

ساختمان داده ها

استاد : دکتر اسکندری

ترم اول سال تحصیلی 1403-1404

هفته چهارم

گرد آورندگان : امیر حسین همتی ، حمید رضا نامجومنش

توضیحات:



در صورت مشاهده لوگوی سبز open ai در بالای سوال خود شما می توانید از هوش مصنوعی در پاسخ به سوال خود استفاده کنید اما باید سوالی را که از هوش مصنوعی پرسیدید اسکرین شات گرفته و در پاسخنامه خود قرار دهید.



در صورت مشاهده لوگوی قرمز open ai در بالای سوال خود شما نمی توانید از هوش مصنوعی در پاسخ به سوال خود استفاده کنید و باید با دانش خود به این سوال پاسخ دهید.



$$2^{2^{100}} \in \Theta(1)$$

سوال 1 : عبارت های زیر را اثبات کنید.

$$\log_{(n)} \in \Theta(\log_2(n))$$

$$\log(n!) \in \Theta(n \log n)$$

$$4^n \notin O(2^n)$$

$$n^k \in O(c^n)$$

$$\log(5^x) \in \Theta(x)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \in \Theta(\log n)$$



سوال 2 : صحیح و غلط بودن عبارت های زیر را مشخص کنید و دلیلی خود را در یک الی دو خط توجیه کنید و در صورت نیاز به اثبات ریاضی آن را نیز بیان کرده و در صورت نادرستی عبارت مثال نقض برای آن آورده .

$$f(n) \notin O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in O(f(n))$$

•

$$f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$$

•

• در روش تغییر متغیر همیشه با روش تغییر متغیر می توانیم رابطه بازگشتی را ساده تر کنیم یا به عبارتی اثبات کنیم .

• قضیه ساندویچ فقط برای توابع صعودی (مونوتونیک) است



سوال 3 : با توجه به قضیه اصلی (Master Theorem) به مثال های زیر پاسخ دهید .

(لطفا قبل از حل سوال به قضیه اصلی مسلط شوید و سپس سوالات را حل کنید.)

Master Theorem \Rightarrow if

$$T(n) = T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^d)$$

when : $a > 0$, $b > 1$, $d \geq 0$

then

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^d) & \text{if } d > \log_b(a) \\ \Theta(n^d \log n) & \text{if } d = \log_b(a) \\ \Theta(n^{\log_b(a)}) & \text{if } d < \log_b(a) \end{cases}$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + 25n^3$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2 \log(n))$$

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{3}\right) + O(n)$$



سوال 4 : عبارت زیر را با قضیه درخت بازگشتی تحلیل کنید .

$$T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{4n}{5}\right) + cn$$

$$T(1) = c$$



سوال 5 : الگوریتم جستجوی دودویی بازگشتی (Recursive Binary Search) را پیاده سازی کنید و سپس پیچیدگی زمانی را تحلیل کنید (معادله + پیچیدگی زمانی + روش مورد استفاده + اثبات نهایی + مرتبه چندم).



سوال 6 : در یک دایره واحد n نقطه داریم می دانیم که این نقاط به صورت یکنواخت توزیع شده اند (یعنی احتمال پیدا کردن یک نقطه در هر ناحیه متناسب هست با مساحت آن ناحیه) حال الگوریتمی از $O(n)$ پیشنهاد دهید تا نقاط را بر حسب فاصله آن ها از مرکز دایره مرتب کند .



*

سوال 7 : یک آرایه A داریم که از اعدادی تشکیل شده باشد اندازه این آرایه n است هر یک از اعداد این آرایه توی بازه 1 تا n^3 است آیا می توانیم این آرایه در $O(n)$ مرتب سازی کنیم یا خیر ؟ (علت خود را بیان کنید).