон, и переходит с первого на второй энергетический уровень.

Ускорение, которое приобретает атом при давлении на него света:

$$ma = \hbar k \frac{\Gamma}{2},$$

где $\hbar k$ – импульс одного возбужденного фотона, а Γ – обратное время жизни возбужденного состояния атома.

Домашнее задание 1.2. Атом лития замедляется резонансным светом при переходе $2s \rightarrow 2p$. Рассчитайте ускорение и сравните с g . Замедление начинается со скорости 500 м/с. Рассчитайте расстояние на котором скорость падает почти до нуля.

Для удержания вещества используется **магнито-оптическая ловушка**. Будем пользоваться *эффектом Зеймана*. Также потребуем от падающего с разных сторон света обратной поляризации σ_- и σ_+ .

А какие у нас вообще пределы всего этого:

$$T_{\min} = \frac{p_{\text{photon}}^2}{2m}, \quad p_{\text{photon}} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad \rightsquigarrow \quad T_{\min} = 4 \text{ мК (для Li)}.$$

И ещё есть так называемый *предел Летохова-Миногина-Павлика*:

$$T_{\min} = \frac{\hbar\Gamma}{2} = 150 \text{ мК}.$$

Чтобы пойти ещё холоднее воспользуемся простой **оптической дипольной ловушкой**. Нам нужно, чтобы собственная частота атома была много больше частоты колебаний электрического поля, чтобы можно было считать поле от пришедшего света в принципе постоянным.

$$\varphi = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = -\frac{\alpha}{2} E^2.$$

Тот же принцип применяется в оптическом пинцете.

И вот мы удержали, теперь будем охлаждать испарением. А именно, те атомы, которые движутся достаточно быстро, чтобы вылететь из ямы и покидают, остается меньше, оставшиеся вновь пытаются выстроиться нормально и снова появляется кто-то быстрый, кто снова вылетит. Таким образом наблюдаем что-то похожее на испарение.

Домашнее задание 1.3. Посмотрим на сложность такого метода и подводные камни (Li):

$$\nu = n\sigma v$$

и тут можно уже увидеть интересный результат для сечения столкновения и частоты столкновения, которые вообще для нормального испарения мы хотим получать большими.

И то же самое проделать для частиц в атмосфере.

Квантовые вычисления на холодных ионах

Хотим записать гамильтониан иона в ловушке и изучить их движение и взаимодействие ионов в ловушке с внешним полем.

Квантовые механические системы описываются уравнением шредингера:

$$i\hbar\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi,$$

где $\Psi(r_1, \dots, r_N, t)$ – плотность вероятности нахождения N частиц в области пространства. И гамильтониан соответственно:

$$\hat{H} = -\sum_i \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x_1, \dots, x_n),$$

где V – потенциальная энергия системы частиц, которая задается как:

$$V = \sum_{i,j} \frac{e^2}{|r_i - r_j|} + \sum V(r_i).$$

И у уравнения есть стационарное решение:

$$\Psi = e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \Psi(r_1, \dots, r_n).$$

Это все случилось для одного иона, у которого есть N электронов, теперь поместим это все во внешнее электрическое поле.

$$\hat{V} = -e\mathbf{E}(t) \cdot (\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_n) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}.$$

Допустим мы нашли все уровни энергии, такие что $\bar{H}_0 \Psi_n = E_n \Psi_n$, для нашего гамильтониана вида $H = \bar{H}_0 + \bar{V}$. Тогда решения для уравнения Шредингера будет выглядеть как

$$\Psi = \sum c_n(t) e^{-iE_n t} \Psi_n$$

И само уравнения запишется:

$$i\hbar\partial_t c_n = \sum_m e^{-(E_n - E_m)t} V_{nm} c_m.$$

Из всего такого набора c_n оставим только резонансные. И то, что мы светим в резонанс означает, что $\mathbf{E}(t) = E_0 \cos((E_1 - E_0)t)$.

Мы ограничимся всего двумя уровнями энергиями, c_0 и c_1 :

$$i\partial_t \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (Ed)^* \\ (Ed) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

В результате получаются просто осциллируют:

$$c_0(t) = c_0(0) \cos\left(\frac{|E_0 d|}{\hbar} t\right) + i \sin\left(\frac{|E_1 d|}{\hbar} t\right) e^{i\varphi} c_1(0)$$

Вспомнив про матрицы Паули:

$$\sigma_{+,-} = \frac{\sigma_x \pm i\sigma_y}{2}.$$

И далее в более удачном виде все у нас запишется...

$$i\hbar\partial_t c = (Ed)^* c \sigma_- + (Ed) c \sigma_+.$$

Теперь от электронной системы перейдем к системе в которой ещё будем учитывать положение иона.

$$\Psi = \Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = \tilde{\Psi}(\mathbf{R}) \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n).$$

Тут наш гамильтониан:

$$\bar{H} = \frac{\bar{p}^2}{2M} + \frac{m\omega^2 R^2}{2}.$$

И вот гамильтониан диагонализуется с помощью операторов:

$$a, a^\dagger = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} x \pm i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2M}} \bar{p},$$

тогда гамильтониан представится в простом виде:

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right).$$

Классные свойства:

$$[a, a^\dagger] = 1 = aa^\dagger - a^\dagger a; \quad a\Psi_0 = 0;$$

$$H\Psi_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\Psi_0; \Psi_n = (a^\dagger)^n|0\rangle.$$

И таким образом через путанный вывод, который, как мне кажется, не смысла приводить здесь получим:

$$H\Psi_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \Psi_n.$$

Вернемся к нашей системе, где для иона важны два электронных уровня и есть собственные колебания вида, как мы выяснили, $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$. Таким образом наш гамильтониан:

$$H = H_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}.$$

Теперь наши колебания сидят в дипольном моменте:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\Omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R}),$$

где $\mathbf{R} = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}(a + a^\dagger)$.

В электромагнитных волнах мы предполагаем малость амплитуды их колебаний по сравнению с собственными колебаниями ионов. Короче гамильтониан Лэмбэ-Дикке:

$$\bar{H} = H_0 + \frac{E_0}{2} \left(e^{i\Omega t} \left(1 + ik \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}(a + a^\dagger)(\sigma_+ + \sigma_-) \right) \right),$$

где $\Omega = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\hbar} \pm \omega_0$. Частота Раби.

Обработка квантовой информации на ионах в ловушке