Probabilidad
Examen Tarea 1

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Juan Carlos Pardo Millán

26 de septiembre de 2023

1. Vamos a suponer que lanzamos n monedas, sin que el resultado de alguna interfiera con la otra, y cada una muestra sol con probabilidad p. Cada una de las monedas que muestra sol es lanzada nuevamente. Encuentre la probabilidad de obtener k soles en la segunda ronda de lanzamientos.

   Solución 1 – *Definamos a X_i una variable aleatoria tal que toma el valor 1 si la $i-$ésima moneda se obtuvieron dos soles y 0 si no, y también*

   $$X = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

   por lo que el problema nos pide calcular

   $$\mathbb{P}\left[X = k\right].$$

   Para ello fijemonos en un lanzamiento en específico y notemos que nuestro espacio muestral es

   $$\left\{SS, SA, A\right\}.$$

   donde por hipotesis del problema tenemos que

   $$\mathbb{P}\left[SS\right] = p^2, \mathbb{P}\left[SA\right] = p(1-p), \mathbb{P}\left[A\right] = 1-p,$$

   por lo tanto

   $$\mathbb{P}\left[X_i = 1\right] = p^2, \quad \mathbb{P}\left[X_i = 0\right] = p(1-p) + (1-p) = 1 - p^2.$$

   Con lo que obtenemos que $X_i \sim Bernoulli(p^2)$, luego al ser X la suma de n variables aleatorias independientes Bernoulli's con mismo parámetro p^2 entonces

   $$X \sim Binom\left(n, p^2\right).$$

   Por lo tanto concluimos que

   $$\mathbb{P}\left[X = k\right] = \binom{n}{k} p^{2k}(1-p^2)^{n-x}.$$

2. Consideremos un exámen de opción múltiple en donde cada pregunta tiene m respuestas posibles. Sea p la probabilidad de que un estudiante conoce la respuesta correcta a una pregunta dada. Si el ignora la respuesta, escogerá al azar una de las m respuestas posibles. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante conozca realmente la respuesta correcta una vez que la ha dado?

   Solución 2 – *Para resolver la pregunta notemos que tenemos dos eventos*

$$\begin{aligned} A &: \text{“El estudiante conoce la respuesta”}\ , \\ B &: \text{“El estudiante acierta”}\ . \end{aligned}$$

   Luego por definición tenemos que

$$\begin{aligned} A^c &: \text{“El estudiante no conoce la respuesta”}\ , \\ B^c &: \text{“El estudiante no acierta”}\ . \end{aligned}$$

   Ahora por hipotesis del problema y por $\mathbb{P}[X^c] = 1 - \mathbb{P}[X], \mathbb{P}[X^c|Y] = 1 - \mathbb{P}[X|Y]$ *tenemos que*

$$\mathbb{P}[A] = p, \quad \mathbb{P}[A^c] = 1 - p, \quad \mathbb{P}[B|A^c] = \frac{1}{m}.$$

   Además si el alumno conoce la respuesta entonces acertara por lo tanto

$$\mathbb{P}[B|A] = 1.$$

   El problema nos pide calcular la probabilidad que un alumno dio la respuesta correcta a una pregunta, pero desconocemos si la sabía o no, es decir

$$\mathbb{P}[B \cap (A \cup A^c)] = \mathbb{P}[B],$$

   usando probabilidad total podemos concluir que

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[B|A]\,\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B|A^c]\,\mathbb{P}[A^c] = p + \frac{1-p}{m}.$$

   Si quisieramos calcular la probabilidad en el que el alumno no corrio con suerte, es decir que este sabia la respuesta cuando la acerto a la pregunta tendríamos que calcular

$$\mathbb{P}[A|B],$$

   usando bayes y lo anterrior cálculado podemos concluir que

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[B|A]\,\mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{p}{p + \frac{1-p}{m}} = \frac{mp}{1 + (m-1)\,p}.$$