Universidad Centroamericana "José Simeón Cañas"
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Departamento de Matemática
Análisis numérico
Ciclo 01/2021
Ing. Daniel Augusto Sosa

Guía de ejercicios 1 (Revisión 2)

Preliminares matemáticos

Student: The car has a speed of 50 miles an hour. What does that mean?
Teacher: Given any $\epsilon > 0$, there exists a δ such that if $|t_2 - t_1| < \delta$, then

$$\left| \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} - 50 \right| < \epsilon.$$

Student: How in the world did anybody ever think of such an answer?

Judith V. Grabiner, *Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus,* American Mathematical Monthly **90** (1983), 185 - 194.

1. Considere la función $f(x) = x^2 - \frac{9}{x} + 1$. ¿En cuál de los siguientes intervalos podemos afirmar que existe una raíz, usando el teorema de valor intermedio?

    a) $[-3, -1]$.
    b) $[-1, 1]$.
    c) $[1, 3]$.

2. Demuestre que el polinomio $f(x) = x^3 - 7x^2 + 25x + 8$ tiene exactamente una raíz real.

3. Sea $k \in \mathbb{R}$ arbitrario. Use el teorema del valor intermedio y el teorema de Rolle para deducir que la gráfica de $f(x) = x^3 + 2x + k$ cruza el eje x exactamente una vez.

4. Para las siguientes funciones, encuentre todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema de valor medio en los intervalos indicados.

    a) $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 7x - 2$ en $[2, 5]$.
    b) $g(x) = 8x + e^{-3x}$ en $[-2, 3]$.

5. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ se cumple que

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

6. En *Cálculo III*, se estudió que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge. Este ejercicio presenta una forma de demostrar este hecho.

   Los **números armónicos** son los números $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ para $n \geq 1$.

   - Demuestre que para todos los números naturales n y m, si $n \geq m$, entonces $H_n - H_m \geq \frac{n-m}{n}$.

   - Demuestre que para todo $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.
   - Usando los hechos anteriores, concluya que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge.

7. Un hilo pesado, bajo la acción de la gravedad, se comba formando la catenaria $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, donde $a \neq 0$ es un número real. Demuestre que para valores pequeños de $|x|$ la forma que toma el hilo puede representarse aproximadamente por la parábola

$$y = a + \frac{x^2}{2a}.$$

8. Utilice el polinomio de Taylor grado n para aproximar los valores de las siguientes funciones. Además, calcule los errores relativos porcentuales para cada aproximación.

   a) $f(x) = e^x \cos(x)$, $n = 2$, $c = 0$, aproximar $f(0.5)$ y $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.
   b) $f(x) = (x-1)\ln(x)$, $n = 3$, $c = 1$, aproximar $f(0.75)$ y $\int_{0.5}^{1.5} f(x)\mathrm{d}x$.
   c) $f(x) = x^2 e^{x^2}$, $n = 4$, $c = 0$, aproximar $f(0.2)$, $\int_0^{0.4} f(x)\mathrm{d}x$ y $f'(0.2)$.

9. Acote el error absoluto que se comete cuando se aproxima cada una de las siguientes funciones a través de su polinomio de Taylor de grado n y centro c.

   a) $f(x) = \sin^{-1}(x)$, $n = 4$, $c = 0$. Para aproximar $f(x)$ en $|x| \leq 0.5$.
   b) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$, $n = 6$, $c = 0$. Para aproximar $f(x)$ en $|x| \leq \frac{\pi}{2}$.
   c) $f(x) = \ln(x^2 + 2)$, $n = 3$, $c = 1$. Para aproximar $f(x)$ en $0 \leq x \leq 1$.

Números de máquina

1. Determine el número decimal equivalente a los siguientes números de máquina de punto flotante. **Nota:** las zonas de memoria están distribuidas de la siguiente forma: 1 bit para el signo, 11 bits para el exponente (sesgado) y 11 bits para la mantisa (normalizada con punto flotante).

   a) 0 01111111111 11010011000
   b) 1 10000001010 10010011000
   c) 0 00000101010 11111111111
   d) 1 10010000001 10000000000

2. Para cada uno de los números del ejercicio anterior, determine la forma decimal del número de máquina siguiente y del número de máquina anterior.

3. Utilizando el mismo esquema del ejercicio 1, responda las siguientes preguntas:

    a) ¿Cuántos números reales se pueden representar? No olvide incluir 0.

    b) ¿Cuál es el menor número positivo representable?

    c) ¿Cuáll es el mayor número positivo representable?

Rapidez de convergencia

1. Encuentre la rapidez de convergencia de las siguientes sucesiones a medida que $n \to \infty$.

    a) $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

    b) $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$

    c) $\lim_{n\to\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 = 0$

    d) $\lim_{n\to\infty} [\ln(n+1) - \ln(n)] = 0$

2. Encuentre la rapidez de convergencia de las siguientes funciones a medida que $h \to 0$

    a) $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$

    b) $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h} = 0$

    c) $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h) - h\cos(h)}{h} = 0$

    d) $\lim_{h\to 0} \frac{1-e^h}{h} = -1$

Sugerencias y respuestas

Preliminares matemáticos

1. *a*) No podemos concluir que exista una raíz.
   b) No podemos concluir que exista una raíz.
   c) Existe una raíz en este intervalo.

2. **Existencia:** Use el teorema de valor intermedio.

   Unicidad: Proceda por contradicción y use el teorema de Rolle.

3. **Existencia:** Proceda por casos.

   Caso I. Suponga que $x > 0$. Relacione $f(x)$ y la expresión $2x + k$ para encontrar un d tal que $f(x) > 0$ siempre que $x > d$.

   Caso II. Suponga que $x < 0$. Demuestre que $f(x) < 0$ cuando $x < d$.

   Ahora use el teorema de valor intermedio.

   Unicidad. Proceda por contradicción y use el teorema de Rolle.

4. *a*) $c = (2 + \sqrt{79})/3$.
   b) $c = -1.0973$.

5. Use inducción. La suma $1 + 2 + \ldots + n$ es conocida. Existe una historia apócrifa de Carl Friedrich Gauss y esta suma.

6. *a*) Considere un número natural m arbitrario y proceda por inducción sobre n con $n = m$ como caso base.
   b) Use inducción y el literal anterior.
   c) Use el criterio de comparación de series y el literal anterior.

7. Use inducción.

8. ¡Taylor!

9. *a*)
   - $E_{\mathrm{rel}\,\%} = 3.6707\,\%$
   - $E_{\mathrm{rel}\,\%\,\int} = 8.85147\,\%$

   b)
   - $E_{\mathrm{rel}\,\%} = 2.23583\,\%$
   - $E_{\mathrm{rel}\,\%\,\int} = 5.32497\,\%$

   c)
   - $E_{\mathrm{rel}\,\%} = 0.077898\,\%$

- $E_{\text{rel}\,\%\,\int} = 0.519272\,\%$
- $E_{\text{rel}\,\%\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} = 0.225712\,\%$

10. a) $E_{\text{abs}} \leq 0.027086$
    b) $E_{\text{abs}} \leq 0.006621$
    c) $E_{\text{abs}} \leq 0.125$

Números de máquina

1. a) 0.412109375
   b) -588
   c) $2.4453000026536 \times 10^{-296}$
   d) $-3.4028236692101 \times 10^{38}$
2. a)
   - Anterior: 0.411865234375
   - Próximo: 0.412353515625

   b)
   - Anterior: -588.5
   - Próximo: -587.5

   c)
   - Anterior: $2.4441054252219 \times 10^{-296}$
   - Próximo: $2.4464945800855 \times 10^{-296}$

   d)
   - Anterior: $-3.4061467391995 \times 10^{38}$
   - Próximo: $-3.4011621342154 \times 10^{38}$
3. a) 4194305
   b) 2^{-1025}
   c) $2^{1023} \sum_{k=1}^{11} 2^{-k}$

Rapidez de convergencia

1. a) $O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   b) $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   c) $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   d) $O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. a) $O(h^2)$.
   b) $O(h)$.

c) $O(h^2)$.

d) $O(h)$.

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & 1 & \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$