

Aula 5: Capacitância

Curso de Física Geral III

F-328

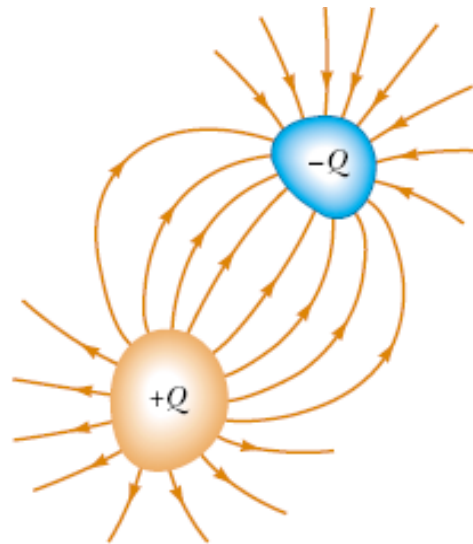
1º semestre, 2014



Capacitância

Capacitores

Dois condutores carregados com cargas $+Q$ e $-Q$ e isolados, de formatos arbitrários, formam o que chamamos de um *capacitor*.

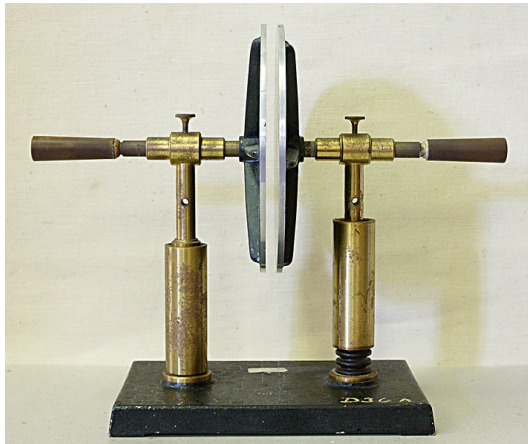


A sua utilidade é *armazenar energia potencial* no *campo elétrico* por ele formado.

História – Garrafa de Leiden e bateria

Quatro capacitores carregados formando uma “Bateria”.
Esse sistema foi usado por **Daniel Gralath** para *armazenar energia potencial* no *campo elétrico* existente no interior dos capacitores - 1756.

Daniel Bernoulli, e Alessandro Volta, mediram a força entre placas de um capacitor, e Aepinus em 1758 foi quem que supôs que era uma lei de inverso-de-quadrado. (Em 1785 - Lei de Coulomb).

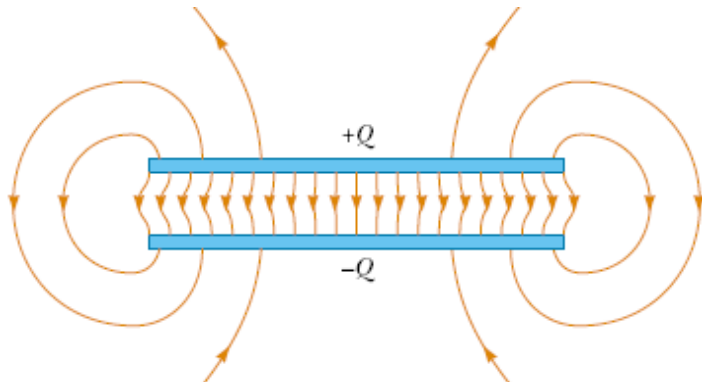
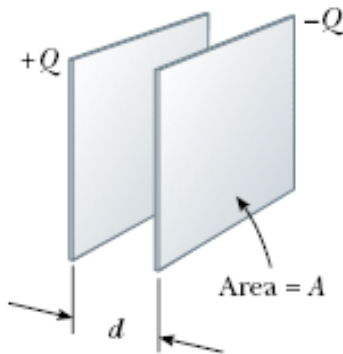


Réplica do sistema de Gralath existente no museu de Ciência da Cidade de Leiden (Holanda).

Capacitância

Capacitores

O capacitor mais convencional é o de *placas paralelas*. Em geral, dá-se o nome de *placas do capacitor (ou armaduras)* aos condutores que o compõem, independentemente das suas formas.



Outros capacitores

Capacitores

Como as placas do capacitor são condutoras, elas formam *superfícies equipotenciais*. A carga nas placas é proporcional à diferença de potencial entre elas, ou seja:

$$Q = CV ,$$

onde C é a chamada *capacitância* do capacitor. Então:

$$C = \frac{Q}{V}$$

A constante C depende apenas da *geometria* do capacitor. No SI a capacitância é medida em *farads* (F).

$$1 \text{ farad} = 1 \text{ F} = 1 \text{ coulomb/volt} = 1 \text{ C/V}$$

$$1 \text{ } \mu\text{farad} = 10^{-6} \text{ F}$$

Importante: $\epsilon_0 = 8,85 \text{ pF/m}$

Cálculo da Capacitância

Esquema de cálculo

Em geral, os capacitores que usamos gozam de alguma simetria, o que nos permite calcular o campo elétrico gerado em seu interior através da lei de Gauss:

$$\varphi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

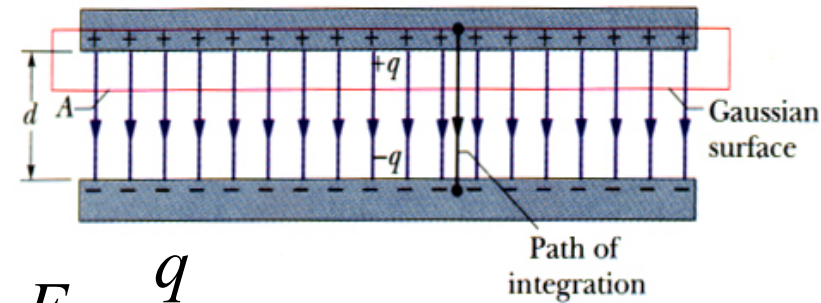
De posse do campo elétrico, podemos calcular a diferença de potencial entre as duas placas como:

$$V = V_f - V_i = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

E, finalmente, usamos o resultado anterior em $Q = CV$, de onde podemos extrair C .

Capacitância: Exemplos

Capacitor de placas paralelas



$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow$$

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

$$V_f - V_i = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \quad \longrightarrow$$

$$V = Ed$$

$$q = CV \quad \longrightarrow$$

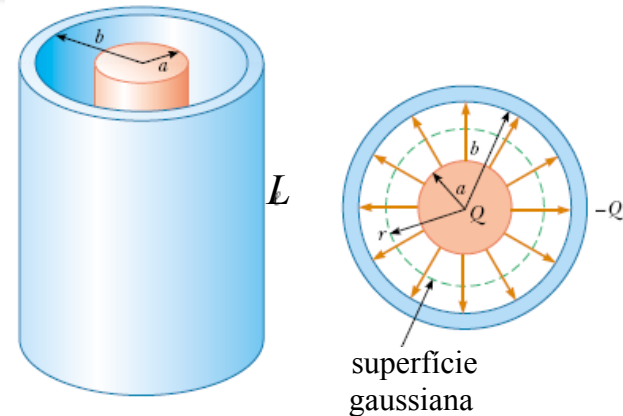
$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Nota-se que a capacitância é proporcional a um comprimento e só depende de *fatores geométricos* do capacitor.

Capacitância: Exemplos

Capacitor cilíndrico

$(L \gg b)$



$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$



$$E = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L r}$$

$$V_f - V_i = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$



$$V = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

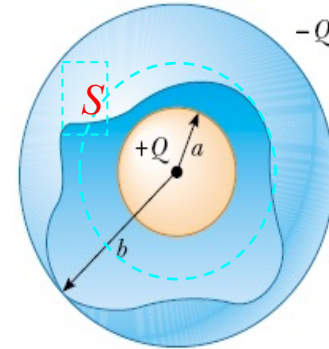
$$Q = CV$$



$$C = 2\pi \epsilon_0 \frac{L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Capacitância: Exemplos

Capacitor esférico



$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow$$

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$V_f - V_i = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \quad \longrightarrow$$

$$V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{b-a}{ab}$$

$$Q = CV \quad \longrightarrow$$

$$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

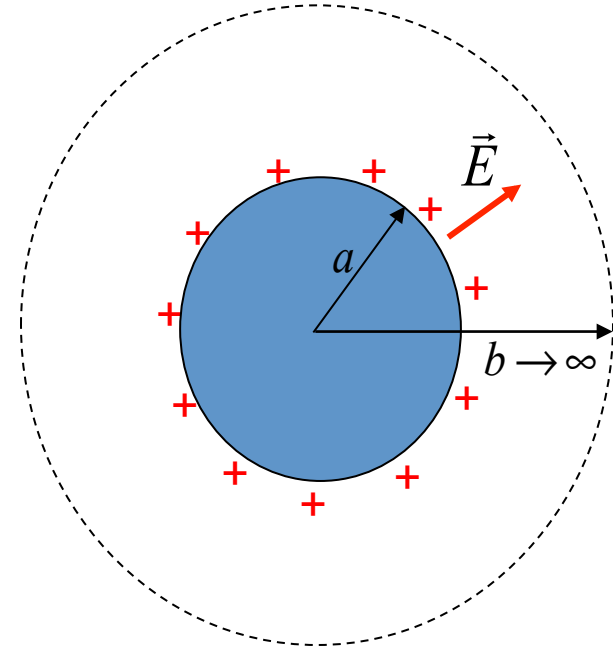
Capacitância: Exemplos

Esfera isolada ($R = a$)

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} = 4\pi\epsilon_0 \frac{a}{1 - \frac{a}{b}}$$

↓ $b \rightarrow \infty$

$$C = 4\pi\epsilon_0 a$$



Exemplo numérico:

$$R = 1\text{ m}, \epsilon_0 = 8,85\text{ pF/m} \quad \longrightarrow \quad C \approx 1,1 \times 10^{-10}\text{ F}$$

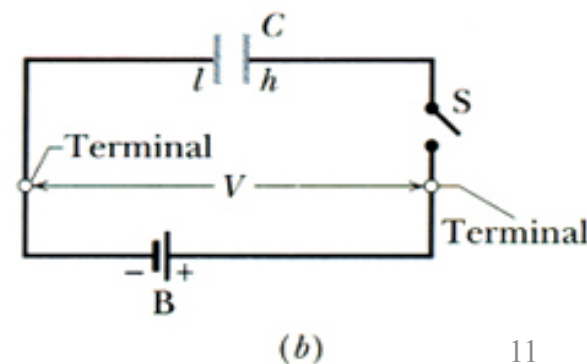
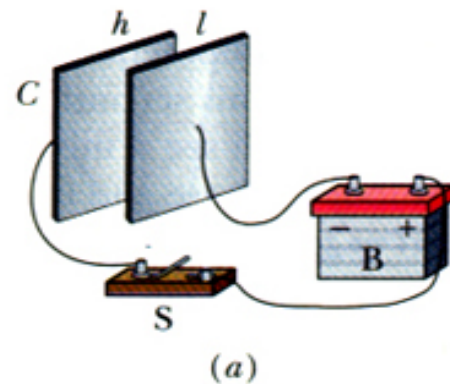
Capacitância

Carregando o capacitor

Podemos carregar um capacitor ligando as suas placas a uma bateria que estabelece uma diferença de potencial fixa, V , ao capacitor. Assim, em função de V

$$Q = CV,$$

cargas $+Q$ e $-Q$ irão se acumular nas placas do capacitor estabelecendo entre elas uma diferença de potencial $-V$ que se opõe à diferença de potencial da bateria e faz cessar o movimento de cargas no circuito.



Associação de capacitores

Associação de capacitores em paralelo

$$q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V \quad \text{e} \quad q_3 = C_3 V$$

$$q = q_1 + q_2 + q_3 \Rightarrow q = (C_1 + C_2 + C_3)V$$

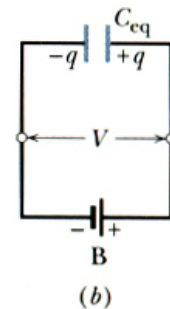
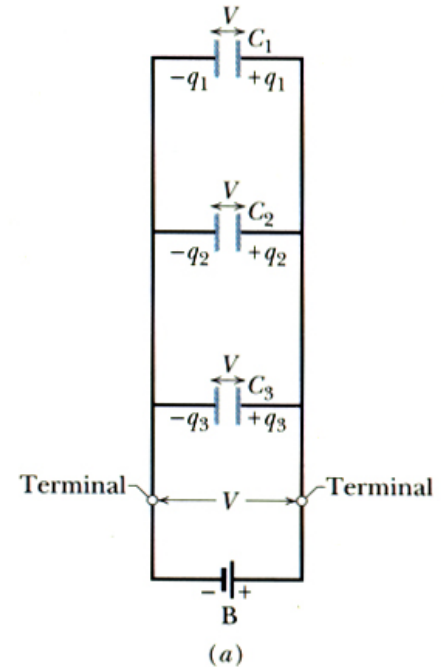
Como $q = C_{eq} V$



$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

ou

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$



Associação de capacitores

Associação de capacitores em série

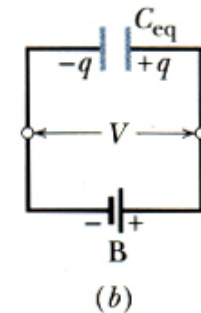
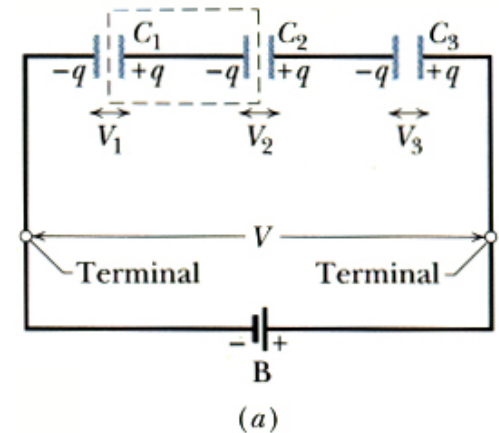
$$q = C_1 V_1, \quad q = C_2 V_2 \quad \text{e} \quad q = C_3 V_3$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$$

Como $V = \frac{q}{C_{eq}}$:

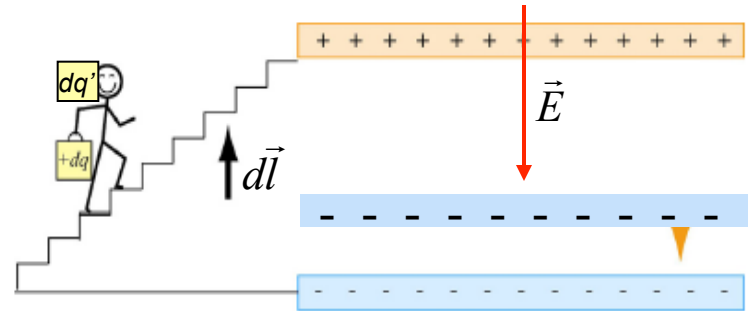


$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$



Energia armazenada no campo elétrico

Um agente externo deve realizar trabalho para carregar um capacitor. Este trabalho fica armazenado sob a forma de energia potencial na região do campo elétrico entre as placas.



Suponha que haja q' e $-q'$ armazenadas nas placas de um capacitor. O trabalho para se deslocar uma carga elementar dq' de uma placa para a outra é então:

$$dW = V' dq' = \frac{q'}{C} dq' \longrightarrow W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C}$$

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2$$

Energia no capacitor

Densidade de energia

$$u = \frac{\text{energia potencial}}{\text{volume}}$$

Em um capacitor de placas paralelas sabemos que:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \text{e} \quad V = Ed$$

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \quad \downarrow \quad = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} E^2 d^2$$

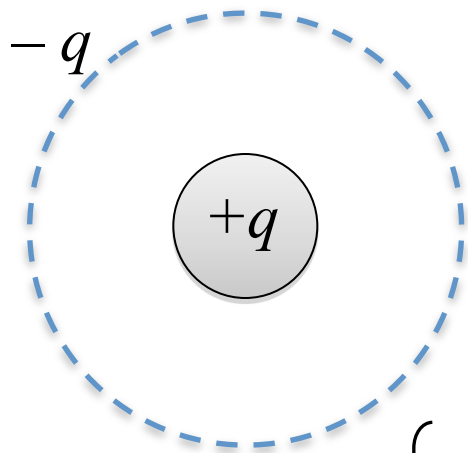
$$\downarrow \quad u \equiv \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

(Apesar de a demonstração ter sido feita para o capacitor de placas paralelas, esta **fórmula é sempre válida!**)

Exercício: energia de uma esfera

Considere um condutor esférico de raio R carregado com uma carga q .
Qual a energia total neste condutor?

Duas interpretações:



a) Energia potencial de um capacitor esférico de raio R :

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \\ C = 4\pi\epsilon_0 R \end{array} \right. \rightarrow U = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

b) Integração da densidade de energia u :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \\ E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{array} \right. \rightarrow U = \int_R^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(r) 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

c) Qual o raio R_0 que contém metade da energia total?

$$U(R_0) = \frac{1}{2} U \Rightarrow \int_R^{R_0} (...) \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \int_R^\infty (...) \frac{dr}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{2} \frac{1}{R} \Rightarrow R_0 = 2R$$

Uma nova visão de U

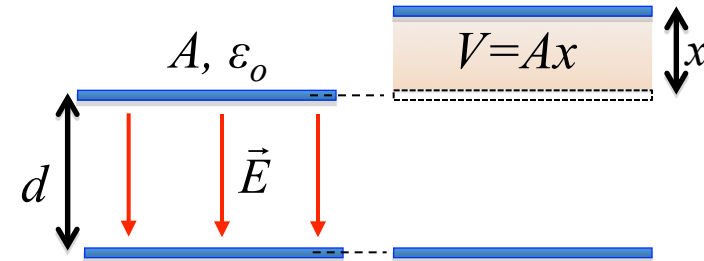
a) Qual é o trabalho W necessário para aumentar em x a separação das placas?

- É a energia adicional que apareceu no volume Ax , que antes não existia. Então:

$$\begin{aligned} W = U = u Ax &= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 Ax = \\ &= \frac{1}{2} E Ax \epsilon_0 \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{1}{2} QE x \end{aligned}$$

b) Qual é a força de atração entre as placas?

- Como $W = Fx \rightarrow F = \frac{1}{2} QE$

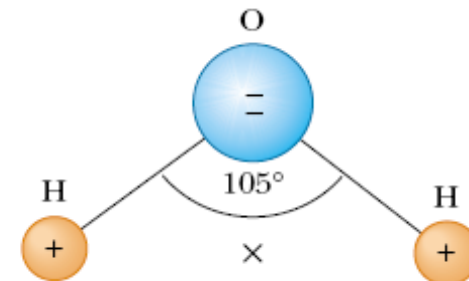


$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

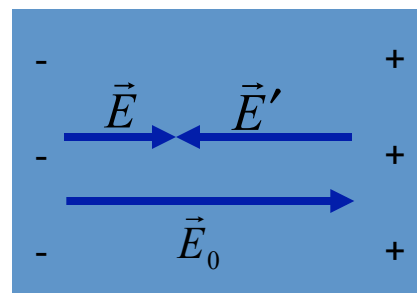
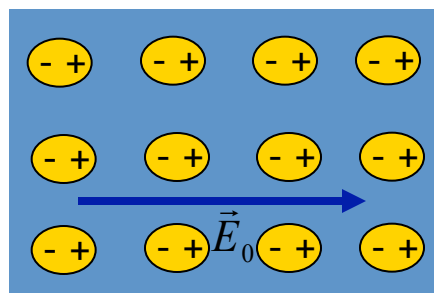
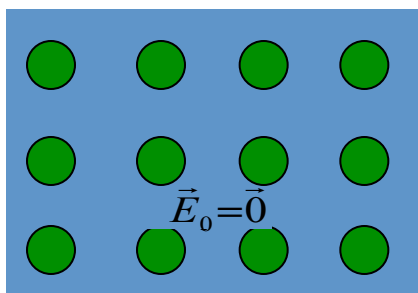
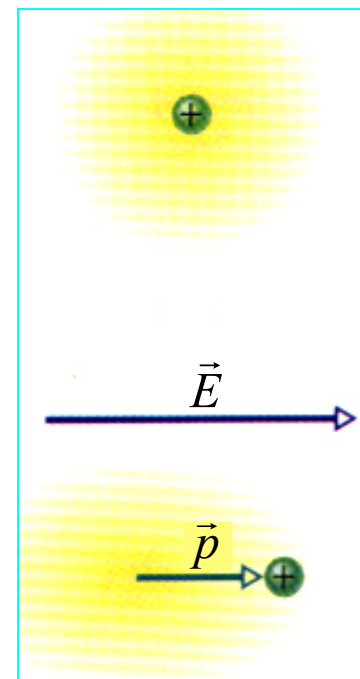
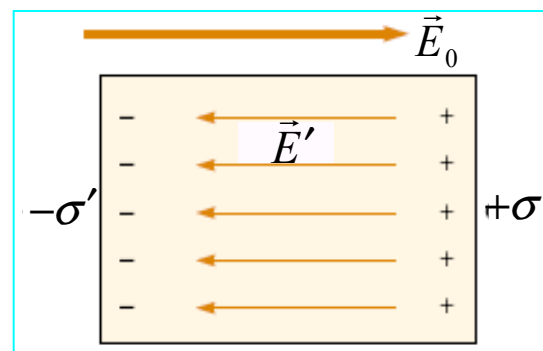
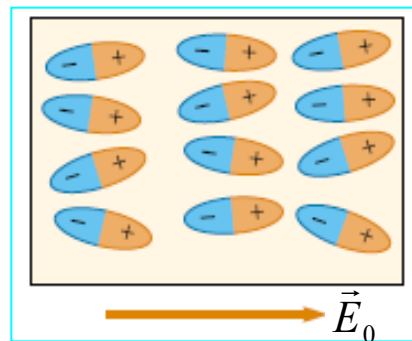
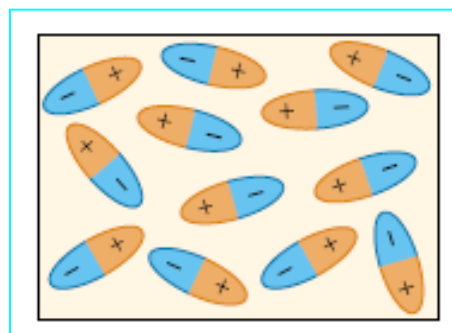
Dielétricos

Visão atômica

Dielétricos são materiais *isolantes* que podem ser *polares* ou *não-polares*.



um dielétrico polar: molécula de água



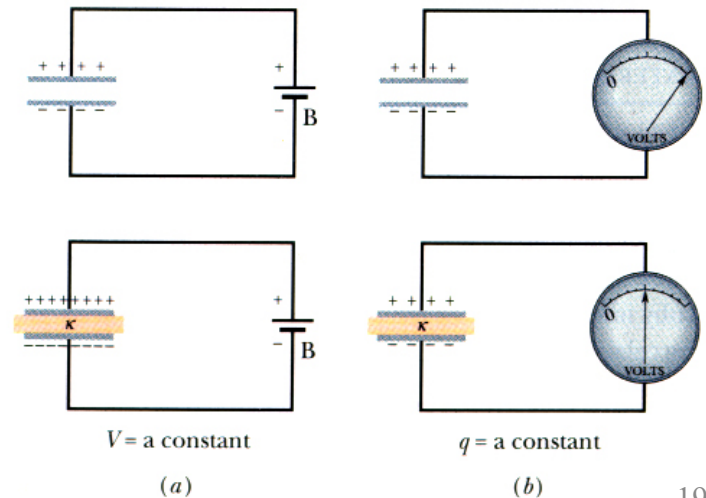
Capacitores com dielétricos

Ao colocarmos um material dielétrico entre as placas de um capacitor, se V é mantido constante, a carga das placas *aumenta*; se Q é mantida constante, V *diminui*. Como $Q = CV$, ambas as situações são compatíveis com o fato de que o dielétrico entre as placas do capacitor *faz a sua capacitância aumentar*.

Vimos: $C_0 = \epsilon_0 \mathcal{L}$, onde \mathcal{L} é uma função que depende apenas da geometria e tem dimensão de comprimento.

Então, na presença de um dielétrico preenchendo *totalmente* o capacitor: $C_d = \kappa \epsilon_0 \mathcal{L} = \kappa C_0$, onde $\kappa > 1$

No vácuo, $\kappa = 1$



Dielétricos

Material	Constante dielétrica	Resistência Dielétrica (kV/mm)
Ar (1 atm)	1,00054	3
Poliestireno	2,6	24
Papel	3,5	16
Pirex	4,7	14
Porcelana	6,5	5,7
Silício	12	
Etanol	25	
Água (20°)	80,4	
Água (25°)	78,5	

Lei de Gauss com dielétricos

$$(a): \oint_S \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

$$(b): \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q - q'}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{q - q'}{\epsilon_0 A}$$

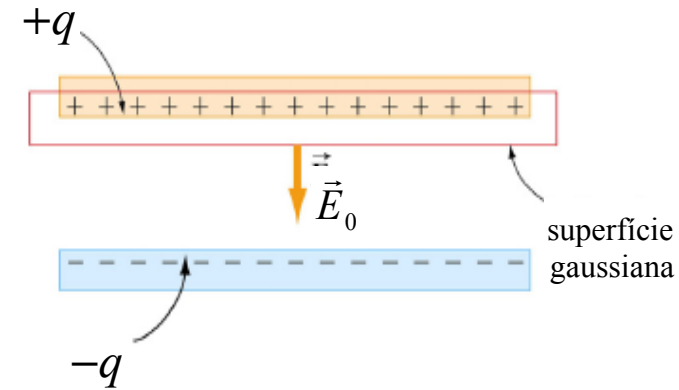
$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{q}{\kappa \epsilon_0 A} = \frac{q - q'}{\epsilon_0 A} \therefore q - q' = \frac{q}{\kappa}$$

$$\text{Em (b): } \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q}{\kappa \epsilon_0}$$

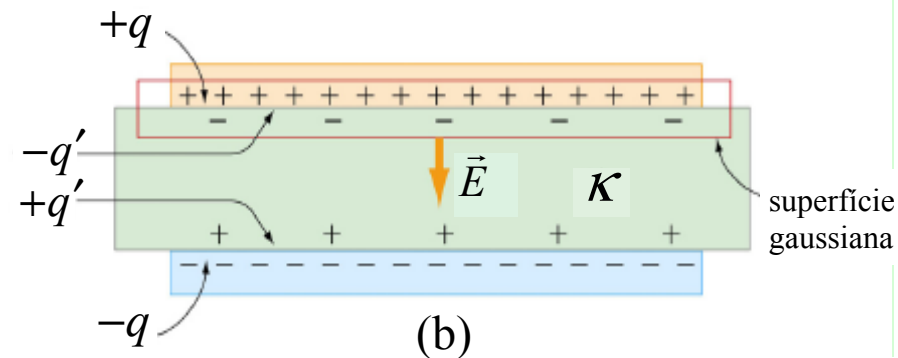
$$\text{Ou: } \oint_A \vec{D}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = q,$$

onde $\vec{D}(\vec{r}) \equiv \kappa \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})$ é o **vetor de deslocamento elétrico**.

Então, na lei de Gauss expressa com o vetor \vec{D} , aparecem apenas as **cargas livres** (das placas).



(a)



(b)

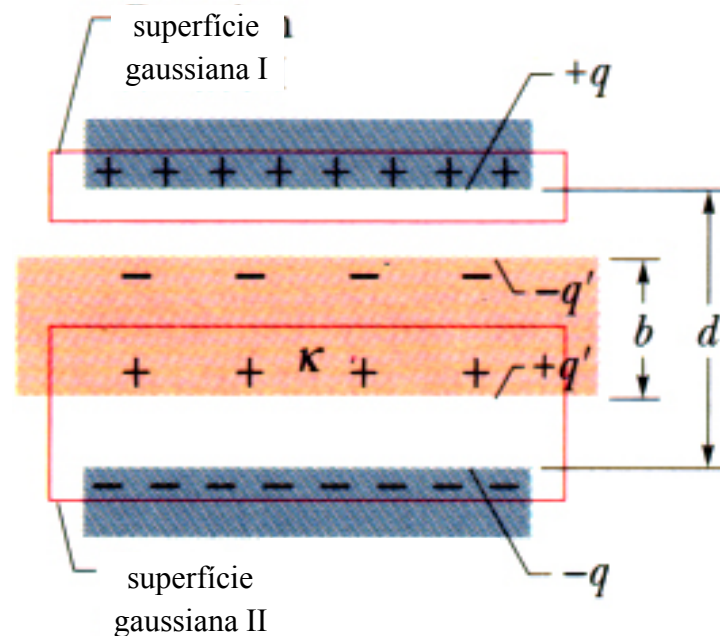
Dielétricos: Exemplo

Exemplo

Capacitor de placas paralelas com $A=115 \text{ cm}^2$, $d=1.24 \text{ cm}$, $V_0=85.5 \text{ V}$, $b=0.78 \text{ cm}$, $\kappa=2.61$

Calcule:

- a) C_0 sem o dielétrico;
- b) a carga livre nas placas;
- c) o campo E_0 entre as placas e o dielétrico;
- d) o campo E_d no dielétrico;
- e) a ddp V entre as placas na presença do dielétrico;
- f) A capacitância C com o dielétrico.



Lista de exercícios do Capítulo 25

Os exercícios sobre **Lei de Gauss** estão na página da disciplina :
(<http://www.ifi.unicamp.br>).

Consultar: **Graduação → Disciplinas → F 328-Física Geral III**

Aulas gravadas:

<http://lampiao.ic.unicamp.br/weblectures> (Prof. Roversi)

ou

[UnivespTV e Youtube](#) (Prof. Luiz Marco Brescansin)