计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：　高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：　李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

§5.5 条件数与误差分析

【 定义 5.5.1. **矩阵的病态与良态 】**原始数据的微小变动称为摄动或扰动. 对于非齐次线性方程组 $Ax = b$,若系数矩阵 A 和自由项 b 的摄动将会 (不会) 造成解的巨大变化，则称方程组为病态 (良态)(Ill-Well conditioned Matrix) 的；相应系数矩阵称为病态 (良态) 矩阵.

比如，下述的高阶希尔伯特坡度矩阵 (Hilbert Matrix) 就是典型的病态矩阵 (Ill-conditioned Matrix)：

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

【定义 5.5.2 非奇异方阵的条件数】非奇异方阵 A 的条件数(Condition Number) 定义为其逆阵范数与其自身范数的乘积

$$cond(A) = ||A^{-1}||||A||$$

（显然，由于逆阵的介入，只有对于非奇异方阵才可能定义条件数.）

从而解的相对误差上界有估计：

(1) 自由项摄动方程组：

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq cond(A)\frac{||\delta b||}{||b||}$$

(2) 系数矩阵摄动方程组：

$$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq \frac{cond(A)\frac{||\delta A||}{||A||}}{1 - cond(A)\frac{||\delta A||}{||A||}}$$

非奇异方阵 A 的 条件数(Condition Number) 作为其逆阵范数与其自身范数的乘积，当然与范数的取法有关．取什么样的矩阵范数，就对应着什么样的条件数．在计算实践中，我们通常注重如下两种条件数：谱条件数和 ∞ - 条件数.

【**定义** 5.5.3】常用矩阵条件数 (Classical Cond)

容易验证，如下定义映照皆可作为 n 阶方阵空间上的条件数：

(1)谱条件数 ： $cond(A)_2 = ||A^{-1}||_2||A||_2 = \sqrt{\dfrac{\lambda_{\max}(A^TA)}{\lambda_{\min}(A^TA)}}$

特别地，当 A 为实对称矩阵， λ_1 和 λ_n 为 A 的最大和最小特征值，则

$$cond(A) = ||A^{-1}||_2||A||_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^TA)}{\lambda_{\min}(A^TA)}} = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|} \quad ;$$

(2)∞ - 条件数： $cond(A) = ||A^{-1}||_\infty ||A||_\infty$ ；

【例 1. 计算 2 阶 Hilbert 矩阵的 2 种常用条件数】

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2 阶 Hilbert 矩阵的逆矩阵为 $H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 12 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$

H^{-1} 的特征多项式为

$$|\lambda I - H^{-1}| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 6 \\ 6 & \lambda - 12 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16\lambda + 12$$

由求根公式， 2 个实特征值为

$$\lambda_1 = 8 + \sqrt{52} = 2(4 + \sqrt{13}), \lambda_2 = 8 - \sqrt{52} = 2(4 - \sqrt{13})$$

H^{-1} 的谱范数为 $||H^{-1}||_2 = \rho(H) = 8 + \sqrt{52} = 2(4 + \sqrt{13})$.
H^{-1} 的 ∞- 范数 (行范数) 为 $||H^{-1}||_\infty = 6 + 12 = 18$；于是:

(1) ∞- 条件数：因 H 的 ∞- 范数 (行范数) 为 $||H||_\infty = \frac{3}{2}$ ；故 H 的 ∞- 条件数

$$cond_\infty(H) = ||H^{-1}||_\infty ||H||_\infty = \frac{3}{2} \times 18 = 27$$

(2) 谱条件数：因 H 的谱范数为 $||H||_2 = \rho(H) = \dfrac{4+\sqrt{13}}{6}$.
故 H 的谱条件数

$$cond_2(H) = ||H^{-1}||_2||H||_2 = \frac{4+\sqrt{13}}{6} \times 2(4+\sqrt{13}) = \frac{(4+\sqrt{13})^2}{3}$$

$$\approx 19.2814700679039714483179233 7992 \approx 19.$$

可见低阶的 (2 阶)Hilbert 矩阵的病态性已然相当显著．阶数越高，越发 “病入膏肓”.

【 注记．高阶希尔伯特坡度矩阵的条件数 】

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

对称正定希尔伯特坡度矩阵 (Hilbert Matrix) 的 2- 条件数表如下，可见其严重病态性质．这是病态矩阵的著名例子.

n	3	5	6	8	
$cond_2(H_n)$	5×10^2	5×10^5	1.5×10^7	1.5×10^9	

【注记】希尔伯特 (David Hilbert),1862 年生于柯尼斯堡（今俄罗斯加里宁格勒）, 1943 年 2 月 14 日逝世于德国格廷根. 希尔伯特是 20 世纪最伟大的数学家之一, 具有多方面的贡献, 包括代数不变量问题、代数数域理论、几何基础、变分法、积分方程与无穷维空间理论、近代物理学、数理逻辑与符号学.

1900 年，他在巴黎第二届国际数学家大会上提出著名的 23 个数学问题 (Hilbert's Mathematical Problems)，成为 20 世纪主流数学的纲领性文件，极大推动了现代数学的发展. 泛函分析理论中有希尔伯特空间 (Hilbert Space)、几何理论中有希尔伯特公理 (Hilbert's system of axioms), 在物理学中他独立于爱因斯坦导出了引力场方程. 他在生前和死后都享有崇高的声望，曾对纳粹统治表示了极大愤慨，以正直的学者和天才的大师之名永垂青史.