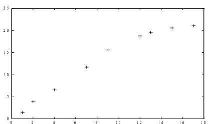
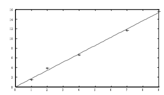
实验2 插值与拟合 第8题 虎克定律

```
x=[1   2   4   7   9   12   13   15   17];
f=[1.5 3.9 6.6 11.7 15.6 18.8 19.6 20.6 21.1];
plot(x,f,'+'),
```



1）用前5个点拟合一条过原点的直线 $y_1=kx$

```
x1=[1 2 4 7 9 ];
f1=[1.5 3.9 6.6 11.7 15.6 ];
k=x1'\f1';
xx1=0:0.1:9;
y1=k*xx1,
y10=k*9,
plot(x1,f1,'+',xx1,y1),
```



k=1.7086,
x1=9，y10 =9k=15.3775

2）用后5个点拟合一条二次曲线 $y_2=a_1x^2+a_2x+a_3$，使曲线过连接点 (9, 9k)，其中k=1.7086。

y_2可改记作 $y_2=a_1(x^2-9^2)+a_2(x-9)+9k$

huke1

$$y=y_2-9k$$
$$r_1(x)=x^2-9^2$$
$$r_2(x)=x-9$$
$$y=a_1r_1(x)+a_2r_2(x)$$

```
x2=[9 12 13 15 17];
f2=[15.6 18.8 19.6 20.6 21.1];
u=f2-k*9;
r1=x2.^2-81;
r2=x2-9;
R=[r1' r2'];
a=R\u';
a1=a(1);a2=a(2);
dy20=2*a1*9+a2;
```

a1 = -0.0843,
a2 = 2.9031
dy20=1.3863

曲线y_2过$x=9$点的斜率$1.3863\neq k$

3）用后5个点拟合一条二次曲线 $y_2=a_1x^2+a_2x+a_3$，使曲线过连接点 (9, 9k)，且与直线$y=kx$光滑相接，其中k=1.7086。

$x=9, y_2=9k \Rightarrow 9^2a_1+9a_2+a_3=9k$

$x=9, y_2'=k \Rightarrow 9\times 2a_1+a_2=k$

$\Rightarrow a_1=\dfrac{a_3}{9^2}$, $a_2=k-\dfrac{2a_3}{9}$

$$y_2=a_3\left(\frac{x^2}{9^2}-\frac{2x}{9}+1\right)+kx$$

$$u=y_2-kx$$
$$v=\frac{x^2}{9^2}-\frac{2x}{9}+1$$

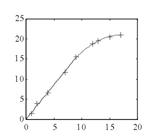
$u=a_3v \Rightarrow a_3=v'\backslash u'$

3）用后5个点拟合一条二次曲线 $y_2=a_1x^2+a_2x+a_3$，使曲线过连接点 (9, 9k)，且与直线$y=kx$光滑相接，其中k=1.7086。

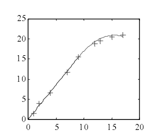
```
x2=[9 12 13 15 17];
f2=[15.6 18.8 19.6 20.6 21.1];
u=f2-k*x2;
v=(x2/9).^2-2*x2/9+1;
a3=v'\u';
a1=a3/81;
a2=k-2*a3/9;
```

huke2 huke3

a1 = -0.1303
a2 =4.0548
a3 = -10.5578



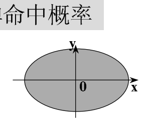
连接



连接且光滑

实验3 数值积分 第10题 炮弹命中概率

原书上例题（P79,91）



$$P=\iint_\Omega p(x,y)dxdy,\quad \Omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$$

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right]$$

作变换
$x=au,\ y=bv$，

$$P=ab\iint_{\bar\Omega}\bar p(u,v)dudv,\ \bar\Omega: u^2+v^2\le 1$$

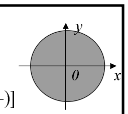
$$\bar p(u,v)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(a^2u^2+b^2v^2)}$$

积分域和被积函数的对称性

$$P=4ab\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-u^2}}\bar p(u,v)dvdu$$

用蒙特卡罗方法计算，(u,v)取(0,1)随机数

第10题 (P94) $P=\iint_\Omega p(x,y)dxdy,\quad \Omega: x^2+y^2\le 1$



$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}-\frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right]$$

用蒙特卡罗方法计算，
(x,y) 取 (0,1) 随机数

$$\cancel{P=}\,4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}p(x,y)dydx\approx 0.79$$

令 $x=2u-1,\ y=2v-1$，
(u,v)为 (0,1) 随机数

被积函数在积分域中不对称

$$P=4\iint_{\bar\Omega}\bar p(u,v)dudv,\quad \bar\Omega:(2u-1)^2+(2v-1)^2\le 1$$

$$\bar p(u,v)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(2u-1)^2}{\sigma_x^2}-\frac{2\rho(2u-1)(2v-1)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(2v-1)^2}{\sigma_y^2}\right)\right]$$

第10题 (P94)

paodan

```
a=0.8;b=0.5;p=0.4;m=0;z=0;
n=10000;
for i=1:n
   x=2*rand(1,2)-1;
   y=0;
   if x(1)^2+x(2)^2<=1
      y=exp(-0.5/(1-p*p)*(x(1)^2/a^2
      +x(2)^2/b^2-2*p*x(1)*x(2)/a/b));
      z=z+y;
      m=m+1;
   end
end
P=4*z/2/pi/a/b/sqrt(1-p*p)/n,m
```

$P \approx 0.69$

实验2 插值与拟合 第9题 导热系数(P74)

方法1

Daore1.m

分析：这是一个二元插值问题，但可转化成一元问题。

第一步：线性插值,并画草图

```
T=[68,87,106,140];
P=[9.7981,13.324,9.0078,13.355,9.7918,14.277,
9.6563,12.463];
K=[0.0848,0.0897,0.0762,0.0807,0.0696,0.0753,
0.0611,0.0651];
T0=99; P0=10.3;
x(1)=interp1(P(1:2),K(1:2),P0);
x(2)=interp1(P(3:4),K(3:4),P0);
x(3)=interp1(P(5:6),K(5:6),P0);
x(4)=interp1(P(7:8),K(7:8),P0);
plot(T,x,'r+',T,x)
```

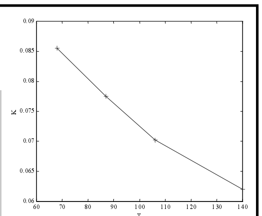
第二步：二次拟合函数

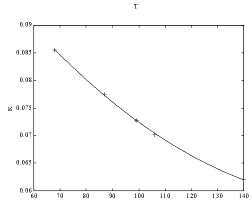
$$K = aT^2 + bT + c$$

```
% 二次拟合
aa=polyfit(T,x,2);
a=aa(1)
b=aa(2)
c=aa(3)
K0=polyval(aa,T0)
T1=68:0.1:140;
K1=polyval(aa,T1);
plot(T,x,'r+',T1,K1,T0,K0,
'r*')
xlabel('T'), ylabel('K')
```

a=2.0738E-6
b=-7.5935E-4
c=0.1276

K(99, 10.3)
=0.0728



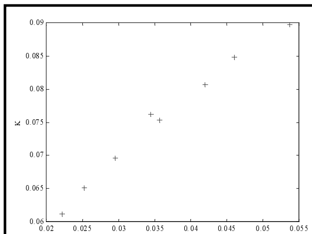


方法2 分析：从已知数据发现 $T\uparrow K\downarrow, P\uparrow K\uparrow$,
且通过画草图可看到K与$\sqrt{P}/T$成线性关系。
为此，可选拟合函数为：

$$K = a\sqrt{P}/T + b \qquad (1)$$

Daore2.m

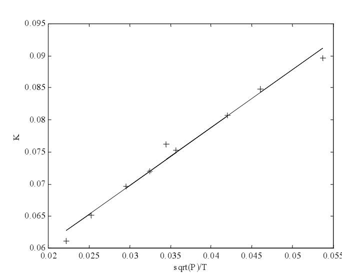
```
% The second method
T=[68,68,87,87,106,106,140,140];
P=[9.7981,13.324,9.0078,13.355,9.7918,14.277,
9.6563,12.463];
K=[0.0848,0.0897,0.0762,0.0807,0.0696,0.0753,
0.0611,0.0651];
T0=99; P0=10.3;
x=sqrt(P)./T;
plot(x,K,'r+')
xlabel('sqrt(P)/T'), ylabel('K')
```



作变换$x = \sqrt{P}/T$,
则(1)变为$K = ax + b$

Daore2.m

```
pause
aa=polyfit(x,K,1);
a=aa(1), b=aa(2)
x0=sqrt(P0)/T0;
K0=polyval(aa,x0)
K1=polyval(aa,x);
plot(x,K,'k+',x,K1,x0,K0,'r*')
xlabel('sqrt(P)/T'),ylabel('K')
```

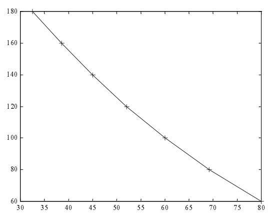


结果：a=9044，b=0.0427, K(99,10.3)=0.0720

与方法1的结果 K(99, 10.3)=0.0728相差不大

Ex3.Prob.6 (P94) 气体作功

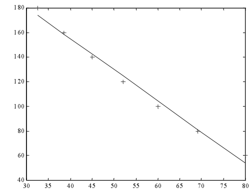
分析：作草图观察，发现P与V呈二次函数关系，选取拟合函数：$P=aV^2+bV+c$

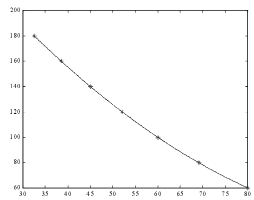


MATLAB 5.3.lnk ex3prob6.m

```
P=[60,80,100,120,140,160,180];
V=[80,69.2,60,52,45,38.6,32.5];
dv=[1,1]; V0=[60,50];
%画草图
plot(V,P,'r+',V,P)
pause
```

```
%一次拟合
aa=polyfit(V,P,1);
P1=polyval(aa,V)
plot(V,P1,V,P,'r+')
pause
%二次拟合
aa=polyfit(V,P,2)
V2=80:-0.1:32.5;
P2=polyval(aa,V2);
plot(V2,P2,V,P,'r*')
dp=(2*aa(1)*V0+aa(2))
.*dv
x=40:10:70;
W=quad('ex3fun6',40,
70)
```





ex3prob6.m MATLAB 5.3.lnk

计算结果: $a = 0.00193,\ \ b = -4.6996,\ \ c = 312.385$

在$V = 60$, 50处, $\Delta V = 1$时

$\Delta P = -2.3802,\ \ -2.7668$

V从70减至40时气体做的功$W = 3412.1$

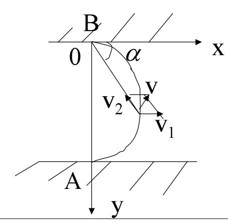
```
function p=fun6(x)
a=0.0193; b=-4.6996; c=312.3854;
p=a*x.^2+b.*x+c;
```

也可以采用数值微分计算ΔP；

也可以采用离散型数值积分计算W；

Ex4prob5 (P120) 小船过河

a) 解：假设小船始终向对岸目标前进，由于河水的流动，所以小船实际走的是一条曲线，如右图所示。



取如图坐标系，则小船原点坐标为（0， d），终点坐标为（0，0）。设小船行至点(x,y)，记坐标原点0到该点的向量与x正方向的夹角为α，则小船x方向的速度dx/dt与y方向的速度dy/dt

分别为

$$\frac{dx}{dt} = v_1 - v_2 \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = -v_2 \sin\alpha$$

由于

$$\cos(\alpha) = x/\sqrt{x^2+y^2} \qquad \sin(\alpha) = y/\sqrt{x^2+y^2}$$

故得微分方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_1 - v_2 x/\sqrt{x^2+y^2} & (1) \\ \dfrac{dy}{dt} = -v_2 y/\sqrt{x^2+y^2} & (2) \end{cases}$$

初始条件为：

$$\begin{cases} x(0) = 0 & (3) \\ y(0) = d & (4) \end{cases}$$

(1), (2)两式相除得： $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{v_1\sqrt{x^2+y^2} - v_2 x}{v_2 y}$

将x看成y的函数，则上述方程可化为：

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{v_1}{v_2}\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} + \frac{x}{y}$$

由 $k = \dfrac{v_1}{v_2}$, 再由起始点为：$(0, d)$得定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = -k\sqrt{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 1} + \dfrac{x}{y} & (5) \\ x\big|_{y=d} = 0 \end{cases}$$

令$x/y=u$，u是y的函数，则方程变成：

$$u+y\frac{du}{dy}=-k\sqrt{1+u^2}+u$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+u^2}=cy^{-k}-u,\ \text{由}x\big|_{y=d}=0\Rightarrow u\big|_{y=d}=0\Rightarrow$$

$$c=d^k,$$

于是方程解为：

$$\sqrt{1+u^2}=d^k y^{-k}-u$$

两边平方，再将$u=x/y$代入得解析解：

$$x=\frac{d}{2}\left[\left(\frac{y}{d}\right)^{1-k}-\left(\frac{y}{d}\right)^{1+k}\right] \qquad (6)$$

b)

令$x_1=x, x_2=y, x=(x_1,x_2)^T$，则(1)－(4)可表示为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} v_1-v_2\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ -v_2\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

$$x(0)=(0,\ d)^T \qquad (8)$$

用4阶 *Runge* － *Kutta* 方法求解 (7)－(8)得：

MATLAB 5.3.lnk

xiaochuan.m

```
function xdot=chuan(t,x)
v1=1; v2=2;
xdot=[v1-v2*x(1)/sqrt(x(1)^2+x(2)^2);
        -v2*x(2)/sqrt(x(1)^2+x(2)^2)];
```

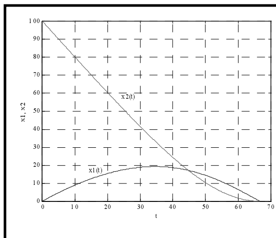
```
d=100;ts=0:0.1:50;x0=[0,d];[t,x]=ode45('chuan',ts,x0);
n=length(x); T=50; t=ts';
while min(abs(x(n,1)),abs(x(n,2)))>=0.0005
   T=T+0.1; t1=[T-0.1,T]; x1=x(n,:);
   [t2,x2]=ode45('chuan',t1,x1); n1=length(t2);
   n=n+1; x=[x;x2(n1,:)]; t=[t;T];
end
n1=length(t);
[t(1:10),x(1:10,:)],
[t((n1-10):n1),x((n1-10):n1,:)],    T
pause
plot(t,x), grid,xlabel('t'),ylabel('x1, x2'),
gtext('x1(t)'), gtext('x2(t)'),
pause
plot(x(:,1),x(:,2)), grid, xlabel('x1'), ylabel('x2')
pause
v1=1; v2=2; k=v1/v2;
x1=d/2*((x(:,2)/d).^(1-k)-(x(:,2)/d).^(1+k));
[x(1:10,:),x1(1:10)],
[x((n1-10):n1,:),x1((n1-10):n1)],
```

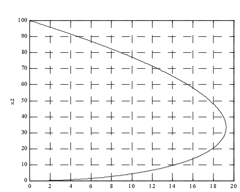
t	x	y
0	0	100.0000
0.1000	0.0999	99.8000
0.2000	0.1996	99.6000
0.3000	0.2991	99.4000
0.4000	0.3984	99.2000
0.5000	0.4975	99.0000
0.6000	0.5964	98.8000
0.7000	0.6951	98.6000
0.8000	0.7936	98.4000
0.9000	0.8919	98.2000
…………	…………	…………

MATLAB 5.3.lnk

xiaochuan.m

t	x	y
…………	…………	…………
65.6000	1.0660	0.0455
65.7000	0.9661	0.0374
65.8000	0.8663	0.0300
65.9000	0.7664	0.0235
66.0000	0.6665	0.0178
66.1000	0.5665	0.0128
66.2000	0.4666	0.0087
66.3000	0.3666	0.0054
66.4000	0.2666	0.0028
66.5000	0.1666	0.0011
66.6000	0.0666	0.0002





C)

当$v_1=0,\ 0.5,\ 1.5,\ 2(m/s)$时，同理可计算

结果：$v_1=0$时，$T=50$秒

$v_1=0.5$时，$T=53.4$秒

$v_1=1.5$时，$T=113.4$秒

$v_1=2$时，$T=242.5$秒，且

小船不能到达B点