Calcula Diferencial e Integral III
Examen Tarea

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Dr. Manuel Cruz López

28 de noviembre de 2020

Problemas

1. Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) f es continua en Ω,

   b) para cada sucesion $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en Ω que converge a $x_0 \in \Omega$ se cumple que la sucesión $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$,

   c) para cada subconjunto cerrado $C \subset \mathbb{R}^m$ se cumple que $f^{-1}(C) = D \cap \Omega$, para algún subconjunto cerrado $D \subset \mathbb{R}^n$.

   Demostración. Empezaremos por demostrar la equivalencia del *a*) y *b*). Por definición f es continua en x_0 si y sólo si $\forall\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tales que si $x \in B_\delta(x_0)$ entonces $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$, es decir f es continua en x_0 si y sólo si el limite de f en x_0 es $f(x_0)$; por equivalencia en defınción por sucesiones de límite concluimos que f es continua en x_0 si y sólo si $\forall\,(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\Omega \setminus \{x_0\}$ que converge a x_0 se cumple que la sucesión $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$.

   Ahora demostraremos la equivalencia de *a*) y *c*). Puesto que $\forall A \subset \mathbb{R}^m$ se cumple que

   $$f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c,$$

   entonces si $C' \subset \mathbb{R}^m$ es abierto se cumple que $f^{-1}(C) = D \cap \Omega$, para algún subconjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^n$ si y sólo si se cumple que $f^{-1}(C) = D \cap \Omega$, para algún subconjunto cerrado $D \subset \mathbb{R}^n$. Al ser f continua si y sólo si para cada subconjunto abierto $C' \subset \mathbb{R}^m$ se cumple que $f^{-1}(C) = D \cap \Omega$, para algún subconjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^n$, concluimos que *a*) y *c*) son equivalentes.

   □

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Si $f(0) = 0$ y $f(t\mathrm{x}) = tf(\mathrm{x})$ para toda $t \in \mathbb{R}$ y $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$, prueba que $f(\mathrm{x}) = \nabla f(0) \cdot \mathrm{x}$ para toda $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$. En particular, f es lineal.

   Demostración. Si f es diferenciable en $x_0 \in \Omega$ entonces existe una función polinomial lineal

   $$P(x) = f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0),$$

   tal que

   $$\lim_{x\to\mathrm{x}_0} \frac{f(x) - P(x)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Sea

$$R(x) = f(x) - P(x),$$

entonces

$$\lim_{x \to \mathrm{x}_0} \frac{R(x)}{\|x - x_0\|} = 0,$$

y

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + R(x).$$

Evaluando la ecuación anterior en λx y $x_0 = 0$ obtenemos

$$f(\lambda x) = f(0) + \nabla f(0) \cdot (\lambda x) + R(\lambda x),$$

puesto que $f(0) = 0$, por linealidad del producto punto y por definición de f obtenemos

$$\lambda f(x) = \lambda \nabla f(0) \cdot (x) + R(\lambda x),$$

entonces

$$R(\lambda x) = \lambda f(x) - \lambda \nabla f(0) \cdot (x) = \lambda \left(f(x) - \nabla f(0) \cdot (x) \right) = \lambda R(x).$$

Ahora por definición de $R(x)$ tenemos

$$0 = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{R(\lambda x)}{\|\lambda x\|} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\lambda R(x)}{\|\lambda x\|} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{|\lambda| R(x)}{\|\lambda x\|} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{R(x)}{\|x\|} = \frac{R(x)}{\|x\|},$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, para el es caso $x = 0$ ya se cumple la hipotesis. Por lo tanto concluimos que

$$f(\mathrm{x}) = \nabla f(0) \cdot \mathrm{x}.$$

□

3. Usa multiplicadores de Lagrange para encontrar la distancia mínima entre la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ y la línea $x + y = 4$.

   La distancia de un punto (x_0, y_0) a la línea $x + y = 4$ es

$$f(\mathrm{x}) = \left(\frac{4 - y + x}{2} - x \right)^2 + \left(\frac{4 + y - x}{2} - y \right)^2,$$

   Sea $g(\mathrm{x}) = x^2 + y^2 - 1$ y

$$S = \left\{ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 | g(\mathrm{x}) = 0 \right\},$$

   por el teorema de multiplicadores de Lagrange si $\mathrm{x}_0 \in S$ es un punto en el que f alcanza su valor mínimo sobre S entonces debe existir λ tal que

$$\nabla f(\mathrm{x}_0) = \lambda g(\mathrm{x}_0),$$

es decir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{x}_0) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(\mathrm{x}_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{x}_0) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(\mathrm{x}_0).$$

De lo cual obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y - 4 &= \lambda 2x \\ x + y - 4 &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1, \end{aligned}$$

las primeras dos ecuaciones obtenemos que $x = y$, luego utilizando esto y despejando x de la primera ecuación obtenemos $x = \frac{-2}{\lambda - 1}$ sustituyendo en la última ecuación obtenemos que $\lambda = 1 \pm 2\sqrt{2}$, por lo que obtenemos los siguientes dos soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - 2\sqrt{2} & &, 1 + 2\sqrt{2} \\ x &= \frac{1}{\sqrt{2}} & &, -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} & &, -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

evaluando ambos puntos en la función f concluimos que la distancia mínima es $2\sqrt{2} - 1$.

4. Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase $\mathfrak{C}^2$ y $h(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))$, verifica que el laplaciano de f se escribe en coordenadas polares en la forma:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}.$$

Demostración. Por regla de la cadena tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x},$$

analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y},$$

luego al ser $r = \|(x, y)\|$ y $\theta = arctan(y/x)$ se cumple que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial r} cos(\theta) - \frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{sin(\theta)}{r},$$

también

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial r} sin(\theta) + \frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{cod(\theta)}{r},$$

Ahora volviendo a derivar por X las ultimas dos funciones y aplicando de nuevo la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x},$$

analogamente

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y},$$

luego sustituyendo obtenemos y calculando cada derivada parcial obtenemos

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} cos(\theta) - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\frac{sen(\theta)}{r} + \frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{sin(\theta)}{r}\right) cos(\theta)$$
$$- \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \theta \partial r} cos(\theta) - \frac{\partial h}{\partial r} sin(\theta) - \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}\frac{sin(\theta)}{r} - \frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{cos(\theta)}{r}\right)\frac{sin(\theta)}{r},$$

por lo que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} cos(\theta)^2 - \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial \theta}\frac{sen(\theta)cos(\theta)}{r} + \frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{sin(\theta)cos(\theta)}{r}\right)$$
$$- \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \theta \partial r}\frac{sin(\theta)cos(\theta)}{r} - \frac{\partial h}{\partial r}\frac{sin(\theta)^2}{r} - \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}\frac{sin(\theta)^2}{r^2} - \frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{cos(\theta)sin(\theta)}{r^2}\right),$$

es decir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} cos(\theta)^2 + \frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{2cos(\theta)sin(\theta)}{r^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial \theta \partial r}\frac{2sin(\theta)cos(\theta)}{r} + \frac{\partial h}{\partial r}\frac{sin(\theta)^2}{r} + \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}\frac{cos(\theta)^2}{r^2}.$$

Analogamente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} sin(\theta)^2 - \frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{2cos(\theta)sin(\theta)}{r^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \theta \partial r}\frac{2sin(\theta)cos(\theta)}{r} + \frac{\partial h}{\partial r}\frac{cos(\theta)^2}{r} + \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}\frac{sin(\theta)^2}{r^2}.$$

Por lo que el laplaciano de f es

$$\Delta f = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2},$$

esto es

$$\Delta f = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} cos(\theta)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} sin(\theta)^2 + \frac{\partial h}{\partial r}\frac{cos(\theta)^2}{r} + \frac{\partial h}{\partial r}\frac{sin(\theta)^2}{r} + \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}\frac{cos(\theta)^2}{r^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}\frac{sin(\theta)^2}{r^2},$$

factorizando obtenemos

$$\Delta f = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}\left(cos(\theta)^2 + sin(\theta)^2\right) + \frac{\partial h}{\partial r}\left(\frac{cos(\theta)^2}{r} + \frac{sin(\theta)^2}{r}\right) + \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}\left(\frac{cos(\theta)^2}{r^2} + \frac{sin(\theta)^2}{r^2}\right),$$

puesto que $cos(x)^2 + sin(x)^2 = 1$ concluimos que

$$\Delta f = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{\partial h}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$\square$

5. Usa el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x, y) = \cos(x + y)$ para calcular el límite

$$\lim_{\mathrm{x}\to(0,0)} \frac{1 - \cos(x + y)}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad \mathrm{x} = (x, y).$$

El polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x, y) = \cos(x + y)$ en $(0, 0)$ es

$$P(\mathrm{x}) = \cos(0) - \sin(0)(x) - \sin(0)y - \frac{\cos(0)x^2 - 2\cos(0)xy - \cos(0)y^2}{2} = 1 - \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2},$$

y sea

$$R(\mathrm{x}) = P(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}),$$

entonces

$$\lim_{\mathrm{x}\to(0,0)} \frac{R(\mathrm{x})}{\|\mathrm{x}\|^2} = 0,$$

por lo tanto

$$\lim_{\mathrm{x}\to(0,0)} \frac{R(\mathrm{x})}{\|\mathrm{x}\|^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Ahora por la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$2xy = \langle (x, y), (y, x)\rangle \leq \|(x, y)\| \, \|(y, x)\| = x^2 + y^2,$$

por lo que

$$\frac{\frac{x^2+2xy+y^2}{2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = (x^2 + y^2)^{1/2},$$

por el teorema del emparedado obtenemos

$$\lim_{\mathrm{x}\to(0,0)} \frac{\frac{x^2+2xy+y^2}{2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = 0$$

Regresando al límite original concluimos

$$\lim_{\mathrm{x}\to(0,0)} \frac{\frac{x^2+2xy+y^2}{2} + R(\mathrm{x})}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \lim_{\mathrm{x}\to(0,0)} \frac{\frac{x^2+2xy+y^2}{2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}} + \frac{R(\mathrm{x})}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = 0.$$

6. Prueba que si una superficie de revolución S en $\mathbb{R}^3$ está definida a partir de una curva regular entonces S es una superficie diferenciable.

7. Prueba que el toro bidimensional $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie diferenciable y describe el plano tangente al toro en un punto.

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathfrak{C}^1$ en Ω. Si $Jf(\mathrm{x}) \neq 0$ para toda $\mathrm{x} \in \Omega$, prueba que $f(\Omega)$ es un subconjunto abierto y $f^{-1} : f(\Omega) \longrightarrow \Omega$ es diferenciable.

   Demostración. Como $Jf(\mathrm{x}) \neq 0$ entonces por el Teorema de la función inversa se cumple que para todo $x \in \Omega$ existe una vecindad abierta $U \subset \Omega$ de x y otra vecindad abierta $V \subset f(\Omega)$ de $f(x)$ tal que $f(U) = V$, y que f es invertible con $f^{-1} : V \to U$ la cual es continua y diferenciable.

   Si nos fijamos en $y \in f(\Omega)$ y $f^{-1}(y) \in \Omega$ entonces por el Teorema de la función inversa se cumple que existe una vecindad abierta $V \subset \Omega$ de y y otra vecindad abierta $U \subset f(\Omega)$ de $f^{-1}(y)$ tal que $f^{-1}(U) = V$, y que f^{-1} es invertible con $f : U \to V$ la cual es continua y diferenciable cuya inversa es diferenciable, es decir $f^{-1} : V \to \Omega$ es diferenciable en cualquier $y \in f\Omega)$.

   Ahora como para toda g continua se cumple que $g(A \cup B) = g(A) \cup g(B)$ entonces si nos fijamos en la vecindad producida por la inversa local en $y \in \Omega$ V_y tenemos que$f(\Omega) = \mathbb{U}_{y \in \Omega} V_y$, por lo que concluimos que f es invertible que es

   $$f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega,$$

   la cual es diferenciable para todo $y \in f(\Omega)$, por lo que es continua para todo $y \in f(\Omega)$ por definición de continuidad concluimos que $f(\Omega)$ es abierto. □

9. Supongamos que $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es de clase $\mathfrak{C}^1$ y satisface las Ecuaciones de Cauchy – Riemann

   $$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

   a) Prueba que $Jf(x, y) = 0$ si y sólo si $Df(x, y) = 0$. Por lo tanto f es localmente invertible si y sólo si $Df(x, y) \neq 0$.

   Demostración. Veamos lo siguiente

   $$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ -\frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial x} \end{pmatrix},$$

   por lo que

   $$Jf(x, y) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2,$$

   por lo que si $Jf(x, y)$ entonces al tener una suma de cuadrados entonces ambos tienen que ser 0, es decir $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 = 0$. Entonces si $Df(x, y) \neq 0$ por lo anterior $Jf(x, y) \neq 0$ por lo tanto f es localmente invertible. □

   b) exhibe un ejemplo que muestre que la afirmación (1) es falsa si f no satisface las ecuaciones de Cauchy – Riemann.

   La proyección de un punto sobre algunos de los ejes es un contra ejemplo de esto, puesto que si $f(x, y) = (0, y)$ entonces

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pero

$$Jf(x,y) = 0,$$

además $f(x,y)$ no es inyectiva por lo que no es invertible. Por lo que f es un contra ejemplo.

10. Demuestra que si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y $c \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f entonces $f^{-1}(c)$ es una superficie diferenciable.