

Aula passada coef a determinar

Aula hoje Variação das constantes

3.7 Variação das constantes

↳ método para determinar uma solução particular

↳ serve para equações mais gerais

Sup $y'' + p(t)y' + q(t) = G(t)$ (*)

uma equação não homogênea

e $y_h(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$

solução geral de

$y'' + p(t)y' + q(t) = 0$ (homogênea)

Nossa candidata a solução particular de (*) será

$y_p(t) = u_1(t) y_1(t) + u_2(t) y_2(t)$

variação das constantes

Objetivo: caracterizar as funções u_1, u_2

Para isso vamos derivar e substituir

$$\begin{aligned} y_p' &= u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2' \\ &= u_1 y_1' + u_2 y_2' + \underbrace{u_1' y_1 + u_2' y_2}_{=0} \end{aligned}$$

Vamos supor $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$ Equação 1

Assim $y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$ derivando

$y_p'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''$

substituindo:

$$(u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'') + p(t)(u_1 y_1' + u_2 y_2') + q(t)(u_1 y_1 + u_2 y_2) = G(t)$$

$$+ q(t)(u_1 y_1 + u_2 y_2) = G(t)$$

$$u_1 (\overbrace{y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1}^{\text{Zero}}) + u_2 (\overbrace{y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2}^{\text{Zero}}) + u_1' y_1' + u_2' y_2' = G(t)$$

$$\Rightarrow u_1' y_1' + u_2' y_2' = G(t) \quad \text{Equação 2}$$

Temos $\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = G(t) \end{cases}$

escrita matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ G(t) \end{pmatrix}$$

resolvendo o sistema

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{Matriz inversa}} \begin{pmatrix} 0 \\ G(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{pmatrix} y_2' - y_2 \\ -y_1' y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ G(t) \end{pmatrix}$$

Wronskiano \leftarrow portanto

$$u_1' = \frac{-y_2 \cdot G(t)}{W(y_1, y_2)}$$

$$u_2' = \frac{y_1 G(t)}{W(y_1, y_2)}$$

↳ para determinar u_1, u_2 tem que integrar as funções

↳ Lembre-se $y_p(t) = u_1 y_1 + u_2 y_2$

e $y(t) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p(t)$ a solução geral.

↳ Método bom para qualquer EDO (não só coeficientes constantes)

↳ Ruim porque tem que resolver integral

Exemplo Resolva $t^2 y'' - 2y = 3t^2 - 1$

Solução:

Passo 1: Resolva a equação homogênea

$$t^2 y'' - 2y = 0 \quad (\text{Euler})$$

$$x(x-1) - 2 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = -1, x = 2$$

$$y_h(t) = c_1 \frac{1}{t} + c_2 t^2$$

Passo 2 Por a equação na forma que foi desenvolvida o método

$$y'' - \frac{2}{t^2} = \underbrace{\frac{3t^2 - 1}{t^2}}_{G(t)}$$

Passo 3 Solução particular

$$y_p(t) = u_1(t) \cdot \frac{1}{t} + u_2(t) t^2$$

onde

$$u_1' = -\frac{1}{t^2} \cdot \left(\frac{3t^2 - 1}{t^2} \right) \quad \text{e} \quad u_2' = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{3t^2 - 1}{t^2} \right)$$
$$\frac{u_1'}{w\left(\frac{1}{t}, t^2\right)} \quad \frac{u_2'}{w\left(\frac{1}{t}, t^2\right)}$$

$$w\left(\frac{1}{t}, t^2\right) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & t^2 \\ -\frac{1}{t^2} & 2t \end{pmatrix} = 3$$

Então

$$u_1'(t) = -\frac{3t^2 + 1}{3} = -t^2 + \frac{1}{3}, \quad u_2'(t) = \frac{3}{t} - \frac{1}{t^3} = \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3}$$

$$u_1(t) = -\frac{t^3}{3} + \frac{1}{3}t$$

$$u_2(t) = \ln t + \frac{1}{6t^2}$$

portanto

$$y_p(t) = \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{1}{3}t \right) \cdot \frac{1}{t} + \left(\ln t + \frac{1}{6t^2} \right) t^2$$
$$= -\frac{t^2}{3} + \frac{1}{3} + t^2 \ln t + \frac{1}{6} = \frac{t^2}{3} + t^2 \ln t + \frac{1}{2}$$

É a solução geral e'

$$y(t) = c_1 \frac{1}{t} + c_2 t^2 + \frac{t^2}{3} + t^2 \ln t + \frac{1}{2}$$

$$y(t) = c_1 \frac{1}{t} + c_2 t^2 + t^2 \ln t + \frac{1}{2}$$