

Aula passada Equações autônomas

Aula Hoje Eq de 2ª ordem Tipo especiais

Algumas equações de segunda ordem especiais pag 72 exercícios.

↳ usa técnicas de 1ª ordem

$$y'' = f(t, y, y')$$

↳ vamos fazer uma substituição para reduzir a ordem e resolver com o método que já aprendemos

Caso 1 Falta a variável dependente

$$y'' = f(t, y')$$

→ sem y

Método: faça $v = y'$ então $v' = y''$
substituindo $v' = f(t, v)$ equação de 1ª ordem

Exemplo Resolva $ty'' = y'$

Solução: é do tipo anterior $v = y' \Rightarrow v' = y''$

Substituindo $t \cdot v' = v$ separável

$$t \frac{dv}{dt} = v \Rightarrow \int \frac{1}{v} \cdot dv = \int \frac{1}{t} dt$$

$$\Rightarrow \ln v = \ln t + C$$

$$v = e^{\ln t + C} = t \cdot e^C = Kt$$

voltando

$$y' = Kt \Rightarrow y(t) = \frac{Kt^2}{2} + K_2 \quad \text{solução geral}$$

Exemplo Resolva $t^2 y'' + 2ty' - 1 = 0 \quad t > 0$

Solução: faça $v = y' \Rightarrow v' = y''$ substituindo

$$t^2 v' + 2tv - 1 = 0 \quad \text{linear}$$

$$v' + \frac{2}{t}v = \frac{1}{t^2}$$

Fator integrante: $\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2 \ln t} = t^2$

Multiplicando

$$\int \frac{d}{dt} t^2 v = \int \frac{1}{t} dt \Rightarrow t^2 v = t + C$$

$$v(t) = \frac{1}{t} + \frac{C}{t^2}$$

voltando

$$y' = \frac{1}{t} + \frac{C}{t^2}$$

$$y(t) = \ln t - \frac{C}{t} + K_1 \quad \text{solução geral}$$

Caso 2

Faltando a variável independente

$$y'' = f(y, y') \rightarrow \text{sem } t$$

Método: faça $v(y) = y'$ então

separa cada coisa

$$\frac{dv}{dy} y' = y'' \Rightarrow \frac{dv}{dy} \cdot v = y''$$

Substituindo

$$\frac{dv}{dy} \cdot v = f(y, v)$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{f(y, v)}{v}$$

equação de 1ª ordem em v e y

Exemplo Resolva $yy'' + (y')^2 = 0$

Solução

Não aparece t : faça $y' = v(y)$

derivando $y'' = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot y' = \frac{dv}{dy} \cdot v(y)$

Substituindo

$$y \cdot \frac{dv}{dy} \cdot v + v^2 = 0 \quad \text{separável}$$

temos que achar uma expressão para $v(y)$

$$y \cdot v \frac{dv}{dy} = -v^2 \Rightarrow \int \frac{-1}{v} \cdot dv = \int \frac{1}{y} \cdot dy$$

$$-\ln v = \ln y + C$$

$$e^{-\ln v} = e^{\ln y + C}$$

$$e^{\ln \frac{1}{v}} = e^C \cdot y = Ky$$

$$\frac{1}{v} = Ky \Rightarrow v(y) = \frac{1}{Ky}$$

voltando $v(y) = y' = \frac{1}{Ky}$ outra EDO

acha a $y(t)$: é separável novamente

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{Ky}$$

$$\Rightarrow \int y \cdot dy = \int K \cdot dt$$

$$\frac{y^2}{2} = Kt + K_2$$

$$y(t) = \sqrt{2Kt + K_2} \quad \text{solução}$$