Probabilidad
Parcial II - Ejercicio 1

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Ehyter Matías Martín González

15 de noviembre de 2020

Problemas

1. (100 pts.) Sea $Z \sim N(0,1)$ y $X \sim \Gamma(\nu/2, 1/2)$ con $\nu > 0$ no precisamente entero. Utilice el Teorema de Cambio de Variable Multivariado para demostrar que $T = \frac{Z}{\sqrt{X/\nu}}$ tiene distribución t_ν, bajo la hipótesis $Z \perp X$.

   Comenzaremos por ver la distribución de la densidad conjunta de T y X.

   Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $g(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{\frac{y}{\nu}}}, y\right)$, de la cual su función inversa es $g^{-1}(x,y) = \left(x\sqrt{\frac{y}{\nu}}, y\right)$ cuyo determinante Jacobiano es

$$J = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{y}{v}} & \frac{x\sqrt{\frac{y}{\nu}}}{2x} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{y}{\nu}}.$$

   entonces

$$\begin{aligned}
f_{T,X}((z,x)) &= f_{Z,X}(g^{-1}(z,x)) * J && \text{Por el Teorema de Cambio de Variable Multivariado} \\
&= f_{Z,X}\left(\left(z\sqrt{\frac{x}{\nu}}, x\right)\right)\sqrt{\frac{x}{\nu}} \\
&= f_Z\left(z\sqrt{\frac{x}{\nu}}\right) f_X(x)\sqrt{\frac{x}{\nu}} && \text{Por la Independencia de Z y X} \\
&= \left(\frac{e^{-\frac{z^2\frac{x}{\nu}}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right)\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\right)\sqrt{\frac{x}{\nu}}
\end{aligned}$$

   Ahora por definición de densidad marginal tenemos que

$$f_T(z) = \int_0^\infty f_{T,X}((z,x))dx,$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
f_T(z) &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\frac{z^2 \frac{x}{\nu}}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right) \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right) \sqrt{\frac{x}{\nu}} dx \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\left(\sqrt{2\pi v}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty \left(e^{-\left(\frac{z^2}{2\nu}+\frac{1}{2}\right)x} \right) \left(x^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}} \right) dx \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\sqrt{2\pi v}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\left(\frac{z^2}{2\nu}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \frac{\left(e^{-\left(\frac{z^2}{2\nu}+\frac{1}{2}\right)x} \right) \left(x^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{z^2}{2\nu}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)} dx \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\sqrt{2\pi v}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\left(\frac{z^2}{2\nu}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}} \quad \text{Al ser la integral una Gamma con parametros } \left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}, \frac{z^2}{2\nu}+\frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\sqrt{\pi v}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{z^2}{2\nu}+\frac{1}{2} \right)^{-\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}.
\end{aligned}
$$

Al ser la función de densidad de T de una t_v concluimos que

$$T \sim t_v.$$