矩阵(5)

逆矩阵.

定义：设A是n阶方阵，若存在n阶方阵B，使$AB=BA=E$，则称A是可逆矩阵，B为A的逆矩阵，记作A^{-1}，即$A^{-1}=B$.

注：① 若方阵A可逆，则A的逆矩阵是唯一的

② 未必任何方阵都有逆矩阵，方阵分为可逆和不可逆，二者必居其一

定义：设A为n阶方阵，若$|A|\neq0$，称A是非奇异矩阵，若$|A|=0$，称A是奇异矩阵.

定理：A为非奇异矩阵 $\Longleftrightarrow$ 方阵A可逆 $(|A|\neq0)$

当A可逆时，$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.（伴随矩阵法）

证明：

充分性：$\because |A|\neq 0$

$$\therefore AA^*=A^*A=|A|E$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A=E$$

$\therefore A$可逆，且$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

必要性：若A可逆，则

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

$$\Rightarrow |A||A^{-1}|=|E|=1$$

$$\Rightarrow |A|\neq 0$$

证明完毕

例1. $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{vmatrix}=2\neq 0$（可逆）

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\\5&-1&1\\\frac{7}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&1&-1&2\end{pmatrix}$

$$B=\left(\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \\ \hline 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right)=0\ (不可逆)$$

结论：对角形矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$

可逆的充要条件是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都 $\neq 0$，

且 $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$

推论：设 A 是 n 阶方阵，若 $\exists\, n$ 阶方阵 B，使 $AB=E$ 或 $BA=E$，则 A 可逆，且 $A^{-1}=B$.（$AB=E \Rightarrow A$ 可逆，且 $A^{-1}=B$）

例13. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-2A-5E=0$，证明：$A+2E$ 可逆，并求 $(A+2E)^{-1}$.

解：证明：$A^2-2A-5E=0$

$$\Rightarrow A^2-2A-8E=-3E$$

$$\Rightarrow (A+2E)(A-4E)=-3E$$

$$\Rightarrow (A+2E)\left[-\frac{1}{3}(A-4E)\right]=E$$

$$\Rightarrow (A+2E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A-4E)$$

证明完毕

例4. $A\neq 0$, $A^3=0$.

$A^3-E^3=-E$

$\Rightarrow (A-E)(A^2+A+E)=-E$

$\Rightarrow (E-A)(A^2+A+E)=E$

$\Rightarrow$ $E-A$ 可逆, 且 $(E-A)^{-1}=A^2+A+E$

同理,

$E+A$ 可逆, 且 $(E+A)^{-1}=A^2-A+E$

可逆矩阵的性质☆.

① 若方阵 A 可逆, 则其逆矩阵 A^{-1} 也可逆, 且 $(A^{-1})^{-1}=A$.

② 若 A 可逆, 则 A^T 也可逆, 且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

$A^T(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=E^T=E$

说明 ^(T), ^(-1) 可以交换顺序.

③ 若 A 可逆, k 为非零常数, 则 kA 也可逆, 且 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

$|A| \neq 0 \Rightarrow |kA| = k^n|A| \neq 0$

$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1}) = AA^{-1} = E$

归纳：$|kA| = k^n|A|$

$(kA)^* = k^{n-1}A^*$

$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

④ 若A可逆，则A^*也可逆，且$(A^*)^{-1}$
$= (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$.

$|A| \neq 0 \Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$

$AA^* = A^*A = |A|E \quad (|A| \neq 0)$

$\Rightarrow (\frac{1}{|A|}A)A^* = A^*(\frac{1}{|A|}A) = E$

$\Rightarrow \underline{(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A}$

又$\because A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

$\Rightarrow A^* = |A|A^{-1}$

$\Rightarrow (A^{-1})^* = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1}$

$\Rightarrow \underline{(A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A}$

$\therefore (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$

说明 $^{(*)}$，$^{(-1)}$ 可以交换顺序.

归纳：$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(A^*)^T = (A^T)^*$

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

⑤ 若 A, B 为同阶可逆方阵，则 AB 也可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$|A| \neq 0, |B| \neq 0$

$\Rightarrow |AB| = |A||B| \neq 0$

$AB \cdot B^{-1}A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$

⑥ 若 A 可逆，m 为正整数，则 A^m 也可逆，且 $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$.

$|A| \neq 0 \Rightarrow |A^m| = |A|^m \neq 0$

⑦ 若 A 可逆，则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

$AA^{-1} = E$

$\Rightarrow |A||A^{-1}| = 1$

$\Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

⑧ 若 A 可逆，则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

（求解逆矩阵的伴随矩阵法）