Глава 1

09.03.2018, дискретная математика

1.0.1 Алгоритм Эдмондса—Карпа

Путь $(s = v_1, \dots, v_{k+1} = t)$ в сети (V, E) называется **увеличивающим**, если $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ $\varepsilon(v_i, v_{i+1}) > 0$, где $\varepsilon(v_i, v_{i+1}) = \begin{cases} q(v_i, v_{i+1}) - p(v_i, v_{i+1}),\ (v_i, v_{i+1}) \in E \\ p(v_{i+1}, v_i),\ (v_{i+1}, v_i) \in E \end{cases}$. Введём $\delta = \min\limits_{0 \leqslant i \leqslant k} \varepsilon(v_i, v_{i+1})$, тогда новое значение потока в сети равно $\begin{cases} p(v_i, v_{i+1}) + \delta,\ (v_i, v_{i+1}) \in E \\ p(v_{i+1}, v_i) - \delta,\ (v_{i+1}, v_i) \in E \end{cases}$.

Рассмотрим случай, когда до t не существует увеличивающего пути. Пусть X — множество вершин, до которых существует увеличивающий путь, $u \in X$, $v \notin X$. Если $(u, v) \in E$, то $q(u, v) = p(u, v)$, а если $(v, u) \in E$, то $p(v, u) = 0$, тогда

$$p(X, \overline{X}) = \sum_{u \in V, v \in \overline{X}} p(u, v) - \sum_{u \in V, v \in \overline{X}} p(v, u) = \sum_{u \in V, v \in \overline{X}} q(u, v)$$

Лемма 1.0.1. *В ходе работы алгоритма Эдмондса—Карпа кратчайший (s, t)-путь не уменьшается.*

Доказательство методом от противного. Рассмотрим самую близкую к s вершину v, для которой кратчайший путь $(s, \dots, u, v)$ уменьшается, тогда для вершины u кратчайший (s, u)-путь не уменьшается. Пусть d_u и d_v — длины кратчайших (s, u)- и (s, v)-путей соответственно на предыдущем шаге, а d'_u и d'_v — на текущем.

$$d_v > d'_v = d'_u + 1 \geqslant d_u + 1 \Rightarrow d_v \geqslant d_u + 2$$

Значит, на предыдущем шаге не было дуги (u, v), тогда не было и кратчайшего (s, v)-пути. Противоречие. ■

Назовём дугу (v_i, v_{i+1}) **критической**, если $e(v_i, v_{i+1}) = \delta$.

Лемма 1.0.2. *Каждая дуга может быть критической на увеличивающем пути порядка $\frac{|V|}{2}$ раз.*

Доказательство. Пусть дуга (u, v) критическая на шагах t_1 и t_2. Если она была использована как прямая два раза, то между этими использованиями она должна была быть использована как обратная (на шаге t_3), тогда

$$d_v(t_2) = d_u(t_2) + 1 \geqslant d_u(t_3) + 1 = d_v(t_3) + 2 \geqslant d_v(t_1) + 2$$

■

1.1 Конечные автоматы

Назовём **алфавитом** конечное непустое множество и обозначим через X. Его элементы называются **буквами**. Конечная последовательность букв называется **словом**, а его **длиной** — количество букв в слове с учётом повторений.

Слово, не содержащее букв, называется **пустым** и обозначается λ.

Множество из всех слов алфавита X обозначается X^*.

Конкатенацией слов $\alpha = x_1 x_2 \dots x_n$ и $\beta = y_1 y_2 \dots y_m$ называется слово $\alpha \cdot \beta = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$.

Степенью слова $\alpha = x_1 \dots x_n$ называется слово $\alpha^n = \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$, где $n \in \mathbb{N}$. $\alpha^0 = \lambda$.

Языком называется множество $L \subseteq X^*$.

Конечным автоматом называется набор (X, S, δ), где X — алфавит, S — конечное множество **состояний**, $\delta \colon S \times X \to S$ — функция перехода.

Если задан орграф, в котором каждой дуге соответствует буква, то по нему можно построить конечный автомат.

Глава 2

14.03.2018, математический анализ

Теорема 2.0.1 (интегральный признак Коши). *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *— знакоположительный ряд. Если существует монотонная функция* $f(x) colon f(n) = a_n$ & $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится* $\Leftrightarrow \exists \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Доказательство. Площадь заштрихованной фигуры равна $1a_1 + 1a_2 + \ldots + 1a_n$, а криволинейной трапеции — $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$, тогда $S_n > \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$, $S_{n+1} - a_1 < \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$.

1. $\Leftarrow$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n < a_1 + \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx < a_1 + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2. $\Rightarrow$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_1^{n+1} f(x)\,dx < S_n < S \Rightarrow \exists \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

■

2.0.1 Знакопеременные ряды

Теорема 2.0.2. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *сходится, то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *тоже сходится.*

Доказательство. Пусть (S_n) и (σ_n) — частичные суммы рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ соответственно. По критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall m > N\ \forall k \geqslant 1\ |\sigma_{m+k} - \sigma_m| < \varepsilon$$

Тогда

$$|S_{m+k} - S_m| = |\sum_{i=1}^{k} a_{m+i}| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |a_{m+i}| = |\sigma_{m+k} - \sigma_m| < \varepsilon$$

Значит, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. ■

Теорема 2.0.3 (признак Лейбница). *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ *— знакочередующийся ряд. Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *причём* (a_n) *— монотонная последовательность, то ряд сходится.*

Доказательство.

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) < S_{2n+2}$$

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$$

Тогда по свойству **??** предела последовательности

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Значит, ряд сходится. ■

2.1 Функциональные ряды

Теорема 2.1.1 (мажорантный признак сходимости). *Если существует последовательность* $(a_n)\colon \forall n \in \mathbb{N}\ |f_n(x)| \leqslant a_n$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится* $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится абсолютно.*

2.1.1 Степенные ряды

Степенным называется ряд вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$.

Теорема 2.1.2 (Абеля).

- *Если ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x\colon |x| < |x_0|$ *он сходится абсолютно.*
- *Если ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *расходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x\colon |x| > |x_0|$ *он расходится.*

Доказательство.

- $\lim\limits_{n\to\infty} c_n x_0^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0\colon |c_n x_0^n| \leqslant M \Rightarrow |c_n x^n| \leqslant M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$.

  Тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^k$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ сходится абсолютно.

- Если бы $\exists x_1\colon |x_1| > |x_0|$ & $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x_1^k$ сходится, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$ сходился бы, что противоречит условию.

■

Следствие 2.1.3. $\exists R > 0\colon$ *при* $|x| < R$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *сходится, а при* $|x| > R$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *расходится.*

R называется **радиусом сходимости степенного ряда**.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k x^k|$. По признаку д'Аламбера $\lim\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n} \cdot |x|\right| \ldots$

Глава 3

16.03.2018, дискретная математика

По индукции можно задать функцию перехода $\delta^*\colon S \times X^* \to S$:

- $\delta^*(s, x) = \delta(s, x)$;
- $\delta^*(s, \alpha x) = \delta(\delta^*(s, \alpha), x)$.

Такой функции перехода соответствует ориентированный путь в графе.

Запись $\delta^*(s, \alpha)$ несколько громоздка, поэтому вместо неё может использоваться запись $s\delta(\alpha)$.

Конечный автомат называется **настроенным**, если для него указаны начальное состояние s_1 и множество F допускающих состояний. Т. е. настроенный автомат задаётся набором (S, X, δ, s_1, F).

Настроенный автомат A **распознаёт язык** L, если $\alpha \in L \Leftrightarrow s_1\delta(\alpha) \in F$.

Утверждение 3.0.1. *Любой конечный язык распознаётся конечным автоматом.*

Доказательство. Пусть L — конечный язык, множество S состояний состоит из префиксов слов L, а также включает дополнительное состояние s', $\alpha\delta(x) = \begin{cases} \alpha x, & \alpha x \in S \\ s', & \alpha x \notin S \end{cases}$

Рассмотрим автомат $(S, X, \delta, \lambda, L)$.

$$\lambda\delta(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \alpha \in S \setminus s' \\ s', & \alpha \notin S \setminus s' \end{cases} \quad \Rightarrow (s_1\delta(\alpha) \in F \Leftrightarrow \alpha \in L)$$

■

Теорема 3.0.2. *Язык $L = \{a^k b^k \mid k \geqslant 0\}$ не распознаётся конечным автоматом.*

Доказательство методом от противного. Пусть L распознаётся конечным автоматом $A = (S, X, \delta, s_1, F)$ с n состояниями. Тогда какие-то из состояний $s_1, s_1\delta(a), s_1\delta(aa), \ldots, s_1\delta(a^{n-1}), s_1\delta(a^n)$ совпадают. Пусть $s_1\delta(a^i) = s_1\delta(a^j)$, тогда $s_1\delta(a^i)\delta(b^i) \in F \Rightarrow s_1\delta(a^j)\delta(b^i) \in F$. Значит, $a^j b^i \in L$. Противоречие. ■

Некоторое отношение $\sim$ называется **отношением эквивалентности**, если оно удовлетворяет условиям:

1. Рефлексивность: $a \sim a$.
2. Симметричность: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$.
3. Транзитивность: $a \sim b \;\&\; b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

Классом эквивалентности, или **фактор-классом**, **элемента** x называется множество $[x] = \{y \mid y \sim x\}$.

Фактор-множеством называется множество различных фактор-классов.

Слова α и β называются **различимыми словом** $\gamma \in X^*$ **относительно языка** L, если $\alpha\gamma \in L \;\&\; \beta\gamma \notin L \vee \alpha\gamma \notin L \;\&\; \beta\gamma \in L$. Различимость обозначается $\alpha \not\sim_L \beta$.

Слова α и β называются **неразличимыми относительно языка** L, если $\forall\gamma \in X^* \; \alpha\gamma \in L \Leftrightarrow \beta\gamma \in L$. Неразличимость обозначается $\alpha \sim_L \beta$.

Утверждение 3.0.3. *Отношение неразличимости слов относительно языка является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Очевидно, что $\alpha \sim \alpha$ и $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$.

Пусть $\alpha \sim \beta \;\&\; \beta \sim \gamma$, тогда $\forall\Theta \in X^* \; \alpha\Theta \in L \Leftrightarrow \beta\Theta \in L \Leftrightarrow \gamma\Theta \in L \Rightarrow \alpha \sim \gamma$. ■

Утверждение 3.0.4. $\alpha \sim \beta \Rightarrow \forall\gamma \in X^* \; \alpha\gamma \sim \beta\gamma$.

Доказательство.

$$\forall \Theta \in X^* \ (\alpha\gamma)\Theta \in L \Leftrightarrow \alpha(\gamma\Theta) \in L \Leftrightarrow \beta(\gamma\Theta) \in L \Leftrightarrow (\beta\gamma)\Theta \in L \Rightarrow \alpha\gamma \sim \beta\gamma$$

■

Рангом языка L называется количество элементов в фактор-множестве относительно неразличимости слов относительно L и обозначается $\operatorname{rank} L$.

Утверждение 3.0.5. *Если A — автомат с n состояниями, распознающий язык L, то $n \geqslant \operatorname{rank} L$.*

Глава 4

21.03.2018, математический анализ

Найдём радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^p}$:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = 1$$

Подставим $x = 1$, тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

Подставим $x = -1$, тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^p}$ сходится абсолютно при $p > 1$, сходится условно при $0 < p \leqslant 1$ и расходится при $p \leqslant 0$.

Утверждение 4.0.1. *Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k = S(x)$ *при* $|x| < R$, *то*

1. $\int\limits_a^b S(x)\,dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \int\limits_a^b x^k\,dx$, *где* $|a|, |b| < R$

2. $(S(x))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (x^k)^{(m)}$, *где* $|x| < R$

Связь суммы ряда и его коэффициентов:

1. $c_0 = S(0)$
2. $c_1 = S'(0)$
3. $c_2 = \frac{S''(0)}{2}$
4. $c_3 = \frac{S'''(0)}{3!}$
5. $c_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$

Т. о., $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$ при $|x| < R$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|}{\left|\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|(n+1)}{|f^{(n+1)}(0)}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

Тогда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$ при $\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}\, x^{n+1} = 0$.

Разложение некоторых функций:

1. $f(x) = e^x$. Для $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$R = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

$$r_n = \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}\, x^{n+1} < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}\, |x|^{n+1} \ \&\ \lim_{n\to\infty} \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}\, |x|^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}\, x^{n+1} = 0$$

Тогда при $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

2. $f(x) = \sin x$. Для $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\, x^{2k-1}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n-1)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} 2n(2n+1) = \infty$$

$$r_n = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\, |\sin\left(\Theta x + \frac{\pi}{den}\right) < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \&\ \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\, |\sin\left(\Theta x + \frac{\pi}{den}\right) = 0$$

Тогда при $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\, x^{2k-1}$$

3. $f(x) = \cos x$. Для $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} (2n+1)(2n+2) = \infty$$

$$r_n = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\, |\cos\left(\Theta x + \frac{\pi}{den}\right) < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \&\ \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\, |\cos\left(\Theta x + \frac{\pi}{den}\right) = 0$$

Тогда при $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}$$

4. $f(x) = (1+x)^\alpha$ при $\alpha \notin \mathbb{N}$. Для $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k$

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)|(k+1)!}{k!|\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k)|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{|\alpha-k|} = 1$$

$$r_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)(1+\Theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}\, x^{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\Theta x)^{n+1-\alpha}}$$

Если $x \in [0;1)$ $|r_n(x)| \leqslant M \cdot \frac{x^{n+1}}{1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Тогда при $x \in (-1;1)$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k$$

4.0.1 Приложения разложений функций в ряд Маклорена

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots,\ |x| < 1$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots,\ |x| < 1$$

Тогда при $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t} = \int\limits_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Глава 5

23.03.2018, дискретная математика

Теорема 5.0.1.

1. *Язык L распознаётся конечным автоматом с n состояниями* $\Leftrightarrow \operatorname{rank} L \leqslant n$.

2. *Если* $\operatorname{rank} L = n$, *то существует конечный автомат с n состояниями, который распознаёт L, и никакой конечный автомат с меньшим числом состояний не распознаёт L.*

Доказательство.

1. Язык L распознаётся конечным автоматом $A = (X, S, \delta, s_1, F)$ с n состояниями. Рассмотрим слова $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in X^*$. Хотя бы два из состояний $s_1\delta(\alpha_1), \ldots, s_1\delta(\alpha_{n+1})$ совпадают.

   Пусть $s_1\delta(\alpha_i) = s_1\delta(\alpha_j)$, где $i \neq j$.

   $$s_1\delta(\alpha_i\gamma) = s_1\delta(\alpha_i)\delta(\gamma) = s_1\delta(\alpha_j)\delta(\gamma) = s_1\delta(\alpha_j\gamma) \Rightarrow (\alpha_i\gamma \in L \Leftrightarrow \alpha_j\gamma \in L)$$

   Т. о., среди $n+1$ состояний всегда найдётся пара неразличимых, значит, $\operatorname{rank} L \leqslant n$.

2. Пусть $A = (X, S, \delta, s_1, F)$, где $S = \{[\alpha] \mid \alpha \in X^*\}$, $\delta\colon [\alpha]\delta(x) = [\alpha x]$, $s_1 = [\lambda]$, $F = \{[\alpha] \mid \alpha \in L\}$, тогда $s_1\delta(\alpha) = [\alpha] \in F \Leftrightarrow \alpha \in L$.

   Пусть существует конечный автомат с k состояниями, где $k < n$.

■

Базисом языка L называется множество $W \subseteq X^*$ такое, что:

1. Все слова из W попарно различимы.

2. Любое другое слово неотличимо от одного из слов множества W.

Теорема 5.0.2. *Множество W — базис* $\Leftrightarrow$

1. *Все слова из W попарно различимы.*

2. $\lambda \in W$

3. $\forall \alpha \in W\ \forall x \in X\ \exists \beta \in W\colon \alpha x \sim \beta$

Доказательство. Докажем пункт 2 по индукции.

- *База индукции.* d

- *Шаг индукции.* Пусть доказано для $|\alpha| \leqslant k$. Рассмотрим $\beta\colon |\beta| = k\ \&\ \beta \sim \gamma \in W$. $\beta x \sim \gamma x \sim \delta \in W$.

■

Два состояния s и s' называются **эквивалентными относительно автомата** $A = (X, S, \delta, s_1, F)$, если $\forall \alpha \in X^*\ s\delta(\alpha) \in F \Leftrightarrow s'\delta(\alpha) \in F$.

Автомат называется **связным**, если $\forall s \in S \exists \alpha \in X^*\ s_1\delta(\alpha) = s$.

Автомат называется **приведённым**, если в нём нет эквивалентных состояний.

Пусть задан автомат $A = (X, S, \delta, s_1, F)$. Рассмотрим автомат $A_m = (X, S_m, \delta_m, s_m, F_m)$, где $S_m = S/\sim = \{[s] \mid s \in S\}$, $\delta_m\colon [s]\delta(x) = [s\delta(x)]$, $s_m = [s_1]$, $F_m = \{[s] \mid s \in F\}$, тогда $[s_1]\delta(\alpha) = [s_1\delta(\alpha)] \in F_m$, т. к. $s_1\delta(\alpha) \in F$.

$s \sim_{k+1} s' \Leftrightarrow s \sim_k s'\ \&\ \forall x \in X\ s\delta(x) \sim_k s'\delta(x)$

Глава 6

28.03.2018, математический анализ

6.0.1 Тригонометрические ряды Фурье

Представим функцию $f(x)$ на отрезке $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n}{T}\, x + \sum_{k=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi n}{T}\, x$$

Скалярным произведением функций $f(x)$ **и** $g(x)$ называется $\langle f(x), g(x)\rangle = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)g(x)\,dx$.

Проверим, что функции 1, $\cos\frac{2\pi n}{T}\, x$ и $\sin\frac{2\pi n}{T}\, x$ попарно ортогональны:

- $\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\frac{2\pi n}{T}\, x\,dx = \frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n}{T}\, x\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$
- $\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin\frac{2\pi n}{T}\, x\,dx = -\frac{T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi n}{T}\, x\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$
- $\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\frac{2\pi m}{T}\, x\cos\frac{2\pi n}{T}\, x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\frac{2\pi(m-n)}{T}\, x + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\frac{2\pi(m+n)}{T}\, x = 0,\ m \neq n$
- $\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin\frac{2\pi m}{T}\, x\sin\frac{2\pi n}{T}\, x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\frac{2\pi(m-n)}{T}\, x - \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\frac{2\pi(m+n)}{T}\, x = 0,\ m \neq n$
- $\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\frac{2\pi m}{T}\, x\sin\frac{2\pi n}{T}\, x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin\frac{2\pi(m+n)}{T}\, x + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin\frac{2\pi(m-n)}{T}\, x = 0$

Найдём квадраты этих функций:

- $\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1^2\,dx = T$
- $\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2\frac{2\pi n}{T}\, x\,dx = \frac{T}{2}$

- $\displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 \frac{2\pi n}{T} x \, dx = \frac{T}{2}$

Тогда можно найти коэффициенты:

- $a_k = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos \frac{2\pi k}{T} x \, dx$

- $b_k = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin \frac{2\pi k}{T} x \, dx$

Причём если $f(x)$ чётна, то $b_k = 0$. Если же $f(x)$ нечётна, то $a_k = 0$.

Глава 7

30.03.2018, дискретная математика

Два автомата (S, X, δ, s_1, F) и $(S', X, \delta', s_2, F')$ называются **изоморфными**, если существует биекция $\varphi \colon S \to S'$ такая, что:

1. $s\delta(x) = t \Leftrightarrow \varphi(s)\delta'(x) = \varphi(t)$;
2. $\varphi(s_1) = s_2$;
3. $t \in F \Leftrightarrow \varphi(t) \in F'$.

Утверждение 7.0.1. *Если два минимальных автомата распознают один и тот же язык, то они изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, причём $S = \{s_1\delta(\alpha)\}$ & $S' = \{s_2\delta'(\alpha)\}$. В каждом из автоматов нет эквивалентных состояний, поэтому можно построить биекцию $\varphi(s_1\delta(\alpha)) = s_2\delta'(\alpha)$. Тогда $s_1\delta(\alpha) \in F \Leftrightarrow \alpha \in L \Leftrightarrow s_1'\delta'(\alpha) \in F$. ■

Пусть L_1, L_2 — языки, распознаваемые некоторыми конечными автоматами, тогда $\operatorname{rank} L_1 = m$ & $\operatorname{rank} L_2 = n$.

1. Докажем, что $\operatorname{rank} L_1 = \operatorname{rank} \overline{L}_1$.

   Доказательство.

   $$\alpha \not\sim_{L_1} \beta \Leftrightarrow \exists \gamma \colon \alpha\gamma \in L_1 \,\&\, \beta\gamma \notin L_1 \Leftrightarrow \alpha\gamma \notin \overline{L}_1 \,\&\, \beta\gamma \in \overline{L}_1 \Leftrightarrow \alpha \not\sim_{\overline{L}_1} \beta$$

   $$\alpha \not\sim_{L_1} \beta \Leftrightarrow \exists \gamma \colon \alpha\gamma \in L_1 \,\&\, \beta\gamma \notin L_1 \Leftrightarrow \alpha\gamma \notin \overline{L}_1 \,\&\, \beta\gamma \in \overline{L}_1 \Leftrightarrow \alpha \not\sim_{\overline{L}_1} \beta$$

   ■

2. Докажем, что $\operatorname{rank} L_1 \cap L_2 \leqslant mn$.

   Доказательство. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — базисы L_1 и L_2 соответственно. Тогда

   $$\forall \gamma \in X^* \ \exists \alpha_i, \beta_j \colon \alpha_i \sim_{L_1} \gamma \,\&\, \beta_j \sim_{L_2} \gamma$$

   Пусть γ_{ij}

   - $\gamma\Theta \in L_1 \Leftrightarrow \alpha_i\Theta \in L_1 \Leftrightarrow \gamma_{ij}\Theta \in L_1$;
   - $\gamma\Theta \in L_2 \Leftrightarrow \beta_j\Theta \in L_2 \Leftrightarrow \gamma_{ij}\Theta \in L_2$;
   - $\gamma\Theta \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow \alpha_i\Theta \in L_1 \,\&\, \beta_j \in L_2 \Leftrightarrow \gamma_{ij}\Theta \in L_1 \cap L_2$.

   ■

   Пусть автомат $A = (S \times S', X, \delta'', s_0, F'')$.

Лемма 7.0.2 (о накачке). *Если L распознаётся конечным автоматом, то $\exists n \in \mathbb{N} \colon (\forall \alpha \in X^* \colon |\alpha| > n) \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \colon \alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$, причём*

1. $\alpha_2 \neq \lambda$;
2. $\alpha \in L \Rightarrow \forall i \ \alpha_1\alpha_2^i\alpha_3 \in L$;
3. $\alpha_1\alpha_2| \leqslant n$.

Доказательство. Пусть в конечном автомате n состояний, $|\alpha| = k \geqslant n$ & $\alpha = x_1 \ldots x_k$. Среди состояний $s_1\delta(\lambda), s_1\delta(x_1), s_1\delta(x_1x_2), \ldots, s_1\delta(x_1 \ldots x_n)$ найдутся два совпадающих, т. е. $\exists l, m\colon 0 \leqslant l < m \leqslant n$ & $s_1\delta(x_1 \ldots x_l) = s_1\delta(x_1 \ldots x_m) = s'$. Пусть $\alpha_1 = x_1 \ldots x_l$, $\alpha_2 = x_{l+1} \ldots x_m$, $\alpha_3 = x_{m+1} \ldots x_k$, тогда $s_1\delta(\alpha_1) = s', s_1\delta(\alpha_1\alpha_2) = s', \delta(\alpha_1, \alpha_2^i = s', s_1\delta(\alpha_1\alpha_2^i\alpha_3) = s'\delta(\alpha_3) = s''$. ■

Следствие 7.0.3. *Если $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \alpha\colon |\alpha| \in n$, причём для любых слов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:*

1. *$\alpha_2 \neq \lambda$;*
2. *$\alpha \in L$ & $\exists i\ \alpha_1\alpha_2^i\alpha_3 \notin L$;*
3. *$\alpha_1\alpha_2| \leqslant n$.*

то L не распознаётся конечным автоматом.

Глава 8

04.04.2018, математический анализ

8.1 Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение вида $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x))$. n называется **его порядком**.

8.1.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$y' = f(x) \cdot g(y)$

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C$$

8.1.2 Однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$
Пусть $p(x) = \frac{y}{x}$, тогда $y = x \cdot p(x) \Rightarrow y' = p(x) + x \cdot p'(x)$. Получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow xp'(x) = F(p(x)) - p \Leftrightarrow p' = \frac{F(p(x)) - p}{x}$$

Решив его, найдём $p(x)$ и y.

Глава 9

06.04.2018, дискретная математика

Утверждение 9.0.1. *Если непустой язык распознаётся автоматом с n состояниями, то он содержит слово длины не больше n.*

Доказательство. Если автомат распознаёт слово, то в соответствующем графе есть путь из начального состояния в допускающее, а значит, есть и простой путь. В графе n вершин, тогда длина простого пути не больше n, а ему соответствует слово длины не больше n. ■

Утверждение 9.0.2. *Пусть L_1 и L_2 — языки, распознаваемые автоматами с n_1 и n_2 состояниями соответственно. $L_1 = L_2 \Leftrightarrow$ все слова длин, не больших $n_1 n_2$,*

Конкатенацией языков L_1 **и** L_2 называется язык $\{\alpha\beta | \alpha \in L_1 \; \& \; \beta \in L_2\}$.

Недетерминированным конечным автоматом называется набор (S, X, δ, s_1, F), где S — конечное множество состояний; X — конечный алфавит; $\delta \colon S \times (X \cup \{\lambda\}) \to Y$ — функция перехода, где $Y \subseteq 2^S$; $s_1 \in S$ — начальное состояние; $F \subseteq S$ — множество допускающих состояний.

Недетерминированный автомат **распознаёт язык** L, если при чтении слова из языка L хотя бы один из получившихся путей приводит в допускающее состояние.

Если языки L_1 и L_2 распознаются автоматами $(S_1, X, \delta_1, s_1, F_1)$ и $(S_2, X, \delta_2, s_2, F_2)$ соответственно, тогда автомат $(S_1 \cup S_2, X, \delta, s_1, F_2)$ распознаёт язык $L_1 L_2$, где $s\delta(x) = \begin{cases} s\delta_1(x), \; s \in S_1 \\ s\delta_2(x), \; s \in S_2 \\ s_2, \; s \in F_1 \; \& \; x = \lambda \end{cases}$, т. к.

$$s_1\delta(\alpha\beta) = (s_1\delta(\alpha))\delta(\beta) = s_1\delta(\alpha)\delta(\lambda)\delta(\beta) = s_2\delta(\beta)$$

$L^n = \underbrace{LL \dots L}_{n}$, причём $L^0 = \{\lambda\}$ $L^* = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} L^n$, $X^* = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} X^n$ — **звёздочка Клини**.

Пусть L распознаётся автоматом (S, X, δ, s_1, F), тогда $(S \cup \{s_0\}, X, \delta_1, s_0, F \cup \{s_0\})$ распознаёт L^*, где $\delta_1 = \begin{cases} s\delta(x), \; s \in S \\ s_1, \; s \in S \; \& \; x = \lambda \end{cases}$

Глава 10

11.04.2018, математический анализ

10.0.1 Уравнение в полных дифференциалах

Уравнением в полных дифференциалах называется уравнение вида $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$. Если $M'_y = N'_x$, то $M(x,y) = F'_x$ & $N(x,y) = F'_y$, тогда

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \Leftrightarrow M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \Leftrightarrow dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C$$

Пусть $M'_y \neq N'_x$, но $\exists \mu(x,y)\colon (\mu \cdot M)'_y = (\mu \cdot N)'_x$, тогда

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \Leftrightarrow \mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0 \Leftrightarrow dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C$$

$\mu(x,y)$ называется **интегрирующим множителем**.

10.1 Линейное уравнение первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $y' = a(x)y + b(x)$.

Рассмотрим **метод вариации произвольной постоянной**.

1. Решим уравнение
$$y'_0 = a(x)y_0 \Leftrightarrow \frac{dy_0}{y_0} = a(x)\,dx \Rightarrow \ln y_0 = \varphi(x) + \ln C \Rightarrow y_0 = Ce^{\varphi(x)}$$

2. Подставим $y = C(x)e^{\varphi(x)}$ в исходное уравнение:
$$C'(x)e^{\varphi(x)} + C(x)e^{\varphi(x)}\varphi'(x) = a(x)C(x)e^{\varphi(x)} + b(x)$$
$y_0 = Ce^{\varphi(x)} \Rightarrow Ce^{\varphi(x)}\varphi'(x) = a(x)Ce^{\varphi(x)}$, тогда получим
$$C'(x)e^{\varphi(x)} = b(x) \Leftrightarrow C'(x) = b(x)e^{-\varphi(x)} \Leftrightarrow C(x) = \int b(x)e^{-\varphi(x)}$$

Тогда $y = C(x)e^{\varphi(x)}$.

Глава 11

13.04.2018, дискретная математика

Построим ДКА по НКА (S, X, δ_N, s_1, F), не содержащему пустых переходов, где $\delta_N : S \times X \to 2^S$: $(2^S, X, \delta_D, s_1, F')$, где $F' = \{M \mid M \subseteq S \,\&\, M \cap F \neq \varnothing\}$, $M\delta_D(x) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \delta_N(m_i, x)$, $M = \{m_1, \dots, m_k\}$.

Докажем, что $\delta_D(s_1, \alpha) = \delta_N(s_1, \alpha)$, методом математической индукции:

- *База индукции.* $\delta_D(s_1, \lambda) = s_1$, $\delta_N(s_1, \lambda) = \{s_1\}$.
- *Шаг индукции.* Пусть доказано для слов $\beta \colon |\beta| = n$. Рассмотрим $\alpha \colon |\alpha| = n+1$. Предположим, что $\delta_N(s_1, \beta) = \{m_1, \dots, m_k\}$, тогда $\delta_D(s_1, \beta x) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \delta_D(m_i, x) \,\&\, \delta_N(s_1, \beta x) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \delta_N(m_i, x) \Rightarrow \delta_D(s_1, \alpha) = \delta_N(s_1, \alpha)$.

Построим НКА без пустых переходов по НКА (S, X, δ, s_1, F), содержащему пустые переходы, где $\delta \colon S \times (X \cup \{\lambda\}) \to 2^S$: (S, X, δ', s_1, F'), где $F' = \{s \mid \delta(s, \lambda^k) = s' \,\&\, s' \in F\}$, $\delta'(s, a) = s'$ при $\delta(s, \lambda^k a) = s'$.

Замыканием состояния s **НКА** называется множество $\{s' \mid \delta(s, \lambda^k) = s'\}$ и обозначается $[s]$.

Построим ДКА по НКА, содержащему пустые переходы, где $\delta \colon S \times (X \cup \{\lambda\}) \to 2^S$: $(T, X, \delta', [s_1], F')$, где $T = \{M \mid M \subseteq 2^S \,\&\, [M] = M\}$, $F = \{M \mid M \in T \,\&\, M \cap F \neq \varnothing\}$, $\delta'(\{m_1, \dots, m_k\}, x) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} [\delta(m_i, x)]$.

Докажем, что $\delta(s_1, w) = \delta'([s_1], w)$, методом математической индукции:

- *База индукции.* $\delta(s_1, \lambda) = [s_1] \,\&\, \delta'([s_1], \lambda) = [s_1] \Rightarrow \delta(s_1, \lambda) = \delta'([s_1], \lambda)$
- *Шаг индукции.* Пусть доказано для слов $\beta \colon |\beta| = n$. Рассмотрим $\alpha \colon |\alpha| = n + 1$. $\delta(s_1, \beta x) = \bigcup_{i=1}^{k} [\delta(m_i, x)] \,\&\, \delta'([s_1], \beta x) = \bigcup_{i=1}^{k} [\delta(m_i, x)] \Rightarrow \delta(s_1, \beta x) = \delta'([s_1], \beta x)$

Глава 12

18.04.2018, математический анализ

12.0.1 Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y' = a(x)y + b(x)y^n$, где $n \neq 1$. Пусть $\frac{1}{y^{n-1}} = z$, тогда

$$y' = a(x)y + b(x)y^n \Leftrightarrow \frac{y'}{y^n} = a(x)y^{1-n} + b(x) \Leftrightarrow \frac{z'}{1-n} = a(x)z + b(x)$$

Т. о., решение уравнения Бернулли сводится к решению линейного уравнения.

Теорема 12.0.1. *Пусть $y'(x) = f(x, y(x))$ & $y(x_0) = y_0$, причём в некоторой окрестности $\exists M > 0\colon |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant M|y_1 - y_2|$, тогда уравнение имеет единственное решение в окрестности $(x_0 - d; x_0 + d)$: $y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx + y_0$.*

Это уравнение можно решить методом итераций:

$y_1(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx + y_0$

$y_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\,dx + y_0$

Доказательство.

$$y_n(x) - y_{n-1}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} (f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x)))\,dx$$

$|\int\limits_{a}^{b} g(x)\,dx| \leqslant |b - a| \max_{x\in[a;b]} |g(x)|$, тогда

$$\max_{|x-x_0|<d} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant d \max_{|x-x_0|<d} |f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x))| \leqslant dM \max_{|x-x_0|<d} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)|$$

Пусть $q = dM < 1$, тогда

$$\max_{|x-x_0|<d} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant q \max_{|x-x_0|<d} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| \leqslant q^{n-1} \max_{|x-x_0|<d} |y_1(x) - y_0|$$

Тогда

$$\forall k \geqslant 1 \max_{x\in[a;b]} |y_{n+k}(x) - y_n(x)| = \max_{|x-x_0|<d} |(y_{n+k}(x) - y_{n+k-1}(x)) + (y_{n+k-1}(x) + y_{n+k-2}(x)) + \ldots + (y_{n+1}(x) - y_n(x))| \leqslant \max_{|x-x_0|<d} |y_{n+k}($$

По признаку Коши получим

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n > N\ \forall k \geqslant 1\ \max_{x\in[a;b]} |y_{n+k}(x) - y_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \tilde{y}(x)$$

Докажем единственность:

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| = |\int\limits_{x_0}^{x} (f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x)))\,dx| \Rightarrow \max_{|x-x_0|<d} |y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant |x - x_0| \cdot \max_{|x-x_0|<d} |f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))| < dM \max_{|x-x_0|<d} |y(x) -$$

Противоречие, значит, решение единственно. ■

Глава 13

20.04.2018, дискретная математика

13.0.1 Алгоритм Бржозовского

Назовём язык, распознаваемый автоматом $(S, X, \delta, s_1, \{s'\})$, **левым языком** $L_l(s')$, а язык, распознаваемый автоматом (S, X, δ, s', F) — **правым языком** $L_r(s')$.

$L = \bigcup\limits_{s' \in S} L_l(s')$

Пусть $A = (S, X, \delta, s_1, F)$. Рассмотрим произвольное состояние s'.

1. Автомат детерминирован $\Leftrightarrow$ все его левые языки не пересекаются.

   Доказательство методом от противного. Пусть $\alpha \in L_l(s') \cap L_l(s'')$, тогда по α можно прийти и в s', и в s'' $\Leftrightarrow$ автомат недетерминирован. ■

2. Если $L_l(s')$ — левый язык автомата A, то $r(L_l(s'))$ — правый язык $r(A)$.

3. Автомат минимальный $\Leftrightarrow$ все его правые языки различны и все вершины достижимы.

Теорема 13.0.1. *Автомат $drdr(A)$ минимален, где A — автомат.*

Доказательство. Т. к. обращений было два, то автомат распознаёт тот же язык. Кроме того, он детерминированный.

Левые языки автомата $dr(A)$ не пересекаются $\Rightarrow$ правые языки $rdr(A)$ не пересекаются $\Rightarrow$ правые языки $drdr(A)$ различны $\Rightarrow$ $drdr(A)$ минимален. ■

1. $\varnothing$, λ, x называются **регулярными выражениями**. Они определяют языки $\varnothing$, $\{\lambda\}$, $\{x\}$.

2. $L \cup M$, LM, L^* называются **регулярными выражениями**, где L, M — регулярные выражения.

Приоритет операций в порядке убывания: $*$, $\cdot$, $\cup$. При записи регулярных выражений объединение может обозначаться знаком $+$.

Теорема 13.0.2 (Клини). *Язык над алфавитом X распознаётся конечным автоматом $\Leftrightarrow$ он может быть выражен через языки $\varnothing$, $\{\lambda\}$, $\{x\}$, где $x \in X$, и операции $\cup$, $\cdot$, $*$.*

Доказательство.

1. $\Leftarrow$. Очевидно.

2. $\Rightarrow$. Пусть вершины пронумерованы от 1 до n. Обозначим $L_{ij}^{(k)} = \{\alpha \mid i\delta(\alpha) = j$ & промежуточные состояния имеют номер

   - *База индукции.* $L_{ij}^{(0)} = \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \ i \neq j \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_k + \lambda, \ i = j \end{cases}$

   - *Шаг индукции.* $L_{ij}^{(k+1)} = L_{ij}^{(k)} + L_{i\,k+1}^{(k)}(L_{k+1\,k+1}^{(k)})^* L_{k+1\,j}^{(k)}$

■