计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：　高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：　李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第三节 Aitken 加速算法和 Steffensen迭代法

- 3.1. **埃特金加速算法** (Aitken Algorithm)

对于收敛的迭代法，只要迭代次数足够多，总可以达到任意指定的精度。然而正如人们要用喷射引擎取代螺旋桨，更快的速度和更高的效率一向是我们所追求的．兔子不偷懒，总会胜过乌龟.

【 **定义 1 埃特金加速算法** (Aitken Algorithm) 】

因迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, 故由微分中值定理或 Taylor 公式，有

$$x_{k+1} - x^* = \varphi^{'}(\xi)(x_k - x^*) \tag{3.1}$$

若记 $y_k = x_{k+1} = \varphi(x_k), L \approx \varphi^{'}(\xi)$, 则上式成为

$$y_k - x^* \approx L(x_k - x^*) \tag{3.2}$$

同理再令 $z_k = y_{k+1} = \varphi(y_k) = \varphi(\varphi(x_k))$, 则又得

$$z_k - x^* \approx L(y_k - x^*) \tag{3.3}$$

上述两等式联立，相除消去 L 可得改良近似公式

$$
\begin{aligned}
&\frac{y_k - x^*}{z_k - x^*} \approx \frac{x_k - x^*}{y_k - x^*} \\
&\Rightarrow (y_k - x^*)^2 \approx (x_k - x^*)(z_k - x^*) \\
&\Rightarrow y_k^2 - 2y_k x^* \approx x_k z_k - x_k x^* - z_k x^* \\
&\Rightarrow (x_k + z_k - 2y_k)x^* \approx x_k z_k - y_k^2 \\
&\Rightarrow x^* \approx \frac{x_k z_k - y_k^2}{x_k + z_k - 2y_k} \\
&\Rightarrow x^* \approx \frac{x_k(x_k + z_k - 2y_k) - x_k^2 + 2x_k y_k - y_k^2}{x_k + z_k - 2y_k} \\
&\Rightarrow x^* \approx x_k - \frac{(x_k - y_k)^2}{x_k + z_k - 2y_k}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

即

$$
\begin{aligned}
x^* &\approx \frac{x_k\varphi(\varphi(x_k)) - (\varphi(x_k))^2}{x_k + \varphi(\varphi(x_k)) - 2\varphi(x_k)} \\
&= x_k - \frac{(x_k - \varphi(x_k))^2}{x_k + \varphi(\varphi(x_k)) - 2\varphi(x_k)}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

我们得到了二重迭代的新的改进值 x^*，较之原有近似更为精准.

记

$$\triangle x_k = \varphi(x_k) - x_k, \triangle^2 x_k = x_k + \varphi(\varphi(x_k)) - 2\varphi(x_k) \tag{3.6}$$

则

$$x^* \approx x_k - \frac{(\triangle x_k)^2}{\triangle^2 x_k} \tag{3.7}$$

称为 埃特金加速算法 (Aitken Algorithm).

【**注记** 1 **首次加速**】我们看到，若利用微分中值定理进行首次加速，则有

$$y_k - x^* \approx L(x_k - x^*) \Rightarrow x^* \approx \frac{y_k - Lx_k}{1-L} \tag{3.8}$$

加速公式系数构成 凸线性组合：

$$\frac{1}{1-L} + \frac{-L}{1-L} \equiv 1 \tag{3.9}$$

但因含有导函数的信息 $(L \approx \varphi'(\xi))$，故转而考察利用迭代函数进行一次和二次改良，即二重迭代，由此获得埃特金加速算法的公式.

• 3.2. **斯蒂芬森迭代法** (Steffensen Iteration)

【 **定义** 2 **斯蒂芬森迭代法** (Steffensen Iteration) 】

由埃特金加速算法，记我们得到的不动点 x^* 的二重迭代下的新的改进值所对应的不动点迭代函数为

$$\psi(x) = x - \frac{(x-\varphi(x))^2}{x+\varphi(\varphi(x))-2\varphi(x)} = \frac{x\varphi(\varphi(x))-(\varphi(x))^2}{x+\varphi(\varphi(x))-2\varphi(x)} \tag{3.10}$$

则

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} = \psi(x_k) = x_k - \frac{(x_k - \varphi(x_k))^2}{x_k + \varphi(\varphi(x_k)) - 2\varphi(x_k)} \\
= \frac{x_k \varphi(\varphi(x_k)) - (\varphi(x_k))^2}{x_k + \varphi(\varphi(x_k)) - 2\varphi(x_k)}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

称为 斯蒂芬森迭代法 (Steffensen Iteration).

【注记 2 斯蒂芬森迭代法的几何意义】

定义 绝对误差函数

$$\varepsilon(x) = \varphi(x) - x \tag{3.12}$$

设不动点 x^* 的首次和二次迭代的近似值为

$$y_k = \varphi(x_k), z_k = y_{k+1} = \varphi(y_k) = \varphi(\varphi(x_k)) \tag{3.13}$$

则其相应绝对误差函数值为

$$\varepsilon(x_k) = \varphi(x_k) - x_k = y_k - x_k, \varepsilon(y_k) = \varphi(y_k) - y_k = z_k - y_k \tag{3.14}$$

现在 将绝对误差外推到 0 ，即由 误差曲线 $\Gamma : \varepsilon = \varepsilon(x)$ 上两点 $P(x_k, \varepsilon(x_k))$ 和 $Q(y_k, \varepsilon(y_k))$ 作成直线

$$l_k : \varepsilon = \varepsilon(x_k) + \frac{\varepsilon(y_k) - \varepsilon(x_k)}{y_k - x_k}(x - x_k) \tag{3.15}$$

令误差为零，即 $\varepsilon = 0$ ，即得直线与 x 轴交点，可以作为误差曲线与 x 轴交点即不动点的近似点 x_{k+1}.

由

$$0 = \varepsilon(x_k) + \frac{\varepsilon(y_k) - \varepsilon(x_k)}{y_k - x_k}(x - x_k) \tag{3.16}$$

解得

$$\begin{aligned} & x_{k+1} \approx x_k - \frac{y_k - x_k}{\varepsilon(y_k) - \varepsilon(x_k)}\varepsilon(x_k) \\ & \Rightarrow x_{k+1} \approx x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{(z_k - y_k) - (y_k - x_k)} \\ & \Rightarrow x_{k+1} \approx x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} \end{aligned} \tag{3.17}$$

即为斯蒂芬森迭代法.

【定理 1　不动点等价定理】 二重迭代下的斯蒂芬森迭代法 (Steffensen Iteration) 不动点迭代函数为

$$\psi(x) = x - \frac{(x-\varphi(x))^2}{x+\varphi(\varphi(x))-2\varphi(x)} = \frac{x\varphi(\varphi(x))-(\varphi(x))^2}{x+\varphi(\varphi(x))-2\varphi(x)}$$

则若 x^* 为 $\psi(x)$ 的不动点，必为 $\varphi(x)$ 的不动点；反之，若 x^* 为连续可微函数 $\varphi(x)$ 的不动点，且满足 $\varphi'(x^*) \neq 1$, 则必为 $\psi(x)$ 的不动点.

【证明略】

【注记 1】 事实上，$\varphi'(x)=1$ 时，即 x 为 $\varphi(x)-x=0$ 的重根时，$\varphi(x)$ 的不动点亦为 $\psi(x)$ 的不动点．证明可见 Isaacson E and H.B.Keller.*Analysis of Numerical Methods*, New York,1966.

【注记 2】 设 $\varphi^{(p+1)}(x)$ 存在. $p=1,\varphi'(x)\neq 1$ 时, Steffensen 迭代法是二阶收敛的； $p>1$, 若迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 是 p 阶收敛的，则 Steffensen 迭代法是 $2p-1$ 阶收敛的．但应用中因为 $p>1$ 的情况 Steffensen 迭代改善并不显著，通常只用 $p=1$ 时即二阶收敛的 Steffensen 迭代法．证明可见： (清华大学) 关治，陆金甫． 数值分析基础. 高等教育出版社.

- 3.3. **例题选讲**

【例 1. Steffensen **迭代法对发散迭代的改良】**

非线性方程初值问题 $f(x)=x^3-x-1=0, x_0=1.5$ ，用 Steffensen 迭代法对发散迭代

$$x_{k+1}=x_k^3-1$$

进行改良，求迭代函数 $\psi(x)$ 并试计算近似根.

【解】 Steffensen 迭代函数

$$\begin{aligned}\psi(x) &= x - \frac{(x-\varphi(x))^2}{x+\varphi(\varphi(x))-2\varphi(x)} \\ &= x - \frac{(x^3-x-1)^2}{(x^3-1)^3-1+x-2(x^3-1)}\end{aligned}$$

比如

$$
\begin{aligned}
x_1 = \psi(x_0) &= x_0 - \frac{(x_0 - \varphi(x_0))^2}{x_0 + \varphi(\varphi(x_0)) - 2\varphi(x_0)} \\
&= x_0 - \frac{(x_0^3 - x_0 - 1)^2}{(x_0^3 - 1)^3 - 1 + x_0 - 2(x_0^3 - 1)} \\
&= 1.5 - \frac{(1.5^3 - 1.5 - 1)^2}{(1.5^3 - 1)^3 - 1 + 1.5 - 2 \cdot (1.5^3 - 1)} \\
&= 1.5 - \frac{(2.37500 - 1.5)^2}{12.3965 + 1.5 - 2 \cdot 2.37500} \\
&= 1.5 - \frac{(0.875)^2}{9.1465} = 1.5 - \frac{0.765625}{9.1465} \\
&= 1.5 - 0.08371 = 1.41629
\end{aligned}
$$

如是递推即得各次 Steffensen 迭代近似根.

根据迭代函数利用迭代递推公式作出近似根表如下：

k	x_k	$y_k = \varphi(x_k)$	$z_k = \varphi(\varphi(x_k))$		
0	1.5	2.37500	12.3965		
1	1.41629	2.84092	5.23888		
2	1.35565	1.49140	2.31728		
3	1.32895	1.34710	1.44435		
4	1.32480	1.32518	1.32714		
5	1.32472				