Cálculo II
Tarea 08

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Dr. Fernando Nuñez Medina

30 Abril 2020

Teoremas

1. Sea a_n una suceción con $a_n \in \mathbb{R}$ convergente, entonces la suceción a_{n+k} también es convergente.

Problemas

1. Comprueba cada una de los siguientes límites

   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.
   Veamos lo siguiente
   $$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$
   Al ser $lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ y $lim_{n\to\infty}1 = 1$, entonces concluimos que
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

   b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^3+1} = 1|$.
   Veamos lo siguiente
   $$\frac{n+3}{n^3+1} = \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^3}}.$$
   Donde
   $$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^3}}.$$
   Por lo tanto conlcuimos que
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1} = 0$.
Veamos primero que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n} = 0.$$

x|
Ahora veamos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2},$$

esto pues

2. Halla los siguientes límites.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}$.

$$0 = \lim_{n\to\infty} 1 - 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}.$$

b) $\lim_{n\to\infty} n - \sqrt{n+a}\sqrt{n+b}$.

$$\begin{aligned}
-\frac{a+b}{2} &= \lim_{n\to\infty} -\frac{(a+b)}{1+\sqrt{1+\frac{a}{n}}\sqrt{1+\frac{b}{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} -\frac{(a+b)}{1+\frac{\sqrt{n+a}}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n+b}}{\sqrt{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{ab}{n+\sqrt{n+a}\sqrt{n+b}} - \frac{n(a+b)}{n+\sqrt{n+a}\sqrt{n+b}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-(n+a)(n+b)}{n+\sqrt{n+a}\sqrt{n+b}} \\
&= \lim_{n\to\infty} n - \sqrt{n+a}\sqrt{n+b}
\end{aligned}$$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{(-1)^n}{2^n}}{2+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}
\end{aligned}$$

3. Realiza lo siguiente.

a) Demuestra que si $0 < a < 2$, entonces $a < \sqrt{2a} < 2$.

Demostración. Veamos la primera desigualdad,

$$\begin{aligned} & a < 2 \\ \Rightarrow & \text{al ser } a > 0. \\ & a^2 < 2a \Rightarrow & \text{al ser } a > 0. \\ & a < \sqrt{2a}. \end{aligned}$$

Ahora la segunda

$$\begin{aligned} & a < 2 \\ \Rightarrow & \\ & 2a < 4 \Rightarrow & \text{al ser } a > 0. \\ & \sqrt{2a} < 2. \end{aligned}$$

□

b) Demuestra que la suceción

$$\sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{2}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}, \dots$$

converge.

Demostración. Sea $b_1 = \sqrt{2}, b_{n+1} = \sqrt{2 \cdot b_n}$ la cual es la descrita anteriormente. Primero veamos que la sucesión esta acotada por 2. Procederemos por inducción

- **Caso base: n = 1**

  $$b_1 = \sqrt{2}$$

  Por orden de los naturales sabemos

  $$2 < 4$$

  Después por $b > a > 0 \implies b^q > a^q > 0, q \in \mathbb{Q}$ entonces tenemos

  $$\sqrt{2} < 2$$

- **Hipótesis de inducción**

  $$b_n < 2$$

- **Paso Inductivo** Por hipótesis de inducción sabemos

  $$b_n < 2$$

  Luego multiplicando por 2 obtenemos

  $$2b_n < 4$$

  Después por $b > a > 0 \implies b^q > a^q > 0, q \in \mathbb{Q}$ entonces tenemos

  $$\sqrt{2b_n} < 2$$

  Por definición de la sucesión b_n esto es

  $$b_{n+1} < 2$$

Con lo que concluimos
$$b_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$$
Luego veamos que la suseción es creciente
Por lo demostrado anterior sabemos
$$b_n < 2$$
Luego si multiplicamos por b_n obtenemos
$$b_n^2 < 2b_n$$
Después por $b > a > 1 \implies b^r > a^r > 1, r \in \mathbb{R}$ entonces tenemos
$$b_n < \sqrt{2b_n}$$
Por definición de la sucesión b_n concluimos
$$b_n < b_{n+1}$$
Luego como la sucesión b_n es monótona y acotada entonces
$$\exists \lim_{n\to\infty} b_n$$
$\square$

c) Calcule el límite.
Ahora por definición de la sucesión b_n
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2b_{n-1}}$$
Después por $\lim a_n = \lim a_{n-1}$ entonces tenemos
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2b_n}$$
Elevando al cuadrado obtenemos
$$(\lim_{n\to\infty} b_n)^2 = \lim_{n\to\infty} 2b_n$$
Como $\lim_{n\to\infty} c(a_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n$ esto es
$$(\lim_{n\to\infty} b_n)^2 = 2 \lim_{n\to\infty} b_n$$
Dividiendo por $\lim_{n\to\infty} b_n$ (ya que $b_n > 0$, esto por que es creciente y $b_1 = \sqrt{2} > 0$) concluimos
$$\lim_{n\to\infty} b_n = 2$$
.

4. Integración por sustitución.

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$
Sea $u = e^x$ entonces $du = e^x dx$, sustituyendo obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{du}{u\sqrt{1+u}}.$$

Sea $v = \sqrt{1+u}$ entonces $dv = \frac{du}{2\sqrt{1+u}}$, sustituyendo obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{2vdv}{(v^2-1)v} = \int \int \frac{2dv}{v^2-1} = \int \frac{2dv}{(v+1)(v-1)}.$$

Por el metodo de fracciones parciales obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \left(\frac{1}{(v-1)} - \frac{1}{(v+1)} \right) dv = \log(v-1) - \log(v+1).$$

Por lo tanto concluimos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \log(\sqrt{1+e^x} - 1) - \log(\sqrt{1+e^x} + 1).$$

b) $\int \frac{dx}{2+\tan(x)}$
Sea $u = \tan(x)$ entonces $x = \tan^{-1}(u)$ y $dx = \frac{du}{1+u^2}$, por lo que sustituyendo obtenemos

$$\int \frac{dx}{2+\tan(x)} = \int \frac{du}{(1+u^2)(2+u)}$$

Luego por fracciones parciales vemos que

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{2+u} - \frac{u-2}{1+u^2} \right) du = \frac{log(2+u)}{5} - \frac{log(u^2+1)}{10} + \frac{2\tan^{-1}(u)}{5}.$$

Por lo tanto concluimos

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \frac{log(2+\tan(x))}{5} - \frac{log(\sec(u)^2)}{10} + \frac{2x}{5}.$$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x+1}}}$
Sea $u = \sqrt{\sqrt{x}+1}$ entonces $x = (u^2-1)^2$ y por regla de la cadena $dx = 4u(u^2-1)du$, sustituyendo en la integral original obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} = \int \frac{4u(u^2-1)du}{u} = \int 4u^2 du - \int 4du = \frac{4u^3}{3} - 4u.$$

Por lo tanto concluimos que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} = \frac{4\left(\sqrt{\sqrt{x}+1}\right)^3}{3} - 4\left(\sqrt{\sqrt{x}+1}\right).$$

5. Una sustancia radiactiva disminuye a un ritmo proporcional a la cantidad que de ella queda (puesto que todos los átomos tienen la misma probabilidad de desintegrarse, la desintegración total es proporcional al número de átomos remanentes). Si $A(t)$ es la cantidad en el tiempo t, esto significa que $A'(t) = cA(t)$ para algún c (el cual representa la probabilidad de que se desintegre un átomo).

   a) Halla $A(t)$ en términos de la cantidad $A_0 = A(0)$ presente en el tiempo 0.
   Por la tare pasada sabemos que existe un k tal que

$$A(t) = ke^{ct},$$

   evualando en 0 obtenemos

$$A(0) = ke^{c0} = k,$$

   por lo tanto

$$A_0 = k$$

   y

$$A(t) = A_0 e^{ct}.$$

   b) Demuestra que existe un número τ (la "vida media"del elemento radiactivo) con la propiedad de que $A(t+\tau) = A(t)/2$.

   Demostración. Sea $\tau = \frac{\log(\frac{1}{2})}{c}$, entonces

$$e^{c\tau} = \frac{1}{2},$$

   por lo que

$$A_0 e^{c(t+\tau)} = \frac{A_0 e^{ct}}{2},$$

   por lo tanto

$$A(t+\tau) = \frac{A(t)}{2}.$$

$\square$