Cálculo III
Tarea 3

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Fabián Augusto Pascual Domínguez

1 de enero de 2023

1. Probar usando la definición de conjunto compacto que

   - $[0,1]$ es compacto en $\mathbb{R}$.

     Sea $U = \cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ una cubierta abierta de $[0,1]$, y P el conjunto de puntos $p \in [0,1]$ tales que $[0,x]$ puede ser cubierto por una cantidad finita de elementos de U, puesto que 0 es un conjunto finito entonces $0 \in P$, además como P es acotado entonces tiene un supremo s.

     Sea $U_s \in U_\alpha, \alpha \in \Lambda$ un conjunto que contiene a s (el cual existe ya que U es una cubierta de $[0,1]$), al ser U_s abierto existe $s > \epsilon > 0$ tal que $(s-\epsilon, s] \subset U_s$, al ser s el supremo entonces $s - \epsilon \in P$ y existe una subcubierta finita de U que cubre a $[0, s-\epsilon]$ agregando U_s a esa subcubierta obtenemos que $[0,s]$ puede ser cubierto por una subcubierta finita de U y por lo que $s \in P$.

     Si $x < 1$, y sea $U_s \in U_\alpha, \alpha \in \Lambda$ un conjunto que contiene a s (el cual existe ya que U es una cubierta de $[0,1]$) al ser U_s abierto existe $\epsilon > 0$ tal que $[s, s+\epsilon) \subset U_s$, luego como $s \in P$ existe una subcubierta finita de U que cubre a $[0,s]$ agregando U_s a ella obtenemos una subcubierta finita de U que cubre a $[0, s+\frac{\epsilon}{2}]$ y $s + \frac{\epsilon}{2} \in P$, lo cual es una contradicción ya que s es el supremos de P. Por lo que $s = 1$.

     Por lo tanto $[0,1]$ es compacto.

   - $\{0\} \times [0,1]$ no es compacto en $\mathbb{R}$.

2. Sea A un conjunto compacto en $\mathbb{R}^p$. Definimos

$$co(A) = \{\vec{z} = t\vec{x} + (1-t)\vec{y} \in \mathbb{R}^p | \vec{x}, \vec{y} \in A, t \in [0,1]\},$$

   el cual se llama cubierta abierta convexa de A. Probar que $co(A)$ es compacto en $\mathbb{R}^p$.

   Demostración. Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$. Para todo z_n existen $x_n, y_n \in A, t \in [0,1]$ tales que

$$z_n = t\vec{x_n} + (1-t)\vec{y_n}.$$

   Al ser A compacto entonces es secuencialmente compacto, por lo tanto existe

$$\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty} \xrightarrow{m\to\infty} x \in A$$

   y además

$$\left\{y_{n_{m_l}}\right\} \xrightarrow{l\to\infty} y \in A (\text{también } x_{n_{m_l}} \xrightarrow{m\to\infty} x),$$

por lo que

$$z_{n_{m_l}} = t\vec{x_{n_{m_l}}} + (1-t)\vec{y_{n_{m_l}}} \xrightarrow{m\to\infty} t\vec{x} + (1-t)\vec{y} \in co(A)$$

por definición de $co(A)$. Por lo que $co(A)$ es secuencialmente compacto y por lo tanto concluimos que $co(A)$ es compacto. □

3. Conjuntos disconexos

   a) Sean $A, B \subset \mathbb{R}^p$ cerrados tales que $A \cap B = 0$ y B acotado. Probar que existe un $\epsilon > 0$ tal que $\|\vec{x} - \vec{y}\| \geq \epsilon, \forall \vec{x} \in A, \vec{y} \in B$.

   Demostración. Procederemos a demostrar por contradicción. Si $\forall \epsilon > 0$ existen $\vec{x} \in A, \vec{y} \in B$ tales que $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \epsilon$ sean $\vec{x_n}, \vec{y_n}$ tales que $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \frac{1}{n}$, notese que $\lim_{n\to\infty} d\left(\vec{x_n}, \vec{y_n}\right) = 0$. Al ser B cerrado y acotado entonces es compacto, por lo que también secuencialmente compacto, entonces existe una subsucesión $\{\vec{y_{n_m}}\}_{m=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{m\to\infty} \vec{y_{n_m}} = \vec{y} \in B$ luego como $\vec{x_n} \in A$ y $d(\vec{y_n}, A) = \inf_{a\in A} \|\vec{y_n} - a\|$ entonces $d(y_n, A) = 0$, por el ejercicio 5 de la tarea pasada tenemos que $d(y, A) = 0$, lo cual es una contradicción ya que A es cerrado. □

   b) Dar un ejemplo en $\mathbb{R}$ donde B no es acotado pero no se cumple la conclusión anterior.
   Sea $A = \mathbb{N}$ y $B = \left\{n + \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\right\}$, luego $\forall \epsilon > 0$ tenemos que por propiedad ariquimediana de los números reales existe n talque $\frac{1}{n} < \epsilon$ por lo que $\left|n - \left(n + \frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n} < \epsilon$, por lo que A y B no cumplen la concluisión de A.

4. Sea A un conjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ con más de un punto. Demostrar que $A \subset A'$.

Demostración. Sea $a \in A$ y $b \in A \setminus \{a\}$ (ya que A tiene mas de un punto), al ser A conexo tenemos que

$$c = bt + (1-t)a, t \in [0,1] \subset A.$$

Si $\epsilon \geq \|b - a\|$ entonces

$$b \in \left[B\left(a, \epsilon\right) \cap A\right] \setminus \{a\}.$$

Si $0 < \epsilon < \|b - a\|$ entonces $0 < \frac{\epsilon}{2\|b-a\|} < 1$ por lo que

$$b\frac{\epsilon}{2\|b-a\|} + \left(1 - \frac{\epsilon}{2\|b-a\|}\right)a \in A$$

luego

$$\left\|b\frac{\epsilon}{2\|b-a\|} + \left(1 - \frac{\epsilon}{2\|b-a\|}\right)a - a\right\| = \left\|(b-a)\frac{\epsilon}{2\|b-a\|}\right\| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

por lo que

$$b\frac{\epsilon}{2\|b-a\|} + \left(1 - \frac{\epsilon}{2\|b-a\|}\right)a \in \left[B\left(a, \epsilon\right) \cap A\right] \setminus \{a\}.$$

Por lo que $a \in A'$, por lo tanto concluimos que $A \subset A'$. □

5. Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de conjuntos compactos, conexos y que no son vacios de $\mathbb{R}^p$. Sea $F = \lim_{n\to\infty} F_n$. Demostrar que F es un conjunto compacto, conexo y que no es vacío.

   Demostración. Puesto que $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ (ya que el límite de una sucesión creciente de conjuntos es la intersección de ellos), entonces $F \subset F_1$, por lo que F es acotado, ahora como F es la intersección arbitraria de conjuntos cerrados entonces F es cerrado. Además como F es no vació ya que de lo contario existiría un F_n talque es vacío lo cual es una contradicción.

   Procederemos a demostrar por contradicción que F es conexo. si F es disconexo entonces existen $U, V \subset \mathbb{R}^p$ abiertos tales que $U \cap V = \emptyset, F \cap U \neq \emptyset \neq F \cap V$ y $F \subset U \cup V$. Sea $G_n = F_n \setminus (U \cup V)$, como F_n es decreciente también G_n lo es, además como F es compacto entonces para todo subcubierta de F_n existe una subcubierta finita que lo cubre y como $G_n \subset F_n$ entonces también subre a G_n por lo tanto G_n es compacto, además

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \setminus (U \cup V) = \emptyset.$$

   por lo tanto existe un $G_n = \emptyset$ por lo que $F_n \subset U \cup V$, lo cual es una contradicción ya que F_n es conexo. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} F$ es conexo. □