Cálculo II
Tarea 06

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Dr. Fernando Nuñez Medina

25 Febrero 2020

Problemas

1. Halla

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}dt$$

(para $f > 0$ en $[a, b]$).

Fijemonos en la derivada de la composición $log \circ f$, vista en la tarea pasada,

$$(log \circ f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Luego $(log \circ f)(x)$ es primitiva de $\frac{f'(x)}{f(x)}$, por el segundo teorema fundamental del cálcuo conlcuimos que

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} = (log \circ f)(b) - (log \circ f)(a) = \log\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right).$$

2. Calcula las siguientes integrales

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Sea $\sin(u) = x$ entonces $dx = cos(u)du$, por lo tanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{cos(u)du}{\sqrt{1-\sin^2(x)^2}} = \int du = u = sin^{-1}(x).$$

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Sea $\tan(u) = x$ entonces $dx = sec(u)^2du$, por lo tanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{sec(u)^2du}{\sqrt{1+\tan(x)^2}} = \int sec(u)du = log(sec(u) + tan(u))$$

$$= log(\sqrt{1+x^2} + x^2).$$

(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$
Sea $sec(u) = x$ entonces $dx = sec(u)tan(u)du$, por lo tanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{sec(u)tan(u)du}{tan(u)} = \int sec(u)du = log(sec(u) + tan(u))$$
$$= log(x + \sqrt{x^2-1}).$$

3. Calcule las siguientes integrales

(a) $\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2+x-1}dx$
Expresaremos lo anterior por fracciones parciales

$$\begin{aligned}\frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2+x-1} &= \frac{2x^2+7x-1}{(x+1)^2(x-1)} \\ &= \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} \\ &= \frac{A(x-1) + B(x^2-1) + C(x+1)^2}{x^3+x^2+x-1} \\ &= \frac{(B+C)x^2 + (A+2C)x + (C-B-A)}{x^3+x^2+x-1}.\end{aligned}$$

De lo que obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}B + C &= 2 \\ A + 2C &= 7 \\ A + B - C &= 1,\end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$A = 3 \quad B = 0 \quad C = 2$$

.
Sustituyendo en la integral tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2+x-1}dx &= \int \left(\frac{3}{(x+1)^2} + \frac{0}{x+1} + \frac{2}{x-1} \right) dx \\ &= 3\int \frac{2dx}{(x+1)^2} + 2\int \frac{dx}{x-1} \\ &= -\frac{3}{(x+1)} + 2log(x-1)\end{aligned}$$

(b) $\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}dx$
Expresaremos lo anterior por fracciones parciales

$$
\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1} &= \frac{2x^2+7x-1}{(x-1)^3} \\
&= \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} \\
&= \frac{A+B(x-1)+C(x-1)^2}{(x-1)^3} \\
&= \frac{Cx^2+(B-2C)x+(A-B+C)}{(x-1)^3}.
\end{aligned}
$$

De lo que obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
C &= 0 \\
B-2C &= 2 \\
A-B+C &= 1,
\end{aligned}
$$

resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$A = 3 \quad B = 2 \quad C = 0$$

.

Sustituyendo en la integral tenemos

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1} dx &= \int \left(\frac{3}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{0}{x-1} \right) dx \\
&= 3 \int \frac{dx}{(x-1)^3} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2} \\
&= -\frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} \\
&= \frac{1-4x}{2(x-1)^2}
\end{aligned}
$$

(c) $\int \frac{x^3+7x^2-5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3} dx$

Expresaremos lo anterior por fracciones parciales

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^3+7x^2-5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3} \\
&= \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1} \\
&= \frac{A(x+1)^3 + B(x-1)(x+1)^3 + C(x-1)^2 + D(x-1)^2(x+1) + E(x-1)^2(x+1)^2}{(x-1)^2(x+1)^3} \\
&= \frac{(B+E)x^4 + (A+2B+D)x^3 + (3A+C-D-2E)x^2}{(x-1)^2(x+1)^3} \\
&+ \frac{(3A-2B-2C-D)x + (A-B+C+D+E)}{(x-1)^2(x+1)^3}.
\end{aligned}
$$

De lo que obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} B+E&=0\\ A+2B+D&=1\\ 3A+C-D-2E&=7\\ 3A-2B-2C-D&=-5\\ A-B+C+D+E&=5 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$A=1, \qquad B=0, \qquad C=4, \qquad D=0, \qquad \text{y} \qquad E=0.$$

Sustituyendo en la integral tenemos

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^3+7x^2-5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3}dx\\ &=\int \left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{0}{(x-1)^2}+\frac{4}{(x+1)^3}+\frac{0}{(x+1)^2}+\frac{0}{x+1}\right)dx\\ &=\int \frac{dx}{(x-1)^2}+4\int \frac{dx}{(x+1)^3}\\ &=-\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

4. Calcula las siguientes integrales

   (a) $\int \frac{a^x}{b^x}dx$
   Veamos que $\frac{a^x}{b^x}dx = \left(\frac{a}{b}\right)^x dx$, por lo tanto

   $$\int \frac{a^x}{b^x}dx = \int \left(\frac{a}{b}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{log(\frac{a}{b})}$$

   (b) $\int tan(x)^2dx$
   Veamos lo siguiente

   $$\int tan(x)^2dx = \int sex(x)^2dx - \int dx = tan(x) - x$$

   (c) $\int fracdxa + x^2dx$
   Si $a=0$ entonces $\int fracdxa + x^2dx = -\frac{1}{x}$, si $a \neq 0$ entonces

   $$\int fracdxa + x^2dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{a}\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = -\frac{arctan(x/a)}{a}$$

5. Calcula las siguientes integrales

(a) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+2e^x+1}$
Sea $u = e^x$, entonces $du = e^x dx$, por lo tanto

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+2e^x+1} = \int \frac{du}{(u+1)^2} = -\frac{1}{u+1} = -\frac{1}{e^x+1}$$

(b) $\int e^{e^x} e^x dx$
Sea $u = e^x$, entonces $du = e^x dx$, por lo tanto

$$\int e^{e^x} e^x dx = \int e^u du = e^u = e^{e^x}$$

(c) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$
Sea $u = x^2$, entonces $du = 2xdx$, y sea $sin(v) = u$ entonces $du = cos(v)dv$. Veamos lo siguiente

$$\frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{v}{2}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sin^{-1}(x^2)}{2}$$

6. Integración por partes

(a) $\int x^2 sin(x)dx$
Sea $u = x^2$ y $v = -cos(x)$, entonces $du = 2xdx$ y $dv = sen(x)dx$, por lo tanto

$$\int x^2 sin(x)dx = -x^2 cos(x) - 2\int cos(x)xdx$$

Sea $u = x$ y $v = sen(x)$, entonces $du = dx$ y $dv = -cos(x)dx$, por lo tanto

$$\int x^2 sin(x)dx = -x^2 cos(x) + 2\left(xsen(x) - \int sin(x)dx\right) = cos(x)(2-x^2) + 2xsen(x)$$

(b) $log(x)^3 dx$
Sea $u = log(x)^3$ y $v = x$, entonces $du = 3log(x)^2(1/x)dx$ y $dv = dx$, por lo tanto

$$\int log(x)^3 dx = log(x)^3 x - 3\int log(x)^2 dx$$

Sea $u = log(x)^2$ y $v = x$, entonces $du = 2log(x)(1/x)dx$ y $dv = dx$, por lo tanto

$$\int log(x)^3 dx = log(x)^3 x - 3\left(log(x)^2 x - 2\int log(x)dx\right)$$

Sea $u = log(x)$ y $v = x$, entonces $du = (1/x)dx$ y $dv = dx$, por lo tanto

$$\int log(x)^3 dx = log(x)^3 x - 3\left(log(x)^2 x - 2\left(log(x)x - \int dx\right)\right)$$
$$= log(x)^3 x - 3log(x)^2 x + 6log(x)x - 6x$$

(c) $\int \frac{log(log(x))}{x}dx$

Sea $u = log(x)$ entonces $du = dx/x$ por lo tanto

$$\int \frac{log(log(x))}{x}dx = \int log(u)du$$

Sea $v = log(x)$ y $w = x$, entonces $du = (1/x)dx$ y $dv = du$, por lo tanto

$$\int \frac{log(log(x))}{x}dx = log(u)u - \int du = (log(u) - 1)u$$

Con lo que concluimos que

$$\int \frac{log(log(x))}{x}dx = log(u)u - \int du = (log(log(x)) - 1)log(x)$$