Álgebra Lineal I
Tarea 05

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Rafael Herrera Guzmán

02 Marzo 2020

Problemas

1. Sea $P_n(R)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado a lo más n. Defínase

$$T : P_2(\mathbb{R}) + P_3(\mathbb{R})$$

como $T(p(x)) = xp(x) + p'(x)$. Demuestra que es transformación lineal, calcula $N(T)$, $R(T)$ y las dimensiones de dichos subespacios.

Demostración. Sean $p(x), q(x)$ polinimios en $P_2(\mathbb{R})$, y c un número real. Al ser la derivada lineal se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} T(cp(x) + q(x)) &= x(cp(x) + q(x)) + (cp(x) + q(x))' \\ &= c(xp(x)) + xq(x) + cp'(x) + q'(x) \\ &= c(xp(x) + p'(x)) + xq(x) + q'(x) \\ &= cT(p(x)) + T(q(x)) \end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que T es una función lineal. ■

Sea $p(x)$ en $P_2(\mathbb{R})$, por lo que $p(x)$ es de la forma

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

por lo tanto

$$T(p(x)) = (ax^3 + bx^2 + cx) + (2ax + b) = ax^3 + bx^2 + (2a + c)x + b.$$

Veamos como es $N(T)$, por definición

$$N(T) = \{p(x) \in P_2(x) : T(p(x)) = 0\},$$

susitituyendo $T(p(x))$ obtenemos

$$N(T) = \{p(x) \in P_2(x) : ax^3 + bx^2 + (2a + c)x + b = 0\},$$

esto es si y sólo

$$N(T) = \{p(x) \in P_2(x) : a = b = c = 0\},$$

por lo tanto

$$N(T) = \{0\}.$$

Por definición la dimensión de $N(T)$ es 0.
Es turno de fijarnos en $R(T)$, para ello veamos que si $q(x)$ en $P_3(x)$ entonces

$$q(x) = rx^3 + sx^2 + tx + u, \quad r, s, t, u \in \mathbb{R},$$

por definición tenemos que

$$R(T) = \{T(p(x)) : p(x) \in P_2(x)\}.$$

Como $T(p(x))$ esta en $P_3(x)$ entonces

$$T(p(x)) = rx^3 + sx^2 + tx + u,$$

pero por lo visto anteriormente tenemos que

$$ax^3 + bx^2 + (2a + c)x + b = rx^3 + sx^2 + tx + u,$$

por lo tanto

$$R(T) = \{T(p(x)) : s = u.$$

Podemos ver que $\{ax^3, bx^2 + b, cx\}$ es base de $R(T)$, por lo tanto su dimension es 3.

2. Defínase

$$tr : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

como tomar la traza. Demuestra que es una transformación lineal, calcula $N(T)$, $R(T)$ y las dimensiones de dichos subespacios. Da una base de $N(T)$.

Demostración. Sean A, B polinimios en $M_{n,n}(\mathbb{R})$, y c un número real. Definamos $a_{i,j}$ a la entrada de la matriz A en el renglón i columna j, entonces la $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$. Notemos que la entrada $d_{i,j}$ de la matriz $D = cA + B$ es igual a $ca_{i,j} + b_{i,j}$ por definición de suma y producto escalar de matrices.

Ahora veamos lo siguiente

$$\begin{aligned} tr(cA+B) &= \sum_{i=1}^{n} ca_{i,i} + b_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} ca_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \\ &= c\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \\ &= c(tr(A)) + tr(B) \end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que tr es una función lineal. ■

Sea $A_{i,j}$ en $M_{n,n}(\mathbb{R})$ tal que $a_{i,j} = 1$ y $a_{ii,jj} = 0$ para todo $ii \neq i$, $jj \neq j$.

Por definición $N(tr) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}$, por la tarea anterior sabemos que una base de $N(tr)$ es $\{A_{i,j} : i \neq j\} \cup \{B_{i,i} = A_{i,i} - A_{i+1,i+1} : \forall i < n\}$, por tanto su dimensión es $N^2 - 1$.

Podemos ver que $R(tr) = \mathbb{R}$, por lo que la dimensión de este es 1.

3. Defínase

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x-2y+z, 2x-3y+z) \end{aligned}$$

Demuestra que T es una transformación lineal, calcula $N(T)$, $R(T)$ y las dimensiones de dichos subespacios. Da una base de $N(T)$.

Demostración. Sean $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbb{R}^3$, y c un número real. Ahora veamos lo siguiente

$$\begin{aligned} T(cv_1 + v_2) &= T((cx_1 + x_2, cy_1 + y_2, cz_1 + z_2)) \\ &= ((cx_1 + x_2) - 2(cy_1 + y_2) + (cz_1 + z_2), \\ &2(cx_1 + x_2) - 3(cy_1 + y_2) + (cz_1 + z_2)) \\ &= c(x_1 - 2y_1 + z_1, 2x_2 - 3y_2 + z_2) \\ &= cT(A) + T(B) \end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que tr es una función lineal. ■

Por definición $N(T) = \{v \in \mathbb{R}^3 : T(v) = (x-2y+z, 2x-3y+z) = 0\}$, por la tarea anterior sabemos que una base de $N(T)$ es $\{(1,1,1)\}$, por tanto su dimensión es 1.

Podemos ver que $R(T) = \mathbb{R}^2$, por lo que la dimensión de este es 2.

4. Sea $T : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Demuestra que

   (a) Si $n < m$, entonces T no puede ser sobreyectiva.
   Como $Nity(T) + rank(T) = n$ entonces

   $$rank(T) \leq n < m,$$

   al ser $R(T) \subset \mathbb{R}^m$ concluimos que T no es sobreyectiva.

   (b) Si $n > m$, entonces T no puede ser inyectiva.

   $$Nity(T) = n - rank(T) \geq n - m > 0,$$

   por lo que concluimos que T no es inyectiva.

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}$ una transformación lineal. Demostrar que existen escalares a, b y c tales que $T(x, y, z) = ax + by + cz$ para toda $(x, y, z) \in R^3$. ¿Se puede generalizar este resultado para $T : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$? Enunciar y demostrar un resultado semejante para $T : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$.