Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática
GABARITO P3 – Álgebra Linear (MAT09592) – 10/12/20

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Seja $R_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que reflete pontos do plano em relação à reta $r : y = k^{-1}x$, onde $k \in \mathbb{R}$ (fixado), com $k \neq 0$.

   (a) (1,0 ponto) Mostre que $\overrightarrow{v}_1 = (k, 1)$ e $\overrightarrow{v}_2 = (1, -k)$ são autovetores de R_r.

   (b) (1,0 ponto) Verifique se a matriz de R_r é diagonalizável.

Solução 1:

(a) Considerando a equação de reta $y = k^{-1}x$, para $x = k$, temos $y = 1$ mostrando que o vetor $\overrightarrow{v}_1$ está na reta r e assim, é deixado fixo pela ação de R_r, isto é, temos que $R_r(\overrightarrow{v}_1) = R_r(k, 1) = (k, 1) = \overrightarrow{v}_1$. Assim, $R_r(\overrightarrow{v}_1) = \overrightarrow{v}_1$ mostra que $\overrightarrow{v}_1$ é um autovetor de R_r associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$.

Já para o vetor $\overrightarrow{v}_2 = (1, -k)$, observamos que este é perpendicular à reta r pois está na reta $s : y = -kx$. Assim, R_r reflete $\overrightarrow{v}_2$ em seu negativo $-\overrightarrow{v}_2$, isto é,$R_r(\overrightarrow{v}_2) = (-1, k) = -(1, -k) = -\overrightarrow{v}_2$ mostrando assim que $\overrightarrow{v}_2$ é um autovetor de R_r associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$.

(b) Vemos então que $S = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ constituída de autovetores de R_r, o que nos leva a concluir que R_r é diagonalizável com a representação diagonal, em relação à base S,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solução 2:

(a) Seja $P_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear projeção ortogonal de pontos do plano na reta reta $r : y = k^{-1}x$, onde $k \in \mathbb{R}$ (fixado), com $k \neq 0$. Podemos escrever a reta também na forma $r : (x, y) = t(1, k^{-1})$ com $t \in \mathbb{R}$. Assim, o vetor $\overrightarrow{v}_r = (1, k^{-1})$ é um vetor diretor da reta r.

Então temos que

$$P_r(x, y) = proj_{\overrightarrow{v}_r}(x, y) = \frac{(x, y) \cdot (1, k^{-1})}{(1, k^{-1}) \cdot (1, k^{-1})}(1, k^{-1}) = k^2\Big(\frac{x + k^{-1}y}{k^2 + 1}\Big)(1, k^{-1})$$

$$\Rightarrow P_r(x, y) = \Big(\frac{1}{k^2 + 1}\Big)(k^2x + ky, kx + y).$$

Sabemos da álgebra de vetores que: $R_r(\overrightarrow{v}) = 2P_r(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v}$ para todos $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$. Desta forma,

$$R_r(x, y) = 2P_r(x, y) - (x, y) = \Big(\frac{2}{k^2 + 1}\Big)(k^2x + ky, kx + y) - (x, y)$$

$$\Rightarrow R_r(x,y)=\Big(\frac{(k^2-1)x+2ky}{k^2+1},\frac{2kx-(k^2-1)y}{k^2+1}\Big).$$

Portanto, temos:

$$R_r(\overrightarrow{v}_1)=R_r(k,1)=\Big(\frac{(k^2-1)k+2k}{k^2+1},\frac{2k^2-k^2+1}{k^2+1}\Big)=(k,1)\Rightarrow R_r(\overrightarrow{v}_1)=\overrightarrow{v}_1.$$

$$R_r(\overrightarrow{v}_2)=R_r(1,-k)=\Big(\frac{k^2-1-2k^2}{k^2+1},\frac{2k+(k^2-1)k}{k^2+1}\Big)=(-1,k)\Rightarrow R_r(\overrightarrow{v}_2)=-\overrightarrow{v}_2.$$

Assim, $R_r(\overrightarrow{v}_1)=\overrightarrow{v}_1$ e $R_r(\overrightarrow{v}_2)=-\overrightarrow{v}_2$ mostram que $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$ são autovetores de R_r associados aos autovalores $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=-1$, respectivamente.

(b) Visto que $dim(\mathbb{R}^2)=2$ e que o conjunto $B=\{\overrightarrow{v}_1,\overrightarrow{v}_2\}$ é L.I., portanto é uma base de $\mathbb{R}^2$ constituída de autovetores, conclui-se que R_r é diagonalizável. Assim, $[R_r]_B$ é diagonal com

$$[R_r]_B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

2. (2,0 pontos) Determine uma matriz ortogonal $A_{3\times 3}$ tal que a transformação linear definida por $T(\overrightarrow{v})=A\overrightarrow{v}$ leve o plano $x-y+z=0$ no plano $x+y-z=0$.

Solução 1: Indiquemos os planos por $\pi_1: x-y+z=0$ e $\pi_2: x+y-z=0$. Observamos inicialmente que o plano π_1 é constituído pelos pontos da forma $(x,y,-x+y)$ e o plano π_2 é constituído pelos pontos da forma $(x,y,x+y)$.

Temos:

$$(x,y,-x+y)=x(1,0,-1)+y(0,1,1)\ \text{ e }\ (x,y,x+y)=x(1,0,1)+y(0,1,1).$$

Assim vemos que o plano π_1 é o lugar geométrico dos pontos do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(1,0,-1)$ e $(0,1,1)$ e o plano π_2 é o lugar geométrico dos pontos do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(1,0,1)$ e $(0,1,1)$.

Considere as bases $B=\{(1,-1,1),(1,0,-1),(0,1,1)\}$ e $C=\{(1,1,-1),(1,0,1),(0,1,1)\}$ do $\mathbb{R}^3$ onde $\overrightarrow{n}_1=(1,-1,1)$ e $\overrightarrow{n}_2=(1,1,-1)$ são os vetores normais dos planos π_1 e π_2, respectivamente.

Denotemos:

$$\overrightarrow{u}_1=(1,-1,1),\overrightarrow{u}_2=(1,0,-1),\overrightarrow{u}_3=(0,1,1),\overrightarrow{v}_1=(1,1,-1),\overrightarrow{v}_2=(1,0,1)\ \text{ e }\ \overrightarrow{v}_3=(0,1,1).$$

Se desejamos encontrar uma transformação linear que leve o plano π_1 no plano π_2, basta que encontremos uma transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(\overrightarrow{u}_1)=\langle\overrightarrow{v}_1\rangle,\ \ T(\overrightarrow{u}_2)=\langle\overrightarrow{v}_2\rangle\ \text{ e }\ T(\overrightarrow{u}_3)=\langle\overrightarrow{v}_3\rangle.$$

Observamos que se o vetor $\overrightarrow{v}=(x,y,z)\in\pi_1$, então $T(\overrightarrow{v})\in\pi_2$ e disto, temos que

$$(x,y,z)\longmapsto(x,-y,-z)$$

De fato, se $\overrightarrow{v}=(x,y,z)$ é tal que $z=-x+y$ então

$$x\longmapsto x, y\longmapsto -y, z\longmapsto -z\Longrightarrow z=-x+y\longmapsto -z=-x-y$$

isto é,

$$\pi_1: x-y+z=0\longmapsto\pi_2: x+y-z=0.$$

*Aqui observamos que $T(\overrightarrow{u}_3)=-\overrightarrow{v}_3\in\langle\overrightarrow{v}_3\rangle$ mas temos que

$$\pi_2=\langle(1,0,-1),(0,1,1)\rangle=\langle(1,0,-1),(0,-1,-1)\rangle.$$

Assim, considerando $T(x,y,z) = (x,-y,-z)$, sua matriz canônica é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que $A = A^t$ e

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = A^{-1}.$$

mostrando que A é simétrica ortogonal e tal que a transformação linear definida por $T(\overrightarrow{v}) = A\overrightarrow{v}$ leva o plano π_1 no plano π_2.

Solução 2: Indiquemos os planos por $\pi_1 : x - y + z = 0$ e $\pi_2 : x + y - z = 0$. Temos que $\overrightarrow{n}_1 = (1,-1,1)$ e $\overrightarrow{n}_2 = (1,1,-1)$ são os vetores normais dos planos π_1 e π_2, respectivamente.

Sabemos que um plano fica plenamente determinado se conhecemos seu vetor normal e um ponto dele. Sendo assim, basta que busquemos uma transformação linear que leve o vetor normal $\overrightarrow{n}_1 = (1,-1,1)$ no $\overrightarrow{n}_2 = (1,1,-1)$ e fixando a origem $\overrightarrow{0} = (0,0,0)$ visto que a origem é um ponto comum aos planos π_1 e π_2.

Considere a função $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (x,-y,-z)$. É fácil vermos que

$$T(k_1(x_1,y_1,z_1) + k_2(x_2,y_2,z_2)) = k_1T(x_1,y_1,z_1) + k_2T(x_2,y_2,z_2)$$

mostrando que T é uma transformação linear sobre $\mathbb{R}^3$.

Além disso, vemos que

$$T(\overrightarrow{0}) = T(0,0,0) = (0,0,0) = \overrightarrow{0} \ \text{ e } \ T(\overrightarrow{n}_1) = T(1,-1,1) = (1,1,-1) = \overrightarrow{n}_2.$$

Portanto temos assim T uma transformação linear que leva o plano π_1 no plano π_2. Podemos ainda ver que $\pi_1 = \langle (1,0,-1),(0,1,1) \rangle$, $\pi_2 = \langle (1,0,1),(0,1,1) \rangle$ e

$$T(1,0,-1) = (1,0,1), \quad T(0,1,1) = -(0,1,1),$$

comprovando que $T(\pi_1) = \pi_2$.

A matriz canônica de $T(x,y,z) = (x,-y,-z)$, é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que $A = A^t$ e

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = A^{-1}.$$

mostrando que A é simétrica ortogonal e tal que a transformação linear definida por $T(\overrightarrow{v}) = A\overrightarrow{v}$ leva o plano π_1 no plano π_2.

3. (2,0 pontos) Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ duas transformações lineares não nulas tais que $T \circ S = 0$. Mostre que existem vetores não nulos $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{v}$ tais que $T(\overrightarrow{u}) = T(\overrightarrow{v})$.

Solução: Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ duas transformações lineares não nulas. Então existem vetores não nulos $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ em $\mathbb{R}^3$ tais que $T(\overrightarrow{v}) \neq \overrightarrow{0}$ e $S(\overrightarrow{w}) \neq \overrightarrow{0}$.

Agora, considere o vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} - S(\overrightarrow{w})$. Temos que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ (consequentemente, $\overrightarrow{v} \neq S(\overrightarrow{w})$.
De fato, suponha que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
Então teríamos $T(\overrightarrow{u}) = T(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.
Por outro lado,

$$T(\overrightarrow{u}) = T(\overrightarrow{v} - S(\overrightarrow{w})) = T(\overrightarrow{v}) - T(S(\overrightarrow{w})) = T(\overrightarrow{v}) - (T \circ S)(\overrightarrow{w}) = T(\overrightarrow{v}) - \overrightarrow{0} = T(\overrightarrow{v})$$

Assim, teríamos uma contradição pois $T(\overrightarrow{v}) \neq \overrightarrow{0}$.
Desta forma, mostramos que existem vetores não nulos $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{v}$ tais que $T(\overrightarrow{u}) = T(\overrightarrow{v})$.

4. Verifique se cada uma das seguintes afirmações é Verdadeira ou Falsa. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, dê um contraexemplo.
   (a) (1,0 ponto)Se $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$, então $\overrightarrow{x}$ é um autovetor de A.
   (b) (1,0 ponto) Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear inversível. Então, se $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ são ortogonais, então $T(\overrightarrow{u})$ e $T(\overrightarrow{v})$ também são ortogonais.
   (c) (1,0 ponto) Se λ é um autovalor de uma matriz inversível A então λ^{-1} é um autovalor de A^{-1}.
   (d) (1,0 ponto) Se $A_{n\times n}$ é uma matriz que possui k autovalores distintos, com $k < n$, então A não é diagonalizável.

Solução:

(a) Falso.
Tome

$$A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrário e $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} = (0,0)^t \in \mathbb{R}^2$.
Temos assim que:

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} = \lambda\overrightarrow{x}$$

mas no entanto, $\overrightarrow{x}$ não pode ser um autovetor de A pois autovetores têm de ser não nulos por definição.

(b) Falso.
Tome $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, o operador linear dado por $T(\overrightarrow{v}) = A(\overrightarrow{v})$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí, tomando $\epsilon_1 = (1,0)$ e $\epsilon_2 = (0,1)$, que formam a base ortogonal canônica do $\mathbb{R}^2$, vemos que:

$$T(\epsilon_1) = \epsilon_1, \qquad T(\epsilon_2) = (1,1).$$

Desta forma temos;

$$\epsilon_1 \cdot \epsilon_1 = 0 \;\text{ porém, }\; T(\epsilon_1) \cdot T(\epsilon_2) \neq 0.$$

(c) Verdadeiro.
Se Se λ é um autovalor de uma matriz inversível A então existe um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ tal que $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$.
Sendo A invertível e $\lambda \neq 0$, segue então que

$$A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v} \Rightarrow A^{-1} \cdot (A\overrightarrow{v}) = A^{-1} \cdot (\lambda\overrightarrow{v}) \Rightarrow I\overrightarrow{v} = \lambda(A^{-1}\overrightarrow{v}) \Rightarrow A^{-1}\overrightarrow{v} = \lambda^{-1}\overrightarrow{v},$$

o que nos leva a concluir que λ^{-1} é um autovalor de A^{-1}.

(d) Falso.

Tome a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

É fácil observar que $\lambda = 3$ é seu único autovalor porém, visto que A já é diagonal, obviamente, A é diagonalizável.