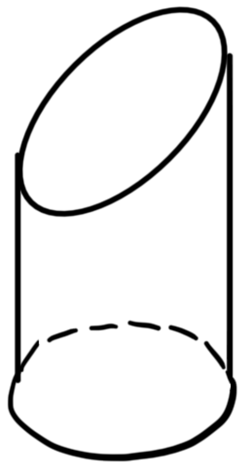
向量代数与空间解析几何(6)

空间曲线的一般方程

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

例1. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$



例2. $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} & ① \\ (x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2 & ② \end{cases}$

① 可化为 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (z>0)$

图像是上半球面

② 底面的圆心$(\frac{a}{2},0)$，半径$\frac{a}{2}$，圆柱面

空间曲线的参数方程

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$

$z = z(t)$

例3. $x^2+y^2=a^2$（圆柱面）以角速度ω绕z轴旋转，同时以线速度v沿平行于z轴正方向上升.

解：令$t=0$时，$A(a,0,0)$

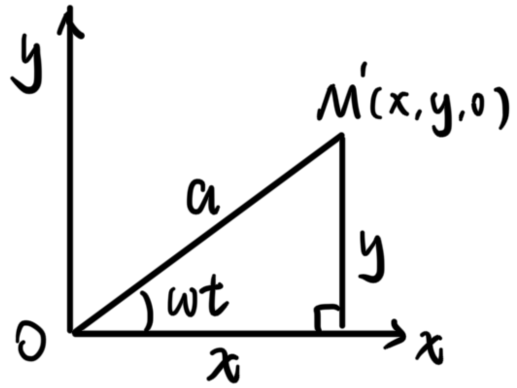
经过时间t，A运动到$M(x,y,z)$

记M在xOy面上投影$M'(x,y,0)$

$x = |OM'|\cos\omega t = a\cos\omega t$

$y = |OM'|\sin\omega t = a\sin\omega t$

$z = vt$



故M构成螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases}$$

空间曲线在坐标面上的投影

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

在 xOy 面上的投影：

消 z： $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

例4. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 & ① \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 & ② \end{cases}$

① - ② 得： $y+z=1 \Rightarrow z=1-y$ ③

③ 代入 ② 得： $x^2+2y^2-2y=0$

∴ 交线在 xOy 面上投影为

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

例5. $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad 4-x^2-y^2=3x^2+3y^2$

$\Rightarrow \quad x^2+y^2=1$

∴交线在 xOy 上投影曲线为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

投影为 $\begin{cases} x^2+y^2\leq 1 \\ z=0 \end{cases}$