微分方程（3）

高阶线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x)$$

$$\Rightarrow y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$$

其中当 $f(x)=0$ 时，

$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 为

二阶线性齐次微分方程

定理1：

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

若 $y_1(x), y_2(x)$ 是解，

则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也是解

验证：

$$\begin{cases} y_1''(x)+P(x)y_1'(x)+Q(x)y_1(x)=0 \\ y_2''(x)+P(x)y_2'(x)+Q(x)y_2(x)=0 \end{cases}$$

又 $\because y''+P(x)y'+Q(x)y$

$\Rightarrow C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) + C_1 P(x) y_1'(x)$

$+ C_2 P(x) y_2' + C_1 Q(x) y_1(x) + C_2 Q(x) y_2(x)$

$= C_1 [y_1''(x) + P(x) y_1'(x) + Q(x) y_1(x)]$

$+ C_2 [y_2''(x) + P(x) y_2'(x) + Q(x) y_2(x)]$

$= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0$

$= 0$

向量组的线性相关性

$\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性相关：

$\exists$ 一组不全为0的 $k_1 \cdots k_s$

使得 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_1\alpha_s = 0$ 成立

线性无关：

若 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$,

$k_1 = \cdots = k_s = 0$

$1, 2x, -x$ 线性相关

$\because 0 \times 1 + 1 \times 2x + 2 \times (-x) = 0$

1，$\cos^2 x$，$\sin^2 x$ 线性相关

$\because$ $1-\cos^2 x-\sin^2 x=0$

两个函数线性相关：

两个函数的比是个常数

定理2：y_1，y_2 是线性无关的特解，

则 $C_1y_1+C_2y_2$ 是齐次方程的通解.

定理3 若

$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 非齐次

y^* 是特解

$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 齐次

Y 是通解

则 y^*+Y 是非齐次方程的通解

证：

$(Y+y^*)''+P(x)(Y+y^*)'+Q(x)(Y+y^*)$

$= Y'' + P(x)Y' + Q(x)Y$

$\quad + y^{*''} + P(x)y^{*'} + Q(x)Y^{*}$

$= 0 + f(x)$

$= f(x)$

另：

Y_1, Y_2 是非齐次方程的特解，

则 $Y_1 - Y_2$ 是齐次方程的特解.

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 非齐次

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 齐次

$\therefore (Y_1 - Y_2)'' + P(x)(Y_1 - Y_2)' + Q(x)(Y_1 - Y_2)$

$= Y_1'' + P(x)Y_1' + Q(x)Y_1'$

$\quad - (Y_2'' + P(x)Y_2' + Q(x)Y_2')$

$= f(x) - f(x)$

$= 0$

定理 4

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$

若 y_1^* 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$ 特解

y_2^* 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$ 特解

则 $y_1^*+y_2^*$ 是原方程的特解

（叠加原理）

/remake

二阶线性微分方程:

$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$

齐次:

$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$

解的结构:

① $y_1(x), y_2(x)$ 是解

$\Rightarrow C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 也是解

② y_1, y_2 是线性无关的解

$\Rightarrow C_1y_1+C_2y_2$ 是齐次方程的通解

③ $u''+P(x)u'+Q(x)u=f(x)$ u^* 特解

[illegible]

$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$，Y是通解

$\Rightarrow Y+y^*$是非齐次方程的通解

④ $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$

y_1^*是$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$特解

y_2^*是$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$特解

$\Rightarrow y_1^*+y_2^*$是原微分方程的特解