# Métodos Estadísticos
# Tarea 1

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Rogelio Ramos Quiroga

3 de febrero de 2022

En un estudio se examina hojas de plantas y se cuenta el número de cierto tipo de insectos. Suponga que la distribución del número de insectos por hoja es una Poisson con media $\lambda$. Ahora, en muchas hojas no hay insectos pues no son adecuadas como alimento para los insectos, de aquí que se decide no considerar hojas en donde no haya insectos.

1. Obtenga la probabilidad de que en una hoja haya $i$ insectos, dado que hay al menos uno.

   **Solución 1** – *Sea $X \sim Poisson\left(\lambda\right)$. Por definición de probabilidad condicional tenemos que*

   $$\mathbb{P}\left[X = i | X > 0\right] = \frac{\mathbb{P}\left[X = i, X > 0\right]}{\mathbb{P}\left[X > 0\right]}.$$

   *Consideremos 2 casos. Cuando $i = 0$ entonces $\mathbb{P}\left[X = i, X > 0\right] = 0$ por lo que*

   $$\mathbb{P}\left[X = i | X > 0\right] = 0,$$

   *en cambio cuando $i > 0$ entonces $\{X = i\} \subset \{X > 0\}$, por lo que $\mathbb{P}\left[X = i, X > 0\right] = \mathbb{P}\left[X = i\right]$ y por lo tanto*

   $$\mathbb{P}\left[X = i | X > 0\right] = \frac{\mathbb{P}\left[X = i\right]}{\mathbb{P}\left[X > 0\right]} = \frac{\mathbb{P}\left[X = i\right]}{1 - \mathbb{P}\left[X = 0\right]} = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!\left(1 - e^{-\lambda}\right)}.$$

2. Suponga que se observan $x_1$ hojas con 1 insecto, $x_2$ hojas con 2 insectos, etc., donde $\sum_i x_i = n$. Muestre que el estimador de máxima verosimilitud, $\hat{\lambda}$, del parámetro $\lambda$, satisface la ecuación

   $$\hat{\lambda} = \tilde{x}\left(1 - e^{-\hat{\lambda}}\right)$$

   donde $\tilde{x} = \sum_i i x_i / n$.

   *Demostración.* Primero puesto que $\sum_i x_i = n$ entonces la cantidad de hojas con insectos son $n$, enumeramos estas hojas del $1 - n$ y representando por $y_i$ la cantidad de insectos en la hoja $i$. La cantidad de insectos entre todas las hojas es por definición $\sum_i i x_i = \sum y_i$.

   De ahora en adelante trabajaremos con la muestra $y_i$. La función de verosimilitud esta dada por

   $$L\left(\lambda\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left[Y_i = y_i\right] = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{y_i} e^{-\lambda}}{y_i!\left(1 - e^{-\lambda}\right)} = \left(\frac{\left(\lambda^{\overline{y}}\right) e^{-\lambda}}{\left(1 - e^{-\lambda}\right)}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i!},$$

por lo que la logverosimilitud haciendo uso de propiedades del logaritmo es

$$l(\lambda) = \log\left(\left(\frac{\left(\lambda^{\overline{y}}\right)e^{-\lambda}}{\left(1-e^{-\lambda}\right)}\right)^n \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i!}\right) = n\overline{y}\log(\lambda) - n\lambda - n\log\left(1-e^{-\lambda}\right) + \sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{1}{y_i!}\right)$$

con $\overline{y} = \sum_i y_i/n$, de donde obtenemos la función score haciendo uso de propiedades de la derivada es

$$S(\lambda) = \frac{\mathrm{d}n\overline{y}\log(\lambda) - n\lambda - n\log\left(1-e^{-\lambda}\right) + \sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{1}{y_i!}\right)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{n\overline{y}}{\lambda} - n - \frac{ne^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}},$$

por lo tanto el emv de $\lambda$ es

$$\hat{\lambda} = \overline{y}\left(1-e^{-\lambda}\right).$$

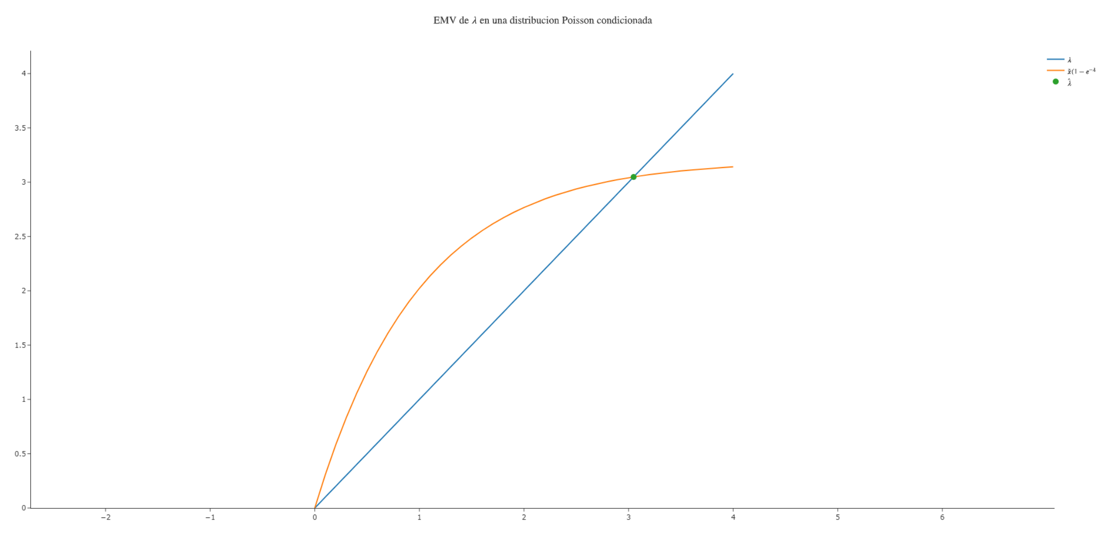
Debido a que $\tilde{x} = \sum_i ix_i/n = \sum_i y_i/n = \overline{y}$, concluimos que

$$\hat{\lambda} = \tilde{x}\left(1-e^{-\lambda}\right).$$

□

3. Determine $\hat{\lambda}$, numéricamente, para el caso $\tilde{x} = 3{,}2$.

**Solución 2** – *El máximo estimador de verosimilitud de $\lambda$ es* $\hat{\lambda} = 3{,}0481745440$




*Se anexa código.*