行列式(4)

行列式按一行(列)展开

余子式与代数余子式

行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 10 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

定义：a_{ij} 的余子式为 M_{ij}

代数余子式为 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

对 a_{23}：余子式 $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = -21$

代数余子式 $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23}$

$= 21$

对 a_{31}：$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -3$

$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = -3$

例1. 若行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & x \\ 4 & x & -1 \end{vmatrix}$ 中

$A_{23} = -8$，求 A_{21}.

解：$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23}$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & x \end{vmatrix}$$

$$= -2x + 4 = -8$$

$$\Rightarrow x = 6$$

$$\therefore A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 31$$

行列式按一行(列)展开定理:

n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 等于它任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积的和.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

降阶

$$= -2 - 2$$

$$= -4$$

(按0较多的行展开易算)

例12. 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$D = 1 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ \end{vmatrix}$$

$$D = 1\times(-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+\ a\times(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1-a^4$$

例3. 计算 $D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$D = 3\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \times\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= -3\times\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \times\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$= -3\times\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{vmatrix}$$

$= -3\times 3\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{5} = -9$（三角形行列式法）

或 $D = 3\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$\times(-2)$

$\big| \ 3 \quad 1 \quad -3 \ \big|$

$$= -3\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3\times 1\times(-1)^{3+2}\times\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\times(-3)$$

$= -9$（二次降阶法）

例4. 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 3 \\ -5 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$\times 1$　$\times(-1)$　$\times 1$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 4 \\ -5 & -4 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

$\times 2$　$\times(-2)$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 6 & -15 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times(-1)^{2+2}\times\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & -15 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times(-85)$$

$$= -170$$

例5. 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_n$$

$$= a\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+ b\times(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= a\cdot a^{n-1} + (-1)^{n+1} b\cdot b^{n-1}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1} b^n$$

例6. 已知四阶行列式D中第三列元素依次为-1, 2, 0, 1, 它们余子式值依次为-2, -5, -9, 4, 求D.

$$D = -1\times(-1)^{1+3}M_{13} + 2\times(-1)^{2+3}M_{23}$$

$$+ 1\times(-1)^{4+3}M_{43}$$

$$= -1\times(-2) + (-2)\times(-5) + (-1)\times 4$$

$= 8$

异乘变零定理：

n阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的某一行(列)的所有元素与另一行(列)中对应元素的代数余子式乘积的和等于零.

例7. $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

(1) $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \times(-1)$$

$$=7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -28$$

(2) $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$

$= -A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$

$$
= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= -7 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \times(-1)
$$

$$
= 7 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -56
$$

例18. $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 7 & -8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

(1) $2A_{41} - 3A_{42} + A_{43} + 5A_{44} = 0$

(2) $M_{11} - M_{12} + M_{13} - M_{14}$

$$
= A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 7 & -8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0
$$