

# Оглавление

<b>1</b>	<b>14.03.2018, математический анализ</b>	<b>3</b>
1.0.1	Знакопеременные ряды . . . . .	3
1.1	Функциональные ряды . . . . .	4
1.1.1	Степенные ряды . . . . .	4
<b>2</b>	<b>21.03.2018, математический анализ</b>	<b>5</b>
2.0.1	Приложения разложений функций в ряд Маклорена . . . . .	7
<b>3</b>	<b>28.03.2018, математический анализ</b>	<b>8</b>
3.0.1	Тригонометрические ряды Фурье . . . . .	8
<b>4</b>	<b>04.04.2018, математический анализ</b>	<b>10</b>
4.1	Дифференциальные уравнения . . . . .	10
4.1.1	Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными . . . . .	10
4.1.2	Однородное дифференциальное уравнение первого порядка . . . . .	10
<b>5</b>	<b>11.04.2018, математический анализ</b>	<b>11</b>
5.0.1	Уравнение в полных дифференциалах . . . . .	11
5.1	Линейное уравнение первого порядка . . . . .	11
<b>6</b>	<b>18.04.2018, математический анализ</b>	<b>12</b>
6.0.1	Уравнение Бернулли . . . . .	12
<b>7</b>	<b>25.04.2018, математический анализ</b>	<b>13</b>
7.0.1	Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами . . . . .	13
<b>8</b>	<b>04.05.2018, дискретная математика</b>	<b>14</b>
8.1	Контекстно-свободные грамматики . . . . .	14
<b>9</b>	<b>11.05.2018, дискретная математика</b>	<b>15</b>
<b>10</b>	<b>16.05.2018, математический анализ</b>	<b>16</b>
10.0.1	Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами . . . . .	16
10.0.2	Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . .	17
<b>11</b>	<b>18.05.2018, дискретная математика</b>	<b>18</b>
<b>12</b>	<b>23.05.2018, математический анализ</b>	<b>19</b>
12.0.1	Неоднородные системы . . . . .	19
12.1	Приближённое решение дифференциальных уравнений . . . . .	20
12.1.1	Решение с помощью степенного ряда . . . . .	20
<b>13</b>	<b>25.05.2018, дискретная математика</b>	<b>21</b>
13.1	Недетерминированная машина Тьюринга . . . . .	21

# Глава 1

## 14.03.2018, математический анализ

**Теорема 1.0.1 (интегральный признак Коши).** Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  — знакоположительный ряд. Если существует монотонная функция  $f(x)$  такая, что  $f(n) = a_n$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , то  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится  $\Leftrightarrow \exists \int_1^{+\infty} f(x) dx$ .

**Доказательство.** Площадь заштрихованной фигуры равна  $1a_1 + 1a_2 + \dots + 1a_n$ , а криволинейной трапеции —  $\int_1^{n+1} f(x) dx$ , тогда  $S_n > \int_1^{n+1} f(x) dx$ ,  $S_{n+1} - a_1 < \int_1^{n+1} f(x) dx$ .

$$1. \Leftarrow. \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n < a_1 + \int_1^{n+1} f(x) dx < a_1 + \int_1^{+\infty} f(x) dx \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится.}$$

$$2. \Rightarrow. \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_1^{n+1} f(x) dx < S_n < S \Rightarrow \exists \int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

■

### 1.0.1 Знакопеременные ряды

**Теорема 1.0.2.** Если  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  сходится, то  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  тоже сходится.

**Доказательство.** Пусть  $(S_n)$  и  $(\sigma_n)$  — частичные суммы рядов  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  соответственно. По критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall m > N \quad \forall k \geq 1 \quad |\sigma_{m+k} - \sigma_m| < \varepsilon$$

Тогда

$$|S_{m+k} - S_m| = \left| \sum_{i=1}^k a_{m+i} \right| \leq \sum_{i=1}^k |a_{m+i}| = |\sigma_{m+k} - \sigma_m| < \varepsilon$$

Значит,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится. ■

**Теорема 1.0.3 (признак Лейбница).** Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$  — знакочередующийся ряд. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , причём  $(a_n)$  — монотонная последовательность, то ряд сходится.

**Доказательство.**

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) < S_{2n+2}$$

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$$

Тогда по свойству ?? предела последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Значит, ряд сходится. ■

## 1.1 Функциональные ряды

**Теорема 1.1.1 (мажорантный признак сходимости).** Если существует последовательность  $(a_n): \forall n \in \mathbb{N} |f_n(x)| \leq a_n$ , то  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится  $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  сходится абсолютно.

### 1.1.1 Степенные ряды

**Степенным** называется ряд вида  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k$ .

**Теорема 1.1.2 (Абеля).**

- Если ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  сходится при  $x = x_0$ , то  $\forall x: |x| < |x_0|$  он сходится абсолютно.
- Если ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  расходится при  $x = x_0$ , то  $\forall x: |x| > |x_0|$  он расходится.

**Доказательство.**

- $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_0^n = 0 \Rightarrow \exists M > 0: |c_n x_0^n| \leq M \Rightarrow |c_n x^n| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ .

Тогда  $\sum_{k=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^k$  сходится  $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  сходится абсолютно.

- Если бы  $\exists x_1: |x_1| > |x_0|$  &  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_1^k$  сходится, то  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$  сошелся бы, что противоречит условию.

■

**Следствие 1.1.3.**  $\exists R > 0$ : при  $|x| < R$   $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  сходится, а при  $|x| > R$   $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  расходится.

$R$  называется **радиусом сходимости степенного ряда**.

Рассмотрим ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k x^k|$ . По признаку д'Аламбера  $\lim_{n \rightarrow \infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \cdot |x| \right| \dots$

## Глава 2

### 21.03.2018, математический анализ

Найдём радиус сходимости ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^p}$ :

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^p = 1$$

Подставим  $x = 1$ , тогда  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^p}$  сходится при  $p > 1$  и расходится при  $p \leq 1$ .

Подставим  $x = -1$ , тогда  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^p}$  сходится абсолютно при  $p > 1$ , сходится условно при  $0 < p \leq 1$  и расходится при  $p \leq 0$ .

**Утверждение 2.0.1.** Если  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = S(x)$  при  $|x| < R$ , то

$$1. \int_a^b S(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_a^b x^k dx, \text{ где } |a|, |b| < R$$

$$2. (S(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x^k)^{(n)}, \text{ где } |x| < R$$

Связь суммы ряда и его коэффициентов:

$$1. c_0 = S(0)$$

$$2. c_1 = S'(0)$$

$$3. c_2 = \frac{S''(0)}{2}$$

$$4. c_3 = \frac{S'''(0)}{3!}$$

$$5. c_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$$

Т.о.,  $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k)}(0)}{k!} x^k$  при  $|x| < R$ .

Рассмотрим ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ .

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|}{\left| \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f^{(n)}(0)|(n+1)}{|f^{(n+1)}(0)|}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Тогда  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  при  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$ .

Разложение некоторых функций:

$$1. f(x) = e^x. \text{ Для } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

$$r_n = \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$$

Тогда при  $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$2. f(x) = \sin x. \text{ Для } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2n-1)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n(2n+1) = \infty$$

$$r_n = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \sin \left( \Theta x + \frac{\pi}{den} \right) \right| < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \sin \left( \Theta x + \frac{\pi}{den} \right) \right| = 0$$

Тогда при  $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$$

$$3. f(x) = \cos x. \text{ Для } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)(2n+2) = \infty$$

$$r_n = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \cos \left( \Theta x + \frac{\pi}{den} \right) \right| < \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \cos \left( \Theta x + \frac{\pi}{den} \right) \right| = 0$$

Тогда при  $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$4. f(x) = (1+x)^\alpha \text{ при } \alpha \notin \mathbb{N}. \text{ Для } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)|(k+1)!}{k!|\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k)|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{|\alpha-k|} = 1$$

$$r_n = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)(1+\Theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\Theta x)^{n+1-\alpha}}$$

Если  $x \in [0; 1)$   $|r_n(x)| \leq M \cdot \frac{x^{n+1}}{1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ .

Тогда при  $x \in (-1; 1)$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

### 2.0.1 Приложения разложений функций в ряд Маклорена

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad |x| < 1$$

Тогда при  $|x| < 1$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

## Глава 3

# 28.03.2018, математический анализ

### 3.0.1 Тригонометрические ряды Фурье

Представим функцию  $f(x)$  на отрезке  $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$  в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + \sum_{k=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n}{T} x$$

**Скалярным произведением функций  $f(x)$  и  $g(x)$**  называется  $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)g(x) dx$ .

Проверим, что функции  $1$ ,  $\cos \frac{2\pi n}{T} x$  и  $\sin \frac{2\pi n}{T} x$  попарно ортогональны:

- $\bullet \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{T}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n}{T} x \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$
- $\bullet \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi n}{T} x dx = -\frac{T}{2\pi n} \cos \frac{2\pi n}{T} x \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$
- $\bullet \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi m}{T} x \cos \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi(m-n)}{T} x + \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi(m+n)}{T} x = 0, m \neq n$
- $\bullet \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi m}{T} x \sin \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi(m-n)}{T} x - \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi(m+n)}{T} x = 0, m \neq n$
- $\bullet \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi m}{T} x \sin \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi(m+n)}{T} x + \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi(m-n)}{T} x = 0$

Найдём квадраты этих функций:

- $\bullet \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1^2 dx = T$
- $\bullet \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2 \frac{2\pi n}{T} x dx = \frac{T}{2}$

- $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 \frac{2\pi n}{T} x \, dx = \frac{T}{2}$

Тогда можно найти коэффициенты:

- $a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos \frac{2\pi k}{T} x \, dx$

- $b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin \frac{2\pi k}{T} x \, dx$

Причём если  $f(x)$  чётна, то  $b_k = 0$ . Если же  $f(x)$  нечётна, то  $a_k = 0$ .



## Глава 4

# 04.04.2018, математический анализ

### 4.1 Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение вида  $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x))$ .  $n$  называется его порядком.

#### 4.1.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$$

#### 4.1.2 Однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Пусть  $p(x) = \frac{y}{x}$ , тогда  $y = x \cdot p(x) \Rightarrow y' = p(x) + x \cdot p'(x)$ . Получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow xp'(x) = F(p(x)) - p \Leftrightarrow p' = \frac{F(p(x)) - p}{x}$$

Решив его, найдём  $p(x)$  и  $y$ .

## Глава 5

# 11.04.2018, математический анализ

### 5.0.1 Уравнение в полных дифференциалах

**Уравнением в полных дифференциалах** называется уравнение вида  $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ . Если  $M'_y = N'_x$ , то  $M(x,y) = F'_x$  &  $N(x,y) = F'_y$ , тогда

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \Leftrightarrow M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \Leftrightarrow dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C$$

Пусть  $M'_y \neq N'_x$ , но  $\exists \mu(x,y): (\mu \cdot M)'_y = (\mu \cdot N)'_x$ , тогда

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 \Leftrightarrow \mu(x,y)M(x,y) dx + \mu(x,y)N(x,y) dy = 0 \Leftrightarrow dF(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = C$$

$\mu(x,y)$  называется **интегрирующим множителем**.

### 5.1 Линейное уравнение первого порядка

**Линейным дифференциальным уравнением первого порядка** называется уравнение вида  $y' = a(x)y + b(x)$ .

Рассмотрим метод вариации произвольной постоянной.

1. Решим уравнение

$$y'_0 = a(x)y_0 \Leftrightarrow \frac{dy_0}{y_0} = a(x) dx \Rightarrow \ln y_0 = \varphi(x) + \ln C \Rightarrow y_0 = Ce^{\varphi(x)}$$

2. Подставим  $y = C(x)e^{\varphi(x)}$  в исходное уравнение:

$$C'(x)e^{\varphi(x)} + C(x)e^{\varphi(x)}\varphi'(x) = a(x)C(x)e^{\varphi(x)} + b(x)$$

$y_0 = Ce^{\varphi(x)} \Rightarrow Ce^{\varphi(x)}\varphi'(x) = a(x)Ce^{\varphi(x)}$ , тогда получим

$$C'(x)e^{\varphi(x)} = b(x) \Leftrightarrow C'(x) = b(x)e^{-\varphi(x)} \Leftrightarrow C(x) = \int b(x)e^{-\varphi(x)}$$

Тогда  $y = C(x)e^{\varphi(x)}$ .

## Глава 6

# 18.04.2018, математический анализ

### 6.0.1 Уравнение Бернулли

**Уравнением Бернулли** называется уравнение вида  $y' = a(x)y + b(x)y^n$ , где  $n \neq 1$ . Пусть  $\frac{1}{y^{n-1}} = z$ , тогда

$$y' = a(x)y + b(x)y^n \Leftrightarrow \frac{y'}{y^n} = a(x)y^{1-n} + b(x) \Leftrightarrow \frac{z'}{1-n} = a(x)z + b(x)$$

Т.о., решение уравнения Бернулли сводится к решению линейного уравнения.

**Теорема 6.0.1.** Пусть  $y'(x) = f(x, y(x))$  &  $y(x_0) = y_0$ , причём в некоторой окрестности  $\exists M > 0: |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$ , тогда уравнение имеет единственное решение в окрестности  $(x_0 - d; x_0 + d)$ :  $y(x) = \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx + y_0$ .

Это уравнение можно решить методом итераций:

$$y_1(x) = \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx + y_0$$

$$y_n(x) = \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx + y_0$$

**Доказательство.**

$$y_n(x) - y_{n-1}(x) = \int_{x_0}^x (f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x))) dx$$

$$\left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq |b - a| \max_{x \in [a; b]} |g(x)|, \text{ тогда}$$

$$\max_{|x-x_0|<d} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq d \max_{|x-x_0|<d} |f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x))| \leq dM \max_{|x-x_0|<d} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)|$$

Пусть  $q = dM < 1$ , тогда

$$\max_{|x-x_0|<d} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq q \max_{|x-x_0|<d} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| \leq q^{n-1} \max_{|x-x_0|<d} |y_1(x) - y_0|$$

Тогда

$$\forall k \geq 1 \max_{x \in [a; b]} |y_{n+k}(x) - y_n(x)| = \max_{|x-x_0|<d} |(y_{n+k}(x) - y_{n+k-1}(x)) + (y_{n+k-1}(x) - y_{n+k-2}(x)) + \dots + (y_{n+1}(x) - y_n(x))| \leq \max_{|x-x_0|<d} |y_{n+k}(x) - y_n(x)|$$

По признаку Коши получим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \forall k \geq 1 \max_{x \in [a; b]} |y_{n+k}(x) - y_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \tilde{y}(x)$$

Докажем единственность:

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| = \left| \int_{x_0}^x (f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))) dx \right| \Rightarrow \max_{|x-x_0|<d} |y(x) - \tilde{y}(x)| \leq |x - x_0| \cdot \max_{|x-x_0|<d} |f(x, y(x)) - f(x, \tilde{y}(x))| < dM \max_{|x-x_0|<d} |y(x) - \tilde{y}(x)|$$

Противоречие, значит, решение единственно. ■

## Глава 7

# 25.04.2018, математический анализ

Рассмотрим  $F(y, y', y'') = 0$ . Пусть  $y'(x) = z(y)$ , тогда  $y''(x) = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z$  и  $F(y, y', y'') = 0 \Leftrightarrow F(y, z, z' \cdot z) = 0$ .

### 7.0.1 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

**Линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка** называется уравнение вида  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$ .

Введём функции  $y_0 = y, y_1 = y', \dots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$ , тогда

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y'_0 = y_1 \\ y'_1 = y_2 \\ \dots \\ y'_{n-1} = f(x) - a_0y_0 - a_1y_1 - \dots - a_{n-1}y_{n-1} \end{cases}$$

Введём вектор-функцию  $Y(x) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ , тогда  $Y' = AY + F$ , где  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ ,  $F =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Уравнение можно решить методом итераций:  $Y_k(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x (AY_{k-1}(t) + F(t)) dt$ .

**Определителем Вронского**, или **вронскианом**, называется определитель

$$\begin{vmatrix} \tilde{y}_0(x_0) & \tilde{y}_1(x_0) & \dots & \tilde{y}_{n-1}(x_0) \\ \tilde{y}'_0(x_0) & \tilde{y}'_1(x_0) & \dots & \tilde{y}'_{n-1}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y}_0^{(n-1)}(x_0) & \tilde{y}_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & \tilde{y}_{n-1}^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

где  $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$  — частные решения уравнения.

**Утверждение 7.0.1.** Если решения  $\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n-1}$

## Глава 8

# 04.05.2018, дискретная математика

### 8.1 Контекстно-свободные грамматики

**Контекстно-свободной грамматикой** называется набор  $(V, X, P, S)$ , где  
 $X$  — конечное множество **терминальных символов**, или **терминалов**;  
 $V$  — конечное множество **переменных**, представляющих языки;  
 $S$  — **стартовый символ** — переменная, представляющая определяемый язык;  
 $P$  — конечное множество **продукций** — правил вывода вида  $A \rightarrow B$ , в результате которого  $A$  заменяется на  $B$ .

**Теорема 8.1.1.** Язык  $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  — нерегулярный и контекстно-свободный.

**Доказательство.** Такой язык описывается контекстно-свободной грамматикой  $(\{s\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow \lambda, S \rightarrow aSb\}, S)$ .

■

**Деревом разбора для контекстно-свободной грамматики**  $G = (V, X, P, S)$  называется дерево такое, что:

1. Каждый внутренний узел отмечен переменной из  $V$ .
2. Каждый лист отмечен либо переменной из  $V$ , либо терминалом, либо  $\lambda$ . Если он отмечен  $\lambda$ , то он должен быть единственным потомком своего родителя.
3. Если внутренний узел отмечен  $A$ , а его потомки —  $X_1, X_2, \dots, X_k$  слева направо, то  $(A \rightarrow X_1 X_2 \dots X_k) \in P$ .

Контекстно-свободная грамматика называется **неоднозначной**, если она содержит слово, для которого можно построить несколько деревьев разбора, иначе — **однозначной**.

**Теорема 8.1.2.** Все контекстно-свободные языки распознаются автоматами с магазинной памятью, и все автоматы с магазинной памятью задают контекстно-свободные языки.

## Глава 9

# 11.05.2018, дискретная математика

Алгоритм построения КС-грамматики по регулярному выражению:

$\emptyset: S \rightarrow S$

$\lambda: S \rightarrow \lambda$

$a: S \rightarrow a$

$+: (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, X, S, P_1 \cup P_2 \cup P_0)$ , где  $P_0 = \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\}$

$\cdot: P_0 = \{S \rightarrow S_1 S_2\}$

$*: (V \cup \{S\}, X, S, \{S \rightarrow \lambda, S \rightarrow SS_1\})$

**Машиной Тьюринга** называется набор  $(Q, X, \delta, q_1, q_0)$ , где

$Q$  — множество состояний;

$X$  — алфавит;

$\delta: Q \times X \rightarrow Q \times X \times \{L, S, R\}$  — функция перехода;

$q_1 \in Q$  — начальное состояние;

$q_0 \in Q$  — состояние остановки.

$x_1 x_2 \dots x_{i-1} q_i x_i x_{i+1} \dots x_n$  называется **конфигурацией машины Тьюринга**, где  $x_1 x_2 \dots x_n$  — текущее слово,  $q_i$  — текущее состояние,  $x_i$  — текущий символ.

Язык называется **вычислимым**, если существует машина Тьюринга, которая при чтении слова из этого языка останавливается на не пустом символе, а при чтении слова не из этого языка — на пустом.

**Теорема 9.0.1.** *Любой регулярный язык вычислим.*

**Доказательство.** Пусть дан автомат  $(Q, X, \delta_A, q_1, F)$ . Рассмотрим машину Тьюринга  $(Q \cup \{q_0\}, X, \delta_M, q_1, q_0)$ ,

где

$$\begin{cases} \delta_M(q, x) = (\delta_A(q, x), \bullet, R), & x \neq \bullet \\ \delta_M(q, x) = \begin{cases} (q_0, a, S), & q \in F \\ (q_0, \bullet, S), & q \notin F \end{cases} \end{cases} \quad \blacksquare$$

**Утверждение 9.0.2.** *Язык  $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  вычислим.*

**Доказательство.** Рассмотрим машину Тьюринга с функцией перехода

	$a$	$b$	$\bullet$
$q_1$	$q_2 \bullet R$	$q_0 \bullet S$	$q_0 a S$
$q_2$	$q_2 a R$	$q_2 b R$	$q_3 \bullet L$
$q_3$	$q_0 \bullet S$	$q_4 \bullet L$	$q_0 \bullet S$
$q_4$	$q_4 a L$	$q_4 b L$	$q_1 \bullet R$

■

Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется **правильно вычислимой**, если существует такая машина Тьюринга,  $q_1 1^{x_1+1} \bullet 1^{x_2+1} \bullet \dots \bullet 1^{x_n+1} \rightarrow q_0 1^{f(x_1, \dots, x_n)}$ .

Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется **вычислимой**, если после чтения  $q_1 1^{x_1+1} \bullet \dots \bullet 1^{x_n+1}$  на ленте  $f(x_1, \dots, x_n)$  единиц.

## Глава 10

# 16.05.2018, математический анализ

Пусть дифференциальному уравнению  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$  соответствует характеристическое уравнение  $k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \dots + a_1k + a_0 = 0$ .

**Доказательство.**  $y'' + a_1y' + a_0y = 0$

Пусть  $k_1 = k_2$ , тогда  $k_1^2 + a_1k_1 + a_0 = 0$  &  $2k_1 + a_1 = 0$ . Подставим  $y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}$ :

$$e^{k_1x}(C_1k_1^2 + 2C_2k_1 + C_2xk_1^2 + C_1a_1k_1 + C_2a_1 + C_2a_1k_1x + C_1a_0 + C_2a_0x) = 0 \Leftrightarrow C_1(k_1^2 + a_1k_1 + a_0) + C_2(2k_1 + a_1) + C_2x(k_1^2 + a_1k_1 + a_0) = 0$$

■

Пусть  $k_1 = \alpha + i\beta$ ,  $k_2 = \alpha - i\beta$ , тогда, используя  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ , получим

$$y(x) = C_{10}e^{(\alpha+i\beta)x} + C_{20}e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(C_{10}e^{i\beta x} + C_{20}e^{-i\beta x}) = e^{\alpha x}((C_{10} + C_{20})\cos \beta x + i(C_{10} - C_{20})\sin \beta x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

### 10.0.1 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим следующие методы решения уравнений вида  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$ .

#### Метод вариации произвольных постоянных

1. Найдём решение  $y_0 = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 + \dots + C_n\tilde{y}_n$  уравнения  $y_0^{(n)} + a_{n-1}y_0^{(n-1)} + \dots + a_1y_0' + a_0y_0 = 0$ .
2. Решением исходного уравнения будет  $y(x) = C_1(x)\tilde{y}_1 + \dots + C_n(x)\tilde{y}_n$ .
3. Найдём  $C_1(x), \dots, C_n(x)$ , решая систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + \dots + C_n'(x)\tilde{y}_n = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1' + \dots + C_n'(x)\tilde{y}_n' = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1'' + \dots + C_n'(x)\tilde{y}_n'' = 0 \\ \dots \\ C_1'(x)\tilde{y}_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)\tilde{y}_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

и интегрируя  $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$ .

**Доказательство.** Пусть дано уравнение  $y'' + a_1y' + a_0y = f(x)$  и  $y_0(x) = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2$ , тогда

$$y(x) = C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2$$

$$y'(x) = C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_1(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2 + C_2(x)\tilde{y}_2'$$

$$y''(x) = C_1''(x)\tilde{y}_1 + 2C_1'(x)\tilde{y}_1' + C_1(x)\tilde{y}_1'' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + 2C_2'(x)\tilde{y}_2' + C_2(x)\tilde{y}_2''$$

Подставим в уравнение:

$$C_1''(x)\tilde{y}_1 + 2C_1'(x)\tilde{y}_1' + C_1(x)\tilde{y}_1'' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + 2C_2'(x)\tilde{y}_2' + C_2(x)\tilde{y}_2'' + a(C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_1(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2 + C_2(x)\tilde{y}_2') + b(C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2) = f(x) \Leftrightarrow C_1''(x)\tilde{y}_1 + C_2''(x)\tilde{y}_2 + a(C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2) = f(x)$$

Решим систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\tilde{y}_1 + C_2'(x)\tilde{y}_2 = 0 \\ C_1'(x)\tilde{y}_1' + C_2'(x)\tilde{y}_2' = f(x) \end{cases}$$

тогда

$$C_1''(x)\tilde{y}_1 + C_1'\tilde{y}_1' + C_2''(x)\tilde{y}_2 + C_2'\tilde{y}_2' = 0$$

Подставляя в уравнение, получим  $f(x) = f(x)$ . ■

### Метод неопределённых коэффициентов

Уравнение  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$  можно решить методом неопределённых коэффициентов, если

$$f(x) = \sum_j e^{\alpha_j x} (P_j(x) \cos \beta_j x + Q_j(x) \sin \beta_j x)$$

Тогда решение имеет вид

$$\sum_j e^{\alpha_j x} (T_j(x) \cos \beta_j x + R_j(x) \sin \beta_j x) x^{s_j}$$

где  $s_j$  — кратность корня.

### 10.0.2 Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Решим систему

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

$$y_1'' = ay_1' + by_2' \Rightarrow y_1'' = ay_1' + b(cy_1 + dy_2) \Rightarrow y_1'' = ay_1' + bcy_1 + d(y_1' - ay_1) \Rightarrow y_1'' = (a+d)y_1' + (bc-ad)y_1 = 0$$

Т.о., система свелась к уравнению.



## Глава 11

# 18.05.2018, дискретная математика

Язык называется **вычислимо-перечислимым**, если на словах из языка машина останавливается на непустом символе, а на словах не из языка работает бесконечно долго.

**Утверждение 11.0.1.** Языки  $L$  и  $\bar{L}$  вычислимо-перечислимы  $\Leftrightarrow L$  вычислим.

**Доказательство.**

1.  $\Rightarrow$ . Можно объединить две машины, на нечётных шагах выполняя команды первой машины, а на чётных — второй. На ленте изначально будет два одинаковых слова, своё для каждой машины. Тогда получим машину, которая запускает на слове обе машины. Одна из них всегда остановится.
2.  $\Leftarrow$ .

■

**Утверждение 11.0.2.**  $L$  вычислим  $\Leftrightarrow \bar{L}$  вычислим.

**Теорема 11.0.3.** Язык  $L_0 = \{i \mid \alpha_i \in L_{M_i}\}$  вычислимо-перечислим, но невычислим.

**Доказательство.** Пусть команда  $c = q_i x_j q_k x_l d$  кодируется числом  $|c| = 2^{i+1} \cdot 3^{j+1} \cdot 5^{k+1} \cdot 7^{l+1} \cdot 11^{d+1}$ . Тогда машина Тьюринга с  $r$  командами кодируется числом  $2^{|c_1|+1} \cdot 3^{|c_2|+1} \cdot \dots \cdot p_r^{|c_r|+1}$ . Также можно закодировать слова.

Пусть  $\alpha_i$  — слово с кодом  $i$ ,  $L_{M_i}$  — язык, распознаваемый машиной Тьюринга с кодом  $i$ .

1. Если  $L_0$  вычислим, то  $\bar{L}_0$  также вычислим, тогда существует машина Тьюринга  $M_k$  с кодом  $k$ , вычисляющая  $\bar{L}_0$ . Значит,  $\alpha_k \in L_{M_k} \Leftrightarrow k \in L_0 \Leftrightarrow k \notin \bar{L}_0 \Leftrightarrow \alpha_k \notin L_{M_k}$ . Противоречие, тогда  $L_0$  не вычислим.
2. На первом шаге запускаем  $M_1$ , на втором —  $M_2$  и т. д. Если какая-то из машин остановилась, то соответствующее слово принадлежит  $L_0$ .

■

**Следствие 11.0.4.**  $\bar{L}_0$  не вычислимо-перечислим.

**Теорема 11.0.5.**  $L_1 = \{(i, j) \mid \alpha_i \in L_{M_j}\}$

## Глава 12

### 23.05.2018, математический анализ

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 \\ y_0' = cy_1 + dy_2 \end{cases}$$

Известно, что  $y_1 = Le^{kx}$ ,  $y_2 = Me^{kx}$ , тогда

$$\begin{cases} Lk = aL + bM \\ Mk = cL + dM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L(a - k) + Mb = 0 \\ Lc + M(d - k) = 0 \end{cases}$$

Если  $\begin{vmatrix} a - k & b \\ c & d - k \end{vmatrix} \neq 0$ , то получим единственное решение — нулевое. Тогда

$$(a - k)(d - k) - bc = 0 \Leftrightarrow k^2 - k(a + d) + ad - bc = 0$$

Получили характеристическое уравнение.

Решим системы

$$\begin{cases} L(a - k_i) + Mb = 0 \\ Lc + M(d - k_i) = 0 \end{cases}$$

где  $k_i$  —  $i$ -й корень характеристического уравнения, причём в каждой системе одно из уравнений можно убрать, т. к. главный определитель равен нулю. Возьмём частные решения  $(L_1, M_1)$ ,  $(L_2, M_2)$ , тогда

$$y_1 = C_1 L_1 e^{k_1 x} + C_2 L_2 e^{k_2 x}$$

$$y_0 = C_1 M_1 e^{k_1 x} + C_2 M_2 e^{k_2 x}$$

#### 12.0.1 Неоднородные системы

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 + f_1 \\ y_2' = cy_1 + dy_2 + f_2 \end{cases}$$

Решая соответствующую однородную систему, получим

$$y_1 0 = C_1 \tilde{y}_1 + C_2 \tilde{y}_2$$

$$y_2 0 = D_1 \tilde{y}_1 + D_2 \tilde{y}_2$$

где  $D_1$  и  $D_2$  линейно связаны с  $C_1$  и  $C_2$  соответственно.

Тогда

$$y_1 = C_1(x) \tilde{y}_1 + C_2(x) \tilde{y}_2$$

$$y_2 = D_1(x) \tilde{y}_1 + D_2(x) \tilde{y}_2$$

Подставляя в систему, получим

$$\begin{cases} C_1'(x) \tilde{y}_1 + C_2'(x) \tilde{y}_2 + C_1(x) \tilde{y}_1' + C_2(x) \tilde{y}_2' = a(C_1(x) \tilde{y}_1 + C_2(x) \tilde{y}_2) + b(D_1(x) \tilde{y}_1 + D_2(x) \tilde{y}_2) + f_1(x) \\ D_1'(x) \tilde{y}_1 + D_2'(x) \tilde{y}_2 + D_1(x) \tilde{y}_1' + D_2(x) \tilde{y}_2' = c(C_1(x) \tilde{y}_1 + C_2(x) \tilde{y}_2) + d(D_1(x) \tilde{y}_1 + D_2(x) \tilde{y}_2) + f_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) \tilde{y}_1 + C_2'(x) \tilde{y}_2 = f_1(x) \\ D_1'(x) \tilde{y}_1 + D_2'(x) \tilde{y}_2 = f_2(x) \end{cases}$$

Решая, получим  $C_1'(x)$  и  $C_2'(x)$ , откуда найдём  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$ .

## 12.1 Приближённое решение дифференциальных уравнений

### 12.1.1 Решение с помощью степенного ряда

Рассмотрим уравнение  $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  с начальными условиями  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ . Найдём его решение в окрестности точки  $x_0$ :

$$y(x) = y_0 + y_1(x - x_0) + \frac{y_2}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{F(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})}{n!}(x - x_0)^n + c_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \dots$$

Неизвестные коэффициенты можно определить подстановкой в исходное уравнение или его дифференцированием и подстановкой начальных условий.

## Глава 13

# 25.05.2018, дискретная математика

### 13.1 Недетерминированная машина Тьюринга

**Утверждение 13.1.1 (тезис Чёрча).** *Всё, что можно сделать алгоритмом, можно сделать и на машине Тьюринга.*

**Утверждение 13.1.2.** *Языки, распознаваемые недетерминированной машиной Тьюринга, распознаются детерминированной машиной Тьюринга.*

**Доказательство.** При каждом переходе в недетерминированной машине Тьюринга получаются сразу несколько конфигураций. В детерминированной машине Тьюринга эти конфигурации можно записывать друг за другом. ■

**Временем работы на входных данных размера  $n$**  называется количество шагов, необходимое для получения ответа, и обозначается  $T(n)$ .

Если время решения задачи на детерминированной машине Тьюринга выражается полиномом, то её относят к **классу P-задач**, обозначаемому  $P$ .

Если время решения задачи на недетерминированной машине Тьюринга выражается полиномом, то её относят к **классу NP-задач**, обозначаемому  $NP$ .

Если решение задачи  $z_1$  сводится к решению задачи  $z_2$ , то говорят, что  $z_1$  **сводится к**  $z_2$ , и обозначают  $z_1 \leq z_2$ .

Задача  $z$  называется **NP-полной**, если  $z \in NP$  &  $\forall z' \in NP \ z' \leq z$ .