多元函数微分法及其应用(3)

全微分

一元函数的微分：$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

$$= A\Delta x + o(\Delta x) \approx \underbrace{dy}_{\text{微分}}$$

偏增量：$f(x+\Delta x,y)-f(x,y) \approx f_x(x,y)\Delta x$

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y) \approx \underbrace{f_y(x,y)\Delta y}_{\text{偏微分}}$$

若 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 的全增量 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称 z 在 (x,y) 可微分，$A\Delta x + B\Delta y$ 称为全微分.

定理1（必要条件）：

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，那么该函数在点 (x,y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

定理2（充分条件）：

如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在 (x,y) 连

如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在 (x,y) 连续，那么函数在该点可微分.

小结：

一元函数：　可导 $\Rightarrow$ 连续

可微分 $\Rightarrow$ 连续

可导 $\Leftrightarrow$ 可微

二元函数：　偏导数存在 $\not\Rightarrow$ 连续

可微分 $\Rightarrow$ 偏导数存在

可微分 $\Rightarrow$ 连续

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

（叠加原理：二元函数全微分＝两个偏微分之和）

例1. 计算函数 $z=x^2y+y^2$ 的全微分.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$

$\therefore dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=2xy\,dx+(x^2+2y)\,dy$

例2. 计算函数 $z=e^{xy}$ 在 $(2,1)$ 处的全微分.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$

$\therefore dz = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$

$\therefore dz\big|_{(2,1)} = e^{2}dx + 2e^{2}dy$

例3. 计算函数 $u = x + \sin\frac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = ye^{yz}$

$\therefore du = dx + (\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz})dy + ye^{yz}dz$