Tarea 4, Probabilidad
Ejercicio 2

Integrantes: Ricardo Alberto Gloria Picazo, Rubén Pérez Palacios y Mercé Nachón Moreno

Demostración. *(Mercé Nachón Moreno)*

(a) *Si* $\vec{X}$ *es de dimensión* d *y* $A \in M_{q\times d}$*, entonces* $\vec{X}A^t$ *tiene dimensión* q*. Ahora tomemos* $a \in \mathbb{R}^q$ *tal que*

$$\begin{aligned}(\vec{X}A^t)a^t &= \vec{X}(A^t a^t)\\ &= \vec{X}(aA)^t.\end{aligned}$$

Llamemos $b^t = (aA)^t \in \mathbb{R}^d$ *a modo que*

$$\vec{X}b^t \sim N(\vec{\mu}b^t, b\Sigma b^t),$$

es decir

$$(\vec{X}A^t)a^t \sim N((\vec{\mu}A^t)a^t, a(A\Sigma A^t)a^t).$$

Se sigue por la Definición 9.3*:*

$$\vec{X}A^t \sim N_q(\vec{\mu}A^t, A\Sigma A^t).$$

(b) *Veamos que el producto de una matriz $B \in M_{n\times l}$ con su transpuesta es de la forma*

$$BB^t = \sum_{k=1}^{l} \vec{b_k}\vec{b_k}^t, \tag{1}$$

donde $\vec{b_k}$ es la k-ésima columna vector de A. Además es fácil ver que para $C \in B \in M_{l\times m}$

$$\begin{aligned} x &= \vec{b}^t\vec{c} \\ y &= \vec{c}^t\vec{b} = x^t = x \\ xy &= \vec{b}^t\vec{c}\vec{c}^t\vec{b} = x^2 \\ &= \left(\vec{b}^t\vec{c}\right)^2. \end{aligned}$$

El producto de inversas se define como

$$(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}.$$

Para una matriz B resolvamos $B\vec{u} = \sigma\vec{u}$. Donde σ será un valor propio de la matriz y $\vec{u}$ un vector propio. Cuando colocamos los vectores propios en una matriz U de tal forma que

$$\begin{aligned} BU &= U\Lambda \\ B &= U\Lambda U^{-1} \end{aligned}$$

donde Λ es la matriz diagonal de los valores propios λ_i. Para matrices simétricas U será una matriz ortogonal, es decir $U^{-1} = U^t$ y así

$$B = U\Lambda U^t.$$

Además si queremos $B = B^{1/2}B^{1/2}$ o B^{-1}, entonces

$$B^{1/2} = U\Lambda^{1/2}U^t$$

y

$$\begin{aligned} B^{-1} &= (U\Lambda U^{-1})^{-1} \\ &= (U^{-1})^{-1}\lambda^{-1}U^{-1} \\ &= U\lambda^{-1}U^{-1} \\ &= U\lambda^{-1}U^t, \end{aligned}$$

donde $\Lambda^{-1} = \Lambda$, por lo que $A^{-1} = A$.

Explicado lo anterior, notemos que siendo Σ una matriz simétrica de tamaño $d \times d$, podemos decir que es invertible, donde

$$\Sigma^{-1} = U\lambda^{-1}U^t$$

y por (1) llegamos a

$$\Sigma^{-1} = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k^{-1}\vec{u}_k\vec{u}_k^t,$$

donde $\vec{u}_k$ es el k-ésimo vector propio correspondiente a λ_k. De esta forma podemos decir que

$$\begin{aligned}
(\vec{X}-\vec{\mu})^t\Sigma^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu}) &= (\vec{X}-\vec{\mu})^t\left(\sum_{k=1}^{d}\lambda_k^{-1}\vec{u}_k\vec{u}_k^t\right)(\vec{X}-\vec{\mu})\\
&= \sum_{k=1}^{d}\lambda_k^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu})^t\vec{u}_k\vec{u}_k^t(\vec{X}-\vec{\mu})\\
&= \sum_{k=1}^{d}\lambda_k^{-1}\left(\vec{u}_k^t(\vec{X}-\vec{\mu}\right)^2\\
&= \sum_{k=1}^{d}\left(\lambda_k^{-1/2}\vec{u}_k^t(\vec{X}-\vec{\mu}\right)^2\\
&= \sum_{k=1}^{d}Y_k^2,
\end{aligned}$$

donde Y_k es una nueva variable basada en el vector $\vec{X}$. Podemos decir que $\vec{Z}=\vec{X}-\vec{\mu}\sim N(0,\Sigma)$, dado que por el Teorema 9.1 obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{i(\vec{X}-\vec{\mu})s^t}] &= e^{-i\vec{\mu})s^t}\mathbb{E}[e^{i\vec{X}s^t}]\\
&= e^{-i\vec{\mu})s^t}\left(e^{i\vec{\mu})s^t-\frac{1}{2}s\Sigma s^t}\right)\\
&= e^{-\frac{1}{2}s\Sigma s^t}.
\end{aligned}$$

Observemos ahora que

$$\sigma_k^{-1}e_k=\lambda_k^{-1/2}\vec{u}_k^t$$

siendo e_k el k-ésimo vector columna de la matriz identidad, tal que así por la proposición 9.3 numeral (1),

$$Y_k=\sigma_k^{-1}e_kZ=\frac{X_k-\mu_k}{\sigma}\sim N(0,1).$$

Por último tendremos que $Y_k^2\sim\Gamma(1/2,1/2)$, y por la proposición 9.4,

$$(\vec{X}-\vec{\mu})^t\Sigma^{-1}(\vec{X}-\vec{\mu})=\sum_{k=1}^{d}Y_k^2\sim\chi_n.$$

(c) Sabemos que la densidad conjunta de $\vec{X}$ se define como

$$f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{i=1}^{d} f_{X_i}(x_i),$$

tal que así para $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, implementando lo obtenido en el inciso anterior, tendremos

$$\begin{aligned} f_{\vec{X}}(x_1, \ldots, x_d) &= \prod_{i=1}^{d} \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma}\right)^2} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d/2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma}\right)^2} \prod_{i=1}^{d} \frac{1}{\frac{1}{\sigma_i}(e_i \Sigma e_i^t)} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d/2} \left(\frac{1}{|\Sigma|}\right)^{d/2} e^{-\frac{1}{2}(\vec{X}-\vec{\mu})^t \Sigma^{-1} (\vec{X}-\vec{\mu})}. \end{aligned}$$