Введение

Здесь содержатся знания maxim4133 о математике. Принятые обозначения:

- $\forall$ — **квантор всеобщности**. Обозначение условия, которое верно для всех указанных элементов. Читается как «для всех», «для каждого», «для любого» или «все», «каждый», «любой».
- $\exists$ — **квантор существования**. Обозначение условия, которое верно хотя бы для одного из указанных элементов. Читается как «существует», «найдётся».
- $\exists!$ — **квантор существования и единственности**. Обозначение условия, которое верно ровно для одного из указанных элементов. Читается как «существует единственный».
- $:$ — «что», «такой (такие)», «что», «так, что», «обладающий свойством».
- $\Rightarrow$ — символ следствия. Читается как «если…, то…».
- $\Leftrightarrow$ — символ эквивалентности (равносильности). Читается как «тогда и только тогда, когда», «ровно/в точности тогда, когда».
- $\wedge$ — знак конъюнкции. Высказывание, полученное при связывании двух других высказываний конъюнкцией, истинно ровно тогда, когда оба связываемых высказываний истинны.
- $\vee$ — знак дизъюнкции. Высказывание, полученное при связывании двух других высказываний дизъюнкцией, истинно ровно тогда, когда истинно хотя бы одно из связываемых высказываний. Дизъюнкция имеет более низкий приоритет по сравнению с конъюнкцией.

Оглавление

Глава 1

Дискретная математика

1.1 Графы

Графом называется пара множеств $G = (V, E)$, где V — множество вершин графа, $E \subseteq V^2$ — множество рёбер графа.

Если $e = \{u, v\}$, $e \in E$, то говорят, что:

- ребро e соединяет вершины u и v;
- u и v — концы ребра e;
- ребро e инцидентно вершинам u и v;
- вершины u и v инцидентны ребру e.

В дальнейшем будем рассматривать только конечные графы.

На рисунках вершины графа изображают точками, а рёбра $e = \{u, v\}$ — кривыми, соединяющими точки, которые изображают вершины u и v.

Вершины называются **соседними**, если их соединяет ребро, иначе — **несоседними**.

Ребро вида $e = \{u, u\}$ называется **петлёй**.

Граф, в котором любые две вершины соединены ребром, называется **полным** и обозначается K_n, где n — число вершин в нём.

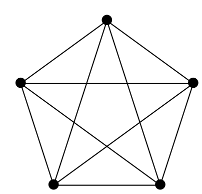

Рис. 1.1: Граф K_5

Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются **изоморфными**, если существует биекция $\varphi\colon V_1 \to V_2$ такая, что $\forall u, v \in V_1$ $((u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2)$, иначе — **неизоморфными**.

φ называется **изоморфизмом**.

Число рёбер в графе G, инцидентных вершине u, называется **степенью** вершины и обозначается $\deg_G u$.

Лемма 1.1.1 (о рукопожатиях).

$$\sum_{u \in V} \deg_G u = 2|E|$$

где $G = (V, E)$ *— граф.*

Доказательство (методом математической индукции).

- *База индукции.* $|E| = 0$: в таком графе $\sum\limits_{u \in V} \deg u = 0$.

- *Шаг индукции.* Пусть лемма верна для $|E| = n$. Докажем её для $|E| = n+1$. Для этого достаточно заметить, что каждое новое ребро увеличивает степени двух вершин на 1.

■

Маршрутом в графе $G = (V, E)$ называется последовательность вершин и рёбер вида $(v_1; e_1; v_2; \ldots; e_k; v_{k+1})$, где $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$.

Маршрут, в котором все рёбра различны, называется **цепью**.

Цепь, в которой все вершины, за исключением, может быть, первой и последней, различны, называется **простой**.

Маршрут, в котором первая и последняя вершины совпадают, называется **замкнутым**.

Замкнутая цепь называется **циклом**.

Маршрут, соединяющий вершины u и v, называется (u, v)**-маршрутом**.

Лемма 1.1.2. *(u, v)-маршрут содержит (u, v)-простую цепь.*

Доказательство. Пусть $(u = v_1; e_1; v_2; \ldots; e_k; v_{k+1} = v)$ — не простая цепь, тогда $\exists i < j \colon v_i = v_j$. Уберём из маршрута подпоследовательность $(e_i; v_{i+1}; \ldots; e_{j-1}; v_j)$, получим маршрут, в котором совпадающих вершин на одну меньше. Повторяя, получим простую цепь, являющуюся частью данного маршрута. ■

Лемма 1.1.3. *Любой цикл содержит простой цикл.* Доказательство аналогично предыдущему.

Лемма 1.1.4. *Если в графе есть две различные простые цепи, соединяющие одни и те же вершины, то в этом графе есть простой цикл.*

Доказательство. Пусть $(u = v_1; e_1; v_2; \ldots; e_n; v_{n+1} = v)$, $(u = v'_1; e'_1; v'_2; \ldots; e'_m; v'_{m+1} = v)$ — простые цепи. Найдём наименьшее $i \colon e_i \neq e'_i$, тогда $(v_i; e_i; v_{i+1}; \ldots; e_n; v_{n+1} = v'_{m+1}; e'_m; \ldots; e'_i; v'_i = v_i)$ — цикл, значит, можно получить простой цикл. ■

1.1.1 Связность графов

Вершины u и v называются **связанными**, если существует (u, v)-маршрут, иначе — **несвязанными**.

Граф называется **связным**, если в нём любые две вершины связаны, иначе — **несвязным**.

Граф $G' = (V', E')$ называется **подграфом** графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$.

Компонентой связности графа называется его максимальный (относительно включения) связный подграф.

1.1.2 Эйлеровы графы

Цикл, содержащий все рёбра графа, называется **эйлеровым**.

Граф, содержащий эйлеров цикл, называется **эйлеровым**.

Теорема 1.1.1. *Связный граф эйлеров $\Leftrightarrow$ степени всех вершин чётны.*

Доказательство.

1. $\Rightarrow$. Пусть в графе есть эйлеров цикл. Выберем вершину v_0 в этом цикле и начнём обходить его. При каждом посещении вершины $v \neq v_0$ её степень увеличивается на 2. Т. о., если посетить её k раз, то $\deg v = 2k \,\vdots\, 2$.

   Для v_0 степень увеличивается на 1 в начале обхода, на 1 в конце обхода и на 2 при промежуточных посещениях. Т. о., её степень чётна.

2. $\Leftarrow$. Пусть степени всех вершин чётны. Выберем цепь $C = (v_0; e_0; v_1; e_1; \ldots; e_{k-1}; v_k)$ наибольшей длины. Все рёбра, инцидентные v_k, присутствуют в этой цепи, иначе её можно было бы удлинить.

   Докажем методом от противного, что $v_0 = v_k$. Пусть $v_0 \neq v_k$. При прохождении вершины $v_i = v_k$, где $0 < i < k$, степень v_k увеличивается на 2. Также проходим по ребру e_{k-1}, тогда степень v_k нечётна. Противоречие.

   Докажем методом от противного, что C содержит все рёбра. Пусть найдётся ребро $e = \{u, v\}$, не входящее в C. Возьмём первое ребро $e' = \{v_i, v'\}$ из (v_0, u)-маршрута, не входящее в C. Тогда цепь $(v'; e'; v_i; e_i; \ldots; e_{k-1}; v_k = v_0; e_0; v_1; e_1; \ldots; v_{i-1})$ длиннее, чем C. Противоречие.

■

Алгоритмы нахождения эйлерова цикла

1. **Алгоритм Флёри (очень медленный)**.
   (a) Выберем произвольную вершину.
   (b) Пусть находимся в вершине v. Выберем ребро, инцидентное ей, которое должно быть мостом, только если не осталось других рёбер.
   (c) Проходим по выбранному ребру и вычёркиваем его.
   (d) Повторяем, пока есть рёбра.

2. **Алгоритм объединения циклов**.
   (a) Выберем произвольную вершину.
   (b) Выбираем любое непосещённое ребро и идём по нему.
   (c) Повторяем, пока не вернёмся в начальную вершину.
   (d) Получим цикл C. Если он не эйлеров, то $\exists u \in C,\ e = \{u, u'\} \colon u' \notin C$. Повторяем шаги 2a–2c для начальной вершины u. Получим цикл C', рёбра которого не совпадают с рёбрами C. Объединим эти циклы и получим новый. Повторяем шаг 2d.

Цепь называется **эйлеровым путём**, если она не является циклом и содержит все рёбра.
Граф называется **полуэйлеровым**, если в нём есть эйлеров путь.
Теорема 1.1.2. *Связный граф полуэйлеров $\Leftrightarrow$ степени двух вершин нечётны, а остальных — чётны.*
Доказательство.

1. $\Rightarrow$. Пусть в графе есть эйлеров путь. Соединив его концы ребром, получим эйлеров цикл. Степени соединённых вершин увеличились каждая на 1, значит, они были нечётными, а степени остальных вершин — чётными.

2. $\Leftarrow$. Пусть степени двух вершин нечётны, а остальных — чётны. Соединим нечётные вершины ребром, тогда можно получить эйлеров цикл. Убрав из него добавленное ребро, получим эйлеров путь.

■

1.1.3 Гамильтоновы графы

Простой цикл, содержащий все вершины графа, называется **гамильтоновым**.
Граф называется **гамильтоновым**, если в нём есть гамильтонов цикл.
Теорема 1.1.3 (Дирака). *Если в графе $G = (V, E)$ с $n \geqslant 3$ вершинами $\forall u \in V\ \ \deg u \geqslant \frac{n}{2}$, то граф гамильтонов.*
Доказательство.

1. Докажем методом от противного, что граф связный. Пусть он несвязный. Выберем компоненту связности $G' = (V', E')$ с наименьшим числом вершин, тогда $|V'| \leqslant \frac{n}{2}$. Возьмём $v \in V'$, тогда $\deg v \leqslant |V'| - 1 < \frac{n}{2}$. Противоречие с условием.

2. Выберем цепь $C = (v_0; e_0; v_1; \ldots; e_{k-1}; v_k)$ максимальной длины. Тогда все вершины, соседние с v_0, лежат в этой цепи, иначе можно увеличить длину цепи. Среди $v_1, v_2, \ldots, v_k$ не менее $\frac{n}{2}$ вершин, соседних с v_0, т.к. $\deg v_0 \geqslant \frac{n}{2}$. Аналогично для v_k.

   Найдутся v_{i-1} и v_i такие, что v_{i-1} соседняя с v_k, а v_i — с v_0.

   Докажем, что $(v_i; e_{i+1}; \ldots; v_k; e; v_{i-1}; e_{i-1}; \ldots; v_0; e'; v_i)$ — гамильтонов цикл, методом от противного. Предположим обратное, тогда есть вершина u, не входящая в цикл, и существует (v_0, u)-маршрут. Значит, существует ребро, инцидентное одной из вершин цикла, но не входящее в него, и можно получить более длинную цепь. Противоречие.

■
Теорема 1.1.4 (Оре). *Если в графе с $n \geqslant 3$ вершинами для любых двух несмежных вершин u и v $deg u + deg v \geqslant n$, то граф гамильтонов.*
Доказательство.

1. Докажем методом от противного, что граф связный. Пусть он несвязный, тогда в нём найдутся хотя бы две компоненты связности $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$. Пусть $u \in V_1$, $v \in V_2$. u и v несмежные, тогда

$$\deg u \leqslant |V_1| - 1,\ \deg v \leqslant |V_2| - 1 \Rightarrow \deg u + \deg v \leqslant |V_1| + |V_2| - 2 \leqslant n - 2$$

   Противоречие с условием.

2. Докажем, что граф гамильтонов. Выберем цепь $W = (v_0; e_0; v_1; \ldots; e_{k-1}; v_k)$ наибольшей длины. В ней содержатся все вершины, соседние с v_0 или с v_k. Т. о., среди вершин $v_1, \ldots, v_k$ $deg v_0$ соседних с v_0. Аналогично для v_k.

   $\deg v_0 + \deg v_k \geqslant n$, тогда найдутся v_i и v_{i+1} такие, что v_i соседняя с v_k, а v_{i+1} — с v_0. $(v_{i+1}; e_{i+1}; \ldots; v_k; e; v_i; e_{i-1}; v_{i-1}; \ldots; e_0; v_0; e'; v_{i+1})$ — гамильтонов цикл (доказательство аналогично доказательству в теореме 1.1.3 (Дирака)).

■

1.2 Деревья

Граф без циклов называется **лесом**.
Связный лес называется **деревом**.
Ребро называется **мостом**, если при его удалении увеличивается число компонент связности.
Утверждение 1.2.1. *Ребро — мост ровно тогда, когда оно не содержится в цикле.*
Доказательство.

1. Докажем методом от противного, что если ребро содержится в цикле, то оно не является мостом. Пусть ребро e содержится в цикле $W = v_0 e_0 \ldots uev \ldots v_k$, u' и v' — смежные вершины.

   (a) Если в этом маршруте нет ребра e, то при его удалении из графа u' и v' останутся смежными.

   (b) Если $u' = v_0' e_0' \ldots uev \ldots e_m v_m' = v'$ — маршрут, соединяющий u' и v', тогда при удалении e из графа u' и v' соединяет маршрут $u' = v_0' e_0' \ldots u \ldots e_0 v_0 = v_k e_{k-1} \ldots v \ldots e_m v_m' = v'$.

2. Пусть $e = (u, v)$ не является мостом, тогда u, v лежат в одной компоненте связности. Удалим e из графа, тогда число компонент связности не изменилось, значит, u и v также лежат в одной компоненте связности, т./,е. существует цепь, соединяющая u и v: $u = v_0 e_0 \ldots e_{k-1} v_k = v$. Тогда в исходном графе существует цикл $u = v_0 e_0 \ldots e_{k-1} v_k = veu$.

■

Теорема 1.2.1. *Следующие утверждения о графе G с n вершинами эквивалентны:*

1. *G — дерево.*
2. *G связный и имеет $n - 1$ ребро.*
3. *G связный и каждое его ребро — мост.*
4. *G не содержит циклов и имеет $n - 1$ ребро.*
5. *Любые две вершины графа G соединены ровно одной простой цепью.*
6. *G не содержит циклов и добавление ребра приводит к появлению цикла.*

Доказательство.

- Докажем 1) ⇒ 3). Связность следует из определения дерева. В силу пред. утв. каждое ребро — мост.
- Докажем 3) ⇒ 2). Связность по предположению. Докажем методом математической индукции, что в графе $n - 1$ ребро.
  - *База индукции.* Для $n = 1, 2$ очевидно.

- *Шаг индукции.* Пусть для графов с числом вершин, меньшим n, Возьмём мост e и удалим его. Получим две компоненты связности $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$. По предположению индукции $|E_1| = |V_1| - 1$, $|E_2| = |V_2| - 1$. В исходном графе рёбер $|E_1| + |E_2| + 1 = |V_1| + |V_2| - 1 = n - 1$.

- Докажем 2) $\Rightarrow$ 4). В G $n-1$ ребро по предположению. Докажем методом математической индукции, что G не содержит циклов.
  - *База индукции.* Для $n = 1, 2$ очевидно.
  - *Шаг индукции.* Докажем, что в графе есть вершина степени 1. $\forall u \; deg u \geqslant 1$. $\forall u \; deg u \geqslant 2 \Rightarrow 2|E| = \sum_{u \in V} deg u \geqslant 2n \Rightarrow n - 1 = |E| \geqslant n$. Значит, в графе найдётся вершина степени 1. Удалим её и инцидентное ей ребро. Полученный граф содержит $n-1$ вершину и удовлетворяет утверждению 2). По предположению индукции он не содержит циклов, тогда и исходный граф не содержит циклов.

- Докажем 4) $\Rightarrow$ 5). Докажем связность методом математической индукции.
  - *База индукции.* Для $n = 1, 2$ очевидно.
  - *Шаг индукции.* Пусть в графе k компонент связности: $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $\ldots$, $G_k = (V_k, E_k)$. Они являются деревьями.

  $|E_1| = |V_1| - 1$, $|E_2| = |V_2| - 1$, $\ldots$, $|E_k| = |V_k| - 1$. $n - 1 = |E_1| + \ldots + |E_k| = n - k \Rightarrow k = 1$, значит, граф связный.

  Пусть существуют вершины u, v такие, что их соединяют две простые цепи, тогда в графе есть цикл, что противоречит предположению. Тогда эти вершины соединены ровно одной простой цепью.

- Докажем 5) $\Rightarrow$ 6). Предположим, что в графе есть цикл $v_0 e_0 v_1 e_1 \ldots v_k = v_0$, тогда есть две простые цепи $v_0 e_0 \ldots v_{k-1}$ и $v_{k-1} e_k v_k = v_0$, соединяющие v_0 и v_{k-1}, что противоречит предположению.

  Докажем, что добавление ребра приводит к появлению ровно одного цикла. Рассмотрим несоседних вершины u и v. По предположению есть цепь $u = v_0 e_0 \ldots v_k = v$, соединяющая их. Тогда $u = v_0 e_0 \ldots v_k = veu$ — цикл, где e — (u, v)-маршрут. Пусть есть 2 цикла, соединяющих u и v. Удалим e, цикл останется. Получили исходный граф, в котором нет циклов. Противоречие.

- 6) $\Rightarrow$ 1). Докажем связность. Рассмотрим вершины u и v. Если они не соединены ребром, то соединим и по предположению получим цикл $v_0 e_0 \ldots uev \ldots e_{k-1} v_k = v_0$. Тогда $u \ldots e_0 v_0 = v_k e_{k-1} \ldots v$ — (u, v)-маршрут. Противоречие.

■

1.2.1 Остовы

Остовом графа $G = (V, E)$ называется его подграф $G' = (V', E')$ такой, что $V = V'$ и G' — дерево.
Утверждение 1.2.2. *Любой связный граф содержит остов.*
Утверждение 1.2.3. *Если граф не является деревом, то в нём несколько остовов.*
Пусть $G = (V, E)$ — граф. **Весом** называется функция $\alpha\colon E \to \mathbb{R}^+$.
Весом ребра $e \in E$ называется $\alpha(e)$.
Весом графа называется $\sum_{e \in E} \alpha(e)$.

Алгоритмы нахождения остова минимального веса

Пусть дан граф $G = (V, E)$ и весовая функция $\alpha\colon E \to R^+$. Строим остов наименьшего веса $T = (V, P)$.

1. **Алгоритм Краскала**
   (a) Выбираем ребро $e \in E$ с наименьшим весом: $T_1 = (V, \{e\}) = (V, P_1)$.
   (b) Выбираем ребро $e \in E$ с наименьшим весом такое, что $e \notin P_i$ и добавление этого ребра не приводит к образованию цикла в T. $T_{i+1} = (V, P_i \cup \{e\})$.

(c) Повторяем шаг 2 $(|V|-2)$ раз.

Доказательство. Пусть $T=(V,P)$ — построенный остов, где $P=\{e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}\}$, $e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}$ — рёбра в порядке их добавления в остов, а также $D=(V,M)$ — другой остов, где $M=\{e'_1,e'_2,\ldots,e'_{n-1}\}$, $e'_1,e'_2,\ldots,e'_{n-1}$ — рёбра в порядке неубывания их весов.

Если $T\neq D$, то пусть i — наименьшее число такое, что $e_i\neq e'_i$. Рассмотрим $D'=(V,M\cup\{e_i\})$. В этом графе ровно один цикл, причём e_i входит в цикл.

Данный цикл содержит ребро $e'\notin\{e_1,\ldots,e_i\}$: $\alpha(e_i)\leqslant\alpha(e'_i)$, т. к. $e_1,\ldots,e_i$ не образуют цикл. Если $\alpha(e')<\alpha(e_i)$, то на i-м шаге алгоритм выбрал бы e' вместо e_i, т. к. $e_1,\ldots,e_{i-1},e'$ не образуют цикл, потому что иначе D содержал бы цикл.

Пусть $D_1=(V,M\cup\{e_i\}\setminus\{e'_i\})$. Этот граф — остов, причём $\alpha(D_1)\leqslant\alpha(D)$ и у T и D_1 на 1 общее ребро больше, чем у T и D. Повторяя, получим $D_k=T$. Значит, вес построенного остова не превосходит веса любого другого остова. ■

2. **Алгоритм Прима** Строится последовательность деревьев $S_1\subset S_2\subset\ldots\subset S_n$.

   (a) Выбираем произвольную вершину v. $S_1=(\{v\},\varnothing)$.

   (b) Пусть $S_i=(V_i,E_i)$. Находим ребро $e\in E$ наименьшего веса, инцидентное одной из вершин v_i, добавление которого не приводит к образованию цикла.
   $e'=(u,v)$, где $u\in V_i$, $v\notin V_i$. $S_{i+1}=V_i\cup\{v\},E_i\cup\{e'\}$.

   (c) Повторяем шаг 2 $(n-1)$ раз. S_n — искомый остов.

Глава 2

Математический анализ

2.0.1 Локальный экстремум функции нескольких переменных

Точка $\overline{x_0} = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ называется **точкой локального минимума функции** $f(\overline{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, если $\overline{x_0} \in D(f)$ и существует проколотая окрестность $\dot{U}(\overline{x_0})\colon \forall \overline{x} \in \dot{U}(\overline{x_0})\ f(\overline{x}) > f(\overline{x_0})$.

Точка $\overline{x_0} = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ называется **точкой локального максимума функции** $f(\overline{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, если $\overline{x_0} \in D(f)$ и существует проколотая окрестность $\dot{U}(\overline{x_0})\colon \forall \overline{x} \in \dot{U}(\overline{x_0})\ f(\overline{x}) < f(\overline{x_0})$.

Точки локального минимума и максимума называются **точками локального экстремума**.

Теорема 2.0.1 (необходимое условие локального экстремума). *В точке локального экстремума частные производные функции равны нулю или не существуют.*

Доказательство. Пусть $\overline{x_0} = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ — точка экстремума функции $f(\overline{x})$, дифференцируемой в точке $\overline{x_0}$. Рассмотрим $g(x) = f(x_{10}, \ldots, x_{k-1\,0}, x, x_{k+1\,0}, \ldots, x_{n0})$. $\overline{x_0}$ — точка экстремума $f(\overline{x})$, тогда x_{k0} — точка экстремума $g(x)$, значит, $g'(x_{k0}) = 0$ или не существует. Тогда $f'_{x_k}(x_{k0}) = 0$ или не существует. ■

Теорема 2.0.2 (достаточное условие локального экстремума функции двух переменных). *Пусть дана функция $f(x, y)$. Если*

1. $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$
2. $(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$

то (x_0, y_0) — точка локального экстремума $f(x, y)$.

1. *(x_0, y_0) — точка локального минимума, если $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ или $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$.*
2. *(x_0, y_0) — точка локального максимума, если $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ или $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$.*

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0) + o(\rho^2((x, y), (x_0, y_0))) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0) + o(\rho^2((x, y), (x_0, y_0)))$$

значит, $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ сохраняет знак, если $d^2 f(x_0, y_0)$ сохраняет знак.

$$d^2 f(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) dx^2 + 2 f''_{xy}(x_0, y_0) dx dy + f''_{yy}(x_0, y_0) dy^2 =$$
$$= \left(f''_{xx}(x_0, y_0) + 2 f''_{xy}(x_0, y_0) \frac{dy}{dx} + f''_{yy}(x_0, y_0) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) dx^2$$

Т. о., (x_0, y_0) — точка локального экстремума $f(x, y)$, если $d^2 f(x_0, y_0)$ сохраняет знак, т. е. при

$$(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$$

$$(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0) > (f''_{xy}(x_0,y_0))^2 \Rightarrow f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0) > 0$$

значит, $f''_{xx}(x_0,y_0)$ и $f''_{yy}(x_0,y_0)$ одного знака.

1. Если $f''_{xx}(x_0,y_0) > 0 \vee f''_{yy}(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow d^2f(x_0,y_0) > 0$, тогда (x_0,y_0) — точка локального минимума.

2. Если $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0 \vee f''_{yy}(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow d^2f(x_0,y_0) < 0$, тогда (x_0,y_0) — точка локального максимума.

■

Теорема 2.0.3 (достаточное условие локального экстремума). *Пусть дана функция $f(\overline{x}) = f(x_1,\ldots,x_n)$. Точка $\overline{x_0} = (x_{10},\ldots,x_{n0})$ — точка локального экстремума $f(\overline{x})$, если*

1. $f'_{x_1}(\overline{x_0}) = \ldots = f'_{x_n}(\overline{x_0}) = 0$

2. $\sum\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_ix_j}(\overline{x_0})dx_idx_j$ *сохраняет знак.*

1. $\overline{x_0}$ *— точка локального минимума, если* $\sum\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_ix_j}(\overline{x_0})dx_idx_j > 0.$

2. $\overline{x_0}$ *— точка локального максимума, если* $\sum\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_ix_j}(\overline{x_0})dx_idx_j < 0.$

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(\overline{x}) - f(\overline{x_0}) = f(\overline{x_0}) + df(\overline{x_0}) + \frac{d^2f(\overline{x_0})}{2!} + o(\rho^2(\overline{x},\overline{x_0})) - f(\overline{x_0}) = \frac{d^2f(\overline{x_0})}{2!} + o(\rho^2(\overline{x},\overline{x_0}))$$

значит, $f(\overline{x}) - f(\overline{x_0})$ сохраняет знак, если $d^2f(\overline{x_0})$ сохраняет знак.

$$d^2f(\overline{x_0}) = \sum_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_ix_j}(\overline{x_0})dx_idx_j$$

1. Если $\sum\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_ix_j}(\overline{x_0})dx_idx_j > 0 \Leftrightarrow d^2f(\overline{x_0}) > 0$, то $\overline{x_0}$ — точка локального минимума.

2. Если $\sum\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_ix_j}(\overline{x_0})dx_idx_j < 0 \Leftrightarrow d^2f(\overline{x_0}) < 0$, то $\overline{x_0}$ — точка локального максимума.

■

При практическом применении теоремы 2.0.3 полезен критерий Сильвестра.

2.0.2 Метод наименьших квадратов

Пусть даны точки $x_1,\ldots,x_n$ и требуется найти аппроксимирующую прямую для значений некоторой функции $f(x)$ в этих точках. Уравнение прямой — $y = Ax + B$. Найдём точку, в которой сумма

$$S(A,B) = \sum_{i=1}^{n}(Ax_i + B - f(x_i))^2$$

принимает наименьшее значение.

$$S'_A = \sum 2x_i(Ax_i + B - f(x_i))$$

$$S'_B = \sum 2(Ax_i + B - f(x_i))$$

$$\begin{cases} S'_A = 0 \\ S'_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\sum x_i^2 + B\sum x_i = \sum x_i f(x_i) \\ A\sum x_i + Bn = \sum f(x_i) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right) A = n\sum x_i f(x_i) - \sum x_i \sum f(x_i) \\ Bn = \sum f(x_i) - A\sum x_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{n\sum x_i f(x_i) - \sum x_i \sum f(x_i)}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \\ B = \dfrac{\sum x_i^2 \sum f(x_i) - \sum x_i \sum x_i f(x_i)}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \end{cases}$$

Найденные значения A и B — искомые коэффициенты в уравнении аппроксимирующей прямой. Для оценки точности аппроксимации можно найти коэффициент корреляции по формуле

$$r = \sqrt{\frac{\sum(f(x_i) - \tilde{y})^2 - \sum(f(x_i) - \tilde{y}_i)^2}{\sum(f(x_i) - \tilde{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sum(f(x_i) - \tilde{y}_i)^2}{\sum(f(x_i) - \tilde{y})^2}}$$

где $\tilde{y} = \frac{1}{n}\sum f(x_i)$, $\tilde{y}_i = Ax_i + B$, а значение коэффициента r тем ближе к единице, чем точнее аппроксимация.

2.0.3 Условный экстремум

Пусть дана функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, переменные которой удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Для нахождения её экстремумов (называемых **условными**) введём функцию Лагранжа

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_n)$$

и исследуем её. Её экстремумы являются условными экстремумами функции f.

Глава 3

Теория множеств

3.1 Множества

Множество — основное понятие. Некоторые числовые множества:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество натуральных чисел.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ — множество целых чисел.
- $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$ — множество рациональных чисел.
- $\mathbb{I}$ — множество иррациональных чисел.
- $\mathbb{R}$ — множество действительных (вещественных) чисел.
- $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

3.1.1 Отношения между множествами

Пусть A, B — множества. Между ними определены следующие отношения:

- A включено в B (является **подмножеством** B):

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A \ a \in B$$

  Нередко вместо знака $\subseteq$ пишется знак $\subset$.

- A равно B:

$$A = B \Leftrightarrow \forall a \ (a \in A \Leftrightarrow a \in B)$$

- A строго включено в B:

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A = B$$

3.1.2 Операции над множествами

Пусть A, B — множества. Над ними определены следующие операции:

- **Объединение**:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- **Пересечение**:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- **Разность**:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

- **Симметрическая разность**:

$$A \triangle B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B \vee x \notin A \wedge x \in B\}$$

- **Дополнение** до U, где $A \subseteq U$:

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

- **Декартово произведение**:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

- **Декартова степень**:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n}$$

3.1.3 Функции

Пусть A и B — множества. **Функцией** f называется правило, ставящее в соответствие каждому элементу $a \in A$ единственный элемент $f(a) \in B$.

A называется **областью определения** функции f.

B называется **областью значений** функции f.

a называется **прообразом** $f(a)$.

$f(a)$ называется **образом** a.

Функция $f \colon A \to B$ называется **инъективной (инъекцией)**, если $\forall x, y \in A\ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$.

Функция $f \colon A \to B$ называется **сюръективной (сюръекцией)**, если $\forall b \in B\ \exists a \in A \colon f(a) = b$.

Функция $f \colon A \to B$ называется **биективной (биекцией)**, если она инъективная и сюръективная.

3.1.4 Мощность множеств

Множества A и B называются **равномощными (имеют одинаковую мощность)**, если существует биекция $f \colon A \to B$, иначе — **неравномощными**.

Для конечных множеств это означает, что у них одинаковое количество элементов.

Мощностью конечного множества A называется количество $|A|$ его элементов.

Множество всех подмножеств множества A обозначается

$$\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

Множество всех подмножеств множества A мощности k обозначается

$$\mathcal{P}_k(A) = \{x \subseteq A \mid |x| = k\}$$

Теорема 3.1.1 (Кантора). *Множества A и $\mathcal{P}(A)$ не равномощны.*

Доказательство (методом от противного). Пусть $f \colon A \to \mathcal{P}(A)$ — биекция. Рассмотрим множество

$$X = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \Rightarrow X \subset A \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A)$$

f — биекция, тогда $\exists b \in A \colon f(b) = X$. Возможны два случая:

1. Пусть $b \in X \Rightarrow b \in f(b) \Rightarrow b \notin X$. Противоречие.

2. Пусть $b \notin X \Rightarrow b \in f(b) \Rightarrow b \in X$. Противоречие.

В обоих случаях получили противоречие. ■

Теорема 3.1.2. *Пусть дано множество $A \colon |A| = n$, тогда $|\mathcal{P}_k(A)| = C_n^k$.*

Доказательство (методом математической индукции).

- *База индукции.* $n = 0$:

$$|A| = 0 \Rightarrow A = \varnothing \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\varnothing\} \Rightarrow |\mathcal{P}_0(A)| = 1 = C_0^0$$

- *Шаг индукции.* Пусть теорема верна для n. Докажем её для $n+1$. Пусть $X \subset A$, $|X| = k$, $a \in A$. Подсчитаем количество таких X. Возможны два случая:

    1. Пусть $a \notin X \Rightarrow X \subset A \setminus \{a\}$, тогда таких X C_n^k.
    2. Пусть $a \in X$, тогда таких X столько же, сколько множеств $X \setminus \{a\} \subset A \setminus \{a\}$, т. е. C_n^{k-1}.

    Тогда $|\mathcal{P}(A)| = C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

■

Глава 4

Разное