曲线积分与曲面积分(4)

格林公式及其应用

定理1：设闭区域D由分段光滑的曲线L围成，若函数$P(x,y)$及$Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint Pdx+Qdy$$

其中L是D的取正向的边界曲线.

例1. 计算 $\oint_L x^2ydx-xy^2dy$，其中L为正向圆周 $x^2+y^2=a^2$.

解：令 $P=x^2y$，$Q=-xy^2$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-y^2-x^2$$

$\therefore$ $\oint_L x^2y\,dx-xy^2dy$

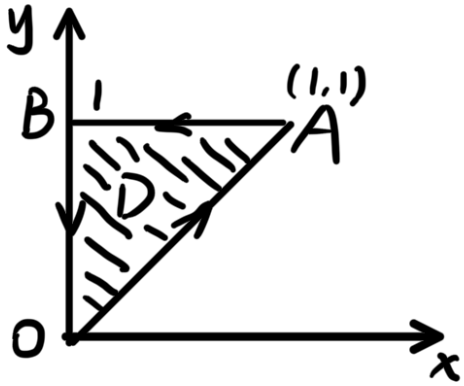
$$=\iint(-y^2-x^2)dxdy$$

$$=-\int_0^a \rho^2\cdot\rho d\rho\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=-\frac{\pi}{2}a^4$$

例2. 计算 $\iint e^{-y^2}dxdy$，其中 D是以O(0,0)

$A(1,1)$, $B(0,1)$ 为顶点的三角形闭区域.



解：令 $P=0$, $Q=xe^{-y^2}$

则 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^{-y^2}$

$$
\begin{aligned}
\therefore \iint_D e^{-y^2}dxdy
&= \oint_{OA+AB+BO} xe^{-y^2}dy \\
&= \int_{OA} xe^{-y^2}dy \\
&= \int_0^1 xe^{-x^2}dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}d(-x^2) \\
&= -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(1-e^{-1})
\end{aligned}
$$

例3. 求椭圆 $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$ 所围成图形的面积 A.

解：
$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta\cdot b\cos\theta+b\sin\theta\cdot a\sin\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}d\theta \\
&= \pi ab
\end{aligned}
$$

例14. 计算 $\oint_L \frac{\quad}{x^2+y^2}$，其中 L 为一条不自相交、分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，L 的方向为逆时针方向.

解：令 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，则 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

① 当 $(0,0)\notin D$ 时，

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$$

② 当 $(0,0)\in D$ 时，取适当小的 $r>0$，作位于 D 内的圆周 l：$x^2+y^2=r^2$. 记 L 和 l 围成的闭区域为 D_1，对 D_1 应用格林公式：

$$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\oint_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$$

其中 l 的方向取逆时针方向，

$$\therefore \oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\oint_l \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$$

$$\Rightarrow \text{原式}=\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}d\theta=2\pi$$