计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第七章　矩阵特征值计算

7.1　幂法和反幂法
(Power Method)

7.1.1 幂法

幂法 (Power Method) 和反幂法 (Inverse Power Method) 是利用迭代序列计算矩阵 A 和非奇异矩阵的逆矩阵 A^{-1} 的主特征值 和 主特征向量 的方法. 它们本质上都是属于 迭代方法. 与之相对的则是 变换方法，包括著名的 Householder 方法和 QR 方法等等.

【 定义 1. 主特征值和主特征向量 】

矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$ 的所有特征值依照模从大到小的次序排列为

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|\geq 0$$

则矩阵 A 的 主特征值 正是矩阵 A 的模极大的特征值 λ_1. 它的模 严格大于 序列后面的所有特征值的模. 矩阵 A 的 主特征值λ_1 对应的特征向量 v_1 称为矩阵 A 的 主特征向量.

倘若矩阵 A 的模极大的特征值 λ_1 是 r 重根，所有特征值依照模从大到小的次序排列为

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \cdots = |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq 0$$

则 主特征值 λ_1 对应的 r 个线性无关特征向量 $v_1, v_2, \cdots, v_r$ 称为矩阵 A 的 主特征向量.

【 **幂法** (Power Method) **的引入** 】

由于矩阵 A 的所有特征值对应的线性无关特征向量系

$$v_1, v_2, \cdots, v_n$$

可以构成向量空间 R^n (或 C^n) 的标准正交基. 对于任意非零实向量 $x_0 \neq 0 \in R^n$ (或非零复向量 $x \neq 0 \in C^n$), 我们有在这个基下的线性组合表示

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n, \qquad c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2 > 0$$

此时 以矩阵 A 为迭代映射 构造迭代序列

$$\begin{aligned}
x_1 = Ax_0 \quad &= c_1Av_1 + c_2Av_2 + \cdots + c_nAv_n \\
&= c_1\lambda_1 v_1 + c_2\lambda_2 v_2 + \cdots + c_n\lambda_n v_n \\
x_2 = Ax_1 \quad &= A^2x_0 = c_1\lambda_1^2 v_1 + c_2\lambda_2^2 v_2 + \cdots + c_n\lambda_n^2 v_n \\
\cdots\cdots\cdots \quad & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_k = Ax_{k-1} \quad &= A^kx_0 = c_1\lambda_1^k v_1 + c_2\lambda_2^k v_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k v_n \\
x_{k+1} = Ax_k \quad &= A^{k+1}x_0 \\
&= c_1\lambda_1^{k+1} v_1 + c_2\lambda_2^{k+1} v_2 + \cdots + c_n\lambda_n^{k+1} v_n \\
\cdots\cdots\cdots \quad & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

对于一般的第 k 步迭代表达式，我们提取出公因子 λ_1^k, 则有

$$
\begin{aligned}
& x_k = Ax_{k-1} = A^k x_0 = c_1\lambda_1^k v_1 + c_2\lambda_2^k v_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k v_n \\
& = \lambda_1^k[c_1 v_1 + c_2(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k v_2 + \cdots + c_n(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k v_n] \\
& = \lambda_1^k[c_1 v_1 + \sum_{j=2}^{n} c_j(\frac{\lambda_j}{\lambda_1})^k v_j] \\
& = \lambda_1^k[c_1 v_1 + \varepsilon_k]
\end{aligned}
$$

其中 $\varepsilon_k = \sum_{j=2}^{n} c_j (\frac{\lambda_j}{\lambda_1})^k v_j$. 由于 $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$, 故而 $|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}| < 1$. 于是

$$\varepsilon_k = \sum_{j=2}^{n} c_j (\frac{\lambda_j}{\lambda_1})^k v_j \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow +\infty$$

从而

$$\lim_{k\longrightarrow +\infty}\frac{x_k}{\lambda_1^k}=\lim_{k\longrightarrow +\infty}[c_1v_1+\varepsilon_k]=c_1v_1$$

换言之，当 $k\longrightarrow +\infty$ 充分大时，向量

$$x_k\approx c_1\lambda_1^k v_1$$

亦即迭代向量 x_k 可以作为矩阵 A 的 主特征值 λ_1 对应的 主特征向量 v_1 的 近似向量.

对于 A 的 主特征值 λ_1 的计算，我们如下进行. 由

$$\begin{cases} x_k &= \lambda_1^k[c_1 v_1 + \varepsilon_k] = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \cdots, x_k^{(n)}) \\ x_{k+1} &= \lambda_1^{k+1}[c_1 v_1 + \varepsilon_{k+1}] = (x_{k+1}^{(1)}, x_{k+1}^{(2)}, \cdots, x_{k+1}^{(n)}) \end{cases}$$

对于向量的第 $i, 1 \le i \le n$ 个分量比较，即有

$$x_k^{(i)} = \lambda_1^k[c_1 v_1^{(i)} + \varepsilon_k^{(i)}] \qquad (1)$$

$$x_{k+1}^{(i)} = \lambda_1^{k+1}[c_1 v_1^{(i)} + \varepsilon_{k+1}^{(i)}] \qquad (2)$$

用 (2) 式除以 (1) 式得

$$\frac{x_{k+1}^{(i)}}{x_k^{(i)}} = \lambda_1 \frac{c_1 v_1^{(i)} + \varepsilon_{k+1}^{(i)}}{c_1 v_1^{(i)} + \varepsilon_k^{(i)}}$$

令 $k \longrightarrow +\infty$ 充分大取极限时，有

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{x_{k+1}^{(i)}}{x_k^{(i)}} = \lambda_1 \lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{c_1 v_1^{(i)} + \varepsilon_{k+1}^{(i)}}{c_1 v_1^{(i)} + \varepsilon_k^{(i)}} = \lambda_1$$

亦即迭代向量 x_{k+1} 的第 i 个分量与迭代向量 x_k 的第 i 个分量的比值可以作为矩阵 A 的 主特征值 λ_1 的 近似值.

对于矩阵 A 的模极大的 主特征值 λ_1 是 r 重根的情况可类似证明。我们有如下结论：

【 **定理** 1. **幂法** (Power Method) **收敛定理** 】

矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$ 的所有特征值依照模从大到小的次序排列为

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|\geq 0$$

则矩阵 A 的 主特征值 正是矩阵 A 的模极大的特征值 λ_1. 对应的特征向量称为矩阵 A 的 主特征向量. 则矩阵 A 的所有特征值对应的线性无关特征向量系 $v_1,v_2,\cdots,v_n$, 可以构成向量空间 R^n (或 C^n) 的基向量系.

对于任意非零实向量 $x_0 \neq 0 \in R^n$ (或非零复向量 $x \neq 0 \in C^n$) , 我们有在这个基下的线性组合表示

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n, \qquad c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2 > 0$$

此时以矩阵 A 为迭代映射构造迭代序列

$$x_k = A x_{k-1} \quad = A^k x_0 = c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2 + \cdots + c_n \lambda_n^k v_n$$

当 $k \longrightarrow +\infty$ 充分大时,

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{x_k}{\lambda_1^k} = c_1 v_1$$

换言之，迭代向量

$$x_k \approx c_1 \lambda_1^k v_1$$

亦即迭代向量 x_k 可以作为矩阵 A 的 主特征值 λ_1 对应的 主特征向量v_1 的 近似向量.

而

$$\lambda_1 \quad = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{x_{k+1}^{(i)}}{x_k^{(i)}}$$

亦即迭代向量 x_{k+1} 的第 i 个分量与迭代向量 x_k 的第 i 个分量的比值可以作为矩阵 A 的 主特征值 λ_1 的 近似值.

倘若矩阵 A 的模极大的 主特征值 λ_1 是 r 重根，所有特征值依照模从大到小的次序排列为

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \cdots = |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq 0$$

对应的 r 个线性无关特征向量 $v_1, v_2, \cdots, v_r$ 为 主特征向量. 此时以矩阵 A 为迭代映射构造迭代序列

$$x_k = Ax_{k-1} \quad = A^k x_0 = \lambda_1^k [\sum_{j=1}^{r} c_j v_j + \sum_{j=r+1}^{n} c_j (\frac{\lambda_j}{\lambda_1})^k v_j]$$

当 $k \longrightarrow +\infty$ 充分大时,

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{x_k}{\lambda_1^k} = \sum_{j=1}^{r} c_j v_j$$

换言之，迭代向量

$$x_k \approx c_1 \lambda_1^k \sum_{j=1}^{r} c_j v_j$$

亦即迭代向量 x_k 可以作为矩阵 A 的 主特征值 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r$ 对应的 主特征向量$v_1, v_2, \cdots, v_r$ 的线性组合的 近似向量.

而与 主特征值 λ_1 是单根的情形类似有

$$\lambda_1 \quad = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{x_{k+1}^{(i)}}{x_k^{(i)}}$$

亦即迭代向量 x_{k+1} 的第 i 个分量与迭代向量 x_k 的第 i 个分量的比值可以作为矩阵 A 的 主特征值 λ_1 的 近似值.

【 **幂法** (Power Method) **的标准化** 】

我们引入 迭代向量 x_k 的第一个具有最大模的坐标分量 $x_k^{(i_0)}$ ，即此分量的模恰好等于向量 x_k 的 最大模范数 $|x_k^{(i_0)}| = ||x_k||_\infty$ ，而它又是所有具有最大模的坐标分量中首先出现的 (后面可能还有具有最大模的坐标分量，比如向量 $(1, 1, \cdots, 1)^T$). 换言之，标记 i_0 是 "最小的" 或 "头一号".

我们并标记此分量为 $x_k^{(i_0)} = \max(x_k)$. 这是个约定俗成的记法. 即 $x_k^{(i_0)} = \max(x_k) := \pm||x_k||_\infty$,

$|x_k^{(i_0)}| = |\max(x_k)| = ||x_k||_\infty = \max(|x_k^{(1)}|, |x_k^{(2)}|, \cdots, |x_k^{(n)}|)$

令 标准化迭代向量

$$y_k := \frac{x_k}{\max(x_k)} = \frac{x_k}{x_k^{(i_0)}}$$

则向量 y_k 的 最大模范数 为 1:

$$||y_k||_\infty = \frac{||x_k||_\infty}{|\max(x_k)|} = \frac{||x_k||_\infty}{||x_k||_\infty} = 1$$

计算实践中使用幂法，是将 标准化迭代程序 在每一步里操作，就是“迭代 $\longrightarrow$ 标准化 $\longrightarrow$ 迭代 $\longrightarrow$ 标准化 $\longrightarrow$ 迭代 $\cdots\cdots$ ”. 我们获得的是如下 标准化幂法迭代程序 序列：

$$
\left\{
\begin{aligned}
x_1 &= Ax_0 = Ay_0 \\
y_1 &= \frac{x_1}{\max(x_1)} = \frac{Ax_0}{\max(Ax_0)} \\
x_2 &= Ay_1 = \frac{A^2 x_0}{\max(Ax_0)} \\
y_2 &= \frac{x_2}{\max(x_2)} = \frac{A^2 x_0}{\max(A^2 x_0)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_k &= Ay_{k-1} = \frac{A^k x_0}{\max(A^{k-1} x_0)}, \\
y_k &= \frac{x_k}{\max(x_k)} = \frac{A^k x_0}{\max(A^k x_0)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right.
$$

【例 1. 标准化幂法迭代】

对如下矩阵 A，给定初始非零向量 $x_0 = (1,1,1)^T$. 试求对应于 特征值$\lambda_1 = 4$ 的特征向量:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

分别用代数方法和数值方法求解并比较.

解

特征矩阵

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

特征方程 $|\lambda E - A| = (\lambda - 4)^2(\lambda - 2) = 0$. 故特征根：
$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ 为重根， $\lambda_3 = 2$ 为单根.

求特征向量:

对重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, 我们有

$$\lambda = 4, (\lambda E - A)\alpha = 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

即 $a_2 - a_3 = 0$. 取 $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, 得一个特征向量 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$.

用幂法迭代求解.

给定初始非零向量 $x_0=(1,1,1)^T$(这里初始向量碰巧选择得好，就是特征向量！多数情况要尝试)， 标准化幂法迭代程序 序列为

$$
\begin{aligned}
x_1 &= Ax_0 = Ay_0, & y_1 &= \frac{x_1}{\max(x_1)} = \frac{Ax_0}{\max(Ax_0)} \\
x_2 &= \frac{A^2x_0}{\max(Ax_0)}, & y_2 &= \frac{x_2}{\max(x_2)} = \frac{A^2x_0}{\max(A^2x_0)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_k &= \frac{A^kx_0}{\max(A^{k-1}x_0)}, & y_k &= \frac{x_k}{\max(x_k)} = \frac{A^kx_0}{\max(A^kx_0)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

迭代一步就是

$$x_1 = Ax_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \frac{x_1}{\max(x_1)} = \frac{(4,4,4)^T}{\max(4,4,4)^T} = \frac{(4,4,4)^T}{4} = (1,1,1)^T$$

倘若任意选择初始非零向量 $x_0 = (2, 1, 0)^T$， 标准化幂法迭代程序 序列迭代一步就是

$$x_1 = Ax_0 \quad = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \frac{x_1}{\max(x_1)} \quad = \frac{(8, 3, 1)^T}{\max(8, 3, 1)^T} = \frac{(8, 3, 1)^T}{8} = (1, \frac{3}{8}, \frac{1}{8})^T$$

标准化幂法迭代程序 序列再迭代一步就是

$$x_2 = Ay_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{10}{8} \\ \frac{6}{8} \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \frac{x_2}{\max(x_2)} = \frac{(4, \frac{10}{8}, \frac{6}{8})^T}{\max(4, \frac{10}{8}, \frac{6}{8})^T} = \frac{(4, \frac{10}{8}, \frac{6}{8})^T}{4} = (1, \frac{10}{32}, \frac{6}{32})^T$$

而 改进迭代向量 x_2 的第 1 个具有最大模的分量可以作为矩阵 A 的 主特征值 λ_1 的 近似值:

$$\lambda_1 \approx \max(x_2) = 4$$

事实上它已经达到了真值！

7.1.2 幂法的加速 (Acceleration of Power Method)

我们看到，幂法的原始迭代为

$$x_k = Ax_{k-1} = A^k x_0 = \lambda_1^k [c_1 v_1 + \varepsilon_k]$$

其中 $\varepsilon_k = \sum_{j=2}^{n} c_j (\frac{\lambda_j}{\lambda_1})^k v_j$. 由于 $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$, 故而 $|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}| < 1$.

于是余项向量

$$\varepsilon_k = \sum_{j=2}^{n} c_j (\frac{\lambda_j}{\lambda_1})^k v_j \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow +\infty$$

显然，余项向量趋向于 0 的速度越快，幂法的收敛速度越快．从而幂法 (Power Method) 的 收敛速度 取决于比值 (次大特征值和最大特征值模的比值)

$$r = |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| < 1$$

我们希望比值越小越好．当 $r \ll 1$ 时，收敛速度比较快．但若当 $r \approx 1$ 时，收敛速度可能很慢．此时我们需要对迭代进行加速．

【**加速方法** 1. **原点位移加速** (Shift Acceleration of Power Method)】

矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的所有特征值依照模从大到小的次序排列为

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|\geq 0$$

矩阵 A 的 主特征值 是模极大的特征值 λ_1. 对应的特征向量 v_1 为 主特征向量.

引入参数 p, 辅助矩阵 $B = A - pI$ 的所有特征值为

$$\lambda_1 - p, \lambda_2 - p, \cdots, \lambda_n - p$$

适当选择参数 p, 使得辅助矩阵 $B = A - pI$ 的 主特征值 为 $\lambda_1 - p$, 且

$$\frac{|\lambda_2 - p}{|\lambda_1 - p|}| < r = |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| < 1$$

【 命题 1 】

矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的所有特征值全是实数（比如 Hermite 矩阵或实对称矩阵特征值就全是实数），依照从大到小的次序排列为

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} > \lambda_n$$

当选择参数 $\lambda_n < p^* < \lambda_2$ 为中点

$$p^* = \frac{\lambda_2+\lambda_n}{2}$$

时辅助矩阵 $B=A-pI$ 的 收敛速度 的比值达到最小值.

【 证明略 】

【 释例.　　原点位移加速幂法 】

某四阶矩阵 A 具有特征根:

$$\lambda_1 = 14, \lambda_2 = 13, \lambda_1 = 12, \lambda_2 = 11$$

试求 收敛速度比 $r = |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|$.

适当选择参数 p, 构造原点位移辅助矩阵 $B = A - pI$ 再求 收敛速度比

$$r = \max(\frac{|\lambda_2 - p|}{|\lambda_1 - p|}, \frac{|\lambda_n - p}{|\lambda_1 - p|}|)$$

并比较位移前后的收敛速度.

解

四阶矩阵 A 具有特征根：

$$\lambda_1 = 14, \lambda_2 = 13, \lambda_3 = 12, \lambda_4 = 11$$

于是 收敛速度比

$$r = |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{13}{14} \approx 0.92857$$

适当选择参数

$$p = \frac{\lambda_2 + \lambda_n}{2} = \frac{13+11}{2} = 12$$

构造原点位移辅助矩阵 $B = A - pI = A - 12I$, 则 收敛速度比

$$r = \max\left(\frac{|\lambda_2 - p|}{|\lambda_1 - p|}, \frac{|\lambda_n - p|}{|\lambda_1 - p|}\right) = \frac{|\lambda_2 - p|}{|\lambda_1 - p|} = \frac{13-12}{14-12} \approx 0.5$$

位移后的收敛速度大大加快.

【例 1. 原点位移加速幂法】

令 初始迭代向量 $x_0 = y_0 = (1,1,1)^T$. 适当选择参数 $p = -0.5$, 构造原点位移辅助矩阵 $B = A - pI$, 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

的 主特征值 和 主特征向量.

解　用原点位移加速幂法迭代求解.

取参数 $p = -0.5$, 构造 原点位移矩阵

$$B = (A - pI) = \begin{pmatrix} 1+0.5 & 2 & 3 \\ 2 & 3+0.5 & 4 \\ 3 & 4 & 5+0.5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 3 \\ 2 & 3.5 & 4 \\ 3 & 4 & 5.5 \end{pmatrix}$$

以 原点位移矩阵 $B = (A - pI)$ 为迭代映射构造幂法迭代序列

$$\begin{cases} x_0 &= y_0 = (1,1,1)^T \\ x_k &= By_{k-1} = (A - pI)y_{k-1} \\ \mu_k &= \max(x_k) \\ y_k &= \dfrac{x_k}{\mu_k} = \dfrac{x_k}{\max(x_k)} \end{cases}$$

迭代一步就是

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_1^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 3 \\ 2 & 3.5 & 4 \\ 3 & 4 & 5.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 9.5 \\ 12.5 \end{pmatrix}$$

标准化得

$$y_1 = \frac{x_1}{\max(x_1)} \quad = \frac{(6.5, 9.5, 12.5)^T}{12.5} = (0.52, 0.76, 1)^T$$

再迭代一步就是

$$\begin{pmatrix} x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 3 \\ 2 & 3.5 & 4 \\ 3 & 4 & 5.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.52 \\ 0.76 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.3 \\ 7.7 \\ 10.1 \end{pmatrix}$$

标准化得

$$y_2 = \frac{x_2}{\max(x_2)} \quad = \frac{(5.3, 7.7, 10.1)^T}{10.1} = (0.52475, 0.76237624, 1)^T$$

迭代向量 $x_2 = (5.3, 7.7, 10.1)^T$ 的最大模分量接近于 位移矩阵 $B = (A - pI)$ 的精确的 主特征值

$$\lambda_1 \approx \max(x_2) = 10.1$$

从而由于对应的 原始矩阵 A 的 主特征值 $\lambda_1(A) = \lambda_1 - p$ ，故 $\lambda_1(A)$ 的近似值为

$$\lambda_1(A) \approx p + \max(x_2) = -0.5 + 10.1 = 9.6$$

并且对应的 主特征向量 为

$$y_2 = (0.52475, 0.76237624, 1)^T$$