数学实验

Experiments in Mathematics

实验8　约束优化

Dept. of Mathematical Sciences

Tsinghua University

Beijing 100084, China

约束优化问题一般形式

$$\min_{x\in\Re^n} \quad f(x)$$
$$s.t. \quad h_i(x)=0,\ i=1,\ldots,m$$
$$g_j(x)\le 0,\ j=1,\ldots,l$$

当最优解在可行域边界上取得时，不能用无约束优化方法求解

约束优化基本内容

1. 问题与模型　**2.** 基本原理

3. 算法和**MATLAB**实现　**4.** 补充知识

约 束 优 化 实 例 1　生产计划

某厂生产甲乙两种口味的饮料，条件如右

	甲(百箱)	乙(百箱)	现有
原料(kg)	6	5	60
工人(名)	10	20	150
获利(万元)	10	9	

因条件所限，甲饮料产量不能超过8百箱

问如何安排生产计划，即两种饮料各生产多少使获利最大。

$$\max \quad z=10x_1+9x_2$$
$$s.t.\quad 6x_1+5x_2\le 60$$
$$10x_1+20x_2\le 150$$
$$x_1\le 8$$
$$x_1,x_2\ge 0$$

决策变量：甲乙两种饮料的产量x_1, x_2（以百箱为单位）。

约束优化实例2　聘用方案

某服务部门一周中每天需要不同数目的雇员：周一到周四每天至少 50 人，周五和周日每天至少 80 人，周六至少 90 人。

现规定应聘者需连续工作 5 天，试确定聘用方案，即周一到周日每天聘用多少人，使在满足需要的条件下聘用总人数最少。

决策变量：周一至周日每天(新)聘用人数 $x_1, x_2,\ldots x_7$

目标函数：7天(新)聘用人数之和

约束条件：周一至周日每天需要人数

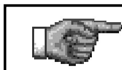
聘用方案

设系统已进入稳态（不是开始的几周）

连续工作5天 周一工作的应是(上)周四至周一聘用的

$$x_4+x_5+x_6+x_7+x_1\ge 50$$

$$\min \quad z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$$
$$s.t.\quad x_1+x_4+x_5+x_6+x_7\ge 50$$
$$x_1+x_2+x_5+x_6+x_7\ge 50$$
$$x_1+x_2+x_3+x_6+x_7\ge 50$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_7\ge 50$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\ge 80$$
$$x_2+x_3+x_4+x_5+x_6\ge 90$$
$$x_3+x_4+x_5+x_6+x_7\ge 80$$



约束优化问题的分类

- 线性规划(**LP**)　目标和约束均为线性函数
- 非线性规划(**NLP**) 目标或约束中存在非线性函数
- 二次规划(**QP**)　目标为二次函数、约束为线性
- 整数规划(**IP**)　决策变量为整数

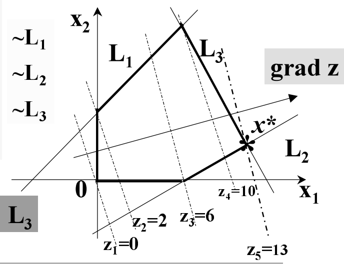
求解线性规划的基本原理

基本模型

$$\max(or\ \min)\ z=c^Tx,\ x\in R^n$$
$$s.t.\quad Ax\le b,\ x\ge 0$$
$$c\in R^n,\ A\in R^{m\times n},\ b\in R^m$$

线性规划(LP)的图解法

$$\max\ z = 3x_1 + x_2$$
$$s.t.\ -x_1 + x_2 \le 2 \quad \sim L_1$$
$$x_1 - 2x_2 \le 2 \quad \sim L_2$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 14 \quad \sim L_3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



起作用约束：L_2、L_3

最优解（4，1），最优值z_{max}=13

LP的约束和目标函数均为线性函数

⇩

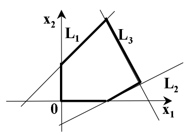
	2维	n维
可行域	线段组成的凸多边形	超平面组成的凸多面体
目标函数	等值线为直线	等值线是超平面
最优解	凸多边形的某个顶点	凸多面体的某个顶点

求解LP的基本思想

从可行域的某一顶点开始，只需在有限多个顶点中一个一个找下去，一定能得到最优解。

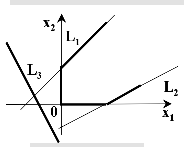
算法：怎样从一点转到下一点，尽快找到最优解。

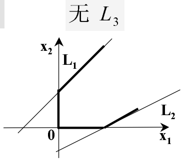
求解LP的特殊情形

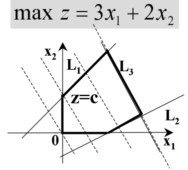


$$\max\ z = 3x_1 + x_2$$
$$s.t.\ -x_1 + x_2 \le 2 \quad \sim L_1$$
$$x_1 - 2x_2 \le 2 \quad \sim L_2$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 14 \quad \sim L_3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$3x_1 + 2x_2 \le -1 \sim L_3$ | 无 L_3 | $\max\ z = 3x_1 + 2x_2$







无可行解 | 无最优解 | 最优解不唯一

线性规划的标准形和基本性质

$$\max\ z = 3x_1 + x_2$$
$$s.t.\ -x_1 + x_2 \le 2$$
$$x_1 - 2x_2 \le 2$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 14$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

⇨

$$\min z = -3x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5$$
$$s.t.\quad -x_1 + x_2 + x_3 = 2,\quad x_3 \ge 0$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2,\quad x_4 \ge 0$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 14,\quad x_5 \ge 0$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

加入松弛变量将不等式变为等式

标准形

$$\min\ z = c^T x$$
$$s.t.\ Ax = b,\ x \ge 0$$
$$A \in R^{m\times n},\ m \le n$$

对标准形求解

$$\min\ z = c^T x$$
$$s.t.\ Ax = b,\ x \ge 0$$
$$A \in R^{m\times n},\ m \le n$$

$$\min z = -3x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5$$
$$s.t.\quad -x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 14,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

先求可行解

满足 $Ax = b,\ x \ge 0$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 14,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

再在有限个可行解中寻找最优解

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 14$$

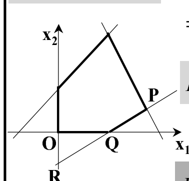
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5]$$

$A \Rightarrow [B, N]$, B可逆

$x^T \Rightarrow [x_B^T, x_N^T]$

$Ax = Bx_B + Nx_N = b$

$x_N = 0 \Rightarrow x_B = B^{-1}b$



$B = [p_3\ p_4\ p_5] \Rightarrow x = (0,0,2,2,14)^T$ O点

$B = [p_1\ p_3\ p_5] \Rightarrow x = (2,0,4,0,8)^T$ Q点

$B = [p_2\ p_3\ p_5] \Rightarrow x = (0,-1,3,0,16)^T$ R点

$B = [p_1\ p_2\ p_3] \Rightarrow x = (4,1,5,0,0)^T$ P点

可行解x：$Ax=b,\ x \ge 0\ (x_B \ge 0,\ x_N = 0)$

LP基本性质

可行域存在时，必是凸多面体；
可行解对应于可行域的顶点；
最优解存在时，必在可行域的顶点取得。

最优解只需在有限个可行解中寻找

LP的通常解法是单纯形法

单纯形法的基本思路是

从一个顶点转换到另一个顶点（即构成x_B和x_N的向量p_i间的转换），使目标函数下降最多。

MATLAB求解LP

$\min z = c^T x, \quad s.t. \ Ax \le b$

```
x=lp(c,A,b)
x=lp(c,A,b,v1)
x=lp(c,A,b,v1,v2)
x=lp(c,A,b,v1,v2,x0)
x=lp(c,A,b,v1,v2,x0,ne)
x=lp(c,A,b,v1,v2,x0,ne,dis)
[x,lag]=lp(c,A,b,…)
[x,lag,how]=lp(c,A,b,…)
```

c，b~行列向量均可
v1~x的下界
v2~x的上界
x0~初始解(缺省时为0)
ne~等式约束个数，等式约束置于前面
dis~警告信息
how~错误信息

- **v1或v2的维数k小于x的维数n时，v1或v2仅表示x前k个分量的下界或上界）**
- lag~Lagrange乘子，维数等于约束个数，非零分量对应于起作用约束

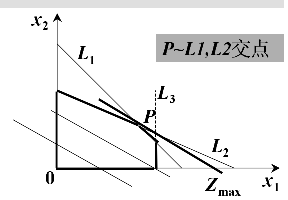
Examp081;
Examp082

注：lp将被linprog取代（用法有变化）

$$\max \ z = 10x_1 + 9x_2$$
$$s.t.\ 6x_1 + 5x_2 \le 60$$
$$10x_1 + 20x_2 \le 150$$
$$x_1 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

```
c=[-10 -9];
A=[6 5;10 20;1 0];
b=[60 150 8];
v1=[0 0];
[x,lag]=lp(c,A,b,v1)
z=-c*x
```

约束优化实例1 生产计划




```
x=(6.4286,4.2857)
lag=(1.5714,0.0571,0,0,0)
z=102.8571
```

甲乙两种饮料各生产6.4286和4.2857（百箱）获利102.8571（万元），原料和工人充分利用。

$$\max \ z = 10x_1 + 9x_2$$
$$s.t.\ 6x_1 + 5x_2 \le 60$$
$$10x_1 + 20x_2 \le 150$$
$$x_1 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

```
x=(6.4286,4.2857)
lag=(1.5714,0.0571,0,0,0)
z=102.8571
```

讨论以下问题

1）若投资0.8万元可增加原料1公斤，问应否作投资？

$6x_1 + 5x_2 \le 60 \Rightarrow 61$ ⇨ z1=104.4286

获利增值z1-z=1.5715>0.8(万元) ⇨ 应该投资

lag(1)=1.5714

这是偶然的吗？

L—乘子的重要含义

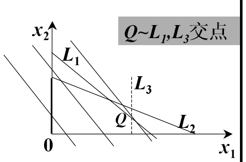
lag(2)=0.0571 表示什么？

shili081

$$\max \ z = 10x_1 + 9x_2$$
$$s.t.\ 6x_1 + 5x_2 \le 60$$
$$10x_1 + 20x_2 \le 150$$
$$x_1 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

```
x=(6.4286,4.2857)
lag=(1.5714,0.0571,0,0,0)
z=102.8571
```

2）若每百箱甲饮料获利增加1万元, 问应否改变计划?



$$z = 10x_1 + 9x_2 \Rightarrow 11x_1 + 9x_2$$

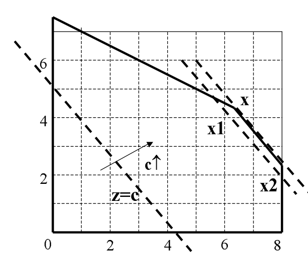
x=(8.0000,2.4000)

最优解改变，计划应改变

3）如果以百箱为最小生产单位, 怎么办?

$$\max \ z = 10x_1 + 9x_2$$
$$s.t.\ 6x_1 + 5x_2 \le 60$$
$$10x_1 + 20x_2 \le 150$$
$$x_1 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

x_1, x_2为整数



x⇒x1=(6,4),z1=96

x2=(8,2),z2=98

x=(6.4286,4.2857)

整数规划

线性规划补充知识——影子价格和对偶问题

实例1 生产计划

$$\max \quad z = 10x_1 + 9x_2$$
$$s.t. \quad 6x_1 + 5x_2 \le 60$$
$$10x_1 + 20x_2 \le 150$$
$$x_1 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

```
x=(6.4286,4.2857)
lag=(1.5714,0.0571,0,0,0)
z=102.8571
```

若投资0.8万元可增加原料1公斤，问应否作投资？

```
lag(1)=1.5714
```

约束条件1(资源)右端改变1个单位时目标函数(利润)的变化量，它度量了该资源的价值　影子价格

原料的影子价格为1.5714（万元），工人的影子价格为0.0571（万元），而产品产量的限制对利润没有影响，影子价格为零。

线性规划补充知识——影子价格和对偶问题

原问题

	甲	乙	现有
原料	6	5	60
工人	10	20	150
获利	10	9	

$$\max \quad z = 10x_1 + 9x_2$$
$$s.t. \quad 6x_1 + 5x_2 \le 60$$
$$10x_1 + 20x_2 \le 150$$
$$x_1 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

问两种饮料各生产多少使获利最大

```
x=(6.4286,4.2857)
lag=(1.5714,0.0571,0,0,0)
z=102.8571
```

对偶问题

确定3种资源(原料、工人、甲产量限制)的影子价格，以这个价格"获取"它们，费用最小，且产品利润不低于给定值。

$$\min \quad w = 60y_1 + 150y_2 + 8y_3$$
$$s.t. \quad 6y_1 + 10y_2 + y_3 \ge 10$$
$$5y_1 + 20y_2 \ge 9$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

用y_1 y_2 y_3表示这3种资源的影子价格，建立模型

```
y=(1.5714,0.0571,0)
lag=(6.4286,4.2857,0,0,1.5714)
w=102.8571
```


原问题LP

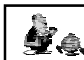
$$\min_x z = cx, \quad c = (c_1, \cdots c_n), \quad x = (x_1 \cdots x_n)^T$$
$$s.t. \; Ax \ge b, \quad A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad b = (b_1, \cdots b_n)^T$$
$$x \ge 0$$

对偶问题LD

$$\max \; w = yb, \quad y = (y_1, y_2, \cdots y_m)$$
$$s.t. \; yA \le c$$
$$y \ge 0$$

对偶现象

- LD的最优解是LP的影子价格(L—乘子)
- LP的最优解是LD的L—乘子
- 二者的最优值相等



约束优化实例2 聘用方案

$$\min \quad z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$
$$s.t. \quad x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \ge 50$$
$$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \ge 50$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \ge 50$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \ge 50$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \ge 80$$
$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \ge 90$$
$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \ge 80$$

约束矩阵

$$A = -\begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&1&1 \\ 1&1&0&0&1&1&1 \\ 1&1&1&0&0&1&1 \\ 1&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&1&1&1&0&0 \\ 0&1&1&1&1&1&0 \\ 0&0&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

向量**c=**（1 1 1 1 1 1 1）　b=-(50 50 50 50 80 90 80)

计算结果　x =（0 10 30 10 30 10 0） z = 90

周二、四、六各聘用10人，周三、五各聘用30人，能满足需求，共聘90人

问题一：如果周日的需求量由80增至90人，聘用方案如何改变

只需改变周日的约束条件，计算结果为

x =（0 3.3333 33.3333 10 33.3333 10 3.3333）
z = 93.3333

如将x的小数进位，聘用方案为（0，4，34，10，34，10，4），共96人。

实际上可以发现只用94人的方案：
（0，3，34，10，34，10，3）；
（0，4，33，10，33，10，4）。

思考：对于求整数解，你有什么考虑？

问题二：可以聘用两个半时雇员(每天4小时，不需连续工作)代替一个全时雇员(每天8小时)，并规定：半时雇员的工作量不超过总量的1/4；全时和半时雇员每小时酬金为5元和3元。确定聘用方案使所付酬金总额最小。

决策变量　周一至日聘用全时和半时雇员数　$x = (x_1, x_2, \cdots x_7, y_1, y_2, \cdots y_7)^T$

约束条件

$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_1 \ge 50$ ⇨ $x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_1 + y_1/2 \ge 50$

$$(y_1 + y_2 + \cdots + y_7) \times 4 \le (50 \times 4 + 80 \times 2 + 90) \times 8$$

目标函数 $\min z = 5 \times 8 \times 5 \times (x_1 + \cdots + x_7) + 3 \times 4 \times (y_1 + \cdots + y_7)$

聘用方案 问题二 计算结果

x=(15 17.5 0 17.5 0 17.5 0 0 0 0 0 60 75 90)

总金额 z = 16200（元）

作少许试探即可得到整数解

x= (15 18 0 17 0 18 0 0 0 0 0 60 75 90 ）

总金额 z = 16300（元）

问题 这是问题二的最优解吗？全时雇员能再减少吗？半时雇员呢？请试试看。

实 例 3 供应与选址

某公司有6个建筑工地，位置坐标为(a_i, b_i) (单位：公里), 水泥日用量d_i (单位：吨）

i	1	2	3	4	5	6
a	1.25	8.75	0.5	5.75	3	7.25
b	1.25	0.75	4.75	5	6.5	7.75
d	3	5	4	7	6	11

1)现有 2 料场，位于 A (5, 1), B (2, 7), 记(x_j,y_j),j=1,2, 日储量 e_j 各有 20 吨。

假设：料场和工地之间有直线道路

目标：制定每天的供应计划，即从 A, B 两料场分别向各工地运送多少吨水泥，使总的吨公里数最小。

决策变量：c_{ij} (料场j到工地i的运量）~12维

线性规划模型

$$\min \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} c_{ij}[(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2]^{1/2}$$

$$s.t.\quad \sum_{j=1}^{2} c_{ij}=d_i,\quad i=1,\ldots,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} c_{ij}\le e_j,\quad j=1,2$$

用例中数据计算，最优解为

i	1	2	3	4	5	6
c_{i1}（料场 A）	3	5	0	7	0	1
c_{i2}（料场 B）	0	0	4	0	6	10

总吨公里数为136.2

2）改建两个新料场，需要确定新料场位置(x_j,y_j)和运量c_{ij}，在其它条件不变下使总吨公里数最小。

$$\min \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} c_{ij}[(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2]^{1/2}$$

$$s.t.\quad \sum_{j=1}^{2} c_{ij}=d_i,\quad i=1,\ldots,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} c_{ij}\le e_j,\quad j=1,2$$

决策变量：c_{ij}, (x_j,y_j)~16维

非线性规划模型

非线性规划(NLP)的基本原理(只有不等式约束)

$$\min_{x\in\Re^n} \quad z=f(x)$$
$$s.t.\quad g_j(x)\le 0,\ j=1,\ldots,l \qquad \textbf{(G)}$$

设x为可行解，位于约束边界

$g_j(x)=0,\quad j\in J_1$ **J₁**~起作用约束(j=1)

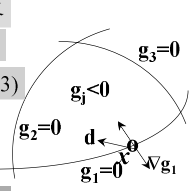
$g_j(x)<0,\quad j\in J_2$ **J₂**~不起作用约束(j=2,3)

可行方向**d** $x+\lambda d\in G\quad (0<\lambda<\lambda_0)$

$$g_j(x+\lambda d)=g_j(x)+\lambda\nabla g_j(x)^T d+O(\lambda^2)$$

$\nabla g_j(x)^T d<0\quad (j\in J_1)\quad (1)$

下降方向**d** $f(x+\lambda d)<f(x)\quad (0<\lambda<\lambda_0)$ $\nabla f(x)^T d<0\quad (2)$



若**x**沿**d**方向既可行又下降，则**x**不是最优解

$\nabla g_j(x)^T d<0\quad (j\in J_1)\quad (1)$ $\nabla f(x)^T d<0\quad (2)$

x为最优解 ⇨ 不存在满足**(1),(2)**的**d**

$$\min_{x\in\Re^n} \quad z=f(x)$$
$$s.t.\quad g_j(x)\le 0,\ j=1,\ldots,l$$

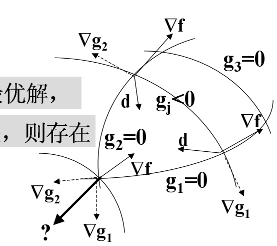
最优解的必要条件 若**x**为最优解，

且 $\nabla g_j(x)\ (j\in J_1)$ 线性无关，则存在

$\lambda_1,\cdots\lambda_l\ge 0$ 使

$$\nabla f(x)+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j\nabla g_j(x)=0$$

$$\lambda_j g_j(x)=0,\quad j=1,2,\cdots l$$



最优解的必要条件

$$\min_{x\in\Re^n} \quad z=f(x)$$
$$s.t. \quad g_j(x)\le 0,\ j=1,\dots,l$$

$$\nabla f(x)+\sum_{j=1}^{l}\lambda_i\nabla g_j(x)=0$$

Kuhn-Tucker条件（**K-T**条件）

$$\lambda_j g_j(x)=0,\quad j=1,2,\cdots l$$

互补性条件

$$\min_{x\in\Re^n} \quad f(x)$$
$$s.t. \quad h_i(x)=0,\ i=1,\dots,m$$
$$g_j(x)\le 0,\ j=1,\dots,l$$

$\nabla h_i,\nabla g_j(j\in J_1)$线性无关，则存在$\mu_i$和$\lambda_j\ge 0$,

$$\nabla f(x)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i\nabla h_i(x)+\sum_{j=1}^{l}\lambda_i\nabla g_j(x)=0 \qquad \lambda_j g_j(x)=0,\ j=1,\cdots l$$

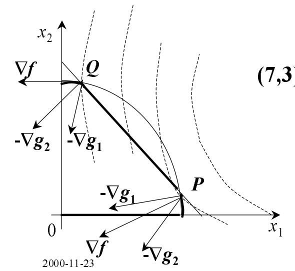
2000-11-23 31

K-T条件的几何解释

例（**P217**）

$$\nabla f(x)+\sum_{j=1}^{l}\lambda_i\nabla g_j(x)=0$$
$$\lambda_j g_j(x)=0,\quad j=1,2,\cdots l$$

$$\min f(x)=(x_1-7)^2+(x_2-3)^2$$
$$s.t.\quad g_1(x)=x_1^2+x_2^2-10\le 0$$
$$g_2(x)=x_1+x_2-4\le 0$$
$$g_3(x)=x_2\ge 0$$



(7,3)

最优解在**P(3,1)**取得

$$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=0,$$
$$\nabla f(P)+\nabla g_1(P)+2\nabla g_2(P)=0$$

P(3,1)是**K-T**点

其它点(如**Q**)均不是

2000-11-23 32

二次规划(QP)及有效集方法

$$\min\ f(x)=\frac{1}{2}x^T Hx+cx$$
$$s.t.\quad Ax\le b$$

当H为对称阵，称二次规划
当H正定时，称凸二次规划

凸二次规划性质：
最优点⇔K—T点；
局部最优解⇔全局最优解；

等式约束 $Ax=b$下的Lagrange乘子法

L函数 $L(x,\lambda)=\frac{1}{2}x^T Hx+cx+\lambda^T(Ax-b),\quad \lambda\in R^m$

最优解方程
$$Hx+c^T+A^T\lambda=0$$
$$Ax-b=0$$

2000-11-23 33

解二次规划的有效集方法

基本思想：对于不等式约束的二次规划，在某可行点处将不起作用约束去掉，起作用约束视为等式约束，通过求解等式约束的二次规划来改进可行点。

$$\min f(x)=\frac{1}{2}x^T Hx+cx \qquad s.t.\quad Ax\le b \qquad \textbf{(1)}$$

$$\min f(x)=\frac{1}{2}x^T Hx+cx \qquad s.t.\quad a_j x=b_j,\quad j\in J_1 \qquad (2)$$

(a_j是A的第j列)

基本原理

- 若x为(1)的最优解，则它也是(2)的最优解；
- 若x为(1)的可行解，又是(2)的K—T点，且L—乘子非负，则它必是(1)的最优解。

2000-11-23 34

用MATLAB求解QP

$$\min\ f(x)=\frac{1}{2}x^T Hx+cx$$
$$s.t.\quad Ax\le b$$

```
x=qp(H,c,A,b)
x=qp(H,c,A,b,v1)
x=qp(H,c,A,b,v1,v2)
x=qp(H,c,A,b,v1,v2,x0)
x=qp(H,c,A,b,v1,v2,x0,ne)
x=qp(H,c,A,b,v1,v2,x0,ne,dis)
x=qp(H,c,A,b,v1,v2,x0,ne,dis,1)%H~>0
[x,lag]=qp(H,c,A,b,…)
[x,lag,how]=qp(H,c,A,b,…)
```

用法与求解LP相同

2000-11-23 注：qp将被quadprog取代（用法有变化） 35

非线性规划(NLP)的解法

可行方向法、罚函数法、梯度投影法...

逐步二次规划法(**Sequential Quadratic Programming**)

SQP的基本原理

$$\min_{x\in\Re^n} \quad f(x)$$
$$s.t.\quad h_i(x)=0,\ i=1,\dots,m$$
$$g_j(x)\le 0,\ j=1,\dots,l$$

构造LNP的拉格朗日函数

$$L(x,\mu,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i h_i(x)+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j g_j(x)$$

用二次函数近似 $L(x,\mu,\lambda)$, NLP化为QP，
再解一系列QP子问题。

2000-11-23 36

用MATLAB求解带约束的NLP

注：constr将被fmincon取代（用法有变化）

```
x=constr('fun',x0)
x=constr('fun',x0,opt)
x=constr('fun',x0,opt,v1,v2,'grad')
x=constr('fun',x0,opt,v1,v2,'grad',p1,p2,…)
[x,opt]=constr('fun',x0,…)
```

注意：fun.m文件中同时给出目标函数f和约束g，形式为[f,g]=fun(x)；grad.m文件中（用分析方法）同时给出目标函数f和约束g的梯度，形式为[df,dg]=grad(x)。

例：P222 Rosenbrock (求min)

$$f(x_1,x_2)=100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$$

$$\text{s.t.}\quad x_1^2+x_2^2\le 1.5,\quad x_1+x_2\ge 0$$

Examp084

实例3供应与选址

$$\min \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} c_{ij}[(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2]^{1/2}$$

$$s.t.\quad \sum_{j=1}^{2} c_{ij}=d_i,\quad i=1,\ldots,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} c_{ij}\le e_j,\quad j=1,2$$

改建两个新料场

决策变量：c_{ij}，(x_j,y_j)~16维

初始点的选择

局部最优解问题

用现料场总吨公里数为136.2

结果：总吨公里数为**85.3**，比使用原料场减少了**50.9**。

计算方法的改善

$$\min \sum_{i=1}^{6}\{c_i[(x_1-a_i)^2+(y_1-b_i)^2]^{1/2}$$

$$+(d_i-c_i)[(x_2-a_i)^2+(y_2-b_i)^2]^{1/2}\}$$

$$s.t.\quad c_i\le d_i,\quad i=1,\cdots 6$$

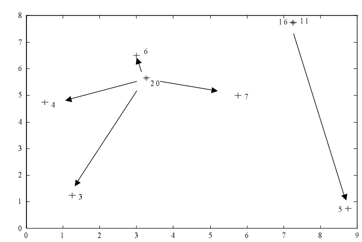
$$\sum_{i=1}^{6} c_i\le e_1,\quad \sum_{i=1}^{6}(d_i-c_i)\le e_2$$

决策变量：c_i，(x_j,y_j)~10维

局部最优解问题有所改进

liaoch1, liaoch11

i	1	2	3	4	5	6	新料场位置（x_j,y_j）
c_{i1}	3	0	4	7	6	0	（3.2552 5.6528）
c_{i2}	0	5	0	0	0	11	（7.2497 7.7499）



+为工地, 数字为用量; *为新料场, 数字为供应量。

布置实验内容

实验目的

1）掌握用MATLAB优化工具包解线性规划和非线性规划的方法；

2）练习建立实际问题的线性规划和非线性规划模型。

实验内容

《数学实验》第230页 3),10）,11)（每种货币每天只能进行一次兑换）。

专用优化软件：**LINDO, LINGO**

可计算**LP, NLP, IP**（输出结果较丰富）

优化知识扩展：整数规划

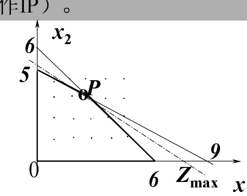
数学规划中要求决策变量为整数解的，称为整数规划（Integer Programming, 记作IP）。

$$\max\quad z=5x_1+8x_2$$

$$s.t.\quad x_1+x_2\le 6$$

$$5x_1+9x_2\le 45$$

$$x_1,x_2\ge 0 \text{ 且为整数}$$



思考：求解**IP**能否先去掉整数限制，找到规划的解后，将它舍入成整数或在附近搜索呢？

去掉整数限制后，可行域为点（0,0), (6,0), (0,5), P (2.25,3.75) 围成的4边形

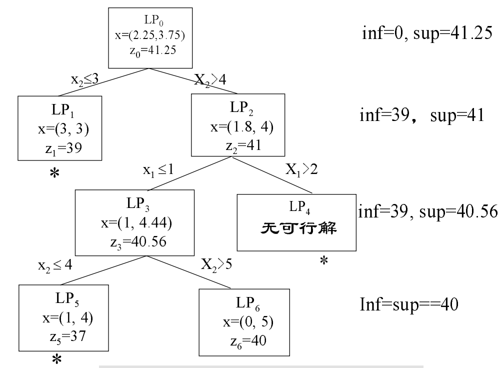
结果

LP 最优解 P	P 的舍入解	最靠近 P 的可行解	IP 最优解
（2.25，3.75）	（2，4）	（2，3）	（0，5）
z=41.25	不可行	z=34	z=40

从LP最优解经过简单的“移动”不一定能得到IP最优解。

一般地说，求解整数规划没有统一的有效方法，不同方法的效果与问题的性质有很大关系

分枝定界法：把可行域划分为一系列子域，子域某些边界的分量为整数。对于最大值问题，在子域上解LP，其最优值是IP的上界，IP任意可行点的函数值是IP的下界。在子域分解的过程中，上界非增，下界非减，经有限次分解可得到IP最优解。“分而治之”下面，通过上面例子的求解过程说明该方法。



前面例子的分枝定界计算示意图

约 束 优 化 实 例 2：投资策略

某部门现有资金 10 万元，五年内有以下投资项目供选择：

项目 A，从第一年到第四年每年初投资，次年末收回本金且获利 15%；

项目 B，第三年初投资，第五年末收回本金且获利 25%，最大投资额为 4 万元；

项目 C，第二年初投资，第五年末收回本金且获利 40%，最大投资额为 3 万元；

项目 D，每年初投资，年末收回本金且获利 6%。

问如何确定投资策略使第五年末本息总额最大。

决策变量是每年初各个项目的投资额，约束条件是每年初拥有的资金。用 x_{ij} 表示第 i 年初（i＝1，2，… 5）项目 j（j＝ 1，2，3，4 分别代表 A，B，C，D）的投资额

建模要点

年初投资项目**D**，年底可收回本息，所以在年初可将资金全部用于投资

第 1 年初：10 万元全部投向 A, D, 有

$$x_{11} + x_{14} = 10$$

第 2 年初：拥有的资金为项目 D 第 1 年投资 x_{14} 收回的本息，全部投向 A, C, D, 有

$$x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1.06 x_{14}$$

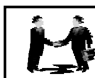
第 3 年初：拥有的资金为项目 A 第 1 年投资 x_{11} 和 D 第 2 年投资 x_{24} 收回的本息，全部投向 A, B, D, 有

$$x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1.15 x_{11} + 1.06 x_{24}$$

投资策略数学模型

$$\max \quad 1.15x_{41} + 1.4x_{23} + 1.25x_{32} + 1.06x_{54}$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & x_{11} + x_{14} = 10 \\ & x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1.06x_{14} \\ & x_{31} + x_{32} + x_{34} = 1.15x_{11} + 1.06x_{24} \\ & x_{41} + x_{44} = 1.15x_{21} + 1.06x_{34} \\ & x_{54} = 1.15x_{31} + 1.06x_{44} \\ & x_{23} \le 3, x_{32} \le 4, x_{ij} \ge 0 \end{aligned}$$



约束优化实例之二：投资策略

将投资策略实例中建立的模型写成用MATLAB求解的标准形式，其中

$$\boldsymbol{x} = (x_{11}, x_{14}, x_{21}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{34}, x_{41}, x_{44}, x_{54})^T$$

$$\boldsymbol{c} = (0, 0, 0, 1.4, 0, 0, 1.25, 0, 1.15, 0, 1.06)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&r&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ s&0&0&0&r&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&s&0&0&0&0&r&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&s&0&0&0&r&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad r = -1.06, \quad s = -1.15, \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

由于前**5**个约束为等式约束、变量非负，所以

命令行： `x=lp(c,a,b,zeros(11,1),[],[],5)`

计算结果：x =（3.8268 6.1732 3.5436 3.0000 0 0.4008 4.0000 0 4.0752 0 0.4609）

z = 14.3750

第1年项目A,D分别投资3.8268 和 6.1732（万元）；
第2年项目A,C分别投资3.5436和 3（万元）；
第3年项目A,B分别投资0.4008和 4（万元）；
第4年项目A投资4.0752(万元);
第5年项目D投资0.4609（万元）。
5年后总资金14.375（万元），即盈利43.75%。

基本步骤

设(1)的可行点为x^*，有效集记作J^*，用L—乘子法求解:

$$\min f(x^*+d)=\frac{1}{2}(x^*+d)^T H(x^*+d)+c(x^*+d)$$
$$s.t.\quad a_j d=0,\quad j\in J^*$$

得d^*, λ^*

- 若$d^*=0$, 则x^*为(2)最优解; 当λ^*非负时x^*是(1)最优解

有效集修正

若$d^*=0$, 且$(\lambda^*)_q<0$, $q\in J^*$, 则x^*不是最优解, 有效集修正为$J^*\backslash\{q\}$ 。

若$d^*\neq 0$，以此为方向确定步长α^*使得$a_p(x^*+\alpha^* d^*)=b_p$，$p\notin J^*$，则有效集修正为$J^*\cup\{p\}$。

QP子问题

$$\min\quad \frac{1}{2}d^T G_k d+\nabla f(x_k)^T d$$
$$s.t.\quad \nabla h_i(x_k)^T d+h_i(x_k)=0,\quad i=1,\cdots m$$
$$\nabla g_j(x_k)^T d+g_j(x_k)\le 0,\quad j=1,\cdots l$$

x_k 是第k次迭代的初始点，G_k 是海赛阵$\nabla^2 L$的近似。

将最优解$\mathbf{d}_\mathbf{k}$作为迭代的搜索方向，令 $x_{k+1}=x_k+\alpha_k d_k$

SQP的基本步骤

- 求解QP子问题，得 d_k；
- 用线性搜索计算迭代步长α_k；
- 确定矩阵G_k的迭代公式。