

# 优化模型（1）

1、血管分支

2、冰山运送

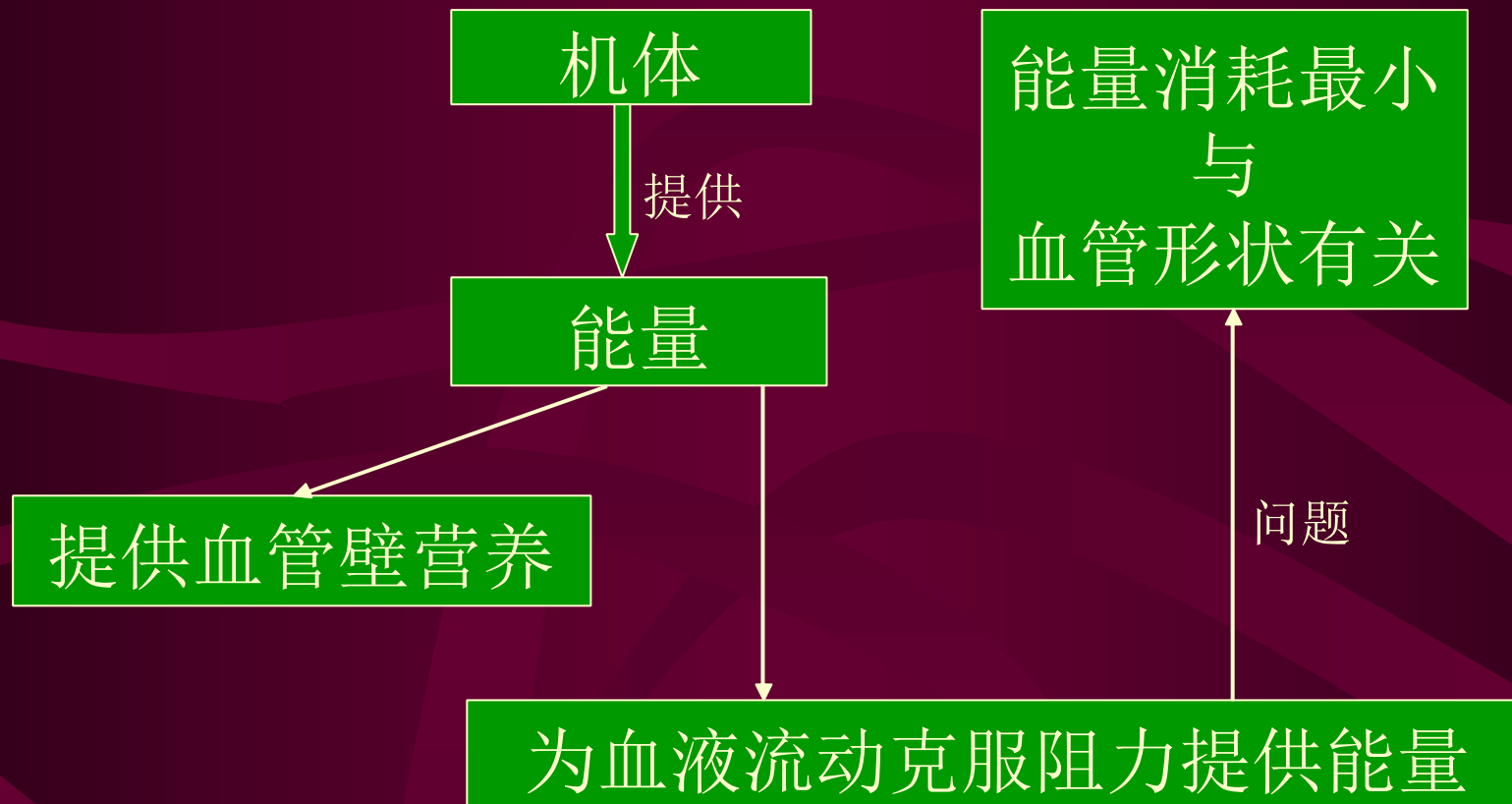


# 1、问题

高级动物的血管系统遍布全身，进化大概已使其构造最优化。问题是血管的几何形状如何，使动物付出的代价最小。

代价的意义：指消耗能量

## 2、关于能量与血管形状的关系



模型解决的问题：血管分支处粗细血管的半径比例与分岔角度。

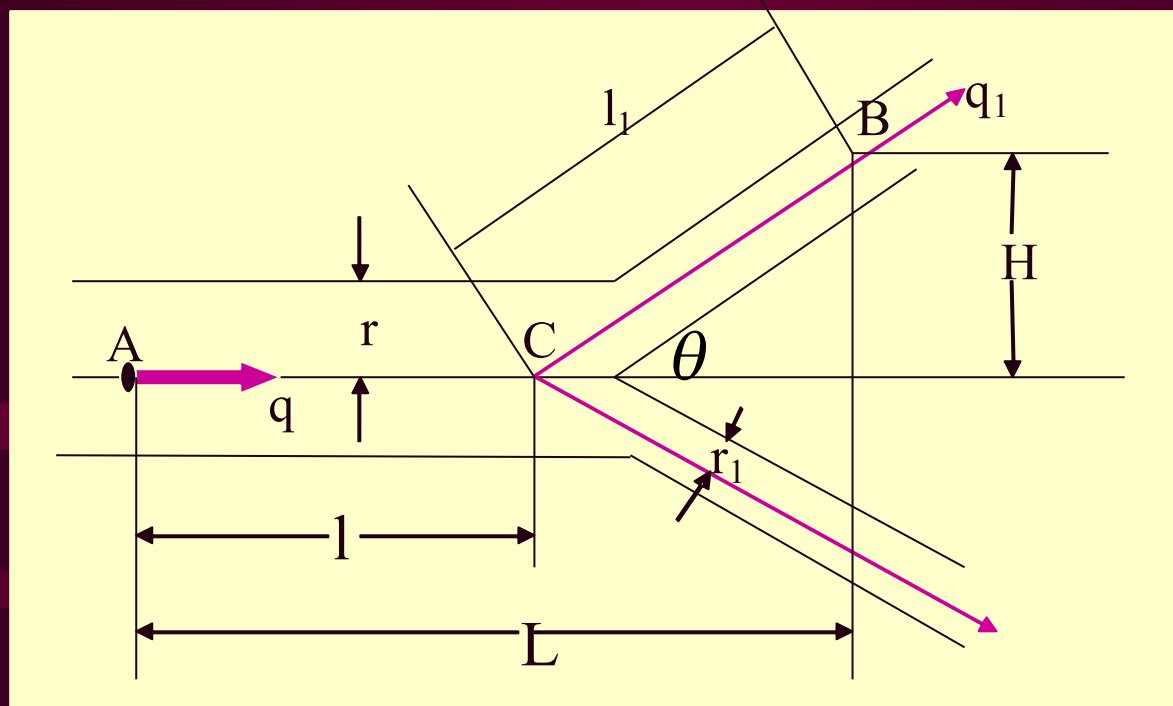
### 3、模型假设

1. 一条粗血管在分支点处分成两条细血管，分支点附近三条血管在同一平面上，有一对称轴。因为如果不在一个平面上血管总长度必然增加，导致能量消耗增加，不符合最优原则。这是一条几何上的假设。

2. 在考察血液流动受到的阻力时，将这种流动视为粘性流体在刚性管道中的运动，这当然是一种近似，实际上血管是有弹性的，不过这种近似的影响不大，这是一条物理上的假设。

3. 血液对血管壁提供营养的能量随管壁内表面积及管壁所占体积的增加而增加，管壁所占体积又取决于管壁厚度，而厚度近似地与血管半径成正比。这是一条生理上的假设。

## 4、符号体系与血管形状



由假设1

两条细血管在  $C$  点分岔，并形成对称的几何形状。设粗细血管半径分别是  $r$  和  $r_1$ ，分岔处夹角是  $\theta$ 。考察长度为  $l$  的一段粗血管  $AC$  和长度为  $l_1$  的两条细血管  $CB$  和  $CB'$ ， $ACB$  ( $ACB'$ ) 的水平距离为  $L$  和  $H$ ，如图所示。再设血液在粗细血管中单位时间的流量分别为  $q$  和  $q_1$ ，显然  $q = 2q_1$ 。

## 5、机体克服阻力所消耗的能量

(1) 血液流过半径 $r$ 、长 $l$ 的血管时的流量 $q$ :

$$q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \mu l}$$

← Poiseuille定律

(2) 机体克服阻力所消耗的能量 $E_1$ :

$$E_1 = q \cdot \Delta p = \frac{8 \mu q^2 l}{\pi r^4} = \frac{k q^2}{r^4}$$

## 6、机体为血管壁提供的能量 $E_2$

设半径为 $r$ 、长度为 $l$ 的血管，血管壁厚为 $d$

$S'$ 为管壁截面积

$d$ 与 $r$ 成正比

$$v = S' l = \pi[(r+d)^2 - r^2]l = \pi(d^2 + 2rd) \propto r^2$$



$$E_2 = br^\alpha l, \text{ 其中 } 1 \leq \alpha \leq 2, \text{ } b \text{ 是比例常数}$$

## 7、模型的建立

(1) 机体为血液从A到C至B所克服及提供的能量:

$$E = \left( \frac{kq^2}{r^4} + br^a \right) \cdot l + \left( \frac{kq_1^2}{r_1^4} + br_1^a \right) \cdot 2l_1$$

(2) 血管简单的几何形状

$$l = L - \frac{H}{\tan \theta}, \quad l_1 = \frac{H}{\sin \theta}$$

$$\text{及 } q_1 = q/2$$

模型:

$$E(r, r_1, \theta) = \left( \frac{kq^2}{r^4} + br^a \right) \left( L - \frac{H}{\tan \theta} \right) + \left( \frac{kq^2}{4r_1^4} + br_1^a \right) \frac{2H}{\sin \theta}$$



## 8、模型求解

(1) 问题:

$$\min E(r, r_1, \theta)$$

(2) 求最优解的数学方法:

$$\frac{\partial E}{\partial r} = 0 \text{ 和 } \frac{\partial E}{\partial r_1} = 0 \quad (1)$$

及:

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow (2)$$

(3) 由公式 (1), 有:

$$\begin{cases} -\frac{4kq^2}{r^5} + b\alpha r^{\alpha-1} = 0 \\ -\frac{kq^2}{r_1^5} + b\alpha r_1^{\alpha-1} = 0 \end{cases}$$



$$\frac{r}{r_1} = 4^{\frac{1}{\alpha+4}}$$

(4) 代入公式 (2)

$$\cos\theta = 2^{\frac{\alpha-4}{\alpha+4}}$$

## 9、分岔角度的范围

取  $\alpha = 1$  和  $\alpha = 2$



$$1.26 \leq \frac{r}{r_1} \leq 1.32, \quad 37^\circ \leq \theta \leq 49^\circ$$

## 10、模型验证（以狗为例）

设从大动脉到毛细血管共有  $n$  次分岔

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = 4^{\frac{n}{\alpha+4}}$$

$r_{\max}/r_{\min}$  的实际数值可以测出，例如对狗而言有  $r_{\max}/r_{\min} \approx 1000 \approx 4^5$ ，由 (9) 式可知  $n \approx 5(\alpha+4)$ 。因为  $1 \leq \alpha \leq 2$ ，所以按照这个模型，狗的血管应有 25 ~ 30 次分岔。又因为当血管有  $n$  次分岔时血管总条数为  $2^n$ ，所以估计狗应约有  $2^{25} \sim 2^{30}$ ，即  $3 \times 10^7 \sim 10^9$  条血管。

# 优化模型（1）

1、血管分支

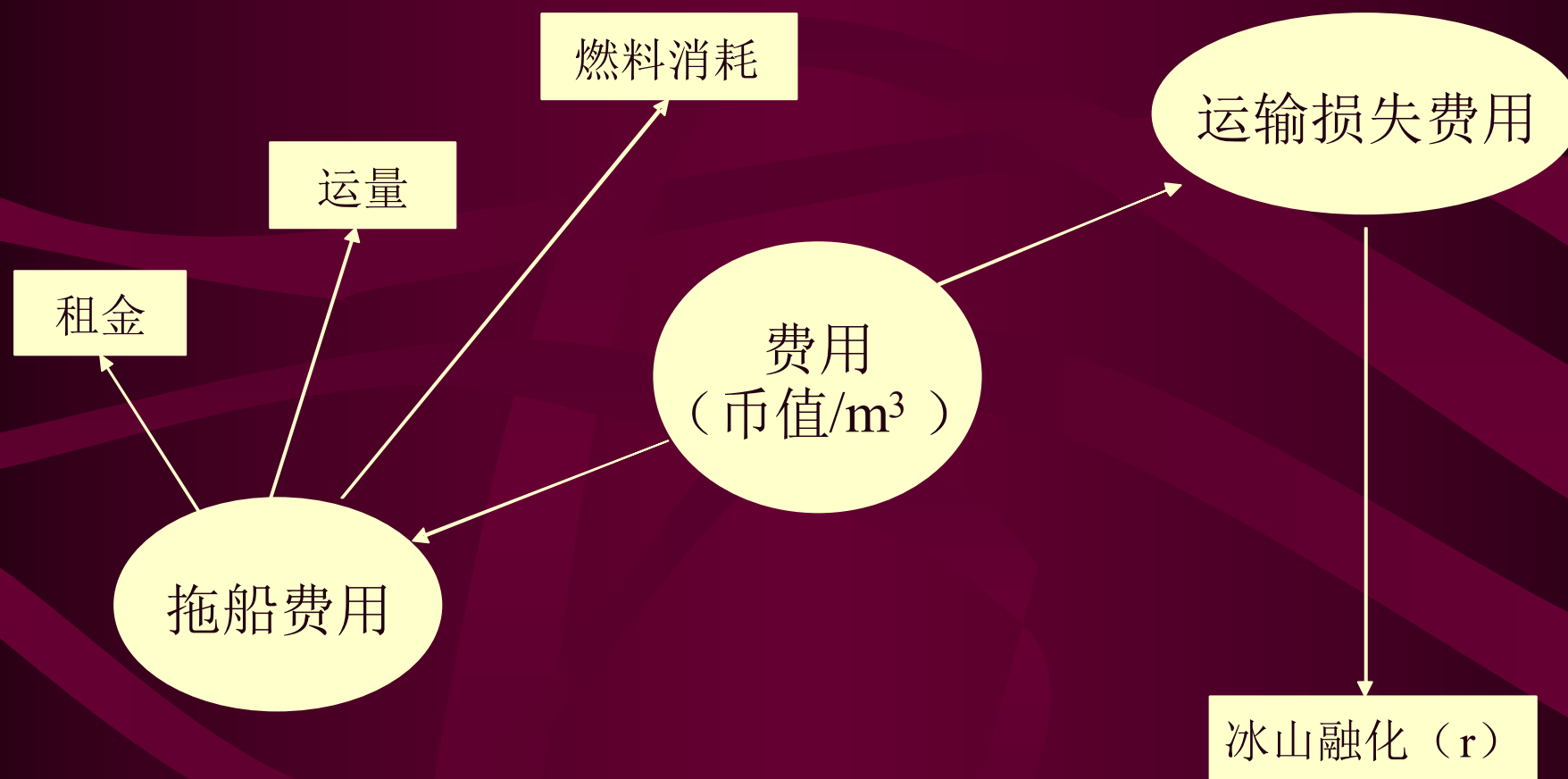
2、冰山运送



# 1、问题

在以盛产石油著称的波斯湾地区，浩瀚的沙漠覆盖着大地，水资源十分贫乏，不得不采用淡化海水的办法为国民提供用水。成本大约是每立方米淡水 0.1 英镑。有些专家提出从相距 9600 千米之遥的南极用拖船运送冰山到波斯湾，以取代淡化海水的办法。这个模型要从经济角度研究冰山运输的可行性。

## 2、运送冰山的费用分析



### 3、数据收集

1. 三种拖船的日租金和最大运量

2. 燃料消耗 (英镑 / 千米). 主要依赖于船速和所运冰山的体积, 船型的影响可以忽略.

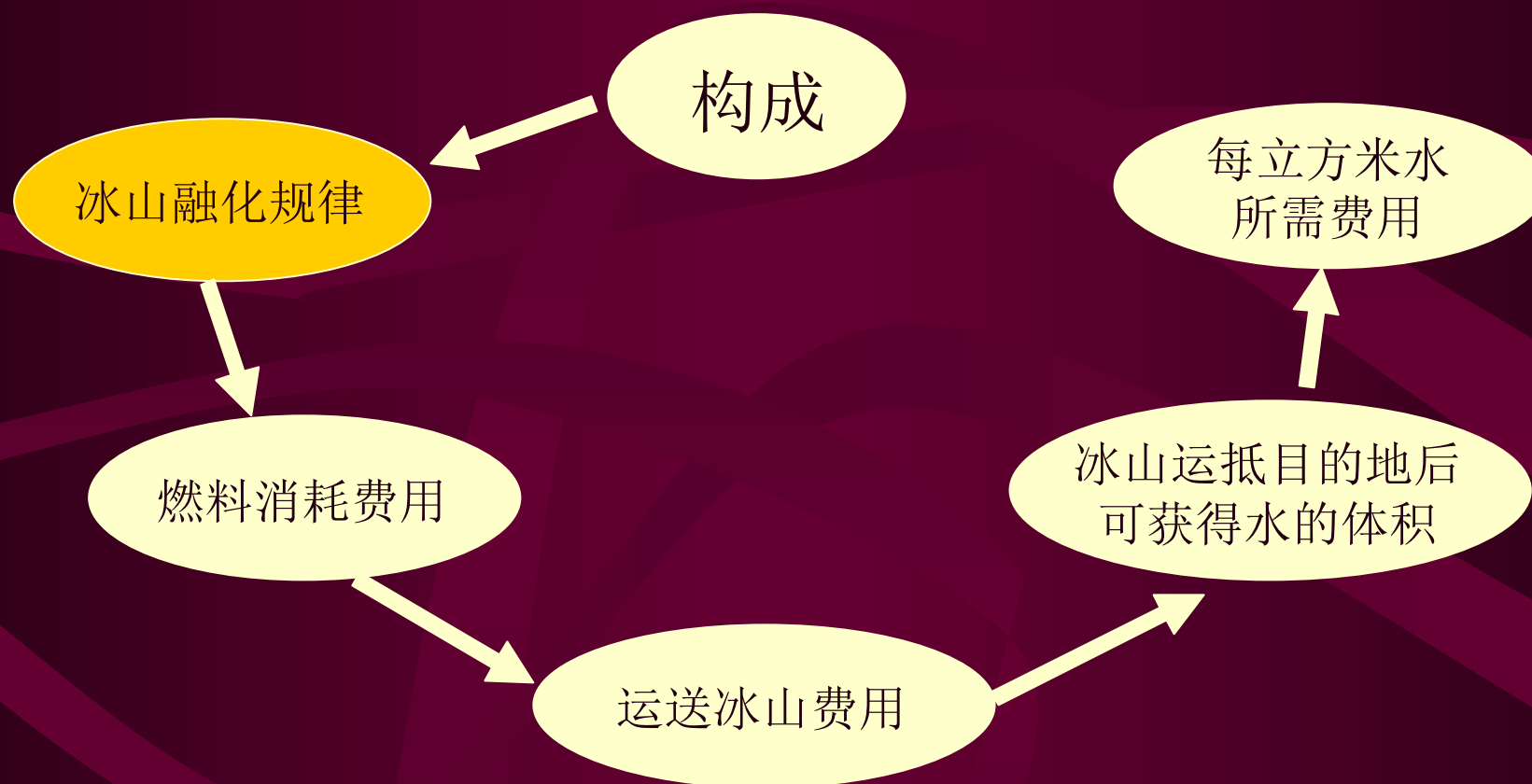
3. 冰山运输过程中的融化速率 (米 / 天). 指在冰山与海水接触处每天融化的深度. 融化速率除与船速有关外, 还和运输过程中冰山到达处与南极的距离有关, 这是由于冰山要从南极运往赤道附近的缘故.

## 4、模型假设

1. 拖船航行过程中船速不变，航行不考虑天气等任何因素的影响，总航行距离 9600 千米，
2. 冰山形状为球形，球面各点的融化速率相同，
3. 冰山到达目的地后，1 立方米冰可融化成 0.85 立方米水，



## 5、建立模型



# 冰山融化规律

## (1) 冰球融化速度 $r$ (米/天) 与目的地距离的关系

记冰山球面半径融化速率为 $r$  (米 / 天), 船速为 $u$  (千米 / 小时), 拖船与南极距离为 $l$  (千米). 根据表 4-3 中融化速率的数据, 可设 $r$ 是船速 $u$ 的线性函数, 且当 $0 \leq l \leq 4000$  (千米) 时 $r$ 与 $l$ 成正比, 而当 $l > 4000$  (千米) 时 $r$ 与 $l$ 无关, 这可以解释为 $0 \leq l \leq 4000$  (千米) 相当于从南极到赤道以南, 海水温度随 $l$ 增加而上升, 使融化速率 $r$ 也随 $l$ 的增加而变大, 而 $l > 4000$  (千米) 后海水温度变化较小, 可以忽略. 按照这个分析可设

$$r = \begin{cases} a_1 l (1 + bu), & 0 \leq l \leq 4000 \\ a_2 (1 + bu), & l > 4000 \end{cases} \quad (1)$$

# 冰山融化规律

## (2) 冰球体积与航行时间的关系

1、航行 $t$ 天时与南极的距离:  $l = 24ut$

2、第 $t$ 天冰山的融化速度:

$$r_t = \begin{cases} 1.2 \times 10^{-3} u (1 + 0.4u) t, & 0 \leq t \leq \frac{1000}{6u} \\ 0.2 (1 + 0.4u), & t > \frac{1000}{6u} \end{cases}$$

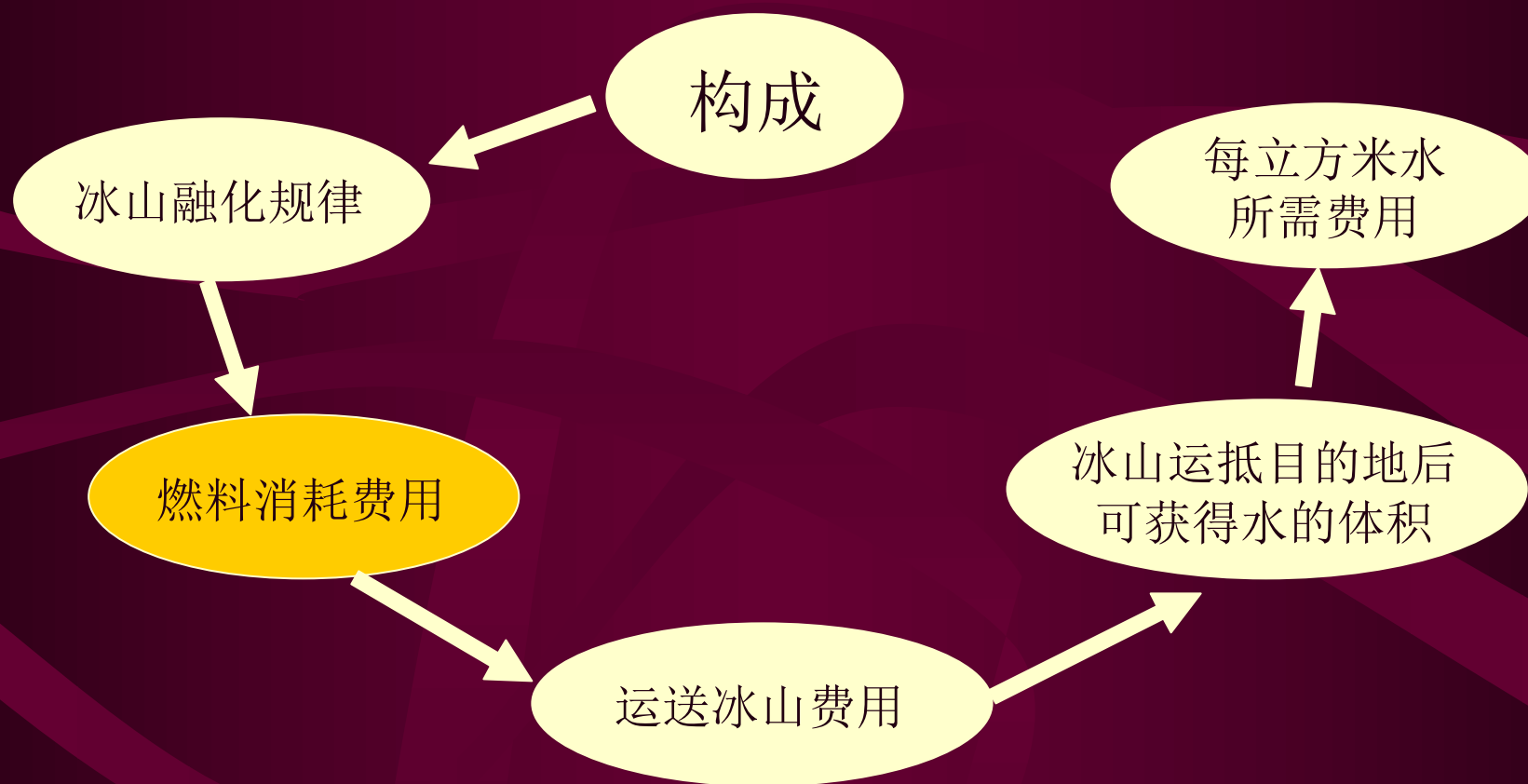
3、第 $t$ 天冰山的体积:

$$R_t = R_0 - \sum_{k=1}^t r_k$$

$$V_t = \frac{4\pi}{3} R_t^3$$

$$V(u, V_0, t) = \frac{4\pi}{3} \left( \sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \sum_{k=1}^t r_k \right)^3$$

## 5、建立模型



# 燃料的消耗费用

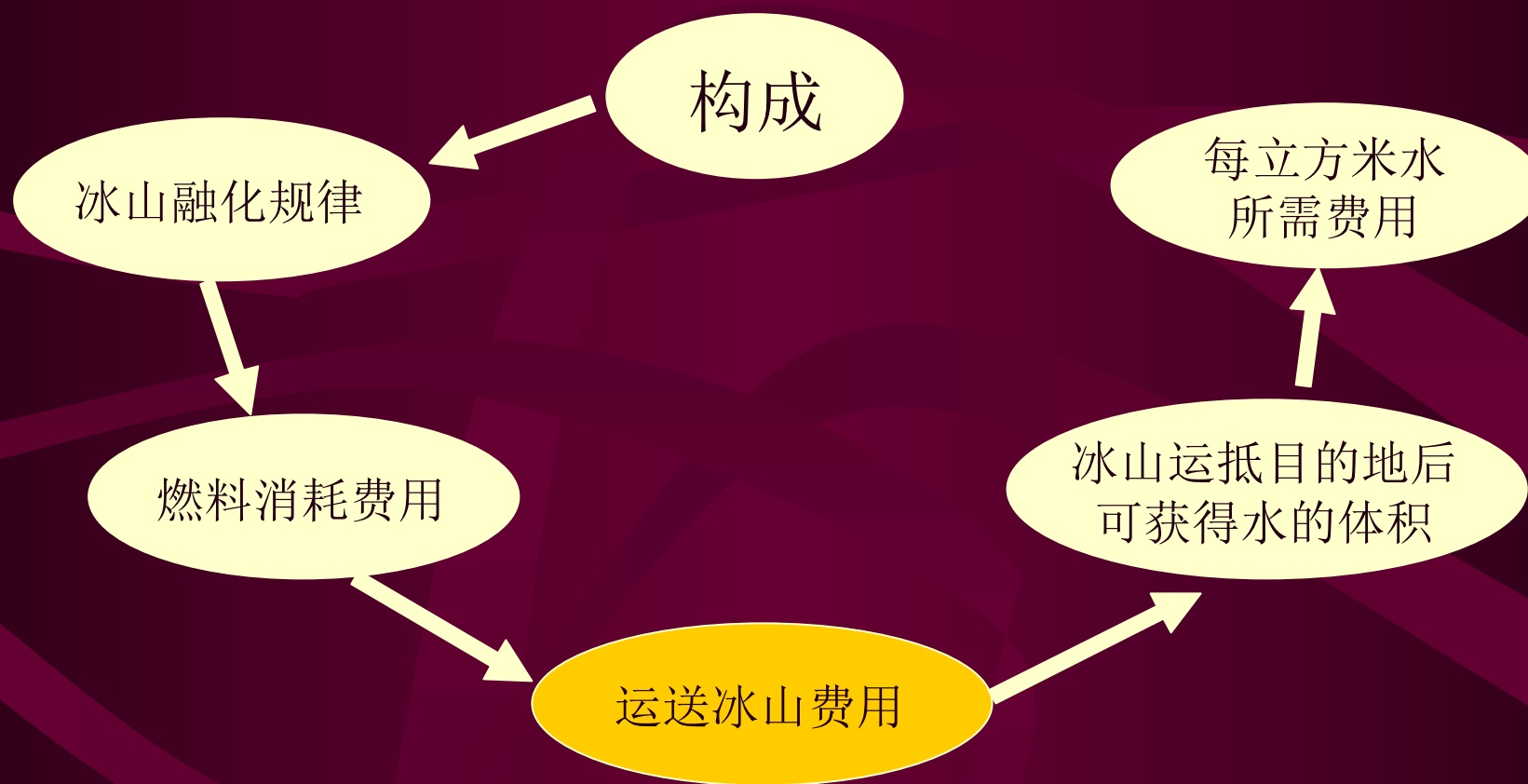
(1) 曲线拟合：燃料消耗与冰山体积的对数按线性变化：

$$\bar{q} = c_1 (u + c_2) (\log_{10} V + c_3)$$

(2) 第t天的燃料消费

$$\begin{aligned} q(u, V_0, t) &= 24u.c_1(u + c_2)[\lg V(u, V_0, t) + c_3] \\ &= 7.2u(u + 6)\left[\lg \frac{4\pi}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \sum_{k=1}^t r_k\right)^3 - 1\right] \\ &= 7.2u(u + 6)\left[3\lg\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \sum_{k=1}^t r_k\right) - 0.378\right] \end{aligned}$$

## 5、建立模型



# 运送冰山费用

(1) 日租金 $f(V_0)$ :

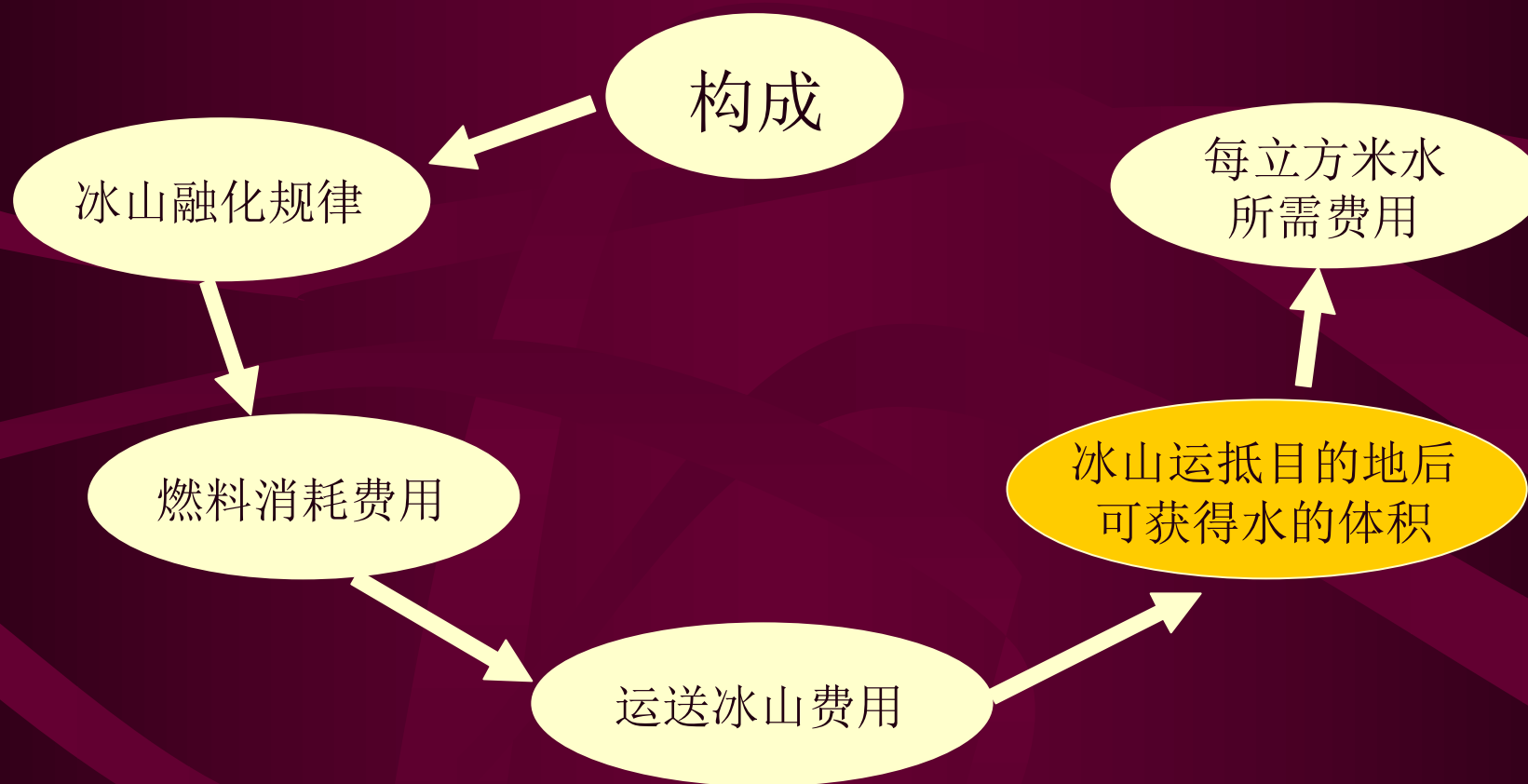
$$f(V_0) = \begin{cases} 4.0, & V_0 \leq 5 \times 10^5 \\ 6.2, & 5 \times 10^5 < V_0 \leq 10^6 \\ 8.0, & 10^6 < V_0 \leq 10^7 \end{cases}$$

(2) 运送天数:  $T = \frac{9600}{24u}$       租金费用:  $T * f(V_0)$

(3) 整个航程的燃料耗费:  $\sum_{t=1}^T q(u, V_0, t)$

(4) 运送冰山总费用  
= 租金费用 + 整个航程的燃料耗费

## 5、建立模型





# 冰山运抵后所获得的水的体积

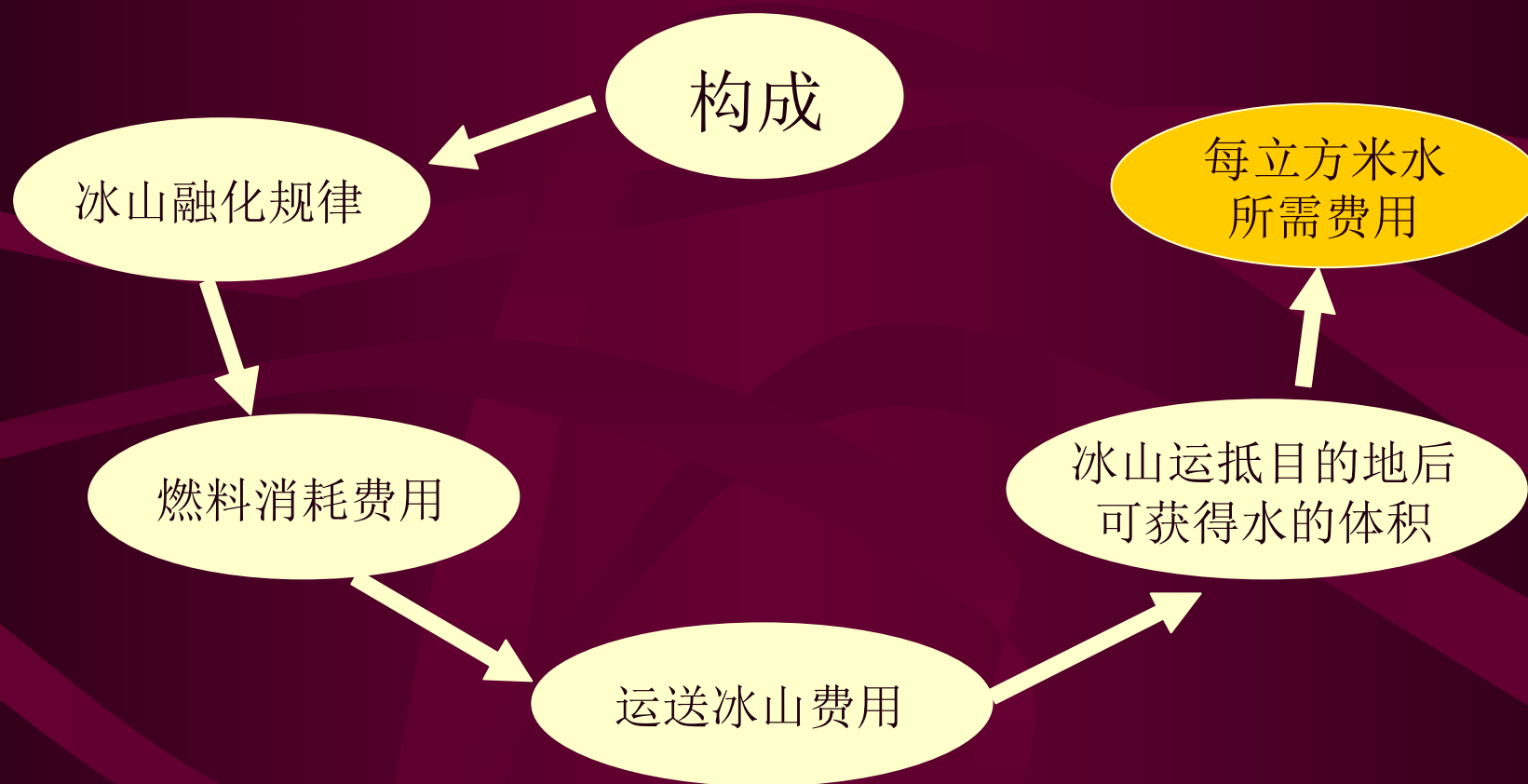
(1) 冰山体积:

$$V(u, V_0, d) = \frac{4\pi}{3} \left( \sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \sum_{t=1}^T r_t \right)^3$$

(2) 冰山融化为水后的体积:

$$W(u, V_0) = 0.85 \frac{4\pi}{3} \left[ \sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \sum_{t=1}^T r_t \right]^3$$

## 5、建立模型



## 每立方米水的费用

$$\bar{S}(u, V_0) = \frac{S(u, V_0)}{W(u, V_0)}$$

我们要选择船速  $u$  和冰山初始体积  $V_0$  (相当于船型), 使费用  $\bar{S}$  最小.

# 讨论题

问题1：

(1) 你还能想出有理由设法收集并可使赛艇速度模型改进的数据吗？

(2) 有人建议：如果负载时轻量级八人艇是重量级八人艇的比例模型（即尺寸比例是 $1:(1.8)^{1/3}$ ），5%的优势便消失。你同意吗？为什么？

问题2：

跑步与走路时如何节省能量

我们每个人都有跑步的经历，有人会因此而疲惫不堪，但是有谁会想：怎样跑步能使我们消耗的能量最少？

# 打分原则：

## 1、组间打分（5分为满分）

5分：很好      4分：好      3分：及格  
2分：不好      1分：非常不好

## 2、组内打分（5分为满分）

5分：积极肯干，富有创造性  
4分：参与讨论，收集资料，动手写作  
3分：参与讨论，协助同组同学的工作  
2分：毫无创造性，也不积极参与  
1~0分：根本不参与