计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：　高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：　李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第七章　矩阵特征值计算

7.1.3　反幂法
(Inverse Power Method)

反幂法(Inverse Power Method) 是利用迭代序列计算一个 非奇异 矩阵 A 的 模极小的特征值 λ_n 和相应 特征向量 的方法. 其原理是依据如下简单而基本的事实:

"逆矩阵A^{-1} 的特征值就是原始矩阵 A 的特征值的倒数. 因此 非奇异 矩阵 A 的 模极小的特征值 λ_n 的倒数 $\dfrac{1}{\lambda_n}$ 就是 逆矩阵A^{-1} 的 主特征值. 而矩阵 A 的 模极小的特征值 λ_n 对应的特征向量 v_n 就是矩阵 A^{-1} 的 主特征向量"

反幂法亦可以使用 原点位移 或 Rayleigh商 等等加速方法来加快收敛过程. 经过适当的 原点位移 之后, 反幂法可以拿来求解实矩阵的任意一个给定特征值的近似值.

【 反幂法 (Inverse Power Method) 的引入 】

非奇异 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$ 的所有特征值依照模从大到小的次序排列为

$$|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_{n-1}|>|\lambda_n|\geq 0$$

则矩阵 A 的 主特征值 正是矩阵 A 的模极大的特征值 λ_1. 它的模 严格大于 序列后面的所有特征值的模. 矩阵 A 的 主特征值λ_1 对应的特征向量 v_1 称为矩阵 A 的 主特征向量.

倘若 逆矩阵A^{-1} 的所有特征值依照模从大到小的次序排列为

$$\frac{1}{|\lambda_n|} > \frac{1}{|\lambda_{n-1}|} \geq \frac{1}{|\lambda_{n-2}|} \geq \cdots \geq \frac{1}{|\lambda_1|} \geq 0$$

则矩阵 A^{-1} 的 主特征值 正是矩阵 A 的 模极小的特征值 λ_n 的倒数 $\dfrac{1}{\lambda_n}$. 它的模 <u>严格大于</u> 序列后面的所有特征值的模.

矩阵 A 的 模极小的特征值 λ_n 对应的特征向量 v_n 称为矩阵 A^{-1} 的 主特征向量.

【定理 1. 标准化反幂法迭代收敛定理】

非奇异矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的所有特征值依照模从大到小的次序排列为

$$\frac{1}{|\lambda_n|}>\frac{1}{|\lambda_{n-1}|}\geq\frac{1}{|\lambda_n|}\geq\cdots\geq\frac{1}{|\lambda_1|}\geq 0$$

则矩阵 A^{-1} 的主特征值正是矩阵 A 的模极小的特征值 λ_n 的倒数 $\dfrac{1}{\lambda_n}$. 它的模<u>严格大于</u>序列后面的所有特征值的模.

矩阵 A 的模极小的特征值 λ_n 对应的特征向量 v_n 称为矩阵 A^{-1} 的主特征向量.

矩阵 A 的所有特征值对应的线性无关特征向量系 $v_1, v_2, \cdots, , v_n$, 可以构成向量空间 R^n (或 C^n) 的基向量系. 对于任意非零实向量 $x_0 = y_0 \neq 0 \in R^n$, 我们有在这个基下的线性组合表示

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n, \qquad c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2 > 0$$

此时以矩阵 A 为迭代映射构造迭代序列

$$\begin{cases} x_0 & = y_0 \neq 0 \\ x_k & = A^{-1} x_{k-1} \Leftrightarrow A x_k = x_{k-1} \\ \mu_k & = \max(x_k) \\ y_k & = \dfrac{x_k}{\mu_k} = \dfrac{x_k}{\max(x_k)} \end{cases}$$

当 $k \longrightarrow +\infty$ 充分大时，我们有

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} y_k = \frac{v_n}{\max(v_n)}$$

亦即 标准化迭代向量 y_k 可以作为矩阵 A^{-1} 的 主特征值$\dfrac{1}{\lambda_n}$ 对应的 主特征向量v_n 的 近似向量.

进而对于第一个具有最大模的坐标分量 $x_k^{(i_0)}$，此极限为

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty}\mu_k=\lim_{k\longrightarrow+\infty}\max(x_k)=\lim_{k\longrightarrow+\infty}x_k^{(i_0)}=\frac{1}{\lambda_n}$$

亦即 改进迭代向量 x_k 的第 i_0 个分量可以作为矩阵 A^{-1} 的主特征值 $\dfrac{1}{\lambda_n}$ 的 近似值.

显然，反幂法 (Inverse Power Method) 的收敛速度取决于比值 (次大特征值和最大特征值模的比值)

$$r = |\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}| < 1$$

我们希望比值越小越好．当 $r \ll 1$ 时，收敛速度比较快．但若当 $r \approx 1$ 时，收敛速度可能很慢．此时我们需要对迭代进行加速．

【加速方法. 列主元三角分解加速反幂法 (LU Decomposition Acceleration of Inverse Power Method) **】**

求解非齐次线性代数方程组 $(A - pI)x_k = y_{k-1}$ 时, 可以结合矩阵的三角分解 (LU Decomposition) 方法. 首先对位移矩阵 $B = (A - pI)$ 进行 选列主元 的三角 LU 分解

$$PB = P(A - pI) = LU$$

其中 矩阵 P 为某个排列阵. 左乘以位移矩阵相当于调整行的位置 (即作初等行互易变换), 把列主元素放到对角线上来. 如果不选列主元, 则成为最简单的三角 LU 分解

$$B = (A - pI) = LU$$

此时可以把排列矩阵视为退化成为单位矩阵: $P = I$.

于是求解方程组 $(A-pI)x_k=y_{k-1}$ 等价于连续求解方程组 $Lu_k=Py_{k-1}$ 和方程组 $Ux_k=u_k$.

计算实践表明，取如下向量作为 初始迭代向量 最好:

$$Ux_1=L^{-1}Py_0=(1,1,1,\cdots,1)^T$$

即由

$$x_1=U^{-1}(1,1,1,\cdots,1)^T$$

确定首次迭代. 再回代求解非齐次线性代数方程组 $(A-\tilde{\mu}_kI)x_k=y_{k-1}$ 以获得下一个迭代向量.

总之，标准化反幂法列主元三角分解加速(LU Decomposition Acceleration of Inverse Power Method) 过程如下：

I. 取参数 $p \approx \lambda_j$ 为特征值的近似值, 对位移矩阵 $B = (A - pI)$ 进行列主元三角 LU 分解：

$$PB = P(A - pI) = LU$$

保存排列矩阵 P 以及单位下三角矩阵 L 和上三角矩阵 U 的信息.

II.

(1) 取如下向量作为 初始迭代向量 ：

$$Ux_1 = L^{-1}Py_0 = (1, 1, 1, \cdots, 1)^T$$

确定

$$\mu_1 = \max(x_1), \quad y_1 = \frac{x_1}{\mu_1} = \frac{x_1}{\max(x_1)}$$

(2) 以 逆矩阵 $B^{-1} = (A - pI)^{-1}$ 为迭代映射构造迭代序列

$$
\begin{cases}
Ux_1 & = L^{-1}Py_0 = (1, 1, 1, \cdots, 1)^T \\
Lu_k & = Py_{k-1} \Rightarrow u_k = L^{-1}Py_{k-1} \\
Ux_k & = u_k \\
\mu_k & = \max(x_k) \\
y_k & = \dfrac{x_k}{\mu_k} = \dfrac{x_k}{\max(x_k)}
\end{cases}
$$

【例.　　标准化反幂法三角分解加速】

对如下矩阵 A，给定初始非零向量 $x_0 = (1,1,1)^T$. 试求最接近于 $p = 6$ 的特征值：

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

用标准化反幂法三角分解加速求解.

解

用标准化反幂法三角分解加速迭代求解.

I. 取参数 $p = 6$ 为特征值的 近似值, 对位移矩阵

$$B = (A - pI) = \begin{pmatrix} 6-6 & 2 & 1 \\ 2 & 3-6 & 1 \\ 1 & 1 & 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

进行三角 LU 分解:

$$PB = P(A - pI) = LU$$

就是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2.5 & -5.5 \\ 0 & 0 & 5.4 \end{pmatrix}$$

保存排列矩阵 P 以及单位下三角矩阵 L 和上三角矩阵 U 的信息.

II.

(1) 取如下向量作为初始迭代向量：

$$Ux_1 = (1, 1, 1)^T$$

就是

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2.5 & -5.5 \\ 0 & 0 & 5.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_1^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

求解方程组得

$$x_1 = (1.6185185, 0.8074074, 0.185185185)^T$$

确定

$$\mu_1 = \max(x_1) = 1.6185185, \quad y_1 = \frac{x_1}{\mu_1} = (1, 0.49886, 0.11442)^T$$

(2) 以逆矩阵 $B^{-1} = (A - pI)^{-1}$ 为迭代映射构造迭代序列

$$\begin{cases} Ux_1 &= L^{-1}Py_0 = (1, 1, 1, \cdots, 1)^T \\ Lu_k &= Py_{k-1} \Rightarrow u_k = L^{-1}Py_{k-1} \\ Ux_k &= u_k \\ \mu_k &= \max(x_k) \\ y_k &= \dfrac{x_k}{\mu_k} = \dfrac{x_k}{\max(x_k)} \end{cases}$$

迭代一步为

$$Ux_2 = L^{-1}Py_1$$

就是

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2.5 & -5.5 \\ 0 & 0 & 5.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.4988558 \\ 0.1144165 \end{pmatrix}$$

求解方程组得

$$x_2 = (0.7429443, 0.3974066, 0.2051869)^T$$

而

$$y_2 = \frac{x_2}{\max(x_2)} \quad = (1, 0.5349076, 0.2761807)^T$$

由于 $\lambda_3 - p \approx \dfrac{1}{\max(x_2)}$，故相应最接近于 $p = 6$ 的特征值为

$$\lambda_3 \approx p + \frac{1}{\max(x_2)} = 6 + \frac{1}{0.7429443} = 6 + 1.34599592 = 7.34599592$$