Álgebra para Ciencias de la Computación
Examen Parcial II

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Dr. Rafael Herrera Guzmán

18 de octubre de 2020

Problemas

1. Calcula los determinantes, las adjuntas clásicas y, en caso de que exitan, la inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 8 & 0 & -3 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las matriz adjunta clásica es

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} -18 & -20 & 48 \\ 28 & -21 & 14 \\ -6 & 37 & -16 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -18 & 28 & -6 \\ -20 & -21 & 37 \\ 48 & 14 & -16 \end{pmatrix}.$$

2. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x - y + 4z &= -2, \\ -8x + 3y + z &= 0, \\ 2x - y + z &= 6, \end{aligned}$$

usando la regla de Cramer.

La matriz extendida asociada al sistema de ecuaciones es

$$E = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 2 \\ -8 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right),$$

la matriz asociada al sitema de ecuaciones es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -8 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -8 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Las matrices A_i que son las matrices formadas por remplazar la $i-esima$ columna de A por la última columna de E, cuyos determinantes son

$$det(A_1) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -86,$$

$$det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -8 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -218,$$

$$det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -8 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -34.$$

Por la regla de Cramer concluimos que las soluciones al sistema de ecuaciones son

$$x = \frac{-86}{2} = -43, \quad y = \frac{-218}{2} = -109, \quad z = \frac{-34}{2} = -17.$$

3. Encuentra la forma canónica de Jordan real de

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 & -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz anterior es

$$(x-3)(x-2)^2 \left(x-(2+i)\right)^2 \left(x-(2-i)\right)^2,$$

por lo tanto los valores propios de esta matriz son

$$2, 3, 2+i, 2-i.$$

Ahora encontremoos los vectores propios de estos valores propios. Sea $v \in \mathbb{R}^8$ de la forma

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda = 2$
  Resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 & -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} v = 2v,$$

  obtenemos que v es de la forma

$$v = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \\ a \\ a \\ b \\ b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

  por lo que obtenemos los siguientes 2 vectores propios

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nos falta un vector para llegar a la multiplicidad del valor propio 2 por lo que calcularemos el generalizado de p_1 resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 & -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} v = 2p_1,$$

obtenemos que v es de la forma

$$v = \begin{pmatrix} -2+a \\ a \\ a \\ a \\ a \\ a \\ b \\ b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

por lo que obtenemos elos siguiente vector generalizado

$$g_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda = 3$
  Resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 & -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} v = 3v,$$

obtenemos que v es de la forma

$$v = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \\ a \\ a \\ a \\ -a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

por lo que obtenemos el siguiente vector propio

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda = 2 + i$
  Resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 & -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} v = (2+i)v,$$

  obtenemos que v es de la forma

$$v = \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ -ia \\ a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

por lo que obtenemos el siguiente vector propio

$$p_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -i \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda = 2 - i$
  Resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 & -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} v = (2+i)v,$$

  obtenemos que v es de la forma

$$v = \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ ia \\ a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

  por lo que obtenemos el siguiente vector propio

$$p_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ i \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora de lo anterior podemos ver que la descomposición de los vectores complejos p_4 y p_5 nos dan 4 vectores de los cuales solo 2 son independientes por lo que calcularemos un vector generalizado para uno de estos vectores propios. Tomando p_4 y resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \frac{-1-2*i}{2} & 1 & -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1-i & -1 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 & -i & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 & \frac{-1-2*i}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & -i & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 & \frac{-3}{2} & 1 & -i & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & \frac{1-2*i}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1-2*i}{2} \end{pmatrix} v = p_4,$$

obtenemos que v es de la forma

$$v = \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ -1+i(1-a) \\ -2+a \\ -1+a-i \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

por lo que obtenemos el siguiente vector generalizado

$$g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -i \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora tomandonos como base $\beta = \{p_1, p_2, g_1, p_3, p_4, p_{5_r}, p_{5_c}, g_2\}$ obtenemos la siguiente matriz de cambio de coordenadas

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuya inversa es

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto concluimos que la forma canónica real de la matriz A es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$