Всеобщая тетрадь

Содержание

Современная оптика лекция 1

Лектор — Л.М.Колдунов

Геометрическая оптика ⊂ волновая оптика ⊂ эм-оптика ⊂ квантовая оптика.

Уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho_{\text{out}} \\
&\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \\
&\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
&\operatorname{rot} \bar{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\text{out}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
&\boldsymbol{j}_{\text{out}} = 0 \qquad \rho_{\text{out}} = 0
\end{aligned}$$

Покрутим уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{B} \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} = -\Delta\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\mu\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

Получаем уравнение электромагнитной волны:

$$\Delta\boldsymbol{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

Получаем решение вида

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\exp(i\omega t - i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}) \qquad \Rightarrow \qquad -k^2\boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2\boldsymbol{E} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}$$

Уравнение Эйконала

Имеем постулаты геометрическо оптики:

1. Свет распространяется в виде лучей;
2. Среда характеризуется показателем преломления n: $c_{\text{среды}} = c/n$;
3. $\int ndl \to \min$.

Def 0.1. *Оптическим путём* назовём $S = \int_A^B n(\boldsymbol{r})dl$

Найдём ход лучей в предположении, что $n(\boldsymbol{r})$:

$$\Delta\boldsymbol{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad E(\boldsymbol{r},t) = a(\boldsymbol{r})\exp(ik_o \underbrace{\Phi(\boldsymbol{r})}_{\text{Эйконал}} - i\omega t).$$

Взяв $\boldsymbol{E}$ одномерным посчитаем в лоб лапласиан:

$$\Delta E = \Delta a\exp() - a(\boldsymbol{r})k_0^2|\operatorname{grad}\Phi|^2\exp() + i(2k_0(\operatorname{grad} a, \operatorname{grad}\Phi) + k_0 a\Delta\Phi)exp()$$

Сначала вещественную часть:

$$\Delta a\exp() - a(\boldsymbol{r})k_0^2|\operatorname{grad}\Phi|^2\exp() + \frac{\omega^2}{c^2}n^2 a\exp() = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{|\operatorname{grad}\Phi|^2 = \frac{1}{ak_0^2}\Delta a + n^2.}$$

Теперь будем считать верным предположение:

$$|\lambda\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}| \ll |\frac{\partial a}{\partial x}|, \qquad |\lambda\frac{\partial a}{\partial x}| \ll a, \qquad \lambda \to 0.$$

Получаем в приближении уравнение Эйконала:

$$|\operatorname{grad}\Phi| = n. \tag{1.2}$$

Выражение $\omega t - k_0\Phi = \text{const}$ задаёт *Волновой фронт.*

$$\operatorname{grad}\Phi = n\boldsymbol{s}, \qquad |\boldsymbol{s}| = 1 \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial s} = n.$$

$$\omega dt - k_0 d\Phi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega dt = k_0 d\Phi = k_0\frac{d\Phi}{ds}ds = k_0 n ds.$$

Принцип Ферма

Пуст Φ — задано однозначно: $\operatorname{grad}\Phi = n\boldsymbol{s}$. Возьмём интеграл по замкнутому контуру:

$$\oint n(\boldsymbol{s}, d\boldsymbol{l}) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \int_{ACB} n(\boldsymbol{s}, d\boldsymbol{l}) = \int_{ADB} n(\boldsymbol{s}, d\boldsymbol{l}).$$

Но $\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{l} = sdl = dl$ на ACB. Тогда и получим выражение, доказывающее принцип Ферма:

$$\int_{ACB} ndl = \int_{ADB} n\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{l} \leqslant \int_{ADB} ndl.$$

Приведём пару примеров: (Колдунов гнём зеркало)

Траектория луча

Было соотношение, что: $m\boldsymbol{s} = \operatorname{grad}\Phi$. Для траектории: $\boldsymbol{s} = d\boldsymbol{r}/dl$. Тогда для градиента (который d/dl):

$$n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl} = \operatorname{grad}\Phi \qquad \frac{d}{dl}\left(n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}\right) = \frac{d}{dl}\operatorname{grad}\Phi = \operatorname{grad}\frac{d\Phi}{dl} = \operatorname{grad} n \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dl}\left(n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}\right) = \operatorname{grad} n.$$

Получили уравнение луча. Давайте теперь возьмём однородную среду:

$$n = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dl^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}l + \boldsymbol{b}.$$

Теперь возьмём:

$$\frac{d}{dl}(n\boldsymbol{s}) = \operatorname{grad} n \quad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{s}\frac{dn}{dl} + n\frac{d\boldsymbol{s}}{dl} = \nabla n \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\boldsymbol{N}}{R} = \frac{1}{n}\left(\nabla n - \boldsymbol{s}\frac{dn}{dl}\right)$$

Домножим последнее выражение скалярно на $\boldsymbol{N}$:

$$0 < \frac{N^2}{R} = \frac{(\boldsymbol{N}, \nabla n)}{n} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{N}, \nabla n) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Луч поворачивает!}$$

((Пример про слоистую среду))

Уравнение луча в параксиальном приближении

((картинка))

$$n(y)\cos\theta(y) = n(ydy)\cos\theta(y{+}dy) = \left(n(y) + \frac{dn}{dy}\Delta y\right) cos\left(\theta(y) + \frac{d\theta}{dy}\Delta y\right) = \left(n(y) + \frac{dn}{dy}\Delta y\right)\left(\cos\theta - \sin\theta(y)\frac{d\theta}{dy}\Delta y\right).$$

То есть получаем, что

$$\frac{dn}{dy}\cos\theta(y) = n(y)\sin\theta(y)\frac{d\theta}{dy} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n}\frac{dn}{dy} = \tan\theta\frac{d\theta}{dy} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Пример параболической зависимости $n^2 = n_0^2(1-\alpha^2y^2)$ SELFOC.

$$\alpha y \ll 1 \qquad y''_{xx} = \frac{1}{n_0(1-\alpha^2y^2)^{1/2}}\frac{dn}{dy} = \frac{-n_0\alpha^2 y}{n_0(1-\alpha^2y^2)} = -\alpha^2 y. \quad \Rightarrow \quad y''_{xx} + \alpha^2 y = 0.$$

Такое вещество используют при создании стекловолокна, суть в том, что при заходе в канал под разными углами скорость примерно одна и та же распространения.

((забыли про мнимую часть!!!!))

Современная оптика лекция 2

Матричная оптика

Луч можно характеризовать его координатой y и углом к оптической оси x. То есть $\{y_1, \theta_1\} <-> \leftrightarrow \{y_1, n_1, \theta_1\}$, и $n\theta = v$. Таким образом:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & n_1\theta_1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перемещения

В ходе перемещения:

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta_1 \\ y_2 = y_1 + l\theta_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Или же второй вариант, который встречается в литературе:

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta_1 n \\ y_2 = y_1 + (l/n)\theta_1 n \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Матрица преломления на сферической поверхности

Пусть луч падает из среды с показателем преломления n_1 в n_2. Запишем условие падения:

$$n_1\beta_1 = n_2\beta_2, \quad \beta_1 = \theta_1 + \alpha, \quad \beta_2 = \theta_2 + \alpha, \quad n_1(\theta_1+\alpha) = n_2(\theta_2+\alpha), \quad \alpha = y_1/R.$$

$$v_2 = v_1 + \frac{n_1 - n_2}{R} y_1 \qquad \Rightarrow \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n_2-n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Или ещё в литературе она может встретиться как:

$$v_2 = \frac{n_1}{n_2}\theta_1 + \frac{n_1-n_2}{n_2 R} y_1 \qquad \Rightarrow \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n_2-n_1}{n_2 R} & \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

Общий подход

Пусть у нас есть какая-то система, части которой мы знаем как преобразуют луч по отдельности, то есть все матрицы преобразований знаем. Получаем матричное выражение с перемножением матриц:

$$M_3 M_2 M_1 \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{a} = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

По факту теперь имеем и какую-то матрицу в которой очень хочется понять значение её коэффициентов.

1. $D = 0$. Означает, что луч у нас идёт в фокальной плоскости.
2. $B = 0$. Тогда наша изображение: $y_2 = Ay_1$. Так называемые *сопряженные плоскости*. И A называется коэффициентом *поперечного увеличения*.
3. $C = 0$. Тогда наша изображение: $y_2 = B\theta_1$. D в этом случае называется коэффициентом. Тако случай называется телескопическим.

Перейдём у примерам.

Пример 0

Для тонкой линзы с двумя радиусами кривизны – внешним и внутренним:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n-1}{nR_2} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1-n}{nR_1} & \dfrac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n-1}{nR_2} + \dfrac{1-n}{nR_1} & 1 \end{pmatrix}$$

В левом нижнем углу у нас стоит *оптическая сила системы*: $(n-1)(1/R_1 - 1/R_2)$.

Пример 1

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{b}{F} & b + a\left(1 - \frac{b}{F}\right) \\ -\frac{1}{F} & 1 - \frac{a}{F} \end{pmatrix}$$

Таким образом получаем формулу линзы занулив левый верхний элемент:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \tag{2.5}$$

Задача 2 (см) файл

Только размер предмета не как в задаче — а 2 мм.

Какие матрицы запишем: сначала распространяемся, потом преломляемся, и наконец снова распространяемся.

$$\begin{pmatrix} 1 & x/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{x}{7.8} & 15 - \dfrac{x}{0.78} \\ -0.2 & -2 \end{pmatrix}$$

Снова $B = 0$ и решаем уравнение: $15 - \frac{x}{0.78} = 0$, откуда $x = 11.7$ см. Коэффициент увеличение $A = 1 - \dfrac{11.7}{0.78} = -0.5$.

Задача 4 (см) файл

Снова думаем — преломляемся–распространение–преломляемся–распространяемся.

$$\begin{pmatrix} 1 & F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-(1-n)}{-R} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2R}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2F(n-1)+(n-2)R}{nR} & \dfrac{-nF+2F+2R}{n} \\ \dfrac{2-2n}{nR} & \dfrac{2}{n}-1 \end{pmatrix}$$

И так $A = 0$ значит $-2F(n-1) = R(n-2)$, откуда $F = R\frac{2-n}{2(n-1)}$.

Задача 11 (см) файл

На самом деле это задача из Овчинкина 1.32.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{l}{F_2} & l \\ -\frac{1-\frac{l}{F_1}}{F_2} - \frac{1}{F_1} & 1-\frac{l}{F_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-lP_2 & l \\ -P_1-(1-lP_1)\,P_2 & 1-lP_1 \end{pmatrix}.$$

Про увеличения:

$$\frac{d}{dn}((n-1)(G_1+G_2)-(n-1)^2 lG_1G_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (G_1+G_2)-2(n-1)lG_1G_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{1}{2(n-1)}\left(\frac{1}{G_1}+\frac{1}{G_2}\right)$$

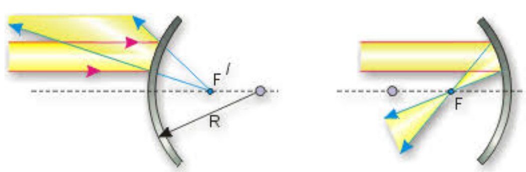
Или же

$$l = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)G_1}+\frac{1}{(n-1)G_2}\right) = \frac{F_1+F_2}{2}.$$

Современная оптика лекция 3

Обобщение на случай отражения

В прошлый раз у нас было матрица T (2.3) и матрица P (2.4).



Возьмём теперь зеркало, посмотрим на отражение для выгнутого зеркала (слева) и напишем матрицу отражения.

$$n_1 = n, n_2 = -n \quad \rightsquigarrow \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{-n-n}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

для вогнутого же (справа) заодно выпишем сразу все матрицы, которые у нас есть:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n_2-n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 1

Допустим шёл луч и упал на плоскопараллельную пластину и пошёл внутри неё змейкой.

$$\begin{pmatrix} 1 & h/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & hN/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 13

Описываем жизнь нашего луча умножением матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2R}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2R}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{n-4}{n} & -\dfrac{4R}{n} \\ \dfrac{2(n-2)}{nR} & \dfrac{n-4}{n} \end{pmatrix}$$

Периодические оптические системы

Пусть у нас оптическая ячейка уже после перемножения всех матриц характеризуется в итоге матрицей 2x2, с элементами A, B, C, D. У периодической системы такая ячейка встречается m раз:

$$\begin{pmatrix} y_m \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} y_{m+1} \\ v_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} y_m \\ v_m \end{pmatrix}$$

Получаем уравнения:

$$\begin{cases} y_{m+1} = Ay_m + Bv_m \\ v_{m+1} = Cy_m + Dv_m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_m = \dfrac{y_{m+1} - Ay_m}{B} \quad \Rightarrow \quad v_{m+1} = \dfrac{y_{m+2} - Ay_{m+1}}{B} \\ y_{m+2} - Ay_{m+1} = BCy_m + D(y_{m+1} - Ay_m) \end{cases}$$

Получили уравнение на y:

$$y_{m+2} - (A+D)y_{m+1} + (AD - BC)y_m = 0 \quad \Rightarrow \quad y_m = y_0 h^m \quad \Rightarrow \quad h^2 - (A+D)h + 1 = 0$$

Заменяя $A + D = 2b$, получаем три случая на детерминант: $h_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - 1}$.

1. $|b| < 1$: Тогда $h_{1,2} = e^{i\varphi} \Rightarrow y_m = \alpha_1 e^{im\varphi} + \alpha_2 e^{-im\varphi} = y_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_0)$.

Заметим, что y_m периодичен, только если $\varphi/2\pi$ – рациональное число.

Пример 2

Дана система линз: $\uparrow -d- \uparrow -d- \uparrow$. Матрицы прохождения луча:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -1/F & 1 - d/F \end{pmatrix}$$

Получаем, что устойчиво когда:

$$b = \frac{2 - d/F}{2} \quad \rightsquigarrow \quad |b| < 1 \quad \rightsquigarrow \quad 0 < \frac{b}{F} < 4.$$

Посмотрим случаи:

1. $d = F$: тогда $b = 1/2$, и тогда $b = \cos\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$;

2. $d = 2F$: тогда $b = 0$;

3. $d = 0$: тогда $d = 4F$.

Оптический резонатор

Пусть у нас есть два зеркала: $\big(- L - \big)$. Матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad b = (A+D)/2 = 2\underbrace{\left(1 + \frac{L}{R_1}\right)}_{g_1}\underbrace{\left(1 + \frac{L}{R_2}\right)}_{g_2} - 1.$$

Можно рассмотреть различные типы резонаторов:

1. Плоский;

2. Симметричный конфокальный;

3. Симметричный концентрический.

Современная оптика лекция 4

Оптика пучков

Что у нас есть. У нас есть волновое уравнение!

$$\nabla^2 E - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$$

Получаем уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2 f e^{-i\omega t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}(-1)\omega^2 f e^{-i\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 f + \varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} f = 0.$$

Таким образом:

$$\nabla^2 f + \varepsilon k_0^2 f = 0 \tag{4.6}$$

Если рассматривать полну идущую от точечного источника, то вблизи мы будет ее считать *сферической* чуть дальше — *параболической*, и совсем далеко — *плоской*.

Выберем ось z на которой поместим точечный источник. Теперь $f = \frac{A}{r}\exp(ikr)$.

На расстоянии ρ от оси точка на волновом фронте лежит на $r^2 = \rho^2 + z^2$. Приблизительно в предположении $z \gg \rho$: $r \approx z + \frac{\rho^2}{2z}$. То есть в порядке малости выпишем:

$$1\; r \simeq z, \qquad 2\; r \simeq \frac{2\pi}{\lambda}(z + \frac{\rho^2}{2z} + \ldots) = \frac{2\pi}{\lambda}z + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\rho^2}{2z}.$$

Второй вот порядок и называют параболическим: $f = \frac{A}{z}\exp(ikz + ik\frac{\rho^2}{2z})$.

Параксиальное приближение

Имеем ситуацию: $f(\boldsymbol{r}) = A(\boldsymbol{r})\exp(ikz)$. Будем требовать:

$$\frac{\partial A}{\partial z}\lambda \ll A \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A}{\partial z} \ll \frac{A}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A}{\partial z} \ll A \cdot k.$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\lambda \ll \frac{\partial A}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll \frac{\partial A}{\partial z}\cdot k.$$

И так волновое уравнение, с заменой $k^2 = \varepsilon\omega^2/c^2$:

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial z}e^{ikz} + A\cdot ike^{ikz}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}e^{ikz} + 2A'_z ike^{ikz} - Ak^2 e^{ikz}.$$

Теперь всё это в волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2\frac{\partial A}{\partial z}ik - Ak^2 + \nabla^2 A + Ak^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2\frac{\partial A}{\partial z}ik + \nabla^2 A = 0.$$

И с нашем приближение получаем *параксиальное уравнение Гельмгольца* (может мы где-то знак потеряли).

$$\nabla^2 A + 2ik\frac{\partial A}{\partial z} = 0. \tag{4.7}$$

Надо проверить, подставится будет ли решением уравнения сверху выражение:

$$f(r) = \frac{A}{z}\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2z}\right) \quad \Rightarrow \quad f(r) = A(r)e^{-ikz}, \qquad A(r) = \frac{A}{z}\exp\left(-ik\frac{\rho^2}{2z}\right).$$

Решение таким образом при таким f.

$$f(r) = \frac{A}{z + iz_0}\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2(z+iz_0)}\right) \qquad z \longrightarrow q(z) = z + iz_0.$$

Тут введен q-параметр и *Рэлеевская длина* — z_0.

Мы знаем, что $\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z+iz_0} = \frac{z - iz_0}{z^2 + z_0^2}$. Подставляем:

$$f(r) = A\left(\frac{z}{z^2+z_0^2} - i\frac{z_0}{z^2+z_0^2}\right)\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2}\frac{z - iz_0}{z^2+z_0^2}\right).$$

$$f(r) = A\left(\frac{z}{z^2+z_0^2} - i\frac{z_0}{z^2+z_0^2}\right)\exp\left(-\frac{k\rho^2}{2}\frac{z_0}{z^2+z_0^2}\right)\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2 z_0}{z^2+z_0^2}\right).$$

Выпишем:

$$-\frac{2\pi}{2}\frac{\rho^2 z_0}{\lambda(z^2+z_0^2)} = i\frac{\rho^2}{\frac{\lambda}{z_0\pi}(z^2+z_0^2)} \qquad \text{обозначим: } W^2(z) = \frac{\lambda z_0}{\pi}(1 + \frac{z^2}{z_0^2}), \qquad R(z) = z(1 + \frac{z^2}{z_0^2}).$$

Тогда получаем:

$$f(r) = A\left(\frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi W^2(z)}\right)\exp(-\frac{\rho^2}{W^2(z)})\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)}\right).$$

$$f(r) = \frac{A}{iz}\frac{W_0}{W(z)}\exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right)\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} + i\xi(z)\right),$$

где $W_0 = W(0)$, а $\xi(z) = \arctan\frac{z}{z_0}$. Обычно в первом члене ещё обозначают $A_0 = A/iz_0$.

Интенсивность

$$I =< |\boldsymbol{S}| >_t =< \frac{c}{4\pi}\sqrt{\varepsilon}E^2 >= \frac{cn}{4\pi} < E^2 >= \frac{cn}{8\pi}E_0^2.$$

И для всех будет прекрасней, для всех будет полезней не таскать коэффициент:

$$I \propto E_0^2 \quad I \propto E^2 \quad I = E^2 \left[\frac{\text{В}^2}{\text{м}^2}\right],$$

сокращать на размерный коэффициент очень круто, поэтому запомним, что размерность $[I] = \frac{\text{Дж}}{\text{с см}}$.

Таким образом со всеми предположениями:

$$I = A_0^2 \frac{W_0^2}{W^2(z)} \exp\left(-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right).$$

Это называется *Гаусовой интенсивностью*. Читатель может построить её самостоятельно.

Мощность

$$P = \int_0^\infty I(\rho) 2\pi\rho d\rho = \frac{1}{2} I_0(\pi W_0^2).$$

И в построенном читателями графике в предыдущем пункте если посмотреть на ширину полосы под распределением, то можно заметить, что $\rho_0 = W(z)$, в связи с чем $W(z)$ называют *радиусом пучка*.

Посмотрим, что у нас с нашим радиусом творится:

$$W(z) = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}\left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)},$$

если пытливый читатель построить и этот график, то он (график) пересечет $z = 0$ в $W(0) = W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}}$. Асимптотически он будет стремиться к прямой с коэффициентом наклона: $\theta \approx \sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_0}} = \frac{W_0}{z_0}$.

Для примера если взять лазер $\lambda_0 = 633$ нм, с $2W_0 = 2$ см, то *глубина резкости* будет: $2z_0 = 1$ км. Если же $2W_0 = 2$ мкм, то уже всё будет потоньше: $2z_0 = 1$ нм.

Тест вставки картинок