数学实验

Experiments in Mathematics

实验6 非线性方程近似解

清 华 大 学 数 学 科 学 系

非线性方程的特点

方程分类:

- 代数方程: $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$;
- 超越方程: 包含超越函数(如$\sin x$, $\ln x$)的方程;
- 非线性方程: n(≥2)次代数方程和超越方程。

方程根的特点:

- n次代数方程有且只有n个根(包括复根、重根);
- 5次以上的代数方程无求根公式;
- 超越方程有无根，有几个根通常难以判断。

实验6的基本内容

1. 非线性方程 $f(x)=0$ 的数值解法:
   - 迭代方法的基本原理;
   - 牛顿方法.
2. 推广到解非线性方程组
3. 实际问题中非线性方程的数值解

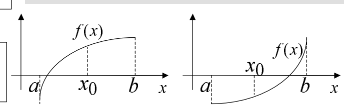
解方程$f(x)=0$第一步——确定根的大致范围

- 作$f(x)$图形, 观察$f(x)$与x轴的交点
- 根的隔离: 二分法

二分法的原理

若对于 $a<b$，有 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在 (a,b) 内 $f(x)$ 至少有一个零点，即 $f(x)=$ 至少有一个根。

二分法的实现



$f(a)<0$

$f(b)>0$

$x_0:(a,b)$中点

$f(x_0)>0 \Rightarrow a_1=a,\ b_1=x_0$

$f(x_0)<0 \Rightarrow a_1=x_0,\ b_1=b$

$(a,b)\Rightarrow(a_1,b_1)\Rightarrow\cdots\Rightarrow(a_n,b_n)\Rightarrow\cdots$ 区间每次缩小一半，n足够大时，可确定根的范围

不足 收敛速度较慢

迭代法举例

$f(x)=x^2+x-14=0 \Rightarrow x=\varphi(x)$

$f(3)=-2,\ f(4)=6$ 存在根 $x\in(3,4)$

$x=\varphi_1(x)=14-x^2$，迭代公式：$x_{k+1}=14-x_k^2$

$x=\varphi_2(x)=14/(x+1)$，迭代公式：$x_{k+1}=14/(x_k+1)$

$x=\varphi_3(x)=x-(x^2+x-14)/(2x+1)$，

迭代公式：$x_{k+1}=x_k-(x_k^2+x_k-14)/(2x_k+1)$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
φ_1	3.0000	5.0000	-11.0000	-107.0000		
φ_2	3.0000	3.5000	3.1111	3.4054	3.1779	3.3510
φ_3	3.0000	3.2857	3.2749	3.2749	3.2749	3.2749

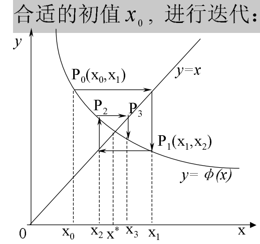
$x_{1,2}=(-1\pm\sqrt{1+14\times4})/2,\ x^*=(-1+\sqrt{57})/2\approx3.2749$

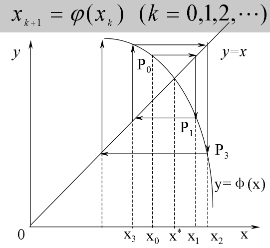
φ_1根本不收敛；φ_2虽呈现收敛趋势，但很慢；φ_3收敛很快。

迭代法的思路和几何解释

不动点$x^*=\varphi(x^*)$

将原方程 $f(x)=0$ 改写成容易迭代的形式 $x=\varphi(x)$，选合适的初值 x_0，进行迭代：$x_{k+1}=\varphi(x_k)\ \ (k=0,1,2,\cdots)$





$\{x_k\}$收敛于x^* 取决于曲线 $\phi(x)$的斜率 $\{x_k\}$不收敛于x^*

迭代法的收敛性

设 $y=\varphi(x)$ 在 $a\le x\le b$ 连续，且 $a\le y\le b$，若存在 $L<1$ 使 $|\varphi'(x)|\le L$，则 $x=\varphi(x)$ 在 $a\le x\le b$ 有唯一解 x^*，且

1）对于 $x_0\in(a,b)$，迭代公式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ $(k=0,1,2\cdots)$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*；

2）$|x_{k+1}-x^*|\le L|x_k-x^*|$,　$|x_k-x^*|\le \dfrac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$。

L不易确定 ⇨ 放宽定理条件，缩小初值范围

局部收敛性：只要 $\varphi(x)$ 在 x^* 的一个邻域连续且 $|\varphi'(x^*)|<1$，则对于该邻域内的任意初值 x_0，序列 $\{x_k\}$ 就收敛于 x^*。

迭代法的收敛速度（收敛阶）

记 $e_k=x_k-x^*$，若 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{e_{k+1}}{e_k^p}=c\ne 0$（$p$ 为一正数）

称序列 $\{x_k\}$ p 阶收敛。显然，p 越大收敛越快。

$$\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x_k-x^*)+\cdots+\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}(x_k-x)^p+\cdots$$

$$\Rightarrow\quad e_{k+1}=\varphi'(x^*)e_k+\cdots+\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}e_k{}^p+\cdots$$

$\varphi'(x^*)\ne 0$, $\{x_k\}$ 1 阶收敛

$\varphi'(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$,　$\varphi^{(p)}(x^*)\ne 0$，$\{x_k\}$ p 阶收敛

迭代法的收敛速度（收敛阶）

例题 $f(x)=x^2+x-14=0$

$x=\varphi_2(x)=14/(x+1)$

$$\varphi_2'(x)=\frac{-14}{(x+1)^2},\ \varphi_2'(x^*)\ne 0\Rightarrow\{x_k\}\ \text{1阶收敛}$$

$x=\varphi_3(x)=x-(x^2+x-14)/(2x+1)$

$$\varphi_3'(x)=\frac{2(x^2+x-14)}{(2x+1)^2},\ \varphi_3'(x^*)=0,$$

$\varphi_3''(x^*)\ne 0\Rightarrow\{x_k\}$2阶收敛

$\phi(x)$ 的构造决定收敛速度

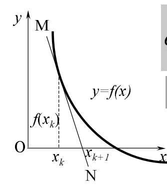
牛顿切线法

$f(x)$ 在 x_k 作Taylor展开，去掉2阶及2阶以上项得

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

设 $f'(x_k)\ne 0$，用 x_{k+1} 代替右端的 x，由 $f(x)=0$ 得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\qquad \text{即令}\quad \varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$



$$\varphi'(x^*)=\frac{f(x^*)f''(x^*)}{f'(x^*)^2},\quad \varphi''(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

若x^*为单根　$f(x^*)=0,\ f'(x^*),f''(x^*)\ne 0$

⇨ $\varphi'(x^*)=0,\ \varphi''(x^*)\ne 0$

牛顿切线法2阶收敛

牛顿切线法

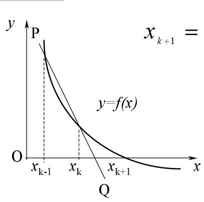
若x^*为重根　$f(x^*)=f'(x^*)=0$ ⇨ $\varphi'(x^*)\ne 0$

牛顿切线法1阶收敛　重数越高，收敛越慢

牛顿割线法

用差商 $\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$ 代替 $f'(x_k)$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)(x_k-x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$$



收敛速度比牛顿切线法稍慢

x^*为单根时收敛阶数是 1.618

用MATLAB解非线性方程

牛顿法

需自行编制程序，如对切线法编写名为`newton1.m`的`m`文件

多项式求根

当 $f(x)$ 为多项式时可用

`r=roots(c)`	输入多项式的系数 c（按降幂排列），输出 r 为 $f(x)=0$ 的全部根；
`c=poly(r)`	输入 $f(x)=0$ 的全部根 r，输出 c 为多项式的系数（按降幂排列）；
`df=polyder(c)`	输入多项式的系数 c（按降幂排列），输出 df 为多项式的微分的系数。

求解f(x)=0的newton1.m文件

```
function y=newton1(x0,n,tol)
x(1)=x0;
c=1;
i=1;
while(abs(c)>tol*x(i))
   x(i+1)=x(i)-fun1(x(i))/dfun1(x(i));
   c=x(i+1)-x(i);
   i=i+1;
   if(i>n)error('n is full');
      return;
end
end
x(i),i
```

fun1.m是f(x)的m-函数文件，dfun1.m是f '(x)的m-函数文件

解非线性方程组的牛顿法

解方程 $f(x)=0$ 的牛顿切线法

$$f(x^{k+1})=f(x^k)+f'(x^k)(x^{k+1}-x^k)$$

$$x^{k+1}=x^k-\frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

推广到解方程组

$F(x)=0,\ x=[x_1,\cdots x_n]^T,\ F(x)=[f_1(x),\cdots f_n(x)]^T$

$$f_i(x^{k+1})=f_i(x^k)+\frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_1}(x_1^{k+1}-x_1^k)+\cdots+\frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_n}(x_n^{k+1}-x_n^k),\quad i=1,2,\cdots n$$

$F(x)=0,\ x=[x_1,\cdots x_n]^T,\ F(x)=[f_1(x),\cdots f_n(x)]^T$

$$F'(x)=[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}]_{n\times n}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdots\cdots\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \cdots\cdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\cdots\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

解方程 $f(x)=0$

$$f(x^{k+1})=f(x^k)+f'(x^k)(x^{k+1}-x^k)$$

$$x^{k+1}=x^k-\frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

$$F(x^{k+1})=F(x^k)+F'(x^k)(x^{k+1}-x^k)$$

$$x^{k+1}=x^k-[F'(x^k)]^{-1}F(x^k)$$

$\Rightarrow$ $F'(x^k)\Delta x^k=-F(x^k)$ $\quad x^{k+1}=x^k+\Delta x^k$

例 解 $x_1^2+x_2^2=4,\ x_1^2-x_2^2=1$

$$F(x)=\begin{bmatrix}x_1^2+x_2^2-4\\ x_1^2-x_2^2-1\end{bmatrix},\quad F'(x)=2\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_1 & -x_2\end{bmatrix}$$

$F'(x^k)\Delta x^k=-F(x^k),\quad x^{k+1}=x^k+\Delta x^k,\quad k=0,1,\cdots$

取 $x^0=(1,1)^T$

k	x^k
0	(1.000000, 1.000000)
1	(1.750000, 1.250000)
2	(1.589286, 1.225000)
3	(1.581160, 1.224645)
4	(1.581139, 1.224745)
5	(1.581139, 1.224745)

精确解 $x=(\sqrt{5/2},\sqrt{3/2})^T=(1.58113883,1.22474487)^T$

也可用solve函数求解

解方程 $f(x)=0$ 的牛顿割线法

$$f(x^{k+1})=f(x^k)+a^k(x^{k+1}-x^k)$$

$$x^{k+1}=x^k-\frac{f(x^k)}{a^k}\qquad a^k=\frac{f(x^k)-f(x^{k-1})}{x^k-x^{k-1}}$$

解方程组的拟牛顿法——用A^k代替$F'(x^k)$

使A^k满足 $A^k(x^k-x^{k-1})=F(x^k)-F(x^{k-1})$

矩阵A^k(n^2个未知数)不能由这样的n个方程确定

用迭代方法$A^k=A^{k-1}+\Delta A^{k-1}$ (ΔA有不同的构造)计算A^k

再求 $x^{k+1}=x^k-(A^k)^{-1}F(x^k)$

实例1 － 疾病的传染

- 描述传染病的传播过程
- 分析被传染人数的变化规律
- 寻求预防传染病蔓延的手段

模型假设

1）总人数N不变，健康人和病人的比例分别为 $x(t), y(t)$

2）每个病人每天有效接触人数为a，且使接触的健康人致病 $\qquad$ a ~ 日接触率

3）病人每天治愈的比例为b $\qquad$ b ~日治愈率

4）病愈后免疫，人数比例为 $z(t)$

模型建立 $x(t)$~健康人，$y(t)$~病人，$z(t)$~病愈免疫

$x(t)+y(t)+z(t)=1$　a ~日接触率　b ~日治愈率

$$N[x(t+\Delta t)-x(t)]=-ax(t)Ny(t)\Delta t$$

$$N[y(t+\Delta t)-y(t)]=[ax(t)Ny(t)-bNy(t)]\Delta t$$

$$\frac{dx}{dt}=-axy \qquad \frac{dy}{dt}=axy-by$$

$$x(0)=x_0 \qquad y(0)=y_0$$

无法求出 $x(t), y(t)$ **解析解**

模型建立 $\frac{dx}{dt}=-axy$　$\frac{dy}{dt}=axy-by$

$x(0)=x_0$　$y(0)=y_0$

消去 dt 得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sigma x}-1, \quad \sigma=a/b$$

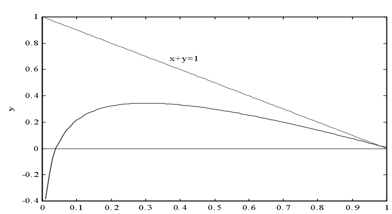
a ~ 日接触率　$1/b$~传染期

b ~日治愈率

σ ~ 接触数 (传染期内一个病人平均接触人数)

模型求解 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sigma x}-1$，$y(x=x_0)=y_0$ ⇨ $y=\frac{1}{\sigma}\ln\frac{x}{x_0}-x+(x_0+y_0)$

设日接触率 a =1, 日治愈率 b =0.3，开始时健康人与病人的比例分别为 $x_0=0.98, y_0=0.02$，作 $y(x)$ 图形——相轨线



结果分析 $\frac{dx}{dt}=-axy$　$\frac{dy}{dt}=axy-by$

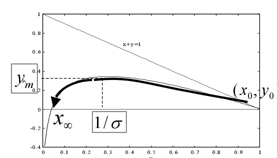
$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sigma x}-1$　$y=\frac{1}{\sigma}\ln\frac{x}{x_0}-x+(x_0+y_0)$

1) 求健康人未被传染的比例，并计算病人比例最大值

$t\to\infty, y\to 0, x\to x_\infty$

健康人未被传染的比例 x_∞ 是以下方程的解

$$\frac{1}{\sigma}\ln\frac{x}{x_0}-x+(x_0+y_0)=0$$



病人比例最大值 y_m 在点 $x=1/\sigma$ 取得

$$y=\frac{1}{\sigma}\ln\frac{x}{x_0}-x+(x_0+y_0)$$

MATLAB 5.3.lnk

bing

设 $a=1, b=0.3$，$x_0=0.98, y_0=0.02$

```
function y=fun1(x)
a=1;b=0.3;
s=a/b;
x0=0.98;y0=0.02;
y=1/s*log(x/x0)-x+x0+y0;

function y=dfun1(x)
a=1;b=0.3;
s=a/b;
y=1/s/x-1;
```

```
a=1;b=0.3;
s=a/b;
x0=0.98;y0=0.02;
x=0.01:0.01:1;
y1=0;;y2=1-x;
y=1/s*log(x/x0)-x+x0+y0;
plot(x,y,x,y1,'r',x,y2,'b'),
grid,
newton1(0.1,20,1e-4)
x=1/s;
if x<x0
   ym=1/s*log(x/x0)-x+x0+y0
else
ym=y0
end
```

得到 $x_\infty=0.0399, y_m=0.3449$

2) 当提高卫生水平使日接触率降低为 a =0.6 时，结果如何。进一步改进医疗条件使日治愈率提高到 b =0.5，结果又如何。

3) 如果在传染病蔓延前采取接种疫苗的办法，使初始时刻易感染者（健康人）的比例降低为 $x_0=0.70$，结果会发生什么变化。

a	b	x_0	y_0	x_∞	y_m
1	0.3	0.98	0.02	0.0399	0.3449
0.6	0.3	0.98	0.02	0.1965	0.1635
0.6	0.5	0.98	0.02	0.6245	0.0316
1	0.3	0.70	0.02	0.0840	0.1658
0.6	0.3	0.70	0.02	0.3056	0.0518
0.6	0.5	0.70	0.02	0.6233	0.0200

$a\downarrow, b\uparrow \Rightarrow x_\infty\uparrow, y_m\downarrow$

$x_0\downarrow \Rightarrow x_\infty\uparrow, y_m\downarrow$

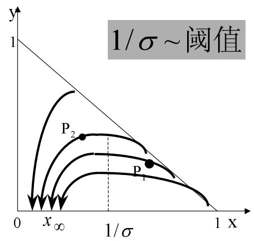
相轨线 $y(x)$ 分析

$$\begin{cases}\dot{y} = axy - by \\ \dot{x} = -axy \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sigma x} - 1 \\ y\big|_{x=x_0} = y_0\end{cases}$$

$$y = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{x}{x_0} - x + (x_0 + y_0)$$

$x = 1/\sigma,\ y = y_m$（最大值）

$1/\sigma \sim$ 阈值



$x_0 > 1/\sigma \Rightarrow y(t)$先升后降至 0(如$P_1$) ⇨ **传染病蔓延**

$x_0 < 1/\sigma \Rightarrow y(t)$单调降至0 (如$P_2$) ⇨ **传染病不蔓延**

预防传染病蔓延的手段

传染病不蔓延的条件—— $x_0 < 1/\sigma$

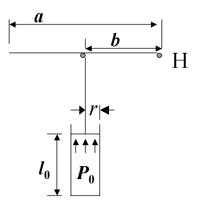
•提高阈值 $1/\sigma \Rightarrow \sigma(= a/b)\downarrow \Rightarrow a\downarrow, b\uparrow$

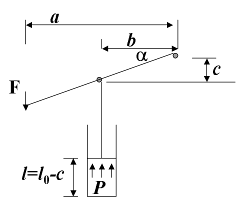
a(日接触率)↓ ⇒ 卫生水平↑

b(日治愈率)↑ ⇒ 医疗水平↑

•降低x_0 $(x_0 + y_0 + z_0 = 1) \Rightarrow z_0 \uparrow$ ⇨ **群体免疫**

实例2 － 门的气压控制





在绝热条件下，气体的压强 p 和体积 v 满足 $pv^{\gamma}=c$，其中 γ 是绝热系数，c 是常数。

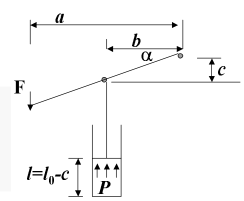
设 a=0.8m，b=0.25m，r=0.04m，l_0=0.5m，$p_0=10^4 \mathrm{N/m^2}$，γ=1.4，F=25N，求 α。

门的气压控制

开门力矩为 $M_1 = Fa\cos\alpha$

气体的压强为 p，体积为 v，并记活塞的面积为 s，则气体作用在活塞上的力矩为

$M_2 = psb$



$\therefore Fa\cos\alpha = psb$

$\because pv^{\gamma} = p_0 v_0^{\gamma}$

$\therefore p = p_0(\frac{v_0}{v})^{\gamma} = p_0(\frac{l_0}{l_0 - c})^{\gamma}$

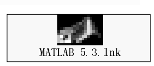
注意到$c = b\cdot tg\alpha$，$s = \pi r^2$,得

$$Fa\cos\alpha = \pi r^2 bp_0(\frac{l_0}{l_0 - btg\alpha})^{\gamma}$$

$$f(\alpha) = Fa\cos\alpha(l_0 - btg\alpha)^{\gamma} - \pi r^2 bp_0 l_0^{\gamma} = 0$$

门的气压控制 $f(\alpha) = Fa\cos\alpha(l_0 - btg\alpha)^{\gamma} - \pi r^2 bp_0 l_0^{\gamma} = 0$

$a = 0.8, b = 0.25, r = 0.04, l_0 = 0.5$
$p_0 = 10000, \gamma = 1.4, F = 25$



newton2

用牛顿割线法解方程　newton2(0.1,0.3,10,1e-4)

得到结果：α=0.4329（弧度）=24.8^0

布置“非线性方程近似解”实验

目的

1) 用MATLAB软件掌握求解非线性方程的迭代法和牛顿法，并对结果作初步分析；

2) 通过实例练习用非线性方程求解的实际问题。

内容 P172 1); 7)