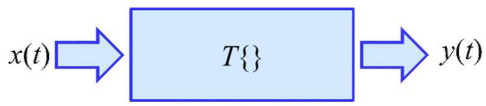
Sistemas de Tempo contínuo (Parte II)

Professor
Jorge Leonid Aching Samatelo
jlasam001@gmail.com



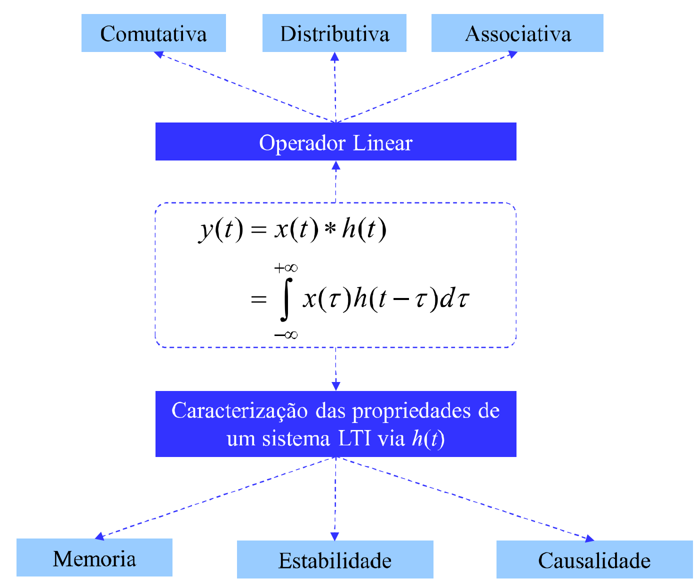
$$x(t) \xrightarrow{T} y(t)$$

$$y(t) = T\{x(t)\}$$

Índice

Propriedades da Convolução

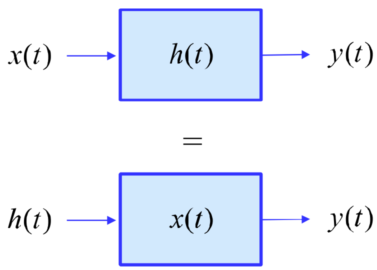
Propriedades da Convolução



Propriedades da Convolução

Comutativa

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$



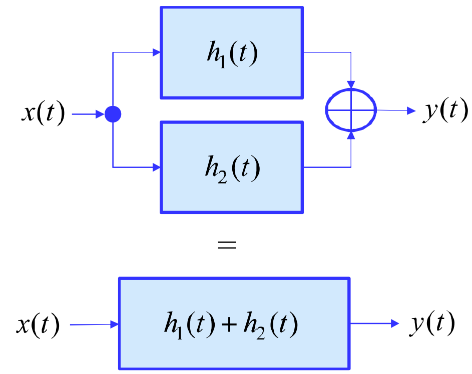
A ordem na qual dois sinais são convoluidos não faz diferença.

Propriedades da Convolução

Distributiva

$$y(t) = x(t) * \left(h_1(t) + h_2(t)\right) = h_1(t) * x_1(t) + h_2(t) * x_2(t)$$

Conexão paralela de sistemas.



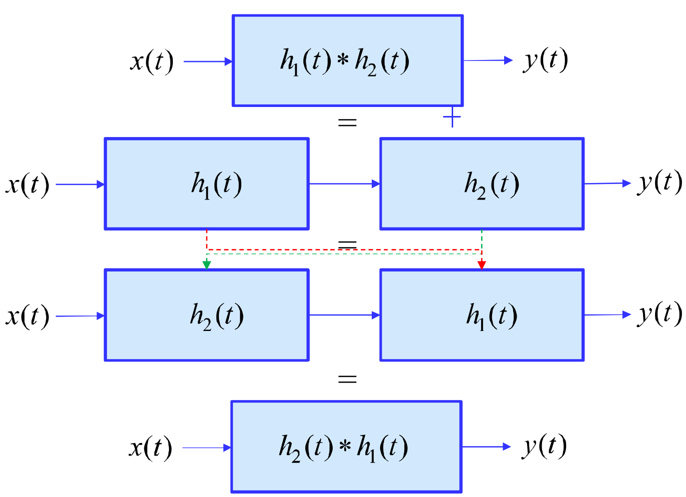
A convolução é distributiva em relação à soma.

Propriedades da Convolução

Associativa

$$y(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_2(t)) * h_1(t)$$

Conexão em cascata de sistemas

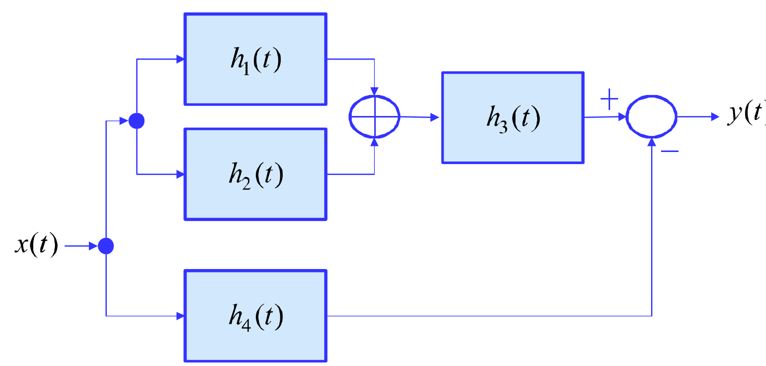


A convolução é associativa.

Propriedades da Convolução

Exemplo

- ❑ Determinar a função de transferência $h(t)$ do seguinte sistema:

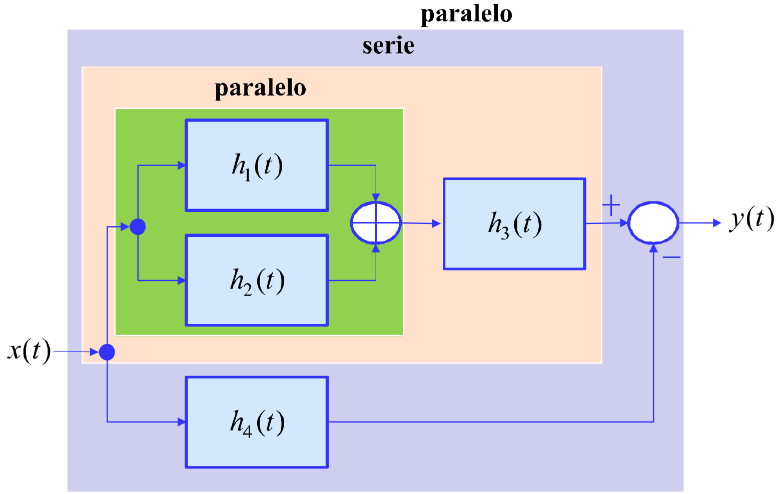


A. $h_1(t) * h_3(t) - h_4(t)$
B. $h_1(t) * h_4(t) - h_3(t)$
C. $(h_1(t) + h_2(t)) * h_3(t) - h_4(t)$
D. N.A.

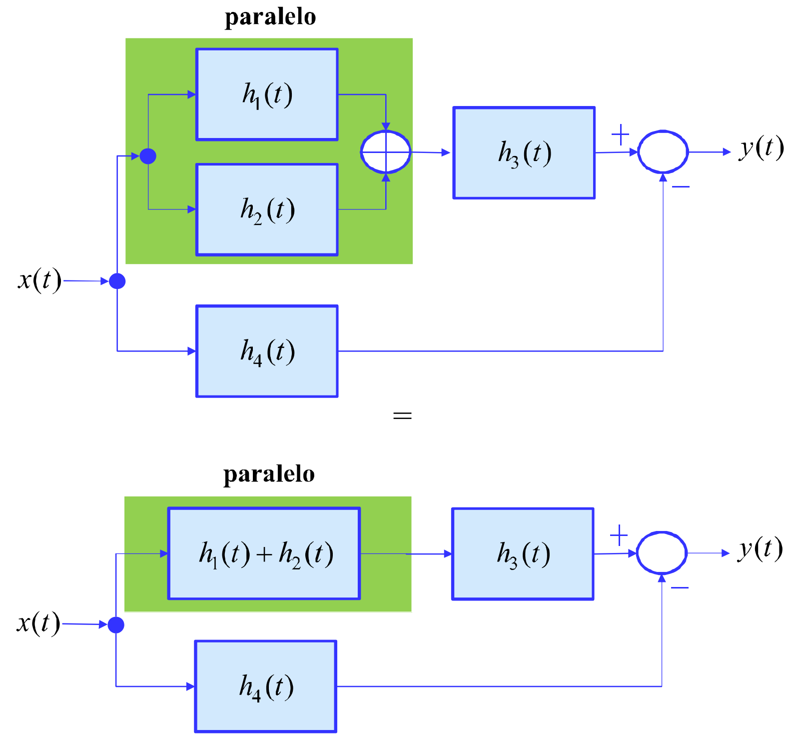
Propriedades da Convolução

Solução

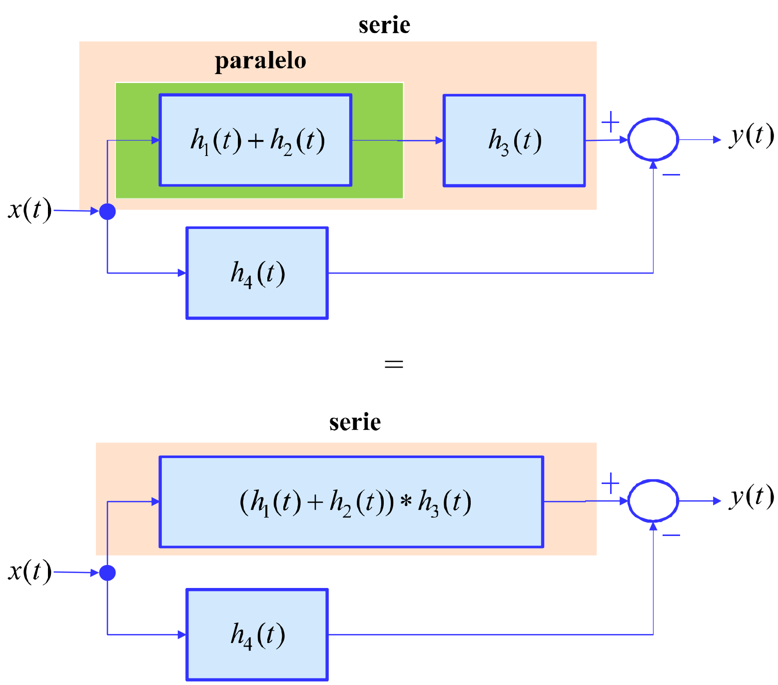
- Determinando o sistema equivalente:



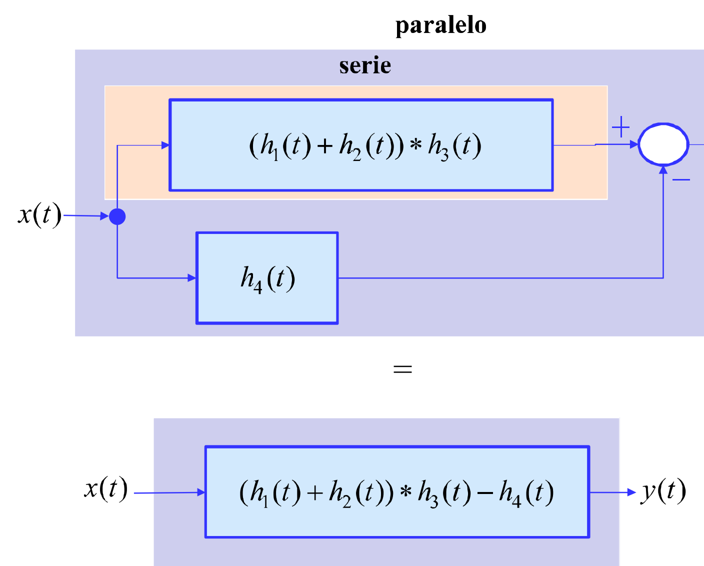
Solução



Solução



Solução



Propriedades da Convolução

Memoria

- Em um sistema **sem memoria**, a saída em um determinado instante depende unicamente do valor da entrada no mesmo instante.

- *Matematicamente*
  - Um sistema LTI de tempo contínuo é sem memoria, se:

$$h(\tau) = c\delta(\tau)$$

  - Onde,
    - c é uma constante arbitraria.

Propriedades da Convolução

Causalidade

- Um sistema é causal se a saída $y(t)$ depende unicamente dos valores passados ou presentes da entrada.

- *Matematicamente*
  - Um sistema LTI de tempo contínuo é causal, se:

$$h(t) = 0 \; ; \; \forall t < 0$$

Propriedades da Convolução

Estabilidade

- Um sistema é estável se uma entrada limitada produz uma saída limitada.
  BIBO: *Bounded Input-Bounded Output*.

- *Intuitivamente*
  - Pequenas variações aplicadas na entrada resultam em pequenas variações na saída.

- *Matematicamente*
  - Um sistema LTI de tempo contínuo é BIBO estável, se a resposta ao impulso seja absolutamente integrável, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \, d\tau < \infty$$

Resposta de um sistema LTI a sinais elementares

Resposta de um sistema LTI a sinais elementares

Resposta ao degrau unitário

- A saída de um sistema LTI, a uma entrada degrau unitário é denotada como $s(t)$, e expressada em termos da resposta impulsiva $h(t)$ como:

$$u(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

- Agora, fazendo uso do teorema fundamental do calculo, podemos chegar a uma relação que permite determinar a resposta impulsiva de um sistema via a resposta ao degrau unitário.

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

Teorema fundamental do cálculo

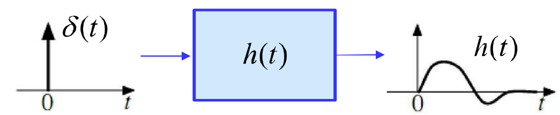
$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Resposta de um sistema LTI a sinais elementares

Resposta ao degrau unitário

Caso pratico: Medir a resposta impulsiva de um sistema LTI

- Considerando um sistema LTI real, gostaríamos determinar a resposta ao impulso $h(t)$.



Isso pode ser difícil, já que, é INVIÁVEL alimentar um sistema real com uma entrada de pouca duração e grande amplitude.

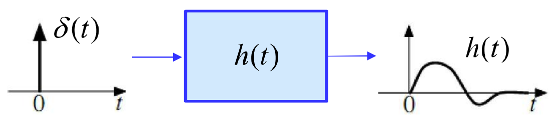
Faixa de operação do sistema

Resposta de um sistema LTI a sinais elementares

Resposta ao degrau unitário

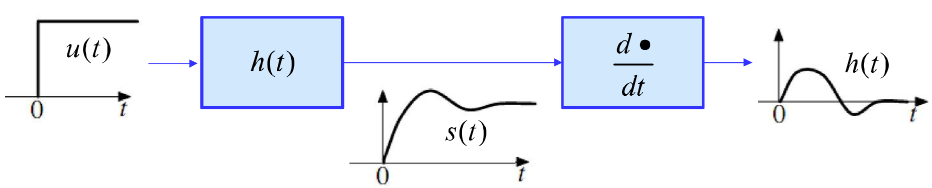
Caso pratico: Medir a resposta impulsiva de um sistema LTI

- Considerando um sistema LTI real, gostaríamos determinar a resposta ao impulso $h(t)$.



Isso pode ser difícil, já que, é INVIÁVEL alimentar um sistema real com uma entrada de pouca duração e grande amplitude.

- Uma alternativa comum é a determinar a resposta ao impulso via a resposta ao degrau unitário.



Resposta de um sistema LTI a sinais elementares

Resposta à uma exponencial complexa

- A saída de um sistema LTI, quando a entrada é uma exponencial complexa que tem unicamente parte imaginaria é caracterizada pela *resposta em frequência do sistema $H(jw)$*.

$$x(t) = e^{jwt} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = H(jw)e^{jwt}$$

- Onde, a *resposta em frequência do sistema $H(jw)$* e expressada em termos da resposta impulsiva $h(t)$ como:

$$H(jw) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-jw\tau}d\tau$$

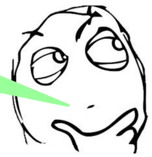
- *Podemos ver que*
  - Quando a entrada a um sistema LTI é uma exponencial complexa a saída é outra exponencial complexa com (possíveis) mudanças na amplitude e fase, mas mantendo a frequência original. Esta propriedade é bastante útil e da origem a resposta em frequência de um sistema LTI.

Resposta de um sistema LTI a sinais elementares

Resposta à uma exponencial complexa

- *Importância da resposta em frequência*
  - A resposta em frequência *H(jw)* de um sistema , é medível no laboratório, ao contrario da reposta impulsiva *h(t)* (que é de utilidade para analise teóricos).

Mas como é feito o calculo da resposta em frequência experimentalmente se é um valor complexo dependente da frequência *w*?



Primeiro, é necessário solucionar alguns exemplos.

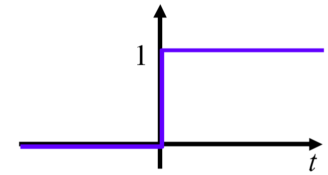
Resposta de um sistema LTI a sinais elementares

Resposta à uma exponencial complexa

Exemplo

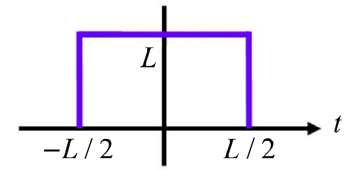
- Determine a resposta em frequência dos seguintes sistemas definidos via pela correspondente resposta ao impulso.
  - *Degrau unitário:*

$$h(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$



  - *Pulso Porta Unitário:*

$$h(t) = \frac{1}{L} ret\left(\frac{t}{L}\right) = \begin{cases} 1/L & t \in [-1/L, +1/L] \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$



- *Dica*
  - Lembrar que:

$$H(jw) \square \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-jw\tau} d\tau \qquad \int_{t_o}^{t_1} e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} \Big|_{t_o}^{t_1}$$

Resposta de um sistema LTI a sinais elementares

Resposta à uma exponencial complexa

Solução

- *Degrau unitário*: $h(t) = u(t)$
  - Sustituido na definição da resposta em frequência *H(jw)* a resposta ao impulso a usar.

$$H(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-jw\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-jw\tau} d\tau$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-jw\tau} d\tau$$

$$\int_{t_o}^{t_1} e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} \Big|_{t_o}^{t_1}$$

$$= \frac{1}{-jw} e^{-jw\tau} \Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{-jw} (\underbrace{e^{-jw(\infty)}}_{=0} - \underbrace{e^{-jw(0)}}_{=1})$$

$$= \frac{1}{jw}$$

Resposta de um sistema LTI a sinais elementares

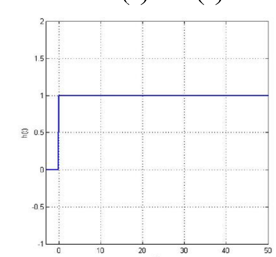
Resposta à uma exponencial complexa

Solução

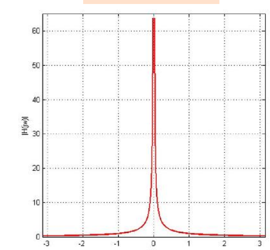
- *Degrau unitário*: $h(t) = u(t)$

$$H(jw) = \frac{1}{jw}$$

$h(t) = u(t)$

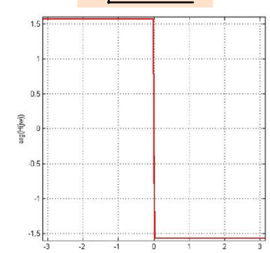


$\| H(jw) \|$



Modulo da reposta em frequência

$\angle H(jw)$



Fase da reposta em frequência

Resposta de um sistema LTI a sinais elementares

Resposta à uma exponencial complexa

Solução

- *Pulso Porta Unitário*: $h(t) = (1/L)ret(t/L)$
  - Sustituido na definição da resposta em frequência $H(jw)$ a resposta ao impulso a usar.

$$H(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-jw\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} ret\left(\frac{t}{L}\right) e^{-jw\tau} d\tau = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} e^{-jw\tau} d\tau$$

$$\int_{t_o}^{t_1} e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} \Big|_{t_o}^{t_1}$$

$$= \frac{1}{-jwL} e^{-jw\tau} \Big|_{-L/2}^{+L/2}$$

$$= \frac{1}{-jwL}\left(e^{-jw(L/2)} - e^{-jw(-L/2)}\right)$$

$$\text{sen}(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{j2}$$

$$= \frac{1}{wL/2}\left(\frac{e^{jwL/2} - e^{-jwL/2}}{j2}\right)$$

$$= \frac{sen(wL/2)}{wL/2}$$

Resposta de um sistema LTI a sinais elementares

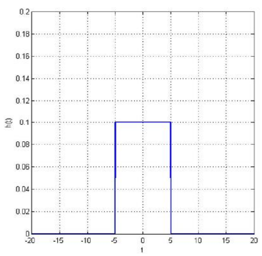
Resposta à uma exponencial complexa

Solução

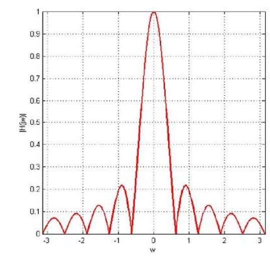
- *Pulso Porta Unitário*: $h(t) = (1/L)ret(t/L)$

$$H(jw) = \frac{sen(wL/2)}{wL/2}$$

$h(t) = (1/L)ret(t/L)$

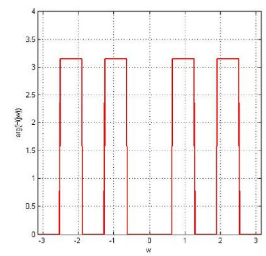


$\| H(jw) \|$



Modulo da reposta em frequência

$\underline{|H(jw)}$

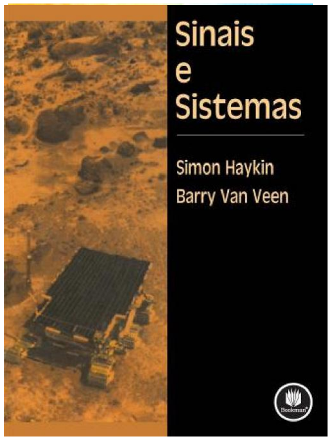


Fase da reposta em frequência

Bibliografia

Bibliografia

HAYKIN, S. e VAN VEEN, B. **Sinais e sistemas**. Porto Alegre: Bookman, 2001. (19).



Indicação das seções do livro a ler em relação aos temas abordados na apresentação.

- Propriedades básicas dos sistemas contínuos (1.8).
- Sistemas contínuos LTI (2.2).
- Propriedades de Sistemas contínuos LTI (2.3).
- Resposta de um sistema LTI a sinais elementares (2.3).