特征值与特征向量(6)

向量的内积

定义：n 维列向量 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ 的

内积：$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$；

行向量 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的

内积：$(\alpha,\beta)=\alpha\beta^T=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$.

注：内积是一个数，是两个向量对应分量的乘积之和.

内积的性质：

① 非负性：$(\alpha,\alpha)\geq 0$，且 $(\alpha,\alpha)=0 \Longleftrightarrow \alpha=\vec{0}$

② 对称性：$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

③ 齐次性：$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$

④ $(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=(\alpha_1,\beta)+(\alpha_2,\beta)$

$(\alpha,\beta_1+\beta_2)=(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)$

$(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2)=(\alpha_1,\beta_1)+(\alpha_2,\beta_1)+(\alpha_1,\beta_2)+(\alpha_2,\beta_2)$

向量的长度

定义：$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha,\alpha)} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

性质：

① 非负性：$\|\alpha\| \geq 0$ 且 $\|\alpha\| = 0$

$\iff \alpha = \vec{0}$

② 齐次性：$\|k\alpha\| = |k| \cdot \|\alpha\|$

③ 三角不等式：$\|\alpha+\beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$

④ Cauchy - Schwartz 不等式：

$|(\alpha,\beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$，且等号成立

$\iff \alpha$ 与 β 线性相关

向量的正交：

定义：若 $(\alpha,\beta)=0$，则称向量 α 与 β 正交，

记作 $\alpha \perp \beta$.

定义：两两正交的非零向量组称为正交向量组.

定义：每个向量均为单位向量的正交向量组

称为标准正交向量组或单位正交向

量组

量组.

定理：正交向量组必线性无关.

施密特正交化方法：

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_3$线性无关，令

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$\cdots\cdots$

再将$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$单位化，令

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\quad \gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\cdots,\gamma_s=\frac{\beta_s}{\|\beta_s\|},$$

则$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$即为与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价的标准正交向量组.

例7. 将向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，化为正交向量组.

解：令$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

则$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$
$$= \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

正交矩阵

定义：满足 $AA^T=E$ 的 n 阶矩阵 A 称为正交矩阵.

性质：

① 若 A 为正交矩阵，则 $AA^T=A^TA=E$

② 若 A 为正交矩阵，则 $|A|=\pm1$

③ 若 A 为正交矩阵，则 A 可逆，且 $A^{-1}=A^T$

④ 若 λ 是正交矩阵 A 的特征值，则 $\frac{1}{\lambda}$ 也是其特征值

⑤ 若 A 为正交矩阵，则 A^T, A^{-1}, A^* 也是正交矩阵

⑥ 若 A, B 均为正交矩阵，则 AB 也为正交矩阵

⑦ 保内积性：若 A 为正交矩阵，则 $(A\alpha, A\beta)=(\alpha,\beta)$

⑧ 保长度性：若 A 为正交矩阵，则 $\|A\alpha\|=\|\alpha\|$.

⑨ A 为正交矩阵

$\Leftrightarrow$ A 的列（行）向量组为单位正交向量组