数学实验

Experiments in Mathematics

实验8　约束优化

Dept. of Mathematical Sciences

Tsinghua University

Beijing 100084, China

约束优化问题一般形式

$$\min_{x \in \Re^n} \quad f(x)$$
$$s.t. \quad h_i(x) = 0,\ i = 1,\dots, m$$
$$g_j(x) \le 0,\ j = 1,\dots, l$$

当最优解在可行域边界上取得时，不能用无约束优化方法求解

约束优化基本内容

1. 问题与模型　**2.** 基本原理

3. 算法和**MATLAB**实现　**4.** 补充知识

约束优化实例1 生产计划

某厂生产甲乙两种口味的饮料，条件如右

	甲(百箱)	乙(百箱)	现有
原料(kg)	6	5	60
工人(名)	10	20	150
获利(万元)	10	9	

因条件所限，甲饮料产量不能超过8百箱

问如何安排生产计划，即两种饮料各生产多少使获利最大。

$$\max \quad z = 10x_1 + 9x_2$$
$$s.t. \quad 6x_1 + 5x_2 \le 60$$
$$10x_1 + 20x_2 \le 150$$
$$x_1 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

决策变量：甲乙两种饮料的产量 x_1, x_2（以百箱为单位）。

2000-11-23 3

约束优化实例2 聘用方案

某服务部门一周中每天需要不同数目的雇员：周一到周四每天至少 50 人，周五和周日每天至少 80 人，周六至少 90 人。

现规定应聘者需连续工作 5 天，试确定聘用方案，即周一到周日每天聘用多少人，使在满足需要的条件下聘用总人数最少。

决策变量：周一至周日每天(新)聘用人数 $x_1, x_2, \ldots x_7$

目标函数：**7天(新)聘用人数之和**

约束条件：周一至周日每天需要人数

2000-11-23 4

聘用方案　设系统已进入稳态（不是开始的几周）

连续工作**5**天 ⇨ 周一工作的应是**(**上**)**周四至周一聘用的

⇨ $x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_1 \ge 50$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
s.t. \quad & x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \ge 50 \\
& x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \ge 50 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \ge 50 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \ge 50 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \ge 80 \\
& x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \ge 90 \\
& x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \ge 80
\end{aligned}
$$

约束优化问题的分类

- 线性规划**(LP)**　目标和约束均为线性函数
- 非线性规划**(NLP)** 目标或约束中存在非线性函数
- 二次规划**(QP)**　目标为二次函数、约束为线性
- 整数规划**(IP)**　决策变量为整数

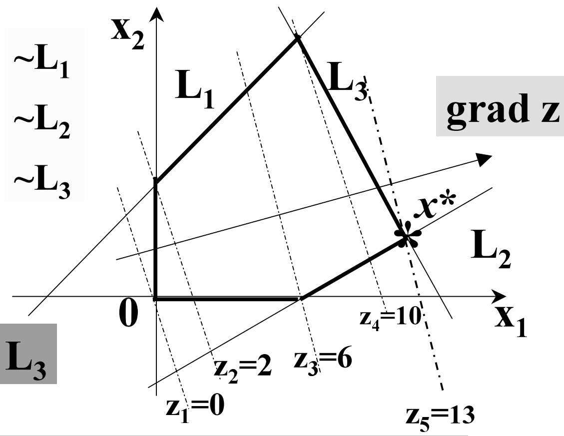
求解线性规划的基本原理

基本模型

$$
\begin{aligned}
& \max(or \min)\ z = c^T x,\ x \in R^n \\
& s.t. \qquad Ax \le b,\ x \ge 0 \\
& c \in R^n,\ A \in R^{m \times n},\ b \in R^m
\end{aligned}
$$

线性规划(LP)的图解法

$$\max \quad z = 3x_1 + x_2$$
$$s.t. \quad -x_1 + x_2 \le 2 \quad \sim L_1$$
$$x_1 - 2x_2 \le 2 \quad \sim L_2$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 14 \quad \sim L_3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



起作用约束：L_2、L_3

最优解（4，1），最优值z_{max}=13

2000-11-23 7

LP的约束和目标函数均为线性函数

⇩

	2维	n维
可行域	线段组成的凸多边形	超平面组成的凸多面体
目标函数	等值线为直线	等值线是超平面
最优解	凸多边形的某个顶点	凸多面体的某个顶点

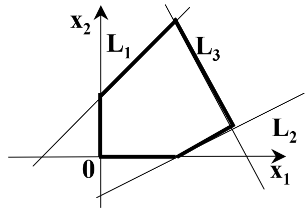
求解LP的基本思想

从可行域的某一顶点开始，只需在有限多个顶点中一个一个找下去，一定能得到最优解。

算法：怎样从一点转到下一点，尽快找到最优解。

2000-11-23 8

求解LP的特殊情形

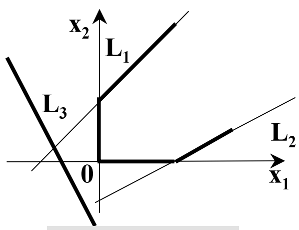


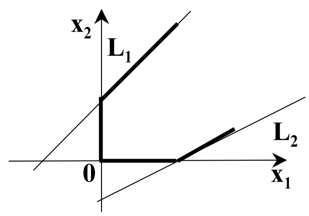
$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 3x_1 + x_2 \\
s.t. \quad & -x_1 + x_2 \le 2 & \sim L_1 \\
& x_1 - 2x_2 \le 2 & \sim L_2 \\
& 3x_1 + 2x_2 \le 14 & \sim L_3 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

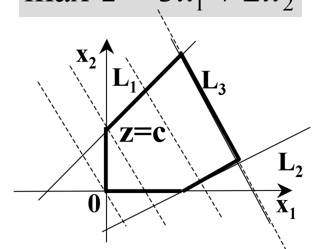
$3x_1 + 2x_2 \le -1 \sim L_3$

无 L_3

$\max\ z = 3x_1 + 2x_2$







无可行解

无最优解

最优解不唯一

线性规划的标准形和基本性质

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 3x_1 + x_2 \\
s.t. \quad & -x_1 + x_2 \le 2 \\
& x_1 - 2x_2 \le 2 \\
& 3x_1 + 2x_2 \le 14 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\min z = & -3x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 \\
s.t. \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad x_3 \ge 0 \\
& x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \quad x_4 \ge 0 \\
& 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 14, \quad x_5 \ge 0 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

加入松弛变量将不等式变为等式

标准形

$$
\begin{aligned}
& \min \ z = c^T x \\
& s.t. \ Ax = b,\ x \ge 0 \\
& A \in R^{m \times n},\ m \le n
\end{aligned}
$$

对标准形求解

$$\min\ z = c^T x$$
$$s.t.\ \ Ax = b,\ x \ge 0$$
$$A \in R^{m\times n},\ m \le n$$

$$\begin{aligned}\min z &= -3x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5\\ s.t.\quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 2\\ & x_1 - 2x_2 + x_4 = 2,\\ & 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 14,\\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0\end{aligned}$$

先求可行解

满足

$$Ax = b,\ x \ge 0$$

$$\begin{aligned}& -x_1 + x_2 + x_3 = 2\\ & x_1 - 2x_2 + x_4 = 2,\\ & 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 14,\\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0\end{aligned}$$

再在有限个可行解中寻找最优解

$$\begin{aligned}& -x_1 + x_2 + x_3 = 2\\ & x_1 - 2x_2 + x_4 = 2\\ & 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 14\end{aligned}$$

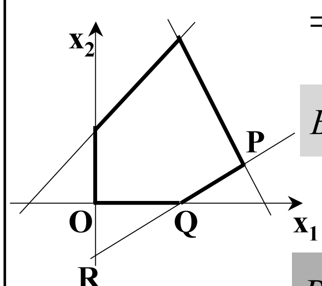
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = [p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5]$$

$A \Rightarrow [B, N]$, B可逆

$$x^T \Rightarrow [x_B^T, x_N^T]$$

$$Ax = Bx_B + Nx_N = b$$

$$x_N = 0 \Rightarrow x_B = B^{-1}b$$



$B = [p_3\ p_4\ p_5] \Rightarrow x = (0,0,2,2,14)^T$ **O**点

$B = [p_1\ p_3\ p_5] \Rightarrow x = (2,0,4,0,8)^T$ **Q**点

$B = [p_2\ p_3\ p_5] \Rightarrow x = (0,-1,3,0,16)^T$ **R**点

$B = [p_1\ p_2\ p_3] \Rightarrow x = (4,1,5,0,0)^T$ **P**点

可行解$\boldsymbol{x}$： $\boldsymbol{Ax=b, x \ge 0}$ $\boldsymbol{(x_B \ge 0，x_N = 0)}$

LP基本性质

可行域存在时，必是凸多面体；
可行解对应于可行域的顶点；
最优解存在时，必在可行域的顶点取得。

最优解只需在有限个可行解中寻找

LP的通常解法是单纯形法

单纯形法的基本思路是

从一个顶点转换到另一个顶点（即构成x_B和x_N的向量p_i间的转换），使目标函数下降最多。

MATLAB求解LP

$$\min\ z = c^T x, \quad s.t.\ \ Ax \le b$$

□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□）
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□，□□行列向量均可
□□□□的下界
□□□□的上界
x0□初始解(缺省时为0)
ne□等式约束个数，等式约束置于前面
□□□□□警告信息
□□□□□错误信息

□ □□或□□的维数□小于□的维数□时，□□或□□仅表示□前□个分量的下界或上界）

- lag□Lagrange乘子，维数等于约束个数，非零分量对应于起作用约束

Examp081;

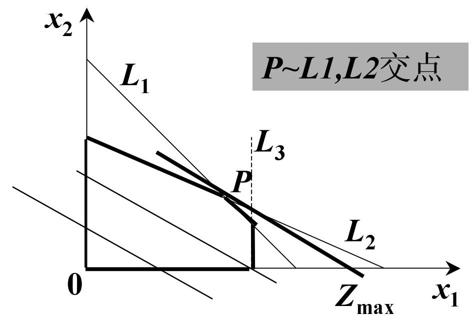
Examp082

注：lp将被linprog取代（用法有变化）

$$\max \quad z = 10x_1 + 9x_2$$
$$s.t. \quad 6x_1 + 5x_2 \le 60$$
$$10x_1 + 20x_2 \le 150$$
$$x_1 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□

约束优化实例1 生产计划



*P~L1,L2*交点

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□

甲乙两种饮料各生产□□□□□□和□□□□□□（百箱）
获利□□□□□□□□□（万元），原料和工人充分利用。

$$\max \quad z = 10x_1 + 9x_2$$
$$s.t. \quad 6x_1 + 5x_2 \le 60$$
$$10x_1 + 20x_2 \le 150$$
$$x_1 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□

讨论以下问题

1）若投资0.8万元可增加原料1公斤，问应否作投资？

$$6x_1 + 5x_2 \le 60 \Rightarrow 61$$ □□□□□□□□□□□□□

获利增值□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□万元□ 应该投资

□□□□□□□□□□□□□□

这是偶然的吗?

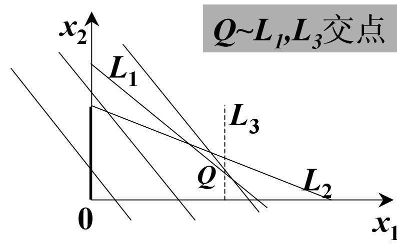
L—乘子的重要含义

□□□□□□□□□□□□□□
表示什么□

shili081

$$\max \quad z = 10x_1 + 9x_2$$
$$s.t. \quad 6x_1 + 5x_2 \le 60$$
$$10x_1 + 20x_2 \le 150$$
$$x_1 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□



Q~L_1,L_3交点

2）若每百箱甲饮料获利增加1万元, 问应否改变计划?

$$z = 10x_1 + 9x_2 \Rightarrow 11x_1 + 9x_2$$

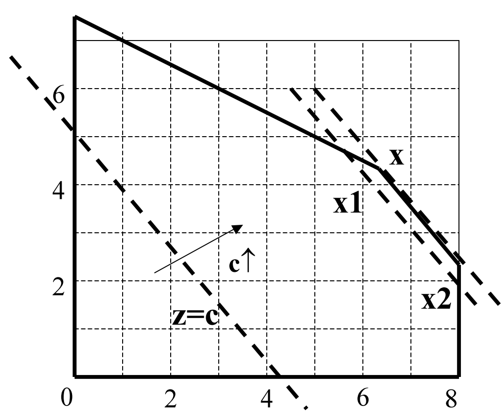
□□□□□□□□□□□□□□□□□

最优解改变，计划应改变

3）如果以百箱为最小生产单位, 怎么办?

$$\max \quad z = 10x_1 + 9x_2$$
$$s.t. \quad 6x_1 + 5x_2 \le 60$$
$$10x_1 + 20x_2 \le 150$$
$$x_1 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

x_1,x_2为整数



□⇒□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□

整数规划

线性规划补充知识——影子价格和对偶问题

实例1 生产计划

□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 10x_1 + 9x_2 \\
s.t. \quad & 6x_1 + 5x_2 \le 60 \\
& 10x_1 + 20x_2 \le 150 \\
& x_1 \le 8 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

若投资0.8万元可增加原料1公斤，问应否作投资？

□□□□□□□□□□□□□□

约束条件□□资源□右端改变□个单位时目标函数□利润□的变化量，它度量了该资源的价值

影子价格

原料的影子价格为□□□□□□（万元），工人的影子价格为□□□□□□（万元），而产品产量的限制对利润没有影响，影子价格为零。

线性规划补充知识——影子价格和对偶问题

原问题

	甲	乙	现有
原料	6	5	60
工人	10	20	150
获利	10	9	

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 10x_1 + 9x_2 \\
s.t. \quad & 6x_1 + 5x_2 \le 60 \\
& 10x_1 + 20x_2 \le 150 \\
& x_1 \le 8 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

问两种饮料各生产多少使获利最大

□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□

对偶问题

确定□种资源□原料、工人、甲产量限制□的影子价格，以这个价格□获取□它们，费用最小，且产品利润不低于给定值。

$$
\begin{aligned}
\min \quad & w = 60y_1 + 150y_2 + 8y_3 \\
s.t. \quad & 6y_1 + 10y_2 + y_3 \ge 10 \\
& 5y_1 + 20y_2 \ge 9 \\
& y_1, y_2, y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

用□$_1$ □$_2$ □$_3$表示这□种资源的影子价格，建立模型

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□

原问题**LP**

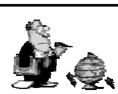
$$\min_{x} z = cx, \quad c=(c_1,\cdots c_n), \quad x=(x_1\cdots x_n)^T$$
$$s.t.\ Ax \ge b, \quad A=(a_{ij})_{m\times n}, \quad b=(b_1,\cdots b_n)^T$$
$$x \ge 0$$

对偶问题**LD**

$$\max\ w = yb, \quad y=(y_1, y_2, \cdots y_m)$$
$$s.t.\quad yA \le c$$
$$y \ge 0$$

对偶现象

- LD的最优解是LP的影子价格(L—乘子)
- LP的最优解是LD的L—乘子
- 二者的最优值相等



约束优化实例2 聘用方案

$$\begin{aligned}
\min\quad & z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
s.t.\quad & x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \ge 50 \\
& x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \ge 50 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \ge 50 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \ge 50 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \ge 80 \\
& x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \ge 90 \\
& x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \ge 80
\end{aligned}$$

约束矩阵

$$A = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

向量**c=**（1 1 1 1 1 1 1）

b=-(50 50 50 50 80 90 80)

计算结果 x =（0 10 30 10 30 10 0） □□ 90

周二、四、六各聘用10人，周三、五各聘用30人，能满足需求，共聘90人

问题一：如果周日的需求量由80增至90人，聘用方案如何改变

只需改变周日的约束条件，计算结果为

□□□0 3.3333 33.3333 10 33.3333 10 3.3333)
z = 93.3333

如将x的小数进位，聘用方案为（0，4，34，10，34，10，4），共96人。

实际上可以发现只用94人的方案：
（0，3，34，10，34，10，3）；
（0，4，33，10，33，10，4）。

思考：对于求整数解，你有什么考虑？

2000-11-23 23

问题二：可以聘用两个半时雇员(每天4小时，不需连续工作)代替一个全时雇员(每天8小时)，并规定：半时雇员的工作量不超过总量的1/4；全时和半时雇员每小时酬金为5元和3元。确定聘用方案使所付酬金总额最小。

决策变量 周一至日聘用全时和半时雇员数 $x = (x_1, x_2, \cdots x_7, y_1, y_2, \cdots y_7)^T$

约束条件

$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_1 \geq 50$ ⇨ $x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_1 + y_1/2 \geq 50$

$$(y_1 + y_2 + \cdots + y_7) \times 4 \leq (50 \times 4 + 80 \times 2 + 90) \times 8$$

目标函数 $\min z = 5\times8\times5\times(x_1+\cdots+x_7)+3\times4\times(y_1+\cdots+y_7)$

2000-11-23 24

聘用方案 问题二　　计算结果

x=(15 17.5 0 17.5 0 17.5 0 0 0 0 0 60 75 90)

总金额 z = 16200（元）

作少许试探即可得到整数解

x= (15 18 0 17 0 18 0 0 0 0 0 60 75 90 ）

总金额 z = 16300（元）

问题　这是问题二的最优解吗？全时雇员能再减少吗？半时雇员呢？请试试看。

实 例 3　供应与选址

某公司有6个建筑工地，位置坐标为(a_i, b_i) (单位：公里), 水泥日用量d_i (单位：吨）

i	1	2	3	4	5	6
a	1.25	8.75	0.5	5.75	3	7.25
b	1.25	0.75	4.75	5	6.5	7.75
d	3	5	4	7	6	11

1)现有 2 料场，位于 A (5, 1), B (2, 7), 记(x_j,y_j),j=1,2, 日储量 e_j 各有 20 吨。

假设：料场和工地之间有直线道路

目标：制定每天的供应计划，即从 A, B 两料场分别向各工地运送多少吨水泥，使总的吨公里数最小。

决策变量：c_{ij} (料场j到工地i的运量）~12维

$$\min \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} c_{ij}[(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2]^{1/2}$$

$$s.t.\ \sum_{j=1}^{2} c_{ij}=d_i,\quad i=1,\ldots,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} c_{ij}\le e_j,\quad j=1,2$$

线性规划模型

用例中数据计算，最优解为

i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
c_{i1}（料场 **A**）	3	5	0	7	0	1
c_{i2}（料场 **B**）	0	0	4	0	6	10

总吨公里数为136.2

2）改建两个新料场，需要确定新料场位置(x_j,y_j)和运量c_{ij}，在其它条件不变下使总吨公里数最小。

$$\min \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} c_{ij}[(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2]^{1/2}$$

$$s.t.\ \sum_{j=1}^{2} c_{ij}=d_i,\quad i=1,\ldots,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} c_{ij}\le e_j,\quad j=1,2$$

决策变量：c_{ij}，(x_j,y_j)~16维

非线性规划模型

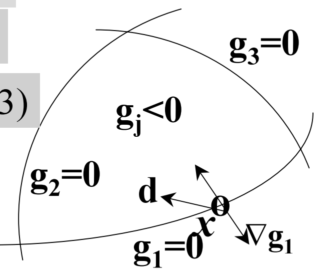
非线性规划(NLP)的基本原理(只有不等式约束)

$$\min_{x\in\Re^n} \quad z=f(x)$$
$$s.t. \quad g_j(x)\le 0,\ j=1,\dots,l \qquad \textbf{(G)}$$

设x为可行解，位于约束边界

$g_j(x)=0, \quad j\in J_1$ **J_1**~起作用约束(j=1)

$g_j(x)<0, \quad j\in J_2$ **J_2**~不起作用约束(j=2,3)



可行方向**d** $x+\lambda d\in G \quad (0<\lambda<\lambda_0)$

$$g_j(x+\lambda d)=g_j(x)+\lambda\nabla g_j(x)^T d+O(\lambda^2)$$

$$\nabla g_j(x)^T d<0 \quad (j\in J_1) \quad (1)$$

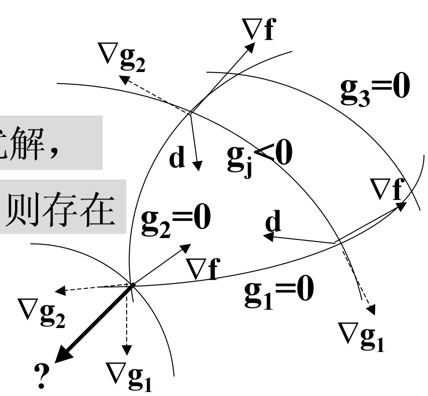
下降方向**d** $f(x+\lambda d)<f(x) \quad (0<\lambda<\lambda_0)$ $\nabla f(x)^T d<0 \quad (2)$

若**x**沿**d**方向既可行又下降，则**x**不是最优解

$\nabla g_j(x)^T d<0 \quad (j\in J_1) \quad (1)$ $\nabla f(x)^T d<0 \quad (2)$

x为最优解 ⇨ 不存在满足**(1),(2)**的**d**

$$\min_{x\in\Re^n} \quad z=f(x)$$
$$s.t. \quad g_j(x)\le 0,\ j=1,\dots,l$$



最优解的必要条件 若**x**为最优解，

且 $\nabla g_j(x)$ $(j\in J_1)$ 线性无关，则存在

$\lambda_1,\cdots\lambda_l\ge 0$ 使

$$\nabla f(x)+\sum_{j=1}^{l}\lambda_i\nabla g_j(x)=0$$

$$\lambda_j g_j(x)=0, \quad j=1,2,\cdots l$$

最优解的必要条件

$$\min_{x\in\Re^n} \quad z = f(x)$$
$$s.t. \quad g_j(x) \le 0,\ j = 1,\dots,\ l$$

$$\nabla f(x) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_i \nabla g_j(x) = 0$$

Kuhn-Tucker条件（**K-T**条件）

$$\lambda_j g_j(x) = 0, \quad j = 1,2,\cdots l$$

互补性条件

$$\min_{x\in\Re^n} \quad f(x)$$
$$s.t. \quad h_i(x) = 0,\ i = 1,\dots,\ m$$
$$g_j(x) \le 0,\ j = 1,\dots,\ l$$

$\nabla h_i, \nabla g_j (j \in J_1)$线性无关，

则存在μ_i和$\lambda_j \ge 0$，

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla h_i(x) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_i \nabla g_j(x) = 0$$

$$\lambda_j g_j(x) = 0,\ j = 1,\cdots l$$

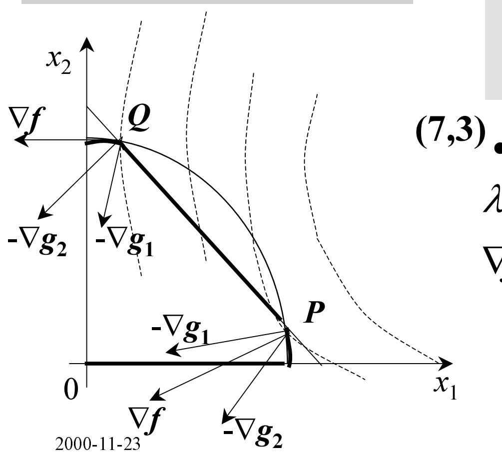
K-T条件的几何解释

例（**P217**）

$$\nabla f(x) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_i \nabla g_j(x) = 0$$

$$\lambda_j g_j(x) = 0, \quad j = 1,2,\cdots l$$

$$\min f(x) = (x_1 - 7)^2 + (x_2 - 3)^2$$
$$s.t. \quad g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 10 \le 0$$
$$g_2(x) = x_1 + x_2 - 4 \le 0$$
$$g_3(x) = x_2 \ge 0$$



最优解在**P(3,1)**取得

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0,$$
$$\nabla f(P) + \nabla g_1(P) + 2\nabla g_2(P) = 0$$

P(3,1)是**K-T**点

其它点(如**Q**)均不是

二次规划(QP)及有效集方法

$$\min\ f(x)=\frac{1}{2}x^T Hx+cx$$
$$s.t.\quad Ax\le b$$

当H为对称阵，称二次规划
当H正定时，称凸二次规划

凸二次规划性质：
最优点⇔K—T点；
局部最优解⇔全局最优解；

等式约束 $Ax=b$下
的Lagrange乘子法

L函数 $L(x,\lambda)=\frac{1}{2}x^T Hx+cx+\lambda^T(Ax-b),\quad \lambda\in R^m$

最优解方程
$$Hx+c^T+A^T\lambda=0$$
$$Ax-b=0$$

解二次规划的有效集方法

基本思想：对于不等式约束的二次规划，在某可行点处将不起作用约束去掉，起作用约束视为等式约束，通过求解等式约束的二次规划来改进可行点。

$$\min f(x)=\frac{1}{2}x^T Hx+cx$$
$$s.t.\quad Ax\le b \qquad \textbf{(1)}$$

$$\min f(x)=\frac{1}{2}x^T Hx+cx \qquad (2)$$
$$s.t.\quad a_j x=b_j,\quad j\in J_1 \quad (a_j是A的第j列)$$

基本原理

- 若x为(1)的最优解，则它也是(2)的最优解；
- 若x为(1)的可行解，又是(2)的K—T点，且L—乘子非负，则它必是(1)的最优解。

用MATLAB求解QP

$$\min f(x) = \frac{1}{2} x^T Hx + cx$$
$$s.t. \quad Ax \le b$$

[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]）
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

用法与求解LP相同

注：qp将被quadprog取代（用法有变化）

非线性规划(NLP)的解法

可行方向法、罚函数法、梯度投影法**...**

逐步二次规划法**(Sequential Quadratic Programming)**

SQP的基本原理

$$\min_{x \in \Re^n} \quad f(x)$$
$$s.t. \quad h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m$$
$$g_j(x) \le 0,\ j = 1, \ldots, l$$

构造LNP的拉格朗日函数

$$L(x, \mu, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i h_i(x) + \sum_{j=1}^{l} \lambda_j g_j(x)$$

用二次函数近似 $L(x,\mu,\lambda)$, NLP化为QP,
再解一系列QP子问题。

用MATLAB求解带约束的NLP

注：constr将被fmincon取代（用法有变化）

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□
□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

注意：□□□□□文件中同时给出目标函数□和约束□，形式为□□□□□□□□□□□□□；□□□□□□文件中（用分析方法）同时给出目标函数□和约束□的梯度，形式为□□□□□□□□□□□□□□□□□。

例：**P222 Rosenbrock (求min)**

$$f(x_1,x_2)=100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$$

s.t. $x_1^2+x_2^2\le 1.5,\quad x_1+x_2\ge 0$

Examp084

实例3 供应与选址

$$\min \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} c_{ij}[(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2]^{1/2}$$

$$s.t.\ \sum_{j=1}^{2} c_{ij}=d_i,\quad i=1,\ldots,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} c_{ij}\le e_j,\quad j=1,2$$

改建两个新料场

决策变量：

c_{ij}，(x_j,y_j)~16维

初始点的选择

局部最优解问题

用现料场总吨公里数为136.2

结果：总吨公里数为**85.3**，比使用原料场减少了**50.9**。

计算方法的改善

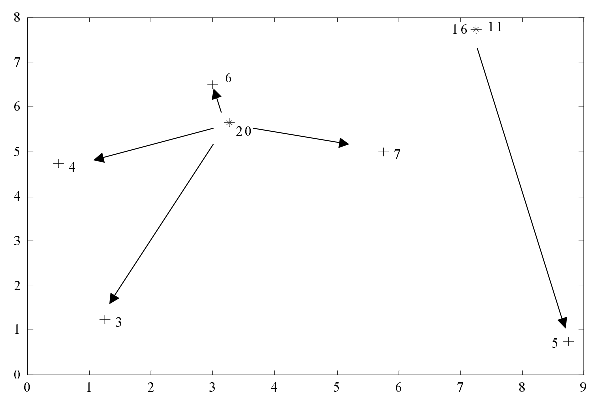
$$\min \sum_{i=1}^{6}\{c_i[(x_1-a_i)^2+(y_1-b_i)^2]^{1/2}$$
$$+(d_i-c_i)[(x_2-a_i)^2+(y_2-b_i)^2]^{1/2}\}$$
$$s.t.\quad c_i \le d_i,\quad i=1,\cdots 6$$
$$\sum_{i=1}^{6} c_i \le e_1,\quad \sum_{i=1}^{6}(d_i-c_i) \le e_2$$

决策变量：c_i , (x_j,y_j)~10维

局部最优解问题有所改进

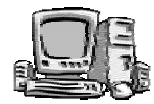
liaoch1, liaoch11

i	1	2	3	4	5	6	新料场位置（x_j, y_j）
c_{i1}	3	0	4	7	6	0	（3.2552 5.6528）
c_{i2}	0	5	0	0	0	11	（7.2497 7.7499）



+为工地, 数字为用量; *为新料场, 数字为供应量。

布置实验内容



实验目的

1）掌握用MATLAB优化工具包解线性规划和非线性规划的方法；

2）练习建立实际问题的线性规划和非线性规划模型。

实验内容

《数学实验》第230页　3),10）,11）(每种货币每天只能进行一次兑换)。

专用优化软件：**LINDO, LINGO**

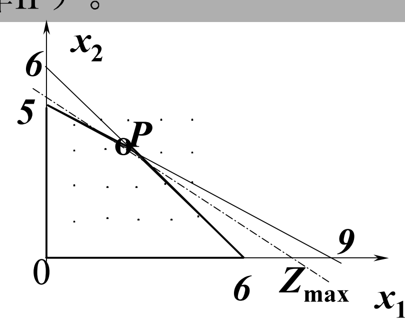
可计算**LP, NLP, IP**（输出结果较丰富）

2000-11-23　　41

优化知识扩展：整数规划

数学规划中要求决策变量为整数解的，称为整数规划（Integer Programming, 记作IP）。

$$
\begin{aligned}
\max\quad & z = 5x_1 + 8x_2 \\
s.t.\quad & x_1 + x_2 \le 6 \\
& 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\
& x_1, x_2 \ge 0 \text{ 且为整数}
\end{aligned}
$$



思考：求解**IP**能否先去掉整数限制，找到规划的解后，将它舍入成整数或在附近搜索呢？

去掉整数限制后，可行域为点（0,0), (6,0), (0,5), P (2.25,3.75) 围成的4边形

结果

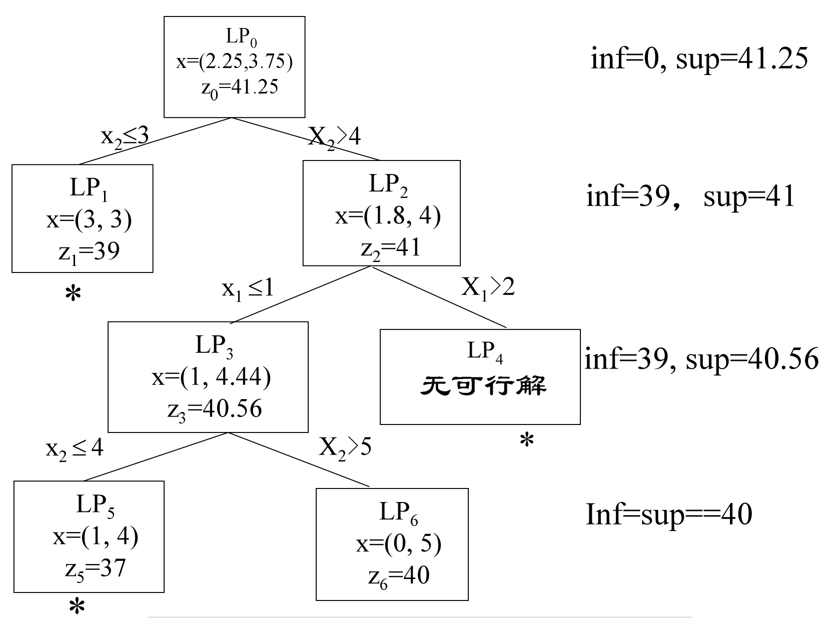
LP 最优解 P	P 的舍入解	最靠近 P 的可行解	IP 最优解
（2.25，3.75） z=41.25	（2，4） 不可行	（2，3） z=34	（0，5） z=40

从LP最优解经过简单的“移动”不一定能得到IP最优解。

一般地说，求解整数规划没有统一的有效方法，不同方法的效果与问题的性质有很大关系

分枝定界法：把可行域划分为一系列子域，子域某些边界的分量为整数。对于最大值问题，在子域上解LP，其最优值是IP的上界，IP任意可行点的函数值是IP的下界。在子域分解的过程中，上界非增，下界非减，经有限次分解可得到IP最优解。“分而治之”

下面，通过上面例子的求解过程说明该方法。



前面例子的分枝定界计算示意图

约 束 优 化 实 例 2：投资策略

某部门现有资金 10 万元，五年内有以下投资项目供选择：

项目 A，从第一年到第四年每年初投资，次年末收回本金且获利 15%；

项目 B，第三年初投资，第五年末收回本金且获利 25%，最大投资额为 4 万元；

项目 C，第二年初投资，第五年末收回本金且获利 40%，最大投资额为 3 万元；

项目 D，每年初投资，年末收回本金且获利 6%。

问如何确定投资策略使第五年末本息总额最大。

决策变量是每年初各个项目的投资额，约束条件是每年初拥有的资金。

用 x_{ij} 表示第 i 年初（i = 1,2,… 5）项目 j（j= 1,2,3,4 分别代表 A,B,C,D）的投资额

建模要点

年初投资项目**D**，年底可收回本息，所以在年初可将资金全部用于投资

第 1 年初：10 万元全部投向 A, D, 有

$$x_{11} + x_{14} = 10$$

第 2 年初：拥有的资金为项目 D 第 1 年投资 x_{14} 收回的本息，全部投向 A, C, D, 有

$$x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1.06x_{14}$$

第 3 年初：拥有的资金为项目 A 第 1 年投资 x_{11} 和 D 第 2 年投资 x_{24} 收回的本息，全部投向 A, B, D, 有

$$x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1.15x_{11} + 1.06x_{24}$$

投资策略数学模型

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 1.15x_{41} + 1.4x_{23} + 1.25x_{32} + 1.06x_{54} \\
s.t. \quad & x_{11} + x_{14} = 10 \\
& x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1.06x_{14} \\
& x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1.15x_{11} + 1.06x_{24} \\
& x_{41} + x_{44} = 1.15x_{21} + 1.06x_{34} \\
& x_{54} = 1.15x_{31} + 1.06x_{44} \\
& x_{23} \le 3,\ x_{32} \le 4,\ x_{ij} \ge 0
\end{aligned}
$$

2000-11-23 47

约束优化实例之二：投资策略

将投资策略实例中建立的模型写成用MATLAB求解的标准形式，其中

$$\boldsymbol{x}=(x_{11}, x_{14}, x_{21}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{34}, x_{41}, x_{44}, x_{54})^T$$

$$\boldsymbol{c}= (0, 0, 0, 1.4, 0, 0, 1.25, 0, 1.15, 0, 1.06)$$

$$
A=\begin{bmatrix}
1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
0\,r\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
s\,0\,0\,0\,r\,1\,1\,1\,0\,0\,0 \\
0\,0\,s\,0\,0\,0\,0\,r\,1\,1\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,s\,0\,0\,0\,r\,1 \\
0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0
\end{bmatrix},\quad r=-1.06,\quad s=-1.15,\quad b=\begin{bmatrix}10\\0\\0\\0\\0\\3\\4\end{bmatrix}
$$

由于前**5**个约束为等式约束、变量非负，所以

命令行： □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

计算结果：x =（3.8268 6.1732 3.5436 3.0000 0
0.4008 4.0000 0 4.0752 0 0.4609）
z = 14.3750
第1年项目A,D分别投资3.8268 和 6.1732（万元）；
第2年项目A,C分别投资3.5436和 3（万元）；
第3年项目A,B分别投资0.4008和 4（万元）；
第4年项目A投资4.0752(万元);
第5年项目D投资0.4609（万元）。
5年后总资金14.375（万元），即盈利43.75%。

基本步骤

设(1)的可行点为x^*，有效集记作J^*，用L—乘子法求解:

$$\min\ f(x^*+d)=\frac{1}{2}(x^*+d)^T H(x^*+d)+c(x^*+d)$$
$$s.t.\quad a_j d=0,\quad j\in J^*$$

得d^*, λ^*

• 若$d^*=0$, 则x^*为(2)最优解; 当λ^*非负时x^*是(1)最优解

有效集修正

若$d^*=0$, 且$(\lambda^*)_q<0$, $q\in J^*$, 则x^*不是最优解, 有效集修正为$J^*\setminus\{q\}$ 。

若$d^*\neq 0$，以此为方向确定步长α^*使得$a_p(x^*+\alpha^* d^*)=b_p$，$p\notin J^*$，则有效集修正为$J^*\cup\{p\}$。

QP子问题

$$\begin{aligned}\min\quad & \frac{1}{2}d^T G_k d + \nabla f(x_k)^T d \\ s.t.\quad & \nabla h_i(x_k)^T d + h_i(x_k) = 0, \quad i = 1,\cdots m \\ & \nabla g_j(x_k)^T d + g_j(x_k) \le 0, \quad j = 1,\cdots l\end{aligned}$$

x_k 是第 k 次迭代的初始点，G_k 是海赛阵 $\nabla^2 L$ 的近似。

将最优解$\boldsymbol{d}_{\mathbf{k}}$作为迭代的搜索方向，令 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$

SQP的基本步骤

- 求解QP子问题，得 d_k；
- 用线性搜索计算迭代步长α_k；
- 确定矩阵G_k的迭代公式。

2000-11-23 51