Probabilidad Aplicada y Optimización
Tarea 1

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Daniel Hernández Hernández

2 de febrero de 2023

1. La σ-álgebra de Borel de los reales ($\mathcal{B}$) contiene a las uniones numerables de intervalos (de cualquier tipo).

   Demostración. Veamos que si $a, c, b \in R$ cumplen que $a \leq c \leq b$ entonces

   a) Por definición todo intervalo abierto esta contenido en ($\mathcal{B}$).
   b) Puesto que $(-\infty, a), (b, \infty) \in (\mathcal{B})$ por definición y es cerrado bajo unión finita y complemento entonces $[a, b] \in (\mathcal{B})$.
   c) Por último puesto que $(a, c), [c, b] \in (\mathcal{B})$ y es cerrado bajo unión entonces $(a, b] \in (\mathcal{B})$. Analogamente podemos ver que $[a, b) \in (\mathcal{B})$.

   Debido a que ($\mathcal{B}$) es cerrado bajo uniones numerables y demostramos que todo tipo de intervalo esta contenido en ($\mathcal{B}$) concluimos que contiene a las uniones numerables de intervalos (de cualquier tipo). □

2. Prueba que la función

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

   es, en efecto una función de densidas. Esto es, que f no sea negativa y que $\int_{-\infty} \infty f(x)dx = 1$.

   Demostración. Veamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = \int_{0}^{\infty} f(x) = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} = -e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty} = -(0-1) = 1.$$

   Puesto que $e > 0$ entonces $e^{-\lambda x} > 0$. Por lo tanto concluimos que f es una función de densidad. □

3. Si $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B]$, entonces $\mathbb{P}[A^c \cap B] = \mathbb{P}[A^c]\,\mathbb{P}[B]$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[A^c \cap B] &= 1 - \mathbb{P}[(A^c \cap B)^c] && \text{Debido a que } \mathbb{P}[X] = 1 - \mathbb{P}[X^c] \\
&= 1 - (\mathbb{P}[(B^c \cup A)]) && \text{Ya que } \mathbb{P}[(A \cap B)^c] = \mathbb{P}[A^c \cup B^c] \\
&= 1 - (\mathbb{P}[(B^c \cup A) \cap (B^c \cup B)]) && \text{Puesto que } \mathbb{P}[A \cup A^c] = \mathbb{P}[\Omega] \\
&= 1 - (\mathbb{P}[B^c \cup (A \cap B)]) && \text{Por distribución.} \\
&= 1 - (\mathbb{P}[B^c] + \mathbb{P}[A \cap B]) && \text{Por sigmatividad de } \mathbb{P} \\
&= \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B] && \text{Debido a que } \mathbb{P}[X] = 1 - \mathbb{P}[X^c] \\
&= \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A]\,\mathbb{P}[B] && \text{Por hipotesis} \\
&= (1 - \mathbb{P}[A])\,\mathbb{P}[B] \\
&= \mathbb{P}[A^c]\,\mathbb{P}[B] && \text{Debido a que } \mathbb{P}[X] = 1 - \mathbb{P}[X^c].
\end{aligned}
$$

□

4. Dada una función de distribución F, simular una variable aleatoria con función de distribución F a partir de un generador de observaciones de una variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$.