# 计算方法及MATLAB实现

郑勋烨 编著

主审： 高世臣 褚宝增 王祖朝 王翠香

副审： 李少琪 李明霞 赵琳琳 赵俊芳

国防工业出版社

# 第四节　　厄米特插值 Hermite Interpolation

- 4.1. **密切插值** (Osculating Interpolation)

拉格朗日插值多项式和牛顿插值多项式形式不同，但本质是一致的，即都是满足基本插值条件 ($n+1$ 个方程)

$$L(x_j) = y_j = f(x_j), \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{4.1}$$

的 n 次代数多项式．基本插值条件要求插值多项式与被插函数 $f(x)$ 在给定 $n+1$ 个插值节点的函数值相等；很自然地，对于可微函数其导函数存在，我们会想能否再把基本插值条件加强一下，考虑让插值多项式与被插函数在给定 $n+1$ 个插值节点的若干阶导函数值 (看被插函数 $f(x)$ 有几阶连续导函数) 也相等？这就是所谓 <u>密切性</u>.

**【定义 2 厄米特插值或密切插值】**

(Hermite Interpolation or Osculating Interpolation)

考虑函数 $f(x), H(x)$ 和 $n+1$ 个插值节点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，如果只要求 $f(x), H(x)$ 的函数值和一阶导函数值在给定 $n+1$ 个插值节点相等，即取 (4.2) 式的前两组共 $2n+2$ 个方程：

$$H(x_j)=y_j=f(x_j),\quad H^{'}(x_j)=m_j=f^{'}(x_j), j=0,1,2,\cdots,n \tag{4.3}$$

则可以确定具有 $2n+2$ 个系数的 $2n+1$ 次代数多项式 $H_{2n+1}(x)$，我们称 $H_{2n+1}(x)$ 为函数 $f(x)$ 关于 $n+1$ 个插值节点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 的 $2n+1$ 次厄米特插值多项式.

**【例 1 密切函数】** 考虑指数函数和一个多项式函数：$f(x)=e^x$, $g(x)=1+\dfrac{x^n}{n}$ 及单节点 $x_0=0$, 则

$$g(0)=1=f(0),\quad g^{'}(0)=0\neq f^{'}(0)=1 \tag{4.4}$$

故 $f(x)$, $g(x)$ 不是密切的；而若令 $H(x)=1+x+\dfrac{x^n}{n}$, 则

$$H(0)=1=f(0),\quad H^{'}(0)=f^{'}(0)=1 \tag{4.5}$$

故 $f(x)$, $H(x)$ 在单节点 $x_0=0$ 是 一阶 密 切 的.

**【注记　密切的内涵】**　密切 (切，读作平声) 的含义是 “亲密切触”，表示了两个函数的密切程度或近似程度，直观来看，密切阶数越高，两个函数就越贴近；微分几何里也有类似的概念，表示的是两张曲面的贴合程度。任意一张光滑曲面与它在某点的切平面具有相同的法向量，因而二者是一阶密切的.

- 4.2. **厄米特插值** (Hermite Interpolation )

**【 定理** 1 **】 厄米特插值多项式唯一性定理** 满足密切插值条件 (4.3) 的 $2n+1$ 次厄米特插值多项式是存在唯一的 (无论形式如何).

【证明】

存在性的证明用构造法. 形式地设 $2n+1$ 次厄米特插值多项式具有厄米特插值基函数的线性组合形式

$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n}(\alpha_j(x)y_j + \beta_j(x)m_j)$

$= \sum_{j=0}^{n}(\alpha_j(x)f(x_j) + \beta_j(x)f^{'}(x_j))$

这里 $\alpha_j(x)$, $\beta_j(x)$ 称为 $2n+1$ 次厄米特插值基函数 (n-order Hermite Interpolating Base Function ), 在 $n+1$ 个插值节点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 处满足由 $4(n+1)^2$ 个等式构成的 标准正交条件 :

$$
\left\{
\begin{array}{r}
\alpha_0(x_0)=1, \alpha_0(x_1)=0, \alpha_0(x_2)=0, \cdots\cdots\cdots, \alpha_0(x_n)=0 \\
\alpha_1(x_0)=0, \alpha_1(x_1)=1, \alpha_1(x_2)=0, \cdots\cdots\cdots, \alpha_1(x_n)=0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_n(x_0)=0, \alpha_n(x_1)=0, \alpha_n(x_2)=0, \cdots\cdots\cdots, \alpha_n(x_n)=1 \\
\alpha_0^{'}(x_j)=\alpha_1^{'}(x_j)=\alpha_2^{'}(x_j)=\cdots\cdots\cdots=\alpha_n^{'}(x_j)=0, \\
j=0,1,2,\cdots,n
\end{array}
\right.
\qquad (4.7.a)
$$

$$\left\{\begin{array}{r}\beta_0^{'}(x_0)=1,\beta_0^{'}(x_1)=0,\beta_0^{'}(x_2)=0,\cdots\cdots\cdots,\beta_0^{'}(x_n)=0\\ \beta_1^{'}(x_0)=0,\beta_1^{'}(x_1)=1,\beta_1^{'}(x_2)=0,\cdots\cdots\cdots,\beta_1^{'}(x_n)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \beta_n^{'}(x_0)=0,\beta_n^{'}(x_1)=0,\beta_n^{'}(x_2)=0,\cdots\cdots\cdots,\beta_n^{'}(x_n)=1\\ \beta_0(x_j)=\beta_1(x_j)=\beta_2(x_j)=\cdots\cdots\cdots=\beta_n(x_j)=0,\\ j=0,1,2,\cdots,n\end{array}\right. \tag{4.7.b}$$

引入狄拉克符号 (Dirac Notation)

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad j, k = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{4.8}$$

标准正交条件可简单记为

$$\begin{cases} \alpha_j(x_k) = \delta_{j,k}, & \alpha_j'(x_k) = 0, \\ \beta_j'(x_k) = \delta_{j,k}, & \beta_j(x_k) = 0. \end{cases} \quad j, k = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{4.9}$$

现在利用拉格朗日插值基函数来构造厄米特插值基函数. 我们知道拉格朗日插值基函数是线性分式函数形式的 $n$ 次多项式:

$$l_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$= \prod_{k\neq j,k=0}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k} (4.10)$$

其平方是 $2n$ 次多项式:

$$l_j^2(x) = \left(\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}\right)^2$$

$$= \prod_{k\neq j,k=0}^{n} \left(\frac{x-x_k}{x_j-x_k}\right)^2 (4.11)$$

因而可以设厄米特插值基函数具有形式

$$\alpha_j(x) = (ax+b)l_j^2(x), \quad \beta_j(x) = (cx+d)l_j^2(x) \tag{4.12}$$

即是一个线性函数与 $2n$ 次多项式的乘积. 下面利用标准正交条件来确定待定系数 $a, b, c, d$. 首先我们有下面的引理:

**【引理 1】 拉格朗日插值基函数的导函数** 拉格朗日插值基函数的导函数具有加和形式:

$$l_j'(x_j) = \sum_{k\neq j, k=0}^{n} \frac{1}{x_j - x_k} \tag{4.13}$$

【证明】

对拉格朗日插值基函数

$$l_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$= \prod_{k\neq j,k=0}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$$

两边取对数得

$$\ln l_j(x) = \ln \prod_{k\neq j,k=0}^{n} (x-x_k) - \ln \prod_{k\neq j,k=0}^{n} (x_j-x_k)$$

再求导数得

$$\frac{l_j'(x)}{l_j(x)} = \sum_{k\neq j,k=0}^{n} \frac{1}{x-x_k}$$

又由拉格朗日插值基函数的 <u>标准正交条件</u>：

$$l_j(x_k) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad j,k = 0,1,2,\cdots,n$$

可知

$$l_j'(x_j) = (\sum_{k\neq j,k=0}^{n} \frac{1}{x_j - x_k}) l_j(x_j) = \sum_{k\neq j,k=0}^{n} \frac{1}{x_j - x_k}$$

【证毕】

由厄米特插值基函数形式 $\alpha_j(x) = (ax+b)l_j^2(x)$ 求导得

$$\alpha_j^{'}(x) = al_j^2(x) + 2(ax+b)l_j(x)l_j^{'}(x) \tag{4.14}$$

从而由厄米特插值基函数的标准正交条件有

$$1 = \alpha_j(x_j) = (ax_j+b)l_j^2(x_j) = ax_j + b \tag{4.15a}$$

且

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_j^{'}(x_j) \\ &= al_j^2(x_j) + 2(ax_j+b)l_j(x_j)l_j^{'}(x_j) \\ &= a + 2(ax_j+b)l_j^{'}(x_j) \\ &= a + 2l_j^{'}(x_j) \end{aligned} \tag{4.15b}$$

于是

$$\begin{cases} ax_j + b & = 1, \\ a + 2l_j'(x_j) & = 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

将拉格朗日插值基函数的导函数代入上述方程组得系数

$$\begin{cases} a & = -2l_j'(x_j) = -2 \displaystyle\sum_{k \neq j, k=0}^{n} \frac{1}{x_j - x_k} \\ b & = 1 - ax_j = 1 + 2x_j \displaystyle\sum_{k \neq j, k=0}^{n} \frac{1}{x_j - x_k} \end{cases} \tag{4.17}$$

代入厄米特插值基函数形式 $\alpha_j(x) = (ax+b)l_j^2(x)$ 得

$$\begin{aligned}
&\alpha_j(x) = (ax+b)l_j^2(x) \\
&= ((-2\sum_{k\neq j,k=0}^{n}\frac{1}{x_j - x_k})x + 1 + 2x_j\sum_{k\neq j,k=0}^{n}\frac{1}{x_j - x_k})l_j^2(x) \\
&= (1 - 2(x - x_j)\sum_{k\neq j,k=0}^{n}\frac{1}{x_j - x_k}))l_j^2(x)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

同理利用厄米特插值基函数的标准正交条件可得

$$\beta_j(x) = (cx + d)l_j^2(x) = (x - x_j)l_j^2(x) \tag{4.19}$$

代入厄米特插值多项式函数形式

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n}(\alpha_j(x)y_j + \beta_j(x)m_j)$$

$$= \sum_{j=0}^{n}(\alpha_j(x)f(x_j) + \beta_j(x)f^{'}(x_j))$$

即证明了其存在性.

对于唯一性类似于拉格朗日插值多项式唯一性的证明，设如满足密切条件

$$H(x_j) = y_j = f(x_j), \quad H'(x_j) = m_j = f'(x_j), j = 0, 1, 2, \cdots, n$$

的 $2n+1$ 次厄米特插值多项式不是存在唯一的，即还有 $2n+1$ 次厄米特插值多项式 $P(x)$ 满足密切条件：

$$P(x_j) = y_j = f(x_j), \quad P'(x_j) = m_j = f'(x_j), j = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{4.20}$$

则二者的差作成的不超过 $2n+1$ 次的代数多项式

$$Q(x) := H(x) - P(x), \quad Q(x_j) = 0, j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n \quad (4.21)$$

具有 2n+2 个零点 $x_j, j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n$, 每个零点都是二重根. 这与 代数学基本定理 矛盾. 因此满足密切条件的 $2n+1$ 次厄米特插值多项式 是存在唯一的.

【证毕】

类似地，我们还有厄米特插值余项定理.

**【定理 2】 厄米特插值余项定理** 被插函数 $f(x)$ 在插值区间 $[a,b]$ 上具有 $2n+1$ 阶连续导函数并且在开区间 $(a,b)$ 上存在 $2n+2$ 阶导函数：
$f^{(2n+1)}(x)\in C^0[a,b]\bigcap C^1(a,b)$ ， $H_{2n+1}(x)$ 是在 $n+1$ 个插值节点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 处满足密切条件

$$H(x_j)=y_j=f(x_j),\quad H^{'}(x_j)=m_j=f^{'}(x_j),j=0,1,2,\cdots,n$$

的 $2n+1$ 次厄米特插值多项式，则 厄米特插值余项 为：

$$R(x) := f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x) \tag{4.22}$$

其中 $\xi = \xi(x) \in (a, b)$ 是依赖于 $x$ 的某个内点，辅助函数 $\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$. 显然，这一余项表达类似于 Talor 公式的余项，是导函数形式的。

【证明】

因 $R(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)$，由密切条件

$$H(x_j)=y_j=f(x_j),\ \ H^{'}(x_j)=m_j=f^{'}(x_j),j=0,1,2,\cdots,n$$

知 $R(x_j)=0, j=0,1,2,\cdots\cdots,n$，即余项函数以 $n+1$ 个插值节点为二重零点，因而可由待定系数法设

$$R(x)=K(x)\omega_{n+1}^2(x)=K(x)(x-x_0^2)\cdots(x-x_n)^2$$

$$=K(x)\Pi_{j=0}^{n}(x-x_j)^2$$

这里 $K(x)$ 为待定系数函数。

现在构造一个具有 $2n+3$ 个零点的 $n+1$ 阶连续可微辅助函数

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= R(t) - K(x)\omega_{n+1}(t) \\
&= f(t) - H_{2n+1}(t) - K(x)(t-x_0)^2\cdots(t-x_n)^2
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

除了 $n+1$ 个插值节点为二重零点外它还以 $x$ 为单零点。现在连续应用 罗尔中值定理， $\varphi^{(2n+2)}(t)$ 在插值区间 $(a,b)$ 内具有至少 1 个零点，设为 $\xi=\xi(x)\in(a,b)$ ，即

$$0 = \varphi^{(2n+2)}(\xi) = f^{(2n+2)}(\xi) - H_{2n+1}^{(2n+2)}(\xi) - K(x)(2n+2)!$$

$$= f^{(2n+2)}(\xi) - K(x)(2n+2)!$$

这里用到 $H_{2n+1}^{(2n+2)}(\xi) = 0$；

于是

$$K(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \tag{4.26}$$

故 厄米特插值余项 为：

$$\begin{aligned}R(x)&=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^{2}(x)\\&=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)^2\end{aligned} \tag{4.27}$$

【证毕】

**【定理 3】误差估计** 引入导函数最大值标记：$M_n = \max | f^{(n)}(x) |$, $x \in [a, b]$ 则有厄米特插值余项误差估计

$$| R(x) | \leq \frac{M_{2n+2}}{(2n+2)!} \max | \omega_{n+1}^2(x) | \tag{4.28}$$

- 4.3. **三次厄米特插值多项式** (3-order Hermite Interpolation )

**【定义 3】 三次厄米特插值多项式** 双节点的三次厄米特插值多项式形如

$$
\begin{aligned}
H_3(x) &= \sum_{j=0}^{1}(\alpha_j(x)y_j + \beta_j(x)m_j) \\
&= \alpha_0(x)y_0 + \alpha_1(x)y_1 + \beta_0(x)m_0 + \beta_1(x)m_1
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

这里 $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \beta_0(x), \beta_1(x)$ 称为 3 次厄米特插值基函数 (3-order Hermite Interpolating Base Function )，在 2 个插值节点 $a = x_0 < x_1 = b$ 处满足由 $4(1+1)^2 = 16$ 个等式构成的标准正交条件：

$$\begin{cases} \alpha_0(x_0) = 1, \alpha_0(x_1) = 0, \\ \alpha_1(x_0) = 0, \alpha_1(x_1) = 1, \\ \alpha_0^{'}(x_j) = \alpha_1^{'}(x_j) = 0, j = 0, 1. \end{cases} \tag{4.30.a}$$

$$\begin{cases} \beta_0^{'}(x_0) = 1, \beta_0^{'}(x_1) = 0, \\ \beta_1^{'}(x_0) = 0, \beta_1^{'}(x_1) = 1, \\ \beta_0(x_j) = \beta_1(x_j) = 0, j = 0, 1. \end{cases} \tag{4.30.b}$$

代入厄米特插值基函数形式得

$$\alpha_j(x) = (1 - 2(x - x_j)\sum_{k\neq j,k=0}^{1}\frac{1}{x_j - x_k}))l_j^2(x)$$
$$= (1 - 2(x - x_j)\sum_{k\neq j,k=0}^{1}\frac{1}{x_j - x_k}))\prod_{k\neq j,k=0}^{1}(\frac{x - x_k}{x_j - x_k})^2 \tag{4.31a}$$

同理利用厄米特插值基函数的标准正交条件可得

$$\beta_j(x) = (x - x_j)l_j^2(x) = (x - x_j)\prod_{k\neq j,k=0}^{1}(\frac{x - x_k}{x_j - x_k})^2 \tag{4.31b}$$

写开即是

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_0(x) &= (1-2(x-x_0)\frac{1}{x_0-x_1})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2 \\ &= (1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2 \\ \alpha_1(x) &= (1-2(x-x_1)\frac{1}{x_1-x_0})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2 \\ &= (1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2 \end{aligned}\right. \tag{4.32a}$$

以及

$$\left\{\begin{aligned} \beta_0(x) &= (x-x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2 \\ \beta_1(x) &= (x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2 \end{aligned}\right. \tag{4.32b}$$

**【＊三次厄米特插值余项和误差估计】** 对于双节点情况， $a = x_0 < x_1 = b$ ， 三次厄米特插值余项 为：

$$R(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\omega_2^2(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \tag{4.33}$$

引入导函数最大值标记： $M_n = \max \mid f^{(n)}(x) \mid$， $x \in [a, b]$，设步长 $h = b - a > 0$ ，则当内点 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 时取得最大值，此时有

$$\begin{aligned} \mid R(x) \mid &\le \frac{M_4}{4!} \max \mid ((x-x_0)^2(x-x_1)^2 \mid \\ &\le \frac{M_4}{24}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 = \frac{M_4}{384}(b-a)^4 = \frac{M_4}{384}h^4 \end{aligned} \tag{4.34}$$

- 4.4. **例题选讲**

**【 例 1 三次厄米特插值多项式的计算 (数据完备情形) 】** 由给定函数表写出函数的三次厄米特插值多项式展开.

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $f'(x_k)$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | $-1$ |

【解】 因所给数据完备，所有节点的函数与导函数信息均在表中，故根据函数表利用三次厄米特插值多项式公式直接计算如下：

$$H_3(x) = \alpha_0(x)y_0+\alpha_1(x)y_1+\beta_0(x)m_0+\beta_1(x)m_1 = \alpha_0(x)-\beta_1(x) \tag{4.35}$$

这里 $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \beta_0(x), \beta_1(x)$ 是 3 次厄米特插值基函数：

$$\begin{aligned}\alpha_0(x) &= (1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2 \\ &= (1+2\frac{x-0}{1-0})(\frac{x-1}{0-1})^2 = (1+2x)(x-1)^2\end{aligned} \tag{4.36a}$$

$$\beta_1(x) = (x - x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 = (x-1)\left(\frac{x-0}{1-0}\right)^2 = (x-1)x^2 \tag{4.36b}$$

代入 (4.35) 式得所求三次厄米特插值多项式为

$$H_3(x) = \alpha_0(x) - \beta_1(x) = (1+2x)(x-1)^2 - (x-1)x^2 = x^3 - 2x^2 + 1 \tag{4.37}$$

【解毕】

**【例 2 带余项的三次厄米特插值多项式的计算 (数据不完备情形)】** 由给定函数表写出函数的带余项的三次厄米特插值多项式展开.

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $f'(x_k)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | |

【解】 因所给数据不完备，在节点 $x=2$ 的导函数信息不在表中，故根据函数表利用带余项的三次厄米特插值多项式公式和待定系数法计算如下：

$$\begin{aligned}
&P(x)=\alpha_0(x)y_0+\alpha_1(x)y_1+\beta_0(x)m_0+\beta_1(x)m_1\\
&+C(x-x_0)^2(x-x_1)^2\\
&=\alpha_1(x)+\beta_1(x)+Cx^2(x-1)^2
\end{aligned} \tag{4.38}$$

这里 $C$ 是待定系数， $\alpha_0(x),\alpha_1(x),\beta_0(x),\beta_1(x)$ 是 3 次厄米特插值基函数：

$$
\begin{aligned}
\alpha_1(x) &= (1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2 \\
&= (1+2\frac{x-1}{0-1})(\frac{x-0}{1-0})^2 = (3-2x)x^2
\end{aligned} \tag{4.39a}
$$

$$
\beta_1(x) = (x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2 = (x-1)(\frac{x-0}{1-0})^2 = (x-1)x^2 \tag{4.39b}
$$

三次厄米特插值多项式为

$$
\begin{aligned}
H_3(x) &= \alpha_1(x) + \beta_1(x) \\
&= (3-2x)x^2 + (x-1)x^2 = 2x^2 - x^3
\end{aligned} \tag{4.40}
$$

利用冗余条件 $P(2)=1$ 代入 (4.38) 式得所求待定系数 $C$:

$$1=P(2)=H_3(2)+C(2-0)^2(2-1)^2=0+4C \Rightarrow C=\frac{1}{4} \tag{4.41}$$

从而所求带余项的三次厄米特插值多项式

$$\begin{aligned} P(x)&=\alpha_1(x)+\beta_1(x)+Cx^2(x-1)^2 \\ &=2x^2-x^3+\frac{1}{4}x^2(x-1)^2=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2 \end{aligned} \tag{4.42}$$

【解毕】

**【例 3 带余项的牛顿插值多项式的计算 (数据不完备情形)】** 由给定函数表写出函数的带余项的牛顿插值多项式展开.

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $f'(x_k)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | |

【解】　因所给数据不完备，在节点 $x=0,2$ 的导函数信息不在表中，故根据函数表利用带余项的牛顿插值多项式公式和待定系数法计算．先来求二次牛顿插值多项式系数，建立差商表如下：

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $f[x_{k-1},x_k]$ | $f[x_{k-2},x_{k-1},x_k]$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\underline{0}$ | | |
| 1 | 0 | $\underline{0}$ | |
| 2 | 1 | 1 | $\underline{\frac{1}{2}}$ |

故二次牛顿插值多项式

$$
\begin{aligned}
& N_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \\
& f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
& = f(0) + f[0, 1](x - 0) + f[0, 1, 2](x - 0)(x - 1) \\
& = 0 + 0(x - 0) + \frac{1}{2}(x - 0)(x - 1) \\
& = \frac{1}{2}x(x - 1)
\end{aligned} \tag{4.43}
$$

设带余项的牛顿插值多项式

$$
\begin{aligned}
P(x) &= N_2(x) + C(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= \frac{1}{2}x(x-1) + C(x-0)(x-1)(x-2) \\
&= \frac{1}{2}x(x-1) + Cx(x-1)(x-2)
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

这里 $C$ 是待定系数，利用冗余条件 $P^{'}(1)=0$ 代入 (4.44) 式得所求待定系数 $C$:

$$0=P^{'}(1)=\frac{1}{2}-C\Rightarrow C=\frac{1}{2} \tag{4.45}$$

从而所求带余项的牛顿插值多项式为

$$\begin{aligned}P(x)&=\frac{1}{2}x(x-1)+Cx(x-1)(x-2)\\&=\frac{1}{2}x(x-1)+\frac{1}{2}x(x-1)(x-2)=\frac{1}{2}x(x-1)^2\end{aligned} \tag{4.46}$$

另一种解法 是考虑形如 $y(x) = (x - x_0)^m, m > 0$ 的多项式. 显然它满足:

$$y(x_0) = y^{'}(x_0) = \cdots\cdots = y^{(m-1)}(x_0) = 0, \qquad y^{(m)}(x_0) = m! \tag{4.47}$$

因而由函数表所给条件 $P(0) = 0, P(1) = P^{'}(1) = 0$, 可形式设插值多项式为

$$P(x) = Cx(x-1)^2 \tag{4.48}$$

再由冗余条件 $P(2)=1$, 求得待定系数 $C$:

$$1 = P(2) = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2} \tag{4.49}$$

从而也可得到

$$P(x) = \frac{1}{2}x(x-1)^2 \tag{4.50}$$

【解毕】

**【例** 4 **带余项的** Taylor **插值多项式的计算** (**数据不完备情形**) **】** 由给定函数表写出函数的带余项的 Taylor 插值多项式展开.

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $f^{'}(x_k)$ | $f^{''}(x_k)$ |
|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)$ | $f^{'}(x_0)$ | $f^{''}(x_0)$ |
| $x_1$ | $f_1$ | | |

【解】 设带余项的 Taylor 插值多项式为

$$
\begin{aligned}
P(x) &= T_2(x) + C(x-x_0)^3 \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + C(x-x_0)^3
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

这里 $C$ 是待定系数，利用冗余条件 $f(x_1)=f_1$ 代入上式得所求待定系数 $C$:

$$
f_1 = f(x_1) = P(x_1) = T_2(x_1) + C(x_1-x_0)^3 \Rightarrow C = \frac{f_1 - T_2(x_1)}{(x_1-x_0)^3}
\tag{4.52}
$$

从而所求带余项的 Taylor 插值多项式为

$$
\begin{aligned}
&P(x)=T_2(x)+C(x-x_0)^3\\
&=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\\
&\frac{f_1-T_2(x_1)}{(x_1-x_0)^3}(x-x_0)^3
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

【解毕】

**【例 5 非标准插值多项式的计算】** 由给定函数表写出函数的首一四次插值多项式.

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $f'(x_k)$ | $f''(x_k)$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | 0 | 0 | 0 |
| $b$ | | 0 | |

【解】 类似于前边关于幂函数的考虑，设此首一插值多项式具有因式分解形式

$$P(x) = (x-a)^3(x-C) \tag{4.54}$$

这里 $C$ 是待定系数，利用冗余条件 $P^{'}(b) = f^{'}(b) = 0$ 代入上式得所求待定系数 $C$:

$$0 = f^{'}(b) = P^{'}(b) = 3(b-a)^2(b-C) + (b-a)^3 \Rightarrow C = \frac{4b-a}{3} \tag{4.55}$$

从而所求首一四次插值多项式为

$$\begin{aligned} P(x) = (x-a)^3(x-C) &= (x-a)^3(x-\frac{4b-a}{3}) \\ &= \frac{(x-a)^3}{3}(3x+a-4b) \end{aligned} \tag{4.56}$$

【解毕】

**【 例 6 非标准插值多项式的计算】** 由给定函数表写出函数的带余项的三次插值多项式.

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $f^{'}(x_k)$ |
|---|---|---|
| $x_0$ | $f_0$ | |
| $x_1$ | $f_1$ | $f_1^{'}$ |
| $x_2$ | $f_2$ | |

【解】 设此插值多项式具有牛顿形式

$$
\begin{aligned}
&P(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)\\
&+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\
&+C(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\
&=f_0+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\\
&+C(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

这里 $C$ 是待定系数，利用冗余条件 $P'(x_1)=f_1'$ 代入上式得

所求待定系数 $C$:

$$
\begin{aligned}
& f_1^{'} = P^{'}(1) \\
& = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](x_1 - x_0) + C(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \\
& \Rightarrow C = \frac{f_1^{'} - f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2](x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

而由于 $x = x_1$ 为二重零点，故所求余项类似于 三次厄米特插值余项, 为:

$$
R(x) = f(x) - P(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2) \tag{4.59}
$$

【解毕】