向量代数与空间解析几何(3)

平面及其方程

1、平面的点法式方程

法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$ ，$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{P_0P}$

$\Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$

$\Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

例1. 过点$(2,-3,0)$，$\vec{n}=(1,-2,3)$

$1\times(x-2)+(-2)\times(x+3)+3\times z=0$

$\Rightarrow x-2y+3z-8=0$ （一般式）

法向量 $(1,-2,3)$

例2. 求过 $M_1(2,-1,4)$，$M_2(-1,3,-2)$，$M_3(0,2,3)$ 的平面方程.

法①：$\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,4,-6)$，$\overrightarrow{M_1M_3}=(-2,3,-1)$

$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

$= (14, 9, -1)$

$\therefore$ 平面方程为 $\quad 14(x-0)+9(y-2)-(z-3)=0$

$\Rightarrow \quad 14x+9y-z-15=0$

法②：平面方程的一般式：$Ax+By+Cz+D=0$

$\Rightarrow$ 将 M_1、M_2、M_3 代入得：

$$\begin{cases} 2A-B+4C+D=0 \\ -A+3B-2C+D=0 \\ 2B+3C+D=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow -\frac{14}{15}Dx-\frac{3}{5}Dy+\frac{1}{15}Dz+D=0$

$\Rightarrow 14x+9y-z-15=0$

平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$

① $D=0 \quad \Rightarrow \quad Ax+By+Cz=0$ 过原点的平面

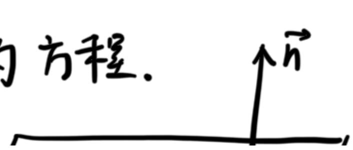
② $A=0 \quad \Rightarrow \quad By+Cz+D=0$，$\vec{n}=(0,B,C)$

（平行于 x 轴的平面）

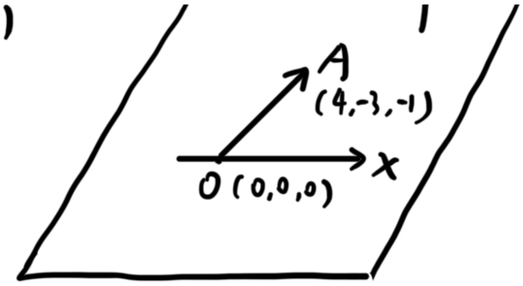
③ $A=B=0 \quad \Rightarrow \quad z=-\frac{D}{C}$，$\vec{n}=(0,0,C)$

（平行于 xoy 平面的平面）

例13. 过 x 轴、过点 $(4,-3,-1)$ 平面的方程.



$OA=(4,-3,-1)$, $i=(1,0,0)$



$\vec{n}=\vec{OA}\times\vec{i}$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -3 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(0,-1,3)$$

∴ 方程为 $-y+3z=0$

平面的截距式方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

a、b、c 依次为平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距

两平面的夹角 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$

（两平面法向量的夹角）

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|}$$

两平面的位置

(1) $\pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}$

(2) $\pi_1 \parallel \pi_2 \Rightarrow \vec{n_1}\parallel\vec{n_2}$

(3) 重合 $\Rightarrow \vec{n_1}\parallel\vec{n_2}$

(4) 斜交

例5. 求面 $x-y+2z-6=0$ 和面 $2x+y+z-5=0$ 夹角.

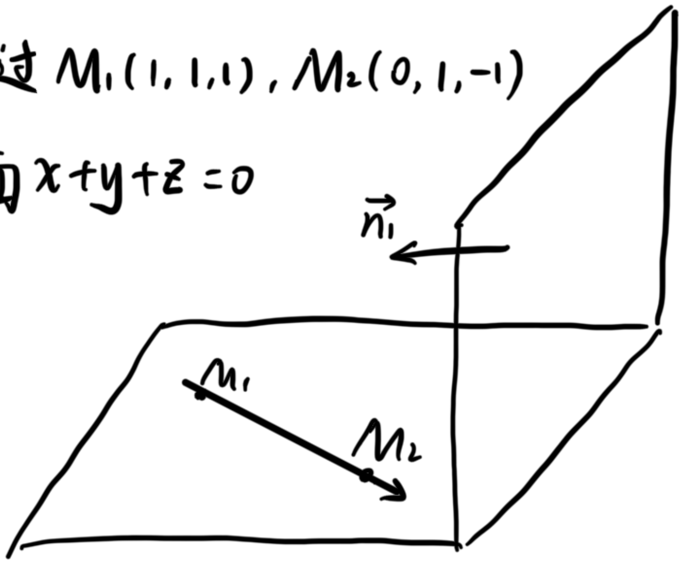
$\vec{n_1}=(1,-1,2)$, $\vec{n_2}=(2,1,1)$

$\cos\theta=\dfrac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{3}$

例6. 一平面过 $M_1(1,1,1)$, $M_2(0,1,-1)$

垂直于面 $x+y+z=0$



$\vec{n_1}=(1,1,1)$

$\overrightarrow{M_2M_1}=(1,0,2)$

$$\vec{n}=\vec{n_1}\times\overrightarrow{M_2M_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

$=(2,-1,-1)$

$\therefore$ 方程为 $2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0$

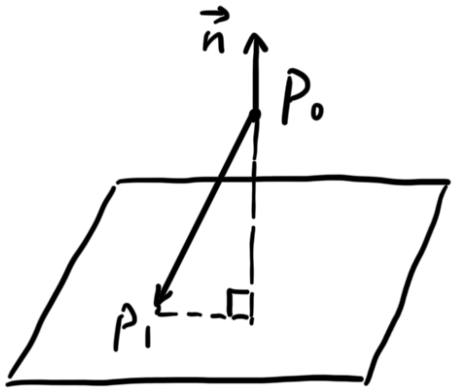
$\Rightarrow 2x-y-z=0$

例7. 求 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到面 $Ax+By+Cz+D=0$

的距离.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$



点(1, 2, 3)到面 $x+y+z=10$ 的距离.

$$d = \frac{|1+2+3-10|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$