Métodos Estadísticos
Tarea II

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Pedro Luis del Ángel Rodríguez

13 de marzo de 2021

Problemas

Preguntas comunes para todos los alumnos para hacer en la casa:

El principio de Cavalieri (Milán, 1598 - Bolonia, 1647) nos dice que podemos calcular el volumen de un sólido integrando las áreas de las secciones transversales.

$$V = \int_0^h A dz.$$

1. Use el principio de Cavalieri para demostrar que los volúmenes de dos cilindros,con la misma base y altura, son iguales.

   Demostración. Veamos lo siguiente, si ambos cilindros se encuentran en $[0, h]$ entonces para cada sección transversal de uno a una altura $h' \in [0, h]$ habra una sección transversal a esa misma altura h' y que además es del mismo tamaño, por el principio de Cavalieri concluimos que su volumén es el mismo. □

2. Encuentre el volumén del cilindro $x^2 + y^2 = r^2$ que se encuentra entre los planos $y = mx$ y $z = 0$.

3. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces, encuentre el volumen del sólido que se obtiene de rotar la gráfica de f al rededor del eje x, para $a \leq x \leq b$.

   Por el principio de Cavalieri solo debemos de ver commo son las secciones transversal de este solido pero puesto que esta se obtiene de rotar la gráfica de f al rededor del eje x, entonces cada sección transversal en la altura x sera un círculo de radio $|f(x)|$ por lo que su volúmen es

$$V = \int_a^b f(x) dx.$$

4. Calcule $\int_0^1 dy \int_0^1 ye^{xy} dx$.

   Sea $u = xy$ entonces $du = ydx$ por lo tanto

$$\int_0^1 dy \int_0^1 ye^{xy} dx = \int_0^1 dy \int_0^y e^u du = \int_0^1 e^y - 1 dy = \int_0^1 e^y dy - \int_0^1 dy = e - 2.$$

5. Sea $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea

$$F(x,y) = \int_a^x ds \int_c^y f(s,t)dt;$$

demuestre que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x} = f(x,y)$.

Demostración. Primero veamos que al ser f continua entonces para y fijo entonces

$$\int_c^y f(s,t)dt$$

es continua, analogamente si dijamos la primera entrada e integramos por la primera esta función será continua. Entonces podemos aplicar el TFC a

$$\int_c^y f(s,t)dt,$$

y obtener

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \int_c^y f(x,t)dt,$$

por último como f es continua una vez más por el TFC obtenemos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}(x,y) = f(x,y).$$

analogamente obtenemos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x}(x,y) = f(x,y).$$

□

6. Calcule $\int_{-1}^1 dx \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy$.

Separando la integral de x en dos integrales obtenemos

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy = \int_{-1}^0 dx \int_{2x}^{-x} e^{x+y} dy + \int_0^1 dx \int_{-2x}^{x} e^{x+y} dy.$$

Sea $u = x + y$ entonces $du = dy$ por lo que

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy = \int_{-1}^0 dx \int_{3x}^{0} e^{u} du + \int_0^1 dx \int_{-x}^{2x} e^{u} du$$

$$= \int_{-1}^0 \left(1 - e^{3x}\right) dx + \int_0^1 \left(e^{2x} - e^{-x}\right) dx = \frac{1}{3e^3} + \frac{e^2}{2} + \frac{1}{e} - \frac{5}{6}.$$

7. Encuentre el área de una elipse con semiejes de longitudes a y b respectivamente.

   Por cuestiones de simplicidad tomares como $2a$ y $2b$ los semiejes respectivos de la elipse. La ecuación de esta elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

   Ahora por lo que para un x fija tenemos que

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

   Es decir para todo $y \in \left[-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right]$ se cumple que (x, y) esta dentro de la elipse por lo que el área de la elipse arriba del eje es

$$A = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx = 2ab\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - u^2}du.$$

   Luego como es simetrica la elpise con respecto al eje y entonces

$$A = 4ab\int_{0}^{1} \sqrt{1 - u^2}du = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos(w)^2dw = 2ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1 + cos(2w)dw = ab\pi.$$

8. Encuentre el volumen de un cono de altura h y base de radio r.

   Primero veamos que la sección tranversal del cono a la altura h' es un circulo de radio $r' = \frac{rh'}{h}$ por semejansa de triángulos. Por el principio de Cavalieri tenemos que el volúmen del cono es

$$V = \int_{0}^{h} \pi\left(\frac{rz}{h}\right)^2 dz = \frac{r^2\pi}{h^2}\int_{0}^{h} z^2dz = \frac{rh\pi}{3}.$$

9. Encuentre

$$\int_{0}^{a} dx \int_{0}^{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}} \left(a^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}} dy$$