特征值与特征向量(4)

相似矩阵的概念与性质

定义：设 A 与 B 都是 n 阶方阵，若存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，则称 A 与 B 相似，或称 B 是 A 的相似矩阵，记为 $A\sim B$.

特别地，如果 A 能与对角形矩阵相似，则称 A 可对角化.

(另：等价：对于同型矩阵 A, B, $\exists$ 可逆 P, Q，使得 $PAQ=B$)

相似矩阵的性质：

1. 矩阵的相似关系是一种等价关系，即若 $A\sim B$，则 $A\cong B$.

(1) 反身性：$A \sim A$

(2) 对称性：若 $A\sim B$，则 $B\sim A$

(3) 传递性：若 $A\sim B$, $B\sim C$，则 $A\sim C$

☆. 相似矩阵一定等价，等价不一定相似.

2. 若 $A\sim B$，则 $r(A)=r(B)$.

3. 若 $A\sim B$，则 A 与 B 具有相同的特征行列式，即 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，从而具有相同的特征值.（逆命题不成立）

4. 若 $A\sim B$，则 $|A|=|B|$，$tr(A)=tr(B)$.

5. 若 $A\sim B$，则

(1) $|A|$ 与 $|B|$ 同时为 0，或同时不为 0；

(2) A（不）可逆 $\Longleftrightarrow$ B（不）可逆.

6. 若 $A\sim B$，则当 A 与 B 均可逆时，有

(1) $A^{-1}\sim B^{-1}$；

(2) $A^{*}\sim B^{*}$.

7. 若 $A\sim B$，则 $A^{m}\sim B^{m}$（$m\in N_{+}$）.

8. 若 $A\sim B$，则 $A^{T}\sim B^{T}$.

9. 若 $A\sim B$，则 $kA\sim kB$，$A+kE\sim B+kE$，$f(A)\sim f(B)$，（其中 k 为常数，$f(x)$ 是关于 x 的多项式）.

逆否：① $r(A)\neq r(B)$ $\Rightarrow$ $A\nsim B$

② $tr(A)\neq tr(B)$ $\Rightarrow$ $A\nsim B$

③ $|A|\neq|B|$ $\Rightarrow$ $A\nsim B$

④ $\lambda_A \neq \lambda_B \quad \Rightarrow \quad A \not\sim B$

例1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & b \end{pmatrix}$,
且 $A \sim B$, 求 a, b.

解: $\because A \sim B$

$$\therefore \begin{cases} tr(A) = tr(B) \\ |A| = |B| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+a = 4+b \\ 2a-4 = 3b+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -4 \end{cases}$$

例2. 设 A、B 均为三阶方阵, 且 $A \sim B$, 已知 A 的特征值为 $-1, 2, 2$, 求 $|B^2-3B+5E|$.

解: $\because A \sim B$

$\therefore$ B 的特征值为 $-1, 2, 2$

$\therefore$ $B^2-3B+5E$ 的特征值为 $9, 3, 3$

$\therefore$ $|B^2-3B+5E| = 9 \times 3 \times 3 = 81$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

例3. 已知 $A \sim B$，$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

求 $r(A-2E)+r(A-E)$.

解：$\because A \sim B$

$\therefore A-2E \sim B-2E$，$A-E \sim B-E$

$\therefore r(A-2E)=r(B-2E)$，$r(A-E)=r(B-E)$

$\therefore$ 原式 $=r(B-2E)+r(B-E)$

$$=r\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}+r\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=3+1=4$$

例4. 已知A，B 均为 n 阶矩阵，且A可逆，

证明 $AB \sim BA$.

解：证明：$\because \quad A^{-1}(AB)A=(A^{-1}A)(BA)$

$$=BA$$

$\therefore \quad AB \sim BA$

证明完毕