计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第六章　线性方程组的迭代法

§6.2　线性方程组迭代法的收敛性

【 定义 1. 矩阵序列的收敛性 】 矩阵序列 $B_k = (b_{ij}^{(k)}) \in R^{n\times n}$收敛 到给定矩阵 $B = (b_{ij})$，定义为 n^2 个元素数列收敛：

$$\lim_{k\to+\infty} b_{ij}^{(k)} = b_{ij}$$

并记为 $\lim_{k\to+\infty} B_k = B.$

(1) 对任意算子范数 $||\cdot||$ 都有范数序列收敛：

$$\lim_{k\to+\infty} ||B_k - B|| = 0$$

(2) 对任意向量 $x \in R^n$ 都有向量序列收敛：

$$\lim_{k\to+\infty} B_k x = Bx$$

【释例 1】 考察 2 阶矩阵序列 $B_k := B^k$(即矩阵序列里第 k 个矩阵定义为矩阵 B 的 k 次幂 $B_k := B^k$) 形如:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \cdots,$$

$$B^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}, \cdots.$$

若 $0 < |\lambda| < 1$, 或即 $|\frac{1}{\lambda}| > 1$ 则

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda^k = 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} k\lambda^k = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{(\frac{1}{\lambda})^k} = 0$$

(比如： $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，我们有 $\lim_{k\to+\infty} k(\frac{1}{2})^k = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{2^k} = 0.$)

从而 2 阶矩阵序列 $B_k = B^k$收敛 到 2 阶零矩阵 $B = (0_{ij})$, 即 $\lim\limits_{k \to +\infty} B^k = O$ 或

$$\lim_{k \to +\infty} \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

【引理 1. 谱半径定理】 $\lim\limits_{k\to+\infty} B^k = 0$ 的充分必要条件是矩阵的 谱半径小于 1： $\rho(B) = |\lambda|_{\max}(B) < 1.$

【证明略】

【 **定理** 1. **迭代法的收敛基本定理** 】 线性方程组的 (一阶定常) 简单迭代法, 迭代序列 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 对任意初始向量 $x^{(0)}$ 收敛的充分必要条件是 迭代阵的谱半径小于 1 :
$\rho(B) = |\lambda|_{\max}(B) < 1.$

【 *证明 】

充分性 设迭代阵的谱半径小于 1： $\rho(B)=|\lambda|_{\max}(B)<1$，则由矩阵从属范数与谱半径的联系，存在矩阵从属范数 $||B||\le\rho(B)+\varepsilon<1$，故矩阵 $A:=I-B$ 非奇异 (参阅上章第 6 节有关条件数的定理 1)，由 Cramer 法则易知，线性方程组 $Ax=f$ 亦即 $(I-B)x=f$ 存在唯一解，记为 x^*. 则 $x^*=Bx^*+f$，误差向量 $\varepsilon^{(k)}=x^{(k)}-x^*=B^k\varepsilon^{(0)}$. 因 $\rho(B)=|\lambda|_{\max}(B)<1$，故 $\lim\limits_{k\to+\infty}B^k=0$, 从而 $\lim\limits_{k\to+\infty}\varepsilon^{(k)}=0$. 即 $\lim\limits_{k\to+\infty}x^{(k)}=x^*$.

必要性 设 $\lim\limits_{k\to+\infty} x^{(k)} = x^*$. 对迭代序列 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ 取极限 x^* ，显然 $x^* = Bx^* + f$ ，即是线性方程组 $Ax = f$ 的解．且误差向量 $\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x^* = B^k \varepsilon^{(0)} \to 0$. 故 $\lim\limits_{k\to+\infty} B^k = 0$, 从而 $\rho(B) = |\lambda|_{\max}(B) < 1$.

【推论 1. 基本迭代法的收敛定理】

(1)线性方程组的 Jacobi 迭代法, 迭代序列
$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$ 对任意初始向量 $x^{(0)}$ 收敛的充分必要条件是 Jacobi 迭代阵的谱半径小于 1：

$$\rho(J) = \rho(D^{-1}(L+U)) < 1$$

(2)线性方程组的 Gauss-Seidel 迭代法, 迭代序列 $x^{(k+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(k)} + (D-L)^{-1}b$ 对任意初始向量 $x^{(0)}$ 收敛的充分必要条件是 Gauss-Seidel 迭代阵 的谱半径小于 1：

$$\rho(G) = \rho((D-L)^{-1}U) < 1$$

(3)线性方程组的 SOR 迭代法, 迭代序列
$x = L_\omega x + \omega(D - \omega L)^{-1} b$. 对任意初始向量 $x^{(0)}$ 收敛的充分必要条件是迭代阵的谱半径小于 1：

$$\rho(L_\omega) = \rho((D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega U)) < 1$$

【引理 2. 对角占优定理】

(1) 矩阵 A 为 严格对角占优阵，则必为非奇异阵.

(1) 用反证法. 假设矩阵 A 为 严格对角占优阵 ，却是奇异阵，则其行列式为零： $|A| = 0$. 考虑齐次线性方程组 $Ax = 0$, 由 Cramer 法则知存在非平凡解向量 (非零解)$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$. 从而解向量的达到最大模 (绝对值) 的分量非零，不妨设为此分量为 x_k, 即

$$|x_k| = \max(|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|) > 0$$

考察此齐次线性方程组

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

的第 k 个方程，即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kk}x_k + \cdots + a_{kn}x_n = 0$$

移项得

$$a_{kk}x_k = -\sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j$$

$$= -(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{k,k-1}x_{k-1} + a_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}x_n).$$

取绝对值得

$$|a_{kk}x_k| = |\sum_{j=1,j\neq k}^{n} a_{kj}x_j| \leq \sum_{j=1,j\neq k}^{n} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{j=1,j\neq k}^{n} |a_{kj}|$$

即

$$|a_{kk}| \leq \sum_{j=1,j\neq k}^{n} |a_{kj}|$$

与假设矩阵 A 为 严格对角占优阵 相矛盾. 故 严格对角占优阵 必为非奇异阵.

【定理 3. 特殊迭代法的收敛定理】

(1)线性方程组 $Ax = b$, 系数矩阵 A 为严格对角占优阵，则线性方程组的 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法对任意初始向量 $x^{(0)}$ 均收敛.

(2)线性方程组 $Ax = b$, 系数矩阵 A 为弱对角占优阵，且为不可约矩阵，则线性方程组的 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法对任意初始向量 $x^{(0)}$ 均收敛.

【证明略】

【 定理 4. SOR 迭代法的收敛定理 】

(1)线性方程组 $Ax=b$ 的 SOR 迭代法收敛，则 $0<\omega<2$.

(2)线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 为对称正定矩阵，且 $0<\omega<2$，则线性方程组的 SOR 迭代法收敛.

(3)线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 为严格对角占优阵或弱对角占优不可约阵，且 $0<\omega\le 1$，则线性方程组的 SOR 迭代法收敛.

【**例** 3】 讨论非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \end{cases}$$

Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法及敛散性.

Jacobi 迭代矩阵

$$J = D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

特征多项式为

$$|\lambda I - J| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 4 - 4 + 4\lambda - 2\lambda - 2\lambda = \lambda^3$$

特征值 $\lambda = 0$ 为三重根. 谱半径 $\rho(J) = 0 < 1$,Jacobi 迭代法收敛.

Gauss-Seidel 迭代矩阵 $G = (D-L)^{-1}U =$

$$
-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

特征多项式为

$$|\lambda I - G| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2$$

特征值 $\lambda = 0, 2, 2$. 谱半径 $\rho(G) = 2 > 1$,Gauss-Seidel 迭代法发散.

【注记】 本例说明，Gauss-Seidel 迭代法并非总是优于 Jacobi 迭代法的．在此处的情况，甚至 Jacobi 迭代法收敛，Gauss-Seidel 迭代法反倒发散了．当然，在多数情况下，Gauss-Seidel 迭代法若是收敛的，则收敛速度快于 Jacobi 迭代法.

【**例 6**】 非齐次线性方程组系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$,

Jacobi 迭代只对 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ 是收敛的.

解 Jacobi 迭代矩阵

$$J = D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

特征多项式为

$$|\lambda I - J| = \begin{vmatrix} \lambda & a & a \\ a & \lambda & a \\ a & a & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a)^2(\lambda + 2a)$$

特征值 $\lambda = a, a, -2a$. 谱半径 $\rho(J) = |2a| < 1$ 时， Jacobi 迭代法收敛. 即 Jacobi 迭代法只对 $-\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{1}{2}$ 是收敛的.

注 1：当 $-\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{1}{2}$ 时，有 $1 > |a| + |a| = |2a|$, 矩阵为 严格对角占优矩阵，故其 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法都是收敛的.

注 2：当 $-\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{1}{2}$ 时，顺序主子式

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 > 0, \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = (1-a)^2(1+2a) > 0,$$ 矩

阵为 对称正定阵.

【 例 8 】

二阶非齐次线性方程组 $Ax = b$ 系数矩阵为二阶阵 $A = (a_{ij})$ 且 $a_{11}a_{22} \neq 0$, 证明 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法是同时收敛或发散的.

证明 将方程组写为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \end{cases}$$

变形为 $x = Bx + f$ 的形式,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = D - L - U =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & \\ -a_{21} & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & -a_{12} \\ & \end{pmatrix}$$

Jacobi 迭代矩阵

$$J = D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} & a_{12} \\ a_{21} & \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & \\ & \dfrac{1}{a_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & a_{12} \\ a_{21} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & \end{pmatrix}.$$

特征多项式为

$$|\lambda I - J| = \begin{vmatrix} \lambda & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ \dfrac{a_{21}}{a_{22}} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$$

$$= (\lambda - \sqrt{\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}})(\lambda + \sqrt{\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}}).$$

特征值 $\lambda=\sqrt{\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}},-\sqrt{\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}}$. 当 $\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}>0$ 时特征值为一对实相反数；当 $\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}<0$ 时特征值为一对共轭纯虚数.

谱半径 $\rho(J)=\sqrt{\left|\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|}<1$ 时， Jacobi 迭代法收敛.

Gauss-Seidel 迭代矩阵

$$G = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} a_{11} & \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} & -a_{12} \\ & \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{a_{11}a_{22}} \begin{pmatrix} a_{22} & \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & -a_{12} \\ & \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{11}a_{22}} \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}a_{22} \\ 0 & a_{12}a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{pmatrix}.$$

特征多项式为

$$|\lambda I - J| = \begin{vmatrix} \lambda & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \lambda - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}).$$

特征值 $\lambda = 0, \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$. 谱半径 $\rho(G) = |\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}| < 1$ 时, Gauss-Seidel 迭代法收敛.

故二阶非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法是同时收敛或发散的.