

# Введение

Здесь содержатся знания max4133 о математике. Принятые обозначения:

- $\forall$  — **квантор всеобщности**. Обозначение условия, которое верно для всех указанных элементов. Читается как «для всех», «для каждого», «для любого» или «все», «каждый», «любой».
- $\exists$  — **квантор существования**. Обозначение условия, которое верно хотя бы для одного из указанных элементов. Читается как «существует», «найдётся».
- $\exists!$  — **квантор существования и единственности**. Обозначение условия, которое верно ровно для одного из указанных элементов. Читается как «существует единственный».
- $:$  — «что», «такой (такие)», «что», «так, что», «обладающий свойством».
- $\Rightarrow$  — символ следствия. Читается как «если... то...».
- $\Leftrightarrow$  — символ эквивалентности (равносильности). Читается как «тогда и только тогда, когда», «ровно/в точности тогда, когда».
- $\blacksquare$  — Q.E.D. (лат. quod erat demonstrandum, рус. что и требовалось доказать). Обозначение конца доказательства.

# Оглавление

<b>I</b>	<b>Школьный курс</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Теория множеств</b>	<b>5</b>
1.1	Множества	5
1.1.1	Отношения между множествами	5
1.1.2	Операции над множествами	5
1.1.3	Функции	6
<b>2</b>	<b>Элементарная алгебра</b>	<b>7</b>
2.1	Вещественные числа	7
2.1.1	Аксиоматика вещественных чисел	7
2.1.2	Существование иррациональных чисел	8
2.1.3	Геометрическое представление вещественных чисел	9
2.2	Подмножества множества $\mathbb{R}$	9
2.3	Алгебраические преобразования	9
<b>II</b>	<b>Университетский курс</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Дискретная математика</b>	<b>12</b>
3.1	Графы	12
3.1.1	Связность графов	13
3.1.2	Эйлеровы графы	13
3.1.3	Гамильтоновы графы	14
3.1.4	Планарность графов	15
3.1.5	Деревья	17
3.1.6	Остовы	18
3.1.7	Помеченные деревья	19
<b>4</b>	<b>Линейная алгебра</b>	<b>21</b>
4.1	Линейные комбинации	21
4.2	Матрицы	21
4.2.1	Операции над матрицами	21
4.2.2	Определитель матрицы	22
4.2.3	Ранг матрицы	26
4.2.4	Элементарные преобразования матриц	27
4.2.5	Обратные матрицы	27
4.3	Векторные пространства	28
4.3.1	Базис и размерность векторного пространства	29
4.4	Системы линейных алгебраических уравнений	29
4.4.1	Матричная форма системы линейных уравнений	30
4.4.2	Линейная независимость	30
4.4.3	Решение систем линейных уравнений	31
4.4.4	Фундаментальная система решений	32
4.5	Многочлены от одной переменной	33
4.5.1	Деление многочленов	33

4.5.2	Корень многочлена	34
4.6	Многочлены от нескольких переменных	35
4.6.1	Симметрические многочлены	36
4.7	Квадратные формы	36
<b>5</b>	<b>Математический анализ</b>	<b>38</b>
5.1	Ограниченные подмножества множества $\mathbb{R}$	38
5.2	Предел последовательности	39
5.2.1	Элементарные свойства пределов	40
5.2.2	Арифметические свойства пределов	41
5.2.3	Основные свойства пределов последовательностей	42
5.2.4	Число Эйлера	43
5.2.5	Критерий Коши	43
5.3	Предел функции	44
5.3.1	Предел функции в точке	44
5.3.2	Предел функции на бесконечности	44
5.3.3	Замечательные пределы	44
5.3.4	Локальный экстремум функции нескольких переменных	46
5.3.5	Метод наименьших квадратов	48
5.3.6	Условный экстремум	48
<b>6</b>	<b>Теория множеств</b>	<b>49</b>
6.1	Множества	49
6.1.1	Мощность множеств	49
6.1.2	Мощность числовых множеств	50
<b>7</b>	<b>Элементарная алгебра</b>	<b>52</b>
7.1	Комплексные числа	52
7.1.1	Геометрическое представление комплексного числа	52
7.1.2	Тригонометрическая форма комплексного числа	52

Часть I

Школьный курс

# Глава 1

## Теория множеств

### 1.1 Множества

**Множество** — основное понятие. Некоторые числовые множества:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  — множество натуральных чисел.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  — множество целых чисел.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$  — множество рациональных чисел.
- $\mathbb{I}$  — множество иррациональных чисел.
- $\mathbb{R}$  — множество действительных (вещественных) чисел.
- $\mathbb{C}$  — множество комплексных чисел.

#### 1.1.1 Отношения между множествами

Пусть  $A, B$  — множества. Между ними определены следующие отношения:

- $A$  включено в  $B$  (является **подмножеством**  $B$ ):

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A \ a \in B$$

Нередко вместо знака  $\subseteq$  пишется знак  $\subset$ .

- $A$  равно  $B$ :

$$A = B \Leftrightarrow \forall a \ (a \in A \Leftrightarrow a \in B)$$

- $A$  строго включено в  $B$ :

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B, \ A \neq B$$

#### 1.1.2 Операции над множествами

Пусть  $A, B$  — множества. Над ними определены следующие операции:

- **Объединение:**

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

- **Пересечение:**

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, \ x \in B\}$$

- **Разность:**

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, \ x \notin B\}$$

- Симметрическая разность:

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A, x \notin B \text{ или } x \notin A, x \in B\}$$

- Дополнение до  $U$ , где  $A \subseteq U$ :

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

- Декартово произведение:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

- Декартова степень:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n$$

### 1.1.3 Функции

Пусть  $A$  и  $B$  — множества. **Функцией**  $f$  называется правило, ставящее в соответствие каждому элементу  $a \in A$  единственный элемент  $f(a) \in B$ .  $A$  называется **областью определения** функции  $f$ ,  $B$  — **областью значений** функции  $f$ .  $a$  называется **прообразом**  $f(a)$ ,  $f(a)$  — **образом**  $a$ .

Функция  $f: A \rightarrow B$  называется **инъективной (инъекцией)**, если  $\forall x, y \in A (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$ .

Функция  $f: A \rightarrow B$  называется **сюръективной (сюръекцией)**, если  $\forall b \in B \exists a \in A: f(a) = b$ .

Функция  $f: A \rightarrow B$  называется **биективной (биекцией)**, если она инъективная и сюръективная.

**Последовательностью** называется функция, заданная на множестве  $X \subseteq \mathbb{N}$ , и обозначается  $(x_n)$ .

**Подпоследовательностью** последовательности  $(x_n)$  называется последовательность  $(x_{n_k})$ , если  $(n_k)$  — монотонно возрастающая последовательность.

## Глава 2

# Элементарная алгебра

## 2.1 Вещественные числа

### 2.1.1 Аксиоматика вещественных чисел

Аксиомы сложения:

1. Коммутативность сложения:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a + b = b + a$$

2. Ассоциативность сложения:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

3. Существование **нуля**:

$$\exists 0 \in \mathbb{R}: \forall a \in \mathbb{R} \quad a + 0 = a$$

4. Существование **противоположного** числа:

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R}: a + (-a) = 0$$

Аксиомы умножения:

1. Коммутативность умножения:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

2. Ассоциативность умножения:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

3. Дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

4. Существование **единицы**:

$$\exists 1 \in \mathbb{R}: \forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 = a$$

5. Существование **обратного** числа:

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists \frac{1}{a} = a^{-1} \in \mathbb{R}: a \cdot a^{-1} = 1$$

Аксиомы порядка:

1. Рефлексивность:

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad a \leq a$$

2. Антисимметричность:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} (a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b)$$

3. Транзитивность:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} (a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c)$$

4. Линейная упорядоченность:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} (a \leq b \text{ или } b \leq a)$$

5. Связь сложения и порядка:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} (a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c)$$

6. Связь умножения и порядка:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} (0 \leq a, 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a \cdot b)$$

Аксиома нетривиальности:

$$0 \neq 1$$

Аксиома непрерывности:

$$\forall A, B \subset \mathbb{R} (\forall a \in A, b \in B: a \leq b) \exists x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b$$

## 2.1.2 Существование иррациональных чисел

**Иррациональным** называется число, не являющееся рациональным.

**Утверждение 2.1.1.** *Существуют иррациональные числа.*

**Доказательство (методом от противного).** Пусть  $\exists p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}: \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ ,  $\text{НОД}(p, q) = 1$ .

Тогда

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 : 2 \Leftrightarrow p : 2 \Leftrightarrow p = 2l, l \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2l^2 = q^2$$

Аналогичными рассуждениями получим  $q : 2$ .  $p : 2, q : 2 \Rightarrow \text{НОД}(p, q) \neq 1$ . Противоречие. ■

**Утверждение 2.1.2.** *Среди вещественных чисел есть иррациональные.*

**Доказательство.** Пусть  $X = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^2 < 2\}$ ,  $Y = \{y \in \mathbb{R}^+ \mid y^2 > 2\}$ .

$$\forall x \in X, y \in Y (y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) > 0 \Rightarrow y > x) \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}: \forall x \in X, y \in Y x \leq z \leq y$$

1. Пусть  $z^2 < 2$ .  $z \in X, z > 1,1$ , тогда

$$0 < 2 - z^2 < 1 \Rightarrow \frac{2 - z^2}{5} < 1 \Rightarrow \left(\frac{2 - z^2}{5}\right)^2 < \frac{2 - z^2}{5}$$

- $z + \frac{2 - z^2}{5} > z \Rightarrow z + \frac{2 - z^2}{5} \notin X$
- $\left(z + \frac{2 - z^2}{5}\right)^2 = z^2 + 2z \cdot \frac{2 - z^2}{5} + \left(\frac{2 - z^2}{5}\right)^2 < z^2 + \frac{4}{5}(2 - z^2) + \frac{2 - z^2}{5} = 2 \Rightarrow z + \frac{2 - z^2}{5} \in X$

Противоречие, значит,  $z^2 \geq 2$ .

2. Пусть  $z^2 > 2$ .  $z \in Y, z < 1,9$ , тогда

$$0 < z^2 - 2 < 2 \Rightarrow \frac{z^2 - 2}{4} < 1 \Rightarrow \left(\frac{z^2 - 2}{4}\right)^2 < \frac{z^2 - 2}{4}$$

- $z - \frac{z^2 - 2}{4} < z \Rightarrow z - \frac{z^2 - 2}{4} \notin Y$
- $\left(z - \frac{z^2 - 2}{4}\right)^2 = z^2 - z \cdot \frac{z^2 - 2}{2} + \left(\frac{z^2 - 2}{4}\right)^2 > z^2 - (z^2 - 2) = 2 \Rightarrow z - \frac{z^2 - 2}{4} \in Y$

Противоречие, значит,  $z^2 \leq 2$ .

Т. о.,  $z^2 \leq 2, z^2 \geq 2 \Leftrightarrow z^2 = 2 \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}: (z^2 = 2 \Rightarrow z \notin \mathbb{Q})$ . ■



### 2.1.3 Геометрическое представление вещественных чисел

Самой распространённой интерпретацией множества  $\mathbb{R}$  является бесконечная прямая.

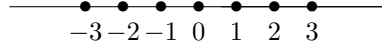


Рис. 2.1: Множество  $\mathbb{R}$  в виде прямой

Множество  $\mathbb{R}$  также можно представить в виде окружности, одна точка которой соответствует нулю, а другая — бесконечности.

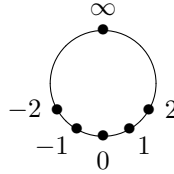
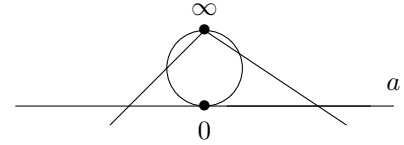


Рис. 2.2: Множество  $\mathbb{R}$  в виде окружности

Покажем, что эти интерпретации взаимозаменяемы. Изобразим их так, чтобы точка, соответствующая нулю на прямой  $a$ , совпадала с точкой, соответствующей нулю на окружности. Теперь из точки, соответствующей бесконечности на окружности, проведём все возможные прямые. Каждая из них пересекает одну точку на прямой  $a$  и одну точку на окружности и таким образом устанавливает взаимно однозначное соответствие.



## 2.2 Подмножества множества $\mathbb{R}$

**Промежутком** называется множество вещественных чисел, которое вместе с любыми двумя числами содержит любое число между ними. Типы промежутков:

- $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  — **отрезок**
- $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  — **интервал**
- $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  — **полуинтервал**
- $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$  — **полуинтервал**

Полагая  $a = \pm\infty$  или  $b = \pm\infty$ , можно определить бесконечные промежутки. Например:

- $(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$
- $(0; +\infty) = \mathbb{R}^+$

**Окрестностью** точки  $x \in \mathbb{R}$  называется интервал  $(a; b): x \in (a; b)$ .

$\varepsilon$ -**окрестностью**  $U_\varepsilon(x)$  точки  $x \in \mathbb{R}$  называется интервал  $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ .

**Проколотой  $\varepsilon$ -окрестностью**  $\check{U}_\varepsilon(x)$  точки  $x \in \mathbb{R}$  называется  $U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$ .

## 2.3 Алгебраические преобразования

Формулы сокращённого умножения:

1. Квадрат суммы:

$$(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$$

2. Разность квадратов:

$$a^2 - b^2 = a^2 - ab + (ab - b^2) = (a + b)(a - b)$$

3. Куб суммы:

$$(a \pm b)^3 = (a^2 \pm 2ab + b^2)(a \pm b) = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

4. Сумма кубов:

$$a^3 \pm b^3 = a^3 \mp a^2b + ab^2 \pm a^2b - ab^2 \pm b^3 = a(a^2 \mp ab + b^2) \pm b(a^2 \mp ab + b^2) = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

**Теорема 2.3.1 (формула бинома Ньютона).**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m$$

**Доказательство (методом математической индукции).**

- *База индукции.*  $n = 1$ :  $(a + b)^1 = a + b = C_1^0 a + C_1^1 b$
- *Шаг индукции.* Пусть формула верна для  $n$ . Докажем истинность для  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b) \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m+1} b^m + \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^{m+1} = \\ &= a^{n+1} + \sum_{m=0}^{n-1} C_n^{m+1} a^{n-m} b^{m+1} + \sum_{m=0}^{n-1} C_n^m a^{n-m} b^{m+1} = a^{n+1} + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n+1}^{m+1} a^{n-m} b^{m+1} + b^{n+1} = \\ &= a^{n+1} + \sum_{m=1}^n C_{n+1}^m a^{n+1-m} b^m + b^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m a^{n+1-m} b^m \end{aligned}$$

■

## Часть II

# Университетский курс

## Глава 3

# Дискретная математика

### 3.1 Графы

**Неориентированным графом** называется пара множеств  $G = (V, E)$ , где  $V$  — множество вершин графа,  $E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$  — множество рёбер графа.

Если  $e = \{u, v\}$ ,  $e \in E$ , то говорят, что:

- ребро  $e$  соединяет вершины  $u$  и  $v$ ;
- $u$  и  $v$  — концы ребра  $e$ ;
- ребро  $e$  **инцидентно** вершинам  $u$  и  $v$ ;
- вершины  $u$  и  $v$  **инцидентны** ребру  $e$ .

В дальнейшем будем рассматривать только конечные графы.

На рисунках вершины графа изображают точками, а рёбра  $e = \{u, v\}$  — кривыми, соединяющими точки, которые изображают вершины  $u$  и  $v$ .

Вершины называются **соседними**, или **смежными**, если их соединяет ребро, иначе — **несоседними**, или **несмежными**.

Число рёбер в графе  $G$ , инцидентных вершине  $u$ , называется **степенью** вершины и обозначается  $\deg_G u$ .

Если степень вершины равна 0, то она называется **изолированной**, а если 1 — то **висячей**.

Ребро вида  $e = \{u, u\}$  называется **петлёй**.

Рёбра называются **кратными**, инцидентные одним и тем же вершинам.

Граф называется **простым**, если он не содержит петель и кратных рёбер.

Граф, в котором любые две вершины соединены ребром, называется **полным** и обозначается  $K_n$ , где  $n$  — число вершин в нём.

Графы  $G_1 = (V_1, E_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2)$  называются **изоморфными**, если существует биекция  $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$  такая, что  $\forall u, v \in V_1 \{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$ , иначе — **неизоморфными**.  $\varphi$  называется **изоморфизмом**.

**Лемма 3.1.1 (о рукопожатиях).**

$$\sum_{u \in V} \deg_G u = 2|E|$$

где  $G = (V, E)$  — граф.

**Доказательство (методом математической индукции).**

- *База индукции.*  $|E| = 0$ : в таком графе  $\sum_{u \in V} \deg u = 0$ .

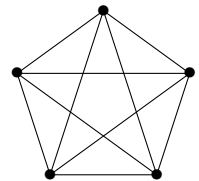


Рис. 3.1: Граф  $K_5$

- *Шаг индукции.* Пусть лемма верна для  $|E| = n$ . Докажем её для  $|E| = n + 1$ . Для этого достаточно заметить, что каждое новое ребро увеличивает степени двух вершин на 1.

■

**Маршрутом** в графе  $G = (V, E)$  называется последовательность вершин и рёбер вида  $(v_1; e_1; v_2; \dots; e_k; v_{k+1})$ , где  $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ .

Маршрут, в котором все рёбра различны, называется **цепью**.

Цепь, в которой все вершины, за исключением, может быть, первой и последней, различны, называется **простой**.

Маршрут, в котором первая и последняя вершины совпадают, называется **замкнутым**.

Замкнутая цепь называется **циклом**.

Маршрут, соединяющий вершины  $u$  и  $v$ , называется  $(u, v)$ -**маршрутом**.

**Лемма 3.1.2.**  $(u, v)$ -маршрут содержит  $(u, v)$ -простую цепь.

**Доказательство.** Пусть  $(u = v_1; e_1; v_2; \dots; e_k; v_{k+1} = v)$  — не простая цепь, тогда  $\exists i < j: v_i = v_j$ . Уберём из маршрута подпоследовательность  $(e_i; v_{i+1}; \dots; e_{j-1}; v_j)$ , получим маршрут, в котором совпадающих вершин на одну меньше. Повторяя, получим простую цепь, являющуюся частью данного маршрута. ■

**Лемма 3.1.3.** Любой цикл содержит простой цикл. Доказательство аналогично предыдущему.

**Лемма 3.1.4.** Если в графе есть две различные простые цепи, соединяющие одни и те же вершины, то в этом графе есть простой цикл.

**Доказательство.** Пусть  $(u = v_1; e_1; v_2; \dots; e_n; v_{n+1} = v)$ ,  $(u = v'_1; e'_1; v'_2; \dots; e'_m; v'_{m+1} = v)$  — простые цепи. Найдём наименьшее  $i: e_i \neq e'_i$ , тогда  $(v_i; e_i; v_{i+1}; \dots; e_n; v_{n+1} = v'_{m+1}; e'_m; \dots; e'_i; v'_i = v_i)$  — цикл, значит, можно получить простой цикл. ■

### 3.1.1 Связность графов

Вершины  $u$  и  $v$  называются **связанными**, если существует  $(u, v)$ -маршрут, иначе — **несвязанными**.

Граф называется **связным**, если в нём любые две вершины связаны, иначе — **несвязным**.

Граф  $G' = (V', E')$  называется **подграфом** графа  $G = (V, E)$ , если  $V' \subseteq V$  и  $E' \subseteq E$ .

**Компонентой связности** графа называется его максимальный (относительно включения) связный подграф.

### 3.1.2 Эйлеровы графы

Цикл, содержащий все рёбра графа, называется **эйлеровым**.

Граф, содержащий эйлеров цикл, называется **эйлеровым**.

**Теорема 3.1.1.** Связный граф эйлеров  $\Leftrightarrow$  степени всех вершин чётны.

**Доказательство.**

1.  $\Rightarrow$ . Пусть в графе есть эйлеров цикл. Выберем вершину  $v_0$  в этом цикле и начнём обходить его. При каждом посещении вершины  $v \neq v_0$  её степень увеличивается на 2. Т. о., если посетить её

$k$  раз, то  $\deg v = 2k$ .

Для  $v_0$  степень увеличивается на 1 в начале обхода, на 1 в конце обхода и на 2 при промежуточных посещениях. Т. о., её степень чётна.

2.  $\Leftarrow$ . Пусть степени всех вершин чётны. Выберём цепь  $C = (v_0; e_0; v_1; e_1; \dots; e_{k-1}; v_k)$  наибольшей длины. Все рёбра, инцидентные  $v_k$ , присутствуют в этой цепи, иначе её можно было бы удлинить.

Докажем методом от противного, что  $v_0 = v_k$ . Пусть  $v_0 \neq v_k$ . При прохождении вершины  $v_i = v_k$ , где  $0 < i < k$ , степень  $v_k$  увеличивается на 2. Также проходим по ребру  $e_{k-1}$ , тогда степень  $v_k$  нечётна. Противоречие.

Докажем методом от противного, что  $C$  содержит все рёбра. Пусть найдётся ребро  $e = \{u, v\}$ , не входящее в  $C$ . Возьмём первое ребро  $e' = \{v_i, v'\}$  из  $(v_0, u)$ -маршрута, не входящее в  $C$ . Тогда цепь  $(v'; e'; v_i; e_i; \dots; e_{k-1}; v_k = v_0; e_0; v_1; e_1; \dots; v_{i-1})$  длиннее, чем  $C$ . Противоречие.

■

## Алгоритмы нахождения эйлерова цикла

### 1. Алгоритм Флёр (очень медленный).

- (a) Выберем произвольную вершину.
- (b) Пусть находимся в вершине  $v$ . Выберем ребро, инцидентное ей, которое должно быть мостом, только если не осталось других рёбер.
- (c) Проходим по выбранному ребру и вычёркиваем его.
- (d) Повторяем, пока есть рёбра.

### 2. Алгоритм объединения циклов.

- (a) Выберем произвольную вершину.
- (b) Выбираем любое непосещённое ребро и идём по нему.
- (c) Повторяем, пока не вернёмся в начальную вершину.
- (d) Получим цикл  $C$ . Если он не эйлеров, то  $\exists u \in C, e = \{u, u'\} : u' \notin C$ . Повторяем шаги 2a–2c для начальной вершины  $u$ . Получим цикл  $C'$ , рёбра которого не совпадают с рёбрами  $C$ . Объединим эти циклы и получим новый. Повторяем шаг 2d.

Цепь называется **эйлеровым путём**, если она не является циклом и содержит все рёбра.

Граф называется **полуэйлеровым**, если в нём есть эйлеров путь.

**Теорема 3.1.2.** *Связный граф полуэйлеров  $\Leftrightarrow$  степени двух вершин нечётны, а остальных — чётны.*

**Доказательство.**

- 1.  $\Rightarrow$ . Пусть в графе есть эйлеров путь. Соединив его концы ребром, получим эйлеров цикл. Степени соединённых вершин увеличились каждая на 1, значит, они были нечётными, а степени остальных вершин — чётными.
- 2.  $\Leftarrow$ . Пусть степени двух вершин нечётны, а остальных — чётны. Соединим нечётные вершины ребром, тогда можно получить эйлеров цикл. Убрав из него добавленное ребро, получим эйлеров путь.

■

### 3.1.3 Гамильтоновы графы

Простой цикл, содержащий все вершины графа, называется **гамильтоновым**.

Граф называется **гамильтоновым**, если в нём есть гамильтонов цикл.

**Теорема 3.1.3 (Дирака).** *Если в графе  $G = (V, E)$  с  $n \geq 3$  вершинами  $\forall u \in V \deg u \geq \frac{n}{2}$ , то граф гамильтонов.*

**Доказательство.**

- 1. Докажем методом от противного, что граф связный. Пусть он несвязный. Выберем компоненту связности  $G' = (V', E')$  с наименьшим числом вершин, тогда  $|V'| \leq \frac{n}{2}$ . Возьмём  $v \in V'$ , тогда  $\deg v \leq |V'| - 1 < \frac{n}{2}$ . Противоречие с условием.
- 2. Выберем цепь  $C = (v_0; e_0; v_1; \dots; e_{k-1}; v_k)$  максимальной длины. Тогда все вершины, соседние с  $v_0$ , лежат в этой цепи, иначе можно увеличить длину цепи. Среди  $v_1, v_2, \dots, v_k$  не менее  $\frac{n}{2}$  вершин, соседних с  $v_0$ , т. к.  $\deg v_0 \geq \frac{n}{2}$ . Аналогично для  $v_k$ .

Найдутся  $v_{i-1}$  и  $v_i$  такие, что  $v_{i-1}$  соседняя с  $v_k$ , а  $v_i$  — с  $v_0$ .

Докажем, что  $(v_i; e_{i+1}; \dots; v_k; e; v_{i-1}; e_{i-1}; \dots; v_0; e'; v_i)$  — гамильтонов цикл, методом от противного. Предположим обратное, тогда есть вершина  $u$ , не входящая в цикл, и существует  $(v_0, u)$ -маршрут. Значит, существует ребро, инцидентное одной из вершин цикла, но не входящее в него, и можно получить более длинную цепь. Противоречие.

■

**Теорема 3.1.4 (Оре).** Если в графе с  $n \geq 3$  вершинами для любых двух несмежных вершин  $u$  и  $v$   $\deg u + \deg v \geq n$ , то граф гамильтонов.

**Доказательство.**

1. Докажем методом от противного, что граф связный. Пусть он несвязный, тогда в нём найдутся хотя бы две компоненты связности  $G_1(V_1, E_1)$  и  $G_2(V_2, E_2)$ . Пусть  $u \in V_1, v \in V_2$ .  $u$  и  $v$  несмежные, тогда

$$\deg u \leq |V_1| - 1, \deg v \leq |V_2| - 1 \Rightarrow \deg u + \deg v \leq |V_1| + |V_2| - 2 \leq n - 2$$

Противоречие с условием.

2. Докажем, что граф гамильтонов. Выберем цепь  $W = (v_0; e_0; v_1; \dots; e_{k-1}; v_k)$  наибольшей длины. В ней содержатся все вершины, соседние с  $v_0$  или с  $v_k$ . Т. о., среди вершин  $v_1, \dots, v_k$   $\deg v_0$  соседних с  $v_0$ . Аналогично для  $v_k$ .

$\deg v_0 + \deg v_k \geq n$ , тогда найдутся  $v_i$  и  $v_{i+1}$  такие, что  $v_i$  соседняя с  $v_k$ , а  $v_{i+1}$  — с  $v_0$ .

$(v_{i+1}; e_{i+1}; \dots; v_k; e; v_i; e_{i-1}; v_{i-1}; \dots; e_0; v_0; e'; v_{i+1})$  — гамильтонов цикл (доказательство аналогично доказательству в теореме Дирака (3.1.3)).

■

### 3.1.4 Планарность графов

**Плоским** называется граф  $G = (V, E)$  такой, что:

- $V \subset \mathbb{R}^2$ ;
- рёбра — кривые, концами которых являются вершины;
- различные рёбра не имеют общих точек, за исключением концов.

**Планарным** называется граф, изоморфный плоскому.

Если  $G$  — граф и  $G'$  — плоский граф, изоморфный  $G$ , то  $G'$  называется **укладкой**  $G$  в  $\mathbb{R}^2$ .

Аналогично можно определить плоский граф в  $\mathbb{R}^3$ , на сфере и т. д.

**Теорема 3.1.5.** Любой граф можно уложить в  $\mathbb{R}^3$ .

**Доказательство.** Пусть  $G = (V, E)$  — граф,  $V = \{(1; 0; 0), (2; 0; 0), \dots, (n; 0; 0)\}$ . Рассмотрим плоскости, проходящие через  $Ox$  и образующие с плоскостью  $Oxy$  углы  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2 \cdot 2}, \dots, \frac{\pi}{2m}$ , где  $m = |E|$ . Получим плоский граф, т. к. плоскости пересекаются только по прямой  $Ox$ . ■

**Теорема 3.1.6.** Граф укладывается на плоскость  $\Leftrightarrow$  он укладывается на сферу.

**Доказательство.** Пусть плоскость  $z = 0$  касается сферы в точке  $O(0; 0; 0)$ ,  $N$  — точка на сфере, диаметрально противоположная точке  $O$ . Для каждой точки сферы, не совпадающей с  $N$ , проведём прямую через неё и точку  $N$ , которая пересечёт сферу и плоскость, причём любые две из таких прямых имеют единственную общую точку  $N$ . Получим биекцию между точками сферы и точками плоскости, тогда можно построить биекцию между укладками на сфере и укладками на плоскости.

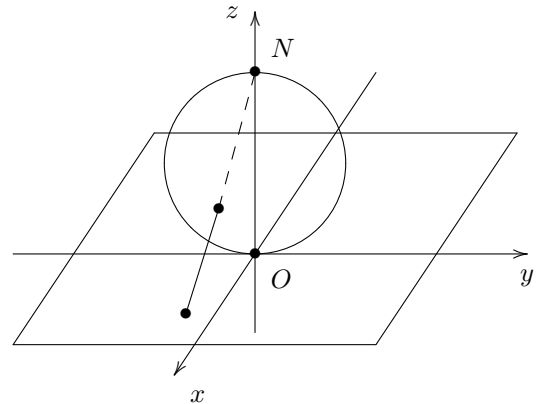
■

Множество на плоскости называется **линейно связным**, если любые две точки этого множества можно соединить кривой, целиком лежащей в этом множестве.

**Грань** плоского графа  $G = (V, E)$  называется часть множества  $\mathbb{R}^2 \setminus G$ , которая линейно связна и не является подмножеством другого линейно связного множества.

**Теорема 3.1.7 (формула Эйлера).** В плоском связном графе  $n - m + f = 2$ , где  $n, m, f$  — число вершин, рёбер и граней соответственно.

**Доказательство.** Рассмотрим остов данного графа. В нём  $n$  вершин,  $n - 1$  рёбер и 1 грань. Формула Эйлера верна для него:  $n - (n - 1) + 1 = 2$ .



Добавим 1 ребро данного графа, тогда оно разобьёт одну грань на две, т. е. число граней увеличится на 1. Формула Эйлера верна для полученного графа. Повторяя  $m - (n - 1)$  раз, получим исходный граф, для которого формула Эйлера верна. ■

**Теорема 3.1.8.** Пусть  $G$  — планарный граф с  $n \geq 3$  вершинами и  $m$  рёбрами. Тогда  $m \leq 3n - 6$ .

**Доказательство.** При  $m = 2$  неравенство выполняется.

Пусть в графе  $f$  граней,  $m_i$  — число рёбер в границе  $i$ -й грани. Тогда  $m_i \geq 3$ ,  $\sum_{i=1}^f m_i \geq 3f$ . С другой стороны,  $\sum_{i=1}^f m_i = 2m$ . По формуле Эйлера (3.1.7)  $n - m + f = 2 \Leftrightarrow f = m + 2 - n$ . Получим:

$$2m \geq 3f \Leftrightarrow 2m \geq 3m + 6 - 3n \Leftrightarrow m \leq 3n - 6$$

■

**Следствие 3.1.1.** Планарный граф  $G = (V, E)$  содержит хотя бы одну вершину со степенью, не большей 5.

**Доказательство (методом от противного).** Пусть  $\forall v \in V \deg v \geq 6$ ,  $|V| = n$ ,  $|E| = m$ , тогда  $m = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg v \geq 3n$ . Имеем:

$$3n \leq m \leq 3n - 6 \Rightarrow 0 \leq -6$$

Противоречие. ■

**Теорема 3.1.9.** Графы  $K_5$  и  $K_{3,3}$  не планарные.

**Доказательство.**

- Рассмотрим  $K_5$ :  $n = 5$ ,  $m = 10$ . Тогда  $m \leq 3n - 6 \Leftrightarrow 10 \leq 9$ . Неверно, значит,  $K_5$  не планарен.
- Рассмотрим  $K_{3,3}$ . Пусть он планарный. В нём самый короткий цикл имеет длину 4. Тогда рассуждениями, аналогичными рассуждениям при доказательстве теоремы (3.1.8), получим

$$2m \geq 4f \Leftrightarrow 2m \geq 4m + 8 - 4n \Leftrightarrow m \leq 2n - 4$$

$n = 6$ ,  $m = 9$ , тогда  $9 \leq 8$ . Неверно, значит,  $K_{3,3}$  не планарен.

■

Граф  $G' = (V', E')$  получается **подразбиением** ребра  $e = \{u, v\}$  графа  $G = (V, E)$ , если:

- $V' = V \cup \{u'\}$ ;
- $E' = (E \setminus \{e\}) \cup \{\{u, u'\}, \{v, u'\}\}$ .

Графы  $G$  и  $G'$  **гомеоморфны**, если они изоморфны графам, получающимся подразбиениями рёбер одного и того же графа.

**Теорема 3.1.10 (Понтрягина-Куратовского).** Граф  $G$  планарен  $\Leftrightarrow$  он не содержит подграфов, гомеоморфных  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .

**Доказательство.**

1.  $\Rightarrow$ . Очевидно, что подграф планарного графа планарен. Если  $G$  — планарный граф, содержащий подграф  $G'$ , гомеоморфный  $K_5$  или  $K_{3,3}$ , то  $G'$  тоже планарный, значит,  $K_5$  или  $K_{3,3}$  планарен, т. к. подразбиение рёбер не влияет на планарность. Противоречие, значит,  $G$  не планарен.
2.  $\Leftarrow$ . Доказательство слишком сложно, поэтому здесь не приводится.

■



### 3.1.5 Деревья

Граф без циклов называется **лесом**.

Связный лес называется **деревом**.

Ребро называется **мостом**, если при его удалении увеличивается число компонент связности.

**Утверждение 3.1.1.** Ребро — мост  $\Leftrightarrow$  оно не содержится в цикле.

**Доказательство.**

1.  $\Leftarrow$ . Пусть ребро  $e$  содержится в цикле  $W = (v_0; e_0; \dots; u; e; v; \dots; v_k)$ ,  $u'$  и  $v'$  — связанные вершины.
  - (a) Если в  $(u', v')$ -маршруте нет ребра  $e$ , то при его удалении из графа  $u'$  и  $v'$  останутся связными.
  - (b) Пусть  $(u' = v'_0; e'_0; \dots; u; e; v; \dots; e'_m; v'_m = v')$  — маршрут, соединяющий  $u'$  и  $v'$ , тогда при удалении  $e$  из графа  $u'$  и  $v'$  соединяет маршрут  $(u' = v'_0; e'_0; \dots; u; \dots; e_0; v_0 = v_k; e_{k-1}; \dots; v; \dots; e'_m; v'_m = v')$ .
2.  $\Rightarrow$ . Пусть  $e = \{u, v\}$  не является мостом, тогда  $u, v$  лежат в одной компоненте связности. Удалим  $e$  из графа. Число компонент связности не изменится, значит,  $u$  и  $v$  также лежат в одной компоненте связности, т. е. существует цепь, соединяющая  $u$  и  $v$ :  $(u = v_0; e_0; \dots; e_{k-1}; v_k = v)$ . Тогда в исходном графе существует цикл  $(u = v_0; e_0; \dots; e_{k-1}; v_k = v; e; u)$ .

■

**Теорема 3.1.11.** Следующие утверждения о графе  $G = (V, E)$  с  $n$  вершинами эквивалентны:

1.  $G$  — дерево.
2.  $G$  связный и каждое его ребро — мост.
3.  $G$  связный и имеет  $n - 1$  ребро.
4.  $G$  не содержит циклов и имеет  $n - 1$  ребро.
5. Любые две вершины графа  $G$  соединены ровно одной простой цепью.
6.  $G$  не содержит циклов и добавление ребра приводит к появлению ровно одного цикла.

**Доказательство.**

- (1)  $\Rightarrow$  (2). Связность следует из определения дерева.

В силу утверждения (3.1.1) каждое ребро — мост.

- (2)  $\Rightarrow$  (3). Связность следует из предположения.

Докажем методом математической индукции, что в графе  $n - 1$  ребро.

— *База индукции.* Для  $n = 1, 2$  очевидно.

— *Шаг индукции.* Пусть утверждение верно для чисел, меньших  $n$ . Возьмём мост  $e$  и удалим его. Получим две компоненты связности  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$ . По предположению индукции  $|E_1| = |V_1| - 1$ ,  $|E_2| = |V_2| - 1$ . Тогда в исходном графе рёбер  $|E_1| + |E_2| + 1 = |V_1| + |V_2| - 1 = n - 1$ .

- (3)  $\Rightarrow$  (4).  $G$  имеет  $n - 1$  ребро по предположению.

Докажем методом математической индукции, что  $G$  не содержит циклов.

— *База индукции.* Для  $n = 1, 2$  очевидно.

— *Шаг индукции.* Пусть утверждение верно для чисел, меньших  $n$ . Докажем методом от противного, что в графе есть вершина степени 1. Пусть

$$\forall u \in V \quad \deg u \geq 2 \Rightarrow 2|E| = \sum_{u \in V} \deg u \geq 2n \Rightarrow n - 1 = |E| \geq n \Rightarrow -1 \geq 0$$

Противоречие, значит, в графе найдётся вершина степени 1.

Удалим её и инцидентное ей ребро. Полученный граф содержит  $n - 1$  вершину и удовлетворяет утверждению (3). По предположению индукции он не содержит циклов, тогда и исходный граф не содержит циклов.

- (4)  $\Rightarrow$  (5).

Пусть в графе  $k$  компонент связности:  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$ ,  $\dots$ ,  $G_k = (V_k, E_k)$ . Они не содержат циклов по предположению, тогда они являются деревьями.

$$|E_1| = |V_1| - 1, |E_2| = |V_2| - 1, \dots, |E_k| = |V_k| - 1, n - 1 = |E_1| + \dots + |E_k| = n - k \Rightarrow k = 1$$

Значит, граф связный.

Пусть существуют вершины  $u$  и  $v$  такие, что их соединяют две простые цепи, тогда по лемме (3.1.4) в графе есть цикл, что противоречит предположению. Значит, эти вершины соединены ровно одной простой цепью.

- (5)  $\Rightarrow$  (6).

Докажем методом от противного, что в графе нет циклов. Предположим, что есть цикл  $(v_0; e_0; v_1; \dots; v_k = v_0)$ , тогда есть две простые цепи  $(v_0; e_0; \dots; v_{k-1})$  и  $(v_{k-1}; e_k; v_k = v_0)$ , соединяющие  $v_0$  и  $v_{k-1}$ , что противоречит предположению.

Докажем, что добавление ребра приводит к появлению ровно одного цикла. Рассмотрим несоседние вершины  $u$  и  $v$ . По предположению есть цепь  $(u = v_0; e_0; \dots; v_k = v)$ , соединяющая их. Тогда, добавив  $e = \{u, v\}$ , получим цикл  $(u = v_0; e_0; \dots; v_k = v; e; u)$ .

Пусть есть 2 цикла, соединяющих  $u$  и  $v$ . Удалим  $e$ , тогда один цикл останется. Получим исходный граф, в котором не должно быть циклов. Противоречие.

- (6)  $\Rightarrow$  (1).

Докажем связность методом от противного. Рассмотрим несвязные вершины  $u$  и  $v$ . Соединим их и по предположению получим цикл  $(v_0; e_0; \dots; u; e; v; \dots; e_{k-1}; v_k = v_0)$ . Тогда в исходном графе  $(u; \dots; e_0; v_0 = v_k; e_{k-1}; \dots; v) - (u, v)$ -маршрут. Противоречие.

■

В ходе доказательства было получено, что в связном графе с  $n$  вершинами и  $n-1$  рёбрами существует висющаяся вершина. Т.к. доказано, что такой граф является деревом, то верно следующее утверждение.

**Утверждение 3.1.2.** В дереве существует висющаяся вершина.

**Утверждение 3.1.3.** Если в лесу  $n$  вершин,  $m$  рёбер и  $k$  компонент связности, то

$$m = n - k$$

**Доказательство.** Пусть  $n_1, \dots, n_k$  — число вершин в каждой компоненте связности, тогда

$$m = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) = n - k$$

■

### 3.1.6 Остовы

**Остовом** графа  $G = (V, E)$  называется его подграф  $G' = (V', E')$  такой, что  $V = V'$  и  $G'$  — дерево.

**Утверждение 3.1.4.** Любой связный граф содержит остов.

**Утверждение 3.1.5.** Если граф не является деревом, то в нём несколько остовов.

Пусть  $G = (V, E)$  — граф. **Весом** называется функция  $\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ . **Весом ребра**  $e \in E$  называется  $\alpha(e)$ . **Весом графа** называется  $\sum_{e \in E} \alpha(e)$ .

#### Алгоритмы нахождения остова минимального веса

Пусть дан граф  $G = (V, E)$ ,  $n = |V|$  и весовая функция  $\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Строим остов наименьшего веса  $T = (V, P)$ .

##### 1. Алгоритм Краскала

- Выбираем ребро  $e \in E$  с наименьшим весом:  $P_1 = \{e\}$ ,  $T_1 = (V, P_1)$ .

- (b) Выбираем ребро  $e \in E$  с наименьшим весом такое, что  $e \notin P_i$  и добавление этого ребра не приводит к образованию цикла в  $T$ :  $T_{i+1} = (V, P_i \cup \{e\})$ .
- (c) Повторяем шаг 1b  $n - 2$  раз.  $T_n$  — искомый остов.

**Доказательство.** Пусть  $T = (V, P)$  — построенный остов, где  $P = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ ,  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  — рёбра в порядке их добавления в остов, а также  $D = (V, M)$  — другой остов, где  $M = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_{n-1}\}$ ,  $e'_1, e'_2, \dots, e'_{n-1}$  — рёбра в порядке убывания их весов.

Если  $T \neq D$ , то пусть  $i$  — наименьшее число такое, что  $e_i \neq e'_i$ .  $e'_i$  не входит в  $T$ , значит, оно образует цикл с рёбрами в  $T$ , выбранными ранее, тогда вес этих рёбер не больше  $\alpha(e'_i)$ . Выберем из них ребро  $e$  такое, что при добавлении его в  $D$  образуется цикл. Пусть  $D_1 = (V, M \cup \{e\} \setminus \{e'_i\})$ . Этот граф — остов, причём  $\alpha(D_1) \leq \alpha(D)$  и у  $T$  и  $D_1$  на 1 общее ребро больше, чем у  $T$  и  $D$ . Повторяя, получим  $D_k = T$ . Значит, вес построенного остова не превосходит веса любого другого остова. ■

## 2. Алгоритм Прима

Строится последовательность деревьев  $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n = T$ .

- (a) Выбираем произвольную вершину  $v$ .  $S_1 = (\{v\}, \emptyset)$ .
- (b) Пусть построено  $S_i = (V_i, E_i)$ . Находим ребро  $e = \{u, v_i\} \in E$ , где  $u \in V_i$ ,  $v_i \notin V_i$ , наименьшего веса, добавление которого не приводит к образованию цикла:  $S_{i+1} = (V_i \cup \{v_i\}, E_i \cup \{e\})$ .
- (c) Повторяем шаг 2b  $n - 1$  раз.  $S_n$  — искомый остов.

### 3.1.7 Помеченные деревья

Дерево с  $n$  вершинами, которым сопоставлены числа  $1, \dots, n$ , называется **помеченным**.

Каждому помеченному дереву можно взаимнооднозначно сопоставить последовательность из  $n - 2$  чисел от 1 до  $n$ , называемую **кодом Прюфера**. Алгоритм построения кода Прюфера для помеченного дерева  $G = (V, E)$ :

1. Выбираем висячую вершину  $v$  с наименьшим номером.
2. Добавляем номер вершины, смежной с  $v$ , в код.
3. Удаляем  $v$  и ребро, инцидентное  $v$ , из дерева.
4. Повторить, начиная с шага 1,  $n - 2$  раза.

**Утверждение 3.1.6.** *Различным помеченным деревьям соответствуют различные коды Прюфера.*  
**Доказательство (методом математической индукции).**

- *База индукции.* При  $n = 3$  легко проверить.
- *Шаг индукции.* Пусть утверждение верно при  $n$ ,  $G = (V, E)$  и  $G' = (V', E')$  — различные помеченные деревья с  $n + 1$  вершинами в каждом. Если в  $G$  и  $G'$  вершины с наименьшим номером смежны с вершинами с одинаковыми номерами, то выполняем шаг построения кода, тогда оставшиеся деревья различны, значит, по предположению индукции у них различные коды.

■

Алгоритм построения дерева по коду  $A_0 = (a_0; \dots; a_{n-3})$ .

1. Пусть  $B_0 = \{1, \dots, n\}$ .
2. Находим наименьшее  $b \in B_i$ :  $b \notin A_i$ . Тогда в дереве есть ребро  $\{b, a_i\}$ :  $A_{i+1} = A_i \setminus \{a_i\}$ ,  $B_{i+1} = B_i \setminus \{b\}$ .
3. Повторяем шаг 2  $n - 2$  раз. Получим  $B_{n-2} = \{b', b''\}$ , значит, в дереве есть ребро  $\{b', b''\}$ .

**Утверждение 3.1.7.** *Указанный алгоритм построения дерева по коду из  $n$  чисел строит дерево.*  
**Доказательство (методом математической индукции).**

- *База индукции.* При  $n = 1$  легко проверить.

- *Шаг индукции.* Рассмотрим графы  $T_1, \dots, T_{n-1}$ , полученные в процессе построения дерева.  $T_1$  не содержит циклов.  $T_2$  получается из  $T_1$  либо добавлением новой вершины, либо добавлением моста, что не приводит к появлению цикла. Т. о.,  $T_{n-1}$  не содержит циклов и содержит  $n$  вершин и  $n - 1$  ребёр, значит,  $T_{n-1}$  — дерево.

■

**Теорема 3.1.12 (Кэли).** Пусть  $G = (V, E)$  — помеченное дерево с  $n$  вершинами. Всего можно составить  $n^{n-2}$  таких неизоморфных деревьев.

## Глава 4

# Линейная алгебра

### 4.1 Линейные комбинации

Выражение, построенное на множестве элементов путём сложения этих элементов, умноженных на некоторые коэффициенты, называется **линейной комбинацией**. Если все коэффициенты линейной комбинации равны нулю, то она называется **тривиальной**, иначе — **нетривиальной**.

### 4.2 Матрицы

**Матрицей** называется прямоугольная таблица из чисел, содержащая  $m$  строк и  $n$  столбцов, и обозначается

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

Числа  $m$  и  $n$  называются **порядками** матрицы.

Если  $m = n$ , то матрица называется **квадратной**, а число  $m = n$  — её **порядком**. **Главной** называется диагональ квадратной матрицы, состоящая из элементов  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ , а **побочной** — состоящая из элементов  $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}$ .

$i$ -я строка матрицы обозначается  $A_i$ ,  $j$ -й столбец —  $A^j$ .

Две матрицы называются **равными**, если их порядки и соответствующие элементы совпадают, иначе — **неравными**.

#### 4.2.1 Операции над матрицами

Матрица, все элементы которой равны 0, называется **нулевой** и обозначается  $O$ .

Квадратная матрица, в которой элементы главной диагонали равны 1, а остальные — 0, называется **единичной** и обозначается  $E$ .

Над матрицами определены следующие операции:

- **Сложение.** Определено только над матрицами одинакового размера.

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{array} \right\|$$

Пусть  $A, B, C$  — матрицы. Свойства сложения:

- коммутативность:  $A + B = B + A$
- ассоциативность:  $(A + B) + C = A + (B + C)$

- **Умножение на число.**

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{vmatrix}$$

Пусть  $\alpha, \beta$  — числа,  $A, B$  — матрицы. Свойства умножения на число:

- ассоциативность:  $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$
- дистрибутивность относительно сложения чисел:  $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
- дистрибутивность относительно сложения матриц:  $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

- **Умножение.**  $A \cdot B$  определено, только если количество столбцов в матрице  $A$  совпадает с количеством строк в матрице  $B$ .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum a_{1i}b_{i1} & \sum a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum a_{1i}b_{in} \\ \sum a_{2i}b_{i1} & \sum a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum a_{2i}b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{mi}b_{i1} & \sum a_{mi}b_{i2} & \cdots & \sum a_{mi}b_{in} \end{vmatrix}$$

где суммирование производится по  $i$  от 1 до  $k$ .

Пусть  $\lambda$  — число,  $A, B, C$  — матрицы. Свойства умножения:

- ассоциативность:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- дистрибутивность:  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ ,  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- ассоциативность и коммутативность относительно умножения на число:  $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$

## 4.2.2 Определитель матрицы

**Определителем** порядка  $n$ , соответствующим квадратной матрице  $A$  порядка  $n$ , называется число, равное

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma=(i_1; \dots; i_n) \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}, \quad |\sigma| = \begin{cases} 0, \sigma \text{ чётная} \\ 1, \sigma \text{ нечётная} \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $S_n$  — множество всех перестановок  $n$ -элементного множества.

Матрица называется **вырожденной**, если её определитель равен 0, иначе — **невырожденной**.

Свойства определителя:

- Если элементы какой-либо строки или столбца определителя имеют общий множитель  $\lambda$ , то его можно вынести за знак определителя.

**Доказательство.**

$$\Delta = \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

Каждое слагаемое имеет множитель из каждой строки, а также из каждого столбца, т. к.  $\sigma$  является перестановкой и содержит все номера столбцов от 1 до  $n$  включительно. Тогда все слагаемые имеют общий множитель  $\lambda$ , поэтому его можно вынести за скобки. ■

- Если какая-либо строка или столбец определителя состоит из нулей, то он равен 0.

•

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство для столбцов аналогично.

**Доказательство.**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1 i_1} \cdots a_{n i_n} =$$

| Каждое слагаемое содержит ровно 1 элемент из  $i$ -й строки и поэтому имеет вид |

$$= \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1 i_1} \cdots a_{k-1 i_{k-1}} (a_{k i_k} + b_{k i_k}) a_{k+1 i_{k+1}} \cdots a_{n i_n} =$$

$$= \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1 i_1} \cdots a_{k i_k} \cdots a_{n i_n} + \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1 i_1} \cdots b_{k i_k} \cdots a_{n i_n} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство для столбцов доказывается аналогично. ■

- Если в определителе поменять две строки или два столбца местами, то он изменит знак.

**Доказательство.** При перестановке строк или столбцов местами все перестановки в формуле (4.1) меняют чётность, значит, каждое слагаемое меняет знак, тогда и определитель меняет знак. ■

- Если в определителе две строки или два столбца совпадают, то он равен 0.

**Доказательство.** Если поменять местами совпадающие строки или столбцы, то он, с одной стороны, не изменится, а с другой, поменяет знак. Значит, определитель равен 0. ■

•

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} + a_{j1} & \lambda a_{i2} + a_{j2} & \cdots & \lambda a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство для столбцов аналогично.

**Доказательство.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} + a_{j1} & \lambda a_{i2} + a_{j2} & \cdots & \lambda a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство для столбцов доказывается аналогично. ■

Пусть дана матрица

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Алгебраическим дополнением** элемента  $a_{ij}$  называется число, равное

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Лемма 4.2.1.**

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Доказательство.**

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
 = \sum a \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} + \sum 0 \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} + \dots + \sum 0 \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} = \\
 = a \sum a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} = a \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



■

**Теорема 4.2.1.** Любой определитель можно **разложить** по элементам произвольной строки или столбца:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

где  $A_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} \cdot \\ & \cdot \left( \begin{vmatrix} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right) = \\ & = (-1)^{i+1} \cdot \left( \begin{vmatrix} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{i2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-12} & a_{i-11} & a_{i-13} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+12} & a_{i+11} & a_{i+13} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \right. \\ & \quad \left. + (-1)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{in} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1n} & a_{i-11} & \cdots & a_{i-1n-1} \\ a_{i+1n} & a_{i+11} & \cdots & a_{i+1n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix} \right) = \\ & = (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2} a_{i2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & a_{i-13} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+13} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \end{aligned}$$

$$+(-1)^{i+n}a_{in} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\ 1} & \cdots & a_{i-1\ n-1} \\ a_{i+1\ 1} & \cdots & a_{i+1\ n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ n-1} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

Аналогично доказывается

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}$$

■

**Транспонированием** матрицы или определителя называется операция, в результате которой строки меняются местами со столбцами с сохранением порядка следования:

$$\left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\|^T = \left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\|$$

Полученная матрица или определитель называется **транспонированной** по отношению к исходной.

**Утверждение 4.2.1.** *Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной.*

**Доказательство.**

$$\left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\|^T = \left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\| = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j} = \left\| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right\|$$

■

### 4.2.3 Ранг матрицы

Строка (столбец) матрицы называется **линейно зависимой**, если она является линейной комбинацией остальных строк (столбцов), иначе — **линейно независимой**.

**Рангом** матрицы называется максимальное количество её линейно независимых строк.

**Минором**  $k$ -го порядка матрицы называется определитель, содержащий только те её элементы, которые стоят на пересечении некоторых  $k$  строк и  $k$  столбцов. Минор наибольшего порядка, отличный от нуля, называется **базисным**.

**Теорема 4.2.2.** *Ранг матрицы равен порядку базисного минора.*

**Доказательство.** Пусть

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$M_k$  — базисный минор  $k$ -го порядка. При перестановке строк и столбцов минора равенство с нулём сохраняется, значит, без ограничения общности можно считать, что

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$M_k \neq 0$ , значит, строки  $A_1, \dots, A_k$  линейно независимы. Пусть  $M_{k+1}$  — минор  $(k+1)$ -го порядка:

$$M_{k+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$$

т. к.  $M_k$  — базисный минор. Тогда

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{kj}A_{kj} + a_{ij}A_{ij} = 0, \quad A_{ij} = M_k \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{ij} = -\frac{A_{1j}}{A_{ij}}a_{1j} - \frac{A_{2j}}{A_{ij}}a_{2j} - \dots - \frac{A_{kj}}{A_{ij}}a_{kj}$$

где  $A_{1j}, \dots, A_{kj}, A_{ij}$  — алгебраические дополнения  $a_{1j}, \dots, a_{kj}, a_{ij}$ .  $A_{1j}, \dots, A_{kj}, A_{ij}$  не зависят от  $j$ , тогда  $A_i$  — линейная комбинация  $A_1, \dots, A_k$ , значит,  $k$  — ранг матрицы  $A$ . ■

Рангом матрицы по строкам (столбцам) называется максимальное количество её линейно независимых строк (столбцов).

**Следствие 4.2.1.** Ранг матрицы по строкам равен рангу матрицы по столбцам. Для доказательства достаточно заметить, что определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной.

#### 4.2.4 Элементарные преобразования матриц

**Элементарными преобразованиями** называются следующие операции над матрицей, не изменяющие её ранга:

- **Перестановка строк** матриц. Очевидно, что ранг матрицы при перестановке строк не меняется.
- **Умножение строки на  $\lambda \neq 0$ .**

**Доказательство.**

■

- **Прибавление к строке матрицы другой строки, умноженной на  $\lambda \neq 0$ .**

**Доказательство.**

■

Аналогично определяются элементарные преобразования над столбцами.

Матрица  $A$  имеет **ступенчатый вид**, если:

- все нулевые строки стоят последними;
- для любой ненулевой строки  $A_p$  верно, что  $\forall i > p, j \leq q \ a_{ij} = 0$ , где  $a_{pq}$  — первый ненулевой элемент строки  $A_p$ .

**Теорема 4.2.3.** Любую матрицу путём элементарных преобразований только над строками можно привести к ступенчатому виду.

**Доказательство.**

■

#### 4.2.5 Обратные матрицы

Матрица  $B$  называется **левой обратной** к квадратной матрице  $A$ , если  $BA = E$ .

Матрица  $C$  называется **правой обратной** к квадратной матрице  $A$ , если  $AC = E$ .

Заметим, что обе матрицы  $B$  и  $C$  — квадратные того же порядка, что и  $A$ .

**Утверждение 4.2.2.** Если существуют левая и правая обратные к  $A$  матрицы  $B$  и  $C$ , то они совпадают.

**Доказательство.**  $B = BE = BAC = EC = C$  ■

Т. о., матрица  $A^{-1}$  называется **обратной** к матрице  $A$ , если  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ .

**Теорема 4.2.4.** Пусть даны матрицы

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

где  $A_{ij}$  — алгебраическое дополнение  $a_{ij}$ .

Если  $|A| \neq 0$ , то

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{|A|}$$

**Доказательство.**

■

**Теорема 4.2.5.** Пусть дана невырожденная матрица

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Присоединим к ней единичную матрицу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

и с помощью элементарных преобразований только над строками полученной матрицы (или только над столбцами) приведём её левую часть к единичной матрице. Тогда правая часть будет обратной к  $A$  матрицей.

**Доказательство.**

■

## 4.3 Векторные пространства

$n$ -мерным векторным пространством над полем вещественных чисел называется множество

$$V_n = \mathbb{R}^n = \{(x_1; \dots; x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

элементы которого называются **векторами**. Над ними определены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие аксиомам:

1. Коммутативность сложения:

$$\forall \bar{a}, \bar{b} \in V_n \quad \bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$$

2. Ассоциативность сложения:

$$\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V_n \quad \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$$

3. Существование **нулевого** вектора, или **нуля**, обозначаемого  $\bar{0}$ :

$$\exists \bar{0} \in V_n : \forall \bar{a} \in V \quad \bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$$

4. Существование **противоположного** вектора:

$$\forall \bar{a} \in V_n \quad \exists (-\bar{a}) \in V_n : \bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$$

5. Ассоциативность умножения на число:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \bar{a} \in V_n \quad \alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$$

6. Дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \bar{a}, \bar{b} \in V_n \quad \alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$$

7. Дистрибутивность умножения на число относительно сложения чисел:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \bar{a} \in V_n \quad (\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$$

8. Существование единицы:

$$\forall \bar{a} \in V_n \quad 1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$$

#### 4.3.1 Базис и размерность векторного пространства

Векторы  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$  называются **линейно зависимыми**, если

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n: \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{a}_i = \bar{0}, \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \neq 0$$

иначе — **линейно независимыми**.

Множество линейно независимых векторов  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  векторного пространства  $V$  называется **базисом** этого пространства, если

$$\forall \bar{x} \in V \quad \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n: \bar{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{e}_i$$

Приведённое равенство называется **разложением** вектора  $\bar{x}$  по базису  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ .

**Теорема 4.3.1 (о базисе).** Любой вектор  $\bar{x}$  может быть разложен по базису  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  единственным образом.

**Доказательство.**

■

**Размерностью** векторного пространства называется максимальное количество линейно независимых векторов.

**Теорема 4.3.2.** В векторном пространстве размерности  $n$  любые  $n$  линейно независимых векторов образуют его базис.

**Доказательство.**

■

**Теорема 4.3.3.** Если векторное пространство имеет базис из  $n$  векторов, то его размерность равна  $n$ .

**Доказательство.**

■

## 4.4 Системы линейных алгебраических уравнений

Система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — переменные.

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$  называются **коэффициентами при переменных**,  $b_1, b_2, \dots, b_m$  — **свободными членами**.

Система линейных уравнений называется **однородной**, если все её свободные члены равны 0, иначе — **неоднородной**.

Система линейных уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, иначе — **несовместной**.

Система линейных уравнений называется **определённой**, если она имеет единственное решение. Если система имеет более одного решения, то она называется **неопределённой**.

Две системы линейных уравнений называются **эквивалентными**, если их решения совпадают или обе не имеют решений.

#### 4.4.1 Матричная форма системы линейных уравнений

Систему линейных уравнений можно представить в матричной форме:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right\| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right\| &= \left\| \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right\| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A \cdot X = B \end{aligned}$$

$A$  называется **основной матрицей системы**,  $X$  — **столбцом переменных**,  $B$  — **столбцом свободных членов**. Если к основной матрице справа приписать столбец свободных членов, то получится **расширенная матрица системы**:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right\|$$

#### 4.4.2 Линейная независимость

Уравнение системы линейных уравнений называется **линейно зависимым**, если соответствующая ему строка расширенной матрицы является нетривиальной линейной комбинацией других строк, иначе — **линейно независимым**.

Система линейных уравнений называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная линейная комбинация строк расширенной матрицы, в результате которой получается нулевая строка, иначе — **линейно независимой**.

**Утверждение 4.4.1.** Система линейных уравнений линейно зависима  $\Leftrightarrow$  одно из её уравнений линейно зависимо.

**Доказательство.**

1.  $\Rightarrow$ . Пусть система из строк  $A_1, \dots, A_n$  линейно зависима:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i = O, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \neq 0$$

где  $O$  — нулевая строка. Без ограничения общности можно считать, что  $\alpha_1 \neq 0$ , тогда

$$A_1 = - \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1} A_i$$

Значит,  $A_1$  — линейно зависимая строка.

2.  $\Leftarrow$ . Пусть одна из строк линейно зависима:

$$A_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i A_i \Leftrightarrow 1 \cdot A_1 - \alpha_2 A_2 - \dots - \alpha_n A_n = O$$

Значит, система линейно зависима.

■

#### 4.4.3 Решение систем линейных уравнений

**Лемма 4.4.1.** Пусть система из строк  $A_1, \dots, A_n$  линейно независима и  $A_{n+1}$  не является линейной комбинацией  $A_1, \dots, A_n$ . Тогда система из строк  $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$  линейно независима.

**Доказательство (методом от противного).** Пусть система из строк  $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$  линейно зависима:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i A_i = O, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^2 \neq 0$$

где  $O$  — нулевая строка. Система из строк  $A_1, \dots, A_n$  линейно независима по условию, тогда

$$\alpha_{n+1} \neq 0 \Rightarrow A_{n+1} = - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}} A_i$$

Значит,  $A_{n+1}$  — линейная комбинация  $A_1, \dots, A_n$ . Противоречие с условием. ■

**Теорема 4.4.1 (Кронекера — Капелли).** Система линейных уравнений совместна  $\Leftrightarrow$  ранг основной матрицы совпадает с рангом расширенной матрицы.

**Доказательство.**

1.  $\Rightarrow$ .

2.  $\Leftarrow$ .

■

#### Метод Гаусса

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (4.2)$$

Её расширенную матрицу можно привести к ступенчатому виду, т. е. (4.2) эквивалентна

$$\begin{cases} a_{1j_1}x_{j_1} + \dots + a_{1j_n}x_{j_n} = b_1 \\ a_{2j_2}x_{j_2} + \dots + a_{2j_n}x_{j_n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{rj_r}x_{j_r} + \dots + a_{rj_n}x_{j_n} = b_r \\ 0 = b_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b_m \end{cases} \quad (4.3)$$

где  $a_{1j_1}, \dots, a_{rj_r} \neq 0$ . Без ограничения общности можно считать, что в базисный минор основной матрицы системы (4.3) входят только коэффициенты при переменных  $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ , называемых **главными** (**зависимыми**). Остальные переменные называются **свободными** (**независимыми**).

Если  $\exists i > r: b_i \neq 0$ , то система несовместна. Пусть  $\forall i > r: b_i = 0$ . Тогда получим систему

$$\begin{cases} x_{j_1} = \frac{b_1}{a_{1j_1}} - \frac{a_{1j_2}}{a_{1j_1}}x_{j_2} - \dots - \frac{a_{1j_n}}{a_{1j_1}}x_{j_n} \\ x_{j_2} = \frac{b_2}{a_{2j_2}} - \frac{a_{2j_3}}{a_{2j_2}}x_{j_3} - \dots - \frac{a_{2j_n}}{a_{2j_2}}x_{j_n} \\ \vdots \\ x_{j_r} = \frac{b_r}{a_{rj_r}} - \frac{a_{rj_{r+1}}}{a_{rj_r}}x_{j_{r+1}} - \dots - \frac{a_{rj_n}}{a_{rj_r}}x_{j_n} \end{cases}$$

Если свободным переменным полученной системы придавать все возможные значения и решать новую систему относительно главных неизвестных от нижнего уравнения к верхнему, то получим все решения данной системы.

## Метод Крамера

Позволяет решить только те системы, которые имеют единственное решение. Пусть дана система линейно независимых уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Определитель основной матрицы системы не равен 0, т.к. строки линейно независимы. Запишем систему в матричной форме:

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow X = A^{-1}B \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

где  $A_{ij}$  — алгебраическое дополнение  $a_{ij}$ .

Т.о., получим решение системы:

$$x_i = \frac{\sum_{j=1}^n A_{ji}b_j}{|A|} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

Полученные формулы называется **формулами Крамера**.

## 4.4.4 Фундаментальная система решений

**Утверждение 4.4.2.** Однородная линейно независимая система уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i = 0 \end{cases}$$

задаёт векторное пространство размерности  $n - m$ .



**Доказательство.**

■

**Фундаментальной системой решений** однородной системы линейных уравнений называется базис множества всех её решений.

### Нахождение фундаментальной системы решений

Пусть дана однородная линейно независимая система уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{1i}x_i = - \sum_{i=m+1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^m a_{2i}x_i = - \sum_{i=m+1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{mi}x_i = - \sum_{i=m+1}^n a_{mi}x_i \end{cases}$$

Пусть

$$\begin{aligned} &(x_{11}; x_{21}; \dots; x_{m1}; 1; 0; \dots; 0) \\ &(x_{12}; x_{22}; \dots; x_{m2}; 0; 1; \dots; 0) \\ &\vdots \\ &(x_{1n-m}; x_{2n-m}; \dots; x_{mn-m}; 0; 0; \dots; 1) \end{aligned}$$

являются решениями данной системы. Тогда они образуют фундаментальную систему решений.

**Доказательство.**

■

**Теорема 4.4.2.** *Общее решение неоднородной системы линейных уравнений равно сумме её частного решения и общего решения соответствующей однородной системы, т.е. с теми же самыми коэффициентами при переменных.*

**Доказательство.**

■

## 4.5 Многочлены от одной переменной

**Одночленом**, или **мономом**, называется произведение числового множителя и нуля и более переменных, взятых каждая в неотрицательной степени.

**Степенью** одночлена называется сумма степеней входящих в него переменных. Степень тождественного нуля равна  $-\infty$ .

**Многочленом**, или **полиномом**, от одной переменной называется сумма вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — переменные.

**Степенью** многочлена называется максимальная из степеней его одночленов.

**Лемма 4.5.1.** *Пусть  $f$  и  $g$  — многочлены, тогда  $\deg fg = \deg f + \deg g$ .*

### 4.5.1 Деление многочленов

**Теорема 4.5.1.** *Пусть  $f(x)$  и  $g(x) \neq 0$  — многочлены, тогда существуют единственные многочлены  $q(x)$  и  $r(x)$  такие, что  $f = qg + r$ , причём либо  $r = 0$ , либо  $\deg r < \deg g$ .*

**Доказательство.**

1. Докажем единственность.
2. Докажем существование.

■

**Общим делителем** многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  называется многочлен  $h(x)$ , на который и  $f$ , и  $g$  делятся нацело:

$$f = ph, \quad g = qh$$

**Наибольшим** называется общий делитель наибольшей степени и обозначается НОД.

**Теорема 4.5.2 (алгоритм Евклида).** Любые два многочлена имеют единственный НОД.

**Доказательство.**

■

## 4.5.2 Корень многочлена

**Корнем** многочлена  $f(x)$  называется такое число  $a$ , что  $f(a) = 0$ .

**Теорема 4.5.3 (Безу).** Остаток от деления многочлена  $f(x)$  на двучлен  $x - a$  равен  $f(a)$ .

**Доказательство.**

$$f(x) = g(x)(x - a) + r \Rightarrow f(a) = g(a)(a - a) + r \Leftrightarrow r = f(a)$$

■

**Следствие 4.5.1.** Если  $a$  — корень  $f(x)$ , то  $f(x)$  делится на  $x - a$  без остатка.

**Кратностью** корня  $a$  многочлена  $f(x)$  называется число  $m$ :  $f(x) \dot{=} (x - a)^m$ ,  $f(x) \not\dot{=} (x - a)^{m+1}$ .

**Теорема 4.5.4 (основная теорема алгебры).** Если  $f(x)$  — многочлен, отличный от константы, то он имеет хотя бы один комплексный корень. Доказательство теоремы слишком сложно, поэтому здесь не приводится.

**Следствие 4.5.2.** Многочлен  $n$ -й степени имеет ровно  $n$  комплексных корней с учётом их кратности.

**Доказательство.** Пусть  $f(x)$  — многочлен  $n$ -й степени. По основной теореме алгебры (4.5.4) он имеет корень  $a$ , тогда по следствию (4.5.1)  $f(x) = g(x)(x - a)$ , где  $g(x)$  — многочлен  $(n - 1)$ -й степени, который также имеет корень. Будем повторять деление до тех пор, пока не получим константу. Т. о., получим  $n$  корней. ■

**Следствие 4.5.3.** Любой многочлен  $f(x)$   $n$ -й степени представим в виде

$$f(x) = a(x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

где  $a$  — число,  $x_0, \dots, x_{n-1}$  — корни  $f(x)$ .

**Лемма 4.5.2.** Если  $f(x)$  — многочлен с действительными коэффициентами,  $z \in \mathbb{C}$ , то  $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ .

**Доказательство.** Пусть  $z_1 = a_1 + b_1 i$ ,  $z_2 = a_2 + b_2 i$ ,  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ . Многочлен строится при помощи операций сложения и умножения, поэтому достаточно доказать следующее:

$$1. \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$2. \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Тогда  $\overline{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} = a_n \overline{z}^n + \dots + a_1 \overline{z} + a_0$  при  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . ■

**Теорема 4.5.5.** Любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами.

**Доказательство.** Пусть  $f(x)$  — многочлен с действительными коэффициентами, тогда если  $f(z) = 0$ , то  $f(\overline{z}) = \overline{f(z)} = \overline{0} = 0$ . Значит, если  $a + bi$  — корень  $f(x)$ , то  $a - bi$  — тоже корень  $f(x)$ . Имеем:

$$f(x) = a \prod_{j=1}^m (x - x_j) \cdot \prod_{j=1}^n (x - (a_j + b_j i))(x - (a_j - b_j i)) = a \prod_{j=1}^m (x - x_j) \cdot \prod_{j=1}^n (x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2)$$

где  $a, x_1, \dots, x_m, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ ,  
 $x_1, \dots, x_m, a_1 + b_1 i, \dots, a_n + b_n i$  — корни  $f(x)$ . ■

**Теорема 4.5.6 (формулы Виета).** Пусть

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \quad (4.4)$$

тогда

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -a_n \sum_{i=0}^{n-1} x_i \\ a_{n-2} &= a_n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} x_i x_j \\ a_{n-3} &= -a_n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n-1} x_i x_j x_k \\ &\vdots \\ a_1 &= (-1)^{n-1} a_n \sum_{i=0}^{n-1} x_0 x_1 \cdot \dots \cdot x_{i-1} x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_{n-1} \\ a_1 &= (-1)^n a_n x_0 x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \end{aligned}$$

Для доказательства достаточно раскрыть скобки в правой части равенства (4.4).

**Теорема 4.5.7.** Пусть на плоскости даны  $n + 1$  точек, никакие две из которых не лежат на прямой, параллельной оси ординат, тогда через них проходит единственная кривая  $n$ -го порядка.

**Доказательство.** Пусть данные точки заданы координатами  $(a_0; b_0), (a_1; b_1), \dots, (a_n; b_n)$ , тогда кривая

$$f = \sum_{i=0}^n b_i \frac{(x - a_0) \cdot \dots \cdot (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - a_n)}{(a_i - a_0) \cdot \dots \cdot (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \cdot \dots \cdot (a_i - a_n)}$$

Докажем, что  $f$  проходит через все данные точки. Рассмотрим точку  $(a_k; b_k)$ . Подставим  $x = a_k$ , тогда  $k$ -е (считая с нуля) слагаемое равно  $b_k$ , а остальные — 0. ■

## 4.6 Многочлены от нескольких переменных

1. В многочлене  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  подставим  $a_i = P_i(y)$  — многочлен от  $y$ . Получим многочлен от  $x$  и  $y$ .
2. Пусть имеем многочлен от  $n$  переменных. Подставим вместо его коэффициентов многочлен от одной переменной, получим многочлен от  $n + 1$  переменных.

Одночлены многочлена будем записывать в лексикографическом порядке степеней переменных (члены с большими степенями идут раньше).

**Теорема 4.6.1.** Старший член произведения многочленов равен произведению старших членов множителей.

**Доказательство.** Перемножая члены с наибольшими показателями старшей переменной, получим член с наибольшим показателем при этой переменной. Проведя аналогичные рассуждения для остальных переменных, придём к выводу, что полученный член является старшим. ■

Аналогично доказывается следующая теорема.

**Теорема 4.6.2.** Младший член произведения многочленов равен произведению младших членов множителей.

#### 4.6.1 Симметрические многочлены

Многочлен называется **симметрическим**, если при перестановке переменных он не изменяется.

**Утверждение 4.6.1.** Если  $f(x_1, \dots, x_n) = ax_1^{i_1}x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} + \dots$  — симметрический многочлен, то  $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n$ .

**Доказательство (методом от противного).** Пусть  $\exists r < q: i_r < i_q$ , тогда  $f$  содержит  $bx_1^{i_1}x_2^{i_2} \dots \cdot x_r^{i_q} \dots x_q^{i_r} \dots x_n^{i_n}$ , который старше, чем  $ax_1^{i_1}x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$ . Противоречие. ■

**Элементарными симметрическими многочленами от  $n$  переменных называются многочлены**

$$\begin{aligned}\sigma_1(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n x_i \\ \sigma_2(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n x_i x_j \\ &\vdots \\ \sigma_n(x_1, \dots, x_n) &= x_1 x_2 \dots x_n\end{aligned}$$

**Теорема 4.6.3 (основная теорема о симметрических многочленах).** Любой симметрический многочлен может быть представлен в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.

**Доказательство.** Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) = ax_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} + \dots$  — симметрический многочлен. Введём

$$\begin{aligned}g_1(\sigma_1, \dots, \sigma_n) &= a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3} \dots \sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}\sigma_n^{k_n} = \\ &= a(x_1 + \dots)^{k_1-k_2}(x_1x_2 + \dots)^{k_2-k_3} \dots (x_1x_2 \dots x_{n-1} + \dots)^{k_{n-1}-k_n}(x_1x_2 \dots x_n)^{k_n} = \\ &= ax_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} + \dots\end{aligned}$$

Тогда старший член многочлена  $f_1 = f - g_1$  младше старшего члена многочлена  $f$ . Повторим те же действия с многочленом  $f_1$ . Будем продолжать таким образом, пока не получим ноль. В итоге получим  $f = g_1 + g_2 + \dots + g_m$ , где  $g_1, g_2, \dots, g_m$  — многочлены от элементарных симметрических многочленов. ■

#### 4.7 Квадратные формы

**Квадратичной формой** называется многочлен, все одночлены в котором второй степени:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

Для определённости полагают  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Квадратичной форме можно сопоставить **матрицу квадратичной формы**, составленную из коэффициентов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**Каноническим видом** квадратичной формы называется её представление в виде суммы квадратов с некоторыми коэффициентами.

**Теорема 4.7.1 (метод Лагранжа).** Любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду.

**Доказательство.**

■

**Нормальным видом** квадратичной формы называется её канонический вид, коэффициенты в котором равны  $-1$  или  $1$ .

**Рангом** квадратичной формы называется количество переменных в её каноническом виде. Количество положительных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы называется её **положительным индексом**, а отрицательных — **отрицательным индексом**. **Сигнатурой** квадратичной формы называется модуль разности положительного и отрицательного индексов.

Ранг, положительный и отрицательный индексы и сигнатура одинаковы для всех канонических видов квадратичной формы.

## Глава 5

# Математический анализ

### 5.1 Ограниченные подмножества множества $\mathbb{R}$

Множество  $X \subset \mathbb{R}$  называется **ограниченным сверху**, если  $\exists a \in \mathbb{R}: \forall x \in X \ x \leq a$ . Число  $a$  называется **мажорантой** множества  $X$ .

Множество  $X \subset \mathbb{R}$  называется **ограниченным снизу**, если  $\exists a \in \mathbb{R}: \forall x \in X \ a \leq x$ . Число  $a$  называется **минорантой** множества  $X$ .

Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется **ограниченным**.

Мажоранта ограниченного сверху множества, принадлежащая ему, называется **его максимальным элементом**. Миноранта ограниченного снизу множества, принадлежащая ему, называется **его минимальным элементом**.

Очевидно, что во множестве может быть не более одного минимального элемента и не более одного максимального элемента.

Минимальный элемент множества мажорант ограниченного сверху множества  $A$  называется **супремумом** и обозначается  $\sup A$ .

**Утверждение 5.1.1.** Если множество  $A$  ограничено сверху, то  $\exists! \sup A$ .

**Доказательство.** Пусть  $B$  — множество всех мажорант множества  $A$ , тогда  $\forall a \in A, b \in B \ a \leq b$ . По **аксиоме непрерывности**  $\exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A, b \in B \ a \leq c \leq b$ , тогда  $c$  — минимальная мажоранта множества  $A$ .

Единственность следует из единственности минимального элемента. ■

**Утверждение 5.1.2.** Если  $a = \sup A$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A: a - \varepsilon < x \leq a$ .

**Доказательство (методом от противного).** Пусть  $\exists \varepsilon_0: \forall x \in A \ x \leq a - \varepsilon_0$ . Тогда  $a - \varepsilon_0$  — мажоранта множества  $A$ , значит,  $a \neq \sup A$ . Противоречие. ■

Максимальный элемент множества минорант ограниченного снизу множества  $A$  называется **инфимумом** и обозначается  $\inf A$ .

**Утверждение 5.1.3.** Если множество  $A$  ограничено снизу, то  $\exists! \inf A$ . Доказательство аналогично доказательству утверждения 5.1.1.

**Утверждение 5.1.4.** Если  $a = \inf A$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A: a \leq x < a + \varepsilon$ . Доказательство аналогично доказательству утверждения 5.1.2.

**Теорема 5.1.1 (принцип Архимеда).** Если  $h > 0$ , то  $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists k \in \mathbb{Z}: (k-1)h \leq x < kh$ .

**Доказательство.** Рассмотрим множество  $A = \left\{ z \in \mathbb{Z} \mid z > \frac{x}{h} \right\}$ , тогда  $\exists a = \inf A$ . По утверждению 5.1.4  $\forall \varepsilon \in (0; 1] \ \exists z_0: a \leq z_0 < a + \varepsilon$ . Т.к. в промежутке  $[a; a+1)$  лежит только одно целое число, то  $a = z_0$ , тогда  $a - 1 \leq \frac{x}{h} < a$ . Т.о.,  $a$  — искомое значение  $k$ . ■

Из принципа Архимеда следует, что не существует бесконечно больших чисел.

**Следствие 5.1.1.**

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < \varepsilon$$

**Доказательство.** По **принципу Архимеда** для  $h = \varepsilon, x = 1$  получим:

$$\exists n \in \mathbb{Z}: \left( (n-1)\varepsilon \leq 1 < n\varepsilon \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right)\varepsilon \leq \frac{1}{n} < \varepsilon, \ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon, \ n \in \mathbb{N} \right)$$

■

Отсюда следует, что не существует бесконечно малых чисел.

**Следствие 5.1.2.**

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \exists c \in \mathbb{Q}: a < c < b$$

**Доказательство.** Из следствия 5.1.1 для  $\varepsilon = b - a$  получим  $\exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < b - a$ . По **принципу Архимеда** для  $h = \frac{1}{n}$ ,  $x = a$  получим:

$$\exists k \in \mathbb{Z}: \left( \frac{k-1}{n} \leq a < \frac{k}{n} \Rightarrow a < \frac{k}{n} = \frac{k-1}{n} + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b \right)$$

Т. о.,  $\frac{k}{n}$  — искомое значение  $c$ . ■

Точка  $a \in \mathbb{R}$  называется **предельной** точкой множества  $A \subset \mathbb{R}$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \check{U}_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ .

Точка  $a \in A$  называется **дискретной** точкой множества  $A \subset \mathbb{R}$ , если  $\exists \varepsilon > 0: \check{U}_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$ .

Точка  $a \in A$  называется **внутренней** точкой множества  $A \subset \mathbb{R}$ , если  $\exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(a) \subset A$ .

Множество называется **открытым**, если состоит только из внутренних точек.

Множество называется **замкнутым**, если его дополнение  $\bar{A}$  до  $\mathbb{R}$  является открытым.

**Утверждение 5.1.5.** Множество  $A$  замкнуто  $\Leftrightarrow$  оно содержит все свои предельные точки.

**Доказательство.**

1.  $\Rightarrow$ . Докажем методом от противного, что  $A$  содержит все свои предельные точки. Пусть  $\exists a_0 \notin A$  — предельная точка  $A$ , тогда

$$a_0 \in \bar{A} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: (U_\varepsilon(a_0) \subset \bar{A} \Rightarrow U_\varepsilon(a_0) \cap A = \emptyset)$$

Значит,  $a_0$  не является предельной точкой  $A$ . Противоречие.

2.  $\Leftarrow$ . Пусть  $\forall a \in \bar{A} \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(a) \subset \bar{A}$ . Докажем методом от противного, что  $\bar{A}$  открыто. Пусть  $\exists a \in \bar{A} \forall \varepsilon > 0 U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ , тогда  $a \notin A$  — предельная точка  $A$ . Противоречие.

■

**Теорема 5.1.2 (Вейерштрасса).** Если  $A$  — бесконечное ограниченное множество, то  $\exists a \in \mathbb{R}$  — предельная точка  $A$ .

**Доказательство.**  $A \subset [a; b]$ , где  $a = \inf A$ ,  $b = \sup A$ . Пусть  $a$  не является предельной точкой  $A$ , т. е.  $\exists \varepsilon_0 > 0: \check{U}_{\varepsilon_0}(a) \cap A = \emptyset$ , тогда  $a \in A$ , значит,  $a$  — дискретная точка  $A$ .

Рассмотрим множество  $B$  точек  $y$  таких, что интервал  $(-\infty; y)$  содержит конечное число точек  $A$ . Интервал  $(-\infty; a + \varepsilon_0)$  содержит только одну точку множества  $A$  —  $a$ , значит,  $\forall k \in (0; 1] a + k\varepsilon_0 \in B$ .

$A \subset (-\infty; b]$ , тогда  $b$  — мажоранта  $B$ , значит,  $\exists c = \sup B$ .

1.  $\forall \varepsilon > 0 (-\infty; c - \varepsilon)$  содержит конечное число точек множества  $A$ .
2.  $\forall \varepsilon > 0 (-\infty; c + \varepsilon)$  содержит бесконечное число точек множества  $A$ , т. к.  $c + \varepsilon \notin B$ .

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \check{U}_\varepsilon(c)$  содержит бесконечное число точек множества  $A$ , значит,  $c$  — предельная точка множества  $A$ . ■

## 5.2 Предел последовательности

Число  $a$  называется **пределом** последовательности  $(x_n)$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 |x_n - a| < \varepsilon$$

и обозначается  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Говорят, что последовательность  $(x_n)$  **сходится**, если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , иначе говорят, что  $(x_n)$  **расходится**.

Последовательность  $(x_n)$  называется **ограниченной**, или **ограниченной величиной**, если  $\exists a > 0: \forall n \in \mathbb{N} |x_n| < a$ .

**Бесконечно малой величиной** называется последовательность  $(x_n)$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 |x_n| < \varepsilon$$

Можно определить предел последовательности, используя понятие бесконечно малой величины.

Число  $a$  называется **пределом** последовательности  $(x_n)$ , если  $x_n = a + \alpha_n$ , где  $\alpha_n$  — бесконечно малая величина.

Докажем эквивалентность этих определений.

**Доказательство.**

1. Пусть дана последовательность  $(x_n)$  такая, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 |x_n - a| < \varepsilon$$

Докажем, что  $x_n = a + \alpha_n$ . В самом деле,  $\alpha_n = x_n - a$  — бесконечно малая величина. Т.о.,  $x_n = a + \alpha_n$ .

2. Проведя те же самые рассуждения в обратную сторону, докажем обратное утверждение.

■

### 5.2.1 Элементарные свойства пределов

1. Последовательность может иметь не более одного предела.

**Доказательство.** Пусть  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Тогда

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 (\exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n > n_1 |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \exists n_2 \in \mathbb{N}: \forall n > n_2 |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}) \\ \Rightarrow \forall n > \max(n_1, n_2) |a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon \end{aligned}$$

Значит,  $a = b$ . ■

2. **Теорема 5.2.1 (о двух милиционерах).** Пусть  $\forall n \in \mathbb{N} x_n \leq y_n \leq z_n$ . Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 (\exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n > n_1 |x_n - a| < \varepsilon, \exists n_2 \in \mathbb{N}: \forall n > n_2 |z_n - a| < \varepsilon) \\ \Rightarrow \forall n > \max(n_1, n_2) a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \Rightarrow \forall n > \max(n_1, n_2) |y_n - a| < \varepsilon \end{aligned}$$

■

3. Если  $\forall n \in \mathbb{N} x_n \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то  $a \geq 0$ .

**Доказательство (методом от противного).** Пусть  $a < 0$ .

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 \left( |x_n - a| < -\frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} < x_n - a < -\frac{a}{2} \Rightarrow x_n < \frac{a}{2} < 0 \right)$$

Противоречие. ■

4. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ .

**Доказательство.**

$$\begin{cases} |a| - |x_n| \leq |a - x_n| \\ |x_n| - |a| \leq |x_n - a| \end{cases} \Rightarrow ||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 ||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$$

■



5. Если последовательность  $(x_n)$  сходится, то она ограничена.

**Доказательство.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ . Получим:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 (||x_n| - |a|| < 1 \Rightarrow |x_n| < |a| + 1)$$

Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} |x_n| < \max(|x_1| + 1, |x_2| + 1, \dots, |x_{n_0}| + 1, |a| + 1)$ . ■

6. Если последовательности  $(x_n)$  и  $(y_n)$  — ограниченная и бесконечно малая величины соответственно, то  $z_n = x_n y_n$  — бесконечно малая величина.

**Доказательство.** Пусть

$$\begin{aligned} a > 0: \forall n \in \mathbb{N} |x_n| < a, \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 |y_n| < \frac{\varepsilon}{a} \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 |x_n y_n| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 \end{aligned}$$

■

7. Если последовательности  $(x_n)$  и  $(y_n)$  — бесконечно малые величины, то  $z_n = x_n + y_n$  — тоже бесконечно малая величина.

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 (\exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n > n_1 |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \exists n_2 \in \mathbb{N}: \forall n > n_2 |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall n > \max(n_1, n_2) |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \varepsilon) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 \end{aligned}$$

■

### 5.2.2 Арифметические свойства пределов

Пусть даны сходящиеся последовательности  $x_n = a + \alpha_n$  и  $y_n = b + \beta_n$ , где  $(\alpha_n), (\beta_n)$  — бесконечно малые величины.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$

**Доказательство.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a + b + \alpha_n + \beta_n) = a + b$$

■

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab$

**Доказательство.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n) = ab$$

■

3. Если  $a \neq 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$

**Доказательство.** Покажем, что  $\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|\alpha_n|}{|a||\alpha_n + a|}$  — бесконечно малая величина.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 |x_n - a| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n > n_0 \left( |a| = |a - x_n + x_n| \leq |a - x_n| + |x_n| < \frac{|a|}{2} + |x_n| \Rightarrow |x_n| > \frac{|a|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|a|} \right)$$

Тогда  $\frac{1}{|x_n|} = \frac{1}{|\alpha_n + a|}$  — ограниченная величина, значит,  $\frac{|\alpha_n|}{|a||\alpha_n + a|} = \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right|$  — бесконечно малая величина. Отсюда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$ . ■

4. Если  $b \neq 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ .

**Доказательство.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x_n \cdot \frac{1}{y_n} \right) = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

■

### 5.2.3 Основные свойства пределов последовательностей

1. Из ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

**Доказательство.** Пусть  $A$  — множество значений, принимаемых членами ограниченной последовательности  $(x_n)$ .

- (а) Пусть  $A$  конечно. Тогда бесконечное множество членов последовательности  $(x_n)$  принимает хотя бы одно значение из  $A$ , значит, подпоследовательность, состоящая из них, сходится к этому значению.
- (б) Пусть  $A$  бесконечно, тогда оно ограничено, значит, по **теореме Вейерштрасса** оно имеет предельную точку  $a$ . В окрестности  $\check{U}_1(a)$  содержится хотя бы одна точка из множества  $A$ , а соответствующее значение принимает член  $x_{n_1}$ .

Рассмотрим множество  $A_1$ , полученное из  $A$  удалением значений, принимаемых членами  $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$ .  $A_1$  бесконечно и имеет предельную точку  $a$ , поэтому в окрестности  $\check{U}_{\frac{1}{2}}(a)$  найдётся значение, принимаемое членом  $x_{n_2}$ , причём  $n_1 < n_2$ .

Рассмотрим множество  $A_2$ , полученное из  $A_1$  удалением значений, принимаемых членами  $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots, x_{n_2}$ .  $A_2$  бесконечно и имеет предельную точку  $a$ , поэтому в окрестности  $\check{U}_{\frac{1}{3}}(a)$  найдётся значение, принимаемое членом  $x_{n_3}$ , причём  $n_2 < n_3$ .

Продолжая, получим последовательность  $(x_{n_k})$ :  $|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$ . По следствию 5.1.1  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ .

■

2. Монотонная ограниченная последовательность  $(x_n)$  сходится.

**Доказательство.** Для определённости предположим, что  $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \leq x_{n+1}$ . Последовательность ограничена, поэтому множество  $A$  её значений имеет супремум  $a = \sup A$ . По утверждению 5.1.2

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N}: (a - \varepsilon < x_k \leq a \Rightarrow \forall n > k \ a - \varepsilon < x_k \leq x_n \leq a \Rightarrow \forall n > k \ |x_n - a| < \varepsilon) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

■

3. **Лемма 5.2.1 (о вложенных отрезках).** Пусть  $(a_n), (b_n)$  — последовательности концов последовательно вложенных друг в друга отрезков (т. е.  $[a_n; b_n] \subset [a_{n-1}; b_{n-1}]$ ), причём  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ .

Тогда  $\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k; b_k] = \{a\}$ .

**Доказательство.** Очевидно, что  $(a_n)$  монотонна и ограничена сверху,  $(b_n)$  монотонна и ограничена снизу, тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Имеем:

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Отрезки последовательно вложены друг в друга, поэтому  $\bigcap_{k=1}^n [a_k; b_k] = [a_n; b_n]$ .

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k; b_k] = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{k=1}^n [a_k; b_k] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_n; b_n] = \{a\}$$

■

## 5.2.4 Число Эйлера

**Утверждение 5.2.1.**

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

**Доказательство.** Рассмотрим последовательность  $(x_n)$ :

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3n^3} + \dots + \frac{n!}{n!n^n} = \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Значит,  $(x_n)$  ограничена. Кроме того, из выражения (5.1) ясно, что  $(x_n)$  монотонна. Тогда  $(x_n)$  сходится. ■

Число  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828\dots$  называется **числом Эйлера** (иногда **числом Непера**, или **неперовым числом**).

## 5.2.5 Критерий Коши

Последовательность  $(x_n)$  называется **фундаментальной**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m, n > n_0 |x_n - x_m| < \varepsilon$$

**Теорема 5.2.2 (критерий Коши).** Последовательность сходится  $\Leftrightarrow$  она фундаментальна.  
**Доказательство.**

1.  $\Rightarrow$ . Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть  $m, n > n_0$ .

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2.  $\Leftarrow$ .

$$\begin{aligned} &\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m, n > n_0 |x_n - x_m| < 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall n > n_0 (|x_n - x_{n_0+1}| < 1 \Rightarrow ||x_n| - |x_{n_0+1}|| < 1 \Rightarrow |x_n| < |x_{n_0+1}| + 1) \end{aligned}$$

Значит,  $\forall x \in \mathbb{N} |x_n| < \max(|x_1| + 1, |x_2| + 1, \dots, |x_{n_0}| + 1)$ , т.е.  $(x_n)$  ограничена.

Выберем из неё сходящуюся подпоследовательность  $(x_{n_k})$ :  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ .

$$\forall \varepsilon > 0 (\exists k_0, n_1 \in \mathbb{N}: \forall k > k_0, n > n_1 |x_n - x_{n_k}| < \varepsilon \Rightarrow$$

| При  $k \rightarrow \infty$  получим |

$$\Rightarrow \forall n > n_1 |x_n - a| < \varepsilon) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

■

## 5.3 Предел функции

### 5.3.1 Предел функции в точке

Пусть  $a$  — предельная точка области определения функции  $f(x)$ . Следующие определения эквивалентны:

#### 1. Определение по Гейне

Число  $b$  называется **пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$** , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$  для любой последовательности  $(x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

#### 2. Определение по Коши

Число  $b$  называется **пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$** , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (\forall x : |x - a| < \delta) |f(x) - b| < \varepsilon$$

Предел функции  $f(x)$  в точке  $a$  обозначается  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

**Доказательство.**

#### 1. (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a &\Rightarrow \forall \delta > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 |x_n - a| < \delta \Rightarrow \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k > 0 : \forall x_n > k |f(x_n) - b| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b \end{aligned}$$

#### 2. (1) $\Rightarrow$ (2). Докажем методом от противного, что условия определения (2) выполняются. Пусть

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : (\forall \delta > 0 \exists x_0 : |x_0 - a| < \delta, |f(x_0) - b| \geq \varepsilon_0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n : |x_n - a| < \frac{1}{n}, |f(x_n) - b| \geq \varepsilon_0)$$

Получили последовательность  $(x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq b$ . Противоречие.

■

Из определения по Гейне следует, что пределы функции в точке обладают теми же свойствами, что и пределы последовательности.

Также можно определить односторонние пределы.

Число  $b$  называется **левым пределом**, или **пределом слева**, функции  $f(x)$  в точке  $a$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (\forall x : 0 < a - x < \delta) |f(x) - b| < \varepsilon$$

и обозначается  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ .

Число  $b$  называется **правым пределом**, или **пределом справа**, функции  $f(x)$  в точке  $a$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (\forall x : 0 < x - a < \delta) |f(x) - b| < \varepsilon$$

и обозначается  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ .

$$\text{Т. о., } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b.$$

### 5.3.2 Предел функции на бесконечности

Число  $a$  называется **пределом функции  $f(x)$  на бесконечности**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : (\forall x : |x| > M) |f(x) - a| < \varepsilon$$

и обозначается  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

### 5.3.3 Замечательные пределы

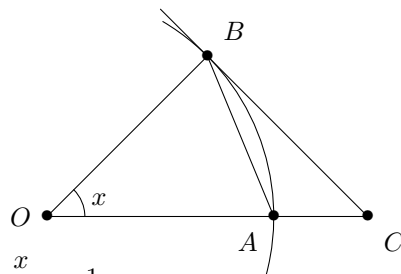
Замечательными пределами называют два тождества, часто используемых при нахождении других пределов.

## Первый замечательный предел

### Утверждение 5.3.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**Доказательство.** Пусть  $x > 0$ . Рассмотрим сектор  $AOB$  единичного круга ( $OA = OB = 1$ ) с углом  $x$  и касательную  $BC$  к нему.



$$S_{AOB} < S_{\text{сект}} < S_{BOC} \Leftrightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x \Leftrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Применяя теорему о двух милиционерах, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

Для  $x < 0$   $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-x)}{-x} = 1$ . ■

Следствия:

•

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = a, \quad a \neq 0$$

•

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{x} = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax \cos ax} = a, \quad a \neq 0$$

•

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{x^2} = \frac{a^2}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{ax}{2}}{\left(\frac{ax}{2}\right)^2} = \frac{a^2}{2}, \quad a \neq 0$$

•

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin ax}{x} \quad |\text{Пусть } ax = \sin y| = a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = a, \quad a \neq 0$$

•

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x} \quad |\text{Пусть } x = \operatorname{tg} y| = a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = a, \quad a \neq 0$$

## Второй замечательный предел

### Утверждение 5.3.2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

**Доказательство.**

1. Пусть  $x > 0$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x] + 1} = e$  по определению числа Эйлера.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x] + 1} \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{-1} &= \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \\ < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1} &= \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right) \end{aligned}$$

Применяя теорему о двух милиционерах, получим:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x] + 1} \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{-1} = e,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right) = e \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e\end{aligned}$$

2. Пусть  $x < 0$ ,  $y = -x$ , тогда

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e\end{aligned}$$

■

Следствия:

•

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \left| \text{Пусть } y = \frac{1}{x} \right| = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

•

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right)^a = e^a, a \neq 0$$

•

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+ax)^{\frac{1}{bx}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} \left(1+ax\right)^{\frac{1}{ax}}^{\frac{a}{b}} = \ln e^{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}, a, b \neq 0$$

•

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{c^{ax} - 1}{bx} &= \\ \left| \text{Пусть } c^{ax} - 1 = y \Leftrightarrow ax \ln c = \ln(y+1) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(y+1)}{a \ln c} \right| \\ &= \frac{a \ln c}{b} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = \frac{a}{b} \ln c, a, b \neq 0, c > 0\end{aligned}$$

•

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax)^n - 1}{bx} \quad \left| \text{Пусть } 1+ax = e^y \right| = \frac{a}{b} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{ny} - 1}{e^y - 1} = \frac{an}{b} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{ny} - 1}{ny} \cdot \frac{y}{e^y - 1} = \frac{an}{b}, a, b, n \neq 0$$

### 5.3.4 Локальный экстремум функции нескольких переменных

Точка  $\overline{x_0} = (x_{10}, \dots, x_{n0})$  называется **точкой локального минимума функции**  $f(\overline{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ , если  $\overline{x_0} \in D(f)$  и существует проколота окрестность  $\check{U}(\overline{x_0}) : \forall \overline{x} \in \check{U}(\overline{x_0}) f(\overline{x}) > f(\overline{x_0})$ .

Точка  $\overline{x_0} = (x_{10}, \dots, x_{n0})$  называется **точкой локального максимума функции**  $f(\overline{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ , если  $\overline{x_0} \in D(f)$  и существует проколота окрестность  $\check{U}(\overline{x_0}) : \forall \overline{x} \in \check{U}(\overline{x_0}) f(\overline{x}) < f(\overline{x_0})$ .

Точки локального минимума и максимума называются **точками локального экстремума**.

**Теорема 5.3.1 (необходимое условие локального экстремума).** В точке локального экстремума частные производные функции равны нулю или не существуют.

**Доказательство.** Пусть  $\overline{x_0} = (x_{10}, \dots, x_{n0})$  — точка экстремума функции  $f(\overline{x})$ , дифференцируемой в точке  $\overline{x_0}$ . Рассмотрим  $g(x) = f(x_{10}, \dots, x_{k-10}, x, x_{k+10}, \dots, x_{n0})$ .  $\overline{x_0}$  — точка экстремума  $f(\overline{x})$ , тогда

$x_{k0}$  — точка экстремума  $g(x)$ , значит,  $g'(x_{k0}) = 0$  или не существует. Тогда  $f'_{x_k}(x_{k0}) = 0$  или не существует. ■

**Теорема 5.3.2 (достаточное условие локального экстремума функции двух переменных).** Пусть дана функция  $f(x, y)$ . Если

1.  $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$
2.  $(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$

то  $(x_0, y_0)$  — точка локального экстремума  $f(x, y)$ .

1.  $(x_0, y_0)$  — точка локального минимума, если  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$  или  $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$ .
2.  $(x_0, y_0)$  — точка локального максимума, если  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$  или  $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$ .

**Доказательство.** По формуле Тейлора

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0, y_0) + o(\rho^2((x, y), (x_0, y_0))) - f(x_0, y_0) = \\ &= \frac{1}{2}d^2f(x_0, y_0) + o(\rho^2((x, y), (x_0, y_0))) \end{aligned}$$

значит,  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  сохраняет знак, если  $d^2f(x_0, y_0)$  сохраняет знак.

$$\begin{aligned} d^2f(x_0, y_0) &= f''_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0, y_0)dy^2 = \\ &= \left( f''_{xx}(x_0, y_0) + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\frac{dy}{dx} + f''_{yy}(x_0, y_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right) dx^2 \end{aligned}$$

Т. о.,  $(x_0, y_0)$  — точка локального экстремума  $f(x, y)$ , если  $d^2f(x_0, y_0)$  сохраняет знак, т. е. при

$$(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$$

$$(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) > (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 \Rightarrow f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$$

значит,  $f''_{xx}(x_0, y_0)$  и  $f''_{yy}(x_0, y_0)$  одного знака.

1. Если  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \vee f''_{yy}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow d^2f(x_0, y_0) > 0$ , тогда  $(x_0, y_0)$  — точка локального минимума.
2. Если  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \vee f''_{yy}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow d^2f(x_0, y_0) < 0$ , тогда  $(x_0, y_0)$  — точка локального максимума.

■

**Теорема 5.3.3 (достаточное условие локального экстремума).** Пусть дана функция  $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ . Точка  $\bar{x}_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$  — точка локального экстремума  $f(\bar{x})$ , если

1.  $f'_{x_1}(\bar{x}_0) = \dots = f'_{x_n}(\bar{x}_0) = 0$
2.  $\sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j$  сохраняет знак.

1.  $\bar{x}_0$  — точка локального минимума, если  $\sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j > 0$ .

2.  $\bar{x}_0$  — точка локального максимума, если  $\sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j < 0$ .

**Доказательство.** По формуле Тейлора

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = f(\bar{x}_0) + df(\bar{x}_0) + \frac{d^2f(\bar{x}_0)}{2!} + o(\rho^2(\bar{x}, \bar{x}_0)) - f(\bar{x}_0) = \frac{d^2f(\bar{x}_0)}{2!} + o(\rho^2(\bar{x}, \bar{x}_0))$$

значит,  $f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)$  сохраняет знак, если  $d^2 f(\bar{x}_0)$  сохраняет знак.

$$d^2 f(\bar{x}_0) = \sum_{\substack{i=1, n \\ j=1, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j$$

1. Если  $\sum_{\substack{i=1, n \\ j=1, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j > 0 \Leftrightarrow d^2 f(\bar{x}_0) > 0$ , то  $\bar{x}_0$  — точка локального минимума.
2. Если  $\sum_{\substack{i=1, n \\ j=1, n}} f''_{x_i x_j}(\bar{x}_0) dx_i dx_j < 0 \Leftrightarrow d^2 f(\bar{x}_0) < 0$ , то  $\bar{x}_0$  — точка локального максимума.

■

При практическом применении теоремы 5.3.3 полезен критерий Сильвестра.

### 5.3.5 Метод наименьших квадратов

Пусть даны точки  $x_1, \dots, x_n$  и требуется найти аппроксимирующую прямую для значений некоторой функции  $f(x)$  в этих точках. Уравнение прямой —  $y = Ax + B$ . Найдём точку, в которой сумма

$$S(A, B) = \sum_{i=1}^n (Ax_i + B - f(x_i))^2$$

принимает наименьшее значение.

$$\begin{aligned} S'_A &= \sum 2x_i(Ax_i + B - f(x_i)) \\ S'_B &= \sum 2(Ax_i + B - f(x_i)) \\ \begin{cases} S'_A = 0 \\ S'_B = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A \sum x_i^2 + B \sum x_i = \sum x_i f(x_i) \\ A \sum x_i + Bn = \sum f(x_i) \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \left( n \sum x_i^2 - \left( \sum x_i \right)^2 \right) A = n \sum x_i f(x_i) - \sum x_i \sum f(x_i) \\ Bn = \sum f(x_i) - A \sum x_i \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{n \sum x_i f(x_i) - \sum x_i \sum f(x_i)}{n \sum x_i^2 - \left( \sum x_i \right)^2} \\ B = \frac{\sum x_i^2 \sum f(x_i) - \sum x_i \sum x_i f(x_i)}{n \sum x_i^2 - \left( \sum x_i \right)^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Найденные значения  $A$  и  $B$  — искомые коэффициенты в уравнении аппроксимирующей прямой. Для оценки точности аппроксимации можно найти коэффициент корреляции по формуле

$$r = \sqrt{\frac{\sum (f(x_i) - \tilde{y})^2 - \sum (f(x_i) - \tilde{y}_i)^2}{\sum (f(x_i) - \tilde{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sum (f(x_i) - \tilde{y}_i)^2}{\sum (f(x_i) - \tilde{y})^2}}$$

где  $\tilde{y} = \frac{1}{n} \sum f(x_i)$ ,  $\tilde{y}_i = Ax_i + B$ , а значение коэффициента  $r$  тем ближе к единице, чем точнее аппроксимация.

### 5.3.6 Условный экстремум

Пусть дана функция  $f(x_1, \dots, x_n)$ , переменные которой удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Для нахождения её экстремумов (называемых **условными**) введём функцию Лагранжа

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

и исследуем её. Её экстремумы являются условными экстремумами функции  $f$ .



## Глава 6

# Теория множеств

### 6.1 Множества

#### 6.1.1 Мощность множеств

Множества  $A$  и  $B$  называются **равномощными** (имеют одинаковую мощность), если существует биекция  $f: A \rightarrow B$ , иначе — **неравномощными**.

Для конечных множеств это означает, что у них одинаковое количество элементов.

**Мощностью** конечного множества  $A$  называется количество  $|A|$  его элементов.

Множество всех подмножеств множества  $A$  обозначается

$$\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

Множество всех подмножеств множества  $A$  мощности  $k$  обозначается

$$\mathcal{P}_k(A) = \{x \subseteq A \mid |x| = k\}$$

**Теорема 6.1.1 (Кантора).** *Множества  $A$  и  $\mathcal{P}(A)$  не равномощны.*

**Доказательство (методом от противного).** Пусть  $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  — биекция. Рассмотрим множество

$$X = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \Rightarrow X \subset A \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A)$$

$f$  — биекция, тогда  $\exists b \in A: f(b) = X$ . Возможны два случая:

1. Пусть  $b \in X \Rightarrow b \in f(b) \Rightarrow b \notin X$ . Противоречие.
2. Пусть  $b \notin X \Rightarrow b \in f(b) \Rightarrow b \in X$ . Противоречие.

В обоих случаях получили противоречие. ■

**Теорема 6.1.2.** *Пусть дано множество  $A: |A| = n$ , тогда  $|\mathcal{P}_k(A)| = C_n^k$ .*

**Доказательство (методом математической индукции).**

- База индукции.  $n = 0$ :

$$|A| = 0 \Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset\} \Rightarrow |\mathcal{P}_0(A)| = 1 = C_0^0$$

- Шаг индукции. Пусть теорема верна для  $n$ . Докажем её для  $n + 1$ . Пусть  $X \subset A$ ,  $|X| = k$ ,  $a \in A$ . Подсчитаем количество таких  $X$ . Возможны два случая:

1. Пусть  $a \notin X \Rightarrow X \subset A \setminus \{a\}$ , тогда таких  $X$   $C_n^k$ .
2. Пусть  $a \in X$ , тогда таких  $X$  столько же, сколько множеств  $X \setminus \{a\} \subset A \setminus \{a\}$ , т. е.  $C_n^{k-1}$ .

Тогда  $|\mathcal{P}(A)| = C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$ .

■

### 6.1.2 Мощность числовых множеств

Множество называется **счётным**, если оно равномощно множеству натуральных чисел. Бесконечное множество, не являющееся счётным, называется **несчётным**.

**Утверждение 6.1.1.**  $\mathbb{Z}$  счётно.

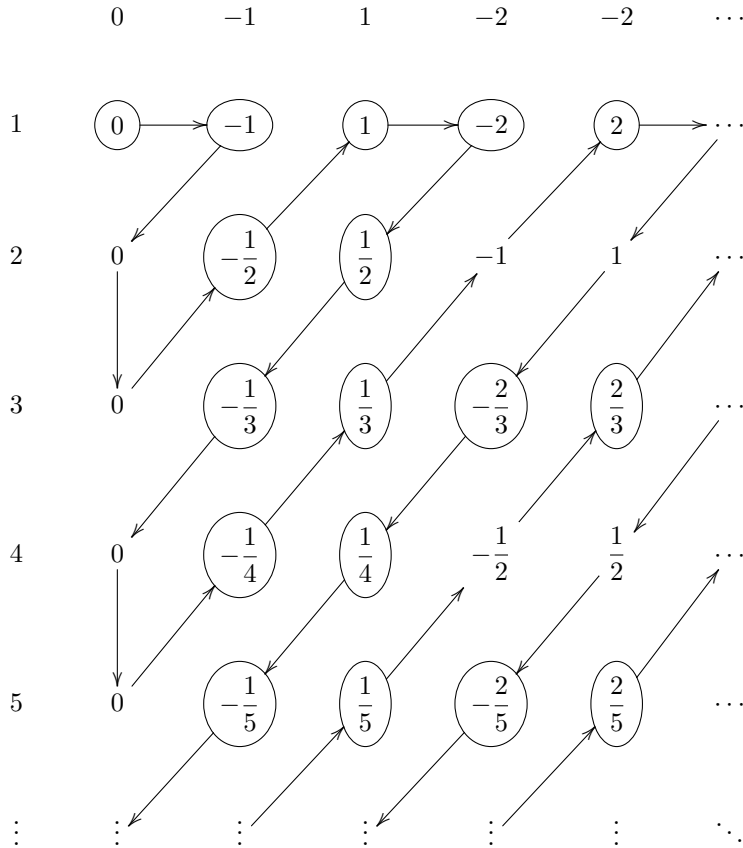
**Доказательство.** Построим биекцию  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ :

$$f(n) = \begin{cases} -2n - 1, & n < 0 \\ 2n, & n \geq 0 \end{cases}$$

Тогда  $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ . ■

**Утверждение 6.1.2.**  $\mathbb{Q}$  счётно.

**Доказательство.** Составим таблицу, в верхней строке которой стоят  $p_i \in \mathbb{Z}$ , в левом столбце —  $q_i \in \mathbb{N}$ , а на пересечении столбца и строки —  $\frac{p_i}{q_i}$ . Обходя таблицу в указанном порядке, будем нумеровать очередной элемент, только если он не встречался ранее:



Ясно, что таким образом можно пронумеровать все элементы  $\mathbb{Q}$ , причём ни один из них не будет пронумерован дважды, значит,  $\mathbb{Q}$  счётно. ■

**Утверждение 6.1.3.**  $(0; 1)$  несчётно.

**Доказательство (методом от противного).** Пусть все числа из интервала  $(0; 1)$  можно пронумеровать. Тогда представим каждое число в виде десятичной дроби и расположим эти дроби в соответствии с нумерацией:

1.  $0, a_{11} a_{12} \dots$
2.  $0, a_{21} a_{22} \dots$
- ...

где  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{21}, a_{22}, \dots$  — цифры. Рассмотрим дробь  $0, b_1 b_2 \dots$ , где  $b_1, b_2, \dots$  — цифры такие, что  $b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, \dots$ . Такая дробь отличается от каждой из пронумерованных хотя бы в одной позиции, значит, она не пронумерована. Противоречие. ■

**Утверждение 6.1.4.**  $|\mathbb{R}| = |(0; 1)|$ .

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 2, & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x-1} + 2, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

$f$  переводит  $(0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$  и является биекцией, значит, интервал  $(0; 1)$  равномощен  $\mathbb{R}$ . ■  
 $|\mathbb{R}|$  называется **континуумом**.

## Глава 7

# Элементарная алгебра

### 7.1 Комплексные числа

**Мнимой единицей** называется число, квадрат которого равен  $-1$ , и обозначается  $i$ .

**Комплексным** называется число вида  $a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Если  $a = 0$ , то такое число называется **мнимым**, или **чисто мнимым**. Множество комплексных чисел обозначается  $\mathbb{C}$ .

Если  $z = a + bi$ , то  $\bar{z} = a - bi$  называется **сопряжённым** к  $z$ .

Операции над комплексными числами  $z_1 = a_1 + b_1i$ ,  $z_2 = a_2 + b_2i$ ,  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$  осуществляются так же, как над вещественными:

- **Сложение**

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

- **Умножение**

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

- **Деление**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i$$

#### 7.1.1 Геометрическое представление комплексного числа

Комплексное число  $a + bi$  принято изображать на координатной плоскости точкой  $(a; b)$ , а также радиус-вектором, соединяющим начало координат с этой точкой. Такая плоскость называется **комплексной**.

**Модулем** комплексного числа  $z = a + bi$ , или его **абсолютной величиной**, называется длина соответствующего радиус-вектора комплексной плоскости, равная

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**Аргументом** комплексного числа  $z = a + bi$  называется угол соответствующего радиус-вектора на комплексной плоскости:

$$a = |z| \cos \operatorname{Arg} z, \quad b = |z| \sin \operatorname{Arg} z$$

**Главным аргументом** называется значение  $\operatorname{Arg} z \cap (-\pi; \pi]$  и обозначается  $\arg z$ .

#### 7.1.2 Тригонометрическая форма комплексного числа

**Тригонометрической формой** комплексного числа  $z$  называется его представление в виде

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \varphi = \operatorname{Arg} z$$

При использовании тригонометрических форм операции умножения и деления комплексных чисел  $z_1 = |z_1|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ ,  $z_2 = |z_2|(\cos \beta + i \sin \beta)$  упрощаются:

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)) = |z_1| |z_2| (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta))}{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta))$$

**Теорема 7.1.1 (формула Эйлера).**

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}$$

**Доказательство.** Воспользуемся разложением  $\cos x$ ,  $\sin x$  и  $e^{ix}$  в ряд Маклорена:

$$\cos x + i \sin x = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \dots = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \frac{i^4 x^4}{4!} + \frac{i^5 x^5}{5!} + \dots = e^{ix}$$

■

При подстановке  $x = \pi$  в формулу Эйлера (7.1.1) получим замечательное **тождество Эйлера**, связывающее пять фундаментальных математических констант:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

**Теорема 7.1.2 (формула Муавра).** Если  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $n \in \mathbb{R}$ , то

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

**Доказательство.** Для  $n \in \mathbb{N}$  формулу можно доказать методом математической индукции, тогда показать истинность формулы для  $n \in \mathbb{Z}$  несложно. Мы же докажем формулу сразу для  $n \in \mathbb{R}$ , пользуясь формулой Эйлера (7.1.1):

$$z^n = |z|^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

■

Пользуясь формулой Муавра (7.1.2), можно извлекать корни из комплексного числа  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ :

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right)$$

Следует не забывать, что  $\varphi$  определено с точностью до  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , поэтому комплексный корень имеет не одно, а  $n$  значений (что можно показать, пользуясь следствием (4.5.2)).

# Глоссарий

<b>Б</b>		<b>М</b>	Простой граф
Бесконечно малая величина		Мажоранта	
Биекция		Миноранта	<b>С</b>
		Маршрут	Соседняя вершина
<b>В</b>			Смежность вершин
Висячая вершина	<b>Н</b>		Степень вершины
Внутренняя точка	Неориентированный граф		Супремум
			Сходимость
			последовательности
<b>Д</b>	<b>О</b>		Сюръекция
Дискретная точка	Ограниченная величина		
	Ограниченное множество	<b>Ф</b>	
<b>И</b>	Окрестность	Фундаментальная	
Изолированная вершина	Отрезок	последовательность	
Изоморфизм графов		Функция	
Интервал	<b>П</b>		
Инфимум	Петля	<b>Ц</b>	
Инцидентность	Полный граф	Цепь	
Инъекция	Последовательность	Цикл	
	Предел последовательности		
<b>К</b>	Предел функции	<b>Ч</b>	
	Предельная точка	Число Эйлера	
Кратное ребро	Промежуток		