Probabilidad
Tarea II

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Dr. Ehyter Matías Martín González

20 de Septiembre 2020

Problemas

1. Convergencía en media r-ésima

   a) Diferencias con convergencía en L_p.
   Esta permite convergencía con respecto de $0 < p < 1$.

   b) ¿Porqué no se puede definir convergencúa en L_p para $p \in (0,1)$? O ¿sí se puede?
   Primero veamos que $||\cdot||_p$ ya no es métrica cuando $0 < p < 1$. Considermos el espacio $([0,2], B[0,2], \lambda)$ (donde λ es la medida de Lebesgue normalizada en $[0,2]$) y L_p con repecto a este espacio medible, y las siguientes indicadoras

$$\mathbb{1}_{[0,1)}, \mathbb{1}_{[1,2]}.$$

Recordemos que

$$E[|\mathbb{1}_A|^p]^{1/p} = E[\mathbb{1}_A^p]^{1/p} = E[\mathbb{1}_A]^{1/p} = P[A]^{1/p} < \infty,$$

por lo que $\mathbb{1}_{[0,1)}, \mathbb{1}_{[1,2]} \in L_p$. También es claro que la variable aleatoria $0 \in L_p$.
Ahora si veamos lo siguiente

$$d(\mathbb{1}_{[0,1)}, -\mathbb{1}_{[1,2]}) = ||\mathbb{1}_{[0,1)} + \mathbb{1}_{[1,2]}||_p = ||\mathbb{1}_{[0,2]}||_p = E[|\mathbb{1}_{[0,2]}|^p]^{1/p} = P([0,2])^{1/p} = 1,$$

y también

$$d(\mathbb{1}_{[0,1)}, 0) = ||\mathbb{1}_{[0,1)}||_p = E[|\mathbb{1}_{[0,1)}|^p]^{1/p} = P([0,1))^{1/p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p},$$

$$d(0, -\mathbb{1}_{[1,2]}) = ||\mathbb{1}_{[1,2]}||_p = E[|\mathbb{1}_{[1,2]}|^p]^{1/p} = P([1,2])^{1/p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p}$$

Al ser $0 < p < 1$ tenemos que

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p-1} < 1,$$

por lo tanto

$$d(\mathbb{1}_{[0,1)}, -\mathbb{1}_{[1,2]}) > d(\mathbb{1}_{[0,1)}, 0) + d(0, -\mathbb{1}_{[1,2]}),$$

con lo que concluimos que $||\cdot||_p$ ya no es métrica cuando $0 < p < 1$. Esto genera que no podamos hablar convergencia con esta métrica en L_p pero podria haber otra métrica que permita $p > 0$. Al menos es lo que supongo qusieron decir cuaando nos dijeron que demostramos esto, pero estuve leyendo un poco e invesitgando y creo el problema en general es que si $1 < p < \infty$ entonces se cumple que para toda suceción $\{X_n\} \in L_p$ convergente se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} X_n \in L_p,$$

pero esto no necesariamente es cierto si $0 < p < 1$, bajo la definición de que $X \in L_p$ ssi

$$E[|X|^p] < \infty.$$

Ya no tuve tiempo de desarrollar esta idea por hacer la otra demostración. Intentare seguirla.

c) Conjunto denso en $\mathcal{L}_p$
Un conjunto $S \in \mathcal{L}_p$ es denso si $\forall w \in S$ se cumple que para toda bola abierta de s interseca a L_p en un punto diferente a el, usando la métrica

$$d(x,y) = ||X - Y||_p$$

$\forall s \in S$

d) Ejemplo conjunto denso
No lo encontre.

2. Pendiente

3. Sea $X_1, \cdots, X_n$ una colección de v.a. iid con distribución $\mathcal{U}[0,\theta]$ con $\theta > 0$ y desconocido.

a) Estimador de máxima verosimilitud de θ.
Primero veamos cual es la verosimilitud de nuestra muestra

$$L(\theta, x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} f_{\mathcal{U}[0,\theta]}(x_i) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,\theta](x_i)}}{\theta^n},$$

luego esta función es decreciente para $\theta \geq \text{máx}(x_1, \cdots, x_n)$, y es 0 para $0 < theta < \text{máx}(x_1, \cdots, x_n)$ por lo que su maximo es en $\theta = \text{máx}(x_1, \cdots, x_n)$. Por lo tanto

$$\hat{\theta}_n = \text{máx}(x_1, \cdots, x_n).$$

b) Ahora vemos las convergencias

- Convergencia casi segura:
Por lo visto en el Tarea 1 problema 4 tenemos que $\hat{\theta}_n$ converge al extremo derecho w_f, que en este caso es θ.

- Convergencia en Probabilidad:
  Esta se cumple puesto que convergen casis seguramente.
- Convergencia en L_p
  Aún no me sale

c) Gráfica

4. Componentes

- Convergencia casi segura

  Si $X_n \to X$ casi seguramente entonces existe un N nulo tal que $\forall w \in N^c$ se cumple que $X_n(w) \to X(w)$. ahora como una función converge si y sólo si sus componentes convergen tenemos que $X_{n,i}(w) \to X_i(w), i = 1, 2$. Por lo que el mismo nulo de la convergencia casi segura original funciona para la convergencia casi segura de las componentes.

  Si $X_{n,i}(w) \to X_i(w), i = 1, 2$ casi seguramente entonces tenemos que existe un N_i nulo tal que $\forall w_i \in N_i^c$ se cumple que $X_{n,i}(w) \to X_i(w)$, entonces sea $N = N_1 \cup N_2$ tenemos que $\forall w \in N^c$ se cumple que $X_{n,i}(w) \to X_i(w)$, y como una función converge si y sólo si sus componentes convergen tenemos que $X_n(w) \to X(w)$. Por lo que la union de los nulos de la convergencia casi segura de las componentes funciona para la convergencia casi segura de la bivariada.

- Convergencia en Probabilidad

  La ida se sigue del teorema del mape continuo.

  Si $X_{n,i}(w) \to X_i(w), i = 1, 2$ en probabilidad entonces $P[|X_{n,i} - X_i| > \epsilon] \to 0$. Ahora veamos que por desigualdad del triangulo tenemos que

  $$\{|X_{n,1} - X_1| < \epsilon/2\} \cap \{|X_{n,2} - X_2| < \epsilon/2\} \subset \{|X_n - X| < \epsilon\},$$

  por complementos obtenemos

  $$\{|X_n - X| > \epsilon\} \subset \{|X_{n,1} - X_1| > \epsilon/2\} \cup \{|X_{n,2} - X_2| > \epsilon/2\},$$

  por subaditividad obtenemos que

  $$P(|X_n - X| > \epsilon) \leq P(|X_{n,1} - X_1| > \epsilon/2) \cup P(|X_{n,2} - X_2| > \epsilon/2),$$

  por lo tanto concluimos que

  $$X_n \xrightarrow{P} X$$