计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：　高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：　李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第五节　分段低次插值
Piecewise Lower-order Interpolation

- 5.1. **龙格现象** (Runge Phenomenon)

一般而言，增加插值节点数目即采用高次插值将有助于提高插值多项式对于被插函数的逼近程度，比如抛物插值优于线性插值．通俗地说即“节点越多越精细”或“次数越高越精细”；但不可将这一结论无限推广，认为所有插值多项式都是节点越多越精细，次数越高越精细．

事实上，对于插值节点数目较多 (比如， $n \geq 8$) 时的高次插值多项式，往往会出现某种病态性质：只在某个局部小区间内如 $x \in [-c, c]$ 时，当插值节点数目无限增加 (即 $n \to \infty$) 时插值多项式序列时才收敛于被插函数：

$$\lim_{n \to \infty} L_n(x) = f(x) \tag{5.1}$$

而在此区间之外是发散的，即 $L_n(x)$ 在给定点的值与被插函数相去甚远甚至背道而驰． 20 世纪初龙格 (Runge) 构造出了一个著名的反例，他的实验函数是我们熟知的 箕舌线函数.

【定义 1】 箕舌线函数 箕舌线函数

$$y = f(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{5.2}$$

它是最大值为 $f(0)=1$, 下确界为 0 的严格取正实值的偶函数，在 $(-\infty,0]$ 上单调上升，在 $[0,+\infty)$ 上单调下降；其图像是界于两条平行于 x 轴的直线 $y=0, y=1$ 之间的光滑曲线，正视如舌头，倒视如簸箕，因而得名箕舌线．其一阶导函数为

$$f^{'}(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \tag{5.3}$$

零点 $x=0$ 是最大值点；二阶导函数为

$$f^{''}(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \tag{5.4}$$

零点 $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 是拐点；幂级数展开为

$$y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots\cdots \tag{5.5}$$

可作为近似计算的式子.

【例 1】 龙格振荡现象 (Runge Vibration Phenomenon)

现在考虑箕舌线函数插值区间 $I=[-5,5]$ 上取 $n+1$ 个等距节点

$$x_j = -5 + \frac{10j}{n}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n \tag{5.6}$$

为插值节点的插值问题. n 次拉格朗日插值多项式为

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} l_j(x) y_j = \sum_{j=0}^{n} \Big(\prod_{k\neq j, k=0}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \Big) \frac{1}{1+x_j^2} \tag{5.7}$$

满足基本插值条件

$$L_n(x_j) = y_j = \frac{1}{1+x_j^2}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{5.8}$$

我们有

【 龙格定理】 存在常数 $c \approx 3.63$,$x \in [-c, c]$ 时，插值多项式序列 $\{L_n(x)\}$ 收敛于箕舌线函数：

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{5.9}$$

而当 $|\, x \,| > c$ 时，序列 $\{L_n(x)\}$ 发散.

比如，我们取 $n = 10$, 则 11 个等距节点为 $x_j = -5 + j$, 即

$$x_j = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

而相应函数值 $f(x_j) = y_j = \dfrac{1}{1 + x_j^2}$ 为

$f(x_j) = 0.03846, 0.05882, 0.10000, 0.20000, 0.50000,$

$1, 0.50000, 0.20000, 0.10000, 0.05882, 0.03846$

10 次拉格朗日插值多项式为

$$L_{10}(x) = \sum_{j=0}^{10} l_j(x) y_j = \sum_{j=0}^{10} \left(\prod_{k \neq j, k=0}^{10} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right) \frac{1}{1 + x_j^2} \tag{5.10}$$

绘出拉格朗日插值多项式的图像与箕舌线函数的图像进行比较，我们发现在区间端点附近，箕舌线函数向横轴无限趋近，而拉格朗日插值多项式的图像却高高翘起，二者可谓南辕北辙．比如， $x = 4.8$ 处， $f(4.8) = \dfrac{1}{1 + 4.8^2} = 0.041597$, 而 $L_{10}(4.8) = 1.80438 > 1$, 超过了箕舌线函数的最大值.

从另一角度考察 $n+1$ 个等距插值节点的情况，在区间右端点附近取最后两个节点的中点

$$x_{n-\frac{1}{2}} := \frac{x_{n-1}+x_n}{2} = \frac{-5+\dfrac{10(n-1)}{n} - 5 + \dfrac{10n}{n}}{2} = 5 - \frac{5}{n} \tag{5.11}$$

相应函数值为

$$f(x_{n-\frac{1}{2}}) = f(5-\frac{5}{n}) = \frac{1}{1+(5-\dfrac{5}{n})^2} \tag{5.12}$$

由是分别取 $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$, 算得中节点值

$x_{n-\frac{1}{2}} = 2.5000, 3.7500, 4.1667, 4.3750, 4.5000,$

$4.5833, 4.6429, 4.6875, 4.7222, 4.7500$

相应函数值为

$f(x_{n-\frac{1}{2}}) = 0.1379, 0.0664, 0.0545, 0.0497, 0.0471,$

$0.0454, 0.0443, 0.0435, 0.0429, 0.0424.$

上述运算可利用 Matlab 编程如下：

n=[2 4 6 8 10 12 14 16 18 20]

m=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]

x=5.*(1-m./n)

$\mathbf{f} = 1./(1 + x.^2)$

同理可算得相应拉格朗日插值多项式的中节点值．比如
$n = 2$ 时，节点值为 $x = -5, 0, 5$, 相应函数值为
$y = f(x) = 0.0385, 1.0000, 0.0385$, 从而二次抛物插值多项式为

$$L_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$$

$$= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

$$= \frac{(x-0)(x-5)}{(-5-0)(-5-5)}0.0385 + \frac{(x+5)(x-5)}{(0+5)(0-5)} + \frac{(x+5)(x-0)}{(5+5)(5-0)}0.0385$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x(x-5)}{50}0.0385 + \frac{(x+5)(x-5)}{-25} + \frac{x(x+5)}{50}0.0385 \\
&= \frac{0.0385x^2}{25} - \frac{x^2-25}{25} \\
&= \frac{25-0.9615x^2}{25}
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

在右端中节点 $x=2.5$ 处的值为
$L_2(2.5)=0.7596 \gg f(2.5)=0.1379$, 几乎是真值的 6 倍之多．而若取四次拉格朗日插值多项式计算在右端中节点 $x=3.75$ 处的值，更有 $L_4(3.75)=-0.3568<0$, 超越了箕舌线函数的下界 0. 总之对于箕舌线函数的拉格朗日插值，随着插值节点数目的增加即插值次数的升高，插值多项式序列 $\{L_n(x)\}$ 并不收敛于被插函数，而呈现出一种图像振荡的病态性质．所以我们不应单纯依赖高次插值来提高逼近精度，有必要另辟蹊径.

【注记　　箕舌线函数别裁】　　箕舌线函数的另一种取法是令

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \tag{5.14}$$

在插值区间 $I = [-1, 1]$ 上取 $n+1$ 个等距节点

$$x_j = -1 + \frac{2j}{n}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n \tag{5.15}$$

则存在常数 $c \approx .0.726$,$x \in [-c, c]$ 时，插值多项式序列 $\{L_n(x)\}$ 收敛于箕舌线函数：

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \tag{5.16}$$

而当 $|\, x \,| > c$ 时，序列 $\{L_n(x)\}$ 发散．比如取 11 个等距节点

$$x_j = -1 + \frac{j}{5}, \qquad j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, 10 \tag{5.17}$$

为插值节点，则 10 次拉格朗日插值多项式为

$$L_{10}(x) = \sum_{j=0}^{10} \Big(\prod_{k\neq j, k=0}^{10} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \Big) \frac{1}{1+25x_j^2} \tag{5.18}$$

- 5.2. **分段线性插值**

顾名思义，分段线性插值的意思，就是把插值区间 $I=[a,b]$ 作剖分，得到节点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 标记步长 $h_j=x_{j+1}-x_j>0, j=0,1,2,\cdots,n-1$, 最大步长 $h=\max h_j$, 在每个区间段 $I_j=[x_{j-1},x_{j+1}]$ 上定义分段形式的线性插值基函数：

$$l_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x_{j-1} \le x \le x_j, j \neq 0, \\ \dfrac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}, & x_j \le x \le x_{j+1}, j \neq n, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, \\ 0, & x \in I - I_j. \end{cases} \tag{5.19}$$

则分段线性插值多项式可表示为线性组合形式

$$I_h(x) = \sum_{j=0}^{n} l_j(x) y_j, j = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{5.20}$$

满足基本插值条件

$$I_h(x_j) = y_j = f(x_j), j = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{5.21}$$

且在每个小区间 $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ 上是线性函数，从而在整个区间上 $I = [a, b]$ 上是连续函数： $I_h(x) \in C^0[a, b]$.

或者， <u>更实用而易懂的定义</u>，我们有下面的表述.

【定义 2 分段线性插值多项式】 (Piecewise Linear Interpolating Polynomial) 考虑函数 $f(x)$ 和 $n+1$ 个插值节点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，在每个区间段 $I_j=[x_j,x_{j+1}], j=0,1,2,\cdots,n-1$ 上 (与上面同样记号表达的区间不同)，局部定义分段线性插值多项式的 限制 为线性插值多项式：

$$I_h^j(x):=l_j(x)y_j+l_{j+1}(x)y_{j+1}=\frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}y_j+\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}y_{j+1},$$

$j=0,1,2,\cdots,n-1.(5.22)$.

这里 $I_h^j(x)$ 是两个区间端点对应的函数值点的 凸线性组合, 即组合系数之和为 1：

$$l_j(x) + l_{j+1}(x) = \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} + \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} = 1, \tag{5.23}$$

则整个区间上的分段线性插值多项式是 $I_h^j(x)$ 的 延拓：

$$I_h(x) = \bigcup_{j=0}^{n-1} I_h^j(x), j = 0, 1, 2, \cdots, n-1, I_h(x)|_{I_j} = I_h^j(x) \tag{5.24}$$

因而要确立一个分段线性插值多项式，只需要写出它在每个区间段 $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ 上的 限制$I_h^j(x)$ 来就好了.

【定理 1】 分段线性插值余项估计 被插函数 $f(x)$ 在插值区间 $[a,b]$ 上连续， $I_h(x)$ 是在 $n+1$ 个插值节点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 处满足基本插值条件 $I_h(x_j)=y_j$， $j=0,1,2,\cdots,n$ 的分段线性插值多项式，则<u>分段线性插值余项上界</u> 为：

$$|R(x)|=|f(x)-I_h(x)|\leq \frac{M_2}{8}h^2 \tag{5.25}$$

这里 h 不同于线性插值的步长 (在那里是区间长度 $h = b - a$)，而是最大步长：

$$h = \max h_j = \max |x_{j+1} - x_j|, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \tag{5.26}$$

而 M_2 仍为区间上导函数最大模：

$$M_2 = \max |\, f^{''}(x) \,|, \quad x \in [a, b] \tag{5.27}$$

【证明】 $|R(x)| \leq \dfrac{M_2}{2} \max |(x-x_j)(x-x_{j+1})|$

$$\leq \frac{M_2}{2} \max\left(\frac{|x_{j+1}-x_j|}{2}\right)^2$$

$$= \frac{M_2}{8} h_j^2 \leq \frac{M_2}{8} h^2 (5.28).$$

【证毕】

【 定理 2 】 分段线性插值多项式序列的一致收敛性 被插函数 $f(x)$ 在插值区间 $[a, b]$ 上连续： $f(x) \in C^{(0)}[a, b]$ ，$I_h(x)$ 是在 $n+1$ 个插值节点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 处满足基本插值条件 $I_h(x_j) = y_j$， $j = 0, 1, 2, \cdots, n$ 的分段线性插值多项式，则分段线性插值多项式序列的一致收敛于被插函数 $f(x)$ ：

$$\lim_{h \to 0} I_h(x) = f(x) \tag{5.29}$$

【 证明】

先引入一个定义

【定义 3】 **连续模** (Continuous Module) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，如果对于任意两点 $x^{'}, x^{''} \in [a,b]$, 当 $|x^{'} - x^{''}| \leq h$ 时，成立

$$|f(x^{'}) - f(x^{''})| \leq \omega(h) \tag{5.30}$$

则称依赖于步长 h 的非负函数 $\omega(h)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 连续模 (Continuous Module). 对于闭区间上的连续函数其连续模随着步长的缩小而趋向于 0，我们有下面的引理.

【 * 引理 1 】 连续模引理 (Continuous Module)　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续： $f(x) \in C^{(0)}[a,b]$， $\omega(h)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 连续模 (Continuous Module), 则

$$\lim_{h \to 0} \omega(h) = 0 \tag{5.31}$$

显然，由此易得推论： <u>闭区间上的连续函数必定一致连续</u>. 引理的证明是平凡的，或可参阅数学分析文献.

【定理的证明】 限制在局部小区间 $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ 上，有

$$I_h^j(x) := l_j(x)y_j + l_{j+1}(x)y_{j+1},$$

$$f(x) = 1 \cdot f(x) = l_j(x)f(x) + l_{j+1}(x)f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) - I_h^j(x) = l_j(x)(f(x) - y_j) + l_{j+1}(x)(f(x) - y_{j+1})$$

$$\Rightarrow |f(x) - I_h^j(x)|$$

$$\leq l_j(x) \mid (f(x) - y_j) \mid + l_{j+1}(x) \mid (f(x) - y_{j+1}) \mid$$

$$\Rightarrow |f(x) - I_h^j(x)|$$

$$\leq l_j(x) \mid (f(x) - f(x_j)) \mid + l_{j+1}(x) \mid (f(x) - f(x_{j+1})) \mid$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow |f(x) - I_h^j(x)| \le l_j(x)\omega(h_j) + l_{j+1}(x)\omega(h_j) \\
&\Rightarrow |f(x) - I_h^j(x)| \le \omega(h_j) \le \omega(h)
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

从而在整个区间 $[a,b]$ 上有

$$
|f(x)-I_h(x)| \le \max |f(x)-I_h^j(x)| \le \omega(h) \to 0, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{5.33}
$$

即得 (5.30) 式.

【证毕】

- 5.3. **分段三次厄米特插值**
  (Piecewise 3-order Hermite Interpolation)

类似于分段线性插值，把插值区间 $I = [a, b]$ 作剖分，得到节点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 标记步长 $h_j = x_{j+1} - x_j > 0, j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, 最大步长 $h = \max h_j$, 在每个区间段 $I_j = [x_{j-1}, x_{j+1}]$ 上定义分段形式的厄米特插值基函数

$$
\begin{cases}
\alpha_j(x) & = (1+2\dfrac{x-x_j}{x_{j-1}-x_j})(\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}})^2, \\
& x_{j-1} \le x \le x_j, j \ne 0, \\
\alpha_j(x) & = (1+2\dfrac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j})(\dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}})^2, \\
& x_j \le x \le x_{j+1}, j \ne n, \\
\alpha_j(x) & = 0, \quad otherwise.
\end{cases}
\tag{5.34a}
$$

以及

$$
\begin{cases}
\beta_j(x) & = (x - x_j)(\dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}})^2, \qquad x_{j-1} \le x \le x_j, j \ne 0, \\
\beta_j(x) & = (x - x_j)(\dfrac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}})^2, \qquad x_j \le x \le x_{j+1}, j \ne n, \\
\beta_j(x) & = 0, \qquad otherwise.
\end{cases}
\tag{5.34b}
$$

则分段线性插值多项式可表示为线性组合形式

$$I_h(x) = \sum_{j=0}^{n} (\alpha_j(x) f(x_j) + \beta_j(x) f^{'}(x_j)), j = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{5.35}$$

满足密切条件

$$I_h(x_j) = y_j = f(x_j), \qquad I_h^{'}(x_j) = y_j = f^{'}(x_j), \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{5.36}$$

且在每个小区间 $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ 上是三次多项式函数，从而在整个区间上 $I = [a, b]$ 上是至少一阶连续可微函数：$I_h(x) \in C^{(1)}[a, b]$.

或者， 更实用而易懂的定义，我们有下面的表述.

【定义 4 分段三次厄米特插值多项式】

(Piecewise 3-order Hermite Interpolating Polynomial)

考虑函数 $f(x)$ 和 $n+1$ 个插值节点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，在每个区间段 $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ 上，局部定义分段三次厄米特插值多项式的限制 为三次厄米特插值多项式:

$$
\begin{aligned}
I_h^j(x) &:= \alpha_j(x) f(x_j) + \alpha_{j+1}(x) f(x_{j+1}) \\
&+ \beta_j(x) f'(x_j) + \beta_{j+1}(x) f'(x_{j+1}).\ j = 0, 1, 2, \cdots, n-1.
\end{aligned} \tag{5.37}
$$

这里 $I_h^j(x)$ 是两个区间端点对应的函数值点的 凸线性组合,即组合系数之和为 1：

$$
\alpha_j(x) + \alpha_{j+1}(x) = 1 \tag{5.38}
$$

则整个区间上的分段线性插值多项式是 $I_h^j(x)$ 的 延拓：

$$I_h(x) = \bigcup_{j=0}^{n-1} I_h^j(x), j = 0, 1, 2, \cdots, n-1, I_h(x)|_{I_j} = I_h^j(x) \tag{5.39}$$

因而要确立一个分段三次厄米特插值多项式，只需要写出它在每个区间段 $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ 上的 限制 来就好了.

【定理 3】 分段三次厄米特插值余项估计 被插函数 $f(x)$ 在插值区间 $[a,b]$ 上至少一阶连续可微， $I_h(x)$ 是在 $n+1$ 个插值节点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 处满足密切条件

$$I_h(x_j)=y_j=f(x_j),\qquad I_h^{'}(x_j)=y_j=f^{'}(x_j)j=0,1,2,\cdots,n$$

的分段三次厄米特插值多项式，则
<u>分段三次厄米特插值余项上界</u> 为：

$$|\,R(x)\,|=|\,f(x)-I_h(x)\,|\leq\frac{35M_1}{27}h \tag{5.40}$$

这里 h 是最大步长：

$$h = \max h_j = \max |x_{j+1} - x_j|, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

而 M_1 为区间上导函数最大模：

$$M_1 = \max |\, f^{'}(x) \,|, \quad x \in [a, b] \tag{5.41}$$

【证明略】

【定理 4】 分段三次厄米特插值多项式序列的一致收敛性

被插函数 $f(x)$ 在插值区间 $[a,b]$ 上至少一阶连续可微：$f(x) \in C^{(1)}[a,b]$， $I_h(x)$ 是在 $n+1$ 个插值节点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 处满足密切条件的分段三次厄米特插值多项式，则分段三次厄米特插值多项式序列一致收敛于被插函数 $f(x)$：

$$\lim_{h \to 0} I_h(x) = f(x) \tag{5.42}$$

【证明略】

- 5.4. **例题选讲**

【例 1 箕舌线函数的分段线性插值多项式的计算】

考虑箕舌线函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ 和区间 $I = [-5, 5]$ 上 $n+1 = 11$ 个 <u>等距</u> 插值节点

$a = x_0 = -5 < -4 < -3 < \cdots < 3 < 4 < 5 = x_n = b$，在每个区间段 $I_j = [x_j, x_{j+1}], j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 上局部定义分段线性插值多项式的 <u>限制</u> 为线性插值多项式：

(1) 求分段线性插值多项式 $I_h(x)$；

(2) 计算各插值节点的中点 (中节点)$x_{j+\frac{1}{2}}$ 处 $f(x)$ 与 $I_h(x)$ 的值;

(3) 估计误差绝对值上限 $| R(x) | = | f(x) - I_h(x) |$.

【解】

(1) 要确立一个分段线性插值多项式，只需要写出它在每个区间段 $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ 上的 <u>限制</u> 来．注意到对 $n+1=11$ 个等距插值节点步长恒定：

$$x_{j+1} - x_j = h_j \equiv h = \frac{b-a}{n} = \frac{5+5}{10} = 1 \tag{5.43}$$

故

$$\begin{aligned} I_h^j(x) &= l_j(x)y_j + l_{j+1}(x)y_{j+1} \\ &= \frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}y_j + \frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}y_{j+1} \\ &= \frac{x-x_{j+1}}{-1}\frac{1}{1+x_j^2} + \frac{x-x_j}{1}\frac{1}{1+x_{j+1}^2} \quad j=0,1,2,\cdots,n- \\ &= \frac{x_{j+1}-x}{1+x_j^2} + \frac{x-x_j}{1+x_{j+1}^2} \end{aligned} \tag{5.44}$$

整个区间上的分段线性插值多项式是 $I_h^j(x)$ 的 <u>延拓</u>：

$$I_h(x) = \bigcup_{j=0}^{n} I_h^j(x), j=0,1,2,\cdots,n, I_h(x)|_{I_j} = I_h^j(x) \tag{5.45}$$

(2) 注意到箕舌线函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ 为偶函数，各插值节点的中点 (中节点)

$$x_{j+\frac{1}{2}} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}, j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

处 $f(x)$ 的值 $f(x_{j+\frac{1}{2}}) = f(\dfrac{x_j + x_{j+1}}{2})$

$= f(\pm 0.5), f(\pm 1.5), f(\pm 2.5), f(\pm 3.5), f(\pm 4.5)$

而 $I_h(x)$ 的值为

$$
\begin{aligned}
I_h^j(x_{j+\frac{1}{2}}) &= \frac{x_{j+1}-x_{j+\frac{1}{2}}}{1+x_j^2}+\frac{x_{j+\frac{1}{2}}-x_j}{1+x_{j+1}^2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x_j^2}+\frac{1}{1+x_{j+1}^2}\right),\\
j &= 0,1,2,\cdots,n-1.
\end{aligned}
\tag{5.47}
$$

如下表:

$x_{j+\frac{1}{2}}$	± 0.5	± 1.5	± 2.5	± 3.5	± 4.5
$f(x_{j+\frac{1}{2}})$	0.80000	0.30769	0.13793	0.07547	0.04706
$I_h^j(x_{j+\frac{1}{2}})$	0.75000	0.35000	0.15000	0.07941	0.04864

(3) 由于最大步长：

$$h = \max h_j = \max |x_{j+1} - x_j| \equiv 1, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \tag{5.48}$$

而 M_2 仍为区间上二阶导函数最大模：

$$M_2 = \max |\ f^{''}(x)\ | = 2, \quad x \in [a, b] \tag{5.49}$$

故由误差绝对值上限估计

$$|\ R(x)\ | = |\ f(x) - I_h(x)\ | \leq \frac{M_2}{8} h^2 = \frac{1}{4} \tag{5.50}$$

这里二阶导函数最大模如下计算：因对箕舌线函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, 一阶导函数为 $f^{'}(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, 二阶导函数为 $f^{''}(x) = \dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$, 三阶导函数为 $f^{'''}(x) = \dfrac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$, 零点 $x = 0, \pm 1$ 是二阶导函数的可能最值点，同时考虑闭区

间端点 ±5，二阶导函数最大模

$$\begin{aligned} &M_2 = \max \mid f^{''}(x) \mid \\ &= \max\{\mid f^{''}(0) \mid, \mid f^{''}(\pm1) \mid, \mid f^{''}(\pm5) \mid\} = \mid f^{''}(0) \mid = 2 \end{aligned} \tag{5.51}$$

【例 2 平方函数的分段线性插值多项式的计算】

考虑平方函数 $f(x)=x^2$ 和区间 $I=[a,b]$ 上 $n+1$ 个 等距 插值节点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，在每个区间段 $I_j=[x_j,x_{j+1}], j=0,1,2,\cdots,n-1$ 上局部定义分段线性插值多项式的 限制 为线性插值多项式：

(1) 求分段线性插值多项式 $I_h(x)$；

(2) 估计误差绝对值上限 $|R(x)|=|f(x)-I_h(x)|$.

【解】

(1) 要确立一个分段线性插值多项式，只需要写出它在每个区间段 $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ 上的 限制 来. 注意到对 $n+1$ 个等距插值节点步长恒定：

$$x_{j+1} - x_j = h_j \equiv h = \frac{b-a}{n} \tag{5.52}$$

故

$$\begin{aligned} I_h^j(x) &= \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} y_j + \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} y_{j+1} \\ &= \frac{1}{h}(x_j^2(x_{j+1} - x) + x_{j+1}^2(x - x_{j+1})) \\ & j = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \end{aligned} \tag{5.53}$$

(2) 由于 M_2 为区间上二阶导函数最大模：

$$M_2 = \max \mid f^{''}(x) \mid = \max \mid (2x)^{''} \mid = 2, \quad x \in [a, b] \tag{5.54}$$

故由误差绝对值上限估计

$$\mid R(x) \mid = \mid f(x) - I_h(x) \mid \leq \frac{M_2}{8} h^2 = \frac{h^2}{4} \tag{5.55}$$