线性方程组 (5)

线性方程组的求解

齐次：

$Ax=0$ ⟶ 对系数矩阵A进行行变化为行简化阶梯形矩阵

↓

求出A的秩 $r(A)$

- $r(A)<n$ ↓ 有非零解 ↓ 有基础解系 ↓ 写出 $Ax=0$ 的通解
- $r(A)=n$ ↓ 只有零解

非齐次：

$Ax=b$ → 对增广矩阵 $\bar{A}$ 进行行变化为行简化阶梯形矩阵

↓

求出 A 及 $\bar{A}$ 的秩 $r(A), r(\bar{A})$

$r(\bar{A})=r(A)=n$ → 求出唯一解

$r(\bar{A})=r(A)<n$ → 无穷多解 → 求 $Ax=b$ 的特解；求 $Ax=0$ 的基础解系 → 写出 $Ax=b$ 的通解

$r(\bar{A})\neq r(A)$ → 无解

例3.

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & -12 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & -11 & 4 & 10 & 6 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & -\frac{12}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{6}{7} \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

原方程组的同解方程组:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 - \frac{12}{7} \\ x_2 = \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 - \frac{6}{7} \end{cases}$$

其中x_3, x_4为自由未知量

令$x_3 = x_4 = 0$, 得原方程组的一个特解 $\alpha_0 = \begin{pmatrix} -\frac{12}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

又原方程导出组 $Ax=0$的同解方程组:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4 \\ x_2 = \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$$

其中 x_3, x_4 为自由未知量

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, 得导出组的一个基础解系为 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

∴原方程组的通解为

$$x = \alpha_0 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{12}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

其中c_1, c_2为任意常数.