线性方程组(3)

齐次线性方程组的基础解系

定义：设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解向量，如果

(1) $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 线性无关；

(2) 方程组 $Ax=0$ 的任一解向量都可以由 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 线性表示.

则称 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系.

定理：对于 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$，若 $r(A)=r<n$，则 $Ax=0$ 一定存在基础解系，且基础解系中含有 $n-r$ 个解向量.

例. 求齐次方程组

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-6x_3-4x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+2x_2-3x_3-5x_4+3x_5=0 \\ x_1-5x_2-6x_3+8x_4-6x_5=0 \end{cases}$$

的一个基础解系

的一个基础解系:

解:

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-6&-4&2\\2&2&-3&-5&3\\1&-5&-6&8&-6\end{pmatrix}$$

$\div 4 \quad -3 \quad -2$

$$\to\begin{pmatrix}1&-5&-6&8&-6\\0&12&9&-21&15\\0&4&3&-7&5\end{pmatrix}$$

$\div 3$

$$\to\begin{pmatrix}1&-5&-6&8&-6\\0&4&3&-7&5\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$5 \quad \div 4$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{9}{4}&-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&\frac{3}{4}&-\frac{7}{4}&\frac{5}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=\frac{9}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4-\frac{1}{4}x_5\\x_2=-\frac{3}{4}x_3+\frac{7}{4}x_4-\frac{5}{4}x_5\end{cases}$$

$\therefore$ x_3, x_4, x_5 是自由未知量

令 x_3, x_4, x_5 分别取值为 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$

得: $\eta_1=\begin{pmatrix}9\\-3\\4\\0\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}3\\7\\0\\4\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}-1\\-5\\0\\0\\4\end{pmatrix}$

全部解为 $C_1\eta_1+C_2\eta_2+C_3\eta_3$

基础解系的判定

向量组 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 是n元齐次线性方程

组 $Ax=0$ 的基础解系

组 $Ax=0$ 的基础解系

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\mathrm{I})\ \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s \text{ 是 } Ax=0 \text{ 的解向量} \\ (\mathrm{II})\ \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s \text{ 线性无关} \\ (\mathrm{III})\ \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s \text{ 中向量个数 } s=n-r(A) \end{cases}$$

性质：

① 当 $Ax=0$ 有非零解时，基础解系存在

② 若 $Ax=0$ 的基础解系存在，则基础解系不唯一

③ $Ax=0$ 的不同基础解系之间可以互相线性表示

④ $Ax=0$ 的不同基础解系中所含向量个数相等，均为 $n-r(A)$

⑤ $Ax=0$ 中的任意 $n-r(A)$ 个线性无关的解向量都是它的基础解系

⑥ 若 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $Ax=0$ 的任一解都可用 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 线性表示

小结：

① 秩越高，线性独立性越强

② 秩越低，线性相关性越强