矩阵(3)

矩阵的转置

定义：将矩阵 A的各行依次变为列得到的矩阵,即为 A的转置矩阵A^T.

$A_{m\times n} \Rightarrow A^T_{n\times m}$

性质：

① $(A^T)^T = A$

② $(A+B)^T = A^T + B^T$

$(A-B)^T = A^T - B^T$

③ $(kA)^T = kA^T$，k为常数

④ $(AB)^T = \underline{B^T A^T}$ ☆.

$(ABC)^T = C^T B^T A^T$

⑤ $(A^k)^T = (A^T)^k$, k为正整数

例2. 设$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}$.

$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 6 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ -4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ -4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

可见 $(AB)^T = B^T A^T$

对称矩阵与反对称矩阵（方阵）

对称矩阵：$a_{ij} = a_{ji}$ （$A^T = A$）

① 主对角线元素为任意数

② 以主对角线为轴，上下对应相等

例如，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，$A^T = A$，为对称矩阵.

结论：

① 若 A，B 为同阶对称矩阵，则 $A+B$，$A-B$ 仍为对称矩阵.

$$(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$$

$$(A-B)^T = A^T - B^T = A-B$$

② 若 A 为对称矩阵，则 kA，A^m 仍为

② 若A为对称矩阵，则kA, A^m仍为对称矩阵.（k为常数，m为正整数）

$$(kA)^T = kA^T = kA$$

$$(A^3)^T = (A^T)^3 = A^3$$

③ 若A, B为同阶对称矩阵，则AB为对称矩阵的充要条件是$AB=BA$.

充分性：若$AB=BA$，

则$(AB)^T = B^TA^T = BA = AB$

必要性：若AB为对称矩阵，

则$(AB)^T = AB = B^TA^T = BA$

④ 对$\forall\, m\times n$矩阵A，则A^TA、AA^T均为对称矩阵.

$$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$$

$$(AA^T)^T = (A^T)^TA^T = AA^T$$

反对称矩阵：$A^T = -A$

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

（奇数阶反对称行列式的值为0）

. / 0 1 -2 \

例如 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

① 主对角线元素全为0

② 关于主对角线对称位置元素互为相反数

结论：

① 若 A，B 为同阶反对称矩阵，则

$A+B$，$A-B$ 仍为反对称矩阵.

$A^T=-A$，$B^T=-B$

$(A+B)^T = A^T+B^T=-(A+B)$

② 若 A 为反对称矩阵，k 为常数，则

kA 仍为反对称矩阵.

③ 若 A 为反对称矩阵，k 为正整数，则

A^k 为 $\begin{cases} \text{对称矩阵，} k \text{ 为偶数} \\ \text{反对称矩阵，} k \text{ 为奇数} \end{cases}$

$A^T=-A$

$(A^k)^T=(A^T)^k=(-A)^k$

$=(-1)^kA^k=\begin{cases} -A^k, k\text{为奇} \\ A^k, k\text{为偶} \end{cases}$