Probabilidad y Estadística
Examen II

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Dr. Octavio Arizmendi Echegaray

15 Mayo 2020

Problemas

1. Sea $\{X_i\}_{i\geq 1}$ una suceción de v.a.i.i.d con $E(X_i) = 0$ y $E(X_i^2) < \infty$. Sea $\alpha > \frac{1}{2}$ y definamos a S_n como

$$Sn = X_1 + \cdots + X_n$$

Encuentre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^\alpha}\text{en distribución.}$$

Demostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^\alpha}$$

converge a la distribución degenerada en 0.

Demostración. Sea

$$Y_{\alpha,n} = \frac{S_n}{n^\alpha} = \frac{|S_n|}{n^\alpha},$$

entonces

$$Var(Y_{\alpha,n}) = \frac{nVar(X_i)}{n^{2\alpha}} = \frac{Var(X_i)}{n^{2\alpha-1}}$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} Var(Y_{\alpha,n}) = 0.$$

Recordemos que si una variable aleatoria X cumple que $Var(X) = 0$ entonces $X = E(X)$ esto pues $Var(X) = E((X - E(X))^2) = 0$ y que $E(|X|) = 0$ implica que $X = 0$. Por lo anterior concluimos que $Y_{\alpha,n}$ converge a la distribución degenerada en 0. $\square$

2. Sean X, Y v.a normales estandar independientes entre sí.

   a) Muestre que $Z = \frac{X+Y}{2}$ y $W = \frac{X-Y}{2}$ son independientes y normales.

   Demostración. Primero encontraremos la densidad de la suma de $X + Y$,

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-x)^2+x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-y)^2+y^2}{2}} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-\frac{z}{2})^2-\frac{z^2}{4}} dy \\
&= \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-\frac{z}{2})^2} dy \\
&= \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt
\end{aligned}
$$

   Ahora veamos lo siguiente. Sea $P = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$ entonces

$$
\begin{aligned}
P^2 &= \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(t^2+s^2)} dtds \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-((rs)^2+s^2)} sdrds \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} se^{-s^2(r^2+1)} dsdr \\
&= \int_0^{\infty} -\frac{1}{2(r^2+1)} \int_0^{\infty} -2ase^{-s^2(r^2+1)} dsdr \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{2(r^2+1)} dr \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{\arctan(r)}{2} dr \\
&= \frac{\pi}{4} dr
\end{aligned}
$$

por lo que

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

analogamente

$$\int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

por lo tanto

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

y concluimos que

$$f_{X+Y}(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}$$

tiene distribución normal con varianza 2 y media 0.

Ahora veamos que una variable aleatoria normal por una constante sigue siendo normal. Esto es pues recordemos que

$$f_{A(B)}(t) = f_B(A^{-1}(t))(A^{-1}(t))',$$

entonces

$$f_{cX}(z) = \frac{f_X\left(\frac{z}{c}\right)}{c} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2c^2}}}{c\sqrt{2\pi}}$$

la cual tiene distribución normal con varianza c^2 y media 0. Por lo tanto concluimos que las combinaciones lineales de dos variables aleatorias normales estandar $aX+bY$ son normales con media 0 y varianza a^2+b^2. En específico Z y W, con media 0 y a varianza s y s respectivamente. Veamos lo siguiente

$$Cov(Z,W) = \frac{Cov(X+Y, X-Y)}{4} =$$

$$\frac{Cov(X,X) - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - Cov(Y,Y)}{4} = \frac{V(X) - V(Y)}{4} = 0.$$

Por lo que concluimos que W y Z son independientes.

$\square$

b) Calcula la densidad de WZ.

Por lo demostrado anteriormente obtenemos que Z y W son normales con media 0, y varianza $\frac{1}{2}$. Haciendo uso de convolución obtenemos

$$f_{WZ}(r) = \int_0^\infty f_w(w) f_Z(r/w) dw + f_{WZ}(r) - \int_{-\infty}^0 f_w(w) f_Z(r/w) dw.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f_w(w) f_Z(r/w) \frac{1}{w} dw &= \int_0^\infty \frac{e^{-w^2}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-(r-w)^2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{w} dw \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-w^2-(r-w)^2}}{\pi w} dw \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-z^2-(r-z)^2}}{\pi (r-z)} dz \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-(z\sqrt{2}-\frac{r}{\sqrt{2}})^2-\frac{r^2}{2}}}{\pi (r-z)} dz \\
&= \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-(z\sqrt{2}-\frac{r}{\sqrt{2}})^2}}{r-z} dz \\
&= \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{z-t\sqrt{2}} dt
\end{aligned}$$

analogamente

$$\int_{-\infty}^0 f_W(w) f_Z(r/w) \frac{1}{w} dw = \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-t^2}}{z-t\sqrt{2}} dt,$$

por lo tanto

$$f_{WZ}(r) = \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{\pi\sqrt{2}} \left(\int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{z-t\sqrt{2}} dt - \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-t^2}}{z-t\sqrt{2}} dt \right)$$

3. Sea $U \sim U(-1,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $X_\alpha = sign(U)|U|^\alpha$

a) Calcule la densidad de X^α.

Primero veamos que $X_\alpha^{-1} = sign(U)|U|^{\frac{1}{\alpha}}$ entonces tenemos que

$$F_{X_\alpha}(x) = F_U(sign(x)|x|^{\frac{1}{\alpha}})$$

Si $X \geq 0$ entonces

$$F_{X_\alpha}(x) = F_U(x^{\frac{1}{\alpha}}) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{1}{\alpha}}+1}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

y (sin contar el 0)

$$f_{X_\alpha}(x) = \frac{f_U(x^{\frac{1}{\alpha}})x^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha} = \begin{cases} \frac{x^{\frac{1}{\alpha}-1}}{2\alpha} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Si $X < 0$ entonces

$$F_{X_\alpha}(x) = F_U(-(-x)^{\frac{1}{\alpha}}) = \begin{cases} 0 & (-x) \geq 1 \\ \frac{-(-x)^{\frac{1}{\alpha}}+1}{2} & 1 \geq (-x) \geq 0 \end{cases}$$

y

$$f_{X_\alpha}(x) = \frac{f_U(-(-x)^{\frac{1}{\alpha}}) - (-x)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha} = \begin{cases} 0 & (-x) \geq 1 \\ \frac{-(-x)^{\frac{1}{\alpha}-1}}{2\alpha} & 1 \geq (-x) \geq 0 \end{cases}$$

b) Haye los siguientes limites

1) $\alpha \to \infty$
Si $X \geq 0$

$$lim_{\alpha\to\infty} F_{X_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Si $X < 0$

$$lim_{\alpha\to\infty} F_{X_\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & (-x) \geq 1 \\ 0 & 1 \geq (-x) \geq 0 \end{cases}$$

Es decir

$$lim_{\alpha\to\infty} F_{X_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \end{cases}$$

2) $\alpha \to 0$
Entonces $lim_{\alpha\to 0} X_\alpha = sign(U)$, por lo que

$$lim_{\alpha\to 0} F_{X_\alpha}(x) = F_sign(U)(x) = P(sign(u) \leq 1) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

3) $\alpha \to -\infty$
Si $X \geq 0$

$$lim_{\alpha\to\infty} F_{X_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Si $X < 0$

$$lim_{\alpha\to\infty} F_{X_\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & (-x) \geq 1 \\ 0 & 1 \geq (-x) \geq 0 \end{cases}$$

Es decir

$$lim_{\alpha\to\infty} F_{X_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \end{cases}$$

c)

4. Sean $U \sim U[0,1]$ y $Q \sim Poisson(\lambda)$. Calcula la densidad de $U+P$.

   Proseguiremos a resolver por probabilidad total.

$$F_{U+Q}(x) = P(U+Q \leq x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(U \leq x-Q|Q=k)P(Q=k) = \sum_{k=0}^{\infty} F_U(x-p)P(Q=k).$$

por lo que

$$f_{U+Q}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_u(x-k)P(Q=k).$$

Por lo tanto si x es entero entonces

$$f_{U+Q}(x) = P(Q=x) + P(Q=x-1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{(x)!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{(x-1)!},$$

si no

$$f_{U+Q}(x) = P(Q=[x]) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{[x]}}{([x])!}$$