UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

ANDRÉ LOUIS SOUZA RIBEIRO (2019107791)
ANDRÉ OLIVEIRA CUNHA (2019107756)

TRABALHO 1 DE SISTEMAS REALIMENTADOS

Vitória - ES
2022

SUMÁRIO

Questão 1

Número da dupla:
N = 4

1 - Projeto 1

Seja o sistema de controle da posição da fita apresentado do exercício P7.11 no cap. 7 do livro do Dorf, pagina 308. **Substitua o amplificador por um controlador cujo sinal de controle seja limitado no intervalo [-10,10], e** considere os parâmetros dados no enunciado do problema, com exceção dos seguintes:

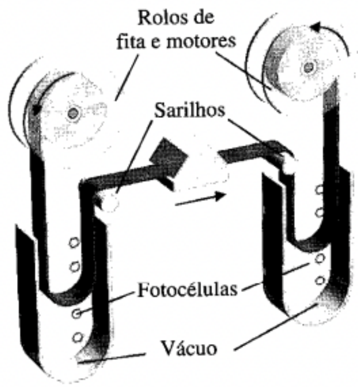
$$J = 1/N\,,\ r = 0{,}1/N\,,\ k_2 = 0\,,\ k_T/L = L/R = 0{,}5N$$

1.1 Qual controlador você escolheria (P.PD ou PI) para que a resposta ao degrau seja a mais rápida possível, com o sobressinal menor que 10 % e erro em regime à entrada rampa menor ou igual a 0,01 ? Justifique sua resposta usando o método do Lugar das Raízes e projete o controlador escolhido. Explique as razões de não utilizar os controladores que não foram escolhidos.

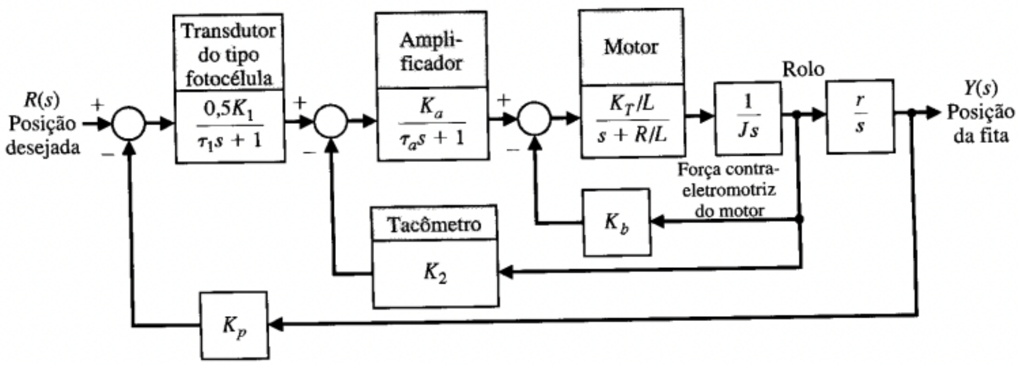
P7.11 Um sistema de computadores requer um sistema de transporte de fita magnética de alto desempenho [17]. As condições ambientais impostas ao sistema resultam em um teste severo do projeto de engenharia de controle. Um sistema de acionamento direto com motor CC para o rolo de fita está mostrado na Fig. P7.11, onde r é igual ao raio do carretel e J é igual à inércia do carretel e do rotor. É necessário que uma reversão completa no sentido de rotação se dê em 6 ms e que o rolo de fita deva responder a um comando em degrau em 3 ms ou menos. A fita está operando normalmente a uma velocidade de 100 polegadas por segundo. O motor e os componentes selecionados para este sistema possuem as seguintes características:

$K_b = 0{,}40$ $\qquad r = 0{,}2$
$K_p = 1$ $\qquad K_1 = 2{,}0$
$\tau_1 = \tau_a = 1$ ms $\qquad K_2$ é ajustável.
$K_T/LJ = 2{,}0$

A inércia do carretel e do rotor do motor é de $2{,}5 \times 10^{-3}$ com o carretel vazio e 5×10^{-3} com o carretel cheio. Uma série de fotocélulas é usada como um dispositivo sensor de erro. A constante de tempo do motor é $L/R = 0{,}5$ ms. (a) Esboçar o lugar das raízes do sistema quando $K_2 = 10$ e $J = 5{,}0 \times 10^{-3}$, $0 < K_a < \infty$. (b) Determinar o ganho K_a que resulta em um sistema bem amortecido de modo que o ζ de todas as raízes seja maior ou igual a 0,60. (c) Com o valor de K_a determinado na parte (b), esboçar o lugar das raízes para $0 < K_2 < \infty$.



(a)

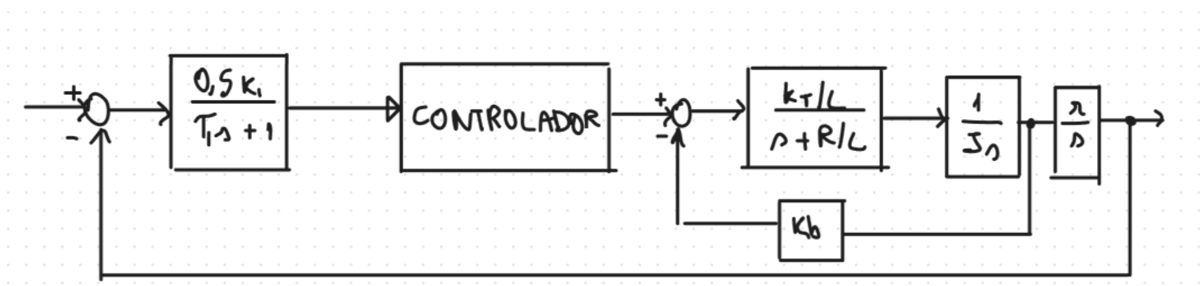


(b)

Fig. P7.11 (a) Sistema de controle de fita. (b) Diagrama de blocos.

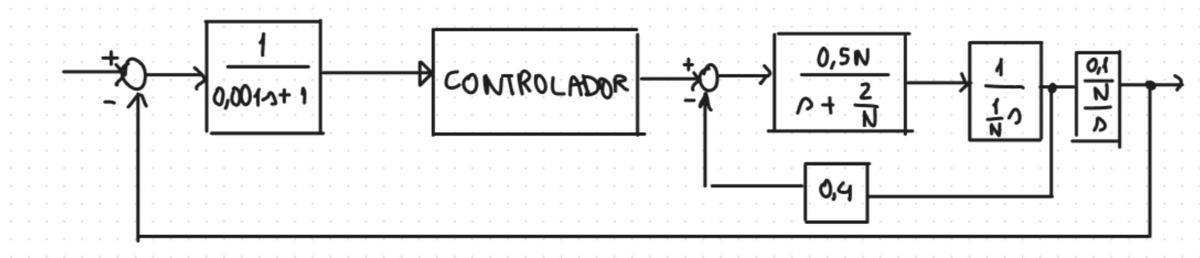
Questão 1.1

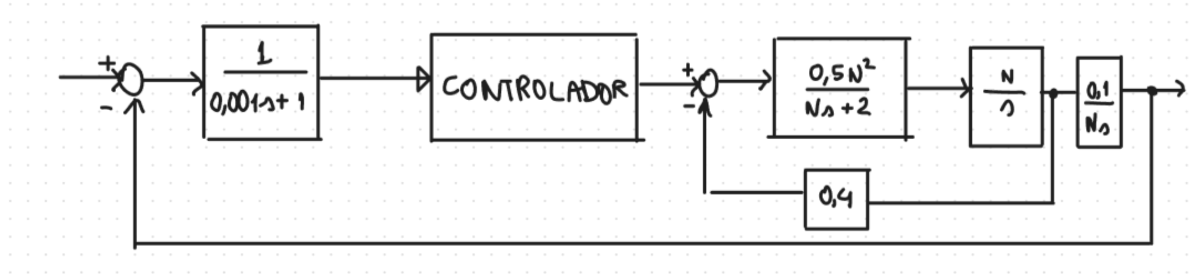
Substituindo o amplificador por um controlador e fazendo uma simplificação do diagrama de blocos, vamos ter:

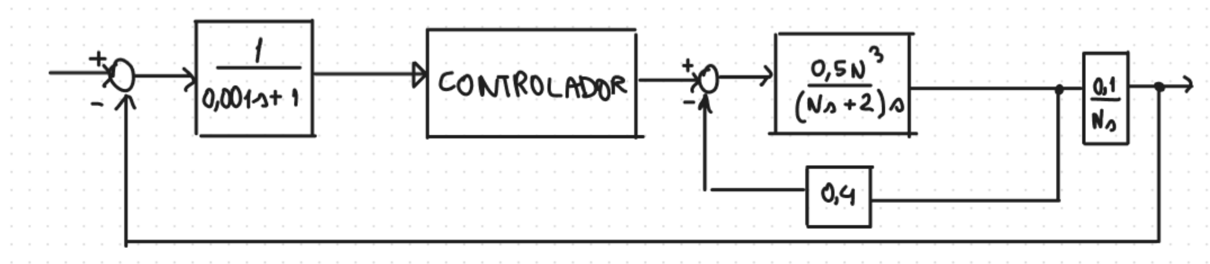


Vamos substituir os parâmetros pelos fornecidos pela questão do livro, com exceção dos seguintes parâmetros fornecidos na questão:

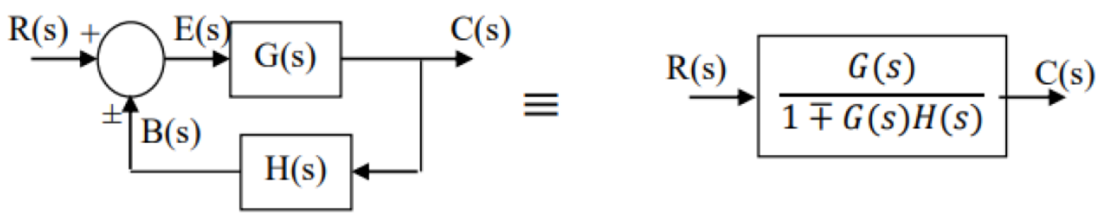
$$J = 1/N\,,\ r = 0{,}1/N\,,\ k_2 = 0\,,\ k_T/L = L/R = 0{,}5N$$

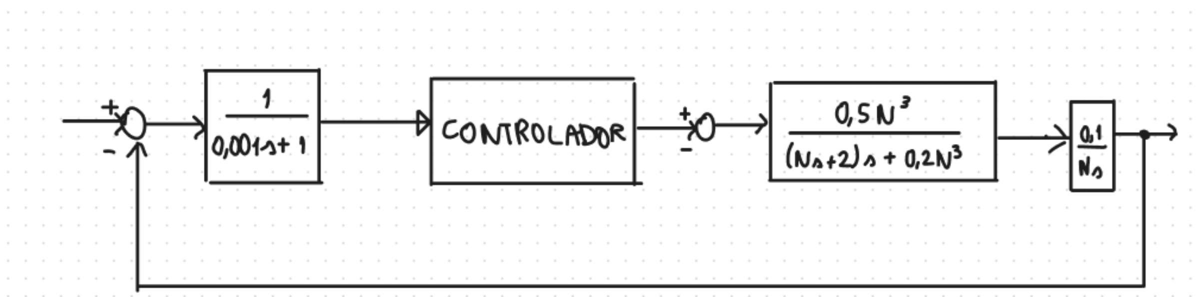


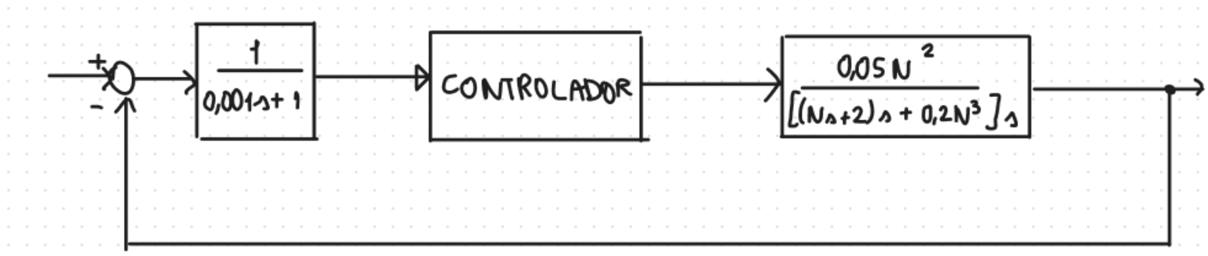




Utilizando a seguinte propriedade do diagrama de blocos, podemos fazer algumas simplificações no diagrama:





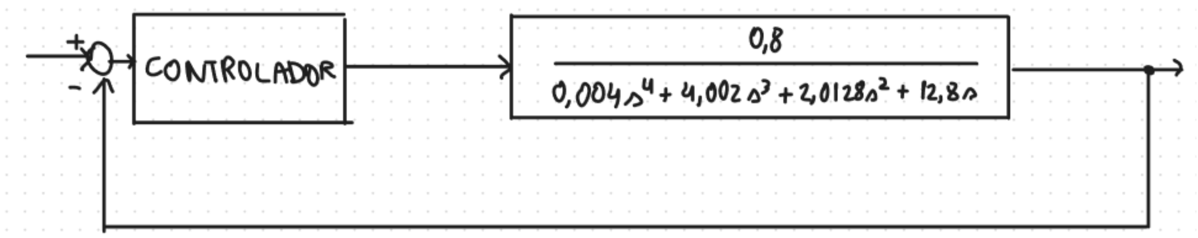


Fazendo mais algumas simplificações no diagrama e substituindo o N por 4, sendo este o N da dupla, obtemos:

Para N=4

$$= \frac{0{,}8}{4s^3 + 2s^2 + 12{,}8s} \cdot \frac{1}{0{,}001s+1}$$

$$= \frac{0{,}8}{0{,}004s^4 + 4{,}002s^3 + 2{,}0128s^2 + 12{,}8s}$$



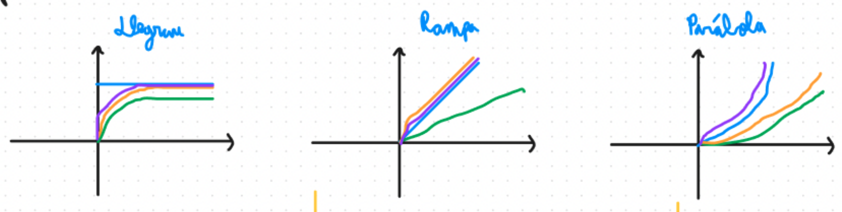
Portanto, nossa Gma será:

```
gma =

                      0.8
  ------------------------------------------
  0.004 s^4 + 4.002 s^3 + 2.013 s^2 + 12.8 s
```

Vamos analisar primeiro, os **critérios** que o sistema deve obedecer. Para analisar o erro em regime permanente, podemos perceber que o sistema é do tipo 1 e entrada rampa, e podemos utilizar a seguinte tabela de erro para auxiliar nossos cálculos:

Temos algumas classificações de sistema:

- Tipo 0 → s^0
- Tipo 1 → s^1
- Tipo 2 → s^2



Degrau:

Tipo 0: $e(\infty) = \dfrac{1}{1+K_p}$, $K_p = \lim\limits_{s \to 0} G(s)$

Tipo 1: $e(\infty) = 0$

Tipo 2: $e(\infty) = 0$

Rampa:

Tipo 0: $e(\infty) = \infty$

Tipo 1: $e(\infty) = \dfrac{1}{K_v}$, $K_v = \lim\limits_{s \to 0} s\,G(s)$

Tipo 2: $e(\infty) = 0$

Parábola:

Tipo 0: $e(\infty) = \infty$

Tipo 1: $e(\infty) = \infty$

Tipo 2: $e(\infty) = \dfrac{1}{K_a}$, $K_a = \lim\limits_{s \to 0} s^2\,G(s)$

	tipo 0	tipo 1	tipo 2
Degrau	1 / 1 + kp	0	0
Rampa	∞	1/kv	0
Parábola	∞	∞	1/ka

$$e_{ss}(\infty) = \frac{1}{K_v}$$

$$\frac{1}{K_v} \leq 0{,}01$$

$$K_v \geq 100$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\,G_{MA}(s)$$

$$\lim_{s \to 0} s\,G_{MA}(s) \geq 100$$

$$\lim_{s \to 0} \cancel{s} \left(\frac{0{,}8 \cdot K_p}{0{,}004 s^{\cancel{4}} + 4{,}002 s^{\cancel{3}} + 2{,}0128 s^{\cancel{2}} + 12{,}8 \cancel{s}} \right) \geq 100$$

$$\lim_{s \to 0} \left(\frac{0{,}8 \cdot K_p}{0{,}004 s^3 + 4{,}002 s^2 + 2{,}0128 s + 12{,}8} \right) \geq 100$$

$$\frac{0{,}8\, K_p}{12{,}8} \geq 100$$

$$\boxed{K_p \geq 1600}$$

E fazendo a análise para um sobressinal menor que 10%, temos:

$$M_p = e^{-\pi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} < 0,1$$

$$e^{-\pi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} < 0,1$$

$$-\pi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) < \ln 0,1$$

$$\pi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) > 2,30$$

$$\boxed{\zeta > 0,6}$$

Agora que temos os critérios calculados, podemos projetar os controladores. Vamos começar projetando um **controlador proporcional**.

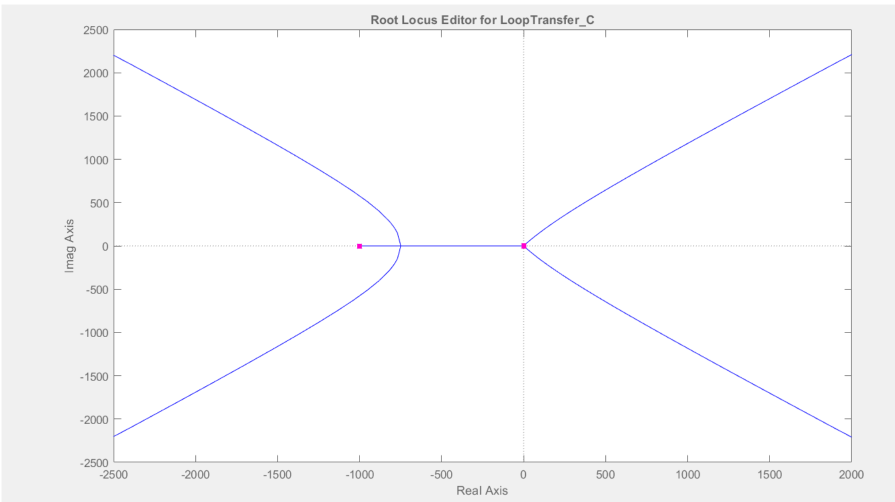
Projetando um controlador proporcional:

Esse é o controlador mais simples, onde ele irá apenas fornecer um ganho Kp ao sistema.

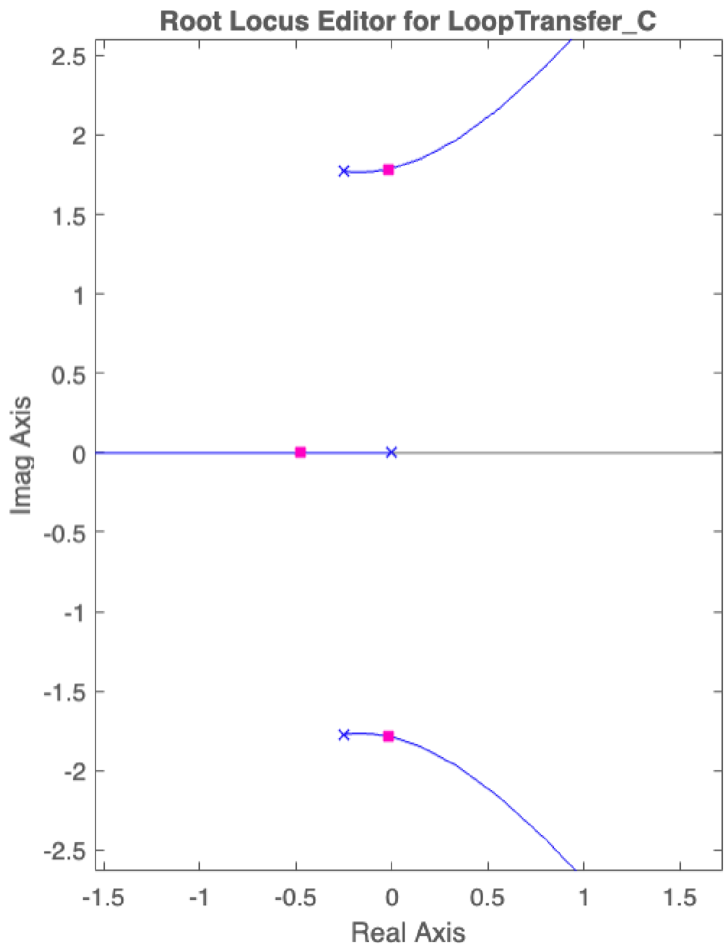
Sabendo que a Gma é :

```
gma =

                          0.8
  -----------------------------------------
  0.004 s^4 + 4.002 s^3 + 2.013 s^2 + 12.8 s
```

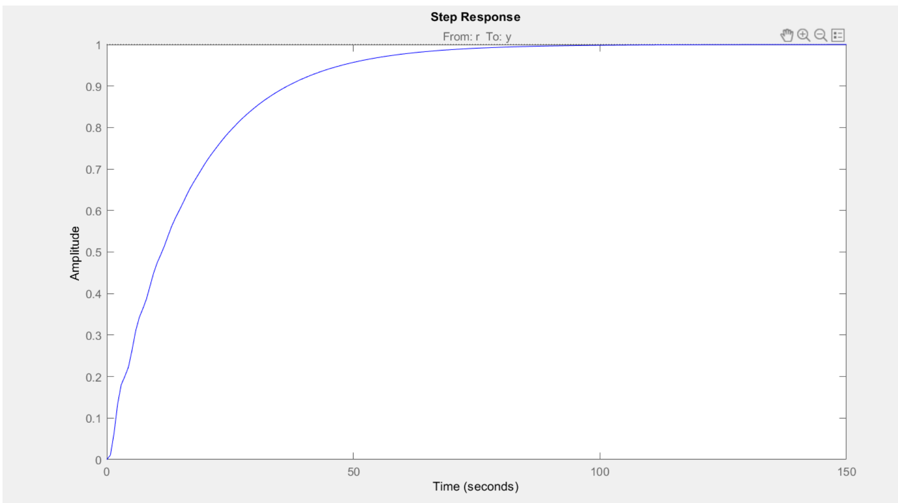
Agora, vamos fazer o Lugar das raízes da Gma, para poder conferir se os parâmetros calculados foram atendidos. Vamos fazer isso utilizando o software **matlab** e a função **rltool()**.



Aplicando um zoom na região próxima à origem:



Resposta ao Degrau:



Análise:

Analisando o gráfico do lugar das raízes, para um valor de Kp=7,5 o sistema já se encontra marginalmente estável, portanto um controlador proporcional (Kp) não atenderia o critério do erro em regime, de ter um Kp > 1600. Visto que para um Kp > 7,5 o sistema fica instável, logo esse controlador não serviria. Visto que esse controlador não atendeu, vamos projetar um **proporcional derivativo (PD)**.

Trecho do código:

```
%controlador proporcional
num=[0.8];
den=[0.004 4.002 2.0128 12.8 0];
gma=tf(num,den);
rootsgp=roots(den)
rltool(gma)
```

Projetando um controlador proporcional derivativo (PD):

Para esse controlador, visto que o mesmo não insere novos pólos na função Gp(s), o sistema é do tipo 1, então o erro em regime é calculado da mesma forma como fizemos anteriormente. Portanto o nosso Kp deve ser maior ou igual a 1600 para atender ao erro em regime solicitado. O critério do sobressinal também se mantém o mesmo.

Sabendo que Gp:

$$G_p(s) = \frac{0{,}8}{0{,}004s^4 + 4{,}002s^3 + 2{,}0128s^2 + 12{,}8s}$$

Sabendo que a equação do controlador Pd é dada por:

- **Gc = Kp + sKd**

Logo, nossa equação característica será 1 + (Kp + sKd)Gp = 0, e para obter o Lugar das raízes desse controlador, nós vamos manter Kp fixo e variar o Kd.

- Kp = 1600

$$1 + (1600 + s K_d) G_p = 0$$

$$(1 + 1600 G_p) + s K_d \cdot G_p = 0$$

$$1 + K_d \left(\frac{s G_p}{1 + 1600 G_p} \right) = 0$$

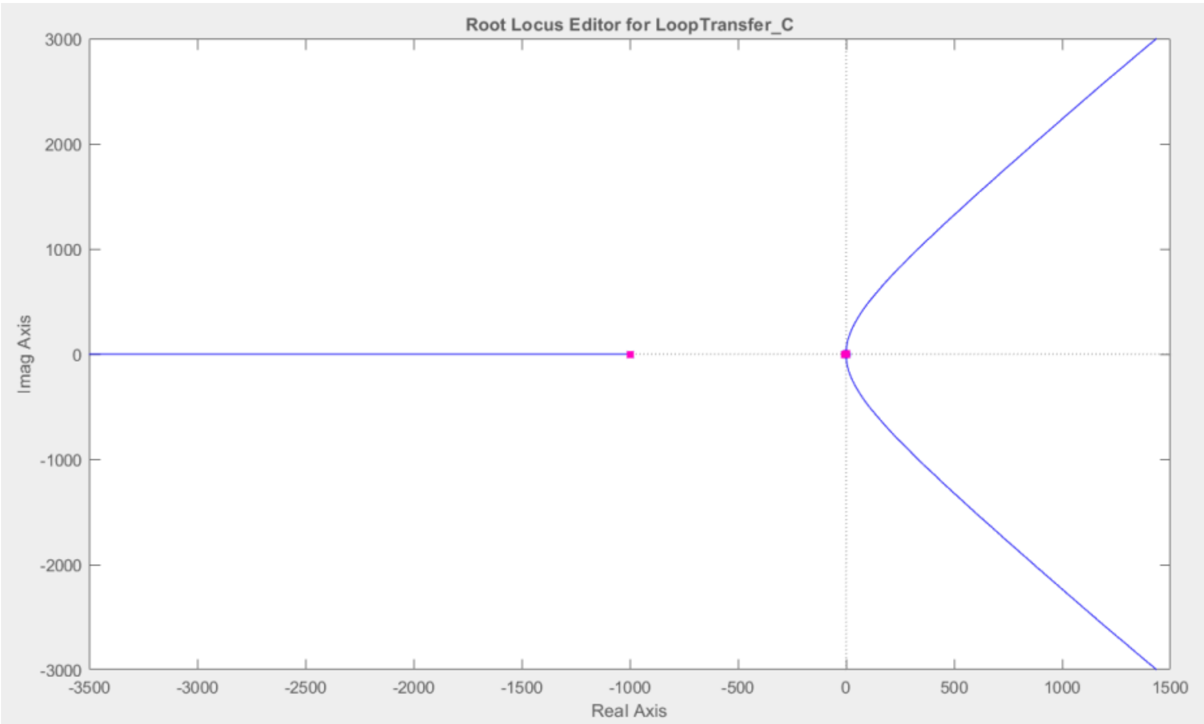
Sendo $G_p = \frac{N}{D}$ $\xrightarrow{}$ numerador, $\xrightarrow{}$ denominador

$$1 + K_d \left(\frac{s\left(\frac{N}{D}\right)}{1 + 1600\left(\frac{N}{D}\right)} \right) = 0$$

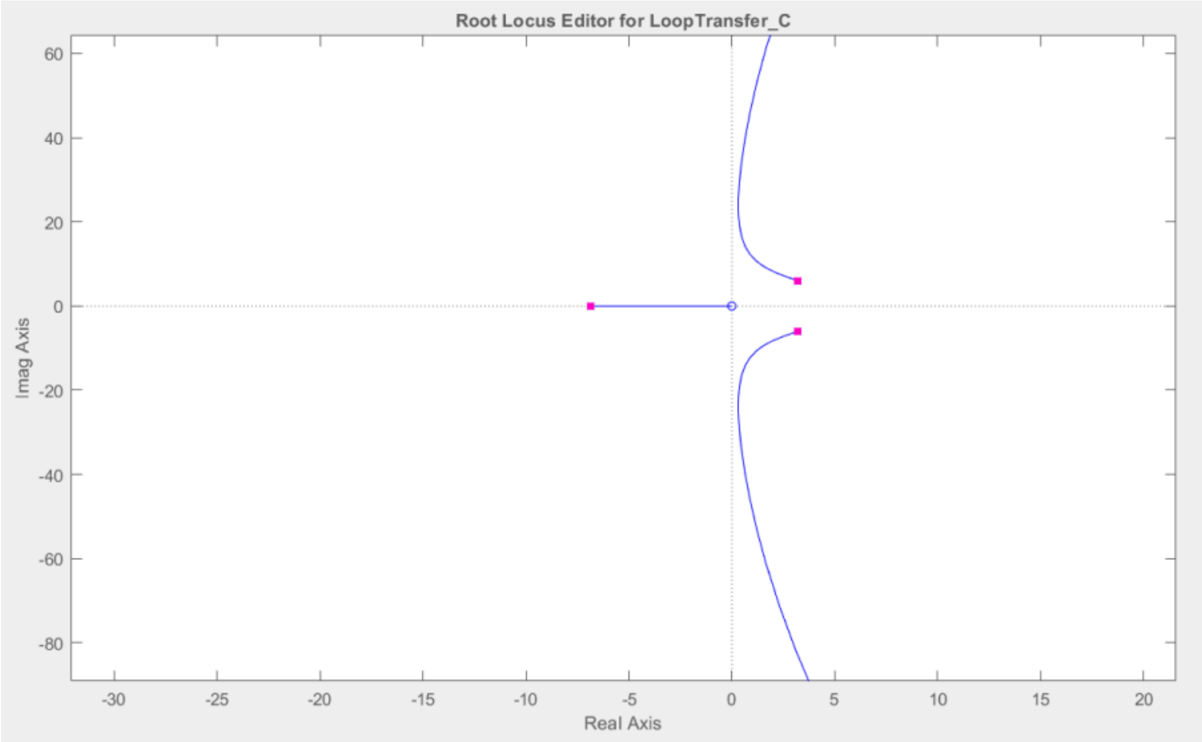
$$1 + K_d \left(\frac{s N}{D + 1600 N} \right) = 0$$

$$1 + K_d \left(\frac{0{,}8 s}{0{,}004 s^4 + 4{,}002 s^3 + 2{,}0128 s^2 + 12{,}8 s + 1280} \right) = 0$$

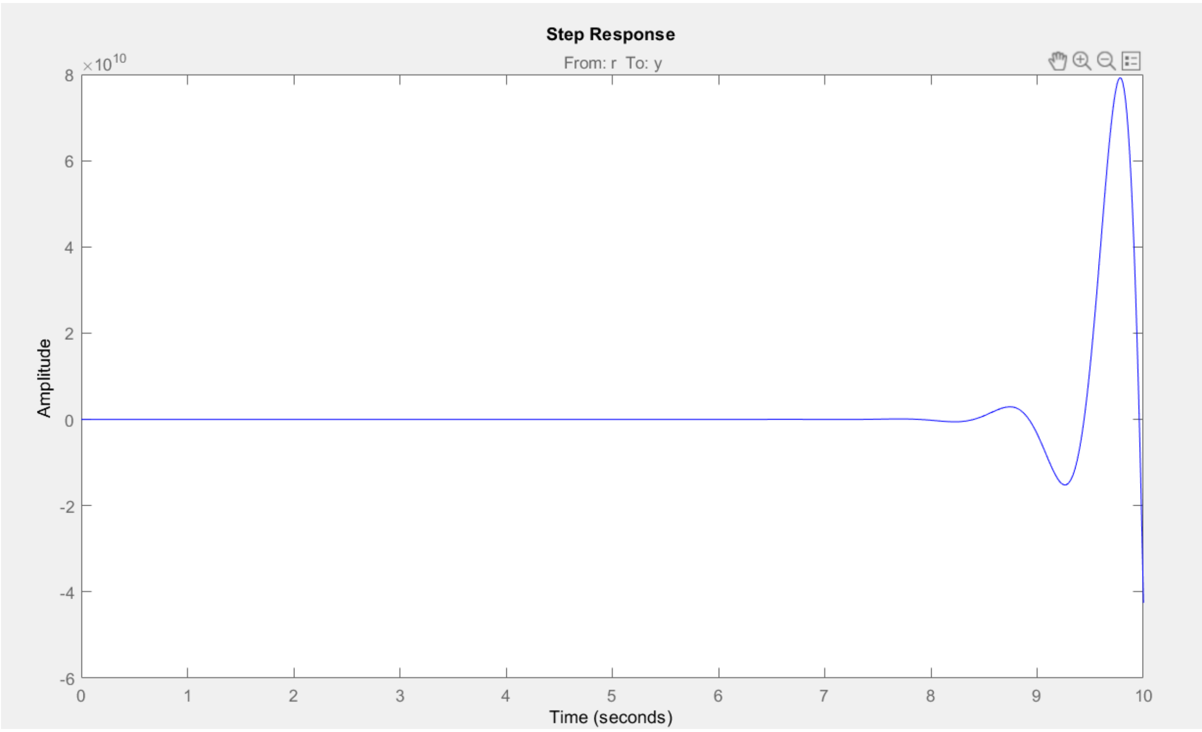
Vamos fazer o lugar das raízes para Kp fixo e Kd variando entre 0 e infinito. O gráfico do lugar das raízes com o um controlador PD é:



Aplicando um zoom na região próxima à origem:



Resposta ao Degrau:



Percebemos que para um controlador proporcional derivativo o sistema já começa instável e independente do valor de Kd que seja variado para Kd >= 0 o sistema continuará instável. Logo, um controlador PD também não atende aos parâmetros pedidos. Vamos então agora projetar um **controlador PI**.

Trecho do código:

```
%controlador proporcional derivativo
num_pd=[0.8 0];
den_pd=[0.004 4.002 2.0128 12.8 1280];
gma_pd=tf(num_pd,den_pd)
rltool(gma_pd)
```

Projetando um controlador proporcional integral (PI):

Sabendo que o controlador Gc é dado por:

- **Gc = Kp+Ki/s**

Como esse controlador insere um pólo na origem da função de transferência de malha aberta, nosso sistema vai ser do tipo 2. Portanto, o erro em regime a entrada rampa será nulo. Podemos confirmar isso utilizando o teorema do valor final:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1+G_{ma}(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+G_{ma}(s)}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+G_c \cdot G_p} =$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+ \frac{\left(s+\frac{K_i}{K_p}\right)}{s} \cdot \frac{0{,}8}{0{,}004s^4+4{,}002s^3+2{,}0128s^2+12{,}8s}}$$

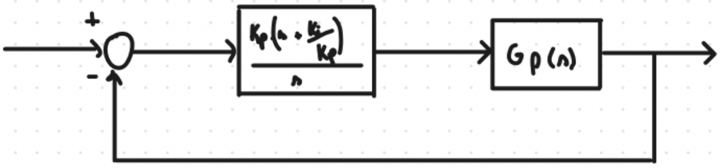
$$= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+ \frac{0{,}8s + 0{,}8 \cdot \left(\frac{K_i}{K_p}\right)}{0{,}004s^5+4{,}002s^4+2{,}0128s^3+12{,}8s^2}}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{\infty} = 0$$

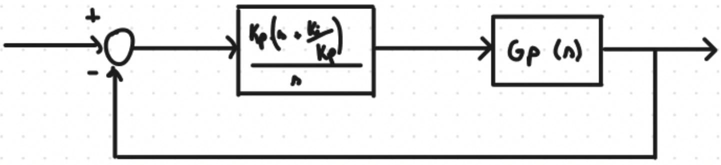
$$G_c = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p\left(s + \frac{K_i}{K_p}\right)}{s}$$

zero em $-\frac{K_i}{K_p}$

polo na origem



Kp fixo e Kd variando de zero a infinito



O primeiro passo para projetar esse controlador é escolher um -ki/kp próximo a origem.

$\frac{K_i}{K_p}$ = -10% da parte real do polo de Gp mais próximo à origem

Sabendo que nossa Gp(s) é:

```
                    0.8
  -----------------------------------------
  0.004 s^4 + 4.002 s^3 + 2.013 s^2 + 12.8 s
```

Temos que as raízes do denominador da nossa Gp(s) será:

0.0000 + 0.0000i
-1.0000e+03 + 0.0000e+00i
-0.2500 + 1.7713i
-0.2500 - 1.7713i

Pegando a parte real do polo mais próximo a origem, temos -0.25 e aplicando o -10%, ficamos com 0.025, então vamos escolher:

- **ki/kp = 0.025**

Sabendo que nossa equação característica será 1 + KGma`(s) =0 , devemos primeiro calcular a Gma´(s). Sendo que esta será:

$$G_{MA}'(s) = \frac{\left(s + \frac{K_i}{K_p}\right)}{s} \cdot G_p$$

$$G_{MA}'(s) = \frac{\left(s + \frac{K_i}{K_p}\right)}{s} \cdot \frac{0,8}{0,004s^4 + 4,002s^3 + 2,0128s^2 + 12,8s}$$

$$G_{MA}'(s) = \frac{0,8s + 0,8.\left(\frac{K_i}{K_p}\right)}{0,004s^4 + 4,002s^3 + 2,0128s^2 + 12,8s}$$

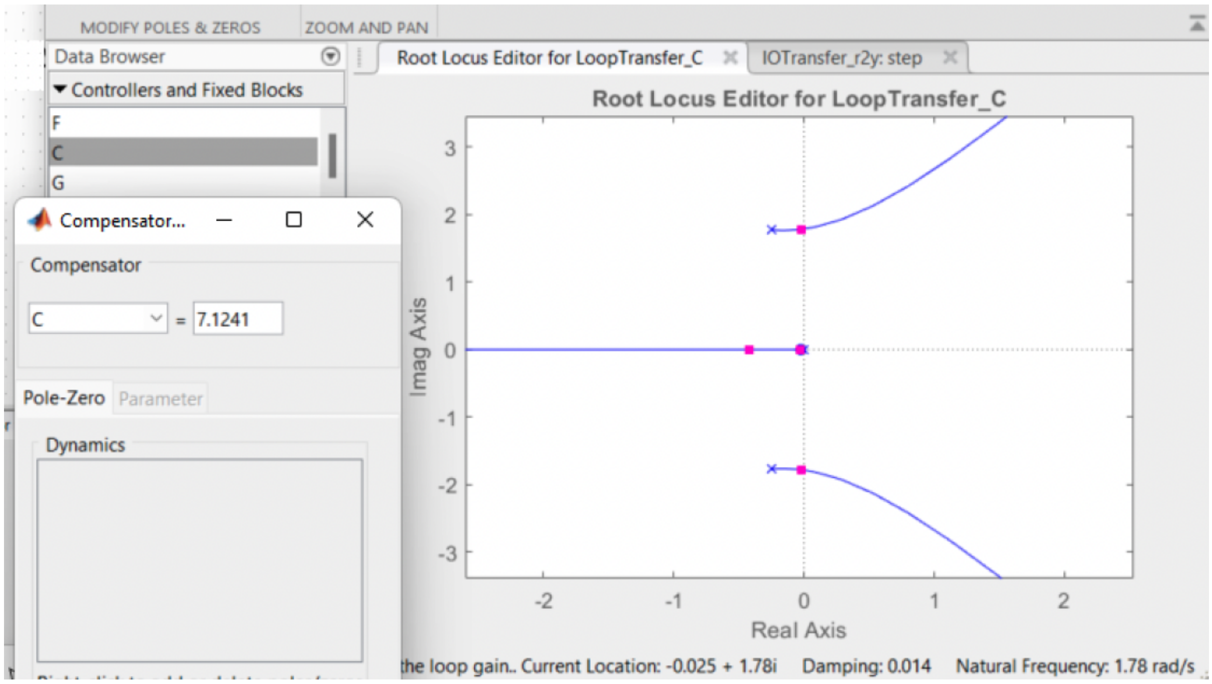
Agora, podemos substituir a Gma´(s) pela que encontramos acima.

$$1 + K_p\left(\frac{0,8s + 0,8.\left(\frac{K_i}{K_p}\right)}{0,004s^5 + 4,002s^4 + 2,0128s^3 + 12,8s^2}\right) = 0$$

Como o Ki/Kp escolhido inicialmente foi de 0.025, temos que a Gma(s) do PI é:

```
gma_pi =

                    0.8 s + 0.02
  ---------------------------------------------
  0.004 s^5 + 4.002 s^4 + 2.013 s^3 + 12.8 s^2
```

Fazendo o lugar das raízes no matlab, para Kp variando de 0 até infinito,temos:



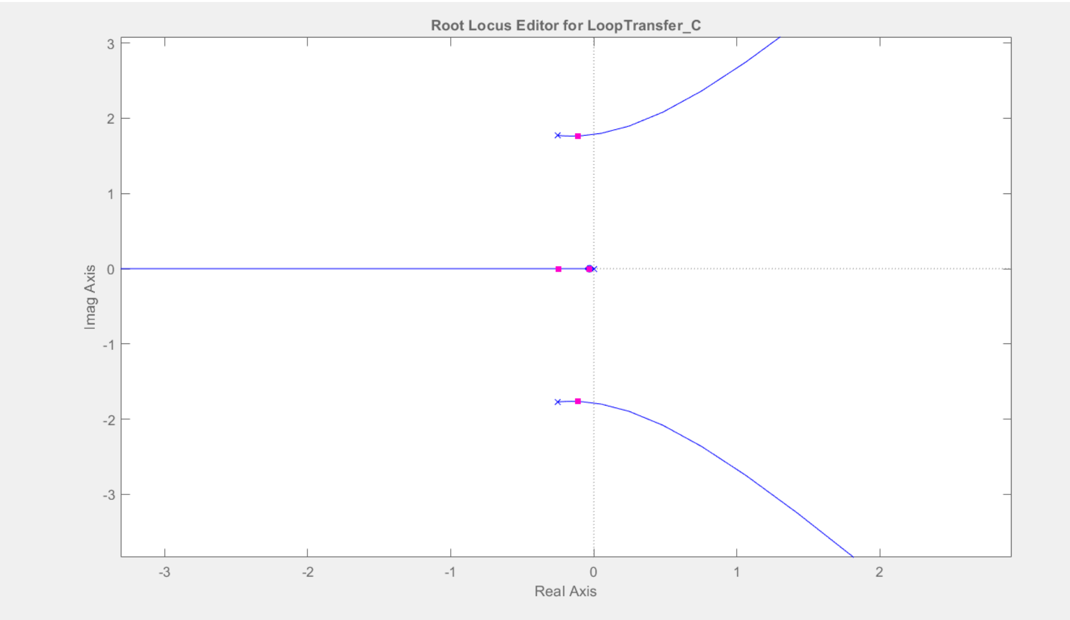
Percebemos que com o controlador PI, temos alguns valores de Kp que deixam o sistema estável. Usando o próprio matlab vimos que o Kp pode variar de 0 até aproximadamente 7.12 onde ele fica marginalmente estável. Para valores maiores que 7.12 o sistema se encontra instável.

Analisando quais seriam os melhores valores para o sistema que atendesse ao sobressinal de 10% e a resposta ao degrau mais rápida possível (afastando o -ki/kp gradualmente da origem) fizemos uma tabela com alguns valores:

Kp	Ki/Kp	Mp	Tr	Ta
2.0	0.025	11.70%	11.60s	98.70s
2.5	0.025	10.00%	9.89s	89.80s
2.8	0.025	9.32%	8.40s	85.10s
3.0	0.025	8.95%	8.04s	82.30s
3.2	0.025	8.64%	7.83s	79.60s
3.4	0.025	8.40%	7.67s	77.10s
4.0	0.025	8.32%	5.10s	70.30s
4.5	0.025	8.93%	4.73s	65.00s
4.8	0.025	9.79%	4.62s	63.20s
4.2	0.030	9.74%	4.85s	63.30s
4.4	**0.030**	**9.92%**	**4.74s**	**61.30s**

4.5	0.030	10.1%	4.69s	60.70s
4	0.050	13.60%	4.79s	49.40s
4.1	0.050	13.50%	4.72s	39.10s

Com o valor de Ki/Kp = 0.025 vimos que para determinados valores de Kp a condição de sobressinal foi atendida, então aumentamos gradativamente o valor de Ki/Kp para ter um tempo de resposta mais rápido. Após uma análise, chegamos à conclusão de que os melhores valores foram de **Ki/Kp = 0.03** e **Kp = 4.4**, com um **sobressinal (MP) de 9.92%**, **Tr = 4.74s** e **Ta = 61.20s**.



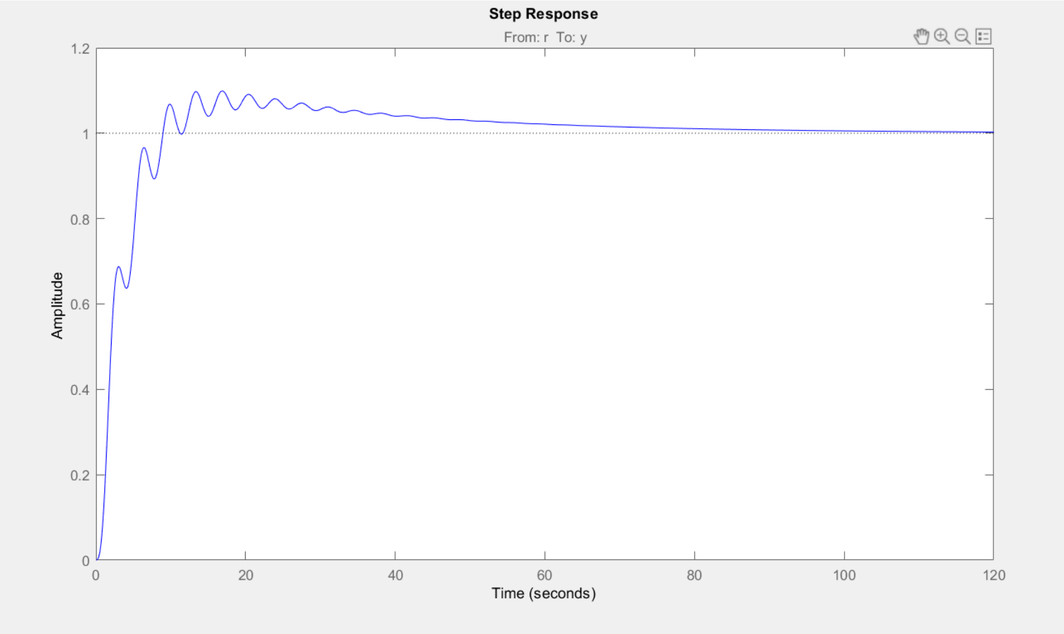
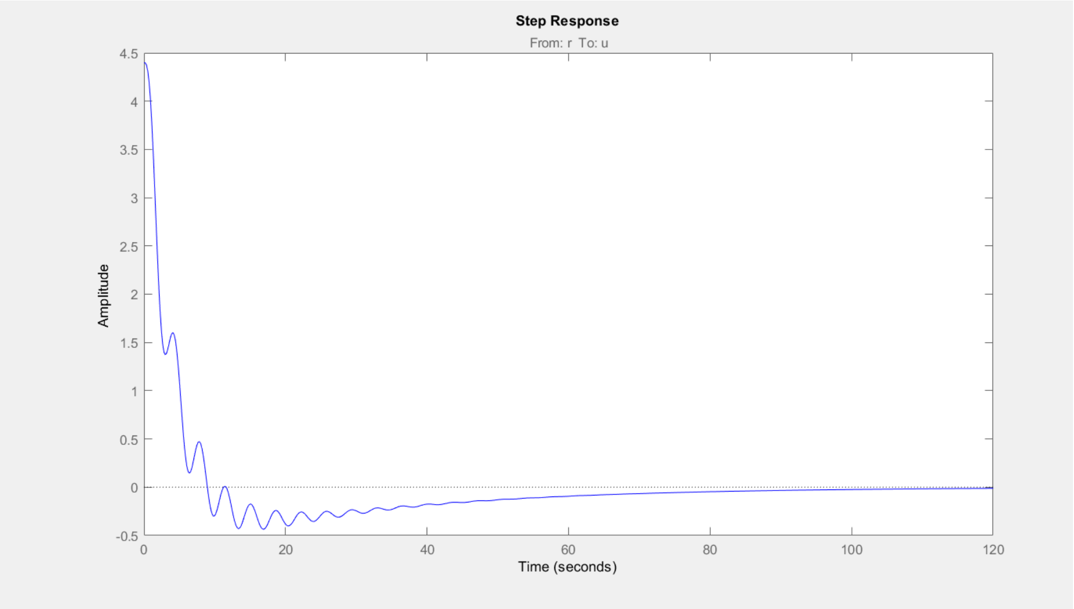


Gráfico limitado no intervalo de [-10, 10]:



Portanto, podemos chegar à conclusão de que um controlador PI iria atender aos critérios exigidos na questão.

Trecho do código:

```
% Para o controlador proporcional integral (PI)
ki_kp = 0.03;
num_pi=[0.8 ki_kp*0.8];
den_pi=[0.004 4.002 2.0128 12.8 0 0];
gma_pi=tf(num_pi,den_pi);
rltool(gma_pi);
```

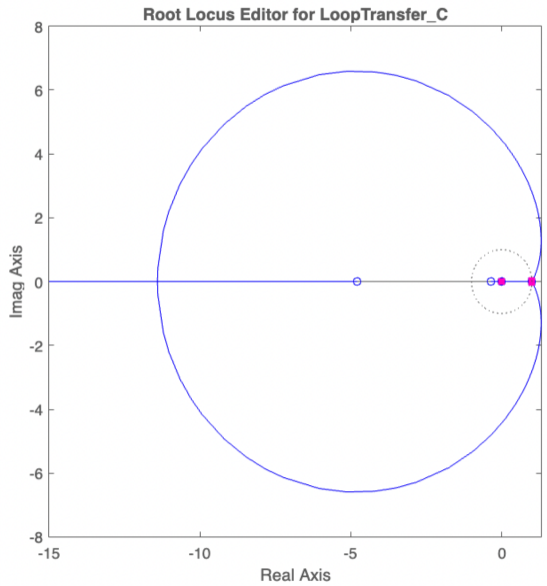
Questão 1.2

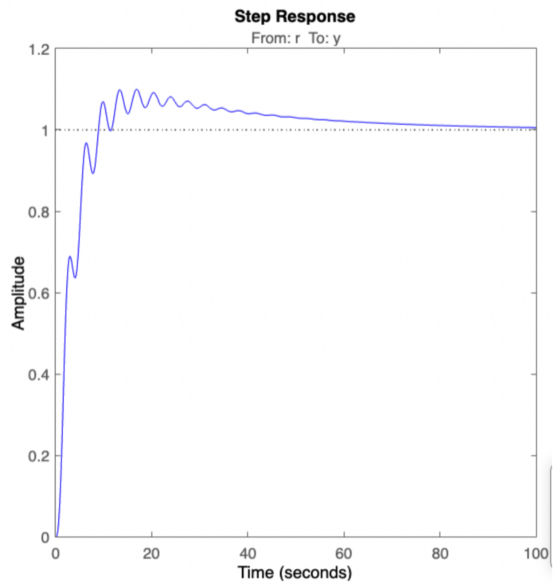
1.2 Discretize o controlador projetado no item 1.1 para diferentes períodos de amostragem iguais a T=0.01, T=0,1 e T=1 s. Para cada período de amostragem, compare as repostas obtidas do sistema de controle digital à entrada degrau e discuta as diferenças.

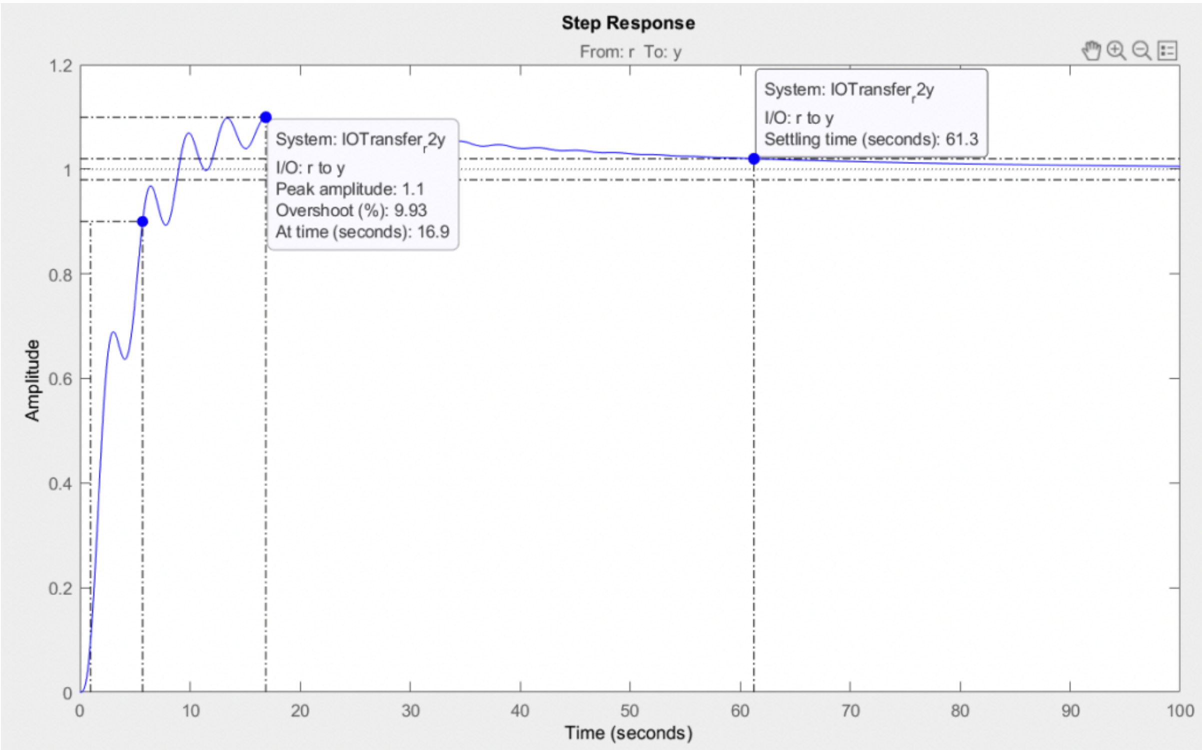
Com o controlador projetado na questão 1.1, discretizando a Gma por meio do matlab, usamos o seguinte código, sendo time a variável do tempo (T) que será alterado entre 0.01, 0.1 e 1:

Para T = 0.01s:

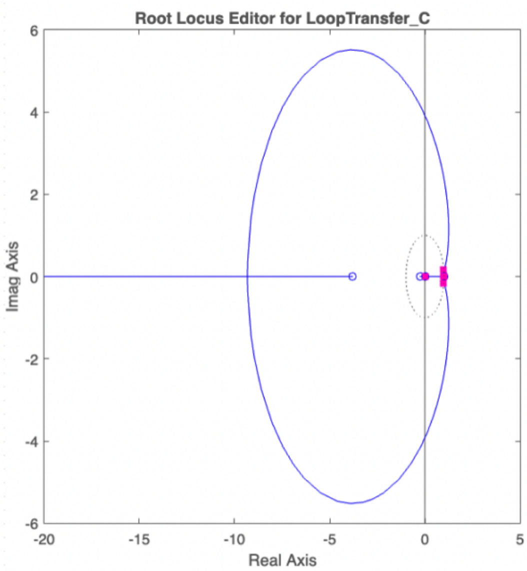
```
time = 0.01;
sys_d = c2d(4.4*gma_pi,time);
rltool(sys_d);
```

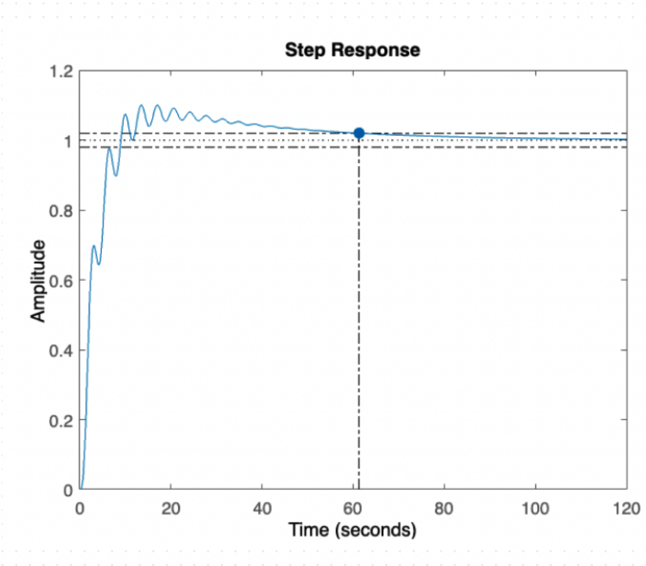

Root Locus Editor for LoopTransfer_C
Imag Axis
Real Axis

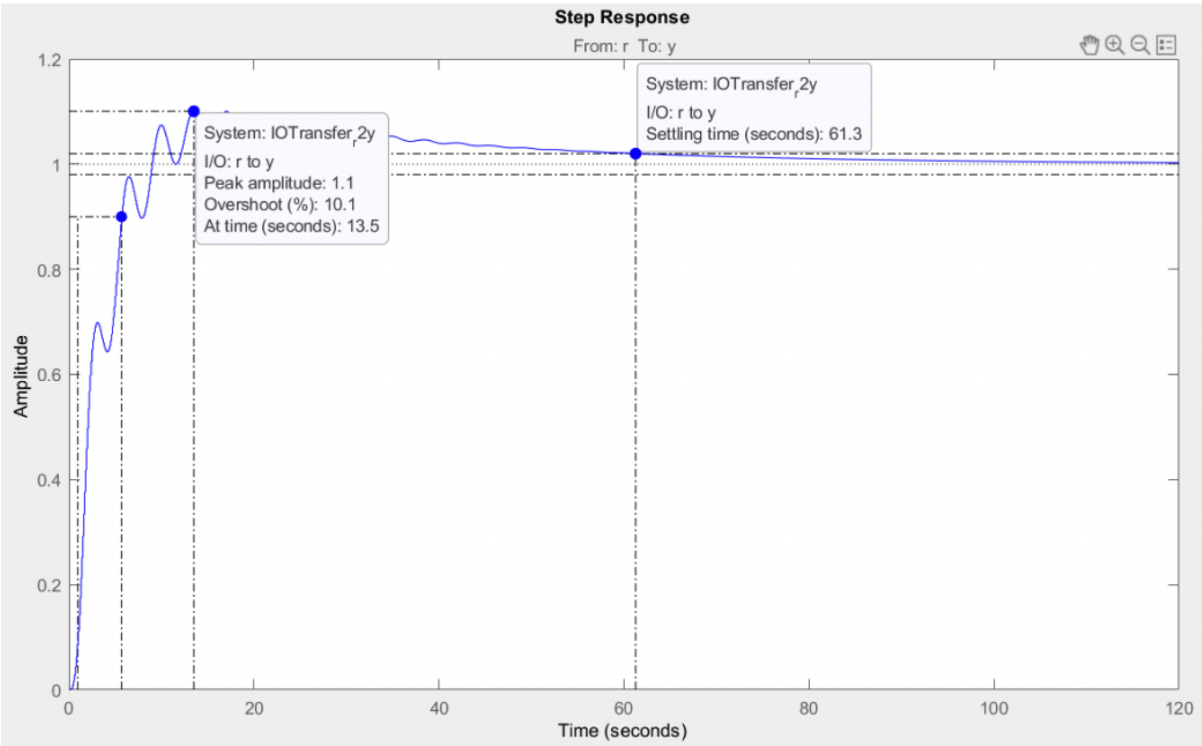

Step Response
From: r To: y
Amplitude
Time (seconds)


Step Response
From: r To: y
System: IOTransfer_r2y
I/O: r to y
Peak amplitude: 1.1
Overshoot (%): 9.93
At time (seconds): 16.9
System: IOTransfer_r2y
I/O: r to y
Settling time (seconds): 61.3
Amplitude
Time (seconds)

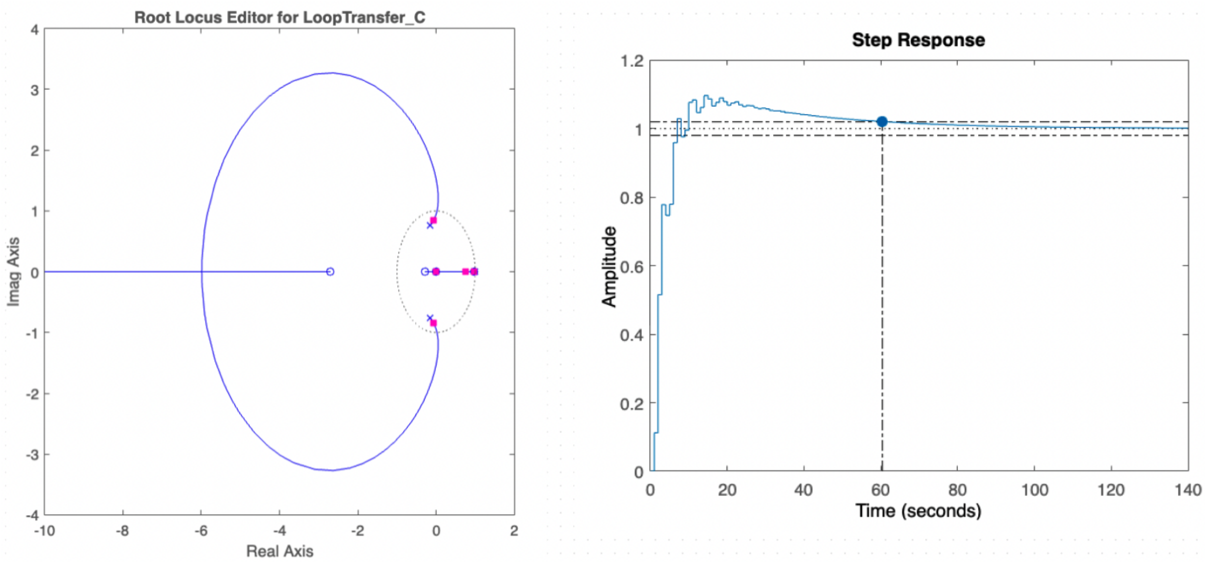
Para T = 0.1s

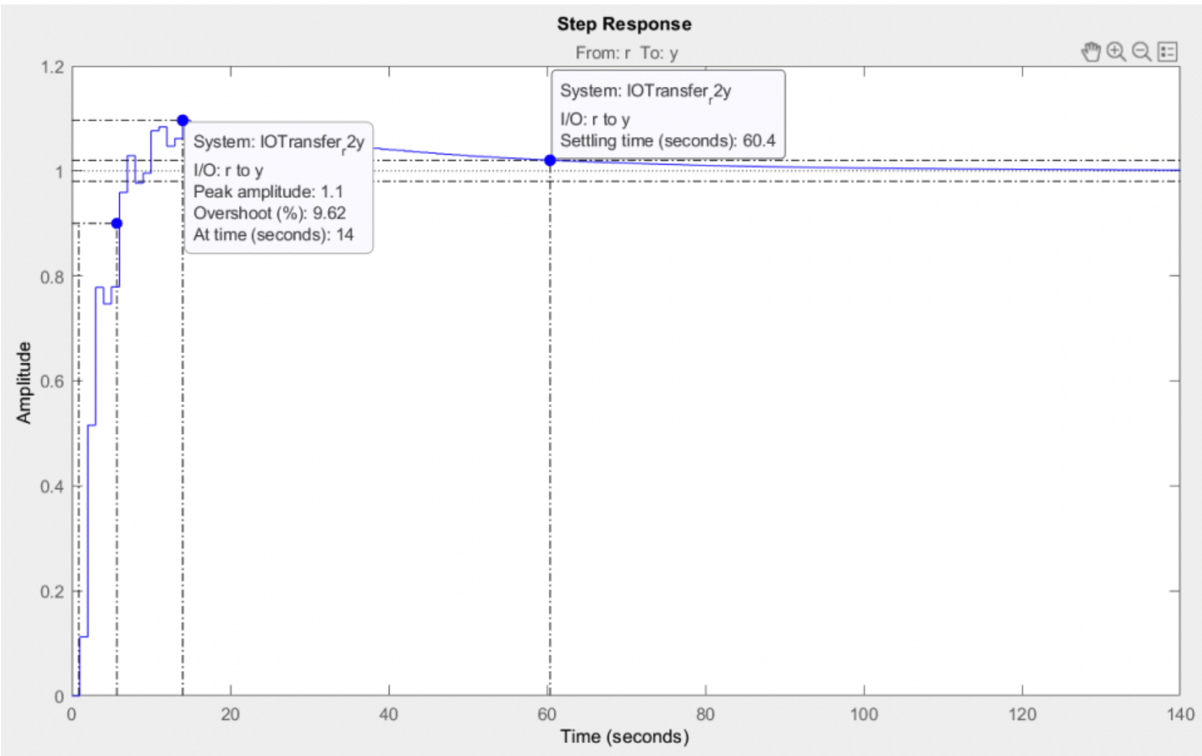

Root Locus Editor for LoopTransfer_C
Imag Axis
Real Axis
6
4
2
0
-2
-4
-6
-20
-15
-10
-5
0
5


Step Response
Amplitude
Time (seconds)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
20
40
60
80
100
120

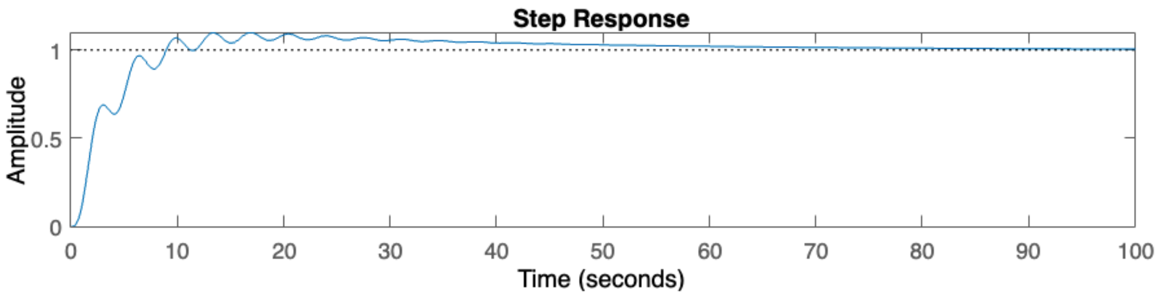

Step Response
From: r To: y
System: IOTransfer_r2y
I/O: r to y
Peak amplitude: 1.1
Overshoot (%): 10.1
At time (seconds): 13.5
System: IOTransfer_r2y
I/O: r to y
Settling time (seconds): 61.3
Amplitude
Time (seconds)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
20
40
60
80
100
120

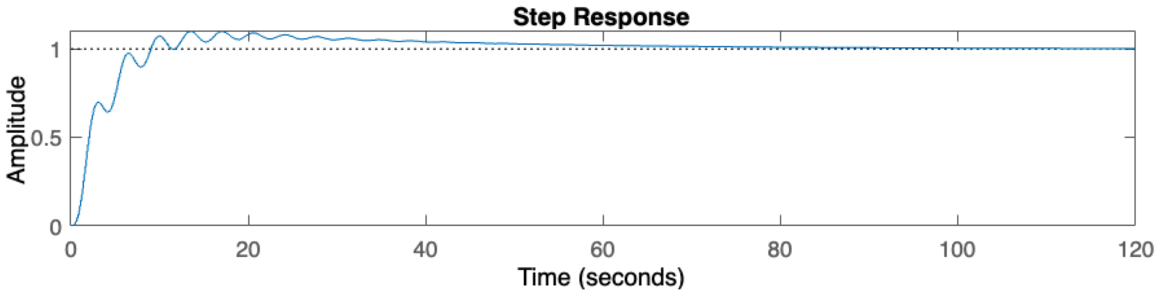
Para T = 1s

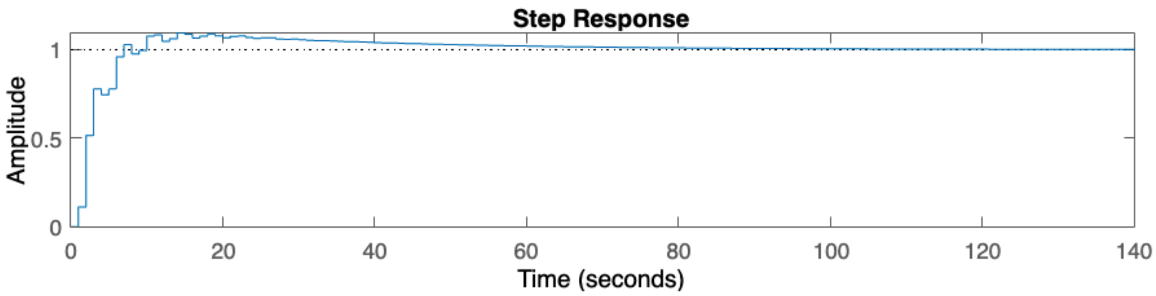




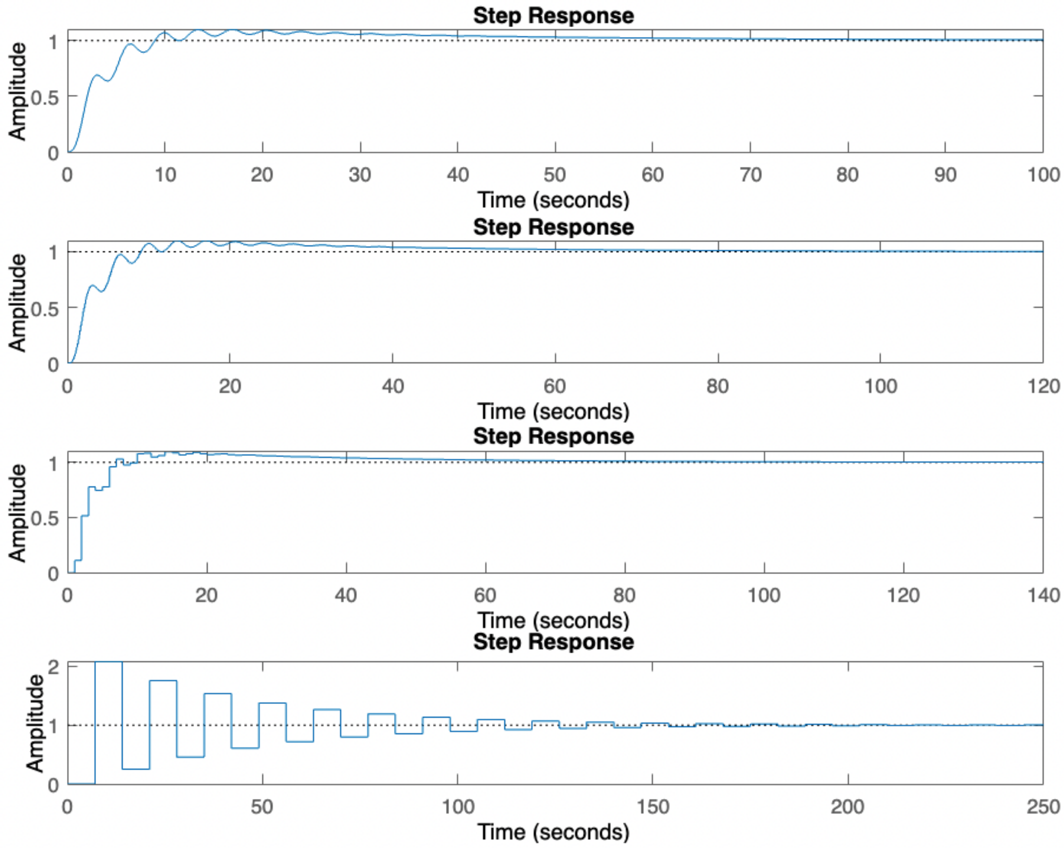
Comparando as respostas ao degrau nos três tempos diferentes temos:



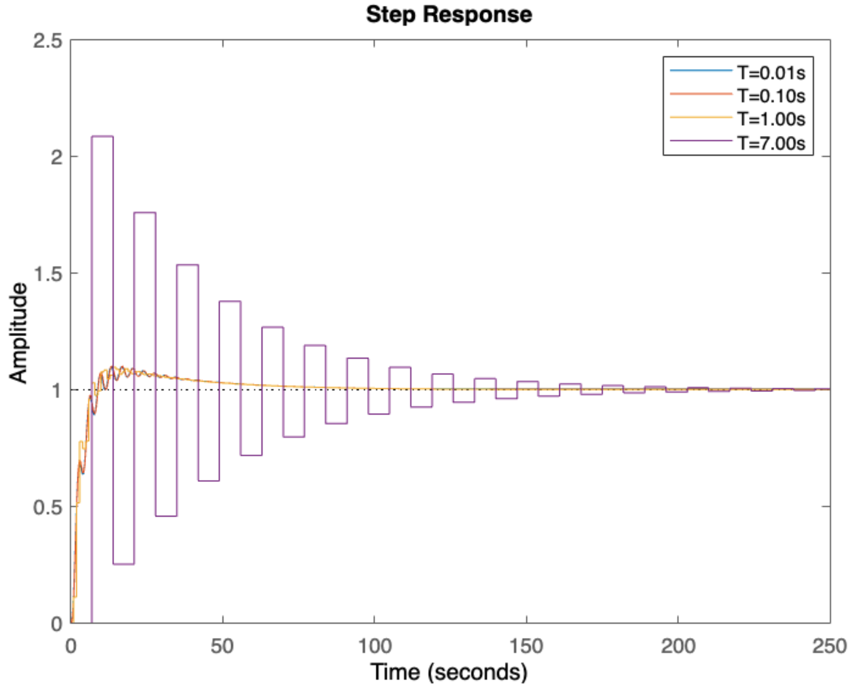




As respostas degrau estão muito próximas e poucas conclusões podemos tirar. Fazendo também com um tempo T = 7s, e analisando os quatro tempos temos:



Um gráfico contendo todas as 4 respostas no mesmo plano:



Analisando o gráfico resultante, conforme o período de amostragem (T) foi aumentando, mais oscilações apareceram, já que menos amostras por ciclos eram fornecidas. Ou seja, um sistema com um maior tempo de amostragem vai ter uma resposta mais lenta e mais oscilatória, além de dificultar a estabilização do sistema.

Código utilizado

```
%% Questão 1.2 (discreto)
time = 1;
sys_d = c2d(4.4*gma_pi,time);
sys_d1 = c2d(4.4*gma_pi,0.01);
sys_d2 = c2d(4.4*gma_pi,0.1);
sys_d3 = c2d(4.4*gma_pi,1);
sys_d4 = c2d(4.4*gma_pi,7);
FT_d1 = feedback(sys_d1,1);
FT_d2 = feedback(sys_d2,1);
FT_d3 = feedback(sys_d3,1);
FT_d4 = feedback(sys_d4,1);
step(FT_d1, FT_d2, FT_d3, FT_d4);
legend('T=0.01s','T=0.10s','T=1.00s','T=7.00s ');
```

Questão 2

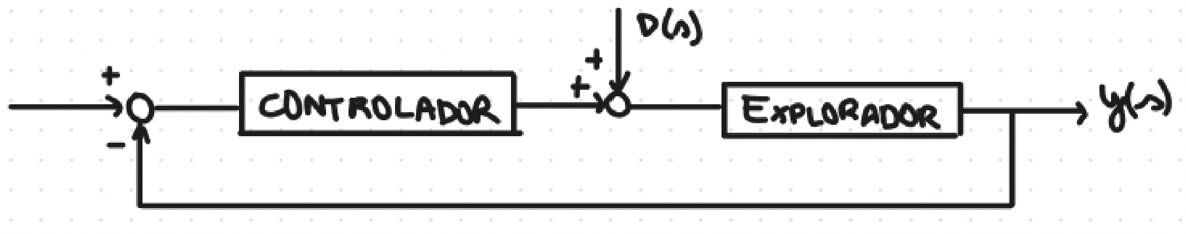
2 - Projeto 2

Seja o sistema de controle de posição de um veículo explorador de marte apresentado na capa do livro do Dorf (veja exemplo de projeto na seção 4.8 pag. 155 do livro do Dorf.) Substitua a FT do veículo explorador apresentado no diagrama de blocos da Figura 4.25 (b) pela seguinte função de transferência:
:

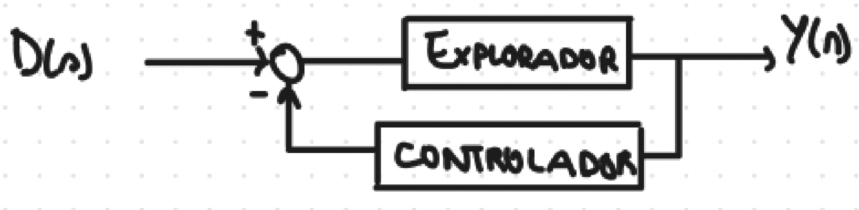
$$G_p = \frac{1}{(3Ns+1)(\frac{10s}{N}+1)(0,5Ns+1)}$$

Projete um controlador PID para que a resposta ao degrau seja a mais rápida possível, com o sobressinal menor que 10% e que o erro em regime, provocado por um distúrbio igual à rampa unitária ($D(s)=1/s^2$) quando a entrada r(t)=0, seja menor ou igual a 0,1.

Dado o sistema:



Podemos reorganizar ele da seguinte maneira:



O explorador é o nosso Gp e o nosso controlador é o Gc, então:

A nosso função de transferência é dada por:

$$FT = \frac{G_p}{1 + G_p G_c}$$

Substituindo o Gp pelo fornecido na questão temos:

$$G_p = \frac{1}{(3Ns+1)(\frac{10s}{N}+1)(0,5Ns+1)}$$

$$F_T = \frac{\frac{1}{(3Ns+1)(\frac{10s}{N}+1)(0,5Ns+1)}}{1 + G_c\left(\frac{1}{(3Ns+1)(\frac{10s}{N}+1)(0,5Ns+1)}\right)}$$

$$F_T = \frac{1}{(3Ns+1)(\frac{10s}{N}+1)(0,5Ns+1) + G_c}$$

Sendo $G_c = K_p + sK_d + \frac{K_i}{s}$

Então:

$$F_T = G(s) = \frac{1}{(3Ns+1)\left(\frac{100}{N}+1\right)(0,5Ns+1) + \left(K_{pi} + sK_{di} + \frac{K_{ii}}{s}\right)}$$

Fazendo a análise para o erro em regime permanente ser menor que 0.1:

Fazendo a entrada $r(t) = 0$

$y(\infty) \leq 0,1$, para $D(s) = \frac{1}{s^2}$

$y(\infty) = \lim_{s \to 0} s D(s) . G(s)$ → Teorema do valor final

$$\lim_{s \to 0} s D(s) . G(s) \leq 0,1$$

$$\lim_{s \to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{s^{\cancel{2}}} \cdot \left(\frac{1}{(3Ns+1)\left(\frac{100}{N}+1\right)(0,5Ns+1) + \left(K_{pi} + sK_{di} + \frac{K_{ii}}{s}\right)} \right) \leq 0,1$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{1}{(3Ns+1)\left(\frac{100}{N}+1\right)(0,5Ns+1) + \left(K_{pi} + sK_{di} + \frac{K_{ii}}{s}\right)} \right) \leq 0,1$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s\,\cancelto{0}{(3Ns+1)\left(\frac{100}{N}+1\right)(0,5Ns+1)} + s\left(K_{pi} + sK_{di} + \frac{K_{ii}}{s}\right)} \leq 0,1$$

$$\frac{1}{K_{ii}} \leq 0,1$$

$$\boxed{K_{ii} \geq 10}$$

Agora partiremos para projetar o controlador PID do sistema, ficando em observação para atender o Kii >= 10 que é referente ao erro em regime.

Projetando um controlador proporcional integral (PI):

$$G_{MA}' = \frac{K_{pi}\left(s + \frac{K_{ii}}{K_{pi}}\right)}{s} \cdot G_p$$

Fazendo a equação característica $1 + KG_{MA}' = 0$, temos:

$$1 + \frac{K_{pi}\left(s + \frac{K_{ii}}{K_{pi}}\right)}{s} \cdot \left(\frac{1}{(3Ns+1)\left(\frac{10s}{N}+1\right)(0{,}5Ns+1)}\right) = 0$$

$$1 + \frac{K_{pi}\left(s + \frac{K_{ii}}{K_{pi}}\right)}{s} \cdot \left(\frac{1}{60s^3 + 59s^2 + 16{,}5s + 1}\right) = 0$$

$$1 + \frac{K_{pi}\left(s + 0{,}009\right)}{s} \cdot \left(\frac{1}{60s^3 + 59s^2 + 16{,}5s + 1}\right) = 0$$

$$1 + K_{pi}\left(s + 0{,}009\right) \cdot \left(\frac{1}{60s^4 + 59s^3 + 16{,}5s^2 + s}\right) = 0$$

$$1 + K_{pi}\frac{(s + 0{,}009)}{60s^4 + 59s^3 + 16{,}5s^2 + s} = 0$$

Portanto, nossa Gma é dada por:

```
gma =

            s + 0.009
  ------------------------------
  60 s^4 + 59 s^3 + 16.5 s^2 + s
```

Fazendo as raízes no matlab temos:

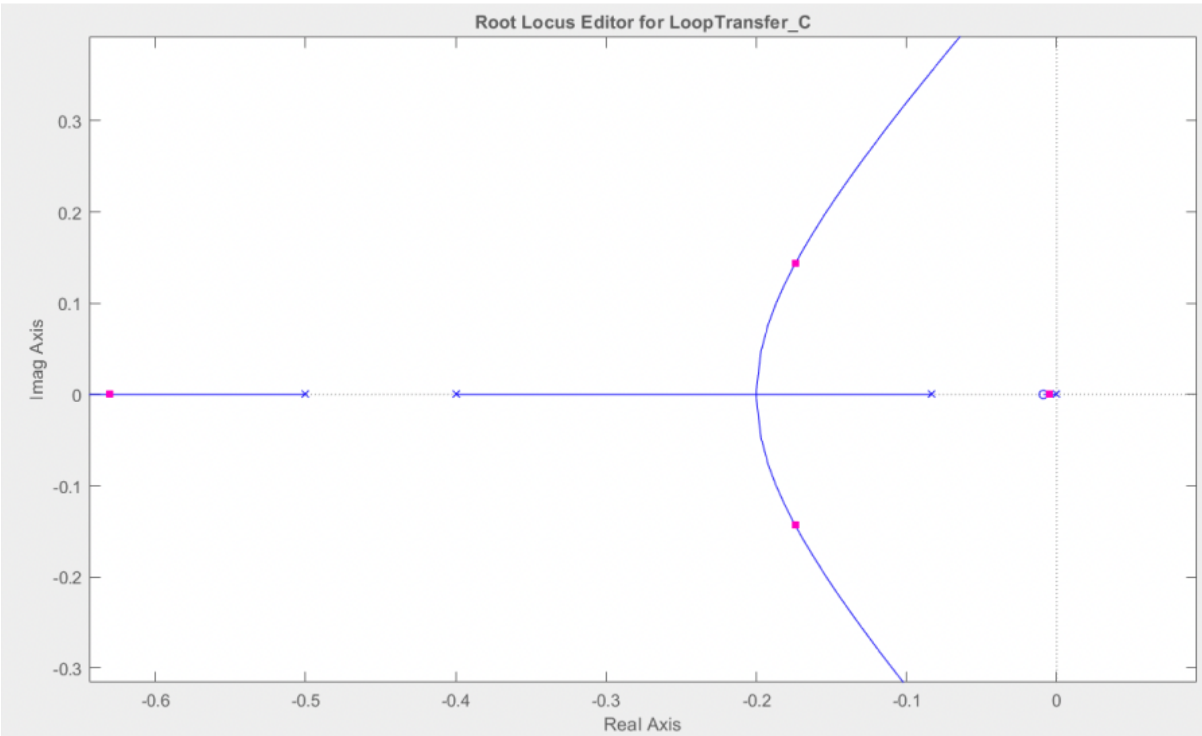
```
>> roots([60 59 15.5 1])

ans =

   -0.5979
   -0.2890
   -0.0965

>>
```

$\rightarrow -0{,}009 = \frac{Kii}{Kpi}$

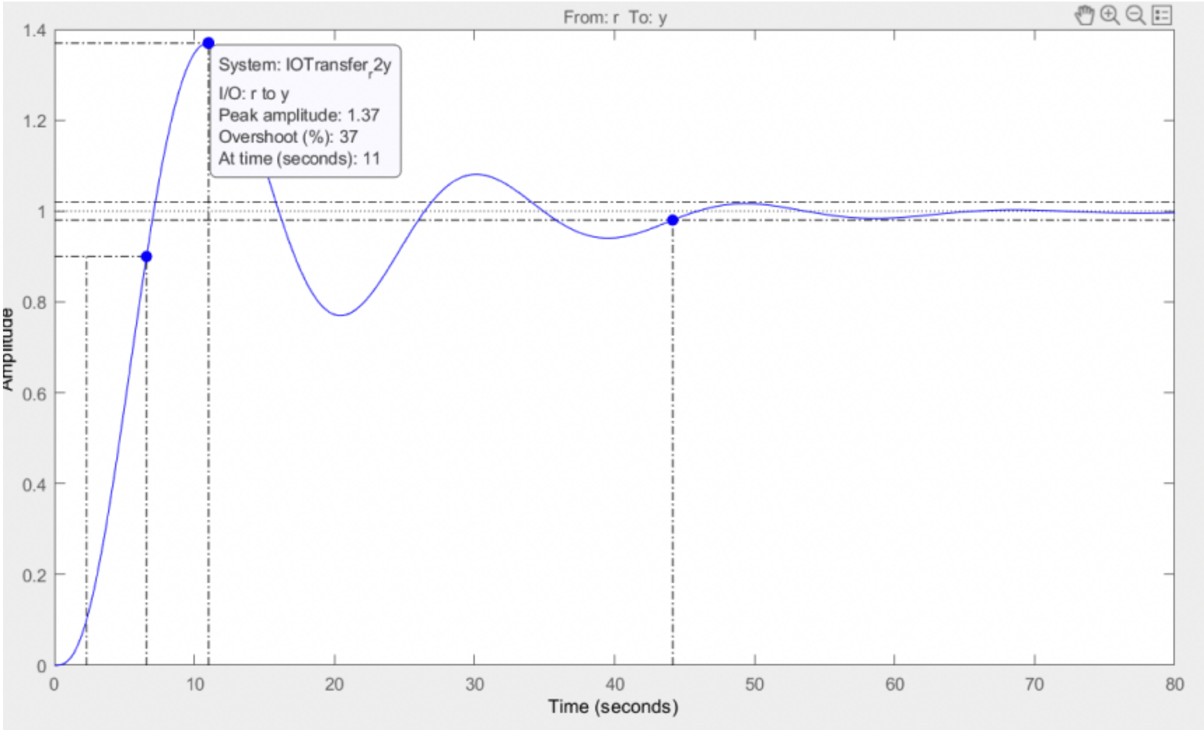
Portanto, poderíamos escolher o kii/kpi = -0.009, sendo 10% do polo mais próximo da origem. Mas, como queremos a resposta mais rápida, vamos afastar mais esse zero da origem. Após alguns testes, verificamos que um bom valor para **kii/kpi será 0.05.**

Kp	Ki/Kp	Mp	Tr	Ta
5	0.05	37.0%	4.29s	44.2s
4	0.08	39.7%	4.7s	48.3s

Projetando o lugar das raízes:



Para um valor de Kpi = 5 e kii/kpi = 0.05, conseguimos atender ao sobressinal entre 30% e 40%, com a resposta mais rápida. Vamos ter a seguinte resposta ao degrau:



Com isso obtemos:

Kp	Ki/Kp	Mp	Tr	Ta
5	0.05	37.0%	4.29s	44.2s

Começamos com o Kii/Kpi igual a 10% do polo real mais próximo da origem, ou seja, 0.009. Para ficar com o overshoot no intervalo entre 30% a 40% aumentamos o valor gradativamente até 0.05 e o valor de Kpi = 5 onde obtivemos um overshoot de 37% e com o melhor tempo de resposta. Porém não será possível obter um erro de 0.1 com esse Kii/Kpi, pois:

$$\frac{Kii}{Kpi} = 0{,}05$$

$$\frac{Kii}{5} = 0{,}05$$

$$Kii = 0{,}25$$

Esse Kii é menor que 10, logo o erro em regime será maior que 0,1

Kii/Kpi não pode ser maior que 0.09, pois se não os polos escolhidos deixariam de ser os dominantes. Com isso concluímos que o PID para esse sistema não atenderia às condições pedidas.

Mas, supondo que os valores escolhidos atendessem a um erro aceitável, partiremos agora para o controlador PD.

Projetando um controlador proporcional derivativo (PD):

$$1 + (1 + s\,kdd)\, G_p^{NOVA} = 0$$

$$G_p^{NOVA} = \frac{5(s+0{,}05)}{60s^4 + 59s^3 + 16{,}5s^2 + s}$$

$$1 + (1 + s\,kdd)\frac{5(s+0{,}05)}{60s^4 + 59s^3 + 16{,}5s^2 + s} = 0$$

$$\left(1 + \frac{5(s+0{,}05)}{60s^4 + 59s^3 + 16{,}5s^2 + s}\right) + s\,kdd\frac{5(s+0{,}05)}{60s^4 + 59s^3 + 16{,}5s^2 + s} = 0$$

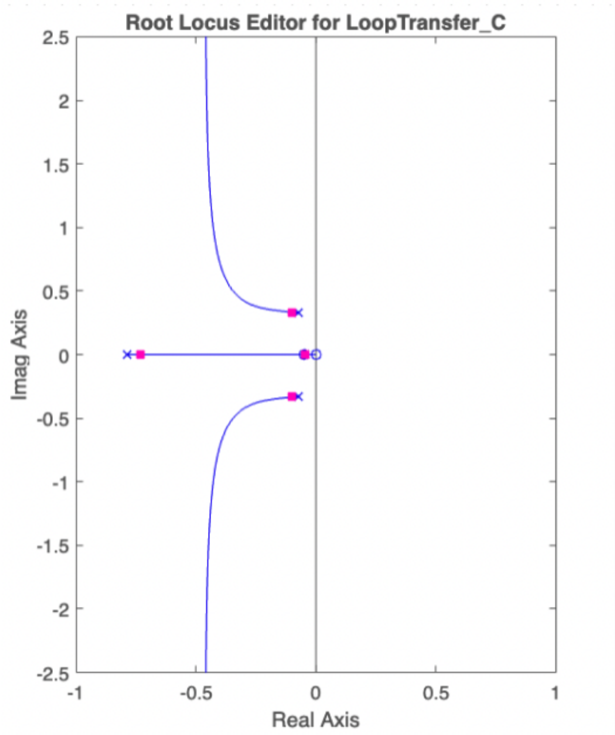
Dividindo cada termo por $(1 + G_p^{NOVA})$:

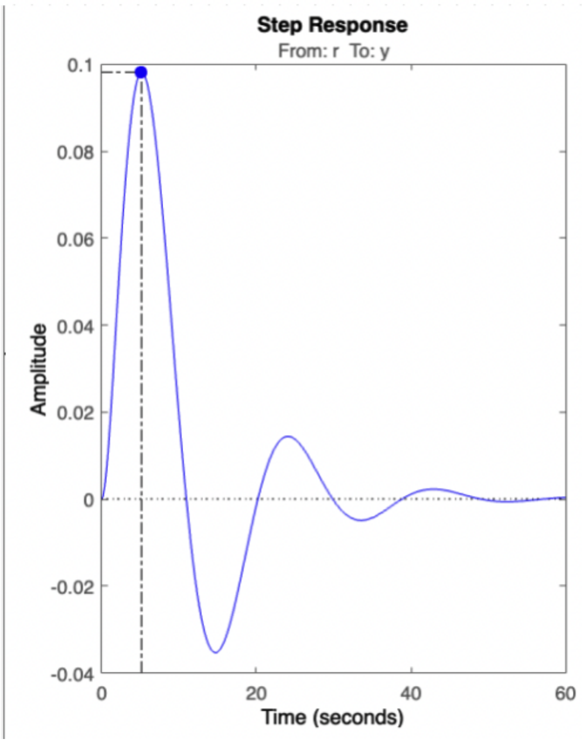
$$= 1 + s\,kdd\left(\frac{\dfrac{5(s+0{,}05)}{60s^4 + 59s^3 + 16{,}5s^2 + s}}{1 + \dfrac{5(s+0{,}05)}{60s^4 + 59s^3 + 16{,}5s^2 + s}}\right) = 0$$

$$= 1 + s\,kdd\left(\frac{5(s+0{,}05)}{60s^4 + 59s^3 + 16{,}5s^2 + s + 5(s+0{,}05)}\right) = 0$$

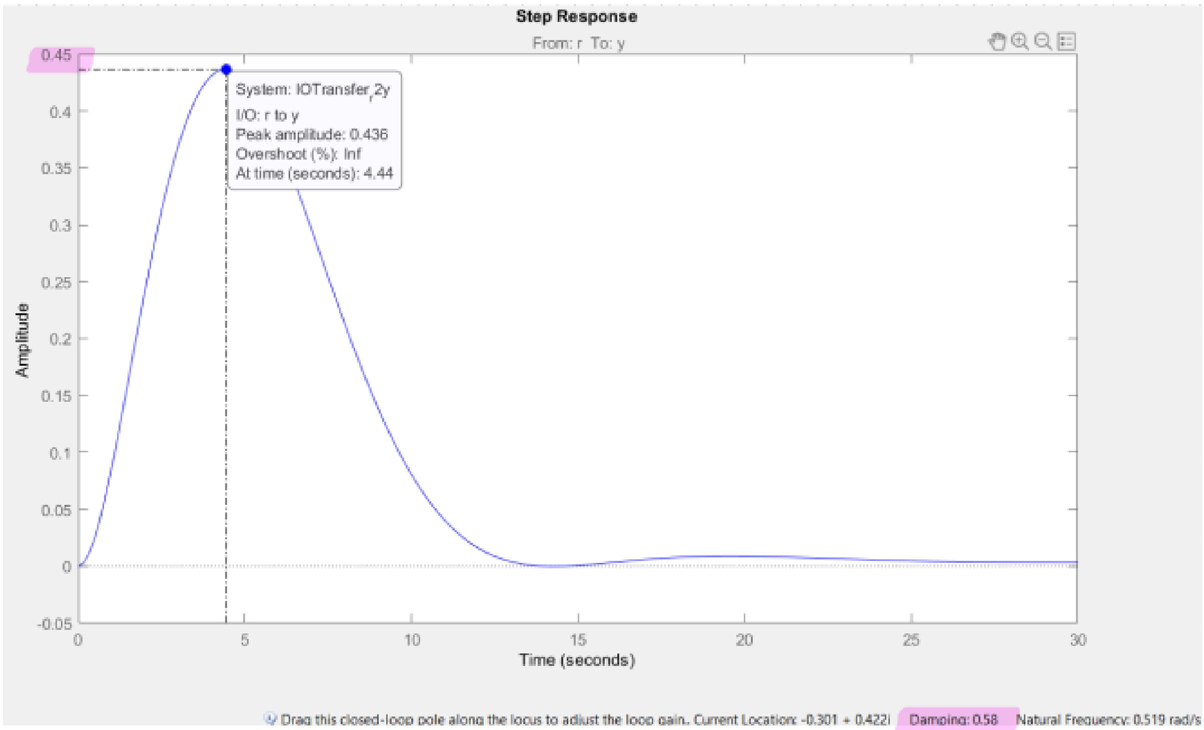
$$= 1 + kdd\left(\frac{5s^2 + 0{,}25s}{60s^4 + 59s^3 + 16{,}5s^2 + 6s + 0{,}25}\right) = 0$$

Projetando o Kdd para atender os 10% de sobressinal:





Dado que o MP deve ser menor que 10%, o ζ deve ser maior que 0.6. Podemos concluir que o sistema não atende esses requisitos. Visto que para um ζ = 0.58 o gráfico da resposta resposta ao degrau já se encontra perto dos 45%. Como podemos confirmar a seguir:



Podemos concluir que não é possível projetar um controlador pd que atenda o sobressinal pedido.

Mas supondo que o **ζ = 0.58** seja aceitável, temos que o valor de Kdd é de 0.49.

Projetando o controlador PID:

Sendo o PI $\rightarrow \dfrac{5(s+0{,}05)}{s}$

e o PD $\rightarrow 1 + s . 0{,}49$

Então o PID = PI . PD

$$= \frac{5s+0{,}25}{s} . (1 + s . 0{,}49)$$

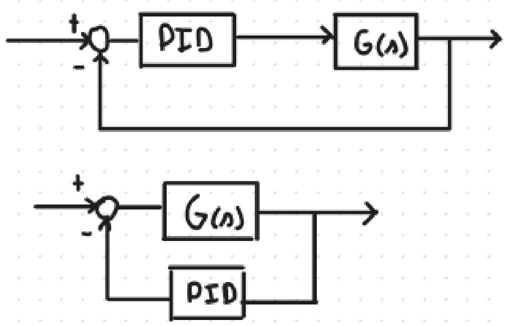
$$= \frac{5s + 2{,}45s^2 + 0{,}25 + 0{,}1225s}{s}$$

$$= \frac{2{,}45s^2 + 5{,}1225s + 0{,}25}{s}$$

$$= 2{,}45s + 5{,}1225 + \frac{0{,}25}{s}$$

$K_p = 5{,}1225$ | $K_i = 0{,}25$ | $K_d = 2{,}45$

Os parâmetros escolhidos para o controlador PID são: Kp = 5.1225, Ki = 0.25 e Kd = 2.45.



Esses parâmetros escolhidos foram supondo que o erro em regime e o sobressinal não fossem atendidos. Mas como fomos concluindo ao longo do desenvolvimento da questão, não é possível definir um valor válido de Kdd e nem de Kii para atender os requisitos. Além disso, outros parâmetros dependem de Kdd, logo não é possível projetar um controlador PID que atenda aos critérios estabelecidos para o sistema.

Código utilizado na questão:

```
%% Questão 2
num_pid=[1 0.009];
den_pid=[60 59 16.5 1 0];
gma_pid=tf(num_pid,den_pid);
rltool(gma_pid);
Controlador PD
num_pid_pd = [5 0.25 0];
```

```
den_pid_pd = [60 59 16.5 6 0.25];
gma_pid_pd = tf(num_pid_pd, den_pid_pd);
rltool(gma_pid_pd);
```