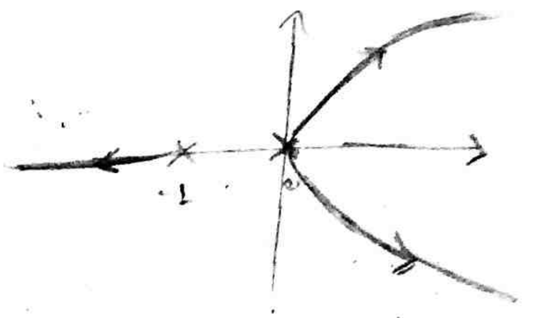
FIG. 2 = QUESTÃO 4



2011/1

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES
Departamento de Engenharia Elétrica

Primeira Prova de Controle Automático II – 14/04/2011

Aluno: José Paulo Vrenna Pertin

3 pts 1 – Sejam os Pólos e Zeros da FTMA de um sistema de controle digital :

$$p_1 = 2j\,,\quad p_2 = -2j\,,\quad z_1 = 1\,,\quad z_2 = 0$$

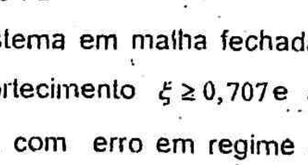
1.1 - . Obter o Lugar das Raízes (LR) da equação característica, especificando o ângulo de saída/chegada dos pólos/zeros complexos de $G_{MA}(s)$, a intercessão com o eixo imaginário, o LR no eixo real, as assíntotas, e o ponto de saída do eixo real.

1.2 – Usando O LR, determine a faixa do ganho proporcional que deixa este sistema : i) Sobreamortecido; ii) Marginalmente estável; iii) Subamortecidol. .

2 pts 2 – **No projeto de controladores PI para sistemas de primeira ordem com $G_{MA}(s) = \dfrac{k}{\tau s + 1}$, não é adequado escolher o zero do PI próximo à origem.** Justifique esta afirmação analisando as vantagens e desvantagens do zero do PI ser longe ao invés de próximo à origem?.

2,5 pts 3 – Considere o sistema de controle com $G_{MA}(s) = \dfrac{s^2 - 2s + 2}{s^2 + 3s + 2}$. É possível projetar um controlador PID para esta planta a fim de que o sistema em malha fechada tenha par de pólos complexos dominantes com amortecimento $\xi \geq 0{,}707$ e a resposta à entrada degrau seja a mais rápida possível, com erro em regime a entrada degrau igual a zero? Justifique a sua resposta..

2,5 pts 4 – A Fig. 2 mostra o LR da FTMA de uma determinada planta. Qual controlador você escolheria (P,PD, PI) para que a resposta ao degrau em malha fechada com controlador seja a mais rápida possível e com o menor sobressinal, e o erro à entrada RAMPA seja nulo? Projetor



CONTROLE AUTOMÁTICO II

JOSÉ PAULO

$G_{MA}(s) = \frac{N(s)}{M(s)}$

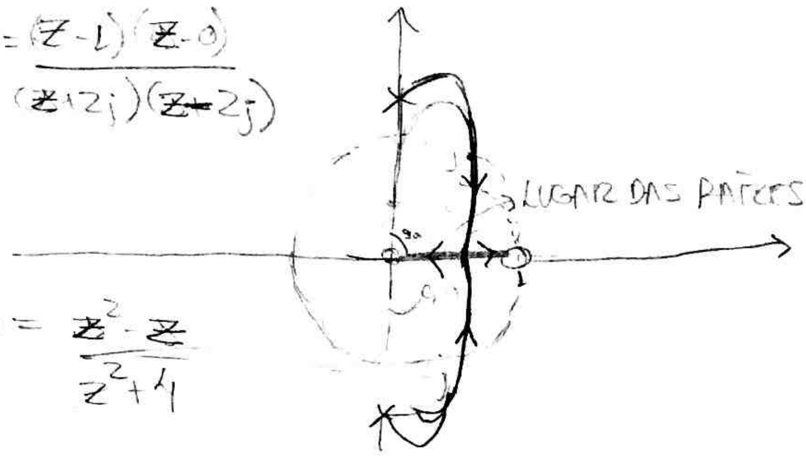
1ª PROVA 2011/1:

1) $P_1 = 2j$, $P_2 = -2j$, $Z_1 = 1$, $Z_2 = 0$

1.1

$$G_{MA}(s) = \frac{(z-1)(z-0)}{(z+2j)(z-2j)}$$

$$G_{MA}(s) = \frac{z^2 - z}{z^2+4}$$



• Nº DE ASSÍNTOTAS: $n - m = 2 - 2 = 0$

• PONTO DE CHEGADA E SAÍDA DO EIXO REAL:

$N'.M - N.M' = 0$

$(2z-1)(z^2+4) - (z^2-z)(2z) = 0$

$2z^3 + 8z - z^2 - 4 - 2z^3 + 2z^2 = 0$

$z^2 + 8z - 4 = 0$

$z = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(1)(-4)}}{2.1}$

$z' = \frac{-8 \pm 8,94}{2}$ $z' = 8,47$ não é LR

$\boxed{z'' = 0,47}$

LR NO EIXO REAL: $\{0,1\}$

COMO O LUGAR DAS RAÍZES ESTÁ NO EIXO REAL: O ÂNGULO DE CHEGADA É 90°.

ÂNGULO DE SAÍDA DOS PÓLOS COMPLEXOS: $\theta_m - \theta_n = \pm 180°$

$P = 2j$

$(\theta + 90) - (90 + 116) = \pm 180°$ $\theta = -116 \pm 180° = 63,43°, -296°$

ÂNGULO DE CHEGADA NO EIXO REAL: 90°

PONTO DE INTERSEÇÃO COM O EIXO $j\omega$: $(z = +2j, z = -2j)$

$1 + K\, G_{MA}(s) = 0$

$1 + K \frac{(z^2 - z)}{z^2+4} = 0$

$z^2 + 4 + K(z^2 - z) = 0$

$(K+1)z^2 - Kz + 4 = 0$

MÉTODO DE ROUTH:

z^2 $(K+1)$ $+4$ $-K = 0$ $\boxed{K = 0}$

z^1 $\boxed{-K \quad 0}$

z^0 $+4$

EQ. CARACTERÍSTICA:

$z^2 + 4 = 0$ $\boxed{z = \pm 2j}$

1.2 i) SOBREAMORTECIDO (QUANDO TOCA O EIXO REAL)

$$K = \left|\frac{1}{G_{MA}(P)}\right|_{P=0,47}$$

$\boxed{K = 15}$

$\boxed{K \geq 15}$

ii) MARGINALMENTE ESTÁVEL (TOCA O CÍRCULO UNITÁRIO)

$$K = \left|\frac{1}{G_{MA}(P)}\right|_{P=0,44+j0,9}$$

$\boxed{K = 3}$

iii) SUBAMORTECIDO

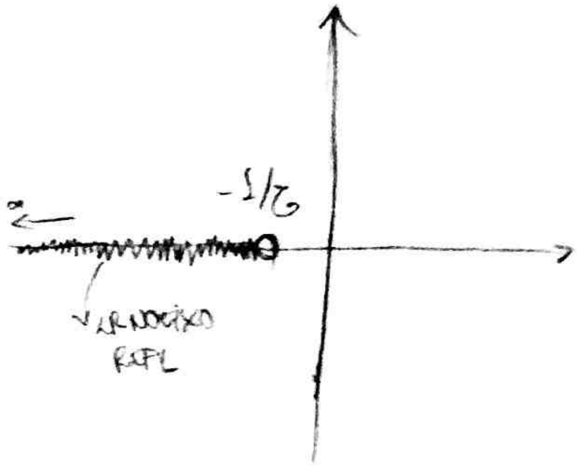
$\boxed{3 \leq K \leq 15}$

(ESTÁVEL SEM TOCAR O EIXO REAL)

2) $G_{MA}(s) = \frac{K}{\tau s+1} = \frac{K}{\tau\left(s+\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{1}{\tau}\cdot\frac{K}{s+\frac{1}{\tau}}$

PARA UM PROJETO PI DESTA PLANTA:

PI: $G_C(s)=\frac{K_P}{s}\cdot\left(s+\frac{K_I}{K_P}\right)$



ESCOLHENDO $\frac{K_I}{K_P} = 0,1\left|-\frac{1}{\tau}\right| = \frac{0,1}{\tau}$

$G_C(s)=\frac{K_P}{s}\left(s+\frac{0,1}{\tau}\right)$

SISTEMA DO TIPO 0: O PI ANULA O ERRO À ENTRADA DEGRAU, LOGO:

$e_{ss}=\lim_{s\to0} s.E(s) = \lim_{s\to0} s R(s).\frac{1}{1+G_{MA}(s)}$, PARA $R(s)=\frac{1}{s} \Rightarrow e_{ss}=0$

$\lim_{s\to0} s.\frac{1}{s}.\frac{1}{1+G'_{MA}(s)} = 0$, $\lim_{s\to0}\frac{1}{1+G'_{MA}(s)}=0$

$G'_{MA}(s) = G_C(s).G_{MA}(s) = \frac{1}{\tau}\frac{K}{(s+1/\tau)}.\frac{K_P}{s}.\left(s+\frac{0,1}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau}.\frac{K}{(s+1/\tau)}\frac{K_P}{s}\frac{(\tau s+0,1)}{\tau}$

$G'_{MA}(s)=\frac{KK_P}{\tau}\frac{(s+0,1/\tau)}{(s+1/\tau).s}$

$\lim_{s\to0} s E(s) = \lim_{s\to0} s\frac{1}{s}\frac{1}{1+G'_{MA}(s)} = \lim_{s\to0} \frac{1}{1+G'_{MA}(s)} = 0$

$\lim_{s\to0} \frac{1}{1+\frac{KK_P(s+0,1/\tau)}{\tau\left(s+\frac{1}{\tau}\right).s}} = \lim_{s\to0} \frac{\tau(s+1/\tau)s}{\tau(s+1/\tau)s+KK_P\left(s+\frac{0,1}{\tau}\right)} = 0$

NÃO SAI

PERGUNTAR AO PROFESSOR SOBRE O ERRO.

VANTAGENS DO ZERO DO PI SER LONGE DA ORIGEM:

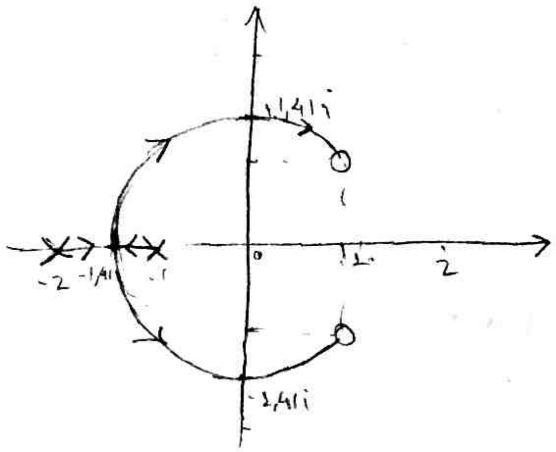
SISTEMA MAIS RÁPIDO

(DESESTABILIZA O SISTEMA)

PROVA 2011/1 - CONTINUAÇÃO: (JP)

③ $G_{MA}(s) = \dfrac{s^2-2s+2}{s^2+3s+2}$

GRÁFICO DO LUGAR DAS RAÍZES:



INTERSEÇÃO COM O EIXO $j\omega$:

$1 + k \cdot G_{MA}(s) = 0$

$1 + k \cdot \dfrac{(s^2-2s+2)}{(s^2+3s+2)} = 0$

$s^2+3s+2 + k(s^2-2s+2) = 0$

$(k+1)s^2 + (3-2k)s + (2+2k) = 0$

UTILIZANDO MÉTODO DE ROUTH; ANULANDO UMA LINHA QUE NÃO SEJA A ÚLTIMA:

$s^2 \quad (k+1) \quad (2+2k)$

$\boxed{s^1 \quad (3-2k) \quad 0} \Rightarrow 3-2k=0$

$s^0 \quad 2+2k$

$\boxed{k=3/2}$

$\boxed{k=1,5}$

VOLTANDO À EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA:

$(1,5+1)s^2 + (3-2\times1,5)s + (2+2\times1,5) = 0$

$2,5s^2 + 0s + 5 = 0$

$2,5s^2+5=0 \quad s^2=-2 \quad \boxed{s=\pm1,41i}$

PROJETAR PID:

- PAR DE PÓLOS COMPLEXOS DOMINANTES

AMORTECIMENTO: $\xi \geq 0,707$

RESPOSTA AO DEGRAU: $e_{ss}=0$

PÓLOS: $s=-1, -2$

ZEROS: $s=1+i, 1-i$

LR NO EIXO REAL: $\{-2, -1\}$

Nº ASSÍNTOTAS: $n-m = 2-2 = 0$

PONTO DE SAÍDA E CHEGADA NO EIXO REAL:

$N'M - N.M' = 0$

$(2s-2)(s^2+3s+2) - (s^2-2s+2)(2s+3) = 0$

$2s^3+6s^2+4s-2s^2-6s-4 - 2s^3 - 3s^2 + 4s^2 + 6s - 4s - 6 = 0$

$5s^2-10=0 \quad s=\pm\sqrt{2} = \pm1,41$

$s=1,41 \rightarrow \notin LR$

$\boxed{s=-1,41}$ É PONTO DE SAÍDA

VAMOS PROJETAR O PID COMEÇANDO DO PI. ELE ATENDERÁ A CONDIÇÃO DE ERRO. FAREMOS O PI PARA UM AMORTECIMENTO: $\xi=0,2$ PARA QUE SISTEMA NÃO FIQUE LENTO.

$$PI: G_c = \frac{k_{PI}}{s}\left(s + \frac{k_I}{k_{PI}}\right)$$

$$\frac{k_I}{k_{PI}} = 0{,}1 \quad |P_1| = 0{,}1\,|-1| = 0{,}1$$

$$\boxed{G_c(s) = \frac{k_{PI}}{s}(s + 0{,}1)}$$

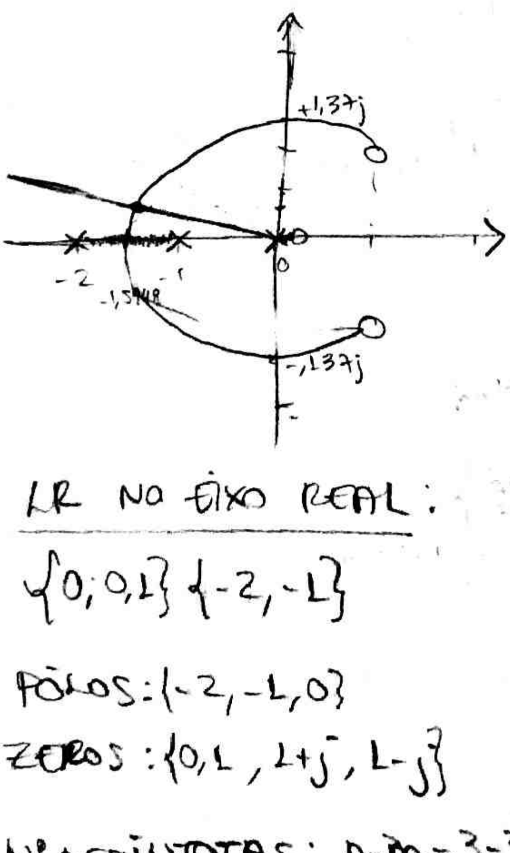
$$G_{MA}'(s) = G_c(s) \cdot G_{MA}(s)$$

$$G_{MA}'(s) = \frac{k_{PI}}{s}(s+0{,}1) \cdot \frac{(s^2-2s+2)}{(s^2+3s+2)}$$

$$1 + G_{MA}'(s) = 0$$

$$1 + k_{PI}\frac{(s+0{,}1)(s^2-2s+2)}{s(s^2+3s+2)} = 0$$

LUGAR DAS RAÍZES:



LR NO EIXO REAL:

$$\{0; 0{,}1\} \; \{-2, -1\}$$

PÓLOS: $\{-2, -1, 0\}$

ZEROS: $\{0{,}1,\ 1+j,\ 1-j\}$

Nº ASSINTOTAS: $n - m = 3 - 3 = 0$

PONTOS DE SAÍDA E CHEGADA NO EIXO REAL:

$$N'M - M'N = 0$$

$$(s^3 - 1{,}9s^2 + 1{,}8s + 0{,}2) = N \qquad s^3 + 3s^2 + 2s = M$$

$$N' = 3s^2 - 3{,}8s + 1{,}8$$

$$M' = 3s^2 + 6s + 2$$

$$N'M - M'N = 0$$

$$N'M = M'N$$

$$\overbrace{(s^3 - 1{,}9s^2 + 1{,}8s + 0{,}2)}^{N}\overbrace{(3s^2 + 6s + 2)}^{M'} =$$

$$(3s^2 - 3{,}8s + 1{,}8)(s^3 + 3s^2 + 2s)$$

$$3s^5 + 0{,}3s^4 - 4s^3 + 7{,}6s^2 + 4{,}8s + 0{,}4 =$$

$$3s^5 + 12{,}8s^4 + 19{,}2s^3 + 13s^2 + 3{,}6s$$

$$-12{,}5s^4 - 23{,}2s^3 - 20{,}6s^2 + 1{,}2s + 0{,}4 =$$

$$\boxed{s = -1{,}5448} \qquad s = -0{,}2768 + j0{,}094$$

$$s = 0{,}2424 \qquad s = -0{,}2768 - j0{,}094$$

$s = -1{,}5448$ É PONTO DE SAÍDA DO LR.

INTERSEÇÃO COM O EIXO $j\omega$:

$$1 + k \cdot G_{MA}(s) = 0$$

$$1 + k\frac{(s+0{,}1)(s^2-2s+2)}{s(s^2+3s+2)} = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 2s + k(s^3 - 1{,}9s^2 + 1{,}8s + 0{,}2) = 0$$

$$(k+1)s^3 + (3 - 1{,}9k)s^2 + (2 + 1{,}8k)s + 0{,}2k = 0$$

MÉTODO DE ROUTH:

$$\begin{array}{lll} s^3 & (k+1) & (2+1{,}8k) \\ s^2 & (3-1{,}9k) & (0{,}2k) \\ s^1 & \left[\dfrac{(3-1{,}9k)(2+1{,}8k) - (k+1)(0{,}2k)}{3-1{,}9k}\right] & 0 \\ s & 0{,}2k & \end{array}$$

$$\begin{cases} \boxed{k = 1{,}4952} \\ k = -1{,}1085 \end{cases} \longrightarrow \text{VOLTANDO NA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA}$$