Gráficas y Combinatoria
Tarea V

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Dr. Octavio Arizmendi Echegaray

17 de noviembre de 2020

Problemas

1. Prueba que todo árbol T tiene al menos $\Delta(T)$ hojas.

   Lo demostraremos por inducción sobre el número de vertices n.

   - **Caso base:** n = 1
     Es cierto puesto que $\Delta(T) = 0$ y el número de hojas es 1.
   - **Hipotesis:**
     Todo árbol tiene al menos T tiene al menos $\Delta(T)$ hojas.
   - **Paso Inductivo:**
     Sea G una árbol con $n+1$ vértices y u un hoja de G. Luego entonces $G \setminus u$ es un arbol de n vértices donde a lo más pudimos haber disminuido en 1 a $\Delta(G)$ y al núemro de hojas, ahora por inducción matemática tenemos que el número de hojas de $G \setminus u$ es al menos $\Delta(T)$ por lo que el único caso que nos genera conflicto es que se de la igualdad, de ser así entonces $G \setminus u$ todos sus nodos excepto v tal que $deg(v) = \Delta(G \setminus u)$ tendrían un grado menor o igual a 2 de no ser así habría mas hojas que $\Delta(T)$ por lo que si a este grafo le quitamos una hoja w entonces tenemos dos casos cuando $(v, w) \in E(G \setminus u)$ pero de ser así entonces tanto $\Delta(G)$ como el número de hojas disminuirian en 1, luego si $(v, w) \notin E(G \setminus u)$ entonces el número de hojas ni $\Delta(G)$ disminuirian. Por lo tanto concluimos que el número de hojas de G es al menos $\Delta(G)$.

2. Para una gráfica con cuello al menos $g = 2r$ y de grado mínimo mayor que d tiene al menos

   $$\sum_{i=0}^{r-1} (d-1)^i$$

   vertices.

3. Muestre que $K_{3,3}$ no es planar.

   Supongamos que $K_{3,3}$ es planar entonces por la formula de Euler tenemos que

   $$V - E + F = 2,$$

   donde $V = 6$, $E = 9$, por lo tanto

$$F = 5.$$

Ahora veamos de al menos cuantas aristas estan formadas las caras. El número de aristas no puede ser impar ya que el $K_{3,3}$ es bipartito. Entonces el número de aristas por cara al menos es 4, por lo que el total de aristas que bordean las caras deben ser al menos $4F$, luego al solo poder pertenecer a lo mas 2 caras cada arista entonces tenemos que E es al menos $2F$ por lo que

$$E \geq 10,$$

lo cual cual es una contradicción ya que $E = 9$.

4. Determine el grado promedio, número de aristas, grado, radio, diametro, cuello y conexidad por aristas del cubo de dimensión n.

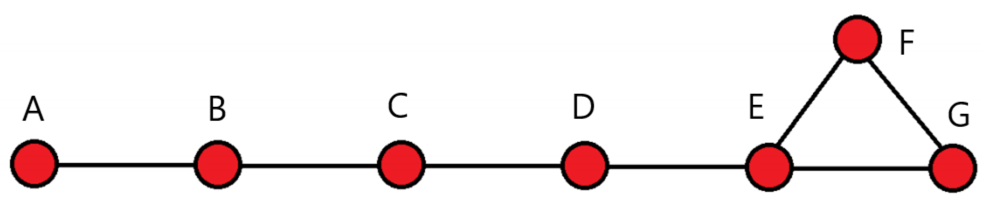
   - **Grado Promedio:** Se demostrara que todos los vertices tienen el mismo grado digamos el cual es n por inducción sobre n. Cuando $n = 1$ tendremos una solo arista en el hipercubo por lo que el grado de sus vertices es 1. Sea S una cadena de 0 y 1 de tamaño $n+1$ y sea T la cadena que resulta de quitar el último elemento de S por lo que T es de tamaño n, por hipotesis de inducción el número de vertices adyacentes a T son N. El número de vertices adyacentes a S son el número de vértices de T mas uno ya que son todas las cadenas que terminan en el mismo elemento que S y que difieren en a lo mas en 1 en las n posiciones anteriores - de las cuales son la misma cantidad que de vertices de T - y las cadena que es igual en las primeras n posiciones y en la ultima difiere con S. por lo tanto concluimos que el grado de todo vertice es n y por lo tanto también su promedio.
   - **Aristas:** Puesto que la cantidad de vertices es 2^n, al ser el grado de cada vertice n entonces este genera n pero al ser cada arista compuesta por dos vertices entonces concluimos que la cantidad de aristas es

     $$\frac{2^n n}{2} = 2^{n-1}n.$$

   - **Radio y Diametro:** Veamos que la distancia entre los vertices cuyas cadenas S y T difieren en todos las posiciones es la excentrecidad de ambos y por lo tanto n, esto puesto que de no ser así entonces existe un R tal que su distancia a S es mayor que la de S a T pero R difiere en menos de n posiciones digamos k por lo que si seguimos el camino $S_0 \sim S_1 \sim \cdots \sim S_{k-1} \sim S_k$ donde $S_0 = S, S_k = R$ y S_{i+1} es igual a la cadena S_i excepto en primera posición donde difieren S_i y R, donde en esa posición la cedan S_{i+1} es igua a R, luego entonces este al ser un camino de tamaño $k <= n$ es una contradicción que R es un punto a mayor distancia que T. Tomando el mismo camino anterior tenemos que la $dist(S,T) \leq n$ pero si fuese menor que n entonces tendriamos dos nodos conexos que difieren en mas de una posición por lo que la excentricidad de S y T es n. Por lo tanto concluimos que tanto el radio como el diametro son iguales a n.
   - **Cuello:** Una cara consta de 4 aristas, vertices puesto que no puede ser 3 ya que de ser así entonces dos vertices cuyas secuencias diferirian en 2 posiciones por lo que no pueden estar conectadas; y es de 4 ya que consideremos los vertices adyacentes que al menos tiene una cara F digamos A, B y C tales que $(A,B),(B,C)$ son aristas, luego sabemos que la cadena que representa A difiere en una posición i a la de B y así mismo la cadena que representa a B difiere en una posición j a la de C; i y j no pueden ser iguales ya que der asi entonces $A = C$, luego entonces tenemos que A y C difieren en las posiciones i y j por lo que estos dos tienen dos vecinos en común donde uno de ellos es B y el otro es D y por lo tanto se tiene un ciclo de tamaño 4 el cual es la cara F. Puesto que cada ciclo es de al menos 4 vertices entonces el cuello es 4.

- **Conexo:** Sean U y V vertices en el hipercubo y S y T las cadenas que los representan respectivamente. Demostremos que siempre hay un camino entre U y V, para ello lo divideremos en dos casos cuando S y T coinciden o no en su úlitma posición. Para lo primero lo haremos a través de inducción. Para $n = 1$ puesto que solo se tienen 2 vertices y una arista entre ellos se cumple que es conexo. Consideremos el hipercubo de dimensión $n+1$ y U, V, S, T como se describieron anteriormente, y sea S', T' cadenas de tamaño n tales que cada posición de S' coincide con la de S y cada posición de T' coincide con la de T, entonces por hipotesis de inducción existe un camino $R'_1 \sim R'_2 \sim \cdots \sim R'_{k-1} \sim R'_k$ tal que $R'_1 = S'$, $R'_k = T'$, entonces sean $R_1, \cdots, R_k$ tales que cada entrada de R'_i coincide con la de R_i y la ultima posición de R_i es la misma que la de S la cual también es la de T, entonces tenemos que $R_1 \sim R_2 \sim \cdots \sim R_{k-1} \sim R_k$ es un camino entre S y T. Ahora cuando S y T difieren en una posición entonces tomamos R tal que R coincide en la primeras n posiciones con T y en la ultima posición es igual a S entonces sabemos que T y R estan conectados y por lo anterior R y S están conectados por lo tanto S y T también lo estan.

5. Determine el polinomio cromático de la siguiente gráfica



Nos refiremos a este gráfica por G. Por la recurción del polinomio Característico de un gráfica tenemos que

$$P(G, k) = P(G - ef, k) - P(G/ef, k).$$

Al ser $G - ef$ un árbol con 7 nodos tenemos que su polinomio cáractieristico es

$$P(G - ef, k) = k(k-1)^6.$$

Asi mismo al ser G/ef un árbol con 6 nodos tenemos que su polinomio cáractieristico es

$$P(G/ef, k) = k(k-1)^5.$$

Por lo tanto concluimos que

$$P(G, k) = k(k-1)^6 - k(k-1)^5 = k(k-1)^5(k-1-1) = k(k-1)^5(k-2).$$