Probabilidad
Tarea IV - Ejercicio 3

Rubén Pérez Palacios
Ricardo Alberto Gloria Picazzo
Mercé Nachón Moreno
Profesor: Dr. Ehyter Matías Martín González

26 de octubre de 2020

Problemas

1. (Rubén Pérez Palacios) Sea $\{\vec{X}_n\}$ vectores aleatorios iid de tamaño d con vector de medias $\vec{\mu}$ y matriz de covarianzas invertible Σ. Definamos el vector de medias muestral y la matriz de covarianzas muestral, respectivamente, como

$$\overline{\vec{X}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \vec{X}_j, \quad \mathcal{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(\vec{X}_j - \overline{\vec{X}}\right)^t \left(\vec{X}_j - \overline{\vec{X}}\right).$$

Demuestre que

$$\vec{Y}_n = \sqrt{n}\left(\overline{\vec{X}}_n - \vec{\mu}\right), \vec{Y}_n \sim N_d(\vec{0}, \Sigma),$$

$$\mathcal{S}_n^2 \overset{c.s.}{\to} \Sigma \ \text{ (entrada por entrada)}.$$

- Sea $\{Z_1\}$ una sucesión variables aleatorias iid con media μ y varianza σ^2 entonces

$$\sqrt{n}\left(\overline{\vec{Z}}_n - \mu\right) \overset{d}{\to} N\left(0, sigma^2\right).$$

Demostración. Por el teorema del límite central tenemos

$$\frac{\left(\overline{\vec{Z}}_n - \mu\right)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{d}{\to} N\left(0,1\right),$$

luego como

$$\sigma N\left(0,1\right) \sim N\left(0, \sigma^2\right),$$

entonces por slutsky concluimos que

$$\sqrt{n}\left(\overline{\vec{Z}}_n - \mu\right) \overset{d}{\to} N\left(0, sigma^2\right).$$

□

- $\vec{Y}_n \sim N_d\left(\vec{0}, \Sigma\right)$

  Demostración. Comenzaremos por ver como se comporta una combinación lineal de las variables aleatorias $\{Z_1, \cdots, Z_d\}$. Entonces podemos ver que toda combinación lineal de estas variables aleatorias se puede expresar como $\vec{Z}a^t$, donde $\vec{Z}$ es el vector con coordenadas las Z_i y $a \in \mathbb{R}^d$. La media de $\vec{Z}a^t$ es por linealidad de la esperanza lo siguiente

  $$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i Z_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}\left[Z_i\right].$$

  Así como la varianza es

  $$\begin{aligned}
  Var\left(\vec{Z}a^t\right) &= Cov(\sum_{i=1}^{n} a_i Z_i, \sum_{j=1}^{n} a_j Z_j) && \text{definición de varianza}\\
  &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(a_i Z_i, a_j Z_j) && \text{linealidad de la covarianza}\\
  &= \sum_{i=1}^{n} Cov(a_i Z_i, a_i Z_i) + \sum_{1\le i<j\le n}^{n} Cov(a_i Z_i, a_j Z_j) && \text{reagrupando las sumas}\\
  &= \sum_{i=1}^{n} Var(a_i Z_i) + \sum_{1\le i<j\le n}^{n} Cov(a_i Z_i, a_j Z_j) && \text{definición de varianza}\\
  &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(Z_i) + \sum_{1\le i<j\le n}^{n} a_i a_j Cov(Z_i, Z_j) && \text{linealidad de la var y la cov}
  \end{aligned}$$

  Ahora sea Σ la matriz de covarianzas de $\vec{Z}$ entonces

  $$a\Sigma a^t = Var(\vec{Z}a^t).$$

  Ahora si nos fijamos en la función característica de Y_n la cual es

  $$\Phi_{\vec{Y}_n}(a) = \mathbb{E}\left[e^{i\vec{Y}_n a^t}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i\left(\sqrt{n}\left(\vec{\overline{X}}_n - \vec{\mu}\right)\right)a^t}\right],$$

  haciendo uso del inciso anterior sobre las $\vec{X}_n a^t$ cuyas esperanza es μa^t y varianza es $a\Sigma a^t$, obtenemos

  $$\sqrt{n}\left(\vec{Y}_n - \mu\right) a^t \xrightarrow{d} N\left(0, a\Sigma a^t\right),$$

  por lo tanto

  $$\phi_{\vec{Y}_n}(a) \to \phi_{N(0,\Sigma)}(a),$$

  por el teorema 9.1 concluimos que

  $$\vec{Y}_n \sim N\left(0, \sigma\right).$$

  □

- $\mathcal{S}_n^2 \overset{c.s.}{\to} \Sigma$ (entrada por entrada)

  Demostración. Empezaremos por expresar a S_n^2 de una forma mas conveniente y así poder encontrar una expresión de sus entrada completamente en términos de las entradas del vector aleatorio.

$$
\begin{aligned}
\frac{n-1}{n} S_n^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{X}_j - \vec{\overline{X}}\right)^t \left(\vec{X}_j - \vec{\overline{X}}\right) \\
&\text{por definición de var. muestral} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{X}_j^t - \vec{\overline{X}}^t\right) \left(\vec{X}_j - \vec{\overline{X}}\right) \\
&\text{por linealidad de la transpuesta} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{X}_j^t \vec{X}_j - \vec{\overline{X}}^t \vec{X}_j - \vec{X}_j^t \vec{\overline{X}} + \vec{\overline{X}}^t \vec{\overline{X}}\right) \\
&\text{por la distrib. del prod. de matr.} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{X}_j^t \vec{X}_j\right) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{\overline{X}}^t \vec{X}_j\right) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{X}_j^t \vec{\overline{X}}\right) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{\overline{X}}^t \vec{\overline{X}}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{X}_j^t \vec{X}_j\right) - \frac{1}{n} \vec{\overline{X}}^t \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{X}_j\right) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{X}_j^t\right) \vec{\overline{X}} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{\overline{X}}^t \vec{\overline{X}}\right) \\
&\text{por la distrib. del prod. de matr.} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{X}_j^t \vec{X}_j\right) - \frac{1}{n} \vec{\overline{X}}^t \left(n \vec{\overline{X}}\right) - \frac{1}{n} \left(n \vec{\overline{X}}^t\right) \vec{\overline{X}} + \left(\vec{\overline{X}}^t \vec{\overline{X}}\right) \\
&\text{por definición de varianza muestral} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{X}_j^t \vec{X}_j\right) - \left(\vec{\overline{X}}^t \vec{\overline{X}}\right) - \left(\vec{\overline{X}}^t \vec{\overline{X}}\right) + \left(\vec{\overline{X}}^t \vec{\overline{X}}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{X}_j^t \vec{X}_j\right) - \left(\vec{\overline{X}}^t \vec{\overline{X}}\right),
\end{aligned}
$$

  Denotaremos por para un vector Z a $(Z)_i$ como la $i-esima$ entrada, analogamente para una matriz A denotaremos $(A)_{(i,j)}$ como la entrada en el renglón i columna j. Ahora veamos como es la entrada $\left(\frac{n-1}{n} S_n^2\right)_{(i,j)}$

$$
\left(\frac{n-1}{n} S_n^2\right)_{(i,j)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\vec{X}_k\right)_i \left(\vec{X}_k\right)_j - \left(\vec{\overline{X}}\right)_i \left(\vec{\overline{X}}\right)_j
$$

  por la ley de grandes números tenemos que

$$
\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\vec{X}_k\right)_i \left(\vec{X}_k\right)_j \overset{a.s}{\to} \mathbb{E}\left[\left(\vec{(}X)_1\right)_i \left(\vec{(}X)_1\right)_j\right]
$$

$$\left(\vec{\overline{X}}\right)_i \overset{a.s}{\to} (\mu)_i$$

al converger casi seguramente entonces podemos hacer operaciones con esto debido a las propiedades de los límites en los reales, entonces

$$\left(\vec{\overline{X}}\right)_i \left(\vec{\overline{X}}\right)_j \overset{a.s}{\to} (\mu)_i (\mu)_j ,$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(\vec{X}_k\right)_i \left(\vec{X}_k\right)_j - \left(\vec{\overline{X}}\right)_i \left(\vec{\overline{X}}\right)_j \overset{a.s}{\to} \mathbb{E}\left[\left(\vec{(}X)_1\right)_i \left(\vec{(}X)_1\right)_j\right] - (\mu)_i (\mu)_j ,$$

por definición de covarianza y al ser $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$ concluimos

$$\left(S_n^2\right)_{i,j} = Cov\left(\left(\vec{X}_1\right)_i , \left(\vec{X}_1\right)_j\right).$$

□