特征值与特征向量(3)

特征值与特征向量的性质

1. n阶矩阵A在复数域内必有n个特征值(重根按重数计算).

2. n阶矩阵A与其转置矩阵A^T有相同的特征多项式，进而有相同的特征值.

注：A与其转置A^T有相同的特征值，但特征向量一般不相同.

3. 设n阶矩阵A的n个特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则 (1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$

☆. $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 称为A的迹(trace)

4. n阶方阵A可逆($|A| \neq 0$)

$\Longleftrightarrow$ A的所有特征值都不等于0

n阶方阵A不可逆($|A| = 0$)

$\Longleftrightarrow$ A的特征值至少有一个是0

例11. 已知0是 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值，求a.

解：$|A|=0 \Rightarrow 2a-2=0 \Rightarrow a=1$

例2. 若 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为1，2，3，求 x.

解：$tr(A) = 1+x+1 = 1+2+3 \Rightarrow x=4$

或 $|A| = 1\times 2\times 3 \Rightarrow x=4$

5. 矩阵A的对应于不同特征值的特征向量线性无关.

6. 矩阵A的对应于不同特征值的线性无关的特征向量合起来所得的特征向量组仍线性无关.

7. (1) 若λ是矩阵A的k重特征值，则A的对应于λ的线性无关的特征向量的个数不超过k个；

(2) 若λ是矩阵A的单特征值，则A的对应于λ的线性无关的特征向量有且只有1个.

8. 若λ是矩阵A的特征值，对应的特征向

量为 α，则

矩阵	A	A^m	kA	$A+E$
特征值	λ	λ^m	$k\lambda$	$\lambda+1$
特征向量	α	α	α	α

续表：

矩阵	$f(A)$	$A^2+2A+3E$	A^{-1}	A^*
特征值	$f(\lambda)$	$\lambda^2+2\lambda+3$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$
特征向量	α	α	α	α

特点：把 A 替换成 λ，把 E 替换成 1

推论：若 λ 是矩阵 A 的特征值，$f(x)$ 为一多项式且 $f(A)=0$，则 $f(\lambda)=0$.

9. 设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 且 $r(A)=1$，则 A 的特征值为 $\lambda_1=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$，$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$.

例3. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 2,3,4，则 A^* 的特征值为多少？

解：$|A|=2\times3\times4=24$

$\therefore \lambda'=\frac{|A|}{\lambda}=12,8,6$

例4. 设三阶矩阵A的特征值为$-1, 1, 2$，矩阵$B=A^3-5A^2+3A+E$，求$|B|$，$tr(B)$.

解：设$f(x)=x^3-5x^2+3x+1$

$\therefore B=f(A)$的特征值为

$f(-1)=-8, f(1)=0, f(2)=-5$

$\therefore |B|=(-8)\times 0\times(-5)=0$

$tr(B)=-8+0-5=-13$

例5. 设三阶矩阵A的特征值为$1, 2, 2$，求$|4A^{-1}-E|$.

解：$4A^{-1}-E$的特征值为$3, 1, 1$

$\therefore |4A^{-1}-E|=3\times1\times1=3$

例6. 设三阶矩阵A满足$A^2-A-2E=0$，且$0<|A|<5$，求$|A|$.

解：设A的特征值为λ.

$\lambda^2-\lambda-2=0$

$\Rightarrow \lambda=2$或$\lambda=-1$

又$\because 0<|A|<5$

$\therefore$ 特征值仅取 $-1,-1,2$，$|A|=2$

例17. 若三维列向量 α,β 满足 $\alpha^T\beta=2$，求矩阵 $A=\beta\alpha^T$ 的特征值.

解：设 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$$\therefore \quad (a_1 a_2 a_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=2$$

$$\Rightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=2$$

又 $\because A=\beta\alpha^T=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1\\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2\\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3\end{pmatrix}$

$\therefore r(A)=1$

$\therefore$ A 的特征值为 $\lambda_1=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=2$，

$\lambda_2=\lambda_3=0$