第三章　量纲分析法建模

（Dimensional Analysis）

§1　量纲齐次原则

物理量的量纲

长度 l 的量纲记 L=[l]
质量 m的量纲记 M=[m]
时间 t 的量纲记 T=[t]

→ 动力学中基本量纲 L, M, T

速度 v 的量纲 $[v]=LT^{-1}$
加速度 a 的量纲 $[a]=LT^{-2}$
力 f 的量纲 $[f]=LMT^{-2}$

→ 导出量纲

引力常数 k 的量纲 [k]
$=[f][l]^2[m]^{-2}=LMT^{-2}L^2M^{-2}=L^3M^{-1}T^{-2}$

$$f = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

对无量纲量α，$[\alpha]=1(=L^0M^0T^0)$

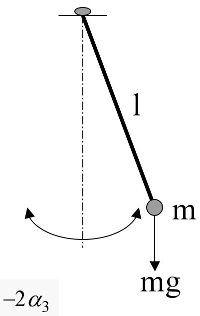
量纲齐次原则

等式两端的量纲一致

量纲分析~利用量纲齐次原则寻求物理量之间的关系

例. 单摆运动

求摆动周期 t 的表达式



设物理量 t, m, l, g 之间有关系式

$$t = \lambda m^{\alpha_1} l^{\alpha_2} g^{\alpha_3} \quad (1)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为待定系数，λ为无量纲量

(1)的量纲表达式 $[t] = [m]^{\alpha_1}[l]^{\alpha_2}[g]^{\alpha_3}$

$$\Rightarrow T = M^{\alpha_1} L^{\alpha_2+\alpha_3} T^{-2\alpha_3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1/2 \\ \alpha_3 = -1/2 \end{cases} \Rightarrow t = \lambda\sqrt{\frac{l}{g}}$$

对比

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$t = \lambda m^{\alpha_1} l^{\alpha_2} g^{\alpha_3}$$

为什么假设这种形式

设p= f(x,y,z)

对 x,y,z的两组量测值

$p_1 = f(x_1,y_1,z_1)$, $p_2 = f(x_2,y_2,z_2)$

x,y,z的量纲单位缩小a,b,c倍

$p_1' = f(ax_1,by_1,cz_1)$, $p_2' = f(ax_2,by_2,cz_2)$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_1'}{p_2'} \Rightarrow \frac{f(x_1,y_1 z_1)}{f(x_2,y_2,z_2)} = \frac{f(ax_1,by_1,cz_1)}{f(ax_2,by_2,cz_2)}$$

$\Rightarrow$ p= f(x,y,z)的形式为 $f(x,y,z) = \lambda x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$

单摆运动中 t, m, l, g 的一般表达式 $f(t,m,l,g)=0$

$\Rightarrow$ $t^{y_1}m^{y_2}l^{y_3}g^{y_4}=\pi$ y_1~y_4 为待定常数, π为无量纲量

$$\begin{cases}[t]=L^0M^0T^1\\ [m]=L^0M^1T^0\\ [l]=L^1M^0T^0\\ [g]=L^1M^0T^{-2}\end{cases}$$

$$(L^0M^0T^1)^{y_1}(L^0M^1T^0)^{y_2}(L^1M^0T^0)^{y_3}(L^1M^0T^{-2})^{y_4}=L^0M^0T^0$$

$$L^{y_3+y_4}M^{y_2}T^{y_1-2y_4}=L^0M^0T^0$$

$$\begin{cases}y_3+y_4=0\\ y_2=0\\ y_1-2y_4=0\end{cases} \Rightarrow y=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T=(2,0,-1,1)^T$$

$t^2l^{-1}g=\pi$ $F(\pi)=0$

$(t=\lambda\sqrt{l/g})$

Pi定理 (Buckingham) 设 $f(q_1, q_2, \ldots, q_m)=0$

是与量纲单位无关的物理定律，$X_1,X_2,\ldots X_n$ 是基本量纲，$n\le m$，$q_1, q_2, \ldots q_m$ 的量纲可表为

$$[q_j]=\prod_{i=1}^{n}X_i^{a_{ij}},\quad j=1,2,\cdots,m$$

若量纲矩阵 $A=\{a_{ij}\}_{n\times m}$，$rank\ A=r$

线性齐次方程组 $Ay=0$ 有 m-r 个基本解，记作

$y_s=(y_{s1}, y_{s2}, \ldots, y_{sm})^T$，$s=1,2,\ldots,m-r$

则 $\pi_s=\prod_{j=1}^{m}q_j^{y_{sj}}$ 为m-r 个相互独立的无量纲量, 且

$F(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{m-r})=0$ 与 $f(q_1, q_2, \ldots, q_m)=0$ 等价, F未定

§2 量纲分析示例

1. 波浪对航船的阻力

阻力f

速度v, 尺寸l, 浸没面积s, 海水密度ρ, 重力加速度g

$f(q_1, q_2, \ldots, q_m) = 0$

$\varphi(g, l, \rho, v, s, f) = 0$

$$[q_j] = \prod_{i=1}^{n} X_i^{a_{ij}}, \quad j = 1,2,\cdots,m$$

$[g] = LT^{-2}$, $[l] = L$, $[\rho] = L^{-3}M$,
$[v] = LT^{-1}$, $[s] = L^2$, $[f] = LMT^{-2}$

$$A = \{a_{ij}\}_{n\times m}$$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} (L) \\ (M) \\ (T) \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} (g) & (l) & (\rho) & (v) & (s) & (f) \end{array} & \end{array}$$

m=6, n=3

$f(q_1, q_2, \ldots, q_m) = 0$

rank A = r

Ay=0 有m-r个基本解

$y_s = (y_{s1}, y_{s2}, \ldots, y_{sm})^T$

$s = 1,2,\ldots, m-r$

m-r 个无量纲量

$$\pi_s = \prod_{j=1}^{m} q_j^{y_{sj}}$$

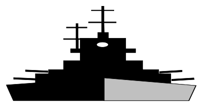
$\varphi(g, l, \rho, v, s, f) = 0$

rank A = 3

Ay=0 有m-r=3个基本解

$$\begin{cases} y_1 = (-1/2, -1/2, 0, 1, 0, 0)^T \\ y_2 = (0, -2, 0, 0, 1, 0)^T \\ y_3 = (-1, -3, -1, 0, 0, 1)^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = g^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} v \\ \pi_2 = l^{-2} s \\ \pi_3 = g^{-1} l^{-3} \rho^{-1} f \end{cases}$$



F(π$_1$, π$_2$,π$_3$) = 0与
φ(g, l, ρ,v,s,f) = 0 等价

F(π $_1$, π$_2$,…, π$_{m-r}$) = 0 与
f (q$_1$, q$_2$, …, q$_m$) =0 等价

$$\pi_s = \prod_{j=1}^{m} q_j^{y_{sj}}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = g^{-\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} v \\ \pi_2 = l^{-2} s \\ \pi_3 = g^{-1} l^{-3} \rho^{-1} f \end{cases}$$

为得到阻力 f 的显式表达式 F=0 ⇨ $\pi = \varphi(\pi_1, \pi_2)$

令 $\pi = \dfrac{\pi_3}{\pi_1^2 \pi_2}$ ⇨ $\pi = \dfrac{f}{sv^2\rho}$

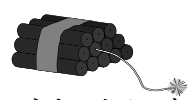
$$f = sv^2\rho\varphi(\pi_1, \pi_2)$$

$$\pi_1 = \frac{v}{\sqrt{gl}}, \pi_2 = \frac{s}{l^2}$$

φ 未定

---

2. 点热源的热扩散



r=0处热量**e**的瞬时点热源**(t=0)**在无穷空间引起热扩散

温度u ⇦ 向径r,时刻t,热量e,介质(体积)比热c, 扩散系数k

φ (r, t, e, c, k, u) = 0

基本量纲：L,M,T, Θ(温度)

[r] = L, [t] = T

[e] = L^{2}MT^{-2}

[c] = L^{-1}MT^{-2}Θ^{-1}

[k] = LMT^{-3} Θ^{-1}

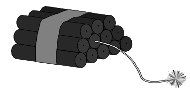
[u] = Θ

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} (L) \\ (M) \\ (T) \\ (\Theta) \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} (r) & (t) & (e) & (c) & (k) & (u) \end{array} \end{array}$$

m=6, n=4

$$\varphi(r, t, e, c, k, u) = 0$$



rank A=r=4，Ay=0有 m-r=2个基本解

$$\begin{cases} y_1 = (-2, 1, \ \ 0, -1, \ 1, 0)^T \\ y_2 = (\ 3, 0, -1, \ \ 1, \ 0, 1)^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = r^{-2} t c^{-1} k \\ \pi_2 = r^3 e^{-1} c u \end{cases}$$

$$F(\pi_1, \pi_2) = 0$$

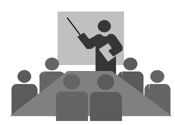
$$u = \frac{e}{c}(a^2 t)^{-\frac{3}{2}} g\left(\frac{r^2}{a^2 t}\right), \quad a^2 = \frac{k}{c}$$

g是未定函数

$$u = \frac{e}{c}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}, \quad a^2 = \frac{k}{c}$$

热传导方程的解

量纲分析法的评注



- 物理量的选取

  φ (…) = 0中包括哪些物理量是至关重要的

- 基本量纲的选取

  基本量纲个数n；选哪些基本量纲

- 基本解的构造

  有目的地构造 Ay=0 的基本解

- 方法的普适性
- 结果的局限性

  函数F和无量纲量的未定性

§3 量纲分析在物理模拟中的应用

例. 航船阻力的物理模拟

通过航船模型确定原型船所受阻力

已知模型船所受阻力

$$f = sv^2\rho\varphi(\pi_1, \pi_2)$$

$$\pi_1 = \frac{v}{\sqrt{gl}}, \pi_2 = \frac{s}{l^2}$$

f, s, l, v, ρ, g

~模型船的参数(均已知)

可得原型船所受阻力

$$f_1 = s_1 v_1^2 \rho_1 \varphi(\pi_1', \pi_2')$$

$$\pi_1' = \frac{v_1}{\sqrt{g_1 l_1}}, \pi_2' = \frac{s_1}{l_1^2}$$

$f_1, s_1, l_1, v_1, \rho_1, g_1$

~原型船的参数

(f_1未知，其他已知)

注意：二者的φ相同

$$f = sv^2\rho\varphi(\pi_1, \pi_2)$$

$$\pi_1 = \frac{v}{\sqrt{gl}}, \pi_2 = \frac{s}{l^2}$$

$$f_1 = s_1 v_1^2 \rho_1 \varphi(\pi_1', \pi_2')$$

$$\pi_1' = \frac{v_1}{\sqrt{g_1 l_1}}, \pi_2' = \frac{s_1}{l_1^2}$$

$$g = g_1$$

$$\pi_1 = \pi_1', \quad \pi_2 = \pi_2'$$

$$\Rightarrow \frac{f_1}{f} = \frac{s_1 v_1^2 \rho_1}{s v^2 \rho}$$

$$\left(\frac{v_1}{v}\right)^2 = \frac{l_1}{l}$$

$$\frac{s_1}{s} = \left(\frac{l_1}{l}\right)^2$$

$(\rho = \rho_1)$

$$\frac{f_1}{f} = \left(\frac{l_1}{l}\right)^3$$

按一定尺寸比例造模型船，量测 **f**，可算出 $\mathbf{f_1}$ ~ 物理模拟

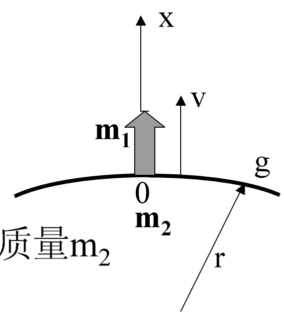
§4 无量纲化

例. 火箭发射

星球表面竖直发射。初速v,

星球半径r, 表面重力加速度g

研究火箭高度 **x** 随时间 **t** 的变化规律



解 设 t=0 时 x=0, 火箭质量m_1, 星球质量m_2

牛顿第二定律，万有引力定律

$$m_1\ddot{x} = -k\frac{m_1 m_2}{(x+r)^2}$$

$$\ddot{x} = -g\ (x=0)$$

$$km_2 = r^2 g$$

$$\ddot{x} = -\frac{r^2 g}{(x+r)^2}$$

$$x(0)=0,\ \dot{x}(0)=v$$

$x = x(t; r, v, g)$ ——**3**个独立参数

用无量纲化方法减少独立参数个数

变量x, t和独立参数r, v, g的量纲

$[x]=L,\ [t]=T,\ [r]=L,\ [v]=LT^{-1},\ [g]=LT^{-2}$

用参数r, v, g的组合, 分别构造与x, t具有相同量纲的$\mathbf{x_c}$, $\mathbf{t_c}$（特征尺度）

令 $\bar{x} = \dfrac{x}{x_c},\ \bar{t} = \dfrac{t}{t_c}$

如 $x_c = r,\ t_c = r/v$

$\bar{x},\ \bar{t}$ —无量纲变量

利用新变量 $\bar{x},\ \bar{t}$ $x = x(t; r, v, g)$ 将被简化

x_c, t_c的不同构造

$$\bar{x} = \frac{x}{x_c},\ \bar{t} = \frac{t}{t_c}$$

$$\ddot{x} = -\frac{r^2 g}{(x+r)^2}$$

$$x(0)=0,\ \dot{x}(0)=v$$

$x = x(t;r,v,g)$ 的不同简化结果

1）令 $x_c = r, t_c = r/v$ $\quad \bar{x} = x/r, \bar{t} = vt/r$

$$\dot{x} = v\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = v\dot{\bar{x}}$$

$$\ddot{x} = \frac{v^2}{r}\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} = \frac{v^2}{r}\ddot{\bar{x}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon\ddot{\bar{x}} = -\dfrac{1}{(\bar{x}+1)^2}, \varepsilon = \dfrac{v^2}{rg} \\ \bar{x}(0)=0, \quad \dot{\bar{x}}(0)=1 \end{cases}$$

$x = x(t;r,v,g)$ $\Rightarrow$ $\bar{x} = \bar{x}(\bar{t};\varepsilon)$ $\quad$ ε为无量纲量

2）令 $x_c = r, t_c = \sqrt{r/g}$

$x = x(t;r,v,g)$

$\bar{x} = \bar{x}(\bar{t};\varepsilon)$

ε为无量纲量

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\bar{x}} = -\dfrac{1}{(\bar{x}+1)^2} \\ \bar{x}(0) = 0 \\ \dot{\bar{x}}(0) = \sqrt{\varepsilon},\ \varepsilon = \dfrac{v^2}{rg} \end{cases}$$

3）令 $x_c = v^2/g, t_c = v/g$

$x = x(t;r,v,g)$

$\bar{x} = \bar{x}(\bar{t};\varepsilon)$

ε为无量纲量

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\bar{x}} = -\dfrac{1}{(\varepsilon\bar{x}+1)^2}, \varepsilon = \dfrac{v^2}{rg} \\ \bar{x}(0)=0, \quad \dot{\bar{x}}(0)=1 \end{cases}$$

1）2）3）的共同点

解 $\bar{x}=\bar{x}(\bar{t};\varepsilon)$

只含**1**个参数——无量纲量ε

重要差别

考察无量纲量 $\varepsilon=\dfrac{v^2}{rg}$

$\sqrt{rg}=\sqrt{6370\times10^3\times9.8}\doteq8000(m/s)$ $>>v$ ⇨ $\varepsilon<<1$

在**1**）**2**）**3**）中能否忽略以ε为因子的项？

1) $\begin{cases}\varepsilon\ddot{\bar{x}}=-\dfrac{1}{(\bar{x}+1)^2},\ \varepsilon=\dfrac{v^2}{rg}\\ \bar{x}(0)=0,\quad \dot{\bar{x}}(0)=1\end{cases}$ $\xrightarrow{\text{忽略ε项}}$ $\dfrac{1}{(\bar{x}+1)^2}=0,$ $\bar{x}(0)=0,\dot{\bar{x}}(0)=1$

$\bar{x}$ 无解 ⇨ 不能忽略ε项

2) $\begin{cases}\ddot{\bar{x}}=-\dfrac{1}{(\bar{x}+1)^2}\\ \bar{x}(0)=0\\ \dot{\bar{x}}(0)=\sqrt{\varepsilon},\ \varepsilon=\dfrac{v^2}{rg}\end{cases}$ $\xrightarrow{\text{忽略ε项}}$ $\ddot{\bar{x}}=-\dfrac{1}{(\bar{x}+1)^2},$ $\bar{x}(0)=0,\dot{\bar{x}}(0)=0$

$\bar{x}(\bar{t})<0$ $\to x(t)<0$

⇨ 不能忽略ε项

3) $\begin{cases}\ddot{\bar{x}}=-\dfrac{1}{(\varepsilon\bar{x}+1)^2},\ \varepsilon=\dfrac{v^2}{rg}\\ \bar{x}(0)=0,\quad \dot{\bar{x}}(0)=1\end{cases}$ $\xrightarrow{\text{忽略ε项}}$ $\ddot{\bar{x}}=-1,$ $\bar{x}(0)=0,\dot{\bar{x}}(0)=1$

$\bar{x}(\bar{t})=-\dfrac{\bar{t}^2}{2}+\bar{t}$

$$\bar{x}(\bar{t}) = -\frac{\bar{t}^2}{2} + \bar{t}$$

$$\bar{x} = \frac{x}{x_c}, \bar{t} = \frac{t}{t_c}$$

$$x_c = v^2/g, t_c = v/g$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + vt$$

原问题

$$\ddot{x} = -\frac{r^2 g}{(x+r)^2}$$

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = v$$

火箭发射过程中引力$m_1 g$不变

即 **x+r ≈ r**

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -g \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v \end{cases}$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + vt$$ 是原问题的近似解 ⇨ 可以忽略ε项

为什么3)能忽略ε项，得到原问题近似解，而1)2)不能?

3）令 $x_c = v^2/g, t_c = v/g$

火箭到达最高点时间为v/g, 高度为$v^2/2g$,

$\bar{x} = x/x_c, \bar{t} = t/t_c$ 大体上具有单位尺度

⇨ $\varepsilon(<<1)$ 项可以忽略

1）令 $x_c = r, t_c = r/v$ $\quad x << x_c$ ⇨ $\bar{x}, \bar{t} << 1$

2）令 $x_c = r, t_c = \sqrt{r/g}$ ⇨ $\varepsilon(<<1)$ 项不能忽略

林家翘：*自然科学中确定性问题的应用数学*

作业

第3章习题（82页）

1，5，7

（与第4章作业一起交）

已讲过的课件放在如下的网址上：
www.csiam.edu.cn/mathmodel