数学实验

Experiments in Mathematics

实验5 线性方程组的解法

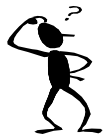
为什么要学习线性方程组的数值解法

- 许多实际问题归结为线性（代数）方程组

  机械设备、土建结构的受力分析　　经济计划

  输电网络、管道系统的参数计算　　企业管理

- 大型的方程组需要有效的数值解法
- 数值解法的稳定性和收敛性问题需要注意



实验5的主要内容

1. 两类数值解法:
直接方法；迭代方法

2. 实际问题中方程组的数值解。

3*.数值解法的稳定性和收敛性——向量和矩阵的范数

线性方程组的一般形式、两类解法

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\cdots\cdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

或 AX=b

直接法　经过有限次算术运算求出精确解（实际上由于有舍入误差只能得到近似解）---- 高斯（Gauss）消元法及与它密切相关的矩阵LU分解

迭代法　从初始解出发，根据设计好的步骤用逐次求出的近似解逼近精确解 ---- 雅可比（Jacobi）迭代法和高斯—塞德尔（Gauss—Seidel）迭代法

直接法---高斯消元法

消元过程

$$a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}$$
$$a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}$$

条件

$a_{kk}^{(k)} \neq 0$

$(k = 1,2,\cdots,n)$

$$a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}$$
$$a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)}$$
$$a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)}$$

回代过程

2000-10-27 5

直 接 法 – 列 主 元 素 消 元 法

高斯消元法条件 $a_{kk}^{(k)} \neq 0 (k = 1,2,\cdots,n)$

$a_{kk}^{(k)}$ (绝对值)很小时，用它作除数会导致舍入误差的很大增加

$$a_{kk}^{(k)}x_k + \cdots\cdots + a_{kn}^{(k)}x_n = b_k^{(k)}$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{nk}^{(k)}x_k + \cdots\cdots + a_{nn}^{(k)}x_n = b_n^{(k)}$$

解决办法

选 $\left|a_{ik}^{(k)}\right| (i = k,\cdots n)$

最大的一个（列主元）

将列主元所在行与第k行交换后，再按上面的高斯消元法进行下去，称为列主元素消元法。

2000-10-27 6

直接法 － 高斯消元法的矩阵表示

高斯消元法的第一次消元

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\cdots\cdots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ \cdots\cdots \\ a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)} \end{aligned}$$

相当于方程AX=b 两 边左乘单位下三角阵M_1

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 1 & & \\ \cdots\cdots & & \ddots & \\ -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$M_1Ax = M_1b$$

直接法 － 高斯消元法的矩阵表示

第二次消元相当于再左乘单位下三角阵M_2

$$M_1Ax = M_1b \Rightarrow M_2M_1Ax = M_2M_1b$$

最终消元形式 $M_{n-1}\cdots M_2M_1Ax = M_{n-1}\cdots M_2M_1b$

$$\Downarrow$$

记 $M_{n-1}\cdots M_2M_1 = M$，M为下三角阵

记 $MA = U$ $\quad Ux = Mb \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ \cdots\cdots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n &= b_{n-1}^{(n-1)} \\ a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)} \end{aligned}$$

U为上三角阵,且对角元素$a_{kk}^{(k)} \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$x = U^{-1}Mb$$

直 接 法 – 矩 阵 LU 分 解

$a_{kk}^{(k)} \neq 0$
$(k=1,2,\cdots,n)$
$\Leftrightarrow$ A的顺序主子式$D = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1k} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{k1} \cdots a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, (k=1,\cdots n)$

高斯消元法通过左乘M,使MA=U

M单位下三角阵，U上三角阵

记 L=M^{-1}，L为单位下三角阵

若**A**可逆且顺序主子式不为零，则**A**可分解为一个单位下三角阵**L**和一个上三角阵**U**的积 **A=LU**。
这种分解是唯一的，称 矩阵**LU**分解。

直 接 法 – 矩 阵 LU 分 解

若A可逆，但顺序主子式 $D \neq 0$不成立

消元中会遇到某个$a_{kk}^{(k)} = 0$，但必存在$a_{ik}^{(k)} \neq 0 (i = k+1,\cdots n)$

第i行与第k行交换 $\Leftrightarrow$ 乘以初等交换阵

$$MA = U \Rightarrow MPA = U$$

P~交换阵（单位阵经若干次行交换）

若**A**可逆，则存在交换阵 **P** 使 **PA=LU**
L为单位下三角阵，**U**为上三角阵。

直接法 － 正定对称矩阵的分解

正定对称矩阵 A 可分解成对角元素为正的下三角阵 L 与它的转置矩阵之积，即

$$A = LL^T \qquad \text{或} \qquad A = LDL^T$$

其中 L 是单位下三角阵，D 是元素为正的对角阵。这种分解称三角分解或 Cholesky 分解。

2000-10-27 11

直 接 法 － MATLAB 的 用 法

1. 求解 $Ax=b$ 用左除： $x = A\backslash b$□，输出方程的解 x

2. 矩阵**LU**分解

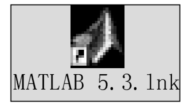
□□□□□□□□□□□□□□若 A 可逆且顺序主子式不为零，□输出 x 为单位下三角阵 L，y 为上三角阵 U，使 $A = LU$；若 A 可逆，x 为一交换阵与单位下三角阵之积.

□□□□□□□□□□□□□□□□□若 A 可逆，输出 x 为单位下三角阵 L，y 为上三角阵 U，p 为一交换阵 P，使 $PA = LU$.

□□□□□□□□□□□□□对正定对称矩阵 A 的 Cholesky 分解，输出 u 为上三角阵 U，使 $A=U^TU$

2000-10-27 12

例. 解 $\begin{cases} 10x_1+3x_2+x_3=14 \\ 2x_1-10x_2+3x_3=-5 \\ x_3+3x_2+10x_3=14 \end{cases}$



shiyan51

并对系数矩阵作***LU***分解

若第**1**个方程改为

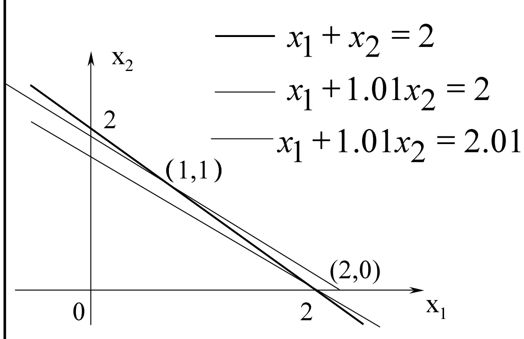
$\mathbf{3x_2+x_3=14}$

结果如何

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□
□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□
□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□

直 接 法 – 误 差 分 析

$$\overset{A}{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1.01\end{bmatrix}}\overset{x}{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}}=\overset{b}{\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}}$$



$x=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}2\\2.01\end{bmatrix}$

$x=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ x对b的扰动敏感

$Ax=b$，如果解 $\boldsymbol{x}$ 对 $\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{A}$ 的扰动敏感，就称方程组是病态的，也称系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是病态的。

向量和矩阵的范数

度量向量、矩阵大小的数量指标

向量范数

设 $x=(x_1,\cdots x_n)^T$，范数记作 $\|x\|$

最常用的向量范数是 2−范数 $\|x\|_2=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$

1−范数 $\|x\|_1=|x_1|+\cdots+|x_n|$　　∞−范数 $\|x\|_\infty=\max(|x_1|,\cdots|x_n|)$

矩阵范数

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，范数记作 $\|A\|$

$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$（2−范数）　$\lambda_{\max}$ 表示最大特征根

$\|A\|_1=\max\limits_{j}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$（1−范数）　$\|A\|_\infty=\max\limits_{i}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$（$\infty$−范数）

向量和矩阵范数的相容性条件　$\|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\|$

条件数与误差分析

$Ax=b$　$\|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\|$

1）设b有扰动 δb，分析x的误差 δx

$A(x+\delta x)=b+\delta b$ ⇨ $A\,\delta x=\delta b$

⇨ $\delta x=A^{-1}\delta b$ ⇨ $\|\delta x\|\le\|A^{-1}\|\cdot\|\delta b\|$

$\|b\|\le\|A\|\cdot\|x\|$ ⇨ $\|x\|\ge\|b\|/\|A\|$

$$\Rightarrow\ \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}=cond\,(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

定义 A 的条件数为 $Cond\,(A)=\|A^{-1}\|\cdot\|A\|$

***A*的条件数越大,（由 *b*的扰动引起的）*x*的误差可能越大**

条件数与误差分析

$Ax = b$

2）设A有扰动 δA，分析x的误差 δx

$$(A+\delta A)(x+\delta x)=b$$

$$\Rightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \cong \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = cond(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

***A*的条件数越大, (由*A*的扰动引起的) *x*的误差越大**

x的(相对)误差不超过b的(相对)误差的$Cond(A)$倍，
也大致上是A的(相对)误差的$Cond(A)$倍。

条件数大的矩阵是病态矩阵

直 接 法 － **MATLAB** 的 用 法

3. 范数　条件数

□□□□□□□□□□□输入 x 为向量或矩阵，输出为 x 的 2-范数

□□□□□□□□□□□输入 x 为矩阵, 输出为 x 的 2-条件数

□□□□□□□□□□□□输入 x 为方阵, 输出为 x 条件数倒数

4．Hilbert 矩阵：　□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□输出 □ 为 n 阶 Hilbert 矩阵

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots\cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & \cdots\cdots & 1/(n+1) \\ \cdots\cdots & & & \\ 1/n & 1/(n+1) & \cdots & 1/(2n-1) \end{bmatrix}$$

当n很大时Hilbert矩阵呈病态

观察**Hilbert**矩阵的病态性

MATLAB 5.3.lnk

shiyan52

例. Hx=b, 其中
H=hilb(5), b=[1,…1]^T

□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□
□□□□□□
□□□□□□□□□
□□□□□□□
□□□□□□□
□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□

x	x1
1.0e+003 *	
0.0050	0.0680
-0.1200	-1.3800
0.6300	6.3000
-1.1200	-9.9400
0.6300	5.0400

□□□□□□□□4.7661e+005

迭代法 --- 一 个 例 子

$$\begin{cases} 10x_1+3x_2+x_3=14 \\ 2x_1-10x_2+3x_3=-5 \\ x_3+3x_2+10x_3=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-0.3x_2-0.1x_3+1.4 \\ x_2=0.2x_1+0.3x_3+0.5 \\ x_3=-0.1x_1-0.3x_2+1.4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-0.3x_2^{(k)}-0.1x_3^{(k)}+1.4 \\ x_2^{(k+1)}=0.2x_1^{(k)}+0.3x_3^{(k)}+0.5 \\ x_3^{(k+1)}=-0.1x_1^{(k)}-0.3x_2^{(k)}+1.4 \end{cases} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

$$x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=x_3^{(0)}=0 \Rightarrow x_1^{(1)}=1.4, x_2^{(1)}=0.5, x_3^{(1)}=1.4$$

$$\Rightarrow x_1^{(4)}=0.9906,\ x_2^{(4)}=0.9645,\ x_3^{(4)}=0.9906$$

精确解 $x_1=x_2=x_3=1$

迭代法 － 雅可比（Jacobi）迭代

将 A 分解为 $A = D - L - U$，其中 $D = diag(a_{11}, a_{22}, \cdots a_{nn})$，

$$L = -\begin{bmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \qquad U = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \cdots & & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,1} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

设对角阵D非奇异（即$a_{ii} \neq 0, i = 1, \cdots n$）　$Ax = b$

$\Rightarrow$ $Dx - (L+U)x = b$ $\Rightarrow$ $x = D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$

记 $B_1 = D^{-1}(L+U)$

$f_1 = D^{-1}b$

迭代格式

$$x^{(k+1)} = B_1 x^{(k)} + f_1 \quad (k = 0,1,2\cdots)$$

迭代法 － 高斯-塞德尔（Gauss-Sedeil）迭代

Jacobi迭代公式 $Dx^{(k+1)} = Lx^{(k)} + Ux^{(k)} + b$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -0.3x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1.4 \\ x_2^{(k+1)} &= 0.2x_1^{(k)} + 0.3x_3^{(k)} + 0.5 \\ x_3^{(k+1)} &= -0.1x_1^{(k)} - 0.3x_2^{(k)} + 1.4 \end{aligned}$$

改进 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -0.3x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} + 1.4 \\ x_2^{(k+1)} &= 0.2x_1^{(k+1)} + 0.3x_3^{(k)} + 0.5 \\ x_3^{(k+1)} &= -0.1x_1^{(k+1)} - 0.3x_2^{(k+1)} + 1.4 \end{aligned}$$

Gauss-Seideil迭代公式 $Dx^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + b$

在D非奇异的假设下$(D-L)$可逆，于是得到

$$B_2 = (D-L)^{-1}U, \quad f_2 = (D-L)^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = B_2 x^{(k)} + f_2 \quad (k = 0,1,2\cdots)$$

迭代法的收敛性

$B_1 = D^{-1}(L+U)$
$f_1 = D^{-1}b$

Jacobi迭代 $x^{(k+1)} = B_1 x^{(k)} + f_1$

$B_2 = (D-L)^{-1}U$
$f_2 = (D-L)^{-1}b$

Gauss-Seideil迭代 $x^{(k+1)} = B_2 x^{(k)} + f_2$

一般迭代形式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$

原方程组的解x^*满足： $x^* = Bx^* + f$

迭代k次得到 $x^{(k)} - x^* = B^k(x^{(0)} - x^*)$

序列收敛 $x^{(k)} \to x^* (k \to \infty)$的充要条件

$B^k \to 0 (k \to \infty)$ $\Leftrightarrow B$的所有特征根（取模）小于1

$\Updownarrow$

$\rho(B) < 1$

B的谱半径 $\rho(B) = \max\limits_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$

λ_i（$i = 1, \cdots n$)是B的特征根

迭代法的收敛性

序列收敛 $x^{(k)} \to x^* (k \to \infty)$的充分条件

1) 若A是严格对角占优的，即$|b_{ii}| > \sum\limits_{j \ne i} |b_{ij}|$ $(i = 1, \cdots n)$,
则雅可比和高斯$-$赛德尔迭代均收敛；

2）若 A 对称正定，则高斯—塞德尔迭代收敛；

3) 若$\|B\| = q < 1$, 则迭代公式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 收敛

且 $\|x^{(k+1)} - x^*\| \le \dfrac{q}{1-q} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$, q越小收敛越快

谱半径性质：$\rho(B) \le \| B \|$ 其中||B||是任何一种矩阵范数

迭 代 法 – MATLAB 的 用 法

1. 提取（产生）对角阵

□□□□□□□□□ 输入向量x，输出v是以x为对角元素的对角阵;

输入矩阵x，输出v是x的对角元素构成的向量;

□□□□□□□□□□□□□□□ 输入矩阵x，输出v是x的对角元素构成的对角阵，可用于迭代法中从A中提取D。

2. 提取（产生）上（下）三角阵

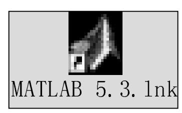
□□□□□□□□□ 输入矩阵 x，输出 v 是 x 的上三角阵;

□□□□□□□□□ 输入矩阵 x，输出 v 是 x 的下三角阵;

□□□□□□□□□□□ 输入矩阵 x，输出 v 是 x 的上三角阵，但对角元素为 0，可用于迭代法中从 A 中提取 U;

□□□□□□□□□□□□ 输入矩阵 x，输出 v 是 x 的下三角阵，但对角元素为 0，可用于迭代法中从 A 中提取 L。

例. 用迭代法解
$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_3 + 3x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$



shiyan53

	x^T(雅可比)	x^T(高斯—塞德尔)
0	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)
1	(1.4, 0.5, 1.4)	(1.4, 0.78, 1.026)
2	(1.11, 1.20, 1.11)	(1.0634, 1.0205, 0.9875)
3	(0.929, 1.055, 0.929)	(0.9951, 0.9953, 1.0019)
4	(0.9906, 0.9645, 0.9906)	(1.0012, 1.0008, 0.9996)

稀疏矩阵的处理 ～**MATLAB**进行大规模计算的优点

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ 在第□行、第□列输入数值□，矩阵共□行□列，输出□为稀疏矩阵，只给出□□□□□及□

□□□□□□□□□□□□ 输入稀疏矩阵□，输出□□为满矩阵（包含零元素）

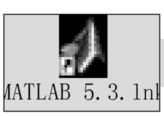
□□□

输出 □□□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□

例. 分别用稀疏矩阵和满矩阵求解***Ax=b*****,** 比较计算时间

设 $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \mathbf{0} \\ & 1 & 4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & 1 & 4 \end{bmatrix}_{n\times n}$

$b = [1, 2, \cdots n]^T$



Shiyan54

□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□

□□□□□□□□□□

t_1, t2相差巨大，说明用稀疏矩阵计算的优点

（**y=yy** 用于简单地验证两种方法结果的一致）

实例1　投入产出模型

表 1　国民经济各个部门间的关系

分配去向 / 投入来源	农业	制造业	服务业	外部需求	总产出
农业	**15**	**20**	**30**	**35**	**100**
制造业	**30**	**10**	**45**	**115**	**200**
服务业	**20**	**60**	**/**	**70**	**150**
初始投入	**35**	**110**	**75**		
总投入	**100**	**200**	**150**		

假定每个部门的产出与各部门对它的投入成正比，得到投入系数。

表2 投入产出表

分配去向 / 投入来源	农业	制造业	服务业
农业	**0.15**	**0.10**	**0.20**
制造业	**0.30**	**0.05**	**0.30**
服务业	**0.20**	**0.30**	**0**

实例1　投入产出模型

1）设有n个部门，已知投入系数，给定外部需求，建立求解各部门总产出的模型。

2）设投入系数如表2所给，如果今年对农业、制造业和服务业的外部需求分别为50，150，100亿元，问这三个部门的总产出分别应为多少。

3）如果三个部门的外部需求分别增加1个单位，它们的总产出应分别增加多少。

4）如果对于任意给定的、非负的外部需求，都能得到非负的总产出，模型就称为可行的。问为使模型可行，投入系数应满足什么条件？

1）基本模型

x_i: 第i个部门的产出，
x_{ij}: 第i个部门对第 j个部门的投入，
d_i: 第i个部门的外部需求

产出 / 投入	部门 1	部门 i	部门 n	外部需求	总产出
部门 1	x_{11}	x_{1i}	x_{1n}	d_1	x_1
部门 *i*	x_{i1}	x_{ii}	x_{in}	d_i	x_i
部门 n	x_{n1}	x_{ni}	x_{xn}	d_n	x_n
初始投入	x_{01}	x_{0i}	x_{0n}		
总投入	x_1	x_i	x_n		

平衡关系

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + d_i = x_i (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + d_i = x_i (i = 1,2,\cdots,n)$$

投入系数 $a_{ij} = x_{ij} / x_j$

投入系数矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$

产出向量 $x = (x_1,\cdots x_n)^T$

需求向量 $d = (d_1,\cdots d_n)^T$

$$x = Ax + d$$

$$(I - A)x = d$$

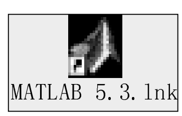
$$x = (I - A)^{-1} d$$

31

2）设农业、制造业和服务业的外部需求分别为50，150，100亿元，求三个部门的总产出。

基本模型 $x = (I - A)^{-1} d$

$$A = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.05 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$$



shiyan55

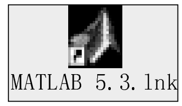
$$d = [50\ 150\ 100]^T$$

$\Rightarrow$ x=(139.2801, 267.6056, 208.1377)^T

3）若三部门的外部需求分别增加1个单位，求它们的总产出的增量。

基本模型 $x=(I-A)^{-1}d$　　记 $C=(I-A)^{-1}$

当需求增加Δd时，总产出增量 $\Delta x = C\Delta d$



shiyan55

C=1.3459　0.2504　0.3443

0.5634　1.2676　0.4930

0.4382　0.4304　1.2167

若Δd=(1,0,0)^T，即农业外部需求增加1单位时，三部门总产出应分别增加1.3459，0.5634，0.4382单位。

即C的第1列。　C的第2，3列给出了什么？

4）如果对于任意给定的、非负的外部需求，都能得到非负的总产出，模型就称为可行的。问为使模型可行，投入系数应满足什么条件？

基本模型 $x=(I-A)^{-1}d$，其中$A\geq 0$

模型可行 $\Leftrightarrow$ $\forall d\geq 0 \Rightarrow x\geq 0$ $\Leftrightarrow$ $(I-A)^{-1}\geq 0$

$$(I-A)(I+A+\cdots+A^k)=I-A^{k+1}$$

$$\Downarrow$$

$A\geq 0$

$A^k\to 0\ (k\to\infty)$ $\Rightarrow$ $(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k$

问 $A^k\to 0\ (k\to\infty)$ 是否成立？

模型可行 $\Leftrightarrow$ $\forall d \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ $\Leftarrow$ $A^k \to 0 \, (k \to \infty)$

矩阵范数定义 $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ $\Rightarrow$ $\|A^k\| \leq \|A\|^k$

$a_{ij} = x_{ij} / x_j$

$\|A\|_1 < 1 \Rightarrow \|A\|^k \to 0 \Rightarrow A^k \to 0$

$\|A\|_1 = \max\limits_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

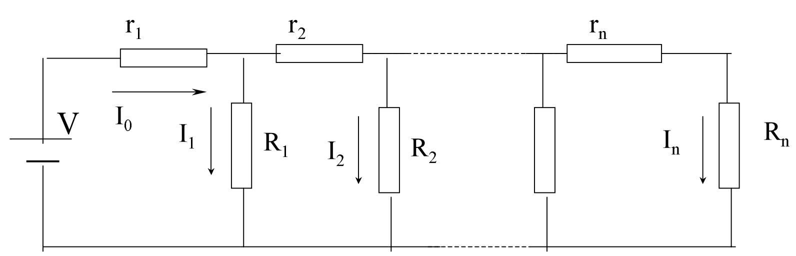
$$\|A\|_1 < 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_{ij} < x_j \ (j = 1, \cdots n)$$

若A是由实际数据得到，只要初始投入非负，

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} < x_j \ (j = 1, \cdots n)$ 成立

模型可行

实例2　输电网络



1）列出求各负载上电流 I_1，I_2，…I_n 的方程;

2）设 $R_1=R_2=\ldots=R_n=R$，$r_1=r_2=\ldots=r_n=r$，在 $r=1$，$R=6$，$V=18$，$n=10$ 的情况下求 I_1，I_2，…I_n 及总电流 I_0;

3）讨论 $n\to\infty$ 的情况。

1）记 $r_1,\cdots r_n$ 上的电流为 $i_1\cdots i_n$，由电路定律得

$$\begin{cases} r_1 i_1 + R_1 I_1 = V \\ r_2 i_2 + R_2 I_2 = R_1 I_1 \\ \cdots \\ r_n i_n + R_n I_n = R_{n-1} I_{n-1} \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} I_1 + i_2 = i_1 \\ I_2 + i_3 = i_2 \\ \cdots \\ I_{n-1} + i_n = i_{n-1} \\ I_n = i_n \end{cases}$$

消去 $i_1\cdots i_n$ 得到

$$\begin{cases} (R_1 + r_1) I_1 + r_1 I_2 + \cdots + r_1 I_n = V \\ -R_1 I_1 + (R_2 + r_2) + \cdots + r_2 I_n = 0 \\ \cdots \\ -R_{n-1} I_{n-1} + (R_n + r_n) I_n = 0 \end{cases}$$

$$R = \begin{bmatrix} R_1 + r_1 & r_1 & r_1 & \cdots & r_1 \\ -R_1 & R_2 + r_2 & r_2 & \cdots & r_2 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & -R_{n-1} & R_n + r_n \end{bmatrix}$$

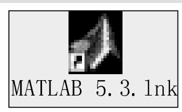
$$I = [I_1, I_2, \cdots I_n]^T$$

$$E = [V, 0, \cdots 0]^T$$

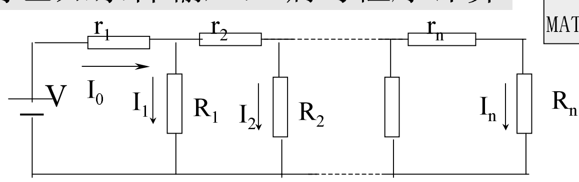
n阶代数方程组 $RI = E$

2)设 $R_1=R_2=\ldots=R_n=R$, $r_1=r_2=\ldots=r_n=r$，在 r=1, R=6, V=18, n=10 的情况下求 I_1, I_2, …I_n 及总电流 I_0;

将已知条件输入，编写程序计算



shiyan56



k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I_k(n=10)	5.9970	2.0005	1.3344	0.8907	0.5955	0.3995	0.2702	0.1858	0.1324	0.1011	0.0867
I_k(n=20)	6.0000	2.0000	1.3333	0.8889	0.5926	0.3951	0.2634	0.1756	0.1171	0.0780	0.0520
k		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I_k(n=20)		0.0347	0.0231	0.0154	0.0103	0.0069	0.0047	0.0032	0.0023	0.0018	0.0015

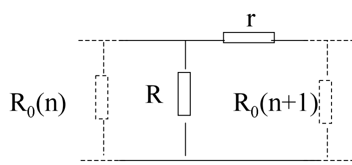
n从10增到20，总电流几乎不变

$$I_{k+1} \approx \frac{2}{3} I_k$$

3) 讨论 n→∞的情况。

为求出总电阻 R_0，考察第 n 段电路（从右向左数）和第 n+1 段电路的等效电阻 $R_0(n)$和 $R_0(n+1)$

$$R_0(n+1) = r + \frac{R \cdot R_0(n)}{R + R_0(n)}$$



$n \to \infty$时有 $R_0 = r + \dfrac{R \cdot R_0}{R + R_0}$

总电流 $I_0 = \dfrac{V}{R_0} = 6$

$$\Rightarrow \quad R_0 = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4rR}}{2}$$

$$I_{n+1} = \frac{R}{R + R_0} \cdot I_n = \frac{2}{3} I_n$$

$r = 1, R = 6$时 $R_0 = 3$

2000-10-27 39

布 置 实 验

目的

1. 用MATLAB软件掌握线性方程组的解法，对迭代法的收敛性和解的稳定性作初步分析

2. 通过实例练习用线性方程组求解的实际问题

内容

预备：编写雅可比迭代的程序

1)(用直接法和迭代法解Ax=b),b,d; 4)

2000-10-27 40

补充材料　向量和矩阵的范数

向量范数 设$x\in R^n$，若存在实函数$N(x)=\|x\|$，满足

a) $\|x\|\ge 0$，且仅当$x=0$时，$\|x\|=0$,

b) $\forall k\in R$，$\|kx\|=|k|\|x\|$,

c) $\forall y\in R^n$，$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$.

最常用的向量范数是 2-范数 $\|x\|_2=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$

矩阵范数 设$A\in R^{n\times n}$，若存在实函数$N(A)=\|A\|$，满足

a) $\|A\|\ge 0$，且仅当$A=0$时，$\|A\|=0$,

b) $\forall k\in R$, $\|kA\|=|k|\|A\|$,

c) $\forall B\in R^{n\times n}$, $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$,

d) $\forall B\in R^{n\times n}$, $\|AB\|\le\|A\|\|B\|$.

2000-10-27　41

向量和矩阵范数的相容性条件

$x\in R^n$, $A\in R^{n\times n}$, $\|Ax\|\le\|A\|\|x\|$.

矩阵A的算子范数 $x\in R^n$, $A\in R^{n\times n}$, 定义 $\|A\|=\max\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$

(符合相容性条件)

一些特殊的矩阵A的算子范数

$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$（2－范数）　$\lambda_{\max}$ 表示最大特征根

$\|A\|_1=\max\limits_j\sum\limits_{i=1}^n|a_{ij}|$ (1−范数)　$\|A\|_\infty=\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|$ (∞−范数)

2000-10-27　42

谱半径

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为**A**的特征根，则**A**的谱半径定义为：

$$\rho(A) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$$

谱半径性质

$\rho(A) \le \| A \|$ 其中||**A**||是任何一种矩阵范数

条件数 $$Cond\ (A) = \left\| A^{-1} \right\| \cdot \left\| A \right\|$$

$$\|A\|_2, \|A\|_1, \|A\|_\infty \Rightarrow cond_2(A), cond_1(A), cond_\infty(A)$$