

# Введение

Здесь содержатся знания `math4133` о математике. Принятые обозначения:

- $\forall$  — **квантор всеобщности**. Обозначение условия, которое верно для всех указанных элементов. Читается как «для всех», «для каждого», «для любого» или «все», «каждый», «любой».
- $\exists$  — **квантор существования**. Обозначение условия, которое верно хотя бы для одного из указанных элементов. Читается как «существует», «найдётся».
- $\exists!$  — **квантор существования и единственности**. Обозначение условия, которое верно ровно для одного из указанных элементов. Читается как «существует единственный».
- $:$  — «что», «такой (такие)», «что», «так, что», «обладающий свойством».
- $\Rightarrow$  — символ следствия. Читается как «если... , то...».
- $\Leftrightarrow$  — символ эквивалентности (равносильности). Читается как «тогда и только тогда, когда», «ровно/в точности тогда, когда».
- $\wedge$  — знак конъюнкции. Высказывание, полученное при связывании двух других высказываний конъюнкцией, истинно ровно тогда, когда оба связываемых высказываний истинны.
- $\vee$  — знак дизъюнкции. Высказывание, полученное при связывании двух других высказываний дизъюнкцией, истинно ровно тогда, когда истинно хотя бы одно из связываемых высказываний. Дизъюнкция имеет более низкий приоритет по сравнению с конъюнкцией.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Дискретная математика</b>	<b>3</b>
1.1	Графы	3
1.1.1	Связность графов	4
1.1.2	Эйлеровы графы	4
1.1.3	Гамильтоновы графы	5
1.2	Деревья	6
1.2.1	Остовы	7
<b>2</b>	<b>Линейная алгебра</b>	<b>9</b>
2.1	Линейные комбинации	9
2.2	Матрицы	9
2.2.1	Операции над матрицами	9
2.2.2	Определитель матрицы	10
2.2.3	Ранг матрицы	14
<b>3</b>	<b>Математический анализ</b>	<b>16</b>
3.0.1	Локальный экстремум функции нескольких переменных	16
3.0.2	Метод наименьших квадратов	17
3.0.3	Условный экстремум	18
<b>4</b>	<b>Теория множеств</b>	<b>19</b>
4.1	Множества	19
4.1.1	Отношения между множествами	19
4.1.2	Операции над множествами	19
4.1.3	Функции	20
4.1.4	Мощность множеств	20
<b>5</b>	<b>Разное</b>	<b>22</b>

# Глава 1

## Дискретная математика

### 1.1 Графы

**Графом** называется пара множеств  $G = (V, E)$ , где  $V$  — множество вершин графа,  $E \subseteq V^2$  — множество рёбер графа.

Если  $e = \{u, v\}$ ,  $e \in E$ , то говорят, что:

- ребро  $e$  соединяет вершины  $u$  и  $v$ ;
- $u$  и  $v$  — концы ребра  $e$ ;
- ребро  $e$  инцидентно вершинам  $u$  и  $v$ ;
- вершины  $u$  и  $v$  инцидентны ребру  $e$ .

В дальнейшем будем рассматривать только конечные графы.

На рисунках вершины графа изображают точками, а рёбра  $e = \{u, v\}$  — кривыми, соединяющими точки, которые изображают вершины  $u$  и  $v$ .

Вершины называются **соседними**, если их соединяет ребро, иначе — **несоседними**.

Ребро вида  $e = \{u, u\}$  называется **петлёй**.

Граф, в котором любые две вершины соединены ребром, называется **полным** и обозначается  $K_n$ , где  $n$  — число вершин в нём.

Графы  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$  называются **изоморфными**, если существует биекция  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$  такая, что  $\forall u, v \in V_1 ((u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2)$ , иначе — **неизоморфными**.

$\varphi$  называется **изоморфизмом**.

Число рёбер в графе  $G$ , инцидентных вершине  $u$ , называется **степенью** вершины и обозначается  $\deg_G u$ .

**Лемма 1.1.1 (о рукопожатиях).**

$$\sum_{u \in V} \deg_G u = 2|E|$$

где  $G = (V, E)$  — граф.

**Доказательство (методом математической индукции).**

- *База индукции.*  $|E| = 0$ : в таком графе  $\sum_{u \in V} \deg u = 0$ .

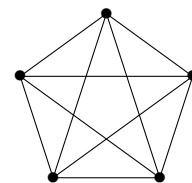


Рис. 1.1: Граф  $K_5$

- *Шаг индукции.* Пусть лемма верна для  $|E| = n$ . Докажем её для  $|E| = n + 1$ . Для этого достаточно заметить, что каждое новое ребро увеличивает степени двух вершин на 1.

■

**Маршрутом** в графе  $G = (V, E)$  называется последовательность вершин и рёбер вида  $(v_1; e_1; v_2; \dots; e_k; v_{k+1})$ , где  $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ .

Маршрут, в котором все рёбра различны, называется **цепью**.

Цепь, в которой все вершины, за исключением, может быть, первой и последней, различны, называется **простой**.

Маршрут, в котором первая и последняя вершины совпадают, называется **замкнутым**.

Замкнутая цепь называется **циклом**.

Маршрут, соединяющий вершины  $u$  и  $v$ , называется  $(u, v)$ -**маршрутом**.

**Лемма 1.1.2.**  $(u, v)$ -маршрут содержит  $(u, v)$ -простую цепь.

**Доказательство.** Пусть  $(u = v_1; e_1; v_2; \dots; e_k; v_{k+1} = v)$  — не простая цепь, тогда  $\exists i < j: v_i = v_j$ . Уберём из маршрута подпоследовательность  $(e_i; v_{i+1}; \dots; e_{j-1}; v_j)$ , получим маршрут, в котором совпадающих вершин на одну меньше. Повторяя, получим простую цепь, являющуюся частью данного маршрута. ■

**Лемма 1.1.3.** Любой цикл содержит простой цикл. Доказательство аналогично предыдущему.

**Лемма 1.1.4.** Если в графе есть две различные простые цепи, соединяющие одни и те же вершины, то в этом графе есть простой цикл.

**Доказательство.** Пусть  $(u = v_1; e_1; v_2; \dots; e_n; v_{n+1} = v)$ ,  $(u = v'_1; e'_1; v'_2; \dots; e'_m; v'_{m+1} = v)$  — простые цепи. Найдём наименьшее  $i: e_i \neq e'_i$ , тогда  $(v_i; e_i; v_{i+1}; \dots; e_n; v_{n+1} = v'_{m+1}; e'_m; \dots; e'_i; v'_i = v_i)$  — цикл, значит, можно получить простой цикл. ■

### 1.1.1 Связность графов

Вершины  $u$  и  $v$  называются **связанными**, если существует  $(u, v)$ -маршрут, иначе — **несвязанными**.

Граф называется **связным**, если в нём любые две вершины связаны, иначе — **несвязным**.

Граф  $G' = (V', E')$  называется **подграфом** графа  $G = (V, E)$ , если  $V' \subseteq V$  и  $E' \subseteq E$ .

**Компонентой связности** графа называется его максимальный (относительно включения) связный подграф.

### 1.1.2 Эйлеровы графы

Цикл, содержащий все рёбра графа, называется **эйлеровым**.

Граф, содержащий эйлеров цикл, называется **эйлеровым**.

**Теорема 1.1.1.** Связный граф эйлеров  $\Leftrightarrow$  степени всех вершин чётны.

**Доказательство.**

1.  $\Rightarrow$ . Пусть в графе есть эйлеров цикл. Выберем вершину  $v_0$  в этом цикле и начнём обходить его. При каждом посещении вершины  $v \neq v_0$  её степень увеличивается на 2. Т. о., если посетить её

$k$  раз, то  $\deg v = 2k$ .

Для  $v_0$  степень увеличивается на 1 в начале обхода, на 1 в конце обхода и на 2 при промежуточных посещениях. Т. о., её степень чётна.

2.  $\Leftarrow$ . Пусть степени всех вершин чётны. Выберём цепь  $C = (v_0; e_0; v_1; e_1; \dots; e_{k-1}; v_k)$  наибольшей длины. Все рёбра, инцидентные  $v_k$ , присутствуют в этой цепи, иначе её можно было бы удлинить.

Докажем методом от противного, что  $v_0 = v_k$ . Пусть  $v_0 \neq v_k$ . При прохождении вершины  $v_i = v_k$ , где  $0 < i < k$ , степень  $v_k$  увеличивается на 2. Также проходим по ребру  $e_{k-1}$ , тогда степень  $v_k$  нечётна. Противоречие.

Докажем методом от противного, что  $C$  содержит все рёбра. Пусть найдётся ребро  $e = \{u, v\}$ , не входящее в  $C$ . Возьмём первое ребро  $e' = \{v_i, v'\}$  из  $(v_0, u)$ -маршрута, не входящее в  $C$ . Тогда цепь  $(v'; e'; v_i; e_i; \dots; e_{k-1}; v_k = v_0; e_0; v_1; e_1; \dots; v_{i-1})$  длиннее, чем  $C$ . Противоречие.

■

## Алгоритмы нахождения эйлерова цикла

### 1. Алгоритм Флёр (очень медленный).

- Выберем произвольную вершину.
- Пусть находимся в вершине  $v$ . Выберем ребро, инцидентное ей, которое должно быть мостом, только если не осталось других рёбер.
- Проходим по выбранному ребру и вычёркиваем его.
- Повторяем, пока есть рёбра.

### 2. Алгоритм объединения циклов.

- Выберем произвольную вершину.
- Выбираем любое непосещённое ребро и идём по нему.
- Повторяем, пока не вернёмся в начальную вершину.
- Получим цикл  $C$ . Если он не эйлеров, то  $\exists u \in C, e = \{u, u'\}: u' \notin C$ . Повторяем шаги 2а–2с для начальной вершины  $u$ . Получим цикл  $C'$ , рёбра которого не совпадают с рёбрами  $C$ . Объединим эти циклы и получим новый. Повторяем шаг 2д.

Цепь называется **эйлеровым путём**, если она не является циклом и содержит все рёбра.

Граф называется **полуэйлеровым**, если в нём есть эйлеров путь.

**Теорема 1.1.2.** *Связный граф полуэйлеров  $\Leftrightarrow$  степени двух вершин нечётны, а остальных — чётны.*

**Доказательство.**

- $\Rightarrow$ . Пусть в графе есть эйлеров путь. Соединив его концы ребром, получим эйлеров цикл. Степени соединённых вершин увеличились каждая на 1, значит, они были нечётными, а степени остальных вершин — чётными.
- $\Leftarrow$ . Пусть степени двух вершин нечётны, а остальных — чётны. Соединим нечётные вершины ребром, тогда можно получить эйлеров цикл. Убрав из него добавленное ребро, получим эйлеров путь.

■

### 1.1.3 Гамильтоновы графы

Простой цикл, содержащий все вершины графа, называется **гамильтоновым**.

Граф называется **гамильтоновым**, если в нём есть гамильтонов цикл.

**Теорема 1.1.3 (Дирака).** *Если в графе  $G = (V, E)$  с  $n \geq 3$  вершинами  $\forall u \in V \deg u \geq \frac{n}{2}$ , то граф гамильтонов.*

**Доказательство.**

- Докажем методом от противного, что граф связный. Пусть он несвязный. Выберем компоненту связности  $G' = (V', E')$  с наименьшим числом вершин, тогда  $|V'| \leq \frac{n}{2}$ . Возьмём  $v \in V'$ , тогда  $\deg v \leq |V'| - 1 < \frac{n}{2}$ . Противоречие с условием.
- Выберем цепь  $C = (v_0; e_0; v_1; \dots; e_{k-1}; v_k)$  максимальной длины. Тогда все вершины, соседние с  $v_0$ , лежат в этой цепи, иначе можно увеличить длину цепи. Среди  $v_1, v_2, \dots, v_k$  не менее  $\frac{n}{2}$  вершин, соседних с  $v_0$ , т. к.  $\deg v_0 \geq \frac{n}{2}$ . Аналогично для  $v_k$ .

Найдутся  $v_{i-1}$  и  $v_i$  такие, что  $v_{i-1}$  соседняя с  $v_k$ , а  $v_i$  — с  $v_0$ .

Докажем, что  $(v_i; e_{i+1}; \dots; v_k; e; v_{i-1}; e_{i-1}; \dots; v_0; e'; v_i)$  — гамильтонов цикл, методом от противного. Предположим обратное, тогда есть вершина  $u$ , не входящая в цикл, и существует  $(v_0, u)$ -маршрут. Значит, существует ребро, инцидентное одной из вершин цикла, но не входящее в него, и можно получить более длинную цепь. Противоречие.

■

**Теорема 1.1.4 (Оре).** *Если в графе с  $n \geq 3$  вершинами для любых двух несмежных вершин  $u$  и  $v$   $\deg u + \deg v \geq n$ , то граф гамильтонов.*

**Доказательство.**

1. Докажем методом от противного, что граф связный. Пусть он несвязный, тогда в нём найдутся хотя бы две компоненты связности  $G_1(V_1, E_1)$  и  $G_2(V_2, E_2)$ . Пусть  $u \in V_1, v \in V_2$ .  $u$  и  $v$  несмежные, тогда

$$\deg u \leq |V_1| - 1, \deg v \leq |V_2| - 1 \Rightarrow \deg u + \deg v \leq |V_1| + |V_2| - 2 \leq n - 2$$

Противоречие с условием.

2. Докажем, что граф гамильтонов. Выберем цепь  $W = (v_0; e_0; v_1; \dots; e_{k-1}; v_k)$  наибольшей длины. В ней содержатся все вершины, соседние с  $v_0$  или с  $v_k$ . Т. о., среди вершин  $v_1, \dots, v_k$   $\deg v_0$  соседних с  $v_0$ . Аналогично для  $v_k$ .

$\deg v_0 + \deg v_k \geq n$ , тогда найдутся  $v_i$  и  $v_{i+1}$  такие, что  $v_i$  соседняя с  $v_k$ , а  $v_{i+1}$  — с  $v_0$ .

$(v_{i+1}; e_{i+1}; \dots; v_k; e; v_i; e_{i-1}; v_{i-1}; \dots; e_0; v_0; e'; v_{i+1})$  — гамильтонов цикл (доказательство аналогично доказательству в теореме 1.1.3 (Дирака)).

■

## 1.2 Деревья

Граф без циклов называется **лесом**.

Связный лес называется **деревом**.

Ребро называется **мостом**, если при его удалении увеличивается число компонент связности.

**Утверждение 1.2.1.** Ребро — мост ровно тогда, когда оно не содержится в цикле.

**Доказательство.**

1. Докажем методом от противного, что если ребро содержится в цикле, то оно не является мостом. Пусть ребро  $e$  содержится в цикле  $W = v_0 e_0 \dots u e v \dots v_k$ ,  $u'$  и  $v'$  — смежные вершины.
- (а) Если в этом маршруте нет ребра  $e$ , то при его удалении из графа  $u'$  и  $v'$  останутся смежными.
- (б) Если  $u' = v'_0 e'_0 \dots u e v \dots e_m v'_m = v'$  — маршрут, соединяющий  $u'$  и  $v'$ , тогда при удалении  $e$  из графа  $u'$  и  $v'$  соединяет маршрут  $u' = v'_0 e'_0 \dots u \dots e_0 v_0 = v_k e_{k-1} \dots v \dots e_m v'_m = v'$ .
2. Пусть  $e = (u, v)$  не является мостом, тогда  $u, v$  лежат в одной компоненте связности. Удалим  $e$  из графа, тогда число компонент связности не изменилось, значит,  $u$  и  $v$  также лежат в одной компоненте связности, т. е. существует цепь, соединяющая  $u$  и  $v$ :  $u = v_0 e_0 \dots e_{k-1} v_k = v$ . Тогда в исходном графе существует цикл  $u = v_0 e_0 \dots e_{k-1} v_k = v e u$ .

■

**Теорема 1.2.1.** Следующие утверждения о графе  $G$  с  $n$  вершинами эквивалентны:

1.  $G$  — дерево.
2.  $G$  связный и имеет  $n - 1$  ребро.
3.  $G$  связный и каждое его ребро — мост.
4.  $G$  не содержит циклов и имеет  $n - 1$  ребро.
5. Любые две вершины графа  $G$  соединены ровно одной простой цепью.
6.  $G$  не содержит циклов и добавление ребра приводит к появлению цикла.

**Доказательство.**

- Докажем 1)  $\Rightarrow$  3). Связность следует из определения дерева. В силу пред. утв. каждое ребро — мост.
- Докажем 3)  $\Rightarrow$  2). Связность по предположению. Докажем методом математической индукции, что в графе  $n - 1$  ребро.

— База индукции. Для  $n = 1, 2$  очевидно.

– *Шаг индукции.* Пусть для графов с числом вершин, меньшим  $n$ , Возьмём мост  $e$  и удалим его. Получим две компоненты связности  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$ . По предположению индукции  $|E_1| = |V_1| - 1$ ,  $|E_2| = |V_2| - 1$ . В исходном графе рёбер  $|E_1| + |E_2| + 1 = |V_1| + |V_2| - 1 = n - 1$ .

• Докажем  $2) \Rightarrow 4)$ . В  $G$   $n - 1$  ребро по предположению. Докажем методом математической индукции, что  $G$  не содержит циклов.

– *База индукции.* Для  $n = 1, 2$  очевидно.

– *Шаг индукции.* Докажем, что в графе есть вершина степени 1.  $\forall u \deg u \geq 1$ .  $\forall u \deg u \geq 2 \Rightarrow 2|E| = \sum_{u \in V} \deg u \geq 2n \Rightarrow n - 1 = |E| \geq n$ . Значит, в графе найдётся вершина степени 1. Удалим её и инцидентное ей ребро. Полученный граф содержит  $n - 1$  вершину и удовлетворяет утверждению 2). По предположению индукции он не содержит циклов, тогда и исходный граф не содержит циклов.

• Докажем  $4) \Rightarrow 5)$ . Докажем связность методом математической индукции.

– *База индукции.* Для  $n = 1, 2$  очевидно.

– *Шаг индукции.* Пусть в графе  $k$  компонент связности:  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$ ,  $\dots$ ,  $G_k = (V_k, E_k)$ . Они являются деревьями.

$|E_1| = |V_1| - 1$ ,  $|E_2| = |V_2| - 1$ ,  $\dots$ ,  $|E_k| = |V_k| - 1$ .  $n - 1 = |E_1| + \dots + |E_k| = n - k \Rightarrow k = 1$ , значит, граф связный.

Пусть существуют вершины  $u$ ,  $v$  такие, что их соединяют две простые цепи, тогда в графе есть цикл, что противоречит предположению. Тогда эти вершины соединены ровно одной простой цепью.

• Докажем  $5) \Rightarrow 6)$ . Предположим, что в графе есть цикл  $v_0 e_0 v_1 e_1 \dots v_k = v_0$ , тогда есть две простые цепи  $v_0 e_0 \dots v_{k-1}$  и  $v_{k-1} e_k v_k = v_0$ , соединяющие  $v_0$  и  $v_{k-1}$ , что противоречит предположению.

Докажем, что добавление ребра приводит к появлению ровно одного цикла. Рассмотрим несоседних вершины  $u$  и  $v$ . По предположению есть цепь  $u = v_0 e_0 \dots v_k = v$ , соединяющая их. Тогда  $u = v_0 e_0 \dots v_k = v e_i$  — цикл, где  $e$  —  $(u, v)$ -маршрут. Пусть есть 2 цикла, соединяющих  $u$  и  $v$ . Удалим  $e$ , цикл останется. Получили исходный граф, в котором нет циклов. Противоречие.

•  $6) \Rightarrow 1)$ . Докажем связность. Рассмотрим вершины  $u$  и  $v$ . Если они не соединены ребром, то соединим и по предположению получим цикл  $v_0 e_0 \dots u e v \dots e_{k-1} v_k = v_0$ . Тогда  $u \dots e_0 v_0 = v_k e_{k-1} \dots v$  —  $(u, v)$ -маршрут. Противоречие.

■

### 1.2.1 Остовы

**Остовом** графа  $G = (V, E)$  называется его подграф  $G' = (V', E')$  такой, что  $V = V'$  и  $G'$  — дерево.

**Утверждение 1.2.2.** Любой связный граф содержит остов.

**Утверждение 1.2.3.** Если граф не является деревом, то в нём несколько остовов.

Пусть  $G = (V, E)$  — граф. **Весом** называется функция  $\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

**Весом ребра**  $e \in E$  называется  $\alpha(e)$ .

**Весом графа** называется  $\sum_{e \in E} \alpha(e)$ .

#### Алгоритмы нахождения остова минимального веса

Пусть дан граф  $G = (V, E)$  и весовая функция  $\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Строим остов наименьшего веса  $T = (V, P)$ .

##### 1. Алгоритм Краскала

(a) Выбираем ребро  $e \in E$  с наименьшим весом:  $T_1 = (V, \{e\}) = (V, P_1)$ .

(b) Выбираем ребро  $e \in E$  с наименьшим весом такое, что  $e \notin P_i$  и добавление этого ребра не приводит к образованию цикла в  $T$ .  $T_{i+1} = (V, P_i \cup \{e\})$ .

(с) Повторяем шаг 2  $(|V| - 2)$  раз.

**Доказательство.** Пусть  $T = (V, P)$  — построенный остов, где  $P = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ ,  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  — рёбра в порядке их добавления в остов, а также  $D = (V, M)$  — другой остов, где  $M = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_{n-1}\}$ ,  $e'_1, e'_2, \dots, e'_{n-1}$  — рёбра в порядке неубывания их весов.

Если  $T \neq D$ , то пусть  $i$  — наименьшее число такое, что  $e_i \neq e'_i$ . Рассмотрим  $D' = (V, M \cup \{e_i\})$ . В этом графе ровно один цикл, причём  $e_i$  входит в цикл.

Данный цикл содержит ребро  $e' \notin \{e_1, \dots, e_i\}$ :  $\alpha(e_i) \leq \alpha(e'_i)$ , т. к.  $e_1, \dots, e_i$  не образуют цикл. Если  $\alpha(e') < \alpha(e_i)$ , то на  $i$ -м шаге алгоритм выбрал бы  $e'$  вместо  $e_i$ , т. к.  $e_1, \dots, e_{i-1}, e'$  не образуют цикл, потому что иначе  $D$  содержал бы цикл.

Пусть  $D_1 = (V, M \cup \{e_i\} \setminus \{e'_i\})$ . Этот граф — остов, причём  $\alpha(D_1) \leq \alpha(D)$  и у  $T$  и  $D_1$  на 1 общее ребро больше, чем у  $T$  и  $D$ . Повторяя, получим  $D_k = T$ . Значит, вес построенного остова не превосходит веса любого другого остова. ■

2. **Алгоритм Прима** Строится последовательность деревьев  $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n$ .

- (а) Выбираем произвольную вершину  $v$ .  $S_1 = (\{v\}, \emptyset)$ .
- (b) Пусть  $S_i = (V_i, E_i)$ . Находим ребро  $e \in E$  наименьшего веса, инцидентное одной из вершин  $v_i$ , добавление которого не приводит к образованию цикла.  
 $e' = (u, v)$ , где  $u \in V_i, v \notin V_i$ .  $S_{i+1} = V_i \cup \{v\}, E_i \cup \{e'\}$ .
- (с) Повторяем шаг 2  $(n - 1)$  раз.  $S_n$  — искомый остов.



## Глава 2

# Линейная алгебра

### 2.1 Линейные комбинации

Выражение, построенное на множестве элементов путём сложения этих элементов, умноженных на некоторые коэффициенты, называется **линейной комбинацией**. Если все коэффициенты линейной комбинации равны нулю, то она называется **тривиальной**, иначе — **нетривиальной**.

### 2.2 Матрицы

**Матрицей** называется прямоугольная таблица из чисел, содержащая  $m$  строк и  $n$  столбцов, и обозначается

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

Числа  $m$  и  $n$  называются **порядками** матрицы.

Если  $m = n$ , то матрица называется **квадратной**, а число  $m = n$  — её **порядком**. **Главной** называется диагональ квадратной матрицы, состоящая из элементов  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ , а **побочной** — состоящая из элементов  $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}$ .

$i$ -я строка матрицы обозначается  $A_i$ ,  $j$ -й столбец —  $A^j$ .

Две матрицы называются **равными**, если их порядки и соответствующие элементы совпадают, иначе — **неравными**.

#### 2.2.1 Операции над матрицами

Матрица, все элементы которой равны 0, называется **нулевой** и обозначается  $O$ .

Квадратная матрица, в которой элементы главной диагонали равны 1, а остальные — 0, называется **единичной** и обозначается  $E$ .

Над матрицами определены следующие операции:

- **Сложение.** Определено только над матрицами одинакового размера.

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{array} \right\|$$

Пусть  $A, B, C$  — матрицы. Свойства сложения:

- коммутативность:  $A + B = B + A$
- ассоциативность:  $(A + B) + C = A + (B + C)$

- **Умножение на число.**

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{vmatrix}$$

Пусть  $\alpha, \beta$  — числа,  $A, B$  — матрицы. Свойства умножения на число:

- ассоциативность:  $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$
- дистрибутивность относительно сложения чисел:  $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
- дистрибутивность относительно сложения матриц:  $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

- **Умножение.**  $A \cdot B$  определено, только если количество столбцов в матрице  $A$  совпадает с количеством строк в матрице  $B$ .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum a_{1i}b_{i1} & \sum a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum a_{1i}b_{in} \\ \sum a_{2i}b_{i1} & \sum a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum a_{2i}b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{mi}b_{i1} & \sum a_{mi}b_{i2} & \cdots & \sum a_{mi}b_{in} \end{vmatrix}$$

где суммирование производится по  $i$  от 1 до  $k$ .

Пусть  $\lambda$  — число,  $A, B, C$  — матрицы. Свойства умножения:

- ассоциативность:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- дистрибутивность:  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ ,  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- ассоциативность и коммутативность относительно умножения на число:  $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$

## 2.2.2 Определитель матрицы

**Определителем** порядка  $n$ , соответствующим квадратной матрице  $A$  порядка  $n$ , называется число, равное

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma=(i_1; \dots; i_n) \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}, \quad |\sigma| = \begin{cases} 0, \sigma \text{ чётная} \\ 1, \sigma \text{ нечётная} \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $S_n$  — множество всех перестановок  $n$ -элементного множества.

Свойства определителя:

- Если элементы какой-либо строки или столбца определителя имеют общий множитель  $\lambda$ , то его можно вынести за знак определителя.

**Доказательство.**

$$\Delta = \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

Каждое слагаемое имеет множитель из каждой строки, а также из каждого столбца, т. к.  $\sigma$  является перестановкой и содержит все номера столбцов от 1 до  $n$  включительно. Тогда все слагаемые имеют общий множитель  $\lambda$ , поэтому его можно вынести за скобки. ■

- Если какая-либо строка или столбец определителя состоит из нулей, то он равен 0.

•

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство для столбцов аналогично.

**Доказательство.**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1 i_1} \cdots a_{n i_n} =$$

| Каждое слагаемое содержит ровно 1 элемент из  $i$ -й строки и поэтому имеет вид |

$$\begin{aligned} &= \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1 i_1} \cdots a_{k-1 i_{k-1}} (a_{k i_k} + b_{k i_k}) a_{k+1 i_{k+1}} \cdots a_{n i_n} = \\ &= \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1 i_1} \cdots a_{k i_k} \cdots a_{n i_n} + \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1 i_1} \cdots b_{k i_k} \cdots a_{n i_n} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Свойство для столбцов доказывается аналогично. ■

- Если в определителе поменять две строки или два столбца местами, то он изменит знак.

**Доказательство.** При перестановке строк или столбцов местами все перестановки в формуле (2.1) меняют чётность, значит, каждое слагаемое меняет знак, тогда и определитель меняет знак. ■

- Если в определителе две строки или два столбца совпадают, то он равен 0.

**Доказательство.** Если поменять местами совпадающие строки или столбцы, то он, с одной стороны, не изменится, а с другой, поменяет знак. Значит, определитель равен 0. ■

•

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} + a_{j1} & \lambda a_{i2} + a_{j2} & \cdots & \lambda a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство для столбцов аналогично.

**Доказательство.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} + a_{j1} & \lambda a_{i2} + a_{j2} & \cdots & \lambda a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство для столбцов доказывается аналогично. ■

Пусть дана матрица

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Алгебраическим дополнением** элемента  $a_{ij}$  называется число, равное

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Лемма 2.2.1.**

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Доказательство.**

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
 = \sum a \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} + \sum 0 \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} + \dots + \sum 0 \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} = \\
 = a \sum a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} = a \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

■

**Теорема 2.2.1.** Любой определитель можно **разложить** по элементам произвольной строки или столбца:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

где  $A_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} \cdot \\ & \cdot \left( \begin{vmatrix} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right) = \\ & = (-1)^{i+1} \cdot \left( \begin{vmatrix} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{i2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-12} & a_{i-11} & a_{i-13} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+12} & a_{i+11} & a_{i+13} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \right. \\ & \quad \left. + (-1)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{in} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1n} & a_{i-11} & \cdots & a_{i-1n-1} \\ a_{i+1n} & a_{i+11} & \cdots & a_{i+1n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix} \right) = \\ & = (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2} a_{i2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-13} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+13} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \end{aligned}$$

$$+(-1)^{i+n} a_{in} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\ 1} & \cdots & a_{i-1\ n-1} \\ a_{i+1\ 1} & \cdots & a_{i+1\ n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ n-1} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

Аналогично доказывается

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

■

**Транспонированием** матрицы или определителя называется операция, в результате которой строки меняются местами со столбцами с сохранением порядка следования:

$$\left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\|^T = \left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\|$$

Полученная матрица или определитель называется **транспонированной** по отношению к исходной.

**Утверждение 2.2.1.** *Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной.*

**Доказательство.**

$$\left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\|^T = \left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\| = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} = \left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\|$$

■

### 2.2.3 Ранг матрицы

Строка (столбец) матрицы называется **линейно зависимой**, если она является линейной комбинацией остальных строк (столбцов), иначе — **линейно независимой**.

**Рангом** матрицы называется максимальное количество её линейно независимых строк.

**Минором**  $k$ -го порядка матрицы называется определитель, содержащий только те её элементы, которые стоят на пересечении некоторых  $k$  строк и  $k$  столбцов. Минор, отличный от нуля, называется **базисным**.

**Теорема 2.2.2.** *Ранг матрицы равен наибольшему порядку базисного минора.*

**Доказательство.** Пусть

$$A = \left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\|$$

$M_k$  — базисный минор  $k$ -го (наибольшего) порядка. При перестановке строк и столбцов минора равенство с нулём сохраняется, значит, без ограничения общности можно считать, что

$$M_k = \left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \right\|$$

$M_k \neq 0$ , значит, строки  $A_1, \dots, A_k$  линейно независимы.

$$M_{k+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$$

т. к.  $M_k$  — базисный минор наибольшего порядка. Тогда

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{kj}A_{kj} + a_{ij}A_{ij} = 0, \quad A_{ij} = M_k \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{ij} = -\frac{A_{1j}}{A_{ij}}a_{1j} - \frac{A_{2j}}{A_{ij}}a_{2j} - \dots - \frac{A_{kj}}{A_{ij}}a_{kj}$$

где  $A_{1j}, \dots, A_{kj}, A_{ij}$  — алгебраические дополнения  $a_{1j}, \dots, a_{kj}, a_{ij}$ .  $A_{1j}, \dots, A_{kj}, A_{ij}$  не зависят от  $j$ , тогда  $A_i$  — линейная комбинация  $A_1, \dots, A_k$ , значит,  $k$  — ранг матрицы  $A$ . ■

Рангом матрицы по строкам (столбцам) называется максимальное количество её линейно независимых строк (столбцов).

**Следствие 2.2.1.** Ранг матрицы по строкам равен рангу матрицы по столбцам. Для доказательства достаточно заметить, что определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной.

## Глава 3

# Математический анализ

### 3.0.1 Локальный экстремум функции нескольких переменных

Точка  $\bar{x}_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$  называется **точкой локального минимума функции**  $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ , если  $\bar{x}_0 \in D(f)$  и существует проколота окрестность  $\dot{U}(\bar{x}_0): \forall \bar{x} \in \dot{U}(\bar{x}_0) f(\bar{x}) > f(\bar{x}_0)$ .

Точка  $\bar{x}_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$  называется **точкой локального максимума функции**  $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ , если  $\bar{x}_0 \in D(f)$  и существует проколота окрестность  $\dot{U}(\bar{x}_0): \forall \bar{x} \in \dot{U}(\bar{x}_0) f(\bar{x}) < f(\bar{x}_0)$ .

Точки локального минимума и максимума называются **точками локального экстремума**.

**Теорема 3.0.1 (необходимое условие локального экстремума).** В точке локального экстремума частные производные функции равны нулю или не существуют.

**Доказательство.** Пусть  $\bar{x}_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$  — точка экстремума функции  $f(\bar{x})$ , дифференцируемой в точке  $\bar{x}_0$ . Рассмотрим  $g(x) = f(x_{10}, \dots, x_{k-10}, x, x_{k+10}, \dots, x_{n0})$ .  $\bar{x}_0$  — точка экстремума  $f(\bar{x})$ , тогда  $x_{k0}$  — точка экстремума  $g(x)$ , значит,  $g'(x_{k0}) = 0$  или не существует. Тогда  $f'_{x_k}(x_{k0}) = 0$  или не существует. ■

**Теорема 3.0.2 (достаточное условие локального экстремума функции двух переменных).** Пусть дана функция  $f(x, y)$ . Если

1.  $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$
2.  $(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$

то  $(x_0, y_0)$  — точка локального экстремума  $f(x, y)$ .

1.  $(x_0, y_0)$  — точка локального минимума, если  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$  или  $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$ .
2.  $(x_0, y_0)$  — точка локального максимума, если  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$  или  $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$ .

**Доказательство.** По формуле Тейлора

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0, y_0) + o(\rho^2((x, y), (x_0, y_0))) - f(x_0, y_0) = \\ &= \frac{1}{2}d^2f(x_0, y_0) + o(\rho^2((x, y), (x_0, y_0))) \end{aligned}$$

значит,  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  сохраняет знак, если  $d^2f(x_0, y_0)$  сохраняет знак.

$$\begin{aligned} d^2f(x_0, y_0) &= f''_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0, y_0)dy^2 = \\ &= \left( f''_{xx}(x_0, y_0) + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\frac{dy}{dx} + f''_{yy}(x_0, y_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right) dx^2 \end{aligned}$$

Т. о.,  $(x_0, y_0)$  — точка локального экстремума  $f(x, y)$ , если  $d^2f(x_0, y_0)$  сохраняет знак, т. е. при

$$(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$$

$$(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) < 0 \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) > (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 \Rightarrow f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$$

значит,  $f''_{xx}(x_0, y_0)$  и  $f''_{yy}(x_0, y_0)$  одного знака.

1. Если  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \vee f''_{yy}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow d^2 f(x_0, y_0) > 0$ , тогда  $(x_0, y_0)$  — точка локального минимума.
2. Если  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \vee f''_{yy}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow d^2 f(x_0, y_0) < 0$ , тогда  $(x_0, y_0)$  — точка локального максимума.

■

**Теорема 3.0.3 (достаточное условие локального экстремума).** Пусть дана функция  $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ . Точка  $\bar{x}_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$  — точка локального экстремума  $f(\bar{x})$ , если

1.  $f'_{x_1}(\bar{x}_0) = \dots = f'_{x_n}(\bar{x}_0) = 0$
2.  $\sum_{\substack{i=1, n \\ j=1, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j$  сохраняет знак.
1.  $\bar{x}_0$  — точка локального минимума, если  $\sum_{\substack{i=1, n \\ j=1, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j > 0$ .
2.  $\bar{x}_0$  — точка локального максимума, если  $\sum_{\substack{i=1, n \\ j=1, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j < 0$ .

**Доказательство.** По формуле Тейлора

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = f(\bar{x}_0) + df(\bar{x}_0) + \frac{d^2 f(\bar{x}_0)}{2!} + o(\rho^2(\bar{x}, \bar{x}_0)) - f(\bar{x}_0) = \frac{d^2 f(\bar{x}_0)}{2!} + o(\rho^2(\bar{x}, \bar{x}_0))$$

значит,  $f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)$  сохраняет знак, если  $d^2 f(\bar{x}_0)$  сохраняет знак.

$$d^2 f(\bar{x}_0) = \sum_{\substack{i=1, n \\ j=1, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j$$

1. Если  $\sum_{\substack{i=1, n \\ j=1, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j > 0 \Leftrightarrow d^2 f(\bar{x}_0) > 0$ , то  $\bar{x}_0$  — точка локального минимума.
2. Если  $\sum_{\substack{i=1, n \\ j=1, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j < 0 \Leftrightarrow d^2 f(\bar{x}_0) < 0$ , то  $\bar{x}_0$  — точка локального максимума.

■

При практическом применении теоремы 3.0.3 полезен критерий Сильвестра.

### 3.0.2 Метод наименьших квадратов

Пусть даны точки  $x_1, \dots, x_n$  и требуется найти аппроксимирующую прямую для значений некоторой функции  $f(x)$  в этих точках. Уравнение прямой —  $y = Ax + B$ . Найдём точку, в которой сумма

$$S(A, B) = \sum_{i=1}^n (Ax_i + B - f(x_i))^2$$

принимает наименьшее значение.

$$S'_A = \sum 2x_i (Ax_i + B - f(x_i))$$

$$\begin{aligned}
S'_B &= \sum 2(Ax_i + B - f(x_i)) \\
\begin{cases} S'_A = 0 \\ S'_B = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A \sum x_i^2 + B \sum x_i = \sum x_i f(x_i) \\ A \sum x_i + Bn = \sum f(x_i) \end{cases} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \begin{cases} \left( n \sum x_i^2 - \left( \sum x_i \right)^2 \right) A = n \sum x_i f(x_i) - \sum x_i \sum f(x_i) \\ Bn = \sum f(x_i) - A \sum x_i \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{n \sum x_i f(x_i) - \sum x_i \sum f(x_i)}{n \sum x_i^2 - \left( \sum x_i \right)^2} \\ B = \frac{\sum x_i^2 \sum f(x_i) - \sum x_i \sum x_i f(x_i)}{n \sum x_i^2 - \left( \sum x_i \right)^2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Найденные значения  $A$  и  $B$  — искомые коэффициенты в уравнении аппроксимирующей прямой. Для оценки точности аппроксимации можно найти коэффициент корреляции по формуле

$$r = \sqrt{\frac{\sum (f(x_i) - \tilde{y})^2 - \sum (f(x_i) - \tilde{y}_i)^2}{\sum (f(x_i) - \tilde{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sum (f(x_i) - \tilde{y}_i)^2}{\sum (f(x_i) - \tilde{y})^2}}$$

где  $\tilde{y} = \frac{1}{n} \sum f(x_i)$ ,  $\tilde{y}_i = Ax_i + B$ , а значение коэффициента  $r$  тем ближе к единице, чем точнее аппроксимация.

### 3.0.3 Условный экстремум

Пусть дана функция  $f(x_1, \dots, x_n)$ , переменные которой удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Для нахождения её экстремумов (называемых **условными**) введём функцию Лагранжа

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

и исследуем её. Её экстремумы являются условными экстремумами функции  $f$ .

## Глава 4

# Теория множеств

### 4.1 Множества

**Множество** — основное понятие. Некоторые числовые множества:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  — множество натуральных чисел.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  — множество целых чисел.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$  — множество рациональных чисел.
- $\mathbb{I}$  — множество иррациональных чисел.
- $\mathbb{R}$  — множество действительных (вещественных) чисел.
- $\mathbb{C}$  — множество комплексных чисел.

#### 4.1.1 Отношения между множествами

Пусть  $A, B$  — множества. Между ними определены следующие отношения:

- $A$  включено в  $B$  (является **подмножеством**  $B$ ):

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A \ a \in B$$

Нередко вместо знака  $\subseteq$  пишется знак  $\subset$ .

- $A$  равно  $B$ :

$$A = B \Leftrightarrow \forall a \ (a \in A \Leftrightarrow a \in B)$$

- $A$  строго включено в  $B$ :

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

#### 4.1.2 Операции над множествами

Пусть  $A, B$  — множества. Над ними определены следующие операции:

- **Объединение:**

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- **Пересечение:**

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- **Разность:**

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

- Симметрическая разность:

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B \vee x \notin A \wedge x \in B\}$$

- Дополнение до  $U$ , где  $A \subseteq U$ :

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

- Декартово произведение:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

- Декартова степень:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n$$

### 4.1.3 Функции

Пусть  $A$  и  $B$  — множества. **Функцией**  $f$  называется правило, ставящее в соответствие каждому элементу  $a \in A$  единственный элемент  $f(a) \in B$ .

$A$  называется **областью определения** функции  $f$ .

$B$  называется **областью значений** функции  $f$ .

$a$  называется **прообразом**  $f(a)$ .

$f(a)$  называется **образом**  $a$ .

Функция  $f: A \rightarrow B$  называется **инъективной (инъекцией)**, если  $\forall x, y \in A (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$ .

Функция  $f: A \rightarrow B$  называется **сюръективной (сюръекцией)**, если  $\forall b \in B \exists a \in A: f(a) = b$ .

Функция  $f: A \rightarrow B$  называется **биективной (биекцией)**, если она инъективная и сюръективная.

### 4.1.4 Мощность множеств

Множества  $A$  и  $B$  называются **равномощными (имеют одинаковую мощность)**, если существует биекция  $f: A \rightarrow B$ , иначе — **неравномощными**.

Для конечных множеств это означает, что у них одинаковое количество элементов.

**Мощностью** конечного множества  $A$  называется количество  $|A|$  его элементов.

Множество всех подмножеств множества  $A$  обозначается

$$\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

Множество всех подмножеств множества  $A$  мощности  $k$  обозначается

$$\mathcal{P}_k(A) = \{x \subseteq A \mid |x| = k\}$$

**Теорема 4.1.1 (Кантора).** Множества  $A$  и  $\mathcal{P}(A)$  не равномощны.

**Доказательство (методом от противного).** Пусть  $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  — биекция. Рассмотрим множество

$$X = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \Rightarrow X \subset A \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A)$$

$f$  — биекция, тогда  $\exists b \in A: f(b) = X$ . Возможны два случая:

1. Пусть  $b \in X \Rightarrow b \in f(b) \Rightarrow b \notin X$ . Противоречие.
2. Пусть  $b \notin X \Rightarrow b \in f(b) \Rightarrow b \in X$ . Противоречие.

В обоих случаях получили противоречие. ■

**Теорема 4.1.2.** Пусть дано множество  $A: |A| = n$ , тогда  $|\mathcal{P}_k(A)| = C_n^k$ .

**Доказательство (методом математической индукции).**

- База индукции.  $n = 0$ :

$$|A| = 0 \Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset\} \Rightarrow |\mathcal{P}_0(A)| = 1 = C_0^0$$

- *Шаг индукции.* Пусть теорема верна для  $n$ . Докажем её для  $n + 1$ . Пусть  $X \subset A$ ,  $|X| = k$ ,  $a \in A$ . Подсчитаем количество таких  $X$ . Возможны два случая:

1. Пусть  $a \notin X \Rightarrow X \subset A \setminus \{a\}$ , тогда таких  $X$   $C_n^k$ .
2. Пусть  $a \in X$ , тогда таких  $X$  столько же, сколько множеств  $X \setminus \{a\} \subset A \setminus \{a\}$ , т. е.  $C_n^{k-1}$ .

Тогда  $|\mathcal{P}(A)| = C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$ .

■

## Глава 5

## Разное