计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：　高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：　李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第五节 高斯求积公式 (Gaussian Quadrature)

前述 插值型机械求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j), \quad A_j = \int_a^b l_j(x)dx \tag{5.1}$$

我们是选取被积函数 $f(x)$ 在区间 $I=[a,b]$ 上的 等距节点 剖分，步长 (Stepsize) 是恒定的：
$h_j = x_{j+1} - x_j \equiv h = \dfrac{b-a}{n}, j = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. 且已经证明，某机械求积公式具有至少 n 次代数精度的充要条件是：它是插值型的.

现在的问题是：

(1)<u>等距节点</u> 的条件是否可去，替换为具有某种规律的<u>自由节点</u>.

(2) 设剖分区间段数不变 (n 个)，求积公式代数精度能否提高 (大于 n), 最高可达多少.

解决这两个问题，我们就将得到具有更好自由度和更高代数精度的求积公式：高斯求积公式 (Gaussian Quadrature).

- 5.1. **高斯求积公式的一般理论**

【 定理 1 】 求积公式的最高代数精度 n+1 个节点的求积公式可以达到的最大代数精度为 2n+1.

【 证明】 设 n+1 个节点的求积公式可以达到的最大代数精度为 m. 即对于多项式空间的 基函数族 $1, x, x^2, \cdots, x^m$, 严格成立等式：

$$\int_a^b x^k dx = \sum_{j=0}^{n} A_j x_j^k, j = 0, 1, 2, \cdots, n, k = 0, 1, 2, \cdots, m, \tag{5.2}$$

机械求积公式具有 m 次代数精度当且仅当对于这族基函数精确成立由 $m+1$ 个方程构成的方程组，就节点 x_j 而言是非线性，就求积系数 A_j 而言是线性的：

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\int_a^b x^0 dx = b - a = \sum_{j=0}^{n} A_j = A_0 + A_1 + \cdots + A_n \\
\int_a^b x^1 dx = \dfrac{b^2 - a^2}{2} = \sum_{j=0}^{n} A_j x_j \\
= A_0 x_0 + A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n \\
\int_a^b x^2 dx = \dfrac{b^3 - a^3}{3} = \sum_{j=0}^{n} A_j x_j^2 \\
= A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 + \cdots + A_n x_n^2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int_a^b x^m dx = \dfrac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} = \sum_{j=0}^{n} A_j x_j^m \\
= A_0 x_0^m + A_1 x_1^m + \cdots + A_n x_n^m
\end{array}
\right. \tag{5.3}
$$

方程组含有 $A_0, A_1, \cdots, A_n; x_0, x_1, \cdots, x_n$ 共 2n+2 个未知参数，可以确定具有 2n+2 个系数 $a_0, a_1, \cdots, a_{2n+1}$ 的 $2n+1$ 次多项式
$P_{2n+1}(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 故 n+1 个节点的求积公式可以达到的最大代数精度为 2n+1.

【证毕】

【定义 1】 高斯求积公式和高斯点 (Gaussian Quadrature)
设被积函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上有 未必等距节点 剖分： $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. 若带有 权函数$\rho(x) \geq 0$ 的求积公式

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j) \tag{5.4}$$

具有 2n+1 次代数精度，则称之为 高斯求积公式 (Gaussian Quadrature).

而我们选取的使求积公式具有 2n+1 次代数精度的相应节点称为 高斯节点 (Gaussian Nodes). 在后边将会证明，这里的高斯求积系数 (Gaussian Coefficients) 是正数：

$$A_j = \int_a^b l_j^2(x)\rho(x)dx > 0 \tag{5.5}$$

由此可知高斯求积公式是稳定的.

为了建立一个高斯求积公式，确定高斯节点是首要的. 那么何种节点才能成为一个插值型机械求积公式的高斯节点呢？下面的定理为我们提供了选取高斯节点的依据.

【定理 2】 高斯节点的充要条件 带有权函数$\rho(x) \geq 0$ 的插值型求积公式 $\int_a^b f(x)\rho(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$ 的节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是高斯节点的充要条件是

以节点为零点的辅助多项式函数

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

与任何次数不超过 n 的多项式 $P(x)$ 带权 $\rho(x) \geq 0$ 正交:

$$\int_a^b P(x)\omega_{n+1}(x)\rho(x)dx = 0 \tag{5.6}$$

【证明】

必要性：记 H_n 为 n 次多项式集合．若机械求积公式的节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是高斯节点，由高斯求积公式代数精度之定义知对任意次数不超过 $2n+1$ 的多项式它都精确成立等式．现在因 $P(x) \in H_n, \omega_{n+1}(x) \in H_{n+1}$, 故
$P(x)\omega_{n+1}(x) \in H_{2n+1}$,

从而有等式

$$\int_a^b P(x)\omega_{n+1}(x)\rho(x)dx = \sum_{j=0}^n A_j P(x_j)\omega_{n+1}(x_j)$$

$$= \sum_{j=0}^n A_j P(x_j) \cdot 0 = 0,$$

即 $\omega_{n+1}(x)$ 与任何次数不超过 n 的多项式 $P(x)$ 带权 $\rho(x) \geq 0$ 正交.

充分性: 若 $\omega_{n+1}(x)$ 与任何次数不超过 n 的多项式 $P(x)$ 带权 $\rho(x) \geq 0$ 正交，设 $f(x) \in H_{2n+1}$, 则由多项式的 Euler 辗转相除法，我们作 $f(x) \in H_{2n+1}$ 的带余项的商分解

$$f(x) = P(x)\omega_{n+1}(x) + q(x), \quad P(x), q(x) \in H_n \tag{5.8}$$

则在节点处有

$$f(x_j) = P(x_j)\omega_{n+1}(x_j) + q(x_j) = q(x_j) \tag{5.9}$$

代入求积公式有

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\rho(x)dx \\
&= \int_a^b (P(x)\omega_{n+1}(x) + q(x))\rho(x)dx \\
&= \int_a^b P(x)\omega_{n+1}(x)\rho(x)dx + \int_a^b q(x)\rho(x)dx \\
&= 0 + \int_a^b q(x)\rho(x)dx \\
&= \sum_{j=0}^{n} A_j q(x_j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

从而对任意次数不超过 $2n+1$ 的多项式 $f(x) \in H_{2n+1}$ 精确

成立等式

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j) \tag{5.11}$$

即节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是高斯节点.

【证毕】

【定理 3】 高斯求积公式的余项 高斯求积公式的积分余项

$$R[f]=\int_a^b \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x)\rho(x)dx$$

$$=\frac{f^{(2n+2)}(\zeta)}{(2n+2)!}\int_a^b \omega_{n+1}^2(x)\rho(x)dx$$

【证明】

作 $f(x)$ 的带余项的 Hermite 插值多项式逼近：

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x) \tag{5.13}$$

两边同乘以权函数 $\rho(x) \geq 0$ 并积分得

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\rho(x)dx \\
&= \int_a^b (H_{2n+1}(x) + \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!})\rho(x)dx \\
&= \int_a^b H_{2n+1}(x)\rho(x)dx + \int_a^b \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!})\rho(x)dx \\
&= \sum_{j=0}^{n} A_j H_{2n+1}(x_j) + \int_a^b \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!})\rho(x)dx \\
&= \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j) + \int_a^b \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!})\rho(x)dx
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

故高斯求积公式的积分余项

$$R[f] = \int_a^b \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x)\rho(x)dx$$

$$= \frac{f^{(2n+2)}(\zeta)}{(2n+2)!}\int_a^b \omega_{n+1}^2(x)\rho(x)dx$$

最后一步是根据积分中值定理获得.　$\zeta \in [a, b]$ 为中值点.

【证毕】

【定理 4】 高斯求积公式的系数为正 高斯求积系数 (Gaussian Coefficients) 是正数：

$$A_j = \int_a^b l_j^2(x)\rho(x)dx > 0 \tag{5.16}$$

由此可知高斯求积公式是稳定的.

【证明】 对于 n 次拉格朗日插值基函数

$$l_j(x) = \prod_{k\neq j,k=0}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \tag{5.17}$$

其平方

$$l_j^2(x) = \prod_{k\neq j,k=0}^{n} (\frac{x - x_k}{x_j - x_k})^2 \tag{5.18}$$

是 2n 次多项式，以节点 x_j 为重根．故具有 2n+1 次代数精度的高斯求积公式对之精确成立，利用拉格朗日插值基函数的标准正交性，此即

$$\int_a^b l_j^2(x)\rho(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k l_j^2(x_k) = \sum_{k=0}^{n} A_k \delta_{kj} = A_j \tag{5.19}$$

故高斯求积系数作为非负函数 $l_j^2(x)\rho(x)$ 的积分

$$A_j = \int_a^b l_j^2(x)\rho(x)dx > 0 \tag{5.20}$$

是正数. **【证毕】**

- 5.2. **高斯 - 勒让德求积公式** (Gauss-Legendre Quadrature)

【**定义** 2】 **勒让德正交多项式函数系** (Cluster of Legendre's Orthogonal Functions) 勒让德正交多项式函数系 由如下递推公式确立：

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = \dfrac{(2n+1)x}{n+1} P_n(x) - \dfrac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \\ P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \end{cases} \tag{5.21}$$

容易证明，成立 勒让德正交关系

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases} \tag{5.22}$$

比如：

(1) n=1 时,

$$P_2(x) = \frac{3x}{2}P_1(x) - \frac{1}{2}P_0(x) = \frac{3x^2 - 1}{2} \tag{5.23}$$

具有 2 个零点

$x_j = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} = \pm 0.57735026918962576450914878050196.$

(2)　n=2 时,

$$P_3(x) = \frac{5x}{3}P_2(x) - \frac{2}{3}P_1(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2} \tag{5.24}$$

具有 3 个零点

$x_j = 0, \pm\dfrac{\sqrt{15}}{5} = 0, \pm 0.77459666924148337703585307995648.$

(3) n=3 时,

$$P_4(x) = \frac{7x}{4}P_3(x) - \frac{3}{4}P_2(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8} \tag{5.25}$$

具有 4 个零点 $x_j = \pm\sqrt{\dfrac{30+4\sqrt{30}}{70}}, \pm\sqrt{\dfrac{30-4\sqrt{30}}{70}},$

即 $0, \pm 0.86113631159405257522394648889281,$

$\pm 0.33998104358485626480266575910324.$

(4) n=4 时,

$$P_5(x) = \frac{9x}{5} P_4(x) - \frac{4}{5} P_3(x) = \frac{x(63x^4 - 70x^2 + 15)}{8} \tag{5.26}$$

具有 5 个零点 $0, \pm 0.9061798459, \pm 0.5384693101$.

【定义 3　　高斯 - 勒让德求积公式】 简单起见，现在取权函数 $\rho(x)=1$, 考虑标准积分区间 $[-1,1]$ 上的积分 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, 则有

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j), \qquad \sum_{j=0}^{n} A_j = 1-(-1)=2 \quad (5.27)$$

若取节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为勒让德正交多项式函数的零点，则称此高斯求积公式为 高斯 - 勒让德求积公式.

比如,

(0)　n=0 时，取 $P_1(x)=x$ 的零点 0 ，作单点高斯 - 勒让德求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_0 f(0), \qquad A_0 = 1-(-1) = 2$$

即

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2f(0), \tag{5.28}$$

事实上即是 中矩形公式.

(1) n=1 时，取 $P_2(x)=\dfrac{3x^2-1}{2}$ 的零点

$x_j=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\pm 0.5773503$，作两点高斯 - 勒让德求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_0 f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + A_1 f(-\frac{\sqrt{3}}{3}), A_0 + A_1 = 1-(-1) = 2$$

由代数精度的定义，分别令公式对于基函数 $1, x$ 精确成立，则

$$\begin{cases} 2 = \int_{-1}^{1} 1 dx = A_0 + A_1 \\ 0 = \int_{-1}^{1} x dx = -\frac{\sqrt{3}}{3} A_0 + \frac{\sqrt{3}}{3} A_1 \end{cases} \tag{5.29}$$

解此线性方程组得 $A_0 = A_1 = 1$. 从而两点高斯 - 勒让德求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}) \tag{5.30}$$

(2) n=2 时，取 $P_3(x) = \dfrac{5x^3 - 3x}{2}$ 的零点

$x_j = 0, \pm\dfrac{\sqrt{15}}{5} = 0, \pm 0.7745967$，作三点高斯 - 勒让德求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_0 f(-\frac{\sqrt{15}}{5}) + A_1 f(0) + A_2 f(\frac{\sqrt{15}}{5}),$$

$A_0 + A_1 + A_2 = 2.$

由代数精度的定义，分别令公式对于基函数 $1, x, x^2$ 精确成

立，则

$$\begin{cases} 2 = \int_{-1}^{1} 1dx = A_0 + A_1 + A_2 \\ 0 = \int_{-1}^{1} xdx = -\frac{\sqrt{15}}{5}A_0 + \frac{\sqrt{15}}{5}A_2 \\ \frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x^2dx = -\frac{3}{5}A_0 + \frac{3}{5}A_2 \end{cases} \tag{5.31}$$

解此线性方程组得

$A_0 = A_2 = \frac{5}{9} = 0.5555556, A_1 = \frac{8}{9} = 0.8888889$. 从而三点高斯 - 勒让德求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{5}{9}f(-\frac{\sqrt{15}}{5}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\frac{\sqrt{15}}{5}) \tag{5.32}$$

(3) n=3 时，取 $P_4(x)=\dfrac{35x^4-30x^2+3}{8}$ 的零点 $x_j=\pm 0.8611363116, \pm 0.3399810436$，作四点高斯 - 勒让德求积公式为

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} f(x)dx\\ &= 0.3478548451 f(-0.861136)+0.3478548451 f(0.861136)\\ &+0.6521451549 f(-0.339981)+0.6521451549 f(0.339981)\end{aligned} \tag{5.33}$$

(4) n=4 时，取 $P_5(x)=\dfrac{x(63x^4-70x^2+15)}{8}$ 的零点

$$x_j=0,\pm0.9061798459,\pm0.5384693101$$

作五点高斯 - 勒让德求积公式为

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=0.5688888889f(0)+$$
$$0.2369268851f(-0.9061798)+0.2369268851f(0.9061798)$$
$$+0.4786286705f(-0.5384693)+0.4786286705f(0.5384693) \tag{5.34}$$

上述结果可归纳为下面的简表.

表 5.1： 高斯 - 勒让德求积公式节点 - 系数表

n	x_j	A_j
0	0	2
1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3} = \pm 0.5773503$	1
2	$\pm\frac{\sqrt{15}}{5} = \pm 0.7745967$	$\frac{5}{9} = 0.5555556$
	0	$\frac{8}{9} = 0.8888889$
3	± 0.8611363116	0.3478548451
	± 0.3399810436	0.6521451549
4	± 0.9061798459	0.2369268851
	± 0.5384693101	0.4786286705
	0	0.5688888889
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

【注记】 当积分区间 $[a,b]$ 非标准区间 $[-1,1]$ 时，需先作标准区间 $[-1,1]$ 到积分区间 $[a,b]$ 的线性拓扑同构变换：

$$g:[-1,1]\to[a,b], x=g(t)=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2} \tag{5.35a}$$

即

$$t=\frac{2x-(a+b)}{b-a} \tag{5.35b}$$

则积分

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2})dt \tag{5.36}$$

当然，同构变换的方式并非唯一.

比如，取积分区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 则依线性拓扑同构变换：

$$x = g(t) = \frac{\pi}{2}t$$

而非线性拓扑同构变换可取为：

$$x = g(t) = \arcsin t$$

等等.

- 5.3. **例题选讲**

【例 1】 用三点高斯 - 勒让德求积公式计算积分

(1)

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

【解】 先将积分化到标准区间：

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx\\&= \frac{1-0}{2}\int_{-1}^1 \frac{4}{1+(\frac{t+1}{2})^2}dt\\&= 8\int_{-1}^1 \frac{1}{4+(t+1)^2}dt\end{aligned}$$

令函数 $f(t) = \dfrac{1}{4+(t+1)^2}$, 再用三点高斯 - 勒让德求积公式

计算积分

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx \\
&= 8\int_{-1}^1 \frac{1}{4+(t+1)^2}dt \\
&= 8(\frac{5}{9}f(-0.7745967)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(0.7745967)) \\
&= 3.141068
\end{aligned}
$$

(2)

$$I=\int_1^3 \frac{1}{x}dx$$

【解】 先将积分化到标准区间：

$$\int_1^3 \frac{1}{x}dx=\int_{-1}^1 \frac{1}{t+2}dt$$

令函数 $f(t)=\dfrac{1}{t+2}$, 再用三点高斯 - 勒让德求积公式计算积

分

$$
\begin{aligned}
&\int_1^3 \frac{1}{x}dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{t+2}dt \\
&= \frac{5}{9}f(-0.7745967) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(0.7745967) \\
&= 1.098039
\end{aligned}
$$

若用五点高斯 - 勒让德求积公式计算，则有

$$
\begin{aligned}
&\int_1^3 \frac{1}{x}dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{t+2}dt \\
&= 0.5688888889f(0) + 0.2369268851f(-0.9061798459) \\
&+0.2369268851f(0.9061798459) \\
&+0.4786286705f(-0.5384693) + 0.4786286705f(0.5384693) \\
&= 1.098609
\end{aligned}
$$

- 5.3. **高斯 - 切贝雪夫求积公式** (Gauss-Chebyshev Quadrature)

【定义 1】 **切贝雪夫正交多项式系** (Cluster of Chebyshev's Orthogonal Polynomials)

切贝雪夫正交多项式系 由如下递推公式确立:

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \end{cases}$$

展开即如

$$
\begin{cases}
T_0(x) & = 1, \qquad T_1(x) = x \\
T_2(x) & = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 \\
T_3(x) & = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x \\
T_4(x) & = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
T_5(x) & = 2xT_4(x) - T_3(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
\quad \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

容易证明，对于 $n = 0, 1, 2, \cdots$, 切贝雪夫正交多项式满足如下性质：

1. 切贝雪夫三角公式 $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ 可作为切贝雪夫正交多项式的等价定义：

2. 切贝雪夫正交关系(权函数为 $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \dfrac{\pi}{2}, & m = n \neq 0. \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

3. 切贝雪夫奇偶关系

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

4. 切贝雪夫零点 n 次切贝雪夫正交多项式 $T_n(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上具有 n 个单零点

$$x_j = \cos\frac{2j-1}{2n}\pi, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

这由切贝雪夫三角公式定义直接获得．事实上，我们有
$T_n(x_j) = \cos(n\arccos(x_j))$

$$= \cos(n\arccos(\cos\frac{2j-1}{2n}\pi)) = \cos(\frac{2j-1}{2}\pi) = 0.$$

(2) n=2 时,

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

具有 3 个零点

$x_j = 0, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0, \pm 0.8660254037844386467637231707529 4.$

(3)　n=3 时,

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) \\ &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

具有 4 个零点 $x_j = \pm\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}, \pm\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$.

即 $\pm 0.92387953251128675612818318939679$,

$\pm 0.38268343236508977172845998403063$.

【**定义** 2. **高斯 - 切贝雪夫求积公式** (Gauss-Chebyshev Quadrature)】

现在取权函数

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

考虑标准积分区间 $[-1, 1]$ 上的积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$,

则有

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j),$$

$$\sum_{j=0}^{n} A_j = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi$$

若取节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为高斯 - 切贝雪夫正交多项式函数的零点，则称此高斯求积公式为 高斯 - 切贝雪夫求积公式 (Gauss-Chebyshev Quadrature).

(0)　n=0 时，取 $T_1(x)=x$ 的零点 0，作单点高斯 - 切贝雪夫求积公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = A_0 f(0), \qquad A_0=\pi$$

即

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi f(0)$$

事实上即是 中矩形公式.

(1)　n=1 时，取 $T_2(x) = 2x^2 - 1$ 的零点

$x_j = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \pm 0.7071$，作两点高斯 - 切贝雪夫求积公式

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = A_0 f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + A_1 f(\frac{\sqrt{2}}{2}), \qquad A_0 + A_1 = \pi$$

由代数精度的定义，分别令公式对于基函数 $1, x$ 精确成立，则

$$
\left\{
\begin{aligned}
\pi &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = A_0 + A_1 \\
0 &= \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\sqrt{2}}{2} A_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} A_1
\end{aligned}
\right.
$$

解此线性方程组得 $A_0 = A_1 = \dfrac{\pi}{2}$. 从而两点高斯 - 切贝雪夫求积公式为

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\pi}{2} f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{2}[f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + f(\frac{\sqrt{2}}{2})]$$

(2)　n=2 时，取 $T_3(x)=4x^3-3x$ 的零点

$x_j=0,\pm\frac{\sqrt{3}}{2}=0,\pm 0.866$，作三点高斯 - 切贝雪夫求积公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=A_0f(-\frac{\sqrt{3}}{2})+A_1f(0)+A_2f(\frac{\sqrt{3}}{2}),$$

$$A_0+A_1+A_2=\pi$$

由代数精度的定义，分别令公式对于基函数 $1,x,x^2$ 精确成立，则

$$
\begin{cases}
\pi = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = A_0 + A_1 + A_2 \\
0 = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\sqrt{3}}{2} A_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} A_2 \\
\frac{\pi}{2} = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{3}{4} A_0 + \frac{3}{4} A_2
\end{cases}
\tag{5.31}
$$

解此线性方程组得 $A_0 = A_1 = A_2 = \dfrac{\pi}{3} \approx 1.04719753$. 从而三点高斯 - 切贝雪夫求积公式为

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{3}[f(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + f(0) + f(\frac{\sqrt{3}}{2})]$$

(3)　n=3 时，取 $T_4(x)=8x^4-8x^2+1$ 的零点

$x_j=\pm\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}},\pm\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$，作四点高斯 - 切贝雪夫求积公式为

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{4}[f(-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}})+f(-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}})$$
$$+f(\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}})+f(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}})]$$

【 * **定理** 1 **形式别裁**. **高斯 - 切贝雪夫求积系数** (Gauss-Chebyshev Coefficients) 】

设有标准积分区间 $[-1,1]$ 上的采用 n 个节点的 高斯 - 切贝雪夫求积公式 (Gauss-Chebyshev Quadrature).

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j),$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_j = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi$$

若取节点 $x_1, \cdots, x_n$ 为 n 次高斯 - 切贝雪夫正交多项式函数的 n 个单零点 $x_j = \cos\dfrac{2j-1}{2n}\pi, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$

则所有的 高斯 - 切贝雪夫求积系数 Gauss-Chebyshev Coefficients 为与 j 无关只与 n 有关的常数:

$$A_j = \frac{\pi}{n}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

亦即标准积分区间 $[-1, 1]$ 上的 高斯 - 切贝雪夫求积公式 (Gauss-Chebyshev Quadrature) 为

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\cos \frac{2j-1}{2n}\pi), \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

【注记】

由于高斯 - 切贝雪夫求积系数极其简单:
$A_j = \dfrac{\pi}{n}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n,$ 若被积分函数包含因子
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，则此类奇异积分适宜采用高斯 - 切贝雪夫求积公式 (Gauss-Chebyshev Quadrature) 计算.

【例 1】 用高斯-切贝雪夫求积公式 (Gauss-Chebyshev Quadrature).

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\cos \frac{2j-1}{2n} \pi), \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

计算积分:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

令函数 $f(x)=e^x$, 再用单点高斯 - 切贝雪夫求积公式计算积分则

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\pi f(0)=\pi e^0=\pi\approx 3.1415926$$

用两点高斯 - 切贝雪夫求积公式计算积分则有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{\pi}{2}[f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + f(\frac{\sqrt{2}}{2})] \\
&= \frac{\pi}{2}[e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}] \\
&= 1.5707963 \times [e^{-0.7071} + e^{0.7071}] \\
&= 1.5707963 \times [0.4930722695 + 2.0281002640] \\
&= 1.5707963 \times 2.5211725335 = 3.96024848728342605
\end{aligned}
$$

若用三点高斯 - 切贝雪夫求积公式计算积分则有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{\pi}{3}[f(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + f(0) + f(\frac{\sqrt{3}}{2})] = \frac{\pi}{3}[e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} + e^0 + e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}] \\
&= 1.047197533 \times [e^{-0.866} + 1 + e^{0.866}] \\
&= 1.047197533 \times (0.420630956555 + 1 + 2.377380895) \\
&= 1.047197533 \times 3.798011851555030742768497000 2143 \\
&= 3.97726864125319
\end{aligned}
$$

若用五点高斯 - 切贝雪夫求积公式计算积分则有

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \frac{\pi}{5}\sum_{j=1}^{5} f(\cos\frac{2j-1}{10}\pi) = \frac{\pi}{5}\sum_{j=1}^{5} e^{\cos\frac{2j-1}{10}\pi}$$

$$= 0.62831852\times$$

$$[e^{\cos\frac{1}{10}\pi} + e^{\cos\frac{3}{10}\pi} + e^{\cos\frac{5}{10}\pi} + e^{\cos\frac{7}{10}\pi} + e^{\cos\frac{9}{10}\pi}]$$

$$= 3.977463$$

根据采用 n 个节点的高斯 - 切贝雪夫求积公式 (Gauss-Chebyshev Quadrature)

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n}f(\cos\frac{2j-1}{2n}\pi),\qquad j=1,2,\cdots,n$$

的积分余项表达

$$R_n[f]=\int_a^b\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\omega_{n+1}^2(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!}\frac{2\pi}{2^{2n}}$$

对于五点高斯 - 切贝雪夫求积公式,

$n=5, 2n=10, f^{(10)}(\zeta)=e^{\zeta}, \zeta\in[-1,1]$. 我们有

$$R_n[f]=\frac{f^{(2n)}(\zeta)}{(2n)!}\frac{2\pi}{2^{2n}}=\frac{e^{\zeta}}{(10)!}\frac{2\pi}{2^{10}}=\frac{e^{\zeta}}{(10)!}\frac{\pi}{2^{9}}\leq\frac{e}{(10)!}\frac{\pi}{2^{9}}$$
$$\leq 4.6\times 10^{-9}$$

显然已经相当精确.

【 **定义** 3. **高斯 - 洛巴托求积公式** (Gauss-Lobatto Quadrature) 】

对于标准积分区间 $[-1,1]$ 上的积分 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, 预先固定左端点 $x_0 = -1$ 和右端点 $x_n = 1$, 则有

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{2}{n(n+1)}[f(-1) + f(1)] + \sum_{j=1}^{n-1} A_j f(x_j) + R_n[f]$$

其中节点 $x_1, \cdots, x_{n-1}$ 为 n 次勒让德正交多项式的导数多项式 $P_n'(x)$(它是 $n-1$ 次多项式) 的零点，而 $P_n(x)$ 为 n 次勒让德正交多项式

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \\ P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \end{cases}$$

相应求积系数为

$$A_j = \frac{2}{n(n+1)(P_n(x_j))^2}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n-1$$

积分余项为

$$R_n[f] = -\frac{n^3 2^{2n+1}(n+1)((n-1)!)^4 f^{(2n)}(\zeta)}{(2n+1)[(2n)!]^3}$$

称此高斯求积公式为 高斯 - 洛巴托求积公式 (Gauss-Lobatto Quadrature).

表 5.5. 高斯 - 洛巴托求积公式节点 - 系数表

n	x_j	A_j
2	$0,$	$\frac{4}{3} \approx 1.33333333$
	± 1	$\frac{1}{3} \approx 0.3333333$
3	± 0.447214	$\frac{5}{6} \approx 0.83333333333$
	± 1	$\frac{1}{6} \approx 0.1666666667$
4	$0,$	$\frac{32}{45} \approx 0.7111111111$
	± 0.654654	$\frac{49}{90} \approx 0.5444444444$
	± 1	$\frac{1}{10} \approx 0.1$

【例 1】 用 高斯 - 洛巴托求积公式 (Gauss-Lobatto Quadrature).

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{2}{n(n+1)}[f(-1)+f(1)] + \sum_{j=1}^{n-1} A_j f(x_j)$$

计算积分:

$$I = \int_{-1}^{1} \cos\frac{\pi x}{2} dx$$

【解】

用 $n=4$ 的五点高斯 - 洛巴托求积公式计算积分有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} \cos\frac{\pi x}{2} dx \\
&= \frac{2}{4\times(4+1)}[f(-1)+f(1)] + \sum_{j=1}^{3} A_j f(x_j) \\
&= \frac{1}{10}(\cos\frac{\pi\times(-1)}{2} + \cos\frac{\pi\times 1}{2}) + \\
&\frac{49}{90}\cos\frac{\pi\times(-0.654654)}{2} + \frac{32}{45}\cos\frac{\pi\times 0}{2} + \frac{49}{90}\cos\frac{\pi\times(0.65465}{2} \\
&= \frac{1}{10}(0+0) + 2\times\frac{49}{90}\cos\frac{0.654654\pi}{2} + \frac{32}{45} \\
&= \frac{49}{45}\times 0.516251459248 + 0.711111111111 \\
&= 0.5621404778479 + 0.7111111111111111 = 1.2732515889590
\end{aligned}
$$

积分精确值为

$$I = \int_{-1}^{1} \cos\frac{\pi x}{2} dx = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}|_{-1}^{1} = \frac{4}{\pi} \approx 1.273239566454288$$

显然已经相当精确.

【 高斯 - 洛巴托求积公式 (Gauss-Lobatto Quadrature) **的 Matlab 实现】**

高斯 - 洛巴托求积公式 (Gauss-Lobatto Quadrature) 计算积分，可用 Matlab 编程如下： 举例说明之.

【例 1】 计算积分：

$$I = \int_{-1}^{1} \cos\frac{\pi x}{2} dx$$

【解】

高斯 - 洛巴托求积公式 (Gauss-Lobatto Quadrature) 的 Matlab 库函数命令为 quadl ， 直接调用：

源程序：

```
z=quadl('cos(pi.*(x) /2 )',-1,1);
```

运行结果为：

```
z =
1.27323953039284
```

【例 2】 计算积分：

$$\pi = I = 8\int_{-1}^{1} \frac{1}{4+(t+1)^2}dt$$

【解】

高斯 - 洛巴托求积公式 (Gauss-Lobatto Quadrature) 的 Matlab 库函数命令为 quadl， 直接调用：

源程序:

$z = quadl('1./(4+(t+1).^2)', -1, 1)$

$I = 8*z$

运行结果为:

$\mathrm{z} = 0.392699908837902$

$\mathrm{I} = 3.14159270703219$

【例 3】 计算积分：

$$\int_1^3 \frac{1}{x}dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{t+2}dt$$

【解】

高斯 - 洛巴托求积公式 (Gauss-Lobatto Quadrature) 的 Matlab 库函数命令为 quadl ， 直接调用：

源程序:

$z = quadl('1./(t+2)', -1, 1)$

运行结果为:

z = 1.09861319966583