特征值与特征向量(1)

定义：设A为n阶方阵，α为n维非零向量，λ为数，若 $A\alpha=\lambda\alpha$，则称λ为A的特征值，α为A的对应于特征值λ的特征向量.

注：(1) A必须是方阵

(2) 特征值λ是一个数，有可能取0

(3) 特征向量α是非零列向量

① 列向量：$A\alpha=\lambda\alpha$中，α是列向量才能保证A与α相乘

② 非零向量：若 α是0向量，则 $A\times 0=\lambda\times 0$恒成立

性质：

① 若α是矩阵A对应于特征值λ的特征向量，则$k\alpha(k\neq 0)$也是矩阵A对应于特征值λ的特征向量.

② 给定方阵A，特征向量α只能属于一个特

② 给定方阵 A，特征向量 α 只能属于一个特征值.

③ 给定方阵 A，若 α_1,α_2 都是对应于特征值 λ 的特征向量，则线性组合 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\neq0$ 也是对应于特征值 λ 的特征向量.

例1. 设 A 为二阶矩阵，α_1,α_2 为线性无关的二维列向量，$A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，求 A 的特征值.

解：$A\alpha_1=0\cdot\alpha_1$

$\Rightarrow \lambda_1=0$

$$A(2\alpha_1+\alpha_2)=2\cdot A\alpha_1+A\alpha_2=A\alpha_2$$
$$=1\cdot(2\alpha_1+\alpha_2)$$

$\Rightarrow \lambda_2=1$

$\therefore$ A 的特征值为 0 和 1.

例2. 设 $A=(a_{ij})$ 为三阶矩阵，且各行元素之和均为 5，求 A 的一个非零特征值及对应的特征向量.

解：$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 特征值：5，特征向量为 $k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \neq 0.$