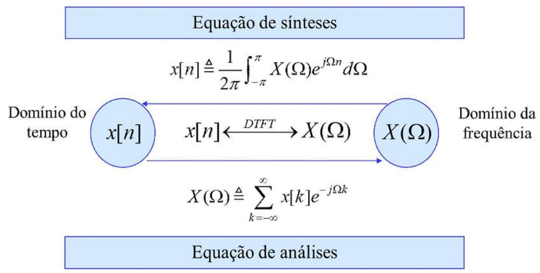
Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT)

Professor
Dr. Jorge Leonid Aching Samatelo
jlasam001@gmail.com



Índice

Introdução

Introdução

Analise de Fourier

		Sinal	
		Periódica	Aperiódica
Tempo	Valor contínuo $x \in \mathbb{R}$	Series de Fourier de Tempo Continuo (**CTFS**)	Transformada de Fourier de Tempo Continuo (**CTFT**)
	Valor Discreto $x \in \mathbb{Z}$	Series de Fourier de Tempo Discreto (**DTFS**)	Transformada de Fourier de Tempo Discreto (**DTFT**)

DTFT

DTFT

Definição

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(\Omega)$$

$$X(\Omega) = DTFT\{x[n]\}$$

$$x[n] = DTFT^{-1}\{X(\Omega)\}$$

- De forma geral podemos definir a DTFT como:
  - uma transformação linear *DTFT{}* de ida e volta, aplicada sobre um sinal discreta, gerando uma expressão algébrica *X*(Ω) no domínio das frequências Ω.

DTFT

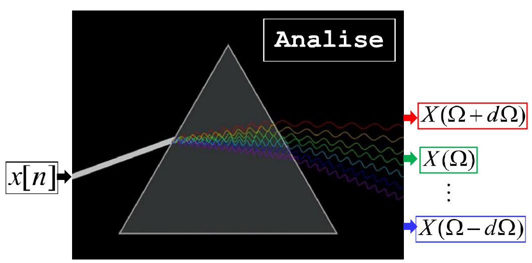
Definição

- *Equação de Analise (forma direta)*

$$X(\Omega) \triangleq DTFT\{x[n]\}$$

$$\triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\Omega k}$$

Do *domínio do tempo* ao *domínio da frequência*

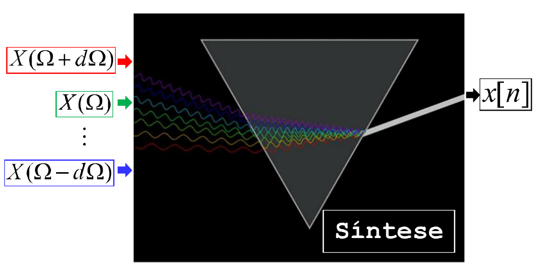


- *Equação de Síntese (forma inversa)*

$$x[n] \triangleq DTFT^{-1}\{X(\Omega)\}$$

$$\triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

Do *domínio da frequência* ao *domínio do tempo*



DTFT

Espectro

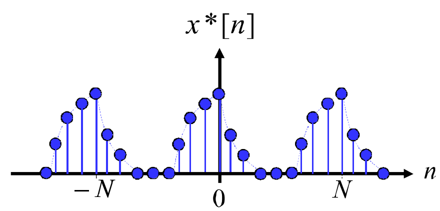
- 1ª Propriedade: O espectro da DTFT de $x[n]$ é um sinal continuo.

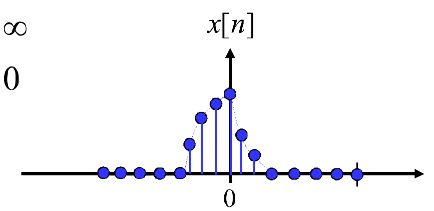
$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n\in<N>} x^*[n]e^{-j\Omega_0 kn}$$

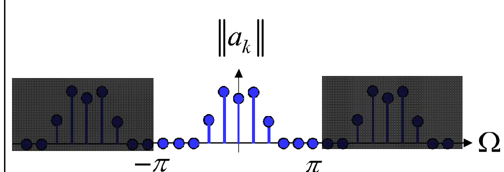
$$X(\Omega) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\Omega k}$$

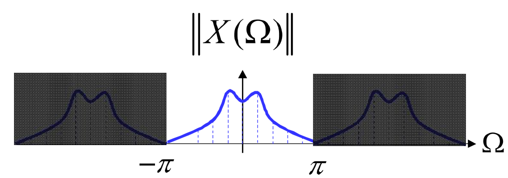
$N \to \infty$

$\Delta\Omega \to 0$







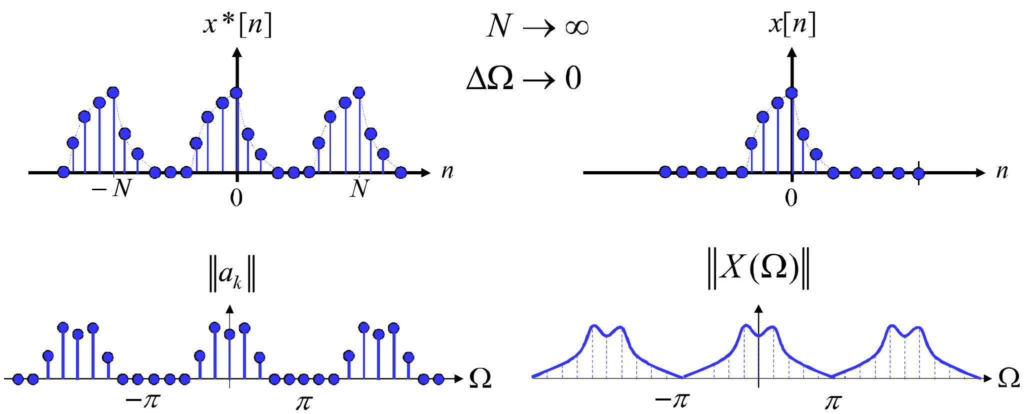


DTFT

Espectro

- 2ª Propriedade: O espectro da DTFT de $x[n]$ é periódico com período 2π.

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n\in<N>} x^*[n]e^{-j\Omega_0 kn} \qquad X(\Omega) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\Omega k}$$

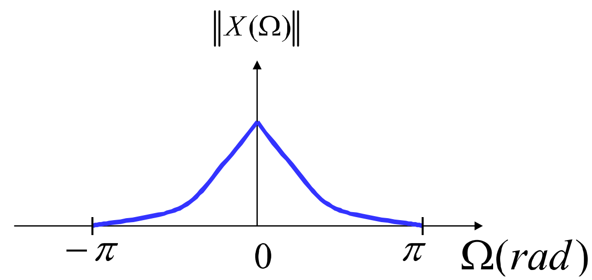


DTFT

Espectro

- 2ª Propriedade: O espectro da DTFT de $x[n]$ é periódico com período 2π.

- Um período de uma DTFT descreve completamente $X(\Omega)$ para todos os valores de Ω, portanto, $X(\Omega)$ é usualmente plotado apenas para o intervalo $[-\pi, \pi]$



DTFT

Calculo da DTFT

Exemplo

- Determine a DTFT do sinal:
  - *Impulso unitário*

$$x[n] = \delta[n]$$

  - *Decaimento exponencial*

$$x(t) = \alpha^n \mu[n] \ , \ |\alpha| < 1$$

- *Dica*
  - Lembrar que a DTFT de $x[n]$ é definida pela expressão:

$$X(\Omega) \triangleq DTFT\{x[n]\}$$
$$\triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\Omega k}$$

DTFT

Calculo da DTFT

Solução

- *Impulso unitário*
  - Solucionando o somatório:

$$X(\Omega) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\Omega k} \qquad x[n] = \delta[n]$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]e^{-j\Omega k} \qquad x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]e^{-j\Omega 0}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]$$
$$= 1$$

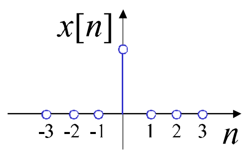
DTFT

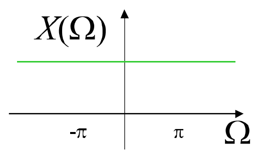
Calculo da DTFT

Solução

- *Impulso unitário*
  - Então:

$x[n]$		$X(\Omega)$
$\delta[n]$	$\leftrightarrow$	1





DTFT

Calculo da DTFT

Solução

- *Decaimento exponencial*
  - Solucionando o somatório:

$$X(\Omega) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\Omega k} \qquad x[n]=\alpha^n \mu[n]\ ,\ |\alpha|<1$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^n \mu[n] e^{-j\Omega k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\Omega k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha e^{-j\Omega}\right)^k$$

Lembrando que:

$$1+A^1+A^2+A^3+\cdots = \frac{1}{1-A}; |A|<1 \qquad A=\alpha e^{-j\Omega}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$

DTFT

Calculo da DTFT

Solução

- *Decaimento exponencial*
  - Então:

$x[n]$		$X(\Omega)$
$\alpha^n \mu[n]$	$\leftrightarrow$	$\dfrac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$

DTFT

Calculo da DTFT

Solução

- *Decaimento exponencial*
  - Desenhando o espectro e a fase dos coeficientes da DTFT de $x[n]$.
    - ❖Calculando o espectro de $X(\Omega)$:

$$\|X(\Omega)\| = \left\| \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \right\| \qquad \left\|\frac{x}{y}\right\| = \frac{\|x\|}{\|y\|}$$

$$= \frac{1}{\|(1-\alpha\cos(\Omega)) - j\alpha\sin(\Omega)\|} \qquad \|a+jb\| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha\cos(\Omega))^2 + (\alpha\sin(\Omega))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos(\Omega)+\alpha^2}}$$

$$(1-\alpha\cos(\Omega))^2 + (\alpha\sin(\Omega))^2 = 1-2\alpha\cos(\Omega)+\alpha^2$$

DTFT

Calculo da DTFT

Solução

- *Decaimento exponencial*
  - Desenhando o espectro e a fase dos coeficientes da DTFT de $x[n]$.
    - ❖Calculando a fase de $X(\Omega)$:

$$\angle X(\Omega) = \angle \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}} \qquad \angle \frac{x}{y} = \angle x - \angle y$$

$$= \angle 1 - \angle 1-\alpha e^{-j\Omega}$$

$$= 0 - \text{atan}^{-1}\left(\frac{\alpha\sin(\Omega)}{1-\alpha\cos(\Omega)}\right) \qquad \angle x+y = \text{atan}^{-1}\left(\frac{\text{Im}\{x\}+\text{Im}\{y\}}{\text{Re}\{x\}+\text{Re}\{y\}}\right)$$

$$= -\text{atan}^{-1}\left(\frac{\alpha\sin(\Omega)}{1-\alpha\cos(\Omega)}\right)$$

DTFT

Calculo da DTFT

Solução

- Desenhando o espectro e a fase dos coeficientes da DTFT de $x[n]$.

$$X(\Omega) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$

$$\|X(\Omega)\| = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos(\Omega)+\alpha^2}}$$

Espectro

$$\angle X(w) = -\text{atan}^{-1}\left(\frac{\alpha\sin(\Omega)}{1-\alpha\cos(\Omega)}\right)$$

Fase

DTFT

Calculo da DTFT^{-1}

Exemplo

- Determine a IDTFT dos sinais:
  - Filtro ideal Passa-baixo

$$X_{LPF}(\Omega) = \begin{cases} 1 & -\Omega_c < \Omega < \Omega_c \\ 0 & \Omega_c < \Omega < \pi \end{cases}$$

- *Dica*
  - Lembrar que a IDTFT de $X(\Omega)$ é definida pela expressão:

$$x[n] \triangleq DTFT^{-1}\{X(\Omega)\}$$

$$\triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

DTFT

Calculo da DTFT^{-1}

Solução

- Filtro ideal Passa-baixo
  - Solucionando a integral:

$$x_{LPF}[n] \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{LPF}(\Omega)e^{j\Omega n}\,d\Omega \qquad X_{LPF}(\Omega) = \begin{cases} 1 & -\Omega_c < \Omega < \Omega_c \\ 0 & \Omega_c < \Omega < \pi \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_c}^{+\Omega_c} 1.e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

$$= \frac{1}{j2\pi n} e^{j\Omega n}\Big|_{-\Omega_c}^{\Omega_c} \qquad \int_{t_o}^{t_1} e^{at}\,dt = \frac{1}{a}e^{at}\Big|_{t_o}^{t_1}$$

$$= \frac{1}{j2\pi n}\left(e^{j\Omega_c n} - e^{-j\Omega_c n}\right)$$

ROC

Calculo da DTFT^{-1}

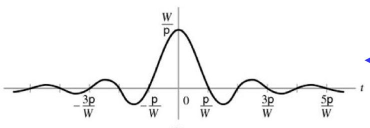
Solução

- Filtro ideal Passa-baixo
  - Solucionando a integral:

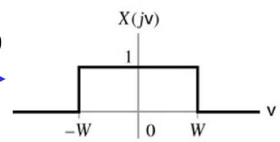
$$x_{LPF}[n] = \frac{1}{\pi n}\left(\frac{e^{j\Omega_c n} - e^{-j\Omega_c n}}{j2}\right) \qquad \sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{j2}$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sin(\Omega_c n) \qquad \text{sinc}(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\varphi}$$

$$= \frac{\Omega_c}{\pi}\text{sinc}(\Omega_c n)$$



$$x(t) \xrightarrow{ICTFT} X(w)$$



DTFT

Resumo

Equação de sínteses

$$x[n] \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

Domínio do tempo $x[n]$ $\quad x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(\Omega) \quad$ $X(\Omega)$ Domínio da frequência

$$X(\Omega) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\Omega k}$$

Equação de análises

Propriedades da DTFT

Propriedades da DTFT

Introdução

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(\Omega)$$

$$X(\Omega) = DTFT\{x[n]\}$$

$$x[n] = DTFT^{-1}\{X(\Omega)\}$$

- Linearidade
- Convolução
  - No domínio do tempo
  - No domínio da frequência
- Simétria
- Reflexão
  - No domínio do tempo
  - No domínio da frequência
- Deslocamento
  - No domínio do tempo
  - No domínio da frequência

Propriedades

Linearidade

$$x_1[n] \xleftrightarrow{DTFT} X_1(\Omega)$$
$$x_2[n] \xleftrightarrow{DTFT} X_2(\Omega)$$
$$y(t) = Ax_1[n] + Bx_2[n] \xleftrightarrow{DTFT} Y(\Omega) = AX_1(\Omega) + BX_2(\Omega)$$

- A DTFT é uma operação linear.

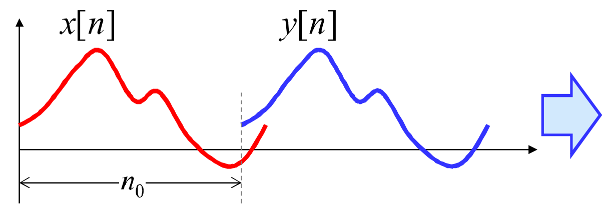
Propriedades

Deslocamento

- *Deslocamento no domínio do tempo*

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(\Omega)$$
$$y[n] = x[n - n_0] \xleftrightarrow{DTFT} Y(\Omega) = e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

- Um deslocamento no tempo corresponde a multiplicação da transformada por uma exponencial complexa imaginaria pura.



Espectro

$$\|Y(\Omega)\| = \|X(\Omega)\|$$

Fase

$$\angle Y(\Omega) = \angle X(\Omega) - \Omega n_0$$

O deslocamento temporal não afeta o módulo da transformada de Fourier, apenas a sua fase

Propriedades

Deslocamento

- *Deslocamento no domínio da frequência*

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(\Omega)$$
$$y[n] = x[n]e^{j\Omega_0 n} \xleftrightarrow{DTFT} Y(\Omega) = X(\Omega - \Omega_0)$$

- Um deslocamento na frequência corresponde a multiplicação do sinal do tempo por uma exponencial complexa imaginaria pura.

Propriedades

Convolução

- *Convolução no domínio do tempo*

Convolução no tempo — *Modulação no domínio das frequências*

$$x_1[n] \xleftrightarrow{DTFT} X_1(\Omega)$$
$$x_2[n] \xleftrightarrow{DTFT} X_2(\Omega)$$
$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{DTFT} Y(w) = X_1(\Omega)X_2(\Omega)$$

- A DTFT da convolução de dois sinais é o produto das transformadas desses sinais.

Propriedades

Convolução

- *Convolução no domínio da frequência*

Modulação no tempo		*Convolução no domínio das frequências*
$x_1[n]$	$\xleftrightarrow{DTFT}$	$X_1(\Omega)$
$x_2[n]$	$\xleftrightarrow{DTFT}$	$X_2(\Omega)$
$y[n]=x_1[n]x_2[n]$	$\xleftrightarrow{DTFT}$	$Y(\Omega)=\dfrac{1}{2\pi}X_1(\Omega)*X_2(\Omega)$

- A transformada de Fourier discreta da modulação de dois sinais é a convolução das transformadas desses sinais.

Propriedades

Exemplo

- Determine a DTFT da sequência:

$$x[n]=\delta[n]\;+\alpha^n\mu[n-1]$$

- *Dica:*
  - Usar a *propriedade de deslocamento no tempo*:

$$x[n-n_0]\xleftrightarrow{DTFT}e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$$

  - Lembrar que:

$x[n]$		$X(\Omega)$
$\alpha^n\mu[n]$	$\leftrightarrow$	$\dfrac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$

Propriedades

Solução

- Expressando convenientemente a sequência:

$$x[n]=\delta[n]\;+\alpha\left(\alpha^{n-1}\mu[n-1]\right)$$

- Calculando a DTFT a $x[n]$:

$$X(\Omega)=DTFT\{\delta[n]\}+\alpha\, DTFT\{\alpha^{n-1}\mu[n-1]\}$$

$$x[n-n_0]\xleftrightarrow{DTFT}e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$$

$$=1+\alpha\left(e^{-j\Omega\cdot 1}\cdot\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right)$$

$$=1+\frac{\alpha e^{-j\Omega}}{1-\alpha e^{-j\Omega}}=\frac{1-\alpha e^{-j\Omega}+\alpha e^{-j\Omega}}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$

$$=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$

$x[n]$		$X(\Omega)$
$\alpha^n\mu[n]$	$\leftrightarrow$	$\dfrac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$

✓ $x[n]=\alpha^n\mu[n]$

DTFT e Sistemas LTI

DTFT e Sistemas LTI

Função de Transferência

- A saída de um sistema LTI de tempo discreto pode-se expressar via a operação de convolução:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = h[n] * x[n]$$

- Sendo assim, no domínio da frequência, a saída será o produto da transformada da entrada pela transformada da resposta ao impulso.

$$X(\Omega) \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

- Neste caso, a função de transferência no domínio da frequência será a Transformada de Fourier discreta da resposta ao impulso, podendo-se expressar como:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

Resumo

$$y[n] = h[n] * x[n]$$

Saída no tempo

DTFT

$$Y(\Omega) = DTFT\{h(\Omega)\}DTFT\{x(\Omega)\}$$
$$= H(\Omega)X(\Omega)$$

Saída no domínio da frequência

IDTFT

$$y[n] = DTFT^{-1}\{Y(\Omega)\}$$

Saída no tempo

DTFT e Sistemas LTI

Função de Transferência

Exemplo

- Calcular a saída do sistema LTI ante a entrada $x[n]$

$$x[n] = \alpha^n \mu[n] \longrightarrow \boxed{h[n] = \delta[n] - \alpha\delta[n-1]} \longrightarrow y[n]$$

- *Dica:*
  - Usar a *propriedade de deslocamento no tempo*:

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{DTFT} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

  - Lembrar que:

$x[n]$		$X(\Omega)$
$\alpha^n \mu[n]$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$

$x[n]$		$X(\Omega)$
$\delta[n]$	$\leftrightarrow$	1

DTFT e Sistemas LTI

Função de Transferência

Solução

- Calculando $X(\Omega)$:

$$X(\Omega) = DTFT\{x[n]\}$$
$$= DTFT\{\alpha^n \mu[n]\}$$

$$\alpha^n \mu[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$

DTFT e Sistemas LTI

Função de Transferência

Solução

- Calculando $H(\Omega)$:

$$
\begin{aligned}
H(\Omega) &= DTFT\{h[n]\} \\
&= DTFT\{\delta[n] - \alpha\delta[n-1]\} \\
&= DTFT\{\delta[n]\} - \alpha DTFT\{\delta[n-1]\}
\end{aligned}
$$

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{DTFT} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

$$
\begin{aligned}
&= DTFT\{\delta[n]\} - \alpha e^{-j\Omega.1} DTFT\{\delta[n]\} \\
&= (1 - \alpha e^{-j\Omega.1}) DTFT\{\delta[n]\}
\end{aligned}
$$

$$\delta[n] \xleftrightarrow{DTFT} 1$$

$$
\begin{aligned}
&= (1 - \alpha e^{-j\Omega}).1 \\
&= 1 - \alpha e^{-j\Omega}
\end{aligned}
$$

DTFT e Sistemas LTI

Função de Transferência

Solução

- Calculando $Y(\Omega)$, aplicando a propriedade da convolução:

$$
\begin{aligned}
Y(\Omega) &= H(\Omega)X(\Omega) \\
&= \left(1 - \alpha e^{-j\Omega}\right)\left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

- Calculando $y[n]$

$$DTFT^{-1}\{Y(\Omega)\} = DTFT^{-1}\{1\}$$

$$\delta[n] \xleftrightarrow{DTFT} 1$$

$$y[n] = \delta[n]$$

Bibliografia

Bibliografia

John G. Proakis, and Dimitris K. Manolakis. *Digital Signal Processing* (4th Edition). Pearson, USA, 2007