线性方程组(4)

线性方程组解的结构

齐次：

定理：对于n元齐次线性方程组 $Ax=0$，若系数矩阵A的秩 $r(A)=r<n$，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为其一个基础解系，则方程组 $Ax=0$ 的通解可以表示为

$$x=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 为任意常数.

例2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是4维非零列向量组，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，方程组 $Ax=0$ 的通解为 $c_1(-1,1,3,0)^T+c_2(1,0,-2,0)^T$，求向量组的线性相关性.

解：$\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}$ 是基础解系

$\Rightarrow\ n-r(A)=2$

$\Rightarrow\ r(A)=2$

$\therefore A\eta_1 = A\eta_2 = 0$

$$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\0\end{pmatrix} = -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\end{pmatrix} = \alpha_1 - 2\alpha_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_2 = 3\alpha_3\\ \alpha_1 = 2\alpha_3\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}\alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_1$$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2$；$\alpha_2, \alpha_3$；$\alpha_1, \alpha_3$ 线性相关

非齐次：

① $r(A) \neq r(\bar{A})$ 无解

② $r(A) = r(\bar{A}) = n$ 唯一解

③ $r(A) = r(\bar{A}) < n$ 无穷多解

定理：对于 n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$，若 $r(A) = r(\bar{A}) = r < n$，如果 α_0 是 $Ax=b$ 的一个解（通常为特解），$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 为其导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则方程组 $Ax=b$ 的通解可表示为

$$x = \alpha_0 + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$ 为任意常数

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_{n-r}$ 为任意常数.

$Ax=b$ 的通解：

$Ax=b$ 的特解 $+$ $Ax=0$ 的通解

例3. 设 A 为 4×3 矩阵，η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的三个线性无关的解，k_1，k_2 为任意常数. 求 $Ax=\beta$ 的通解.

解：$\because A\left[\frac{1}{2}(\eta_2+\eta_3)\right]=\frac{1}{2}(A\eta_2+A\eta_3)=\beta$

$\therefore \frac{1}{2}(\eta_2+\eta_3)$ 为 $Ax=\beta$ 的特解

$\because \eta_1, \eta_2, \eta_3$ 线性无关

$\therefore \eta_2-\eta_1, \eta_3-\eta_1$ 是导出组 $Ax=0$ 的两个线性无关的解

$\therefore 3-r(A)\geq 2 \Rightarrow r(A)\leq 1$

又 $\because r(A)\geq 1$

$\therefore r(A)=1$

$\therefore Ax=0$ 的基础解系中含有两个解向量

$\eta_2-\eta_1$，$\eta_3-\eta_1$ 即为基础解系

$\therefore Ax=\beta$ 的通解为 $\frac{1}{2}(\eta_2+\eta_3)$

$$+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$$