

线性方程组 (2)

线性方程组解的性质

对于齐次方程组:

- ① 若 ξ_1, ξ_2 齐次线性方程组 $Ax=0$ 的两个解, 则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是 $Ax=0$ 的解.
- ② 若 ξ 是 $Ax=0$ 的解, 则对任意常数 k , $k\xi$ 也是 $Ax=0$ 的解.
- ③ 若 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 是 $Ax=0$ 的解, 则它们的线性组合 $C_1\xi_1 + C_2\xi_2 + \dots + C_s\xi_s$ 也是解.

例1. 设 α_1, α_2 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的两个不同的解, 则 $\alpha_1 - \alpha_2$ 是 $Ax=0$ 的非零解.
($\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$)

对于非齐次线性方程组:

- ① 设 η_1, η_2 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的任意两个解, 则 $\eta_1 - \eta_2$ 为对应导出组

$Ax=0$ 的解.

- ② 设 η 是 $Ax=b$ 的解, ξ 是其导出组 $Ax=0$ 的任一解, 则 $\xi+\eta$ 是 $Ax=b$ 的解.
- ③ 若 η^* 是 $Ax=b$ 的解, 则 $Ax=b$ 的任一解可表示为 $\xi+\eta^*$, 其中 ξ 是其导出组 $Ax=0$ 的解.

例2. 设 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解, 则 $C_1\eta_1 + C_2\eta_2 + \dots + C_s\eta_s$ 仍为 $Ax=b$ 的解的充分必要条件是?

解: 由题: $A\eta_1 = A\eta_2 = \dots = A\eta_s = b$

$$\begin{aligned} &\therefore A(C_1\eta_1 + C_2\eta_2 + \dots + C_s\eta_s) \\ &= C_1A\eta_1 + C_2A\eta_2 + \dots + C_sA\eta_s \\ &= C_1b + C_2b + \dots + C_sb \\ &= (C_1 + C_2 + \dots + C_s)b \end{aligned}$$

要使 $(C_1 + C_2 + \dots + C_s)b = b$,

只要使 $C_1 + C_2 + \dots + C_s = 1$

\therefore 充分必要条件为 $C_1 + C_2 + \dots + C_s = 1$.

例3. 设 η_1, η_2 是非齐次方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解, ξ_1, ξ_2 是其导出组 $Ax=0$ 的两个不同的解, k_1, k_2 为任意常数, 则(ABC).

A. $\frac{1}{2}(\eta_1 - \eta_2)$ 是 $Ax=0$ 的解 ✓

B. $\frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2)$ 是 $Ax=b$ 的解 ✓

$$A\eta_1 = A\eta_2 = b$$

$$\Rightarrow A\eta_1 + A\eta_2 = 2b$$

$$\Rightarrow A \cdot \left[\frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) \right] = b$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2)$ 是 $Ax=b$ 的解

C. $\underbrace{k_1\xi_1 + k_2\xi_2}_{Ax=0} + \underbrace{\frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2)}_{Ax=b}$ 是 $Ax=b$ 的解 ✓

D. $\underbrace{k_1\xi_1 + k_2\xi_2}_{Ax=0} + \underbrace{\frac{1}{2}(\eta_1 - \eta_2)}_{Ax=0}$ 是 $Ax=b$ 的解 ✗

小结:

$$\textcircled{1} Ax=0 \text{ 的解: } \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 + \xi_2 \\ k\xi \\ c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_s\xi_s \end{array} \right.$$

$$[\eta_1 - \eta_2$$

$$\textcircled{2} Ax = b \text{ 的解: } \begin{cases} \xi + \eta \\ \xi + \eta^* \rightarrow \text{特解} \end{cases}$$

(ξ 为齐次解, η 为非齐次解)