Tarea 4
Probabilidad
Ejercicio 1

Ricardo Alberto Gloria Picazzo
Rubén Pérez Palacios
Mercé Nachón Moreno

Octubre 2020

(Ricardo Alberto Gloria Picazzo)

Lema 1. *Si* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de variables aleatorias iid con distribución* $Poisson(\lambda)$*, entonces:*

$$\frac{\overline{X_n}-\lambda}{\sqrt{\overline{X_n}}/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z$$

dónde $Z \sim N(0,1)$*.*

Demostración. Como $X_n \sim Poisson(\lambda)$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mathbb{E}[X_n] = Var(X_n) = \lambda$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego, por el Teorema del Límite central se sigue que

$$\frac{\overline{X_n}-\lambda}{\sqrt{\lambda}/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \tag{1}$$

dónde $Z \sim N(0,1)$.

Por otra parte, por la ley debil de los grandes números se sigue que $\overline{X_n} \xrightarrow{P} \lambda$. Aplicando el Teorema del mapeo continuo son la función $g_1(x) = 1/x$ se obtiene que $1/(\overline{X_n}) \xrightarrow{P} 1/\lambda$. Luego, aplicando nuevamente el teorema del mapeo continuo con la función $g_2(x) = \sqrt{x}$ se sigue que $1/\sqrt{\overline{X_n}} \xrightarrow{P} 1/\sqrt{\lambda}$. Finalemnte aplicando el teorema del mapeo continuo con la función continua $g_3(x) = \sqrt{\lambda}\cdot x$ se obtiene que

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\overline{X_n}}} \xrightarrow{P} 1. \tag{2}$$

Así aplicando el tercer literal del Toerema de Slutsky con (1) y (2) se obtiene que

$$\frac{\overline{X_n}-\lambda}{\sqrt{\overline{X_n}}/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z$$

dónde $Z \sim N(0,1)$. □

Enunciado 1. *El medidor de temperatura de cierta maquinaria presenta fallas a lo largo del día. El archivo "tarea4e3.txt" contiene una muestra de fallas registradas durante 718 días distintos. Suponiendo que las fallas en cada día son independientes ¿se puede decir que el medidor presenta en promedio más de 5 fallas y menos de 10 fallas?*

Solución: Dado el contexto del problema, modelemos la situación con variables aleatorias con distribución Poisson. Especificamente, modelemos el número de fallas en el n-ésimo día con una variable $X_n \sim Poisson(\lambda)$. Observamos así que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias identicamente distribuidas e independientes con espereanza y varianza λ. Se busca el promedio de fallas del medidor en un día. Hallemos, entonces un intervalo de 95 % de confianza para el parametro λ, el cual, como ya se mencionó, es el valor esperado de X_n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que si $(a, b) \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, entonces

$$\mathbb{P}\left[a < \frac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\overline{X_n}}/\sqrt{n}} < b\right] = \mathbb{P}\left[\frac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\overline{X_n}}/\sqrt{n}} < b\right] - \mathbb{P}\left[\frac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\overline{X_n}}/\sqrt{n}} \leq a\right]. \tag{3}$$

Del Lema 1 recordamos:

$$\frac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\overline{X_n}}/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z$$

dónde $Z \sim N(0, 1)$. Nos intersa el caso $n = 718$, por lo que considerando $n = 718$ como "suficientemente grande", obtenemos de (3) que

$$\mathbb{P}\left[a < \frac{\overline{X_{718}} - \lambda}{\sqrt{\overline{X_{718}}}/\sqrt{718}} < b\right] \approx \mathbb{P}[Z < b] - \mathbb{P}[Z \leq a] = F_Z(b) - F_Z(a). \tag{4}$$

Luego, se desea un intervalo del 95 % de confianza. Es decir, a y b son tales que

$$\mathbb{P}\left[a < \frac{\overline{X_{718}} - \lambda}{\sqrt{\overline{X_{718}}}/\sqrt{718}} < b\right] \approx 1 - \alpha = 0.95 \tag{5}$$

con $\alpha = 0.05$. Elijamos así a y b de modo que $F_Z(b) = 1 - 0.025 = 0.975$ y $F_Z(a) = 0.025$, pues de esta manera se cumple (5) debido a la relación (4). Entonces:

$$\begin{aligned} a &:= F_Z^{-1}(0.025) = -1.9599639845400545, \\ b &:= F_Z^{-1}(0.975) = 1.9599639845400545. \end{aligned}$$

Observemos así que

$$\begin{aligned} 0.95 &\approx \mathbb{P}\left[a < \frac{\overline{X_m} - \lambda}{\sqrt{\overline{X_m}}/\sqrt{m}} < b\right]. \\ &= \mathbb{P}\left[a \cdot \frac{\sqrt{\overline{X_m}}}{\sqrt{m}} < \overline{X_m} - \lambda < b \cdot \frac{\sqrt{\overline{X_m}}}{\sqrt{m}}\right]. \\ &= \mathbb{P}\left[a \cdot \frac{\sqrt{\overline{X_m}}}{\sqrt{m}} - \overline{X_m} < -\lambda < b \cdot \frac{\sqrt{\overline{X_m}}}{\sqrt{m}} - \overline{X_m}\right]. \\ &= \mathbb{P}\left[\overline{X_m} - b \cdot \frac{\sqrt{\overline{X_m}}}{\sqrt{m}} < \lambda < \overline{X_m} - a \cdot \frac{\sqrt{\overline{X_m}}}{\sqrt{m}}\right]. \end{aligned}$$

Dónde $m = 718$. Se calcula $\overline{X_m}$ con la muestra dada. Así se obtiene que:

$$t_0 := \overline{X_m} - b \cdot \frac{\sqrt{\overline{X_m}}}{\sqrt{m}} = 8.984193859877442.$$
$$t_1 := \overline{X_m} - a \cdot \frac{\sqrt{\overline{X_m}}}{\sqrt{m}} = 9.42806240753203.$$

Entonces,

$$\mathbb{P}[t_0 < \lambda < t_1] \approx 0.95.$$

Por lo tanto, se concluye con un 95 % de confinaza que el promedio de fallas del medidor en un día es mayor a t_0 y menor a t_1. Entonces se puede decir con 95 % de confinaza que el promedio de fallas del medidor en un día es mayor a 5 y menor a 10.

Nota: Los cálculos para obtener el valor de a, b, t_0 y t_0 fueron hechos en python. Se incluye el código. Para que el código funcioné se debe de borrar la primera línea del archivo “tarea4e3.txt” y se debe ejecutar en la misma carpeta dónde se encuntra el programa.

$\diamondsuit$