E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	Calif.

Probabilidad

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática NUA 424730

Agosto - Diciembre de 2020
Parcial 2 (13 de noviembre)

Resuelva **formal y detalladamente** los siguientes ejercicios, de manera totalmente individual.

Está estrictamente prohibido consultar cualquier otro tipo de bibliografía distinto a las notas del curso. Ante cualquier sospecha de esto, el examen se anulará (se calificará automáticamente con cero) sin derecho a réplica.

Coloque una y solamente una respuesta a cada ejercicio. En caso de colocar más de una, solamente se revisará la primera.

La nota de este examen será el promedio de las puntuaciones obtenidas en cada ejercicio.

1. (100 pts.) Sea $Z \sim N(0,1)$ y $X \sim \Gamma(\nu/2, 1/2)$ con $\nu > 0$ no precisamente entero. Utilice el Teorema de Cambio de Variable Multivariado para demostrar que $T = \frac{Z}{\sqrt{X/\nu}}$ tiene distribución t_ν, bajo la hipótesis $Z \perp X$.

2. (100 pts.) Sean $X \sim \Gamma(\nu/2, 1/2)$ y $Y \sim \Gamma(\mu/2, 1/2)$ con $\nu, \mu > 0$ no precisamente enteros. Utilizando Probabilidad Total halle la distribución de $F = \frac{\mu X}{\nu Y}$, bajo la hipótesis $X \perp Y$.

3. Una sucesión de vectores aleatorios $\{\vec{X}_n\}$ converge en distribución a otro vector aleatorio $\vec{X}$ ssi $F_{\vec{X}_n}(\vec{x})$ converge a $F_{\vec{X}}(\vec{x})$ para todo $\vec{x}$ en el que $F_{\vec{X}}$ es continua (según la distancia euclidiana).

   (a) (70 pts.) Demuestre que si $\{\vec{X}_n\}$ es una sucesión de vectores aleatorios tales que convergen en distribución a $\vec{X}$, entonces cada entrada de $\{\vec{X}_n\}$ converge a la correspondiente entrada de $\vec{X}$. ¿Se cumple el recíproco?

   (b) (30 pts.) Sea $\vec{X} \sim N_d(\mu\vec{1}, \sigma^2 I_d)$. Halle la distribución de $\overline{X}_d$ condicionada a $\max\{X_1, \ldots, X_d\} - \min\{X_1, \ldots, X_d\}$.

4. (100 pts.) Sean $\{X_n\}$ variables aleatorias iid con media μ y varianza finita σ^2. Demuestre que

$$\sqrt{n}\left(e^{\overline{X}_n} - e^{\mu}\right) \xrightarrow{d} \sigma e^{\mu} Z, \quad Z \sim N(0,1).$$

5. (100 pts.) Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias iid cuya función de distribución tiene extremo derecho infinito. Para $x > 0$ fijo, sea

$$T(x) := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n > x\}.$$

   $T(x)$ es el índice de la primera variable de la sucesión que toma un valor mayor a x. Sea X otra variable aleatoria con la misma distribución que las X_n e independiente de todas las X_n y sea $\{Y_n\}$ v.a. iid con distribución $Bernoulli(\mathbb{P}[X > x])$. Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario, demuestre que

$$\frac{1}{mx} T(x) \sum_{j=1}^{\lceil mx \rceil} Y_j \xrightarrow{d} E, x \to \infty, \quad E \sim exp(1).$$

6. (10 pts. extra en la nota final del examen). Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y definamos

$$\partial A := \{x : \exists\{y_n\} \subseteq A, y_n \to x \wedge \exists\{z_n\} \subseteq A^c, z_n \to x\}.$$

   ∂A se conoce como la **frontera de** A. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. con funciones de distribución $\{F_n\}$ y sea X otra v.a. con función de distribución F. Demuestre que $X_n \xrightarrow{d} X$ssi

$$\int_A F_n(dx) \to \int_A F(dx), n \to \infty,$$

   para todo A tal que $F(\partial A) = 0$. ($F(A) := \mathbb{P}[X \in A]$).