Оглавление

Глава 1

18.04.2018, математический анализ

1.0.1 Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y' = a(x)y + b(x)y^n$, где $n \neq 1$. Пусть $\frac{1}{y^{n-1}} = z$, тогда

$$y' = a(x)y + b(x)y^n \Leftrightarrow \frac{y'}{y^n} = a(x)y^{1-n} + b(x) \Leftrightarrow \frac{z'}{1-n} = a(x)z + b(x)$$

Т. о., решение уравнения Бернулли сводится к решению линейного уравнения.

Теорема 1.0.1. *Пусть $y'(x) = f(x, y(x))$ & $y(x_0) = y_0$, причём в некоторой окрестности $\exists M > 0$: $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant M|y_1 - y_2|$, тогда уравнение имеет единственное решение в окрестности $(x_0 - d; x_0 + d)$: $y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx + y_0$.*

Это уравнение можно решить методом итераций:

$y_1(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx + y_0$

$y_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\, dx + y_0$

Доказательство.

$$y_n(x) - y_{n-1}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} (f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x)))\, dx$$

$|\int\limits_a^b g(x)\, dx| \leqslant |b - a| \max_{x \in [a;b]} |g(x)|$, тогда

$$\max_{|x-x_0|<d} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant d \max_{|x-x_0|<d} |f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x))| \leqslant dM \max_{|x-x_0|<d} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)|$$

Пусть $q = dM < 1$, тогда

$$\max_{|x-x_0|<d} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant q \max_{|x-x_0|<d} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| \leqslant q^{n-1} \max_{|x-x_0|<d} |y_1(x) - y_0|$$

Тогда

$$\forall k \geqslant 1 \max_{x \in [a;b]} |y_{n+k}(x) - y_n(x)| = \max_{|x-x_0|<d} |(y_{n+k}(x) - y_{n+k-1}(x)) + (y_{n+k-1}(x) + y_{n+k-2}(x)) + \ldots + (y_{n+1}(x) - y_n(x))| \leqslant \max_{|x-x_0|<d} |y_{n+k}($$

По признаку Коши получим

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n > N\ \forall k \geqslant 1\ \max_{x \in [a;b]} |y_{n+k}(x) - y_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} y_n(x) = \tilde{y}(x)$$

Докажем единственность:

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| = |\int\limits_{x_0}^{x} (f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x)))\, dx| \Rightarrow \max_{|x-x_0|<d} |y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant |x - x_0| \cdot \max_{|x-x_0|<d} |f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))| < dM \max_{|x-x_0|<d} |y(x) -$$

Противоречие, значит, решение единственно. ■

Глава 2

25.04.2018, математический анализ

Рассмотрим $F(y, y', y'') = 0$. Пусть $y'(x) = z(y)$, тогда $y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z$ и $F(y, y', y'') = 0 \Leftrightarrow F(y, z, z' \cdot z) = 0$.

2.0.1 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$.

Введём функции $y_0 = y, y_1 = y', \ldots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$, тогда

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ \ldots \\ y_{n-1}' = f(x) - a_0 y_0 - a_1 y_1 - \ldots - a_{n-1} y_{n-1} \end{cases}$$

Введём вектор-функцию $Y(x) = \begin{Vmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_{n-1} \end{Vmatrix}$, тогда $Y' = AY + F$, где $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \ldots - a_{n-1} & & \end{Vmatrix}$, $F = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ f(x) \end{Vmatrix}$

Уравнение можно решить методом итераций: $Y_k(x) = Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} (AY_{k-1}(t) + F(t))\,dt$.

Определителем Вронского, или **вронскианом**, называется определитель

$$\begin{vmatrix} \tilde{y}_0(x_0) & \tilde{y}_1(x_0) & \ldots & \tilde{y}_{n-1}(x_0) & \\ \tilde{y}_0'(x_0) & \tilde{y}_1'(x_0) & \ldots & \tilde{y}_{n-1}'(x_0) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y}_0^{(n-1)}(x_0) & \tilde{y}_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & \tilde{y}_{n-1}^{(n-1)}(x_0) & \end{vmatrix}$$

где $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n$ — частные решения уравнения.

Утверждение 2.0.1. *Если решения $\tilde{y}_0, \ldots, \tilde{y}_{n-1}$*

Глава 3

16.05.2018, математический анализ

Пусть дифференциальному уравнению $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_1k + a_0 = 0$.

Доказательство. $y'' + a_1y' + a_0y = 0$

Пусть $k_1 = k_2$, тогда $k_1^2 + a_1k_1 + a_0 = 0$ & $2k_1 + a_1 = 0$. Подставим $y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}$:

$$e^{k_1x}(C_1k_1^2+2C_2k_1+C_2xk_1^2+C_1a_1k_1+C_2a_1+C_2a_1k_1x+C_1a_0+C_2a_0x) = 0 \Leftrightarrow C_1(k_1^2+a_1k_1+a_0)+C_2(2k_1+a_1)+C_2x(k_1^2+a_1k_1+a_0) = 0$$

■

Пусть $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, тогда, используя $e^{it} = \cos t + i\sin t$, получим

$$y(x) = C_{10}e^{(\alpha+i\beta)x}+C_{20}e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(C_{10}e^{i\beta x}+C_{20}e^{-i\beta x}) = e^{\alpha x}((C_{10}+C_{20})\cos\beta x+i(C_{10}-C_{20})\sin\beta x) = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta$$

3.0.1 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим следующие методы решения уравнений вида $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = f(x)$.

Метод вариации произвольных постоянных

1. Найдём решение $y_0 = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 + \ldots + C_n\tilde{y}_n$ уравнения $y_0^{(n)} + a_{n-1}y_0^{(n-1)} + \ldots + a_1y_0' + a_0y_0 = 0$.
2. Решением исходного уравнения будет $y(x) = C_1(x)\tilde{y}_1 + \ldots + C_n(x)\tilde{y}_n$.
3. Найдём $C_1(x), \ldots, C_n(x)$, решая систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + \ldots + C_n'(x)\tilde{y}_n = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1' + \ldots + C_n'(x)\tilde{y}_n' = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1'' + \ldots + C_n'(x)\tilde{y}_n'' = 0 \\ \ldots \\ C_1'(x)\tilde{y}_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\tilde{y}_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

и интегрируя $C_1'(x), \ldots, C_n'(x)$.

Доказательство. Пусть дано уравнение $y'' + a_1y' + a_0 = f(x)$ и $y_0(x) = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2$, тогда

$$y(x) = C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2$$

$$y'(x) = C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_1(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2 + C_2(x)\tilde{y}_2'$$

$$y''(x) = C_1''(x)\tilde{y}_1 + 2C_1'\tilde{y}_1' + C_1(x)\tilde{y}_1'' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + 2C_2'\tilde{y}_2' + C_2(x)\tilde{y}_2''$$

Подставим в уравнение:

$$C_1''(x)\tilde{y}_1+2C_1'\tilde{y}_1'+C_1(x)\tilde{y}_1''+C_2''(x)\tilde{y}_2+2C_2'\tilde{y}_2'+C_2(x)\tilde{y}_2''+a(C_1'(x)\tilde{y}_1+C_1(x)\tilde{y}_1'+C_2'(x)\tilde{y}_2+C_2(x)\tilde{y}_2')+b(C_1(x)\tilde{y}_1+C_2(x)\tilde{y}_2) = f(x) \Leftrightarrow C_1$$

Решим систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_2'(x)\tilde{y}_2 = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2' = f(x) \end{cases}$$

тогда

$$C_1''(x)\tilde{y}_1 + C_1'\tilde{y}_1' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + C_2'\tilde{y}_2' = 0$$

Подставляя в уравнение, получим $f(x) = f(x)$. ■

Метод неопределённых коэффициентов

Уравнение $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ можно решить методом неопределённых коэффициентов, если

$$f(x) = \sum_j e^{\alpha_j x}(P_j(x)\cos\beta_j x + Q_j(x)\sin\beta_j x)$$

Тогда решение имеет вид

$$\sum_j e^{\alpha_j x}(T_j(x)\cos\beta_j x + R_j(x)\sin\beta_j x)\, x^{s_j}$$

где s_j — кратность корня.

3.0.2 Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Решим систему

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

$$y_1'' = ay_1' + by_2' \Rightarrow y_1'' = ay_1' + b(cy_1 + dy_2) \Rightarrow y_1'' = ay_1' + bcy_1 + d(y_1' - ay_1) \Rightarrow y_1'' = (a+d)y_1' + (bc - ad)y = 0$$

Т. о., система свелась к уравнению.

Глава 4

23.05.2018, математический анализ

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_0' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

Известно, что $y_1 = Le^{kx}$, $y_2 = Me^{kx}$, тогда

$$\begin{cases} Lk = aL + bM \\ Mk = cL + dM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L(a-k) + Mb = 0 \\ Lc + M(d-k) = 0 \end{cases}$$

Если $\begin{vmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{vmatrix} \neq 0$, то получим единственное решение — нулевое. Тогда

$$(a-k)(d-k) - bc = 0 \Leftrightarrow k^2 - k(a+d) + ad - bc = 0$$

Получили характеристическое уравнение.

Решим системы

$$\begin{cases} L(a-k_i) + Mb = 0 \\ Lc + M(d-k_i) = 0 \end{cases}$$

где k_i — i-й корень характеристического уравнения, причём в каждой системе одно из уравнений можно убрать, т. к. главный определитель равен нулю. Возьмём частные решения $(L_1, M_1), (L_2, M_2)$, тогда

$$y_1 = C_1L_1e^{k_1x} + C_2L_2e^{k_2x}$$
$$y_0 = C_1M_1e^{k_1x} + C_2M_2e^{k_2x}$$

4.0.1 Неоднородные системы

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 + f_1 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 + f_2 \end{cases}$$

Решая соответствующую однородную систему, получим

$$y_10 = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2$$
$$y_20 = D_1\tilde{y}_1 + D_2\tilde{y}_2$$

где D_1 и D_2 линейно связаны с C_1 и C_2 cooветственно.

Тогда

$$y_1 = C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2$$
$$y_2 = D_1(x)\tilde{y}_1 + D_2(x)\tilde{y}_2$$

Подставляя в систему, получим

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_2'(x)\tilde{y}_2 + C_1(x)\tilde{y}_1' + C_2(x)\tilde{y}_2' = a(C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2) + b(D_1(x)\tilde{y}_1 + D_2(x)\tilde{y}_2) + f_1(x) \\ D_1'(x)\tilde{y}_1 + D_2'(x)\tilde{y}_2 + D_1(x)\tilde{y}_1' + D_2(x)\tilde{y}_2' = c(C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2) + d(D_1(x)\tilde{y}_1 + D_2(x)\tilde{y}_2) + f_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_2'(x)\tilde{y}_2 = f \\ D_1'(x)\tilde{y}_1 + D_2'(x)\tilde{y}_2 = \end{cases}$$

Решая, получим $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, откуда найдём $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

4.1 Приближённое решение дифференциальных уравнений

4.1.1 Решение с помощью степенного ряда

Рассмотрим уравнение $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Найдём его решение в окрестности точки x_0:

$$y(x) = y_0 + y_1(x - x_0) + \frac{y_2}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{F(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})}{n!}(x - x_0)^n + c_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \dots$$

Неизвестные коэффициенты можно определить подстановкой в исходное уравнение или его дифференцированием и подстановкой начальных условий.

4.1.2 Метод Эйлера

$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k)$

Можно улучшить точность: $y_{k+1} = y_k + f($

Метод приближённого решения дифференциального уравнения высшего порядка заключается в его сведении к системе линейных уравнений.

4.1.3 Графический метод

Приближённые решения уравнения вида $y' = f(x, y)$ можно получить графическим методом, находя изоклины — линии, на которых производная функции не меняет значение. По ним можно получить представление о том, какую форму имеет кривая.

Рассмотрим **динамическую систему**

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t) \\ \dot{y} = g(x, y, t) \end{cases}$$

Если $\begin{cases} f(a, b, t) = 0 \\ g(a, b, t) = 0 \end{cases}$, то (a, b) называется **точкой покоя**, или **положением равновесия**.

Исследуем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

Для неё $(0, 0)$ — точка покоя.

Решая уравнение $\begin{vmatrix} a - k & b \\ c & d - k \end{vmatrix} = 0$, получим корни k_1 и k_2.

Тогда

1. Если $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, то

$$x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} y = C_1 \, \frac{k_1 - a}{b} \, e^{k_1 t} + C_2 \, \frac{k_2 - a}{b} \, e^{k_2 t}$$

   - Если $k_1, k_2 < 0$, то $(0, 0)$ — устойчивый узел.
   - Если $k_1, k_2 > 0$, то $(0, 0)$ — неустойчивый узел.
   - Если $k_1 < 0 < k_2$, то $(0, 0)$ — седло.

2. Если $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то

$$\begin{cases} x = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \\ y = \left(\frac{\alpha - a}{b} \, C_1 + \frac{\beta}{b} \, C_2 \right) e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \end{cases}$$

   - Если $\alpha < 0$, то $(0, 0)$ — устойчивый фокус.
   - Если $\alpha > 0$, то $(0, 0)$ — неустойчивый фокус.
   - Если $\alpha = 0$, то $(0, 0)$ — центр.

3. Если $k_1 = k_2 = \alpha \in R$, то

$$x =$$