Probabilidad Aplicada y Optimización
Tarea

Rubén Pérez Palacios Lic. Computación Matemática
Profesor: Dr. Daniel Hernández Hernández

16 de febrero de 2023

1. Sea y un edtado de una cadena de Markov tal que $\mathbb{P}_x\left[T_y \leq k\right] \geq \alpha > 0$ para toda x en el espacio de estados S. Se cumple

$$\mathbb{P}_x\left[T_y > nk\right] \leq (1-\alpha)^n.$$

Demostración. Procederemos a demostrar por inducción matemática.

- **Caso base:** $n = 1$
  Por definición $\mathbb{P}_x\left[T_y \leq k\right] \geq \alpha > 0$, luego al ser $\mathbb{P}_x$ una medida de probabilidad se cumple que

$$1 - \mathbb{P}_x\left[T_y > k\right] \geq \alpha,$$

  lo cual es si y sólo si

$$\mathbb{P}_x\left[T_y > k\right] \geq 1 - \alpha.$$

  Por lo tanto concluimos que es cierto $\mathbb{P}_x\left[T_y > nk\right] \leq (1-\alpha)^n$ para $n = 1$.
- **Hipotesis de Inducción:**
  Se cumple para un $m \in \mathbb{N}_0$ que

$$\mathbb{P}_x\left[T_y > mk\right] \leq (1-\alpha)^m$$

- **Paso de Inducción:**
  Al ser $\mathbb{P}_x$ una medida de probabilidad entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x\left[T_y > (m+1)k\right] &= \mathbb{P}_x\left[X_1 \neq y, \cdots, X_{km} \neq y, X_{km+1} \neq y, \cdots, X_{(m+1)k} \neq y\right] \\
&\quad \text{Por defínción de } T_y \\
&= \mathbb{P}_x\left[X_{km+1} \neq y, \cdots, X_{(m+1)k} \neq y | X_1 \neq y, \cdots, X_{km} \neq y\right] \\
&\quad \mathbb{P}_x\left[X_1 \neq y, \cdots, X_{km} \neq y\right] \\
&\quad \text{Por multiplicidad de probabilidad condicional} \\
&= \mathbb{P}_x\left[X_{km+1} \neq y, \cdots, X_{(m+1)k} \neq y | X_{km} \neq y\right] \\
&\quad \mathbb{P}_x\left[X_1 \neq y, \cdots, X_{km} \neq y\right] \\
&\quad \text{Por perdida de memoria de } X \text{ al ser de Markov}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}_x \left[X_2 \neq y, \cdots, X_{k+1} \neq y | X_1 \neq y\right] \mathbb{P}_x \left[X_1 \neq y, \cdots, X_{km} \neq y\right] \\
&\quad \text{Al ser homogéneo } X \\
&= \mathbb{P} \left[X_2 \neq y, \cdots, X_{k+1} \neq y | X_0 = x, X_1 \neq y\right] \mathbb{P}_x \left[X_1 \neq y, \cdots, X_{km} \neq y\right] \\
&\quad \text{Por definción de } \mathbb{P}_x \\
&= \mathbb{P} \left[X_2 \neq y, \cdots, X_{k+1} \neq y | X_1 \neq y\right] \mathbb{P}_x \left[X_1 \neq y, \cdots, X_{km} \neq y\right] \\
&\quad \text{Por perdida de memoria de } X \text{ al ser de Markov} \\
&= \mathbb{P} \left[X_1 \neq y, \cdots, X_k \neq y | X_0 \neq y\right] \mathbb{P}_x \left[X_1 \neq y, \cdots, X_{km} \neq y\right] \\
&\quad \text{Al ser homogéneo } X \\
&\leq \mathbb{P}_x \left[X_1 \neq y, \cdots, X_k \neq y | X_0 \neq y\right] (1-\alpha)^m \\
&\leq (1-\alpha)^{m+1}
\end{aligned}
$$

Por Inducción Matemática concluimos que

$$\mathbb{P}_x \left[T_y > nk\right] \leq (1-\alpha)^n.$$

$\square$

2. Dada una matriz de transición Q, describa el conjunto de vectores propios por la izquierda asociados a sus correspondientes valores propios, mencionando sus características principales en el caso particular de que Q sea irreducible.

   Solución 1 – *Puesto que el Teorema de Perron-Frobenious nos indica que para una matriz no negativa existe un valor propio por la izquierda r tal que es mayor o igual en valor absoluto a cualquier auto valor de ella y con el un vector propio por la izquierda con entradas no negativas, pero al ser Q irreducible entonces Q tiene un vector propio q por la izquierda con entradas no negativas. Multiplicando a q por el inverso de la suma de sus entradas obtenemos p. Con esto aseguramos que es una distribución y además por construcción cumple que $pQ = p$. Al tener p todas sus entradas positivas entonces es posible llegar a todos los estados, es decir todos los estados son recurrentes (como lo es en una matriz irreducible).*

3. Cuando el orden de la matriz de transición Q no es grande, la ecuación lineal que da lugar a la búsqueda de las distribuciones estacionarias se puede realizar de manera rápida. Sin embargo, en caso de que el orden sea grande, proponga un método computacional para calcular tales distribuciones, y analice su tasa de convergencia.

   Solución 2 – *Si quisieramos calcular el valor propio p, puesto que este cumple que $pQ = p$, y que la suma de sus entradas es 1, este puede ser planteado como una ecuación lineal y resolverla con el método de Gauss-Jordan. El problema con ello es que el cálculo de esto puede ser algo tardado ya que la complejidad computacional del algoritmo es $O(N)$ con N la dimensión.*

   Ahora tenemos dos opciones calcular este mediante el cálculo de sus valores propios, lo cual sabemos que se puede o simulando.