Probabilidad y Estadística
Tarea 06

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Dr. Octavio Arizmendi Echegaray

24 Marzo 2020

Problemas

1. Sean $X_1, \cdots, X_n$ variables aleatorias exponenciales independientes con parametros $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, respectivamente.

   a) Sea $Y_n = \min(X_1, \cdots, X_n)$, luego

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= 1 - P(Y > y) \\
&= 1 - P(X_1 > y, \cdots, X_n > y) && \text{por definición de mínimo} \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > y) && \text{al ser independientes} \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i y} && \text{por ser exponenciales} \\
&= 1 - e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) y}
\end{aligned}
$$

   La cual es una distirbución exponencial con parámtero $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

   b) Veamos como es $P(X_1 < X_2)$

$$
\begin{aligned}
P(X_1 < X_2) &= \int_0^\infty P(X < Y | Y = y) f_Y(y) dy \\
&= \int_0^\infty F_X(y) f_Y(y) dy \\
&= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda_1 y}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy \\
&= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy - \int_0^\infty \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) y} dy \\
&= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}
\end{aligned}
$$

c) Veamos $X_1 = Y$, quiere decir que X_1 es el minimo de $X_1, \cdots, X_n$, lo cual es cierto si y sólo si $X_1 \leq X_2, \cdots, X_1 \leq X_n$, por lo que

$$P(X_1 = Y) = P(X_1 \leq X_2, \cdots, X)$$

Al ser independientes entonces

$$P(X_1 = Y) = \prod_{i=2}^{n} P(X_1 \leq X_i)$$

Como las X_i son continuas entonces $X_i - X_j$ también lo es, por lo tanto $P(X_i = X_j) = 0$. Por lo que

$$P(X_1 = Y) = \prod_{i=2}^{n} P(X_1 < X_i),$$

por el inciso anterior

$$P(X_1 = Y) = \prod_{i=2}^{n} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_i},$$

por lo que concluimos que

$$P(X_1 = Y) = \frac{\lambda_1^{n-1}}{\prod_{i=2}^{n} \lambda_1 + \lambda_i}$$

2. Sea (X, Y) un vector con función de densidad $f(x, y) = \frac{x+y}{8}$ para $0 \leq x, y \leq 2$.

   Empezaremos por calcular la funciones de densidad marginales de X y Y, ya que podrian sernos utiles mas adelante.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \\ &= \int_0^2 f(x,y)dy \\ &= \int_0^2 \frac{x+y}{8} dy \\ &= \frac{x+1}{4}. \end{aligned}$$

   Analogamente obtenemos que

$$f_Y(y) = \frac{y+1}{4}.$$

a) Como $0 \leq x, y$ entonces $f(x,y) \geq 0$. Ahora veamos que estas acumulan 1,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy &= \int_0^2\int_0^2 f(x,y)dxdy \\
&= \int_0^2\int_0^2 \frac{x+y}{8}dxdy \\
&= \int_0^2 \frac{y+1}{4}dy \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo que concluimos que es una función de distribución.

b) La función de densidad marginal de Y es $f_Y(y) = \frac{y+1}{4}$ y la de X es $f_X(x) = \frac{x+1}{4}$, por lo que

$$\begin{aligned}
f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \\
&= \frac{\frac{x+y}{8}}{\frac{y+1}{4}} \\
&= \frac{x+y}{2y+2}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \\
&= \frac{\frac{x+y}{8}}{\frac{x+1}{4}} \\
&= \frac{x+y}{2x+2}
\end{aligned}$$

c) La probabilidad de $P(X > Y)$ es $\frac{1}{2}$ al ser indenticamente distribuidas. Aquí dejo el calculo de no ser lo suficientemente convincente. Primero calcularemos la función de distribución marginal de X.

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \\
&= \int_0^x \frac{u+1}{4}du \\
&= \frac{x(x+2)}{8}.
\end{aligned}$$

Usando ley total obtenemos

$$\begin{aligned}
P(X < Y) &= \int_0^2 F_X(x)f_Y(x)dx \\
&= \int_0^2 \frac{x(x+2)}{8}\frac{x+1}{4}dx \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$