INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS FLUIDOS

INTRODUÇÃO À ANÁLISE DIFERENCIAL DOS MOVIMENTOS DOS FLUIDOS

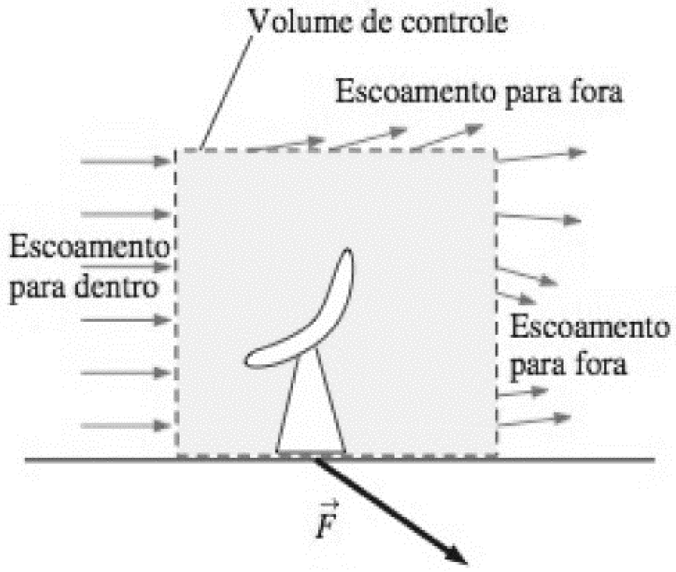
Professor Bruno Furieri

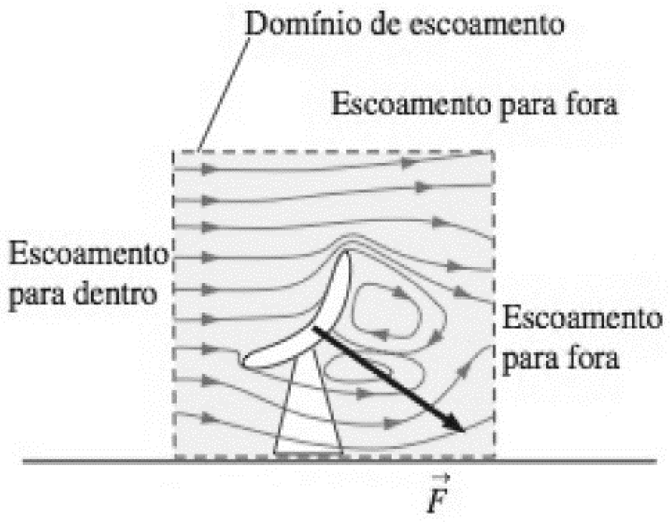
INTRODUÇÃO

ANÁLISE INTEGRAL ✕ **ANÁLISE DIFERENCIAL**

Características gerais de um escoamento

Sem características detalhadas

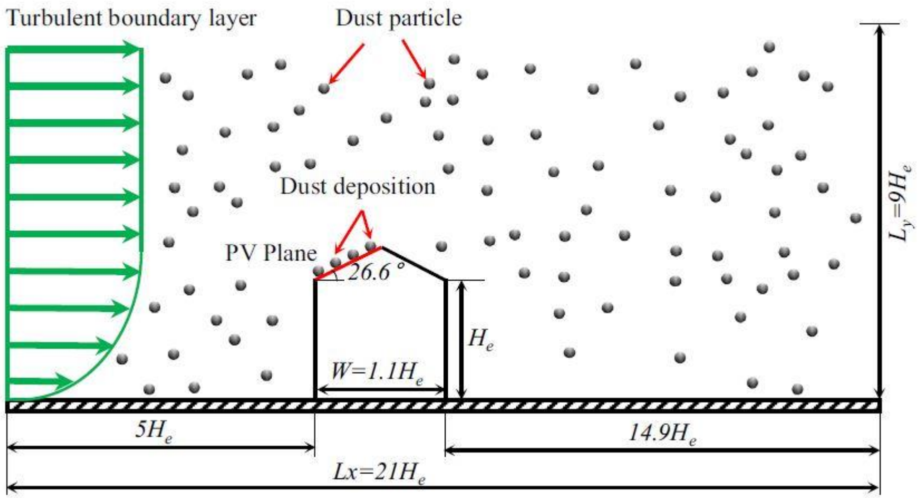


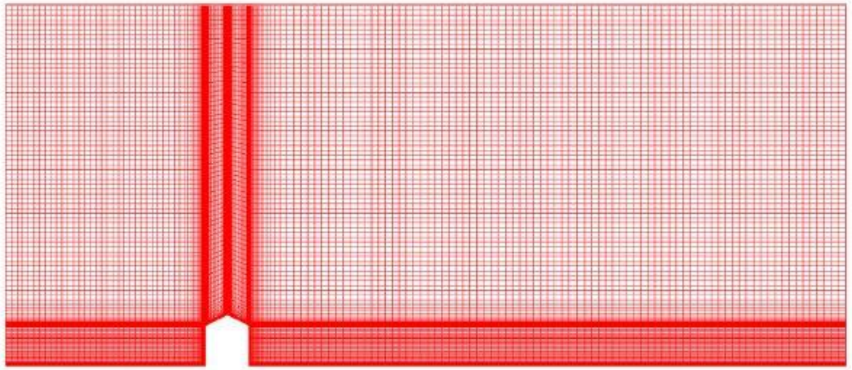


(ÇENGEL E CIMBALA, 2015)

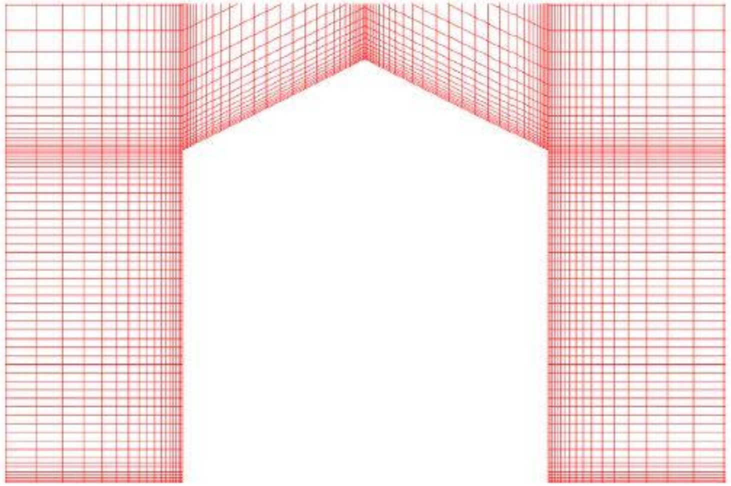
Aplicação de equações diferenciais em todos os pontos no campo de escoamento sobre o domínio de escoamento

INTRODUÇÃO





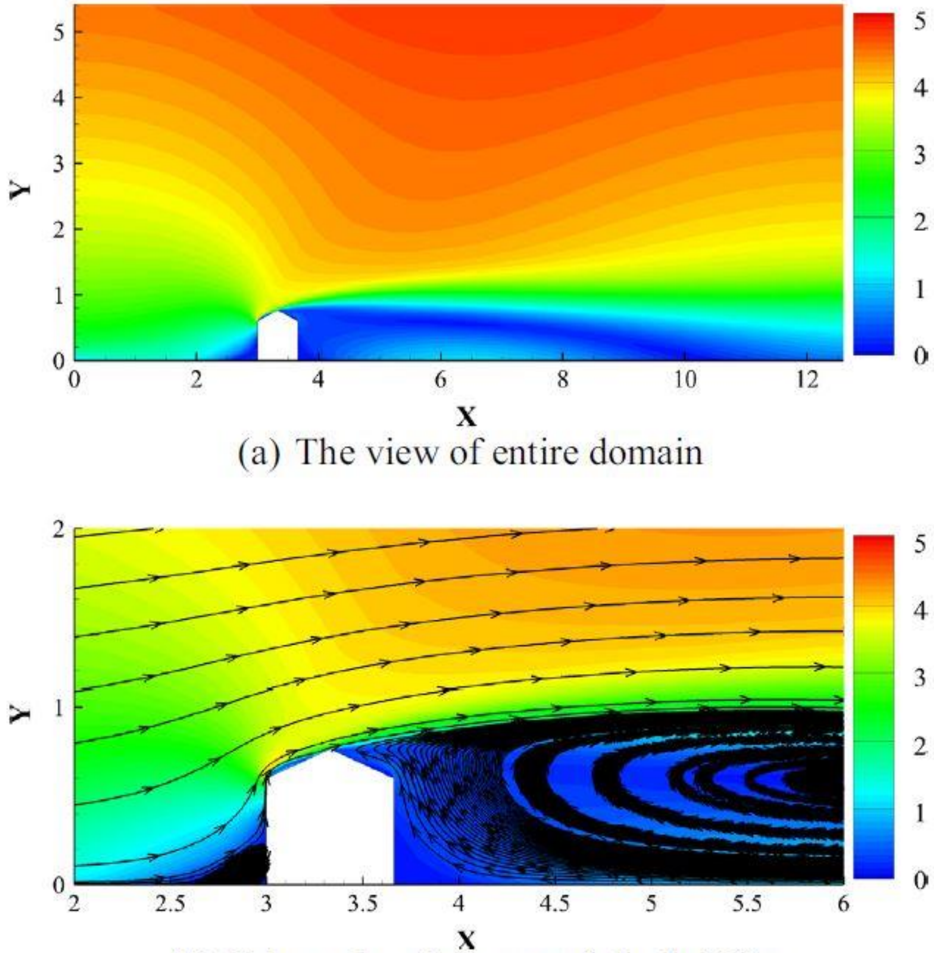
(a) Computational grids for the entire domain



(b) Enlarged view of grids around the building

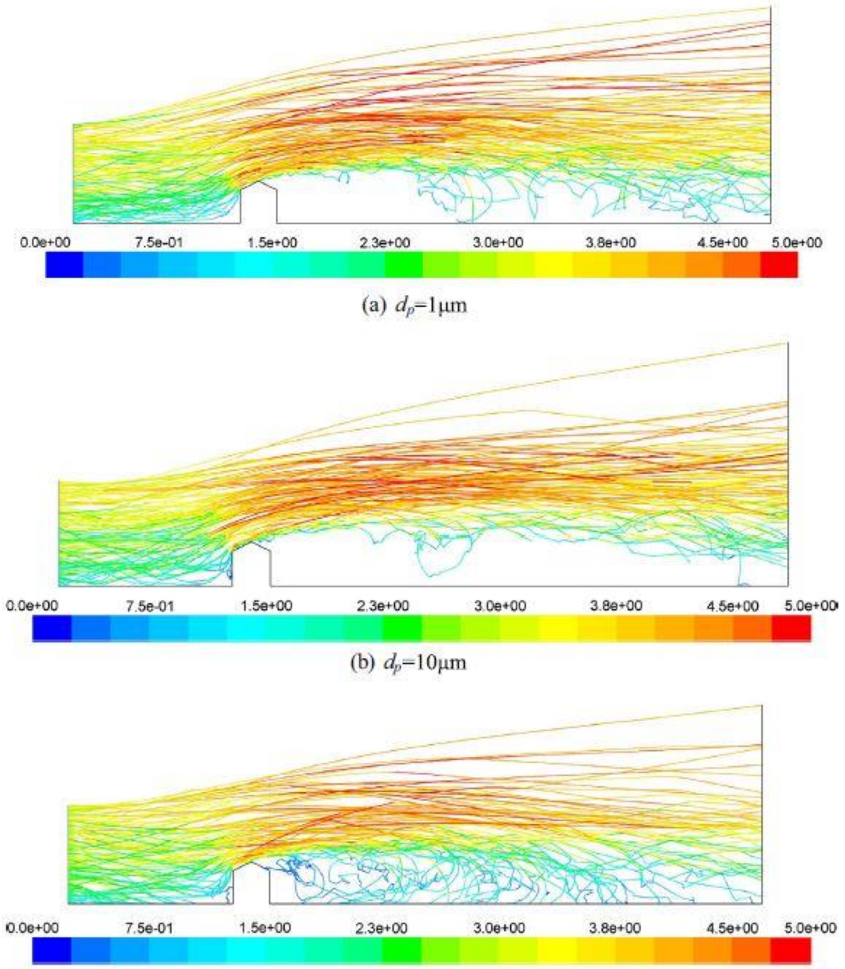
Volume de controle diferencial

INTRODUÇÃO



(a) The view of entire domain

(b) Enlarged review around the building

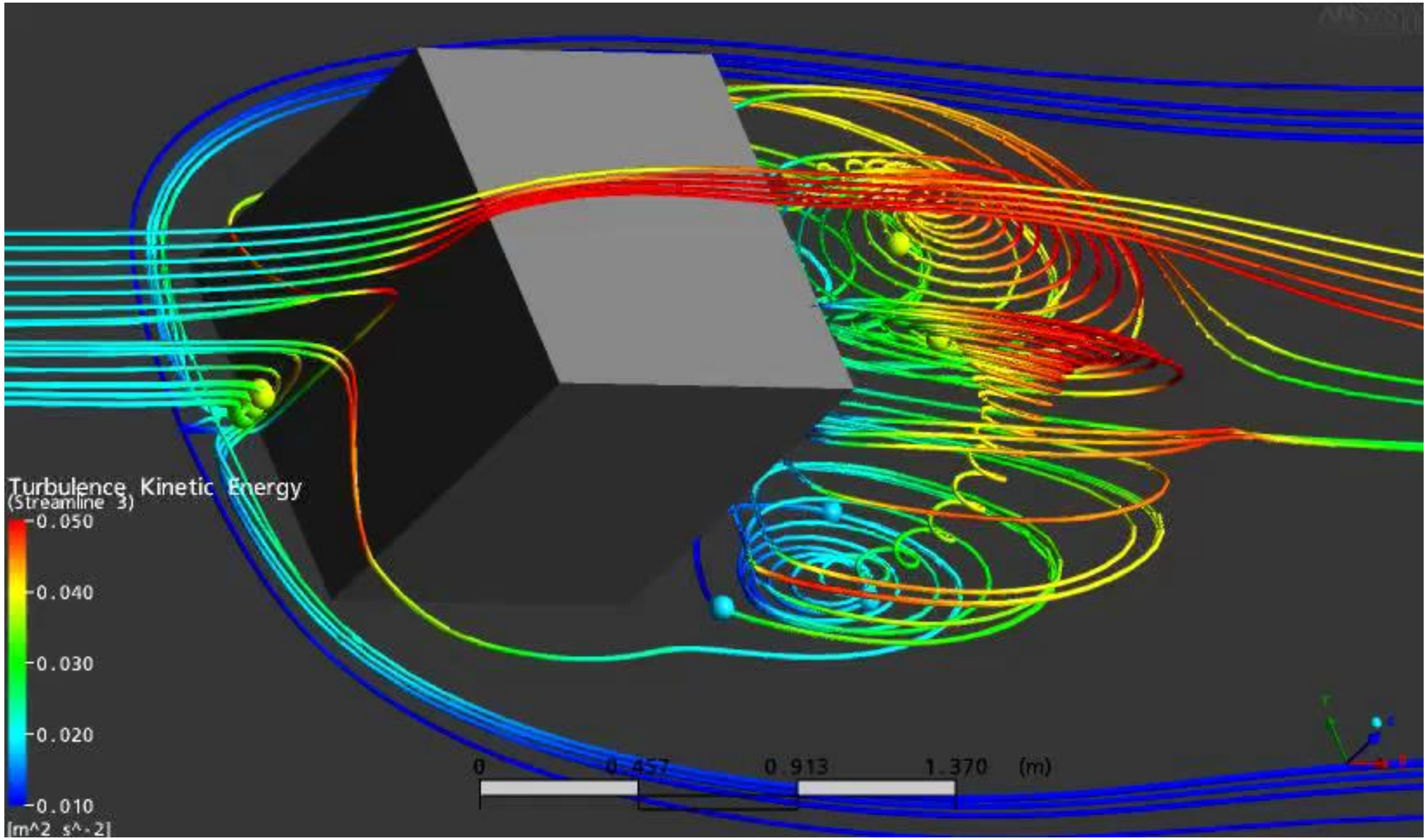


(a) d_p=1μm

(b) d_p=10μm

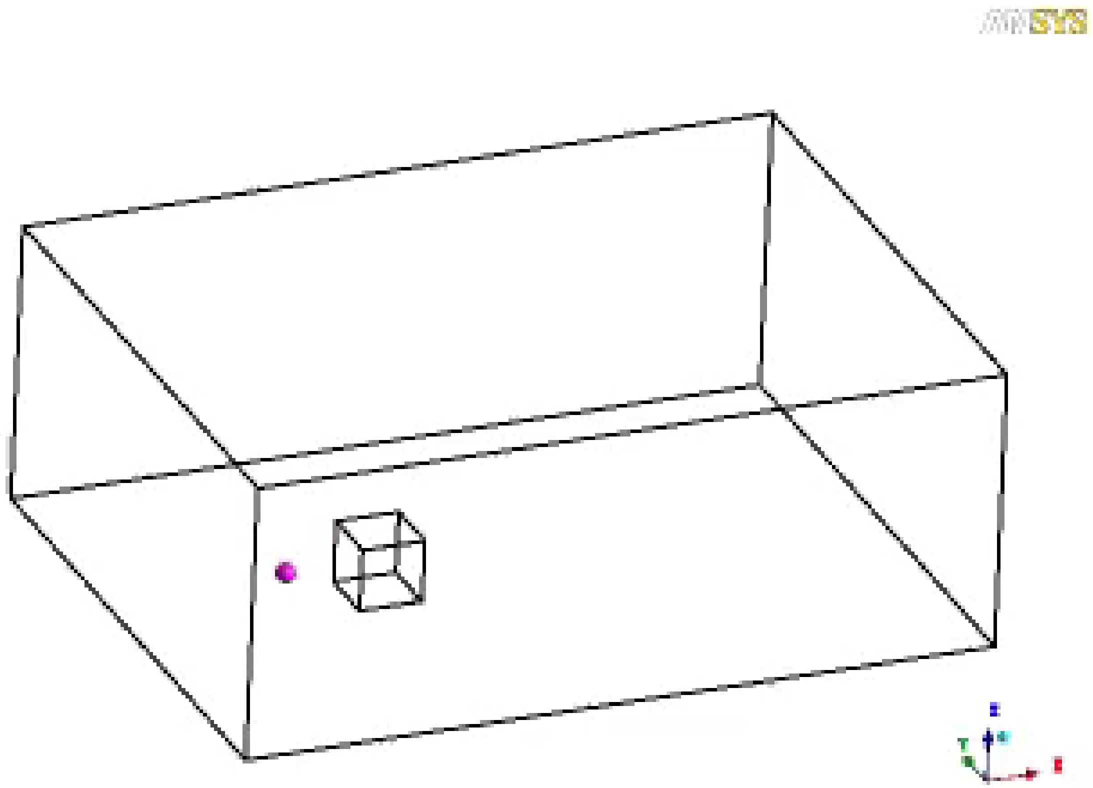
(c) d_p=50μm

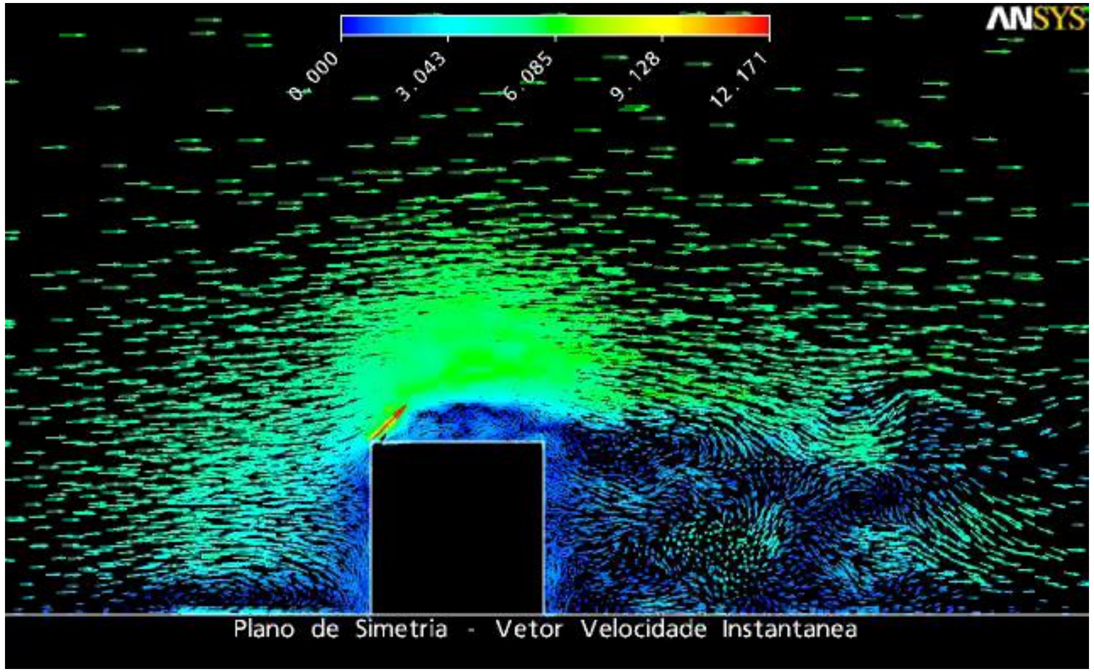
INTRODUÇÃO



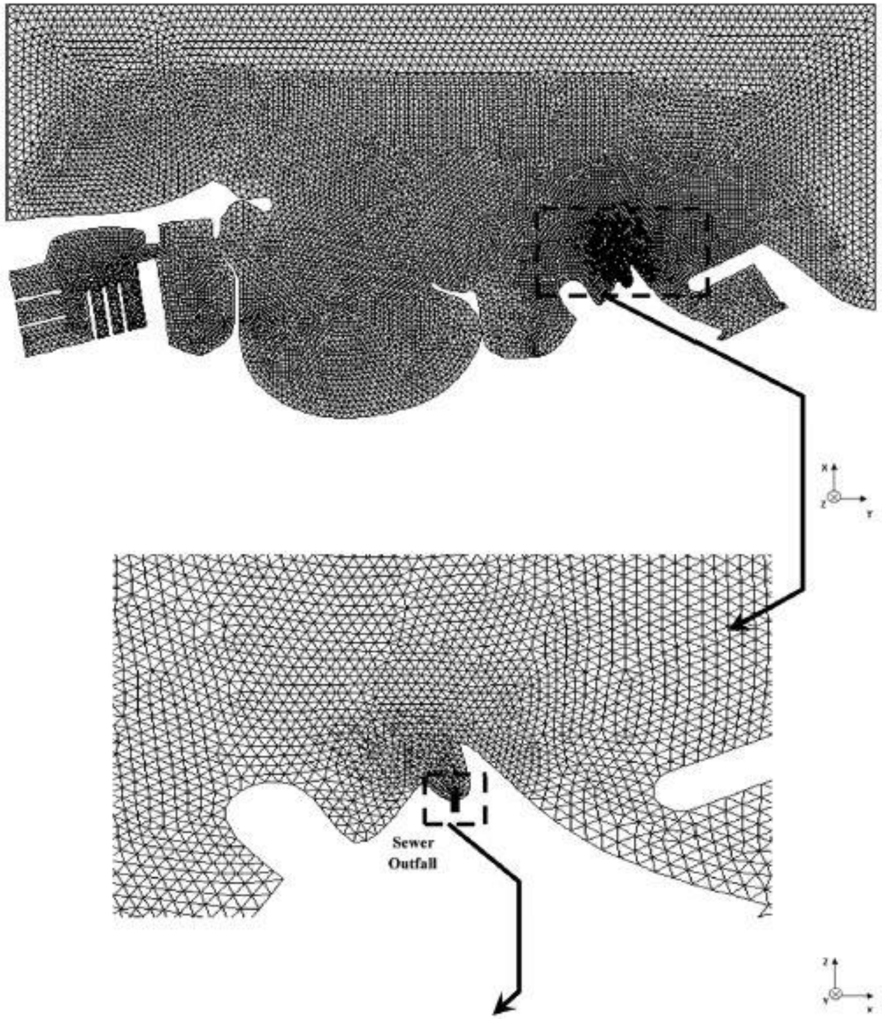
Linhas de trajetória

INTRODUÇÃO

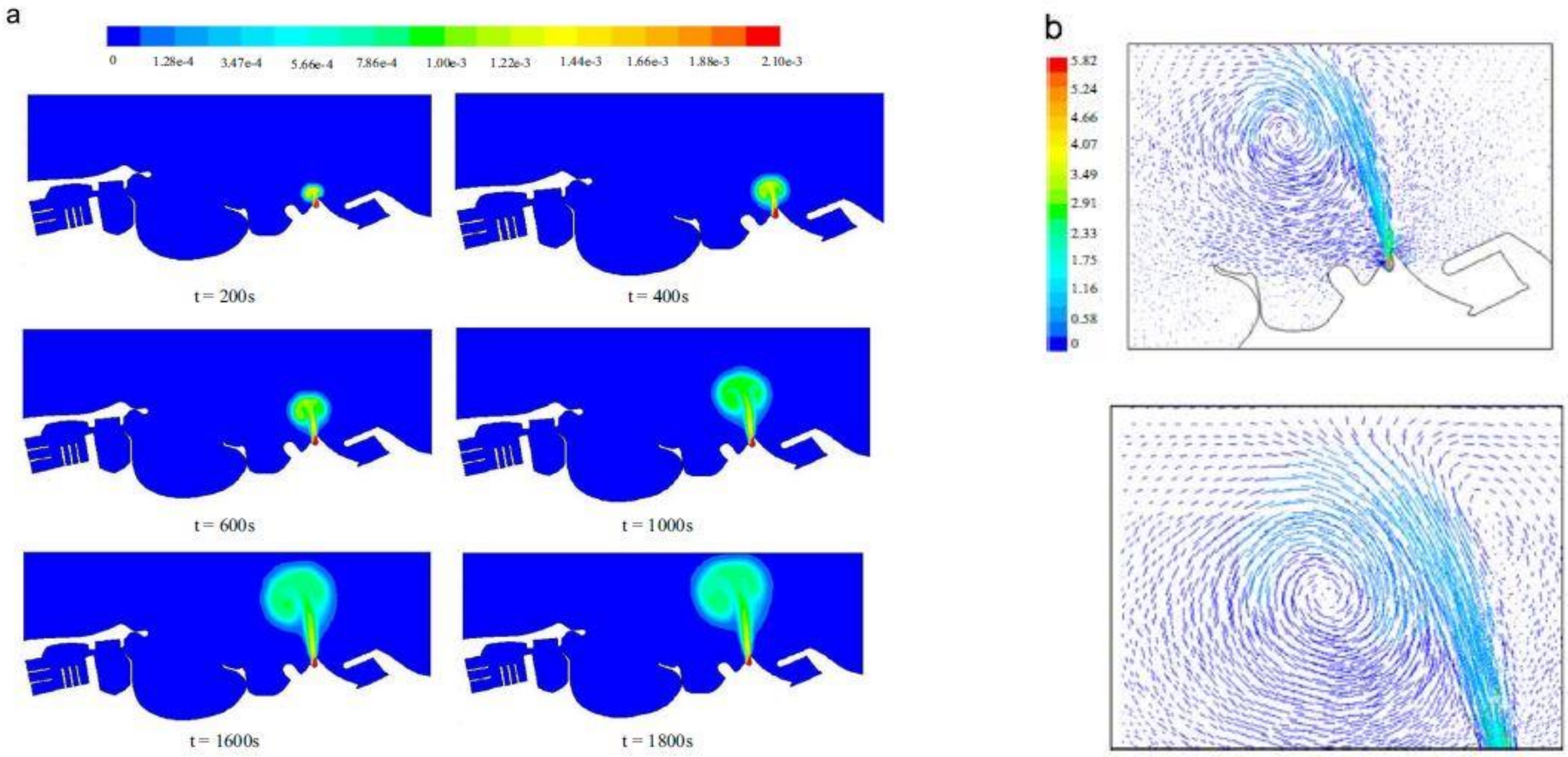

ANSYS


ANSYS
0.000
3.043
6.085
9.128
12.171
Plano de Simetria - Vetor Velocidade Instantanea

INTRODUÇÃO

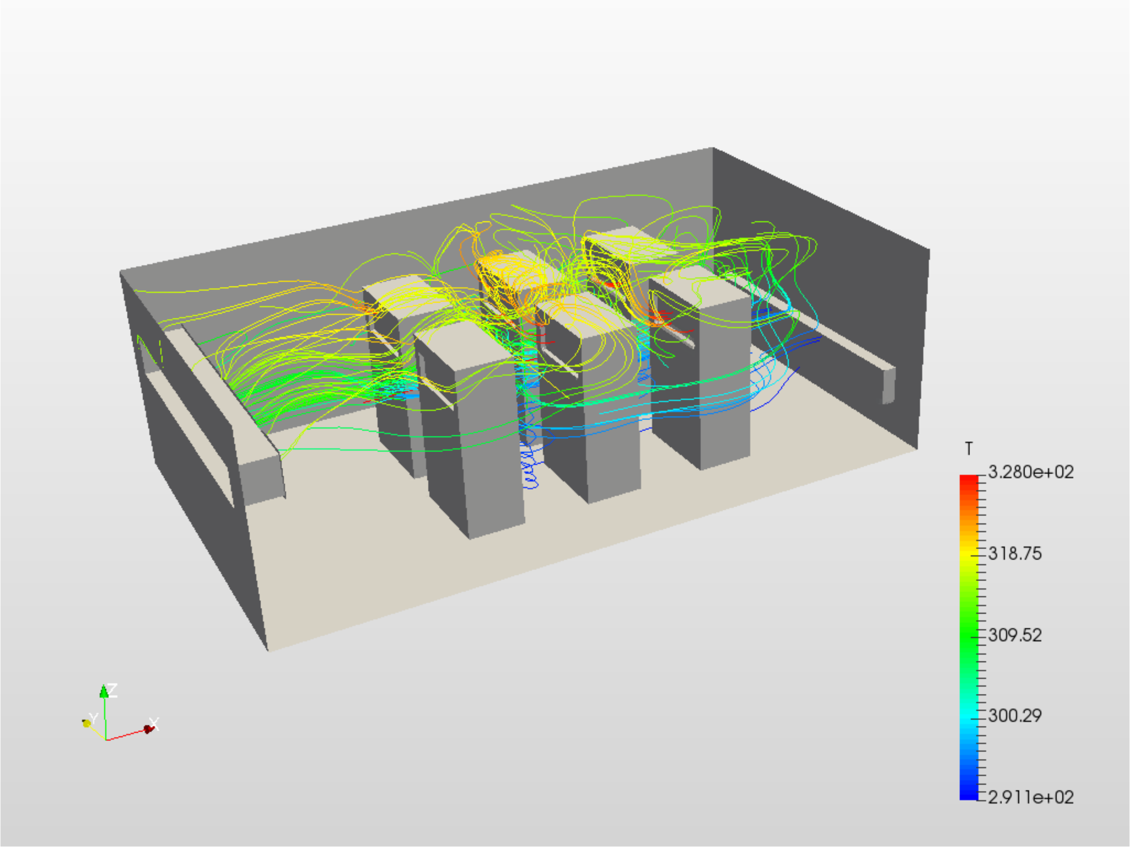


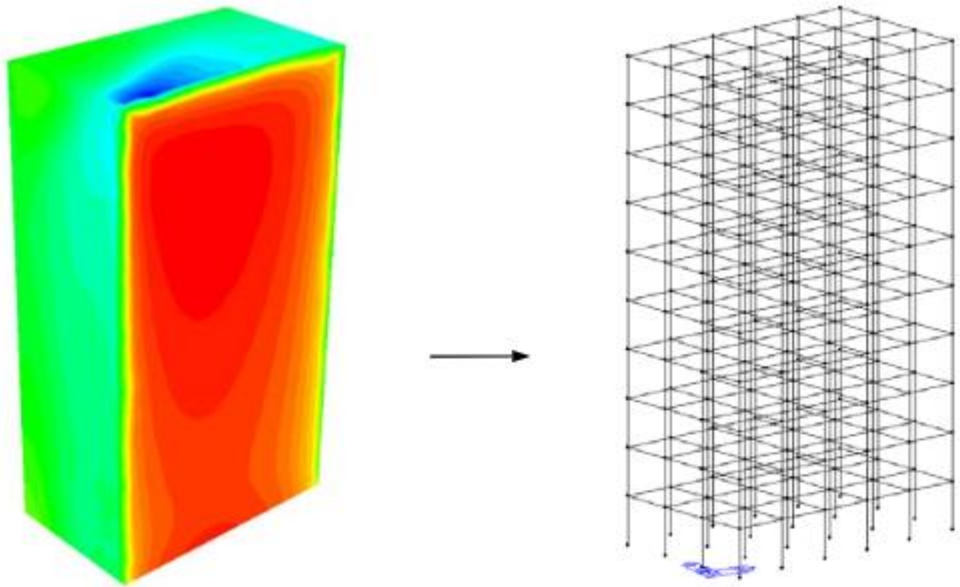
INTRODUÇÃO



a
0
1.28e-4
3.47e-4
5.66e-4
7.86e-4
1.00e-3
1.22e-3
1.44e-3
1.66e-3
1.88e-3
2.10e-3
t= 200s
t= 400s
t= 600s
t = 1000s
t= 1600s
t = 1800s
b
5.82
5.24
4.66
4.07
3.49
2.91
2.33
1.75
1.16
0.58
0

INTRODUÇÃO



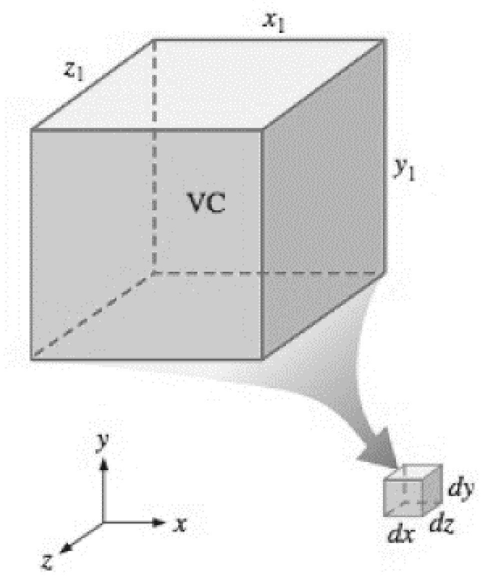


(a) mean static pressure (CFD) (b) structural analysis model (FEM)

CONSERVAÇÃO DA MASSA

Para gerar uma equação diferencial para conservação da massa, imagina-se o volume de controle encolhendo até um tamanho infinitesimal.

Em coordenadas retangulares, o volume de controle é um elemento infinitesimal com lados de comprimento *dx*, *dy*, *dz*



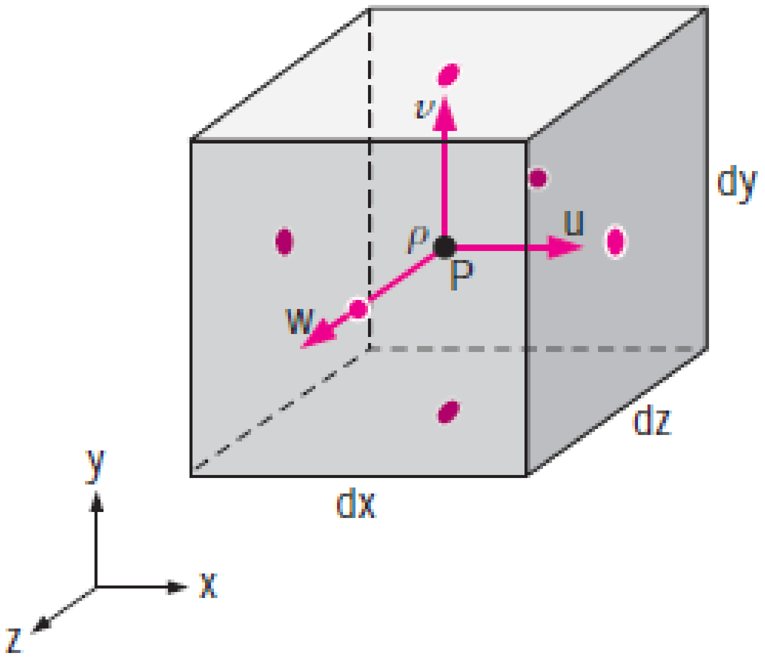
Fonte: ÇENGEL E CIMBALA, 2015.

Considerando a massa específica no centro, O, do volume de controle como ρ e a velocidade como

$$\vec{V} = u\hat{\imath} + v\hat{\jmath} + w\hat{k}$$

(ÇENGEL E CIMBALA, 2015)

CONSERVAÇÃO DA MASSA



O centro da face direita da caixa está localizado a uma distância $dx/2$ do meio da caixa na direção x, o valor de ρ e de u naquele ponto é:

$$\rho u)_{x+\,dx/2} = \rho u + \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}$$

Os termos correspondentes na face esquerda são:

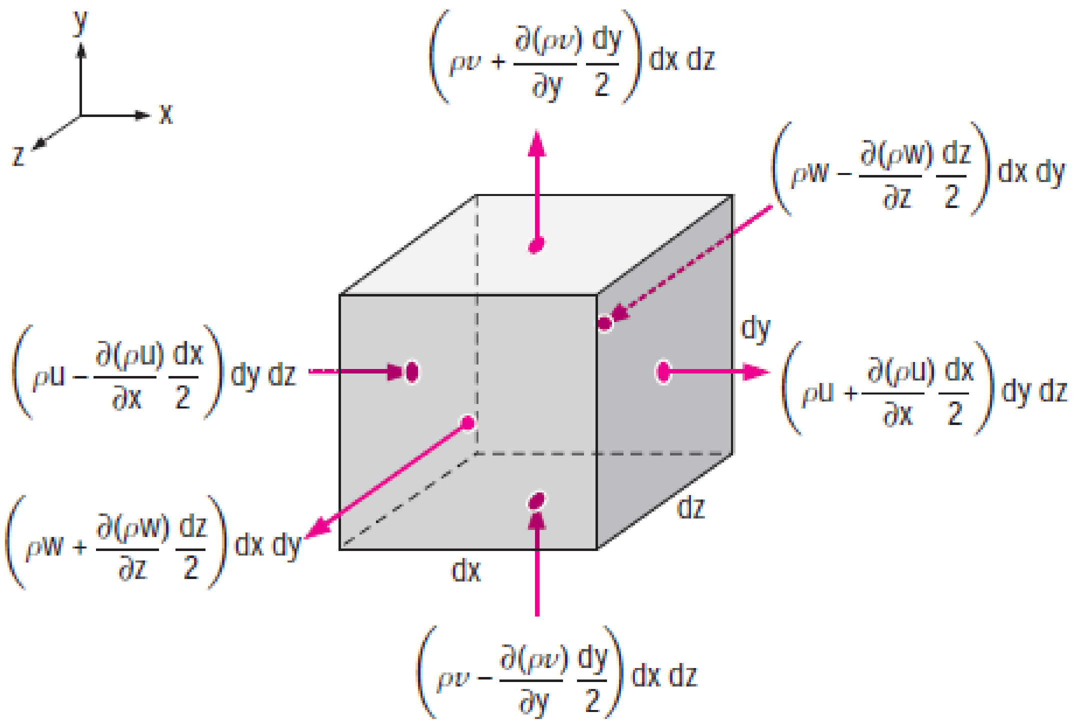
$$\rho u)_{x-\,dx/2} = \rho u - \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}$$

*Refazer o procedimento para as faces frontal/traseira e superior/inferior

CONSERVAÇÃO DA MASSA

Pode-se escrever expressões similares envolvendo ρ e v para as faces da frente e de trás e ρ e w para as faces de cima e de baixo do cubo infinitesimal $dx\ dy\ dz$.

(FOX et al., 2011)



Balanço de massa

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = \sum_{in} \dot{m} - \sum_{out} \dot{m}$$

$$\boxed{\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \cong \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz}$$

*Como explicar a aproximação acima?

CONSERVAÇÃO DA MASSA

Dedução utilizando o Teorema do Divergente de Gauss: transforma a integral de volume em uma integral de área

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G}\, dV = \oint_A \vec{G} \cdot \vec{n}\, dA$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial w}\right] dx\, dy\, dz$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho dV \cong \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho dV = -\int_{SC} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\, \cancel{dx\, dy\, dz} = -\left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial w}\right] \cancel{dx\, dy\, dz}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial w} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Uma forma diferencial da lei da conservação da massa

(FOX et al., 2011)

CONSERVAÇÃO DA MASSA

O operador vetorial, $\vec{\nabla}$, em coordenadas retangulares, é dado por

$$\vec{\nabla} = \hat{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

*Como é escrito o operador vetorial do gradiente em coordenadas cilíndricas?

Então

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial w} = \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v}$$

A conservação da massa também pode ser escrita como

$$\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

*Como se escreve a equação da continuidade na forma de notação indicial?

(FOX et al., 2011)

CONSERVAÇÃO DA MASSA

Dois casos de escoamento para os quais a equação diferencial da continuidade pode ser simplificada devem ser destacados

Para um fluido incompressível, ρ é constante; a massa específica não é função nem das coordenadas espaciais nem do tempo. Então:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial w}=\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0}$$

*Qual a interpretação física do termo ao lado?

Para escoamento permanente, todas as propriedades do fluido são, por definição, independentes do tempo; assim $\partial\rho/\partial t = 0$. Então:

$$\boxed{\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial w}=\vec{\nabla}\cdot\rho\vec{v}=0}$$

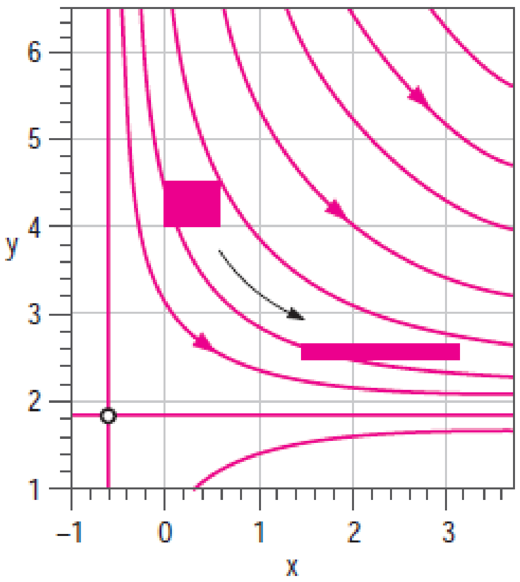
(FOX et al., 2011)

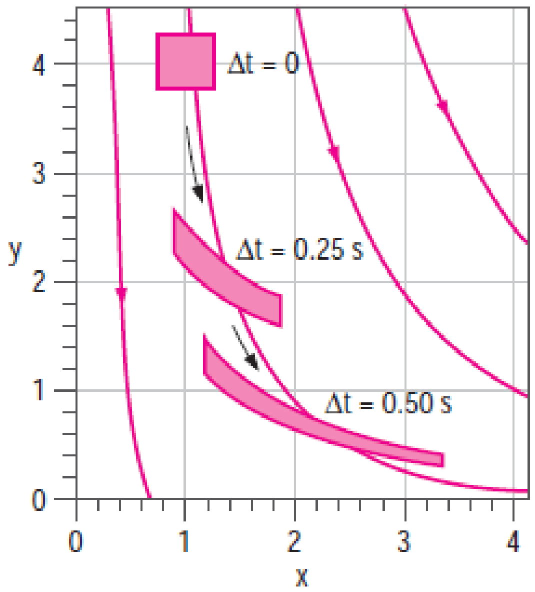
CINEMÁTICA DOS FLUIDOS

Cinemática dos fluidos

Trata da descrição do movimento dos fluidos sem necessariamente considerar as forças e os momentos que causam o movimento.

A figura abaixo mostra um elemento finito de fluido típico identificado no escoamento. O elemento de fluido se deforma com o escoamento.





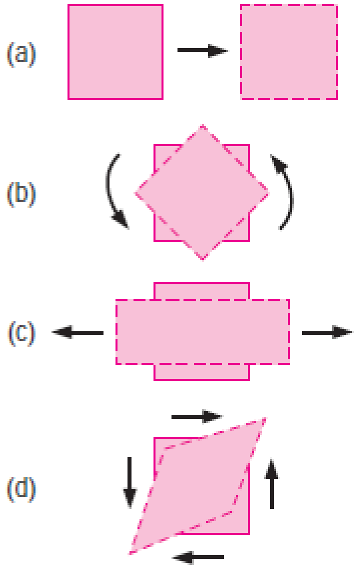
O movimento dessa partícula pode ser decomposto em quatro componentes:

Translação

Deformação linear

Rotação

Deformação angular



(FOX et al., 2011)

*Qual a variável utilizada no estudo da cinemática dos fluidos?

CINEMÁTICA DOS FLUIDOS

Aceleração

Agrupando todas as equações em um vetor, obtém-se a aceleração total.

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(u\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right)$$

Para deixar claro que o cálculo da aceleração de uma partícula fluida num campo de velocidade requer uma derivada especial, ela recebe o símbolo $D\vec{v}/Dt$.

A derivada $D\vec{v}/Dt$ é comumente chamada de derivada substancial ou derivada material para enfatizar que é calculada para uma partícula de "substância"

O termo $\partial\vec{v}/\partial t$ é chamado de aceleração local e desaparece se o escoamento for permanente.

Os três termos entre parênteses são chamados de aceleração convectiva, que aparece quando a partícula se desloca por regiões com velocidade variável no espaço.

(FOX et al., 2011; WHITE, 2011)

*Deduza a expressão da aceleração total utilizando o conceito da regra da cadeia...

CINEMÁTICA DOS FLUIDOS

Aceleração

Para um escoamento bidimensional, $\vec{v} = \vec{v}(x, y, t)$, a equação da aceleração reduz-se a

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Para um escoamento unidimensional, $\vec{v} = \vec{v}(x, t)$, a equação da aceleração reduz-se a

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Para um escoamento permanente em três dimensões, a equação da aceleração reduz-se a

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = u\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

(FOX et al., 2011)

CINEMÁTICA DOS FLUIDOS

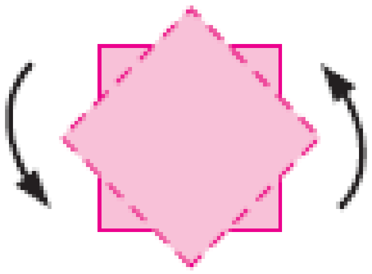
Rotação

A taxa de rotação do elemento de fluido com relação ao ponto *P* da figura é

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha_a + \alpha_b}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Em três dimensões, deve-se definir um vetor para a taxa de rotação em um ponto do escoamento, uma vez que seu valor pode diferir em cada uma das três dimensões. O vetor da taxa de rotação é expresso em coordenadas cartesianas como:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k}\right]$$



O termo entre colchetes é conhecido como rotacional do vetor velocidade, então em notação vetorial pode-se escrever :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{v}$$

(ÇENGEL E CIMBALA, 2015; FOX et al., 2011)

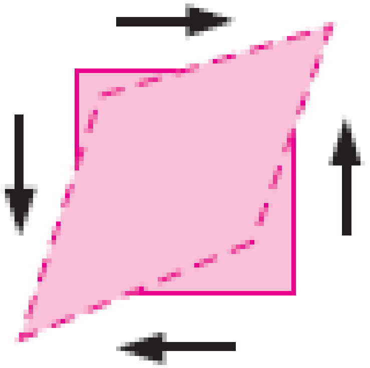
*Deduza a expressão das componentes do vetor vorticidade a partir do rotacional...

CINEMÁTICA DOS FLUIDOS

Deformação

Deformação angular

Essa equação pode ser facilmente estendida para três dimensões. Portanto, a taxa de deformação angular é dada por



$$\boxed{\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)}$$

$$\boxed{\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)}$$

$$\boxed{\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)}$$

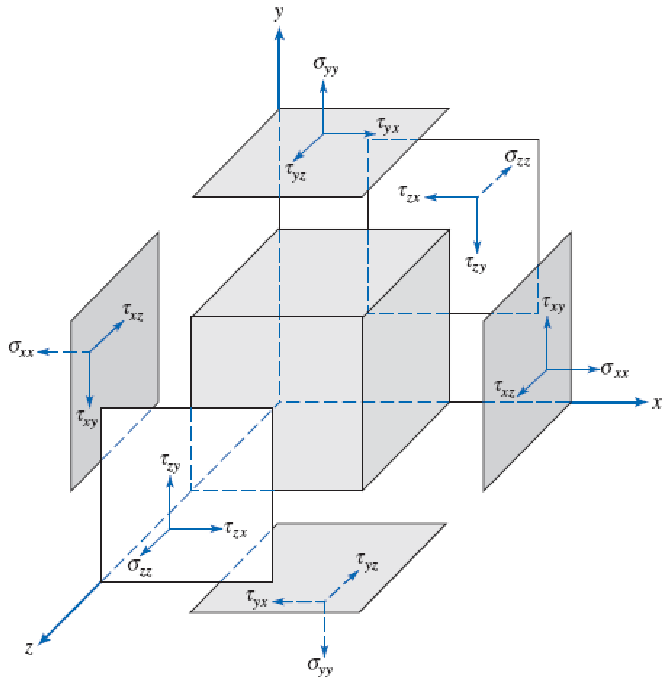


Fig. 2.8 Notation for stress.

(ÇENGEL E CIMBALA, 2015)

*Interprete a diferença existente na formulação da taxa de rotação e da taxa de deformação angular...

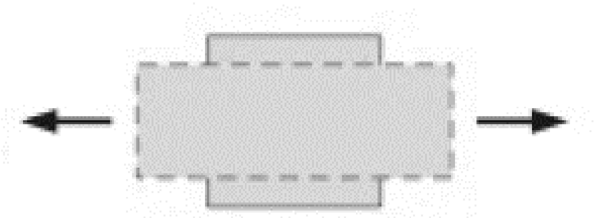
CINEMÁTICA DOS FLUIDOS

Deformação

Deformação linear

Durante uma deformação linear, a forma de um elemento de fluido, descrita pelos ângulos em seus vértices, permanece imutável, visto que todos os ângulos retos continuam retos

O comprimento do elemento variará na direção x somente se $\partial u/\partial x$ for diferente de zero. Analogamente, uma mudança na dimensão y requer um valor diferente de zero para $\partial v/\partial y$, enquanto uma mudança na dimensão z requer um valor diferente de zero para $\partial w/\partial z$.



Fonte: ÇENGEL E CIMBALA, 2015 adaptada.

Essas quantidades representam as componentes das taxas longitudinais de deformação nas direções x, y e z

(FOX et al., 2011)

Deformação linear

Variações no comprimento dos lados podem produzir alterações no volume do elemento. A taxa de dilatação volumétrica local, instantânea é dada por

$$\boxed{Taxa\ de\ dilatação\ de\ volume = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}}$$

Para escoamento incompressível, a taxa de dilatação volumétrica é zero

(FOX et al., 2011)

CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Aplicando-se a **Segunda Lei de Newton** a uma partícula infinitesimal de fluido (massa dm)

forma diferencial da EQM:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}\bigg)_{sistema}$$

A quantidade de movimento P do sistema é dada por:

$$\vec{P}_{sistema} = \int_{massa\ (sistema)} \vec{v}\,dm$$

Então,

$$d\vec{F} = dm\frac{d\vec{v}}{dt}\bigg)_{sistema}$$

Segunda Lei de Newton para um sistema infinitesimal de massa dm

FOX et al., 2011

CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Que pode ainda ser escrita na ***<u>forma vetorial</u>***, quando deduzida para a aceleração de um elemento de fluido com massa dm em movimento em um campo de velocidade:

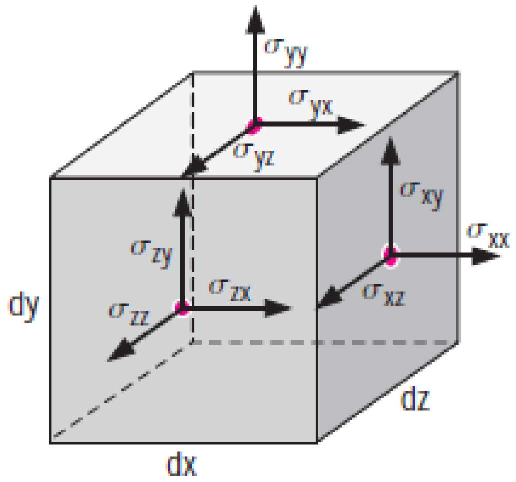
$$d\vec{F} = dm\left[u\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right]$$

Com isso, precisa-se obter a formulação da força $d\vec{F}$ ou suas componentes $d\vec{F}_x, d\vec{F}_y, d\vec{F}_z$ atuando sobre uma partícula fluida

FOX et al., 2011

CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

LEMBRAR QUE:
- ✓ Forças que atuam: de superfície e forças de campo e
- ✓ Componente x da força atua sobre um elemento diferencial de massa dm e volume $dV = dxdydz$



Por exemplo, se as tensões no centro do elemento diferencial forem tomadas como σ_{xx} , τ_{yx} e τ_{zx} então as tensões atuando na direção x em cada face do elemento serão:

$$\boldsymbol{dF_{S_x} = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dydz - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dxdz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right) dxdz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dxdy - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right) dxdy}$$

FOX et al., 2011

*Obtenha a expressão do cálculo das forças de superfície para as direções y e z...

CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Quando a única força atuante no corpo é a gravitacional, a força de corpo por unidade de massa é igual a $\vec{g}$. Então a força resultante da direção x, $d\vec{F}_x$ é dada por:

$$d\vec{F}_x = dF_{B_x} + dF_{S_x} = \left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) dxdydz$$

(direção x)

Expressam a força $d\vec{F}$ atuando sobre um elemento de massa dm

FOX et al., 2011

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO MOVIMENTO DE QUALQUER PARTÍCULA FLUIDA SATISFAZENDO A HIPÓTESE DO CONTÍNUO

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

*Como podem ser denominadas as equações abaixo?

CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A matemática da *dinâmica dos fluidos* é governada pelas **Equações de Navier-Stokes**

Descrevem como as velocidades e as propriedades de um fluido em um campo de escoamento variam no espaço e no tempo

Foram originalmente deduzidas por **Navier**, porém, apenas após **Stokes** reapresentá-las, cerca de um século mais tarde, elas se tornaram uma
ferramenta popular para análise de escoamentos

Após Osborne Reynolds explicar como a turbulência altera um campo de escoamento, houve a confirmação:

AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES REALMENTE GOVERNAM TODOS OS ESCOAMENTOS DE FLUIDOS NEWTONIANOS

POST, 2013

CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

lembrete → **FLUIDO NEWTONIANO:**

a tensão viscosa é diretamente proporcional à taxa de deformação por cisalhamento (taxa de deformação angular).

ANTES – Unidade I :

Escoamento newtoniano, unidimensional e laminar

$$\boxed{\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy}}$$

→

AGORA :

escoamento tridimensional

expressões mais complexas para a taxa de deformação angular

FOX et al., 2011

CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

As tensões podem ser expressas em termos de gradientes de velocidade e de propriedades dos fluidos, em coordenadas retangulares

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

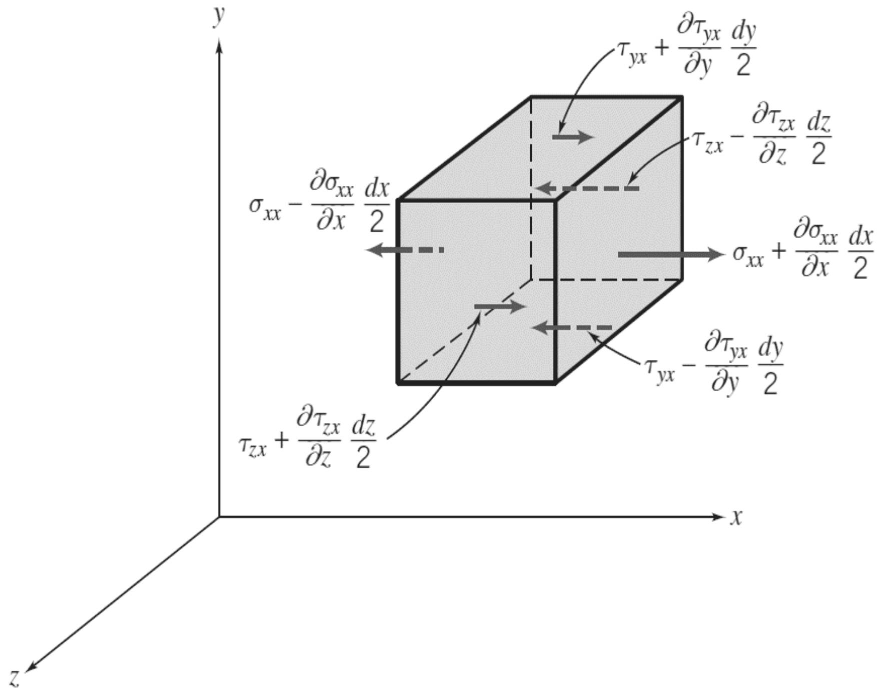
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}.\vec{v} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}.\vec{v} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}.\vec{v} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}$$



onde p é a pressão termodinâmica local, que está relacionada com a massa específica e com a temperatura, por meio de relações termodinâmicas chamadas de equações de estado

FOX et al., 2011

*Pesquisar a Hipótese de Stokes...

CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Equações constitutivas: **NAVIER-STOKES**

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\vec{\nabla}.\vec{v}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\vec{\nabla}.\vec{v}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\vec{\nabla}.\vec{v}\right)\right]$$

CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Escoamento ***incompressível*** *com* <u>*viscosidade constante*</u>*:*

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

FOX et al., 2011

CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Escoamento sem atrito ($\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$) $\rightarrow$ **EQUAÇÃO DE EULER:** $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p$

As equações de ***Navier-Stokes*** + ***ECM*** *(equação da continuidade):*

QUATRO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS NÃO LINEARES

acopladas para $\boldsymbol{u, v, w}$ ***e*** $\boldsymbol{p}$

Tais equações descrevem muitos escoamentos comuns, desde que em fluidos Newtonianos (viscosidade constante) e escoamentos incompressíveis

FOX et al., 2011

*O que significa e o que representa o fato de uma EDP ser não-linear?

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E MASSA DE ESPÉCIE QUÍMICA

Conservação da energia → ***Transferência de calor e Realização de trabalho***

Conservação de massa de espécie química → ***Transferência de massa de substância***

Potencial motriz: Quando um escalar se encontra em desequilíbrio, a natureza tenta redistribuí-la até que o equilíbrio seja estabelecido

Nota: As equações da energia e da conservação da espécie química expressam o princípio da conservação de grandezas escalares

ÇENGEL E GHAJAR, 2012

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E MASSA DE ESPÉCIE QUÍMICA

Muitos problemas de transferência de massa de espécie química encontrados na prática são dependentes da transferência de energia. A **TRANSFERÊNCIA DE MASSA** é análoga à transferência de calor em muitos aspectos
(relações de transferência de calor e massa)

<u>*Pode ocorrer em **líquidos**, **sólidos** e **gases***</u>

Exemplo: um copo de água deixado em uma sala evapora como resultado da difusão das moléculas de água para à atmosfera, ou seja, ocorre uma transferência de massa do líquido para o gás

ÇENGEL E GHAJAR, 2012

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E MASSA DE ESPÉCIE QUÍMICA

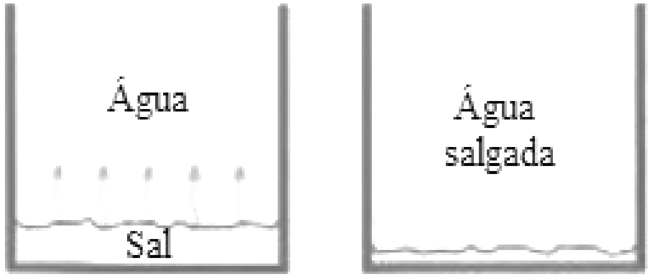
Potencial motriz:

Quando uma substância se encontra em desequilíbrio com o meio, a natureza tenta redistribuí-la até que o equilíbrio seja estabelecido

Concentração:

Quantidade da mesma por unidade de volume e seu fluxo ocorre sempre na direção da redução da concentração

Antes e depois de uma mistura água + sal: fluxo da região de alta concentração para a de baixa concentração, tendendo ao equilíbrio



$$\boxed{\dot{Q} = -k_{dif} A \frac{dC}{dx}}$$

onde k_{dif} é o coeficiente de difusão do meio

Nota de aula: *diferentemente do que foi observado na continuidade, a massa de uma espécie química pode ser transformada, criada ou destruída por meio de reações químicas*

ÇENGEL E GHAJAR, 2012

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E MASSA DE ESPÉCIE QUÍMICA

DIFUSÃO:

- A taxa de condução de calor (**transferência de energia**) é expressa pela **LEI DE FOURIER**

$$q_x = -kA\frac{\partial T}{\partial x}$$

onde K é a condutividade térmica do meio

- A taxa de **difusão da massa da espécie química** no meio estacionário na direção x é proporcional ao gradiente de concentração $\frac{dC}{dx}$ nessa direção, expressa pela **LEI DE FICK**

$$j_x = -D_{AB}\, A\frac{\partial C}{\partial x}$$

onde D é a difusividade mássica da espécie na mistura e C é a concentração da espécie na mistura nesse local

ÇENGEL E GHAJAR, 2012

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E MASSA DE ESPÉCIE QUÍMICA

Em base mássica, a concentração é expressa em concentração em massa (massa por unidade de volume), e é dada por:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

onde ρ é expresso no Sistema Internacional em $\frac{kg}{m^3}$

A concentração em massa também pode ser expressa na forma adimensional como:

$$m\ (fração) = \frac{massa\ da\ espécie\ química}{massa\ total\ da\ mistura}$$

ÇENGEL E GHAJAR, 2012

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E MASSA DE ESPÉCIE QUÍMICA

CONVECÇÃO:

CONVECÇÃO DE CALOR: mecanismo de transferência de energia que envolve a condução de calor (difusão molecular) e o movimento da massa de fluido (advecção). O movimento do fluido aumenta a transferência de calor por meio da remoção do fluido aquecido próximo à superfície e da substituição pelo fluido mais frio longe dela. Em casos onde não há movimento da massa de fluido, a convecção se reduz à condução

PROCESSOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR ENVOLVENDO MUDANÇA DE FASE:

CONVECÇÃO

por causa do movimento do fluido induzido durante o processo, como a ascensão de bolhas de vapor durante a ebulição ou a queda de gotículas de líquido durante a condensação

ÇENGEL E BOLES, 2013; ÇENGEL E GHAJAR, 2012

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E MASSA DE ESPÉCIE QUÍMICA

CONVECÇÃO:

Taxa de transferência de calor por convecção
LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON

$$\dot{Q}_{convec} = hA(T_s - T_f)$$

onde h é o coeficiente de transferência de calor por convecção, A é a área da superfície através do qual a transferência de calor ocorre, T_s é a temperatura da superfície e T_f é a temperatura do fluido longe da superfície

ÇENGEL E BOLES, 2013

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E MASSA DE ESPÉCIE QUÍMICA

CONVECÇÃO:

CONVECÇÃO DE MASSA: transferência de massa entre uma superfície e um fluido em movimento, devido tanto à difusão de massa quanto ao movimento da massa de fluido. O movimento do fluido também aumenta a transferência de massa, removendo o fluido com alta concentração de perto da superfície e substituindo-o por um fluido mais afastado e com menor concentração

ÇENGEL E GHAJAR, 2012

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E MASSA DE ESPÉCIE QUÍMICA

Equação da energia

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \rho c_p T}{\partial t}\right.}_{\mathrm{I}} + \underbrace{u\frac{\partial \rho c_p T}{\partial x} + v\frac{\partial \rho c_p T}{\partial y} + w\frac{\partial \rho c_p T}{\partial z}}_{\mathrm{IIa}}\left.\right) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial T}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[k\frac{\partial T}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[k\frac{\partial T}{\partial z}\right]}_{\mathrm{IIb}} + S_t$$

Equação da conservação da espécie química

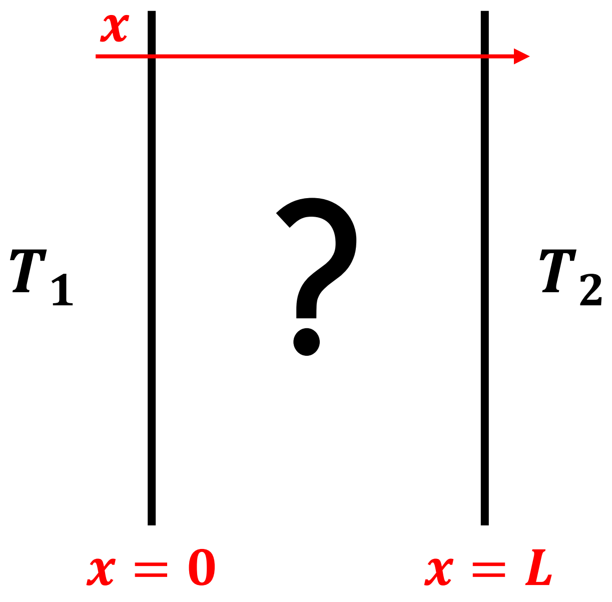
$$\underbrace{\left(\frac{\partial \rho m_A}{\partial t}\right.}_{\mathrm{I}} + \underbrace{u\frac{\partial \rho m_A}{\partial x} + v\frac{\partial \rho m_A}{\partial y} + w\frac{\partial \rho m_A}{\partial z}}_{\mathrm{IIa}}\left.\right) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left[D_{AB}\frac{\partial \rho m_A}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[D_{AB}\frac{\partial \rho m_A}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[D_{AB}\frac{\partial \rho m_A}{\partial z}\right]}_{\mathrm{IIb}} + S_c$$

onde o termo I é a taxa de variação por unidade de volume, os termos II.a e II.b representam os fluxos advectivos e difusivos, respectivamente e o termo S é o termo fonte

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E MASSA DE ESPÉCIE QUÍMICA

DIFUSÃO TÉRMICA

Obtenha a distribuição de temperaturas considerando a condução de calor unidimensional e estacionária para o esquema de placa plana mostrado abaixo com e sem a consideração de geração de calor no interior da placa.



CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E MASSA DE ESPÉCIE QUÍMICA

DIFUSÃO MÁSSICA

Uma fina membrana é usada para separar hélio de uma corrente gasosa. Sob condições de regime estacionário, a concentração do hélio na membrana é de 0,02 e 0,005 kmol/m³ nas superfícies interna e externa, respectivamente. Se a membrana possui espessura de 1 mm e o coeficiente de difusão binária do hélio em relação ao plástico é de 10^{-9} m²/s:

a) Calcule a distribuição de concentrações na membrana;

b) Calcule o fluxo difusivo do hélio deixando a membrana;

DIFUSÃO MÁSSICA

Um medicamento encontra-se no interior de um velho frasco farmacêutico de vidro. A boca do frasco está fechada com uma rolha de borracha que tem 20 mm de altura, com 10 mm de diâmetro na extremidade inferior e superior. A concentração molar do vapor do medicamento na rolha é de $2.10^{-3}\ kmol/m^3$ na sua superfície inferior e é desprezível na superfície superior. Sendo a difusividade mássica do medicamento na borracha igual a $0{,}2.10^{-9}\ m^2/s$, ache a taxa na qual o vapor sai pela rolha.

EQUAÇÃO GERAL DIFERENCIAL DE TRANSPORTE

- As variáveis dependentes de interesse nos escoamentos de fluidos obedecem a um princípio genérico de conservação:

$$\frac{\partial \rho\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\rho\vec{V}\phi\right) = \vec{\nabla}.\left(\Gamma\vec{\nabla}\phi\right) + S$$

*Como sair da equação geral de transporte e chegar nas equações apresentadas anteriormente?

Variável	Definição
ϕ	Variável dependente
Γ	Coeficiente de difusão
S	Termo fonte

*Que variáveis poderiam substituir o ϕ na Equação Geral Diferencial de Transporte?

EQUAÇÃO GERAL DIFERENCIAL DE TRANSPORTE

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\rho \vec{V} \phi\right) = \vec{\nabla}.\left(\Gamma \vec{\nabla} \phi\right) + S$$

- É uma representação geral das propriedades dos fluidos como viscosidade ou condutividade térmica, os quais juntamente com o gradiente da variável apropriada leva ao fluxo difusivo como tensão viscosa ou fluxo de calor;
- Para escoamentos turbulentos, os valores laminares do coeficiente de difusão são frequentemente substituídos pelas correspondentes propriedades turbulentas (ex.: viscosidade turbulenta);
- Em geral, Γ pode ser não uniforme, podendo depender da posição, da velocidade, temperatura, etc.

EQUAÇÃO GERAL DIFERENCIAL DE TRANSPORTE

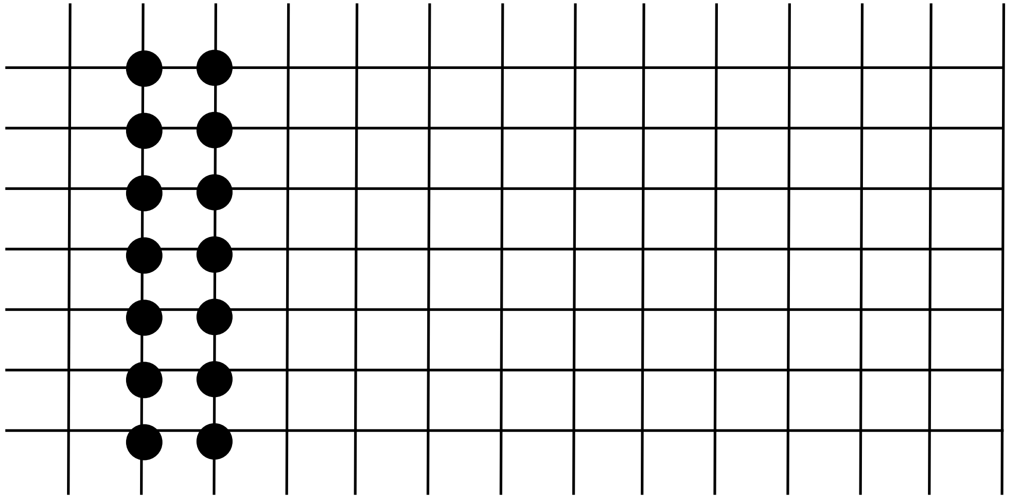
$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\rho \vec{V} \phi\right) = \vec{\nabla}.\left(\Gamma \vec{\nabla} \phi\right) + S$$

- O termo fonte é primordialmente definido para mecanismos como geração de calor, produção e destruição de espécies químicas em uma reação, forças de corpo em fluido, etc...
- Contudo, S também pode ser usado para representar qualquer termo que não possa ser representado pelos três primeiros termos da equação diferencial geral de conservação.

EQUAÇÃO GERAL DIFERENCIAL DE TRANSPORTE

OBJETIVOS DE UM MÉTODO NUMÉRICO

- Obter uma distribuição da variável dependente em termos de um número finito de valores numéricos;
- Os métodos numéricos consideram desconhecidos os valores de ϕ em um número dado de localizações no domínio computacional. O propósito do método é encontrar estes valores.



EQUAÇÃO GERAL DIFERENCIAL DE TRANSPORTE

MÉTODOS DE DISCRETIZAÇÃO

- Um método de discretização fornece:
  - Um conjunto de equações algébricas para os valores de ϕ nos pontos nodais, e;
  - Um algoritmo para resolver as equações;

- As equações algébricas são derivadas a partir das equações diferenciais ao considerar-se um "perfil" para a variação de ϕ entre os pontos nodais. Estes perfis em geral são perfis em intervalos.

EQUAÇÃO GERAL DIFERENCIAL DE TRANSPORTE

EQUAÇÕES DE DISCRETIZAÇÃO

- É uma relação algébrica conectando o valor de ϕ para um grupo de pontos nodais;

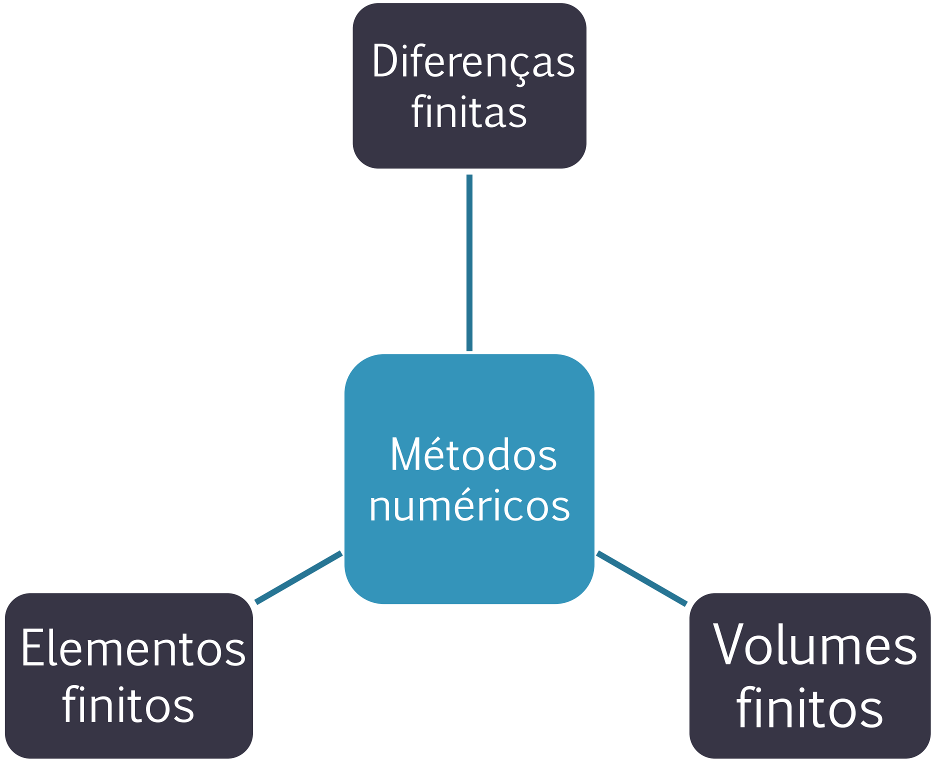
- É originada de uma equação diferencial e expressa a mesma informação física;

- A medida que o número de pontos nodais cresce, espera-se que a solução das equações de discretização se aproxime da solução exata da equação diferencial;

- As possíveis equações de discretização são muitas, porém espera-se obter a mesma solução quando o número de pontos nodais é muito grande.

EQUAÇÃO GERAL DIFERENCIAL DE TRANSPORTE

CLASSES DE MÉTODOS NUMÉRICOS



FORMULAÇÃO DE VOLUMES DE CONTROLE

- O domínio é dividido em um número de volumes de controle tal que exista um volume de controle ao redor de cada ponto nodal (ao qual chamaremos de elementos);

- A equação diferencial é integrada sobre cada volume de controle para obter uma equação algébrica contendo os valores de ϕ nos elementos;

- A equação de discretização resultante expressa o princípio de conservação para um volume de controle finito, assim como a equação diferencial expressa o mesmo para um volume de controle infinitesimal;

EQUAÇÃO GERAL DIFERENCIAL DE TRANSPORTE

FORMULAÇÃO DE VOLUMES DE CONTROLE

- A equação resultante implica que o princípio de conservação integral (massa, quantidade de movimento, energia e massa de espécie química) é perfeitamente satisfeito para qualquer grupo de volumes de controle, e consequentemente, para todo o domínio;

- É necessário supor uma variação de ϕ entre os pontos nodais;

- É possível, se desejado, utilizar diferentes perfis para integrar diferentes termos da equação diferencial;

REFERÊNCIAS

ÇENGEL, Y. E BOLES, M.A. ***Termodinâmica.*** *7 ed. São Paulo: AMGH, 2013.*

ÇENGEL, Y. E CIMBALA, J. ***Mecânica dos Fluidos*** *– fundamentos e aplicações. 3 ed. São Paulo: AMGH, 2015.*

ÇENGEL, Y. E GHAJAR, A.J. ***Transferência de Calor e Massa*** *– uma abordagem prática. 4 ed. São Paulo: AMGH, 2012.*

FOX, R.W. et al. ***Introduction to Fluid Mechanics.*** *8 ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2011.*

KNIGHT, R.D. ***Física – uma abordagem estratégica, vol. 2.*** *2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2009.*

POST, S. ***Mecânica dos Fluidos*** *– Aplicada e Computacional. Rio de Janeiro: LTC, 2013.*

WHITE, F.M. ***Mecânica dos Fluidos.*** *6 ed. São Paulo: AMGH, 2011.*