Probabilidad
Examen Tarea 4

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Juan Carlos Pardo Millán

25 de noviembre de 2023

1. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una susesión de v.a. que converge en probabilidad a la v.a. X. Demuestre que si para cada $n \geq 1$, $X_n \leq X_{n+1}$ casi seguramente, entonces la sucesión converge casi seguramente.

   Demostración. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una susesión de v.a. que

   $$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X,$$

   y además existe un Ω' tal que

   $$\mathbb{P}\left[\Omega'\right] = 1 \quad \text{y} \quad \omega \in \Omega', n \geq 1 \Longrightarrow X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega).$$

   Como toda sucesión que converge en probabilidad tiene una subsucesión que converge casi seguramente al mismo limite tenemos que existe una subsucesión $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que

   $$X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{c.s.} X,$$

   sea Ω'' el conjunto con probabilidad 1 donde X_n converge a X.

   Recordemos que que toda sucesión monotona de números reales con una subsucesión convergente implica que la sucesión converge al mismo limite. Sea $\Omega = \Omega' \cap \Omega''$ y $\omega \in \Omega$ entonces la sucesión de números reales $(X_n)_{n\geq 1}$ es no decreciente, y debido a que la subsucesión

   $$X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} X(\omega),$$

   entonces

   $$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega).$$

   Por último como Ω' y Ω'' tienen probabilidad 1 entonces $1 = \mathbb{P}\left[\Omega'\right] \leq \mathbb{P}\left[\Omega' \cup \Omega''\right] \leq 1$, por lo tanto

   $$\mathbb{P}\left[\Omega\right] = \mathbb{P}\left[\Omega' \cap \Omega''\right] = \mathbb{P}\left[\Omega'\right] + \mathbb{P}\left[\Omega'\right] - \mathbb{P}\left[\Omega' \cup \Omega''\right] = 1 + 1 - 1 = 1.$$

   Finalmente como para todo $\omega \in \Omega$ la sucesión $X_n(\omega)$ converge a $X(\omega)$ y $\mathbb{P}\left[\Omega\right] = 1$ concluimos que

   $$X_n \xrightarrow{c.s} X.$$

   $\square$

2. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una susesión de v.a. que converge en probabilidad a la v.a. X. y supongamos que f es una función uniformemente continua. Demuestre que $(f(X_n))_{n\geq 1}$ converge en probabilidad.

Demostración. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una susesión de v.a. que converge en probabilidad a la v.a. X y sea f una función uniformemente continua. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

por lo tanto

$$|x - y| > \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| > \delta,$$

Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ como en la definición de uniforme continuidad, para todo $n \geq 1$ se cumple que

$$\mathbb{P}\left[|f(X_n) - f(X)| < \varepsilon\right] \leq \mathbb{P}\left[|X_n - X| < \delta\right].$$

Como $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilidad a X entonces para todo $\delta > 0$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[|X_n - X| < \delta\right] = 1.$$

Por lo tanto para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[|f(X_n) - f(X)| < \varepsilon\right] = 1.$$

Por lo tanto $(f(X_n))_{n\geq 1}$ converge en probabilidad a $f(X)$. $\square$