Cálculo 2 2027.2

$\boxed{\text{Aula 16}}$

Aula passada Cálculo

Aula hoje Coordenadas polares

Exemplo seja $C: r(t) = (t^2, t^3 - 3t)$

(a) Mostre que C tem duas tangentes no ponto $(3,0)$ e encontre suas equações

(b) Encontre os pontos em C onde a tangente é horizontal ou vertical

(c) Determine onde a curva sobe e desce e onde sua concavidade é para cima ou para baixo

(d) Esboce

Solução

(a) Mostrar que em $(3,0)$ tem dois instantes que $r(t) = (3,0)$:

$$\Leftrightarrow \quad t^2 = 3 \quad \to t = \pm\sqrt{3}$$
$$(t^3 - 3t) = 0 \quad \to t = 0 \ \text{e}\ t = \pm\sqrt{3}$$

que satisfaz simultaneamente é: $t = \pm\sqrt{3}$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 3}{2t}\Big|_{\sqrt{3}} = \frac{9-3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\frac{3t^2 - 3}{2t}\Big|_{-\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

reta que passa em $(3,0)$ e tem declividades $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$:

- $y - 0 = \sqrt{3}(x-3)$

$$\boxed{y = \sqrt{3}(x-3)}$$

- $y - 0 = -\sqrt{3}(x-3)$

$$\boxed{y = -\sqrt{3}(x-3)}$$

(b) horizontal : $\frac{dy}{dx} = 0$

vertical : $\frac{dy}{dx}$ não existe

horizontal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{\underset{\neq 0}{2t}} = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 3 = 0 \Rightarrow t^2 = 1, \quad t = \pm 1$$

$$\boxed{P_1 = r(1) = (1,-2)} \qquad \boxed{P_2 = r(-1) = (1,2)}$$

Vertical

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2-3}{\underset{=0}{2t}} \Leftrightarrow t = 0 \qquad \frac{dy}{dx} \text{ não existe}$$

$$\boxed{P_3 = (0,0)}$$

(b) Crescimento/decrescimento: sinal de $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{2t}$$

	$t<-1$	$-1<t<0$	$0<t<1$	$t>1$
$3t^2-3$	−	+	+	−
$2t$	−	−	+	+
$\frac{dy}{dx}$	+	−	+	−

crescente para $t \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$

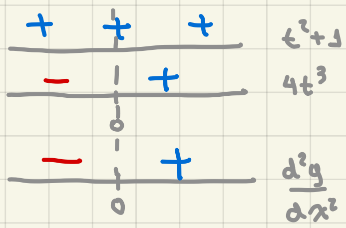
decrescente para $t \in (-1,0) \cup (1,\infty)$

Concavidade

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{3t^2-3}{2t}\right)}{2t} = \frac{\frac{2t\,(6t) - (3t^2-3)\cdot 2}{4t^2}}{2t}$$

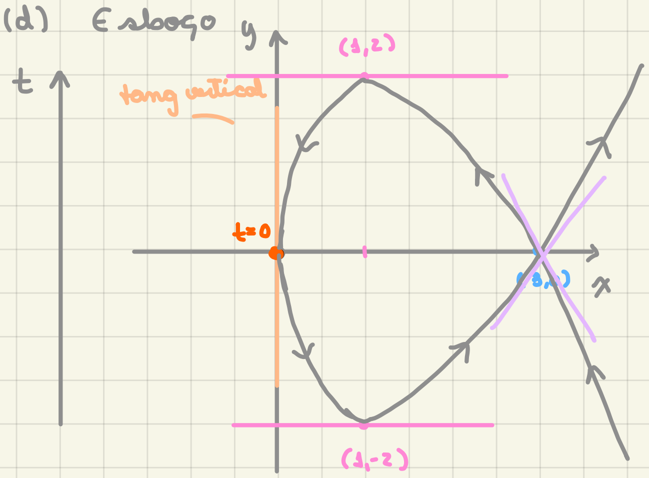
$$= \frac{6t^2 - 3t^2 + 3}{4t^3} = \frac{3}{4t^3}(t^2+1)$$

sinal da segunda derivada



concavidade positiva : $t>0$
concavidade negativa : $t<0$

(d) Esboço



$x(t) = t^2 \longrightarrow +\infty \quad t \to \pm\infty$
$y(t) = t^3 - 3t \longrightarrow +\infty \quad t \to +\infty$
$\longrightarrow -\infty \quad t \to -\infty$

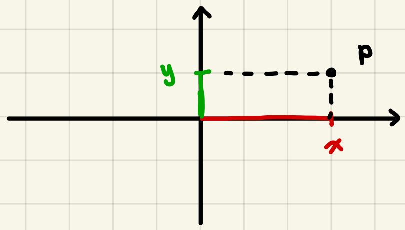
Simetria $\quad x(t) = x(-t)$
$y(t) = -y(-t)$

10.3 Coordenadas polares

↳ um sistema para representar pontos no plano.

COORDENADA CARTESIANAS :

- dois eixos perpendiculares
- representa um ponto P como um par (x,y) que são as distância aos eixos

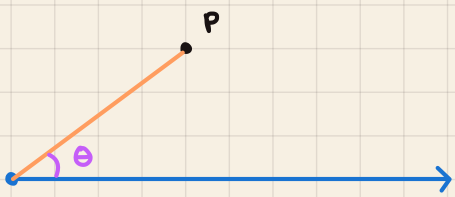


Objetivos : - definir um sistema novo de representar um ponto P.
- qual a relação tem com o sistema cartesiano
- esboçar curvas nessa representação
- cálculo

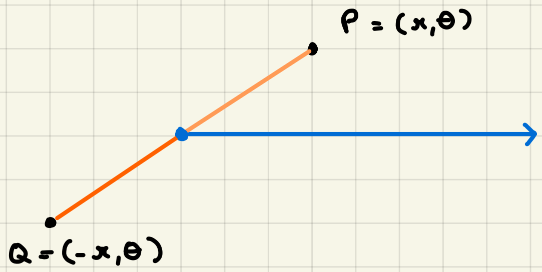
definição
- Escolhemos um ponto : polo (ou origem) O
- Desenhamos uma semi reta a partir de O : eixo polar

Então $P = (r, \theta)$ são as coordenadas polares onde

* $r = |OP|$
* θ ângulo formado entre OP e o eixo polar

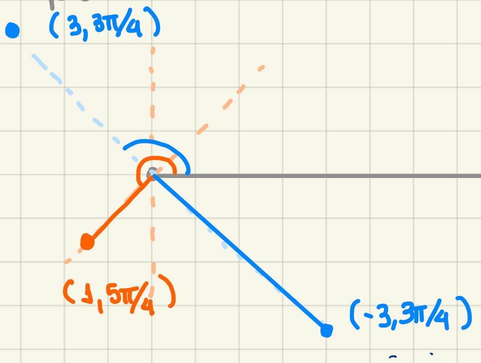


Obs • (r,θ), $r>0$ então $(-r,\theta)$ está na mesma reta mas do lado oposto com relação a origem
• um ponto tem mais de uma representação polar : $(r,\theta) = (r, \theta + 2\pi)$



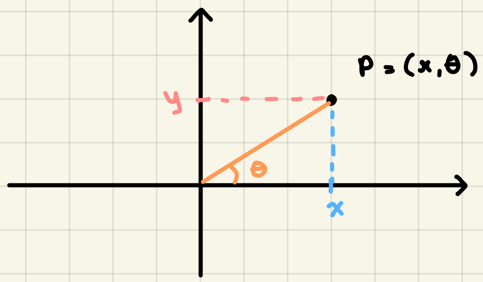
Exemplo Marque $\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$ e $\left(-3, \frac{3\pi}{4}\right)$:

Solução



CARTESIANA x POLARES

↳ A relação entre as duas representações



$$x = r\cos\theta \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$
$$y = r\,\operatorname{sen}\theta$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Exemplo Converta (a) $(2, \pi/3)$ polar
(b) $(-1, 1)$ cartesiana

Solução

(a) $r = 2$, $\theta = \pi/3$ $\quad x = 2\cos\pi/3 = 1$
$y = 2\,\operatorname{sen}\pi/3 = \sqrt{3}$

(b) $x = -1$, $y = 1$ $\Rightarrow r^2 = 2$
$\Rightarrow r = \pm\sqrt{2}$
$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{-1} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

escolher o que está no quadrante certo