计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：　高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：　李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第四节　　牛顿法
Newton-Raphson Iteration Method

- 4.1. **牛顿迭代法基本原理**

【定义 1 】 牛顿迭代法单根情形 设非线性方程 $f(x)=0$ 的求根函数 $f(x)$ 有近似根 $x_k : f(x_k) \approx 0$ ，若满足导数非零条件： $f'(x_k) \neq 0$, 则由微分中值定理或 **Taylor** 公式，从

$$0 = f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) \tag{4.1}$$

解出新的近似值

$$x^* \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{4.2}$$

定义为新的迭代值

$$x_{k+1} := \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{4.3}$$

则称迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 为 牛顿迭代法 (Newton Method)，相应 不动点迭代函数 为

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{4.4}$$

【牛顿迭代法的几何意义】 注意到求根函数曲线上近似点 $(x_k, f(x_k))$ 处的 切线 方程为

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) \tag{4.5}$$

故牛顿迭代值 x_{k+1} 即为切线与 x 横轴的交点 $y = 0$. 换言之，牛顿迭代的几何意义是 将切线外推到 0. 因此牛顿法亦称 切线法, 是一种 线性化方法.

【定理 1】 牛顿迭代法的局部收敛定理 在单根不动点

$$x^* : f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0$$

附近牛顿迭代序列 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 至少为平方收敛 (2 阶局部收敛). 且有

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \qquad (4.6)$$

【证明略】

【定义 2】 **牛顿迭代法 m 重根情形** 设非线性方程 $f(x)=0$ 的求根函数 $f(x)$ 有 m 重根 x^*, 即

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x), g(x^*)\neq 0 \tag{4.10}$$

或即满足 m 阶导数非零条件:

$$f(x^*)=f^{'}(x^*)=f^{''}(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0, f^{(m)}(x^*)\neq 0 \tag{4.11}$$

则定义 牛顿加权因子 为重数 m, 我们有

$$x_{k+1} := \varphi(x_k) = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{4.12}$$

称迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 为 牛顿加权因子迭代法 (m 重根情形)， 牛顿加权因子迭代函数 为

$$\varphi(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{4.13}$$

此时

$$\varphi'(x) = 1 - m + m\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \tag{4.14}$$

故

$$\varphi'(x^*) = 1 - m + m\frac{f(x^*)f''(x^*)}{f'(x^*)^2} = 1 - m + m(1 - \frac{1}{m}) = 0 \tag{4.15}$$

故牛顿加权因子迭代至少为 平方收敛 (2 阶局部收敛).

或取 牛顿修正函数 为

$$\mu(x) := \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-x^*)g(x)}{mg(x)+(x-x^*)g'(x)} \tag{4.16}$$

由上式或直接由代数学的多项式理论， x^* 为 $f(x)$ 的 m 重根，则为 $\mu(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ 的单根.

故亦可取 牛顿修正函数迭代函数 为

$$\varphi(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)f'(x)}{f'(x)^2 - f(x)f''(x)} \tag{4.17}$$

相应 牛顿修正函数迭代法

$$x_{k+1} := \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - f(x_k)f''(x_k)} \tag{4.18}$$

亦至少为 平方收敛 (2 阶局部收敛).

- 4.2. **平行弦法与牛顿下山法**

【定义 2 】 **平行弦法 (简化牛顿法)** 设非线性方程 $f(x)=0$ 的求根函数 $f(x)$ 有近似根 $x_k : f(x_k)\approx 0$ ，若满足初始值点处导数非零条件： $f'(x_0)\neq 0$, 取非零常数 $C=\dfrac{1}{f'(x_0)}\neq 0$ 代替 $\dfrac{1}{f'(x_k)}$, 即令 $C\approx\dfrac{1}{f'(x_k)}$ 或 $f'(x_k)\approx\dfrac{1}{C}$ ，由此解出新的近似值

$$x^* \approx x_k - Cf(x_k) \tag{4.19}$$

定义为新的迭代值

$$x_{k+1} := \varphi(x_k) = x_k - Cf(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)} \tag{4.20}$$

则称迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 为 简化牛顿法 (Simplified Newton Method) 或 平行弦法 (Parallel Chords Method)，相应 不动点迭代函数 为

$$\varphi(x) = x - Cf(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)} \tag{4.21}$$

【平行弦法 (简化牛顿法) 的几何意义】 注意到由

$$\begin{aligned}
&x_{k+1} = x_k - Cf(x_k) \\
&\Rightarrow x_{k+1} - x_k = -Cf(x_k) \\
&\Rightarrow \frac{f(x_k) - 0}{x_{k+1} - x_k} = -\frac{1}{C} \\
&\Rightarrow \frac{0 - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \frac{1}{C} \approx f'(x_k)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

故平行弦法是以求根函数曲线上近似点 $(x_k, f(x_k))$ 处的 弦 (割线)

$$l_k: \quad y - f(x_k) = \frac{1}{C}(x - x_k) \tag{4.23}$$

与 x 横轴的交点 $y = 0$ 来近似取代切线

$$C_k: \quad y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k) \tag{4.24}$$

与 x 横轴的交点 $y = 0$. 换言之，简化牛顿法的几何意义是将弦外推到 0. 而显然这里的常数 $C \approx \dfrac{1}{f'(x_k)}$ 的几何意义是切线的 内法线的斜率的近似.

一般地，可取常数 $C=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ 为初始值点处的内法线斜率，于是我们是以斜率为 $\dfrac{1}{C}$ 的 平行弦簇 与 x 横轴的交点作为 x^* 的迭代近似值，因此简化牛顿法亦称 平行弦法.

【**平行弦法 (简化牛顿法) 的局部收敛性**】 由于

$$\varphi(x) = x - Cf(x) \Rightarrow \varphi'(x) = 1 - Cf'(x) \tag{4.25}$$

故据迭代法收敛性定理可知迭代序列 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 在不动点 x^* 附近当

$$|\varphi'(x)| = |1 - Cf'(x)| < 1 \Leftrightarrow 0 < Cf'(x) < 2 \tag{4.26}$$

时为 *局部收敛*. 且因 $\varphi'(x) = 1 - Cf'(x) \neq 0$ ，故平行弦法仅为 *线性收敛*.

【定义 3】 **下山法与牛顿下山法** 设非线性方程 $f(x)=0$ 的求根函数 $f(x)$ 有近似根 x_k，若迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 满足求根函数 $f(x)$ 对迭代值 x_k 的 绝对值单调下降条件 或 下山条件

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)| \tag{4.27}$$

则称迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 为 下山算法.

将下山算法与牛顿法结合，作初始迭代值 x_k 与牛顿法 x_k 迭代值 $x_k - \lambda \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 的 凸线性组合 或 加权平均 获得新的迭代值

$$x_{k+1} := \lambda(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}) + (1-\lambda)x_k = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (4.28)$$

相应 不动点迭代函数 为

$$\varphi(x) = x - \lambda \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{4.29}$$

则称迭代法

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{4.30}$$

为 牛顿下山法.

其中因子 $0 < \lambda \leq 1$ 称为 牛顿下山因子. 通常用逐次二分法从 $\lambda = 1$ 开始取为

$$\lambda = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \cdots \tag{4.31}$$

等等直至可使 下山条件 成立.

【 牛顿下山法的意义】 下山算法 保证了迭代序列值稳定下降收敛，而 牛顿法 则可加快收敛速度，二者珠联璧合，构成牛顿下山法．此种 凸线性组合 的技巧也是值得注意的．

- 4.3. **例题选讲**

【例 1 牛顿法求解超越方程的单根】 非线性方程初值问题

$$f(x) = xe^x - 1 = 0, x_0 = 0.5$$

即求指数曲线 $y = e^x$ 与双曲线 $y = \dfrac{1}{x}$ 的交点，试用牛顿法计算近似根.

【解】牛顿迭代函数

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{xe^x - 1}{(x+1)e^x}$$
$$= x - \frac{x - e^{-x}}{x+1} = \frac{x^2 - e^{-x}}{x+1}$$

牛顿迭代

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
$$= x_k - \frac{x_k - e^{-x_k}}{x_k + 1} = \frac{x_k^2 - e^{-x_k}}{x_k + 1}$$

比如

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{x_0 - e^{-x_0}}{x_0 + 1} \\
&= 0.5 - \frac{0.5 - e^{-0.5}}{0.5 + 1} = 0.5 - \frac{0.5 - 0.60653086}{1.5} = 0.57102
\end{aligned}
$$

如是递推即得各次牛顿迭代近似根.

根据迭代函数利用迭代递推公式作出近似根表如下：

k	x_k	
0	0.5	
1	0.57102	
2	0.56716	
3	0.56714	

【例 2 牛顿法求解非线性多项式方程的重根】 非线性方程初值问题

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = 0, x_0 = 1.5$$

试用三种牛顿法计算二重根 $\sqrt{2}$ 的近似值.

【解】

(1) 牛顿迭代：不动点迭代函数为

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= x - \frac{x^4 - 4x^2 + 4}{4x^3 - 8x} \\ &= x - \frac{x^2 - 2}{4x}\end{aligned}$$

牛顿迭代为

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{4x_k}$$

(2) 牛顿加权因子迭代：因子取为重数 $m=2$. 不动点迭代函数为

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x - m\frac{f(x)}{f'(x)}\\ &= x - 2\frac{x^4-4x^2+4}{4x^3-8x}\\ &= x - \frac{x^2-2}{2x}\end{aligned}$$

牛顿加权因子迭代为

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{x_k^2-2}{2x_k}$$

(3) 牛顿修正函数迭代：修正函数为

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x^2 - 2}{4x} = \frac{x}{4} - \frac{1}{2x}$$

修正函数的导函数为

$$\mu'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2x^2} = \frac{x^2 + 2}{4x^2}$$

牛顿修正函数迭代为

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{\mu(x_k)}{\mu'(x_k)}$$

$$= x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - f(x_k)f''(x_k)}$$

$$= x_k - \frac{\dfrac{x_k^2 - 2}{4x_k}}{\dfrac{x_k^2 + 2}{4x_k^2}} = x_k - \frac{x_k(x_k^2 - 2)}{x_k^2 + 2}$$

根据迭代函数利用迭代递推公式作出近似根表如下：

k	牛顿迭代 x_k	加权因子迭代 y_k	修正函数迭代 z_k		
1	1.45833	1.41667	1.41176		
2	1.43661	1.41422	1.41421		
3	1.42550	1.41421	1.41421		

【例 3 牛顿法下的开方公式】 试用牛顿法获得开方计算公式，并讨论收敛性.

(I) 开平方公式：设非线性方程求根问题
$f(x)=x^2-a=0, a>0;$

(II) 开立方公式：设非线性方程求根问题
$f(x)=x^3-a=0, a>0;$

(III) 开 n 次方公式：设非线性方程求根问题
$f(x)=x^n-a=0, a>0.$

(I)开平方公式：

牛顿迭代函数

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{x^2-a}{2x}=\frac{1}{2}(x+\frac{a}{x})$$

牛顿迭代

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k})$$

可证此牛顿迭代公式对任意正初值 $x_0>0$ 均收敛.

证 法 1. 配 方 法　对牛顿迭代公式配方得

$$x_{k+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_k}(x_k - \sqrt{a})^2$$

$$x_{k+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2x_k}(x_k + \sqrt{a})^2$$

两式相除得

$$\frac{x_{k+1} - \sqrt{a}}{x_{k+1} + \sqrt{a}} = (\frac{x_k - \sqrt{a}}{x_k + \sqrt{a}})^2$$

由此反复递推有

$$\frac{x_k-\sqrt{a}}{x_k+\sqrt{a}}=(\frac{x_0-\sqrt{a}}{x_0+\sqrt{a}})^{2^k}$$

记

$$q = \frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}}, \quad \forall x_0 > 0, |q| < 1$$

则有

$$x_k - \sqrt{a} = 2\sqrt{a}\frac{q^{2^k}}{1 - q^{2^k}} \to 0, \quad (k \to +\infty)$$

即 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = \sqrt{a}$. 故牛顿迭代公式对任意正初值 $x_0 > 0$ 均收敛.

证 法 2. 单 调 有 界 收 敛 法　对任意正初值 $x_0 > 0$，牛顿迭代序列为正数列，且

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k}) \geq \sqrt{x_k \cdot \frac{a}{x_k}} = \sqrt{a}$$

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{x_k^2}) \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{a}{a}) = 1 \Rightarrow x_{k+1} \leq x_k$$

牛顿迭代序列为单调下降有下界 $\sqrt{a}$ 的正数列，由数学分析中的单调有界收敛定理可知其收敛，并由

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k})$$

令 $k \to +\infty$ 取极限可知牛顿迭代序列收敛于 $\sqrt{a}$.

【应用实例 (I) 】 开方公式

设非线性方程求根问题 $f(x) = x^2 - a = 0, a > 0;$ 对于不动点迭代序列

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k})$$

若 $a = 10$,$x_0 = 3$, 则

$$x_1 = \varphi(x_0) = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{a}{x_0}) = \frac{1}{2}(3 + \frac{10}{3}) \approx \frac{6.33}{2} \approx 3.165$$

(II)开立方公式：

牛顿迭代函数

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - a}{3x^2} = \frac{1}{3}(2x + \frac{a}{x^2})$$

牛顿迭代

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{3}(2x_k + \frac{a}{x_k^2})$$

可证此牛顿迭代公式对任意正初值 $x_0 > 0$ 均收敛.

(III)开 n 次方公式：

牛顿迭代函数

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^n - a}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}((n-1)x + \frac{a}{x^{n-1}})$$

牛顿迭代

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{n}((n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}})$$

可证此牛顿迭代公式对任意正初值 $x_0 > 0$ 均收敛.

【例 5 牛顿下山法对发散初值的改进】

试用牛顿下山法对发散初值的非线性方程求根问题

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0, x_0 = 0.6$$

改进获得计算公式，并讨论收敛性.

【解】

对非线性方程求根问题 $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ 选取不恰当的初值 $x_0 = 0.6$ 时，若依牛顿法有

$$
\begin{aligned}
& x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\
& \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1} \\
& \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - x_0 - 1}{3x_0^2 - 1} \\
& \Rightarrow x_1 = 0.6 - \frac{0.6^3 - 0.6 - 1}{3 \cdot 0.6^2 - 1} \\
& \Rightarrow x_1 = 0.6 - \frac{1.384}{0.08} = 17.9
\end{aligned}
$$

远离真值．我们用牛顿下山法对之改进．对下山因子用逐次二分法从 $\lambda = 1$ 开始取为

$$\lambda = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \cdots$$

当取到 $\lambda = \dfrac{1}{32}$ 时有

$$
\begin{aligned}
& x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\
& \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{1}{32} \cdot \frac{x_k^3 - x_k - 1}{3x_k^2 - 1} \\
& \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{1}{32} \cdot \frac{x_0^3 - x_0 - 1}{3x_0^2 - 1} \\
& \Rightarrow x_1 = 0.6 - \frac{1}{32} \cdot \frac{0.6^3 - 0.6 - 1}{3 \cdot 0.6^2 - 1} \\
& \Rightarrow x_1 = 0.6 - \frac{1}{32} \cdot \frac{1.384}{0.08} = 1.140625
\end{aligned}
$$

此时 $f(x_1)=f(1.140625)=-0.656643$, 故显然满足下山条件： $|f(x_1)|=0.656643<1.384=|f(x_0)|$. 以下迭代时则只须取下山因子 $\lambda=1$ ，则均满足下山条件．计算至 4 次可得各次迭代近似值及相应求根函数在近似值点处的值，可见是渐趋于 0 的．可列表如下.

k	下山因子 λ	牛顿下山迭代 x_k	求根函数值 $f(x_k)$		
0		0.6	-1.384		
1	$\frac{1}{32}$	1.140625	0.656643		
2	1	1.36181	0.1866		
3	1	1.32628	0.00667		
4	1	1.32472	0.0000086		