行列式(5)

行列式按多行(列)展开

例如，在五阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$ 中，

二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$，余子式 $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

拉普拉斯定理：

在 n 阶行列式 D 中，任意取定 k 行(列)($1\le k\le n-1$)，则由这 k 行(列)元素所组成的一切 k 阶子式 $N_1, N_2, \cdots, N_t$ ($t=C_n^k$) 与它们对应的代数余子式 $A_1, A_2, \cdots A_t$ 乘积之和等于行列式 D，即

$$D = N_1A_1 + N_2A_2 + \cdots + N_tA_t$$

结论：

① $$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

② $$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

③ $$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

④ $$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|$$

⑤ $$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|$$

⑥ $$\begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|$$

回顾：
$$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$$

例3. $$D = \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

法一：
$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \times (-1)^{1+3+2+3} \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$
$$= -(ad-bc)^2$$

法二：
$$D = a \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$$
$$+ b \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$= -a(ad^2 - bcd) + b(acd - bc^2)$$
$$= abcd - a^2d^2 + abcd - b^2c^2$$
$$= -(a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd)$$

$= -(ad-bc)^2$

法三：

$$D = \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= (bc-ad)\cdot(ad-bc)$$

$$= -(ad-bc)^2$$