行列式(2)

n阶行列式的定义

定义一、按行展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

① 行标取标准排列

② 列标取排列的所有可能

③ 符号由列标排列逆序数奇偶性决定

④ 不同行不同列取n个元素相乘

例1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{N(1324)} \times 1 \times 3 \times 7 \times 5 = -105$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{N(4321)}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 30$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{N(1234)} \times 1\times2\times4\times3 + (-1)^{N(1243)} \times 1\times2\times5\times1$$

$$= 24 - 10$$

$$= 14$$

定义二、按列展开：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

① 列标取标准排列

② 行标取排列的所有可能

③ 符号由行标排列逆序数奇偶性决定

④ 不同行不同列取n个元素相乘

例.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{N(1234)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \quad -(\ \ )\qquad \times 1\times 5\times 8\times 10$$

$$= 400$$

例1. 求符号（五阶行列式 $|a_{ij}|$）

(1) $a_{14}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52}$

$N(43512) = 3+2+2 = 7$ 负

(2) $a_{51}a_{32}a_{13}a_{24}a_{45}$

$N(53124) = 4+2 = 6$ 正

(3) $a_{24}a_{15}a_{31}a_{52}a_{43}$

$N(21354) + N(45123)$

$= (1+1) + (3+3)$

$= 8$ 正

例2. 若 $a_{15}a_{2k}a_{36}a_{4i}a_{51}a_{62}$ 是六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中带负号的项，求 k, i.

解：① $k=3$，$i=4$ 时，

$N(536412) = 4+2+3+2 = 11$ ✓

② $k=4$，$i=3$ 时，

$N(546312) = 4+3+3+2 = 12$ ✗

$\therefore\ k=3,\ i=4$

例3. $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$=(-1)^{N(3421)}\times 1\times 2\times 3\times 4$

$=-24$

或 原式 $=(-1)^{N(4312)}\times 1\times 2\times 3\times 4$

$=-24$

例4. 求 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ x & x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3x \end{vmatrix}$

中 x^4 的系数.

解: 含有 x^4 的项为 $(-1)^{N(1324)}6x^4$

$=-6x^4$

$\therefore$ 系数为 -6

结论:

① 若行列式某行或某列元素全为0,

则该行列式值为0.

② 三角形行列式等于主对角线上元素的乘积.(还要看符号).

另: $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$