多元函数微分法及其应用(1)

平面点集

① 内点：$U(P)\subset E$

② 外点：$U(P)\cap E=\varnothing$

③ 边界点

④ 聚点

⑤ 开集

⑥ 闭集

⑦ 连通集

⑧ 区域(开区域)

⑨ 闭区域

⑩ 有界集

⑪ 无界集

多元函数的概念

二元函数：$z=f(x,y),\ (x,y)\in D$

多元函数：$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$

多元函数的极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{（二元函数的极限）}$$

考察函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

$\because \lim\limits_{\substack{y=x\\x\to 0}} \dfrac{x^2}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{\substack{y=2x\\x\to 0}} \dfrac{2x^2}{x^2+4x^2}=\dfrac{2}{5}$

$\therefore$ 函数在 $(0,0)$ 点极限不存在

（另法 $\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to 0}} \dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$）

沿两种不同的方式逼近，若极限不同，则该二元极限不存在；反之，该二元极限可能存在.

例5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y$$

$$=\lim_{y\to 2} y$$

$$=2$$

多元函数的连续性

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

例7. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{3}{2}$

例8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$

$=\dfrac{1}{2}$

性质1：有界性与最大值最小值定理

性质2：介值定理

性质3：一致连续性定理