# 矩阵(4)

## 方阵的行列式

(只有方阵才能求行列式)

性质:

设A,B为n阶方阵,k为常数,m为正整数,则

① $|A^T| = |A|$

② $|kA| = k^n|A|$ ☆.

③ $|AB| = |A| \cdot |B|$

④ $|A^m| = |A|^m$

⑤ $|E| = 1$ (E为单位矩阵)

例1. 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

$$|2A| = 2^3|A|$$
$$= 8 \times 15 = 120$$

$$|A|A = 15A = 15\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

例2. 设A为n阶方阵，且 $|A| = 3$.

$$\big|\,|A|\cdot A^T\big| = |3A^T| = 3^n|A^T| = 3^n|A| = 3^{n+1}$$

$$\big|\,|A|\cdot A^2\big| = |3A^2| = 3^n|A|^2 = 3^{n+2}$$

$$\Big|\big|\,|A|\cdot A\big|\cdot A\Big| = \big|\,|3A|\cdot A\big| = \big|\,3^n|A|\cdot A\big| = |3^{n+1}\cdot A| = 3^{n(n+1)}\cdot|A| = 3^{n^2+n+1}$$

例3. 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，E为2阶单位矩阵，矩阵B满足 $BA = B + 2E$，

求 $|B|$

求 $|B|$.

解：$BA=B+2E$

$\Rightarrow BA-BE=2E$

$\Rightarrow B(A-E)=2E$

两边同时取行列式：

$\Rightarrow |B|\cdot|A-E|=2^2|E|$

$\Rightarrow |B|\cdot 2=4$

$\Rightarrow |B|=2$

例4. 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 满足 $A^TA=E$，其中 $E$ 为 $n$ 阶单位矩阵，若 $|A|<0$，求 $|A+E|$.

解：$A^TA=E$

两边同时取行列式：

$\Rightarrow |A^T|\cdot|A|=1$

$\Rightarrow |A|^2=1$

又 $\because |A|<0$

$\Rightarrow |A|=-1$

$\therefore |A+E|$

$|A+B|=|A|+|B|$

没有此公式！

$= |A + A^T A|$

$= |(E + A^T) A|$

$= -|E^T + A^T|$

$= -|(E + A)^T|$

$= -|E + A|$

$\Rightarrow |A+E| = -|A+E|$

$\Rightarrow |A+E| = 0$

方阵的伴随矩阵

例11. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

按行求的代数余子式按列放

注：任一方阵都有伴随矩阵

只有方阵才有伴随矩阵

伴随矩阵的性质：

① 对任意方阵A，有 $AA^* = A^*A = |A|E$

以三阶为例：$AA^* = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$

$$= |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |A|E$$

（不管A可逆与否，均成立）

② 若A为n阶方阵，则 $|A^*| = |A|^{n-1}$

$AA^* = |A|E$

$\Rightarrow |A| \cdot |A^*| = \big| |A|E \big|$

$\Rightarrow |A| \cdot |A^*| = |A|^n |E|$

$\Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1} \quad (|A| \neq 0)$

（不管A可逆与否，均成立）

③ 若A为方阵，则 $(A^T)^* = (A^*)^T$

④ 若A为n阶方阵，k为常数，

则 $(kA)^* = k^{n-1}A^*$

⑤ 若 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则 $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

主对角线元素互换位置

副对角线元素成相反数

（只适用于二阶方阵）

例12. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$$|2A^*| = 2^3|A|^{3-1}$$
$$= 8|A|^2$$
$$= 8\times 5^2$$
$$= 200$$

例13. 设三阶矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $A^*=A^T$，若 $a_{11}, a_{12}, a_{13}$ 为三个相等的正数，求 $a_{11}$.

解: $A^*=A^T$

$$\Rightarrow A_{ij}=a_{ij}$$

又 $\because |A| = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$

$$= a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2>0$$

$$|A^*|=|A^T|$$
$$\Rightarrow |A|^2=|A|$$
$$\Rightarrow |A|(|A|-1)=0$$

又 $\because |A|>0$

$\therefore \ |A| = 1$

$\therefore \ 3a_{11}^2 = 1$

$\Rightarrow a_{11} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ (a_{11} > 0)$