计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第六节　三次样条插值
Cubic Spline Interpolation

- 6.1. 三次样条函数 (Cubic Spline Interpolant)

样条 (spline) 源自工程师们的绘图工具，是富有弹性的细长条，以压铁固定于模具指定点，并调整使其具有光滑外形，这样既保证了外形曲线的光滑美观，间断性又使它转折自如．自 20 世纪 60 年代初由于航空、造船、汽车工业外形设计的迫切需要，样条函数方法获得飞速发展，应用领域极其广泛．

新疆有种风味小吃叫“拉条子”，即是以厨师的两手作为样条插值节点，相当于压铁，而拉甩的动作即是在调整样条的外形．

【定义 1】 三次插值样条函数 (Cubic Spline Interpolant)
考虑被插函数 $f(x)$，要求它在插值区间 $[a,b]$ 上至少二阶连续可微： $f(x) \in C^{(2)}[a,b]$，选取 $n+1$ 个插值节点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，在每个区间段 $I_j = [x_j, x_{j+1}], j = 0,1,2,\cdots,n-1$ 上，局部定义三次样条函数 $S(x)$ 的 限制 为三次多项式 $S_j(x)$：

$$S_j(x) := a_3^j x^3 + a_2^j x^2 + a_1^j x + a_0^j, j = 0,1,2,\cdots,n-1 \quad (6.1)$$

则整个区间上的三次样条函数是限制函数 $S_j(x)$ 的 延拓：

$$S(x) = \bigcup_{j=0}^{n-1} S_j(x), j = 0, 1, 2, \cdots, n-1, S(x)|_{I_j} = S_j(x) \quad (6.2)$$

因而要确立一个三次样条函数，只需要写出它在每个区间段 $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ 上的 限制$S_j(x)$ 来就好了，即我们要确定 $4n$ 个系数： $a_3^j, a_2^j, a_1^j, a_0^j, j = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$

三次样条函数 $S(x)$ 满足 $n+1$ 个插值节点处的基本插值条件，由此可定 $n+1$ 个方程：

$$S(x_j) = y_j = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{6.3}$$

此外，样条函数独特之处在于，它还应满足在 $n-1$ 个
<u>内节点</u> $x_j, j = 1, 2, \cdots, n-1$ 处的
<u>直至二阶导函数的连续性条件</u>，即 $S(x), S'(x), S''(x)$ 的左右极限相等 (或等价地说，即 $S(x)$ 的直至二阶的左右导函数相等), 以保证它是至少二阶连续可微的： $S(x) \in C^{(2)}[a, b]$. 由此又可定出 $3(n-1)$ 个方程：

$$
\begin{cases}
S(x_j - 0) & = S(x_j + 0), \\
S^{'}(x_j - 0) & = S^{'}(x_j + 0), \qquad j = 1, 2, \cdots, n-1 \\
S^{''}(x_j - 0) & = S^{''}(x_j + 0).
\end{cases} \tag{6.4}
$$

或以限制函数 $S_j(x), j=1,2,\cdots,n-1$ 的形式表达，即

$$\begin{cases} S_{j-1}(x_j) & = S_j(x_j), \\ S'_{j-1}(x_j) & = S'_j(x_j), \qquad j=1,2,\cdots,n-1 \\ S''_{j-1}(x_j) & = S''_j(x_j). \end{cases} \tag{6.5}$$

这样我们就得到了 $(n+1)+3(n-1)=4n-2$ 个方程．确定三次样条函数的 $4n$ 个系数还需要 2 个条件，如何施加呢？基于现实应用的背景，经常讨论的是如下 3 种条件：

(1) **钳制边界 (固支边界)**(Clamped Boundary)　已知被插函数 $f(x)$ 在两端点的一阶导函数值，样条函数与被插函数在两端点处一阶密切，即具有相同的一阶导函数值：

$$S^{'}(x_0) = f_0^{'} = f^{'}(a), \quad S^{'}(x_n) = f_n^{'} = f^{'}(b), \tag{6.6}$$

(2) **自然边界 (曲率极小边界)**(Natural or Free Boundary)

已知被插函数 $f(x)$ 在两端点的二阶导函数值，样条函数与被插函数在两端点处具有相同的二阶导函数值 (但未必密切，因为一阶导函数值可能不同)：

$$S^{''}(x_0) = f_0^{''} = f^{''}(a), \quad S^{''}(x_n) = f_n^{''} = f^{''}(b), \tag{6.7}$$

特别地，如果被插函数在两端点的二阶导函数值为 0 ，从几何上解释就是曲率极小，则样条函数也在两端点的二阶导函数值为 0 ：

$$S^{''}(x_0) = S^{''}(x_n) = 0, \tag{6.8}$$

称之为 自 然边界.

(3) **周期边界** (Periodic Boundary)　已知被插函数 $f(x)$ 是以两端点所定长度 $T = b - a = x_n - x_0$ 为一个正周期的周期函数，样条函数亦然，即在两端点具有相同的直至二阶的导函数值：

$$S^{'}(x_0) = S^{'}(x_n), \quad S^{''}(x_0) = S^{''}(x_n), \tag{6.9}$$

而由于样条函数的周期性，条件 $S(x_0) = S(x_n)$ 此时包含在样条函数的连续性条件之中.

- 6.2. **三次样条插值函数的建立**
  (Construction of Cubic Spline Interpolant)

　　我们来建立一种常用的三次样条插值函数，基本方法是获得节点处的 *矩*，相关的方程组以力学术语称为 *三弯矩方程*.

【定义 1】 矩 (moment) 样条插值函数 $S(x) \in C^{(2)}[a,b]$ 在 $n+1$ 个插值节点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 处的二阶导函数值:

$$M_j := S^{''}(x_j), \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, n-1, n \tag{6.10}$$

称为 矩. 在力学上解释为细梁在 x_j 截面处的弯矩.

由于在每个区间段 $I_j = [x_j, x_{j+1}], j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 上，三次样条函数 $S(x)$ 的 限制 为三次多项式 $S_j(x)$ ，故其一阶导函数是二次从而二阶导函数 $S_j^{''}(x)$ 是一次即
线性插值多项式：

$$\begin{aligned}
&S^{''}(x)|_{I_j} = S_j^{''}(x) \\
&= \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} S_j^{''}(x_j) + \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} S_j^{''}(x_{j+1}) \\
&= \frac{x_{j+1} - x}{h_j} M_j + \frac{x - x_j}{h_j} M_{j+1} \\
&\quad j = 0, 1, 2, \cdots, n-1
\end{aligned} \tag{6.11}$$

这里 $h_j = x_{j+1} - x_j$ 为各区间段 $I_j = [x_j, x_{j+1}], j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 的长度即 <u>步长</u>.

现在来确定矩. 将上式在区间段 $[x_j, x]$ 上逐项积分:

$$\begin{aligned}
&S^{'}(x)|_{I_j} = S_j^{'}(x)\\
&= -\frac{(x_{j+1}-x)^2}{2h_j}M_j + \frac{(x-x_j)^2}{2h_j}M_{j+1} + A_j\\
&= \frac{-M_j(x_{j+1}-x)^2 + M_{j+1}(x-x_j)^2}{2h_j} + A_j\\
&\quad j = 0, 1, 2, \cdots, n-1
\end{aligned} \tag{6.12}$$

再积分一次得

$$
\begin{aligned}
S(x)|_{I_j} &= S_j(x) \\
&= \frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}M_j + \frac{(x-x_j)^3}{6h_j}M_{j+1} + A_j(x-x_j) + B_j \\
&= \frac{M_j(x_{j+1}-x)^3 + M_{j+1}(x-x_j)^3}{6h_j} + A_j(x-x_j) + B_j \\
&\quad j = 0,1,2,\cdots,n-1
\end{aligned} \tag{6.13}
$$

这里 A_j, B_j 为积分常数，我们将利用三次样条函数 $S(x)$ 满足的 $n+1$ 个插值节点处的基本插值条件和在 $n-1$ 个内节点$x_j, j=1,2,\cdots,n-1$ 处的直至二阶导函数的连续性条件 来确定.

$$
\begin{aligned}
y_j &= S(x_j) \\
&= \frac{M_j(x_{j+1}-x_j)^3 + M_{j+1}(x_{j+1}-x_j)^3}{6h_j} + A_j(x_j - x_j) + B_j \\
&= \frac{M_j h_j^3}{6h_j} + B_j = \frac{M_j h_j^2}{6} + B_j \\
\Rightarrow \quad & B_j = y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

同理

$$y_{j+1} = S(x_{j+1}) = \frac{M_j(x_{j+1}-x_{j+1})^3 + M_{j+1}(x_{j+1}-x_j)^3}{6h_j} +$$
$$A_j(x_{j+1}-x_j) + B_j$$
$$= \frac{M_{j+1}h_j^3}{6h_j} + A_jh_j + B_j$$
$$= \frac{M_{j+1}h_j^2}{6} + A_jh_j + y_j - \frac{M_jh_j^2}{6}$$
$$= \frac{(M_{j+1}-M_j)h_j^2}{6} + A_jh_j + y_j$$
$$\Rightarrow \quad A_jh_j = y_{j+1} - y_j - \frac{(M_{j+1}-M_j)h_j^2}{6}$$
$$\Rightarrow \quad A_j = \frac{y_{j+1}-y_j}{h_j} - \frac{(M_{j+1}-M_j)h_j}{6}$$
$$\Rightarrow \quad A_j = f[x_j, x_{j+1}] - \frac{(M_{j+1}-M_j)h_j}{6} \tag{6.15}$$

即所求待定系数为

$$\left\{\begin{array}{ll} A_j & = f[x_j, x_{j+1}] - \dfrac{(M_{j+1} - M_j)h_j}{6}, \\ B_j & = y_j - \dfrac{M_j h_j^2}{6}. \end{array}\right. \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \tag{6.16}$$

代入样条函数的待定式得

$$
\begin{aligned}
&S(x)|_{I_j} = S_j(x) \\
&= \frac{M_j(x_{j+1}-x)^3 + M_{j+1}(x-x_j)^3}{6h_j} + \\
&(f[x_j, x_{j+1}] - \frac{(M_{j+1}-M_j)h_j}{6})(x-x_j) + y_j - \frac{M_j h_j^2}{6} \\
&= \frac{M_j(x_{j+1}-x)^3 + M_{j+1}(x-x_j)^3}{6h_j} \\
&+(\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j} - \frac{(M_{j+1}-M_j)h_j}{6})(x-x_j) + y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{M_j(x_{j+1}-x)^3 + M_{j+1}(x-x_j)^3}{6h_j} + \frac{1}{h_j}(y_{j+1} - y_j$$

$$-\frac{(M_{j+1}-M_j)h_j^2}{6})(x-x_j) + y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}$$

$$= \frac{M_j(x_{j+1}-x)^3 + M_{j+1}(x-x_j)^3}{6h_j}$$

$$+\frac{x-x_j}{h_j}(y_{j+1} - \frac{(M_{j+1}-M_j)h_j^2}{6}) - y_j\frac{x-x_j}{h_j} + y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}$$

$$= \frac{M_j(x_{j+1}-x)^3 + M_{j+1}(x-x_j)^3}{6h_j} + \frac{x-x_j}{h_j}(y_{j+1} - \frac{M_{j+1}h_j^2}{6})$$

$$\frac{x-x_j}{h_j}\frac{M_j h_j^2}{6} + y_j(1-\frac{x-x_j}{h_j}) - \frac{M_j h_j^2}{6}$$

$$= \frac{M_j(x_{j+1}-x)^3 + M_{j+1}(x-x_j)^3}{6h_j} + \frac{x-x_j}{h_j}(y_{j+1} - \frac{M_{j+1}h_j^2}{6})$$

$$+y_j(\frac{x_{j+1}-x}{h_j}) - \frac{M_j h_j^2}{6}(1-\frac{x-x_j}{h_j})$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{M_j(x_{j+1}-x)^3 + M_{j+1}(x-x_j)^3}{6h_j} + \\
&\frac{x-x_j}{h_j}\left(y_{j+1} - \frac{M_{j+1}h_j^2}{6}\right) + y_j\frac{x_{j+1}-x}{h_j} - \frac{M_jh_j^2}{6}\cdot\frac{x_{j+1}-x}{h_j} \\
&= \frac{M_j(x_{j+1}-x)^3 + M_{j+1}(x-x_j)^3}{6h_j} + \\
&\left(y_{j+1} - \frac{M_{j+1}h_j^2}{6}\right)\frac{x-x_j}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_jh_j^2}{6}\right)\frac{x_{j+1}-x}{h_j}
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

关于 x 逐项求导，或者，直接将 A_j 的表达代入三次样条函数 $S(x)$ 的一阶导函数的表达得到

$$
\begin{aligned}
& S^{'}(x)|_{I_j} = S_j^{'}(x) \\
& = \frac{-M_j(x_{j+1}-x)^2 + M_{j+1}(x-x_j)^2}{2h_j} + \\
& f[x_j, x_{j+1}] - \frac{(M_{j+1}-M_j)h_j}{6}
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

同理，限制在区间段 $I_{j-1}=[x_{j-1},x_j]$ 上，令步长 $h_{j-1}=x_j-x_{j-1}$, 则

$$\begin{aligned}
&S^{'}(x)|_{I_{j-1}}=S_{j-1}^{'}(x)\\
&=\frac{-M_{j-1}(x_j-x)^2+M_j(x-x_{j-1})^2}{2h_{j-1}}+\\
&f[x_{j-1},x_j]-\frac{(M_j-M_{j-1})h_{j-1}}{6}
\end{aligned}\tag{6.19}$$

由此分别代入上述两式， $S(x)$ 在节点 x_j 处的值为

$$
\begin{aligned}
& S'(x_j)|_{I_j} = S_j'(x_j) \\
& = \frac{-M_j(x_{j+1}-x_j)^2 + M_{j+1}(x_j-x_j)^2}{2h_j} + \\
& f[x_j, x_{j+1}] - \frac{(M_{j+1}-M_j)h_j}{6} \\
& = \frac{-M_j(x_{j+1}-x_j)^2}{2h_j} + f[x_j, x_{j+1}] - \frac{(M_{j+1}-M_j)h_j}{6} \\
& = \frac{-M_jh_j}{2} + f[x_j, x_{j+1}] - \frac{(M_{j+1}-M_j)h_j}{6} \\
& = -\frac{M_jh_j}{3} - \frac{M_{j+1}h_j}{6} + f[x_j, x_{j+1}]
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&S^{'}(x_j)|_{I_{j-1}} = S^{'}_{j-1}(x_j)\\
&= \frac{-M_{j-1}(x_j - x_j)^2 + M_j(x_j - x_{j-1})^2}{2h_{j-1}} +\\
&f[x_{j-1}, x_j] - \frac{(M_j - M_{j-1})h_{j-1}}{6}\\
&= \frac{M_j(x_j - x_{j-1})^2}{2h_{j-1}} + f[x_{j-1}, x_j] - \frac{(M_j - M_{j-1})h_{j-1}}{6}\\
&= \frac{M_j h_{j-1}}{2} + f[x_{j-1}, x_j] - \frac{(M_j - M_{j-1})h_{j-1}}{6}\\
&= \frac{M_j h_{j-1}}{3} + \frac{M_{j-1}h_{j-1}}{6} + f[x_{j-1}, x_j]
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

利用三次样条函数 $S(x)$ 满足的在 $n-1$ 个
内节点$x_j, j = 1, 2, \cdots, n-1$ 处的一阶导函数的连续性条件,
我们有:

$$
\begin{aligned}
&S^{'}(x_j)|_{I_j} = S^{'}(x_j)|_{I_{j-1}} \Leftrightarrow S^{'}(x_j+0) = S^{'}(x_j-0) \\
&\Leftrightarrow S_j^{'}(x_j) = S_{j-1}^{'}(x_j) \\
&\Rightarrow -\frac{M_j h_j}{3} - \frac{M_{j+1} h_j}{6} + f[x_j, x_{j+1}] \\
&= \frac{M_j h_{j-1}}{3} + \frac{M_{j-1} h_{j-1}}{6} + f[x_{j-1}, x_j] \\
&\Rightarrow \frac{M_{j-1} h_{j-1}}{6} + \frac{M_j (h_{j-1} + h_j)}{3} + \frac{M_{j+1} h_j}{6} \\
&= f[x_j, x_{j+1}] - f[x_{j-1}, x_j]
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

在此方程两端同乘以 $\dfrac{6}{h_{j-1}+h_j}$ 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{M_{j-1}h_{j-1}}{6}+\frac{M_j(h_{j-1}+h_j)}{3}+\frac{M_{j+1}h_j}{6}\\
&=f[x_j,x_{j+1}]-f[x_{j-1},x_j]\\
&\Leftrightarrow \frac{M_{j-1}h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j}+2M_j+\frac{M_{j+1}h_j}{h_{j-1}+h_j}\\
&=6\frac{f[x_j,x_{j+1}]-f[x_{j-1},x_j]}{h_{j-1}+h_j}\\
&\Leftrightarrow \frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j}M_{j-1}+2M_j+\frac{h_j}{h_{j-1}+h_j}M_{j+1}\\
&=6\frac{f[x_j,x_{j+1}]-f[x_{j-1},x_j]}{x_{j+1}-x_{j-1}}\\
&\Leftrightarrow \mu_jM_{j-1}+2M_j+\lambda_jM_{j+1}=6f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}]\\
&\Leftrightarrow \mu_jM_{j-1}+2M_j+\lambda_jM_{j+1}=d_j
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

于是我们得到了一个形式上因对称而显得非常漂亮的方程组

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j \quad j = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{6.24}$$

其中的系数是

$$\begin{aligned} \mu_j &= \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j}, \\ \lambda_j &= \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j}, \\ d_j &= 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] \end{aligned} \qquad j = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{6.25}$$

显然这里的系数 μ_j 与 λ_j 是一对 <u>凸线性组合系数</u>：

$$\mu_j + \lambda_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j} + \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j} \equiv 1 \tag{6.26}$$

就不同的边界条件讨论：

(1) **钳制边界 (固支边界)**(Clamped Boundary)　样条函数与被插函数在两端点处具有相同的一阶导函数值：

$$S^{'}(x_0) = f_0^{'},\quad S^{'}(x_n) = f_n^{'} \tag{6.27}$$

分别取 $j = 1$ 和 $j = n - 1$，代入 $S^{'}(x)|_{I_{j-1}} = S_{j-1}^{'}(x)$ 和 $S^{'}(x)|_{I_j} = S_j^{'}(x)$ 的表达式

$$
\begin{aligned}
&S^{'}(x)|_{I_0} = S_0^{'}(x) \\
&= \frac{-M_0(x_1-x)^2+M_1(x-x_0)^2}{2h_0} + f[x_0,x_1] - \frac{(M_1-M_0)h_0}{6}
\end{aligned}
\tag{6.28}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&S^{'}(x)|_{I_{n-1}} = S_{n-1}^{'}(x) \\
&= \frac{-M_{n-1}(x_n-x)^2+M_n(x-x_{n-1})^2}{2h_{n-1}} + \\
&f[x_{n-1},x_n] - \frac{(M_n-M_{n-1})h_{n-1}}{6}
\end{aligned}
\tag{6.29}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
S'(x_0)|_{I_0} &= S_0'(x_0) \\
&= \frac{-M_0(x_1-x_0)^2 + M_1(x_0-x_0)^2}{2h_0} + \\
& f[x_0,x_1] - \frac{(M_1-M_0)h_0}{6} \\
&= \frac{-M_0h_0}{2} + f[x_0,x_1] - \frac{(M_1-M_0)h_0}{6} \\
&= -\frac{M_0h_0}{3} - \frac{M_1h_0}{6} + f[x_0,x_1] \\
&= -\frac{2M_0+M_1}{6}h_0 + f[x_0,x_1]
\end{aligned} \tag{6.28}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&S'(x_n)|_{I_{n-1}} = S'_{n-1}(x_n)\\
&= \frac{-M_{n-1}(x_n - x_n)^2 + M_n(x_n - x_{n-1})^2}{2h_{n-1}} +\\
&f[x_{n-1}, x_n] - \frac{(M_n - M_{n-1})h_{n-1}}{6}\\
&= \frac{M_n h_{n-1}^2}{2} + f[x_{n-1}, x_n] - \frac{(M_n - M_{n-1})h_{n-1}}{6}\\
&= \frac{M_n h_{n-1}}{3} + \frac{M_{n-1}h_{n-1}}{6} + f[x_{n-1}, x_n]\\
&= \frac{M_{n-1} + 2M_n}{6} h_{n-1} + f[x_{n-1}, x_n]
\end{aligned}
\tag{6.29}
$$

于是所给钳制边界即为

$$
\begin{cases} f_0^{'} = S^{'}(x_0) = & -\dfrac{2M_0 + M_1}{6} h_0 + f[x_0, x_1], \\ f_n^{'} = S^{'}(x_n) = & \dfrac{M_{n-1} + 2M_n}{6} h_{n-1} + f[x_{n-1}, x_n]. \end{cases} \tag{6.30}
$$

从而又得到两个矩方程：

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = & \dfrac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f_0') := d_0, \\ M_{n-1} + 2M_n = & \dfrac{6}{h_{n-1}}(f_n' - f[x_{n-1}, x_n]) := d_n. \end{cases} \tag{6.31}$$

为形式统一起见，这里定义系数

$$\begin{cases} \lambda_0 = & \mu_n = 1 \\ d_0 = & \dfrac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f_0'), \\ d_n = & \dfrac{6}{h_{n-1}}(f_n' - f[x_{n-1}, x_n]). \end{cases} \tag{6.32}$$

将方程组 (6.24) 与 (6.31) 联立得到关于 矩 为未知元的 $n+1$ 阶线性代数方程组：

$$
\left\{
\begin{array}{rl}
2M_0 + \lambda_0 M_1 = & d_0, \\
\mu_1 M_0 + 2M_1 + \lambda_1 M_2 = & d_1, \\
\mu_2 M_1 + 2M_2 + \lambda_2 M_3 = & d_2, \\
\vdots\vdots\ \ddots\ \ddots\ \ddots\ \vdots\vdots & \\
\vdots\vdots\ \ddots\ \ddots\ \ddots\ \vdots\vdots & \\
\mu_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} + \lambda_{n-1} M_n = & d_{n-1} \\
\mu_n M_{n-1} + 2M_n = & d_n.
\end{array}
\right.
\tag{6.33}
$$

写为矩阵方程形式即为

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & 0 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & & & & \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & & 0 & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} \tag{6.34}$$

$$
= \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}
$$

其中的系数如下定义：

$$
\left\{
\begin{aligned}
\lambda_0 = &\quad \mu_n = 1 \\
d_0 = &\quad \frac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f_0^{'}), \\
d_n = &\quad \frac{6}{h_{n-1}}(f_n^{'} - f[x_{n-1}, x_n]) \\
\mu_j &\quad = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j}, \qquad \lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j}, \\
\mu_j &\quad +\lambda_j = 1 \\
d_j &\quad = 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]. \\
&\quad j = 1, 2, \cdots, n-1
\end{aligned}
\right.
\tag{6.35}
$$

这就是有名的 *三弯矩方程*. 其系数矩阵是所谓 *三对角矩阵*, 即只有主对角线及其腋下和肩上的斜对角线上的元素非零, 而其他所有位置的元素均为 0. 根据系数的定义可知系数矩阵是 *严格对角优势矩阵*, 即各行的主对角线元素严格大于其左右两边的元素之和：

$$2 > 1 = \lambda_0 = \mu_n, \quad 2 > 1 = \mu_j + \lambda_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{6.36}$$

此类型方程组存在唯一解，并且可以用 *解三对角矩阵方程的追赶法* 来求. 这一方法我们在线性代数方程组的直接解法中为诸君介绍.

(2) **自然边界 (曲率极小边界)**(Natural or Free Boundary) 样条函数与被插函数在两端点处具有相同的二阶导函数值:

$$S^{''}(x_0) = f_0^{''}, \quad S^{''}(x_n) = f_n^{''}, \tag{6.37}$$

则直接得到矩方程:

$$M_0 = f_0^{''}, \qquad M_n = f_n^{''}. \tag{6.38}$$

从而若定义系数

$$\lambda_0 = \mu_n = 0, \qquad d_0 = 2f_0^{''}, \qquad d_n = 2f_n^{''}. \tag{6.39}$$

则亦有矩阵方程形式的 三弯矩方程 :

$$
\begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
\mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & & & & & \\
0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\
 & & & & & & 0 & 0 & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} \tag{6.40}
$$

特别地，如果样条函数在两端点的二阶导函数值为 0 即在 自然边界 的情况：

$$S^{''}(x_0) = S^{''}(x_n) = 0 \tag{6.41}$$

直接有

$$M_0 = M_n = 0 \tag{6.42}$$

此时三弯矩方程退化为 $n-1$ 阶线性代数方程组：

$$
\begin{pmatrix}
2 & \lambda_1 & 0 & & & & & \\
\mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & \ddots & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\
 & & & & & \mu_{n-1} & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1}
\end{pmatrix}
$$

$$= \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix} \tag{6.43}$$

(3) **周期边界** (Periodic Boundary)　样条函数是以两端点所定长度 $T = b - a = x_n - x_0$ 为一个正周期的周期函数，即在两端点具有相同的直至二阶的导函数值：

$$S(x_0) = S(x_n), \quad S^{'}(x_0) = S^{'}(x_n), \quad S^{''}(x_0) = S^{''}(x_n), \quad (6.44)$$

代入样条函数及其导函数的表达式得

$$\begin{cases} M_0 = M_n, \\ -\dfrac{2M_0 + M_1}{6} h_0 + f[x_0, x_1] = \\ \dfrac{M_{n-1} + 2M_n}{6} h_{n-1} + f[x_{n-1}, x_n], \end{cases} \tag{6.45}$$

联立之得

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2M_0 + M_1}{6}h_0 + f[x_0, x_1] \\
&= \frac{M_{n-1} + 2M_n}{6}h_{n-1} + f[x_{n-1}, x_n] \\
&\Rightarrow -\frac{2M_n + M_1}{6}h_0 + f[x_0, x_1] \\
&= \frac{M_{n-1} + 2M_n}{6}h_{n-1} + f[x_{n-1}, x_n] \\
&\Rightarrow \frac{2M_n + M_1}{6}h_0 + \frac{M_{n-1} + 2M_n}{6}h_{n-1} \\
&= f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n] \\
&\Rightarrow \frac{M_1 h_0 + M_{n-1}h_{n-1} + 2M_n(h_0 + h_{n-1})}{6} \\
&= f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{M_1 h_0 + M_{n-1} h_{n-1} + 2M_n(h_0 + h_{n-1})}{h_0 + h_{n-1}} \\
&= 6\frac{f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]}{h_0 + h_{n-1}} \\
&\Rightarrow \frac{M_1 h_0}{h_0 + h_{n-1}} + \frac{M_{n-1} h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}} + 2M_n \\
&= 6\frac{f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]}{h_0 + h_{n-1}} \\
&\Rightarrow \lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n
\end{aligned}
\tag{6.46}
$$

即有

$$\begin{cases} M_0 = & M_n, \\ \lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n & = d_n. \end{cases} \tag{6.47}$$

这里定义系数

$$\begin{cases} \lambda_n = & \dfrac{h_0}{h_0 + h_{n-1}}, \\ \mu_n = & \dfrac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \\ \lambda_n + \mu_n & = 1, \\ d_n = & 6\dfrac{f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]}{h_0 + h_{n-1}}. \end{cases} \tag{6.48}$$

此时三弯矩方程退化为 n 阶线性代数方程组：

$$
\begin{pmatrix}
2 & \lambda_1 & 0 & & & & \mu_1 \\
\mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\
\lambda_n & & & & & \mu_n & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ M_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n
\end{pmatrix}
\tag{6.49}
$$

同样系数矩阵是 严格对角优势矩阵, 此类型方程组存在唯一解，并且可以用 解三对角矩阵方程的追赶法 来求.

【定理 1】 三次样条函数的误差估计 (Error Estimation of Cubic Spline Interpolant) 考虑被插函数 $f(x)$，要求它在插值区间 $[a,b]$ 上至少四阶连续可微： $f(x) \in C^{(4)}[a,b]$，选取 $n+1$ 个插值节点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，三次样条函数 $S(x)$ 满足钳制或自然边界条件. h 是最大步长：

$$h = \max h_j = \max |x_{j+1} - x_j|, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

引入导函数最大值标记： $M_n = max \mid f^{(n)}(x) \mid, \quad x \in [a,b]$，则有三次样条插值函数及其直至二阶导函数的余项误差估

计：

$$\begin{cases} \mid R_0(x) \mid = \mid f(x) - S(x) \mid \leq & \dfrac{5}{384} M_4 h^4, \\ \mid R_1(x) \mid = \mid f^{'}(x) - S^{'}(x) \mid \leq & \dfrac{1}{24} M_4 h^3, \\ \mid R_2(x) \mid = \mid f^{''}(x) - S^{''}(x) \mid \leq & \dfrac{3}{8} M_4 h^2. \end{cases} \tag{6.50}$$

【证明略】

- 6.4. **例题选讲**

【例 1 三次样条插值函数的计算】

给定函数 $f(x) \in C^{(4)}[1,2]$ 的函数值数据表如下. 求 $f(x)$ 的三次样条插值函数，分别满足：

x	0.25	0.30	0.39	0.45	0.53
$f(x)$	0.500	0.5477	0.6245	0.6708	0.7280

(1)**钳制边界 (固支边界)**(Clamped Boundary)　样条函数与被插函数在两端点处具有相同的一阶导函数值：

$$S^{'}(0.25) = f_0^{'} = 1.0000, \quad S^{'}(0.53) = f_4^{'} = 0.6868;$$

(2) **自然边界 (曲率极小边界)**(Natural or Free Boundary)　样条函数在两端点的二阶导函数值为 0 ：

$$S^{''}(0.25) = S^{''}(0.53) = 0.$$

【解】

(1) 为计算系数，先由数据表作出差商表．因系数 $d_j = 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]$, 故只需算到二阶差商：

k	x_k	$f(x_k)$	$f[x_{k-1}, x_k]$	$f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k]$	
0	0.25	$\underline{0.5000}$			
1	0.30	0.5477	$\underline{0.9540}$		
2	0.39	0.6245	0.8533	$\underline{-0.7193}$	
3	0.45	0.6708	0.7717	-0.5440	
4	0.53	0.7280	0.7150	-0.4050	

根据给定边界条件，此时矩阵形式三弯矩方程即为

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} \tag{6.51}$$

其中的系数根据定义分别计算如下：

$$
\left\{
\begin{aligned}
\lambda_0 = &\quad \mu_4 = 1 \\
d_0 = &\quad \frac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f_0^{'}) = \frac{6}{0.05}(0.9540 - 1.0000) \\
&\quad = -6 \times 0.9200, \\
d_4 = &\quad \frac{6}{h_{n-1}}(f_n^{'} - f[x_{n-1}, x_n]) = \frac{6}{0.08}(0.6868 - 0.7150) \\
&\quad = -6 \times 0.3525, \\
\mu_1 = &\quad \frac{h_0}{h_0 + h_1} = \frac{0.05}{0.14} = \frac{5}{14}, \qquad \lambda_1 = 1 - \mu_1 = \frac{9}{14} \\
\mu_2 = &\quad \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{0.09}{0.15} = \frac{3}{5}, \qquad \lambda_2 = 1 - \mu_2 = \frac{2}{5} \\
\mu_3 = &\quad \frac{h_2}{h_2 + h_3} = \frac{0.06}{0.14} = \frac{3}{7}, \qquad \lambda_3 = 1 - \mu_3 = \frac{4}{7} \\
d_1 &\quad = 6f[x_0, x_1, x_2] = -6 \times 0.7193, \\
d_2 &\quad = 6f[x_1, x_2, x_3] = -6 \times 0.5440, \\
d_3 &\quad = 6f[x_2, x_3, x_4] = -6 \times 0.4050.
\end{aligned}
\right.
\tag{6.52}
$$

代入 三弯矩方程 之形式得关于 矩 为未知元的 5 阶三对角线对角优势线性代数方程组：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{14} & 2 & \frac{9}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 2 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} & 2 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 0.9200 \\ 0.7193 \\ 0.5440 \\ 0.4050 \\ 0.3525 \end{pmatrix} \tag{6.53}$$

解之得各节点的矩为

$M_0 = -2.0278, \quad M_1 = -1.4643, \quad M_2 = -1.0313,$

$M_3 = -0.8072, \quad M_4 = -0.6539.$

代入三次样条插值函数的分段形式定义并化简为分段三次多项式形式，可得所求样条函数为 $S(x) =$

$$\begin{cases} 1.8783x^3 - 2.4227x^2 + 1.8591x + 0.1573, & x \in [0.25, 0.30]; \\ 0.8019x^3 - 1.4538x^2 + 1.5685x + 0.1863, & x \in [0.30, 0.39]; \\ 0.6225x^3 - 1.2440x^2 + 1.4866x + 0.1970, & x \in [0.39, 0.45]; \\ 0.3194x^3 - 0.8348x^2 + 1.3025x + 0.2246, & x \in [0.45, 0.53]. \end{cases}$$

这里求解三弯矩方程的相应 Matlab 源程序 可写为：

```
A=[ 2 1 0 0 0;5./14 2 9./14 0 0;0 3./5 2
2./5 0 ;0 0 3./7 2 4./7;0 0 0 1 2];
d=-[6.*0.9200 6.*0.7193
 6.*0.5440 6.*0.4050 6.*0.3525 ]';
M=A\d;
```

运行结果为

$$M = \begin{array}{r} \mathbf{-2.02784808362369} \\ \mathbf{-1.46430383275261} \\ \mathbf{-1.03127247386760} \\ \mathbf{-0.80718188153310} \\ \mathbf{-0.65390905923345} \end{array}$$

(2) 对于自然边界，样条函数在两端点的二阶导函数值为 0 ： $S^{''}(0.25)=S^{''}(0.53)=0$. 此时矩阵形式三弯矩方程即为

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 \\ 0 & \mu_3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \tag{6.55}$$

代入 三弯矩方程 之形式得关于 矩 为未知元的 3 阶三对角线对角优势线性代数方程组：

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{9}{14} & 0 \\ \frac{3}{5} & 2 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{7} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 0.7193 \\ 0.5440 \\ 0.4050 \end{pmatrix} \tag{6.56}$$

解之得各节点的矩为

$M_1 = -1.88094273858921, \quad M_2 = -0.86164481327801,$

$M_3 = -1.03036182572614.$

代入三次样条插值函数的分段形式定义并化简为分段三次多项式形式，可得所求样条函数为 $S(x) =$

$$\begin{cases} -6.2697x^3 + 4.7023x^2 - 0.2059x + 0.3555, & x \in [0.25, 0.30]; \\ 1.8876x^3 - 2.6393x^2 + 1.9966x + 0.1353, & x \in [0.30, 0.39]; \\ -0.4689x^3 + 0.1178x^2 + 0.9213x + 0.2751, & x \in [0.39, 0.45]; \\ 2.1467x^3 - 3.4132x^2 + 2.5103x + 0.0367, & x \in [0.45, 0.53]. \end{cases}$$

这里求解三弯矩方程的相应 Matlab 源程序 可写为：

```
A=[2 9./14 0;3./5 2 2./5;0 3./7 2];
d=-[6.*0.7193 6.*0.5440 6.*0.4050]';
M=A\d;
```

运行结果为

$$M = \begin{matrix} \textbf{-1.88094273858921} \\ \textbf{-0.86164481327801} \\ \textbf{-1.03036182572614} \end{matrix}$$

【解毕】

【例 2 三次样条插值函数的计算和误差估计】

给定函数 $f(x)=e^x \in c^{\infty}[-1,1]$ 的函数值数据表如下．求 $f(x)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$ 并做出误差估计.

j	0	1	2
x	-1	0	1
$f(x)$	0.3679	1.0000	2.7182
$f'(x)$	0.3679	1.0000	2.7182

【解】

<u>**方法一**.</u> 我们回到建立三次样条函数 $S(x)$ 的基本方法，逐项积分再微分.

由于在每个区间段 $I_0=[-1,0],I_1=[0,1]$ 上，三次样条函数 $S(x)$ 的 <u>限制</u> 为三次多项式 $S_j(x)$，故其一阶导函数是二次从而二阶导函数 $S_j''(x),\quad j=0,1$ 是一次即 <u>线性插值多项式</u>：

$$\begin{cases} S''(x)|_{I_0}=S_0''(x) & =\dfrac{0-x}{1}M_0+\dfrac{x-(-1)}{1}M_1 \\ & =-xM_0+(x+1)M_1 \\ S''(x)|_{I_1}=S_1''(x) & =\dfrac{1-x}{1}M_1+\dfrac{x-0}{1}M_2 \\ & =(1-x)M_1+xM_2 \end{cases} \tag{6.58}$$

现在来确定矩. 将上式在区间段 $[x_j, x]\quad j=0,1$ 上逐项积分二次得:

$$\begin{cases} S(x)|_{I_0} = S_0(x) &= \dfrac{-M_0x^3 + M_1(x+1)^3}{6} + A_0x + B_0 \\ S(x)|_{I_1} = S_1(x) &= \dfrac{M_1(1-x)^3 + M_2x^3}{6} + A_1x + B_1 \end{cases} \tag{6.59}$$

这里 $A_j, B_j, \quad j=0,1$ 为积分常数，我们利用三次样条函数 $S(x)$ 满足的 $n+1$ 个插值节点处的基本插值条件和在 $n-1$ 个 内节点$x_j, j=1,2,\cdots,n-1$ 处的直至二阶导函数的连续性条件来确定.

由于 $S(-1)=0.3679, \quad S(0)=1.0000$, 代入未定式得系数

$$A_0=0.6321+\frac{M_0-M_1}{6}, \quad B_0=1-\frac{M_1}{6} \tag{6.60a}$$

同理由 $S(1)=2.7182, \quad S(0)=1.0000$, 代入未定式得系数

$$A_1=1.7182+\frac{M_1-M_2}{6}, \quad B_1=1-\frac{M_1}{6} \tag{6.60b}$$

从而

$$
\begin{cases}
S(x)|_{I_0} = S_0(x) & = \dfrac{-M_0x^3 + M_1(x+1)^3}{6} + \\
 & (0.6321 + \dfrac{M_0 - M_1}{6})x + 1 - \dfrac{M_1}{6} \\
S(x)|_{I_1} = S_1(x) & = \dfrac{M_1(1-x)^3 + M_2x^3}{6} + \\
 & (1.7182 + \dfrac{M_1 - M_2}{6})x + 1 - \dfrac{M_1}{6}
\end{cases}
\tag{6.61}
$$

将上述两式分别微分一次，并利用钳制边界条件：
$S^{'}(-1) = 0.3679, \quad S^{'}(1) = 2.7182$ 可得矩方程：

$$\left\{\begin{array}{ll} 2M_0 + M_1 = & d_0 = 1.5852, \\ M_1 + 2M_2 = & d_2 = 6.0000. \end{array}\right. \tag{6.62}$$

再由三次样条函数 $S(x)$ 在内节点 $x_1 = 0$ 处的一阶导函数的连续性条件： $S_0^{'}(0) = S_1^{'}(0)$ 又得

$$M_0 + 4M_1 + M_2 = \quad 2d_1 = 6.5166 \tag{6.63}$$

三式联立解得各节点的矩为

$$M_0 = 0.3386, \quad M_1 = 0.9080, \quad M_2 = 2.5460 \tag{6.64}$$

代入三次样条插值函数的分段形式定义并化简为分段三次多项式形式，可得所求样条函数为

$$S(x) = \begin{cases} 0.0949x^3 + 0.4540x^2 + 0.9912x + 1.0000, & x \in [-1, 0]; \\ -0.5757x^3 + 0.4540x^2 + 1.5372x + 1.0000, & x \in [0, 1]. \end{cases} \tag{6.65}$$

<u>**方法二.**</u>　先做出差商表，再直接套用矩方程.

k	x_k	$f(x_k)$	$f[x_{k-1},x_k]$	$f[x_{k-2},x_{k-1},x_k]$
0	-1	<u>0.3679</u>		
1	0	1.0000	<u>0.6321</u>	
2	1	2.7182	1.7182	<u>0.54305</u>

根据给定边界条件，此时矩阵形式三弯矩方程即为

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 \\ 0 & \mu_2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \tag{6.66}$$

其中的系数根据定义分别计算如下:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\lambda_0 = &\quad \mu_2 = 1 \\
d_0 = &\quad \frac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f_0^{'}) = \frac{6}{1}(0.6321 - 0.3679) \\
&\quad = 6 \times 0.2642 = 1.5852, \\
d_2 = &\quad \frac{6}{h_{n-1}}(f_n^{'} - f[x_{n-1}, x_n]) = \frac{6}{1}(2.7182 - 1.7182) \\
&\quad = 6 \times 1.0000 = 6, \\
\mu_1 = &\quad \frac{h_0}{h_0 + h_1} = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_1 = 1 - \mu_1 = \frac{1}{2} \\
d_1 &\quad = 6f[x_0, x_1, x_2] = 6 \times 0.54305 = 3.2583.
\end{aligned}
\right.
\tag{6.67}
$$

代入形式矩阵方程即得三对角线对角优势方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5852 \\ 3.2583 \\ 6.0000 \end{pmatrix} \tag{6.68}$$

求解三弯矩方程的相应 Matlab 源程序 可写为:

A=[2 1 0;1 4 1;0 1 2];

d=d=[1.5852 6.5166 6.0000]';

M=A$\backslash d$;

运行结果为

$$M = \begin{array}{c} \mathbf{0.338600000000000} \\ \mathbf{0.908000000000000} \\ \mathbf{2.546000000000000} \end{array}$$

同样可得所求结果.

根据三次样条插值函数及其直至二阶导函数的余项误差估计定理：

$$\begin{cases} \mid R_0(x) \mid = \mid f(x) - S(x) \mid \leq & \dfrac{5}{384} M_4 h^4, \\ \mid R_1(x) \mid = \mid f^{'}(x) - S^{'}(x) \mid \leq & \dfrac{1}{24} M_4 h^3, \\ \mid R_2(x) \mid = \mid f^{''}(x) - S^{''}(x) \mid \leq & \dfrac{3}{8} M_4 h^2. \end{cases} \tag{6.69}$$

在区间 $[-1,1]$ 上代入相应数值：

$$M_4 = max \mid f^{(4)}(x) \mid = max \mid e^x \mid = e, \quad h = 1 \tag{6.70}$$

得余项估计：

$$\begin{cases} \mid R_0(x) \mid = \mid e^x - S(x) \mid \leq & \dfrac{5}{384} e \approx 0.03539429464139, \\ \mid R_1(x) \mid = \mid e^x - S^{'}(x) \mid \leq & \dfrac{1}{24} e \approx 0.11326174285246, \\ \mid R_2(x) \mid = \mid e^x - S^{''}(x) \mid \leq & \dfrac{3}{8} e \approx 1.01935568567214. \end{cases} \tag{6.71}$$

【解毕】

【例 3 三次样条插值函数的分部积分公式】

给定函数 $f(x) \in C^{(2)}[a,b]$ 的三次样条插值函数 $S(x)$, 证明：

(1)

$$\int_a^b (f^{''}(x))^2 dx - \int_a^b (S^{''}(x))^2 dx$$
$$= \int_a^b (f^{''}(x) - S^{''}(x))^2 dx + 2\int_a^b S^{''}(x)(f^{''}(x) - S^{''}(x))dx \tag{6.72}$$

(2) 若选取 $n+1$ 个插值节点

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 则:

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b S^{''}(x)(f^{''}(x) - S^{''}(x))dx \\
&= S^{''}(b)(f^{'}(b) - S^{'}(b)) - S^{''}(a)(f^{'}(a) - S^{'}(a))
\end{aligned}
\tag{6.73}
$$

【证明】

(1) 根据平方和公式及加减变形技巧，我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b (f^{''}(x) - S^{''}(x))^2 dx \\
&= \int_a^b (f^{''}(x)^2 - 2f^{''}(x)S^{''}(x) + S^{''}(x)^2) dx \\
&= \int_a^b (f^{''}(x))^2 dx + \int_a^b (S^{''}(x))^2 dx - 2\int_a^b f^{''}(x)S^{''}(x) dx \\
&= \int_a^b (f^{''}(x))^2 dx - \int_a^b (S^{''}(x))^2 dx \\
&+2\int_a^b (S^{''}(x))^2 dx - 2\int_a^b f^{''}(x)S^{''}(x) dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b (f^{''}(x))^2 dx - \int_a^b (S^{''}(x))^2 dx \\
&-2 \int_a^b S^{''}(x)(f^{''}(x) - S^{''}(x)) dx
\end{aligned}
$$

移项即得所证式.

(2) 根据分部积分公式及基本插值条件，我们有

$$S(a) = f(a), \quad S(b) = f(b), \quad S^{'''}(x) = c = const \tag{6.75}$$

故而

$$\begin{aligned}
&\int_a^b S^{''}(x)(f^{''}(x) - S^{''}(x))dx \\
&= S^{''}(x)(f^{'}(x) - S^{'}(x))|_a^b - \int_a^b S^{'''}(x)(f^{'}(x) - S^{'}(x))dx \\
&= S^{''}(b)(f^{'}(b) - S^{'}(b)) - S^{''}(a)(f^{'}(a) - S^{'}(a)) \\
&-c(f(x) - S(x))|_a^b \\
&= S^{''}(b)(f^{'}(b) - S^{'}(b)) - S^{''}(a)(f^{'}(a) - S^{'}(a))
\end{aligned} \tag{6.76}$$

即得所证式.

【证毕】