Interpolação polinomial via forma de Newton

Algoritmos Numéricos - Topico 6-2
O polinômio interpolador na forma de Newton

Prof. Cláudia G. Varassin DI/UFES
emails:claudia.varassin@ufes.br e galarda@inf.ufes.br

Abril de 2021

Interpolação Polinomial

1. Formas de obter o polinômio interpolador
2. Operador diferenças divididas ascendentes
3. O polinômio interpolador na forma de Newton

Fazer uma interpolação polinomial consiste em determinar um polinômio de grau n, $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$
que aproxime uma função $f(x)$ em um conjunto de pontos.

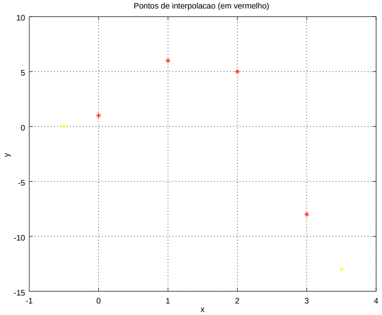
x_k	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$y_k = f(x_k)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

O polinômio interpolador deve coincidir com a função $f(x)$ nestes pontos.

$$p_n(x_i) = f(x_i)$$

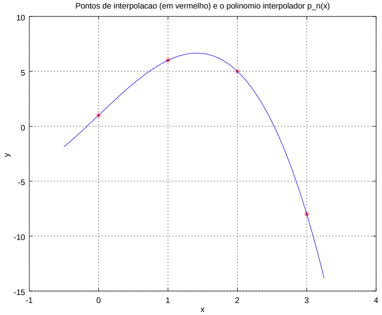
A condição acima é chamada de restrição de interpolação.

Ilustrando...
Os pontos (x_i, y_i)



Ilustrando...

O polinômio interpolador: $p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$



Embora exista um e só um polinômio de grau n que passa por $(n+1)$ pontos, há diversos caminhos para se obter o polinômio, dentres eles, cita-se:

1. Resolução via o sistema linear $Xa = y$
2. Forma de Lagrange
3. Forma de Newton

A resolução do problema de interpolação via o caminho "1" (via o sistema linear) é computacionalmente ineficiente se comparada com outras formas, isto é, representa um caminho onde se realiza mais operações comprado com outros possíveis.

Um polinômio de grau n pode ser representado de diversas formas. Uma forma possível é a seguinte:

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Esta representação é chamada de polinômio de Newton.

Um polinômio de grau n pode ser representado de diversas formas. Uma forma possível é a seguinte:

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Esta representação é chamada de polinômio de Newton.
Obter o polinômio consiste em obter os coeficientes b_i.

Para se obter os coeficientes b_i é necessário calcular um valor conhecido como *diferença dividida ascendente*.

Operador diferença dividida ascendente

Há diferenças divididas ascendentes de várias ordens. Estas são dadas por:

Diferença dividida de ordem 0:

$$\triangle^0 y_i = y_i$$

Exemplos: $\triangle^0 y_0 = y_0, \triangle^0 y_1 = y_1, ..., \triangle^0 y_7 = y_7$

Operador diferença dividida ascendente

Há diferenças divididas ascendentes de várias ordens. Estas são dadas por:

Diferença dividida de ordem 0:

$$\triangle^0 y_i = y_i$$

Exemplos: $\triangle^0 y_0 = y_0, \triangle^0 y_1 = y_1, ..., \triangle^0 y_7 = y_7$

Diferença dividida de ordem 1:

$$\triangle^1 y_i = \frac{\triangle^0 y_{i+1} - \triangle^0 y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Operador diferença dividida ascendente

Há diferenças divididas ascendentes de várias ordens. Estas são dadas por:

Diferença dividida de ordem 0:

$$\triangle^0 y_i = y_i$$

Exemplos: $\triangle^0 y_0 = y_0, \triangle^0 y_1 = y_1, ..., \triangle^0 y_7 = y_7$

Diferença dividida de ordem 1:

$$\triangle^1 y_i = \frac{\triangle^0 y_{i+1} - \triangle^0 y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Exemplos:

$$\triangle^1 y_0 = \frac{\triangle^0 y_1 - \triangle^0 y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\triangle^1 y_1 = \frac{\triangle^0 y_2 - \triangle^0 y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Diferença dividida de ordem 2:

$$\triangle^2 y_i = \frac{\triangle^1 y_{i+1} - \triangle^1 y_i}{x_{i+2} - x_i}$$

Diferença dividida de ordem 2:

$$\triangle^2 y_i = \frac{\triangle^1 y_{i+1} - \triangle^1 y_i}{x_{i+2} - x_i}$$

Exemplo:

$$\triangle^2 y_0 = \frac{\triangle^1 y_1 - \triangle^1 y_0}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x1)} - \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}}{x_2 - x_0}$$

A diferença dividida de ordem qualquer é dada por:
Diferença dividida de ordem k:

$$\triangle^k y_i = \frac{\triangle^{(k-1)} y_{i+1} - \triangle^{(k-1)} y_i}{x_{i+k} - x_i}$$

Calculando as Diferenças Divididas

Um exemplo:

x_k	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0
$y_k = f(x_k)$	1.0	1.5	0.0	-1.0	-2.0

Tabela de diferenças divididas:

	$\triangle^0 y_i$	$\triangle^1 y_i$	$\triangle^2 y_i$	$\triangle^3 y_i$	$\triangle^4 y_i$
$x_0 = -1$	y_0= 1.0	0.5			
$x_1 = 0$	y_1= 1.5	-1.5			
$x_2 = 1$	y_2= 0.0	-1.0			
$x_3 = 2$	y_3= -1.0	-1.0			
$x_4 = 3$	y_4=-2.0				

Cont... Completando a tabela de diferenças divididas:

	$\triangle^0 y_i$	$\triangle^1 y_i$	$\triangle^2 y_i$	$\triangle^3 y_i$	$\triangle^4 y_i$
$x_0 = -1$	1.0	0.5	-1.0	0.4166	-0.1249
$x_1 = 0$	1.5	-1.5	0.25	-0.0833	
$x_2 = 1$	0.0	-1.0	0		
$x_3 = 2$	-1.0	-1.0			
$x_4 = 3$	-2.0				

Diferença dividida de ordem k: $\triangle^k y_i = \frac{\triangle^{(k-1)} y_{i+1} - \triangle^{(k-1)} y_i}{x_{i+k} - x_i}$

	DD(i,0)	DD(i,1)	DD(i,2)	...	DD(i,k)	...	DD(i,n)
	$\triangle^0 y_i$	$\triangle^1 y_i$	$\triangle^2 y_i$	..	$\triangle^k y_i$	...	$\triangle^n y_i$
x_0	y_0						
x_1	y_1						
x_2	y_2						
$\vdots$							
x_i	y_i				$\triangle^k y_i$		
x_{i+1}	y_{i+1}						
$\vdots$							
$x_{(n-1)}$							
x_n							

Diferenças divididas ascendentes

$$\triangle^k y_i = \frac{\triangle^{(k-1)} y_{i+1} - \triangle^{(k-1)} y_i}{x_{i+k} - x_i}$$

ALGORITMO
INICIO
Para i de 0 até n
  DD(i,0) = y(i)
Fim
Para k de 1 até n
  Para i de 0 até (n -k)
    DD(i,k) = (DD(i+1,k-1) - DD(i,k-1))/ (x(i+k) - x(i))
  Fim
Fim k
FIM

Dados os pontos no plano P=((x_0, y_0), (x_0, y_0), ... (x_n, y_n)) interpoladores
É possível determinar os coeficientes b_i do polinômio :

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Impondo, uma a uma, as restrições de interpolação:

1^a **restrição** $p_n(x_0) = y_0$:

$$p_n(x_0) = b_0 + b_1(x_0 - x_0) + b_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1) + \ldots + b_n(x_0 - x_0)(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_{n-1})$$

$$p_n(x_0) = b_0 + 0 + \ldots + 0 = y_0$$

Portanto

$$b_0 = y_0 = \triangle^0 y_0$$

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Impondo a 2^a **restrição**: $p_n(x_1) = y_1$:

$$p_n(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) + b_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) + \ldots + b_n(x_1 - x_0)(x_1 - x_1)\ldots(x_1 - x_{n-1})$$

$$p_n(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) + 0 + \ldots + 0 = y_1$$

Portanto

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \triangle^1 y_0$$

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Impondo a 3ª **restrição**:
$p_n(x_2) = y_2$:

$$p_n(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) + \ldots + b_n(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\ldots(x_2 - x_{n-1})$$

$$p_n(x_2) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) + 0 + \ldots + 0 = y_2$$

Portanto

$$b_2 = \frac{y_2 - b_0 - b_1(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Susbtituindo $b_0 = y_0$ e $b_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ e fazendo várias simplificações:

$$b_2 = \frac{\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x1)} - \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}}{x_2 - x_0} = \triangle^2 y_0$$

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Impondo a $(n+1)^a$ **restrição**: $p_n(x_n) = y_n$:

$$p_n(x_1) = b_0 + b_1(x_n - x_0) + b_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \ldots + b_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1}) = y_n$$

Portanto

$$b_n = \triangle^n y_0$$

Assim, o polinômio interpolador de Newton é dado por:

$$p_n(x) = \triangle^0 y_0 + \triangle^1 y_0(x - x_0) + \triangle^2 y_0(x - x_0)(x_n - x_1) + \ldots + \triangle^n y_0(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Encontre o polinômio de Newton de grau 2 que interpola os pontos da tabela abaixo em seguida calcule uma estimativa para $f(-1)$.

x_k	-2	0	1
$y_k = f(x_k)$	3	1	-1

$$p_2(x) = b_0 + b_1(x+2) + b_2(x+2)(x-0)$$

onde

	$\triangle^0 y_i$	$\triangle^1 y_i$	$\triangle^2 y_i$
-2	3	-1	-0.33333
0	1	-2	
1	-1		

Cont...

	$\triangle^0 y_i$	$\triangle^1 y_i$	$\triangle^2 y_i$
x_0= -2	3	(-1)	-0.3333
x_1= 0	1	-2	
x_2= 1	-1		

$$p_2(x) = b_0 + b_1(x+2) + b_2(x+2)(x-0)$$

$$p_2(x) = 3 + (-1)(x+2) + (-0.3333)(x+2)(x-0)$$

$$p_2(-1) = 3 + (-1)((-1)+2) + (-0.3333)((-1)+2)((-1)-0)$$

$p_2(-1) = 3 - 1 + 0.33333 = 2.33333$
Obs: $p_2(x) = 3 - (x+2) - \frac{1}{3}(x+2)x = 1 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}x^2$

Avaliação do polinômio em um ponto usando parênteses encaixados (processo de Horner):

$$p_3(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Avaliação do polinômio em um ponto usando parênteses encaixados (processo de Horner):

$$p_3(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$p_3(x) = b_0 + (x - x_0)(b_1 + b_2(x - x_1) + b_3(x - x_1)(x - x_2))$$

Avaliação do polinômio em um ponto usando parênteses encaixados (processo de Horner):

$$p_3(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$p_3(x) = b_0 + (x - x_0)(b_1 + b_2(x - x_1) + b_3(x - x_1)(x - x_2))$$
$$p_3(x) = b_0 + (x - x_0)(b_1 + (x - x_1)(b_2 + (x - x_2)b_3))$$

$$\begin{aligned} c_3 &= b_3 \\ c_2 &= b_2 + (x - x_2)c_3 \\ c_1 &= b_1 + (x - x_1)c_2 \\ c_0 &= b_0 + (x - x_0)c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_3 &= d_3 \\ \Rightarrow c_i &= b_i + (x - x_i)c_{i+1}, \qquad i = 2, 1, 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_0 = p_3(x)$$

Bibliografia Básica

[1] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[2] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.