

Aula 3

12.2 Vetores

Motivação

• Grandezas escalares:

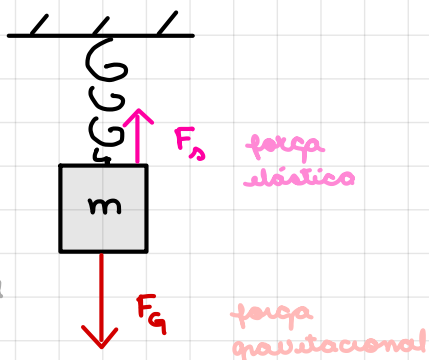
um valor determina completamente a grandeza

- comprimento
- peso
- altura

• Grandezas vetoriais:

precisa mais de um elemento para descrever a grandeza.

• força

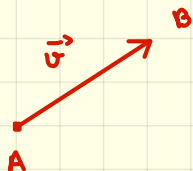


para descrever precisa

- intensidade
- direção
- sentido
- aceleração
- velocidade
- campo elétrico

Ponto de vista Geométrico

Definição Um vetor é um segmento de reta orientado (com origem A e extremidade B)



Observação

Um vetor possui

- tamanho
- direção
- sentido
- infinitos representantes



direções infinitas

fixa uma direção

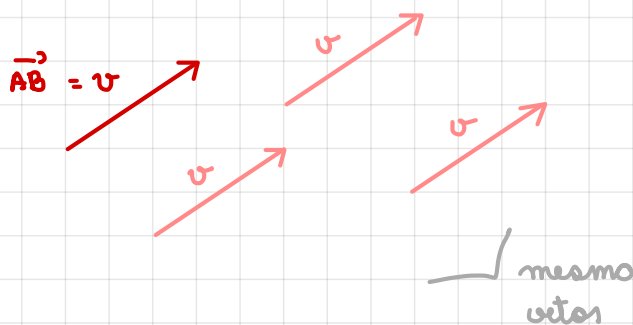


dois sentidos

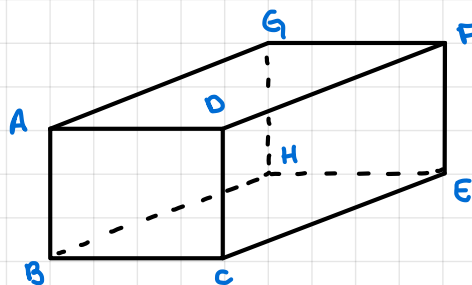
Recorde $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} \dots$

infinitos modos de representar o 0,5.

Vetores são iguais (se representação diferente se tem mesmo: tamanho, direção e sentido)



Exemplo Reconheça os vetores iguais

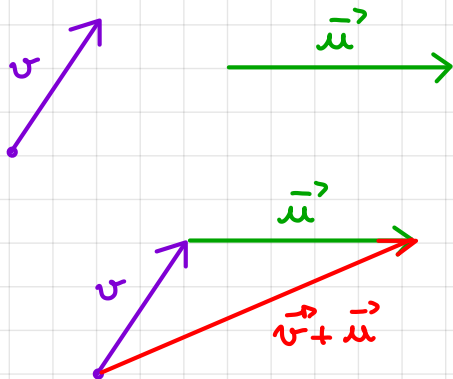


Solução

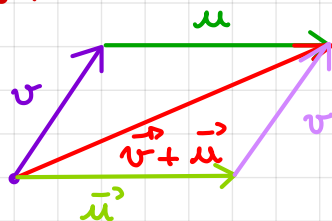
$$\begin{aligned}\vec{AD} &= \vec{BC} = \vec{HG} = \vec{GF} \\ \vec{AG} &= \vec{DF} = \vec{CE} = \vec{BH} \\ \vec{AB} &= \vec{DC} = \vec{FE} = \vec{GF}\end{aligned}$$

Operações com vetores

Soma : Pegue o fim de um vetor no início do outro então o vetor soma é o que tem início em um e fim no outro



Observação :



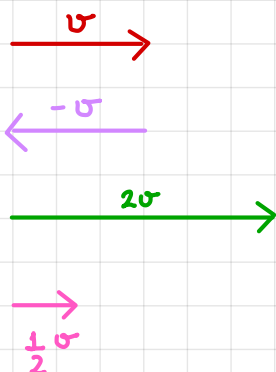
regra do paralelogramo

Multiplicação por escala :

$\lambda \vec{v}$ muda o tamanho do vetor

- contrai $0 < |\lambda| < 1$
- estica $|\lambda| > 1$

Além disso, muda o sentido se $\lambda < 0$

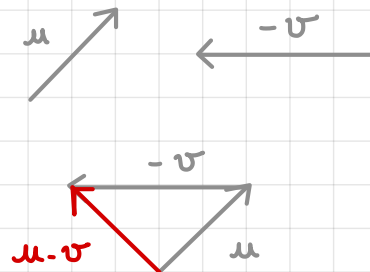


Exemplo Represente $\vec{u} - \vec{v}$:

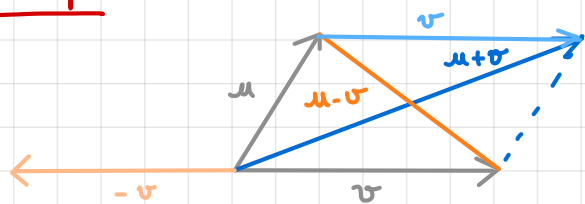


Solução

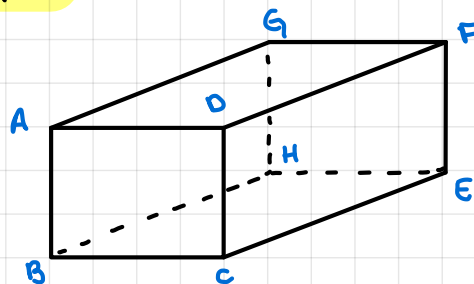
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



Observação

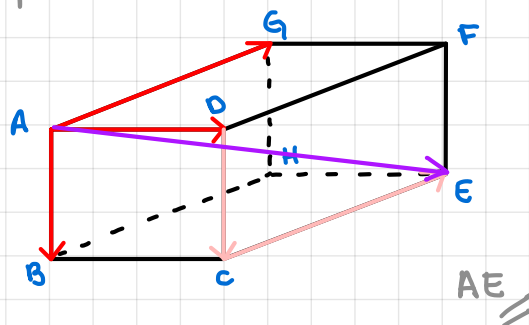


Exemplo Considere



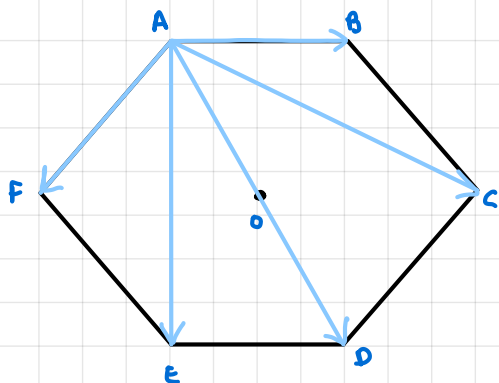
Determine $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AG}$

Solução



Exemplo Considere um hexágono regular. Mostre que

$$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = 6\vec{AO}$$



Solução

$$AB + AE = AD = 2AO$$

$$AD = 2AO$$

$$AC + AF = AD = 2AO$$

$$AB + AE + AD + AC + AF = 6AO$$

Ponto de vista algébrico de vetores

Definição Dados pontos

$A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$,
o vetor v com representação \vec{AB}

$$v = \vec{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Observação

$$O = (0, 0, 0)$$

$$\vec{OA} = (a_1, a_2, a_3)$$

Notação

vetores canônicos

\mathbb{R}^2 :

$$i = (1, 0)$$

$$j = (0, 1)$$

$$v = (a, b) = ai + bj$$

\mathbb{R}^3

$$i = (1, 0, 0)$$

$$j = (0, 1, 0)$$

$$k = (0, 0, 1)$$



$$v = (a, b, c) = ai + bj + ck$$

Operações entre vetores

norma: $v = (a, b, c)$

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

soma: $v = (a_1, b_1, c_1)$

$$u = (a_2, b_2, c_2)$$

$$v + u = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$$

multiplicação por escalares

$$v = (a, b, c)$$

$$\lambda v = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$$

vetor unitário $v = (a, b, c)$

$$\frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$

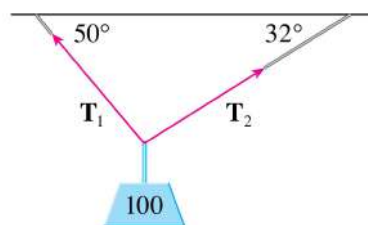
Observação trabalhando com paciência as representações e usando pitágoras se mostra que as operações algébricas coincidem com a noção geométrica

Aplicação

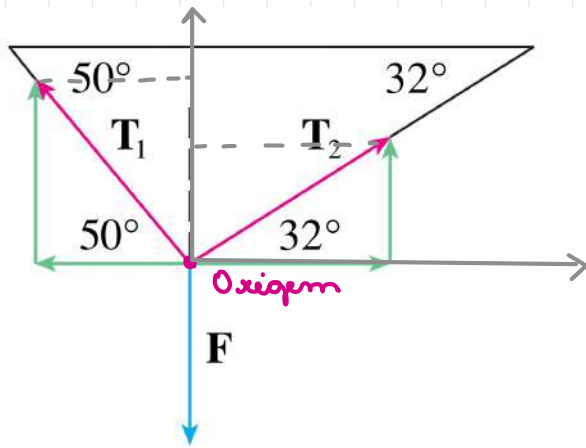
Força é uma grandeza vetorial

Em um objeto agindo várias forças a resultante é zero.

Exemplo Uma carga de 100 kg de massa pendu a partir de dois fios como mostrado na figura. Encontre as Tensões (forças) T_1 e T_2 em ambos os fios e suas magnitudes



Solução



Porém o objeto na origem do sistema

Assim as coordenadas dos vetores são (trigonometria)

$$T_1 = (-|T_1| \cos 50, |T_1| \sin 50)$$

e

$$T_2 = (|T_2| \cos 32, |T_2| \sin 32)$$

A resultante é nula

$$T_1 + T_2 + F = \vec{0} = (0, 0)$$

F é a força gravitacional

$$F = (0, mg) = (0, 100 \cdot 9,8)$$

!
age so para
baixo

$$= (0, 980)$$

$$(-|T_1| \cos 50, |T_1| \sin 50) +$$

$$(|T_2| \cos 32, |T_2| \sin 32) + (0, 980) = (0, 0)$$

$$-|T_1| \cos 50 + |T_2| \cos 32 = 0$$

$$|T_1| \sin 50 + |T_2| \sin 32 + 980 = 0$$

$$|T_1| \sin 50 + \frac{|T_1| \cos 50}{\cos 32} \cdot \sin 32 = 980$$

$\tan 32^\circ$

$$|T_1| = \frac{980}{\sin 50 + \cos 50 \cdot \tan 32} \approx 839 \text{ N}$$

$$|T_2| = \frac{|T_1| \cdot \cos 32}{\cos 50} \approx 636 \text{ N}$$

magnitudes

$$T_1 = (-839 \cdot \cos 50, 839 \sin 50)$$

$$\approx (-539, 643)$$

$$T_2 = (636 \cos 32, 636 \sin 32)$$

$$\approx (539, 337)$$