Álgebra Lineal I
Tarea 08

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Rafael Herrera Guzmán

02 Marzo 2020

Problemas

1. Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3(\mathbb{R})$, entonces $T(p(x)) = p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_2x^2$. Ahora sabemos que

$$A[p]_\beta = [p']_\gamma,$$

   como la siguiente matriz cumple la igualdad y es única entonces

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Ahora veamos que

2. Respuestas

   a) Veamos que

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) = a_1(1,0) + a_2(0,1) && = a_1e_1 + a_2e_2 \\ (b_1, b_2) = b_1(1,0) + b_2(0,1) && = b_1e_1 + b_2e_2 \end{aligned}$$

   por lo que la matriz que buscamos es

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

   b) Veamos que

$$3(2,5) + 5(-1,-3) = (1,0) = e_1$$
$$-1(2,5) - 2(-1,-3) = (0,1) = e_2$$

   Por lo tanto la matriz que buscamos es

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Para los siguientes ejercicios queremos encontrar una matriz de la siguiente forma

$$Q = \begin{pmatrix} q_0 & q_3 & q_6 \\ q_1 & q_4 & q_7 \\ q_2 & q_5 & q_8 \end{pmatrix}$$

   a) Los coeficiente de la matriz Q deben cumplir

$$\begin{aligned} a_2x^2 + a_1x + a_0 &= q_0x^2 + q_1x + q_2 \\ b_2x^2 + b_1x + b_0 &= q_3x^2 + q_4x + q_5 \\ c_2x^2 + c_1x + c_0 &= q_6x^2 + q_7x + q_8 \end{aligned}$$

   por lo tanto la matriz Q que buscamos es

$$Q = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{pmatrix}$$

   b) Los coeficiente de la matriz Q deben cumplir

$$\begin{aligned} a_2x^2 + a_1x + a_0 &= q_0 + q_1x + q_2x^2 \\ b_2x^2 + b_1x + b_0 &= q_3 + q_4x + q_5x^2 \\ c_2x^2 + c_1x + c_0 &= q_6 + q_7x + q_8x^2 \end{aligned}$$

   por lo tanto la matriz Q que buscamos es

$$Q = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

4. Respuestas

   a) Sea Q tal que

$$Q = \begin{pmatrix} q_0 & q_2 \\ q_1 & q_3 \end{pmatrix},$$

   entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 1 + x &= q_0 + xq_1, \\ 1 - x &= q_2 + xq_3, \end{aligned}$$

   por lo tanto

$$q_0 = q_1 = q_2 = 1, \quad q_3 = -1.$$

   Conlcuimos que

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Sea Q^{-1} tal que

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} q_0 & q_2 \\ q_1 & q_3 \end{pmatrix},$$

luego veamos que

$$Q^{-1}Q = \begin{pmatrix} q_0 + q_1 & q_0 - q_1 \\ q_2 + q_3 & q_2 - q_3 \end{pmatrix}.$$

Por definición de matriz inversa tenemos que

$$Q^{-1}Q = I_2,$$

por lo tanto

$$q_0 + q_1 = 1, q_0 - q_1 = 0, q_2 + q_3 = 0, q_2 - q_3 = 1,$$

con lo que concluimos que

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Sea $p(x) = ax + b$, entonces $T(p(x)) = p'(x) = b$. Luego sabemos que

$$A[p]_\beta = A[p']_\beta,$$

si

$$A = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix}$$

entonces

$$aq_0 + bq_1 = b, \quad aq_2 + bq_3 = 0.$$

Por lo tanto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora también sabemos que

$$B[p]_\beta = B[p']_\beta,$$

si

$$B = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\frac{a+b}{2}q_0 + \frac{a-b}{2}q_1 = b, \quad \frac{a+b}{2}q_2 + \frac{a-b}{2}q_3 = 0.$$

Por lo tanto

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$