Probabilidad
Tarea 1

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Antonio Murillo Salas

29 de septiembre de 2021

Nota: Justifique con claridad cada una de las respuestas.

1. Sea (X, Y) un vector aleatoria con función de densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{6(y-x)}{N(N^2-1)}, & \text{si } x < y \text{ y } x, y \in \{1, \cdots, N\}, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Encuentre la función de probabilidades condicional de:

a) X dado Y.

b) Y dado X.

2. Suponga una moneda se lanza N veces, donde los lanzamientos son independientes y N tiene distribución Poisson de parametro $\lambda > 0$. Sea X y Y el número de águilas y soles en los N lanzamientos, respectivamente.

a) Encuentre la función de probabilidades conjunta de X y Y.
Recordemos que si N es conocido entonces nuestro experimento será una distribucción bernoulli con parametros $\left(N, \frac{1}{2}\right)$. Ahora puesto que en todo lanzamiento siempre el resultado será águilo o sol entonces $X + Y = N$, por lo que

$$f_{N|X,Y}(n, x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = x + y, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Si $x + y = n$ por bayes obtenemos

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= f_{X,Y|N}(x, y, n) f_N(N) \\ &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{\lambda^{x+y} e^{-\lambda}}{(x+y)!} \binom{x+y}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{\lambda^{x+y} e^{-\lambda}}{x!y!} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+y} \\ &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{\lambda^x e^{-\frac{\lambda}{2}}}{x!}\right)\right] \left[\left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{\lambda^y e^{-\frac{\lambda}{2}}}{y!}\right)\right] \end{aligned}$$

en otro caso $f_{X,Y}(x, y) = 0$.

b) ¿Son independientes X y Y?

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \sum_{y=0}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x+y}e^{-\lambda}}{x!y!}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+y} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{\lambda^{x}e^{-\frac{\lambda}{2}}}{x!}\right)\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{y}e^{-\frac{\lambda}{2}}}{y!} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{\lambda^{x}e^{-\frac{\lambda}{2}}}{x!}\right), \end{aligned}$$

analogamente

$$f_Y(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{y}\left(\frac{\lambda^{y}e^{-\frac{\lambda}{2}}}{y!}\right),$$

por lo que

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y),$$

por lo tanto X y Y son independientes.

3. Se elijen al azar y sin reemplazo, dos tarjetas de una urna que contiene N tarjetas numeradas del 1 al N, con $N \geq 1$. Sean X y Y el menor y mayor respectivamente, de los números de las tarjetas seleccionadas. Encuentre $\mathbb{E}(X|Y)$ y $\mathbb{E}(Y|X)$.

4. Sean X y Y variables aleatorias tales que $Var(X)$ es finita. La varianza condicional de X dado Y se define por

$$Var(X|Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X|Y))^2 |Y\right).$$

Demuestre que

$$Var(X) = \mathbb{E}(Var(X|Y)) + Var(\mathbb{E}(X|Y)).$$

Demostración. Observemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Var(X|Y)) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X|Y))^2 |Y\right)\right) && \text{Por definición de varianza condicional} \\ &= \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X|Y))^2\right) && \text{Por esperanza total} \\ &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X\mathbb{E}(X|Y)) && \text{Por linealidad de la esperanza} \end{aligned}$$

$\square$

5. Sea Y una variable aleatoria con distribución gamma de parámetros (s, α), es decir, Y tiene densidad

$$f_y(y) = \frac{\alpha^s}{\Gamma(s)} e^{-\alpha y} y^{s-1}, y > 0.$$

Supongo que X es una variable aleatoria cuya distribución condicional dado $Y = y$ es Poisson con media y. Pruebe que la distribución Y dado $X = i$ es gamma de parámetros $(s + i, \alpha + i)$.