计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第八章　　常微分方程数值解

第二节　　龙格–库塔方法

Runge-Kutta Method

一、显式 Runge-Kutta 方法

【 龙格 - 库塔方法的设计思想：分析背景与几何背景 】

我们首先回顾一下改进的 Euler 公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) \\ = y_n + h(\dfrac{1}{2}K_1 + \dfrac{1}{2}K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) = f(x_n + h, y_n + hK_1) \end{cases}$$

显然， Euler 公式 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y_n+hK_1$ 是以斜率向前推进，而改进 Euler 公式是以斜率的 算术平均 向前推进．这样就得到了比 Euler 公式更精细的表达．那么，我们可以问：何不将两个斜率的 算术平均 $\dfrac{1}{2}K_1+\dfrac{1}{2}K_2$ 推广为更一般的多个斜率的 加权平均 或 凸线性组合

$$\sum_{i=1}^{r}c_iK_i,\quad \sum_{i=1}^{r}c_i=1$$ 呢？

何不将节点推进的长度从 固定 步长 $x_n + h$ 推广为 可变 的步长 $x_n + \lambda_i h$ 呢？何不将折线函数值点推进的长度由从固定步长因子乘以前面的斜率 $y_n + hK_1$ 推广为可变的步长因子乘以前面的所有斜率 $y_n + h\sum_{j=1}^{i-1}\mu_{ij}K_j$ 呢？对于改进 Euler 公式，就可以这样来推广：

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + h(c_1 K_1 + c_2 K_2) \\
K_1 = f(x_n, y_n) \\
K_2 = f(x_n + \lambda_1 h, y_n + h\mu_{21} K_1)
\end{cases}
$$

事实证明，这样的想法是对头的．并且完全可以推广到一般情形，这就是著名的 Runge-Kutta 方法.

更一般地，龙格 - 库塔方法的背景来源于如下考虑:

(1)**分析背景**: 取节点为 $x_n + \lambda_i h$，相应函数值为 $y(x_n + \lambda_i h)$，将积分用求积公式表达为近似的有限和形式，并进而利用 Euler 公式将应函数值为 $y(x_n + \lambda_i h)$ 表达为前一节点值与增量函数之和的形式

$y(x_n + \lambda_i h) = y_n + h \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ij} K_j$, 则有

$$y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

$$\approx \sum_{i=1}^{r} c_i f(x_n + \lambda_i h, y(x_n + \lambda_i h))$$

$$\approx \sum_{i=1}^{r} c_i f(x_n + \lambda_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ij} K_j).$$ 从而

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h\varphi(x_n, y_n, h) \\
&= y_n + h\sum_{i=1}^{r} c_i K_i \\
&= y_n + h\sum_{i=1}^{r} c_i f(x_n + \lambda_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ij} K_j)
\end{aligned}
$$

即是 r 级显式 Runge-Kutta 一般公式.

(2)**几何背景**: 就几何形式而言， Runge-Kutta 公式 $y_{n+1}=y_n+h\sum_{i=1}^{r}c_iK_i$ 是将增量函数或即差商表示成为斜率的 凸线性组合 或 加权平均：

$$\varphi(x_n,y_n,h)=\frac{y_{n+1}-y_n}{h}=\sum_{i=1}^{r}c_iK_i$$

以期提高方法的阶. 显然，这样做了斜率的 凸线性组合 或 加权平均 后，折线段的坡度更加平缓柔和，可以更好地拟合积分曲线，也就能更精确地逼近微分方程的真实解.

【 **定理** 1. r **级显式** Runge-Kutta **一般公式** 】

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h) \\ \varphi(x_n, y_n, h) = \sum\limits_{i=1}^{r} c_i K_i \\ K_i = f(x_n + \lambda_i h, y_n + h\sum\limits_{j=1}^{i-1} \mu_{ij} K_j) \end{cases}$$

其中 c_i, λ_i, μ_{ij} 均为常数组合系数. 系数 μ_{ij} 可排成一个 $r \times r$ 的零对角元下三角方阵. K_j 为斜率. c_i 构成凸线性组合系数: $\sum_{i=1}^{r} c_i = 1$, 而斜率组合项的数目 r 称为 Runge-Kutta 公式的 **级**.

如系数 μ_{ij} 排成的 $r \times r$ 的零对角元下三角方阵为:

$$L_{r\times r} = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & \\ \mu_{21} & 0 & \cdots & & \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mu_{r1} & \mu_{r2} & \cdots & \mu_{r,r-1} & 0 \end{pmatrix}$$

【 命题 1 】

(1)$r=1, c_1=1$ 的显式 Runge-Kutta 公式即是 Euler 公式
$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y_n+hK_1$;

(2)$r=2$ 的显式 Runge-Kutta 公式之一即是改进 Euler 公式

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{2}(f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n)) \\ =y_n+h(\dfrac{1}{2}K_1+\dfrac{1}{2}K_2) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n)=f(x_n+h,y_n+hK_1) \\ c_1=c_2=\dfrac{1}{2},\lambda_1=1,\mu_{21}=1. \end{cases}$$

对于 2 级 2 阶的显式 Runge-Kutta 公式

若取 $c_2 = a = 1, c_1 = 0, \lambda_2 = \mu_{21} = \dfrac{1}{2}$, 则有如下中点公式.

【**命题** 2. **中点公式** (Midpoint Method) 】

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_2 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1) \end{cases}$$

【 命题 2. 若干低阶低级显式 Runge-Kutta 一般公式 】

一阶一级显式 Runge-Kutta 公式即是 Euler 公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + hK_1$$

二阶二级显式 Runge-Kutta 公式一般形式为

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + h(c_1 K_1 + c_2 K_2) \\
K_1 = f(x_n, y_n) \\
K_2 = f(x_n + \lambda_2 h, y_n + h\mu_{21} K_1) \\
= f(x_n + \lambda_2 h, y_n + h\mu_{21} f(x_n, y_n))
\end{cases}
$$

三阶三级显式 Runge-Kutta 公式一般形式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(c_1K_1 + c_2K_2 + c_3K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \lambda_2 h, y_n + h\mu_{21}K_1) \\ K_3 = f(x_n + \lambda_3 h, y_n + h\mu_{31}K_1 + h\mu_{32}K_2) \end{cases}$$

四阶四级显式 Runge-Kutta 公式一般形式为

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + h(c_1K_1 + c_2K_2 + c_3K_3 + c_4K_4) \\
K_1 = f(x_n, y_n) \\
K_2 = f(x_n + \lambda_2 h, y_n + h\mu_{21}K_1) \\
K_3 = f(x_n + \lambda_3 h, y_n + h\mu_{31}K_1 + h\mu_{32}K_2) \\
K_4 = f(x_n + \lambda_4 h, y_n + h\mu_{41}K_1 + h\mu_{42}K_2 + h\mu_{43}K_3)
\end{cases}
$$

【注记 1. **“级”和“阶”】**注意“级”和“阶”是不同的概念. 我们知道, 若某种数值方法的“局部截断误差”可被步长 h 的 $p+1$ 次幂控制, 即满足

$$T_{n+1} = y(x+h) - y(x) - h\varphi(x, y, y(x+h), h) = O(h^{p+1})$$

或简写为 $T_{n+1} = O(h^{p+1})$, 则称此方法 *具有 p 阶精度*. 自然会问, “级”和“阶”是否就毫无瓜葛呢? 回答是否定的. 事实上, 对于 Runge-Kutta 公式, “级”和“阶”的关系相当确定: 一至四级的显式 Runge-Kutta 公式具有的阶数与其级数相等: $p = r$. 而五级以上的显式 Runge-Kutta 公式阶数比级数要小: $p < r$. 这是 Butcher 证明的.

【注记 2. Runge-Kutta **公式的优缺点】** Runge-Kutta 公式对于求解范围较大而精度要求较高的近似解是优秀的算法；但由于它是基于高阶 Taylor 展开的方法，而具有高阶连续导数的解函数 $\varphi(x)$ 自然对应着相当光滑的积分曲线．因此，若解函数 $\varphi(x)$ 比较光滑，则 Runge-Kutta 公式优于低阶的 Euler 方法；但若解函数曲线 $\varphi(x)$ 疙疙瘩瘩，则可能反而不如用低阶的 Euler 方法或改进 Euler 方法来得精确．所以针对具体问题还是要灵活应对，不拘一格．哪个算法好就用哪个，而不可为教条和本本束缚手脚．

【 **注记** 3. Runge-Kutta **公式的套路** 】赫赫有名的 Runge-Kutta 公式是一整套方法，级数自低而高，斜率自少而多，精度自粗而细，形式自简而繁，其核心设计理念却未有更改. 犹如新疆维吾尔人民的“十二木卡姆”套曲，单独来用，固然称手；组合起来，相得益彰.

如前所述，一般形式的四阶四级的显式 Runge-Kutta 格式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(c_1K_1 + c_2K_2 + c_3K_3 + c_4K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \lambda_2 h, y_n + h\mu_{21}K_1) \\ K_3 = f(x_n + \lambda_3 h, y_n + h\mu_{31}K_1 + h\mu_{32}K_2) \\ K_4 = f(x_n + \lambda_4 h, y_n + h\mu_{41}K_1 + h\mu_{42}K_2 + h\mu_{43}K_3) \end{cases}$$

包含 13 个未知数： 4 个 c_i， 3 个 λ_i 和 6 个 μ_{ij}. 其推导需要求解 13 个未知数 11 个方程构成的不定方程组，解不唯一. 四阶四级的显式 Runge-Kutta 格式具有特别重要的实用价值，其中之一名之为“经典公式”.

【 **定理** 4. **四阶显式** Runge-Kutta **格式** (**经典公式**) 】

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 = f(x_n, y_n) \\
K_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1) \\
K_3 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_2) \\
K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3)
\end{cases}
$$

若依照我们从前对于插值或积分节点的记号，仍记中节点为 $x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{h}{2}$，则四阶显式 Runge-Kutta 格式 (经典公式) 可写为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(x_{n+1}, y_n + hK_3) \end{cases}$$

本格式用 4 个节点 $x_n, x_{n+\frac{1}{2}}, x_{n+\frac{1}{2}}, x_{n+1}$(中节点用了两次) 处的斜率 K_1, K_2, K_3, K_4 的凸线性组合
$\frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$ 生成平均斜率，组合系数为“杨辉三角”的双肩系数“ 1,2,1 ”反复使用两次，首个斜率
$K_1 = f(x_n, y_n)$ 直接计算， K_2, K_3 都用中点公式计算， K_4 则用“后退”的 Euler 公式计算，其中“预报”的函数值则由 Euler 公式计算为 $\widetilde{y}_n = y_n + hK_3$.

显然，用四阶显式 Runge-Kutta 经典格式每推进一步要反复四次计算函数 $f(x, y)$ 在各点的值.

【例 1.　Runge-Kutta 经典格式】

用四阶显式 Runge-Kutta 形式 (经典公式)

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \end{cases}$$

求解一阶常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = 1, 0 < x < 1. \end{cases}$$

其精确解为 $y = \sqrt{1+2x}$. 取步长 $h = 0.2$.

解

此一阶线性常微分方程初值问题四阶显式 Runge-Kutta 形式 (经典公式) 为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) = y_n - \dfrac{2x_n}{y_n} \\ K_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_1) \\ = y_n + \dfrac{h}{2}K_1 - \dfrac{2(x_n + \dfrac{h}{2})}{y_n + \dfrac{h}{2}K_1} \\ = y_n + \dfrac{h}{2}K_1 - \dfrac{2x_n + h}{y_n + \dfrac{h}{2}K_1} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
K_3 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{h}{2}K_2) \\
= y_n + \dfrac{h}{2}K_2 - \dfrac{2(x_n + \dfrac{h}{2})}{y_n + \dfrac{h}{2}K_2} \\
= y_n + \dfrac{h}{2}K_2 - \dfrac{2x_n + h}{y_n + \dfrac{h}{2}K_2} \\
K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \\
= y_n + hK_3 - \dfrac{2x_n + 2h}{y_n + hK_3}
\end{cases}
$$

取步长 $h=0.2$, 则 $h/2=0.1, x=0,0.2,0.4.0.6.0.8,1$. 如迭代 1 步有

$$\left\{\begin{aligned} K_1 &= y_n - \frac{2x_n}{y_n} = y_0 - \frac{2x_0}{y_0} = 1 - \frac{2\times 0}{1} = 1 \\ K_2 &= y_n + \frac{h}{2}K_1 - \frac{2x_n + h}{y_n + \frac{h}{2}K_1} \\ &= 1 + 0.1K_1 - \frac{2x_n + 0.2}{1 + 0.1K_1} \\ &= 1 + 0.1\times 1 - \frac{2\times 0 + 0.2}{1 + 0.1\times 1} \\ &= 1.1 - \frac{0.2}{1.1} \approx 0.91818 \end{aligned}\right.$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
K_3 &= y_n + \frac{h}{2}K_2 - \frac{2x_n + h}{y_n + \frac{h}{2}K_2} \\
&= 1 + 0.1K_2 - \frac{2x_n + 0.2}{1 + 0.1K_2} \\
&= 1 + 0.1 \times 0.91818 - \frac{2 \times 0 + 0.2}{1 + 0.1 \times 0.91818} \\
&= 1.091818 - \frac{0.2}{1.091818} \approx 0.90864
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\begin{cases}
K_4 = y_n + hK_3 - \dfrac{2x_n + 2h}{y_n + hK_3} \\
= y_n + 0.2K_3 - \dfrac{2x_n + 0.4}{y_n + 0.2K_3} \\
= 1 + 0.2 \times 0.90864 - \dfrac{2 \times 0 + 0.4}{1 + 0.2 \times 0.90864} \\
= 1.181728 - \dfrac{0.4}{1.181728} \approx 0.84324
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
= 1 + \dfrac{0.2}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
= 1 + \dfrac{0.1}{3}(1 + 2 \times 0.91818 + 2 \times 0.90864 + 0.84324) \\
= 1 + \dfrac{0.1}{3} \times (1 + 1.83636 + 1.81728 + 0.84324) \\
= 1 + \dfrac{0.1}{3} \times 5.49688 \approx 1.1832293
\end{cases}
$$

【例 2. Runge-Kutta 经典格式】

取步长 $h=0.2$, 则 $x=0,0.2,0.4.0.6.0.8,1$. 用四阶显式 Runge-Kutta 形式 (经典公式)

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1) \\ K_3=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_2) \\ K_4=f(x_n+h,y_n+hK_3) \end{cases}$$

求解一阶常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x + y \\ y(0) = 1, 0 < x < 1. \end{cases}$$

解

此一阶线性常微分方程初值问题四阶显式 Runge-Kutta 形式 (经典公式) 为

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 = f(x_n, y_n) = x_n + y_n \\
K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1) \\
= x_n + \frac{h}{2} + y_n + \frac{h}{2}K_1 \\
= (1 + \frac{h}{2})K_1 + \frac{h}{2}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
K_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2) \\
= x_n + \frac{h}{2} + y_n + \frac{h}{2}K_2 \\
= K_1 + \frac{h}{2}K_2 + \frac{h}{2} \\
K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \\
= x_n + h + y_n + hK_3 = K_1 + h + hK_3
\end{cases}
$$

取步长 $h=0.2$, 则 $\dfrac{h}{2}=0.1, x=0,0.2,0.4.0.6.0.8,1$. 如迭代 1 步有

$$\begin{cases} K_1 = f(x_0,y_0) = x_0 + y_0 = 0+1 = 1 \\ K_2 = (1+\dfrac{h}{2})K_1 + \dfrac{h}{2} = (1+0.1)1+0.1 = 1.2 \\ K_3 = K_1 + \dfrac{h}{2}K_2 + \dfrac{h}{2} = 1+0.1\times 1.2+0.1 = 1.22 \\ K_4 = K_1 + h + hK_3 = 1+0.2+0.2\times 1.22 = 1.444 \end{cases}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$
$$= 1 + \frac{0.2}{6}(1 + 2.4 + 2.44 + 1.444) = 1.2428$$