二次型(2)

化二次型为标准形

1. 配方法

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$

解：$f=\underline{x_1^2-2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2}-(x_2-x_3)^2-3x_2^2+4x_3^2-6x_2x_3$

$$=(x_1-x_2+x_3)^2-4x_2^2-4x_2x_3+3x_3^2$$

$$=(x_1-x_2+x_3)^2-(4x_2^2-4x_2x_3+x_3^2)+4x_3^2$$

$$=(x_1-x_2+x_3)^2-(2x_2+x_3)^2+4x_3^2$$

$$=y_1^2-y_2^2+4y_3^2$$

$$\begin{cases} y_1=x_1-x_2+x_3 \\ y_2=2x_2+x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1+\frac{1}{2}y_2-\frac{3}{2}y_3 \\ x_2=\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

$\therefore x=Cy$，$C=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$

解：令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_3 = y_3 \end{cases}$$

$\therefore f = 2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1+y_2)y_3-6(y_1-y_2)y_3$

$= 2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3$

$= 2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 + 2z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$

$\therefore f = 2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$

$\therefore x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y,\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z$

2. 正交变换法（实对称矩阵的正交相似对角化）

$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$

解：$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=-2$$

$$\Rightarrow \alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 单位化后 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$,

Q 为正交矩阵，

且 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 4 & \\ & & -2\end{pmatrix}$

令 $x=Qy$，即 $\begin{cases} x_1=-\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{1}{3}y_3\\ x_2=-\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3\\ x_3=\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3\end{cases}$

定理：实对称矩阵A与B合同的充分必要条件是它们有相同的秩和相同的正惯性指数.

推论：若实对称矩阵A与B相似，则A与B合同.

正特征根个数 = 正惯性指数

负特征根个数 = 负惯性指数