Cálculo III
Tarea 1

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Fabián Augusto Pascual Domínguez

30 de noviembre de 2021

1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, pruebe que

- (Dualidad entre interior y adherencia) $\mathcal{C}\overline{A} = (\mathcal{C}A)^\circ =: ExtA$ y $\mathcal{C}A^\circ = \overline{\mathcal{C}A}$.

  Demostración. Puesto que $A^{c-c} = A^o$, entonces evaluando en A^c obtenemos

  $$A^{-c} = A^{cc-c} = A^{co}$$

  y aplicando complemento de la original obtenemos

  $$A^{c-} = A^{c-cc} = A^{oc}.$$

  □

- $\overline{A} = \bigcap \{V|A \subset V, V \text{ es cerrado en } \mathbb{R}^n\}$.

  Demostración. Ya que

  $$(\mathcal{C}A)^\circ = \bigcup \{V|V \subset \mathcal{C}A, V \text{es abierto en} \mathbb{R}^n\},$$

  ya que $\mathcal{C}\overline{A} = (\mathcal{C}A)^\circ$ entonces

  $$\mathcal{C}\overline{A} = \bigcup \{V|V \subset \mathcal{C}A, V \text{es abierto en} \mathbb{R}^n\},$$

  luego aplicando complemento obtenemos

  $$\overline{A} = \mathcal{C}\bigcup \{V|V \subset \mathcal{C}A, V \text{es abierto en} \mathbb{R}^n\},$$

  aplicando las Leyes de De Morgan, $X \subset Y \Rightarrow \mathcal{C}Y \subset \mathcal{C}X$ y X abierto entonces $\mathcal{C}X$ cerrado obtenemos

  $$\overline{A} = \bigcap \{\mathcal{C}V|A \subset \mathcal{C}V, \mathcal{C}V \text{es cerrado en} \mathbb{R}^n\},$$

  por lo tanto

  $$\overline{A} = \bigcap \{V|A \subset V, V \text{es cerrado en} \mathbb{R}^n\}.$$

  □

- $A^{coc} = A^{-}$.

  Demostración. Debido a que $A^{-c} = A^{co}$ entonces $A^{coc} = A^{-cc} = A^{-}$. $\square$

2. Producto cartesiano de conjuntos abiertos

   - Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) intervalos abiertos en $\mathbb{R}$. Demostrar que el conjunto $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ es abierto en $\mathbb{R}^2$.
     Se sigue inmediato del úlitmo inciso.
   - Pruebe que $B_\infty(\vec{a}, r) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | \, \|\vec{x} - \vec{a}\|_\infty < r\right\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$ con la norma euclideana.
     Puesto que la todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes esto es cierto. En especial se demostro en clase que la norma infinito y la norma euclideana son equivalentes.
   - Sean G_1 y G_2 conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$. Mostrar que $G_1 \times G_2$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$.
     Se sigue inmediato del último inciso.
   - Generalizar los incisos anteriores para $\mathbb{R}^n$.

     Demostración. Sea $U \in X$ y $V \in Y$ un conjuntos abiertos en sus respectivos espacios, con norma euclideana, y

     $$x = (x_u, x_v) \in U \times V, x_u \in U, x_v \in V.$$

     Por definición

     $$\exists \epsilon_u, \epsilon_v > 0 \text{ t.q. } B(x_u, \epsilon_u) \subset U, B(x_v, \epsilon_v) \subset V.$$

     Sea $\epsilon = \text{mín}(\epsilon_u, \epsilon_v)$, y $y \in B(x, \epsilon)$ por definición

     $$\|y - x\| < \epsilon,$$

     por lo que

     $$\|y_u - x_u\|^2 + \|y_v - x_v\|^2 < \epsilon^2,$$

     como la norma es no negativa obtenemos que

     $$\|y_u - x_u\| < \epsilon \text{ y } \|y_v - x_v\| < \epsilon,$$

     entonces

     $$y \in B(x_u, \epsilon) \times B(x_v, \epsilon).$$

     Ya que

     $$B(x_u, \epsilon) \subset B(x_u, \epsilon_u) \subset U \text{ y } B(x_v, \epsilon) \subset B(x_v, \epsilon_v) \subset V,$$

     entonces $y \in B(x_u, \epsilon) \times B(x_v, \epsilon) \subset U \times V$. Por lo que todo punto en el producto cartesiano de dos abiertos es punto interior y por lo tanto concluimoso que es abierto. $\square$

3. Conjuntos cerrados y cerradura

   - Sea $A = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) | x > 0\right\}$. Determinar si A es abierto y/o cerrado en $\mathbb{R}^2$.

Solución 1 – *Primero notemos que* $(1,1) \in A'$*, puesto que la sucesión*

$$\vec{x}_n = \left(1 + \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}\right) \in A$$

converge a el.
Sea $\vec{x} \in A'$ *entonces existe una sucesión*

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A, \vec{x}_n \neq \vec{x}_0 \forall n \in \mathbb{N},$$

tal que $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x}$.
Como $\vec{x}_n \in A$ *entonces*

$$\vec{x}_n = \left((\vec{x}_n)_1 , (\vec{x}_n)_2 \right) = \left((\vec{x}_n)_1 , \frac{1}{(\vec{x}_n)_1} \right).$$

Ya que $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} (\vec{x}_n)_1 = \vec{x}_1 \text{ y } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\vec{x}_n)_1} = \vec{x}_2,$$

pero este último es (por ser $1/x$ *una función continua)*

$$\frac{1}{\vec{x}_1} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} (\vec{x}_n)_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\vec{x}_n)_1} = \vec{x}_2,$$

por lo que $\vec{x} \in A$*. Por lo tanto* $A' \subset A$ *y concluimos que* A *es cerrado.*

- Si F_1, F_2 son dos conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$, mostrar que $F_1 \times F_2$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$.

  Demostración. Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$ conjuntos cerrados en sus respectivos espacios. Luego A^c y B^c abiertos en sus respectivos espacios y entonces $A^c \times X$ y $X \times B^c$ abiertos en $X \times Y$. Ahora por definición

$$\begin{aligned}(A \times B)^c &= \{(a,b) \,| a \in A \text{ y } b \in B\}^c = \{(a,b) \,| a \notin A \text{ o } b \notin B\} \\ &= \{(a,b) \,| a \notin A \text{ y } b \in Y\} \cup \{(a,b) \,| a \in A \text{ y } b \notin B\},\end{aligned}$$

  Al ser $(A \times B)^c$ unión de dos abiertos entonces es abierto. Por lo tanto concluimos que $A \times B$ es cerrado.

  □

- Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Probar que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

  Demostración. Debido a que $\overline{X}$ es cerrado para todo conjunto X entonces $\overline{A} \times \overline{B}$ es cerrado. Ya que $\overline{A} = \bigcap \{V | A \subset V, V \text{ es cerrado en } \mathbb{R}^n\}$ entonces $\overline{A \times B} \subset \overline{A} \times \overline{B}$.
  Sea

$$\vec{x} = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) \in \overline{A} \times \overline{B}, \epsilon > 0.$$

  Si $y = \left(\vec{a'}, \vec{b'}\right) \in B\left(\vec{a}, \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right) \times B\left(\vec{b}, \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)$ entonces
  entonces

$$\|\vec{a}' - \vec{a}\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \text{ y } \left\|\vec{b}' - \vec{b}\right\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}},$$

por lo que

$$\|\vec{y}-\vec{x}\|^2 = \|\vec{a}'-\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}'-\vec{b}\right\|^2 < \epsilon$$

es decir $y \in B(\vec{x},\epsilon)$.
Pero por definición tenemos que

$$B\left(\vec{a},\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)\cap A \neq \emptyset,$$

y

$$B\left(\vec{a},\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)\cap A \neq \emptyset,$$

por lo que si

$$\vec{a'} \in B\left(\vec{a},\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)\cap A \text{ y } \vec{b'} \in B\left(\vec{a},\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)\cap A,$$

entonces

$$\vec{y} = \left(\vec{a'},\vec{b'}\right) \in B(\vec{x},\epsilon) \text{ y } \vec{y} \in A\times B,$$

por lo que

$$B(\vec{x},\epsilon)\cap A\times B \neq \emptyset,$$

por lo tanto

$$\overline{A\times B} \supset \overline{A}\times\overline{B},$$

concluimos que

$$\overline{A\times B} = \overline{A}\times\overline{B}.$$

□

- Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ una familia de subconjuntos en $\mathbb{R}^n$. ¿Se cumple que $\bigcup_{\alpha\in\Omega}\overline{A_\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha\in\Omega}A_\alpha}$?
  Solución 2 – *No por que la unión arbitraria de cerrados no es necesariamente cerrada y el conjunto de la derecha siempre es cerrado, y justo el contra ejemplo $A_n = \left[0,1-\frac{1}{n}\right], n\in\mathbb{N}$ para ello funciona también aquí ya que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n} = [0,1)$ el cual no es cerrado pero $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n}$ si lo es por lo que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n} = [0,1) \not\supset [0,1] = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n}$.*
  Primero veamos que si $A\subset B$ entonces si V es un conjunot tal que $B\subset V$ entonces $A\subset V$ y como $\overline{B} = \bigcap\{V|B\subset V, V \text{ es cerrado en } \mathbb{R}^n\}$ y $\overline{A} = \bigcap\{V|A\subset V, V \text{ es cerrado en } \mathbb{R}^n\}$ entonces $\overline{A}\subset\overline{B}$. Ahora como $A_\alpha\subset\bigcup_{\alpha\in\Omega}A_\alpha$ entonces tenemos que $\overline{A_\alpha}\subset\overline{\bigcup_{\alpha\in\Omega}A_\alpha}$ para todo $\alpha\in\Omega$, por lo tanto $\bigcup_{\alpha\in\Omega}\overline{A_\alpha}\subset\overline{\bigcup_{\alpha\in\Omega}A_\alpha}$.

4. Demostrar que para todo subconjunto $A\subset\mathbb{R}^n$

   - $\overline{A} = A\cup A'$ y $A^\circ\cup\partial A = A\cup\partial A = \overline{A}$.

Demostración. Sea $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$ entonces $x \in A \cup A'$. Si $x \notin A$, al ser x es un punto de adherencia de A se cumple que $\forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, por lo que $[\forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A] \setminus \{x\} \neq \emptyset$, por lo tanto x es un punto límite de A es decir $x \in A' \subset A \cup A'$. Por lo tanto $\overline{A} \subset A \cup A'$.

Ahora recordemos que $A, A' \subset \overline{A}$ por lo tanto $A \cup A' \subset \overline{A}$.

Por lo tanto concluimos que $\overline{A} = A \cup A'$.

Ahora puesto que $\partial A = A^{-} \cap A^{c-}$ y por la dualidad entre interior y adherencia obtenemos

$$A \cup \partial A = A \cup \left(A^{-} \cap A^{c-}\right) = \left(A \cup A^{-}\right) \cap \left(A \cup A^{c-}\right) = \left(A^{-}\right) \cap \left(A \cup A^{c-}\right) = A^{-},$$

analogamente

$$A^{\circ} \cup \partial A = A^{\circ} \cup \left(A^{-} \cap A^{c-}\right) = \left(A^{\circ} \cup A^{-}\right) \cap \left(A^{\circ} \cup A^{c-}\right) = \left(A^{-}\right) \cap \left(A^{\circ} \cup A^{c-}\right) = A^{-}.$$

□

- $A^{\circ} \cap \partial A = \emptyset$ y $\partial A = \overline{A} \setminus A^{\circ}$. Deducir que $\overline{A} \setminus A \subset A'$.

  Demostración. Si $x \in \partial A$ entonces $\forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A^{c} \neq \emptyset$ por lo que $B(x, \epsilon) \not\subset A$ y $x \notin A^{\circ}$. Por lo tanto $A^{\circ} \cap \partial A = \emptyset$. Como $A^{\circ} \cup \partial A = \overline{A}$ entonces $\partial A = \overline{A} \setminus A^{\circ}$.
  Como $\overline{A} = A \cup A'$ entonces $\overline{A} \setminus A = (A \cup A') \setminus A == A' \setminus A \subset A'$.

  □

5. Para todo $A \subset \mathbb{R}^{n}$ y $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n}$ se define la distancia entre $\vec{x}$ y A como

$$d(\vec{x}, A) = \inf_{\vec{a} \in A} \|\vec{x} - \vec{a}\|.$$

Demuestre las siguientes afirmaciones:

- $\forall \vec{x}, \vec{y}$ y $A \subset \mathbb{R}^{n}$, se tiene que $|d(\vec{x}, A) - d(\vec{y}, A)| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

  Demostración. Veamos lo siguiente

$$\begin{aligned}
|d(\vec{x}, A) - d(\vec{y}, A)| &= \left|\inf_{\vec{a} \in A} \|\vec{x} - \vec{a}\| - \inf_{\vec{a} \in A} \|\vec{y} - \vec{a}\|\right| && \text{por definición de métrica} \\
&= \left|\inf_{\vec{a} \in A} \left(\|\vec{x} - \vec{a}\| - \|\vec{y} - \vec{a}\|\right)\right| && \text{por propiedad del ínfimo} \\
&\leq \inf_{\vec{a} \in A} \left|\left(\|\vec{x} - \vec{a}\| - \|\vec{y} - \vec{a}\|\right)\right| && \text{por propiedad del ínfimo} \\
&\leq \inf_{\vec{a} \in A} \|(\vec{x} - \vec{a}) - (\vec{y} - \vec{a})\| && \text{por el útimo ejercicio de la tarea 1} \\
&= \|\vec{x} - \vec{y}\|
\end{aligned}$$

  □

- Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}^{k}$ y $A \subset \mathbb{R}^{k}$, deduzca que existe el límite $\lim_{n \to \infty} d(\vec{x}_n, A)$.

Demostración. Sea $\vec{x} = \lim_{n\to\infty} \vec{x}_n$. Entonces

$$0 \leq \left| d\left(\vec{x}_n, A\right) - d\left(\vec{x}, A\right) \right| \leq \left\| \vec{x}_n - \vec{x} \right\|,$$

ya que el límite conserva el orden, por linealidad del límite y por continuidad del valor aboluto y la norma obtenemos

$$0 \leq \left| \lim_{n\to\infty} d\left(\vec{x}_n, A\right) - d\left(\vec{x}, A\right) \right| \leq \left\| \lim_{n\to\infty} \vec{x}_n - \vec{x} \right\|,$$

por definición de $\vec{x}$ y por el toerema del emperadedo concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} d\left(\vec{x}_n, A\right) = d\left(\vec{x}, A\right).$$

□

- $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $A \subset \mathbb{R}^n$, $d\left(x, A\right) = d\left(x, \overline{A}\right)$.

  Demostración. Puesta que $A \subset \overline{A}$ entonces por definición de distancia y por monotonía del ínfimo tenemos que

  $$d\left(x, \overline{A}\right) \leq d\left(x, A\right).$$

  Sea $\vec{a} \in \overline{A}$ entonces existe $\{\vec{a}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ tal que $\lim_{n\to\infty} \vec{a}_n = \vec{a}$ por lo que $\forall \epsilon > 0$ existe $\vec{a'} \in A$ talque $d\left(\vec{a}, \vec{a'}\right) < \epsilon$ (es decir $d\left(\vec{a}, \vec{a'}\right) = 0$), entonces

  $$d\left(\vec{x}, A\right) \leq d\left(\vec{x}, \vec{a'}\right) \leq d\left(\vec{x}, \vec{a}\right) + d\left(\vec{a'}, \vec{a}\right) < d\left(\vec{x}, \vec{a}\right) + \epsilon,$$

  puesto que esto es cierto para todo $\epsilon > 0$ entonces

  $$d\left(\vec{x}, A\right) \leq d\left(\vec{x}, \vec{a}\right).$$

  Ahora como lo anterior es cierto $\forall \vec{a} \in \overline{A}$ enotnces por definición de distancia (y de ínfimo) tenemos que

  $$d\left(\vec{x}, A\right) \leq d\left(\vec{x}, \overline{A}\right).$$

  Por lo tanto concluimos que

  $$d\left(\vec{x}, A\right) = d\left(\vec{x}, \overline{A}\right).$$

  □

6. Sucesiones

   Puesto que una sucesión $\{\vec{x}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^k$ converge si y sólo si las sucesiones de sus componentes convergen entonces todas las propiedades de límites en $\mathbb{R}$ se heredan, entre ellas que si esta converge el límite es único y que toda subsucesión de ella converge al mismo límite.

   - Sea $\{\vec{x}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}^k$. Encontrar $\overline{A}$ donde $A = \{\vec{x}_n | n \in \mathbb{N}\}$.

     Solución 3 – *Si $\vec{a} \in \overline{A}$ entonces existe una $\{\vec{a}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ tal que $\lim_{n\to\infty} \vec{a}_n = \vec{a}$, por definición $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n \in \overline{A}$, además es su único elemento ya que el límite es único y toda sucesión $\{\vec{a}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ será subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.*
   - Demuestra el Teorema de Bolzano-Weiestrass para sucesiones en $\mathbb{R}^k$.

Demostración. Procesderemos a demostralos por inducción, para evitar confusión y no caer en un argumento ciclico llamaremos al Teorema de Bolzano-Weiestrass como Teorema Base.

- **Caso base: n = 1** Es cierto por el Teorema Base.
- **Hipótesis de Inducción:** Para toda sucesión $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^k$ acotada, existe una subsucesión $\{x_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ de $\{\vec{x}_n\}$ que es convergente.
- **Paso de Inducción:** Sea

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{k+1}$$

acotada, definimos a la sucesión

$$\{\vec{y}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^k$$

como

$$\vec{y}_n = \left(\vec{x}_n^1, \cdots, \vec{x}_n^k\right)$$

por hipotesis de inducción existe una subsucesión

$$\{\vec{y}_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$$

tal que esta converge a $\vec{y} \in \mathbb{R}^k$. Consideremos la sucesión

$$\left\{\vec{x}_{n_l}^{k+1}\right\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$$

por el Teorema Base tenemoso que existe una subsucesión

$$\left\{x_{n_{l_m}}^{k+1}\right\}_{m=1}^{\infty}$$

que converge a $\vec{x}^{k+1} \in \mathbb{R}$. Ya que si una sucesión converge entonces toda subsucesión converge al mismo límite, entonces

$$\left\{\vec{y}_{n_{l_m}}\right\}_{m=1}^{\infty} \to \vec{y}.$$

Finalmente como una sucesión en $\mathbb{R}^t$ converge si y sólo si convergen la sucesiones de cada componente entonces la subsucesión

$$\left\{\vec{x}_{n_{l_m}}\right\}_{m=1}^{\infty} \to \left(\vec{y}^1, \cdots, \vec{y}^k, \vec{x}^{k+1}\right).$$

Por lo tanto concluimos que para toda sucesión $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{k+1}$ acotada, existe una subsucesión $\{x_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ de $\{\vec{x}_n\}$ que es convergente.

Por Inducción Matemática concluimos que el Teorema de Bolzano-Weiestrass en $\mathbb{R}^k$ es cierto.

$\square$