Método de Euler para resolver um sistema de EDO de 1^a ordem

Algoritmos Numéricos - Topico 5-3
O método de Euler para a resolver
sistemas de EDO

Prof. Cláudia G. Varassin DI/UFES
emails:claudia.varassin@ufes.br e galarda@inf.ufes.br

Abril de 2021

Sumário

1. Sistemas de EDOs
2. O método de Euler

Sistemas de EDOS de 1^a, com valor inicial

O problema matemático abordado é um sistema de equações diferenciais de 1^a ordem, com valores iniciais, dado abaixo

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_1(x_0) = y_{1,0} \\ y_2(x_0) = y_{2,0} \\ \vdots \\ y_n(x_0) = y_{n,0} \end{cases}$$

Notar que são equações acopladas.

A solução é um conjunto de n funções $y_i(x)$

$$\begin{cases} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{cases}$$

que devem atender às EDOS e às condições iniciais:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{1,0} \\ y_2(x_0) = y_{2,0} \\ \vdots \\ y_n(x_0) = y_{n,0} \end{cases}$$

Exemplo 1: Dado o PVI, composto por duas equações

$$\begin{cases} {y_1}' = f_1(x, y_1, y_2) = y_1 + y_2 + 3x \\ {y_2}' = f_2(x, y_1, y_2) = 2y_1 - y_2 - x \\ y_1(0.0) = 0.0 \\ y_2(0.0) = -1.0 \end{cases}$$

A solução são duas funções

$$\begin{cases} y_1(x) \\ y_2(x) \end{cases}$$

que devem atender às EDOS e às condições iniciais:

$$\begin{cases} y_1(0.0) = 0.0 \\ y_2(0.0) = -1.0 \end{cases}$$

Os métodos baseados na série de Taylor

Os métodos métodos baseados na série de Taylor podem ser usados para resolver o PVI

$$y_{1,i+1} = y_{1,i} + h\frac{dy_1}{dx}(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, ..., y_{n,i}) + \frac{h^2}{2}\frac{dy_1^2}{dx^2}(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, ..., y_{n,i}) + \cdots$$

$$y_{2,i+1} = y_{2,i} + h\frac{dy_2}{dx}(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, ..., y_{n,i}) + \frac{h^2}{2}\frac{dy_2^2}{dx^2}(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, ..., y_{n,i}) + \cdots$$

$$\vdots$$

$$y_{n,i+1} = y_{n,i} + h\frac{dy_n}{dx}(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, ..., y_{n,i}) + \frac{h^2}{2}\frac{dy_n^2}{dx^2}(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, ..., y_{n,i}) + \cdots$$

Método de Euler para resolver sistemas de EDO's de 1^a ordem

O método de Euler para se resolver o sistema de equações diferenciais de 1^a ordem, com valores iniciais, é dado por

$$y_{1,i+1} = y_{1,i} + h\frac{dy_1}{dx}(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, ..., y_{n,i})$$

$$y_{2,i+1} = y_{2,i} + h\frac{dy_2}{dx}(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, ..., y_{n,i})$$

$$\vdots$$

$$y_{n,i+1} = y_{n,i} + h\frac{dy_n}{dx}(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, ..., y_{n,i})$$

Resolvendo o problema do exemplo 1, em $D[0.0, 0.6]$ com $h = 0.2$:

$$\begin{cases} {y_1}' = f_1(x, y_1, y_2) = y_1 + y_2 + 3x \\ {y_2}' = f_2(x, y_1, y_2) = 2y_1 - y_2 - x \\ y_1(0.0) = 0.0 \\ y_2(0.0) = -1.0 \end{cases}$$

Via Euler:

$$y_{1,i+1} = y_{1,i} + h\frac{dy_1}{dx}(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, ..., y_{n,i})$$

$$y_{2,i+1} = y_{2,i} + h\frac{dy_2}{dx}(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, ..., y_{n,i})$$

Resolvendo o problema do exemplo 1, em $D[0.0, 0.6]$ com $h = 0.2$:

$$\begin{cases} {y_1}' = f_1(x, y_1, y_2) = y_1 + y_2 + 3x \\ {y_2}' = f_2(x, y_1, y_2) = 2y_1 - y_2 - x \\ y_1(0.0) = 0.0 \\ y_2(0.0) = -1.0 \end{cases}$$

Via Euler:

$$y_{1,i+1} = y_{1,i} + h\frac{dy_1}{dx}(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, ..., y_{n,i})$$

$$y_{2,i+1} = y_{2,i} + h\frac{dy_2}{dx}(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, ..., y_{n,i})$$

Para este exemplo, fica:

$$y_{1,i+1} = y_{1,i} + hf_1 \Rightarrow y_{1,i+1} = y_{1,i} + h(y_{1,i} + y_{2,i} + 3x_i)$$

$$y_{2,i+1} = y_{2,i} + hf_2 \Rightarrow y_{2,i+1} = y_{2,i} + h(2y_{1,i} - y_{2,i} - x_i)$$

Resolvendo o problema do exemplo 1, em $D[0.0, 0.6]$ com $h = 0.2$:

$$\begin{cases} {y_1}' = f_1(x, y_1, y_2) = y_1 + y_2 + 3x \\ {y_2}' = f_2(x, y_1, y_2) = 2y_1 - y_2 - x \\ y_1(0.0) = 0.0 = y_{1,0} \\ y_2(0.0) = -1.0 = y_{2,0} \end{cases}$$

1^0 passo:

$y_{1,1} = y_{1,0} + h(y_{1,0} + y_{2,0} + 3x_0) \Rightarrow y_{1,1} = 0 + 0.2(0 - 1.0 + 3 * 0) = -0.2$

Resolvendo o problema do exemplo 1, em $D[0.0, 0.6]$ com $h = 0.2$:

$$\begin{cases} {y_1}' = f_1(x, y_1, y_2) = y_1 + y_2 + 3x \\ {y_2}' = f_2(x, y_1, y_2) = 2y_1 - y_2 - x \\ y_1(0.0) = 0.0 = y_{1,0} \\ y_2(0.0) = -1.0 = y_{2,0} \end{cases}$$

1^0 passo:

$y_{1,1} = y_{1,0} + h(y_{1,0} + y_{2,0} + 3x_0) \Rightarrow y_{1,1} = 0 + 0.2(0 - 1.0 + 3 * 0) = -0.2$

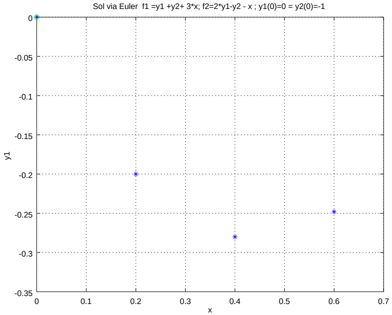
$y_{2,1} = y_{2,0} + h(2y_{1,0} - y_{2,0} - x_0) \Rightarrow y_{2,1} = -1.0 + 0.2(2 * 0 + 1.0) - 0) = -0.8$

1^0 passo:
$y_{1,1} = -0.2$
$y_{2,1} = -0.8$

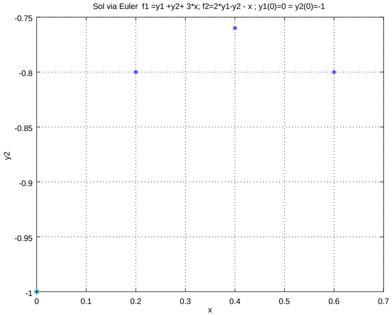
2^0 passo:
$y_{1,2} = -0.28$
$y_{2,2} = -0.76$

3^0 passo:
$y_{1,3} = -0.248$
$y_{2,3} = -0.8$

A função $y_1(x)$ (solução numérica via Euler):



A função $y_2(x)$ (solução numérica via Euler):



Nesta aula foi visto que para resolver um PVI de 1^a ordem:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_1(x_0) = y_{1,0} \\ y_2(x_0) = y_{2,0} \\ \vdots \\ y_n(x_0) = y_{n,0} \end{cases}$$

Pode se empregar o método de Euler:

$$y_{1,i+1} = y_{1,i} + h\frac{dy_1}{dx}(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{n,i})$$

$$y_{2,i+1} = y_{2,i} + h\frac{dy_2}{dx}(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{n,i})$$

$$\vdots$$

$$y_{n,i+1} = y_{n,i} + h\frac{dy_n}{dx}(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}, \dots, y_{n,i})$$

Bibliografia Básica

[1] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[2] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.