AULA 5 Cálculo 3A 2020.2

16.4 Teorema de Green

↳ outro resultado para calcular integrais de linha (em $\mathbb{R}^2$) relaciona integral de linha com integral dupla

definição

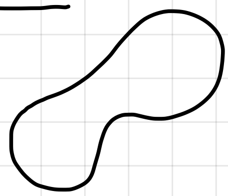
Uma curva $C: x(t)$, $a \leq t \leq b$ é dita **simples**, se ela não tem autointerseção, isto é,

$$x(t) \neq x(s)$$

para todo $a < s, t < b$

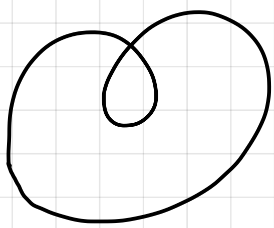
Exemplo

a)



- simples
- fechada

b)



- não é simples
- fechada

Teorema de Green

Considere

I) uma região D delimitada por uma curva ∂D simples, fechada, contínua por partes e orientada positivamente

II) $F(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ um campo com derivadas parciais de P e Q contínuas em D

Então

$$\int_{\partial D} F \cdot dr = \iint_D \operatorname{rot} F \cdot \vec{k} \, dA$$

Observação

$$\operatorname{rot} F \cdot k = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Então podemos escrever

$$\int_{\partial D} F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Prova do teorema para um caso particular

Suponha que a região D é do Tipo 1 (entre gráfico de funções)

$C_1: x_1(t) = (t, g_1(t))$, $a \leq t \leq b$

$C_2: x_2(t) = (b, t)$ $g_1(b) \leq t \leq g_2(b)$

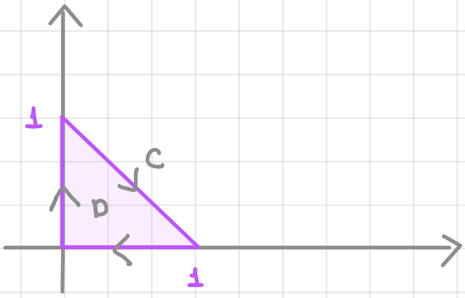
$C_3: x_3(t) = (t, g_2(t))$ $a \leq t \leq b$

Exemplo

Calcule $\int_C x^4 dx + xy\,dy$ onde

C é a curva ligando $(0,0),(1,0),(0,1)$ orientada no sentido horário

Solução



C : é fechada orientada no sentido negativo

Recorde que $\int_{-C} F.dr = -\int_C F dr$

↳ sentido contrário de C.

$F(x,y) = x^4 i + xy J$

$\text{rot} F \cdot K = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y \neq 0$

não é conservativo

Usano o teorema de Green

$\int_C F.dr = -\iint_D y \, dA = (*)$

Vamos descrever a região D

$D = \{ (x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x \}$

$(*) = -\int_0^1 \int_0^{1-x} y \, dy dx$

$= -\int_0^1 \frac{y^2}{2} \Big|_1^{1-x} = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 . dx$

$= -\frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{1}{3} (1-x)^3 \right] \Big|_0^1 = -\frac{1}{6}$

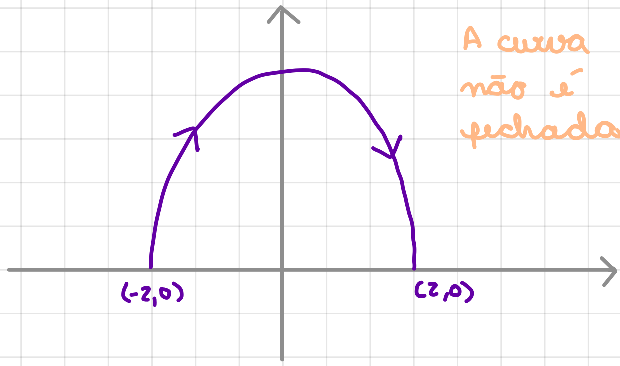
Exemplo

Calcule $\int_C \underbrace{(x + e^x \operatorname{sen} y)}_{P} dx + \underbrace{(x + e^x \cos y)}_{Q} dy$

onde C é a curva $y = 4 - x^2$, $y \geq 0$ ligando $(-2,0)$ a $(2,0)$.

$F = Pi + QJ$

Solução



A curva não é fechada

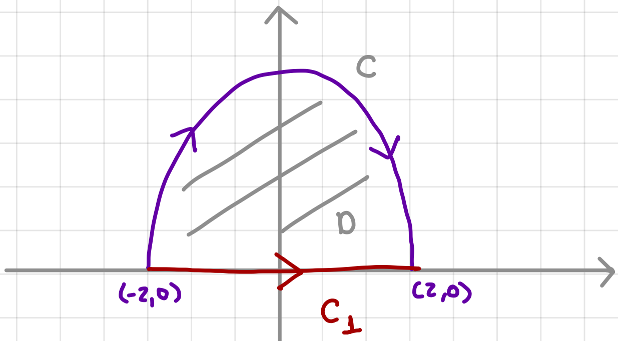
$\text{rot} F \cdot K = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + e^x \cos y - e^x \cos y = 1$

não é conservativo

- Recorde que

$\int_{C_1 \cup C_2} F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr$

Vamos fechar a curva para usar o teorema de Green



O teorema de Green a orientação fronteira de D tem orientação positiva

$$\int_{-C \cup C_1} F \cdot dr = \iint_D \text{rot} F \cdot k \, dA$$

tem orientação positiva

teorema de Green

$$= \iint_D 1 \cdot dA \quad (*)$$

Descrevendo

$D = \{(x,y) : -2 \leq x \leq 2 \ , \ 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$

$$\int_{-C} F \cdot dr + \int_{C_1} F \cdot dr = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{4-x^2} dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} y \Big|_{0}^{4-x^2} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx$$

$$= 4x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{2} = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3}$$

$\Rightarrow$

$$-\int_C F \cdot dr + \int_{C_1} F \cdot dr = \frac{32}{3}$$

$$\int_C F \cdot dr = \underbrace{\int_{C_1} F \cdot dr}_{\text{calcular esta usando a definição}} - \frac{32}{3}$$

calcular esta usando a definição

$C_1 : \ r(t) = (t, 0) \quad -2 \leq t \leq 2$

$r'(t) = (1, 0)$

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{-2}^{2} [(t + e^t \operatorname{sen} 0) \cdot 1 + (t + e^t \cos 0) \cdot 0]\,dt$$

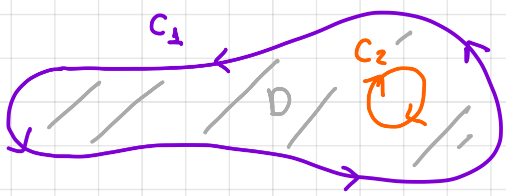
$$= 0$$

Portanto

$$\int_C (x + e^x \operatorname{sen} y)\,dx + (x + e^x \cos y)\,dy = -32/3$$

Versões estendidas do teorema de Green

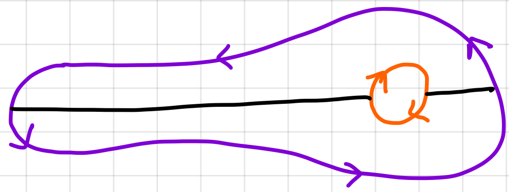
O teorema de Green pode ser aplicado para regiões com furos

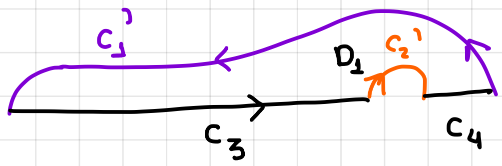


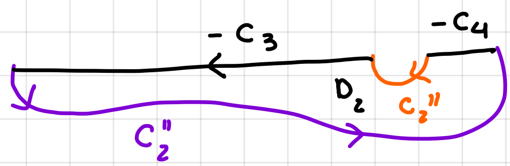
A região D é delimitada por curvas C_1 e C_2 orientadas de forma que a região D está à esquerda quando a curva é percorrido

C_1: está no sentido anti-horário

C_2: está no sentido horário







• $D = D_1 \cup D_2 \Rightarrow \iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$

Considere F um campo definido na região D aplicando o Teorema de Green em D_1 e D_2 temos:

$$\iint_D \text{rot}\, F \cdot K \, dA = \iint_{D_1} \text{rot}\, F \cdot K \, dA$$

$$+ \iint_{D_2} \text{rot}\, F \cdot K \, dA$$

GREEN

$$= \int_{C_1'} F \cdot dr + \int_{C_3} F \cdot dr + \int_{C_2'} F \cdot dr + \int_{C_4} F \cdot dr$$

$$+ \int_{C_1''} F \cdot dr - \int_{C_4} F \cdot dr + \int_{C_2''} F \cdot dr - \int_{C_3} F \cdot dr$$

$$= \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr$$

onde $C_1 = C_1' \cup C_1''$ e

$C_2 = C_2' \cup C_2''$

Em resumo

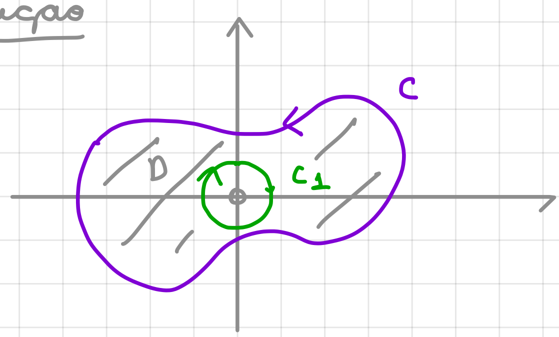
$$\int_{\underbrace{\partial D}_{C_1 \cup C_2}} F \cdot dr = \iint_D \text{rot}\, F \cdot K \, dA$$

Exemplo:

Se $F(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\, i + \dfrac{x}{x^2+y^2}\, J$

Mostre que $\int_C F \cdot dr = 2\pi$ para qualquer curva que circunda a origem

Solução



Considere

- C uma curva qualquer que circunda a origem
- C_1 um círculo de raio a de forma que C_1 está no interior de C

$$C_1: x(t) = (a\cos t, a \sin t)$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

orientado no sentido horário

- o campo F não está defini em $\mathbb{R}^2$
- Mas F está definido na região D entre as curvas C e C_1

Pelo teorema de Green para regiões gerais

$$\int_{C \cup C_1} F \cdot dr = \iint_D \underbrace{\text{rot}\, F \cdot K}_{} \, dA \quad (*)$$

calcular:

$$\text{rot}\, F \cdot K = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$= \frac{(x^2+y^2) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} - \left[\frac{(x^2+y^2) \cdot -1 + y \, 2y}{(x^2+y^2)^2}\right.$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \vec{0}$$

Note que não podemos concluir que F é conservativo pois $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ não é simplesmente conexo

Em (*)

$$\int_{C \cup C_1} F \cdot dr = \iint_D \text{rot}\, F \cdot K \, dA = 0$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_{-C_1} F \cdot dr$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-a\,\text{sen}\,t \cdot -a\,\text{sen}\,t}{a^2} + \frac{a\cos t + a\cos t}{a^2} \, dt$$

$$= 2\pi \,//$$