Métodos Estadísticos
Tarea II

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesora: Dra. Eloísa Díaz Francés Murguía

21 de marzo de 2021

Problemas

Preguntas comunes para todos los alumnos para hacer en la casa:

1. Si X tiene una distribución $F(x;\theta,\sigma)$ que pertenece a la familia de localización y escala con θ parametro de localizaicón y σ de escala, entonces da una expresión para el cuantil Q_α en términos de los parametros (θ,σ), aprovechando la relación que guardan F y G, donde G es la distribución del miembro estándar de esta familia. El miembro G corresponde al caso $\theta = 0$ y $\sigma = 1$,

$$F(x;\theta,\sigma) = G\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right).$$

Recuérdese que como X es variable aletoria contínua, la función de cuantiles es simplemente la inversa de la distribución,

$$Q_\alpha = Q(\alpha) = F_X^{-1}(\alpha).$$

Notar que la definición de un cuantil Q_α es el valor donde se acumula una probabilidad α, de manera que

$$F_X(Q_\alpha;\theta,\alpha) = P\left[X \leq Q_\alpha\right] = \alpha.$$

Bajo estas consideraciones, el parámetro θ resulta ser él mismo un cuantil de cierta probabilidad. Indica cuál es esta probabilidad.

Solución 1 – *Primero veamos que por la relación que guardan F y G se cumple que*

$$F^{-1}(x) = G^{-1}(x)\sigma + \theta,$$

por lo que

$$Q_\alpha = F^{-1}(\alpha) = G^{-1}(\alpha)\sigma + \theta.$$

Ahora por esta misma relación tenemos que

$$F(\theta;\theta,\sigma) = G\left(\frac{\theta-\theta}{\sigma}\right) = G(0)$$

2. Considera una variable T Student con 9 grados de libertad. Da el valor del cuantil $b > 0$ tal que $P[-b \leq T \leq b] = 0{,}90$. Da un par de valores (a, c) con $a \neq -c$ tales que $P[a \leq T \leq c] = 0{,}90$ y muestra que $|c - a| > 2b$. Nota que el intervalo más corto con probabilidad 0,90 tiene la propiedad de que en sus extremos la función de densidad t de student tiene la misma altura. Es decir se obtiene al hacer un corte horizontal a la función de densidad.

   Solución 2 – *Se anexa a la entrega de esta tarea un script de R en el cual se calculan los siguientes datos obtenidos, a travez de una busqueda binaria.*

$$b = -1{,}833112933, a = -2, c = 1{,}699484154.$$

   De donde

$$|c - a| = 3{,}699484154 \geq -3{,}666225865 = 2b.$$

3. Si X es una $F(a, b)$ de Fisher demuestra que $Y = \frac{1}{X}$ se distribuye como una F de Fisher con sus grados de libertad (b, a).

   Demostración. El teorema del cambio de variable nos dice que si $Y = g(X) = 1/x$ entonces

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{\mathrm{d}g^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} \right|,$$

   al ser el soporte de una Fisher $(0, \infty)$ obtenemos

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{1}{y}\right) \frac{1}{y^2}.$$

   Recordemos que la distribución de una vairable F de Fisher es la siguiente

$$f_X(x) = \frac{1}{B\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{2}} x^{\frac{a}{2}-1} \left(1 + \frac{a}{b}x\right)^{-\frac{a+b}{2}}.$$

   remplazando en nuestra ecuación anterior obtenemos

$$f_Y(y) = \frac{1}{B\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{2}} \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{a}{2}-1} \left(1 + \frac{a}{b}\left(\frac{1}{y}\right)\right)^{-\frac{a+b}{2}} \frac{1}{y^2},$$

   puesto que la función Beta es simétrica tenemos que

$$f_Y(y) = \frac{1}{B\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{2}-1} \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{a}{2}-1} \left(1 + \frac{a}{b}\left(\frac{1}{y}\right)\right)^{-\frac{a+b}{2}} \frac{1}{y^2},$$

   factorizando y haciendo uso de las leyes de exponentes obtenemos

$$f_Y(y) = \frac{1}{B\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)} \left(\frac{b}{a}y\right)^{\frac{a}{2}} \left(1 + \frac{b}{a}y\right)^{-\frac{a+b}{2}} \frac{1}{y},$$

   por lo tanto

$$f_Y(y) = \frac{1}{B\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{2}} y^{\frac{a}{2}-1} \left(1 + \frac{b}{a}y\right)^{-\frac{a+b}{2}},$$

la cual es la función de densidad de una F de Fisher con sus grados de libertad (b, a), por lo tanto concluimos que Y se distribuye como F de Fisher con grados de libertad (b, a).

□

4. Usa la función generadora de momentos $M(t)$ como se sugiere en la sección 4.7 del Hogg y Craig (1978) para mostrar cómo se distribuye la suma $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ de n variables aleatorias independientes $X_1, \cdots, X_n$ idénticamente distribuidas como exponenciales con parámetro de escala β. Indica cual es la distribución de la cantidad pivotal $\frac{T}{\beta}$.

   No se como hacerlo :'(

Preguntas para discutir dentro de los equipos

1. Demuestra si la variable exponencial con tiempo de vida garantizado $\alpha > 0$ y párametro de escala θ cuya densidad es

   $$f(x; \alpha, \theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left[-\frac{(x-\alpha)}{\theta}\right] \mathbb{1}_{[\alpha,\infty)}(x),$$

   pertenece a la familia de localización y escala, o no. Di si pertenece a la familia exponencial de distribuciones. Nota que el soporte de la variable X es desde $\alpha > 0$ hasta infinito; es decir $X \geq \alpha > 0$.

   Puesto que el soporte es desconocido entonces la variable exponencial no pertenece a la familia de localización y escala.

2. Si X se distribuye como Gama con parametros α, β, ¿cómo se distribuye $Y = aX$ con a una constante positiva?

   Por el teorema de cambio de variable tenemos que

   $$f_Y(y) = f_{aX}(y) = \frac{f_X\left(\frac{y}{a}\right)}{a},$$

   como X se distribuye como Gama esto es

   $$f_Y(y) = \frac{\frac{\beta^\alpha \left(\frac{y}{a}\right)^{\alpha-1} e^{-\beta\left(\frac{y}{a}\right)}}{\Gamma(\alpha)}}{a} = \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\alpha (y)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\beta}{a}\right)y}}{\Gamma(\alpha)},$$

   al tener Y una función de densidad Gamma con parámetros α y $\frac{\beta}{a}$ concluimos que Y se distribuye Gamma con parámetros α y $\frac{\beta}{a}$.

3. Se tienen k variables aleatorias normales independientes $X_1, \cdots, X_k$ donde X_i tiene media μ_i y varianza σ^2. Indica como se distribuye la suma $T = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ de las k variables asociadas

   $$Z_i = \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma}\right)^2, \quad \text{para } i = 1, \cdots, n.$$

Primero recordemos que si Z se distribuye $N(\mu, \sigma)$ entonces $aZ+b$ se distribuye $N(a\mu+b, |a|\sigma)$ por lo que $\frac{X_i-\mu_i}{\sigma}$ se distribuye normal estándar, y por definición $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_i}{\sigma}\right)^2$ se distirbuye como chi-cuadrada.

4. Considera la variable aleatoria Z Cauchy de parámetros (θ, σ) y demuestra que pertenece a la familia de localización y escala. Sabiendo que una variable Cauchy $(0,1)$ se genera como la razón de dos variables normales estándar X/Y entonces di cómo es que puedes simular realizaciones de Z, a partir de números aleatorios normales estándar.

   Para generar realizaciones de Z solo basta con generar dos realizaciones x y y con distribución normal estandar y entonces x/y será una realización de Z.

   Ahora veamos que la distribución Cauchy pertenece a la familia de Localización y Escala

   Demostración. Recordemos que la función de distribución de Z es

$$f(x;\theta,\sigma) = \frac{1}{\pi\sigma\left[1+\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2\right]}\mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x).$$

   Podemos ver que su soporte no depende de parámetros desconocidos. Ahora veamos que podemos reexpresar a la densidad como

$$f(x;\theta,\sigma) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{1}{\pi\left[1+\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2\right]}\mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x) = \frac{1}{\sigma}f_0\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right),$$

   donde

$$f_0(x) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}.$$

   Ahora si $Y = \frac{X-\theta}{\sigma}$ por el Teorema de Cambio de Variable con $g(x) = \frac{x-\theta}{\sigma}$ vemos que la densidad de Y es $f_0(x)$ la cual no depende de parametros desconocidos, por lo tanto concluioms que la distirbución Cauchy pertenece a la familia de localización y escala. □