Probabilidad
Tarea 1

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Antonio Murillo Salas

15 de septiembre de 2021

Nota: Justifique con claridad cada una de las respuestas.

1. Suponga se lanzan dos dados de manera consecutiva. Considere el vector aleatorio (X, Y), donde X es el mayor valor observado y Y es la suma de los valores observados.

   Veamos que si A y B son las variables aleatorias de los lanzamientos del dado, entonces

$$f_X(x) = \mathbb{P}[\text{máx}(A, B) = x] = \mathbb{P}[A = x, B < x] + \mathbb{P}[A < x, B = x] + \mathbb{P}A = x, B = x = \frac{2x - 1}{36},$$

   y

$$f_Y(y) = \mathbb{P}[A + B = y] = \frac{6 - |7 - y|}{36}.$$

   a) Encuentre la covarianza entre X y Y.
   Veamos que la densidad conjunta esta dada por la siguiente tabla

(x, y)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0
6	0	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

   ,

   por lo que

$$\mathbb{E}[X] = \frac{161}{36},$$

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{252}{36},$$

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{1190}{36}$$

   por lo tanto

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{1190}{36} - \frac{161}{36}\frac{252}{36} = \frac{2268}{1296} = \frac{7}{4}.$$

b) Determine el coeficiente de correlación entre X y Y.
Para ello calcularemos

$$Var(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{28476 - 25921}{1296} = \frac{2555}{1296},$$

y

$$Var(Y) = \mathbb{E}\left[Y^2\right] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{71064 - 63504}{1296} = \frac{7560}{1296},$$

por lo tanto

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}} = \frac{\frac{7}{4}}{\sqrt{\frac{2555}{1296}\frac{7560}{1296}}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{\sqrt{19315800}}{1296}} = \frac{9072}{4\sqrt{19315800}} = \frac{9\sqrt{438}}{365}$$
$$\sim 0{,}516043961172896294779277.$$

2. Sean (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ce^{-\lambda y}, 0 < x \leq y < \infty, \\ 0, enotrocaso. \end{cases}$$

donde c y λ son constantes positivas.

a) Determine el valor de c para que, efectivamente, $f_{X,Y}$ sea una función de densidad conjunta.
Solución 1 – *Para que $f_{X,Y}$ sea una función de densidad conjunta se debe cumplir que*

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty \int_0^y f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \\ &= \int_0^\infty \int_0^y ce^{-\lambda y} dxdy \\ &= c\int_0^\infty e^{-\lambda y} \int_0^y dxdy \\ &= c\int_0^\infty e^{-\lambda y} ydy \\ &= \frac{c}{\lambda^2}\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{\Gamma(2)} ye^{-\lambda y} dy \\ &= \frac{c}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$c = \lambda^2.$$

b) Encuentre las densidades marginales.
Solución 2 – *Tenemos que*

$$f_X(x) = \int_x^\infty f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy \\
&= \lambda e^{-\lambda y} \Big|_0^{\infty} \\
&= -\lambda
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^y f_{X,Y}(x,y)\,dx \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda y} \int_0^y dx \\
&= \lambda^2 y e^{-\lambda y}
\end{aligned}
$$

c) ¿Son X y Y independientes?

Solución 3 – *Puesto que*

$$f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} \neq -\lambda^3 y e^{-\lambda y} = f_X(x) f_Y(y),$$

concluimos que X y Y no son independientes.

3. Considere la ecuación

$$x^2 + Ax + B = 0,$$

donde A y B se seleccionan al azar de manera independiente en el intervalo $(0,1)$.

a) Determine la probabilidad de que ambas raíces sean reales.

Solución 4 – *Recordemos que las soluciones a la ecuación $x^2 + Ax + B = 0$ están dadas por $x = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$ por lo que las soluciones son reales si y sólo si*

$$A^2 - 4B \geq 0,$$

es decir

$$A^2 \geq 4B.$$

Si X es el evento donde la ecuación $x^2 + Ax + B = 0$ tiene soluciones reales entonces

$$\mathbb{P}[X] = \mathbb{P}\left[A^2 \geq B\right] = \int_0^1 \int_0^{\frac{x^2}{4}} f_A(x) f_B(y)\,dydx = \int_0^1 \int_0^{\frac{x^2}{4}} dydx = \int_0^1 \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{12}.$$

b) ¿Cual es la probabilidad que las raíces sean iguales?

Solución 5 – *Recordemos que las soluciones a la ecuación* $x^2 + Ax + B = 0$ *están dadas por* $x = \frac{-A \pm \sqrt{A^2-4B}}{2}$ *por lo que las soluciones son reales si y sólo si*

$$A^2 - 4B = 0,$$

es decir

$$A^2 = 4B.$$

Al ser continuas A *y* B *concluimos que la probabilidad de que las raices sean iguales es* 0.

4. Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Dado $\lambda > 0$ defina

$$Y := -\frac{1}{\lambda}\ln(X_1 X_2).$$

Determine la función de densidad de Y.

Solución 6 – *Por el puente fundamental y por la Ley de Adam obtenemos la ley de probabilidad total en el caso continuo*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A] &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_A | X = x)) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_A | X = x) f_X(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A | X = x) f_X(x)\,dx
\end{aligned}$$

Por probabilidad total tenemos que

$$F_{X_1 X_2}(z) = \int_0^1 \mathbb{P}[X_1 X_2 \leq z | X_1 = x] f_{X_1}(x)\,dx = \int_0^1 F_{X_2}\left(\frac{z}{x}\right) f_{X_1}(x)\,dx,$$

por el teorema fundamental del cáculo y regla de la cadena, al derivar por z *obtenemos*

$$\begin{aligned}
f_{X_1 X_2}(z) &= \int_0^1 f_{X_2}\left(\frac{z}{x}\right) f_{X_1}(x) \frac{1}{x} dx \\
&= \int_0^z f_{X_2}\left(\frac{z}{x}\right) f_{X_1}(x) \frac{1}{x} dx + \int_z^1 f_{X_2}\left(\frac{z}{x}\right) f_{X_1}(x) \frac{1}{x} dx \\
&= \int_z^1 \frac{1}{x} dx \\
&= -\log(z).
\end{aligned}$$

Luego por cambio de variable y puesto que $\log$ *es monótona obtenemos que*

$$f_Y(y) = f_{X_1 X_2}\left(e^{-\lambda y}\right)\left(-\lambda e^{-\lambda y}\right) = -\lambda^2 y e^{-\lambda y}$$