曲线积分与曲面积分(1)

对弧长的曲线积分

$$\int_L f(x,y)\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

$$\int_{L_1+L_2} f(x,y)\,ds = \int_{L_1} f(x,y)\,ds + \int_{L_2} f(x,y)\,ds$$

性质:

① 设α,β为常数,则

$$\int_L [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\,ds$$

$$= \alpha\int_L f(x,y)\,ds + \beta\int_L g(x,y)\,ds$$

② 若积分弧段L可分成两段光滑曲线弧L_1和L_2,则

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_{L_1} f(x,y)\,ds + \int_{L_2} f(x,y)\,ds$$

③ 设在L上$f(x,y)\le g(x,y)$,则

$$\int_L f(x,y)\,ds \le \int_L g(x,y)\,ds$$

特别地,有 $\left|\int_L f(x,y)\,ds\right| \le \int_L |f(x,y)|\,ds$

对弧长的曲线积分计算法

定理:设L的参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} (\alpha\le t\le\beta)$

且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，

则 $\int_L f(x,y)\,ds$

$$= \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\,\underline{\underline{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}}\,dt \quad (\alpha<\beta)$$

① $y=\psi(x) \quad (x_0\leq x\leq X)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (x_0\leq t\leq X)$$

$\int_L f(x,y)\,ds$

$$= \int_{x_0}^{X} f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,dx \quad (x_0<X)$$

② $x=\varphi(y) \quad (y_0\leq y\leq Y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=t \end{cases} \quad (y_0\leq t\leq Y)$$

$\int_L f(x,y)\,ds$

$$= \int_{y_0}^{Y} f[\varphi(y),y]\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\,dy \quad (y_0<Y)$$

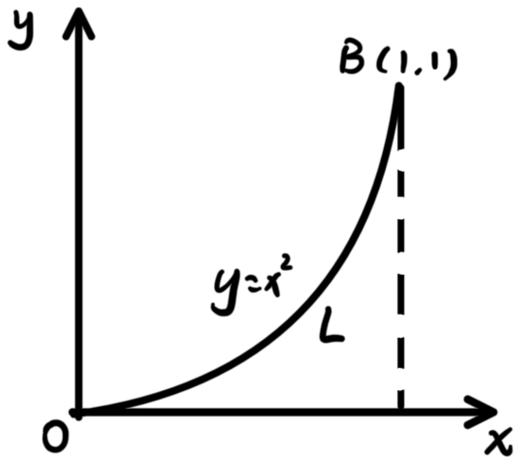
③ $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=w(t) \quad (\alpha\leq t\leq\beta)$

$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds$

$$= \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),w(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+w'^2(t)}\,dt \quad (\alpha<\beta)$$

例1. 计算 $\int_L \sqrt{y}\, ds$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O(0,0)$ 与点 $B(1,1)$ 之间的一段弧.

解: $y=x^2$，$0 \le x \le 1$



$$\int_L \sqrt{y}\, ds$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1+(x^2)'^2}\, dx$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\, dx$$

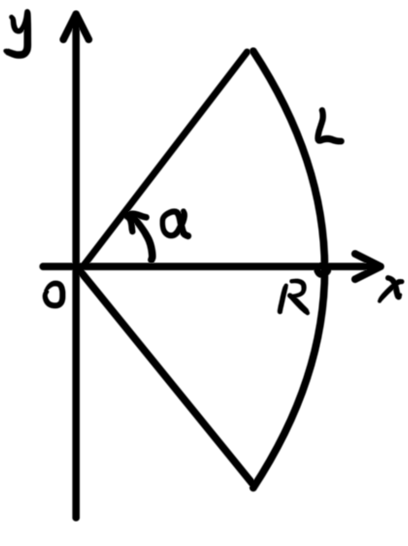
$$= \frac{1}{8}\int_0^1 (1+4x^2)^{\frac{1}{2}} d(1+4x^2)$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$

例2. 计算半径为 R、中心角为 2α 的圆弧 L 对于它的对称轴的转动惯量（设 $\mu=1$）.

解: $I=\int_L y^2 ds$



令 $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$ $(-\alpha \le \theta \le \alpha)$

$\therefore\ I = \int_L y^2 ds$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2\sin^2\theta \sqrt{(-R\sin\theta)^2+(R\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= R^3\int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{R^3}{4}\int_{-\alpha}^{\alpha} (1-\cos 2\theta)\, d(2\theta)$$

$$= \frac{R^3}{4}\left[2\theta - \sin 2\theta\right]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$= R^3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$$

例3. 计算曲线积分 $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds$，其中Γ为螺旋线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=kt$ 上相应于 t 从 0 到 2π 的一段弧.

解： $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,ds$

$$= \int_0^{2\pi}\left[(a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(kt)^2\right]\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,dt$$

$$= \sqrt{a^2+k^2}\cdot\left[a^2t+\frac{1}{3}k^2t^3\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}\,(3a^2+4\pi^2k^2)$$