Оглавление

Глава 1

14.03.2018, математический анализ

Теорема 1.0.1 (интегральный признак Коши). *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *— знакоположительный ряд. Если существует монотонная функция* $f(x) colon f(n) = a_n$ & $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится* $\Leftrightarrow \exists \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Доказательство. Площадь заштрихованной фигуры равна $1a_1 + 1a_2 + \ldots + 1a_n$, а криволинейной трапеции — $\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$, тогда $S_n > \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$, $S_{n+1} - a_1 < \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx$.

1. $\Leftarrow$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n < a_1 + \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx < a_1 + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2. $\Rightarrow$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_1^{n+1} f(x)\,dx < S_n < S \Rightarrow \exists \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

■

1.0.1 Знакопеременные ряды

Теорема 1.0.2. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *сходится, то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *тоже сходится.*

Доказательство. Пусть (S_n) и (σ_n) — частичные суммы рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ соответственно. По критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall m > N\ \forall k \geqslant 1\ |\sigma_{m+k} - \sigma_m| < \varepsilon$$

Тогда

$$|S_{m+k} - S_m| = |\sum_{i=1}^{k} a_{m+i}| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |a_{m+i}| = |\sigma_{m+k} - \sigma_m| < \varepsilon$$

Значит, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. ■

Теорема 1.0.3 (признак Лейбница). *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ *— знакочередующийся ряд. Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *причём* (a_n) *— монотонная последовательность, то ряд сходится.*

Доказательство.

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) < S_{2n+2}$$

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$$

Тогда по свойству **??** предела последовательности

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Значит, ряд сходится. ■

1.1 Функциональные ряды

Теорема 1.1.1 (мажорантный признак сходимости). *Если существует последовательность* $(a_n)\colon \forall n \in \mathbb{N}\ |f_n(x)| \leqslant a_n$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится* $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится абсолютно.*

1.1.1 Степенные ряды

Степенным называется ряд вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$.

Теорема 1.1.2 (Абеля).

- *Если ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *сходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x\colon |x| < |x_0|$ *он сходится абсолютно.*
- *Если ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *расходится при* $x = x_0$, *то* $\forall x\colon |x| > |x_0|$ *он расходится.*

Доказательство.

- $\lim\limits_{n\to\infty} c_n x_0^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0\colon |c_n x_0^n| \leqslant M \Rightarrow |c_n x^n| \leqslant M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$.

  Тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^k$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ сходится абсолютно.
- Если бы $\exists x_1\colon |x_1| > |x_0|$ & $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x_1^k$ сходится, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$ сходился бы, что противоречит условию.

■

Следствие 1.1.3. $\exists R > 0\colon$ *при* $|x| < R$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *сходится, а при* $|x| > R$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *расходится.*

R называется **радиусом сходимости степенного ряда**.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k x^k|$. По признаку д'Аламбера $\lim\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n} \cdot |x|\right| \ldots$

Глава 2

21.03.2018, математический анализ

Найдём радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^p}$:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^p = 1$$

Подставим $x = 1$, тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

Подставим $x = -1$, тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^p}$ сходится абсолютно при $p > 1$, сходится условно при $0 < p \leqslant 1$ и расходится при $p \leqslant 0$.

Утверждение 2.0.1. *Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k = S(x)$ *при* $|x| < R$, *то*

1. $\int\limits_a^b S(x)\,dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \int\limits_a^b x^k\,dx$, *где* $|a|, |b| < R$

2. $(S(x))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (x^k)^{(m)}$, *где* $|x| < R$

Связь суммы ряда и его коэффициентов:

1. $c_0 = S(0)$
2. $c_1 = S'(0)$
3. $c_2 = \frac{S''(0)}{2}$
4. $c_3 = \frac{S'''(0)}{3!}$
5. $c_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$

Т. о., $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k)}(0)}{k!} x^k$ при $|x| < R$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|}{\left|\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|(n+1)}{|f^{(n+1)}(0)|}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Тогда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ при $\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$.

Разложение некоторых функций:

1. $f(x) = e^x$. Для $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$R = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

$$r_n = \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \ \& \lim_{n\to\infty} \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$$

Тогда при $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

2. $f(x) = \sin x$. Для $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n-1)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} 2n(2n+1) = \infty$$

$$r_n = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} |\sin\left(\Theta x + \frac{\pi}{den}\right) < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \& \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} |\sin\left(\Theta x + \frac{\pi}{den}\right) = 0$$

Тогда при $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$$

3. $f(x) = \cos x$. Для $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} (2n+1)(2n+2) = \infty$$

$$r_n = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} |\cos\left(\Theta x + \frac{\pi}{den}\right) < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \& \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} |\cos\left(\Theta x + \frac{\pi}{den}\right) = 0$$

Тогда при $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

4. $f(x) = (1+x)^\alpha$ при $\alpha \notin \mathbb{N}$. Для $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} x^k$

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)|(k+1)!}{k!|\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k)|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{|\alpha-k|} = 1$$

$$r_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)(1+\Theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\Theta x)^{n+1-\alpha}}$$

Если $x \in [0;1)$ $|r_n(x)| \leqslant M \cdot \frac{x^{n+1}}{1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Тогда при $x \in (-1;1)$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

2.0.1 Приложения разложений функций в ряд Маклорена

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \ |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \ |x| < 1$$

Тогда при $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t} = \int\limits_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Глава 3

28.03.2018, математический анализ

3.0.1 Тригонометрические ряды Фурье

Представим функцию $f(x)$ на отрезке $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ в виде

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2\pi n}{T}\,x+\sum_{k=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2\pi n}{T}\,x$$

Скалярным произведением функций $f(x)$ **и** $g(x)$ называется $\langle f(x),g(x)\rangle=\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)g(x)\,dx$.

Проверим, что функции 1, $\cos\frac{2\pi n}{T}\,x$ и $\sin\frac{2\pi n}{T}\,x$ попарно ортогональны:

- $\displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos\frac{2\pi n}{T}\,x\,dx=\frac{T}{2\pi n}\sin\frac{2\pi n}{T}\,x\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}=0$
- $\displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi n}{T}\,x\,dx=-\frac{T}{2\pi n}\cos\frac{2\pi n}{T}\,x\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}=0$
- $\displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos\frac{2\pi m}{T}\,x\cos\frac{2\pi n}{T}\,x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos\frac{2\pi(m-n)}{T}\,x+\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos\frac{2\pi(m+n)}{T}\,x=0,\ m\neq n$
- $\displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi m}{T}\,x\sin\frac{2\pi n}{T}\,x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos\frac{2\pi(m-n)}{T}\,x-\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos\frac{2\pi(m+n)}{T}\,x=0,\ m\neq n$
- $\displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos\frac{2\pi m}{T}\,x\sin\frac{2\pi n}{T}\,x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi(m+n)}{T}\,x+\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sin\frac{2\pi(m-n)}{T}\,x=0$

Найдём квадраты этих функций:

- $\displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}1^2\,dx=T$
- $\displaystyle\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos^2\frac{2\pi n}{T}\,x\,dx=\frac{T}{2}$

- $\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 \frac{2\pi n}{T}\, x\, dx = \frac{T}{2}$

Тогда можно найти коэффициенты:

- $a_k = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos \frac{2\pi k}{T}\, x\, dx$
- $b_k = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin \frac{2\pi k}{T}\, x\, dx$

Причём если $f(x)$ чётна, то $b_k = 0$. Если же $f(x)$ нечётна, то $a_k = 0$.

Глава 4

04.04.2018, математический анализ

4.1 Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение вида $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x))$. n называется **его порядком**.

4.1.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$y' = f(x) \cdot g(y)$

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C$$

4.1.2 Однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$

Пусть $p(x) = \frac{y}{x}$, тогда $y = x \cdot p(x) \Rightarrow y' = p(x) + x \cdot p'(x)$. Получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow xp'(x) = F(p(x)) - p \Leftrightarrow p' = \frac{F(p(x)) - p}{x}$$

Решив его, найдём $p(x)$ и y.

Глава 5

11.04.2018, математический анализ

5.0.1 Уравнение в полных дифференциалах

Уравнением в полных дифференциалах называется уравнение вида $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$. Если $M'_y = N'_x$, то $M(x,y) = F'_x$ & $N(x,y) = F'_y$, тогда

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \Leftrightarrow M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \Leftrightarrow dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C$$

Пусть $M'_y \neq N'_x$, но $\exists \mu(x,y)\colon (\mu \cdot M)'_y = (\mu \cdot N)'_x$, тогда

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \Leftrightarrow \mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0 \Leftrightarrow dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C$$

$\mu(x,y)$ называется **интегрирующим множителем**.

5.1 Линейное уравнение первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $y' = a(x)y + b(x)$.

Рассмотрим **метод вариации произвольной постоянной**.

1. Решим уравнение
$$y'_0 = a(x)y_0 \Leftrightarrow \frac{dy_0}{y_0} = a(x)\,dx \Rightarrow \ln y_0 = \varphi(x) + \ln C \Rightarrow y_0 = Ce^{\varphi(x)}$$

2. Подставим $y = C(x)e^{\varphi(x)}$ в исходное уравнение:
$$C'(x)e^{\varphi(x)} + C(x)e^{\varphi(x)}\varphi'(x) = a(x)C(x)e^{\varphi(x)} + b(x)$$

   $y_0 = Ce^{\varphi(x)} \Rightarrow Ce^{\varphi(x)}\varphi'(x) = a(x)Ce^{\varphi(x)}$, тогда получим
$$C'(x)e^{\varphi(x)} = b(x) \Leftrightarrow C'(x) = b(x)e^{-\varphi(x)} \Leftrightarrow C(x) = \int b(x)e^{-\varphi(x)}$$

Тогда $y = C(x)e^{\varphi(x)}$.

Глава 6

13.04.2018, дискретная математика

Построим ДКА по НКА (S, X, δ_N, s_1, F), не содержащему пустых переходов, где $\delta_N : S \times X \to 2^S$: $(2^S, X, \delta_D, s_1, F')$, где $F' = \{M \mid M \subseteq S \ \& \ M \cap F \neq \varnothing\}$, $M\delta_D(x) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \delta_N(m_i, x)$, $M = \{m_1, \dots, m_k\}$.

Докажем, что $\delta_D(s_1, \alpha) = \delta_N(s_1, \alpha)$, методом математической индукции:

- *База индукции.* $\delta_D(s_1, \lambda) = s_1$, $\delta_N(s_1, \lambda) = \{s_1\}$.
- *Шаг индукции.* Пусть доказано для слов $\beta\colon |\beta| = n$. Рассмотрим $\alpha\colon |\alpha| = n+1$. Предположим, что $\delta_N(s_1, \beta) = \{m_1, \dots, m_k\}$, тогда $\delta_D(s_1, \beta x) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \delta_D(m_i, x) \ \& \ \delta_N(s_1, \beta x) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \delta_N(m_i, x) \Rightarrow \delta_D(s_1, \alpha) = \delta_N(s_1, \alpha)$.

Построим НКА без пустых переходов по НКА (S, X, δ, s_1, F), содержащему пустые переходы, где $\delta\colon S \times (X \cup \{\lambda\}) \to 2^S$: (S, X, δ', s_1, F'), где $F' = \{s \mid \delta(s, \lambda^k) = s' \ \& \ s' \in F\}$, $\delta'(s, a) = s'$ при $\delta(s, \lambda^k a) = s'$.

Замыканием состояния s **НКА** называется множество $\{s' \mid \delta(s, \lambda^k) = s'\}$ и обозначается $[s]$.

Построим ДКА по НКА, содержащему пустые переходы, где $\delta\colon S \times (X \cup \{\lambda\}) \to 2^S$: $(T, X, \delta', [s_1], F')$, где $T = \{M \mid M \subseteq 2^S \ \& \ [M] = M\}$, $F = \{M \mid M \in T \ \& \ M \cap F \neq \varnothing\}$, $\delta'(\{m_1, \dots, m_k\}, x) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} [\delta(m_i, x)]$.

Докажем, что $\delta(s_1, w) = \delta'([s_1], w)$, методом математической индукции:

- *База индукции.* $\delta(s_1, \lambda) = [s_1] \ \& \ \delta'([s_1], \lambda) = [s_1] \Rightarrow \delta(s_1, \lambda) = \delta'([s_1], \lambda)$
- *Шаг индукции.* Пусть доказано для слов $\beta\colon |\beta| = n$. Рассмотрим $\alpha\colon |\alpha| = n + 1$. $\delta(s_1, \beta x) = \bigcup_{i=1}^{k} [\delta(m_i, x)] \ \&$ $\delta'([s_1], \beta x) = \bigcup_{i=1}^{k} [\delta(m_i, x)] \Rightarrow \delta(s_1, \beta x) = \delta'([s_1], \beta x)$

Глава 7

18.04.2018, математический анализ

7.0.1 Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y' = a(x)y + b(x)y^n$, где $n \neq 1$. Пусть $\frac{1}{y^{n-1}} = z$, тогда

$$y' = a(x)y + b(x)y^n \Leftrightarrow \frac{y'}{y^n} = a(x)y^{1-n} + b(x) \Leftrightarrow \frac{z'}{1-n} = a(x)z + b(x)$$

Т. о., решение уравнения Бернулли сводится к решению линейного уравнения.

Теорема 7.0.1. *Пусть $y'(x) = f(x, y(x))$ & $y(x_0) = y_0$, причём в некоторой окрестности $\exists M > 0\colon |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant M|y_1 - y_2|$, тогда уравнение имеет единственное решение в окрестности $(x_0 - d; x_0 + d)$: $y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx + y_0$.*

Это уравнение можно решить методом итераций:

$y_1(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx + y_0$

$y_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\,dx + y_0$

Доказательство.

$$y_n(x) - y_{n-1}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} (f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x)))\,dx$$

$|\int\limits_{a}^{b} g(x)\,dx| \leqslant |b - a| \max_{x \in [a;b]} |g(x)|$, тогда

$$\max_{|x-x_0|<d} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant d \max_{|x-x_0|<d} |f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x))| \leqslant dM \max_{|x-x_0|<d} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)|$$

Пусть $q = dM < 1$, тогда

$$\max_{|x-x_0|<d} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant q \max_{|x-x_0|<d} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| \leqslant q^{n-1} \max_{|x-x_0|<d} |y_1(x) - y_0|$$

Тогда

$$\forall k \geqslant 1 \max_{x \in [a;b]} |y_{n+k}(x) - y_n(x)| = \max_{|x-x_0|<d} |(y_{n+k}(x) - y_{n+k-1}(x)) + (y_{n+k-1}(x) + y_{n+k-2}(x)) + \ldots + (y_{n+1}(x) - y_n(x))| \leqslant \max_{|x-x_0|<d} |y_{n+k}(x$$

По признаку Коши получим

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n > N\ \forall k \geqslant 1 \max_{x \in [a;b]} |y_{n+k}(x) - y_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} y_n(x) = \tilde{y}(x)$$

Докажем единственность:

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| = |\int\limits_{x_0}^{x} (f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x)))\,dx| \Rightarrow \max_{|x-x_0|<d} |y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant |x - x_0| \cdot \max_{|x-x_0|<d} |f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))| < dM \max_{|x-x_0|<d} |y(x) -$$

Противоречие, значит, решение единственно. ■

Глава 8

20.04.2018, дискретная математика

8.0.1 Алгоритм Бржозовского

Назовём язык, распознаваемый автоматом $(S, X, \delta, s_1, \{s'\})$, **левым языком** $L_l(s')$, а язык, распознаваемый автоматом (S, X, δ, s', F) — **правым языком** $L_r(s')$.

$L = \bigcup\limits_{s' \in S} L_l(s')$

Пусть $A = (S, X, \delta, s_1, F)$. Рассмотрим произвольное состояние s'.

1. Автомат детерминирован $\Leftrightarrow$ все его левые языки не пересекаются.

   Доказательство методом от противного. Пусть $\alpha \in L_l(s') \cap L_l(s'')$, тогда по α можно прийти и в s', и в s'' $\Leftrightarrow$ автомат недетерминирован. ■

2. Если $L_l(s')$ — левый язык автомата A, то $r(L_l(s'))$ — правый язык $r(A)$.

3. Автомат минимальный $\Leftrightarrow$ все его правые языки различны и все вершины достижимы.

Теорема 8.0.1. *Автомат $drdr(A)$ минимален, где A — автомат.*

Доказательство. Т. к. обращений было два, то автомат распознаёт тот же язык. Кроме того, он детерминированный.

Левые языки автомата $dr(A)$ не пересекаются $\Rightarrow$ правые языки $rdr(A)$ не пересекаются $\Rightarrow$ правые языки $drdr(A)$ различны $\Rightarrow$ $drdr(A)$ минимален. ■

1. $\varnothing$, λ, x называются **регулярными выражениями**. Они определяют языки $\varnothing$, $\{\lambda\}$, $\{x\}$.

2. $L \cup M$, LM, L^* называются **регулярными выражениями**, где L, M — регулярные выражения.

Приоритет операций в порядке убывания: $*$, $\cdot$, $\cup$. При записи регулярных выражений объединение может обозначаться знаком $+$.

Теорема 8.0.2 (Клини). *Язык над алфавитом X распознаётся конечным автоматом $\Leftrightarrow$ он может быть выражен через языки $\varnothing$, $\{\lambda\}$, $\{x\}$, где $x \in X$, и операции $\cup$, $\cdot$, $*$.*

Доказательство.

1. $\Leftarrow$. Очевидно.

2. $\Rightarrow$. Пусть вершины пронумерованы от 1 до n. Обозначим $L_{ij}^{(k)} = \{\alpha \mid i\delta(\alpha) = j$ & промежуточные состояния имеют номер

   - *База индукции.* $L_{ij}^{(0)} = \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \ i \neq j \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_k + \lambda, \ i = j \end{cases}$

   - *Шаг индукции.* $L_{ij}^{(k+1)} = L_{ij}^{(k)} + L_{i\,k+1}^{(k)} (L_{k+1\,k+1}^{(k)})^* L_{k+1\,j}^{(k)}$

■

Глава 9

25.04.2018, математический анализ

Рассмотрим $F(y, y', y'') = 0$. Пусть $y'(x) = z(y)$, тогда $y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z$ и $F(y, y', y'') = 0 \Leftrightarrow F(y, z, z' \cdot z) = 0$.

9.0.1 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = f(x)$.

Введём функции $y_0 = y, y_1 = y', \ldots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$, тогда

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ \ldots \\ y_{n-1}' = f(x) - a_0y_0 - a_1y_1 - \ldots - a_{n-1}y_{n-1} \end{cases}$$

Введём вектор-функцию $Y(x) = \begin{Vmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_{n-1} \end{Vmatrix}$, тогда $Y' = AY + F$, где $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \ldots - a_{n-1} & & \end{Vmatrix}$, $F = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ f(x) \end{Vmatrix}$

Уравнение можно решить методом итераций: $Y_k(x) = Y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} (AY_{k-1}(t) + F(t))\, dt$.

Определителем Вронского, или **вронскианом**, называется определитель

$$\begin{vmatrix} \tilde{y}_0(x_0) & \tilde{y}_1(x_0) & \ldots & \tilde{y}_{n-1}(x_0) & \\ \tilde{y}_0'(x_0) & \tilde{y}_1'(x_0) & \ldots & \tilde{y}_{n-1}'(x_0) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y}_0^{(n-1)}(x_0) & \tilde{y}_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & \tilde{y}_{n-1}^{(n-1)}(x_0) & \end{vmatrix}$$

где $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n$ — частные решения уравнения.

Утверждение 9.0.1. *Если решения $\tilde{y}_0, \ldots, \tilde{y}_{n-1}$*

Глава 10

27.04.2018, дискретная математика

10.1 Автоматы с магазинной памятью

Автоматом с магазинной памятью называется набор $(S, X, \Gamma, \delta, s_1, Z_0, F)$, где
S — конечное множество состояний;
X — алфавит;
Γ — конечное множество магазинных символов;
$\delta\colon S \times (X \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \to 2^S \times \Gamma^*$ — функция перехода;
s_1 — начальное состояние;
Z_0 — начальный магазинный символ **(маркер дна)**;
F — множество допускающих состояний.

$L(A) = \{\alpha \in X^* \mid \delta(s_1, \alpha, Z_0) = (s_f, \gamma),\ s_f \in F, \gamma \in \Gamma^*\}$

$N(A) = \{\alpha \in X^* \mid \delta(s_1, \alpha, Z_0) = (s, \lambda, \lambda),\ s \in S\}$

Если $\delta(s, a\alpha, X) = (s', \xi)$, то $(s, a\alpha, xn) \Rightarrow (s', \alpha, \xi n)$.

Глава 11

04.05.2018, дискретная математика

11.1 Контекстно-свободные грамматики

Контекстно-свободной грамматикой называется набор (V, X, P, S), где
X — конечное множество **терминальных символов**, или **терминалов**;
V — конечное множество **переменных**, представляющих языки;
S — **стартовый символ** — переменная, представляющая определяемый язык;
P — конечное множество **продукций** — правил вывода вида $A \to B$, в результате которого A заменяется на B.

Теорема 11.1.1. *Язык $\{a^n b^n \mid n \geqslant 0\}$ — нерегулярный и контекстно-свободный.*

Доказательство. Такой язык описывается контекстно-свободной грамматикой $(\{s\}, \{a, b\}, \{S \to \lambda, S \to aSb\}, S)$.
■

Деревом разбора для контекстно-свободной грамматики $G = (V, X, P, S)$ называется дерево такое, что:

1. Каждый внутренний узел отмечен переменной из V.
2. Каждый лист отмечен либо переменной из V, либо терминалом, либо λ. Если он отмечен λ, то он должен быть единственным потомком своего родителя.
3. Если внутренний узел отмечен A, а его потомки — $X_1, X_2, \ldots, X_k$ слева направо, то $(A \to X_1 X_2 \ldots X_k) \in P$.

Контекстно-свободная грамматика называется **неоднозначной**, если она содержит слово, для которого можно построить несколько деревьев разбора, иначе — **однозначной**.

Теорема 11.1.2. *Все контекстно-свободные языки распознаются автоматами с магазинной памятью, и все автоматы с магазинной памятью задают контекстно-свободные языки.*

Глава 12

11.05.2018, дискретная математика

Алгоритм построения КС-грамматики по регулярному выражению:
$\varnothing\colon S \to S$
$\lambda\colon S \to \lambda$
$a\colon S \to a$
$+\colon (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, X, S, P_1 \cup P_2 \cup P_0)$, где $P_0 = \{S \to S_1, S \to S_2\}$
$\cdot\colon P_0 = \{S \to S_1 S_2\}$
$^*\colon (V \cup \{S\}, X, S, \{S \to \lambda, S \to SS_1\})$

Машиной Тьюринга называется набор (Q, X, δ, q_1, q_0), где
Q — множество состояний;
X — алфавит;
$\delta\colon Q \times X \to Q \times X \times \{L, S, R\}$ — функция перехода;
$q_1 \in Q$ — начальное состояние;
$q_0 \in Q$ — состояние остановки.

$x_1 x_2 \dots x_{i-1} q_i x_i x_{i+1} \dots x_n$ называется **конфигурацией машины Тьюринга**, где $x_1 x_2 \dots x_n$ — текущее слово, q_i — текущее состояние, x_i — текущий символ.

Язык называется **вычислимым**, если существует машина Тьюринга, которая при чтении слова из этого языка останавливается на не пустом символе, а при чтении слова не из этого языка — на пустом.

Теорема 12.0.1. *Любой регулярный язык вычислим.*

Доказательство. Пусть дан автомат (Q, X, δ_A, q_1, F). Рассмотрим машину Тьюринга $(Q \cup \{q_0\}, X, \delta_M, q_1, q_0)$, где

$$\begin{cases} \delta_M(q,x) = (\delta_A(q,x), \bullet, R),\ x \neq \bullet \\ \delta_M(q,x) = \begin{cases} (q_0, a, S),\ q \in F \\ (q_0, \bullet, S),\ q \notin F \end{cases} \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Утверждение 12.0.2. *Язык $\{a^n b^n \mid n \geqslant 0\}$ вычислим.*

Доказательство. Рассмотрим машину Тьюринга с функцией перехода

	a	b	$\bullet$
q_1	$q_2 \bullet R$	$q_0 \bullet S$	$q_0 a S$
q_2	$q_2 a R$	$q_2 b R$	$q_3 \bullet L$
q_3	$q_0 \bullet S$	$q_4 \bullet L$	$q_0 \bullet S$
q_4	$q_4 a L$	$q_4 b L$	$q_1 \bullet R$

$\blacksquare$

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется **правильно вычислимой**, если существует такая машина Тьюринга, $q_1 1^{x_1+1} \bullet 1^{x_2+1} \bullet \dots \bullet 1^{x_n+1} \to q_0 1^{f(x_1,\dots,x_n)}$.

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется вычислимой, если после чтения $q_1 1^{x_1+1} \bullet \dots \bullet 1^{x_n+1}$ на ленте $f(x_1, \dots, x_n)$ единиц.

Глава 13

16.05.2018, математический анализ

Пусть дифференциальному уравнению $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_1k + a_0 = 0$.

Доказательство. $y'' + a_1y' + a_0y = 0$

Пусть $k_1 = k_2$, тогда $k_1^2 + a_1k_1 + a_0 = 0$ & $2k_1 + a_1 = 0$. Подставим $y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}$:

$$e^{k_1x}(C_1k_1^2+2C_2k_1+C_2xk_1^2+C_1a_1k_1+C_2a_1+C_2a_1k_1x+C_1a_0+C_2a_0x) = 0 \Leftrightarrow C_1(k_1^2+a_1k_1+a_0)+C_2(2k_1+a_1)+C_2x(k_1^2+a_1k_1+a_0) = 0$$

■

Пусть $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, тогда, используя $e^{it} = \cos t + i\sin t$, получим

$$y(x) = C_{10}e^{(\alpha+i\beta)x}+C_{20}e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(C_{10}e^{i\beta x}+C_{20}e^{-i\beta x}) = e^{\alpha x}((C_{10}+C_{20})\cos\beta x+i(C_{10}-C_{20})\sin\beta x) = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x$$

13.0.1 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим следующие методы решения уравнений вида $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = f(x)$.

Метод вариации произвольных постоянных

1. Найдём решение $y_0 = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 + \ldots + C_n\tilde{y}_n$ уравнения $y_0^{(n)} + a_{n-1}y_0^{(n-1)} + \ldots + a_1y_0' + a_0y_0 = 0$.
2. Решением исходного уравнения будет $y(x) = C_1(x)\tilde{y}_1 + \ldots + C_n(x)\tilde{y}_n$.
3. Найдём $C_1(x), \ldots, C_n(x)$, решая систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + \ldots + C_n'(x)\tilde{y}_n = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1' + \ldots + C_n'(x)\tilde{y}_n' = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1'' + \ldots + C_n'(x)\tilde{y}_n'' = 0 \\ \ldots \\ C_1'(x)\tilde{y}_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\tilde{y}_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

   и интегрируя $C_1'(x), \ldots, C_n'(x)$.

Доказательство. Пусть дано уравнение $y'' + a_1y' + a_0 = f(x)$ и $y_0(x) = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2$, тогда

$$y(x) = C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2$$

$$y'(x) = C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_1(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2 + C_2(x)\tilde{y}_2'$$
$$y''(x) = C_1''(x)\tilde{y}_1 + 2C_1'\tilde{y}_1' + C_1(x)\tilde{y}_1'' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + 2C_2'\tilde{y}_2' + C_2(x)\tilde{y}_2''$$

Подставим в уравнение:

$$C_1''(x)\tilde{y}_1+2C_1'\tilde{y}_1'+C_1(x)\tilde{y}_1''+C_2''(x)\tilde{y}_2+2C_2'\tilde{y}_2'+C_2(x)\tilde{y}_2''+a(C_1'(x)\tilde{y}_1+C_1(x)\tilde{y}_1'+C_2'(x)\tilde{y}_2+C_2(x)\tilde{y}_2')+b(C_1(x)\tilde{y}_1+C_2(x)\tilde{y}_2) = f(x) \Leftrightarrow C_1$$

Решим систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_2'(x)\tilde{y}_2 = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2' = f(x) \end{cases}$$

тогда

$$C_1''(x)\tilde{y}_1 + C_1'\tilde{y}_1' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + C_2'\tilde{y}_2' = 0$$

Подставляя в уравнение, получим $f(x) = f(x)$. ∎

Метод неопределённых коэффициентов

Уравнение $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ можно решить методом неопределённых коэффициентов, если

$$f(x) = \sum_j e^{\alpha_j x}(P_j(x)\cos\beta_j x + Q_j(x)\sin\beta_j x)$$

Тогда решение имеет вид

$$\sum_j e^{\alpha_j x}(T_j(x)\cos\beta_j x + R_j(x)\sin\beta_j x)\, x^{s_j}$$

где s_j — кратность корня.

13.0.2 Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Решим систему

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

$$y_1'' = ay_1' + by_2' \Rightarrow y_1'' = ay_1' + b(cy_1 + dy_2) \Rightarrow y_1'' = ay_1' + bcy_1 + d(y_1' - ay_1) \Rightarrow y_1'' = (a+d)y_1' + (bc - ad)y = 0$$

Т. о., система свелась к уравнению.

Глава 14

18.05.2018, дискретная математика

Язык называется **вычислимо-перечислимым**, если на словах из языка машина останавливается на непустом символе, а на словах не из языка работает бесконечно долго.

Утверждение 14.0.1. *Языки L и $\overline{L}$ вычислимо-перечислимы $\Leftrightarrow$ L вычислим.*

Доказательство.

1. $\Rightarrow$. Можно объединить две машины, на нечётных шагах выполняя команды первой машины, а на чётных — второй. На ленте изначально будет два одинаковых слова, своё для каждой машины. Тогда получим машину, которая запускает на слове обе машины. Одна из них всегда остановится.

2. $\Leftarrow$.

■

Утверждение 14.0.2. *L вычислим $\Leftrightarrow$ $\overline{L}$ вычислим.*

Теорема 14.0.3. *Язык $L_0 = \{i \mid \alpha_i \in L_{M_i}\}$ вычислимо-перечислим, но невычислим.*

Доказательство. Пусть команда $c = q_i x_j q_k x_l d$ кодируется числом $|c| = 2^{i+1} \cdot 3^{j+1} \cdot 5^{k+1} \cdot 7^{l+1} \cdot 11^{d+1}$. Тогда машина Тьюринга с r командами кодируется числом $2^{|c_1|+1} \cdot 3^{|c_2|+1} \cdot \ldots \cdot p_r^{|c_r|+1}$. Также можно закодировать слова.

Пусть α_i — слово с кодом i, L_{M_i} — язык, распознаваемый машиной Тьюринга с кодом i.

1. Если L_0 вычислим, то $\overline{L}_0$ также вычислим, тогда существует машина Тьюринга M_k с кодом k, вычисляющая $\overline{L}_0$. Значит, $\alpha_k \in L_{M_k} \Leftrightarrow k \in L_0 \Leftrightarrow k \notin \overline{L}_0 \Leftrightarrow \alpha_k \notin L_{M_k}$. Противоречие, тогда L_0 не вычислим.

2. На первом шаге запускаем M_1, на втором — M_2 и т. д. Если какая-то из машин остановилась, то соответствующее слово принадлежит L_0.

■

Следствие 14.0.4. *$\overline{L}_0$ не вычислимо-перечислим.*

Теорема 14.0.5. $L_1 = \{(i, j) \mid \alpha_i \in L_{M_j}\}$

Глава 15

23.05.2018, математический анализ

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_0' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

Известно, что $y_1 = Le^{kx}$, $y_2 = Me^{kx}$, тогда

$$\begin{cases} Lk = aL + bM \\ Mk = cL + dM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L(a-k) + Mb = 0 \\ Lc + M(d-k) = 0 \end{cases}$$

Если $\begin{vmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{vmatrix} \neq 0$, то получим единственное решение — нулевое. Тогда

$$(a-k)(d-k) - bc = 0 \Leftrightarrow k^2 - k(a+d) + ad - bc = 0$$

Получили характеристическое уравнение.

Решим системы

$$\begin{cases} L(a-k_i) + Mb = 0 \\ Lc + M(d-k_i) = 0 \end{cases}$$

где k_i — i-й корень характеристического уравнения, причём в каждой системе одно из уравнений можно убрать, т. к. главный определитель равен нулю. Возьмём частные решения $(L_1, M_1), (L_2, M_2)$, тогда

$$y_1 = C_1L_1e^{k_1x} + C_2L_2e^{k_2x}$$

$$y_0 = C_1M_1e^{k_1x} + C_2M_2e^{k_2x}$$

15.0.1 Неоднородные системы

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 + f_1 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 + f_2 \end{cases}$$

Решая соответствующую однородную систему, получим

$$y_10 = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2$$

$$y_20 = D_1\tilde{y}_1 + D_2\tilde{y}_2$$

где D_1 и D_2 линейно связаны с C_1 и C_2 сооветственно.

Тогда

$$y_1 = C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2$$

$$y_2 = D_1(x)\tilde{y}_1 + D_2(x)\tilde{y}_2$$

Подставляя в систему, получим

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_2'(x)\tilde{y}_2 + C_1(x)\tilde{y}_1' + C_2(x)\tilde{y}_2' = a(C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2) + b(D_1(x)\tilde{y}_1 + D_2(x)\tilde{y}_2) + f_1(x) \\ D_1'(x)\tilde{y}_1 + D_2'(x)\tilde{y}_2 + D_1(x)\tilde{y}_1' + D_2(x)\tilde{y}_2' = c(C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2) + d(D_1(x)\tilde{y}_1 + D_2(x)\tilde{y}_2) + f_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_2'(x)\tilde{y}_2 = f \\ D_1'(x)\tilde{y}_1 + D_2'(x)\tilde{y}_2 = \end{cases}$$

Решая, получим $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, откуда найдём $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

15.1 Приближённое решение дифференциальных уравнений

15.1.1 Решение с помощью степенного ряда

Рассмотрим уравнение $y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Найдём его решение в окрестности точки x_0:

$$y(x) = y_0 + y_1(x - x_0) + \frac{y_2}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{F(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})}{n!}(x - x_0)^n + c_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \ldots$$

Неизвестные коэффициенты можно определить подстановкой в исходное уравнение или его дифференцированием и подстановкой начальных условий.