

# Péndulo Invertido Simple con Control Adaptativo

David Redondo Quintero

22 de enero de 2024

## 1. Introducción

Se pretende controlar un péndulo invertido colocado en un carrito móvil con rozamiento  $b$  mediante un control adaptativo MRAC. Este sistema es no lineal e inestable en su punto de equilibrio superior. Para controlar el péndulo, se ejerce una fuerza  $u$  hacia un lado o hacia el otro. El sistema cuenta con el carrito de masa  $M$  y el péndulo de longitud  $L$  y masa centrada en el extremo superior  $m$ . El ángulo del péndulo sobre el eje vertical es  $\theta(t)$  y  $x(t)$  es el desplazamiento del carro.

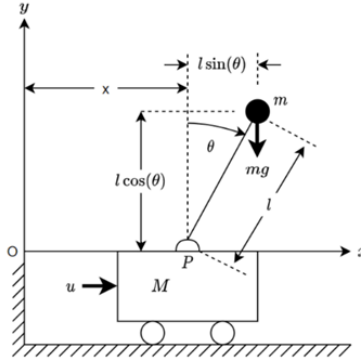


Figura 1: Ilustración del péndulo invertido sobre un carro

## 2. Ecuaciones del sistema

Se parte de las ecuaciones obtenidas para el control del péndulo con LQR. Ec. (1) y ec. (2).

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) = u - b\dot{x} \quad (1)$$

$$ml\cos(\theta)\ddot{x} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin(\theta) = 0 \quad (2)$$

## 3. Diseño del controlador adaptativo

Para realizar este controlador, se va a separar el sistema carro-péndulo en dos sistemas individuales. Es decir, se controlará el péndulo con un lazo de control adaptativo y el carro con un PID lineal.

Esta decisión lleva a la simplificación del lazo de control de un sistema de 4º orden a dos de segundo orden. Dado que el sistema cuenta con un único input, este debe ser el resultado de la suma de los lazos individuales.

## 4. Control Adaptativo

El control MRAC, funciona muy bien en situaciones en las que las perturbaciones o parámetros de la planta varían más lentamente que la dinámica de la planta. Este lazo de control ofrece un rendimiento y robustez superior a los PID clásicos. En la figura 2 se muestra el esquema de un control MRAC. Se

realizaron 3 tipos de control MRAC. Usando la regla MIT, combinando el esquema MRAC con un PID y mediante el teorema de Lyapunov. De los 3 modelos, los dos últimos se implementaron con éxito. El modelo MRAC basado en la regla MIT era incapaz de mantener el péndulo en su posición vertical. Por lo que solo se comentarán los otros dos esquemas. La función de transferencia modelo elegida es una

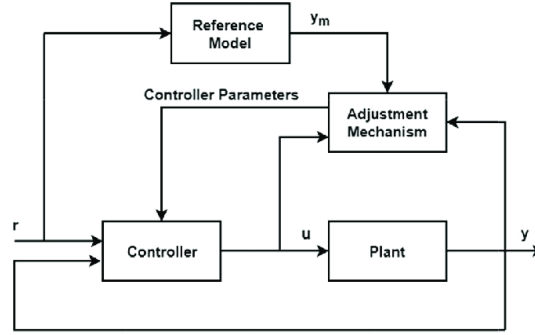


Figura 2: Esquema general MRAC

de segundo orden subamortiguado estándar, ec.3 con  $\omega_n = 2rad/s$  y  $\xi = 0,5$ . El diseño de la función de transferencia modelo se ha hecho de forma experimental teniendo en cuenta la fuerza que se tenía que usar para controlar el péndulo, de tal forma que no entrara en saturaciones.

El hecho de que la función modelo sea subamortiguada se debe a la dinámica del sistema. La estabilización del péndulo consiste en balancearlo dentro entorno a inestable. En otras palabras, el sistema modelo no puede tender asintóticamente al valor cero, por que el modelo no lineal no será capaz de seguir ese comportamiento. El sistema real alcanzará la estabilidad dentro del punto inestable gracias al balanceo del controlador.

$$F_{\text{modelo}} = \frac{25}{s^2 + 5s + 25} \quad (3)$$

#### 4.1. MRAC PID

Este diseño consta de un PID y una ley de adaptación que ajusta la señal del PID en base al error entre la planta y el modelo de referencia. En la Figura 3 se muestra el esquema de control. La ley de control sigue la forma de la ec.4 y la fuerza que se aplica al carro es la ec.5.

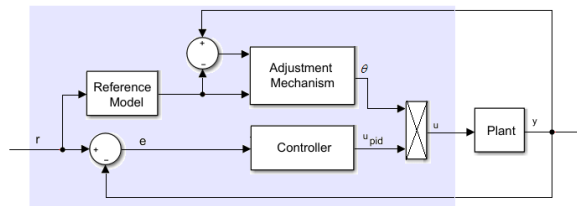


Figura 3: Esquema MRAC-PID

$$\theta = (y - y_m)y_m \frac{-\gamma}{s} \quad (4)$$

$$u = u_{\text{pid}}\theta \quad (5)$$

Cabe destacar que para que este diseño pudiera funcionar de forma adaptativa se ha hecho un pequeño ajuste. En el mecanismo de adaptación, ec.4, la  $y_m$  que multiplica todo la ecuación ha sido sustituida por un 1. En caso de que no se hiciera este ajuste, la  $y_m$  sería cero, debido a que la referencia es 0 y esto haría que el ganancia de adaptación  $\theta$  siempre fuera 1. En la figura 4 se puede ver el cambio. Dentro del mecanismo de adaptación en lugar de hacer la multiplicación entre  $y_m(y - y_m)$  donde  $y_m = 0$ , se hace  $1(y - y_m)$ .

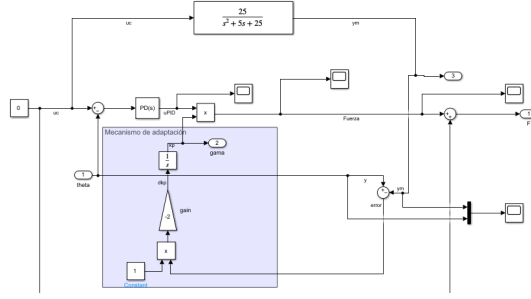


Figura 4: Detalle de la modificación

## 4.2. MRAC- Lyapunov

Debido a las características de la planta y el modelo de referencia (modelo de segundo orden), el controlador cuenta con 3 parámetros  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$ . De tal forma que la señal de control tiene el aspecto de la ec.6.

$$u = K_1 r - K_2 y - K_3 \dot{y} \quad (6)$$

Donde  $y$  es la salida del modelo no lineal, el ángulo del péndulo en este caso, y  $u$  es la fuerza que se le aplica al carro.  $y_e$  es la diferencia entre la salida del modelo y la planta.  $A_m$  y  $B_m$  representan modelo de referencia, mientras que el sistema de ecuaciones 10 son el modelo linealizado de la planta determinado en el artículo 2. Con este modelo se construyen las matrices  $A$  y  $B$ .

$$x_e = \begin{bmatrix} y_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\omega_n)^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix}; B_m = [0 \quad (\omega_n)^2] \quad (8)$$

$$\dot{\theta} = \frac{g}{\frac{4L}{3} - \frac{ml}{m+M}} \theta - \frac{1}{(m+M)(4 * l/3) - \frac{ml}{m+M}} * F \quad (9)$$

$$y = \theta \quad (10)$$

El diseño de las leyes de adaptación se ha realizado usando el Teorema de estabilidad de Lyapunov. La mayor dificultad de usar este teorema es encontrar un función  $V(t, x_e)$  definida positiva, tal que se cumpla  $V(0) = 0$  y que  $dV/(dt)$  sea definida negativa. Si se encuentra una función  $V$  que cumpla estas características, el teorema de Lyapunov asegura que el punto de equilibrio  $\theta = 0$  es asintóticamente estable.

Función  $V(t, x_e)$  11 propuesta en el artículo. La derivada de la función de Lyapunov  $V$  es definida negativa si se eligen las siguientes leyes de adaptación 13 y 14, donde  $\gamma_A$  y  $\gamma_B$  se refieren a las ganancias de adaptación (constantes positivas). La matriz  $P(2 \times 2)$  15 simétrica y definida positiva que cumple la inecuación 12. Resolviendo las ecuaciones 13 y 14 se obtienen las leyes de adaptación 16, 17 y 18. Donde  $A$  es la matriz de estado,  $A_m$  es la matriz de estado del modelo de referencia y  $Q$  es la matriz identidad.  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  y  $\gamma_3$  son las ganancias de adaptación del sistema.

$$V(t, x_e) = x_e^T P(x_e) x_e + \text{tr}\{(A_m - A)^T \gamma_A (A_m - A)\} + \text{tr}\{(B_m - B)^T \gamma_B (B_m - B)\} \quad (11)$$

$$AP + PA_m = -Q < 0 \quad (12)$$

$$\dot{A} = \gamma_A P x_e x^T \quad (13)$$

$$\dot{B} = \gamma_B P x_e r^T \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_n} (\xi + \frac{1+\omega_n^2}{4\xi}) & \frac{1}{1\omega_n^2} \\ \frac{1}{1\omega_n^2} & \frac{1}{4\xi\omega_n} (1 + \frac{1}{\omega_n^2}) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\dot{K}_1 = -\gamma_1 (p_{12}y_e + p_{22}\dot{y}_e)r \quad (16)$$

$$\dot{K}_2 = \gamma_2 (p_{12}y_e + p_{22}\dot{y}_e)y \quad (17)$$

$$\dot{K}_3 = \gamma_3 (p_{12}y_e + p_{22}\dot{y}_e)\dot{y} \quad (18)$$

## 5. Control PID

Como se comentó al principio, el control del sistema está dividido en dos controladores. Para el caso del carro se ha usado un control PID clásico. Mediante prueba y error se obtuvo el siguiente ajuste.  $P = -3,5, D = -10, I = 0, N = 10$ . Cabe mencionar que es el mismo para todos los controles que se detallan en este trabajo.

## 6. Implementación en MATLAB

Se ha diseñado un sistema con las siguientes características:

- Masa Carro  $M = 2$  Kilogramos.
- Longitud péndulo  $l = 0,6$  metros.
- Gravedad  $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$ .
- Masa péndulo  $m = 0,2$  Kilogramos.
- Rozamiento  $b = 0,1$

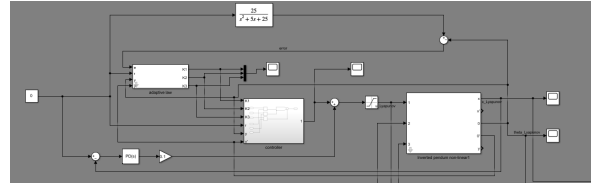


Figura 5: Implementación MRAC Lyapunov en Simulink

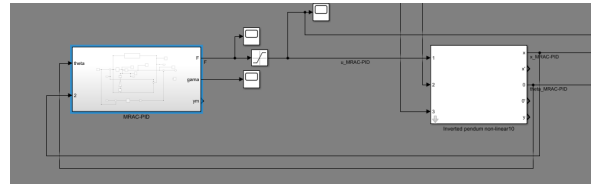


Figura 6: Implementación MRAC-PID en Simulink

## 7. Ajuste de los parámetros iniciales de adaptación

En este caso, el valor inicial de los parámetros de adaptación es una parte crítica para que el sistema sea estable. Tras un ajuste experimental se llegó a  $K_1 = -10$ ,  $K_2 = -40$  y  $K_3 = -10$  para caso del control con Lyapunov y a  $\theta = 1$  para control MRAC-PID. Valores más cercanos a 0 no logran estabilizar el sistema.

Respecto a los factores de aprendizaje, todos tienen valor unitario. De hecho, en el caso del MRAC-PID si se usan factores más altos de 3, el sistema es inestable debido a la enorme cantidad de fuerza que aplica y a la saturación en caso de estar limitada.

Para validar el ajuste del sistema, se ha tenido en cuenta el siguiente criterio. El recorrido del carro no debe superar los 3 metros, el límite de fuerza que se puede aplicar al sistema son 10 Newtons y tanto el carro como el péndulo tienen un tiempo de establecimiento menor a 20 segundos. En la figura 7 se muestra la respuesta de los 3 lazos de control. El test se hará a los 2 controles adaptativos a la vez, además de otro péndulo controlado por PID's lineales para visualizar fácilmente la diferencia.

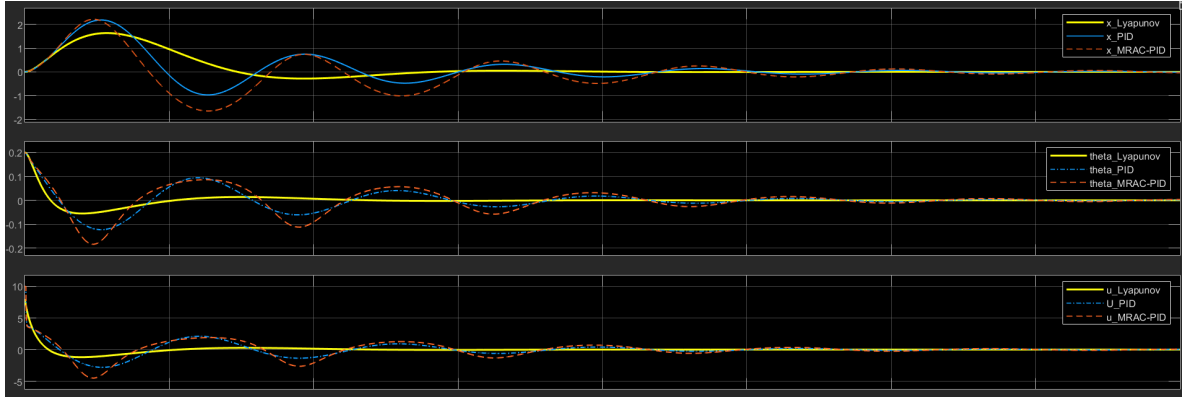


Figura 7: Imagen superior: posición carro (metros) — Imagen medio: Ángulo del péndulo (rads) — Imagen inferior: Fuerza aplicada sobre el carro (Newtons)

En este primer test ya se pueden apreciar varias diferencias. La más llamativa es que el control basado en el Lyapunov presenta una respuesta mucho mejor en todos los aspectos. Mientras que el resto de controladores necesitan 2 o más metros de carril, el control por Lyapunov solo 1,5 metros. En cuanto a la fuerza aplicada, hay una clara diferencia entre la respuesta del sistema con Lyapunov respecto al resto. Mientras que el resto de diseños requieren 10 Newtons o más, este solo requiere 8. En esta gráfica no se aprecia, porque hay una saturación en 10 Newtons, pues es el límite físico del escenario. Pero si se visualiza la fuerza antes de la saturación se ve que esta supera el valor de 200. El controlador lineal aplica una fuerza similar. No se ha logrado ajustar el control del MRAC-PID para que fuerza que aplica no supere el umbral de los 10 Newtons. Respecto a los mecanismos de adaptación, se ve que en el diseño de Lyapunov apenas se han modificado 9. Parece que es necesario aumentar la ganancia de aprendizaje para ver mejor su evolución. En la Figura 11, se ha ajustado el factor de aprendizaje de cada  $K$  a 100 durante una secuencia de perturbaciones. Se ve que estas evolucionan hacia valores más negativos. Esto se debe a que la  $ym$  es cero constantemente, ya que la referencia tiene valor nulo. Esto equivale a que el sistema tenga que seguir una entrada escalón, por lo que siempre va a tratar de aumentar la aceleración que se le aplica al carro, ya que es la forma más rápida de controlar el péndulo.

En cuanto al diseño del MRAC-PID, este valor oscila ligeramente entorno a 1, Figura 10. Debido a esta razón se puede ver que el desempeño es muy parecido al del controlador lineal, de hecho lo empeora. Este se debe a que la ganancia de adaptación se queda oscilando entorno 1, en lugar de subir, pero como se ve en la Figura 12, este valor tiende a subir lentamente con el paso del tiempo, lo que mejora la respuesta del sistema, sin embargo, también amplifica los sobrepicos de fuerza.

## 8. Demostración de Robustez

Para comprobar la robustez de los sistemas, se propone someterlos a los siguientes tests.

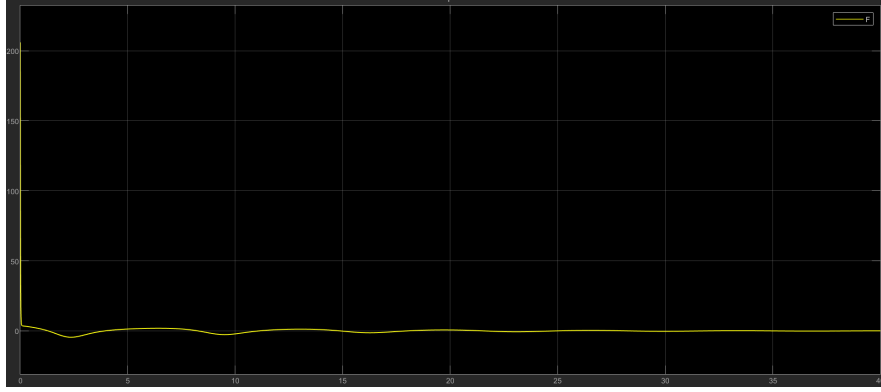


Figura 8: Fuerza aplicada por el controlador MRAC-PID

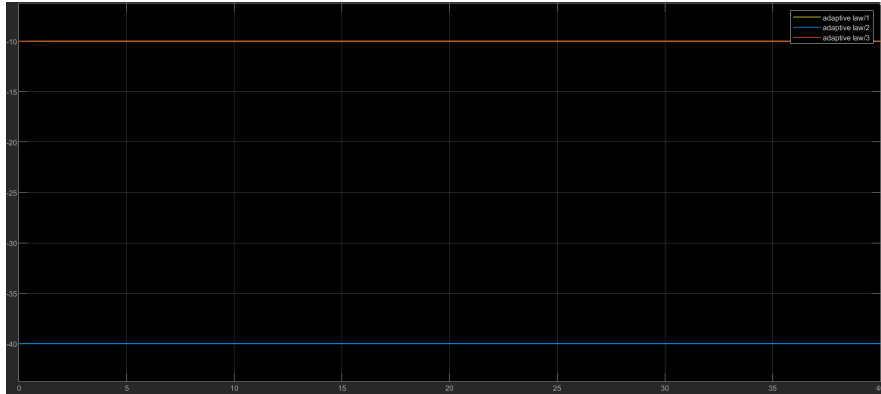


Figura 9: Evolución de las ganancias de adaptación en el MRAC de Lyapunov

1. Perturbaciones periódicas iguales mientras se modifica la longitud del péndulo. Con esta prueba se pretende evaluar la capacidad adaptativa del lazo.
2. Perturbaciones periódicas cuya amplitud se incrementa mientras se modifica la longitud del péndulo.

### 8.1. Perturbaciones periódicas iguales y cambio de longitud del péndulo

Las perturbaciones tienen una magnitud de 0.3 radianes y se generan cada 10 segundos. La longitud del péndulo pasa de 0.6 metros a 2 metros en el instante 30.5. En la Figura 13 se muestra la respuesta del sistema ante el cambio de longitud. Se puede ver que el controlador lineal y el MRAC-PID no son capaces de manejar el cambio y se vuelven inestables. Resulta llamativo que el MRAC-PID no fuera capaz de adaptarse al cambio. La principal razón, es que el mecanismo de adaptación es muy lento, como se puede ver en la Figura 12. Realizando pruebas, se llegó a un mecanismo más rápido, ec 19. En este nuevo mecanismo, lo que se está haciendo es duplicar el error del ángulo, lo que lleva a una adaptación más agresiva. Si se usa este mecanismo, el sistema sí que es capaz de ajustarse al cambio del péndulo. Además se observa que el mecanismo de adaptación sigue la misma dinámica que el de Lyapunov, Figura 11.

$$\theta = (y - y_m)y \frac{-\gamma}{s} \quad (19)$$

El modelo adaptativo de Lyapunov logra adaptarse al cambio perfectamente. En la Figura 14 se comparan las ganancias de adaptación sin la variación de la longitud y con ella. Es en el instante 30.5 cuando se realiza el cambio. No se observa ningún cambio significativo en los parámetros de adaptación, lo que lleva a pensar que el cambio no es lo suficientemente agresivo como para comprometer al control de Lyapunov. También puede ser que la modificación es muy suave, lo cual destaca sobre la incapacidad del resto de controladores para adaptarse a ella.

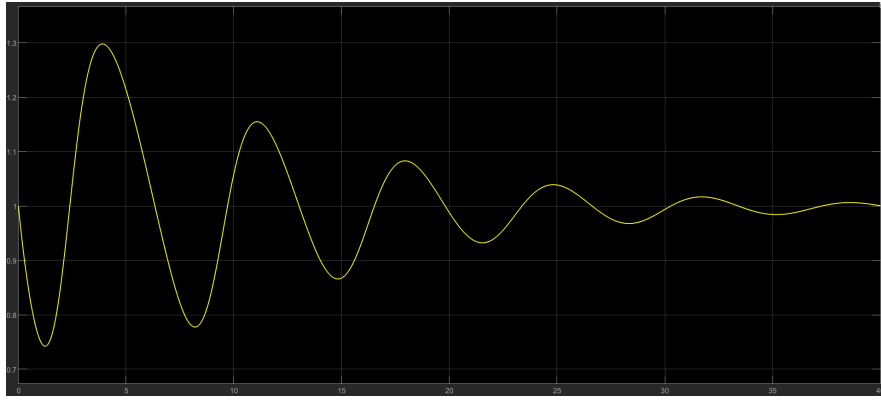


Figura 10: Evolución de la ganancia de adaptación en el MRAC-PID

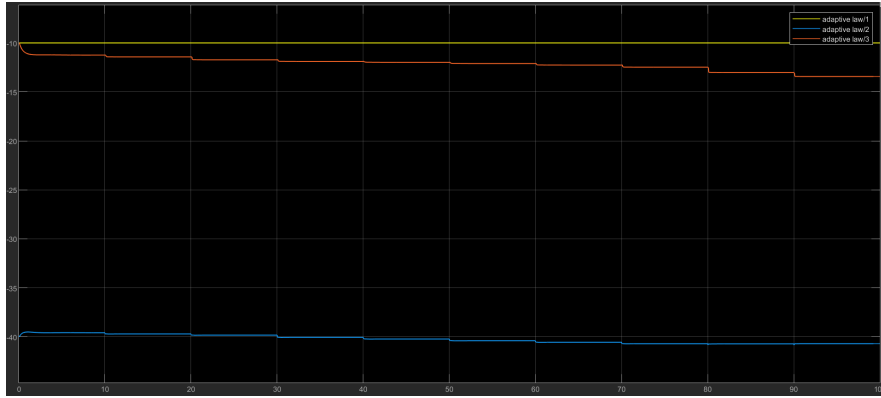


Figura 11: Evolución de las ganancias de adaptación en el MRAC de Lyapunov cuando el factor de aprendizaje es 100 para cada K

## 8.2. Perturbaciones periódicas incrementales y cambio de longitud del péndulo

En la Figura 15 se muestra la respuesta del controlador con Lyapunov y la del MRAC-PID con el nuevo mecanismo de adaptación. Como se puede ver, a partir de perturbaciones mayores a 0.4 radianes, se sobrepasa la especificación de diseño de no superar los 3 metros de carril. Además, a partir de perturbaciones superiores a 0.3 radianes, el control por Lyapunov comienza a saturar la fuerza que se le aplica al carro. El controlador MRAC-PID, ya saturaba la fuerza máxima desde el principio. En la Figura 16 se puede ver la evolución de las ganancias de adaptación durante este test. Se observa que a medida que aumenta la perturbación, las ganancias aumentan más rápidamente debido a las perturbaciones cada vez más agresivas.

## 9. Conclusiones

Como se ha podido ver durante la comparación, los diseños adaptativos han mostrado un comportamiento más robusto y rápido que el controlador lineal. Dentro de los diseños evaluados, destaca significativamente el control basado en la ley de Lyapunov, que además de ser el más rápido, es el mejor gestión hacía de la fuerza para controlar el sistema.

Por otro lado el controlador MRAC-PID ha sido un fracaso, pues siempre llega a saturar la fuerza máxima que se le puede aplicar al carro y según que mecanismo se use, no logra adaptarse correctamente a los cambios. En caso de que se use el mecanismo que puede adaptarse, el fuerza que aplica es exageradamente grande.

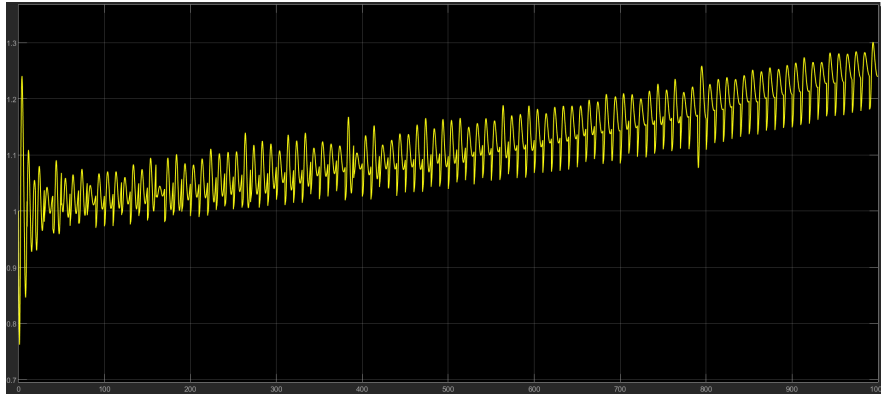


Figura 12: Evolución de la ganancia de adaptación del MRAC-PID en una simulación de 1000 segundos

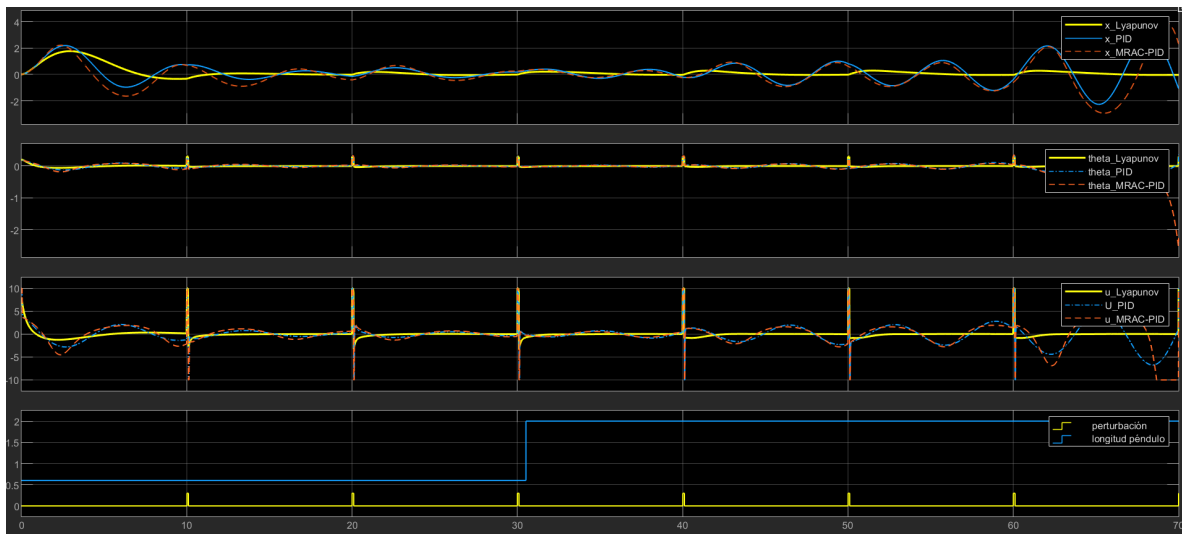


Figura 13: Test en el que varía la longitud del péndulo y se aplican perturbaciones de 0.3 radianes de forma periódica

## 10. Referencias

1. [MATLAB MRAC-PID](#)
2. [MODEL REFERENCE ADAPTIVE CONTROL FOR INVERTED PENDULUM](#)
3. [Model Reference Adaptive Control](#)



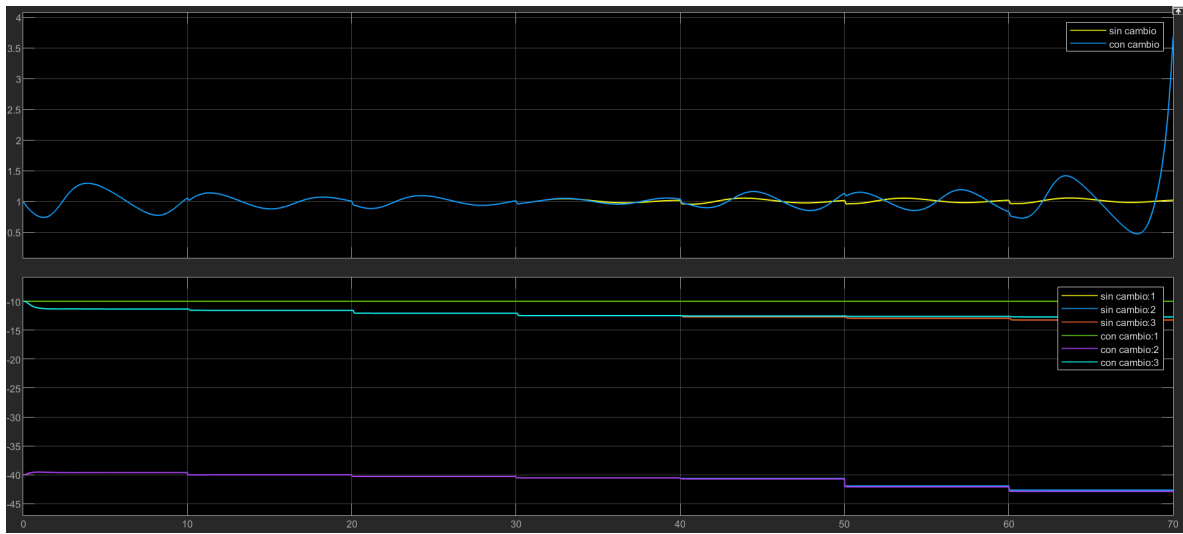


Figura 14: Gráfica superior: Adaptación del MRAC-PID — Gráfica inferior: Adaptación Lyapunov

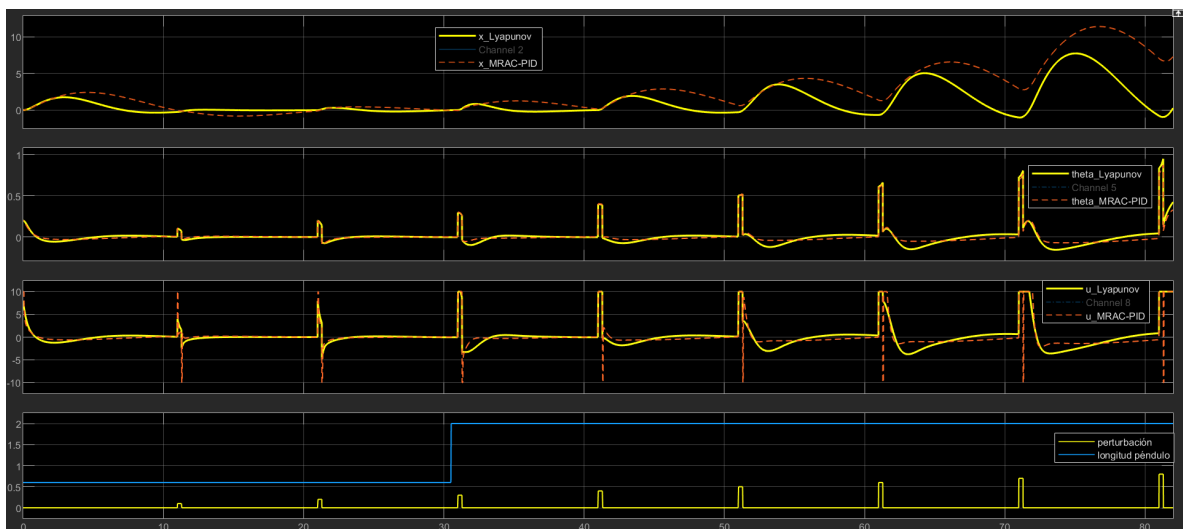


Figura 15: Test en el que varía la longitud del péndulo y se aplican perturbaciones de incrementales periódicamente

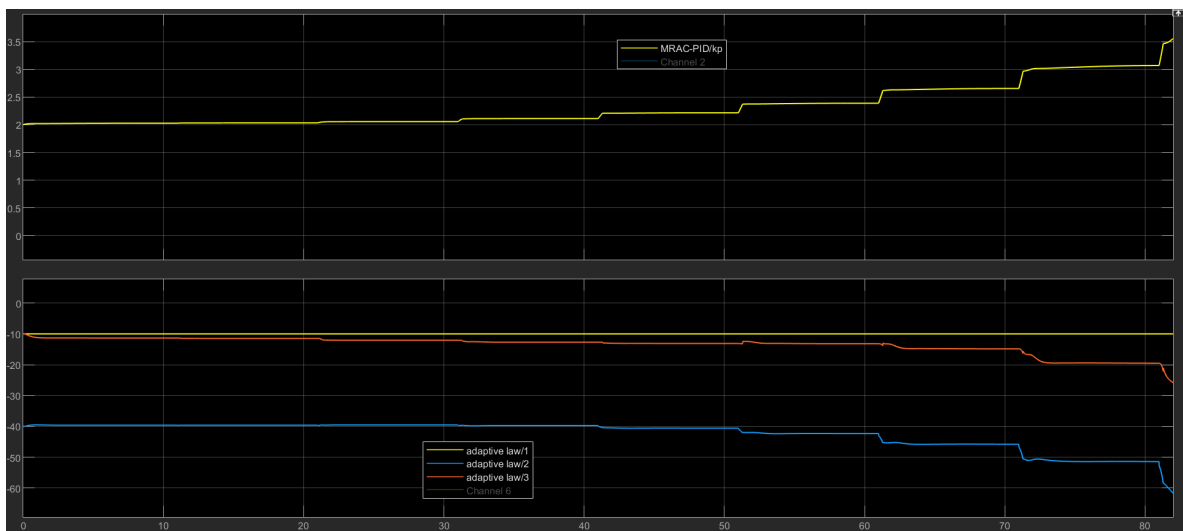


Figura 16: Ganancias de adaptación durante la segunda prueba de robustez