计算方法及MATLAB实现

郑勋烨　编著

主审：高世臣　褚宝增　王祖朝　王翠香

副审：李少琪　李明霞　赵琳琳　赵俊芳

国防工业出版社

第二节　迭代法及其收敛性

（Fixed-Point Iteration）

我们先来考察求根方程 $f(x)=0$. 若可将之适当等价变形，改写成为如下的 不动点格式：

$$x=\varphi(x) \tag{2.1}$$

我们称满足在映照 φ 下不变 (动) 的，即自变量与函数值相等 (或说像与原像相等) 的点 x 为映照 φ 下的 不动点 (Fixed-Point). 则对求根函数 $f(x)$ 求根的问题就转化为对不动点映照 φ 求不动点的问题： $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\varphi(x)$.

显然，这里的关键问题仍是存在惟一性：

(1) 如何由求根函数作出不动点映照，此种作法是否惟一；

(2) 如何获得不动点，此不动点是否惟一.

【 释例. 不动点映照】

设非线性方程求根问题 $f(x)=x^2-x=0$; 显然它有两个实根 $x=0,1$. 将之适当等价变形，改写成为如下的 不动点格式： $x=x^2$. 即取 不动点映照 为 $\varphi(x)=x^2$, 则对求根函数 $f(x)=x^2-x$ 求根的问题就转化为对不动点映照 $\varphi(x)=x^2$ 求不动点的问题:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x) = x^2$$

从几何背景解释，求抛物线 $y = f(x) = x^2 - x = 0$ 与实轴的交点，转化为求直线 $y = x$ 与抛物线 $y = \varphi(x) = x^2$ 的交点. 显然，这些交点都是 $x = 0, 1$.

- 2.1. **不动点迭代法基本原理**

【定义 1 】 **不动点迭代法 (Fixed-Point Iteration)** 设不动点映照 φ 为连续映照： $\varphi \in C^0$. 根据不动点格式：
$x = \varphi(x)$ 构造迭代序列 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, 也称不动点映照 φ 为迭代函数；选择或给出一个初始值 x_0 得到初始迭代
$x_1 = \varphi(x_0)$. 由此可获得序列 $\{x_k\}$. 若此序列收敛于有限极限 x^* ：

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^* \tag{2.2}$$

则称迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 收敛，且此时由于不动点映照 φ 的连续性，交换函数与极限运算次序，则可知极限点即为不动点：

$$x^* = \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to+\infty} \varphi(x_k) = \varphi(\lim_{k\to+\infty} x_k) = \varphi(x^*) \quad (2.3)$$

也即为求根函数 $f(x)$ 的根：

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^* = \varphi(x^*) \Leftrightarrow f(x^*) = 0 \qquad (2.4)$$

如是我们获得了 根 (Root) 、 不动点 (Fixed-Point) 和 极限点 (Limit-Point) 的 三位一体关系.

现在我们来考求何时迭代序列 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 能够收敛，收敛精度能有多高，收敛速度又能有多快？

【定理 1】 不动点存在惟一性定理　设映照 $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ 为连续映照： $\varphi \in C^0[a,b]$. 若满足如下条件：

(1)φ 为内射 (Injection)： $\varphi(x) \in [a,b]$, 即函数值域包含在定义域内： $\langle \varphi(a), \varphi(b) \rangle \subseteq [a,b]$. 或直观而言是区间在 φ 的映照下越映越小.

(2)φ 满足 Lipschitz 压缩条件 (Compression)：存在小正数 $L \in (0,1)$, 任取定义域内两点 x_1, x_2, 满足不等式:

$$| \varphi(x_1) - \varphi(x_2) | \leq L \mid x_1 - x_2 \mid \tag{2.5}$$

或直观而言是距离在 φ 的映照下越映越小.

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在惟一不动点 x^*.

【证明】

存在性：若 $\varphi(a)=a$ 或 $\varphi(b)=b$, 则区间端点即为不动点，因此仅就非平凡的情况考察．由于 φ 为内射 (Injection)：$\langle\varphi(a),\varphi(b)\rangle\subseteq[a,b]$, 不妨设 $\varphi(a)>a,\varphi(b)<b$, 引入辅助函数

$$f(x)=x-\varphi(x) \tag{2.6}$$

则 $f(a)=a-\varphi(a)<0, f(b)=b-\varphi(b)>0$, 故由连续函数零点定理知，存在点 $x^*\in(a,b)$, 使 $f(x^*)=0$, 即 $x^*=\varphi(x^*)$.

惟一性：若又有不动点 x_0 满足 $x_0 = \varphi(x_0)$, 则由 Lipschitz 压缩条件有

$$|x^* - x_0| = |\varphi(x^*) - \varphi(x_0)| \leq L|x^* - x_0| < |x^* - x_0| \quad (2.7)$$

是为矛盾方程. 故 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在惟一不动点 x^*.

【证毕】

【定理 2】 迭代法收敛性定理 (压缩映像原理) 设迭代法

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), x_1 = \varphi(x_0) \tag{2.8}$$

的迭代函数 φ 为满足定理 1 所述压缩内射条件的连续映照：则迭代法收敛于惟一不动点 $x^* = \varphi(x^*)$. 且对第 k 步迭代有误差估计不等式：

$$| x_k - x^* | \leq \frac{L^k}{1-L} | x_1 - x_0 | \tag{2.9}$$

【证明】

收敛性：设惟一不动点 $x^* = \varphi(x^*)$. 由内射条件知 $x_{k+1} = \varphi(x_k) \in [a, b]$. 又由压缩条件知

$$\begin{aligned} &| x_k - x^* | = | \varphi(x_{k-1}) - \varphi(x^*) | \\ &\le L \mid x_{k-1} - x^* \mid \le L^2 \mid x_{k-2} - x^* \mid \le \cdots \le L^k \mid x^* - x_0 \mid \end{aligned} \tag{2.10}$$

而 $0 < L < 1$, 故令 $k \to +\infty$ 不等式两边取极限可得

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = x^* = \varphi(x^*)$$

即迭代法收敛于惟一不动点.

误差估计：由 Lipschitz 压缩条件有

$$
\begin{aligned}
&| x_{k+1} - x_k |=| \varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) | \\
&\leq L | x_k - x_{k-1} | \leq L^2 | x_{k-1} - x_{k-2} | \leq \cdots \leq L^k | x_1 - x_0 |
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

故对任意的正整数 $p > 0$, 有

$$
\begin{aligned}
&\mid x_{k+p} - x_k \mid \\
&\leq \mid x_{k+p} - x_{k+p-1} \mid + \mid x_{k+p-1} - x_{k+p-2} \mid + \cdots + \mid x_{k+1} - x_k \\
&\leq (L^{k+p-1} + L^{k+p-2} + \cdots + L^k) \mid x_1 - x_0 \mid \\
&\leq \frac{L^k}{1-L} \mid x_1 - x_0 \mid
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

(正项级数的部分和小于其极限和) 故令 $p \to +\infty$ 不等式两边取极限，由 $\lim\limits_{p \to +\infty} x_{k+p} = x^*$ 可得

$$
\mid x_k - x^* \mid \leq \frac{L^k}{1-L} \mid x_1 - x_0 \mid
$$

【证毕】

【推论 1】 误差的事后估计 迭代法

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), x_1 = \varphi(x_0)$$

的误差的事后估计为

$$|x_k - x^*| \leq \frac{1}{1-L} |x_{k+1} - x_k| \qquad (2.13)$$

【证明】　对任意的正整数 $p > 0$, 有

$$\begin{aligned}
&| x_{k+p} - x_k | = | x_{k+1+p-1} - x_k | \\
&\le (L^{p-1} + L^{p-2} + \cdots + L^1 + 1) \, | x_{k+1} - x_k | \\
&\le \frac{1}{1-L} \, | x_{k+1} - x_k |
\end{aligned} \tag{2.14}$$

故令 $p \to +\infty$ 不等式两边取极限，由 $\lim\limits_{p \to +\infty} x_{k+p} = x^*$ 可得

$$| x_k - x^* | \le \frac{1}{1-L} \, | x_{k+1} - x_k |$$

【证毕】

- 2.2. **局部收敛性与收敛阶** (Locally Convergent and order of Convergence)

适才我们讨论的是全局收敛性，并未限定收敛区间，在实际操作时往往是就不动点 x^* 或是初始值点 x_0 的某个小邻域来讨论．由此导出局部收敛的概念．

【**定义** 1】 **局部收敛** (Locally Convergent) 如果存在某不动点 x^*(或是初始值点 x_0) 的某个小邻域 $U(x^*) := \{x \in R| \mid x - x^* \mid < \delta\}$, 使得对任意初始值点 $x_0 \in R$，迭代序列 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 均位于小邻域内： $x_k \in U(x^*)$, 且收敛于不动点 x^*： $\lim_{k \to +\infty} x_k = x^*$, 则称迭代序列 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 在不动点 x^* 附近 *局部收敛* (Locally Convergent).

下面我们给出局部收敛性的一个用导函数特征刻画的充分条件，可以作为实用的判定法.

【 定理 1 】 局部收敛判定法　若在不动点 x^* 附近迭代序列 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 的迭代函数 $\varphi(x)$ 的导函数 $\varphi'(x)$ 连续，且在不动点 x^* 处的绝对值有上界 1：

$$|\varphi'(x^*)| \leq L < 1 \tag{2.15}$$

则迭代序列 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 在不动点 x^* 附近 *局部收敛* (Locally Convergent).

【证明】 由微分中值定理和不动点定义，有

$$
\begin{aligned}
&|\ \varphi(x) - x^*\ | = |\ \varphi(x) - \varphi(x^*)\ | = |\ \varphi'(\xi)\ ||\ x - x^*\ | \\
&\leq L\ |\ x - x^*\ | < |\ x - x^*\ |
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

故 $\varphi(x) \in U(x^*)$, 即为连续压缩内射．从而由迭代法收敛性定理可知迭代序列 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 在不动点 x^* 附近局部收敛.

【证毕】

【定义 2】 局部收敛阶 (Order of Local Convergence) 如果迭代序列 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 局部收敛于不动点 x^*, 且满足相邻第 $k+1$ 步迭代值绝对误差与第 k 步迭代值绝对误差的 p 幂之比为非零常数:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^p} = Const \neq 0 \tag{2.17}$$

则称迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 是 p 阶局部收敛的;特别地,当:

(1)$p=1$ 即 $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{e_{k+1}}{e_k}=C$ 时为 线性收敛;

(2)$p>1$ 即 $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{e_{k+1}}{e_k^p}=C$ 时为 超线性收敛;

(3)$p=2$ 即 $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{e_{k+1}}{e_k^2}=C$ 时为 平方收敛.

收敛速度的快慢可用收敛阶来衡量，阶数 p 越高收敛越快. 我们也有用导函数表征的实用的判定方法，其证明工具仍是 Taylor 公式.

【定理 2】 收敛阶判定法 若在不动点 x^* 附近迭代序列 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 的迭代函数 $\varphi(x)$ 的 p 阶导函数 $\varphi^{(p)}(x)$ 连续，且在不动点 x^* 处满足驻定条件：

$$\varphi'(x^*)=\varphi^{''}(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0,\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0 \quad (2.18)$$

则迭代序列 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 在不动点 x^* 附近为 p 阶局部收敛. 且有

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\lim_{k\to+\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^p}=\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!} \quad (2.19)$$

【证明】　首先由 $\varphi'(x^*) = 0 < 1$，据迭代法收敛性定理可知迭代序列 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 在不动点 x^* 附近局部收敛．又由 Taylor 公式，将 $\varphi(x_k)$ 在不动点 x^* 附近展开到 p 阶，利用驻定条件有

$$
\begin{aligned}
&\varphi(x_k) = \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x_k - x^*) + \cdots \\
&+ \frac{\varphi^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}(x_k - x^*)^{p-1} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k - x^*)^p \\
&= \varphi(x^*) + \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k - x^*)^p
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

故

$$x_{k+1}=\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-x^*)^p=x^*+\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-x^*)^p \tag{2.21}$$

即

$$x_{k+1}-x^*=\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-x^*)^p \tag{2.22}$$

从而

$$\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^p}=\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!} \tag{2.23}$$

令 $k\to+\infty$ 取极限，则 $\xi\to x^*$, 于是

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\lim_{k\to+\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^p}=\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}=Const\neq 0 \tag{2.24}$$

从而由收敛阶定义可知迭代序列 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 在不动点 x^* 附近为 p 阶局部收敛. 【证毕】

- 2.3. **例题选讲**

【例 1】 不同等价变形下迭代方程收敛性 设非线性方程初值问题 $f(x)=x^3-x^2-1=0, x_0=1.5$ ，用不同等价变形获得尽可能多样的迭代法，并依据迭代法收敛性定理分别讨论其收敛性.

(1) 作等价变形

$$x^3 - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = x^2 + 1 \Rightarrow x \cdot x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{x^2} + 1$$

由是获得不动点迭代函数 $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$, 其一阶导函数 $\varphi^{'}(x) = -\dfrac{2}{x^3}$, 在初值点 $x_0 = 1.5$ 处有

$$|\varphi'(x_0)| = |\varphi'(1.5)| = |-\frac{2}{1.5^3}| = \frac{2}{3.375} < 1$$

故迭代序列 $x_{k+1} = \varphi(x_k) = \dfrac{1}{x_k^2} + 1$ 在初值点 $x_0 = 1.5$ 附近局部收敛.

(2) 作等价变形

$$x^3 - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = x^2 + 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

由是获得不动点迭代函数 $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$, 其一阶导函数 $\varphi^{'}(x) = \dfrac{2x}{3(1+x^2)^{2/3}}$, 在初值点 $x_0 = 1.5$ 处有

$$|\varphi'(x_0)| = |\varphi'(1.5)| = |\frac{1}{(1+1.5^2)^{2/3}}| = \frac{1}{(3.25)^{2/3}} < 1$$

故迭代序列 $x_{k+1} = \varphi(x_k) = \sqrt[3]{x_k^2+1}$ 在初值点 $x_0 = 1.5$ 附近局部收敛.

(3) 作等价变形

$$x^3 - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = x^3 - 1 \Rightarrow x \cdot x = x^3 - 1 \Rightarrow x = x^2 - \frac{1}{x}$$

由是获得不动点迭代函数 $\varphi(x) = x^2 - \frac{1}{x}$, 其一阶导函数 $\varphi^{'}(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$, 在初值点 $x_0 = 1.5$ 处有

$$|\varphi'(x_0)| = |\varphi'(1.5)| = |3 + \frac{1}{1.5^2}| > 3 > 1$$

故迭代序列 $x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k^2 - \frac{1}{x_k}$ 在初值点 $x_0 = 1.5$ 附近发散.

(4) 作等价变形

$$x^3 - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

由是获得不动点迭代函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, 其一阶导函数 $\varphi^{'}(x)=-\dfrac{1}{2(x-1)^{3/2}}$, 在初值点 $x_0=1.5$ 处有

$$|\varphi'(x_0)|=|\varphi'(1.5)|=|\frac{1}{2(0.5^{3/2})}|\approx 1.414213562373>1$$

故迭代序列 $x_{k+1}=\varphi(x_k)=\dfrac{1}{\sqrt{x_k-1}}$ 在初值点 $x_0=1.5$ 附近发散.【解毕】

【练习 1】 不同等价变形下迭代方程收敛性 设非线性方程初值问题 $f(x) = x^3 - x - 1 = 0, x_0 = 1.5$ ，用不同等价变形获得尽可能多样的迭代法，并依据迭代法收敛性定理分别讨论其收敛性.

【例 3】 开方公式

(I) 开平方公式：设非线性方程求根问题

$f(x) = x^2 - a = 0, a > 0;$

(II) 开立方公式：设非线性方程求根问题

$f(x) = x^3 - a = 0, a > 0;$

(III) 开 n 次方公式：设非线性方程求根问题

$f(x) = x^n - a = 0, a > 0.$

用不同等价变形获得尽可能多样的迭代法.

(I)开平方公式：

(1) 作等价变形

$$x^2 - a = 0 \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x \cdot x = a \Rightarrow x = \frac{a}{x}$$

由是获得不动点迭代函数 $\varphi(x) = \dfrac{a}{x}$, 其一阶导函数 $\varphi'(x) = -\dfrac{a}{x^2}$.

(2) 作等价变形

$$x^2 - a = 0 \Rightarrow x = x + x^2 - a$$

由是获得不动点迭代函数 $\varphi(x) = x + x^2 - a$, 其一阶导函数 $\varphi^{'}(x) = 1 + 2x$.

(3) 作等价变形

$$x^2 - a = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot (x + \frac{a}{x})$$

由是获得不动点迭代函数 $\varphi(x) = \frac{1}{2} \cdot (x + \frac{a}{x})$, 其一阶导函数 $\varphi^{'}(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{x^2})$.

(4) 作等价变形

$$x^2 - a = 0 \Rightarrow 1 - \frac{a}{x^2} = 0 \Rightarrow x = x - 0 = x - \frac{1 - \dfrac{a}{x^2}}{\dfrac{2a}{x^3}} = \frac{1}{2}x(3 - \frac{x^2}{a})$$

由是获得不动点迭代函数 $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}x(3 - \dfrac{x^2}{a})$, 其一阶导函数 $\varphi'(x) = \dfrac{3}{2}(1 - \dfrac{x^2}{a})$.

(III)开 n 次方公式：

(1) 作等价变形

$$x^n - a = 0 \Rightarrow x^n = a \Rightarrow x \cdot x^{n-1} = a \Rightarrow x = \frac{a}{x^{n-1}}$$

由是获得不动点迭代函数 $\varphi(x) = \dfrac{a}{x^{n-1}}$, 其一阶导函数

$\varphi^{'}(x) = -\dfrac{(n-1)a}{x^n}$.

(2) 作等价变形

$$x^n - a = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{x^{n-1}} \Rightarrow x = \frac{1}{n} \cdot nx = \frac{1}{n}((n-1)x + \frac{a}{x^{n-1}})$$

由是获得不动点迭代函数 $\varphi(x) = \dfrac{1}{n}((n-1)x + \dfrac{a}{x^{n-1}})$, 其一阶导函数 $\varphi'(x) = \dfrac{n-1}{n}(1 - \dfrac{a}{x^n})$.

(3) 作等价变形

$$x^n - a = 0 \Rightarrow 1 - \frac{a}{x^n} = 0 \Rightarrow x = x - 0$$

$$= x - \frac{1 - \dfrac{a}{x^n}}{\dfrac{na}{x^{n+1}}} = \frac{1}{n}x(n + 1 - \frac{x^n}{a}).$$

由是获得不动点迭代函数 $\varphi(x) = \dfrac{1}{n}x(n + 1 - \dfrac{x^n}{a})$, 其一阶导函数 $\varphi^{'}(x) = \dfrac{n+1}{n}(1 - \dfrac{x^n}{a})$.

下面讨论一般开方公式的收敛阶．由收敛阶判定法，我们有

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\lim_{k\to+\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^p}=\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}$$

对于迭代函数 $\varphi(x)=\frac{1}{n}((n-1)x+\frac{a}{x^{n-1}})$, 其二阶导函数 $\varphi''(x)=\frac{(n-1)a}{x^{n+1}}$, 在不动点处 $\varphi''(\sqrt[n]{a})=\frac{(n-1)}{\sqrt[n]{a}}$ 代入收敛阶公式得

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\lim_{k\to+\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^p}=\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}=\frac{n-1}{2\sqrt[n]{a}}$$

对于迭代函数 $\varphi(x)=\frac{1}{n}x(n+1-\frac{x^n}{a})$, 其二阶导函数 $\varphi^{''}(x)=-\frac{(n+1)x^{n-1}}{a}$, 在不动点处 $\varphi^{''}(\sqrt[n]{a})=-\frac{(n+1)}{\sqrt[n]{a}}$ 代入收敛阶公式得

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=\lim_{k\to+\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^p}=\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}=-\frac{n+1}{2\sqrt[n]{a}}$$

【解毕】