Universidade Federal do Espírito Santo
Uma solução Terceira Prova de Álgebra Linear
Vitória, 23 de abril de 2013

1. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ b & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ c & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.

   (a) Encontre $\mathrm{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tal que a matriz A seja ortogonal. O vetor v é único?
   Sol.: Sejam $\mathrm{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e $\mathrm{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Como $< \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 >= 0$ e $||\mathrm{v}_1|| = ||\mathrm{v}_2|| = 1$, então, escolhendo $\mathrm{v} = \mathrm{v}_1 \times \mathrm{v}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ temos: $||\mathrm{v}|| = 1$, $< \mathrm{v}, \mathrm{v}_1 >=$ $< \mathrm{v}, \mathrm{v}_2 >= 0$. Portanto, $\beta = \{\mathrm{v}, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$ será ortonormal e A será uma matriz ortogonal, para esta escolha de v. Perceba que $-\mathrm{v}$ tambem é solução do problema. Logo, v não é único.

   (b) Seja $\beta = \{\mathrm{v}, (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$, onde v é uma solução do item (a). Encontre as coordenadas do vetor $\mathrm{u} = (0, 1, 1)$ na base β.
   Sol.: Veja que A é matriz de mudança de base, da base β, definida no item (a), para a base conônica de $\mathbb{R}^3$, além disso, $A^{-1} = A^T$. Portanto, $[\mathrm{u}]_\beta = A^T[\mathrm{u}]_{can} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$.

2. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Encontre os auto-valores de A.
   Sol.: Veja que $det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda - 1)^3$. Logo os auto-valores de A são 0 e 1.

   (b) A é diagonalizável? Explique!
   Sol.: Não, pois a dimensão do auto-espaço associado ao auto-valor 1 tem diensão 1. De fato,
$$I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Como 3 linhas de $(I - A)$ são L.I., o espaço nulo de $I - A$ tem dimensão 1. A seria diagonalizável se a dimensão do auto-espaço associado ao auto-valor 1 fosse 3.

3. Seja T a transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ definida por
$$T(x, y) = (x + 2y, y - x, x + y).$$

   (a) Encontre o núcleo de T. A transformação T é injetora? T é sobrejetora?
$$\textit{Sol.: } T(x, y) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x + 2y &= 0 \\ y - x &= 0 \\ x + y &= 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0.$$
   Logo $N(T) = \{(0, 0)\}$ e T é injetora. T não pode ser sobrejetora pois a dimensão do domínio ($\mathbb{R}^2$) é menor que a dimensão do contra-domínio ($\mathbb{R}^3$).

(b) Encontre a matriz de T com relação às bases

$$\beta = \{(1,2),(3,-1)\} \text{ e } \beta' = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

Sol.: Sejam α e α' as bases conônicas do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Então, $[T]_{\alpha',\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Sejam $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ as matrizes de mudança de base de β para α e de β' para α' respectivamente. Assim

$$[T]_{\beta',\beta} = Q^{-1}\,[T]_{\alpha',\alpha}\,P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Seja $S \subset \mathbb{R}^5$ o espaço-linha da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre bases β e β' para S e para o seu complemento ortogonal $S^\perp$, respectivamente.
Sol.: A é equivalente por linhas a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sejam $\mathrm{v}_1 = (1,-2,-1,2,-1)$ e $\mathrm{v}_2 = (0,1,-3,0,1)$. Então $\beta = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2\}$ é uma base ortogonal de S. Como o núcleo de A, $N(A)$, é o complemento ortogonal do espaço linha de A, temos que $S^\perp = N(A) = ger\{\mathrm{v}_3 = (7,3,1,0,0), \mathrm{v}_4 = (-2,0,0,1,0), \mathrm{v}_5 = (-1,-1,0,0,1)\}$. Assim, $\beta' = \{\mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4, \mathrm{v}_5\}$ é uma base para $S^\perp$.

(b) Ortogonalize a base B do $\mathbb{R}^5$ obtida pela união de β e β' ($B = \beta \cup \beta'$).
Sol.: Como v_1 e v_2 são ortogonais e todo vetor de S é ortogonal a todo vetor de $S^\perp$, basta aplicar Gram-Schimidt em β'. Seja $\mathrm{u}_3 = \mathrm{v}_3$, $\mathrm{u}_4 = \mathrm{v}_4 - \frac{<\mathrm{u}_3,\mathrm{v}_4>}{||\mathrm{u}_3||^2}\mathrm{u}_3$ e $\mathrm{u}_5 = \mathrm{v}_5 - \frac{<\mathrm{u}_4,\mathrm{v}_5>}{||\mathrm{u}_4||^2}\mathrm{u}_4 - \frac{<\mathrm{u}_3,\mathrm{v}_5>}{||\mathrm{u}_3||^2}\mathrm{u}_3$. $\mathcal{B} = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{u}_3, \mathrm{u}_4, \mathrm{u}_5\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^5$ obtida da ortogonalização de B.

(c) Defina um operador linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tal que

$$\begin{cases} Im(T) &= S \\ Nuc(T) &= S^\perp. \end{cases}$$

Sol.: Basta definir T na base $\mathcal{B}$ da seguinte forma: $T(\mathrm{v}_1) = \mathrm{v}_1$, $T(\mathrm{v}_2) = \mathrm{v}_2$, $T(\mathrm{u}_3) = T(\mathrm{u}_4) = T(\mathrm{u}_5) = 0$.