Probabilidad
Parcial II

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Ehyter Matías Martín González

15 de noviembre de 2020

Problemas

1. (100 pts.) Sea $Z \sim N(0,1)$ y $X \sim \Gamma(\nu/2, 1/2)$ con $\nu > 0$ no precisamente entero. Utilice el Teorema de Cambio de Variable Multivariado para demostrar que $T = \frac{Z}{\sqrt{X/\nu}}$ tiene distribución t_ν, bajo la hipótesis $Z \perp X$.

   Comenzaremos por ver la distribución de la densidad conjunta de T y X.

   Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $g(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{\frac{y}{\nu}}}, y\right)$, de la cual su función inversa es $g^{-1}(x,y) = \left(x\sqrt{\frac{y}{\nu}}, y\right)$ cuyo determinante Jacobiano es

$$J = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{y}{v}} & \frac{x\sqrt{\frac{y}{\nu}}}{2x} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{y}{\nu}}.$$

   entonces

$$\begin{aligned}
f_{T,X}((z,x)) &= f_{Z,X}(g^{-1}(z,x)) * J && \text{Por el Teorema de Cambio de Variable Multivariado} \\
&= f_{Z,X}\left(\left(z\sqrt{\frac{x}{\nu}}, x\right)\right)\sqrt{\frac{x}{\nu}} \\
&= f_Z\left(z\sqrt{\frac{x}{\nu}}\right) f_X(x)\sqrt{\frac{x}{\nu}} && \text{Por la Independencia de Z y X} \\
&= \left(\frac{e^{-\frac{z^2\frac{x}{\nu}}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right)\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\right)\sqrt{\frac{x}{\nu}}
\end{aligned}$$

   Ahora por definición de densidad marginal tenemos que

$$f_T(z) = \int_0^\infty f_{T,X}((z,x))dx,$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
f_T(z) &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\frac{z^2 \frac{x}{\nu}}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right)\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\right)\sqrt{\frac{x}{\nu}}dx \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\left(\sqrt{2\pi v}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty \left(e^{-\left(\frac{z^2}{2\nu}+\frac{1}{2}\right)x}\right)\left(x^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\right)dx \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\sqrt{2\pi v}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\left(\frac{z^2}{2\nu}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \frac{\left(e^{-\left(\frac{z^2}{2\nu}+\frac{1}{2}\right)x}\right)\left(x^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{z^2}{2\nu}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}dx \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\sqrt{2\pi v}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\left(\frac{z^2}{2\nu}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}} \quad \text{Al ser la integral una Gamma con parametros } \left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}, \frac{z^2}{2\nu}+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\sqrt{\pi v}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(\frac{z^2}{2\nu}+\frac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}.
\end{aligned}
$$

Al ser la función de densidad de T de una t_v concluimos que

$$
T \sim t_v.
$$

2. (100 pts.) Sean $X \sim \Gamma(\nu/2, 1/2)$ y $Y \sim \Gamma(\mu/2, 1/2)$ con $\nu, \mu > 0$ no precisamente enteros. Utilizando Probabilidad Total halle la distribución de $F = \frac{\mu X}{\nu Y}$, bajo la hipótesis $X \perp Y$.

Encontraremos la distribución de F

$$F_f(x) = P\left[F \leq x\right]$$

$$= \int_0^{\infty} P\left[F \leq x | Y = y\right] f_Y(y) dy$$

Por Probabilidad Total sobre Y

$$= \int_0^{\infty} P\left[\frac{\mu X}{\nu y} \leq x\right] f_Y(y) dy$$

Por independencia de X y Y

$$= \int_0^{\infty} P\left[X \leq x\left(\frac{\nu y}{\mu}\right)\right] f_Y(y) dy$$

Ya que $P\left[g(X) \leq t\right] = P\left[X \leq g^{-1}(t)\right]$

$$= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{x} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \left(x\left(\frac{\nu y}{\mu}\right)\right)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x\left(\frac{\nu y}{\mu}\right)}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\nu y}{\mu}\right) dx\right) f_Y(y) dy$$

Por el Teorema de Cambio de Variable

$$= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{x} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \left(x\left(\frac{\nu y}{\mu}\right)\right)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x\left(\frac{\nu y}{\mu}\right)}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\nu y}{\mu}\right) dx\right) \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu}{2}} y^{\frac{\mu}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}\right) dy$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{x} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \left(x\left(\frac{\nu y}{\mu}\right)\right)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x\left(\frac{\nu y}{\mu}\right)}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\nu y}{\mu}\right) \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu}{2}} y^{\frac{\mu}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}\right) dx\right) dy$$

$$= \int_0^{x} \left(\int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}} \left(x\left(\frac{\nu y}{\mu}\right)\right)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x\left(\frac{\nu y}{\mu}\right)}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\nu y}{\mu}\right) \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\mu}{2}} y^{\frac{\mu}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}\right) dy\right) dx$$

Por Fubini

$$= \int_0^{x} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{\nu}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1} \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}} (y)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}-1} e^{-\left(\frac{x\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{2}+\frac{1}{2}\right)y} dy\right) dx$$

$$= \int_0^{x} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{\nu}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1} \left(1 + x\frac{\nu}{\mu}\right)^{-\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}\right)}$$

$$\left(\int_0^{\infty} \left(\left(1 + x\frac{\nu}{\mu}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}} (y)^{\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}-1} e^{-\left(\frac{x\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{2}+\frac{1}{2}\right)y} dy\right) dx$$

$$= \int_0^{x} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{\nu}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1} \left(1 + x\frac{\nu}{\mu}\right)^{-\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}\right)} dx$$

Al ser la integral de una Gama con parametros $\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}, \left(1 + x\frac{\nu}{\mu}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

Por lo tanto

$$f_F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{\nu}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1} \left(1 + x\frac{\nu}{\mu}\right)^{-\left(\frac{\nu}{2}+\frac{\mu}{2}\right)},$$

con lo que concluimos que

$$F \sim F(\nu, \mu).$$

3. Una sucesión de vectores aleatorios $\{\vec{X}_n\}$ converge en distribución a otro vector aleatorio $\vec{X}$ ssi $F_{\vec{X}_n}(\vec{x})$ converge a $F_{\vec{X}}(\vec{x})$ para todo $\vec{x}$ en el que $F_{\vec{X}}$ es continua (según la distancia euclidiana).

   a) (70 pts.) Demuestre que si $\{\vec{X}_n\}$ es una sucesión de vectores aleatorios tales que convergen en distribución a $\vec{X}$, entonces cada entrada de $\{\vec{X}_n\}$ converge a la correspondiente entrada de $\vec{X}$. ¿Se cumple el recíproco?

   Por el Teorema 8.1 tenemos que para todo función g acotada y continua se cumple que $\vec{X}_n \xrightarrow{d} X$ si y sólo si

$$E\left[g\left(\vec{X}_n\right)\right] \xrightarrow{E} [(g(X))],$$

   ahora sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada, y $h(\vec{X}) = \left(\vec{X}\right)_i$ la proyección del vector a la $i - esima$ componente la cual es una función continua, por lo que $f \circ h$ es un función continua y acotada. Si tomamos $g = f \circ h$ entonces

$$E\left[f\left(h\left(\vec{X}_n\right)\right)\right] = E\left[f\left(g\left(\vec{X}\right)\right)\right],$$

   por lo tanto concluimos

$$E\left[f\left(\left(\vec{X}_n\right)_i\right)\right] = E\left[f\left(\left(\vec{X}\right)_i\right)\right].$$

   El recíproco no es cierto ya que si tomamos $X_n = X = -Y_n = Y$ una sucesión de variables aleatorias donde $X \sim Y \sim N(\mu, \sigma)$, entonces
   $X_n + Y_n \sim Z$
   donde Z es una variable degenerada en 0. Por lo tanto (X_n, Y_n) no converge a (X, Y).

b) (30 pts.) Sea $\vec{X} \sim N_d(\mu\vec{1}, \sigma^2 I_d)$. Halle la distribución de $\overline{X}_d$ condicionada a $\max\{X_1, \ldots, X_d\} - \min\{X_1, \ldots, X_d\}$.

4. (100 pts.) Sean $\{X_n\}$ variables aleatorias iid con media μ y varianza finita σ^2. Demuestre que

$$\sqrt{n}e^{\overline{X}_n} - e^{\mu} \xrightarrow{d} \sigma e^{\mu} Z, \quad Z \sim N(0,1).$$

Teorema 1 – *(Metodo Delta) Sean $\{X_n\}$ variables aleatorias iid con media μ y varianza finita σ^2, y g una función derivable cuya derivado no se anula, entonces*

$$\sqrt{n}\left(\frac{g\left(\overline{X}_n\right) - g\left(\mu\right)}{\sigma g'(\mu)}\right) \xrightarrow{d} Z, Z \sim N(0,1).$$

Demostración. Por el teorema de limite central tenemos que

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right) \xrightarrow{d} Z, Z \sim N(0,1).$$

Por el teorema del Bebe de Skorohod tenemos que existen Y_n' y Z' tales que

$$Y_n' \sim \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right), \quad Z' \sim Z,$$

y que

$$\lim_{n\to\infty} Y_n' = Z'.$$

Entonces

$$\overline{X}_n \sim \mu + \frac{\sigma Y_n'}{\sqrt{n}},$$

por lo que

$$g\left(\overline{X}_n\right) \sim g\left(\mu + \frac{\sigma Y_n'}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\sqrt{n}\left(\frac{g\left(\overline{X}_n\right) - g\left(\mu\right)}{\sigma g'(\mu)}\right) \sim \sqrt{n}\left(\frac{g\left(\mu + \frac{\sigma Y_n'}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\mu\right)}{\sigma g'(\mu)}\right),$$

multiplicando por $1 = \frac{Y_n'}{Y_n'}$ obtenemos

$$\sqrt{n}\left(\frac{g\left(\overline{X}_n\right) - g\left(\mu\right)}{\sigma g'(\mu)}\right) \sim \left(\frac{g\left(\mu + \frac{\sigma Y_n'}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\mu\right)}{\frac{\sigma Y_n'}{\sqrt{n}}}\right)\left(\frac{Y_n'}{g'(\mu)}\right).$$

Por definición de $g'(\mu)$ y que $\frac{\sigma Y_n'}{\sqrt{n}} \xrightarrow{c.s.} 0$ tenemos que

$$g'(\mu) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{g\left(\mu + \frac{\sigma Y_n'}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\mu\right)}{\frac{\sigma Y_n'}{\sqrt{n}}}\right),$$

además como

$$\lim_{n\to\infty} Y_n' = Z',$$

concluimos que

$$\sqrt{n}\left(\frac{g\left(\overline{X}_n\right) - g\left(\mu\right)}{\sigma g'(\mu)}\right) \xrightarrow{d} g'(\mu)\frac{Z'}{g'(\mu)} = Z' \sim Z \sim N(0,1).$$

□

Ahora seguiremos por demostrar el ejercicio

Demostración. Un corolario del teorema anterior es que

$$\sqrt{n}\left(g\left(\overline{X}_n\right) - g\left(\mu\right)\right) \xrightarrow{d} \sigma g'(\mu) Z, Z \sim N(0,1),$$

esto por Slutsky.
Tomando $g(x) = e^x$ obtenemos

$$\sqrt{n}\left(e^{\overline{X}_n} - e^{\mu}\right) \xrightarrow{d} \sigma e^{\mu} Z, Z \sim N(0,1)$$

□

5. (100 pts.) Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias iid cuya función de distribución tiene extremo derecho infinito. Para $x > 0$ fijo, sea

$$T(x) := \text{ínf}\{n \in \mathbb{N} : X_n > x\}.$$

$T(x)$ es el índice de la primera variable de la sucesión que toma un valor mayor a x. Sea X otra variable aleatoria con la misma distribución que las X_n e independiente de todas las X_n y sea $\{Y_n\}$ v.a. iid con distribución $Bernoulli(\mathbb{P}[X > x])$. Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario, demuestre que

$$\frac{1}{mx} T(x) \sum_{j=1}^{\lceil mx \rceil} Y_j \xrightarrow{d} E, x \to \infty, \quad E \sim exp(1).$$

6. (10 pts. extra en la nota final del examen). Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y definamos

$$\partial A := \{x : \exists\{y_n\} \subseteq A, y_n \to x \wedge \exists\{z_n\} \subseteq A^c, z_n \to x\}.$$

∂A se conoce como la **frontera de** A. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. con funciones de distribución $\{F_n\}$ y sea X otra v.a. con función de distribución F. Demuestre que $X_n \stackrel{d}{\to} X$ssi

$$\int_A F_n(dx) \to \int_A F(dx), n \to \infty,$$

para todo A tal que $F(\partial A) = 0$. $(F(A) := \mathbb{P}[X \in A])$.