多元函数微分法及其应用(8)

多元函数的极值及其求法(优化问题)

定理1(必要条件)：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，则有 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$.

具有偏导数的极值点必定是驻点，但函数的驻点不一定是极值点.

定理2(充分条件)：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，令 $f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$，则

① $AC-B^2>0$，有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，$A>0$ 时有极小值；

② $AC-B^2<0$，无极值；

③ $AC-B^2=0$，无法判断.

例14. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值

解：$f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0$

$\Rightarrow x=1$ 或 $x=-3$

$f_y(x,y)=-3y^2+6y=0$

$\Rightarrow y=0$ 或 $y=2$

∴驻点为 $(1,0)$，$(-3,0)$，$(1,2)$，$(-3,2)$

$f_{xx}(x,y)=6x+6$，$f_{yy}(x,y)=-6y+6$，$f_{xy}(x,y)=0$

∴在 $(1,0)$ 处，$AC-B^2=12\times6>0$，$A>0$，极小值 $f(1,0)=-5$

在 $(-3,0)$ 处，$AC-B^2=(-12)\times6<0$，不是极值

在 $(1,2)$ 处，$AC-B^2=12\times(-6)<0$，不是极值

在 $(-3,2)$ 处，$AC-B^2=(-12)\times(-6)>0$，$A<0$，极大值 $f(-3,2)=31$

关于驻点的求法：

例：$f_x=x(y-1)(y-3)=0 \quad\Rightarrow x=0, y=1, y=3$

$f_y=(x+3)(x-5)(y-7)=0 \quad\Rightarrow x=-3, x=5, y=7$

∴驻点为 $(0,7)$，$(-3,1)$，$(-3,3)$，$(5,1)$，$(5,3)$

然而，如果函数在个别点处的偏导数不存在，这些点当然不是驻点，但也可能是极值点.

例5. 某厂要用铁板做成一个体积为 $2m^3$ 的有盖长方体水箱. 问当长宽和高各取怎样的尺寸时，才能使用料最省.

解：设长、宽、高分别为 x m, y m, h m.

则 $xyh=2$

$$\Rightarrow h=\frac{2}{xy}$$

$$A=2\left(xy+x\cdot\frac{2}{xy}+y\cdot\frac{2}{xy}\right)$$

$$=2xy+\frac{4}{y}+\frac{4}{x}\quad(x,y>0)$$

$$A_x=2y-\frac{4}{x^2},\quad A_y=2x-\frac{4}{y^2}$$

令 $\begin{cases}2y-\frac{4}{x^2}=0\\2x-\frac{4}{y^2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt[3]{2}\\y=\sqrt[3]{2}\end{cases}$

∴ 驻点为 $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})$

又∵ 由题意得：最小值必然存在

且求得唯一驻点

∴ 当水箱长为 $\sqrt[3]{2}$ m, 宽为 $\sqrt[3]{2}$ m, 高为 $\frac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{2}$ m 时，水箱所用的材料最省.

拉格朗日乘数法

函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 约束下，取得极值的优化问题.

引入拉格朗日乘子λ，设 $\frac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=-\lambda$.

则 $\begin{cases} f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0 \\ f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0 \\ \varphi(x_0,y_0)=0 \end{cases}$

引入拉格朗日函数 $L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，

则前两式可化为 $L_x(x_0,y_0)=0$，$L_y(x_0,y_0)=0$.

例7. 求表面积为 a^2 而体积最大的长方体的体积.

解：设三棱长为 x,y,z.

则 $2(xy+yz+xz)=a^2$

$\Rightarrow$ 令 $\varphi(x,y,z)=2xy+2yz+2xz-a^2$

要求 $V=xyz\ (x,y,z>0)$ 的最大值.

设 $L(x,y,z)=xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz-a^2)$

求其对 x,y,z 的偏导数，使之为零，再联立 $\varphi(x,y,z)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} yz+2\lambda(y+z)=0 \\ xz+2\lambda(x+z)=0 \\ xy+2\lambda(y+x)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{x+z}{y+z} \\ \frac{y}{z}=\frac{x+y}{x+z} \end{cases}$

$$\left\{\begin{array}{l} \\ 2xy+2yz+2xz-a^2=0 \end{array}\right. \Rightarrow x=y=z$$

$\therefore x=y=z=\frac{\sqrt{6}}{6}a$

例8. 求函数 $u=xyz$ 在附加条件 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ $(x,y,z,a>0)$ 下的极值.

解：作拉格朗日函数

$L(x,y,z)=xyz+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right)=0$

令 $\left\{\begin{array}{l} L_x=yz-\frac{\lambda}{x^2}=0 \\ L_y=xz-\frac{\lambda}{y^2}=0 \\ L_z=xy-\frac{\lambda}{z^2}=0 \end{array}\right. \Rightarrow 3xyz-\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=0$

又 $\because \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$

$\therefore 3xyz-\lambda\cdot\frac{1}{a}=0$

$\Rightarrow xyz=\frac{\lambda}{3a}$ 代入得：$x=y=z=3a$

$\therefore u=xyz$ 在该条件下在点 $(3a,3a,3a)$ 处取得极小值 $27a^3$.