计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第八章　　常微分方程数值解

第三节　　单步法的收敛性与稳定性

一、收敛性与相容性

【**定义** 1. **收敛性**】若某种数值方法如单步法

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h)$$

对固定的节点 $x_n = x_0 + nh$ 当步长 $h = \dfrac{x_n - x_0}{n} \to 0$ 时第 n 步数值解趋向于精确解在此节点的函数值 $y_n \to y(x_n)$ 即整体截断误差随着步长加密收敛于 0：

$$e_n := y(x_n) - y_n \to 0$$

则称数值方法 收敛.

【 **定理** 1. **收敛性定理** 】单步法

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h)$$

具有 p 阶精度，且增量函数 $\varphi(x, y, h)$ 关于 y 满足局部 Lipschitz 条件：

$$|\varphi(x, y, h) - \varphi(x, y^*, h)| \leq L_\varphi |y - y^*|$$

且初值准确： $y_0 = y(x_0)$, 则整体截断误差

$e_n := y(x_n) - y_n = O(h^p)$.

证明略. (参阅关治 P438)

【定义 2. 相容性】 若某种数值方法如单步法

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h)$$

的增量函数 $\varphi(x, y, h)$ 当步长为零 $h = 0$ 时等于右端函数 $\varphi(x, y, 0) = f(x, y)$ ，则称此数值方法与一阶常微分方程初值问题

$$E : \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) & (1.1) \\ y(x_0) = y_0. & (1.2) \end{cases}$$

相容(consistent).

相容性的意义是： 相容数值方法的精度阶数至少是一阶的 $p \geq 1$ ，而 $p \geq 1$ 阶的数值方法必定相容. 事实上，对 p 阶的数值方法有

$$
\begin{aligned}
& T_{n+1} = y(x+h) - y(x) - h\varphi(x,y,h) \\
& = hy^{'} + \frac{1}{2}h^2y^{''} + \frac{1}{6}h^3y^{'''} + \cdots \\
& -h[\varphi(x,y,0) + h\frac{\partial f}{\partial x}\varphi(x,y,0) + \cdots] \\
& = h[y^{'} - \varphi(x,y,0)] + \cdots = O(h^{p+1})
\end{aligned}
$$

故 $p \geq 1$ 的充要条件为 $y^{'} - \varphi(x,y,0) = 0$ ，即 $\varphi(x,y,0) = f(x,y)$.

二、绝对稳定性与绝对稳定域

【 **定义** 1. **稳定性** 】若某种数值方法如单步法

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h)$$

在节点 y_n 处产生大小为 δ 的扰动，在以后各节点值 $y_m, m > n$ 上产生的偏差均不超过 δ，则称数值方法 稳定.

由二元函数 Taylor 展开式，我们有

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) =$$

$$f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \cdots$$

略去高阶项，可线性化为所谓 *模型方程*: $\dfrac{du}{dx} = \lambda u, Re(\lambda) < 0.$ 这里根据微分方程稳定性理论，附加特征值实部小于 0 的条件是为保证解的稳定性．一般地，我们以 *模型方程* $\dfrac{dy}{dx} = \lambda y, Re(\lambda) < 0.$ 作为检验数值方法稳定性的标准参照.

【**定义** 2. **绝对稳定性**】单步法

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h)$$

用于解 模型方程 $\dfrac{dy}{dx} = \lambda y, Re(\lambda) < 0.$ 若得到的解 $y_{n+1} = E(h\lambda)y_n$ 满足 $|E(h\lambda)| < 1$, 则称此单步法是 绝对稳定 的；在平面 $\mu = h\lambda$ 上，满足 $|E(h\lambda)| < 1$ 的变量围成的区域称为 绝对稳定区域，与实轴的交集称为 绝对稳定区间.

【命题 1 】 Euler 公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ 的 绝对稳定区域 为 $|E(h\lambda)| = |1 + h\lambda| < 1$. 当 $\lambda < 0$ 时， 绝对稳定区间为 $-2 < \lambda h < 0$.

【证明】

将 Euler 公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ 用于解 模型方程 $\dfrac{dy}{dx} = \lambda y, Re(\lambda) < 0$. 得到的解

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda)y_n = E(h\lambda)y_n$$

故 绝对稳定区域 为 $|E(h\lambda)| = |1 + h\lambda| < 1$. 与实轴的交集为绝对稳定区间 $-2 < \lambda h < 0$. 在复平面 $\mu = h\lambda$ 上， 绝对稳定区域 为以 $(-1, 0)$ 为圆心， 1 为半径的单位圆域.

【命题 2 】四阶显式 Runge-Kutta 经典格式的 绝对稳定区域 为 $|E(h\lambda)| = |1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \frac{1}{6}h^3\lambda^3 + \frac{1}{24}h^4\lambda^4| < 1$. 当 $\lambda < 0$ 时， 绝对稳定区间 约为 $-2.785 < \lambda h < 0$.

【证明略】

【**命题** 4 】后退的 Euler 公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ 的绝对稳定区域为 $|E(h\lambda)| = |\dfrac{1}{1-h\lambda}| < 1$. 当 $\lambda < 0$ 时，绝对稳定区间为 $-\infty < \lambda h < 0$. 即 $0 < h < \infty$. 对任意步长均稳定.

【**证明略**】

【**命题** 5 】 梯形公式

$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}))$ 的 绝对稳定区域 为 $|E(h\lambda)|=|\frac{2+h\lambda}{2-h\lambda}|<1$. 当 $\lambda<0$ 时， 绝对稳定区间 为 $-\infty<\lambda h<0$. 即 $0<h<\infty$. 对任意步长均稳定.

【**证明略**】

【 例 1. 模型方程 】

求解一阶常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -100y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

精确解为速降函数 $y = e^{-100x}$. 取不同步长，分别作 Euler 格式和后退的 Euler 格式计算数值解，考察其稳定性.

(1) 先作 Euler 格式迭代计算．即

$$y_{n+1} = y_n - 100hy_n = (1-100h)y_n, y(0) = 1.$$

取步长 $h = 0.025$, 则 $x = 0, 0.025, 0.05, 0.075, 0.100$ 可迭代计算．如

$y_1 = (1-100h)y_0 = (1-2.5) = -1.5,$

$y_2 = (1-100h)y_1 = -1.5(1-2.5) = 2.25,$

$y_3 = (1-100h)y_2 = 2.25(1-2.5) = -3.375,$

$y_4 = (1-100h)y_3 = -3.375(1-2.5) = 5.0625,$

等等．可见若取步长 $h = 0.025$, 则 Euler 格式数值解符号波动剧烈，计算很不稳定．

取步长 $h = 0.005$, 则 $x = 0, 0.005, 0.01, 0.015, 0.020$ 可迭代计算．如

$$y_1 = (1 - 100h)y_0 = (1 - 0.5) = 0.5,$$

$$y_2 = (1 - 100h)y_1 = 0.5(1 - 0.5) = 0.25,$$

$$y_3 = (1 - 100h)y_2 = 0.25(1 - 0.5) = 0.125,$$

$$y_4 = (1 - 100h)y_3 = 0.125(1 - 0.5) = 0.0625,$$

等等．可见若取步长 $h = 0.005$, 则 Euler 格式数值解计算比较稳定.

(2) 再作后退的 Euler 格式迭代计算. 即

$y_{n+1} = y_n - 100hy_{n+1}$ 或即

$$y_{n+1} = \frac{1}{1+100h}y_n, y(0) = 1.$$

仍取步长 $h = 0.025$, 则 $x = 0, 0.025, 0.05, 0.075, 0.100$,

$y_{n+1} = \dfrac{1}{3.5}y_n, y(0) = 1.$ 可迭代计算. 如

$$y_1 = \frac{1}{3.5} y_0 = \frac{1}{3.5} = 0.2857,$$

$$y_2 = \frac{1}{3.5} y_1 = 0.2857^2 = 0.0816,$$

$$y_3 = \frac{1}{3.5} y_2 = 0.2857 \times 0.0816 = 0.0233,$$

$$y_4 = \frac{1}{3.5} y_3 = 0.2857 \times 0.0233 = 0.0067.$$

可见若取步长 $h = 0.025$, 则后退的 Euler 格式数值解计算比较稳定. **结论**. 数值计算稳定性不但与方法有关，也与步长大小有关.