# 第6章 稳态模型

## ——微分方程稳定性方法建模



## §1 捕鱼业的持续收获

- 再生资源（渔业、林业等）与非再生资源（矿业等）
- 再生资源应适度开发——在持续稳产前提下实现最大产量或最佳效益

问题及分析

- 在捕捞量稳定的条件下，如何控制捕捞使产量最大或效益最佳
- 如果使捕捞量等于自然增长量，渔场鱼量将保持不变，则捕捞量稳定

产量模型　　$x(t)\sim$渔场鱼量

假设　• 无捕捞时鱼的自然增长服从 Logistic规律

$$\dot{x}(t) = f(x) = rx(1-\frac{x}{N})$$

$r\sim$固有增长率，$N\sim$最大鱼量

• 单位时间捕捞量与渔场鱼量成正比

$$h(x) = Ex,\ E\sim\text{捕捞强度}$$

建模　　记 $F(x) = f(x) - h(x)$

捕捞情况下渔场鱼量满足

$$\dot{x}(t) = F(x) = rx(1-\frac{x}{N}) - Ex$$

• 不需要求解x(t), 只需知道x(t)稳定的条件

一阶微分方程的平衡点及其稳定性

$\dot{x} = F(x)$　(1)　一阶非线性（自治）方程

平衡点 **~F(x)=0的根$x_0$**　$\dot{x}\big|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow x \equiv x_0$

设x(t)是方程的解，若从$x_0$邻域的任一初值出发，

都有 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x_0$，称$x_0$是方程(1)的稳定平衡点

不求x(t), 判断$x_0$稳定性的方法——直接法

$\dot{x} = F'(x_0)(x - x_0)$　(2)　(1)的近似线性方程

$F'(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$稳定(对(2),(1))

$F'(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$不稳定(对(2),(1))

产量模型 $\dot{x}(t) = F(x) = rx(1-\frac{x}{N}) - Ex$

$F(x)=0$ ⇨ 平衡点 $x_0 = N(1-\frac{E}{r}),\ x_1 = 0$

稳定性判断 $F'(x_0)=E-r,\quad F'(x_1)=r-E$

$E<r \Rightarrow F'(x_0)<0, F'(x_1)>0 \Rightarrow x_0$稳定, $x_1$不稳定

$E>r \Rightarrow F'(x_0)>0, F'(x_1)<0 \Rightarrow x_0$不稳定, $x_1$稳定

$E$ ~ 捕捞强度 $r$ ~固有增长率

$x_0$稳定, 可得到稳定产量 $x_1$稳定,渔 场干枯

产量模型

在捕捞量稳定的条件下，
控制捕捞使产量最大

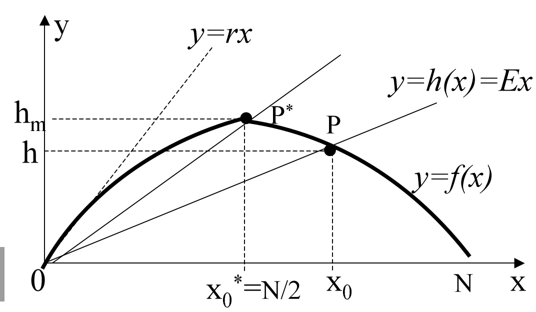
图解法

$F(x)=f(x)-h(x)$

$f(x) = rx(1-\frac{x}{N})$

$h(x)=Ex$

$F(x_0)=0$ ⇨ $f$与$h$交点P




P的横坐标$x_0$~平衡点 P的纵坐标$h$~产量

产量最大 $P^*(x_0^*=N/2, h_m=rN/4)$ $E^*=h_m/x_0^*=r/2$

效益模型

在捕捞量稳定的条件下，控制捕捞使效益最大

假设 • 鱼销售价格$p$ • 单位捕捞强度费用c

收入$T = ph(x) = pEx$，支出$S = cE$

单位时间利润 $R = T - S = pEx - cE$

稳定平衡点 $x_0 = N(1 - E/r)$

$$R(E) = T(E) - S(E) = pNE(1 - \frac{E}{r}) - cE$$

求$E$使$R(E)$最大 $\Rightarrow$ $E_R = \frac{r}{2}(1 - \frac{c}{pN})$

最大效益下 $x_R = \frac{N}{2} + \frac{c}{2p}$ $h_R = \frac{rN}{4}(1 - \frac{c^2}{p^2N^2})$

捕捞过度

• 封闭式捕捞追求利润R(E)最大

•开放式捕捞只求利润R(E)>0

$$R(E) = T(E) - S(E) = pNE(1 - \frac{E}{r}) - cE = 0 \Rightarrow E_s = r(1 - \frac{c}{pN})$$

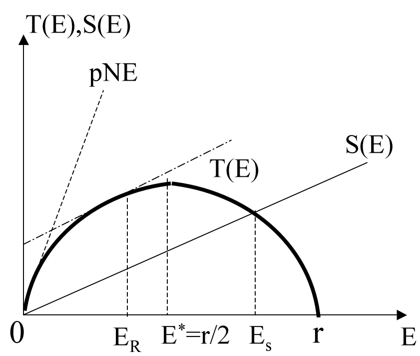
临界强度$E_s=2E_R$

$E_s$存在(>0)的条件 $p > c/N$

$E_s$代入 $x_0 = N(1 - \frac{E}{r})$

$\Rightarrow$ 渔场鱼量 $x_s = c/p$

$p\uparrow, c\downarrow \Rightarrow x_s\downarrow$ 捕捞过度



## §2　军备竞赛

• 描述两个国家(国家集团)军备竞赛的过程

• 解释(预测)军备竞赛的结局

假设

1）相互不信任，使一方军备越大，另一方军备增加越快；

2）经济实力限制，使任一方军备越大，对军备增长的制约越大；

3）相互敌视或领土争端，使每一方都存在增加军备的潜力。

进一步假设

1）2）的作用为线性；3）的作用为常数

建模　$x(t)\sim$ 甲方军备，　$y(t)\sim$ 乙方军备

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g \\ \dot{y}(t) = lx - \beta y + h \end{cases} \qquad (*)$$

$\alpha,\beta\sim$ 本方经济实力的制约；

$k,l\sim$ 对方军备的刺激；

$g,h\sim$ 军备竞赛的潜力.

军备竞赛的结局 ⇨ $t\to\infty$ 时的 $x(t),y(t)$

⇨ 微分方程（*）的平衡点及其稳定性

线性常系数微分方程组 $\dot{x}(t)=ax+by$, $\dot{y}(t)=cx+dy$ 的平衡点及其稳定性

平衡点$P_0(x_0,y_0)=(0,0)$ ~代数方程 $\begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases}$ 的根

若从$P_0$邻域的任一初值出发，都有 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=x_0$，$\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=y_0$，称$P_0$是微分方程的稳定平衡点

记系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 特征方程 $\det(A-\lambda I)=0$

$$\begin{cases} \lambda^2+p\lambda+q=0 \\ p=-(a+d) \\ q=\det A \end{cases}$$

特征根 $\lambda_{1,2}=(-p\pm\sqrt{p^2-4q})/2$

---

线性常系数微分方程组 $\dot{x}(t)=ax+by$, $\dot{y}(t)=cx+dy$ 的平衡点及其稳定性

平衡点$P_0(0,0)$ 特征根 $\lambda_{1,2}=(-p\pm\sqrt{p^2-4q})/2$

微分方程一般解形式 $c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$

$\lambda_{1,2}$为负数或有负实部

$\Updownarrow$

$p>0$ 且 $q>0$ $\Rightarrow$ 平衡点$P_0(0,0)$稳定

$p<0$ 或 $q<0$ $\Rightarrow$ 平衡点$P_0(0,0)$不稳定

建模

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g \\ \dot{y}(t) = lx - \beta y + h\end{cases} \quad (*)$$

平衡点

$$x_0 = \frac{kh+\beta g}{\alpha\beta - kl}, \quad y_0 = \frac{lg+\alpha h}{\alpha\beta - kl}$$

稳定性判断

系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} -\alpha & k \\ l & -\beta \end{bmatrix}$

$$p = -(-\alpha - \beta) = \alpha + \beta > 0$$

$$q = \det A = \alpha\beta - kl$$

平衡点$(x_0,y_0)$稳定的条件 $p > 0, q > 0$

$$\Rightarrow \alpha\beta > kl$$

模型的定性解释

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g \\ \dot{y}(t) = lx - \beta y + h\end{cases} \quad (*)$$

平衡点 $x_0 = \frac{kh+\beta g}{\alpha\beta - kl}, \quad y_0 = \frac{lg+\alpha h}{\alpha\beta - kl}$

双方军备稳定(时间充分长后趋向有限值)的条件

$$\alpha\beta > kl \quad (+)$$

$\alpha,\beta$ ~ 本方经济实力的制约；
$k,l$ ~ 对方军备的刺激；
$g,h$ ~ 军备竞赛的潜力.

1)双方经济制约大于双方军备刺激时，军备竞赛才会稳定，否则军备将无限扩张。

2) 若$g=h=0$, 则$x_0=y_0=0$, 在条件(+)下$x(t)=y(t)=0$, 即友好邻国通过裁军可达到永久和平。

模型的定性解释

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g \\ \dot{y}(t) = lx - \beta y + h\end{cases} \quad (*)$$

$\alpha, \beta \sim$ 本方经济实力的制约；

$k, l \sim$ 对方军备的刺激；

$g, h \sim$ 军备竞赛的潜力.

3）若 $g,h$ 不为零，即便双方一时和解，使某时$x(t),y(t)$很小，但因 $\dot{x} > 0, \dot{y} > 0$，也会重整军备。

4）即使某时一方(由于战败或协议)军备大减, 如$x(t) =0$，也会因 $\dot{x} = ky + g$ 使该方重整军备，即存在互不信任($k \neq 0$)或固有争端( $g \neq 0$ 的单方裁军不会持久。

## §3　种群的相互竞争

• 一个自然环境中有两个种群生存，它们之间的关系：相互竞争；相互依存；弱肉强食。

• 当两个种群为争夺同一食物来源和生存空间相互竞争时，常见的结局是，竞争力弱的灭绝，竞争力强的达到环境容许的最大容量。

• 建模描述两个种群相互竞争的过程，分析产生这种结局的条件。

模型假设

• 有甲乙两个种群，它们独自生存时数量变化均服从Logistic规律;

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 (1 - \frac{x_1}{N_1}) \qquad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 (1 - \frac{x_2}{N_2})$$

• 两种群在一起生存时，乙对甲增长的阻滞作用与乙的数量成正比，甲对乙有同样的作用。

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \qquad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

对于消耗甲的资源而言，乙(相对于$N_2$)是甲(相对于$N_1$)的 $\sigma_1$ 倍。

$\sigma_1 > 1$ ⇨ 对甲增长的阻滞作用，乙大于甲 ⇒乙的竞争力强

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \qquad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

模型分析

$t \to \infty$时$x_1(t), x_2(t)$的趋向 (平衡点及其稳定性)

(二阶)非线性(自治)方程 $\begin{cases}\dot{x}_1(t) = f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2(t) = g(x_1, x_2)\end{cases}$ 的平衡点及其稳定性

平衡点$P_0(x_1^0, x_2^0)$ ~代数方程 $\begin{cases} f(x_1, x_2) = 0 \\ g(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$ 的根

若从$P_0$邻域的任一初值出发，都有 $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = x_1^0$, $\lim_{t\to\infty} x_2(t) = x_2^0$, 称$P_0$是微分方程的稳定平衡点

判断$P_0$ $(x_1^0,x_2^0)$ 稳定性的方法——直接法

$$\dot{x}_1(t)=f(x_1,x_2)$$
$$\dot{x}_2(t)=g(x_1,x_2) \quad (1)$$

(1)的近似线性方程

$$\dot{x}_1(t)=f_{x_1}(x_1^0,x_2^0)(x_1-x_1^0)+f_{x_2}(x_1^0,x_2^0)(x_2-x_2^0)$$
$$\dot{x}_2(t)=g_{x_1}(x_1^0,x_2^0)(x_1-x_1^0)+g_{x_2}(x_1^0,x_2^0)(x_2-x_2^0) \quad (2)$$

$$A=\begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{P_0}$$

$$\begin{cases} \lambda^2+p\lambda+q=0 \\ p=-(f_{x_1}+g_{x_2})\big|_{P_0} \\ q=\det A \end{cases}$$

$p>0$ 且 $q>0$

平衡点$P_0$稳定(对2,1)

$p<0$ 或 $q<0$

平衡点$P_0$不稳定(对2,1)

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right) \qquad \dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\begin{cases} f(x_1,x_2)\equiv r_1x_1\left(1-\dfrac{x_1}{N_1}-\sigma_1\dfrac{x_2}{N_2}\right)=0 \\ g(x_1,x_2)\equiv r_2x_2\left(1-\sigma_2\dfrac{x_1}{N_1}-\dfrac{x_2}{N_2}\right)=0 \end{cases}$$

平衡点： $P_1(N_1,0),\ P_2(0,N_2),$

$$P_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right),P_4(0,0)$$

仅当$\sigma_1, \sigma_2<1$或$\sigma_1, \sigma_2>1$时，$P_3$才有意义

平衡点稳定性分析

$$A=\begin{bmatrix} f_{x1} & f_{x2} \\ g_{x1} & g_{x2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_1\left(1-\frac{2x_1}{N_1}-\frac{\sigma_1 x_2}{N_2}\right) & -\frac{r_1\sigma_1 x_1}{N_2} \\ -\frac{r_2\sigma_2 x_2}{N_1} & r_2\left(1-\frac{\sigma_2 x_1}{N_1}-\frac{2x_2}{N_2}\right) \end{bmatrix}$$

$$p=-(f_{x1}+g_{x2})\Big|_{p_i},\quad i=1,2,3,4$$

$$q=\det A\Big|_{p_i},\quad i=1,2,3,4$$

平衡点$P_i$稳定条件：$p>0$ 且 $q>0$

种群竞争模型的平衡点及稳定性

| 平衡点 | $p$ | $q$ | 稳定条件 |
|---|---|---|---|
| $p_1(N_1,0)$ | $r_1-r_2(1-\sigma_2)$ | $-r_1r_2(1-\sigma_2)$ | $\sigma_1<1,\ \sigma_2>1$ |
| $p_2(0,N_2)$ | $-r_1(1-\sigma_1)+r_2$ | $-r_1r_2(1-\sigma_1)$ | $\sigma_1>1,\ \sigma_2<1$ |
| $p_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$ | $\frac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$ | $\frac{r_1r_2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$ | $\sigma_1<1,\sigma_2<1$ |
| $p_4(0,0)$ | $-(r_1+r_2)$ | $r_1r_2$ | 不稳定 |

$P_1,P_2$是一个种群存活而另一灭绝的平衡点

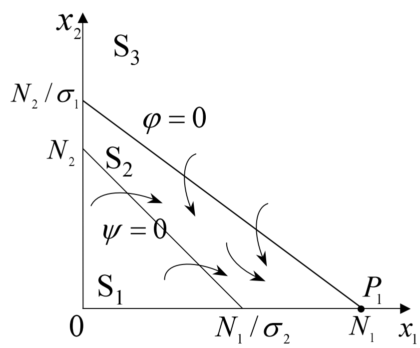
$P_3$是两种群共存的平衡点

平衡点稳定性的相轨线分析

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)$$
$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\varphi(x_1,x_2)=1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}$$
$$\psi(x_1,x_2)=1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}$$

(1)设$\sigma_1<1,\sigma_2>1$，画相轨线



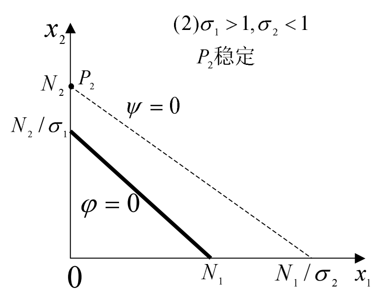

$S_1:\dot{x}_1>0,\dot{x}_2>0$

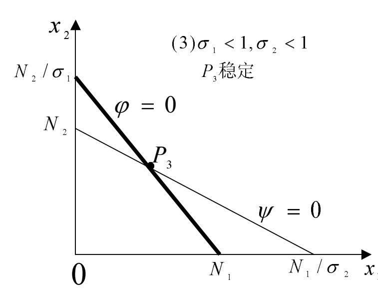
$S_2:\dot{x}_1>0,\dot{x}_2<0$

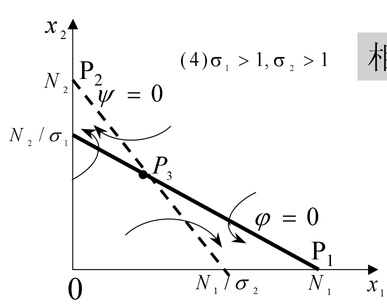
$S_3:\dot{x}_1<0,\dot{x}_2<0$

从任意点出发(t=0)的相轨线都趋向(t→∞)$P_1(N_1,0)$

$P_1(N_1,0)$是稳定平衡点




相轨线或者趋向$P_1$, 或者趋向$P_2$

⇨ $P_1, P_2$都不稳定

$P_1$稳定的条件：$\sigma_1<1, \sigma_2>1$

结果解释

• $P_1$稳定的条件：$\sigma_1<1, \sigma_2>1$

对于消耗甲的资源而言，乙(相对于$N_2$)是甲(相对于$N_1$)的 $\sigma_1$ 倍。

$\sigma_1 <1$ ⇨ 对甲增长的阻滞作用，乙小于甲 ⇒乙的竞争力弱

$\sigma_2>1$ ⇒甲的竞争力强

甲达到最大容量，乙灭绝

• $P_2$稳定的条件：$\sigma_1>1, \sigma_2<1$

• $P_3$稳定的条件：$\sigma_1<1, \sigma_2<1$

通常$\sigma_1\approx1/\sigma_2$， $P_3$稳定条件不满足

## §4　种群的相互依存

甲乙两种群的相互依存有三种形式

1) 甲可以独自生存，乙不能独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。

2) 甲乙均可以独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。

3) 甲乙均不能独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。

模型假设

• 甲可以独自生存，数量变化服从Logistic规律；甲乙一起生存时乙为甲提供食物、促进增长。

• 乙不能独自生存；甲乙一起生存时甲为乙提供食物、促进增长；乙的增长又受到本身的阻滞作用(服从Logistic规律)。

模型

$$\dot{x}_1(t_1) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

乙 (相对于$N_2$)为甲提供的食物是甲(相对于$N_1$)消耗的 $\sigma_1$ 倍

种群依存模型的平衡点及稳定性

| 平衡点 | $p$ | $q$ | 稳定条件 |
|---|---|---|---|
| $P_1(N_1,0)$ | $r_1 - r_2(\sigma_2 - 1)$ | $-r_1 r_2(\sigma_2 - 1)$ | $\sigma_2 < 1, \sigma_1\sigma_2 < 1$ |
| $P_2\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$ | $\frac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$ | $\frac{r_1 r_2(1-\sigma_1)(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$ | $\sigma_1 < 1, \sigma_2 > 1, \sigma_1\sigma_2 < 1$ |
| $P_3(0,0)$ | $-r_1 + r_2$ | $-r_1 r_2$ | 不稳定 |

$P_2$是甲乙相互依存而共生的平衡点

平衡点$P_2$稳定性的相轨线

$$P_2\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$$

$$\dot{x}_1(t_1)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}+\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)=r_1x_1\varphi(x_1,x_2)\quad \dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)=r_2x_2\psi(x_1,x_2)$$

稳定条件 ：

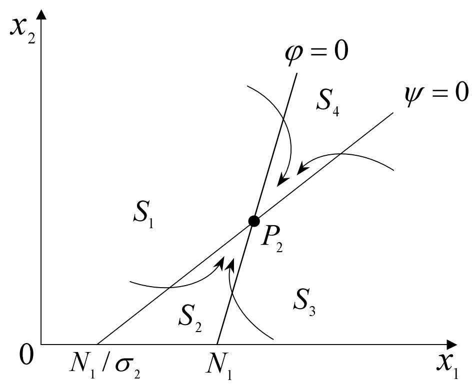
$\sigma_1<1,\sigma_2>1,\sigma_1\sigma_2<1$

$S_1:\dot{x}_1>0,\dot{x}_2<0;$

$S_2:\dot{x}_1>0,\dot{x}_2>0;$

$S_3:\dot{x}_1<0,\dot{x}_2>0;$

$S_4:\dot{x}_1<0,\dot{x}_2<0.$




结果解释

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)\qquad P_2\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$$

$P_2$点稳定条件：$\sigma_1<1,\sigma_2>1,\sigma_1\sigma_2<1$

$\sigma_2>1$ ~甲必须为乙提供足够的食物(乙不能独立生存)——甲(相对于$N_1$)为乙提供的食物是乙(相对于$N_2$)消耗的 $\sigma_2$

$\sigma_1\sigma_2<1$ ~ $\sigma_2>1$ 前提下$P_2$存在的必要条件

$\sigma_1<1$ ~ $\sigma_2>1$ ,$\sigma_1\sigma_2<1$ 的必然结果

## §5 种群的弱肉强食
## (食饵-捕食者模型)

- 种群甲靠丰富的天然资源生存，种群乙靠捕食甲为生，形成食饵-捕食者系统，如食用鱼和鲨鱼，美洲兔和山猫。

- 模型的历史背景——一次大战期间地中海渔业的捕捞量下降，但是其中鲨鱼的比例却在增加，为什么？

---

食饵-捕食者模型**(Volterra)**

食饵（甲）数量 $x(t)$，捕食者（乙）数量 $y(t)$

甲独立生存的增长率 $r$

$$\dot{x} = rx$$

乙使甲的增长率减小，减小量与 $y$ 成正比

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x = rx - axy \quad (1)$$

乙独立生存的死亡率 $d$

$$\dot{y} = -dy$$

甲使乙的死亡率减小，减小量与 $x$ 成正比

$$\dot{y}(t) = -(d - bx)y = -dy + bxy \quad (2)$$

在初始条件 $x(0) = x_0', y(0) = y_0'$ 下求解(1),(2)

**(1),(2)** 无解析解

用**MATLAB**解常微分方程（食饵-捕食者模型）

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x \qquad \dot{x}_1 = (r - ax_2)x_1$$
$$\dot{y}(t) = (-d + bx)y \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = (-d + bx_1)x_2$$
$$x(0) = x_0', \ y(0) = y_0' \qquad x_1(0) = x_{10}, \ x_2(0) = x_{20}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r - ax_2, & 0 \\ 0, & -d + bx_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

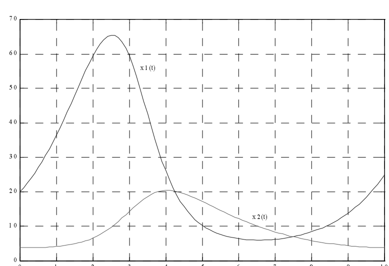
MATLAB 5.3.lnk

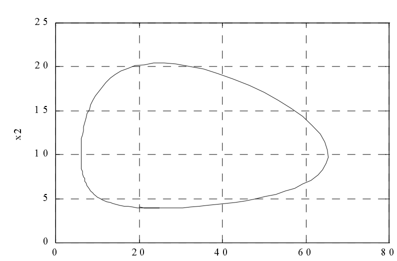
shiyan42

$$x = [x_1, x_2]^T \qquad \dot{x} = Ax, \quad A = diag[r - ax_2, -d + bx_1]$$
$$x(0) = [x_{10}, x_{20}]^T$$

$$r = 1, d = 0.5, a = 0.1, b = 0.02, x_{10} = 20, x_{20} = 4$$

| t | x1 | x2 |
|---|---|---|
| 0 | 20.0000 | 4.0000 |
| 0.1000 | 21.2406 | 3.9651 |
| 0.2000 | 22.5649 | 3.9405 |
| 0.3000 | 23.9763 | 3.9269 |
| 0.4000 | 25.4782 | 3.9247 |
| ………………………… | | |
| 2.2000 | 62.8469 | 7.6873 |
| 2.3000 | 64.1077 | 8.3061 |
| 2.4000 | 64.9786 | 8.9920 |
| 2.5000 | 65.3992 | 9.7450 |
| 2.6000 | 65.3076 | 10.5643 |
| ………………………… | | |
| 9.5000 | 18.4416 | 4.0394 |
| 9.6000 | 19.5821 | 3.9907 |
| 9.7000 | 20.8007 | 3.9520 |
| 9.8000 | 22.1010 | 3.9237 |
| 9.9000 | 23.4865 | 3.9064 |
| 10.0000 | 24.9604 | 3.9004 |



食饵-捕食者模型

$\dot{x}(t)=(r-ay)x$  $\dot{y}(t)=-(d-bx)y$

$x(0)=x_0', y(0)=y_0'$  $r=1, d=0.5, a=0.1, b=0.02, x_0=20, y_0=4$

计算结果（数值，图形）

⇩ 观察，猜测

**x(t),y(t)**是周期函数，相图**(x,y)**是封闭曲线；

**x(t),y(t)**的周期约为**9.6;**

$\mathbf{x_{max}=65.5, x_{min}=6, y_{max}=20.5, y_{min}=3.9.}$

用数值积分可算出**x(t), y(t)**一周期的平均值

**x(t)**的平均值约为**25, y(t)**的平均值约为**10**

食饵-捕食者模型的平衡点及其稳定性

$$\dot{x}(t)=(r-ay)x=rx-axy$$
$$\dot{y}(t)=-(d-bx)y=-dy+bxy$$

平衡点

$$P(\frac{d}{b},\frac{r}{a}),\ P'(0,0)$$

稳定性分析

$$A=\begin{bmatrix} r-ax & -ax \\ by & -d+bx \end{bmatrix}\Bigg|_P=\begin{bmatrix} 0 & -ad/b \\ br/a & 0 \end{bmatrix}$$

$p=0, q>0$
临界状态

$$A=\begin{bmatrix} r-ax & -ax \\ by & -d+bx \end{bmatrix}\Bigg|_{P'}=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

$q<0$
$P'$不稳定

**P**点稳定性不能用近似线性方程分析

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (r-ay)x \\ \dot{y}(t) &= (-d+bx)y\end{aligned} \quad (1)$$

消去$dt$ $\Rightarrow$ $$\frac{dx}{dy} = \frac{x(r-ay)}{y(-d+bx)} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{-d+bx}{x}dx = \frac{r-ay}{y}dy$$

$$\Rightarrow -d\ln x + bx = r\ln y - ay + c_1$$

$\Rightarrow$ (2)的通解 $(x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay}) = c$ （3）

$c$由初始条件确定

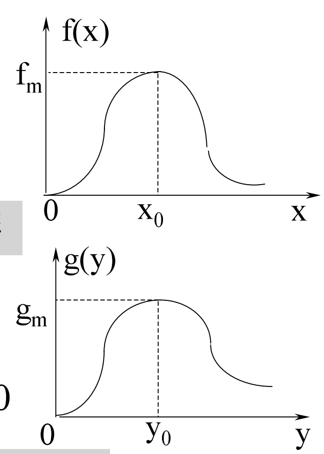
用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

$(x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay}) = c$ (3)

$f(x) = x^d e^{-bx}, g(y) = y^r e^{-ay}$

$f(x)g(y) = c$ ~ 相轨线

在相平面上讨论相轨线（3）的图形

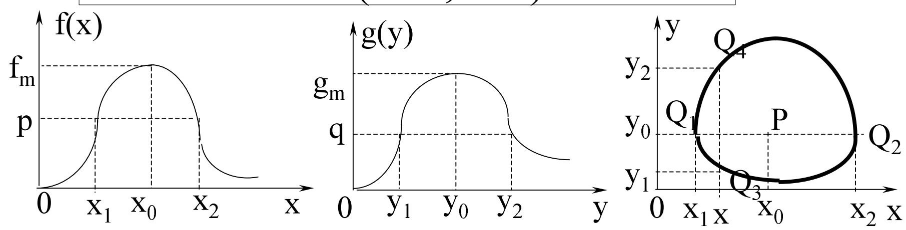



$$f(0) = f(\infty) = 0, f(x_0) = f_m, x_0 = \frac{d}{b} = 25$$

$$g(0) = g(\infty) = 0, g(y_0) = g_m, y_0 = \frac{r}{a} = 10$$

$c > f_m g_m$时(3)无图形,以下设$c \le f_m g_m$

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性




$c = f_m g_m$ ⇨ $x=x_0, y=y_0$ ⇨ (3)退化为P点——中心

$c < f_m g_m$ ⇨ 设$c = p g_m$ 令$y=y_0$ ⇨ $g(y) = g_m$ $f(x)=p<f_m$

⇨ 存在$x_1<x_0<x_2$, 使$f(x_1)=f(x_2)=p$ ⇨ $\boldsymbol{Q_1(x_1,y_0), Q_2(x_2,y_0)}$

考察$x \in [x_1, x_2]$ ⇨ $f(x)g(y) = pg_m$ $f(x)>p$ ⇨ $g(y) = q < g_m$

⇨ 存在$y_1<y_0<y_2$,使$g(y_1)=g(y_2)=q$ ⇨ $\boldsymbol{Q_3(x,y_1), Q_4(x,y_2)}$

$x$是$[x_1, x_2]$内任意点 ⇨ 相轨线（**3**）是封闭曲线族

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

相轨线是封闭曲线 ⟺ **x(t),y(t)**是周期函数**(**周期记 **T)**

求**x(t),y(t)**在一周期的平均值 $\bar{x}, \bar{y}$

$\dot{y}(t) = (-d+bx)y$ ⇨ $x(t) = \frac{1}{b}\left(\frac{\dot{y}}{y} + d\right)$

⇨ $\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}\left(\frac{\ln y(T) - \ln y(0)}{b} + \frac{dT}{b}\right)$ ⇨ $\bar{x} = \frac{d}{b}$

$\dot{x}(t) = (r-ay)x$ ⇨ ····· ⇨ $\bar{y} = \frac{r}{a}$

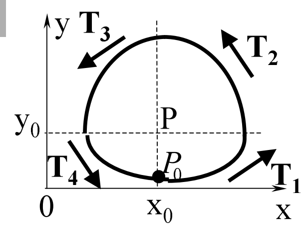
轨线中心 $P(x_0, y_0): x_0 = \frac{d}{b}, y_0 = \frac{r}{a}$ ⇨ $\bar{x} = x_0, \quad \bar{y} = y_0$

## 模型解释

$\dot{x}(t)=(r-ay)x$　　$\dot{y}(t)=-(d-bx)y$

$x(0)=x_0',\ y(0)=y_0'$　　$P_0(x_0',y_0')$

$x_0=\dfrac{d}{b},\ y_0=\dfrac{r}{a}$




$T_1: x(t)\uparrow\ y(t)\uparrow$　　$T_2: x(t)\downarrow\ y(t)\uparrow$

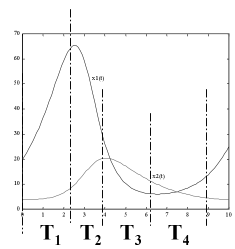
$T_3: x(t)\downarrow\ y(t)\downarrow$　　$T_4: x(t)\uparrow\ y(t)\downarrow$

捕食者数量 $\bar{y}=\dfrac{r}{a}$　　***r*** ~食饵增长率

***a*** ~捕食者掠取食饵能力

食饵数量 $\bar{x}=\dfrac{d}{b}$　　***d*** ~捕食者死亡率

***b*** ~食饵供养捕食者能力




## 模型解释

$\bar{x}=d/b,\ \bar{y}=r/a$

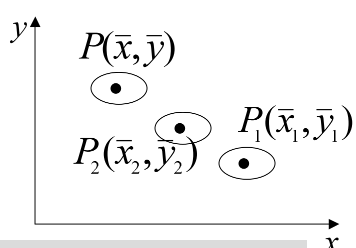
一次大战期间地中海渔业的捕捞量下降，
但是其中鲨鱼的比例却在增加，为什么？

平时捕捞　　$r\to r-\varepsilon_1,\ d\to d+\varepsilon_1$

$\bar{x}_1>\bar{x},\ \bar{y}_1<\bar{y}$

战时捕捞　　$r\to r-\varepsilon_2,\ d\to d+\varepsilon_2,\ \varepsilon_2<\varepsilon_1$

$\bar{x}_2<\bar{x}_1,\ \bar{y}_2>\bar{y}_1$　$\Rightarrow$　食饵(鱼)减少，捕食者(鲨鱼)增加




$\bar{x}_1>\bar{x},\ \bar{y}_1<\bar{y}$　表明：对食饵害虫—捕食者益虫系统，用杀虫剂会使害虫增加，益虫减少。

## 食饵-捕食者模型(Volterra)的缺点与改进

- 相轨线是封闭曲线，结构不稳定——一旦离开某一条闭轨线，就进入另一条闭轨线，不恢复原状。

- 自然界存在的周期性平衡生态系统是结构稳定的 ——偏离周期轨道后，内部制约使系统恢复原

**Volterra模型** $\dot{x}(t)=(r-ay)x \quad \dot{y}(t)=-(d-bx)y$

改写

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}\right)$$

加Logistic项

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

结构稳定

---

种群模型几种形式

种群的相互竞争

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)$$
$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

种群的相互依存

$$\dot{x}_1(t_1)=r_1x_1\left(\pm1-\frac{x_1}{N_1}+\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)$$
$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(\pm1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

种群的弱肉强食

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)$$
$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

作业：第6章习题（221页）
3，8，15（1-3）

大作业候选题5：食饵-捕食者模型

1）**Volterra**模型 $\dot{x}(t)=(r-ay)x$ $\dot{y}(t)=-(d-bx)y$

设定参数 $r=1, d=0.5, a=0.1, b=0.02, x_0'=20, y_0'=4$

画图(x(t),y(t)及轨线), 求周期, x,y的最大(小)值。

2）改变参数，讨论对周期, x,y的最大(小)值的影响。

3）模型增加**Logistic**项，适当设定参数，通过画图求解, 讨论它与**Volterra**模型的区别。