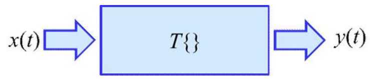
Representação de Sistemas contínuos LTI por Equações Diferenciais



$$x(t) \xrightarrow{T} y(t)$$
$$y(t) = T\{x(t)\}$$
$$= \sum_{k=1}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} - \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}$$

Professor
Jorge Leonid Aching Samatelo
jlasam001@gmail.com

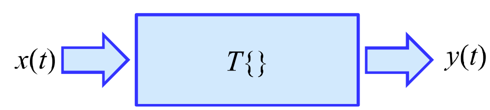
Índice

Representação por Equações Diferenciais

Representação por Equações Diferenciais

Introdução

- ❑ Diferentes modelos de sistemas contínuos estabelecem o mapeamento entre a entrada e a saída via uma equação diferencial:



$$x(t) \xrightarrow{T} y(t)$$
$$y(t) = T\{x(t)\}$$
$$= f\left(x, \underbrace{x', x'', \cdots}_{\text{Derivadas da entrada}}, \underbrace{y', y'', \cdots}_{\text{Derivadas da saída}}\right)$$

Equações diferenciais são equações que tem derivadas entre suas variáveis.

Representação por Equações Diferenciais

Introdução

- Sendo os de maior interesse, os sistemas contínuos definidos por **Equações Diferenciais Ordinárias** (EDO), neste caso, as derivadas da equação diferencial somente ocorrem em relação ao tempo.

$x(t) \Rightarrow \boxed{T\{\}} \Rightarrow y(t)$

$$x(t) \xrightarrow{T} y(t)$$

$$y(t) = T\{x(t)\}$$

$$= f\left(x, \underbrace{\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \cdots}_{\text{Derivadas da entrada em relação ao tempo}}, \underbrace{\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \cdots}_{\text{Derivadas da saída em relação ao tempo}}\right)$$

Representação por Equações Diferenciais

Introdução

- Agora se a EDO que caracteriza a resposta do sistema é linear (é uma combinação linear das derivadas da entrada e a saída), o sistema pode assumir algumas características de interesse pratico.

$x(t) \Rightarrow \boxed{T\{\}} \Rightarrow y(t)$

$$x(t) \xrightarrow{T} y(t)$$

$$y(t) = T\{x(t)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{M} b_k(t) \frac{d^k x(t)}{dt^k} - \sum_{k=0}^{N} a_k(t) \frac{d^k y(t)}{dt^k}$$

Observe que, os coeficientes das derivadas DEPENDEM do tempo.

Representação por Equações Diferenciais

Introdução

- Agora se a EDO ... a pode assumir ...

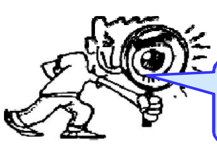
Pode-se demostrar que: Todo sistema que é modelado usando uma EDO linear é um sistema linear variante no tempo.

$x(t) \Rightarrow \boxed{T\{\}} \Rightarrow y(t)$

$$x(t) \xrightarrow{T} y(t)$$

$$y(t) = T\{x(t)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{M} b_k(t) \frac{d^k x(t)}{dt^k} - \sum_{k=0}^{N} a_k(t) \frac{d^k y(t)}{dt^k}$$



Observe que, os coeficientes das derivadas DEPENDEM do tempo.

Representação por Equações Diferenciais

Introdução

- Se os coeficientes das derivadas não dependem do tempo, sistemas Lineares Invariantes no Tempo (sistemas LTI) podem ser modelados.
- Neste caso a equação diferencial é definida como uma EDO de coeficientes constantes.

$x(t) \Rightarrow \boxed{T\{\}} \Rightarrow y(t)$

$$x(t) \xrightarrow{T} y(t)$$

$$y(t) = T\{x(t)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} - \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}$$

Este tipo de EDO joga um papel central na descrição de relações entrada-saída de uma ampla variedades de sistemas elétricos, mecânicos, físicos e biológicos.

Representação por Equações Diferenciais

Introdução

- Por exemplo, se ... sistemas
  Lineares ... s
- N ... de coeficientes
  constan...

Pode-se demostrar que: Todo sistema que é modelado usando uma EDO linear com coeficientes constantes é um sistema LTI.

$$x(t) \Rightarrow \boxed{T\{\}} \Rightarrow y(t)$$

$$x(t) \xrightarrow{T} y(t)$$

$$y(t) = T\{x(t)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} - \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}$$

Este tipo de EDO joga um papel central na descrição de relações entrada-saída de uma ampla variedades de sistemas elétricos, mecânicos, físicos e biológicos.

Representação por Equações Diferenciais

Introdução

- *Resumindo:*
  - A forma geral de um sistema caracterizado por uma EDO linear de coeficientes constantes é:

$$x(t) \Rightarrow \boxed{T\{\}} \Rightarrow y(t)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

  - Onde:
    - a_k y b_k são os coeficientes constantes reais da EDO linear.
    - N é um número inteiro chamado de ordem da EDO, e corresponde à derivada mais elevada (sempre que $N > M$).

Representação por Equações Diferenciais

Introdução

- *Resumindo:*
  - Utilizando o operador diferencial *D=d/dt* podemos escrever a equação anterior como:

$$x(t) \Rightarrow \boxed{T\{\}} \Rightarrow y(t)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

$$D^k = \frac{d^k}{dt^k}$$

Operador Diferencial

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

  - Onde:

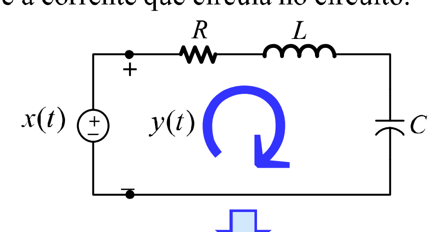
$$Q(D) = a_0 + a_1 D + \cdots + a_{N-1} D^{N-1} + a_N D^N$$

$$P(D) = b_0 + b_1 D + \cdots + b_{M-1} D^{M-1} + b_M D^M$$

Representação por Equações Diferenciais

Exemplo: Sistema RLC

- Determinar a equação diferencial que define o comportamento de um circuito *RLC*, onde
  - a entrada *x(t)* é a tensão de alimentação e
  - a saída *y(t)* é a corrente que circula no circuito.



$$v_R(t) = R i_R(t)$$

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_C(\tau) d\tau$$

$$x(t) = v(t) \rightarrow \boxed{T\{\ \} = ?} \rightarrow y(t) = T\{x(t)\}$$

A. $(1/C + RD + LD^2) y(t) = x(t)$
B. $\boxed{(1/C + RD + LD^2) y(t) = (D) x(t)}$
C. N.A.

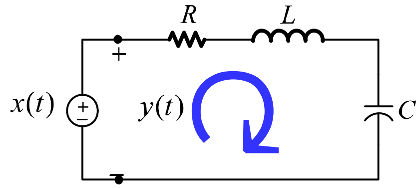
Representação por Equações Diferenciais

Solução

- Aplicando a Lei de Malhas de *Kirchoff* determinamos a EDO linear de coeficientes constantes que caracteriza a relação entrada-saída do circuito *RLC*.

$$Ry(t) + L\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = x(t)$$

$$\frac{1}{C}y(t) + R\frac{d}{dt}y(t) + L\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$



- Representando a equação diferencial através do operador diferencial

$$\underbrace{\left(\frac{1}{C} + RD + LD^2\right)}_{=Q(D)} y(t) = \underbrace{(D)}_{=P(D)}\, x(t)$$

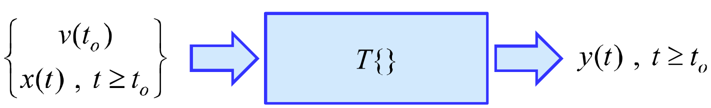
Observe que a ordem N é 2 e o sistema possui dois elementos de armazenamento de energia: o capacitor e o indutor.

Solucionando Equações Diferenciais

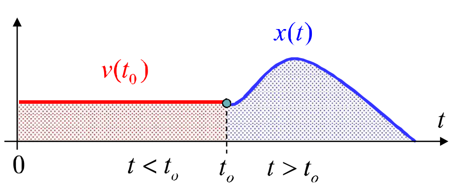
Solucionando Equações Diferenciais

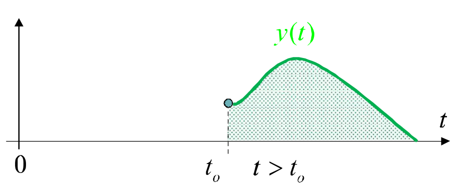
Sistema com Memoria

- Condição Inicial (ou Estado Inicial) $v(t_o)$ de um sistema com memória no instante t_o:
  - $v(t_o)$ é a informação em t_o que, juntamente com o conhecimento da entrada $x(t)$, $t \geq t_o$ (futuro), determina uma única saída $y(t)$ para todo $t \geq t_o$.
  - $v(t_o)$ contém toda a informação passada do sistema até o instante t_o. Assim,



$$\begin{Bmatrix} v(t_o) \\ x(t)\ ,\ t \geq t_o \end{Bmatrix} \xrightarrow{T} y(t)\ ,\ t \geq t_o$$

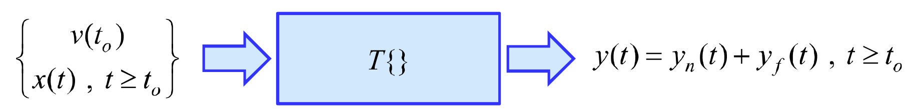




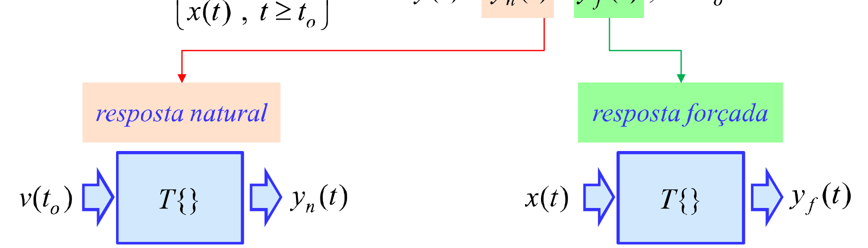
Solucionando Equações Diferenciais

Sistemas LTI com Memoria

- A resposta total $y(t)$ $t \geq t_o$, de um sistema LTI com memoria, é definida pela soma de duas componentes:



$$\begin{Bmatrix} v(t_o) \\ x(t)\ ,\ t \geq t_o \end{Bmatrix} \xrightarrow{T} y(t) = y_n(t) + y_f(t)\ ,\ t \geq t_o$$



$$\begin{Bmatrix} v(t_o) \\ x(t) = 0\ ,\ t \geq t_o \end{Bmatrix} \xrightarrow{T} y_n(t)\ ,\ t \geq t_o \qquad \begin{Bmatrix} v(t_o) = 0 \\ x(t)\ ,\ t \geq t_o \end{Bmatrix} \xrightarrow{T} y_f(t)\ ,\ t \geq t_o$$

Solucionando Equações Diferenciais

Sistemas LTI com Memoria

- Se o sistema LTI com memoria é definido por uma EDO linear de coeficientes constantes, a resposta total $y(t)\ t \geq t_o$ também será a soma de duas componentes:

$$\left\{\begin{matrix} v(t_o) \\ x(t)\ ,\ t \geq t_o \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{Q(D)y(t) = P(D)x(t)} \Rightarrow y(t) = y_n(t) + y_f(t)\ ,\ t \geq t_o$$

$$\left\{\begin{matrix} v(t_o) \\ x(t)\ ,\ t \geq t_o \end{matrix}\right\} \xrightarrow{Q(D)y(t)=P(D)x(t)} y(t) = y_n(t) + y_f(t)\ ,\ t \geq t_o$$

resposta natural

resposta forçada

$$v(t_o) \Rightarrow \boxed{Q(D)y(t) = 0} \Rightarrow y_n(t)$$

$$x(t) \Rightarrow \boxed{Q(D)y(t) = P(D)x(t)} \Rightarrow y_f(t)$$

$$\left\{\begin{matrix} v(t_o) \\ x(t) = 0\ ,\ t \geq t_o \end{matrix}\right\} \xrightarrow{T} y_n(t)\ ,\ t \geq t_o$$

$$\left\{\begin{matrix} v(t_o) = 0 \\ x(t)\ ,\ t \geq t_o \end{matrix}\right\} \xrightarrow{T} y_n(t)\ ,\ t \geq t_o$$

Solucionando Equações Diferenciais

Sistemas LTI com Memoria

$$\left\{\begin{matrix} v(t_o) \\ x(t)\ ,\ t \geq t_o \end{matrix}\right\} \xrightarrow{Q(D)y(t)=P(D)x(t)} y(t) = y_n(t) + y_f(t)\ ,\ t \geq t_o$$

resposta natural

resposta forçada

$$v(t_o) \Rightarrow \boxed{Q(D)y(t) = 0} \Rightarrow y_n(t)$$

$$x(t) \Rightarrow \boxed{Q(D)y(t) = P(D)x(t)} \Rightarrow y_f(t)$$

$$\left\{\begin{matrix} v(t_o) \\ x(t) = 0\ ,\ t \geq t_o \end{matrix}\right\} \xrightarrow{T} y_n(t)\ ,\ t \geq t_o$$

$$\left\{\begin{matrix} v(t_o) = 0 \\ x(t)\ ,\ t \geq t_o \end{matrix}\right\} \xrightarrow{T} y_n(t)\ ,\ t \geq t_o$$

- Para este caso, as condições iniciais são os valores das N derivadas da saída avaliadas no tempo t_o.

$$v(t_o) = \left\{ y(t_o), \frac{d}{dt}y(t_o), \frac{d^2}{dt^2}y(t_o), \ldots, \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}}y(t_o) \right\}$$

Solucionando Equações Diferenciais

Sistemas LTI com Memoria

- Os métodos para determinar a solução de uma Equação de Diferenças são:
  - *Método Direto*
    - Utiliza um procedimento padrão solucionar EDOs lineares de coeficientes constantes.
      - Primeiro, é determinada a Resposta Natural do sistema.
      - Depois, é determinada a Resposta Forçada como a soma de duas componentes:
        - A resposta natural forçada y_{nf}
        - Uma solução particular y_p.
  - *Método Indireto*
    - Usa a transformada de Laplace unilateral.

Focaremos neste método quando estudemos a transformada de Laplace Unilateral

Solucionando Equações Diferenciais

Calculo da Resposta Natural de um sistema LTI

- A resposta natural $y_n(t)$ é obtida observando-se a saída quando $x(t) = 0$.

$$Q(D)y(t) = P(D)\cancel{x(t)}$$

$$(a_0 + a_1 D + \cdots + a_{N-1}D^{N-1} + a_N D^N)y(t) = 0$$

- Seja a solução da EDO:

$$y_n(t) = e^{\lambda t}$$

- Então:

$$(a_0 + a_1 D + \cdots + a_{N-1}D^{N-1} + a_N D^N)y_n(t) = 0$$

$$(a_0 + a_1 D + \cdots + a_{N-1}D^{N-1} + a_N D^N)e^{\lambda t} = 0 \qquad \frac{d^n e^{\lambda t}}{dt^n} = \lambda^n e^{\lambda t}$$

$$\underbrace{(a_0 + a_1 \lambda + \cdots + a_{N-1}\lambda^{N-1} + a_N \lambda^N)}_{=Q(\lambda)}e^{\lambda t} = 0$$

$$Q(\lambda) = 0$$

polinômio característico

Equação característica

Solucionando Equações Diferenciais

Calculo da Resposta Natural de um sistema LTI

- Se a equação característica tiver *N* raízes distintas então:

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_N) = 0$$

- Então, a solução natural será:

$$y_n(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_N e^{\lambda_N t}$$

- Onde as constantes:

$$c_1, c_2, \cdots, c_N$$

- São determinadas usando as *N* condições iniciais do sistema LTI.

- *Observações:*
  - As raízes

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$$

  - são chamadas de: *raízes características*, *valores característicos*, *autovalores* ou *frequências naturais.*
  - As exponenciais

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_N t}$$

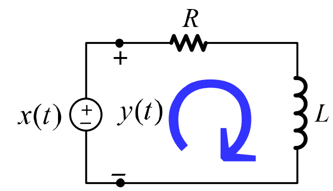
  - são chamadas de: *modos característicos do sistema*.

Solucionando Equações Diferenciais

Calculo da Resposta Natural de um sistema LTI

Exemplo

- Considere o circuito *RL* como um sistema cuja entrada é a tensão aplicada $x(t)$ e a saída é a corrente $y(t)$.
- Encontre:
  - uma equação diferencial que descreva este sistema,
  - a *resposta natural* do sistema para $t > 0$, supondo que a corrente que atravessa o indutor no instante $t = 0$ seja $y(0) = 2$A.



$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

$$v_L(t) = L\frac{d}{dt}i_L(t)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau$$

Solucionando Equações Diferenciais

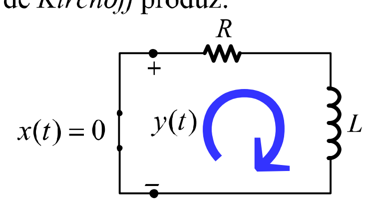
Calculo da Resposta Natural de um sistema LTI

Solução

- Considerando que $x(t) = 0$, a Lei de Malhas de *Kirchoff* produz:

$$Ry(t) + L\frac{d}{dt}y(t) = 0$$

$$(R + LD)y(t) = 0$$



- A equação característica $Q(\lambda)$ será:

$$Q(\lambda) = 0$$

$$(R + L\lambda) = 0$$

- cuja raiz é:

$$R + L\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -R/L$$

- Então,
  - A *resposta natural* será:

$$y_n(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} = c_1 e^{-(R/L)t}, t \geq 0$$

Solucionando Equações Diferenciais

Calculo da Resposta Natural de um sistema LTI

Solução

- Determinando o valor de c_1.
  - a solução deve satisfazer a condição inicial $y(0) = 2$. Neste caso,

$$y_n(0) = c_1 e^{-(R/L)(0)}$$

$$2 = c_1$$

- Finalmente:

$$y_n(t) = 2e^{-(R/L)t}, t \geq 0$$

Estabilidade em Equações Diferenciais

Estabilidade em Equações Diferenciais

Introdução

- Um sistema estável é um *sistema dinâmico* com uma resposta limitada para uma entrada limitada. Uma ilustração do conceito de estabilidade é exposta a seguir.

Estável

Instável

Se o cone está em repouso sobre sua base e um **pequeno empurrão** é aplicado **(entrada limitada),** ele retorna a sua **posição original de equilíbrio (saída limitada)**.

Estabilidade em Equações Diferenciais

Introdução

- Um sistema estável é um *sistema dinâmico* com uma resposta limitada para uma entrada limitada. Uma ilustração do conceito de estabilidade é exposta a seguir.

Estável

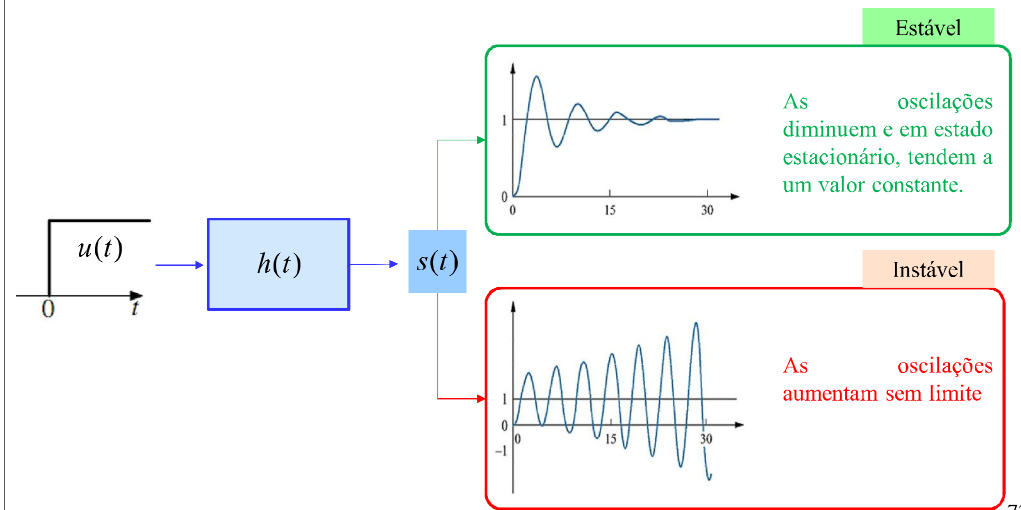
Instável

Se o cone é **ligeiramente empurrado (entrada limitada)**, ele **cai (saída ilimitada)**.

Estabilidade em Equações Diferenciais

Introdução

- A estabilidade de um sistema dinâmico é definida de maneira similar.
- Por exemplo, a resposta ao degrau unitário de um sistema pode resultar num decaimento, neutralidade ou crescimento da resposta como ilustrado a seguir.



Estabilidade em Equações Diferenciais

Estabilidade Assintótica

- Para os sistemas LTI caracterizados via uma EDO a estabilidade depende das raízes da equação característica:

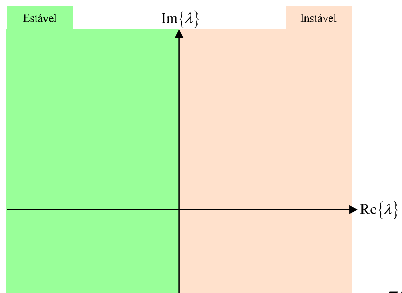
$$Q(\lambda) = 0$$

$$a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{N-1}\lambda^{N-1} + a_N\lambda^N = 0$$

- Neste caso, a resposta natural do sistema, $y_n(t)$, depende das N raízes da equação característica e pode ser escrita na forma

$$y_n(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_N e^{\lambda_N t}$$

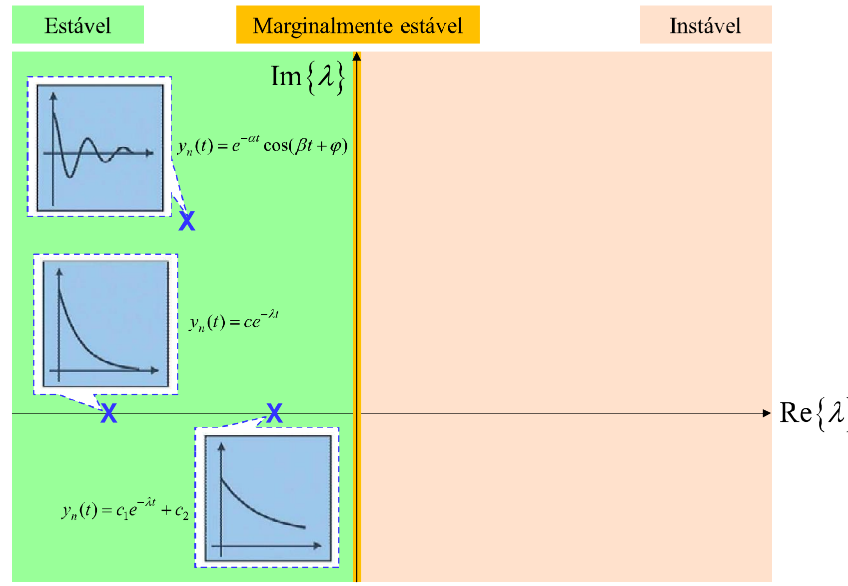
- Neste caso, a estabilidade pode ser estudada analisando o comportamento das raízes no *plano complexo*.
- Assim:
  - *Um sistema LTI é assintoticamente estável se e somente se **nenhum das raízes** de sua equação característica pertence ao **semi-plano direito**, do plano complexo.*



Estabilidade em Equações Diferenciais

Estabilidade Assintótica

- *Caso 1*



Estabilidade em Equações Diferenciais

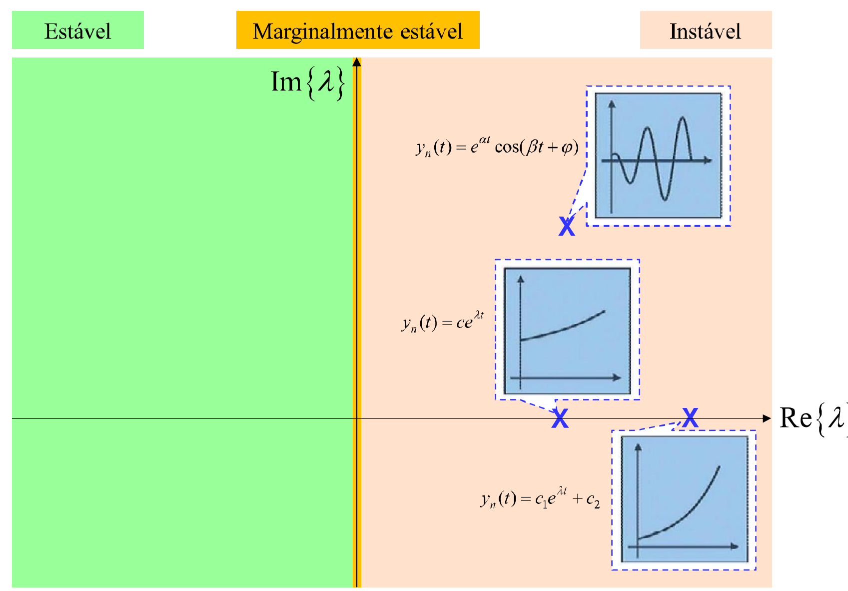
Estabilidade Assintótica

- *Caso 2*
  - **Se**, a equação característica tem, pelo menos, uma das N raízes positiva ou duas raízes complexas conjugadas têm parte real positiva.
  - **Então**, as correspondentes exponenciais $e^{\lambda t}$ tendem para infinito quando $t \to \infty$.
  - **Nesta situação**, a resposta não estabiliza e diz-se que o sistema é INSTÁVEL.

Estabilidade em Equações Diferenciais

Estabilidade Assintótica

- *Caso 2*



Estabilidade em Equações Diferenciais

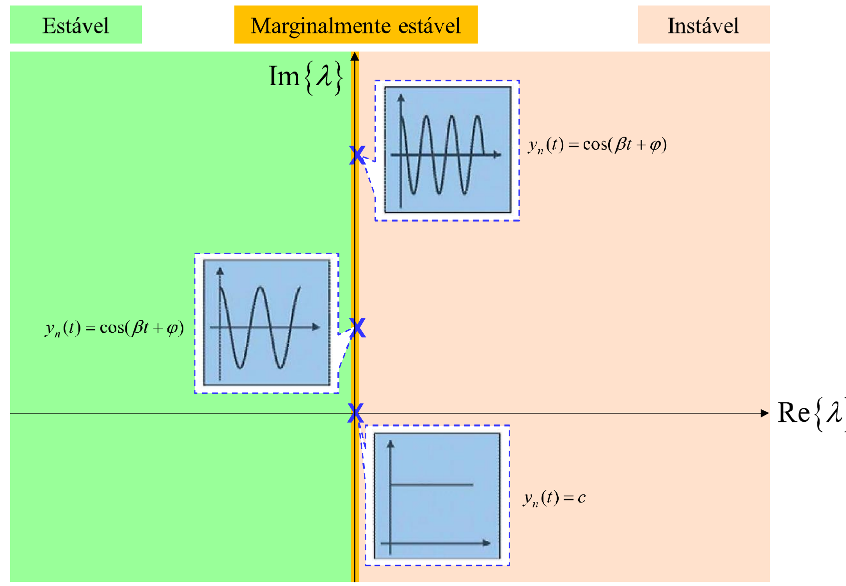
Estabilidade Assintótica

- *Caso 3*
  - **Se**, a equação característica tem, pelo menos, um par de raízes complexas conjugadas com parte real nula (raízes imaginárias puras) e todas as outras raízes têm parte real negativa.
  - **Então**, dois casos podem acontecer:
    - **Caso 3.1**
      - **Se,** as raízes imaginárias puras são raízes simples,
      - **Então**, existem modos oscilatórios não amortecidos e o sistema é estável mas não é assintoticamente estável.
      - **Neste caso,** pode-se dizer que o sistema tem uma ESTABILIDADE LIMITADA ou é MARGINALMENTE ESTAVEL.

Estabilidade em Equações Diferenciais

Estabilidade Assintótica

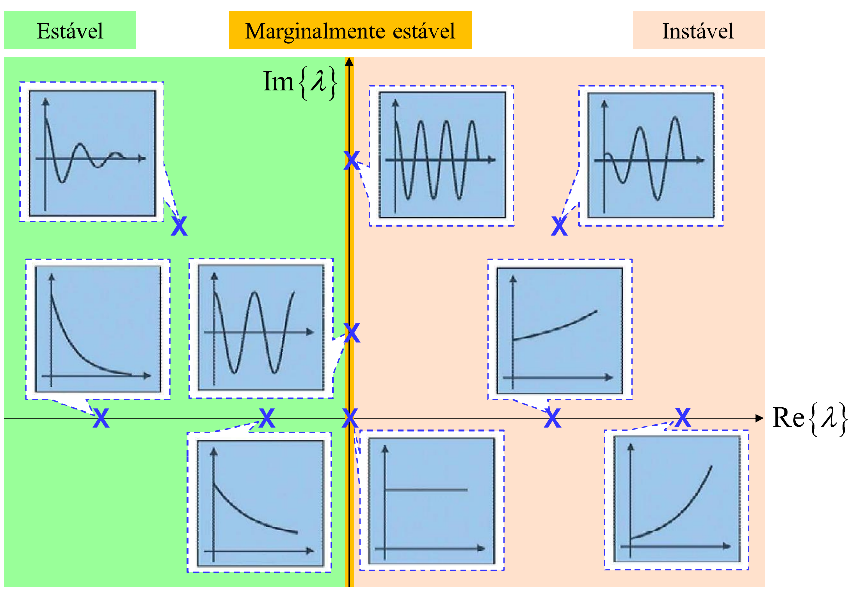
- *Caso 3.1*



Estabilidade em Equações Diferenciais

Estabilidade Assintótica

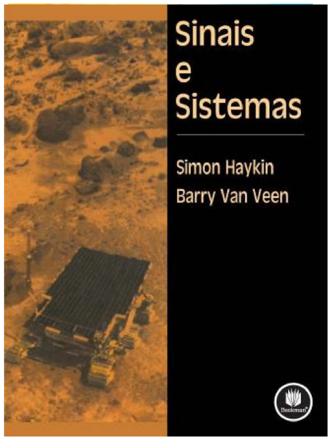
- *Resumo*



Bibliografia

Bibliografia

HAYKIN, S. e VAN VEEN, B. **Sinais e sistemas**. Porto Alegre: Bookman, 2001. (19).



Indicação das seções do livro a ler em relação aos temas abordados na apresentação.

- Representação por Equações Diferenciais (2.4).
- Solucionando Equações Diferenciais (2.4).
- Estabilidade em Equações Diferenciais (2.4).