Probabilidad
Parcial I

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Ehyter Matías Martín González

8 de octubre de 2020

Problemas

1. Definiciones

   a) Explique clara y concisamente los conceptos de convergencia casi segura, en probabilidad y en L_p, resaltando las relaciones entre ellos y qué tan restrictivo es cada tipo de convergencia.

   Sea $\{X_n\}$ y X definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ahora veamos las definiciones de los siguientes tipo de convergencia

   1) **Convergencia casi segura:** X_n converge $\mathbb{P}$-casi seguramente a X si y sólo si existe un conjunto nulo medible N, tal que X_n converge sobre N^c de manera puntual a X, es decir para todo $\omega \in N^c$ se tiene que $X_n(\omega) \to X(\omega)$. Esto es denotado por

   $$X_n \xrightarrow{c.s} X.$$

   Esto lo que quiere decir es que en todo los eventos que son importantes es decir que su probabilidad no es 0 entonces el valor de las variables aleatorias de la susceción X_n si convergen a X en estos eventos.

   2) **Convergencia en probabilidad:** X_n converge en probabilidad a X si y sólo si para todo $\epsilon > 0$

   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[|X_n - X| > \epsilon\right] = 0.$$

   Esto es denotado por

   $$X_n \xrightarrow{P} X.$$

   Esto lo que quiere decir es que los eventos w tales que la diferencia del valor de la variable aleatoria X_n en ese evento $X_n(w)$ es muy cercana (a distancia menor a ϵ) al valor de la variable aleatoria X en ese evento $X(w)$, cada vez son mas eventos mientras n crece hasta que son todos los eventos con medida distinta de 0. Esto no es tan fuerte como c.s. puesto que no solo te asegura que estan muy cerca estos valores pero no son realmente esos valores.

   3) **Convergencia en L_p:** X_n para $p \geq 1$ converge en L_p a X si y sólo si

   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] = 0.$$

   Esto es denotado por

   $$X_n \xrightarrow{L_p} X.$$

Luego tenemos que

$$X_n \xrightarrow{c.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X.$$
$$X_n \xrightarrow{L_p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X.$$

por lo que convergencia c.s y en L_p son mas restrictivos que convergencia en probabilidad.

b) Demuestre que existe una sucesión $\{X_n\}$ tal que ella converge casi seguramente, en probabilidad y en L_p al mismo límite, donde $\{X_n\}$ es tal que para toda n, X_n **no** es degenerada.

Demostración. Sea $\{X_n\}$ y X definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tales que X_n converge puntualmente a X, y $g \in L_p$ para algún $p \geq 1$ tal que $|X_i(\omega)| \leq g(\omega)$.

Como X_n converge puntualmente a X entonces converge casi seguramente a X y por lo tanto converge en probabilidad a X. Ahora por el Teorema de convegrencia dominada tenemos que X_n converge en L_p a X.

Tomemos X_n tal que X_N converge c.s, luego la sucesión

$$\{-sup_{k\geq n}\{X_k - X\}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

es monótona y acotada por lo que esta suceción de variables aletorias es un ejemplo tal que converge c.s, en probabilidad y en L_p.

Sea $\{X_n\}$ tal que $X_i = Y$ para todo $i \in \mathbb{N}$, donde $Y \in L_1$, entonces podemos ver $X_n \to Y$ puntualmente por lo que converge c.s y por lo tanto en probabilidad, puesto que $X_n \leq Y$ entonces por convergencia dominada se tiene

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - Y|^p] = E[|\lim_{n\to\infty} X_n - Y|^p],$$

por continuidad del valor absoluto y de x^p tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - Y|^p] = E[|Y - Y|^p] = 0,$$

por lo tanto converge también en L_p. $\square$

c) Escriba la definición de $X_n \to \infty$ en probabilidad.
Sea $\{X_n\}$ y X definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).X_n$ diverge en probabilidad si y sólo si para todo $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[X_n > \epsilon\right] = 1.$$

Esto es denotado por

$$X_n \xrightarrow{P} \infty.$$

2. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias tales que $X_n \overset{L_p}{\to} X$ para algún $p \geq 1$ y sea $g : A \to B$ medible y **no constante**, donde $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Mencione al menos dos casos en los cuales la convergencia en L_p de la sucesión $\{X_n\}$, implique $g(X_n) \overset{L_p}{\to} g(X)$.

Lema 1 − *Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función acotada y $Y \in L_P$ entonces*

$$g(Y) \in L_p.$$

Demostración. Sea $Y \in L_p$ entonces $g(Y) \in L_p$ si y sólo si

$$E[|g(Y)|^p] < \infty.$$

Tenemos que por ser g acotada digamos por M entonces

$$E[|g|^p] \leq E[M^p] = M^p,$$

por lo tanto

$$g(Y) \in L_p.$$

□

- **Continua y acotada:** Si g es conitnua y acotada por algun $h \in L_p$, es decir $|g(x)| \leq h(x)$ entonces se cumple que

$$g(X_n) \xrightarrow{L_p} g(X).$$

Demostración. Al ser g acotada entonces por el Lema 1 tenemos que para todo $X \in L_P$ se cumple

$$g(X) \in L_p,$$

por convergencia dominada se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|g(X_n) - g(X)|^p\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} |g(X_n) - g(X)|^p\right],$$

por continuidad del valor absoluto y de x^p tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|g(X_n) - g(X)|^p\right] = \mathbb{E}\left[\left|\lim_{n\to\infty} g(X_n) - g(X)\right|^p\right]$$

como $g(X_n) \in L_p$ y $X_n \xrightarrow{L_p} X$ concluimos

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|g(X_n) - g(X)|^p\right] = \mathbb{E}\left[|g(X) - g(X)|^p\right] = 0,$$

es decir

$$g(X_n) \xrightarrow{L_p} g(X)$$

□

- **Lipchitz:** Si g es Lipschitz y acotada entonces se cumple que

$$g(X_n) \xrightarrow{L_p} g(X).$$

Demostración. Al ser g acotada entonces por el Lema 1 tenemos que para todo $X \in L_P$ se cumple que

$$g(X) \in L_p.$$

Por ser g Lipchitz tenemos que existe $K \geq 0$ tal que

$$|g(X_n) - g(X)| \leq K|X_n - X|,$$

por monotonía de x_p se cumple que

$$|g(X_n) - g(X)|^p \leq K^p|X_n - X|^p.$$

Por ser la esperanza monótina se tiene

$$\mathbb{E}\left[|g(X_n) - g(X)|^p\right] \leq \mathbb{E}\left[K^p|X_n - X|^p\right],$$

luego por linealidad de la esperanza se cumple

$$\mathbb{E}\left[|g(X_n) - g(X)|^p\right] \leq K^p\mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right].$$

Ahora por linealidad del operador límite tenemos

$$\lim_{n\to\infty} K^p\mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] = K^p \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right],$$

por hipotesis sabemos que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] = 0$ por Teorema del emparedado concluimos

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|g(X_n) - g(X)|^p\right] = 0,$$

es decir

$$g(X_n) \xrightarrow{L_p} g(X)$$

□

Puesto que toda función es Lipschitz y derivable si y sólo si es derivable y cuya derivada es acotada, entonces si g es derivable y cuya derivada es acotada entonces se cumple que

$$g(X_n) \xrightarrow{L_p} g(X).$$

3. Sean $\{X_n\}, \{Y_n\}$ sucesiones de variables aleatorias tales que $X_n \xrightarrow{P} X$, $Y_n \xrightarrow{L_q} Y$ y $|X_n| \leq |Y_n|$ casi seguramente.

   a) Utilice el Teorema 7.3 de las notas para probar que $\left\{\frac{|X_n|}{1+|Y_n|}\right\}$ converge en probabilidad y determine la variable límite. **Nota**: cualquier solución que no use dicho Teorema, será calificada automáticamente con cero puntos, independientemente de si es correcta o no.

   Demostración. Sea W_N, V_n sucesiones de variables aleatorias tales que $W_n \xrightarrow{P} X$, $V_n \xrightarrow{P} Y$. Tomemos un subsucesión arbitrario de X_nY_n digamos $X_{n_k}Y_{n_k}$.

   Ahora como $X_n \xrightarrow{P} X$ entonces $X_{n_k} \xrightarrow{P} X$, por el Teorema 7.3 existe una subsucesión digamos $X_{n_{k_m}}$ tal que $X_{n_{k_m}} \xrightarrow{c.s.} X$.

   Analogamente como $Y_n \xrightarrow{P} Y$ entonces $Y_{n_{k_m}} \xrightarrow{P} Y$, por el Teorema 7.3 existe una subsucesión digamos $Y_{n_{k_{m_l}}}$ tal que $Y_{n_{k_{m_l}}} \xrightarrow{c.s.} Y$.
   Ahora tenemos

$$X_{n_{k_{m_l}}} \xrightarrow{c.s.} X \text{ y } Y_{n_{k_{m_l}}} \xrightarrow{c.s.} Y,$$

   luego puesto que

$$||a| - |b|| \leq |a - b|,$$

   también sus valores absolutos cumplen

$$|X_{n_{k_{m_l}}}| \xrightarrow{c.s.} |X| \text{ y } |Y_{n_{k_{m_l}}}| \xrightarrow{c.s.} |Y|,$$

   Las siguientes operaciones se siguen de las propiedades del limite en los números reales. Por linealidad del operador límite tenemos

$$1 + |Y_{n_{k_{m_l}}}| \xrightarrow{c.s.} 1 + |Y|,$$

   además al ser $0 < 1 + |Y_{n_{k_{m_l}}}|$ entonces su inverso cumple que

$$\frac{1}{1 + |Y_{n_{k_{m_l}}}|} \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{1 + |Y|},$$

   por último el el producto de ellos también converge c.s. es decir

$$\frac{|X_{n_{k_{m_l}}}|}{1 + |Y_{n_{k_{m_l}}}|} \xrightarrow{c.s.} \frac{|X|}{1 + |Y|},$$

   por el Teorema 7.3 concluimos que

$$\frac{|X_n|}{1 + |Y_n|} \xrightarrow{P} \frac{|X|}{1 + |Y|}$$

$\square$

b) Determine si $\left\{\frac{|X_n|}{1+|Y_n|}\right\}$ converge en L_p para algún $p \geq 1$. Justifique formalmente su respuesta.

Demostración. Primero al ser $|X_n| \leq |Y_n|$ c.s. entonces

$$\frac{|X_n|}{1+|Y_n|} \leq \frac{|Y_n|}{1+|Y_n|} \leq 1,$$

Ahora recordemos que el límite de sucesiones en $\mathbb{R}$ conservan el orden, por lo que

$$|X| \leq |Y| \text{ c.s,}$$

por lo tanto

$$\frac{|X|}{1+|Y|} \leq \frac{|Y|}{1+|Y|} \leq 1.$$

De las dos desigualdades anteriores obtenemos

$$\left|\frac{|X_n|}{1+|Y|} - \frac{|Y|}{1+|Y|}\right| \leq 2,$$

por convergencia dominada tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left|\frac{|X_n|}{1+|Y_n|} - \frac{|X|}{1+|Y|}\right|^p\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty}\left|\frac{|X_n|}{1+|Y_n|} - \frac{|X|}{1+|Y|}\right|^p\right]$$

por continuidad de valor absoluto y x^p tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left|\frac{|X_n|}{1+|Y_n|} - \frac{|X|}{1+|Y|}\right|^p\right] = \mathbb{E}\left[\left|\lim_{n\to\infty}\frac{|X_n|}{1+|Y_n|} - \frac{|X|}{1+|Y|}\right|^p\right]$$

luego por el inciso anterior concluimos

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left|\frac{|X_n|}{1+|Y_n|} - \frac{|X|}{1+|Y|}\right|^p\right] = \mathbb{E}\left[\left|\frac{|X|}{1+|Y|} - \frac{|X|}{1+|Y|}\right|^p\right] = 0,$$

por lo tanto concluimos quiere

$$\frac{|X_n|}{1+|Y_n|} \xrightarrow{L_p} \frac{|X|}{1+|Y|}$$

$\square$

4. Sea $\{\vec{X}_n\}$ una sucesión de vectores aleatorios d-dimensionales, tales que $\vec{X}_n = (X_{n,1}, \ldots, X_{n,d})$ y $X_{n,j} \xrightarrow{L_p} X_j$ para algún $p \geq 1$ (p **no necesariamente es el mismo** para todos los vectores y tampoco para todas las entradas de cada vector). Demuestre que $\vec{X}_n \xrightarrow{P} \vec{X}$, donde $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_d)$.

Lema 2 – *La suma de d suceciones convergentes en probabilidad convergen a la suma de sus límites*

Demostración. Demostraremos por Inducción Matemática.

Para el caso base $d = 2$ sabemos que si dos suceciones de variables aleatorias convergen en probabilidad entonces la suma de estas suceciones converge a la suma de sus límites. Para el paso inductivo tomemos $d + 1$ suceciones de variables aleatorias convergentes en probailidad, es decir sean $\{X_{i_n}\}, i \in \{1, \cdots, d+1\}$ sucesiones de variables aleatorias tales que

$$X_{i_n} \xrightarrow{P} X_i,$$

ahora sabemos que por hípotesis de inducción

$$\sum_{i=1}^{d} X_{i_n} \xrightarrow{P} \sum_{i=1}^{d} X_i,$$

luego como la suma de dos suceciones de variables aleatorias convergen en probabilidad entonces la suma de estas suceciones converge a la suma de sus límites, tenemos

$$\sum_{i=1}^{d} X_{i_n} + X_{d+1_n} \xrightarrow{P} \sum_{i=1}^{d} X_i + X_{d+1},$$

es decir

$$\sum_{i=1}^{d+1} X_{i_n} \xrightarrow{P} \sum_{i=1}^{d+1} X_i.$$

Por Inducción Matemática conluimos que la suma de d suceciones convergentes en probabilidad convergen a la suma de sus límites. $\square$

Recordemos que si $W_n \xrightarrow{L_p} W$ para algún $p \geq 1$, entonces para todo $q < p$ se cumple que

$$W_n \xrightarrow{L_q} W.$$

Ahora entonces que

$$X_{n,j} \xrightarrow{L_{p_{n,j}}} X_j, p_{n,j} \geq 1,$$

luego entonces

$$X_{n,j} \xrightarrow{P} X_j.$$

Ahora sean las proyecciones de cada componente $g_i(Y) = (0, \cdots, X_i, 0, \cdots, 0)$. Al ser g_i continua por el Teorema del mapeo continuo tenemos que

$$g_i(X_{n,i}) \xrightarrow{P} g_i(X_i).$$

Por el Lema 2 tenemos

$$\sum_{i=1}^{d} g_i(X_{n,i}) \xrightarrow{P} \sum_{i=1}^{d} g_i(X_i),$$

por definición concluimos que

$$\vec{X}_n \xrightarrow{P} \vec{X}$$

5. Sea m_n el mínimo de n variables aleatorias iid con distribución común $exp(\theta)$, todas sobre el mismo espacio de probabilidad. Demuestre que $m_n \xrightarrow{L_p} 0$ para todo $p > 0$.

Demostración. Empecemos por ver cual es la función de distirbución de m_n, para ello digamos que nuestras n variables aleatorias son $X_1, \cdots, X_n$, ahora

$$
\begin{aligned}
F_{m_n}(x) &= \mathbb{P}[m_n \leq x] && \text{por definición de fda} \\
&= 1 - \mathbb{P}[m_n > x] && \text{por definición de P} \\
&= 1 - \mathbb{P}[X_1 > x, \cdots, X_n > x] && \text{por definición de mínimo} \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[X_i > x] && \text{por independencia} \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[X_1 > x] && \text{por ser iid} \\
&= 1 - \mathbb{P}[X_1 > x]^n && \\
&= 1 - \left(e^{-\theta x}\right)^n && \text{por tener distirbución } \exp(\theta) \\
&= 1 - e^{-\theta n x}
\end{aligned}
$$

por lo que

$$f_{m_n}(x) = \theta n e^{-\theta n x},$$

Ahora veamos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[|m_n|^p] &= \mathbb{E}[m_n^p] && \text{ya que minimo es no negativo} \\
&= \int_0^\infty x^p f_{m_n}(x) dx && \text{por definición de esperanza} \\
&= \int_0^\infty x^p \theta n e^{-\theta n x} dx && \text{sutituyendo la funsión de densidad} \\
&= \theta n \int_0^\infty x^p e^{-\theta n x} dx && \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{(\theta n)^p} \int_0^\infty \frac{(\theta n)^{p+1}}{\Gamma(p+1)} x^p e^{-\theta n x} dx
\end{aligned}
$$

Sabemos que $\frac{(\theta n)^{p+1}}{\Gamma(p+1)} x^p e^{-\theta n x}$ es la función de distribución de una variable aleatoria con distribución Gamma con para metros $\alpha = p+1, \beta = \theta n$, por lo que

$$\mathbb{E}[|m_n|^p] = \frac{\Gamma(p+1)}{(\theta n)^p}.$$

Como $\lim_{n \to \infty} \frac{\Gamma(p+1)}{(\theta n)^p} = 0$ conluimos que

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[|m_n|^p] = 0$$

□