Resolução de Sistemas Lineares
O algoritmo de substituição regressiva

Algoritmos Numéricos - Tópico 2-1
Substituição regressiva
Profa. Cláudia G. Varassin DI/UFES
emails:claudia.varassin@ufes.br e galarda@inf.ufes.br

Fevereiro 2021

Sumário

1. O que são sistemas lineares
2. A solução dos sistemas lineares
3. Como obter a solução de sistemas particulares: a substituição regressiva

Equações lineares e sistemas de equações lineares

Equação linear:

$$ax - b = 0$$

$$ax = b$$

Equações lineares e sistemas de equações lineares

Equação linear:

$$ax - b = 0$$

$$ax = b$$

Exemplos:

$$5x - 1041.5 = 0$$

$$3.2x = 1.0$$

Um sistema de equações lineares

Um sistema de equações lineares (de dimensão 2)

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 = & b_2 \end{cases}$$

Na forma matricial $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Um sistema de equações lineares

Um sistema de equações lineares (de dimensão n)

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 & & & \dots & \dots & & \vdots & & \dots & = & \dots \\
a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + & a_{i,3}x_3 & + & \dots & + & a_{i,n}x_n & = & b_i \\
 & & & \dots & \dots & & \vdots & & \dots & = & \dots \\
a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & + & \dots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}\right.$$

Na forma matricial $Ax = b$

$$
\begin{bmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\
a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n
\end{bmatrix}
$$

Como é a solução de um sistema de equações lineares

A solução de uma equação linear do tipo $ax = b$ é dada por:

$$x_{sol} = b/a$$

obs: só pode ser obtida se $a \neq 0$

Como é a solução de um sistema de equações lineares

A solução de uma equação linear do tipo $ax = b$ é dada por:

$$x_{sol} = b/a$$

obs: só pode ser obtida se $a \neq 0$

Exemplo:

$$3.2x = 1.0$$

$$\Rightarrow x = 1.0/3.2 = 0.3152$$

A solução de um sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2 \end{cases}$$

No $\mathbb{R}^2$, geometricamente, o sistema é representado por duas retas.

A solução de um sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 = & b_2 \end{cases}$$

No $\mathbb{R}^2$, geometricamente, o sistema é representado por duas retas.

$$\begin{cases} eq.1 \Rightarrow x_2 = & b_1/a_{1,2} & - & a_{1,1}/a_{1,2}x_1 \\ eq.2 \Rightarrow x_2 = & b_2/a_{2,2} & - & a_{2,1}/a_{2,2}x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = & \beta_1 & - & k_1x_1 \\ x_2 = & \beta_2 & - & k_2x_1 \end{cases}$$

Exemplo: Seja o sistema de dimensão 2:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

O sistema é representado por duas retas.

Exemplo: Seja o sistema de dimensão 2:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

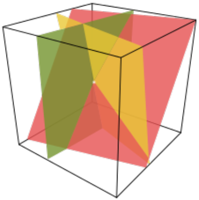
O sistema é representado por duas retas.

A solução é um ponto no plano (no $\mathbb{R}^2$) $\rightarrow$ $p = (3.25, -1.5)$

No $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & = & b_2 \\ a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & a_{3,3}x_3 & = & b_3 \end{cases}$$

Geometricamente, o sistema é representado por 3 planos:



A solução é um ponto no $\mathbb{R}^3 \rightarrow x_{sol} = (x_1, x_2, x_3)$

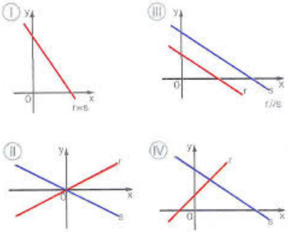
As soluções No $\mathbb{R}^1$ ($ax = b$):

Se $a = 0$: há infinitas soluções (qdo $b = 0$) OU nenhuma (qdo $b \neq 0$)

Se $a \neq 0$: a solucão existe e é única. É um ponto no $\mathbb{R}^1$ ($x = b/a$)

As soluções No $\mathbb{R}^1$ $(ax = b)$:
Se $a = 0$: há infinitas soluções (qdo $b = 0$) OU nenhuma (qdo $b \neq 0$)
Se $a \neq 0$: a solucão existe e é única. É um ponto no $\mathbb{R}^1$ $(x = b/a)$

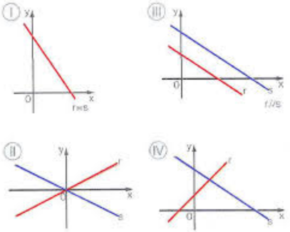
No $\mathbb{R}^2$ $(Ax = b)$:



Se $detA \neq 0$: a solução é um ponto no $\mathbb{R}^2 \rightarrow x_{sol} = (x_1, x_2)$

As soluções No $\mathbb{R}^1$ $(ax = b)$:
Se $a = 0$: há infinitas soluções (qdo $b = 0$) OU nenhuma (qdo $b \neq 0$)
Se $a \neq 0$: a solucão existe e é única. É um ponto no $\mathbb{R}^1$ $(x = b/a)$

No $\mathbb{R}^2$ $(Ax = b)$:



Se $detA \neq 0$: a solução é um ponto no $\mathbb{R}^2 \rightarrow x_{sol} = (x_1, x_2)$

No $\mathbb{R}^n$ $(Ax = b)$:
Se $detA \neq 0$: a solução é um ponto no $\mathbb{R}^n \rightarrow x_{sol} = (x_1, x_2, ..., x_n)$

Sistema triangular superior

Se o sistema linear for particular, por exemplo triangular superior:

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & + & & \dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
 & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & + & & \dots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 & & \dots & \dots & \vdots & & & \dots & = & \dots \\
 & & & a_{i,i}x_i & + & & & +a_{i,n}x_n & = & b_i \\
 & & & & \vdots & & & \dots & = & \dots \\
 & & & & & a_{n-1,n-1}x_n & & +a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\
 & & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}
\right.
$$

Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Resolvendo as equações

Dado um sistema triangular superior
Da última equação pode se obter x_n:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Solução:

$$a_{n,n}\, x_n = b_n$$

Resolvendo as equações

Dado um sistema triangular superior
Da última equação pode se obter x_n:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Solução:

$$a_{n,n}\, x_n \quad = \quad b_n \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

Resolvendo as equações

Da penúltima equação pode se obter x_{n-1}:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Solução:

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$$

Resolvendo as equações

Da penúltima equação pode se obter x_{n-1}:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\begin{aligned} a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} \\ \Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}} & \end{aligned}$$

Resolvendo as equações

Da "iésima" equação pode se obter x_i:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\color{red}{\rightarrow} & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots\color{red}{\leftarrow} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots\color{red}{\leftarrow} \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$a_{i,i}\color{red}{x_i} + a_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

Substituição Regressiva

Para a linha i:

$$a_{i,i}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

$$x_i = (b_i - (a_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{i,n}x_n))/a_{i,i}$$

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} (a_{i,j}x_j))/a_{i,i}$$

Substituição Regressiva

Para a linha i:

$$a_{i,i}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

$$x_i = (b_i - (a_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{i,n}x_n))/a_{i,i}$$

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} (a_{i,j}x_j))/a_{i,i}$$

A última variável a ser calculada será x_1, dada por:

$$x_1 = (b_1 - \sum_{j=2}^{n} (a_{1,j}x_j))/a_{1,1}$$

A Substituição Regressiva

$$x_n = b(n)/a(n,n)$$

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} (a_{i,j}x_j))/a_{i,i}$$

Algoritmo
INICIO
Ler(a,b,n)
x(n) = b(n)/a(n,n)
Para i = (n-1) até 1, passo(-1)

...Calcular o s...
x(i) = (b(i)- s)/a(i,i)
Fim do i
Mostrar(x)
FIM

A Substituição Regressiva

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} (a_{i,j}x_j))/a_{i,i}$$

Algoritmo

```
INICIO
Ler(a,b,n)
x=b(n)/a(n,n)
Para i = (n-1) até 1, passo(-1)
  s=0
  Para j= (i+1):n
        s = s + a(i,j)*x(j)
  Fim do j
  x(i) = ( b(i)- s )/a(i,i)
 Fim do i
Mostrar(x)
FIM
```

RESUMINDO

Dado um sistema de equações lineares $Ax = b$ de dimensão n

- Se o $detA \neq 0$ (chamado de não singular), o sistema tem solução única e a solução é um ponto no $\mathbb{R}^n$: $x_{sol} = (x_1, x_2, ..., x_n)$
- Se o sistema linear for triangular superior é possível de resolvê-lo é pelo método de substituição regressiva.

Bibliografia Básica

- Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.
- Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.
- https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-oct/sdsl-sistemas-triangulares.html