计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：　高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：　李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第八章　常微分方程数值解

第一节　Euler 单步方法

一、 Euler 单步方法基本概念

【定义 1. **一阶常微分方程初值问题** (IVP **问题**) **】**一阶常微分方程初值问题 (Initial Value Problem) 或称 Cauchy 问题形如

$$E:\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x,y) & (1.1)\\ y(x_0)=y_0.\ \ x\in[a,b] & (1.2)\end{cases}$$

解决微分方程的基本方案自然是积分，即用初等积分法求解．然而，法国数学家 Liouville 早于 1841 年证明：大多数微分方程的解不能用初等积分法求解．比如，一阶黎卡提 (Riccati) 方程

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

只在特殊情形下 (比方，知道它的一个特解) 才能求出解析解，而一般的情况则无法用初等积分法求解．换句话说，我们不能获得其精确的解函数解析表达式，也就不能得到解函数在某处的精确值．然而，这样的“不可求方程”却在工程应用中俯拾皆是．

怎么办？还是一个词：“ Discreticized ”，或者一句话：“以直代曲，以离散代连续”．导数 $y' = \dfrac{dy}{dx}$ 的存在是“病根”，搬开这块绊脚石的办法就是 **差分方法** —— 即不要解析解，而要数值解，用差商代替导数，转而寻求那个不可知或难以知道的解函数 $y = \varphi(x)$ 在给定区间 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 各个离散节点处的近似值 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n$. 这需要我们建立一系列的 **差分方程** ，由此将可能产生庞大的代数方程组．虽然仍令人稍有不悦，但毕竟微分方程已经变成了差分方程，分析问题已经变成了代数问题.

【 **定义 3. 欧拉折线** (Euler's polygonal arc method) 】

设一阶 ODE

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

右端函数 $f(x, y) \in C^0(D)$. 过初值点 $P_0(x_0, y_0)$ 作斜率为 $S_0 = f(x_0, y_0)$ 的直线

$$l_0 : y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

又在此直线 l_0 上取点 $P_1(x_1, y_1) \in C^0(D) \bigcap l_0$, 过此点作斜率为 $S_1 = f(x_1, y_1)$ 的直线

$$l_1 : y - y_1 = f(x_1, y_1)(x - x_1)$$

同理可在 D 内重复此程序，一般地，在直线 l_{n-1} 上取点 $P_n(x_n, y_n) \in C^0(D) \bigcap l_{n-1}$, 过此点作斜率为 $S_n = f(x_n, y_n)$ 的直线

$$l_n : y - y_n = f(x_n, y_n)(x - x_n)$$

由于我们每次选取的斜率为 $S_n = f(x_n, y_n)$ ，倘若在每次向下一个节点推进前，都以函数近似值 y_n 取代精确值 $y(x_n)$(这是差分法的基本技术)，那么根据微分方程的标准形式 $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, 右端函数即是积分曲线的切线斜率：

$f(x, y) = \dfrac{dy}{dx}$,

从而

$$S_n = f(x_n, y_n) \approx f(x_n, y(x_n)) = \frac{dy}{dx} \mid_{(x_n, y(x_n))}$$

亦即我们每次选取的直线斜率 $S_n = f(x_n, y_n)$ 与积分曲线在相应节点处的 **切线** 斜率近似相等，因而，这些直线段首尾相连获得的折线处处近似贴合积分曲线，换言之折线将成为积分曲线的近似．这样的一条折线就称为一条 **欧拉折线**(Euler's polygonal arc method)．根据我们的做法，显然其解析式为：

$$l_n : \begin{cases} \varphi(x_0) = y_0 \\ \varphi(x) = \varphi(x_n) + f(x_n, y_n)(x - x_n) \\ = y_n + f(x_n, y_n)(x - x_n) \\ x_n < x \le x_{n+1}, n = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

当 $x_n < x \le x_{n+1}$, 取点 x_n 足够细密即步长 $h = x_{n+1} - x_n$ 充分小时，欧拉折线无限趋近于积分曲线.

【**引例** 1. Euler **折线**】考察一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x \\ y(0) = 1. x \in [0,3] \end{cases}$$

取步长 $h = 1$, 试建立在节点 $0, 1, 2, 3$ 之间的欧拉折线，写出各区间上的直线段解析表达式.

因 $y(0)=1$, 右端函数 $f(x,y)=2x$ ，欧拉折线一般解析式为：

$$l_n:\begin{cases}\varphi(0)=1\\ \varphi(x)=\varphi(x_n)+f(x_n,y_n)(x-x_n) \\ =\varphi(x_n)+2x_n(x-x_n)\end{cases}\qquad n=0,1,2,\cdots$$

若取步长 $h = 1$, 在节点 $0, 1, 2, 3$ 之间的欧拉折线即为 3 条直线段：

$x \in [0, 1], l_0 : \varphi(x) = \varphi(x_0) + f(x_0, y_0)(x - x_0)$

$= \varphi(0) + 2 \times 0 \times (x - 0) = 1 + 0 = 1$

$x \in (1, 2], l_1 : \varphi(x) = \varphi(x_1) + f(x_1, y_1)(x - x_1)$

$= \varphi(1) + 2 \times 1 \times (x - 1) = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1$

$x \in (2, 3], l_2 : \varphi(x) = \varphi(x_2) + f(x_2, y_2)(x - x_2)$

$= \varphi(2) + 2 \times 2 \times (x - 2) = 3 + 4(x - 2) = 4x - 5$

【 **定理** 1. **欧拉公式** (Euler's Method)(**几何推演**) 】

显然，取节点 等距 ，即步长 恒定 为 $h = x_{n+1} - x_n$ ，并令初始节点值近似相等： $y(x_n) = y_n$(我们此后对于单步方法都将作如是假设), 则欧拉折线在节点 $P_n(x_n, y_n), P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ 间的直线段解析表达式为

$y(x) = y(x_n) + f(x_n, y(x_n))(x - x_n)$

$= y_n + f(x_n, y_n)(x - x_n), x_n < x \leq x_{n+1}.$

斜率解析表达式为

$$K = f(x_n, y_n) = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

反解出 y_{n+1} 得到

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + hK$$

此即著名的 欧拉公式(Euler's Method). 本质上，它是一种“差分”格式 (Difference Equation).

【**引例** 2. Euler **格式**】考察一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x \\ y(0) = 1. x \in [0, 2] \end{cases}$$

取步长 $h = 0.5$, 用 Euler 格式计算 $x = 0.5, 1, 1.5, 2$ 处的近似值. 并与相应的真实值作比较.

解

对方程 $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ 积分，则易知其通解为 $y = x^2 + C$, 代入初值条件 $y(0) = 1$ 得常数 $C = 1$, 从而其 Cauchy 初值解为 $y = x^2 + 1$. 这是真实的解析解，若代入节点则相应函数值为精确值.

一阶常微分方程初值问题 Euler 格式具有形式 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$. 这里右端函数 $f(x,y)=2x$ ，从而

$$y_{n+1}=y_n+2hx_n, y(0)=1$$

取步长 $h=0.5$, 则 $x=0,0.5,1,1.5,2$ 可迭代计算. 此时

$$y_{n+1}=y_n+2hx_n=y_n+2\times 0.5x_n=y_n+x_n, y(0)=1$$

故欧拉折线上各个节点对应的函数近似值根据

$y_{n+1} = y_n + x_n, y(0) = 1$ 计算，逐个为

$y_0 = y(0) = 1$,(初始值精确相等)

$y_1 = y_0 + x_0 = 1 + 0 = 1,$

$y_2 = y_1 + x_1 = 1 + 0.5 = 1.5,$

$y_3 = y_2 + x_2 = 1.5 + 1 = 2.5,$

$y_4 = y_3 + x_3 = 2.5 + 1.5 = 4,$

而积分曲线上各个节点对应的函数精确值根据 $y(x_n) = x_n^2 + 1, y(0) = 1$ 计算，逐个为

$$y(0) = 0^2 + 1 = 1,$$

$$y(0.5) = 0.5^2 + 1 = 1.25,$$

$$y(1) = 1^2 + 1 = 2,$$

$$y(1.5) = 1.5^2 + 1 = 3.25,$$

$$y(2) = 2^2 + 1 = 5.$$

显然，这里出现较大的误差，一方面是由于我们选取的步长不够细密，导致折线与曲线贴合得不够紧密；另一方面是由于欧拉公式自身是较为粗糙的算法（这才是关键所在）. 它在理论上具有重大的启蒙意义，但实用中我们往往要用各种方式对它改进和加速，如所谓 改进的欧拉公式 等等.

【 命题 1. 欧拉公式微分推演 】

因差商的极限即为导数，将一阶常微分方程在节点 $P_n(x_n, y_n)$ 的导数用差商近似代替有

$$K = \frac{dy}{dx}\,|_{P_n} = f(x_n, y_n) \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

同样反解出 y_{n+1} 得到 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ 即 欧拉公式.

【 **定理** 2. **单步欧拉公式积分推演** 】

将一阶常微分方程 $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$, 亦即 $dy = f(x,y)dx$, 在节点 $P_n(x_n, y_n), P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ 间的直线段 $\overline{P_nP_{n+1}}$ 上积分，并以节点值近似代替曲线函数值：

$y(x_{n+1}) \approx y_{n+1}, y(x_n) \approx y_n$ ，得到

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

用 数值积分左矩形公式 计算积分

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t))dt \approx (x_{n+1} - x_n)f(x_n, y_n) = hf(x_n, y_n)$$

得到 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ 即 欧拉公式 (Euler's Method).

用 数值积分右矩形公式 计算积分

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t,y(t))dt \approx (x_{n+1}-x_n)f(x_{n+1},y_{n+1}) = hf(x_{n+1},y_{n+1})$$

得到 $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1},y_{n+1})$ 称为 后退的欧拉公式 (Backward Euler's Method).

用 数值积分梯形公式 计算积分

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t,y(t))dt \approx (x_{n+1}-x_n)\frac{1}{2}(f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}))$$

$$= \frac{h}{2}(f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})).$$

得到 $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}))$ 称为 梯形公式 (Trapezoidal Euler's Method).

【 **定义** 4. **单步方法与多步方法** (One-step Method and Multi-steps Method)) 】

计算 y_{n+1} 只用到上一节点 y_n 的数值方法称为 单步方法，如 欧拉公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

即是 单步方法 .

计算 y_{n+1} 须用到前若干个节点 $y_n, y_{n-1}, \cdots$ 的数值方法称为 多步方法，如用到头两个节点 y_n, y_{n-1} 就称为 两步方法 等等. Adams 方法 就是典型的 多步方法.

【 **定义** 5. **显式方法与隐式方法** (Explicit Method and Implicit Method) 】

y_{n+1}<u>已经</u> 解为前若干个节点的显函数式的数值方法称为 显式方法，如 欧拉公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

即是 显式单步方法 .

y_{n+1}没有 解为前若干个节点的显函数式的数值方法称为 隐式方法，如 后退的欧拉公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

与 梯形公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

即是 隐式单步方法．实质上是关于 y_{n+1} 的函数方程，可反解出 y_{n+1} 得到 显式．

隐式单步方法 通常可用迭代过程逐步显式化.

【 **定理** 3. **改进** Euler **公式** (Modified Euler Method) 】

梯形公式迭代法精度提高了，但算法复杂，多次计算右端函数值．为控制计算量同时保证精度，建立预测 - 校正系统 (PC)，过程如下：

预测 (Predictor)：用欧拉公式预测： $y_p = y_n + hf(x_n, y_n)$

校正 (Corrector): 用梯形公式校正：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_p))$$

这样获得新差分值的 隐式单步方法 称为 改进 Euler 公式 (Modified Euler Method).

就是说，在使用梯形公式计算时，把右端的 y_{n+1} 以用欧拉公式预测的值 y_p 取代，结合起来就构成一种改进．它的精度通常要强于 Euler 格式．这种“预报 - 校正”体系是我们进行算法优化的基本技术，后面还要经常用到，而且可能反复来用：“预报 - 校正 - 估计 - 再预报 - 再校正 - 再估计”等等，不厌其烦，精益求精．

倘若定义 校正值 为 $y_c = y_n + hf(x_{n+1}, y_p)$ ，则我们将此校正值与预测值作算术平均有

$$\frac{y_p + y_c}{2} = \frac{y_n + hf(x_n, y_n) + y_n + hf(x_{n+1}, y_p)}{2}$$

$$= y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_p)) = y_{n+1}.$$

因此 改进 Euler 公式 (Modified Euler Method) 也可以写为如下的 平均化形式

$$\begin{cases} y_p = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_c = y_n + hf(x_{n+1}, y_p) \\ y_{n+1} = \dfrac{y_p + y_c}{2} \end{cases}$$

总之，一阶常微分方程初值问题 改进 Euler 公式 (Modified Euler Method) 具有 平均化形式

$$\begin{cases} y_p = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_c = y_n + hf(x_{n+1}, y_p) \\ y_{n+1} = \dfrac{y_p + y_c}{2} \end{cases}$$

或 嵌套形式

$$\begin{cases} y_p = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_p)) \end{cases}$$

【**例** 1. Euler **格式**】非齐次一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = 1, 0 < x < 1. \end{cases}$$

精确解为 $y = \sqrt{1+2x}$. 取步长 $h = 0.1$, 作 Euler 格式迭代计算.

右端函数 $f(x,y)=y-\dfrac{2x}{y}$,Euler 格式 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ 即

$$y_{n+1}=y_n+h(y_n-\frac{2x_n}{y_n}), y(0)=1, 0<x<1.$$

取步长 $h=0.1$, 则 $x=0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,\cdots,1$ 可迭代计算.

如 $y_1 = y_0 + h(y_0 - \frac{2x_0}{y_0}) = 1 + 0.1(1 - \frac{0}{1}) = 1.1$,

$y_2 = y_1 + h(y_1 - \frac{2x_1}{y_1}) = 1.1 + 0.1(1.1 - \frac{0.2}{1.1}) = 1.1918$.

等等.

【 **例** 2. **改进** Euler **格式** 】一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = 1, 0 < x < 1. \end{cases}$$

精确解为 $y = \sqrt{1+2x}$. 取步长 $h = 0.1$, 作改进 Euler 格式迭代计算.

解

平均化形式

$$\begin{cases} y_p = y_n + h(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}) \\ y_c = y_n + h(y_p - \dfrac{2x_{n+1}}{y_p}) \\ y_{n+1} = \dfrac{y_p + y_c}{2} \\ y(0) = 1, 0 < x < 1. \end{cases}$$

或嵌套形式

$$\begin{cases} y_p = y_n + h(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_p)) \\ y(0) = 1, 0 < x < 1. \end{cases}$$

取步长 $h = 0.1$, 则 $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, \cdots, 1$ 可迭代计算.

如用平均化形式

$$
\begin{cases}
y_p = y_0 + h(y_0 - \dfrac{2x_0}{y_0}) = 1.1 \\
y_c = y_0 + h(y_p - \dfrac{2x_1}{y_p}) \\
= 1 + 0.1(1.1 - \dfrac{0.2}{1.1}) = 1.0918. \\
y_1 = \dfrac{y_p + y_c}{2} = \dfrac{1.1 + 1.0918}{2} = 1.0959
\end{cases}
$$

或嵌套形式

$$
\begin{cases}
y_p = y_n + h(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}) = 1.1 \\
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_p)) \\
= 1 + 0.05(1 + (1.1 - \dfrac{0.2}{1.1})) = 1.09590909
\end{cases}
$$

等等.