Probabilidad
Tarea 1

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Antonio Murillo Salas

1 de septiembre de 2021

Nota: Justifique con claridad cada una de las respuestas.

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de probabilidades conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx^2, & x, y \in \{1, \cdots, N\}, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde N es un número natural y c una constante positiva.

a) Determine el valor de c.

Solución 1 – *Por definición de función de probabilidades tenemos que*

$$\sum_{x=1}^{N}\sum_{y=1}^{N} f_{X,Y}(x,y) = 1,$$

entonces

$$1 = \sum_{x=1}^{N}\sum_{y=1}^{N} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=1}^{N}\sum_{y=1}^{N} cx^2 = Nc\frac{N(N+1)(2N+1)}{6},$$

por lo tanto

$$c = \frac{6}{N^2(N+1)(2N+1)}.$$

b) Encuentre las funciones de probabilidades marginal de X y Y.

Solución 2 – *Por definición de función de probabilidades tenemos que*

$$f_X(x) = \sum_{y=1}^{N} f_{X,Y}(x,y),$$

entonces

$$f_X(x) = \sum_{y=1}^{N} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{y=1}^{N} \frac{6}{N^2(N+1)(2N+1)}x^2 = \frac{6x^2}{N(N+1)(2N+1)},$$

claro si $x \in \{1, \cdots, N\}$ *en otro caso* 0, *y análogamente*

$$f_Y(y) = \sum_{x=1}^{N} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=1}^{N} \frac{6}{N^2(N+1)(2N+1)} x^2 = \frac{1}{N}.$$

si $y \in \{1, \cdots, N\}$ *en otro caso* 0*,*

c) ¿Son X y Y variables aleatorias independientes?

Demostración. Puesto que

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{6}{N^2(N+1)(2N+1)} x^2 = \frac{6x^2}{N(N+1)(2N+1)} \frac{1}{N} = f_X(x) f_Y(y),$$

concluimos que X y Y son independientes. □

2. Suponga que (X, Y) un vector aleatorio con función de probabilidades conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx, & x, y \in \{1, \cdots, N\}, x \leq y^2, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde N es un número natural y c una constante positiva. Encuentre la función de probabilidades marginal de X y Y.

Solución 3 − *Comenzaremos por encontrar el valor de c. Por definición de función de probabilidades tenemos que*

$$\sum_{y=1}^{N^2} \sum_{x=1}^{y^2} f_{X,Y}(x,y) = 1,$$

entonces

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{y=1}^{N^2} \sum_{x=1}^{y^2} f_{X,Y}(x,y) \\
&= \sum_{y=1}^{N^2} \sum_{x=1}^{y^2} cx \\
&= c \sum_{y=1}^{N^2} \frac{y^2(y^2+1)}{2} \\
&= \frac{c}{2} \sum_{y=1}^{N^2} y^4 + y^2 \\
&= \frac{c}{2} \left[\frac{N^2(N^2+1)(2N^2+1)(3N^4+3N^2-1)}{30} + \frac{N^2(N^2+1)(2N^2+1)}{6} \right] \\
&= \frac{cN^2(N^2+1)(2N^2+1)(3N^4+3N^2+4)}{60}.
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$c = \frac{60}{N^2(N^2+1)(2N^2+1)(3N^4+3N^2+4)}.$$

Ahora veamos que por definición de función de probabilidades tenemos que

$$f_X(x) = \sum_{y=\lceil \sqrt{x} \rceil}^{N^2} f_{X,Y}(x,y),$$

entonces

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \sum_{y=\lceil \sqrt{x} \rceil}^{N^2} f_{X,Y}(x,y) \\
&= \sum_{y=\lceil \sqrt{x} \rceil}^{N^2} \frac{60}{N^2(N^2+1)(2N^2+1)(3N^4+3N^2+4)} x \\
&= \frac{60x}{N^2(N^2+1)(2N^2+1)(3N^4+3N^2+4)} \left(N - \lceil \sqrt{x} \rceil + 1\right),
\end{aligned}$$

claro si $x \in \left\{1, \cdots, N^2\right\}$ *en otro caso* 0*, y análogamente*

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \sum_{x=1}^{\text{mín}\left(y^2, N^2\right)} f_{X,Y}(x,y) \\
&= \sum_{x=1}^{\text{mín}\left(y^2, N^2\right)} \frac{60}{N^2(N^2+1)(2N^2+1)(3N^4+3N^2+4)} x \\
&= \frac{60}{N^2(N^2+1)(2N^2+1)(3N^4+3N^2+4)} \sum_{x=1}^{\text{mín}\left(y^2, N^2\right)} x \\
&= \frac{30\left(\text{mín}\left(y^2, N^2\right)\left(\text{mín}\left(y^2, N^2\right)+1\right)\right)}{N^2(N^2+1)(2N^2+1)(3N^4+3N^2+4)}.
\end{aligned}$$

si $y \in \left\{1, \cdots, N^2\right\}$ *en otro caso* 0*.*

Notemos que en este caso X *y* Y *no son independientes.*

3. Suponga que $2N$ bolas se colocan al azar en cualquiera de N cajas disponibles. Sea X_i el número de bolas que quedan en la caja i. Encuentre la función de probabilidades conjunta de $X_1, \cdots, X_N$.

   Solución 4 – *Primero veamos que el total de formas de acomodar las* $2N$ *bolas en las* N *cajas por seperadores es*

$$A = \binom{3N-1}{N-1}.$$

Por lo tanto concluimos que la función de distirbución conjunta de $X_1, \cdots, X_N$ *es*

$$f_{x_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_N) = \begin{cases} \frac{1}{\binom{3N-1}{N-1}} & x_1+\cdots+x_N = 2N \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

4. Considere un experimento aleatorio que tiene tres posibles resultados con probabilidades p_1,p_2 y p_3, respectivamente. Suponga que se realizan N ensayos independientes y denote por X_i el número de veces que ocurre el resultado i.

   a) Determine la distribución de $X_1 + X_2$.

   Solución 5 – *Primero veamos que este experimento lo podemos ver para cada resultado i con $i = 1, 2, 3$ como un experimento bernoulli (donde el experimento se considera exitoso si el resutlado es i y fallido si no) con probabilidad $p = p_i$ y $q = 1 - p_i$, luego X_i es la suma de N ensayos independientes de estos experimentos bernoullis, por definición tenemos que $X_i \sim Binomial(N, p_i)$, entonces la suma de binomiales es $X_1+X_2 \sim Binomial(N, p_1+p_2)$.*

   b) Encuentre $\mathbb{P}[X_2 = y | X_1 + X_2 = z], y = 0, 1, \cdots, z$.

   Solución 6 – *Si $X_1+X_2 = z$ entonces sabemos que de z ensayos de un experimento tuvieron resultados $1, 2$, ahora cada uno de esos z ensayos son de un experimento bernoulli con dos posibles resultados $1, 2$. Ahora calcularemos la probabilidad de que en un experimento E el resultado sea 2, por probabilidad condicional*

$$\mathbb{P}[E = 2 | E \in \{1,2\}] = \frac{\mathbb{P}[E = 2, E \in \{1,2\}]}{\mathbb{P}[E \in \{1,2\}]} = \frac{\mathbb{P}[E = 2]}{\mathbb{P}[E \in \{1,2\}]} = \frac{p_2}{p_1 + p_2}.$$

   Entonces la variable aleatoria $X_2 = y | X_1 + X_2 = z$ tiene una distribución Binomial con parametros z, $\frac{p_2}{p_1+p_2}$. Por lo tanto concluimos que

$$\mathbb{P}[X_2 = y | X_1 + X_2 = z] = \binom{z}{y} \left(\frac{p_2}{p_1 + p_2}\right)^y \left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}\right)^{z-y}.$$