# Probabilidad
# Parcial II

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Ehyter Matías Martín González

19 de noviembre de 2020

## Problemas

1. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Prueba las siguientes afirmaciones e interpreta geométricamente:

   *a*) $\|\gamma(t)\|$ es constante si y sólo si $\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$ para toda $t \in I$.
   Consideremos la función $s(t) = \|\gamma(t)\|^2 = \langle t, t \rangle$, entonces veamos que por linealidad del producto interior se cumple

$$
\begin{aligned}
\frac{s(t+h) - s(t)}{h} &= \frac{\langle \gamma(t+h), \gamma(t+h) \rangle - \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle}{h} \\
&= \frac{\langle \gamma(t+h), \gamma(t+h) \rangle - \langle \gamma(t), \gamma(t+h) \rangle + \langle \gamma(t+h), \gamma(t) \rangle - \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle}{h} \\
&= \frac{\langle \gamma(t+h) - \gamma(t), \gamma(t+h) \rangle + \langle \gamma(t+h) - \gamma(t), \gamma(t) \rangle}{h} \\
&= \frac{\langle \gamma(t+h) - \gamma(t), \gamma(t+h) + \gamma(t) \rangle}{h} \\
&= \left\langle \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}, \gamma(t+h) + \gamma(t) \right\rangle
\end{aligned}
$$

   Entonces

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} &= \lim_{h \to 0} \left\langle \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}, \gamma(t+h) + \gamma(t) \right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}, \lim_{h \to 0} \gamma(t+h) + \gamma(t) \right\rangle = \langle \gamma'(t), 2\gamma(t) \rangle \\
&= 2 \langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle .
\end{aligned}
$$

   Por lo tanto $s'(t) = 0$ si y sólo si $\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$. Como $\|\gamma(t)\|$ es constante es si y sólo si $s(t)$ es constante y $s(t)$ es constante si y sólo si $s'(t) = 0$, entonces concluimos que $\|\gamma(t)\|$ es constante si y sólo si $\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$ para toda $t \in I$.

   *b*) Sea $r(t) = \|\gamma(t)\|$. Si $r(t_0)$ es un máximo o un mínimo local de r, entonces $\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0$.

2. Sea $gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ continua con $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$ y definamos:

$$\int_a^b \gamma(t)dt = \left( \int_a^b \gamma_1(t)dt, \cdots, \int_a^b \gamma_m(t)dt \right).$$

Prueba:

*a*) Si $c = (c_1, \cdots, c_m)$ es un vector constante, entonces

$$\int_a^b \langle c, \gamma(t) \rangle \, dt = \left\langle c, \int_a^b \gamma(t)dt \right\rangle.$$

*Demostración.* Por definición de producto punto

$$\langle c, \gamma(t) \rangle = \sum_{i=1}^m c_i \gamma_i(t),$$

entonces

$$\int_a^b \langle c, \gamma(t) \rangle \, dt = \int_a^b \left( \sum_{i=1}^m c_i \gamma_i(t) \right) dt,$$

por linealidad de la integral obtenemos

$$\int_a^b \langle c, \gamma(t) \rangle \, dt = \sum_{i=1}^m c_i \int_a^b \gamma_i(t)dt,$$

por definición de producto punto concluimos

$$\int_a^b \langle c, \gamma(t) \rangle \, dt = \left\langle c, \int_a^b \gamma(t)dt \right\rangle.$$

$\square$

*b*) H

$$\left\| \int_a^b \gamma(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| \, dt,$$

*Demostración.* Sea $s \in [a,b]$ entonces por linealidad de la integral tenemos

$$\left\| \int_a^b \gamma(t)dt \right\| \left( \int_a^b \|\gamma(s)\| \, ds \right) = \int_a^b \left\| \int_a^b \gamma(t)dt \right\| \|\gamma(s)\| \, ds,$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\left\| \int_a^b \gamma(t)dt \right\| \left( \int_a^b \|\gamma(s)\| \, ds \right) \geq \int_a^b \left\langle \int_a^b \gamma(t)dt, \gamma(s) \right\rangle ds,$$

por el inciso anterior se cumple

$$\left\|\int_a^b \gamma(t)dt\right\|\left(\int_a^b \|\gamma(s)\|\, ds\right) \geq \left\langle \int_a^b \gamma(t)dt, \int_a^b \gamma(s)ds \right\rangle,$$

por definición de norma esto es

$$\left\|\int_a^b \gamma(t)dt\right\|\left(\int_a^b \|\gamma(s)\|\, ds\right) \geq \left\|\int_a^b \gamma(t)dt\right\|^2,$$

por lo tanto concluimos

$$\int_a^b \|\gamma(s)\|\, ds \geq \left\|\int_a^b \gamma(t)dt\right\|$$

□

*c*) si $\gamma$ es diferenciable entonces

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \ell(\Gamma),$$

donde $\Gamma = \gamma\left([a,b]\right)$.

*Demostración.* Por el inciso anterior tenemos

$$\int_a^b \|\gamma'(s)\|\, ds \geq \left\|\int_a^b \gamma'(t)dt\right\|,$$

por el Teorema fundamental del Cálculo concluimos

$$\int_a^b \|\gamma'(s)\|\, ds \geq \|\gamma\left(a\right) - \gamma\left(b\right)\|.$$

□

3. (Las líneas minimizan la distancia entre dos puntos) Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$ y $\Gamma$ una curva que los une con parametrización diferenciable regular $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, i.e. $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$. Prueba:

*a*) Si $u \in R^3$ es un vector unitario cualquiera, entonces

$$\langle \gamma'(t), u \rangle \leq \|\gamma'(t)\|, \quad (t \in [a,b]).$$

*Demostración.* Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\langle \gamma'(t), u \rangle \leq \|\gamma'(t)\|\, \|u\|,$$

al ser $u$ un vector unitario concluimos

$$\langle \gamma'(t), u \rangle \leq \|\gamma'(t)\|.$$

□

*b*) H

$$\langle y - x, u \rangle \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

*Demostración.* Por el inciso anterior obtenemos

$$\int_a^b \langle \gamma'(t), u \rangle \, dt \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt,$$

por el ejercicio 4.$a$ obtenemos

$$\left\langle \int_a^b \gamma'(t)dt, u \right\rangle \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt,$$

por el teorema fundamental del cálculo concluimos

$$\langle y - x, u \rangle \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

□

$c$) haciendo $u = \frac{y-x}{\|y-x\|}$ en el ejercicio anterior obtenemos

$$\left\langle y - x, \frac{y-x}{\|y-x\|} \right\rangle \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt,$$

por linealidad del producto punto obtenemos

$$\frac{\langle y-x, y-x \rangle}{\|y-x\|} \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt,$$

por definición de norma esto es

$$\frac{\|y-x\|^2}{\|y-x\|} \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt,$$

por lo tanto

$$\|y-x\| \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Esto es, la curva de longitud más corta que une a los puntos $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$ es el segmento de línea recta que los une.

4. Prueba el teorema del valor intermedio para derivadas direccionales: Sean $a, b \in \Omega$ tales que el segmento $[a, b] \in \Omega$ y hagamos $u = \frac{b-a}{\|b-a\|} \in \mathbb{R}^n$. Si $D_u f(x)$ existe para toda $X \in [a, b]$ entonces existe $\xi \in (0, \|b-a\|)$ tales que si $\widehat{\xi} = a + \xi u$ entonces

$$f(b) - f(a) = \|b-a\| \, D_u f(\widehat{\xi}).$$

*Demostración.* Hola □