

Doble Péndulo Invertido

David Redondo Quintero

January 22, 2024

1 Introducción

Se pretende controlar un doble péndulo invertido colocado en un carrito móvil con rozamiento b . Este sistema es altamente no lineal y es inestable en su punto de equilibrio superior. Para controlar el péndulo, el controlador puede ejercer fuerza u hacia un lado o hacia el otro. El sistema cuenta con el carrito de masa M y el péndulo de longitud L y masa centrada en el extremo superior m . El ángulo del primer péndulo sobre el eje vertical es $\theta_1(t)$, el ángulo del segundo péndulo es $\theta_2(t)$ y $x(t)$ es el desplazamiento del carro.

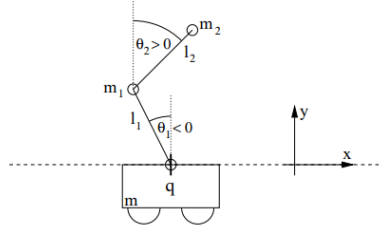


Figure 1: Doble Péndulo invertido sobre un carro

2 Obtención de la ecuaciones del sistema

Para obtener las ecuaciones dinámicas del modelo, se calculará la Lagrangiana del modelo. Para ello se plantea obtener las ecuaciones cinemáticas y potenciales del carrito y el péndulo.

$$K = \frac{1}{2} \left\{ m\dot{x}^2 + m_1 \left[(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 \right] + m_2 \left[(\dot{x} + l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \right] \right\} \quad (1)$$

La energía potencial de los péndulos es:

$$P = g \{ m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \} \quad (2)$$

Se aplican las ecuaciones de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de diferencias del modelo. Notese que una de las ecuaciones de Euler (4) está igualada a $u - b\dot{x}$. Donde u representa la fuerza que se aplica al carrito, que será la salida de controlador y b es el coeficiente de rozamiento del carrito.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = u - b\dot{x} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad (5)$$

Se obtienen las siguientes ecuaciones no lineales del sistema (6), (7) y (8).

$$\begin{aligned} u - b\dot{x} &= (m + m_1 + m_2)\ddot{x} + l_1(m_1 + m_2)\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ &\quad + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - l_1(m_1 + m_2)(\dot{\theta}_1)^2 \sin \theta_1 \\ &\quad - m_2 l_2 (\dot{\theta}_2)^2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} 0 &= l_1(m_1 + m_2)\ddot{x} \cos \theta_1 + \frac{l_1^2}{2}(m_1 + m_2)\ddot{\theta}_1 + l_1 l_2 m_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + l_1 l_2 m_2 (\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g(m_1 + m_2)l_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} 0 &= l_2 m_2 \ddot{x} \cos \theta_2 + l_1 l_2 m_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{l_2^2}{2} m_2 \ddot{\theta}_2 \\ &\quad - l_1 l_2 m_2 (\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - l_2 m_2 g \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (8)$$

3 Construcción del sistema en forma de espacio de estados

Para evitar tener que despejar las variables \ddot{x} , $\ddot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2$ se generan las matrices $D(\theta)$, $C(\theta, \dot{\theta})$, $G(\theta)$ y H . Estas matrices modelan el sistema como un sistema no lineal de segundo orden de la forma (9). Este método ha sido obtenido de la publicación de IAN J P Crowe-Wright (8) y adaptado al problema propuesto. Mientras que en la publicación de IAN no se tenía en cuenta el rozamiento del carro, en este problema sí.

$$D(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = Hu \quad (9)$$

$$\begin{aligned} D &= \begin{bmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & (m_1 + m_2)l_1 \cos(\theta_1) & l_2 m_2 \cos(\theta_2) \\ (m_1 + m_2)l_1 \cos(\theta_1) & (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ m_2 l_2 \cos(\theta_2) & m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} b & -(m_1 + m_2)l_1 \sin(\theta_1)\dot{\theta}_1 & -m_2 l_2 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_2 \\ 0 & -m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \\ G &= \begin{bmatrix} 0 \\ -(m_1 + m_2)l_1 g \sin(\theta_1) \\ -m_2 g l_2 \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \\ H &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La manipulación del sistema para convertirlo a una forma de primer orden se realiza de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + G &= Hu \\ D\ddot{\theta} &= -C\dot{\theta} - G + Hu \\ \ddot{\theta} &= -D^{-1}C\dot{\theta} - D^{-1}G + D^{-1}Hu \end{aligned}$$

Usando la expansión de Taylor, se linealiza el sistema alrededor de $\theta = 0$:

$$\begin{aligned} D^{-1}(\theta) &\approx D^{-1}(0) \\ C(\theta, \dot{\theta}) &\approx C(0, 0) \\ G(\theta) &\approx \frac{\partial G(0)}{\partial \theta} \theta \end{aligned}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -D^{-1}(0)C(0, 0) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -D^{-1}(0)\frac{\partial G(0)}{\partial \theta} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ D^{-1}(0)H \end{bmatrix} u$$

Que se puede redefinir como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathbf{D}^{-1}(0)\frac{\partial G(0)}{\partial \theta} & -D^{-1}(0)C(0,0) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{D}^{-1}(0)\mathbf{H} \end{bmatrix} u \quad (10)$$

donde:

$$\frac{\partial G(0)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 g(m_1 + m_2) & 0 \\ 0 & 0 & -l_2 g m_2 \end{bmatrix}$$

4 Implementación en MATLAB

Se ha diseñado un sistema con las siguientes características:

- Masa Carro $M = 1$ Kilogramos.
- Longitud primer péndulo $l_1 = 0.5$ metros.
- Longitud segundo péndulo $l_2 = 0.5$ metros.
- Gravedad $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$.
- Rozamiento $b = 0.1$.
- Masa primer péndulo $m_1 = 0.4$ Kilogramos.
- Masa segundo péndulo $m_2 = 0.5$ Kilogramos.

A través de la librería "syms" se definen las variables del sistema y las matrices $D(\theta)$, $C(\theta, \dot{\theta})$, $G(\theta)$ y H . Posteriormente se evalúa en el punto de equilibrio inestable. El desarrollo del sistema no lineal se realiza en Simulink, Figura 3. A su vez, la función de MATLAB incluye las ecuaciones de estado despejadas. El computo de estas ecuaciones se ha realizado siguiendo el método de la publicación (8). En este documento se calculan las ecuaciones mediante el cómputo de $inv(M)f$. El resultado de esta operación son las ecuaciones no lineales con las variables de estado derivadas despejadas. La implementación es inmediata, Figura 2.

```
function [ddx,ddth1,ddth2] = fcn(x, dx, th1, dth1,th2, dth2, F, m0, m1, m2, l1, l2, g, b)

% M = [m0+m1+m2 (m1+m2)*l1*cos(th1) (l2*m2*cos(th2));
%      (m1+m2)*l1*cos(th1) (m1+m2)*l1^2 m2*l1*l2*cos(th1-th2);
%      m2*l2*cos(th2) m2*l1*l2*cos(th1-th2) m2*l2^2];
%
% f= [l1*(m1+m2)*dth1^2*sin(th1)+m2*l2*dth2^2*sin(th2) - dx*b + F;
%     -l1*l2*m2*dth2^2*sin(th1-th2)+g*(m1+m2)*l1*sin(th1);
%     l1*l2*m2*dth1^2*sin(th1-th2)+g*l2*m2*sin(th2)];
%
% x_1=inv(M)*f;

ddx=((l1*l2*m2*sin(th1 - th2)*dth1^2 + g*l2*m2*sin(th2))*(m1*cos(th2) + m2*cos(th2) - m1*c
ddth1=((l1*l2*m2*sin(th1 - th2)*dth1^2 + g*l2*m2*sin(th2))*(m0*cos(th1 - th2) + m1*cos(th1
ddth2=((m1*cos(th2) + m2*cos(th2) - m1*cos(th1 - th2)*cos(th1) - m2*cos(th1 - th2)*cos(th1

end
```

Figure 2: Implementación de las ecuaciones despejadas

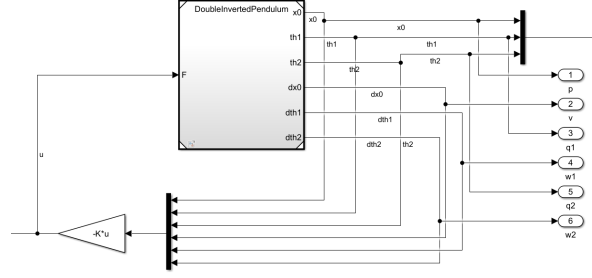


Figure 3: Diagrama Simulink

5 Diseño del controlador LQR

Primero se analiza la controlabilidad del sistema. Se usa la función "ctrb()" de MATLAB y se resta el rango de la matriz de controlabilidad con el tamaño de la matriz A. El resultado de la resta es 0, de modo que el sistema es totalmente controlable.

En cuanto a la observabilidad del sistema, se considera completa. Es decir, se pueden observar todas las variables de estado por separado. Para ello se considera la matriz C como la matriz identidad.

Al igual que con el péndulo invertido simple, se usa la función "lqr()" de MATLAB para computar el arreglo de ganancias K. Dado el sistema, se plantean los siguientes criterios de diseño para una perturbación inicial de 0.2 radianes para el péndulo inferior y -0.2 para el péndulo superior. Se desea que el péndulo doble sea capaz de estabilizarse antes de los 5 segundos sin desplazarse más de 1.5 metros en ambos sentidos. Además se pide que la fuerza máxima que se le puede aplicar al carrito sea 100 Newtons. Dados estos requisitos se comienza a probar combinaciones de las matrices Q y R. Primer intento:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 1$$

Como se puede ver en la Figura 4, el único criterio que falta por cumplirse es la distancia máxima que puede moverse el carro para estabilizar el péndulo, que es 1.5 metros. Para reducir la distancia se aumenta el valor de la matriz Q asociado a la velocidad del carro. De esta forma se restringe más la velocidad que puede tomar. También se probó a aumentar la ponderación de la posición del carro en la matriz Q, pero el sistema era inestable. En ese caso concreto, se daba tanta prioridad a la posición del carrito que el controlador era incapaz de controlar los péndulos.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 1$$

Se puede ver que con el ajuste de la velocidad ha disminuido bastante la distancia recorrida por el carrito, Figura 5. No obstante, se sacrifica mucha capacidad de control de los péndulos a cambio de controlar mejor el carro. Se va a tratar de generar un respuesta más suave para los péndulos. Para ello se aumenta la ponderación de la velocidad angular de los ángulos dentro de la matriz Q.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad R = 1$$

El ajuste ha mejorado considerablemente las oscilaciones que generaban los péndulos, Figura 6. Mientras que en el caso anterior se hacían 3 oscilaciones, con este ajuste se reducen a 2. Sin embargo, el péndulo inferior soporta oscilaciones muy grandes que pueden comprometer la estabilidad del sistema. Sería conveniente reducir la ponderación de la posición y velocidad del carrito para mejorar la estabilización. En cuanto al criterio del recorrido del carro, está significativamente por debajo del máximo, por lo que se puede reducir la ponderación sin demasiado riesgo,

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} R = 1$$

Con este ajuste se logra cumplir todos los requisitos, explicados al principio. Establecimiento en menos de 5 segundos, fuerza máxima ejercida menor a 100 Newtons y desplazamiento menor a 1.5 metros, Figura 7.

6 Demostración de Robustez

Para comprobar la robustez del sistema, se propone someter el péndulo superior a perturbaciones puntuales de tamaño incremental. A su vez, se va a introducir ruido en la señal de lectura de todas las variables de estado. En la Figura 8 se puede apreciar que el sistema pierde la estabilidad cuando se le aplica una perturbación mayor a 0.2 radianes sobre el péndulo superior. Respecto al ruido, se ve que la fuerza es más estridente. Lo ideal sería incluir un filtro que reduzca la influencia del ruido o incluso diseñar un control LQG para mejorar la señal de control sobre el motor. En cuanto a las características de diseño, se observa que el diseño cumple con los requisitos Figura 9.

7 Conclusiones

El diseño del controlador LQR permitió cumplir con los requisitos de estabilidad y rendimiento, demostrando su eficacia en la simulación del sistema. A pesar de la robustez del sistema ante perturbaciones moderadas (< 0.2 radianes), se observó que perturbaciones significativas (> 0.2 radianes) pueden llevar al sistema a la inestabilidad.

8 Referencias

- [Control on a Cart Theory: The Double Pendulum Inverted; Ian J P Crowe-Wright](#)
- [Equations of motion for an inverted double pendulum on a cart \(in generalized coordinates\)](#)

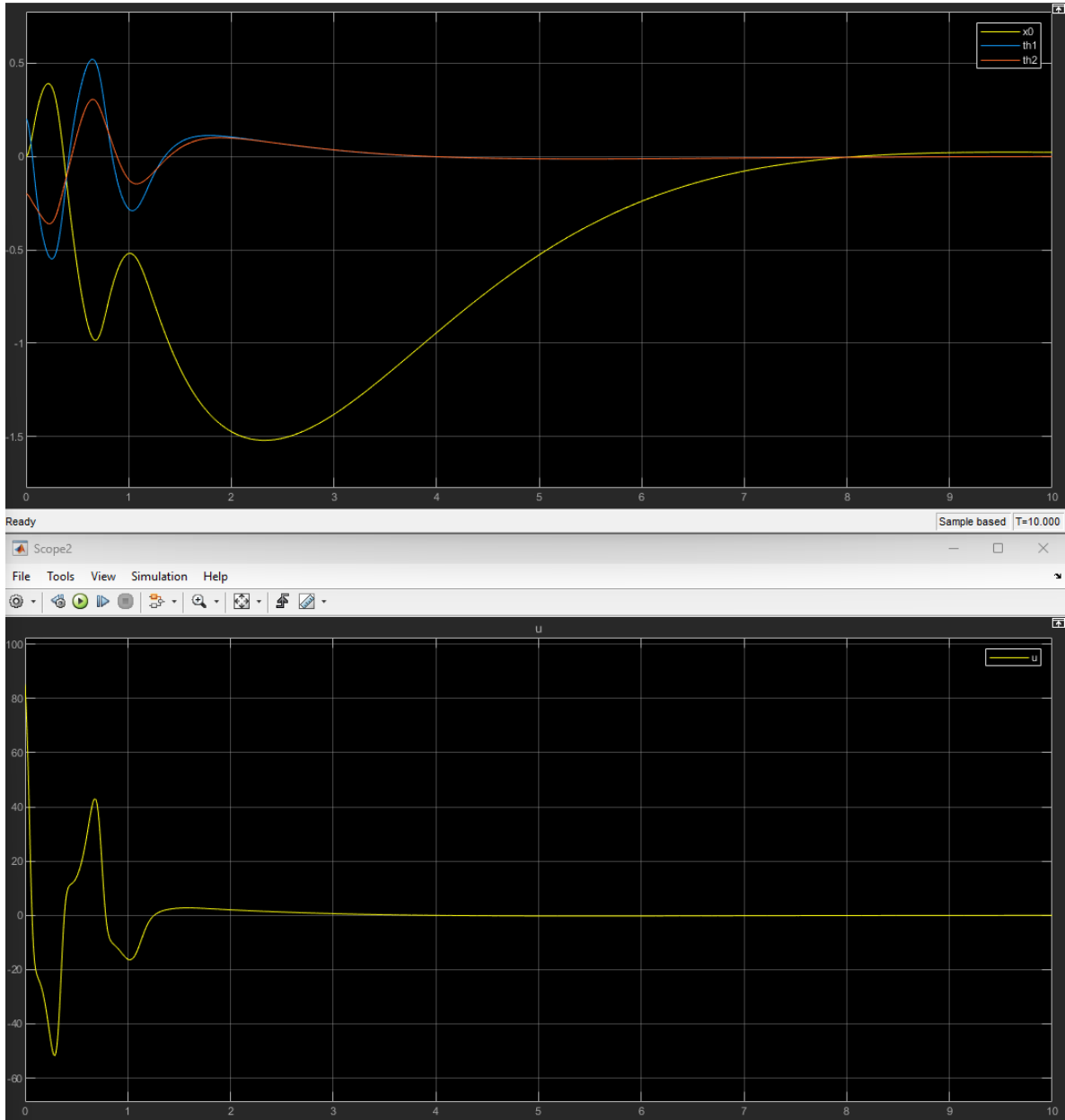


Figure 4: Imagen superior, amarillo: posición carro (metros) ; azul: ángulo péndulo inferior (rads); naranja: ángulo péndulo superior (rads) — Imagen inferior: Fuerza aplicada sobre el carro (Newtons)

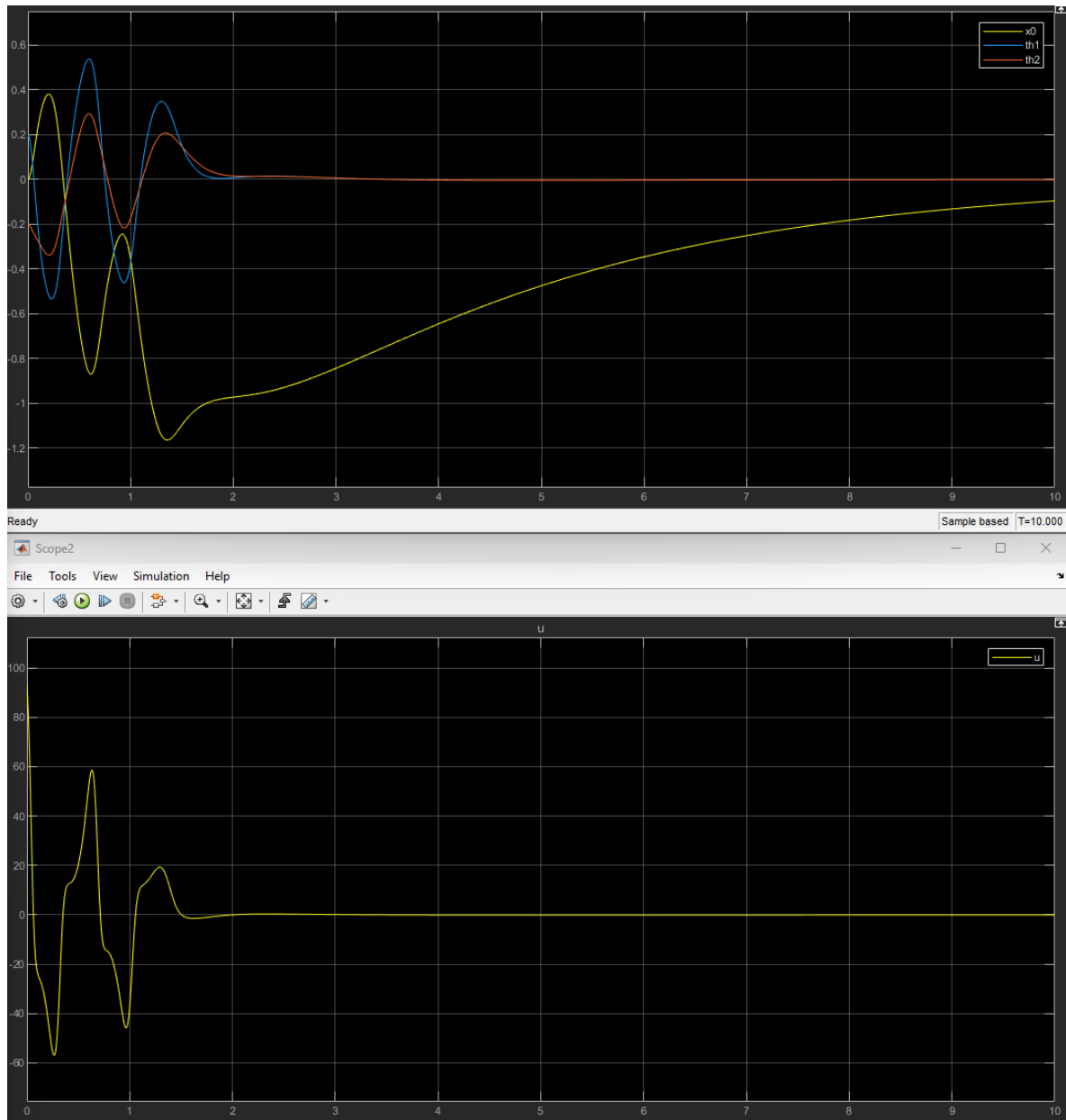


Figure 5: Imagen superior, amarillo: posición carro (metros) ; azul: ángulo péndulo inferior (rads); naranja: ángulo péndulo superior (rads) — Imagen inferior: Fuerza aplicada sobre el carro (Newtons)

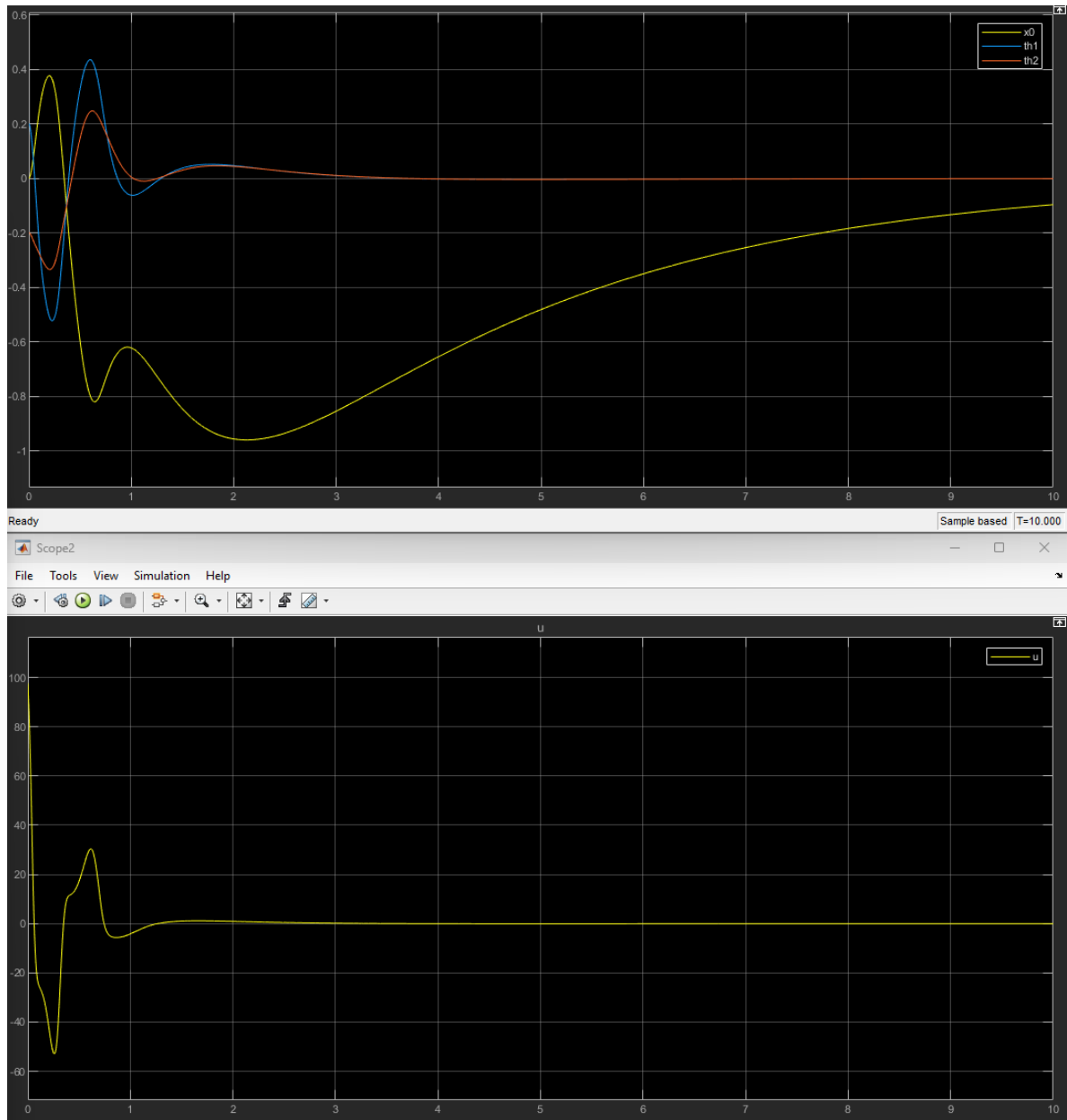


Figure 6: Imagen superior, amarillo: posición carro (metros) ; azul: ángulo péndulo inferior (rads); naranja: ángulo péndulo superior (rads) — Imagen inferior: Fuerza aplicada sobre el carro (Newtons)

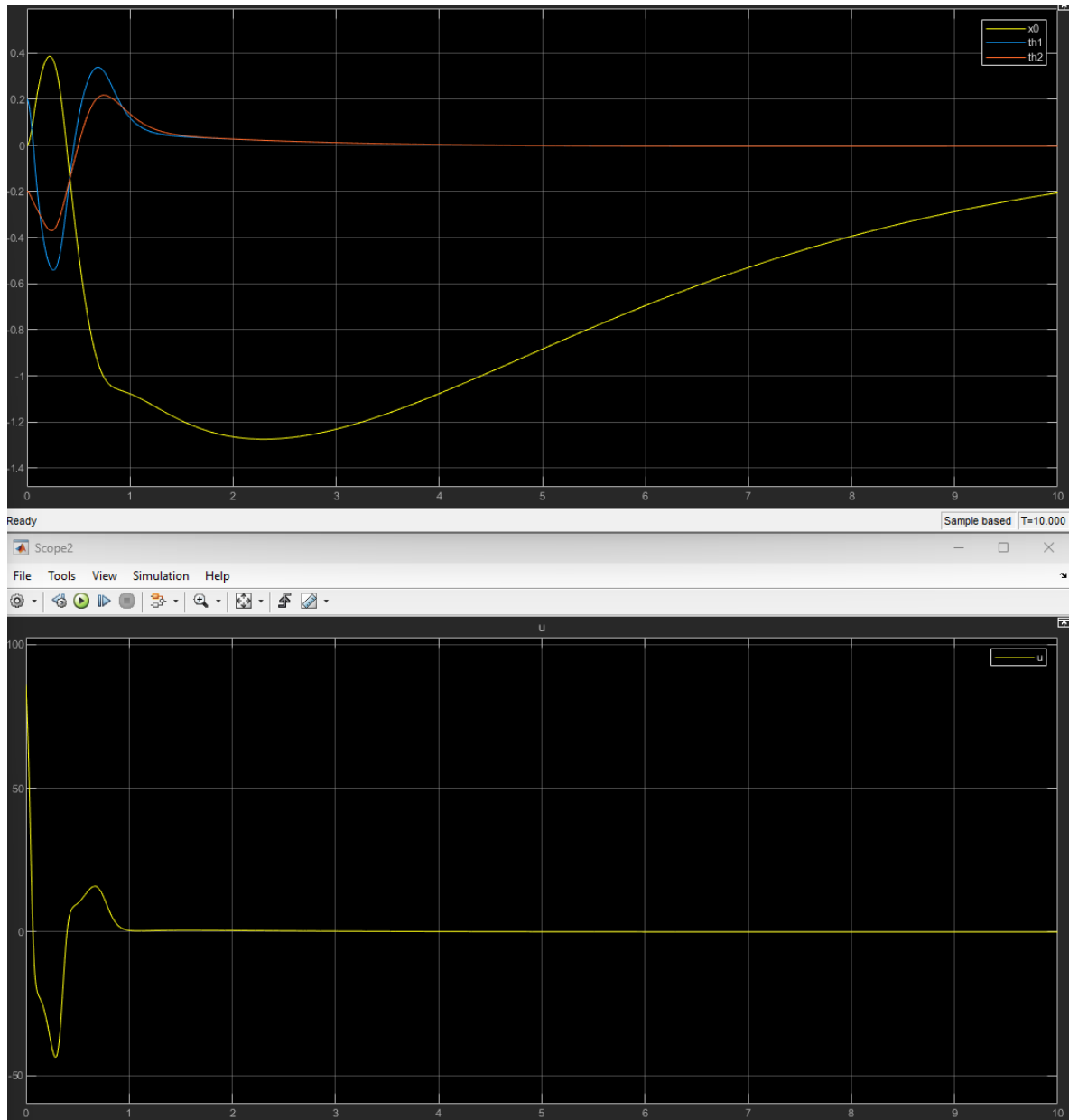


Figure 7: Imagen superior, amarillo: posición carro (metros) ; azul: ángulo péndulo inferior (rads); naranja: ángulo péndulo superior (rads) — Imagen inferior: Fuerza aplicada sobre el carro (Newtons)

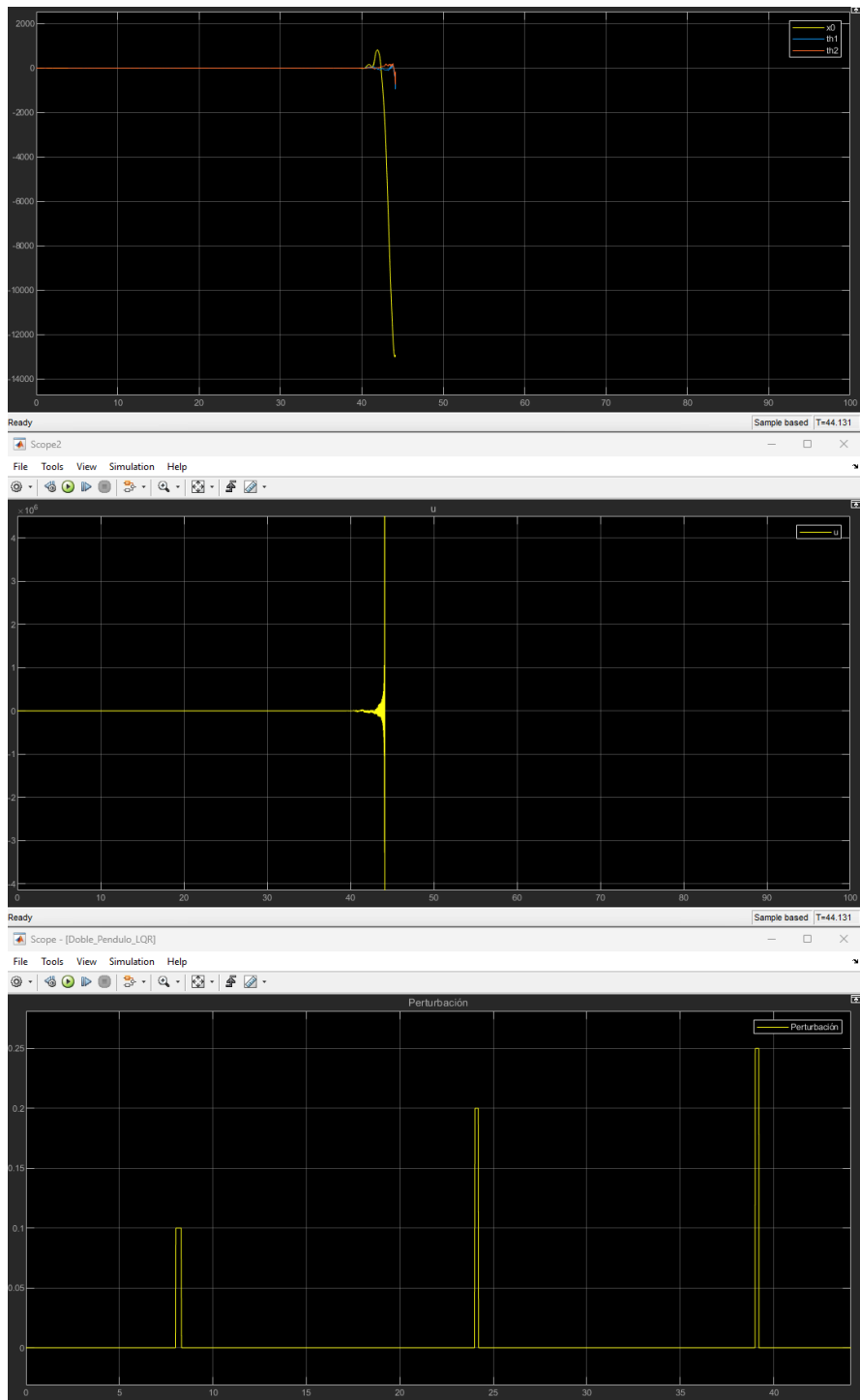


Figure 8: Imagen superior, amarillo: posición carro (metros) ; azul: ángulo péndulo inferior (rads); naranja: ángulo péndulo superior (rads) — Imagen medio: Fuerza aplicada sobre el carro (Newtons), — Imagen inferior: Perturbación en el péndulo superior (rads)

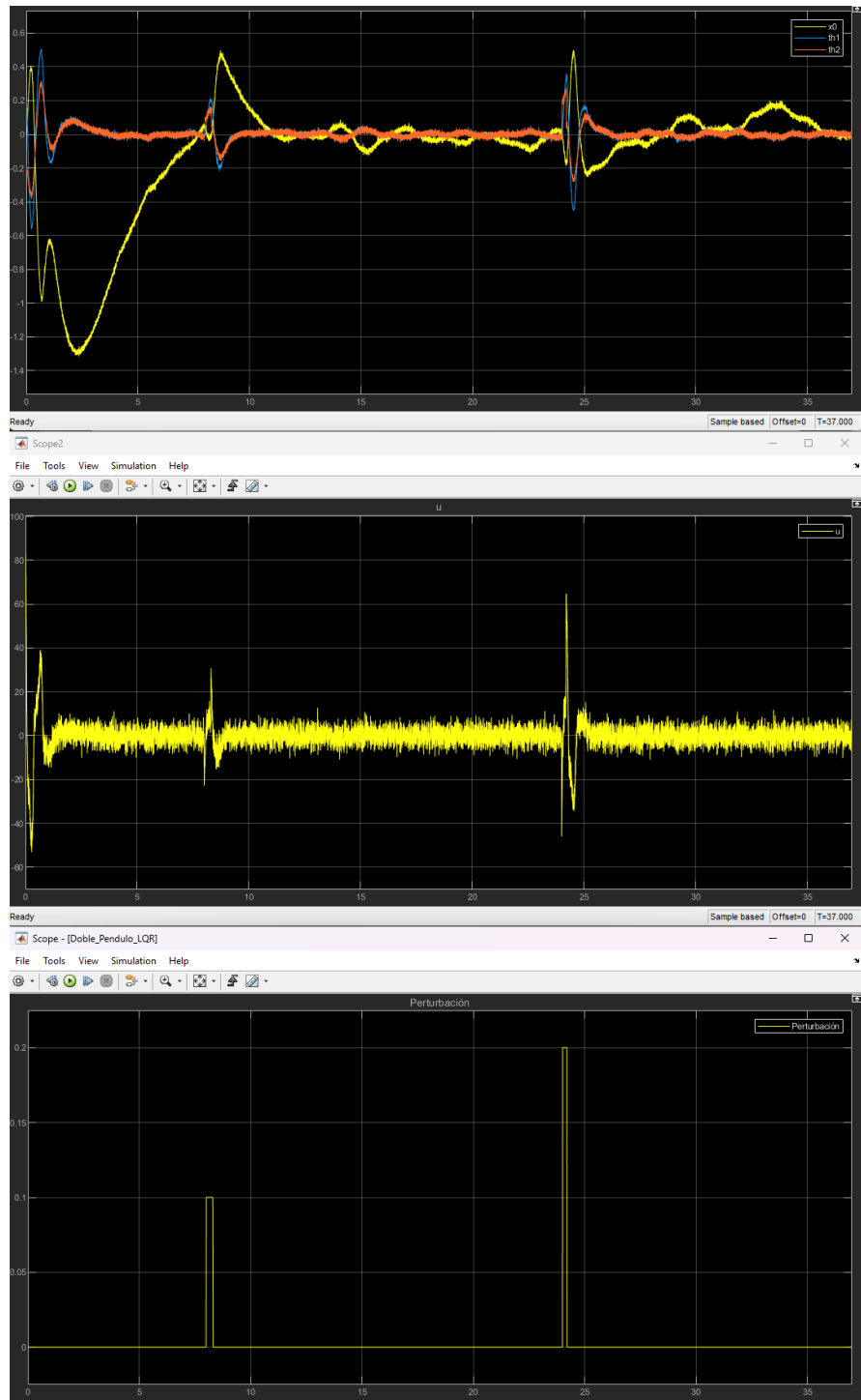


Figure 9: Imagen superior, amarillo: posición carro (metros) ; azul: ángulo péndulo inferior (rads); naranja: ángulo péndulo superior (rads) — Imagen medio: Fuerza aplicada sobre el carro (Newtons), — Imagen inferior: Perturbación en el péndulo superior (rads)