行列式(1)

一、二阶与三阶行列式

二阶行列式：2行，2列，4个元素

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

主对角线

解二元线性方程组 $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+4y=-2 \end{cases}$

解：$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8-9=-1 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = -10 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = 7$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

（对角线法则）

例4. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix}$

$= -8+14+50-8-20-(-35) = 63$

例5. 当 a 取何值时，$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} < 0$

解：$D = a^2 - 1 < 0$

$\Rightarrow -1 < a < 1$

① 上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

② 下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

③ 对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

二、全排列与对换

定义：由 $1, 2, \cdots, n$ 组成的有序数组，叫作一个 n 级排列.

$\Rightarrow$ n 级排列共有 $n!$ 个

$1234\cdots n$ 称为标准（自然）排列

定义：若较大数 i_s 排在较小数 i_t 前，则称 i_s 与 i_t 构成一个逆序；排列中逆序的个数称为它的逆序数，N.

例. $N(54123) = 4+3+0+0+0 = 7$

例1. 求 $N(6471325)$

$= 5+3+4+0+1+0+0$

$= 13$

例2. 求下列 n 级排列的逆序数.

(1) $123\cdots(n-1)n$

$N=0$

(2) $n(n-1)\cdots321$

$$N=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$
$$=1+2+\cdots+n-1$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

定义：逆序数为奇数的排列称为奇排列
逆序数为偶数的排列称为偶排列

例3. (1) 4132

$N=3+0+1+0=4$ 偶

(2) 32514

$N=2+1+2+0+0=5$ 奇

例4. $n(n-1)\cdots321$

$N=\frac{n(n-1)}{2}$ ① $n=4k$ 或 $4k+1$ 偶

② $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 奇

例5. 若6级排列 $4k52t1$ 是奇排列.

① 465231 $N=3+4+3+1+1=12$ ×

② 435261 $N=3+2+2+1+1=9$ ✓

$\therefore k=3, t=6$

对换：互换某两个数码的位置

定理：每次对换，奇偶性改变

定理：n级排列共有 $n!$ 个，其中奇排列和偶排列各占一半，各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

$(n\geq 2)$