# 特征值与特征向量(7)

## 实对称矩阵的对角化

定义：设A, B为两个n阶方阵，如果存在一个正交矩阵，使 $Q^{-1}AQ = B$，则称A与B正交相似.

性质：

① 实对称矩阵的特征值均为实数，特征向量均为实向量

② 实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量正交

③ 设A为n阶实对称矩阵，则对于A的任一s重特征值λ，有 $r(\lambda E - A) = n - s$

④ 实对称矩阵对应于s重特征值的线性无关的特征向量恰有s个

⑤ n阶实对称矩阵必有n个线性无关的特征向量

⑥ 实对称矩阵一定可以对角化

⑦ 实对称矩阵与对角形矩阵正交相似

例1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$，求一正交矩阵Q，使 $Q^{-1}AQ=\Lambda$ 为对角形矩阵.

解： $|\lambda E-A|=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda-1&2\\0&2&\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\2&\lambda\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&2\\0&\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-4)-4\lambda=0$$

$$\Rightarrow \lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-8)=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=-2$$

① $\lambda_1=1$ 时， $E-A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=-\frac{1}{2}x_3\end{cases}$

令 $x_3=-2$，则基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$

② $\lambda_2=4$ 时， $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

③ $\lambda_3=-2$时，$\alpha_3=\begin{pmatrix} \cdots \\ 2 \end{pmatrix}$

由性质知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$已经为正交向量组，只需单位化即可

$$\beta_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$\therefore Q=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$，则$Q$为正交矩阵，

且$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & -2 \end{pmatrix}=\Lambda$

小结：对于实对称矩阵$A$，正交相似于对角形矩阵.

① $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 三根互异：

$$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \xrightarrow{\text{单位化}} \beta_1,\beta_2,\beta_3$$

② $\lambda_1$单根，$\lambda_2=\lambda_3$重根：

$$\lambda_1：\alpha_1 \xrightarrow{\text{单位化}} \beta_1$$

$$\lambda_2=\lambda_3：\alpha_1,\alpha_2 \text{ 若正交 } \xrightarrow{\text{单位化}} \beta_1,\beta_2,\beta_3$$

不正交 $\xrightarrow{\text{正交化}}\xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

③ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ 三重根：

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \xrightarrow{\text{正交化}}\xrightarrow{\text{单位化}} \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$