

Capítulo 1: Introdução

Exemplo 1 (Problema estático)

Modelagem para "estimativa da tarifa" para o Uber considerando

custo fixo = 6,00 reais

preço base = 1,50 reais/Km rodado

Considere: $x :=$ Km rodado

$T(x) :=$ tarifa estimada

MODELO QUE REPRESENTA O EVENTO

$$y := T(x) = 6 + 3/2 x$$

$$y = 6 + 3x \quad \text{equação algébrica}$$

- * é uma equação estática, isto é, as quantidades não variam como tempo
- * estudamos esse tipo de equações em cálculo 1

Queremos estudar equações que as quantidades variam como tempo

quantidades que variam como tempo

significa

derivada

Então, queremos estudar equações que envolvem funções e suas derivadas

Exemplo 2 (Crescimento populacional de Maltus para microorganismo)

Seja

$P(t) =$ quantidade de indivíduos da população de uma espécie no instante t .

Por observação: a taxa de variação da população (natalidade - mortalidade) é proporcional a quantidade de indivíduos

MODELAGEM

taxa de variação

$$P'(t) = K P(t)$$

constante de proporcionalidade

Equação diferencial ordinária

(equação que envolve $P(t)$ e sua derivada $P'(t)$)

Objetivo: Resolver a equação: determinar uma função $P(t)$ que satisfaz a equação

Resolver a equação $P' = KP$ de modo empírico

P: Que função a derivada é um múltiplo da função?

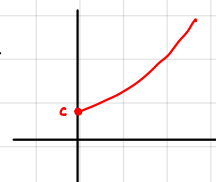
$$R: P(t) = C e^{Kt}$$

Note que $P'(t) = C \cdot K e^{Kt} = K(C e^{Kt}) = K P(t)$, isto é a função satisfaz a equação

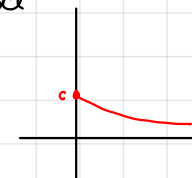
Interpretando

$P(0) = C$ população inicial da espécie

Se $K > 0$ então $P(t) = C e^{Kt}$ cresce



Se $K < 0$ então $P(t) = C e^{Kt}$ decresce (extinção)



Nota 1: Este modelo é bem simples, existem modelos sobre dinâmica de populações mais realísticos

Objetivo do curso:

- * desenvolver métodos matemáticos para achar as soluções desse tipo de equação
- * fazer algumas análises das soluções
- * trabalhar com algumas modelagens simples

Nota 2: Mesmo em equações algébricas são difíceis de resolver, por exemplo

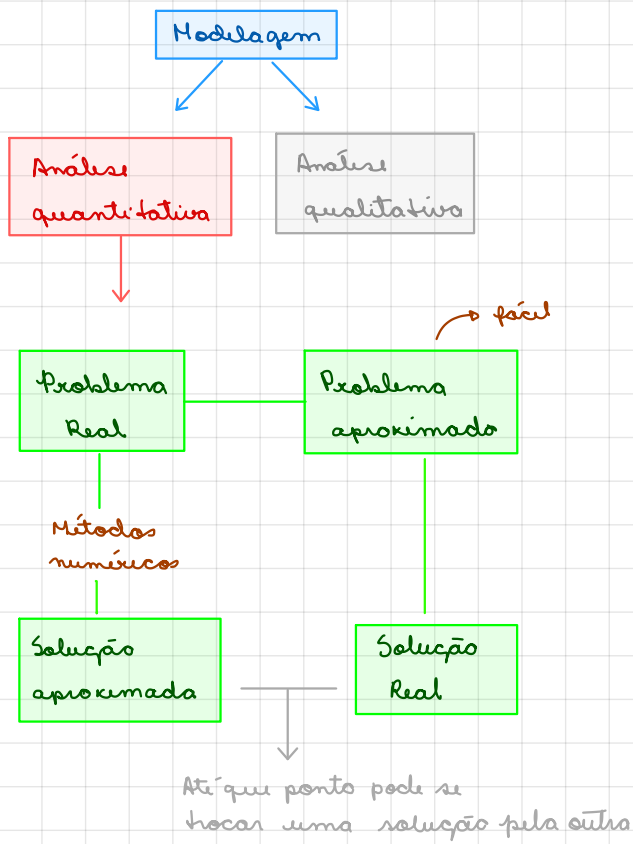
$$x^3 + x^2 + 10 = 0$$

(quais os valores de x satisfazem essa equação?)

Então, imaginem, equações que o objetivo é encontrar Funções que satisfazem a equação.

Nota 3: Soluções modelagem matemática

↳ expressar determinado fenômeno da realidade como objetivo de compreendê-lo para entender ou não em seu processo.



Formalizando

Definição A expressão

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (*)$$

(a n -ésima derivada de uma função igual a um relação envolvendo a variável t , a função e suas derivadas) é dita uma equação diferencial ordinária de ordem n mais derivada envolvida

Exemplo

a) $y' = 3y$

↳ equação de primeiro ordem

b) $y'' + t^2 y' = t^2$

equação de segunda ordem

c) $y''' + [y']^2 = 0$

equação de terceiro ordem

d) $y^{(4)} + y''' + y'' + y' + y = x$ → pode ter outra notação da variável independente
equação de ordem quatro

Vamos começar a estudar as equações de ordem menor (1ª ordem → 2ª ordem)

Definição Uma solução para EDO (*) é uma função $y(t)$:

- definida em um intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$
- n -vezes diferenciável
- que satisfaça (*)

Exemplo: Verifique se cada função é solução da EDO:

a) $y^{(4)} + 4y''' + 3y = t, y_1(t) = t/3, y_2(t) = e^{-t} + t/3$

Solução:

- Derivar e substituir para verificar a igualdade

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= t/3 \\ y_1'(t) &= 1/3 \\ y_1''(t) &= y_1'''(t) = y_1^{(4)}(t) = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &3 \cdot t/3 = t \\ &\text{OK} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} y_2(t) &= e^{-t} + t/3 \\ y_2'(t) &= -e^{-t} + 1/3 \\ y_2''(t) &= e^{-t} \\ y_2'''(t) &= -e^{-t} \\ y_2^{(4)}(t) &= e^{-t} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &e^{-t} + 4(-e^{-t}) + 3 \cdot (e^{-t} + t/3) \\ &= e^{-t} - 4e^{-t} + 3e^{-t} + t = t \\ &= 0 \end{aligned} \quad \text{OK}$$

b) $2t^2 y'' + 3t y' - y = 0, y_1(t) = \frac{1}{t}, y_2(t) = \sqrt{t} \quad t > 0$

$$\begin{aligned} &y_1'(t) = -\frac{1}{t^2}, y_1''(t) = \frac{2}{t^3} \\ &\hookrightarrow 2t^2 \cdot \frac{2}{t^3} + 3t \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{t} \\ &= \frac{4}{t} - \frac{3}{t} - \frac{1}{t} = 0 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow y_2'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}, y_2''(t) = -\frac{1}{4\sqrt{t^3}}$$

$$\begin{aligned} &2t^2 \cdot \left(-\frac{1}{4\sqrt{t^3}}\right) + 3t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{t} + \frac{3}{2} \sqrt{t} - \sqrt{t} = 0 \end{aligned}$$

Definição

A expressão

$$a_n(t)y^{(n)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

é dita **equação linear**

Além disso se $g(t) \equiv 0$, isto é,

$$a_n(t)y^{(n)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

é dita **equação linear homogênea**

Do contrário dizemos que é uma **equação linear não homogênea**.

↳ não envolve potência/raiz/trigonometria em $y, y', \dots, y^{(n)}$

Exemplo

a) $y' + t^2 y = t + 1$ **Linear não homogênea** de 1ª ordem

b) $y' + y^2 = 0$ **Não linear** de 1ª ordem

c) $y' \cdot y = t$ **Não linear** de 1ª ordem

d) $y'' = \sqrt{1 - y'}$ **Não linear** de 2ª ordem

e) $\sqrt{t} y'' + 3y' + ty = \sin t$ **Linear não homogênea** de 2ª ordem

f) $y'' + \frac{1}{t}y = 0$ **Linear homogênea** de 2ª ordem

Definição

A expressão $y^{(n)} = F(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ é dita uma **equação diferencial autônoma** não aparece t

Exemplo

a) $y' + t^2 y = t + 1$ **Não Autônoma** linear de 1ª ordem

b) $y' + y^2 = 0$ **Autônoma** não linear de 2ª ordem

c) $y' = 3y$ **Autônoma** linear de 1ª ordem

d) $y' \cdot y = t$ **Não Autônoma** não linear de 1ª ordem