

# Глава 1

## 09.03.2018, дискретная математика

### 1.1 Конечные автоматы

Назовём **алфавитом** конечное непустое множество и обозначим через  $X$ . Его элементы называются **буквами**. Конечная последовательность букв называется **словом**, а его **длиной** — количество букв в слове с учётом повторений.

Слово, не содержащее букв, называется **пустым** и обозначается  $\lambda$ .

Множество из всех слов алфавита  $X$  обозначается  $X^*$ .

**Конкатенацией слов**  $\alpha = x_1x_2 \dots x_n$  и  $\beta = y_1y_2 \dots y_m$  называется слово  $\alpha \cdot \beta = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$ .

**Степенью слова**  $\alpha = x_1 \dots x_n$  называется слово  $\alpha^n = \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .  $\alpha^0 = \lambda$ .

Языком называется множество  $L \subseteq X^*$ .

**Конечным автоматом** называется набор  $(X, S, \delta)$ , где  $X$  — алфавит,  $S$  — конечное множество **состояний**,  $\delta: S \times X \rightarrow S$  — функция перехода.

Если задан орграф, в котором каждой дуге соответствует буква, то по нему можно построить конечный автомат.

## Глава 2

# 14.03.2018, математический анализ

**Теорема 2.0.1 (интегральный признак Коши).** Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  — знакоположительный ряд. Если существует монотонная функция  $f(x)$  такая, что  $f(n) = a_n$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , то  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится  $\Leftrightarrow \exists \int_1^{+\infty} f(x) dx$ .

**Доказательство.** Площадь заштрихованной фигуры равна  $1a_1 + 1a_2 + \dots + 1a_n$ , а криволинейной трапеции —  $\int_1^{n+1} f(x) dx$ , тогда  $S_n > \int_1^{n+1} f(x) dx$ ,  $S_{n+1} - a_1 < \int_1^{n+1} f(x) dx$ .

$$1. \Leftarrow. \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n < a_1 + \int_1^{n+1} f(x) dx < a_1 + \int_1^{+\infty} f(x) dx \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится.}$$

$$2. \Rightarrow. \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_1^{n+1} f(x) dx < S_n < S \Rightarrow \exists \int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

■

### 2.0.1 Знакопеременные ряды

**Теорема 2.0.2.** Если  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  сходится, то  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  тоже сходится.

**Доказательство.** Пусть  $(S_n)$  и  $(\sigma_n)$  — частичные суммы рядов  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  соответственно. По критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall m > N \quad \forall k \geq 1 \quad |\sigma_{m+k} - \sigma_m| < \varepsilon$$

Тогда

$$|S_{m+k} - S_m| = \left| \sum_{i=1}^k a_{m+i} \right| \leq \sum_{i=1}^k |a_{m+i}| = |\sigma_{m+k} - \sigma_m| < \varepsilon$$

Значит,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится. ■

**Теорема 2.0.3 (признак Лейбница).** Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$  — знакочередующийся ряд. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , причём  $(a_n)$  — монотонная последовательность, то ряд сходится.

**Доказательство.**

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) < S_{2n+2}$$

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$$

Тогда по свойству ?? предела последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Значит, ряд сходится. ■

## 2.1 Функциональные ряды

**Теорема 2.1.1 (мажорантный признак сходимости).** Если существует последовательность  $(a_n): \forall n \in \mathbb{N} |f_n(x)| \leq a_n$ , то  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится  $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  сходится абсолютно.

### 2.1.1 Степенные ряды

**Степенным** называется ряд вида  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k$ .

**Теорема 2.1.2 (Абеля).**

- Если ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  сходится при  $x = x_0$ , то  $\forall x: |x| < |x_0|$  он сходится абсолютно.
- Если ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  расходится при  $x = x_0$ , то  $\forall x: |x| > |x_0|$  он расходится.

**Доказательство.**

- $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_0^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0: |c_n x_0^n| \leq M \Rightarrow |c_n x^n| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ .

Тогда  $\sum_{k=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^k$  сходится  $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  сходится абсолютно.

- Если бы  $\exists x_1: |x_1| > |x_0|$  &  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_1^k$  сходится, то  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$  сошелся бы, что противоречит условию.

■

**Следствие 2.1.3.**  $\exists R > 0$ : при  $|x| < R$   $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  сходится, а при  $|x| > R$   $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  расходится.

$R$  называется **радиусом сходимости степенного ряда**.

Рассмотрим ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k x^k|$ . По признаку д'Аламбера  $\lim_{n \rightarrow \infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \cdot |x| \right| \dots$

## Глава 3

### 21.03.2018, математический анализ

Найдём радиус сходимости ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^p}$ :

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^p = 1$$

Подставим  $x = 1$ , тогда  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^p}$  сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ .

Подставим  $x = -1$ , тогда  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^p}$  сходится абсолютно при  $p > 1$ , сходится условно при  $0 < p \leq 1$  и расходится при  $p \leq 0$ .

**Утверждение 3.0.1.** Если  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = S(x)$  при  $|x| < R$ , то

$$1. \int_a^b S(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_a^b x^k dx, \text{ где } |a|, |b| < R$$

$$2. (S(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x^k)^{(n)}, \text{ где } |x| < R$$

Связь суммы ряда и его коэффициентов:

$$1. c_0 = S(0)$$

$$2. c_1 = S'(0)$$

$$3. c_2 = \frac{S''(0)}{2}$$

$$4. c_3 = \frac{S'''(0)}{3!}$$

$$5. c_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$$

Т.о.,  $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k)}(0)}{k!} x^k$  при  $|x| < R$ .

Рассмотрим ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ .

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|}{\left| \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f^{(n)}(0)|(n+1)}{|f^{(n+1)}(0)|}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Тогда  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  при  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$ .

Разложение некоторых функций:

1.  $f(x) = e^x$ . Для  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

$$r_n = \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$$

Тогда при  $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

2.  $f(x) = \sin x$ . Для  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2n-1)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n(2n+1) = \infty$$

$$r_n = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \sin \left( \Theta x + \frac{\pi}{den} \right) \right| < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \sin \left( \Theta x + \frac{\pi}{den} \right) \right| = 0$$

Тогда при  $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$$

3.  $f(x) = \cos x$ . Для  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)(2n+2) = \infty$$

$$r_n = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \cos \left( \Theta x + \frac{\pi}{den} \right) \right| < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \cos \left( \Theta x + \frac{\pi}{den} \right) \right| = 0$$

Тогда при  $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

4.  $f(x) = (1+x)^\alpha$  при  $\alpha \notin \mathbb{N}$ . Для  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!} x^k$

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)|(k+1)!}{k!|\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k)|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{|\alpha-k|} = 1$$

$$r_n = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)(1+\Theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\Theta x)^{n+1-\alpha}}$$

Если  $x \in [0; 1)$   $|r_n(x)| \leq M \cdot \frac{x^{n+1}}{1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ .

Тогда при  $x \in (-1; 1)$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

### 3.0.1 Приложения разложений функций в ряд Маклорена

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad |x| < 1$$

Тогда при  $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

## Глава 4

# 23.03.2018, дискретная математика

### Теорема 4.0.1.

1. Язык  $L$  распознаётся конечным автоматом с  $n$  состояниями  $\Leftrightarrow \text{rank } L \leq n$ .
2. Если  $\text{rank } L = n$ , то существует конечный автомат с  $n$  состояниями, который распознаёт  $L$ , и никакой конечный автомат с меньшим числом состояний не распознаёт  $L$ .

### Доказательство.

1. Язык  $L$  распознаётся конечным автоматом  $A = (X, S, \delta, s_1, F)$  с  $n$  состояниями. Рассмотрим слова  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in X^*$ . Хотя бы два из состояний  $s_1\delta(\alpha_1), \dots, s_1\delta(\alpha_{n+1})$  совпадают.

Пусть  $s_1\delta(\alpha_i) = s_1\delta(\alpha_j)$ , где  $i \neq j$ .

$$s_1\delta(\alpha_i\gamma) = s_1\delta(\alpha_i)\delta(\gamma) = s_1\delta(\alpha_j)\delta(\gamma) = s_1\delta(\alpha_j\gamma) \Rightarrow (\alpha_i\gamma \in L \Leftrightarrow \alpha_j\gamma \in L)$$

Т.о., среди  $n + 1$  состояний всегда найдётся пара неразличимых, значит,  $\text{rank } L \leq n$ .

2. Пусть  $A = (X, S, \delta, s_1, F)$ , где  $S = \{[\alpha] \mid \alpha \in X^*\}$ ,  $\delta: [\alpha]\delta(x) = [\alpha x]$ ,  $s_1 = [\lambda]$ ,  $F = \{[\alpha] \mid \alpha \in L\}$ , тогда  $s_1\delta(\alpha) = [\alpha] \in F \Leftrightarrow \alpha \in L$ .

Пусть существует конечный автомат с  $k$  состояниями, где  $k < n$ .

■

**Базисом языка  $L$**  называется множество  $W \subseteq X^*$  такое, что:

1. Все слова из  $W$  попарно различимы.
2. Любое другое слово неотличимо от одного из слов множества  $W$ .

**Теорема 4.0.2.** Множество  $W$  — базис  $\Leftrightarrow$

1. Все слова из  $W$  попарно различимы.
2.  $\lambda \in W$
3.  $\forall \alpha \in W \forall x \in X \exists \beta \in W: \alpha x \sim \beta$

**Доказательство.** Докажем пункт 2 по индукции.

• *База индукции.*  $d$

• *Шаг индукции.* Пусть доказано для  $|\alpha| \leq k$ . Рассмотрим  $\beta: |\beta| = k \ \& \ \beta \sim \gamma \in W$ .  $\beta x \sim \gamma x \sim \delta \in W$ .

■

Два состояния  $s$  и  $s'$  называются **эквивалентными относительно автомата**  $A = (X, S, \delta, s_1, F)$ , если  $\forall \alpha \in X^* s\delta(\alpha) \in F \Leftrightarrow s'\delta(\alpha) \in F$ .

Автомат называется **связным**, если  $\forall s \in S \exists \alpha \in X^* s_1\delta(\alpha) = s$ .

Автомат называется **приведённым**, если в нём нет эквивалентных состояний.

Пусть задан автомат  $A = (X, S, \delta, s_1, F)$ . Рассмотрим автомат  $A_m = (X, S_m, \delta_m, s_m, F_m)$ , где  $S_m = S / \sim = \{[s] \mid s \in S\}$ ,  $\delta_m: [s]\delta(x) = [s\delta(x)]$ ,  $s_m = [s_1]$ ,  $F_m = \{[s] \mid s \in F\}$ , тогда  $[s_1]\delta(\alpha) = [s_1\delta(\alpha)] \in F_m$ , т.к.  $s_1\delta(\alpha) \in F$ .

$s \sim_{k+1} s' \Leftrightarrow s \sim_k s' \ \& \ \forall x \in X s\delta(x) \sim_k s'\delta(x)$

## Глава 5

# 28.03.2018, математический анализ

### 5.0.1 Тригонометрические ряды Фурье

Представим функцию  $f(x)$  на отрезке  $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$  в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + \sum_{k=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n}{T} x$$

**Скалярным произведением функций  $f(x)$  и  $g(x)$**  называется  $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)g(x) dx$ .

Проверим, что функции  $1$ ,  $\cos \frac{2\pi n}{T} x$  и  $\sin \frac{2\pi n}{T} x$  попарно ортогональны:

- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{T}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n}{T} x \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$
- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi n}{T} x dx = -\frac{T}{2\pi n} \cos \frac{2\pi n}{T} x \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$
- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi m}{T} x \cos \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi(m-n)}{T} x + \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi(m+n)}{T} x = 0, m \neq n$
- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi m}{T} x \sin \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi(m-n)}{T} x - \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi(m+n)}{T} x = 0, m \neq n$
- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi m}{T} x \sin \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi(m+n)}{T} x + \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi(m-n)}{T} x = 0$

Найдём квадраты этих функций:

- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1^2 dx = T$
- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{T}{2}$



- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 \frac{2\pi n}{T} x \, dx = \frac{T}{2}$

Тогда можно найти коэффициенты:

- $a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos \frac{2\pi k}{T} x \, dx$

- $b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin \frac{2\pi k}{T} x \, dx$

Причём если  $f(x)$  чётна, то  $b_k = 0$ . Если же  $f(x)$  нечётна, то  $a_k = 0$ .

## Глава 6

### 30.03.2018, дискретная математика

Два автомата  $(S, X, \delta, s_1, F)$  и  $(S', X, \delta', s_2, F')$  называются **изоморфными**, если существует биекция  $\varphi: S \rightarrow S'$  такая, что:

1.  $s\delta(x) = t \Leftrightarrow \varphi(s)\delta'(x) = \varphi(t)$ ;
2.  $\varphi(s_1) = s_2$ ;
3.  $t \in F \Leftrightarrow \varphi(t) \in F'$ .

**Утверждение 6.0.1.** Если два минимальных автомата распознают один и тот же язык, то они изоморфны.

**Доказательство.** Пусть  $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , причём  $S = \{s_1\delta(\alpha)\}$  &  $S' = \{s_2\delta'(\alpha)\}$ . В каждом из автоматов нет эквивалентных состояний, поэтому можно построить биекцию  $\varphi(s_1\delta(\alpha)) = s_2\delta'(\alpha)$ . Тогда  $s_1\delta(\alpha) \in F \Leftrightarrow \alpha \in L \Leftrightarrow s'_1\delta'(\alpha) \in F$ . ■

Пусть  $L_1, L_2$  — языки, распознаваемые некоторыми конечными автоматами, тогда  $\text{rank } L_1 = m$  &  $\text{rank } L_2 = n$ .

1. Докажем, что  $\text{rank } L_1 = \text{rank } \bar{L}_1$ .

**Доказательство.**

$$\alpha \not\sim_{L_1} \beta \Leftrightarrow \exists \gamma: \alpha\gamma \in L_1 \text{ \& } \beta\gamma \notin L_1 \Leftrightarrow \alpha\gamma \notin \bar{L}_1 \text{ \& } \beta\gamma \in \bar{L}_1 \Leftrightarrow \alpha \not\sim_{\bar{L}_1} \beta$$

$$\alpha \not\sim_{L_1} \beta \Leftrightarrow \exists \gamma: \alpha\gamma \in L_1 \text{ \& } \beta\gamma \notin L_1 \Leftrightarrow \alpha\gamma \notin \bar{L}_1 \text{ \& } \beta\gamma \in \bar{L}_1 \Leftrightarrow \alpha \not\sim_{\bar{L}_1} \beta$$

■

2. Докажем, что  $\text{rank } L_1 \cap L_2 \leq mn$ .

**Доказательство.** Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  и  $\beta_1, \dots, \beta_n$  — базисы  $L_1$  и  $L_2$  соответственно. Тогда

$$\forall \gamma \in X^* \exists \alpha_i, \beta_j: \alpha_i \sim_{L_1} \gamma \text{ \& } \beta_j \sim_{L_2} \gamma$$

Пусть  $\gamma_{ij}$

- $\gamma\Theta \in L_1 \Leftrightarrow \alpha_i\Theta \in L_1 \Leftrightarrow \gamma_{ij}\Theta \in L_1$ ;
- $\gamma\Theta \in L_2 \Leftrightarrow \beta_j\Theta \in L_2 \Leftrightarrow \gamma_{ij}\Theta \in L_2$ ;
- $\gamma\Theta \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow \alpha_i\Theta \in L_1 \text{ \& } \beta_j \in L_2 \Leftrightarrow \gamma_{ij}\Theta \in L_1 \cap L_2$ .

■

Пусть автомат  $A = (S \times S', X, \delta'', s_0, F'')$ .

**Лемма 6.0.2 (о накачке).** Если  $L$  распознаётся конечным автоматом, то  $\exists n \in \mathbb{N}: (\forall \alpha \in X^*: |\alpha| > n) \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3: \alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ , причём

1.  $\alpha_2 \neq \lambda$ ;
2.  $\alpha \in L \Rightarrow \forall i \alpha_1\alpha_2^i\alpha_3 \in L$ ;
3.  $|\alpha_1\alpha_2| \leq n$ .

**Доказательство.** Пусть в конечном автомате  $n$  состояний,  $|\alpha| = k \geq n$  &  $\alpha = x_1 \dots x_k$ . Среди состояний  $s_1\delta(\lambda), s_1\delta(x_1), s_1\delta(x_1x_2), \dots, s_1\delta(x_1 \dots x_n)$  найдутся два совпадающих, т.е.  $\exists l, m: 0 \leq l < m \leq n$  &  $s_1\delta(x_1 \dots x_l) = s_1\delta(x_1 \dots x_m) = s'$ . Пусть  $\alpha_1 = x_1 \dots x_l$ ,  $\alpha_2 = x_{l+1} \dots x_m$ ,  $\alpha_3 = x_{m+1} \dots x_k$ , тогда  $s_1\delta(\alpha_1) = s', s_1\delta(\alpha_1\alpha_2) = s', \delta(\alpha_1, \alpha_2^i = s', s_1\delta(\alpha_1\alpha_2^i\alpha_3) = s'\delta(\alpha_3) = s''$ . ■

**Следствие 6.0.3.** Если  $\forall n \in \mathbb{N} \exists \alpha: |\alpha| \in n$ , причём для любых слов  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ :

1.  $\alpha_2 \neq \lambda$ ;
2.  $\alpha \in L$  &  $\exists i \alpha_1\alpha_2^i\alpha_3 \notin L$ ;
3.  $|\alpha_1\alpha_2| \leq n$ .

то  $L$  не распознаётся конечным автоматом.

## Глава 7

# 04.04.2018, математический анализ

### 7.1 Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение вида  $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x))$ .  $n$  называется его порядком.

#### 7.1.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$$

#### 7.1.2 Однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Пусть  $p(x) = \frac{y}{x}$ , тогда  $y = x \cdot p(x) \Rightarrow y' = p(x) + x \cdot p'(x)$ . Получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow xp'(x) = F(p(x)) - p \Leftrightarrow p' = \frac{F(p(x)) - p}{x}$$

Решив его, найдём  $p(x)$  и  $y$ .

## Глава 8

# 06.04.2018, дискретная математика

**Утверждение 8.0.1.** Если непустой язык распознаётся автоматом с  $n$  состояниями, то он содержит слово длины не больше  $n$ .

**Доказательство.** Если автомат распознаёт слово, то в соответствующем графе есть путь из начального состояния в допускающее, а значит, есть и простой путь. В графе  $n$  вершин, тогда длина простого пути не больше  $n$ , а ему соответствует слово длины не больше  $n$ . ■

**Утверждение 8.0.2.** Пусть  $L_1$  и  $L_2$  — языки, распознаваемые автоматами с  $n_1$  и  $n_2$  состояниями соответственно.  $L_1 = L_2 \Leftrightarrow$  все слова длин, не больших  $n_1 n_2$ ,

**Конкатенацией языков  $L_1$  и  $L_2$**  называется язык  $\{\alpha\beta | \alpha \in L_1 \text{ \& } \beta \in L_2\}$ .

**Недетерминированным конечным автоматом** называется набор  $(S, X, \delta, s_1, F)$ , где  $S$  — конечное множество состояний;  $X$  — конечный алфавит;  $\delta: S \times (X \cup \{\lambda\}) \rightarrow Y$  — функция перехода, где  $Y \subseteq 2^S$ ;  $s_1 \in S$  — начальное состояние;  $F \subseteq S$  — множество допускающих состояний.

Недетерминированный автомат **распознаёт язык  $L$** , если при чтении слова из языка  $L$  хотя бы один из получившихся путей приводит в допускающее состояние.

Если языки  $L_1$  и  $L_2$  распознаются автоматами  $(S_1, X, \delta_1, s_1, F_1)$  и  $(S_2, X, \delta_2, s_2, F_2)$  соответственно, тогда автомат  $(S_1 \cup S_2, X, \delta, s_1, F_2)$  распознаёт язык  $L_1 L_2$ , где  $s\delta(x) = \begin{cases} s\delta_1(x), & s \in S_1 \\ s\delta_2(x), & s \in S_2 \\ s_2, & s \in F_1 \text{ \& } x = \lambda \end{cases}$ , т. к.

$$s_1\delta(\alpha\beta) = (s_1\delta(\alpha))\delta(\beta) = s_1\delta(\alpha)\delta(\lambda)\delta(\beta) = s_2\delta(\beta)$$

$$L^n = \underbrace{LL \dots L}_n, \text{ причём } L^0 = \{\lambda\} \quad L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n, \quad X^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n \text{ — звёздочка Клини.}$$

Пусть  $L$  распознаётся автоматом  $(S, X, \delta, s_1, F)$ , тогда  $(S \cup \{s_0\}, X, \delta_1, s_0, F \cup \{s_0\})$  распознаёт  $L^*$ , где  $\delta_1 = \begin{cases} s\delta(x), & s \in S \\ s_1, & s \in S \text{ \& } x = \lambda \end{cases}$

## Глава 9

# 11.04.2018, математический анализ

### 9.0.1 Уравнение в полных дифференциалах

**Уравнением в полных дифференциалах** называется уравнение вида  $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ . Если  $M'_y = N'_x$ , то  $M(x,y) = F'_x$  &  $N(x,y) = F'_y$ , тогда

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \Leftrightarrow M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \Leftrightarrow dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C$$

Пусть  $M'_y \neq N'_x$ , но  $\exists \mu(x,y): (\mu \cdot M)'_y = (\mu \cdot N)'_x$ , тогда

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \Leftrightarrow \mu(x,y)M(x,y) dx + \mu(x,y)N(x,y) dy = 0 \Leftrightarrow dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C$$

$\mu(x,y)$  называется **интегрирующим множителем**.

### 9.1 Линейное уравнение первого порядка

**Линейным дифференциальным уравнением первого порядка** называется уравнение вида  $y' = a(x)y + b(x)$ .

Рассмотрим метод вариации произвольной постоянной.

1. Решим уравнение

$$y'_0 = a(x)y_0 \Leftrightarrow \frac{dy_0}{y_0} = a(x) dx \Rightarrow \ln y_0 = \varphi(x) + \ln C \Rightarrow y_0 = Ce^{\varphi(x)}$$

2. Подставим  $y = C(x)e^{\varphi(x)}$  в исходное уравнение:

$$C'(x)e^{\varphi(x)} + C(x)e^{\varphi(x)}\varphi'(x) = a(x)C(x)e^{\varphi(x)} + b(x)$$

$y_0 = Ce^{\varphi(x)} \Rightarrow Ce^{\varphi(x)}\varphi'(x) = a(x)Ce^{\varphi(x)}$ , тогда получим

$$C'(x)e^{\varphi(x)} = b(x) \Leftrightarrow C'(x) = b(x)e^{-\varphi(x)} \Leftrightarrow C(x) = \int b(x)e^{-\varphi(x)}$$

Тогда  $y = C(x)e^{\varphi(x)}$ .

## Глава 10

### 13.04.2018, дискретная математика

Построим ДКА по НКА  $(S, X, \delta_N, s_1, F)$ , не содержащему пустых переходов, где  $\delta_N: S \times X \rightarrow 2^S: (2^S, X, \delta_D, s_1, F')$ , где  $F' = \{M \mid M \subseteq S \text{ \& } M \cap F \neq \emptyset\}$ ,  $M\delta_D(x) = \bigcup_{i=1}^k \delta_N(m_i, x)$ ,  $M = \{m_1, \dots, m_k\}$ .

Докажем, что  $\delta_D(s_1, \alpha) = \delta_N(s_1, \alpha)$ , методом математической индукции:

- *База индукции.*  $\delta_D(s_1, \lambda) = s_1$ ,  $\delta_N(s_1, \lambda) = \{s_1\}$ .
- *Шаг индукции.* Пусть доказано для слов  $\beta: |\beta| = n$ . Рассмотрим  $\alpha: |\alpha| = n + 1$ . Предположим, что  $\delta_N(s_1, \beta) = \{m_1, \dots, m_k\}$ , тогда  $\delta_D(s_1, \beta x) = \bigcup_{i=1}^k \delta_D(m_i, x) \text{ \& } \delta_N(s_1, \beta x) = \bigcup_{i=1}^k \delta_N(m_i, x) \Rightarrow \delta_D(s_1, \alpha) = \delta_N(s_1, \alpha)$ .

Построим НКА без пустых переходов по НКА  $(S, X, \delta, s_1, F)$ , содержащему пустые переходы, где  $\delta: S \times (X \cup \{\lambda\}) \rightarrow 2^S: (S, X, \delta', s_1, F')$ , где  $F' = \{s \mid \delta(s, \lambda^k) = s' \text{ \& } s' \in F\}$ ,  $\delta'(s, a) = s'$  при  $\delta(s, \lambda^k a) = s'$ .

**Замыканием состояния  $s$  НКА** называется множество  $\{s' \mid \delta(s, \lambda^k) = s'\}$  и обозначается  $[s]$ .

Построим ДКА по НКА, содержащему пустые переходы, где  $\delta: S \times (X \cup \{\lambda\}) \rightarrow 2^S: (T, X, \delta', [s_1], F')$ , где  $T = \{M \mid M \subseteq 2^S \text{ \& } [M] = M\}$ ,  $F = \{M \mid M \in T \text{ \& } M \cap F \neq \emptyset\}$ ,  $\delta'(\{m_1, \dots, m_k\}, x) = \bigcup_{i=1}^k [\delta(m_i, x)]$ .

Докажем, что  $\delta(s_1, w) = \delta'([s_1], w)$ , методом математической индукции:

- *База индукции.*  $\delta(s_1, \lambda) = [s_1] \text{ \& } \delta'([s_1], \lambda) = [s_1] \Rightarrow \delta(s_1, \lambda) = \delta'([s_1], \lambda)$
- *Шаг индукции.* Пусть доказано для слов  $\beta: |\beta| = n$ . Рассмотрим  $\alpha: |\alpha| = n + 1$ .  $\delta(s_1, \beta x) = \bigcup_{i=1}^k [\delta(m_i, x)] \text{ \& } \delta'([s_1], \beta x) = \bigcup_{i=1}^k [\delta(m_i, x)] \Rightarrow \delta(s_1, \beta x) = \delta'([s_1], \beta x)$

# Глава 11

## 18.04.2018, математический анализ

### 11.0.1 Уравнение Бернулли

**Уравнением Бернулли** называется уравнение вида  $y' = a(x)y + b(x)y^n$ , где  $n \neq 1$ . Пусть  $\frac{1}{y^{n-1}} = z$ , тогда

$$y' = a(x)y + b(x)y^n \Leftrightarrow \frac{y'}{y^n} = a(x)y^{1-n} + b(x) \Leftrightarrow \frac{z'}{1-n} = a(x)z + b(x)$$

Т. о., решение уравнения Бернулли сводится к решению линейного уравнения.

**Теорема 11.0.1.** Пусть  $y'(x) = f(x, y(x))$  &  $y(x_0) = y_0$ , причём в некоторой окрестности  $\exists M > 0: |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$ , тогда уравнение имеет единственное решение в окрестности  $(x_0 - d; x_0 + d)$ :  $y(x) = \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx + y_0$ .

Это уравнение можно решить методом итераций:

$$y_1(x) = \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx + y_0$$

$$y_n(x) = \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx + y_0$$

**Доказательство.**

$$y_n(x) - y_{n-1}(x) = \int_{x_0}^x (f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x))) dx$$

$$\left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq |b - a| \max_{x \in [a; b]} |g(x)|, \text{ тогда}$$

$$\max_{|x-x_0|<d} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq d \max_{|x-x_0|<d} |f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x))| \leq dM \max_{|x-x_0|<d} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)|$$

Пусть  $q = dM < 1$ , тогда

$$\max_{|x-x_0|<d} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq q \max_{|x-x_0|<d} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| \leq q^{n-1} \max_{|x-x_0|<d} |y_1(x) - y_0|$$

Тогда

$$\forall k \geq 1 \max_{x \in [a; b]} |y_{n+k}(x) - y_n(x)| = \max_{|x-x_0|<d} |(y_{n+k}(x) - y_{n+k-1}(x)) + (y_{n+k-1}(x) - y_{n+k-2}(x)) + \dots + (y_{n+1}(x) - y_n(x))| \leq \max_{|x-x_0|<d} |y_{n+k}(x) - y_n(x)|$$

По признаку Коши получим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \forall k \geq 1 \max_{x \in [a; b]} |y_{n+k}(x) - y_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \tilde{y}(x)$$

Докажем единственность:

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| = \left| \int_{x_0}^x (f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))) dx \right| \Rightarrow \max_{|x-x_0|<d} |y(x) - \tilde{y}(x)| \leq |x-x_0| \cdot \max_{|x-x_0|<d} |f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))| < dM \max_{|x-x_0|<d} |y(x) - \tilde{y}(x)|$$

Противоречие, значит, решение единственно. ■



## Глава 12

# 20.04.2018, дискретная математика

### 12.0.1 Алгоритм Бржозовского

Назовём язык, распознаваемый автоматом  $(S, X, \delta, s_1, \{s'\})$ , **левым языком**  $L_l(s')$ , а язык, распознаваемый автоматом  $(S, X, \delta, s', F)$  — **правым языком**  $L_r(s')$ .

$$L = \bigcup_{s' \in S} L_l(s')$$

Пусть  $A = (S, X, \delta, s_1, F)$ . Рассмотрим произвольное состояние  $s'$ .

1. Автомат детерминирован  $\Leftrightarrow$  все его левые языки не пересекаются.

**Доказательство методом от противного.** Пусть  $\alpha \in L_l(s') \cap L_l(s'')$ , тогда по  $\alpha$  можно прийти и в  $s'$ , и в  $s'' \Leftrightarrow$  автомат недетерминирован. ■

2. Если  $L_l(s')$  — левый язык автомата  $A$ , то  $r(L_l(s'))$  — правый язык  $r(A)$ .

3. Автомат минимальный  $\Leftrightarrow$  все его правые языки различны и все вершины достижимы.

**Теорема 12.0.1.** Автомат  $drdr(A)$  минимален, где  $A$  — автомат.

**Доказательство.** Т.к. обращений было два, то автомат распознаёт тот же язык. Кроме того, он детерминированный.

Левые языки автомата  $dr(A)$  не пересекаются  $\Rightarrow$  правые языки  $rdr(A)$  не пересекаются  $\Rightarrow$  правые языки  $drdr(A)$  различны  $\Rightarrow drdr(A)$  минимален. ■

1.  $\emptyset, \lambda, x$  называются **регулярными выражениями**. Они определяют языки  $\emptyset, \{\lambda\}, \{x\}$ .
2.  $L \cup M, LM, L^*$  называются **регулярными выражениями**, где  $L, M$  — регулярные выражения.

Приоритет операций в порядке убывания:  $*$ ,  $\cdot$ ,  $\cup$ . При записи регулярных выражений объединение может обозначаться знаком  $+$ .

**Теорема 12.0.2 (Клини).** Язык над алфавитом  $X$  распознаётся конечным автоматом  $\Leftrightarrow$  он может быть выражен через языки  $\emptyset, \{\lambda\}, \{x\}$ , где  $x \in X$ , и операции  $\cup, \cdot, *$ .

**Доказательство.**

1.  $\Leftarrow$ . Очевидно.
2.  $\Rightarrow$ . Пусть вершины пронумерованы от 1 до  $n$ . Обозначим  $L_{ij}^{(k)} = \{\alpha \mid i\delta(\alpha) = j \text{ \& промежуточные состояния имеют номер}$

- База индукции.  $L_{ij}^{(0)} = \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k, & i \neq j \\ x_1 + x_2 + \dots + x_k + \lambda, & i = j \end{cases}$
- Шаг индукции.  $L_{ij}^{(k+1)} = L_{ij}^{(k)} + L_{i, k+1}^{(k)} (L_{k+1, k+1}^{(k)})^* L_{k+1, j}^{(k)}$

■

## Глава 13

# 25.04.2018, математический анализ

Рассмотрим  $F(y, y', y'') = 0$ . Пусть  $y'(x) = z(y)$ , тогда  $y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z$  и  $F(y, y', y'') = 0 \Leftrightarrow F(y, z, z' \cdot z) = 0$ .

### 13.0.1 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

**Линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка** называется уравнение вида  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$ .

Введём функции  $y_0 = y, y_1 = y', \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$ , тогда

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y'_0 = y_1 \\ y'_1 = y_2 \\ \dots \\ y'_{n-1} = f(x) - a_0y_0 - a_1y_1 - \dots - a_{n-1}y_{n-1} \end{cases}$$

Введём вектор-функцию  $Y(x) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ , тогда  $Y' = AY + F$ , где  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ ,  $F =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Уравнение можно решить методом итераций:  $Y_k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x (AY_{k-1}(t) + F(t)) dt$ .

**Определителем Вронского**, или **вронскианом**, называется определитель

$$\begin{vmatrix} \tilde{y}_0(x_0) & \tilde{y}_1(x_0) & \dots & \tilde{y}_{n-1}(x_0) \\ \tilde{y}'_0(x_0) & \tilde{y}'_1(x_0) & \dots & \tilde{y}'_{n-1}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y}_0^{(n-1)}(x_0) & \tilde{y}_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & \tilde{y}_{n-1}^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

где  $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$  — частные решения уравнения.

**Утверждение 13.0.1.** Если решения  $\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n-1}$

## Глава 14

# 27.04.2018, дискретная математика

### 14.1 Автоматы с магазинной памятью

**Автоматом с магазинной памятью** называется набор  $(S, X, \Gamma, \delta, s_1, Z_0, F)$ , где

$S$  — конечное множество состояний;

$X$  — алфавит;

$\Gamma$  — конечное множество магазинных символов;

$\delta: S \times (X \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \rightarrow 2^S \times \Gamma^*$  — функция перехода;

$s_1$  — начальное состояние;

$Z_0$  — начальный магазинный символ (**маркер дна**);

$F$  — множество допускающих состояний.

$$L(A) = \{\alpha \in X^* \mid \delta(s_1, \alpha, Z_0) = (s_f, \gamma), \ s_f \in F, \gamma \in \Gamma^*\}$$

$$N(A) = \{\alpha \in X^* \mid \delta(s_1, \alpha, Z_0) = (s, \lambda, \lambda), \ s \in S\}$$

Если  $\delta(s, a\alpha, X) = (s', \xi)$ , то  $(s, a\alpha, xn) \Rightarrow (s', \alpha, \xi n)$ .

## Глава 15

# 04.05.2018, дискретная математика

### 15.1 Контекстно-свободные грамматики

**Контекстно-свободной грамматикой** называется набор  $(V, X, P, S)$ , где  
 $X$  — конечное множество **терминальных символов**, или **терминалов**;  
 $V$  — конечное множество **переменных**, представляющих языки;  
 $S$  — **стартовый символ** — переменная, представляющая определяемый язык;  
 $P$  — конечное множество **продукций** — правил вывода вида  $A \rightarrow B$ , в результате которого  $A$  заменяется на  $B$ .

**Теорема 15.1.1.** Язык  $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  — нерегулярный и контекстно-свободный.

**Доказательство.** Такой язык описывается контекстно-свободной грамматикой  $(\{s\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow \lambda, S \rightarrow aSb\}, S)$ .

■

**Деревом разбора для контекстно-свободной грамматики**  $G = (V, X, P, S)$  называется дерево такое, что:

1. Каждый внутренний узел отмечен переменной из  $V$ .
2. Каждый лист отмечен либо переменной из  $V$ , либо терминалом, либо  $\lambda$ . Если он отмечен  $\lambda$ , то он должен быть единственным потомком своего родителя.
3. Если внутренний узел отмечен  $A$ , а его потомки —  $X_1, X_2, \dots, X_k$  слева направо, то  $(A \rightarrow X_1 X_2 \dots X_k) \in P$ .

Контекстно-свободная грамматика называется **неоднозначной**, если она содержит слово, для которого можно построить несколько деревьев разбора, иначе — **однозначной**.

**Теорема 15.1.2.** Все контекстно-свободные языки распознаются автоматами с магазинной памятью, и все автоматы с магазинной памятью задают контекстно-свободные языки.

# Глава 16

## 11.05.2018, дискретная математика

Алгоритм построения КС-грамматики по регулярному выражению:

$\emptyset: S \rightarrow S$

$\lambda: S \rightarrow \lambda$

$a: S \rightarrow a$

$+: (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, X, S, P_1 \cup P_2 \cup P_0)$ , где  $P_0 = \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\}$

$\cdot: P_0 = \{S \rightarrow S_1 S_2\}$

$\ast: (V \cup \{S\}, X, S, \{S \rightarrow \lambda, S \rightarrow SS_1\})$

**Машиной Тьюринга** называется набор  $(Q, X, \delta, q_1, q_0)$ , где

$Q$  — множество состояний;

$X$  — алфавит;

$\delta: Q \times X \rightarrow Q \times X \times \{L, S, R\}$  — функция перехода;

$q_1 \in Q$  — начальное состояние;

$q_0 \in Q$  — состояние остановки.

$x_1 x_2 \dots x_{i-1} q_i x_i x_{i+1} \dots x_n$  называется **конфигурацией машины Тьюринга**, где  $x_1 x_2 \dots x_n$  — текущее слово,  $q_i$  — текущее состояние,  $x_i$  — текущий символ.

Язык называется **вычислимым**, если существует машина Тьюринга, которая при чтении слова из этого языка останавливается на не пустом символе, а при чтении слова не из этого языка — на пустом.

**Теорема 16.0.1.** *Любой регулярный язык вычислим.*

**Доказательство.** Пусть дан автомат  $(Q, X, \delta_A, q_1, F)$ . Рассмотрим машину Тьюринга  $(Q \cup \{q_0\}, X, \delta_M, q_1, q_0)$ ,

где

$$\begin{cases} \delta_M(q, x) = (\delta_A(q, x), \bullet, R), & x \neq \bullet \\ \delta_M(q, x) = \begin{cases} (q_0, a, S), & q \in F \\ (q_0, \bullet, S), & q \notin F \end{cases} \end{cases} \quad \blacksquare$$

**Утверждение 16.0.2.** *Язык  $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  вычислим.*

**Доказательство.** Рассмотрим машину Тьюринга с функцией перехода

	$a$	$b$	$\bullet$
$q_1$	$q_2 \bullet R$	$q_0 \bullet S$	$q_0 a S$
$q_2$	$q_2 a R$	$q_2 b R$	$q_3 \bullet L$
$q_3$	$q_0 \bullet S$	$q_4 \bullet L$	$q_0 \bullet S$
$q_4$	$q_4 a L$	$q_4 b L$	$q_1 \bullet R$

■

Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется **правильно вычислимой**, если  $q_1 1^{x_1+1} \bullet 1^{x_2+1} \bullet \dots \bullet 1^{x_n+1} \rightarrow q_0 1^{f(x_1, \dots, x_n)}$ .

Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется **вычислимой**, если после чтения  $q_1 1^{x_1+1} \bullet \dots \bullet 1^{x_n+1}$  на ленте  $f(x_1, \dots, x_n)$  единиц.