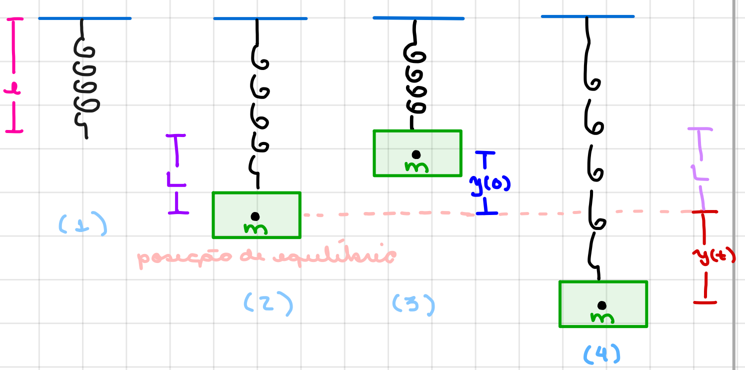
Aula 16 Cálculo 3B   Aula 25 Cálculo 3A

Aula passada resolver equações lineares de segunda ordem
* coef. cons
* Euler
* Redução

Aula Hoje Modelagem com equações de 2ª ordem lineares

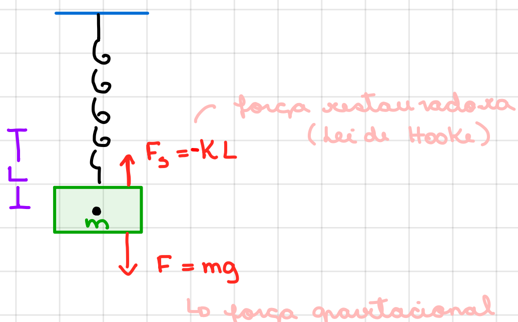
3.8 Vibrações Mecânicas

Situação



(1) uma mola flexível fixa em uma das extremidades de comprimento l

(2) uma massa m é conectada a mola provocando um alongamento L da mola e atinge uma posição de equilíbrio



Como está em equilíbrio $\boxed{mg - KL = 0}$

Nota Use $mg - KL = 0$ para determinar K dita constante da mola

Exemplo Se uma massa de 10 libras (peso m.g) alonga $\frac{1}{2}$ pé de uma mola

então com $m.g = K.L \Rightarrow 10 = K.\frac{1}{2}$
$\Rightarrow K = 20$ lb/pés

(3) a mola sofre um deslocamento inicial $y(0) = y_0$ e posta em movimento com velocidade $y'(0) = y_1$

(4) Denote $y(t)$ o deslocamento (para baixo +) da massa a partir da posição de equilíbrio no instante t

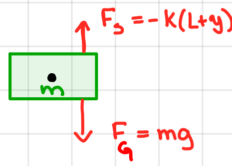
Caso 1 Movimento não amortecido

Supondo que não há haja forças de amortecimento, resistência do ar, nem forças externas

Pela 2ª Lei de Newton

$$\boxed{m.a = F_s + F_G}$$

$$m.a = \underbrace{-K(L+y(t))}_{\text{Força Restauradora}} + \overbrace{mg}^{\text{força da gravidade}}$$



$$my'' = \underbrace{-KL + mg}_{=0} - Ky(t)$$

$$\boxed{my'' + Ky = 0}$$ movimento harmônico simples

m massa ↲   ↳ K constante da mola

Caso 2 Movimento amortecido

Suponha que haja uma força F_d de resistência ou amortecimento então vamos supor que

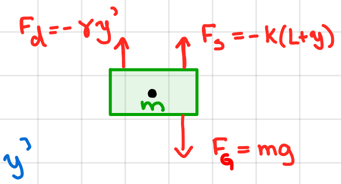
$$\boxed{F_d = \gamma y'(t)}$$

γ coeficiente de amortecimento

proporcional a velocidade da massa

Pela segunda lei

$$\boxed{m.a = F_s + F_G + F_d}$$



$$ma = -K(L+y) + mg - \gamma y'$$
$$= -KL + mg - Ky - \gamma y'$$

$$\boxed{my'' + \gamma y' + Ky = 0}$$ movimento amortecido

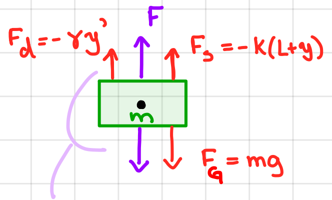
↳ em ambos os casos são EDO de 2ª ordem de coeficientes constantes

Caso 3 Movimento forçado

Suponha uma Força $F(t)$ externa

↳ pode ser uma força devido ao movimento da estrutura onde está presa a mola.

↳ pode ser um força aplicada na massa.



pode ser a favor do movimento ou contrário

Pela 2ª Lei de Newton:

$$\boxed{m.a = F_G + F_s + F_d + F}$$

$$my'' = -Ky - \underbrace{KL + mg}_{=0} - \gamma y' + F$$

$$\boxed{my'' + \gamma y' + Ky = F(t)}$$

↳ movimento forçado

Exemplo

Uma massa de 4 libras (peso = mg) estica uma mola de 2 polegadas (1 pé = 12 in). Suponha que a massa é deslocado 6 polegadas adicionais e depois e solta. A massa está em um meio que exerce uma resistência viscosa de 6 libras (força) quando a massa está a uma velocidade de 3 pés/s (use $g = 32$ pes/s). Formule um PVI que governa o movimento da mola.

Solução: Identificar o tipo de movimento:

* Fala do amortecimento
* Não fala de força externa

$$\begin{cases} my'' + \gamma y' + Ky = 0 \\ y(0) = y_0 \quad , y'(0) = y_1 \end{cases}$$

Determinar as constantes m, γ, K, y_0, y_1

• massa = $\dfrac{\text{peso}}{\text{gravidade}} = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$

• γ coeficiente de amortecimento:

$$6 = F_d = \gamma . \underbrace{y'}_{= 3 pés/s} = \gamma . 3$$

o enunciado dá a intensidade (sem -)

↳ sem o menos

$$\Rightarrow \quad \gamma = 2$$

• K constante da mola:

$$mg = KL$$

$$1 \text{ pés} - 12 in$$
$$x \;\; \underline{x} \;\; 2 in$$

$$2 \text{ polegadas} = \frac{1}{6} \text{ pés}$$

peso m.g ←

$$4 = K . 1/6$$
$$K = 24$$

• y_0 condição inicial:

deslocada 6 polegadas adicionais $= \frac{1}{2}$ pés

então $y(0) = \frac{1}{2}$

• y_1 como a massa é solta, interpretamos como a massa sendo colocada sem velocidade inicial

Portanto temos o seguinte PVI

$$\begin{cases} \frac{1}{8} y'' + 2y' + 24y = 0 \\ y(0) = \frac{1}{2} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Exemplo

Suponha que uma massa de 10 lb (peso = mg) estica uma mola em 2 polegadas (1 pé = 12 in). Se a massa for deslocada 2 polegadas a mais e depois colocada em movimento com uma velocidade inicial apontando para cima de 1 pé/s. Determine:

a) a posição $y(t)$ da massa em qualquer instante posterior

b) o período $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}}$, onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ (K: Constante da Mola; m: Massa) é a frequência circular.

Solução

Não fala de uma força de resistência ou amortecedora então o modelo é:

$$\begin{cases} my'' + Ky = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

Vamos determinar as constantes envolvidas

- massa: $m = \dfrac{\text{Peso}}{\text{gravidade}} = \dfrac{10}{32 \text{ pés}/s^2} = \dfrac{5}{16}$

- constante da mola

$$m.g = K.L$$

↳ deslocamento

$$\Leftrightarrow \quad 10 = K.\frac{1}{6} \text{ pés} \quad \Rightarrow \quad K = 60 \text{ lb/pés}$$

1 pé — 12 in
x — 2

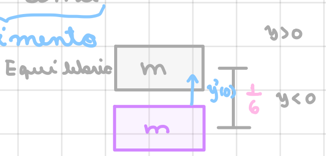
- condição inicial:

↗ polegada

deslocado $2 in = \frac{1}{6}$ pés a mais $\Rightarrow y(0) = \frac{1}{6}$

posta em movimento com velocidade inicial apontando $\underbrace{\text{para cima}}$

contrário ao movimento



Então $y'(0) = -1$

Assim o PVI fica

$$\boxed{\begin{cases} \frac{5}{16}y'' + 60y = 0 \\ y(0) = \frac{1}{6} \\ y'(0) = -1 \end{cases}}$$

Resolvendo para determinar a posição $y(t)$

polinômio característico

$$\frac{5}{16}x^2 + 60 = 0$$

$$x^2 = -\frac{60.16}{5} = -192$$

$$x = \sqrt{192}\, i \quad \text{complexo}$$

então a solução é da forma

$$y(t) = c_1 \cos\sqrt{192}\,t + c_2 \,\text{sen}\sqrt{192}\,t$$

$$\frac{1}{6} = y(0) = c_1$$

$$y'(t) = -\sqrt{192}.\frac{1}{6}\,\text{sen}\sqrt{192}.t + \sqrt{192}\,c_2 \cos\sqrt{192}\,t$$

$$-1 = y'(0) = \sqrt{192}\,c_2 \qquad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{192}}$$

Portanto

a) $$\boxed{y(t) = \frac{1}{6}\cos\sqrt{192}\,t - \frac{1}{\sqrt{192}}\,\text{sen}\sqrt{192}\,t}$$

b) $$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{192} \qquad T = \frac{2\pi}{\sqrt{192}}$$