曲线积分与曲面积分(5)

对面积的曲面积分

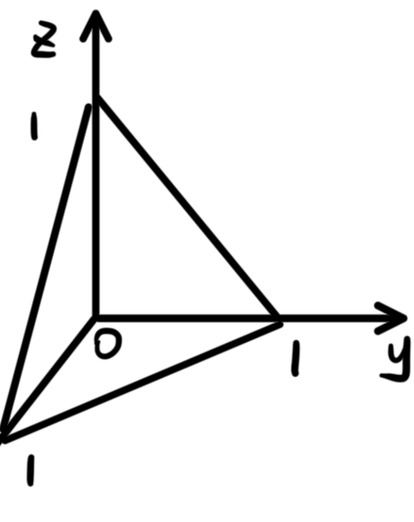
定义：设曲面Σ光滑，$f(x,y,z)$ 在Σ上有界，

则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$.

计算：$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS$

$$= \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,dx\,dy$$

例2. 计算 $\oiint_\Sigma xyz\,dS$，其中Σ是由平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的整个边界曲面.



解：$\oiint_\Sigma xyz\,dS$

$$= 0+0+0+\iint_{\Sigma_4} xyz\,dS$$

$$= \iint_{\Sigma_4} xyz\,dS$$

$$= \sqrt{3}\iint_{D_4} xy(1-x-y)\,dx\,dy$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} xy(1-x-y)\,dy$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 \frac{1}{6}x(1-x)^3\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^1 (-x^4+3x^3-3x^2+x)\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{3}{4}x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{120}$$