Cálculo II
Examen III

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Dr. Fernando Nuñez Medina

6 Mayo 2020

Problemas

1. Demuestra que una sucesión convergente es siempre acotada.

   Demostración. Sea a_n una sucesión convergente a l, por definición tenemos que

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ se cumple que } |a_n - l| < \varepsilon.$$

   Sea $\varepsilon = 1$ entonces existe un N tal que para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq N$ se cumple que

   $$|a_n - l| < 1,$$

   por la desigualdad del triangulo obtenemos

   $$|a_n| = |a_n - l + l| \leq |a_n - l| + |l| < 1 + |l|.$$

   Ahora sea $M = \sup(|a_1|, \cdots, |a_N|, 1 + |l|)$, entonces por definición concluimos que

   $$|a_n| \leq M \quad \forall n,$$

   es decir la sucesión a_n es acotada.

   $\square$

2. Muestra que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces sus sumas parciales también.

   Demostración. Sea a_n una sucesión tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces por definición la sumas parciales s_n convergen digamos a l. Por el problema anterior concluimos que s_n es acotada. $\square$

3. Sea

$$f_n(x) = \frac{e^{-x^2}}{n}, x \in \mathbb{R}$$

a) Determina el límite puntual de $f_n(x)$.
El límite puntal de $f_n(x)$ es

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

Esto pues e^{-x^2} con respecto a n es constante y $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n} = 0$.

b) Determina si f_n converge uniformemente a la función encontrada en a).
Veamos lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 &\leq x^2 \\ 1 &\leq e^{x^2} \\ e^{-x^2} &\leq 1 \\ \frac{e^{-x^2}}{n} &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

y al ser

$$\frac{e^{-x^2}}{n} > 0$$

conlcuimos que

$$|f_n(x)| = \left| \frac{e^{-x^2}}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$$

4. Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x}, x \in [1, 2].$$

a) Determina si f es continua.
Por el problema 5 f es derivable en $[1, 2]$, por lo que es continua en $[1, 2]$

b) Determina si f es integrable.
Al ser f continua en $[1, 2]$ por el teorema 3 del capítulo 13 del spivak f es integrable en $[1, 2]$

5. Determina si la función f del ejercicio anterior es derivable.
   Sea $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x}$, por regla de la cadena obtenemos

$$f_n'(x) = -\frac{n^2}{(1+n^2x)^2}.$$

Puesto que, tanto f_n y f' son composición de funciones derivables entonces estas dos funciones son derivables y por tanto continuas.
Sea

$$M_n = \frac{n^2}{(1+n^2)^2},$$

como $1+n^2 \leq 1+n^2x$ ya que $x \in [1,2]$ entonces

$$|f_n'| \leq M_n.$$

Veamos que

$$\frac{n^2}{(1+n^2)^2} \leq \frac{n^2}{(n^2)^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$$

converge por la prueba de comparación, por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

converge.
Por la prueba m de Weierstrass concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$$

converge uniformemente, por el corolario de la definición de convergencía uniforme y que f_n' son continuas concluimos que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \forall x \in [1,2].$$

6. Supon que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones acotadas (no necesariamente continuas) en $[a, b]$ que converge uniformemente hacia f en $[a, b]$. Demuestra que f es acotada en $[a, b]$.

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones acotadas (no necesariamente continuas) en $[a, b]$ que converge uniformemente hacia f en $[a, b]$. Por definición de convergencia uniforme tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ se cumple que } |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon = 1$ entonces existe un N tal que para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq N$ se cumple que

$$|f(x) - f_n(x)| < 1,$$

por la desigualdad del triangulo obtenemos

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < 1 + |f_n(x)|,$$

al ser f_n acotada entonces existe un M_n tal que $|f_n| < M_n$ por lo que

$$|f(x)| \leq 1 + M_n,$$

en particular

$$|f(x)| \leq 1 + M_N,$$

Por lo tanto f es acotada. $\square$