Aula 8 Cálculo 3B Aula 17 Cálculo 3A

Aula passada: Modelagem $\begin{cases} \cdot \text{ velocidade de escape} \\ \cdot \text{ outros} \end{cases}$

Aula Hoje: Dinâmica populacional
equações autônomas

2.5 Equações autonômas e Dinâmica populacional

definição A equação da forma

$$\boxed{y' = f(y)}$$

que a variável independente t não aparece é dita **Equação autônoma**.

> Separável, mas queremos obter informações qualitativas sem resolvê-las.

Exemplo:

a) $y' = Ky$ modelo de crescimento exponencial
K taxa de crescimento ou declínio

b) $y' = r\left(1 - \dfrac{y}{K}\right)y$ modelo de crescimento logístico

definição dizemos que c é um **ponto de equilíbrio ou estacionário** de

$$y' = f(y)$$

quando

$$\boxed{f(c) = 0}$$

Note que se c é ponto estacionário $y = c$ (função constante) é solução da EDO $y' = f(c)$, ora $[c]' = 0 = f(c)$
Neste caso $y(t) = c$ é dita **solução de equilíbrio ou estacionária**

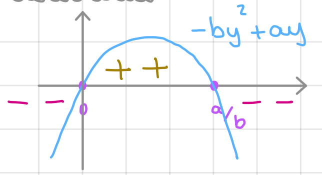
> Podemos dizer quando uma solução $y(t)$ é crescente ou decrescente determinando o sinal de y'. Para equações autônomas faremos isso sobre o eixo y onde $f(y)$ é positiva ou negativa

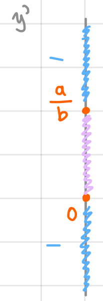
Exemplo Faça uma análise das soluções de $y' = y(a - by)$, $a, b > 0$

Solução

- soluções de equilíbrio: $y(a - by) = 0$
  $y = 0$ e $y = \dfrac{a}{b}$

- Analizar o sinal da derivada:



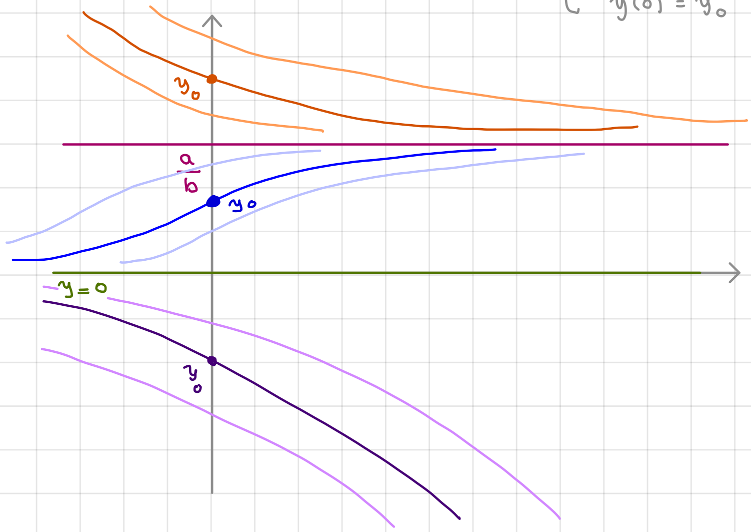


Quando os valores de $y(t) > a/b$ a função é decrescente.

Quando os valores de $y(t) \in (0, a/b)$ a função é crescente.

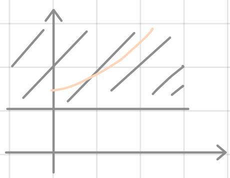
Quando os valores de $y(t) < 0$ a função é decrescente.

- Esboçar algumas soluções $\begin{cases} y' = y(a - by) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$



Pelo TEU em um ponto passa uma única solução.

- $(0, y_0)$, se $y_0 > \dfrac{a}{b}$ então a solução permanece na região $\mathbb{R} \times \left(\dfrac{a}{b}, \infty\right)$ porque não pode cruzar a solução $y = a/b$ e é decrescente então $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = a/b$

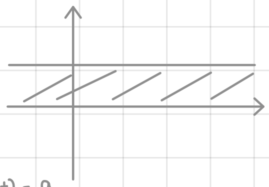


e $\lim\limits_{t \to -\infty} y(t) = +\infty$

↳ Não converge para uma assíntota horizontal pois, se sim ela seria solução da EDO

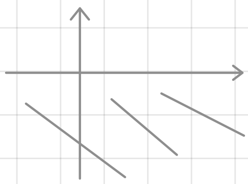
- $(0, y_0)$ se $\dfrac{a}{b} > y_0 > 0$ então a solução permanece na região $\mathbb{R} \times (0, a/b)$

porque não pode
cruzar as soluções
$y = 0$, $y = a/b$
E é sempre crescente



Então $\lim_{t \to -\infty} y(t) = 0$ $\lim_{t \to +\infty} y(t) = a/b$

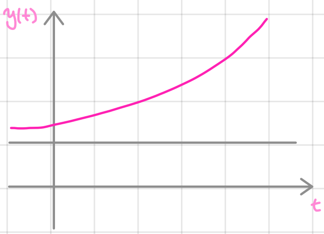
• $(0, y_0)$, $y_0 < 0$ então a solução
pertence a região
$\mathbb{R} \times (0, \infty)$
porque não pode
cruzar a solução $y=0$
e ela é descrescente



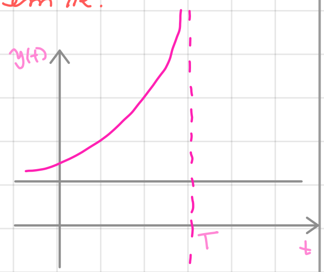
$\lim_{t \to -\infty} y(t) = 0$ e $\lim_{y \to +\infty} y(t) = -\infty$

NOTA

• O que ainda não é claro e se para $y_0 > a/b$
a solução esta definida em $\mathbb{R}$.



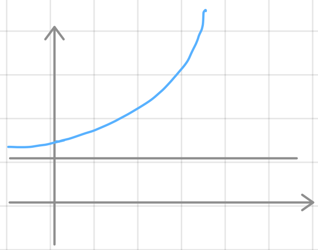
definida em $\mathbb{R}$



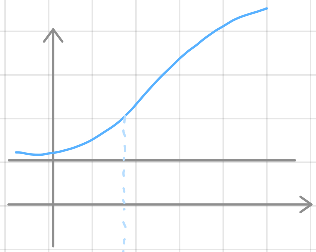
definida em $(0, T)$

igual para $y_0 < 0$

• Não é claro também a concavidade da solução



concava para cima



côncava para baixo | côncava para cima

Vamos fazer a segunda derivada para determinar os pontos de inflexão e o sinal

$y' = f(y)$
$y'' = f'(y) \cdot y'(t)$

$$\boxed{y'' = f'(y) \cdot f(y)}$$

• $f'(y)$ e $f(y)$ mesmo sinal
= côncava para cima
• $f'(y)$, $f(y)$ sinais contrários
= côncava para baixo

Definição Uma solução $y(t) = c$ de equilíbrio é dita
a) assintoticamente estável quando
para soluções que estão suficientemente
perto de c temos $\lim_{t \to +\infty} y(t) = c$

b) instável caso contrário

Esse conceito é importante em modelagem

Exemplo Classifique as soluções de equilíbrio
em $y' = y(a - by)$

Solução
Pelo que fizemos antes
• $y = 0$ é instável
• $y = a/b$ é assintoticamente estável

Crescimento exponencial:
Seja $y(t)$ a população de uma espécie no
instante t. A hipótese mais simples sobre
a variação da população é que:

A taxa de variação é proporcional ao
valor atual de y:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}}$$

taxa de crescimento
ou declínio

Resolvendo obtemos $\boxed{y(t) = y_0 e^{rt}}$

↳ esse é um modelo simples demais

Crescimento logístico (Equação de Verhulst)

Para levar em consideração o fato de que a taxa
de crescimento depende, realmente, da população atual, vamos substituir a constante
r por $\boxed{r - ay}$ $a > 0$

Assim $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = (r - ay) \cdot y}$

podemos escrever, fazendo $K = r/a$
a equação da seguinte forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = r\left(1 - \dfrac{y}{K}\right)y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

EDO não linear separável

nível de saturação

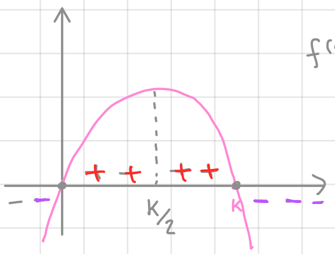
Equação de Verhulst

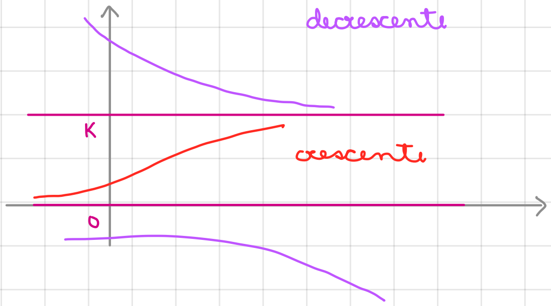
Exemplo Classifique as soluções de equilíbrio da equação logística $y' = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y$

Solução: As soluções de equilíbrio são $y_1(t) \equiv K$

$y_2(t) \equiv 0$

$$f(y) = r\left(1 - \frac{y}{K}\right) \cdot y$$





Como vemos $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = K$

então $y_1(t) \equiv K$ é assintoticamente estável

e $y_2(t) \equiv 0$ é instável

Exemplo: O modelo logístico foi aplicado a população de linguados gigantes em uma área do pacífico. Suponha que $y(t)$ medido em kg é a massa total em um instante t. Se os parametros são

$r = 0,71$ / ano

$K = 80,5 \times 10^6$ kg

Se a biomassa inicial $0,25K$. Determine a biomassa 2 anos depois

Solução

Equação logística

$$\begin{cases} y' = r\left(1 - \dfrac{y}{K}\right) \cdot y \\ y(0) = 0,25K \end{cases}$$ separável

Vamos resolver o PVI, depois substituímos os parametros.

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{y}{K}\right)y} \cdot dy = r\,dt$$

frações parciais:

$$\frac{A}{\left(1 - \frac{y}{K}\right)} + \frac{B}{y} = \frac{1}{\left(1 - \frac{y}{K}\right)y} \Rightarrow A = 1/K \quad B = 1$$

$$\int \left[\frac{1/K}{\left(1 - \frac{y}{K}\right)} + \frac{1}{y}\right] dy = \int r\,dt$$

$$\ln|y| - \ln\left|1 - \frac{y}{K}\right| = rt + c$$

Note que $0 < y(0) = 0,25K \leq K$

pelo exemplo anterior a solução

$0 \leq y(t) \leq K$

então podemos tirar o módulo

$$\ln \overset{\geq 0}{y} - \ln\overset{\geq 0}{\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = rt + c$$

$$\ln\left(\frac{y}{1 - y/K}\right) = rt + c$$

$$\frac{y}{1 - y/K} = Ce^{rt}$$

para $y(0) = 0,25K$

$$\frac{0,25K}{1 - 0,25} = C \quad \text{substituindo}$$

$$\frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\frac{y}{1 - \frac{y}{K}} = \left(\frac{0,25K}{0,75}\right)e^{rt}$$

$$y = \left(1 - \frac{y}{K}\right)\left(\frac{1}{3}Ke^{rt}\right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{3}e^{rt}\right)y = \frac{1}{3}Ke^{rt}$$

$$y(t) = \frac{\frac{1}{3}Ke^{rt}}{1 + \frac{1}{3}e^{rt}}$$

$K = 80,5 \times 10^6$

$r = 0,71$

$t = 2$

$$y(2) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 80,5 \cdot 10^{10} \cdot e^{1,42}}{1 + \frac{1}{3}e^{1,42}} \approx 0,5797$$