矩阵(9)

矩阵的秩

定义：矩阵A中非零子式的最高阶数，称为矩阵A的秩，记作 $r(A)$.

① 零矩阵没有非零子式，规定零矩阵的秩为零

② 若 $A\neq 0$，则 $r(A)\geq 1$

③ 对任意矩阵 $A_{m\times n}$，有 $0\leq r(A)\leq \min(m,n)$

定义：设A为 $m\times n$ 矩阵，若 $r(A)=\min(m,n)$，称A为满秩矩阵.

$$\left.\begin{array}{l}\text{① 若 } r(A)=m\text{，称}A\text{为行满秩矩阵}\\ \text{② 若 } r(A)=n\text{，称}A\text{为列满秩矩阵}\end{array}\right\}\text{满秩矩阵}$$

③ 若 $r(A)<\min(m,n)$，称A为降秩矩阵

④ 特别地，若A为n阶方阵，若 $r(A)=n$，称A为满秩矩阵；若 $r(A)<n$，称A为降秩矩阵.

由定义可知，若A为n阶方阵，则

A满秩 $\Leftrightarrow r(A)=n \Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow$ A可逆(非奇异)

A降秩 $\Leftrightarrow r(A)<n \Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow$ A不可逆(奇异)

有关矩阵的秩的16个结论

① $r(A)=r\ (r>0) \Leftrightarrow$ 矩阵A中至少有一个r阶子式不等于零，而所有的 r+1阶子式全等于零(或根本没有r+1阶子式).

② $r(A)\geq r \Leftrightarrow$ 矩阵A中至少有一个r阶子式不等于零.

③ $r(A)<r \Leftrightarrow$ 矩阵A中所有r阶子式全等于零.

④ $r(A)=r(A^T)$, $r(A)=r(-A)$, $r(kA)=r(A)$, $(k\neq 0)$.

⑤ $r(A)=0 \Leftrightarrow A=O$, $r(A)\geq 1 \Leftrightarrow A\neq O$.

⑥ 若 $A\neq 0$，则A的任意两行(列)元素对应成比例 $\Leftrightarrow r(A)=1$.

⑦ 若A为行阶梯形矩阵，则 $r(A)=$ A中非零行的行数.

⑧ 初等变换不改变矩阵的秩，即若 $A\cong B$，则 $r(A)=r(B)$.

⑨ 若A，B为同型矩阵，则 $A\cong B \Leftrightarrow r(A)=r(B)$.

⑩ 若A的标准形为$D=\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$，则$r(A)=$D中1的个数.

⑪ 若A,B同为m×n矩阵，则$r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$.

⑫ 若A为m×n矩阵，B为n×s矩阵，则

$$r(A)+r(B)-n\le r(AB)\le \min(r(A),r(B)).$$

⑬ 若A为m×n矩阵，B为n×s矩阵，且$AB=0$，则

$$r(A)+r(B)\le n.$$

⑭ $r(A^TA)=r(AA^T)=r(A)=r(A^T)$.

⑮ 若A为可逆方阵，则$r(AB)=r(B)$，$r(CA)=r(C)$.

另：若P,Q均可逆，则$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$.

⑯ 若A为n阶方阵（$n\ge 2$），A^*为A的伴随矩阵，则

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n; \\ 1, & r(A)=n-1; \\ 0, & r(A)<n-1. \end{cases}$$

例2. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$的秩为3，求k.

解：$\because r(A)=3<4$

$\therefore |A|=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} k+3 & k+3 & k+3 & k+3 \\ 1 & k & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (k+3)\times 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (k+3)(k-1)^3 = 0$$

$\Rightarrow k=-3$ 或 $k=1$

∵ 当 $k=1$ 时，$r(A)=1$（舍去）

∴ $k=-3$

例15. 设 A 是 4×3 矩阵，且 $r(A)=2$，而 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，求 $r(AB)$.

解：∵ $B=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6+4=10 \neq 0$

∴ B 可逆

∴ $r(AB)=r(A)=2$

矩阵的秩的求法

① 定义法：若矩阵 A 中有不等于零的 r 阶子式，而所有的 $r+1$ 阶子式全都等于零（或根本没有 $r+1$ 阶

子式)，则 $r(A)=r$.

② 初等变换法：利用矩阵的初等变换将矩阵化为行阶梯形矩阵，则行阶梯形矩阵的非零行数即为矩阵的秩.

③ 行列式法：若 A 为 n 阶方阵，则当 $|A|\neq 0$ 时，$r(A)=n$；当 $|A|=0$ 时，$r(A)<n$.

例19. 设 $A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$，求 $r(A)$.

解：$|A|=\lambda^3+1+1-\lambda-\lambda-\lambda=\lambda^3-3\lambda+2$

$$=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

另法求 $|A|$：$|A|=\begin{vmatrix} \lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

① 当 $\lambda=1$ 时，$r(A)=1$

② 当 $\lambda=-2$ 时，$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} (-1)$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \swarrow 2$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \swarrow 2 \text{-} 1$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $r(A)=2$（或 $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$，即找1个2阶非零子式）

③ 当 $|A| \neq 0$，即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时，$r(A)=3$