计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：　高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：　李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第三节 牛顿插值 (Newton's Interpolation)

- 3.1. **均差及其性质** (Divided Difference)

拉格朗日插值多项式的原始表达是基函数的线性组合，组合项的个数与节点数有关。通常自然会想去增加节点个数以提高逼近精度，但由于多项式系数之间缺乏明确的承袭传递的关系，增加节点会导致系数全盘重算，而无法使之前算得的结果派上用场，造成计算量的损失。我们希望能够找到一种系数之间具有明确的承袭传递的关系的插值多项式，以改善这种状况。

【定义 1 均差 (差商)】 (Divided Difference) 考虑函数 $f(x)$ 和 $n+1$ 个插值节点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，定义

$$f[x_0, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} \tag{3.1}$$

为函数 $f(x)$ 关于 2 个插值节点 x_0, x_k，$k \geq 1$ 的 一阶均差(One-order Divided Difference)；

$$f[x_0, x_1, x_k] = \frac{f[x_1, x_k] - f[x_0, x_1]}{x_k - x_0} = \frac{f[x_0, x_k] - f[x_0, x_1]}{x_k - x_1} \tag{3.2}$$

为函数 $f(x)$ 关于 3 个插值节点 x_0, x_1, x_k，$k \geq 2$ 的 二阶均差(Second-order Divided Difference)；

一般地,

$$
\begin{aligned}
& f[x_0, x_1, \cdots, \cdots, x_{k-1}, x_k] \\
= & \frac{f[x_1, x_2, \cdots, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \\
= & \frac{f[x_0, x_1, \cdots, \cdots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

为函数 $f(x)$ 关于 $k+1$ 个插值节点 $x_0, x_1, \cdots, \cdots, x_k, k \geq 1$ 的 k 阶均差(k-order Divided Difference);

上述定义中的等式可由下面有关差商的性质获得。

【性质 1 均差 (差商) 对称性】 (Symmetry of Divided Difference) 差商的值与节点的排列次序无关. 以公式表达

即有

$$
\begin{aligned}
& f[x_0, x_1, \cdots, \cdots, x_{n-1}, x_n] \\
& = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{k \neq j, k=0}^{n} (x_j - x_k)} \\
& = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \\
& = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\omega_{n+1}'(x_j)} \\
& = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1) \cdots (x_0 - x_n)} + \cdots + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1})}
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
& f[x_0, x_1, \cdots, \cdots, x_{n-1}, x_n] \\
= & \frac{f[x_1, x_2, \cdots, \cdots, x_n] - f[x_0, x_1, \cdots, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \\
= & \frac{f[x_0, x_1, \cdots, \cdots, x_{n-2}, x_n] - f[x_0, x_1, \cdots, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}}
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

【证明】对于一阶差商,

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0} \tag{3.6}$$

对于二阶差商，

$$
\begin{aligned}
f[x_0,x_1,x_2] &= \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} \\
&= \frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} \\
&= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{x_0-x_2}(\frac{1}{x_2-x_1}+\frac{1}{x_1-x_0}) \\
&+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)\cdots(x_2-x_0)} \\
&= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+ \\
&\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)\cdots(x_2-x_0)}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

一般地，用数学归纳法，可得 (3.4) 式． 【证毕】

【注记：均差与导数】 (Divided Difference and Derivative)
回忆导数的定义可知 <u>导数即为差商的极限</u>，因而可用差商逼近导数：

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3.8}$$

- 3.2. **牛顿插值多项式** (Newton's Interpolating Polynomial)

由一阶差商定义公式变形可得 $f(x)$ 的表达：

$$f[x_0, x] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f[x_0, x](x - x_0) \tag{3.9}$$

同理由二阶差商定义公式变形可得 $f[x_0,x]$ 的表达：

$$f[x_0,x_1,x]=\frac{f[x_0,x]-f[x_0,x_1]}{x-x_1}$$

$$\Rightarrow f[x_0,x]=f[x_0,x_1]+f[x_0,x_1,x](x-x_1)(3.10)$$

将 (3.10) 代入 (3.9) 式得：

$$\begin{aligned} f(x)&=f(x_0)+f[x_0,x](x-x_0)\\ &=f(x_0)+(f[x_0,x_1]+f[x_0,x_1,x](x-x_1))(x-x_0)\\ &=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x](x-x_0)(x-x_1) \end{aligned} \tag{3.11}$$

如是递推，至第 n 步得

$$
\begin{aligned}
& f(x) = f(x_0) + f[x_0, x](x - x_0) \\
& = f(x_0) + (f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x](x - x_1))(x - x_0) \\
& = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x](x - x_0)(x - x_1) \\
& = f(x_0) + f[x_0, x_1]\omega_1(x) + f[x_0, x_1, x]\omega_2(x) \\
& = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& = f(x_0) + f[x_0, x_1]\omega_1(x) + \cdots\cdots + \\
& f[x_0, x_1, \cdots, \cdots, x_{n-1}, x_n]\omega_n(x) + R_n(x) \\
& = N_n(x) + R_n(x)
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

其中

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots\cdots + \\ f[x_0, x_1, \cdots, \cdots, , x_n]\omega_n(x) \tag{3.13}$$

称为 n 次牛顿插值多项式, 而

$$R_n(x) = f[x_0, x_1, \cdots, \cdots, x_{n-1}, x_n, x]\omega_{n+1}(x) \tag{3.14}$$

称为 均差型 n 次牛顿插值多项式余项.

显然，牛顿插值多项式的系数即为各阶差商：

$$a_k = f[x_0, x_1, \cdots, \cdots, x_{k-1}, x_k] \tag{3.15}$$

因而写出一个牛顿插值多项式只需要计算各阶差商，通常的作法是列出一张 *差商表*.

由于插值多项式唯一性定理，满足基本插值条件 (2.21) 的 n 次代数插值多项式是存在唯一的 (无论形式如何)，故比较牛顿插值多项式的均差型余项和拉格朗日插值多项式的 微分型余项 可得

$$
\begin{aligned}
R_n(x) = f[x_0, x_1, \cdots, \cdots, x_{n-1}, x_n, x]\omega_{n+1}(x) \\
= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

从而获得如下有关差商与导数的联络公式:

【 性质 2 差商与导数的联络公式】 (Connection of Divided Difference and Derivative)

$$f[x_0, x_1, \cdots, \cdots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \tag{3.17}$$

这一联络公式在某些差商计算问题中有相当的简化作用。

【 差商表】 下加线差商即为牛顿插值多项式的系数.

x_k	$f(x_k)$	一阶	二阶	三阶	$\cdots$
x_0	$\underline{f(x_0)}$				
x_1	$f(x_1)$	$\underline{f[x_0,x_1]}$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2]}$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$\cdots$
x_5	$f(x_5)$	$f[x_4,x_5]$	$f[x_3,x_4,x_5]$	$f[x_2,x_3,x_4,x_5]$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

- 3.3. **例题选讲**

【例 1 **牛顿插值多项式系数的计算】** 计算函数 $f(x) = 2x^3 + 5$ 在等距自然数插值节点 $1, 2, 3, 4, 5$ 处的三阶差商 $f[1, 2, 3, 4]$ 和四阶差商 $f[1, 2, 3, 4, 5]$，并写出函数的牛顿插值多项式展开.

【解】根据函数表利用递推公式作出差商表如下:

x_k	$f(x_k)$	一阶	二阶	三阶	$\cdots$
1	$\underline{7}$				
2	21	$\underline{14}$			
3	59	38	$\underline{12}$		
4	133	74	18	$\underline{2}$	
5	255	122	24	2	$\underline{0}$

由表可知三阶差商 $f[1,2,3,4]=2$，四阶差商 $f[1,2,3,4,5]=0$；事实上，由差商与导数的联络公式，对于三阶多项式，其四阶差商必然为零：

$$\begin{aligned} & f[x_0, x_1, \cdots, \cdots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \\ & \Rightarrow f[1,2,3,4,5] = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} = \frac{0}{24} = 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

此外，函数的余项为 0 的牛顿插值多项式展开为

$$
\begin{aligned}
&2x^3+5=f(x)\\
&=f(x_0)+f[x_0,x_1]\omega_1(x)+f[x_0,x_1,x_2]\omega_2(x)\\
&+f[x_0,x_1,x_2,x_3]\omega_3(x)\\
&=7+14(x-1)+12(x-1)(x-2)+2(x-1)(x-2)(x-3)
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

【练习 1 牛顿插值多项式系数的计算】 计算函数 $f(x)=x^3-4x$ 在等距自然数插值节点 $1,2,3,4,5$ 处的三阶差商 $f[1,2,3,4]$ 和四阶差商 $f[1,2,3,4,5]$，并写出函数的牛顿插值多项式展开.

【例 2 牛顿插值多项式的建立】

给定某函数 $f(x) \in C^{(2)}[-2, 1]$ 的函数值数据表如下．求 $f(x)$ 的牛顿插值多项式.

x_k	-2	0	1
$f(x_k)$	-27	-1	0

【解】根据函数值数据表利用递推公式作出差商表如下：

x_k	$f(x_k)$	一阶	二阶	三阶	$\cdots$
-2	$\underline{-27}$				
0	-1	$\underline{13}$			
1	0	1	$\underline{-4}$		

这里各阶差商计算如下：

$$f[x_0, x_1] = f[-2, 0] = \frac{-1+27}{0+2} = 13,$$

$$f[x_1, x_2] = f[0, 1] = \frac{0+1}{1-0} = 1.$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[-2, 0, 1] = \frac{1-13}{1-(-2)} = \frac{-12}{3} = -4.$$

差商表的对角线元素就是牛顿插值多项式系数.

于是被插函数的牛顿插值多项式展开为

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1]\omega_1(x) + f[x_0, x_1, x_2]\omega_2(x) \\
&= -27 + 13(x+2) - 4(x+2)(x-0) = -4x^2 + 5x - 1
\end{aligned}
$$

化简后的结果 (把多项式按照降幂或升幂排列) 与我们利用范德蒙矩阵（ Vandermonde Matrix ）求解系数方程组或者 Lagange 二次插值多项式获得的多项式完全一致. 这三度说明了插值多项式的唯一性.

【解毕】

【 例 3 联络公式】 计算多项式函数 $f(x)=x^7+x^4+3x+1$ 的七阶差商 $f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7]$ 和八阶差商 $f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^8]$.

【解】根据差商与导数的联络公式，对于七阶多项式，其八阶差商必然为零： $f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^8]=0$ ；而七阶差商

$$f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7]=\frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=\frac{7!}{7!}=1 \tag{3.20}$$

【例 4 牛顿插值多项式系数与联络公式】 设 n 次代数多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{3.21}$$

有 n 个不同实根 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ ；证明：

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \begin{cases} 0, & 0 \le k \le n-2; \\ \dfrac{1}{a_n}, & k = n-1. \end{cases} \tag{3.22}$$

【解】 n 次代数多项式 $f(x)$ 有 n 个不同实根 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ ， 故可作因式分解

$$
\begin{aligned}
& f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\
& = a_n (x - x_1) \cdots (x - x_n) \\
& = a_n \omega_n(x)
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

从而

$$f'(x_j) = a_n {\omega_n}'(x_j) \tag{3.24}$$

又设幂函数 $g(x) = x^k$ ，则 $x_j^k = g(x_j)$ ；于是利用均差对称性与联络公式有

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^k}{f'(x_j)} \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{g(x_j)}{a_n {\omega_n}'(x_j)} \\
&= \frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{n} \frac{g(x_j)}{{\omega_n}'(x_j)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a_n} g[x_1, \cdots, \cdots, x_{n-1}, x_n] \\
&= \frac{1}{a_n} \frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!} \\
&= \frac{1}{a_n} \begin{cases} 0, & 0 \le k \le n-2; \\ 1, & k = n-1. \end{cases} \qquad (3.25) \\
&= \begin{cases} 0, & 0 \le k \le n-2; \\ \dfrac{1}{a_n}, & k = n-1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

【证毕】