Sistema Realimentados

EP17 - Gráficos de Bode e critério de Nyquist

Data: 28 de maio

Grupo: Eric Rodrigues de Carvalho e Piettro Augusto Pereira Benincá

Seja a FT $G(s) = \dfrac{100(s+10)}{s(s+1)^2}$

1.1) Faça o gráfico de Bode dos polos, zero e ganho e depois some seus efeitos, como foi feito no exemplo 1 das notas de aula.

Os gráficos de Bode do ganho, do zero e dos polos foram plotados separadamente no Matlab. Depois foi plotado o diagrama de Bode para G(s) e por fim todos as curvas foram plotadas em um mesmo gráfico.

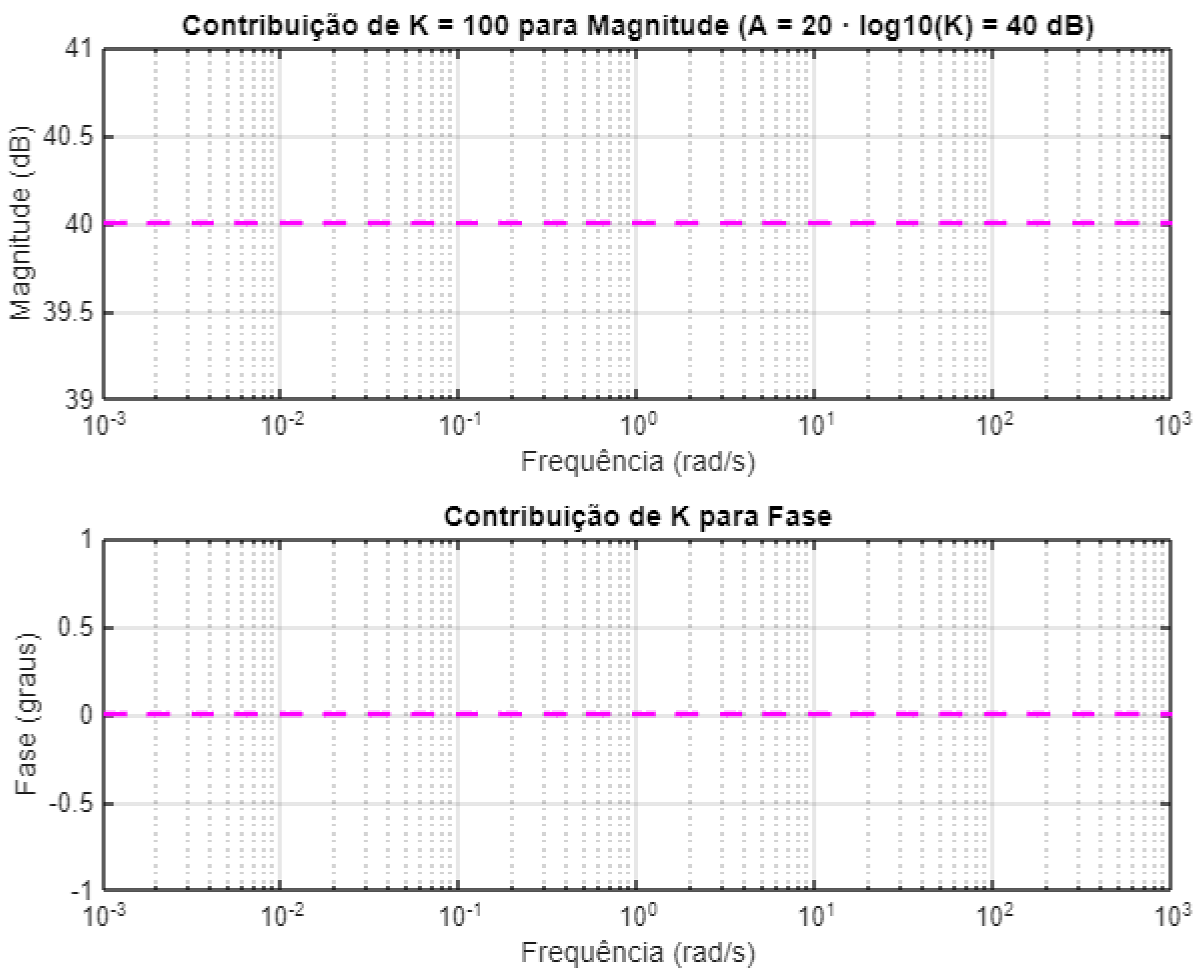

Gráfico 1: Contribuição do ganho K = 100 para magnitude e fase de G(s).

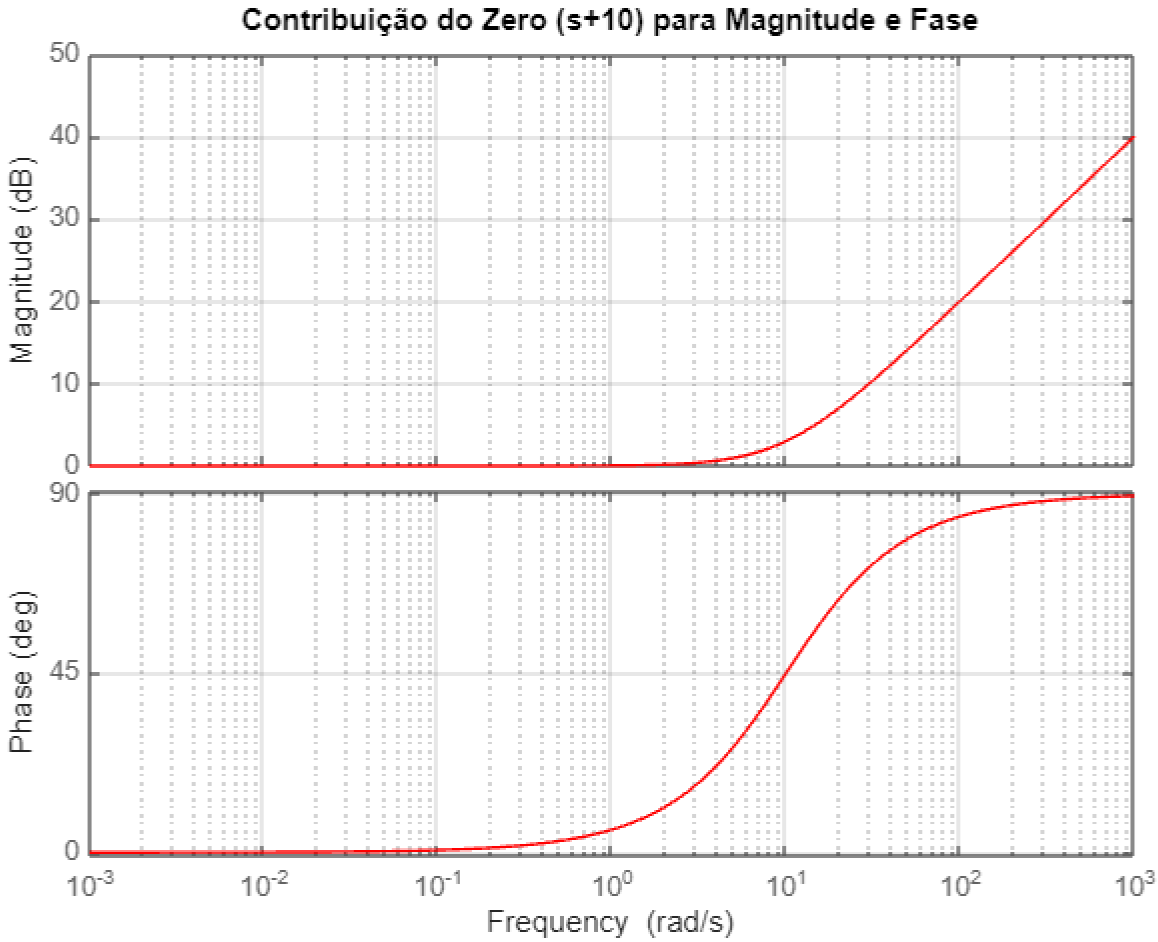

Gráfico 2: Contribuição do zero s+10 = s/10 + 1 para magnitude e fase de G(s).

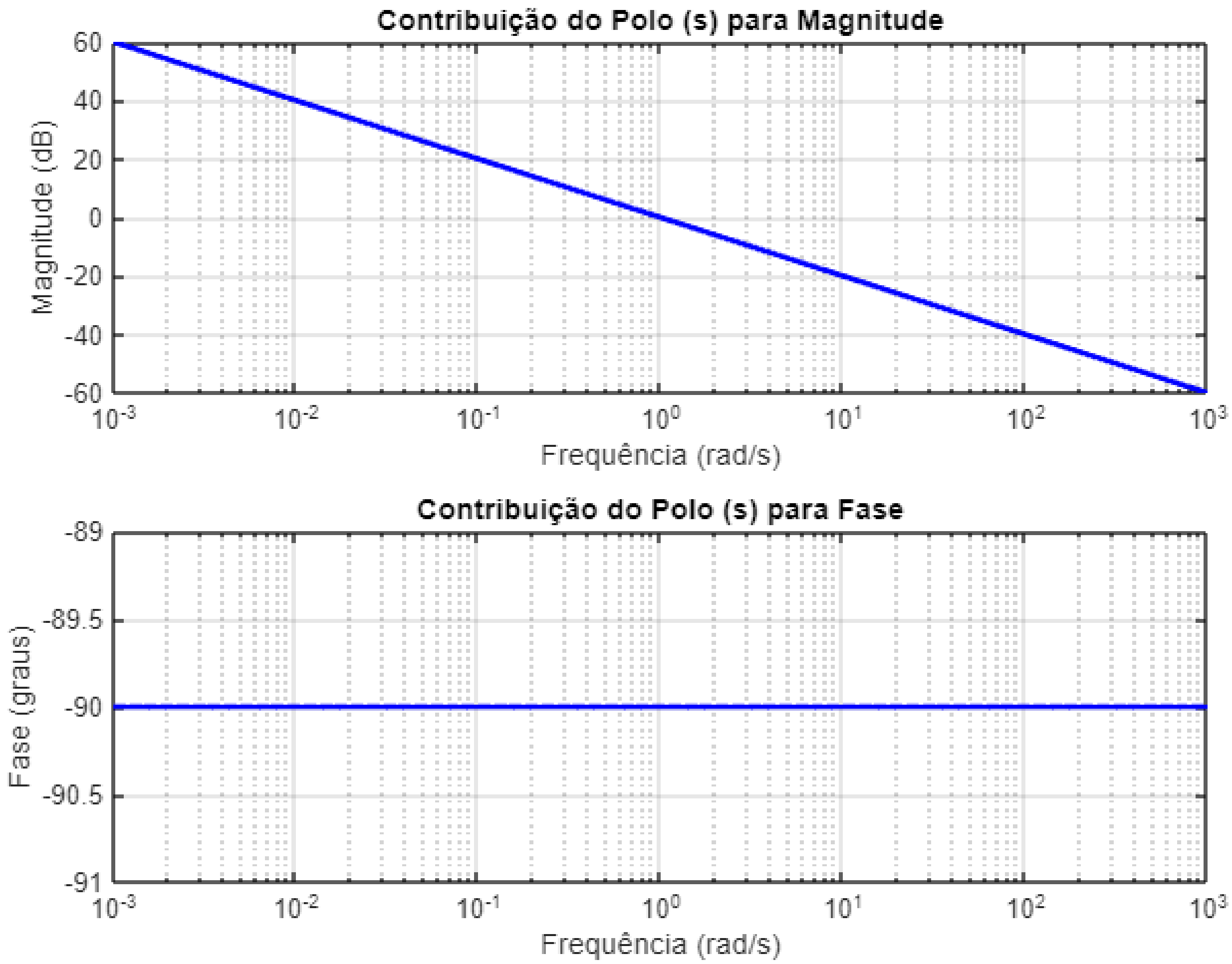

Gráfico 3: Contribuição do polo s para magnitude e fase de G(s).

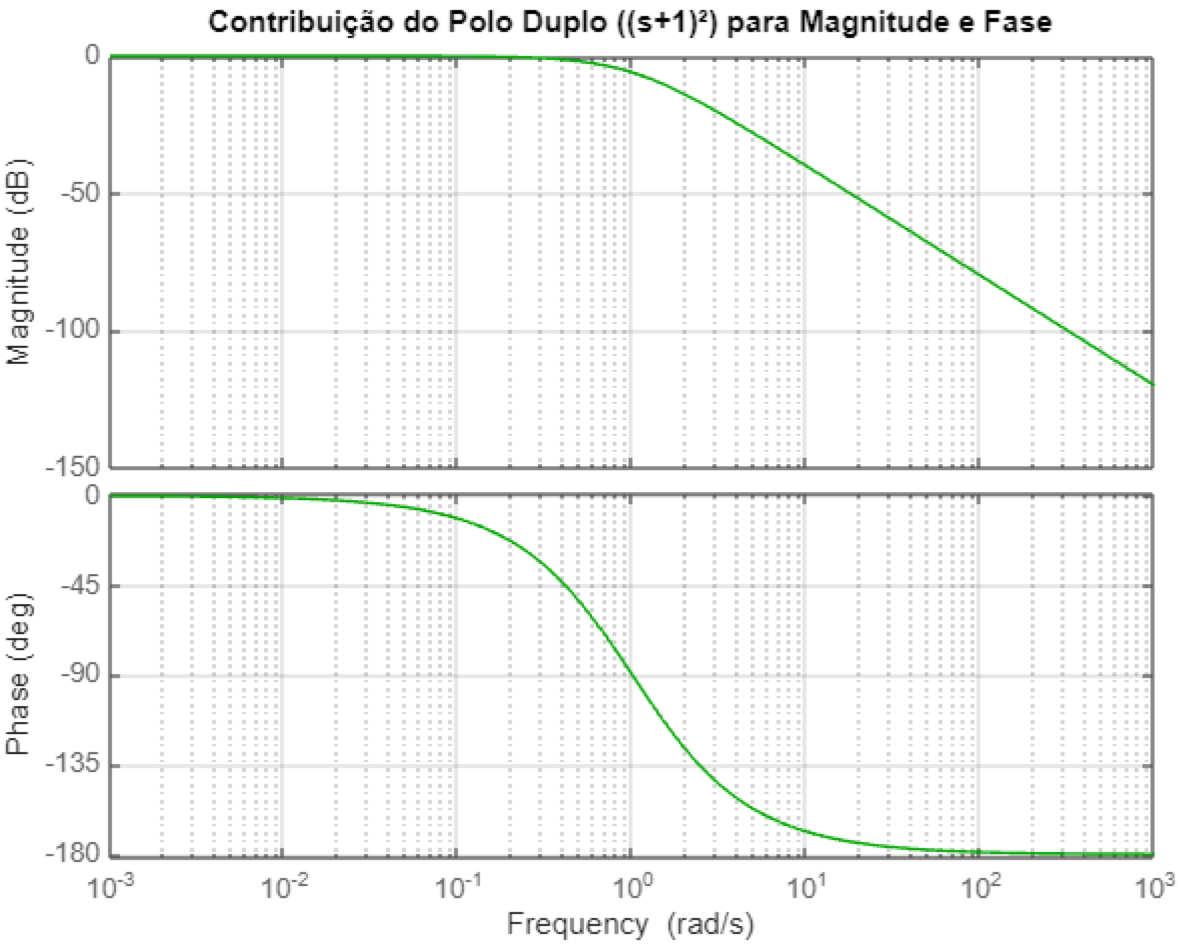

Gráfico 4: Contribuição do polo duplo $(s+1)^2$ para magnitude e fase de G(s).

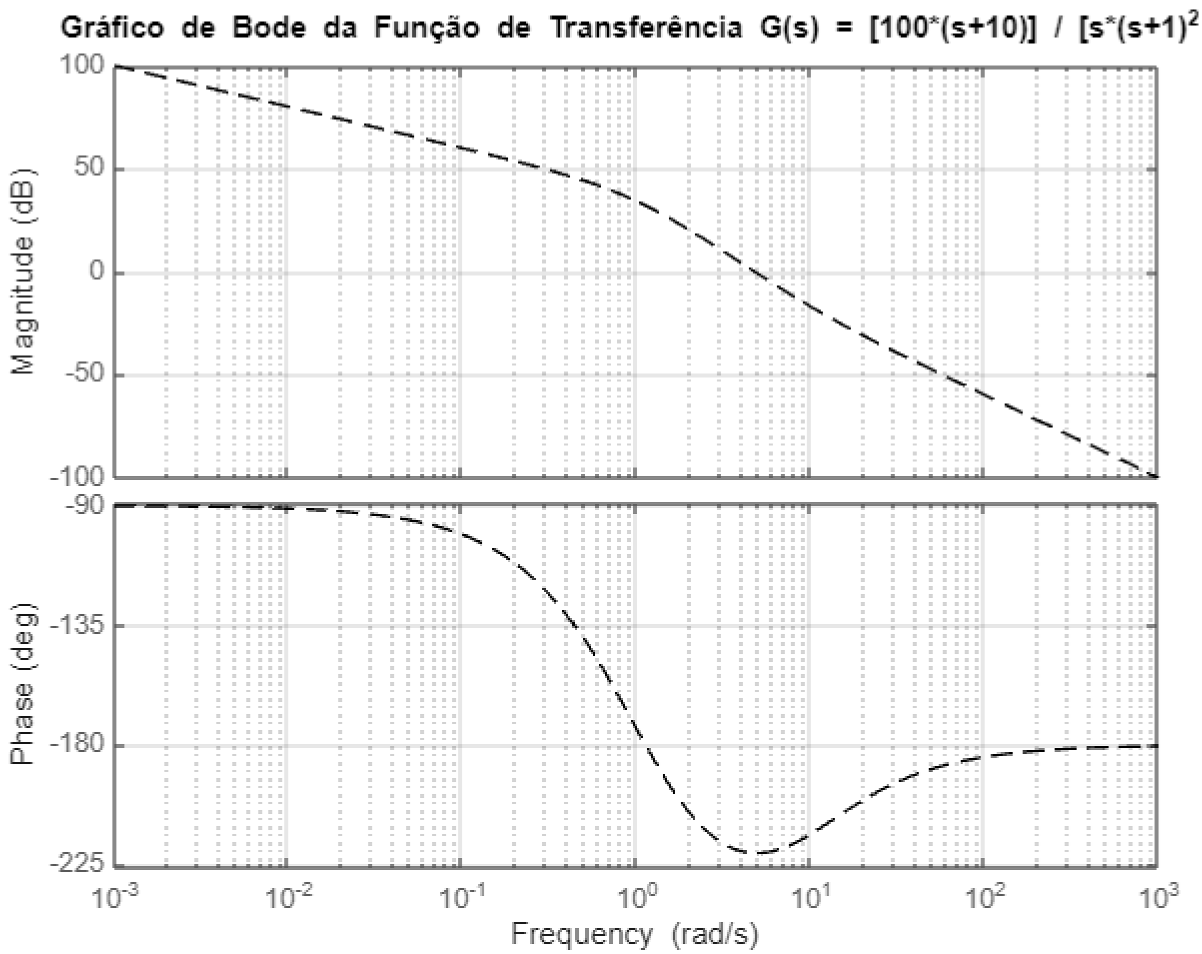

Gráfico 5: Diagrama de Bode de G(s).

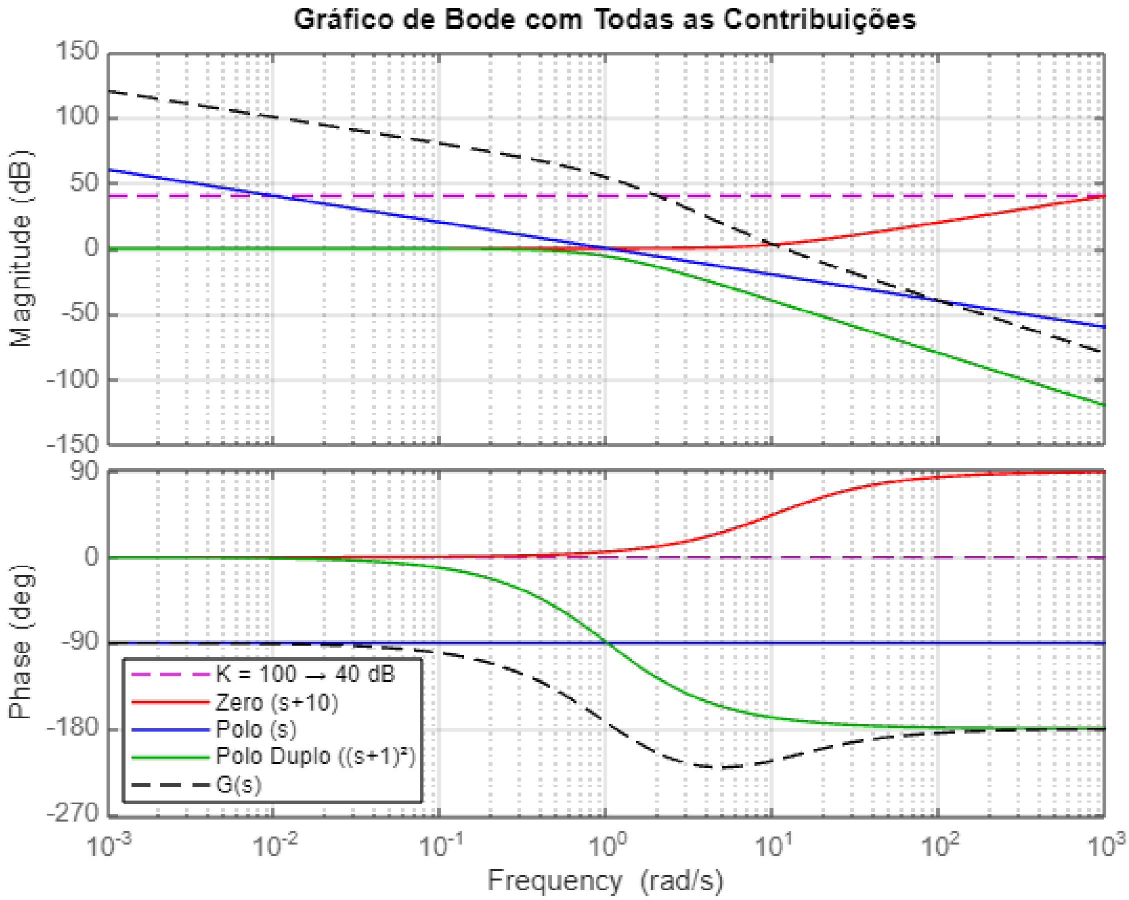

Gráfico 6: Diagrama de Bode de G(s) e as contribuições individuais de seus termos.

A partir dos 4 primeiros gráficos, os valores de magnitude e fase foram retirado do gráfico de acordo com as frequências de 0.01, 0.1, 1, 10 e 100 rad/s. Após isso os valores foram tabelados. A soma dos valores de magnitude e fase correspondem ao diagrama de Bode de G(s).

ω (rad/s)	K	s+10 = s/10 + 1	s	$(s+1)^2$	Soma
0.01	40	0	40	0	80
0.1	40	0	20	0	60
1	40	0	0	-5	35
10	40	20	-20	-40	0
100	40	40	-40	-80	-40

Tabela 1: Contribuições do ganho, polo e zeros para a magnitude de G(s).

ω (rad/s)	K	s+10	s	$(s+1)^2$	Soma
0.01	0	0	-90	0	-90
0.1	0	0	-90	-10	-100
1	0	5	-90	-90	-175
10	0	45	-90	-170	-215
100	0	85	-90	-175	-180

Tabela 2: Contribuições do ganho, polo e zeros para a fase de G(s).

1.2) Esboce o gráfico polar de G(s) analisando o módulo e o ângulo de G(jw) para ω → 0 e para ω → ∞ (como nas notas de aula) e verificando como encontrar o ponto de interseção do gráfico com o eixo real negativo, e formas de obtê-lo.

A magnitude de G(s) é dada por:

$$|G(j\omega)| = \frac{100\sqrt{\omega^2 + 10^2}}{|\omega||\omega^2 + 1|}$$

e a fase é:

$$\angle G(s) = -90^\circ - 2\arctan(\omega) + \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

Quando fazemos ω → 0 e ω → ∞ para a magnitude e a fase temos:

Lembrando que $\arctan(0) = 0$ e $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$.

G(s)	ω = 0	ω = ∞
Magnitude	∞	0
Fase	-90	-180

Tabela 3: Magnitude e fase de G(s) quando ω → 0 e ω → ∞.

Daí podemos obter o gráfico polar de G(s), como mostrado no Gráfico 7.

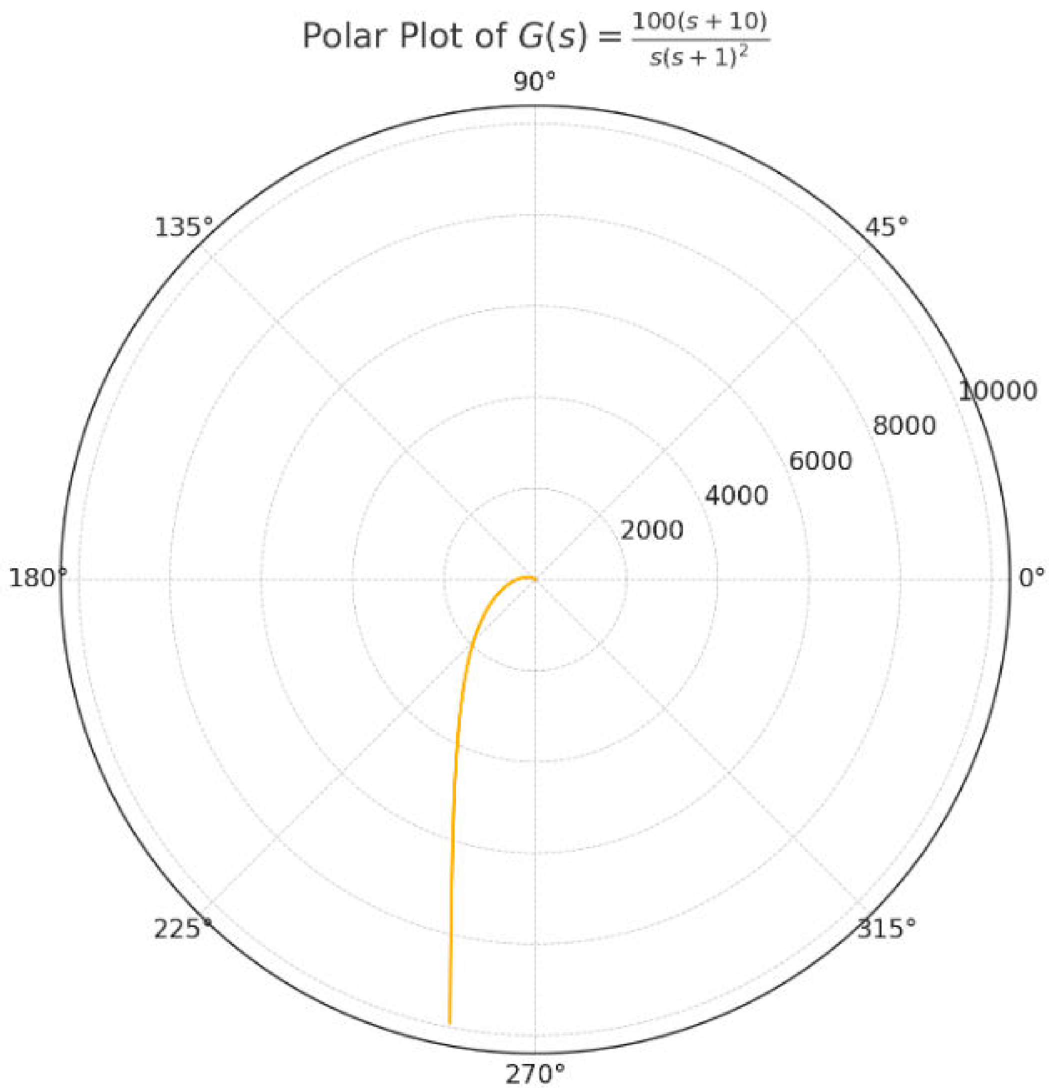

Gráfico 7: Gráfico polar de G(s).

Uma forma de obter o cruzamento com o eixo real negativo é encontrar ω de modo que a parte imaginária de G(jω) seja igual a 0:

$$G(j\omega) = \frac{100 \cdot (j\omega + 10)}{(j\omega) \cdot (j\omega + 1)^2} = \frac{100\,j\omega + 1000}{j^3\omega^3 + 2\omega^2 j^2 + j\omega}$$

Relembrando das potências de j:

$$j^2 = -1;\ j^3 = -j;\ j^4 = 1$$

A partir disso:

$$G(j\omega) = \frac{100\,j\omega + 1000}{j\omega - j\omega^3 - 2\omega^2} = \frac{100\,j\omega + 1000}{-2\omega^2 + j(\omega - \omega^3)} \simeq 1.12$$

Multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador ($-2\omega^2 - j(\omega - \omega^3)$):

$$G(j\omega) = \frac{-100\omega^2 - 1900}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1} + j\,\frac{800\omega^2 - 1000}{\omega^5 + 2\omega^3 + \omega}$$

Igualando o termo imaginário a zero:

$$\frac{800\omega^2 - 1000}{\omega^5 + 2\omega^3 + \omega} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1.12 \text{ rad/s}$$

Além disso, com a frequência podemos descobrir o módulo onde há o cruzamento com o eixo real negativo:

$$|G(j1.12)| = \frac{100\,\sqrt{1.12^2 + 10^2}}{|1.12||1.12^2 + 1|} \simeq 398.53$$

Também é possível obter ω pela equação das tangentes. Reescrevendo G(s) temos:

$$G(s) = \frac{100\left(\frac{s}{10} + 1\right)}{s(s+1)^2}$$

Igualando a fase a -180º, temos:

$$\angle G(s) = -90^\circ - 2\arctan(\omega) + 0.1 \cdot \arctan(\omega) = -180^\circ$$

A partir daí, obtemos:

$$\arctan(\omega) = 47.37^\circ \Rightarrow \omega = 1.09 \simeq 1.12 \text{ rad/s}$$

O resultado pode ser confirmado pela expressão de fase de G(s). O cruzamento com o eixo real negativo ocorre quando a fase de G(s) é 180º (ou -180):

$$\angle G(s) = -90^{\circ} - 2\arctan(\omega) + \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) = -180^{\circ}$$

Com isso, obtemos $\omega = \frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1.12$ rad/s como ilustrado pelo Gráfico 8.

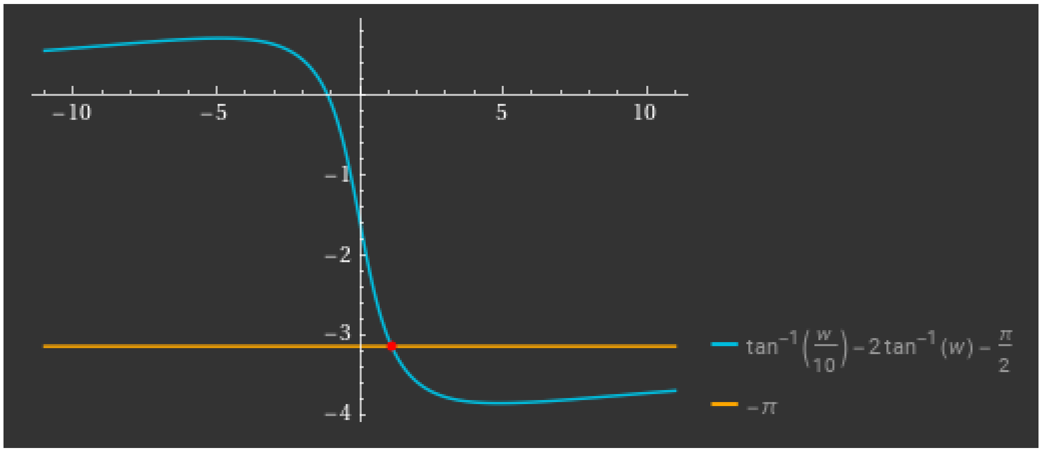

Gráfico 8: Intersecção das funções ∠G(s) e -π.

Outra forma de enxergar o ponto ω = 1.12 rad/s é pelo Diagrama de Bode. Localiza-se o ponto de -180 no gráfico de fase e certifica-se qual é o valor de frequência e magnitude naquele ponto.

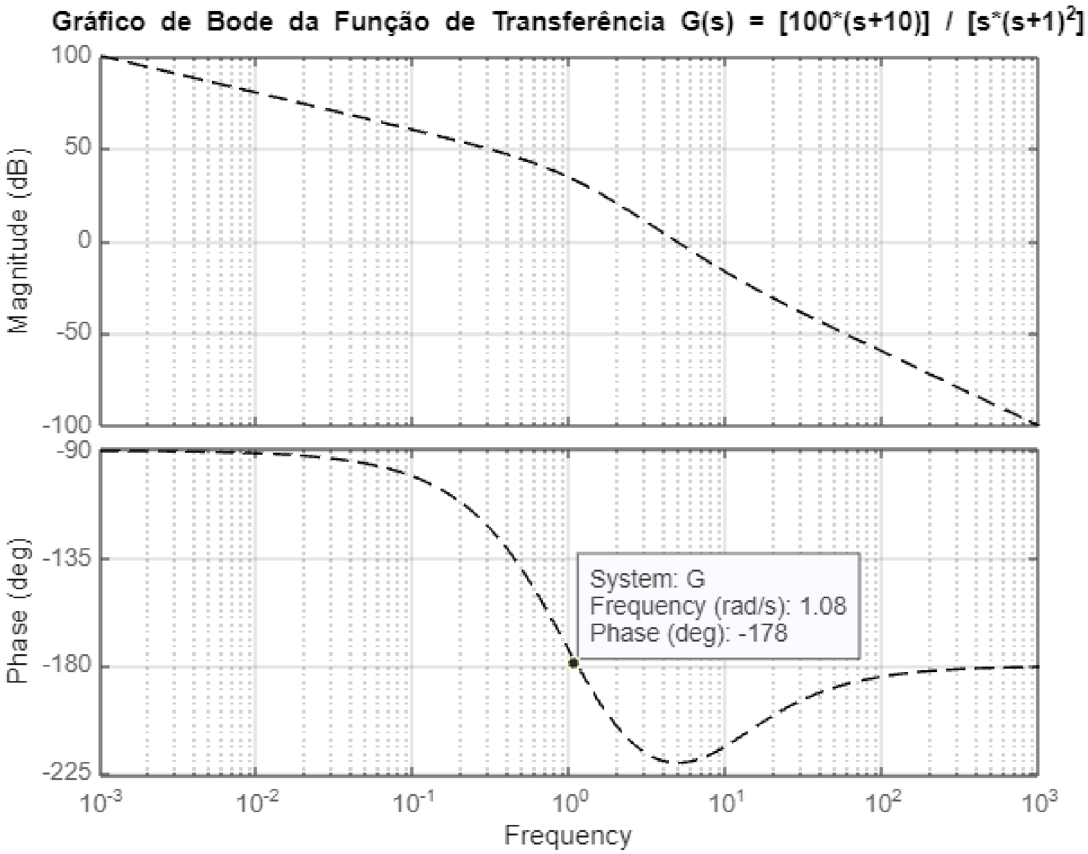

Gráfico 9: Cruzamento com o eixo real (ω = -178*, aproximadamente -180*).

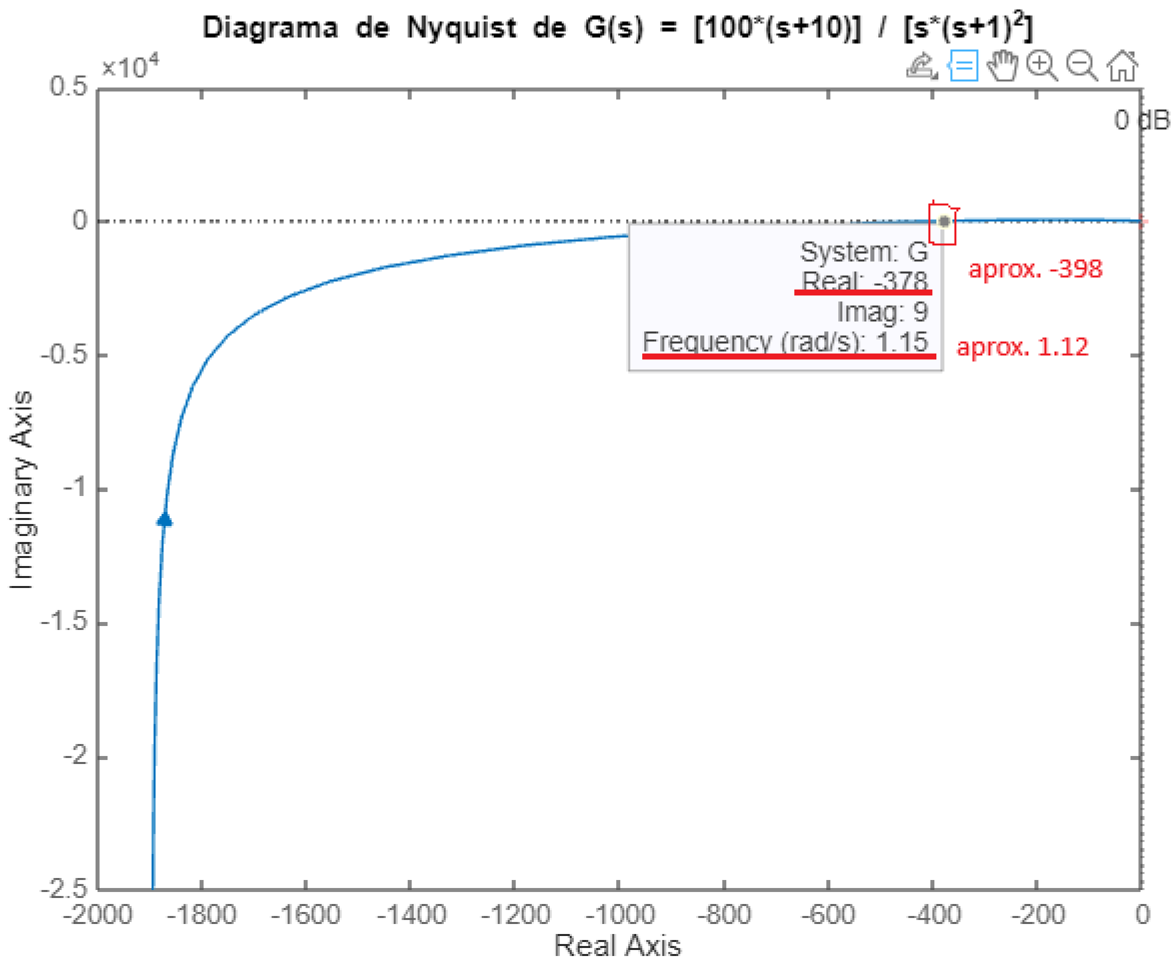

Gráfico 10: Cruzamento com o eixo real negativo (ω = -180*) pelo diagrama de Nyquist.

1.3) Use o critério de Nyquist para verificar se este sistema é estável

$\phi = (Z_d - 0.5 \cdot P_\omega - P_d) \cdot 180°$

$G(s) = \dfrac{100(s+10)}{s(s+1)^2}$

A partir de G(s) obtemos:

$P_\omega = 1$ (pois há um polo sobre o eixo jω)

$P_d = 0$ (pois há zero polos no SPD)

Logo:

$\phi = 180° \cdot Z_d - 90°$

Zd são os polos de malha fechada no SPD.

Se Zd = 0 o sistema é estável. Por outro lado se Zd ≥ 1 o sistema é instável.

Para descobrir Zd, precisamos encontrar Φ a partir do gráfico de Nyquist.

Traça-se um fasor do ponto -1 ao ponto do gráfico polar correspondente à frequência j∞.

Desenha-se um fasor do ponto -1 ao ponto do gráfico correspondente à frequência j0.

Mede-se o ângulo Φ do fasor ao variar de j∞ a j0.

No caso de G(s), Φ = 270º, o que implica em Zd = 2. Logo, o sistema é instável.

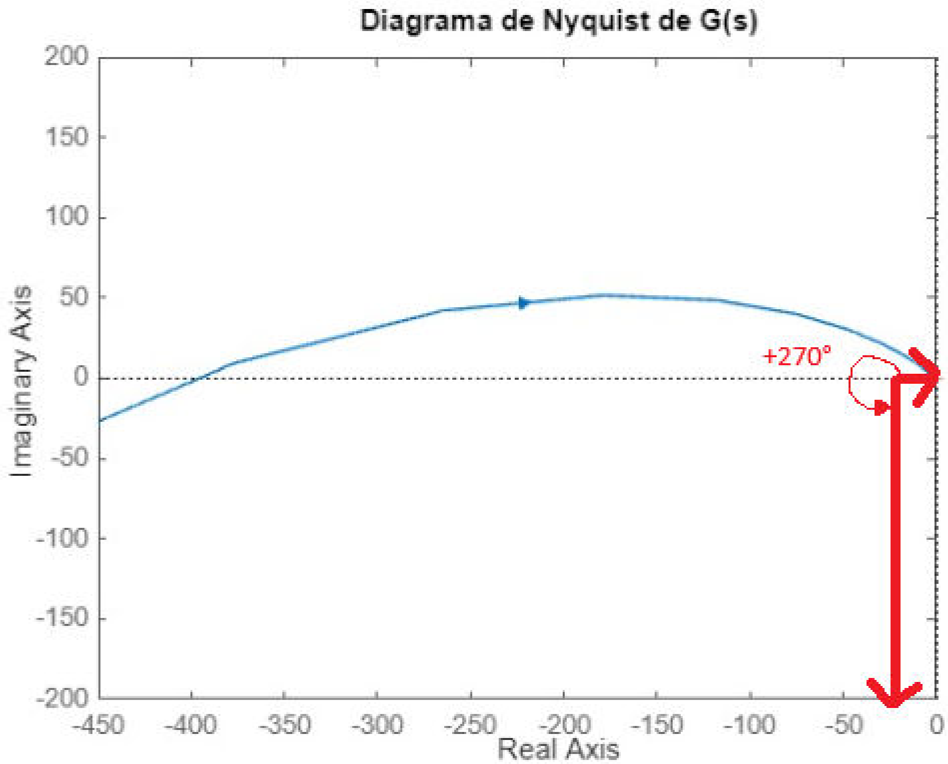

Gráfico 11: Diagrama de Nyquist para G(s).