向量代数与空间解析几何(5)

曲面研究的基本问题

球心 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径 R，

球面方程为 $|M_0M| = R$

$\Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$

球体方程为 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \le R^2$

特殊地，若 $M_0(0,0,0)$，则球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$

例2. $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5$

表示球心 $M_0(1,-2,0)$，半径 $R=5$ 的球面

旋转曲面

yOz 坐标轴一曲线 C: $f(y,z)=0$

设 $M_1(0, y_1, z_1)$ 为 C 上任一点，

则 $f(y_1, z_1) = 0$ ①

当 C 绕 z 轴旋转时，M_1 旋转到 $M(x,y,z)$，

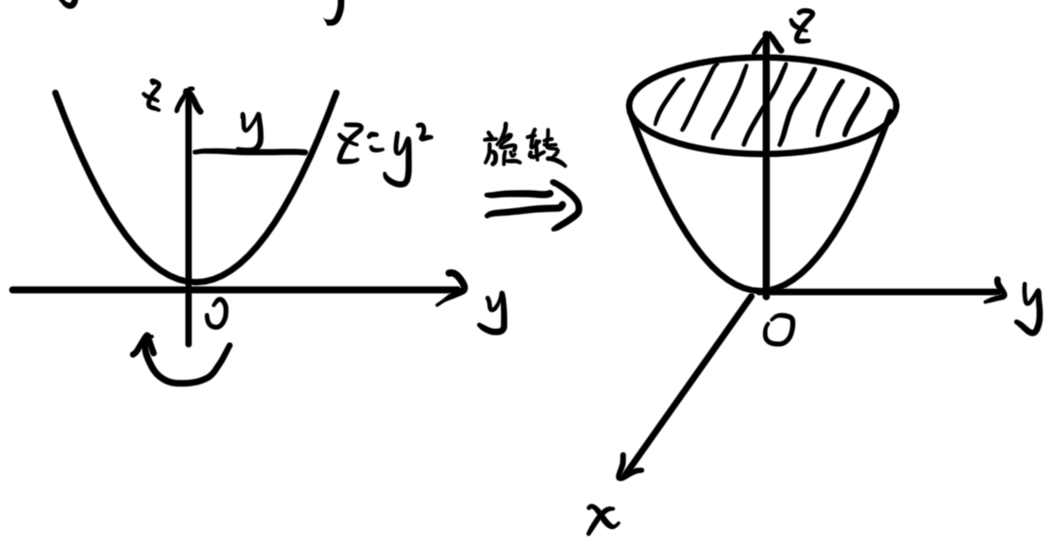
则 $z_1 = z$

∴ M到z轴的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$

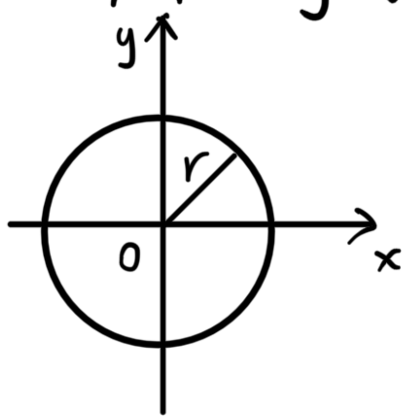
⇒ 将y_1, z_1代入①得：$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$

同理，C绕y轴旋转：$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$

例如，$z=y^2$ 绕z轴旋转：



投影到 xOy 面上：



⇒ $r^2=x^2+y^2$

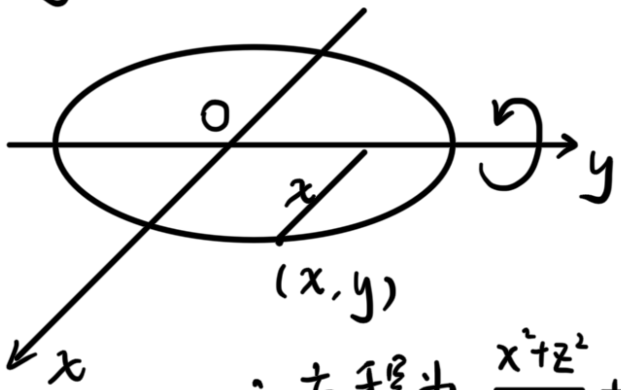
用 x^2+y^2 代替旋转前的横坐标的平方 y^2

⇒ 旋转后方程为 $z=x^2+y^2$

（绕z轴旋转z不动）

再如，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕y轴旋转

y不动，$x^2+z^2=r^2 \Rightarrow x^2$



∴方程为 $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

例4. zOx面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

分别绕z轴与x轴旋转一周.

绕z轴：$x^2 \Rightarrow x^2+y^2$

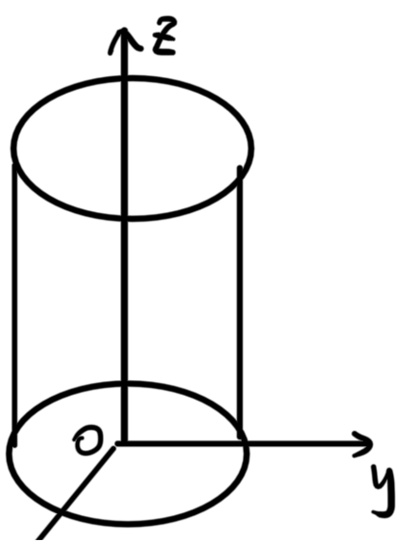
$$\therefore \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

绕x轴：$z^2 = z^2+y^2$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2+y^2}{c^2}=1$$

柱面

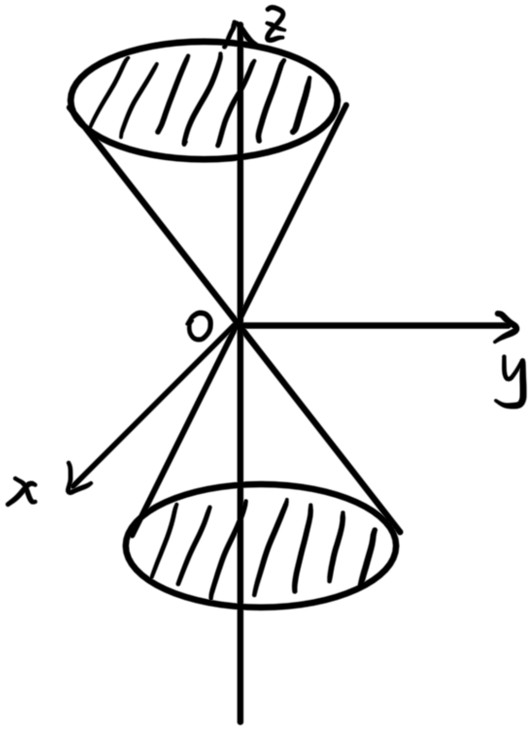
$x^2+y^2=R^2$



一般地，直线 L 沿定曲线 C 平行移动形成的轨迹叫做柱面.

二次曲面

(1) 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$



(2) 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(3) 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(4) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(5) 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

(6) 双曲抛物面（马鞍面）

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

(7) 椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(8) 双曲柱面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

(9) 抛物柱面

$$x^2=ay$$