计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：　高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：　李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第二章　插值法

第一节　　引言：插值法
Interpolation

以简单函数逼近复杂函数，以线性函数逼近非线性函数，从几何上看是以离散的点逼近连续曲线，以直线段拟合弯曲弧段，一言以蔽之是以直代曲，以简代繁。这是我们考虑许多数学问题的基本思路。插值法正是这一思想的最佳体现之一。

- 1.1. **函数逼近**

定理 1.1 **逼近定理** Weierstrass' Approximation Theorem 对于任意连续函数 $f(x) \in C^0[a,b]$，都存在一个多项式函数序列充分逼近它：

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \tag{1.1}$$

而多项式是非常简单的初等函数－－幂函数的线性组合（ Linear Combination of Power Functions ），并且是 n 次连续可微的光滑函数。在实变函数问题中，可测函数也总是可以用一个简单函数列来逼近。

【例 1】 导函数的逼近 设连续可微函数 $f(x) \in C^{(1)}[a,b]$，则函数列

$$\varphi_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \tag{1.2}$$

收敛于导函数 $f'(x) \in C^0(a,b)$.

【例 2】 非负可测函数的逼近 设 $f(x)$ 为可测集 E 上的非负可测函数，则引入子集合分割

$$E_k = E[x \mid \frac{k-1}{2^n} \le f(x) \le \frac{k}{2^n}], \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n2^n;$$
$$E_{n2^n+1} = E[x \mid f(x) \ge n], \tag{1.3}$$

则函数列

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n}, & x \in E_k \\ n, & x \in E_{n2^n+1} \end{cases} \tag{1.4}$$

收敛于可测函数 $f(x)$，且 $\varphi_n(x)$ 为单调上升非负简单函数列.

【例 3】 **傅立叶级数** 设在有限区间上广义绝对可积的以 2π 为周期的函数 $f(x) \in R[-\pi,\pi] \cap C_{2\pi}$，则函数列

$$\varphi_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k coskx + b_k sinkx) \tag{1.5}$$

收敛于函数 $f(x)$，这里

$$\begin{cases} a_0 & = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_k & = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)coskxdx, \\ b_k & = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinkxdx. \end{cases} \tag{1.6}$$

称为傅立叶系数.

- 1.2. **描点法与插值法**

回忆我们作函数图像时所知的 <u>描点法</u>：给出一个一元函数 $y = f(x)$ 作其 (局部) 图像，可取其 (局部) 定义域 (a,b) 内的若干自变量点
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，算出其相应函数值点：
$f(a) = f(x_0), f_k = f(x_k), f(b) = f(x_n), k = 1, 2, \cdots, n-1$，分别以自变量点和函数值点作为横坐标和纵坐标得到二维平面上的离散点列：

$$M_0(a, f(a)), M_k(x_k, f(x_k)), M_n(b, f(b)), k = 1, 2, \cdots, n-1, \tag{1.7}$$

连结这 $n+1$ 个点即可得到近似拟合于函数曲线的一条折线。

现在考虑相反的问题：如果函数 $y = f(x)$ 的解析表达式未知，而给出一组函数值乃至导函数值表，如何获得一个既简单又能充分逼近未知函数的函数 $P(x)$ ，使得它在给定自变量点处与未知函数具有完全相同的函数值乃至导函数值？这就是 插值法 要解决的问题。

【定义 1】 **插值函数** (Interpolating Function)　设 $y=f(x)$ 在区间 $I=[a,b]$ 上有定义，作区间的某种剖分（分点等距或不等距）：　$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，如果存在一个简单函数 $P(x)$（通常是多项式或分段多项式）在给定各分点处的函数值乃至若干阶导函数值与未知函数 $y=f(x)$ 的取值完全相等：

$$P(a)=f(a)=y_0, P(x_k)=f(x_k)=y_k, P(b)=f(b)=y_n,$$

$$k=1,2,\cdots,n-1.$$

则称 $P(x)$ 为 $y = f(x)$ 的 插值函数 (Interpolating Function)， $y = f(x)$ 为 被插值函数；自变量点 $a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n = b$ 称为 插值节点 (nodes)；区间 $I = [a, b]$ 称为 插值区间 (interval)；求插值函数的方法称为 插值法 (Interpolating Method).(1.8) 式称为 基本插值条件 。

根据插值多项式的种类可以作插值法的分类。例如，$P(x)$ 是代数多项式，则插值法为 *多项式插值* (Polynomial Interpolation)； $P(x)$ 为分段多项式，则插值法为 *分段多项式插值* (Piecewise Polynomial Interpolation)； $P(x)$ 为三角多项式，则插值法为 *三角插值* (Trigonometric Interpolation) 等等不一而足。目前我们重点关注多项式插值和分段多项式插值。

- 1.3. **插值多项式的存在唯一定理**

【 定理 1 】 插值多项式的存在唯一定理 满足基本插值条件 (1.8) 式的 n 次代数插值多项式在插值区间 $I=[a,b]$ 上存在惟一。

【 证明】 设 n 次代数插值多项式

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0 \tag{1.9}$$

满足基本插值条件

$$P(x_0)=y_0, P(x_k)=f(x_k)=y_k, P(x_n)=y_n, k=1,2,\cdots,n-1$$

展开即为 $n+1$ 个方程构成的线性代数方程组，以 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0$ 为未知元：

$$\left\{\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_n x_0^n &= y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_n x_1^n &= y_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_{n-1} x_n^{n-1} + a_n x_n^n &= y_n \end{aligned}\right. \tag{1.10}$$

方程组的系数行列式是著名的范德蒙行列式（ Vandermonde Determinant ）

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

因各插值节点不等：

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，故

$V = \prod_{1 \le j < i \le n}(x_i - x_j) \neq 0$，从而由 Cramer 法则，方程组存在惟一解 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0$，即 n 次代数插值多项式在插值区间 $I = [a, b]$ 上存在惟一。【证毕】

【例 1】 插值多项式的直接确立 (求解线性代数方程组)

试求在 3 个插值节点 $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 1$ 处满足如下基本插值条件

$$p(-2) = -27, p(0) = -1, p(1) = 0$$

的 2 次代数插值多项式（即抛物插值多项式） $p(x)$.

【解】

设 2 次代数插值多项式

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

满足基本插值条件

$$p(-2) = -27, p(0) = -1, p(1) = 0$$

展开即为 $2+1=3$ 个方程构成的线性代数方程组，以 a_2, a_1, a_0 为未知元：

$$\begin{cases} a_0 + (-2)a_1 + (-2)^2a_2 & = -27, \\ a_0 + 0 \cdot a_1 + 0^2 \cdot a_2 & = -1, \\ a_0 + 1 \cdot a_1 + 1^2 \cdot a_2 & = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a_0 - 2a_1 + 4a_2 & = -27, \\ a_0 + 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 & = -1, \\ a_0 + 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 & = 0 \end{cases}$$

写为矩阵 - 向量形式 $Ax = b$ 就是

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

方程组的系数行列式是 $n+1=3$ 阶范德蒙行列式（ Vandermonde Determinant ）

$$|V| = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

因各插值节点不等： $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 1$ ，故

$$V = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$= (0+2)(1+2)(1-0) = 6 \neq 0$$

(此结果亦可由行列式运算法则直接计算获得) 从而由 Cramer 法则，方程组存在惟一解

$a_2 = -4, a_1 = 5, a_0 = -1$ ，即所求 2 次代数插值多项式为

$$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = -4x^2 + 5x - 1$$

【注记】 插值多项式的直接确立 (求解线性代数方程组) 为什么实际不可行

我们看到，确立一个满足基本插值条件

$$P(x_0) = y_0, P(x_k) = f(x_k) = y_k, P(x_n) = y_n, k = 1, 2, \cdots, n-1$$

的 n 次代数插值多项式 $P(x)$ 非常简单，只要求解一个以系数 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0$ 为未知元的 $n+1$ 阶线性代数方程组：

$$
\begin{cases}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_n x_0^n & = y_0, \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_n x_1^n & = y_1, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_{n-1} x_n^{n-1} + a_n x_n^n & = y_n
\end{cases}
$$

就好了．并且我们可以知道，一般地，这种方法的计算量（计算复杂性）是 $O(n^3)$(比如用 Gauss 消元法求解)．那么我们何苦还要讨论其他的插值方法呢？

原因在于：这个线性代数方程组的 $n+1$ 范德蒙系数矩阵（ Vandermonde Matrix ）

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix}$$

随着阶数的升高将呈现“病态”：简单解释，随着幂函数 $x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \cdots$（也叫“单项式”）的次数的升高，它们彼此间将越来越接近，曲线越来越靠拢，取值越来越近似，于是范德蒙系数矩阵的各列向量就越来越接近“线性相关”，从而造成矩阵的接近奇异 (Singular). 所以虽然范德蒙系数矩阵在理论上是非奇异的，但实际计算时在某种给定的机器精度下我们获得的矩阵可能是奇异的，这样就无法以 Cramer 法则求得唯一解.

此外，我们选择的幂函数 x^k 随着次数的升高也是病态的，高次幂函数会发生剧烈的波动，产生数值振荡．这是我们期望避免的，比如可以采用下文介绍的分段插值的方法解决．

因此，我们要来系统地研究一些更为良好和稳定的插值算法．