初等模型（2）

一、录象机计数器的用途

二、优秀成果评选公平性问题

三、生小兔问题

四、动物繁殖的规律

五、棋子颜色的变化

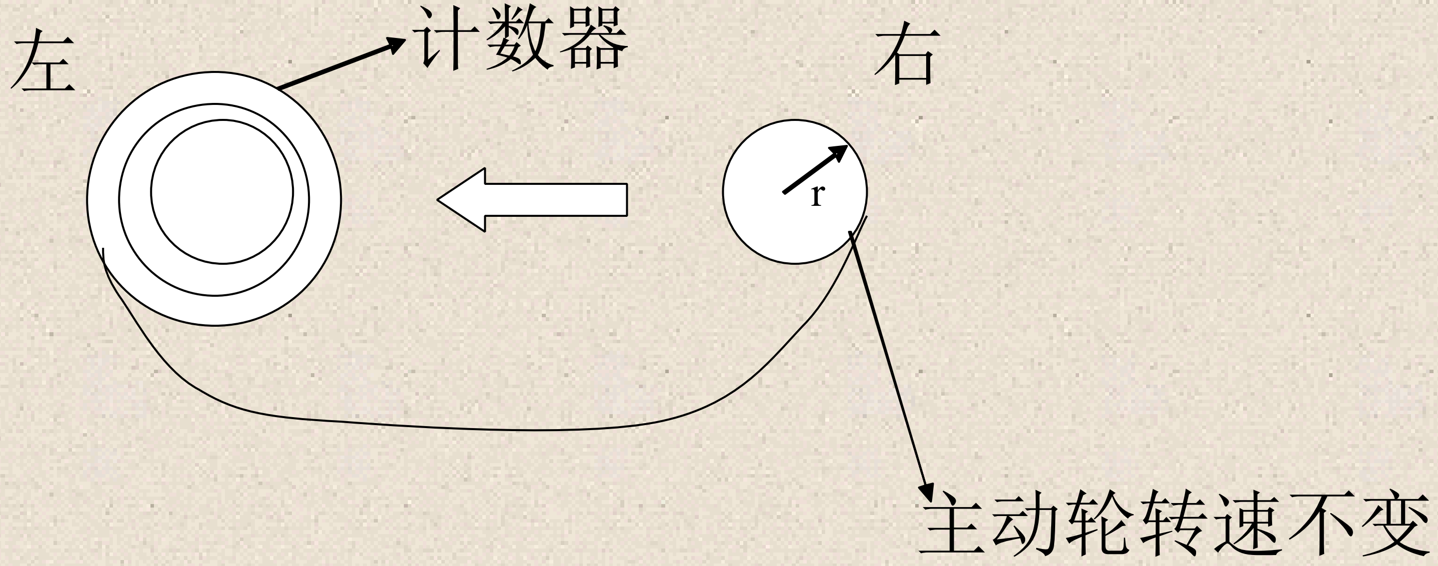
1、问题的提出

老式录象机或一些录音机上有计数器，而没有计时器。因而问题产生：一盘180分钟的带子，计数器从0000变到6061。当带子用到4450时，剩下的带子可否录下一个小时的节目。

问题所在：录象带读数并非随时间而均匀增长，是先快后慢。

要建立的模型：计数器读数与录象带转过的时间之间的关系。

2、问题分析——读数的增长为何先快后慢



建立模型：t = f (n)

3、模型假设

（1）录象带的线速度是常数v

（2）计数器读数n 与右轮盘转的圈数（m ）成正比，即$m = k n$

（3）录象带的厚度（加两带间的空隙）是常数w

（4）空右轮盘半径为r，

初始时刻：$t=0$时$n=0$

几个角度建立模型！

4、模型的建立

方法一、

左轮盘所有圈数的长度 = 录象带转过的长度

$$\sum_{i=1}^{m} 2\pi(r+\omega i) \quad = \quad vt \qquad (1)$$

其中m为圈数，则m=kn

模型：$$t=\left(\frac{2\pi rk}{v}n+\frac{\pi\omega k^2}{v}n^2\right)+\frac{k\omega\pi}{v}n \approx \frac{2\pi rk}{v}n+\frac{\pi\omega k^2}{v}n^2 \qquad (2)$$

w相对r较小，忽略该项

4、模型的建立

方法二、

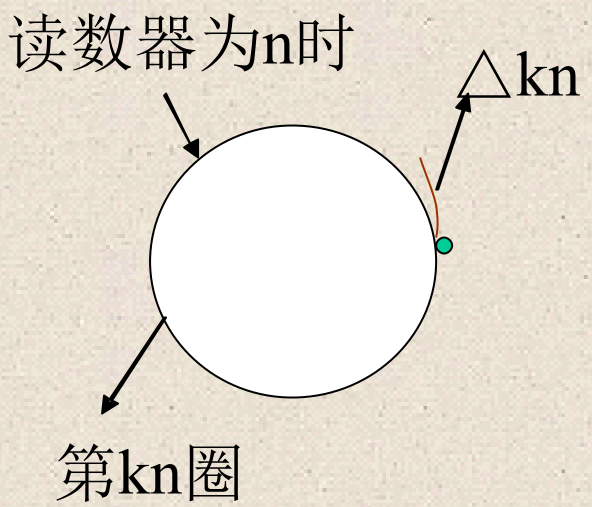
左轮盘面积增加 ＝ 录象带转过的长度与厚度的乘积

$$\pi[(r+\omega kn)^2 - r^2] = \omega(vt) \qquad （3）$$

4、模型的建立

方法三、微积分法　　设t = f (n)

考虑从第n到第n+△n圈（此时第n+1圈未走完)



因此：

$$\Delta t = f(n+\Delta n) - f(n)$$

$$= \frac{[2\pi(kn+1)\omega]*(k\Delta n)}{v}$$

即 $\frac{dt}{dn} = \frac{2\pi k\omega(kn+1)}{v}$, 且 $t(0)=0$

因此：　$t = \frac{2\pi rk}{v} n + \frac{\pi\omega k^2}{v} n^2$

5、参数估计

记

$$t=\underbrace{\frac{2\pi rk}{v}}_{a}n+\underbrace{\frac{\pi\omega k^{2}}{v}}_{b}n^{2}$$

问题：测试一组数据估计：

t = a n + b n

初等模型（2）

一、录象机计数器的用途

二、优秀成果评选公平性问题

三、生小兔问题

三、动物繁殖的规律

四、棋子颜色的变化

二、优秀成果评选公平性问题

1、问题：设有N个评委组成的评选委员会，有M项研究成果，评委会要从中选$m<M$项优秀成果，但有些评委是某些成果的完成者，应如何处理此问题才是公平的？

方案一：按得票多少排序

方案二：评委不参加对自己的成果投票，再按得票率排队

方案（2）是否公平分析

设某成果涉及C个评委，他们回避后该项成果得p(≤N－C)票。

（1）回避得票率

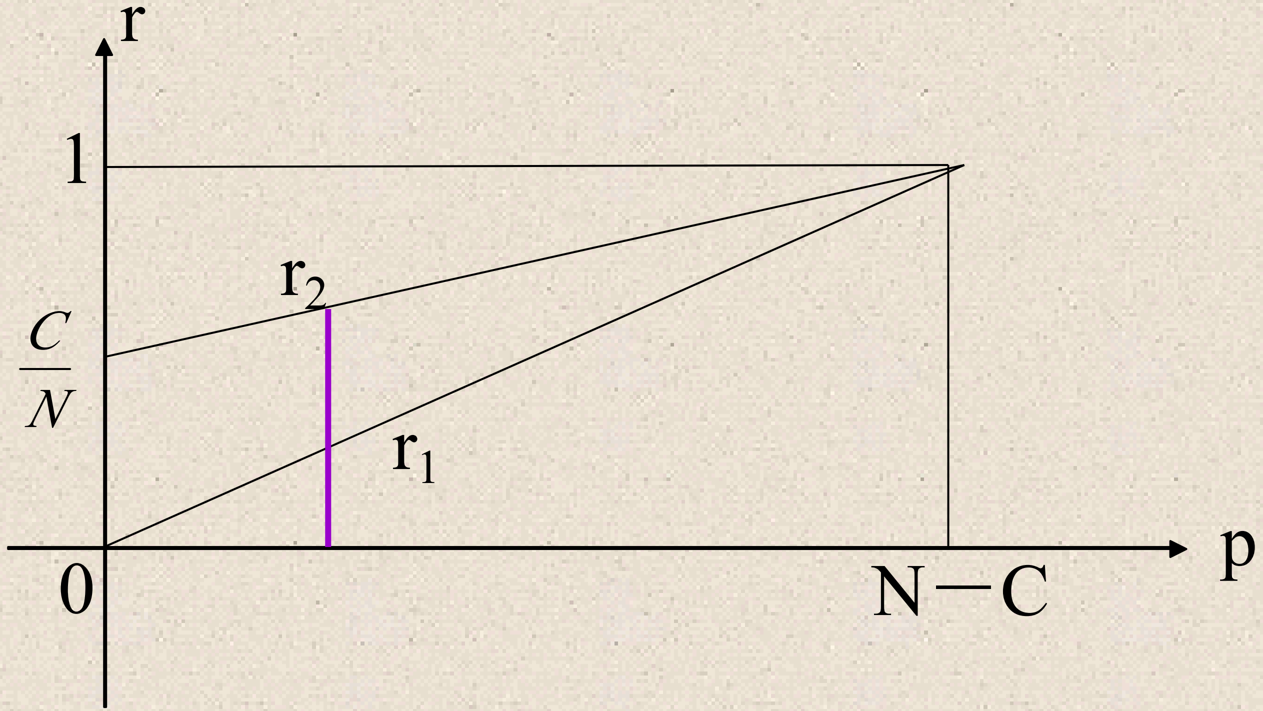
$$r_1(p)=\frac{p}{N-C}$$

（2）不回避得票率

$$r_2(p)=\frac{p+C}{N}$$

方案（2）还是不公平？

除p=N－C外，对每个p，均有$r_1(p) < r_2(p)$



应采用折中方案

度量得票多少的函数$q(p)$应满足如下条件：

（1） $q(p)$是p的单调增函数

（2）$r_1(p) < q(p) < r_2(p)$，$0 < p < N-C$

（3）$q(0) = 0$，$q(N-C) = 1$

一个简单实用公平的度量函数

$$q(p)=\sqrt{r_1(p)r_2(p)}=\sqrt{\frac{p(N+C)}{N(N-C)}}$$

还有吗？

初等模型（2）

一、录象机计数器的用途

二、优秀成果评选公平性问题

三、生小兔问题

四、动物繁殖的规律

五、棋子颜色的变化

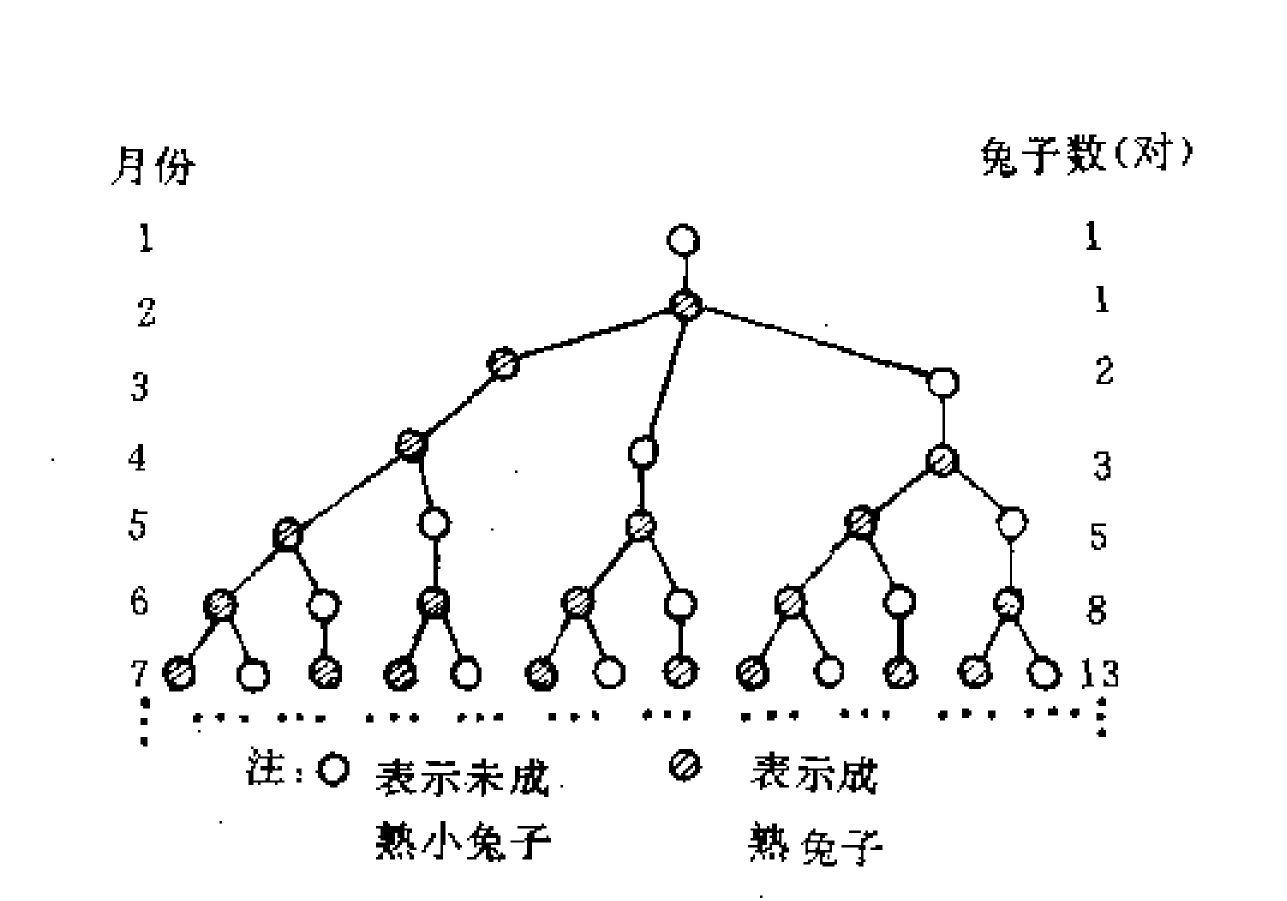
三、生小兔问题

1、问题：

兔子出生以后两个月就能生小兔，如果每月生一次且恰好生一对小兔，且出生的兔子都成活，试问一年以后共有多少对兔子，两年后有多少对兔子?

注：这是13世纪意大利比萨的一位叫伦纳德，绰号为斐波那契(Fibonacd，1170—1250)的数学家，在一本题为《算盘书》的数学著作中，提出的一个有趣的问题。

2、图示



3、问题分析

第一个月：只有一对小兔。

第二个月：小兔子未成熟不会生殖，仍只一对，

第三个月；这对兔子生了一对小兔，共有两对。

第四个月：老兔子又生了一对小兔，而上月出生的小兔还未成熟，这时共有三对。

4、问题分析与模型建立

记r_i表示第i个月的兔子数

（1）$r_1 = 1$

（2）$r_2 = 1$

（3）规律： $r_n = r_{n-2} + r_{n-1}, \quad n = 3,4,\cdots$

2年后兔子的对数：75025

5、 Fibonacd数列的奇特性质

$$(1)F_{m+n}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1} \qquad m,n\in N$$

$$(2)F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$$

$$(3)F_{n-k}F_{m+k}-F_nF_m=(-1)^nF_{m-n-k}F_k$$

$$(4)F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

6、 Fibonacd数列的广泛应用

1、一本专门研究它的杂志——《斐波那契季刊》(Fibonacci Quarterly)于1963年开始发行，在美国还专门设立了Fibonacci数委员会。

2、上世纪50年代出现的“优选法”中，也有斐波那契数列的巧妙应用。

3、斐波那契数列不只是在生小免问题中才会遇到，它也出现在自然界、生活中……，如植物的叶序、菠萝的鳞片、树枝的生长、蜜蜂进蜂房的路线、钢琴键盘等

初等模型（2）

一、录象机计数器的用途

二、优秀成果评选公平性问题

三、生小兔问题

四、动物繁殖的规律

五、棋子颜色的变化

四、动物繁殖的规律

1、问题：

某动物的最大年龄为15岁，按年龄分三组：（1）0~5岁 （2）6~10岁 （3）11~15岁。从第（2）年龄组后开始繁殖。第（2）年龄组平均繁殖4个，第（3）年龄组平均繁殖3个。第（1）（2）年龄组分别进入下一年龄组的存活率为0.5，0.25。现设三个年龄组的数量分别为1000，问：5年、10年、15年后各年龄段动物数量，并且20年后各年龄段动物数量又如何？

2、问题分析

设：以5年为1年龄段，t为时间段，各年龄段的数量为：　$X^{(t)}=[\,x_1^{(t)}\ \ x_2^{(t)}\ \ x_3^{(t)}\,]'$

初始时刻的数量：

$X^{(0)}=[\,x_1^{(0)}\ \ x_2^{(0)}\ \ x_3^{(0t)}\,]'=[1000\ 1000\ 1000]'$

则：

第1年龄段

$$(1)\ x_1^{(t+1)}=4x_2^{(t)}+3x_3^{(t)}$$

第2年龄段

$$(2)\ x_2^{(t)}=0.5x_1^{(t)}$$

第3年龄段

$$(3)\ x_3^{(t)}=0.25x_2^{(t)}$$

3、模型

$$X^{(t+1)}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\ 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.25 & 0\end{bmatrix}X^{(t)}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\ 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.25 & 0\end{bmatrix}^{t}X^{(0)}$$

4、求解5年、10年及15年数量

	5年	10年	15年	20年
第1年龄段	7000	2750	14375	8125
第2年龄段	500	3500	1375	7187.5
第3年龄段	250	125	875	343.8

5、思考?

- （1）当有足够大的时间t时，模型有什么规律?　　　（代数性质）
- （2）如果每5年平均向市场供应动物数是: $c=[s\ s\ s]'$，问动物不在灭绝的前提下，c应取多少?
- （3）在动物不在灭绝的前提下，每5年应如何规划使得20年内向市场供应的数量最大?

初等模型（2）

一、录象机计数器的用途

二、优秀成果评选公平性问题

三、生小兔问题

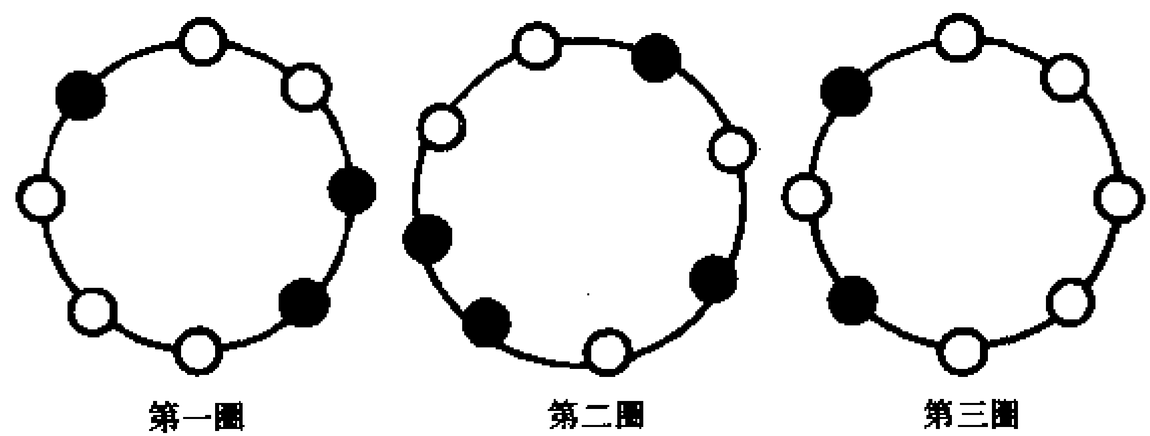
四、动物繁殖的规律

五、棋子颜色的变化

五、棋子颜色的变化

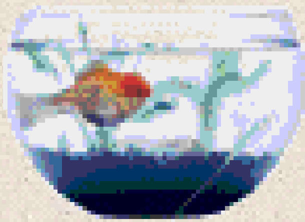
1、问题：

任意拿出黑白两种颜色的棋子共8个，排成如下图所示的圆圆，然后在两颗颜色相同的棋子中间放一颗黑色棋子，在两颜色不同的棋子中间放一颗白色棋子，放完后撤掉原来所放的棋子。再重复以上的过程，问这样重复进行下去各棋子的颜色会怎样变化呢?



2、最终结论是什么？

可完全用数学的推理方法说明最多经过8次变换，各棋子的颜色都会变黑。



3、分析

注意：规则是两同色的棋子中间加黑色棋子，两异色的棋子中间加白色棋子，即黑黑得黑，白白得黑，黑白得白，与有理数符号规则类似。

方法：用+1表尔黑色，用－1表示白色，开始摆的八颗棋子记为a_1，a_2，…，a_8，并且a_k＝+1或-1，k＝1，2，…，8，下一次在a_1与a_2中间摆的棋子的颜色由a1和a2是同色还是异色而定。类似的$a_k a_{k+1}$正好给出了所放棋子的颜色。

4、符号运算规则

规则：黑黑得黑，白白得黑，黑白得白

引入记号⊙，则：

$(+1)\odot(+1)=(+1)^2=+1$

$(-1)\odot(-1)=(-1)^2=+1$

$(+1)\odot(-1)=-1$

5、各次颜色的确定

第 0 次	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
第 1 次	a_1a_2	a_2a_3	a_3a_4	a_4a_5	$\cdots$	$\cdots$	a_8a_1	
第 2 次	$a_1a_2^2a_3$	$a_2a_3^2a_4$	$\cdots$	$\cdots$	$a_8a_1^2a_2$			
第 3 次	$a_1a_2^3a_3^3a_4$	$a_2a_3^3a_4^3a_5$	$\cdots$	$\cdots$	$a_8a_1^3a_2^3a_3$			
	$\cdots$	$\cdots$						
第 8 次	$a_1^1a_2^8a_3^{28}a_4^{56}a_5^{70}a_6^{56}a_7^{28}a_8^8a_1^1, \cdots a_8^1a_1^8a_2^{28}a_3^{56}a_4^{70}a_5^{56}a_6^{28}a_7^8a_8^1$							

可见：最多经过8次变换以后，各个数都变成丁+1，这意味着所有棋子都是黑色，且以后重复上述过程，颜色也就不再变化了。

小组讨论题

d4-01：跑步与走路时如何节省能量

我们每个人都有跑步的经历，有人会因此而疲惫不堪，但是有谁会想：怎样跑步能使我们消耗的能量最少？

结　束！

不公平！

对非评委的研究成果的完成者不公平，因为评委对自己完成的成果投赞成票的可能性最大。

（1）规律：

当时间t足够大时，满足：

$X^{(k+1)} = \lambda X^{(k)}$ （其中 λ 为唯一正特征根）


如何求λ?

Matlab命令：

特征值命令：d=eig(A)

求正数: [i,j]=find(d>0)

（2）如何取c值？

由于：

$$X^{(1)} = AX^{(0)} - c, \qquad X^{(2)} = AX^{(1)} - c,$$

$$X^{(3)} = AX^{(2)} - c, \qquad X^{(4)} = AX^{(3)} - c,$$

故：

$$\begin{cases} X^{(4)} = A^4 X^{(0)} - (A^3 + A^2 + A + I)c \\ X^{(4)} > 0 \end{cases}$$

即：

$$(A^3 + A^2 + A + I)c < A^4 X^{(0)}$$

Matlab求不等式解：c=[152 152 152]

（3）如何使数量最大？

设$c=[c_1\ c_2\ c_3\ c_4]$为每个5年的供应量，则：

$$\max \quad c_1 + c_2 + c_3 + c_4$$

$$s.t.\begin{cases} AX^{(0)} - c_1 > 0 \\ AX^{(1)} - c_2 = A^2X^{(0)} - Ac_1 - c_2 > 0 \\ AX^{(2)} - c_3 = A^3X^{(0)} - A^2c_1 - Ac_2 - c_3 > 0 \\ AX^{(3)} - c_4 = A^4X^{(0)} - A^3c_1 - A^2c_2 - Ac_3 - c_4 > 0 \end{cases}$$

back