向量代数与空间解析几何(2)

一、数量积、(点乘)

$\vec{a}=(1,1,2)$, $\vec{b}=(0,2,3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times0+1\times2+2\times3=8$

数量积是一个数

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta,\ 0\leq\theta\leq\pi$

$\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

或 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot Prj_{\vec{a}}\vec{b}$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos0=|\vec{a}|^2$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$

交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

分配律：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

结合律：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

二、向量积、(叉乘)

$\vec{a}=(1,1,2)$, $\vec{b}=(0,2,-1)$

$\vec{a}\times\vec{b}=\left|\ \vec{i}\quad\vec{j}\quad\vec{k}\ \right|$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$= -\vec{i} + 2\vec{k} + 0 - 0 + \vec{j} - 4i$

$= -5\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

$= (-5, 1, 2)$

另法：

原式 $= \vec{i} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

$+ \vec{k} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= (-5, 1, 2)$

△取"−"

向量积是一个向量

(1) 方向：与 $\vec{a}, \vec{b}$ 都垂直

(右手系拇指指向的方向)

(2) 大小：

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

推论：

(1) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

(2) 对非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$,

$a \times b = 0 \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$

不满足交换律：$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

分配律：$(\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

结合律：$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$

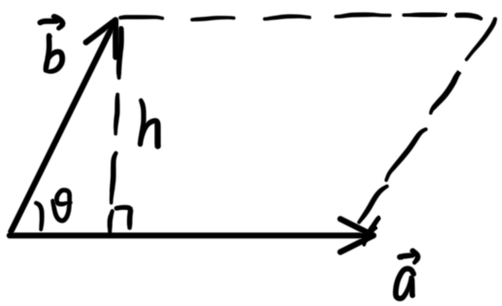
$= \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

例14. $\vec{a} = (2,1,-1)$, $\vec{b} = (1,-1,2)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= (1, -5, -3)$



$\vec{a} = (1,1,2)$, $\vec{b} = (0,3,0)$

$$h = |\vec{b}| \sin\theta$$

$$S_{\square} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

$$= |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= |(-6, 0, 3)|$$

$$= \sqrt{6^2 + 3^2}$$

$$= 3\sqrt{5}$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

例 5.

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}|(4, -6, 2)|$$

$$= |(2, -3, 1)|$$

$$= \sqrt{4 + 9 + 1}$$

$= \sqrt{14}$