计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　　编著

主审：　高世臣　　褚宝增　　王祖朝　　王翠香

副审：　李少琪　　李明霞　　赵琳琳　　赵俊芳

国防工业出版社

§2 Gauss 主元素消去法和 Gauss-Jordan 消去法

一、 Gauss 列主元素消去法的实例

(Pivoting Strategy for Column)

在用 Gauss 消去法求解方程组时，应当避免采用绝对值很小的数作为主元素 (用作分母)，对系数矩阵变换时尽量保持乘数 l_{ik} 的绝对值小于或等于 1. 这样会减少误差损失. 所以很多情况下我们不是直接应用 Gauss 消去法求解方程组，而是先进行“选取主元素”的程序，通过适当的 行或列的互易变换， 把绝对值较大的元素放在系数矩阵的主对角线上，然后再应用 Gauss 消去法. 这种带有选取主元素的程序的 Gauss 消去法就称为 Gauss 主元素消去法.

自然，可以同时对矩阵的行列选取主元素，构造 全主元素消去法，即是进行矩阵中具有最大绝对值元素的“全搜索”作为消元过程中矩阵的主元素 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$. 但如此势必使得计算量增大. 实用中常用 Gauss 列主元素消去法，即依次按列选取最大绝对值元素，通过 行互易变换 把它放到主元素位置上，再进行消元计算.

【**例** 1. **全主元素消去法**】求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 & = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 & = -15 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 6 \end{cases}$$

【解】

$$\text{增广矩阵 } (A|b) = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 & 15 \\ -18 & 3 & -1 & -15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 + \frac{3}{2}r_1, r_3 + \frac{1}{18}r_1} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & \underline{\frac{7}{3}} & 5 \\ 0 & \frac{7}{6} & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3}$$

$$\begin{pmatrix} -18 & -1 & 3 & -15 \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 & 5 \\ 0 & \frac{17}{18} & \frac{7}{6} & \frac{31}{6} \end{pmatrix}$$

$$\underline{r_3 - \frac{17}{18} \times \frac{3}{7} r_2} \longrightarrow \begin{pmatrix} -18 & -1 & 3 & -15 \\ 0 & \frac{7}{3} & -1 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{11}{7} & \frac{22}{7} \end{pmatrix}$$

方程组化为上三角形式（注意：由于我们做了列交换，方程组相应未知元位置有变化！）

$$\begin{cases} -18x_1 - x_3 + 3x_2 & = -15 \\ \frac{7}{3}x_3 - x_2 & = 5 \\ \frac{11}{7}x_2 & = \frac{22}{7} \end{cases}$$

回代求解得

$$\begin{cases} x_2 & = 2 \\ x_3 = \dfrac{5 + x_2}{7/3} & = 3 \\ x_1 & = 1 \end{cases}$$

解向量 $\overrightarrow{x} = (1, 2, 3)^T$.

【例 2. **列主元素消去法】**求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 10x_3 & = 0 \\ 3x_1 - \frac{1}{10}x_2 + x_3 & = 2 \end{cases}$$

【解】

$$\text{增广矩阵 } (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 10 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{10} & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_1} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{10} & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - \frac{1}{5}r_1, r_3 - \frac{3}{5}r_1} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 10 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 10 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -5 & 2 \\ 0 & \frac{6}{5} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{r_3 + \frac{12}{25} r_2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 10 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{49}{25} \end{pmatrix}$$

方程组化为上三角形式

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 10x_3 & = 0 \\ -\frac{5}{2}x_2 - 5x_3 & = 2 \\ -\frac{7}{5}x_3 & = \frac{49}{25} \end{cases}$$

回代求解得

$$\begin{cases} x_3 = -\dfrac{49}{25} \times \dfrac{5}{7} & = -\dfrac{7}{5} \\ x_2 & = 2 \\ x_1 & = \dfrac{6}{5} \end{cases}$$

解向量 $\overrightarrow{x} = (\dfrac{6}{5}, 2, -\dfrac{7}{5})^T$.

二、 Gauss **列主元素消去法的算法体系** (Pivoting Strategy for Column)

【定理 1. Gauss **列主元素消去法的算法体系】**

Gauss 列主元素消去法的算法体系由选取列主元过程 (Pivoting Strategy)、消元过程 (Gaussian Elimination) 和回代过程 (Backward Substituition) 构成. 与普通 Gauss 消去法的重要区别在于多了选取列主元过程 (Pivoting Strategy).

I. **消元过程** (Gaussian Elimination)

标记首行向量 $(a_{11}^{(1)}, a_{12}^{(1)}, \cdots, a_{1n}^{(1)}, b_1^{(1)}) = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, b_1)$. 对于非零矩阵 $A = (a_{ij})$, 其元素 a_{ij} 不全为 0 ，我们总能取到 $a_{ij} \neq 0$ ，再通过适当的初等易位变换 (交换行列位置) 放到 a_{11} 的位置上，故不妨设 $a_{11} \neq 0$.

01 、方程组的选取主元 —- 首列选取具有最大绝对值的元素作为主元 $a_{i_1,1}$ ： $|a_{i_1,1}| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |a_{i1}|$ 通过初等易位变换 (交换行的位置 $r_1 \leftrightarrow r_{i_1}$) 把 $a_{i_1,1}$ 放到 a_{11} 的位置上作为基准元素再进行 Gauss 消去法的步骤:

$$
(A|b) = \begin{pmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_{1}^{(1)} \\
a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2k}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_{2}^{(1)} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
\underline{a_{i_1,1}^{(1)}} & a_{i_1,2}^{(1)} & \cdots & a_{i_1,k}^{(1)} & \cdots & a_{i_1,n}^{(1)} & b_{i_1}^{(1)} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nk}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_{n}^{(1)}
\end{pmatrix} \longrightarrow
$$

$$\begin{pmatrix} a_{i_1,1}^{(1)} & a_{i_1,2}^{(1)} & \cdots & a_{i_1,k}^{(1)} & \cdots & a_{i_1,n}^{(1)} & b_{i_1}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2k}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_{2}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_{1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nk}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_{n}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

1、方程组的第 1 次消元 —- 首列除基准元素 a_{11} 外均化为 0：

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow (A^{(2)}|b^{(2)}) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}.$$

0k 、方程组的选取主元 —- 第 k 列选取主元 $a_{i_k,k}$ ：

$|a_{i_k,k}| = \max\limits_{k\le i\le n} |a_{ik}|$ 通过初等易位变换 (交换行的位置 $r_k \leftrightarrow r_{i_k}$) 把 $a_{i_k,k}$ 放到 a_{kk} 的位置上作为基准元素再进行 Gauss 消去法的步骤：

$$
\begin{pmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \underline{a_{i_k,k}^{(k)}} & \cdots & a_{i_k,n}^{(k)} & b_{i_k}^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)}
\end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{pmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \underline{a_{i_k,k}^{(k)}} & \cdots & a_{i_k,n}^{(k)} & b_{i_k}^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)}
\end{pmatrix}.
$$

2、方程组的第 $k-1$ 次消元 —- 上梯形形式:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

$$
\longrightarrow (A^{(k)}|b^{(k)}) = \begin{pmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)}
\end{pmatrix}.
$$

称为方程组的第 $k-1$ 次消元.

3、第 $n-1$ 次消元 —- 上三角形形式:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$(A^{(n)}|b^{(n)}) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

II. **回代过程** (Backward Substituition)

与 Gauss 消去法一致.

【算法 3.Gauss 列主元素消去算法】

设 n 阶矩阵 A 为系数矩阵, $Ax = b$，本高斯列主元素消去算法用带有 行互易变换 的初等变换把 A 约化为上三角形矩阵 U，用约化矩阵 $A^{(k)}$ 覆盖初始矩阵 A，用乘数 l_{ij} 覆盖 a_{ij}，用计算解 x 覆盖非齐次向量 b; 每次算得的行列式存放在 det 中.

1. $det \leftarrow 1$

2. 对于 $k = 1, 2, \cdots, n-1,$

（ 1 ）按列选取主元素，使得

$$|a_{i_k,k}| = \max_{k\le i\le n} |a_{ik}|$$

（ 2 ）若 $a_{i_k,k} = 0$，则计算终止 (这意味着某列所有元素的最大绝对值为 0，当然这列元素全为 0，行列式为 0，矩阵奇异)；

（ 3 ）对于若 $i_k = k$,(主元素恰好就在主对角线上，不用选取，也不用交换行) 则转向（ 4 ）消元计算；否则

交换行： $a_{kj} \leftrightarrow a_{i_k,j}, j = k, k+1, \cdots, n$;(系数矩阵元素互换)

$b_k \leftrightarrow b_{ik}$;(非齐次向量元素互换)

$det \leftrightarrow -det$;(交换行，造成行列式变号)

（ 4 ）消元计算：

对于 $i = k+1, k+2, \cdots, n$（主元素下方的行标）

I. $a_{ik} \leftarrow l_{ik} = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}, i = k+1, k+2, \cdots, n;$

II. 对于 $j = k+1, k+2, \cdots, n$(列标大于变换主元素列标)

$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - l_{ik} * a_{kj}, i, j = k+1, k+2, \cdots, n;$(系数矩阵元素消元)

$b_i \leftarrow b_i - l_{ik} * b_k, i = k+1, k+2, \cdots, n;$(非齐次向量元素消元)

（ 5 ）行列式计算： $det \leftrightarrow a_{kk} * det$ （这是依据我们约化主元素定理给出的用顺序主子式表达的主元素计算公式 $D_k = a_{kk}^{(k)} * D_{k-1}$ ）;

3. 若 $a_{nn}=0$，则计算终止 (这意味着消元到最后的上三角矩阵，最右下角的元素为 0，当然行列式为 0，矩阵奇异)；

4. 倒向回代求解：

（1）$b_n \leftarrow b_n/a_{nn}$；

（2）对于 $i=n-1,\cdots,2,1$(倒向回代)：

$$b_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} * b_j)/a_{ii};$$

5. 行列式计算： $det \leftrightarrow a_{nn} * det.$

6. 对于 $i=1,2\cdots,n-1,n$, 输出计算解 $x_i=b_i$ 和行列式 $det.$

【 命题 2. Gauss **列主元素消去法的计算量 】** Gauss 列主元素消去法的计算量约为 $\dfrac{n^3}{3}$.

【 注记 】 常规 Gauss 消去法的计算量约为 $\dfrac{n^3}{3}$. 选取主元素不需要进行直接的四则运算（但要计算绝对值，消耗机器时间）. 因此 Gauss 列主元素消去法的计算量与常规 Gauss 消去法相当.

【 定理 2. Gauss **列主元素消去法的** LU **三角分解 】**

n 阶系数方阵 A 为非奇异矩阵，则存在排列矩阵 P 使 $PA = LU$.

【 证明略 】

三、 Gauss-Jordan 消去法

Gauss-Jordan 消去法的源流也是我们在线性代数课程中业已了解的．求非奇异矩阵的逆矩阵，通常至少有两条途径：一条是计算“伴随矩阵” A^* 和行列式 $|A|$ ，则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.
其中“伴随矩阵”是一个转置矩阵的形式：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

而 A_{ij} 是元素 a_{ij} 代数余子式，和 a_{ij} 的数目一样多，总共有 n^2 个，并且都是 $n-1$ 阶的行列式．显然，由于涉及到行列

式的计算，对于高阶非奇异矩阵的逆矩阵求解问题，这办法的计算量会大得惊人．下面我们来看另一条路子，就是所谓求逆阵的 Gauss-Jordan 消去法.

【例 3.Gauss-Jordan 消去法求逆阵】试求以下非奇异矩阵的逆矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

【 **解** 】

将非奇异矩阵 A 和与它同阶的单位矩阵 I 并排“横着”放在一起，作成一个 $n \times 2n$ 的增广矩阵，对此增广矩阵施行初等变换，将 A 变成单位矩阵 I ，则单位矩阵 I 就变成了 A 的逆矩阵 A^{-1} ：

$$
(A|I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{r_2 - 2r_1, r_3 - 3r_1} \longrightarrow
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{r_2 \leftrightarrow r_3} \longrightarrow
$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{r_1 + 2r_2} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{r_2 - 3r_3, r_1 - 3r_3}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_3, -r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

故逆矩阵为

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

上述方法是通过对 A 和与它同阶的单位矩阵 I 并排放在一起作成的增广矩阵施行初等变换 (包括行的所有 3 种变换：消去变换、互易变换和数乘变换) 获得了逆矩阵，显然，对于高阶矩阵，这要比计算 A 的行列式和伴随矩阵 A^* 的元素 (即 n^2 个 $n-1$ 阶的代数余子式) 的算法简捷得多．这就是求逆矩阵的 Gauss-Jordan 消去法.

对于一个非齐次方程组，同样也可以将方程组的 n 阶非奇异系数矩阵 A 和非齐次向量 b 并排放在一起，作成一个 $n \times (n+1)$ 的增广矩阵；将 A 变成单位矩阵 I ，相应的方程组就变成一个不需要回代求解的形式 $Ix = \hat{b}$ ，显然，解向量就是非齐次向量变换后的终极向量 $x = \hat{b}$.

【例 4.Gauss-Jordan 消去法求解方程组】

用 Gauss-Jordan 消去法求解非齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\
x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = 0 \\
-2x_1 + x_2 + x_3 & = 1
\end{cases}
$$

【 解 】

将 n 阶非奇异系数矩阵 A 和非齐次向量 b 并排放在一起，作成一个 $n\times(n+1)$ 的增广矩阵；将 A 变成单位矩阵 I，相应的方程组就变成一个不需要回代求解的形式 $Ix=\hat{b}$：

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{r_2 - r_1, r_3 + 2r_1} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underline{r_3 - 3r_2} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \underline{\frac{1}{2} r_3} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underline{r_2 + r_3, r_1 + r_3} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\underline{r_1 - r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

故解向量就是非齐次向量变换后的终极向量 $x = \hat{b}$:

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

下面我们给出一般的 Gauss-Jordan 消去法的定义，并构造解方程组的 Gauss-Jordan 消去算法.

【 **定义** 1. **求逆矩阵的** Gauss-Jordan **消去法** 】将 n 阶非奇异矩阵 A 和与它同阶的单位矩阵 I 并排“横着”放在一起，作成一个 $n \times 2n$ 的增广矩阵 $(A|I)$ ，对此增广矩阵施行初等变换，将 A 变成单位矩阵 I ，则单位矩阵 I 就变成了 A 的逆矩阵 A^{-1}. 这种 Gauss 消去法称为 *求逆矩阵的 Gauss-Jordan 消去法*.

【 **定义 2. 解方程组的 Gauss-Jordan 消去法** 】将方程组的 n 阶非奇异系数矩阵 A 和非齐次向量 b 并排“横着”放在一起，作成一个 $n\times(n+1)$ 的增广矩阵 $(A|b)$. 施行行的初等变换，同时消去 A 的主对角线肩上（右上方）和腋下（左下方）的所有元素，将 A 变成单位矩阵 I，相应的方程组就变成一个不需要回代求解的形式 $Ix=\hat{b}$，显然，解向量就是非齐次向量变换后的终极向量 $x=\hat{b}$. 这种 Gauss 消去法称为*解方程组的 Gauss-Jordan 消去法*.