矩阵(6)

逆矩阵的性质应用

例6. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，求 $(A^*)^{-1}$.

解：

$|A|=10\neq 0$，A可逆

又∵ $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

$\Rightarrow A^*=|A|A^{-1}$

$\Rightarrow (A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}$

$=\frac{1}{|A|}A$

$=\frac{1}{10}A$

$=\begin{pmatrix}\frac{1}{10}&0&0\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\\frac{3}{10}&\frac{2}{5}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

例7. 已知 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，求 $(A^*)^{-1}$.

解：

$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

例8. 已知A、B为三阶方阵，且

$|A|=3, |B|=2, |A^{-1}+B|=2$，求 $|A+B^{-1}|$.

解：$|A|\cdot|A^{-1}+B|\cdot|B^{-1}|$

$= |A\cdot(A^{-1}+B)\cdot B^{-1}|$

$= |(E+AB)\cdot B^{-1}|$

$= |B^{-1}+A|$

$\therefore$ 原式 $=3\times 2\times\frac{1}{2}=3$

例9. 求 $D=A^{-1}B^{T}(CB^{-1}+E)^{T}$

$-[(C^{-1})^{T}A]^{-1}$.

解：$D=A^{-1}B^{T}[(CB^{-1})^{T}+E^{T}]$

$-A^{-1}C^{T}$

$=A^{-1}B^{T}[(B^{T})^{-1}C^{T}+E]-C^{T}A^{-1}$

$=A^{-1}C^{T}+A^{-1}B^{T}-A^{-1}C^{T}$

$=A^{-1}B^{T}$

其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\therefore D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&2&0\\4&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

解矩阵方程

若A,B均为可逆矩阵,则矩阵方程

① $AX=C$,其解为 $X=A^{-1}C$

$\Rightarrow X=\frac{C}{A}$(错误)

(永远不要把矩阵放分母上!)

$AX=C$

$\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}C$(同时左乘$A^{-1}$)

$\Rightarrow X=A^{-1}C$

② $XA=C$,其解为 $X=CA^{-1}$

$\Rightarrow XAA^{-1}=CA^{-1}$(同时右乘$A^{-1}$)

$\Rightarrow X=CA^{-1}$

③ $AXB=C$,其解为 $X=A^{-1}CB^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$

$\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$

例10. 解矩阵方程 $AX=2X+B$.

其中 $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&-1\\0&1&4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&6\\1&1\\2&-3\end{pmatrix}$.

解：$AX=2X+B$

$\Rightarrow (A-2E)X=B$

又∵ $|A-2E|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&-1&-1\\0&1&2\end{vmatrix}=-2\neq0$

∴ $(A-2E)$可逆

又∵ $(A-2E)^{-1}=\dfrac{1}{|A-2E|}(A-2E)^*$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

∴ $X=(A-2E)^{-1}B$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}_{3\times3}\begin{pmatrix}3&6\\1&1\\2&-3\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&3\\-4&1\\3&-2\end{pmatrix}$$

例11. 已知 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

$A^{-1}=A^*B+B$，求矩阵B.

解: $A^{-1} = A^*B + B$

$\Rightarrow AA^{-1} = AA^*B + AB$

$\Rightarrow E = |A|B + AB \quad (|A| = 1)$

$\Rightarrow E = (E+A)B$

又 $\because E+A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

且 $|E+A| = 10 \neq 0$，$(E+A)$ 可逆

$\therefore B = (E+A)^{-1}$

$= \dfrac{1}{|E+A|}(E+A)^*$

$= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$