矩阵(2)

方阵的幂

例1. 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$

则 $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$

方阵幂的性质

设A为方阵，k_1,k_2为非负整数，则

① $A^{k_1}A^{k_2}=A^{k_1+k_2}$

② $(A^{k_1})^{k_2}=A^{k_1k_2}$

③ $(lA)^k=l^kA^k$（l为常数，k为正整数）

④ 若矩阵A、B可交换（$AB=BA$），

则有 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)=(A-B)(A+B)$

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$

$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$$

$$(AB)^k=A^kB^k.$$

若 A, B 不可交换，则不成立，一般有

$$(A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2$$

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$$

$$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$$

$$(AB)^2=AB\cdot AB$$

⑤ 关于单位矩阵（可直接用）

$$A^2-E=(A+E)(A-E)$$

$$(A+E)^2=A^2+2A+E$$

$$(A-E)^2=A^2-2A+E$$

$$A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)$$

$$A^3+E=(A+E)(A^2-A+E)$$

⑥ 方阵多项式：

设 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$,

则 $f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$

例 2. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} & \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^2 = AB \cdot AB = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

例3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

……

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$$

例4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{1\times 3}$,

求 $(AB)^n$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2$$

$$(AB)^n = A\,\underbrace{(BABA \cdots BA)}_{n-1}\,B$$

$$= (-2)^{n-1} AB$$

$$= (-2)^{n-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

例5. 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$，求$A^{100}$.

$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ -3)$ （反向构造）

$= \alpha \cdot \beta^T$

$\therefore A^{100} = \alpha(\beta^T\alpha\beta^T\alpha \cdots \beta^T\alpha)\beta^T$

$= \alpha\beta^T \times (-8)^{99}$

$= -8^{99} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 3 & -3 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$

例6. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$n \geq 2$ 且 $n \in Z$，求$A^n - 2A^{n-1}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2A$$

$\therefore A^n - 2A^{n-1} = A^{n-2}(A^2 - 2A)$

又 $\because A^2 = 2A \Rightarrow A^2 - 2A = 0$

$\therefore$ 原式 $= 0$