# 计算方法及MATLAB实现

郑励烨　编著

主审：　高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：　李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

# 第一节　搜索法与二分法
## （Search Method and Bisection）

对于线性的问题总是相对容易解决的。比如一元线性方程：

$$ax + b = 0, \qquad a \neq 0 \tag{1.1}$$

存在唯一解 $x = -b/a$. 且 $b = 0$ 时为零解， $b \neq 0$ 时为非零解.

二次方程要复杂一些，如首一实系数二次方程

$$x^2 + 2bx + c = 0 \tag{1.2}$$

至多有两个不同的实根．且我们有确切的求根公式：

$$x = -b \pm \sqrt{b^2 - c} \tag{1.3}$$

考察判别式 $\Delta = 4(b^2 - c)$, 当 $\Delta > 0$, 存在两个互异实根；$\Delta = 0$, 存在两个相等实根； $\Delta < 0$, 无实根.

而更一般的非线性方程，情况则已如蜀道之难．如多项式方程

$$x^6 - 2x^5 - 8x^4 + 14x^3 + 11x^2 - 28x + 12 = 0 \tag{1.4}$$

作因式分解后易知有一个单根 3, 一个二重根 $-2$ 和一个 3 重根 1 ;

又如超越指数方程

$$e^{-\frac{x}{10}}\sin 10x = 0 \tag{1.5}$$

存在无穷多解.

再如著名的二项方程

$$x^p - 1 = 0,, \qquad p \quad is \quad primary \tag{1.6}$$

直至年轻的法国代数天才伽罗瓦 (E.Galois) 在 19 世纪方以群论的方法完美解决其求根的问题.

我们现在要讨论的，就是在无法获得形式简单的一般求根公式的情况下，如何不用这些高深抽象的代数理论，而以数值的方法来求近似根．而关注的重点是非线性方程以及方程组．首先对于根的存在性，我们来回顾数学分析中关于连续函数的基本定理．

- 1.1. **零点定理与搜索法**

**定理** 1.1 **零点定理** Zero Theorem 设连续函数 $f(x) \in C^0[a,b]$ 在区间两个端点处的函数值异号，不妨令 $f(a) < 0, f(b) > 0$, 则必存在某区间内点： $c \in [a,b]$ 是 $f(x)$ 的零点即根：

$$f(c) = 0 \tag{1.7}$$

其证明可参阅微积分学著作，比如可用区间套方法.

**定义** 1.1 **搜索法** Search Method 设连续函数 $f(x) \in C^0[a,b]$ 在区间两个端点处的函数值异号，不妨令 $f(a) < 0, f(b) > 0$, 依某确定步长选取函数 $y = f(x)$ 在区间 $I = [a,b]$ 上的 等距节点 剖分：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$$

这里步长恒定

$h_j = x_{j+1} - x_j \equiv h = \dfrac{b-a}{N}, j = 0, 1, 2, \cdots, N-1$. 即节点可表示为

$$x_j = a + jh, j = 0, 1, 2, \cdots, N \tag{1.8}$$

满足 $f(x_0) = f(a) < 0, f(x_N) = f(b) > 0$.

现在自左至右逐个检查各节点处的函数值 $f(x_j) =, <, > 0$?

(1) 若 $f(x_j) = 0$ ，则 $x_j$ 即为根;

(2) 若 $f(x_j) < 0$ ，则继续向右搜索;

(3) 若 $f(x_j) > 0$ ，则继续向左搜索，必有根存在于子区间 $[x_{j-1}, x_j) \subseteq [a, x_j)$ ；此区间的长度为步长 $\dfrac{b-a}{N}$ ，即绝对误差限不超过步长.

这种自左至右 (或自右至左) 逐次检查节点符号以搜寻根的方法称为 *搜索法* Search Method.

直观来看，此种搜索法有如输电线路或输油管道的故障排查，步步为营，逐个节点全面搜索. 显然，虽必然达到求根的目的，但效率不甚令人满意.

**【例 1】 搜索法求非线性多项式的有根区间** 设 3 次多项式函数 $f(x) = x^3 - x - 1$，试求其有根区间.

**【解】** 先对多项式作因式分解得到大致的有根区间：

$$f(x) = x^3 - x - 1 = x(x^2 - 1) - 1 = x(x - 1)(x + 1) - 1$$

尝试计算整数节点的函数值：由于
$f(1) = -1 < 0, f(2) = 5 > 0$, 故由零点定理，在区间 $(1, 2)$ 内有根；不妨暂取步长 $h = \dfrac{2-1}{4} = 0.25$，逐个向右搜索节点： $x_j = 1 + 0.25j, j = 1, 2, 3$ 计算函数值：

$$f(x_1)=f(1.25)=-\frac{19}{64}<0,$$

$$f(x_2)=f(1.5)=\frac{7}{8}>0,$$

故由零点定理，在区间 $(1.25, 1.5)$ 内有一根．加细步长还会得到更精确的根的存在区间．类似地，尝试计算其他整数节点的函数值，重复以上步骤，将得到另外两根的存在区间．

【解毕】

- 1.2. **二分法 —- 搜索法的改进**

依照连续函数零点定理的证明思想，可采用二分法改进搜索法，获得逐次半分的区间套：

(1)**环套条件**：

$[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_k, b_k] \supseteq \cdots;$

(2) **收敛条件**： $\lim\limits_{n\to\infty}(b_k - a_k) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{2^{k+1}} = 0;$

(3)**异号条件**： $f(a_k) < 0, f(b_k) > 0.$

若取真值约为 $k$ 次近似根： $x^* \approx x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, 则第 $k$ 次近似根的绝对误差限 (近似根与中点 $x_k$ 的距离的上界 $|\, x^* - x_k \,|$ 不超过 $\dfrac{b-a}{2^{k+1}}$. 即我们有 误差估计式

$$|\, x^* - x_k \,| \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

这种逐次二分区间 (二分一次后的子区间长度为二分前区间长度的一半) 并判别区间端点符号以搜寻根的方法称为 **二分法** Bisection Method.

直观来看，二分法有如切瓜时不是像搜索法一牙一牙逐个切，而是一刀两半，两刀四瓣，如此剖分的收敛速度显然要迅速得多.

比如，设初始条件 $f(a) < 0, f(b) > 0$.

(1) 取 $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$;

(2) 计算函数值 $f(x_0) = f(\dfrac{a+b}{2})$;

(3) 判别符号：若 $f(x_0) > 0$, 则取 $x_1 = \dfrac{a+x_0}{2} = \dfrac{3a+b}{4}$ ;

若 $f(x_0) < 0$, 则取 $x_1 = \dfrac{x_0+b}{2} = \dfrac{a+3b}{4}$ ;

(4) 重复以上步骤：计算 $f(x_1)$ 并判别符号，由此确定下一个分点.

**【例 2】 二分法求非线性方程的有根区间**　设非线性函数 $f(x)=e^x+10x-2$，试求其有根区间.

**【解】**　先对非线性函数 $f(x)=e^x+10x-2$ 尝试计算整数节点的函数值：由于 $f(0)=-1<0, f(1)=e+8>0$, 故由零点定理，在区间 $(0,1)$ 内有根；又因
$f^{'}(x)=e^x+10>0$, 故 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上严格单调上升，从而存在惟一根.

用二分法计算，执行如下程序：

(1a) 取 $x_0 = \dfrac{a+b}{2} = 0.5$;

(1b) 计算函数值 $f(x_0) = f(0.5) = \sqrt{e} + 3 > 0$;

(1c) 判别符号：因 $f(0.5) > 0$, 故取有根区间为 $(0, 0.5)$;

(2a) 再取 $x_1 = \dfrac{a + x_0}{2} = \dfrac{0 + 0.5}{2} = 0.25$ ；

(2b) 计算函数值 $f(x_1) = f(0.25) = \sqrt[4]{e} + 0.5 > 0$;

(2c) 判别符号：因 $f(0.25) > 0$, 故取有根区间为 $(0, 0.25)$;

重复以上步骤：计算 $f(x_k)$ 并判别符号，由此确定下一个分点．比如，取至 $k=9$ 时，算得有根区间为 $(\frac{23}{256},\frac{47}{512})$, 近似值为中点 $x_1=\frac{\frac{23}{256}+\frac{47}{512}}{2}=\frac{93}{1024}\approx 0.0908203125$, 其精度误差上界约为

$$|x^*-x_9|\leq \frac{b-a}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^{10}}\approx 0.0009765625<0.001=10^{-3}$$

【解毕】

【例 3】 **二分法求非线性方程的正根** 设非线性函数 $f(x)=x^2-x-1$，试求其正根，使误差小于 0.05.

【解】 因 $f(1)=-1<0, f(2)=1>0$, 故由零点定理，在区间 $(1,2)$ 内有根；由二分法计算，作出二分次数 - 区间 - 近似值对应表如下：

| $k$ | $[a_k,b_k]$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $+/-$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $[1,2]$ | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-$ | |
| 1 | $[\frac{3}{2},2]$ | $\frac{7}{4}$ | $\frac{5}{16}$ | $+$ | |
| 2 | $[\frac{3}{2},\frac{7}{4}]$ | $\frac{13}{8}$ | $-\frac{1}{64}$ | $+$ | |
| 3 | $[\frac{3}{2},\frac{13}{8}]$ | $\frac{25}{16}$ | $-\frac{31}{256}$ | $-$ | |
| 4 | $[\frac{25}{16},\frac{13}{8}]$ | $\frac{51}{32}$ | | | |

因 $k=4$ 时，算得有根区间为 $[\frac{25}{16}, \frac{13}{8}]$, 近似值为中点 $x_4 = \frac{51}{32} = 1.59375$, 其误差上界约为

$$| x^* - x_4 | \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^5} = 0.03125 < 0.05$$

故可取 $x^* \approx x_4 = \frac{51}{32} = 1.59375$. 【解毕】

- 1.3. **数值实验**

**【实验 1】 二分法求解非线性连续函数零点**

实验目的：二分法求解非线性连续函数零点， fzero 命令的一般调用格式为

[x,fv,ef,out]=fzero(@f,x0,opt,P1,P2,)

$x$ 为变号点的近似值， fv 对应函数值， ef 运行终止的理由， out 包含相关信息。 x0 迭代初值， opt 控制参数，P1,P2 为参数.

实验函数：非线性函数 $x^3 - 2 * x - 5$

相关索引： [1]P123

源程序：

$$[x, fv, ef, out] = fzero(inline('x^3 - 2 * x - 5'), 0)$$

运行结果：

x = 2.0946

fv = -8.8818e-016

ef = 1 正数表示找到异号点， -1 表示没找到异号点

out = iterations: 39 迭代 39 次

funcCount: 39 函数调用 39 次

algorithm: 'bisection, interpolation' 二分插值