重积分(1)

二重积分的概念与性质

① 曲顶柱体的体积

② 平面薄片的质量

定义：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

性质：

① $\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\,d\sigma$

$= \alpha\iint_D f(x,y)\,d\sigma + \beta\iint_D g(x,y)\,d\sigma$（$\alpha,\beta$为常数）

② 可加性：D分为两个闭区域D_1与D_2，则

$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\,d$

③ 如果在D上，$f(x,y)=1$，σ为D的面积，则

$\sigma = \iint_D 1\cdot d\sigma = \iint_D d\sigma$；另外，$\iint_D k\,d\sigma = k\iint_D d\sigma = k\cdot\sigma$

④ 如果在D上，$f(x,y)\le g(x,y)$，则

$\iint_D f(x,y)\,d\sigma \le \iint_D g(x,y)\,d\sigma$

特殊地，由于$-|f(x,y)|\le f(x,y)\le |f(x,y)|$，则

$\left|\iint_D f(x,y)\,d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,d\sigma$

⑤ M、m分别为最大、最小值，则

$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\,d\sigma \le M\sigma$ (估值不等式)

⑥ 二重积分的中值定理：

设函数 $f(x,y)$ 在闭区间 D 上连续，σ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$