数学实验

Experiments in Mathematics

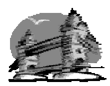
实验4 常微分方程数值解

为什么要学习微分方程数值解

- 微分方程是研究函数变化规律的重要工具，有着广泛的应用。
- 多数微分方程没有解析解，数值解法是求解的重要手段，如

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + x \qquad \begin{aligned}\dot{x}(t) &= -axy \\ \dot{y}(t) &= axy - by\end{aligned}$$

实验4的主要内容

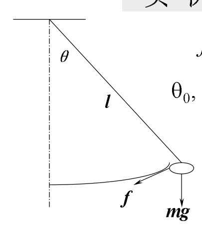


1. 两个最常用的数值解法:
- 欧拉（**Euler**）方法
- 龙格-库塔（**Runge-Kutta**）方法

2. 龙格-库塔方法的**MATLAB**实现

3. 实际问题用微分方程建模，并求数值解

实 例 1 单 摆 运 动



$f = ma$ ⇨ $ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$ (1)

θ_0, 无初速 ⇨ $\theta(0) = \theta_0,\ \dot{\theta}(0) = 0$ (2)

在 θ 不大的条件下 $\sin\theta \approx \theta$

$(1) \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ (3)

(3),(2)的解 $\theta(t) = \theta_0 \cos\omega t,\ \omega = \sqrt{g/l}$

θ_0 较大时 (1),(2)无解析解，如何求 θ (t)

实例2 食饵-捕食者模型

食饵（甲）数量 $x(t)$, 捕食者（乙）数量 $y(t)$

甲独立生存的增长率r $\quad \dot{x} = rx$

乙使甲的增长率减小，减小量与y成正比 $\quad \dot{x}(t) = (r - ay)x \quad (1)$

乙独立生存的死亡率d $\quad \dot{y} = -dy$

甲使乙的死亡率减小，减小量与x成正比 $\quad \dot{y}(t) = -(d - bx)y = (-d + bx)y \quad (2)$

在初始条件 $x(0) = x_0',\ y(0) = y_0'$ 下求解(1),(2)

(1),(2) 无解析解

"常微分方程初值问题数值解"的提法

设$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$的解 $y = y(x)$存在且唯一

不求解析解 $y = y(x)$，而在一系列离散点

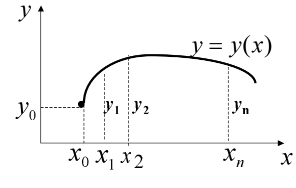
$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$$

求$y(x_n)$的近似值

记作y_n $(n = 1, 2, \cdots)$

通常取等步长h

$x_n = x_0 + nh$



欧 拉 方 法

$y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$

基本思路 $y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x, y(x)),\ x \in [x_n, x_{n+1}]$

在小区间$[x_n, x_{n+1}]$上用差商$[y(x_{n+1}) - y(x_n)]/h$ 代替左端的导数y',右端$f(x,y)$的x取$[x_n, x_{n+1}]$内某一点的值.

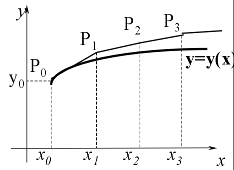
取不同的点 ⇒ 各种欧拉公式

向前欧拉公式 x取左端点x_n

$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$

近似：$y_n \approx y(x_n)$,$y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$

$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),\ n = 0, 1, \cdots$



误差分析 假设到第n步公式右端y_n没有误差, 即$y_n = y(x_n)$，从x_n到x_{n+1}一步的计算值y_{n+1}与精确值$y(x_{n+1})$之差, 称为局部截断误差.

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)$$

$$y_{n+1} = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) = y(x_n) + hy'(x_n)$$

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3) = O(h^2)$$

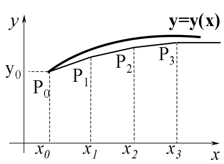
若一种算法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$，则称该算法具有 **p** 阶精度　　向前欧拉公式具有1阶精度

局部截断误差主项为 $\frac{h^2}{2}y''(x_n)$

欧拉方法 $y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x, y(x)),\ x \in [x_n, x_{n+1}]$

向后欧拉公式 x取右端点x_{n+1}, $y_n \approx y(x_n)$,$y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$

$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}),\ n = 0, 1, \cdots$ 右端y_{n+1}未知



隐式公式，迭代求解

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})$$

$$k = 0,1,2,\cdots,\quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$\lim_{k\to\infty} y_{n+1}^{(k)} = y_{n+1}$$

向后欧拉公式的误差

$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}),\ n = 0, 1, \cdots$

$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)$

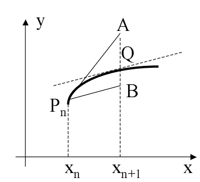
向后欧拉公式具有1阶精度

向前欧拉公式局部误差主项 $\frac{h^2}{2}y''(x_n)$ ~QA

向后欧拉公式局部误差主项 $-\frac{h^2}{2}y''(x_n)$ ~QB

向前、向后欧拉公式的右端平均，则两个误差主项刚好抵消

⇨ 梯形公式



向前欧拉公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

向后欧拉公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$

梯形公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})],\ n = 0, 1, \cdots$$

梯形公式具有2阶精度　局部截断误差主项 $-\frac{h^3}{12}y'''(x_n)$

隐式公式迭代求解 $y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n)$

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})]$$

$$k = 0,1,2,\cdots,\quad n = 0,1,2,\cdots$$

改进的欧拉公式

将梯形公式的迭代过程简化为两步

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad \text{预测}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \quad \text{校正}$$

$$n = 0,1,2,\cdots$$

可表示为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_{n+1}, y_n + hk_1)$$

欧拉公式都可以推广到解常微分方程组、高阶微分方程

龙格-库塔方法

$y' = f(x,y),\ \ y(x_0) = y_0$

解$y = y(x)$满足$y'(x) = f(x, y(x))$

基本思想

微分中值定理 $\dfrac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} = y'(x_n + \theta h),\ 0 < \theta < 1$

即 $y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\overline{K},\quad \overline{K} = f(x_n + \theta h, y(x_n + \theta h))$

向前欧拉公式 $\overline{K} = f(x_n, y_n)$　　$\overline{K}$ ~ 平均斜率

改进的欧拉公式 $\overline{K} = f(x_n, y_n), f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})$ 的平均值

在区间$[x_n, x_{n+1}]$内多取几个点，将它们的斜率加权平均作为$\overline{K}$，就有可能构造出精度更高的计算公式。

龙格-库塔方法　2阶龙格—库塔公式

在区间$[x_n, x_{n+1}]$内取两个点，将它们的斜率加权平均作为平均斜率

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1), \quad 0 < \alpha, \beta \le 1 \end{cases}$$

确定$\lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta$使截断误差尽量小

取$\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2, \alpha = \beta = 1$ ⇨

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$
$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_{n+1}, y_n + hk_1)$$

则$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$

2阶龙格—库塔公式具有2阶精度

即改进的欧拉公式

龙格-库塔方法　4阶龙格—库塔公式

在区间$[x_n, x_{n+1}]$内取四个点，将它们的斜率加权平均作为平均斜率

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + h/2, y_n + hk_1/2) \\ k_3 = f(x_n + h/2, y_n + hk_2/2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases}$$

4阶龙格—库塔公式具有**4**阶精度

龙格—库塔公式也可以推广到解常微分方程组、高阶微分方程

MATLAB中的龙格—库塔方法

```
[t,x]=ode23('f',ts,x0,options)
[t,x]=ode45('f',ts,x0,options)
```

f 为待解方程写成的 **m**文件名(方程组应以x的向量形式写成)

t,x 为输出的自变量和函数值（列向量）

ts=[t0,t1,t2,.....tf]，输出在指定时刻t0, t1, t2, ... tf给出；等步长时用ts=t0:k:tf

Options 用于设定误差限（可以缺省，缺省时设定为相对误差10^{-3}，绝对误差10^{-6}），程序为:

options=odeset('reltol',rt,'abstol',at)

这里rt,at 分别为设定的相对误差和绝对误差

用MATLAB解常微分方程-实例1

MATLAB 5.3.lnk

shiyan41

单摆运动　$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta,\ \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0$

化为方程组　$\dot{x}_1 = x_2,\quad \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{l}\sin x_1$　　g=9.8　l=25

令$x_1 = \theta,\ x_2 = \dot{\theta},$　$x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = 0$

$x_{10} = 10^0 = 0.1745$

danbai.m

```
function y=danbai(t,x)
g=9.8;l=25;
y=[x(2),-g/l*sin(x(1))]';
```

```
ts=0:0.1:11;
x0=[0.1745,0];
[t,x]=ode23('danbai',ts,x0);
```

近似解

$\theta(t) = \theta_0 \cos\sqrt{g/l}\,t$

周期 $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ =10.04

单摆运动的数值解 x(t)与近似解θ(t)

初始角10^0

t	x	θ
0	0.1745	0.1745
0.1000	0.1742	0.1742
0.2000	0.1731	0.1731
0.3000	0.1714	0.1714
0.4000	0.1691	0.1691
0.5000	0.1661	0.1660
0.6000	0.1624	0.1623
------	------	------
9.8000	0.1718	0.1726
9.9000	0.1731	0.1739
10.0000	0.1738	0.1745
10.1000	0.1739	0.1744
10.2000	0.1732	0.1736
10.3000	0.1719	0.1721

初始角30^0

t	x	θ
0	0.5236	0.5236
0.1000	0.5226	0.5226
0.2000	0.5197	0.5195
0.3000	0.5148	0.5144
0.4000	0.5080	0.5073
0.5000	0.4993	0.4982
0.6000	0.4887	0.4871
------	------	------
9.8000	0.5057	0.5179
9.9000	0.5127	0.5217
10.0000	0.5177	0.5235
10.1000	0.5208	0.5232
10.2000	0.5219	0.5208
10.3000	0.5211	0.5164

用MATLAB解常微分方程－实例2　食饵－捕食者模型

$$\dot{x}(t)=(r-ay)x$$
$$\dot{y}(t)=(-d+bx)y$$
$x(0)=x_0',\ y(0)=y_0'$

⇨

$$\dot{x}_1=(r-ax_2)x_1$$
$$\dot{x}_2=(-d+bx_1)x_2$$
$x_1(0)=x_{10},x_2(0)=x_{20}$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r-ax_2, & 0\\ 0, & -d+bx_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$x=[x_1,x_2]^T$　$\dot{x}=Ax,\quad A=diag[r-ax_2,-d+bx_1]$

$x(0)=[x_{10},x_{20}]^T$

$$r=1,d=0.5,a=0.1,b=0.02,x_{10}=20,x_{20}=4$$

食饵－捕食者模型

shiyan42

shier.m

```
function y=shier(t,x)
r=1;d=0.5;a=0.1;b=0.02;
y=diag([r-a*x(2),-d+b*x(1)])*x;
```

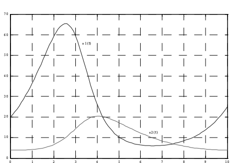
```
Or  y=[(r-a*x(2))*x(1),(-d+b*x(1))*x(2)]';
```

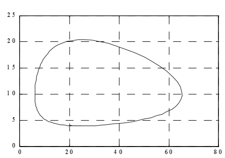
shiyan42

```
ts=0:0.1:10;x0=[20,4];
[t,x]=ode45('shier',ts,x0),
plot(t,x),grid,gtext('x1(t)'),gtext('x2(t)'),
pause,
plot(x(:,1),x(:,2)),grid,
xlabel('x1'),ylabel('x2')
```

注：ts的终值(=10)和步长=(0.1)的确定

t	x1	x2
0	20.0000	4.0000
0.1000	21.2406	3.9651
0.2000	22.5649	3.9405
0.3000	23.9763	3.9269
0.4000	25.4782	3.9247
……		
2.2000	62.8469	7.6873
2.3000	64.1077	8.3061
2.4000	64.9786	8.9920
2.5000	65.3992	9.7450
2.6000	65.3076	10.5643
……		
9.5000	18.4416	4.0394
9.6000	19.5821	3.9907
9.7000	20.8007	3.9520
9.8000	22.1010	3.9237
9.9000	23.4865	3.9064
10.0000	24.9604	3.9004





食饵－捕食者模型

$\dot{x}(t)=(r-ay)x$　$\dot{y}(t)=-(d-bx)y$

$x(0)=x_0',\ y(0)=y_0'$　$r=1,d=0.5,a=0.1,b=0.02,x_0=20,y_0=4$

计算结果（数值，图形）

⇩ 观察，猜测

x(t),y(t)是周期函数，相图(x,y)是封闭曲线；

x(t),y(t)的周期约为9.6;

x_{max}=65.5, x_{min}=6, y_{max}=20.5, y_{min}=3.9.

用数值积分可算出**x(t), y(t)**一周期的平均值　shiyan43

x(t)的平均值约为25, y(t)的平均值约为10

食饵－捕食者模型的进一步研究

$\dot{x}(t)=(r-ay)x$
$\dot{y}(t)=-(d-bx)y$
⇨ $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x(r-ay)}{y(-d+bx)}$

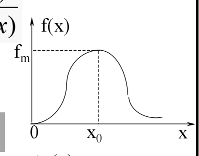
⇨ $\dfrac{-d+bx}{x}dx=\dfrac{r-ay}{y}dy$

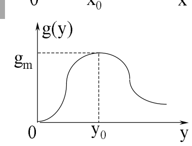
⇨ $f(x)g(y)=c$（c由初始条件确定）

$$f(x)=x^d e^{-bx},\ g(y)=y^r e^{-ay}$$

$f(0)=f(\infty)=0,\ f(x_0)=f_m,\ x_0=\dfrac{d}{b}=25$

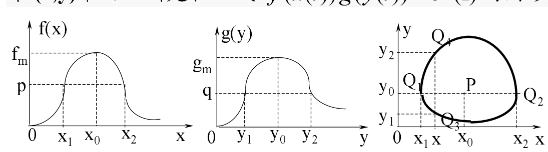
$g(0)=g(\infty)=0,\ g(y_0)=g_m,\ y_0=\dfrac{r}{a}=10$





食饵－捕食者模型的进一步研究

在**(x,y)**平面上研究相轨线 $f(x(t))g(y(t))=c$ (1) 的图形



$c=f_m g_m$ 时, $x=x_0$, $y=y_0$, (1)退化为P点——中心

$c<f_m g_m$, 设$c=pg_m$, 令$y=y_0$, 则$f(x)=p<f_m$ 必存在$x_1<x_0<x_2$, 使$f(x_1)=f(x_2)=p$ ⇨ **$Q_1(x_1,y_0)$ $Q_2(x_2,y_0)$**

$x_1<x<x_2$, $f(x)g(y)=pg_m$, 则$g(y)=q<g_m$, 必存在$y_1<y_0<y_2$, 使$g(y_1)=g(y_2)=q$, ⇨ **$Q_3(x,y_1)$ $Q_4(x,y_2)$**

(1)是封闭曲线

食饵-捕食者模型的进一步研究

相轨线是封闭曲线 ⟺ x(t),y(t)是周期函数(周期记 T)

求x(t),y(t)在一周期的平均值 $\bar{x}, \bar{y}$

$\dot{y}(t)=(-d+bx)y$ ⇒ $x(t)=\frac{1}{b}(\frac{\dot{y}}{y}+d)$

⇒ $\bar{x}=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt=\frac{1}{T}(\frac{\ln y(T)-\ln y(0)}{b}+\frac{dT}{b})$ ⇒ $\bar{x}=\frac{d}{b}$

$\dot{x}(t)=(r-ay)x$ ⇒ ····· ⇒ $\bar{y}=\frac{r}{a}$

轨线中心 $P(x_0,y_0): x_0=\frac{d}{b}, y_0=\frac{r}{a}$ ⇒ $\bar{x}=x_0$, $\bar{y}=y_0$

食饵-捕食者模型

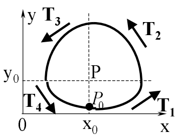
$x_0=\frac{d}{b}, y_0=\frac{r}{a}$

$\dot{x}(t)=(r-ay)x$ $\dot{y}(t)=-(d-bx)y$

$x(0)=x_0', y(0)=y_0'$ $P_0(x_0', y_0')$

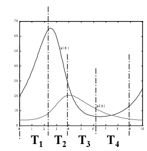
$T_1: x(t)\uparrow\ y(t)\uparrow$ $T_2: x(t)\downarrow y(t)\uparrow$

$T_3: x(t)\downarrow\ y(t)\downarrow$ $T_4: x(t)\uparrow y(t)\downarrow$



捕食者数量 $\bar{y}=\frac{r}{a}$ **r** ~食饵增长率; **a** ~捕食者掠取食饵能力

食饵数量 $\bar{x}=\frac{d}{b}$ **d** ~捕食者死亡率; **b** ~食饵供养捕食者能力



布置实验

目的

1. 用**MATLAB**软件掌握求微分方程数值解的方法，并对结果作初步分析;
2. 通过实例学习用微分方程模型解决简化的实际问题。

内容

1. c; 2; 5.