Universidade Federal do Espírito Santo

Lista de exercícios de Álgebra Linear - MAT09592

Questões do livro texto:
Seção 4.1: $5-8, 21$
Seção 4.2: $1, 5, 7, 25, 26, 31$
Seção 4.3: $1-8, 21, 22, 29, 30, 32, 33$
Seção 4.4: $3, 7, 11, 13, 15, 19, 27, 29$
Seção 4.5: $5, 6, 9, 19, 26, 27, 29$
Seção 4.7: $1, 2, 5, 6, 7, 11, 13, 19$
Seção 5.4: $1, 3, 5, 9$

Mais exercícios:

Questão 1: Mostre que se α é um conjunto gerador de um espaço vetorial V e que se β é um conjunto que contém α, então β é um conjunto gerador de V.

Questão 2: Mostre que $\beta = \{1, 2+x, 3x-x^2, x-x^3\}$ é uma base de $\mathscr{P}_3$. Encontre $[1+x+x^2+x^3]_\beta$.

Questão 3: Sejam V um espaço vetorial e W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de V. Mostre que $W_1 + W_2 := \{\overrightarrow{w}_1 + \overrightarrow{w}_2; \overrightarrow{w}_1 \in W_1 \text{ e } \overrightarrow{w}_2 \in W_2\}$ e $W_1 \cap W_2$ são subespaços vetoriais de V. Mostre que em geral $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço de V.

Questão 4: Sejam V um espaço vetorial e W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de V, ambos de dimensão finita. Então

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Questão 5: Sejam V um espaço vetorial e W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de V, ambos de dimensão finita, com $W_1 \cap W_2 = \{\overrightarrow{0}\}$. Mostre que se β_1 e β_2 são conjuntos LI em W_1 e W_2, respectivamente, então $\beta_1 \cup \beta_2$ é LI em V. Além disso, se β_1 e β_2 bases de W_1 e W_2, respectivamente, então $\beta_1 \cup \beta_2$ é base de $W_1 + W_2$.

Questão 6: Encontre uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém os vetores $\overrightarrow{u} = (1, 2, -2, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 0, -2, 2)$.

Questão 7: Considere o subespaço vetorial $W \subset \mathscr{P}_4$ gerado pelo conjunto $\beta = \{1 + 2x + x^2 + 3x^3 + x^4, 1 - 2x - 2x^2 - 2x^3 - 3x^4, 2 - x^2 + x^3 - 2x^4, x - x^3 + x^4, 3x^2 + 6x^3 + 3x^4\}$. Determine uma base β de W que esteja contida em β.

Questão 8: Mostre que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathscr{P}_2$, dada por $T(a, b) = at^2 + bt + (a + b)$, é uma transformação linear.

Questão 9: Sejam $T : U \to U$ um operador linear. Prove que $T^2 = 0$ se, e somente se, $\operatorname{Im} T \subset \operatorname{Nuc} T$.

Questão 10: Considere em $\mathbb{R}^4$ os subespaços $V = \mathscr{L}\{(1, 0, 1, 1), (0, -1, -1, -1)\}$ e $W = \{(x, y, z, t); x + y = 0 \text{ e } t + z = 0\}$. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Nuc} T = V$ e $\operatorname{Im} T = W$.

Questão 11: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. Mostre que se n é impar, não existe transformação linear $T : V \to V$ tal que $\operatorname{Im} T = \operatorname{Nuc} T$. Além disso, mostre que a afirmação anterior é falsa se n é par.

Questão 12: Mostre que $T : U \to V$ é injetora se, e somente se, T leva cada subconjunto LI de U em um subconjunto LI de V.

Questão 13: Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Mostre que são equivalentes:

(a) $\operatorname{Im} T \cap \operatorname{Nuc} T = \{\overrightarrow{0}\}$.

(b) Se $(T \circ T)(\overrightarrow{v}) = 0$ para $\overrightarrow{v} \in V$, então $T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$.

Questão 14: Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Mostre que V possui um subespaço vetorial isomorfo a U.

Questão 15: Sejam $T : U \to U$ e $S : U \to U$ dois operadores lineares não nulos tais que $T \circ S = 0$. Mostre que existem vetores não nulos $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{v}$ tais que $T(\overrightarrow{u}) = T(\overrightarrow{v})$.

Mais alguns exercícios:

1. Calcule o determinante da matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & 6 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
usando escalonamento.

2. Seja $W = \{(x, y, z, s, r) \in \mathbb{R}^5; x - y + s - r = 0\}$ subespaço vetorial.
   (a) Determine $\dim W$.
   (b) Encontre uma base de W que contenha os vetores $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1, 1, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 1, 0, 1, 1)$.

3. O vetor $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ foi escrito como combinação linear de $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$, $\overrightarrow{v}_3$ obtendo-se
$$\overrightarrow{v} = (y + z)\overrightarrow{v}_1 + (x - y + z)\overrightarrow{v}_2 + (x - 2y + z)\overrightarrow{v}_3.$$
Seja T uma transformação linear tal que $T(\overrightarrow{v}_1) = \overrightarrow{v}_1$, $T(\overrightarrow{v}_2) = \overrightarrow{v}_2$ e $T(\overrightarrow{v}_3) = \overrightarrow{0}$.
   (a) Mostre que $\beta = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ é base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Encontre $[T]_\beta$ e $[T]_\epsilon$, onde ϵ é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

4. Use determinantes para decidir se os vetores
$$\{\mathbf{v}_1 = (3, 5, -6, 4);\ \mathbf{v}_2 = (2, -6, 0, 7);\ \mathbf{v}_3 = (-2, -1, 3, 0);\ \mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, -3)\}$$
são linearmente independentes.

5. Sejam $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 2, 3, 1), \mathbf{v}_2 = (3, -2, 3, 4, -1), \mathbf{v}_3 = (2, -8, 7, 11, 6), \mathbf{v}_4 = (-9, 2, -9, -2, 3)$ e $W = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ um subespaço do $\mathbb{R}^5$.

   (a) Encontre uma base β para W tal que $\mathbf{v}_3 \in \beta$.

   (b) Encontre um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5$ tal que $\mathbf{v} \notin W$.

   (c) O conjunto $\beta \cup \{\mathbf{v}\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^5$?

6. Considere as bases $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ e $\beta' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, onde

$$\mathbf{v}_1 = (-3, 0, -3), \mathbf{v}_2 = (-3, 2, -1), \mathbf{v}_3 = (1, 6, -1)$$

   e

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 4), \mathbf{u}_2 = (1, 0, -3), \mathbf{u}_3 = (2, 3, 8)$$

   (a) Encontre a matriz de mudança de base de β para β'.

   (b) Calcule as coordenadas $[\mathbf{w}]_\beta$, onde $\mathbf{w} = (-5, 8, -5)$ e use o item a) para obter $[\mathbf{w}]_{\beta'}$.