[UFES-CCE-DMAT-Prova Final-Cálculo1-Equipe, 08/03/17]

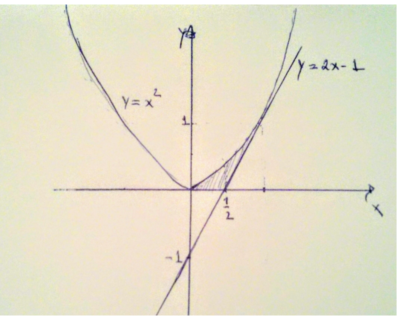
Leia a prova com atenção e justifique todas as respostas.

1. Considere $f(x) = x^2$.

(a) **(0,5pt)** Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (1,1).

$$y - \underbrace{f(1)}_{1} = \underbrace{f'(1)}_{2}(x-1) \Leftrightarrow y = 2x - 1.$$

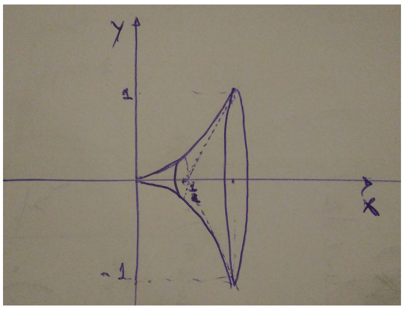
(b) **(0,5pt)** No mesmo sistema cartesiano, esboce o gráfico de f e a reta tangente do item anterior.



(c) **(1pt)** Calcule a área da região R limitada pelo gráfico de f, pelo eixo x e pela reta tangente do item (a).

Usando integração em y, a área é $\int_0^1 \frac{y}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{y}dy$ ou decompondo a região e integrando em x a área vem dada por $\int_0^{1/2} x^2dx + \int_{1/2}^1 x^2 - (2x-1)dx$. Em qualquer caso, o resultado é $\frac{1}{12}$.

(d) **(1pt)** Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região R em torno do eixo x.



Usamos o "método das fatias". Um corte transversal ao eixo de rotação entre para x entre 0 e 1/2 origina um disco de raio x^2, enquanto que para x entre 1/2 e 1, origina uma arruela com raio exterior x^2 e raio interior $2x-1$. Assim, o volume se decompõe em

$$\int_0^{1/2} \pi(x^2)^2dx + \int_{1/2}^1 \pi[(x^2)^2 - (2x-1)^2]dx = \frac{\pi}{30}.$$

2. **(1pt)** Calcule a derivada da função $f(x) = \sqrt{x \cdot \mathrm{sen}(x^3)}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(x \cdot \mathrm{sen}(x^3))^{-1/2} \cdot (x \cdot \mathrm{sen}(x^3))' \\ &= \frac{1}{2}(x \cdot \mathrm{sen}(x^3))^{-1/2} \cdot \left(\mathrm{sen}(x^3) + x \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2\right) \quad (x > 0). \end{aligned}$$

3. Calcule:

(a) **(1pt)** $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x+3}{\sqrt{9x^2+1}}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \frac{x+3}{\sqrt{9x^2+1}} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2(9+1/x^2)}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+3}{|x|\sqrt{9+1/x^2}} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x+3}{-x\sqrt{9+1/x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1+3/x}{-\sqrt{9+1/x^2}} \\ &= -1/3. \end{aligned}$$

(b) **(1pt)** $\displaystyle\int x^3 \ln x dx$

Integrando por partes

$$\int \underbrace{x^3}_{g'} \underbrace{\ln x}_{f} dx = -\int \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{g} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} dx + \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{g} \underbrace{\ln x}_{f} = -\frac{x^4}{16} + \frac{x^4}{4} \ln x + C.$$

(c) **(1pt)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-9} dx$

Pelo método das frações parciais: $\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{6}\frac{1}{x-3} - \frac{1}{6}\frac{1}{x+3}$. Logo

$$\int \frac{1}{x^2-9} dx = \frac{1}{6} \ln|x-3| - \frac{1}{6} \ln|x+3| + C = \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C.$$

4. **(1pt)** Um fio de arame de 1 metro é cortado em dois pedaços para se fazer um círculo e um triângulo equilátero. Quais devem ser os tamanhos dos dois pedaços para que a soma das áreas seja máxima?

Usamos x metros de arame para o triângulo e os restantes $y = 1 - x$ metros para o círculo. O teorema de Pitágoras garante que o triângulo tem altura $\sqrt{3}/6x$ e, logo, área $(x/3 \cdot \sqrt{3}/6x)/2 = \sqrt{3}/3x^2$. Por sua vez, o círculo tem raio $r = (1-x)/(2\pi)$ e, logo, área $\pi(1-x)^2/4\pi^2$. Queremos maximizar $A(x) = \sqrt{3}/36x^2 + (1-x)^2/4\pi$, com $x \in [0,1]$. Temos $A'(x) = \sqrt{3}/18x - (1-x)/(2\pi)$ e $A''(x) = \sqrt{3}/18 + 1/(2\pi) > 0$, para todo $x \in [0,1]$. Logo, o máximo é atingido para $x = 0$ ou para $x = 1$. Como

$A(1) = \sqrt{3}/36 < 1/(4\pi) = A(0)$, devemos usar (o) 1 metro de arame (todo) no círculo.

5. Considere a função $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$. Determine:

(a) **(0,5pt)** Domínio, zeros e assíntotas.

Domínio: toda reta real. Zeros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. A função é contínua em toda a reta, logo não existem assíntotas verticais. Temos $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+3/x^2} = 1$. Analogamente, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+3} = 1$, logo $y = 1$ é a única assíntota horizontal.

(b) **(0,5pt)** Regiões de crescimento e decrescimento, máximos e mínimos.

Temos

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+3) - (2x)x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{6x}{(x^2+3)^2},$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. O sinal de $f'(x)$ é igual ao sinal do numerador $6x$ descrito em baixo junto com os intervalos de monotonia:

		0	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Extremos locais: apenas um mínimo local $f(0) = 0$.

Nota: podemos mesmo concluir que $f(0) = 0$ é mínimo global.

(c) **(0,5pt)** Concavidades e pontos de inflexão.

Temos

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{6(x^2+3)^2 - (6x)2(x^2+3)2x}{((x^2+3)^2)^2} = \frac{6(x^2+3)[(x^2+3) - 4x^2]}{(x^2+3)^4} \\ &= \frac{6(-3x^2+3)}{(x^2+3)^3} = \frac{18(-x^2+1)}{(x^2+3)^3}, \end{aligned}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$. O sinal de $f''(x)$ é igual ao sinal do fator $-x^2+1$ descrito em baixo com os intervalos de concavidade:

		-1		1	
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$		$\cup$		$\cap$

Pontos de inflexão: $(-1, 1/4)$, $(1, 1/4)$.

(d) **(0,5pt)** Esboço do gráfico.