

Probabilidad

Tarea III - Ejercicio 3

Rubén Pérez Palacios
Ricardo Alberto Gloria Picazzo
Mercé Nachón Moreno
Josue Emmanuel Ornelas Hernández
Profesor: Dr. Ehyter Matías Martín González

19 de octubre de 2020

Problemas

1. (Rubén Pérez Palacios) Sea F una distribución y sea $c \in (0, 1)$. Demuestre que

$$G(x) = (1 - c) \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x), x \in \mathbb{R},$$

es una función de distribución y calcule su función característica.

Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias con distribución F independientes luego entonces

$$F_{X_1 + \dots + X_n}(x) = F^{*n}(x).$$

Puesto que F^{*n} es una función de distribución entonces

$$F^{*n}(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R},$$

por lo tanto

$$G(x) = (1 - c) \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x) \leq (1 - c) \sum_{n=0}^{\infty} c^n, x \in \mathbb{R},$$

y al ser $0 < c < 1$ tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n = \frac{1}{1 - c},$$

por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x)$$

converge.

Ahora veremos que se cumplen las tres propiedades de una distribución para G .

■ **Monótona no decreciente**

Sea $x < y$ tales que son F medibles. Por ser F^{*n} por ser una distribución entonces se cumple

$$F^{*n}(x) \leq F^{*n}(y),$$

y al ser $0 < c < 1$ tenemos

$$c^n F^{*n}(x) \leq c^n F^{*n}(y),$$

al converger $\frac{G(x)}{(1-c)}$ concluimos

$$G(x) = (1-c) \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x) \leq (1-c) \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(y) = G(y).$$

■ **Continua por la derecha**

Al ser F^{*n} una distribución entonces es continua por la derecha es decir para todo $a \in \mathbb{R}$ existe el

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F^{*n}(x),$$

por linealidad del operador límite, existe el

$$\lim_{x \rightarrow a^+} c^n F^{*n}(x),$$

como $G(x)/(1-c)$ converge y como la sucesión $c^n F^{*n}$ es dominada entonces existe el

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x),$$

por linealidad del operador límite, concluimos que existe el

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (1-c) \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} G(x).$$

■ **límites infinitos**

Como habíamos visto nuestra sucesión $c^n F^{*n}(x)$ esta dominada por c^n cuya serie convergía, luego por convergencia dominada tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} c^n F^{*n}(x),$$

por linealidad del operador límite y por continuidad de P tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(\lim_{x \rightarrow \infty} x),$$

analogamente obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(\lim_{x \rightarrow -\infty} x),$$

Luego por ser $F^{*n}(x)$ una función de distribución concluimos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - c) \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x) = (1 - c) \sum_{n=0}^{\infty} c^n = 1,$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - c) \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x) = (1 - c) \sum_{n=0}^{\infty} c^n \cdot 0 = 0.$$

2. (Rubén Pérez Palacios) El siguiente ejercicio demuestra que la convergencia en distribución **no** implica la convergencia de las funciones de densidad, cuando estas existen. Sean $\{X_n\}$ v.a. con funciones de distribución

$$F_n(x) = \left(x - \frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n} \right) \mathbb{1}_{(0,1)}(x) + \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x).$$

Por conveniencia expresaremos a $F_n(x)$ como

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \left(x - \frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n} \right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}.$$

Luego veamos que pasa cuando $0 < x < 1$. Por linealidad de la derivada tenemos que

$$\frac{dF_n(x)}{dx} = \frac{dx}{dx} - \frac{d \sin(2\pi nx)}{d2\pi n} = 1 - \cos(2\pi nx) = f_n(x).$$

Ahora veamos que $F_n(x)$ converge a una distribución uniforme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n} \right),$$

por linealidad del operador límite tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = x - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n},$$

puesto que $|\sin(2\pi nx)| \leq 1$ entonces tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = x - 0 = x.$$

Ahora fijemonos en $\cos(2\pi nx)$, pero esta no converge a la función de densidad de una distribución $\mathcal{U}[0,1]$, ya que cuando $x = \frac{p}{q}$ es un racional no existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2\pi nx)$, esto puesto que si nos agarramos la subsección $n_k = k * q$ entonces esta subsección converge a $\cos(2\pi n_k x) = \cos(2\pi kp) = \cos(2\pi) = 0$, pero si nos agarramos la subsección $n_l = ql + 1$ entonces esta converge a $\cos(2\pi n_l x) = \cos(2\pi(ql + 1)p/q) = \cos(2\pi lp + 2\pi p/q) = \cos(2\pi p/q) \neq 0$ por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2\pi nx)$ no existe. Es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \forall x \in [0,1] \cap \mathbb{Q},$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq 1, x \in [0,1].$$