行列式(7)

克莱姆法则

前提① 方程个数 = 未知量个数

② 系数行列式 $D \neq 0$

例1. 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

解:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{13}{28}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{47}{28}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{3}{4}$$

例2. 求解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & 1 \\ 1 & 8 & 27 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (2-1)(3-1)(-1-1)(3-2)(-1-2)(-1-3)$$

$$= -48 \neq 0$$

$$D_1 = D = -48$$

$$D_2 = D_3 = D_4 = 0$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

定理：满足克莱姆法则的齐次方程组

只有零解.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots = 0 \\ \cdots = 0 \end{cases}$$ ← 齐次

若此齐次线性方程组有非零解，

则系数行列式 $D=0$.

关于上述齐次方程组：

有非零解 $\Leftrightarrow$ $D=0$

只有零解 $\Leftrightarrow$ $D\neq 0$

例4. 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

只有零解，求 k 取值范围.

解：

$$D = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 3k - 4 \neq 0$$

$\Rightarrow k\neq 4$ 且 $k\neq -1$

例5. 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} 4x+8y=0 \\ kx+10y=0 \end{cases}$$ 有非零解，求

$$\begin{cases} 2x+ky=1 \\ 3x+7y=2 \end{cases}$$ 的解.

解：$D=\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ k & 10 \end{vmatrix}=40-8k=0$

$\Rightarrow k=5$

$\therefore \begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x+7y=2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$