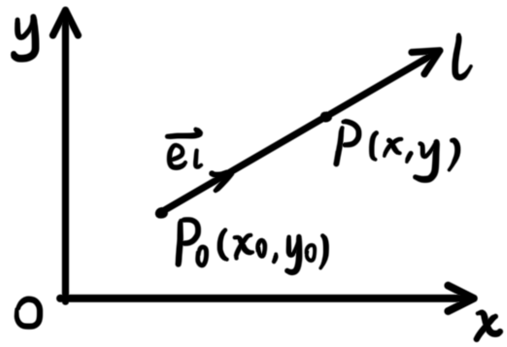
多元函数微分法及其应用(7)

方向导数与梯度



一、方向导数

射线l: $\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \end{cases}$

当P沿着l趋于P_0(即$t \to 0^+$)时的极限存在，那么称此极限为函数$f(x,y)$在点P_0沿着方向l的方向导数，记作$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$，即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta) - f(x_0,y_0)}{t}$$

① 若 $\vec{e_l} = \vec{i} = (1,0)$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0+t,y_0) - f(x_0,y_0)}{t} = f_x(x_0,y_0)$$

② 若 $\vec{e_l} = \vec{j} = (0,1)$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0,y_0+t) - f(x_0,y_0)}{t} = f_y(x_0,y_0)$$

但反之，若$\vec{e_l} = \vec{i}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$存在，则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$未必存在.

方向导数：沿某个方向函数值的变化率.

定理：如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分，

那么函数在该点沿任一方向 l 的方向导数存在，

且有 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$，

其中 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$ 是方向 l 的方向余弦.

例1. 求函数 $z=xe^{2y}$ 在 $P(1,0)$ 处沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 的方向的方向导数.

解：$\overrightarrow{PQ}=(1,-1)$，$\vec{e}_l=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = \left.e^{2y}\right|_{(1,0)} = 1$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} = \left.2xe^{2y}\right|_{(1,0)} = 2$$

$$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,0)} = 1\times\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\times\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

① 计算偏导数

② 标准化方向向量

③ 代入公式计算

二、梯度

定义：$z=f(x,y)$，$P_0(x_0,y_0)$，

则 $f_x(x_0,y_0)\vec{i} + f_y(x_0,y_0)\vec{j} = \mathrm{grad} f(x_0,y_0)$.

（梯度是向量）

(梯度是向量)

如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 可微分，$\vec{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是与方向 l 同向的单位向量，那么

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

$$= (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta)$$

$$= \mathrm{grad}\, f(x_0,y_0) \cdot \vec{e_l}$$

$$= |\mathrm{grad}\, f(x_0,y_0)| \cos\theta$$

其中 $\theta = (\mathrm{grad}\, f(x_0,y_0) \widehat{,} \vec{e_l})$

由这一关系可知：

① 梯度方向：在 P_0 点，$z=f(x,y)$ 增加最快的方向，方向导数最大，$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = |\mathrm{grad}\, f(x_0,y_0)|$；

② 梯度反方向：在 P_0 点，$z=f(x,y)$ 减少最快的方向，方向导数最小，$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = -|\mathrm{grad}\, f(x_0,y_0)|$；

③ 与梯度方向正交($90°$)：函数的变化率为零，$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = |\mathrm{grad}\, f(x_0,y_0)|\cos\theta = 0$.

$f(x,y)=C$ 为函数 $z=f(x,y)$ 的等值线.

若 f_x, f_y 不同时为零，则等值线上任一点 $P(x_0,y_0)$ 处的一个单位法向量为 $\vec{n}=\dfrac{\nabla f(x_0,y_0)}{|\nabla f(x_0,y_0)|}$

又 ∵ $|\nabla f(x_0,y_0)| = \dfrac{\partial f}{\partial n}$

∴ $\nabla f(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial n}\vec{n}$

$\mathrm{grad}\, f(x_0,y_0,z_0) = \nabla f(x_0,y_0,z_0)$

$= f_x(x_0,y_0,z_0)\vec{i} + f_y(x_0,y_0,z_0)\vec{j} + f_z(x_0,y_0,z_0)\vec{k}$

（三维向量）

$f(x,y,z)=C$ 为函数 $f(x,y,z)$ 的等值面.

其中 $f(x,y,z)$ 在一点 (x_0,y_0,z_0) 的梯度 $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ 的方向就是等值面 $f(x,y,z)=C$ 在这点的法向量 $\vec{n}$，而梯度的模 $|\nabla f(x_0,y_0,z_0)|$ 就是函数沿这个法向量的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial n}$.

例3. 求 $\mathrm{grad}\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

解：$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}$

∴ $\mathrm{grad}\dfrac{1}{x^2+y^2} = -\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}\vec{i} - \dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}\vec{j}$

例4. 设 $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，点 $P_0(1,1)$.

(1) $\nabla f(x,y) = x\vec{i}+y\vec{j}$

$\therefore \nabla f(1,1) = \vec{i}+\vec{j} = (1,1)$

$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{(1,1)} = |\nabla f(1,1)| = \sqrt{2}$

(2) $\vec{n_1} = -\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

$\left.\frac{\partial f}{\partial n_1}\right|_{(1,1)} = -|\nabla f(1,1)| = -\sqrt{2}$

(3) $\vec{n_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

或 $\vec{n_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

例5. $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$，点 $P_0(1,1,0)$.

$\nabla f(x,y,z) = (3x^2-y^2)\vec{i}-2xy\vec{j}-\vec{k}$

$\Rightarrow \nabla f(1,1,0) = 2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$

沿 $\nabla f(1,1,0)$ 处增加最快，沿 $-\nabla f(1,1,0)$ 减少最快

变化率分别为 $|\nabla f(1,1,0)|=3$，$-|\nabla f(1,1,0)|=-3$

三元函数 $f(x,y,z)$ 的梯度 ∇f 的方向即为等

值面 $f(x,y,z)=C$ 在该点法向量 $\vec{n}$ 的方向

曲面 $f(x,y,z)=C$ 在这点法向量 $\vec{n}$ 的方向.

例6. 求曲面 $x^2+y^2+z=9$ 在点 $P_0(1,2,4)$ 的切平面和法线方程.

解：设 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z$

$$\nabla f\big|_{P_0}=(2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k})\big|_{(1,2,4)}=2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$$

$\therefore\ \vec{n}=(2,4,1)$

$\therefore$ 切平面方程：$2x+4y+z+D=0$ 代入 P_0 得：$D=-14$

$$\Rightarrow 2x+4y+z-14=0$$

法线方程：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-4}{1}$

或 $x=1+2t,\ y=2+4t,\ z=4+t\ (t\in R)$