

Оглавление

1	14.03.2018, математический анализ	2
1.0.1	Знакопеременные ряды	2
1.1	Функциональные ряды	3
1.1.1	Степенные ряды	3
2	21.03.2018, математический анализ	4
2.0.1	Приложения разложений функций в ряд Маклорена	6
3	28.03.2018, математический анализ	7
3.0.1	Тригонометрические ряды Фурье	7
4	11.04.2018, математический анализ	9
4.0.1	Уравнение в полных дифференциалах	9
4.1	Линейное уравнение первого порядка	9
5	18.04.2018, математический анализ	10
5.0.1	Уравнение Бернулли	10
6	25.04.2018, математический анализ	11
6.0.1	Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	11
7	16.05.2018, математический анализ	12
7.0.1	Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	12
7.0.2	Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	13
8	23.05.2018, математический анализ	14
8.0.1	Неоднородные системы	14
8.1	Приближённое решение дифференциальных уравнений	15
8.1.1	Решение с помощью степенного ряда	15
8.1.2	Метод Эйлера	16
8.1.3	Графический метод	16

Глава 1

14.03.2018, математический анализ

Теорема 1.0.1 (интегральный признак Коши). Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — знакоположительный ряд. Если существует монотонная функция $f(x)$ такая, что $f(n) = a_n$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится $\Leftrightarrow \exists \int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Доказательство. Площадь заштрихованной фигуры равна $1a_1 + 1a_2 + \dots + 1a_n$, а криволинейной трапеции — $\int_1^{n+1} f(x) dx$, тогда $S_n > \int_1^{n+1} f(x) dx$, $S_{n+1} - a_1 < \int_1^{n+1} f(x) dx$.

$$1. \Leftarrow. \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n < a_1 + \int_1^{n+1} f(x) dx < a_1 + \int_1^{+\infty} f(x) dx \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится.}$$

$$2. \Rightarrow. \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_1^{n+1} f(x) dx < S_n < S \Rightarrow \exists \int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

■

1.0.1 Знакопеременные ряды

Теорема 1.0.2. Если $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ тоже сходится.

Доказательство. Пусть (S_n) и (σ_n) — частичные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ соответственно. По критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall m > N \quad \forall k \geq 1 \quad |\sigma_{m+k} - \sigma_m| < \varepsilon$$

Тогда

$$|S_{m+k} - S_m| = \left| \sum_{i=1}^k a_{m+i} \right| \leq \sum_{i=1}^k |a_{m+i}| = |\sigma_{m+k} - \sigma_m| < \varepsilon$$

Значит, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. ■

Теорема 1.0.3 (признак Лейбница). Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ — знакочередующийся ряд. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, причём (a_n) — монотонная последовательность, то ряд сходится.

Доказательство.

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) < S_{2n+2}$$

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$$

Тогда по свойству ?? предела последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Значит, ряд сходится. ■

1.1 Функциональные ряды

Теорема 1.1.1 (мажорантный признак сходимости). Если существует последовательность $(a_n): \forall n \in \mathbb{N} |f_n(x)| \leq a_n$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится абсолютно.

1.1.1 Степенные ряды

Степенным называется ряд вида $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k$.

Теорема 1.1.2 (Абеля).

- Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ сходится при $x = x_0$, то $\forall x: |x| < |x_0|$ он сходится абсолютно.
- Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ расходится при $x = x_0$, то $\forall x: |x| > |x_0|$ он расходится.

Доказательство.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_0^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0: |c_n x_0^n| \leq M \Rightarrow |c_n x^n| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$.

Тогда $\sum_{k=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^k$ сходится $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ сходится абсолютно.

- Если бы $\exists x_1: |x_1| > |x_0|$ & $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_1^k$ сходится, то $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$ сошелся бы, что противоречит условию.

■

Следствие 1.1.3. $\exists R > 0$: при $|x| < R$ $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ сходится, а при $|x| > R$ $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ расходится.

R называется **радиусом сходимости степенного ряда**.

Рассмотрим ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k x^k|$. По признаку д'Аламбера $\lim_{n \rightarrow \infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \cdot |x| \right| \dots$

Глава 2

21.03.2018, математический анализ

Найдём радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^p}$:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p = 1$$

Подставим $x = 1$, тогда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Подставим $x = -1$, тогда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^p}$ сходится абсолютно при $p > 1$, сходится условно при $0 < p \leq 1$ и расходится при $p \leq 0$.

Утверждение 2.0.1. Если $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = S(x)$ при $|x| < R$, то

$$1. \int_a^b S(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_a^b x^k dx, \text{ где } |a|, |b| < R$$

$$2. (S(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x^k)^{(n)}, \text{ где } |x| < R$$

Связь суммы ряда и его коэффициентов:

$$1. c_0 = S(0)$$

$$2. c_1 = S'(0)$$

$$3. c_2 = \frac{S''(0)}{2}$$

$$4. c_3 = \frac{S'''(0)}{3!}$$

$$5. c_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$$

Т.о., $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k)}(0)}{k!} x^k$ при $|x| < R$.

Рассмотрим ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|}{\left| \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f^{(n)}(0)|(n+1)}{|f^{(n+1)}(0)|}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Тогда $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ при $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$.

Разложение некоторых функций:

$$1. f(x) = e^x. \text{ Для } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

$$r_n = \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$$

Тогда при $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$2. f(x) = \sin x. \text{ Для } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2n-1)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n(2n+1) = \infty$$

$$r_n = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \sin \left(\Theta x + \frac{\pi}{den} \right) \right| < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \sin \left(\Theta x + \frac{\pi}{den} \right) \right| = 0$$

Тогда при $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$$

$$3. f(x) = \cos x. \text{ Для } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)(2n+2) = \infty$$

$$r_n = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \cos \left(\Theta x + \frac{\pi}{den} \right) \right| < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \cos \left(\Theta x + \frac{\pi}{den} \right) \right| = 0$$

Тогда при $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$4. f(x) = (1+x)^\alpha \text{ при } \alpha \notin \mathbb{N}. \text{ Для } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)|(k+1)!}{k!|\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k)|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{|\alpha-k|} = 1$$

$$r_n = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)(1+\Theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\Theta x)^{n+1-\alpha}}$$

Если $x \in [0; 1)$ $|r_n(x)| \leq M \cdot \frac{x^{n+1}}{1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$.

Тогда при $x \in (-1; 1)$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

2.0.1 Приложения разложений функций в ряд Маклорена

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad |x| < 1$$

Тогда при $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Глава 3

28.03.2018, математический анализ

3.0.1 Тригонометрические ряды Фурье

Представим функцию $f(x)$ на отрезке $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$ в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + \sum_{k=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n}{T} x$$

Скалярным произведением функций $f(x)$ и $g(x)$ называется $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)g(x) dx$.

Проверим, что функции 1 , $\cos \frac{2\pi n}{T} x$ и $\sin \frac{2\pi n}{T} x$ попарно ортогональны:

- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{T}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n}{T} x \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$
- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi n}{T} x dx = -\frac{T}{2\pi n} \cos \frac{2\pi n}{T} x \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$
- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi m}{T} x \cos \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi(m-n)}{T} x + \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi(m+n)}{T} x = 0, m \neq n$
- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi m}{T} x \sin \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi(m-n)}{T} x - \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi(m+n)}{T} x = 0, m \neq n$
- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi m}{T} x \sin \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi(m+n)}{T} x + \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi(m-n)}{T} x = 0$

Найдём квадраты этих функций:

- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1^2 dx = T$
- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{T}{2}$

- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 \frac{2\pi n}{T} x \, dx = \frac{T}{2}$

Тогда можно найти коэффициенты:

- $a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos \frac{2\pi k}{T} x \, dx$

- $b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin \frac{2\pi k}{T} x \, dx$

Причём если $f(x)$ чётна, то $b_k = 0$. Если же $f(x)$ нечётна, то $a_k = 0$.

Глава 4

11.04.2018, математический анализ

4.0.1 Уравнение в полных дифференциалах

Уравнением в полных дифференциалах называется уравнение вида $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$. Если $M'_y = N'_x$, то $M(x,y) = F'_x$ & $N(x,y) = F'_y$, тогда

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \Leftrightarrow M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \Leftrightarrow dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C$$

Пусть $M'_y \neq N'_x$, но $\exists \mu(x,y): (\mu \cdot M)'_y = (\mu \cdot N)'_x$, тогда

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \Leftrightarrow \mu(x,y)M(x,y) dx + \mu(x,y)N(x,y) dy = 0 \Leftrightarrow dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C$$

$\mu(x,y)$ называется **интегрирующим множителем**.

4.1 Линейное уравнение первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $y' = a(x)y + b(x)$.

Рассмотрим метод вариации произвольной постоянной.

1. Решим уравнение

$$y'_0 = a(x)y_0 \Leftrightarrow \frac{dy_0}{y_0} = a(x) dx \Rightarrow \ln y_0 = \varphi(x) + \ln C \Rightarrow y_0 = Ce^{\varphi(x)}$$

2. Подставим $y = C(x)e^{\varphi(x)}$ в исходное уравнение:

$$C'(x)e^{\varphi(x)} + C(x)e^{\varphi(x)}\varphi'(x) = a(x)C(x)e^{\varphi(x)} + b(x)$$

$y_0 = Ce^{\varphi(x)} \Rightarrow Ce^{\varphi(x)}\varphi'(x) = a(x)Ce^{\varphi(x)}$, тогда получим

$$C'(x)e^{\varphi(x)} = b(x) \Leftrightarrow C'(x) = b(x)e^{-\varphi(x)} \Leftrightarrow C(x) = \int b(x)e^{-\varphi(x)}$$

Тогда $y = C(x)e^{\varphi(x)}$.

Глава 5

18.04.2018, математический анализ

5.0.1 Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y' = a(x)y + b(x)y^n$, где $n \neq 1$. Пусть $\frac{1}{y^{n-1}} = z$, тогда

$$y' = a(x)y + b(x)y^n \Leftrightarrow \frac{y'}{y^n} = a(x)y^{1-n} + b(x) \Leftrightarrow \frac{z'}{1-n} = a(x)z + b(x)$$

Т. о., решение уравнения Бернулли сводится к решению линейного уравнения.

Теорема 5.0.1. Пусть $y'(x) = f(x, y(x))$ & $y(x_0) = y_0$, причём в некоторой окрестности $\exists M > 0: |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$, тогда уравнение имеет единственное решение в окрестности $(x_0 - d; x_0 + d)$: $y(x) = \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx + y_0$.

Это уравнение можно решить методом итераций:

$$y_1(x) = \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx + y_0$$

$$y_n(x) = \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx + y_0$$

Доказательство.

$$y_n(x) - y_{n-1}(x) = \int_{x_0}^x (f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x))) dx$$

$$\left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq |b - a| \max_{x \in [a; b]} |g(x)|, \text{ тогда}$$

$$\max_{|x-x_0|<d} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq d \max_{|x-x_0|<d} |f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x))| \leq dM \max_{|x-x_0|<d} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)|$$

Пусть $q = dM < 1$, тогда

$$\max_{|x-x_0|<d} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq q \max_{|x-x_0|<d} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| \leq q^{n-1} \max_{|x-x_0|<d} |y_1(x) - y_0|$$

Тогда

$$\forall k \geq 1 \max_{x \in [a; b]} |y_{n+k}(x) - y_n(x)| = \max_{|x-x_0|<d} |(y_{n+k}(x) - y_{n+k-1}(x)) + (y_{n+k-1}(x) - y_{n+k-2}(x)) + \dots + (y_{n+1}(x) - y_n(x))| \leq \max_{|x-x_0|<d} |y_{n+k}(x) - y_n(x)|$$

По признаку Коши получим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \forall k \geq 1 \max_{x \in [a; b]} |y_{n+k}(x) - y_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \tilde{y}(x)$$

Докажем единственность:

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| = \left| \int_{x_0}^x (f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))) dx \right| \Rightarrow \max_{|x-x_0|<d} |y(x) - \tilde{y}(x)| \leq |x - x_0| \cdot \max_{|x-x_0|<d} |f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))| < dM \max_{|x-x_0|<d} |y(x) - \tilde{y}(x)|$$

Противоречие, значит, решение единственно. ■

Глава 6

25.04.2018, математический анализ

Рассмотрим $F(y, y', y'') = 0$. Пусть $y'(x) = z(y)$, тогда $y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z$ и $F(y, y', y'') = 0 \Leftrightarrow F(y, z, z' \cdot z) = 0$.

6.0.1 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением n -го порядка называется уравнение вида $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$.

Введём функции $y_0 = y, y_1 = y', \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$, тогда

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y'_0 = y_1 \\ y'_1 = y_2 \\ \dots \\ y'_{n-1} = f(x) - a_0y_0 - a_1y_1 - \dots - a_{n-1}y_{n-1} \end{cases}$$

Введём вектор-функцию $Y(x) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$, тогда $Y' = AY + F$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$, $F =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Уравнение можно решить методом итераций: $Y_k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x (AY_{k-1}(t) + F(t)) dt$.

Определителем Вронского, или вронскианом, называется определитель

$$\begin{vmatrix} \tilde{y}_0(x_0) & \tilde{y}_1(x_0) & \dots & \tilde{y}_{n-1}(x_0) \\ \tilde{y}'_0(x_0) & \tilde{y}'_1(x_0) & \dots & \tilde{y}'_{n-1}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y}_0^{(n-1)}(x_0) & \tilde{y}_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & \tilde{y}_{n-1}^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

где $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ — частные решения уравнения.

Утверждение 6.0.1. Если решения $\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n-1}$

Глава 7

16.05.2018, математический анализ

Пусть дифференциальному уравнению $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \dots + a_1k + a_0 = 0$.

Доказательство. $y'' + a_1y' + a_0y = 0$

Пусть $k_1 = k_2$, тогда $k_1^2 + a_1k_1 + a_0 = 0$ & $2k_1 + a_1 = 0$. Подставим $y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}$:

$$e^{k_1x}(C_1k_1^2 + 2C_2k_1 + C_2xk_1^2 + C_1a_1k_1 + C_2a_1 + C_2a_1k_1x + C_1a_0 + C_2a_0x) = 0 \Leftrightarrow C_1(k_1^2 + a_1k_1 + a_0) + C_2(2k_1 + a_1) + C_2x(k_1^2 + a_1k_1 + a_0) = 0$$

■

Пусть $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, тогда, используя $e^{it} = \cos t + i \sin t$, получим

$$y(x) = C_{10}e^{(\alpha+i\beta)x} + C_{20}e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(C_{10}e^{i\beta x} + C_{20}e^{-i\beta x}) = e^{\alpha x}((C_{10} + C_{20})\cos \beta x + i(C_{10} - C_{20})\sin \beta x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

7.0.1 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим следующие методы решения уравнений вида $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$.

Метод вариации произвольных постоянных

1. Найдём решение $y_0 = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 + \dots + C_n\tilde{y}_n$ уравнения $y_0^{(n)} + a_{n-1}y_0^{(n-1)} + \dots + a_1y_0' + a_0y_0 = 0$.
2. Решением исходного уравнения будет $y(x) = C_1(x)\tilde{y}_1 + \dots + C_n(x)\tilde{y}_n$.
3. Найдём $C_1(x), \dots, C_n(x)$, решая систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + \dots + C_n'(x)\tilde{y}_n = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1' + \dots + C_n'(x)\tilde{y}_n' = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1'' + \dots + C_n'(x)\tilde{y}_n'' = 0 \\ \dots \\ C_1'(x)\tilde{y}_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)\tilde{y}_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

и интегрируя $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$.

Доказательство. Пусть дано уравнение $y'' + a_1y' + a_0 = f(x)$ и $y_0(x) = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2$, тогда

$$y(x) = C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2$$

$$y'(x) = C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_1(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2 + C_2(x)\tilde{y}_2'$$

$$y''(x) = C_1''(x)\tilde{y}_1 + 2C_1'(x)\tilde{y}_1' + C_1(x)\tilde{y}_1'' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + 2C_2'(x)\tilde{y}_2' + C_2(x)\tilde{y}_2''$$

Подставим в уравнение:

$$C_1''(x)\tilde{y}_1 + 2C_1'(x)\tilde{y}_1' + C_1(x)\tilde{y}_1'' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + 2C_2'(x)\tilde{y}_2' + C_2(x)\tilde{y}_2'' + a(C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_1(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2 + C_2(x)\tilde{y}_2') + b(C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2) = f(x) \Leftrightarrow C_1''(x)\tilde{y}_1 + C_2''(x)\tilde{y}_2 + a(C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2) = f(x)$$

Решим систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_2'(x)\tilde{y}_2 = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2' = f(x) \end{cases}$$

тогда

$$C_1''(x)\tilde{y}_1 + C_1'\tilde{y}_1' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + C_2'\tilde{y}_2' = 0$$

Подставляя в уравнение, получим $f(x) = f(x)$. ■

Метод неопределённых коэффициентов

Уравнение $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$ можно решить методом неопределённых коэффициентов, если

$$f(x) = \sum_j e^{\alpha_j x} (P_j(x) \cos \beta_j x + Q_j(x) \sin \beta_j x)$$

Тогда решение имеет вид

$$\sum_j e^{\alpha_j x} (T_j(x) \cos \beta_j x + R_j(x) \sin \beta_j x) x^{s_j}$$

где s_j — кратность корня.

7.0.2 Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Решим систему

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

$$y_1'' = ay_1' + by_2' \Rightarrow y_1'' = ay_1' + b(cy_1 + dy_2) \Rightarrow y_1'' = ay_1' + bcy_1 + d(y_1' - ay_1) \Rightarrow y_1'' = (a+d)y_1' + (bc-ad)y_1 = 0$$

Т.о., система свелась к уравнению.

Глава 8

23.05.2018, математический анализ

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_0' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

Известно, что $y_1 = Le^{kx}$, $y_2 = Me^{kx}$, тогда

$$\begin{cases} Lk = aL + bM \\ Mk = cL + dM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L(a - k) + Mb = 0 \\ Lc + M(d - k) = 0 \end{cases}$$

Если $\begin{vmatrix} a - k & b \\ c & d - k \end{vmatrix} \neq 0$, то получим единственное решение — нулевое. Тогда

$$(a - k)(d - k) - bc = 0 \Leftrightarrow k^2 - k(a + d) + ad - bc = 0$$

Получили характеристическое уравнение.

Решим системы

$$\begin{cases} L(a - k_i) + Mb = 0 \\ Lc + M(d - k_i) = 0 \end{cases}$$

где k_i — i -й корень характеристического уравнения, причём в каждой системе одно из уравнений можно убрать, т. к. главный определитель равен нулю. Возьмём частные решения (L_1, M_1) , (L_2, M_2) , тогда

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 L_1 e^{k_1 x} + C_2 L_2 e^{k_2 x} \\ y_0 &= C_1 M_1 e^{k_1 x} + C_2 M_2 e^{k_2 x} \end{aligned}$$

8.0.1 Неоднородные системы

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 + f_1 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 + f_2 \end{cases}$$

Решая соответствующую однородную систему, получим

$$y_1 0 = C_1 \tilde{y}_1 + C_2 \tilde{y}_2$$

$$y_2 0 = D_1 \tilde{y}_1 + D_2 \tilde{y}_2$$

где D_1 и D_2 линейно связаны с C_1 и C_2 соответственно.

Тогда

$$y_1 = C_1(x) \tilde{y}_1 + C_2(x) \tilde{y}_2$$

$$y_2 = D_1(x) \tilde{y}_1 + D_2(x) \tilde{y}_2$$

Подставляя в систему, получим

$$\begin{cases} C_1'(x) \tilde{y}_1 + C_2'(x) \tilde{y}_2 + C_1(x) \tilde{y}_1' + C_2(x) \tilde{y}_2' = a(C_1(x) \tilde{y}_1 + C_2(x) \tilde{y}_2) + b(D_1(x) \tilde{y}_1 + D_2(x) \tilde{y}_2) + f_1(x) \\ D_1'(x) \tilde{y}_1 + D_2'(x) \tilde{y}_2 + D_1(x) \tilde{y}_1' + D_2(x) \tilde{y}_2' = c(C_1(x) \tilde{y}_1 + C_2(x) \tilde{y}_2) + d(D_1(x) \tilde{y}_1 + D_2(x) \tilde{y}_2) + f_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) \tilde{y}_1 + C_2'(x) \tilde{y}_2 = f_1(x) \\ D_1'(x) \tilde{y}_1 + D_2'(x) \tilde{y}_2 = f_2(x) \end{cases}$$

Решая, получим $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, откуда найдём $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

8.1 Приближённое решение дифференциальных уравнений

8.1.1 Решение с помощью степенного ряда

Рассмотрим уравнение $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Найдём его решение в окрестности точки x_0 :

$$y(x) = y_0 + y_1(x - x_0) + \frac{y_2}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{F(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})}{n!}(x - x_0)^n + c_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \dots$$

Неизвестные коэффициенты можно определить подстановкой в исходное уравнение или его дифференцированием и подстановкой начальных условий.

8.1.2 Метод Эйлера

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Можно улучшить точность: $y_{k+1} = y_k + f(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}, y_k)(x_{k+1} - x_k)$

Метод приближённого решения дифференциального уравнения высшего порядка заключается в его сведении к системе линейных уравнений.

8.1.3 Графический метод

Приближённые решения уравнения вида $y' = f(x, y)$ можно получить графическим методом, находя изоклины — линии, на которых производная функции не меняет значение. По ним можно получить представление о том, какую форму имеет кривая.

Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t) \\ \dot{y} = g(x, y, t) \end{cases}$$

Если $\begin{cases} f(a, b, t) = 0 \\ g(a, b, t) = 0 \end{cases}$, то (a, b) называется **точкой покоя**, или **положением равновесия**.

Исследуем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

Для неё $(0, 0)$ — точка покоя.

Решая уравнение $\begin{vmatrix} a - k & b \\ c & d - k \end{vmatrix} = 0$, получим корни k_1 и k_2 .

Тогда

1. Если $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, то

$$x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} y = C_1 \frac{k_1 - a}{b} e^{k_1 t} + C_2 \frac{k_2 - a}{b} e^{k_2 t}$$

- Если $k_1, k_2 < 0$, то $(0, 0)$ — устойчивый узел.
- Если $k_1, k_2 > 0$, то $(0, 0)$ — неустойчивый узел.
- Если $k_1 < 0 < k_2$, то $(0, 0)$ — седло.

2. Если $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то

$$\begin{cases} x = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \\ y = \left(\frac{\alpha - a}{b} C_1 + \frac{\beta}{b} C_2 \right) e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \end{cases}$$

- Если $\alpha < 0$, то $(0, 0)$ — устойчивый фокус.
- Если $\alpha > 0$, то $(0, 0)$ — неустойчивый фокус.
- Если $\alpha = 0$, то $(0, 0)$ — центр.

3. Если $k_1 = k_2 = \alpha \in \mathbb{R}$, то

$$x =$$