规划模型

（1）效益最大化或费用最小化

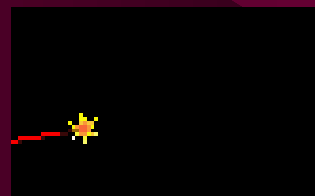
（2）各种条件约束

1、有关线性规划问题的介绍：几个例子

2、线性规划问题的标准形式

3、关于整数规划

3、应用



一、线性规划问题——例1

某化工厂生产A1，A2，A3，A4四种化工产品，每种产品生产1吨消耗的工时、能源和获得的利润如下表：

产品	A1	A2	A3	A4
工时/h	100	250	380	75
能源/吨标准煤	0.2	0.3	0.5	0.1
利润/万元	2	5	8	1

已知该厂明年的工时限额为18480h，能耗限额为100t标准煤，欲使该厂明年的总利润最高，请确定各种产品的生产数量。

模型

假设：

产品	A1	A2	A3	A4
生产数量	x_1	x_2	x_3	x_4

$$\max f(x1,x2,x3,x4) = 2x1+5x2+8x3+x4$$

$$s.t.\begin{cases} 100x1+250x2+380x3+75x4 \le 18480 \\ 0.2x1+0.3x2+0.5x3+0.1x4 \le 100 \end{cases}$$

工时限制

供煤限制

一、线性规划问题——例2

一饲养场饲养供实验用的动物，已知动物生长对蛋白质、矿物质和维生素特别敏感，每个动物每天至少需蛋白质70g、矿物质3g和维生素10mg，该厂能得到五种饲料A1、A2、A3、A4和A5，每种饲料10kg的成本分别为2、7、4、3、5。每一千克饲料所含营养成分如下表：

饲料	A1	A2	A3	A4	A5
蛋白质（g）	0.3	2	1	0.6	1.8
矿物质（g）	0.1	0.05	0.02	0.2	0.05
维生素（mg）	0.05	0.1	0.02	0.2	0.08

希望建立数学模型，既能满足动物需要，又使总成本最低的饲料配方

模型

饲料	A1	A2	A3	A4	A5
符号	x1	x2	x3	x4	x5

$$\min f = 0.2x1 + 0.7x2 + 0.4x3 + 0.3x4 + 0.5x5$$

$$\begin{cases} 0.3x1 + 2x2 + x3 + 0.6x4 + 1.8x5 \le 70 \\ 0.1x1 + 0.05x2 + 0.02x3 + 0.2x4 + 0.05x5 \le 3 \\ 0.05x1 + 0.1x2 + 0.02x3 + 0.2x4 + 0.08x5 \le 10 \end{cases}$$

二、线性规划问题的标准形式

$$
\begin{cases}
\max\ y=cTx \\
\text{s.t.}\quad Ax=b \\
\qquad\quad x\geqslant 0
\end{cases}
$$

求解方法：

（1）单纯形法

（2）软件求解:Lindo， matlab， sas

三、 整数规划

一个公司有22亿元资金用来投资，现有6个项目可供选择，各项目所需投资金额和预计年收益如下表所示：

项目	1	2	3	4	5	6
投资	5	2	6	4	6	8
收益	0.5	0.4	0.6	0.5	0.9	1

应选择哪几个项目投资收益最大？

求解方法：分枝定界法

四、分派问题——0-1规划

问题： 设有工作 m 件，人员 m 个，且一人做一件工作，第 i 人做第 j 件工作的时间（或费用）为 c_{ij}，问如何分派这些人员使总时间（或总费用）最少.

解 设
$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 人做第 } j \text{ 件工作,}\\ 0, & \text{否则,}\end{cases}$$

则得 0－1 规划模型：

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{m}x_{ij}=1,\quad i=1,2,\cdots,m,$$

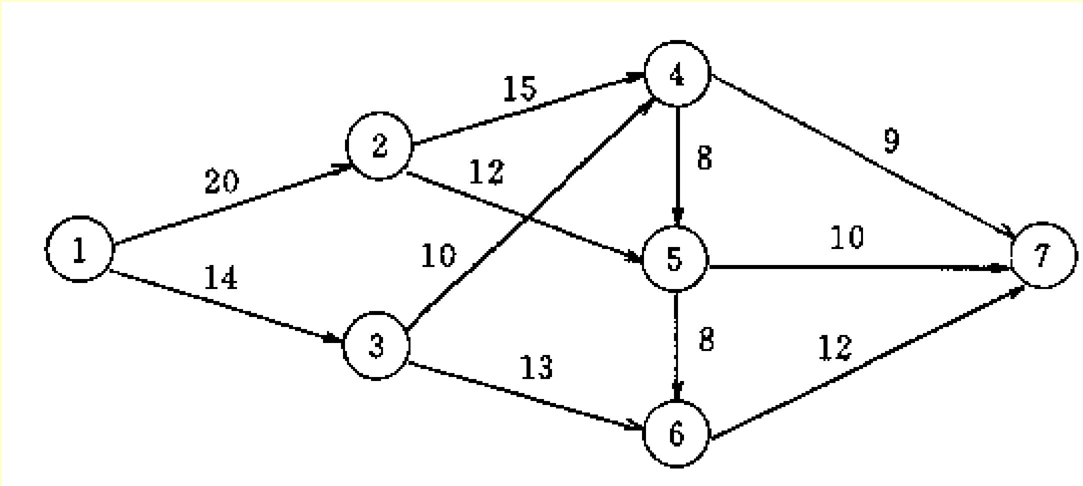
$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=1,\quad j=1,2,\cdots,m,$$

$$x_{ij}=0\text{ 或 }1,\quad i,j=1,2,\cdots,m.$$

五、网络问题

问题：

　　右图是一公路交通图，弧上数字为路程，求汽车从（1）到（7）最短路。



符号假设：

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{有从 } (i) \text{ 到 } (j) \text{ 的弧，}\\ 0, & \text{否则，}\end{cases}$$

则得 0 — 1 规划模型：

模型：

$$\min z = 20x_{12} + 14x_{13} + 15x_{24} + 12x_{25} + 10x_{34} + 13x_{36} + 8x_{45} + 9x_{47} + 8x_{56} + 10x_{57} + 12x_{67} \quad \text{（总路程）}$$

$$\text{s.t.} \quad x_{12} + x_{13} = 1 \quad \text{（从①出发的汽车为一辆）}$$

$$\left.\begin{aligned}
-x_{12} + x_{24} + x_{25} &= 0 \\
-x_{13} + x_{34} + x_{36} &= 0 \\
-x_{24} - x_{34} + x_{45} + x_{47} &= 0 \\
-x_{25} - x_{45} + x_{56} + x_{57} &= 0 \\
-x_{36} - x_{56} + x_{67} &= 0
\end{aligned}\right\} \text{（进入 ⓘ 的汽车数等于离开 ⓘ 的汽车数）}$$

$$-x_{47} - x_{57} - x_{67} = -1 \quad \text{（到达⑦的汽车为一辆）}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, \quad i,j = 1,2,\cdots,7.$$

例 1.5(最大流问题)　设图 1.1 中弧上的数字表示每小时两结点沿箭头方向的最大车流量,问从结点 ① 到结点 ⑦ 每小时的最大车流量是多少.

解　设 v 表示从结点 ① 发出的每小时车流量,x_{ij} 表示从结点 ⓘ 到结点 ⓙ 沿该弧的车流量,则得线性规划模型:

$$\max v$$

$$s.t.\quad x_{12}+x_{13}=v \quad (\text{从 ① 发出的车流量})$$

$$\left.\begin{aligned} -x_{12}+x_{24}+x_{25}&=0\\ -x_{13}+x_{34}+x_{36}&=0\\ -x_{24}-x_{34}+x_{45}+x_{47}&=0\\ -x_{25}-x_{45}+x_{56}+x_{57}&=0\\ -x_{36}-x_{56}+x_{67}&=0 \end{aligned}\right\}(\text{中间结点到达与发出的车流量相等})$$

$$-x_{47}-x_{57}-x_{67}=-v \quad (\text{到达 ⑦ 的车流量})$$

$$\left.\begin{aligned} &0\leqslant x_{12}\leqslant 20 && 0\leqslant x_{45}\leqslant 8\\ &0\leqslant x_{13}\leqslant 14 && 0\leqslant x_{47}\leqslant 9\\ &0\leqslant x_{24}\leqslant 15 && 0\leqslant x_{56}\leqslant 8\\ &0\leqslant x_{25}\leqslant 12 && 0\leqslant x_{57}\leqslant 10\\ &0\leqslant x_{34}\leqslant 10 && 0\leqslant x_{67}\leqslant 12\\ &0\leqslant x_{36}\leqslant 13 && \end{aligned}\right\}(\text{各弧上最大车流量限制})$$

$$v\geqslant 0.$$

问题变形——最小费用流问题

例 1.4(最小费用流问题) 设图 1.1 中弧上的数字为相邻两个结点间的单位运费，现 Q 的某种产品从产地 ① 上图 销地 ⑦，求使总运费最少的运输方案.

解 设 x_{ij} 表示从结点 ⓘ 到结点 ⓙ 沿该弧的运量，则得线性规划模型：

$$\min z = 20x_{12} + 14x_{13} + 15x_{24} + 12x_{25} + 10_{34} + 13x_{36} + 8x_{45} + 9x_{47} + 8x_{56} + 10x_{57} + 12x_{67} \quad \text{(总运费)}$$

$$\begin{aligned}
s.t.\quad & x_{12} + x_{13} = Q \quad \text{(从产地运出的总量)} \\
& \left.\begin{aligned}
-x_{12} + x_{24} + x_{25} &= 0 \\
-x_{13} + x_{34} + x_{36} &= 0 \\
-x_{24} - x_{34} + x_{45} + x_{47} &= 0 \\
-x_{25} - x_{45} + x_{56} + x_{57} &= 0 \\
-x_{36} - x_{56} + x_{67} &= 0
\end{aligned}\right\}\text{(中间结点的运进量与运出量相等)} \\
& -x_{47} - x_{57} - x_{67} = -Q \quad \text{(运进销地的总量)} \\
& x_{ij} \geqslant 0, \quad i,j = 1,2,\cdots,7.
\end{aligned}$$

最短路问题可看成是总运量为 1 的最小费用流问题. 运输问题和分派问题可看成有 m 个发点与 n 个收点且无中转站的最小费用流问题.

六、问题应用——钢管下料

问题：某钢管零售商从钢管厂进货，将钢管按顾客的要求切割后售出，从钢管厂进货时得到的原料钢管都是19m。

（1）现有一客户需要50根4m、20根6m和15根8m的钢管，应如何下料最省。

（2）零售商如果采用的不同切割模式太多，将会导致生产过程的复杂化，从而增加生产和管理成本，所以该零售商规定采用的不同切割模式不能超过3种。此外，该客户除需要（1）中的三种钢管外，还需要10根5m的钢管，应如何下料最省。

问题（1）解答

钢管下料合理切割模式：

	4m钢管数	6m钢管数	8m钢管数	余料（m）
模式1	4	0	0	3
模式2	3	1	0	1
模式3	2	0	1	3
模式4	1	2	0	3
模式5	1	1	1	1
模式6	0	3	0	1
模式7	0	0	2	3

问题：按何种切割模式，切割多少根原钢管，最为节省。

节省：1）余料最少　2）原钢管总数最少

双目标

模型

设x ᵢ表示照第i种模式切割原材料钢管的根数

总余料最小　　　　原钢管条数最少

$$\min z_1 = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7$$

$$\min z_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

$$s.t.\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \ge 50 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \ge 20 \\ x_3 + x_5 + 2x_7 \ge 15 \end{cases}$$

问题（2）解答

问题分析：

一合理的切割模式的余料不应该大于或等于客户需要的钢管的最小尺寸，故本题中合理的切割模式的余量不能大于3m。故可选择总根数最少为目标进行求解。

模型建立

设x $_i$表示照第i种模式切割原材料钢管的根数（i=1,2,3）

r $_{ij}$分别表示第i种切割模式下生产j米（j=4,5,6,8）钢管数

$$\min x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 \geq 50 \\ r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + r_{23}x_3 \geq 10 \\ r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3 \geq 20 \\ r_{41}x_1 + r_{42}x_2 + r_{43}x_3 \geq 15 \\ 16 \leq 4r_{11} + 5r_{21} + 6r_{31} + 8x_{41} \leq 19 \\ 16 \leq 4r_{12} + 5r_{22} + 6r_{32} + 8x_{42} \leq 19 \\ 16 \leq 4r_{13} + 5r_{23} + 6r_{33} + 8x_{43} \leq 19 \end{cases}$$

七、几个应用（AMCM-88B）

将七种不同规格的包装箱装到两辆铁路平板车上，各包装箱宽、高均相等，但厚度t(厘米)与重量w(公斤)不同。每平板车有10.2米长的地方用来装包装箱，载重40吨。由于货运限制，对c5、c6、c7类包装箱总数有限定：总厚度不超过302.7(厘米)。试把箱子装到平板车并使空间浪费最小。

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
T	45.7	51	62.5	71	49.2	52	60
W	2000	3000	1000	500	4000	2000	1000
件数	8	7	9	6	6	4	8

八、应用（AMCM-89B）

机场通常按“先来先走”的原则来分配飞机跑道，即当飞机准备好离开登机口时，驾驶员电告地面控制中心，加入等候跑道的队伍。假设控制中心可以从快速联机数据库中得到每架飞机如下信息：

1、预定离开登机口的时间　2、实际离开登机口的时间

3、机上乘客人数　4、预定在下一站转机的人数和时间

5、到达下一站的预定时间。

又设飞机共有七种型号，载客量从100人起以50人递增，载客最多达400人。

试开发和分析一种能使乘客和航空公司双方满意的数学模型。

九、数学的实践与认识（1998.1）

B 题 灾情巡视路线

下图为某县的乡（镇）、村公路网示意图，公路边的数字为该路段的公里数.

今年夏天该县遭受水灾. 为考察灾情、组织自救，县领导决定，带领有关部门负责人到全县各乡（镇）、村巡视. 巡视路线指从县政府所在地出发，走遍各乡（镇）、村，又回到县政府所在地的路线.

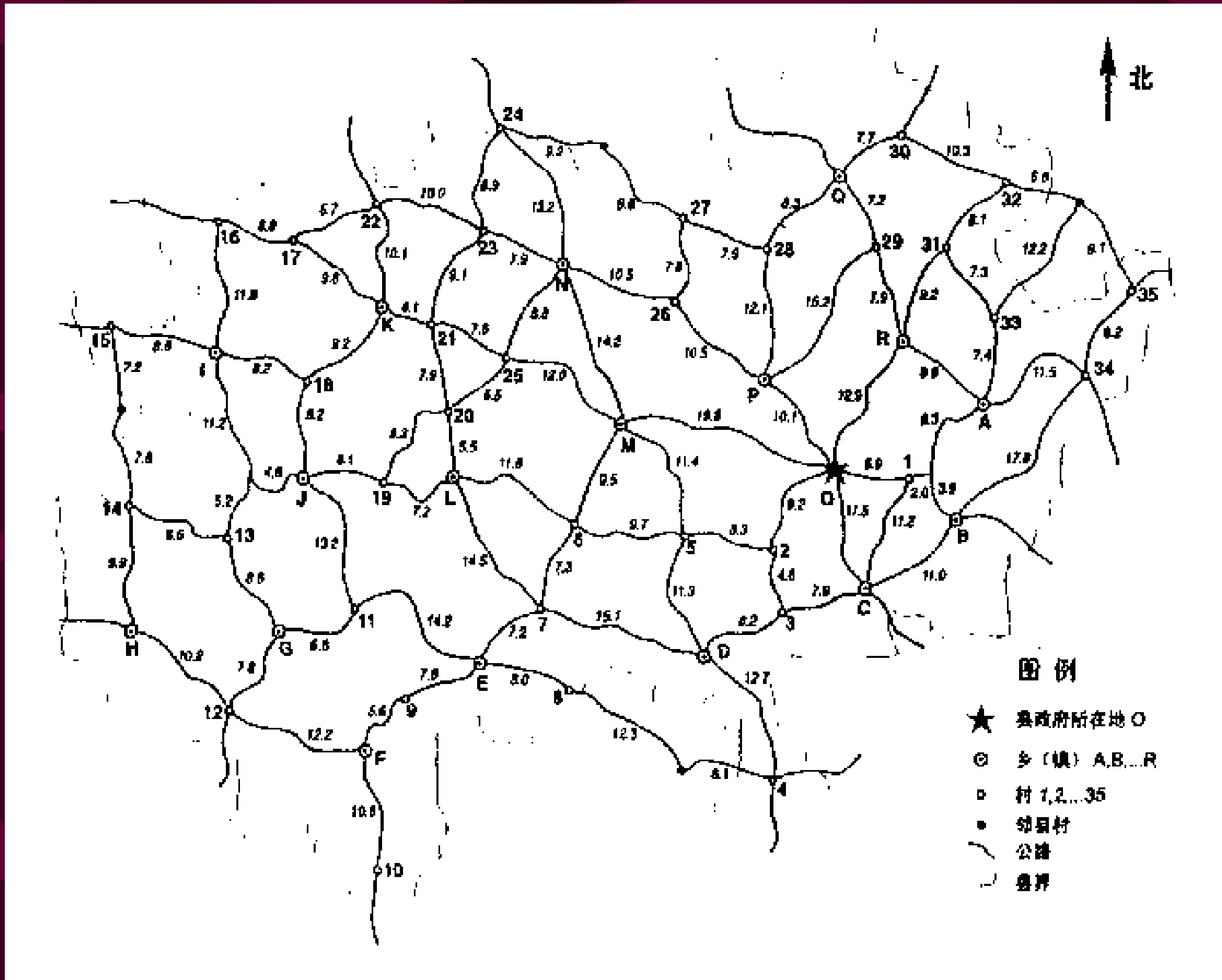
1. 若分三组（路）巡视，试设计总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线.

2. 假定巡视人员在各乡（镇）停留时间 $T=2$ 小时，在各村停留时间 $t=1$ 小时，汽车行驶速度 $V=35$ 公里／小时. 要在 24 小时内完成巡视，至少应分几组；给出这种分组下你认为最佳的巡视路线.

3. 在上述关于 T，t 和 V 的假定下，如果巡视人员足够多，完成巡视的最短时间是多少；给出在这种最短时间完成巡视的要求下，你认为最佳的巡视路线.

4. 若巡视组数已定（比如三组），要求尽快完成巡视，讨论 T，t 和 V 改变对最佳巡视路线的影响.

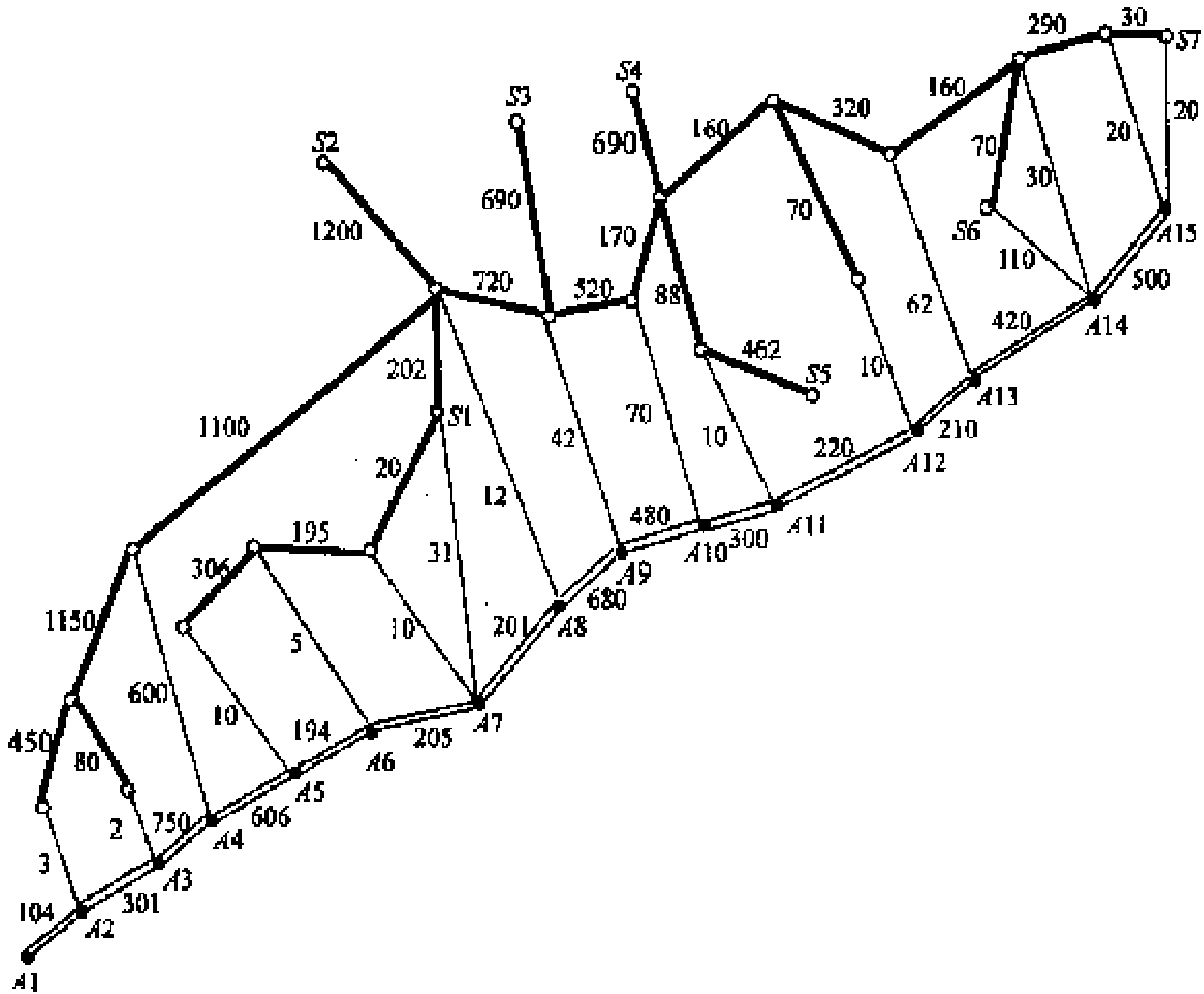
地图



十、数学的实践与认识（1998.1）

B 题　钢管订购和运输

要铺设一条 $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{15}$ 的输送天然气的主管道，如图 1 所示(见反面)．经筛选后可以生产这种主管道钢管的钢厂有 $S_1, S_2, \cdots, S_7$．图中粗线表示铁路，单细线表示公路，双细线表示要铺设的管道(假设沿管道或者原来有公路，或者建有施工公路)，圆圈表示火车站，每段铁路、公路和管道旁的阿拉伯数字表示里程(单位 km)．


S1
S2
S3
S4
S5
S6
S7
A1
A2
A3
A4
A5
A6
A7
A8
A9
A10
A11
A12
A13
A14
A15
104
301
750
606
194
205
680
480
300
220
210
420
500
1200
1100
1150
450
80
3
2
600
10
5
306
195
20
202
720
690
690
520
170
88
160
320
160
290
30
20
20
70
70
30
110
62
10
462
70
10
42
12
31
10
201

数据

为方便计，1km 主管道钢管称为 1 单位钢管.

一个钢厂如果承担制造这种钢管，至少需要生产 500 个单位. 钢厂 S_i 在指定期限内能生产该钢管的最大数量为 s_i 个单位，钢管出厂销价 1 单位钢管为 p_i 万元，如下表：

i	1	2	3	4	5	6	7
s_i	800	800	1000	2000	2000	2000	3000
p_i	160	155	155	160	155	150	160

1 单位钢管的铁路运价如下表：

里程(km)	≤300	301－350	351－400	401－450	451－500
运价(万元)	20	23	26	29	32

里程(km)	501－600	601－700	701－800	801－900	901－1000
运价(万元)	37	44	50	55	60

1000km 以上每增加 1 至 100km 运价增加 5 万元.

公路运输费用为 1 单位钢管每公里 0.1 万元(不足整公里部分按整公里计算).

钢管可由铁路、公路运往铺设地点(不只是运到点 $A_1, A_2, \cdots, A_{15}$，而是管道全线).

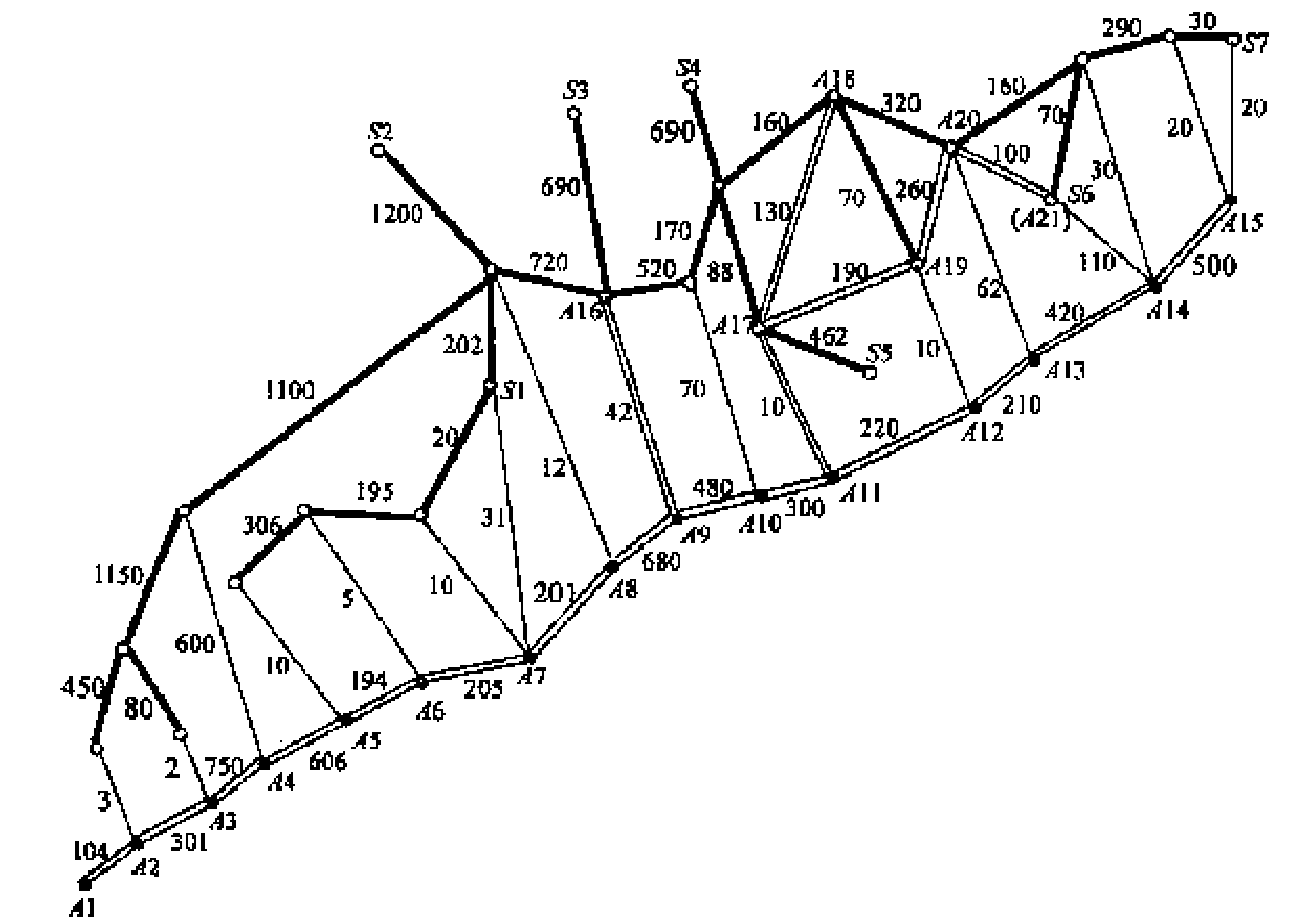
问题

(1)请制定一个主管道钢管的订购和运输计划，使总费用最小(给出总费用).

(2)请就(1)的模型分析：哪个钢厂钢管的销价的变化对购运计划和总费用影响最大，哪个钢厂钢管的产量的上限的变化对购运计划和总费用的影响最大，并给出相应的数字结果.

(3)如果要铺设的管道不是一条线，而是一个树形图，铁路、公路和管道构成网络，请就这种更一般的情形给出一种解决办法，并对图 2 按(1)的要求给出模型和结果.

问题（3）的图



S2
S3
S4
S5
S6
(A21)
S7
S1
A1
A2
A3
A4
A5
A6
A7
A8
A9
A10
A11
A12
A13
A14
A15
A16
A17
A18
A19
A20
1200
720
690
690
520
170
88
160
130
70
320
160
260
100
70
30
290
30
20
20
190
462
10
62
110
420
500
210
220
300
480
680
201
205
194
606
750
301
104
3
2
80
450
1150
600
1100
202
20
195
306
10
5
10
31
12
42
70
10

讨论题

4－8　要调配红、兰、白、黑、黄五种颜色的油漆。清洗调配工具所需花费的时间既与原来调配什么颜色有关，又与拟调配什么颜色有关，各种情况下所需的时间如表 4－24 所示。问应如何调配较好。

表 4－24　　　　单位：分

原调 \ 现调	红	兰	白	黑	黄
红		6	18	4	8
兰	7		17	3	7
白	4	5		4	5
黑	20	19	24		22
黄	8	8	16	6	