Métodos Estadísticos
Tarea 2

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Rogelio Ramos Quiroga

9 de febrero de 2022

Suponga que la probabilidad de encontrar j especies diferentes de plantas en un lote aleatorio (pero de área fija) en cierta región, está dada por

$$p_j = \frac{\left(1 - e^{-\lambda}\right)^{j+1}}{(j+1)\,\lambda}, \quad \lambda \geq 0, j = 0, 1, 2, cdots$$

Se observan 200 lotes y se obtiene la siguiente tabla de datos

No. de especies	0	1	2	3	≥ 4
Frecuencia	147	36	13	4	0

1. Las p_j's ¿forman una distribución de probabilidad? ¿Porqué? Demostraremos que la las p_j's forman una distribución de probabilidad.

Demostración. Por definición $p_j \geq 0$.
Notemos que

$$0 \leq 1 - e^{-\lambda} \leq 1,$$

y recordemos que la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| \leq 1,$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\log\left(|1-x|\right), |x| \leq 1,$$

por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1 - e^{-\lambda}\right)^{n+1}}{n+1} = \lambda,$$

por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1 - e^{-\lambda}\right)^{n+1}}{(n+1)\,\lambda} = 1,$$

por definición concluimos que las p_j's forman una distribución de probabilidad. $\square$

2. Obtenga expresiones para las funciones de λ: Logverosimilitud, score e información.

Solución 1 – *Por definición la función de verosimilitud es*

$$L(\lambda) = \prod_{j=0}^{\infty} p_j^{f_j} = \prod_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\left(1-e^{-\lambda}\right)^{j+1}}{(j+1)\lambda} \right)^{f_j} = c \prod_{j=0}^{\infty} \frac{\left(1-e^{-\lambda}\right)^{(j+1)f_j}}{\lambda^{f_j}} = c \frac{\prod_{j=0}^{\infty} \left(1-e^{-\lambda}\right)^{(j+1)f_j}}{\lambda^{\sum_{j=0}^{\infty} f_j}},$$

por lo que la función de logverosimilitud es

$$l(\lambda) = \log c + \left(\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) f_j \right) \log\left(1-e^{-\lambda}\right) - \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_j \right) \log(\lambda),$$

entonces la función score es

$$Sc(\lambda) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) f_j}{e^{\lambda}-1} - \frac{\sum_{j=0}^{\infty} f_j}{\lambda},$$

por lo tanto la función de información es

$$I(\lambda) = \frac{\left(\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) f_j\right) e^{\lambda}}{\left(e^{\lambda}-1\right)^2} - \frac{\left(\sum_{j=0}^{\infty} f_j\right)}{\lambda^2},$$

3. Use el método de Newton-Raphson para encontrar el estimador máximo verosímil, $\hat{\lambda}$.

Solución 2 – *El estimador de máxima verosimilitud*

$$\hat{\lambda} = 0.5997.$$

Es máximo puesto que

$$I\left(\hat{\lambda}\right) = -183.3073.$$

4. Estime las frecuencias esperadas. ¿Da el modelo un ajuste razonable a los datos observados?

Solución 3 – *Las frecuencias esperadas son:*

No. de especies	0	1	2	3	≥ 4
Frec. obs.	147	36	13	4	0
Frec. esp.	15.4	33.9	10.2	3.5	2

El modelo da un ajuste razonable a los datos puesto que estan muy cerca los resultados.

5. Use el método de Newton para obtener un intervalo de verosimilitud del 10 % para λ.

Solución 4 – *El intervalo de verosimilitud del* 10 % *para* λ *es:*

$$IV(\lambda) = \{\lambda : R(\lambda; x) \geq 0.10\} = [0.4561, 0.7746].$$

Para los incisos 3,4, y 5 se anexa un notebook de python con el cual se encontrar dichas respuestas.