

二次型(1)

二次型及矩阵表示

定义：含有 n 个变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的二次齐次多项式。

定义：称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x$ ($A^T = A$) 为二次型式的矩阵表达式。

例2. 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 8x_2x_3 + x_3^2$ 的矩阵。

(1) 平方项的系数做成主对角线元素

(2) 交叉项的系数除以2，放到对应的两个位置上去

解：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

例3. 已知对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ ，写出 A 对应的二次型。

(1) 主对角线元素做成平方项的系数

(2) 主对角线上(下)方元素乘以2, 做成交叉项的系数

解: $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$

二次型的标准形

定义: 二次型只含平方项 x_i^2 , 不含交叉项

$x_i x_j (i \neq j)$, 即形式为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
 $= d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$.

二次型的标准形对应的矩阵是对角矩阵

二次型的秩等于标准形中非零

系数平方项的个数

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

二次型的规范形

定义: 如果标准形的系数 d_i 只能是 1, -1, 0 三个数, 则称为二次型的规范形. 即

$$z_1^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_r^2$$

↑
顺序不能变

其中, $r = r(A)$, $p \leq r \leq n$.

二次型在实数域上的规范形是唯一的

二次型化成规范形是唯一的.

二次型的惯性指数和符号差

定义: 在标准形中, 正系数平方项的个数 p 称为二次型的正惯性指数, 负系数平方项的个数 q 称为二次型的负惯性指数, 正惯性指数与负惯性指数差 $p-q$ 称为二次型的符号差.

性质: 二次型的秩等于正惯性指数与负惯性指数的和, 即 $r = p + q$.

二次型的线性变换

$x = Cy$ 是线性变换 (不是 $y = Cx$)

定理: 线性变换乘积的矩阵等于各线性变换矩阵的乘积, 且可逆线性变换的乘积仍是可逆线性变换.

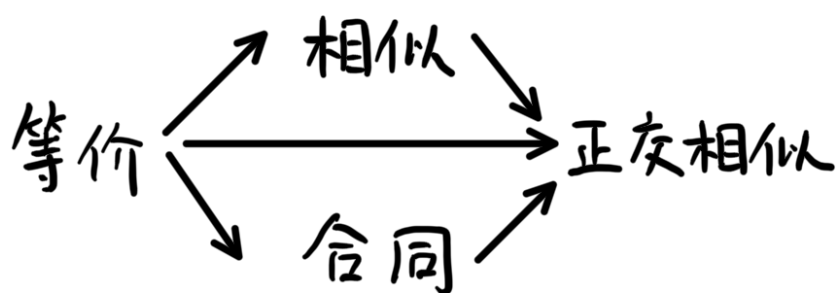
定理: 二次型经过可逆线性变换, 得到的仍是二次型, 且秩不变.

合同矩阵与合同变换

定义：设 A 和 B 是 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 C ，使得 $C^T A C = B$ ，则称矩阵 A 与 B 合同，记为 $A \simeq B$ ，并称由 A 到 B 的变换为合同变换， C 称为合同变换的矩阵。

归纳：

- ① 等价：同型 A, B ， \exists 可逆 P, Q ， $PAQ = B$
- ② 相似：方阵 A, B ， \exists 可逆 P ， $P^{-1}AP = B$
- ③ 正交相似：方阵 A, B ， \exists 正交 P ， $P^{-1}AP = B$ ， $P^T A P = B$
- ④ 合同：方阵 A, B ， \exists 可逆 P ， $P^T A P = B$



性质：

- ① 若 $A \simeq B$ ，则 $r(A) = r(B)$ ， $A \cong B$
- ② 若 $A \simeq B$ ，则 $A = A^T \Leftrightarrow B^T = B$

③ 若 $A \simeq B$, 则 A, B 可逆性相同, 当 A, B 都可逆时, $A^{-1} \simeq B^{-1}$

④ 若 $A \simeq B$, 则 $A^T \simeq B^T$