计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：　高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：　李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第二节　　拉格朗日插值

Lagrange Interpolation

- 2.1. **线性插值与抛物插值**

我们先来考察低次代数多项式插值 —— 线性插值（一次插值）与抛物插值（二次插值）。

【 1 】 线性插值 (Linear Interpolation) 考虑插值区间 $I=[x_0,x_1]$ 上以两个区间端点为插值节点的一次插值问题。利用待定系数法，构造线性插值多项式
$L(x)=a_0+a_1x$，由基本插值条件有

$$L(x_0)=y_0,\quad L(x_1)=y_1 \tag{2.1}$$

从而由两点

$$(x_0,y_0),\quad (x_1,y_1)$$

可确定一条直线，其斜率为 $\kappa=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$, 从而其斜截式方程为

$$L(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0) \tag{2.2}$$

现在将方程进行等价改写，变为两个函数值点的线性组合的形式：

$$
\begin{aligned}
L(x) &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\
&= y_0 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \\
&= \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

现在引入两个线性分式形状的函数：

$$
l_0(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, \qquad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \tag{2.4}
$$

则有线性组合表达

$$L(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 \tag{2.5}$$

我们称 $L(x)$ 为 线性插值函数 (Linear Interpolating Function)； $l_0(x)$ 和 $l_1(x)$ 为 线性插值基函数 (Linear Interpolating Base Function). 在插值节点处它们满足 标准正交条件 ：

$$\begin{cases} l_0(x_0) = 1, l_0(x_1) = 0 \\ l_1(x_0) = 0, l_1(x_1) = 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

这一条件可以作为我们构造插值基函数的依据。从几何上看，每个线性插值基函数的图像都是一条直线，并以另外一个基函数的插值节点为零点。

【 2 】 抛物插值 (Parabolic Interpolation) 考虑插值区间 $I = [x_0, x_2]$ 上以两个区间端点和一个区间内点 x_1 为插值节点的二次插值问题。利用待定系数法，构造线性组合形式的插值多项式

$$L(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2 \tag{2.7}$$

其中待定的插值基函数 $l_0(x), l_1(x)$ 和 $l_2(x)$ 为 *抛物插值基函数* **(Parabolic Interpolating Base Function).** 在插值节点处它们满足 <u>标准正交条件</u> ：

$$\begin{cases} l_0(x_0) = 1, l_0(x_1) = 0, l_0(x_2) = 0 \\ l_1(x_0) = 0, l_1(x_1) = 1, l_1(x_2) = 0 \\ l_2(x_0) = 0, l_2(x_1) = 0, l_2(x_2) = 1 \end{cases} \tag{2.8}$$

利用正交条件，可设插值基函数 $l_0(x)$ 形如

$$l_0(x) = A(x - x_1)(x - x_2) \tag{2.9}$$

其中 A 为待定系数；再利用标准条件 $l_0(x_0) = 1$ 得

$$A = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \tag{2.10}$$

从而

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \tag{2.11}$$

同理可得另外两个插值基函数

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \qquad l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \tag{2.12}$$

从几何上看，每个抛物插值基函数的图像都是一条抛物线，并以另外两个基函数的插值节点为零点。

【例 1】 插值多项式的建立

（1）给定函数 $f(x) = \sin x$，取节点 $0, \frac{\pi}{6}$ 建立线性插值多项式.

（2）给定某函数 $f(x) \in C^{(2)}[-2, 1]$ 的函数值数据表如下. 求 $f(x)$ 的二次插值多项式.

x_k	-2	0	1
$f(x_k)$	-27	-1	0

【解】

（1）利用线性插值多项式公式

$$L(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1$$

注意到 $f(0) = \sin 0 = 0, f(\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$，（注意：我们经常可以利用函数值为 0 的好处，与之匹配的插值基函数将不会真正出现）故

$$L(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 = 0 + \frac{1}{2}l_1(x)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x - 0}{\frac{\pi}{6} - 0} = \frac{3}{\pi}x$$

（ 2 ）利用二次插值多项式公式

$$L(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$$

注意到 $y_2 = f(x_2) = f(1) = 0$ ，故

$$\begin{aligned}
&L(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2 \\
&= -27l_0(x) + (-1)l_1(x) \\
&= -27\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} - \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\
&= -27\frac{(x-0)(x-1)}{(-2-0)(-2-1)} - \frac{(x+2)(x-1)}{(0+2)(0-1)} \\
&= -\frac{27}{6}x(x-1) + \frac{1}{2}(x+2)(x-1) \\
&= -4x^2 + 5x - 1
\end{aligned}$$

化简后的结果 (把多项式按照降幂或升幂排列) 与我们利用范德蒙矩阵（ Vandermonde Matrix ）求解系数方程组获得的多

项式完全一致. 这再度说明了插值多项式的唯一性.

【例 2】 插值多项式的简单应用：求解近似值

（1）给定函数 $f(x)=\sqrt{x}$，取节点 $100, 121$ 建立线性插值多项式.

（2）由此求 $f(115)=\sqrt{115}$ 的近似值.

【解】

（1）利用线性插值多项式公式

$$L(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1$$

注意到 $f(100)=\sqrt{100}=10, f(121)=\sqrt{121}=11$，故

$$\begin{aligned}&L(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1=10l_0(x)+11l_1(x)\\&=10\cdot\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+11\cdot\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\\&=10\cdot\frac{x-121}{100-121}+11\cdot\frac{x-100}{121-100}\\&=10+\frac{11-10}{121-100}(x-100)=10+\frac{1}{21}(x-100)\end{aligned}$$

（ 2 ）由线性插值多项式求 $f(115)=\sqrt{115}$ 的近似值.　　令 $x=115$ 代入线性插值多项式

$$L(x)=10+\frac{1}{21}(x-100)$$

得近似值为

$$f(115)=\sqrt{115}\approx L(115)=10+\frac{1}{21}(115-100)$$

$$=10+\frac{15}{21}\approx 10.71428\ .$$

- 2.2. **拉格朗日插值** Lagrange Interpolation

【定义 1】 n **次拉格朗日插值基函数** (n-order Lagrange Interpolating Base Function) 线性分式形状的 n 次多项式函数 $l_j(x)$ 称为 n 次拉格朗日插值基函数，如果在 $n+1$ 个插值节点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 处满足由 $(n+1)^2$ 个等式构成的 <u>标准正交条件</u>：

$$
\begin{cases}
l_0(x_0) = 1, l_0(x_1) = 0, l_0(x_2) = 0, \cdots\cdots\cdots, l_0(x_n) = 0 \\
l_1(x_0) = 0, l_1(x_1) = 1, l_1(x_2) = 0, \cdots\cdots\cdots, l_1(x_n) = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
l_n(x_0) = 0, l_n(x_1) = 0, l_n(x_2) = 0, \cdots\cdots\cdots, l_n(x_n) = 1
\end{cases}
\tag{2.13}
$$

简单记为

$$
l_j(x_k) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad j, k = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{2.14}
$$

利用标准正交条件和待定系数法易得插值基函数

$$l_j(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=\prod_{k\neq j,k=0}^{n}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}$$

引入一个辅助函数

$$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_j)(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)$$

$$= \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

显然 $\omega_{n+1}(x)$ 是以 $n+1$ 个插值节点为其零点的 $n+1$ 次首一多项式.

其导函数为

$$\begin{aligned}
&\omega_{n+1}^{'}(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n) \\
&+(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)+ \\
&\cdots+(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n) \\
&+\cdots+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})
\end{aligned} \tag{2.17}$$

从而在插值节点 x_j 处的导函数值为

$$\omega_{n+1}^{'}(x_j) = (x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n) \tag{2.18}$$

代入 (2.15) 得到用辅助函数 $\omega_{n+1}(x)$ 及其导函数在插值节点 x_j 处的线性分式函数形式表达的插值基函数：

$$l_j(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_j)\omega'_{n+1}(x_j)}$$

【**定义 2**】 n **次拉格朗日插值多项式** (n-order Lagrange Interpolating Polynomial) n 次拉格朗日插值基函数 $l_j(x)$ 的线性组合形式

$$L(x) = \sum_{j=0}^{n} l_j(x) y_j = \sum_{j=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_j)\omega'_{n+1}(x_j)} y_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \Big(\prod_{k \neq j, k=0}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \Big) y_j$$

称为 n 次拉格朗日插值多项式, 满足基本插值条件

$$L(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{2.21}$$

下面的定理表明，满足基本插值条件 (2.21) 的 n 次代数插值多项式还是唯一的.

【定理 1】 插值多项式唯一性定理 满足基本插值条件(2.21) 的 n 次代数插值多项式是存在唯一的 (无论形式如何).

【证明】

若满足基本插值条件的 n 次代数插值多项式不是存在唯一的，即还有 n 次代数插值多项式 $P(x)$ 满足基本插值条件：

$$P(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{2.22}$$

则二者的差作成的不超过 n 次的代数多项式

$$Q(x) := L(x) - P(x), \quad Q(x_j) = 0, j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n \quad (2.23)$$

具有 n+1 个零点 $x_j, j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n$. 这与
代数学基本定理（ n 次的代数多项式只有 n 个零点 ）矛盾。
【证毕】

- 2.3. **插值余项和误差估计** Interpolating Residue and Error Estimation

【定义 1】 **插值余项** (Interpolating Residue) 插值区间 $[a, b]$ 上被插函数与插值多项式的差即 截断误差

$$R(x) := f(x) - L(x) \tag{2.24}$$

称为 插值余项.

【定理 1】 拉格朗日插值余项定理 被插函数 $f(x)$ 在插值区间 $[a,b]$ 上具有 n 阶连续导函数并且在开区间 (a,b) 上存在 $n+1$ 阶导函数： $f^{(n)}(x) \in C^0[a,b] \bigcap C^1(a,b)$， $L(x)$ 是在 $n+1$ 个插值节点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 处满足基本插值条件 $L(x_j) = y_j$， $j = 0,1,2,\cdots,n$ 的 n 次拉格朗日插值多项式，则 拉格朗日插值余项 为：

$R(x) := f(x) - L(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

$= \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\displaystyle\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ 其中 $\xi = \xi(x) \in (a, b)$ 是依赖于 x 的某个内点，辅助函数 $\omega_{n+1}(x) = \displaystyle\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$. 显然，这一余项表达类似于 Taylor 公式的余项，是导函数形式的。

【证明】

因 $R(x)=f(x)-L(x)$，由基本插值条件

$L(x_j)=y_j=f(x_j),\ \ j=0,1,2,\cdots,n$ 知

$R(x_j)=0, j=0,1,2,\cdots\cdots,n$，即余项函数以 $n+1$ 个插值节点为零点，因而可由待定系数法设

$$R(x)=K(x)\omega_{n+1}(x)=K(x)(x-x_0)\cdots(x-x_n)$$

$$=K(x)\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

这里 $K(x)$ 为待定系数函数。

现在构造一个具有 $n+2$ 个零点的 $n+1$ 阶连续可微辅助函数

$$\varphi(t)=R(t)-K(x)\omega_{n+1}(t)=f(t)-L(t)-K(x)(t-x_0)\cdots(t-x_n) \tag{2.27}$$

除了 $n+1$ 个插值节点为外它还以 x 为零点。现在连续应用罗尔中值定理，在 $\varphi(t)$ 两个零点之间必至少有 $\varphi^{'}(t)$ 的一个零点，因而 $\varphi^{'}(t)$ 在插值区间 $[a,b]$ 内具有至少 $n+1$ 个零点；$\varphi^{''}(t)$ 在插值区间 $[a,b]$ 内具有至少 n 个零点.

如此类推， $\varphi^{(n+1)}(t)$ 在插值区间 (a,b) 内具有至少 1 个零点，设为 $\xi=\xi(x)\in(a,b)$ ，即

$0=\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-L^{(n+1)}(\xi)-K(x)(n+1)!$

$=f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!K(x)$

这里用到 $L^{(n+1)}(\xi)=0$ ；

于是

$$K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{2.29}$$

故 拉格朗日插值余项 为：

$$R(x) := f(x) - L(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

【证毕】

【**定理 2**】 **误差估计** 引入导函数最大值标记：

$$M_n = \max |\, f^{(n)}(x) \,|, \quad x \in [a,b] \tag{2.31}$$

则有误差估计

$$|\, R(x) \,| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max |\, \omega_{n+1}(x) \,| \tag{2.32}$$

如线性插值余项

$$|\, R(x) \,| \le \frac{M_2}{2!} \max |\, \omega_2(x) \,| = \frac{M_2}{2} \max |\, (x-x_0)(x-x_1) \,| \tag{2.33}$$

抛物插值余项

$$|\, R(x) \,| \le \frac{M_3}{3!} \max |\, \omega_3(x) \,|$$

$$= \frac{M_3}{6} \max |\, (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \,| \,.$$

特别地，对于双节点情况， $a = x_0 < x_1 = b$ ，设步长 $h = b - a > 0$ ，则当内点 $x = \frac{a+b}{2}$ 时取得最大值，此时有

$$| R(x) | \leq \frac{M_2}{2} \max | (x - x_0)(x - x_1) | \leq \frac{M_2}{2} \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{M_2}{8}(b-a)^2 = \frac{M_2}{8} h^2$$

- 2.4. **例题选讲**

【例 1】 误差估计不等式 设函数 $f(x) \in C^{(2)}[a,b]$，且在区间端点取值为 0： $f(a) = f(b) = 0$；求证：

$$| f(x) | \leq \frac{M_2}{8}(b-a)^2 = \frac{M_2}{8}h^2 \tag{2.36}$$

这里 $M_2 = \max | f''(x) |, \quad x \in [a,b]$.

【 证明】

由于满足由基本插值条件 $L(x_j) = y_j = f(x_j) = 0, \ \ j = 0, 1$ 的线性插值多项式恒为零： $L(x) \equiv 0$ ，故由线性插值余项公式有

$$| \ f(x) \ | = | \ f(x) - L(x) \ | = | \ R(x) \ | \leq \frac{M_2}{8}(b-a)^2 = \frac{M_2}{8}h^2 \tag{2.37}$$

【证毕】

【【例 2】 插值多项式的建立

（1）给定函数 $f(x) \in C^{(2)}[1,2]$ 的函数值数据表如下。求 $f(x)$ 的二次插值多项式。

x	1	-1	2
$f(x)$	0	-3	4

（2）给定函数 $f(x) = e^x$，取节点 $0, 1$ 建立线性插值多项式。

【解】

（1）利用二次插值多项式公式

$$L(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2 \tag{2.38}$$

注意到 $f(1) = 0$，故

$$\begin{aligned}
&L(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2 \\
&= -3l_1(x) + 4l_2(x) \\
&= -3\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + 4\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\
&= -3\frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} + 4\frac{(x-1)(x+1)}{(2-1)(2+1)} \\
&= \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{3}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

（ 2 ）利用线性插值多项式公式

$$L(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 \tag{2.40}$$

注意到 $f(0) = 1, f(1) = e$ ，故

$$\begin{aligned}
&L(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 \\
&= l_1(x) + el_2(x) \\
&= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + e\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\
&= \frac{x - 1}{0 - 1} + e\frac{x - 0}{1 - 0} \\
&= (e - 1)x + 1
\end{aligned} \tag{2.41}$$

【解毕】

【例 3】 幂函数插值与恒等式 证明幂函数

$f(x) = x^m, \quad m = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n$，关于 $n+1$ 个插值节点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 的插值多项式即为其自身，并且成立恒等式：

$$x^m \equiv \sum_{j=0}^n l_j(x) x_j^m = \sum_{j=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_j)\omega'_{n+1}(x_j)} x_j^m$$

$$= \sum_{j=0}^n \left(\prod_{k \neq j, k=0}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}\right) x_j^m$$

由此证明如下恒等式：

(1)

$$\sum_{j=0}^{n}(\prod_{k\neq j,k=0}^{n}\frac{x-x_k}{x_j-x_k})\equiv 1 \tag{2.43}$$

(2)

$$\sum_{j=0}^{n}(\prod_{k\neq j,k=0}^{n}\frac{x-x_k}{x_j-x_k})x_j\equiv x \tag{2.44}$$

(3)

$$\sum_{j=0}^{n}(x_j-x)^m l_j(x)\equiv 0, m=0,1,2,\cdots\cdots,n \tag{2.45}$$

【证明】 由于插值多项式唯一性定理，满足基本插值条件 (2.21) 的 n 次代数插值多项式是存在唯一的 (无论形式如何)，故由基本插值条件：

$L(x_j) = y_j = f(x_j) = x_j^m,\quad j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n$ 可知幂函数 $f(x) = x^m,\quad m = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n$，关于 $n+1$ 个插值节点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 的插值多项式即为其自身： $L(x) \equiv x^m$，并且成立恒等式：

$x^m \equiv \sum_{j=0}^n l_j(x)x_j^m = \sum_{j=0}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_j)\omega'_{n+1}(x_j)} x_j^m$

$= \sum_{j=0}^n (\prod_{k\neq j,k=0}^n \frac{x-x_k}{x_j-x_k}) x_j^m$

分别取 $m=0,1$ 即得 (2.43) 和 (2.44) 式。若特别地取等距自然数节点： $x_j=j$, 即

$a=0<1<2<\cdots<n-1<n=b$ ，则成立恒等式：

(1)

$$\sum_{j=0}^{n}\Big(\prod_{k\neq j,k=0}^{n}\frac{x-k}{j-k}\Big)\equiv 1 \qquad (2.43)'$$

(2)

$$\sum_{j=0}^{n}\Big(\prod_{k\neq j,k=0}^{n}\frac{x-k}{j-k}\Big)j\equiv x \qquad (2.44)'$$

对于 (2.45) 式，利用二项式定理和恒等式 (2.42)，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n}(x_j - x)^m l_j(x) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k {x_j}^k (-x)^{m-k}\right) l_j(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-x)^{m-k} \left(\sum_{j=0}^{n} {x_j}^k l_j(x)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-x)^{m-k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^{m-k} x^m \\
&= x^m \sum_{k=0}^{m} C_m^k 1^k (-1)^{m-k} \\
&= x^m (1-1)^m \\
&= x^m \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.47}
$$