

CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Arquitetura de Computadores I – Turmas 01 e 02 (EARTE) – 2021/2
Prof. Rodolfo da Silva Villaça – rodolfo.villaca@ufes.br

Laboratório IV – Aritmética de Números Inteiros

1. Objetivo

- Entender como funcionam as operações aritméticas com números inteiros no MIPS.

2. Apresentação

Adição e subtração são realizadas em números de 32 bits armazenados em registradores de propósito geral (cada um com 32 bits, numerados de \$0 a \$31). O resultado da execução da instrução é sempre um número de 32 bits. Dois tipos de instruções estão incluídas no conjunto de instruções MIPS para fazer a adição e subtração:

- Instruções para aritmética “com sinal”: os números de 32 bits são representados sob a forma de valores em complemento de 2. Neste caso, a execução da instrução de adição ou subtração pode gerar indicação de *overflow*, isto é, o resultado não pode ser representado em 32 bits.
- Instruções para aritmética “sem sinal”: os números de 32 bits são representados sob a forma de valores padrão em binário. Neste caso, a execução deste tipo de instrução **nunca gerará indicação de *overflow***.

A multiplicação pode gerar resultados maiores que a faixa de valores representáveis em 32 bits $[-2^{31}$ a $2^{31}-1$]. A divisão inteira retorna dois valores de 32 bits, resto e quociente, que exigem 32 bits, cada, para sua representação. A arquitetura MIPS fornece 2 registradores especiais de 32 bits que são destino para as operações de multiplicação e divisão. Estes registradores extras, chamados hi e lo, são destinos implícitos nestas instruções mult e div do conjunto de instruções do MIPS. O registrador hi armazena os bits de mais alta ordem do resultado da multiplicação (bits 63 a 32) e, no caso da divisão, o resto da divisão de dois inteiros. O registrador lo armazena os bits de mais baixa ordem (bits 31 a 0) do resultado da multiplicação e, no caso da divisão, o quociente da divisão de dois inteiros. Duas instruções especiais são oferecidas pelo conjunto de instruções MIPS para movimentar os dados dos registradores hi e lo para registradores de propósito geral.

Instrução MIPS	Semântica
mfhi Rdest #move from	\$hi → Rdest
mflo Rdest	\$lo → Rdest
mthi Rsrc #move to	\$hi ← Rsrc
mtlo Rsrc	\$lo ← Rsrc

Dois tipos de instruções estão incluídas no conjunto de instruções MIPS para fazer a multiplicação e divisão:

- Instruções para aritmética “com sinal” (*signed numbers*): os números de 32 bits são representados sob a forma de valores em complemento de 2. A execução da instrução de multiplicação nunca gera *overflow*, mas a divisão pode gerar *overflow*. Note que a CPU não gera um sinal de *overflow* nesse último caso. O *overflow* deve ser resolvido por software (lembre-se de que o programador deve evitar, por exemplo, a divisão por zero).
- Instruções para aritmética “sem sinal” (*unsigned numbers*): os números de 32 bits são representados sob a forma de valores padrão em binário. O bit 31 é o bit mais significativo do número armazenado. Neste caso, a execução deste tipo de instrução **nunca gerará um sinal de *overflow***.

3. Atividades

O foco aqui está nas questões relacionadas à diferença entre as operações com sinal e sem sinal, além dos erros de *overflow*. Um *overflow* ocorrerá quando o resultado de uma operação aritmética não puder ser representado na quantidade de bits disponíveis para armazená-lo. No caso MIPS, o resultado com sinal deve poder ser representado em 32 bits.

CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

3.1. Adição e Subtração

Um tipo inteiro “sem sinal” identifica um dado que sempre terá um valor inteiro e positivo. Com n bits para representação, o menor número sem sinal representável com este tipo é 0 e o maior, $2^n - 1$. Em programas C/C++, as variáveis inteiras que nunca receberão valores negativos poderiam ser declaradas como unsigned int (embora você possa ter visto muitos programas onde variáveis armazenam tipicamente valores positivos terem sido declaradas como int, i.e. inteiros com sinal...). Inteiros “com sinal” podem ser negativos ou positivos. Com n bits para representação e com os negativos representados em complemento de 2, o menor número sem sinal representável é 2^{n-1} e o maior, $2^n - 1$. No nível de programação C/C++ este tipo de diferença é normalmente ignorado, em especial porque os programadores não precisam utilizar valores próximos do início e do fim do intervalo de representação (por exemplo, contadores de interação normalmente armazenam valores muito menores do que $2^{n-1} - 1$).

Entretanto, é simples verificar que declarar uma variável “sempre positiva” como int (quando ela de fato deveria ter sido representada como unsigned int) reduz a faixa de valores representáveis à metade da escala. Por exemplo, considere o código C a seguir:

```
// Assuma inteiros em 32 bits
unsigned int ex1;          // ex1 entre [0..4294967295]
int ex2; /                 / ex1 entre [-2147483648..2147483647]
```

Se a variável ex2 for sempre positiva, então a faixa de valores possíveis para esta variável ficará entre 0 e 2147483647, ou seja, a metade dos valores possíveis que um inteiro sem sinal (unsigned int) teria.

Atividade 1

Um número negativo é representado como um padrão de bits no qual o bit mais significativo é 1 (considerando a representação em complemento de 2). O mesmo padrão de bits estaria associado à representação de um valor inteiro elevado se este padrão fosse tratado como a representação de um valor “sem sinal”. Preencha a tabela a seguir com os valores inteiros representados em 16 bits a seguir.

Padrão de bits	Inteiro com sinal	Inteiro sem sinal
0x0000	0	0
0x7fff		
0x8000		
0xffff		

Atividade 2

Note que a extensão da representação de 16 para 32 bits pode ser feita de maneira simples, copiando o bit mais significativo da representação com menos bits para todos os bits de mais alta ordem incluídos na representação estendida. Reescreva a tabela anterior, considerando que a representação dos padrões de bits anteriores estariam agora representadas em 32 bits, conforme o exemplo da primeira linha da tabela.

Padrão de bits	Inteiro com sinal	Inteiro sem sinal
0x00000000	0	0

CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

No nível da linguagem de montagem (*assembly* MIPS) a diferença entre um número com sinal e sem sinal é mais sutil. Muitas instruções aritméticas com números com sinal podem gerar *overflow* e este *overflow* será sinalizado ao “controle da máquina” (o sistema operacional). As instruções que fazem aritmética com inteiros “sem sinal” por outro lado, ignorarão um *overflow* mesmo se a operação gerar um resultado não representável na quantidade de bits disponível para armazená-lo.

Preencha a tabela a seguir com “S” ou “N” para indicar a ocorrência ou não de overflow nas operações de adição e subtração. Justifique cada situação, aqui você pode usar exemplos!

Oper ₁	Oper ₂	Oper ₁ + Oper ₂	Oper ₁ – Oper ₂	Justificativa
valor > 0	valor > 0			
valor > 0	valor < 0			
valor < 0	valor > 0			
valor < 0	valor < 0			
0	valor > 0			
0	valor < 0			
valor > 0	0			
valor < 0	0			

Escreva um programa em C, chamado *lab3.1.c*, no qual você:

- Declara 2 variáveis inteiras, a e b. O valor inicial de a e b é o maior valor possível para um inteiro (INT_MAX quando você usa um include *limits.h* em seu programa C);
- Soma a e b e imprime o resultado da soma;
- Subtrai 0 de b e imprime o resultado da subtração.

Compile e execute o programa *lab3.1.c* e mostre a saída do programa. Explique o que aconteceu e qual o resultado esperado para a execução do programa.

Atividade 3

Escreva um programa usando MIPS e o simulador MARS, denominado *lab3.2.asm*, que:

- Declare 2 variáveis inteiras, a e b. Estas variáveis serão usadas para armazenar 2 inteiros digitados pelo usuário, os quais serão armazenados em **\$t0** e **\$t1**;
- Some **\$t0** e **\$t1** usando uma instrução nativa para inteiros com sinal e insira o resultado em **\$t2**;
- Imprima o resultado da soma.

Rode o programa e preencha a tabela a seguir com seu “plano de testes”. Escolha valores que gerem overflow. Na coluna “Overflow” use “S/N” para indicar que houve (não houve) overflows. Na coluna “Comentários” descreva o motivo da ocorrência do overflow.

Importante: escolha os números cuidadosamente para seus testes serem efetivos. A chamada de sistema que lê um inteiro do usuário truncará um valor muito grande que ultrapassaria o limite do registrador (32 bits). Tente colocar um número inteiro muito grande (ex 8.589.934.593) e observe o resultado da execução.

CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Oper_1	Oper_2	Resultado Impresso	Overflow	Justificativa
+2000000000	+2000000000		Y	
+	–			
–	+			
–	–			

Atividade 4

Escreva um programa usando MIPS e o simulador MARS, denominado *lab3.3.asm* (muito similar ao anterior), que:

- Declare 2 variáveis inteiras, a e b. Estas variáveis serão usadas para armazenar 2 inteiros digitados pelo usuário, os quais serão armazenados em **\$t0** e **\$t1**
- Subtraia **\$t0** e **\$t1** usando uma instrução nativa para inteiros com sinal e insira o resultado em **\$t3**.
- Imprima o resultado da subtração.

Rode o programa e preencha a tabela a seguir com seu “plano de testes”. Sempre que possível, escolha valores que gerem overflow. Na coluna “Overflow” use “S/N” para indicar que houve (não houve) overflows. Na coluna “Comentários” descreva o motivo da ocorrência do overflow.

Oper_1	Oper_2	Resultado Impresso	Overflow	Justificativa
+2000000000	+2000000000		Y	
+	–			
–	+			
–	–			

Atividade 5

Agora, vamos testar o uso de instruções que desconsideram o overflow. O simulador MARS sempre imprime o conteúdo dos registradores de propósito geral como sendo um valor inteiro com sinal. O fato de que um valor válido “muito grande” sendo representado nos 32 bits e sendo impresso como um valor negativo poderia confundir um programador menos avisado. Os valores tratados como “*unsigned numbers*” podem usar o bit mais significativo como sendo um valor e não a representação do sinal. Entretanto, eles serão interpretados como negativos pelo serviço de impressão do sistema operacional.

Escreva agora um programa usando MIPS e o simulador MARS, denominado *lab3.4.asm* (também similar aos anteriores) para:

- Declarar 2 variáveis inteiras, a e b. Estas variáveis serão usadas para armazenar 2 inteiros digitados pelo usuário, os quais serão armazenados em **\$t0** e **\$t1**
- Somar **\$t0** e **\$t1** usando uma instrução nativa para inteiros sem sinal (*unsigned*) e armazenar o resultado em **\$t2**.
- Imprima o resultado da adição.

CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

- Subtrair **\$t0** e **\$t1** usando uma instrução nativa para inteiros sem sinal (*unsigned*) e armazenar o resultado em **\$t3**.
- Imprima o resultado da subtração.

Rode o programa e preencha a tabela a seguir com seu “plano de testes”. Sempre que possível, escolha valores que gerem overflow. Na coluna “Overflow” use “S/N” para indicar que houve (não houve) overflows. Na coluna “Comentários” descreva o motivo da ocorrência do overflow.

Oper ₁	Oper ₂	Resultado Impresso	Overflow	Comentários (Justificativas)
Adição				
+	+			
+	–			
–	+			
–	–			
Subtração				
+	+			
+	–			
–	+			
–	–			

3.2. Multiplicação e Divisão

A multiplicação de inteiros pode ser feita usando números com e sem sinal. A arquitetura especifica 2 registradores especiais, hi and lo (32 bit cada), os quais são os destinos dos resultados de divisão e multiplicação de inteiros. Como visto, a multiplicação inteira pode gerar resultados maiores que a faixa de valores representáveis em 32 bits [-2^{31} a $2^{31}-1$]. A divisão inteira retorna dois valores de 32 bits, resto e quociente, que exigem 32 bits, cada, para sua representação.

Multiplicar 2 valores inteiros “*unsigned*” de n bits pode resultar em valores que requerem $2n$ bits para serem representados. Dividir 2 valores inteiros “*unsigned*” de n bits resulta em 2 valores de n bits, um para o quociente e outro para o resto da divisão. Para multiplicação com valores inteiros “*signed*”, os valores negativos estarão representados em complemento de 2. O resultado, se for negativo, também estará representado em complemento de 2. Assim, o resultado de uma multiplicação “com sinal” requer $2.(n - 1)$ bits para a representação da magnitude do valor e mais 1 bit de sinal.

A multiplicação inteira com ou sem sinal nunca requererá mais que 64 bits para o resultado e, portanto, nunca ocorrerá um overflow quando instruções nativas de multiplicação inteira forem utilizadas. As instruções nativas para a multiplicação são as seguintes:



Universidade Federal
do Espírito Santo

CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Instruction	Comment
<code>mult Rsrc1, Rsrc2</code>	Multiply the signed numbers in <code>Rsrc1</code> and <code>Rsrc2</code> . The higher 32 bits of the result go in register <code>hi</code> . The lower 32 bits of the result go in register <code>lo</code>
<code>multu Rsrc1, Rsrc2</code>	Multiply the unsigned numbers in <code>Rsrc1</code> and <code>Rsrc2</code> . The higher 32 bits of the result go in register <code>hi</code> . The lower 32 bits of the result go in register <code>lo</code>

Por outro lado, a máquina virtual do simulador oferece várias instruções de multiplicação que produzem um resultado em 32 bits, com o registrador destino especificado como sendo um registrador de uso geral (e não os registradores especiais `hi` e `lo`).

Pseudoinstruções Nativas para Multiplicação Inteira em MIPS

Instruction	Comment
<code>mul Rdest, Rsrc1, Rsrc2</code>	Multiply the signed numbers in <code>Rsrc1</code> and <code>Rsrc2</code> . The lower 32 bits of the result go in register <code>Rdest</code> .
<code>mulo Rdest, Rsrc1, Rsrc2</code>	Multiply the signed numbers in <code>Rsrc1</code> and <code>Rsrc2</code> . The lower 32 bits of the result go in register <code>Rdest</code> . Signal overflow
<code>mulou Rdest, Rsrc1, Rsrc2</code>	Multiply the unsigned numbers in <code>Rsrc1</code> and <code>Rsrc2</code> . The lower 32 bits of the result go in register <code>Rdest</code> . Signal overflow

O resultado de uma divisão inteira é composto por um quociente (armazenado no registrador `lo`) e um resto (armazenado no registrador `hi`), sendo ambos números inteiros de 32 bits. Existe uma complicação extra, relacionada com a divisão inteira: o sinal do resto. Existem duas abordagens para tratar o problema: (1) Seguir o teorema de divisão da matemática ou (2) usar uma solução baseada na visão da ciência da computação.

Dividir um inteiro *DD* (dividendo) por um *valor positivo DR* (divisor), as seguintes condições devem ser sempre verdadeiras (teorema da divisão):

$$DD = DR * Q + RM \quad (1)$$

$$0 \leq RM < DR \quad (2)$$

Observe que a divisão gera um *Q* (quociente) e um *RM* (resto – *remainder*) que são inteiros únicos e que o resto é sempre positivo. Assim, se o dividendo e o divisor tiverem o mesmo sinal, então o quociente é positivo; do contrário, será negativo. Um resto diferente de zero sempre terá o mesmo sinal do dividendo.

Atividade 6

Quais são os resultados das seguintes divisões inteiras?

Dividendo	Divisor	Quociente	Resto
22	7		
-22	7		
22	-7		
-22	-7		

CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

No MIPS, se um dos operandos numa divisão inteira for negativo, então o sinal do resto é “não especificado”. Para se obter o resultado correto da divisão, alguns passos extras devem ser executados:

- Converter ambos os operandos em valores positivos;
- Realizar a divisão;
- Ajustar o resultado para a representação correta, tendo como base os sinais iniciais do dividendo e do divisor.

Uma operação de divisão com sinal pode gerar overflow, uma vez que a representação em complemento de 2 de inteiros é assimétrica (a representação do 0 fica do lado das representações positivas e, com isso existe um número negativo a mais do que os valores positivos). Note entretanto, que um *overflow* numa divisão inteira não gera um sinal de overflow como no caso da adição/subtração. Ou seja, fica a cargo do programador o tratamento deste erro por meio de um código próprio para tratar o *overflow*. D

Dividir um valor inteiro por zero é uma operação ilegal! Entretanto, mesmo que o divisor seja zero, a operação de divisão será feita sem reportar um erro de execução. Novamente, cabe ao compilador ou ao programador a tarefa de gerar um código que detecta e trata este tipo de operação ilegal antes que ela aconteça.

Instruções Nativas para Divisão Inteira em MIPS

Instruction	Comment
<code>div Rsrc1, Rsrc2</code>	Divide the signed integer in <code>Rsrc1</code> by the signed integer in <code>Rsrc2</code> . The quotient (32 bits) goes in register <code>lo</code> . The remainder goes in register <code>hi</code> . Can overflow.
Instruction	Comment
<code>divu Rsrc1, Rsrc2</code>	Divide the unsigned integer in <code>Rsrc1</code> by the unsigned integer in <code>Rsrc2</code> . The quotient (32 bits) goes in register <code>lo</code> . The remainder goes in register <code>hi</code> . Does not overflow.

Pseudoinstruções para Divisão Inteira em MIPS

Instruction	Comment
<code>div Rdest, Rsrc1, Rsrc2</code>	Divide the signed integer in <code>Rsrc1</code> by the signed integer in <code>Rsrc2</code> . Store the quotient (32 bits) in register <code>Rdest</code> . Can overflow.
<code>divu Rdest, Rsrc1, Rsrc2</code>	Divide the unsigned integer in <code>Rsrc1</code> by the unsigned integer in <code>Rsrc2</code> . Store the quotient in <code>Rdest</code> . Does not overflow.
<code>rem Rdest, Rsrc1, Rsrc2</code>	Divide the signed integer in <code>Rsrc1</code> by the signed integer in <code>Rsrc2</code> . Store the remainder ^a (32 bits) in register <code>Rdest</code> . Can overflow.
<code>remu Rdest, Rsrc1, Rsrc2</code>	Divide the signed integer in <code>Rsrc1</code> by the signed integer in <code>Rsrc2</code> . Store the remainder ^a (32 bits) in register <code>Rdest</code> . Does not overflow.

Se um dos operandos for negativo, o resto terá sinal indefinido. Assim como na multiplicação, a máquina virtual do MARS oferece instruções de divisão que podem ser armazenadas em registradores de propósito geral (e não os registradores especiais `hi` e `lo`).

Atividade 7

Escreva um programa usando linguagem C, chamado *lab3.3.c*, no qual você:

- Declara 2 variáveis inteiras, `a` e `b`. Os valores iniciais de `a` e `b` são os maiores valores possível para um inteiro (`INT_MAX` quando você usa um `include limits.h` em seu programa C);
- Multiplica `a` e `b`;
- Imprime o resultado da multiplicação.

CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

O programa gera um *overflow*? O resultado impresso está correto? Justifique.

Atividade 8

Escreva um programa MIPS, usando o simulador MARS, chamado *lab3.4.asm*, no qual você:

- Declara 2 variáveis inteiras, a e b. Estas variáveis serão usadas para armazenar 2 inteiros digitados pelo usuário, os quais serão armazenados em \$t0 e \$t1;
- Multiplica \$t0 e \$t1 usando uma instrução nativa para inteiros com sinal;
- Imprime o resultado da multiplicação.

Execute o programa e preencha a tabela a seguir com seu plano de testes. Use as ferramentas do simulador MARS para verificar o conteúdo dos registradores hi e lo. Inclua o maior e menor inteiro representável em 32 bits para os valores as duas variáveis a e b nas duas últimas linhas da tabela.

Multiplicação com sinal

a	b	Registrador hi (hexadecimal)	Registrador lo (hexadecimal)
2	1		
2	-1		
2^{18}	2^{14}		
2^{18}	-2^{14}		

Preencha a tabela usando os mesmos valores anteriores com os resultados esperados e obtidos nesta execução.

Multiplicação com sinal

a	b	Resultado Esperado	Resultado Obtido
2	1		
2	-1		
2^{18}	2^{14}		
2^{18}	-2^{14}		

Alguns dos resultados impressos não estão corretos. Por quê?

Atividade 9

Escreva um programa, chamado *lab3.5.asm*, no qual você:

- Declara 2 variáveis inteiras, a e b. Estas variáveis serão usadas para armazenar 2 inteiros digitados pelo usuário, os quais serão armazenados em **\$t0** e **\$t1**

CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

- Multiplica **\$t0** e **\$t1** usando uma instrução nativa para **inteiros sem sinal**.
- Imprime o resultado da multiplicação.

De forma similar ao que foi feito anteriormente, execute o programa e preencha a tabela a seguir com seu plano de testes. Inclua o maior e menor inteiro representável em 32 bits para os valores as duas variáveis a e b nas duas últimas linhas da tabela.

Multiplicação sem sinal

a	b	Registrador hi (hexadecimal)	Registrador lo (hexadecimal)
2	1		
2	-1		
2^{18}	2^{14}		
2^{18}	-2^{14}		

Repita a execução do programa *lab3.5.asm* usando os mesmos valores anteriores e preencha a tabela a seguir com os resultados esperados e obtidos nesta execução.

Multiplicação sem sinal

a	b	Resultado Esperado	Resultado Obtido
2	1		
2	-1		
2^{18}	2^{14}		
2^{18}	-2^{14}		

Atividade 10

Escreva um programa usando MIPS e o simulador MARS, chamado *lab3.6.asm*, no qual você:

- Declara 2 variáveis inteiras, a e b. Estas variáveis serão usadas para armazenar 2 inteiros digitados pelo usuário, os quais serão armazenados em **\$t0** e **\$t1**;
- Divide **\$t0** e **\$t1** usando uma instrução nativa para inteiros com sinal;
- Imprime o quociente e o resto da divisão.

Execute o programa e preencha a tabela a seguir com seu plano de testes. Use as ferramentas do simulador MARS para verificar o conteúdo dos registradores hi e lo. Use números “pequenos” que gerem resto diferente de zero. Para as últimas duas linhas, insira valores em **\$t0** e **\$t1** que gerem *overflow* na execução da divisão. Note que divisão por 0 (que é uma operação ilegal) e overflow são coisas diferentes em termos de execução. Na coluna “Erro” indique quando um erro de execução for observado. Destaque as colunas com valores errados.

CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Divisão com sinal

Oper ₁	Oper ₂	Quociente impresso	Resto impresso	Erro
> 0	> 0			
> 0	< 0			
< 0	> 0			
< 0	< 0			
-1	2			
	= 0			

Atividade 11

Escreva um programa usando MIPS e o simulador MARS, chamado *lab3.7.asm*, no qual você:

- Declara 2 variáveis inteiras, a e b. Estas variáveis serão usadas para armazenar 2 inteiros digitados pelo usuário, os quais serão armazenados em **\$t0** e **\$t1**;
- Divide **\$t0** e **\$t1** usando uma instrução nativa para **inteiros sem sinal**;
- Imprime o quociente e o resto da divisão.

De maneira similar ao feito para a divisão de inteiros com sinal, execute o programa e preencha a tabela a seguir com seu plano de testes, usando os mesmos valores anteriores de entrada dos operandos. Destaque (em negrito) as colunas com valores errados.

Divisão sem sinal

Oper ₁	Oper ₂	Quociente impresso	Resto impresso	Erro
> 0	> 0			
> 0	< 0			
< 0	> 0			
< 0	< 0			
-1	2			
	= 0			