第四章　静态优化模型

——微分法建模

静 态 优 化 模 型

- 现实世界中普遍存在着优化问题
- 静态优化问题指最优解是数(不是函数)
- 建立静态优化模型的关键之一是根据建模目的确定恰当的目标函数
- 求解静态优化模型一般用微分法

§1　存贮模型

问题

配件厂为装配线生产若干种产品，轮换产品时因更换设备要付生产准备费，产量大于需求时因积压资金要付贮存费。该厂生产能力非常大，即所需数量可在很短时间内产出。

今已知某产品的日需求量为100件，生产准备费5000元，贮存费每日每件1元。试安排该产品的生产计划，即多少天生产一次（生产周期），每次产量多少，使总费用最小。

要求

不只是回答问题，而且要建立生产周期、产量与需求量、准备费、贮存费之间的关系。

问题分析与思考

日需求100件，生产准备费5000元，贮存费每日每件1元。

- 每天生产一次，每次100件，无贮存费，准备费5000元，故每天费用为**5000**元。

- **10**天生产一次，每次1000件，贮存费900+800+…+100=4500元，准备费5000元，总计9500元。

平均每天费用为**950**元

- **50**天生产一次，每次5000件，贮存费4900+4800+…+100=122500元，准备费5000元，总计127500元。

平均每天费用为**2550**元

10天生产一次平均每天费用最小吗?

问题分析与思考

- 周期短，产量小 贮存费少，准备费多
- 周期长，产量大 准备费少，贮存费多

存在最佳的周期和产量，使总费用（二者之和）最小

- 这是一个优化问题，关键在建立目标函数。

显然不能用一个周期的总费用作为目标函数

目标函数——每天总费用的平均值

模型假设

1. 产品每天的需求量为常数 r；
2. 每次生产准备费为 c_1, 每天每件产品贮存费为 c_2；
3. T天生产一次(周期为T), 每次生产Q件，且当贮存量降到零时，Q件产品立即生产出来(生产时间不计)；
4. 为方便起见，时间和产量都作为连续量处理。

建模目的

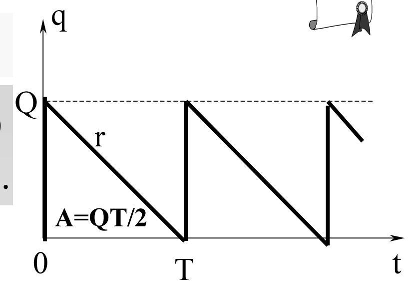
设 $\mathbf{r,c_1,c_2}$ 已知，求 **T,Q,** 使每天总费用的平均值最小。

模型建立

离散问题连续化

将贮存量表示为时间的函数q(t)

t=0生产Q件，贮存量q(0)=Q, q(t)以需求r的速率递减，直到q(T)=0.



$$\Rightarrow \quad Q = rT \qquad (1)$$

一周期贮存费

$$c_2\int_0^T q(t)dt = c_2 A$$

一周期总费用 $\overline{C} = c_1 + c_2\frac{Q}{2}T = c_1 + c_2\frac{rT^2}{2}$

每天总费用平均值（目标函数）

$$C(T) = \frac{\overline{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 rT}{2} \qquad (2)$$

模型求解

求 T 使 $C(T) = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 rT}{2} \rightarrow Min$

$$\frac{dC}{dT} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}} \qquad Q = rT = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

模型分析

$c_1\uparrow \Rightarrow T,Q\uparrow$ $\quad c_2\uparrow \Rightarrow T,Q\downarrow$ $\quad r\uparrow \Rightarrow T\downarrow,Q\uparrow$

模型应用

• 回答问题

c_1=5000(元), c_2=1(元/天•件), r=100(件/天)

$\Rightarrow$ T=10(天), Q=1000(件), C=1000(元)

- 经济批量订货公式（EOQ公式）

用于订货、供应、存贮情形

每天需求量 r，每次订货费为 c_1,每天每件贮存费为 c_2，T天订货一次(周期T), 每次订货Q件，且当贮存量降到零时，Q件立即到货。

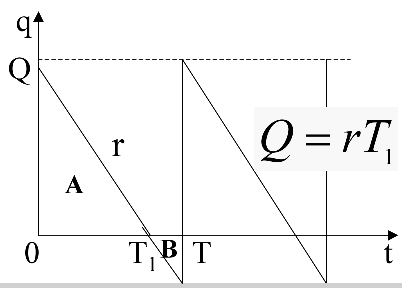
$$T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}} \qquad Q = rT = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

不允许缺货的存贮模型

- 问：为什么不考虑生产费用？在什么条件下才不考虑？

允许缺货的存贮模型

当贮存量降到零时仍有需求r, 出现缺货，造成损失



$$Q = rT_1$$

原模型假设：贮存量降到零时Q件立即生产出来(或立即到货)

现假设：允许缺货, 每天每件缺货损失费 **c_3**, 缺货需补足

周期T, $t=T_1$贮存量降到零

一周期贮存费 $c_2\int_0^{T_1} q(t)dt = c_2 A$

一周期缺货费 $c_3\int_{T_1}^{T} |q(t)|dt = c_3 B$

一周期总费用

$$\overline{C} = c_1 + c_2\frac{QT_1}{2} + c_3\frac{r(T-T_1)^2}{2}$$

一周期总费用 $\overline{C} = c_1 + \frac{1}{2}c_2 Q T_1 + \frac{1}{2}c_3 r(T - T_1)^2$

每天总费用平均值（目标函数） $C(T,Q) = \frac{\overline{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 Q^2}{2rT} + \frac{c_3 (rT - Q)^2}{2rT}$

求 ***T*,*Q*** 使 $C(T,Q) \to Min$

$\frac{\partial C}{\partial T} = 0, \frac{\partial C}{\partial Q} = 0$

为与不允许缺货的存贮模型相比，T记作T ', Q记作Q'

$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}\frac{c_2 + c_3}{c_3}}$　　$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_3}{c_2 + c_3}}$

允许缺货模型

$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}\frac{c_2 + c_3}{c_3}}$

$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_3}{c_2 + c_3}}$

不允许缺货模型

$T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}}$

$Q = rT = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$

记 $\mu = \sqrt{\frac{c_2 + c_3}{c_3}}$　　$T' = \mu T, \quad Q' = \frac{Q}{\mu}$

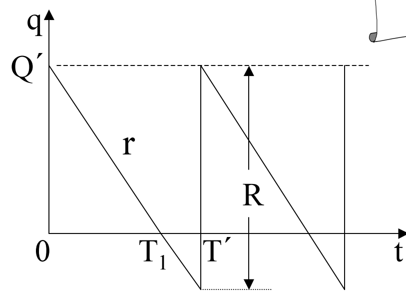
$\mu > 1 \Rightarrow T' > T, \quad Q' < Q$　　$c_3 \uparrow \Rightarrow \mu \downarrow$

不允许缺货 $\Leftrightarrow c_3 \to \infty \Rightarrow \mu \to 1 \Rightarrow T' \to T, \ Q' \to Q$

允许缺货模型

$$T' = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}\frac{c_2+c_3}{c_3}}$$

$$Q' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_3}{c_2+c_3}}$$



注意：缺货需补足

Q’是每周期初的存贮量

每周期的生产量（或订货量）为 $R = rT' = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}\frac{c_2+c_3}{c_3}}$

$R = \mu Q$ Q~不允许缺货时的产量(或订货量)

§2 森林救火

问题

森林失火后，要确定派出消防队员的数量。
队员多，森林损失小，救援费用大；
队员少，森林损失大，救援费用小。
综合考虑损失费和救援费，确定队员数量。

问题分析

记队员人数x, 失火时刻t=0, 开始救火时刻t_1, 灭火时刻t_2, 时刻t森林烧毁面积B(t).

- 损失费$f_1(x)$是x的减函数, 由烧毁面积$B(t_2)$决定.
- 救援费$f_2(x)$是x的增函数, 由队员人数和救火时间决定.

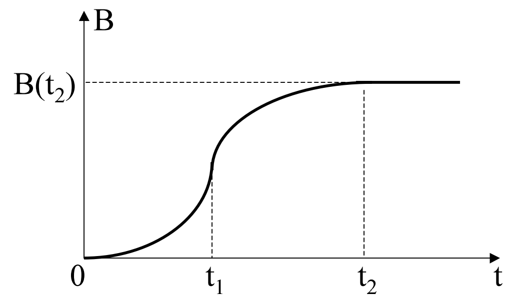
存在恰当的**x**使$\mathbf{f_1(x), f_2(x)}$之和最小

问题分析

• 关键是对B(t)作出合理的简化假设.

失火时刻t=0, 开始救火时刻t_1, 灭火时刻t_2, 画出时刻t森林烧毁面积B(t)的大致图形

分析B(t)比较困难, 转而讨论森林烧毁速度dB/dt.



模型假设

1）$0 \le t \le t_1$, dB/dt 与 t成正比，系数β (火势蔓延速度）

2）$t_1 \le t \le t_2$, β 降为β-λx (λ为队员的平均灭火速度）

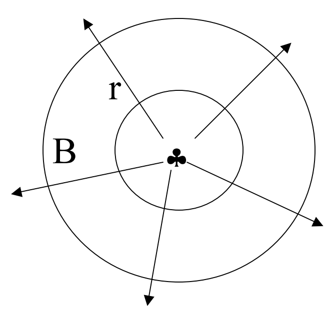
3）$f_1(x)$与$B(t_2)$成正比，系数c_1 (烧毁单位面积损失费）

4）每个队员的单位时间灭火费用c_2, 一次性费用c_3

假设1）的解释

火势以失火点为中心，均匀向四周呈圆形蔓延，半径 r与 t成正比

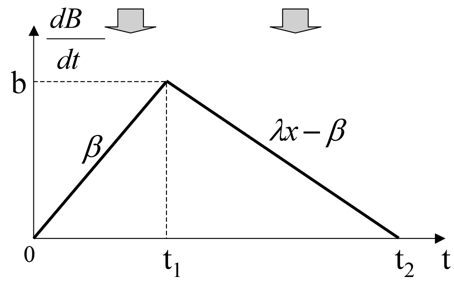
面积 B与 t^2成正比，dB/dt 与 t成正比.



模型建立

假设1）　假设2）

$$b=\beta t_1,\quad t_2-t_1=\frac{b}{\lambda x-\beta}$$



$$\Rightarrow\quad t_2=t_1+\frac{\beta t_1}{\lambda x-\beta}$$

$$B(t_2)=\int_0^{t_2}\dot B(t)dt=\frac{bt_2}{2}=\frac{\beta t_1^2}{2}+\frac{\beta^2t_1^2}{2(\lambda x-\beta)}$$

假设3）4）$\Rightarrow$ $f_1(x)=c_1B(t_2),\quad f_2(x)=c_2x(t_2-t_1)+c_3x$

目标函数——总费用　$C(x)=f_1(x)+f_2(x)$

模型建立

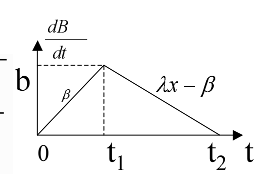
目标函数——总费用

$$C(x)=\frac{c_1\beta t_1^2}{2}+\frac{c_1\beta^2t_1^2}{2(\lambda x-\beta)}+\frac{c_2\beta t_1x}{\lambda x-\beta}+c_3x$$

其中$c_1,c_2,c_3,,t_1,\beta,\lambda$为已知参数

模型求解　求 $\boldsymbol{x}$使 $\boldsymbol{C(x)}$最小

$$\frac{dC}{dx}=0\quad\Rightarrow\quad x=\frac{\beta}{\lambda}+\beta\sqrt{\frac{c_1\lambda t_1^2+2c_2t_1}{2c_3\lambda^2}}$$



结果解释

- β/λ 是火势不继续蔓延的最少队员数

$$x=\frac{\beta}{\lambda}+\beta\sqrt{\frac{c_1\lambda t_1^2+2c_2t_1}{2c_3\lambda^2}}$$

结果解释

烧毁单位面积损失费c_1,每个队员的单位时间灭火费用c_2, 一次性费用c_3,开始救火时刻t_1,火势蔓延速度β , 队员的平均灭火速度λ.

$c_1, t_1, \beta\uparrow\to x\uparrow$　　$c_3, \lambda\uparrow\to x\downarrow$

$c_2\uparrow\to x\uparrow$　　为什么?

模型应用

c_1,c_2,c_3已知, t_1可估计　β ,λ可设置一系列数值

由模型决定队员数量x

§3　最优价格

问题

根据产品成本和市场需求，在产销平衡条件下确定商品价格，使利润最大

假设

1）产量等于销量，记作 **x**

2）收入与销量**x**成正比，系数 p即价格

3）支出与产量**x**成正比，系数 q即成本

4）销量 **x**依于价格p, **x**(p)是减函数

进一步设 $x(p)=a-bp,\ a,b>0$

建模与求解

收入 $I(p)=px$　　支出 $C(p)=qx$

利润 $U(p)=I(p)-C(p)$　　求p使U(p)最大

建模与求解

使利润 U(p)最大的最优价格 p^*满足

$$\left.\frac{dU}{dp}\right|_{p=p^*}=0 \Rightarrow \left.\frac{dI}{dp}\right|_{p=p^*}=\left.\frac{dC}{dp}\right|_{p=p^*}$$

边际收入　　边际支出

最大利润在边际收入等于边际支出时达到

$$I(p)=px$$

$$C(p)=qx$$

$$x(p)=a-bp$$

$$\Rightarrow U(p)=I(p)-C(p)$$

$$=(p-q)(a-bp)$$

$$\Rightarrow p^*=\frac{q}{2}+\frac{a}{2b}$$

结果解释

$$p^*=\frac{q}{2}+\frac{a}{2b} \qquad x(p)=a-bp,\ a,b>0$$

- **q /2** 是成本的一半

- **b**是价格上升1单位时销量的下降幅度（需求对价格的敏感度），b↑ → **p***↓

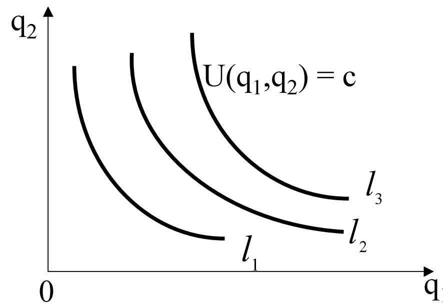
- **a** 可视为绝对需求(**p**很小时的需求), **a**↑ → **p***↑

§4 消费者均衡

问题 消费者对甲乙两种商品的偏爱程度用无差别曲线族表示，问他如何分配一定数量的钱，购买这两种商品，以达到最大的满意度。

设甲乙数量为q_1,q_2, 消费者的无差别曲线族（单调减、下凸、不相交），记作 $U(q_1,q_2)=c$.

$U(q_1,q_2)$ ~ 效用函数



已知甲乙价格 p_1,p_2, 有钱s，试分配s购买甲乙数量 q_1,q_2, 使 $U(q_1,q_2)$ 最大

模型及求解 已知价格 p_1,p_2, 钱 s, 求q_1,q_2,或 $\mathbf{p_1q_1 / p_2q_2}$, 使 $U(q_1,q_2)$ 最大

$$\max \quad Z=U(q_1,q_2)$$
$$s.t. \quad p_1q_1+p_2q_2=s$$

$$L=U+\lambda(p_1q_1+p_2q_2),\ \frac{\partial L}{\partial q_i}=0\ (i=1,2) \Rightarrow \frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{\frac{\partial U}{\partial q_2}}=\frac{p_1}{p_2}$$

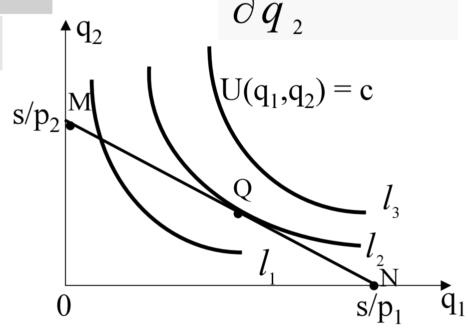
几何解释

直线MN: $p_1q_1+p_2q_2=s$

最优解Q: MN与 l_2切点

斜率 $K_{MN}=-p_1/p_2$

$$K_{l_2}=\frac{dq_2}{dq_1}=-\frac{\partial U}{\partial q_1}/\frac{\partial U}{\partial q_2}$$



结果解释 $\frac{\partial U}{\partial q_1}, \frac{\partial U}{\partial q_2}$ ——边际效用

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial q_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial q_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

消费者均衡状态在两种商品的边际效用之比恰等于它们价格之比时达到。

效用函数$\mathbf{U(q_1,q_2)}$应满足的条件

A. $U(q_1,q_2)=c$ 所确定的函数 $q_2=q_2(q_1)$单调减、下凸

$$B.\ \frac{\partial U}{\partial q_1} > 0,\quad \frac{\partial U}{\partial q_2} > 0,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} < 0,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} < 0,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} > 0$$

$B \Rightarrow A$　　解释 B的实际意义

效用函数$\mathbf{U(q_1,q_2)}$几种常用的形式

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial q_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial q_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

1. $U = (\frac{\alpha}{q_1} + \frac{\beta}{q_2})^{-1}, \alpha, \beta > 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{p_1 q_1}{p_2 q_2} = \sqrt{\frac{\alpha p_1}{\beta p_2}}$$

- 消费者均衡状态下购买两种商品费用之比与二者价格之比的平方根成正比。

- $U(q_1,q_2)$ 中参数 α, β分别表示消费者对甲乙两种商品的偏爱程度。

2. $U = q_1^{\lambda} q_2^{\mu}$，$0 < \lambda, \mu < 1$

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} \Big/ \frac{\partial U}{\partial q_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p_1 q_1}{p_2 q_2} = \frac{\lambda}{\mu}$$

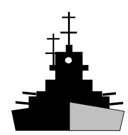
• 购买两种商品费用之比与二者价格无关。

• $U(q_1,q_2)$ 中参数 λ,μ 分别表示对甲乙的偏爱程度。

3. $U = (a\sqrt{q_1} + b\sqrt{q_2})^2,\ a, b > 0$

思考：如何推广到 m (> 2) 种商品的情况

§5　冰山运输



背景

• 波斯湾地区水资源贫乏，淡化海水的成本为每立方米0.1英镑。

• 专家建议从9600千米远的南极用拖船运送冰山，取代淡化海水

• 从经济角度研究冰山运输的可行性。

建模准备

1. 日租金和最大运量

船　型	小	中	大
日租金（英镑）	4.0	6.2	8.0
最大运量（米^3）	5×10^6	10^7	10^8

2. 燃料消耗（英镑/千米）

冰山体积(米³) / 船速(千米/小时)	10^5	10^6	10^7
1	8.4	10.5	12.6
3	10.8	13.5	16.2
5	13.2	16.5	19.8

3. 融化速率（米/天）

与南极距离 (千米) / 船速(千米/小时)	0	1000	>4000
1	0	0.1	0.3
3	0	0.15	0.45
5	0	0.2	0.6

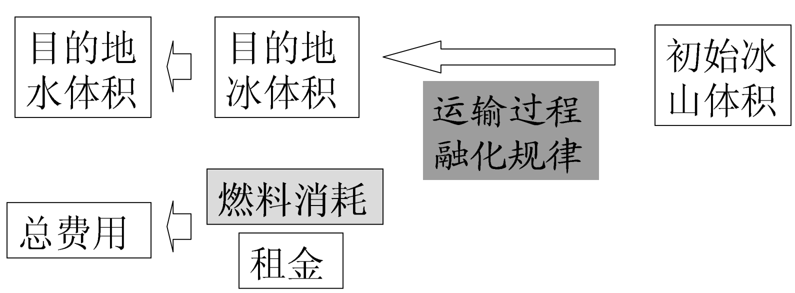
建模目的

选择船型和船速，使冰山到达目的地后每立米水的费用最低，并与淡化海水的费用比较

模型假设

- 航行过程中船速不变，总距离9600千米
- 冰山呈球形，球面各点融化速率相同
- 到达目的地后，每立米冰可融化0.85立米水

建模分析



模型建立

1.冰山融化规律

船速u (千米/小时)
与南极距离d(千米)
融化速率r(米/天）

u \ d (r)	0	1000	>4000
1	0	0.1	0.3
3	0	0.15	0.45
5	0	0.2	0.6

r是 u 的线性函数；
d<4000时v与d成正比
d>4000时v与d无关

$$r = \begin{cases} a_1 d(1+bu), & 0 \le d \le 4000 \\ a_2(1+bu), & d > 4000 \end{cases}$$

$$a_1 = 5\times 10^{-5}, a_2 = 0.2, b = 0.4$$

航行 t天时

$$d = 24ut$$

融化速率

$$r(t) = \begin{cases} 1.2\times 10^{-3} u(1+0.4u)t, & 0 \le t \le \dfrac{1000}{6u} \\ 0.2(1+0.4u), & t > \dfrac{1000}{6u} \end{cases}$$

1.冰山融化规律

冰山初始半径R_0，航行t天时半径 $R(t) = R_0 - \int_0^t r(t)dt$

冰山初始体积 $V_0 = \frac{4\pi}{3} R_0^3$ t天时体积 $V(t) = \frac{4\pi}{3} R^3(t)$

选定u,V_0, 航行t天时冰山体积

$$V(u, V_0, t) = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \int_0^t r(t)dt\right)^3$$

总航行天数 $T = \dfrac{9600}{24u} = \dfrac{400}{u}$

到达目的地时冰山体积

$$V(u, V_0, T) = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \int_0^T r(t)dt\right)^3$$

2. 燃料消耗

燃料消耗 q_1(英镑/千米)

u \ V (q_1)	10^5	10^6	10^7
1	8.4	10.5	12.6
3	10.8	13.5	16.2
5	13.2	16.5	19.8

q_1对u线性, 对$\log_{10}V$线性

$$q_1 = c_1(u + c_2)(\log_{10} V + c_3), \quad c_1 = 0.3, c_2 = 6, c_3 = -1$$

选定u,V_0, 航行第t天燃料消耗 q (英镑/天)

$$q(u,V_0,t) = 24u \cdot c_1(u + c_2)[\log_{10} V(u,V_0,t) + c_3]$$

$$= 7.2u(u+6)\left[\log_{10}\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \int_0^t r(t)dt\right)^3 - 1\right]$$

总燃料消耗费用 $Q(u,V_0) = \int_0^T q(u,V_0,t)dt$

3.运送每立米水费用

冰山初始体积V_0的日租金 $f(V_0)$（英镑）

V_0	5×10^6	10^7	10^8
$f(V_0)$	4.0	6.2	8.0

航行天数 $T = \frac{400}{u}$

拖船租金费用 $R(u,V_0) = f(V_0)\cdot\frac{400}{u}$

总燃料消耗费用 $Q(u,V_0) = \int_0^T q(u,V_0,t)dt$

$$q(u,V_0,t) = 7.2u(u+6)\left[\log_{10}\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}} - \int_0^t r(t)dt\right)^3 - 1\right]$$

冰山运输总费用

$S(u,V_0) = R(u,V_0) + Q(u,V_0)$

$$r(t) = \begin{cases} 1.2\times10^{-3}u(1+0.4u)t, & 0 \le t \le \frac{1000}{6u} \\ 0.2(1+0.4u), & t > \frac{1000}{6u} \end{cases}$$

3.运送每立米水费用

$$V(u,V_0,T)=\frac{4\pi}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}}-\int_0^T r(t)dt\right)^3$$

冰山到达目的地后得到的水体积

$$W(u,V_0)=0.85V(u,V_0,T)$$

$$r(t)=\begin{cases}1.2\times10^{-3}u(1+0.4u)t, & 0\le t\le\frac{1000}{6u}\\ 0.2(1+0.4u), & t>\frac{1000}{6u}\end{cases}$$

$$W(u,V_0)=\frac{3.4\pi}{3}\left[\sqrt[3]{\frac{3V_0}{4\pi}}-(1+0.4u)\frac{190}{3u}\right]^3$$

冰山运输总费用 $S(u,V_0)$

运送每立米水费用 $$Y(u,V_0)=\frac{S(u,V_0)}{W(u,V_0)}$$

模型求解

选择船型和船速，使冰山到达目的地后每立米水的费用最低 ⇨ 求 u,V_0使$Y(u,V_0)$最小

枚举法：u=1, 3, 5, $V_0= 5\times10^6, 10^7, 10^8$

⇨ u=5(千米/小时), $V_0= 10^8$ (米^3)， $Y(u,V_0)$最小

结果分析

$Y<0.055$(英镑/米^3)?

未考虑影响航行的种种不利因素，冰山到达目的地后实际体积会显著小于$V(u,V_0,T)$

只有当计算出的$Y(u,V_0)$显著低于淡化海水的成本(0.1英镑/米^3)时，才考虑其可行性