计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：　高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：　李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第三章　数值积分

第一节　　引言：数值积分
（ Numerical Integration ）

- 1.1. 数值积分问题的背景

定积分的计算始终是一个有意义的问题．对于一元可积函数 $f(x) \in R[a,b]$, 倘若它的原函数 $F(x) \in C^{(0)}[a,b]$ 存在，则由微积分学的基本定理： **牛顿 - 莱布尼兹公式** (Newton-Leibniz Formula) 可知

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{1.1}$$

这样定积分的计算就转化为 *不定积分* 的计算，然后仅仅代入积分的上下限就好了.

问题是很多情况下，这个不定积分也并非容易获得的．比如我们看一个建筑中的积分问题.

【例 1】 弧长公式 (Arc Length) 中国民居的瓦房、皇宫的琉璃檐或自行车棚的石棉瓦或塑料屋顶，其剖面曲线呈周期变化的波浪形．设有一段剖面曲线近似呈正弦曲线的屋脊，其函数表达为 $f(x) = \sin x \in C^{(1)}[a, b]$，求其在区间 $[a, b]$ 上的曲线长度．如果屋顶以厚度可忽略的薄板如铝板打制，则此结果可用于我们下料时做参考．

由弧长公式，所求长度为

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \tag{1.2}$$

此积分属于第二型的椭圆积分 **(An elliptic integral of the second kind)**，原函数无法用初等函数形式表示出来．这使得我们应用牛顿 - 莱布尼兹公式求解的企图成为空欢喜．

【例 2】 类似的非直接可积函数的例子

类似的非直接可积函数的例子还有 Dirichlet 积分 $\int \frac{sinx}{x}dx$, 概率积分 $\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, 一对 Frenel 积分 $\int sin(x^2)dx, \int cos(x^2)dx$, 等等. 比如，我们求概率定积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \tag{1.3}$$

可以通过化为二重积分再求平方根的方法解决.

然而，这是特殊问题的特殊处理．而面对一般问题，即积分的原函数无法用初等函数形式表达，或积分核 (被积函数) 的解析表达未知，仅在某些离散点上已知 (比如由实验数据表确立的函数关系)，我们更需要一种广泛适用的方法，并且希望这种算法可以机器实现．这就是我们研究数值积分的初衷。

- 1.2. **机械求积公式** (Quadrature Formulae)

回忆定积分的原始 黎曼和 (Riemann Sum) 定义：给出一个一元函数 $y=f(x)$ 作其 (局部) 定义域 $[a,b]$ 上的定积分 $\int_a^b f(x)dx$，我们取一种区间的剖分：
$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，任取每个小区间段上的点 $\xi_j\in[x_j,x_{j+1}]$ 算出其相应函数值
$f(\xi_j), j=0,1,2,\cdots,n-1,$ 则定积分的 黎曼和 定义为被积函数的黎曼和当剖分半径趋向于 0 时的极限：

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)h_j, j=0,1,2,\cdots,n-1, \qquad (1.4)$$

这提示我们可以寻找一个有限和形式 (相对的，级数是无限和) 来逼近定积分的精确真值. 这就是机械求积公式.

【定义 1】 **机械求积公式** (Quadrature Formulae)
设 $y=f(x)$ 在区间 $I=[a,b]$ 上有定义且 黎曼可积(其严格定义请读者参考实函数论)，作区间的某种剖分（分点等距或不等距）: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，如果存在一个有限和形式，使得定积分的精确真值近似等于这个和式：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j), j=0,1,2,\cdots,n, \tag{1.5}$$

则自变量点 $a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n=b$ 称为 *求积节点* (nodes)； 区间 $I=[a,b]$ 称为 *积分区间* (interval)； 而正数 $A_j>0, j=0,1,2,\cdots,n$ 称为伴随节点 x_j 的 *权* (weight) 或 *求积系数* (Quadrature Coefficient), 它与被积函数 $f(x)$ 的形式无关而仅依赖于节点 x_j 自身的选取. 所建立的积分的和式表达称为 *机械求积公式* (Quadrature Formulae). 建立求积公式的方法称为 *机械求积法* (Quadrature Method).

【例 1】 梯形公式与矩形公式 (Trapezoidal and Rectangular Quadrature)

由第一积分中值定理 (Weighted Mean Value Theorem for Integals), 存在中值点 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \tag{1.6}$$

现在用两种方法确定 $f(\xi)$:

(1) 选取函数中值近似为两区间端点函数值的算术平均：
$f(\xi)=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ 则有

$$T=\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)\approx\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \qquad (1.7)$$

其几何意义是：曲边梯形的面积近似等于一个躺倒的直边梯形的面积：“上底” $f(a)$ 加“下底” $f(b)$ 乘以“高” $b-a$ 再除以 2. 故此机械求积公式称为 *梯形公式* (Trapezoidal Quadrature).

(2) 选取自变量中值近似为两区间端点值的算术平均:
$\xi = \dfrac{a+b}{2}$ 则有

$$R = \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \approx f(\frac{a+b}{2})(b-a) \qquad (1.8)$$

其几何意义是：曲边梯形的面积近似等于一个矩形的面积：“长” $b-a$ 乘以“宽” $f(\dfrac{a+b}{2})$. 故此机械求积公式称为 矩形公式 (Rectangular Quadrature).

讨论：

设若函数二阶连续可微： $f(x) \in C^{(2)}[a,b]$, 真值为

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

(1)$f(x)$ 为凸函数，即 $f^{''}(x) < 0$, 则

$f(\frac{a+b}{2}) > \frac{f(a)+f(b)}{2}$ ，从而 $R > I > T$, 即梯形公式近似值小于积分真值，而矩形公式近似值大于积分真值.

(2)$f(x)$ 为凹函数，即 $f^{''}(x) > 0$, 则

$f(\frac{a+b}{2}) < \frac{f(a)+f(b)}{2}$ ，从而 $T > I > R$, 即梯形公式近似值大于积分真值，而矩形公式近似值小于积分真值.

【证明】

由 Taylor 公式，将被积函数在左端点 a 展开到一阶余项形式：

$$f(x)=f(a)+f^{'}(\xi_1)(x-a) \tag{1.9}$$

在区间 $I=[a,b]$ 上积分之，因被积函数 $x-a$ 在区间上保号非负，由积分中值定理得

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)dx=f(a)\int_a^b dx+\int_a^b f^{'}(\xi_1)(x-a)dx\\&=f(a)(b-a)+f^{'}(\zeta_1)\frac{(b-a)^2}{2}\end{aligned} \tag{1.10}$$

称之为 *左矩形公式* (Left Rectangular Quadrature). 这里中值点 $\xi_1 \in (a,x), \zeta_1 \in (a,b)$. 同理将被积函数在右端点 b 展开到一阶余项形式:

$$f(x) = f(b) + f^{'}(\xi_2)(x-b) \tag{1.11}$$

在区间 $I=[a,b]$ 上积分之得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx = f(b)\int_a^b dx + \int_a^b f^{'}(\xi_2)(x-b)dx \\ = f(b)(b-a) - f^{'}(\zeta_2)\frac{(b-a)^2}{2}\end{aligned} \tag{1.12}$$

称之为 右矩形公式 (Right Rectangular Quadrature). 这里中值点 $\xi_2 \in (x, b), \zeta_2 \in (a, b)$. 现选取中值点 $\zeta_1 = \zeta_2 \approx \zeta \in (a, b)$ 并将两个左右矩形公式相加得

$$T = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a) \tag{1.13}$$

即是梯形公式.

又将被积函数在区间中点 $\dfrac{a+b}{2}$ 展开到二阶余项形式：

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f^{'}(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f^{''}(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2 \tag{1.14}$$

在区间 $I=[a,b]$ 上积分之，因被积函数 $(x-\dfrac{a+b}{2})^2$ 在区间上保号非负，由积分中值定理得

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)dx = f(\frac{a+b}{2})\int_a^b dx + f^{'}(\frac{a+b}{2})\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})dx \\
&+ \int_a^b \frac{f^{''}(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2 dx \\
&= f(\frac{a+b}{2})\int_a^b dx + f^{'}(\frac{a+b}{2})\cdot 0 + \frac{f^{''}(\zeta)}{2}\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^2 dx \\
&= f(\frac{a+b}{2})(b-a) + \frac{f^{''}(\zeta)}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{12} \\
&= f(\frac{a+b}{2})(b-a) + \frac{f^{''}(\zeta)}{24}(b-a)^3
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

即是矩形公式，并且同时得到矩形公式余项为

$$R_R(f) = \frac{f^{''}(\zeta)}{24}(b-a)^3 \tag{1.16}$$

对于梯形公式余项，我们从另一方面着手，利用有关插值法的理论，将被积函数展开为它的线性插值函数挂有二阶余项的形式：

$$f(x) = l_0(x)f(a) + l_1(x)f(b) + \frac{f^{''}(\xi)}{2}(x-a)(x-b) \tag{1.17}$$

这里线性插值基函数

$$l_0(x) = \frac{b-x}{b-a}, \quad l_1(x) = \frac{x-a}{b-a} \tag{1.18}$$

在区间 $[a,b]$ 上积分之，因被积函数 $(x-a)(x-b)$ 在区间上保号非正，由积分中值定理得

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)\int_a^b \frac{b-x}{b-a}dx + f(b)\int_a^b \frac{x-a}{b-a}dx + \frac{f''(\zeta)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

$$= f(a)\frac{b-a}{2} + f(b)\frac{b-a}{2} + \frac{f''(\zeta)}{2}\cdot\left(-\frac{(b-a)^3}{6}\right)$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \frac{f''(\zeta)}{12}(b-a)^3 \tag{1.19}$$

即是梯形公式，并且同时得到梯形公式余项为

$$R_T(f) = -\frac{f''(\zeta)}{12}(b-a)^3 \tag{1.20}$$

故而设若函数二阶连续可微： $f(x) \in C^{(2)}[a,b]$, 真值为
$I = \int_a^b f(x)dx$,

(1)$f(x)$ 为凸函数，即 $f^{''}(x)<0$, 则 $f(\dfrac{a+b}{2})>\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$
且

$$R_T(f)=-\frac{f^{''}(\zeta)}{12}(b-a)^3>0>\frac{f^{''}(\zeta)}{24}(b-a)^3=R_R(f) \quad (1.21)$$

从而

$$
\begin{aligned}
R > R + R_R(f) &= f(\frac{a+b}{2})(b-a) + \frac{f^{''}(\zeta)}{24}(b-a)^3 \\
&= \int_a^b f(x)dx \\
&= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \frac{f^{''}(\zeta)}{12}(b-a)^3 = T + R_T(f) > T
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

即 $R > I > T$, 即梯形公式近似值小于积分真值，而矩形公式近似值大于积分真值. 几何解释即是直边梯形面积小于曲边梯形面积更小于矩形面积.

(2)$f(x)$ 为凹函数，即 $f^{''}(x)>0$, 则

$f(\frac{a+b}{2})>\frac{f(a)+f(b)}{2}$ ，且

$$R_T(f)=-\frac{f^{''}(\zeta)}{12}(b-a)^3<0<\frac{f^{''}(\zeta)}{24}(b-a)^3=R_R(f) \quad (1.23)$$

从而

$$
\begin{aligned}
R &< R + R_R(f) = f(\frac{a+b}{2})(b-a) + \frac{f^{''}(\zeta)}{24}(b-a)^3 \\
&= \int_a^b f(x)dx \\
&= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \frac{f^{''}(\zeta)}{12}(b-a)^3 = T + R_T(f) < T
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

即 $R < I < T$, 即梯形公式近似值大于积分真值，而矩形公式近似值小于积分真值. 几何解释即是直边梯形面积大于曲边梯形面积更大于矩形面积. 【证毕】

【 注记 1 】 所谓凸函数 (Convex Function) 与凹函数 (Concave Function) 在不同文献中的定义可能并非一致或往往相反. 而就汉字的象形特征考察 (世界古文明硕果仅存且生命旺盛的象形文字)，无疑采纳二阶导函数小于 0 是凸函数而大于 0 是凹函数的定义是恰当的. 理由是满足

$f''(x) < 0$ 的函数比如对数函数

$$f(x) = \ln x, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

其图象向上凸起，如一顶草帽或一口钟；而足 $f^{''}(x) > 0$ 的函数比如幂函数

$$f(x) = x^2, \quad f^{''}(x) = 2 > 0$$

其图象向下凹进，如一架马槽或一只碗；有时数学家们为了避免江湖纷争，给这定义加以前缀，称凸函数为 上凸函数 (Upward Convex Function) 而称凹函数为 下凸函数 (Downward Convex Function). 这当然不是画蛇添足，却不免令初学者眼花缭乱了.

【 注记 2 】 《汉书 · 律历志》解释说：权 者，铢两斤钧石也．即俗称的秤砣．作为度量质量的参照物其自身质量显然是正的．数学家们借用它来指代正的系数．“加权和”是若干量的带有正的系数的加和，“加权平均”是若干量的带有正的系数的平均．机械求积公式事实上就是一个定积分的加权和 形式的近似公式表达，对此我们并不陌生．

- 1.3. **代数精度** (Algebraic Degree of Accuracy or Precision)

我们希望构造出的 机械求积公式 作为 近似 公式能够对尽可能多的函数 精确 成立，基于逼近定理，这一期望用多项式函数为基准来衡量，便有所谓 代数精度 的概念.

【 **定义** 2 】 **代数精度** (Algebraic Degree of Accuracy or Precision) 如果某个求积公式对于次数不超过 m 的多项式均可精确成立等号，而对 $m+1$ 次多项式不能精确成立 (即只能约等)，则称此机械求积公式具有 m 次代数精度. 即设 $P_k(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 为任意 k 次多项式， $0 \le k \le m$, 则严格成立等式：

$$\int_a^b P_k(x)dx = \sum_{j=0}^{n} A_j P_k(x_j), j = 0, 1, 2, \cdots, n, k = 0, 1, 2, \cdots, m, \tag{1.25}$$

特别地，我们选取多项式空间的基函数族 $1, x, x^2, \cdots, x^m$，则机械求积公式具有 m 次代数精度当且仅当对于这族基函数精确成立由 $m+1$ 个方程构成的方程组，就节点 x_j 而言是非线性，就求积系数 A_j 而言是线性的：

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\int_a^b x^0 dx = b - a = \sum_{j=0}^{n} A_j = A_0 + A_1 + \cdots + A_n \\
&\int_a^b x^1 dx = \frac{b^2 - a^2}{2} = \sum_{j=0}^{n} A_j x_j = A_0 x_0 + A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n \\
&\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3} = \sum_{j=0}^{n} A_j x_j^2 = A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 + \cdots + A_n x_n^2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} = \sum_{j=0}^{n} A_j x_j^m \\
&= A_0 x_0^m + A_1 x_1^m + \cdots + A_n x_n^m
\end{aligned}
\right.
\tag{1.26}
$$

其中首个方程事实上说明求积系数 A_j 的 和 恒定为区间长度：$\displaystyle\sum_{j=0}^{n} A_j \equiv b - a.$

- 1.4. **插值型机械求积公式** (Quadrature Formulae of Interpolation Type)

【 **定义** 3 】 **插值型机械求积公式** (Quadrature Formulae of Interpolation Type)

选取被积函数 $y=f(x)$ 在区间 $I=[a,b]$ 上某种剖分（分点等距或不等距） $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 下的插值函数 $L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} l_j(x)f(x_j)$ 作为它的近似，则它在区间 $I=[a,b]$ 上的积分也近似等于插值函数在区间 $I=[a,b]$ 上的积分：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx \tag{1.27}$$

自变量点 $a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n=b$ 是 求积节点 同时也是 插值节点；区间 $I=[a,b]$ 是 积分区间 同时也是 插值区间. 而 权$A_j>0, j=0,1,2,\cdots,n$ 可如下推出：

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j) &\approx \int_a^b f(x)dx \\
&\approx \int_a^b L_n(x)dx \\
&= \int_a^b \sum_{j=0}^{n} l_j(x) f(x_j) dx \\
&= \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \int_a^b l_j(x)dx
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

比较得

$$A_j = \int_a^b l_j(x)dx = \int_a^b \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_j)\omega'_{n+1}(x_j)}dx =$$

$$\int_a^b \prod_{k\neq j,k=0}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}dx$$

$$j = 0, 1, 2, \cdots, n(1.29)$$

这里辅助函数 $\omega_{n+1}(x)$ 定义如前，是以求积节点为零点的 $n+1$ 次首一多项式：

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_j)(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)$$

因插值余项为：

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

故积分余项为：

$$R[f]=\int_a^b R_n(x)dx=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$$

$$=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)dx$$

我们称这种类型的求积公式为 插值型机械求积公式. 即

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{j=0}^{n}A_jf(x_j),\quad A_j=\int_a^b l_j(x)dx \tag{1.33}$$

【定理 1】 插值型机械求积公式的代数精度 (Algebraic Degree of Accuracy of Quadrature Formulae of Interpolation Type) 机械求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j), j = 0, 1, 2, \cdots, n$$

至少具有 n 次代数精度的充分必要条件是：它是插值型机械求积公式.

【 证明】

必要性：若机械求积公式至少具有 n 次代数精度，则由代数精度之定义知对任意次数不超过 n 的多项式它都精确成立等式：

$$\int_a^b P_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k P_n(x_k), \tag{1.34}$$

特别地，我们选取 n 次多项式为 插值基函数$l_j(x)$, 则上式即为：

$$\int_a^b l_j(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k l_j(x_k), j = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{1.35}$$

利用插值基函数的正交性

$$l_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad j, k = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{1.36}$$

代入得

$$\int_a^b l_j(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k l_j(x_k) = \sum_{k=0}^{n} A_k \delta_{jk} = A_j, j = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{1.37}$$

故求积公式是插值型机械求积公式.

充分性: 若机械求积公式是插值型的，则对任意次数不超过 n 的多项式 $P_n(x)$ 均有插值型求积等式:

$$\int_a^b P_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k P_n(x_k) + R[P_n(x)] \tag{1.38}$$

但 n 次多项式的 $n+1$ 阶导数为 0，故积分余项

$$R[P_n(x)] = \int_a^b \frac{P_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$$

$$= \int_a^b \frac{0}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx = 0$$

从而对任意次数不超过 n 的多项式 $P_n(x)$ 精确成立等式

$$\int_a^b P_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k P_n(x_k), \tag{1.40}$$

即求积公式至少具有 n 次代数精度.

【证毕】

- 1.5. **求积公式的稳定性与收敛性** (Stability and Convergence of Quadrature Formulae)

【 定义 4 】 机械求积公式的稳定性

(Stability of Quadrature)

计算被积函数 $y = f(x)$ 在各节点 x_j 的函数值 $f(x_j)$ 时可能产生误差 δ_j 而得到近似值 $\widetilde{f}_j$, 即 $f_j = f(x_j) = \widetilde{f}_j + \delta_j$. 倘若相应机械求积公式产生的积分误差连续依赖于被积函数的误差，以 $\varepsilon - \delta$ 语言叙述即是：任给小正数 $\varepsilon > 0$, 存在正数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得 $|f_j - \widetilde{f}_j| = |\delta_j| < \delta$ 时总有

$$|E_n[f]| = |\sum_{j=0}^{n} A_j f_j - \sum_{j=0}^{n} A_j \widetilde{f}_j| < \varepsilon, \tag{1.41}$$

则称机械求积公式是 *稳定* 的.

【 **定理** 2 】

机械求积公式的稳定性 (Stability of Quadrature)

机械求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j), j = 0, 1, 2, \cdots, n$$

当求积系数 $A_j > 0$ 时是稳定的.

【证明】

若机械求积公式的求积系数 $A_j > 0$, 则任给小正数 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{b-a} > 0$, 当 $|f_j - \widetilde{f}_j| = |\delta_j| < \delta$ 时我们有

$$\begin{aligned}|E_n[f]| &= |\sum_{j=0}^{n} A_j f_j - \sum_{j=0}^{n} A_j \widetilde{f}_j| \\ &= |\sum_{j=0}^{n} A_j (f_j - \widetilde{f}_j)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} |A_j||(f_j - \widetilde{f}_j)| \\ &< \delta \sum_{j=0}^{n} A_j \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon\end{aligned} \tag{1.42}$$

即求积系数 $A_j > 0$ 时求积公式是稳定的.

【证毕】

【定义 5】 机械求积公式的收敛性 (Convergence of Quadrature)

如果被积函数 $y=f(x)$ 随着节点 x_j 的加密 (节点数目 n 增加) 同时即是最大步长 $h=max\{h_j\}, j=0,1,2,\cdots,n-1$ 的缩短而相应机械求积公式产生的近似值序列收敛于积分真值：

$$\lim_{n\to\infty,h\to 0}\sum_{j=0}^{n}A_j f_j=\int_a^b f(x)dx \tag{1.43}$$

则称机械求积公式是 收 敛 的.

- 1.6. **例题选讲**

【例 1】 梯形公式与矩形公式的代数精度 证明梯形公式与矩形公式都具有一次代数精度.

【证明】 (1) 对于梯形公式:

$$T=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \tag{1.44}$$

令 $f(x)=x$, 则

$$\int_a^b xdx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)=\frac{a+b}{2}(b-a)=\frac{b^2-a^2}{2} \tag{1.45}$$

而进一步令 $f(x)=x^2$, 则

$$\int_a^b x^2dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)=\frac{a^2+b^2}{2}(b-a)\neq\frac{b^3-a^3}{3} \tag{1.46}$$

故梯形公式有且仅有一次代数精度.

(2) 对于矩形公式：

$$R = \int_a^b f(x)dx \approx f(\frac{a+b}{2})(b-a) \tag{1.47}$$

令 $f(x) = x$, 则

$$\int_a^b xdx \approx f(\frac{a+b}{2})(b-a) = \frac{a+b}{2}(b-a) = \frac{b^2-a^2}{2} \tag{1.48}$$

而进一步令 $f(x) = x^2$, 则

$$\int_a^b x^2dx \approx f(\frac{a+b}{2})(b-a) = (\frac{a+b}{2})^2(b-a) \neq \frac{b^3-a^3}{3} \tag{1.49}$$

故矩形公式有且仅有一次代数精度.

【证毕】

【例 2】 **满足给定代数精度的机械求积公式的设计** 确定求积公式中的待定参数，使其代数精度尽可能高，并求此代数精度．注意充分利用节点的对称性．

(1)

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2)) \tag{1.50}$$

【解】 由于求积公式中含有 4 个待定参数：求积系数 c 和节点 x_0, x_1, x_2. 故我们分别令 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$, 则

$$2 = \int_{-1}^{1} dx \approx c(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2))$$
$$= c(1 + 1 + 1) = 3c \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

进而

$$\begin{cases} 0 = \int_{-1}^{1} x dx \approx \dfrac{2}{3}(x_0 + x_1 + x_2) \\ \dfrac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x^2 dx \approx \dfrac{2}{3}(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) \\ 0 = \int_{-1}^{1} x^3 dx \approx \dfrac{2}{3}(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) \end{cases}$$

联立得关于节点的非线性方程组：

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 = 0 \end{cases}$$

利用对称性取 $x_1 = 0$, 则方程组简化为

$$\begin{cases} x_0 + x_2 = 0 \\ x_0^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$$

解之得 $x_0=\mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x_2=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 故求积公式为：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{3}(f(-\frac{\sqrt{2}}{2})+f(0)+f(\frac{\sqrt{2}}{2}))$$

若取 $f(x)=x^4$, 则

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \neq \frac{2}{3}((-\frac{\sqrt{2}}{2})^4+0+(\frac{\sqrt{2}}{2})^4)=\frac{1}{3}$$

故代数精度为 3. 【解毕】

(2)

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(1) \tag{1.51}$$

【解】 由于求积公式中含有 4 个待定参数：求积系数 A_0, A_1, A_2 和节点 x_1. 故我们分别令 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$, 则

$$\begin{cases} 1 = \int_0^1 xdx \approx A_0 + A_1 + A_2 \\ \frac{1}{2} = \int_0^1 xdx \approx A_1 x_1 + A_2 \\ \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx \approx A_1 x_1^2 + A_2 \\ \frac{1}{4} = \int_0^1 x^2 dx \approx A_1 x_1^3 + A_2 \end{cases}$$

利用对称性取 $x_1 = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$, 则解之得

$A_0 = A_2 = \dfrac{1}{3}, A_1 = \dfrac{2}{3}$. 故求积公式为:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{6}(f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1))$$

若取 $f(x) = x^4$, 则

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{6}(0 + 4(\frac{1}{2})^4 + 1) = \frac{5}{24}$$

故代数精度为 3. 事实上此即 Simpson 公式.

【解毕】

(3)

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_0 f(-h) + A_1 f(0) + A_2 f(h) \tag{1.52}$$

【解】 由于求积公式中含有 3 个待定参数：求积系数 A_0, A_1, A_2. 故我们分别令 $f(x) = 1, x, x^2$, 则

$$\begin{cases} 2h = \int_{-h}^{h} dx \approx A_0 + A_1 + A_2 \\ 0 = \int_{-h}^{h} x dx \approx -hA_0 + hA_2 \\ \frac{2}{3}h^3 = \int_{-h}^{h} x^2 dx \approx h^2 A_0 + h^2 A_2 \end{cases}$$

解之得 $A_0 = A_2 = \frac{1}{3}h, A_1 = \frac{4}{3}h$. 故求积公式为:

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{1}{3}h(f(-h) + 4f(0) + f(h))$$

若取 $f(x) = x^3$, 则

$$\int_{-h}^{h} x^3 dx = 0 = \frac{1}{3}h(-h^3 + 0 + h^3)$$

若取 $f(x) = x^4$, 则

$$\int_{-h}^{h} x^4 dx = \frac{2}{5}h^5 \neq \frac{1}{3}h(h^4 + 0 + h^4) = \frac{2}{3}h^5$$

故代数精度为 3.

【解毕】

(4)

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_0 f(-h) + A_1 f(0) + A_2 f(h) \tag{1.53}$$

【解】 由于求积公式中含有 3 个待定参数：求积系数 A_0, A_1, A_2. 故我们分别令 $f(x) = 1, x, x^2$, 则

$$\begin{cases} 4h = \int_{-2h}^{2h} dx \approx A_0 + A_1 + A_2 \\ 0 = \int_{-2h}^{2h} x dx \approx -hA_0 + hA_2 \\ \dfrac{16}{3}h^3 = \int_{-2h}^{2h} x^2 dx \approx h^2 A_0 + h^2 A_2 \end{cases}$$

解之得 $A_0 = A_2 = \frac{8}{3}h, A_1 = -\frac{4}{3}h$. 故求积公式为:

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx \frac{4}{3}h(2f(-h) + f(0) + 2f(h))$$

若取 $f(x) = x^3$, 则

$$\int_{-2h}^{2h} x^3 dx = 0 = \frac{8}{3}h(-h^3 + 0 + h^3)$$

若取 $f(x) = x^4$, 则

$$\int_{-2h}^{2h} x^4 dx = \frac{64}{5}h^5 \neq \frac{4}{3}h(2h^4 + 0 + 2h^4) = \frac{16}{3}h^5$$

故代数精度为 3.

【解毕】

(5)

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)}{3} \tag{1.54}$$

【解】 由于求积公式中含有 2 个待定参数：节点 x_1, x_2. 当 $f(x)=1$ 时得到恒等式，故我们分别令 $f(x)=x, x^2$, 则

$$\begin{cases} 0 = \int_{-1}^{1} xdx \approx \frac{1}{3}(-1+2x_1+3x_2) \\ \frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x^2dx \approx \frac{1}{3}(1+2x_1^2+3x_2^2) \end{cases}$$

联立得关于节点的非线性方程组:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1^2 + 3x_2^2 = 1 \end{cases}$$

首式代入次式得 $x_1 = \dfrac{1-3x_2}{2}$, 则方程组简化为二次方程

$$15x_2^2 - 6x_2 - 1 = 0$$

可用 Matlab 编程解之得

$x_1 = -0.28989794855664, x_2 = 0.52659863237109$ 或

$x_1 = 0.68989794855664, x_2 = -0.12659863237109$ 故求积公式为：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx$$

$$\frac{f(-1) + 2f(-0.28989794855664) + 3f(0.52659863237109)}{3}$$

或

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx$$

$$\frac{f(-1)+2f0.689897948556 64)+3f(-0.126598632371 09)}{3}$$

若取 $f(x)=x^3$, 则易算得方程不成立:

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \neq \frac{f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)}{3}$$

故代数精度为 2.

解二次方程的根即解二次多项式零点的相关 源程序：为

```
a=[15 -6 -1];
x2=roots(a);
x1=(1-3*x2)./2;
```

运行结果为：

a =

15 -6 -1

x2 =

0.52659863237109

-0.12659863237109

x1 =

-0.28989794855664

0.68989794855664

【解毕】