Álgebra para Ciencias de la Computación
Examen Parcial I

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Dr. Rafael Herrera Guzmán

11 de Septiembre 2020

Problemas

1. Sean $a = (1, 2, 1)$, $b = (0, 4, 5)$, $c = (-1, 0, 7)$. Calcula

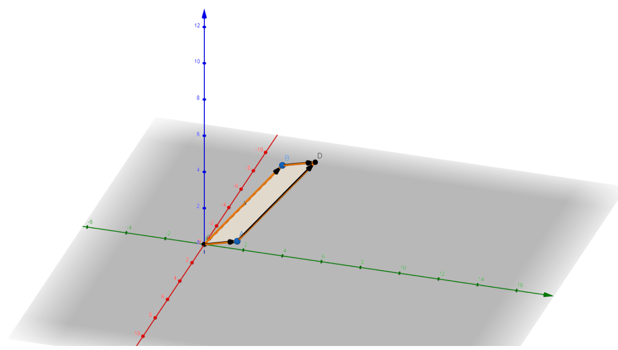
$$a \wedge b, \quad b \wedge c, \quad a \wedge b \wedge c$$

en términos de los vectores básicos $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ y describe la interpretación geométrica de los distintos coeficientes.

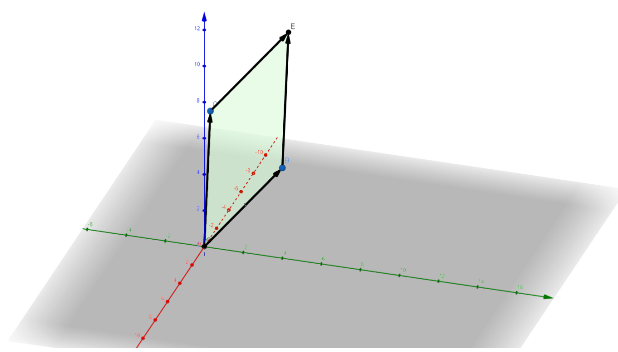
Calculemos los bivectores y el trivector deseado.

$$\begin{aligned}
a \wedge b &= (e_1 + 2e_2 + e_3) \wedge (4e_2 + 5e_3) && \text{Por base canónica}\\
&= 4e_1 \wedge e_2 + 8e_2 \wedge e_2 + 4e_3 \wedge e_2 + 5e_1 \wedge e_3 + 10e_2 \wedge e_3 + 5e_3 \wedge e_3 && \text{Por distribución}\\
&= 4e_1 \wedge e_2 + 4e_3 \wedge e_2 + 5e_1 \wedge e_3 + 10e_2 \wedge e_3 && \text{Por } x \wedge x = 0\\
&= 4e_1 \wedge e_2 + 5e_1 \wedge e_3 + 6e_2 \wedge e_3 && \text{Por antisimetría}\\
b \wedge c &= (4e_2 + 5e_3) \wedge (-e_1 + 7e_3) && \text{Por base canónica}\\
&= -4e_2 \wedge e_1 - 5e_3 \wedge e_1 + 28e_2 \wedge e_3 + 35e_3 \wedge e_3 && \text{Por distribución}\\
&= -4e_2 \wedge e_1 - 5e_3 \wedge e_1 + 28e_2 \wedge e_3 && \text{Por } x \wedge x = 0\\
&= 4e_1 \wedge e_2 + 5e_1 \wedge e_3 + 28e_2 \wedge e_3 && \text{Por antisimetría}\\
a \wedge b \wedge c &= (a \wedge b) \wedge c && \text{Por asociatividad}\\
&= (4e_1 \wedge e_2 + 5e_1 \wedge e_3 + 6e_2 \wedge e_3) \wedge (-e_1 + 7e_3) && \text{Por base canónica}\\
&= -4e_1 \wedge e_2 \wedge e_1 - 5e_1 \wedge e_3 \wedge e_1 - 6e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 + 28e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 &&\\
&+ 35e_1 \wedge e_3 \wedge e_3 + 42e_2 \wedge e_3 \wedge e_3 && \text{Por distribución}\\
&= -6e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 + 28e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 && \text{Por } x \wedge x = 0\\
&= 22e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 && \text{Por antisimetría}
\end{aligned}$$

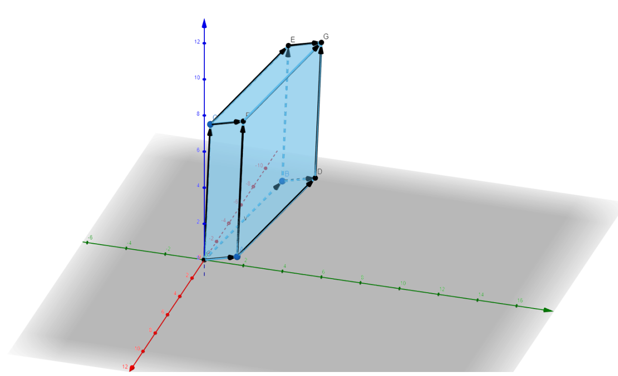
Ahora veamos cuales son sus graficas asociadas y que orientación tienen.



$a \wedge b$, orientación de $\vec{a}$ al $\vec{b}$



$b \wedge c$, orientación de $\vec{b}$ al $\vec{c}$



$a \wedge b \wedge c$, forman un sitema de la mano derecha la cual es su horientación

2. Calcula los determinantes, las adjuntas clásicas y, en caso de que exitan, la inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Los determinantes son

$$\det(A) = 20, \quad \det(B) = 13.$$

Las matrices adjuntas clásicas son

$$\operatorname{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{adj}(B) = C^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 6 & -13 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las matrices inversas son

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(B)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{20} & \frac{1}{20} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(B)}{\det(B)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & 0 & \frac{4}{13} \\ \frac{6}{13} & -1 & -\frac{3}{13} \\ \frac{2}{13} & 0 & -\frac{1}{13} \end{pmatrix}.$$

3. Utilizando la matriz b del ejercicio anterior, calcula la matriz inducida en $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ con respecto a una base de bivectores de tu elección.

La matriz inducida en $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ por B con respecto a la base canónica es

$$\bigwedge^2 B = \begin{pmatrix} M_{33} & M_{32} & M_{31} \\ M_{23} & M_{22} & M_{21} \\ M_{13} & M_{12} & M_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -13 & 0 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$