Всеобщая тетрадь

Содержание

что-то

Задача 1

Дана матрица

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{3+4i}{5} \\ \frac{3-4i}{5} & -1 \end{pmatrix}$$

Пункт 1

Проверим матрицу на унитарность, а именно, покажем, что $AA^* = A^*A = E$.

Первый этап отбора на пратику

Примак Евгений Алексеевич
2 курс ФОПФ

Лекции Колдунова Л.М. по современной оптики

1 Лекция 1

Лектор — Л.М.Колдунов

Геометрическая оптика $\subset$ волновая оптика $\subset$ эм-оптика $\subset$ квантовая оптика.

Уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho_{\text{out}}\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0\\
&\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\
&\operatorname{rot}\bar{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\text{out}} + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\\
&\boldsymbol{j}_{\text{out}} = 0 \qquad \rho_{\text{out}} = 0
\end{aligned}$$

Покрутим уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{B} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} = -\Delta\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\mu\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

Получаем уравнение электромагнитной волны:

$$\Delta\boldsymbol{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

Получаем решение вида

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\exp(i\omega t - i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}) \quad\Rightarrow\quad -k^2\boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2\boldsymbol{E} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}$$

Уравнение Эйконала

Имеем постулаты геометрическо оптики:

1. Свет распространяется в виде лучей;
2. Среда характеризуется показателем преломления n: $c_{\text{среды}} = c/n$;
3. $\int ndl \to \min$.

Def 1.1. *Оптическим путём* назовём $S = \int_A^B n(\boldsymbol{r})dl$

Найдём ход лучей в предположении, что $n(\boldsymbol{r})$:

$$\Delta\boldsymbol{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad E(\boldsymbol{r},t) = a(\boldsymbol{r})\exp(ik_o\underbrace{\Phi(\boldsymbol{r})}_{\text{Эйконал}} - i\omega t).$$

Взяв $\boldsymbol{E}$ одномерным посчитаем в лоб лапласиан:

$$\Delta E = \Delta a\exp() - a(\boldsymbol{r})k_0^2|\operatorname{grad}\Phi|^2\exp() + i(2k_0(\operatorname{grad}a,\operatorname{grad}\Phi) + k_0a\Delta\Phi)exp()$$

Сначала вещественную часть:

$$\Delta a\exp() - a(\boldsymbol{r})k_0^2|\operatorname{grad}\Phi|^2\exp() + \frac{\omega^2}{c^2}n^2a\exp() = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{|\operatorname{grad}\Phi|^2 = \frac{1}{ak_0^2}\Delta a + n^2.}$$

Теперь будем считать верным предположение:

$$|\lambda\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}| \ll |\frac{\partial a}{\partial x}|, \qquad |\lambda\frac{\partial a}{\partial x}| \ll a, \qquad \lambda\to 0.$$

Получаем в приближении уравнение Эйконала:

$$|\operatorname{grad}\Phi| = n. \tag{1.2}$$

Выражение $\omega t - k_0\Phi = \text{const}$ задаёт *Волновой фронт.*

$$\operatorname{grad}\Phi = n\boldsymbol{s}, \qquad |\boldsymbol{s}| = 1 \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial s} = n.$$

$$\omega dt - k_0 d\Phi = 0 \quad\Rightarrow\quad \omega dt = k_0 d\Phi = k_0\frac{d\Phi}{ds}ds = k_0 nds.$$

Принцип Ферма

Пуст Φ — задано однозначно: $\operatorname{grad}\Phi = n\boldsymbol{s}$. Возьмём интеграл по замкнутому контуру:

$$\oint n(\boldsymbol{s}, d\boldsymbol{l}) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \int_{ACB} n(\boldsymbol{s}, d\boldsymbol{l}) = \int_{ADB} n(\boldsymbol{s}, d\boldsymbol{l}).$$

Но $\boldsymbol{s} \cdot d\boldsymbol{l} = sdl = dl$ на ACB. Тогда и получим выражение, доказывающее принцип Ферма:

$$\int_{ACB} ndl = \int_{ADB} n\boldsymbol{s} \cdot d\boldsymbol{l} \leqslant \int_{ADB} ndl.$$

Приведём пару примеров: (Колдунов гнём зеркало)

Траектория луча

Было соотношение, что: $m\boldsymbol{s} = \operatorname{grad}\Phi$. Для траектории: $\boldsymbol{s} = d\boldsymbol{r}/dl$. Тогда для градиента (который d/dl):

$$n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl} = \operatorname{grad}\Phi \qquad \frac{d}{dl}\left(n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}\right) = \frac{d}{dl}\operatorname{grad}\Phi = \operatorname{grad}\frac{d\Phi}{dl} = \operatorname{grad} n \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dl}\left(n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}\right) = \operatorname{grad} n.$$

Получили уравнение луча. Давайте теперь возьмём однородную среду:

$$n = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dl^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}l + \boldsymbol{b}.$$

Теперь возьмём:

$$\frac{d}{dl}(n\boldsymbol{s}) = \operatorname{grad} n \quad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{s}\frac{dn}{dl} + n\frac{d\boldsymbol{s}}{dl} = \nabla n \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\boldsymbol{N}}{R} = \frac{1}{n}\left(\nabla n - \boldsymbol{s}\frac{dn}{dl}\right)$$

Домножим последнее выражение скалярно на $\boldsymbol{N}$:

$$0 < \frac{N^2}{R} = \frac{(\boldsymbol{N}, \nabla n)}{n} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{N}, \nabla n) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Луч поворачивает!}$$

((Пример про слоистую среду))

Уравнение луча в параксиальном приближении

((картинка))

$$n(y)\cos\theta(y) = n(ydy)\cos\theta(y+dy) = \left(n(y) + \frac{dn}{dy}\Delta y\right) cos\left(\theta(y) + \frac{d\theta}{dy}\Delta y\right) = \left(n(y) + \frac{dn}{dy}\Delta y\right)\left(\cos\theta - \sin\theta(y)\frac{d\theta}{dy}\Delta y\right).$$

То есть получаем, что

$$\frac{dn}{dy}\cos\theta(y) = n(y)\sin\theta(y)\frac{d\theta}{dy} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n}\frac{dn}{dy} = \tan\theta\frac{d\theta}{dy} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Пример параболической зависимости $n^2 = n_0^2(1 - \alpha^2y^2)$ SELFOC.

$$\alpha y \ll 1 \qquad y''_{xx} = \frac{1}{n_0(1-\alpha^2y^2)^{1/2}}\frac{dn}{dy} = \frac{-n_0\alpha^2y}{n_0(1-\alpha^2y^2)} = -\alpha^2 y. \quad \Rightarrow \quad y''_{xx} + \alpha^2 y = 0.$$

Такое вещество используют при создании стекловолокна, суть в том, что при заходе в канал под разными углами скорость примерно одна и та же распространения.

((забыли про мнимую часть!!!!))

2 Лекция 2

Матричная оптика

Луч можно характеризовать его координатой y и углом к оптической оси x. То есть $\{y_1, \theta_1\} <-> \leftrightarrow \{y_1, n_1, \theta_1\}$, и $n\theta = v$. Таким образом:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & n_1\theta_1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перемещения

В ходе перемещения:

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta_1 \\ y_2 = y_1 + l\theta_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Или же второй вариант, который встречается в литературе:

$$\begin{cases}\theta_2 = \theta_1 n \\ y_2 = y_1 + (l/n)\theta_1 n\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Матрица преломления на сферической поверхности

Пусть луч падает из среды с показателем преломления n_1 в n_2. Запишем условие падения:

$$n_1\beta_1 = n_2\beta_2, \quad \beta_1 = \theta_1 + \alpha, \quad \beta_2 = \theta_2 + \alpha, \quad n_1(\theta_1+\alpha) = n_2(\theta_2+\alpha), \quad \alpha = y_1/R.$$

$$v_2 = v_1 + \frac{n_1 - n_2}{R} y_1 \qquad \Rightarrow \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Или ещё в литературе она может встретиться как:

$$v_2 = \frac{n_1}{n_2}\theta_1 + \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} y_1 \qquad \Rightarrow \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

Общий подход

Пусть у нас есть какая-то система, части которой мы знаем как преобразуют луч по отдельности, то есть все матрицы преобразований знаем. Получаем матричное выражение с перемножением матриц:

$$M_3 M_2 M_1 \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{a} = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

По факту теперь имеем и какую-то матрицу в которой очень хочется понять значение её коэффициентов.

1. $D = 0$. Означает, что луч у нас идёт в фокальной плоскости.
2. $B = 0$. Тогда наша изображение: $y_2 = Ay_1$. Так называемые *сопряженные плоскости.* И A называется коэффициентом *поперечного увеличения.*
3. $C = 0$. Тогда наша изображение: $y_2 = B\theta_1$. D в этом случае называется коэффициентом. Тако случай называется телескопическим.

Перейдём у примерам.

Пример 0

Для тонкой линзы с двумя радиусами кривизны – внешним и внутренним:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n-1}{nR_2} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1-n}{nR_1} & \dfrac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n-1}{nR_2} + \dfrac{1-n}{nR_1} & 1 \end{pmatrix}$$

В левом нижнем углу у нас стоит *оптическая сила системы*: $(n-1)(1/R_1 - 1/R_2)$.

Пример 1

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{b}{F} & b + a\left(1 - \frac{b}{F}\right) \\ -\frac{1}{F} & 1 - \frac{a}{F} \end{pmatrix}$$

Таким образом получаем формулу линзы занулив левый верхний элемент:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \tag{1.5}$$

Задача 2 (см) файл

Только размер предмета не как в задаче — а 2 мм.

Какие матрицы запишем: сначала распространяемся, потом преломляемся, и наконец снова распространяемся.

$$\begin{pmatrix} 1 & x/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{x}{7.8} & 15 - \dfrac{x}{0.78} \\ -0.2 & -2 \end{pmatrix}$$

Снова $B = 0$ и решаем уравнение: $15 - \frac{x}{0.78} = 0$, откуда $x = 11.7$ см. Коэффициент увеличение $A = 1 - \dfrac{11.7}{0.78} = -0.5$.

Задача 4 (см) файл

Снова думаем — преломляемся–распространение–преломляемся–распространяемся.

$$\begin{pmatrix} 1 & F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-(1-n)}{-R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2R}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2F(n-1)+(n-2)R}{nR} & \dfrac{-nF+2F+2R}{n} \\ \dfrac{2-2n}{nR} & \dfrac{2}{n}-1 \end{pmatrix}$$

И так $A = 0$ значит $-2F(n-1) = R(n-2)$, откуда $F = R\frac{2-n}{2(n-1)}$.

Задача 11 (см) файл

На самом деле это задача из Овчинкина 1.32.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{l}{F_2} & l \\ -\frac{1-\frac{l}{F_1}}{F_2}-\frac{1}{F_1} & 1-\frac{l}{F_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-lP_2 & l \\ -P_1-(1-lP_1)\,P_2 & 1-lP_1 \end{pmatrix}.$$

Про увеличения:

$$\frac{d}{dn}((n-1)(G_1+G_2)-(n-1)^2 lG_1G_2) = 0 \quad\Rightarrow\quad (G_1+G_2)-2(n-1)lG_1G_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad l = \frac{1}{2(n-1)}\left(\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}\right)$$

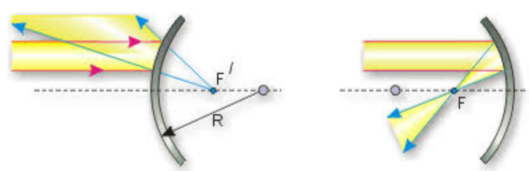
Или же

$$l = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)G_1}+\frac{1}{(n-1)G_2}\right) = \frac{F_1+F_2}{2}.$$

3 Лекция 3

Обобщение на случай отражения

В прошлый раз у нас было матрица T (1.3) и матрица P (1.4).



Возьмём теперь зеркало, посмотрим на отражение для выгнутого зеркала (слева) и напишем матрицу отражения.

$$n_1 = n, n_2 = -n \quad\rightsquigarrow\quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{-n-n}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

для вогнутого же (справа) заодно выпишем сразу все матрицы, которые у нас есть:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n_2-n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 1

Допустим шёл луч и упал на плоскопараллельную пластину и пошёл внутри неё змейкой.

$$\begin{pmatrix} 1 & h/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & hN/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 13

Описываем жизнь нашего луча умножением матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2R}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2R}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{n-4}{n} & -\dfrac{4R}{n} \\ \dfrac{2(n-2)}{nR} & \dfrac{n-4}{n} \end{pmatrix}$$

Периодические оптические системы

Пусть у нас оптическая ячейка уже после перемножения всех матриц характеризуется в итоге матрицей 2x2, с элементами A, B, C, D. У периодической системы такая ячейка встречается m раз:

$$\begin{pmatrix} y_m \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} y_{m+1} \\ v_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} y_m \\ v_m \end{pmatrix}$$

Получаем уравнения:

$$\begin{cases} y_{m+1} = Ay_m + Bv_m \\ v_{m+1} = Cy_m + Dv_m \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} v_m = \dfrac{y_{m+1} - Ay_m}{B} \quad \Rightarrow \quad v_{m+1} = \dfrac{y_{m+2} - Ay_{m+1}}{B} \\ y_{m+2} - Ay_{m+1} = BCy_m + D(y_{m+1} - Ay_m) \end{cases}$$

Получили уравнение на y:

$$y_{m+2} - (A+D)y_{m+1} + (AD - BC)y_m = 0 \quad \Rightarrow \quad y_m = y_0 h^m \quad \Rightarrow \quad h^2 - (A+D)h + 1 = 0$$

Заменяя $A + D = 2b$, получаем три случая на детерминант: $h_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - 1}$.

1. $|b| < 1$: Тогда $h_{1,2} = e^{i\varphi} \Rightarrow y_m = \alpha_1 e^{im\varphi} + \alpha_2 e^{-im\varphi} = y_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_0)$.

Заметим, что y_m периодичен, только если $\varphi/2\pi$ – рациональное число.

Пример 2

Дана система линз: $\uparrow -d- \uparrow -d- \uparrow$. Матрицы прохождения луча:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -1/F & 1 - d/F \end{pmatrix}$$

Получаем, что устойчиво когда:

$$b = \frac{2 - d/F}{2} \quad \rightsquigarrow \quad |b| < 1 \quad \rightsquigarrow \quad 0 < \frac{b}{F} < 4.$$

Посмотрим случаи:

1. $d = F$: тогда $b = 1/2$, и тогда $b = \cos\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$;
2. $d = 2F$: тогда $b = 0$;
3. $d = 0$: тогда $d = 4F$.

Оптический резонатор

Пусть у нас есть два зеркала: $\big(- L - \big)$. Матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad b = (A+D)/2 = 2\underbrace{\left(1 + \frac{L}{R_1}\right)}_{g_1}\underbrace{\left(1 + \frac{L}{R_2}\right)}_{g_2} - 1.$$

Можно рассмотреть различные типы резонаторов:

1. Плоский;
2. Симметричный конфокальный;
3. Симметричный концентрический.

4 Лекция 4

Оптика пучков

Что у нас есть. У нас есть волновое уравнение!

$$\nabla^2 E - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$$

Получаем уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2 f e^{-i\omega t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}(-1)\omega^2 f e^{-i\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 f + \varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} f = 0.$$

Таким образом:

$$\nabla^2 f + \varepsilon k_0^2 f = 0 \tag{1.6}$$

Если рассматривать полну идущую от точечного источника, то вблизи мы будет ее считать *сферической* чуть дальше — *параболической*, и совсем далеко — *плоской*.

Выберем ось z на которой поместим точечный источник. Теперь $f = \frac{A}{r}\exp(ikr)$.

На расстоянии ρ от оси точка на волновом фронте лежит на $r^2 = \rho^2 + z^2$. Приблизительно в предположении $z \gg \rho$: $r \approx z + \frac{\rho^2}{2z}$. То есть в порядке малости выпишем:

$$1\; r \simeq z, \qquad 2\; r \simeq \frac{2\pi}{\lambda}(z + \frac{\rho^2}{2z} + \ldots) = \frac{2\pi}{\lambda}z + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\rho^2}{2z}.$$

Второй вот порядок и называют параболическим: $f = \frac{A}{z}\exp(ikz + ik\frac{\rho^2}{2z})$.

Параксиальное приближение

Имеем ситуацию: $f(\boldsymbol{r}) = A(\boldsymbol{r})\exp(ikz)$. Будем требовать:

$$\frac{\partial A}{\partial z}\lambda \ll A \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A}{\partial z} \ll \frac{A}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A}{\partial z} \ll A \cdot k.$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\lambda \ll \frac{\partial A}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll \frac{\partial A}{\partial z}\cdot k.$$

И так волновое уравнение, с заменой $k^2 = \varepsilon\omega^2/c^2$:

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial z}e^{ikz} + A\cdot ike^{ikz}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}e^{ikz} + 2A'_z ike^{ikz} - Ak^2e^{ikz}.$$

Теперь всё это в волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2\frac{\partial A}{\partial z}ik - Ak^2 + \nabla^2 A + Ak^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2\frac{\partial A}{\partial z}ik + \nabla^2 A = 0.$$

И с нашем приближение получаем *параксиальное уравнение Гельмгольца* (может мы где-то знак потеряли).

$$\nabla^2 A + 2ik\frac{\partial A}{\partial z} = 0. \tag{1.7}$$

Надо проверить, подставится будет ли решением уравнения сверху выражение:

$$f(r) = \frac{A}{z}\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2z}\right) \quad \Rightarrow \quad f(r) = A(r)e^{-ikz}, \quad A(r) = \frac{A}{z}\exp\left(-ik\frac{\rho^2}{2z}\right).$$

Решение таким образом при таким f.

$$f(r) = \frac{A}{z + iz_0}\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2(z+iz_0)}\right) \qquad z \longrightarrow q(z) = z + iz_0.$$

Тут введен q-параметр и *Рэлеевская длина* — z_0.

Мы знаем, что $\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z+iz_0} = \frac{z - iz_0}{z^2+z_0^2}$. Подставляем:

$$f(r) = A\left(\frac{z}{z^2+z_0^2} - i\frac{z_0}{z^2+z_0^2}\right)\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2}\frac{z-iz_0}{z^2+z_0^2}\right).$$

$$f(r) = A\left(\frac{z}{z^2+z_0^2} - i\frac{z_0}{z^2+z_0^2}\right)\exp\left(-\frac{k\rho^2}{2}\frac{z_0}{z^2+z_0^2}\right)\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2 z_0}{z^2+z_0^2}\right).$$

Выпишем:

$$-\frac{2\pi}{2}\frac{\rho^2 z_0}{\lambda(z^2+z_0^2)} = i\frac{\rho^2}{\frac{\lambda}{z_0\pi}(z^2+z_0^2)} \qquad \text{обозначим: } W^2(z) = \frac{\lambda z_0}{\pi}(1 + \frac{z^2}{z_0^2}), \quad R(z) = z(1 + \frac{z^2}{z_0^2}).$$

Тогда получаем:

$$f(r) = A\left(\frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi W^2(z)}\right)\exp(-\frac{\rho^2}{W^2(z)})\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)}\right).$$

$$f(r) = \frac{A}{iz}\frac{W_0}{W(z)}\exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right)\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} + i\xi(z)\right),$$

где $W_0 = W(0)$, а $\xi(z) = \arctan\frac{z}{z_0}$. Обычно в первом члене ещё обозначают $A_0 = A/iz_0$.

Интенсивность

$$I =< |\boldsymbol{S}| >_t =< \frac{c}{4\pi}\sqrt{\varepsilon}E^2 >= \frac{cn}{4\pi} < E^2 >= \frac{cn}{8\pi}E_0^2.$$

И для всех будет прекрасней, для всех будет полезней не таскать коэффициент:

$$I \propto E_0^2 \qquad I \propto E^2 \qquad I = E^2\left[\frac{\text{В}^2}{\text{м}^2}\right],$$

сокращать на размерный коэффициент очень круто, поэтому запомним, что размерность $[I] = \frac{\text{Дж}}{\text{с cm}}$.

Таким образом со всеми предположениями:

$$I = A_0^2\frac{W_0^2}{W^2(z)}\exp\left(-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right).$$

Это называется *Гаусовой интенсивностью.* Читатель может построить её самостоятельно.

Мощность

$$P = \int_0^\infty I(\rho)2\pi\rho d\rho = \frac{1}{2}I_0(\pi W_0^2).$$

И в построенном читателями графике в предыдущем пункте если посмотреть на ширину полосы под распределением, то можно заметить, что $\rho_0 = W(z)$, в связи с чем $W(z)$ называют *радиусом пучка.*

Посмотрим, что у нас с нашим радиусом творится:

$$W(z) = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}\left(1+\frac{z^2}{z_0^2}\right)},$$

если пытливый читатель построить и этот график, то он (график) пересечет $z = 0$ в $W(0) = W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}}$. Асимптотически он будет стремиться к прямой с коэффициентом наклона: $\theta \approx \sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_0}} = \frac{W_0}{z_0}$.

Для примера если взять лазер $\lambda_0 = 633$ нм, с $2W_0 = 2$ см, то *глубина резкости* будет: $2z_0 = 1$ км. Если же $2W_0 = 2$ мкм, то уже всё будет потоньше: $2z_0 = 1$ нм.

6 Лекция 6

Уширение спектральных линий

Естественная ширина линии

В нашем случае это квантовое определение, которому мы прикрутим классические колёса. А именно, возьмём модель осциллятора, то есть атом излучает как:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x}\omega_0^2 x = 0, \qquad x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = 0.$$

И решение соответственно:

$$x(t) = x_0e^{-\gamma t}(\cos\omega t + \frac{\gamma}{2\omega}\sin\omega t), \qquad \omega = \sqrt{\omega_0 - \gamma^2}.$$

Будем считать, что затухание у нас слабое:

$$\gamma << \omega_0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = x_0e^{-\gamma t}\cos\omega_0 t.$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}A(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \qquad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Имеем итого "амплитуду"преобразования Фурье:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x_0e^{-\gamma t}\cos\omega_0 te^{-i\omega t}dt = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}x_0e^{-\gamma t}e^{i(\omega_0-\omega)t}dt + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}x_0e^{-\gamma t}e^{i(\omega_0+\omega)t}dt =$$

$$= \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-\gamma t+i(\omega_0-\omega)t}}{i(\omega_0-\omega)-\gamma} + \underbrace{\frac{e^{-\gamma t+i(\omega_0+\omega)t}}{i(\omega_0+\omega)-\gamma}}_{\to 0}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}(i(\omega_0-\omega)-\gamma)}.$$

Но узнавать что-то мы ведь можем только про интесивнсоть:

$$I = \frac{x_0^2}{8\pi((\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2)}.$$

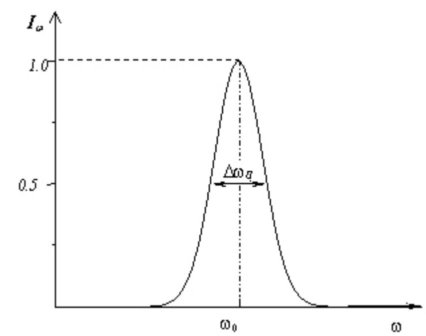
Ширина профиля $I(\omega)$) порядка 10^9.

Доплеровское уширение

При движении детектируемого источника на/от вас фиксируемая частота будет:

$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{v_x}{c}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \omega_0(1 + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}).$$

То есть сколько-то атомов летит с одной скоростью на вас, сколько-то перепендикулярно вам но с большей скорости. Таким образом имеет место Гауссово распределение этих атомов по скоростям. Соотвественно больше всего тех, кто вообще не движется в проекции на вашу ось.



Поговорим теперь про распределения:

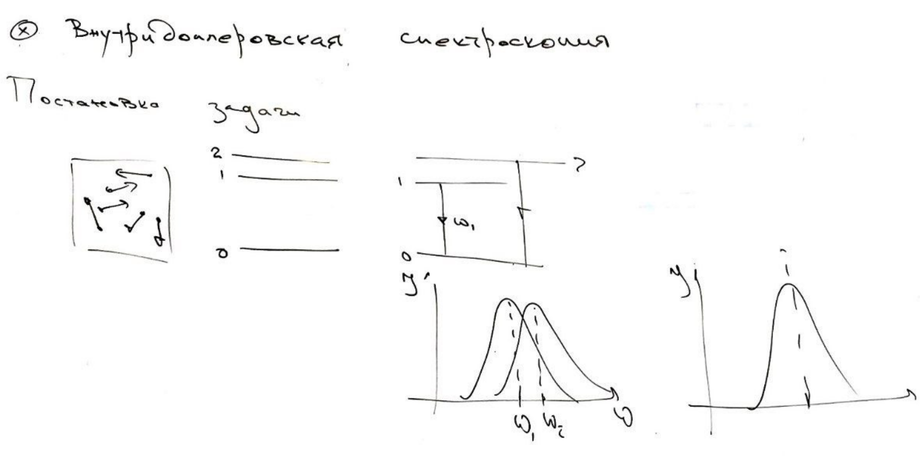
$$v_0^2 = \frac{2rT}{m} \qquad \Rightarrow \qquad dN = N\exp\left(-\frac{(\omega-\omega_0)^2c^2}{\omega_0^2 v_0^2}\right)\frac{c}{\omega_0}d\omega.$$

Столкновительное уширение

Времяпролётное уширение

Внутридоплеровская сперктроскопия

Постановка задачи: есть атомы в коробку, которые носятся туда-сюда, а мы такие берём и посылаем пучок (ну или следим за пучок оттуда). Пусть мы нашли две линии, но из-за доплеровского уширения, если линии близки, то они неплохо так сольются, и различить их будет трудно.



Квантовая механика для самых маленьких: что умеет делать электрон?

Для сечения σ (вероятность что-то сделать) про переходы электронов на уровни вних под/без действия внешнего излучения ответ:

- электрон умеет поглощать фотончик $h\nu$;
- электрон умеет вынужденно излучать;
- электрон умеет спонтанно излучать;
- электрон умеет не излучать.

Кинематические уравнения (скоростные)

Для двух уравнений, количество электронов на уровне: n_1 и n_2. Для характерных времен b – bезизлучательного процесса и c – спонтанного процесса.

$$\dot{n}_2 = -\frac{n_2}{\tau_b} - \frac{n_2}{\tau_c} \qquad \Rightarrow \qquad n_2 = n_{20}\exp\left(-\frac{t}{\tau_b} - \frac{t}{\tau_c}\right).$$

Если есть поток фотонов $F = \frac{I}{h\nu}$, который побуждает переходить электроны и с верхнего не нижний и наоборот:

$$\dot{n}_1 = -F\sigma n_1 + F\sigma n_2 + \frac{n_2}{\tau_b}.$$

$$\dot{n}_2 = F\sigma n_1 - F\sigma n_2 - \frac{n_2}{\tau_b}.$$

Для $n_1 + n_2 = N$:

$$\dot{n}_1 = -F\sigma n_1 + F\sigma n_2 + \frac{n_2}{\tau_b} + \frac{N}{\tau_b} - \frac{n_1}{\tau_b} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{n}_1 + n_1\left(2\sigma F + \frac{1}{\tau_b}\right) = N\sigma F + \frac{N}{\tau_b}.$$

Таким образом:

$$n_1 = N\frac{\sigma F + \frac{1}{\tau_b}}{2\sigma F + \frac{1}{\tau_b}} = N\frac{F + \frac{1}{s\tau_b}}{2F + \frac{1}{\sigma\tau_b}}.$$

А теперь если сказать, что то, сколько приходит и сколько уходит равны, потому как просто больше некому излучаться и поглощать, то:

$$0 = -n_1\sigma F + n_2\sigma F + \frac{n_2}{\tau_b}$$

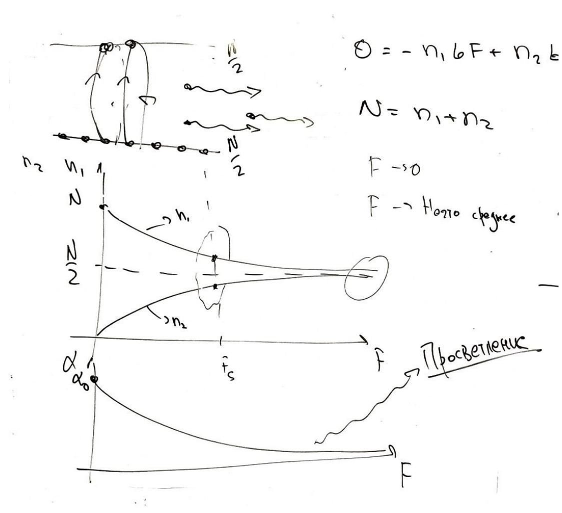
Обозначим как что-то характерное $F_s = \frac{1}{\gamma\tau_b}$, тогда имеем

$$n(F) = N\frac{F + F_s}{2F + F_s}.$$

И введем ещё такую величину на веру: коэффициент поглощения — $\alpha = n_1\sigma - n_2\sigma$. Почему так удобно:

$$dF = -(n_1\sigma - n_2\sigma)F dz.$$

Наконец. Если есть среда, которая, например поглощает красный свет, но мы будем всё больше увеличивать падающий поток, то рано или поздно атомов не хватит на поглощене и материал *просветлиться.*



Напрягаемся в последний раз. Много слушаем и узнаем про провал Лэмба.

Семинары Зябловского А.А. по теории поля

1 Семинар по теории поля 25.03.2021

Про мультипольное разложение

Берем вторую пару уравнений Максвелла

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = -\frac{4\pi}{c} J^\nu, \qquad \partial_\mu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0.$$

Перепишем в терминах векторного потенциала поля:

$$\partial_\mu \left(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu\right) = -\frac{4\pi}{c} J^\nu \quad \Rightarrow \quad \partial^\nu \partial_\mu A^\mu - \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = -\frac{4\pi}{c} J^\nu$$

Воспользуемся калибровкой Лоренца, то есть $\partial_\mu A^\nu = 0$. Тогда наши уравнение становится супер приятным, запишем его через оператор Даламбера:

$$\partial_\mu \partial^\mu = \Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle.$$

Помня, что $J^\nu = (c\rho, \boldsymbol{J})$, получаем:

$$\Box\varphi = 4\pi\rho \qquad \Box\boldsymbol{A} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} \tag{2.8}$$

Если мы говорим про электростатику, то $\rho \neq f(t)$, тогда получаем уравнение Лапласа:

$$\triangle\varphi = -4\pi\rho.$$

Решать будем с помощью функции Грина, для лапласиана и даламбертиана соответственно:

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{-1}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}, \qquad G(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{r}', t') = \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

$$\varphi(x) = \int G(x, x') f(x') dx' \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(\boldsymbol{r}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d^3r' = \frac{Q}{r} + \frac{\boldsymbol{dr}}{r^3} + \frac{r_\alpha r_\beta D_{\alpha\beta}}{2r^5} + \ldots \tag{2.9}$$

Здесь введено очень удобное обозначение:

$$\boldsymbol{d} = \int_V \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} d^3r \text{ — дипольный момент.}$$

$$\boldsymbol{D}_{\alpha\beta} = \int \rho(r)(3r_\alpha r_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}) d^3r \text{ — квадрупольный момент.}$$

Соответственно, не в нашей задаче, но в магнитостатике, аналогично:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int \frac{\boldsymbol{L}(\boldsymbol{r}')}{c|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d^3\boldsymbol{r}'$$

Проведя определенные выкладки можно получить интенсивность излучения системы зарядов в общем случае:

$$I = \frac{2|\ddot{\boldsymbol{d}}|^2}{3c^3} + \frac{2|\ddot{\boldsymbol{\mu}}|^2}{3c^3} + \frac{\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\beta}}{180c^5} + \ldots$$

2 Семинар по теории поля 01.04.2021

С прошлого семинара помним (2.9). А также выражение для величин: $\boldsymbol{d}$, $D_{\alpha\beta}$ и $Q = \int \rho(\boldsymbol{r}) d^3\boldsymbol{r}$. Ещё нам понадобиться выражение для октуполя:

$$O_{\alpha\beta\gamma} = \int \rho(\boldsymbol{r})(15r_\alpha r_\beta r_\gamma - 3r_\alpha\delta_{\beta\gamma} - 3r_\beta\delta_{\alpha\gamma} - 3r_\gamma\delta_{\alpha\beta}r^2) d^3r.$$

Опустим причины появления такого *чудного* выражения, скажем только что октуполь войдёт в разложение для скалярного потенциала как:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d^3r' = \frac{Q}{r} + \frac{\boldsymbol{dr}}{r^3} + \frac{r_\alpha r_\beta D_{\alpha\beta}}{2r^5} + \frac{O_{\alpha\beta\gamma} r_\alpha r_\beta r_\gamma}{6r^7} + \ldots \tag{2.10}$$

Вот мы вводим всё новые члены разложения, но давайте же наконец посмотрим на их свойства. Начнём с квадрупольного момента:

$$D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}, \qquad D_{\alpha\beta}\delta^{\alpha\beta} = \int \rho(\boldsymbol{r})(3r_\alpha r_\beta\delta^{\alpha\beta} - r^2\delta_{\alpha\beta}\delta^{\alpha\beta}) d^3r = 0.$$

Таким образом у квадрупольного момента, с получившимися ограничивающими его свойствами, существует 5 независимых элементов.

Теперь про октупольный момент. У него вообще есть 27 компонент, но сколько же из них независимы. Вариантов когда:

1. все индексы разные $O_{\alpha\beta\gamma}$ всего 6, но из-за индифферентности к перестановкам, они сводятся к 1;
2. все индексы одинаковые $O_{\alpha\alpha\alpha}$ всега 3;
3. Две равны и одна отлична: $O_{\alpha\alpha\beta}$ всего 18, но опять из-за перестановок их независимых остается 6.

Итого уже сократили возможное количество независимых переменных к 10.

Теперь свёртками мы можем получить ещё связи и ещё больше сократить число независимых переменных.

$$O_{\alpha\beta\gamma}\delta^{\alpha\beta} = \int \rho(\boldsymbol{r})(15r_\alpha r_\beta r_\gamma\delta^{\alpha\beta} - 3r_\alpha\delta_{\beta\gamma}\delta^{\alpha\beta} - 3r_\beta\delta_{\alpha\gamma}\delta^{\alpha\beta} - 3r_\gamma\delta_{\alpha\beta}\delta^{\alpha\beta}r^2)d^3r = \int \rho(\boldsymbol{r})(15r^2r_\gamma - 3r_\gamma r^2 - 3r_\gamma r^2 - 9r^2r_\gamma)d^3r = 0.$$

Таким образом, по паре каждых компонент свертка – нуль, то есть ещё 3 условия налагаются на выражение для октупольного момента, оставляя всего **7** независимых компонент.

Задача 11

Задача аксиально симметрична относительно оси Oz, дан потенциал:

$$v(r,0) - v_0\left(1 - \frac{r^2 - a^2}{r\sqrt{r^2+a^2}}\right), \ r > a.$$

Хочется узнать $v(r,\theta)-?$ при условии, что $r \gg a$.

Соотвественно раскладываем в ряд, раз $r \gg a$, и получаем:

$$v(z,0) = v_0\left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)\left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)^{-1/2}\right) \simeq v_0\left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)\left(1 + \frac{a^2}{2z^2}\right)\right) = v_0\left(\frac{3a^2}{2z^2} - \frac{a^4}{2z^4}\right).$$

С другой стороны по теории должно было бы получиться разложение (2.10). Сравнивая степени в разложении получаем:

$$Q = 0, \qquad D_{zz} = 0, \qquad d_z = \frac{3a^2}{2}v_0, \qquad 0_{zzz} = -3a^4v_0.$$

Теперь применим аксиальную симметрию: $\boldsymbol{d} = \int \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}d^3\boldsymbol{r}$. В дипольном моменте компоненты $d_x = d_y = 0$, что мы получаем так же как в упражнении про усреднение $\rho(x,y) = \rho(-x,-y)$.

Далее $D_{\alpha\alpha} = 0$, значит $D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$ то есть $D_{xx} = -D_{yy}$, но в силу аксиальной симметрии такое возможно лишь если $D_{xx} = D_{yy} = 0$.

Наконец $O_{\alpha\alpha\beta} = 0$. То есть $O_{xxz} + O_{yyz} + O_{zzz} = 0$, тогда получаем:

$$O_{xxz} = O_{yyz} = -\frac{O_{zzz}}{2} = \frac{3a^4}{2}v_0$$

$$O_{xzx} = O_{yzy} = O_{zxx} = O_{zyy} = \frac{3a^4}{2}v_0$$

Вариант со всеми разными: $O_{xyz} = \int \rho(x,y,z)(15xyz)d^3r = 0$, так как $\rho(x) = \rho(-x)$. И поэтому же $O_{xxx} = O_{yyy} = 0$.

И не взятые ещё:

$$O_{zzx} = O_{zzy} = O_{xzz} = O_{yzz} = O_{zxz} = O_{zyz} = 0.$$

$$O_{xxy} = O_{yyx} = O_{xyx} = O_{yxy} = O_{yxx} = O_{xyy} = 0.$$

Теперь давайте, как нас просят в задаче, подставим $z = r\cos\theta$:

$$v_0(r,\theta) = \frac{3a^2v_0}{2}\frac{\cos\theta}{r^2} + \left(-\frac{a^4v_0}{2r^4}\cos^3\theta + \frac{3O_{xxz}xxz}{6r^7} + \frac{3O_{yyz}yyz}{6r^7}\right) = \frac{3a^2v_0}{2}\frac{\cos^2\theta}{r^2} + \frac{\left(\frac{3}{4}\cos\theta\sin^2\theta - \frac{1}{2}\cos^3\theta\right)}{r^4}a^4v_0.$$

/так как по сферической замене: $xxz = r^3\cos\theta\sin^2\theta\cos^2\varphi$, $yyz = r^3\cos\theta\sin^2\theta\sin^2\varphi$/

Задача 10

Нас просят найти диполный момент двух полусфер. Так как нас спросили только про дипольный момент, а про распределение зарядов не спросили, то мы последнее и не будем находить.

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \ldots = \sum_{l=0}^{\infty}\varphi^{(l)}.$$

Известно что (ЛЛII §41 его лучше прочитать, потому как мне лень техать выражения для всех величин тут) :

$$\varphi^{(l)} = \sum_a e_a \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} D_l^{(m)} Y_{lm}(\theta,\varphi) \frac{r_a^l}{R_0^{l+1}}. \tag{2.11}$$

Любой скалярный потенциал мы всегда можем разложить по сферическим гармоникам:

$$\varphi(z) = \sum_{l,m} c_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi) R(z).$$

На сфере: $R = z$:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \Phi_0, & z > 0 \\ -\Phi_0, & z < 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \int \varphi(r) Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sin\theta d\theta d\varphi = i\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos\theta \varphi(r) \sin\theta d\theta \varphi =$$

$$= i\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left(-\int_0^{\pi/2} \Phi_0 \cos\theta d\cos\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \Phi_0 \cos\theta d\cos\theta \right) = 2\Phi_0 \pi i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(-\frac{\cos^2\theta}{2}\bigg|_0^{\pi/2} + \frac{\cos^2\theta}{2}\bigg|_{\pi/2}^{\pi} \right).$$

Мы получили, что из (2.11) взяв как и в выводе формулы до $l = 1$:

$$2\pi i \Phi_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{r} D_l^m = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} i d_z \frac{1}{r} \qquad \Rightarrow \qquad d_z = r\frac{3\Phi_0}{2}.$$

Занятно, но решая ту же задачу на семинаре четвртой парой 08.04 мы получили ответ:

$$d_z = \frac{3}{2} R^2 \Phi_0 \qquad \Leftarrow \qquad \varphi^{(l)} = \sum_a e_a \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} D_l^{(m)} Y_{lm}(\theta,\varphi) \frac{1}{R_0^{l+1}},$$

думается, что это из-за отличия в вот этой формуле (2.11). И вроде бы сейчас он правдивее и совпадает с ЛЛ2.

3 Семинар по теории поля 08.04.2021

Вспоминаем, что было (2.8). Таким образом у нас есть $\rho(t)$ и $\boldsymbol{J}(t)$. Разложим соответствующие потенциалы (компоненты четыре-потенциала):

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = \int \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} d^3\boldsymbol{r}', \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \int \frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}\right)}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} d^3\boldsymbol{r}'.$$

Сразу идём в нулевое приближение:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \int \frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{r}{c}\right)}{cr} d^3\boldsymbol{r}' = \frac{1}{rc}\sum_a e_a \boldsymbol{v}_a = \frac{1}{rc}\sum_a e_a \dot{\boldsymbol{r}}_a = \frac{1}{rc}\frac{d}{dt}\left(\sum_a e_a r_a\right) = \frac{\dot{\boldsymbol{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr}.$$

Воспользуемся калибровкой Лоренца:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -c\operatorname{div}\boldsymbol{A}.$$

Далее, собственно приходим к напряженностям:

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}.$$

Дифференцируем:

$$\boldsymbol{E} = \frac{3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}}{r^3} + \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{d}) - \dot{\boldsymbol{d}}}{cr^2} + \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\dot{\boldsymbol{d}}) - \ddot{\boldsymbol{d}}}{c^2 r}, \qquad \boldsymbol{H} = \frac{[\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{d}}]}{cr^2} + \frac{[\boldsymbol{n}\times\ddot{\boldsymbol{d}}]}{c^2 r}.$$

Если у нас $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_0\cos(\omega t)$, то при дифференцировании у нас там вылезет волновой вектор $k = \omega/c$. Далее будем работать в приближении $kr \gg 1$ – так называемая волновая зона. Таким образом умеем:

$$\boldsymbol{H} = \frac{[\boldsymbol{n}\times\ddot{\boldsymbol{d}}]}{c^2 r} \qquad \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{d}}) - \ddot{\boldsymbol{d}}}{c^2 r}.$$

Покажем, что $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{H} \perp \boldsymbol{n}$:

$$(\boldsymbol{n}\boldsymbol{H}) = \frac{1}{c^2 r}(\boldsymbol{n}[\boldsymbol{n}\times\ddot{\boldsymbol{d}}]) = 0, \qquad (\boldsymbol{n}\boldsymbol{E}) = \frac{1}{c^2 r}[(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n})(\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{d}}) - (\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{d}})] = 0,$$

$$[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}] = \frac{1}{c^2 r}[\boldsymbol{n}\times[\boldsymbol{n}\times\ddot{\boldsymbol{d}}]] = \frac{1}{c^2 r}[\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\ddot{\boldsymbol{d}}) - \ddot{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n})] = \boldsymbol{E}.$$

Для Пойтинга:

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}] = \frac{c}{4\pi}[[\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}]\times\boldsymbol{H}] = -\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{H}) - \boldsymbol{n}|\boldsymbol{H}|^2) = \frac{c}{4\pi}|\boldsymbol{H}|^2\boldsymbol{n} = \frac{c}{4\pi}|\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{n}.$$

Тогда интенсивность излучения от точечного источника через поверхность, видимую под телесным углом $d\Omega$:

$$dI = R^2 d\Omega \boldsymbol{n}\boldsymbol{S} = \frac{cR^2}{4\pi}|\boldsymbol{H}|^2 d\Omega.$$

Задача 15

Пусть есть плоскость Oxz, и диполь направлен под углом θ_d к оси Oz. Воспользуемся методом изображений и зеркально под проводящей плоскостью Oxyрасположим второй диполь, заменяющий её.

$$\boldsymbol{d}_1 = d(\boldsymbol{e}_z \cos\theta_d + \boldsymbol{e}\sin\theta_d), \qquad \boldsymbol{d}_2 = d(\boldsymbol{e}_z \cos\theta_d - \boldsymbol{e}_x \sin\theta_d).$$

Здесь введены единичные векторы, и также ещё введём на будущее $\boldsymbol{r}$ вектор на точку наблюдения из середины координат, $\boldsymbol{n}$ – единичный по этому направлению.

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} - L\boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r} + L\boldsymbol{e}_z.$$

Тут $2L$ – расстояние между диполями, будем работать в приближении $r \gg L$. Тогда примерно $\boldsymbol{r}_1 \parallel \boldsymbol{r}_2 \parallel \boldsymbol{n}$. И соответственно $r = (\boldsymbol{r}\boldsymbol{n})$, а остальные:

$$r_1 = (\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}) = r - L(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n}), \qquad r_2 = (\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{n}) = r + L(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n}).$$

И для $d_{1,2}(t - \frac{r_{1,2}}{c})$

$$\boldsymbol{d}_1 = d(\boldsymbol{e}_z \cos\theta_d + \boldsymbol{e}\sin\theta_d)\cos(\omega t - kr_1), \qquad \boldsymbol{d}_2 = d(\boldsymbol{e}_z \cos\theta_d - \boldsymbol{e}_x \sin\theta_d)\cos(\omega t - kr_2),$$

колеблющегося гармонически (по условию):

$$\boldsymbol{H} = \frac{[\ddot{\boldsymbol{d}}_1 \times \boldsymbol{n}]}{c^2 r_1} + \frac{\ddot{\boldsymbol{d}}_2 \times \boldsymbol{n}}{c^2 r_2} = \frac{-\omega^2 d}{c^2 r}\Big(([\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n}]\cos\theta_d + [\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{n}]\sin\theta_d)\cos(\omega t - \frac{\omega}{c}r_1) + ([\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n}]\cos\theta_d + [\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{n}]\sin\theta_d)\cos(\omega t - \frac{\omega}{c}r_2$$

Очень хочется упростить:

$$\cos(\omega t - kr_1) = \cos(\omega t - kr + kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})) = \cos(\omega t - kr) cos(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})) - \sin(\omega t - kr)\sin(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})).$$

$$\cos(\omega t - kr_2) = \cos(\omega t - kr - kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})) = \cos(\omega t - kr) cos(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})) + \sin(\omega t - kr)\sin(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})).$$

Тогда возвращаемся к выражению для H:

$$\boldsymbol{H} = \frac{-2\omega^2 d}{c^2 r}\left([\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n}]\cos\theta_d \cos(\omega t - kr)\cos(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})) - [\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{n}]\sin\theta_d \sin(\omega t - kr)\sin(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n}))\right).$$

4 Семинар по теории поля 15.04.2021

Продолжаем решать задачу...

Имея выражение для вектора Пойтинга, как было показано выше:

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}] = \frac{c}{4\pi}|\boldsymbol{H}|^2\boldsymbol{n}, \qquad dI = r^2 \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} d\Omega.$$

Усредняя по периоду:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - kz)dt = \frac{1}{2}.$$

Таким образом усреднением для вектора Пойтинга мы получаем:

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\frac{2\omega^4 d^2}{c^4 r^2}\left(|[\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n}]|^2 \cos^2\theta_d cos^2(kL(\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{n})) + |[\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{n}]|^2 \sin^2\theta_d \sin^2(kL(\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{n}))\right)\boldsymbol{n}.$$

Соответственно для интенсивности излучения получаем:

$$dI = \frac{\omega^4 d^2}{2\pi c^3}\left(|[\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n}]|^2 \cos^2\theta_d cos^2(kL(\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{n})) + |[\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{n}]|^2 \sin^2\theta_d \sin^2(kL(\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{n}))\right)d\Omega.$$

В задаче на это интегрировать не просим, нам достаточно просто посмотреть предельные случаи:

- $L \ll \lambda$, тогда получаем: $dI \simeq \frac{\omega^4 d^2}{2\pi c^3}|[\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n}]|^2 \cos^2\theta_d d\Omega$.

  $$I = \int dI = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\omega^4 d^2}{2\pi c^3}|[\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n}]|^2 sin^2\theta \cos^2\theta_d \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{-\omega^4 d^2}{c^3}\cos^2\theta_d \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\cos\theta = \frac{2}{3}\frac{\omega^4 d^2}{c^3}\cos^2\theta_d.$$

  После усреднения получим:

  $$\langle I\rangle = \frac{2|\ddot{d}|^2}{3c^3} = \frac{\omega^4 d^2}{3c^3}.$$

- Теперь $L \gg \lambda$, тогда

$$I = \int dI = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\omega^4 d^2}{2\pi c^3} \sin^2\theta \cos^2(kL\cos\theta)\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{\omega^4 d^2}{c^3}\int_0^1 (1-x^2)cos^2(kLx)dx = \frac{\omega^4 d^2}{3c^3}.$$

Задача 16

Значит есть разноименные заряды, один будем характеризовать индексами "1 а другой "2". Будем работать в системе центра инерции:

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2},\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \quad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{R}_{\text{центра инерции}} = 0.$$

Тогда не сложно вычислить:

$$\boldsymbol{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(1+\frac{m_2}{m_1}),\ \boldsymbol{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}.$$

Ну и как мы показывали для излучения диполя: $I = 2|\ddot{\boldsymbol{d}}|^2/(3c^3)$. В нашем случае:

$$\boldsymbol{d} = e_1\boldsymbol{r}_1 + e_2\boldsymbol{r}_2 = \left(\frac{e_2m_1 - e_1m_2}{m_1+m_2}\right)\boldsymbol{r} = q\boldsymbol{r} \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{2q^2\ddot{\boldsymbol{r}}^2}{3c^3}.$$

Введем $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$. Посмотрим на энергию, излучаемую за один период:

$$\delta\varepsilon = I\cdot T_{\text{период}} = I\frac{2\pi r}{v}.$$

Будем работать в предположении, что $\delta\varepsilon \ll \varepsilon$. Воспользуемся теоремой Вириала:

$$2\langle T\rangle = n\langle u\rangle,\ T = \frac{\mu v^2}{2},\ \mu v^2 = -\frac{e_1e_2}{r} \quad \rightsquigarrow \quad u = \frac{e_1e_2}{r}.$$

Таким образом $v = \sqrt{|e_1e_2|/\mu^2}$, тогда опять к энергии:

$$\delta\varepsilon = \frac{2q^2\ddot{r}^2}{3c^3}\frac{\pi r^{3/2}\mu^{1/2}}{|e_1e_2|^{1/2}} = \frac{2q^2}{3c^3}\frac{|e_1e_2|^{3/2}}{\mu^{3/2}r^{5/2}}\pi = \frac{|e_1e_2}{2r}\frac{4\pi q^2}{3|e_1e_2|}\underbrace{\frac{|e_1e_2|^{3/2}}{c^3\mu^{3/2}r^{3/2}}}_{(v/c)^3} = \varepsilon\left(\frac{v}{c}\right)^3\frac{4\pi q^2}{3|e_1e_2|} \ll \varepsilon.$$

Теперь на интересует $r(t)$. Знаем, что $\varepsilon = \frac{e_1e_2}{2r}$.

$$I = -\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{d\varepsilon}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{e_1e_2}{2r^2}\dot{r} = \frac{2q^2\ddot{r}^2}{3c^3},$$

подставляем сюда Кулона $\mu\ddot{r} = \frac{e_1e_2}{r^2}$, а он выполняется, так как за один оборот не очень много энергии теряется:

$$\frac{e_1e_2}{2r^2}\dot{r} = \frac{2q^2(e_1e_2)^2}{3c^3\mu^2r^4} \quad \rightsquigarrow \quad r^2\dot{r} = \frac{4q^2(e_1e_2}{3c^3\mu^2} = \frac{1}{3}\frac{dr^3}{dt}.$$

Не сложно тогда получается:

$$r = \left(r_0^3 + \frac{4\theta^2(e_1e_2)}{c^3\mu^2}t\right)^{1/3}, \qquad t_{\text{пад}} = \frac{r_0^3\mu^2c^3}{4q^2(e_1e_2)}.$$

Для атома время падения электрона на него $t \sim 10^{-8}$ секунды, и действительно в классической теории поля атомы с электронами стабильно существовать не могут.

Задача 17

Два заряда у нас сталкиваются, излучают и летят обратно, нас интересует процесс излучения. Будем считать, что $v \ll c$. Воспользуемся выведенной формулой $I = 2|\ddot{\boldsymbol{d}}|^2/3(c^3)$. И всё так же живём в системе центра инерции, как в прошлой задаче.

$$\boldsymbol{d} = e_1\boldsymbol{r}_1 + e_2\boldsymbol{r}_2 = \left(\frac{e_2m_1 - e_1m_2}{m_1+m_2}\right)\boldsymbol{r} = q\boldsymbol{r}.$$

Давайте рассмотрим случай, когда $e_2m_1 \neq e_1m_2$. Тогда у нас не появляется лишних нулей, $I = \frac{2q^2\ddot{\boldsymbol{r}}^2}{ec^3}$. И, собственно, для энергии имеем:

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} I(t)dt = \frac{2q^2}{3c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\ddot{r}^2dt = \frac{2q^2}{3c^3}\int_{v_{-\infty}}^{v_\infty}\ddot{r}d\dot{r}$$

Опять, работая с предположением: $\varepsilon_{\text{изл}} \ll \varepsilon_{\text{полная}}$, воспользуемся законом кулона. Ещё нам, для выражения скорости понадобится закон сохранения энергии:

$$\frac{\mu v_\infty^2}{2} = \frac{\mu v^2}{2} + \frac{e_1e_2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(e_1e_2)^2}{r^2} = \frac{\mu^2}{4}(v_\infty^2 - v^2)^2,$$

что при подстановке в закон Кулона:

$$\ddot{r} = \frac{e_1e_2}{\mu r^2} = \frac{(e_1e_2)^2}{r^2}\frac{1}{\mu(e_1e_2)} = \frac{\mu}{4(e_1e_2)}(v_\infty^2 - v^2)^2.$$

Теперь мы готовы взять наш интеграл:

$$\varepsilon = \frac{q^2\mu}{6c^3(e_1e_2)}\int_{-v_\infty}^{v_\infty}(v_\infty^2 - v^2)dv = \frac{\mu q^2}{6c^3(e_1e_2)}\left(v_\infty^4 v - \frac{2v^3}{3}v_\infty^2 + \frac{v^5}{5}\right)\Bigg|_{-v_\infty}^{v_\infty} = \frac{8\mu q^2}{45c^3(e_1e_2)}v_\infty^5 = \left(\frac{\mu v_\infty^2}{2}\right)\left(\frac{v_\infty}{c}\right)^3\frac{16q^2}{45(e_1e_2)} \ll \frac{\mu v_\infty^2}{2}.$$