Inteligencia Artificial y Teoría de la Computación
Tarea 5

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Jesús Rodríguez Viorato

10 de enero de 2022

1. Sea $ALL_{AFD} = \{\langle A\rangle \,|A \text{ es un AFD y } L(A) = \Sigma^*\}$. Demuestre que ALL_{AFD} es decidible.

   Demostración. Empecemos por ver que puesto los lenguajes regulares son cerradas bajo complemento, entonces para un $AFD A$ existe un $AFD B$ que reconoce $\overline{L(A)}$.

   Luego la siguiente MT L decide a ALL_{AFD}.

   L = "Sobre la entrada $\langle A\rangle$ donde A es un AFD:

   a) Sea $AFD B$ que reconozca a $\overline{L(A)}$.
   b) Sea MT T que decida al lenguaje E_{AFD}. Ejecuta T con la entrada $\langle B\rangle$.
   c) Si T acepta, acepta, Si T rechaza, rechaza.

   Si $\langle A\rangle \in ALL_{AFD}$ si y sólo si $L(A) = \Sigma^*$, como todo lenguaje es subconjunto de Σ^*, esto es si y sólo si $\overline{L(A)} = \emptyset$, como T reconoce a E_{AFD} concluimos que L reconoce a ALL_{AFD}. □

2. Sea $A = \{\langle R, S\rangle \,|R \text{ y } S \text{ son expresiones regulares y } L(R) \subset L(S)\}$. Demuestre que A es decidible.

   Demostración. Empecemos por ver lo siguiente. Sean R y S expresiones regulares tales que $L(R) \subset L(S)$, lo cual es si y sólo si $\forall\omega \in L(R), \omega \in L(S)$, esto es si y sólo si $\forall\omega \in L(R), \omega \notin \overline{L(S)}$, por último esto es si y sólo si $L(R) \cap \overline{L(S)} = \emptyset$. Ahora como las expresiones regulares son cerradas bajo la intersección y el complemento, y estas son equivalentes a los AFD entonces para todas expresiones regulares R y S existe un $AFD B$ que reconoce a $L(R) \cap \overline{L(S)}$.

   Luego la siguiente MT L decide a A_{AFD}.

   L = "Sobre la entrada $\langle A\rangle$ donde A es un AFD:

   a) Sea $AFD B$ que reconozca a $L(R) \cap \overline{L(S)}$.
   b) Sea MT T que decida al lenguaje E_{AFD}. Ejecuta T con la entrada $\langle B\rangle$.
   c) Si T acepta, acepta, Si T rechaza, rechaza.

   Si $\langle A\rangle \in A$ si y sólo si $L(R) \cap \overline{L(S)} = \emptyset$, como T reconoce a E_{AFD} concluimos que L reconoce a A. □

3. Demuestre que EQ_{AFD} es decidible, comparando dos AFD en todas las cadenas hasta cierto tamaño. Calcule el tamaño que funciona.

Demostración. Veamos que para cualesquiera $A, BAFD$ se tiene que $L(A) = L(B)$ si y sólo si A y B aceptan las mismas cadenas de tamaño a lo mas nm donde n y m son la cantidad de estados de A y B respectivamente. Si $L(A) = L(B)$ entonces si A reconoce a ω entonces también B por lo que A y B reconocen las mismas cadenas entre ellas las de tamaño a lo mas mn. Si $L(A) \neq L(B)$ entonces $\overline{L(A) \cap L(B)} \neq \emptyset$, sea $\omega \in \overline{L(A) \cap L(B)}$ tal que el tamaño de la cadena ω es menor o igual a el tamaño de cualquier otra cadena en $\overline{L(A) \cap L(B)} \neq \emptyset$; ahora consideremos el automata $A \times B$ (el producto cruz de los automatas) el cual reconoce el lenguaje $L(A) \cap L(B)$ y sea $q_1, \cdots, q_t$ la sucesión de estados que recorre la cadena ω en $A \times B$ donde t es el tamaño de ω; sabemos que la cantidad de estados de $A \times B$ son nm si $t \geq mn$ entonces por principio de casillas existen $i, j \in \{1, \cdots, t\}, i \neq j$ tales que $q_i \neq q_j$ entonces la cadena $\omega' = \omega_1\omega_2 \cdots \omega_i\omega_{j+1} \cdots \omega_t$ (donde $\omega = \omega_1 \cdots \omega_n$) también será rechazada pero el tamaño de ω' es menor al de ω lo cual es una contradicción por lo que $t \leq mn$; en resumen si $L(A) \neq L(B)$ entonces existe $\omega \in \overline{L(A) \cap L(B)}$ talque su tamaño es menor a igual mn, por contrapositiva concluimos que si A y B aceptan las mismas cadenas de tamaño a lo mas nm donde n y m son la cantidad de estados de A y B respectivamente entonces $L(A) = L(B)$.

Por lo tanto el siguiente MT L decide a EQ_{AFD}.

L = "Sobre la entrada $\langle A, B\rangle$ donde A, B son AFD:

a) Repite lo siguiente para cada $t = 1, 2, 3, \cdots, nm$.
   1) Repite lo siguiente para cada cadena $\omega \in L(A) \cup L(B)$ tal que el tamaño de ω es t.
      a' Ejecuta el $AFDA \times B$ con la entrada ω

b) Si alguna de las anteriores ejecuciones fue rechazada entonces rechaza, si no acepta.

Notemos que la cantidad de $\omega \in L(A) \cup L(B)$ con $\omega = t$ es a lo más $(|\Sigma_A| + |\Sigma_B|)^t < \infty$ por lo que la cantidad de pasos es finito y L no se cicla. Concluimos que EQ_{AFD} es decidible.

□

4. Demuestra que la clase de lenguajes decidibles no es cerrada bajo homomorfismo.

Demostración. Sea $B_{TM} = \{\langle M, \omega, n\rangle | M$ es una MT y M acepta ω en menos de n pasos$\}$. Veamos que

T = "Sobre la entrada $\langle M, \omega, n\rangle$:

a) Ejecuta maquina M en ω en a lo más n, si lo acepto, acepta, si no rechaza.

Es claro que T reconoce a B_{TM} y además esta no se cicla por que a lo más una cantidad finita de pasos por lo tanto lo decide. Ahora sabemos que toda maquina de turing tiene una codificación sobre el lenguaje $\{0,1\}^*$ por lo que también tiene una codificación sobre el lenguaje $\{a,b\}^*$ donde solo cambias $0's$ por $a's$ y $1's$ por $b's$ luego veamos que

$$B_{TM} = \left\{\omega\omega' | \omega \in \{a,b\}^*, \omega' \in \{0, 1, \cdots, 9\}^+, \omega' \text{es un entero}, \omega = \langle M, \omega\rangle, cond\right\},$$

donde $cond = M$ es una MT y M acepta ω en menos de n pasos (no lo pude formatear para que saltara de linea). Consideremos al homomorfismo dado por $h(a) = a, h(b) = b, h(i) = \epsilon, \forall i = 0, 1, \cdots 9$. entonces la imagen $h(B_{TM}) = A_{TM}$ el cual es una lenguaje indecidible por lo tanto la clase de lenguajes decidibles no es cerrada bajo homomorfismo. □

5. Un estado inutilizado en una Maquina de Turing es aquel que nunca es visitado por ninguna cadena. Considera el problema de determinar si una Maquina de Turing tiene algún estado inutilizado. Formula este problema como un lenguaje y demuestra que es indecidible.

Demostración. El lenguaje que representa el problema de determinar si una Maquina de Turing tiene algún estado inutilizado es

$$IN_{TM} = \{\langle M\rangle \,| M \text{es una } MT \text{ tal que tiene 1 o mas estados inutilizados}\}.$$

Procedermos a demostrar por reducción al lenguaje A_{MT}. □

6. Encuentra un apareamiento de la siguiente colección de fichas del problema de correspondencia de post.

$$\left\{\left[\frac{ab}{abab}\right], \left[\frac{b}{a}\right], \left[\frac{aba}{b}\right], \frac{aa}{a}\right\}.$$

Solución 1 – *El siguiente es un aparamiento de la anterior clase*

$$\left[\frac{ab}{abab}\right]\left[\frac{ab}{abab}\right]\left[\frac{aba}{b}\right]\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{aa}{a}\right]\left[\frac{aa}{a}\right] = \left[\frac{abababab baaaa}{abababab baaaa}\right].$$

7. Sea $T = \left\{\langle M\rangle \,| M \text{ es una } MT \text{ tal que acepta } \omega^R \text{ siempre que acepta } \omega\right\}$. Demuestra que T es indecidible.

Demostración. Procederemos a demostrar por contradicción. Construiremos una MT S tal que una MT M acepta w si y sólo si $\langle S\rangle \in T$, lo cual sería una contradicción puesto que A_{MT} es indecidible.

Si T es decidible entonces existe MT M talque M decide a T. Veamos lo siguiente

$S =$ "Sobre la entrada $\langle M, \omega\rangle$:

a) Sea TM $R =$ "Sobre la entrada ω'
   1) Si $x = 01$ acepta.
   2) Si $x = 10$ y M acepta ω entonces acepta.
   3) Si no rechaza.

b)

c) Ejecuta T_2 con la cadena ω si acepta entonces acepta, si no rechaza.

Notemos que si $\langle M, \omega\rangle \in A_{MT}$ entonces M acepta ω por lo que $L(S\langle M, \omega\rangle) = (01, 10)$, por lo que $\langle S\rangle \in T$; ahora si $\langle M, \omega\rangle \in A_{MT}$ entonces M no acepta ω por lo que $L(S\langle M, \omega\rangle) = (01)$, por lo que $\langle S\rangle \notin T$, por contrapositiva concluimos que $\langle M, \omega\rangle \in A_{MT}$ si y sólo si $\langle S\rangle \in T$, lo cual como habiamos dicho es una contradicción puesto que A_{TM} es indecidible.

□

8. ¿Cuáles de los siguientes pares de numeros son primos relativos? Muestra los cálculos que hiciste para responder la pregunta.

Para ambos casos haremos uso del algoritmo de euclides para calcular si máximo común divisor.

a) 1274 y 10505.

Solución 2 – *Veamos que*

$$\begin{aligned} mcd(1274, 10505) &= mcd(10505, 1274 \ mod \ 10505) &= mcd(10505, 1274) \\ &= mcd(1274, 10505 \ mod \ 1274) &= mcd(1274, 313) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= mcd\,(313, 1274 \ mod \ 313) && = mcd\,(313, 22)\\
&= mcd\,(22, 313 \ mod \ 22) && = mcd\,(22, 5)\\
&= mcd\,(5, 22 \ mod \ 5) && = mcd\,(5, 2)\\
&= mcd\,(2, 5 \ mod \ 2) && = mcd\,(2, 1)\\
&= mcd\,(1, 2 \ mod \ 1) && = mcd\,(1, 0)\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto 1274 *y* 10505 *son primos relativos.*

b) 7289 y 8029.

Solución 3 – *Veamos que*

$$
\begin{aligned}
mcd\,(7289, 8029) &= mcd\,(8029, 7289 \ mod \ 8029) && = mcd\,(8029, 7289)\\
&= mcd\,(7289, 8029 \ mod \ 7289) && = mcd\,(7289, 740)\\
&= mcd\,(740, 7289 \ mod \ 740) && = mcd\,(740, 629)\\
&= mcd\,(629, 740 \ mod \ 629) && = mcd\,(629, 111)\\
&= mcd\,(111, 629 \ mod \ 111) && = mcd\,(111, 74)\\
&= mcd\,(74, 111 \ mod \ 74) && = mcd\,(74, 37)\\
&= mcd\,(37, 74 \ mod \ 37) && = mcd\,(37, 0)\\
&= 37
\end{aligned}
$$

Por lo tanto 1274 *y* 10505 *no son primos relativos.*

9. Demuestra que P es cerrado bajo la unión, concatenación y complemento.

Demostración. Veamos lo siguiente

- P.D. P es cerrado bajo la unión. Sean $L_1, L_2 \in P$ y sean T_1, T_2 MT tales que reconocen a L_1, L_2 en tiempo polinomial, respectivamente. Ahora vemos la siguiente MT T

  T = "Sobre la entrada $\langle \omega \rangle$:

  a) Ejecuta T_1 con la cadena ω si acepta entonces acepta
  b) Ejecuta T_2 con la cadena ω si acepta entonces acepta, si no rechaza.

  Notemos que por construcción T acepta ω si y sólo si $\omega \in L_1$ o $\omega \in L_2$ lo cual es si y sólo si $\omega \in L_1 \cup L_2$, por lo tanto T decide $L_1 \cup L_2$. Como T_1, T_2 tardan tiempo polinomial entonces T tarda tiempo polinomial.

- P.D. P es cerrado bajo la concatenación. Sean $L_1, L_2 \in P$ y sean T_1, T_2 MT tales que reconocen a L_1, L_2 en tiempo polinomial, respectivamente. Ahora vemos la siguiente MT T

  T = "Sobre la entrada $\langle \omega \rangle$, donde $\omega = \omega_1 \cdots \omega_n$:

  a) Repite lo siguiente para cada $i = 1, 2, 3, \cdots, n$.
     1) Ejecuta T_1 con la cadena $\omega' = \omega_1 \cdots \omega_i$.
     2) Ejecuta T_2 con la cadena $\omega'' = \omega_{i+1} \cdots \omega_n$.
     3) Si ambas MT aceptaron entonces acepta.
  b) Si ninguna de las anteriores ejecuciones fue aceptada entonces rechaza.

  Notemos por construcción que T acepta cadenas ω si y sólo si $\omega = \omega'\omega''$ y $\omega' \in L_1, \omega'' \in L_2$, por lo tanto T reconoce $L_1 L_2$. Como los pasos $a), b)$ toman tiempo polinomial y estas se repiten a lo mas $O\,(n)$ entonces T toma tiempo polinomial.

- P.D. P es cerrado bajo complemento. Sean $L_1 \in P$ y sea T_1 MT tales que reconocen a L_1 en tiempo polinomial. Ahora vemos la siguiente MT T

  T = "Sobre la entrada $\langle \omega \rangle$:

  a) Ejecuta T_1 con la cadena ω si acepta entonces acepta, si no rechaza.

  Notemos que por construcción T acepta ω si y sólo si $\omega \notin L_1$ lo cual es si y sólo si $\omega \in \overline{L_1}$, por lo tanto T decide $\overline{L_1}$. Como T_1 tarda tiempo polinomial entonces T tarda tiempo polinomial.

  □

10. Demuestra que si $P = NP$ entonces para todo $A \in P$ tal que $A \neq 0, A \neq \Sigma^*$, se cumple que A es $NP-$completo.

    Demostración. Sea $A \in P$ tal que $A \neq 0, A \neq \Sigma^*$, entonces existen $\omega \in A$ y $\omega' \in \overline{A}$ y como $P = NP$ entonces $A \in NP$. Sea $B \in NP$ como $P = NP$ entonces $B \in P$ por lo que existe MT M talque M reconoce a B en tiempo polinomial. Simulando M para determinar si $\omega \in B$, de ser aceptado entonces devuelve ω de no ser así devuelve ω' por lo que esto es una una función computable en tiempo polinomial de B a A por lo que B es en tiempo polinomial reducible al lenguaje A. Por lo tanto $A \in NP-$completo. □