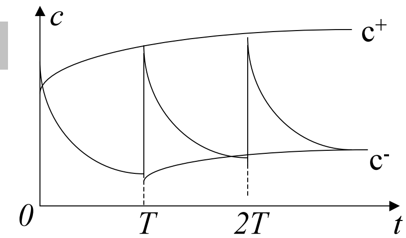
第5章习题　6）一室模型、快速静脉注射下给药方案设计

血药浓度变化规律 $c(t)=De^{-kt}/V$　控制范围 $c_1 \le c(t) \le c_2$

已知 $\boldsymbol{V,k,c_1,c_2}$，设计药量**D**和间隔**T**

$$c(T^-)=De^{-kT}/V$$

$$c(T^+)=D(1+e^{-kT})/V$$



$$c(nT^-)=D(e^{-kT}+\cdots+e^{-nkT})/V \quad \to D/V(e^{kT}-1)=c^-$$

$$c(nT^+)=D(1+e^{-kT}+\cdots+e^{-nkT})/V \quad \to De^{kT}/V(e^{kT}-1)=c^+$$

若取 $c_1=c^-,\ c_2=c^+$，可得 $D=V(c_2-c_1), T=\ln(c_2/c_1)/k$

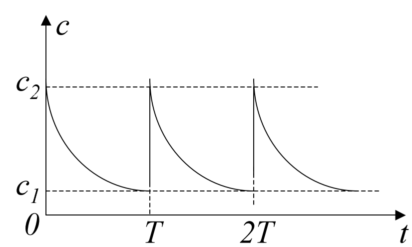
若取 $c_1=c(T^+),\ c_2=c^+$，计算较复杂

一种实用的简化方案

第1次给药量 $D_0=Vc_2$

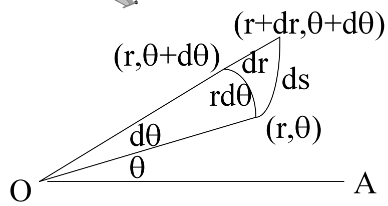
以后每次给药量 $D=V(c_2-c_1)$

给药间隔 $T=\ln(c_2/c_1)/k$



20)飞机搜索潜艇

已知t=0艇在O点，飞机在A点，OA=6, 艇速v_1=20, 机速v_2=40, 艇以任意方向直线离开，要使飞机定能发现潜艇，求飞机飞行路线

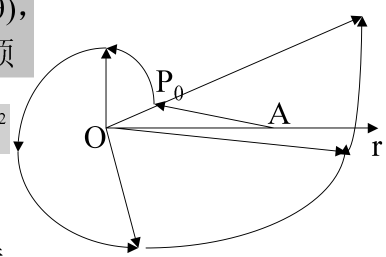


1. 设时刻t飞机在(r,θ)，潜艇在(r,θ+dθ)，为使二者t+dt在(r+dr,θ+dθ)相遇，必须

$\dfrac{ds}{dr} = \dfrac{v_2}{v_1} = 2,$ 又$\because (ds)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2$

$\therefore \dfrac{dr}{rd\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ⇨ $r = r_0 e^{\frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{3}}}$

~对数螺线

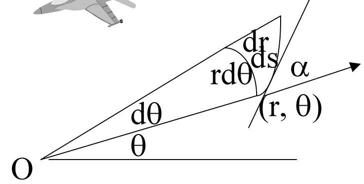


(r_0, θ_0)是满足AP_0=2OP_0的任意一点P_0的坐标.

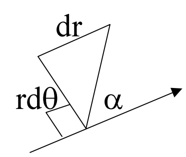
飞机从$\mathbf{P_0}$沿对数螺线飞行一周必能发现潜艇

2. 飞机的光滑航线

考察对数螺线$r = r_0 e^{\frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{3}}}$ 在任一点(r,θ)的切线与向径的夹角α

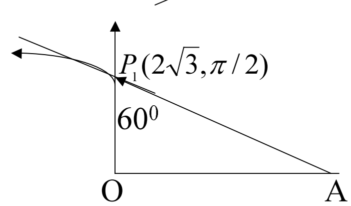


得 $ctg\alpha = \dfrac{dr}{rd\theta}$　　因为 $\dfrac{dr}{rd\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



故$\alpha = 60^0$　又AP_1与向径的夹角也是60^0

故$\mathbf{AP_1}$与航线在$\mathbf{P_1}$点相切。

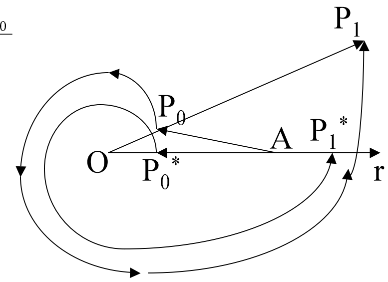


注：对任意极坐标曲线 r=r(θ), 均有

$\dfrac{dr}{d\theta} = rctg\alpha$　α是切线与向径的夹角

而对数螺线 $r = ae^{b\theta}$ 是α等于常数的唯一曲线

3. 飞机航线的长度 $r = r_0 e^{\frac{\theta-\theta_0}{\sqrt{3}}}$



考虑最坏情况，飞机从P_0沿对数螺线飞行一周才能发现潜艇。

航线由直线AP_0和弧P_0P_1组成

弧P_0P_1的长度 $l = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} r d\theta\ ? \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} ds = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2}$

简便算法 $v_2/v_1=2$ 飞机航线长度是潜艇航线长度的**2**倍

$$L = 2OP_1 = 2r(\theta_0 + 2\pi) = 2r_0 e^{2\pi/\sqrt{3}}$$

r_0最小时($r_0=2$)航线最短(AP_0^*和 $P_0^*P_1^*$) $L_1 = 4e^{2\pi/\sqrt{3}} \approx 150$

$r_0 = 2\sqrt{3}$ 时航线光滑 $L_2 = 4\sqrt{3}e^{2\pi/\sqrt{3}} \approx 260$

随机模型

——概率方法建模

§1　报童模型

§2　随机存贮策略

§3　轧钢中的浪费

§4　随机人口模型

§1 报童模型

问题

报童售报：(零售价) ***a*** > (购进价) ***b*** > (退回价) ***c***

售出一份赚 ***a-b***；退回一份赔 ***b-c***

每天购进多少份使收入最大？

分析

购进太多→卖不完退回→赔钱

购进太少→不够销售→赚钱少

⇒ 存在一个合适的购进量

应根据需求确定购进量

每天需求量是随机的 ⇒ 每天收入是随机的

优化问题的目标函数应是长期的日平均收入

等于每天收入的期望

准备

调查需求量的随机规律——每天需求量为 ***r*** 的概率 ***f(r)***，***r***=0,1,2…

建模

- 设每天购进 ***n*** 份，日平均收入为 ***G(n)***
- 已知售出一份赚 ***a-b***；退回一份赔 ***b-c***

$$r \le n \Rightarrow 售出 r \Rightarrow 赚 (a-b)r$$

$$\Rightarrow 退回 n-r \Rightarrow 赔 (b-c)(n-r)$$

$$r > n \Rightarrow 售出 n \Rightarrow 赚 (a-b)n$$

$$G(n)=\sum_{r=0}^{n}[(a-b)r-(b-c)(n-r)]f(r)+\sum_{r=n+1}^{\infty}(a-b)nf(r)$$

求***n***使***G(n)***最大

求解 将$\boldsymbol{r}$视为连续变量 $f(r) \Rightarrow p(r)$(概率密度）

$$G(n)=\int_0^n[(a-b)r-(b-c)(n-r)]p(r)dr+\int_n^\infty(a-b)np(r)dr$$

$$\frac{dG}{dn}=(a-b)np(n)-\int_0^n(b-c)p(r)dr-(a-b)np(n)$$
$$+\int_n^\infty(a-b)p(r)dr$$
$$=-(b-c)\int_0^n p(r)dr+(a-b)\int_n^\infty p(r)dr$$

$$\frac{dG}{dn}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\int_0^n p(r)dr}{\int_n^\infty p(r)dr}=\frac{a-b}{b-c}$$

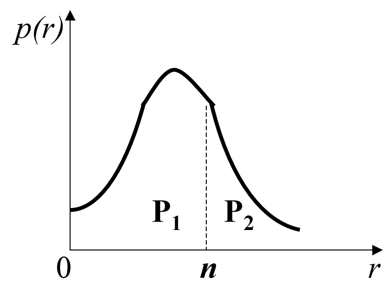
结果解释 $$\frac{\int_0^n p(r)dr}{\int_n^\infty p(r)dr}=\frac{a-b}{b-c}$$

$$\int_0^n p(r)dr=P_1,\ \int_n^\infty p(r)dr=P_2$$

取$\boldsymbol{n}$使 $$\frac{P_1}{P_2}=\frac{a-b}{b-c}$$

a-b ~售出一份赚的钱

b-c ~退回一份赔的钱



$$(a-b)\uparrow \Rightarrow n\uparrow, \quad (b-c)\uparrow \Rightarrow n\downarrow$$

§2 随机存贮策略

问题

以周为时间单位；一周的商品销售量是随机的；周末根据库存决定是否订货，供下周销售。

订货策略：制订下界s, 上界S; 当周末库存小于s时订货，且使库存达到S; 否则，不订货。

—— (s,S)存贮策略

考虑订货费、存贮费、缺货费、购进费，制订**(s,S)**存贮策略，使(平均意义下的)总费用最小

模型假设

- 每次订货费c_0, 每件商品购进价c_1,每件商品一周贮存费c_2,每件商品缺货损失费c_3 ($c_1<c_3$);
- 每周销售量 r 随机、连续，概率密度 $p(r)$;
- 周末库存 x, 订货量 u, 立即到货, 周初库存 $x+u$;
- 每周贮存量按 $x+u-r$ 计 .

建模与求解 （s,S)存贮策略

$$x \ge s \Rightarrow u = 0, \quad x < s \Rightarrow u > 0, x + u = S$$

确定（**s,S)**，使目标函数——每周总费用的平均值（一周费用的期望）最小。

订货费c_0, 购进价c_1, 贮存费c_2, 缺货费c_3

平均费用

$$J(u) = \begin{cases} c_0 + c_1 u + L(x+u), & u > 0 \\ L(x) & u = 0 \end{cases}$$

$$L(x) = c_2 \int_0^x (x-r)p(r)dr + c_3 \int_x^\infty (r-x)p(r)dr$$

建模与求解

1）设 $x<s$, 则 $u>0$, 求 u使 $J(u)$ 最小，确定S

$$\frac{dJ}{du} = c_1 + c_2 \int_0^{x+u} p(r)dr - c_3 \int_{x+u}^\infty p(r)dr$$

$$= (c_1 + c_2)\int_0^S p(r)dr - (c_3 - c_1)\int_S^\infty p(r)dr$$

$x + u = S$

$\int_0^\infty p(r)dr = 1$

$$\frac{dJ}{du} = 0 \Rightarrow \frac{\int_0^S p(r)dr}{\int_S^\infty p(r)dr} = \frac{c_3 - c_1}{c_2 + c_1}$$

$$c_3 \uparrow \Rightarrow S \uparrow, \quad c_2 \uparrow \Rightarrow S \downarrow$$

建模与求解　2）设库存 **x**，确定 **s**

$$J(u)=\begin{cases} c_0+c_1u+L(x+u), & u>0 \\ L(x) & u=0 \end{cases}$$

$$L(x)=c_2\int_0^x (x-r)p(r)dr+c_3\int_x^\infty (r-x)p(r)dr$$

若订货***u*, *u*+*x*=*S***, 总费用为 $J_1=c_0+c_1(S-x)+L(S)$

若不订货, ***u***=0, 总费用为 $J_2=L(x)$

$J_2\le J_1$ ⟺ $L(x)\le c_0+c_1(S-x)+L(S)$

不订货　$c_1x+L(x)\le c_0+c_1S+L(S)$

记 $c_1x+L(x)=I(x)$　订货点 ***s***是 $I(x)=c_0+I(S)$ 的最小正根

建模与求解　$I(x)=c_0+I(S)$ 最小正根的图解法

$$J(u)=\begin{cases} c_0+c_1u+L(x+u), & u>0 \\ L(x) & u=0 \end{cases}$$

$$L(x)=c_2\int_0^x (x-r)p(r)dr+c_3\int_x^\infty (r-x)p(r)dr$$

在***u*+*x*=*S***处达到最小

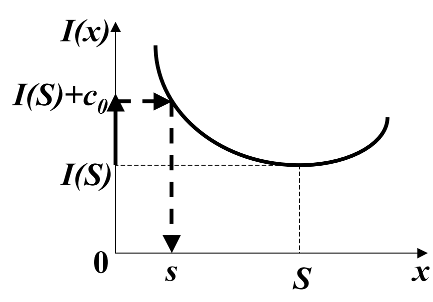
⇩

$I(x)=c_1x+L(x)$

在***x*=*S***处达到最小值***I*(*S*)**

由 ***I*(*x*)**的图形得到

$I(x)=c_0+I(S)$ 的最小正根**s**



§3 轧钢中的浪费

轧制钢材两道工序

- 粗轧(热轧)——形成钢材的雏形
- 精轧(冷轧)——得到钢材规定的长度

随机因素影响

粗轧

钢材长度正态分布

均值可以调整

方差由设备精度确定

粗轧钢材长度大于规定 → 切掉多余部分

精轧

粗轧钢材长度小于规定 → 整根报废

问题：如何调整粗轧的均值，使精轧的浪费最小。

分析

设已知精轧后钢材的规定长度为 l，粗轧后钢材长度的均方差为 σ，

记粗轧时可以调整的均值为 m，则粗轧得到的钢材长度为正态随机变量，记作 $\boldsymbol{x \sim N(m, \sigma^2)}$

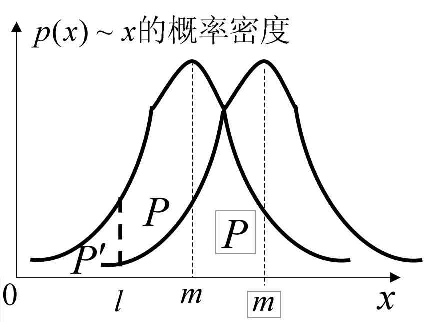
$P = P(x \ge l)$ $P' = P(x < l)$

切掉多余部分的概率　　整根报废的概率

$$m \uparrow \Rightarrow P \uparrow, P' \downarrow$$

$$m \downarrow \Rightarrow P \downarrow, P' \uparrow$$

存在最佳的$\boldsymbol{m}$使总的浪费最小



建模　选择合适的目标函数

总浪费 = 切掉多余部分的浪费 + 整根报废的浪费

$$W=\int_l^{\infty}(x-l)p(x)dx+\int_{-\infty}^{l}xp(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx-\int_l^{\infty}lp(x)dx=m-lP$$

粗轧N根 ⇒ 成品材 PN根

总长度mN ⇒ 成品材长度$l\,PN$

共浪费长度mN-lPN

粗轧一根钢材平均浪费长度

$$\frac{mN-lPN}{N}=m-lP$$

建模　选择合适的目标函数

粗轧一根钢材平均浪费长度 $\dfrac{mN-lPN}{N}=m-lP$

得到一根成品材平均浪费长度 $\dfrac{mN-lPN}{PN}=\dfrac{m}{P}-l$

记 $J(m)=\dfrac{m}{P(m)}$　　更合适的目标函数

$$P(m)=\int_l^{\infty}p(x)dx,\quad p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

优化模型：求m使$J(m)$最小

求解

$$y=\frac{x-m}{\sigma},\quad \mu=\frac{m}{\sigma},\ \lambda=\frac{l}{\sigma}$$

$$J(m)=\frac{m}{P(m)}$$

$$P(m)=\int^{\infty} p(x)dx$$

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$J(\mu)=\frac{\sigma\mu}{\Phi(\lambda-\mu)}$$

$$\Phi(z)=\int_z^{\infty}\varphi(y)dy$$

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$z=\lambda-\mu$$

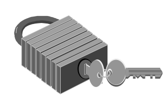
$$J(\mu)=\frac{\sigma\mu}{\Phi(\lambda-\mu)}$$

$$J(z)=\frac{\sigma(\lambda-z)}{\Phi(z)}$$

求z使$J(z)$最小

求解

$$\frac{dJ}{dz}=0$$



$$J(z)=\frac{\sigma(\lambda-z)}{\Phi(z)}$$

$$-\Phi(z)-(\lambda-z)\Phi'(z)=0$$

$$\Phi'(z)=-\varphi(z)$$

$$\lambda-z=\Phi(z)/\varphi(z)$$

$$\Phi(z)=\int_z^{\infty}\varphi(y)dy$$

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$F(z)=\lambda-z$$

$$F(z)=\Phi(z)/\varphi(z)$$

求解 $F(z)=\Phi(z)/\varphi(z)$ 简表

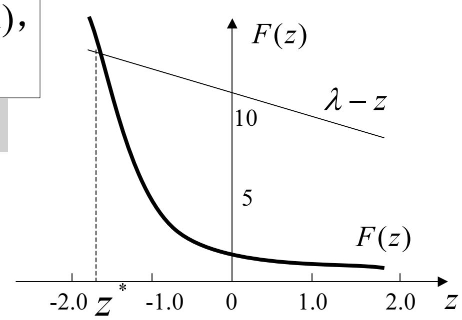
z	-3.0	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5
$F(z)$	227.0	56.79	18.10	7.206	3.477	1.680
z	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$F(z)$	1.253	0.876	0.656	0.516	0.420	0.355

例 设l=2(米), σ=20(厘米)，求m使浪费最小。

λ=l/σ=10 ⇨ z^*=-1.78

⇨ $\mu^*=\lambda-z^*$=11.78

⇨ $m^*=\mu^*\sigma$=2.36(米)



§ 4 随机人口模型

背景 • 一个人的出生和死亡是随机事件

一个国家或地区 平均生育率 平均死亡率 确定性模型

一个家族或村落 出生概率 死亡概率 随机性模型

对象 X(t) ~ 时刻 t 的人口, 随机变量.

$P_n(t)$ ~概率P(X(t)=n), n=0,1,2,…

研究$P_n(t)$的变化规律；得到X(t)的期望和方差

若X(t)=n, 对t到t+Δt的出生和死亡概率作以下假设

1)出生一人的概率与Δt成正比，记$b_n\Delta t$；
出生二人及二人以上的概率为o(Δt).

2)死亡一人的概率与Δt成正比，记$d_n\Delta t$；
死亡二人及二人以上的概率为o(Δt).

3)出生和死亡是相互独立的随机事件。

进一步假设

b_n与n成正比，记$b_n=\lambda n$, λ~出生概率；

d_n与n成正比，记$d_n=\mu n$，μ~死亡概率。

建模

为得到$P_n(t)$ P(X(t)=n),的变化规律，
考察$P_n(t+\Delta t)$ =P(X(t +Δt)=n).

事件X(t +Δt)=n的分解	概率$P_n(t+\Delta t)$
X(t)=n-1, Δt内出生一人	$P_{n-1}(t)$, $b_{n-1}\Delta t$
X(t)=n+1, Δt内死亡一人	$P_{n+1}(t)$, $d_{n+1}\Delta t$
X(t)=n, Δt内没有出生和死亡	$P_n(t)$, $1-b_n\Delta t - d_n\Delta t$
其它(出生或死亡二人，出生且死亡一人，…)	o(Δt)

$$
\begin{aligned}
P_n(t+\Delta t) &= P_{n-1}(t)b_{n-1}\Delta t + P_{n+1}(t)d_{n+1}\Delta t \\
&\quad + P_n(t)(1-b_n\Delta t - d_n\Delta t) + o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

微分方程

$$\frac{dP_n}{dt} = b_{n-1}P_{n-1}(t) + d_{n+1}P_{n+1}(t) - (b_n + d_n)P_n(t)$$

$b_n=\lambda n$，$d_n=\mu n$

$$\frac{dP_n}{dt} = \lambda(n-1)P_{n-1}(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t) - (\lambda+\mu)nP_n(t)$$

$$P_n(0) = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$ (t=0时已知人口为n_0)

~对**n**的一组递推方程

转而考察**X(t)**的期望和方差

基本方程 $\frac{dP_n}{dt} = \lambda(n-1)P_{n-1}(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t) - (\lambda+\mu)nP_n(t)$

求解 期望 $E(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t)$

$$\frac{dE}{dt} = \lambda\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)P_{n-1}(t) \quad \xrightarrow{n-1=k} \quad = \lambda\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)P_k(t),$$

$$+ \mu\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)P_{n+1}(t) \quad \xrightarrow{n+1=k} \quad = \mu\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)P_k(t)$$

$$- (\lambda+\mu)\sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(t)$$

$$\frac{dE}{dt} = (\lambda - \mu)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t) = (\lambda - \mu)E(t)$$

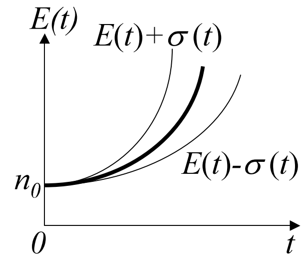
求解 $\dfrac{dE}{dt} = (\lambda - \mu)E(t), \quad E(0) = n_0$

$\Rightarrow$ $E(t) = n_0 e^{rt}, \quad r = \lambda - \mu \sim$ 净增长概率

与确定性指数增长模型比较 $x(t) = x_0 e^{rt}, \quad r \sim$ 平均净增长率

方差 $D(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(t) - E^2(t)$

$$D(t) = n_0 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda-\mu)t}[e^{(\lambda-\mu)t} - 1]$$



均方差σ(t) $r=\lambda-\mu\uparrow \rightarrow \sigma\uparrow, \ \lambda, \mu\uparrow \rightarrow \ \sigma\uparrow$

大作业候选题之六：航空公司的预订票策略

在激烈的市场竞争中，航空公司为争取更多的客源而开展的一个优质服务项目是预订票业务。公司承诺，预先订购机票的乘客如果未能按时前来登机，可以乘坐下一班机或退票，无需附加任何费用。

设飞机容量为n，若公司限制只预订n张机票，那么由于总会有一些订了机票的乘客不按时前来登机，致使飞机因不满员飞行而利润降低，甚至亏本。如果不限制订票数量，则当持票按时前来登机的乘客超过飞机容量时，将会引起那些不能登机的乘客（以下称被挤掉者）的抱怨，导致公司声誉受损和一定的经济损失（如付给赔偿金）。这样，综合考虑公司的经济利益和社会声誉，必然存在一个恰当的预订票数量的限额。

假设已经知道飞行费用（可设与乘客人数无关）、机票价格（一般飞机满员 50%~60%时不亏本，由飞行费用可确定价格）、每位被挤掉者的赔偿金等数据，以及由统计资料估计的每位乘客不按时前来登机的概率（不妨认为乘客间是相互独立的），建立一个数学模型，综合考虑公司经济利益（飞行费用、赔偿金与机票收入等）和社会声誉（被挤掉者不要太多，被挤掉的概率不要太大等），确定最佳的预订票数量。

1）对上述飞机容量、费用、迟到概率等参数给出一些具体数据，按你的模型计算，对结果进行分析。

2）对模型进行改进，如增设某类旅客（学生、旅游者）的减价票，迟到则机票作废。

大作业候选题之七：血样的分组检验

在人群（数量很大）中进行血样检验，设已知先验阳性率为 p, 为减少检验次数将人群分组。

若 k人一组，当 k份血样混在一起时，只要一份呈阳性，这组血样就呈阳性，则该组需人人检验；若一组血样呈阴性，则该组不需检验。

1)当 p固定时(0.1%, 1%, …)，k多大可使检验次数最小.

2) p多大就不应再分组.

3) 讨论两次分组的情况，即阳性组再分组检验。.

4) 讨论其它分组方案，如半分法、三分法。.