Métodos Estadísticos
Tarea 2

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Rogelio Ramos Quiroga

25 de febrero de 2022

Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ y $Y_1, Y_2, \cdots Y_n$ variables aleatorias independientes con distribución Exponencial. Las $X_i's$ con media θ y las $Y_i's$ con media $\lambda\theta$ donde λ y θ son constantes positivas, pero desconocidas.

1. Obtenga expresiones para $\hat{\lambda}$ y $\hat{\theta}$.

   Solución 1 – *Tenemos que la función de verosimilitud de θ, λ para $X_1, X_2, \cdots, X_n$ y $Y_1, Y_2, \cdots Y_n$ es*

$$L(\theta, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{e^{-\frac{x_i}{\theta}}}{\theta} \right) \left(\frac{e^{-\frac{y_1}{\lambda\theta}}}{\lambda\theta} \right) = \frac{e^{-\frac{n}{\theta}\left(\overline{x} + \frac{\overline{y}}{\lambda}\right)}}{\theta^{2n}\lambda^n},$$

   cuya logverosimiltud es

$$l(\theta, \lambda) = -\frac{n\overline{x}}{\theta} - \frac{n\overline{y}}{\lambda\theta} - 2n\log\theta - n\log\lambda.$$

   Por lo que la función Score de θ, λ es

$$Sc(\lambda, \theta) = \left(\frac{n(\lambda\overline{x} + \overline{y})}{\lambda\theta^2} - \frac{2n}{\theta}, \frac{n\overline{y}}{\lambda^2\theta} - \frac{n}{\lambda} \right),$$

   igualando a 0 para calcular los puntso críticos obtenemos

$$\begin{cases} \frac{n\left(\hat{\lambda}\overline{x} + \overline{y}\right)}{\hat{\lambda}\hat{\theta}^2} - \frac{2n}{\hat{\theta}} & = 0, \\ \frac{n\overline{y}}{\hat{\lambda}^2\hat{\theta}} - \frac{n}{\hat{\lambda}} & = 0 \end{cases},$$

   por lo que

$$\begin{cases} \hat{\theta} & = \frac{\left(\hat{\lambda}\overline{x} + \overline{y}\right)}{2\hat{\lambda}}, \\ \hat{\lambda} & = \frac{\overline{y}}{\hat{\theta}} \end{cases},$$

   por lo tanto

$$\begin{cases} \hat{\theta} & = \overline{x}, \\ \hat{\lambda} & = \frac{\overline{y}}{\overline{x}} \end{cases}.$$

La matriz de información de θ, λ *es*

$$I(\theta, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{2n(\lambda\overline{x}+\overline{y})}{\lambda\theta^3} - \frac{2n}{\theta^2} & \frac{n\overline{y}}{\lambda^2\theta^2} \\ \frac{n\overline{y}}{\lambda^2\theta^2} & \frac{2n\overline{y}}{\lambda^3\theta} - \frac{n}{\lambda^2} \end{pmatrix}$$

$$I\left(\hat{\theta}, \hat{\lambda}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2n}{\overline{x}^2} & \frac{n}{\overline{y}} \\ \frac{n}{\overline{y}} & \frac{n\overline{x}^2}{\overline{y}^2} \end{pmatrix},$$

como $\overline{y} > 0$ *entonces la* I *es definida positiva por lo tanto son máximos nuestros puntos críticos.*

2. Muestre que la verosimilitud perfil relativa para λ es

$$R(\lambda) = 2^{2n} \left(\frac{\overline{y}}{\lambda\overline{x}}\right)^n \left(1 + \frac{\overline{y}}{\lambda\overline{x}}\right)^{-2n}.$$

Demostración. Por definición de verosimilitud perfil relativa y de verosimilitud perfil obtenemos

$$R(\lambda) = R\left(\hat{\theta}(\lambda), \lambda\right) = \frac{L\left(\hat{\theta}(\lambda), \lambda\right)}{L\left(\hat{\theta}, \hat{\lambda}\right)} = \frac{\dfrac{e^{-\frac{n}{\frac{\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\overline{x}+\overline{y}\right)}{2\frac{\overline{y}}{\overline{x}}}}\left(\overline{x}+\frac{\overline{y}}{\frac{\overline{y}}{\overline{x}}}\right)}}{\left(\frac{\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\overline{x}+\overline{y}\right)}{2\frac{\overline{y}}{\overline{x}}}\right)^{2n}\frac{\overline{y}}{\overline{x}}^{n}}}{\dfrac{e^{-\frac{n}{\overline{x}}\left(\overline{x}+\frac{\overline{y}}{\frac{\overline{y}}{\overline{x}}}\right)}}{\overline{x}^{2n}\frac{\overline{y}}{\overline{x}}^{n}}} = 2^{2n}\left(\frac{\overline{y}}{\lambda\overline{x}}\right)^n \left(1 + \frac{\overline{y}}{\lambda\overline{x}}\right)^{-2n}.$$

□

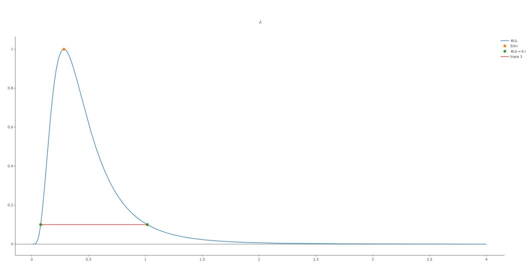
3. Los siguientes son tiempos observados de supervivencia de 12 sujetos

Tratamiento A:	9	186	25	6	44	112
Tratamiento A:	1	18	6	25	14	42

Los tiempos de supervivencia son modelados como variables aleatorias Exponenciales, con media θ para el Tratamiento A y con media $\lambda\theta$ para el B. Obtenga un intervalo al 10 % de verosimilitud para λ. ¿Hay evidencia contundente de que el primer tratamiento es mejor que el segundo?

Solución 2 − *El intervalo al* 10 % *de verosimilitud para* λ *es*

$$IV(\lambda, 0.10) = [0.0788, 1.0172].$$



No hay evidencia puesto que el invervalo de verosimilitud del 10 % *de* λ *no está completamente contenido dentro del intervalo* $[0, 1]$ *(podría pedir un mayor porcentaje pero tendriamos un mayor cesgo).*