计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：　高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：　李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第四节 龙伯格求积公式

(Romberg Integration)

前述复化求积公式我们是选取被积函数 $f(x)$ 在区间 $I=[a,b]$ 上的 <u>等距节点</u> 剖分，每个小区间段 $I_j=[x_j,x_{j+1}], j=0,1,2,\cdots,n-1$ 的长度即步长 (Stepsize) 是恒定的： $h_j=x_{j+1}-x_j\equiv h=\dfrac{b-a}{n}, j=0,1,2,\cdots,n-1.$
因此在使用求积公式之前必须先确定步长．但是步长太太远会降低精度，步长太小太细又会增加计算量，看来似乎鱼和熊掌不可兼得了.

实际问题中我们采用的改进策略是“变步长”，即步长由静态固定变为动态变化的，变化的方式又可以千变万化：可以步步不同，也可以有几步相同．不同的步长之间可以彼此无关，也可以存在某种递推迭代关系．*二分变步长法*就是将步长逐次减半的变步长法．这一方法应用于梯形公式则整体求积公式称为*二分变步长复化梯形公式*或梯形公式的递推化；应用于辛普生公式则整体求积公式称为*二分变步长复化辛普生公式*或辛普生公式的递推化．

- 4.1. **二分变步长梯形公式** (Bisected-Stepsize Trapezoidal Quadrature)

【 定义 1 】 二分变步长梯形公式 (Bisected-Stepsize Trapezoidal Quadrature) 设被积函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上具有 2 阶连续导函数： $f^{''}(x) \in C^0[a,b] \bigcap C^1(a,b)$, 首先选取 $f(x)$ 在区间 $I=[a,b]$ 上的 <u>等距节点</u> 剖分：
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$

这里步长 $h_j = x_{j+1} - x_j \equiv h = \dfrac{b-a}{n}, j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 恒定. 即节点可表示为

$$x_j = a + jh, \quad x_{j+1} = a + (j+1)h, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \tag{4.1}$$

中节点 即每个区间段 $I_j = [x_j, x_{j+1}], j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 的中点可表达为

$$x_{j+\frac{1}{2}} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2} = \frac{a + jh + a + (j+1)h}{2} = a + (j + \frac{1}{2})h \tag{4.2}$$

将每个区间段 $I_j = [x_j, x_{j+1}], j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 作二分：

$$I_j = [x_j, x_{j+1}] = [x_j, x_{j+\frac{1}{2}}] \bigcup [x_{j+\frac{1}{2}}, x_{j+1}], j = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \tag{4.3}$$

对二分前后的三段区间 $[x_j, x_{j+1}], [x_j, x_{j+\frac{1}{2}}], [x_{j+\frac{1}{2}}, x_{j+1}]$ 分别应用梯形公式，即二分前积分值

$$\begin{aligned} T_1^j &= \frac{x_{j+1} - x_j}{2}(f(x_j) + f(x_{j+1})) \\ &= \frac{h}{2}(f(x_j) + f(x_{j+1})) = \frac{h}{2}(f_j + f_{j+1}) \end{aligned} \tag{4.4}$$

二分后积分值

$$
\begin{aligned}
T_2^j = {} & \frac{x_{j+\frac{1}{2}} - x_j}{2}(f(x_j) + f(x_{j+\frac{1}{2}})) + \\
& \frac{x_{j+1} - x_{j+\frac{1}{2}}}{2}(f(x_{j+\frac{1}{2}}) + f(x_{j+1})) \\
= {} & \frac{h/2}{2}(f(x_j) + f(x_{j+\frac{1}{2}})) + \frac{h/2}{2}(f(x_{j+\frac{1}{2}}) + f(x_{j+1})) \\
= {} & \frac{h}{4}(f(x_j) + f(x_{j+\frac{1}{2}})) + \frac{h}{4}(f(x_{j+\frac{1}{2}}) + f(x_{j+1})) \\
= {} & \frac{h}{4}(f(x_j) + 2f(x_{j+\frac{1}{2}}) + f(x_{j+1})) \\
= {} & \frac{h}{4}(f(x_j) + f(x_{j+1})) + \frac{h}{2}f(x_{j+\frac{1}{2}}) \\
= {} & \frac{1}{2}T_1^j + \frac{h}{2}f_{j+\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

于是我们得到二分前后的梯形公式的递推化关系：

$$T_2^j = \frac{1}{2}T_1^j + \frac{h}{2}f_{j+\frac{1}{2}}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \tag{4.6}$$

将上式对 $j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 作加和得整体积分区间上二分前后的梯形公式的递推化关系：

$$\begin{aligned} T_{2n} &:= \sum_{j=0}^{n-1} T_2^j = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} T_1^j + \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{j+\frac{1}{2}} \\ &:= \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{j+\frac{1}{2}}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \end{aligned} \tag{4.7}$$

这里步长 $h = \dfrac{b-a}{n}, j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 代表 <u>二分前</u> 的步长.

【定理 1】 二分变步长梯形公式的余项事后估计
(Afterwards Estimation) 二分变步长梯形公式

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx T_{2n} \tag{4.8}$$

的积分余项估计是:

$$R_{T_{2n}} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) \tag{4.9}$$

从而有更精细的改进二分变步长梯形公式

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n \quad (4.10)$$

这里因积分余项 (误差) 是直接用计算结果 (二分前后的求积公式值) 来估计的，我们称之为 <u>事后估计法</u>(Afterwards Estimation).

【**证明**】 由梯形公式的积分余项估计和微分中值定理，二分前余项

$$
\begin{aligned}
R_{T_n} &= -\frac{h^2}{12}(b-a)f^{''}(\zeta_n) \\
&\approx -\frac{h^2}{12}(f^{'}(b)-f^{'}(a))
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

同理二分后余项

$$
\begin{aligned}
R_{T_{2n}} &= -\frac{(h/2)^2}{12}(b-a)f^{''}(\zeta_{2n}) \\
&\approx \frac{1}{4}\cdot(-\frac{h^2}{12}(f^{'}(b)-f^{'}(a))) = \frac{1}{4}R_{T_n}
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

即是

$$\begin{aligned}
&\frac{R_{T_{2n}}}{R_{T_n}} = \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} = \frac{1}{4} \\
&\Rightarrow I - T_{2n} = \frac{1}{4}(I - T_n) \\
&\Rightarrow \frac{3}{4} I = T_{2n} - \frac{1}{4} T_n \\
&\Rightarrow I = \frac{4}{3} T_{2n} - \frac{1}{3} T_n
\end{aligned} \tag{4.13}$$

这是比 $I \approx T_{2n}$ 更精细的求积公式. 且由此有余项事后估计

$$R_{T_{2n}} = I - T_{2n} = \frac{4}{3} T_{2n} - \frac{1}{3} T_n - T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) \tag{4.14}$$

【证毕】

【定理 2】 改进二分变步长梯形公式即是复化辛普生公式

改进二分变步长梯形公式即是复化辛普生公式

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n \tag{4.15}$$

【证明】 逐步代入改进二分变步长梯形公式、复化梯形

公式和复化辛普生公式直接计算有

$$
\begin{aligned}
I &\approx \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n \\
&= \frac{4}{3}(\frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{j+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}T_n \\
&= \frac{2}{3}T_n + \frac{2h}{3}\sum_{j=0}^{n-1} f_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}T_n \\
&= \frac{1}{3}T_n + \frac{2h}{3}\sum_{j=0}^{n-1} f_{j+\frac{1}{2}} + \frac{2h}{3}\sum_{j=0}^{n-1} f_{j+\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{h}{6}(f(a)+f(b)) + \frac{h}{3}\sum_{j=1}^{n-1} f_j + \frac{2h}{3}\sum_{j=0}^{n-1} f_{j+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{h}{6}(f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{n-1} f_j + 4\sum_{j=0}^{n-1} f_{j+\frac{1}{2}}) \\
&= S_n
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

【证毕】

- 4.2. **龙伯格公式** (Romberg Quadrature)

与上边的推导一样，我们可以定义二分变步长辛普生公式作为每个等距区间段上区间二分后的辛普生公式之和 $S_{2n}=\sum_{j=0}^{n-1}S_2^j$. 并且完全类似，我们对应有下述命题成立.

【定理 3】 二分变步长辛普生公式的余项事后估计 (Afterwards Estimation) 二分变步长辛普生公式

$$I=\int_a^b f(x)dx\approx S_{2n} \tag{4.17}$$

的积分余项事后估计是：

$$R_{S_{2n}}\approx\frac{1}{15}(S_{2n}-S_n) \tag{4.18}$$

从而有更精细的改进二分变步长辛普生公式

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx S_{2n} + \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n) = \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n \quad (4.19)$$

【证明】 由辛普生公式的积分余项估计和微分中值定理，二分前余项

$$R_{S_n} = -\frac{h^4}{2880}(b-a)f^{(4)}(\zeta_n) \approx -\frac{h^4}{2880}(f^{'''}(b) - f^{'''}(a)) \tag{4.20}$$

同理二分后余项

$$\begin{aligned} R_{S_{2n}} &= -\frac{(h/2)^4}{2880}(b-a)f^{(4)}(\zeta_{2n}) \\ &\approx \frac{1}{16}\cdot(-\frac{h^4}{2880}(f^{'''}(b) - f^{'''}(a))) = \frac{1}{16}R_{S_n} \end{aligned} \tag{4.21}$$

即是

$$
\begin{aligned}
\frac{R_{S_{2n}}}{R_{S_n}} &= \frac{I - S_{2n}}{I - S_n} = \frac{1}{16} \\
\Rightarrow I - S_{2n} &= \frac{1}{16}(I - S_n) \\
\Rightarrow \frac{15}{16} I &= S_{2n} - \frac{1}{16} S_n \\
\Rightarrow I &= \frac{16}{15} S_{2n} - \frac{1}{15} S_n
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

这是比 $I \approx S_{2n}$ 更精细的求积公式. 且由此有余项事后估计

$$
R_{S_{2n}} = I - S_{2n} = \frac{16}{15} S_{2n} - \frac{1}{15} S_n - S_{2n} \approx \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n) \tag{4.23}
$$

【 定理 4 】 改进二分变步长辛普生公式即是复化 Cotes 公式 改进二分变步长辛普生公式即是复化 Cotes 公式

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx C_n = \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n \tag{4.24}$$

【 证明略】

运用和上边完全相似的推演，我们将二分前后的 Cotes 公式进行“凸线性组合”形式的改进，则可以获得较复化 Cotes 公式更精细的机械求积公式，即改进二分变步长 Cotes 公式，赋以龙伯格之名.

【定义 2】 龙伯格公式 (Romberg Quadrature)　二分变步长 Cotes 公式

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx C_{2n} \tag{4.25}$$

的积分余项事后估计是：

$$R_{C_{2n}} \approx \frac{1}{63}(C_{2n} - C_n) \tag{4.26}$$

从而有更精细的改进二分变步长 Cotes 公式

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx C_{2n} + \frac{1}{63}(C_{2n} - C_n) = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n := R_n \tag{4.27}$$

通常称之为 龙伯格公式 (Romberg Quadrature), 并记为

$R_n = \dfrac{64}{63}C_{2n} - \dfrac{1}{63}C_n.$

事实上，由辛普生公式的积分余项估计和微分中值定理，二分前余项

$$\begin{aligned} R_{Cn} &= -\frac{h^6}{1935360}(b-a)f^{(6)}(\zeta_n) \\ &\approx -\frac{h^6}{1935360}(f^{(5)}(b)-f^{(5)}(a)) \end{aligned} \tag{4.28}$$

同理二分后余项

$$\begin{aligned} R_{C_{2n}} &= -\frac{(h/2)^6}{1935360}(b-a)f^{(6)}(\zeta_{2n}) \\ &\approx \frac{1}{64}\cdot(-\frac{h^6}{1935360}(f^{(5)}(b)-f^{(5)}(a))) = \frac{1}{64}R_{C_n} \end{aligned} \tag{4.29}$$

即是

$$\begin{aligned} \frac{R_{C_{2n}}}{R_{C_n}} &= \frac{I - C_{2n}}{I - C_n} = \frac{1}{64} \\ \Rightarrow I - C_{2n} &= \frac{1}{64}(I - C_n) \\ \Rightarrow \frac{63}{64} I &= C_{2n} - \frac{1}{16} C_n \\ \Rightarrow I &= \frac{64}{63} C_{2n} - \frac{1}{63} C_n \end{aligned} \tag{4.30}$$

这是比 $I \approx S_{2n}$ 更精细的求积公式. 且由此有余项事后估计

$$R_{C_{2n}} = I - C_{2n} = \frac{64}{63} C_{2n} - \frac{1}{63} C_n - C_{2n} \approx \frac{1}{63}(C_{2n} - C_n) \tag{4.31}$$

上述结果可归纳为下面的简表.

表 1： 龙伯格递推算法表

j	T_{2^j}	$S_{2^{j-1}}$	$C_{2^{j-2}}$	$R_{2^{j-3}}$
0	T_1			
1	T_2	S_1		
2	T_4	S_2	C_1	
3	T_8	S_4	C_2	R_1
4	T_{16}	S_8	C_4	R_2

表 2： 龙伯格公式及余项表

公式	递推关系	事后估计	逼近阶
梯形	$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{j+\frac{1}{2}}$		h^2
辛普生	$S_n = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$	$\frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$	h^4
柯提斯	$C_n = \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n$	$\frac{1}{15}(S_{2n} - S_n)$	h^6
龙伯格	$R_n = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n$	$\frac{1}{63}(C_{2n} - C_n)$	h^8

请同学们思考，由龙伯格公式近似值继续向下递推，获得新的近似值，形式依然是 R_{2n} 与 R_n 的（广义）凸线性组合，试问组合系数是什么？

答 由逼近阶的递增规律，我们有逼近阶 h^8，故因 $2^8 = 256$，我们有新的近似值

$$I = \frac{256}{255}R_{2n} - \frac{1}{255}R_n$$

这是比 $I \approx R_{2n}$ 更精细的求积公式．且由此有余项事后估计

$$R_{R_{2n}} \approx \frac{1}{255}(R_{2n} - R_n)$$

- 4.4. **例题选讲**

龙伯格求积算法公式可以预先建立现成的 Matlab 命令以供调用. 设存储为 Matlab 文件, 命名为 romberg.m.

命令格式为:

function I = Romberg(fun,a,b,tol)

【例 1】 用龙伯格求积算法计算积分使误差小于 10^{-5}.

(1) 设函数 $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x}$，求它在区间 $[0,1]$ 上的龙伯格积分

$$\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x}dx \approx R \tag{4.44a}$$

【解】 可以用 Matlab 编程求解如下：

源程序：先根据积分核形式建立函数文件：

```
function y = p1591(x)
y = 2./sqrt(pi).*exp(-x);
```

再调用龙伯格求积算法程序计算函数在给定区间上的积分：

Romberg(@p1591,0,1)

运行结果为：

ans =

1.42621871546306

(2) 设函数 $f(x) = xsinx$ ， 求它在区间 $[0, 2\pi]$ 上的龙伯格积分

$$\int_0^{2\pi} xsinxdx \approx R \tag{4.44b}$$

【解】 可以用 Matlab 编程求解如下：

源程序：先根据积分核形式建立函数文件：

```
function y = p1592(x)
y = x.*sin(x);
```

再调用龙伯格求积算法程序计算函数在给定区间上的积分：

Romberg(@p1592,0,2π)

运行结果为：

ans =

-1.923670693721790e-016