矩阵(1)

概念：$A_{mn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

矩阵A与B是同型矩阵

$\Leftrightarrow$ A、B行数、列数都相等

矩阵 A、B 相等

$\Leftrightarrow$ A与B是同型矩阵且对应位置元素相等

特殊矩阵：

① 方阵 ② 行矩阵 ③ 列矩阵 ④ 零矩阵

⑤ 负矩阵 ⑥ 上三角形矩阵 ⑦ 下三角形矩阵

⑧ 对角形矩阵(diag) ⑨ 数量矩阵(主对角线元素是同一常数的对角形矩阵) ⑩ 单位矩阵

(主对角线上元素全为1,其它全为0的方阵)

加法、减法的运算规律：

① $A+B=B+A \longrightarrow$ 交换律

② $(A+B)+C=A+(B+C) \longrightarrow$ 结合律

② $(A+B)+C=A+(B+C)$ → 结合律

③ $A+O=A$

④ $A+(-A)=O$

⑤ $A-B=A+(-B)$

⑥ $A+B=C \Longleftrightarrow A=C-B$ → 移项

数乘：数k乘以矩阵A，就是用数k乘以矩阵A的每一个元素.

① 矩阵的所有元素均有公因子k，k外提1次

② 行列式的某一行有公因子k，k外提1次

③ 行列式的所有元素均有公因子k，k外提n次

数乘的运算规律：

① $k(A+B)=kA+kB$

② $(k+l)A=kA+lA$

③ $k(lA)=l(kA)=(kl)A$

④ $1\cdot A=A$

⑤ $(-1)\cdot A=-A$

例10. 设$A=\begin{pmatrix} 6 & y \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} z & -3 \end{pmatrix}$，

$C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$，且$A+2B=C$，求$x,y,z$.

解：$A+2B=C$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 \\ 6 & y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2z & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4+x=0 \\ 6+2z=-1 \\ y-6=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=11 \\ z=-\frac{7}{2} \end{cases}$$

矩阵的乘法

特点：

① 只有当左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数，两个矩阵才可以相乘

② 乘积矩阵AB的行数 = 左边A的行数

③ 乘积矩阵AB的列数 = 右边B的列数

$$A_{s\times t}\,B_{t\times m}=C_{s\times m}$$

例11. 设$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，

$$AB=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}_{2\times2}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 9 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

例2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}_{2\times3}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

BA 无意义

例3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times1}$，$B = (-1, 1, 4)_{1\times3}$.

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 8 \\ -3 & 3 & 12 \end{pmatrix}, \quad BA = 13$$

矩阵的乘法不满足的规律

① 不满足交换律

② 不满足消去律

③ 两个非零矩阵乘积可能是零矩阵

例14. $A=\begin{pmatrix}2&0\\-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0\\3&5\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}2&0\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$AC=\begin{pmatrix}2&0\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

矩阵的乘法满足的规律

① 结合律 $(AB)C=A(BC)$

② 分配律 $(A+B)C=AC+BC$

$C(A+B)=CA+CB$

③ $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

④ $AE=A$, $EA=A$ (E为单位矩阵)

$E_{m\times m}A_{m\times n}=A_{m\times n}E_{n\times n}$

⑤ 数量矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&&\\&a&\\&&\ddots\\&&&a\end{pmatrix}=aE$,

则有 $AB=aB$

⑥ $\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&&&\\&b_2&&\\&&\ddots&\\&&&b_n\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a_1b_1&&&\\&a_2b_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_nb_n\end{pmatrix}$

例5. $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}_{2\times2}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-2&1\end{pmatrix}_{2\times3}$，

$C=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_{3\times1}$

$$ABC=(AB)C=\begin{pmatrix}0&3&1\\2&-1&3\end{pmatrix}_{2\times3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_{3\times1}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}_{2\times1}$$

若 $AB=BA$，则称 A 与 B 可交换，

否则，称 A 与 B 不可交换.

需满足 ① 同阶方阵 ② $AB=BA$

注：单位矩阵 E 和任一同阶方阵可交换

两个同阶对角形矩阵可交换

例6. 判断下列矩阵是否可交换.

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}2&3\\0&3\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix}$

$AB\neq BA$，可交换

(2) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

A、B 不是同阶方阵，不可交换

例7. 求与 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

解：设 $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$AB=BA$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}a&b\\a+c&b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&b\\c+d&d\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}a=a+b\\a+c=c+d\\b+d=d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=0\\a=d\end{cases}$

$\therefore B=\begin{pmatrix}a&0\\c&a\end{pmatrix}$，$a,c$ 为任意常数