特征值与特征向量(2)

特征值与特征向量的求法

引出：$A\alpha=\lambda\alpha$

$\Rightarrow \lambda\alpha-A\alpha=0$

$\Rightarrow (\lambda E-A)\alpha=0$，$\alpha$为非零向量

$\Rightarrow (\lambda E-A)x=0$ 有非零解

$\Rightarrow |\lambda E-A|=0$

∴欲求特征值λ，就是解 $|\lambda E-A|=0$

注：(1) λ只在主对角线上出现

(2) A中所有元素均取相反数

例1. 求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值.

解：$|\lambda E-A|=0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -4 & \lambda-1 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow (\lambda-1)^2-4=0$

$\Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=3$

例2. 求 $A=\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值

解: $|\lambda E - A| = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & \lambda-4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-4) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 4$$

例3. 求 $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ 的特征值.

解: $|\lambda E - A| = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda+3 & -6 & -9 \\ 0 & \lambda-4 & 11 \\ 0 & 0 & \lambda-7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+3)(\lambda-4)(\lambda-7) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 7$$

结论:

① 上三角矩阵、下三角矩阵、对角形矩阵的特征值均为其主对角线上的元素

② 单位矩阵的特征值均为1，零矩阵的特征值均为0

例6. 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值.

解: $|\lambda E - A| = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-3)\lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

例7. 求 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值.

解: $|\lambda E - A| = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -2 \\ 2 & \lambda-2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0$$

-1

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -2 \\ 2 & \lambda-2 & -2 \\ 0 & -\lambda+1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 & -2 \\ 2 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)\times(-1)^{3+3}\times\begin{vmatrix}\lambda+1 & -3\\ 2 & \lambda-4\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=2$$

例8. 求 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$ 的特征值.

解: $|\lambda E-A|=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda-1 & 4 & -2\\ 2 & \lambda+6 & -4\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4\\ 2 & \lambda+6\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)^2(\lambda+7)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-7$$

特征向量的解法

例9. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -3 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解： $|\lambda E-A|=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 3 & \lambda-3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-6)(\lambda+1)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=6,\ \lambda_2=-1$$

① 对 $\lambda_1=6$，$6E-A=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

同解方程组 $x_1=-x_2$，特征向量为 $C_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$C_1\neq 0$

② 对 $\lambda_2=-1$，$-E-A=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

同解方程组 $x_1=\frac{4}{3}x_2$，特征向量为 $C_2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$，$C_2\neq 0$

例 10. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解： $|\lambda E-A|=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 4 & \lambda-3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-1)^2=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=1$$

① 对于 $\lambda_1=2$，$2E-A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $x_1 = x_2 = 0$,

特征向量为 $C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_1 \neq 0$

② 对于 $\lambda_2 = 1$, $2E - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$

特征向量为 $C_2\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 \neq 0$

例11. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求A的特征值和特征向量.

解: $|\lambda E - A| = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda^2(\lambda-3)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=3$

① $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时，$-A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

同解方程组为 $x_1=-x_2-x_3$

令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

特征向量为 $C_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$C_1, C_2$ 不全为0

② $\lambda_3=3$ 时，$3E-A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1=x_3 \\ x_2=x_3 \end{cases}$

令 $x_3=1$，特征向量为 $C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$C_3\neq 0$