计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：　高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：　李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

§5.4 向量和矩阵的范数

§5.4.1 向量的范数

由于实轴的建立，“负实数”和“相反数”出现了，于是人们为着得到习惯的非负数，引入了度量“绝对值”：一个实数 x 的绝对值是非负数 $|x| \geq 0$. 除此之外，“绝对值”还有显而易见的性质：

(1) 非负性 (规范性)(Non-negative)： $|x| \geq 0$ ；等号成立当且仅当 $x = 0$.

(2) 齐次性 (Homogenuity):$|\lambda x| = |\lambda||x|$, 对任意数域中的数 $\lambda \in F$ 成立.

(3) 三角不等式 (Trigonometric Inequality)：
$|x + y| \leq |x| + |y|$.

再后来，由于复平面的建立，又出现了根本不可比较大小的“虚数” $x+yi, x, y \in R$. 于是人们又为着得到习惯的非负数，引入了度量“模”：一个虚数 $x+yi$ 的“模”是非负数

$$|x+yi| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} \geq 0$$

除此之外，“模”也有显而易见的性质：

(1) 非负性 (规范性)(Non-negative)： $|x+yi| \geq 0$ ；等号成立当且仅当 $x+yi=0$.

(2) 齐次性 (Homogenuity):$|\lambda(x+yi)| = |\lambda||x+yi|$, 对任意数域中的数 $\lambda \in F$ 成立.

(3) 三角不等式 (Trigonometric Inequality)：

$|(x+yi)+(a+bi)| = \sqrt{|x+a|^2+|y+b|^2}$

$\leq \sqrt{|x|^2+|y|^2} + \sqrt{|a|^2+|b|^2} = |x+yi| + |a+bi|$

并且，人们发现，“模”除了满足关于“加和”比较的三角不等式之外，还成立关于“乘积”比较的不等式，即：

(4) 施瓦兹不等式 (Schwarz Inequality)：

$$|(x+yi)\cdot(a+bi)| = \sqrt{|ax-by|^2+|bx+ay|^2}$$

$$\leq \sqrt{|x|^2+|y|^2}\cdot\sqrt{|a|^2+|b|^2} = |x+yi|\cdot|a+bi|$$

于是，在人们发现了“向量”和“张量”（矩阵）之后，又打算为它们也建立一种度量体系，而且最好这样的度量也能满足与“实数绝对值”和“复数模”相似的一些性质．结果，“范数”应运而生了．并且，人们还喜欢把它当成一种连续函数（泛函数 Functional ）来看（如下所见，“范数”的确是一种连续函数），这样，有关连续函数的许多重要结论便可以理所当然地对范数成立．于是一种完备缜密的有关向量和矩阵的度量体系就此形成.

【**定义** 5.4.1. **向量范数** (Vector Norm)】对 n 维线性空间中的列向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 存在非负映照 $||\cdot||: V\to R^+\bigcup\{0\}$，满足如下条件:

(1) 非负性 (规范性)(Non-negative)： $||x||\geq 0$ ；等号成立当且仅当 $x=0$.

(2) 齐次性 (Homogenuity):$||\lambda x||=|\lambda|||x||$, 对任意数域中的数 $\lambda\in F$ 成立.

(3) 三角不等式 (Trigonometric Inequality)：
$||x+y||\leq||x||+||y||$.

事实上通常还将满足

(4) 施瓦兹不等式 (Schwarz Inequality)： $||x \cdot y|| \le ||x|| \cdot ||y||$.

则称 $||x|| \ge 0$ 为向量 x 的范数 (Norm). 定义了范数的 n 维线性空间 $(V, ||\cdot||)$ 称为赋范线性空间.

【 **定义** 5.4.2 】**常用向量范数** (Classical Norms)

容易验证，如下定义映照皆可作为 n 维实或复线性空间中的向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 的范数：

(1)2- 范数 (欧氏范数): $||x||_2=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2}$;

(2) ∞- 范数 (最大模范数)：

$||x||_\infty=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|\}$;

(3) 1- 范数 (绝对和范数)： $||x||_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

【**例 1**】求 n 维列向量 $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2})^T$ 的 3 种范数：

(1) 2- 范数 (欧氏范数)： $||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{n}{4}} = \frac{\sqrt{n}}{2}$;

(2) ∞- 范数： $||x||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\} = \max\{|\frac{1}{2}|, |\frac{1}{2}|, \cdots, |\frac{1}{2}|\} = \frac{1}{2}$;

(3) 1- 范数 (绝对和范数)： $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\frac{1}{2}| = \frac{n}{2}$.

【**例 2**】求 2 维列向量 $x=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})^T$ 的 3 种范数：

(1) 2- 范数 (欧氏范数)：

$$||x||_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=\sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}}=\sqrt{1}=1;$$

(2) ∞- 范数：

$$||x||_\infty=\max\{|x_1|,|x_2|\}=\max\{|\frac{1}{2}|,|\frac{\sqrt{3}}{2}|\}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;$$

(3) 1- 范数 (绝对和范数)：

$$||x||_1=\sum_{i=1}^{2}|x_i|=|\frac{1}{2}|+|\frac{\sqrt{3}}{2}|=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\ .$$

【**例 3**】求 3 维复列向量 $x=(3i,0,4i,12)^T$ 的 3 种范数：

(1) 2- 范数 (欧氏范数)：

$||x||_2=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2+|x_4|^2}=\sqrt{9+0+16+144}=\sqrt{169}=13$;

(2) ∞- 范数：

$||x||_\infty=\max\{|x_1|,|x_2|,|x_3|,|x_4|\}=\max\{3,0,4,12\}=12$ ；

(3) 1- 范数 (绝对和范数)：

$$||x||_1=\sum_{i=1}^{2}|x_i|=|3i|+|0|+|4i|+|12|=3+4+12=19\ .$$

【 **定义** 5.4.4 】向量范数的等价性 (Equivalency of Vector Norms) 线性空间中的向量 x 定义了两种向量范数 $||x||_\alpha, ||x||_\beta$, 若存在与 x 无关的正常数 c_1, c_2, 使得

$$c_1||x||_\alpha \leq ||x||_\beta \leq c_2||x||_\alpha$$

则称向量范数是等价范数 (Equivalent Norms).

【命题 1. 向量的 ∞- 范数和 1- 范数等价】

$$||x||_\infty \le ||x||_1 \le n||x||_\infty$$

证明 $||x||_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |x_i| = ||x||_1 \le \sum_{i=1}^{n} \max\{|x_i|\} = n||x||_\infty.$$

【 命题 2. 向量的 ∞- 范数和 2- 范数等价 】

$$||x||_\infty \le ||x||_2 \le \sqrt{n}||x||_\infty$$

证明

对于 n 维列向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ ，不妨设达到最大模的坐标分量为 x_{i_0}, 即

$$|x_{i_0}| = \max\{|x_i|\} = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\} = ||x||_\infty$$

则考虑范数的平方，我们有：

$$||x||_\infty^2 = |x_{i_0}|^2 \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = ||x||_2^2$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |x_{i_0}|^2 = n|x_{i_0}|^2 = n||x||_\infty^2.$$

故两边取平方根，即得

$$||x||_\infty \le ||x||_2 \le \sqrt{n}||x||_\infty$$

【 命题 3. 向量的 1- 范数和 2- 范数等价 】

$$\frac{1}{n}||x||_1 \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_1$$

证明

由命题 1 和命题 2，结合不等式的传递性立得

$$\frac{1}{n}||x||_1 \leq ||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty \leq \sqrt{n}||x||_1$$

【 定理 2. 有限维线性空间向量序列依范数收敛等价于依坐标收敛 】

$$\lim_{k\to\infty} ||x^{(k)} - x|| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$$

5.4.2 **矩阵范数** (Matrix Norm)

类似于我们对于向量范数的定义，对于矩阵同样也有范数的定义，并且同样不止一种，“龙生九子，各显神通”．而且，矩阵范数将通过“相容性”与各种向量范数建立起对应关系．最经典的向量范数当然是欧氏范数（ 2- 范数 ）

$$||x||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

而与向量的欧氏范数“相容”的矩阵范数却是定义方式（附带的，计算方式）相当复杂和“古怪”（ odd/weird ）的所谓“谱范数” (Spectral Norm). 但是，谱范数却有无与伦比的优秀品质，在矩阵分析和系统理论中不可替代.

复方阵空间中的方阵 $A \in C^{n\times n}$ 形如

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

【**定义** 5. **矩阵范数** (Matrix Norm)】对于实矩阵空间中的矩阵 $A \in C^{m\times n}$ ，存在非负映照 $||\cdot||: C^{m\times n} \to R^{+}\bigcup\{0\}$ ，满足如下条件:

a) 非负性 (规范性)(Non-negative)： $||A|| \geq 0$ ；等号成立当且仅当 $A = O$ (零矩阵).

b) 齐次性 (Homogenuity):$||\lambda A|| = |\lambda|||A||$, 对任意数域中的数 $\lambda \in F$ 成立.

c) 三角不等式 (Trigonometric Inequality)：
$||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$.

事实上对于可乘矩阵 A, B ，通常还将满足

d) 施瓦兹不等式 (Schwarz Inequality)： $||AB|| \leq ||A|| ||B||$. 亦称 相容性 条件. 非负映照 $||\cdot|| : R^{m\times n} \rightarrow R^{+} \bigcup \{0\}$ 称为 矩阵范数 (Matrix Norm). 特别地，取向量 $x \in R^{n}$ ，若有 $||Ax|| \leq ||A|| ||x||$ ，则称矩阵范数与向量范数 相容.

我们特别关注的是实方阵空间中的方阵 $A \in R^{n\times n}$.

【定义 2B】常用矩阵范数 (Classical Norms)：

容易验证，如下定义映照皆可作为 n 阶方阵空间 $A \in C^{n\times n}$ 上的范数：

(1)F- 范数 (Frobenius 范数)：

$$||A||_F = \sqrt{|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \cdots + |a_{nn}|^2}\ ;$$

(2) ∞- 范数 (行范数)： $||A||_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|;$

(3) 1- 范数 (列范数)： $||A||_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$

【例 1B. 计算 2 阶抽象实方阵的 3 种常用范数】

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(1)F- 范数:

$||A||_F = \sqrt{|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \cdots + |a_{nn}|^2}$

$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2};$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(2) ∞- 范数 (行范数)： $||A||_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}| =$

$\max\limits_{1\le i\le 2}\sum\limits_{j=1}^{2}|a_{ij}| = \max(|a|+|b|, |c|+|d|);$

(3) 1- 范数 (列范数)：

$||A||_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}| = \max\limits_{1\le j\le 2}\sum\limits_{i=1}^{2}|a_{ij}| = \max(|a|+|c|, |b|+|d|);$

【 **定义 3** 】**算子范数或从属范数** (Opertor Norm) : 一般地, 如下定义映照可作为范数:

$$||A||_p = \sup_{\|x\|=1} ||Ax||_p = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{||Ax||_p}{||x||_p}$$

这里 $1 \leq p \leq +\infty$. 称 $||A||_p$ 为矩阵 $A \in R^{n\times n}$ 的从属于向量 x 的向量范数 $||x||_p$ 的 *算子矩阵范数* 或 *从属矩阵范数*. 其几何 (泛函) 意义为: 自变向量空间中的单位球面 $S : \|x\| = 1$ 上的元素在线性变换 A 之下的像元素向量 Ax 的极大向量范数.

这样，我们就用向量范数定义了它的从属矩阵范数．并且，向量范数和它的从属矩阵范数是 相容 的，即满足施瓦兹不等式 (Schwarz Inequality)：

$$||Ax||_p \leq ||A||_p||x||_p$$

【 命题 1 】矩阵的 ∞- 范数 (行范数) 和 1- 范数 (列范数) 分别是向量的 ∞- 范数 (行范数) 和 1- 范数 (列范数) 的从属范数：

(1) $||Ax||_\infty \leq ||A||_\infty||x||_\infty$; (2) $||Ax||_1 \leq ||A||_1||x||_1$

现在我们要问，与最经典的向量的 2- 范数 (Euclid 范数)相容的从属矩阵范数是谁呢？出乎意料，这个范数形式相当奇怪，它居然是用一个对称阵的特征值最大模的平方根来定义的.

【定义 1】谱半径 (Spectral Radius)：方阵 B 的所有特征值 λ_i 的最大模（对于实特征值即为最大绝对值），称为方阵 B 的 谱半径 (Spectral Radius)：

$$\rho(B) = |\lambda|_{\max}(B) = \max\{|\lambda_i|\}$$

其几何意义可以理解为包含方阵 B 的所有特征值的各个圆形域中最小的一个圆半径.

【 **定义** 2 】**谱范数** (Spectral Norm)：

实方阵 (或更严格的非奇异实方阵)$A \in R^{n\times n}$ 的从属于向量 x 的 2- 范数 (欧氏范数) 的矩阵的矩阵算子矩阵范数或矩阵从属范数，定义为对称阵 A^TA (相应于非奇异实方阵，A^TA 就是正定阵) 的谱半径的平方根：

$$||A||_2 = \sqrt{|\lambda|_{\max}(A^TA)} = \sqrt{\rho(A^TA)}$$

即有 $||Ax||_2 \le ||A||_2||x||_2$.

【 **定理** 1. **矩阵从属范数与谱半径的联系** 】

(1) **控制性**. 方阵的谱半径不大于它的任意一种矩阵范数: $\rho(A) \leq ||A||$;

*(2) **逼近性**.$\forall \varepsilon > 0$, 存在方阵的某种从属范数使得 $||A|| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

证明略

【**定理** 5】（1）正规方阵 A (满足 $A^H = A$) 的谱半径等于它的 2- 范数： $\rho(A) = ||A||_2$. 特别地，（2）对称方阵 A (满足 $A^T = A$) 的谱半径等于它的 2- 范数： $\rho(A) = ||A||_2$.

证明略

【例 2.　计算矩阵的 3 种常用范数和谱半径】

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)F- 范数： $||A||_F = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{nn}^2} = \sqrt{(1+4+1+1+1+1+1)} = \sqrt{10}$ ；

(2) ∞- 范数 (行范数)：

$$||A||_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max(1+2, 1+1, 1+1+1) = 3 \text{ ；}$$

(3) 1- 范数 (列范数)：

$$||A||_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max(1+1, 1+1, 2+1+1) = 4;$$

(4) 谱半径 (Spectral Radius)：特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^3 + 3(\lambda - 1) = (\lambda - 1)[(\lambda - 1)^2 + 3].$$

3 个特征值为（一个实特征值，两个共轭虚特征值）

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 + \sqrt{3}i, \lambda_3 = 1 - \sqrt{3}i$$

谱半径

$\rho(A) = \max_i |\lambda_i| = \max\{1, |1 - \sqrt{3}i|, |1 + \sqrt{3}i|\}$

$= \max\{1, 2, 2\} = 2.$

【例 3. 计算矩阵的 3 种常用范数和谱范数】

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

(1)F- 范数：

$$||A||_F = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{nn}^2} = \sqrt{(1+4+9+16)} = \sqrt{30};$$

(2) ∞- 范数 (行范数)：

$$||A||_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max(1+2, 3+4) = 7\ ;$$

(3) 1- 范数 (列范数)：

$$||A||_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max(1+3, 2+4) = 6;$$

(4) 谱范数 (Spectral Norm)：

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

因对称阵

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -14 \\ -14 & 20 \end{pmatrix},$$

其特征多项式为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 10 & 14 \\ 14 & \lambda - 20 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 30\lambda + 4$$

由求根公式， 2 个实特征值为

$$\lambda_1 = 15 + \sqrt{221}, \lambda_2 = 15 - \sqrt{221}$$

谱范数为 $||A||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sqrt{15 + \sqrt{221}} \approx 5.46.$

【例 4. 计算 2 阶 Hilbert 矩阵的 3 种常用范数和谱范数】

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(1)F- 范数：

$$||H||_F = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{nn}^2} = \sqrt{(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9})} = \frac{\sqrt{58}}{6};$$

(2) ∞- 范数 (行范数)：

$$||H||_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max(1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{3}{2}\ ;$$

(3) 1- 范数 (列范数)：

$$||H||_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max(1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{3}{2};$$

解法一. 因实对称阵的谱范数等于其谱半径:
$||H||_2 = \rho(H)$, H 的特征多项式为

$$|\lambda I - H| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{12}$$

由求根公式， 2 个实特征值为

$$\lambda_1 = \frac{4+\sqrt{13}}{6}, \lambda_2 = \frac{4-\sqrt{13}}{6}$$

谱范数为 $||H||_2 = \rho(H) = \dfrac{4+\sqrt{13}}{6}$

解法二. 采用谱范数的定义:

$$||H||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(H^T H)} = \sqrt{\rho(H^T H)}$$

计算对称正定阵 $H^T H$ 的谱半径再开方: 这里

$$H^T H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{13}{36} \end{pmatrix}$$

故特征多项式

$$|\lambda I - H^T H| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{5}{4} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \lambda - \frac{13}{36} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{29}{18}\lambda + \frac{1}{144}$$

由求根公式， 2 个实特征值为

$$\lambda_1 = \frac{29+8\sqrt{13}}{36}, \lambda_2 = \frac{29-8\sqrt{13}}{36}$$

谱半径为

$$\rho(H^T H) = \max_i |\lambda_i| = \frac{29+8\sqrt{13}}{36} = (\frac{4+\sqrt{13}}{6})^2$$

从而也有

$$||H||_2 = \sqrt{\rho(H^T H)} = \sqrt{(\frac{4+\sqrt{13}}{6})^2} = \frac{4+\sqrt{13}}{6} \approx 1.26759$$

显然，这里不如我们直接利用实对称阵的谱范数等于其谱半径的性质： $||A||_2 = \rho(A)$ 计算来得简单．但对于一般的非奇异矩阵的谱范数计算，以上的流程是通用的．