Probabilidad y Estadística
Tarea 05

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Dr. Octavio Arizmendi Echegaray

24 Marzo 2020

Problemas

1. Sea X_n una variable aleatoria uniforme en $\{1, \cdots, n\}$ y $X \sim U(0,1)$. Muestre que $X_n/n \to X$ en distribución.

   Demostración. Por definición de distribución y de variable aleatoria uniforme, se tiene que

$$
\begin{aligned}
F_{X_n/n}(x) &= P(\frac{X_n}{n} \leq x) \\
&= P(X_n \leq nx) \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \lfloor nx \rfloor \leq 0 \\ \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} & 0 \leq \lfloor nx \rfloor \leq n \\ 1 & \lfloor nx \rfloor \geq n \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

   Ahora acotaremos la diferencia entre esta y la distribución de X.

$$
\begin{aligned}
|F_{X_n}(x) - F_X(x)| &= |\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} - x| \\
&= |\frac{\lfloor nx \rfloor - xn}{n}| \\
&\leq \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

   Por propiedad arquimediana de los números Reales concluimos que

$$lim_{n\to\infty} F_{X_n} = F_X,$$

   es decir

$$X_n/n \to X, \quad \text{en distribución.}$$

   □

2. Sea X una vairable aleatoria uniforme en $[0,1]$.

   a) $Y = X^{\alpha}$, $\alpha > 0$.

$$F_Y(t) = F_X(\sqrt[\alpha]{t}) = \begin{cases} 0 & \sqrt[\alpha]{t} \leq 0 \\ \sqrt[\alpha]{t} & 0 \leq \sqrt[\alpha]{t} \leq 1 \\ 1 & \sqrt[\alpha]{t} \geq 1 \end{cases}$$

$$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{f_X(\sqrt[\alpha]{t})x^{1/\alpha - 1}}{\alpha} = \begin{cases} \frac{x^{1/\alpha-1}}{\alpha} & 0 \leq \sqrt[\alpha]{x} \leq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

   b) $Y = exp(X)$.

$$F_Y(t) = F_X(\log t) = \begin{cases} 0 & \log t \leq 0 \\ \log t & 0 \leq \log t \leq 1 \\ 1 & \log t \geq 1 \end{cases}$$

$$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{f_X(\log t)}{x} = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 \leq \log x \leq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

   c) $Y = log(X)$.

$$F_Y(t) = F_X(e^t) = \begin{cases} 0 & e^t \leq 0 \\ e^t & 0 \leq e^t \leq 1 \\ 1 & e^t \geq 1 \end{cases}$$

$$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}F_Y(t)}{\mathrm{d}t} = f_X(e^t)e^t = \begin{cases} e^t & 0 \leq e^x \leq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

3. *Demostración.* Sea X una variable aleatoria discreta con valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \cdots\}$. Por definición de esperanza tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=0}^{\infty} iP(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{i} P(X = i) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} P(X = i) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) \end{aligned}$$

□

4. *Demostración.* Sea X una variable aleatoria con distribución F.

   Al ser $P(X \leq x)$ continua por la derecha entonces $P(X \geq x)$ es continua por la izquierda. Sea $l = \text{ínf}\{x|P(X \leq x) \geq \frac{1}{2}\}$ y $r = \sup\{x|P(X \geq x) \geq \frac{1}{2}\}$. Por sus respectivas continuidades tenemos que

$$P(X \leq l) \geq \frac{1}{2} \quad P(X \geq r) \geq \frac{1}{2},$$

   Si $r < l$ entonces sea $x \in (r, l)$, por definición de supremo e infimo tenemos $P(X \leq x) < \frac{1}{2}$ y $P(X \geq x) < \frac{1}{2}$, lo cual es una contradicción ya que $P(X \leq x) + P(X \geq x) \geq 1$. Por lo tanto $l \leq r$.

   Por construcción de l y r tenemos que $\forall m \in (l, r)$ se cumple que

$$P(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \quad P(X \geq x) \geq \frac{1}{2}.$$

$\square$