Cálculo 2 2022/2

Aula 4

Aula passada: soma com ponto

Aula hoje: dependência linear

Capítulo 6: Dependência linear

Já falamos que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos quando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem mesma direção ou $\vec{u} = \lambda \vec{v}$

Queremos estender esse conceito

definição um conjunto de vetores $\{v_1, \dots v_n\}$ é dito:

(a) linearmente independente (LI) quando

$$a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

então $a_1 = \dots = a_n = 0$

(b) linearmente dependente (LD) quando

$$a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

para algum $a_i \neq 0$

Para $\{\vec{0}\}$: sempre LD

Para $\{u\}$ ($u \neq 0$) : sempre é LI

Para $\{u, v\}$: são LD

$\Leftrightarrow$

$$\alpha u + \beta v = 0$$

se $\alpha \neq 0$

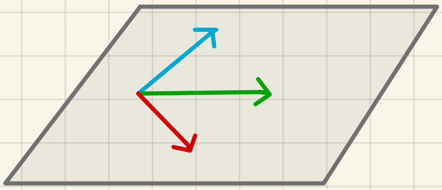
$$u = -\frac{\beta}{\alpha} v$$

isto é são paralelos

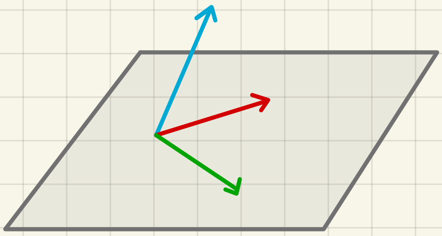
LD

LI

Para $\{u, v, w\}$ são LD se são "coplanares" pertencem ao mesmo plano



LD



LI

Obs Se $\{u, v\}$ LD $\Rightarrow$ $\{u, v, w\}$ LD

$\alpha u + \beta v = 0$ para α ou $\beta \neq 0$

$\Rightarrow \alpha u + \beta v + 0 . w = \vec{0}$

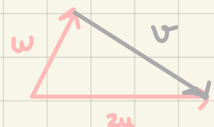
se $\{u, v, w\}$ é LI então $\{u, v\}$ LI

Em geral

definição Se $\vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n$ dizemos que $\vec{u}$ é combinação linear de $v_1, \dots, v_n$ ou $\vec{u}$ é gerado por $v_1, \dots, v_n$. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são ditos coeficientes.

Exemplo

$v = 2u - w$ v é combinação linear de u e w



Proposição Se $\{u, v\}$ é LI então $\{u, v, w\}$ é LD se só se w é gerado por u, v.

Prova ($\Leftarrow$) $w = \alpha u + \beta v$

$\Leftrightarrow \alpha u + \beta v \underbrace{- 1}_{\neq 0} w = 0$

(⇒) Considere

$$\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = 0,$$

se $\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ pois u, v são LI então $\{u, v, w\}$ são LI (absurdo

Então $\alpha_3 \neq 0$ assim

$$w = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \cdot u - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} v$$

combinação de u, v.

Proposição $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ são LD se só se um dos vetores é combinação dos outros dois

(⇒) $\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w = 0$ para algum $\alpha_i \neq 0$

suponha $\alpha_1 \neq 0$ então

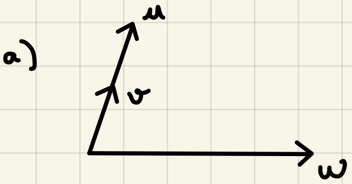
$$u = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot v - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} w$$

(⇐) se $u = \alpha v + \beta w$

$$\underbrace{1}_{\neq 0} u - \alpha v - \beta w = 0$$

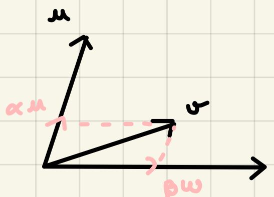
Exemplos

a)



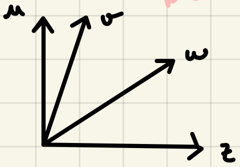
LD

b)



LD

c)



LD

em V^3 mais de 3 vetores são LD (plano ou espaço)

Exemplo Prove que os vetores a seguir são LD para quaisquer u, v, w

$\vec{a} = 2\vec{u} + 4\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{b} = -\vec{u} + \vec{v}/2 + 3\vec{w}/4$, $\vec{c} = \vec{v} + \vec{w}/2$

Solução Note que

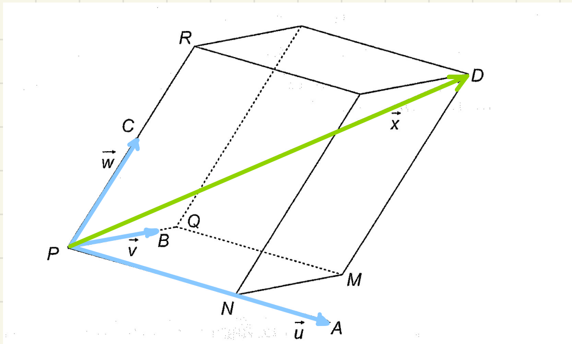
$$\vec{a} + 2\vec{b} = 2u + 4v + w - 2u + v + \frac{3}{2} w = 5v + \frac{5}{2} w$$

$$= 5(v + \tfrac{1}{2} w) = 5\vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{c} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

$\therefore$ são LD

Proposição Em V^3 se $\{u, v, w\}$ são LI então todo $\vec{x}$ é combinação de $\{u, v, w\}$



$$\vec{PN} = a\vec{u}$$
$$\vec{PQ} = b\vec{v}$$
$$\vec{PR} = c\vec{w}$$

Proposição Se $\{u, v, w\}$ são LI e $\vec{x}$ é gerado por $\{u, v, w\}$ então os coeficientes tais que

$$x = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

são únicos

Prova Suponha

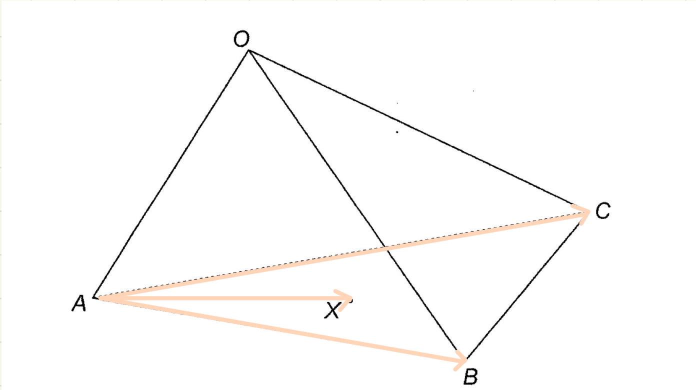
$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

$$\Rightarrow \vec{x} - \vec{x} = (a-\alpha)\vec{u} + (b-\beta)\vec{v} + (c-\gamma)\vec{w} = \vec{0}$$

$\{u, v, w\}$ LI

$$\Rightarrow a = \alpha, \quad b = \beta \;\text{e}\; c = \gamma$$

Exemplo No tetraedro OABC, determine m para que $X = O + m(OA/3 - OB + OC/2)$ pertença ao plano ABC



pense em uma pirâmide

Mostra que X está no plano é o mesmo que

$\vec{AX}$, $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ estarem no mesmo plano

Assim $\{\vec{AX}, \vec{AB}, \vec{AC}\}$ são LD

$\Leftrightarrow \quad a\vec{AX} + b\vec{BX} + c\vec{CX} = 0 \qquad (*)$

tem solução não nula

Note que

$$\vec{XO} = m\left(\frac{OA}{3} - OB + \frac{OC}{2}\right)$$

e $\{\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\}$ são LI

pondo $\vec{AX}$, $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ em termos destes vetores

$$\vec{AX} = \vec{AO} + \vec{OX}$$

$$= -OA + m\left(\frac{OA}{3} - OB + \frac{OC}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{m}{3} - 1\right)OA - mOB + \frac{m}{2}OC$$

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB}$$

$$\vec{AC} = \vec{AO} + \vec{OC} = -\vec{OA} + \vec{OC}$$

substituindo em (*)

$$a\left[\left(\frac{m}{3} - 1\right)OA - mOB + \frac{m}{2}OC\right] + b\left(-\vec{OA} + \vec{OB}\right) + c\left(-\vec{OA} + \vec{OC}\right) = 0$$

$$\vec{OA}\left[a\left(\frac{m}{3} - 1\right) - b - c\right] + \vec{OB}\left[-am + b\right] + \vec{OC}\left[+\frac{am}{2} + c\right] = 0$$

como $\{\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\}$ são LI

$$\begin{cases} a\left(\frac{m}{3} - 1\right) - b - c = 0 \\ -am + b = 0 \\ \frac{am}{2} + c = 0 \end{cases}$$

sistema nas variáveis a, b, c

tem solução não nula quando

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{3} - 1 & -1 & -1 \\ -m & 1 & 0 \\ \frac{m}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{3} - 1 & -1 & -1 \\ -m & 1 & 0 \\ \frac{m}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} m/3 - 1 & -1 \\ -m & 1 \\ \frac{m}{2} & 0 \end{matrix}$$

$$\frac{m}{3} - 1 + \frac{m}{2} - m = 0$$

$$\frac{m}{6} = -1 \quad \Rightarrow \quad m - 6$$

assim (*) tem solução não nula para $m = -6$