Оглавление

Глава 1

23.05.2018, математический анализ

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_0' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

Известно, что $y_1 = Le^{kx}$, $y_2 = Me^{kx}$, тогда

$$\begin{cases} Lk = aL + bM \\ Mk = cL + dM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L(a-k) + Mb = 0 \\ Lc + M(d-k) = 0 \end{cases}$$

Если $\begin{vmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{vmatrix} \neq 0$, то получим единственное решение — нулевое. Тогда

$$(a-k)(d-k) - bc = 0 \Leftrightarrow k^2 - k(a+d) + ad - bc = 0$$

Получили характеристическое уравнение.

Решим системы

$$\begin{cases} L(a-k_i) + Mb = 0 \\ Lc + M(d-k_i) = 0 \end{cases}$$

где k_i — i-й корень характеристического уравнения, причём в каждой системе одно из уравнений можно убрать, т. к. главный определитель равен нулю. Возьмём частные решения $(L_1, M_1), (L_2, M_2)$, тогда

$$y_1 = C_1L_1e^{k_1x} + C_2L_2e^{k_2x}$$

$$y_0 = C_1M_1e^{k_1x} + C_2M_2e^{k_2x}$$

1.0.1 Неоднородные системы

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 + f_1 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 + f_2 \end{cases}$$

Решая соответствующую однородную систему, получим

$$y_10 = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2$$

$$y_20 = D_1\tilde{y}_1 + D_2\tilde{y}_2$$

где D_1 и D_2 линейно связаны с C_1 и C_2 сооветственно.

Тогда

$$y_1 = C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2$$

$$y_2 = D_1(x)\tilde{y}_1 + D_2(x)\tilde{y}_2$$

Подставляя в систему, получим

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_2'(x)\tilde{y}_2 + C_1(x)\tilde{y}_1' + C_2(x)\tilde{y}_2' = a(C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2) + b(D_1(x)\tilde{y}_1 + D_2(x)\tilde{y}_2) + f_1(x) \\ D_1'(x)\tilde{y}_1 + D_2'(x)\tilde{y}_2 + D_1(x)\tilde{y}_1' + D_2(x)\tilde{y}_2' = c(C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2) + d(D_1(x)\tilde{y}_1 + D_2(x)\tilde{y}_2) + f_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_2'(x)\tilde{y}_2 = f \\ D_1'(x)\tilde{y}_1 + D_2'(x)\tilde{y}_2 = \end{cases}$$

Решая, получим $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, откуда найдём $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

1.1 Приближённое решение дифференциальных уравнений

1.1.1 Решение с помощью степенного ряда

Рассмотрим уравнение $y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Найдём его решение в окрестности точки x_0:

$$y(x) = y_0 + y_1(x - x_0) + \frac{y_2}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{F(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})}{n!}(x - x_0)^n + c_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \ldots$$

Неизвестные коэффициенты можно определить подстановкой в исходное уравнение или его дифференцированием и подстановкой начальных условий.

Глава 2

28.05.2018, математический анализ

2.0.1 Метод Эйлера

$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k)$

Можно улучшить точность: $y_{k+1} = y_k + f($

Метод приближённого решения дифференциального уравнения высшего порядка заключается в его сведении к системе линейных уравнений.

2.0.2 Графический метод

Приближённые решения уравнения вида $y' = f(x, y)$ можно получить графическим методом, находя изоклины — линии, на которых производная функции не меняет значение. По ним можно получить представление о том, какую форму имеет кривая.

Рассмотрим **динамическую систему**

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t) \\ \dot{y} = g(x, y, t) \end{cases}$$

Если $\begin{cases} f(a, b, t) = 0 \\ g(a, b, t) = 0 \end{cases}$, то (a, b) называется **точкой покоя**, или **положением равновесия**.

Исследуем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

Для неё $(0, 0)$ — точка покоя.

Решая уравнение $\begin{vmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{vmatrix} = 0$, получим корни k_1 и k_2.

Тогда

1. Если $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, то

$$x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} y = C_1 \frac{k_1 - a}{b} e^{k_1 t} + C_2 \frac{k_2 - a}{b} e^{k_2 t}$$

- Если $k_1, k_2 < 0$, то $(0, 0)$ — устойчивый узел.
- Если $k_1, k_2 > 0$, то $(0, 0)$ — неустойчивый узел.
- Если $k_1 < 0 < k_2$, то $(0, 0)$ — седло.

2. Если $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то

$$\begin{cases} x = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \\ y = \left(\frac{\alpha - a}{b} C_1 + \frac{\beta}{b} C_2 \right) e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \end{cases}$$

- Если $\alpha < 0$, то $(0, 0)$ — устойчивый фокус.
- Если $\alpha > 0$, то $(0, 0)$ — неустойчивый фокус.

- Если $\alpha = 0$, то $(0,0)$ — центр.

3. Если $k_1 = k_2 = \alpha \in R$, то

$$x =$$