

# Оглавление

<b>1</b>	<b>28.03.2018, математический анализ</b>	<b>2</b>
1.0.1	Тригонометрические ряды Фурье . . . . .	2
<b>2</b>	<b>11.04.2018, математический анализ</b>	<b>4</b>
2.0.1	Уравнение в полных дифференциалах . . . . .	4
2.1	Линейное уравнение первого порядка . . . . .	4
<b>3</b>	<b>18.04.2018, математический анализ</b>	<b>5</b>
3.0.1	Уравнение Бернулли . . . . .	5
<b>4</b>	<b>25.04.2018, математический анализ</b>	<b>6</b>
4.0.1	Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами . . . . .	6
<b>5</b>	<b>16.05.2018, математический анализ</b>	<b>7</b>
5.0.1	Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами . . . . .	7
5.0.2	Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . .	8
<b>6</b>	<b>23.05.2018, математический анализ</b>	<b>9</b>
6.0.1	Неоднородные системы . . . . .	9
6.1	Приближённое решение дифференциальных уравнений . . . . .	10
6.1.1	Решение с помощью степенного ряда . . . . .	10
6.1.2	Метод Эйлера . . . . .	11
6.1.3	Графический метод . . . . .	11

# Глава 1

## 11.04.2018, математический анализ

### 1.0.1 Уравнение в полных дифференциалах

**Уравнением в полных дифференциалах** называется уравнение вида  $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ . Если  $M'_y = N'_x$ , то  $M(x,y) = F'_x$  &  $N(x,y) = F'_y$ , тогда

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \Leftrightarrow M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \Leftrightarrow dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C$$

Пусть  $M'_y \neq N'_x$ , но  $\exists \mu(x,y): (\mu \cdot M)'_y = (\mu \cdot N)'_x$ , тогда

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \Leftrightarrow \mu(x,y)M(x,y) dx + \mu(x,y)N(x,y) dy = 0 \Leftrightarrow dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C$$

$\mu(x,y)$  называется **интегрирующим множителем**.

### 1.1 Линейное уравнение первого порядка

**Линейным дифференциальным уравнением первого порядка** называется уравнение вида  $y' = a(x)y + b(x)$ .

Рассмотрим метод вариации произвольной постоянной.

1. Решим уравнение

$$y'_0 = a(x)y_0 \Leftrightarrow \frac{dy_0}{y_0} = a(x) dx \Rightarrow \ln y_0 = \varphi(x) + \ln C \Rightarrow y_0 = Ce^{\varphi(x)}$$

2. Подставим  $y = C(x)e^{\varphi(x)}$  в исходное уравнение:

$$C'(x)e^{\varphi(x)} + C(x)e^{\varphi(x)}\varphi'(x) = a(x)C(x)e^{\varphi(x)} + b(x)$$

$y_0 = Ce^{\varphi(x)} \Rightarrow Ce^{\varphi(x)}\varphi'(x) = a(x)Ce^{\varphi(x)}$ , тогда получим

$$C'(x)e^{\varphi(x)} = b(x) \Leftrightarrow C'(x) = b(x)e^{-\varphi(x)} \Leftrightarrow C(x) = \int b(x)e^{-\varphi(x)}$$

Тогда  $y = C(x)e^{\varphi(x)}$ .

## Глава 2

# 18.04.2018, математический анализ

### 2.0.1 Уравнение Бернулли

**Уравнением Бернулли** называется уравнение вида  $y' = a(x)y + b(x)y^n$ , где  $n \neq 1$ . Пусть  $\frac{1}{y^{n-1}} = z$ , тогда

$$y' = a(x)y + b(x)y^n \Leftrightarrow \frac{y'}{y^n} = a(x)y^{1-n} + b(x) \Leftrightarrow \frac{z'}{1-n} = a(x)z + b(x)$$

Т. о., решение уравнения Бернулли сводится к решению линейного уравнения.

**Теорема 2.0.1.** Пусть  $y'(x) = f(x, y(x))$  &  $y(x_0) = y_0$ , причём в некоторой окрестности  $\exists M > 0: |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$ , тогда уравнение имеет единственное решение в окрестности  $(x_0 - d; x_0 + d)$ :  $y(x) = \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx + y_0$ .

Это уравнение можно решить методом итераций:

$$y_1(x) = \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx + y_0$$

$$y_n(x) = \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx + y_0$$

**Доказательство.**

$$y_n(x) - y_{n-1}(x) = \int_{x_0}^x (f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x))) dx$$

$$\left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq |b - a| \max_{x \in [a; b]} |g(x)|, \text{ тогда}$$

$$\max_{|x-x_0|<d} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq d \max_{|x-x_0|<d} |f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x))| \leq dM \max_{|x-x_0|<d} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)|$$

Пусть  $q = dM < 1$ , тогда

$$\max_{|x-x_0|<d} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq q \max_{|x-x_0|<d} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| \leq q^{n-1} \max_{|x-x_0|<d} |y_1(x) - y_0|$$

Тогда

$$\forall k \geq 1 \max_{x \in [a; b]} |y_{n+k}(x) - y_n(x)| = \max_{|x-x_0|<d} |(y_{n+k}(x) - y_{n+k-1}(x)) + (y_{n+k-1}(x) - y_{n+k-2}(x)) + \dots + (y_{n+1}(x) - y_n(x))| \leq \max_{|x-x_0|<d} |y_{n+k}(x) - y_n(x)|$$

По признаку Коши получим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \forall k \geq 1 \max_{x \in [a; b]} |y_{n+k}(x) - y_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \tilde{y}(x)$$

Докажем единственность:

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| = \left| \int_{x_0}^x (f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))) dx \right| \Rightarrow \max_{|x-x_0|<d} |y(x) - \tilde{y}(x)| \leq |x - x_0| \cdot \max_{|x-x_0|<d} |f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))| < dM \max_{|x-x_0|<d} |y(x) - \tilde{y}(x)|$$

Противоречие, значит, решение единственно. ■

## Глава 3

# 25.04.2018, математический анализ

Рассмотрим  $F(y, y', y'') = 0$ . Пусть  $y'(x) = z(y)$ , тогда  $y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z$  и  $F(y, y', y'') = 0 \Leftrightarrow F(y, z, z' \cdot z) = 0$ .

### 3.0.1 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

**Линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка** называется уравнение вида  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$ .

Введём функции  $y_0 = y, y_1 = y', \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$ , тогда

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y'_0 = y_1 \\ y'_1 = y_2 \\ \dots \\ y'_{n-1} = f(x) - a_0y_0 - a_1y_1 - \dots - a_{n-1}y_{n-1} \end{cases}$$

Введём вектор-функцию  $Y(x) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ , тогда  $Y' = AY + F$ , где  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ ,  $F =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Уравнение можно решить методом итераций:  $Y_k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x (AY_{k-1}(t) + F(t)) dt$ .

**Определителем Вронского**, или **вронскианом**, называется определитель

$$\begin{vmatrix} \tilde{y}_0(x_0) & \tilde{y}_1(x_0) & \dots & \tilde{y}_{n-1}(x_0) \\ \tilde{y}'_0(x_0) & \tilde{y}'_1(x_0) & \dots & \tilde{y}'_{n-1}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y}_0^{(n-1)}(x_0) & \tilde{y}_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & \tilde{y}_{n-1}^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

где  $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$  — частные решения уравнения.

**Утверждение 3.0.1.** Если решения  $\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n-1}$

## Глава 4

# 16.05.2018, математический анализ

Пусть дифференциальному уравнению  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$  соответствует характеристическое уравнение  $k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \dots + a_1k + a_0 = 0$ .

**Доказательство.**  $y'' + a_1y' + a_0y = 0$

Пусть  $k_1 = k_2$ , тогда  $k_1^2 + a_1k_1 + a_0 = 0$  &  $2k_1 + a_1 = 0$ . Подставим  $y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}$ :

$$e^{k_1x}(C_1k_1^2 + 2C_2k_1 + C_2xk_1^2 + C_1a_1k_1 + C_2a_1 + C_2a_1k_1x + C_1a_0 + C_2a_0x) = 0 \Leftrightarrow C_1(k_1^2 + a_1k_1 + a_0) + C_2(2k_1 + a_1) + C_2x(k_1^2 + a_1k_1 + a_0) = 0$$

■

Пусть  $k_1 = \alpha + i\beta$ ,  $k_2 = \alpha - i\beta$ , тогда, используя  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ , получим

$$y(x) = C_{10}e^{(\alpha+i\beta)x} + C_{20}e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(C_{10}e^{i\beta x} + C_{20}e^{-i\beta x}) = e^{\alpha x}((C_{10} + C_{20})\cos \beta x + i(C_{10} - C_{20})\sin \beta x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

### 4.0.1 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим следующие методы решения уравнений вида  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$ .

#### Метод вариации произвольных постоянных

1. Найдём решение  $y_0 = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 + \dots + C_n\tilde{y}_n$  уравнения  $y_0^{(n)} + a_{n-1}y_0^{(n-1)} + \dots + a_1y_0' + a_0y_0 = 0$ .
2. Решением исходного уравнения будет  $y(x) = C_1(x)\tilde{y}_1 + \dots + C_n(x)\tilde{y}_n$ .
3. Найдём  $C_1(x), \dots, C_n(x)$ , решая систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + \dots + C_n'(x)\tilde{y}_n = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1' + \dots + C_n'(x)\tilde{y}_n' = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1'' + \dots + C_n'(x)\tilde{y}_n'' = 0 \\ \dots \\ C_1'(x)\tilde{y}_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)\tilde{y}_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

и интегрируя  $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$ .

**Доказательство.** Пусть дано уравнение  $y'' + a_1y' + a_0 = f(x)$  и  $y_0(x) = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2$ , тогда

$$y(x) = C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2$$

$$y'(x) = C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_1(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2 + C_2(x)\tilde{y}_2'$$

$$y''(x) = C_1''(x)\tilde{y}_1 + 2C_1'(x)\tilde{y}_1' + C_1(x)\tilde{y}_1'' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + 2C_2'(x)\tilde{y}_2' + C_2(x)\tilde{y}_2''$$

Подставим в уравнение:

$$C_1''(x)\tilde{y}_1 + 2C_1'(x)\tilde{y}_1' + C_1(x)\tilde{y}_1'' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + 2C_2'(x)\tilde{y}_2' + C_2(x)\tilde{y}_2'' + a(C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_1(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2 + C_2(x)\tilde{y}_2') + b(C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2) = f(x) \Leftrightarrow C_1''(x)\tilde{y}_1 + C_2''(x)\tilde{y}_2 + a(C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2) = f(x)$$

Решим систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_2'(x)\tilde{y}_2 = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2' = f(x) \end{cases}$$

тогда

$$C_1''(x)\tilde{y}_1 + C_1'\tilde{y}_1' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + C_2'\tilde{y}_2' = 0$$

Подставляя в уравнение, получим  $f(x) = f(x)$ . ■

#### Метод неопределённых коэффициентов

Уравнение  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$  можно решить методом неопределённых коэффициентов, если

$$f(x) = \sum_j e^{\alpha_j x} (P_j(x) \cos \beta_j x + Q_j(x) \sin \beta_j x)$$

Тогда решение имеет вид

$$\sum_j e^{\alpha_j x} (T_j(x) \cos \beta_j x + R_j(x) \sin \beta_j x) x^{s_j}$$

где  $s_j$  — кратность корня.

#### 4.0.2 Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Решим систему

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

$$y_1'' = ay_1' + by_2' \Rightarrow y_1'' = ay_1' + b(cy_1 + dy_2) \Rightarrow y_1'' = ay_1' + bcy_1 + d(y_1' - ay_1) \Rightarrow y_1'' = (a+d)y_1' + (bc-ad)y_1 = 0$$

Т.о., система свелась к уравнению.

## Глава 5

# 23.05.2018, математический анализ

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_0' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

Известно, что  $y_1 = Le^{kx}$ ,  $y_2 = Me^{kx}$ , тогда

$$\begin{cases} Lk = aL + bM \\ Mk = cL + dM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L(a - k) + Mb = 0 \\ Lc + M(d - k) = 0 \end{cases}$$

Если  $\begin{vmatrix} a - k & b \\ c & d - k \end{vmatrix} \neq 0$ , то получим единственное решение — нулевое. Тогда

$$(a - k)(d - k) - bc = 0 \Leftrightarrow k^2 - k(a + d) + ad - bc = 0$$

Получили характеристическое уравнение.

Решим системы

$$\begin{cases} L(a - k_i) + Mb = 0 \\ Lc + M(d - k_i) = 0 \end{cases}$$

где  $k_i$  —  $i$ -й корень характеристического уравнения, причём в каждой системе одно из уравнений можно убрать, т. к. главный определитель равен нулю. Возьмём частные решения  $(L_1, M_1)$ ,  $(L_2, M_2)$ , тогда

$$y_1 = C_1 L_1 e^{k_1 x} + C_2 L_2 e^{k_2 x}$$

$$y_0 = C_1 M_1 e^{k_1 x} + C_2 M_2 e^{k_2 x}$$

### 5.0.1 Неоднородные системы

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 + f_1 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 + f_2 \end{cases}$$

Решая соответствующую однородную систему, получим

$$y_1 0 = C_1 \tilde{y}_1 + C_2 \tilde{y}_2$$

$$y_2 0 = D_1 \tilde{y}_1 + D_2 \tilde{y}_2$$

где  $D_1$  и  $D_2$  линейно связаны с  $C_1$  и  $C_2$  соответственно.

Тогда

$$y_1 = C_1(x) \tilde{y}_1 + C_2(x) \tilde{y}_2$$

$$y_2 = D_1(x) \tilde{y}_1 + D_2(x) \tilde{y}_2$$

Подставляя в систему, получим

$$\begin{cases} C_1'(x) \tilde{y}_1 + C_2'(x) \tilde{y}_2 + C_1(x) \tilde{y}_1' + C_2(x) \tilde{y}_2' = a(C_1(x) \tilde{y}_1 + C_2(x) \tilde{y}_2) + b(D_1(x) \tilde{y}_1 + D_2(x) \tilde{y}_2) + f_1(x) \\ D_1'(x) \tilde{y}_1 + D_2'(x) \tilde{y}_2 + D_1(x) \tilde{y}_1' + D_2(x) \tilde{y}_2' = c(C_1(x) \tilde{y}_1 + C_2(x) \tilde{y}_2) + d(D_1(x) \tilde{y}_1 + D_2(x) \tilde{y}_2) + f_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) \tilde{y}_1 + C_2'(x) \tilde{y}_2 = f_1(x) \\ D_1'(x) \tilde{y}_1 + D_2'(x) \tilde{y}_2 = f_2(x) \end{cases}$$

Решая, получим  $C_1'(x)$  и  $C_2'(x)$ , откуда найдём  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$ .

## 5.1 Приближённое решение дифференциальных уравнений

### 5.1.1 Решение с помощью степенного ряда

Рассмотрим уравнение  $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  с начальными условиями  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ . Найдём его решение в окрестности точки  $x_0$ :

$$y(x) = y_0 + y_1(x - x_0) + \frac{y_2}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{F(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})}{n!}(x - x_0)^n + c_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \dots$$

Неизвестные коэффициенты можно определить подстановкой в исходное уравнение или его дифференцированием и подстановкой начальных условий.



### 5.1.2 Метод Эйлера

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Можно улучшить точность:  $y_{k+1} = y_k + f(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}, y_k)$

Метод приближённого решения дифференциального уравнения высшего порядка заключается в его сведении к системе линейных уравнений.

### 5.1.3 Графический метод

Приближённые решения уравнения вида  $y' = f(x, y)$  можно получить графическим методом, находя изоклины — линии, на которых производная функции не меняет значение. По ним можно получить представление о том, какую форму имеет кривая.

Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t) \\ \dot{y} = g(x, y, t) \end{cases}$$

Если  $\begin{cases} f(a, b, t) = 0 \\ g(a, b, t) = 0 \end{cases}$ , то  $(a, b)$  называется **точкой покоя**, или **положением равновесия**.

Исследуем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

Для неё  $(0, 0)$  — точка покоя.

Решая уравнение  $\begin{vmatrix} a - k & b \\ c & d - k \end{vmatrix} = 0$ , получим корни  $k_1$  и  $k_2$ .

Тогда

1. Если  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ , то

$$x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} y = C_1 \frac{k_1 - a}{b} e^{k_1 t} + C_2 \frac{k_2 - a}{b} e^{k_2 t}$$

- Если  $k_1, k_2 < 0$ , то  $(0, 0)$  — устойчивый узел.
- Если  $k_1, k_2 > 0$ , то  $(0, 0)$  — неустойчивый узел.
- Если  $k_1 < 0 < k_2$ , то  $(0, 0)$  — седло.

2. Если  $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , то

$$\begin{cases} x = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \\ y = \left( \frac{\alpha - a}{b} C_1 + \frac{\beta}{b} C_2 \right) e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \end{cases}$$

- Если  $\alpha < 0$ , то  $(0, 0)$  — устойчивый фокус.
- Если  $\alpha > 0$ , то  $(0, 0)$  — неустойчивый фокус.
- Если  $\alpha = 0$ , то  $(0, 0)$  — центр.

3. Если  $k_1 = k_2 = \alpha \in \mathbb{R}$ , то

$$x =$$