



## 数学实验

### Experiments in Mathematics

清华大学数学科学系

1



### 为什么要开设数学实验课

- 既要学好“算数学”，更要培养“用数学”的能力
- 利用计算机技术提供的条件，培养分析、思考能力
- 感受“用数学”的酸甜苦辣，激发学好数学的愿望

#### 课程宗旨

以学生动手为主，在教师指导下用学到的数学知识和计算机技术，选择合适的数学软件，分析、解决一些经过简化的实际问题

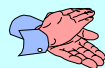
2



### 数学实验课的内容安排

- 介绍一些解决实际问题的常用数学方法：数值计算、优化方法、数理统计和计算机模拟的基本原理和算法；
- 选用一个合适的数学软件——MATLAB，能方便地实现以上内容的主要算法；
- 数学建模贯穿整个课程，每个内容都从实际问题引出，并归结于问题的解决；
- 精心安排学生的实验，上机和作实验报告的时间要保证。

3



### 14个数学实验的具体内容

预备实验：MATLAB使用练习

#### 数学建模

实验1 数学建模初步 实验13 数学建模综合

#### 数值计算

实验2 插值与拟合 实验3 数值积分与微分

实验4 常微分方程数值解

实验5 线性方程组的解法

实验6 非线性方程近似解

#### 优化方法

实验7 无约束优化

实验8 约束优化

#### 数理统计

实验9 数据的统计描述和分析

实验10 方差分析

实验11 回归分析

#### 计算机模拟

实验12 计算机模拟

4



### 实验报告格式的基本要求

系别、班级、学号、姓名

#### 实验目的

#### 计算题

题目，算法设计(包括计算公式)，程序，计算结果(计算机输出)，结果分析，结论。

#### 应用题

题目，问题分析，模型假设，模型建立，算法设计(包括计算公式)，程序，计算结果(计算机输出)，结果的数学分析，结果的实际意义，结论。

#### 收获与建议

5

## 数学实验

### Experiments in Mathematics



### 实验1 数学建模初步

6

## 从我们常见的模型到数学模型

玩具、照片、火箭模型...

~ 实物模型

水箱中的舰艇、风洞中的飞机...

~ 物理模型

地图、电路图、分子结构图...

~ 符号模型

**模型**是为了一定目的，对客观事物的一部分进行简缩、抽象、提炼出来的原型的替代物。

**模型**集中反映了原型中人们需要的那一部分特征。

7

## 你碰到过的数学模型——“航行问题”



甲乙两地相距750千米，船从甲到乙顺水航行需30小时，从乙到甲逆水航行需50小时，问船的速度是多少。

用  $x$  表示船速， $y$  表示水速，列出方程：

$$(x + y) \times 30 = 750$$

$$(x - y) \times 50 = 750$$

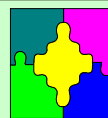
求解得到  $x=20$ ,  $y=5$ , 答：船速每小时20千米

8

## 航行问题建立数学模型的基本步骤

- 作出简化假设（船速、水速为常数）；
- 用符号表示有关量（ $x, y$ 表示船速和水速）；
- 用物理定律（匀速运动的距离等于速度乘以时间）列出数学式子（二元一次方程）；
- 求解得到数学解答（ $x=20, y=5$ ）；
- 回答原问题（船速每小时20千米）。

9



## 数学模型 (Mathematical Model) 和 数学建模 (Mathematical Modeling)

**数学模型**: 对于一个现实对象，为了一个特定目的，根据其内在规律，作出必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构。

**数学建模**: 建立数学模型的全过程（包括分析、建立、求解、检验）。

Motivation, Formulation, Solution, Verification

10



## 数学建模的重要意义

- 电子计算机的出现及飞速发展；
- 数学以空前的广度和深度向一切领域渗透。

数学建模作为用数学方法解决实际问题的第一步，越来越受到人们的重视。

- 在一般工程技术领域数学建模仍然大有用武之地；
- 在高新技术领域数学建模几乎是必不可少的工具；
- 数学进入一些新领域，为数学建模开辟了许多处女地。

11

## 数学建模的具体应用

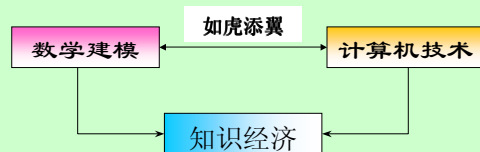


• 分析与设计

• 预测与决策

• 控制与优化

• 规划与管理



12

## 数学建模实例 1

### ——录象机计数器的用途

#### 问题

经试验，一盘录象带从头走到尾，时间用了183分30秒，计数器读数从0000变到6152。

在一次使用中录象带已经转过大半，计数器读数为4580，问剩下的一段还能否录下1小时的节目？

#### 要求

不仅回答问题，而且建立计数器读数与录象带转过时间的关系。

#### 思考

计数器读数是均匀增长的吗？

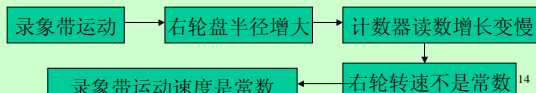
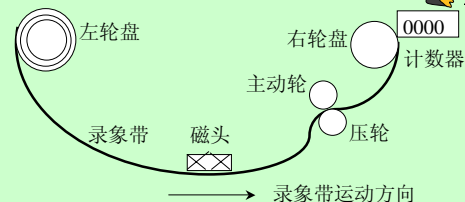
13

#### 观察

计数器读数增长越来越慢！

#### 问题分析

录象机计数器的工作原理



14

#### 模型假设

- 录象带的运动速度是常数  $v$ ；
- 计数器读数  $n$  与右轮转数  $m$  成正比，记  $m=kn$ ；
- 录象带厚度（加两圈间空隙）为常数  $w$ ；
- 空右轮盘半径记作  $r$ ；
- 时间  $t=0$  时读数  $n=0$ 。

#### 建模目的

建立时间  $t$  与读数  $n$  之间的关系

（设  $V, k, w, r$  为已知参数）

15

#### 模型建立

建立  $t$  与  $n$  的函数关系有多种方法

- 右轮盘转第  $i$  圈的半径为  $r+wi$ ， $m$  圈的总长度等于录象带在时间  $t$  内移动的长度  $vt$ ，所以

$$\sum_{i=1}^m 2\pi(r+wi) = vt \quad m = kn$$

$$\Rightarrow t = \frac{\pi w k^2}{v} n^2 + \frac{2\pi r k}{v} n$$

16

#### 模型建立

- 考察右轮盘面积的变化，等于录象带厚度乘以转过的长度，即

$$\pi[(r+wn)^2 - r^2] = wvt$$

- 考察  $t$  到  $t+dt$  录象带在右轮盘缠绕的长度，有

$$(r+wn)2\pi kdn = vdt$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$t = \frac{\pi w k^2}{v} n^2 + \frac{2\pi r k}{v} n$$

17

#### 思考

- 3种建模方法得到同一结果

$$\sum_{i=1}^m 2\pi(r+wi) = vt$$

$$\pi[(r+wn)^2 - r^2] = wvt$$

$$(r+wn)2\pi kdn = vdt$$

$$t = \frac{\pi w k^2}{v} n^2 + \frac{2\pi r k}{v} n$$

但仔细推算会发现稍有差别，请解释。

- 模型中有待定参数  $r, w, v, k$ ，

一种确定参数的办法是测量或调查，请设计测量方法。

18

### 参数估计

另一种确定参数的方法——测试分析

将模型改记作  $t = an^2 + bn$ ，只需估计  $a, b$ ，

理论上，已知  $t=183.5, n=6152$ ，再有一组  $(t, n)$  数据即可；  
实际上，由于测试有误差，最好用足够多的数据作拟合。

现有一批测试数据：

t	0	20	40	60	80
n	0000	1153	2045	2800	3466
t	100	120	140	160	183.5
n	4068	4621	5135	5619	6152

用最小二乘法可得

$$a = 2.51 \times 10^{-6},$$

$$b = 1.44 \times 10^{-2}.$$

### 模型检验

应该另外测试一批数据检验模型：

$$t = an^2 + bn \quad (a = 2.51 \times 10^{-6}, b = 1.44 \times 10^{-2})$$

### 模型应用

1. 回答提出的问题：由模型算得  $n = 4580$  时  $t = 118.5$  分，  
剩下的录象带能录  $183.5 - 118.5 = 65$  分钟的节目。

2. 揭示了“ $t$  与  $n$  之间呈二次函数关系”这一普遍规律，  
当录象带的状态改变时，只需重新估计  $a, b$  即可。

20

## 数学建模实例 2

### ——生产计划的安排

#### 问题

配件厂为装配线生产若干种产品，轮换产品时因更换设备要付生产准备费，产量大于需求时因积压资金要付贮存费。今已知某产品的日需求量为100件，生产准备费5000元，贮存费每日每件1元。试安排该产品的生产计划，即多少天生产一次（生产周期），每次产量多少，使总费用最小。

**要求** 建立生产周期、产量与需求量、准备费、贮存费之间的关系。

21

#### 问题分析与思考

• 周期短，产量小  $\Rightarrow$  贮存费少，准备费多

周期长，产量大  $\Rightarrow$  准备费少，贮存费多

$\Rightarrow$  存在最佳的周期和产量，使总费用（二者之和）最小

• 这是一个优化问题，目标是总费用最小。

问：能用一个周期的总费用作为目标函数吗？为什么？

**目标函数——每天总费用的平均值**

• 问：为什么不考虑生产费用？在什么条件下才不考虑？

22

#### 模型假设

1. 产品每天的需求量为常数  $r$ ；

2. 每次生产准备费为  $c_1$ ，每天每件产品贮存费为  $c_2$ ；

3.  $T$  天生产一次（周期为  $T$ ），每次生产  $Q$  件（产量为  $Q$ ），  
且当贮存量降到零时， $Q$  件产品立即生产出来。

#### 建模目的

设  $r, c_1, c_2$  已知，求  $T, Q$ ，使每天总费用的平均值最小。

23

#### 模型建立

将贮存量表示为时间的函数  $q(t)$ ，

$t=0$  生产  $Q$  件，贮存量  $q(0)=Q$ ， $q(t)$  以需求  $r$  的速率递减，直到  $q(T)=0$ 。

$$\Rightarrow Q = rT \quad (1)$$

一周期的总费用为

$$\bar{C} = c_1 + c_2 \frac{Q}{2} T = c_1 + c_2 \frac{rT^2}{2}$$

**每天总费用平均值（目标函数）**

$$C(T) = \frac{\bar{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 r T}{2} \quad (2)$$

24

**模型求解**

求  $T$  使  $C(T) = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 r T}{2} \rightarrow \text{Min}$

$\frac{dC}{dT} = 0 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}} \quad Q = rT = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$

**模型分析** 经济批量订货公式 (EOQ)

$c_1 \uparrow \Rightarrow T, Q \uparrow \quad c_2 \uparrow \Rightarrow T, Q \downarrow \quad r \uparrow \Rightarrow T \downarrow, Q \uparrow$

**计算结果**  $c_1=5000(\text{元}), c_2=1(\text{元/天} \cdot \text{件}), r=100(\text{件/天})$

$\Rightarrow T=10(\text{天}), Q=1000(\text{件})$  25

**数学建模实例 3**

——市场经济中的蛛网模型

**现象**

供大于求  $\Rightarrow$  价格下降  $\Rightarrow$  减少产量

$\uparrow$   $\downarrow$

增加产量  $\Leftarrow$  价格上涨  $\Leftarrow$  供不应求

**问题**

商品数量与价格的振荡在什么条件下趋向稳定

当不稳定时政府能采取什么干预手段使之稳定

26

**蛛网模型**

$x_k \sim$  第  $k$  时段商品数量;  $y_k \sim$  第  $k$  时段商品价格

消费者的需求关系  $\Rightarrow$  需求函数  $y_k = f(x_k)$  减函数

生产者的供应关系  $\Rightarrow$  供应函数  $x_{k+1} = h(y_k)$  增函数

$y_k = g(x_{k+1})$

$f$  与  $g$  的交点  $P_0(x_0, y_0) \sim$  平衡点

一旦  $x_k = x_0$ , 则

$y_k = y_0, x_n = x_0, y_n = y_0 (n > k)$  27

**蛛网模型**

设  $x_1$  偏离  $x_0$   $x_1 \Rightarrow y_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow y_2 \Rightarrow x_3 \Rightarrow \dots$

$x_k \rightarrow x_0, y_k \rightarrow y_0 \quad P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow \dots \rightarrow P_0$

$P_0$  是稳定平衡点

$P_0$  是不稳定平衡点

$K_f < K_g$   $K_f > K_g$  28

**蛛网模型**

方程模型 在  $P_0$  点附近用直线近似曲线

$y_k = f(x_k) \Rightarrow y_k - y_0 = -\alpha(x_k - x_0) \quad (\alpha > 0)$

$x_{k+1} = h(y_k) \Rightarrow x_{k+1} - x_0 = \beta(y_k - y_0) \quad (\beta > 0)$

$x_{k+1} - x_0 = -\alpha\beta(x_k - x_0) \quad x_{k+1} - x_0 = (-\alpha\beta)^k (x_1 - x_0)$

$\alpha\beta < 1 \quad \alpha (=K_f) < \frac{1}{\beta} (=K_g) \Rightarrow x_k \rightarrow x_0 \quad P_0 \text{ 稳定}$

$\alpha\beta > 1 \quad \alpha (=K_f) > \frac{1}{\beta} (=K_g) \Rightarrow x_k \rightarrow \infty \quad P_0 \text{ 不稳定}$  29

**蛛网模型** 结果解释

考察  $\alpha, \beta$  的含义

$y_k - y_0 = -\alpha(x_k - x_0)$ ,  $\alpha \sim$  商品数量减少 1 单位, 价格上涨幅度

$x_{k+1} - x_0 = \beta(y_k - y_0)$ ,  $\beta \sim$  价格上涨 1 单位, (下时段) 供应的增量

$\alpha \sim$  消费者对需求的敏感程度  $\alpha$  小, 有利于经济稳定

$\beta \sim$  生产者对价格的敏感程度  $\beta$  小, 有利于经济稳定

$\Rightarrow \alpha\beta < 1$  经济稳定 30

### 蛛网模型

经济不稳定时政府的干预办法

1. 使  $\alpha$  尽量小, 如  $\alpha=0$

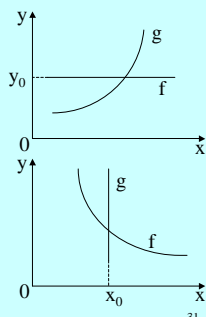
⇒ 需求曲线变为水平

以行政手段控制价格不变

2. 使  $\beta$  尽量小, 如  $\beta=0$

⇒ 供应曲线变为竖直

靠经济实力控制数量不变



31

### 数学建模实例 4

——人口预报

背景

世界人口增长概况

年	1625	1830	1930	1960	1974	1987	1999
人口(亿)	5	10	20	30	40	50	60

中国人口增长概况

年	1908	1933	1953	1964	1982	1990	1995
人口(亿)	3	4.7	6	7	10.1	11.3	12

研究人口变化规律

控制人口过快增长

32

### 指数增长模型

常用的计算公式 今年人口  $x_0$ , 年增长率  $r$

k年后人口

$$x_k = x_0(1+r)^k$$

马尔萨斯 (1788--1834) 提出的指数增长模型

$x(t)$  ~ 时刻  $t$  人口

$r$  ~ 人口(相对)增长率(常数)

$$x(t+\Delta t) - x(t) = rx(t)\Delta t$$

$$x(t) = x_0 e^{rt}$$

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = x_0(e^r)^t \approx x_0(1+r)^t$$

33

### 指数增长模型的应用及局限性

- 与19世纪以前欧洲一些地区人口统计数据吻合
- 适用于19世纪后迁往加拿大的欧洲移民后代
- 可用于短期人口增长预测
- 不符合19世纪后多数地区人口增长规律
- 不能预测较长期的人口增长过程

19世纪后人口数据 ⇒ 人口增长率  $r$  不是常数(逐渐下降)

34

### 阻滞增长模型 (Logistic模型)

人口增长到一定数量后, 增长率下降的原因:

资源、环境等因素对人口增长的阻滞作用

且阻滞作用随人口数量增加而变大 ⇒  $r$  是  $x$  的减函数

假定:

$$r(x) = r - sx \quad (r, s > 0)$$

$r$  ~ 固有( $x$ 很小)增长率

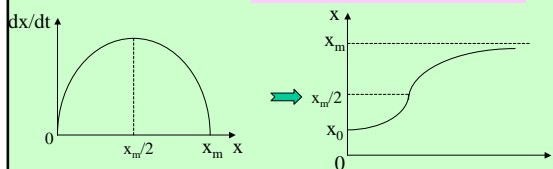
$x_m$  ~ 人口容量 (资源、环境能容纳的最大数量)

$$\Rightarrow r(x_m) = 0 \Rightarrow s = \frac{r}{x_m}$$

$$r(x) = r(1 - \frac{x}{x_m})$$

### 阻滞增长模型 (Logistic模型)

$$\frac{dx}{dt} = rx \Rightarrow \frac{dx}{dt} = r(x)x = rx(1 - \frac{x}{x_m})$$



$$x(t) = \frac{x_m}{1 + (\frac{x_m}{x_0} - 1)e^{-rt}}$$

$x(t)$  ~ S形曲线,  
 $x$  增加先快后慢

36

### 模型的参数估计

用指数增长模型或阻滞增长模型作人口预报，必须先估计模型参数  $r$  或  $r, x_m$

- 利用统计数据用最小二乘法作拟合

例：美国人口数据（单位~百万）

1790	1800	1810	1820	1830	.....	1950	1960	1970	1980
3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	.....	150.7	179.3	204.0	226.5

→  $r=0.2072, x_m=464$

- 专家估计

37

### 模型检验

用模型预报1990年美国人口，与实际数据比较

$$x(1990) = x(1980) + \Delta x = x(1980) + rx(1980)[1 - x(1980)/x_m]$$

$$\Rightarrow x(1990) = 250.5 \quad \text{实际为} 251.4 \text{ (百万)}$$

### 模型应用——人口预报

用美国1790~1990年人口数据重新估计参数

$$\Rightarrow r=0.2083, x_m=457.6 \quad \Rightarrow \begin{matrix} x(2000)=275.0 \\ x(2010)=297.9 \end{matrix}$$

Logistic模型在经济领域中的应用(如耐用消费品的售量)

38

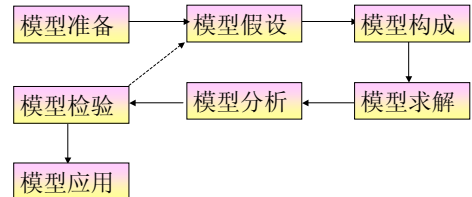
### 数学建模的基本方法和步骤

#### 基本方法

- 机理分析** 根据对客观事物特性的认识，找出反映内部机理的数量规律
  - 测试分析** 将研究对象看作“黑箱”，通过对量测数据的统计分析，找出与数据拟合最好的模型
  - 二者结合** 机理分析建立模型结构，测试分析确定模型参数
- 机理分析没有统一的方法，主要通过实例研究(Case Studies)来学习。以下建模主要指机理分析

39

### 数学建模的一般步骤



40

### 数学建模的一般步骤

#### 模型假设

- 针对问题特点和建模目的
- 作出合理的、简化的假设
- 在合理与简化之间作出折中

#### 模型构成

- 用数学的语言、符号描述问题
- 发挥想象力
- 使用类比法
- 尽量采用简单的数学工具

41

### 数学建模的一般步骤

#### 模型求解

各种数学方法、数学软件和计算机技术

#### 模型分析

如结果的误差分析、模型对数据的稳定性分析

#### 模型检验

与实际现象、数据比较，检验模型的合理性、适用性

#### 模型应用

42



### 怎样学习数学建模

数学建模与其说是一门技术，不如说是一门艺术

技术大致有章可循

艺术无法归纳成普遍适用的准则

想象力

洞察力

判断力

• 学习、分析、评价、改进别人作过的模型

• 亲自动手，认真作几个实际题目

43



### 全国大学生数学建模竞赛 (CUMCM)

教育部、中国工业与应用数学学会 (CSIAM) 共同主办  
全国大学生中规模最大的课外科技竞赛

每年9月举行，连续3天 (今年为26~29日)

三人一队，任意组合 (大二、三、四)，学校选拔

颁发获奖证书，发表优秀论文

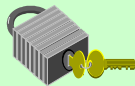
• <http://csiam.edu.cn/mcm>

• <http://www.163.com> 教育频道

• <http://www.comap.com> 美国竞赛

44

### 布置实验内容



#### 目的

学习初步的建模方法，培养建模意识

#### 内容

《数学实验》第48页 4.2实验内容

- 1) ;
- 4) ;
- 6) 。

45