

# Введение

Здесь содержатся знания `math4133` о математике. Принятые обозначения:

- $\forall$  — **квантор всеобщности**. Обозначение условия, которое верно для всех указанных элементов. Читается как «для всех», «для каждого», «для любого» или «все», «каждый», «любой».
- $\exists$  — **квантор существования**. Обозначение условия, которое верно хотя бы для одного из указанных элементов. Читается как «существует», «найдётся».
- $\exists!$  — **квантор существования и единственности**. Обозначение условия, которое верно ровно для одного из указанных элементов. Читается как «существует единственный».
- $:$  — «что», «такой (такие)», «что», «так, что», «обладающий свойством».
- $\Rightarrow$  — символ следствия. Читается как «если... , то...».
- $\Leftrightarrow$  — символ эквивалентности (равносильности). Читается как «тогда и только тогда, когда», «ровно/в точности тогда, когда».
- $\wedge$  — знак конъюнкции. Высказывание, полученное при связывании двух других высказываний конъюнкцией, истинно ровно тогда, когда оба связываемых высказываний истинны.
- $\vee$  — знак дизъюнкции. Высказывание, полученное при связывании двух других высказываний дизъюнкцией, истинно ровно тогда, когда истинно хотя бы одно из связываемых высказываний. Дизъюнкция имеет более низкий приоритет по сравнению с конъюнкцией.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Дискретная математика</b>	<b>3</b>
1.1	Графы	3
1.1.1	Связность графов	4
1.1.2	Эйлеровы графы	4
1.1.3	Гамильтоновы графы	5
1.2	Деревья	6
1.2.1	Остовы	7
<b>2</b>	<b>Линейная алгебра</b>	<b>9</b>
2.1	Линейные комбинации	9
2.2	Матрицы	9
2.2.1	Операции над матрицами	9
2.2.2	Определитель матрицы	10
2.2.3	Ранг матрицы	14
2.2.4	Элементарные преобразования матриц	15
2.2.5	Обратные матрицы	15
2.3	Векторные пространства	16
2.3.1	Базис и размерность векторного пространства	17
2.4	Системы линейных алгебраических уравнений	17
2.4.1	Матричная форма системы линейных уравнений	18
2.4.2	Линейная независимость	18
2.4.3	Решение систем линейных уравнений	19
2.4.4	Фундаментальная система решений	20
2.5	Многочлены от одной переменной	21
2.5.1	Деление многочленов	21
2.5.2	Корень многочлена	22
2.6	Многочлены от нескольких переменных	23
2.6.1	Симметрические многочлены	23
<b>3</b>	<b>Математический анализ</b>	<b>24</b>
3.0.1	Локальный экстремум функции нескольких переменных	24
3.0.2	Метод наименьших квадратов	25
3.0.3	Условный экстремум	26
<b>4</b>	<b>Теория множеств</b>	<b>27</b>
4.1	Множества	27
4.1.1	Отношения между множествами	27
4.1.2	Операции над множествами	27
4.1.3	Функции	28
4.1.4	Мощность множеств	28
<b>5</b>	<b>Разное</b>	<b>29</b>

# Глава 1

## Дискретная математика

### 1.1 Графы

**Графом** называется пара множеств  $G = (V, E)$ , где  $V$  — множество вершин графа,  $E \subseteq V^2$  — множество рёбер графа.

Если  $e = \{u, v\}$ ,  $e \in E$ , то говорят, что:

- ребро  $e$  соединяет вершины  $u$  и  $v$ ;
- $u$  и  $v$  — концы ребра  $e$ ;
- ребро  $e$  инцидентно вершинам  $u$  и  $v$ ;
- вершины  $u$  и  $v$  инцидентны ребру  $e$ .

В дальнейшем будем рассматривать только конечные графы.

На рисунках вершины графа изображают точками, а рёбра  $e = \{u, v\}$  — кривыми, соединяющими точки, которые изображают вершины  $u$  и  $v$ .

Вершины называются **соседними**, если их соединяет ребро, иначе — **несоседними**.

Ребро вида  $e = \{u, u\}$  называется **петлёй**.

Граф, в котором любые две вершины соединены ребром, называется **полным** и обозначается  $K_n$ , где  $n$  — число вершин в нём.

Графы  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$  называются **изоморфными**, если существует биекция  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$  такая, что  $\forall u, v \in V_1 ((u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2)$ , иначе — **неизоморфными**.

$\varphi$  называется **изоморфизмом**.

Число рёбер в графе  $G$ , инцидентных вершине  $u$ , называется **степенью** вершины и обозначается  $\deg_G u$ .

**Лемма 1.1.1 (о рукопожатиях).**

$$\sum_{u \in V} \deg_G u = 2|E|$$

где  $G = (V, E)$  — граф.

**Доказательство (методом математической индукции).**

- *База индукции.*  $|E| = 0$ : в таком графе  $\sum_{u \in V} \deg u = 0$ .

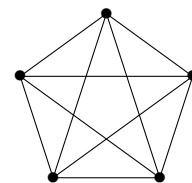


Рис. 1.1: Граф  $K_5$

- *Шаг индукции.* Пусть лемма верна для  $|E| = n$ . Докажем её для  $|E| = n + 1$ . Для этого достаточно заметить, что каждое новое ребро увеличивает степени двух вершин на 1.

■

**Маршрутом** в графе  $G = (V, E)$  называется последовательность вершин и рёбер вида  $(v_1; e_1; v_2; \dots; e_k; v_{k+1})$ , где  $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ .

Маршрут, в котором все рёбра различны, называется **цепью**.

Цепь, в которой все вершины, за исключением, может быть, первой и последней, различны, называется **простой**.

Маршрут, в котором первая и последняя вершины совпадают, называется **замкнутым**.

Замкнутая цепь называется **циклом**.

Маршрут, соединяющий вершины  $u$  и  $v$ , называется  $(u, v)$ -**маршрутом**.

**Лемма 1.1.2.**  $(u, v)$ -маршрут содержит  $(u, v)$ -простую цепь.

**Доказательство.** Пусть  $(u = v_1; e_1; v_2; \dots; e_k; v_{k+1} = v)$  — не простая цепь, тогда  $\exists i < j: v_i = v_j$ . Уберём из маршрута подпоследовательность  $(e_i; v_{i+1}; \dots; e_{j-1}; v_j)$ , получим маршрут, в котором совпадающих вершин на одну меньше. Повторяя, получим простую цепь, являющуюся частью данного маршрута. ■

**Лемма 1.1.3.** Любой цикл содержит простой цикл. Доказательство аналогично предыдущему.

**Лемма 1.1.4.** Если в графе есть две различные простые цепи, соединяющие одни и те же вершины, то в этом графе есть простой цикл.

**Доказательство.** Пусть  $(u = v_1; e_1; v_2; \dots; e_n; v_{n+1} = v)$ ,  $(u = v'_1; e'_1; v'_2; \dots; e'_m; v'_{m+1} = v)$  — простые цепи. Найдём наименьшее  $i: e_i \neq e'_i$ , тогда  $(v_i; e_i; v_{i+1}; \dots; e_n; v_{n+1} = v'_{m+1}; e'_m; \dots; e'_i; v'_i = v_i)$  — цикл, значит, можно получить простой цикл. ■

### 1.1.1 Связность графов

Вершины  $u$  и  $v$  называются **связанными**, если существует  $(u, v)$ -маршрут, иначе — **несвязанными**.

Граф называется **связным**, если в нём любые две вершины связаны, иначе — **несвязным**.

Граф  $G' = (V', E')$  называется **подграфом** графа  $G = (V, E)$ , если  $V' \subseteq V$  и  $E' \subseteq E$ .

**Компонентой связности** графа называется его максимальный (относительно включения) связный подграф.

### 1.1.2 Эйлеровы графы

Цикл, содержащий все рёбра графа, называется **эйлеровым**.

Граф, содержащий эйлеров цикл, называется **эйлеровым**.

**Теорема 1.1.1.** Связный граф эйлеров  $\Leftrightarrow$  степени всех вершин чётны.

**Доказательство.**

1.  $\Rightarrow$ . Пусть в графе есть эйлеров цикл. Выберем вершину  $v_0$  в этом цикле и начнём обходить его. При каждом посещении вершины  $v \neq v_0$  её степень увеличивается на 2. Т. о., если посетить её

$k$  раз, то  $\deg v = 2k$ .

Для  $v_0$  степень увеличивается на 1 в начале обхода, на 1 в конце обхода и на 2 при промежуточных посещениях. Т. о., её степень чётна.

2.  $\Leftarrow$ . Пусть степени всех вершин чётны. Выберём цепь  $C = (v_0; e_0; v_1; e_1; \dots; e_{k-1}; v_k)$  наибольшей длины. Все рёбра, инцидентные  $v_k$ , присутствуют в этой цепи, иначе её можно было бы удлинить.

Докажем методом от противного, что  $v_0 = v_k$ . Пусть  $v_0 \neq v_k$ . При прохождении вершины  $v_i = v_k$ , где  $0 < i < k$ , степень  $v_k$  увеличивается на 2. Также проходим по ребру  $e_{k-1}$ , тогда степень  $v_k$  нечётна. Противоречие.

Докажем методом от противного, что  $C$  содержит все рёбра. Пусть найдётся ребро  $e = \{u, v\}$ , не входящее в  $C$ . Возьмём первое ребро  $e' = \{v_i, v'\}$  из  $(v_0, u)$ -маршрута, не входящее в  $C$ . Тогда цепь  $(v'; e'; v_i; e_i; \dots; e_{k-1}; v_k = v_0; e_0; v_1; e_1; \dots; v_{i-1})$  длиннее, чем  $C$ . Противоречие.

■

## Алгоритмы нахождения эйлерова цикла

### 1. Алгоритм Флёр (очень медленный).

- Выберем произвольную вершину.
- Пусть находимся в вершине  $v$ . Выберем ребро, инцидентное ей, которое должно быть мостом, только если не осталось других рёбер.
- Проходим по выбранному ребру и вычёркиваем его.
- Повторяем, пока есть рёбра.

### 2. Алгоритм объединения циклов.

- Выберем произвольную вершину.
- Выбираем любое непосещённое ребро и идём по нему.
- Повторяем, пока не вернёмся в начальную вершину.
- Получим цикл  $C$ . Если он не эйлеров, то  $\exists u \in C, e = \{u, u'\}: u' \notin C$ . Повторяем шаги 2а–2с для начальной вершины  $u$ . Получим цикл  $C'$ , рёбра которого не совпадают с рёбрами  $C$ . Объединим эти циклы и получим новый. Повторяем шаг 2д.

Цепь называется **эйлеровым путём**, если она не является циклом и содержит все рёбра.

Граф называется **полуэйлеровым**, если в нём есть эйлеров путь.

**Теорема 1.1.2.** *Связный граф полуэйлеров  $\Leftrightarrow$  степени двух вершин нечётны, а остальных — чётны.*

**Доказательство.**

- $\Rightarrow$ . Пусть в графе есть эйлеров путь. Соединив его концы ребром, получим эйлеров цикл. Степени соединённых вершин увеличились каждая на 1, значит, они были нечётными, а степени остальных вершин — чётными.
- $\Leftarrow$ . Пусть степени двух вершин нечётны, а остальных — чётны. Соединим нечётные вершины ребром, тогда можно получить эйлеров цикл. Убрав из него добавленное ребро, получим эйлеров путь.

■

### 1.1.3 Гамильтоновы графы

Простой цикл, содержащий все вершины графа, называется **гамильтоновым**.

Граф называется **гамильтоновым**, если в нём есть гамильтонов цикл.

**Теорема 1.1.3 (Дирака).** *Если в графе  $G = (V, E)$  с  $n \geq 3$  вершинами  $\forall u \in V \deg u \geq \frac{n}{2}$ , то граф гамильтонов.*

**Доказательство.**

- Докажем методом от противного, что граф связный. Пусть он несвязный. Выберем компоненту связности  $G' = (V', E')$  с наименьшим числом вершин, тогда  $|V'| \leq \frac{n}{2}$ . Возьмём  $v \in V'$ , тогда  $\deg v \leq |V'| - 1 < \frac{n}{2}$ . Противоречие с условием.
- Выберем цепь  $C = (v_0; e_0; v_1; \dots; e_{k-1}; v_k)$  максимальной длины. Тогда все вершины, соседние с  $v_0$ , лежат в этой цепи, иначе можно увеличить длину цепи. Среди  $v_1, v_2, \dots, v_k$  не менее  $\frac{n}{2}$  вершин, соседних с  $v_0$ , т. к.  $\deg v_0 \geq \frac{n}{2}$ . Аналогично для  $v_k$ .

Найдутся  $v_{i-1}$  и  $v_i$  такие, что  $v_{i-1}$  соседняя с  $v_k$ , а  $v_i$  — с  $v_0$ .

Докажем, что  $(v_i; e_{i+1}; \dots; v_k; e; v_{i-1}; e_{i-1}; \dots; v_0; e'; v_i)$  — гамильтонов цикл, методом от противного. Предположим обратное, тогда есть вершина  $u$ , не входящая в цикл, и существует  $(v_0, u)$ -маршрут. Значит, существует ребро, инцидентное одной из вершин цикла, но не входящее в него, и можно получить более длинную цепь. Противоречие.

■

**Теорема 1.1.4 (Оре).** *Если в графе с  $n \geq 3$  вершинами для любых двух несмежных вершин  $u$  и  $v$   $\deg u + \deg v \geq n$ , то граф гамильтонов.*

**Доказательство.**

1. Докажем методом от противного, что граф связный. Пусть он несвязный, тогда в нём найдутся хотя бы две компоненты связности  $G_1(V_1, E_1)$  и  $G_2(V_2, E_2)$ . Пусть  $u \in V_1, v \in V_2$ .  $u$  и  $v$  несмежные, тогда

$$\deg u \leq |V_1| - 1, \deg v \leq |V_2| - 1 \Rightarrow \deg u + \deg v \leq |V_1| + |V_2| - 2 \leq n - 2$$

Противоречие с условием.

2. Докажем, что граф гамильтонов. Выберем цепь  $W = (v_0; e_0; v_1; \dots; e_{k-1}; v_k)$  наибольшей длины. В ней содержатся все вершины, соседние с  $v_0$  или с  $v_k$ . Т. о., среди вершин  $v_1, \dots, v_k$   $\deg v_0$  соседних с  $v_0$ . Аналогично для  $v_k$ .

$\deg v_0 + \deg v_k \geq n$ , тогда найдутся  $v_i$  и  $v_{i+1}$  такие, что  $v_i$  соседняя с  $v_k$ , а  $v_{i+1}$  — с  $v_0$ .

$(v_{i+1}; e_{i+1}; \dots; v_k; e; v_i; e_{i-1}; v_{i-1}; \dots; e_0; v_0; e'; v_{i+1})$  — гамильтонов цикл (доказательство аналогично доказательству в теореме 1.1.3 (Дирака)).

■

## 1.2 Деревья

Граф без циклов называется **лесом**.

Связный лес называется **деревом**.

Ребро называется **мостом**, если при его удалении увеличивается число компонент связности.

**Утверждение 1.2.1.** Ребро — мост ровно тогда, когда оно не содержится в цикле.

**Доказательство.**

1. Докажем методом от противного, что если ребро содержится в цикле, то оно не является мостом. Пусть ребро  $e$  содержится в цикле  $W = v_0 e_0 \dots u e v \dots v_k$ ,  $u'$  и  $v'$  — смежные вершины.
- (а) Если в этом маршруте нет ребра  $e$ , то при его удалении из графа  $u'$  и  $v'$  останутся смежными.
- (б) Если  $u' = v'_0 e'_0 \dots u e v \dots e_m v'_m = v'$  — маршрут, соединяющий  $u'$  и  $v'$ , тогда при удалении  $e$  из графа  $u'$  и  $v'$  соединяет маршрут  $u' = v'_0 e'_0 \dots u \dots e_0 v_0 = v_k e_{k-1} \dots v \dots e_m v'_m = v'$ .
2. Пусть  $e = (u, v)$  не является мостом, тогда  $u, v$  лежат в одной компоненте связности. Удалим  $e$  из графа, тогда число компонент связности не изменилось, значит,  $u$  и  $v$  также лежат в одной компоненте связности, т. е. существует цепь, соединяющая  $u$  и  $v$ :  $u = v_0 e_0 \dots e_{k-1} v_k = v$ . Тогда в исходном графе существует цикл  $u = v_0 e_0 \dots e_{k-1} v_k = v e u$ .

■

**Теорема 1.2.1.** Следующие утверждения о графе  $G$  с  $n$  вершинами эквивалентны:

1.  $G$  — дерево.
2.  $G$  связный и имеет  $n - 1$  ребро.
3.  $G$  связный и каждое его ребро — мост.
4.  $G$  не содержит циклов и имеет  $n - 1$  ребро.
5. Любые две вершины графа  $G$  соединены ровно одной простой цепью.
6.  $G$  не содержит циклов и добавление ребра приводит к появлению цикла.

**Доказательство.**

- Докажем 1)  $\Rightarrow$  3). Связность следует из определения дерева. В силу пред. утв. каждое ребро — мост.
- Докажем 3)  $\Rightarrow$  2). Связность по предположению. Докажем методом математической индукции, что в графе  $n - 1$  ребро.

— База индукции. Для  $n = 1, 2$  очевидно.

– *Шаг индукции.* Пусть для графов с числом вершин, меньшим  $n$ , Возьмём мост  $e$  и удалим его. Получим две компоненты связности  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$ . По предположению индукции  $|E_1| = |V_1| - 1$ ,  $|E_2| = |V_2| - 1$ . В исходном графе рёбер  $|E_1| + |E_2| + 1 = |V_1| + |V_2| - 1 = n - 1$ .

• Докажем  $2) \Rightarrow 4)$ . В  $G$   $n - 1$  ребро по предположению. Докажем методом математической индукции, что  $G$  не содержит циклов.

– *База индукции.* Для  $n = 1, 2$  очевидно.

– *Шаг индукции.* Докажем, что в графе есть вершина степени 1.  $\forall u \text{ deg} u \geq 1. \forall u \text{ deg} u \geq 2 \Rightarrow 2|E| = \sum_{u \in V} \text{deg} u \geq 2n \Rightarrow n - 1 = |E| \geq n$ . Значит, в графе найдётся вершина степени 1. Удалим её и инцидентное ей ребро. Полученный граф содержит  $n - 1$  вершину и удовлетворяет утверждению 2). По предположению индукции он не содержит циклов, тогда и исходный граф не содержит циклов.

• Докажем  $4) \Rightarrow 5)$ . Докажем связность методом математической индукции.

– *База индукции.* Для  $n = 1, 2$  очевидно.

– *Шаг индукции.* Пусть в графе  $k$  компонент связности:  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$ ,  $\dots$ ,  $G_k = (V_k, E_k)$ . Они являются деревьями.

$|E_1| = |V_1| - 1$ ,  $|E_2| = |V_2| - 1$ ,  $\dots$ ,  $|E_k| = |V_k| - 1$ .  $n - 1 = |E_1| + \dots + |E_k| = n - k \Rightarrow k = 1$ , значит, граф связный.

Пусть существуют вершины  $u$ ,  $v$  такие, что их соединяют две простые цепи, тогда в графе есть цикл, что противоречит предположению. Тогда эти вершины соединены ровно одной простой цепью.

• Докажем  $5) \Rightarrow 6)$ . Предположим, что в графе есть цикл  $v_0 e_0 v_1 e_1 \dots v_k = v_0$ , тогда есть две простые цепи  $v_0 e_0 \dots v_{k-1}$  и  $v_{k-1} e_k v_k = v_0$ , соединяющие  $v_0$  и  $v_{k-1}$ , что противоречит предположению.

Докажем, что добавление ребра приводит к появлению ровно одного цикла. Рассмотрим несоседних вершины  $u$  и  $v$ . По предположению есть цепь  $u = v_0 e_0 \dots v_k = v$ , соединяющая их. Тогда  $u = v_0 e_0 \dots v_k = v e_i$  — цикл, где  $e$  —  $(u, v)$ -маршрут. Пусть есть 2 цикла, соединяющих  $u$  и  $v$ . Удалим  $e$ , цикл останется. Получили исходный граф, в котором нет циклов. Противоречие.

•  $6) \Rightarrow 1)$ . Докажем связность. Рассмотрим вершины  $u$  и  $v$ . Если они не соединены ребром, то соединим и по предположению получим цикл  $v_0 e_0 \dots u e v \dots e_{k-1} v_k = v_0$ . Тогда  $u \dots e_0 v_0 = v_k e_{k-1} \dots v$  —  $(u, v)$ -маршрут. Противоречие.

■

### 1.2.1 Остовы

**Остовом** графа  $G = (V, E)$  называется его подграф  $G' = (V', E')$  такой, что  $V = V'$  и  $G'$  — дерево.

**Утверждение 1.2.2.** Любой связный граф содержит остов.

**Утверждение 1.2.3.** Если граф не является деревом, то в нём несколько остовов.

Пусть  $G = (V, E)$  — граф. **Весом** называется функция  $\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

**Весом ребра**  $e \in E$  называется  $\alpha(e)$ .

**Весом графа** называется  $\sum_{e \in E} \alpha(e)$ .

#### Алгоритмы нахождения остова минимального веса

Пусть дан граф  $G = (V, E)$  и весовая функция  $\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Строим остов наименьшего веса  $T = (V, P)$ .

##### 1. Алгоритм Краскала

(a) Выбираем ребро  $e \in E$  с наименьшим весом:  $T_1 = (V, \{e\}) = (V, P_1)$ .

(b) Выбираем ребро  $e \in E$  с наименьшим весом такое, что  $e \notin P_i$  и добавление этого ребра не приводит к образованию цикла в  $T$ .  $T_{i+1} = (V, P_i \cup \{e\})$ .

(с) Повторяем шаг 2  $(|V| - 2)$  раз.

**Доказательство.** Пусть  $T = (V, P)$  — построенный остов, где  $P = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ ,  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  — рёбра в порядке их добавления в остов, а также  $D = (V, M)$  — другой остов, где  $M = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_{n-1}\}$ ,  $e'_1, e'_2, \dots, e'_{n-1}$  — рёбра в порядке неубывания их весов.

Если  $T \neq D$ , то пусть  $i$  — наименьшее число такое, что  $e_i \neq e'_i$ . Рассмотрим  $D' = (V, M \cup \{e_i\})$ . В этом графе ровно один цикл, причём  $e_i$  входит в цикл.

Данный цикл содержит ребро  $e' \notin \{e_1, \dots, e_i\}$ :  $\alpha(e_i) \leq \alpha(e'_i)$ , т. к.  $e_1, \dots, e_i$  не образуют цикл. Если  $\alpha(e') < \alpha(e_i)$ , то на  $i$ -м шаге алгоритм выбрал бы  $e'$  вместо  $e_i$ , т. к.  $e_1, \dots, e_{i-1}, e'$  не образуют цикл, потому что иначе  $D$  содержал бы цикл.

Пусть  $D_1 = (V, M \cup \{e_i\} \setminus \{e'_i\})$ . Этот граф — остов, причём  $\alpha(D_1) \leq \alpha(D)$  и у  $T$  и  $D_1$  на 1 общее ребро больше, чем у  $T$  и  $D$ . Повторяя, получим  $D_k = T$ . Значит, вес построенного остова не превосходит веса любого другого остова. ■

2. **Алгоритм Прима** Строится последовательность деревьев  $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n$ .

- (а) Выбираем произвольную вершину  $v$ .  $S_1 = (\{v\}, \emptyset)$ .
- (b) Пусть  $S_i = (V_i, E_i)$ . Находим ребро  $e \in E$  наименьшего веса, инцидентное одной из вершин  $v_i$ , добавление которого не приводит к образованию цикла.  
 $e' = (u, v)$ , где  $u \in V_i, v \notin V_i$ .  $S_{i+1} = V_i \cup \{v\}, E_i \cup \{e'\}$ .
- (с) Повторяем шаг 2  $(n - 1)$  раз.  $S_n$  — искомый остов.



## Глава 2

# Линейная алгебра

### 2.1 Линейные комбинации

Выражение, построенное на множестве элементов путём сложения этих элементов, умноженных на некоторые коэффициенты, называется **линейной комбинацией**. Если все коэффициенты линейной комбинации равны нулю, то она называется **тривиальной**, иначе — **нетривиальной**.

### 2.2 Матрицы

**Матрицей** называется прямоугольная таблица из чисел, содержащая  $m$  строк и  $n$  столбцов, и обозначается

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

Числа  $m$  и  $n$  называются **порядками** матрицы.

Если  $m = n$ , то матрица называется **квадратной**, а число  $m = n$  — её **порядком**. Главной называется диагональ квадратной матрицы, состоящая из элементов  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ , а **побочной** — состоящая из элементов  $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}$ .

$i$ -я строка матрицы обозначается  $A_i$ ,  $j$ -й столбец —  $A^j$ .

Две матрицы называются **равными**, если их порядки и соответствующие элементы совпадают, иначе — **неравными**.

#### 2.2.1 Операции над матрицами

Матрица, все элементы которой равны 0, называется **нулевой** и обозначается  $O$ .

Квадратная матрица, в которой элементы главной диагонали равны 1, а остальные — 0, называется **единичной** и обозначается  $E$ .

Над матрицами определены следующие операции:

- **Сложение.** Определено только над матрицами одинакового размера.

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{array} \right\|$$

Пусть  $A, B, C$  — матрицы. Свойства сложения:

- коммутативность:  $A + B = B + A$
- ассоциативность:  $(A + B) + C = A + (B + C)$

- **Умножение на число.**

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{vmatrix}$$

Пусть  $\alpha, \beta$  — числа,  $A, B$  — матрицы. Свойства умножения на число:

- ассоциативность:  $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$
- дистрибутивность относительно сложения чисел:  $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
- дистрибутивность относительно сложения матриц:  $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

- **Умножение.**  $A \cdot B$  определено, только если количество столбцов в матрице  $A$  совпадает с количеством строк в матрице  $B$ .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum a_{1i}b_{i1} & \sum a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum a_{1i}b_{in} \\ \sum a_{2i}b_{i1} & \sum a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum a_{2i}b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{mi}b_{i1} & \sum a_{mi}b_{i2} & \cdots & \sum a_{mi}b_{in} \end{vmatrix}$$

где суммирование производится по  $i$  от 1 до  $k$ .

Пусть  $\lambda$  — число,  $A, B, C$  — матрицы. Свойства умножения:

- ассоциативность:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- дистрибутивность:  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ ,  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- ассоциативность и коммутативность относительно умножения на число:  $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$

## 2.2.2 Определитель матрицы

**Определителем** порядка  $n$ , соответствующим квадратной матрице  $A$  порядка  $n$ , называется число, равное

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma=(i_1; \dots; i_n) \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}, \quad |\sigma| = \begin{cases} 0, \sigma \text{ чётная} \\ 1, \sigma \text{ нечётная} \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $S_n$  — множество всех перестановок  $n$ -элементного множества.

Матрица называется **вырожденной**, если её определитель равен 0, иначе — **невырожденной**.

Свойства определителя:

- Если элементы какой-либо строки или столбца определителя имеют общий множитель  $\lambda$ , то его можно вынести за знак определителя.

**Доказательство.**

$$\Delta = \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

Каждое слагаемое имеет множитель из каждой строки, а также из каждого столбца, т. к.  $\sigma$  является перестановкой и содержит все номера столбцов от 1 до  $n$  включительно. Тогда все слагаемые имеют общий множитель  $\lambda$ , поэтому его можно вынести за скобки. ■

- Если какая-либо строка или столбец определителя состоит из нулей, то он равен 0.

•

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство для столбцов аналогично.

**Доказательство.**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1 i_1} \cdots a_{n i_n} =$$

| Каждое слагаемое содержит ровно 1 элемент из  $i$ -й строки и поэтому имеет вид |

$$\begin{aligned} &= \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1 i_1} \cdots a_{k-1 i_{k-1}} (a_{k i_k} + b_{k i_k}) a_{k+1 i_{k+1}} \cdots a_{n i_n} = \\ &= \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1 i_1} \cdots a_{k i_k} \cdots a_{n i_n} + \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1 i_1} \cdots b_{k i_k} \cdots a_{n i_n} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Свойство для столбцов доказывается аналогично. ■

- Если в определителе поменять две строки или два столбца местами, то он изменит знак.

**Доказательство.** При перестановке строк или столбцов местами все перестановки в формуле (2.1) меняют чётность, значит, каждое слагаемое меняет знак, тогда и определитель меняет знак. ■

- Если в определителе две строки или два столбца совпадают, то он равен 0.

**Доказательство.** Если поменять местами совпадающие строки или столбцы, то он, с одной стороны, не изменится, а с другой, поменяет знак. Значит, определитель равен 0. ■

•

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} + a_{j1} & \lambda a_{i2} + a_{j2} & \cdots & \lambda a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство для столбцов аналогично.

**Доказательство.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} + a_{j1} & \lambda a_{i2} + a_{j2} & \cdots & \lambda a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство для столбцов доказывается аналогично. ■

Пусть дана матрица

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Алгебраическим дополнением** элемента  $a_{ij}$  называется число, равное

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Лемма 2.2.1.**

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Доказательство.**

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
 = \sum a \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} + \sum 0 \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} + \dots + \sum 0 \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} = \\
 = a \sum a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} = a \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

■

**Теорема 2.2.1.** Любой определитель можно **разложить** по элементам произвольной строки или столбца:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

где  $A_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} \cdot \\ & \cdot \left( \begin{vmatrix} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right) = \\ & = (-1)^{i+1} \cdot \left( \begin{vmatrix} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{i2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-12} & a_{i-11} & a_{i-13} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+12} & a_{i+11} & a_{i+13} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \right. \\ & \quad \left. + (-1)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{in} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1n} & a_{i-11} & \cdots & a_{i-1n-1} \\ a_{i+1n} & a_{i+11} & \cdots & a_{i+1n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix} \right) = \\ & = (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2} a_{i2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-13} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+13} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \end{aligned}$$

$$+(-1)^{i+n}a_{in} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\ 1} & \cdots & a_{i-1\ n-1} \\ a_{i+1\ 1} & \cdots & a_{i+1\ n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ n-1} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

Аналогично доказывается

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

■

**Транспонированием** матрицы или определителя называется операция, в результате которой строки меняются местами со столбцами с сохранением порядка следования:

$$\left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\|^T = \left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\|$$

Полученная матрица или определитель называется **транспонированной** по отношению к исходной.

**Утверждение 2.2.1.** *Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной.*

**Доказательство.**

$$\left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\|^T = \left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\| = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j} = \left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\|$$

■

### 2.2.3 Ранг матрицы

Строка (столбец) матрицы называется **линейно зависимой**, если она является линейной комбинацией остальных строк (столбцов), иначе — **линейно независимой**.

**Рангом** матрицы называется максимальное количество её линейно независимых строк.

**Минором**  $k$ -го порядка матрицы называется определитель, содержащий только те её элементы, которые стоят на пересечении некоторых  $k$  строк и  $k$  столбцов. Минор наибольшего порядка, отличный от нуля, называется **базисным**.

**Теорема 2.2.2.** *Ранг матрицы равен порядку базисного минора.*

**Доказательство.** Пусть

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$M_k$  — базисный минор  $k$ -го порядка. При перестановке строк и столбцов минора равенство с нулём сохраняется, значит, без ограничения общности можно считать, что

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$M_k \neq 0$ , значит, строки  $A_1, \dots, A_k$  линейно независимы. Пусть  $M_{k+1}$  — минор  $(k+1)$ -го порядка:

$$M_{k+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$$

т. к.  $M_k$  — базисный минор. Тогда

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{kj}A_{kj} + a_{ij}A_{ij} = 0, \quad A_{ij} = M_k \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{ij} = -\frac{A_{1j}}{A_{ij}}a_{1j} - \frac{A_{2j}}{A_{ij}}a_{2j} - \dots - \frac{A_{kj}}{A_{ij}}a_{kj}$$

где  $A_{1j}, \dots, A_{kj}, A_{ij}$  — алгебраические дополнения  $a_{1j}, \dots, a_{kj}, a_{ij}$ .  $A_{1j}, \dots, A_{kj}, A_{ij}$  не зависят от  $j$ , тогда  $A_i$  — линейная комбинация  $A_1, \dots, A_k$ , значит,  $k$  — ранг матрицы  $A$ . ■

Рангом матрицы по строкам (столбцам) называется максимальное количество её линейно независимых строк (столбцов).

**Следствие 2.2.1.** Ранг матрицы по строкам равен рангу матрицы по столбцам. Для доказательства достаточно заметить, что определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной.

## 2.2.4 Элементарные преобразования матриц

**Элементарными преобразованиями** называются следующие операции над матрицей, не изменяющие её ранга:

- **Перестановка строк** матриц. Очевидно, что ранг матрицы при перестановке строк не меняется.
- **Умножение строки на  $\lambda \neq 0$ .**

**Доказательство.**

■

- **Прибавление к строке матрицы другой строки, умноженной на  $\lambda \neq 0$ .**

**Доказательство.**

■

Аналогично определяются элементарные преобразования над столбцами.

Матрица  $A$  имеет **ступенчатый вид**, если:

- все нулевые строки стоят последними;
- для любой ненулевой строки  $A_p$  верно, что  $\forall i > p, j \leq q \ a_{ij} = 0$ , где  $a_{pq}$  — первый ненулевой элемент строки  $A_p$ .

**Теорема 2.2.3.** Любую матрицу путём элементарных преобразований только над строками можно привести к ступенчатому виду.

**Доказательство.**

■

## 2.2.5 Обратные матрицы

Матрица  $B$  называется **левой обратной** к квадратной матрице  $A$ , если  $BA = E$ .

Матрица  $C$  называется **правой обратной** к квадратной матрице  $A$ , если  $AC = E$ .

Заметим, что обе матрицы  $B$  и  $C$  — квадратные того же порядка, что и  $A$ .

**Утверждение 2.2.2.** Если существуют левая и правая обратные к  $A$  матрицы  $B$  и  $C$ , то они совпадают.

**Доказательство.**  $B = BE = BAC = EC = C$  ■

Т. о., матрица  $A^{-1}$  называется **обратной** к матрице  $A$ , если  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ .

**Теорема 2.2.4.** Пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где  $A_{ij}$  — алгебраическое дополнение  $a_{ij}$ .

Если  $|A| \neq 0$ , то

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{|A|}$$

**Доказательство.**

■

**Теорема 2.2.5.** Пусть дана невырожденная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Присоединим к ней единичную матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

и с помощью элементарных преобразований только над строками полученной матрицы (или только над столбцами) приведём её левую часть к единичной матрице. Тогда правая часть будет обратной к  $A$  матрицей.

**Доказательство.**

■

## 2.3 Векторные пространства

$n$ -мерным векторным пространством над полем вещественных чисел называется множество

$$V_n = \mathbb{R}^n = \{(x_1; \dots; x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

элементы которого называются **векторами**. Над ними определены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие аксиомам:

1. Коммутативность сложения:

$$\forall \bar{a}, \bar{b} \in V_n \quad \bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$$

2. Ассоциативность сложения:

$$\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V_n \quad \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$$

3. Существование **нулевого** вектора, или **нуля**, обозначаемого  $\bar{0}$ :

$$\exists \bar{0} \in V_n : \forall \bar{a} \in V \quad \bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$$

4. Существование **противоположного** вектора:

$$\forall \bar{a} \in V_n \quad \exists (-\bar{a}) \in V_n : \bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$$



5. Ассоциативность умножения на число:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \bar{a} \in V_n \quad \alpha(\beta \bar{a}) = (\alpha\beta) \bar{a}$$

6. Дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \bar{a}, \bar{b} \in V_n \quad \alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha \bar{a} + \alpha \bar{b}$$

7. Дистрибутивность умножения на число относительно сложения чисел:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \bar{a} \in V_n \quad (\alpha + \beta) \bar{a} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{a}$$

8. Существование **единицы**:

$$\forall \bar{a} \in V_n \quad 1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$$

### 2.3.1 Базис и размерность векторного пространства

Векторы  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$  называются **линейно зависимыми**, если

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n: \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{a}_i = \bar{0}, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \neq 0$$

иначе — **линейно независимыми**.

Множество линейно независимых векторов  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  векторного пространства  $V$  называется **базисом** этого пространства, если

$$\forall \bar{x} \in V \quad \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n: \bar{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{e}_i$$

Приведённое равенство называется **разложением** вектора  $\bar{x}$  по базису  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ .

**Теорема 2.3.1.** Любой вектор  $\bar{x}$  может быть разложен по базису  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  единственным образом.

**Доказательство.**

■

**Размерностью** векторного пространства называется максимальное количество линейно независимых векторов.

**Теорема 2.3.2.** В векторном пространстве размерности  $n$  любые  $n$  линейно независимых векторов образуют его базис.

**Доказательство.**

■

**Теорема 2.3.3.** Если векторное пространство имеет базис из  $n$  векторов, то его размерность равна  $n$ .

**Доказательство.**

■

## 2.4 Системы линейных алгебраических уравнений

Система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — переменные.

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$  называются **коэффициентами при переменных**,  $b_1, b_2, \dots, b_m$  — **свободными членами**.

Система линейных уравнений называется **однородной**, если все её свободные члены равны 0, иначе — **неоднородной**.

Система линейных уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, иначе — **несовместной**.

Система линейных уравнений называется **определённой**, если она имеет единственное решение. Если система имеет более одного решения, то она называется **неопределённой**.

Две системы линейных уравнений называются **эквивалентными**, если их решения совпадают или обе не имеют решений.

### 2.4.1 Матричная форма системы линейных уравнений

Систему линейных уравнений можно представить в матричной форме:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right\| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right\| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A \cdot X = B \end{aligned}$$

$A$  называется **основной матрицей системы**,  $X$  — **столбцом переменных**,  $B$  — **столбцом свободных членов**. Если к основной матрице справа приписать столбец свободных членов, то получится **расширенная матрица системы**:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right\|$$

### 2.4.2 Линейная независимость

Уравнение системы линейных уравнений называется **линейно зависимым**, если соответствующая ему строка расширенной матрицы является нетривиальной линейной комбинацией других строк, иначе — **линейно независимым**.

Система линейных уравнений называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная линейная комбинация строк расширенной матрицы, в результате которой получается нулевая строка, иначе — **линейно независимой**.

**Утверждение 2.4.1.** Система линейных уравнений линейно зависима  $\Leftrightarrow$  одно из её уравнений линейно зависимо.

**Доказательство.**

1.  $\Rightarrow$ . Пусть система из строк  $A_1, \dots, A_n$  линейно зависима:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i = O, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \neq 0$$

где  $O$  — нулевая строка. Без ограничения общности можно считать, что  $\alpha_1 \neq 0$ , тогда

$$A_1 = - \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1} A_i$$

Значит,  $A_1$  — линейно зависима строка.

2.  $\Leftarrow$ . Пусть одна из строк линейно зависима:

$$A_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i A_i \Leftrightarrow 1 \cdot A_1 - \alpha_2 A_2 - \dots - \alpha_n A_n = O$$

Значит, система линейно зависима.

■

### 2.4.3 Решение систем линейных уравнений

**Лемма 2.4.1.** Пусть система из строк  $A_1, \dots, A_n$  линейно независима и  $A_{n+1}$  не является линейной комбинацией  $A_1, \dots, A_n$ . Тогда система из строк  $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$  линейно независима.

**Доказательство (методом от противного).** Пусть система из строк  $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$  линейно зависима:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i A_i = O, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^2 \neq 0$$

где  $O$  — нулевая строка. Система из строк  $A_1, \dots, A_n$  линейно независима по условию, тогда

$$\alpha_{n+1} \neq 0 \Rightarrow A_{n+1} = - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}} A_i$$

Значит,  $A_{n+1}$  — линейная комбинация  $A_1, \dots, A_n$ . Противоречие с условием. ■

**Теорема 2.4.1 (Кронекера — Капелли).** Система линейных уравнений совместна  $\Leftrightarrow$  ранг основной матрицы совпадает с рангом расширенной матрицы.

**Доказательство.**

1.  $\Rightarrow$ .

2.  $\Leftarrow$ .

■

### Метод Гаусса

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.2)$$

Её расширенную матрицу можно привести к ступенчатому виду, т. е. (2.2) эквивалентна

$$\begin{cases} a_{1j_1}x_{j_1} + \dots + a_{1j_n}x_{j_n} = b_1 \\ a_{2j_2}x_{j_2} + \dots + a_{2j_n}x_{j_n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{rj_r}x_{j_r} + \dots + a_{rj_n}x_{j_n} = b_r \\ 0 = b_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b_m \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $a_{1j_1}, \dots, a_{rj_r} \neq 0$ . Без ограничения общности можно считать, что в базисный минор основной матрицы системы (2.3) входят только коэффициенты при переменных  $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ , называемых **главными** (**зависимыми**). Остальные переменные называются **свободными** (**независимыми**).

Если  $\exists i > r: b_i \neq 0$ , то система несовместна. Пусть  $\forall i > r: b_i = 0$ . Тогда получим систему

$$\begin{cases} x_{j_1} = \frac{b_1}{a_{1j_1}} - \frac{a_{1j_2}}{a_{1j_1}}x_{j_2} - \dots - \frac{a_{1j_n}}{a_{1j_1}}x_{j_n} \\ x_{j_2} = \frac{b_2}{a_{2j_2}} - \frac{a_{2j_3}}{a_{2j_2}}x_{j_3} - \dots - \frac{a_{2j_n}}{a_{2j_2}}x_{j_n} \\ \vdots \\ x_{j_r} = \frac{b_r}{a_{rj_r}} - \frac{a_{rj_{r+1}}}{a_{rj_r}}x_{j_{r+1}} - \dots - \frac{a_{rj_n}}{a_{rj_r}}x_{j_n} \end{cases}$$

Если свободным переменным полученной системы придавать все возможные значения и решать новую систему относительно главных неизвестных от нижнего уравнения к верхнему, то получим все решения данной системы.

## Метод Крамера

Позволяет решить только те системы, которые имеют единственное решение. Пусть дана система линейно независимых уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Определитель основной матрицы системы не равен 0, т.к. строки линейно независимы. Запишем систему в матричной форме:

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow X = A^{-1}B \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

где  $A_{ij}$  — алгебраическое дополнение  $a_{ij}$ .

Т.о., получим решение системы:

$$x_i = \frac{\sum_{j=1}^n A_{ji}b_j}{|A|} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

Полученные формулы называется **формулами Крамера**.

## 2.4.4 Фундаментальная система решений

**Утверждение 2.4.2.** Однородная линейно независимая система уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i = 0 \end{cases}$$

задаёт векторное пространство размерности  $n - m$ .

**Доказательство.**

■

**Фундаментальной системой решений** однородной системы линейных уравнений называется базис множества всех её решений.

### Нахождение фундаментальной системы решений

Пусть дана однородная линейно независимая система уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{1i}x_i = - \sum_{i=m+1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^m a_{2i}x_i = - \sum_{i=m+1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{mi}x_i = - \sum_{i=m+1}^n a_{mi}x_i \end{cases}$$

Пусть

$$\begin{aligned} &(x_{11}; x_{21}; \dots; x_{m1}; 1; 0; \dots; 0) \\ &(x_{12}; x_{22}; \dots; x_{m2}; 0; 1; \dots; 0) \\ &\vdots \\ &(x_{1n-m}; x_{2n-m}; \dots; x_{mn-m}; 0; 0; \dots; 1) \end{aligned}$$

являются решениями данной системы. Тогда они образуют фундаментальную систему решений.

**Доказательство.**

■

**Теорема 2.4.2.** *Общее решение неоднородной системы линейных уравнений равно сумме её частного решения и общего решения соответствующей однородной системы, т.е. с теми же самыми коэффициентами при переменных.*

**Доказательство.**

■

## 2.5 Многочлены от одной переменной

**Одночленом**, или **мономом**, называется произведение числового множителя и нуля и более переменных, взятых каждая в неотрицательной степени.

**Степенью** одночлена называется сумма степеней входящих в него переменных. Степень тождественного нуля равна  $-\infty$ .

**Многочленом**, или **полиномом**, от одной переменной называется сумма вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — переменные.

**Степенью** многочлена называется максимальная из степеней его одночленов.

**Лемма 2.5.1.** *Пусть  $f$  и  $g$  — многочлены, тогда  $\deg fg = \deg f + \deg g$ .*

### 2.5.1 Деление многочленов

**Теорема 2.5.1.** *Пусть  $f(x)$  и  $g(x) \neq 0$  — многочлены, тогда существуют единственные многочлены  $q(x)$  и  $r(x)$  такие, что  $f = qg + r$ , причём либо  $r = 0$ , либо  $\deg r < \deg g$ .*

**Доказательство.**

1. Докажем единственность.

2. Докажем существование.

■

**Общим делителем** многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  называется многочлен  $h(x)$ , на который и  $f$ , и  $g$  делятся нацело:

$$f = ph, \quad g = qh$$

**Наибольшим** называется общий делитель наибольшей степени и обозначается НОД.

**Теорема 2.5.2 (Евклида).** Любые два многочлена имеют единственный НОД.

**Доказательство.**

■

## 2.5.2 Корень многочлена

**Корнем** многочлена  $f(x)$  называется такое число  $a$ , что  $f(a) = 0$ .

**Теорема 2.5.3 (Безу).** Остаток от деления многочлена  $f(x)$  на двучлен  $x - a$  равен  $f(a)$ .

**Доказательство.**

$$f(x) = g(x)(x - a) + r \Rightarrow f(a) = g(a)(a - a) + r \Leftrightarrow r = f(a)$$

■

**Следствие 2.5.1.** Если  $a$  — корень  $f(x)$ , то  $f(x)$  делится на  $x - a$  без остатка.

**Кратностью** корня  $a$  многочлена  $f(x)$  называется число  $m$ :  $f(x) \dot{=} (x - a)^m$ ,  $f(x) \not\dot{=} (x - a)^{m+1}$ .

**Теорема 2.5.4 (основная теорема алгебры).** Если  $f(x)$  — многочлен, отличный от константы, то он имеет хотя бы один комплексный корень. Доказательство теоремы слишком сложно, поэтому здесь не приводится.

**Следствие 2.5.2.** Многочлен  $n$ -й степени имеет ровно  $n$  комплексных корней с учётом их кратности.

**Доказательство.** Пусть  $f(x)$  — многочлен  $n$ -й степени. По основной теореме алгебры 2.5.4 он имеет корень  $a$ , тогда по следствию 2.5.1  $f(x) = g(x)(x - a)$ , где  $g(x)$  — многочлен  $(n - 1)$ -й степени, который также имеет корень. Будем повторять деление до тех пор, пока не получим константу. Т. о., получим  $n$  корней. ■

**Следствие 2.5.3.** Любой многочлен  $f(x)$   $n$ -й степени представим в виде

$$f(x) = a(x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

где  $a$  — число,  $x_0, \dots, x_{n-1}$  — корни  $f(x)$ .

**Теорема 2.5.5 (Виета).** Пусть

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \quad (2.4)$$

тогда

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -a_n \sum_{i=0}^{n-1} x_i \\ a_{n-2} &= a_n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} x_i x_j \\ a_{n-3} &= -a_n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n-1} x_i x_j x_k \\ &\vdots \\ a_1 &= (-1)^{n-1} a_n \sum_{i=0}^{n-1} x_0 x_1 \cdot \dots \cdot x_{i-1} x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_{n-1} \\ a_0 &= (-1)^n a_n x_0 x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \end{aligned}$$

Для доказательства достаточно раскрыть скобки в правой части равенства (2.4).

**Теорема 2.5.6.** Пусть на плоскости даны  $n + 1$  точек, никакие две из которых не лежат на прямой, параллельной оси ординат, тогда через них проходит единственная кривая  $n$ -го порядка.

**Доказательство.** Пусть данные точки заданы координатами  $(a_0; b_0), (a_1; b_1), \dots, (a_n; b_n)$ , тогда кривая

$$f = \sum_{i=0}^n b_i \frac{(x - a_0) \cdot \dots \cdot (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - a_n)}{(a_i - a_0) \cdot \dots \cdot (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \cdot \dots \cdot (a_i - a_n)}$$

Докажем, что  $f$  проходит через все данные точки. Рассмотрим точку  $(a_k; b_k)$ . Подставим  $x = a_k$ , тогда  $k$ -е (считая с нуля) слагаемое равно  $b_k$ , а остальные — 0. ■

## 2.6 Многочлены от нескольких переменных

1. В многочлене  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  подставим  $a_i = P_i(y)$  — многочлен от  $y$ . Получим многочлен от  $x$  и  $y$ .
2. Пусть имеем многочлен от  $n$  переменных. Подставим вместо его коэффициентов многочлен от одной переменной, получим многочлен от  $n + 1$  переменных.

Одночлены многочлена будем записывать в лексикографическом порядке степеней переменных (члены с большими степенями идут раньше).

**Теорема 2.6.1.** Старший член произведения многочленов равен произведению старших членов множителей.

**Доказательство.** Перемножая члены с наибольшими показателями старшей переменной, получим член с наибольшим показателем при этой переменной. Проведя аналогичные рассуждения для остальных переменных, придём к выводу, что полученный член является старшим. ■

Аналогично доказывается следующая теорема.

**Теорема 2.6.2.** Младший член произведения многочленов равен произведению младших членов множителей.

### 2.6.1 Симметрические многочлены

Многочлен называется **симметрическим**, если при перестановке переменных он не изменяется.

**Утверждение 2.6.1.** Если  $f(x_1, \dots, x_n) = ax_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n} + \dots$  — симметрический многочлен, то  $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n$ .

**Доказательство (методом от противного).** Пусть  $\exists r < q: i_r < i_q$ , тогда  $f$  содержит  $bx_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdot \dots \cdot x_r^{i_r} \cdot \dots x_q^{i_q} \cdot \dots x_n^{i_n}$ , который старше, чем  $ax_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdot \dots x_n^{i_n}$ . Противоречие. ■

Элементарными симметрическими многочленами от  $n$  переменных называются многочлены

$$\begin{aligned} \sigma_1(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n x_i \\ \sigma_2(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n x_i x_j \\ &\vdots \\ \sigma_n(x_1, \dots, x_n) &= x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n \end{aligned}$$

**Теорема 2.6.3 (основная теорема о симметрических многочленах).** Любой симметрический многочлен может быть представлен в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.

**Доказательство.**

■

## Глава 3

# Математический анализ

### 3.0.1 Локальный экстремум функции нескольких переменных

Точка  $\bar{x}_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$  называется **точкой локального минимума функции**  $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ , если  $\bar{x}_0 \in D(f)$  и существует проколота окрестность  $\dot{U}(\bar{x}_0): \forall \bar{x} \in \dot{U}(\bar{x}_0) f(\bar{x}) > f(\bar{x}_0)$ .

Точка  $\bar{x}_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$  называется **точкой локального максимума функции**  $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ , если  $\bar{x}_0 \in D(f)$  и существует проколота окрестность  $\dot{U}(\bar{x}_0): \forall \bar{x} \in \dot{U}(\bar{x}_0) f(\bar{x}) < f(\bar{x}_0)$ .

Точки локального минимума и максимума называются **точками локального экстремума**.

**Теорема 3.0.1 (необходимое условие локального экстремума).** В точке локального экстремума частные производные функции равны нулю или не существуют.

**Доказательство.** Пусть  $\bar{x}_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$  — точка экстремума функции  $f(\bar{x})$ , дифференцируемой в точке  $\bar{x}_0$ . Рассмотрим  $g(x) = f(x_{10}, \dots, x_{k-10}, x, x_{k+10}, \dots, x_{n0})$ .  $\bar{x}_0$  — точка экстремума  $f(\bar{x})$ , тогда  $x_{k0}$  — точка экстремума  $g(x)$ , значит,  $g'(x_{k0}) = 0$  или не существует. Тогда  $f'_{x_k}(x_{k0}) = 0$  или не существует. ■

**Теорема 3.0.2 (достаточное условие локального экстремума функции двух переменных).** Пусть дана функция  $f(x, y)$ . Если

1.  $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$
2.  $(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$

то  $(x_0, y_0)$  — точка локального экстремума  $f(x, y)$ .

1.  $(x_0, y_0)$  — точка локального минимума, если  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$  или  $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$ .
2.  $(x_0, y_0)$  — точка локального максимума, если  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$  или  $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$ .

**Доказательство.** По формуле Тейлора

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0, y_0) + o(\rho^2((x, y), (x_0, y_0))) - f(x_0, y_0) = \\ &= \frac{1}{2}d^2f(x_0, y_0) + o(\rho^2((x, y), (x_0, y_0))) \end{aligned}$$

значит,  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  сохраняет знак, если  $d^2f(x_0, y_0)$  сохраняет знак.

$$\begin{aligned} d^2f(x_0, y_0) &= f''_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0, y_0)dy^2 = \\ &= \left( f''_{xx}(x_0, y_0) + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\frac{dy}{dx} + f''_{yy}(x_0, y_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right) dx^2 \end{aligned}$$

Т. о.,  $(x_0, y_0)$  — точка локального экстремума  $f(x, y)$ , если  $d^2f(x_0, y_0)$  сохраняет знак, т. е. при

$$(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$$

$$(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) < 0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) > (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 \Rightarrow f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$$

значит,  $f''_{xx}(x_0, y_0)$  и  $f''_{yy}(x_0, y_0)$  одного знака.

1. Если  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \vee f''_{yy}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow d^2 f(x_0, y_0) > 0$ , тогда  $(x_0, y_0)$  — точка локального минимума.
2. Если  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \vee f''_{yy}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow d^2 f(x_0, y_0) < 0$ , тогда  $(x_0, y_0)$  — точка локального максимума.

■

**Теорема 3.0.3 (достаточное условие локального экстремума).** Пусть дана функция  $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ . Точка  $\bar{x}_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$  — точка локального экстремума  $f(\bar{x})$ , если

1.  $f'_{x_1}(\bar{x}_0) = \dots = f'_{x_n}(\bar{x}_0) = 0$
2.  $\sum_{\substack{i=1, n \\ j=1, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j$  сохраняет знак.
1.  $\bar{x}_0$  — точка локального минимума, если  $\sum_{\substack{i=1, n \\ j=1, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j > 0$ .
2.  $\bar{x}_0$  — точка локального максимума, если  $\sum_{\substack{i=1, n \\ j=1, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j < 0$ .

**Доказательство.** По формуле Тейлора

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = f(\bar{x}_0) + df(\bar{x}_0) + \frac{d^2 f(\bar{x}_0)}{2!} + o(\rho^2(\bar{x}, \bar{x}_0)) - f(\bar{x}_0) = \frac{d^2 f(\bar{x}_0)}{2!} + o(\rho^2(\bar{x}, \bar{x}_0))$$

значит,  $f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)$  сохраняет знак, если  $d^2 f(\bar{x}_0)$  сохраняет знак.

$$d^2 f(\bar{x}_0) = \sum_{\substack{i=1, n \\ j=1, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j$$

1. Если  $\sum_{\substack{i=1, n \\ j=1, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j > 0 \Leftrightarrow d^2 f(\bar{x}_0) > 0$ , то  $\bar{x}_0$  — точка локального минимума.
2. Если  $\sum_{\substack{i=1, n \\ j=1, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j < 0 \Leftrightarrow d^2 f(\bar{x}_0) < 0$ , то  $\bar{x}_0$  — точка локального максимума.

■

При практическом применении теоремы 3.0.3 полезен критерий Сильвестра.

### 3.0.2 Метод наименьших квадратов

Пусть даны точки  $x_1, \dots, x_n$  и требуется найти аппроксимирующую прямую для значений некоторой функции  $f(x)$  в этих точках. Уравнение прямой —  $y = Ax + B$ . Найдём точку, в которой сумма

$$S(A, B) = \sum_{i=1}^n (Ax_i + B - f(x_i))^2$$

принимает наименьшее значение.

$$S'_A = \sum 2x_i (Ax_i + B - f(x_i))$$

$$\begin{aligned}
S'_B &= \sum 2(Ax_i + B - f(x_i)) \\
\begin{cases} S'_A = 0 \\ S'_B = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A \sum x_i^2 + B \sum x_i = \sum x_i f(x_i) \\ A \sum x_i + Bn = \sum f(x_i) \end{cases} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \begin{cases} \left( n \sum x_i^2 - \left( \sum x_i \right)^2 \right) A = n \sum x_i f(x_i) - \sum x_i \sum f(x_i) \\ Bn = \sum f(x_i) - A \sum x_i \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{n \sum x_i f(x_i) - \sum x_i \sum f(x_i)}{n \sum x_i^2 - \left( \sum x_i \right)^2} \\ B = \frac{\sum x_i^2 \sum f(x_i) - \sum x_i \sum x_i f(x_i)}{n \sum x_i^2 - \left( \sum x_i \right)^2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Найденные значения  $A$  и  $B$  — искомые коэффициенты в уравнении аппроксимирующей прямой. Для оценки точности аппроксимации можно найти коэффициент корреляции по формуле

$$r = \sqrt{\frac{\sum (f(x_i) - \tilde{y})^2 - \sum (f(x_i) - \tilde{y}_i)^2}{\sum (f(x_i) - \tilde{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sum (f(x_i) - \tilde{y}_i)^2}{\sum (f(x_i) - \tilde{y})^2}}$$

где  $\tilde{y} = \frac{1}{n} \sum f(x_i)$ ,  $\tilde{y}_i = Ax_i + B$ , а значение коэффициента  $r$  тем ближе к единице, чем точнее аппроксимация.

### 3.0.3 Условный экстремум

Пусть дана функция  $f(x_1, \dots, x_n)$ , переменные которой удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Для нахождения её экстремумов (называемых **условными**) введём функцию Лагранжа

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

и исследуем её. Её экстремумы являются условными экстремумами функции  $f$ .

## Глава 4

# Теория множеств

### 4.1 Множества

**Множество** — основное понятие. Некоторые числовые множества:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  — множество натуральных чисел.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  — множество целых чисел.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$  — множество рациональных чисел.
- $\mathbb{I}$  — множество иррациональных чисел.
- $\mathbb{R}$  — множество действительных (вещественных) чисел.
- $\mathbb{C}$  — множество комплексных чисел.

#### 4.1.1 Отношения между множествами

Пусть  $A, B$  — множества. Между ними определены следующие отношения:

- $A$  включено в  $B$  (является **подмножеством**  $B$ ):

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A \ a \in B$$

Нередко вместо знака  $\subseteq$  пишется знак  $\subset$ .

- $A$  равно  $B$ :

$$A = B \Leftrightarrow \forall a \ (a \in A \Leftrightarrow a \in B)$$

- $A$  строго включено в  $B$ :

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

#### 4.1.2 Операции над множествами

Пусть  $A, B$  — множества. Над ними определены следующие операции:

- **Объединение:**

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- **Пересечение:**

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- **Разность:**

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

- **Симметрическая разность:**

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B \vee x \notin A \wedge x \in B\}$$

- **Дополнение** до  $U$ , где  $A \subseteq U$ :

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

- **Декартово произведение:**

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

- **Декартова степень:**

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n$$

### 4.1.3 Функции

Пусть  $A$  и  $B$  — множества. **Функцией**  $f$  называется правило, ставящее в соответствие каждому элементу  $a \in A$  единственный элемент  $f(a) \in B$ .  $A$  называется **областью определения** функции  $f$ ,  $B$  — **областью значений** функции  $f$ .  $a$  называется **прообразом**  $f(a)$ ,  $f(a)$  — **образом**  $a$ .

Функция  $f: A \rightarrow B$  называется **инъективной (инъекцией)**, если  $\forall x, y \in A (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$ .

Функция  $f: A \rightarrow B$  называется **сюръективной (сюръекцией)**, если  $\forall b \in B \exists a \in A: f(a) = b$ .

Функция  $f: A \rightarrow B$  называется **биективной (биекцией)**, если она инъективная и сюръективная.

### 4.1.4 Мощность множеств

Множества  $A$  и  $B$  называются **равномощными (имеют одинаковую мощность)**, если существует биекция  $f: A \rightarrow B$ , иначе — **неравномощными**.

Для конечных множеств это означает, что у них одинаковое количество элементов.

**Мощностью** конечного множества  $A$  называется количество  $|A|$  его элементов.

Множество всех подмножеств множества  $A$  обозначается

$$\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

Множество всех подмножеств множества  $A$  мощности  $k$  обозначается

$$\mathcal{P}_k(A) = \{x \subseteq A \mid |x| = k\}$$

**Теорема 4.1.1 (Кантора).** Множества  $A$  и  $\mathcal{P}(A)$  не равномощны.

**Доказательство (методом от противного).** Пусть  $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  — биекция. Рассмотрим множество

$$X = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \Rightarrow X \subset A \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A)$$

$f$  — биекция, тогда  $\exists b \in A: f(b) = X$ . Возможны два случая:

1. Пусть  $b \in X \Rightarrow b \in f(b) \Rightarrow b \notin X$ . Противоречие.
2. Пусть  $b \notin X \Rightarrow b \in f(b) \Rightarrow b \in X$ . Противоречие.

В обоих случаях получили противоречие. ■

**Теорема 4.1.2.** Пусть дано множество  $A: |A| = n$ , тогда  $|\mathcal{P}_k(A)| = C_n^k$ .

**Доказательство (методом математической индукции).**

- **База индукции.**  $n = 0$ :

$$|A| = 0 \Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset\} \Rightarrow |\mathcal{P}_0(A)| = 1 = C_0^0$$

- **Шаг индукции.** Пусть теорема верна для  $n$ . Докажем её для  $n + 1$ . Пусть  $X \subset A$ ,  $|X| = k$ ,  $a \in A$ . Подсчитаем количество таких  $X$ . Возможны два случая:

1. Пусть  $a \notin X \Rightarrow X \subset A \setminus \{a\}$ , тогда таких  $X$   $C_n^k$ .
2. Пусть  $a \in X$ , тогда таких  $X$  столько же, сколько множеств  $X \setminus \{a\} \subset A \setminus \{a\}$ , т.е.  $C_n^{k-1}$ .

$$\text{Тогда } |\mathcal{P}(A)| = C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k.$$

■

## Глава 5

## Разное