离散模型之一
——差分方程建模

§1 市场经济中的蛛网模型

§2 离散形式的阻滞增长模型

§3 按年龄分组的种群增长模型

§4 减肥计划——节食与运动

§1 市场经济中的蛛网模型

现象

供大于求 ⇨ 价格下降 ⇨ 减少产量 ⇩ 供不应求 ⇦ 价格上涨 ⇦ 增加产量 ⇧ 供大于求

问题

描述商品数量与价格的变化规律

商品数量与价格的振荡在什么条件下趋向稳定

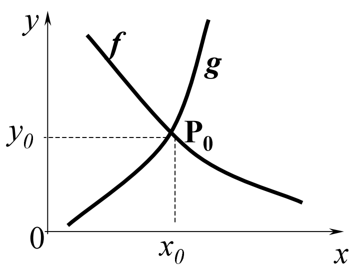
当不稳定时政府能采取什么干预手段使之稳定

蛛网模型

x_k~第k时段商品数量；y_k~第k时段商品价格

消费者的需求关系 ⇨ 需求函数 $y_k = f(x_k)$ 减函数

生产者的供应关系 ⇨ 供应函数 $x_{k+1} = h(y_k)$ ⇕ $y_k = g(x_{k+1})$ 增函数



f与g的交点$P_0(x_0,y_0)$ ~ 平衡点

一旦$x_k=x_0$，则$y_k=y_0$,

$x_{k+1},x_{k+2},\ldots=x_0$, $y_{k+1},y_{k+2},\ldots=y_0$

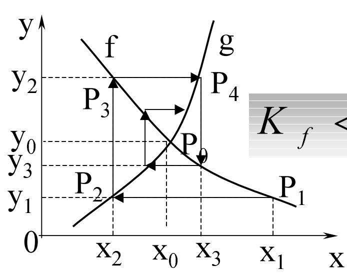
蛛网模型

$y_k = f(x_k)$ $x_{k+1} = h(y_k)$

设x_1偏离x_0 $x_1 \Rightarrow y_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow y_2 \Rightarrow x_3 \Rightarrow \cdots$

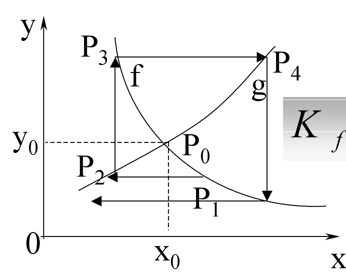
$x_k \to x_0, y_k \to y_0$ $P_1 \to P_2 \to P_3 \to \cdots \to P_0$

P_0是稳定平衡点



$K_f < K_g$

P_0是不稳定平衡点



$K_f > K_g$

蛛网模型

方程模型

在P_0点附近用直线近似曲线

$y_k = f(x_k)$ ⇒ $y_k - y_0 = -\alpha(x_k - x_0) \quad (\alpha > 0)$

$x_{k+1} = h(y_k)$ ⇒ $x_{k+1} - x_0 = \beta(y_k - y_0) \quad (\beta > 0)$

$x_{k+1} - x_0 = -\alpha\beta(x_k - x_0)$ $\quad x_{k+1} - x_0 = (-\alpha\beta)^k (x_1 - x_0)$

$\alpha\beta < 1$ $\quad \alpha(=K_f) < \dfrac{1}{\beta}(=K_g)$ ⇒ $x_k \to x_0$ $\quad P_0$稳定

$\alpha\beta > 1$ $\quad \alpha(=K_f) > \dfrac{1}{\beta}(=K_g)$ ⇒ $x_k \to \infty$ $\quad P_0$不稳定

蛛网模型

结果解释

考察 α, β 的含义

$y_k - y_0 = -\alpha(x_k - x_0)$, α~商品数量减少1单位,价格上涨幅度

$x_{k+1} - x_0 = \beta(y_k - y_0)$, β~价格上涨1单位,(下时段)供应的增量

α~ 消费者对需求的敏感程度 $\quad \alpha$ 小,有利于经济稳定

β~ 生产者对价格的敏感程度 $\quad \beta$ 小,有利于经济稳定

$\Rightarrow \alpha\beta < 1$ 经济稳定

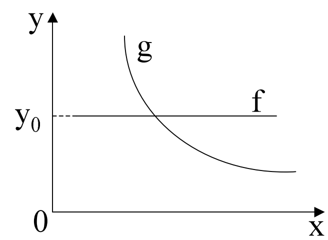
蛛网模型

经济不稳定时政府的干预办法

1. 使 α 尽量小，如 $\alpha=0$

⇨ 需求曲线变为水平

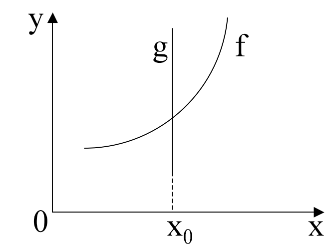
以行政手段控制价格不变



2. 使 β 尽量小，如 $\beta=0$

⇨ 供应曲线变为竖直

靠经济实力控制数量不变



模型的推广

生产者管理水平提高

• 假定生产者根据当前时段和前一时段的价格决定下一时段的产量

$$x_{k+1}=h\left(\frac{y_k+y_{k-1}}{2}\right)$$

设供应函数为 $x_{k+1}-x_0=\beta[(y_k+y_{k-1})/2-y_0]$

需求函数不变 $y_k-y_0=-\alpha(x_k-x_0)$

$$\Rightarrow\ 2x_{k+2}+\alpha\beta x_{k+1}+\alpha\beta x_k=2(1+\alpha\beta)x_0,\ k=1,2,\cdots$$

二阶线性常系数差分方程

x_0为平衡点　研究平衡点稳定，即$k\to\infty$, $x_k\to x_0$的条件

模型的推广

$2x_{k+2}+\alpha\beta x_{k+1}+\alpha\beta x_k=2(1+\alpha\beta)x_0$ 的平衡点x_0的稳定性

方程通解 $x_k=c_1\lambda_1^k+c_2\lambda_2^k$ c_1, c_2由初始条件确定,

$\lambda_{1,2}$是特征根，即方程 $2\lambda^2+\alpha\beta\lambda+\alpha\beta=0$ 的根

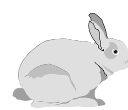
平衡点稳定，即$k\to\infty$, $x_k\to x_0$的条件: $|\lambda_{1,2}|<1$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\alpha\beta\pm\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4} \Rightarrow |\lambda_{1,2}|=\sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}}$$

平衡点稳定条件 $\alpha\beta<2$

比原来的条件 $\alpha\beta<1$ 放宽了

§2 离散形式的阻滞增长模型



连续形式的阻滞增长模型 (Logistic模型)

$\dot{x}(t)=rx(1-\frac{x}{N})$ $x(t)$ ~某种群 t时刻的数量(人口)

$t\to\infty$, $x(t)\to N$, $x=N$是稳定平衡点(与r大小无关)

离散形式 $y_{k+1}-y_k=ry_k(1-\frac{y_k}{N}), k=1,2,\cdots$

y_k ~某种群第k代的数量(人口)

若$y_k=N$, 则$y_{k+1}, y_{k+2},\ldots=N$, 即$y^*=N$是平衡点。

讨论平衡点的稳定性，即$k\to\infty$, $y_k\to N$?

离散形式阻滞增长模型的平衡点及其稳定性

$y_{k+1}-y_k=ry_k(1-\frac{y_k}{N})$ (1) $\Rightarrow$ $y_{k+1}=(r+1)y_k\left[1-\frac{r}{(r+1)N}y_k\right]$

$x_k=\frac{r}{(r+1)N}y_k$

$b=r+1$

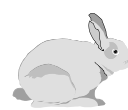
$x_{k+1}=bx_k(1-x_k)$ (2)

一阶(非线性)差分方程

(1)的平衡点$y^*=N$ $\Leftrightarrow$ (2)的平衡点$x^*=r/(r+1)=1-1/b$

讨论 $\boldsymbol{x}^*$的稳定性

一阶(非线性)差分方程 $x_{k+1}=f(x_k)$ (*)



(*)的平衡点x^*——代数方程 $x=f(x)$的根

(*)的近似线性方程 $x_{k+1}=f(x^*)+f'(x^*)(x_k-x^*)$ (**)

稳定性判断 x^*也是(**)的平衡点

$|f'(x^*)|<1$ x^*是(**)和(*)的稳定平衡点

$|f'(x^*)|>1$ x^*是(**)和(*)的不稳定平衡点

$x_{k+1} = bx_k(1-x_k)$ 的平衡点及其稳定性

平衡点 $x = f(x) = bx(1-x)$ ⇨ $x^* = 1 - \frac{1}{b}$

稳定性 $f'(x^*) = b(1-2x^*) = 2-b$

另一平衡点 $x=0$ 不稳定

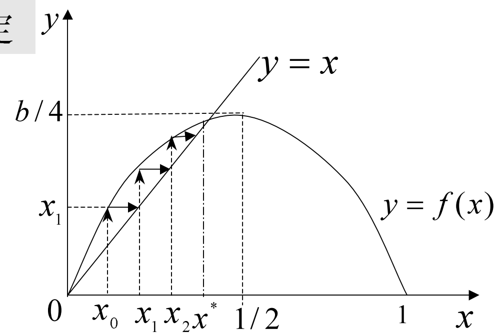
$|f'(x^*)| < 1$ ⟺ $1 < b < 3$ ⟺ x^* 稳定

$b > 3$ $(|f'(x^*)| > 1)$ ⟺ x^* 不稳定

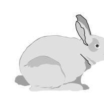
(1) $1 < b < 2$

⇨ $x^* = 1 - 1/b < 1/2$

x_k（单调增）$\to x^*$

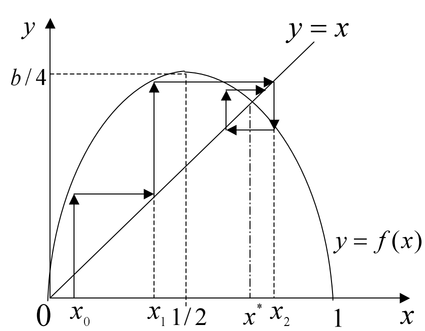


$x_{k+1} = bx_k(1-x_k)$ 的平衡点及其稳定性



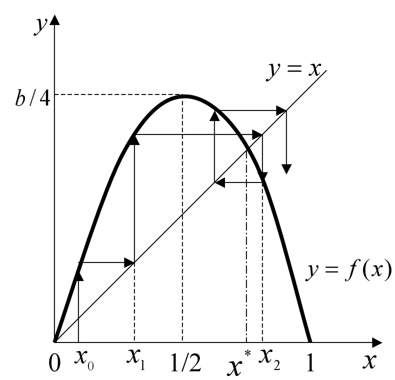
(2) $2 < b < 3$

⇨ $x^* = 1 - 1/b > 1/2$



x_k（振荡地）$\to x^*$

(3) $b > 3$



观察计算结果

x_k（不）$\to x^*$

倍周期收敛——x^*不稳定情况的进一步讨论

x_k（不）$\to x^*$　　　子序列 $x_{2k}\to x_1^*$，$x_{2k+1}\to x_2^*$

单周期不收敛　　　　　　2倍周期收敛

$$x_{k+1}=f(x_k)\qquad x_{k+2}=f(x_{k+1})=f(f(x_k))=f^{(2)}(x_k)\ (*)$$

$$x=f(f(x))=b\cdot bx(1-x)[1-bx(1-x)]$$

(*)的平衡点　$x^*=1-\dfrac{1}{b}$　　$x_{1,2}^*=\dfrac{b+1\mp\sqrt{b^2-2b-3}}{2b}$

$$x_1^*=f(x_2^*),\quad x_2^*=f(x_1^*),\quad 0<x_1^*<x^*<x_2^*<1$$

x^*不稳定，研究x_1^*, x_2^*的稳定性

倍周期收敛　　$x_{1,2}^*=\dfrac{b+1\mp\sqrt{b^2-2b-3}}{2b}$

$$(f^{(2)}(x))'\Big|_{x=x_1^*}=f'(x_2^*)f'(x_1^*),$$

$$(f^{(2)}(x))'\Big|_{x=x_2^*}=f'(x_1^*)f'(x_2^*)$$

$\Rightarrow$ x_1^*, x_2^*的稳定性相同

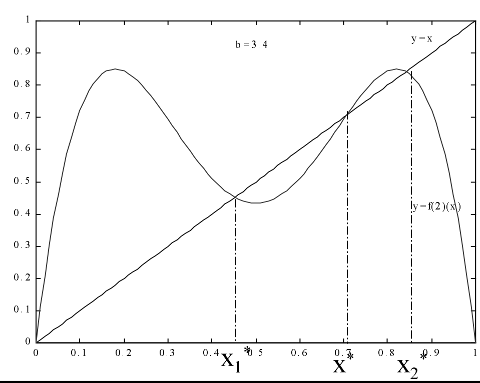
$$(f^{(2)}(x))'\Big|_{x=x_1^*,x_2^*}=b^2(1-2x_1^*)(1-2x_2^*)$$

$$\left|(f^{(2)}(x_{1,2}^*))'\right|<1$$

$\Downarrow$

$$b<1+\sqrt{6}\doteq 3.449$$

$$x_{2k}\to x_1^*,\ x_{2k+1}\to x_2^*$$



倍周期收敛

$b > 3.449 \ (|(f^{(2)}(x^*_{1,2}))'| > 1)$ ⇨ x_1^*, x_2^* (及x^*)不稳定

出现4个收敛子序列 $x_{4k}, x_{4k+1}, x_{4k+2}, x_{4k+3}$

平衡点及其稳定性需研究 $x_{k+4} = f^{(4)}(x_k)$

$3.449 < b < 3.544$ 时有4个稳定平衡点 ——4倍周期收敛

2^n倍周期收敛, n=1,2,… b_n~ 2^n倍周期收敛b的上界

$b_0=3, b_1=3.449, b_2=3.544, \ldots$ $n \to \infty, b_n \to 3.57$

b>3.57, 不存在任何收敛子序列 ⇨ 混沌现象

§3 按年龄分组的种群增长模型

- 不同年龄组的繁殖率和死亡率不同
- 以雌性个体数量为对象
- 建立差分方程模型，讨论稳定状况下种群的增长规律

假设与建模

- 种群按年龄大小等分为n个年龄组，记$i=1,2,\ldots n$
- 时间离散为时段，长度与年龄组区间相等，记$k=1,2,\ldots$
- 第 i年龄组1雌性个体在1时段内的繁殖率为b_i
- 第 i年龄组在1时段内的死亡率为d_i, 存活率为$s_i=1- d_i$

假设与建模

$x_i(k)$~时段k第i年龄组的种群数量

$$x_1(k+1)=\sum_{i=1}^{n} b_i x_i(k) \quad (\text{设至少1个}b_i>0)$$

$$x_{i+1}(k+1)=s_i x_i(k),\ i=1,2,\cdots,n-1$$

$$L=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & s_2 & & 0 & \vdots \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

~Leslie矩阵(L矩阵)

$x(k)=[x_1(k),x_2(k),\cdots x_n(k)]^T$

~按年龄组的分布向量

$$x(k+1)=Lx(k)$$

$$x(k)=L^k x(0)$$

预测任意时段种群按年龄组的分布

稳定状态分析的数学基础

- L矩阵存在正单特征根λ_1，使 $|\lambda_k|\le\lambda_1,\ k=2,3,\cdots n$

特征向量为 $x^*=\left[1,\dfrac{s_1}{\lambda_1},\dfrac{s_1 s_2}{\lambda_1^2},\cdots,\dfrac{s_1 s_2\cdots s_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}}\right]^T$

- 若L矩阵存在$b_i,b_{i+1}>0$, 则 $|\lambda_k|<\lambda_1,\ k=2,3,\cdots,n$

且 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x(k)}{\lambda_1^k}=cx^*$, c是由b_i, s_i, $x(0)$决定的常数

$x(k)=L^k x(0)$

$$L^k=(P\,diag\,(\lambda_1,\cdots\lambda_n)P^{-1})^k = P\,diag\,(\lambda_1^k,\cdots\lambda_n^k)P^{-1}$$

P的第1列是x^*

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{x(k)}{\lambda_1^k}=P\,diag\,(1,0,\cdots 0)P^{-1}x(0)$$

稳定状态分析——**k**充分大
种群按年龄组的分布

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x(k)}{\lambda_1^k}=cx^*$$

1) $x(k)\approx c\lambda^k x^*$ ~种群按年龄组的分布趋向稳定，x^*称稳定分布, 与初始分布无关

2) $x(k+1)\approx \lambda x(k)$ ⇨ $x_i(k+1)\approx \lambda x_i(k), i=1,2,\cdots n$

~种群各年龄组按同一倍数增减， λ称固有增长率

3）λ=1时各年龄组数量不变

$$L=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \\ & s_2 & & 0 & \vdots \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^*=[1,s_1,s_1s_2,\cdots s_1s_2\cdots s_{n-1}]^T$$

$Lx^*=x^*$ 的第1行

⇨ $b_1+b_2s_1+\cdots+b_ns_1s_2\cdots s_{n-1}=1$

稳定状态分析

$$\lambda=1\Leftrightarrow b_1+b_2s_1+\cdots+b_ns_1s_2\cdots s_{n-1}=R=1$$

R~1个体在整个存活期内的繁殖数量

4) $x(k)\approx c\lambda^k x^*$, $x^*=[1,s_1,s_1s_2,\cdots,s_{n-1}]^T$

⇨ $x_{i+1}(k)\approx s_ix_i(k), i=1,2,\cdots n-1$

~存活率 s_i是同一时段的 x_{i+1}与 x_i之比

（与s_i的原定义 $x_{i+1}(k+1)=s_ix_i(k)$ 比较）

§4 减肥计划——节食与运动

背景

- 体重指数BMI=w(kg)/l^2(m^2). 18.5<BMI<25~正常； BMI>25~超重；BMI>30~肥胖.
- 多数减肥食品达不到减肥目标，或不能维持
- 通过控制饮食和适当的运动，在不伤害身体的前提下，达到减轻体重并维持下去的目标

分析

- 体重变化由体内能量守恒破坏引起
- 饮食（吸收热量）引起体重增加
- 代谢和运动（消耗热量）引起体重减少

假设

1）体重增加正比于吸收的热量——每8000千卡增加体重1公斤

2）代谢引起的体重减少正比于体重——每周每公斤体重消耗200千卡 ~ 320千卡(因人而异)，相当于70公斤的人每天消耗2000千卡 ~ 3200千卡

3）运动引起的体重减少正比于体重，且与运动形式有关

4）为了安全与健康，每周体重减少不宜超过1.5公斤，每周吸收热量不要小于10000千卡

减肥计划

某甲体重100公斤，目前每周吸收20000千卡热量，体重维持不变。现欲减肥至75公斤。

1）在不运动的情况下安排一个两阶段计划。

第一阶段：每周减肥1公斤，每周吸收热量逐渐减少，直至达到下限（10000千卡）；

第二阶段：每周吸收热量保持下限，减肥达到目标。

2）若要加快进程，第二阶段增加运动，试安排计划。

3）给出达到目标后维持体重的方案。

基本模型

$w(k)$ ~ 第k周(末)体重

$c(k)$ ~第k周吸收热量

$$w(k+1) = w(k) + \alpha c(k+1) - \beta w(k)$$

$\alpha = 1/8000$(公斤/千卡)，　β ~代谢消耗系数(因人而异)

1）不运动情况的两阶段减肥计划

• 确定某甲的代谢消耗系数

每周吸收20000千卡
w=100公斤不变

$$\Rightarrow \quad w = w + \alpha c - \beta w$$

$$\beta = \frac{\alpha c}{w} = \frac{20000}{8000 \times 100} = 0.025$$

即每周每公斤体重消耗 20000/100=200千卡

基本模型 $w(k+1) = w(k) + \alpha c(k+1) - \beta w(k)$

• 第一阶段: $w(k)$每周减1公斤, $c(k)$减至下限10000千卡

$w(k+1) - w(k) = b(=1)$ ⇨ $w(k) = w(0) - bk$

$$c(k+1) = \frac{1}{\alpha}[\beta w(k) - b] = \frac{\beta}{\alpha} w(0) - \frac{b}{\alpha}(1 + \beta k)$$

$$= 12000 - 200k \geq C_m = 10000$$ ⇨ $k \leq 10$

第一阶段10周, 体重每周减1公斤($w(10)$=90), 吸收热量按

$c(k+1) = 12000 - 200k, \quad k = 0,1,\cdots 9$ 进行

基本模型 $w(k+1) = w(k) + \alpha c(k+1) - \beta w(k)$

• 第二阶段：每周$c(k)$保持C_m, $w(k)$减至75公斤

$$w(k+1) = (1-\beta) w(k) + \alpha C_m$$

$$w(k+n) = (1-\beta)^n w(k) + \alpha C_m \frac{1-(1-\beta)^n}{\beta}$$

$$= (1-\beta)^n [w(k) - \frac{\alpha C_m}{\beta}] + \frac{\alpha C_m}{\beta}$$

以 $\beta = 0.025, \ \alpha = \frac{1}{8000}, \ C_m = 10000$ 代入得

$$w(k+n) = 0.975^n [w(k) - 50] + 50$$

• 第二阶段：每周$c(k)$保持C_m, $w(k)$减至75公斤

$$w(k+n)=0.975^n[w(k)-50]+50$$

已知 $w(k)=90$, 要求 $w(k+n)=75$，求n

$$75=0.975^n(90-50)+50$$

$$n=\frac{\lg(25/40)}{\lg 0.975}=19$$

第二阶段19周, 每周吸收热量保持10000千卡, 体重按

$w(n)=40\times 0.975^n+50\ (n=1,2,\cdots 19)$减少至目标75公斤

2）第二阶段增加运动的减肥计划

根据资料每小时每公斤体重消耗的热量 γ (千卡):

跑步	跳舞	乒乓	自行车(中速)	游泳(50米/分)
7.0	3.0	4.4	2.5	7.9

基本模型 ⇨

$$w(k+1)=w(k)+\alpha c(k+1)-(\beta+\alpha\gamma t)w(k)$$

t~每周运动时间(小时)

取 $\alpha\gamma t=0.003$,即 $\gamma t=24$， $\beta(=0.025)\to\beta+\alpha\gamma t(=0.028)$

$\dfrac{\alpha C_m}{\beta}=44.6$, $75=0.972^n(90-44.6)+44.6$ ⇨ $n=14$

增加运动 γt=24 (每周跳舞8小时或自行车10小时), 14周即可达到目标体重。

3）达到目标体重75公斤后维持不变的方案

每周吸收热量$c(k)$保持某常数C，使体重w不变

$$w(k+1) = w(k) + \alpha c(k+1) - (\beta + \alpha\gamma t)w(k)$$

$$\Rightarrow \quad w = w + \alpha C - (\beta + \alpha\gamma t)w \quad \Rightarrow \quad C = \frac{(\beta + \alpha\gamma t)w}{\alpha}$$

* 不运动　$C = 8000 \times 0.025 \times 75 = 15000$(千卡)

* 运动(内容同前)　$C = 8000 \times 0.028 \times 75 = 16800$(千卡)

大作业候选题

全国大学生数学建模竞赛**1993**年**B**题

足球队排名次

下表给出了我国12支足球队在1988-1989年足球甲级队联赛中的成绩，要求:

1）设计一个依据这些成绩排出诸队名次的算法，并给出用该算法排名次的结果;

2）把算法推广到任意个队的情况;

3）讨论：数据应具备什么样的条件，用你的方法才能够排出诸队的名次。

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}
T_1	X	0:1 1:0 0:0	2:2 1:0 0:2	2:0 3:1 1:0	3:1	1:0	0:1 1:3	0:2 2:1	1:0 4:0	1:1 1:1	X	X
T_2		X	2:0 0:1 1:3	0:0 2:0 0:0	1:1	2:1	1:1 1:1	0:0 0:0	2:0 1:1	0:2 0:0	X	X
T_3			X	4:2 1:1 0:0	2:1	3:0	1:0 1:4	0:1 3:1	1:0 2:3	0:1 2:0	X	X
T_4				X	2:3	0:1	0:5 2:3	2:1 1:3	0:1 0:0	0:1 1:1	X	X
T_5					X	0:1	X	X	X	X	1:0 1:2	0:0 1:1
T_6						X	X	X	X	X	X	X

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}
T_7							X	1:0 2:0 0:0	2:1 3:0 1:0	3:1 3:0 2:2	3:1	2:0
T_8								X	0:1 1:2 2:0	1:1 1:0 0:1	3:1	0:0
T_9									X	3:0 1:0 0:0	1:0	1:0
T_{10}										X	1:0	2:0
T_{11}											X	1:! 1:2 1:1
T_{12}												x