Probabilidad
Tarea III

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Ehyter Matías Martín González

18 de octubre de 2020

Problemas

1. Sea F una distribución y sea $c \in (0, 1)$. Demuestre que

$$G(x) = (1 - c) \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x), x \in \mathbb{R},$$

es una función de distribución y calcule su función característica.

Sean $X_1, \cdots, X_n$ variables aleatorias con distirbución F independientes luego entonces

$$F_{X_1 + \cdots + X_N}(x) = F^{*n}(x).$$

Puesto que F^{*n} es una función de distribución entonces

$$F^{*n}(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R},$$

por lo tanto

$$G(x) = (1 - c) \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x) \leq (1 - c) \sum_{n=0}^{\infty} c^n, x \in \mathbb{R},$$

y al ser $0 < c < 1$ tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n = \frac{1}{1 - c},$$

por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x)$$

converge.

Ahora veremos que se cumplen las tres propiedades de una distribución para G.

- **Monótona no decreciente**
  Sea $x < y$ tales que son F medibles. Por ser F^{*n} por ser una distirbución entonces se cumple

$$F^{*n}(x) \leq F^{*n}(y),$$

  y al ser $0 < c < 1$ tenemos

$$c^n F^{*n}(x) \leq c^n F^{*n}(y),$$

  al converger $\frac{G(x)}{(1-c)}$ concluimos

$$G(x) = (1-c)\sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x) \leq (1-c)\sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(y) = G(y).$$

- **Continua por la derecha**
  Al ser F^{*n} una distribucion entonces es continua por la derecha es decir para todo $a \in \mathbb{R}$ existe el

$$\lim_{x\to a^+} F^{*n}(x),$$

  por linealidad del operador límite, existe el

$$\lim_{x\to a^+} c^n F^{*n}(x),$$

  como $G(x)/(1-c)$ converge y como la sucesión $c^n F^{*n}$ es dominada entonces existe el

$$\lim_{x\to a^+} \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x),$$

  por linealidad del operador límite, concluimos que existe el

$$\lim_{x\to a^+} (1-c)\sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x) = \lim_{x\to a^+} G(x).$$

- **límites infinitos**
  Como habiamos visto nuestra sucesión $c^n F^{*n}(x)$ esta dominada por c^n cuya serie convergía, luego por convergencia dominada tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to\infty} c^n F^{*n}(x),$$

  por linealidad del operador límite y por continuidad de P tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(\lim_{x\to\infty} x),$$

  analogamente obtenemos

$$\lim_{x\to-\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n F^{*n}(\lim_{x\to-\infty} x),$$

  Luego por ser $F^{*n}(x)$ una función de distribución concluimos

$$\lim_{x\to\infty}(1-c)\sum_{n=0}^{\infty}c^nF^{*n}(x)=(1-c)\sum_{n=0}^{\infty}c^n=1,$$

y

$$\lim_{x\to-\infty}(1-c)\sum_{n=0}^{\infty}c^nF^{*n}(x)=(1-c)\sum_{n=0}^{\infty}c^n\cdot 0=0.$$

2. El siguiente ejercicio demuestra que la convergencia en distribucion **no** implica la convergencia de las funciones de densidad, cuando estas existen. Sean $\{X_n\}$ v.a. con funciones de distribución

$$F_n(x)=\left(x-\frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n}\right)\mathbb{1}(0,1)(x)+\mathbb{1}_{[1,\infty)]}(x).$$

Por conveniencia expresaremos a $F_n(x)$ como

$$F_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le 0\\ \left(x-\frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n}\right) & \text{si } 0<x<1\\ 1 & \text{si } 1\le x\end{cases}.$$

Luego veamos que pasa cuando $0<x<1$. Por linealidad de la derivada tenemos que

$$\frac{\mathrm{d}F_n(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}\sin(2\pi nx)}{\mathrm{d}2\pi n}=1-\cos(2\pi nx)=f_n(x).$$

Ahora veamos que $F_n(x)$ converge a una distribución uniforme

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(x-\frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n}\right),$$

por linealidad del operador límite tenemos

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=x-\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n},$$

puesto que $|sin(2\pi nx)|\le 1$ entonces tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=x-0=x.$$

Ahora fijemonos en $cos(2\pi nx)$, pero esta no converge a la función de densidad de una distribución $\mathcal{U}[0,1]$, ya que cuando $x=\frac{p}{q}$ es un racional no existe $\lim_{n\to\infty}cos(2\pi nx)$, esto puesto que si nos agarramos la subseción $n_k=k*q$ entonces esta subseción converge a $cos(2\pi n_kx)=cos(2\pi kp)=cos(2\pi)=0$, pero si nos agarramos la subseción $n_l=ql+1$ entonces esta converge a $cos(2\pi n_lx)=cos(2\pi(ql+1)p/q)=cos(2\pi lp+2\pi p/q)=cos(2\pi p/q)\neq 0$ por lo tanto $\lim_{n\to\infty}cos(2\pi nx)$ no existe. Es decir

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x),\forall x\in[0,1]\cap\mathbb{Q},$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)\neq 1,x\in[0,1].$$