Álgebra Lineal I
Tarea 08

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Rafael Herrera Guzmán

02 Marzo 2020

Problemas

1. Funciones Lineales

   a) $V = \mathbb{R}^2; f((x,y)) = (2x + 4y)$.
   Sea $u, v \in V$ y $a \in F$ entonces

$$\begin{aligned} f(au+v) &= f((ax_u + x_v), (ay_u + y_v)) \\ &= (2(ax_u + x_v), 4(ay_u + y_v)) \\ &= a(2ax_u, 4y_u) + (2x_v, 4y_v)) \\ &= af(u) + f(v). \end{aligned}$$

   Por lo tanto f es lineal.

   b) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R}); f(A) = tr(A)$.
   Sea $u, v \in V$ y $a \in F$ entonces

$$\begin{aligned} f(au+v) &= f((ax_u + x_v), (ay_u + y_v)) \\ &= (2(ax_u + x_v), 4(ay_u + y_v)) \\ &= a(2ax_u, 4y_u) + (2x_v, 4y_v)) \\ &= af(u) + f(v). \end{aligned}$$

   Por lo tanto f es lineal.

   c) $V = \mathbb{R}^3; f((x,y,z)) = x^2 + y^2 + z^2$.
   Sea $u, v \in V$ y $a \in F$ entonces

$$\begin{aligned} f(au+v) &= f((ax_u + x_v), (ay_u + y_v), (az_u + z_v)) \\ &= (ax_u + x_v)^2 + (ay_u + y_v)^2 + (az_u + z_v)^2 \\ &= a^2(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) + (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) + 2(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) \\ &= a^2 T(u) + T(v) + 2(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) \\ &\neq af(u) + f(v). \end{aligned}$$

   Por lo tanto f no es lineal.

2. Para los espacios vectoriales V y bases β que aparecen a continuación, encontrar la base dual para V^*.

   a) $V = \mathbb{R}^3; \beta = \{(1,0,1),(1,2,1),(0,0,1)\}$.
   Sea $\beta^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ una base de dual de V, entonces tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
1 = f_1((1,0,1)) &= f_1((e_1 + 0e_2 + e_3)) = f_1(e_1) + f_1(e_3),\\
0 = f_1((1,2,1)) &= f_1((e_1 + 2e_2 + e_3)) = f_1(e_1) + 2f_1(e_2) + f_1(e_3),\\
0 = f_1((0,0,1)) &= f_1((0e_1 + 0e_2 + e_3)) = f_1(e_3),
\end{aligned}$$

   resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$f_1(e_1) = 1 \qquad f_1(e_2) = -\frac{1}{2} \qquad f_1(e_3) = 0.$$

   Por lo tanto

$$f_1((x,y,z)) = x - \frac{y}{2}.$$

   Ahora veamos que

$$\begin{aligned}
0 = f_2((1,0,1)) &= f_2((e_1 + 0e_2 + e_3)) = f_2(e_1) + f_2(e_3),\\
1 = f_2((1,2,1)) &= f_2((e_1 + 2e_2 + e_3)) = f_2(e_1) + 2f_2(e_2) + f_3(e_3),\\
0 = f_2((0,0,1)) &= f_2((0e_1 + 0e_2 + e_3)) = f_2(e_3),
\end{aligned}$$

   resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$f_2(e_1) = 0 \qquad f_2(e_2) = \frac{1}{2} \qquad f_2(e_3) = 0.$$

   Por lo tanto

$$f_2((x,y,z)) = \frac{y}{2}.$$

   Por último veamos que

$$\begin{aligned}
0 = f_3((1,0,1)) &= f_3((e_1 + 0e_2 + e_3)) = f_3(e_1) + f_3(e_3),\\
0 = f_3((1,2,1)) &= f_3((e_1 + 2e_2 + e_3)) = f_3(e_1) + 2f_2(e_2) + f_3(e_3),\\
1 = f_3((0,0,1)) &= f_3((0e_1 + 0e_2 + e_3)) = f_3(e_3),
\end{aligned}$$

   resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$f_3(e_1) = -1 \qquad\qquad f_3(e_2) = 0 \qquad\qquad f_3(e_3) = 1.$$

Por lo tanto

$$f_3((x, y, z)) = -x + z.$$

b) $V = P_2(\mathbb{R}); \beta = \{1, x, x^2\}$.
Sea $\beta^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ una base de dual de V, entonces tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
1 = f_1(1) \qquad & = f_1(1 + 0x + 0x^2) = f_1(e_1) + f_1(e_3), \\
0 = f_1(x) \qquad & = f_1(0 + x + 0x^2) = f_1(e_1) + 2f_1(e_2) + f_1(e_3), \\
0 = f_1(x^2) \qquad & = f_1(0 + 0x + x^2)) = f_1(e_3),
\end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$f_1(e_1) = 1 \qquad\qquad f_1(e_2) = -\frac{1}{2} \qquad\qquad f_1(e_3) = 0.$$

Por lo tanto

$$f_1((x, y, z)) = x - \frac{y}{2}.$$

3. Sea $f \in (\mathbb{R}^2)^*$ mediante $f((x, y)) = 2x + y$ y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante $T(x, y) = (3x + 2y, x)$.

    a) Calcular $T^t(f)$