离散模型之二 ——层次分析法建模

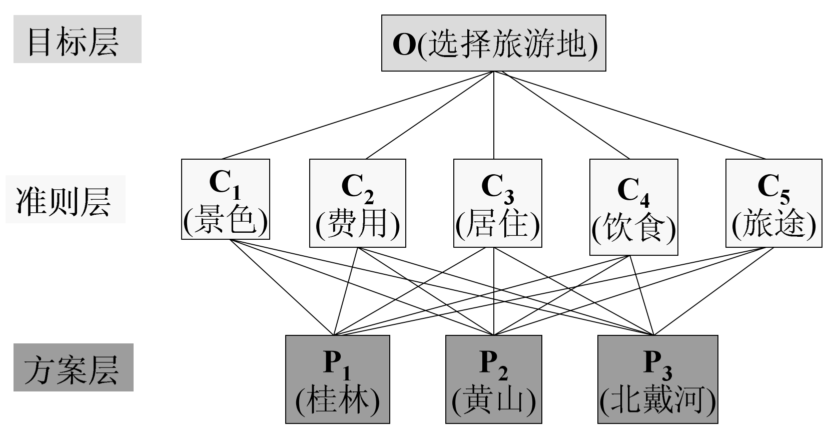
背景

- 日常工作、生活中的决策问题
- 涉及经济、社会等方面的因素
- 作比较、判断时人的主观选择起相当主要作用，各因素的重要性难以量化
- T.L.Saaty于1970年代提出层次分析法——AHP(Analytic Hierarchy Process)
- AHP——一种定性与定量相结合的、系统化、层次化的分析方法

一. 层次分析法的基本步骤

例. 选择旅游地

如何在3个目的地中按照景色、费用、居住条件等因素选择.



"选择旅游地"思维过程的归纳

• 将决策问题分为3个层次：目标层O，准则层C，方案层P；每层有若干元素， 各层元素间的关系用相连的直线表示。

• 通过相互比较确定各准则对目标的权重，及各方案对每一准则的权重。

• 将上述两组权重进行综合，确定各方案对目标的权重。

层次分析法将定性分析与定量分析结合起来完成以上步骤，给出决策问题的定量结果。

层次分析法的基本步骤

成对比较阵和权向量

元素之间两两对比，对比采用相对尺度

设要比较各准则$C_1,C_2,\ldots C_n$对目标O的重要性：

$$C_i : C_j \Rightarrow a_{ij} \qquad A=(a_{ij})_{n\times n},\ a_{ij}>0,\ a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}}$$

选择旅游地

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A~成对比较阵

A称正互反阵

要由A确定$C_1,\ldots C_n$对O的权向量

成对比较的不一致情况

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & \cdots \\ 2 & 1 & 7 & \cdots \\ \cdots\cdots & & & \end{bmatrix}$$

不一致

$a_{12}=1/2(C_1:C_2)$

$a_{13}=4(C_1:C_3)$

一致比较 $\Rightarrow$ $a_{23}=8(C_2:C_3)$

允许不一致，但要确定不一致的允许范围

考察完全一致的情况：

$W\Rightarrow w_1,w_2,\cdots w_n$

令$a_{ij}=w_i/w_j$

$w=(w_1,w_2,\cdots w_n)^T$ ~ 权向量

$$A=\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdots & \cdots & & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

成对比较完全一致的情况

若正互反阵A满足

$a_{ij}\cdot a_{jk}=a_{ik},\quad i,j,k=1,2,\cdots,n$

则A称一致阵。

$$A=\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdots & \cdots & & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

一致阵性质

- A的秩为1，A的唯一非零特征根为n
- A的任一列向量是对应于n 的特征向量
- A的归一化特征向量可作为权向量

对于不一致(但在允许范围内)的成对比较阵A，建议用对应于最大特征根λ的特征向量作为权向量w ，即

$$Aw=\lambda w$$

比较尺度 a_{ij}

Saaty等人提出1~9尺度—— a_{ij} 取值范围：1,2,…9及其互反数1,1/2, ,…1/9

• 便于定性到定量的转化：

尺度 a_{ij}	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_i:C_j$的重要性	相同		稍强		强		明显强		绝对强

$a_{ij}=1,1/2,\ldots 1/9$ $\sim C_i:C_j$的重要性 与上面相反

• 心理学家认为成对比较的因素不宜超过9个

• 用1~3,1~5,…1~17,…,1^p~9^p (p=2,3,4,5), d+0.1~d+0.9 (d=1,2,3,4)等27种比较尺度对若干实例构造成对比较阵，算出权向量，与实际对比发现， 1~9尺度较优。

一致性检验 对**A**确定不一致的允许范围

已知：n 阶一致阵的唯一非零特征根为n

可证：n 阶正互反阵的最大特征根λ ≥n, 且λ =n时为一致阵

定义一致性指标: $CI=\frac{\lambda-n}{n-1}$ *CI*越大，不一致越严重

为衡量*CI*的大小，引入随机一致性指标***RI***——随机模拟得到 a_{ij} ，形成A，计算*CI*即得*RI*。一组数据为

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

定义一致性比率 $CR = CI/RI$

当CR<0.1时，通过一致性检验

“选择旅游地”中准则层对目标的权向量及一致性检验

准则层对目标的成对比较阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

最大特征根$\lambda=5.073$

权向量(特征向量) $\boldsymbol{w}=(0.263,0.475,0.055,0.090,0.110)^{T}$

一致性指标 $CI=\dfrac{5.073-5}{5-1}=0.018$

随机一致性指标 ***RI***=1.12 (查表)

一致性比率***CR***=0.018/1.12=0.016<0.1

通过一致性检验

组合权向量

记第2层（准则）对第1层（目标）的权向量为$w^{(2)}=(w_1^{(2)},\cdots,w_n^{(2)})^T$

同样求第3层(方案)对第2层每一元素(准则)的权向量

方案层对C_1(景色)的成对比较阵

$$B_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

方案层对C_2(费用)的成对比较阵

$$B_2=\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/8 \\ 3 & 1 & 1/3 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

…C_n

…B_n

最大特征根	λ_1	λ_2	… λ_n
权向量	$\boldsymbol{w}_1^{(3)}$	$\boldsymbol{w}_2^{(3)}$	… $\boldsymbol{w}_n^{(3)}$

组合权向量

第3层对第2层的计算结果

k	1	2	3	4	5	$w^{(2)}$
$w_k^{(3)}$	0.595	0.082	0.429	0.633	0.166	0.263
	0.277	0.236	0.429	0.193	0.166	0.475
	0.129	0.682	0.142	0.175	0.668	0.055
λ_k	3.005	3.002	3	3.009	3	0.090
CI_k	0.003	0.001	0	0.005	0	0.110

RI=0.58 (n=3), $\boldsymbol{CI_k}$ 均可通过一致性检验

方案P_1对目标的组合权重为0.595×0.263+ …=0.300

方案层对目标的组合权向量为 $(0.300, 0.246, 0.456)^T$

组合权向量

第1层O

第2层C_1,…C_n

第3层P_1, …P_m

第2层对第1层的权向量

$$w^{(2)}=(w_1^{(2)},\cdots,w_n^{(2)})^T$$

第3层对第2层各元素的权向量

$$w_k^{(3)}=(w_{k1}^{(3)},\cdots,w_{km}^{(3)})^T,\ k=1,2,\cdots,n$$

构造矩阵 $W^{(3)}=[w_1^{(3)},\cdots,w_n^{(3)}]$

则第3层对第1层的组合权向量 $w^{(3)}=W^{(3)}w^{(2)}$

第s层对第1层的组合权向量

$$w^{(s)}=W^{(s)}W^{(s-1)}\cdots W^{(3)}w^{(2)}$$

其中$\boldsymbol{W^{(p)}}$是由第p层对第p-1层权向量组成的矩阵

层次分析法的基本步骤

1）建立层次分析结构模型

深入分析实际问题，将有关因素自上而下分层（目标—准则或指标—方案或对象），下层受上层影响，而层内各因素相对独立。

2）构造成对比较阵

用成对比较法和1~9尺度构造各层对上一层每一因素的成对比较阵。

3）计算权向量并作一致性检验

对每一成对比较阵计算最大特征根和特征向量，作一致性检验，若通过，则特征向量为权向量。

4）计算组合权向量（作组合一致性检验）

组合权向量可作为决策的定量依据。

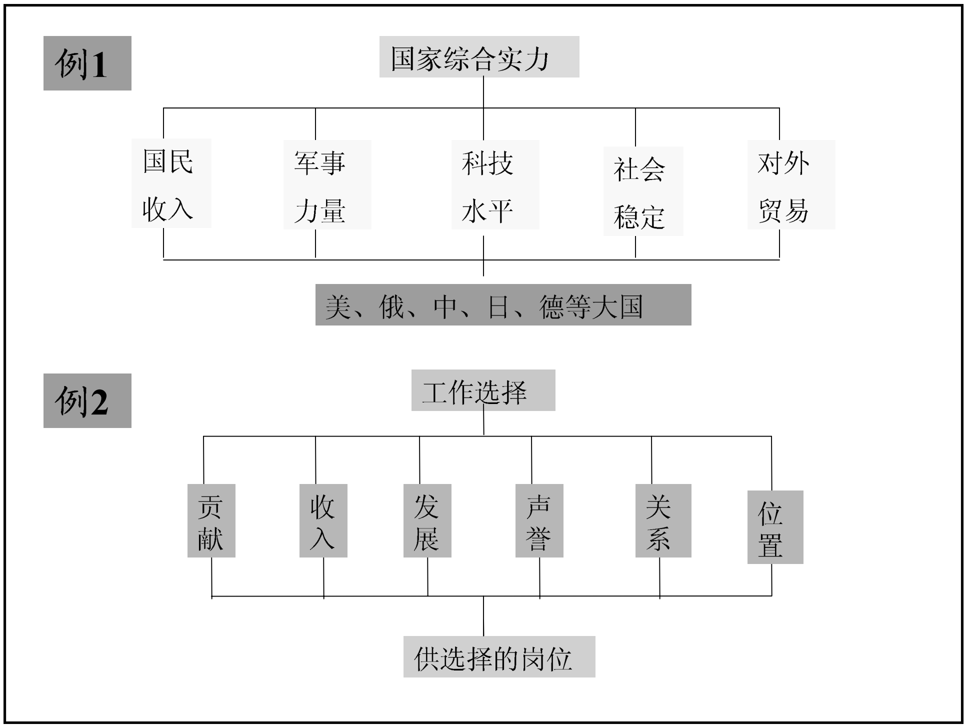
二. 层次分析法的广泛应用

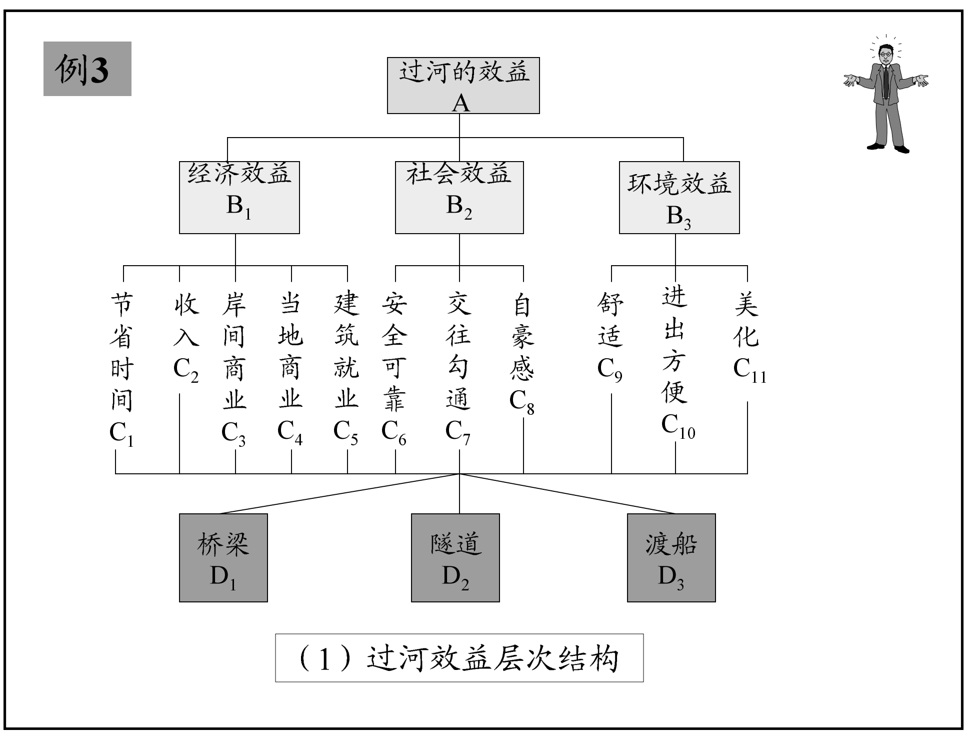
• 应用领域：经济计划和管理，能源政策和分配，人才选拔和评价，生产决策，交通运输，科研选题，产业结构，教育，医疗，环境，军事等。

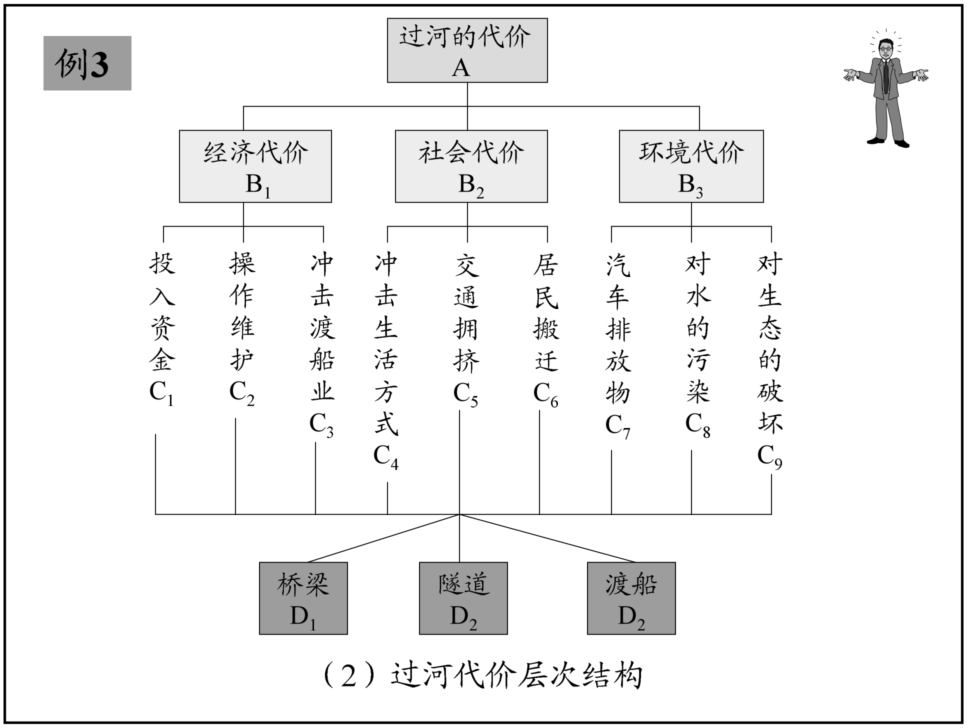
• 处理问题类型：决策、评价、分析、预测等。

• 建立层次分析结构模型是关键一步，要有主要决策层参与。

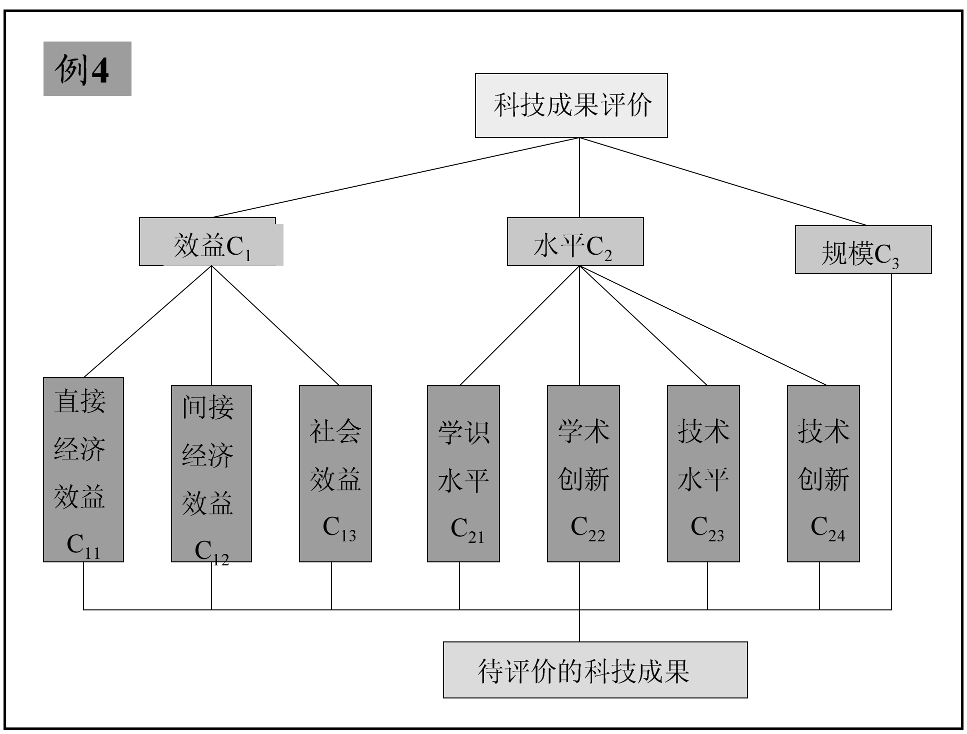
• 构造成对比较阵是数量依据，应由经验丰富、判断力强的专家给出。


例1
国家综合实力
国民收入
军事力量
科技水平
社会稳定
对外贸易
美、俄、中、日、德等大国
例2
工作选择
贡献
收入
发展
声誉
关系
位置
供选择的岗位


例3
过河的效益 A
经济效益 B1
社会效益 B2
环境效益 B3
节省时间 C1
收入 C2
岸间商业 C3
当地商业 C4
建筑就业 C5
安全可靠 C6
交往沟通 C7
自豪感 C8
舒适 C9
进出方便 C10
美化 C11
桥梁 D1
隧道 D2
渡船 D3
（1）过河效益层次结构


例3
过河的代价 A
经济代价 B_1
社会代价 B_2
环境代价 B_3
投入资金 C_1
操作维护 C_2
冲击渡船业 C_3
冲击生活方式 C_4
交通拥挤 C_5
居民搬迁 C_6
汽车排放物 C_7
对水的污染 C_8
对生态的破坏 C_9
桥梁 D_1
隧道 D_2
渡船 D_2

（2）过河代价层次结构


例4
科技成果评价
效益C_1
水平C_2
规模C_3
直接经济效益 C_{11}
间接经济效益 C_{12}
社会效益 C_{13}
学识水平 C_{21}
学术创新 C_{22}
技术水平 C_{23}
技术创新 C_{24}
待评价的科技成果

三. 层次分析法的若干问题

- 正互反阵的最大特征根是否为正数？特征向量是否为正向量？一致性指标能否反映正互反阵接近一致阵的程度？
- 怎样简化计算正互反阵的最大特征根和特征向量？
- 为什么用特征向量作为权向量？
- 当层次结构不完全或成对比较阵有空缺时怎样用层次分析法？

1. 正互反阵的最大特征根和特征向量的性质

定理1　正矩阵**A** 的最大特征根λ是正单根，对应正特征向量$\boldsymbol{w}$，且 $\lim_{k\to\infty}\frac{A^k e}{e^T A^k e}=w,\quad e=(1,1,\cdots 1)^T$

定理2　n阶正互反阵$\boldsymbol{A}$的最大特征根 $\lambda \ge n$ ，当 $\lambda = n$ 时$\boldsymbol{A}$为一致阵。

证明：　已知**A=(a_{ij})**的λ**>0,**

w=(w$_1$,…

$$\lambda w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j$$

$$a_{ij} = \varepsilon_{ij} w_i / w_j \Rightarrow = w_i \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}$$

对i求和 $\Rightarrow$ $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}$

定理2 n阶正互反阵A的最大特征根 $\lambda \ge n$，当 $\lambda = n$ 时A为一致阵。

证明(续) $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}$ A正互反 $a_{ij} = \varepsilon_{ij} w_i / w_j$ $\Rightarrow \varepsilon_{ij} > 0, \varepsilon_{ji} = 1/\varepsilon_{ij}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}}\right) + 1 \Rightarrow \lambda \ge \frac{2}{n}\frac{n(n-1)}{2} + 1$

$\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}} \ge 2$

$\Rightarrow \lambda \ge n$

$\lambda = n \Rightarrow \varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}} = 2 \Rightarrow \varepsilon_{ij} = 1 \Rightarrow a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$

$\lambda = n$ 是A为一致阵的充要条件 $\Leftarrow$ A为一致阵

2. 正互反阵的最大特征根和特征向量的简化计算

- 精确计算的复杂和不必要
- 简化计算的思路——一致阵的任一列向量都是特征向量，一致性尚好的正互反阵的列向量都应近似特征向量，可取其某种意义下的平均。

和法——取列向量的算术平均

例 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 4 \\ 1/6 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列向量归一化}} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.615 & 0.545 \\ 0.3 & 0.308 & 0.364 \\ 0.1 & 0.077 & 0.091 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{算术平均}} \begin{bmatrix} 0.587 \\ 0.324 \\ 0.089 \end{bmatrix} = w$

$Aw = \begin{bmatrix} 1.769 \\ 0.974 \\ 0.286 \end{bmatrix} \xrightarrow{Aw = \lambda w} \lambda = \frac{1}{3}\left(\frac{1.769}{0.587} + \frac{0.974}{0.324} + \frac{0.268}{0.089}\right) = 3.009$

精确结果:w=(0.588,0.322,0.090)^T, λ=3.010

根法——取列向量的几何平均

幂法——迭代算法

1）任取初始向量$w^{(0)}$, k:=0，设置精度ε

2) 计算 $\tilde{w}^{(k+1)} = Aw^{(k)}$

3）归一化 $w^{(k+1)} = \tilde{w}^{(k+1)} / \sum_{i=1}^{n} \tilde{w}_i^{(k+1)}$

4）若 $\max_i \left| w_i^{(k+1)} - w_i^{(k)} \right| < \varepsilon$，停止;

否则，k:=k+1, 转2）

5) 计算 $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{w}_i^{(k+1)}}{w_i^{(k)}}$

3. 特征向量作为权向量——成对比较的多步累积效应

问题

一致阵A, 权向量$w=(w_1,\ldots w_n)^T$, $a_{ij}=w_i/w_j$

A不一致，应选权向量w使w_i/w_j与 a_{ij}相差尽量小（对所有i,j)。

拟合——确定w

$$\min_{w_i(i=1,\cdots,n)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2$$

非线性最小二乘

线性化——对数最小二乘

$$\min_{w_i(i=1,\cdots,n)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\ln a_{ij} - \ln \frac{w_i}{w_j} \right)^2$$

结果同根法

多步累积效应

• 按不同准则确定的权向量不同，特征向量有什么优点。

成对比较

C_i:C_j(直接比较)

a_{ij}~ 1步强度

$A^2=(a_{ij}^{(2)})$ $\quad a_{ij}^{(2)}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}a_{sj}$

$a_{ij}^{(2)}$~ 2步强度

$a_{is}a_{sj}$~ C_i通过 C_s 与C_j的比较

更能反映C_i对C_j 的强度

$A^k=(a_{ij}^{(k)}),\quad a_{ij}^{(k)}\sim k$步强度

体现多步累积效应

$$\forall i, j, \exists k_0, k > k_0, a_{is}^{(k)} \ge a_{js}^{(k)} \text{或} a_{is}^{(k)} \le a_{js}^{(k)} (s = 1, \cdots n)$$

⇨ 当k足够大, A^k第i行元素反映C_i的权重 ⇨ 求A^k的行和

定理1 $\lim_{k\to\infty}\frac{A^k e}{e^T A^k e}=w$

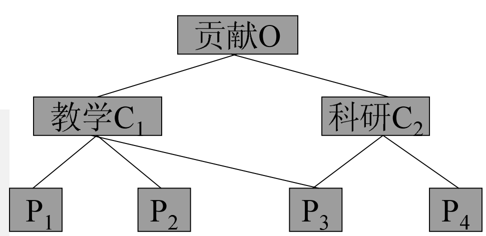
特征向量体现多步累积效应

4. 不完全层次结构中组合权向量的计算

完全层次结构：上层每一元素与下层所有元素相关联。

不完全层次结构

例. 评价教师贡献的层次结构



设第2层对第1层权向量 $w^{(2)}=(w_1^{(2)},w_2^{(2)})$已定

第3层对第2层权向量 $w_1^{(3)}=(w_{11}^{(3)},w_{12}^{(3)},w_{13}^{(3)},0)^T$

$w_2^{(3)}=(0,0,w_{23}^{(3)},w_{24}^{(3)})^T$已得

P_1,P_2,P_3只作教学，P_3,P_4只作科研。

讨论由$w^{(2)},W^{(3)}=(w_1^{(3)}, w_2^{(3)})$计算第3层对第1层权向量$w^{(3)}$的方法

C_1,C_2支配元素的数目不等

考察一个特例：若C_1,C_2重要性相同，$w^{(2)}=(1/2,1/2)$，
P_1~P_4能力相同，$w_1^{(3)}=(1/3,1/3,1/3,0)^T, w_2^{(3)}=(0,0,1/2,1/2)^T$

公正的评价应为：$P_1:P_2:P_3:P_4=1:1:2:1$

• 不考虑支配元素数目不等的影响

仍用 $w^{(3)}=W^{(3)}w^{(2)}$计算 ⇨ $w^{(3)}=(1/6,1/6,5/12,1/4)^T$

• 支配元素越多权重越大

用支配元素数目对$w^{(2)}$加权进行修正

设C_1,C_2支配元素数目分别为n_1,n_2

$$\tilde{w}^{(2)}=(n_1w_1^{(2)},n_2w_2^{(2)})^T/(n_1w_1^{(2)}+n_2w_2^{(2)})$$

再用 $w^{(3)}=W^{(3)}\tilde{w}^{(2)}$计算 ⇨ $w^{(3)}=(1/5,1/5,2/5,1/5)^T$

5. 残缺成对比较阵的处理

例 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & * \\ 1/2 & 1 & 2 \\ * & 1/2 & 1\end{bmatrix}$ ⇨ $C=\begin{bmatrix}1 & 2 & w_1/w_3 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ w_3/w_1 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$ 辅助矩阵

*为残缺元素

$Cw=\lambda w$ ⇨ $\lambda=3,\ w=(0.5714,0.2857,0.1429)^T$

⇕

$\overline{A}w=\lambda w$

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\overline{a}_{ij}=\begin{cases}a_{ij}, & i\neq j \\ m_i+1, & i=j\end{cases}$$

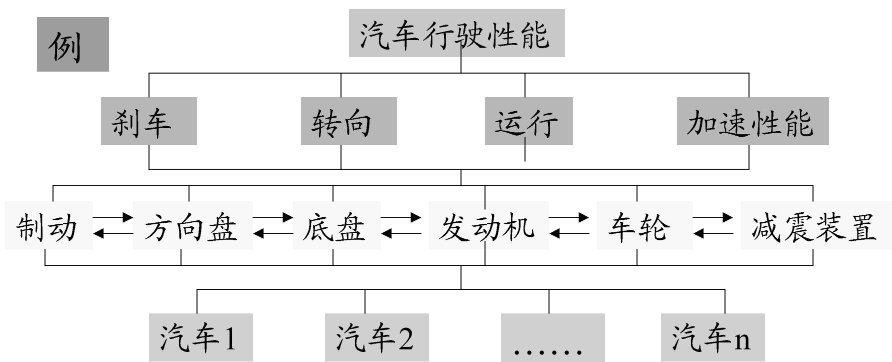
m_i~A第i行中*的个数

6. 更复杂的层次结构

• 递阶层次结构：层内各元素独立，无相互影响和支配；层间自上而下、逐层传递，无反馈和循环。

• 更复杂的层次结构：层内各元素间存在相互影响或支配；层间存在反馈或循环。

例



层次分析法的优点

• 系统性——将对象视作系统，按照分解、比较、判断、综合的思维方式进行决策——系统分析（与机理分析、测试分析并列）；

• 实用性——定性与定量相结合，能处理传统的优化方法不能解决的问题；

• 简洁性——计算简便，结果明确，便于决策者直接了解和掌握。

层次分析法的局限

• 囿旧——只能从原方案中选优，不能产生新方案；

• 粗略——定性化为定量，结果粗造；

• 主观——主观因素作用大，结果可能难以服人。