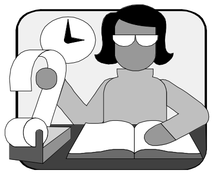


数学实验

Experiments in Mathematics

实验10　方差分析

清 华 大 学 数 学 科 学 系

方差分析

1、方差分析的基本概念、实例

2、单因素方差分析

3、双因素方差分析

4、**MATLAB**统计工具箱**(Statistics Toolbox)**的使用

单因素方差分析示例——灯泡寿命

用4种工艺生产灯泡，从每种工艺制成的灯泡中各抽取若干个测量其寿命(小时)，如表，试推断这几种工艺制成的灯泡寿命是否有显著差异。

序号 \ 工艺	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1620	1580	1460	1500
2	1670	1600	1540	1550
3	1700	1640	1620	1610
4	1750	1720		1680
5	1800			
平均	1708	1635	1540	1585

数据间的差异有两个原因：不同工艺造成的系统差异；同一工艺内的随机差异。

从平均值看A_1最大，但其中最小者比A_4中最大者要小。

双因素方差分析示例---小麦产量

为分析4种化肥和3个小麦品种对小麦产量的影响，把试验田等分成24块，对种子和化肥的每一组合种植2块田，产量如下表，问品种、化肥对小麦产量有无显著影响，二者的交互作用对小麦产量有无显著影响。

小麦产量试验数据（公斤）

品种 \ 化肥	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	173, 172	174, 176	177, 179	172, 173
B_2	175, 173	178, 177	174, 175	170, 171
B_3	177, 175	174, 174	174, 173	169, 169

方差分析的基本概念

指标：关心的试验结果

灯泡的寿命，小麦的产量

因素：需要考察、可以控制的条件

灯泡寿命中的**4**个工艺

单因素

小麦产量中的品种和化肥用量

双因素

水平：因素所设定的状态

灯泡寿命：工艺**4**水平

小麦产量：品种**3**水平，化肥**4**水平

单因素方差分析（因素A）

数学模型

r 个水平 $A_1, A_2, \ldots A_r$，A_i 下总体 $x_i \sim N(\mu_i, \sigma^2), i=1,\cdots r$，$\mu_i, \sigma^2$ 未知。

x_i 中抽取容量为 n 的样本 $x_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2), i=1,\cdots,r,\ j=1,\cdots n$ 且相互独立。

数据表格

	A_1	A_2	…	A_r
1	x_{11}	x_{21}	…	X_{r1}
2	x_{12}	x_{22}	…	x_{r2}
…	…	…	…	…
n	x_{1n}	x_{2n}	…	x_{rn}

判断A的r个水平对指标有无显著影响，等价于:

假设检验：H_0：$\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_r$；H_1：$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_r$ 不全相等。

单因素方差分析-----示例形式

灯泡寿命数据（若每种工艺灯泡数量相同）

序号＼工艺	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1620	1580	1460	1500
2	1670	1600	1540	1550
3	1700	1640	1620	1610
4	1750	1720	1840	1680
5	1800	1840	1840	1840

单因素：

生产工艺

水平： **4个: A_1 A_2 A_3 A_4**

样本量：每组**5**个数据

假设检验：H_0：$\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4$；H_1：$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$不全相等。

单因素方差分析----数学模型

$$x_{ij}=\mu_i+\varepsilon_{ij},\quad i=1,\cdots r,\ j=1,\cdots n,\ \varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2)$$ 且相互独立

$\mu=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_i$ ~ 总均值

$\alpha_i=\mu_i-\mu$ ~ A_i对指标的效应

模型

$$\begin{cases} x_{ij}=\mu+\alpha_i+\varepsilon_{ij} \\ \sum_{i=1}^{r}\alpha_i=0 \\ \varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2),\quad i=1,\cdots r,\ j=1,\cdots n, \end{cases}$$

原假设为 $H_0:\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=0$（略去备选假设）

统计分析

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\text{(组平均值)}, \quad \bar{x} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\bar{x}_i\text{(总平均值)}$$

$$S = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x})^2\text{(总偏差)} \qquad S = S_A + S_E\text{(}S\text{的分解)}$$

$$S_A = \sum_{i=1}^{r} n(\bar{x}_i - \bar{x})^2\text{(组间平方和)} \qquad S_E = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2\text{(组内平方和)}$$

$$ES_E = r(n-1)\sigma^2, \quad ES_A = (r-1)\sigma^2 + \sum_{i=1}^{r} n\alpha_i^2$$

$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$ (A的r个水平对指标无显著影响)

若 H_0 成立 $\dfrac{S_A/r-1}{S_E/r(n-1)} \approx 1$， $F = \dfrac{S_A/r-1}{S_E/r(n-1)} \sim F(r-1, r(n-1))$

显著性水平：α

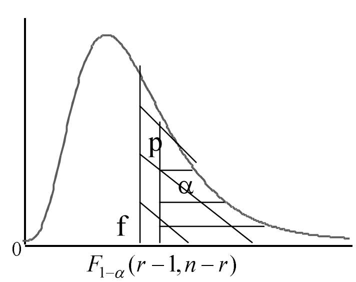
检验规则：$F < F_{1-\alpha}(r-1, r(n-1))$ 时接受 H_0，否则拒绝。

单因素方差分析表

$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$

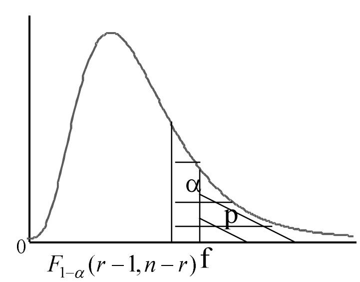
方差来源	平方和	自由度	平方均值	F 值	概率
因素A	S_A	$r-1$	$\bar{S}_A = S_A/r-1$	$f = \bar{S}_A/\bar{S}_E$	$p = P\{F > f\}$
误差	S_E	$r(n-1)$	$\bar{S}_E = S_E/r(n-1)$		
总和	S	$rn-1$			

f~F的样本值



若$f < F_{1-\alpha}(r-1, n-r)$

(即$p > \alpha$),则接受H_0



若$f > F_{1-\alpha}(r-1, n-r)$

(即$p < \alpha$),则拒绝H_0

单因素方差分析

$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$ (A的r个水平对指标无显著影响)

α=0.01，拒绝 H_0 ---影响非常显著；

α=0.01，不拒绝 H_0，但取α=0.05，拒绝 H_0 ----影响显著；

α=0.05，不拒绝 H_0----无显著影响。

单因素方差分析----MATLAB实现

命令： **p=anova1(x)**

适用于各组样本容量相同的单因素方差分析。

输入：

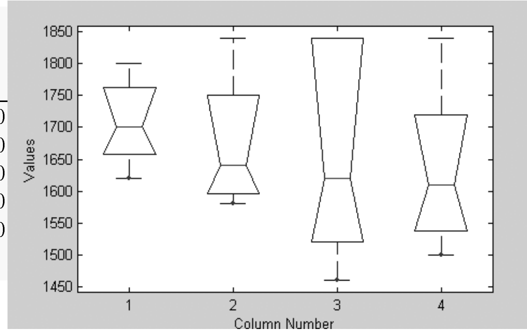
x为**n**行**r**列的数据矩阵，**n**为样本容量，**r**为水平数。

输出： $p = P\{F > f\}$

方差来源	平方和	自由度	平方均值	F 值
因素 A	S_A	$r-1$	$\bar{S}_A = S_A / r-1$	$f = \bar{S}_A / \bar{S}_E$
误差	S_E	$r(n-1)$	$\bar{S}_E = S_E / r(n-1)$	
总和	S	$rn-1$		

表 1　灯泡寿命试验数据

序号 \ 工艺	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1620	1580	1460	1500
2	1670	1600	1540	1550
3	1700	1640	1620	1610
4	1750	1720	1840	1680
5	1800	1840	1840	1840



假设检验: H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4$

结果：**p =0.8351**

结论：接受$\mathbf{H_0}$, 不同工艺无显著影响。

ANOVA Table

Source	SS	df	MS	F
Columus	1.368e+004	3	4560	0.2855
Errors	2.555e+005	16	1.597e+004	
Total	2.692e+005	19		

调用lamp.m (case 1)

命令： **p=anova1(x,group)**

假设检验: H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4$

用于各组样本容量不同的单因素方差分析。

表 2　灯泡寿命试验数据

序号 \ 工艺	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1620	1580	1460	1500
2	1670	1600	1540	1550
3	1700	1640	1620	1610
4	1750	1720		1680
5	1800			

ANOVA Table

Source	SS	df	MS	F
Columus	6.282e+004	3	2.094e+004	4.061
Errors	6.188e+004	12	5157	
Total	1.247e+005	15		

输入：要求**r**个水平样本值顺序排放，

$\mathbf{x=[x_{11}\ldots x_{1n1}\ x_{21}\ldots x_{2n2}\ldots x_{r1}\ldots x_{nr}]}$

group=[1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4 4]

结果：**p =0.0331**

结论：拒绝$\mathbf{H_0}$, 不同工艺有显著影响。

调用

lamp.m (case 2)

多重比较

假设检验：H_0：$\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4$

结论：拒绝H_0，不同工艺有显著影响。

序号 \ 工艺	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1620	1580	1460	1500
2	1670	1600	1540	1550
3	1700	1640	1620	1610
4	1750	1720		1680
5	1800			
平均	1708	1635	1540	1585

哪几种工艺有显著影响？

两总体的假设检验 (ttest2)

原假设	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1=\mu_3$	$\mu_1=\mu_4$
H	0	1	1
p	0.1459	0.0202	0.0408

A_1与A_3, A_4有显著差异（α=0.05），但与A_2无显著差异

双因素方差分析

为考察某指标（如小麦产量）受两个因素A（化肥），B（品种）影响的显著性，

将A,B各划分几个水平；

每个水平组合作若干次试验；

对试验数据进行方差分析；

检验因素A,B是否分别对指标有显著影响，

以及两因素是否对指标有显著的交互影响。

双因素方差分析

数学模型　两个因素：**A和B**

A：r个水平$A_1, A_2, \ldots A_r$,　B：s个水平$B_1, B_2, \ldots B_s$

水平组合（A_i, B_j）：

总体 $x_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2),\ i=1,\cdots r,\ j=1,\cdots s$

（A_i, B_j）下作了t个试验，所得结果记作x_{ijk}，x_{ijk}服从 $N(\mu_{ij}, \sigma^2), i=1,\cdots r,\ j=1,\cdots s, k=1,\cdots t$，且相互独立

	A_1	A_2	…	A_r
B_1	$x_{111}, \ldots x_{11t}$	$x_{211} \ldots x_{21t}$	…	$x_{r11}, \ldots x_{r1t}$
B_2	$x_{121}, \ldots x_{12t}$	$x_{221}, \ldots x_{22t}$	…	$x_{r21}, \ldots x_{r2t}$
…	…	…	…	…
B_s	$x_{1s1}, \ldots x_{1st}$	$x_{2s1}, \ldots x_{2st}$	…	$x_{rs1, \ldots} x_{rst}$

数学模型　$x_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$

x_{ijk} 分解 $: x_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$　$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$，相互独立

$\mu = \frac{1}{rs}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij}$ ~ 总均值

$\mu_i = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij}, \alpha_i = \mu_i - \mu$

$\alpha_i \sim A_i$对指标的效应

$\mu_j = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_{ij}, \beta_j = \mu_j - \mu$

$\beta_j \sim B_j$对指标的效应

$\gamma_{ij} = \mu_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j$

$\gamma_{ij} \sim A_i, B_j$对指标的交互效应

模型

$$\begin{cases} x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ikj} \\ \sum_{i=1}^{r}\alpha_i = 0,\ \sum_{j=1}^{s}\beta_j = 0,\ \sum_{i=1}^{r}\gamma_{ij} = \sum_{j=1}^{s}\gamma_{ij} = 0 \\ \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2),\quad i = 1,\cdots r,\ j = 1,\cdots s,\ k = 1,\cdots t \end{cases}$$

假设检验

原假设

$H_{01}: \alpha_i = 0 \quad (i = 1, \cdots r);$
$H_{02}: \beta_j = 0 \quad (j = 1, \cdots s);$
$H_{03}: \gamma_{ij} = 0 \ (i = 1, \cdots r, \ j = 1, \cdots s)$

统计分析

$$\bar{x}_{ij} = \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t} x_{ijk} \qquad \bar{x}_i = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\bar{x}_{ij}, \ \bar{x}_j = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\bar{x}_{ij} \qquad \bar{x} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\bar{x}_i = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\bar{x}_j$$

(总偏差)$S = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}(x_{ijk} - \bar{x})^2 \Rightarrow S = S_A + S_B + S_{AB} + S_E$

$$\begin{cases} S_A = st\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_i - \bar{x})^2, & S_B = rt\sum_{j=1}^{s}(\bar{x}_j - \bar{x})^2 \\ S_{AB} = t\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\bar{x}_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x})^2, & S_E = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}(x_{ijk} - \bar{x}_{ij})^2 \end{cases}$$

统计分析

$H_{01}: \alpha_i = 0, H_{02}: \beta_j = 0, H_{03}: \gamma_{ij} = 0$

$$ES_A = (r-1)\sigma^2 + st\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2 \qquad ES_B = (s-1)\sigma^2 + rt\sum_{j=1}^{s}\beta_j^2$$

$$ES_{AB} = (r-1)(s-1)\sigma^2 + t\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\gamma_{ij}^2 \qquad ES_E = rs(t-1)\sigma^2$$

H_{01}成立 $F_A = \dfrac{S_A / r-1}{S_E / rs(t-1)} \sim F(r-1, rs(t-1))$ $\quad F_A < F_{1-\alpha}(r-1, rs(t-1))$ 接受H_{01}

H_{02}成立 $F_B = \dfrac{S_B / s-1}{S_E / rs(t-1)} \sim F(s-1, rs(t-1))$ $\quad F_B < F_{1-\alpha}(s-1, rs(t-1))$ 接受H_{02}

H_{03}成立 $F_{AB} = \dfrac{S_{AB}/(r-1)(s-1)}{S_E / rs(t-1)} \sim F((r-1)(s-1), rs(t-1))$

$F_{AB} < F_{1-\alpha}((r-1)(s-1), rs(t-1))$ 接受H_{03}

随机变量F_A, F_B和F_{AB}代入样本值后，分别记成 f_A，f_B 和f_{AB}

方差分析表

方差来源	平方和	自由度	平方均值	F 值	概率
因素A	S_A	$r-1$	$\bar{S}_A = S_A / r-1$	$f_A = \bar{S}_A / \bar{S}_E$	$P_A = P(F_A > f_A)$
因素B	S_B	$s-1$	$\bar{S}_B = S_B / s-1$	$f_B = \bar{S}_B / \bar{S}_E$	$P_B = P(F_B > f_B)$
因素A×B	S_{AB}	$(r-1)(s-1)$	$\bar{S}_{AB} = S_{AB} / (r-1)(s-1)$	$f_{AB} = \bar{S}_{AB} / \bar{S}_E$	$P_{AB} = P(F_{AB} > f_{AB})$
误差	S_E	$rs(t-1)$	$\bar{S}_E = S_E / rs(t-1)$		
总和	S	$rst-1$			

显著性水平 α

检验规则

$f_A < F_{1-\alpha}(r-1, rs(t-1))$(即$P_A > \alpha$)时接受 H_{01}，否则拒绝 H_{01}；

$f_B < F_{1-\alpha}(s-1, rs(t-1))(P_B > \alpha)$时接受 H_{02}，否则拒绝 H_{02}；

$f_{AB} < F_{1-\alpha}((r-1)(s-1), rs(t-1))(P_{AB} > \alpha)$时接受 H_{03}，否则拒绝 H_{03}。

双因素方差分析----无交互影响情况

根据经验或某种分析能够事先断定两因素之间没有交互影响，每组试验就不必重复, t=1.

模型

$$\begin{cases} x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ikj} \\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 0, \ \sum_{j=1}^{s} \beta_j = 0, \ \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ij} = \sum_{j=1}^{s} \gamma_{ij} = 0 \\ \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, \cdots r, \ j = 1, \cdots s, \ k = 1, \cdots t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 0, \ \sum_{j=1}^{s} \beta_j = 0 \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \end{cases}$$

假设检验: $H_{01}: \alpha_i = 0 \ (i = 1, \cdots, r)$; $H_{02}: \beta_j = 0 \ \ (j = 1, \cdots, s)$

统计分析

$$H_{01}:\alpha_i=0\ (i=1,\cdots,r);\quad H_{02}:\beta_j=0\ (j=1,\cdots,s)$$

$$S=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(x_{ij}-\bar{x})^2,\qquad S=S_A+S_B+S_E$$

$$S_A=s\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_i-\bar{x})^2,\quad S_B=r\sum_{j=1}^{s}(\bar{x}_j-\bar{x})^2,\quad S_E=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{x}_j+\bar{x})^2$$

$$ES_E=(r-1)(s-1)\sigma^2,\ ES_A=(r-1)\sigma^2+s\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2,\ ES_B=(s-1)\sigma^2+r\sum_{j=1}^{s}\beta_j^2$$

H_{01}成立时，$F_A=\dfrac{S_A/r-1}{S_E/(r-1)(s-1)}\sim F(r-1,(r-1)(s-1))$

当H_{02}成立时，$F_B=\dfrac{S_B/s-1}{S_E/(r-1)(s-1)}\sim F(s-1,(r-1)(s-1))$

统计分析

方差分析表

方差来源	平方和	自由度	平方均值	F 值	概率
因素A	S_A	$r-1$	$\bar{S}_A=S_A/r-1$	$f_A=\bar{S}_A/\bar{S}_E$	$P_A=P(F_A>f_A)$
因素B	S_B	$s-1$	$\bar{S}_B=S_B/s-1$	$f_B=\bar{S}_B/\bar{S}_E$	$P_B=P(F_B>f_B)$
误差	S_E	$(r-1)(s-1)$	$\bar{S}_E=S_E/(r-1)(s-1)$		
总和	S	$rs-1$			

检验规则

$f_A<F_{1-\alpha}(r-1,(r-1)(s-1))$(即$P_A>\alpha$)时接受$H_{01}$，否则拒绝$H_{01}$；

$f_B<F_{1-\alpha}(s-1,(r-1)(s-1))$(即$P_B>\alpha$)时接受$H_{02}$，否则拒绝$H_{02}$。

MATLAB实现　双因素方差分析(无交互作用)

命令：**p=anova2(x)**

输入： **x**为**s**行**r**列的数据矩阵。

输出：$p = P\{F_A > f_A\}, P\{F_B > f_B\}$

方差来源	平方和	自由度	平方均值	F 值
因素A	S_A	$r-1$	$\bar{S}_A = S_A / r-1$	$f_A = \bar{S}_A / \bar{S}_E$
因素B	S_B	$s-1$	$\bar{S}_B = S_B / s-1$	$f_B = \bar{S}_B / \bar{S}_E$
误差	S_E	$(r-1)(s-1)$	$\bar{S}_E = S_E / (r-1)(s-1)$	
总和	S	$rs-1$		

MATLAB实现　双因素方差分析(有交互作用)

命令：**p=anova2(x,rep)**

输入： **x**为**st**行**r**列的数据矩阵**,** 每一个试验水平**(A_i, B_j)**的**t**个数据按列排列**, rep=t**重复试验的次数 。

输出：$p = P\{F_A > f_A\},\ P\{F_B > f_B\},\ P\{F_{AB} > f_{AB}\}$

方差来源	平方和	自由度	平方均值	F 值
因素A	S_A	$r-1$	$\bar{S}_A = S_A / r-1$	$f_A = \bar{S}_A / \bar{S}_E$
因素B	S_B	$s-1$	$\bar{S}_B = S_B / s-1$	$f_B = \bar{S}_B / \bar{S}_E$
因素A×B	S_{AB}	$(r-1)(s-1)$	$\bar{S}_{AB} = S_{AB} /(r-1)(s-1)$	$f_{AB} = \bar{S}_{AB} / \bar{S}_E$
误差	S_E	$rs(t-1)$	$\bar{S}_E = S_E / rs(t-1)$	
总和	S	$rst-1$		

双因素方差分析----MATLAB实现

例：小麦产量

问品种、化肥及二者的交互作用对小麦产量有无显著影响。

品种 \ 化肥	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	173, 172	174, 176	177, 179	172, 173
B_2	175, 173	178, 177	174, 175	170, 171
B_3	177, 175	174, 174	174, 173	169, 169

假设检验

$$H_{01}: \alpha_i = 0 \quad (i = 1, \cdots 4);$$
$$H_{02}: \beta_j = 0 \quad (j = 1, \cdots 3);$$
$$H_{03}: \gamma_{ij} = 0 \ (i = 1, \cdots 4, \ j = 1, \cdots 3)$$

双因素方差分析----MATLAB实现

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

ANOVA Table

Source	SS	df	MS	F
Columns	90.83	3	30.28	33.03
Rows	8.083	2	4.042	4.409
Interaction	51.92	6	8.653	9.439
Error	11	12	0.9167	
Total	161.8	23		

结论**:**

因素**A(**化肥**)**和交互作用**AB**影响非常显著，因素**B(**品种**)**显著**.**

演示 wheat.m

目的

1、了解方差分析的基本原理

2、根据问题的要求提出模型

3、对已经确定的模型，确定参数、使用MATLAB

作业 1)，4)，6)*

1. 目的。 2. 内容（对每一题）：模型（对应用题）；算法设计；计算结果；结果分析；附程序（必要时加说明语句）。 3. 收获和建议。