行列式(3)

行列式的性质

定义：n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 的转置行列式

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论：$(D^T)^T=D$

性质1：行列式与它的转置行列式相等.

(行列式的行、列地位是一样的，对行成立的性质对列也成立.)

性质2：对换行列式的两行(列)，行列式变号 (参考逆序数的对换证明)

推论：若行列式中有两行(两列)对应元素相等，则行列式值为零.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow D = -D \Rightarrow 2D = 0 \Rightarrow D = 0$

性质3：行列式中某一行(列)所有元素都乘同一数k，等于用数k乘此行列式.

$$\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

行列式某一行(列)有公因子k，k就向外提一次.

$$\begin{vmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 5k & 6k \\ 7k & 8k & 8k \end{vmatrix} = k^3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

若行列式均有公因子k，k就向外提n次.

推论：若行列式有两行(列)的元素对应成比例，则此行列式值为零.

对应成比例，则此行列式值为零.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 10 & 10 & 50 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

结论：

① D中某一行全为0，则D=0

② D中两行相等，则D=0

③ D中两行成比例，则D=0

性质4：若行列式某一行(列)的各元素都是两个数之和，则此行列式等于两个行列式之和，这两个行列式分别以这两个数之一作为所在行(列)对应位置的元素，其他位置的元素与原行列式相同.

☆. 其余行(列)保持不变.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a+1 & b+3 & c+6 \\ 8 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 8 & 8 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 8 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

性质5：把行列式的某一行(列)的各元素乘同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式不变.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ m+k & n+2k & p+3k \end{vmatrix} \times k$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ k & 2k & 3k \end{vmatrix}}_{=0}$$

① 某一行(列)的k倍加到另一行(列)上去.

② 某一行(列)加到另一行(列)上去.

③ 某一行(列)乘以(−1)加到另一行(列)上去.

④ 某一行(列)减另一行(列).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \times 1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

例1. 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$,

则 $\begin{vmatrix} 4a_{11} & 4a_{13} & 4a_{12}-2a_{11} \\ -a_{21} & -a_{23} & -a_{22}+\frac{1}{2}a_{21} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32}-\frac{1}{2}a_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a_{11} & 4a_{13} & 4a_{12} \\ -a_{21} & -a_{23} & -a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$

$\times\frac{1}{2}$

$= -4\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 8$

例2. (反对称行列式) n阶行列式 $D=|a_{ij}|$,

其元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}$, $i,j=1,2,\cdots,n$.

证明: 当n为奇数时, 行列式 $D=0$.

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

① 主对角线元素全为0

② 以主对角线为轴, 上下元素为相反数

以三阶为例:

n阶则为 $(-1)^n$

$D = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & a & b \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = -D$$

$D = -D \Rightarrow 2D = 0 \Rightarrow D = 0$ *

由此看出，当 n 为奇数时，* 成立

（n 为偶数时得出 $D=D$，无法判断）

例3. 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$

解：该方程为四次方程，实数根 ≤ 4.

① $2-x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

② $9-x^2=5 \Rightarrow x=\pm 2$

$\therefore x=\pm 1$ 或 ± 2

例4. 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 10 & 5 \\ 0 & 3 & -25 & 8 \\ 5 & 10 & 15 & 4 \end{vmatrix}$

（纯数字化为上三角形）

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 10 & 5 \\ 0 & 3 & -25 & 8 \end{vmatrix} \times(-2)$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & -25 & 8 \\ 5 & 10 & 15 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-5) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & -25 & 8 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times 3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times(-3) \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -52 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1) \times 5 \times (-52)$$

$$= 260$$

例5. 计算 $D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_1 & 3+a_1 \\ 1+a_2 & 2+a_2 & 3+a_2 \\ 1+a_3 & 2+a_3 & 3+a_3 \end{vmatrix}$

$$\begin{matrix} \times(-1) & & \times(-1) \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_2 & 1 & 2 \\ 1+a_3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

例6. 求证

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

解：证明：

$$\text{左式} \underset{\times(-1)}{=} \begin{vmatrix} b & c & a \\ a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} \times(-1)$$

$$\underset{\times(-1)}{=} \begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ a+b & b+c & c+a \\ a & b & c \end{vmatrix} \times(-1)$$

$$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ a & b & c \\ c & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ b & c & a \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

证明完毕！