二次型(3)

二次型和对称矩阵的有定性

定义：设 n 元二次型 $f(x)=x^TAx\ (A^T=A)$，如果对于任意非零列向量 $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T\neq 0$，恒有 $f(x)=x^TAx$

① >0；② <0；③ ≥ 0；④ ≤ 0，则称二次型 $f(x)=x^TAx$ 为①正定 ②负定 ③半正定 ④半负定 二次型.

定理：正定二次型经过任一可逆线性变换仍化为正定二次型.（性质）

推论：① 可逆线性变换不改变二次型的定性.（性质）

② 若A与B是两个合同的实对称矩阵，则A与B有相同的定性.

定理：n 元二次型 $f(x)=x^TAx$ 正定的充分必要条件是它的标准型为 $d_1u_1^2+d_2u_2^2+\cdots$

$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots$
$+d_ny_n^2$，其中$d_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$.（标准形法）

推论：① n元二次型$f(x)=x^TAx$正定的充分必要条件是它的正惯性指数为n.（惯性指数法）

② 若对称矩阵A正定，则$|A|>0$.（正定的必要条件）

定理：n阶实对称矩阵正定的充分必要条件是A的特征值全大于零.（特征值法）

定义：设n阶矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，由A的第$1,2,\cdots,k$行及第$1,2,\cdots,k$列交叉位置上的元素所构成的k阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

称为A的k阶顺序主子式，记为$|A_k|$.

定理：n阶实对称矩阵A正定的充分必要

定理：n阶实对称矩阵A正定的充分必要条件是A的各阶顺序主子式全大于0.（顺序主子式法）

正定矩阵的性质

① 若A为正定矩阵，则A必为对称矩阵.（正定的必要条件）

② 若A为正定矩阵，则A的主对角线上的元素都大于零，即$a_{ii}>0, i=1,2,\dots,n$.（正定的必要条件）

③ 若A为正定矩阵，则A为可逆矩阵.（正定的必要条件）

④ 若A为正定矩阵，则A^T、A^{-1}、A^*、$kA(k>0)$、A^k（k是正整数）均为正定矩阵.

⑤ 若A为正定矩阵，B是同阶正定（或半正定）矩阵，则$A+B$也是正定矩阵.

例9. 当t取何值时，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$是正定二次型？

解：二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

一阶：$2>0$

二阶：$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2-1=1>0$

三阶：$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 1 \end{vmatrix}=2-1-\frac{t^2}{2}>0$

$\Rightarrow t\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

完结撒花！