Álgebra Lineal I
Tarea 05

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Rafael Herrera Guzmán

02 Marzo 2020

Problemas

1. Sean β y γ las bases ordenadas estándar para $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Para las siguientes transformaciones $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, calcular $[T]_\beta^\gamma$.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida mediante $T((x, y)) = (2x - y, 3x + 4y, x)$.
   Calculemos las transformaciones lineales de β.

$$
\begin{aligned}
T((1,0)) &= (2,3,1)\\
T((0,1)) &= (-1,4,0).
\end{aligned}
$$

   Por lo que

$$
[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante $T((x, y, z)) = (2x + 3y - z, x + z)$.
   Calculemos las transformaciones lineales de β.

$$
\begin{aligned}
T((1,0,0)) &= (2,1)\\
T((0,1,0)) &= (3,0)\\
T((0,0,1)) &= (-1,1).
\end{aligned}
$$

   Por lo que

$$
[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T(x,y) = (x-y, x, 2x+y)$. Sea β la base ordenada estándar para $\mathbb{R}^2$ y $\gamma = \{(1,1,0),(0,1,1),(2,2,3)\}$. Calcular $[T]_\beta^\gamma$. Si $\alpha = \{(1,2),(2,3)\}$, calcular $[T]_\alpha^\gamma$.

Calculemos las transformaciones lineales de β.

$$T((1,0)) = (1,1,2)$$
$$T((0,1)) = (-1,0,1).$$

Luego veamos cuales son los coeficientes de la combinaciones lineales de γ que nos dan estas transformaciones linelaes.

$$(1,1,2) = a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(2,2,3)$$
$$(-1,0,1) = r(1,1,0) + s(0,1,1) + t(2,2,3)$$

De los cuales obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a + 2c &= 1 \\ a + b + 2c &= 1 \\ b + 3c &= 2 \\ r + 2t &= -1 \\ r + s + 2t &= 0 \\ s + 3t &= 1 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{array}{ccc} a = -\dfrac{1}{3} & b = 0 & c = \dfrac{2}{3} \\ r = -1 & s = 1 & t = 0 \end{array}$$

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos las transformaciones lineales de α.

$$T((1,2)) = (-1,1,4)$$
$$T((2,3)) = (-1,2,7).$$

Luego veamos cuales son los coeficientes de la combinaciones lineales de γ que nos dan estas transformaciones linelaes.

$$
\begin{aligned}
(-1,1,4) &= a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(2,2,3)\\
(-1,2,7) &= r(1,1,0) + s(0,1,1) + t(2,2,3)
\end{aligned}
$$

De los cuales obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
a + 2c &= -1\\
a + b + 2c &= 1\\
b + 3c &= 4\\
r + 2t &= -1\\
r + s + 2t &= 2\\
s + 3t &= 7
\end{aligned}
$$

cuyas soluciones son

$$
\begin{array}{ccc}
a = -\dfrac{7}{3} & b = 2 & c = \dfrac{2}{3}\\
r = -\dfrac{11}{3} & s = 3 & t = \dfrac{4}{3}
\end{array}
$$

$$
[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{11}{3}\\ 2 & 3\\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}
$$

3. Para los siguientes incisos, sean

$$
\alpha = \left\{ \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}
$$

$$
\beta = \{1, x, x^2\}
$$

y

$$
\gamma = \{1\}.
$$

   (a) Defina $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mediante $T(A) = A^t$, calcular $[T]_\alpha$.
   Calculemos las transformaciones lineales de β.

$$
\begin{aligned}
T(\alpha_1) &= \alpha_1 \\
T(\alpha_2) &= \alpha_3 \\
T(\alpha_3) &= \alpha_2 \\
T(\alpha_4) &= \alpha_4
\end{aligned}
$$

Por lo que

$$
[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

(b) Defina $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mediante $T(A) = tr(A)$, calcular $[T]_\alpha^\gamma$.
Calculemos las transformaciones lineales de β.

$$
\begin{aligned}
T(\alpha_1) &= 1 \\
T(\alpha_2) &= 0 \\
T(\alpha_3) &= 0 \\
T(\alpha_4) &= 1
\end{aligned}
$$

Por lo que

$$
[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

(c) Si $p(x) = 3 - 6x + x^2$, calcular $[p]_\beta$.
Por lo que

$$
[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión n con base ordenada β. Definiendo a $T : V \to \mathbb{R}^n$ mediante

   Para demostrar que T es lineal entonces falta con demostrar que $cT(x)+T(y) = T(ax+y)$, veamos lo siguiente

$$
cx = c\sum_{i=1}^{n} a_i\beta_i, \quad y = \sum_{i=0}^{n} b_i\beta_i,
$$

   por lo que

$$
cx + y = \sum_{i=1}^{n} (ca_i + b_i)\beta_i,
$$

por lo tanto
Concluimos que

$$T(cx + y) = cT(x) + T(y),$$

por lo tanto T es lineal.