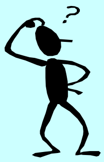
数学实验

Experiments in Mathematics

清 华 大 学 数 学 科 学 系

1



为什么要开设数学实验课

• 既要学好“算数学”，更要培养“用数学”的能力

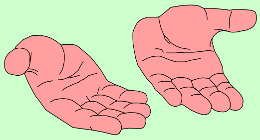
• 利用计算机技术提供的条件，培养分析、思考能力

• 感受“用数学”的酸甜苦辣，激发学好数学的愿望

课程宗旨

以学生动手为主，在教师指导下用学到的数学知识和计算机技术，选择合适的数学软件，分析、解决一些经过简化的实际问题

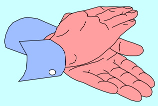
2



数学实验课的内容安排

- 介绍一些解决实际问题的常用数学方法：数值计算、优化方法、数理统计和计算机模拟的基本原理和算法；
- 选用一个合适的数学软件——MATLAB，能方便地实现以上内容的主要算法；
- 数学建模贯穿整个课程，每个内容都从实际问题引出，并归结于问题的解决；
- 精心安排学生的实验，上机和作实验报告的时间要保证。

3



14个数学实验的具体内容

预备实验：MATLAB使用练习

数学建模：实验1 数学建模初步；实验13 数学建模综合

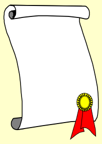
数值计算：实验2 插值与拟合；实验3 数值积分与微分；实验4 常微分方程数值解；实验5 线性方程组的解法；实验6 非线性方程近似解

优化方法：实验7 无约束优化；实验8 约束优化

数理统计：实验9 数据的统计描述和分析；实验10 方差分析；实验11 回归分析

计算机模拟：实验12 计算机模拟

4



实验报告格式的基本要求

系别、班级、学号、姓名

实验目的

计算题

题目，算法设计(包括计算公式)，程序，计算结果(计算机输出)，结果分析，结论。

应用题

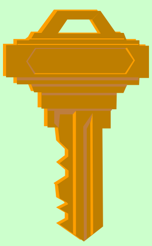
题目，问题分析，模型假设，模型建立，算法设计(包括计算公式)，程序，计算结果(计算机输出)，结果的数学分析，结果的实际意义，结论。

收获与建议

5

数学实验

Experiments in Mathematics



实验1 数学建模初步

6

从我们常见的模型到数学模型

玩具、照片、火箭模型… ～实物模型

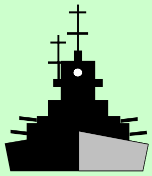
水箱中的舰艇、风洞中的飞机… ～物理模型

地图、电路图、分子结构图… ～符号模型

模型是为了一定目的，对客观事物的一部分进行简缩、抽象、提炼出来的原型的替代物。

模型集中反映了原型中人们需要的那一部分特征。

你碰到过的数学模型——“航行问题”



甲乙两地相距750千米，船从甲到乙顺水航行需30小时，从乙到甲逆水航行需50小时，问船的速度是多少。

用 x 表示船速，y 表示水速，列出方程：

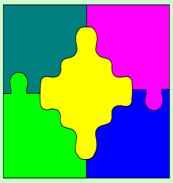
$$(x+y)\times 30 = 750$$
$$(x-y)\times 50 = 750$$

求解得到 x=20，y=5，答：船速每小时20千米

航行问题建立数学模型的基本步骤

- 作出简化假设（船速、水速为常数）；
- 用符号表示有关量（x, y表示船速和水速）；
- 用物理定律（匀速运动的距离等于速度乘以时间）列出数学式子（二元一次方程）；
- 求解得到数学解答（x=20, y=5）；
- 回答原问题（船速每小时20千米）。

9



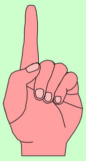
数学模型 (Mathematical Model) 和 数学建模 (Mathematical Modeling)

数学模型:对于一个现实**对象**，为了一个特定**目的**，根据其内在**规律**，作出必要的简化**假设**，运用适当的**数学工具**，得到的一个**数学结构**。

数学建模：建立数学模型的**全过程**（包括分析、建立、求解、检验）。

Motivation, Formulation, Solution, Verification

10



数 学 建 模 的 重 要 意 义

- 电子计算机的出现及飞速发展；
- 数学以空前的广度和深度向一切领域渗透。

数学建模作为用数学方法解决实际问题的第一步，越来越受到人们的重视。

- 在一般工程技术领域数学建模仍然大有用武之地；
- 在高新技术领域数学建模几乎是必不可少的工具；
- 数学进入一些新领域，为数学建模开辟了许多处女地。

11

数 学 建 模 的 具 体 应 用

- 分析与设计
- 预报与决策
- 控制与优化
- 规划与管理

如虎添翼

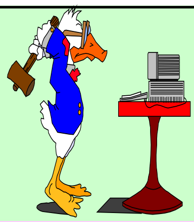
数学建模 ↔ 计算机技术

知识经济

12

数 学 建 模 实 例 1

——录象机计数器的用途



问题

经试验，一盘录象带从头走到尾，时间用了183分30秒，计数器读数从0000变到6152。

在一次使用中录象带已经转过大半，计数器读数为4580，问剩下的一段还能否录下1小时的节目？

要求

不仅回答问题，而且建立计数器读数与录象带转过时间的关系。

思考

计数器读数是均匀增长的吗？

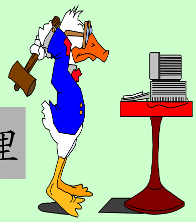
13

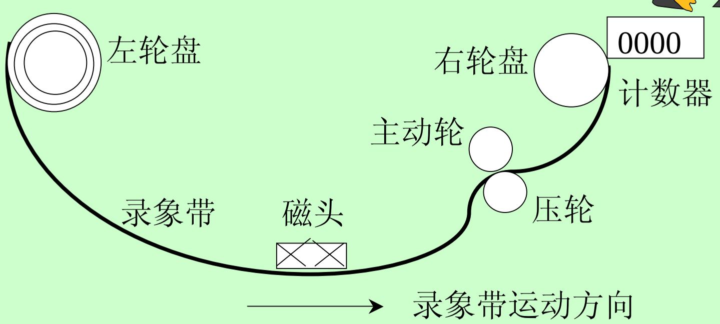
观 察

计数器读数增长越来越慢！

问 题 分 析

录象机计数器的工作原理

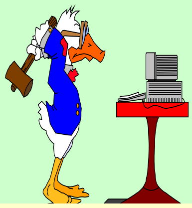




录象带运动 → 右轮盘半径增大 → 计数器读数增长变慢 → 右轮转速不是常数 → 录象带运动速度是常数

14

模 型 假 设



- 录象带的运动速度是常数 v ；
- 计数器读数 n与右轮转数 m成正比， 记 m=kn;
- 录象带厚度（加两圈间空隙）为常数 w;
- 空右轮盘半径记作 r ；
- 时间 t=0 时读数 n=0 .

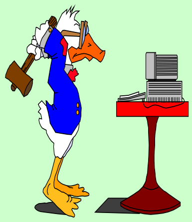
建 模 目 的

建立时间t与读数n之间的关系

（设V，k ，w ，r 为已知参数）

15

模 型 建 立



建立t与n的函数关系有多种方法

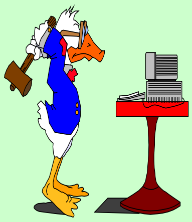
1. 右轮盘转第 i 圈的半径为r+wi, m圈的总长度等于录象带在时间t内移动的长度vt, 所以

$$\sum_{i=1}^{m} 2\pi(r+wi) = vt \qquad m = kn$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{\pi w k^2}{v} n^2 + \frac{2\pi r k}{v} n$$

16

模型建立



2. 考察右轮盘面积的变化，等于录象带厚度乘以转过的长度，即

$$\pi[(r+wkn)^2-r^2]=wvt$$

3. 考察t到t+dt录象带在右轮盘缠绕的长度，有

$$(r+wkn)2\pi kdn=vdt$$

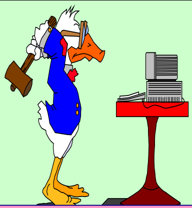
$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$t=\frac{\pi wk^2}{v}n^2+\frac{2\pi rk}{v}n$$

17

思考

1. 3种建模方法得到同一结果



$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{m}2\pi(r+wi)=vt\\ \pi[(r+wkn)^2-r^2]=wvt\\ (r+wkn)2\pi kdn=vdt\end{array}\right\}\Rightarrow t=\frac{\pi wk^2}{v}n^2+\frac{2\pi rk}{v}n$$

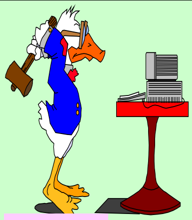
但仔细推算会发现**稍有差别**，请解释。

2. 模型中有待定参数 $r,w,v,k,$

一种确定参数的办法是测量或调查，请设计测量方法。

18

参数估计



另一种确定参数的方法——测试分析

将模型改记作 $t = an^2 + bn$，只需估计 a, b，

理论上，已知t=183.5, n=6152, 再有一组(t, n)数据即可；

实际上，由于测试有误差，最好用足够多的数据作拟合。

现有一批测试数据：

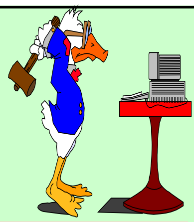
t	0	20	40	60	80
n	0000	1153	2045	2800	3466
t	100	120	140	160	183.5
n	4068	4621	5135	5619	6152

用最小二乘法可得

$a = 2.51 \times 10^{-6}$,

$b = 1.44 \times 10^{-2}$.

模型检验



应该另外测试一批数据检验模型：

$$t = an^2 + bn \quad (a = 2.51 \times 10^{-6}, b = 1.44 \times 10^{-2})$$

模型应用

1. 回答提出的问题：由模型算得 n = 4580 时 t = 118.5分，剩下的录象带能录 183.5-118.5 = 65分钟的节目。

2. 揭示了“**t 与 n 之间呈二次函数关系**”这一普遍规律，当录象带的状态改变时，只需重新估计 a,b 即可。

数 学 建 模 实 例 2

——生 产 计 划 的 安 排

问 题

配件厂为装配线生产若干种产品，轮换产品时因更换设备要付生产准备费，产量大于需求时因积压资金要付贮存费。

今已知某产品的日需求量为100件，生产准备费5000元，贮存费每日每件1元。试安排该产品的生产计划，即多少天生产一次（生产周期），每次产量多少，使总费用最小。

要 求 建立生产周期、产量与需求量、准备费、贮存费之间的关系。

21

问题分析与思考

- 周期短，产量小 ⇒ 贮存费少，准备费多

  周期长，产量大 ⇒ 准备费少，贮存费多

⇒ 存在**最佳**的周期和产量，使**总费用**（二者之和）最小

- 这是一个优化问题，目标是总费用最小。

  问：能用一个周期的总费用作为目标函数吗？为什么？

  目标函数——每天总费用的平均值

- 问：为什么不考虑生产费用？在什么条件下才不考虑？

22

模 型 假 设

1. 产品每天的需求量为常数 r；

2. 每次生产准备费为 c_1, 每天每件产品贮存费为 c_2；

3. T天生产一次(周期为T), 每次生产Q件(产量为Q)，且当贮存量降到零时，Q件产品立即生产出来。

建 模 目 的

设r, c_1, c_2已知，求T, Q, 使每天总费用的平均值最小。

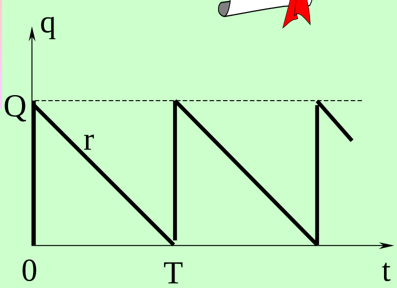
23

模 型 建 立

将贮存量表示为时间的函数q(t)，

t=0生产Q件，贮存量q(0)=Q, q(t)以需求r的速率递减，直到q(T)=0.

$$\Rightarrow \quad Q = rT \qquad (1)$$



一周期的总费用为

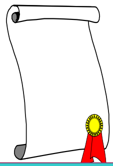
$$\bar{C} = c_1 + c_2 \frac{Q}{2} T = c_1 + c_2 \frac{rT^2}{2}$$

每天总费用平均值（目标函数）

$$C(T) = \frac{\bar{C}}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 rT}{2} \qquad (2)$$

24

模型求解



求 T 使 $C(T)=\frac{c_1}{T}+\frac{c_2 rT}{2}\to Min$

$$\frac{dC}{dT}=0 \Rightarrow T=\sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}}$$

$$Q=rT=\sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}}$$

模型分析

经济批量订货公式（EOQ）

$c_1\uparrow\Rightarrow T,Q\uparrow$ $\quad c_2\uparrow\Rightarrow T,Q\downarrow$ $\quad r\uparrow\Rightarrow T\downarrow,Q\uparrow$

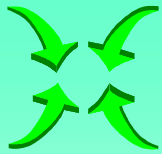
计算结果

c_1=5000(元), c_2=1(元/天•件), r=100(件/天)

$\Rightarrow$ T=10(天), Q=1000(件)

25

数学建模实例3



——市场经济中的蛛网模型

现象

供大于求 ⇨ 价格下降 ⇨ 减少产量

⇧ ⇩

增加产量 ⇦ 价格上涨 ⇦ 供不应求

问题

商品数量与价格的振荡在什么条件下趋向稳定

当不稳定时政府能采取什么干预手段使之稳定

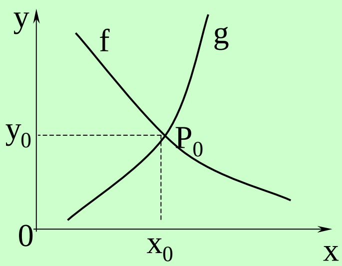
26

蛛网模型

x_k~第k时段商品数量；y_k~第k时段商品价格

消费者的需求关系 ⇨ 需求函数 $y_k = f(x_k)$ 减函数

生产者的供应关系 ⇨ 供应函数 $x_{k+1} = h(y_k)$ ⇕ $y_k = g(x_{k+1})$ 增函数



f与g的交点$P_0(x_0,y_0)$ ~ 平衡点

一旦$x_k=x_0$，则

$y_k=y_0$, $x_n=x_0$, $y_n=y_0$ (n>k)

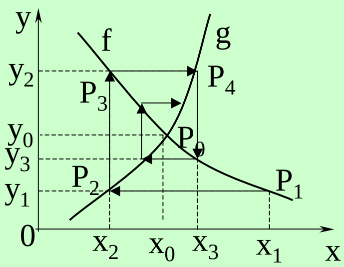
27

蛛网模型

设x_1偏离x_0 $x_1 \Rightarrow y_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow y_2 \Rightarrow x_3 \Rightarrow \cdots$

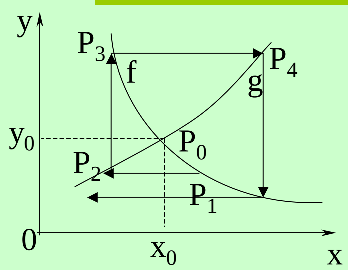
$x_k \to x_0, y_k \to y_0$ $P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_3 \to \cdots \to P_0$

P_0是稳定平衡点



$K_f < K_g$

P_0是不稳定平衡点



$K_f > K_g$

28

蛛 网 模 型

方程模型　　在P_0点附近用直线近似曲线

$y_k = f(x_k)$ $\Rightarrow$ $y_k - y_0 = -\alpha(x_k - x_0) \quad (\alpha > 0)$

$x_{k+1} = h(y_k)$ $\Rightarrow$ $x_{k+1} - x_0 = \beta(y_k - y_0) \quad (\beta > 0)$

$x_{k+1} - x_0 = -\alpha\beta(x_k - x_0)$　　$x_{k+1} - x_0 = (-\alpha\beta)^k (x_1 - x_0)$

$\alpha\beta < 1$　$\alpha(=K_f) < \dfrac{1}{\beta}(=K_g)$ $\Rightarrow$ $x_k \to x_0$　P_0稳定

$\alpha\beta > 1$　$\alpha(=K_f) > \dfrac{1}{\beta}(=K_g)$ $\Rightarrow$ $x_k \to \infty$　P_0不稳定

29

蛛 网 模 型　　结果解释

考察 α, β 的含义

$y_k - y_0 = -\alpha(x_k - x_0)$，$\alpha$~ 商品数量减少1单位,价格上涨幅度

$x_{k+1} - x_0 = \beta(y_k - y_0)$，$\beta$~价格上涨1单位,(下时段)供应的增量

α~ 消费者对需求的敏感程度　　α 小,有利于经济稳定

β~ 生产者对价格的敏感程度　　β 小,有利于经济稳定

$\Rightarrow \alpha\beta < 1$ 经济稳定

30

蛛网模型

经济不稳定时**政府的干预办法**

1. 使 α 尽量小，如 $\alpha=0$

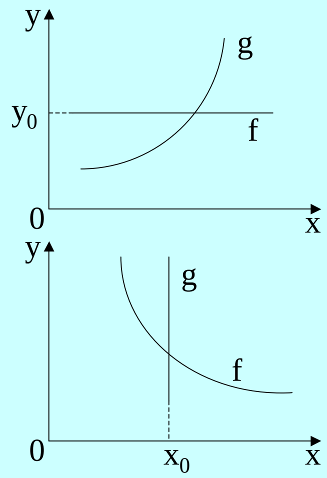
⇨ 需求曲线变为水平

以行政手段控制价格不变

2. 使 β 尽量小，如 $\beta=0$

⇨ 供应曲线变为竖直

靠经济实力控制数量不变



数学建模实例 4

——人口预报

背景

世界人口增长概况

年	1625	1830	1930	1960	1974	1987	1999
人口(亿)	5	10	20	30	40	50	60

中国人口增长概况

年	1908	1933	1953	1964	1982	1990	1995
人口(亿)	3	4.7	6	7	10.1	11.3	12

研究人口变化规律　　控制人口过快增长

指数增长模型

常用的计算公式 今年人口 x_0, 年增长率 r

k年后人口 $x_k = x_0(1+r)^k$

马尔萨斯（1788--1834）提出的指数增长模型

x(t) ~时刻t人口 r ~ 人口(相对)增长率(常数)

$x(t+\Delta t) - x(t) = rx(t)\Delta t$

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = x_0 e^{rt}$$

$$x(t) = x_0(e^r)^t \approx x_0(1+r)^t$$

33

指数增长模型的应用及局限性

- 与19世纪以前欧洲一些地区人口统计数据吻合
- 适用于19世纪后迁往加拿大的欧洲移民后代
- 可用于短期人口增长预测
- 不符合19世纪后多数地区人口增长规律
- 不能预测较长期的人口增长过程

19世纪后人口数据 ⇨ 人口增长率r不是常数(逐渐下降)

34

阻滞增长模型 (Logistic模型)

人口增长到一定数量后，增长率下降的原因：

资源、环境等因素对人口增长的阻滞作用

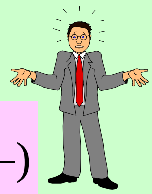
且阻滞作用随人口数量增加而变大 ⇨ r是x的减函数

假定： $r(x)=r-sx\ (r,s>0)$ r~固有(x很小)增长率

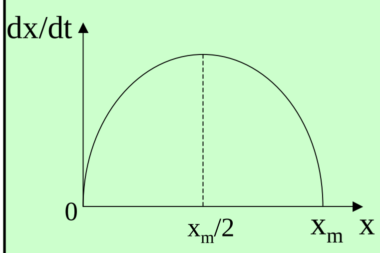
x_m~人口容量（资源、环境能容纳的最大数量）

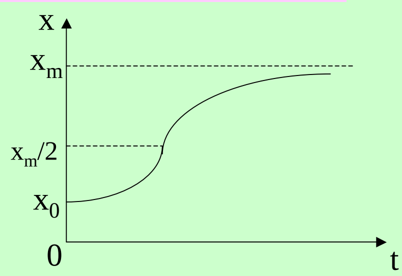
$\Rightarrow r(x_m)=0 \Rightarrow s=\dfrac{r}{x_m}$ $\quad r(x)=r(1-\dfrac{x}{x_m})$

阻滞增长模型 (Logistic模型)



$$\frac{dx}{dt}=rx \Rightarrow \frac{dx}{dt}=r(x)x=rx(1-\frac{x}{x_m})$$





$$x(t)=\frac{x_m}{1+(\frac{x_m}{x_0}-1)e^{-rt}}$$

x(t)~S形曲线，
x增加先快后慢

36

模型的参数估计

用指数增长模型或阻滞增长模型作人口预报，必须先估计模型参数 r 或 r, x_m

- 利用统计数据用最小二乘法作拟合

例：美国人口数据（单位~百万）

1790	1800	1810	1820	1830	……	1950	1960	1970	1980
3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	……	150.7	179.3	204.0	226.5

⇨ $r=0.2072,\ x_m=464$

- 专家估计

37

模 型 检 验

用模型预报1990年美国人口，与实际数据比较

$$x(1990)=x(1980)+\Delta x=x(1980)+rx(1980)[1-x(1980)/x_m]$$

⇨ $x(1990)=250.5$　　实际为251.4 (百万)

模 型 应 用——人 口 预 报

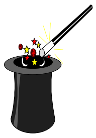
用美国1790~1990年人口数据重新估计参数

⇨ $r=0.2083,\ x_m=457.6$ ⇨ $x(2000)=275.0$

$x(2010)=297.9$

Logistic模型在经济领域中的应用（如耐用消费品的售量）

38



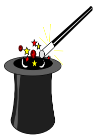
数学建模的基本方法和步骤

基 本 方 法

- •机理分析：根据对客观事物特性的认识，找出反映内部机理的数量规律
- •测试分析：将研究对象看作“黑箱”,通过对量测数据的统计分析，找出与数据拟合最好的模型
- •二者结合：机理分析建立模型结构,测试分析确定模型参数

机理分析没有统一的方法，主要通过实例研究(Case Studies)来学习。以下建模主要指机理分析

39



数 学 建 模 的 一 般 步 骤

模型准备 → 模型假设 → 模型构成 → 模型求解 → 模型分析 → 模型检验 → 模型应用

模型检验 ⇢ 模型假设

模型准备：

了解实际背景	明确建模目的	形成一个比较清晰的‘问题’
搜集有关信息	掌握对象特征	

40

数 学 建 模 的 一 般 步 骤

模型假设

针对问题特点和建模目的

作出合理的、简化的假设

在合理与简化之间作出折中

模型构成

用数学的语言、符号描述问题

发挥想象力

使用类比法

尽量采用简单的数学工具

41

数 学 建 模 的 一 般 步 骤

模型求解

各种数学方法、数学软件和计算机技术

模型分析

如结果的误差分析、
模型对数据的稳定性分析

模型检验

与实际现象、数据比较，
检验模型的合理性、适用性

模型应用

42

怎 样 学 习 数 学 建 模

数学建模与其说是一门技术，不如说是一门艺术

技术大致有章可循

艺术无法归纳成普遍适用的准则

想象力　洞察力　判断力

- 学习、分析、评价、改进别人作过的模型
- 亲自动手，认真作几个实际题目

43

全国大学生数学建模竞赛（CUMCM）

教育部、中国工业与应用数学学会（CSIAM）共同主办
全国大学生中规模最大的课外科技竞赛

每年9月举行，连续3天 （今年为26~29日 ）

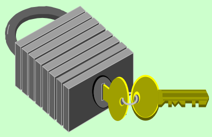
三人一队，任意组合（大二、三、四），学校选拔

颁发获奖证书，发表优秀论文

- http://csiam.edu.cn/mcm
- http://www.163.com 教育频道
- http://www.comap.com 美国竞赛

44

布 置 实 验 内 容



目的

学习初步的建模方法，培养建模意识

内容

《数学实验》第48页 4.2实验内容

1）；

4）；

6）。

45