

ВСЕОБЩАЯ ТЕТРАДЬ

Содержание

Лекции Колдунова Л.М. по современной оптики	2
1 Лекция 1	2
2 Лекция 2	3
3 Лекция 3	5
4 Лекция 4	6
6 Лекция 6	8
Семинары Зябловского А.А. по теории поля	11
1 Семинар по теории поля 25.03.2021	11
1.1 Про мультипольное разложение	11
2 Семинар по теории поля 01.04.2021	11

Лекции Колдунова Л.М. по современной оптики

1 Лекция 1

Лектор — Л.М.Колдунов

Геометрическая оптика \subset волновая оптика \subset эм-оптика \subset квантовая оптика.

Уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho_{\text{out}} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{out}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \mathbf{j}_{\text{out}} &= 0 \quad \rho_{\text{out}} = 0\end{aligned}$$

Покрутим уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Получаем уравнение электромагнитной волны:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

Получаем решение вида

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad -k^2 \mathbf{E} + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \omega^2 \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu}$$

Уравнение Эйконала

Имеем постулаты геометрической оптики:

1. Свет распространяется в виде лучей;
2. Среда характеризуется показателем преломления n : $c_{\text{среды}} = c/n$;
3. $\int n dl \rightarrow \min$.

Def 1.1. *Оптическим путём* назовём $S = \int_A^B n(\mathbf{r}) dl$

Найдём ход лучей в предположении, что $n(\mathbf{r})$:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad E(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \exp(ik_0 \underbrace{\Phi(\mathbf{r})}_{\text{Эйконал}} - i\omega t).$$

Взяв \mathbf{E} одномерным посчитаем в лоб лапласиан:

$$\Delta E = \Delta a \exp() - a(\mathbf{r}) k_0^2 |\operatorname{grad} \Phi|^2 \exp() + i(2k_0 (\operatorname{grad} a, \operatorname{grad} \Phi) + k_0 \Delta \Phi) \exp()$$

Сначала вещественную часть:

$$\Delta a \exp() - a(\mathbf{r}) k_0^2 |\operatorname{grad} \Phi|^2 \exp() + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 a \exp() = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\operatorname{grad} \Phi|^2 = \frac{1}{a k_0^2} \Delta a + n^2.}$$

Теперь будем считать верным предположение:

$$|\lambda \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}| \ll |\frac{\partial a}{\partial x}|, \quad |\lambda \frac{\partial a}{\partial x}| \ll a, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Получаем в приближении уравнение Эйконала:

$$|\operatorname{grad} \Phi| = n. \quad (1.2)$$

Выражение $\omega t - k_0 \Phi = \text{const}$ задаёт *Волновой фронт*.

$$\operatorname{grad} \Phi = n \mathbf{s}, \quad |\mathbf{s}| = 1 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} = n.$$

$$\omega dt - k_0 d\Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega dt = k_0 d\Phi = k_0 \frac{d\Phi}{ds} ds = k_0 n ds.$$

Принцип Ферма

Пусть Φ — задано однозначно: $\text{grad } \Phi = n\mathbf{s}$. Возьмём интеграл по замкнутому контуру:

$$\oint n(\mathbf{s}, d\mathbf{l}) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \int_{ACB} n(\mathbf{s}, d\mathbf{l}) = \int_{ADB} n(\mathbf{s}, d\mathbf{l}).$$

Но $\mathbf{s} \cdot d\mathbf{l} = s dl = dl$ на ACB . Тогда и получим выражение, доказывающее принцип Ферма:

$$\int_{ACB} n dl = \int_{ADB} n \mathbf{s} \cdot d\mathbf{l} \leq \int_{ADB} n dl.$$

Приведём пару примеров: (Колдунов гнём зеркало)

Траектория луча

Было соотношение, что: $m\mathbf{s} = \text{grad } \Phi$. Для траектории: $\mathbf{s} = d\mathbf{r}/dl$. Тогда для градиента (который d/dl):

$$n \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \text{grad } \Phi \quad \frac{d}{dl} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) = \frac{d}{dl} \text{grad } \Phi = \text{grad } \frac{d\Phi}{dl} = \text{grad } n \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dl} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) = \text{grad } n.$$

Получили уравнение луча. Давайте теперь возьмём однородную среду:

$$n = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = \mathbf{a}l + \mathbf{b}.$$

Теперь возьмём:

$$\frac{d}{dl}(n\mathbf{s}) = \text{grad } n \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{s} \frac{dn}{dl} + n \frac{d\mathbf{s}}{dl} = \nabla n \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathbf{N}}{R} = \frac{1}{n} \left(\nabla n - \mathbf{s} \frac{dn}{dl} \right)$$

Домножим последнее выражение скалярно на \mathbf{N} :

$$0 < \frac{N^2}{R} = \frac{(\mathbf{N}, \nabla n)}{n} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{N}, \nabla n) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Луч поворачивает!}$$

((Пример про слоистую среду))

Уравнение луча в параксиальном приближении

((картинка))

$$n(y) \cos \theta(y) = n(y dy) \cos \theta(y + dy) = \left(n(y) + \frac{dn}{dy} \Delta y \right) \cos \left(\theta(y) + \frac{d\theta}{dy} \Delta y \right) = \left(n(y) + \frac{dn}{dy} \Delta y \right) \left(\cos \theta - \sin \theta(y) \frac{d\theta}{dy} \Delta y \right).$$

То есть получаем, что

$$\frac{dn}{dy} \cos \theta(y) = n(y) \sin \theta(y) \frac{d\theta}{dy} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = \tan \theta \frac{d\theta}{dy} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Пример параболической зависимости $n^2 = n_0^2(1 - \alpha^2 y^2)$ SELFOC.

$$\alpha y \ll 1 \quad y''_{xx} = \frac{1}{n_0(1 - \alpha^2 y^2)^{1/2}} \frac{dn}{dy} = \frac{-n_0 \alpha^2 y}{n_0(1 - \alpha^2 y^2)} = -\alpha^2 y. \quad \Rightarrow \quad y''_{xx} + \alpha^2 y = 0.$$

Такое вещество используют при создании стекловолокна, суть в том, что при заходе в канал под разными углами скорость примерно одна и та же распространения.

((забыли про мнимую часть!!!!))

2 Лекция 2

Матричная оптика

Луч можно характеризовать его координатой y и углом к оптической оси x . То есть $\{y_1, \theta_1\} < - > \leftrightarrow \{y_1, n_1, \theta_1\}$, и $n\theta = v$. Таким образом:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & n_1 \theta_1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перемещения

В ходе перемещения:

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta_1 \\ y_2 = y_1 + l\theta_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Или же второй вариант, который встречается в литературе:

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta_1 n \\ y_2 = y_1 + (l/n)\theta_1 n \end{cases} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Матрица преломления на сферической поверхности

Пусть луч падает из среды с показателем преломления n_1 в n_2 . Запишем условие падения:

$$n_1 \beta_1 = n_2 \beta_2, \quad \beta_1 = \theta_1 + \alpha, \quad \beta_2 = \theta_2 + \alpha, \quad n_1(\theta_1 + \alpha) = n_2(\theta_2 + \alpha), \quad \alpha = y_1/R.$$

$$v_2 = v_1 + \frac{n_1 - n_2}{R} y_1 \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Или ещё в литературе она может встретиться как:

$$v_2 = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 + \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} y_1 \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$$

Общий подход

Пусть у нас есть какая-то система, части которой мы знаем как преобразуют луч по отдельности, то есть все матрицы преобразований знаем. Получаем матричное выражение с перемножением матриц:

$$M_3 M_2 M_1 \mathbf{a} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

По факту теперь имеем и какую-то матрицу в которой очень хочется понять значение её коэффициентов.

1. $D = 0$. Означает, что луч у нас идёт в фокальной плоскости.
2. $B = 0$. Тогда наша изображение: $y_2 = Ay_1$. Так называемые *сопряженные плоскости*. И A называется коэффициентом *поперечного увеличения*.
3. $C = 0$. Тогда наша изображение: $y_2 = B\theta_1$. D в этом случае называется коэффициентом. Тако случай называется телескопическим.

Перейдём у примерам.

Пример 0

Для тонкой линзы с двумя радиусами кривизны – внешним и внутренним:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{nR_2} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{nR_1} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{nR_2} + \frac{1-n}{nR_1} & 1 \end{pmatrix}$$

В левом нижнем углу у нас стоит *оптическая сила системы*: $(n-1)(1/R_1 - 1/R_2)$.

Пример 1

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{b}{F} & b + a(1 - \frac{b}{F}) \\ -\frac{1}{F} & 1 - \frac{a}{F} \end{pmatrix}$$

Таким образом получаем формулу линзы занулив левый верхний элемент:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \quad (1.5)$$

Задача 2 (см) файл

Только размер предмета не как в задаче – а 2 мм.

Какие матрицы запишем: сначала распространяемся, потом преломляемся, и наконец снова распространяемся.

$$\begin{pmatrix} 1 & x/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{7.8} & 15 - \frac{x}{0.78} \\ -0.2 & -2 \end{pmatrix}$$

Снова $B = 0$ и решаем уравнение: $15 - \frac{x}{0.78} = 0$, откуда $x = 11.7$ см. Коэффициент увеличения $A = 1 - \frac{11.7}{0.78} = -0.5$.

Задача 4 (см) файл

Снова думаем — преломляемся—распространение—преломляемся—распространяемся.

$$\begin{pmatrix} 1 & F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(1-n) & -R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2R \\ 0 & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2F(n-1) + (n-2)R}{nR} & \frac{-nF + 2F + 2R}{n} \\ \frac{2-2n}{nR} & \frac{2}{n} - 1 \end{pmatrix}$$

И так $A = 0$ значит $-2F(n-1) = R(n-2)$, откуда $F = R \frac{2-n}{2(n-1)}$.

Задача 11 (см) файл

На самом деле это задача из Овчинкина 1.32.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l}{F_2} & l \\ -\frac{1}{F_2} - \frac{l}{F_1} & 1 - \frac{l}{F_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - lP_2 & l \\ -P_1 - (1-lP_1)P_2 & 1 - lP_1 \end{pmatrix}.$$

Про увеличения:

$$\frac{d}{dn}((n-1)(G_1 + G_2) - (n-1)^2 l G_1 G_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (G_1 + G_2) - 2(n-1)l G_1 G_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{1}{2(n-1)} \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right)$$

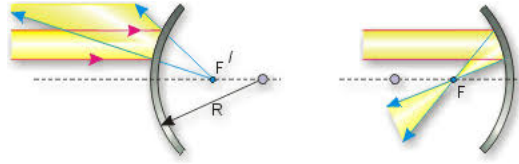
Или же

$$l = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(n-1)G_1} + \frac{1}{(n-1)G_2} \right) = \frac{F_1 + F_2}{2}.$$

3 Лекция 3

Обобщение на случай отражения

В прошлый раз у нас было матрица T (1.3) и матрица P (1.4).



Возьмём теперь зеркало, посмотрим на отражение для выгнутого зеркала (слева) и напомним матрицу отражения.

$$n_1 = n, n_2 = -n \quad \rightsquigarrow \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-n}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix}$$

для вогнутого же (справа) заодно выпишем сразу все матрицы, которые у нас есть:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 1

Допустим шёл луч и упал на плоскопараллельную пластину и пошёл внутри неё змейкой.

$$\begin{pmatrix} 1 & h/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & hN/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 13

Описываем жизнь нашего луча умножением матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2R}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2n}{R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2R}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n-4}{nR} & -\frac{4R}{n} \\ \frac{2(n-2)}{nR} & \frac{n-4}{n} \end{pmatrix}$$

Периодические оптические системы

Пусть у нас оптическая ячейка уже после перемножения всех матриц характеризуется в итоге матрицей 2×2 , с элементами A, B, C, D . У периодической системы такая ячейка встречается m раз:

$$\begin{pmatrix} y_m \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} y_{m+1} \\ v_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} y_m \\ v_m \end{pmatrix}$$

Получаем уравнения:

$$\begin{cases} y_{m+1} = Ay_m + Bv_m \\ v_{m+1} = Cy_m + Dv_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_m = \frac{y_{m+1} - Ay_m}{B} \Rightarrow v_{m+1} = \frac{y_{m+2} - Ay_{m+1}}{B} \\ y_{m+2} - Ay_{m+1} = BCy_m + D(y_{m+1} - Ay_m) \end{cases}$$

Получили уравнение на y :

$$y_{m+2} - (A + D)y_{m+1} + (AD - BC)y_m = 0 \Rightarrow y_m = y_0 h^m \Rightarrow h^2 - (A + D)h + 1 = 0$$

Заменяя $A + D = 2b$, получаем три случая на детерминант: $h_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - 1}$.

1. $|b| < 1$: Тогда $h_{1,2} = e^{i\varphi} \Rightarrow y_m = \alpha_1 e^{im\varphi} + \alpha_2 e^{-im\varphi} = y_{\max} \sin(m\varphi + \varphi_0)$.

Заметим, что y_m периодичен, только если $\varphi/2\pi$ – рациональное число.

Пример 2

Дана система линз: $\uparrow -d - \uparrow -d - \uparrow$. Матрицы прохождения луча:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -1/F & 1 - d/F \end{pmatrix}$$

Получаем, что устойчиво когда:

$$b = \frac{2 - d/F}{2} \rightsquigarrow |b| < 1 \rightsquigarrow 0 < \frac{b}{F} < 4.$$

Посмотрим случаи:

1. $d = F$: тогда $b = 1/2$, и тогда $b = \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$;
2. $d = 2F$: тогда $b = 0$;
3. $d = 0$: тогда $d = 4F$.

Оптический резонатор

Пусть у нас есть два зеркала: $(-L-)$. Матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/R_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b = (A + D)/2 = 2 \underbrace{\left(1 + \frac{L}{R_1}\right)}_{g_1} \underbrace{\left(1 + \frac{L}{R_2}\right)}_{g_2} - 1.$$

Можно рассмотреть различные типы резонаторов:

1. Плоский;
2. Симметричный конфокальный;
3. Симметричный концентрический.

4 Лекция 4

Оптика пучков

Что у нас есть. У нас есть волновое уравнение!

$$\nabla^2 E - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$$

Получаем уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2 f e^{-i\omega t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} (-1)\omega^2 f e^{-i\omega t} = 0 \Rightarrow \nabla^2 f + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} f = 0.$$

Таким образом:

$$\nabla^2 f + \varepsilon k_0^2 f = 0 \quad (1.6)$$

Если рассматривать полну идущую от точечного источника, то вблизи мы будем ее считать *сферической* чуть дальше — *параболической*, и совсем далеко — *плоской*.

Выберем ось z на которой поместим точечный источник. Теперь $f = \frac{A}{r} \exp(ikr)$.

На расстоянии ρ от оси точка на волновом фронте лежит на $r^2 = \rho^2 + z^2$. Приблизительно в предположении $z \gg \rho$: $r \approx z + \frac{\rho^2}{2z}$. То есть в порядке малости выпишем:

$$\textcircled{1} r \simeq z, \quad \textcircled{2} r \simeq \frac{2\pi}{\lambda} \left(z + \frac{\rho^2}{2z} + \dots \right) = \frac{2\pi}{\lambda} z + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho^2}{2z}.$$

Второй вот порядок и называют параболическим: $f = \frac{A}{z} \exp(ikz + ik \frac{\rho^2}{2z})$.

Параксиальное приближение

Имеем ситуацию: $f(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(ikz)$. Будем требовать:

$$\frac{\partial A}{\partial z} \lambda \ll A \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial z} \ll \frac{A}{\lambda} \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial z} \ll A \cdot k.$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \lambda \ll \frac{\partial A}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll \frac{\partial A}{\partial z} \cdot k.$$

И так волновое уравнение, с заменой $k^2 = \varepsilon \omega^2 / c^2$:

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial z} e^{ikz} + A \cdot ik e^{ikz}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} e^{ikz} + 2A'_z ik e^{ikz} - Ak^2 e^{ikz}.$$

Теперь всё это в волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial z} ik - Ak^2 + \nabla^2 A + Ak^2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial z} ik + \nabla^2 A = 0.$$

И с нашим приближением получаем *параксиальное уравнение Гельмгольца* (может мы где-то знак потеряли).

$$\nabla^2 A + 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0. \quad (1.7)$$

Надо проверить, подставится будет ли решением уравнения сверху выражение:

$$f(r) = \frac{A}{z} \exp \left(-ikz - ik \frac{\rho^2}{2z} \right) \Rightarrow f(r) = A(r) e^{-ikz}, \quad A(r) = \frac{A}{z} \exp \left(-ik \frac{\rho^2}{2z} \right).$$

Решение таким образом при таком f .

$$f(r) = \frac{A}{z + iz_0} \exp \left(-ikz - ik \frac{\rho^2}{2(z + iz_0)} \right) \quad z \rightarrow q(z) = z + iz_0.$$

Тут введен q -параметр и *Рэлеевская длина* — z_0 .

Мы знаем, что $\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + iz_0} = \frac{z - iz_0}{z^2 + z_0^2}$. Подставляем:

$$f(r) = A \left(\frac{z}{z^2 + z_0^2} - i \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} \right) \exp \left(-ikz - ik \frac{\rho^2}{2} \frac{z - iz_0}{z^2 + z_0^2} \right).$$

$$f(r) = A \left(\frac{z}{z^2 + z_0^2} - i \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} \right) \exp \left(-\frac{k\rho^2}{2} \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} \right) \exp \left(-ikz - ik \frac{\rho^2 z_0}{z^2 + z_0^2} \right).$$

Выпишем:

$$-\frac{2\pi}{2} \frac{\rho^2 z_0}{\lambda(z^2 + z_0^2)} = i \frac{\rho^2}{\frac{\lambda}{z_0 \pi} (z^2 + z_0^2)} \quad \text{обозначим: } W^2(z) = \frac{\lambda z_0}{\pi} \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right), \quad R(z) = z \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right).$$

Тогда получаем:

$$f(r) = A \left(\frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi W^2(z)} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)} \right) \exp \left(-ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} \right).$$

$$f(r) = \frac{A}{iz} \frac{W_0}{W(z)} \exp \left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)} \right) \exp \left(-ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\xi(z) \right),$$

где $W_0 = W(0)$, а $\xi(z) = \arctan \frac{z}{z_0}$. Обычно в первом члене ещё обозначают $A_0 = A/iz_0$.

Интенсивность

$$I = \langle |S| \rangle_t = \langle \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon} E^2 \rangle = \frac{cn}{4\pi} \langle E^2 \rangle = \frac{cn}{8\pi} E_0^2.$$

И для всех будет прекрасней, для всех будет полезней не таскать коэффициент:

$$I \propto E_0^2 \quad I \propto E^2 \quad I = E^2 \left[\frac{B^2}{M^2} \right],$$

сокращать на размерный коэффициент очень круто, поэтому запомним, что размерность $[I] = \frac{\text{Дж}}{\text{с см}}$.

Таким образом со всеми предположениями:

$$I = A_0^2 \frac{W_0^2}{W^2(z)} \exp\left(-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right).$$

Это называется *Гаусовой интенсивностью*. Читатель может построить её самостоятельно.

Мощность

$$P = \int_0^\infty I(\rho) 2\pi \rho d\rho = \frac{1}{2} I_0 (\pi W_0^2).$$

И в построенном читателями графике в предыдущем пункте если посмотреть на ширину полосы под распределением, то можно заметить, что $\rho_0 = W(z)$, в связи с чем $W(z)$ называют *радиусом пучка*.

Посмотрим, что у нас с нашим радиусом творится:

$$W(z) = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi} \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)},$$

если пытливый читатель построит и этот график, то он (график) пересечет $z = 0$ в $W(0) = W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}}$.

Асимптотически он будет стремиться к прямой с коэффициентом наклона: $\theta \approx \sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_0}} = \frac{W_0}{z_0}$.

Для примера если взять лазер $\lambda_0 = 633$ нм, с $2W_0 = 2$ см, то *глубина резкости* будет: $2z_0 = 1$ км. Если же $2W_0 = 2$ мкм, то уже всё будет потоньше: $2z_0 = 1$ нм.

6 Лекция 6

Уширение спектральных линий

Естественная ширина линии

В нашем случае это квантовое определение, которому мы прикрутим классические колёса. А именно, возьмём модель осциллятора, то есть атом излучает как:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} \omega_0^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

И решение соответственно:

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} (\cos \omega t + \frac{\gamma}{2\omega} \sin \omega t), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Будем считать, что затухание у нас слабое:

$$\gamma \ll \omega_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t.$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Имеем итог "амплитуду" преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x_0 e^{-\gamma t} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x_0 e^{-\gamma t} e^{i(\omega_0 + \omega)t} dt = \\ &= \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-\gamma t + i(\omega_0 - \omega)t}}{i(\omega_0 - \omega) - \gamma} + \underbrace{\frac{e^{-\gamma t + i(\omega_0 + \omega)t}}{i(\omega_0 + \omega) - \gamma}}_{\rightarrow 0} \right) \Big|_0^\infty = \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi} (i(\omega_0 - \omega) - \gamma)}. \end{aligned}$$

Но узнавать что-то мы ведь можем только про интенсивность:

$$I = \frac{x_0^2}{8\pi((\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2)}.$$

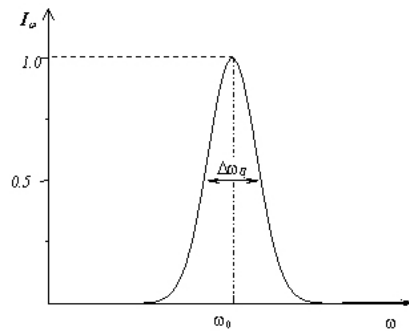
Ширина профиля $I(\omega)$ порядка 10^9 .

Доплеровское уширение

При движении детектируемого источника на/от вас фиксируемая частота будет:

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{v_x}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_0(1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}).$$

То есть сколько-то атомов летит с одной скоростью на вас, сколько-то перпендикулярно вам но с большей скорости. Таким образом имеет место Гауссово распределение этих атомов по скоростям. Соответственно больше всего тех, кто вообще не движется в проекции на вашу ось.



Поговорим теперь про распределения:

$$v_0^2 = \frac{2rT}{m} \quad \Rightarrow \quad dN = N \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2 c^2}{\omega_0^2 v_0^2}\right) \frac{c}{\omega_0} d\omega.$$

Столкновительное уширение

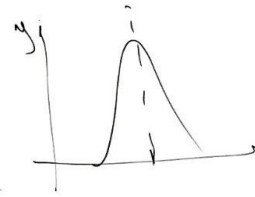
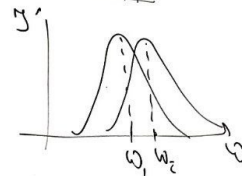
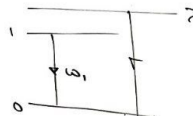
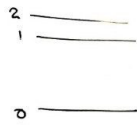
Времяпролётное уширение

Внутريدоплеровская спектроскопия

Постановка задачи: есть атомы в коробку, которые носятся туда-сюда, а мы такие берём и посылаем пучок (ну или следим за пучок оттуда). Пусть мы нашли две линии, но из-за доплеровского уширения, если линии близки, то они неплохо так сольются, и различить их будет трудно.

⊗ Внутридоплеровская спектроскопия

Постановка задачи



Квантовая механика для самых маленьких: что умеет делать электрон?

Для сечения σ (вероятность что-то сделать) про переходы электронов на уровни в них под/без действия внешнего излучения ответ:

- электрон умеет поглощать фотончик $h\nu$;
- электрон умеет вынужденно излучать;
- электрон умеет спонтанно излучать;
- электрон умеет не излучать.

Кинематические уравнения (скоростные)

Для двух уравнений, количество электронов на уровне: n_1 и n_2 . Для характерных времен b – безизлучательного процесса и c – спонтанного процесса.

$$\dot{n}_2 = -\frac{n_2}{\tau_b} - \frac{n_2}{\tau_c} \quad \Rightarrow \quad n_2 = n_{20} \exp\left(-\frac{t}{\tau_b} - \frac{t}{\tau_c}\right).$$

Если есть поток фотонов $F = \frac{I}{h\nu}$, который побуждает переходить электроны с верхнего на нижний и наоборот:

$$\dot{n}_1 = -F\sigma n_1 + F\sigma n_2 + \frac{n_2}{\tau_b}.$$

$$\dot{n}_2 = F\sigma n_1 - F\sigma n_2 - \frac{n_2}{\tau_b}.$$

Для $n_1 + n_2 = N$:

$$\dot{n}_1 = -F\sigma n_1 + F\sigma n_2 + \frac{n_2}{\tau_b} + \frac{N}{\tau_b} - \frac{n_1}{\tau_b} \quad \Rightarrow \quad \dot{n}_1 + n_1 \left(2\sigma F + \frac{1}{\tau_b}\right) = N\sigma F + \frac{N}{\tau_b}.$$

Таким образом:

$$n_1 = N \frac{\sigma F + \frac{1}{\tau_b}}{2\sigma F + \frac{1}{\tau_b}} = N \frac{F + \frac{1}{\sigma\tau_b}}{2F + \frac{1}{\sigma\tau_b}}.$$

А теперь если сказать, что то, сколько приходит и сколько уходит равны, потому как просто больше некому излучаться и поглощать, то:

$$0 = -n_1\sigma F + n_2\sigma F + \frac{n_2}{\tau_b}$$

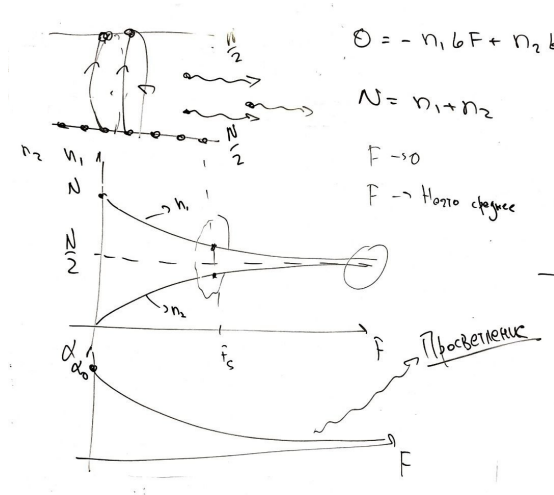
Обозначим как что-то характерное $F_s = \frac{1}{\gamma\tau_b}$, тогда имеем

$$n(F) = N \frac{F + F_s}{2F + F_s}.$$

И введем ещё такую величину на веру: коэффициент поглощения – $\alpha = n_1\sigma - n_2\sigma$. Почему так удобно:

$$dF = -(n_1\sigma - n_2\sigma)Fdz.$$

Наконец. Если есть среда, которая, например поглощает красный свет, но мы будем всё больше увеличивать падающий поток, то рано или поздно атомов не хватит на поглощение и материал *просветлится*.



Напрягаемся в последний раз. Много слушаем и узнаем про провал Лэмба.

Семинары Зябловского А.А. по теории поля

1 Семинар по теории поля 25.03.2021

1.1 Про мультипольное разложение

Берем вторую пару уравнений Максвелла

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = -\frac{4\pi}{c} J^\nu, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0.$$

Перепишем в терминах векторного потенциала поля:

$$\partial_\mu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = -\frac{4\pi}{c} J^\nu \Rightarrow \partial^\nu \partial_\mu A^\mu - \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = -\frac{4\pi}{c} J^\nu$$

Воспользуемся калибровкой Лоренца, то есть $\partial_\mu A^\mu = 0$. Тогда наше уравнение становится супер приятным, запишем его через оператор Даламбера:

$$\partial_\mu \partial^\mu = \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Помня, что $J^\nu = (c\rho, \mathbf{J})$, получаем:

$$\square \varphi = 4\pi\rho \quad \square \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

Если мы говорим про электростатику, то $\rho \neq f(t)$, тогда получаем уравнение Лапласа:

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho.$$

Решать будем с помощью функции Грина, для лапласиана и даламбертиана соответственно:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$
$$\varphi(x) = \int G(x, x') f(x') dx' \Rightarrow \varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = \frac{Q}{r} + \frac{d\mathbf{r}}{r^3} + \frac{r_\alpha r_\beta D_{\alpha\beta}}{2r^5} + \dots \quad (2.8)$$

Здесь введено очень удобное обозначение:

$$\mathbf{d} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3r - \text{дипольный момент.}$$

$$D_{\alpha\beta} = \int \rho(r) (3r_\alpha r_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) d^3r - \text{квадрупольный момент.}$$

Соответственно, не в нашей задаче, но в магнитостатике, аналогично:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{L}(\mathbf{r}')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

Проведя определенные выкладки можно получить интенсивность излучения системы зарядов в общем случае:

$$I = \frac{2|\ddot{\mathbf{d}}|^2}{3c^3} + \frac{2|\ddot{\boldsymbol{\mu}}|^2}{3c^3} + \frac{\ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{D}_{\alpha\beta}}{180c^5} + \dots$$

2 Семинар по теории поля 01.04.2021

С прошлого семинара помним (2.8). А также выражение для величин: \mathbf{d} , $D_{\alpha\beta}$ и $Q = \int \rho(\mathbf{r}) d^3r$. Ещё нам понадобится выражение для октуполя:

$$O_{\alpha\beta\gamma} = \int \rho(\mathbf{r}) (15r_\alpha r_\beta r_\gamma - 3r_\alpha \delta_{\beta\gamma} - 3r_\beta \delta_{\alpha\gamma} - 3r_\gamma \delta_{\alpha\beta} r^2) d^3r.$$

Опустим причины появления такого *чудного* выражения, скажем только что октуполь войдёт в разложение для скалярного потенциала как:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = \frac{Q}{r} + \frac{d\mathbf{r}}{r^3} + \frac{r_\alpha r_\beta D_{\alpha\beta}}{2r^5} + \frac{O_{\alpha\beta\gamma} r_\alpha r_\beta r_\gamma}{6r^7} + \dots \quad (2.9)$$

Вот мы вводим всё новые члены разложения, но давайте же наконец посмотрим на их свойства. Начнём с квадрупольного момента:

$$D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}, \quad D_{\alpha\beta} \delta^{\alpha\beta} = \int \rho(\mathbf{r}) (3r_\alpha r_\beta \delta^{\alpha\beta} - r^2 \delta_{\alpha\beta} \delta^{\alpha\beta}) d^3r = 0.$$

Таким образом у квадрупольного момента, с получившимися ограничивающими его свойствами, существует 5 независимых элементов.

Теперь про октупольный момент. У него вообще есть 27 компонент, но сколько же из них независимы. Вариантов когда:

1. все индексы разные $O_{\alpha\beta\gamma}$ всего 6, но из-за индифферентности к перестановкам, они сводятся к 1;
2. все индексы одинаковые $O_{\alpha\alpha\alpha}$ всего 3;
3. Две равны и одна отлична: $O_{\alpha\alpha\beta}$ всего 18, но опять из-за перестановок их независимых остается 6.

Итого уже сократили возможное количество независимых переменных к 10.

Теперь свёртками мы можем получить ещё связи и ещё больше сократить число независимых переменных.

$$O_{\alpha\beta\gamma}\delta^{\alpha\beta} = \int \rho(\mathbf{r})(15r_\alpha r_\beta r_\gamma \delta^{\alpha\beta} - 3r_\alpha \delta_{\beta\gamma} \delta^{\alpha\beta} - 3r_\beta \delta_{\alpha\gamma} \delta^{\alpha\beta} - 3r_\gamma \delta_{\alpha\beta} \delta^{\alpha\beta} r^2) d^3r = \int \rho(\mathbf{r})(15r^2 r_\gamma - 3r_\gamma r^2 - 3r_\gamma r^2 - 9r^2 r_\gamma) d^3r = 0.$$

Таким образом, по паре каждых компонент свертка – нуль, то есть ещё 3 условия налагаются на выражение для октупольного момента, оставляя всего **7** независимых компонент.

Задача 11

Задача аксиально симметрична относительно оси Oz , дан потенциал:

$$v(r, 0) = v_0 \left(1 - \frac{r^2 - a^2}{r\sqrt{r^2 + a^2}} \right), \quad r > a.$$

Хочется узнать $v(r, \theta)$ –? при условии, что $r \gg a$.

Соответственно раскладываем в ряд, раз $r \gg a$, и получаем:

$$v(z, 0) = v_0 \left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{-1/2} \right) \simeq v_0 \left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{2z^2} \right) \right) = v_0 \left(\frac{3a^2}{2z^2} - \frac{a^4}{2z^4} \right).$$

С другой стороны по теории должно было бы получиться разложение (2.9). Сравнивая степени в разложении получаем:

$$Q = 0, \quad D_{zz} = 0, \quad d_z = \frac{3a^2}{2}v_0, \quad 0_{zzz} = -3a^4v_0.$$

Теперь применим аксиальную симметрию: $\mathbf{d} = \int \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}d^3\mathbf{r}$. В дипольном моменте компоненты $d_x = d_y = 0$, что мы получаем так же как в упражнении про усреднение $\rho(x, y) = \rho(-x, -y)$.

Далее $D_{\alpha\alpha} = 0$, значит $D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$ то есть $D_{xx} = -D_{yy}$, но в силу аксиальной симметрии такое возможно лишь если $D_{xx} = D_{yy} = 0$.

Наконец $O_{\alpha\alpha\beta} = 0$. То есть $O_{xxz} + O_{yyz} + O_{zzz} = 0$, тогда получаем:

$$O_{xxz} = O_{yyz} = -\frac{O_{zzz}}{2} = \frac{3a^4}{2}v_0$$

$$O_{xzx} = O_{yzy} = O_{zxx} = O_{zyy} = \frac{3a^4}{2}v_0$$

Вариант со всеми разными: $O_{xyz} = \int \rho(x, y, z)(15xyz)d^3r = 0$, так как $\rho(x) = \rho(-x)$. И поэтому же $O_{xxx} = O_{yyy} = 0$.

И не взятые ещё:

$$O_{zzx} = O_{zzy} = O_{xzz} = O_{yzz} = O_{zxx} = O_{zyz} = 0.$$

$$O_{xxy} = O_{yyx} = O_{xyx} = O_{yxx} = O_{yxx} = O_{xyy} = 0.$$

Теперь давайте, как нас просят в задаче, подставим $z = r \cos \theta$:

$$v_0(r, \theta) = \frac{3a^2v_0 \cos \theta}{2} \frac{1}{r^2} + \left(-\frac{a^4v_0}{2r^4} \cos^3 \theta + \frac{3O_{xxz}xxz}{6r^7} + \frac{3O_{yyz}yyz}{6r^7} \right) = \frac{3a^2v_0 \cos^2 \theta}{2} \frac{1}{r^2} + \frac{\left(\frac{3}{4} \cos \theta \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \cos^3 \theta \right)}{r^4} a^4v_0.$$

/так как по сферической замене: $xxz = r^3 \cos \theta \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$, $yyz = r^3 \cos \theta \sin^2 \theta \sin^2 \varphi$ /

Задача 10

Нас просят найти дипольный момент двух полусфер. Так как нас спросили только про дипольный момент, а про распределение зарядов не спросили, то мы последнее и не будем находить.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi^{(l)}.$$

Известно что (ЛПШ §41 его лучше прочитать, потому как мне лень техать выражения для всех величин тут) :

$$\varphi^{(l)} = \sum_a e_a \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} D_l^{(m)} Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{r_a^l}{R_0^{l+1}}. \quad (2.10)$$

Любой скалярный потенциал мы всегда можем разложить по сферическим гармоникам:

$$\varphi(z) = \sum_{l,m} c_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) R(z).$$

На сфере: $R = z$:

$$\begin{aligned} \varphi(r) = \begin{cases} \Phi_0, & z > 0 \\ -\Phi_0, & z < 0 \end{cases} \rightsquigarrow \int \varphi(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sin \theta d\theta d\varphi = i \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \theta \varphi(r) \sin \theta d\theta d\varphi = \\ = i \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left(- \int_0^{\pi/2} \Phi_0 \cos \theta d \cos \theta + \int_{\pi/2}^\pi \Phi_0 \cos \theta d \cos \theta \right) = 2\Phi_0 \pi i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(- \frac{\cos^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos^2 \theta}{2} \Big|_{\pi/2}^\pi \right). \end{aligned}$$

Мы получили, что из (2.10) взяв как и в выводе формулы до $l = 1$:

$$2\pi i \Phi_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{r} D_l^m = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} i d_z \frac{1}{r} \Rightarrow d_z = r \frac{3\Phi_0}{2}.$$