

Оглавление

1	25.04.2018, математический анализ	2
1.0.1	Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	2
2	16.05.2018, математический анализ	3
2.0.1	Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	3
2.0.2	Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	4
3	23.05.2018, математический анализ	5
3.0.1	Неоднородные системы	5
3.1	Приближённое решение дифференциальных уравнений	6
3.1.1	Решение с помощью степенного ряда	6
3.1.2	Метод Эйлера	7
3.1.3	Графический метод	7

Глава 1

25.04.2018, математический анализ

Рассмотрим $F(y, y', y'') = 0$. Пусть $y'(x) = z(y)$, тогда $y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z$ и $F(y, y', y'') = 0 \Leftrightarrow F(y, z, z' \cdot z) = 0$.

1.0.1 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением n -го порядка называется уравнение вида $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$.

Введём функции $y_0 = y, y_1 = y', \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$, тогда

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y'_0 = y_1 \\ y'_1 = y_2 \\ \dots \\ y'_{n-1} = f(x) - a_0y_0 - a_1y_1 - \dots - a_{n-1}y_{n-1} \end{cases}$$

Введём вектор-функцию $Y(x) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$, тогда $Y' = AY + F$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$, $F =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Уравнение можно решить методом итераций: $Y_k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x (AY_{k-1}(t) + F(t)) dt$.

Определителем Вронского, или **вронскианом**, называется определитель

$$\begin{vmatrix} \tilde{y}_0(x_0) & \tilde{y}_1(x_0) & \dots & \tilde{y}_{n-1}(x_0) \\ \tilde{y}'_0(x_0) & \tilde{y}'_1(x_0) & \dots & \tilde{y}'_{n-1}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y}_0^{(n-1)}(x_0) & \tilde{y}_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & \tilde{y}_{n-1}^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

где $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ — частные решения уравнения.

Утверждение 1.0.1. Если решения $\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n-1}$

Глава 2

16.05.2018, математический анализ

Пусть дифференциальному уравнению $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \dots + a_1k + a_0 = 0$.

Доказательство. $y'' + a_1y' + a_0y = 0$

Пусть $k_1 = k_2$, тогда $k_1^2 + a_1k_1 + a_0 = 0$ & $2k_1 + a_1 = 0$. Подставим $y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}$:

$$e^{k_1x}(C_1k_1^2 + 2C_2k_1 + C_2xk_1^2 + C_1a_1k_1 + C_2a_1 + C_2a_1k_1x + C_1a_0 + C_2a_0x) = 0 \Leftrightarrow C_1(k_1^2 + a_1k_1 + a_0) + C_2(2k_1 + a_1) + C_2x(k_1^2 + a_1k_1 + a_0) = 0$$

■

Пусть $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, тогда, используя $e^{it} = \cos t + i \sin t$, получим

$$y(x) = C_{10}e^{(\alpha+i\beta)x} + C_{20}e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(C_{10}e^{i\beta x} + C_{20}e^{-i\beta x}) = e^{\alpha x}((C_{10} + C_{20})\cos \beta x + i(C_{10} - C_{20})\sin \beta x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

2.0.1 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим следующие методы решения уравнений вида $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$.

Метод вариации произвольных постоянных

1. Найдём решение $y_0 = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 + \dots + C_n\tilde{y}_n$ уравнения $y_0^{(n)} + a_{n-1}y_0^{(n-1)} + \dots + a_1y_0' + a_0y_0 = 0$.
2. Решением исходного уравнения будет $y(x) = C_1(x)\tilde{y}_1 + \dots + C_n(x)\tilde{y}_n$.
3. Найдём $C_1(x), \dots, C_n(x)$, решая систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + \dots + C_n'(x)\tilde{y}_n = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1' + \dots + C_n'(x)\tilde{y}_n' = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1'' + \dots + C_n'(x)\tilde{y}_n'' = 0 \\ \dots \\ C_1'(x)\tilde{y}_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)\tilde{y}_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

и интегрируя $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$.

Доказательство. Пусть дано уравнение $y'' + a_1y' + a_0 = f(x)$ и $y_0(x) = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2$, тогда

$$y(x) = C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2$$

$$y'(x) = C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_1(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2 + C_2(x)\tilde{y}_2'$$

$$y''(x) = C_1''(x)\tilde{y}_1 + 2C_1'(x)\tilde{y}_1' + C_1(x)\tilde{y}_1'' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + 2C_2'(x)\tilde{y}_2' + C_2(x)\tilde{y}_2''$$

Подставим в уравнение:

$$C_1''(x)\tilde{y}_1 + 2C_1'(x)\tilde{y}_1' + C_1(x)\tilde{y}_1'' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + 2C_2'(x)\tilde{y}_2' + C_2(x)\tilde{y}_2'' + a(C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_1(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2 + C_2(x)\tilde{y}_2') + b(C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2) = f(x) \Leftrightarrow C_1''(x)\tilde{y}_1 + C_2''(x)\tilde{y}_2 + a(C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2) = f(x)$$

Решим систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_2'(x)\tilde{y}_2 = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2' = f(x) \end{cases}$$

тогда

$$C_1''(x)\tilde{y}_1 + C_1'\tilde{y}_1' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + C_2'\tilde{y}_2' = 0$$

Подставляя в уравнение, получим $f(x) = f(x)$. ■

Метод неопределённых коэффициентов

Уравнение $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$ можно решить методом неопределённых коэффициентов, если

$$f(x) = \sum_j e^{\alpha_j x} (P_j(x) \cos \beta_j x + Q_j(x) \sin \beta_j x)$$

Тогда решение имеет вид

$$\sum_j e^{\alpha_j x} (T_j(x) \cos \beta_j x + R_j(x) \sin \beta_j x) x^{s_j}$$

где s_j — кратность корня.

2.0.2 Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Решим систему

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

$$y_1'' = ay_1' + by_2' \Rightarrow y_1'' = ay_1' + b(cy_1 + dy_2) \Rightarrow y_1'' = ay_1' + bcy_1 + d(y_1' - ay_1) \Rightarrow y_1'' = (a+d)y_1' + (bc-ad)y_1 = 0$$

Т.о., система свелась к уравнению.

Глава 3

23.05.2018, математический анализ

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_0' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

Известно, что $y_1 = Le^{kx}$, $y_2 = Me^{kx}$, тогда

$$\begin{cases} Lk = aL + bM \\ Mk = cL + dM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L(a - k) + Mb = 0 \\ Lc + M(d - k) = 0 \end{cases}$$

Если $\begin{vmatrix} a - k & b \\ c & d - k \end{vmatrix} \neq 0$, то получим единственное решение — нулевое. Тогда

$$(a - k)(d - k) - bc = 0 \Leftrightarrow k^2 - k(a + d) + ad - bc = 0$$

Получили характеристическое уравнение.

Решим системы

$$\begin{cases} L(a - k_i) + Mb = 0 \\ Lc + M(d - k_i) = 0 \end{cases}$$

где k_i — i -й корень характеристического уравнения, причём в каждой системе одно из уравнений можно убрать, т. к. главный определитель равен нулю. Возьмём частные решения (L_1, M_1) , (L_2, M_2) , тогда

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 L_1 e^{k_1 x} + C_2 L_2 e^{k_2 x} \\ y_0 &= C_1 M_1 e^{k_1 x} + C_2 M_2 e^{k_2 x} \end{aligned}$$

3.0.1 Неоднородные системы

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 + f_1 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 + f_2 \end{cases}$$

Решая соответствующую однородную систему, получим

$$y_1 0 = C_1 \tilde{y}_1 + C_2 \tilde{y}_2$$

$$y_2 0 = D_1 \tilde{y}_1 + D_2 \tilde{y}_2$$

где D_1 и D_2 линейно связаны с C_1 и C_2 соответственно.

Тогда

$$y_1 = C_1(x) \tilde{y}_1 + C_2(x) \tilde{y}_2$$

$$y_2 = D_1(x) \tilde{y}_1 + D_2(x) \tilde{y}_2$$

Подставляя в систему, получим

$$\begin{cases} C_1'(x) \tilde{y}_1 + C_2'(x) \tilde{y}_2 + C_1(x) \tilde{y}_1' + C_2(x) \tilde{y}_2' = a(C_1(x) \tilde{y}_1 + C_2(x) \tilde{y}_2) + b(D_1(x) \tilde{y}_1 + D_2(x) \tilde{y}_2) + f_1(x) \\ D_1'(x) \tilde{y}_1 + D_2'(x) \tilde{y}_2 + D_1(x) \tilde{y}_1' + D_2(x) \tilde{y}_2' = c(C_1(x) \tilde{y}_1 + C_2(x) \tilde{y}_2) + d(D_1(x) \tilde{y}_1 + D_2(x) \tilde{y}_2) + f_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) \tilde{y}_1 + C_2'(x) \tilde{y}_2 = f_1(x) - a(C_1(x) \tilde{y}_1 + C_2(x) \tilde{y}_2) - b(D_1(x) \tilde{y}_1 + D_2(x) \tilde{y}_2) \\ D_1'(x) \tilde{y}_1 + D_2'(x) \tilde{y}_2 = f_2(x) - c(C_1(x) \tilde{y}_1 + C_2(x) \tilde{y}_2) - d(D_1(x) \tilde{y}_1 + D_2(x) \tilde{y}_2) \end{cases}$$

Решая, получим $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, откуда найдём $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

3.1 Приближённое решение дифференциальных уравнений

3.1.1 Решение с помощью степенного ряда

Рассмотрим уравнение $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Найдём его решение в окрестности точки x_0 :

$$y(x) = y_0 + y_1(x - x_0) + \frac{y_2}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{F(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})}{n!}(x - x_0)^n + c_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \dots$$

Неизвестные коэффициенты можно определить подстановкой в исходное уравнение или его дифференцированием и подстановкой начальных условий.

3.1.2 Метод Эйлера

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Можно улучшить точность: $y_{k+1} = y_k + f(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}, y_k)(x_{k+1} - x_k)$

Метод приближённого решения дифференциального уравнения высшего порядка заключается в его сведении к системе линейных уравнений.

3.1.3 Графический метод

Приближённые решения уравнения вида $y' = f(x, y)$ можно получить графическим методом, находя изоклины — линии, на которых производная функции не меняет значение. По ним можно получить представление о том, какую форму имеет кривая.

Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t) \\ \dot{y} = g(x, y, t) \end{cases}$$

Если $\begin{cases} f(a, b, t) = 0 \\ g(a, b, t) = 0 \end{cases}$, то (a, b) называется **точкой покоя**, или **положением равновесия**.

Исследуем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

Для неё $(0, 0)$ — точка покоя.

Решая уравнение $\begin{vmatrix} a - k & b \\ c & d - k \end{vmatrix} = 0$, получим корни k_1 и k_2 .

Тогда

1. Если $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, то

$$x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} y = C_1 \frac{k_1 - a}{b} e^{k_1 t} + C_2 \frac{k_2 - a}{b} e^{k_2 t}$$

- Если $k_1, k_2 < 0$, то $(0, 0)$ — устойчивый узел.
- Если $k_1, k_2 > 0$, то $(0, 0)$ — неустойчивый узел.
- Если $k_1 < 0 < k_2$, то $(0, 0)$ — седло.

2. Если $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то

$$\begin{cases} x = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \\ y = \left(\frac{\alpha - a}{b} C_1 + \frac{\beta}{b} C_2 \right) e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \end{cases}$$

- Если $\alpha < 0$, то $(0, 0)$ — устойчивый фокус.
- Если $\alpha > 0$, то $(0, 0)$ — неустойчивый фокус.
- Если $\alpha = 0$, то $(0, 0)$ — центр.

3. Если $k_1 = k_2 = \alpha \in \mathbb{R}$, то

$$x =$$