二次型(1)

二次型及矩阵表示

定义：含有n个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式.

定义：称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T A x \ (A^T = A)$ 为二次型式的矩阵表达式.

例2. 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 8x_2x_3 + x_3^2$ 的矩阵.

(1) 平方项的系数做成主对角线元素

(2) 交叉项的系数除以2，放到对应的两个位置上去

解：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

例3. 已知对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$，写出A对应的二次型.

(1) 主对角线元素做成平方项的系数

(2) 主对角线上(下)方元素乘以2，做成交叉项的系数

解：$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$

二次型的标准形

定义：二次型只含平方项 x_i^2，不含交叉项 $x_ix_j\ (i\neq j)$，即形式为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$
$=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$.

二次型的标准形对应的矩阵是对角矩阵

二次型的秩等于标准形中非零系数平方项的个数

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

二次型的规范形

定义：如果标准形的系数 d_i 只能是 $1,-1,0$ 三个数，则称为二次型的规范形. 即

$$z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$$

顺序不能变

其中，$r=r(A)$，$p\leq r\leq n$.

…次型化成规范形是唯一的

二次型化成规范形是唯一的.

二次型的惯性指数和符号差

定义：在标准型中，正系数平方项的个数 p 称为二次型的正惯性指数，负系数平方项的个数 q 称为二次型的负惯性指数，正惯性指数与负惯性指数差 $p-q$ 称为二次型的符号差.

性质：二次型的秩等于正惯性指数与负惯性指数的和，即 $r=p+q$.

二次型的线性变换

$x=Cy$ 是线性变换（不是 $y=Cx$）

定理：线性变换乘积的矩阵等于各线性变换矩阵的乘积，且可逆线性线性变换的乘积仍是可逆线性变换.

定理：二次型经过可逆线性变换，得到的仍是二次型，且秩不变.

合同矩阵与合同变换

定义：设A和B是n阶矩阵，如果存在可逆矩阵C，使得 $C^TAC=B$，则称矩阵A与B合同，记为 $A\simeq B$，并称由A到B的变换为合同变换，C称为合同变换的矩阵.

归纳：

① 等价：同型A、B，∃可逆P、Q，$PAQ=B$

② 相似：方阵A、B，∃可逆P，$P^{-1}AP=B$

③ 正交相似：方阵A，B，∃正交P，$P^{-1}AP=B$，$P^TAP=B$

④ 合同：方阵A、B，∃可逆P，$P^TAP=B$

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{相似} \arrow[dr] & \\
\text{等价} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \text{正交相似} \\
 & \text{合同} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

性质：

① 若 $A\simeq B$，则 $r(A)=r(B)$，$A\cong B$

② 若 $A\simeq B$，则 $A=A^T \Leftrightarrow B^T=B$

③若 $A \simeq B$，则 A、B 可逆性相同，当 A、B 都可逆时，$A^{-1} \simeq B^{-1}$

④若 $A \simeq B$，则 $A^T \simeq B^T$