矩阵(7)

矩阵的初等变换

定义：初等行(列)变换：

① 交换矩阵的两行(列)

② 用数$k\neq0$乘矩阵某一行(列)的所有元素

③ 把矩阵某一行(列)所有元素的l倍加到另一行(列)对应的元素上去

(中间用箭头，不要用等号)

矩阵的标准形

特点：元素只有两个数1和0组成，且矩阵的左上角是一个单位矩阵，其余元素全为0.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 等.

定理：任何矩阵都可以经过初等变换化为标准形矩阵

例2. 化为标准形矩阵.

(2)
$$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\times(-2)}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\-3&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\times 3}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\times(-2)}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&8\end{pmatrix}\xrightarrow{\times 2}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&8\end{pmatrix}\xrightarrow{\times(-1),\ \times\frac{1}{8}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

注：① 化为标准形时，往往行列变换都要进行

② 标准形中1的个数即为矩阵的秩

定义：行阶梯形矩阵：

① 如果矩阵存在零行，则零行都在非零行的下面

② 任一非零行从左到右第一个非零元

素（首非零元）所在的列中，在这个元

素左下方的元素（若还有）全为零.

例如 $\begin{pmatrix} 6 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

折线法：① 竖线只经过一个数

② 横线可经过多个数

特别地，若行阶梯形矩阵的首非零元都是1，且首非零元所在列上的其他元素都为0，则称此矩阵为行简化阶梯形矩阵.

例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

矩阵 $\xrightarrow{\text{行变换}}$ 行阶梯形矩阵

$\downarrow$ 行变换

行简化阶梯形矩阵

注：只用初等行变换，A的阶梯形不唯

一，但A的行简化阶梯形是唯一的.

初等矩阵

定义：由单位矩阵E经过一次初等行(列)变换所得到的矩阵.

① 交换单位矩阵E的第 i,j 两行(列)得到初等矩阵 $E(ij)$.

② 用非零数k乘单位矩阵E的第 i 行(列)得到初等矩阵 $E(i(k))$.

③ 把单位矩阵E的第 j 行的 l 倍加到第 i 行得到初等矩阵 $E(ij(l))$.

性质：

① 初等矩阵的行列式都不为零.

$|E(ij)|=-1$，$|E(i(k))|=k$，$|E(ij(l))|=1$

② 初等矩阵的转置矩阵仍为同种类型的初等矩阵.

$E(ij)^T=E(ij)$，$E(i(k))^T=E(i(k))$，$E(ij(l))^T=E(ji(l))$

③ 初等矩阵均可逆，且初等矩阵的逆矩阵仍为同种类型的初等矩阵.

$E(ij)^{-1}=E(ij)$, $E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$, $E(ij(l))^{-1}=E(ij(-l))$

例1. 写出逆矩阵与行列式.

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ |A|=1$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},|B|=1$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix},C^{-1}=\begin{pmatrix}1&\\0&\frac{1}{4}\end{pmatrix},\ |C|=4$$

初等矩阵与矩阵的初等变换的关系

对A进行一次初等行变换,等于用同种类型的m阶初等矩阵左乘A(列变换右乘A).

说明:用初等矩阵左乘A,等于对A施行一次相对应的初等行变换(右乘列变换).

例2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\-1&5&1&4\\0&2&-3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\-1&5&1&4\\1&0&2&3\end{pmatrix}$,

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

(1) 求初等矩阵 P，使 $PA=B$.

(2) 求 AQ.

解：(1) $P_{3\times3}A_{3\times4}$（交换一、三两行）

$$\Rightarrow P=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

(2)（第二列 ×2 → 第四列）

$$AQ=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\-1&5&1&14\\0&2&-3&5\end{pmatrix}$$