

Sistema realimentados

Resposta em frequência

Tópicos

1. Introdução

Motivação para análise de resposta em freqüência

Comparação entre resposta no tempo e em freqüência

Predição do comportamento em regime transitório e estacionário a partir dos gráficos de módulo e ângulo de $G(s)$

2. Módulo e ângulo de uma função de transferência

Cálculo do módulo e ângulo de uma função de transferência

Análise gráfica da contribuição de polos e zeros

Contribuição de polos e zeros no SPE e no SPD

3. Desenho de gráficos polares

4. Desenho de gráficos de Bode

5. Efeito do atraso no tempo nos gráficos de Bode e polares

6. Critério de Nyquist

7. Estabilidade relativa

- no gráfico polar
- No gráfico de Bode

8. Efeito do atraso no tempo na estabilidade relativa

1.1 Motivação

A resposta no tempo de sistemas de controle permite obter informações mais realísticas sobre seu desempenho, através do uso sinais padrão de teste (degrau, rampa, etc).

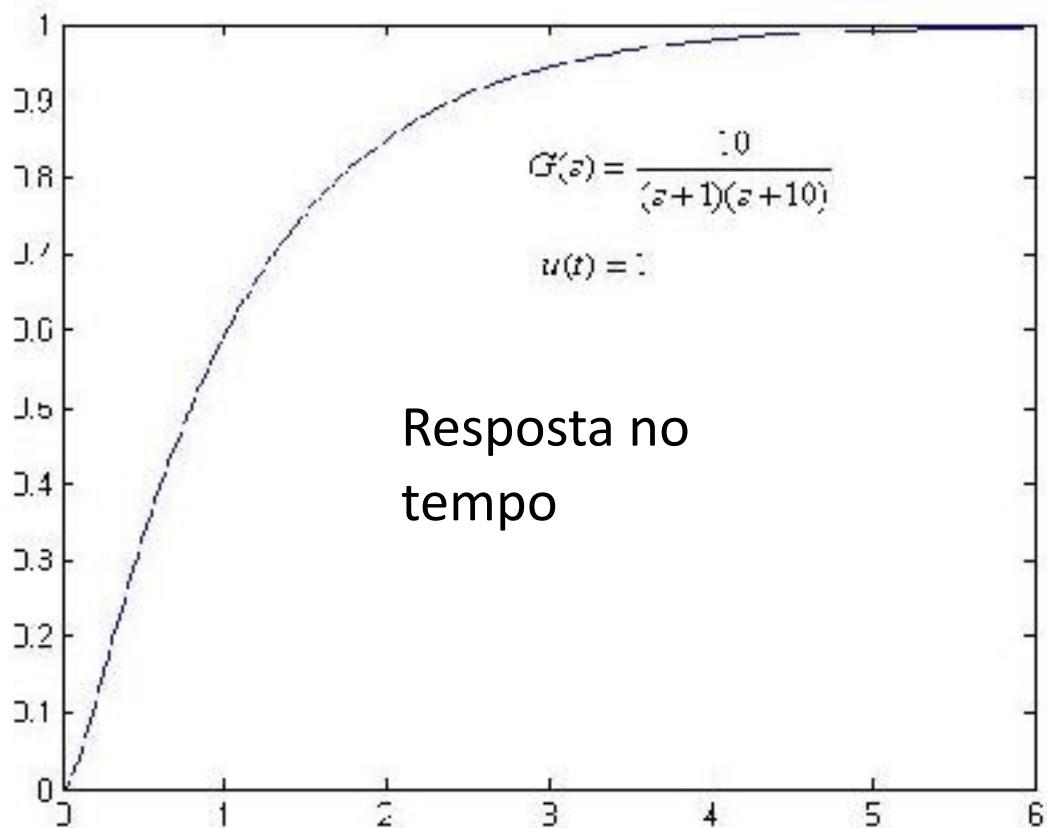
Em sistemas de comunicação, a resposta em freqüência é mais importante, uma vez que sinais senoidais devem ser usualmente processados.

O uso da resposta em freqüência para análise de sistemas de controle não implica que apenas sinais senoidais possam ser aplicados.

Seu uso para projeto de sistemas de controle permite a proposta de uma metodologia diferente que pode simplificar o projeto de controladores.

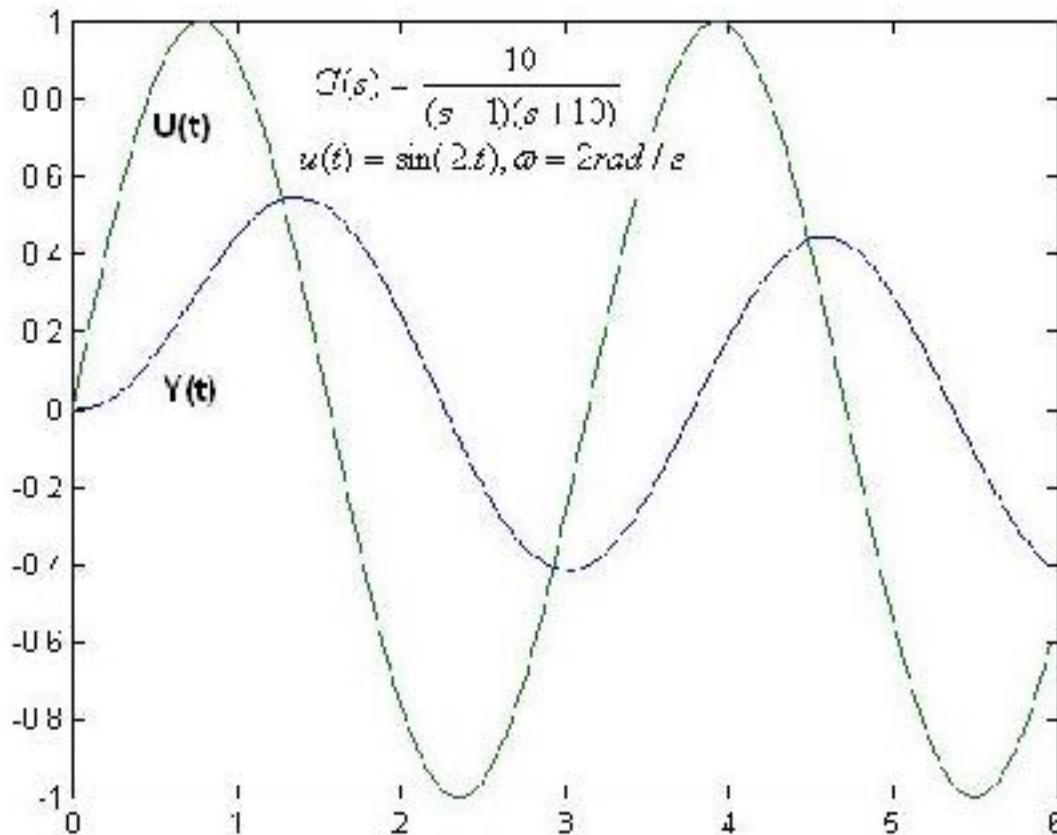
1.1 Motivação

Exemplo : $G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$

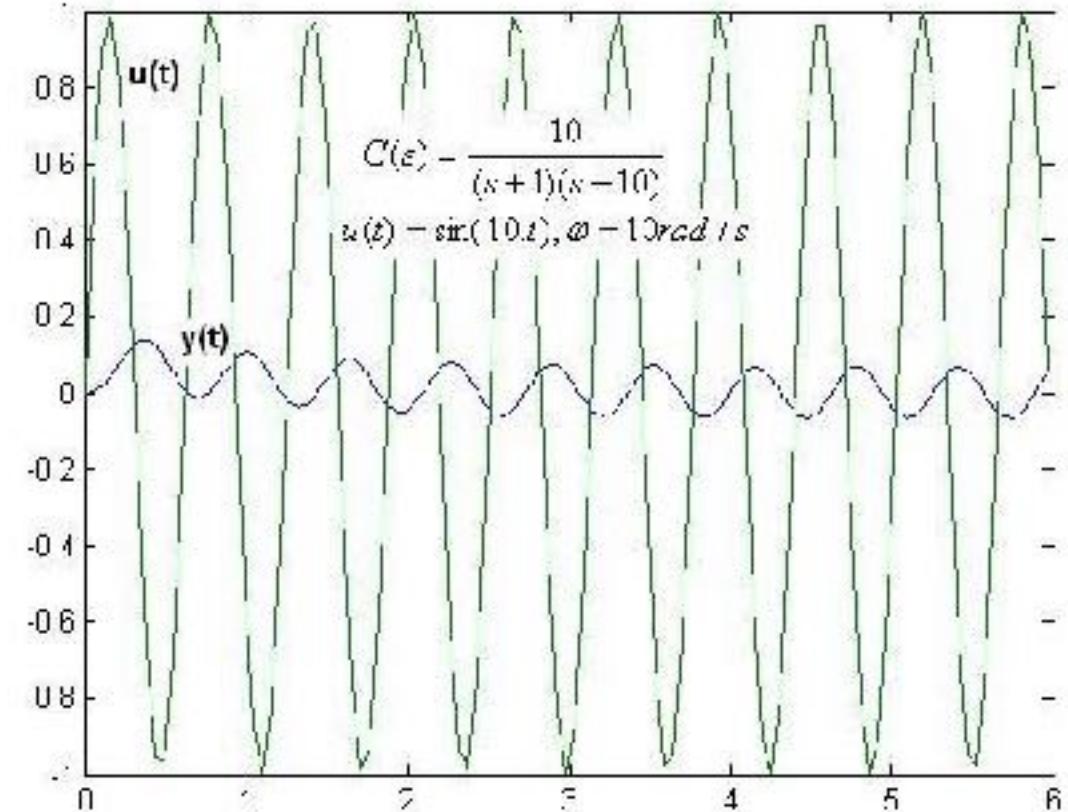


1.1 Motivação

Exemplo : $G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$

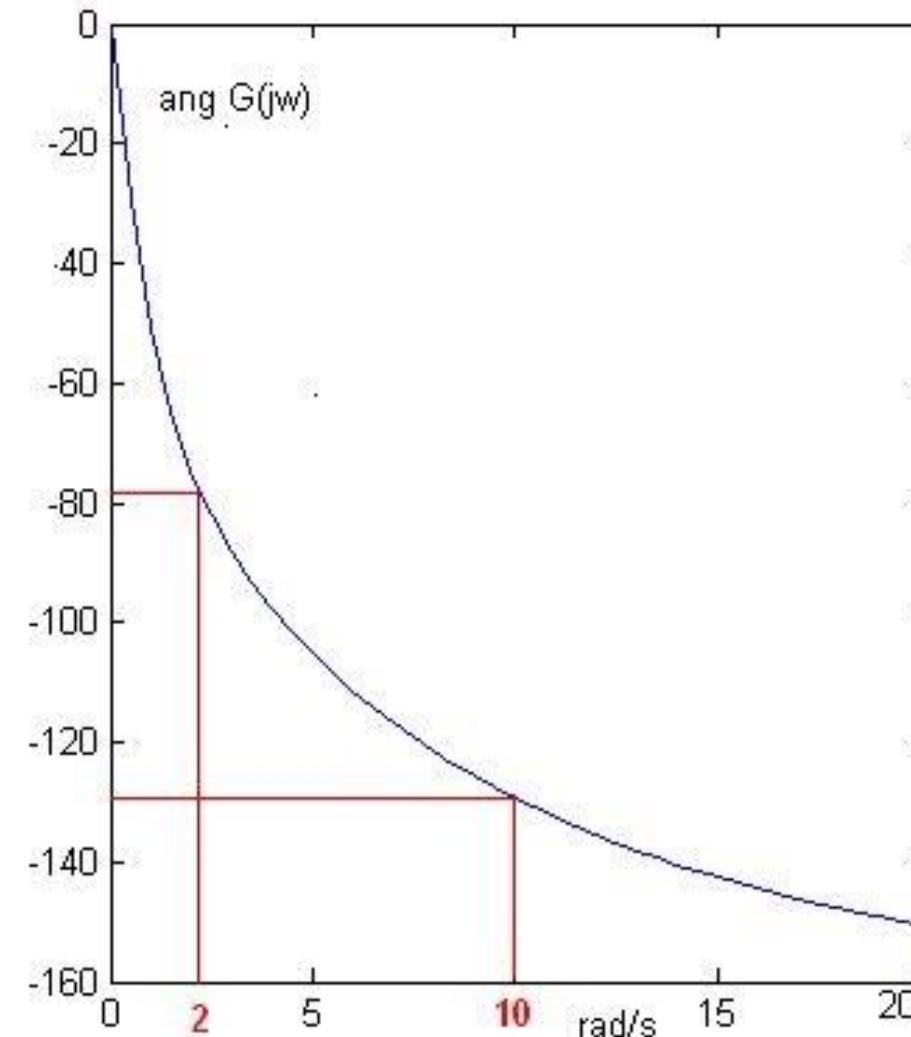
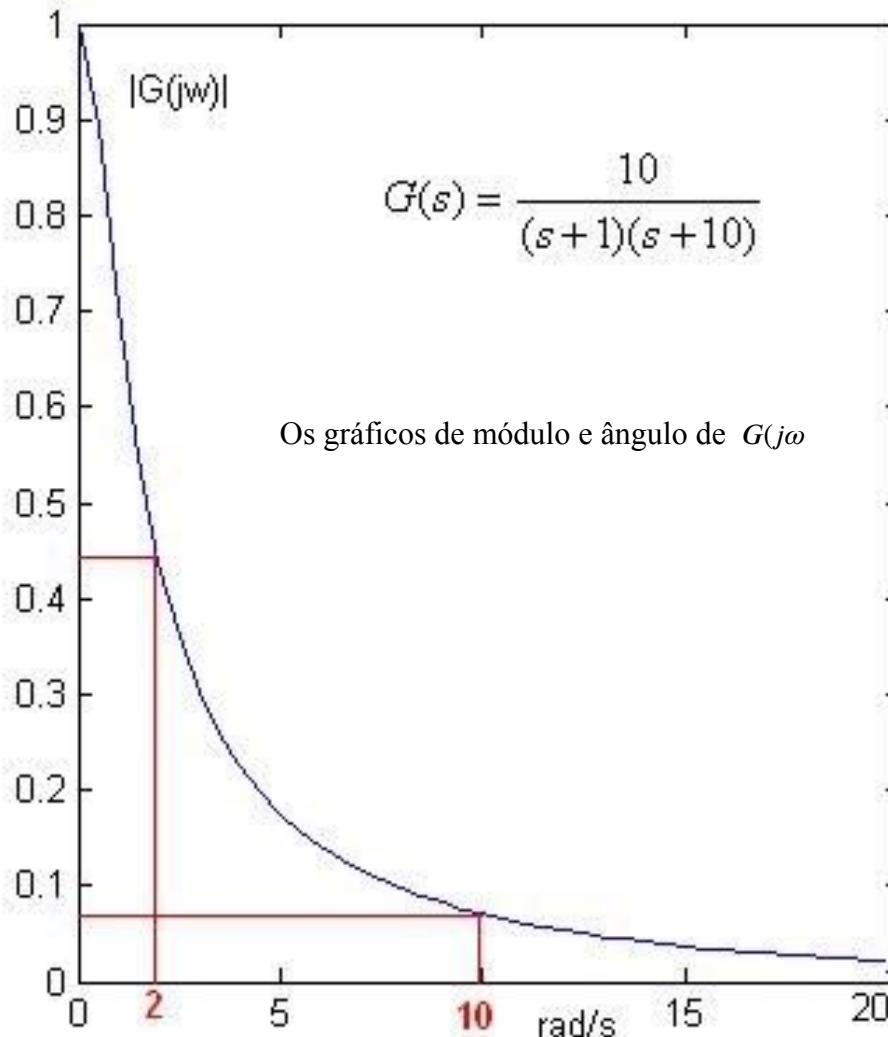


Resposta para sinais senoidais aplicados.



1.1 Motivação

O módulo diminui para altas frequências, e a fase atrasa.



2. Módulo e ângulo de uma função de transferência

Seja $G(s) = \frac{1}{s + a}$, $a > 0$

Para avaliar em $s = j\omega$ $G(jw) = \frac{1}{j\omega + a}$, $a > 0$

Módulo de $G(j\omega)$:

$$|G(jw)| = \frac{1}{|j\omega + a|} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$$

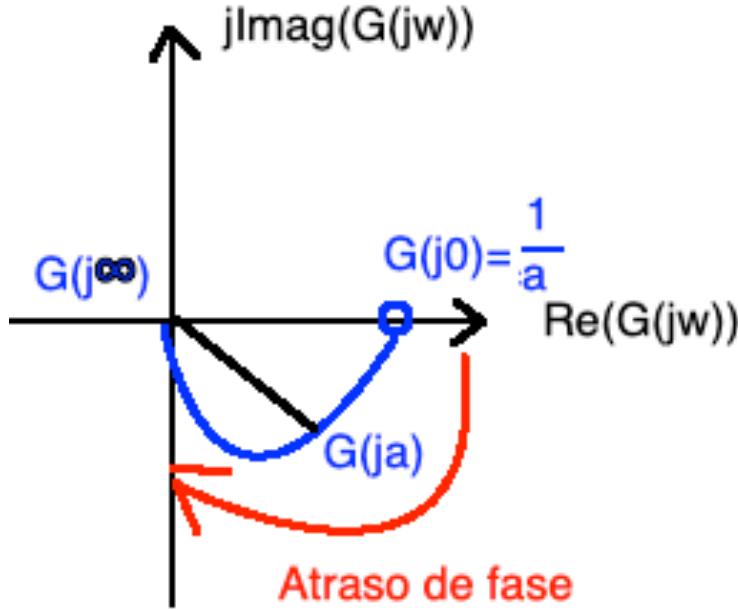
Ângulo de $G(j\omega)$: $\angle G(j\omega) = \angle 1 - \angle(j\omega + a) = -\operatorname{tg}^{-1}(\omega/a)$

2. Módulo e ângulo de uma função de transferência

$$G(jw) = \frac{1}{j\omega + a}, \quad a > 0$$

$$|G(jw)| = \frac{1}{|j\omega + a|} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = - \operatorname{tg}^{-1}(\omega/a)$$



O polo atrasa a fase em 90 graus, quando ω vai de 0 a ∞ .

2. Módulo e ângulo de uma função de transferência

Contribuições de módulo e ângulo de um polo no semiplano esquerdo

	$\omega = 0$	$\omega = a$	$\omega \rightarrow \infty$
Módulo de $G(j\omega)$	$1/a$	$1/\sqrt{2}a$	0
Ângulo de $G(j\omega)$	0	-45	-90

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{|j\omega + a|} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega/a)$$

Polo na origem: a fase é -90 graus para qualquer frequência $\omega > 0$,

Polo na origem: o módulo é $1/|\omega|$

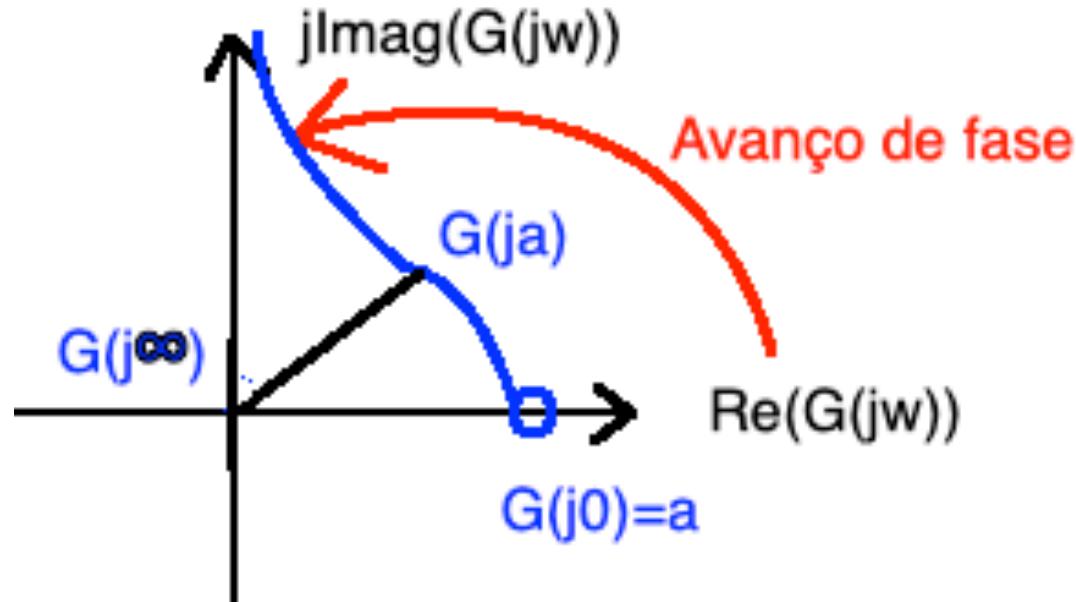
2. Módulo e ângulo de uma função de transferência

Seja agora o zero.

$$G(jw) = j\omega + a$$

$$|G(jw)| = \sqrt{\omega^2 + a^2}$$

$$\angle G(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1}(\omega/a)$$



O zero avança a fase em 90 graus, quando ω vai de 0 a ∞ .

2. Módulo e ângulo de uma função de transferência

Contribuições de módulo e ângulo de um **zero** no semiplano esquerdo

	$\omega = 0$	$\omega = a$	$\omega \rightarrow \infty$
Módulo de $G(j\omega)$	a	$\sqrt{2}a$	∞
Ângulo de $G(j\omega)$	0	45	90

$$G(j\omega) = j\omega + a$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{(\omega^2 + a^2)}$$

$$\text{ang } G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Zero na origem: a fase é +90 graus para qualquer frequência $\omega > 0$,

Zero na origem: o módulo é $|\omega|$.

2. Módulo e ângulo de uma função de transferência

Contribuições de módulo e ângulo de polos e **zeros** no semiplano esquerdo

$$G(s) = \frac{s + b}{s + a}$$

O zero em $s = -b$ avança a fase de 0 a 90 graus, quando a frequência ω varia de 0 a infinito.

O polo em $s = -a$ atrasa a fase de 0 a -90 graus, quando a frequência ω varia de 0 a infinito.

2. Módulo e ângulo de uma função de transferência

Contribuições de módulo e ângulo de polos e **zeros** no semiplano esquerdo

$$G(s) = \frac{s + b}{s + a}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + b^2}}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1}(\omega/b) - \operatorname{tg}^{-1}(\omega/a)$$

Desenho de gráficos polares

Deve-se analisar a contribuição dos polos e zeros da função transferência quando a frequência varia de zero a infinito.

Exemplo 1: $G(s) = \frac{10}{s(s+10)}$

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{|j\omega||j\omega + 10|}$$

$$\text{ang } G(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

Módulo

Quando $\omega \rightarrow 0$, $|G(j\omega)| \rightarrow \infty$ devido ao polo na origem

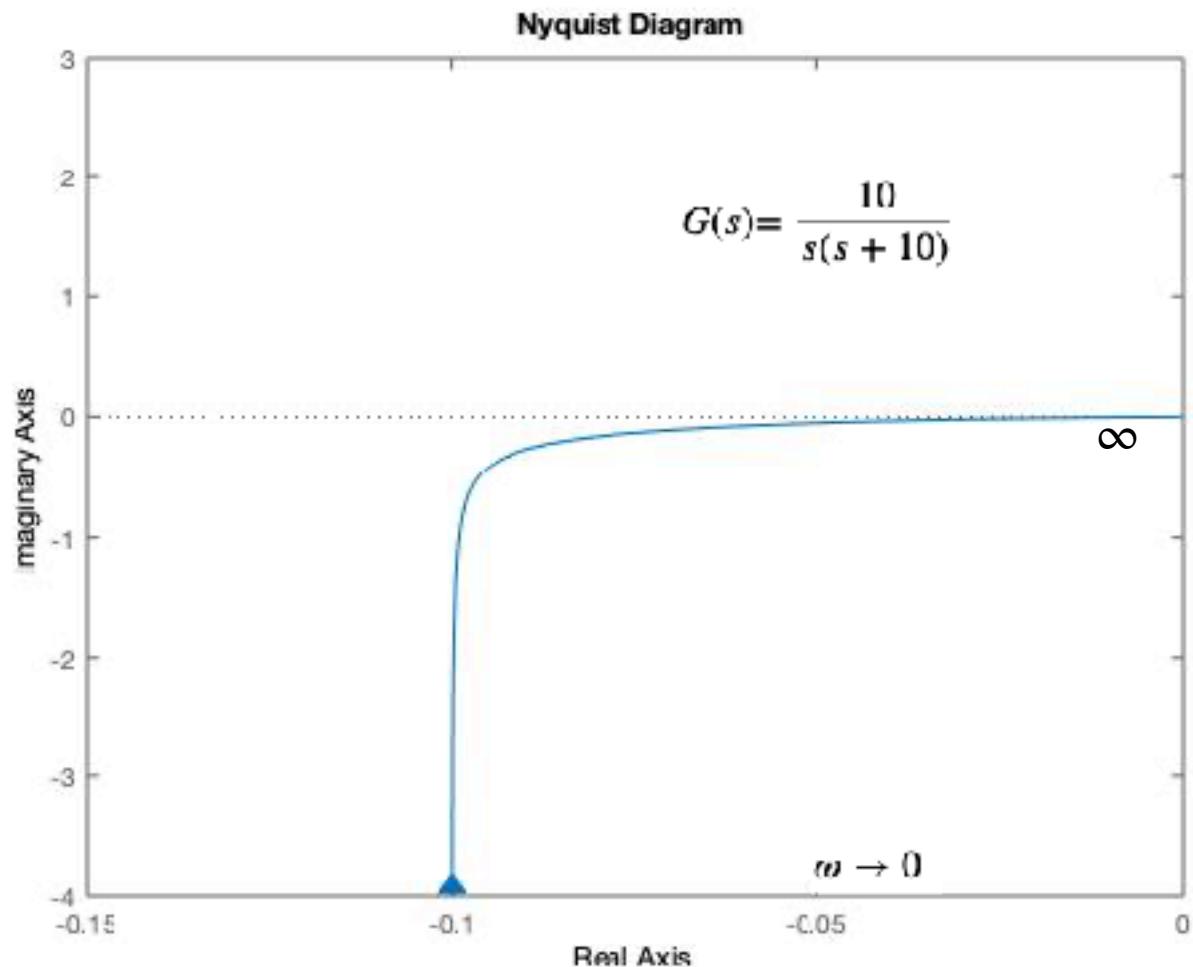
Quando $\omega \rightarrow \infty$, $|G(j\omega)| \rightarrow 0$

Ângulo

Quando $\omega \rightarrow 0$, $\text{ang } G(j\omega) \rightarrow -90$ devido ao polo na origem

Quando $\omega \rightarrow \infty$, $\text{ang } G(j\omega) \rightarrow -180$ devido ao atraso de 90 graus dos dois polos

Exemplo 1:



$$|G(j\omega)| = \frac{10}{|j\omega||j\omega + 10|}$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad \text{ang } G(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

	w=0	w=10	Infty
$ G(j\omega) $	∞	$1/10\sqrt{2}$	0
$\angle G(j\omega)$	-90	-135	-180

Exemplo 2:

$$G(s) = \frac{10}{s^2(s + 1)}$$

Exemplo 2:

$$G(s) = \frac{10}{s^2(s + 1)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{|\omega^2||j\omega + 1|}$$

$$\text{ang } G(j\omega) = -180 - \operatorname{tg}^{-1}\omega$$

Módulo

Quando $\omega \rightarrow 0$, $|G(j\omega)| \rightarrow \infty$ devido aos polos na origem

Quando $\omega \rightarrow \infty$, $|G(j\omega)| \rightarrow 0$

Ângulo

Quando $\omega \rightarrow 0$, $\text{ang } G(j\omega) \rightarrow -180$ devido aos 2 polos na origem

Quando $\omega \rightarrow \infty$, $\text{ang } G(j\omega) \rightarrow -270$ devido ao atraso dos 3 polos

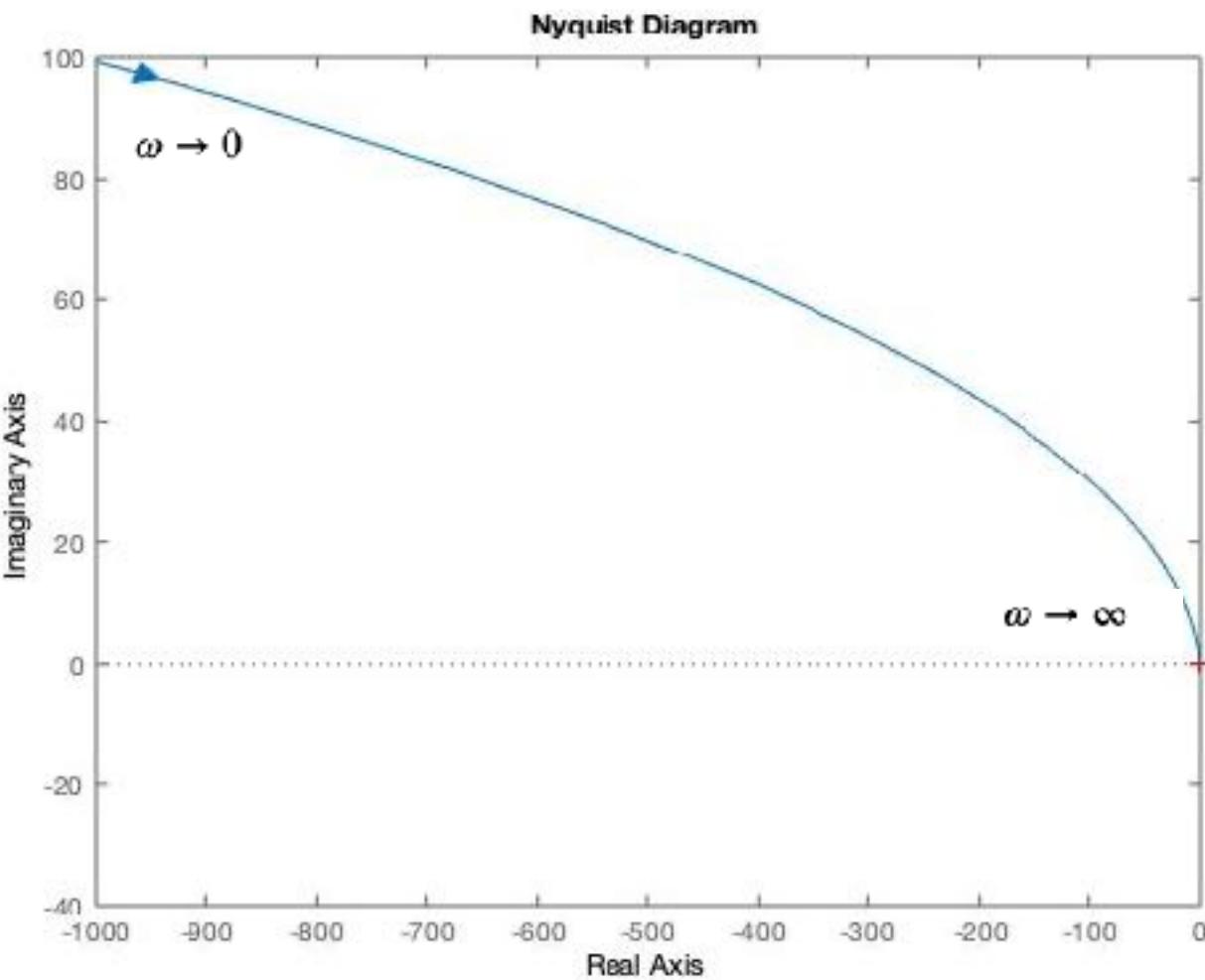
Exemplo 2:

$$G(s) = \frac{10}{s^2(s + 1)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{|\omega^2||j\omega + 1|}$$

$$\text{ang } G(j\omega) = -180 - \operatorname{tg}^{-1}\omega$$

$G(s)$ tem 3 polos:
logo, atrasa $3 \cdot 90 = 270$ graus.



Exemplo 3:

$$G(s) = \frac{10}{s(s + 1)(s + 2)}$$

Exemplo 3:

$$G(s) = \frac{10}{s(s + 1)(s + 2)}$$

$$\text{ang } G(j\omega) = -90 - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{|\omega||j\omega + 1||j\omega + 2|}$$

Módulo

Quando $\omega \rightarrow 0$, $|G(j\omega)| \rightarrow \infty$ devido ao polo na origem

Quando $\omega \rightarrow \infty$, $|G(j\omega)| \rightarrow 0$

Ângulo

Quando $\omega \rightarrow 0$, $\text{ang } G(j\omega) \rightarrow -90$ devido ao polo na origem

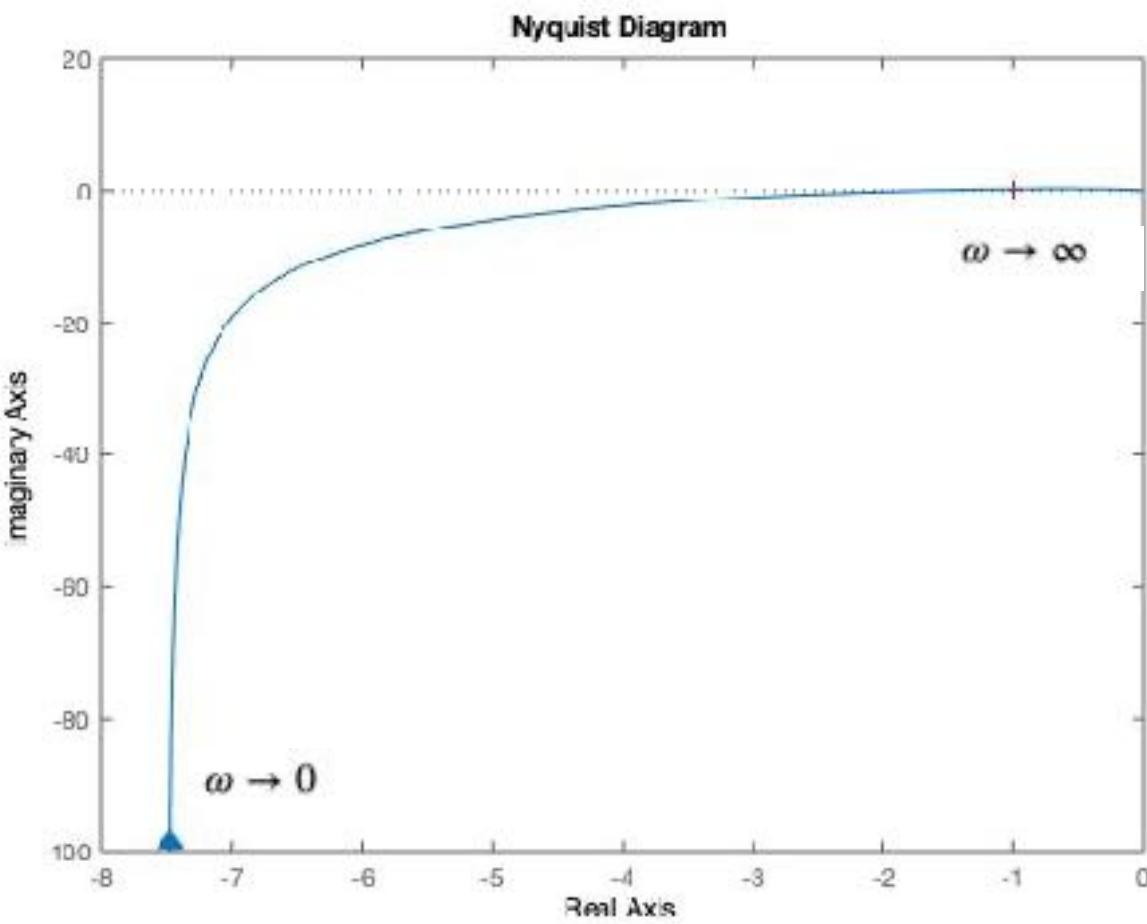
Quando $\omega \rightarrow \infty$, $\text{ang } G(j\omega) \rightarrow -270$ devido aos 3 polos

Exemplo 3:

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\text{ang } G(j\omega) = -90 - \operatorname{tg}^{-1}\omega - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{10}{|\omega||j\omega + 1||j\omega + 2|}$$

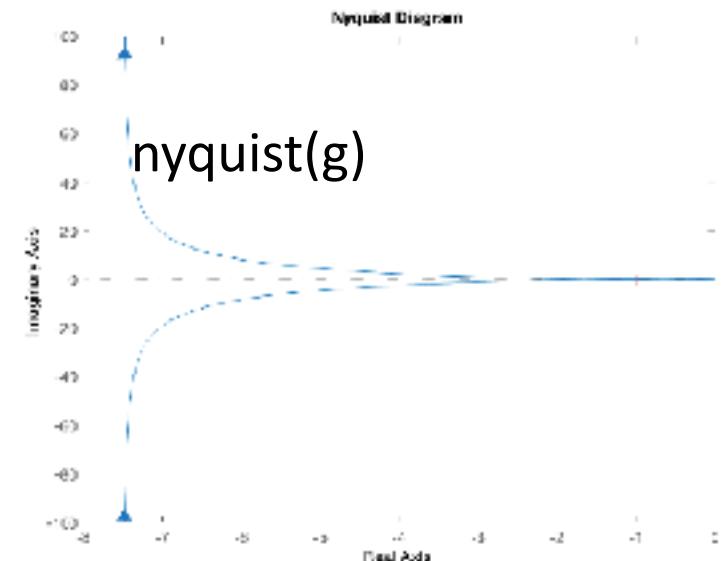


Gráficos polares no Matlab

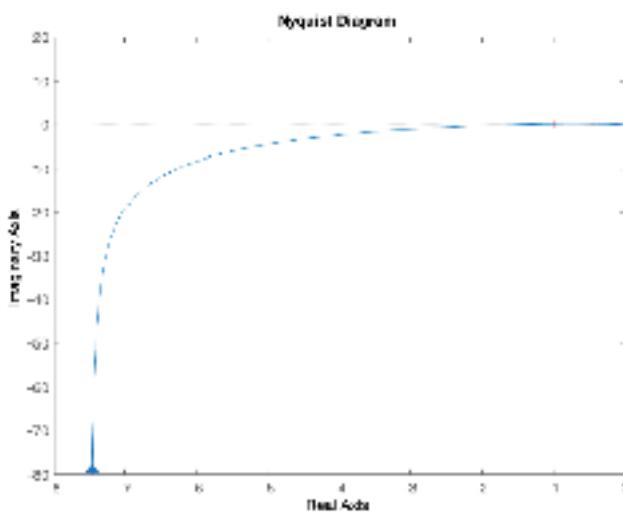
`nyquist(g)`

Se quiser apenas para frequências positivas:

```
h=nyquistplot(g);  
set(h,'ShowFullContour','off')
```



Pode ajustar limites:
`xlim` e `ylim`



Com ajustes!

Exemplo 4:

$$G(s) = \frac{(s + 1)(s + 10)}{s^3}$$

Exemplo 4

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+10)}{s^3}$$

$$\angle G(j\omega) = -270 + \operatorname{tg}^{-1}\omega + \operatorname{tg}^{-1}(\omega/10)$$

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1})\sqrt{\omega^2 + 100)}}{\omega^3}$$

	w=0	w=1	w=10	Infty
G(j\omega)	∞	14.21	0.14	0
$\angle G(j\omega)$	-270	-225	-135	-90

Gráficos polares no Matlab: exemplo 5

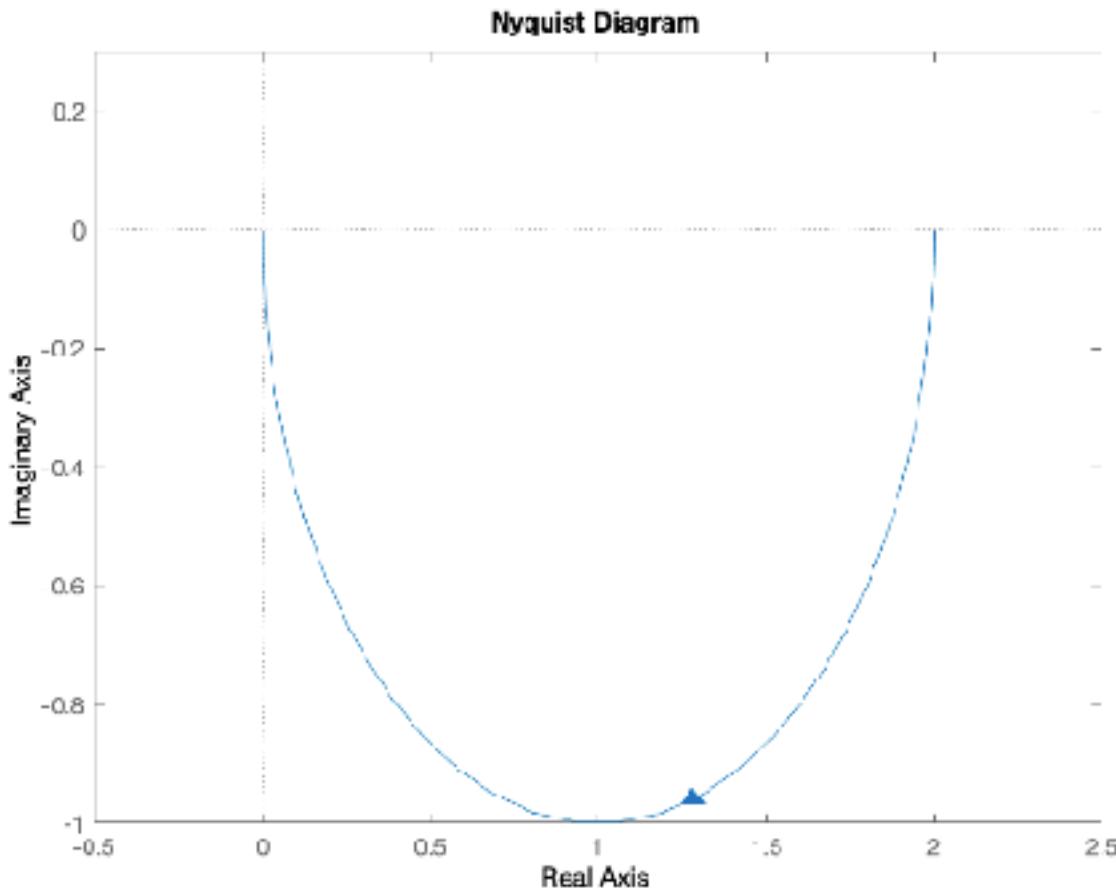
Seja a FT $G(s) = \frac{1}{s + 0.5}$

Tem-se que

$$G(j0) = 2 \text{ e}$$

$$G(j\infty) = 0$$

O gráfico polar é
mostrado ao lado.



Gráficos polares no Matlab: exemplo 5

Observe o efeito da adição sucessiva
do mesmo polo em $s=-0.5$

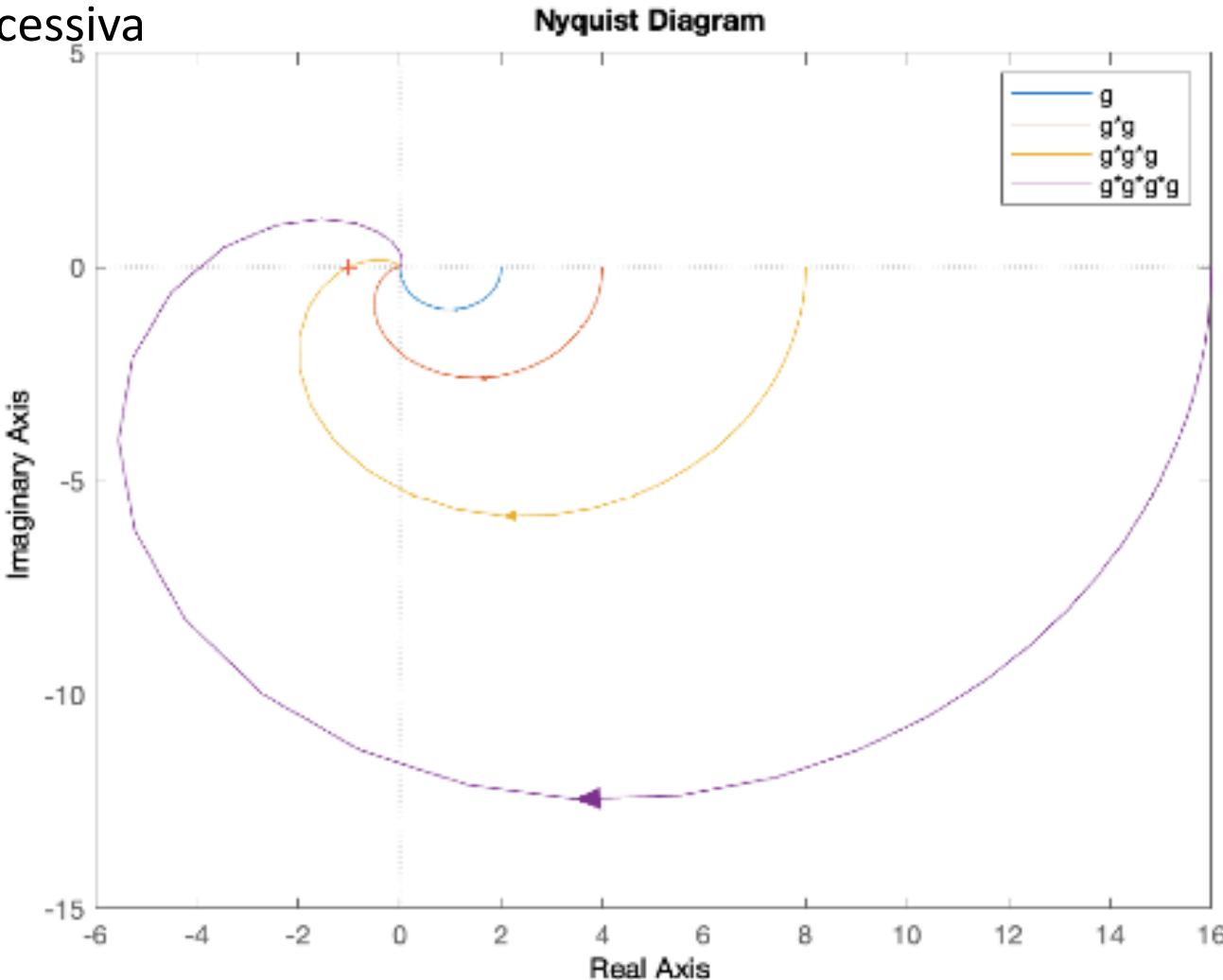
$$G(s) = \frac{1}{s + 0.5}$$

$$G(s)G(s) = \frac{1}{s + 0.5} \frac{1}{s + 0.5}$$

$$G(s)G(s)G(s)$$

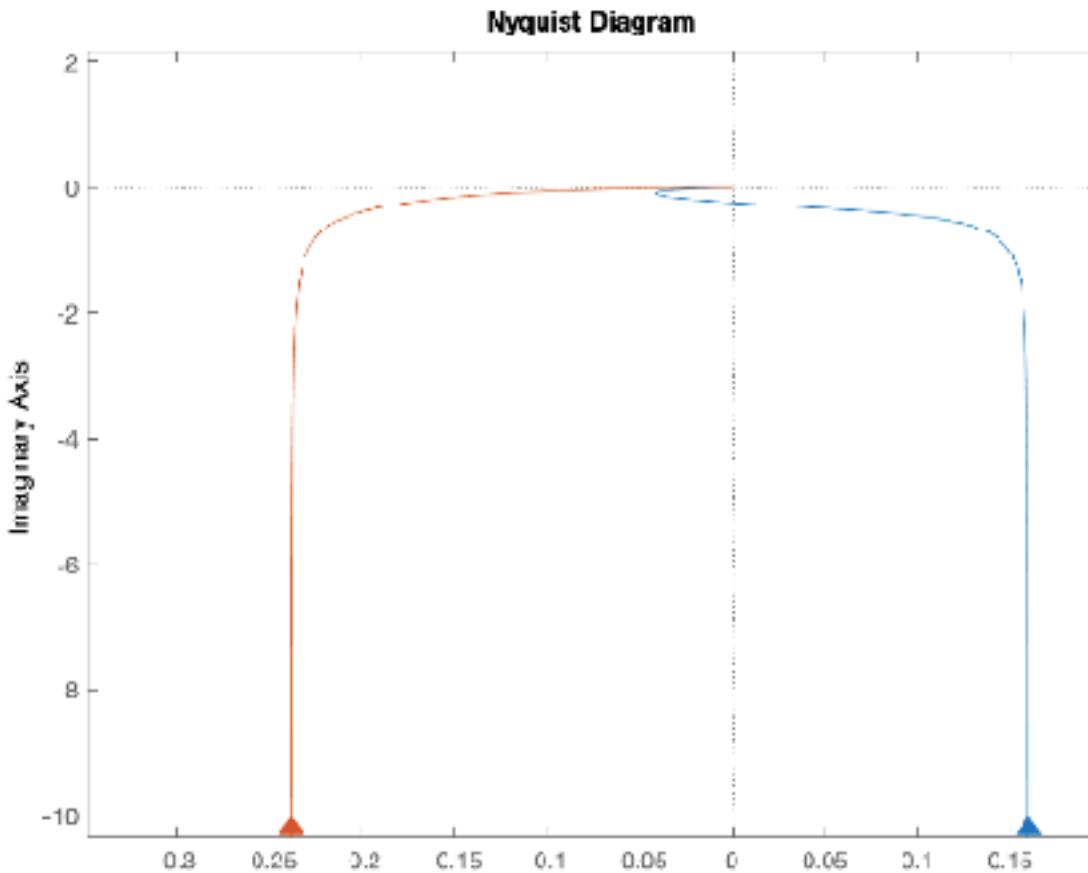
$$G(s)G(s)G(s)G(s)$$

O gráfico começa sempre
sobre o eixo real e termina
na origem, com um ângulo
que é igual o número de
polos vezes 90.



Gráficos polares no Matlab: exemplo 6

$$G(s) = \frac{(s + a)}{s(s + 1)(s + 10)}$$



Quem vem antes?
O zero ou o polo?

Gráficos polares: ponto de cruzamento do eixo real negativo

Manda o gráfico polar cruza o eixo real negativo é necessário saber em que ponto ocorre esse cruzamento. Essa informação necessária para o critério de estabilidade de Nyquist que será discutido

$$\text{Seja a FT: } G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)}$$

Sabemos que ela cruzará o eixo real, e isto ocorre na frequência tal que a parte imaginária de $G(jw)=0$.

Basta obter esta frequência e substituir em $G(jw)$ para obter a parte real.

Uma forma trabalhosa de fazer isto é substituir s por jw e obter $G(jw)$ da forma

$$G(jw) = \frac{1}{d} = \frac{1}{-11w^2 + (11 - w^2)jw}$$

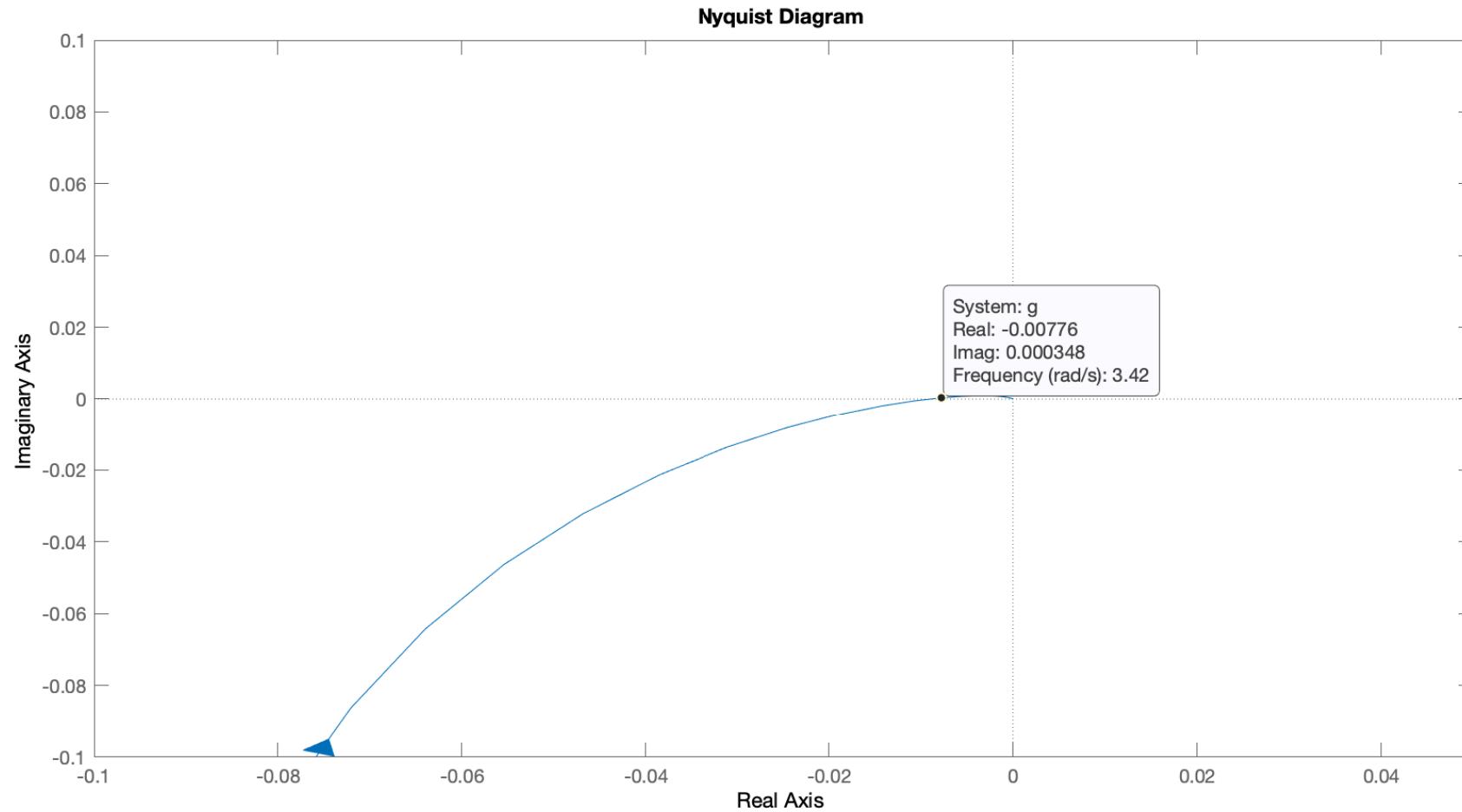
$$G(jw) = \frac{-11w^2 + (11 - w^2)jw}{dr} \quad -11w^2$$

Substituindo em $\frac{-11w^2}{dr}$ obtem-se a parte real, que é negativa.

Multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, o denominador ficará real, igual a dr .

Em $w = \sqrt{11}$ a parte imaginária é zero.

Gráficos polares: ponto de cruzamento do eixo real negativo



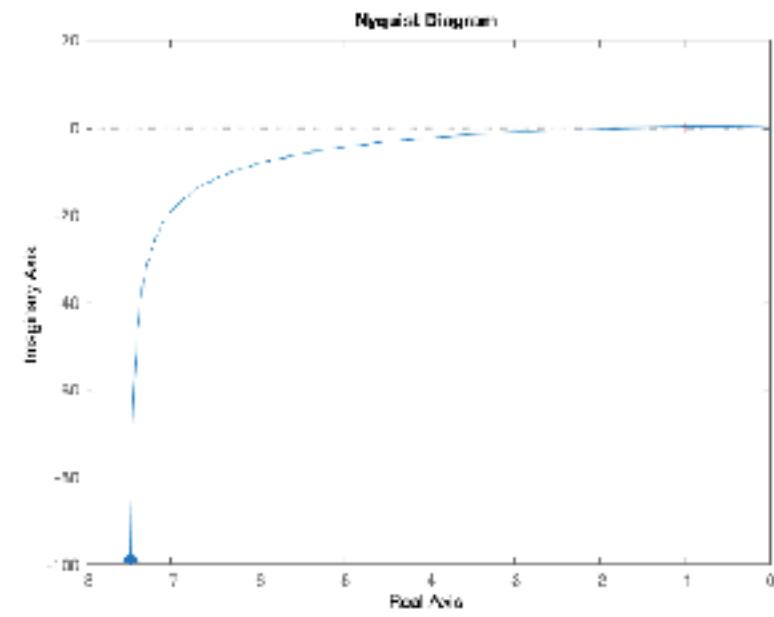
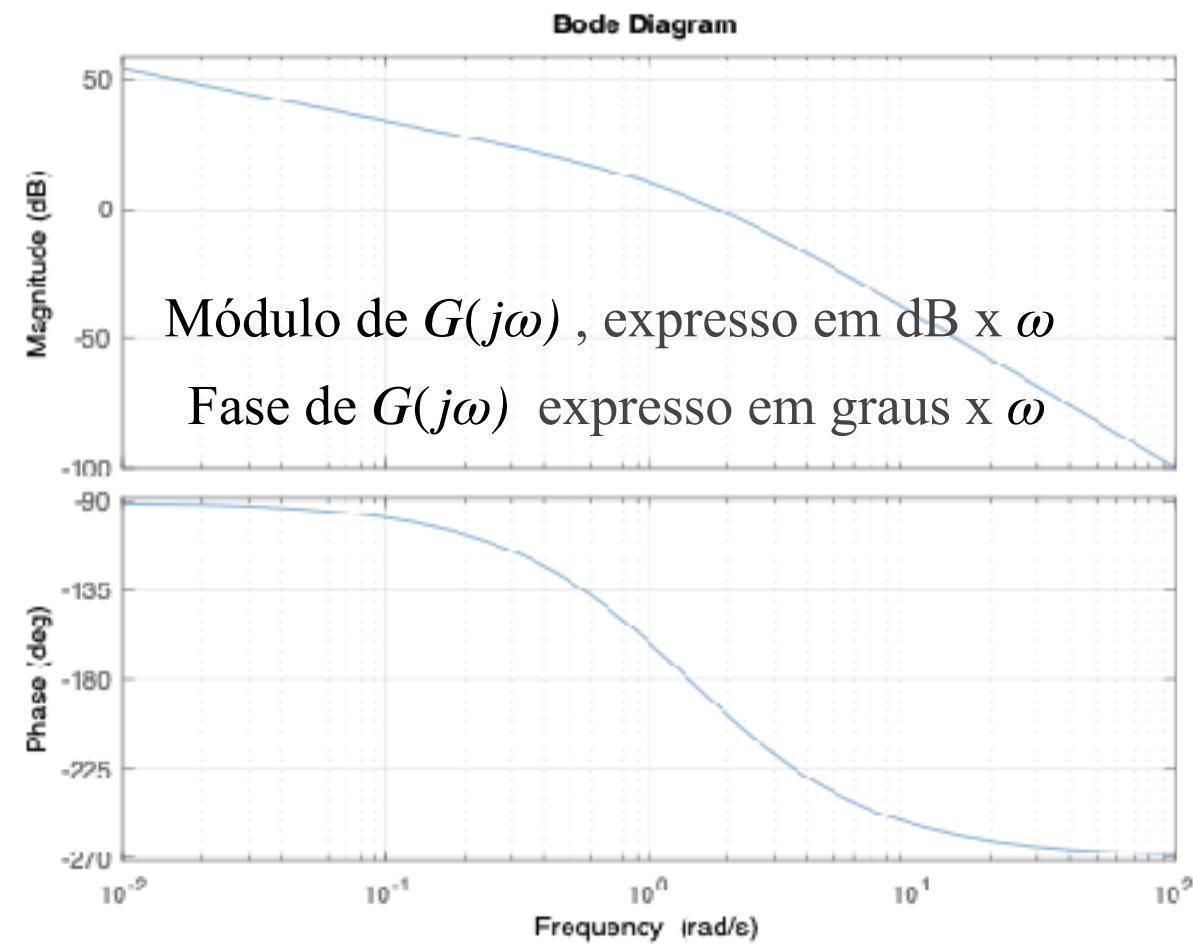
Gráficos polares: ponto de cruzamento do eixo real negativo

Há casos em que fica fácil obter esta informação: por exemplo, $G(s) = \frac{1}{s(s + 10)^2}$

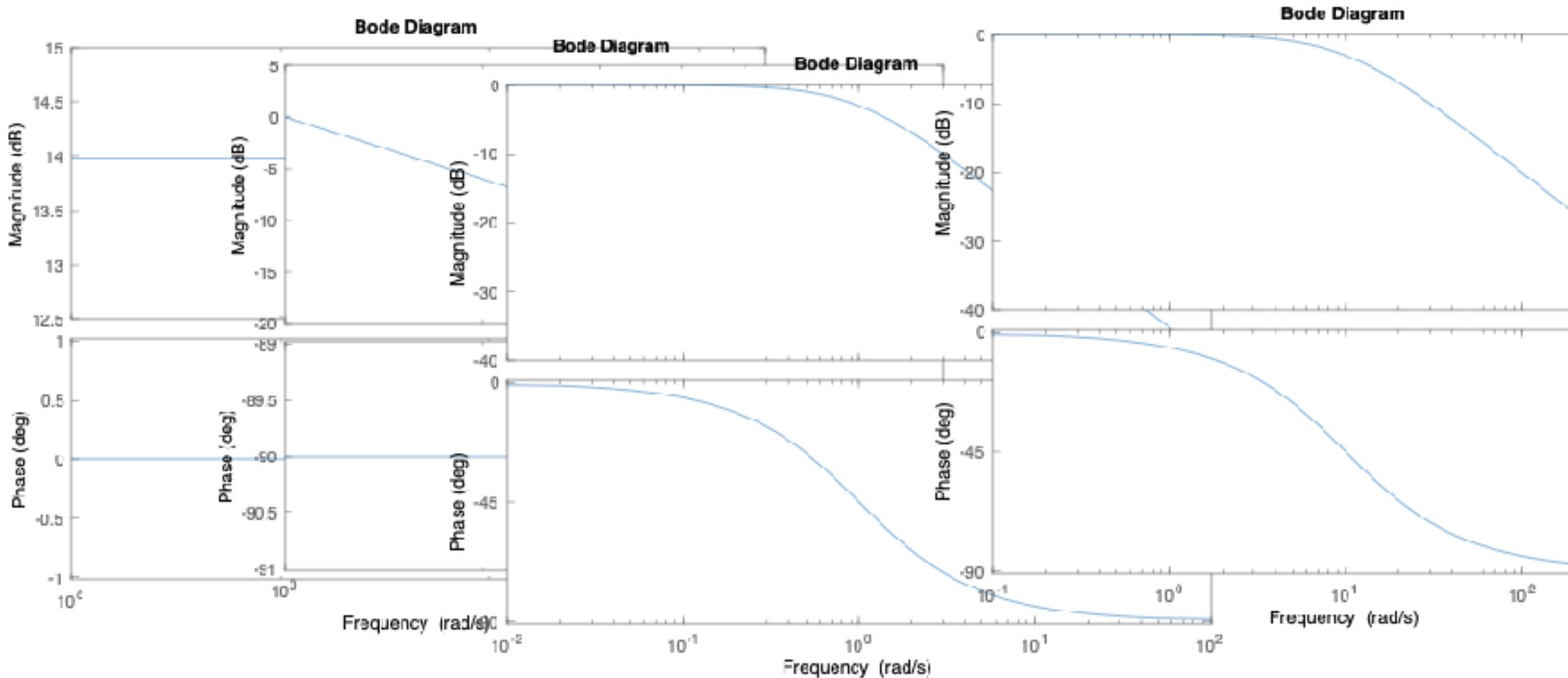
O ângulo de $G(s)$ é dado por $G(s) = -90^\circ - 2\operatorname{tg}^{-1}\frac{w}{10}$

Em $w = 10$ tem o ângulo de 180° , o cruzamento pelo eixo real negativo.

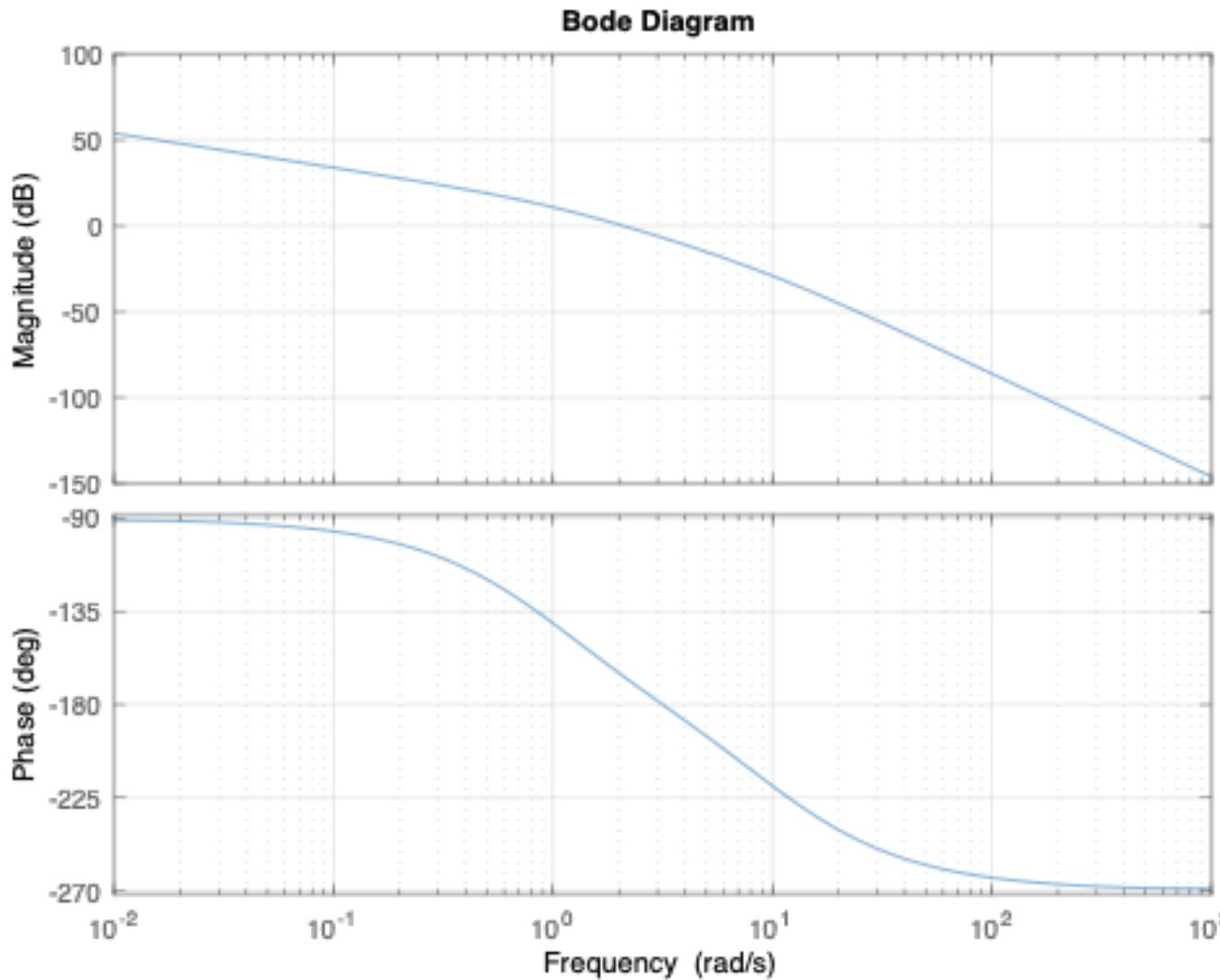
Gráfico polar



4. Gráficos de Bode



4. Gráficos de Bode



4. Gráficos de Bode

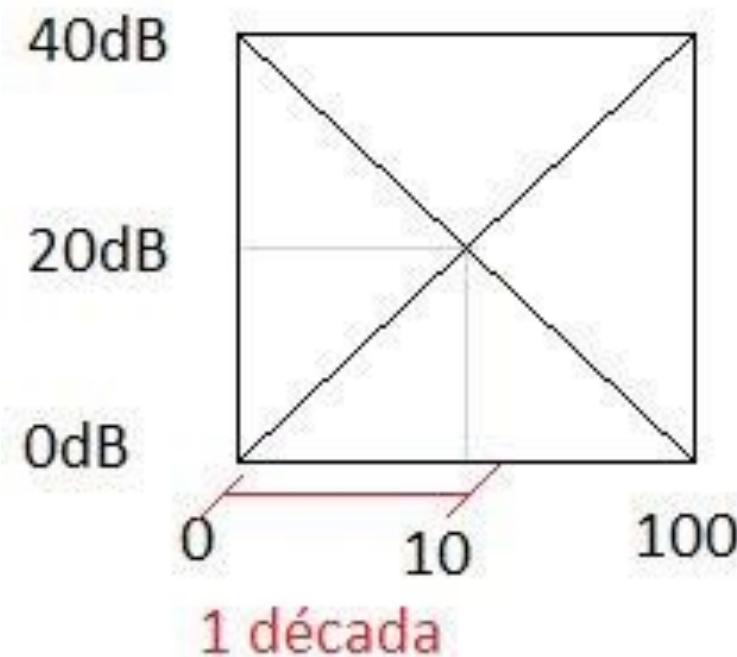
Revisando logaritmos:

$$\log_{10} x = 10^x = a$$

$$A[\text{dB}] = 20\log_{10} x$$

$$\log_{10}(y * x) = \log_{10}(y) + \log_{10}(x)$$

$$\log_{10}(y/x) = \log_{10}(y) - \log_{10}(x)$$



4. Gráficos de Bode: ganho

$$G(j\omega) = K$$

$$\text{módulo} = 20 \log_{10} K$$

$$\text{ângulo} = \begin{cases} 0^\circ, & K > 0 \\ 180^\circ, & K < 0 \end{cases}$$

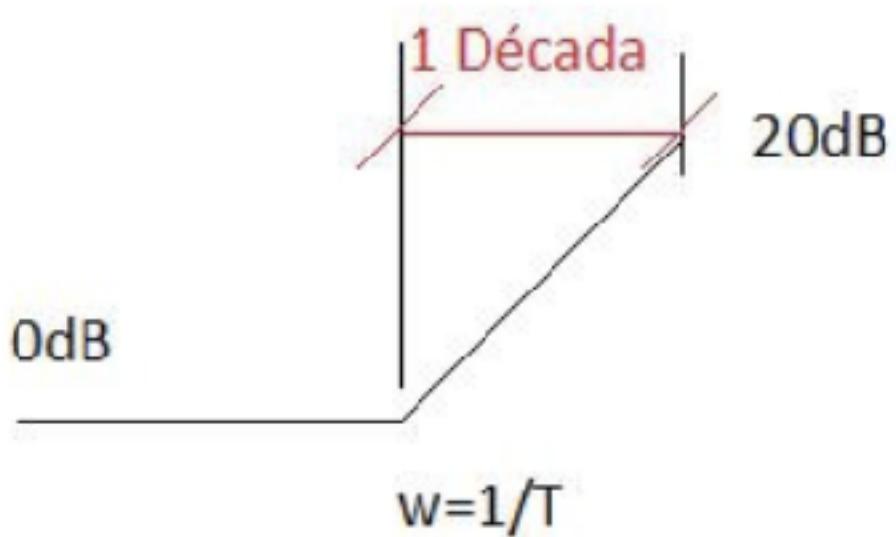
4. Gráficos de Bode: zero

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T$$

Módulo

$$\begin{aligned}|G(j\omega)| &= \log 1 + 20 \log(|1 + j\omega T|) = 20 \log \sqrt{1 + (\omega T)^2} \\&\Rightarrow \begin{cases} \omega \rightarrow 0 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 0 \\ \omega \rightarrow \infty \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(\omega T) \end{cases}\end{aligned}$$

$$\omega = 1/T \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(1) = 0$$

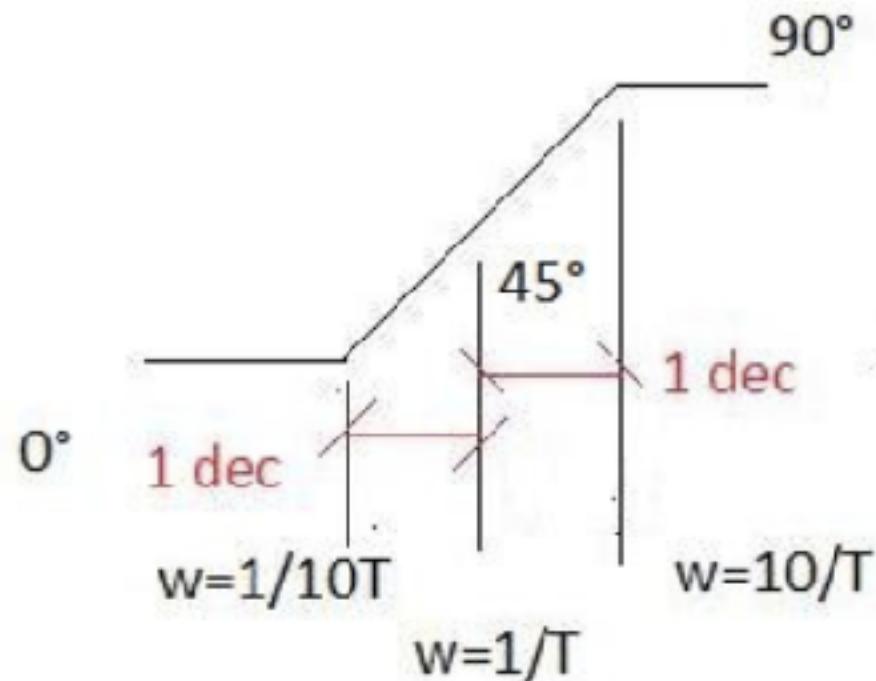


4. Gráficos de Bode: zero

Ângulo:

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}(\omega T)$$

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} \omega \rightarrow 0, & \angle G(j\omega) = 0^\circ \\ \omega = \frac{1}{T}, & \angle G(j\omega) = 45^\circ \\ \omega \rightarrow \infty, & \angle G(j\omega) = 90^\circ \end{cases}$$



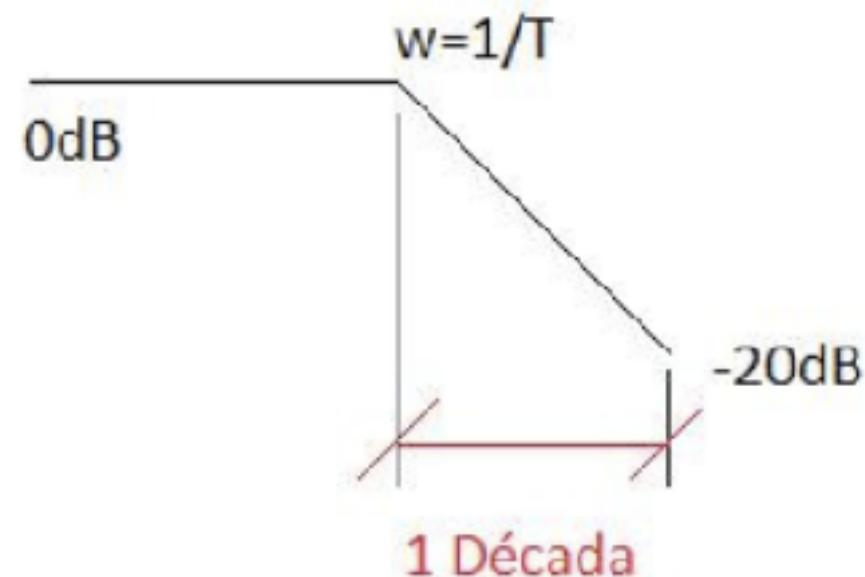
4. Gráficos de Bode: polo

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

Módulo

$$\begin{aligned}|G(j\omega)| &= 20 \log 1 - 20 \log(|1 + j\omega T|) = -20 \log \sqrt{1 + (\omega T)^2} \\&\Rightarrow \begin{cases}\omega \rightarrow 0 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 0 \\ \omega \rightarrow \infty \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log(\omega T)\end{cases}\end{aligned}$$

$$\omega = 1/T \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = -20 \log(1) = 0$$



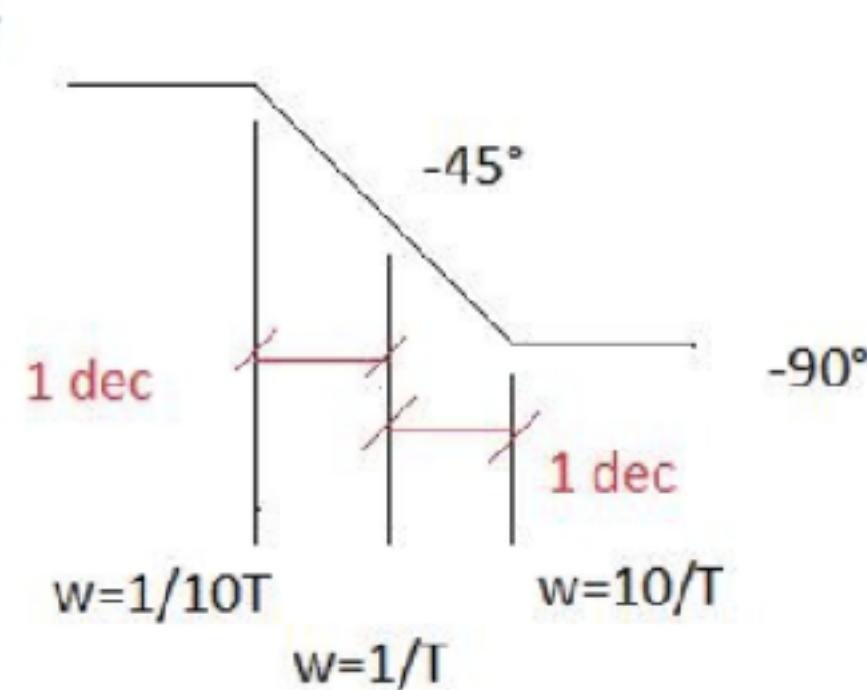
4. Gráficos de Bode: polo

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

Ângulo

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega T)$$

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} \omega \rightarrow 0, & \angle G(j\omega) = 0^\circ \\ \omega = \frac{1}{T}, & \angle G(j\omega) = -45^\circ \\ \omega \rightarrow \infty, & \angle G(j\omega) = -90^\circ \end{cases}$$



4. Gráficos de Bode: exemplo 1

$$G(s) = \frac{200(s + 1)}{s(s + 10)(s + 100)}$$

Primeiramente, escrevemos a FT no formato adequado para o esboço do gráfico de Bode:

$$G(s) = \frac{200(s + 1)}{1000s(s/10 + 1)(s/100 + 1)}$$

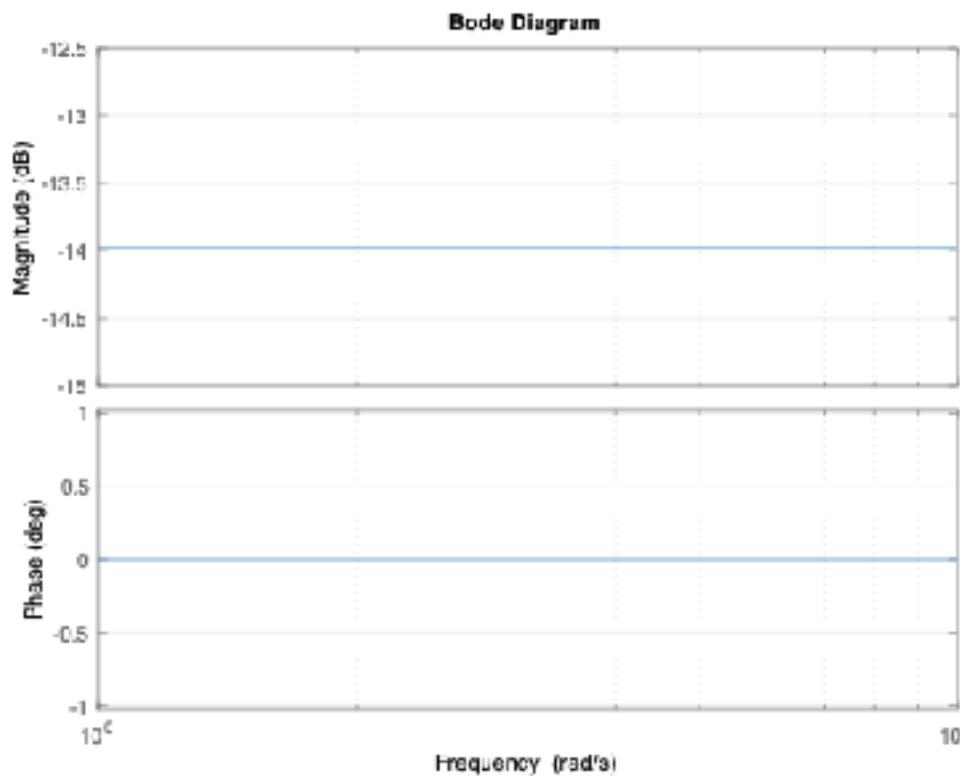
$$G(s) = \frac{0.2(s + 1)}{s(0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

4. Gráficos de Bode: exemplo 1

Iniciamos com o ganho K=0.2

$$A = 20 \log_{10}(0.2) = -14 \text{dB}$$

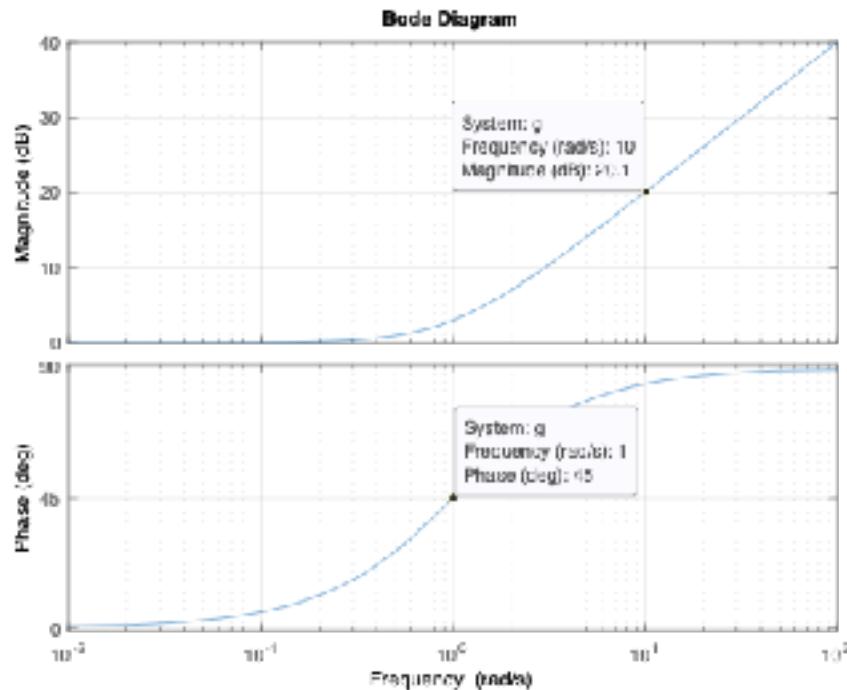
A fase é sempre 0 graus para K>0



4. Gráficos de Bode: exemplo 1

Gráfico do zero em $(s+1)$

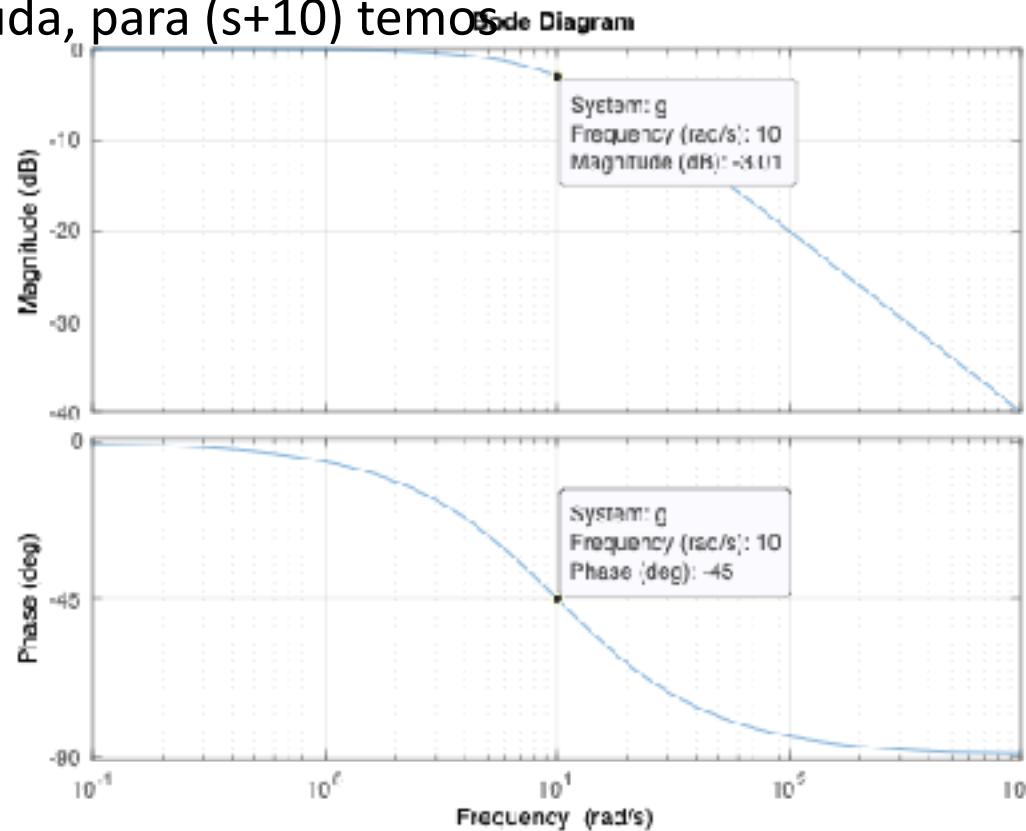
O módulo de um zero se comporta de forma a manter o módulo anterior (no caso, 0dB), e gradativamente cresce de forma a incrementar 20dB a cada década. A fase tende a sair da referência anterior (no caso 0°) e incrementar em 90° no infinito, sendo que para $\omega=1\text{rad}/\text{s}$ temos um ângulo de 45° , conforme abaixo:



4. Gráficos de Bode: exemplo 1

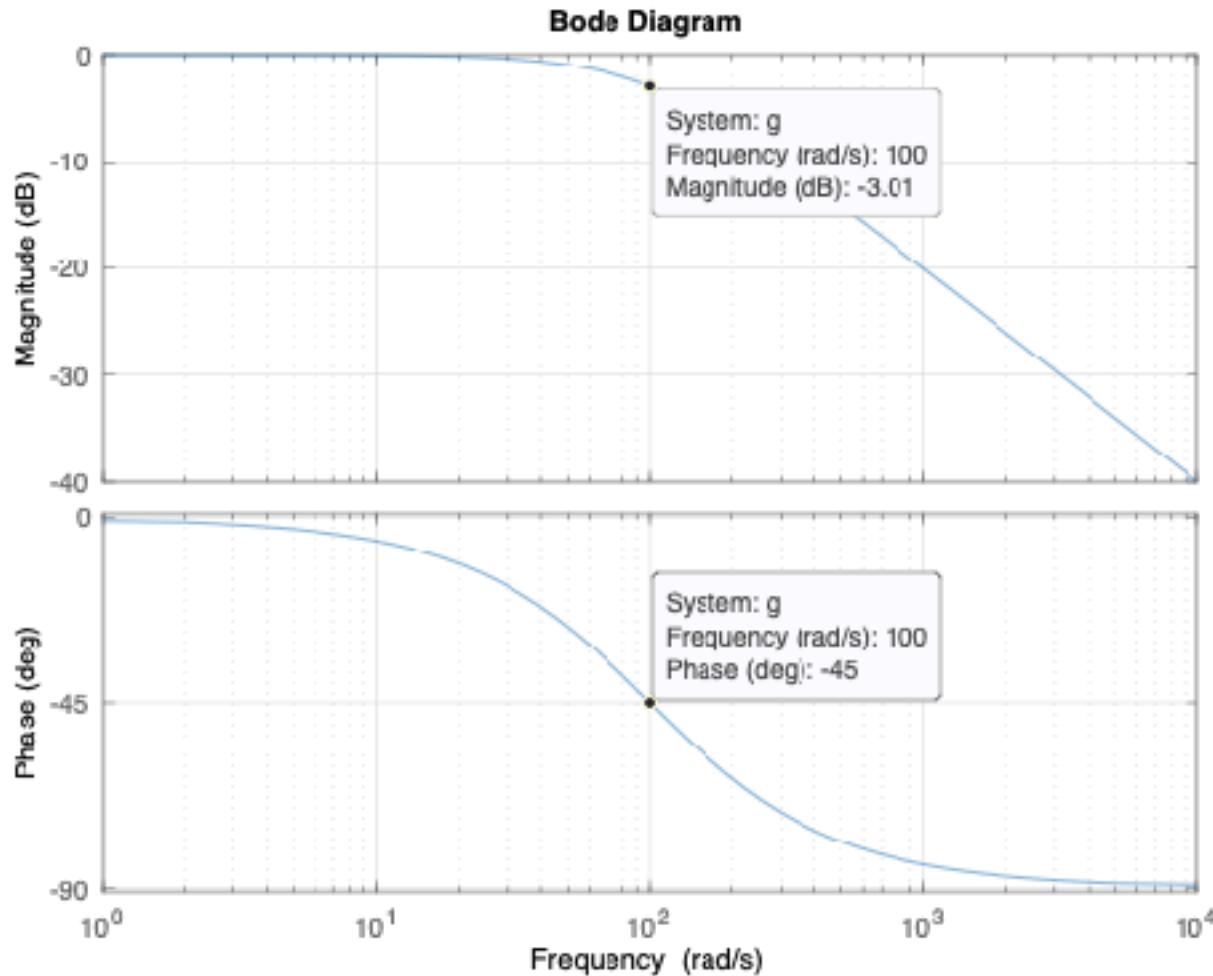
Gráfico dos polos em $(0.1s+1)$, $(0.01s+1)$ e o polo na origem

Os polos que não estão na origem se comportam de maneira análoga aos zeros, porém ao invés de incrementarem 20dB a cada década, no módulo, e 90° no infinito, para a fase, os mesmos decrementam na mesma proporção. Observe que a frequência em que a fase está em 45° não muda, para $(s+10)$ temos



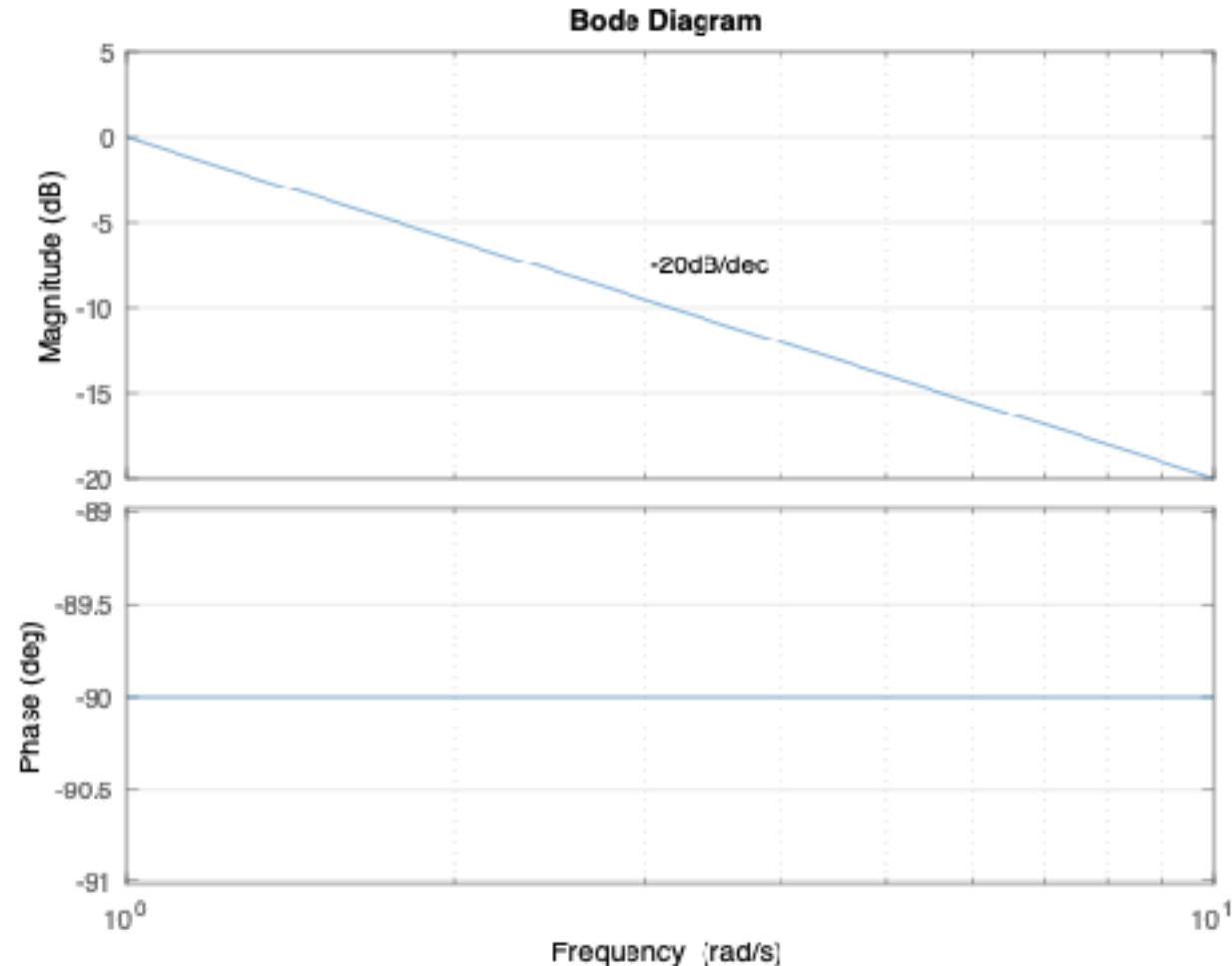
4. Gráficos de Bode: exemplo 1

$s+100$

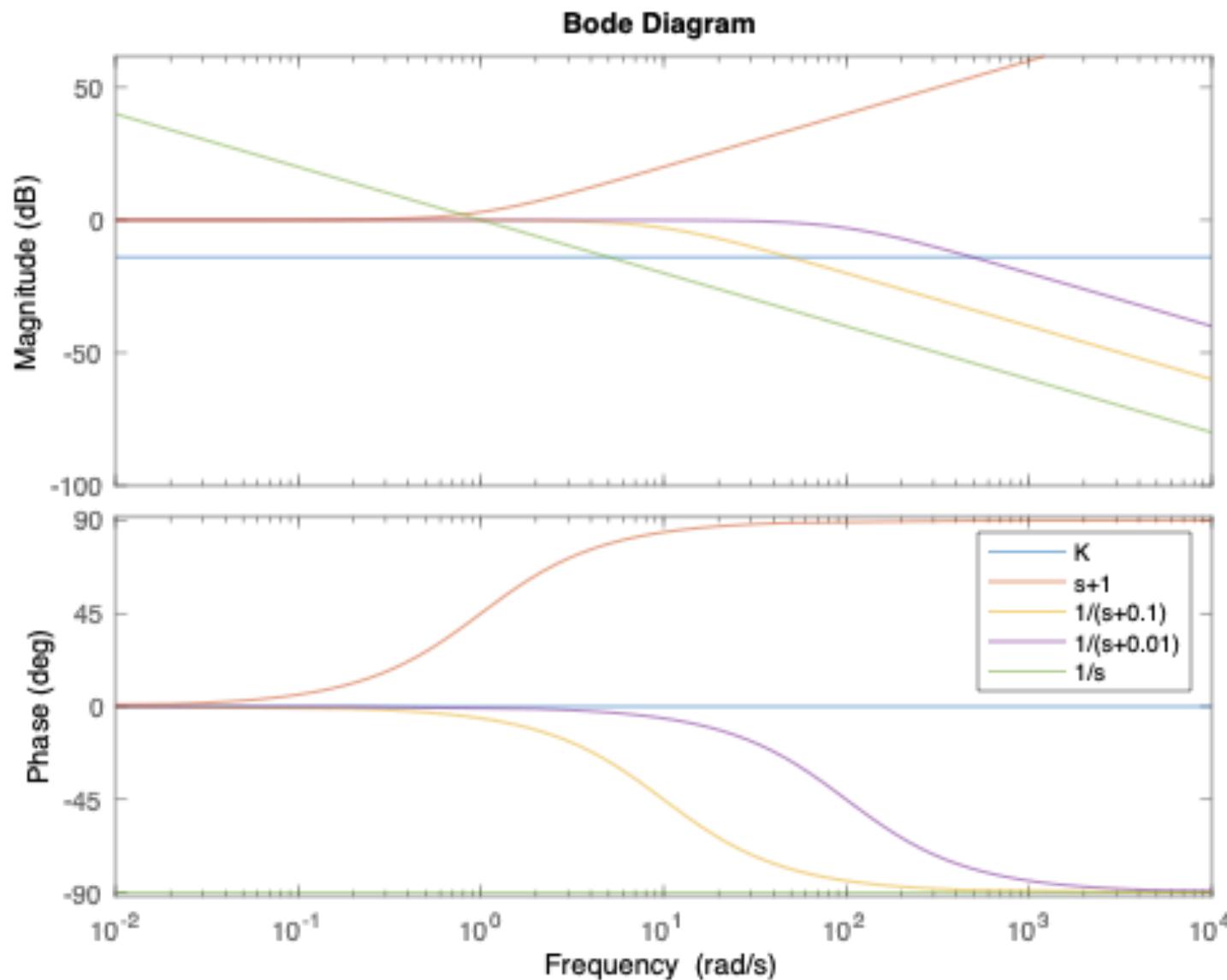


4. Gráficos de Bode: exemplo 1

Polo na origem: $s=0$

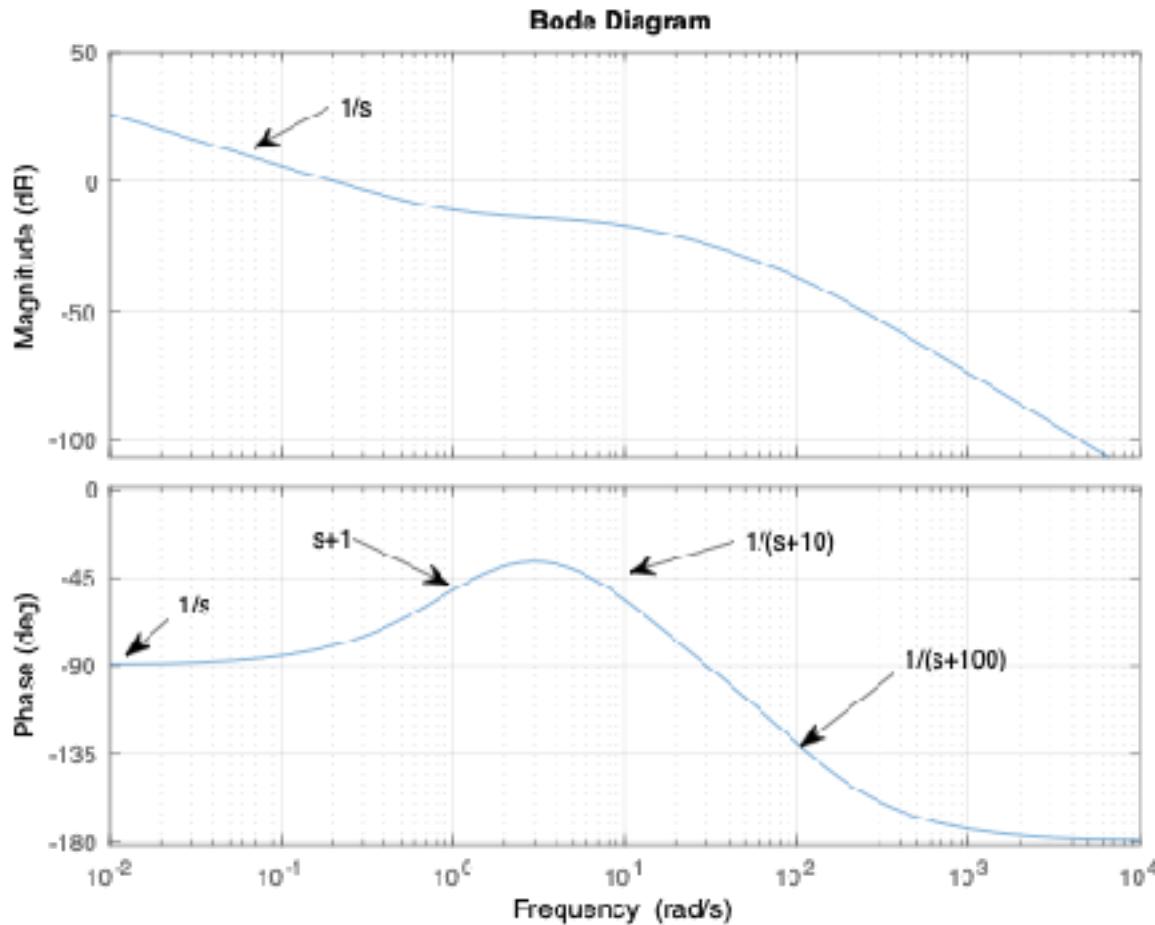


4. Gráficos de Bode: exemplo 1



Efeito de cada elemento

4. Gráficos de Bode: exemplo 1



Tudo junto

4. Gráficos de Bode: exemplo 1

Ângulo de cada elemento para cada frequência

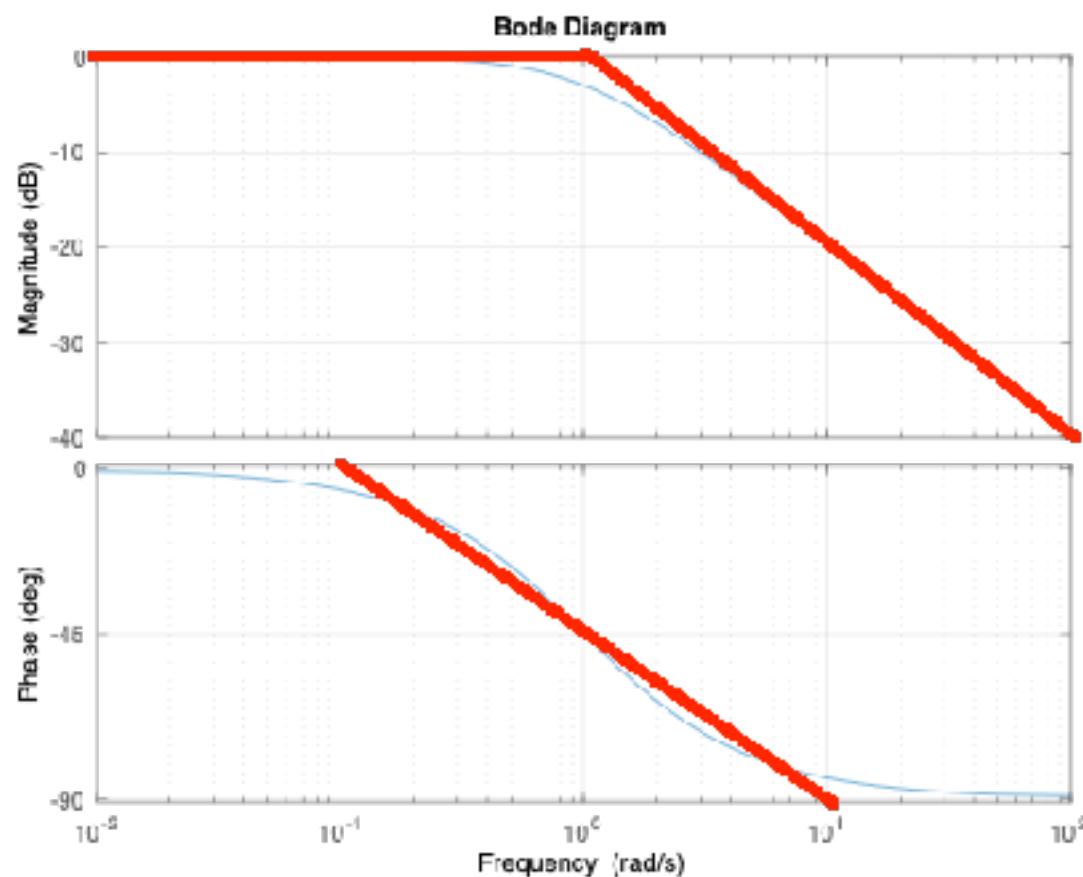
Frequência	K	S+1	$1/(s+10)$	$1/(s+100)$	$1/s$	Soma
0.1	0	0	0	0	-90	-90
1	0	45	0	0	-90	-45
10	0	90	-45	0	-90	-45
100	0	90	-90	-45	-90	-135
	0	90	-90	-90	-90	-180

4. Gráficos de Bode: exemplo 1

Módulo de cada elemento em cada frequência

Frequência	K	S+1	1/(s+10)	1/(s+100)	1/s	Soma
0.1	-14	0	0	0	20	6
1	-14	0	0	0	0	-14
10	-14	20	0	0	-20	-14
100	-14	40	-20	0	-40	-34
1000	-14	60	-40	-20	-60	-74

4. Gráfico de Bode assintótico



Seja a análise para um polo $1/(s+1)$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 + 1^2)}}$$

No gráfico assintótico, o módulo é zero em $\omega=1\text{rad/s}$

Entretanto,

$$|G(j1)| = \frac{1}{\sqrt{(1^2 + 1^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 = -3\text{dB}$$

Essa pequena diferença não atrapalha na maioria das análises

4. Gráfico de Bode: polos complexos

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

Para $s=j\omega$ temos:

$$G(s) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi\frac{\omega}{\xi\omega_n}}$$

ω_n é a frequência natural do sistema e ω é a frequência que varia de 0 a infinito para avaliar a resposta em frequência.

4. Gráfico de Bode: polos complexos

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

Para $s=j\omega$ temos:

$$G(s) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi\frac{\omega}{\xi\omega_n}}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$$

temos que $|G(j\omega)| = 0dB$.

$$\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$$

temos que $|G(j\omega)| = -40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) dB$.

Logo, o par de polos não têm efeito sobre o módulo para baixas frequências e reduz o módulo em 40dB/dec para frequências maiores que a frequência natural.

4. Gráfico de Bode: polos complexos

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

Para $s=j\omega$ temos:

$$G(s) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi\frac{\omega}{\xi\omega_n}}$$

O máximo valor de $|G(j\omega)|$ ocorre quando o denominador é mínimo, então:

$$\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\frac{\omega}{\xi\omega_n}\right]^2 = \left[\frac{\omega^2 - \omega_n^2(1 - 2\xi^2)}{\omega_n^2}\right] + 4\xi^2(1 - \xi^2)$$

Isto ocorre quando: $\omega = \omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2}$

4. Gráfico de Bode: polos complexos

Exemplo:

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 2s + 101}$$

$$\text{Pôlos} = -1 \pm j10$$

$$\text{Portanto, } \omega_n = \sqrt{101} \quad e \quad \xi = \cos(\operatorname{tg}^{-1} 10) = 0,1$$

$$\text{Portanto, } \omega_n = \sqrt{101} \quad e \quad \xi = \cos(\operatorname{tg}^{-1} 10) = 0,1$$

A frequência para o maior módulo é dada por:

$$\omega = \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \approx 10 \text{ rad/s} \text{ então: } d(\omega_r) = 0,0392$$

Por fim: $|G(j\omega)| = -20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{d(\omega_r)}} \right) = 14 \text{ dB}$

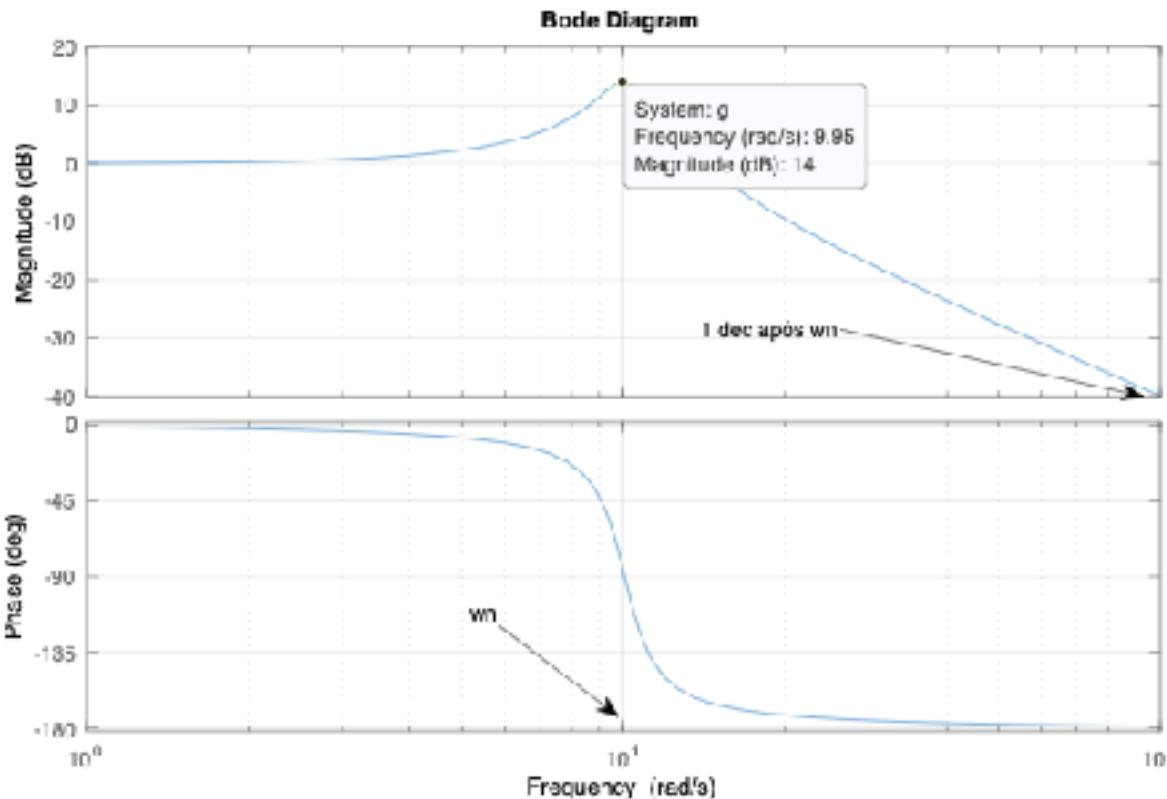
4. Gráfico de Bode: polos complexos

Portanto, $\omega_n = \sqrt{101}$ e $\xi = \cos(tg^{-1}10) = 0,1$

A frequência para o maior módulo é dada por:

$$\omega = \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \approx 10 \text{ rad/s} \text{ então: } d(\omega_r) = 0,0392$$

Por fim: $|G(j\omega)| = -20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{d(\omega_r)}} \right) = 14 \text{ dB}$



Sistemas com polos ou zeros no semi-plano direito

Sistemas que têm zeros no semi-plano direito são denominados de fase não mínima.

Sistemas que têm polos no semi-plano direito são denominados instáveis.

Sejam as FT $G_1(j\omega) = j\omega + 1$ e $G_2(j\omega) = j\omega - 1$

Conclui-se rapidamente que $|G_1(j\omega)| = |G_2(j\omega)|$

Entretanto, para o ângulo tem-se que:

$$\angle G_1(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1}(\omega)$$

$$\angle G_2(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1}(-\omega)$$

Sistemas com polos ou zeros no semi-plano direito

Analisando para $G(j0)$,

$$G_1(j\omega) = j\omega + 1 \text{ e } G_2(j\omega) = j\omega - 1$$

$$G_1(j0) = 1 \text{ e } G_2(j0) = -1$$

Portanto, para zeros

Quando $\omega \rightarrow 0$,

$$\angle G_1(j0) = 0^\circ$$

$$\angle G_2(j0) = 180^\circ$$

Quando $\omega \rightarrow \infty$,

$$\angle G_1(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1}(\omega) = 90^\circ$$

$$\angle G_2(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1}(-\omega) = -90^\circ$$

Sistemas com polos ou zeros no semi-plano direito

Análise para polos

Sejam as FT $G_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$ e $G_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega - 1}$

Quando $\omega \rightarrow 0$,

$$\angle G_1(j0) = 0^\circ$$

$$\angle G_2(j0) = 180^\circ$$

Quando $\omega \rightarrow \infty$,

$$\angle G_1(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1}(\omega) = -90^\circ$$

$$\angle G_2(j\omega) = \operatorname{tg}^{-1}(-\omega) = +90^\circ$$

Sistemas com polos ou zeros no semi-plano direito

Portanto, conclui-se que:

Os gráficos de módulo não se alteram se os polos ou zeros estão no SPD.

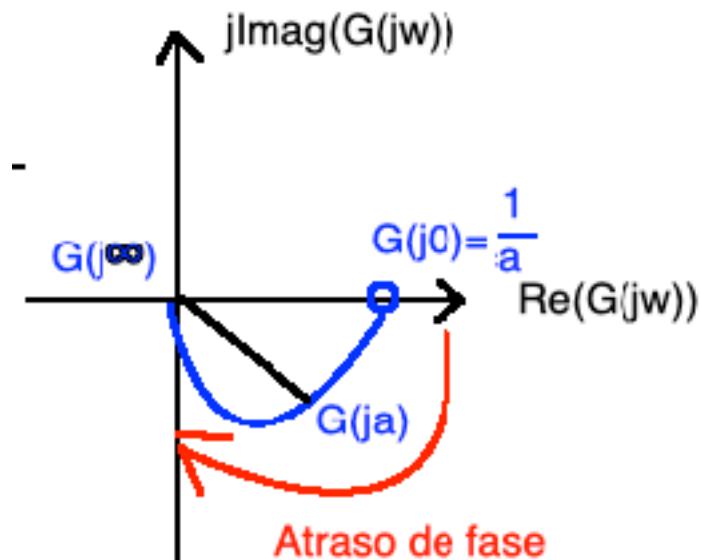
Zeros no SPD: a fase atrasa de -180graus para -90 graus

Polos no SPD: a fase avança de -180graus para +90 graus

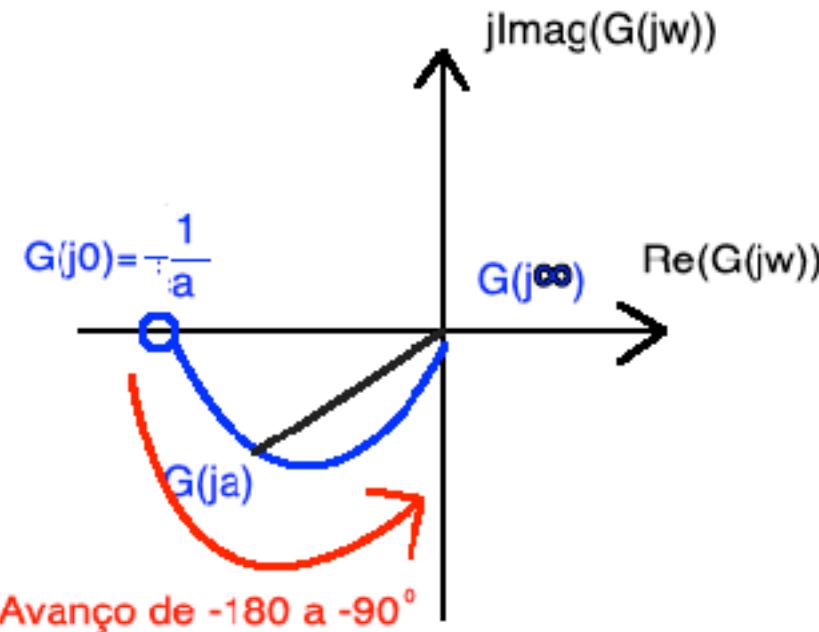
$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \quad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega - a}$$

Sistemas com polos ou zeros no semi-plano direito

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$



$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega - a}$$



Polo no SPE: atrasa a fase

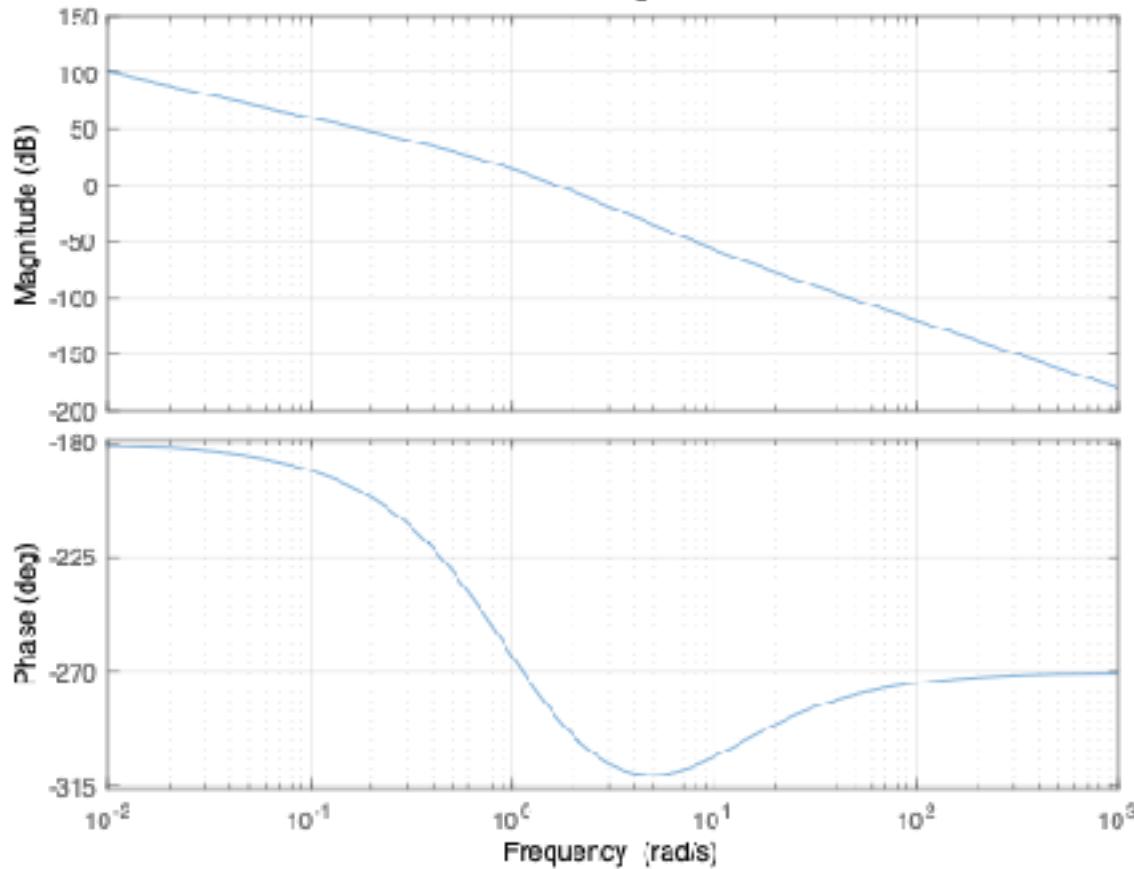
Polo no SPD: avança a fase

Sistemas com polos ou zeros no semi-plano direito

Resumindo:

	SPE	SPD
Polos	Atrasam fase	Avançam fase
Zeros	Avançam fase	Atrasam fase

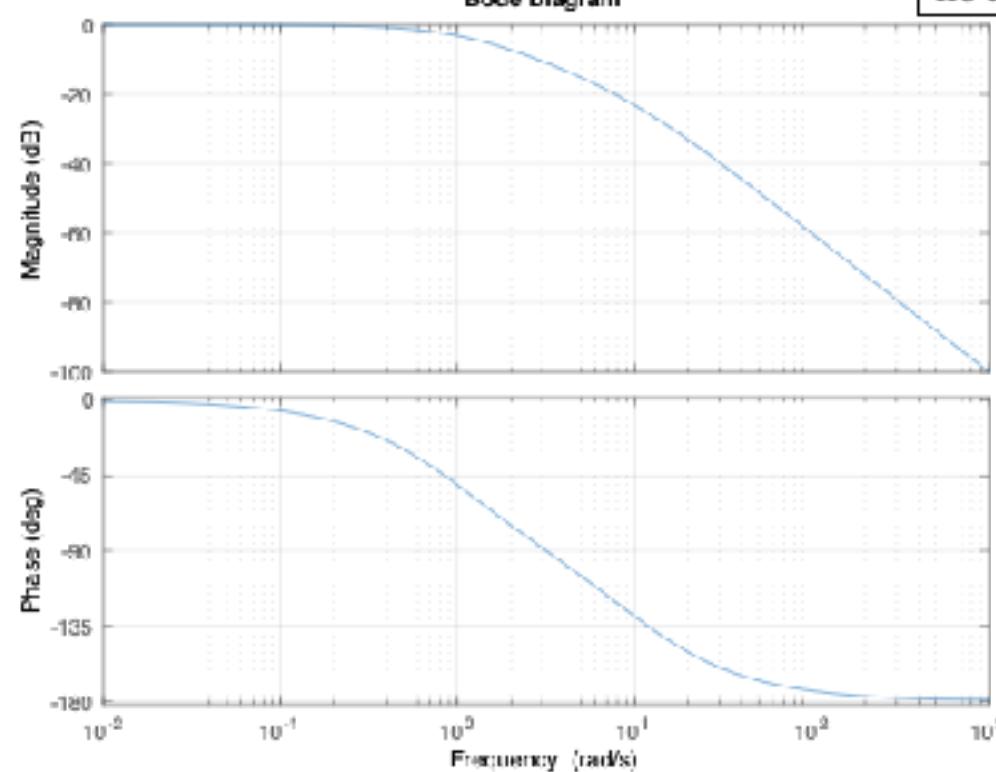
Bode Diagram



	Polo no SPE	Polo no SPD	Zero no SPE	Zero no SPD	Polo sobre jw
	$\frac{1}{j\omega T+1}$	$\frac{1}{j\omega T-1}$	$j\omega T+1$	$j\omega T-1$	$\frac{1}{j\omega T}$
$\omega \rightarrow 0$	0	180	0	180	-90
$\omega \rightarrow \infty$	-90	-90	+90	90	-90
Variação no ângulo	-90	+90	+90	-90	0

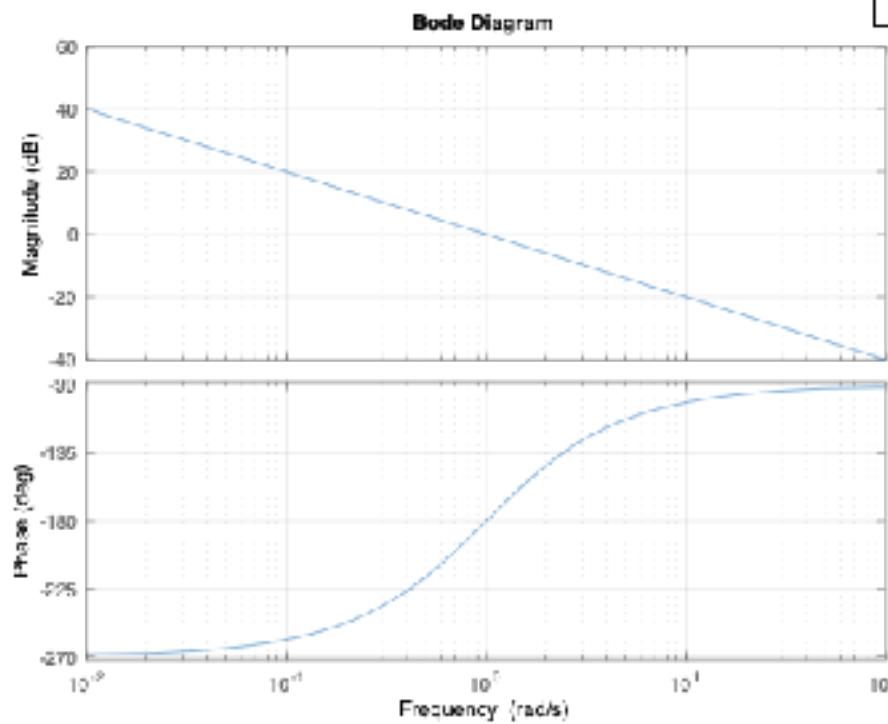
Exercício 1: identificar os polos, zeros, ganho que originaram este gráfico de Bode.

	Polo no SPE	Polo no SPD	Zero no SPE	Zero no SPD	Polo sobre jw
	$\frac{1}{j\omega T + 1}$	$\frac{1}{j\omega T - 1}$	$j\omega T + 1$	$j\omega T - 1$	$\frac{1}{j\omega T}$
$\omega \rightarrow 0$	0	180	0	180	-90
$\omega \rightarrow \infty$	-90	-90	+90	90	-90
Variação no ângulo	-90	+90	+90	-90	0



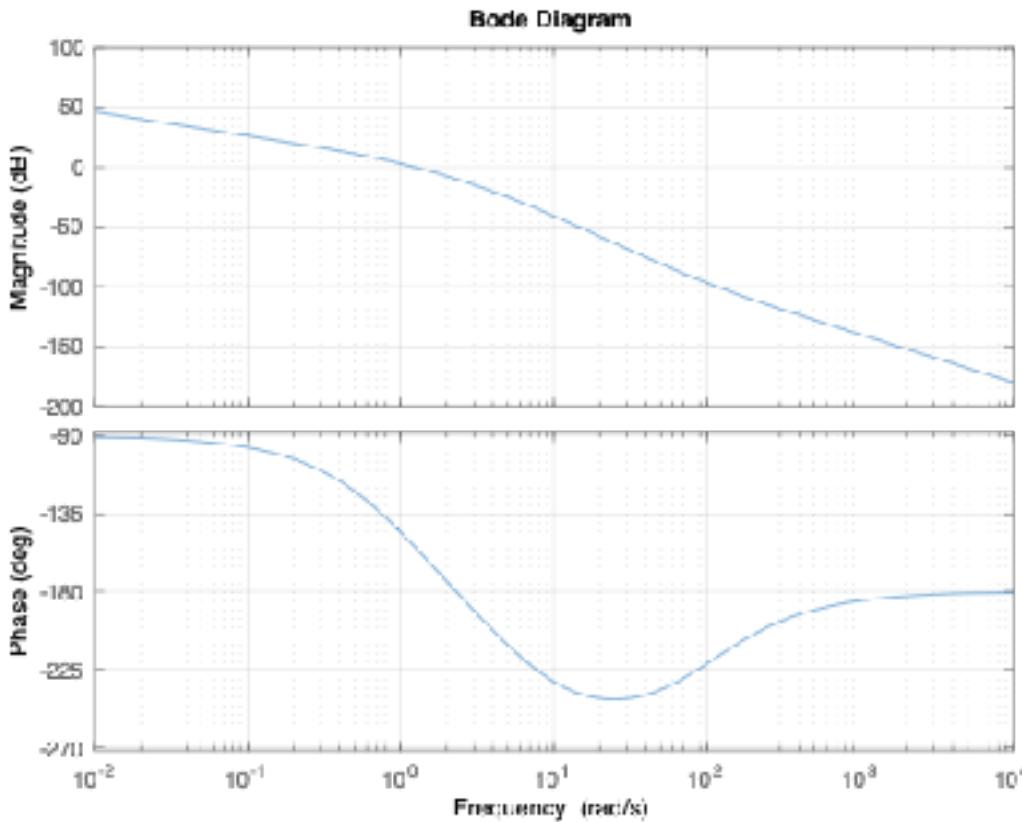
Exercício 2: Qual o efeito de um zero em $s=-1$ neste gráfico de Bode?

	Polo no SPE	Polo no SPD	Zero no SPE	Zero no SPD	Polo sobre jw
	$\frac{1}{j\omega T + 1}$	$\frac{1}{j\omega T - 1}$	$j\omega T + 1$	$j\omega T - 1$	$\frac{1}{j\omega T}$
$\omega \rightarrow 0$	0	180	0	180	-90
$\omega \rightarrow \infty$	-90	-90	+90	90	-90
Variação no ângulo	-90	+90	+90	-90	0



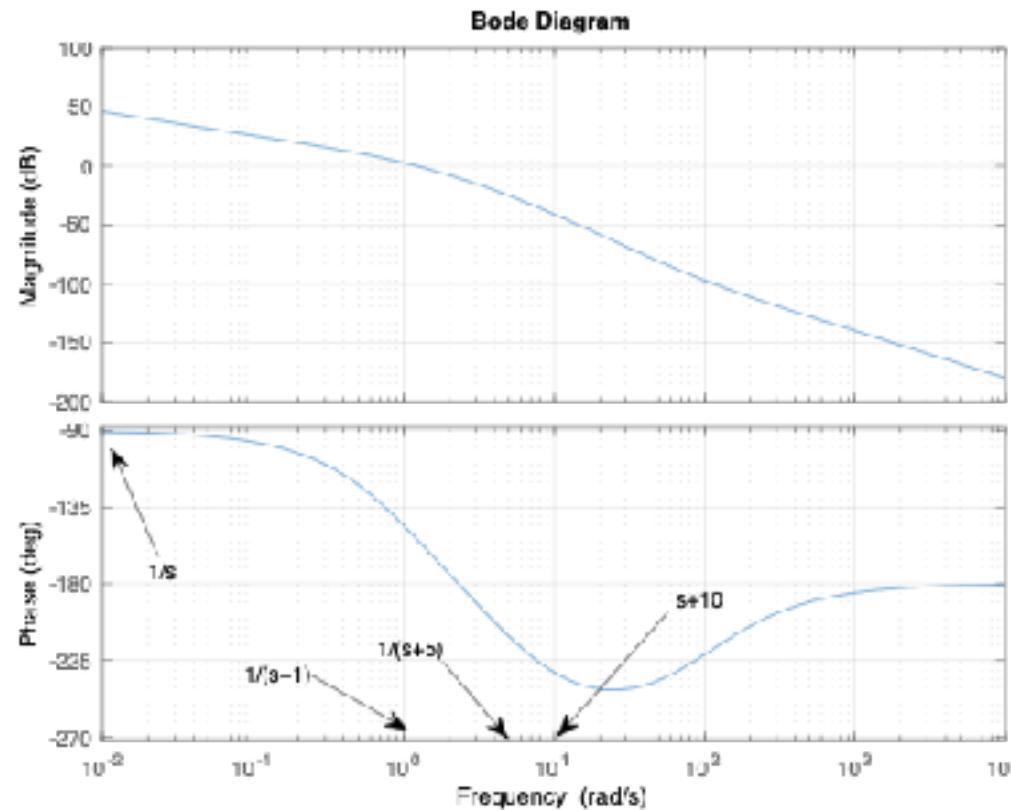
Exercício 3: Identificar a presença de polo/zero de fase não mínima neste gráfico de Bode.

	Polo no SPE	Polo no SPD	Zero no SPE	Zero no SPD	Polo sobre jw
	$\frac{1}{j\omega T + 1}$	$\frac{1}{j\omega T - 1}$	$j\omega T + 1$	$j\omega T - 1$	$\frac{1}{j\omega T}$
$\omega \rightarrow 0$	0	180	0	180	-90
$\omega \rightarrow \infty$	-90	-90	+90	90	-90
Variação no ângulo	-90	+90	+90	-90	0



Exercício 4: Quando os polos e zeros não estão afastados de 1 década, a identificação de suas frequências é mais difícil.

	Polo no SPE	Polo no SPD	Zero no SPE	Zero no SPD	Polo sobre jw
	$\frac{1}{j\omega T+1}$	$\frac{1}{j\omega T-1}$	$j\omega T+1$	$j\omega T-1$	$\frac{1}{j\omega T}$
$\omega \rightarrow 0$	0	180	0	180	-90
$\omega \rightarrow \infty$	-90	-90	+90	90	-90
Variação no ângulo	-90	+90	+90	-90	0



Exercício 4: Quando os polos e zeros não estão afastados de 1 década, a identificação de suas frequências é mais difícil.

5. Efeito do atraso de tempo nos gráficos de resposta em frequência

$$G(s) = G_0(s)e^{-ds}$$

$$G(j\omega) = G_0(j\omega)e^{-j\omega d}$$

$|e^{-j\omega d}| = 1$ Logo, o atraso não afeta o módulo nos gráficos.

$\text{ang } e^{-j\omega d} = -\omega d \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ Logo, o ângulo dos gráficos é atrasado em ωd rad/s.

5. Efeito do atraso de tempo nos gráficos de resposta em frequência

Aproximações para o atraso de tempo $e^{-s\tau}$:

Série de
MacLaurin

$$e^{-s\tau} = \frac{1}{1 + \tau s + \tau^2 s^2 / 2}$$

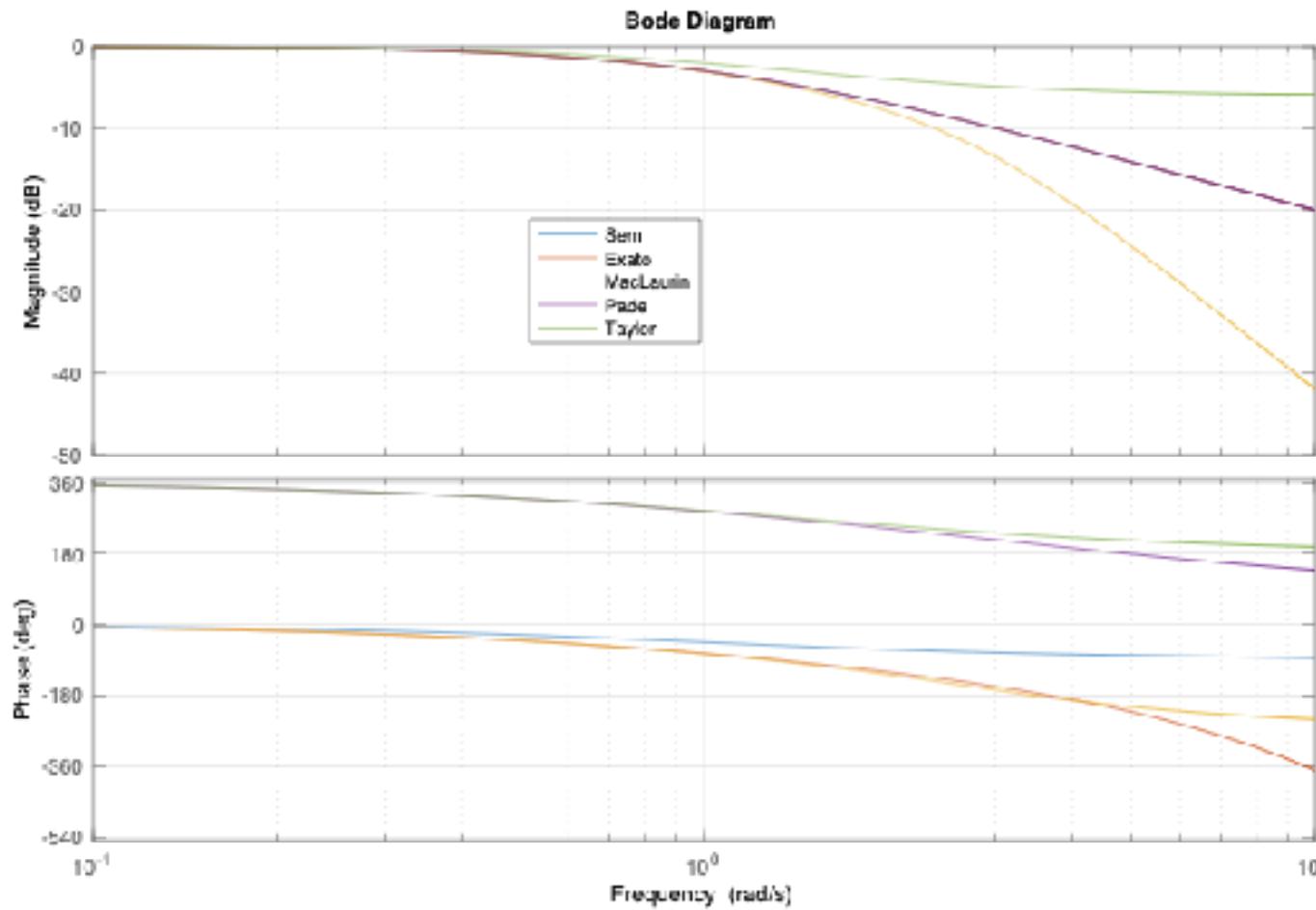
Padé

$$e^{-s\tau} = \frac{1 - s\tau/2}{1 + s\tau/2}$$

Série de Taylor

$$e^{-\tau s} = 1 - \tau s$$

5. Gráfico de Bode: efeito do atraso de tempo no Matlab



$$G_0(s) = \frac{1}{s + 1}$$

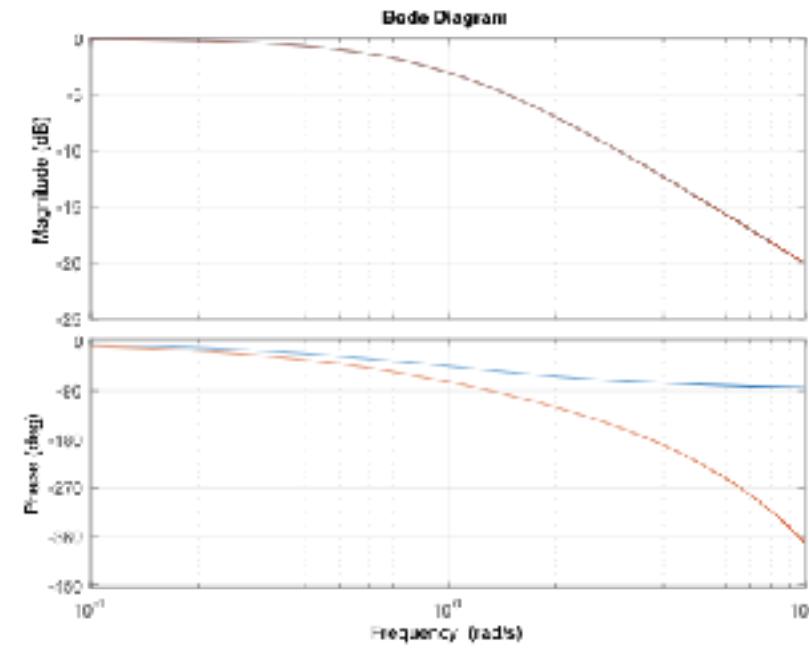
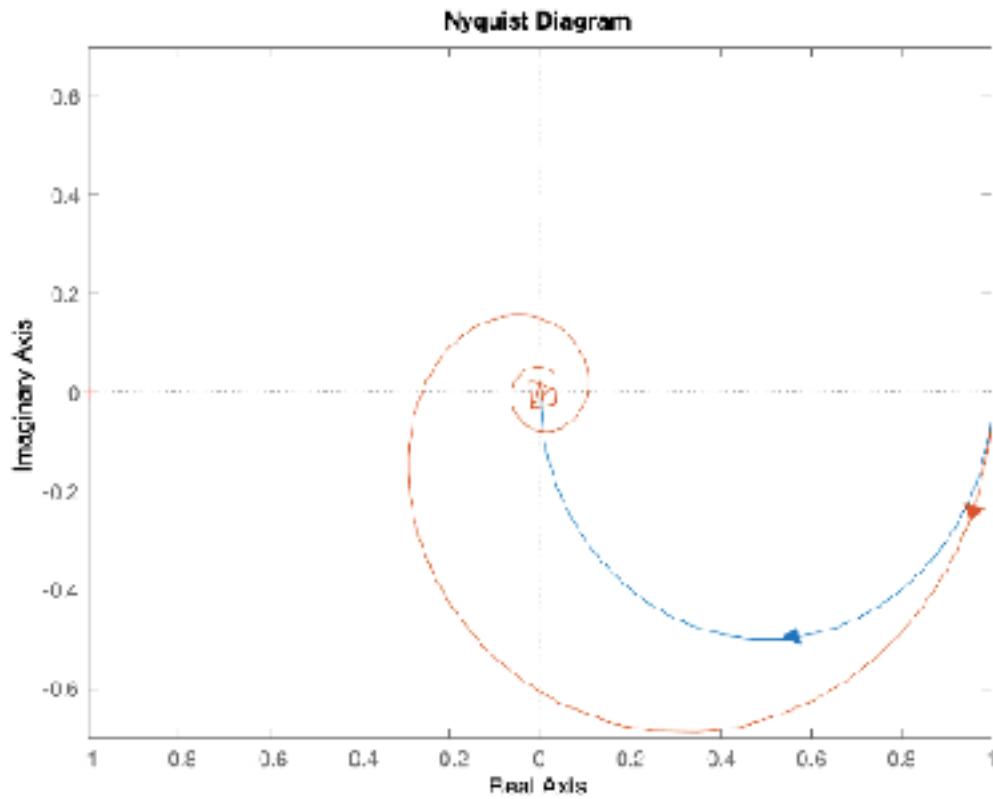
$$G(s) = \frac{e^{-0.5s}}{s + 1}$$

Padé e Taylor começam o gráfico de ângulo em 360 ao invés de 0 graus.

O gráfico exato é obtido definindo a FT com atraso no Matlab e plotando diretamente seu gráfico.

A aproximação deve ser usada somente quando necessário

5. Efeito do atraso de tempo no gráfico polar



O ângulo tende a infinito: logo,
infinitos envolvimentos da origem.

6. Critério de estabilidade de Nyquist

O critério de Nyquist se baseia na análise da contribuição de polos e zeros ao ângulo da função de transferência para descobrir se há polos de malha fechada no semiplano direito, o que corresponde a um sistema instável.

Seja a função de transferência de malha aberta $G(s)H(s)$, que em malha fechada resulta na função de transferência

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (1.4)$$

Para que o sistema dado por (1.4) seja estável, os zeros de

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0 \quad 1.5)$$

devem estar todos no SPE.

6. Critério de estabilidade de Nyquist

Escrevendo $G(s)H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$,

temos de (1.5)

$$1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s) + D(s)}{D(s)} = 0 \quad (1.6)$$

De (1.6), os zeros de $N(s) + D(s) = 0$ são os polos de malha fechada de (1.4), que desejamos saber se estão no SPD.

Os zeros de $D(s) = 0$ são os polos de malha aberta, conhecidos.

6. Critério de estabilidade de Nyquist

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0 \quad 1.5)$$

Seja então o gráfico pola de (1.5), quando ω varia de 0 a ∞ . A variação total do ângulo de $F(s)$, dada por Φ_0^∞ , será

$$\Phi_0^\infty = \angle zeros - \angle polos$$

Seja agora Z_d o número de zeros de $F(s)$ no SPD e Z_e o número de zeros de $F(s)$ no SPE. Vamos assumir que não há polos de malha fechada sobre o eixo imaginário. Mostraremos depois uma interpretação bastante natural para esta suposição, que permitirá a verificação de estabilidade mesmo com polos de malha fechada sobre eixo imaginário.

Da mesma forma, seja P_d o número de polos de $F(s)$ no SPD e P_e o número de polos de $F(s)$ no SPE. Sejam também P_w os polos de $F(s)$ sobre o eixo $j\omega$.

6. Critério de estabilidade de Nyquist

$$\text{Exemplo: } F(s) = 1 + \frac{s+1}{s(s+10)} = \frac{s(s+10) + (s+1)}{s(s+10)}$$

$$\Phi_0^\infty = \angle \text{zeros} - \angle \text{polos}$$

$$\Phi_0^\infty = \angle(s^2 + 11s + 1) - \angle(s(s+10)) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Quando ω vai de 0 a ∞ , o ângulo dos zeros vai de 0° a 180° , e o ângulo dos polos vai de -90° a -180° .

Logo, a variação total é 90° .

6. Critério de estabilidade de Nyquist

Conhecendo a contribuição dos polos e zeros para o ângulo, a equação

$$\Phi_0^\infty = \angle zeros F(s) - \angle polos F(s) \quad (1.7)$$

pode ser escrita como

$$\phi_0^\infty = Z_d * (-90) + Z_e * (90) - P_e * (90) + P_d * (90)$$

ou

$$\phi_0^\infty = 90(Z_e - Z_d - P_e + P_d) \quad (1.8)$$

Observe que P_w não aparece, pois sua contribuição à fase de ϕ_0^∞ quando ω vai de 0 a infinito é nula (tabela 1).

6. Critério de estabilidade de Nyquist

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s) + D(s)}{D(s)}$$

Zeros de $F(s)$

Polos de $F(s)$

Como o número total de zeros de $F(s)$ é igual ao número total de polos de $F(s)$, ou seja,

$$Z_e + Z_d = P_e + P_d + P_w \quad (1.9)$$

De (1.8) e (1.9) vem

$$\phi_0^\infty = 90(Z_e - Z_d - P_e + P_d) \quad (1.8)$$

$$\phi_0^\infty = 90(P_e + P_d + P_w - Z_d - Z_d - P_e + P_d)$$

$$\phi_0^\infty = 90(2P_d - 2Z_d + P_w)$$

$$\phi_0^\infty = (P_d - Z_d + P_w/2) * 180$$

6. Critério de estabilidade de Nyquist

$$\phi_0^\infty = (P_d - Z_d + P_w/2) * 180$$

Considerando ω variando de ∞ a 0, como na literatura, basta inverter o sinal do ângulo,

$$\phi_\infty^0 = (Z_d - P_w/2 - P_d) * 180 \quad (1.10)$$

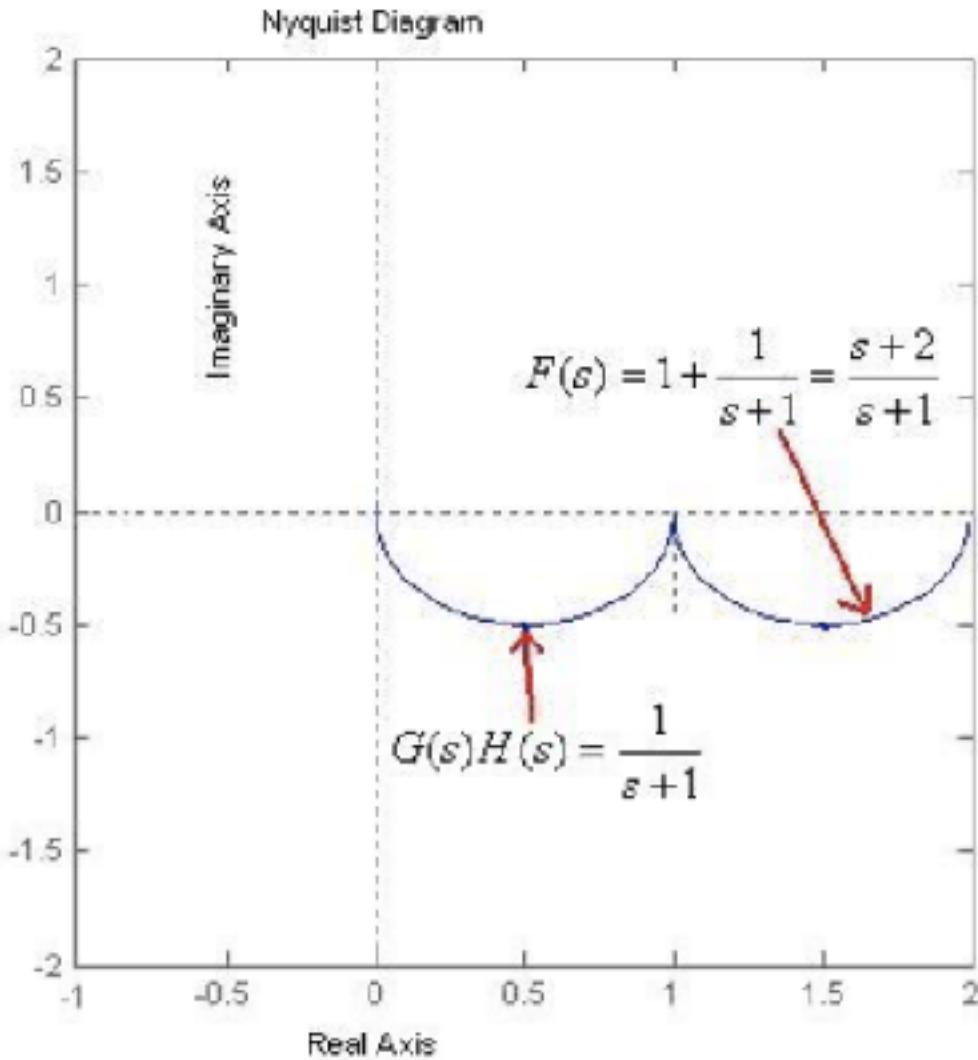
A variação do ângulo de $F(s)$ em torno da origem quando ω varia de ∞ a 0 é dada por ϕ_∞^0 . Para simplificar a obtenção deste ângulo, passaremos a utilizar o gráfico de $G(s)H(s)$ quando ω varia de ∞ a 0, uma vez que este é o gráfico polar que já conhecemos. Neste caso, mediremos a variação do ângulo em torno do ponto -1, ao invés da origem.

Lembrando que:

Zd=zeros de $F(s)$ = polos de MF **MF: Quero saber!!!**

Pd e Pw são polos de $F(s)$ = polos de $G(s)H(s)$ **Conhecidos!**

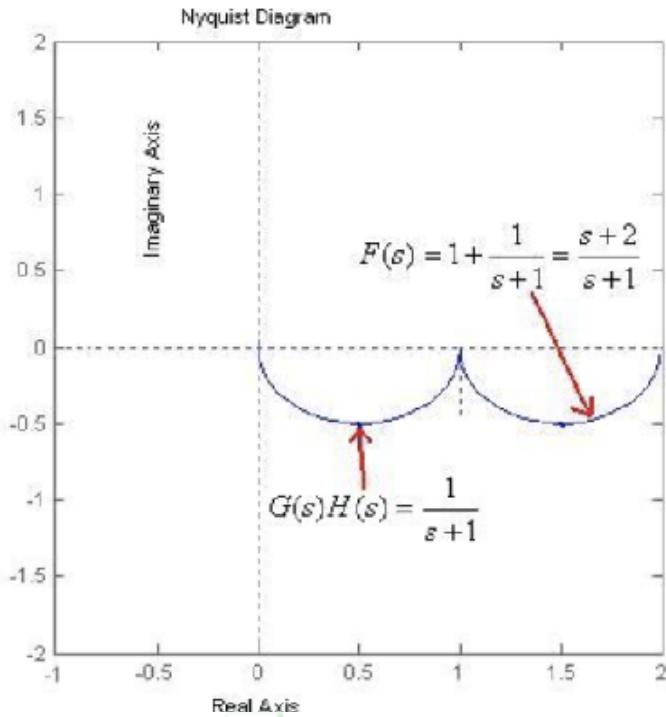
6. Critério de estabilidade de Nyquist



Comparação do gráfico polar de $G(s)H(s)$ e $1+G(s)H(s)$.

A parte real do gráfico de $G(s)H(s)$ é deslocada em 1 para a esquerda.

6. Critério de estabilidade de Nyquist



Na figura observa-se que medir o ângulo em torno da origem para $1 + G(s)H(s) = 0$ é equivalente a medir o ângulo de $G(s)H(s) = 0$ em torno do ponto -1 , uma vez que o segundo gráfico está deslocado de -1 em relação ao eixo real. Como o gráfico de $G(s)H(s) = 0$ é o gráfico polar já conhecido, optaremos por este e denotaremos simplesmente por ϕ o ângulo descrito por $G(s)H(s) = 0$ quando ω varia de ∞ a 0 .

6. Critério de estabilidade de Nyquist

$$\phi_{\infty}^0 = (Z_d - P_w/2 - P_d) * 180 \quad (1.10)$$

Reescrevemos então (1.10) na forma

$$\phi = (Z_d - P_w/2 - P_d) * 180 \quad (1.11)$$

Malha fechada

Malha aberta

Onde:

P_w = número de polos de $F(s)$ (ou de $G(s)H(s)$) que estão sobre o eixo $j\omega$

P_d = número de polos de $F(s)$ (ou de $G(s)H(s)$) que estão no SPD

Z_d = número de zeros de $F(s)$ (ou de $1 + G(s)H(s) = 0$) que estão no SPD.

ϕ = ângulo de $F(s)$ em torno do ponto -1 quando ω varia de ∞ a 0.

6. Critério de estabilidade de Nyquist

Como utilizar: $\Phi = (Z_d - \frac{P_\omega}{2} - P_d)180^\circ$

De $G(s)$ obtemos sempre P_ω e P_d .

Z_d são os polos de MF no SPD

Opção 1: assumimos $Z_d = 0$ e verificamos que valor de Φ garante estabilidade.

Opção 2: Fazemos o gráfico polar de $G(s)$ e medimos Φ . Da equação, vemos qual o valor de Z_d que satisfaz a equação.

6. Critério de estabilidade de Nyquist

Exemplo 1: vamos aplicar o critério de Nyquist dado por (1.11) para verificar a estabilidade de $G(s) = \frac{10}{s(s+10)}$ em malha fechada.

Neste caso:

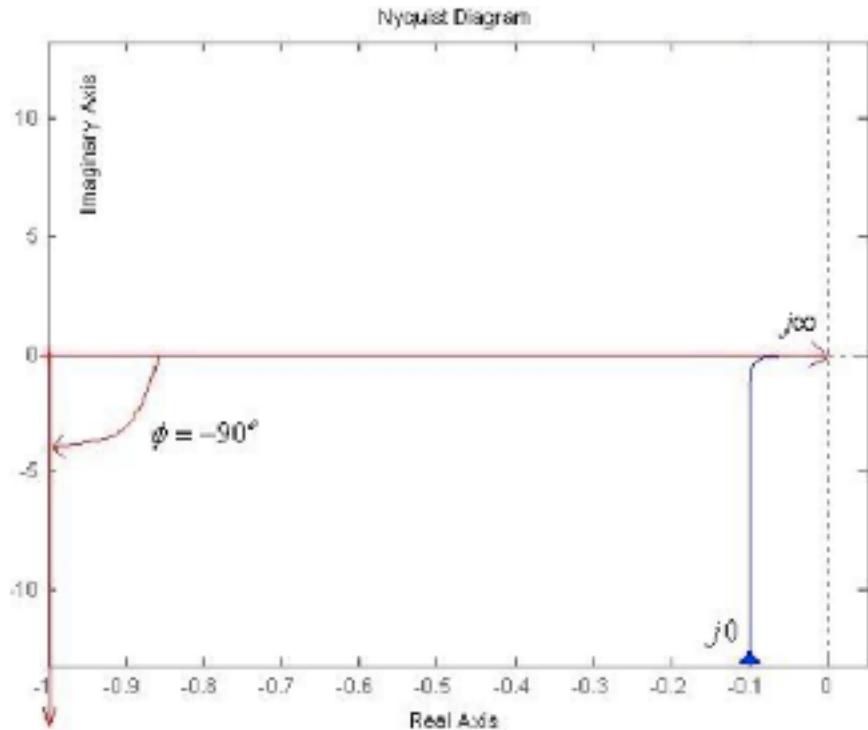
$P_\omega = 1$, pois há um polo $G(s)H(s)$ sobre o eixo $j\omega$

$P_d = 0$, pois não há polos de $G(s)H(s)$ no SPD

Para obter ϕ , usamos o gráfico polar desta FT (

6. Critério de estabilidade de Nyquist

Exemplo 1: vamos aplicar o critério de Nyquist dado por (1.11) para verificar a estabilidade de $G(s) = \frac{10}{s(s+10)}$ em malha fechada.



Desenhamos no gráfico polar um fasor do ponto -1 ao ponto do gráfico polar correspondente à frequência $j\infty$. A seguir, desenhamos um fasor do ponto -1 ao ponto do gráfico correspondente à frequência $j0$. Observa-se que este fasor variou -90 graus desde a frequência $j\infty$ até a frequência $j0$. Substituindo os dados em (1.11), vem

$$-90 = (Z_d - 0.5)180$$

Essa equação é satisfeita para $Z_d = 0$, ou seja, não há pólos de malha fechada no semiplano direito, e o sistema estável.

Portanto, usamos aqui a opção 2.

6. Critério de estabilidade de Nyquist

Exemplo 2: vamos aplicar o critério de Nyquist dado por (1.11) para obter os valores de a para estabilidade de $G(s) = \frac{s+a}{s^2(s+10)}$ em malha fechada.

Neste caso,

$P_w = 2$, pois há dois polos $G(s)H(s)$ sobre o eixo $j\omega$

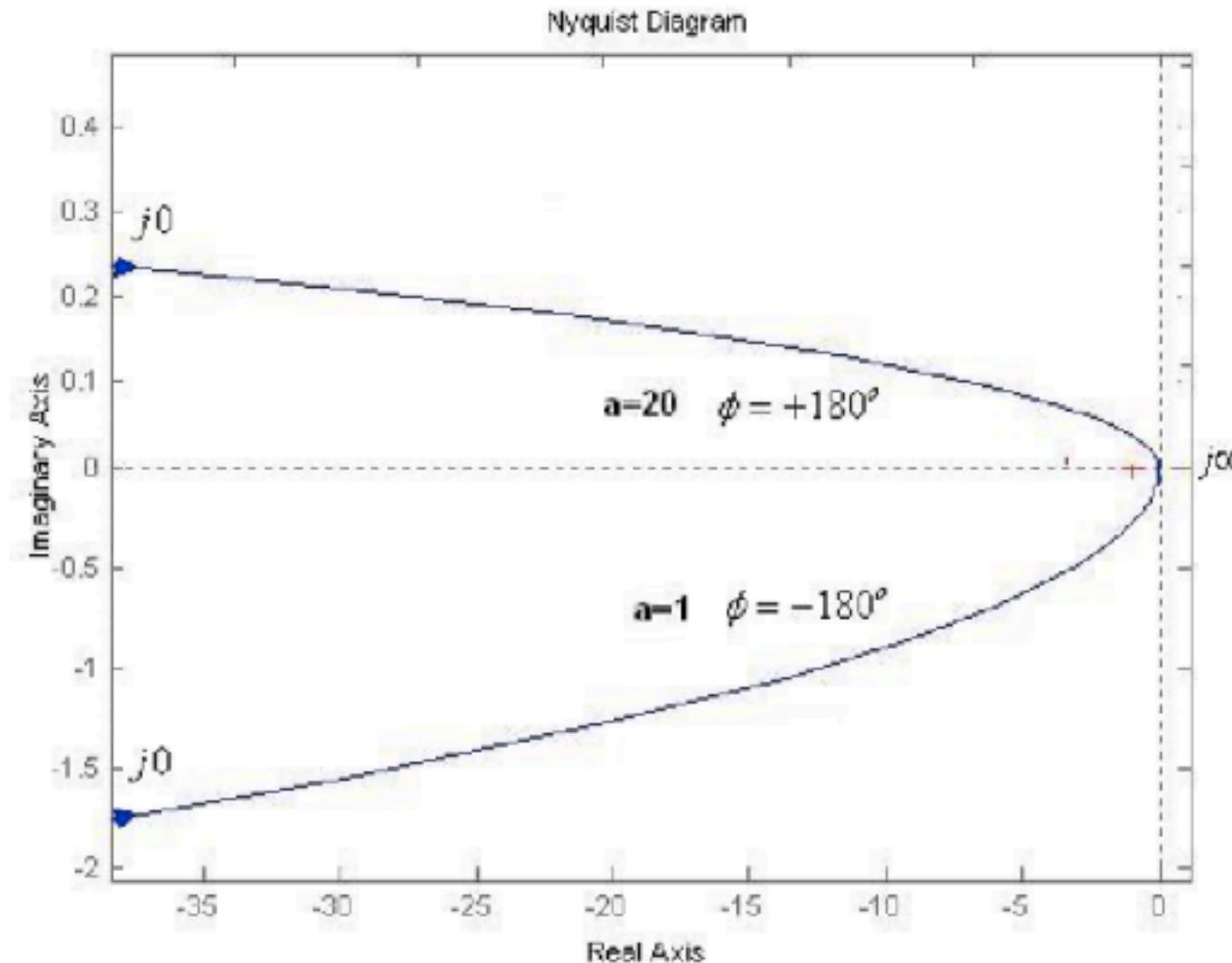
$P_d = 0$

Da equação, $\phi = (Z_d - P_w/2 - P_d) * 180$

Para estabilidade teremos $Z_d=0$, o que implica em $\Phi = -180$

Portanto, estamos usando a opção 1: fazer $Z_d = 0$ e verificando se o ângulo Φ satisfaz a equação

6. Critério de estabilidade de Nyquist



Para $a=1$,

$-180 = (Z_d - 1)180$, que é satisfeita para $Z_d = 0$.

Para $a=20$, $+180 = (Z_d - 1)180$, que é satisfeita para $Z_d = 2$.

Para que o ângulo seja -180 graus, o zero em $s = -a$ deve avançar a fase antes do polo, em $s = -10$.

Portanto, se $a > 10$ esta condição é atendida.

6. Critério de estabilidade de Nyquist

Exemplo 3: seja $G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 10)}$

$$\Phi = (Z_d - \frac{P_\omega}{2} - P_d)180^\circ$$

Temos de $G(s)$ que $P_\omega = 1$ e $P_d = 0$ e portanto,

$$\Phi = (Z_d - 0.5)180^\circ$$

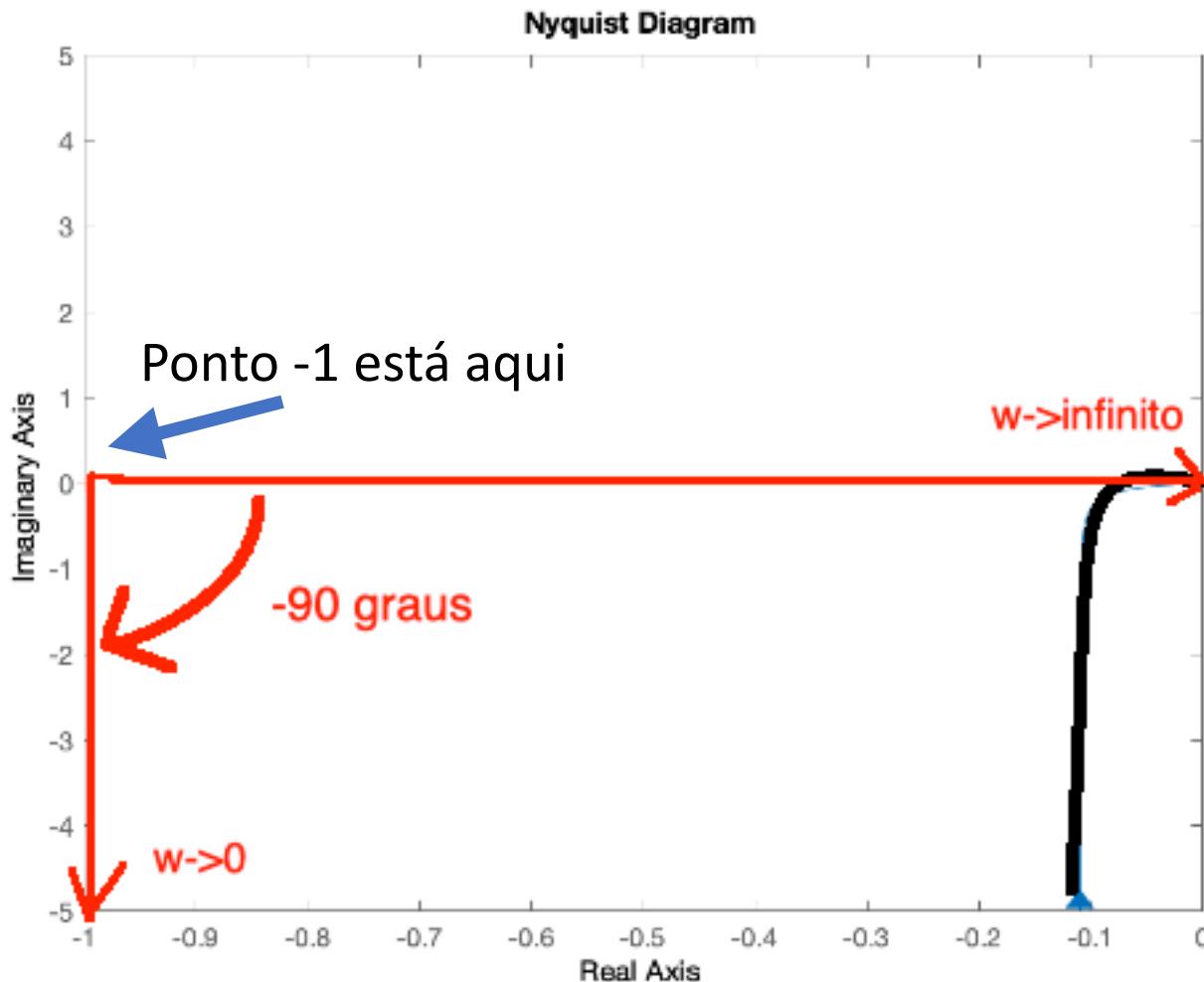
Para que o sistema seja estável ($Z_d = 0$), deve-se ter $\Phi = -90^\circ$.

6. Critério de estabilidade de Nyquist

Desenhando o gráfico polar de $G(s)$ para $K=1$,

$$-90 = (Z_d - 0.5)180^\circ$$

E portanto $Z_d = 0$

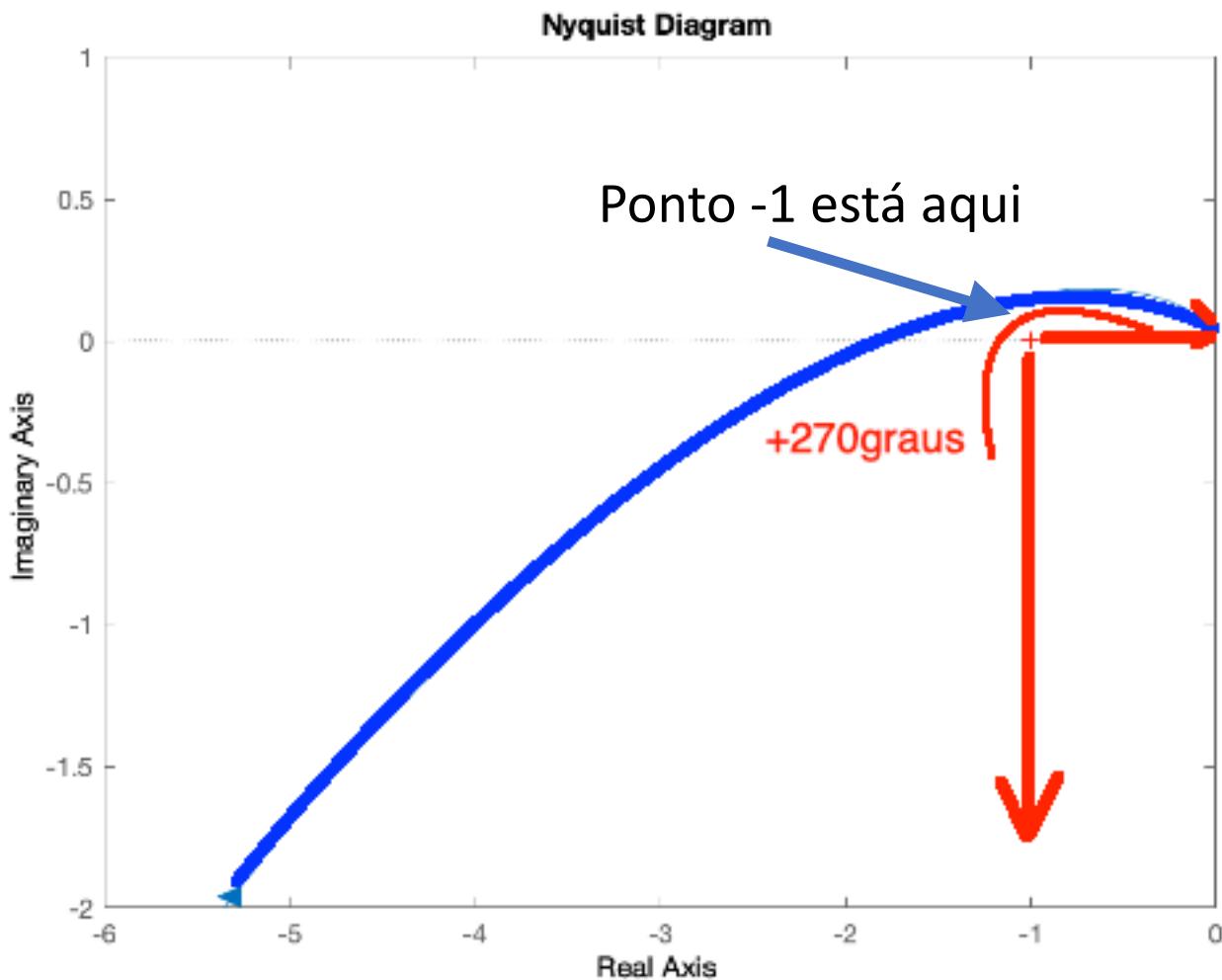


6. Critério de estabilidade de Nyquist

Desenhando o gráfico polar de $G(s)$ para $K=200$

$$+270 = (Z_d - 0.5)180^\circ$$

E portanto $Z_d = 2$

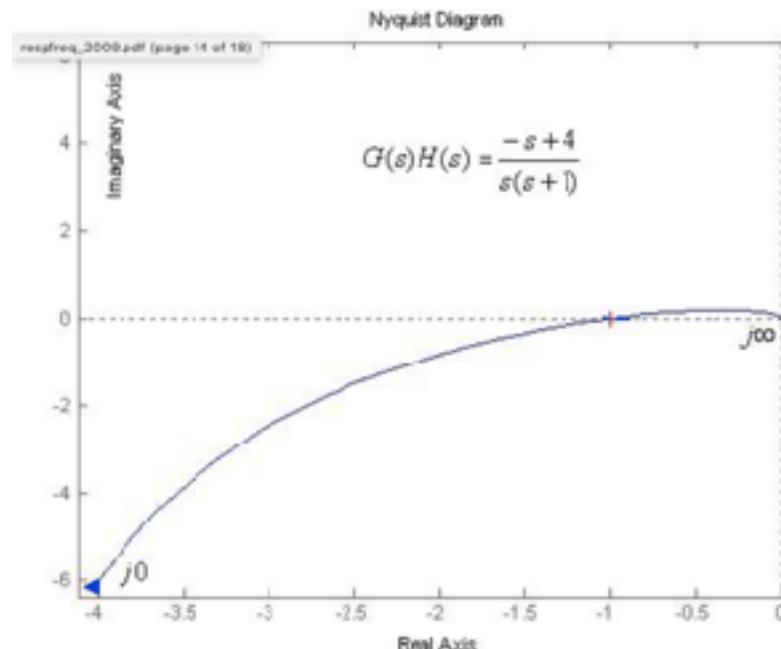


6. Critério de estabilidade de Nyquist

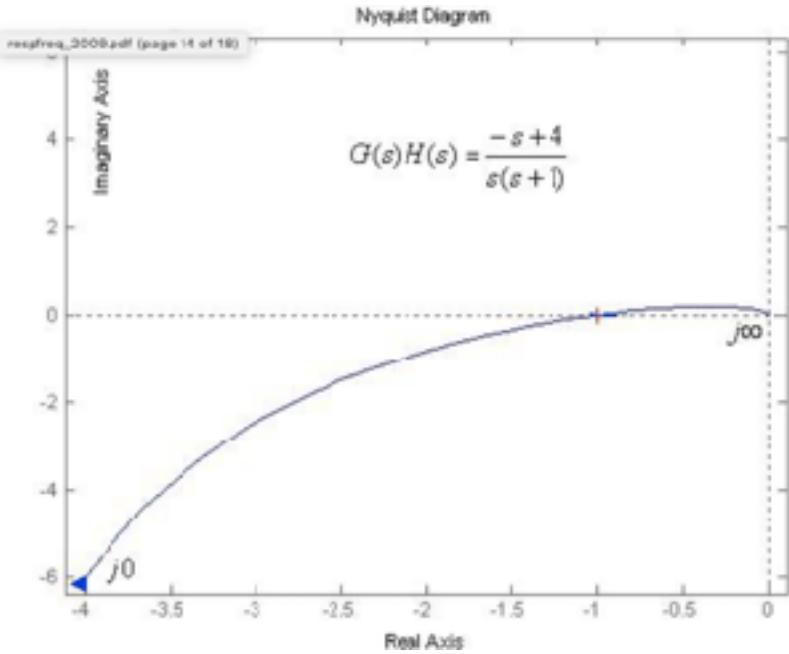
Exemplo 4: vamos ilustrar agora o caso em que $F(s)=1+G(s)H(s)=0$ tem polos sobre o eixo imaginário.

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{-s + 4}{s(s + 1)} = 0$$

Para este sistema, os zeros de $1+G(s)H(s)$ são as raízes de $s^2 + 4 = 0$, ou $s = \pm j2$. Neste caso, $P_\omega = 1$ e $P_d = 0$. O gráfico de $G(s)H(s)$ é mostrado na figura



6. Critério de estabilidade de Nyquist

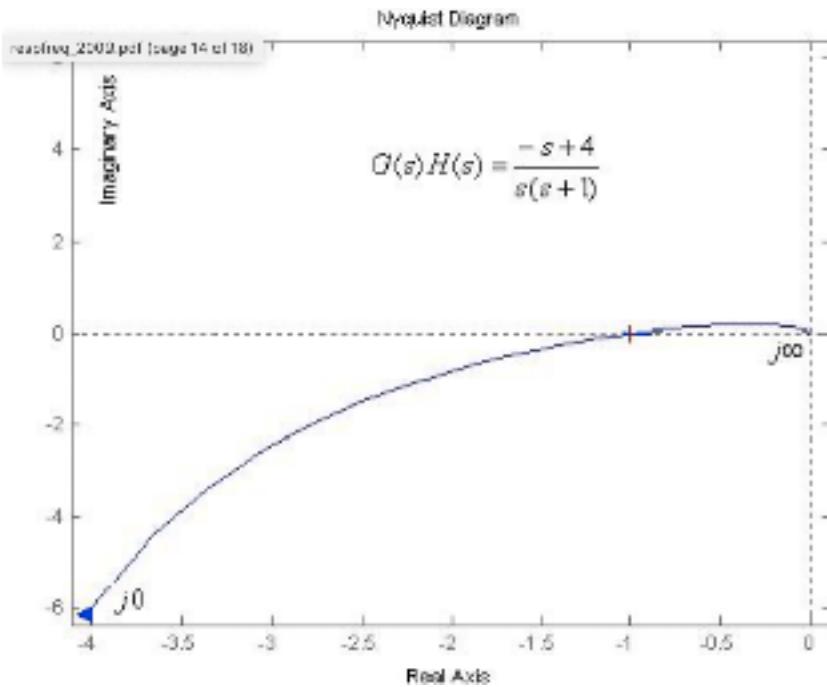


Observa-se que neste caso o gráfico polar passa exatamente sobre o ponto -1 . Se passasse antes do ponto -1 , teríamos

$$-90 = (Z_d - 0.5) * 180$$

e $Z_d = 0$, implicando em estabilidade.

6. Critério de estabilidade de Nyquist

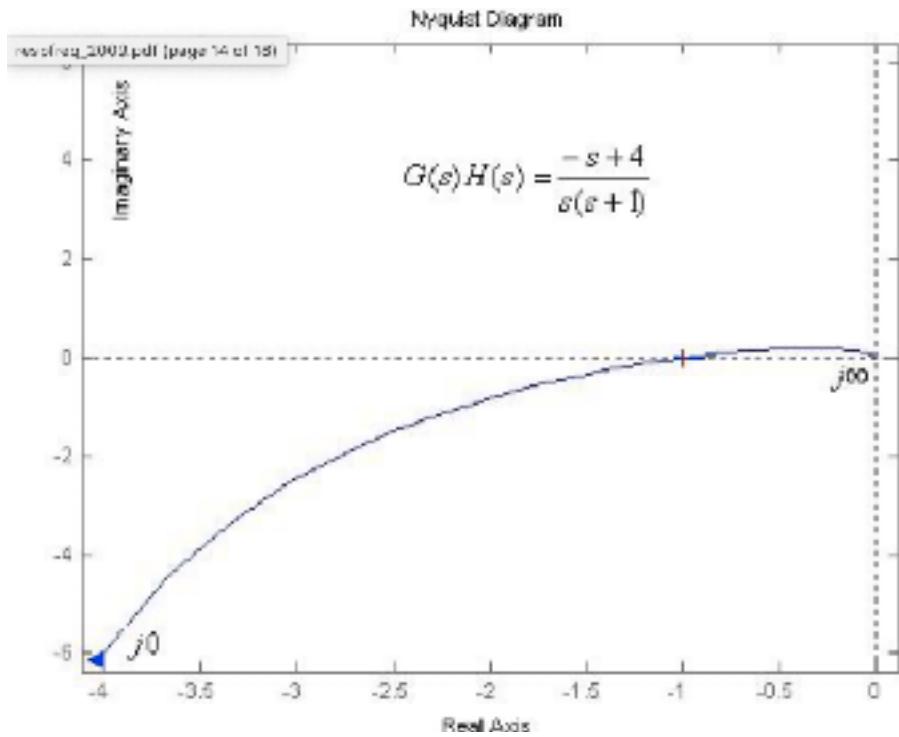


Passando após o ponto -1, teríamos

$$+270 = (Z_d - 0.5) * 180$$

e $Z_d = 2$, implicando em instabilidade.

6. Critério de estabilidade de Nyquist

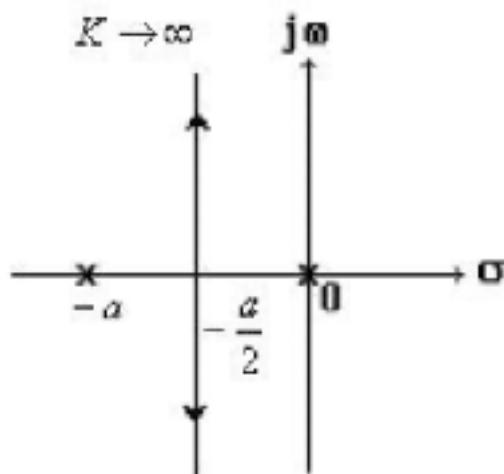


Logo, o fato do gráfico passar sobre o ponto -1 significa que o sistema é marginalmente estável, ou seja, há polos de malha fechada sobre o eixo imaginário.

Assim, a situação de polos de malha fechada sobre o eixo imaginário também é verificável através do critério de Nyquist.

7. Estabilidade relativa

Seja $G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$, com $a>0$ e $K>0$.

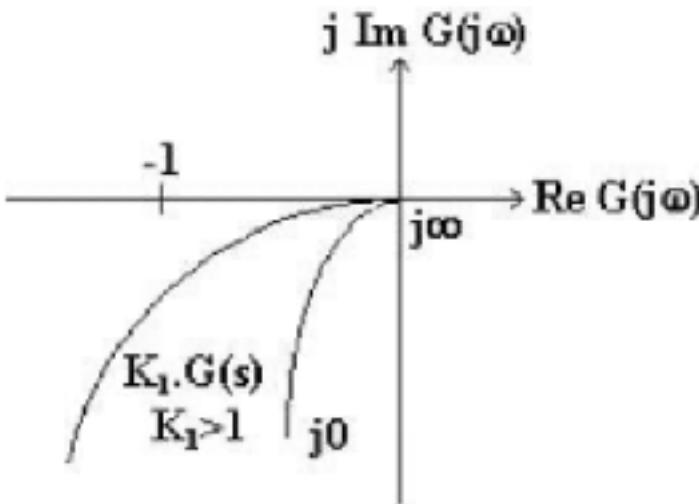
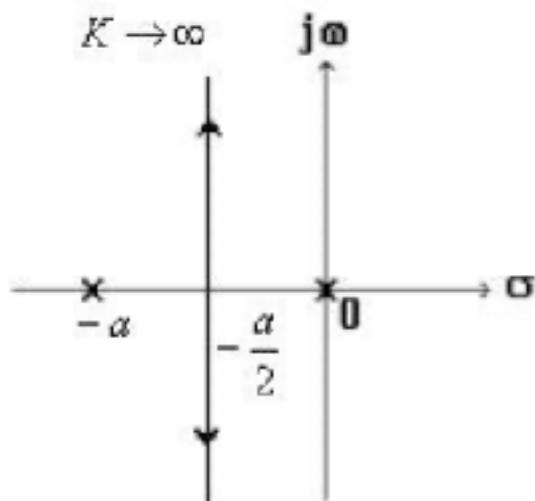


O lugar das raízes de $1+KG(s)=0$ ilustra todos os possíveis polos de malha fechada. Observe que quando K aumenta, o amortecimento diminui. Isto faz a sobreelevação aumentar, deixando o sistema oscilatório.

Dizemos neste caso que o sistema é relativamente menos estável, devido à esse comportamento oscilatório que o aproxima de um sistema marginalmente estável.

7. Estabilidade relativa

Seja $G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$, com $a>0$ e $K>0$.

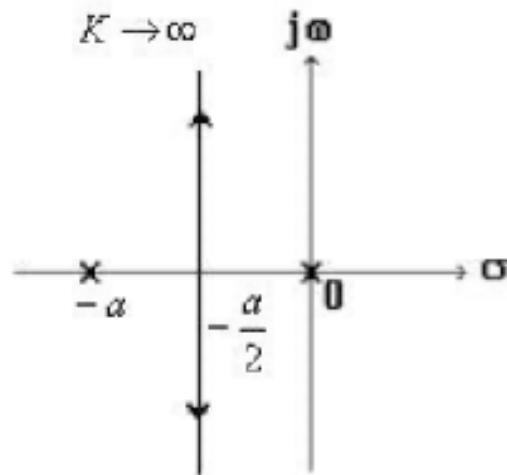


Usando o critério de Nyquist para essa análise, vemos que o ângulo de $G(j\omega)$ é -90 graus para $K>0$, garantindo estabilidade.

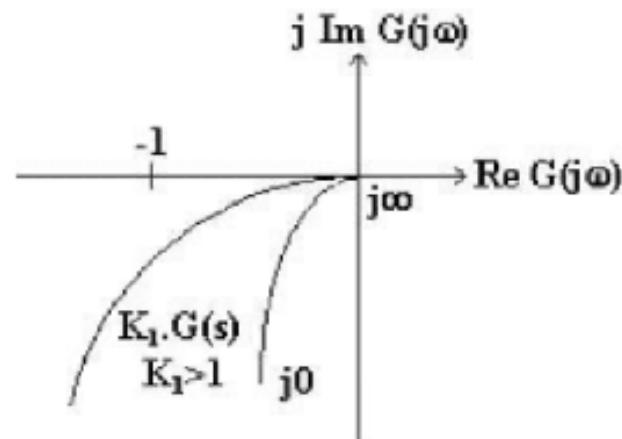
Entretanto, ganhos maiores fazem com que o gráfico de $G(j\omega)$ se aproxime mais do ponto crítico $-1+j0$.

7. Estabilidade relativa

Seja $G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$, com $a>0$ e $K>0$.



Portanto, um menor amortecimento dos polos no LR equivale a uma maior proximidade do gráfico de $G(j\omega)$ do ponto crítico $-1-j0$.



7.1 Estabilidade relativa no gráfico polar

Usaremos agora um sistema da forma $G(s) = \frac{K}{s(s+a)(s+b)}$ com $K>0$, $a>0$ e $b>0$ para introduzir parâmetros para medir o grau de estabilidade em M.F. A figura 7.1 ilustra o gráfico polar de $G(s)$.

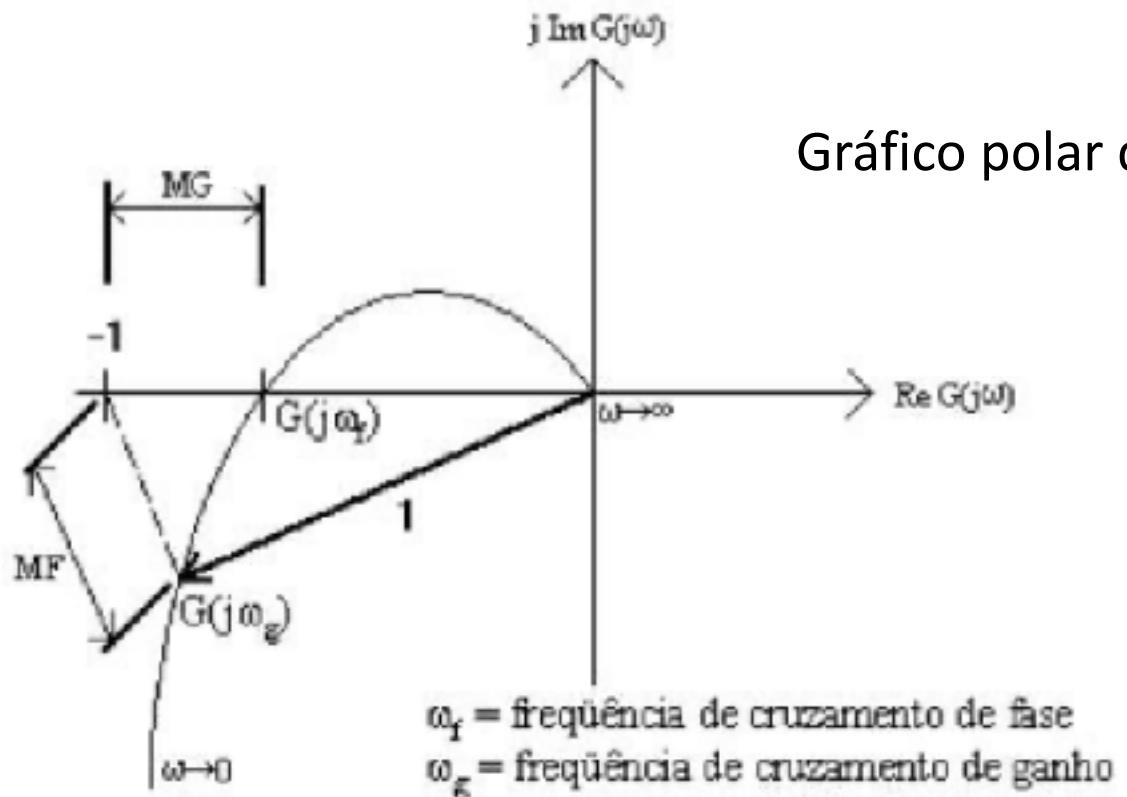
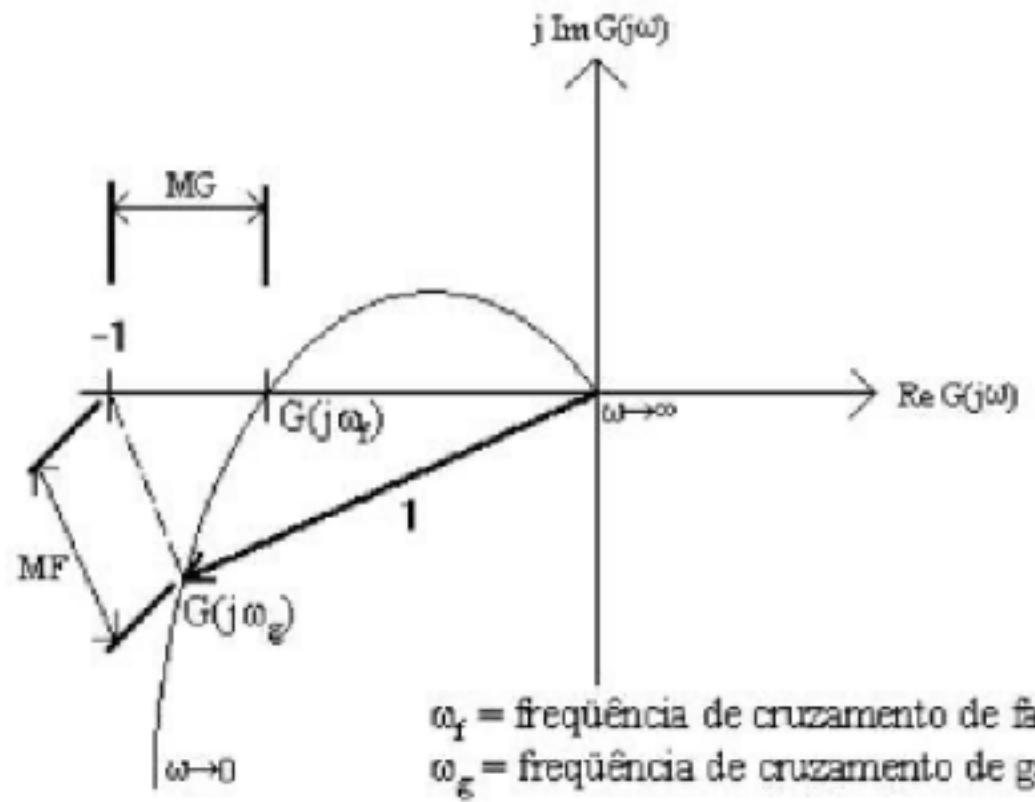


Gráfico polar de $G(s)$

Como $G(s)$ tem um polo na origem, a condição para essa estabilidade é que o ângulo seja -90° .

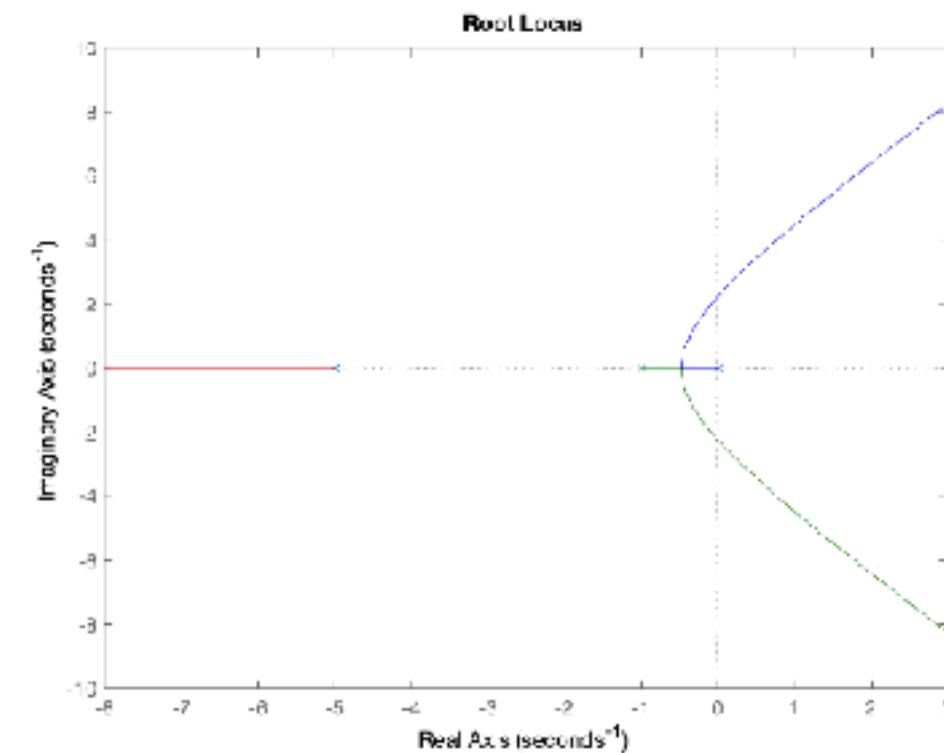
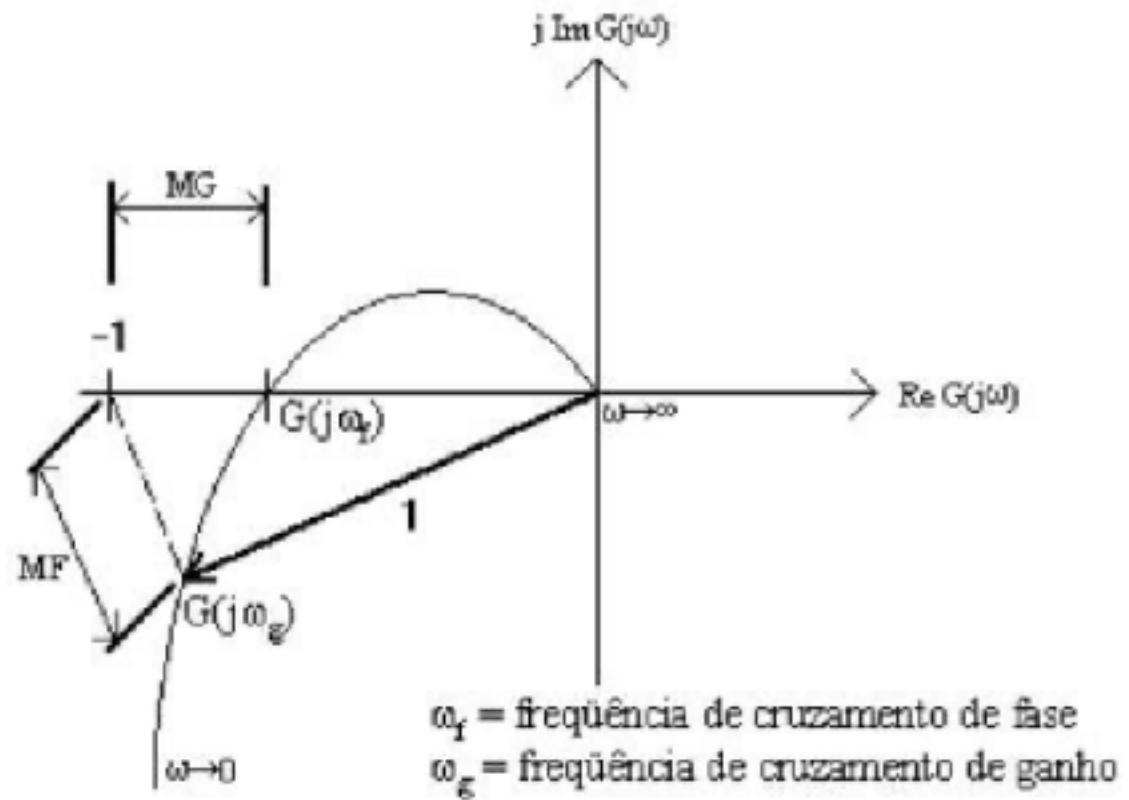
Se a curva de $G(j\omega)$ cruzar o eixo real entre a origem e o ponto -1 , esta condição é atendida.

7.1 Estabilidade relativa no gráfico polar



Assim, a distância de $G(j\omega)$ do ponto -1 indica o grau de estabilidade do sistema, que será medido usando dois parâmetros: MG e MF

7.1 Estabilidade relativa no gráfico polar

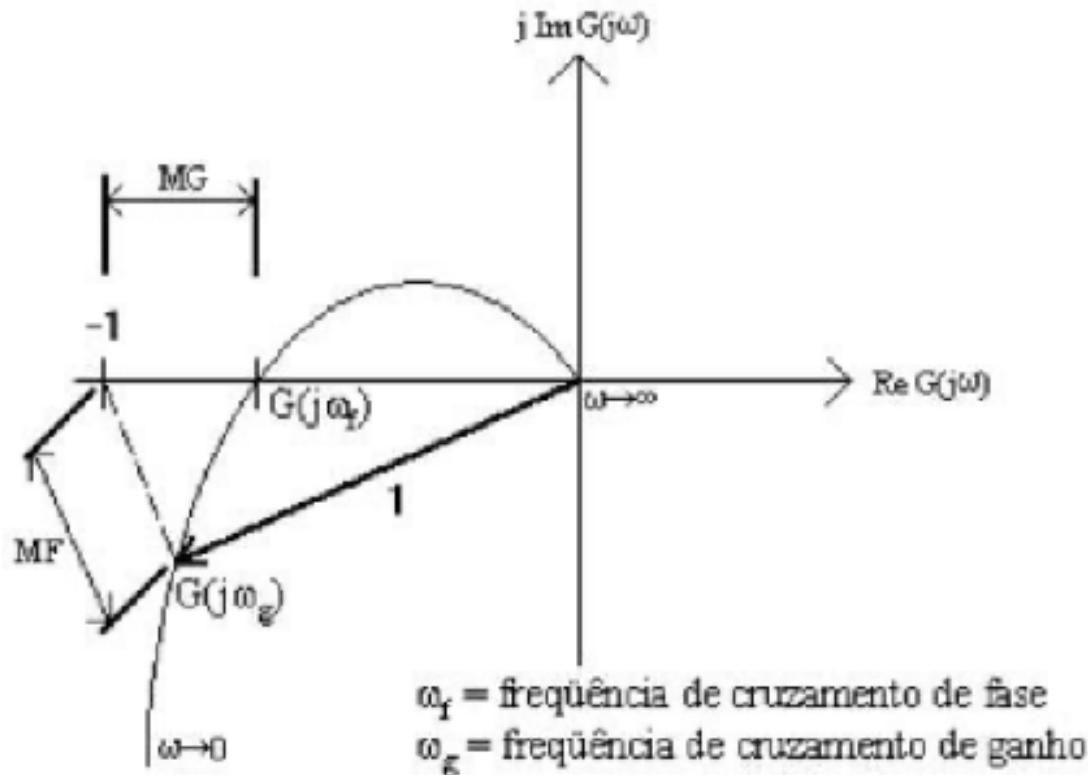


No LR para $1+KG(s)=0$ mostrado, quando $K = 0$ até $K \rightarrow \infty$, observa-se que o aumento de K reduz o amortecimento, e a estabilidade. O mesmo pode ser observado no gráfico polar, através do critério de Nyquist, onde o aumento do ganho reduz a margem de ganho e de fase

7.1 Estabilidade relativa no gráfico polar

Margem de ganho

O ganho que deve ser adicionado ao sistema (em dB) para que o mesmo se torne instável. Na figura abaixo, pode ser visualizado como a distância de $G(j\omega_f)$ ao ponto -1 , onde ω_f é a frequência de cruzamento de fase (o ângulo de $G(j\omega)$ cruza por 180°).



7.1 Estabilidade relativa no gráfico polar

Margem de Fase (MF):

O ângulo que a curva de $G(j\omega)$ deve ser rotacionada (no sentido horário) de modo que a mesma cruze o ponto -1 .

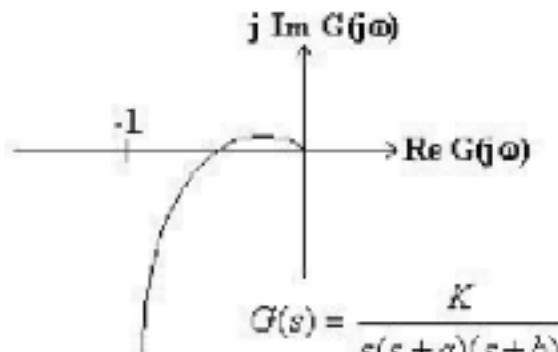
$$MF = 180^\circ + \angle G(j\omega_g), \text{ graus}$$

onde ω_g é a frequência onde $|G(j\omega_g)| = 1$

7.1 Estabilidade relativa no gráfico polar

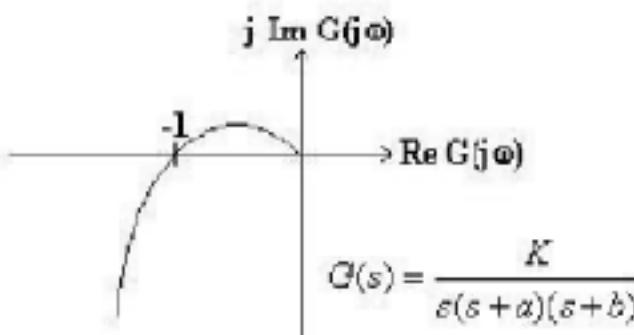
MG > 0

MF > 0



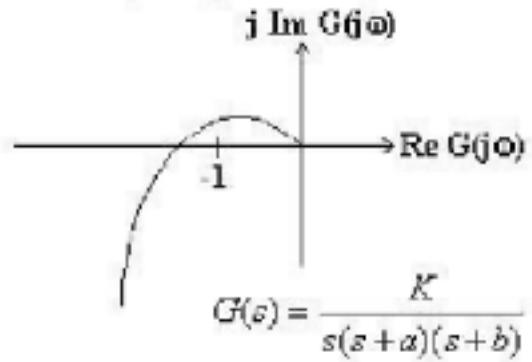
MG = 0

MF = 0



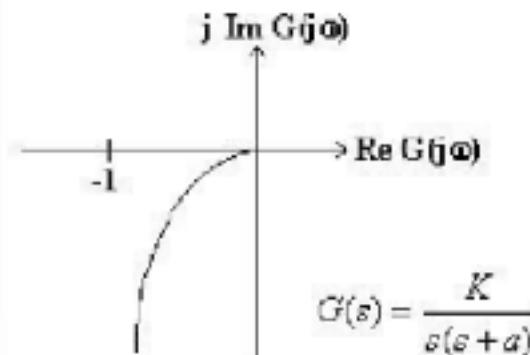
MG < 0 (deve-se retirar ganho para o sistema ficar estável)

MF < 0 (idem para a fase)

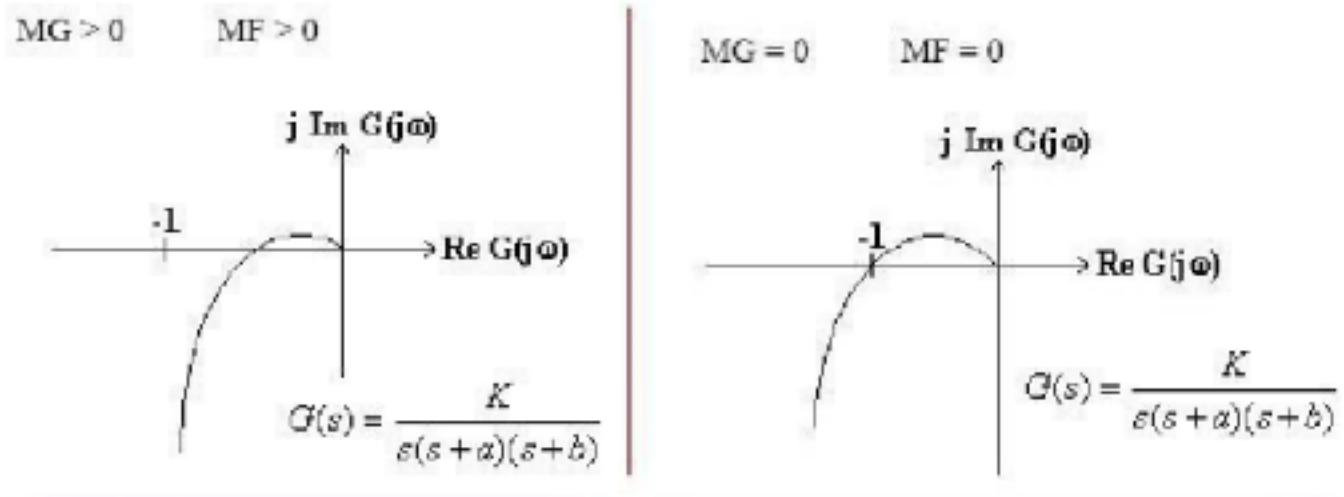


MG = ∞ (o aumento do ganho não instabiliza o sistema)

MF > 0 Aumentar o ganho reduz MF



7.1 Estabilidade relativa no gráfico polar

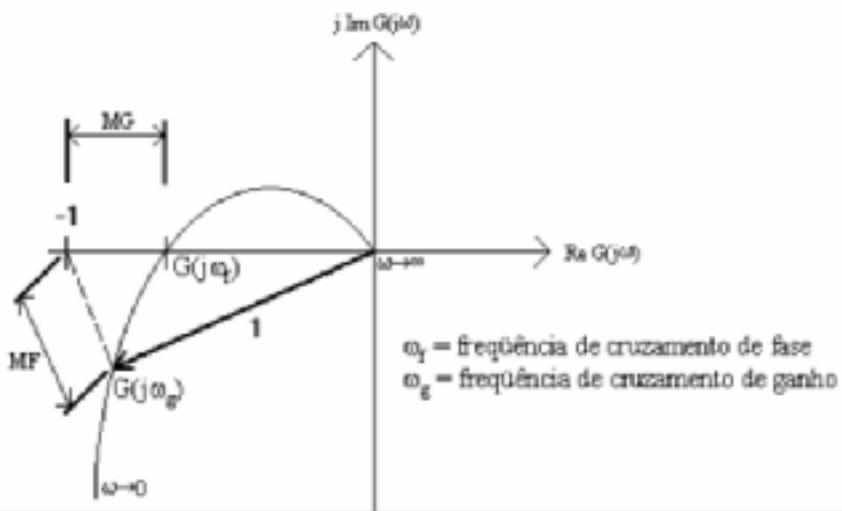


Por serem gráficos esboçados, os gráficos polares não são adequados para medir a margem de ganho e de fase.

Os gráficos de Bode permitem obter estas informações com boa aproximação, e serão agora utilizados.

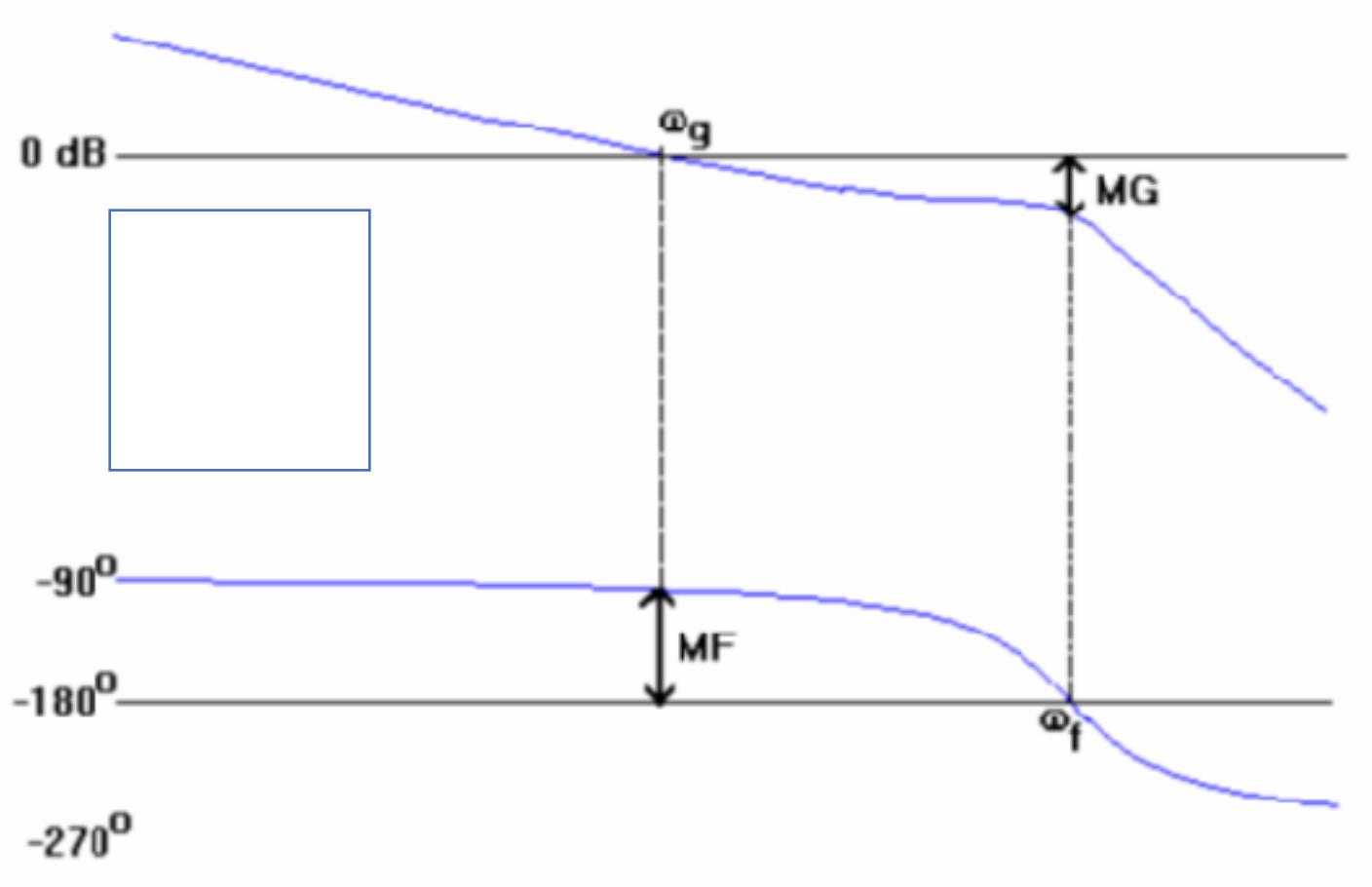
7.2 Estabilidade relativa no gráfico de Bode

$$G(s) = \frac{\kappa}{s(s+1)(s+10)}$$



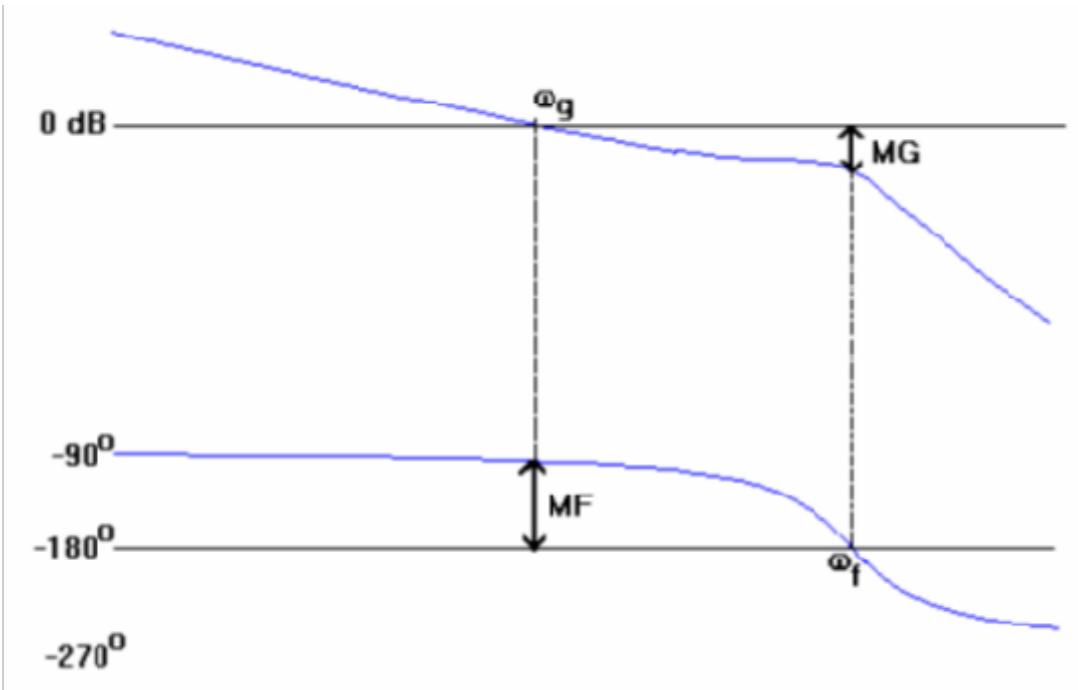
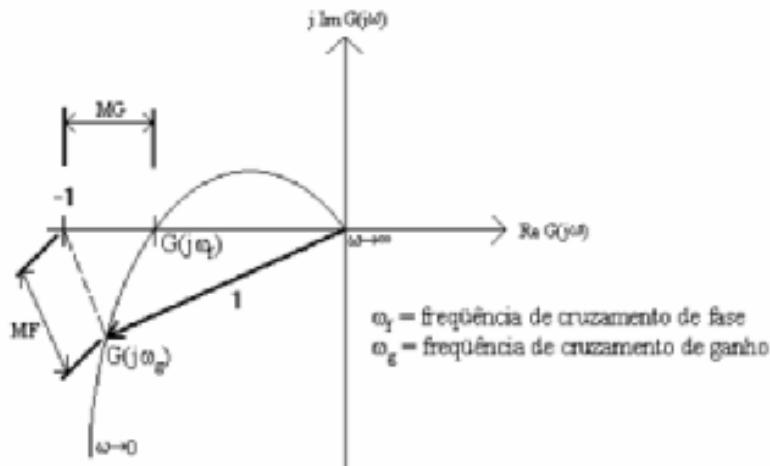
$$MG = 20 \log_{10}(1) - 20 \log_{10} |G(j\omega_f)|$$

$$MG = -20 \log_{10} |G(j\omega_f)|$$



7.2 Estabilidade relativa no gráfico de Bode

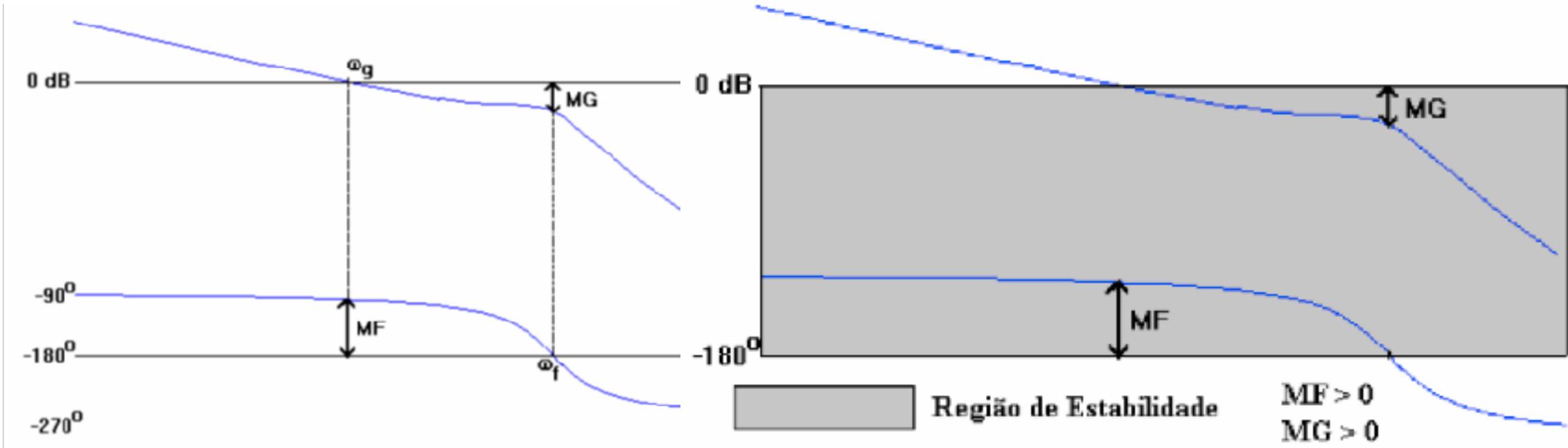
$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 10)}$$



- ponto -1 corresponde, no diagrama de Bode, ao ponto $(0 \text{ dB}, -180^\circ)$.
- A curva de $G(j\omega_f)$ estar entre 0 e 1 no gráfico polar equivale à curva de módulo de $G(j\omega)$ estar abaixo de 0 dB em ω_f .
- A MF ser positiva no diagrama de Bode equivale ao ângulo de $G(j\omega_g)$ estar acima da reta de -180° .

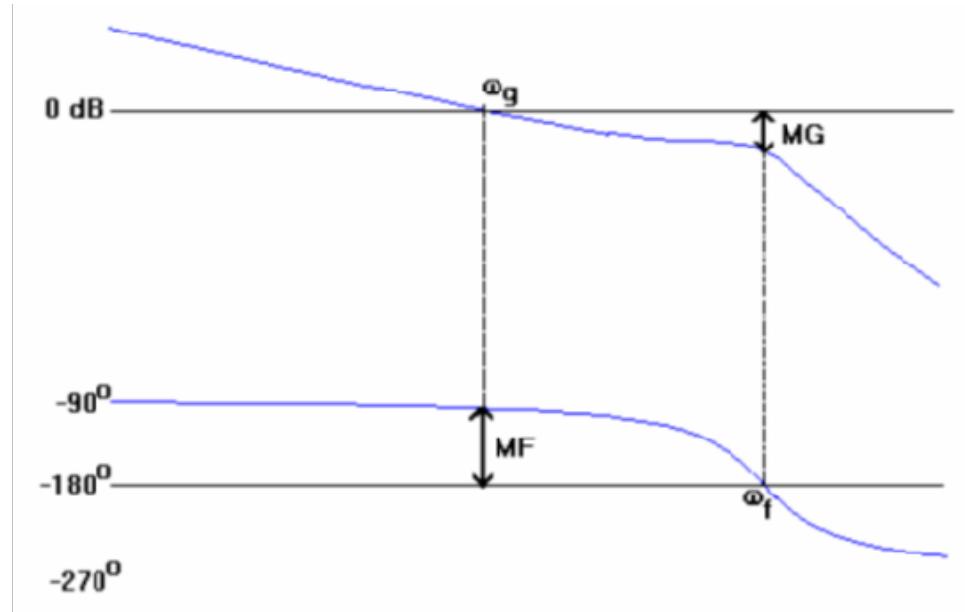
7.2 Estabilidade relativa no gráfico de Bode

$$G(s) = \frac{\kappa}{s(s+1)(s+10)}$$



7.2 Estabilidade relativa no gráfico de Bode

$$G(s) = \frac{\kappa}{s(s+1)(s+10)}$$



Observem que:

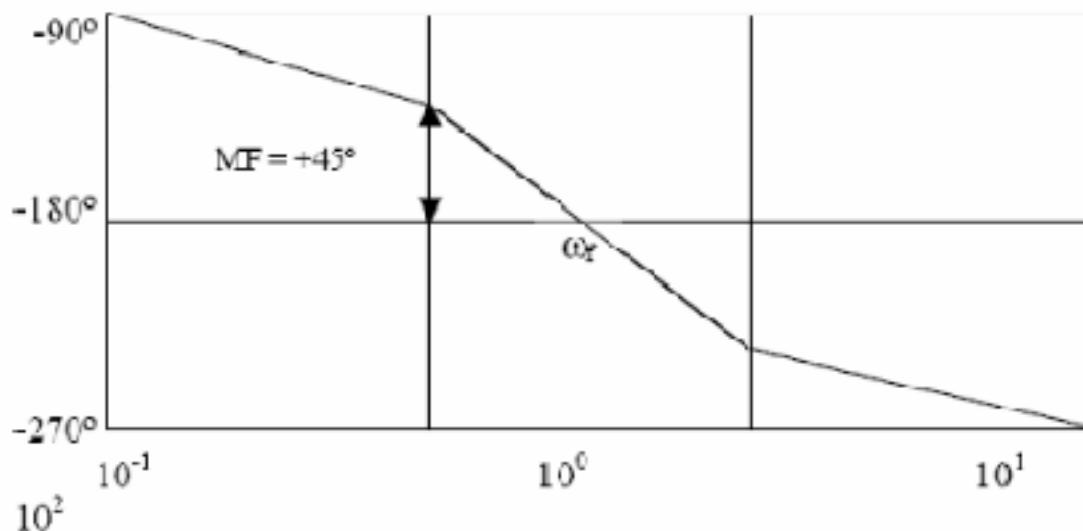
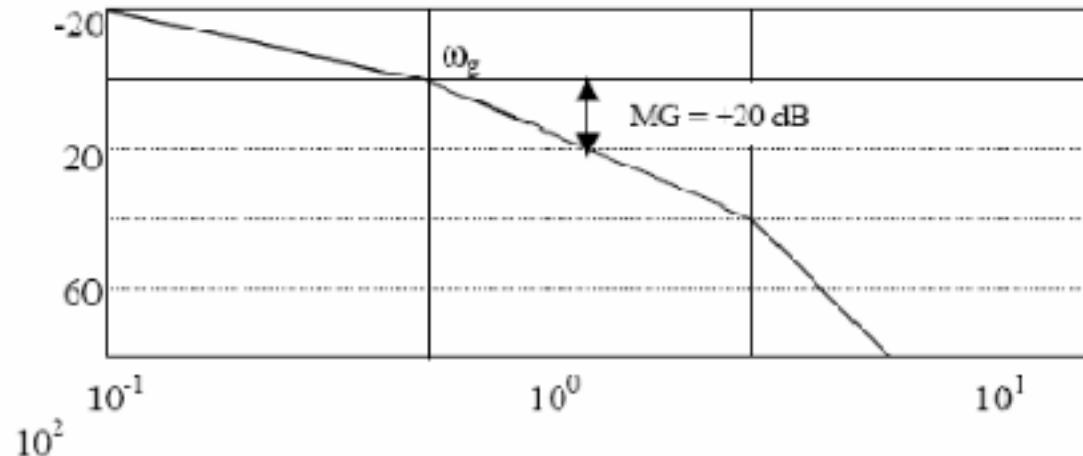
A Margem de Ganho é obtida verificando a freqüência na qual a fase cruza o eixo de 180 graus

A Margem de Fase é obtida verificando a freqüência na qual o módulo cruza o eixo de 0 dB.

Entretanto, esta conclusão depende de uma análise prévia baseada no Critério de Nyquist.

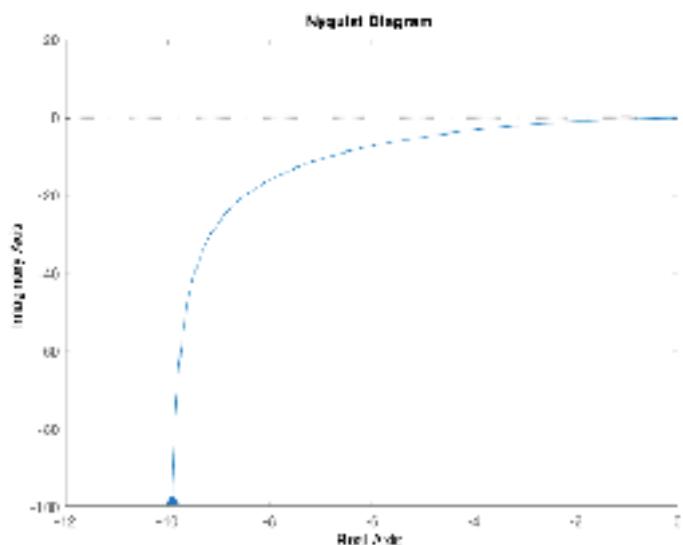
Não é possível analisar a estabilidade relativa sem saber antes se o sistema é estável (usando Nyquist)

7.2 Estabilidade relativa no gráfico de Bode

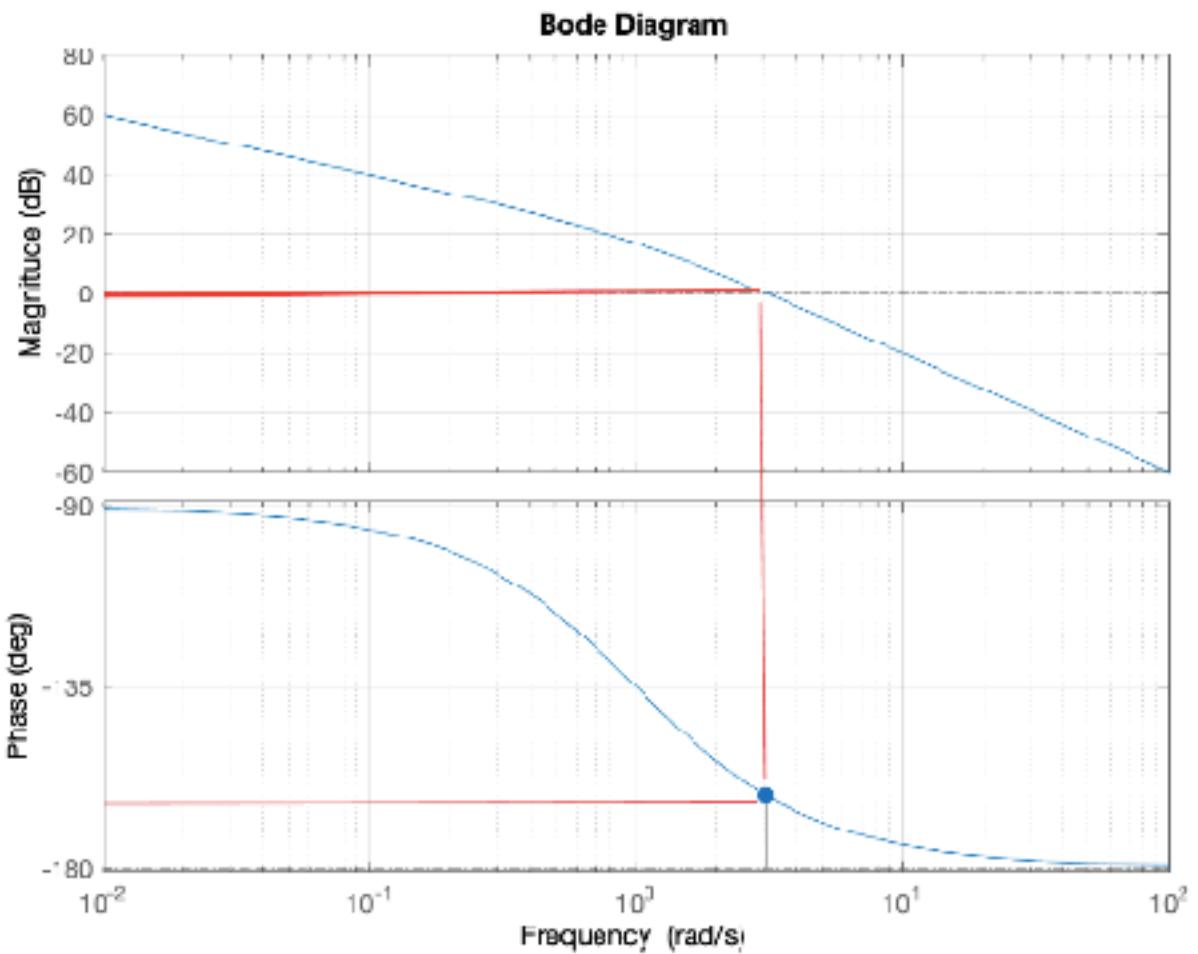


7.2 Estabilidade relativa no gráfico de Bode

Exemplo 1: $G(s) = \frac{10}{s(s + 1)}$



- MF é facilmente obtida, sendo aproximadamente igual a 20 graus.
- MG é infinita, pois o ganho pode ser aumentado indefinidamente sem que o sistema fique instável. Esta última análise vem do critério, e não do Gráfico de Bode.



7.2 Estabilidade relativa no gráfico de Bode

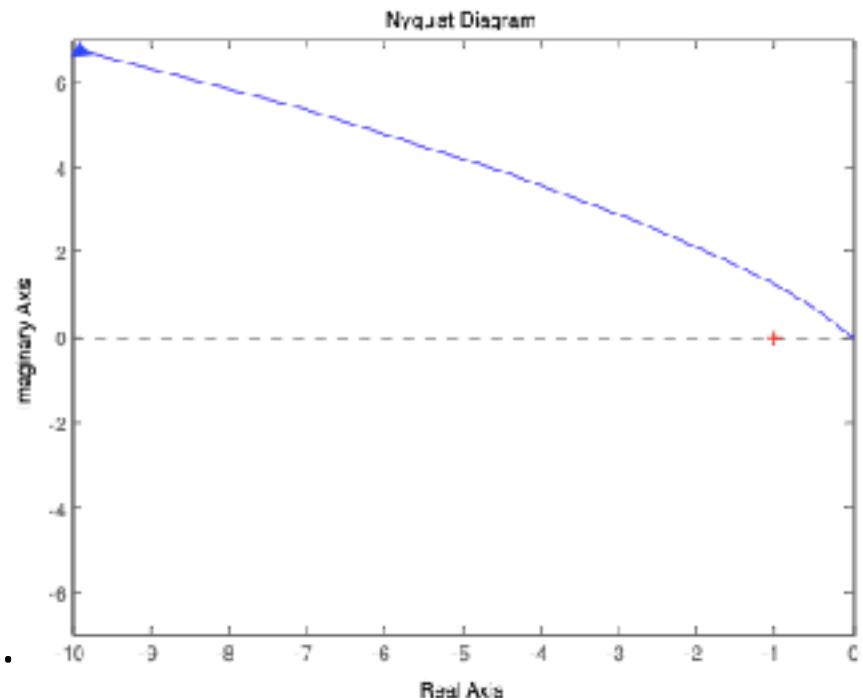
Exemplo 2 $G(s) = \frac{s + 10}{s^2(s + 1)}$

1. Pelo critério de Nyquist, temos que $P_w=2$, $P_d=0$ e este sistema será estável para

$$\phi = \left(0 - \frac{2}{2} - 0\right) 180^\circ = -180^\circ$$

Percebe-se claramente pelo gráfico polar que o ângulo $\phi = 180^\circ$, não fazendo sentido buscar a informação de MG no gráfico de Bode, pois o sistema é instável para qualquer ganho.

Um avanço de fase tornaria o sistema estável.
Logo, tem-se Margem de Fase negativa!



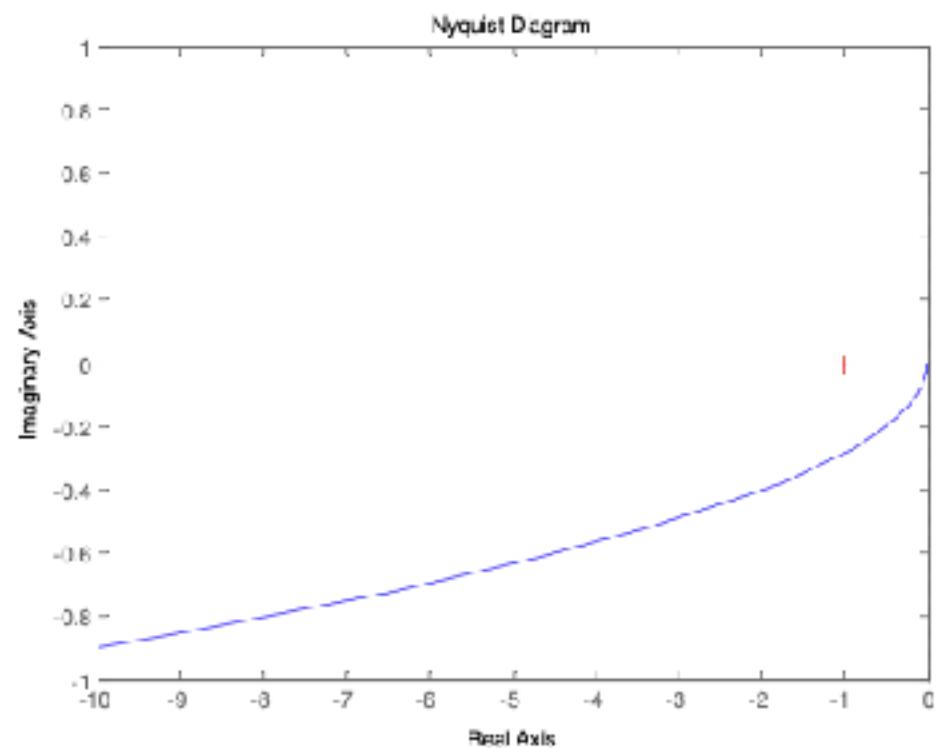
7.2 Estabilidade relativa no gráfico de Bode

Exemplo 3 $G(s) = \frac{s + 1}{s^2(s + 10)}$

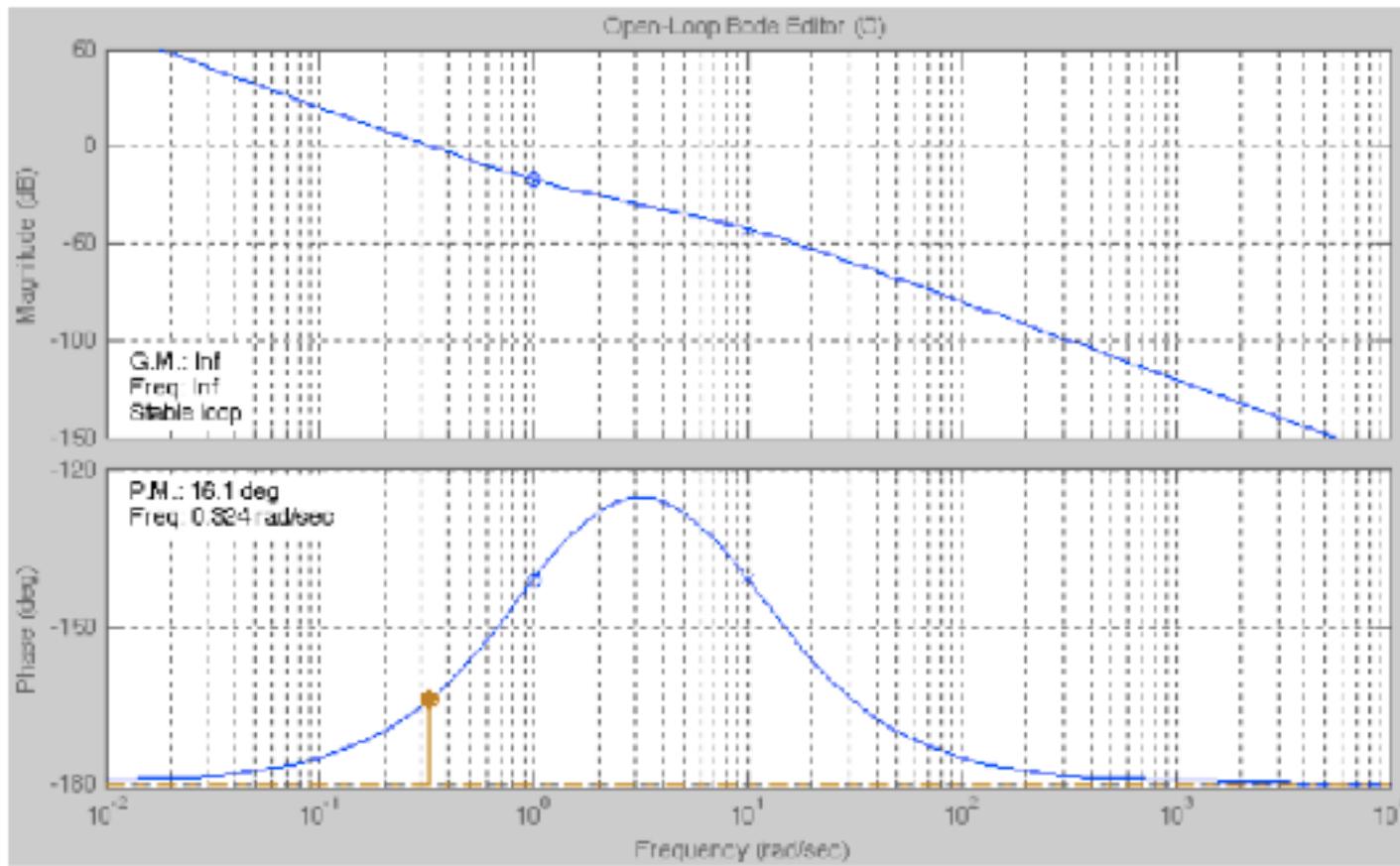
Pelo critério de Nyquist, temos que $P_w=2$, $P_d=0$ e este sistema será estável para

$$\varphi = \left(0 - \frac{2}{2} - 0\right) 180^\circ = -180^\circ$$

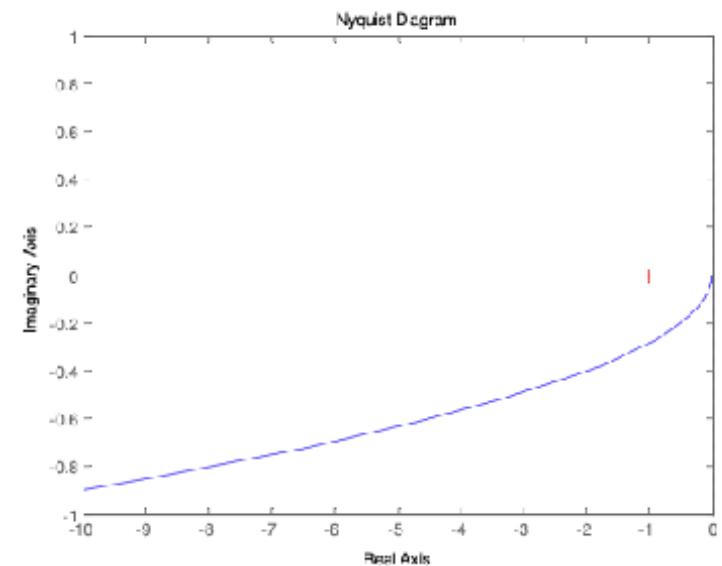
Neste caso pelo gráfico polar tem-se que $\phi = -180^\circ$, indicando que o sistema é estável. Para qualquer valor de K o sistema será estável, indicando que a margem de ganho é infinita. Entretanto, a margem de fase é finita.



7.2 Estabilidade relativa no gráfico de Bode



$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2(s + 10)}$$

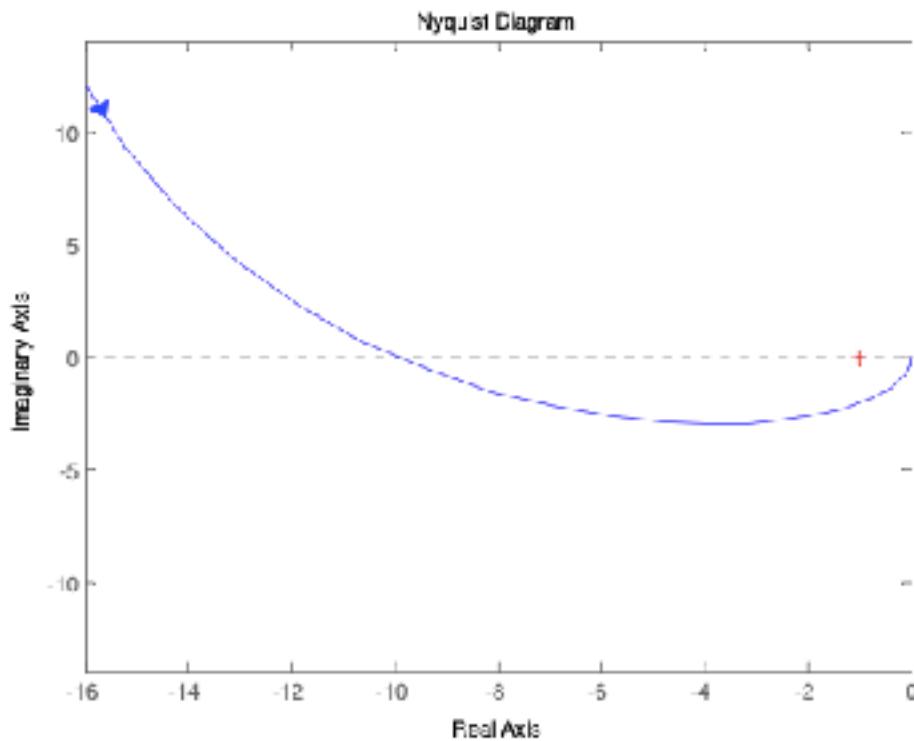


7.2 Estabilidade relativa no gráfico de Bode

Exemplo 4 $G(s) = \frac{10(s + 1)}{s(s - 1)}$

Pelo critério de Nyquist, temos que $P_w=1$, $P_d=1$ e este sistema será estável para

$$\varphi = \left(0 - \frac{1}{2} - 1\right) 180^\circ = -270^\circ$$

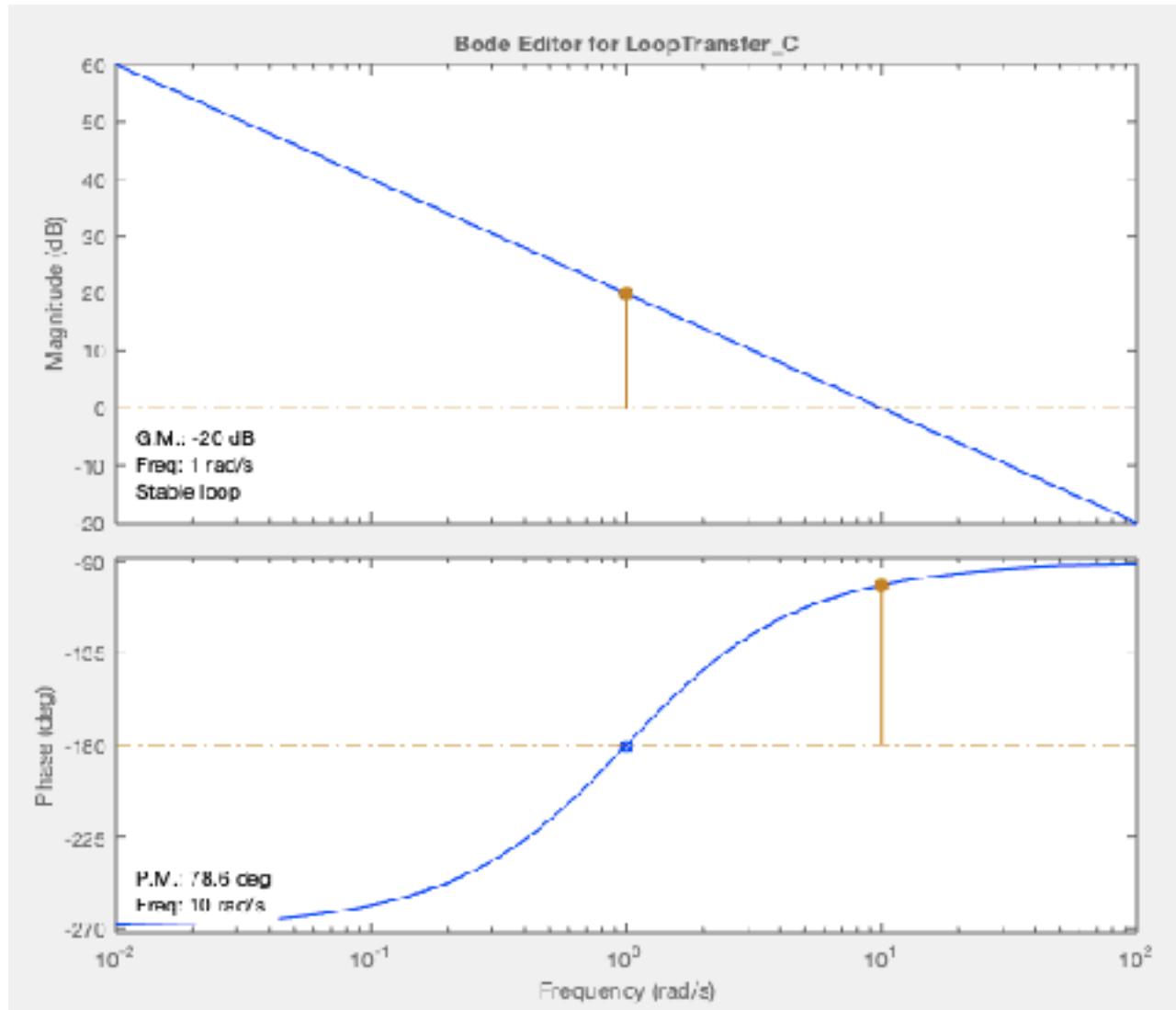


O gráfico polar mostra que a condição de ângulo é satisfeita e o sistema é estável.

A margem de fase é claramente definida.

A definição de margem de ganho não se aplica neste caso, pois o ganho deve ser aumentado para que o sistema fique estável.

7.2 Estabilidade relativa no gráfico de Bode

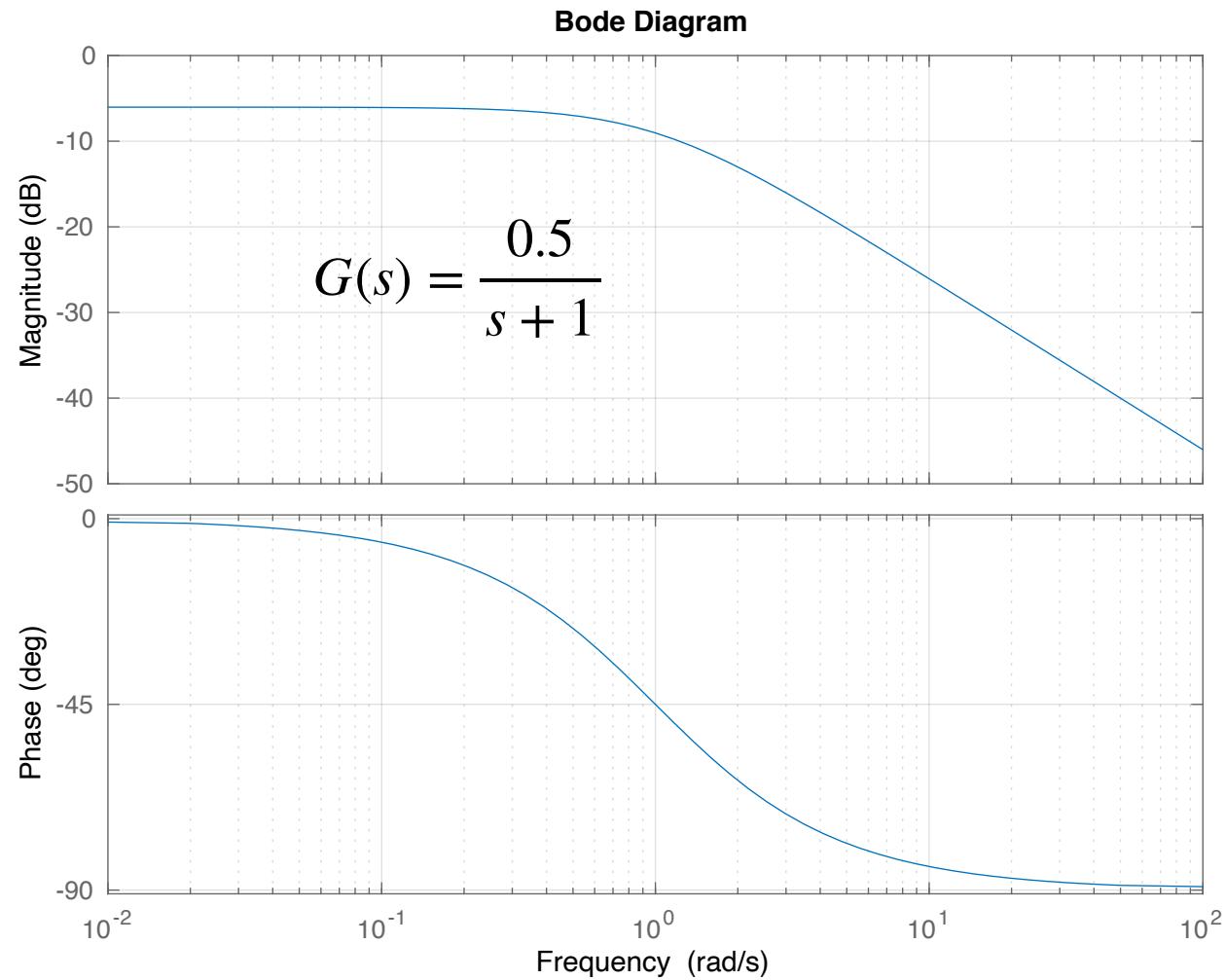


Análise correta da margem de fase.

Análise incorreta da margem de ganho

Esse exemplo confirma que a análise de estabilidade de Nyquist deve sempre preceder a análise de estabilidade relativa para a obtenção da Margem de Ganho e de Fase, para evitar erros de interpretação do Gráfico de Bode.

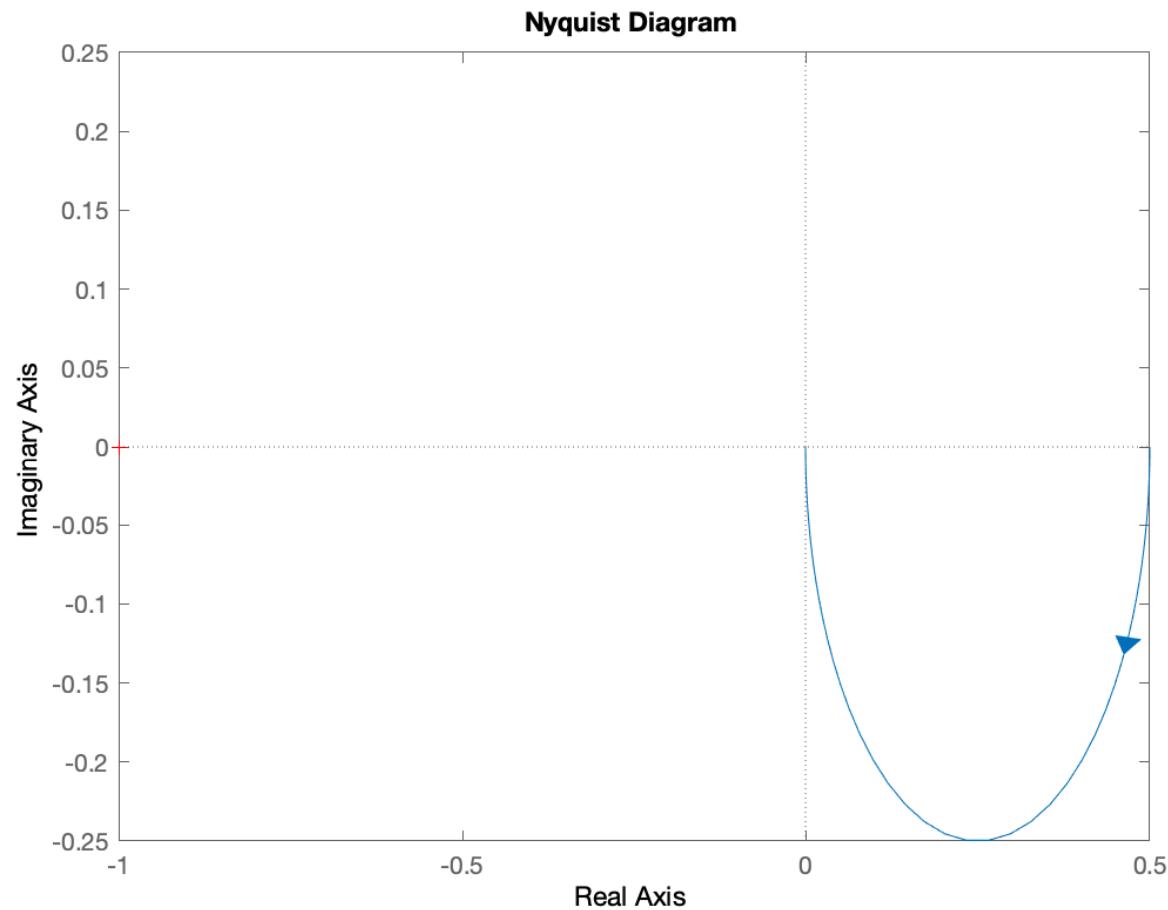
7.2 Estabilidade relativa no gráfico de Bode



Como avaliar as margens de fase e ganho neste caso?

Observe que o gráfico de módulo não cruza por 0dB e o gráfico de fase não cruza por 180 graus.

7.2 Estabilidade relativa no gráfico de Bode



Com $P_w=0$ e $P_d=0$, tem-se que para estabilidade $\phi = 0^\circ$.

Logo, o sistema é estável para qualquer ganho maior que zero e $MG = \infty$.

Como o módulo máximo de G é 0.5, ao rotacionar o gráfico de Nyquist ele não cruza sobre o ponto -1. Portanto, tem-se que $\phi = 0^\circ$ para qualquer atraso, e neste caso, $MF = \infty$.

7.2 Estabilidade relativa no gráfico de Bode

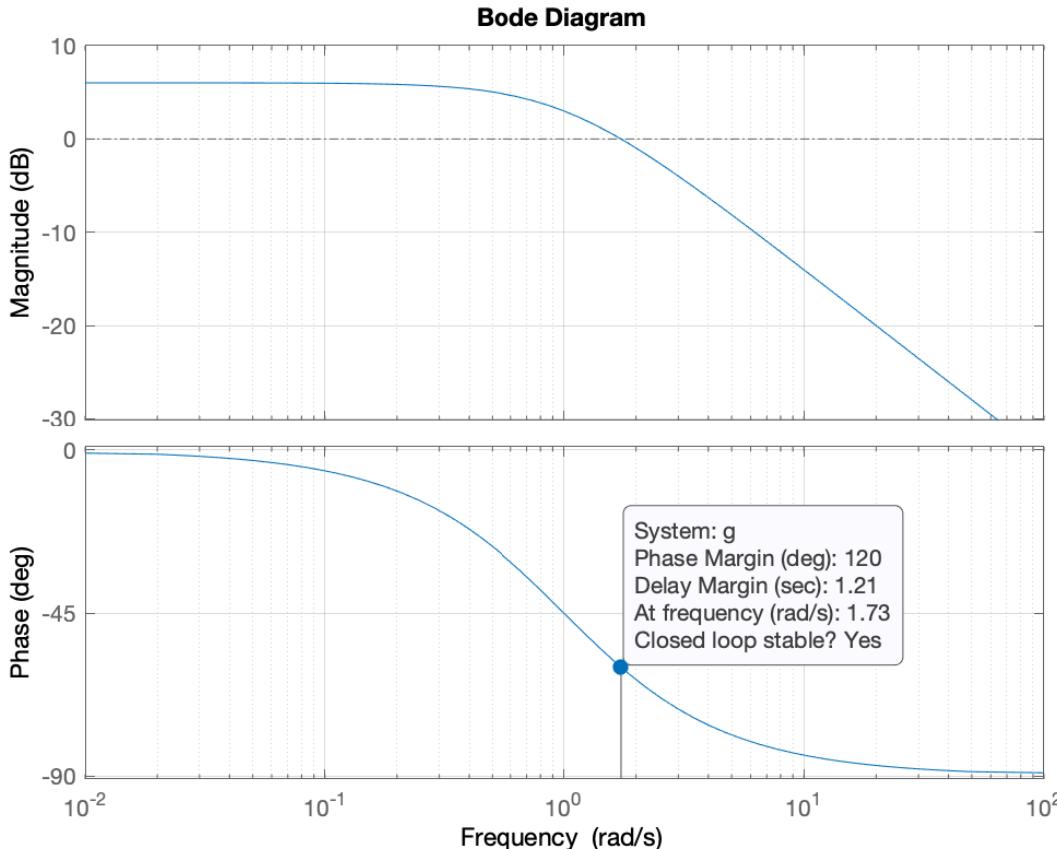
Portanto, neste caso as margens de fase e ganho foram definidas usando o critério e o gráfico de Nyquist, não sendo obtidas do gráfico de Bode.

Entretanto, veja abaixo o gráfico de Bode ao se aumentar o ganho, por exemplo,

$$G(s) = \frac{2}{s + 1}$$

A margem de fase agora é obtida da forma usual no gráfico de Bode.

A margem de ganho é infinita.



8. Efeito do atraso de tempo na estabilidade relativa

Considere as FTs:

$$G_1(s) = \frac{5}{s + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{5e^{-0.5s}}{s + 1}$$

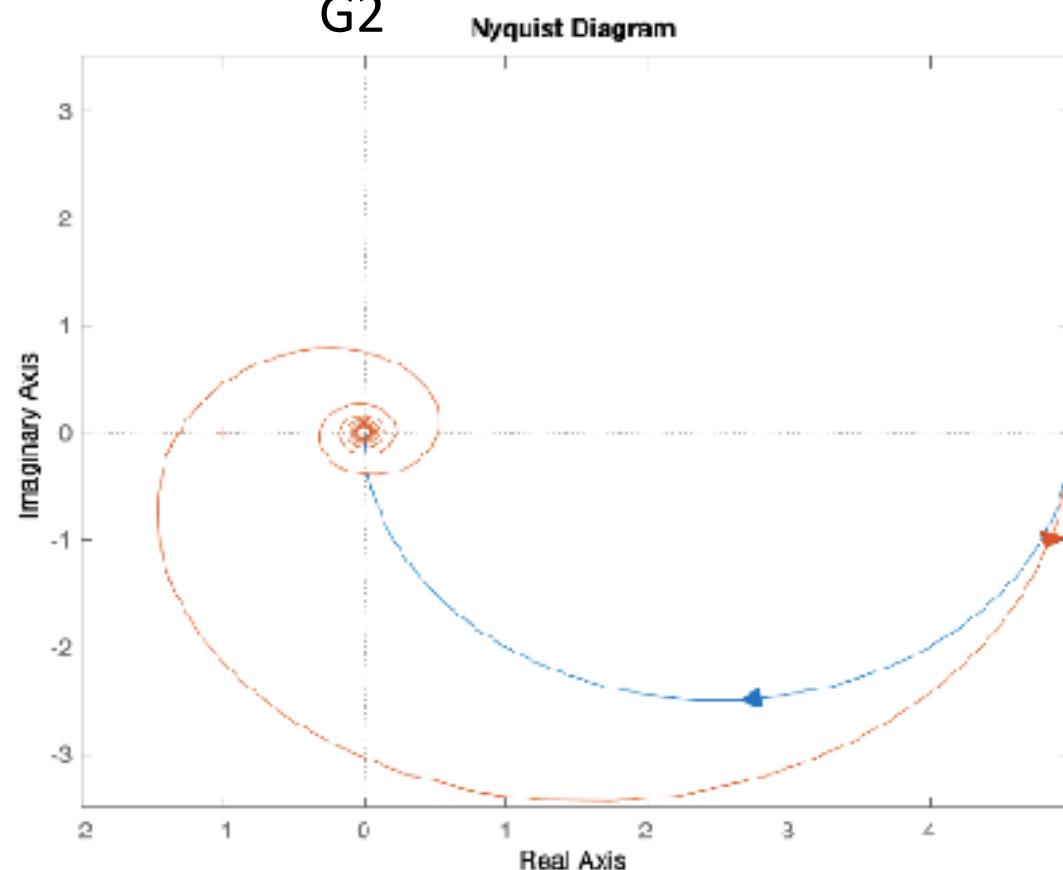
Para estabilidade, o ângulo destas FTs em torno do ponto $-1+j0$ deve ser $\phi = 0^\circ$.

O ângulo de G_1 é zero, mas de G_2 é $+270^\circ$.

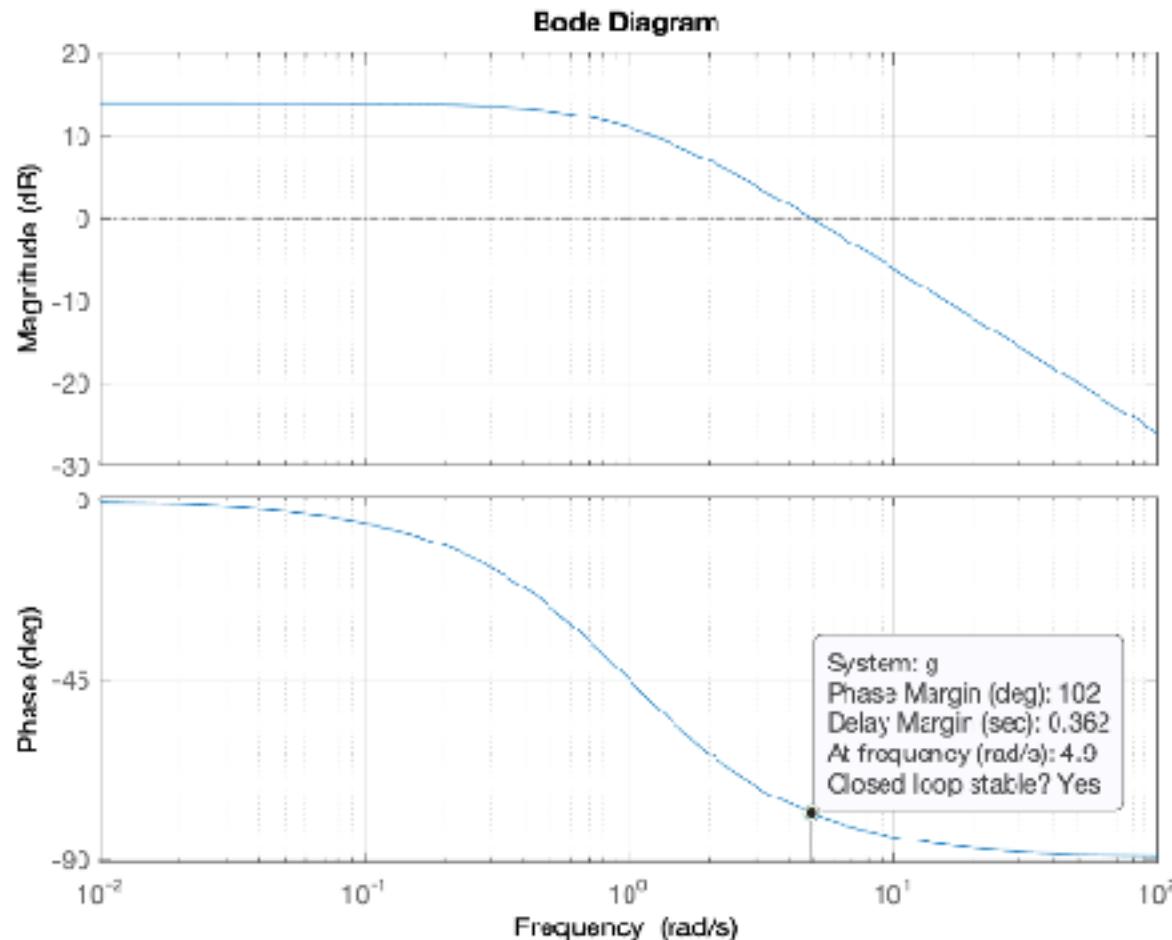
Portanto, o atraso de $0.5s$ instabiliza esta FT.

Gráficos polares de G_1 e

G_2



8. Efeito do atraso de tempo na estabilidade relativa



O gráfico de Bode permite obter o limite do atraso para estabilidade. No caso ao lado, para $G_1(s)$, tem-se $MF=102^\circ$, que ocorre na frequência 4.9rad/s .

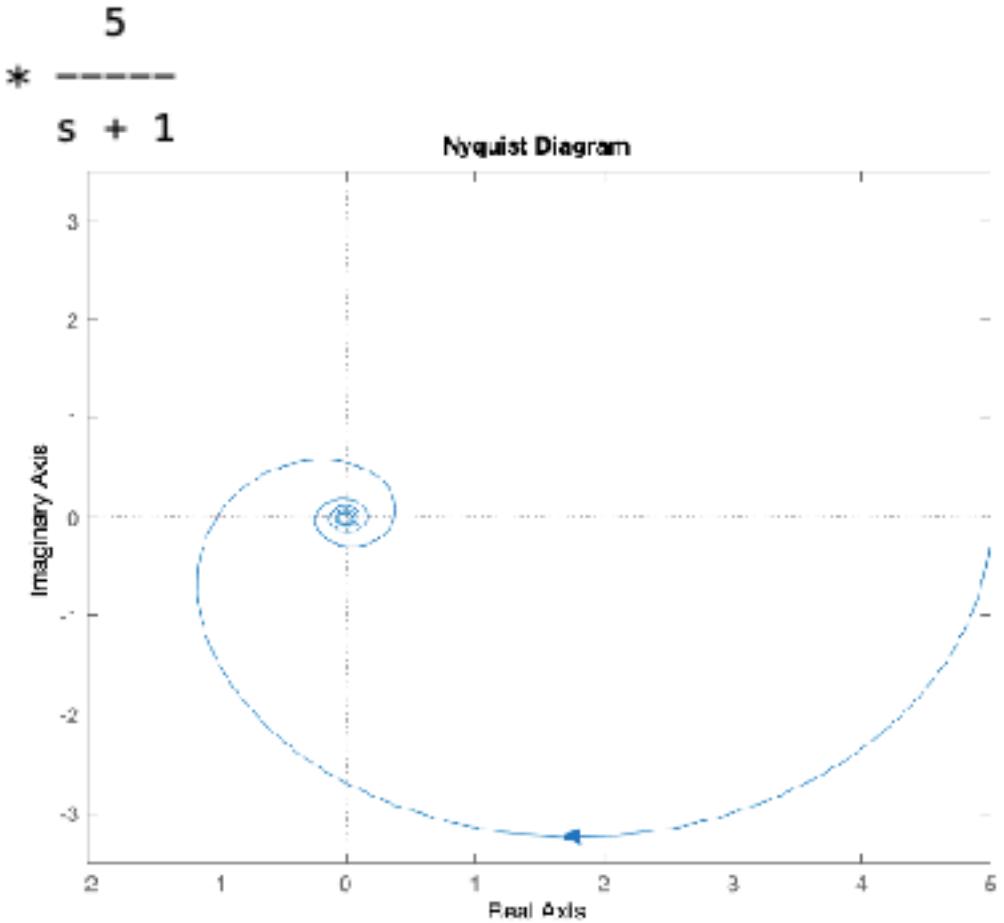
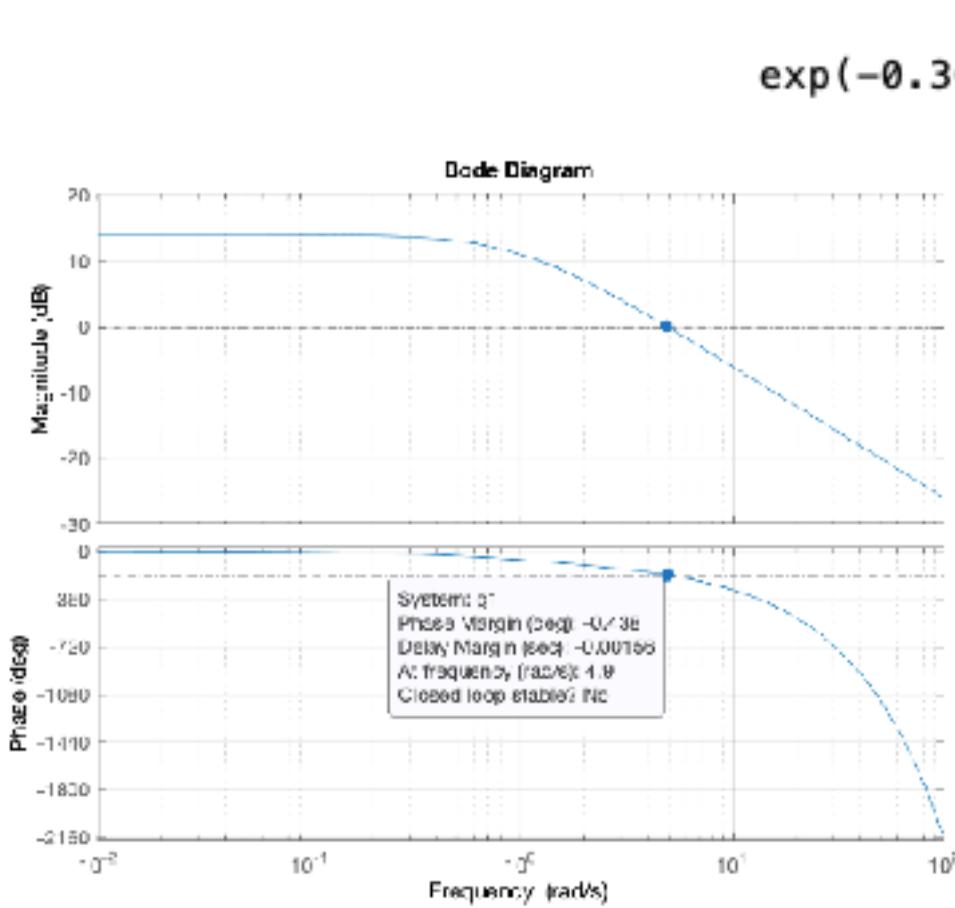
O atraso de fase introduzido pelo atraso de tempo d é dado por $-dw$, em radianos. Portanto, o máximo atraso d é dado por

$$\frac{d\omega_{180}}{\pi} \leq MF$$

$$d \leq \frac{\pi MF}{180\omega}$$

8. Efeito do atraso de tempo na estabilidade relativa

$g1 =$



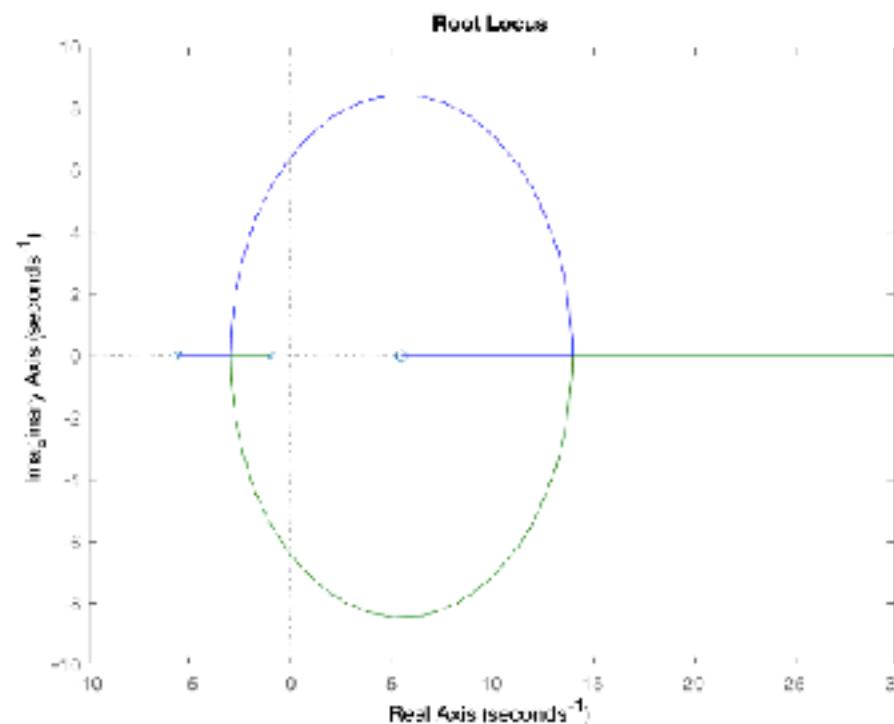
O Matlab desenha o gráfico de Bode de FTs com atraso, sem a necessidade de aproximações.

8. Efeito do atraso de tempo na estabilidade relativa

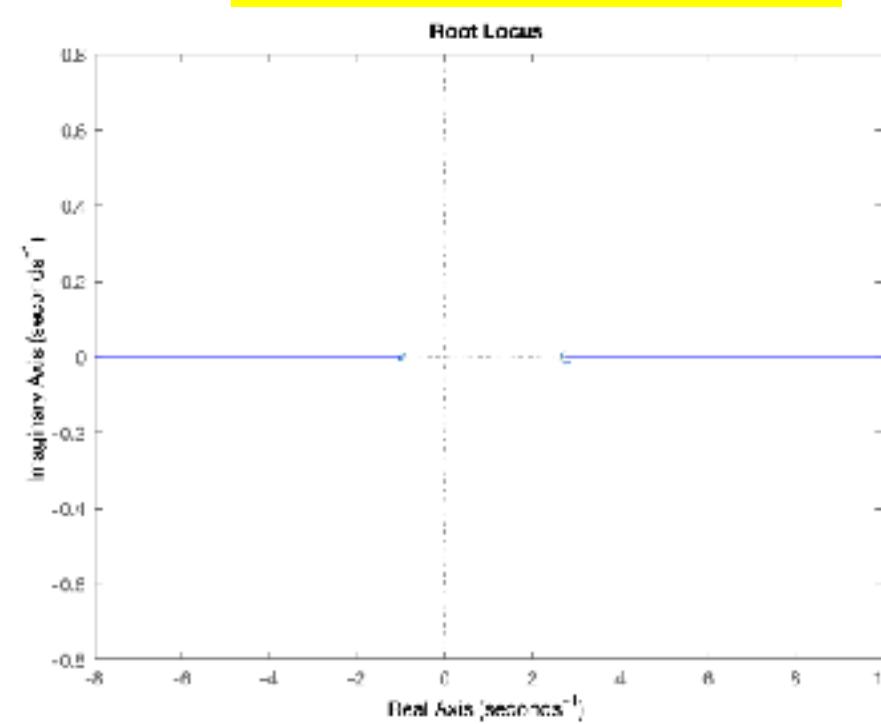
A análise do efeito do atraso no lugar das raízes requer o uso de alguma aproximação do atraso para obter os polos de malha fechada.

$$G_2(s) = \frac{Ke^{-0.36s}}{s + 1}$$

K pequeno o sistema é estável



Aproximação de Pade de ordem
1



Aproximação por Taylor

Resumo sobre estabilidade relativa

A análise da estabilidade relativa deve ser precedida da análise da estabilidade absoluta.

O critério de Nyquist e o gráfico correspondente permitem verificar se o sistema é estável ou instável, e se as margens de fase e ganho podem quantificadas.

O gráfico de Bode é utilizado para quantificar as margens de fase e ganho, quando forem mensuráveis.

As definições de margem de fase e ganho devem sempre ser utilizadas. Quando não forem aplicáveis, informa-se as condições para estabilidade em termos de aumento/redução de ganho ou atraso/avanço de fase.