

## 1999年全国大学生数学建模竞赛C题（大专组）

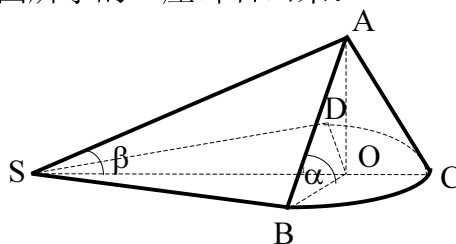
### 煤矸石堆积

煤矿采煤时，会产出无用废料——煤矸石。在平原地区，煤矿不得不征用土地堆放矸石。通常矸石的堆积方法是：

架设一段与地面角度约为  $\beta = 25^\circ$  的直线形上升轨道（角度过大，运矸车无法装满），用在轨道上行驶的运矸车将矸石运到轨道顶端后向两侧倾倒，待矸石堆高后，再借助矸石堆延长轨道，这样逐渐堆起如下图所示的一座矸石山来。

现给出下列数据：

矸石自然堆放安息角（矸石自然堆积稳定后，其坡面与地面形成的夹角） $\alpha \leq 55^\circ$ ；



矸石容重（碎矸石单位体积的重量）约 2 吨/米<sup>3</sup>；

运矸车所需电费为 0.50 元/度（不变）；

运矸车机械效率（只考虑堆积坡道上的运输）初始值（在地平面上）约 30%，坡道每延长 10 米，效率在原有基础上约下降 2%；

土地征用费现值为 8 万元/亩，预计地价年涨幅约 10%；

银行存、贷款利率均为 5%；

煤矿设计原煤产量为 300 万吨/年；

煤矿设计寿命为 20 年；

采矿出矸率（矸石占全部采出的百分比）一般为 7%~10%。

另外，为保护耕地，煤矿堆矸土地应比实际占地多征用 10%。

现在煤矿设计中用于处理矸石的经费（只计征地费及堆积时运矸车用的电费）为 100 万元/年，这笔钱是否够用？试制订合理的年度征地计划，并对不同的出矸率预测处理矸石的最低费用。

### 问题分析

处理矸石费用：征地费；电费

征地费年涨幅10% > 贷款利率5% → 20年用地一次征用

20年矸石总量（体积）一定，堆积1个矸石山用地最少

1个矸石山 → 征地费最少



矸石山高度增加 → 运矸车效率下降 → 电费增加

堆积几个矸石山取决于征地费和电费的比例

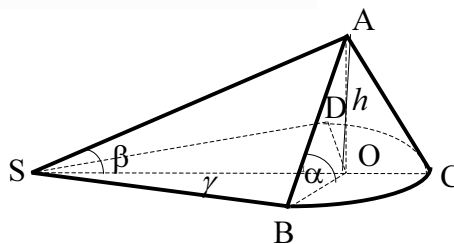
### 模型假设

1. 矸石山与地面夹角  $\alpha = 55^\circ$ ，运矸车道与地面夹角  $\beta = 25^\circ$ ；
2. 矸石均匀堆积，容重取  $c = 2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ；
3. 运矸车电费 0.5 元/度，效率由初值 30% 按坡道延长 10 米下降 2% 递减；
4. 原煤产量 300 万吨/年，理解为去掉矸石的净煤产量，共 20 年；
5. 土地征用费现值 8 万元/亩，年涨幅 10%，最多于每年初征地一次；
6. 出矸率 7%~10%，征地需比堆积用地多 10%；
7. 煤矿用于处理矸石的经费 100 万元/年，理解为每年初一次拨出；
8. 银行利率 5%，为复利，煤矿使用银行资金存贷自由；
9. 征地费于当时付出，电费于当年内付出，不可拖欠。

模型  
建立

## 1. 矸石山底面积、体积与高度的关系

矸石山由A-SBOD  
(四棱锥)和A-BCDO  
(不完全圆锥)组成



$$\sin \gamma = \frac{h / \operatorname{tg} \alpha}{h / \operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow \gamma = 19^{\circ}$$

矸石山底面积  $\tilde{S} = h^2 \left( \frac{\cos \gamma}{\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha} + \frac{\gamma + \pi / 2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = 2.352 h^2 (m^2)$

占地面积  $S(h) = 1.1 \tilde{S} = 2.587 h^2 (m^2)$

矸石山体积  $V(h) = \tilde{S} h / 3 = 0.784 h^3 (m^3)$

## 2. 矸石山体积 $V$ ,高度 $h$ ,占地面积 $S$ 与出矸率 $p$ 的关系

$Q$ ~年出矸量,  $Q_1$ ~年原煤产量, 出矸率 $p = Q / (Q + Q_1)$

$$q = \frac{p}{1-p} \quad Q = q Q_1 = q \times 3 \times 10^9 (kg / 年)$$

矸石体积 $V = Q / c$ (容重) $= 1.5 q (\times 10^6 m^3 / 年)$

$t$ 年后矸石山体积  $V(t, p) = 1.5 q t (\times 10^6 m^3)$   $(p=10\%)$   
 $t=1 \quad t=20$

$t$ 年后矸石山高度  $h(t, p) = 124.1 (q t)^{1/3} (m)$   $h=60 \quad 162$

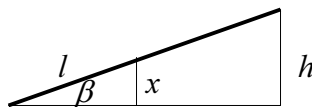
$t$ 年后占地面积  $S(t, p) = 59.77 (q t)^{2/3} (亩)$   $S=14 \quad 102$

若 $p=10\%$ , 20年1个矸石山的征地费为 $R=8 \times 102=816$ (万元)

每年1个矸石山的征地费 $8 \times 14=112$ (万元/年)!

### 3. 运矸车电费

效率由初值30%按坡道延长10米下降2%



设坡道行程  $l$ ,  $l = x / \sin \beta$  ( $x$  为高程), 则运矸车机械效率

$$\eta(x) = 0.3(1 - 0.02)^{l/10} = 0.3 \times 0.98^{x/10 \sin \beta} = 0.3e^{-0.00478x}$$

矸石堆积到  $h$   
所作的功为

$$J(h) = \int_0^h \frac{c g x}{\eta(x)} dV(x) \quad V(x) = 0.784x^3$$

$$J(h) = 1.537 \int_0^h x^3 e^{0.00478x} dx (\times 10^5 \text{ 焦耳})$$

1 度(电) =  $3.6 \times 10^6$  焦耳,  
电费 0.5 元/度

$$\text{电费 } W(h) = 0.0213 \int_0^h x^3 e^{0.00478x} dx (\text{元})$$

### 3. 运矸车电费

(1个矸石山)  $t$ 年后矸石山高度  $h(t, p) = 124.1(qt)^{1/3} (m)$

$$W = 0.0213 \int_0^h x^3 e^{0.00478x} dx (\text{元}) = 168q^{4/3} \int_0^t t^{1/3} \exp(0.59(qt)^{1/3}) dt (\text{万元})$$

若  $p=10\%$ , 按年度的电费 (万元) 如下

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w(t)	8.50	14.25	18.00	21.09	23.82	26.32	28.64	30.83	32.92	34.93
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
w(t)	36.86	38.73	40.55	42.33	44.07	45.77	47.44	49.08	50.69	52.28

将20年电费按利率5%折合成现值

$$W = \sum_{t=1}^{20} 1.05^{-(t-1)} w(t) = 404 (\text{万元})$$

#### 4. 总经费与征地费、电费的比较

总经费(100万元/年  
×20年)折合成现值

$$S = 100 \sum_{t=1}^{20} 1.05^{-(t-1)} = 1269 \text{ (万元)}$$

$p=10\%$ , 1个矸石山的征地费(现值) $R=816$ (万元)

$R + W$

$p=10\%$ , 1个矸石山的电费(现值)  $W=404$ (万元)

$=1220$

#### 结论

开始时按 10%的出矸率为 20 年堆积矸石征地 102 亩，不足经费向银行贷款，以后每年用当年经费缴电费并还贷，20 年经费刚好够用。

#### 讨论

1. 引入折扣因子  $g(t) = 1.05^{-t} = e^{-0.049t}$ ，  
简化电费计算（连续化）

$$\tilde{W}(p) = 168q^{4/3} \int_0^{20} t^{1/3} \exp(0.59(qt)^{1/3} - 0.049t) dt \text{ (万元)}$$

对不同 $p$ 的费用为

出矸率 $p$	总电费（万元）	征地费（万元）	总费用（万元）
0.07	218.6	628.2	846.8
0.08	271.9	691.7	963.6
0.09	330.8	753.7	1084.5
0.10	395.3	814.5	1209.8
0.11	465.7	874.4	1340.1

## 讨论

2. 在一般情况下有“堆积几个矸石山费用最小”的问题。可用最短路或动态规划等方法解决。
3. 据我国“土地法”有关规定，征入后闲置二年以上的土地将被收回。如把已征入但未堆积矸石的土地视为闲置，则只能两年征地一次，费用将大大增加，原有经费不足。
4. 将原煤理解为包含煤矸石，则在同一出矸率下出矸量将减少，致使费用减少。