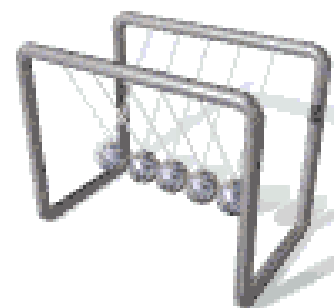


# 初 等 模 型

- 一、公平的席位分配
- 二、动物的身长和体重
- 三、划艇比赛
- 四、人员疏散
- 五、红绿灯模型



# 一、公平的席位分配

## 1、问题：

某学校有3个系共200名学生，其中甲系100名，乙系60名、丙系40名。若学生代表会议设20个席位，公平而又简单的席位分配办法是按学生人数的比例分配，显然甲乙丙三系分别应占有10、6、4个席位。

现在丙系有6名学生转入甲乙两系，若仍按比例分配席位，出现小数按取整原则，重新计算后，甲乙丙三系的席位为10、6、4席。

现在的问题是：因为有20个席位的代表会议在表决提案时可能出现10：10的局面，会议决定下一届增加1席。他们按照上述方法重新分配席位，计算结果是：甲乙丙三系的席位为11、7、3席。显然这个结果对丙系太不公平了、因为总席位增加1席。而丙系却由4席减为3席。

# 按比例分配方案的计算结果

系 别	学生人数	学生人数 的比例(%)	20 个席位的分配		21 个席位的分配	
			比例分配 的席位	参照惯例 的结果	比例分配 的席位	参照惯例 的结果
甲	103	51.5	10.3	10	10.815	11
乙	63	31.5	6.3	6	6.615	7
丙	34	17.0	3.4	4	3.570	3
总和	200	100.0	20.0	20	21.000	21

要解决这个问题必须舍弃所谓惯例，找到衡量公平分配席位的**指标**，并由此建立新的分配方法。

## 2、指标体系的建立

### ( 1 ) 按比例分配不公平的原因

设A、B两方人数分别 $P_1$ 和 $P_2$ ，占有席位分别是 $n_1$ 和 $n_2$ ，则两方每个席位代表的人数分别为 $P_1/n_1$ 和 $P_2/n_2$ 。显然仅当 $P_1/n_1=P_2/n_2$ ，此时席位的分配才是公平的。但是因为人数和席位都是整数，所以通常 $P_1/n_1 \neq P_2/n_2$ ，这时席位分配不公平，并且 $P_i/n_i (i=1,2)$ 数值较大的一方吃亏，或者说对这方不公平。

## 2、指标体系的建立

(2) 不公平程度的衡量：

不妨设 $P_1/n_1 > P_2/n_2$ ，不公平程度用以下数值衡量：

**绝对程度**： $P_1/n_1 - P_2/n_2$

评价：无法区分两种程度明显不同的不公平情况  
但常识告诉我们，这种情况的公平席位度  
比起前面已大为改善。

改进：    相对标准

## 2、指标体系的建立

(3) 相对标准的建立：符号假设同上

若： $p_1/n_1 > p_2/n_2$ ，定义  $r_A(n_1, n_2) = \frac{p_1/n_1 - p_2/n_2}{p_2/n_2}$  为

A相对不公平值

若： $p_2/n_2 > p_1/n_1$ ，定义  $r_B(n_1, n_2) = \frac{p_2/n_2 - p_1/n_1}{p_1/n_1}$  为

B相对不公平值

方案原则：使这些指标值尽可能小。

### 3、分配方案的确定

假设：

A、B两方已分别占有 $n_1$ 、 $n_2$ 席，利用相对不公平值 $r_A$ 和 $r_B$ 讨论，当总席位增加1席时，应该分配给A还是B？

不失一般性可设： $p_1/n_1 > p_2/n_2$ ，即对A不公平。当再分配1个席位时，关于 $p_i/n_i (i = 1, 2)$ 的不等式可能有以下3种情况：

(1)  $p_1/(n_1+1) > p_2/n_2$ ，说明即使A方增加1席，仍然对A不公平，所以这一席显然应分给A方。

### 3、分配方案的确定

2.  $p_1/(n_1+1) < p_2/n_2$ , 说明当  $A$  方增加 1 席时将变为对  $B$  不公平, 参照(2)式可计算出对  $B$  的相对不公平值为

$$r_B(n_1+1, n_2) = \frac{p_2(n_1+1)}{p_1 n_2} - 1 \quad (3)$$

3.  $p_1/n_1 > p_2/(n_2+1)$ , 即当  $B$  方增加 1 席时将对  $A$  不公平, 参照(1)式可计算出对  $A$  的相对不公平值为

$$r_A(n_1, n_2+1) = \frac{p_1(n_2+1)}{p_2 n_1} - 1 \quad (4)$$

不可能出现  $p_1/n_1 < p_2/(n_2+1)$  的情况. WHY ?



### 3、分配方案的确定

归纳：

因为公平分配席位的原则是使得相对不公平值尽可能地小，所以如果

$$\frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)} < \frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)}$$

则这1席应分给A方；反之则分给B方。

模型：

$$\frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)} < \frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)}$$

当上式成立时增加的1席应分给A方。反之则分给B。

## 4、模型的推广——Q值法

推广有m方分配席位的情况：

设第i方人数为 $P_i$ ，已占有 $n_i$ 个席位， $i=1, 2, \dots, m$ 。当总席位增加1席时，计算：

$$Q_i = \frac{P_i^2}{n_i(n_i + 1)}, \quad i=1, 2, \dots, m$$

应将这一席分给Q值最大的一方。这种席位分配方法称Q值法。

## 5、本问题求解：

下面用Q值法重新讨论本节开始提出的甲乙丙三系分配21个席位的问题。

(1) 先按照比例计算结果将整数部分的19席分配完毕，  
有 $n_1=10$ ， $n_2=6$ ， $n_3=3$

(2) 然后再用Q值方法分配第20席和第21席：  
第20席：

$$\text{计算 } Q_1 = \frac{103^2}{10 \times 11} = 96.4, Q_2 = \frac{63^2}{6 \times 7} = 94.5,$$

$$Q_3 = \frac{34^2}{3 \times 4} = 96.3. Q_1 \text{ 最大, 于是这一席应分给甲系,}$$

第21席：

$$\text{计算 } Q_1 = \frac{103^2}{11 \times 12} = 80.4, Q_2, Q_3 \text{ 同上. } Q_3 \text{ 最大,}$$

于是这一席应分给丙系。

# 评论——这种方法公平吗？

Q值所反映的对第i方的不公平程度：

记p为总人数即 $p = \sum P_i$ ，n为总席位数，且设第i方席位 $n_i$ 为按人数比例计算的整数部分即：

$$n_i = \left[ \frac{P_i}{p} \cdot n \right]$$

于是：

$$\frac{P_i}{(n_i + 1)} < \frac{p}{n} \leq \frac{P_i}{n_i}$$

上式两端分别是增加的1席分给第i方和不分给第i方时，该方每席位所代表的人数，这两个值越大，对第i方越不公平。而 $Q_i$ 恰是它们的几何平均值的平方，故 $Q_i$ 能反映对第i方酌不公平程度，增加酌1席应分给Q值最大的一方。

# 关于公平分席的另一方案

新问题：学校共1000名学生，235人住在A宿舍，333人住B宿舍，432人住在C宿舍。学生们要组织一个10人的委员会，试用下列办法分配各宿舍的委员数。

d'Hondt方法：

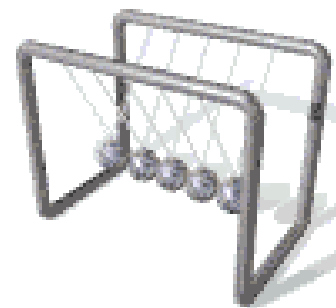
将A、B、C各宿舍的人数用1, 2, 3, ...正整数相除。其商数如下表：

	1	2	3	4	5	...
A	<u>235</u>	<u>117.5</u>	78.3	58.75	...	
B	<u>333</u>	<u>166.5</u>	<u>111</u>	83.25	...	
C	<u>432</u>	<u>216</u>	<u>144</u>	<u>108</u>	<u>86.4</u>	...

将所得商数从大到小取前10个（10为席位总数），在数字下标以横线，表中A、B、C行有横线的数分别为2、3、5，这就是3个宿舍分配的席位。这种方法有道理吗？

# 初 等 模 型

- 一、公平的席位分配
- 二、动物的身长和体重
- 三、划艇比赛
- 四、人员疏散
- 五、红绿灯模型



## 二、动物的身长和体重

问题的提出：

四足动物的躯干的长度(不含头尾)与它的体重有什么关系？

这个问题有一定的实际意义。比如，在生猪收购站或屠宰场工作的人们，往往希望能从生猪的身长估计出它的体重。

动物的生理构造因种类不同而异，如果陷入对生物学复杂生理结构的研究，将很难得到满足上述目的有使用价值的模型。这里我们仅在十分粗略的假设基础上，利用类比方法，借助力学的某些结果，建立动物身长和体重间的比例关系。

# 1、问题的分析与假设

把四足动物的躯干看作圆柱体，长度 $l$ 、直径 $d$ 、断面面积 $s$ 如下图所示。



将这种圆柱体的躯干类比作一根支撑在四肢上的弹性梁，以便利用弹性力学的一些研究成果。



## 2、模型的建立：

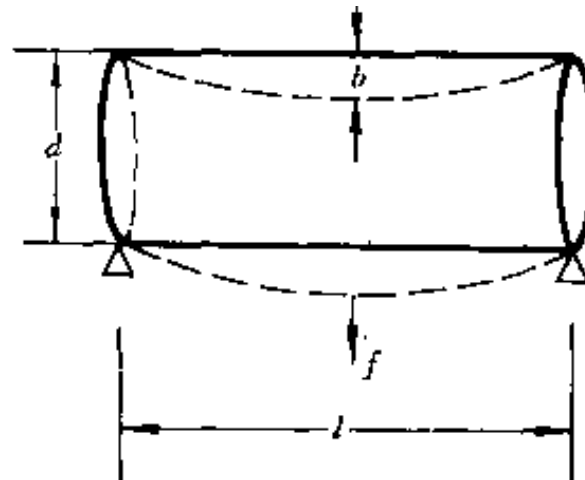
原理：

动物在自身体重 $f$ 作用下躯干的最大下垂度 $b$ ，即梁的最大弯曲，根据对弹性梁的研究，有：

$$b \propto \frac{f l^3}{s d^4} \quad (1)$$

因为  $f \propto s l$ , 所以

$$\frac{b}{l} \propto \frac{f}{d^4} \quad (2)$$



进一步分析 $b/l$ 的意义.....

### 3、生物学角度分析 $b/l$

$b/l$ 生理学意义：

$b/l$ 是动物躯干的相对下垂度。 $b/l$ 太大，四肢将无法支撑； $b/l$ 太小，四肢的材料和尺寸超过了支撑躯干的需要，无疑是一种浪费。

生物学进化角度：

经过长期进化，对每一种动物而言 $b/l$ 已经达到其最合适的数值，即 $b/l$ 应视为与这种动物的尺寸无关的常数。

## 4、结论

(1) 关系式：（前面分析）

$$P \propto d^2$$

(2) 另一些比例关系：

$$f \propto sl, s \propto d^2$$

(3) 最终结论：

$$f \propto P^4$$

即体重与躯干长度的4次方成正比。这样，对于某一种四足动物比如生猪，在根据统计数据确定出上述比例系数以后，就能从躯干长度估计出动物的体重了。

## 5、一个有趣的问题

在小说《格里佛游记》中，小人国的小人们决定给格里佛相当于一个小人食量1728倍的食物。他们是这样推理的，因为格里佛的身高是小人的12倍，他的体积是小人的 $12^3=1728$ 倍。所以他需要的食物量是一个小人食量的1728倍。可这个推理是错误的，正确的答案是什么？

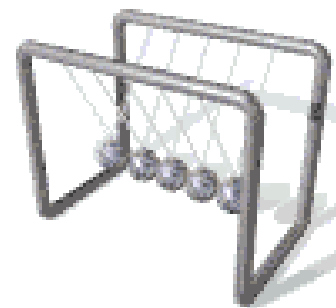
原因：人体进食是为了维持能量的消耗，因此所需的能量与体重有关。而体重 $w$ 与身高 $h$ 有什么关系呢？是否 $w=k h^3$ ？

## 6、人体体重 $w$ 与身高 $h$ 的关系：

( 1 ) 视角：人体躯干为一弹性圆柱体

# 初 等 模 型

- 一、公平的席位分配
- 二、动物的身长和体重
- 三、划艇比赛
- 四、人员疏散
- 五、红绿灯模型



## 三、划艇比赛

问题提出：

赛艇是一种靠桨手划桨前进的小船，分单人艇、双人艇、四人艇、八人艇四种。八人艇还分重量级(桨手平均体重86公斤)和轻量级(平均体重73公斤)。各种艇虽大小不同，但形状相似。T. A. McMahon比较了各种赛艇1964—1970年四次2000米比赛的最好成绩(包括1964年和1968年的两次奥运会和两次世界锦标赛)，发现它们之间有相当一致的差别，他认为比赛成绩与桨手数量之间存在着某种联系，于是建立了一个模型来解释这种关系。

# 1、数据资料

## 各种艇的比赛成绩和规格

艇种	2000 米成绩 $t$ (分钟)					艇长 $l$ (米)	艇宽 $b$ (米)	$l/b$	艇重 $w_0$ (公斤) 桨手数 $n$
	1	2	3	4	平均				
单人	7.16	7.25	7.28	7.17	7.21	7.93	0.293	27.0	16.3
双人	6.87	6.92	6.95	6.77	6.88	9.76	0.356	27.4	13.6
四人	6.33	6.42	6.48	6.13	6.32	11.75	0.574	21.0	18.1
八人(重)	5.87	5.92	5.82	5.73	5.84	18.28	0.610	30.0	14.7

现象：

八人艇重量级组的成绩比轻量级组约好5%



## 2、问题分析

赛艇前进时受到的阻力主要是艇浸没部分与水之间的摩擦力。艇靠桨手的力量克服阻力保持一定的速度前进。桨手越多划艇前进的动力越大。但是艇和桨手总重量的增加会使艇浸没面积加大，于是阻力加大，增加的阻力将抵消一部分增加的动力。建模目的是寻求桨手数量与比赛成绩(航行一定距离所需时间)之间的数量规律。

### 3、如何抽象问题假设？

- (1) 如果假设艇速在整个赛程中保持不变，那么只需构造一个静态模型，使问题简化为建立桨手数量与艇速之间的关系。注意到在实际比赛中桨手在极短的时间内使艇加速到最大速度，然后把这个速度保持到终点，那么上述假设也是合理的。
- (2) 从表中可以看出，桨手数 $n$ 增加时，艇的尺寸 $l$ 、 $b$ 及艇重 $w_0$ 都随之增加，但比值 $l/b$ 和 $w_0/n$ 变化不大。若 $l/b$ 常数，即各种艇的形状一样，则可得到艇浸没面积与排水体积之间的关系。
- (3) 若假定 $w_0/n$ 是常数，则可得到艇和桨手的总重量与桨手数之间的关系。此外还需对桨手体重、划桨功率、阻力与艇速的关系等方面作出简化且合理的假定，才能运用合适的物理定律建立需要的模型。

## 4、问题假设

- ( 1 ) 各种艇的几何形状相同， $1/b$ 为常数；艇重 $w_0$ 与桨手数 $n$ 成正比，这是艇的静态特性
- ( 2 ) 艇速 $v$ 是常数，前进时受的阻力 $f$ 与 $sv^2$ 成正比( $s$ 是艇浸没部分面积)，这是艇的动态特性。
- ( 3 ) 所有桨手(除八人艇轻量级组外)的体重都相同，记作 $w$ ；在比赛中每个桨手的划桨功率 $P$ 保持不变，且 $P$ 与 $w$ 成正比。

## 5、模型的构成

- (1) 有 $n$ 名桨手的艇的总功率 $nP$ 与阻力 $f$ 和速度 $v$ 的乘积成正比, 即:  $np \propto f v$
- (2) 由假设2、3, 有:  $f \propto s v^2, p \propto w$
- (3) 由假设1: 各种艇几何形状相同, 若艇浸没面积 $s$ 与艇的某特征尺寸 $c$ 的平方成正比, 则艇排水体积 $A$ 必与 $c$ 的立方成正比, 于是有:  $s \propto A^{\frac{2}{3}}$
- (4) 根据艇重 $w_0$ 与桨手数 $n$ 成正比, 所以艇和桨手的总重量 $w' = w_0 + nw$ 也与 $n$ 成正比(八人艇轻量级组除外), 即:  $w' \propto n$
- (5) 由阿基米德定律, 艇排水体积 $A$ 与总重量 $w'$ 成正比, 即:  $A \propto w'$

## 6、模型

速度与人数、重量及艇浸没面积的关系：

$$v \propto \left( \frac{nw}{s} \right)^{\frac{1}{3}}$$

比赛成绩与速度的关系：

$$t \propto n^{-\frac{1}{9}}$$



## 7、模型应用于本问题

对于八人艇的重量级组和轻量级组，分别用 $v_h, v_l, w_h, w_l, s_h, s_l$ 和 $t_h, t_l$ 表示其速度、桨手体重、艇浸没面积和比赛时间

关系1：
$$v_h \propto \left( \frac{nw_h}{s_h} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad v_l \propto \left( \frac{nw_l}{s_l} \right)^{\frac{1}{3}}$$

因为 $n$ 相同，所以：
$$\frac{t_h}{t_l} = \frac{v_l}{v_h} = \left( \frac{w_l}{w_h} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{s_h}{s_l} \right)^{\frac{1}{3}}$$

另外，重量级组桨手体重大，下沉力大，会增加艇浸没面积，但重量级组的艇身略大，上浮力大，也会抵消一部分下沉力，减少浸没面积，因而若记 $\lambda = \frac{s_l}{s_h}$ ，则 $\lambda$ 将非常接近于1(略小于1)，所以：

$$\frac{t_h}{t_l} = \frac{0.9468}{\sqrt[3]{\lambda}} \approx 0.95 \quad (w_1 = 73, w_2 = 86, 0.975 < \lambda < 1)$$

## 8、模型验证

( 1 ) 前面分析的模型 :

比赛成绩与速度的关系 :

$$t \propto n^{-\frac{1}{9}}$$

( 2 ) 数据拟合t与n的模型 :

$$t = 7.21n^{-0.111}$$

## 9、堂上讨论题

d3-01 :

你还能想出有理由设法收集并可使赛艇速度模型改进的数据吗？

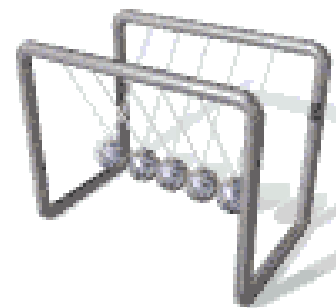
d3-02 :

有人建议：如果负载时轻量级八人艇是重量级八人艇的比例模型（即尺寸比例是 $1:(1.8)^{1/3}$ ），5%的优势便消失。你同意吗？为什么？



# 初 等 模 型

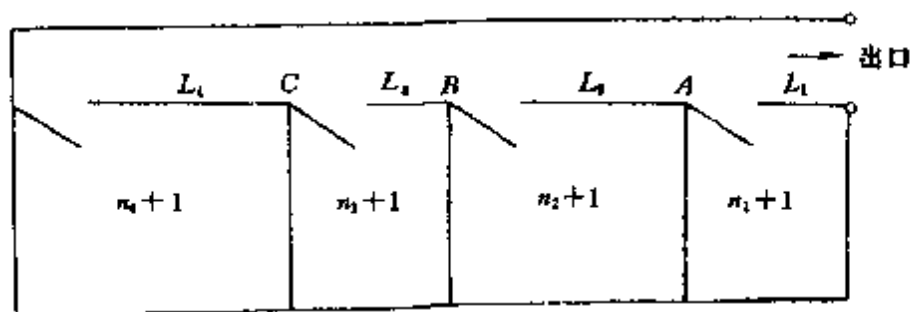
- 一、公平的席位分配
- 二、动物的身长和体重
- 三、划艇比赛
- 四、人员疏散
- 五、红绿灯模型



# 1、问题的提出

在意外事件发生的时候，建筑物内的人员是否能有效疏散撤离是人们普遍关心的问题。尤其是911事件发生后。对于一个特定建筑物，人们关心疏散路线和全部疏散完毕所用时间等。这个问题可以通过反复的实际演习来解决。但多次反复的演习实际上是不可能的，理想的办法是通过理论上的分析来得到。

考虑学校的一座教学楼，其中一楼有一排四间教室(下图)学生们可以沿教室外的走道一直走到尽头的出口，试用数学模型来分析人员疏散所用时间。



## 2、假设

- ( 1 ) 为简单起见，可设疏散时大家秩序井然地排成单行均匀稳定地向外走，则疏散时队列中人与人之间的距离为常数，记为 $d$ 米；
- ( 2 ) 设逃离是匀速行进的，速度为 $v$ 米 / 秒；

### 3、符号体系

$d$  —— 疏散时人与人的距离

$v$  —— 疏散时人员的行进速度

$n_i + 1$  —— 第 $n_i$ 个课室的人数

$L_i$  —— 第 $i$ 个课室门口到第 $i - 1$  个课室门口的距离

$t_0$  —— 疏散时第一个到达教室门口所用的时间

## 4、模型的分析与建立

(1) 考虑靠近出口的第一个教室内人员的疏散。这个教室撤空的时间是：

$$\frac{n_1 d}{\nu} + t_0$$

因而该室最后一人到达出口，全部撤离的时间是：

$$\left(\frac{n_1 d}{\nu} + t_0\right) + \frac{L_1}{\nu}$$

(2) 其他课室类似考虑

## 5、考虑重叠的情况

在单行撤离的假设下还应该考虑到这两支疏散队伍可能出现的重叠的情形，也就是说，当第二个教室的第一个撤离者到达第一个教室的门口A时，第一个教室内的人还没有疏散完毕，这时如果两支队伍同时行进势必造成混乱，因此需要等待第一个教室撤空以后第二个教室的队伍再继续前进。这种情形出现的条件是：

$$\frac{n_1 d}{v} + t_0 > \frac{L_2}{v} + t_0 \text{ 或 } n_1 d > L_2$$

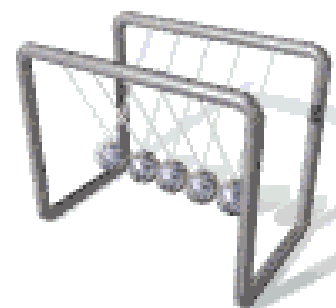
## 6、两个课室全部撤离所用时间的模型

$$T = \begin{cases} \frac{L_1 + L_2 + n_2 d}{v} + t_0 \\ \frac{L_1 + (n_1 + n_2 + 1)d}{v} + t_0 \end{cases}$$

问题：三个课室呢？

# 初 等 模 型

- 一、公平的席位分配
- 二、动物的身长和体重
- 三、划艇比赛
- 四、人员疏散
- 五、红绿灯模型





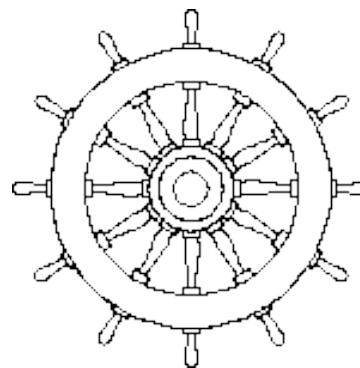
# 1、问题

在一个由红绿灯管理下的十字路口，如果绿灯亮15秒钟，问最多可有多少汽车通过该交叉路口？



## 2、情况分析

这个问题提得笼统含混，因为交通灯对十字路口的控制方式很复杂，特别是车辆左、右转弯的规则，不同的国家都不一样。通过路口的车辆的多少还依赖于路面上汽车的数量以及它们的行驶的速度和方向。因而这里在一定的假设之下把问题简化。



### 3、问题假设

- ( 1 ) 十字路口的车辆穿行秩序良好，不会发生阻塞。
- ( 2 ) 所有车辆都是直行穿过路口，不拐弯行驶，并且仅考虑马路一侧或单行线上的车辆。
- ( 3 ) 所有的车辆长度相同，为 $L$ 米，并且都是从静止状态匀加速启动。
- ( 4 ) 红灯下等待的每相邻两辆车之间的距离相等，为 $D$ 米。
- ( 5 ) 前一辆车启动后，下一辆车启动的延迟时间相等，为 $T$ 秒。

## 4、坐标体系

用 $x$ 轴表示车辆行驶的道路，原点 $O$ 表示交通灯的位置， $x$ 轴的正向是汽车行驶的方向。以绿灯开始亮为起始时刻。



## 5、定理应用

(1) 匀速的运动规律： $\frac{s_1}{\Delta t} = v_1$

其中 $S_1(t)$ 为 $t$ 时刻汽车在 $x$ 轴上的位置。

(2) 城市的最高限速 $v^*$ ，绿灯亮后汽车将起动一直加速到可能的最高速度，并以这个速度向前行驶。

(3) 第 $n$ 辆车在 $t$ 时刻的位置：

$$S_n(t) = S_n(0) + \frac{a(t - t_n)^2}{2}$$

其中 $S_n(0)$ 是启动前汽车位置， $t_n$ 是该车启动时刻  
有：

$$S_n(0) = -(n-1)(L + D) \quad t_n = (n-1)T$$

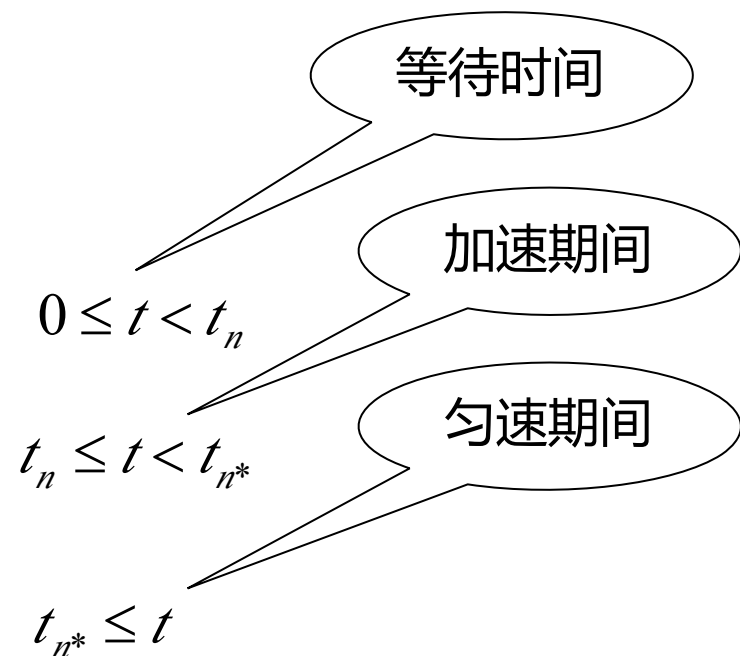
## 6、模型建立

(1) 汽车加速时间：

$$t_{n^*} = \frac{v^*}{a} + t_n$$

(2) 绿灯亮后汽车行驶规律：

$$S_n(t) = \begin{cases} S_n(0) \\ S_n(0) + \frac{a(t-t_n)^2}{2} \\ S_n(0) + \frac{v_*^2}{2a} + v^*(t-t_{n^*}) \end{cases}$$



## 7、问题回答

(1) 模型参数：

取 $L=5$ 米， $D=2$ 米， $T=1$ 秒

城市十字路口最高速度：40千米/小时=11.1米/秒

(2) 一项调查：

大部分司机10秒钟内车子可以由静止加速到大约26米/秒的速度，即加速度为 $2.6\text{米/秒}^2$ ，保守取 $2\text{米/秒}^2$

(3) 绿灯亮至15秒红灯再次亮时每辆汽车的位置：

车 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
最终位置(米)	135.7	117.6	99.5	81.4	63.3	45.2	27.1	9	-9.1

为什么不可能出现 $p_1/n_1 < p_2/(n_2 + 1)$ 的情况？

因为讨论是从对A不公平即 $p_1/n_1 > p_2/n_2$ ，前提出发的。而 $p_2/n_2 > p_2/(n_2 + 1)$ ，因而不会出现这种情况。

Back