# 微分方程（总结）

1. 基本概念

2. 可分离变量的微分方程

$g(y)dy = f(x)dx$ ⇒ 两边同时积分

3. 齐次方程

① 令 $u = \frac{y}{x}$

② $y = u \cdot x$

③ $\frac{dy}{dx} = u + x \cdot \frac{du}{dx}$

再将 $u$ 代回原式

4. 一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} + \underline{\underline{P(x)}}\,y = \underline{\underline{Q(x)}}$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

伯努利方程*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \ (n \neq 0,1)$$

$$\Rightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

令 $z = y^{1-n}$ 即可

5. 可降阶的高阶微分方程

① $y^{(n)} = f(x)$ 型 ⇒ 直接积分

② $y''=f(x,y')$ 型（无 $y$）

$\Rightarrow$ 令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dx}=p'$

③ $y''=f(y,y')$ 型（无 $x$）

$\Rightarrow$ 令 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy}$

6. 高阶线性微分方程

解的结构（4个定理）

7. 常系数齐次线性微分方程

$y''+py'+qy=0$

特征方程为 $r^2+pr+q=0$

① $r_1\neq r_2$，通解 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

② $r_1=r_2$，通解 $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$

③ $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，通解 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

欧拉公式

8. 常系数非齐次线性微分方程

① $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

② $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$ 型

9.* 欧拉方程

$x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$

( $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为常数 )