

## 向量(3)

### 向量组的等价

定义：两个向量组可以相互线性表示。

(向量组等价，所含向量的个数不一定一样多)

性质：

① 反身性：  $A \cong A$ 。

② 对称性：  $A \cong B$ ，则  $B \cong A$ 。

③ 传递性：  $A \cong B$  且  $B \cong C$ ，则  $A \cong C$ 。

### 极大线性无关组

定义：① 线性无关的

② 极大：个数最多的无关组

(向量个数达到最大的线性无关部分组)

例1. 写出下列向量组的一个极大线性无关组。

(1)  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

$\alpha_1, \alpha_4$  ;  $\alpha_1, \alpha_2$  为极大线性无关组

性质和结论:

- ① 零向量没有极大线性无关组
- ② 线性无关的向量组,其极大线性无关组为向量组本身
- ③ 向量组的极大线性无关组可能不唯一
- ④ 向量组和它的任一极大线性无关组等价
- ⑤ 同一向量组的两个极大线性无关组等价,所含向量个数相等
- ⑥ 若向量组(I)可由向量组(II)线性表示,则向量组(I)的极大线性无关组可由向量组(II)的极大线性无关组线性表示
- ⑦ 等价的向量组,其极大线性无关组也等价

极大线性无关组的求法

—— 矩阵初等变换法

例3. 求向量组  $\alpha_1 = (1, -2, 2, -1)$ ,  $\alpha_2 = (2, -4, 8, 0)$ ,  $\alpha_3 = (-2, 4, -2, 3)$ ,  $\alpha_4 = (3, -6, 0, -6)$  的一个极大线性

无关组,并求其余向量由该极大线性无关组线性表示的表达式

无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解: (向量不管行、列, 均按列构成矩阵, 且只做行初等变换)

$$\begin{aligned} \text{设 } A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -6 \\ 2 & 8 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow_2 \\ \downarrow_{-2} \\ \uparrow_1 \end{matrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \uparrow_{-2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \uparrow_{-2} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (行简化阶梯形)} \end{aligned}$$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2$  为一个极大线性无关组

$$\alpha_3 = -3\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2, \alpha_4 = 6\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2$$

$$\text{再如, } A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$  是一个极大线性无关组

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_4 = \alpha_2 + 2\alpha_3$$

$$\alpha_6 = 6\alpha_2 + 9\alpha_3 + \alpha_5$$

原理:

初等行变换不改变矩阵列向量组的线性关系

初等列变换不改变矩阵行向量组的线性关系