Álgebra Lineal I
Examen Parcial II

Rubén Pérez Palacios
Profesor: Rafael Herrera Guzmán

28 Abril 2020

Problemas

1. Supóngase que $v_1, \cdots, v_n$ son vectores linealmente independientes en V y $w \in V$. Demostrar que

$$\dim(span(\{v_1 + w, \cdots, v_n + w\})) \geq n - 1.$$

Demostración. Los vectores $v_2 - v_1, \cdots, v_n - v_1$ también son linealmente independientes, ya que de no ser así entonces hay una combinación lineal de los vectores $v_2 - v_1, \cdots, v_n - v_1$ tal que es igual a cero y no todos sus coeficientes son cero, pero esta combinación lineal también es de los vectores $v_1, \cdots, v_n$ por lo que serían dependientes lo cual es una contradicción; así que

$$\dim(span(\{v_2 - v_1, \cdots, v_n - v_1\})) = n - 1.$$

También como

$$v_i - v_1 = (v_i + w) - (v_1 + w) \text{ para } i = \{2, \cdots, n\},$$

entonces

$$v_i - v_1 \in span(\{v_1 + w, \cdots, v_2 + w\}), i = \{2, \cdots, n\},$$

por lo tanto

$$span(\{v_2 - v_1, \cdots, v_n - v_1\}) \subset span(\{v_1 + w, \cdots, v_2 + w\})$$

Por el teorema 1,11 concluimos que

$$\dim(span(\{v_1 + w, \cdots, v_n + w\})) \geq \dim(span(\{v_2 - v_1, \cdots, v_n - v_1\})) = n - 1.$$

■

2. Sea

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | c = a + b \right\}.$$

Definase $T : V \to V$ dada por

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 3a+3c \\ -2a-b & a-b+3c \end{pmatrix}.$$

De una base de V, la matriz de T en dicha base y bases para $N(T)$,$R(T)$.
Sea

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

en el cual sus vectores son independientes. Sea $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \in V$ entonces

$$a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix},$$

por lo que estas vectores generan todo V, por lo tanto β es una base de V.
Ahora veamos que

$$\begin{aligned} T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz T en β es

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego veamos que

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \right) = 0,$$

si y sólo si $3a + 3c = 0, -2a - b = 0$, es decir $a = -c, b = 2c$, por lo tanto

$$N(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 2c & c \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Una base de este es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por último veamos que

$$\begin{aligned}
R(T) &= span(T(\beta)) \\
&= span\left(\left\{T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right), T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)\right\}\right) \\
&= span\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}\right).
\end{aligned}$$

Ahora como

$$2\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

entonces

$$R(T) = span\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}\right),$$

el cual es independiente y genera $R(T)$, por lo tanto concluimos que una base de $R(T)$ es

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$. ¿Es T invertible? Si sí, encuentra una regla para T^{-1} como la dada para T.

   Sea $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$U(x, y, z) = \left(\frac{x}{3}, \frac{x}{3} - y, z + y - x\right).$$

   Veamos lo siguiente

$$\begin{aligned}
UT &= U(T(x, y, z)) \\
&= U(3x, x - y, 2x + y + z) \\
&= (x, y, z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TU &= T(U(x, y, z)) \\
&= T\left(\frac{x}{3}, \frac{x}{3} - y, z + y - x\right) \\
&= (x, y, z)
\end{aligned}$$

   Por definición T es invertible y $T^{-1} = U$.

4. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con $\dim V = 2$ y $\beta \subset V$ base ordenada. Si

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Probar que $T^2 - (a+d)T + (ad - bc)Id_V = T_0$.

Demostración. Veamos como es la representación matricial de la anterior función

$$[T^2]_\beta = [T]_\beta [T]_\beta = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

$$[(a+d)T]_\beta = (a+d)[T]_\beta = \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}$$

$$[(ad - bc)Id_V]_\beta = (ad - bc)[Id_V]_\beta = (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&[T^2 - (a+d)T + (ad - bc)Id_V]_\beta \\
&= [T^2]_\beta - [(a+d)T]_\beta + [(ad - bc)Id_V]_\beta \\
&= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Como

$$[T_0]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

por el corolario del Teorema 2,6 concluimos que $T^2 - (a+d)T + (ad - bc)Id_V = T_0$.

■

5. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (-y, x)$.

   a) Calcula la matriz de T en la base estandar de $\mathbb{R}^2$.
   Veamos que

   $$T((1,0)) = (0,1) = 0e_1 + e_2,$$
   $$T((0,1)) = (-1,0) = -e_1 + 0e_2.$$

   Por lo tanto

   $$[T]_e = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Calcula la matriz de T en la base $\gamma = \{(1,2),(1,-1)\}$.

Veamos que

$$T((1,2)) = (-2,1) = -\frac{1}{3}(1,2) - \frac{5}{3}(1,-1),$$
$$T((1,-1)) = (1,1) = \frac{2}{3}(1,2) + \frac{1}{3}(1,-1).$$

Por lo tanto

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

c) Demuestra que para todo número real c, $S = (T - cId_{\mathbb{R}^2})$ es invertible.

Demostración. Sea $U_c : T^2 \to T^2$ dada por

$$U_c(x,y) = \left(\frac{y - cx}{c^2+1}, -\frac{x+cy}{c^2+1}\right)$$

Veamos lo siguiente

$$\begin{aligned} U_cS &= U_c(T - cId_{\mathbb{R}^2}) = U_c((-y,x) + c(x,y)) \\ &= U_c(-cx - y, x - cy) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SU_c &= S\left(\left(\frac{y-cx}{c^2+1}, -\frac{x+cy}{c^2+1}\right)\right) \\ &= \left(\frac{x+cy}{c^2+1}, \frac{y-cx}{c^2+1}\right) - c\left(\frac{y-cx}{c^2+1}, -\frac{x+cy}{c^2+1}\right) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

Por definición T es invertible y $T^{-1} = U$.

■