Cálculo III
Tarea I

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Luis Hernández Lamoneda

24 de agosto de 2023

1. Prueba que si X y Y son ortogonales en $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 .$$

Demostración. Sean $X, Y \in \mathbb{R}^n$ ortogonales. Por la relación del producto interior y la norma euclideana tenemos que

$$\|X+Y\|^2 = \langle X+Y, X+Y\rangle ,$$

por linealidad del producto punto eso es

$$\|X+Y\|^2 = \langle X, X\rangle + \langle X, Y\rangle + \langle Y, Y\rangle ,$$

de nuevo por lo relación del producto interior y la norma euclideana obtenemos

$$\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle X, Y\rangle + \|Y\|^2 ,$$

finalmente al ser X y Y ortogonales esto es si y sólo $\langle X, Y\rangle = 0$, por lo tanto concluimos que

$$\|X+Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 .$$

$\square$

2. Imagina un cubo $n-$dimensional en $\mathbb{R}^n$ con tamaño de lado $c : 0$, el cuál consiste de todos los puntos $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ con

$$0 \leq x_k \leq c, \quad k = 1, \cdots, n.$$

   a) Encuentra el punto P en el cubo tal que su norma es la más grande. Llama a este punto la esquina más alejada del cubo.

   Solución 1 – *Sea* $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *un punto en el cubo, veamos que*

$$\|X\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\| ,$$

   donde e *es la base canonica. Ahora por subatividad tenemos que*

$$\|X\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\|,$$

por definición de e_i *y la norma euclideana esto es*

$$\|X\| \leq \sum_{i=1}^{n} x_i, \text{ al ser positivos los } x_i\text{'s omtimos el módulo.}$$

Ahora por definición $x_i \leq c$ *para todo* i*, por lo tanto*

$$\|X\| \leq \sum_{i=1}^{n} c,$$

por definición de e_i *y la norma euclideana esto es*

$$\|X\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|c\,(e_i)\|,$$

finalmente al tener la base canónica vectores unitarios obtenemos

$$\|X\| \leq c\sqrt{n}.$$

Ahora el punto $C = (c, c, \cdots, c)$ *en el cubo tiene como norma*

$$\|C\| = c\sqrt{n}.$$

Con lo que obtenemos que C *es un punto en el cubo cuya norma es la más grande.*
Supongamos que existe otro punto $D = (d_1, \cdots, d_n)$ *en el cubo y distinto a* C *cuya norma sea igual a la de* C*, por definición del cubo algún* d_j *deberá ser menor a* c*. Luego que al ser* $0 \leq d_i \leq c$ *entonces* $d_i^2 \leq c^2$ *y además como* $d_j^2 < c^2$ *entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 < \sum_{i=1}^{n} c^2,$$

finalmente como la raiz cuadrado es una función monótona y creciente concluimos que

$$\|D\| < \|C\|,$$

lo cuál es una contradicción. Con lo que concluimos que C *es el punto más alejado.*

b) ¿Cuál es el valor de c tal que la esquina más alejada del cubo está en la esfera unitaria ($\|X\| = 1$)?

Solución 2 – *Por definición de* C *tenemos que*

$$\|C\| = c\sqrt{n},$$

luego C *está en la esfera unitaria ssi* $\|C\| = 1$ *por lo tanto* c *es tal que*

$$c\sqrt{n} = 1,$$

por lo tanto

$$c = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

c) Fijando la esquina más alejada del cubo en la esfera unitaria, ¿qué le pasá al tamaño c del lado mientras que la dimensión n tiende a infinito?

Solución 3 – *Cómo*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

entonces si C está en la bola unitaria obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} c = 0.$$

3. Sea $W_1 = (1,1,1,0)$ y $W_2 = (0,1,1,1)$. Encuentra dos vectores independientes y ortogonales a W_1 y W_2.

   Solución 4 – *Sea $V \in \mathbb{R}^N$ un vector ortogonal a W_1 y a W_2 entonces por definición* $\langle V, W_1\rangle = \langle V, W_2\rangle = 0.$

   Lo cuál nos induce el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + V_3 &= 0, \\ V_2 + V_3 + V_4 &= 0. \end{aligned}$$

   Del sistema de ecuaciones anterior obtenemos

$$V_1 - V_4 = 0,$$

   es decir

$$V_1 = V_4.$$

   Luego si $V_1 = 0$ y $V_2 = 1$ obtenemos $V = (0,1,-1,0)$. En cambio si $V_1 = 1$ y $V_2 = -1$ entonces $V = (1,-1,0,1)$. Por construcción ambos vectores son ortogonales a W_1 y a W_2, pero además al tener ambos vectores en una entrada igual a 0 y el otro no culimna en que son independientes.

4. En nuestra prueba de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, en el teorema 1,12 usamos que si U es un vector unitario, entonces

$$0 \leq \|V - \langle U, V\rangle U\|^2 = \|V\|^2 - \langle U, V\rangle^2 .$$

   a) Demuestra que si U es un vector unitario y $|\langle U, V\rangle| = \|U\| \|V\|$, entonces $V = \langle U, V\rangle U$.

   Demostración. Sea $U \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario y $V \in \mathbb{R}^n$ tales que $|\langle U, V\rangle| = \|U\| \|V\|$. Como

$$\|V - \langle U, V\rangle U\|^2 = \|V\|^2 - \langle U, V\rangle^2 ,$$

   entonces

$$\|V - \langle U, V\rangle U\|^2 = \|V\|^2 - \|U\|^2 \|V\|^2 = \|V\|^2 - \|V\|^2 = 0.$$

   Al ser norma positiva definida obtenemos

$$V - \langle U, V\rangle U = 0,$$

   por lo tanto concluimos que

$$V = \langle U, V\rangle U.$$

   □

b) Prueba que la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz se da sólo si son linealmente dependientes.

Para ello empezaremos por la demostración del siguiente lema

Lema 1 – *Sea V un espacio vectorial y $u, v \in V$ si $\|u\| = \|v\| = 1$ y $|\langle u, v\rangle| = 1$ entonces u y v son linealmente dependientes.*

Demostración. Sean $u, v \in V$ entonces por linealidad del producto interior obtenemos

$$\langle u \pm v, u \pm v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle \pm 2\langle u, v\rangle,$$

ahora si $\|u\| = \|v\| = 1$ entonces

$$\langle u \pm v, u \pm v\rangle = 2 \pm 2\langle u, v\rangle.$$

pero si $\langle u, v\rangle = 1$ entonces

$$\langle u - v, u - v\rangle = 0,$$

ahora puesto que $\langle x, x\rangle = 0$ ssi $x = \vec{0}$ entonces

$$u - v = \vec{0},$$

por lo tanto concluimos que

$$u = v.$$

De manera análoga se obtiene para $\langle u, v\rangle = -1$ considerando $\langle u + v, u + v\rangle$.

□

Proseguimos por la demostración del inciso

Demostración. Si $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son linealmente dependientes, entonces existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda x = y$, por lo que

$$\begin{aligned}
|\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle| &= |\langle \vec{x}, \lambda\vec{x}\rangle| && \text{Por ser linealmente dependientes } \vec{x} \text{ y } \vec{y} \\
&= |\lambda|\,|\langle \vec{x}, \vec{x}\rangle| && \text{Por linealidad del producto punto} \\
& && \text{y homogeneidad del valor absoluto} \\
&= |\lambda|\,\|x\|\,\|x\| && \text{Por relación producto punto y norma} \\
&= \|x\|\,\|\lambda x\| && \text{Por homogeneidad de la norma} \\
&= \|x\|\,\|y\|
\end{aligned}$$

Ahora si $|\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle| = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$ entonces por linealidad del producto punto obtenemos

$$\left|\left\langle \frac{\vec{x}}{\|x\|}, \frac{\vec{y}}{\|y\|}\right\rangle\right| = 1.$$

por el lema 1 tenemos

$$\frac{\vec{x}}{\|x\|} = \frac{\vec{y}}{\|y\|}.$$

por lo tanto concluimos

$$\vec{x} = \frac{\|x\|}{\|y\|}\vec{y},$$

es decir x y y son linealmente dependientes. □

5. EL icosahedro regular cabe perfectamente en un cubo. Tiene veinte caras en forma de triángulos equilateros. En el cubo $0 \leq x, y, z \leq 2$. Los puntos A y B son colocador en una cara del cubo donde $x = 2$, y están colocados paralelos a una arista e igualmente separados del centro, tal que $A = (2, 1-h, 1)$ y $B = (2, 1+h, 1)$ para algún número real $h : 0$.

   a) Encuentra las coordenadas de los puntos C y D en terminos de h.

   Como podemos notar C y D deben estar en la cara superior del cubo por lo tanto su coordenada z debera ser 2, además de estar justo a la mitad a lo ancho de esta por lo tanto su coordenada y deberá ser 1 ahora al ser regular estos deberan estar igualmente separados del centro de esta cara de lo contrario sería más chica alguna arista por lo tanto sus coordenada x deberán ser $1-h$ y $1+h$ respectivamente. Con lo que concluimos que

$$C = (1-h, 1, 2), D = (1+h, 1, 2)$$

   b) Expresa la distancia entre A y B en terminos de h

   Solución 5 – *Por la distancia inducida por la norma obtenemos*

$$d(A, B) = \|B - A\| = 2h$$

   c) Expresa la distnacia entre A y D en terminos de h

   Solución 6 – *Por la distancia inducida por la norma obtenemos*

$$d(A, D) = \|D - A\| = \|(h-1, h, 1)\| = \sqrt{(2)(h^2 - h + 1)}$$

   Solución 7 – *Por los dos incisos anteriores obtenemos la ecuación*

$$2h = \sqrt{(2)(h^2 - h + 1)},$$

   donde obtenemos

$$h = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}.$$

6. Encuentra la ecuación en la forma $ax + by + cz = d$ para los siguiente planos en $\mathbb{R}^3$.

   a) El plano que pasa por el origen y con vector normal $(1, 0, 0)$

   Solución 8 – *Sea S el plano con vector normal $(1, 0, 0)$, entonces para todo $v \in S$ tiene que ser ortogonal a $(1, 0, 0)$, es decir*

$$\langle v, (1, 0, 0) \rangle = 0,$$

   por definición esto es

$$v_1 = 0.$$

   Por lo tanto concluimos que

$$S = \{v = (x, y, z) \,|x = 0\}.$$

   b) El plano que pasa por $(0, 0, 0), (0, 1, 1)$ y $(-3, 0, 0)$

   Solución 9 – *Sea S el plano que contiene a $(0, 0, 0), (0, 1, 1)$ y $(-3, 0, 0)$, luego sea $ax+by+cz = d$ su ecuación. Evaluandola en los tres punto obtenemos*

$$0 = d$$

$$b + c = d$$
$$-a = d.$$

Donde obtenemos que

$$a = 0, \quad b = -c, \quad d = 0.$$

Asignamos $b = 1$ *concluimos que*

$$S = \{v = (x, y, z)\,|y - z = 0\}.$$

c) El plano S que contiene al punto $(1, 1, 1)$ y es paralelo al plano S' con ecuación $x - 3y + 5z = 0$

Solución 10 − *Por definición el vector* $(1, -3, 5)$ *es un vector ortogonal a* S'. *Luego al ser* S *paralelo a* S' *también* $(1, -3, 5)$ *es un vector ortogonal a* S, *por lo tanto para todo vector* $v = (x, y, z)$ *en* S *se debe cumplir que*

$$x - 3y + 5z = 0,$$

como $1, 1, 1$ *está en* S *obtenemos que*

$$3 = 1 - 3 + 5 = d.$$

Con lo cuál conclumos que la ecuación del plano S *es*

$$x - 3y + 5z = 3.$$

7. Sea $U = 0$, $V_1 = (0, 1, 1)$ y $V_2 = (-3, 0, 0)$.

a) Encuentra la ecuación de la línea que pasa por U y V_1 en la forma $X(s) = U + sV_1$.

Solución 11 − *Por definición obtenemos*

$$X(s) = (0, 0, 0) + s(0, 1, 1).$$

Lo cuál es

$$X(s) = (0, s, s).$$

b) Encuentra la ecuación de la línea que pasa por U y V_2 en la forma $X(t) = U + sV_2$.

Solución 12 − *Por definición obtenemos*

$$X(s) = (0, 0, 0) + t(-3, 0, 0).$$

Lo cuál es

$$X(t) = (-3t, 0, 0).$$

c) Encuentra la ecuación del plano que pasa por U, V_1 y V_2 en la forma

$$X(s, t) = U + sV_1 + tV_2.$$

Solución 13 − *Por definición obtenemos*

$$X(s, t) = (0, 0, 0) + s(0, 1, 1) + t(-3, 0, 0).$$

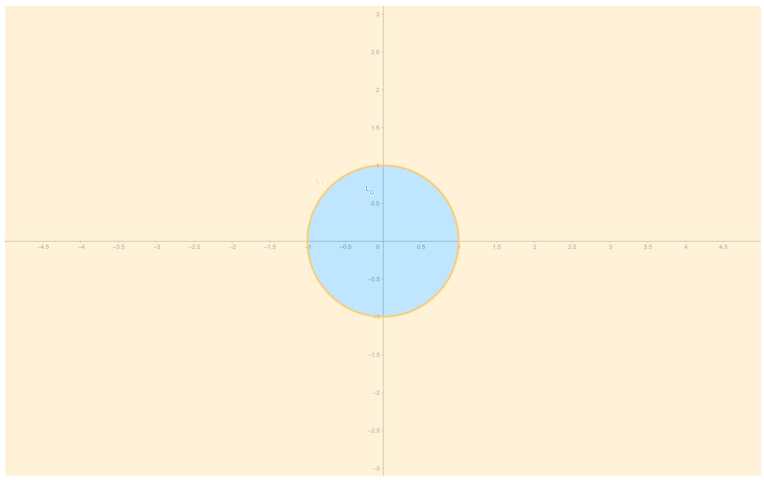
Lo cuál es

$$X(s, t) = (-3t, s, s).$$

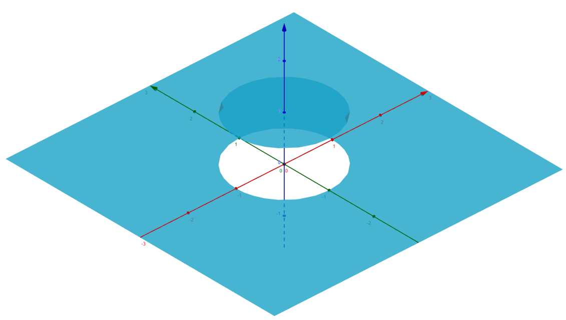
8. Sea $f(x, y)$ tal que su valor es 1 cuando (x, y) está contenido en el bola unitaria centrada en el origen, y 0 cuando no es así. Describe los conjuntos de nivel de f. Haz un bosquejo de la gráfica de f.

   Solución 14 – *Los conjuntos de nivel $L_c(f)$ de f solo pueden ser $c \in 0, 1$ por definición. Además por definición $f(x, y) = 1$ ssi (x, y) está contenido en el disco unitario centrado en el origen, y $f(x, y) = 0$ si no. Por lo tanto concluimos que*

$$L_0(f) = \left\{(x, y) \,|x^2 + y^2 < 1\right\}$$
$$L_1(f) = \left\{(x, y) \,|x^2 + y^2 \geq 1\right\}$$



   La gráfica de la función f es



9. Sea $f(X)$ igual a $\|X\|^2$ cuando X está contenido en la bola unitaria y 0 cuando no. Describe los conjuntos de nivel para los siguientes dominios.

   a) $\mathbb{R}$ Los conjuntos de nivel $L_c(f)$ de f solo pueden ser $c \in 0, 1$ por definición. Además por definición $f(x) = 1$ ssi (x) está contenido en la bola unitaria centrada en el origen, y $f(x) = 0$ si no. Por lo tanto concluimos que

$$L_0(f) = \{(x) \,|\, |x| < 1\}$$
$$L_1(f) = \{(x) \,|\, |x| \geq 1\}$$

b) $\mathbb{R}^3$ Los conjuntos de nivel $L_c(f)$ de f solo pueden ser $c \in 0, 1$ por definición. Además por definición $f(x, y, z) = 1$ ssi (x) está contenido en la bola unitaria centrada en el origen, y $f(x, y, z) = 0$ si no. Por lo tanto concluimos que

$$\begin{aligned} L_0(f) &= \{(x, y, z) \mid \|(x, y, z)\| < 1\} \\ L_1(f) &= \{(x, y, z) \mid \|(x, y, z)\| \geq 1\} \end{aligned}$$

c) $\mathbb{R}^5$ Los conjuntos de nivel $L_c(f)$ de f solo pueden ser $c \in 0, 1$ por definición. Además por definición $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 1$ ssi (x) está contenido en la bola unitaria centrada en el origen, y $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0$ si no. Por lo tanto concluimos que

$$\begin{aligned} L_0(f) &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \|(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\| < 1\} \\ L_1(f) &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \|(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\| \geq 1\} \end{aligned}$$

10. Sea $f(X) = \|X\|^2$, $X \in \mathbb{R}^4$. Sea $A \in \mathbb{R}^4$ and define

$$g_A(X) = \|A\|^2 + 2\langle A, X - A\rangle .$$

a) Sea $U = X - A$. Usa la formula

$$\|A + U\| = \|A\|^2 + 2\langle A, U\rangle + \|U\|^2$$

para demostrar que la diferencia entre $f(X)$ y $g_a(X)$ es $\|U\|^2$.

Demostración. Veamos que por la formula mencionada obtenemos

$$\begin{aligned} f(X) - g_A(X) &= \|X\|^2 - \left(\|A\|^2 + 2\langle A, X - A\rangle\right) \\ &= \|X\|^2 - \left(\|A\|^2 + 2\langle A, U\rangle + \|U\|^2\right) + \|U\|^2 \\ &= \|X\|^2 - \|A + U\| + \|U\|^2 \\ &= \|U\|^2 \end{aligned}$$

□

b) Demuestra que la diferencia entre $f(X)$ y $g_a(X)$ no excede 10^{-4} cuando $\|X - A\| < 10^{-2}$.

Demostración. Puesto que $f(X) - g_A(X) = \|X - A\|^2$ y tenemos que $\|X - A\| < 10^{-2}$, al ser el cuadrado una función montona creciente concluimos que

$$f(X) - g_A(X) < 10^{-4}.$$

□

11. Describe y haz un bosquejo de los conjuntos de nivel c ($f(x,y) = c$ en $\mathbb{R}^2$), para las siguientes funciones f y valores c. Ayudate de estos conjuntos de nivel para hacer un bosquejo de la gráfica de la función.

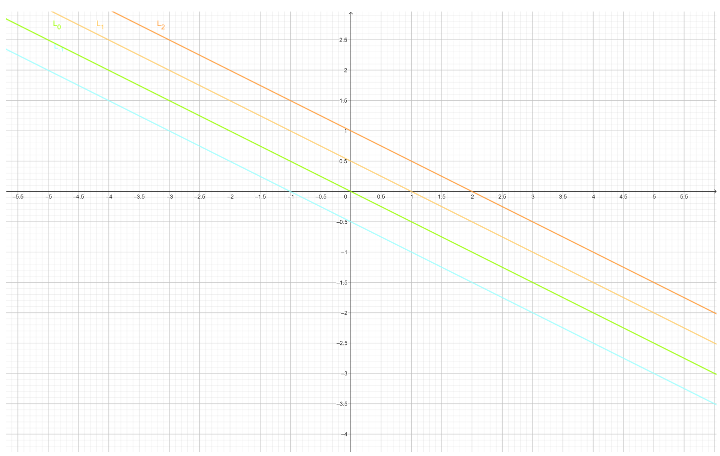
   a) $f(x,y) = x + 2y, c = -1, 0, 1, 2$
   Si $f(x,y) = c$ entonces obtenemos que

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{c}{2},$$

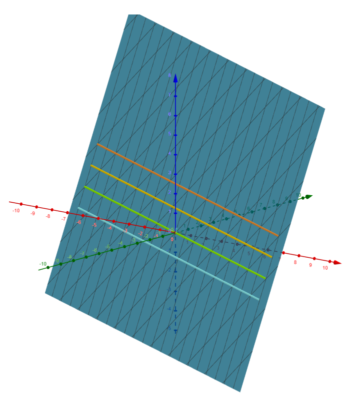
   la cuál es la ecuación de la recta con pendiente $-\frac{1}{2}$ y cruce con el eje y en $\frac{c}{2}$. Con ello vemos que

$$\begin{aligned}
L_{-1}(f) &= \left\{(x,y)|y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right\} \\
L_0(f) &= \left\{(x,y)|y = -\frac{x}{2}\right\} \\
L_1(f) &= \left\{(x,y)|y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right\} \\
L_2(f) &= \left\{(x,y)|y = -\frac{x}{2} + 1\right\}
\end{aligned}$$

   Cuyas gráficas son



   Con ello obtenemos la gráfica de la función f



b) $f(x,y) = xy, c = -1, 0, 1, 2$

Si $f(x,y) = c$ entonces obtenemos que

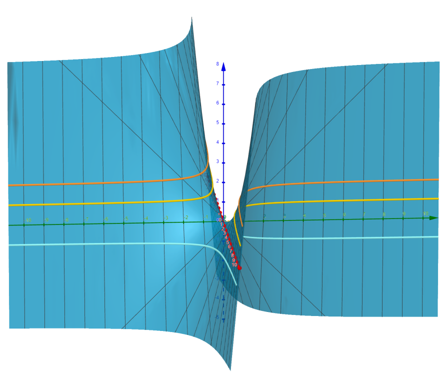
$$y = c/x,$$

la cuál es la ecuación de una hiperbola rotada 45 grados, con eje mayor $y = x$ cuando $c > 0$ y $y = -x$ cuando $c < 0$. Con ello veamos que

$$L_{-1}(f) = \left\{(x,y)|y = -\frac{1}{x}\right\}$$
$$L_0(f) = \{(x,y)|y = 0\}$$
$$L_1(f) = \left\{(x,y)|y = \frac{1}{x}\right\}$$
$$L_2(f) = \left\{(x,y)|y = \frac{2}{x}\right\}$$

Cuyas gráficas son

Con ello obtenemos la gráfica de la función f



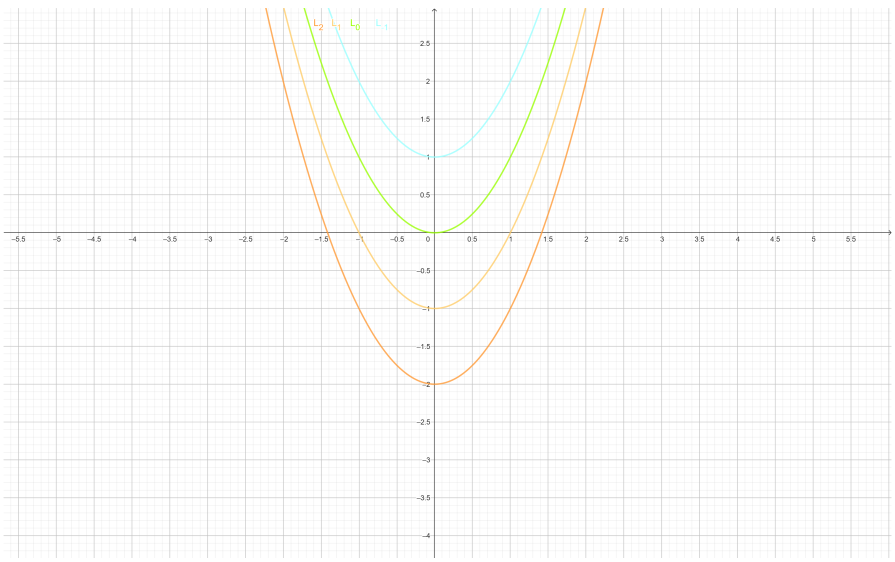
c) $f(x,y) = x^2 - y, c = -1, 0, 1, 2$
Si $f(x,y) = c$ entonces obtenemos que

$$y = x^2 - c,$$

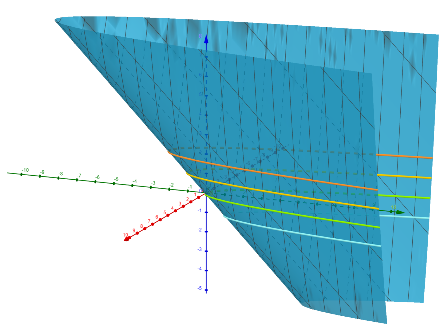
la cuál es la ecuación de una hiperbola rotada 45 grados, con eje mayor $y = x$ cuando $c > 0$ y $y = -x$ cuando $c < 0$. Con ello veamos que

$$\begin{aligned} L_{-1}(f) &= \left\{(x,y)|y = x^2 + 1\right\} \\ L_0(f) &= \{(x,y)|y = 0\} \\ L_1(f) &= \left\{(x,y)|y = x^2 - 1\right\} \\ L_2(f) &= \left\{(x,y)|y = x^2 - 2\right\} \end{aligned}$$

Cuyas gráficas son



Con ello obtenemos la gráfica de la función f



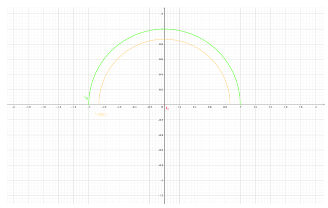
d) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, c = 0, \frac{1}{2}, 1$
Si $f(x,y) = c$ entonces obtenemos que

$$y = \sqrt{1-x^2-c^2},$$

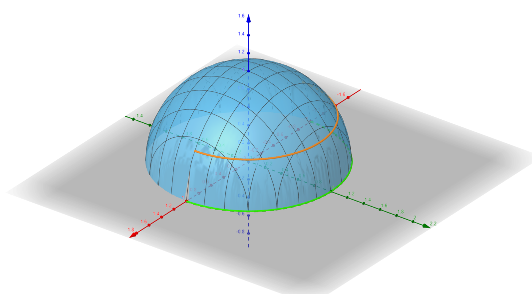
la cuál es la ecuación de una semicircunferencia de radio c sobre el eje x. Con ello veamos que

$$L_0(f) = \left\{(x,y)|y = \sqrt{1-x^2}\right\}$$
$$L_{\frac{1}{2}}(f) = \left\{(x,y)|y = \sqrt{1-x^2-1/4}\right\}$$
$$L_1(f) = \left\{(x,y)|y = \sqrt{-x^2}\right\}$$

Cuyas gráficas son



Con ello obtenemos la gráfica de la función f



12. Sea $\{x_k\} \in \mathbb{R}^n$ una sucesión cuyas coordenadas denotamos por

$$x_k = \{(x_k)_1, \cdots, (x_k)_n\}.$$

Prueba que

$$x_k \to x = (x_1, \cdots, x_n) \quad \text{si y sólo si} \quad (x_k)_i \to x_i, \quad \text{para toda } i : 1, \cdots n.$$

Demostración. Sea $\{x_k\}$ una sucesión tal que converge a x, entonces al ser $\Pi_i(x)$ la $i-esima$ proyección una función continua entonces

$$\lim_{k\to\infty} (x_k)_i = \lim_{k\to\infty} \Pi\,(x_k) = \Pi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \Pi\,(x) = x_i,$$

por lo que $(x_k)_i$ converge a x_i para toda $i : 1, \cdots, n$.

Ahora sean $\{x_k\}$ una sucesión tal que $\lim_{k\to\infty} (x_k)_i \to x_i$, luego por definición tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N_i \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N$ se cumple que $|(x_k)_i - x_i| < \varepsilon$. Sea $N = \max(N_1, \cdots, N_n)$ entonces

$$|(x_k)_1 - x_1| + \cdots + |(x_k)_n - x_n| \leq \varepsilon,$$

y por ser subaditividad y homogeneidad absoluta de la norma obtenemos

$$\|x_k - x\| = \left\|\sum_{i=1}^{N} ((x_k)_i - x_i)\, e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{N} \|((x_k)_i - x_i)\, e_i\| = \sum_{i=1}^{N} |(x_k)_i - x_i|\, \|e_i\| = \sum_{i=1}^{N} |(x_k)_i - x_i| < \varepsilon,$$

donde $\{e_1, \cdots, e_n\}$ es la base canóninca de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto x_k converge a x.

Con lo que concluimos que

$$x_k \to x = (x_1, \cdots, x_n) \quad \text{si y sólo si} \quad (x_k)_i \to x_i, \quad \text{para toda } i : 1, \cdots n.$$

$\square$