Оглавление

Глава 1

14.03.2018, математический анализ

Теорема 1.0.1 (интегральный признак Коши). *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *— знакоположительный ряд. Если существует монотонная функция* $f(x) colon f(n) = a_n$ & $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится* $\Leftrightarrow \exists \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Доказательство. Площадь заштрихованной фигуры равна $1a_1 + 1a_2 + \ldots + 1a_n$, а криволинейной трапеции — $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$, тогда $S_n > \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$, $S_{n+1} - a_1 < \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$.

1. $\Leftarrow$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n < a_1 + \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx < a_1 + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.
2. $\Rightarrow$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_1^{n+1} f(x)\,dx < S_n < S \Rightarrow \exists \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

■

1.0.1 Знакопеременные ряды

Теорема 1.0.2. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *сходится, то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *тоже сходится.*

Доказательство. Пусть (S_n) и (σ_n) — частичные суммы рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ соответственно. По критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall m > N\ \forall k \geqslant 1\ |\sigma_{m+k} - \sigma_m| < \varepsilon$$

Тогда

$$|S_{m+k} - S_m| = |\sum_{i=1}^{k} a_{m+i}| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |a_{m+i}| = |\sigma_{m+k} - \sigma_m| < \varepsilon$$

Значит, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. ■

Теорема 1.0.3 (признак Лейбница). *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ *— знакочередующийся ряд. Если* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, *причём* (a_n) *— монотонная последовательность, то ряд сходится.*

Доказательство.

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) < S_{2n+2}$$

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$$

Тогда по свойству **??** предела последовательности

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n} = S \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} S_{2n} + \lim_{n \to \infty} a_{2n+1} = S \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = S$$

Значит, ряд сходится. ■

1.1 Функциональные ряды

Теорема 1.1.1 (мажорантный признак сходимости). *Если существует последовательность* $(a_n)\colon \forall n \in \mathbb{N}\ |f_n(x)| \leqslant a_n$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится* $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится абсолютно.*

1.1.1 Степенные ряды

Степенным называется ряд вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$.

Теорема 1.1.2 (Абеля).

- *Если ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x\colon |x| < |x_0|$ *он сходится абсолютно.*
- *Если ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *расходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x\colon |x| > |x_0|$ *он расходится.*

Доказательство.

- $\lim\limits_{n\to\infty} c_n x_0^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0\colon |c_n x_0^n| \leqslant M \Rightarrow |c_n x^n| \leqslant M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$.

  Тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^k$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ сходится абсолютно.

- Если бы $\exists x_1\colon |x_1| > |x_0|$ & $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x_1^k$ сходится, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$ сходился бы, что противоречит условию.

■

Следствие 1.1.3. $\exists R > 0\colon$ *при* $|x| < R$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *сходится, а при* $|x| > R$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *расходится.*

R называется **радиусом сходимости степенного ряда**.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k x^k|$. По признаку д'Аламбера $\lim\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n} \cdot |x|\right| \ldots$

Глава 2

21.03.2018, математический анализ

Найдём радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^p}$:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = 1$$

Подставим $x = 1$, тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

Подставим $x = -1$, тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^p}$ сходится абсолютно при $p > 1$, сходится условно при $0 < p \leqslant 1$ и расходится при $p \leqslant 0$.

Утверждение 2.0.1. *Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k = S(x)$ *при* $|x| < R$, *то*

1. $\int\limits_a^b S(x)\,dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \int\limits_a^b x^k\,dx$, *где* $|a|, |b| < R$
2. $(S(x))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (x^k)^{(m)}$, *где* $|x| < R$

Связь суммы ряда и его коэффициентов:

1. $c_0 = S(0)$
2. $c_1 = S'(0)$
3. $c_2 = \frac{S''(0)}{2}$
4. $c_3 = \frac{S'''(0)}{3!}$
5. $c_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$

Т. о., $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k)}(0)}{k!} x^k$ при $|x| < R$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|}{\left|\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|(n+1)}{|f^{(n+1)}(0)}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Тогда $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k$ при $\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}\,x^{n+1}=0$.

Разложение некоторых функций:

1. $f(x)=e^x$. Для $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$

$$R=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

$$r_n=\frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}\,x^{n+1}<\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}\,|x|^{n+1}\ \&\ \lim_{n\to\infty}\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}\,|x|^{n+1}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}\,x^{n+1}=0$$

Тогда при $x\in\mathbb{R}$

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

2. $f(x)=\sin x$. Для $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\,x^{2k-1}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n-1)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}2n(2n+1)=\infty$$

$$r_n=\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\,|\sin\left(\Theta x+\frac{\pi}{den}\right)<\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \&\ \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\,|\sin\left(\Theta x+\frac{\pi}{den}\right)=0$$

Тогда при $x\in\mathbb{R}$

$$\sin x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\,x^{2k-1}$$

3. $f(x)=\cos x$. Для $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{(2k)!}\,x^{2k}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}}=\lim_{n\to\infty}(2n+1)(2n+2)=\infty$$

$$r_n=\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\,|\cos\left(\Theta x+\frac{\pi}{den}\right)<\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \&\ \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\,|\cos\left(\Theta x+\frac{\pi}{den}\right)=0$$

Тогда при $x\in\mathbb{R}$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{(2k)!}\,x^{2k}$$

4. $f(x)=(1+x)^\alpha$ при $\alpha\notin\mathbb{N}$. Для $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}\,x^k$

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)|(k+1)!}{k!|\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k)|}=\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{|\alpha-k|}=1$$

$$r_n=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)(1+\Theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}\,x^{n+1}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\Theta x)^{n+1-\alpha}}$$

Если $x\in[0;1)$ $|r_n(x)|\leqslant M\cdot\frac{x^{n+1}}{1}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$.

Тогда при $x\in(-1;1)$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}\,x^k$$

2.0.1 Приложения разложений функций в ряд Маклорена

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \ |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \ |x| < 1$$

Тогда при $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t} = \int\limits_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Глава 3

28.03.2018, математический анализ

3.0.1 Тригонометрические ряды Фурье

Представим функцию $f(x)$ на отрезке $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n}{T}\,x + \sum_{k=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi n}{T}\,x$$

Скалярным произведением функций $f(x)$ **и** $g(x)$ называется $\langle f(x), g(x)\rangle = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)g(x)\,dx$.

Проверим, что функции 1, $\cos\frac{2\pi n}{T}\,x$ и $\sin\frac{2\pi n}{T}\,x$ попарно ортогональны:

- $\displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\frac{2\pi n}{T}\,x\,dx = \frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n}{T}\,x\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$
- $\displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin\frac{2\pi n}{T}\,x\,dx = -\frac{T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi n}{T}\,x\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$
- $\displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\frac{2\pi m}{T}\,x\cos\frac{2\pi n}{T}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\frac{2\pi(m-n)}{T}\,x + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\frac{2\pi(m+n)}{T}\,x = 0,\ m \neq n$
- $\displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin\frac{2\pi m}{T}\,x\sin\frac{2\pi n}{T}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\frac{2\pi(m-n)}{T}\,x - \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\frac{2\pi(m+n)}{T}\,x = 0,\ m \neq n$
- $\displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\frac{2\pi m}{T}\,x\sin\frac{2\pi n}{T}\,x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin\frac{2\pi(m+n)}{T}\,x + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin\frac{2\pi(m-n)}{T}\,x = 0$

Найдём квадраты этих функций:

- $\displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1^2\,dx = T$
- $\displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2\frac{2\pi n}{T}\,x\,dx = \frac{T}{2}$

- $\displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 \frac{2\pi n}{T} x \, dx = \frac{T}{2}$

Тогда можно найти коэффициенты:

- $\displaystyle a_k = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos \frac{2\pi k}{T} x \, dx$
- $\displaystyle b_k = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin \frac{2\pi k}{T} x \, dx$

Причём если $f(x)$ чётна, то $b_k = 0$. Если же $f(x)$ нечётна, то $a_k = 0$.

Глава 4

04.04.2018, математический анализ

4.1 Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение вида $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x))$. n называется **его порядком**.

4.1.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$y' = f(x) \cdot g(y)$

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C$$

4.1.2 Однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$
Пусть $p(x) = \frac{y}{x}$, тогда $y = x \cdot p(x) \Rightarrow y' = p(x) + x \cdot p'(x)$. Получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow xp'(x) = F(p(x)) - p \Leftrightarrow p' = \frac{F(p(x)) - p}{x}$$

Решив его, найдём $p(x)$ и y.

Глава 5

11.04.2018, математический анализ

5.0.1 Уравнение в полных дифференциалах

Уравнением в полных дифференциалах называется уравнение вида $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$. Если $M'_y = N'_x$, то $M(x,y) = F'_x$ & $N(x,y) = F'_y$, тогда

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \Leftrightarrow M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \Leftrightarrow dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C$$

Пусть $M'_y \neq N'_x$, но $\exists \mu(x,y)\colon (\mu \cdot M)'_y = (\mu \cdot N)'_x$, тогда

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \Leftrightarrow \mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0 \Leftrightarrow dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C$$

$\mu(x,y)$ называется **интегрирующим множителем**.

5.1 Линейное уравнение первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $y' = a(x)y + b(x)$.

Рассмотрим **метод вариации произвольной постоянной**.

1. Решим уравнение
$$y'_0 = a(x)y_0 \Leftrightarrow \frac{dy_0}{y_0} = a(x)\,dx \Rightarrow \ln y_0 = \varphi(x) + \ln C \Rightarrow y_0 = Ce^{\varphi(x)}$$

2. Подставим $y = C(x)e^{\varphi(x)}$ в исходное уравнение:
$$C'(x)e^{\varphi(x)} + C(x)e^{\varphi(x)}\varphi'(x) = a(x)C(x)e^{\varphi(x)} + b(x)$$

   $y_0 = Ce^{\varphi(x)} \Rightarrow Ce^{\varphi(x)}\varphi'(x) = a(x)Ce^{\varphi(x)}$, тогда получим
$$C'(x)e^{\varphi(x)} = b(x) \Leftrightarrow C'(x) = b(x)e^{-\varphi(x)} \Leftrightarrow C(x) = \int b(x)e^{-\varphi(x)}$$

Тогда $y = C(x)e^{\varphi(x)}$.

Глава 6

18.04.2018, математический анализ

6.0.1 Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y' = a(x)y + b(x)y^n$, где $n \neq 1$. Пусть $\frac{1}{y^{n-1}} = z$, тогда

$$y' = a(x)y + b(x)y^n \Leftrightarrow \frac{y'}{y^n} = a(x)y^{1-n} + b(x) \Leftrightarrow \frac{z'}{1-n} = a(x)z + b(x)$$

Т. о., решение уравнения Бернулли сводится к решению линейного уравнения.

Теорема 6.0.1. *Пусть* $y'(x) = f(x, y(x))$ & $y(x_0) = y_0$, *причём в некоторой окрестности* $\exists M > 0\colon |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant M|y_1 - y_2|$, *тогда уравнение имеет единственное решение в окрестности* $(x_0 - d; x_0 + d)$: $y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx + y_0$.

Это уравнение можно решить методом итераций:

$y_1(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx + y_0$

$y_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\, dx + y_0$

Доказательство.

$$y_n(x) - y_{n-1}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} (f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x)))\, dx$$

$|\int\limits_{a}^{b} g(x)\, dx| \leqslant |b - a| \max_{x\in[a;b]} |g(x)|$, тогда

$$\max_{|x-x_0|<d} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant d \max_{|x-x_0|<d} |f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x))| \leqslant dM \max_{|x-x_0|<d} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)|$$

Пусть $q = dM < 1$, тогда

$$\max_{|x-x_0|<d} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant q \max_{|x-x_0|<d} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| \leqslant q^{n-1} \max_{|x-x_0|<d} |y_1(x) - y_0|$$

Тогда

$$\forall k \geqslant 1 \max_{x\in[a;b]} |y_{n+k}(x) - y_n(x)| = \max_{|x-x_0|<d} |(y_{n+k}(x) - y_{n+k-1}(x)) + (y_{n+k-1}(x) + y_{n+k-2}(x)) + \ldots + (y_{n+1}(x) - y_n(x))| \leqslant \max_{|x-x_0|<d} |y_{n+k}($$

По признаку Коши получим

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n > N\ \forall k \geqslant 1 \max_{x\in[a;b]} |y_{n+k}(x) - y_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \tilde{y}(x)$$

Докажем единственность:

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| = |\int\limits_{x_0}^{x} (f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x)))\, dx| \Rightarrow \max_{|x-x_0|<d} |y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant |x - x_0| \cdot \max_{|x-x_0|<d} |f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))| < dM \max_{|x-x_0|<d} |y(x) -$$

Противоречие, значит, решение единственно. ∎

Глава 7

25.04.2018, математический анализ

Рассмотрим $F(y, y', y'') = 0$. Пусть $y'(x) = z(y)$, тогда $y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z$ и $F(y, y', y'') = 0 \Leftrightarrow F(y, z, z' \cdot z) = 0$.

7.0.1 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$.

Введём функции $y_0 = y, y_1 = y', \ldots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$, тогда

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ \ldots \\ y_{n-1}' = f(x) - a_0 y_0 - a_1 y_1 - \ldots - a_{n-1} y_{n-1} \end{cases}$$

Введём вектор-функцию $Y(x) = \begin{Vmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_{n-1} \end{Vmatrix}$, тогда $Y' = AY + F$, где $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \ldots - a_{n-1} & & \end{Vmatrix}$, $F = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ f(x) \end{Vmatrix}$

Уравнение можно решить методом итераций: $Y_k(x) = Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} (AY_{k-1}(t) + F(t))\,dt$.

Определителем Вронского, или **вронскианом**, называется определитель

$$\begin{vmatrix} \tilde{y}_0(x_0) & \tilde{y}_1(x_0) & \ldots & \tilde{y}_{n-1}(x_0) \\ \tilde{y}_0'(x_0) & \tilde{y}_1'(x_0) & \ldots & \tilde{y}_{n-1}'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y}_0^{(n-1)}(x_0) & \tilde{y}_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & \tilde{y}_{n-1}^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

где $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n$ — частные решения уравнения.

Утверждение 7.0.1. *Если решения* $\tilde{y}_0, \ldots, \tilde{y}_{n-1}$

Глава 8

16.05.2018, математический анализ

Пусть дифференциальному уравнению $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_1 k + a_0 = 0$.

Доказательство. $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

Пусть $k_1 = k_2$, тогда $k_1^2 + a_1 k_1 + a_0 = 0 \;\&\; 2k_1 + a_1 = 0$. Подставим $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$:

$$e^{k_1 x}(C_1 k_1^2 + 2C_2 k_1 + C_2 x k_1^2 + C_1 a_1 k_1 + C_2 a_1 + C_2 a_1 k_1 x + C_1 a_0 + C_2 a_0 x) = 0 \Leftrightarrow C_1(k_1^2 + a_1 k_1 + a_0) + C_2(2k_1 + a_1) + C_2 x(k_1^2 + a_1 k_1 + a_0) = 0$$

■

Пусть $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, тогда, используя $e^{it} = \cos t + i \sin t$, получим

$$y(x) = C_{10} e^{(\alpha + i\beta)x} + C_{20} e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(C_{10} e^{i\beta x} + C_{20} e^{-i\beta x}) = e^{\alpha x}((C_{10} + C_{20}) \cos \beta x + i(C_{10} - C_{20}) \sin \beta x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$$

8.0.1 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим следующие методы решения уравнений вида $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$.

Метод вариации произвольных постоянных

1. Найдём решение $y_0 = C_1 \tilde{y}_1 + C_2 \tilde{y}_2 + \ldots + C_n \tilde{y}_n$ уравнения $y_0^{(n)} + a_{n-1} y_0^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_0' + a_0 y_0 = 0$.
2. Решением исходного уравнения будет $y(x) = C_1(x)\tilde{y}_1 + \ldots + C_n(x)\tilde{y}_n$.
3. Найдём $C_1(x), \ldots, C_n(x)$, решая систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + \ldots + C_n'(x)\tilde{y}_n = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1' + \ldots + C_n'(x)\tilde{y}_n' = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1'' + \ldots + C_n'(x)\tilde{y}_n'' = 0 \\ \ldots \\ C_1'(x)\tilde{y}_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\tilde{y}_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

и интегрируя $C_1'(x), \ldots, C_n'(x)$.

Доказательство. Пусть дано уравнение $y'' + a_1 y' + a_0 = f(x)$ и $y_0(x) = C_1 \tilde{y}_1 + C_2 \tilde{y}_2$, тогда

$$y(x) = C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2$$

$$y'(x) = C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_1(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2 + C_2(x)\tilde{y}_2'$$

$$y''(x) = C_1''(x)\tilde{y}_1 + 2C_1'\tilde{y}_1' + C_1(x)\tilde{y}_1'' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + 2C_2'\tilde{y}_2' + C_2(x)\tilde{y}_2''$$

Подставим в уравнение:

$$C_1''(x)\tilde{y}_1 + 2C_1'\tilde{y}_1' + C_1(x)\tilde{y}_1'' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + 2C_2'\tilde{y}_2' + C_2(x)\tilde{y}_2'' + a(C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_1(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2 + C_2(x)\tilde{y}_2') + b(C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2) = f(x) \Leftrightarrow C_1$$

Решим систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_2'(x)\tilde{y}_2 = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2' = f(x) \end{cases}$$

тогда

$$C_1''(x)\tilde{y}_1 + C_1'\tilde{y}_1' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + C_2'\tilde{y}_2' = 0$$

Подставляя в уравнение, получим $f(x) = f(x)$. ■

Метод неопределённых коэффициентов

Уравнение $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ можно решить методом неопределённых коэффициентов, если

$$f(x) = \sum_j e^{\alpha_j x}(P_j(x)\cos\beta_j x + Q_j(x)\sin\beta_j x)$$

Тогда решение имеет вид

$$\sum_j e^{\alpha_j x}(T_j(x)\cos\beta_j x + R_j(x)\sin\beta_j x)\, x^{s_j}$$

где s_j — кратность корня.

8.0.2 Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Решим систему

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

$$y_1'' = ay_1' + by_2' \Rightarrow y_1'' = ay_1' + b(cy_1 + dy_2) \Rightarrow y_1'' = ay_1' + bcy_1 + d(y_1' - ay_1) \Rightarrow y_1'' = (a+d)y_1' + (bc - ad)y = 0$$

Т. о., система свелась к уравнению.

Глава 9

23.05.2018, математический анализ

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_0' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

Известно, что $y_1 = Le^{kx}$, $y_2 = Me^{kx}$, тогда

$$\begin{cases} Lk = aL + bM \\ Mk = cL + dM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L(a-k) + Mb = 0 \\ Lc + M(d-k) = 0 \end{cases}$$

Если $\begin{vmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{vmatrix} \neq 0$, то получим единственное решение — нулевое. Тогда

$$(a-k)(d-k) - bc = 0 \Leftrightarrow k^2 - k(a+d) + ad - bc = 0$$

Получили характеристическое уравнение.

Решим системы

$$\begin{cases} L(a-k_i) + Mb = 0 \\ Lc + M(d-k_i) = 0 \end{cases}$$

где k_i — i-й корень характеристического уравнения, причём в каждой системе одно из уравнений можно убрать, т. к. главный определитель равен нулю. Возьмём частные решения $(L_1, M_1), (L_2, M_2)$, тогда

$$y_1 = C_1L_1e^{k_1x} + C_2L_2e^{k_2x}$$

$$y_0 = C_1M_1e^{k_1x} + C_2M_2e^{k_2x}$$

9.0.1 Неоднородные системы

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 + f_1 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 + f_2 \end{cases}$$

Решая соответствующую однородную систему, получим

$$y_10 = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2$$

$$y_20 = D_1\tilde{y}_1 + D_2\tilde{y}_2$$

где D_1 и D_2 линейно связаны с C_1 и C_2 сооветственно.

Тогда

$$y_1 = C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2$$

$$y_2 = D_1(x)\tilde{y}_1 + D_2(x)\tilde{y}_2$$

Подставляя в систему, получим

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_2'(x)\tilde{y}_2 + C_1(x)\tilde{y}_1' + C_2(x)\tilde{y}_2' = a(C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2) + b(D_1(x)\tilde{y}_1 + D_2(x)\tilde{y}_2) + f_1(x) \\ D_1'(x)\tilde{y}_1 + D_2'(x)\tilde{y}_2 + D_1(x)\tilde{y}_1' + D_2(x)\tilde{y}_2' = c(C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2) + d(D_1(x)\tilde{y}_1 + D_2(x)\tilde{y}_2) + f_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_2'(x)\tilde{y}_2 = f \\ D_1'(x)\tilde{y}_1 + D_2'(x)\tilde{y}_2 = \end{cases}$$

Решая, получим $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, откуда найдём $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

9.1 Приближённое решение дифференциальных уравнений

9.1.1 Решение с помощью степенного ряда

Рассмотрим уравнение $y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Найдём его решение в окрестности точки x_0:

$$y(x) = y_0 + y_1(x - x_0) + \frac{y_2}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{F(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})}{n!}(x - x_0)^n + c_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \ldots$$

Неизвестные коэффициенты можно определить подстановкой в исходное уравнение или его дифференцированием и подстановкой начальных условий.

9.1.2 Метод Эйлера

$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k)$

Можно улучшить точность: $y_{k+1} = y_k + f($

Метод приближённого решения дифференциального уравнения высшего порядка заключается в его сведении к системе линейных уравнений.

9.1.3 Графический метод

Приближённые решения уравнения вида $y' = f(x, y)$ можно получить графическим методом, находя изоклины — линии, на которых производная функции не меняет значение. По ним можно получить представление о том, какую форму имеет кривая.

Рассмотрим **динамическую систему**

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t) \\ \dot{y} = g(x, y, t) \end{cases}$$

Если $\begin{cases} f(a, b, t) = 0 \\ g(a, b, t) = 0 \end{cases}$, то (a, b) называется **точкой покоя**, или **положением равновесия**.

Исследуем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

Для неё $(0, 0)$ — точка покоя.

Решая уравнение $\begin{vmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{vmatrix} = 0$, получим корни k_1 и k_2.

Тогда

1. Если $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, то
$$x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} y = C_1 \frac{k_1 - a}{b} e^{k_1 t} + C_2 \frac{k_2 - a}{b} e^{k_2 t}$$
   - Если $k_1, k_2 < 0$, то $(0, 0)$ — устойчивый узел.
   - Если $k_1, k_2 > 0$, то $(0, 0)$ — неустойчивый узел.
   - Если $k_1 < 0 < k_2$, то $(0, 0)$ — седло.
2. Если $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то
$$\begin{cases} x = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \\ y = \left(\frac{\alpha - a}{b} C_1 + \frac{\beta}{b} C_2 \right) e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \end{cases}$$
   - Если $\alpha < 0$, то $(0, 0)$ — устойчивый фокус.
   - Если $\alpha > 0$, то $(0, 0)$ — неустойчивый фокус.
   - Если $\alpha = 0$, то $(0, 0)$ — центр.
3. Если $k_1 = k_2 = \alpha \in R$, то
$$x =$$