# Cálculo II
# Examen II

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Dr. Fernando Nuñez Medina

30 Abril 2020

## Teoremas

1. Sea $\{a_n\}$ una sucesión con $a_n \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n$, luego sí existe el $\lim_{x\to\infty} f(x)$ entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

*Demostración.* Al existir el límite de $f$ entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y por definición de limite tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c \in \mathbb{R} : \forall x > c \text{ se cumple que } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Luego como $f(n) = a_n$ y por propiedad arquimediana $\exists N \in N$ tal que $N > c$ entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \text{ se cumple que } |f(n) - L| < \varepsilon.$$

por definición de límite concluimos que existe el límite de $\{a_n\}$ y que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

$\square$

2. El polinomio de taylor en $a$ de grado $n$ de $f$ es el polinomio en $(x-a)$ de $f$.

*Demostración.* Por deifnición sabemos que

$$f(x) = P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x).$$

Luego si $f$ es una función polinomial de grado $n$ entonces $f^{(n+1)} = 0$, esto lo demostraremos con inducción

- **Caso base: n = 0** Entonces $f$ es de la forma $f(x) = c$ y por lo tanto $f'(x) = 0$.
- **Hipótesis:** Si $f$ es una función polinomial de grado $n$ entonces $f^{(n+1)} = 0$
- **Paso inductivo** Sea $f$ una función polinomial de grado $n+1$ entonces $f$ es de la forma

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i$$

entonces

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i x^i + a_{n+1} x^{n+1},$$

por lo que

$$f(x) = g(x) + a_{n+1} x^{n+1}$$

donde $g(x)$ es una función polinomial de grado $n$.
Ahora por linealidad de la derivada y por hipotesis de inducción

$$f^{(n+1)} = \frac{a_{n+1}}{n+1}.$$

por lo tanto

$$f^{(n+2)} = 0.$$

Por inducción matemática concluimos que si $f$ es una función polinomial de grado $n$ entonces $f^{(n+1)} = 0$.

Por el teorema de Taylor concluimos que si $f$ es un función polinomial de grado $n$ entonces (ya que $R_{n,a}(x) = 0$)

$$f(x) = P_{n,a}(x).$$

Es decir el polinomio de taylor en $a$ de grado $n$ de $f$ es el polinomio en $(x-a)$ de $f$.

□

# Problemas

1. Realiza lo siguiente

   *a*) Calcula $\int \frac{x}{1+x^2} dx$.
   Sea $u = x^2 + 1$ entonces $du = 2xdx$, sustituyendo en la integral obtenemos

   $$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{du}{2u}.$$

   Al ser $\int \frac{du}{u} = \log(u)$ entonces

   $$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\log(u)}{2},$$

   por lo tanto concluimos que

   $$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\log(x^2+1)}{2}.$$

   *b*) Calcula $\int \tan^{-1}(x) dx$.
   Integraremos por partes, entonces sea $u = \tan -1(x)$ y $dv = dx$ entonces $du = \frac{1}{x^2+1} dx$ y $v = x$; por lo tanto

   $$\int \tan^{-1}(x) dx = \tan^{-1}(x)x - \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

   por el inciso anterior concluimos

   $$\int \tan^{-1}(x) dx = \tan^{-1}(x)x - \frac{\log(x^2+1)}{2}$$

2. Escribe el polinomio $f(x) = x^5$ como polinomio en $(x - 3)$.

   Por el teorema 2 es suficiente calcular el polinomio de Taylor en 3 de grado 5.Empezaremos calculando las derivadas necesarias para el polinomio de Taylor:

   $$\begin{aligned}
   f^{(0)}(x) &= x^5 \\
   f^{(1)}(x) &= 5x^4 \\
   f^{(2)}(x) &= 20x^3 \\
   f^{(3)}(x) &= 60x^2 \\
   f^{(4)}(x) &= 120x \\
   f^{(5)}(x) &= 120
   \end{aligned}$$

   Las evaluamos en 3 y obtenemos

   $$f^{(0)}(3) = 243$$

$$f^{(1)}(3) = 405$$
$$f^{(2)}(3) = 540$$
$$f^{(3)}(3) = 540$$
$$f^{(4)}(3) = 360$$
$$f^{(5)}(3) = 120$$

Por lo tanto

$$f(x) = P_{5,3}(x) = \frac{243}{0!} + \frac{405}{1!}(x-3) + \frac{540}{2!}(x-3)^2 + \frac{540}{3!}(x-3)^3 + \frac{360}{4!}(x-3)^4 + \frac{120}{5!}(x-3)!$$
$$= 243 + 405(x-3) + 270(x-3)^2 + 90(x-3)^3 + 15(x-3)^4 + (x-3)^5.$$

3. Comprueba que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1$.

*Demostración.* Primero veamos que por definición

$$\sqrt[n]{n^2+n} = \exp(\log(\sqrt[n]{n^2+n})),$$

entonces

$$\sqrt[n]{n^2+n} = \exp\left(\frac{\log(n^2+n)}{n}\right),$$

y como $n^2+n = n(n+1)$ obtenemos

$$\sqrt[n]{n^2+n} = \exp\left(\frac{\log(n+1)+\log(n)}{n}\right).$$

Ahora veamos el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{log(x)}{x}$$

por L'Hopital tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{log(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

por el teorema 1 se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n} = 0,$$

analogamente obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n} = 0.$$

Por último veamos lo siguiente

$$\begin{aligned}
1 &= \exp(0) \\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)+\log(n)}{n}\right) && \text{por lo demostrado anteriormente.} \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\log(n^2+n)}{n}\right) && \text{al ser exp continua} \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp(\log(\sqrt[n]{n^2+n})) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n}
\end{aligned}$$

□

4. Demuestra que cualquier subseción de una sucesión convergente es convergente.

*Demostración.* Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente con $a_n \in \mathbb{R}$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. Sea $\{a_{n_k}\}$ una subseción de $s_n$. Primero veamos que $n_k \geq k$, proseguiremos por inducción

- **Caso base: k = 1**
  $n_1 \geq 1$, esto pues $n_k \in \mathbb{N}, \forall k$.
- **Hipótesis:**
  $$n_k \geq k$$
- **Paso Inductivo:**
  Ya que $n_{k+1} > n_k$ y por hipótesis tenemos que
  $$n_{k+1} > k,$$
  por lo tanto
  $$n_{k+1} \geq k+1.$$

Por inducción matemática obtenemos que $n_k \geq k$.
Ahora por definición de convergencia en $\{a_n\}$ tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}, k \geq N \text{ se cumple que } |a_k - l| \leq \varepsilon,$$

como $n_k \geq k$ entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n_k \in \mathbb{N}, n_k \geq N \text{ se cumple que } |a_{n_k} - l| \leq \varepsilon,$$

por definición de convergencia concluimos que $a_{n_k}$ converge y que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = l.$$

□

5. Decir si son convergentes o divergentes cada una de las siguien- tes series innitas. Sugerencia: Aplica la prueba de la integral para c).

   *a)* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^n}$
   Primero veamos que $e < 3$ entonces $e^2 < 9$ y por lo tanto $2 < \log(9)$ al ser una función creciente y además para todo $n > 8$ se cumple que $2 < \log(n)$. Ahora entonces tenemos que para $n > 8$

   $$\frac{1}{\log(n)} < \frac{1}{2},$$

   al ser ambos positivos obtenemos que

   $$\frac{1}{\log(n)^n} < \frac{1}{2^n},$$

   al ser $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ convergente es más igual a 1 entonces por el test de comparación concluimos que

   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^n}$$

   converge.

   *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$
   Primero veamos que $n^3 \geq 1, n \in \mathbb{N}$ por lo que

   $$2n^3 \geq n^3 + 1,$$

   al ser $n > 0$ entonces

   $$\frac{n^3}{n^3+1} \geq \frac{1}{2},$$

   por lo tanto

   $$\frac{n^2}{n^3+1} \geq \frac{1}{2n}.$$

   Luego como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}$ diverge por lo que por la condición de la desaparición ("vanish condition") concluimos que

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$$

   diverge.

*c)* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$
Veamos lo siguiente, sea $u = \log(x)$ entonces $du = \frac{dx}{x}$ por lo que

$$\int \frac{1}{x\log(x)}dx = \int \frac{du}{u} = \log(u) = \log(\log(x)).$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{1}{x\log(x)}dx = \log(\log(N)) - \log(\log(2)).$$

Podemos ver que $\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$a = \log(e^a) = \log(\log(e^{e^a}))$$

Por propiedad arquimediana $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n > e^{e^a}$ y como log es creciente entonces $a < \log(\log(n))$. Es decir, $\forall a \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$a < \log(\log(n))$$

y por lo tanto $\log(\log(N))$ diverge y también $\log(\log(N)) - \log(\log(2))$.
Por criterio de la integral

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$$

diverge.

6. Demuestra que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Por inducción demostraremos que esto se cumple hasta $N \in \mathbb{N}$ es decir $\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n|$. Procederemos a demostrar por indducción

- **Caso base: N = 1**
  $|a_n| = |a_n|$ lo cual es cierto
- **Hipótesis:**

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n|.$$

- **Paso Inductivo:**
  Por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$\left|\sum_{n=1}^{N+1} a_n\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| + |a_{N+1}|$$

Por hipótesis de inducción obtenemos

$$\left|\sum_{n=1}^{N+1} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{N+1} |a_n|.$$

Por inducción matemática obtenemos que

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n|,$$

además por definición $|a_n| \geq 0$ por lo que

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Ahora como $\sum_0^\infty a_n$ es absolutamente convergente, $\sum_0^\infty a_n$ y por la desigualdad concluimos

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$