Probabilidad
Parcial II - Ejercicio 4

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Ehyter Matías Martín González

15 de noviembre de 2020

Problemas

1. (100 pts.) Sean $\{X_n\}$ variables aleatorias iid con media μ y varianza finita σ^2. Demuestre que

$$\sqrt{n}e^{\overline{X}_n} - e^{\mu} \xrightarrow{d} \sigma e^{\mu} Z, \quad Z \sim N(0,1).$$

Teorema 1 – *(Metodo Delta) Sean $\{X_n\}$ variables aleatorias iid con media μ y varianza finita σ^2, y g una función derivable cuya derivado no se anula, entonces*

$$\sqrt{n}\left(\frac{g\left(\overline{X}_n\right) - g\left(\mu\right)}{\sigma g'(\mu)}\right) \xrightarrow{d} Z, Z \sim N(0,1).$$

Demostración. Por el teorema de limite central tenemos que

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right) \xrightarrow{d} Z, Z \sim N(0,1).$$

Por el teorema del Bebe de Skorohod tenemos que existen Y_n' y Z' tales que

$$Y_n' \sim \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right), \quad Z' \sim Z,$$

y que

$$\lim_{n\to\infty} Y_n' = Z'.$$

Entonces

$$\overline{X}_n \sim \mu + \frac{\sigma Y_n'}{\sqrt{n}},$$

por lo que

$$g\left(\overline{X}_n\right) \sim g\left(\mu + \frac{\sigma Y_n'}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\sqrt{n}\left(\frac{g\left(\overline{X}_n\right)-g\left(\mu\right)}{\sigma g'(\mu)}\right)\sim\sqrt{n}\left(\frac{g\left(\mu+\frac{\sigma Y_n'}{\sqrt{n}}\right)-g\left(\mu\right)}{\sigma g'(\mu)}\right),$$

multiplicando por $1=\frac{Y_n'}{Y_n'}$ obtenemos

$$\sqrt{n}\left(\frac{g\left(\overline{X}_n\right)-g\left(\mu\right)}{\sigma g'(\mu)}\right)\sim\left(\frac{g\left(\mu+\frac{\sigma Y_n'}{\sqrt{n}}\right)-g\left(\mu\right)}{\frac{\sigma Y_n'}{\sqrt{n}}}\right)\left(\frac{Y_n'}{g'(\mu)}\right).$$

Por definición de $g'(\mu)$ y que $\frac{\sigma Y_n'}{\sqrt{n}}\xrightarrow{c.s.}0$ tenemos que

$$g'(\mu)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{g\left(\mu+\frac{\sigma Y_n'}{\sqrt{n}}\right)-g\left(\mu\right)}{\frac{\sigma Y_n'}{\sqrt{n}}}\right),$$

además como

$$\lim_{n\to\infty}Y_n'=Z',$$

concluimos que

$$\sqrt{n}\left(\frac{g\left(\overline{X}_n\right)-g\left(\mu\right)}{\sigma g'(\mu)}\right)\xrightarrow{d}g'(\mu)\frac{Z'}{g'(\mu)}=Z'\sim Z\sim N(0,1).$$

□

Ahora seguiremos por demostrar el ejercicio

Demostración. Un corolario del teorema anterior es que

$$\sqrt{n}\left(g\left(\overline{X}_n\right)-g\left(\mu\right)\right)\xrightarrow{d}\sigma g'(\mu)Z, Z\sim N(0,1),$$

esto por Slutsky.

Tomando $g(x)=e^x$ obtenemos

$$\sqrt{n}\left(e^{\overline{X}_n}-e^{\mu}\right)\xrightarrow{d}\sigma e^{\mu}Z, Z\sim N(0,1)$$

□