Probabilidad
Tarea II - Problema 5

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Ehyter Matías Martín González

20 de Septiembre 2020

Problemas

1. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorías con varianza finita σ^2. Sea

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \overline{X}_n\right)^2.$$

S_n^2 se le conoce como la **varianza muestral** construida con la muestra aleatroia $X_1, \cdots, X_n$. Demuestre que $S_n^2 \to \sigma$ cuando $n \to \infty$ en *c.s*.

Veamos primero la convergencia en *c.s* esto pues veamos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{n-1}{n}S_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((X_i - \mu) + \left(\mu - \overline{X}_n\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + \frac{2\left(\mu - \overline{X}_n\right)}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mu - \overline{X}_n\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + \frac{2\left(\mu - \overline{X}_n\right)}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i - \sum_{i=1}^{n}\mu\right) + \left(\mu - \overline{X}_n\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2\left(\overline{X}_n - \mu\right)^2 + \left(\mu - \overline{X}_n\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - \left(\overline{X}_n - \mu\right)^2
\end{aligned}$$

Luego por ley de grandes números sabemos

$$X_n \xrightarrow{c.s} \mu$$

También por ley de grandes números tenemos

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \xrightarrow{c.s} E\left[(X_i-\mu)^2\right]=\sigma^2$$

Por lo tanto concluimos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n^2 &= \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}S_n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-\left(\overline{X}_n-\mu\right)^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-\lim_{n\to\infty}\left(\overline{X}_n-\mu\right)^2 \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$