Введение

Здесь содержатся знания maxim4133 о математике. Принятые обозначения:

- $\forall$ — **квантор всеобщности**. Обозначение условия, которое верно для всех указанных элементов. Читается как «для всех», «для каждого», «для любого» или «все», «каждый», «любой».
- $\exists$ — **квантор существования**. Обозначение условия, которое верно хотя бы для одного из указанных элементов. Читается как «существует», «найдётся».
- $\exists!$ — **квантор существования и единственности**. Обозначение условия, которое верно ровно для одного из указанных элементов. Читается как «существует единственный».
- $:$ — «что», «такой (такие)», «что», «так, что», «обладающий свойством».
- $\Rightarrow$ — символ следствия. Читается как «если…, то…».
- $\Leftrightarrow$ — символ эквивалентности (равносильности). Читается как «тогда и только тогда, когда», «ровно/в точности тогда, когда».
- $\wedge$ — знак конъюнкции. Высказывание, полученное при связывании двух других высказываний конъюнкцией, истинно ровно тогда, когда оба связываемых высказываний истинны.
- $\vee$ — знак дизъюнкции. Высказывание, полученное при связывании двух других высказываний дизъюнкцией, истинно ровно тогда, когда истинно хотя бы одно из связываемых высказываний. Дизъюнкция имеет более низкий приоритет по сравнению с конъюнкцией.

Оглавление

Глава 1

Дискретная математика

1.1 Графы

Определение 1.1.1. ***Графом*** *называется пара множеств $G = (V, E)$, где V — множество вершин графа, $E \subseteq V^2$ — множество рёбер графа.*

Если $e = \{u, v\}$, $e \in E$, то говорят, что:

- *ребро e соединяет вершины u и v;*
- *u и v — концы ребра e;*
- *ребро e инцидентно вершинам u и v;*
- *вершины u и v инцидентны ребру e.*

В дальнейшем будем рассматривать только конечные графы.

На рисунках вершины графа изображают точками, а рёбра $e = \{u, v\}$ — кривыми, соединяющими точки, которые изображают вершины u и v.

Определение 1.1.2. *Вершины называются **соседними**, если их соединяет ребро, иначе — **несоседними**.*

Определение 1.1.3. *Ребро вида $e = \{u, u\}$ называется **петлёй**.*

Определение 1.1.4. *Граф, в котором любые две вершины соединены ребром, называется **полным** и обозначается K_n, где n — число вершин в нём.*

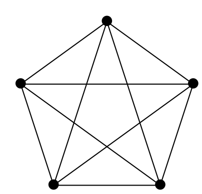

Рис. 1.1: Граф K_5

Определение 1.1.5. *Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются **изоморфными**, если существует биекция $\varphi\colon V_1 \to V_2$ такая, что $\forall u, v \in V_1$ $((u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2)$, иначе — **неизоморфными**.*

*φ называется **изоморфизмом**.*

Определение 1.1.6. *Число рёбер в графе G, инцидентных вершине u, называется **степенью** вершины и обозначается $\deg_G u$.*

Лемма 1.1.1 (о рукопожатиях).

$$\sum_{u \in V} \deg_G u = 2|E|$$

где $G = (V, E)$ — граф.

Доказательство (методом математической индукции).

- *База индукции.* $|E| = 0$: в таком графе $\sum\limits_{u \in V} \deg u = 0$.

- *Шаг индукции.* Пусть лемма верна для $|E| = n$. Докажем её для $|E| = n+1$. Для этого достаточно заметить, что каждое новое ребро увеличивает степени двух вершин на 1.

■

Определение 1.1.7. ***Маршрутом*** *в графе* $G = (V, E)$ *называется последовательность вершин и рёбер вида* $v_1 e_1 v_2 \dots e_k v_{k+1}$, *где* $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$.

Определение 1.1.8. *Маршрут, в котором все рёбра различны, называется* ***цепью***.

Определение 1.1.9. *Цепь, в которой все вершины, за исключением, может быть, первой и последней, различны, называется* ***простой***.

Определение 1.1.10. *Маршрут, в котором первая и последняя вершины совпадают, называется* ***замкнутым***.

Определение 1.1.11. *Замкнутая цепь называется* ***циклом***.

Определение 1.1.12. *Маршрут, соединяющий вершины* u *и* v, *называется* (u, v)***-маршрутом***.

Лемма 1.1.2. (u, v)*-маршрут содержит* (u, v)*-простую цепь.*

Доказательство. Пусть $u = v_1 e_1 v_2 \dots e_k v_{k+1} = v$ — не простая цепь, тогда $\exists i < j \colon v_i = v_j$. Уберём из маршрута подпоследовательность $e_i v_{i+1} \dots e_{j-1} v_j$, получим маршрут, в котором совпадающих вершин на одну меньше. Повторяя, получим простую цепь, являющуюся частью данного маршрута. ■

Лемма 1.1.3. *Любой цикл содержит простой цикл.* Доказательство аналогично предыдущему.

Лемма 1.1.4. *Если в графе есть две различные простые цепи, соединяющие одни и те же вершины, то в этом графе есть простой цикл.*

Доказательство. Пусть $u = v_1 e_1 v_2 \dots e_n v_{n+1} = v$, $u = v'_1 e'_1 v'_2 \dots e'_m v'_{m+1} = v$ — простые цепи. Найдём наименьшее $i \colon e_i \neq e'_i$, тогда $v_i e_i v_{i+1} \dots e_n v_{n+1} = v'_{m+1} e'_m \dots e'_i v'_i = v_i$ — цикл, значит, можно получить простой цикл. ■

Глава 2

Математический анализ

2.0.1 Локальный экстремум функции нескольких переменных

Определение 2.0.1. *Точка* $\overline{x_0} = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ *называется* ***точкой локального минимума функции*** $f(\overline{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$, *если* $\overline{x_0} \in D(f)$ *и существует проколотая окрестность* $\dot{U}(\overline{x_0})\colon \forall \overline{x} \in \dot{U}(\overline{x_0})$ $f(\overline{x}) > f(\overline{x_0})$.

Точка $\overline{x_0} = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ *называется* ***точкой локального максимума функции*** $f(\overline{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$, *если* $\overline{x_0} \in D(f)$ *и существует проколотая окрестность* $\dot{U}(\overline{x_0})\colon \forall \overline{x} \in \dot{U}(\overline{x_0})$ $f(\overline{x}) < f(\overline{x_0})$.

Определение 2.0.2. *Точки локального минимума и максимума называются* ***точками локального экстремума***.

Теорема 2.0.1 (необходимое условие локального экстремума). *В точке локального экстремума частные производные функции равны нулю или не существуют.*

Доказательство. Пусть $\overline{x_0} = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ — точка экстремума функции $f(\overline{x})$, дифференцируемой в точке $\overline{x_0}$. Рассмотрим $g(x) = f(x_{10}, \dots, x_{k-1\,0}, x, x_{k+1\,0}, \dots, x_{n0})$. $\overline{x_0}$ — точка экстремума $f(\overline{x})$, тогда x_{k0} — точка экстремума $g(x)$, значит, $g'(x_{k0}) = 0$ или не существует. Тогда $f'_{x_k}(x_{k0}) = 0$ или не существует. ■

Теорема 2.0.2 (достаточное условие локального экстремума функции двух переменных). *Пусть дана функция* $f(x, y)$. *Если*

1. $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$
2. $(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$

то (x_0, y_0) *— точка локального экстремума* $f(x, y)$.

1. (x_0, y_0) *— точка локального минимума, если* $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ *или* $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$.
2. (x_0, y_0) *— точка локального максимума, если* $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ *или* $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$.

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0) + o(\rho^2((x, y), (x_0, y_0))) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0) + o(\rho^2((x, y), (x_0, y_0)))$$

значит, $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ сохраняет знак, если $d^2 f(x_0, y_0)$ сохраняет знак.

$$d^2 f(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) dx^2 + 2 f''_{xy}(x_0, y_0) dx dy + f''_{yy}(x_0, y_0) dy^2 =$$
$$= \left(f''_{xx}(x_0, y_0) + 2 f''_{xy}(x_0, y_0) \frac{dy}{dx} + f''_{yy}(x_0, y_0) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) dx^2$$

Т. о., (x_0, y_0) — точка локального экстремума $f(x, y)$, если $d^2 f(x_0, y_0)$ сохраняет знак, т. е. при

$$(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$$

$$(f''_{xy}(x_0,y_0))^2 - f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0) < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0) > (f''_{xy}(x_0,y_0))^2 \Rightarrow f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0) > 0$$

значит, $f''_{xx}(x_0,y_0)$ и $f''_{yy}(x_0,y_0)$ одного знака.

1. Если $f''_{xx}(x_0,y_0) > 0 \vee f''_{yy}(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow d^2f(x_0,y_0) > 0$, тогда (x_0,y_0) — точка локального минимума.
2. Если $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0 \vee f''_{yy}(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow d^2f(x_0,y_0) < 0$, тогда (x_0,y_0) — точка локального максимума.

■

Теорема 2.0.3 (достаточное условие локального экстремума). *Пусть дана функция $f(\overline{x}) = f(x_1,\dots,x_n)$. Точка $\overline{x_0} = (x_{10},\dots,x_{n0})$ — точка локального экстремума $f(\overline{x})$, если*

1. $f'_{x_1}(\overline{x_0}) = \ldots = f'_{x_n}(\overline{x_0}) = 0$
2. $\sum\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_ix_j}(\overline{x_0})dx_idx_j$ *сохраняет знак.*

1. $\overline{x_0}$ *— точка локального минимума, если* $\sum\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_ix_j}(\overline{x_0})dx_idx_j > 0.$
2. $\overline{x_0}$ *— точка локального максимума, если* $\sum\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_ix_j}(\overline{x_0})dx_idx_j < 0.$

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(\overline{x}) - f(\overline{x_0}) = f(\overline{x_0}) + df(\overline{x_0}) + \frac{d^2f(\overline{x_0})}{2!} + o(\rho^2(\overline{x},\overline{x_0})) - f(\overline{x_0}) = \frac{d^2f(\overline{x_0})}{2!} + o(\rho^2(\overline{x},\overline{x_0}))$$

значит, $f(\overline{x}) - f(\overline{x_0})$ сохраняет знак, если $d^2f(\overline{x_0})$ сохраняет знак.

$$d^2f(\overline{x_0}) = \sum_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_ix_j}(\overline{x_0})dx_idx_j$$

1. Если $\sum\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_ix_j}(\overline{x_0})dx_idx_j > 0 \Leftrightarrow d^2f(\overline{x_0}) > 0$, то $\overline{x_0}$ — точка локального минимума.
2. Если $\sum\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_ix_j}(\overline{x_0})dx_idx_j < 0 \Leftrightarrow d^2f(\overline{x_0}) < 0$, то $\overline{x_0}$ — точка локального максимума.

■

При практическом применении теоремы 2.0.3 полезен критерий Сильвестра.

2.0.2 Метод наименьших квадратов

Пусть даны точки $x_1,\dots,x_n$ и требуется найти аппроксимирующую прямую для значений некоторой функции $f(x)$ в этих точках. Уравнение прямой — $y = Ax + B$. Найдём точку, в которой сумма

$$S(A,B) = \sum_{i=1}^{n}(Ax_i + B - y_i)^2$$

принимает наименьшее значение.

$$S'_A = \sum 2x_i(Ax_i + B - y_i)$$

$$S'_B = \sum 2(Ax_i + B - y_i)$$

$$\begin{cases} S'_A = 0 \\ S'_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\sum x_i^2 + B\sum x_i = \sum x_i y_i \\ A\sum x_i + Bn = \sum y_i \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right) A = n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i \\ Bn = \sum y_i - A\sum x_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \\ B = \dfrac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \end{cases}$$

Найденные значения A и B — искомые коэффициенты в уравнении аппроксимирующей прямой. Для оценки точности аппроксимации можно воспользоваться формулой

$$r = \sqrt{\frac{\sum(f(x_i) - \tilde{y})^2 - \sum(f(x_i) - \tilde{y}_i)^2}{\sum(f(x_i) - \tilde{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sum(f(x_i) - \tilde{y}_i)^2}{\sum(f(x_i) - \tilde{y})^2}}$$

где $\tilde{y} = \frac{1}{n}\sum f(x_i)$, $\tilde{y}_i = Ax_i + B$, а значение коэффициента r тем ближе к единице, чем точнее аппроксимация.

2.0.3 Условный экстремум

Пусть дана функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, переменные которой удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Для нахождения её экстремумов (называемых **условными**) введём функцию Лагранжа

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_n)$$

и исследуем её. Её экстремумы являются условными экстремумами функции f.

Глава 3

Теория множеств

3.1 Множества

Множество — основное понятие. Некоторые числовые множества:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество натуральных чисел.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ — множество целых чисел.
- $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$ — множество рациональных чисел.
- $\mathbb{I}$ — множество иррациональных чисел.
- $\mathbb{R}$ — множество действительных (вещественных) чисел.
- $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

3.1.1 Отношения между множествами

Пусть A, B — множества. Между ними определены следующие отношения:

- A включено в B (является **подмножеством** B):
$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A \ a \in B$$
Нередко вместо знака $\subseteq$ пишется знак $\subset$.
- A равно B:
$$A = B \Leftrightarrow \forall a \ (a \in A \Leftrightarrow a \in B)$$
- A строго включено в B:
$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A = B$$

3.1.2 Операции над множествами

Пусть A, B — множества. Над ними определены следующие операции:

- **Объединение**:
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$
- **Пересечение**:
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$
- **Разность**:
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

- **Симметрическая разность**:

$$A \triangle B = \{x \mid x \in A \land x \notin B \lor x \notin A \land x \in B\}$$

- **Дополнение** до U, где $A \subseteq U$:
$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

- **Декартово произведение**:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \land y \in B\}$$

- **Декартова степень**:
$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n}$$

3.1.3 Функции

Определение 3.1.1. *Пусть A и B — множества.* ***Функцией*** *f называется правило, ставящее в соответствие каждому элементу $a \in A$ единственный элемент $f(a) \in B$.*

A называется ***областью определения*** функции f.

B называется ***областью значений*** функции f.

a называется ***прообразом*** *$f(a)$.*

$f(a)$ называется ***образом*** *a.*

Определение 3.1.2. *Функция $f\colon A \to B$ называется* ***инъективной (инъекцией)****, если $\forall x, y \in A$ $(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$.*

Определение 3.1.3. *Функция $f\colon A \to B$ называется* ***сюръективной (сюръекцией)****, если $\forall b \in B$ $\exists a \in A\colon f(a) = b$.*

Определение 3.1.4. *Функция $f\colon A \to B$ называется* ***биективной (биекцией)****, если она инъективная и сюръективная.*

3.1.4 Мощность множеств

Определение 3.1.5. *Множества A и B называются* ***равномощными (имеют одинаковую мощность)****, если существует биекция $f\colon A \to B$, иначе —* ***неравномощными****.*

Для конечных множеств это означает, что у них одинаковое количество элементов.

Определение 3.1.6. ***Мощностью*** *конечного множества A называется количество $|A|$ его элементов.*

Множество всех подмножеств множества A обозначается

$$\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

Множество всех подмножеств множества A мощности k обозначается

$$\mathcal{P}_k(A) = \{x \subseteq A \mid |x| = k\}$$

Теорема 3.1.1 (Кантора). *Множества A и $\mathcal{P}(A)$ не равномощны.*

Доказательство (методом от противного). Пусть $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ — биекция. Рассмотрим множество
$$X = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \Rightarrow X \subset A \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A)$$

f — биекция, тогда $\exists b \in A\colon f(b) = X$. Возможны два случая:

1. Пусть $b \in X \Rightarrow b \in f(b) \Rightarrow b \notin X$. Противоречие.

2. Пусть $b \notin X \Rightarrow b \in f(b) \Rightarrow b \in X$. Противоречие.

В обоих случаях получили противоречие. ■

Теорема 3.1.2. *Пусть дано множество $A\colon |A| = n$, тогда $|\mathcal{P}_k(A)| = C_n^k$.*

Доказательство (методом математической индукции).

- *База индукции.* $n = 0$:

$$|A| = 0 \Rightarrow A = \varnothing \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\varnothing\} \Rightarrow |\mathcal{P}_0(A)| = 1 = C_0^0$$

- *Шаг индукции.* Пусть теорема верна для n. Докажем её для $n+1$. Пусть $X \subset A$, $|X| = k$, $a \in A$. Подсчитаем количество таких X. Возможны два случая:

  1. Пусть $a \notin X \Rightarrow X \subset A \setminus \{a\}$, тогда таких X C_n^k.
  2. Пусть $a \in X$, тогда таких X столько же, сколько множеств $X \setminus \{a\} \subset A \setminus \{a\}$, т. е. C_n^{k-1}.

  Тогда $|\mathcal{P}(A)| = C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

■

Глава 4

Разное