Probabilidad
Examen Tarea 2

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Juan Carlos Pardo Millán

15 de noviembre de 2023

1. Sean X_1, X_2, X_3 variables aleatorias independientes con valores en los enteros positivos y con función de masas de probabilidad

$$\mathbb{P}\left[X_i = k\right] = \left(1 - p_i\right) p_i^{k-1}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

e $i = 1, 2, 3$. Probar que

$$\mathbb{P}\left[X_1 < X_2 < X_3\right] = \frac{\left(1 - p_1\right)\left(1 - p_2\right) p_2 p_3^2}{\left(1 - p_2 p_3\right)\left(1 - p_1 p_2 p_3\right)}.$$

Además calcule $\mathbb{P}\left[X_1 \leq X_2 \leq X_3\right]$.

Solución 1 $-$ *Notemos que*

$$\sum_{k=x+1}^{\infty} \left(1 - p\right) p^{k-1} = p^x (1)$$

al ser una suma telescópica.

Ahora por probabilidad total obtenemos que

$$\mathbb{P}\left[X_1 < X_2 < X_3\right] = \sum_{x1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left[X_1 < X_2 < X_3 | X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3\right] \mathbb{P}\left[X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3\right],$$

esto es lo mismo que

$$\mathbb{P}\left[X_1 < X_2 < X_3\right] = \sum_{x1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left[x_1 < x_2 < x_3\right] \mathbb{P}\left[X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3\right].$$

Si no se cumple $x_1 < x_2 < x_3$ entonces $\mathbb{P}\left[x_1 < x_2 < x_3\right] = 0$ y de lo contratio $\mathbb{P}\left[x_1 < x_2 < x_3\right] = 1$ por lo tanto

$$\mathbb{P}\left[X_1 < X_2 < X_3\right] = \sum_{1 \leq x1 < x_2 < x_3} \mathbb{P}\left[X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3\right].$$

Al ser X_1, X_2, X_3 independientes entonces

$$\mathbb{P}\left[X_1 < X_2 < X_3\right] = \sum_{1 \leq x1 < x_2 < x_3} \mathbb{P}\left[X_1 = x_1\right] \mathbb{P}\left[X_2 = x_2\right] \mathbb{P}\left[X_3 = x_3\right],$$

por distribución de X_3 tenemos que

$$\mathbb{P}\left[X_1 < X_2 < X_3\right] = \sum_{1 \leq x1 < x_2 < x_3} \mathbb{P}\left[X_1 = x_1\right] \mathbb{P}\left[X_2 = x_2\right] \left(1 - p_3\right) p_3^{x_3 - 1}.$$

Por (1) obtenemos

$$\mathbb{P}\left[X_1 < X_2 < X_3\right] = \sum_{1 \leq x1 < x_2} \mathbb{P}\left[X_1 = x_1\right] \mathbb{P}\left[X_2 = x_2\right] p_3^{x_2},$$

nuevamente por distribución de X_3 tenemos que

$$\mathbb{P}\left[X_1 < X_2 < X_3\right] = \sum_{1 \leq x1 < x_2} \mathbb{P}\left[X_1 = x_1\right] \left(1 - p_i\right) p_i^{x_2 - 1} p_3^{x_2},$$

lo cuál es lo mismo que

$$\mathbb{P}\left[X_1 < X_2 < X_3\right] = \frac{\left(1 - p_2\right) p_3}{\left(1 - p_2 p_3\right)} \sum_{1 \leq x1 < x_2} \mathbb{P}\left[X_1 = x_1\right] \left(1 - p_2 p_3\right) \left(p_2 p_3\right)^{x_2 - 1}.$$

Aplicando de nuevo (1) obtenemos

$$\mathbb{P}\left[X_1 < X_2 < X_3\right] = \frac{\left(1 - p_2\right) p_3}{\left(1 - p_2 p_3\right)} \sum_{1 \leq x1} \mathbb{P}\left[X_1 = x_1\right] \left(p_2 p_3\right)^{x_1},$$

sustiyendo la función de masas de X_1 obtenemos

$$\mathbb{P}\left[X_1 < X_2 < X_3\right] = \frac{\left(1 - p_2\right) p_3}{\left(1 - p_2 p_3\right)} \sum_{1 \leq x1} \left(1 - p_1\right) p_1^{x_1 - 1} \left(p_2 p_3\right)^{x_1},$$

reorganizando tenemos que

$$\mathbb{P}\left[X_1 < X_2 < X_3\right] = \frac{\left(1 - p_1\right) \left(1 - p_2\right) p_2 p_3^2}{\left(1 - p_2 p_3\right) \left(1 - p_1 p_2 p_3\right)} \sum_{1 \leq x1} \left(1 - p_1 p_2 p_3\right) \left(p_1 p_2 p_3\right)^{x_1 - 1},$$

por último aplicando (1) concluimos que

$$\mathbb{P}\left[X_1 < X_2 < X_3\right] = \frac{\left(1 - p_1\right) \left(1 - p_2\right) p_2 p_3^2}{\left(1 - p_2 p_3\right) \left(1 - p_1 p_2 p_3\right)}.$$

Analogamente veamos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[X_1 < X_2 < X_3\right] &= \sum_{1 \leq x1 < x_2 < x_3} \mathbb{P}\left[X_1 = x_1\right] \mathbb{P}\left[X_2 = x_2\right] \mathbb{P}\left[X_3 = x_3\right] && \textit{Por prob. total e indep.} \\
&= \sum_{1 \leq x1 < x_2 < x_3} \left(1 - p_1\right) \left(1 - p_2\right) \left(1 - p_3\right) p_1^{x_1 - 1} p_2^{x_2 - 1} p_3^{x_3 - 1} && \textit{Por distribución de las } X_i\textit{'s} \\
&= \sum_{1 \leq x1 < x_2} \left(1 - p_1\right) \left(1 - p_2\right) p_1^{x_1 - 1} p_2^{x_2 - 1} p_3^{x_2 - 1} && \textit{Por (1)} \\
&= \frac{\left(1 - p_1\right) \left(1 - p_2\right)}{\left(1 - p_2 p_3\right)} \sum_{1 \leq x1} p_1^{x_1 - 1} p_2^{x_1 - 1} p_3^{x_1 - 1} && \textit{Por (1)} \\
&= \frac{\left(1 - p_1\right) \left(1 - p_2\right)}{\left(1 - p_2 p_3\right) \left(1 - p_1 p_2 p_3\right)} && \textit{Por (1)}
\end{aligned}$$

2. Definamos la varianza condicional de ξ dado η por

$$Var\left(\xi|\eta\right) = \mathbb{E}\left[\xi^2|\eta\right] - \left(\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right]\right)^2.$$

Sean ξ y η dos v.a. con segundo momento finito.

a) Muestre que

$$Var\left(\xi\right) = \mathbb{E}\left[Var\left(\xi|\eta\right)\right] + Var\left(\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right]\right).$$

Solución 2 – *Empezaremos por desarrollar el primer sumando del termino derecho de nuestra expresión. Por la ley de esperanza total y linealidad de la esperanza obtenemos*

$$\mathbb{E}\left[Var\left(\xi|\eta\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\xi^2|\eta\right] - \left(\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right]\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\xi^2|\eta\right]\right] - \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right]\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right]\right)^2\right],$$

ahora desarrollaremos el segundo sumando del termino derecho de nuestra expresión. Por definición de varianza y la ley de esperanza total obtenemos

$$Var\left(\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right]\right) = \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right]\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right]\right]^2 = \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right]\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\xi\right]^2.$$

Haciendo uso de los resultados anteriores y por definición de varianza concluimos que

$$\mathbb{E}\left[Var\left(\xi|\eta\right)\right] + Var\left(\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right]\right) = \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right]\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}\left[\xi|\eta\right]\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\xi\right]^2 = \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - \mathbb{E}\left[\xi\right]^2 = Var\left(\xi\right).$$

b) Sea Δ otra v.a. Muestre la siguiente formula

$$Cov\left(\xi,\eta\right) = \mathbb{E}\left[Cov\left(\left(\xi,\eta\right)|\Delta\right)\right] + Cov\left(\mathbb{E}\left[\xi|\Delta\right], \mathbb{E}\left[\eta|\Delta\right]\right),$$

donde

$$Cov\left(\left(\xi,\eta\right)|\Delta\right) = \mathbb{E}\left[\xi\eta|\Delta\right] - \mathbb{E}\left[\xi|\Delta\right]\mathbb{E}\left[\eta|\Delta\right].$$

Solución 3 – *Empezaremos por desarrollar el primer sumando del termino derecho de nuestra expresión. Por definición de covarianza condicional, la ley de esperanza total y linealidad de la esperanza obtenemos*

$$\mathbb{E}\left[Cov\left(\left(\xi,\eta\right)|\Delta\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\xi\eta|\Delta\right] - \mathbb{E}\left[\xi|\Delta\right]\mathbb{E}\left[\eta|\Delta\right]\right] = \mathbb{E}\left[\xi\eta\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\xi|\Delta\right]\mathbb{E}\left[\eta|\Delta\right]\right]$$

ahora desarrollaremos el segundo sumando del termino derecho de nuestra expresión. Por definición de covarianza y la ley de esperanza total obtenemos

$$Cov\left(\mathbb{E}\left[\xi|\Delta\right], \mathbb{E}\left[\eta|\Delta\right]\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\xi|\Delta\right]\mathbb{E}\left[\eta|\Delta\right]\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\xi|\Delta\right]\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\eta|\Delta\right]\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\xi|\Delta\right]\mathbb{E}\left[\eta|\Delta\right]\right] - \mathbb{E}\left[\xi|\Delta\right]\mathbb{E}\left[\eta|\Delta\right].$$

Haciendo uso de los resultados anteriores y por definición de covarianza concluimos que

$$\mathbb{E}\left[Cov\left(\left(\xi,\eta\right)|\Delta\right)\right] + Cov\left(\mathbb{E}\left[\xi|\Delta\right], \mathbb{E}\left[\eta|\Delta\right]\right) = \mathbb{E}\left[\xi\eta\right] - \mathbb{E}\left[\xi|\Delta\right]\mathbb{E}\left[\eta|\Delta\right] = Cov\left(\xi,\eta\right).$$