Series de Fourier de Tempo Continuo - CTFS (Parte I)

Professor
Dr. Jorge Leonid Aching Samatelo
jlasam001@gmail.com

Equação de sínteses

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0 t}$$

Domínio do tempo continuo — $x(t)$ $\quad x(t)\xleftrightarrow{CTFS} c_k \quad$ c_k — Domínio dos coeficientes da serie

$$c_k=\frac{1}{T}\int_{t\in<T>} x(t)e^{-jkw_0 t}dt$$

Equação de análises

Índice

Introdução

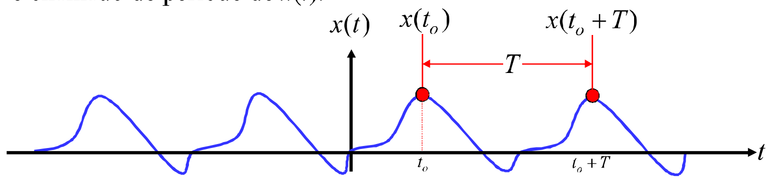
Introdução

Sinais periódicos e aperiódicos

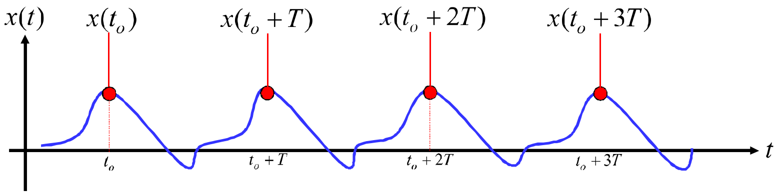
- Um sinal $x(t)$ é periódico se cumpre com a seguinte relação:

$$x(t)=x(t+T)\ ;T\in\mathbb{R}$$

- Onde:
  - T é chamado de período de $x(t)$.



- Se um sinal é periódico de período T então também é periódico de período $2T$, $3T$, $4T$, …
  - O ***período fundamental*** de $x(t)$, T_0 , é o menor valor positivo de T para o qual a relação anterior é valida.



Introdução

Função ortogonal

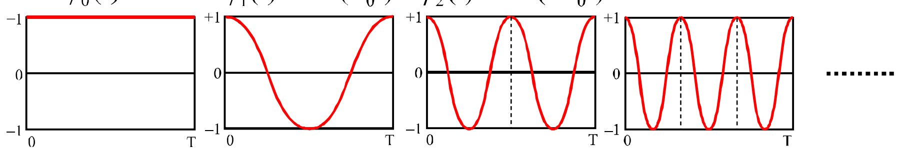
- Seja o conjunto de funções

$$\{\varphi_i(t)\}, i = 0,1,2,\cdots$$

- Por exemplo, o conjunto de funções cosseno:

$$\varphi_k(t) = \cos(kw_0 t)$$

$\varphi_0(t) = 1$ $\varphi_1(t) = \cos(w_0 t)$ $\varphi_2(t) = \cos(2w_0 t)$ $\varphi_3(t) = \cos(3w_0 t)$



Cada função cosseno $\varphi_i(t)$ do conjunto de funções $\{\varphi_i(t)\}$ tem como frequência um múltiplo inteiro positivo de uma frequência fundamental w_0.

Introdução

Função ortogonal

- Seja o conjunto de funções

$$\{\varphi_i(t)\}, i = 0,1,2,\cdots$$

- $\{\varphi_i(t)\}$ é chamado de **CONJUNTO ORTOGONAL** no intervalo $[t_1,t_2]$ se para cada pares de funções pertencentes ao conjunto se cumpre:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ K_j & i = j \end{cases}$$

- Onde:
  - $\varphi_j^*(t)$ é o complexo conjugado $\varphi_j(t)$.

Introdução

Função ortogonal

- Seja o conjunto de funções

$$\{\varphi_i(t)\}, i = 0,1,2,\cdots$$

- $\{\varphi_i(t)\}$ é chamado de **CONJUNTO ORTONORMAL** no intervalo $[t_1,t_2]$ se para cada pares de funções pertencentes ao conjunto se cumpre:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

- Onde:
  - $\varphi_j^*(t)$ é o complexo conjugado $\varphi_j(t)$.

O conjunto de funções cosseno $\{\varphi_i(t)\}$ é um conjunto ortogonal (este resultado pode ser obtido por integração direta).

$$\int_{t_1=-T/2}^{t_2=+T/2} \varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt = \int_{t_1=-T/2}^{t_2=+T/2} \cos(iw_0 t)\cos(jw_0 t)dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ T/2 & i = j \end{cases}$$

Introdução

Função ortogonal

- Qualquer sinal pode ser representada como uma combinação de um conjunto de funções ortogonais.

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i(t)$$

- Onde os coeficientes c_k são determinados pela formula de Euler-Fourier.

$$c_j = \frac{1}{K_j}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\varphi_j^*(t)dt$$

- Tal que

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_j, & i = j \end{cases}$$

Determinação dos coeficientes c_i

OPCIONAL

- Partimos da representação de $x(t)$ como uma combinação de um conjunto de funções ortogonais e operamos

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i\varphi_i(t)$$

$$x(t)\varphi_j^*(t)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\varphi_j^*(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)\right)dt$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty} c_i\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt=\begin{cases}0, & i\neq j\\ K_j, & i=j\end{cases}$$

$$=c_0\underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\varphi_0(t)\varphi_j^*(t)dt}_{=0}+c_1\underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\varphi_1(t)\varphi_j^*(t)dt}_{=0}+\cdots+c_j\underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\varphi_j(t)\varphi_j^*(t)dt}_{=K_j}+\cdots$$

$$=c_jK_j$$

Determinação dos coeficientes c_i

OPCIONAL

- Solucionando para c_j obtemos uma representação o coeficiente j-ésimo da combinação linear

$$c_j=\frac{1}{K_j}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\varphi_j^*(t)dt$$

Introdução

Função ortogonal

Exemplo

- Determinar se o conjunto de exponenciais complexas imaginárias puras formam um conjunto ortogonal de funções no intervalo $[t_o, t_o+2\pi/w_0]$.

$$\{e^{jnw_ot}\}, n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

- *Dica*:
  - Ver se o conjunto de exponenciais complexas imaginárias puras cumpre com a condição de ortogonalidade no intervalo $[t_o, t_o+2\pi/w_0]$:

$$\int_{t_1=t_0}^{t_2=t_0+\frac{2\pi}{w_0}}\varphi_n(t)\varphi_m^*(t)dt=\begin{cases}0 & n\neq m\\ K_j & n=m\end{cases}$$

Introdução

Função ortogonal

Solução

- Bastara com determinar se o conjunto de funções cumpre com a condição de ortogonalidade no intervalo $[t_o, t_o+2\pi/w_0]$.

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi_n(t)\varphi_m^*(t)dt=\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{w_0}} e^{jnw_0t}(e^{jmw_0t})^*dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{w_0}} e^{jnw_0t}e^{-jmw_0t}dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{w_0}} e^{j(n-m)w_0t}dt$$

Introdução

Função ortogonal

Solução

- A solução da integral anterior tem 2 casos:
  - **Caso 1** : $n = m$

$$\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{w_0}} e^{j(n-m)w_0 t}dt = \int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{w_0}} e^{j0w_0 t}dt = \int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{w_0}} 1dt = \frac{2\pi}{w_0}$$

  - **Caso 2** : $n \neq m$

$$\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{w_0}} e^{j(n-m)w_0 t}dt = \left.\frac{e^{j(n-m)w_0 t}}{(n-m)w_0}\right|_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega_0}}$$

$$= \frac{e^{j(n-m)w_0 t_0}}{(n-m)w_0}(e^{j(n-m)2\pi} - 1)$$

$$= \frac{e^{j(n-m)w_0 t_0}}{(n-m)w_0}(\cos((n-m)2\pi) + j\sin((n-m)2\pi) - 1) = 0$$

Introdução

Função ortogonal

Solução

- Então:

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j^*(t)dt = \int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{w_0}} e^{j(n-m)w_0 t}dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{2\pi}{w_0} & i = j \end{cases}$$

- Portanto

O conjunto de exponenciais complexas imaginárias puras formam um conjunto ortogonal de funções no intervalo $[t_o, t_o + 2\pi/w_0]$.

CTFS

CTFS

Definição

$$x(t) \xleftrightarrow[T]{CTFS} c_k$$

$$c_k = CTFS\{x(t)\}$$

$$x(t) = CTFS^{-1}\{c_k\}$$

- De forma geral podemos definir a Serie de Fourier de Tempo Continuo (CTFS-*Continuous Time Fourier Series*) como:
  - uma transformação linear $CTFS\{\}$ de ida e volta, aplicada sobre um sinal continua de período T, que permite determinar os coeficientes da serie harmônica que descreve a $x(t)$.

CTFS

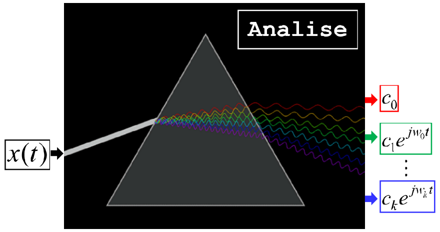
Definição

- *Equação de Analise (forma direta)*

$$c_k \triangleq CTFS\{x(t)\}$$

$$\triangleq \frac{1}{T}\int_{t\in<T>} x(t)e^{-jkw_0 t}\,dt$$

Do *domínio do tempo* ao *domínio da frequência*

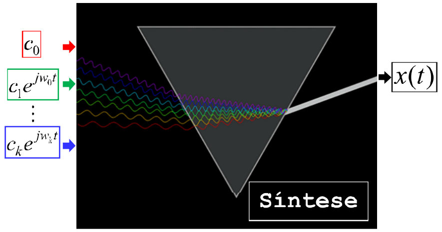


- *Equação de Síntese (forma inversa)*

$$x(t) \triangleq CTFS^{-1}\{c_k\}$$

$$\triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0 t}$$

Do *domínio da frequência* ao *domínio do tempo*



CTFS

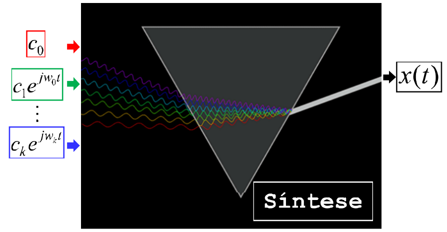
Definição

- Observe que:

$$x(t) \triangleq CTFS^{-1}\{c_k\}$$

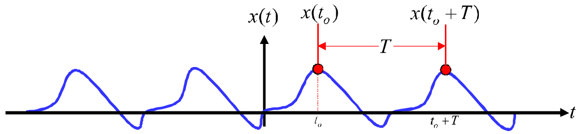
$$\triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0 t}$$

Do *domínio da frequência* ao *domínio do tempo*



A equação de síntese gera a Série Harmônica que é próxima a $x(t)$ no intervalo $[t_o, t_o + T]$, onde a frequência fundamental w_0 é definida pelo valor do período fundamental do sinal periódica $x(t)$.

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$



CTFS

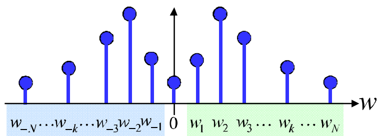
Representação Espectral

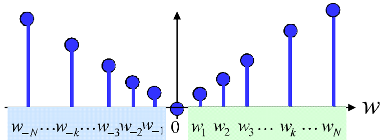
- A representação espectral da serie de Fourier será:

$$c_k = \mathrm{Re}\{c_k\} + j\,\mathrm{Im}\{c_k\}$$

$\|c_k\|$ — *Espectro*

$\angle c_k$ — *Fase*





CTFS

Calculo da CTFS

Exemplo

- Determinar a CTFS do seguinte sinal continuo

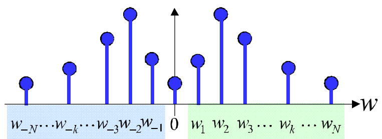
$$x(t) = 3\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t + \tfrac{\pi}{4}\right)$$

- *Dica*:
  - Usando a identidade de Euler representar $x(t)$ como:

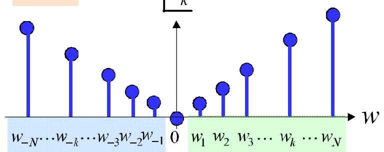
$$x(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0 t}$$

  - Reconhecer os coeficientes c_k e as frequências correspondentes e desenhar a representação espectral de $x(t)$.

Espectro $\|c_k\|$



Fase $\angle c_k$



CTFS

Calculo da CTFS

Solução

- ❑ Neste caso, como o sinal $x(t)$ é a uma função sinusoidal, podemos determinar sua CTFS por inspeção usando a identidade de Euler.

$$x(t) = 3\cos\left(\tfrac{\pi}{2}t + \tfrac{\pi}{4}\right) \qquad w_0 = \tfrac{\pi}{2}$$

$$= 3\cos\left(w_0 t + \tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$= 3\left(\frac{e^{j(w_0 t + \frac{\pi}{4})} + e^{-j(w_0 t + \frac{\pi}{4})}}{2}\right) \qquad \cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

$$= \left(\frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)e^{jw_0 t} + \left(\frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)e^{-jw_0 t}$$

CTFS

Calculo da CTFS

Solução

- ❑ Comparamos com a formula da CTFS para $x(t)$ e por inspeção reconhecemos os coeficientes da serie.

$$x(t) = \left(\frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)e^{jw_0 t} + \left(\frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)e^{-jw_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0 t}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)}_{=c_1}e^{j(1)w_0 t} + \underbrace{\left(\frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}_{=c_{-1}}e^{j(-1)w_0 t}$$

- ❑ Então, os coeficientes da CTFS são:

$$c_1 = 3e^{j\frac{\pi}{4}} \qquad c_{-1} = 3e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

CTFS

Calculo da CTFS

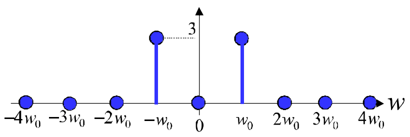
Solução

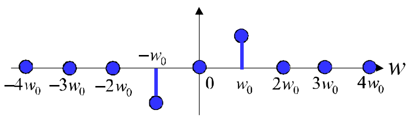
- ❑ Desenhando a representação espectral dos coeficientes da CTFS de $x(t)$.

$$c_1 = \tfrac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \qquad c_{-1} = \tfrac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$\|c_k\|$ — *Espectro*

$\angle c_k$ — *Fase*



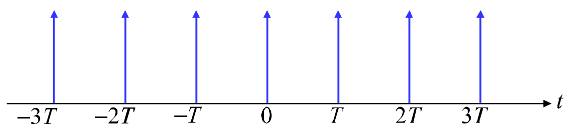


CTFS

Calculo da CTFS

Exemplo

- ❑ Determine a CTFS de um trem de impulsos unitários com período T.



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- ❑ *Dica*:
  - ➢ Usando a equação de analise determinar os coeficientes c_k da serie de Fourier:

$$c_k \triangleq CTFS\{x(t)\} = \frac{1}{T}\int_{t\in\langle T\rangle} x(t)e^{-jkw_0 t}\,dt$$

  - ➢ Usar a *Propriedade de Translação* do impulso unitário ao solucionar a integral

$$x(t)\delta(t - t_o) = x(t_o)\delta(t - t_o)$$

CTFS

Calculo da CTFS

Solução

- Calculamos os coeficientes da CTFS do trem de impulsos

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_{t\in<T>} x(t)e^{-jkw_0t}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jkw_0t}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-jkw_0t}dt \\ &= \frac{1}{T}\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\underbrace{e^{-jkw_0 0}}_{=1}dt}_{=1} \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned}$$

$$x(t)\delta(t-t_o) = x(t_o)\delta(t-t_o)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

CTFS

Calculo da CTFS

Solução

- Então, a representação de $x(t)$ como uma combinação de harmônicos é

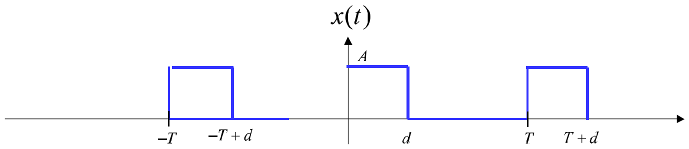
$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T}\right) e^{jkw_0t} \\ &= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jkw_0t} \end{aligned}$$

CTFS

Calculo da CTFS

Exemplo

- Determine os coeficientes da CTFS de um pulso retangular periódico.



$$x(t) = \begin{cases} A & 0 < t < d \\ 0 & d < t < T \end{cases}$$

- *Dica*:
  - Usando a equação de analise determinar os coeficientes c_k da serie de Fourier:

$$c_k \triangleq CTFS\{x(t)\} = \frac{1}{T}\int_{t\in<T>} x(t)e^{-jkw_0t}dt$$

CTFS

Calculo da CTFS

Solução

- Calculamos os coeficientes da CTFS de um pulso retangular periódico.

$$\begin{aligned} c_k &\triangleq CTFS\{x(t)\} \\ &= \frac{1}{T}\int_{t\in<T>} x(t)e^{-jkw_0t}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jkw_0t}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^d Ae^{-jkw_0t}dt + \cancel{\frac{1}{T}\int_d^T 0e^{-jkw_0t}dt} \\ &= \frac{A}{T}\int_0^d e^{-jkw_0t}dt \end{aligned}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < d \\ 0 & d < t < T \end{cases}$$

CTFS

Calculo da CTFS

Solução

- Calculamos os coeficientes da CTFS de um pulso retangular periódico.

$$c_k = \frac{A}{T}\int_0^d e^{-jkw_0 t}\,dt = \frac{A}{T}\frac{1}{-jkw_0}e^{-jkw_0 t}\Big|_0^d$$

$$= \frac{A}{T}\left(\frac{1}{-jkw_0}e^{-jkw_0 d} - \frac{1}{-jkw_0}\right)$$

$$= \frac{A}{T}\frac{1}{jkw_0}(1-e^{-jkw_0 d})$$

$$= \frac{A}{T}\frac{1}{jkw_0}e^{-jkw_0 d/2}(e^{jkw_0 d/2}-e^{-jkw_0 d/2})$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{j2}$$

$$= \frac{Ad}{T}\frac{\sin\left(\frac{k\pi d}{T}\right)}{\left(\frac{k\pi d}{T}\right)}e^{-jkw_0 d/2}$$

CTFS

Calculo da CTFS

Solução

- Então, a representação de $x(t)$ como uma combinação de harmônicos é

$$x(t) \triangleq CTFS^{-1}\{c_k\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{Ad}{T}\frac{\sin\left(\frac{k\pi d}{T}\right)}{\left(\frac{k\pi d}{T}\right)}e^{-jkw_0 d/2}\right)e^{jkw_0 t}$$

$$\operatorname{sinc}(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\varphi}$$

$$= \frac{Ad}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{k\pi d}{T}\right)e^{jkw_0(t-d/2)}$$

CTFS

Resumo

Equação de sínteses

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0 t}$$

Domínio do tempo continuo $x(t)$

$$x(t) \xleftrightarrow[T]{CTFS} c_k$$

c_k Domínio dos coeficientes da serie

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{t\in<T>} x(t)e^{-jkw_0 t}\,dt$$

Equação de análises

Bibliografia

Bibliografia

John G. Proakis, and Dimitris K. Manolakis. *Digital Signal Processing* (4th Edition). Pearson, USA, 2007