

Control de un motor DC con VSC

David Redondo Quintero

23 de marzo de 2024

1. Introducción

En el presente documento se modela un motor DC y se diseña un control de estructura variable que permite controlar la velocidad del motor a través del voltaje.

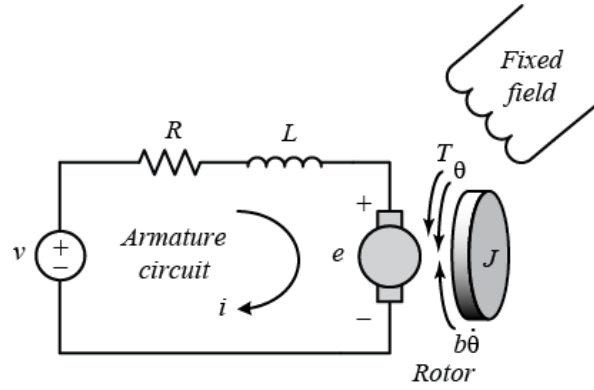


Figura 1: Esquema de funcionamiento de un motor DC genérico

Donde:

- (J) Momento de inercia del Rotor $0,05kg.m^2$
- (b) Coeficiente de fricción del motor $0,01N.m.s$
- (Ke) Constante de fuerza electromotriz $0,5V/rad/sec$
- (Kt) Constante de torque del motor $0,5N.m/Amp$
- (R) Resistencia eléctrica $2Ohm$
- (L) Inductancia eléctrica $0,5H$

2. Obtención de la ecuaciones del sistema

Siguiendo el procedimiento de la referencia 2, se realiza la obtención del modelo no lineal del motor DC. Mediante el análisis de la ley de voltajes de Kirchhoff al sistema eléctrico y la segunda ley de Newton a la rotación, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = v - Ke\omega \quad (1)$$

$$J\dot{\omega} + b\omega = K_t i \quad (2)$$

Ahora se procede a linealizar el sistema. Aplicando la transformada de Laplace, las ecuaciones de modelado anteriores pueden expresarse en términos de la variable Laplace s:

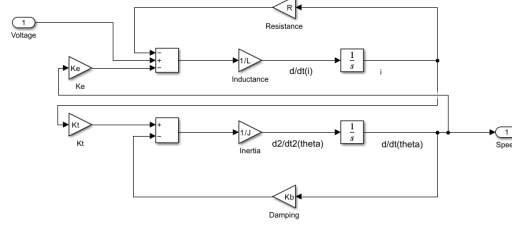


Figura 2: Modelo en Simulink

$$s(Js + b)\Theta(s) = KI(s) \quad (3)$$

$$(Ls + R)I(s) = V(s) - Ks\Theta(s) \quad (4)$$

Sustituyendo la $I(s)$ entre las dos ecuaciones anteriores, podemos obtener la función de transferencia [5](#) que relaciona la velocidad angular del motor con el voltaje de alimentación.

$$\frac{\dot{\Theta}(s)}{V(s)} = \frac{s\Theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js + b)(Ls + R) + K^2} \left[\frac{rad/sec}{V} \right] \quad (5)$$

Sustituyendo los valores del inicio, obtenemos la siguiente función de transferencia:

$$\frac{20}{s^2 + 4,2s + 10,8} \quad (6)$$

3. Modelado del sistema en Simulink

Dado el sistema, se construye su versión no lineal en Simulink.

4. Diseño del controlador

El modelo de función de transferencia en puede ser rescrito en el dominio del tiempo como la ecuación [7](#). Posteriormente se definen la variables de estados como [8](#)

$$\ddot{\theta} + 4,2\dot{\theta} + 10,8\theta = 20v \quad (7)$$

$$x_1 = \theta \quad (8)$$

$$x_2 = \dot{\theta} \quad (9)$$

$$u = v \quad (10)$$

Finalmente, se obtiene el modelo en la forma canónica controlable

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (11)$$

$$\dot{x}_2 = -4,2x_2 - 10,8x_1 + 20u \quad (12)$$

Para asegurar que el controlador es robusto, se aplica la condición de estabilidad $s\dot{s} < 0$ dada por el teorema de Lyapunov. De esta forma se asegura que el sistema tienda a perder energía. Siguiendo la misma metodología de la referencia [1](#), se diseña un controlador de modo deslizante usando usando el error entre el estado y la referencia. Donde θ es la velocidad angular del motor y θ_d es la velocidad de referencia. λ debe ser un valor constante > 0 para que se cumpla la condición de Hurwitz.

$$e = \theta_d - \theta \quad (13)$$

$$s = \dot{e} + \lambda e \quad (14)$$

$$\dot{s} = \lambda \dot{e} + \ddot{e} = -f(s) \quad (15)$$

Donde $f(S)$ es cualquier función impar no decreciente. Esto incluye polinomios de potencia impar, tangente inversa, tangente hiperbólica y cualquier función no continua satisfactoria, como $\text{sign}(s)$ o $\text{sat}(s)$. De esta forma se cumple la inecuación $s\dot{s} < 0$. Siempre que s sea mayor de cero, $f(s)$ será menor que cero. Para construir la forma de la señal de control, se desarrollan las ecuaciones 14 y 15.

$$s = c\dot{e} - \ddot{\theta} = c\dot{e} + 4,2\ddot{\theta} + 10,8\dot{\theta} - 20u \quad (16)$$

$$\dot{s} = \lambda \dot{e} + \ddot{e} = \ddot{\theta}_d + \lambda(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) = -f(s) \quad (17)$$

$$4,2x_2 + 10,8x_1 - 20u - \lambda x_2 = -f(s) \quad (18)$$

Despejando u de la ecuación 18 se obtiene la ecuación 19.

$$u = \frac{1}{20}(4,2x_2 + 10,8x_1 - \lambda x_2 + f(s)) \quad (19)$$

Una vez definida la forma de la señal de control, se procede a elegir la $f(s)$. Según el trabajo 1 se proponen varias leyes de control. En este caso se ha seleccionado $f(s) = K\text{sign}(s)$. Se selecciona un valor de K lo suficientemente grande. Cuanto mayor sea el valor de K , más rápido convergerá la trayectoria a la superficie de deslizamiento.

Los parámetros de control seleccionados son $K = 10$ y $\lambda = 4$. Dado que se busca que el error entre la salida y el setpoint decaiga a cero dentro de 1 segundos, y que el decaimiento exponencial simple a cero ocurre en aproximadamente cuatro constantes de tiempo, la elección de λ es $\frac{4}{1}$. Este método de diseño se ha extraído del documento 1.

5. Características del sistema

Una vez diseñado el controlador, se aplica una entrada escalón de valor unitario y se determinan las características de la respuesta. El tiempo de subida obtenido (63 % de la respuesta) es 0.478 segundos y el tiempo de establecimiento con el criterio del 5 % es 0.979 segundos. De modo que el criterio de diseño impuesto para el tiempo de establecimiento se cumple satisfactoriamente.

Como se puede ver en las figuras 5, 7 y 8, el controlador sufre del efecto conocido como chattering cuando alcanza la superficie de deslizamiento S . Como ya se sabe, este efecto se produce debido a la propia naturaleza del controlador, pues este es discontinuo. Cabe destacar que en el diagrama de fase 5 que el punto final está en la coordenada (1,0) debido a que el setpoint está en el valor 1. Respeto a la evolución del sistema en el diagrama de fase, se puede observar el comportamiento esperado para el control VSC. El controlador lleva al sistema a la superficie de deslizamiento para posteriormente llevarlo al punto de equilibrio.

En cuanto al comportamiento de s frente al tiempo, ilustración 7, la superficie alcanza el cero siguiendo una línea recta de pendiente constante, pues el control está aplicando un voltaje constante. Una vez alcanza el 0, comienza a oscilar entorno a este.

6. Reducción del chattering

Existen múltiples métodos para reducir el chattering. En este trabajo, se va a emplear la técnica de la capa límite propuesta en el artículo 3 que sigue la siguiente forma:

De esta forma, cuando el sistema ha alcanzado la capa límite definida por el valor de ω , el control pasa de ser discontinuo a uno continuo. Con este cambio, se logra reducir significativamente el efecto del chattering. De modo que el actuador no sufre tanto como antes y la respuesta del sistema mejora.

Para evaluar el efecto del tamaño de la capa límite, se proponen 3 valores de anchura (ϕ): 0.01, 1 y 3. Como se puede apreciar en las figuras, una capa límite demasiado pequeña produce que el sistema

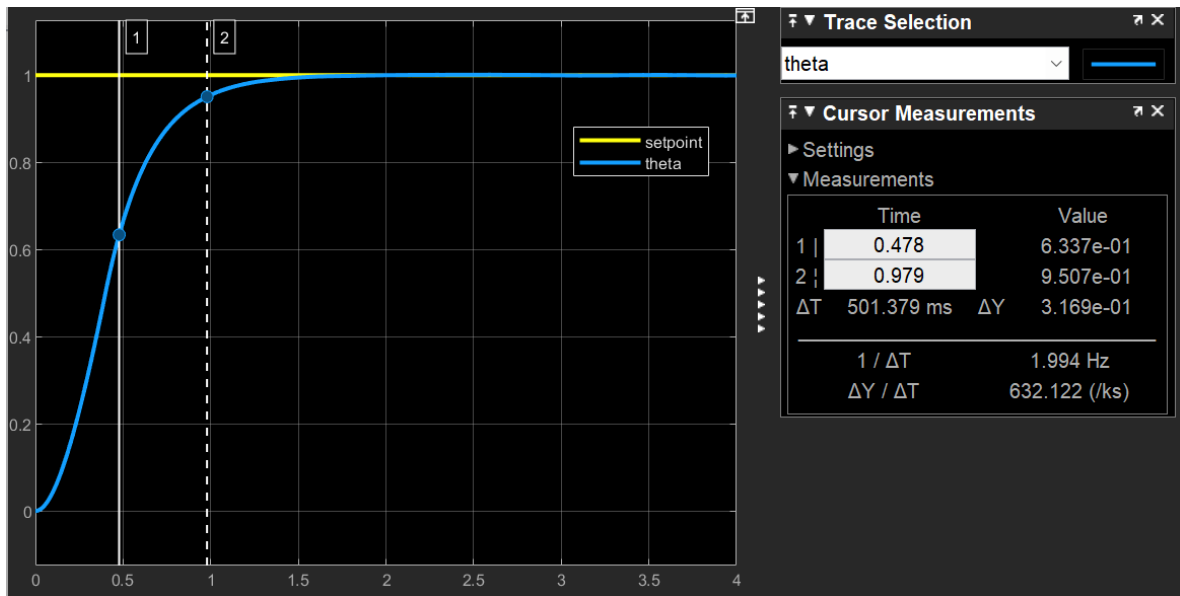


Figura 3: Respuesta del sistema

no reduzca tanto el efecto del chattering, imagen 15, sin embargo el resultado es aún así mejor que no tener la capa límite. Por otro lado, una capa demasiado grande provoca que el sistema sea mucho más lento, debido a que el control continuo propuesto es bastante más lento que el discontinuo, imagen 20. En la ilustración 19 se pudo apreciar el punto de cambio entre el controlador continuo y discontinuo, que se da justo cuando se alcanza el valor $s=3$.

Por lo general, incorporar la capa límite mejora la respuesta del sistema en la etapa de estabilización y hace que el actuador no tenga que sufrir tanto para realizar el control. No obstante, esta ventaja implica un ligero aumento en el tiempo de subida y estabilización entorno al setpoint.

6.1. Anchura igual a 1

Se establece la anchura de la capa límite a 1.

6.2. Anchura igual a 0.01

Se establece la anchura de la capa límite a 0.01.

6.3. Anchura igual a 3

Se establece la anchura de la capa límite a 3.

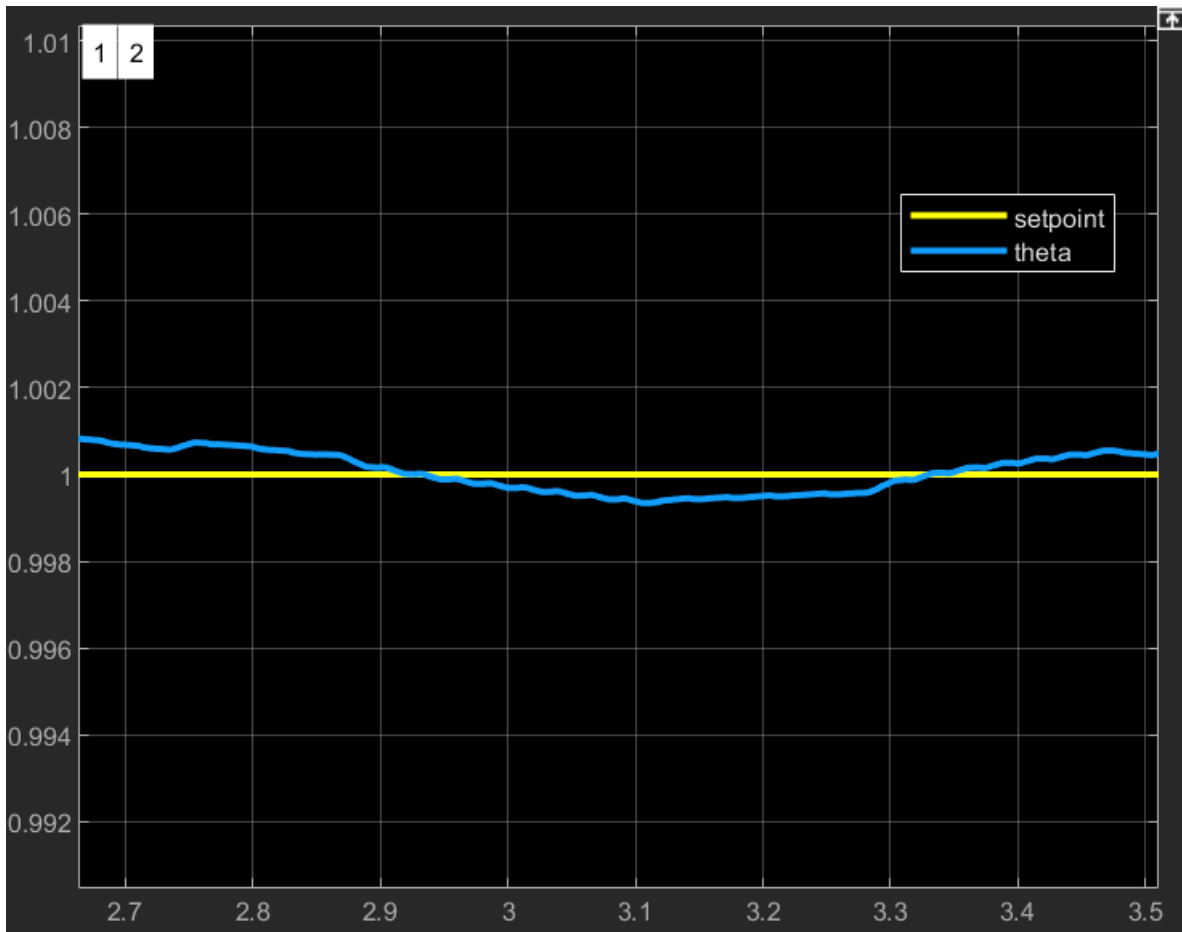


Figura 4: Zoom in para apreciar el efecto del chattering

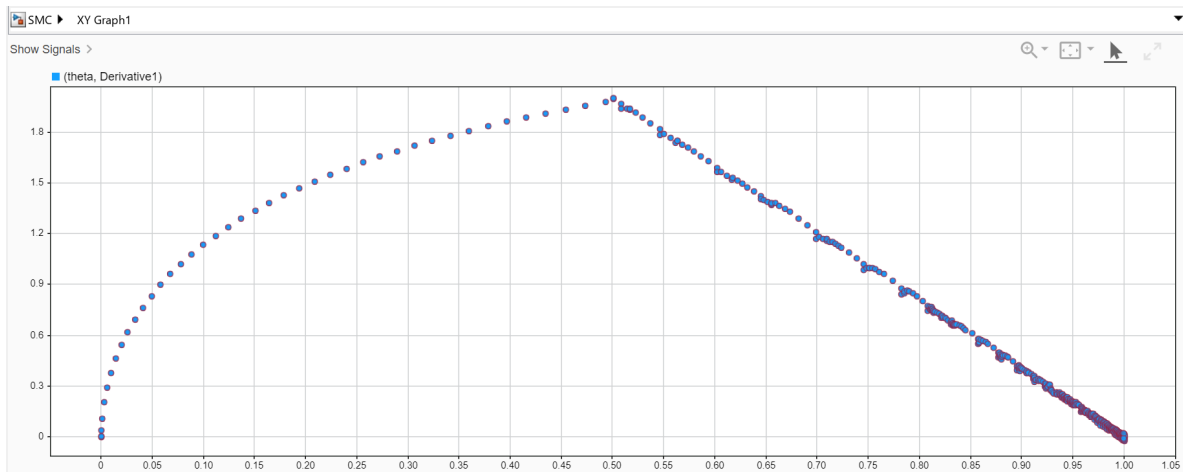


Figura 5: Diagrama de fase

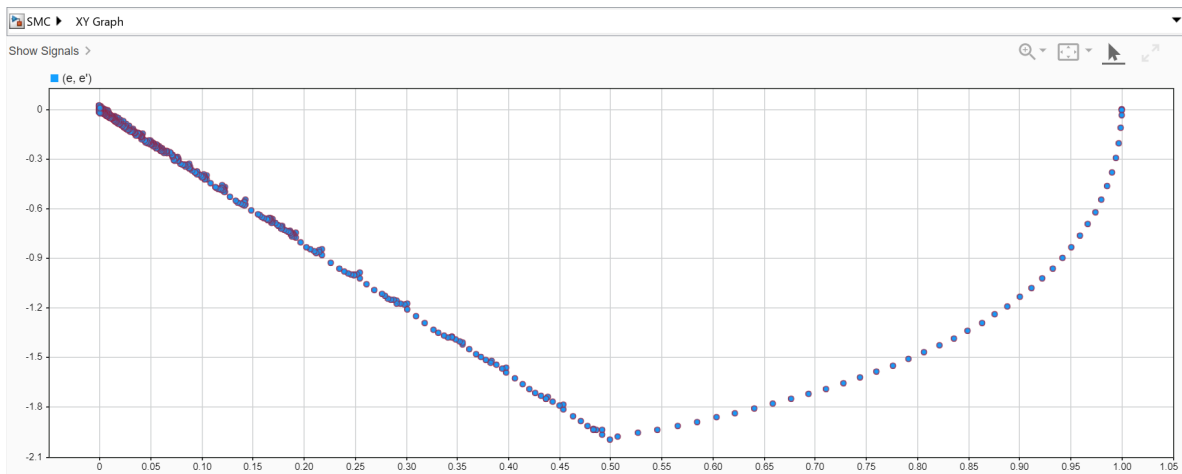


Figura 6: Diagrama de fase del error

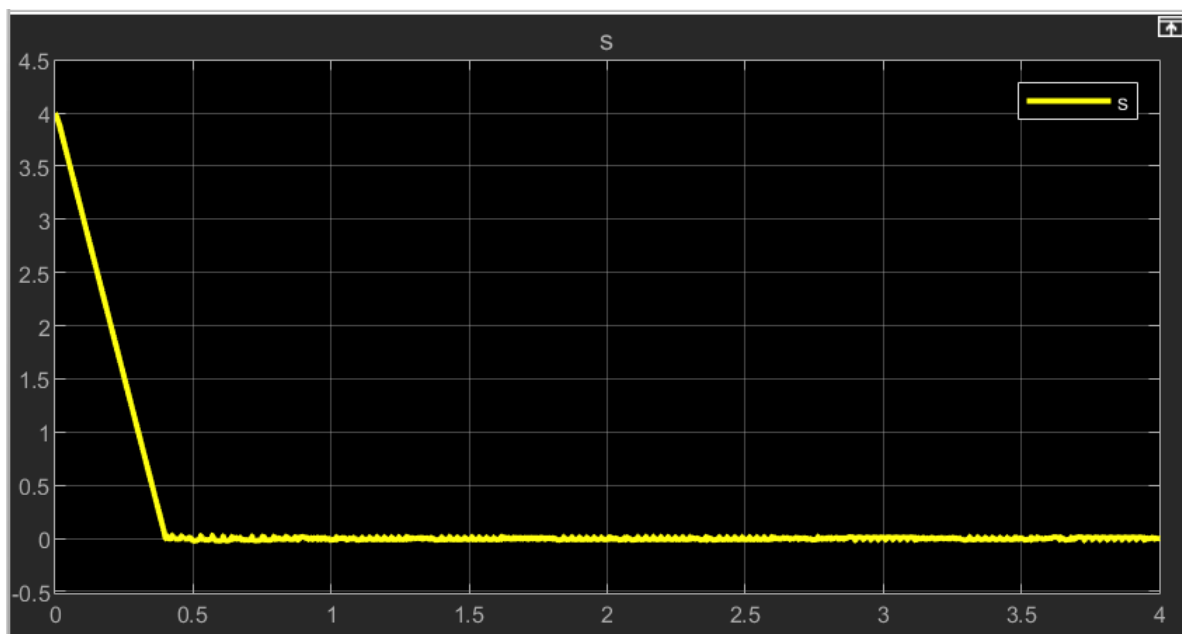


Figura 7: Superficie de deslizamiento frente al tiempo

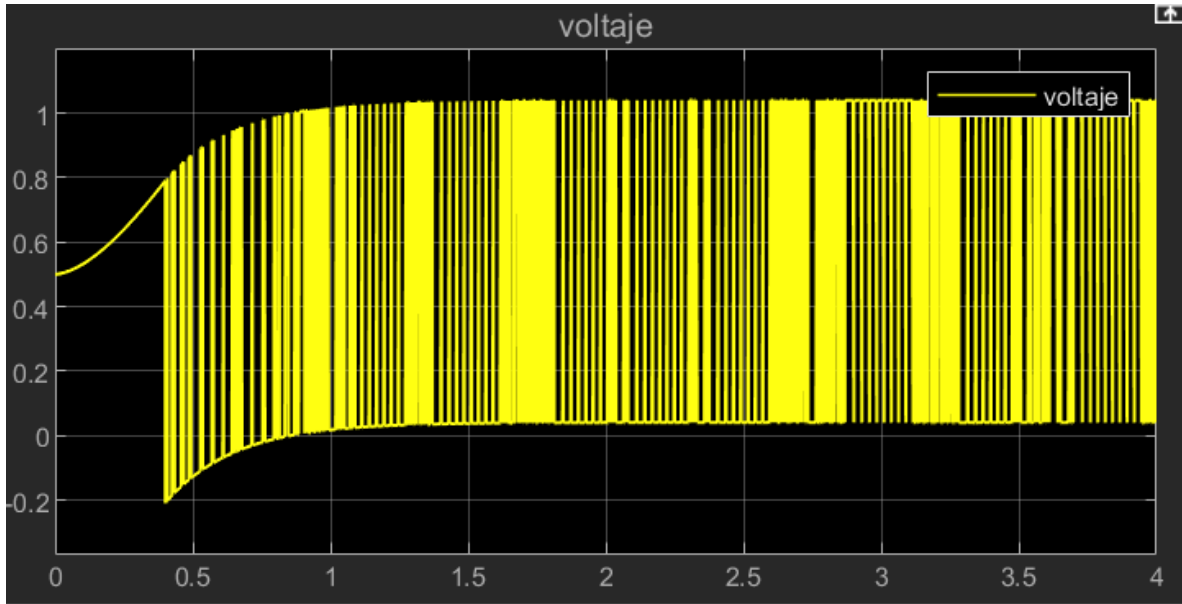


Figura 8: Entrada de voltaje frente al tiempo

$$\text{sat}(s(t), \phi) = \begin{cases} s(t)/\phi & \text{if } |s(t)| < \phi \\ \text{sgn}(s(t)) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Figura 9: Suavización del control discontinuo propuesto

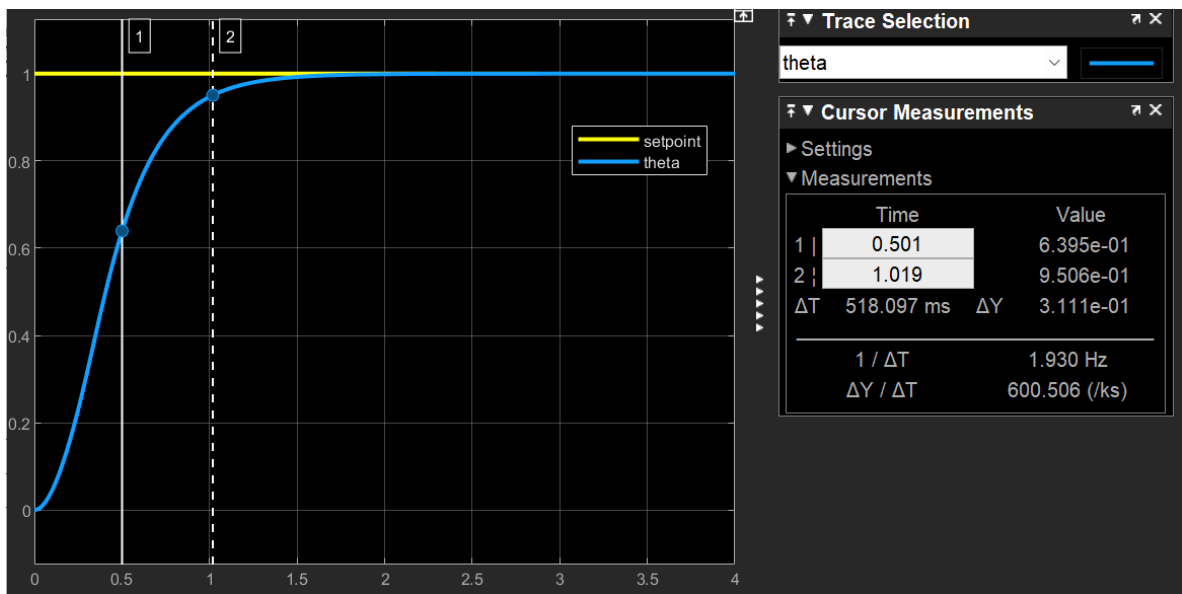


Figura 10: Respuesta del sistema con capa limite igual a 1

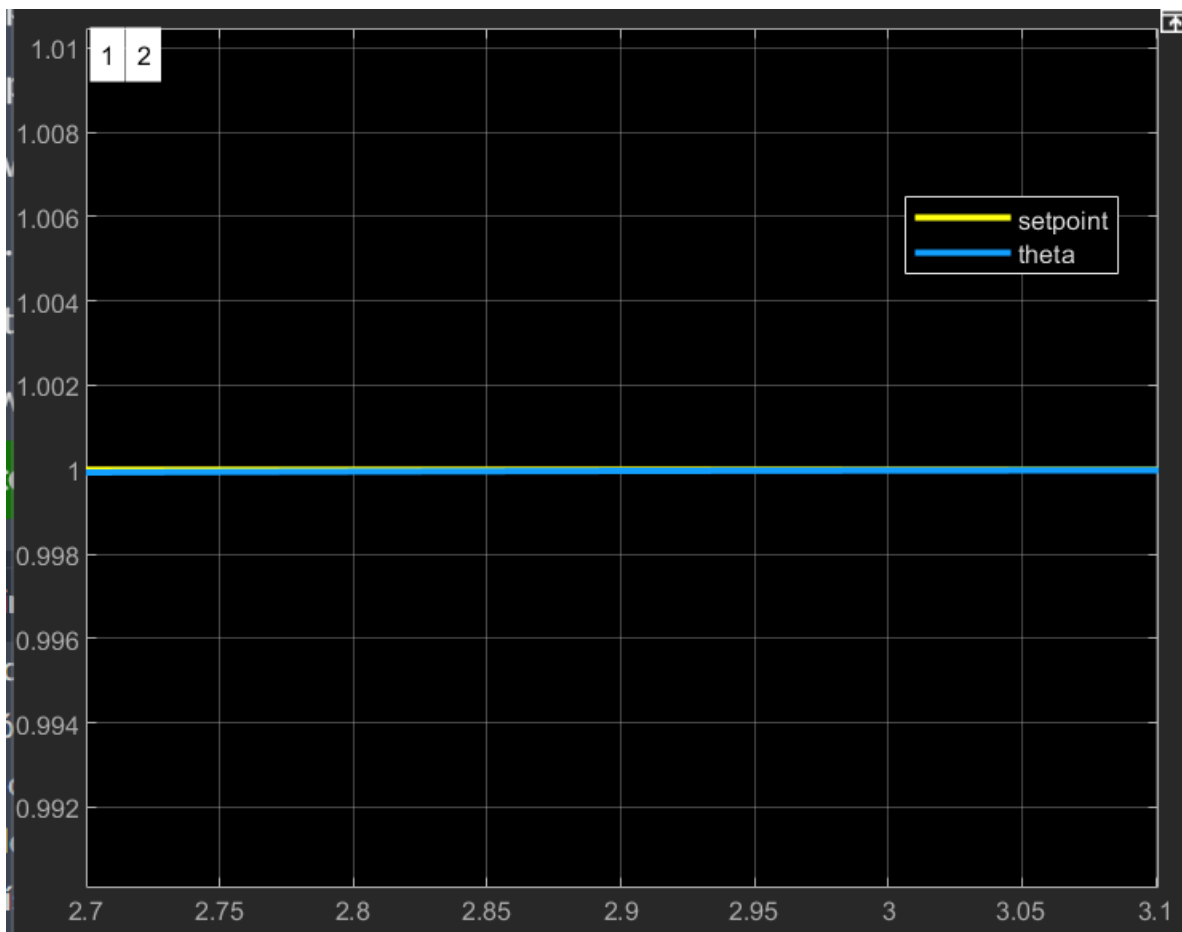


Figura 11: Detalle de la respuesta en estado permanente con capa limite igual a 1

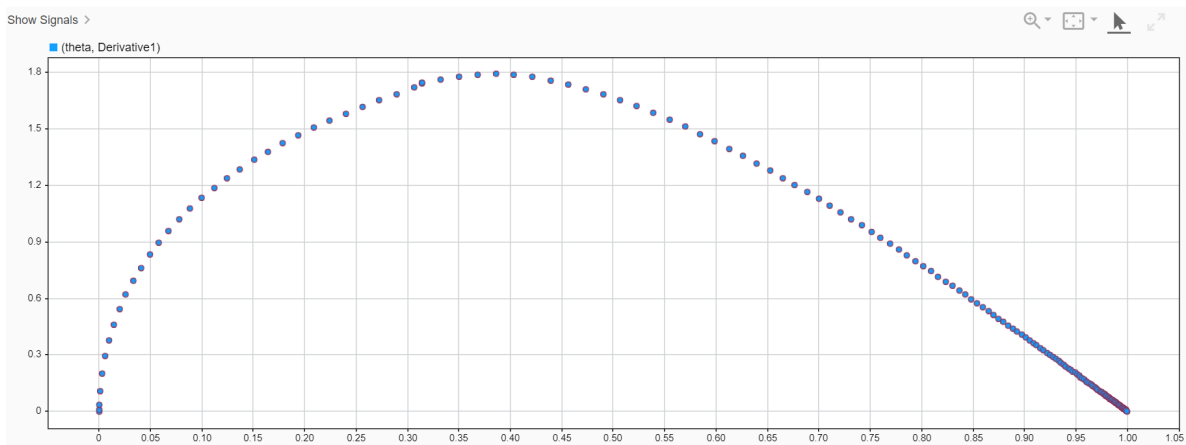


Figura 12: Diagrama de fase con capa limite igual a 1

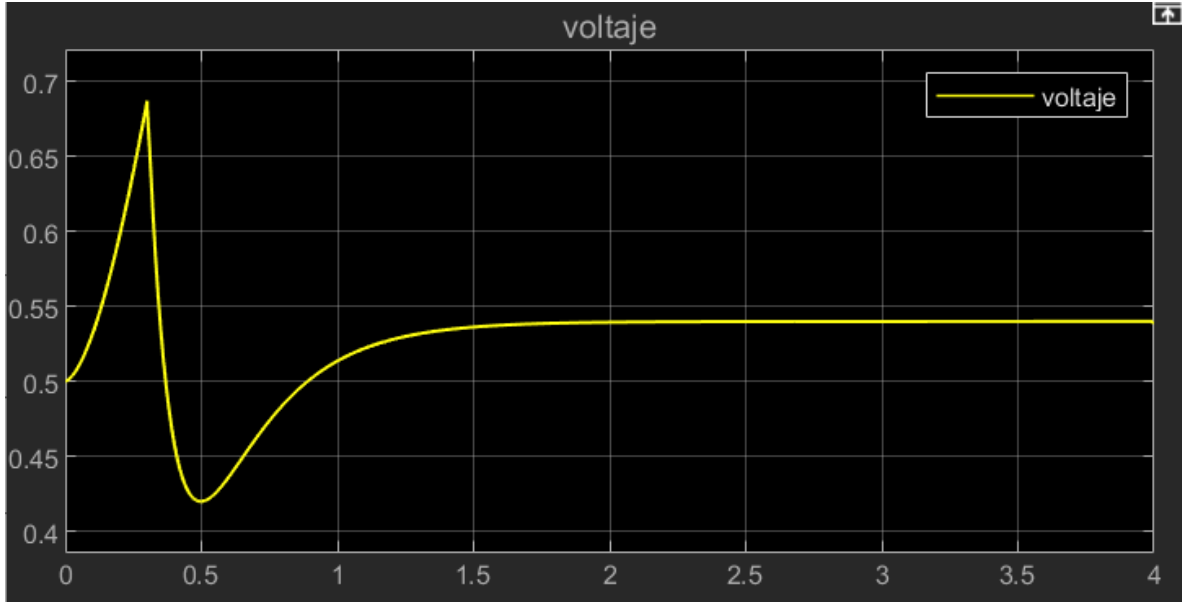


Figura 13: Entrada de voltaje frente al tiempo con capa limite igual a 1

7. Pruebas de robustez del control

Para las pruebas de robustez se han aplicado tres tipos perturbaciones: ruido, perturbación directa (0.25 rads/seg) en la velocidad del motor y modificación de la carga del motor. Para simular un cambio de carga se ha sumado 0.5 rads/seg en la salida de la planta.

Las pruebas muestran que para un $K=10$, el sistema es capaz de amortiguar perturbaciones menores de 0.95 rads/seg. Si la perturbación es mayor de ese valor, el sistema se vuelve inestable, esto quiere decir que la ley aplicada no es asintóticamente estable ante perturbaciones, imagen 26.

En caso de que se aumente el valor de K a valores mayores, el sistema si que es capaz de amortiguar perturbaciones más grandes. De modo que el controlador obtenido no es robusto ante perturbaciones. Respecto a su capacidad para seguir un setpoint, el sistema ha funcionado bastante bien en general, imagen 25.

En cuanto al ruido, este afecta gravemente al controlador del sistema. Como tiene componentes derivativas, el ruido se amplifica dentro del controlador, lo que repercute directamente en el actuador, imagen 24 y 23.

8. Mejora del rechazo ante perturbaciones

Como se ha podido ver, el VSC diseñado permite al motor seguir con facilidad el setpoint comandado. Sin embargo, no es capaz de soportar perturbaciones más grandes de 0.95 rads/segundo. Me sorprende bastante que suceda eso. Analizando la señal de control, se ha llegado a la siguiente conclusión.

El sistema se vuelve inestable cuando la componente del control discontinuo es menor al resto de la ecuación, 20. Esto produce que el sistema entre un estado de ganancia de energía, pues la componente de la izquierda de la inecuación 20 aporta más energía que la que quita $f(s)$.

$$4,2x_2 + 10,8x_1 - \lambda x_2 < f(s) \quad (20)$$

Para solucionar este problema, se ha estado investigando algún método que permita al controlador ser capaz de responder mejor a las perturbaciones. Para ello se propone modelar la perturbación dentro de la etapa de diseño, 22, donde $d(t)$ es la perturbación.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (21)$$

$$\dot{x}_2 = -4,2x_2 - 10,8x_1 + 20u + d(t) \quad (22)$$

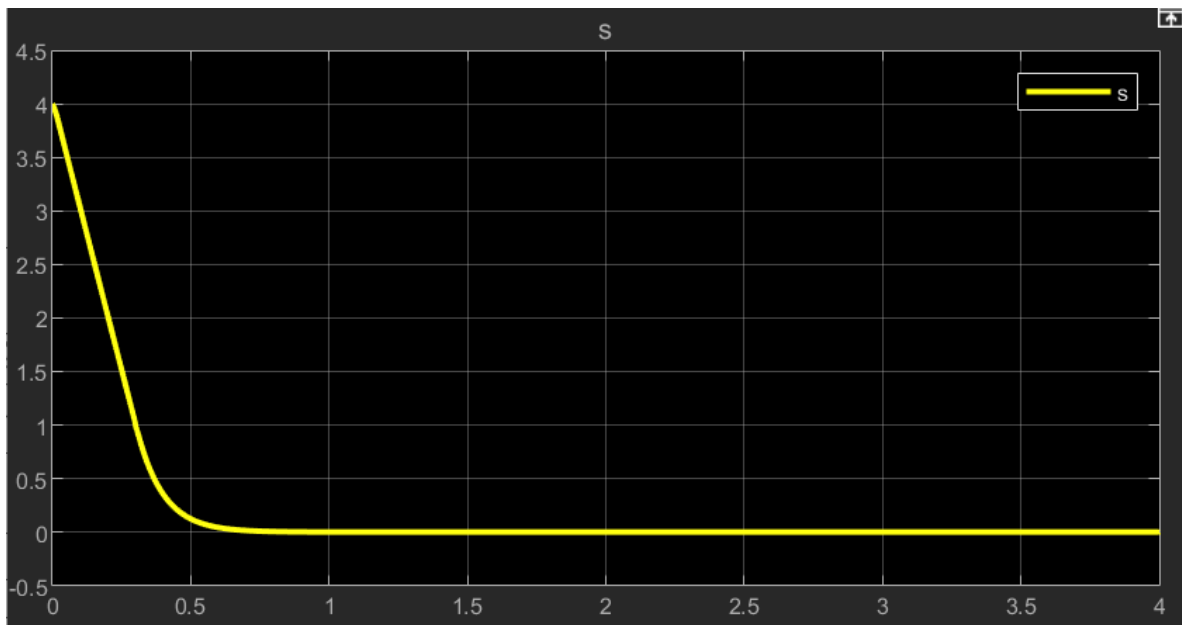


Figura 14: Superficie de deslizamiento frente al tiempo con capa limite igual a 1

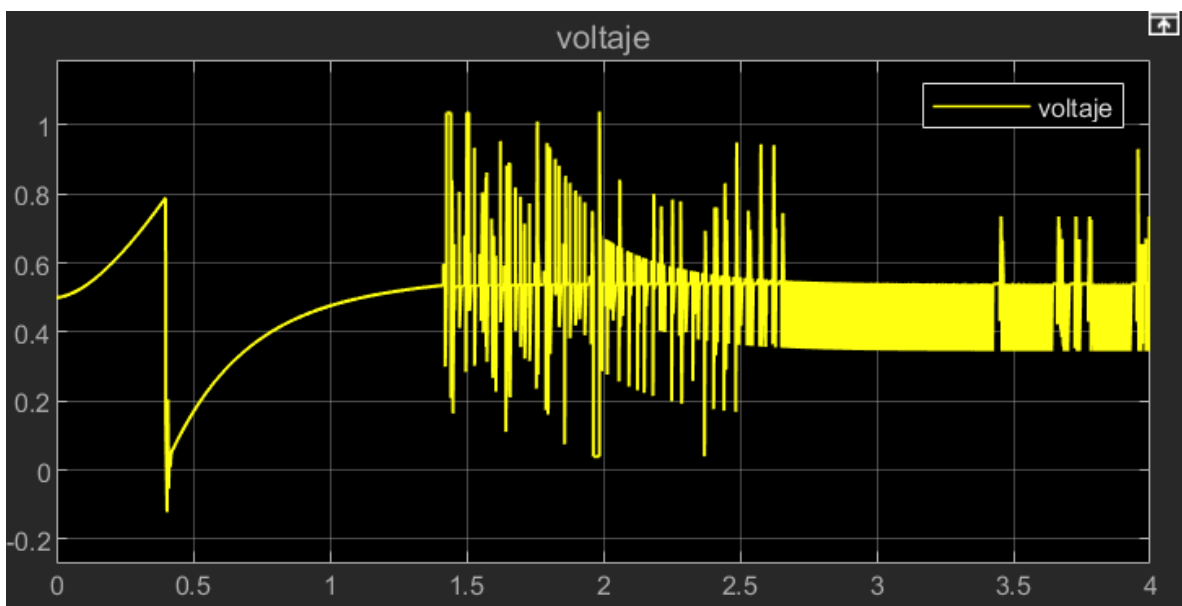


Figura 15: Entrada de voltaje frente al tiempo con capa limite igual a 0.01

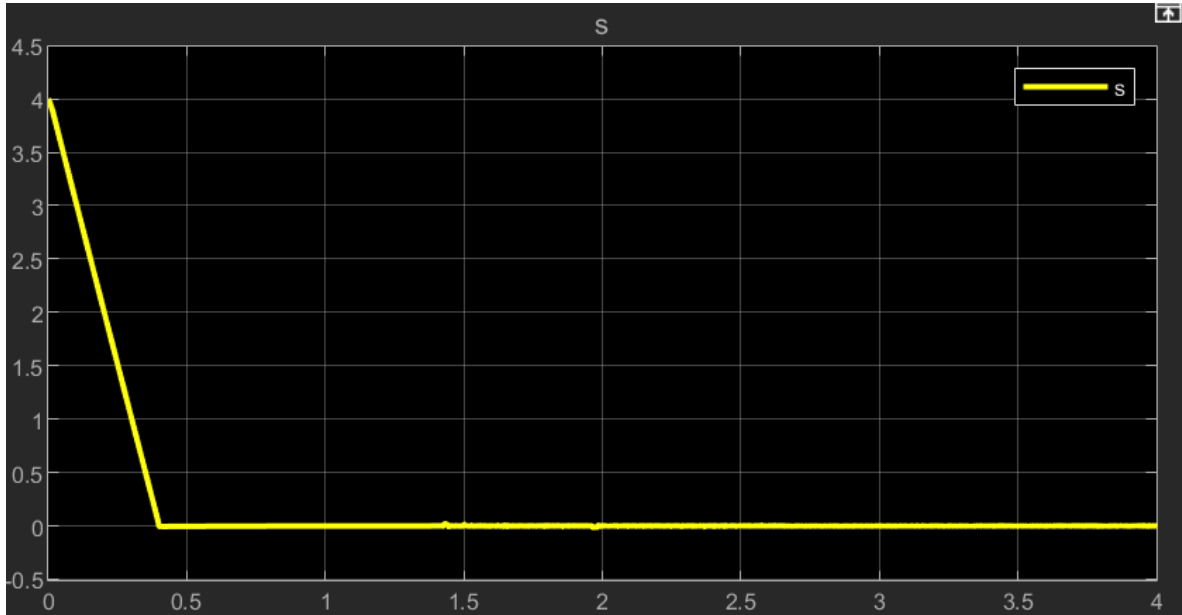


Figura 16: Superficie de deslizamiento frente al tiempo con capa limite igual a 0.01

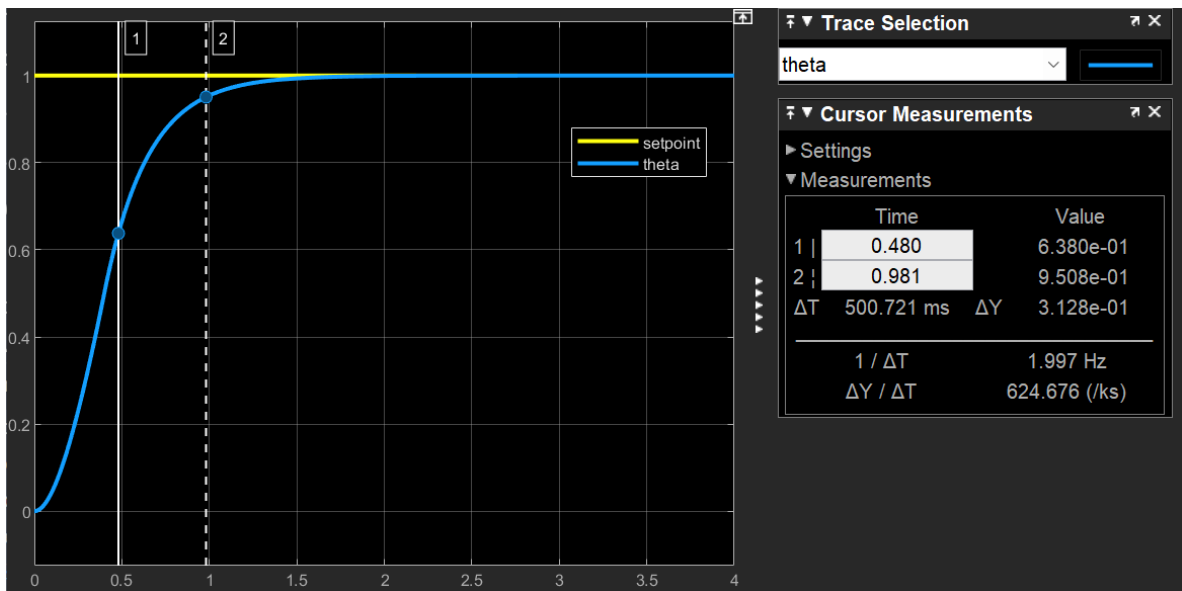


Figura 17: Respuesta del sistema con capa limite igual a 0.01

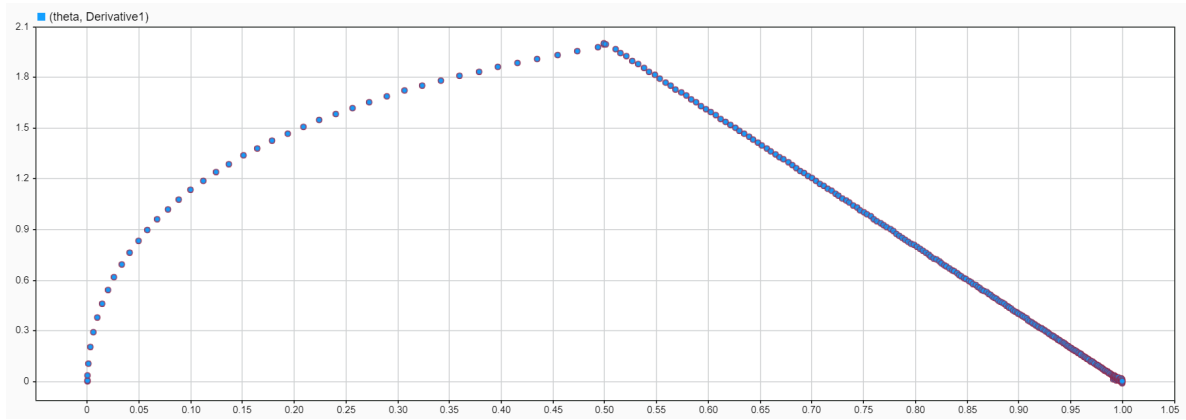


Figura 18: Diagrama de fase con capa limite igual a 0.01

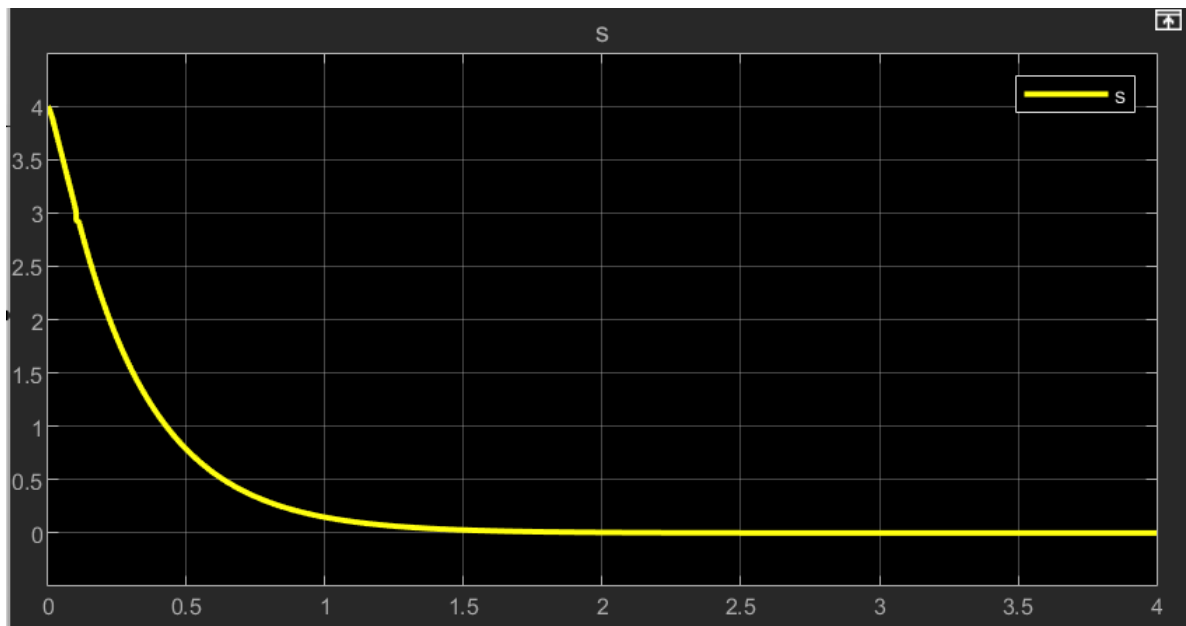


Figura 19: Superficie de deslizamiento frente al tiempo con capa limite igual a 3

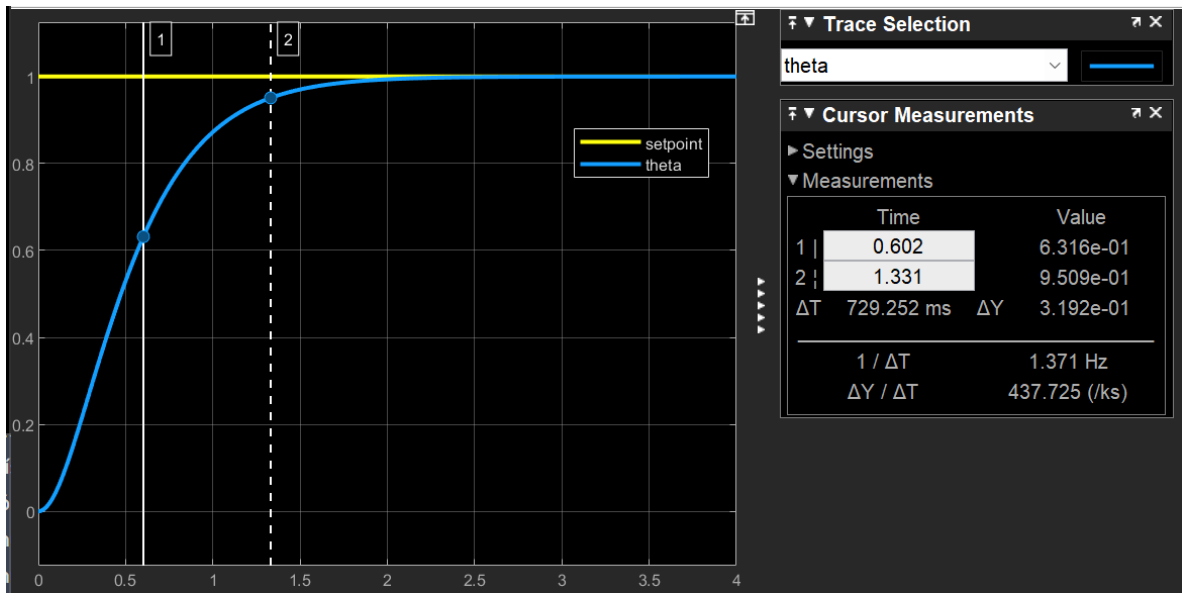


Figura 20: Respuesta del sistema con capa limite igual a 3

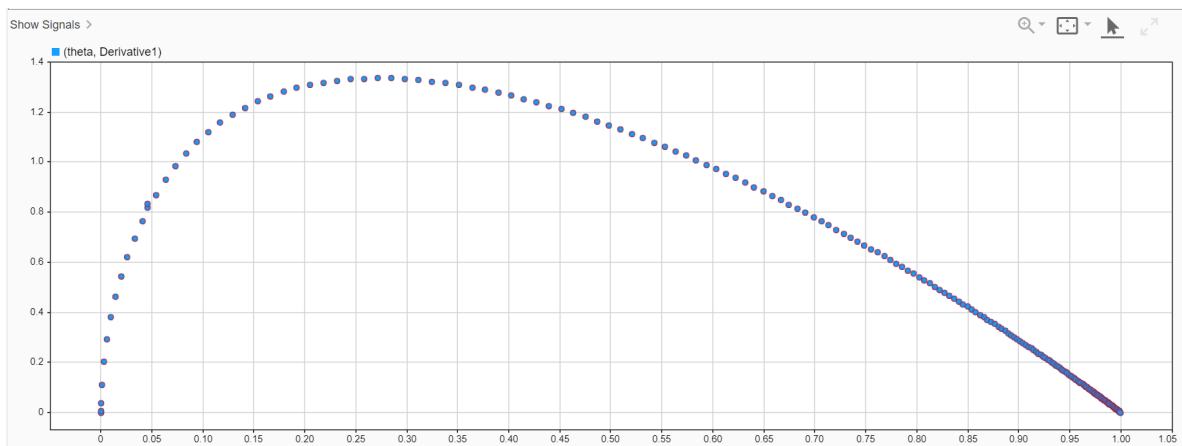


Figura 21: Diagrama de fase con capa limite igual a 3

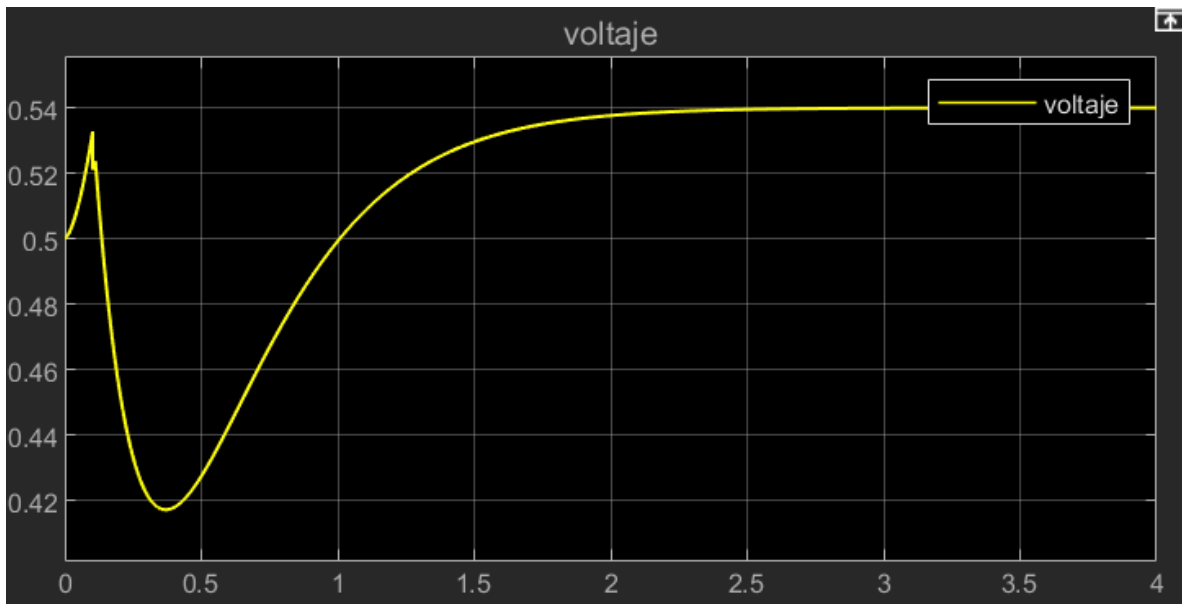


Figura 22: Entrada de voltaje frente al tiempo con capa limite igual a 3

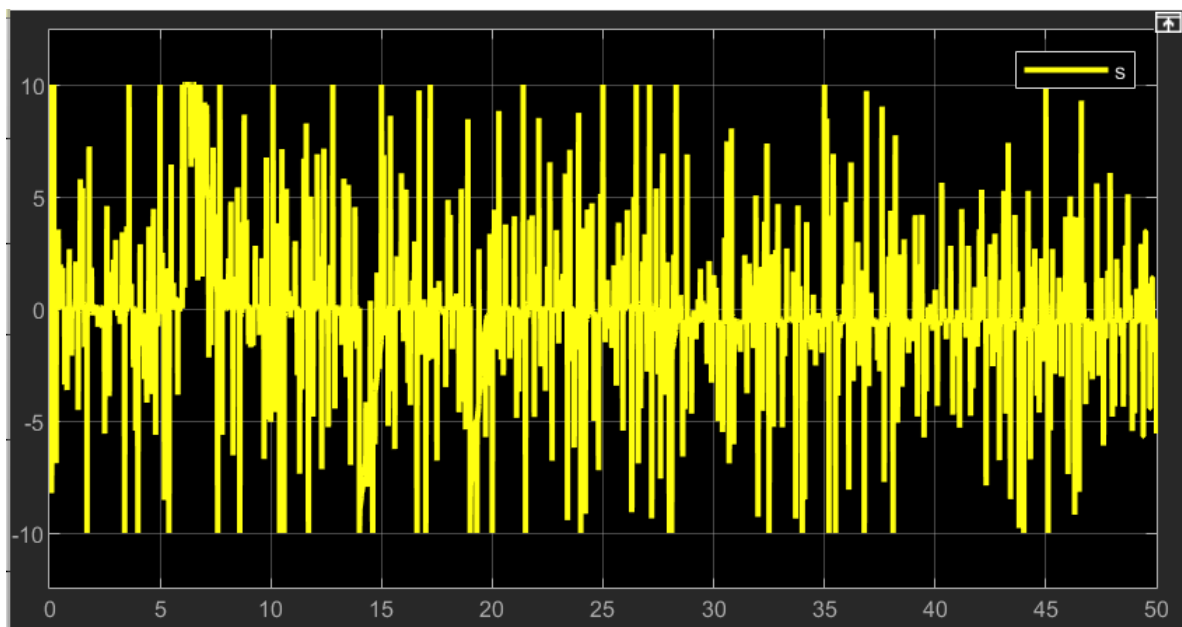


Figura 23: S frente al tiempo con saturación $[-10,10]$ en el scope

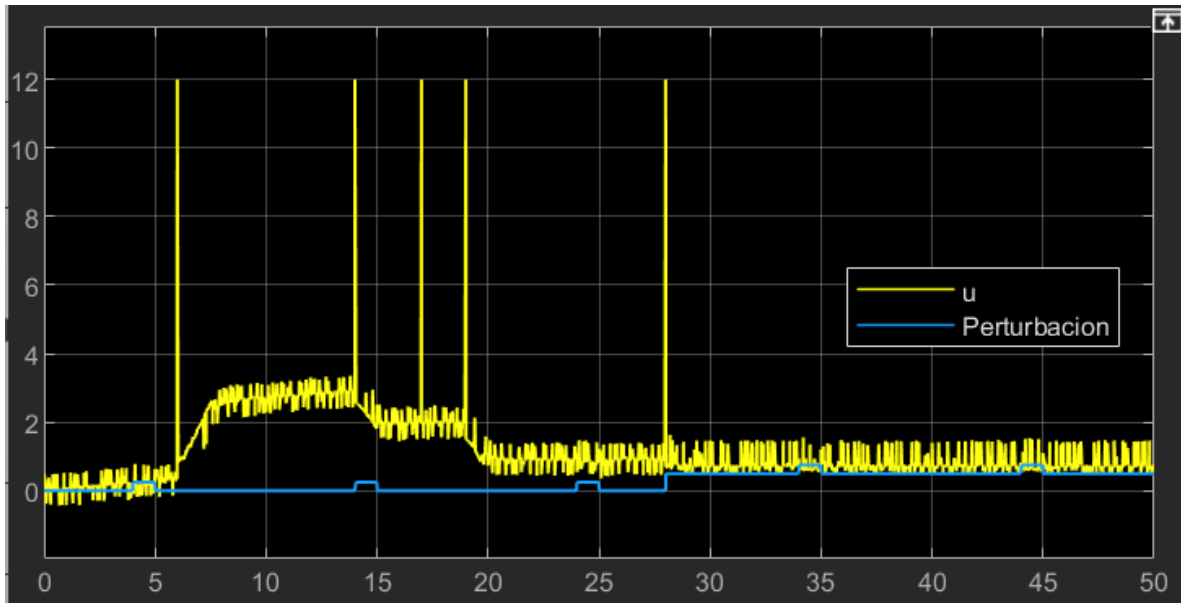


Figura 24: Señal de control u (voltios) con saturación $[-12,12]$

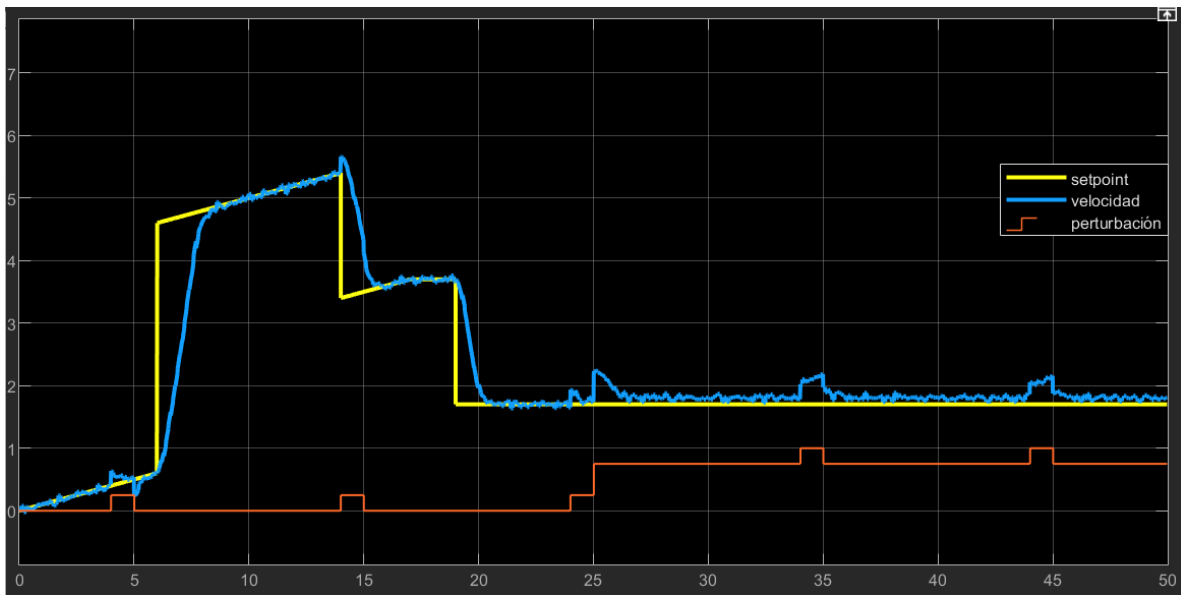


Figura 25: Prueba de robustez

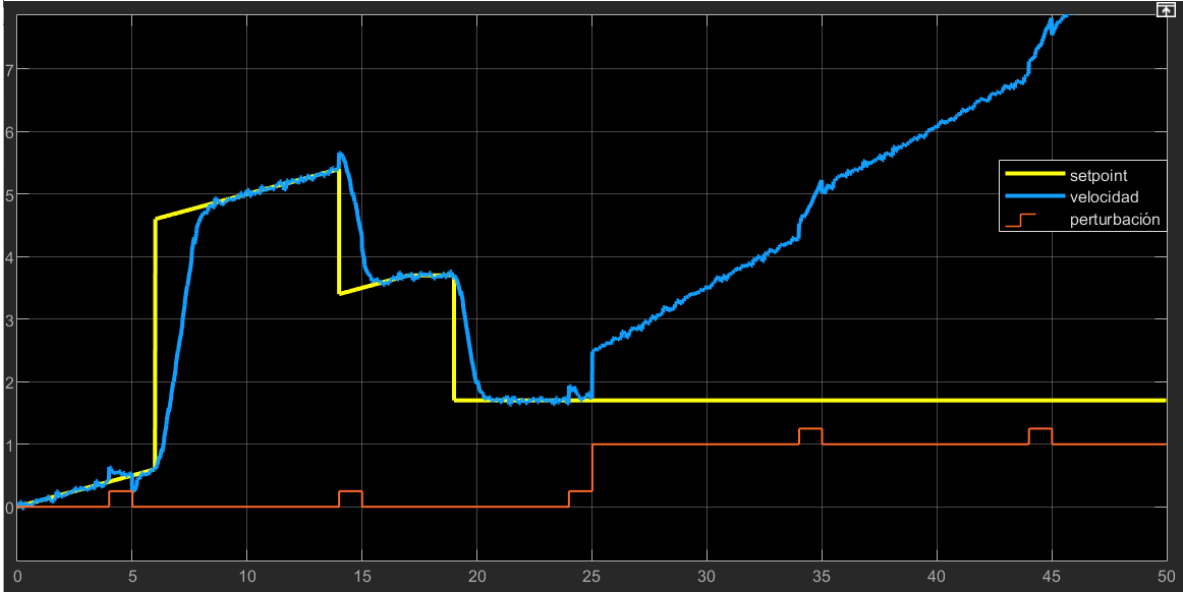


Figura 26: Se somete el sistema a una perturbación instantánea de 1 rad/seg

Realizando el mismo desarrollo de la etapa de diseño, se llega a la siguiente expresión, 23. Donde $f(s) = k \text{sign}(s(t))$ y $d(t)$ es modelado como σs . σ tiene un valor > 0 y cuanto más alto es, más agresivo es el control. Esto repercute directamente en el actuador, que puede provocar que tenga picos de demanda y dañarlo.

$$u = \frac{1}{20}(4,2x_2 + 10,8x_1 - \lambda x_2 + f(s) + d(t)) \quad (23)$$

$$u = \frac{1}{20}(4,2x_2 + 10,8x_1 - \lambda x_2 + \text{sat}(\phi, s(t)) + \sigma s) \quad (24)$$

En la ilustración 27, se puede apreciar el efecto de la modificación. Ahora el sistema es estable ante todo tipo de perturbaciones. Sin embargo este no es capaz de amortiguar los cambios en la carga. Se considera que este fallo se debe a que el sistema no cuenta con una acción integral.

Por otro lado, las perturbaciones y cambios de setpoint producen cambios muy bruscos en la acción de control debido a su componente derivativa, que en conjunto con el ruido, provocan que la señal de control sea muy estridente y ruidosa. Se considera que convendría implementar algún tipo de filtro para suavizar este efecto. En la imagen 28 se puede apreciar el efecto del ruido y las perturbaciones.

9. Conclusiones

En conclusión, el control de estructura variable aporta un método de control robusto. Durante este proyecto no se ha comparado con otros controladores, pero por lo que he podido ver, generalmente ofrece una mejor respuesta en cuanto al seguimiento de referencias. En comparación con un PID, el sistema es capaz de seguir rampas sin complicaciones, ilustración 27, y además es robusto ante perturbaciones. Sin embargo, no es especialmente bueno con ruido, ya que lo amplifica, complicando significativamente la acción de control y forzando al actuador.

10. Referencias

1. [Sliding Mode Control: A Comparison of Sliding Surface Approach Dynamics](#)
2. [DC Motor Speed: Simulink Modeling](#)
3. [Chattering Reduction and Error Convergence in the Sliding-mode Control of a Class of Nonlinear Systems](#)

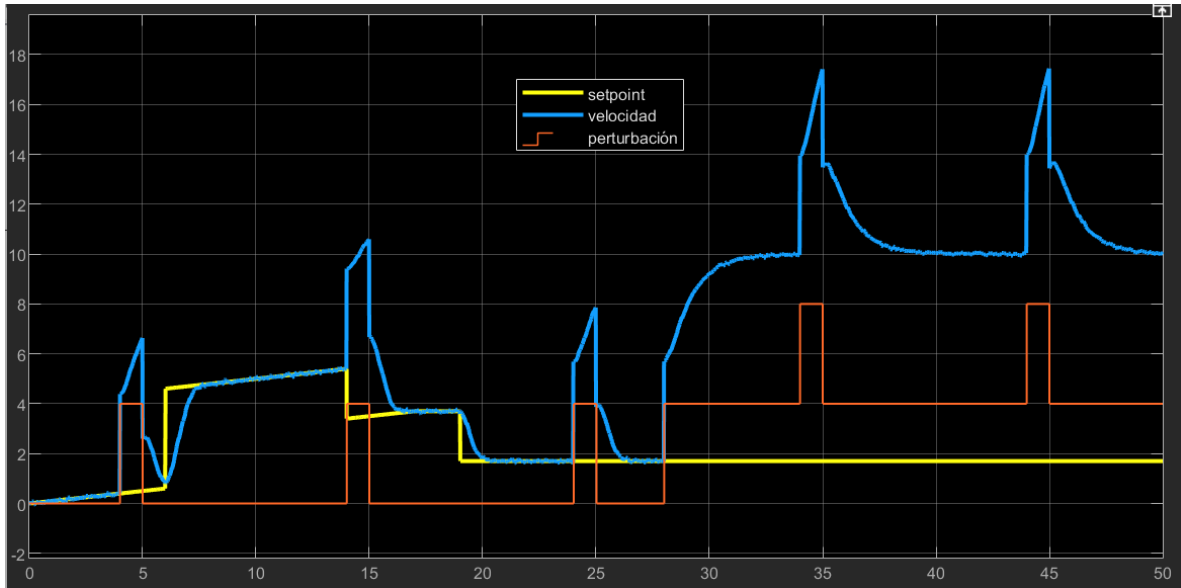


Figura 27: Velocidad del motor (rads/seg) con la perturbación modelada

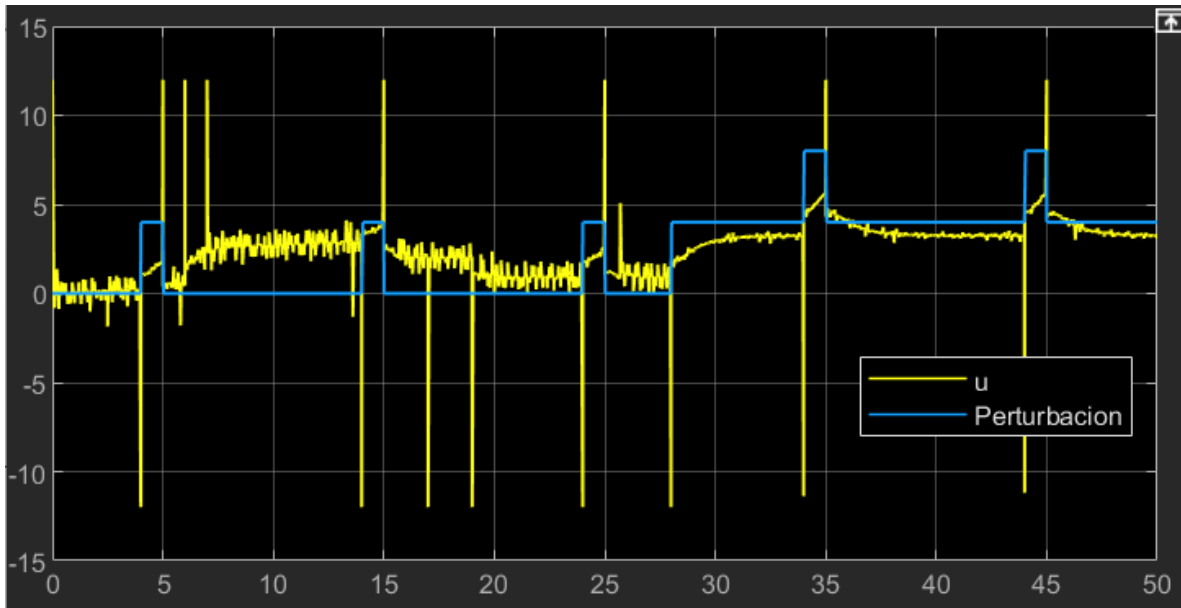


Figura 28: Señal de control u (voltios) con las perturbaciones