多元函数微分法及其应用(6)

一、一元向量值函数及其导数

空间曲线参数方程：$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t), \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta].$

向量形式：$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$,

$$\vec{f}(t)=\varphi(t)\vec{i}+\psi(t)\vec{j}+\omega(t)\vec{k}$$

向量方程：$\vec{r}=\vec{f}(t)$，$t\in[\alpha,\beta]$.

定义1：设数集 $D\subset R$，则称映射 $\vec{f}: D\to R^n$ 为一元向量值函数，通常记为 $\vec{r}=\vec{f}(t)$，$t\in D$，其中数集D称为函数的定义域，t为自变量，$\vec{r}$为因变量.

在 R^3 中，$\vec{f}(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$，$t\in D$

或 $\vec{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$，$t\in D$

定义2：向量值函数 $\vec{f}(t)$ 当 $t\to t_0$ 时的极限：

$\lim \vec{f}(t)=\vec{r_0}$.

$t\to t_0$

$$\lim_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\left(\lim_{t\to t_0}f_1(t),\ \lim_{t\to t_0}f_2(t),\ \lim_{t\to t_0}f_3(t)\right)$$

若 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{f}(t_0)$，则称 $\vec{f}(t)$ 在 t_0 连续.

定义3：若 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t}$ 存在，那么就称这个极限向量为向量值函数 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 在 t_0 处的导数或导向量，记作 $f'(t_0)$ 或 $\left.\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=t_0}$.

$$\vec{f}'(t_0)=f_1'(t_0)\vec{i}+f_2'(t_0)\vec{j}+f_3'(t_0)\vec{k}$$

例1. $\vec{f}(t)=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}+t\vec{k}$.

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\vec{f}(t)=\left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\cos t\right)\vec{i}+\left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\sin t\right)\vec{j}+\left(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}}t\right)\vec{k}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}+\frac{\pi}{4}\vec{k}$$

例2. $\vec{r}=\vec{f}(t)=(t^2+1,\ 4t-3,\ 2t^2-6t)$，$t\in R$，求该曲线在与 $t=2$ 相应点处的单位切向量.

解：$f'(t)=(2t,4,4t-6)$

$f'(2)=(4,4,2)$

$|f'(2)|=6$

∴单位切向量为 $\pm\left(\frac{[illegible]}{3}, \frac{[illegible]}{3}, \frac{[illegible]}{3}\right)$.

二、空间曲线的切线与法平面

空间曲线参数方程：$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$

$\vec{f}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$

$\vec{T} = \vec{f}'(t_0) = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$

切线方程(点向式)：

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面(点、法式)：

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0$$

例1. 求曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 在 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程.

解：∵ $x' = 1, y' = 2t, z' = 3t^2$, $t = 1$

∴ $\vec{T} = (1, 2, 3)$

∴ 切线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

法平面： $x + 2y + 3z + D = 0$，代入 $(1,1,1)$ 得：

$$D=-6$$

$$\Rightarrow x+2y+3z-6=0$$

若空间曲线方程为 $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x \\ y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$

$\therefore$ 在 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线为：

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(x_0)}$$

法平面：$(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0$

若空间曲线方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

例5. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6$, $x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

解：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

对 x 求导得：$\begin{cases} 2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}+2z\cdot\frac{dz}{dx}=0 \\ 1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y\cdot\frac{dy}{dx}+z\cdot\frac{dz}{dx}=-x \end{cases}$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=-1 \right.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}-x & z\\ -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y & z\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{z-x}{y-z}, \quad \frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix}y & -x\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y & z\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{x-y}{y-z}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-2,1)}=0, \quad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,-2,1)}=-1$$

$$\therefore \vec{T}=(1,0,-1)$$

∴ 切线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$

法平面方程为 $x-z+D=0$. 代入$(1,-2,1)$得：$D=0$

$$\Rightarrow x-z=0$$

三、曲面的切平面与法线

$F(x,y,z)=0$，在 (x_0,y_0,z_0) 处：

$$\vec{n}=\left(F_x(x_0,y_0,z_0),\ F_y(x_0,y_0,z_0),\ F_z(x_0,y_0,z_0)\right)$$

切平面（点法式）：

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线（点向式）：

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

例6. 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点$(1,2,3)$处的切平面及法线方程.

面及法线方程.

解：$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$

$F_x=2x,\ F_y=2y,\ F_z=2z$

$\therefore \vec{n}=(2,4,6)$

切平面：$x+2y+3z-14=0$

法线：$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$

考虑曲面方程 $z=f(x,y)$,

令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$,

则 $F_x(x,y,z)=f_x(x,y)$, $F_y(x,y,z)=f_y(x,y)$, $F_z(x,y,z)=-1$

$\therefore \vec{n}=(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)-1)$

切平面：$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$

法线：$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

例7. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(2,1,4)$ 处的切平面及法线方程.

解: $f(x,y)=x^2+y^2-1$

$f_x=2x,\ f_y=2y,\ f_z=-1$

$\therefore \vec{n}\big|_{(2,1,4)}=(4,2,-1)$

$\therefore$ 切平面: $4x+2y-z-6=0$

法线: $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$