Probabilidad y Estadística
Tarea 8

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Dr. Octavio Arizmendi Echegaray

5 Junio 2020

Problemas

1. Sea $x_1, \cdots, x_n$ una muestra de variables aleatorias exponenciales.

   a) Por definición tenemos que para toda i

   $$\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n} = E(x_i).$$

   Luego la esperanza de una exponencial es $\frac{1}{\lambda}$ por lo tanto concluimos que

   $$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$$

   b) Queremos maximizar la siguiente función de λ

   $$\lambda^n e^{-\lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i)},$$

   la cual se maximiza si se maximiza

   $$\log(\lambda^n e^{-\lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i)}) = \log(\lambda^n) + \log(e^{-\lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i)}) = n\log(\lambda) - \lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i)$$

   Encontramos su maximo derivando e igualando a 0, obtenemos

   $$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$$

   lo mismo que en el anterior inciso.

2. Sean $\hat{\mu_1}$ y $\hat{\mu_2}$ tales que $E(\hat{\mu_1}) = E(\hat{\mu_2}) = \mu$, $V(\hat{\mu_1}) = \sigma_1^2$ $V(\hat{\mu_2}) = \sigma_2^2$. Considere el estimador

   $$\hat{\mu_3} = p\hat{\mu_1} + (1-p)\hat{\mu_2}, p \in [0,1].$$

a) Por definición y linealidad de la esperanza obtenemos

$$\begin{aligned}
E(\hat{\mu_3}) &= E(p\hat{\mu_1} + (1-p)\hat{\mu_2}) \\
&= E(p\hat{\mu_1}) + E((1-p)\hat{\mu_2}) \\
&= pE(\hat{\mu_1}) + (1-p)E(\hat{\mu_2}) \\
&= p\mu + (1-p)\mu \\
&= \mu
\end{aligned}$$

por lo tanto es insesgado.

b) Por definición y linealidad (bueno casi) de la varianza obtenemos

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\mu_3}) &= Var(p\hat{\mu_1} + (1-p)\hat{\mu_2}) \\
&= Var(p\hat{\mu_1}) + Var((1-p)\hat{\mu_2}) \\
&= p^2V(\hat{\mu_1}) + (1-p)^2V(\hat{\mu_2}) \\
&= p^2\sigma_1^2 + (1-p)^2\sigma_2^2
\end{aligned}$$

En la anterior resultado podemos notar que su segunda derivada con respecto de p es positiva, por lo tanto el punto critico de esta es su minimo de la varianza, es

$$p = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2.}$$

3. La lectura en un voltimetro conectado a un circuito de prueba esta distribuido uniformemente en el intervalo $(\theta, \theta+1)$ donde θ es el valor desconocido del voltaje real del circuito, suponga que $x_1, \cdots, x_n$ denota una muestra aleatoria de estas lecturas.

a) Por linealidad de la esperanza obtenemos

$$E(\bar{x}) = E(x_1) = \theta + \frac{1}{2},$$

lo cual no es θ y por lo tanto su sesgo es

$$\frac{1}{2}.$$

b) Para que $g(\bar{x})$ sea un estimador insesgado de θ se tiene que cumplir

$$E(g(\bar{x})) = \theta.$$

puesto que el sesgo de $\bar{x}$ es $\frac{1}{2}$ y la esperanza es lineal concluimos que

$$g(\bar{x}) = \bar{x} - \frac{1}{2}$$

es un estimador insesgado de θ.

c) Veamos lo siguiente

$$MSE(\bar{x}) = Var(\bar{x}) + (E(\bar{x}) - \theta)^2 = \frac{1}{12n} + \frac{1}{4}.$$

4. Sea $x_1, \cdots, x_n$ una muestra de una variable aleatoria $bin(k, \theta)$. Se sabe k y se quiere estimar θ.

   a) Por definición y linealidad de la esperanza tenemos que

   $$E(\frac{\bar{x}}{k}) = \frac{E(\bar{x})}{k} = \theta,$$

   por lo tanto es insesgado.

   b) Por definición linealidad (bueno casi) de la varianza tenemos que

   $$MSE(\bar{x}) = Var(\frac{\bar{x}}{k}) = \frac{\theta(1-\theta)}{kn}.$$

   c) La desigualdad de Cramer Rao es

   $$MSE(\bar{x}) \geq \frac{1}{nE((\frac{dlog|f(x)|}{dx})^2)},$$

   podemos ver que

   $$\frac{dlog|f(x)|}{dx} = \frac{x - k\theta}{\theta(1-\theta)},$$

   por lo tanto

   $$E((\frac{dlog|f(x)|}{dx})^2) = E((\frac{x - k\theta}{\theta(1-\theta)})^2) = \frac{E((x-k\theta)^2)}{(\theta(1-\theta))^2}$$
   $$= \frac{E(x^2) - 2k\theta E(x) + E((k\theta)^2)}{(\theta(1-\theta))^2} = \frac{E(x^2) - k\theta}{(\theta(1-\theta))^2} = \frac{k}{\theta(1-\theta)},$$

   entonces

   $$\frac{1}{nE((\frac{dlog|f(x)|}{dx})^2)} = \frac{\theta(1-\theta)}{kn},$$

   por lo que se da la igualdad.