Lista de Exercícios - Algoritmos Numéricos

Resolução de Sistemas Lineares via eliminação de Gauss e via métodos iterativos

Observações:

1) Nesta lista está sendo usada a notação americana, ou seja, usa-se o ponto (.) para denotar a parte fracionária. 2) Nos exercícios onde não se irá simular uma máquina específica, use a memória de sua calculadora e anote os valores com, no mínimo, 4 dígitos depois do ponto, com o arredondamento que quiser. 3) Nos exercícios onde se pede para simular as operações executadas por uma dada máquina (com mantissa estabelecida) não é necessário ficar escrevendo os valores numéricos obtidos usando potências de 10 (mas se preferir pode empregá-las). É importante, apenas, indicar o valor numérico que fica armazenado na memória após cada cálculo.

1. Obtenha o sistema triangular superior equivalente ao sistema abaixo pelo método de Eliminação de Gauss sem pivoteamento.

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

2. Dado o sistema linear abaixo

$$\begin{cases} 77.0x_1 + 55.0x_2 = 400.0 \\ 2.0x_1 + 1.5x_2 = -3.0 \end{cases}$$

   (a) Calcular a solução deste sistema, via Eliminação de Gauss (sem pivoteamento) simulando um computador que opere com aritmética de ponto flutuante normalizada com $t = 4$ dígitos significativos na mantissa, base $\beta = 10$ e expoente (inteiro) em $I = [-99, 99]$. Escreva os valores intermediários obtidos nos cálculos. *OBS: (1) Os arredondamentos devem ser feitos por corte (chopping) isto é, desprezar todos os dígitos partir do* $(t+1)$ *ésimo dígito.*

   (b) Sabendo que a solução exata é $x_{exata} = [139.090909, -187.454545]^t$, calcule o erro verdadeiro relativo (relativo à solução exata fornecida) contido na solução obtida na letra (a). Efetue estas contas com a precisão de sua calculadora, ou seja, neste item não é preciso mais simular as operações de uma máquina específica.

   (c) Descreva o(s) tipo(s) de erro(s) contidos(s) na solução obtida na letra (a).

3. Resolva o sistema linear abaixo pelo método de Eliminação de Gauss, com pivoteamento.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_3 = 0.5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -4.1 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 14.1 \\ 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 12.8 \end{cases}$$

   Efetue as contas com a precisão de sua calculadora, ou seja, neste exercício não é preciso simular as operações de uma máquina específica.

4. Considere o sistema abaixo :

$$\begin{cases} 2.65x_1 - 2.0x_2 = 5.3 \\ 5.3x_1 + 2x_3 = 12.3 \\ 0.09x_2 + 0.09x_3 = 0.09 \end{cases}$$

   Resolva o sistema, pelo método de Eliminação de Gauss, com pivoteamento, simulando as operações executadas por um computador que opere com aritmética de ponto flutuante com $t = 3$ dígitos significativos na mantissa, base 10 e expoente (inteiro) em em $I = [-99, 99]$. *OBS: (1) Os arredondamentos devem ser feitos por corte (chopping) isto é, desprezar todos os dígitos partir do* $(t+1)$ *ésimo dígito.*

5. Descreva a estratégia de pivoteamento empregada no método de eliminação de Gauss.

MÉTODOS ITERATIVOS

6. Dado o sistema linear

$$\begin{aligned} 3.00x_1 - 1.00x_2 + 0.50x_3 &= 2.8 \\ 1.00x_1 + 6.00x_2 + 2.00x_3 &= 10.0 \\ 0.75x_1 + 3.00x_2 - 10.0x_3 &= -6.9 \end{aligned}$$

   (a) Escreva as expressões da atualização dos vetores (ou seja, dado o vetor da iteração (k), como é gerado o vetor da iteração $(k+1)$ para os métodos iterativos de Gauss-Jacobi e de Gauss-Seidel.

   (b) Faça as três primeiras iterações do método de Gauss Jacobi, com vetor inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

   (c) Faça as três primeiras iterações do método de Gauss Seidel, com vetor inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

7. Dada a expressão iterativa do método de Gauss-Jacobi:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= (3 + x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + x_4^{(k)})/10 \\ x_2^{(k+1)} &= (6 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)} - x_4^{(k)})/4 \\ x_3^{(k+1)} &= (5 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - x_4^{(k)})/5 \\ x_4^{(k+1)} &= (10 + x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_3^{(k)})/10 \end{aligned}$$

   (a) Faça as duas primeiras iterações do método de Gauss-Jacobi com vetor inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^T$.

   (b) Podemos garantir que a sequência gerada será convergente, sem calculá-la? Justifique a sua resposta.

8. Obter a solução do sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 20x_2 + 5x_3 = 16 \\ -10x_1 + \quad + 0.2x_3 = 0 \\ 13x_1 + 1x_2 + 35x_3 = 23 \end{cases}$$

com tolerância $\varepsilon = 0.02$ via método iterativo de Gauss Seidel com vetor chute inicial $x_0 = (0; 0; 0)^T$, adotando uma configuração que garanta a convergência da sequência gerada (ou seja, considere fazer troca de linhas no sistema para que este satisfaça as condições de convergência).

9. Dado um sistema linear $Ax = b$, tal que $A_{i,i} \neq 0$ para todo i, não singular. Escreva um código, em octave, para gerar *NumIter* novas aproximações da solução, partindo do vetor $x^{(0)} = (0, 0, ..., 0)^T$ pelo método iterativo de Gauss-Seidel.
   Considere que os valores de A, b e *NumIter* (um inteiro positivo qualquer, maior que 2) já estão na memória.

10. Dado o algoritmo do item anterior (exercício acima) calcule o número total de operações para se efetuar **uma iteração**.

11. Dado um sistema linear $Ax = b$, um vetor chute inicial $x^{(0)}$=$(0, ..., 0)^T$, uma dada tolerância *tol* e um valor NumMax, escreva um codigo para obter a solução do sistema, com precisão *tol*, pelo método iterativo de Gauss-Jacobi Considere a possibilidade de não haver convergência, sendo assim, nestas situações, o código deve parar quando fizer NumMax iterações (valor definido pelo usuário).
    O critério de parada deve ser : $DifRel = \frac{||x^{k+1} - x^k||_{max}}{||x^{k+1}||_{max}} < tol$.