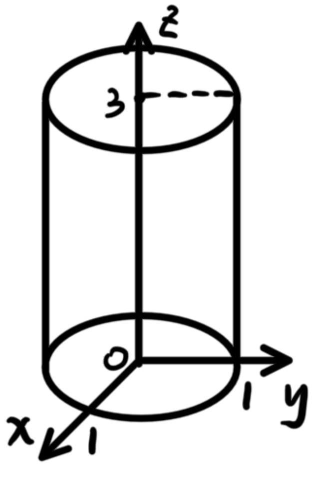
曲线积分与曲面积分（7）

高斯公式

$$\oiint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$$
$$= \oiint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$
$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV$$

对坐标、对面积、三重积分

例 1. 利用高斯公式计算曲面积分 $\oiint_{\Sigma} (x-y)\,dxdy + (y-z)x\,dydz$，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$，$z=3$ 所围成的空间闭区域 Ω 的整个边界曲面的外侧.



解：令 $P=(y-z)x$，$Q=0$，$R=x-y$

$\therefore \frac{\partial P}{\partial x} = y-z$，$\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$，$\frac{\partial R}{\partial z} = 0$

$\therefore$ 原式 $= \iiint_{\Omega} (y-z)\,dxdydz$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^3 (\rho\sin\theta - z)\,dz$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(3\rho^2\sin\theta - \frac{9}{2}\rho\right) d\rho$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\sin\theta - \frac{9}{4}\right) d\theta$$
$$= -\frac{9}{2}\pi$$

例2. 利用高斯公式计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)dS$，其中Σ为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于平面 $z=0$ 及平面 $z=h\ (h>0)$ 之间的部分的下侧.

解：设 Σ_1 为 $z=h\ (x^2+y^2\leq h^2)$ 的上侧

$\therefore \oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos r)ds$

其中 $P=x^2,\ Q=y^2,\ R=z^2$

$\therefore \frac{\partial P}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial Q}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial R}{\partial z}=2z$

$\therefore$ 上式 $=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)dV$

$$= 2\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}(x+y+z)dz$$

$$= 2\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}z\,dz$$

$$= \iint_{D_{xy}}[h^2-(x^2+y^2)]dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{h}(h^2\rho-\rho^3)d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{h^4}{4}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\pi h^4$$

又 $\because \iint_{\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos r)ds$

$= \iint_{\Sigma_1}z^2dS$

$= h^2\times h^2\pi$

$= \pi h^4$

$= \pi h^{4}$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{2}\pi h^4 - \pi h^4 = -\frac{1}{2}\pi h^4$