Probabilidad
Parcial I - Ejercicio 5

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Ehyter Matías Martín González

26 de Septiembre 2020

Problemas

1. Sea m_n el mínimo de n variables aleatorias iid con distribución común $exp(\theta)$, todas sobre el mismo espacio de probabilidad. Demuestre que $m_n \xrightarrow{L_p} 0$ para todo $p > 0$.

   Demostración. Empecemos por ver cual es la función de distirbución de m_n, para ello digamos que nuestras n variables aleatorias son $X_1, \cdots, X_n$, ahora

$$\begin{aligned}
F_{m_n}(x) &= \mathbb{P}\left[m_n \leq x\right] \\
&= 1 - \mathbb{P}\left[m_n > x\right] \\
&= 1 - \mathbb{P}\left[X_1 > x, \cdots, X_n > x\right] \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left[X_i > x\right] \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left[X_1 > x\right] \\
&= 1 - \mathbb{P}\left[X_1 > x\right]^n \\
&= 1 - \left(e^{-\theta x}\right)^n \\
&= 1 - e^{-\theta n x}
\end{aligned}$$

   por lo que

$$f_{m_n}(x) = \theta n e^{-\theta n x},$$

   Ahora veamos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|m_n|^p\right] = \mathbb{E}\left[m_n^p\right] &= \int_0^\infty x^p f_{m_n}(x) dx \\
&= \int_0^\infty x^p \theta n e^{-\theta n x} dx
\end{aligned}$$

$$= \theta n \int_0^\infty x^p e^{-\theta n x} dx$$

En clase se vio como esto se completaba a una gama no me salieron los calculo pero después de ver eso evaluas los límites y de ser cierto deberían converger a 0

$\square$