Введение

Здесь содержатся знания maxim4133 о математике. Принятые обозначения:

- $\forall$ — **квантор всеобщности**. Обозначение условия, которое верно для всех указанных элементов. Читается как «для всех», «для каждого», «для любого» или «все», «каждый», «любой».
- $\exists$ — **квантор существования**. Обозначение условия, которое верно хотя бы для одного из указанных элементов. Читается как «существует», «найдётся».
- $\exists!$ — **квантор существования и единственности**. Обозначение условия, которое верно ровно для одного из указанных элементов. Читается как «существует единственный».
- $:$ — «что», «такой (такие)», «что», «так, что», «обладающий свойством».
- $\Rightarrow$ — символ следствия. Читается как «если..., то...».
- $\Leftrightarrow$ — символ эквивалентности (равносильности). Читается как «тогда и только тогда, когда», «ровно/в точности тогда, когда».
- $\blacksquare$ — Q.E.D. (лат. quod erat demonstrandum, рус. что и требовалось доказать). Обозначение конца доказательства.

Оглавление

Часть I

Школьный курс

Глава 1

Теория множеств

1.1 Множества

Множество — основное понятие. Некоторые числовые множества:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество натуральных чисел.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ — множество целых чисел.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$ — множество рациональных чисел.
- $\mathbb{I}$ — множество иррациональных чисел.
- $\mathbb{R}$ — множество действительных (вещественных) чисел.
- $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

1.1.1 Отношения между множествами

Пусть A, B — множества. Между ними определены следующие отношения:

- A включено в B (является **подмножеством** B):

  $$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A \ a \in B$$

  Нередко вместо знака $\subseteq$ пишется знак $\subset$.

- A равно B:

  $$A = B \Leftrightarrow \forall a \ (a \in A \Leftrightarrow a \in B)$$

- A строго включено в B:

  $$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B, \ A = B$$

1.1.2 Операции над множествами

Пусть A, B — множества. Над ними определены следующие операции:

- **Объединение**:

  $$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

- **Пересечение**:

  $$A \cap B = \{x \mid x \in A, \ x \in B\}$$

- **Разность**:

  $$A \setminus B = \{x \mid x \in A, \ x \notin B\}$$

- **Симметрическая разность**:

$$A \triangle B = \{x \mid x \in A,\ x \notin B \text{ или } x \notin A,\ x \in B\}$$

- **Дополнение** до U, где $A \subseteq U$:

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

- **Декартово произведение**:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

- **Декартова степень**:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n}$$

1.1.3 Функции

Пусть A и B — множества. **Функцией** f называется правило, ставящее в соответствие каждому элементу $a \in A$ единственный элемент $f(a) \in B$. A называется **областью определения** функции f и обозначается $D(f)$, B — **областью значений** функции f и обозначается $E(f)$. a называется **прообразом** $f(a)$, $f(a)$ — **образом** a.

Функция $f\colon A \to B$ называется **инъективной (инъекцией)**, если $\forall x, y \in A\ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$.

Функция $f\colon A \to B$ называется **сюръективной (сюръекцией)**, если $\forall b \in B\ \exists a \in A\colon f(a) = b$.

Функция $f\colon A \to B$ называется **биективной (биекцией)**, если она инъективная и сюръективная.

Последовательностью называется функция, заданная на множестве $X \subseteq \mathbb{N}$, и обозначается (x_n).

Подпоследовательностью последовательности (x_n) называется последовательность (x_{n_k}), если (n_k) — монотонно возрастающая последовательность.

Глава 2

Элементарная алгебра

2.1 Вещественные числа

2.1.1 Аксиоматика вещественных чисел

Аксиомы сложения:

1. Коммутативность сложения:
$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ a + b = b + a$$

2. Ассоциативность сложения:
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a + (b + c) = (a + b) + c$$

3. Существование **нуля**:
$$\exists 0 \in \mathbb{R} \colon \forall a \in \mathbb{R}\ a + 0 = a$$

4. Существование **противоположного** числа:
$$\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R} \colon a + (-a) = 0$$

Аксиомы умножения:

1. Коммутативность умножения:
$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ a \cdot b = b \cdot a$$

2. Ассоциативность умножения:
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

3. Дистрибутивность умножения относительно сложения:
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

4. Существование **единицы**:
$$\exists 1 \in \mathbb{R} \colon \forall a \in \mathbb{R}\ a \cdot 1 = a$$

5. Существование **обратного** числа:
$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists \frac{1}{a} = a^{-1} \in \mathbb{R} \colon a \cdot a^{-1} = 1$$

Аксиомы порядка:

1. Рефлексивность:
$$\forall a \in \mathbb{R}\ a \leqslant a$$

2. Антисимметричность:
$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ (a \leqslant b,\ b \leqslant a \Rightarrow a = b)$$

3. Транзитивность:
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ (a \leqslant b, b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c)$$

4. Линейная упорядоченность:
$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ (a \leqslant b \text{ или } b \leqslant a)$$

5. Связь сложения и порядка:
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ (a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c)$$

6. Связь умножения и порядка:
$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ (0 \leqslant a,\ 0 \leqslant b \Rightarrow 0 \leqslant a \cdot b)$$

Аксиома нетривиальности:
$$0 \neq 1$$

Аксиома непрерывности:
$$\forall A, B \subset \mathbb{R}\ (\forall a \in A, b \in B \colon a \leqslant b)\ \exists x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x \leqslant b$$

2.1.2 Существование иррациональных чисел

Иррациональным называется число, не являющееся рациональным.
Утверждение 2.1.1. *Существуют иррациональные числа.*

Доказательство (методом от противного). Пусть $\exists p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \colon \left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 2,\ \text{НОД}(p, q) = 1.$ Тогда
$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \,\vdots\, 2 \Leftrightarrow p \,\vdots\, 2 \Leftrightarrow p = 2l,\ l \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2l^2 = q^2$$

Аналогичными рассуждениями получим $q \,\vdots\, 2$. $p \,\vdots\, 2,\ q \,\vdots\, 2 \Rightarrow \text{НОД}(p, q) \neq 1$. Противоречие. ■
Утверждение 2.1.2. *Среди вещественных чисел есть иррациональные.*
Доказательство. Пусть $X = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^2 < 2\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R}^+ \mid y^2 > 2\}$.
$$\forall x \in X, y \in Y\ (y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) > 0 \Rightarrow y > x) \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} \colon \forall x \in X, y \in Y\ x \leqslant z \leqslant y$$

1. Пусть $z^2 < 2$. $z \in X$, $z > 1{,}1$, тогда
$$0 < 2 - z^2 < 1 \Rightarrow \frac{2 - z^2}{5} < 1 \Rightarrow \left(\frac{2 - z^2}{5}\right)^2 < \frac{2 - z^2}{5}$$

   - $z + \dfrac{2 - z^2}{5} > z \Rightarrow z + \dfrac{2 - z^2}{5} \notin X$
   - $\left(z + \dfrac{2 - z^2}{5}\right)^2 = z^2 + 2z \cdot \dfrac{2 - z^2}{5} + \left(\dfrac{2 - z^2}{5}\right)^2 < z^2 + \dfrac{4}{5}(2 - z^2) + \dfrac{2 - z^2}{5} = 2 \Rightarrow z + \dfrac{2 - z^2}{5} \in X$

   Противоречие, значит, $z^2 \geqslant 2$.

2. Пусть $z^2 > 2$. $z \in Y$, $z < 1{,}9$, тогда
$$0 < z^2 - 2 < 2 \Rightarrow \frac{z^2 - 2}{4} < 1 \Rightarrow \left(\frac{z^2 - 2}{4}\right)^2 < \frac{z^2 - 2}{4}$$

   - $z - \dfrac{z^2 - 2}{4} < z \Rightarrow z + \dfrac{z^2 - 2}{4} \notin Y$
   - $\left(z - \dfrac{z^2 - 2}{4}\right)^2 = z^2 - z \cdot \dfrac{z^2 - 2}{2} + \left(\dfrac{2 - z^2}{5}\right)^2 > z^2 - (z^2 - 2) = 2 \Rightarrow z - \dfrac{z^2 - 2}{4} \in Y$

   Противоречие, значит, $z^2 \leqslant 2$.

Т. о., $z^2 \leqslant 2,\ z^2 \geqslant 2 \Leftrightarrow z^2 = 2 \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} \colon (z^2 = 2 \Rightarrow z \notin \mathbb{Q})$. ■

2.1.3 Геометрическое представление вещественных чисел

Самой распространённой интерпретацией множества $\mathbb{R}$ является бесконечная прямая.

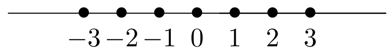


Рис. 2.1: Множество $\mathbb{R}$ в виде прямой

Множество $\mathbb{R}$ также можно представить в виде окружности, одна точка которой соответствует нулю, а другая — бесконечности.

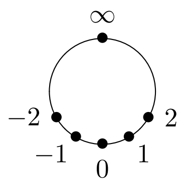
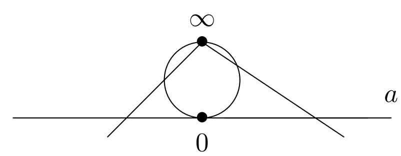


Рис. 2.2: Множество $\mathbb{R}$ в виде окружности

Покажем, что эти интерпретации взаимозаменяемы. Изобразим их так, чтобы точка, соответствующая нулю на прямой a, совпадала с точкой, соответствующей нулю на окружности. Теперь из точки, соответствующей бесконечности на окружности, проведём все возможные прямые. Каждая из них пересекает одну точку на прямой a и одну точку на окружности и таким образом устанавливает взаимно однозначное соответствие.



2.2 Подмножества множества $\mathbb{R}$

Промежутком называется множество вещественных чисел, которое вместе с любыми двумя числами содержит любое число между ними. Типы промежутков:

- $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ — **отрезок**
- $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ — **интервал**
- $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ — **полуинтервал**
- $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ — **полуинтервал**

Полагая $a = \pm\infty$ или $b = \pm\infty$, можно определить бесконечные промежутки. Например:

- $(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$
- $(0; +\infty) = \mathbb{R}^+$

Окрестностью точки $x \in \mathbb{R}$ называется интервал $(a; b)\colon x \in (a; b)$.
ε-окрестностью $U_\varepsilon(x)$ точки $x \in \mathbb{R}$ называется интервал $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$.
Проколотой ε-окрестностью $\breve{U}_\varepsilon(x)$ точки $x \in \mathbb{R}$ называется $U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$.

2.3 Алгебраические преобразования

Формулы сокращённого умножения:

1. Квадрат суммы:
$$(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$$
2. Разность квадратов:
$$a^2 - b^2 = a^2 - ab + (ab - b^2) = (a + b)(a - b)$$

3. Куб суммы:
$$(a \pm b)^3 = (a^2 \pm 2ab + b^2)(a \pm b) = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

4. Сумма кубов:
$$a^3 \pm b^3 = a^3 \mp a^2b + ab^2 \pm a^2b - ab^2 \pm b^3 = a(a^2 \mp ab + b^2) \pm b(a^2 \mp ab + b^2) = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Теорема 2.3.1 (формула бинома Ньютона).

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$$

Доказательство (методом математической индукции).

- *База индукции.* $n = 1$: $(a+b)^1 = a + b = C_1^0 a + C_1^1 b$
- *Шаг индукции.* Пусть формула верна для n. Докажем истинность для $n+1$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m+1} b^m + \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^{m+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{m=0}^{n-1} C_n^{m+1} a^{n-m} b^{m+1} + \sum_{m=0}^{n-1} C_n^m a^{n-m} b^{m+1} = a^{n+1} + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n+1}^{m+1} a^{n-m} b^{m+1} + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} C_{n+1}^m a^{n+1-m} b^m + b^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m a^{n+1-m} b^m$$

■

Часть II

Университетский курс

Глава 3

Дискретная математика

3.1 Графы

Неориентированным графом называется пара множеств $G = (V, E)$, где V — множество вершин графа, $E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ — множество рёбер графа.

Если $e = \{u, v\}$, $e \in E$, то говорят, что:

- ребро e соединяет вершины u и v;
- u и v — концы ребра e;
- ребро e **инцидентно** вершинам u и v;
- вершины u и v **инцидентны** ребру e.

В дальнейшем будем рассматривать только конечные графы.

На рисунках вершины графа изображают точками, а рёбра $e = \{u, v\}$ — кривыми, соединяющими точки, которые изображают вершины u и v.

Вершины называются **соседними**, или **смежными**, если их соединяет ребро, иначе — **несоседними**, или **несмежными**.

Число рёбер в графе G, инцидентных вершине u, называется **степенью** вершины и обозначается $\deg_G u$.

Если степень вершины равна 0, то она называется **изолированной**, а если 1 — то **висячей**.

Ребро вида $e = \{u, u\}$ называется **петлёй**.

Рёбра называются **кратными**, инцидентные одним и тем же вершинам.

Граф называется **простым**, если он не содержит петель и кратных рёбер.

Граф, в котором любые две вершины соединены ребром, называется **полным** и обозначается K_n, где n — число вершин в нём.

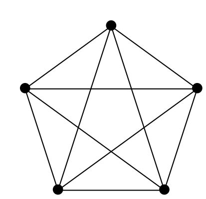


Рис. 3.1: Граф K_5

Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются **изоморфными**, если существует биекция $\varphi\colon V_1 \to V_2$ такая, что $\forall u, v \in V_1\ \{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$, иначе — **неизоморфными**. φ называется **изоморфизмом**.

Лемма 3.1.1 (о рукопожатиях).

$$\sum_{u \in V} \deg_G u = 2|E|$$

где $G = (V, E)$ — граф.

Доказательство (методом математической индукции).

- *База индукции.* $|E| = 0$: в таком графе $\sum\limits_{u \in V} \deg u = 0$.

- *Шаг индукции.* Пусть лемма верна для $|E| = n$. Докажем её для $|E| = n+1$. Для этого достаточно заметить, что каждое новое ребро увеличивает степени двух вершин на 1.

■

Маршрутом в графе $G = (V, E)$ называется последовательность вершин и рёбер вида $(v_1; e_1; v_2; \ldots; e_k; v_{k+1})$, где $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$.

Маршрут, в котором все рёбра различны, называется **цепью**.

Цепь, в которой все вершины, за исключением, может быть, первой и последней, различны, называется **простой**.

Маршрут, в котором первая и последняя вершины совпадают, называется **замкнутым**.

Замкнутая цепь называется **циклом**.

Маршрут, соединяющий вершины u и v, называется **(u, v)-маршрутом**.

Лемма 3.1.2. *(u, v)-маршрут содержит (u, v)-простую цепь.*

Доказательство. Пусть $(u = v_1; e_1; v_2; \ldots; e_k; v_{k+1} = v)$ — не простая цепь, тогда $\exists i < j\colon v_i = v_j$. Уберём из маршрута подпоследовательность $(e_i; v_{i+1}; \ldots; e_{j-1}; v_j)$, получим маршрут, в котором совпадающих вершин на одну меньше. Повторяя, получим простую цепь, являющуюся частью данного маршрута. ■

Лемма 3.1.3. *Любой цикл содержит простой цикл.* Доказательство аналогично предыдущему.

Лемма 3.1.4. *Если в графе есть две различные простые цепи, соединяющие одни и те же вершины, то в этом графе есть простой цикл.*

Доказательство. Пусть $(u = v_1; e_1; v_2; \ldots; e_n; v_{n+1} = v)$, $(u = v'_1; e'_1; v'_2; \ldots; e'_m; v'_{m+1} = v)$ — простые цепи. Найдём наименьшее $i\colon e_i \neq e'_i$, тогда $(v_i; e_i; v_{i+1}; \ldots; e_n; v_{n+1} = v'_{m+1}; e'_m; \ldots; e'_i; v'_i = v_i)$ — цикл, значит, можно получить простой цикл. ■

3.1.1 Связность графов

Вершины u и v называются **связанными**, если существует (u, v)-маршрут, иначе — **несвязанными**.

Граф называется **связным**, если в нём любые две вершины связаны, иначе — **несвязным**.

Граф $G' = (V', E')$ называется **подграфом** графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$.

Компонентой связности графа называется его максимальный (относительно включения) связный подграф.

3.1.2 Эйлеровы графы

Цикл, содержащий все рёбра графа, называется **эйлеровым**.

Граф, содержащий эйлеров цикл, называется **эйлеровым**.

Теорема 3.1.1. *Связный граф эйлеров $\Leftrightarrow$ степени всех вершин чётны.*

Доказательство.

1. $\Rightarrow$. Пусть в графе есть эйлеров цикл. Выберем вершину v_0 в этом цикле и начнём обходить его. При каждом посещении вершины $v \neq v_0$ её степень увеличивается на 2. Т. о., если посетить её k раз, то $\deg v = 2k \,\vdots\, 2$.

   Для v_0 степень увеличивается на 1 в начале обхода, на 1 в конце обхода и на 2 при промежуточных посещениях. Т. о., её степень чётна.

2. $\Leftarrow$. Пусть степени всех вершин чётны. Выберем цепь $C = (v_0; e_0; v_1; e_1; \ldots; e_{k-1}; v_k)$ наибольшей длины. Все рёбра, инцидентные v_k, присутствуют в этой цепи, иначе её можно было бы удлинить.

   Докажем методом от противного, что $v_0 = v_k$. Пусть $v_0 \neq v_k$. При прохождении вершины $v_i = v_k$, где $0 < i < k$, степень v_k увеличивается на 2. Также проходим по ребру e_{k-1}, тогда степень v_k нечётна. Противоречие.

   Докажем методом от противного, что C содержит все рёбра. Пусть найдётся ребро $e = \{u, v\}$, не входящее в C. Возьмём первое ребро $e' = \{v_i, v'\}$ из (v_0, u)-маршрута, не входящее в C. Тогда цепь $(v'; e'; v_i; e_i; \ldots; e_{k-1}; v_k = v_0; e_0; v_1; e_1; \ldots; v_{i-1})$ длиннее, чем C. Противоречие.

■

Алгоритмы нахождения эйлерова цикла

1. **Алгоритм Флёри (очень медленный)**.
   (a) Выберем произвольную вершину.
   (b) Пусть находимся в вершине v. Выберем ребро, инцидентное ей, которое должно быть мостом, только если не осталось других рёбер.
   (c) Проходим по выбранному ребру и вычёркиваем его.
   (d) Повторяем, пока есть рёбра.

2. **Алгоритм объединения циклов**.
   (a) Выберем произвольную вершину.
   (b) Выбираем любое непосещённое ребро и идём по нему.
   (c) Повторяем, пока не вернёмся в начальную вершину.
   (d) Получим цикл C. Если он не эйлеров, то $\exists u \in C,\ e = \{u, u'\} \colon u' \notin C$. Повторяем шаги 2a–2c для начальной вершины u. Получим цикл C', рёбра которого не совпадают с рёбрами C. Объединим эти циклы и получим новый. Повторяем шаг 2d.

Цепь называется **эйлеровым путём**, если она не является циклом и содержит все рёбра.
Граф называется **полуэйлеровым**, если в нём есть эйлеров путь.
Теорема 3.1.2. *Связный граф полуэйлеров $\Leftrightarrow$ степени двух вершин нечётны, а остальных — чётны.*
Доказательство.

1. $\Rightarrow$. Пусть в графе есть эйлеров путь. Соединив его концы ребром, получим эйлеров цикл. Степени соединённых вершин увеличились каждая на 1, значит, они были нечётными, а степени остальных вершин — чётными.

2. $\Leftarrow$. Пусть степени двух вершин нечётны, а остальных — чётны. Соединим нечётные вершины ребром, тогда можно получить эйлеров цикл. Убрав из него добавленное ребро, получим эйлеров путь.

■

3.1.3 Гамильтоновы графы

Простой цикл, содержащий все вершины графа, называется **гамильтоновым**.
Граф называется **гамильтоновым**, если в нём есть гамильтонов цикл.
Теорема 3.1.3 (Дирака). *Если в графе $G = (V, E)$ с $n \geqslant 3$ вершинами $\forall u \in V\ \deg u \geqslant \frac{n}{2}$, то граф гамильтонов.*
Доказательство.

1. Докажем методом от противного, что граф связный. Пусть он несвязный. Выберем компоненту связности $G' = (V', E')$ с наименьшим числом вершин, тогда $|V'| \leqslant \frac{n}{2}$. Возьмём $v \in V'$, тогда $\deg v \leqslant |V'| - 1 < \frac{n}{2}$. Противоречие с условием.

2. Выберем цепь $C = (v_0; e_0; v_1; \ldots; e_{k-1}; v_k)$ максимальной длины. Тогда все вершины, соседние с v_0, лежат в этой цепи, иначе можно увеличить длину цепи. Среди $v_1, v_2, \ldots, v_k$ не менее $\frac{n}{2}$ вершин, соседних с v_0, т. к. $\deg v_0 \geqslant \frac{n}{2}$. Аналогично для v_k.

   Найдутся v_{i-1} и v_i такие, что v_{i-1} соседняя с v_k, а v_i — с v_0.

   Докажем, что $(v_i; e_{i+1}; \ldots; v_k; e; v_{i-1}; e_{i-1}; \ldots; v_0; e'; v_i)$ — гамильтонов цикл, методом от противного. Предположим обратное, тогда есть вершина u, не входящая в цикл, и существует (v_0, u)-маршрут. Значит, существует ребро, инцидентное одной из вершин цикла, но не входящее в него, и можно получить более длинную цепь. Противоречие.

■

Теорема 3.1.4 (Оре). *Если в графе с $n \geqslant 3$ вершинами для любых двух несмежных вершин u и v $\deg u + \deg v \geqslant n$, то граф гамильтонов.*

Доказательство.

1. Докажем методом от противного, что граф связный. Пусть он несвязный, тогда в нём найдутся хотя бы две компоненты связности $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$. Пусть $u \in V_1$, $v \in V_2$. u и v несмежные, тогда
$$\deg u \leqslant |V_1| - 1,\ \deg v \leqslant |V_2| - 1 \Rightarrow \deg u + \deg v \leqslant |V_1| + |V_2| - 2 \leqslant n - 2$$
Противоречие с условием.

2. Докажем, что граф гамильтонов. Выберем цепь $W = (v_0; e_0; v_1; \ldots; e_{k-1}; v_k)$ наибольшей длины. В ней содержатся все вершины, соседние с v_0 или с v_k. Т. о., среди вершин $v_1, \ldots, v_k$ $\deg v_0$ соседних с v_0. Аналогично для v_k.
$\deg v_0 + \deg v_k \geqslant n$, тогда найдутся v_i и v_{i+1} такие, что v_i соседняя с v_k, а v_{i+1} — с v_0.
$(v_{i+1}; e_{i+1}; \ldots; v_k; e; v_i; e_{i-1}; v_{i-1}; \ldots; e_0; v_0; e'; v_{i+1})$ — гамильтонов цикл (доказательство аналогично доказательству в теореме Дирака (3.1.3)).

■

3.1.4 Планарность графов

Плоским называется граф $G = (V, E)$ такой, что:

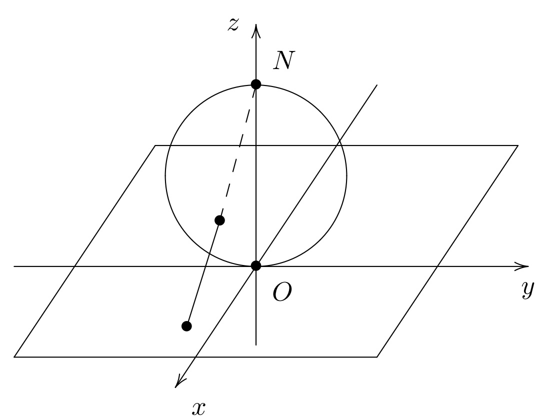
- $V \subset \mathbb{R}^2$;
- рёбра — кривые, концами которых являются вершины;
- различные рёбра не имеют общих точек, за исключением концов.

Планарным называется граф, изоморфный плоскому.
Если G — граф и G' — плоский граф, изоморфный G, то G' называется **укладкой** G в $\mathbb{R}^2$.
Аналогично можно определить плоский граф в $\mathbb{R}^3$, на сфере и т. д.

Теорема 3.1.5. *Любой граф можно уложить в $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — граф, $V = \{(1; 0; 0), (2; 0; 0), \ldots, (n; 0; 0)\}$. Рассмотрим плоскости, проходящие через Ox и образующие с плоскостью Oxy углы $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2 \cdot 2}, \ldots, \dfrac{\pi}{2m}$, где $m = |E|$. Получим плоский граф, т. к. плоскости пересекаются только по прямой Ox. ■

Теорема 3.1.6. *Граф укладывается на плоскость $\Leftrightarrow$ он укладывается на сферу.*



Доказательство. Пусть плоскость $z = 0$ касается сферы в точке $O(0; 0; 0)$, N — точка на сфере, диаметрально противоположная точке O. Для каждой точки сферы, не совпадающей с N, проведём прямую через неё и точку N, которая пересечёт сферу и плоскость, причём любые две из таких прямых имеют единственную общую точку N. Получим биекцию между точками сферы и точками плоскости, тогда можно построить биекцию между укладками на сфере и укладками на плоскости.
■

Множество на плоскости называется **линейно связным**, если любые две точки этого множества можно соединить кривой, целиком лежащей в этом множестве.

Гранью плоского графа $G = (V, E)$ называется часть множества $\mathbb{R}^2 \setminus G$, которая линейно связна и не является подмножеством другого линейно связного множества.

Теорема 3.1.7 (формула Эйлера). *В плоском связном графе $n - m + f = 2$, где n, m, f — число вершин, рёбер и граней соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим остов данного графа. В нём n вершин, $n-1$ рёбер и 1 грань. Формула Эйлера верна для него: $n - (n-1) + 1 = 2$.

Добавим 1 ребро данного графа, тогда оно разобьёт одну грань на две, т. е. число граней увеличится на 1. Формула Эйлера верна для полученного графа. Повторяя $m-(n-1)$ раз, получим исходный граф, для которого формула Эйлера верна. ■

Теорема 3.1.8. *Пусть G — планарный граф с $n \geqslant 3$ вершинами и m рёбрами. Тогда $m \leqslant 3n-6$.*

Доказательство. При $m = 2$ неравенство выполняется.

Пусть в графе f граней, m_i — число рёбер в границе i-й грани. Тогда $m_i \geqslant 3$, $\sum\limits_{i=1}^{f} m_i \geqslant 3f$. С другой стороны, $\sum\limits_{i=1}^{f} m_i = 2m$. По формуле Эйлера (3.1.7) $n - m + f = 2 \Leftrightarrow f = m + 2 - n$. Получим:

$$2m \geqslant 3f \Leftrightarrow 2m \geqslant 3m + 6 - 3n \Leftrightarrow m \leqslant 3n - 6$$

■

Следствие 3.1.1. *Планарный граф $G = (V, E)$ содержит хотя бы одну вершину со степенью, не большей 5.*

Доказательство (методом от противного). Пусть $\forall v \in V \ \deg v \geqslant 6$, $|V| = n$, $|E| = m$, тогда $m = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{v \in V} \deg v \geqslant 3n$. Имеем:

$$3n \leqslant m \leqslant 3n - 6 \Rightarrow 0 \leqslant -6$$

Противоречие. ■

Теорема 3.1.9. *Графы K_5 и $K_{3,3}$ не планарные.*

Доказательство.

- Рассмотрим K_5: $n = 5$, $m = 10$. Тогда $m \leqslant 3n - 6 \Leftrightarrow 10 \leqslant 9$. Неверно, значит, K_5 не планарен.
- Рассмотрим $K_{3,3}$. Пусть он планарный. В нём самый короткий цикл имеет длину 4. Тогда рассуждениями, аналогичными рассуждениям при доказательстве теоремы (3.1.8), получим

  $$2m \geqslant 4f \Leftrightarrow 2m \geqslant 4m + 8 - 4n \Leftrightarrow m \leqslant 2n - 4$$

  $n = 6$, $m = 9$, тогда $9 \leqslant 8$. Неверно, значит, $K_{3,3}$ не планарен.

■

Граф $G' = (V', E')$ получается **подразбиением** ребра $e = \{u, v\}$ графа $G = (V, E)$, если:

- $V' = V \cup \{u'\}$;
- $E' = (E \setminus \{e\}) \cup \{\{u, u'\}, \{v, u'\}\}$.

Графы G и G' **гомеоморфны**, если они изоморфны графам, получающимся подразбиениями рёбер одного и того же графа.

Теорема 3.1.10 (Понтрягина-Куратовского). *Граф G планарен $\Leftrightarrow$ он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.*

Доказательство.

1. $\Rightarrow$. Очевидно, что подграф планарного графа планарен. Если G — планарный граф, содержащий подграф G', гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$, то G' тоже планарный, значит, K_5 или $K_{3,3}$ планарен, т. к. подразбиение ребёр не влияет на планарность. Противоречие, значит, G не планарен.
2. $\Leftarrow$. Доказательство слишком сложно, поэтому здесь не приводится.

■

3.1.5 Деревья

Граф без циклов называется **лесом**.
Связный лес называется **деревом**.
Ребро называется **мостом**, если при его удалении увеличивается число компонент связности.
Утверждение 3.1.1. *Ребро — мост $\Leftrightarrow$ оно не содержится в цикле.*
Доказательство.

1. $\Leftarrow$. Пусть ребро e содержится в цикле $W = (v_0; e_0; \ldots; u; e; v; \ldots; v_k)$, u' и v' — связные вершины.
   (a) Если в (u', v')-маршруте нет ребра e, то при его удалении из графа u' и v' останутся связными.
   (b) Пусть $(u' = v'_0; e'_0; \ldots; u; e; v; \ldots; e'_m; v'_m = v')$ — маршрут, соединяющий u' и v', тогда при удалении e из графа u' и v' соединяет маршрут
   $(u' = v'_0; e'_0; \ldots; u; \ldots; e_0; v_0 = v_k; e_{k-1}; \ldots; v; \ldots; e'_m; v'_m = v')$.
2. $\Rightarrow$. Пусть $e = \{u, v\}$ не является мостом, тогда u, v лежат в одной компоненте связности. Удалим e из графа. Число компонент связности не изменится, значит, u и v также лежат в одной компоненте связности, т. е. существует цепь, соединяющая u и v: $(u = v_0; e_0; \ldots; e_{k-1}; v_k = v)$. Тогда в исходном графе существует цикл $(u = v_0; e_0; \ldots; e_{k-1}; v_k = v; e; u)$.

■

Теорема 3.1.11. *Следующие утверждения о графе $G = (V, E)$ с n вершинами эквивалентны:*

1. *G — дерево.*
2. *G связный и каждое его ребро — мост.*
3. *G связный и имеет $n-1$ ребро.*
4. *G не содержит циклов и имеет $n-1$ ребро.*
5. *Любые две вершины графа G соединены ровно одной простой цепью.*
6. *G не содержит циклов и добавление ребра приводит к появлению ровно одного цикла.*

Доказательство.

- (1) $\Rightarrow$ (2). Связность следует из определения дерева.
  В силу утверждения (3.1.1) каждое ребро — мост.
- (2) $\Rightarrow$ (3). Связность следует из предположения.
  Докажем методом математической индукции, что в графе $n-1$ ребро.
  - *База индукции.* Для $n = 1, 2$ очевидно.
  - *Шаг индукции.* Пусть утверждение верно для чисел, меньших n. Возьмём мост e и удалим его. Получим две компоненты связности $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$. По предположению индукции $|E_1| = |V_1| - 1$, $|E_2| = |V_2| - 1$. Тогда в исходном графе рёбер $|E_1| + |E_2| + 1 = |V_1| + |V_2| - 1 = n - 1$.
- (3) $\Rightarrow$ (4). G имеет $n-1$ ребро по предположению.
  Докажем методом математической индукции, что G не содержит циклов.
  - *База индукции.* Для $n = 1, 2$ очевидно.
  - *Шаг индукции.* Пусть утверждение верно для чисел, меньших n. Докажем методом от противного, что в графе есть вершина степени 1. Пусть
    $$\forall u \in V \ \deg u \geqslant 2 \Rightarrow 2|E| = \sum_{u \in V} \deg u \geqslant 2n \Rightarrow n - 1 = |E| \geqslant n \Rightarrow -1 \geqslant 0$$
    Противоречие, значит, в графе найдётся вершина степени 1.
    Удалим её и инцидентное ей ребро. Полученный граф содержит $n-1$ вершину и удовлетворяет утверждению (3). По предположению индукции он не содержит циклов, тогда и исходный граф не содержит циклов.

- (4) $\Rightarrow$ (5).

  Пусть в графе k компонент связности: $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $\ldots$, $G_k = (V_k, E_k)$. Они не содержат циклов по предположению, тогда они являются деревьями.

  $$|E_1| = |V_1| - 1, |E_2| = |V_2| - 1, \ldots, |E_k| = |V_k| - 1, n - 1 = |E_1| + \ldots + |E_k| = n - k \Rightarrow k = 1$$

  Значит, граф связный.

  Пусть существуют вершины u и v такие, что их соединяют две простые цепи, тогда по лемме (3.1.4) в графе есть цикл, что противоречит предположению. Значит, эти вершины соединены ровно одной простой цепью.

- (5) $\Rightarrow$ (6).

  Докажем методом от противного, что в графе нет циклов. Предположим, что есть цикл $(v_0; e_0; v_1; \ldots; v_k = v_0)$, тогда есть две простые цепи $(v_0; e_0; \ldots; v_{k-1})$ и $(v_{k-1}; e_k; v_k = v_0)$, соединяющие v_0 и v_{k-1}, что противоречит предположению.

  Докажем, что добавление ребра приводит к появлению ровно одного цикла. Рассмотрим несоседние вершины u и v. По предположению есть цепь $(u = v_0; e_0; \ldots; v_k = v)$, соединяющая их. Тогда, добавив $e = \{u, v\}$, получим цикл $(u = v_0; e_0; \ldots; v_k = v; e; u)$.

  Пусть есть 2 цикла, соединяющих u и v. Удалим e, тогда один цикл останется. Получим исходный граф, в котором не должно быть циклов. Противоречие.

- (6) $\Rightarrow$ (1).

  Докажем связность методом от противного. Рассмотрим несвязные вершины u и v. Соединим их и по предположению получим цикл $(v_0; e_0; \ldots; u; e; v; \ldots; e_{k-1}; v_k = v_0)$. Тогда в исходном графе $(u; \ldots; e_0; v_0 = v_k; e_{k-1}; \ldots; v)$ — (u, v)-маршрут. Противоречие.

■

В ходе доказательства было получено, что в связном графе с n вершинами и $n-1$ рёбрами существует висячая вершина. Т. к. доказано, что такой граф является деревом, то верно следующее утверждение.

Утверждение 3.1.2. *В дереве существует висячая вершина.*

Утверждение 3.1.3. *Если в лесу n вершин, m рёбер и k компонент связности, то*

$$m = n - k$$

Доказательство. Пусть $n_1, \ldots, n_k$ — число вершин в каждой компоненте связности, тогда

$$m = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_k - 1) = n - k$$

■

3.1.6 Остовы

Остовом графа $G = (V, E)$ называется его подграф $G' = (V', E')$ такой, что $V = V'$ и G' — дерево.

Утверждение 3.1.4. *Любой связный граф содержит остов.*

Утверждение 3.1.5. *Если граф не является деревом, то в нём несколько остовов.*

Пусть $G = (V, E)$ — граф. **Весом** называется функция $\alpha\colon E \to \mathbb{R}^+$. **Весом ребра** $e \in E$ называется $\alpha(e)$. **Весом графа** называется $\sum\limits_{e \in E} \alpha(e)$.

Алгоритмы нахождения остова минимального веса

Пусть дан граф $G = (V, E)$, $n = |V|$ и весовая функция $\alpha\colon E \to R^+$. Строим остов наименьшего веса $T = (V, P)$.

1. **Алгоритм Краскала**

   (a) Выбираем ребро $e \in E$ с наименьшим весом: $P_1 = \{e\}$, $T_1 = (V, P_1)$.

(b) Выбираем ребро $e \in E$ с наименьшим весом такое, что $e \notin P_i$ и добавление этого ребра не приводит к образованию цикла в T: $T_{i+1} = (V, P_i \cup \{e\})$.

(c) Повторяем шаг 1b $n-2$ раз. T_n — искомый остов.

Доказательство. Пусть $T = (V, P)$ — построенный остов, где $P = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$, $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ — рёбра в порядке их добавления в остов, а также $D = (V, M)$ — другой остов, где $M = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n-1}\}$, $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n-1}$ — рёбра в порядке неубывания их весов.

Если $T \neq D$, то пусть i — наименьшее число такое, что $e_i \neq e'_i$. e'_i не входит в T, значит, оно образует цикл с рёбрами в T, выбранными ранее, тогда вес этих рёбер не больше $\alpha(e'_i)$. Выберем из них ребро e такое, что при добавлении его в D образуется цикл. Пусть $D_1 = (V, M \cup \{e\} \setminus \{e'_i\})$. Этот граф — остов, причём $\alpha(D_1) \leqslant \alpha(D)$ и у T и D_1 на 1 общее ребро больше, чем у T и D. Повторяя, получим $D_k = T$. Значит, вес построенного остова не превосходит веса любого другого остова. ■

2. **Алгоритм Прима**

   Строится последовательность деревьев $S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_n = T$.

   (a) Выбираем произвольную вершину v. $S_1 = (\{v\}, \varnothing)$.

   (b) Пусть построено $S_i = (V_i, E_i)$. Находим ребро $e = \{u, v_i\} \in E$, где $u \in V_i$, $v_i \notin V_i$, наименьшего веса, добавление которого не приводит к образованию цикла: $S_{i+1} = (V_i \cup \{v_i\}, E_i \cup \{e\})$.

   (c) Повторяем шаг 2b $n-1$ раз. S_n — искомый остов.

3.1.7 Помеченные деревья

Дерево с n вершинами, которым сопоставлены числа $1, \ldots, n$, называется **помеченным**.

Каждому помеченному дереву можно взаимнооднозначно сопоставить последовательность из $n-2$ чисел от 1 до n, называемую **кодом Прюфера**. Алгоритм построения кода Прюфера для помеченного дерева $G = (V, E)$:

1. Выбираем висячую вершину v с наименьшим номером.
2. Добавляем номер вершины, смежной с v, в код.
3. Удаляем v и ребро, инцидентное v, из дерева.
4. Повторить, начиная с шага 1, $n-2$ раза.

Утверждение 3.1.6. *Различным помеченным деревьям соответствуют различные коды Прюфера.*
Доказательство (методом математической индукции).

- *База индукции.* При $n = 3$ легко проверить.
- *Шаг индукции.* Пусть утверждение верно при n, $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ — различные помеченные деревья с $n+1$ вершинами в каждом. Если в G и G' вершины с наименьшим номером смежны с вершинами с одинаковыми номерами, то выполняем шаг построения кода, тогда оставшиеся деревья различны, значит, по предположению индукции у них различные коды.

■

Алгоритм построения дерева по коду $A_0 = (a_0; \ldots; a_{n-3})$.

1. Пусть $B_0 = \{1, \ldots, n\}$.
2. Находим наименьшее $b \in B_i : b \notin A_i$. Тогда в дереве есть ребро $\{b, a_i\}$: $A_{i+1} = A_i \setminus \{a_i\}$, $B_{i+1} = B_i \setminus \{b\}$.
3. Повторяем шаг 2 $n-2$ раз. Получим $B_{n-2} = \{b', b''\}$, значит, в дереве есть ребро $\{b', b''\}$.

Утверждение 3.1.7. *Указанный алгоритм построения дерева по коду из n чисел строит дерево.*
Доказательство (методом математической индукции).

- *База индукции.* При $n = 1$ легко проверить.

- *Шаг индукции.* Рассмотрим графы $T_1, \ldots, T_{n-1}$, полученные в процессе построения дерева. T_1 не содержит циклов. T_2 получается из T_1 либо добавлением новой вершины, либо добавлением моста, что не приводит к появлению цикла. Т. о., T_{n-1} не содержит циклов и содержит n вершин и $n-1$ ребёр, значит, T_{n-1} — дерево.

■

Теорема 3.1.12 (Кэли). *Пусть $G = (V, E)$ — помеченное дерево с n вершинами. Всего можно составить n^{n-2} таких неизоморфных деревьев.*

Глава 4

Линейная алгебра

4.1 Линейные комбинации

Выражение, построенное на множестве элементов путём сложения этих элементов, умноженных на некоторые коэффициенты, называется **линейной комбинацией**. Если все коэффициенты линейной комбинации равны нулю, то она называется **тривиальной**, иначе — **нетривиальной**.

4.2 Матрицы

Матрицей называется прямоугольная таблица из чисел, содержащая m строк и n столбцов, и обозначается

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Числа m и n называются **порядками** матрицы.

Если $m = n$, то матрица называется **квадратной**, а число $m = n$ — её **порядком**. **Главной** называется диагональ квадратной матрицы, состоящая из элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, а **побочной** — состоящая из элементов $a_{n1}, a_{n-1\,2}, \ldots, a_{1n}$.

i-я строка матрицы обозначается A_i, j-й столбец — A^j.

Две матрицы называются **равными**, если их порядки и соответствующие элементы совпадают, иначе — **неравными**.

4.2.1 Операции над матрицами

Матрица, все элементы которой равны 0, называется **нулевой** и обозначается O.

Квадратная матрица, в которой элементы главной диагонали равны 1, а остальные — 0, называется **единичной** и обозначается E.

Над матрицами определены следующие операции:

- **Сложение.** Определено только над матрицами одинакового размера.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{Vmatrix}$$

  Пусть A, B, C — матрицы. Свойства сложения:

  – коммутативность: $A + B = B + A$

  – ассоциативность: $(A + B) + C = A + (B + C)$

- **Умножение на число.**

$$\lambda \cdot \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Пусть α, β — числа, A, B — матрицы. Свойства умножения на число:

  - ассоциативность: $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$
  - дистрибутивность относительно сложения чисел: $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
  - дистрибутивность относительно сложения матриц: $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

- **Умножение**. $A \cdot B$ определено, только если количество столбцов в матрице A совпадает с количеством строк в матрице B.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{1i}b_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{k} a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{k} a_{1i}b_{in} \\ \sum\limits_{i=1}^{k} a_{2i}b_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{k} a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{k} a_{2i}b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{k} a_{mi}b_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{k} a_{mi}b_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{k} a_{mi}b_{in} \end{Vmatrix}$$

где суммирование производится по i от 1 до k.

Пусть λ — число, A, B, C — матрицы. Свойства умножения:

  - ассоциативность: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
  - дистрибутивность: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
  - ассоциативность и коммутативность относительно умножения на число: $(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$

4.2.2 Определитель матрицы

Определителем порядка n, соответствующим квадратной матрице A порядка n, называется число, равное

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma = (i_1; \ldots; i_n) \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\, i_1} a_{2\, i_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\, i_n}, \ |\sigma| = \begin{cases} 0, \sigma \text{ чётная} \\ 1, \sigma \text{ нечётная} \end{cases} \tag{4.1}$$

где S_n — множество всех перестановок n-элементного множества.

Матрица называется **вырожденной**, если её определитель равен 0, иначе — **невырожденной**.

Свойства определителя:

- Если элементы какой-либо строки или столбца определителя имеют общий множитель λ, то его можно вынести за знак определителя.

  Доказательство.

$$\Delta = \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1\, i_1} a_{2\, i_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\, i_n}$$

  Каждое слагаемое имеет множитель из каждой строки, а также из каждого столбца, т. к. σ является перестановкой и содержит все номера столбцов от 1 до n включительно. Тогда все слагаемые имеют общий множитель λ, поэтому его можно вынести за скобки. ■

- Если какая-либо строка или столбец определителя состоит из нулей, то он равен 0.

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

  Свойство для столбцов аналогично.

  Доказательство.

  $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1\,i_1} \cdot \ldots \cdot a_{n\,i_n} =$$

  $$|\text{ Каждое слагаемое содержит ровно 1 элемент из } i\text{-й строки и поэтому имеет вид } |$$

  $$= \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1\,i_1} \cdot \ldots \cdot a_{k-1\,i_{k-1}} (a_{k\,i_k} + b_{k\,i_k}) a_{k+1\,i_{k+1}} \cdot \ldots \cdot a_{n\,i_n} =$$

  $$= \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1\,i_1} \cdot \ldots \cdot a_{k\,i_k} \cdot \ldots \cdot a_{n\,i_n} + \sum (-1)^{|\sigma|} a_{1\,i_1} \cdot \ldots \cdot b_{k\,i_k} \cdot \ldots \cdot a_{n\,i_n} =$$

  $$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

  Свойство для столбцов доказывается аналогично. ■

- Если в определителе поменять две строки или два столбца местами, то он изменит знак.

  Доказательство. При перестановке строк или столбцов местами все перестановки в формуле (4.1) меняют чётность, значит, каждое слагаемое меняет знак, тогда и определитель меняет знак. ■

- Если в определителе две строки или два столбца совпадают, то он равен 0.

  Доказательство. Если поменять местами совпадающие строки или столбцы, то он, с одной стороны, не изменится, а с другой, поменяет знак. Значит, определитель равен 0. ■

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1}+a_{j1} & \lambda a_{i2}+a_{j2} & \cdots & \lambda a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

  Свойство для столбцов аналогично.

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} + a_{j1} & \lambda a_{i2} + a_{j2} & \cdots & \lambda a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство для столбцов доказывается аналогично. ■

Пусть дана матрица

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число, равное

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Лемма 4.2.1.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum a \cdot a_{2\,i_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\,i_n} + \sum 0 \cdot a_{2\,i_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\,i_n} + \ldots + \sum 0 \cdot a_{2\,i_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\,i_n} =$$

$$= a \sum a_{2\,i_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\,i_n} = a \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

■

Теорема 4.2.1. *Любой определитель можно* ***разложить*** *по элементам произвольной строки или столбца:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} \cdot$$

$$\cdot \left(\begin{vmatrix} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (-1)^{i+1} \cdot \left(\begin{vmatrix} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{i2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\,2} & a_{i-1\,1} & a_{i-1\,3} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,2} & a_{i+1\,1} & a_{i+1\,3} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \right.$$

$$\left. +(-1)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{in} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\,n} & a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,n-1} \\ a_{i+1\,n} & a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (-1)^{i+1}a_{i1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{i+2}a_{i2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,3} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,3} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+(-1)^{i+n}a_{in}\cdot\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1\,n-1}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{i-1\,1}&\cdots&a_{i-1\,n-1}\\ a_{i+1\,1}&\cdots&a_{i+1\,n-1}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{n\,n-1}\end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

Аналогично доказывается

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

■

Транспонированием матрицы или определителя называется операция, в результате которой строки меняются местами со столбцами с сохранением порядка следования:

$$\begin{Vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{Vmatrix}^{T}=\begin{Vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\ a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{Vmatrix}$$

Полученная матрица или определитель называется **транспонированной** по отношению к исходной.
Утверждение 4.2.1. *Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной.*
Доказательство.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}^{T}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\ a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

■

4.2.3 Ранг матрицы

Строка (столбец) матрицы называется **линейно зависимой**, если она является линейной комбинацией остальных строк (столбцов), иначе — **линейно независимой**.

Рангом матрицы называется максимальное количество её линейно независимых строк.

Минором k-го порядка матрицы называется определитель, содержащий только те её элементы, которые стоят на пересечении некоторых k строк и k столбцов. Минор наибольшего порядка, отличный от нуля, называется **базисным**.

Теорема 4.2.2. *Ранг матрицы равен порядку базисного минора.*

Доказательство. Пусть

$$A=\begin{Vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{Vmatrix}$$

M_k — базисный минор k-го порядка. При перестановке строк и столбцов минора равенство с нулём сохраняется, значит, без ограничения общности можно считать, что

$$M_k=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix}$$

$M_k \neq 0$, значит, строки $A_1, \ldots, A_k$ линейно независимы. Пусть M_{k+1} — минор $(k+1)$-го порядка:

$$M_{k+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$$

т. к. M_k — базисный минор. Тогда

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{kj}A_{kj} + a_{ij}A_{ij} = 0,\ A_{ij} = M_k \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{ij} = -\frac{A_{1j}}{A_{ij}}a_{1j} - \frac{A_{2j}}{A_{ij}}a_{2j} - \ldots - \frac{A_{kj}}{A_{ij}}a_{kj}$$

где $A_{1j}, \ldots, A_{kj}, A_{ij}$ — алгебраические дополнения $a_{1j}, \ldots, a_{kj}, a_{ij}$. $A_{1j}, \ldots, A_{kj}, A_{ij}$ не зависят от j, тогда A_i — линейная комбинация $A_1, \ldots, A_k$, значит, k — ранг матрицы A. ■

Рангом матрицы по строкам (столбцам) называется максимальное количество её линейно независимых строк (столбцов).

Следствие 4.2.1. *Ранг матрицы по строкам равен рангу матрицы по столбцам.* Для доказательства достаточно заметить, что определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной.

4.2.4 Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями называются следующие операции над матрицей, не изменяющие её ранга:

- **Перестановка строк** матриц. Очевидно, что ранг матрицы при перестановке строк не меняется.
- **Умножение строки на $\lambda \neq 0$.**

  Доказательство.

  ■
- **Прибавление к строке матрицы другой строки, умноженной на $\lambda \neq 0$.**

  Доказательство.

  ■

Аналогично определяются элементарные преобразования над столбцами.

Матрица A имеет **ступенчатый вид**, если:

- все нулевые строки стоят последними;
- для любой ненулевой строки A_p верно, что $\forall i > p,\ j \leqslant q\ a_{ij} = 0$, где a_{pq} — первый ненулевой элемент строки A_p.

Теорема 4.2.3. *Любую матрицу путём элементарных преобразований только над строками можно привести к ступенчатому виду.*

Доказательство.

■

4.2.5 Обратные матрицы

Матрица B называется **левой обратной** к квадратной матрице A, если $BA = E$.

Матрица C называется **правой обратной** к квадратной матрице A, если $AC = E$.

Заметим, что обе матрицы B и C — квадратные того же порядка, что и A.

Утверждение 4.2.2. *Если существуют левая и правая обратные к A матрицы B и C, то они совпадают.*

Доказательство. $B = BE = BAC = EC = C$ ■

Т. о., матрица A^{-1} называется **обратной** к матрице A, если $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Теорема 4.2.4. *Пусть даны матрицы*

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \ \tilde{A} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{Vmatrix}$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение a_{ij}.

Если $|A| \neq 0$, то

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{|A|}$$

Доказательство.

■

Теорема 4.2.5. *Пусть дана невырожденная матрица*

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Присоединим к ней единичную матрицу:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}$$

и с помощью элементарных преобразований только над строками полученной матрицы (или только над столбцами) приведём её левую часть к единичной матрице. Тогда правая часть будет обратной к A матрицей.

Доказательство.

■

4.3 Векторные пространства

n-мерным векторным пространством над полем вещественных чисел называется множество

$$V_n = \mathbb{R}^n = \{(x_1; \ldots; x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

элементы которого называются **векторами**. Над ними определены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие аксиомам:

1. Коммутативность сложения:
$$\forall \overline{a}, \overline{b} \in V_n \ \overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$$

2. Ассоциативность сложения:
$$\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_n \ \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$$

3. Существование **нулевого** вектора, или **нуля**, обозначаемого $\overline{0}$:
$$\exists \overline{0} \in V_n \colon \forall \overline{a} \in V \ \overline{a} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{a} = \overline{a}$$

4. Существование **противоположного** вектора:
$$\forall \overline{a} \in V_n \ \exists (-\overline{a}) \in V_n \colon \overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$$

5. Ассоциативность умножения на число:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \overline{a} \in V_n\ \alpha(\beta\overline{a}) = (\alpha\beta)\overline{a}$$

6. Дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \overline{a}, \overline{b} \in V_n\ \alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$$

7. Дистрибутивность умножения на число относительно сложения чисел:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \overline{a} \in V_n\ (\alpha + \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$$

8. Существование **единицы**:

$$\forall \overline{a} \in V_n\ 1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$$

4.3.1 Базис и размерность векторного пространства

Векторы $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}$ называются **линейно зависимыми**, если

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \colon \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{a_i} = \overline{0},\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0$$

иначе — **линейно независимыми**.

Множество линейно независимых векторов $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}$ векторного пространства V называется **базисом** этого пространства, если

$$\forall \overline{x} \in V\ \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \colon \overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{e_i}$$

Приведённое равенство называется **разложением** вектора $\overline{x}$ по базису $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}$.

Теорема 4.3.1 (о базисе). *Любой вектор $\overline{x}$ может быть разложен по базису $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n}$ единственным образом.*

Доказательство.

■

Размерностью векторного пространства называется максимальное количество линейно независимых векторов.

Теорема 4.3.2. *В векторном пространстве размерности n любые n линейно независимых векторов образуют его базис.*

Доказательство.

■

Теорема 4.3.3. *Если векторное пространство имеет базис из n векторов, то его размерность равна n.*

Доказательство.

■

4.4 Системы линейных алгебраических уравнений

Система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — переменные.

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ называются **коэффициентами при переменных**, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — **свободными членами**.

Система линейных уравнений называется **однородной**, если все её свободные члены равны 0, иначе — **неоднородной**.

Система линейных уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, иначе — **несовместной**.

Система линейных уравнений называется **определённой**, если она имеет единственное решение. Если система имеет более одного решения, то она называется **неопределённой**.

Две системы линейных уравнений называются **эквивалентными**, если их решения совпадают или обе не имеют решений.

4.4.1 Матричная форма системы линейных уравнений

Систему линейных уравнений можно представить в матричной форме:

$$\begin{Vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \cdot X = B$$

A называется **основной матрицей системы**, X — **столбцом переменных**, B — **столбцом свободных членов**. Если к основной матрице справа приписать столбец свободных членов, то получится **расширенная матрица системы**:

$$\left\Vert \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right\Vert$$

4.4.2 Линейная независимость

Уравнение системы линейных уравнений называется **линейно зависимым**, если соответствующая ему строка расширенной матрицы является нетривиальной линейной комбинацией других строк, иначе — **линейно независимым**.

Система линейных уравнений называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная линейная комбинация строк расширенной матрицы, в результате которой получается нулевая строка, иначе — **линейно независимой**.

Утверждение 4.4.1. *Система линейных уравнений линейно зависима $\Leftrightarrow$ одно из её уравнений линейно зависимо.*

Доказательство.

1. $\Rightarrow$. Пусть система из строк $A_1, \dots, A_n$ линейно зависима:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i = O,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0$$

   где O — нулевая строка. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$, тогда

$$A_1 = -\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1} A_i$$

   Значит, A_1 — линейно зависимая строка.

2. $\Leftarrow$. Пусть одна из строк линейно зависима:

$$A_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i A_i \Leftrightarrow 1 \cdot A_1 - \alpha_2 A_2 - \ldots - \alpha_n A_n = O$$

Значит, система линейно зависима.

■

4.4.3 Решение систем линейных уравнений

Лемма 4.4.1. *Пусть система из строк $A_1, \ldots, A_n$ линейно независима и A_{n+1} не является линейной комбинацией $A_1, \ldots, A_n$. Тогда система из строк $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ линейно независима.*

Доказательство (методом от противного). Пусть система из строк $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ линейно зависима:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i A_i = O, \ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^2 \neq 0$$

где O — нулевая строка. Система из строк $A_1, \ldots, A_n$ линейно независима по условию, тогда

$$\alpha_{n+1} \neq 0 \Rightarrow A_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}} A_i$$

Значит, A_{n+1} — линейная комбинация $A_1, \ldots, A_n$. Противоречие с условием. ■

Теорема 4.4.1 (Кронекера — Капелли). *Система линейных уравнений совместна $\Leftrightarrow$ ранг основной матрицы совпадает с рангом расширенной матрицы.*

Доказательство.

1. $\Rightarrow$.

2. $\Leftarrow$.

■

Метод Гаусса

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.2}$$

Её расширенную матрицу можно привести к ступенчатому виду, т. е. (4.2) эквивалентна

$$\begin{cases} a_{1\,j_1}x_{j_1} + \ldots + a_{1\,j_n}x_{j_n} = b_1 \\ a_{2\,j_2}x_{j_2} + \ldots + a_{2\,j_n}x_{j_n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{r\,j_r}x_{j_r} + \ldots + a_{r\,j_n}x_{j_n} = b_r \\ 0 = b_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b_m \end{cases} \tag{4.3}$$

где $a_{1\,j_1}, \ldots, a_{r\,j_r} \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что в базисный минор основной матрицы системы (4.3) входят только коэффициенты при переменных $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$, называемых **главными (зависимыми)**. Остальные переменные называются **свободными (независимыми)**.

Если $\exists i > r\colon b_i \neq 0$, то система несовместна. Пусть $\forall i > r\ b_i = 0$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} x_{j_1} = \dfrac{b_1}{a_{1\,j_1}} - \dfrac{a_{1\,j_2}}{a_{1\,j_1}} x_{j_2} - \ldots - \dfrac{a_{1\,j_n}}{a_{1\,j_1}} x_{j_n} \\ x_{j_2} = \dfrac{b_2}{a_{2\,j_2}} - \dfrac{a_{2\,j_3}}{a_{2\,j_2}} x_{j_3} - \ldots - \dfrac{a_{2\,j_n}}{a_{2\,j_2}} x_{j_n} \\ \vdots \\ x_{j_r} = \dfrac{b_r}{a_{r\,j_r}} - \dfrac{a_{r\,j_{r+1}}}{a_{r\,j_r}} x_{j_{r+1}} - \ldots - \dfrac{a_{r\,j_n}}{a_{r\,j_r}} x_{j_n} \end{cases}$$

Если свободным переменным полученной системы придавать все возможные значения и решать новую систему относительно главных неизвестных от нижнего уравнения к верхнему, то получим все решения данной системы.

Метод Крамера

Позволяет решить только те системы, которые имеют единственное решение. Пусть дана система линейно независимых уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Определитель основной матрицы системы не равен 0, т. к. строки линейно независимы. Запишем систему в матричной форме:

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{A_{11}}{|A|} & \dfrac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \dfrac{A_{n1}}{|A|} \\ \dfrac{A_{12}}{|A|} & \dfrac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \dfrac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{A_{1n}}{|A|} & \dfrac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \dfrac{A_{nn}}{|A|} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix}$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение a_{ij}.

Т. о., получим решение системы:

$$x_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_j}{|A|} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ i = 1, \ldots, n$$

Полученные формулы называется **формулами Крамера**.

4.4.4 Фундаментальная система решений

Утверждение 4.4.2. *Однородная линейно независимая система уравнений*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i = 0 \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i = 0 \end{cases}$$

задаёт векторное пространство размерности $n - m$.

Доказательство.

■

Фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений называется базис множества всех её решений.

Нахождение фундаментальной системы решений

Пусть дана однородная линейно независимая система уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}x_i = 0 \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{mi}x_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{1i}x_i = -\sum\limits_{i=m+1}^{n} a_{1i}x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{2i}x_i = -\sum\limits_{i=m+1}^{n} a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{mi}x_i = -\sum\limits_{i=m+1}^{n} a_{mi}x_i \end{cases}$$

Пусть

$$(x_{11}; x_{21}; \ldots; x_{m1}; 1; 0; \ldots; 0)$$
$$(x_{12}; x_{22}; \ldots; x_{m2}; 0; 1; \ldots; 0)$$
$$\vdots$$
$$(x_{1\,n-m}; x_{2\,n-m}; \ldots; x_{m\,n-m}; 0; 0; \ldots; 1)$$

являются решениями данной системы. Тогда они образуют фундаментальную систему решений.

Доказательство.

■

Теорема 4.4.2. *Общее решение неоднородной системы линейных уравнений равно сумме её частного решения и общего решения соответствующей однородной системы, т. е. с теми же самыми коэффициентами при переменных.*

Доказательство.

■

4.5 Многочлены от одной переменной

Одночленом, или **мономом**, называется произведение числового множителя и нуля и более переменных, взятых каждая в неотрицательной степени.

Степенью одночлена называется сумма степеней входящих в него переменных. Степень тождественного нуля равна $-\infty$.

Многочленом, или **полиномом**, от одной переменной называется сумма вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — переменные.

Степенью многочлена называется максимальная из степеней его одночленов.

Лемма 4.5.1. *Пусть f и g — многочлены, тогда $\deg fg = \deg f + \deg g$.*

4.5.1 Деление многочленов

Теорема 4.5.1. *Пусть $f(x)$ и $g(x) \neq 0$ — многочлены, тогда существуют единственные многочлены $q(x)$ и $r(x)$ такие, что $f = qg + r$, причём либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg g$.*

Доказательство.

1. Докажем единственность.

2. Докажем существование.

■

Общим делителем многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется многочлен $h(x)$, на который и f, и g делятся нацело:

$$f = ph, \;\; g = qh$$

Наибольшим называется общий делитель наибольшей степени и обозначается НОД.
Теорема 4.5.2 (алгоритм Евклида). *Любые два многочлена имеют единственный* НОД.
Доказательство.
■

4.5.2 Корень многочлена

Корнем многочлена $f(x)$ называется такое число a, что $f(a) = 0$.
Теорема 4.5.3 (Безу). *Остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$ равен $f(a)$.*
Доказательство.

$$f(x) = g(x)(x-a) + r \Rightarrow f(a) = g(a)(a-a) + r \Leftrightarrow r = f(a)$$

■
Следствие 4.5.1. *Если a — корень $f(x)$, то $f(x)$ делится на $x - a$ без остатка.*

Кратностью корня a многочлена $f(x)$ называется число $m\colon f(x) \,\vdots\, (x-a)^m, \;\; f(x) \,\not\vdots\, (x-a)^{m+1}$.
Теорема 4.5.4 (основная теорема алгебры). *Если $f(x)$ — многочлен, отличный от константы, то он имеет хотя бы один комплексный корень.* Доказательство теоремы слишком сложно, поэтому здесь не приводится.

Следствие 4.5.2. *Многочлен n-й степени имеет ровно n комплексных корней с учётом их кратности.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — многочлен n-й степени. По основной теореме алгебры (4.5.4) он имеет корень a, тогда по следствию (4.5.1) $f(x) = g(x)(x-a)$, где $g(x)$ — многочлен $(n-1)$-й степени, который также имеет корень. Будем повторять деление до тех пор, пока не получим константу. Т. о., получим n корней. ■

Следствие 4.5.3. *Любой многочлен $f(x)$ n-й степени представим в виде*

$$f(x) = a(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$$

где a — число, $x_0, \ldots, x_{n-1}$ — корни $f(x)$.

Лемма 4.5.2. *Если $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, $z \in \mathbb{C}$, то $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$.*

Доказательство. Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. Многочлен строится при помощи операций сложения и умножения, поэтому достаточно доказать следующее:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1+a_2) + (b_1+b_2)i} = (a_1+a_2) - (b_1+b_2)i = (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i} = (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

Тогда $\overline{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0} = a_n \overline{z}^n + \ldots + a_1\overline{z} + a_0$ при $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. ■

Теорема 4.5.5. *Любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, тогда если $f(z) = 0$, то $f(\overline{z}) = \overline{f(z)} = \overline{0} = 0$. Значит, если $a + bi$ — корень $f(x)$, то $a - bi$ — тоже корень $f(x)$. Имеем:

$$f(x) = a\prod_{j=1}^{m}(x - x_j)\cdot\prod_{j=1}^{n}(x - (a_j + b_j i))(x - (a_j - b_j i)) = a\prod_{j=1}^{m}(x - x_j)\cdot\prod_{j=1}^{n}(x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2)$$

где $a, x_1, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$,
$x_1, \ldots, x_m, a_1 + b_1 i, \ldots, a_n + b_n i$ — корни $f(x)$. ■

Теорема 4.5.6 (формулы Виета). *Пусть*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \tag{4.4}$$

тогда

$$a_{n-1} = -a_n \sum_{i=0}^{n-1} x_i$$

$$a_{n-2} = a_n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} x_i x_j$$

$$a_{n-3} = -a_n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n-1} x_i x_j x_k$$

$$\vdots$$

$$a_1 = (-1)^{n-1} a_n \sum_{i=0}^{n-1} x_0 x_1 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_{n-1}$$

$$a_1 = (-1)^n a_n x_0 x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}$$

Для доказательства достаточно раскрыть скобки в правой части равенства (4.4).

Теорема 4.5.7. *Пусть на плоскости даны $n+1$ точек, никакие две из которых не лежат на прямой, паралелльной оси ординат, тогда через них проходит единственная кривая n-го порядка.*

Доказательство. Пусть данные точки заданы координатами $(a_0; b_0), (a_1; b_1), \ldots, (a_n; b_n)$, тогда кривая

$$f = \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{(x - a_0) \cdot \ldots \cdot (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)}{(a_i - a_0) \cdot \ldots \cdot (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (a_i - a_n)}$$

Докажем, что f проходит через все данные точки. Рассмотрим точку $(a_k; b_k)$. Подставим $x = a_k$, тогда k-е (считая с нуля) слагаемое равно b_k, а остальные — 0. ■

4.6 Многочлены от нескольких переменных

1. В многочлене $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ подставим $a_i = P_i(y)$ — многочлен от y. Получим многочлен от x и y.

2. Пусть имеем многочлен от n переменных. Подставим вместо его коэффициентов многочлен от одной переменной, получим многочлен от $n+1$ переменных.

Одночлены многочлена будем записывать в лексикографическом порядке степеней переменных (члены с бóльшими степенями идут раньше).

Теорема 4.6.1. *Старший член произведения многочленов равен произведению старших членов множителей.*

Доказательство. Перемножая члены с наибольшими показателями старшей переменной, получим член с наибольшим показателем при этой переменной. Проведя аналогичные рассуждения для остальных переменной, придём к выводу, что полученный член является старшим. ■

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 4.6.2. *Младший член произведения многочленов равен произведению младших членов множителей.*

4.6.1 Симметрические многочлены

Многочлен называется **симметрическим**, если при перестановке переменных он не изменяется.

Утверждение 4.6.1. *Если $f(x_1, \ldots, x_n) = ax_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n} + \ldots$ — симметрический многочлен, то $i_1 \geqslant i_2 \geqslant \ldots \geqslant i_n$.*

Доказательство (методом от противного). Пусть $\exists r < q \colon i_r < i_q$, тогда f содержит $bx_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots \cdot x_r^{i_q} \ldots x_q^{i_r} \ldots x_n^{i_n}$, который старше, чем $ax_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$. Противоречие. ■

Элементарными симметрическими многочленами от n переменных называются многочлены

$$\sigma_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma_2(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Теорема 4.6.3 (основная теорема о симметрических многочленах). *Любой симметрический многочлен может быть представлен в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) = ax_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} + \ldots$ — симметрический многочлен. Введём

$$g_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = a\sigma_1^{k_1 - k_2} \sigma_2^{k_2 - k_3} \cdot \ldots \cdot \sigma_{n-1}^{k_{n-1} - k_n} \sigma_n^{k_n} =$$

$$= a(x_1 + \ldots)^{k_1 - k_2} (x_1 x_2 + \ldots)^{k_2 - k_3} \cdot \ldots \cdot (x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} + \ldots)^{k_{n-1} - k_n} (x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{k_n} =$$

$$= ax_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} + \ldots$$

Тогда старший член многочлена $f_1 = f - g_1$ младше старшего члена многочлена f. Повторим те же действия с многочленом f_1. Будем продолжать таким образом, пока не получим ноль. В итоге получим $f = g_1 + g_2 + \ldots + g_m$, где $g_1, g_2, \ldots, g_m$ — многочлены от элементарных симметрических многочленов. ■

4.7 Квадратичные формы

Квадратичной формой называется многочлен, все одночлены в котором второй степени:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Для определённости полагают $a_{ij} = a_{ji}$.

Квадратичной форме можно сопоставить **матрицу квадратичной формы**, составленную из коэффициентов:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

Каноническим видом квадратичной формы называется её представление в виде суммы квадратов с некоторыми коэффициентами.

Теорема 4.7.1 (метод Лагранжа). *Любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду.*

Доказательство.

■

Нормальным видом квадратичной формы называется её канонический вид, коэффициенты в котором равны -1 или 1.

Рангом квадратичной формы называется количество переменных в её каноническом виде. Количество положительных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы называется её **положительным индексом**, а отрицательных — **отрицательным индексом**. **Сигнатурой** квадратичной формы называется модуль разности положительного и отрицательного индексов.

Ранг, положительный и отрицательный индексы и сигнатура одинаковы для всех канонических видов квадратичной формы.

Глава 5

Математический анализ

5.1 Ограниченные подмножества множества $\mathbb{R}$

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным сверху**, если $\exists a \in \mathbb{R}\colon \forall x \in X\ x \leqslant a$. Число a называется **мажорантой** множества X.

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным снизу**, если $\exists a \in \mathbb{R}\colon \forall x \in X\ a \leqslant x$. Число a называется **минорантой** множества X.

Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется **ограниченным**.

Мажоранта ограниченного сверху множества, принадлежащая ему, называется **его максимальным элементом**. Миноранта ограниченного снизу множества, принадлежащая ему, называется **его минимальным элементом**.

Очевидно, что во множестве может быть не более одного минимального элемента и не более одного максимального элемента.

Минимальный элемент множества мажорант ограниченного сверху множества A называется **супремумом** и обозначается $\sup A$.

Утверждение 5.1.1. *Если множество A ограничено сверху, то $\exists! \sup A$.*

Доказательство. Пусть B — множество всех мажорант множества A, тогда $\forall a \in A,\ b \in B\ a \leqslant b$. По аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall a \in A,\ b \in B\ a \leqslant c \leqslant b$, тогда c — минимальная мажоранта множества A.

Единственность следует из единственности минимального элемента. ■

Утверждение 5.1.2. *Если $a = \sup A$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A\colon a - \varepsilon < x \leqslant a$.*

Доказательство (методом от противного). Пусть $\exists \varepsilon_0\colon \forall x \in A\ x \leqslant a - \varepsilon_0$. Тогда $a - \varepsilon_0$ — мажоранта множества A, значит, $a \neq \sup A$. Противоречие. ■

Максимальный элемент множества минорант ограниченного снизу множества A называется **инфимумом** и обозначается $\inf A$.

Утверждение 5.1.3. *Если множество A ограничено снизу, то $\exists! \inf A$.* Доказательство аналогично доказательству утверждения 5.1.1.

Утверждение 5.1.4. *Если $a = \inf A$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A\colon a \leqslant x < a + \varepsilon$.* Доказательство аналогично доказательству утверждения 5.1.2.

Теорема 5.1.1 (принцип Архимеда). *Если $h > 0$, то $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists k \in \mathbb{Z}\colon (k-1)h \leqslant x < kh$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $A = \left\{z \in \mathbb{Z} \mid z > \dfrac{x}{h}\right\}$, тогда $\exists a = \inf A$. По утверждению 5.1.4 $\forall \varepsilon \in (0;1]\ \exists z_0\colon a \leqslant z_0 < a + \varepsilon$. Т. к. в промежутке $[a; a+1)$ лежит только одно целое число, то $a = z_0$, тогда $a - 1 \leqslant \dfrac{x}{h} < a$. Т. о., a — искомое значение k. ■

Из принципа Архимеда следует, что не существует бесконечно больших чисел.

Следствие 5.1.1.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Доказательство. По принципу Архимеда для $h = \varepsilon$, $x = 1$ получим:

$$\exists n \in \mathbb{Z}\colon \left((n-1)\varepsilon \leqslant 1 < n\varepsilon \Leftrightarrow (1 - \frac{1}{n})\varepsilon \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon,\ n \in \mathbb{N}\right)$$

■

Отсюда следует, что не существует бесконечно малых чисел.

Следствие 5.1.2.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}\ \exists c \in \mathbb{Q}\colon a < c < b$$

Доказательство. Из следствия 5.1.1 для $\varepsilon = b - a$ получим $\exists n \in \mathbb{N}\colon \dfrac{1}{n} < b - a$. По принципу Архимеда для $h = \dfrac{1}{n}$, $x = a$ получим:

$$\exists k \in \mathbb{Z}\colon \left(\frac{k-1}{n} \leqslant a < \frac{k}{n} \Rightarrow a < \frac{k}{n} = \frac{k-1}{n} + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b\right)$$

Т. о., $\dfrac{k}{n}$ — искомое значение c. ■

Точка $a \in \mathbb{R}$ называется **предельной** точкой множества $A \subset \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \breve{U}_\varepsilon(a) \cap A \neq \varnothing$.

Точка $a \in A$ называется **дискретной** точкой множества $A \subset \mathbb{R}$, если $\exists \varepsilon > 0\colon \breve{U}_\varepsilon(a) \cap A = \varnothing$.

Точка $a \in A$ называется **внутренней** точкой множества $A \subset \mathbb{R}$, если $\exists \varepsilon > 0\colon U_\varepsilon(a) \subset A$.

Множество называется **открытым**, если состоит только из внутренних точек.

Множество называется **замкнутым**, если его дополнение $\overline{A}$ до $\mathbb{R}$ является открытым.

Утверждение 5.1.5. *Множество A замкнуто $\Leftrightarrow$ оно содержит все свои предельные точки.*

Доказательство.

1. $\Rightarrow$. Докажем методом от противного, что A содержит все свои предельные точки. Пусть $\exists a_0 \notin A$ — предельная точка A, тогда

$$a_0 \in \overline{A} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\colon (U_\varepsilon(a_0) \subset \overline{A} \Rightarrow U_\varepsilon(a_0) \cap A = \varnothing)$$

   Значит, a_0 не является предельной точкой A. Противоречие.

2. $\Leftarrow$. Пусть $\forall a \in \overline{A}\ \exists \varepsilon > 0\colon U_\varepsilon(a) \subset \overline{A}$. Докажем методом от противного, что $\overline{A}$ открыто. Пусть $\exists a \in \overline{A}\ \forall \varepsilon > 0\ U_\varepsilon(a) \cap A \neq \varnothing$, тогда $a \notin A$ — предельная точка A. Противоречие.

■

Теорема 5.1.2 (Вейерштрасса). *Если A — бесконечное ограниченное множество, то $\exists a \in \mathbb{R}$ — предельная точка A.*

Доказательство. $A \subset [a; b]$, где $a = \inf A$, $b = \sup A$. Пусть a не является предельной точкой A, т. е. $\exists \varepsilon_0 > 0\colon \breve{U}_{\varepsilon_0}(a) \cap A = \varnothing$, тогда $a \in A$, значит, a — дискретная точка A.

Рассмотрим множество B точек y таких, что интервал $(-\infty; y)$ содержит конечное число точек A. Интервал $(-\infty; a + \varepsilon_0)$ содержит только одну точку множества A — a, значит, $\forall k \in (0; 1]\ a + k\varepsilon_0 \in B$.

$A \subset (-\infty; b]$, тогда b — мажоранта B, значит, $\exists c = \sup B$.

1. $\forall \varepsilon > 0\ (-\infty; c - \varepsilon)$ содержит конечное число точек множества A.

2. $\forall \varepsilon > 0\ (-\infty; c + \varepsilon)$ содержит бесконечное число точек множества A, т. к. $c + \varepsilon \notin B$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \breve{U}_\varepsilon(c)$ содержит бесконечное число точек множества A, значит, c — предельная точка множества A. ■

5.2 Предел последовательности

Число a называется **пределом последовательности** (x_n), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n > n_0\ |x_n - a| < \varepsilon$$

и обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Говорят, что последовательность (x_n) **сходится**, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, иначе говорят, что (x_n) **расходится**.

Последовательность (x_n) называется **ограниченной**, или **ограниченной величиной**, если $\exists a > 0\colon \forall n \in \mathbb{N}\ |x_n| < a$.

Бесконечно малой величиной называется последовательность (x_n), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n > n_0\ |x_n| < \varepsilon$$

Можно определить предел последовательности, используя понятие бесконечно малой величины.

Число a называется **пределом последовательности** (x_n), если $x_n = a + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая величина.

Докажем эквивалентность этих определений.

Доказательство.

1. Пусть дана последовательность (x_n) такая, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall n > n_0 \ |x_n - a| < \varepsilon$$

   Докажем, что $x_n = a + \alpha_n$. В самом деле, $\alpha_n = x_n - a$ — бесконечно малая величина. Т. о., $x_n = a + \alpha_n$.

2. Проведя те же самые рассуждения в обратную сторону, докажем обратное утверждение.

■

5.2.1 Элементарные свойства пределов

1. Последовательность может иметь не более одного предела.

   Доказательство. Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ (\exists n_1 \in \mathbb{N} \colon \forall n > n_1 \ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \exists n_2 \in \mathbb{N} \colon \forall n > n_2 \ |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n > \max(n_1, n_2) \ |a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leqslant |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon)$$

   Значит, $a = b$. ■

2. **Теорема 5.2.1 (о двух милиционерах).** *Пусть* $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

   Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0 \ (\exists n_1 \in \mathbb{N} \colon \forall n > n_1 \ |x_n - a| < \varepsilon, \ \exists n_2 \in \mathbb{N} \colon \forall n > n_2 \ |z_n - a| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n > \max(n_1, n_2) \ a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon \Rightarrow \forall n > \max(n_1, n_2) \ |y_n - a| < \varepsilon)$$

   ■

3. Если $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $a \geqslant 0$.

   Доказательство (методом от противного). Пусть $a < 0$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall n > n_0 \ \left(|x_n - a| < -\frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} < x_n - a < -\frac{a}{2} \Rightarrow x_n < \frac{a}{2} < 0\right)$$

   Противоречие. ■

4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

   Доказательство.

$$\begin{cases} |a| - |x_n| \leqslant |a - x_n| \\ |x_n| - |a| \leqslant |x_n - a| \end{cases} \Rightarrow ||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a|$$

   Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall n > n_0 \ ||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$$

   ■

5. Если последовательность (x_n) сходится, то она ограничена.

   Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$. Получим:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n > n_0 \ (||x_n| - |a|| < 1 \Rightarrow |x_n| < |a| + 1)$$

   Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ |x_n| < \max(|x_1| + 1, |x_2| + 1, \ldots, |x_{n_0}| + 1, |a| + 1)$. ■

6. Если последовательности (x_n) и (y_n) — ограниченная и бесконечно малая величины соответственно, то $z_n = x_n y_n$ — бесконечно малая величина.

   Доказательство. Пусть

$$a > 0\colon \forall n \in \mathbb{N}\ |x_n| < a,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n > n_0\ |y_n| < \frac{\varepsilon}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n > n_0\ |x_n y_n| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

   ■

7. Если последовательности (x_n) и (y_n) — бесконечно малые величины, то $z_n = x_n + y_n$ — тоже бесконечно малая величина.

   Доказательство.

$$\forall \varepsilon > 0\ (\exists n_1 \in \mathbb{N}\colon \forall n > n_1\ |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \exists n_2 \in \mathbb{N}\colon \forall n > n_2\ |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n > \max(n_1, n_2)\ |x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < \varepsilon) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

   ■

5.2.2 Арифметические свойства пределов

Пусть даны сходящиеся последовательности $x_n = a + \alpha_n$ и $y_n = b + \beta_n$, где $(\alpha_n), (\beta_n)$ — бесконечно малые величины.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$

   Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} (a + b + \alpha_n + \beta_n) = a + b$$

   ■

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$

   Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} (ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n) = ab$$

   ■

3. Если $a \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{a}$

   Доказательство. Покажем, что $\left|\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{a}\right| = \dfrac{|\alpha_n|}{|a||\alpha_n + a|}$ — бесконечно малая величина.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n > n_0\ |x_n - a| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n > n_0\ \left(|a| = |a - x_n + x_n| \leqslant |a - x_n| + |x_n| < \frac{|a|}{2} + |x_n| \Rightarrow |x_n| > \frac{|a|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|a|}\right)$$

   Тогда $\dfrac{1}{|x_n|} = \dfrac{1}{|\alpha_n + a|}$ — ограниченная величина, значит, $\dfrac{|\alpha_n|}{|a||\alpha_n + a|} = \left|\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{a}\right|$ — бесконечно малая величина. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{a}$. ■

4. Если $b \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

   Доказательство.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \left(x_n \cdot \frac{1}{y_n}\right) = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

   ■

5.2.3 Основные свойства пределов последовательностей

1. Из ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

   Доказательство. Пусть A — множество значений, принимаемых членами ограниченной последовательности (x_n).

   (a) Пусть A конечно. Тогда бесконечное множество членов последовательности (x_n) принимает хотя бы одно значение из A, значит, подпоследовательность, состоящая из них, сходится к этому значению.

   (b) Пусть A бесконечно, тогда оно ограничено, значит, по теореме Вейерштрасса оно имеет предельную точку a. В окрестности $\breve{U}_1(a)$ содержится хотя бы одна точка из множества A, а соответствующее значение принимает член x_{n_1}.

   Рассмотрим множество A_1, полученное из A удалением значений, принимаемых членами $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$. A_1 бесконечно и имеет предельную точку a, поэтому в окрестности $\breve{U}_{\frac{1}{2}}(a)$ найдётся значение, принимаемое членом x_{n_2}, причём $n_1 < n_2$.

   Рассмотрим множество A_2, полученное из A_1 удалением значений, принимаемых членами $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_{n_2}$. A_2 бесконечно и имеет предельную точку a, поэтому в окрестности $\breve{U}_{\frac{1}{3}}(a)$ найдётся значение, принимаемое членом x_{n_3}, причём $n_2 < n_3$.

   Продолжая, получим последовательность (x_{n_k}): $|x_{n_k} - a| < \dfrac{1}{k}$. По следствию 5.1.1 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

   ■

2. Монотонная ограниченная последовательность (x_n) сходится.

   Доказательство. Для определённости предположим, что $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leqslant x_{n+1}$. Последовательность ограничена, поэтому множество A её значений имеет супремум $a = \sup A$. По утверждению 5.1.2
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N} \colon (a - \varepsilon < x_k \leqslant a \Rightarrow \forall n > k\ a - \varepsilon < x_k \leqslant x_n \leqslant a \Rightarrow \forall n > k\ |x_n - a| < \varepsilon) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

   ■

3. **Лемма 5.2.1 (о вложенных отрезках).** *Пусть $(a_n), (b_n)$ — последовательности концов последовательно вложенных друг в друга отрезков (т. е. $[a_n; b_n] \subset [a_{n-1}; b_{n-1}]$), причём $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Тогда $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[a_k; b_k] = \{a\}$.*

   Доказательство. Очевидно, что (a_n) монотонна и ограничена сверху, (b_n) монотонна и ограничена снизу, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Имеем:
$$b = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n + a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

   Отрезки последовательно вложены друг в друга, поэтому $\bigcap\limits_{k=1}^{n}[a_k; b_k] = [a_n; b_n]$.
$$\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k; b_k] = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{k=1}^{n}[a_k; b_k] = \lim_{n\to\infty}[a_n; b_n] = \{a\}$$

   ■

5.2.4 Число Эйлера

Утверждение 5.2.1.

$$\exists \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность (x_n):

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3n^3} + \ldots + \frac{n!}{n!n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < \tag{5.1}$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Значит, (x_n) ограничена. Кроме того, из выражения (5.1) ясно, что (x_n) монотонна. Тогда (x_n) сходится. ∎

Число $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828\ldots$ называется **числом Эйлера** (иногда **числом Непера**, или **неперовым числом**).

5.2.5 Критерий Коши

Последовательность (x_n) называется **фундаментальной**, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall m, n > n_0\ |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Теорема 5.2.2 (критерий Коши). *Последовательность сходится $\Leftrightarrow$ она фундаментальна.*
Доказательство.

1. $\Rightarrow$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n > n_0\ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   Пусть $m, n > n_0$.

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leqslant |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. $\Leftarrow$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall m, n > n_0\ |x_n - x_m| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n > n_0\ (|x_n - x_{n_0+1}| < 1 \Rightarrow ||x_n| - |x_{n_0+1}|| < 1 \Rightarrow |x_n| < |x_{n_0+1}| + 1)$$

   Значит, $\forall x \in \mathbb{N}\ |x_n| < \max(|x_1| + 1, |x_2| + 1, \ldots, |x_{n_0}| + 1)$, т. е. (x_n) ограничена.

   Выберем из неё сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k}) : \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

$$\forall\varepsilon > 0\ (\exists k_0, n_1 \in \mathbb{N}\colon \forall k > k_0, n > n_1\ |x_n - x_{n_k}| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|\text{ При } k\to\infty \text{ получим }|$$

$$\Rightarrow \forall n > n_1\ |x_n - a| < \varepsilon) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

∎

5.3 Предел функции

5.3.1 Предел функции в точке

Пусть a — предельная точка области определения функции $f(x)$. Следующие определения эквивалентны:

1. **Определение по Гейне**

   Число b называется **пределом функции** $f(x)$ **в точке** a, если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$ для любой последовательности $(x_n): \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2. **Определение по Коши**

   Число b называется **пределом функции** $f(x)$ **в точке** a, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\colon (\forall x\colon |x - a| < \delta)\ |f(x) - b| < \varepsilon$$

Предел функции $f(x)$ в точке a обозначается $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Доказательство.

1. (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall\delta > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \forall n > n_0\ |x_n - a| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists k > 0\colon \forall x_n > k\ |f(x_n) - b| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$$

2. (1) $\Rightarrow$ (2). Докажем методом от противного, что условия определения (2) выполняются. Пусть

$$\exists\varepsilon_0 > 0\colon (\forall\delta > 0\ \exists x_0\colon |x_0 - a| < \delta,\ |f(x_0) - b| \geqslant \varepsilon_0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n\colon |x_n - a| < \frac{1}{n},\ |f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon_0)$$

   Получили последовательность $(x_n)\colon \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq b$. Противоречие.

■

Из определения по Гейне следует, что пределы функции в точке обладают теми же свойствами, что и пределы последовательности.

Также можно определить односторонние пределы.

Число b называется **левым пределом**, или **пределом слева**, функции $f(x)$ **в точке** a, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\colon (\forall x\colon 0 < a - x < \delta)\ |f(x) - b| < \varepsilon$$

и обозначается $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.

Число b называется **правым пределом**, или **пределом справа**, функции $f(x)$ **в точке** a, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\colon (\forall x\colon 0 < x - a < \delta)\ |f(x) - b| < \varepsilon$$

и обозначается $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Т. о., $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$.

5.3.2 Предел функции на бесконечности

Число a называется **пределом** функции $f(x)$ **на бесконечности**, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists M > 0\colon (\forall x\colon |x| > M)\ |f(x) - a| < \varepsilon$$

и обозначается $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Предел функции на бесконечности обладает теми же свойствами, что и предел функции в точке.

5.3.3 Замечательные пределы

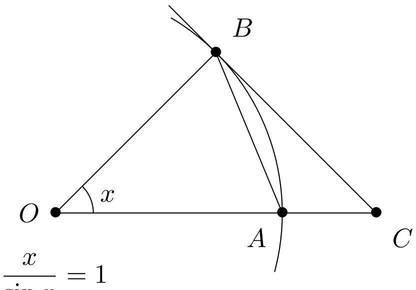
Замечательными пределами называют два тождества, часто используемых при нахождении других пределов.

Первый замечательный предел

Утверждение 5.3.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Доказательство. Пусть $x>0$. Рассмотрим сектор AOB единичного круга ($OA=OB=1$) с углом x и касательную BC к нему.



$$S_{AOB}<S_{\text{сект}}<S_{BOC}\Leftrightarrow \sin x<x<\operatorname{tg}x\Leftrightarrow 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

Применяя теорему о двух милиционерах, получим:

$$\lim_{x\to 0}1=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

Для $x<0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(-x)}{-x}=1$. ■

Следствия:

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=a,\ a\neq 0$$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}ax}{x}=a\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax\cos ax}=a,\ a\neq 0$$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{x^2}=\frac{a^2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{ax}{2}}{\left(\frac{ax}{2}\right)^2}=\frac{a^2}{2},\ a\neq 0$$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin ax}{x}\ |\text{Пусть } ax=\sin y|=a\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=a,\ a\neq 0$$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}ax}{x}\ |\text{Пусть } x=\operatorname{tg}y|=a\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}y}=a,\ a\neq 0$$

Второй замечательный предел

Утверждение 5.3.2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Доказательство.

1. Пусть $x>0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}=e$ по определению числа Эйлера.

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}=\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<$$

$$<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)$$

Применяя теорему о двух милиционерах, получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}=e,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)=e\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

2. Пусть $x<0$, $y=-x$, тогда
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=$$
$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e$$

■

Следствия:

- $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left|\text{Пусть } y=\frac{1}{x}\right|=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$$
- $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right)^{a}=e^{a}, a\neq 0$$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{bx}=\lim_{x\to 0}\ln(1+ax)^{\frac{1}{bx}}=\ln\lim_{x\to 0}\left((1+ax)^{\frac{1}{ax}}\right)^{\frac{a}{b}}=\ln e^{\frac{a}{b}}=\frac{a}{b},\ a,b\neq 0$$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{c^{ax}-1}{bx}=$$
$$\left|\text{Пусть } c^{ax}-1=y\Leftrightarrow ax\ln c=\ln(y+1)\Leftrightarrow x=\frac{\ln(y+1)}{a\ln c}\right|$$
$$=\frac{a\ln c}{b}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)}=\frac{a}{b}\ln c,\ a,b\neq 0,\ c>0$$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax)^{n}-1}{bx}\ \left|\text{Пусть } 1+ax=e^{y}\right|=\frac{a}{b}\lim_{y\to 0}\frac{e^{ny}-1}{e^{y}-1}=\frac{an}{b}\lim_{y\to 0}\frac{e^{ny}-1}{ny}\cdot\frac{y}{e^{y}-1}=\frac{an}{b}, a,b,n\neq 0$$

5.4 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Функция $A(x)$ называется **бесконечно большой** при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}A(x)=\infty$.

Очевидны следующие утверждения.

Утверждение 5.4.1. *Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая функция.*

Утверждение 5.4.2. *Если $A(x)$ — бесконечно большая функция, то $\dfrac{1}{A(x)}$ — бесконечно малая функция.*

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми одного порядка малости** при $x\to x_0$, если $0<\left|\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right|<\infty$.

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалетнтными бесконечно малыми** при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. При этом пишут $f(x)\sim g(x)$.

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка малости**, чем $\beta(x)$, при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, и обозначается $\alpha(x)=o(\beta(x))$. Следует помнить, что это не равенство в обычном смысле, т. е. запись $o(\beta(x))=\alpha(x)$ бессмысленна.

5.5 Непрерывность функции

Пусть функция f задана на множестве $D \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in D$. f называется **непрерывной в точке** a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(\lim\limits_{x\to a} x)$, что эквивалентно $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Точкой разрыва первого рода функции $f(x)$ называется точка a, в которой и левый, и правый пределы функции $f(x)$ конечны, причём $f(x)$ не является непрерывной в точке a.

Точкой разрыва второго рода функции $f(x)$ называется предельная точка a множества $D(f)$, в которой левый или правый предел функции $f(x)$ не существует или бесконечен.

Функция называется **непрерывной на** некотором **множестве**, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

5.5.1 Свойства непрерывных функций

Утверждение 5.5.1. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, $g(x)$ — в точке $f(a)$, то $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.*

Доказательство.

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(f(a))$$

■

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

1. $f(x)$ ограничена на $[a;b]$.

   Доказательство (методом от противного). Пусть $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in [a;b]\colon |f(x_n)| > n$. Получили ограниченную последовательность (x_n). Выберем из неё сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k})\colon \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Точка x_0 предельная для $[a;b]$, значит, $x_0 \in [a;b]$, т. к. $[a;b]$ — замкнутое множество. Тогда в силу непрерывности $f(x)$ $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Это противоречит тому, что $|f(x_{n_k})| > n_k$, т. к. $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$. ■

2. Если $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, то $\exists x_m, x_M \in [a;b]\colon f(x_m) = m,\ f(x_M) = M$.

   Доказательство. По утверждению 5.1.4 $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in [a;b]\colon m \leqslant x_n < m + \dfrac{1}{n}$. Получили ограниченную последовательность (x_n). Выберем из неё сходящуюся подпоследовательность $(x_{n_k})\colon \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_m$. Точка x_m предельная для $[a;b]$, значит, $x_m \in [a;b]$, т. к. $[a;b]$ — замкнутое множество. Тогда в силу непрерывности $f(x)$ $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_m),\ m \leqslant x_{n_k} < m + \dfrac{1}{n_k} \Rightarrow f(x_m) = m$.

   $f(x_M) = M$ доказывается аналогично. ■

3. **Теорема 5.5.1 (о нуле непрерывной функции).** *Если $f(a)\cdot f(b) < 0$, то $\exists x_0 \in [a;b]\colon f(x_0) = 0$.*

   Доказательство. Разделим отрезок $[a;b]$ пополам. Если $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$, то $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$. Иначе выберём ту половину отрезка $[a;b]$, на границах которой функция принимает разные знаки. Разделим её пополам и проверим значение в середине. Продолжая таким образом, получим либо 0 в одной из середин полученных отрезков, либо последовательность вложенных отрезков $[a_n;b_n]\colon \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0,\ f(a_n)\cdot f(b_n) < 0$. По лемме о вложенных отрезках $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c \in [a;b]$. В силу непрерывности $f(x)$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) = 0$, т. к. $f(a_n)$ и $f(b_n)$ имеют разные знаки. ■

4. **Теорема 5.5.2 (о промежуточном значении).** *Если $f(a) \neq f(b)$, то, без ограничения общности полагая $f(a) < f(b)$, $[f(a);f(b)] \subseteq E(f)$.*

   Доказательство. Пусть $C \in (f(a);f(b))$, $g(x) = f(x) - C$. $g(a) = f(a) - C < 0$, $g(b) = f(b) - C > 0$, тогда по теореме о нуле непрерывной функции $\exists c \in [a;b]\colon (g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = C)$. ■

5. Если $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, то $[m;M] \subseteq E(f)$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a;b]$.

1. $h(x) = f(x) + g(x)$ непрерывна на $[a;b]$.

5.6 Дифференцируемость функции

Условие непрерывности функции $f(x)$ в точке a можно сформулировать так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} (f(a + \Delta x) - f(a)) = 0$$

где $\Delta x = x - a$ называется **приращением аргумента**, $\Delta f = f(x) - f(a)$ — **приращением функции**.

Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой в точке** a, если $\Delta f = k\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, где $\Delta f = f(x) - f(a)$, $\Delta x = x - a$, k — константа, называемая **производной** функции $f(x)$ **в точке** a и обозначаемая $f'(a)$.

Из определения следует, что функция, дифференцируемая в точке a, непрерывна в ней.

Функция называется **дифференцируемой на** некотором **множестве**, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Точки, в которых функция дифференцируема, называются **точками гладкости**. Функция называется **гладкой**, если она дифференцируема на всей области определения.

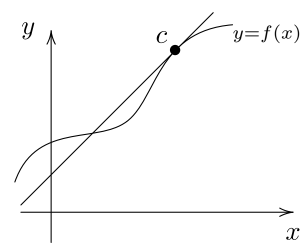
Найдём производную функции $f(x)$ в точке a.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Т. о., производная функции $f(x)$ является функцией $f'(x)$.

5.6.1 Геометрический смысл производной

Пусть дана кривая, заданная уравнением $y = f(x)$, $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Проведём касательную к этой кривой в точке $c \in (a;b)$. Заметим, что касательная — это прямая, получающаяся в пределе из хорд, проходящих через точки $(c, f(c))$ и $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$. Уравнение такой хорды имеет вид



$$\frac{x - c}{(c + \Delta x) - c} = \frac{y - f(c)}{f(c + \Delta x) - f(c)} \Leftrightarrow y = f(c) + \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}(x - c)$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим значение углового коэффициента k касательной:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c)$$

Т. о., $y = f(c) + f'(c)(x - c)$ — уравнение касательной в точке c.

Существование касательной означает, что

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \Rightarrow f(c + \Delta x) - f(c) = f'(c)\Delta x + a\Delta x$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} a = 0 \Rightarrow a\Delta x = o(\Delta x)$. Т. о., существование касательной к графику функции $f(x)$ в точке c равносильно дифференцируемости функции $f(x)$ в точке c.

5.6.2 Физический смысл производной

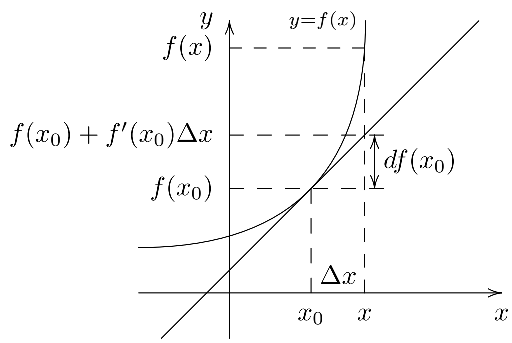
Пусть зависимость пути, пройденного некоторой точкой, от времени выражается функцией $S(t)$. Чтобы найти среднюю скорость движения в промежутке времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$, достаточно вычислить $\dfrac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$. Перейдём к пределу при $\Delta t \to 0$, тогда $[t_0; t_0 + \Delta t]$ выродится в точку, а средняя скорость движения превратится в мгновенную скорость в точке t_0. Т. о., производная функции $S(t)$ представляет зависимость мгновенной скорости от времени.

5.6.3 Дифференциал функции

Пусть $f(x)$ — функция, дифференцируемая в точке x_0, тогда по определению

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha$$

где $\alpha = o(x - x_0)$ при $x \to x_0$. Слагаемое $f'(x_0)(x - x_0)$ представляет линейную часть приращения функции. Его называют **дифференциалом функции** $f(x)$ **в точке** x_0 и обозначают $df(x_0) = f'(x_0)dx$, где $dx = \Delta x$ — приращение аргумента.



Можно записать производную, используя дифференциал: $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$.

5.6.4 Правила дифференцирования

Пусть $f(x)$, $g(x)$ — функции, дифференцируемые в точке a, C — константа.

1. $h(x) = f(x) + g(x)$ дифференцируема в точке a, причём $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

   Доказательство.

   $$h'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a) + g'(a)$$

   ■

2. $h(x) = Cf(x)$ дифференцируема в точке a, причём $h'(x) = Cf'(x)$.

   Доказательство.

   $$h'(a) = \lim_{x\to a} \frac{Cf(x) - Cf(a)}{x - a} = Cf'(x)$$

   ■

3. $h(x) = f(x)g(x)$ дифференцируема в точке a, причём $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

   Доказательство.

   $$h'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} =$$

   $$= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + \lim_{x\to a} f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

   ■

4. Если $f(a) \neq 0$, то $h(x) = \dfrac{C}{f(x)}$ дифференцируема в точке a, причём $h'(x) = -\dfrac{Cf'(x)}{f^2(x)}$.

   Доказательство.

   $$h'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{C}{f(x)} - \frac{C}{f(a)}}{x - a} = -C \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{f(x)f(a)(x - a)} = -\frac{Cf'(a)}{f^2(a)}$$

   ■

5. Если $g(a) \neq 0$, то $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ дифференцируема в точке a, причём $h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

   Доказательство.

$$h'(x) = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

   ■

Сложная функция

Если $h(x) = g(f(x))$, то $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.
Доказательство.

$$h'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

■

Обратная функция

Если $f_1(x) = f'(x) \neq 0$, $g(f(x)) = x$, то $g'(x) = \dfrac{1}{f_1(g(x))}$.

Доказательство.

$$g'(f(a)) = \lim_{f(x) \to f(a)} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f_1(a)} = \frac{1}{f_1(g(f(a)))} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f_1(g(x))}$$

■

Метод логарифмического дифференцирования

Если $f(x) > 0$, то $(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \cdot (\ln(f(x)))'$.

$$(g(x)^{h(x)})' = g(x)^{h(x)} \cdot (h(x) \ln g(x))' = g(x)^{h(x)} \cdot \left(h'(x) \ln g(x) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)}\right)$$

Параметрически заданная функция

Если $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\varphi'(t) \neq 0$, то $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

Доказательство.

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

■

5.6.5 Таблица производных

Здесь производная берётся по переменной x.

- $(C)' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \neq 0$

  Доказательство. Пусть $h = x - a$. Пользуясь формулой бинома Ньютона, получим

$$(a^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^n - a^n + na^{n-1}h + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}h^2 + \dots}{h} =$$

$$= na^{n-1} + \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}h + \dots\right) = na^{n-1}$$

  ■

- $(f^n(x))' = nf'(x)f^{n-1}(x),\ n \neq 0$
- $(|x|)' = \operatorname{sgn} x$
- $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

  Доказательство.
  $$(\ln|x|)' = (\ln\sqrt{x^2})' = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2}}\cdot 2x = \frac{1}{x}$$
  ■
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a,\ a > 0$
- $(a^{f(x)})' = a^x \cdot \ln a \cdot f'(x),\ a > 0$
- $(\sin x)' = \cos x$

  Доказательство.
  $$\sin a = \lim_{x\to a}\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = \cos a$$
  ■
- $(\cos x)' = -\sin x$

  Доказательство.
  $$(\cos x)' = (\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right))' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$
  ■
- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

  Доказательство.
  $$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
  ■
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

  Доказательство.
  $$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$
  ■
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

  Доказательство.
  $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
  ■
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

  Доказательство.
  $$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
  ■

- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

  Доказательство.
$$(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2 \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \operatorname{arctg} x} = \frac{1}{1+x^2}$$

  ■

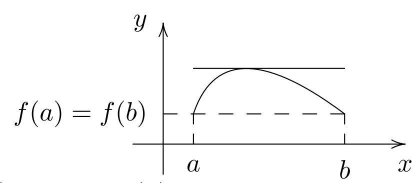
- $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

  Доказательство.
$$(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

  ■

5.6.6 Теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема 5.6.1 (Ролля). *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, причём $f(a) = f(b)$, то* $\exists c \in (a;b)\colon f'(c) = 0$.



Доказательство. Если $f(x) = f(a)$, то в качестве точки c можно взять любую точку из $(a;b)$.

Пусть $f(x)$ не является константой на $[a;b]$, тогда по свойству 2 непрерывной функции $\exists c \in (a;b)\colon f(c) = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ или $f(c) = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$. Для определённости предположим, что

$$f(c) = \inf_{x\in[a;b]} f(x) \Leftrightarrow \forall x \in [a;b]\ f(x) - f(c) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0, & x < c \\ \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0, & x > c \end{cases}$$

$f(x)$ дифференцируема в точке c, тогда $\exists f'(c) = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$.

$$\lim_{x\to c-0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0,\ \lim_{x\to c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0 \Rightarrow f'(c) = 0$$

Доказательство в случае $f(c) = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ аналогично. ■

Теорема 5.6.2 (Коши о среднем значении). *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a;b]$, дифференцируемы на $(a;b)$, $g(a) \neq g(b)$, то*

$$\exists c \in (a;b)\colon \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Пусть

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$$

$F(x)$ дифференцируема на $(a;b)$, $F(a) = F(b) = f(a)$, тогда по теореме Ролля

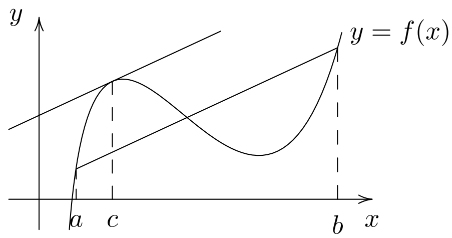
$$\exists c \in (a;b)\colon 0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

■

Полагая $g(x) = x$, получим **формулу конечных приращений**:

Теорема 5.6.3 (Лагранжа о среднем значении). *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, то*

$$\exists c \in (a;b)\colon f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$



5.6.7 Производные и дифференциалы высших порядков

Производная произвольного порядка определяется рекуррентно:

$$f^{(0)}(x)=f(x),\ f^{(1)}(x)=f'(x), f^{(2)}(x)=f''(x)\ f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)}(x))'\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Аналогично определяется дифференциал произвольного порядка:

$$d^0f(x)=f(x),\ df(x)=f'(x)dx,\ d^2f(x)=f''(x)dx^2,\ d^nf(x)=f^{(n)}(x)dx^n\ \forall n\in\mathbb{N}$$

5.6.8 Формула Тейлора

Теорема 5.6.4 (формула Тейлора). *Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности $U(a)$ имеет все производные до $n+1$-го порядка включительно, то*

$$\forall x\in U(a)\ f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x-a)^k}{k!}+R(x),\ R(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\Theta(x-a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ \Theta\in(0;1)$$

$R(x)$ называется **остаточным членом** в форме Лагранжа и используется для оценки ошибки. Также его можно представить в форме Пеано — $R(x)=o((x-a)^n)$ — которая используется при вычислении пределов.

Подставив $a=0$ в формулу Тейлора, получим **формулу Маклорена**:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}x^k}{k!}+R(x),\ R(x)=\frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ \Theta\in(0;1)$$

Разложения некоторых функций в ряд Маклорена

- $f(x)=e^x,\ f^{(n)}(x)=e^x,\ f(n)(0)=1$

$$\forall n\in\mathbb{N}\ f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R(x),\ R(x)=\frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$|R(x)|\leqslant e^{\max(0,x)}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\Rightarrow\begin{cases}|R(x)|\leqslant\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, x<0\\ |R(x)|\leqslant 3^x\cdot\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, x>0\end{cases}$$

- $f(x)=\sin x,\ f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right),\ f^{(n)}(0)=\sin\frac{\pi}{2}n=\begin{cases}0,\ n\ \vdots\ 2\\ 1,\ \exists k\in\mathbb{Z}\colon n=4k+1\\ -1,\ \exists k\in\mathbb{Z}\colon n=4k+3\end{cases}$

$$\forall n\in\mathbb{N}\ f(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R(x),\ R(x)=\frac{\sin\left(\Theta x+\frac{\pi}{2}(2n+1)\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$|R(x)|\leqslant\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- $f(x) = \cos x, f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), \; f^{(n)}(0) = \cos\frac{\pi}{2}n = \begin{cases} 0, \; n \not\vdots\, 2 \\ 1, \; \exists k \in \mathbb{Z}\colon n = 4k \\ -1, \; \exists k \in \mathbb{Z}\colon n = 4k+2 \end{cases}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \; f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!} + R(x), \; R(x) = \frac{\cos(\Theta x + \pi n)}{(2n)!}x^{2n}$$

$$|R(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$

- $f(x) = \ln(1+x), \; f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \; f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

$$\forall n \in \mathbb{N} \; f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R(x), x \in (-1;1], \; R(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\Theta x)^{n+1}}$$

Для вычисления $\ln a$, $a \neq -1$, можно воспользоваться формулой

$$\forall n \in \mathbb{N} \; \ln\frac{1+x_0}{1-x_0} = \ln(1+x_0) - \ln(1-x_0) = 2\left(x_0 + \frac{x_0^3}{3} + \frac{x_0^5}{5} + \ldots\right)$$

$$a = \frac{1+x_0}{1-x_0} \Leftrightarrow a - ax_0 = 1 + x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{a-1}{a+1}$$

- $f(x) = (1+x)^\alpha, \; f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \; f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \; f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^n}{n!} + R(x), |x| < 1,$$

$$R(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)(1+\Theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

5.6.9 Правило Лопиталя

Теорема 5.6.5 (правило Лопиталя). *Если*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *или* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$
2. $g'(x) \neq 0$
3. $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в окрестности точки a, то для случая $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ можно провести следующее доказательство:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \; |\text{По теореме Коши}| = \lim_{x\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} =$$

$$|c \in (x;a) \text{ или } c \in (a;x)| = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Полное доказательство правила Лопиталя слишком сложно, поэтому здесь не приводится.

5.7 Исследование функции

5.7.1 Локальный экстремум функции

Теорема 5.7.1 (критерий монотонности функции). *Если функция $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$, то она не убывает (не возрастает) на $(a;b) \Leftrightarrow \forall x \in (a;b)$ $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$.*

Доказательство.

1. $\Rightarrow$. Пусть $f(x)$ не убывает на $(a;b)$, $x_1, x_2 \in (a;b)$.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geqslant 0 \Rightarrow \lim_{x_2\to x_1}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geqslant 0 \Leftrightarrow f'(x_1) \geqslant 0$$

   Доказательство в случае невозрастания $f(x)$ аналогично.

2. $\Leftarrow$. Пусть $\forall x \in (a;b)$ $f'(x) \geqslant 0$, $a < x_1 < x_2 < b$. По теореме Лагранжа

$$\exists x_3 \in (x_1;x_2)\colon f(x_2)-f(x_1) = f'(x_3)(x_2-x_1)$$

   $f'(x_3)(x_2-x_1) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x)$ не убывает на $(a;b)$.

   Доказательство в случае $f'(x) \leqslant 0$ аналогично.

■

Точка x_0 называется **точкой локального минимума функции** $f(x)$, если существует проколотая окрестность $\breve{U}(x_0)\colon \forall x \in \breve{U}(x_0)$ $f(x) > f(x_0)$.

Точка x_0 называется **точкой локального максимума функции** $f(x)$, если существует проколотая окрестность $\breve{U}(x_0)\colon \forall x \in \breve{U}(x_0)$ $f(x) < f(x_0)$.

Точки локального минимума и максимума называются **точками локального экстремума**.

Теорема 5.7.2 (свойство локального экстремума). *Если x_0 — точка локального экстремума функции $f(x)$, то $\nexists f'(x_0)$ или $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть x_0 — точка локального минимума, $\exists f'(x_0)$, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0, x < x_0 \\ \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0, x > x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$$

Доказательство для локального максимума аналогично. ■

Точка, в которой производная функции не существует или равна нулю, называется **критической**.

Существуют следующие признаки локального экстремума:

1. Если

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0\ (\geqslant 0),\quad \lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0\ (\leqslant 0)$$

   то x_0 — точка локального минимума (максимума).

   Доказательство. Пусть

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0 \lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$$

   ■

2. Если $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$, то

   - x_0 — точка локального максимума при $f^{(2n)}(x_0) < 0$;
   - x_0 — точка локального минимума при $f^{(2n)}(x_0) > 0$;
   - x_0 не является точкой локального экстремума при $f^{(2n)}(x_0) = 0$, $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$.

   Доказательство.

- Пусть $f^{(2n)}(x_0) < 0$. По формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n} + o((x - x_0)^{2n}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n} + o((x - x_0)^{2n}) < 0$$

Тогда x_0 — точка локального максимума.

- Случай при $f^{(2n)}(x_0) > 0$ доказывается аналогично.
- Пусть $f^{(2n)}(x_0) = 0$, $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$. По формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n} + \frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!}(x - x_0)^{2n+1} + o((x - x_0)^{2n+1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!}(x - x_0)^{2n+1} + o((x - x_0)^{2n+1})$$

Знак $f(x) - f(x_0)$ зависит от знака $x - x_0$, поэтому в точке x_0 не может быть локального экстремума.

■

5.7.2 Наименьшее и наибольшее значения функции

Минимальное и максимальное значения функции на некотором отрезке не всегда находятся в точках экстремума. Для того, чтобы найти эти значения, необходимо вычислить значения функции в критических и граничных точках и выбрать среди них наименьшее и наибольшее.

5.7.3 Выпуклость функции

5.7.4 Асимптоты

5.8 Функции нескольких переменных

Функцией от n переменных называется функция $f\colon D \to E$, где $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}$, и обозначается $f(\overline{x})$, или $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Расстоянием между точками $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ называется величина

$$\rho(\overline{a}, \overline{b}) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n}(a_i - b_i)^2}$$

5.8.1 Предел функции нескольких переменных

Число a называется **пределом функции $f(\overline{x})$ в точке** $\overline{x}_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon (\forall \overline{x}\colon \rho(\overline{x}, \overline{x_0}) < \delta)\ |f(\overline{x}) - a| < \varepsilon$$

Для вычисления предела функции двух переменных удобно перейти в полярные координаты, трёх переменных — в сферические.

5.8.2 Непрерывность функции нескольких переменных

Функция $f(\overline{x})$ называется **непрерывной в точке** x_0, если $\lim_{\rho(\overline{x}, \overline{x_0}) \to 0} f(\overline{x}) = f(\overline{x_0})$.

Функция $f(\overline{x})$ называется **непрерывной на множестве**, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

5.8.3 Дифференцируемость функции нескольких переменных

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется **дифференцируемой в точке** $\overline{x_0} = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$, если

$$\exists (a_1, \ldots, a_n)\colon \forall \Delta\overline{x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)\ f(\overline{x_0} + \Delta\overline{x}) - f(\overline{x_0}) = a_1\Delta x_1 + \ldots + a_n\Delta x_n + o(\rho(\overline{x_0} + \Delta\overline{x}, \overline{x_0}))$$

Матрица $(a_1, \ldots, a_n)$ называется **производной**.

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $\overline{x_0} = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$, $\Delta\overline{x} = (0, \ldots, 0, \Delta x_k, 0, \ldots, 0)$, тогда

$$\rho(\overline{x_0} + \Delta\overline{x}, \overline{x_0}) = |\Delta x_k|,\ f(\overline{x_0} + \Delta\overline{x}) - f(\overline{x_0}) = a_k\Delta x_k + o(|\Delta x_k|)$$

Это означает, что функция $g(x) = f(x_{10}, \ldots, x_{k-1\,0}, x_k, x_{k+1\,0}, \ldots, x_{n0})$ дифференцируема в точке x_{k0} и $a_k = g'(x_{k0})$. $g(x)$ называется **частной производной функции** $f(\overline{x})$ и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, или $f'_{x_k}(\overline{x})$. Т. о., производная матрица функции $f(\overline{x})$ имеет вид $(f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_n})$.

Следует обратить внимание, что обозначение $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ следует понимать как цельный символ, а не как отношение некоторых величин. Например, $\dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial t} \neq \dfrac{\partial f}{\partial t}$.

Существование частных производных функции в некоторой точке не является достаточным условием дифференцируемости этой функции в данной точке. Например, функция $f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy = 0 \\ 1, & xy \neq 0 \end{cases}$ имеет частные производные в точке $(0, 0)$: $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, — однако не является дифференцируемой в этой точке, т. к., очевидно, терпит в ней разрыв.

Частная производная $f_1(x_1, \ldots, x_n) = f'_{x_k}$ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ также является функцией. Частная производная $f'_{1\,x_l}$ называется **частной производной функции** $f(\overline{x})$ **второго порядка** и обозначается $f''_{x_k x_l} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}$. При этом, если $k \neq l$, то такая производная называется **смешанной**. Частные производные большего порядка определяются по индукции.

Теорема 5.8.1 (Шварца). *Пусть дана функция $f(x_1, \ldots, x_n)$. Если $f''_{x_i x_j}$ и $f''_{x_j x_i}$ непрерывны, то $f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}$.*

Дифференциалом функции $f(\overline{x})$ **в точке** $\overline{x_0}$ называется величина $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(\overline{x_0})dx_k$, являющаяся линейной частью приращения функции и обозначаемая $df(\overline{x_0})$. По аналогии с частными производными произвольного порядка вводятся дифференциалы произвольного порядка.

Формулу Тейлора можно обобщить на случай нескольких переменных:

$$f(\overline{x}) - f(\overline{x_0}) = df(\overline{x_0}) + \frac{d^2 f(\overline{x_0})}{2!} + \frac{d^3 f(\overline{x_0})}{3!} + \ldots + \frac{d^n f(\overline{x_0})}{n!} + o(\rho(\overline{x}, \overline{x_0}))$$

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $\overline{x_0}$, $\overline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — единичный вектор. **Производной функции** $f(\overline{x})$ **по направлению** $\overline{e}$ называется величина

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{e}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot e_i$$

Градиентом функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, дифференцируемой в точке $\overline{x_0}$, называется вектор $\operatorname{grad} f = (f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n})$.

5.8.4 Экстремумы функции нескольких переменных

Точка $\overline{x_0} = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ называется **точкой локального минимума функции** $f(\overline{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, если существует проколотая окрестность $\breve{U}(\overline{x_0})\colon \forall \overline{x} \in \breve{U}(\overline{x_0})\ f(\overline{x}) > f(\overline{x_0})$.

Точка $\overline{x_0} = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ называется **точкой локального максимума функции** $f(\overline{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, если существует проколотая окрестность $\breve{U}(\overline{x_0})\colon \forall \overline{x} \in \breve{U}(\overline{x_0})\ f(\overline{x}) < f(\overline{x_0})$.

Точки локального минимума и максимума называются **точками локального экстремума**.

Теорема 5.8.2 (свойство локального экстремума). *В точке локального экстремума частные производные функции равны нулю или не существуют.*

Доказательство. Пусть $\overline{x_0} = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ — точка локального экстремума функции $f(\overline{x})$, дифференцируемой в точке $\overline{x_0}$. Рассмотрим $g(x) = f(x_{10}, \ldots, x_{k-1\,0}, x, x_{k+1\,0}, \ldots, x_{n0})$. $\overline{x_0}$ — точка экстремума $f(\overline{x})$, тогда x_{k0} — точка экстремума $g(x)$, значит, $g'(x_{k0}) = 0$ или не существует. Тогда $f'_{x_k}(\overline{x_0}) = 0$ или не существует. ■

Теорема 5.8.3 (признак локального экстремума функции двух переменных). *Пусть дана функция $f(x, y)$. Если*

- $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$
- $(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 - f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$

то (x_0, y_0) — точка локального экстремума $f(x, y)$.

1. *(x_0, y_0) — точка локального минимума, если $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ или $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$.*
2. *(x_0, y_0) — точка локального максимума, если $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ или $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$.*

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0,y_0) + o(\rho^2((x,y),(x_0,y_0))) - f(x_0,y_0) =$$

$$= \frac{1}{2} d^2 f(x_0,y_0) + o(\rho^2((x,y),(x_0,y_0)))$$

значит, $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ сохраняет знак, если $d^2 f(x_0, y_0)$ сохраняет знак.

$$d^2 f(x_0,y_0) = f''_{xx}(x_0,y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0,y_0)dy^2 =$$

$$= \left(f''_{xx}(x_0,y_0) + 2f''_{xy}(x_0,y_0)\frac{dy}{dx} + f''_{yy}(x_0,y_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right) dx^2$$

Т. о., (x_0, y_0) — точка локального экстремума $f(x, y)$, если $d^2 f(x_0, y_0)$ сохраняет знак, т. е. при

$$(f''_{xy}(x_0,y_0))^2 - f''_{xx}(x_0,y_0) f''_{yy}(x_0,y_0) < 0$$

$$(f''_{xy}(x_0,y_0))^2 - f''_{xx}(x_0,y_0) f''_{yy}(x_0,y_0) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f''_{xx}(x_0,y_0) f''_{yy}(x_0,y_0) > (f''_{xy}(x_0,y_0))^2 \Rightarrow f''_{xx}(x_0,y_0) f''_{yy}(x_0,y_0) > 0$$

значит, $f''_{xx}(x_0, y_0)$ и $f''_{yy}(x_0, y_0)$ одного знака.

1. Если $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ или $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow d^2 f(x_0, y_0) > 0$, тогда (x_0, y_0) — точка локального минимума.
2. Если $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ или $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow d^2 f(x_0, y_0) < 0$, тогда (x_0, y_0) — точка локального максимума.

■

Теорема 5.8.4 (признак локального экстремума). *Пусть дана функция $f(\overline{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Точка $\overline{x_0} = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ — точка локального экстремума $f(\overline{x})$, если*

1. $f'_{x_1}(\overline{x_0}) = \ldots = f'_{x_n}(\overline{x_0}) = 0$
2. $\sum\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_i x_j}(\overline{x_0}) dx_i dx_j$ *сохраняет знак.*

1. *$\overline{x_0}$ — точка локального минимума, если* $\sum\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_i x_j}(\overline{x_0}) dx_i dx_j > 0$.
2. *$\overline{x_0}$ — точка локального максимума, если* $\sum\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_i x_j}(\overline{x_0}) dx_i dx_j < 0$.

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(\overline{x}) - f(\overline{x_0}) = f(\overline{x_0}) + df(\overline{x_0}) + \frac{d^2 f(\overline{x_0})}{2!} + o(\rho^2(\overline{x}, \overline{x_0})) - f(\overline{x_0}) = \frac{d^2 f(\overline{x_0})}{2!} + o(\rho^2(\overline{x}, \overline{x_0}))$$

значит, $f(\overline{x}) - f(\overline{x_0})$ сохраняет знак, если $d^2 f(\overline{x_0})$ сохраняет знак.

$$d^2 f(\overline{x_0}) = \sum_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_i x_j}(\overline{x_0}) dx_i dx_j$$

1. Если $\sum\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_i x_j}(\overline{x_0}) dx_i dx_j > 0 \Leftrightarrow d^2 f(\overline{x_0}) > 0$, то $\overline{x_0}$ — точка локального минимума.
2. Если $\sum\limits_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} f''_{x_i x_j}(\overline{x_0}) dx_i dx_j < 0 \Leftrightarrow d^2 f(\overline{x_0}) < 0$, то $\overline{x_0}$ — точка локального максимума.

■

При практическом применении теоремы 5.8.4 полезен критерий Сильвестра.

Метод наименьших квадратов

Пусть даны точки $x_1, \ldots, x_n$ и требуется найти аппроксимирующую прямую для значений некоторой функции $f(x)$ в этих точках. Уравнение прямой — $y = Ax + B$. Найдём точку, в которой сумма

$$S(A, B) = \sum_{i=1}^{n} (Ax_i + B - f(x_i))^2$$

принимает наименьшее значение.

$$S'_A = \sum 2x_i(Ax_i + B - f(x_i))$$

$$S'_B = \sum 2(Ax_i + B - f(x_i))$$

$$\begin{cases} S'_A = 0 \\ S'_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\sum x_i^2 + B\sum x_i = \sum x_i f(x_i) \\ A\sum x_i + Bn = \sum f(x_i) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2\right) A = n\sum x_i f(x_i) - \sum x_i \sum f(x_i) \\ Bn = \sum f(x_i) - A\sum x_i \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{n\sum x_i f(x_i) - \sum x_i \sum f(x_i)}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \\ B = \dfrac{\sum x_i^2 \sum f(x_i) - \sum x_i \sum x_i f(x_i)}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \end{cases}$$

Найденные значения A и B — искомые коэффициенты в уравнении аппроксимирующей прямой. Для оценки точности аппроксимации можно найти коэффициент корреляции по формуле

$$r = \sqrt{\frac{\sum(f(x_i) - \tilde{y})^2 - \sum(f(x_i) - \tilde{y}_i)^2}{\sum(f(x_i) - \tilde{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sum(f(x_i) - \tilde{y}_i)^2}{\sum(f(x_i) - \tilde{y})^2}}$$

где $\tilde{y} = \frac{1}{n}\sum f(x_i)$, $\tilde{y}_i = Ax_i + B$, а значение коэффициента r тем ближе к единице, чем точнее аппроксимация.

Метод множителей Лагранжа

Пусть дана функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, переменные которой удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Для нахождения её экстремумов (называемых **условными**) введём функцию Лагранжа

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_n)$$

и исследуем её. Её экстремумы являются условными экстремумами функции f.

5.9 Функции двух и трёх переменных

5.9.1 Геометрическая интерпретация частных производных функции двух переменных

Пусть функция $f(x, y)$ имеет частные производные в точке (x_0, y_0). Пересечением плоскости $x = x_0$ с поверхностью $z = f(x, y)$ является кривая $z = f(x_0, y)$. Т. о., значение $f'_y(x_0, y_0)$ равно тангенсу угла между касательной к кривой $z = f(x_0, y)$ в точке (x_0, y_0) и положительным направлением оси Oy, а направляющий вектор этой касательной имеет координаты $(0, 1, f'_y(x_0, y_0))$.

Аналогичный геометрический смысл имеет частная производная f'_x.

5.9.2 Уравнение касательной плоскости к поверхности

Поверхность, заданная явно

Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$. Проведём такую плоскость через точку $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, что векторы $(0, 1, f'_y(x_0, y_0))$ и $(1, 0, f'_x(x_0, y_0))$ лежат в ней. Эта плоскость называется **касательной**. Найдём вектор (A, B, C), перпендикулярный этим векторам, а значит, и проведённой плоскости:

$$\begin{cases} B + Cf'_y(x_0, y_0) = 0 \\ A + Cf'_x(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -Cf'_x(x_0, y_0) \\ B = -Cf'_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

Вектор $(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$ перпендикулярен проведённой плоскости, тогда её уравнение

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0 \Leftrightarrow z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{5.2}$$

Поверхность, заданная параметрически

Пусть поверхность задана функцией $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, а в точке (x_0, y_0, z_0) к ней проведена касательная плоскость, причём $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$. Тогда $\exists u_0, v_0 \colon x(u_0, v_0) = x_0, y(u_0, v_0) = y_0$.

Имеем явное и параметрическое задание одной и той же поверхности: $z(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$. Рассматривая производные матрицы этих функций, получим:

$$\begin{Vmatrix} z'_u & z'_v \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} z'_x & z'_y \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z'_u = z'_x x'_u + z'_y y'_u \\ z'_v = z'_x x'_v + z'_y y'_v \end{cases}$$

Решая систему относительно z'_x и z'_y, получим

$$z'_x(x_0, y_0) = \frac{\left.\frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}{\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}} = -\frac{\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}{\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}},\; z'_y(x_0, y_0) = \frac{\left.\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}{\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}} = -\frac{\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}{\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}$$

Подставим полученные значения в уравнение (5.2) и получим уравнение касательной плоскости:

$$z = z_0 - \frac{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\Big|_{(u_0,v_0)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big|_{(u_0,v_0)}}(x - x_0) - \frac{\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\Big|_{(u_0,v_0)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big|_{(u_0,v_0)}}(y - y_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(x - x_0) + \left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(y - y_0) + \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(z - z_0)$$

5.10 Вектор-функции

Вектор-функцией размерности m называется функция $f\colon D \to E$, где $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^m$, и обозначается $f(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), \ldots, f_m(\overline{x}))$. $f_1, \ldots, f_m$ называются **координатными функциями**.

5.10.1 Дифференцируемость вектор-функции

Вектор-функция $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}), \ldots, f_m(\overline{x}))$ называется **дифференцируемой в точке** $\overline{x_0} = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$, если

$$\exists A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} : \forall \Delta\overline{x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \begin{Vmatrix} f_1(\overline{x_0} + \Delta\overline{x}) - f_1(\overline{x_0}) \\ f_2(\overline{x_0} + \Delta\overline{x}) - f_2(\overline{x_0}) \\ \vdots \\ f_m(\overline{x_0} + \Delta\overline{x}) - f_m(\overline{x_0}) \end{Vmatrix} = A \cdot \begin{Vmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{Vmatrix},$$

$$\lim_{\rho(\overline{x_0} + \Delta\overline{x}, \overline{x_0}) \to 0} \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_m^2}}{\rho(\overline{x_0} + \Delta\overline{x}, \overline{x_0})} = 0$$

Матрица A называется **производной матрицей**, или **матрицей Яко́би**, и состоит из значений всех частных производных всех координатных функций в данной точке:

$$A = \begin{Vmatrix} {f'_1}_{x_1}(\overline{x_0}) & {f'_1}_{x_2}(\overline{x_0}) & \cdots & {f'_1}_{x_n}(\overline{x_0}) \\ {f'_2}_{x_1}(\overline{x_0}) & {f'_2}_{x_2}(\overline{x_0}) & \cdots & {f'_2}_{x_n}(\overline{x_0}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {f'_m}_{x_1}(\overline{x_0}) & {f'_m}_{x_2}(\overline{x_0}) & \cdots & {f'_m}_{x_n}(\overline{x_0}) \end{Vmatrix}$$

Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — вектор-функция размерности n, дифференцируемая в точке $\overline{x_0}$, то **якобианом** называется определитель её производной матрицы и обозначается $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \overline{x}}\right|_{\overline{x_0}}$.

5.10.2 Суперпозиция вектор-функций

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_k)$ — m-мерная и n-мерная вектор-функции соответственно, тогда **их суперпозицией** называется вектор-функция $h(x_1, \ldots, x_k) = f(g_1(\overline{x}), \ldots, g_n(\overline{x}))$.

Теорема 5.10.1. *Если $f(\overline{x})$ и $g(\overline{x})$ дифференцируемы в точках $g(\overline{x_0})$ и $\overline{x_0}$ соответственно и имеют в этих точках производные матрицы A и B соответственно, то $h(\overline{x})$ дифференцируема в точке $\overline{x_0}$ и имеет в ней производную матрицу AB.*

Глава 6

Теория множеств

6.1 Множества

6.1.1 Мощность множеств

Множества A и B называются **равномощными (имеют одинаковую мощность)**, если существует биекция $f\colon A \to B$, иначе — **неравномощными**.

Для конечных множеств это означает, что у них одинаковое количество элементов.

Мощностью конечного множества A называется количество $|A|$ его элементов.

Множество всех подмножеств множества A обозначается

$$\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$$

Множество всех подмножеств множества A мощности k обозначается

$$\mathcal{P}_k(A) = \{x \subseteq A \mid |x| = k\}$$

Теорема 6.1.1 (Кантора). *Множества A и $\mathcal{P}(A)$ не равномощны.*

Доказательство (методом от противного). Пусть $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ — биекция. Рассмотрим множество

$$X = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \Rightarrow X \subset A \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A)$$

f — биекция, тогда $\exists b \in A\colon f(b) = X$. Возможны два случая:

1. Пусть $b \in X \Rightarrow b \in f(b) \Rightarrow b \notin X$. Противоречие.
2. Пусть $b \notin X \Rightarrow b \in f(b) \Rightarrow b \in X$. Противоречие.

В обоих случаях получили противоречие. ■

Теорема 6.1.2. *Пусть дано множество A: $|A| = n$, тогда $|\mathcal{P}_k(A)| = C_n^k$.*

Доказательство (методом математической индукции).

- *База индукции.* $n = 0$:

$$|A| = 0 \Rightarrow A = \varnothing \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\varnothing\} \Rightarrow |\mathcal{P}_0(A)| = 1 = C_0^0$$

- *Шаг индукции.* Пусть теорема верна для n. Докажем её для $n+1$. Пусть $X \subset A$, $|X| = k$, $a \in A$. Подсчитаем количество таких X. Возможны два случая:

  1. Пусть $a \notin X \Rightarrow X \subset A \setminus \{a\}$, тогда таких X C_n^k.
  2. Пусть $a \in X$, тогда таких X столько же, сколько множеств $X \setminus \{a\} \subset A \setminus \{a\}$, т. е. C_n^{k-1}.

  Тогда $|\mathcal{P}(A)| = C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

■

6.1.2 Мощность числовых множеств

Множество называется **счётным**, если оно равномощно множеству натуральных чисел. Бесконечное множество, не являющееся счётным, называется **несчётным**.

Утверждение 6.1.1. *$\mathbb{Z}$ счётно.*

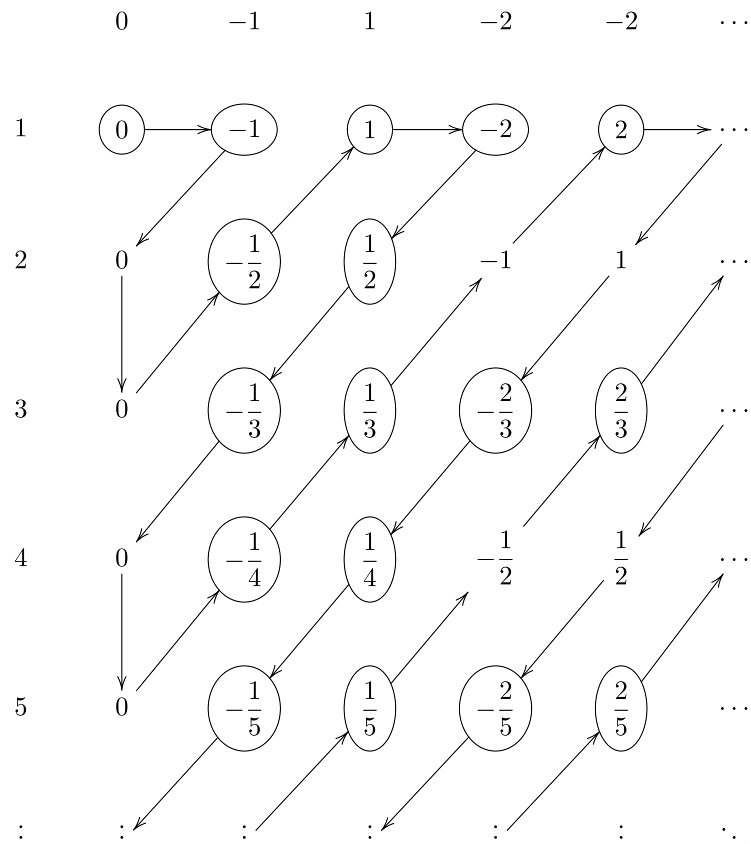
Доказательство. Построим биекцию $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$:

$$f(n) = \begin{cases} -2n-1, \ n < 0 \\ 2n, \ n \geqslant 0 \end{cases}$$

Тогда $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$. ∎

Утверждение 6.1.2. *$\mathbb{Q}$ счётно.*

Доказательство. Составим таблицу, в верхней строке которой стоят $p_i \in \mathbb{Z}$, в левом столбце — $q_i \in \mathbb{N}$, а на пересечении столбца и строки — $\dfrac{p_i}{q_i}$. Обходя таблицу в указанном порядке, будем нумеровать очередной элемент, только если он не встречался ранее:



Ясно, что таким образом можно пронумеровать все элементы $\mathbb{Q}$, причём ни один из них не будет пронумерован дважды, значит, $\mathbb{Q}$ счётно. ∎

Утверждение 6.1.3. $(0;1)$ *несчётно.*

Доказательство (методом от противного). Пусть все числа из интервала $(0;1)$ можно пронумеровать. Тогда представим каждое число в виде десятичной дроби и расположим эти дроби в соответствии с нумерацией:

1. $0{,}a_{11}a_{12}\ldots$
2. $0{,}a_{21}a_{22}\ldots$

   $\ldots$

где $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{21}, a_{22}, \ldots$ — цифры. Рассмотрим дробь $0{,}b_1b_2\ldots$, где $b_1, b_2, \ldots$ — цифры такие, что $b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, \ldots$. Такая дробь отличается от каждой из пронумерованных хотя бы в одной позиции, значит, она не пронумерована. Противоречие. ∎

Утверждение 6.1.4. $|\mathbb{R}| = |(0;1)|$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - 2,\ 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x-1} + 2,\ \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

f переводит $(0;1) \to \mathbb{R}$ и является биекцией, значит, интервал $(0;1)$ равномощен $\mathbb{R}$. $\blacksquare$
$|\mathbb{R}|$ называется **континуумом**.

Глава 7

Элементарная алгебра

7.1 Комплексные числа

Мнимой единицей называется число, квадрат которого равен -1, и обозначается i.

Комплексным называется число вида $a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$. Если $a = 0$, то такое число называется **мнимым**, или **чисто мнимым**. Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Если $z = a + bi$, то $\overline{z} = a - bi$ называется **сопряжённым** к z.

Операции над комплексными числами $z_1 = a_1 + b_1 i, z2 = a_2 + b_2 i,\ a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ осуществляются так же, как над вещественными:

- **Сложение**
$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$
- **Умножение**
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$
- **Деление**
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

7.1.1 Геометрическое представление комплексного числа

Комплексное число $a + bi$ принято изображать на координатной плоскости точкой $(a; b)$, а также радиус-вектором, соединяющим начало координат с этой точкой. Такая плоскость называется **комплексной**.

Модулем комплексного числа $z = a + bi$, или его **абсолютной величиной**, называется длина соответствующего радиус-вектора комплексной плоскости, равная

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Аргументом комплексного числа $z = a + bi$ называется угол соответствующего радиус-вектора на комплексной плоскости:

$$a = |z| \cos \operatorname{Arg} z,\ \ b = |z| \sin \operatorname{Arg} z$$

Главным аргументом называется значение $\operatorname{Arg} z \cap (-\pi; \pi]$ и обозначается $\arg z$.

7.1.2 Тригонометрическая форма комплексного числа

Тригонометрической формой комплексного числа z называется его представление в виде

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \varphi = \operatorname{Arg} z$$

При использовании тригонометрических форм операции умножения и деления комплексных чисел $z_1 = |z_1|(\cos \alpha + i \sin \alpha), z_2 = |z_2|(\cos \beta + i \sin \beta)$ упрощаются:

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)) = |z_1||z_2|(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta))}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta))$$

Теорема 7.1.1 (формула Эйлера).

$$\cos x + i\sin x = e^{ix}$$

Доказательство. Воспользуемся разложением $\cos x$, $\sin x$ и e^{ix} в ряд Маклорена:

$$\cos x + i\sin x = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \ldots = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \ldots = e^{ix}$$

■

При подстановке $x = \pi$ в формулу Эйлера (7.1.1) получим замечательное **тождество Эйлера**, связывающее пять фундаментальных математических констант:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Теорема 7.1.2 (формула Муавра). *Если* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{R}$, *то*

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Доказательство. Для $n \in \mathbb{N}$ формулу можно доказать методом математической индукции, тогда показать истинность формулы для $n \in \mathbb{Z}$ несложно. Мы же докажем формулу сразу для $n \in \mathbb{R}$, пользуясь формулой Эйлера (7.1.1):

$$z^n = |z|^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = |z|^n e^{i\varphi n} = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

■

Пользуясь формулой Муавра (7.1.2), можно извлекать корни из комплексного числа $z = |z|(\cos\varphi + + i\sin\varphi)$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n})$$

Следует не забывать, что φ определено с точностью до $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, поэтому комплексный корень имеет не одно, а n значений (что можно показать, пользуясь следствием (4.5.2)).

Предметный указатель