计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：　高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：　李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第七章　矩阵特征值计算

7.2.3　吉文斯旋转变换

【**定义** 1. **吉文斯旋转矩阵** (Givens Rotation Matrix)】

n 阶正交矩阵 $P = P(i, j, \theta) =$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & i & & & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} I & & & & & & \\ & \cos\theta & \cdots & & & \sin\theta & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & -\sin\theta & \cdots & & & \cos\theta & \\ & & & & & & I \end{pmatrix} \end{array}$$

称为 Givens 旋转矩阵. 倘若引入 n 维标准单位向量

$$e_i = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0)^T,$$

$$e_j = (0, \cdots, 0, \overset{j}{1}, 0, \cdots, 0)^T$$

Givens 旋转矩阵 可表达为

$P = P(i, j, \theta) =$

$I + s(e_i e_j^T - e_j e_i^T) + (c-1)(e_i e_i^T + e_j e_j^T).$

【**定义** 2. **平面旋转矩阵** (Planar Rotation Matrix)】

2 阶正交矩阵

$$P = P(i, j, \theta) = P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

称为 平面旋转矩阵 (Planar Rotation Matrix).

我们经常简单标记三角函数为 $c=\cos\theta, s=\sin\theta$, 于是有 平面旋转矩阵 (Planar Rotation Matrix) 为

$$P=\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$

【 定理 1. **平面旋转矩阵** (Planar Rotation Matrix) **基本性质 】**

平面旋转矩阵 (Rotation Matrix) 具有许多优良的基本性质. 即:

(1) 平面旋转矩阵 $P = P(i, j, \theta)$ 是 "广义排列阵": P 与同阶单位矩阵 I 仅仅在矩阵里的 4 个位置 (i, i),(j, j),(i, j),(j, i) 有所不同, 用三角函数 $c = \cos\theta, s = \sin\theta$ 取代了 1 或 0.

由此, 平面旋转矩阵 $P = P(i, j, \theta)$ 左乘以或右乘以某个矩阵, 类似于用排列阵 $P = P(i, j)$ 左乘以或右乘以某个矩阵产生的效果, 只是除了调换元素的位置以外, 又多了旋转的效果: 只改变向量的方向, 不改变向量的长度.

(2) 平面旋转矩阵 $P = P(i, j, \theta)$ 是正交阵： $P^T = P^{-1}$; 或者等价地， $P^T P = I$.

(3) 平面旋转矩阵 $P = P(i, j, \theta)$ 左乘以矩阵 (即对矩阵进行"行旋转变换") 只要计算第 i 行与第 j 行元素:

$$PA = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{ik} \\ a_{jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{ik} \\ a'_{jk} \end{pmatrix}$$

(4) 平面旋转矩阵 $P = P(i, j, \theta)$ 右乘以矩阵 (即对矩阵进行 "列旋转变换") 只要计算第 i 列与第 j 列元素:

$$AP = \left(\; a_{ik}, a_{jk} \; \right) \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} = \left(\; a'_{ik}, a'_{jk} \; \right)$$

【 **定理** 2. Givens **旋转约化定理** 】

对非零向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)^T, x_i^2+x_j^2\neq 0$, 存在平面旋转阵 $P=P(i,j,\theta)$ 使分量 x_j 化为 0. 即

$$\begin{cases} Px & = P(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)^T \\ & = (x_1,x_2,\cdots,x_i',\cdots,0,\cdots,x_n)^T \\ x_i' & = \sqrt{x_i^2+x_j^2} \\ \theta & = \arctan\dfrac{x_j}{x_i} \end{cases}$$

【 证明 】

取三角函数为

$$c = \cos\theta = \frac{x_i}{x_i'} = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}, \qquad s = \sin\theta = \frac{x_j}{x_i'} = \frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

则由矩阵乘法有

$$
\begin{cases}
x_i' &= cx_i + sx_j = \dfrac{x_i^2 + x_j^2}{x_i'} = \dfrac{x_i^2 + x_j^2}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\
x_j' &= -sx_i + cx_j = \dfrac{-x_i x_j + x_i x_j}{x_i'} = 0 \\
x_k' &= x_k, \qquad k \neq i, j. \\
\theta &= \arctan(\tan\theta) = \arctan\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \arctan\dfrac{x_j}{x_i}
\end{cases}
$$

于是取旋转角度为 $\theta = \arctan\dfrac{x_j}{x_i}$ 时，我们有在此平面旋转变换之下的向量为

$$\begin{aligned} Px &= P(x_1', x_2', \cdots, x_i', \cdots, x_j', \cdots, x_n')^T \\ &= (x_1, x_2, \cdots, x_i', \cdots, 0, \cdots, x_n)^T \\ &= (x_1, x_2, \cdots, \sqrt{x_i^2 + x_j^2}, \cdots, 0, \cdots, x_n)^T \end{aligned}$$

即向量的分量 x_j 化为 0.

【例 1. Givens **旋转变换约化算法】**

对于如下非零向量 $x=(4,3)^T$，存在系列 Givens 旋转变换矩阵 $P=P(i,j,\theta)$ 的乘积形式的正交矩阵 Q^T，使非零向量除首个分量之外的所有分量 x_j 化为 0. 即能让此非零向量与标准单位向量 $e_1=(1,0)^T$ 平行： $Q^Tx=\sigma e_1$. $\sigma\neq 0$ 为常数. 并计算所用正交矩阵 Q^T.

解

由 Givens 旋转约化定理，对于非零向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)^T, x_i^2+x_j^2\neq 0$, 存在平面旋转阵 $P=P(i,j,\theta)$ 使分量 x_j 化为 0. 即

$$\begin{cases} Px &= P(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)^T \\ &= (x_1,x_2,\cdots,x_i',\cdots,0,\cdots,x_n)^T \\ x_i' &= \sqrt{x_i^2+x_j^2} \\ \theta &= \arctan\dfrac{x_j}{x_i} \end{cases}$$

对于非零向量 $x = (4,3)^T$ ，存在 2 阶 Givens 旋转变换阵 $P(1,2,\theta_1)$ 使分量 $x_2 = 3$ 化为 0 且 $P(1,2,\theta_1)x = \alpha_1 = \sigma e_1$.

下面来逐个计算各个参数、向量和矩阵：

$x_1' = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$

取三角函数为 $c = \cos\theta = \dfrac{x_i}{x_i'} = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \dfrac{4}{5}$

$s = \sin\theta = \dfrac{x_j}{x_i'} = \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \dfrac{3}{5}$.

于是取旋转角度为 $\theta_1 = \arctan\dfrac{x_j}{x_i} = \arctan\dfrac{3}{4}$ 时，我们有在此平面旋转变换之下的向量为

$$P(1,2,\theta_1)x \quad = P(1,2,\theta_1)(4,3)^T = (5,0)^T = \sigma e_1 = 5e_1.$$

而相应的正交矩阵 Q^T 即 2 阶 Givens 旋转变换矩阵取为

$$Q^T = P(1, 2, \theta_1) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

约化成功. $\square$

【 解毕 】