



Universidade Federal do Espírito Santo - Centro Tecnológico

Departamento de Engenharia Elétrica

Laboratório de Controle - prof. Celso J. Munaro

Projeto do Controlador Avanço-Atraso de fase via gráficos de Bode

Especificações em frequência

Ao projetar no domínio do tempo, as especificações usuais são:

- Erro em regime
- Sobrelevação
- Tempo de estabelecimento
- IAE

Elas são utilizadas para orientar os projetos, e o atendimento das especificações é verificado via simulação ao degrau.

Ao projetar no domínio da frequência, a margem de fase passa a ser a especificação relacionada ao transitório a ser atendida, sendo verificada no gráfico de Bode. A margem de fase está relacionada ao amortecimento e à sobrelevação no domínio do tempo. Uma forma simples de obtê-la é através de um modelo de referência em malha aberta que produza a resposta desejada em malha fechada.

Seja o protótipo de segunda ordem $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$, sendo ω_n e ζ obtidos a partir do tempo de estabelecimento e sobrelevação desejada. A FT de malha fechada $M(s) = \frac{\omega_n^2}{ss^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ dará a resposta desejada (modelo de referência) e o gráfico de Bode de $G(s)$ pode ser utilizada para obter a margem de fase correspondente.

Seja por exemplo UP=2% e $t_s=0.8s$, e os correspondentes valores de $\zeta = 0.77$ e $\omega_n = 6.4$, obtidos de

$$UP = 100e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \text{ e } t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}.$$

A margem de fase neste caso seria de 69 graus, como mostrado no gráfico de Bode de $G(s)$ na figura 1.

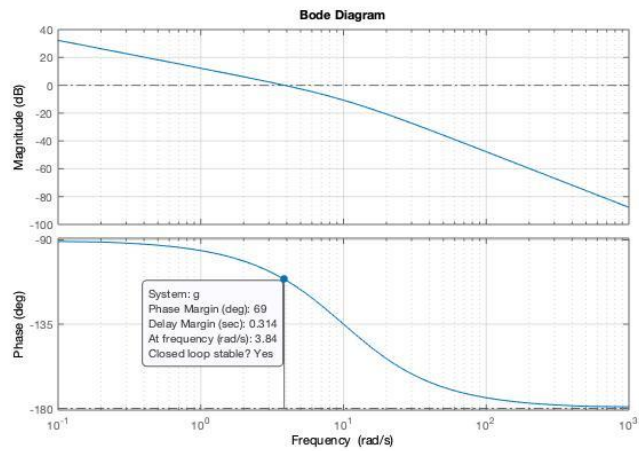


Figura 1. Gráfico de Bode para modelo de referência

A especificação de erro em regime na frequência é igual ao tempo, e nas simulações pode-se verificar o atendimento da sobrelevação e tempo de estabelecimento desejados.

Uma menor margem de fase é equivalente a uma menor sobrelevação (Figura 2).

Uma maior margem de fase tenderá a deixar o sistema mais lento, e uma menor margem de fase deixará o sistema mais rápido (ver Figura 3).

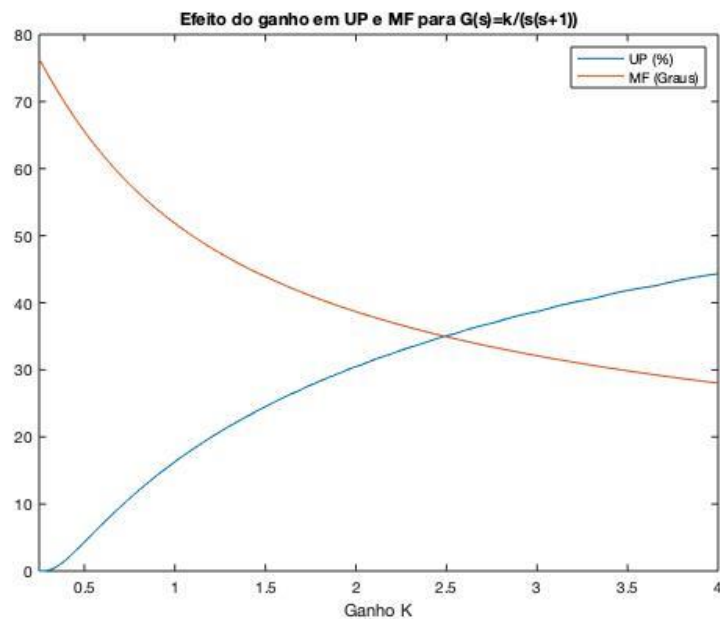


Figura 2. Efeito do ganho em UP e MF

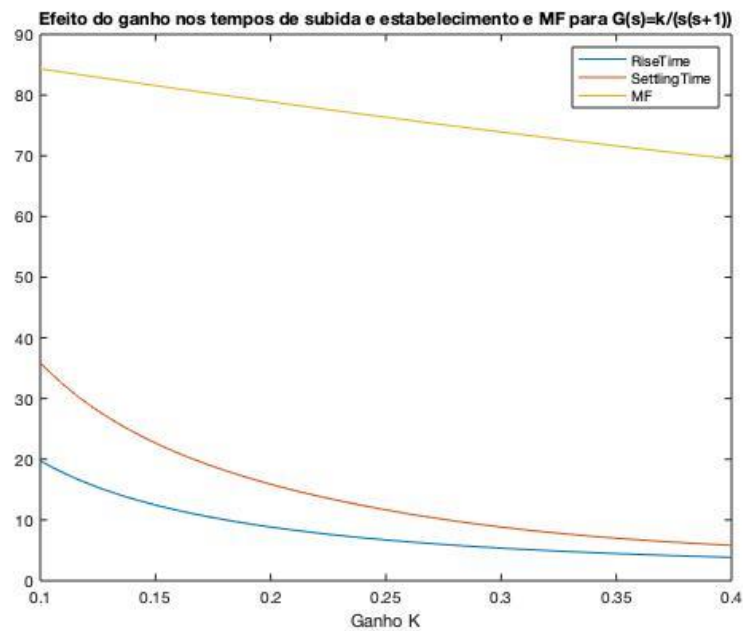


Figura 3. Efeito do ganho nos tempos de subida e estabelecimento e em MF

Erro em regime

Como estes controladores não aumentam o tipo do sistema, o erro em regime geralmente deve satisfazer aumentando o ganho do controlador.

Como a FT do controlador é dada por $G_c(s) = \frac{1}{a} \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$, ou seja, o valor de a afeta seu ganho, calcula-se o ganho K' tal que ao adicionar K'/a resulte o ganho desejado.

A FT do controlador passa então a ser

$$G_c(s) = K \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

O aumento do ganho reduz a margem de fase do sistema. Quando ganhos muito grandes são necessários para atender a especificação de regime, este controlador pode não conseguir estabilizar o sistema.

Nos controles implementados no controle do motor CC, deve-se informar os parâmetros K, a, T do compensador.

Projeto do Controlador Avanço de Fase

O controlador avanço de fase tem a forma $G_c(s) = \frac{1}{a} \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$, com $a > 1$

A figura 1 ilustra o gráfico de Bode deste controlador com $a=10$ e $T=0.1$.

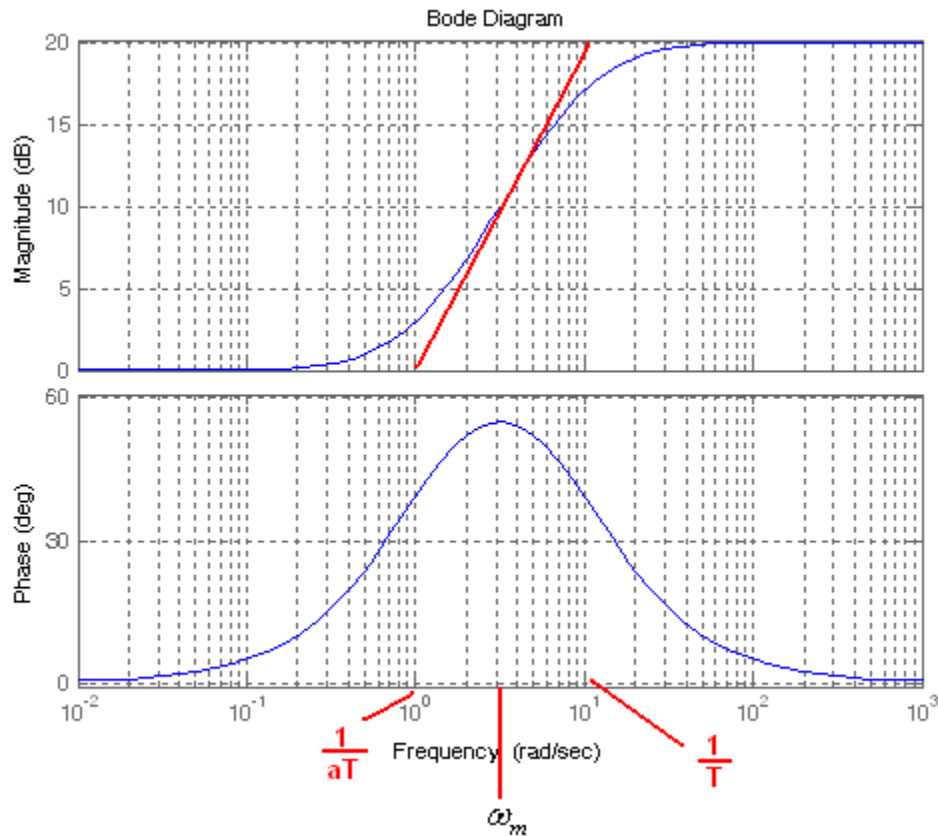


Figura 1. Efeito do avanço de fase

O ganho começa com 0dB e atinge o máximo de 20dB. O valor máximo da fase do controlador é 55°.

O zero do controlador está em $1/aT=1$ rad/s. O polo está em $1/T=10$ rad/s. O ganho começa a aumentar 20dB/dec a partir de 1rad/s (gráfico assintótico). Nesta mesma frequência a fase já aumentou 45 graus.

Em aproximadamente 10rad/s (polo) a inclinação da curva de módulo passa a ser 0, e a fase continua em 45 graus, devido à fase somada pelo zero e subtraída pelo polo. Uma década após o polo (100rad/s), a fase volta a ser 0 graus e o módulo se mantém em 20dB.

Um maior valor de a faz o zero e polo estarem mais distantes, aumentando a contribuição de fase (Margem de Fase).

A frequência ω_m onde o avanço de fase é máximo é a frequência média entre $1/T$ e $1/aT$, logo

$$\log_{10} \omega_m = \frac{1}{2} \left(\log_{10} \frac{1}{aT} + \log_{10} \frac{1}{T} \right) \text{ ou } \log_{10} \omega_m = \log_{10} \frac{1}{\sqrt{aT}}$$

Assim,

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$$

O avanço de fase é dado por

$$\angle G_c(j\omega) = \phi(j\omega) = tg^{-1} \omega aT - tg^{-1} \omega T$$

Substituindo $\omega = \omega_m$ nesta expressão e manipulando, vem

$$\text{sen } \phi_m = \frac{a-1}{a+1} \quad \text{ou} \quad a = \frac{1 + \text{sen } \phi_m}{1 - \text{sen } \phi_m}$$

O módulo adicionado pelo controlador é dado por

$$M(j\omega) = 20 \log_{10} \omega aT - 20 \log_{10} \omega T$$

$$M\left(j \frac{1}{aT}\right) = 0$$

$$M\left(j \frac{1}{T}\right) = 20 \log_{10} a$$

$$M\left(j \frac{1}{\sqrt{aT}}\right) = 10 \log_{10} a$$

Logo, na frequência ω_m são adicionados ϕ_m graus à fase e $10 \log_{10} a$ dB ao módulo

Estratégia de projeto:

Aumentar a fase próximo a frequência de cruzamento de ganho (ω_g) compensando o efeito do ganho do controlador na curva de módulo.

A relação entre a fase adicionada ϕ_m e a é $a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m}$. Por exemplo, caso se queira adicionar 30° , basta escolher

$a=3$. O módulo adicionado em ω_m será $10\log_{10} 3 = 4.77dB$

Logo, os passos de projeto são:

- 1) Obtenha o ganho K' que atenda a condição de regime: $\frac{K}{a} = K' \geq \dots$
- 2) Desenhe o gráfico de Bode de $G(s)$ com o ganho K' obtido no passo 1)
- 3) Verifique a quantidade de fase ϕ_m que deve ser adicionada à curva de fase, de modo que $MF + \phi_m$ seja igual a MF' , a margem de fase desejada
- 4) Calcular a para obter ϕ_m de $a = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m}$
- 5) Verificar a quantidade de módulo adicionada pelo controlador $= 10\log_{10} a$
- 6) Obter do gráfico de Bode a frequência ω_m onde $|G(j\omega_m)| = -10\log_{10}(a)$
- 7) Obter $T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}}$
- 1) Ajustar o ganho da planta K , de modo que $K=a*K'$

Problemas de projeto: quando a fase a ser adicionada for grande, isto resulta em um valor de a também grande, o que pode inviabilizar o projeto deste controlador.

Exemplo: Seja $G(s) = \frac{20}{(1+0.2s)(1+0.02s)}$, uma FT típica do motor CC.

Assuma que se deseje um erro em regime para entrada degrau menor que 2%. Neste caso, o ganho K do controlador vezes o ganho da FT, que é 20, deve ser tal que $erro = \frac{1}{20K} \leq 0.02$. Ou seja, $K = 2.5$.

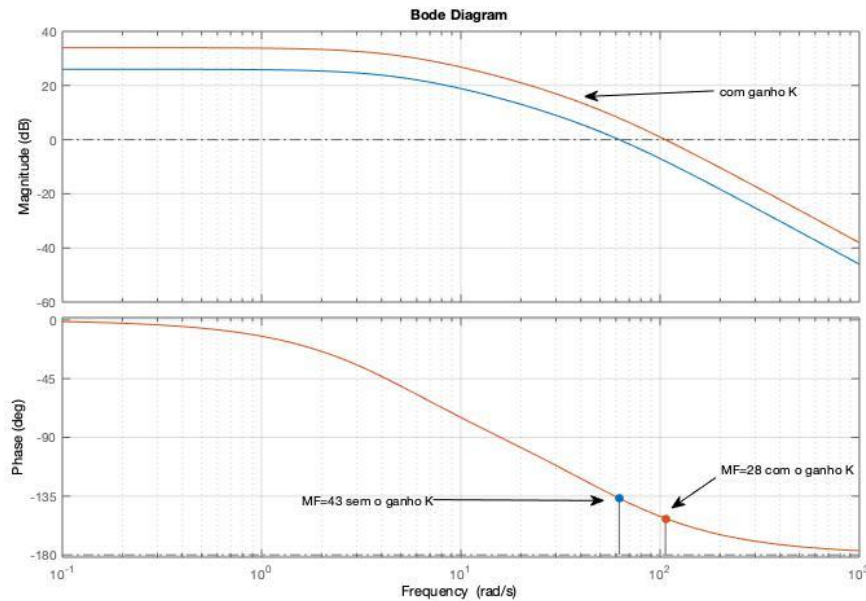


Figura 5. Gráfico de bode de G e K*G

No gráfico de bode da Figura 5 se observa que ao adicionar o ganho K, a MF caiu de 43 para 28 graus, ou seja, menor estabilidade relativa.

Vamos usar este ganho e projetar um controlador para adicionar 32 graus à margem de fase, de modo que ela seja igual a 60 graus (32+28).

Para isto,
$$a = \frac{1 + \sin(32)}{1 - \sin(32)} = 3.25$$

O módulo adicionado é $10 \log_{10} 3.25 = 5.1$. Logo, o avanço de fase deve ser colocado na frequência 151 rad/s, onde o módulo é -5dB. Observa-se que nesta frequência que a margem de fase é 30 graus.

Usando o comando `projav(g,K,fi)` com os valores $K=2.5$ (erro de 2%) e $fi=32$, resulta o gráfico de Bode da Figura 6. A curva de módulo subiu devido ao valor de a , e a margem de fase passou de 31 (180-149) para 53 (180-127). O valor obtido é sempre um pouco menor que o desejado, devido ao aumento da curva de módulo. Lembre-se que escolheu o valor de fi antes de alterar o módulo!

O valor de T é calculado de $T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}}$, sendo $\omega_m = 151 \text{ rad/s}$. Portanto, o zero está em $\frac{1}{aT} = 95 \text{ rad/s}$ e o polo está em $\frac{1}{T} = 238 \text{ rad/s}$. Eles podem ser vistos na Figura 7. Na figura 8 é mostrada a resposta ao degrau do compensador.

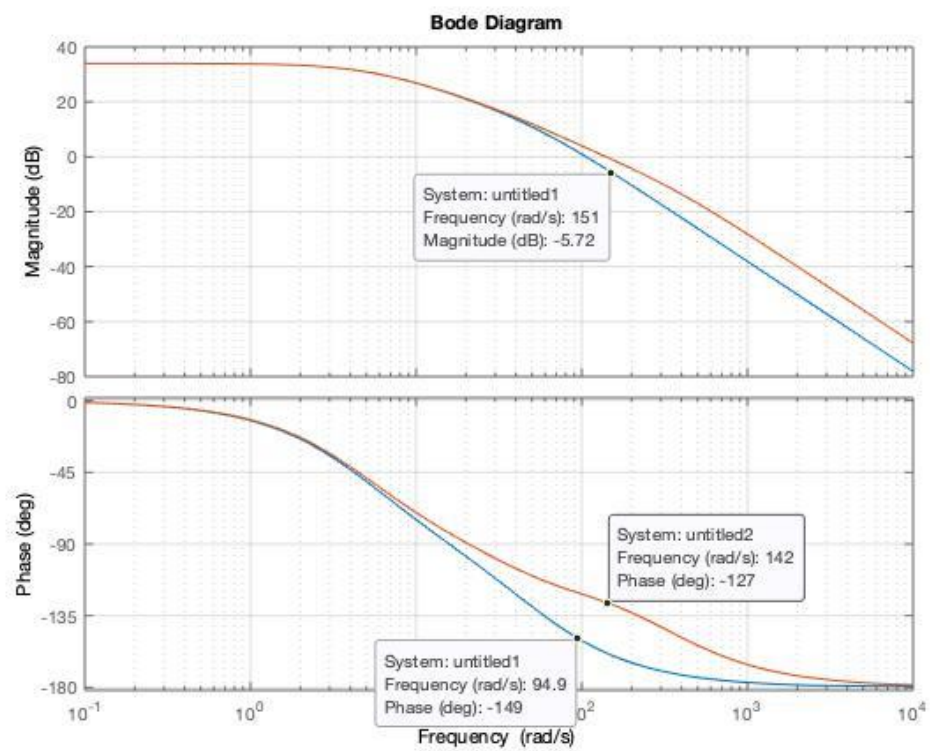


Figura 6. Gráfico de Bode compensado com avanço

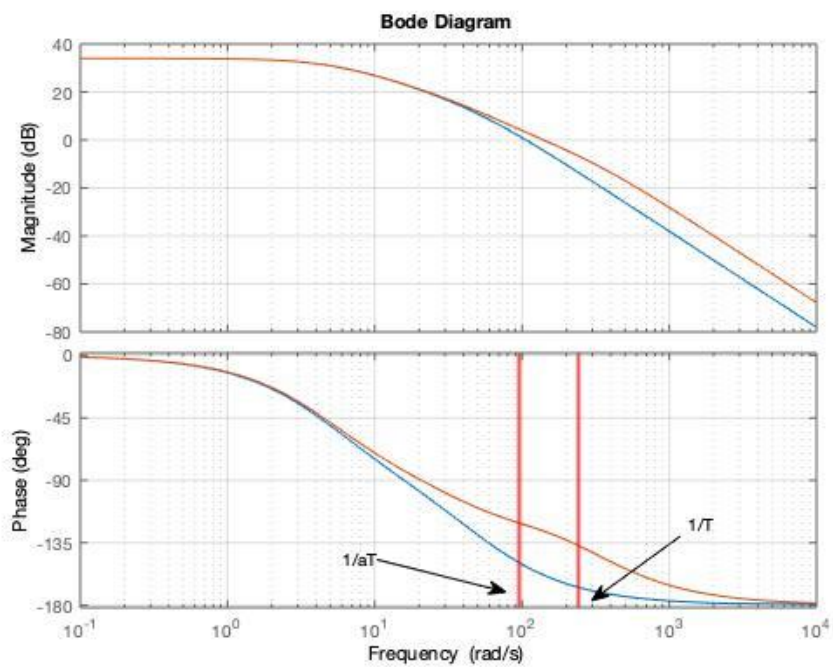


Figura 7. Localização do zero ($1/aT$) e do polo ($1/T$) do compensador avanço

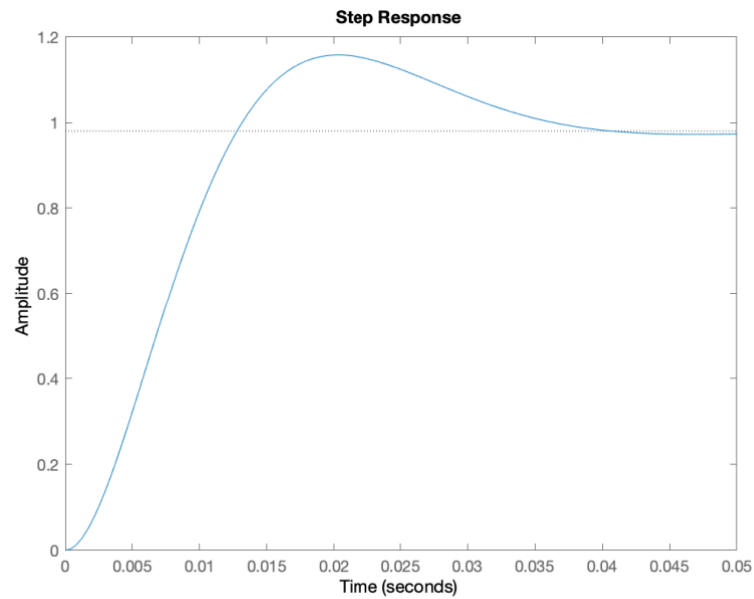


Figura 8. Resposta ao degrau do controlador avanço

Resumindo:

O comando $[c,a,T]=\text{projav}(g,K,fi)$

define a FT g , o ganho K a ser adicionado para atender o erro em regime, e a fase fi que se deseja adicionar de modo que a margem de fase atual + fi seja igual a margem de fase desejada.

Os parâmetros do compensador avanço serão K,a,T , que devem ser fornecidos para a rotina de controle no Arduino.

Projeto do Controlador Atraso de Fase

O controlador atraso de fase tem a forma $G_c(s) = \frac{1}{a} \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$, com $a < 1$

A figura 9 ilustra o gráfico de Bode deste controlador com $a=0.1$ e $T=100$.

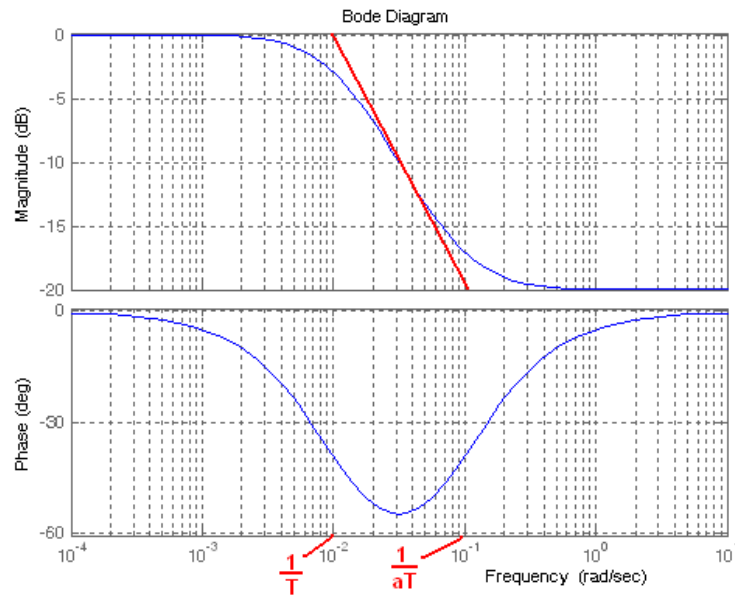


Figura 9. Controlador atraso

O ganho começa com 0dB e atinge o máximo de -20dB. O valor mínimo da fase do controlador é -55°.

O zero do controlador está em $1/aT=0.1\text{rad/s}$. O polo está em $1/T=0.01\text{rad/s}$. O ganho começa a diminuir 20dB/dec a partir de 0.01rad/s (gráfico assintótico). Nesta mesma frequência a fase já diminuiu 45 graus. Em aproximadamente 0.1rad/s (polo) a inclinação da curva de módulo passa a ser 0, e a fase continua em -45graus, devido à fase somada pelo zero e subtraída pelo polo. Uma década após o polo (1rad/s), a fase volta a ser 0 graus e o módulo se mantém em -20dB. Um menor valor de a faz a curva de módulo diminuir, aumentando a Margem de Fase.

Estratégia de projeto:

Escolher $a < 1$ para baixar a curva de módulo tal que a nova frequência de cruzamento de ganho (w_g') produza a Margem de Fase desejada, localizando o atraso de fase uma década antes desta nova frequência de cruzamento de fase (w_g')

Passos de projeto:

- 1) Obtenha o ganho K' que atenda a condição de regime: $\frac{K}{a} = K' \geq \dots$
- 2) Desenhe o gráfico de Bode de $G(s)$ com o ganho K' obtido no passo 1)
- 3) Escolha ω_g' , a frequência onde a curva de módulo de $K'.G(s)$ deveria cruzar 0dB para se ter MF' , a margem de fase desejada
- 4) Calcule o valor de $a < 1$ tal que $20\log_{10} a = -|G(j\omega_g')|_{dB}$
- 5) Coloque o zero do Atraso ($1/aT$) uma década antes de ω_g' , de modo que a fase não seja alterada próxima a ω_g'
- 6) Obtenha T de $\frac{1}{aT} = \frac{\omega_g'}{10}$
- 7) Ajustar o ganho da planta K , de modo que $K = a \cdot K'$

Problemas de projeto: da mesma forma que o controlador PI, se a atenuação necessária for muito grande, isto pode inviabilizar o projeto deste controlador

Exemplo Seja $G(s) = \frac{20}{(1+0.2s)(1+0.02s)}$, como no exemplo do controlador avanço.

Observa-se no gráfico de Bode da Figura 10 que para que a margem de fase seja de 60 graus, o módulo deve ser reduzido em 14.5 dB na frequência $\omega_g' = 37.2$ rad/s. Desta forma a curva de módulo cruzaria 0dB nesta frequência e a curva de fase estaria em -120 graus ($MF = 60$ graus).

Para isto escolhemos a de modo que $20\log_{10} a = -14.5$, ou $a = 0.18$

O zero $1/aT$ deve ser colocado em $37.2/10 = 3.7$. Logo, $T = 1.43$

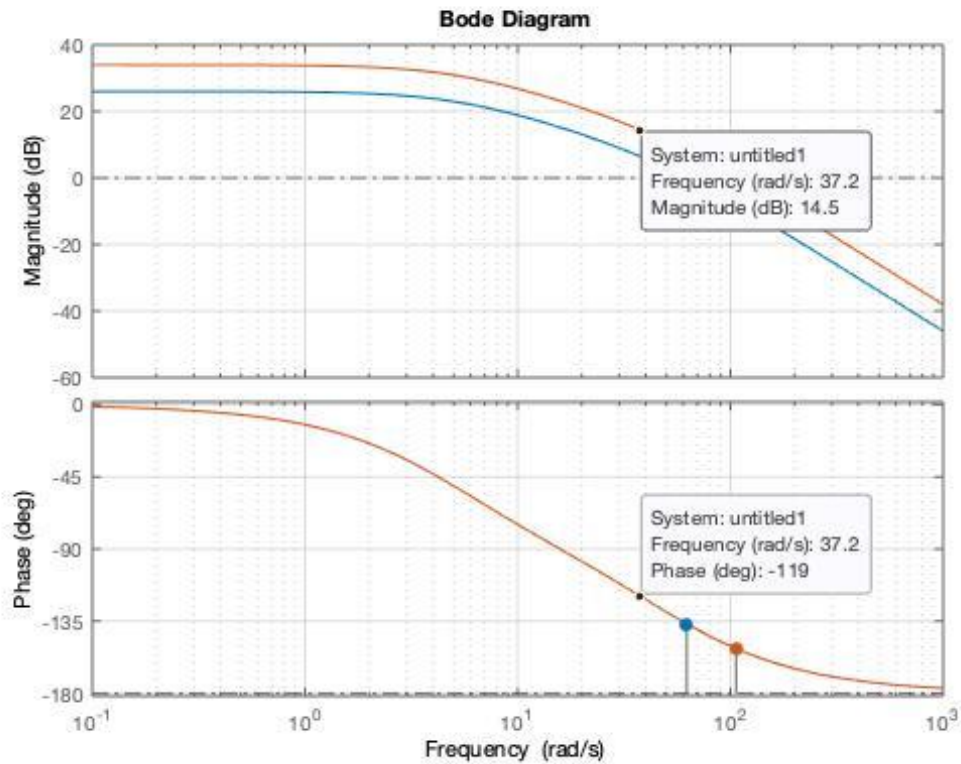


Figura 10. Gráfico de Bode original (azul) e compensado com o ganho (laranja).

O gráfico de bode da figura 11 mostra o sistema compensado com este controlador.

A margem de fase mudou de 29 graus para 56 graus ($180-124$). O polo ficou em $1/T=0.69$ e o zero em $1/aT=3.7$. A curva de módulo foi reduzida em $20\log_{10}a = -14.5$ a partir do zero em $1/aT$.

Resumindo:

O comando `[c,a,T]=projat(g,K,mf)`

define a FT g , o ganho K a ser adicionado para atender o erro em regime, e a margem de fase desejada mf .

Os parâmetros do compensador atraso serão K,a,T , que devem ser fornecidos para a rotina de controle no Arduino.

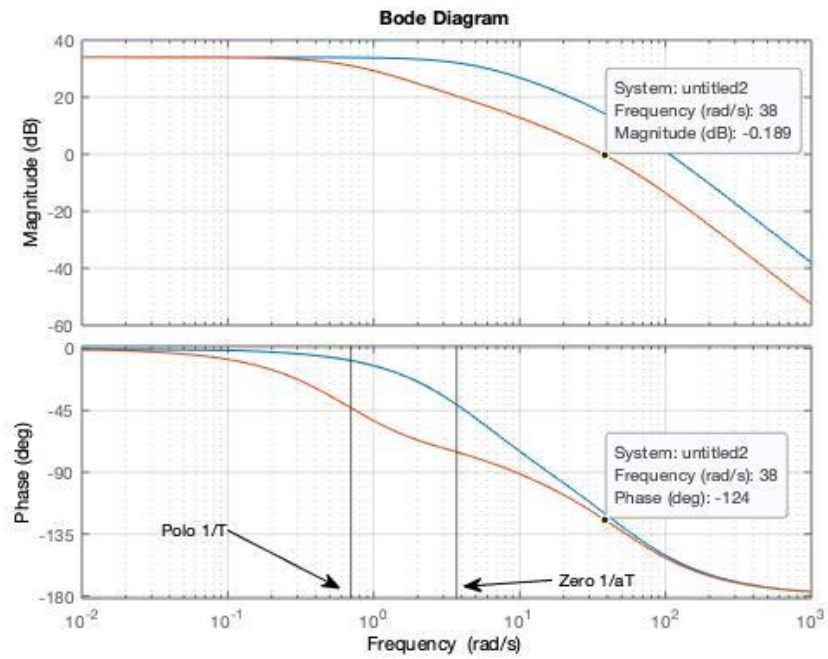


Figura 11. Gráfico de Bode com o controlador atraso

Projeto do controlador avanço-atraso

Basta fazer os dois projetos (c1 e c2) separadamente, usando g para o projeto de c1 e c1*g para o projeto de c2. Em geral faz-se o compensador avanço seguido de um compensador atraso, usando a FT compensada com o avanço!

Seja a FT $G(s) = \frac{20}{(1+0.2s)(1+0.02s)}$ para um compensador avanço seguido de um compensador atraso.

Através do comando C1=projav(g,2.5,20)

usamos o ganho K=2.5, adicionamos 20 graus à margem de fase e resulta o compensador c1,

$$C_1(s) = \frac{0.02615s + 2.5}{0.005128s + 1}$$

cujos gráficos de Bode é mostrado na figura 12, donde se observa a margem de fase aumentar de 30 para 43 graus avançando a fase 20 graus e subindo um pouco a curva de módulo (efeito colateral). O valor deveria ser 30+20=50, mas é sempre menor devido ao efeito do compensador nas duas curvas.

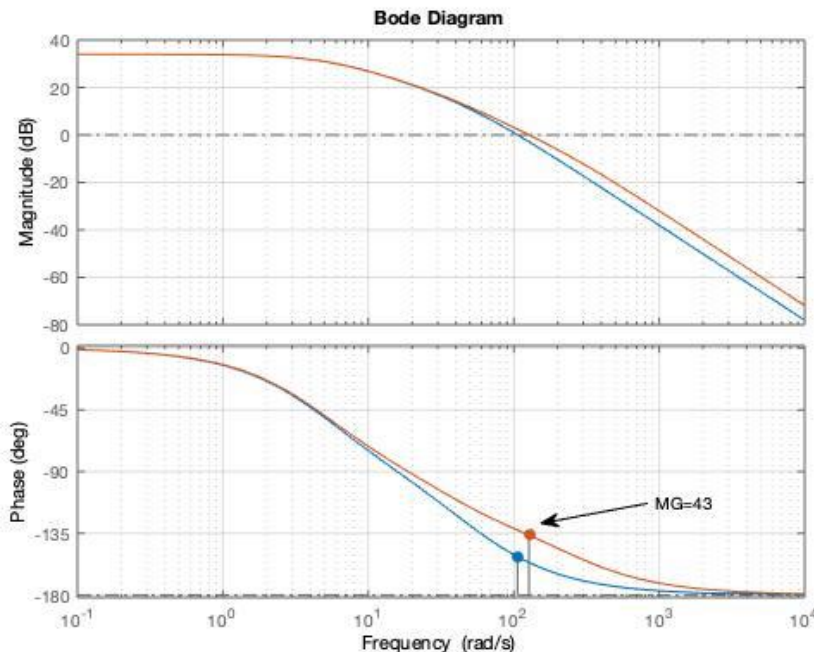


Figura 12. Compensador avanço c1

Para adicionar o compensador atraso, usamos o comando C2=projat(c1*g,1,60). A compensação é feita sobre c1*g e não sobre g, e o ganho é unitário, pois já foi incluído em c1. O valor 60 é a margem de fase desejada, ou seja, se quer que vá de 43 para 60 graus.

O compensador resultante é

$$C_2(s) = \frac{0.1329s + 1}{0.3017s + 1}$$

O compensador resultante é $C_1(s)C_2(s) = \frac{0.003524s^2+0.3589s+2.5}{0.001066s^2+0.3052s+1}$

Na figura 13 mostra-se o gráfico de Bode original, o compensado pelo avanço (c1) e depois pelo avanço e atraso (c1*c2).

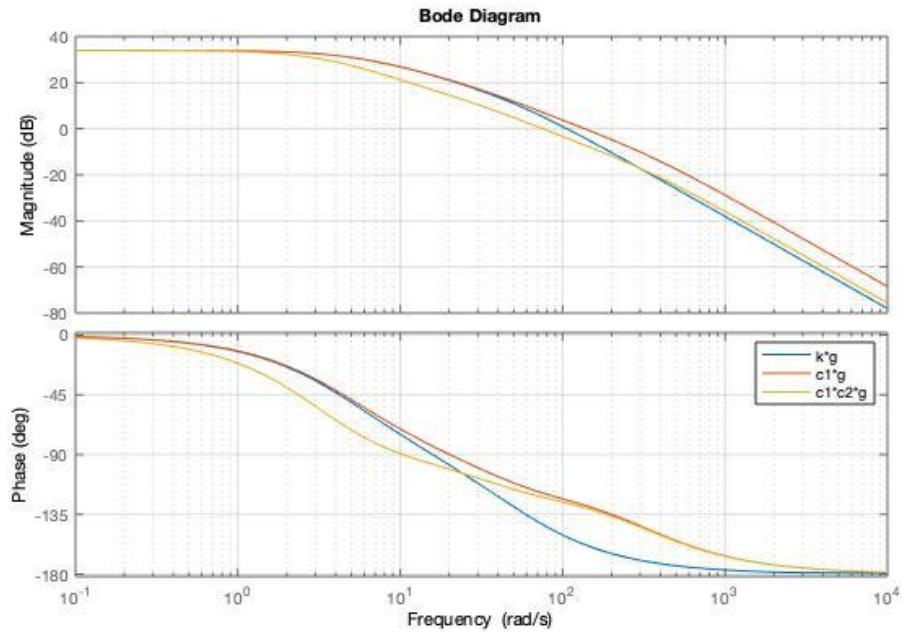


Figura 13. Compensação avanço(c1) e avanço+atraso(c1*c2)

Importante: quando apenas um dos compensadores atender a especificação, o problema está resolvido. Quando as especificações não são atendidas por um dos controladores, faz-se os dois de modo que um projeto atende parcialmente e o outro projeto complementa a margem de fase desejada.