Aula 11: Indutância

Curso de Física Geral III

F-328

1º semestre, 2014

Auto-Indutância e Indutância Mútua

Quando estudamos campo elétrico, relacionamos a quantidade de cargas em um par de condutores com a diferença de potencial entre eles. A constante de proporcionalidade, que é a capacitância, depende apenas das geometrias dos condutores:

$$\left.\begin{aligned} Q_{\text{livre}} &= \oint \varepsilon_o \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA \\ \Delta V &= -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q_{\text{livre}} = CV$$

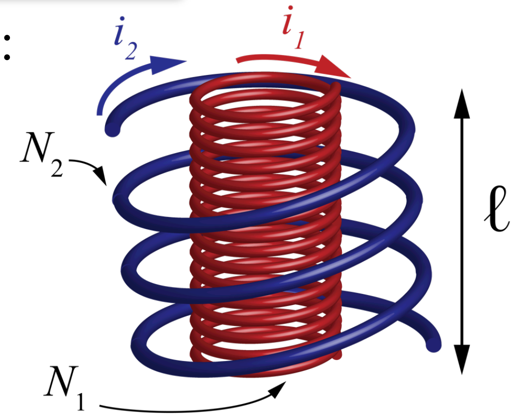
Iremos agora fazer algo análogo ao relacionar as leis de Ampère e Gauss (para campo magnético) e mostrar que poderemos escrever o fluxo magnético em função das correntes elétricas geradoras de campo magnético. Novamente a constante de proporcionalidade depende apenas da geometria dos condutores envolvidos. A grande diferença é que a proporcionalidade é feita através de uma relação matricial, dando origem a auto-indutância e indutâncias mútuas:

$$\left.\begin{aligned} \phi_B &= \int \vec{B}\cdot\hat{n}\,dA \\ i_{\text{env}} &= \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \phi_n = L_{n,m}\, i_m$$

$L_{\text{n,n}}$ = Auto-Indutância;
$L_{\text{m,n}}$ = Indutância Mútua;

Solenoide: Indutância Mútua

Considere o sistema ao lado. Iremos analisar quatro situações:

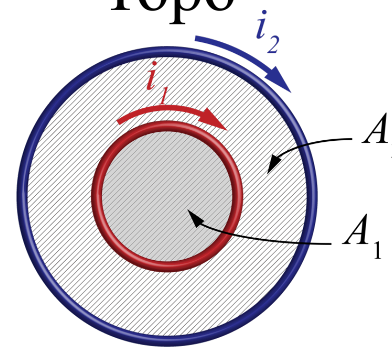


i) i_1 = constante, i_2=0 → fluxo produzido na **bobina 2**:

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} i_1 \hat{z} \qquad \phi_{2,(1)} = N_2 \int_{A_2} \vec{B}_1 \cdot \hat{n}\, dA = N_2 B_1 A_1$$

$$\boxed{\phi_{2(1)} = L_{21} i_1} \qquad \boxed{L_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} A_1}$$

Topo



i) i_2 = constante, i_1=0 → fluxo produzido na **bobina 1**:

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \frac{N_2}{l} i_2 \hat{z} \qquad \phi_{1,(2)} = N_1 \int_{A_1} \vec{B}_2 \cdot \hat{n}\, dA = N_1 B_2 A_1$$

$$\boxed{\phi_{1(2)} = L_{12} i_2} \qquad \boxed{L_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} A_1}$$

$L_{12} = L_{21}$ Note que apesar de L_{12} =L_{21} não se obtém L_{21} de L_{12} trocando-se 1 → 2.

A unidade SI de indutância é o henry (H):

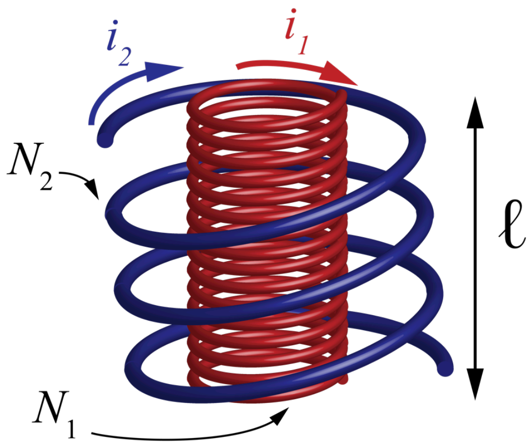
$$1\,\mathrm{H} = \frac{1\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{A}} = \frac{1\mathrm{W_b}}{\mathrm{A}}$$

Solenoide: Auto-Indutância

iii) i_1 = constante, i_2=0 → fluxo produzido na **bobina 1**:

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} i_1 \hat{z} \qquad \phi_{1,(1)} = N_1 \int_{A_1} \vec{B}_1 \cdot \hat{n}\, dA = N_1 B_1 A_1$$

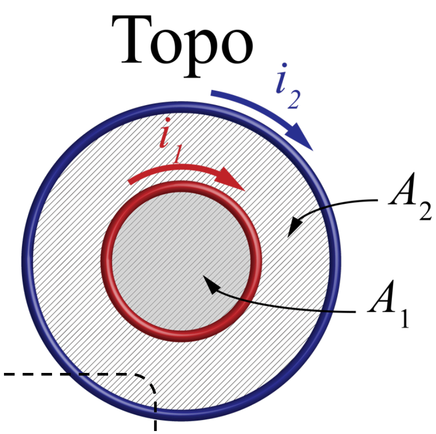
$$\boxed{\phi_{1(1)} = L_{11} i_1} \qquad \boxed{L_{11} = \mu_0 \frac{N_1^{\,2}}{l} A_1}$$



iv) i_2 = constante, i_1=0 → fluxo produzido na **bobina 2**:

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \frac{N_2}{l} i_2 \hat{z} \qquad \phi_{2,(2)} = N_2 \int_{A_2} \vec{B}_2 \cdot \hat{n}\, dA = N_2 B_2 A_2$$

$$\boxed{\phi_{2(2)} = L_{22} i_2} \qquad \boxed{L_{22} = \mu_0 \frac{N_2^{\,2}}{l} A_2}$$



Solenoide ideal:

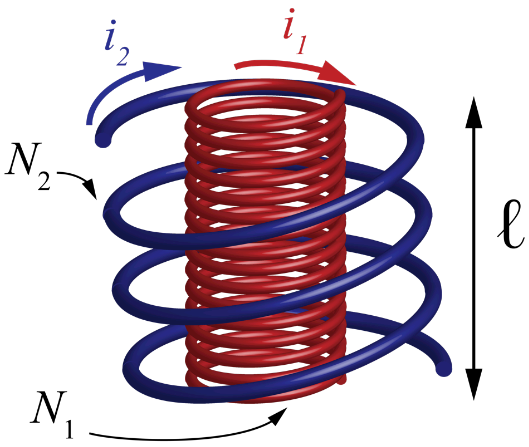
$$L = \mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 lA \rightarrow \frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A$$

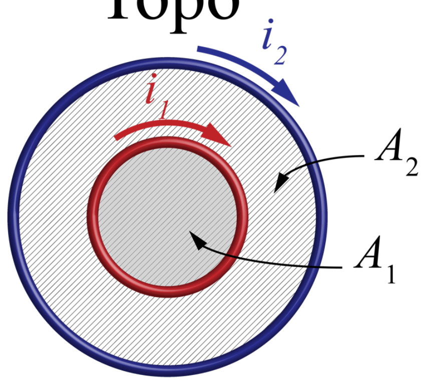
(Indutância por unidade de comprimento)

Auto-Indutância e Indutância Mútua

Quando ambas os solenoides carregam correntes, o fluxo total é então proporcional a estas correntes e às auto-indutâncias e indutâncias mútuas. Pelo princípio de superposição podemos escrever esta relação na forma matricial como:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}}$$





Observações:

1)As auto-indutâncias (que nomearemos apenas como *indutâncias* a partir deste ponto) são constantes reais **positivas diferente de zero**;

2)A indutância mútua pode assumir qualquer valor real (menor, maior ou igual a zero);

3)Ambas dependem apenas de fatores geométricos

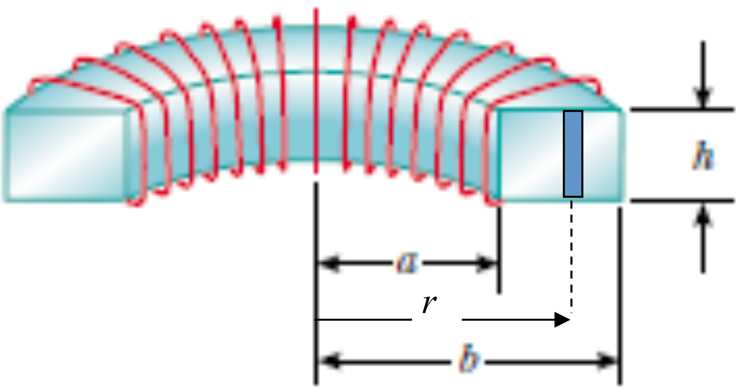
Indutância de um toroide

Vimos que o campo magnético no interior de um toroide é:

$$B = \frac{N\mu_0 i}{2\pi r}$$

$$\phi_B = \int \vec{B}.\hat{n}\,dA = \int Bh\,dr = \int_a^b \frac{\mu_0 iNh\,dr}{2\pi r} =$$

$$= \frac{\mu_0 iNh}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



Então:

$$L = \frac{N\phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

fem induzida em indutores

Consideremos uma bobina de N voltas, chamada de *indutor*, percorrida por uma corrente i que produz um fluxo magnético ϕ_B através de todas as espiras da bobina. Se $i = i(t)$, pela lei de Faraday aparecerá nela uma *fem* dada por:

$$\varepsilon_L = -\frac{d(N\phi_B)}{dt} \qquad (N\phi_B = \text{fluxo concatenado})$$

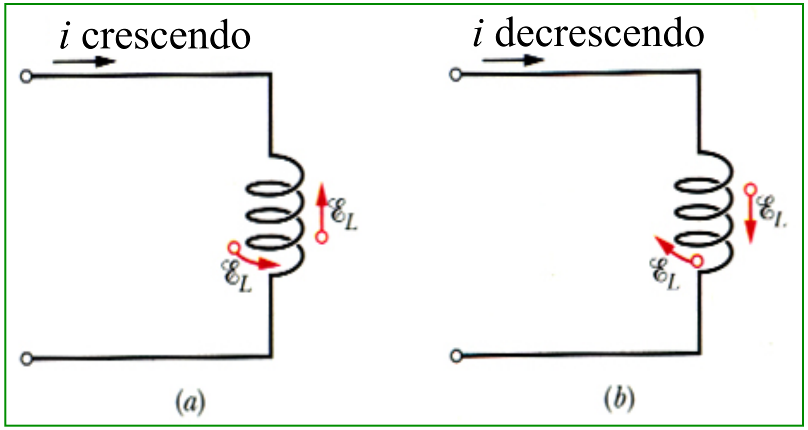
Na ausência de materiais magnéticos, $N\phi_B$ é proporcional à corrente:

$$N\phi_B = Li \quad \text{ou:} \quad \boxed{L = \frac{N\phi_B}{i}} \qquad (L\text{: auto-indutância})$$

Então:

$$\varepsilon_L = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

(*fem* auto-induzida)

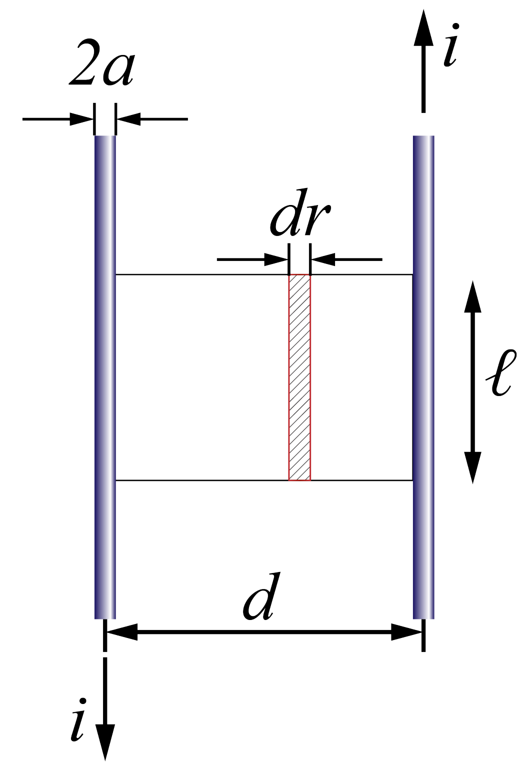


O sentido de ε_L é dado pela lei de Lenz: ela deve se *opor* à *variação* da corrente que a originou (figura).

Exemplo 01

Dois cilindros maciços paralelos de mesmo comprimento *l* e raio *a* transportam correntes iguais em sentidos opostos. Sabendo-se que a distância entre os eixos dos cilindros é *d*, mostre que a indutância por unidade de comprimento desse sistema é:

$$\frac{L}{l}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$



Despreze o fluxo no interior dos cilindros.

O fluxo produzido pelas ***duas*** corrente na região entre os dois fios é dado por:

$$\phi=\int\vec{B}_T\cdot\hat{n}dA=\int(\vec{B}_D+\vec{B}_E)\cdot\hat{n}dA=\frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_a^{d-a}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{d-r}\right)Ldr$$

$$=\frac{\mu_0 L}{\pi}\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)i \quad\Rightarrow\quad \frac{L}{l}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$

Exemplo 02

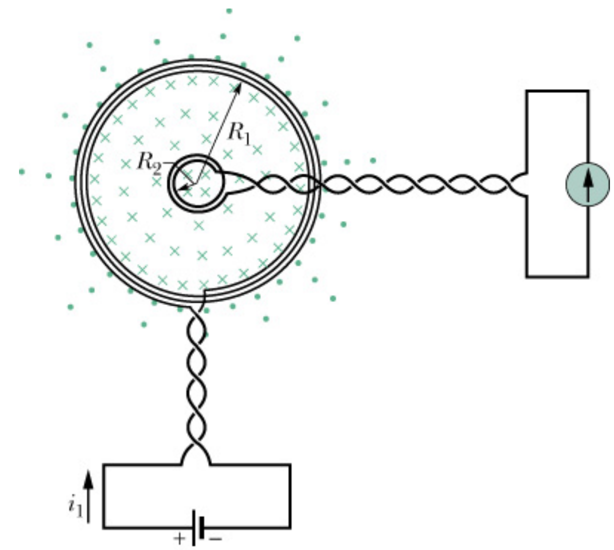
Duas bobinas circulares compactas, a menor delas (raio R_2 e N_2 voltas) sendo coaxial com a maior (raio R_1 e N_1 voltas) e no mesmo plano. Suponha $R_1 >> R_2$.

a) deduzir uma expressão para a indutância mútua deste arranjo ;

b) Qual o valor de M para $N_1 = N_2 = 1200$ voltas, $R_2 = 1{,}1$ cm e $R_1 = 15$ cm?

a) $\boxed{\phi_{21} = B_1 A_2 \rightarrow N_2\phi_{21} = N_2 B_1 A_2}$

$$B_1 = N_1 \frac{\mu_0 i_1}{2R_1} \Longrightarrow N_2\phi_{21} = \frac{\pi\mu_0 N_1 N_2 R_2^{\,2}}{2R_1} i_1$$



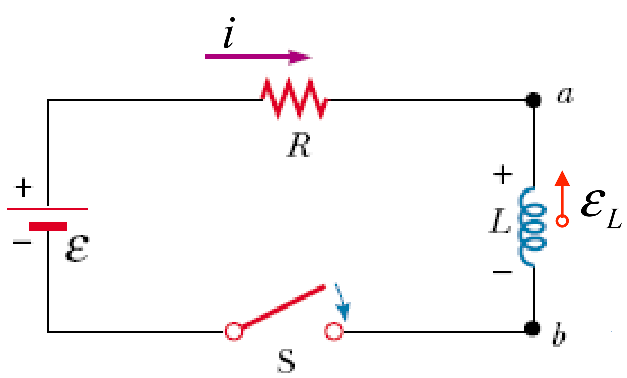
Então:

$$M_{21} = \frac{N_2\phi_{21}}{i_1} = M \Longrightarrow M = \frac{\pi\mu_0 N_1 N_2 R_2^{\,2}}{2R_1}$$

b) $M = \dfrac{\pi(4\pi\times 10^{-7}\,H/m)(1200)(1200)(0{,}011m)^2}{2\times(015m)} = 2{,}29mH$

Circuito RL

Circuitos *RL* são aqueles que contêm *resistores e indutores*. Neles, as correntes e os potenciais variam com o tempo. Apesar das fontes (*fem*) que alimentam estes circuitos serem independentes do tempo, a introdução de indutores provoca efeitos dependentes do tempo. Estes efeitos são úteis para controle do funcionamento de máquinas e motores.



Circuito básico para analisar correntes em um indutor.

a) Fechando-se a chave *S*, no instante $t = 0$, estabelece-se uma corrente crescente no resistor .

$$t=0 \;\Rightarrow\; i(0)=0 \;\rightarrow\; t\neq 0 \;\Rightarrow\; i(t)$$

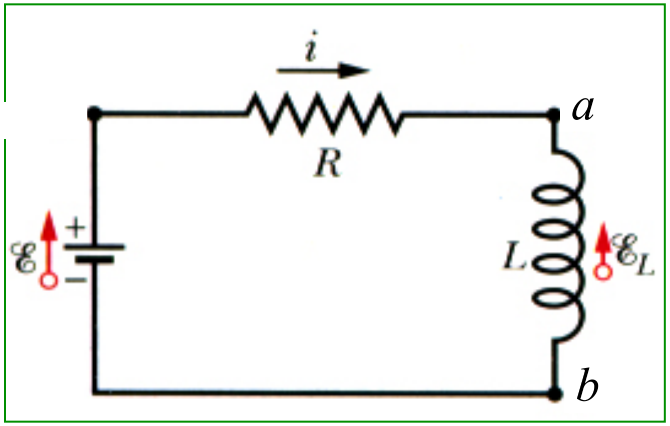
Resolver (estudar) este circuito é encontrar a expressão para a corrente $i(t)$ que satisfaça à equação:

$$\varepsilon - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$$

Circuito RL

A equação anterior fica:

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{\varepsilon}{L}$$



Resolvendo esta equação diferencial para $i(t)$, vamos ter:

ε_L : voltagem no indutor

$$i(t)=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-Rt/L})\ \Rightarrow i(t)=I\,(1-e^{-t/\tau_L}),\quad \text{onde}$$

$$\tau_L=\frac{L}{R}\ \text{ e }\ I=\frac{\varepsilon}{R}$$

(τ_L : constante de tempo *indutiva*)

(I : corrente máxima, assintótica)

Para t muito grande, a corrente atinge um valor máximo constante, como se o indutor fosse um fio de ligação comum.

Circuito RL

Voltagens no resistor e no indutor – figura abaixo

$$V_R = Ri \quad \text{e} \quad V_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{\varepsilon}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \longrightarrow V_L = \varepsilon e^{-Rt/L}$$

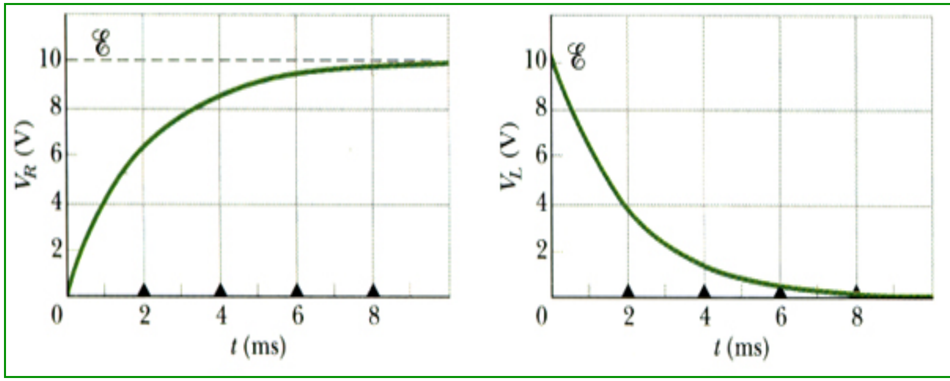
$t=0,\ V_L =$ máximo $\rightarrow$ equivalente a um circuito aberto

$t \gg \tau_L,\ V_L = 0 \rightarrow$ equivalente a um curto–circuito

Interpretação de τ_L:

Para $t = \tau_L = \dfrac{L}{R}$:

$$\begin{cases} i = \dfrac{\varepsilon}{R}(1-e^{-1}) = 0{,}63\dfrac{\varepsilon}{R} \\ V_L = \varepsilon e^{-1} = 0{,}37\varepsilon \end{cases}$$



Circuito RL

b) Fechando-se a chave S_2: neste caso, a equação das quedas de potencial será:

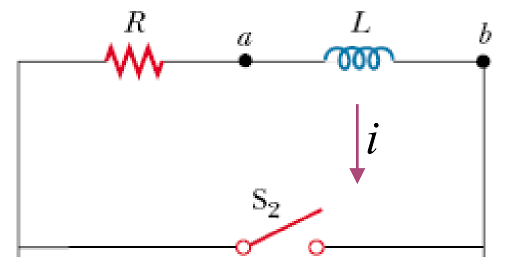
$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

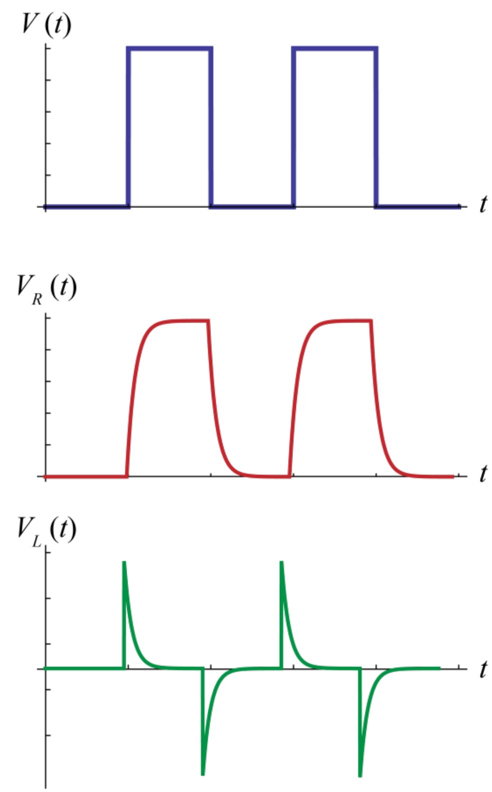
A solução desta equação é:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-Rt/L} = I_0 e^{-t/\tau_L}$$

Variações das voltagens com o tempo:

Ao lado, temos gráficos das tensões Em V_L, V_R e $V_R + V_L = \varepsilon$ para várias situações a) e b).





Energia armazenada no campo magnético

Do circuito abaixo tem-se:

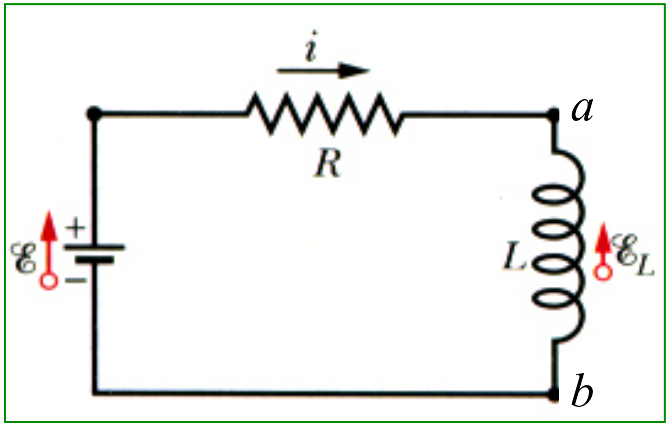
$$\varepsilon = Ri + L\frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad \varepsilon i = Ri^2 + Li\frac{di}{dt}$$

Os termos εi, Ri^2 e $Lidi/dt$ são, respectivamente, a potência fornecida pela bateria, a potência dissipada no resistor e a taxa com que a energia U_B é armazenada no campo magnético do indutor, isto é:

$$\frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt} \rightarrow dU_B = Lidi$$

$$\int_0^{U_B} dU_B = \int_0^{i} Lidi$$

$$\boxed{U_B = \frac{1}{2}Li^2}$$



Densidade de energia do campo magnético

É a energia por unidade de volume armazenada em um ponto qualquer do campo magnético. Consideremos o campo magnético de um solenoide longo de comprimento l e seção transversal A, transportando uma corrente i.

A densidade de energia será dada por:

$$u_B = \frac{U_B}{Al} = \frac{1}{2}\frac{Li^2}{Al}$$

Como $L = \mu_0 n^2 l A \rightarrow u_B = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 i^2$

Lembrando que $B = \mu_0 i n$ resulta que:

$$\boxed{u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$ (densidade de energia magnética)

Indutância mútua

Fluxos conectados: variação de fluxo da bobina 1 produz uma *fem* na bobina 2 e vice-versa.

Indução mútua $\boxed{L_{21} \rightarrow M_{21}}$ $\boxed{M_{21} = \dfrac{N_2 \phi_{21}}{i_1}}$

$$\boxed{M_{21} i_1 = N_2 \phi_{21} \quad ou \quad N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}}$$

A *fem* induzida na bobina 2: $\varepsilon_2 = -M_{21} \dfrac{di_1}{dt}$

A *fem* induzida na bobina 1: $\varepsilon_1 = -M_{12} \dfrac{di_2}{dt}$

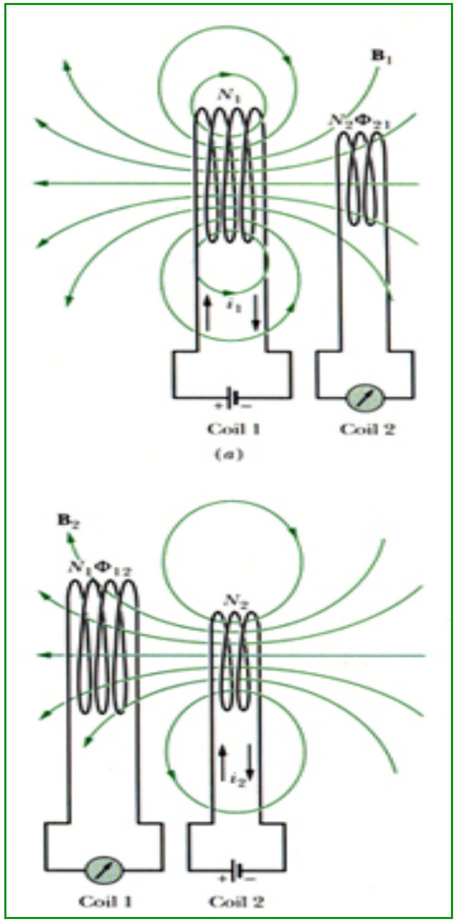
Pode-se provar que:

$$\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$$

A indução é de fato mútua

$$\varepsilon_1 = -M \frac{di_2}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -M \frac{di_1}{dt}$$



Lista de exercícios do Capítulo 30

Os exercícios sobre Lei de Faraday estão na página da disciplina : (http://www.ifi.unicamp.br).
Consultar: Graduação → Disciplinas → F 328-Física Geral III

Aulas gravadas:
http://lampiao.ic.unicamp.br/weblectures (Prof. Roversi)
ou
UnivespTV e Youtube (Prof. Luiz Marco Brescansin)