矩阵（8）

矩阵的等价

定义：若矩阵A可经过有限次初等变换化为矩阵B，则称A与B等价，记作 $A \cong B$.

性质：

① 反身性：对任何矩阵A，都有 $A \cong A$.

② 对称性：若矩阵 $A \cong B$，则 $B \cong A$.

③ 传递性：若矩阵 $A \cong B$，$B \cong C$，则 $A \cong C$.

矩阵等价的有关结论：

① 任意一个矩阵 $A_{m\times n}$ 都和其标准形矩阵

$$D=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$ 等价.

② 矩阵 $A \cong B$ 的充要条件是∃一系列初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s, Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$，使

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = B$$

③ 矩阵 $A \cong B$ 的充要条件是 $\exists$ 可逆矩阵 P, Q，使 $PAQ = B$.

④ 若矩阵 $A \cong B$，则 A 与 B 的标准形相同.

⑤ 若矩阵 $A \cong B$，则 $r(A) = r(B)$.

⑥ 若 A, B 为同型矩阵，则 $A \cong B \Leftrightarrow r(A) = r(B)$.

⑦ 若 A, B 为同型方阵，且 $A \cong B$，则 $|A| = k|B|$ $(k \neq 0)$，则 $|A|, |B|$ 同时为零，或同时不为零.

⑧ 若 A, B 为同型方阵，且 $A \cong B$，则 A, B 同时可逆，或同时不可逆.

⑨ 若 A 为 n 阶方阵，则 A 可逆的充要条件为 $A \cong E$.

⑩ 若 A 为方阵，则 A 可逆的充要条件是 A 可以表示为有限个初等矩阵的乘积.

初等变换法求逆矩阵

回顾：伴随矩阵法：$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

例11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

技巧：① 只作行变换

技巧：① 只做行变换

② 第一列 → 第二列 → ⋯

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

推导：若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

$P_1 \cdots P_s E = A^{-1}$

$\Rightarrow P_1 \cdots P_s E A = A^{-1} A$

$\Rightarrow P_1 \cdots P_s A = E$

（初等行变换）

初等变换法解矩阵方程

设A为n阶可逆矩阵，求解矩阵方程$AX=B$时，

法一：先求出A^{-1}，再计算$X=A^{-1}B$.

法二（初等变换法）：对矩阵$(A\,|\,B)$进行初等行变换，将其化为如下形式

$$(A\,|\,B) \xrightarrow{\text{行}} (E\,|\,C)$$ →只能行变换

则$X=C$.

推导：$A^{-1}B=X$

若A可逆，则A^{-1}可逆，

$P_1\cdots P_s=A^{-1}$

$\Rightarrow \underbrace{P_1\cdots P_s}A=A^{-1}A=E$

又$\because A^{-1}B=X \Rightarrow B=AX$

$\Rightarrow P_1\cdots P_sAX=EX$

$\Rightarrow \underbrace{P_1\cdots P_s}_{\text{（初等行变换）}}B=X$

另：若方程为$XA=B$，右乘$P_1\cdots P_s$，初等列变换

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix}E\\X\end{pmatrix}$$

分块矩阵

① 加法与数乘

② 乘法

$$C_{ij} = \underset{\sim\sim\sim}{A_{i1}B_{1j}} + \cdots + \underset{\sim\sim\sim}{A_{it}B_{tj}} \quad (i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,r)$$

因是子块的乘法(小矩阵相乘),左右顺序不可颠倒

A的列的分法与B的行的分法是一样的

例14. 设分块矩阵 $A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right)$,

$B=\left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$,求AB.

解: $A=\begin{pmatrix} E & -2E \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & E \end{pmatrix}$

$\therefore AB=\begin{pmatrix} B_1 & B_2-2E \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

③ 转置

第一步: 将子块视为普通元素求转置

第二步: 每个子块求转置

④ 逆矩阵

若 B、C 均为方阵且均可逆,则

$\begin{pmatrix} B & \\ & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & \\ & C^{-1} \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} & B \\ C & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & C^{-1} \\ B^{-1} & \end{pmatrix}$

若A、B、C均为方阵且均可逆，则

$$\begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & & \\ & B^{-1} & \\ & & C^{-1} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} & & A \\ & B & \\ C & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & C^{-1} \\ & B^{-1} & \\ A^{-1} & & \end{pmatrix}$$

例5. 设 $A=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ \hline a_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，其中 $a_1a_2a_3a_4 \neq 0$，求 A^{-1}.

解：设 $A=\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \end{pmatrix}$$

⑤ 行列式

$$\left|\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right| = |A|\cdot|B|$$

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}\right| = (-1)^{mn}|A|\cdot|B|$$

例7. 设A为三阶方阵，$|A|=\frac{1}{2}$，求

$$D=\left|\begin{pmatrix} (3A)^{-1}-2A^* & 0 \\ A & -A \end{pmatrix}\right|.$$

解：$D = |(3A)^{-1}-2A^*|\cdot|-A|$

$$= |\tfrac{1}{3}A^{-1}-2A^*|\cdot(-1)^3|A|$$

$$= -\frac{1}{2} \left| \frac{1}{3} A^{-1} - 2 |A| A^{-1} \right|$$

$$= -\frac{1}{2} \left| -\frac{2}{3} A^{-1} \right|$$

$$= -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{|A|}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{8}{27}\right) \times 2$$

$$= \frac{8}{27}$$