# Integração

Algoritmos Numéricos - Topico 7
Integração de Newton Côtes
Prof. Cláudia G. Varassin DI/UFES
emails:claudia.varassin@ufes.br e galarda@inf.ufes.br

**Maio de 2021**

# Integração

Algoritmos Numéricos - Topico 7
Integração de Newton Côtes
Prof. Cláudia G. Varassin DI/UFES
emails:claudia.varassin@ufes.br e galarda@inf.ufes.br

**Maio de 2021**

# Integração de Newton Côtes

O problema:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

?

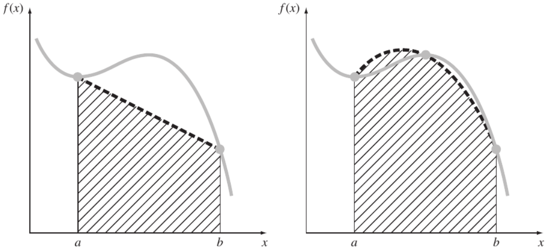
O problema:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

?

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_m(x)dx$$

- para $m = 1$: $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx$
- para $m = 2$: $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx$
- ...



## Usando uma aproximação por um polinômio de grau 1

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx$$

Pontos de interpolação: $x_0 = a$ e $x_1 = b$
O polinômio interpolador é:
$p_1(x) = a_0 + a_1 x$

## Usando uma aproximação por um polinômio de grau 1

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx$$

Pontos de interpolação: $x_0 = a$ e $x_1 = b$
O polinômio interpolador é:
$p_1(x) = a_0 + a_1 x$
ou escrito na forma de Newton
$p_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$

## Usando uma aproximação por um polinômio de grau 1

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx$$

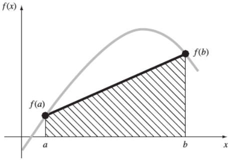
Pontos de interpolação: $x_0 = a$ e $x_1 = b$
O polinômio interpolador é:
$p_1(x) = a_0 + a_1 x$
ou escrito na forma de Newton
$p_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$
$p_1(x) = \triangle^0 y_0 + \triangle^1 y_0(x - x_0)$
$p_1(x) = y_0 + (\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0})(x - x_0)$
Integrando...

$$\int_{a=x_0}^{b=x_1} p_1(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

Regra do Trapézio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$$

onde $h = (b - a)$



## Usando uma aproximação por um polinômio de grau 2

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx$$

Pontos de interpolação:
$x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}$ e $x_2 = b$

O polinômio interpolador é:
$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Usando uma aproximação por um polinômio de grau 2

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx$$

Pontos de interpolação:
$x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}$ e $x_2 = b$

O polinômio interpolador é:
$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
ou escrito na forma de Newton
$p_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$

## Usando uma aproximação por um polinômio de grau 2

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx$$

Pontos de interpolação:
$x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}$ e $x_2 = b$

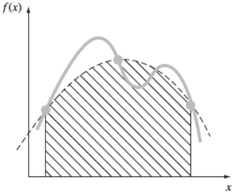
O polinômio interpolador é:
$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
ou escrito na forma de Newton
$p_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$
$p_2(x) = \triangle^0 y_0 + \triangle^1 y_0(x - x_0) + \triangle^2 y_0(x - x_0)(x - x_1)$
Integrando...

$$\int_{a=x_0}^{b=x_2} p_2(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

Para $m = 2$: a regra 1/3 de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

É preciso ter 3 pontos (dois subintervalos) em $[a, b]$:

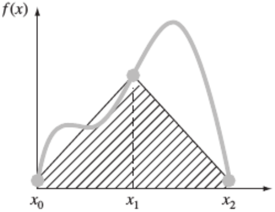


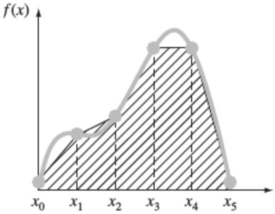
Podemos usar as regras em subintervalos menores:
A regra dos trapézio usando $n$ subintervalos em $[a, b]$:
A regra 1/3 de Simpson usando $n$ subintervalos em $[a, b]$:

A regra do Trapézio com um subintervalo em $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$$

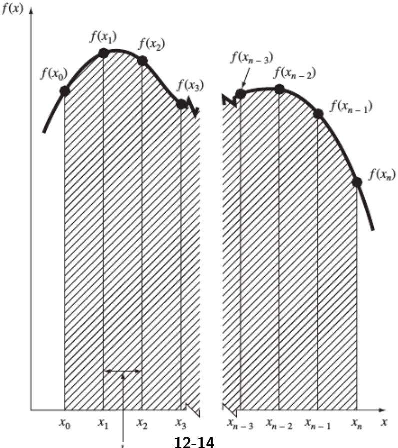
A regra dos Trapézios usando mais de um subintervalo em $[a, b]$:



A regra dos Trapézios usando $n$ subintervalos em $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\,p_1(x)\,)\,dx$$




12-14

Vamos assumir que $x_{i+1} - x_i = h,\ i = 0, 1, \cdots, n-1$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \\
&\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \\
&= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]
\end{aligned}$$

Vamos assumir que $x_{i+1} - x_i = h,\ i = 0, 1, \cdots, n-1$. Então,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \\
&\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \\
&= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \\
&= \frac{h}{2}\left[\, f(x_0) + 2\,(\, f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\,) \,+ f(x_n)\,\right]
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \cdots + A_n f(x_n)$$

onde

$$A_0 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_1 = A_2 = \cdots = A_{n-1} = h$$

Usa-se a cada dois subintervalos uma aproximação por um polinômio de grau 2

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \cdots + A_n f(x_n)$$

## Bibliografia Básica

[1] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[2] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.