Cálculo III
Tarea 1

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Fabián Augusto Pascual Domínguez

23 de agosto de 2021

1. Sea $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, n \geq 1$, entonces

   Lema 1 – *Sea V un espacio vectorial y $u, v \in V$ si $\|u\| = \|v\| = 1$ y $|\langle u, v \rangle| = 1$ entonces u y v son linealmente dependientes.*

   Demostración. Sean $u, v \in V$ entonces por linealidad del producto interior obtenemos

   $$\langle u \pm v, u \pm v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle \pm 2 \langle u, v \rangle ,$$

   ahora si $\|u\| = \|v\| = 1$ entonces

   $$\langle u \pm v, u \pm v \rangle = 2 \pm 2 \langle u, v \rangle .$$

   pero si $\langle u, v \rangle = 1$ entonces

   $$\langle u - v, u - v \rangle = 0,$$

   ahora puesto que $\langle x, x \rangle = 0$ ssi $x = \vec{0}$ entonces

   $$u - v = \vec{0},$$

   por lo tanto concluimos que

   $$u = v.$$

   De manera análoga se obtiene para $\langle u, v \rangle = -1$ considerando $\langle u + v, u + v \rangle$.

   $\square$

   a) $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ si y sólo si $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son linealmente dependientes.

   Demostración. Si $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son linealmente dependientes, entonces existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda x = y$, por lo que

   $$\begin{aligned} |\vec{x} \cdot \vec{y}| &= |\vec{x} \cdot \lambda \vec{x}| && \text{Por ser linealmente dependientes } \vec{x} \text{ y } \vec{y} \\ &= |\lambda| \, |\vec{x} \cdot \vec{x}| && \text{Por linealidad del producto punto} \\ & && \text{y homogeneidad del valor absoluto} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |\lambda| \, \|x\| \, \|x\| && \text{Por relación producto punto y norma} \\
&= \|x\| \, \|\lambda x\| && \text{Por homogeneidad de la norma} \\
&= \|x\| \, \|y\|
\end{aligned}
$$

Ahora si $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|$ entonces por linealidad del producto punto obtenemos

$$\left| \frac{\vec{x}}{\|x\|} \cdot \frac{\vec{y}}{\|y\|} \right| = 1.$$

por el lema 1 tenemos

$$\frac{\vec{x}}{\|x\|} = \frac{\vec{y}}{\|y\|}.$$

por lo tanto concluimos

$$\vec{x} = \frac{\|x\|}{\|y\|} \vec{y},$$

es decir x y y son linealmente dependientes. □

b) $\|\vec{x} + \vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ si y sólo si $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son linealmente dependientes.

Demostración. Si $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son linealmente dependientes entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ talque $\lambda x = y$ luego por homogeneidad de la norma tenemos que

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| = \left\| \vec{x} + \vec{\lambda x} \right\| = (|\lambda| + 1) \, \|\vec{x}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \, .$$

Ahora veamos la suficiencia, empecemos por ver que

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

si y solamente si (por ser la norma no negativa)

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2 \, \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \, ,$$

por otra parte por la relación que hay entre el producto punto y la norma, y linealidad del producto punto obtenemos

$$\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2(x \cdot y) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2 \, \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \, ,$$

es decir

$$\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \cdot \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} = 1$$

por el lema 1 obtenemos

$$\vec{x} = \frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{y}\|} \vec{y},$$

por lo tanto concluimos que x y y son linealmente dependientes. □

2. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\lim_{p \to \infty} \|\vec{x}\|_p = \|\vec{x}\|_\infty .$$

Demostración. Denotemos a $\sup \{x_1, \cdots, x_n\} = \sup (x)$ el cual existe por se un conjunto finito, luego veamos que

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sup (x)^p \right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \sup (x) .$$

Ahora

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sup (x)^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup (x) \sup (x) = \|x\|_\infty ,$$

por lo que

$$\sup (x) \leq \|\vec{x}\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \sup (x) .$$

Recordemos que $\lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} = 0$, luego como n^p es una función continua con $p \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{p \to \infty} n^{\frac{1}{p}} = 1$. Retomando la desigualdad anterior, junto con que los límites preservan el orden obtenemos

$$\sup (x) \leq \lim_{p \to \infty} \|\vec{x}\|_p \leq \sup (x) ,$$

es decir

$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \lim_{p \to \infty} \|\vec{x}\|_p \leq \|\vec{x}\|_\infty ,$$

por lo tanto concluimos

$$\lim_{p \to \infty} \|\vec{x}\|_p = \|\vec{x}\|_\infty .$$

□

3. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

   a) Mostrar que $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right)$ (Ley del paralelogramo) e interpretar geométricamente.

   Demostración. Empecemos por ver que

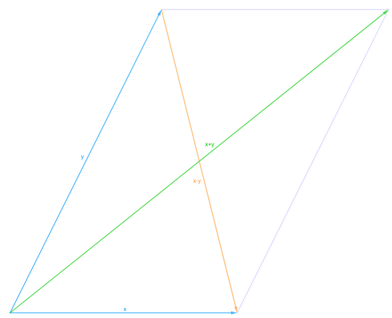
   $$\|x \pm y\|^2 = (x \pm y) \cdot (x \pm y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2 \|x\| \|y\| ,$$

   por lo que concluimos que

   $$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right) .$$

   □

Geométricamente esto quiere decir que la suma del cuadrado de las magnitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma del cuadrado de los lados de este.



Nota: En $\mathbb{R}$ tenemos que $\|x\|_1 = \|x\|_\infty = \|x\| = |x|$ por lo que en $\mathbb{R}$ también es valida la ley del paralelogramo para estas normas.

b) Probar que $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geq 2$ no satisface la ley del paralelogramo

Demostración. Para $\vec{x} = (1, 0, \cdots, 0)$ y $\vec{y} = (0, \cdots, 0, 1)$ tenemos que

$$\|x + y\|_1^2 + \|x - y\|_1^2 = 4n^2 + 4n^2 = 8n^2.$$

pero

$$2\left(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2\right) = 2\left(n^2 + n^2\right) = 4n^2,$$

por lo tanto la ley del paralelogramo no se cumple con $\|\cdot\|_1$. $\square$

c) Probar que $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geq 2$ no satisface la ley del paralelogramo

Demostración. Para $\vec{x} = (1, 0, \cdots, 0)$ y $\vec{y} = (0, \cdots, 0, 1)$ tenemos que

$$\|x + y\|_1^2 + \|x - y\|_1^2 = n^2 + n^2 = 2n^2.$$

pero

$$2\left(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2\right) = 2\left(n^2 + n^2\right) = 4n^2,$$

por lo tanto la ley del paralelogramo no se cumple con $\|\cdot\|_\infty$. $\square$

d) Probar que $\|\vec{x} + \vec{y}\| \, \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$.

Demostración. Por MA-MG, la relación entre producto punto y norma, y linealidad del producto punto concluimos

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \, \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \frac{\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2}{2} = \frac{\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle}{2} = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 .$$

$\square$

4. ¿Son o no correctas las siguientes desigualdades, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$?

   a) $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\|_1 \|\vec{y}\|_1$
   Primero veamos que

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2 \sum_{i,j,i\neq j} |x_i| |x_j| = \|\vec{x}\|_1^2,$$

   por lo que $\|\vec{x}\| \leq \|\vec{x}\|_1$. Por la desigualdad de Cauchy Schwarz y lo anterior concluimos que

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\|_1 \|\vec{y}\|_1 .$$

   b) $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\|_\infty \|\vec{y}\|_\infty$
   Esto no es cierto puesto que para los vectores $\vec{x} = (1, \cdots, 1), \vec{y} = (1, \cdots, 1)$ tenemos que $\|\vec{x}\|_\infty = \|\vec{y}\|_\infty = 1$ y $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = n$ y entonces

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| = n \geq 1 = \|\vec{x}\|_\infty \|\vec{y}\|_\infty$$

5. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Demostrar que existe un número M positivo tal que

$$\|T(\vec{x})\| \leq M \|\vec{x}\|, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Sea $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canónica de R^n luego

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i,$$

por definición de norma obtenemos

$$\|T(\vec{x})\| = \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i\right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i T(\vec{e}_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|T(\vec{e}_i)\| .$$

luego tomemos $C_1 = \sup_i \{T(\vec{e}_i)\}$ el cual existe por ser un conjunto finito en un campo completo, por úlitmo por la desigualdad de Cauchy Schwarz tenemos que si $\vec{|x|} = (|x_1|, \cdots, |x_n|)$ donde $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ entonces

$$\sqrt{n} \|\vec{x}\| = \left\| \overrightarrow{(1, \cdots, 1)} \right\| \left\| \vec{|x|} \right\| \geq \overrightarrow{(1, \cdots, 1)} \cdot \vec{|x|} = \|\vec{x}\|_1 .$$

Tomando a $M = C_1 \sqrt{n}$ concluimos que

$$\|T(\vec{x})\| \leq M \|\vec{x}\|$$

□

6. Sea $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases},$$

¿Es ρ una métrica sobre $\mathbb{R}^n$?

Demostración. Comprobaremos que se cumplen los axiomas de una metrica para ρ:

a) Por definición tenemos que $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ ssi $x = y$.

b) Por definición tenemos que $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho(\vec{y}, \vec{x})$.

c) Primero notemos que $\rho(\vec{x}, \vec{y}) \leq 1$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ luego si al menos dos vectores de $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ son distintos entonces $\rho(\vec{x}, \vec{z}) + \rho(\vec{z}, \vec{y}) \geq 1$ y por lo tanto $\rho(\vec{x}, \vec{y}) \leq \rho(\vec{x}, \vec{z}) + \rho(\vec{z}, \vec{y})$, si todo son iguales entonces $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = 0 = 0 + 0 = \rho(\vec{x}, \vec{z}) + \rho(\vec{z}, \vec{y})$, por lo tanto se cumple el 3er axioma.

Concluimos que ρ es métrica.

□

Todo conjunto A es abierto puesto que para todo punto $a \in A$ es punto interior de este ya que tenemos que para todo $0 < r < 1$ la $B_r(a) = a \subset A$.

7. Sea $X \in R^n$ convexo y sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$. Si $x_1, \cdots, x_p \in X$ entonces

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in X.$$

A esta expresión se le llama combinación convexa.

Demostración. Procederemos a demostrar por inducción

- **Casos base** p = 1, $x \in X$ entonces $x \in X$. p = 2, por defición se cumple.
- **Hipótesis de Inducción** Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ y $x_1, \cdots, x_p \in X$ entonces

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in X, \forall p < n$$

- **Paso de Inducción**

  Si algún $\lambda_i = 0$ entonces nuestra combinación convexa sería de menos puntos que n y por hipótesis de inducción esta estaría contenida en X. Ahora si $\lambda_i \neq 0$ para toda i entonces $\lambda_i < 1$ para toda i y por lo tanto $1 - \lambda_1 > 0$. Puesto que $\lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1 - \lambda_1$ tenemos quen por hipotesis de inducción

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} x_i \in X,$$

  por último, de nuevo por hipotesis de inducción concluimos que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} x_i \in X.$$

Por Inducción Matemática concluimos que toda combinación convexa de un conjunto convexo pertenece a este. □

8. Probar que para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$:

   a) $|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| \leq \|\vec{x} \pm \vec{y}\|$

   Demostración. Empecemos por ver que por subatividad de la norma se cumple que

$$\|\vec{x}\| = \|(\vec{x} \pm \vec{y}) \mp \vec{y}\| \leq \|\vec{x} \pm \vec{y}\| + \|\vec{y}\|\,,$$

   por lo que

$$\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \leq \|\vec{x} \pm \vec{y}\|\,,$$

   y también

$$\|\vec{y}\| - \|\vec{x}\| \leq \|\vec{y} \pm \vec{x}\| = \|\vec{x} \pm \vec{y}\|\,,$$

   por lo tanto concluimos

$$|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| \leq \|\vec{x} \pm \vec{y}\|$$

   □

Nota: Para efectos de esta tarea se uso que el producto interior como el producto punto.