

Algoritmos Numéricos- DI Sobre o exercício 3, do Roteiro 2

Suponha que se queira calcular

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx.$$

para $n > 1$. Usando integração por partes, tem-se :

$$u = x^n, du = nx^{(n-1)} dx$$

$$dv = e^{x-1} dx, v = e^{x-1}$$

$$I_n = (x^n e^{x-1}) \Big|_0^1 - \int_0^1 (e^{x-1} n x^{(n-1)} dx)$$

$$I_n = 1 - n \left(\int_0^1 x^{(n-1)} e^{x-1} dx \right)$$

$$(1) : I_n = 1 - n * I_{n-1}$$

O valor de I_1 é fácil de obter. Fazendo a integração, o valor é $I_1 = 1/e = e^{-1}$.

Assim, conhecendo o valor de I_1 pode-se obter:

I_2 , via $I_2 = 1 - 2 * I_1$

I_3 , via $I_3 = 1 - 3 * I_2$

e assim por diante, até atingir o valor desejado I_n .

Dado o valor $I_1 = 1/e = e^{-1} = 0.367879...$, o código abaixo calcula o valor de I_n , usando a recorrência (1)

Algoritmo Versao Instavel

1. INICIO
2. I= 1/e
3. Para n de 2 ate n passo
4. I= 1-n*I
5. Escreva ('O valor de I, neste ponto do codigo e: ', I)
6. Fim {para n}
7. FIM

Exemplo, Calculando I_9 (Resolução usando 5 dígitos, base 10)

$$I_2 = 1 - 2*(0.36788) = 1 - 0.73576 = 0.26424$$

$$I_3 = 1 - 3*(0.26424) = 1 - 0.79272 = 0.20728$$

$$I_4 = 1 - 4*(0.20728) = \quad \quad \quad = 0.17088$$

...

$$I_8 = 0.0784$$

$$I_9 = 0.2944$$

Partindo de (1), pode-se escrever também que

$$I_n = 1 - n * I_{n-1}$$

$$\frac{I_n}{n} = \frac{1}{n} - I_{n-1}$$

$$\frac{I_n}{n} - \frac{1}{n} = -I_{n-1}$$

$$I_{n-1} = \frac{(1 - I_n)}{n}.$$

$$(2) : I_{n-1} = (1 - I_n)/n.$$

Assim, partindo de I_N , (para um índice “Grande”, maior que n), poderia se obter I_n .

Mas que valor usar para um I_N ????

Como a função e^{x-1} é tal que $0 \leq e^{x-1} \leq 1$ no intervalo de integração, então:

$$0 \leq \int_0^1 x^n e^{x-1} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$0 \leq \int_0^1 x^n e^{x-1} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Para $N = 19$, por exemplo:

$$0 \leq I_{19} \leq 1/20$$

$$I_{18} = (1 - I_{19})/19$$

$$I_{17} = (1 - I_{18})/18$$

⋮

$$I_{10} = (1 - I_{11})/11$$

$$I_9 = (1 - I_{10})/10$$

Algoritmo Versao Estavel

1. INICIO
2. $I = I_N$
3. Para n de N_{grande} ate n , (passo -1)
4. $I = (1 - I)/(n+1)$
5. Escreva ('O valor de I , neste ponto do código e: ', I)
6. Fim {para n }
7. FIM

Por exemplo, Partindo de $I_{(19)} = 0.05$ calculando I_9 (Resolução usando 5 dígitos, base 10) $I_9 = 0.091612$