向量(2)

向量组的线性相关性

定义：给定向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，如果存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\vec{0}$，则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，而称$k_1,k_2,\cdots,k_n$为一组相关系数．否则称向量组线性无关．

线性无关的表述：

① 不存在不全为0的系数，使$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=\vec{0}$成立．

② 若$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=\vec{0}$成立，系数必全为0．

③ 对任意不全为0的$k_1\cdots k_n$，$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n\neq 0$．

性质及结论：

① 一个向量线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha=\vec{0}$；

一个向量线性无关 $\Leftrightarrow$ $\alpha\neq\vec{0}$．

② 两个非零向量α与β线性相关

$\Leftrightarrow$ α与β的分量对应成比例

③ 如果向量组中有一部分向量(部分组)线性相关 则该向量组线性相关

关，则原向量组必线性相关.

④ 若向量组线性无关，则其任一部分组也线性无关.（逆否命题）

⑤ 含有零向量的向量组必线性相关.

⑥ n 维单位坐标向量组必线性无关.

⑦ 设 r 维向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的 $r+l$ 维接长向量，则 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关.

⑧ 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 是 r 维向量，$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 是其 $r+l$ 维接长向量，若 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性相关，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 也线性相关.（逆否命题）

⑨ 若向量组中有两个向量成比例，则向量组必线性相关.

重点概括：

① 部分组相关，整体组相关

整体组无关，部分组无关

② 线性无关向量组的接长向量组无关

线性相关向量组的截短向量组相关

例2. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，$\alpha=\begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix}$，若 $A\alpha$ 与 α

线性相关，则

线性相关，求k.

解：　　$A\alpha=\begin{pmatrix}k\\2k+3\\3k+4\end{pmatrix}$

$A\alpha$与α的分量对应成比例

$\Rightarrow \frac{k}{k}=2k+3=3k+4$

$\Rightarrow k=-1$

判定：

① 定义法：

线性相关 <=> 齐次方程组有非零解

线性无关 <=> 齐次方程组只有零解

② 矩阵秩法：

$r(A)<n$，线性相关

$r(A)=n$，线性无关

③ 行列式法：

$|A|=0$，线性相关

$|A|\neq 0$，线性无关

定理：

① 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\ (m\geq 2)$线性相关的

充要条件是其中至少有一个向量是其余 $m-1$ 个向量的线性组合.

② 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性相关，则 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示，且表示法唯一.

③ 设有两个向量组：(I) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，(II) $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$. 若向量组(I)线性无关，且向量组(I)可由向量组(II)线性表示，则 $r \leq s$.（替换定理）

④ 设有两个向量组：(I) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，(II) $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$. 若向量组(I)可由(II)线性表示，且 $r > s$，则(I)必线性相关.（③逆否命题）

重点概括：

多数向量可由少数向量表示，则多数向量一定线性相关.

推论：

⑤ 若(I)、(II)均线性无关，且(I)、(II)可相互线性表示，则 $r = s$.（$r \geq s$ 且 $r \leq s$）

⑥ 若向量组所含向量的个数大于向量的

维数，则该向量组线性相关.