

Péndulo Invertido Simple

David Redondo Quintero

22 de enero de 2024

1. Introducción

Se pretende controlar un péndulo invertido colocado en un carrito móvil con rozamiento b . Este sistema es no lineal y es inestable en su punto de equilibrio superior. Para controlar el péndulo, el controlador puede ejercer fuerza (u) hacia un lado o hacia el otro. El sistema cuenta con el carrito de masa M y el péndulo de longitud L y masa centrada en el extremo superior m . El ángulo del péndulo sobre el eje vertical es $\theta(t)$ y x es el desplazamiento del carro.

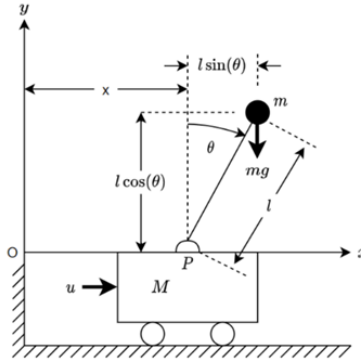


Figura 1: Descripción de la imagen.

2. Obtención de las ecuaciones del sistema

Para obtener las ecuaciones dinámicas del modelo, se calculará la Lagrangiana del modelo. Para ello se plantea obtener las ecuaciones cinemáticas y potenciales del carrito y el péndulo.

$$T_{\text{carrito}} = \frac{1}{2} M \left(\frac{d(x + l \sin(\theta))^2}{dt} \right) \quad (1)$$

$$T_{\text{péndulo}} = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} + l \dot{\theta} \cos(\theta) \right)^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) \right] \quad (2)$$

$$U_{\text{péndulo}} = mgl(1 - \cos(\theta)) \quad (3)$$

$$L = T - U \quad (4)$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta) \quad (5)$$

$$(6)$$

Se aplican las ecuaciones de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento del modelo. Notese que una de las ecuaciones de Euler (8) está igualada a $u - b\dot{x}$. Donde u representa la fuerza que se aplica al carrito, que será la salida de controlador y b es el coeficiente de rozamiento del carrito.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = u - b\dot{x} \quad (8)$$

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = 0 \quad (9)$$

Se obtienen las siguientes ecuaciones no lineales del sistema (10) y ec. (11).

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) = u - b\dot{x} \quad (10)$$

$$ml \cos(\theta)\ddot{x} + ml^2\ddot{\theta} - mgl \sin(\theta) = 0 \quad (11)$$

Se linealizan las ecuaciones del sistema entorno al punto inestable, considerado $\theta = 0$ y asumiendo que para valores pequeños se cumple las aproximaciones (12), (13) y (14).

$$\sin(\theta) \approx \theta \quad (12)$$

$$\cos(\theta) \approx 1 \quad (13)$$

$$\dot{\theta} \approx 0 \quad (14)$$

Sistema de ecuaciones linealizado, ecuaciones (15) y (16).

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u - b\dot{x} \quad (15)$$

$$\ddot{x} + l\ddot{\theta} - g\theta = 0 \quad (16)$$

Si se despejan $\ddot{\theta}$ y \ddot{x} se obtienen las ecuaciones (17) y (18).

$$\ddot{x} = \frac{(u - ml\ddot{\theta} - b\dot{x})}{M + m} \quad (17)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(g\theta - \ddot{x})}{l} \quad (18)$$

3. Construcción del sistema en forma de espacio de estados

Se substituye la ecuación (17) en (18)

$$\ddot{\theta} = \frac{(g\theta - \ddot{x})}{l} = \frac{g\theta - \frac{(u - ml\ddot{\theta} - b\dot{x})}{M + m}}{l} \quad (19)$$

Simplificando, obtenemos:

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m)g\theta l - u + b\dot{x}}{lM} \quad (20)$$

Se substituye la ecuación (20) en la (17) y se obtiene (21)

$$\ddot{x} = \frac{u - b\dot{x}}{M} - \frac{mg\theta}{M} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{M} & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b}{Ml} & \frac{g(M+m)}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u$$

4. Implementación en MATLAB

Se ha diseñado un sistema con las siguientes características:

- Masa Carro $M = 2,4$ Kilogramos.
- Longitud péndulo $l = 0,3$ metros.
- Gravedad $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$.
- Coeficiente rozamiento $b = 0,1$.
- Masa péndulo $m = 0,23$ Kilogramos.

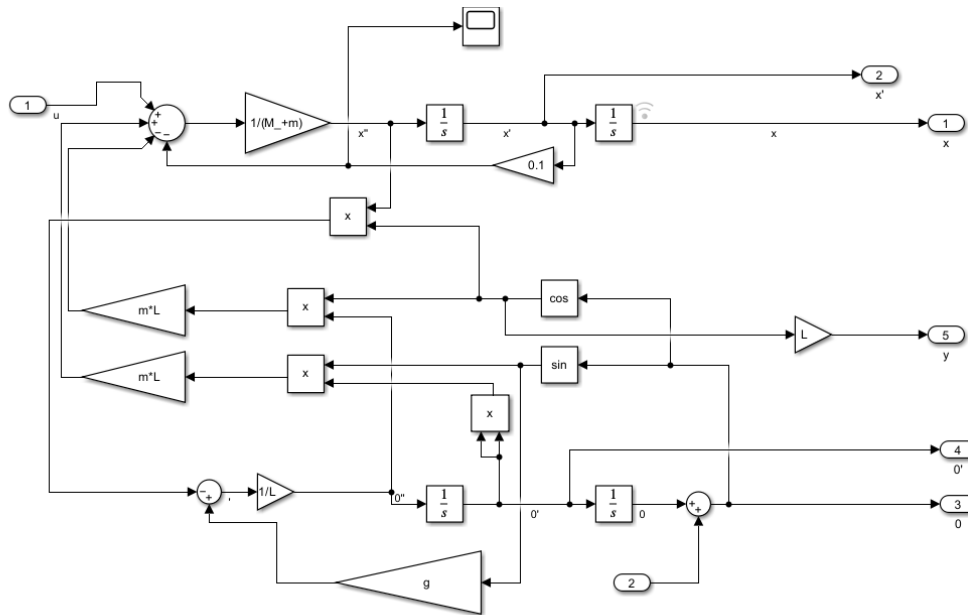


Figura 2: Implementación en Simulink

A través de la librería "syms" se definen las variables del sistema y las ecuaciones con las variables de estado $\ddot{\theta}$ y \ddot{x} despejadas. Posteriormente se genera la matriz jacobiana respecto a las variables de estado y se evalúa en el punto de equilibrio inestable. Como se puede comprobar.

5. Diseño del controlador LQR

El LQR (Linear Quadratic Regulator) es un método de control óptimo utilizado en sistemas lineales. Consiste en diseñar un controlador que minimiza una función de costo cuadrática ec.22, la cual penaliza los errores en el estado del sistema y en la entrada de control. Donde la matriz Q es cuadrática y semipositiva definida, mientras que R tiene que ser definida positiva para que sea invertible.

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (22)$$

El diseño del control cuadrático se realiza mediante el ajuste de las matrices Q y R .

1. Los elementos de Q indican la importancia relativa de cada componente del estado en la función de costo. Valores más altos en la diagonal de Q indican una penalización más fuerte para los errores en los estados correspondientes. Ajustar los valores de Q puede afectar la respuesta transitoria y la precisión del sistema en el seguimiento de referencia.

2. Similar a Q , los elementos de R indican la importancia relativa de cada componente del vector de control en la función de costo. Valores más altos en la diagonal de R indican una penalización más fuerte para grandes valores de control. Ajustar los valores de R puede influir en la suavidad y la energía del controlador. Valores más grandes pueden llevar a un control más suave, mientras que valores más pequeños pueden permitir una respuesta de control más rápida.

El LQR se basa en una realimentación de estados con ganancias mediante la ley de control ec.23. La obtención del vector K se consigue mediante la resolución de la ecuación de Riccati, que es el producto de la resolución del funcional ec.22.

$$u = -R^{-1}B^TKx \quad (23)$$

Una vez que se calcule el vector de ganancias K , conviene calcular los autovalores del sistema realimentado para comprobar que todos son negativo y por tanto asegurar que el sistema es estable. Antes de desarrollar el proceso de ajuste, se comprueba la controlabilidad del sistema. Para ello se hace uso de la función 'ctrb()' de MATLAB y se comprueba el rango de la matriz resultante. Esta es de rango de completo y por tanto es completamente controlable. Respecto a la observabilidad, se considera completa, es decir, se pueden observar todas las variables de estado.

6. Ajuste de los parámetros Q y R

El proceso de ajuste es el siguiente. Se plantea una configuración inicial y en base a las características de diseño establecidas, se modifican las matrices para ajustarse a los requerimientos. Para un situación inicial en el que el péndulo tiene un ángulo de 0.2 radianes, se desea que el controlador sea capaz de estabilizar el péndulo en menos de 5 segundos. No importa el tiempo que tarde en volver el carro a la posición 0, pero se exige que no requiera más de 1 metro de carril en ambas direcciones y que la fuerza máxima aplicada no supere los 10 Newtons. Se comienza con valores unitarios:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 1$$

El resultado del primer ajuste, Figura 3, es bastante bueno. Se cumplen todos los requisitos a excepción de la cantidad de fuerza máxima. Se aumenta la penalización de la señal de control subiendo la R hasta 10.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 10$$

Con el nuevo ajuste se logra cumplir el requisito de la fuerza máxima, pero el carro necesita más carril del que dispone, Figura 4. En intentos posteriores se trató de penalizar menos el error en el péndulo y su velocidad, así como modificar la penalización de la velocidad del carro, pero todas estas apenas cambiaban la respuesta del sistema. De modo que el ajuste se encuentra balanceando la R y el primer índice de la matriz Q el cual pondera el error de la posición del carro respecto a 0. Luego a valores más grandes de este índice, mayor será la fuerza ejercida en el carro y menor es el recorrido del carril. Tras varias simulaciones se encontró esta configuración que cumple por poco los requisitos, Figura 5.

$$Q = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 100$$

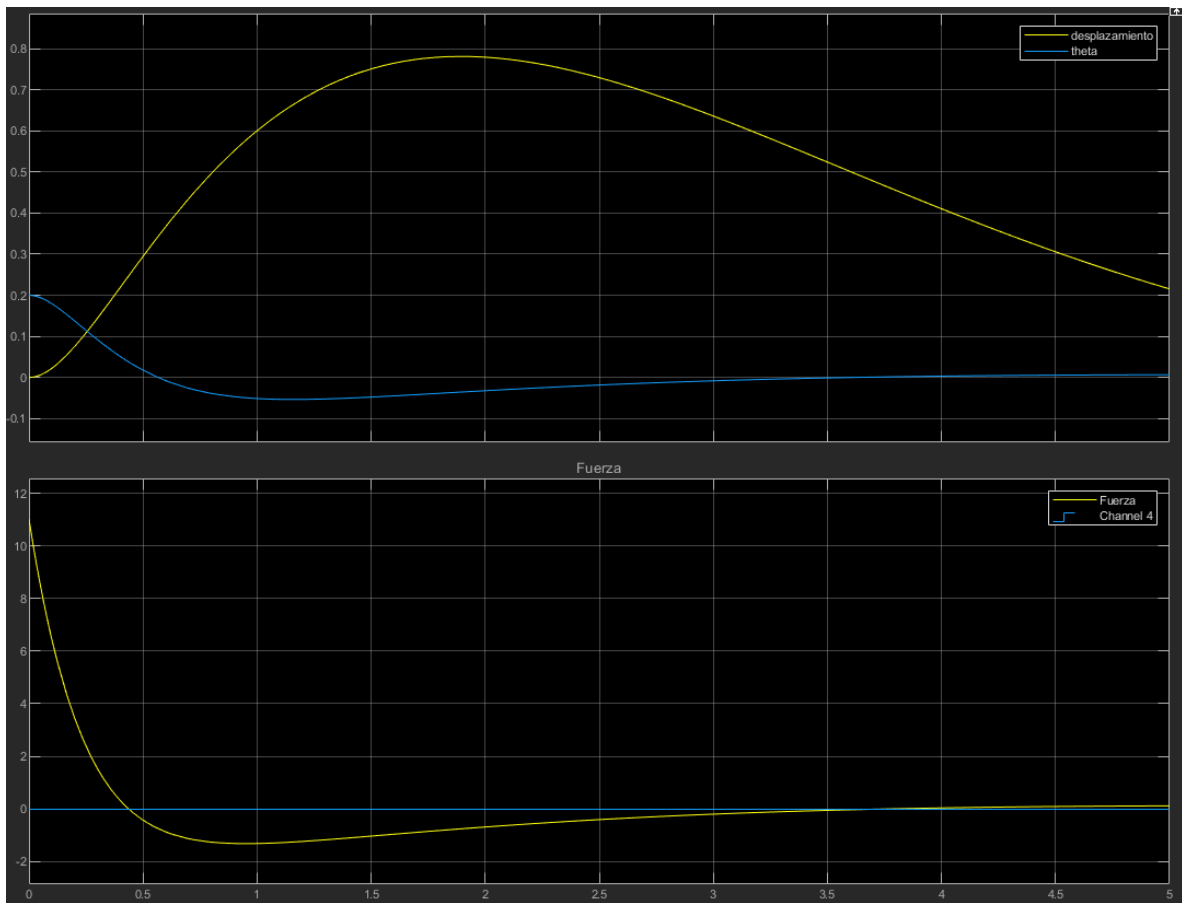


Figura 3: Imagen superior, amarillo: posición carro (metros); azul: ángulo péndulo (rads)— Imagen inferior: Fuerza aplicada sobre el carro (Newtons)

7. Demostración de Robustez

Para comprobar la robustez del sistema, se propone someter el péndulo a perturbaciones puntuales de tamaño incremental. A su vez, se va a introducir ruido en la señal de lectura de todas las variables de estado. En la Figura 6, se observa claramente que el sistema es capaz de soportar hasta perturbaciones de 0.5 radianes. A partir de ese punto, el sistema es inestable. Notese que para perturbaciones mayores a 0.2 radianes, la fuerza que se le aplica al carro comienza a saturar en 10 Newtons, dado que es el límite físico impuesto. Además, cuando la perturbación es mayor de 0.3 radianes, el carro necesita más distancia del límite impuesto en la especificación. Luego el sistema es capaz de soportar perturbaciones como máximo alrededor de 0.3 radianes. Situaciones con alteraciones superiores pueden hacer que el sistema falle fácilmente.

8. Conclusiones

El diseño LQR presentado cumple con las características especificadas dentro del margen comentado en la sección de robustez. El ajuste de Q y R necesario es muy específico y cualquier otra combinación probada durante los ensayos termina incumpliendo alguno de los requisitos. De modo que el diseño planteado es, sino óptimo, muy bueno bajo dichos requisitos.

9. Referencias

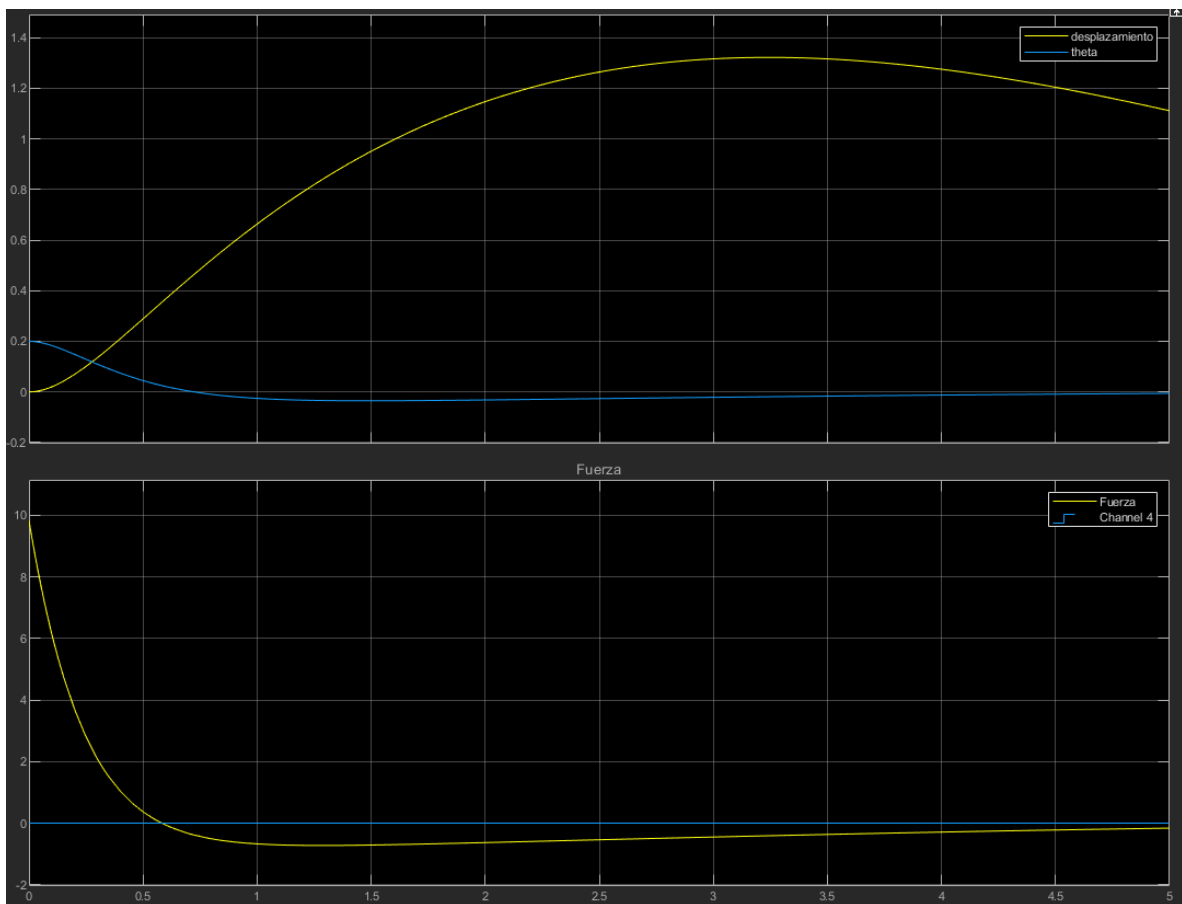


Figura 4: Imagen superior, amarillo: posición carro (metros); azul: ángulo péndulo (rads)— Imagen inferior: Fuerza aplicada sobre el carro (Newtons)

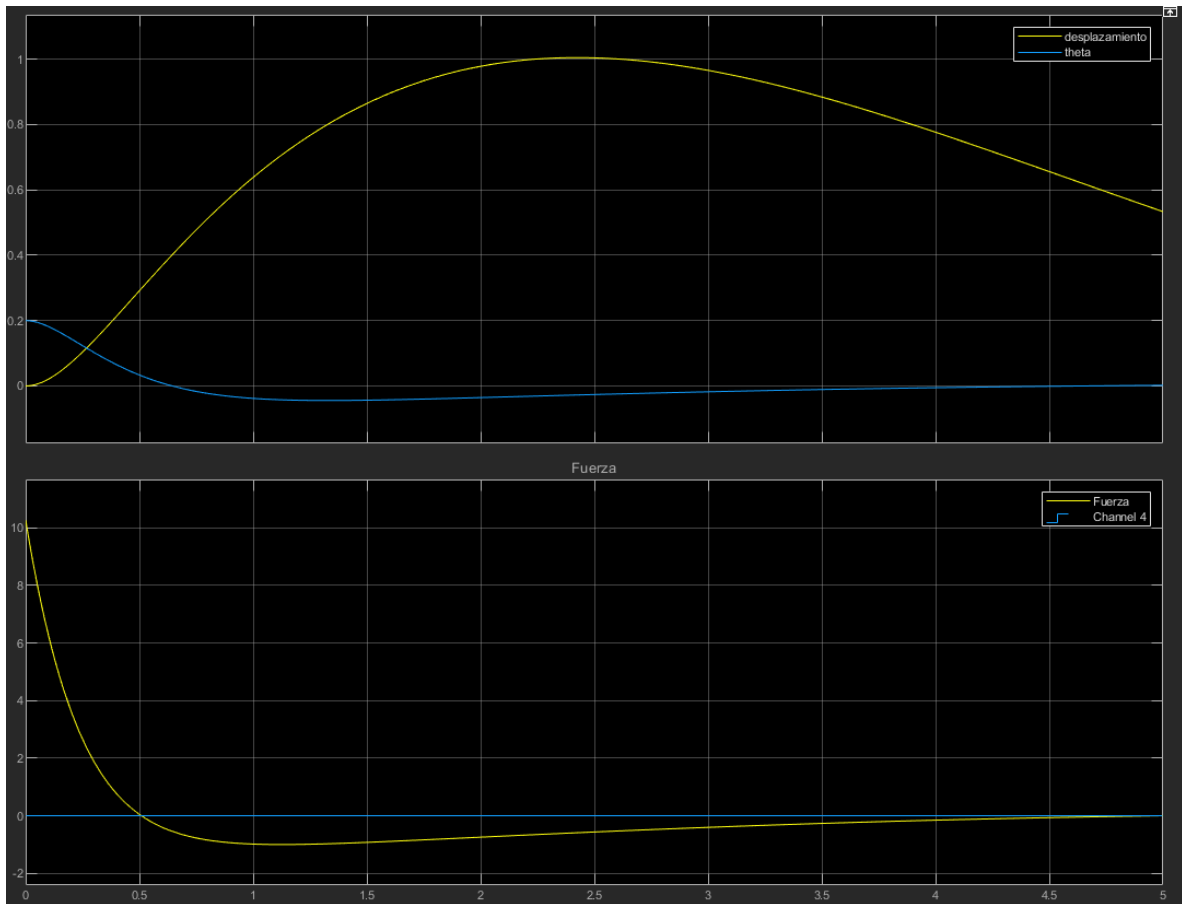


Figura 5: Imagen superior, amarillo: posición carro (metros); azul: ángulo péndulo (rads)— Imagen inferior: Fuerza aplicada sobre el carro (Newtons)

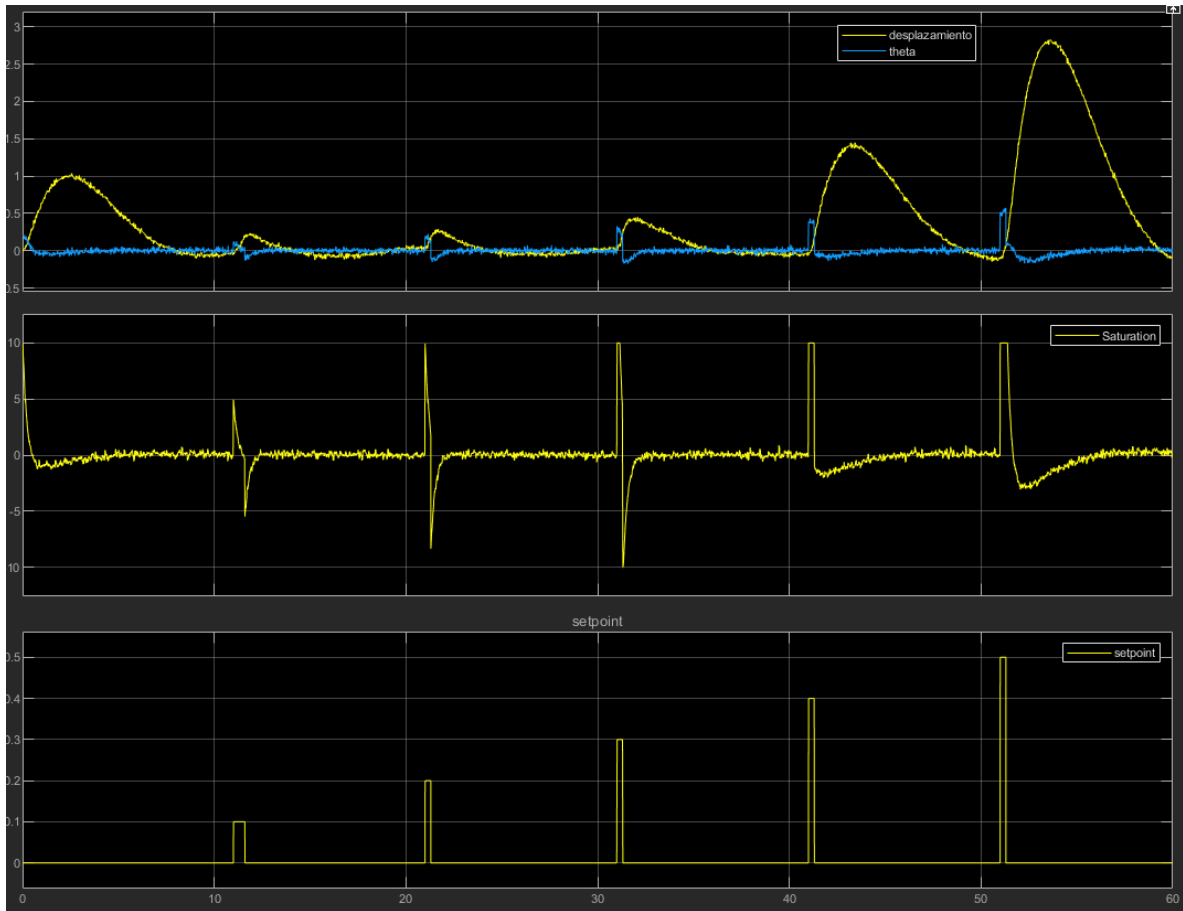


Figura 6: Imagen superior, amarillo: posición carro (metros); azul: ángulo péndulo (rads)— Imagen medio: Fuerza aplicada sobre el carro (Newtons)— Imagen inferior: Perturbación sobre el péndulo (rads)