Universidad Centroamericana "José Simeón Cañas"
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Departamento de Electrónica e Informática
Materia: Análisis Numérico
Catedrático: Daniel Sosa
Instructor: Kevin Lopez
Estudiante: Elsy Alejandra Chavez Mendoza (00125717)
Estudiante: Fredy Alexander Sanchez Perez (00082817)
Estudiante: Erick Fernando Leones Arevalo (00092217)
Estudiante: German Alexander Castro Portillo (00229017)
Viernes 28 de junio de 2019

Definiciones

El método de cuadratura de Gauss es un método numérico para evaluar integrales definidas de funciones, por medio de sumatorias fáciles de implementar, de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) + ... + w_n f(x_n) \tag{1}$$

Donde $\mathrm{w_i}$ se refiere a los pesos o coeficientes que en el caso de cuadratura de Gauss se explicará cómo calcularse más adelante. Y donde $\mathrm{x_i}$ se refiere a las raíces de la función como polinomio lo cual recordando se obtienen igualando la función a cero, es decir:

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

Y los resultados obtenidos siguientes $\mathrm{x_1, x_2, ..., x_n}$ son las raíces de la función.

Para este método también debemos recordar la fórmula del polinomio interpolante de Legendre el cual es:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i(x) f(x_i) \tag{3}$$

Donde:

$$L_i(x) = \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{4}$$

También para contextualizar, recordemos de los otros métodos de cuadratura que, la regla del trapecio (Newton-Cotes para n = 1) tiene grado de precisión uno. La regla de Simpson (n = 2) es correcta hasta los polinomios de tercer grado inclusive. A diferencia de Newton Cotes la cuadratura de Gauss posee un grado de precisión de $2_\mathrm{n} - 1$, además que selecciona los puntos de evaluación de manera óptima y no de forma igualmente espaciada como lo hacen las fórmulas de Newton-Cotes.

Resultados teóricos

Polinomios Ortogonales

Antes de explicar la cuadratura gaussiana se debe conocer acerca de lo que son los polinomios ortogonales para luego proceder a utilizar el polinomio de Legendre. El conjunto de funciones diferentes de cero $\{\mathrm{p_0}, ..., \mathrm{p_n}\}$ en el intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ es ortogonal en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ si

$$\int_a^b p_j(x)p_k(x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \neq 0 & j = k \end{cases} \tag{5}$$

Polinomios de Legendre

Conociendo acerca de los polinomios ortogonales, ahora se da a conocer acerca de un conjunto de este tipo de polinomios llamado de Legendre los cuales son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ y se obtienen de la siguiente fórmula:

$$p_i(x) = \frac{1}{2^i i!}\frac{d^i}{dx^i}[(x^2-1)^i] \tag{6}$$

Cuya demostración omitimos.

Existe un método por el cual se puede determinar los nodos y coeficientes para las fórmulas que dan el resultado exacto de los polinomios de grado superior. Se consideran varias colecciones de polinomios ortogonales, los cuales son funciones que tienen la propiedad de que una integral definida del producto de dos de ellos es igual a cero. Esta colección de polinomios son llamados polinomios de Legendre, que van desde $\mathrm{P_0}$ hasta $\mathrm{P_n}$ y tienen las propiedades:

1. Para cada n, $\mathrm{P_n(x)}$ es un polinomio mónico (polinomio de una variable cuyo coeficiente principal es 1) con grado n.
2. $\int_{-1}^{1} \mathrm{P(x)P_n(x) \cdot dx} = 0$ cuando $\mathrm{P(x)}$ sea un polinomio de grado menor a n.

Los primeros polinomios de Legendre son:
$\mathrm{P_0(x)} = 1$
$\mathrm{P_1(x)} = 1$
$\mathrm{P_2(x)} = \mathrm{x^2} - \frac{3}{5}\mathrm{x}$
$\mathrm{P_3(x)} = \mathrm{x^3} - \frac{6}{7}\mathrm{x^2} + \frac{3}{35}$

Fórmula de la Cuadratura Gaussiana

$$\int_{-1}^{1} f(x) \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \tag{7}$$

Los nodos o raíces $x_1, x_2, ..., x_n$ en el intervalo $[-1, 1]$ y los coeficientes $c_1, c_2, ..., c_n$, son elegidos para minimizar el error obtenido en la aproximación.

Para el caso de las raíces x_i se utiliza el polinomio de Legendre del grado que se desee evaluar y se obtienen las raíces de este, las cuales se utilizan en la formula de Gauss y luego para el caso de los coeficientes c_i se obtienen de la misma forma que en Lagrange se obtiene el $L_i(x)$ siendo x_i de esta fórmula las raíces calculadas con el polinomio de Legendre.

Veamos el siguiente ejemplo:
Polinomio: $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$
Se obtienen las raíces:

$$
\begin{aligned}
&x^2 - \tfrac{1}{3} = 0 \\
&x^2 = \tfrac{1}{3} \\
&x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}} \begin{cases} x_1 = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \\ x_2 = -\sqrt{\tfrac{1}{3}} \end{cases}
\end{aligned} \tag{8}
$$

Se procede ahora a obtener los coeficientes:

$$c_1 = \int_{-1}^{1} \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} \cdot dx = \int_{-1}^{1} \frac{x - (-\sqrt{\frac{1}{3}})}{\sqrt{\frac{1}{3}} - (-\sqrt{\frac{1}{3}})} \cdot dx = 1 \tag{9}$$

$$c_2 = \int_{-1}^{1} \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} \cdot dx = \int_{-1}^{1} \frac{x - \sqrt{\frac{1}{3}}}{-\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}} \cdot dx = 1 \tag{10}$$

Y es así como se obtienen los siguientes resultados para los diferentes grados que se evalúen.

n	raíces x_i	coeficientes c_i
2	$-\sqrt{1/3} = -0.57735026918963$	$1 = 1.00000000000000$
	$\sqrt{1/3} = 0.57735026918963$	$1 = 1.00000000000000$
3	$-\sqrt{3/5} = -0.77459666924148$	$5/9 = 0.55555555555555$
	$0 = 0.00000000000000$	$8/9 = 0.88888888888888$
	$\sqrt{3/5} = 0.77459666924148$	$5/9 = 0.55555555555555$
4	$-\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}} = -0.86113631159405$	$\frac{90-5\sqrt{30}}{180} = 0.34785484513745$
	$-\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}} = -0.33998104358486$	$\frac{90+5\sqrt{30}}{180} = 0.65214515486255$
	$\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}} = 0.33998104358486$	$\frac{90+5\sqrt{30}}{180} = 0.65214515486255$
	$\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}} = 0.86113631159405$	$\frac{90-5\sqrt{30}}{180} = 0.34785484513745$

raíces x_i de los n-ésimos polinomios de Legendre y coeficientes c_i

Fig 1. Para aproximar las integrales en un intervalo general $[a, b]$, el problema debe trasladarse de nuevo a $[-1, 1]$. Si se usa la sustitución $t = \frac{(2x-a-b)}{(b-a)}$ la nueva fórmula queda de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x) = \int_{-1}^{1} f(\frac{(b-a)t+b+a}{2})\frac{b-a}{2} \cdot dt \tag{11}$$

Resultados prácticos

Ejemplo de uso de cuadratura gaussiana:

$$\int_{-1}^{1} (x^4) \cdot dx \tag{12}$$

Calculando el valor correcto:

$$\int_{-1}^{1} (x^4) \cdot dx = \frac{2}{5} = 0{,}4 \tag{13}$$

Calculando el valor aproximado utilizando la cuadratura gaussiana para n = 2:

$$\begin{gathered} \textstyle\int_{-1}^{1} f(x) \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \\ ((-\sqrt{\tfrac{1}{3}})^4 + (\sqrt{\tfrac{1}{3}})^4) = 0{,}2222222222222868 \end{gathered} \tag{14}$$

Calculando el valor aproximado utilizando la cuadratura gaussiana para n = 3:

$$\begin{gathered} \textstyle\int_{-1}^{1} f(x) \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) \\ \tfrac{5}{9}(-\sqrt{\tfrac{3}{5}})^4 + \tfrac{8}{9}(0)^4 + \tfrac{5}{9}(\sqrt{\tfrac{3}{5}})^4 = 0{,}399999999999989 \end{gathered} \tag{15}$$

Calculando el valor aproximado utilizando la cuadratura gaussiana para n = 4:

$$\begin{gathered} \textstyle\int_{-1}^{1} f(x) \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) + c_4 f(x_4) \\ \tfrac{90-5\sqrt{30}}{180}[(-\sqrt{\tfrac{15+2\sqrt{30}}{35}})^4 + (\sqrt{\tfrac{15+2\sqrt{30}}{35}})^4] + \tfrac{90+5\sqrt{30}}{180}[(-\sqrt{\tfrac{15+2\sqrt{30}}{35}})^4 + (\sqrt{\tfrac{15+2\sqrt{30}}{35}})^4] = 0{,}3999999999999921 \end{gathered} \tag{16}$$

Ejemplo de cambio de intervalos a $[-1, 1]$:

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \cdot dx \tag{17}$$

Calculando el valor correcto:

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \cdot dx = 2 \tag{18}$$

Cambiando los intervalos a $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x) = \int_{-1}^1 f(\tfrac{(b-a)t+b+a}{2})\tfrac{b-a}{2} \cdot dt \\
&\int_{-1}^1 f(\tfrac{(4-0)t+4+0}{2})\tfrac{4-0}{2} \cdot dt \\
&\int_{-1}^1 \tfrac{4t+4}{\sqrt{(2t+2)^2+9}} \cdot dt
\end{aligned} \tag{19}$$

Referencias

[1] Timothy Sauer, Análisis numérico pp. 273-279

[2] Richard L. Burden, Análisis numérico pp. 228-235

[3] [Online]. Available: http://www.fis.puc.cl/ rbenguri/metodos/Apuntes/clase5.pdf