离散模型之三——冲量过程建模

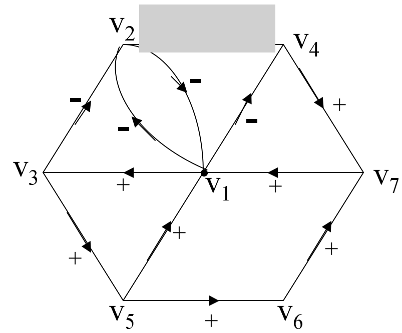
例 能源利用系统的预测

v_1—能源利用量； v_2—能源价格；

v_3—能源生产率； v_4—环境质量；

v_5—工业产值； v_6—就业机会；

v_7—人口总数。



带符号的有向图

系统的元素——图的顶点

元素间的影响——带方向的弧

影响的正反面——弧旁的+、– 号

影响——直接影响

符号——客观规律；方针政策

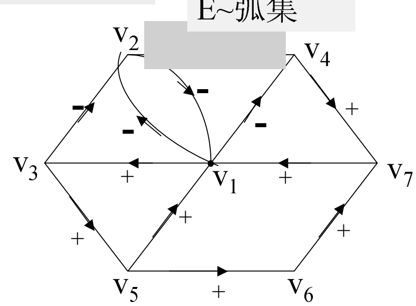
带符号有向图G_1=(V,E)的邻接矩阵A

V~顶点集

E~弧集

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & 若 v_iv_j 为 + \\ -1, & 若 v_iv_j 为 - \\ 0, & 若 v_iv_j \notin E\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$



带符号的有向图G_1

$v_i \xrightarrow[-]{+} v_j$

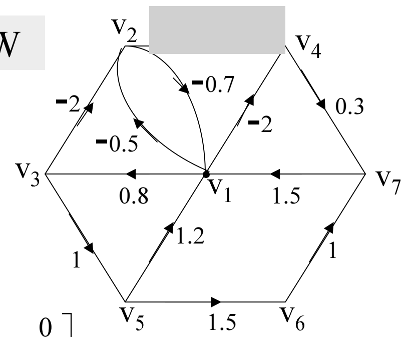
某时段v_i的增加导致下时段v_j的增加减少

定性模型

加权有向图G_2及其邻接矩阵W

$$v_i \xrightarrow{w_{ij}} v_j$$

某时段v_i的增加1单位导致下时段v_j的增加w_{ij}单位



加权有向图G_2

$$W=\begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.8 & -1.2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定量模型

冲量过程（**Pulse Process)**

研究由某元素v_i变化引起的系统的演变过程

$v_i(t)$ ~ v_i在时段t的值； $p_i(t)$ ~ v_i在时段t的改变量(冲量)

$$v_i(t+1)=v_i(t)+p_i(t+1),\quad i=1,2,\cdots,n,\ t=0,1,2,\cdots$$

$$p_j(t+1)=\sum_{i=1}^{n} w_{ij}p_i(t),\quad j=1,2,\cdots,n,\ t=0,1,2,\cdots$$

$$p_j(t+1)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}p_i(t)$$

$$v(t+1)=v(t)+p(t+1)$$

$$v(t)=(v_1(t),v_2(t),\cdots,v_n(t)),$$

$$p(t)=(p_1(t),p_2(t),\cdots p_n(t))$$

$$p(t+1)=p(t)W$$

A视为W的特例

能源利用系统的预测

$$v(t+1)=v(t)+p(t+1)$$

简单冲量过程——初始冲量$p(0)$中1个分量为1，其余为0的冲量过程

$$p(t+1)=p(t)A$$

设 $v(0)=p(0)$

若开始时能源利用量有突然增加，预测系统的演变

能源利用系统的$p(t)$和$v(t)$, $t=0,1,2\cdots$

t	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	1	-1	0	0	0	1	-1	1	-1	0	0	0
2	1	-1	0	0	1	0	-1	2	-2	1	-1	1	0	-1
3	1	-1	1	-1	0	1	0	3	-3	2	-2	1	1	-1
	……							……						

简单冲量过程S的稳定性

- 任意时段S的各元素的值和冲量是否为有限(稳定)
- S不稳定时如何改变可以控制的关系使之变为稳定

$$p(t+1)=p(t)W \qquad v(t+1)=v(t)+p(t+1)$$

S冲量稳定~对任意 i,t, $|p_i(t)|$有界

S值稳定~对任意 i,t, $|v_i(t)|$有界

值稳定 ⇩ 冲量稳定

$p(t)=p(0)W^t$ ⇨ S的稳定性取决于W的特征根

记W的非零特征根为λ

简单冲量过程S的稳定性

- **S**冲量稳定 $\Rightarrow |\lambda| \le 1$
- **S**冲量稳定 $\Leftrightarrow |\lambda| \le 1$且均为单根
- **S**值稳定 $\Leftrightarrow$ **S**冲量稳定且$\lambda \neq 1$

对于能源利用系统的邻接矩阵A

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

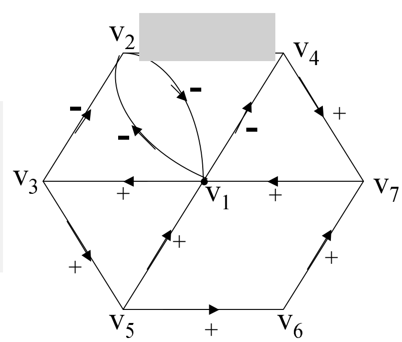
特征多项式

$$f(\lambda)=\lambda^2(\lambda^5-\lambda^3-\lambda^2-1)$$

$$f(1)=-2, f(2)=76 \Rightarrow \exists\lambda\in(1,2)$$

能源利用系统存在冲量不稳定的简单冲量过程

简单冲量过程的稳定性



改进的玫瑰形图**S***~带符号的有向图双向连通，且存在一个位于所有回路上的中心顶点。

回路长度~构成回路的边数

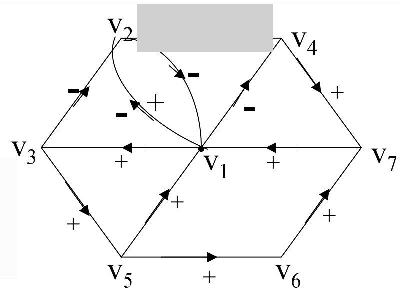
回路符号~构成回路的有向边符号（+1，-1）之积

a_k~长度为k的回路符号和

r~使$a_k \neq 0$的最大整数

- **S***冲量稳定 $\Rightarrow a_r=\pm 1,\ a_k=-a_r\cdot a_{r-k}\ (k=1,2,\cdots r-1)$
- 若**S***冲量稳定，则**S***值稳定 $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{r} a_k \neq 1$

简单冲量过程S*的稳定性



$a_1=0,\ a_2=(-1)_{v1v2}\times(-1)_{v2v1}=1$

$a_3=(+1)_{v1v3v5v1}+(-1)_{v1v4v7v1}+(+1)_{v1v3v2v1}=1,\ a_4=0,\ a_5=1,\ r=5$

• S*冲量稳定 ⇒ $a_r=\pm 1,\ a_k=-a_r\cdot a_{r\text{-}k}\ (k=1,2,\cdots r-1)$

$a_2\neq -a_5\cdot a_3$ ⇨ S*冲量不稳定

v_1—能源利用量
v_2—能源价格

$(-1)_{v1v2}\rightarrow(+1)_{v1v2}$(由鼓励利用变为限制利用)⇒ $a_2=-1$

⇨ A的特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^2(\lambda^5+\lambda^3-\lambda^2-1)$

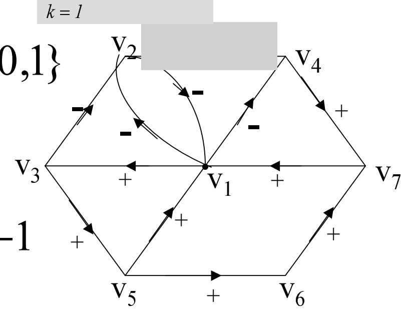
⇨ $\lambda=0,0,1,\pm i,(-1\pm\sqrt{3}i)/2$ ⇒ $|\lambda|\leq 1$ 且为单根 ⇨ S*冲量稳定

• S冲量稳定 ⇔ |λ| ≤ 1且均为单根

• S*冲量稳定 ⇒ $a_r=\pm 1,\ a_k=-a_r\cdot a_{r\text{-}k}\ (k=1,2,\cdots r-1)$

• 若S*冲量稳定，则S*值稳定 ⇔ $\sum_{k=1}^{r}a_k\neq 1$

$\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}=\{0,-1,1,0,1\}$



⇨ S*值不稳定

S*值稳定 ⇦ $a_3,a_5=1\Rightarrow a_3,a_5=-1$

⇦ $(+1)_{v3v5}\rightarrow(-1)_{v3v5}$

v_3—能源生产率
v_5—工业产值

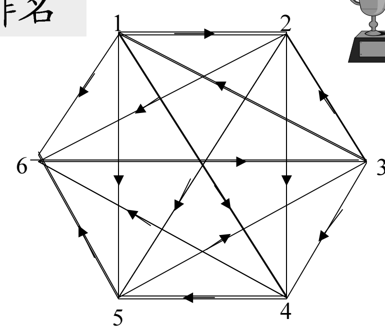
⇨ $(-1)_{v3v5}$违反客观规律

能源利用系统的值不应稳定？

离散模型之四——循环赛排名

• n支球队循环赛，每场比赛只计胜负，没有平局。

• 根据全部比赛结果排出各队名次。



6支球队循环赛结果

依箭头方向通过全部顶点的路径

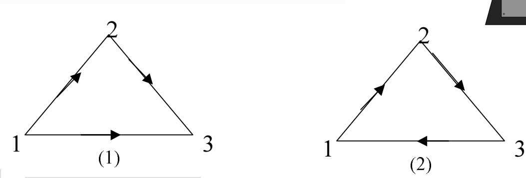
312456　　146325 ⇨ 无法排名

计算得分：1队胜4场，2, 3队各胜3场，4, 5队各胜2场， 6队胜1场。 ⇨ 2, 3队， 4, 5队无法排名

循环比赛的结果——竞赛图

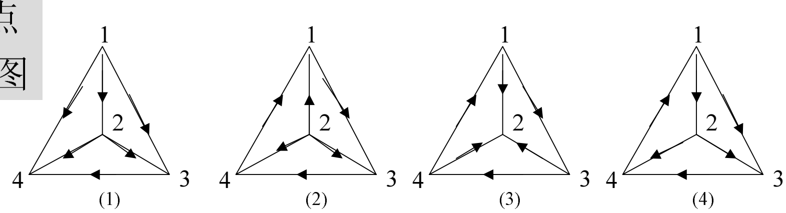
每对顶点间都有边相连的有向图

3个顶点的竞赛图

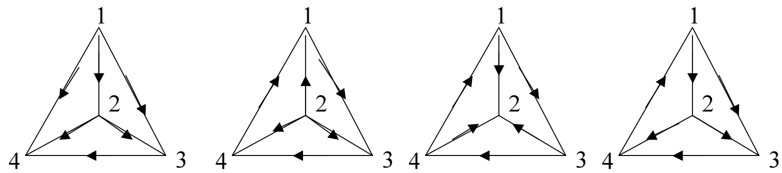


名次　{1，2，3}　　{(1,2,3)}

4个顶点的竞赛图



名次　{1, 2, 3, 4}　{2,(1,3,4)}　{(1,3,4), 2}　{(1,2),(3,4)}



(1) (2) (3) (4)

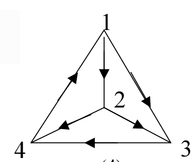
竞赛图的3种形式

- 具有唯一的完全路径，如(1)；
- 双向连通图——任一对顶点存在两条有向路径相互连通，如(4)；
- 其他，如(2)，(3)。

竞赛图的性质

- 必存在完全路径；
- 若存在唯一的完全路径，则由它确定的顶点顺序与按得分排列的顺序一致，如(1)。

双向连通竞赛图**G=(V,E)**的名次排序



(4)

邻接矩阵 $a_{ij}=\begin{cases}1, & v_iv_j\in E\\ 0, & v_iv_j\notin E\end{cases}$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

得分向量 $s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$

$$s=Ae,\ e=(1,1,\cdots,1)^T$$

$s^{(1)}=Ae=(2,2,1,1)^T$ ~ 1级得分向量

$s^{(2)}=As^{(1)}=(3,2,1,2)^T$ ~ 2级得分向量

$s^{(3)}=(3,3,2,3)^T,\quad s^{(4)}=(5,5,3,3)^T,$

$s^{(5)}=(8,6,3,5)^T,\quad s^{(6)}=(9,8,5,8)^T,$

$s^{(7)}=(13,13,8,9)^T, s^{(8)}=(21,17,9,13)^T,$

$$s^{(k)}=As^{(k-1)}=A^ke$$

$$k\to\infty, s^{(k)}\to ?$$

双向连通竞赛图的名次排序 $s^{(k)} = As^{(k-1)} = A^k e$

• 对于n(>3)个顶点的双向连通竞赛图，存在正整数r，使邻接矩阵A满足A^r>0，A称素阵

• 素阵A的最大特征根为正单根λ，对应正特征向量s，且 $\lim_{k \to \infty} \frac{A^k e}{\lambda^k} = s$

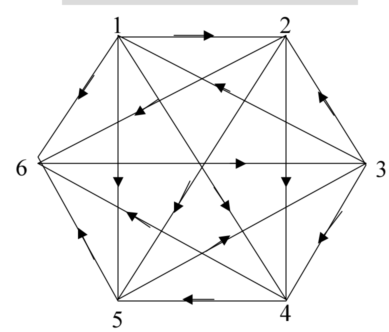
$\Rightarrow$ $k \to \infty, s^{(k)}$(归一化后)$\to s$ $\Rightarrow$ 用**s**排序

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = 1.4, \\ s = (0.323, 0.280, 0.167, 0.230)^T \end{array}$$

名次排序为**{1，2，4，3}**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6支球队循环赛结果



$s^{(1)} = (4,3,3,2,2,1)^T$, $s^{(2)} = (8,5,9,3,4,3)^T$

$s^{(3)} = (15,10,16,7,12,9)^T$, $s^{(4)} = (38,28,32,21,25,16)^T$

$\lambda = 2.232, s = (0.238, 0.164, 0.231, 0.113, 0.150, 0.104)^T$

名次排序为**{1，3， 2，5，4，6}**

离散模型之五——合作对策

例 甲乙丙三人合作经商，若甲乙合作获利7元，甲丙合作获利5元，乙丙合作获利4元，三人合作获利11元。又知每人单干获利1元。问三人合作时如何分配获利？

记甲乙丙三人分配为 $x=(x_1,x_2,x_3)$

$$x_1+x_2+x_3=11$$
$$x_1+x_2\ge 7$$
$$x_1+x_3\ge 5$$
$$x_2+x_3\ge 4$$
$$x_1,x_2,x_3\ge 1$$

解不唯一

(5，3，3)
(4，4，3)
(5，4，2)
……

1) Shapley合作对策

集合 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ $\forall$子集$s\in I$，$\exists$实函数$v(s)$满足

$$v(\phi)=0$$
$$v(s_1\bigcup s_2)\ge v(s_1)+v(s_2),\ s_1\bigcup s_2=\phi$$

$v(s)\sim$子集s的获利

$[I,v]\sim n$人合作对策，$v\sim$特征函数

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $\sim n$人从$v(I)$得到的分配，满足

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=v(I)$$
$$x_i\ge v(i),\quad i=1,2,\cdots,n$$

1) Shapley合作对策

公理化方法 ⇨ **Shapley值**

$$x_i = \sum_{s \in S_i} w(|s|)[v(s) - v(s \setminus i)],\ i = 1,2,\cdots,n$$

$$w(|s|) = \frac{(n - |s|)!(|s| - 1)!}{n!}$$

$|s|$ ~子集 s 中的元素数目， S_i ~包含 i 的所有子集

$[v(s) - v(s \setminus i)]$ ~i对合作s的“贡献”

$w(|s|)$ ~由 $|s|$ 决定的“贡献”的权重

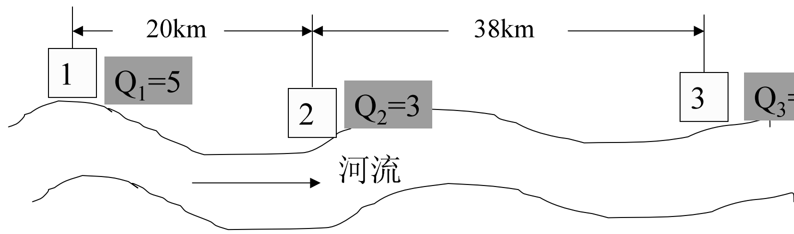
三人(**I={1,2,3}**)经商中甲的分配$\boldsymbol{x_1}$的计算

s	1	$1\cup 2$	$1\cup 3$	I
$v(s)$	1	7	5	11
$v(s\setminus 1)$	0	1	1	4
$v(s)-v(s\setminus 1)$	1	6	4	7
$\|s\|$	1	2	2	3
$w(\|s\|)$	1/3	1/6	1/6	1/3
$w(\|s\|)[v(s)-v(s\setminus 1)]$	1/3	1	2/3	7/3

x_1=13/3　　x_2=23/6, x_3=17/6

合作对策的应用例1 污水处理费用的合理分担

三城镇地理位置示意图



• 污水处理，排入河流

•三城镇可单独建处理厂，或联合建厂(用管道将污水由上游城镇送往下游城镇)

建厂费用$P_1=73Q^{0.712}$

管道费用$P_2=0.66Q^{0.51}L$

Q~污水量，L~管道长度

5种方案

1）单独建厂 $C(1)=73\cdot 5^{0.712}=230, C(2)=160, C(3)=230$

总投资 $D_1=C(1)+C(2)+C(3)=620$

2）1, 2合作 $C(1,2)=73\cdot(5+3)^{0.712}+0.66\cdot 5^{0.51}\cdot 20=350$

总投资 $D_2=C(1,2)+C(3)=580$

3）2, 3合作 $C(2,3)=73\cdot(3+5)^{0.712}+0.66\cdot 3^{0.51}\cdot 38=365$

总投资 $D_3=C(1)+C(2,3)=595$

4）1, 3合作 $C(1,3)=73\cdot(5+5)^{0.712}+0.66\cdot 5^{0.51}\cdot 58=463$

$>C(1)+C(3)=460$ 合作不会实现

4）三城合作总投资 $D_5 = C(1,2,3) = 73\cdot(5+3+5)^{0.712} + 0.66\cdot 5^{0.51}\cdot 20 + 0.66(5+3)^{0.51}\cdot 38 = 556$

D_5最小, 应联合建厂。 D_5如何分担？

$$D_5 \begin{cases} \text{建厂费：} d_1=73\times(5+3+5)^{0.712}=453 \\ 1\rightarrow 2\text{管道费：} d_2=0.66\times 5^{0.51}\times 20=30 \\ 2\rightarrow 3\text{管道费：} d_3=0.66\times(5+3)^{0.51}\times 38=73 \end{cases}$$

城3：d_1 按 5:3:5分担, d_2,d_3由城1，2担负

城2：d_3由城1，2按 5:3分担, d_2由城1担负

城1：城3分担$d_1\times 5/13=174<C(3)$,

城2分担$d_1\times 3/13+d_3\times 3/8=132<C(2)$,

城1分担$d_1\times 5/13+d_3\times 5/8+d_2=250>C(1)$

不同意

Shapley合作对策　　集合 $I=\{1,2,3\}$

特征函数$v(s)$~联合s建厂比单独建厂节约的投资

$$v(\phi)=0,\quad v(1)=v(2)=v(3)=0,$$
$$v(1\cup 2)=C(1)+C(2)-C(1,2)=230+160-350=40$$
$$v(2\cup 3)=C(2)+C(3)-C(2,3)=160+230-365=25$$
$$v(1\cup 3)=0$$
$$v(I)=C(1)+C(2)+C(3)-C(1,2,3)$$
$$=230+160+230-556=64$$

$x=(x_1,x_2,x_3)$ ~三城从节约投资$v(I)$得到的分配

计算城1从节约投资得到的分配x_1

s	1	$1\cup 2$	$1\cup 3$	I
$v(s)$	0	40	0	64
$v(s\setminus 1)$	0	0	0	25
$v(s)-v(s\setminus 1)$	0	40	0	39
$\lvert s\rvert$	1	2	2	3
$w(\lvert s\rvert)$	1/3	1/6	1/6	1/3
$w(\lvert s\rvert)[v(s)-v(s\setminus 1)]$	0	6.7	0	13

$x_1=19.7$, $x_2=32.1$, $x_3=12.2$ x_2最大，如何解释？

⇨ 三城在总投资**556**中的分担

城1 $C(1)-x_1=210.4$, 城2 $C(2)-x_2=127.8$, 城3 $C(3)-x_3=217.8$

合作对策的应用例**2** 派别在团体中的权重

90人的团体由3个派别组成，人数分别为40, 30, 20人。团体表决时需过半数的赞成票方可通过。设每个派别的成员同时投赞成票或反对票，用**Shapley**合作对策计算各派别在团体中的权重。

团体 $I=\{1,2,3\}$，依次代表 3个派别

定义特征函数 $v(s)=\begin{cases}1, & s\text{的成员超过45}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$

$v(\phi)=0,\quad v(1)=v(2)=v(3)=0,$

$v(1\cup 2)=v(1\cup 3)=v(2\cup 3)=v(I)=1$

权重 $x_1=x_2=x_3=1/3$ (虽然3派人数相差很大)

Shapley合作对策

优点：公正、合理，有公理化基础。

缺点：需要知道所有合作的获利，即要定义 $I=\{1,2,\ldots n\}$ 的所有子集(共 2^n-1 个)的特征函数，实际上

如 n 个单位治理污染, 通常知道第 i 方单独治理的投资 y_i 和 n 方共同治理的投资 Y, 及第 i 方不参加时其余 n-1方的投资 z_i (i=1,2, …n). 要确定共同治理时各方分担的费用。

特征函数应定义为合作的获利(节约的投资)，则有

$$v(i)=0\ (i=1,2,\cdots n),\ v(I)=\sum_{i=1}^{n} y_i - Y,\quad v(I\setminus i)=\sum_{j\neq i} y_j - z_i$$

许多 $v(s)$ 不知道, 无法用**Shapley**合作对策求解

求解合作对策的其他方法

设只知道 $b_i = v(I\setminus i) \sim$ 无 i 参加时 n-1方合作的获利

及 $B = v(I) \sim$ 全体合作的获利

记 $b=(b_1,\cdots b_n)$

求各方对获利 B 的分配 $x=(x_1,x_2,\cdots x_n),\ x_i\geq 0$

甲乙丙三人合作经商，若甲乙合作获利7元，甲丙合作获利5元，乙丙合作获利4元，三人合作获利11元。问三人合作时如何分配获利？

即已知 $b=(4,5,7),\ B=11$, 求 $x=(x_1,x_2,x_3)$

2）协商解 以n-1方合作的获利为下限

模型 $\sum x_i = B$

$$\begin{cases} \sum x_i - x_1 \ge b_1 \\ \vdots \\ \sum x_i - x_n \ge b_n \end{cases} \Rightarrow Ax \ge b, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}$$

记 $A\underline{x} = b$, $\underline{x} \sim x$的下限 $\underline{x}_i = \frac{1}{n-1}\sum b_i - b_i$

将剩余获利 $B - \sum \underline{x}_i$ 平均分配

$$x_i = \underline{x}_i + \frac{1}{n}(B - \sum \underline{x}_i) = \frac{1}{n}\sum b_i - b_i + \frac{B}{n}$$

$b = (4,5,7), B = 11,$
$\underline{x} = (4,3,1), B - \sum \underline{x}_i = 3,$
$x = \underline{x} + (1,1,1) = (5,4,2)$

3）Nash解

记 $d = (d_1, \cdots, d_n)$ 为现状点（谈判时的威慑点）

在此基础上“均匀地”分配全体合作的获利B

模型 $$\max \prod_i (x_i - d_i)$$
$$s.t. \quad \sum x_i = B, \quad x_i \ge d_i$$
$$\Rightarrow x_i = d_i + \frac{1}{n}(B - \sum d_i)$$

$d_i = 0 \Rightarrow$ 平均分配获利B

$d_i = \underline{x}_i \Rightarrow$ **3）Nash解** $\Rightarrow$ **2）**协商解

4）最小距离解　记 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$为$x$的上限

模型 $\min\sum_i (x_i-\bar{x}_i)^2$

$s.t.\quad \sum x_i = B$

$x_i \le \bar{x}_i$

⇨ $x_i=\bar{x}_i-\frac{1}{n}(\sum \bar{x}_i - B)$

若令 $\bar{x}_i = B-b_i$ ~第i方的边际效益

则 $x_i=\frac{1}{n}\sum b_i - b_i + \frac{B}{n}$

$b=(4,5,7), B=11,$

$\bar{x}=(7,6,4), \sum x_i - B = 6,$

$x=\bar{x}-(2,2,2)=(5,4,2)$

⇨ 4）最小距离解 ⇒ 2）协商解

5）基于满意度的解

满意度 $u_i=\frac{x_i-d_i}{e_i-d_i}$

d_i~现状点(最低点)

e_i~理想点(最高点)

模型 $\max(\min_i u_i)$

$s.t.\ \sum x_i = B$

⇨ $u_i=\frac{B-\sum d_i}{\sum e_i - \sum d_i}$

$x_i = d_i + u_i(e_i-d_i)$

$d_i=\underline{x}_i, e_i=\bar{x}_i$ ⇨ 5）基于满意度的解⇒ 2）协商解

$d_i=0, e_i=\bar{x}_i$ ⇨ $x_i=\frac{\bar{x}_i}{\sum \bar{x}_i}B$ ~ 按$\bar{x}_i$在$\sum\bar{x}_i$中的比例分配

6）*Raiffi*解

在 $\underline{x}$（$n-1$方合作获利的分配）基础上进行B的分配：

当j参与(原来无j的)$n-1$方合作时,获利为$B-b_j=\bar{x}_j$

$\bar{x}_j$先由j和$n-1$方平分，$n-1$方再等分

$$x_j=\frac{\bar{x}_j}{2},\quad x_i=\underline{x}_i+\frac{\bar{x}_j}{2(n-1)},\ i=1,\cdots,n,\ i\neq j$$

j取$1,2,\cdots n$,再平均，得到

$$x_i=\frac{n-1}{n}\underline{x}_i+\frac{1}{n}\left[\frac{\bar{x}_i}{2}+\frac{1}{2(n-1)}\sum_{j\neq i}\bar{x}_j\right]$$

$\underline{x}=(4,3,1),\ \bar{x}=(7,6,4)$

$x=(4\frac{2}{3},3\frac{11}{12},2\frac{5}{12})$

6种方法小结

A

Shapley 合作对策

$$x_i=\sum_{s\in S_i}w(|s|)[v(s)-v(s\setminus i)],i=1,2,\cdots,n$$

$$w(|s|)=\frac{(n-|s|)!(|s|-1)!}{n!}$$

需要所有 $v(s),s\in I$

B

只需 $b_i=v(I\setminus i),B=v(I)$

协商解

$\underline{x}_i$ ~ 下限

$$x_i=\underline{x}_i+\frac{1}{n}(B-\sum\underline{x}_i)$$

Nash解

d_i ~ 现状

$$x_i=d_i+\frac{1}{n}(B-\sum d_i)$$

最小距离解

$\bar{x}_i$ ~ 上限

$$x_i=\bar{x}_i-\frac{1}{n}(\sum\bar{x}_i-B)$$

$\underline{x}=A^{-1}b,\ \bar{x}_i=B-b_i$

基于满意度的解

d_i~现状, e_i~理想

$$u_i=\frac{B-\sum d_i}{\sum e_i-\sum d_i}$$

$$x_i=d_i+u_i(e_i-d_i)$$

$d_i=\underline{x}_i,\ e_i=\bar{x}_i$

4种方法结果相同

C **Raiffi解** 只需 $b_i = v(I \setminus i), B = v(I)$

对每个j,上限$\bar{x}_j$先由j和$n-1$方平分，$n-1$方再等分

例：有一资方(甲)和二劳方(乙,丙)，仅当资方与至少一劳方合作时才获利10元，应如何分配该获利？

$A\ (Shapley).\quad x = (6.67, 1.67, 1.67)$

$B.\ b_i = v(I \setminus i), b = (0, 10, 10),\ B = v(I) = 10$

$\underline{x} = A^{-1}b = (10, 0, 0)$

$\bar{x}_i = B - b_i, \bar{x} = (10, 0, 0)$

$x = (10, 0, 0)$

$$C\ (Raiffi).\quad x_i = \frac{n-1}{n}\underline{x}_i + \frac{1}{n}\left[\frac{\bar{x}_i}{2} + \frac{1}{2(n-1)}\sum_{j \neq i}\bar{x}_j\right]$$

$x = (8.34, 0.83, 0.83)$

6种方法 **(A,B,C 3类)** 小结

A公正合理；需要信息多，计算复杂。

B计算简单，便于理解，可用于各方实力相差不大的情况；一般来说它偏袒强者。

C 考虑了分配的上下限，又吸取了Shapley的思想，在一定程度上保护弱者。