计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第八章　常微分方程数值解

第四节　线性多步法

【**定义** 1. **线性多步法** (Linear Multistep Method)】

一阶常微分方程初值问题 (Initial Value Problem) 或称 Cauchy 问题形如

$$E: \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) & (1.1) \\ y(x_0) = y_0. \quad x \in [a, b] & (1.2) \end{cases}$$

如果计算 y_{n+k} 时，除了要用 y_{n+k-1} 的值，还要用 $y_{n+k-2}, y_{n+k-3}, \cdots, y_{n+1}, y_n$ 的值，则称此方法为 线性多步法 (Linear Multistep Method).

线性多步法 一般公式可表达为 y_{n+i} 与 f_{n+i} 的线性组合式
(隐式格式，未解出 y_{n+k})

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} &= h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i} \\ &= h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+i}, y_{n+i})\end{aligned}$$

或等价地，解出 y_{n+k} 获得 线性多步法 一般公式为

$$\begin{aligned} y_{n+k} &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y_{n+i} + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y_{n+i} + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+i}, y_{n+i}) \end{aligned}$$

(试比较欧拉单步法格式 $y_{n+1} = y_n + hK$) 其中

$i = 0, 1, 2, \cdots, N$, $n = 0, 1, 2, \cdots, N-k$, 步长 $h = \dfrac{b-a}{N}$,

$y_{n+i} \approx y(x_{n+i})$,$x_i = x_0 + ih$,$x_{n+i} = x_n + ih$.$\alpha_i, \beta_i$ 为常数,
α_0, β_0 不全为零.

计算函数值序列需要 k 个启动值 $y_0, y_1, \cdots, y_{k-2}, y_{k-1}$. 因此称为 线性 k 步法. 由于一阶常微分方程初值问题的原始初值只有一个 y_0, 所以另外 $k-1$ 个启动值 $y_1, \cdots, y_{k-2}, y_{k-1}$ 需要用其他方法来确定.

若 $\beta_k \neq 0$, 则 y_{n+k} 没有解出来，而且方程通常是一种非线性方程. 此时的 线性 k 步法 称为 隐式线性 k 步法.

若 $\beta_k = 0$, 则 y_{n+k} 已经解出来成为以前各项的显式表达，此时的 线性 k 步法 称为 显式线性 k 步法. 并且 显式线性 k 步法 一般公式可表达为

$$\begin{aligned} y_{n+k} &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y_{n+i} + h \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i f_{n+i} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} [\alpha_i y_{n+i} + h\beta_i f(x_{n+i}, y_{n+i})] \end{aligned}$$

【**定义** 2. **线性多步法的局部截断误差** (Local Tuncation Error)】

设 $y(x)$ 是一阶常微分方程初值问题的精确解 (解析解)，则称

$$
\begin{aligned}
T_{n+k} &= L[y(x_n);h] \\
&= y(x_{n+k}) - \sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i y(x_{n+i}) - h\sum_{i=0}^{k}\beta_i y'(x_{n+i}) \\
&= y(x_{n+k}) - \sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i y(x_n+ih) - h\sum_{i=0}^{k}\beta_i y'(x_n+ih)
\end{aligned}
$$

为 线性 k 步法 在节点 x_{n+k} 的 局部截断误差.

局部截断误差 T_{n+k} 关于步长 h 在节点 x_{n+k} 作 Taylor 展开式获得的首项称为 局部截断误差主项.

由 Taylor 展开式:

$$y(x_n + ih) = y(x_n) + ihy'(x_n) + \frac{(ih)^2}{2!}y''(x_n) + \cdots\ ;$$

求导得

$$y'(x_n + ih) = y'(x_n) + ihy''(x_n) + \frac{(ih)^2}{2!}y'''(x_n) + \cdots\ ;$$

将以上两个式子代入局部截断误差 T_{n+k} 的表达式，得

$$T_{n+k} = y(x_{n+k}) - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y(x_n + ih) - h \sum_{i=0}^{k} \beta_i y'(x_n + ih)$$

$$= y(x_n) + khy'(x_n) + \cdots - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i [y(x_n) + ihy'(x_n) + \cdots]$$

$$-h \sum_{i=0}^{k} \beta_i [y'(x_n) + ihy''(x_n) + \frac{(ih)^2}{2!} y'''(x_n) + \cdots]$$

$$= c_0 y(x_n) + c_1 hy'(x_n) + c_2 h^2 y''(x_n) + \cdots + c_p h^p y^{(p)}(x_n) + \cdots$$

其中经过展开整理后，获得的各系数 $c_j, j=2,3,\cdots\cdots$ 分别为

$c_0 = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = 1 - (\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1}),$

$c_1 = k - [\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (k-1)\alpha_{k-1}] - (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k),$

$c_2 = \frac{1}{2!}[k^2 - (\alpha_1 + 2^2\alpha_2 + \cdots + (k-1)^2\alpha_{k-1})] - \frac{1}{(2-1)!}(\beta_1 + 2^{2-1}\beta_2 + \cdots + k^{2-1}\beta_k),$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$

$c_j = \frac{1}{j!}[k^j - (\alpha_1 + 2^j\alpha_2 + \cdots + (k-1)^j\alpha_{k-1})] - \frac{1}{(j-1)!}(\beta_1 + 2^{j-1}\beta_2 + \cdots + k^{j-1}\beta_k),$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

如果适当选择组合系数 α_i, β_i ，使得

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_p = 0, \quad c_{p+1} \neq 0$$

则此时 线性 k 步法 是 p 阶的，并且 局部截断误差 为

$$\begin{aligned} T_{n+k} &= c_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x_n) + \cdots \\ &= c_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}) \end{aligned}$$

定义 局部截断误差主项 为 $c_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x_n)$. 局部截断误差常数 为 c_{p+1}.

【**定义** 4. **线性多步法的相容性** (Consistence)】

p 阶 线性 k 步法 的 局部截断误差 为

$$T_{n+k} = c_0 y(x_n) + c_1 h y'(x_n) + c_2 h^2 y''(x_n) + \cdots = O(h^{p+1})$$

若 $p \geq 1$，即 $c_0 = 0, c_1 = 0$，则称 p 阶 线性 k 步法 与原一阶常微分方程初值问题是 相容 (Consistent) 的. 这等价于

$$c_0 = 1 - (\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1}) = 0,$$

$$c_1 = k - [\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (k-1)\alpha_{k-1}] - (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k) = 0.$$

亦即 p 阶 线性 k 步法 与微分方程 相容 (Consistent) 等价于成立方程组

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1} = 1 \\ [\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (k-1)\alpha_{k-1}] + (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k) = k \end{cases}$$

【**定义** 1. Adams **阿当姆斯线性多步法** (Adams Linear Multistep Method)】

我们知道，一阶常微分方程初值问题 (Initial Value Problem) 线性多步法 一般公式为

$$
\begin{aligned}
y_{n+k} &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y_{n+i} + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i y_{n+i} + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+i}, y_{n+i})
\end{aligned}
$$

如果计算 y_{n+k} 时，只用 y_{n+k-1} 的值加上各个节点处的斜率的线性组合与步长的乘积 $h\sum\limits_{i=0}^{k}\beta_i f_{n+i}$，即取系数

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-2} = 0, \quad \alpha_{k-1} = 1$$

则 线性多步法 公式成为

$$\begin{aligned} y_{n+k} &= y_{n+k-1} + h\sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i} \\ &= y_{n+k-1} + h\sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+i}, y_{n+i}) \end{aligned}$$

则称此方法为 Adams 阿当姆斯线性 k 步法 (Adams Linear Multistep Method).

【 **定义** 2. **显式** Adams **阿当姆斯线性多步法** (Explicit Adams Linear Multistep Method) 】

对于 Adams 阿当姆斯线性 k 步法 (Adams Linear Multistep Method)

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i}$$

取系数 $\beta_k = 0$ ，则

$$
\begin{aligned}
y_{n+k} &= y_{n+k-1} + h\sum_{i=0}^{k-1}\beta_i f_{n+i} \\
&= y_{n+k-1} + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \cdots + \beta_{k-1} f_{n+k-1})
\end{aligned}
$$

称此方法为 显式 Adams 阿当姆斯线性 k 步法 (Explicit Adams Linear Multistep Method) 或 Adams–Bashforth 阿当姆斯 - 巴什福瑟线性 k 步法 (Adams-Bashforth Linear Multistep Method). 简称 显式 Adams 方法 (Explicit Adams Method).

【定义 3. 隐式 Adams **阿当姆斯线性多步法** (Implicit Adams Linear Multistep Method)**】**

对于 Adams 阿当姆斯线性 k 步法 (Adams Linear Multistep Method)

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h\sum_{i=0}^{k}\beta_i f_{n+i}$$

$$= y_{n+k-1} + h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \cdots + \beta_{k-1} f_{n+k-1} + \beta_k f_{n+k})$$

取系数 $\beta_k \neq 0$ ，则称此方法为 隐式 Adams 阿当姆斯线性 k 步法 (Implicit Adams Linear Multistep Method) 或 Adams–Bashforth 阿当姆斯 - 莫尔顿线性 k 步法 (Adams-Moulton Linear Multistep Method). 简称 隐式 Adams 方法 (Implicit Adams Method).

总之，我们有关于 Adams-Moulton-Bashforth 公式的如下结论.

【 定理 1 **】**

一般 Adams-Moulton-Bashforth 公式

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h\sum_{i=0}^{k}\beta_i f_{n+i}$$

【定理 2 】

显式 Adams-Moulton-Bashforth 公式 (c_{p+1} 为相应误差常数)

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf_n, c_{p+1} = \dfrac{1}{2} \\ y_{n+2} = y_{n+1} + \dfrac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n), c_{p+1} = \dfrac{5}{12} \\ y_{n+3} = y_{n+2} + \dfrac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n), c_{p+1} = \dfrac{3}{8} \\ y_{n+4} = y_{n+3} + \dfrac{h}{24}(55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n), \\ c_{p+1} = \dfrac{251}{720} \end{cases}$$

【定理 3 】

隐式 Adams-Moulton-Bashforth 公式 (c_{p+1} 为相应误差常数)

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(f_{n+1} + f_n), c_{p+1} = -\dfrac{1}{12} \\
y_{n+2} = y_{n+1} + \dfrac{h}{12}(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n), c_{p+1} = -\dfrac{1}{24} \\
y_{n+3} = y_{n+2} + \dfrac{h}{24}(9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n), \\
c_{p+1} = -\dfrac{19}{720} \\
y_{n+4} = y_{n+3} + \\
\dfrac{h}{720}(251f_{n+4} + 646f_{n+3} - 264f_{n+2} + 106f_{n+1} - 19f_n), \\
c_{p+1} = -\dfrac{3}{160}
\end{cases}
$$

【 例 1. **二阶** Adams **公式 】**

一阶线性非齐次常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1 - y \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

精确解为 $y = 1 - e^{-x}$. 取步长 $h = 0.2, y_0 = y(0) = 0, y_1 = 0.181$, 用二阶隐式和显式 Adams-Moulton-Bashforth 公式计算到 $x = 1.0$.

解

此一阶线性非齐次常微分方程精确解为

$$y = e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C)$$
$$= e^{-\int 1dx}(\int 1e^{\int 1dx}dx + C)$$
$$= e^{-x}(\int e^{x}dx + C) = 1 + Ce^{-x}.$$

代入初值条件 $y(0) = 0$, 有 $C = -1$, 从而此一阶线性非齐次常微分方程精确初值解为 $y = 1 - e^{-x}$.

(1)　二阶显式 Adams-Monlton-Bashforth 公式具有形式：

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n), c_{p+1} = \frac{5}{12}$$

由题设 $f = 1 - y$，代入得

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(3 - 3y_{n+1} - 1 + y_n)$$

$$= y_{n+1} + \frac{h}{2}(2 - 3y_{n+1} + y_n)$$

$$= y_{n+1} - \frac{3h}{2} y_{n+1} + \frac{h}{2} y_n + h = (1 - \frac{3h}{2}) y_{n+1} + \frac{h}{2} y_n + h$$

即 $y_{n+2} = (1 - \frac{3h}{2}) y_{n+1} + \frac{h}{2} y_n + h.$

由是迭代如

$x = 0.4, y_2 = (1 - \frac{3h}{2}) y_1 + \frac{h}{2} y_0 + h =$

$(1 - 0.3)0.181 + 0 + 0.2 = 0.3267$ 等等.

(2)　二阶隐式 Adams-Monlton-Bashforth 公式具有形式：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n), c_{p+1} = -\frac{1}{12}$$

由题设 $f = 1 - y$，代入得

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n) = y_n + \frac{h}{2}(1 - y_{n+1} + 1 - y_n)$$

$$= y_n - \frac{h}{2}y_{n+1} - \frac{h}{2}y_n + h = (1 - \frac{h}{2})y_n + h - \frac{h}{2}y_{n+1}$$

从而反解得(使用隐式方法通常都要经过此步骤 !)

$$y_{n+1} = \frac{2-h}{2+h}y_n + \frac{2h}{2+h}.$$

由是迭代如

$$x = 0.4, y_2 = \frac{2-h}{2+h}y_1 + \frac{2h}{2+h} = \frac{2-0.2}{2+0.2}\cdot 0.181 + \frac{0.4}{2+0.2} =$$
$$0.1480909 + 0.1818182 = 0.329908$$ 等等.

其他几个常用的多步法公式如下，其使用方式类似于 Adams 公式的用法：

【定理 4. **四步四阶显式** Milne **公式】**

$$
\begin{cases}
y_{n+4} = y_n + \dfrac{4h}{3}(2f_{n+3} - f_{n+2} + 2f_{n+1}), c_5 = \dfrac{14}{45} \\
T_{n+4} = \dfrac{14}{45}h^5 y^{(5)}(x_n) + O(h^6)
\end{cases}
$$

其中 $c_5 = \dfrac{14}{45}$ 为相应误差常数， T_{n+4} 为局部截断误差.

【**定理** 5. **二步四阶隐式** Simpson **公式**】

$$\begin{cases} y_{n+2} = y_n + \dfrac{h}{3}(f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}), c_5 = -\dfrac{1}{90} \\ T_{n+2} = -\dfrac{1}{90}h^5 y^{(5)}(x_n) + O(h^6) \end{cases}$$

其中 $c_5 = -\dfrac{1}{90}$ 为相应误差常数，T_{n+2} 为局部截断误差.

【 **定理** 6. **三步四阶隐式** Hamming **公式** 】

$$\begin{cases} y_{n+3} = \dfrac{3h}{8}(f_{n+3} + 2f_{n+2} - f_{n+1}) + \dfrac{1}{8}(9y_{n+2} - y_n), c_5 = -\dfrac{1}{40} \\ T_{n+3} = -\dfrac{1}{40}h^5 y^{(5)}(x_n) + O(h^6) \end{cases}$$

其中 $c_5 = -\dfrac{1}{40}$ 为相应误差常数， T_{n+3} 为局部截断误差.