向量(1)

向量的概念及线性运算

向量的概念

①零向量

②负向量

③向量的转置

④向量的相等

向量的线性运算

①向量的加法

②向量的数乘

③规律：

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$（交换律）

2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$（结合律）

3) $\alpha+\vec{0}=\vec{0}+\alpha=\alpha$（其中$\vec{0}$为同型的n维零向量）

4) $\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=\vec{0}$（其中$\vec{0}$为同型的n维零向量）

5) $1\cdot\alpha=\alpha$

6) $(kl)\alpha = k(l\alpha) = l(k\alpha)$

7) $k(\alpha+\beta) = k\alpha + k\beta$

8) $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha$

推论：1) $\alpha+\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha=\gamma-\beta \Leftrightarrow \beta=\gamma-\alpha$

2) $k\alpha=\vec{0} \Leftrightarrow k=0$ 或 $\alpha=\vec{0}$（k为实数，α为向量）

例3.1.1（311结论）

关于提公因子的总结：

① 行列式一行有公因子k，k向外提1次

② 行列式所有行都有公因子k，k向外提n次

③ 矩阵所有元素都有公因子k，k向外提1次

④ 向量所有元素都有公因子k，k向外提1次

向量的线性组合与线性表示

例1. 设向量组$\alpha_1=(1,2,3)$，$\alpha_2=(0,1,4)$，$\alpha_3=(2,3,6)$，试判断$\beta=(-1,1,5)$是否是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合？

解：设$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$.

$\Rightarrow (-1,1,5) = k_1(1,2,3) + k_2(0,1,4) + k_3(2,3,6)$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1+2k_3=-1 \\ 2k_1+k_2+3k_3=1 \\ 3k_1+4k_2+6k_3=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1=1 \\ k_2=2 \\ k_3=-1 \end{cases}$$

$\therefore \beta=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$

例2. 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}-3\\2\\-4\end{pmatrix}$,

试判断β是否为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合.

解：设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta$.

$$\Rightarrow k_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\\-4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1+2k_2-k_3=-3 \\ k_2+k_3=2 \\ k_1-2k_3=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1=2 \\ k_2=-1 \\ k_3=3 \end{cases}$$

$\therefore \beta=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$

	β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$表示	$Ax=\beta$方程组
①	可以表示	有解
②	不可以表示	无解
③	表示式唯一	唯一解
④	表示式不唯一	无穷多解

结论：

① 零向量是任意向量组的线性组合.

② 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 中任一向量均可由本向量组线性表示.

③ 任一 n 维向量都可由 n 维基本向量组线性表示，且表示法唯一.

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$$

(组合系数即为 α 的分量)