计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第三节　复化求积公式

由于高阶牛顿 - 柯提斯公式的数值不稳定性，有似分段插值，我们来研究复化求积．基本思想即是将积分区间 $[a,b]$ 上作等距或不等距节点剖分：

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 在每个区间段 $I_j=[x_j,x_{j+1}], j=0,1,2,\cdots,n-1$ 上局部定义整体求积公式的 限制 为某种求积形式，若为梯形公式则整体求积公式称为 *复化梯形公式*; 若为辛普生公式则整体求积公式称为 *复化辛普生公式*.

- 3.1. **复化梯形公式** (Composite Trapezoidal Quadrature)

【 定义 1 】 复化梯形公式 (Composite Trapezoidal Quadrature)　设被积函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上具有 2 阶连续导函数：　$f^{''}(x) \in C^0[a,b] \bigcap C^1(a,b)$, 选取 $f(x)$ 在区间 $I=[a,b]$ 上的 <u>等距节点</u> 剖分：
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$

这里步长恒定

$h_j = x_{j+1} - x_j \equiv h = \dfrac{b-a}{n}, j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. 即节点可表示为

$$x_j = a + jh, \quad x_{j+1} = a + (j+1)h, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \quad (3.1)$$

在每个区间段 $I_j = [x_j, x_{j+1}], j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 上局部定义整体求积公式的 <u>限制</u> 为梯形公式，即

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \\
&\approx \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x_{j+1} - x_j)}{2} (f(x_j) + f(x_{j+1})) \\
&= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_j) + f(x_{j+1})) \\
&= \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n))
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_n)) + \frac{h}{2}(2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1})) \\
&= \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})) \\
&= \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + h\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \\
&= \frac{h}{2}(f(a) + f(b) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})) \\
&= \frac{h}{2}(f(a) + f(b) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j))
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

称此求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a)+f(b)) + h\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) = \frac{h}{2}(f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)) \tag{3.3}$$

为 复化梯形公式.

积分余项为

$$
\begin{aligned}
R_T(f) &= \sum_{j=0}^{n-1} R_T^j(f) = -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{h^3}{12} f^{''}(\zeta_j) = -\frac{h^3}{12} \sum_{j=0}^{n-1} f^{''}(\zeta_j) \\
&= -\frac{h^3}{12} \cdot n f^{''}(\zeta) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \cdot n f^{''}(\zeta) \\
&= -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f^{''}(\zeta) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f^{''}(\zeta)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

这里因 $f^{''}(x) \in C^0[a,b]$, 由闭区间上连续函数的介值定理，存在 $\zeta \in [a,b]$, 使得

$$
\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f^{''}(\zeta_j) = f^{''}(\zeta) \tag{3.5}
$$

上界估计为

$$|R_T(f)| \le \frac{b-a}{12}M_2h^2 = \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3 \tag{3.6}$$

我们看到这一上界与等分区间个数 n 即节点数目 n+1 有关，显然节点数目越多，误差越小，公式越精细．实际问题经常要我们讨论剖分区间个数或取节点数目以达到给定精度，即要解不等式

$$|R_T(f)| \le \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3 < \varepsilon \tag{3.7}$$

反解之，这等价于正整数

$$n^2 > \frac{M_2}{12\varepsilon}(b-a)^3 \tag{3.8}$$

即

$$n \geq N := [\sqrt{\frac{M_2}{12\varepsilon}(b-a)^3}\ ] + 1 \tag{3.9}$$

从而须取区间 N 段或取节点 N+1 个. 这里符号 [ ] 表示 取整函数, 即取括号内数的整数部分.

- 3.2. **复化辛普生公式** (Composite Simpson Quadrature)

【 **定义** 2 】 **复化辛普生公式** (Composite Simpson Quadrature) 设被积函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上具有 4 阶连续导函数： $f^{(4)}(x) \in C^0[a, b] \bigcap C^1(a, b)$, 选取 $f(x)$ 在区间 $I = [a, b]$ 上的 <u>等距节点</u> 剖分：
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$

这里步长恒定

$h_j = x_{j+1} - x_j \equiv h = \dfrac{b-a}{n}, j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. 即节点可表示为

$$x_j = a + jh, \quad x_{j+1} = a + (j+1)h, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

则 中节点 即每个区间段 $I_j = [x_j, x_{j+1}], j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 的中点可表达为

$$x_{j+\frac{1}{2}} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2} = \frac{a + jh + a + (j+1)h}{2} = a + (j + \frac{1}{2})h \tag{3.10}$$

在每个区间段 $I_j = [x_j, x_{j+1}], j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 上局部定义整体求积公式的 限制 为辛普生公式，即

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \\
&\approx \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x_{j+1} - x_j)}{6} (f(x_j) + 4f(x_{j+\frac{1}{2}}) + f(x_{j+1})) \\
&= \frac{h}{6} \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_j) + 4f(x_{j+\frac{1}{2}}) + f(x_{j+1})) \qquad (3.11) \\
&= \frac{h}{6} (f(a) + f(b)) + \frac{h}{3} \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{2h}{3} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{j+\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{h}{6} (f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + 4 \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{j+\frac{1}{2}}))
\end{aligned}
$$

称此求积公式

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{6}(f(a)+f(b))+\frac{h}{3}\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)+\frac{2h}{3}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{j+\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{h}{6}(f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)+4\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{j+\frac{1}{2}}))\end{aligned} \tag{3.12}$$

为 复化辛普生公式.

积分余项为

$$
\begin{aligned}
R_S(f) &= \sum_{j=0}^{n-1} R_S^j(f) \\
&= -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{h^5}{2880} f^{(4)}(\zeta_j) = -\frac{h^5}{2880} \sum_{j=0}^{n-1} f^{(4)}(\zeta_j) \\
&= -\frac{h^5}{2880} \cdot n f^{(4)}(\zeta) = -\frac{(b-a)^5}{2880 n^5} \cdot n f^{(4)}(\zeta) \\
&= -\frac{(b-a)^5}{2880 n^4} f^{(4)}(\zeta) = -\frac{(b-a)}{2880} h^4 f^{(4)}(\zeta)
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

这里因 $f^{(4)}(x) \in C^0[a,b]$, 由闭区间上连续函数的介值定理, 存在 $\zeta \in [a,b]$, 使得

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f^{(4)}(\zeta_j) = f^{(4)}(\zeta) \tag{3.14}$$

上界估计为

$$|R_S(f)| \leq \frac{b-a}{2880} M_4 h^4 = \frac{M_4}{2880 n^4}(b-a)^5 \tag{3.15}$$

我们看到这一上界与等分区间个数 n 即节点数目 n+1 有关，显然节点数目越多，误差越小，公式越精细．实际问题经常要我们讨论剖分区间个数或取节点数目以达到给定精度，即要解不等式

$$|R_S(f)| \leq \frac{M_4}{2880n^4}(b-a)^5 < \varepsilon \tag{3.16}$$

反解之，这等价于正整数

$$n^4 > \frac{M_4}{2880\varepsilon}(b-a)^5 \tag{3.17}$$

即

$$n \geq N := \left[\, \sqrt[4]{\frac{M_4}{2880\varepsilon}(b-a)^5}\ \right] + 1 \tag{3.18}$$

从而须取区间 N 段或取节点 N+1 个.

<u>若算上 N 个中节点</u>，则共需取节点 2N+1 个，而区间剖分成为 2N 等份. 这里符号 [ ] 表示 取整函数，即取括号内数的整数部分.

- 3.3. **例题选讲**

复化梯形公式或辛普生公式的手算方法，自然是直接套用公式，对于给定积分核函数 $f(x)$ 、积分区间 $[a,b]$ 和剖分区间段数 n, 依次算出

(1) 步长： $h = (b-a)/n$;

(2) 节点： $x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n$; 对辛普生公式还要中节点：

$$x_{j+\frac{1}{2}} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2} = a + (j + \frac{1}{2})h, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

(3) 节点和中节点函数值：

$$f(x_j), j = 0, 1, 2, \cdots, n, \quad f(x_{j+\frac{1}{2}}), j = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

然后代入复化梯形公式或辛普生公式计算. 为了明晰起见可以列出一张函数值表.

事实上手算当然是困难的，至不济也当持一便携计算器在手，以解除巨大计算量带来的生命不能承受之重．电算方法用传统的 QBASIC 或 C ， C++ 语言编程是可行的．而 Matlab 命令求解尤为迅速． *自适应求积法* (Self-Adaptative Quadrature) 的命令 quad 或 Gauss-Lobatto 公式的命令 quadl 也可供调用，缺憾是步长自动选取，属于“自动档变速”．对于需要给定步长进行“手动变速”的情况，就应当依照复化梯形公式或辛普生公式的程序进行．命令格式可以参考下面的简单实例．

【例 1】 分别用复化梯形公式与复化辛普生公式求积分

(1)

$$\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}dx, \quad n = 8 \tag{3.19a}$$

【解】 步长 $h = (b-a)/n = 1/8$. 记复化梯形公式积分值为 $T8$, 复化辛普生公式求积分值为 $S8$. 可用 Matlab 编程如下:

源程序：

```
x=0:1/8:1
y = x./(4 + x.^2)
T8=trapz(y)*1/8
k=length(y)
y1=[y(2:2:k-1)];s1=sum(y1)
y2=[y(3:2:k-1)];s2=sum(y2)
S8=(y(1)+y(k)+4*s1+2*s2)*1/8/3
```

运行结果为：

T8 = 0.11140235452955

k = 9

s1 = 0.44764975423056

s2 = 0.34356908200583

S8 = 0.11157238253891

即复化梯形公式积分值 T8 = 0.11140235452955. 复化辛普生公式积分值 S8 = 0.11157238253891.

总之用复化梯形公式和复化辛普生公式求非奇异积分可统一编程写为如下 Matlab 程序格式计算：

源程序：

剖分区间段数： n=n

步长： h=(b-a)/n

节点： x=a:h:b

积分核函数y=f(x)

复化梯形公式积分值:T=trapz(y)*h

节点数： k=length(y)

y1=[y(2:2:k-1)];s1=sum(y1)

y2=[y(3:2:k-1)];s2=sum(y2)

复化辛普生公式积分值： S6=(y(1)+y(k)+4*s1+2*s2)*h/3

【例 2】 复化梯形公式与复化辛普生公式余项比较

分别用复化梯形公式与复化辛普生公式计算积分

$$\int_0^1 e^x dx \tag{3.20}$$

区间 $[0,1]$ 应剖分多少等份才能使截断误差不超过 $\dfrac{1}{2}\times 10^{-5}$?

【解】 由复化梯形公式与复化辛普生公式余项上界估计：

(1) 欲使

$$|R_T(f)| \leq \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3 < \varepsilon$$

反解之，这等价于正整数

$$n^2 > \frac{M_2}{12\varepsilon}(b-a)^3$$

即

$$n \geq N := [\sqrt{\frac{M_2}{12\varepsilon}(b-a)^3}\ ] + 1$$

代入

$$M_2 = \max|f''(x)| = \max|e^x| = e, \quad x \in [0,1]$$

以及要求精度 $\varepsilon = \dfrac{1}{2} \times 10^{-5}$ 得

$$n \geq N := [\sqrt{\frac{M_2}{12\varepsilon}(b-a)^3}\ ] + 1$$

$$= [\sqrt{\frac{10^5 e}{6}}] + 1 = [212.85] + 1 = 213$$

从而须取区间 213 段或取节点 214 个.

(2) 欲使

$$|R_S(f)| \le \frac{M_4}{2880n^4}(b-a)^5 < \varepsilon$$

反解之，这等价于正整数

$$n^4 > \frac{M_4}{2880\varepsilon}(b-a)^5$$

即

$$n \ge N := [\,\sqrt[4]{\frac{M_4}{2880\varepsilon}(b-a)^5}\,] + 1$$

代入

$$M_4 = \max|f^{(4)}(x)| = \max|e^x| = e, \quad x \in [0,1]$$

以及要求精度 $\varepsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-5}$ 得

$$n \geq N := [\ \sqrt[4]{\frac{M_4}{2880\varepsilon}(b-a)^5}\ ] + 1$$

$$= [\ \sqrt[4]{\frac{10^5 e}{1440}}\ ] + 1 = [3.7066] + 1 = 4$$

从而算上 N 个中节点，须取区间 $2N = 8$ 段或取节点 $2N + 1 = 9$ 个．显然较复化梯形方法简捷得多． **【解毕】**

【练习 2】 复化梯形公式与复化辛普生公式余项比较

分别用复化梯形公式与复化辛普生公式计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx \tag{3.21}$$

区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 应剖分多少等份才能使截断误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-5}$?