线性方程组(1)

线性方程组的表示法

① 非齐次：表示为矩阵的形式：$Ax=b$

② 齐次：$Ax=0$，其中0为m维零向量

线性方程组解的判定

	解的情况	充要条件
①	有解	$r(A)=r(\bar{A})$
②	有唯一解	$r(A)=r(\bar{A})=n$*
③	有无穷多解	$r(A)=r(\bar{A})<n$
④	无解	$r(A)\neq r(\bar{A})$

$r(A)\neq r(\bar{A}) \rightarrow$ 无解

否则有解 → $r(A)=r(\bar{A})=n$ 唯一解

$r(A)=r(\bar{A})$ ↘ $r(A)=r(\bar{A})<n$ 无穷多解

* 其中n为未知数的个数

例2. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

试问 a 取何值时，线性方程组 $Ax=\beta$

(1) 有唯一解；(2) 有无穷多解；(3) 无解.

解：

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2 \\ -1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ a-2 \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{pmatrix}$$

(1) 唯一解 $\Rightarrow r(A)=r(\bar{A})=n=3$

$\Rightarrow (a-3)(a+1)\neq 0$

$\Rightarrow a\neq 3$ 且 $a\neq -1$

(2) 无穷多解 $\Rightarrow r(A)=r(\bar{A})=2<3$

$\Rightarrow a-3=0$

$\Rightarrow a=3$

(3) 无解 $\Rightarrow r(A)\neq r(\bar{A})$

$\Rightarrow a+1=0$

$\Rightarrow a=-1$

齐次线性方程组解的判定

① $Ax=0$ 有非零解（无穷多解）

$\iff$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关

$\iff$ $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) < n$

$\iff$ $r(A) < n$

② $Ax=0$ 只有零解（唯一解）

$\iff$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关

$\iff$ $r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = n$

$\iff$ $r(A) = n$

（齐次方程组一定有解，至少有零解）

推论：

① 对于 $Ax=0$，若方程个数 $<$ 未知数个数，则必有非零解.

② 对于 $Ax=0$，若方程个数 $=$ 未知数个数，即系数矩阵 A 为方阵，则

$Ax=0$ 有非零解 $\iff$ $|A|=0$

$Ax=0$ 只有零解 $\iff$ $|A|\neq 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

例4. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -8 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$r(A)=3<4$，有非零解

例5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{pmatrix}$ 齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解，求 k 的取值.

解：$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{vmatrix}=(2-1)(k-1)(k-2)$

$=(k-1)(k-2)\neq 0$

$\Rightarrow k\neq 1$ 且 $k\neq 2$

小结：

$Ax=b$ ① $r(A)\neq r(\bar{A})$ 无解

② $r(A)=r(\bar{A})=n$ 唯一解

③ $r(A)=r(\bar{A})<n$ 无穷多解

$Ax=0$ ① $r(A)=n$ 只有零解

② $r(A)<n$ 有非零解