Cálculo III
Primer Parcial

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Fabián Augusto Pascual Domínguez

20 de septiembre de 2021

1. Sea

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Determine el interior de A, su adherencia, frontera, exterior, conjunto derivado y puntos aislados.

Solución 1 – *Empezaremos por ver que A^c son densos en $\mathbb{R}$. Para ello sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$ luego por densidad de los racionales existen $x', y' \in \mathbb{Q}$ tales que*

$$x < x' < y' < y,$$

sea

$$z = \left(\sqrt{3} - 1\right)(y' - x') + x',$$

entonces

$$x < x' < z < y' < y;$$

supongamos que $z \in A$ luego existen $a, b \in \mathbb{Q}$ tales que

$$z = a + b\sqrt{2},$$

por cerradura del producto y la suma en $\mathbb{Q}$ esto es si y sólo si

$$\sqrt{3} = c + d\sqrt{2} \quad \textit{(donde c y d se obtienen de despejar $\sqrt{3}$ de $z = a + b\sqrt{2}$)},$$

esto es si y sólo si

$$3 = c^2 + 2cd\sqrt{2} + 2d^2$$

lo cual es una contradicción ya que de nuevo $\mathbb{Q}$ es cerrado bajo el producto y la suma y $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Por lo que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ existe $z \in A^c$ tal que $x < z < y$ por lo tanto A^c es denso en los reales.

Veamos cual es la ∂A. Puesto que los $\mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q} \subset A$ entonces A es denso en $\mathbb{R}$, por lo tanto

$$\forall \epsilon > 0, a \in \mathbb{R}, B(a, \epsilon) \cap A \neq 0;$$

análogamente tenemos que A^c es denso en $\mathbb{R}$ por lo que

$$\forall \epsilon > 0, a \in \mathbb{R}, B(a, \epsilon) \cap A^c \neq 0,$$

por lo tanto $\partial A = \mathbb{R}$.

Como A es denso en R entonces $\forall x \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, (B(x, \epsilon) \cap A) \setminus \{x\} \neq 0$ es decir $A' = \mathbb{R}$, y por lo que no tiene puntos aislados.

Puesto que $A^\circ \cap \partial A = \emptyset$ entonces $A^\circ = \emptyset$. Como $A \cup \partial A = \overline{A}$ entonces $\overline{A} = \mathbb{R}$. Además como $ExtA = \left(\overline{A}\right)^c$ entonces $ExtA = \emptyset$.

2. Sea $\left\{\overline{B}(x_n, r_n)\right\}$ una sucesión decreciente de bolas cerradas tales que $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Usando sucesiones pruebe que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) \neq \emptyset,$$

y que dicha intersección costa de un punto.

Demostración. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq m$. Tenemos que

$$\overline{B}(x_m, r_m) \subset \overline{B}(x_n, r_n)$$

por lo que

$$x_m \in \overline{B}(x_n, r_n)$$

y por lo tanto $\|x_m - x_n\| \leq r_n$. Como $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ entonces

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N}, n > N \text{ se cumple que } r_n < \epsilon,$$

por lo que $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq n$ tenemos que $\|x_m - x_n\| < \epsilon$, por lo tanto $\{x_n\}$ es una sucesión de cauchy y entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Ahora como

$$\forall n \in N, \overline{B}(x_m, r_m) \subset \overline{B}(x_n, r_n), \forall m \in \mathbb{N}, m \geq n$$

entonces

$$\{x_k\}_{n=n}^{\infty} \subset \overline{B}(x_n, r_n)$$

y además como toda subsuseción de una sucesión convergente converge al mismo punto tenemos que $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ por lo tanto $x \in \overline{\overline{B}(x_n, r_n)}$, como una bola cerrada es un conjunto cerrado tenemos que $\overline{\overline{B}(x_n, r_n)} = \overline{B}(x_n, r_n)$ y por lo tanto $x \in \overline{B}(x_n, r_n)$. Es decir $x \in \overline{B}(x_n, r_n), \forall n \in \mathbb{N}$ por lo tanto $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n)$.

Si $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n), y \neq x$ entonces $\|y - x\| > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ entonces $\exists n \in N$ tal que $\|x - y\| > 2r_n$, luego

$$2r_n < \|x - y\| < \|x - x_n\| + \|x_n - y\| < r_n + \|x_n - y\|,$$

es decir $r_n < \|x_n - y\|$, por lo que $y \notin \overline{B}(x_n, r_n)$ lo cual es una contradicción, por lo tanto concluimos que

$$x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n).$$

$\square$

3. Se dice que un cojnuto A de $\mathbb{R}^n$ es semicompacto si todo subconjunto infinito de A posee al menos un punto de acumulación dentro de A. Pruebe que todo subconjunto es semicompacto si y sólo si es compacto.

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$.

Si A es semicompacto entonces existe $x \in \{x_n\}' \cap A$. Como $x \in \{x_n\}'$ entonces

$$\exists \{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty} \subset \{x_n\} \text{ tal que } x_{n_m} \neq x, \forall m \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \lim_{m\to\infty} x_{n_m} = x.$$

Por lo tanto A es secuencialmente compacto.

Sea $B \subset A$ infinito. Al ser ínfinito entonces $\exists y_1 \in B$, luego de nuevo por ser infinito $\exists y_2 \in B \setminus \{y_1\}$, de nuevo por ser infinito $\exists y_2 \in B \setminus \{y_1, y_2\}$, y así sucesivamente

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in B \setminus \{y_1, \cdots, y_n\}$$

ya que de ser vació entonces B sería finito lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ es una sucesión tal que $y_i \neq y_j, \forall i \neq j$.

Si A es secuencialmente compacto entonces existe una subsuseción

$$\{y_{n_m}\}_{m=1}^{\infty} \text{ tal que } \lim_{m\to\infty} y_{n_m} = y \in A,$$

considermos a

$$\left\{y_{n_{m_l}}\right\}_{l=1}^{\infty} \text{ tal que } y_{n_{m_l}} \neq y$$

puesto que a lo más un elemento de $\{y_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ era igual a y entonces

$$\lim_{l\to\infty} y_{n_{m_l}} = y \in A$$

por lo que $y \in B'$. A es semicompacto.

Por lo tanto A es semicompacto si y sólo si es secuencialmente compacto. Puesto que si A es semicompacto si y sólo si es compacto conlcuimos que A es semicompacto si y sólo si es compacto. $\square$

4. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ conexo. ¿Se cumple que A es arco conexo? En caso de que no se pueda asegurar que A sea arco conexo, proporcione una condición suciente para asegurar que lo sea y pruebe que dicha condición es, en efecto, suciente.

Lema 1 – *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_1, \cdots, x_n \in A$. Si existe una curva $f_i \subset A$ entre x_i y x_{x+i} para todo $i < n$ entonces existe una curva $h \subset A$ entre x_1 y x_n.*

Demostración. Procederemos a demostrar por inducción matemática.

- **Caso base: n = 1**
  Puesto que $f(x) = x$ es continua entonces existe un camino entre x_1 y x_1.
- **Hipotesis de inducción:**
  Si existe una curva f_i entre x_i y x_{x+i} para todo $i < n$ entonces existe una curva h entre x_1 y x_n.
- **Paso de inducción:**
  Por hipotesis de inducción existe un curva $f \subset A$ que conecta a x_1 y x_n, y existe otra curva $g \subset A$ que conecta a x_n y x_{n+1}. Sea $h \subset A$ dado por

  $$h(t) = \begin{cases} f\left(2t\right) t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g\left(2\left(t - \frac{1}{2}\right)\right) t \in \left(\frac{1}{2}, 2\right] \end{cases},$$

  podemos ver que $h(0) = f(0) = x_1$, $h(1) = g(1) = x_{n+1}$, además como h es composición de funciones continuas entonces h es continua, en el punto $\frac{1}{2}$ es continua puesto que el límite por la izquierda es $f\left(\frac{1}{2}\right) = x_n$ y el límite por la derecha es $g\left(\frac{1}{2}\right) = x_n$. Por lo tanto h es una curva en A entre x_1 y x_{n+1}.

Por inducción matemática concluimos que el lemma es cierto. □

De ahora en adelante haremos uso de este lemma indistintamente, ya que será usado multiples veces en la demostración del ejercicio. Prosigamos a demostrar el problema

Demostración. Consideremos al conjunto $A = [0,1] \times \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \times [0,1]$. Si $x, y \in A$ entonces tenemos cuatro casos

- Que $x \in [0,1] \times \{0\}, y \in [0,1] \times \{0\}$, de ser así al ser $[0,1] \times \{0\}$ conexo existe una curva de x a y en A.
- Que $x \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \times [0,1], y \in \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \times [0,1]$, de ser así entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x \in \frac{1}{n} \times [0,1]$ y $y \in \frac{1}{m} \times [0,1]$ luego como $\frac{1}{p} \times [0,1]$ es conexo para todo $p \in \mathbb{N}$ entonces existen curvas $f, g \subset A$ entre x y $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$, y entre y y $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$ respectivamente, además como $[0,1] \times \{0\}$ es conexo entonces existe un curva $h \subset A$ entre $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ y $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$, por lo tanto existe una curva $f' \subset A$ entre x y y.
- Que $x \in [0,1] \times \{0\}, y \in \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \times [0,1]$, este caso es análogo al anterior.
- Que $y \in [0,1] \times \{0\}, x \in \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \times [0,1]$, este caso es análogo al anterior.

Por lo tanto A es arco conexo y por lo tanto es conexo.

Consideremos al conjunto $B = \{(0,1)\} \cup A$. Veamos que $\forall \epsilon > 0$ por propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ talque $\frac{1}{n} < \epsilon$, por lo que $\left\|(0,1) - \left(\frac{1}{n}, 1\right)\right\| < \epsilon$, como $\left(\frac{1}{n}, 1\right) \in A$ entonces $(0,1) \in \overline{A}$, por lo tanto $B \subset \overline{A}$. Como $A \subset B \subset \overline{A}$ y A conexo entonces B es conexo.

Supongamos que existe una curva $f \subset A$ entre $(0,1)$ y $(0,0) \in A$, entonces tenemos que $(0,1)$ es cerrado por lo que $C = f^{-1}\left(\{(0,1)\}\right)$ es cerrado en $[0,1]$. Ahora sea $D = \left\{(x,y) \in B : y > \frac{1}{2}\right\} =$

$\mathbb{R} \times (\frac{1}{2}, -\infty) \cap B$ la cual es una vecindad abierta de $(0,1)$ en B, sea $x \in C$ entonces al ser f continua existe una un intervalo abierto I que contiene a x tal que $f(I) \subset D$, luego como $f(0) = (0,1)$ entonces no existe $y \in I$ tal que $f(y) \neq (0,1)$, por lo que $f(I) \subset \{(0,1)\}$ es decir $I \subset f^{-1}(\{(0,1)\})$, por lo tanto C es abierto en $[0,1]$. Al ser $[0,1]$ un conjunto conexo y $C \neq$ entonces $C = [0,1]$, lo cual es una contradicción ya que si $f(1) = (0,0)$. Por lo tanto B no es arco conexo.

Además haremos uso de que si un conjunto A es convexo entonces es arco conexo, esto puesto que si $x, y \in A$ tenemos que $[x,y] \subset A$, por lo que $f(t) = xt + (1-t)y \in A, \forall t \in [0,1]$, la cual es una función continua por lo tanto existe una curva f que conecta a x y y para todo $x, y \in A$, por lo tanto A es arco conexo.

Ahora demostraremos que si un conjunto es abierto y conexo entonces es arco conexo. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo, $a \in A$ y $B(a) = \{b \in A | \text{existe un curva de } a \text{ a } b\}$, como existe un curva de a a a dado por $f(a) = a$ entonces $a \in B(a)$ por lo que $B(a) \neq 0$. Ahora sea $x \in B(a)$ al ser abierto A entonces $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset A$ como una bola abierta es convexa entonces es arco conexo, por lo tanto $\forall y \in B(x, \epsilon)$ existe un curva f de x a y, luego como $x \in B(a)$ entonces existe un curva g de a a x, por lo tanto existe un curva h de a a y por lo que $y \in B(a)$ entonces $B(x, \epsilon) \subset B(a)$, por lo tanto $B(a)$ es abierto. Análogamente sea $x \in A \setminus B(a)$ al ser abierto A entonces $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset A$ como una bola abierta es convexa entonces es arco conexo, por lo tanto $\forall y \in B(x, \epsilon)$ existe un curva f de x a y, por lo que $y \notin B(a)$ ya que de ser así entonces existiría un camino que une a g que une a a y y y por que existiría un camino h que une a x y a lo cual es una contradicción ya que $x \notin B(a)$, por lo que $B(x, \epsilon) \subset A \setminus B(a)$ entonces $A \setminus B(a)$ es abierto, por lo tanto $B(a)$. Como un conjunto C es conexo si y sólo si los únicos conjuntos que son cerrados y abiertos a la vez en C son $\emptyset$ y C, entonces $B(a) = A$, por lo tanto concluimos que A es arcoconexo. $\square$