特征值与特征向量(5)

矩阵的对角化

定理：n阶矩阵A可对角化

$\Longleftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量.

定理：若n阶矩阵A有n个互异的特征值，

则A可对角化.

定理：n阶矩阵可对角化

① $\Longleftrightarrow$ A的每个重特征值对应的线性无关特征向量的个数恰好等于该特征值的重数；

② $\Longleftrightarrow$ 对于A的任一s重特征值λ，齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=0$的基础解系含有s个向量；

③ $\Longleftrightarrow$ 对于A的任一s重特征值λ，有$n-r(\lambda E-A)=s$；

④ $\Longleftrightarrow$ 对于A的任一s重特征值λ，有$r(\lambda E-A)=n-s$.

例1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $A\sim B$，

(1) 判断 B可否对角化？

(2) 求 $r(B)$.

解：(1) B有三个互异的特征值，B可对角化

(2) $r(B)=r(A)=3$

例2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，判断可否对角化.

解：$|\lambda E-A|=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda+2 & -2 \\ 3 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \\ -1 & \lambda+2 & -2 \\ 3 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+2 & -3 \\ 3 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda+2 & -3 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda+3)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=4,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-3$$

∴ A有3个互异的特征值

∴ A有3个互异的特征值

∴ A可对角化

例3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，判断可否对角化.

解：$|\lambda E-A|=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1\\ 4 & \lambda-3\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-1)^2=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=1$$

对于 $\lambda_2=\lambda_3=1$，$E-A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，

$r(E-A)=2\neq n-s=1$

∴ A不可对角化

例4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$，判断A可否对角化.

解：$r(A)=1$

$$\therefore \lambda_1=tr(A)=6,\ \lambda_2=\lambda_3=0$$

对于 $\lambda_2=\lambda_3=0$，$\lambda E-A=-A$

$\therefore r(-A)=1=n-s=1$

$\therefore A$ 可对角化

例5. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&a\\1&0&0\end{pmatrix}$ 且 A 可相似于对角形矩阵，求 a.

解：$|\lambda E-A|=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-1&\lambda-1&-a\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)\times(-1)^{2+2}\times\begin{vmatrix}\lambda&-1\\-1&\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=-1$$

$\because A$ 可相似于对角形矩阵

$\therefore r(E-A)=n-s=1$

$$\because E-A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&-a\\-1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-(1+a)\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore -(1+a)=0$

$\Rightarrow a=-1$

$(1\ \ -2\ \ 2$

例16. 判断 $A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ 能否对角化？

若能，求出 P 和 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解：$|\lambda E-A|=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+2 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda+2 & \lambda-2 \\ -2 & -4 & \lambda-2 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 4 & \lambda+6 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 4 & \lambda+6 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)^2(\lambda+7)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-7$$

① $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，$2E-A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $x_1=-2x_2+2x_3$

令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

则基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

② $\lambda_3=-7$ 时，$-7E-A=\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$

令 $x_3 = -2$，则基础解系为 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\therefore P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$，$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -7 \end{pmatrix}$