Métodos Estadísticos
Tarea I

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesora: Dra. Eloísa Díaz Francés Murguía

21 de marzo de 2021

Problemas

1. Da un ejemplo de un modelo probabilístico y de un modelo estadístico con alguna de tus distribuciones que ahora son tus hijas adoptivas.

   Ejemplo de modelo probabilístico es la distribución Gamma con parámetros $\alpha = 1$ y $\beta = 1$.

   Un ejemplo de modelo estadístico es la fmailia de distribuciones

   $$\Phi = \left\{ F(x;\theta) : F \text{ es Gamma con parametros } (1, \frac{1}{\lambda}) \right\},$$

   es decir la familia de distribuciones exponenciales con parametro λ.

2. Demuestra si tus tres distribuciones continuas adoptadas pertenecen a la familia Exponencial de distribuciones o no.

   - Uniforme Continua
     Su función de densidad es

     $$f(x;a,b) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x).$$

     Al depender su soporte de parámetros desconocidos entonces esta no pertenece a la familia Exponencial.

   - Gamma
     Su función de densidad es

     $$f(x;\alpha,\beta) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha\beta^{\alpha}} exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

     Podemos reexpresarla de la siguiente forma

     $$f(x;\alpha,\beta) = \left(\frac{1}{\Gamma\alpha\beta^{\alpha}}\right)\left(\frac{1}{x}\right) exp\left(\alpha\log(x) - \frac{x}{\beta}\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

     Donde su soporte no depende de parámetros desconocidos y $A(\theta) = \frac{1}{\Gamma\alpha\beta^{\alpha}}$, $B(x) = \frac{1}{x}$, $C_1(\theta) = \alpha$, $D_1(x) = log(x)$, $C_2(\theta) = \frac{1}{\beta}$ y $D(x) = x$, por lo tanto la distirbución Gamma pertenece a la familia exponencial.

- DGVE
  Su función de densidad es

$$f(x;a,b,c)=\begin{cases} b^{-1}\left[1+c\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]^{-1-\frac{1}{c}}\exp\left\{-\left[1+c\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]^{-\frac{1}{c}}\right\}\mathbb{1}_{\left(-\infty,a-\frac{b}{c}\right]}(x) & \text{si } c<0,\\ b^{-1}\exp\left\{-\frac{x-a}{b}-\exp\left[-\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]\right\}\mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x) & \text{si } c<0,\\ b^{-1}\left[1+c\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]^{-1-\frac{1}{c}}\exp\left\{-\left[1+c\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]^{-\frac{1}{c}}\right\}\mathbb{1}_{\left[a-\frac{b}{c},\infty\right)}(x) & \text{si } c<0,\end{cases}$$

  Al depender su soporte de parámetros desconocidos entonces esta no pertenece a la familia Exponencial.

3. Demuestra si tus tres distribuciones continuas adoptadas pertenecen a la familia de distribuciones de Localización y Escala o no.

   - Uniforme Continua
     Su función de densidad es

$$f(x;a,b)=\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x).$$

     Al depender su soporte de parámetros desconocidos entonces esta no pertenece a la familia de localización y escala.
   - Gamma
     Su función de densidad es

$$f(x;\alpha,\beta)=\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha\beta^{\alpha}}exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

     Primero su soporte no depende de parámetros desconocidos. Ahora puesto que α es parámetro de forma entonces si concideramos ambos parámetros no sería de localización y escala. En cambio para cada valor α fijo podemos ver que

$$f(x;\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{\beta}\right)\left(\left(\frac{1}{\Gamma\alpha}\right)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{k-1}\right)\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)=\left(\frac{1}{\beta}\right)f_0(\frac{x}{\beta}),$$

     donde

$$f_0(x)=\left(\left(\frac{1}{\Gamma\alpha}\right)(x)^{k-1}\right)\exp\left(-x\right)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

     Ahora si $Y=\frac{x}{\beta}$ por el Teorema de Cambio de variable con $g(x)=\frac{x}{v}$ vemos que la densidad de Y es $f_0(x)$ la cual no depende de parametros desconocidos (por ello tomamos α fijo), por lo tanto concluimos que Gamma para un parametro dijo α pertenece a la familia de localización y escala.
   - DGVE
     Su función de densidad es

$$f(x;a,b,c)=\begin{cases} b^{-1}\left[1+c\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]^{-1-\frac{1}{c}}\exp\left\{-\left[1+c\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]^{-\frac{1}{c}}\right\}\mathbb{1}_{\left(-\infty,a-\frac{b}{c}\right]}(x) & \text{si } c<0,\\ b^{-1}\exp\left\{-\frac{x-a}{b}-\exp\left[-\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]\right\}\mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x) & \text{si } c<0,\\ b^{-1}\left[1+c\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]^{-1-\frac{1}{c}}\exp\left\{-\left[1+c\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]^{-\frac{1}{c}}\right\}\mathbb{1}_{\left[a-\frac{b}{c},\infty\right)}(x) & \text{si } c<0,\end{cases}$$

     Al depender su soporte de parámetros desconocidos entonces esta no pertenece a la familia de localización y escala.

4. Demuestra que la distribución Binomial (N, θ) con N conocido y θ la probabilidad de éxito de cada ensayo Bernoulli, sí pertenece a la familia Exponencial de distribuciones.

   Demostración. Recordemos que la función de masa de probabilidad de un Binomial (N, θ) es

$$f(x; N, \theta) = \binom{N}{x} \theta^x (1-\theta)^{N-x} \mathbb{1}_{\{1, \cdots, N\}}(x).$$

   Ahora reexpresandola de la siguiente forma

$$f(x; N, \theta) = \left((1-\theta)^N\right) \binom{N}{x} \exp\left(x \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\right) \mathbb{1}_{\{1, \cdots, N\}}(x).$$

   Podemos ver que su soporte no depende de parámetros desconocidos, y con $A(\theta) = (1-\theta)^N$, $B = \binom{N}{x}$, $C(\theta) = \log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$ y $D(x) = x$, por lo tanto la distribución Binomial (N, θ) con N conocido pertence a la familia Exponencial.

   $\square$

5. Para cada una de tus tres distirbuciones continuas, da la expresión de la función de densidad conjunta, factorizandola pra identificar las estadísticas suficientes $T(x_1, \cdots, x_n)$:

$$f(x_1, \cdots, x_n; \theta) = h(x_1, \cdots, x_n)\, g(T(x_1, \cdots, x_n); \theta).$$

   Simplifica tus expreciones para que puedas encontrar el vector T que tenga la menor dimensión posible. Recuerda que la muestra obsevada siempre es un vector de estadísticas suficientes y su dimensión es n.

   Solución 1 –

   Uniforme Continua

   Su función de densidad es

$$f(x; a, b) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x).$$

   Entonces la densidad conjunta de $X_1, \cdots, X_n$ *variables aleatorias Uniformes Continuas* (a, b) *es*

$$f(\vec{x}; a, b) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; a, b) = \left(\frac{1}{b-a}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[a,b]}(x).$$

   Veamos que $x_i \leq b, \forall i = 1, \cdots, n$ *si y sólo* $\text{máx}(\vec{x}) \leq b$ *y también* $x_i \geq a, \forall i = 1, \cdots, n$ *si y sólo* $\text{mín}(\vec{x}) \geq a$, *por lo que*

$$f(\vec{x}; a, b) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; a, b) = \left(\frac{1}{b-a}\right)^n \mathbb{1}_{[a,b]}(\text{máx}(\vec{x})) \mathbb{1}_{[a,b]}(\text{mín}(\vec{x})).$$

   Por el Teorema de la factorización de Fisher concluimos que $\text{máx}(\vec{x}), \text{mín}(\vec{x})$ *son estadísticas suficientes de* (a, b).

Gamma

Su función de densidad es

$$f(x;\alpha,\beta)=\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha\beta^{\alpha}}exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Entonces la densidad conjunta de $X_1,\cdots,X_n$ *variables aleatorias Gamma* (α,β) *es*

$$f(\vec{x};a,b)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;a,b)=\left(\prod i=1^n\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x_i)\right)\left(\frac{1}{\Gamma\alpha\beta^{\alpha}}\right)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\alpha-1}\exp-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}.$$

Por el Teorema de la factorización de Fisher concluimos que $(\prod_{i=1}^{n}x_i,\sum_{i=1}^{n}x_i)$ *son estadísticas suficientes de* (α,β).

DGVE

Su función de densidad es

$$f(x;a,b,c)=\begin{cases}b^{-1}\left[1+c\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]^{-1-\frac{1}{c}}\exp\left\{-\left[1+c\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]^{-\frac{1}{c}}\right\}\mathbb{1}_{\left(-\infty,a-\frac{b}{c}\right]}(x) & si\ c<0,\\ b^{-1}\exp\left\{-\frac{x-a}{b}-\exp\left[-\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]\right\}\mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x) & si\ c<0,\\ b^{-1}\left[1+c\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]^{-1-\frac{1}{c}}\exp\left\{-\left[1+c\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]^{-\frac{1}{c}}\right\}\mathbb{1}_{\left[a-\frac{b}{c},\infty\right)}(x) & si\ c<0,\end{cases}$$

Entonces la densidad conjunta de $X_1,\cdots,X_n$ *variables aleatorias DGVE* (a,b,c) *es*

$$f(\vec{x};a,b)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;a,b)$$

$$=\begin{cases}b^{-n}\prod_{i=1}^{n}\left[1+c\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]^{-1-\frac{1}{c}}\exp\left\{-\left[1+c\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]^{-\frac{1}{c}}\right\}\mathbb{1}_{\left(-\infty,a-\frac{b}{c}\right]}(x) & si\ c<0,\\ b^{-n}\prod_{i=1}^{n}\exp\left\{-\frac{x-a}{b}-\exp\left[-\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]\right\}\mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x) & si\ c<0,\\ b^{-n}\prod_{i=1}^{n}\left[1+c\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]^{-1-\frac{1}{c}}\exp\left\{-\left[1+c\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]^{-\frac{1}{c}}\right\}\mathbb{1}_{\left[a-\frac{b}{c},\infty\right)}(x) & si\ c<0,\end{cases}$$

Prodriamos simplificar el producto de las indicadoras con las funciones min y max de la muestra pero no hay forma de encontrar funciones que simplifiquen el producto del resto ya que los terminos $\left[1+c\left(\frac{x-a}{b}\right)\right]$ *están en terminos del resto de los parametros en funciones exponenciales y de potencias. Por lo que las estadisticas suficientes de* (a,b,c) *es toda la muestra.*