Métodos Estadísticos
Tarea 3

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Rogelio Ramos Quiroga

19 de marzo de 2022

Considere inferencia Bayesiana sobre el modelo Exponencial.

1. Muestre que la apriori Gamma es conjugada de la distribución Exponencial.

   Demostración. La función de densidad de la distribución Exponencial con parámetro λ

   $$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

   de donde obtenemos

   $$L(\lambda; x) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}.$$

   La función de densidad de la distribución Gamma con parámetros α, θ es

   $$\pi(\lambda) = f(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{\theta}}}{\Gamma(\alpha)\,\theta^\alpha},$$

   por lo que

   $$\pi(\lambda|x) = \pi(\lambda) L(\lambda; x) \propto \lambda^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda}{\theta}} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} = \lambda^{\alpha+n-1} e^{-\lambda \frac{1+\theta \sum_{i=1}^n x_i}{\theta}},$$

   por lo tanto la posterior es *Gamma* con parametros $\alpha + n$, $\frac{\theta}{1+\theta \sum_{i=1}^n x_i}$. Concluimos que la apriori Gamma es conjugada de la distribución Exponencial. □

2. Suponga que el tiempo de espera en una cola es modelado con la distribución Exponencial(λ). Suponga además que, para una muestra aleatoria de 20 clientes se observó un tiempo medio de espera de 5.1 minutos. Considere distribuciones previas Gama de dos tipos:

   a) Con media 0.5 y desviación estandar 1.

   b) Con media 10 y desviación estandar 20.

   Grafique las dos distribuciones posteriores y compárelas.

   Solución 1 – *Notemos que*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 102, \quad n = 20, \quad \alpha\theta = \mu, \quad \alpha\theta^2 = \sigma^2,$$

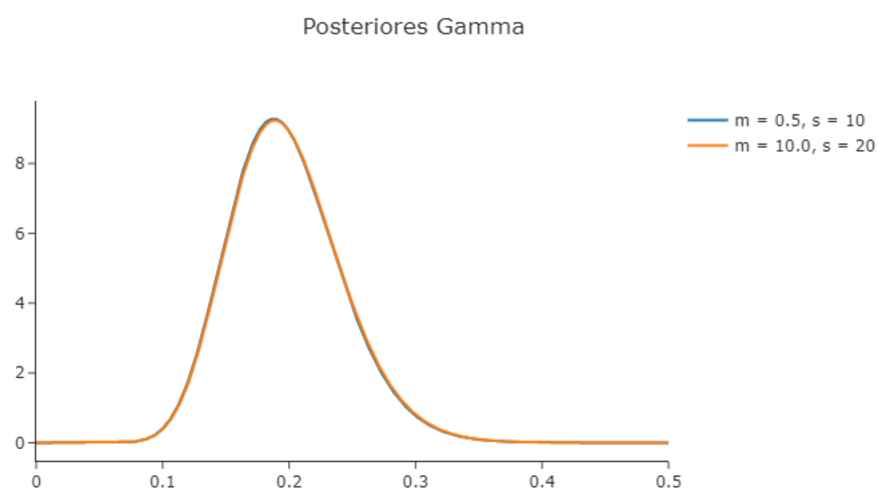
   por lo que cuando $\mu = 0.5, \sigma = 1$ *obtenemos*

$$\pi\left(\lambda|x\right) = \frac{102.5^{20.25}\lambda^{19.5}e^{-102.5\lambda}}{\Gamma\left(20.25\right)},$$

   y cuando $\mu = 0.5, \sigma = 1$ *obtenemos*

$$\pi\left(\lambda|x\right) = \frac{102.025^{20.25}\lambda^{19.25}e^{-102.025\lambda}}{\Gamma\left(20.25\right)}.$$

   Cuyas gráficas son:



   Las gráficas son muy parecidas.

3. Calcule las dos medias posteriores y compárelas. Explique las diferencias.

Solución 2 – *Como*

$$\alpha\theta = \mu,$$

entonces cuando $\mu = 0.5, \sigma = 1$ *obtenemos*

$$\mu_p = 0.1975,$$

y cuando $\mu = 10, \sigma = 20$ *obtenemos*

$$\mu_p = 0.1984.$$

Ambas medias posteriores son muy parecidas, pero como el parametro de escala es mayor en el segunda es ligeramente más grande su media posterior