Aula 4 Cálculo 3B   Aula 13 Cálculo 3A

Aula Passada 1ª ordem lineares $y' + p(t)y = f(t)$

↳ fator integrante

Aula Hoje equações 1ª ordem não lineares $\Big\rangle$ $y' = \dfrac{g(t)}{h(y)}$

separáveis

2.2 Equações Separáveis

$\boxed{y' = \dfrac{g(t)}{h(y)}}$ ou $\boxed{y' = g(t).h(y)}$ é dita equação de variáveis separáveis

Exemplo 1 $y' + 6xy = 0$ é uma equação de variáveis separáveis:

$$y' = (-6x).(y) = \frac{-6x}{\frac{1}{y}} \begin{matrix} \}= g(x) \\ \}= h(y) \end{matrix}$$

Exemplo 2 $y' - 2ty = t^2$ não é uma equação de variaveis separáveis:

$y' = t^2 + 2ty = t(t+2y)$ não é possível escrever $y' = g(t).h(y)$ ou $y' = \dfrac{g(t)}{h(y)}$

Exemplo 3 $\dfrac{dy}{dt} = t\sqrt{y-1}$ é uma equação de variaveis separaveis.

Método para resolver este tipo de equação

$$y' = \frac{g(t)}{h(y)} \Leftrightarrow \underbrace{h(y(t)).y'(t)}_{\text{derivada da composta}} = g(t) \quad (*)$$

derivada da composta

seja $\displaystyle\int h(y).dy \overset{(**)}{=} H(y)$ então

$$\frac{d}{dt}H(y(t)) = \frac{d}{dy}H(y(t)).y'(t) = h(y(t))\,y'$$

Assim em (*) $\dfrac{d}{dt}H(y(t)) = g(t)$

integrando dos dois lados:

$$\int \frac{d}{dt}H(y(t))\,dt = \int g(t).dt$$

$$\boxed{H(y(t)) = \int g(t).dt + C}$$ solução geral

$\int h(y)\,dy$

se H inversível $y(t) = H^{-1}\left[\int g(t)dt + C\right]$

(*) precisamos basicamente $\int h(y)\,dy$ o que nos permite fazer a seguinte mecânica:

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{h(y)} \Leftrightarrow h(y)dy = g(t)dt$$

e integra dos dois lados $\displaystyle\int h(y)dy = \int g(t)dt$

Exemplo: Resolva $y' + 6xy = 0$. LINEAR SEPARÁVEL

Solução $\dfrac{dy}{dx} = -6xy$ $y > 0$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}.dy = \int -6x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \ln y = -3x^2 + C$$

$$\Leftrightarrow y(x) = e^{-3x^2 + C} = e^C.e^{-3x^2}$$

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{-3x^2}}$$ solução geral

Exemplo Resolva $y' = 2t\sqrt{y-1}$ NÃO LINEAR SEPARÁVEL

Solução $\dfrac{dy}{dt} = 2t\sqrt{y-1}$ $y > 1$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y-1}}.dy = \int 2t\,dt \Rightarrow 2\sqrt{y-1} = t^2 + C$$

u substituição

$$\sqrt{y-1} = \frac{t^2+C}{2}$$

$$\boxed{y = \left(\frac{t^2+C}{2}\right)^2 + 1}$$

solução geral

Exemplo Resolva a equação $y' = \dfrac{x^2}{1-y^2}$

NÃO LINEAR / SEPARÁVEL

Solução $\displaystyle\int (1-y^2)\,dy = \int x^2 dx$

$$\boxed{y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C}$$ solução geral na forma implícita

↳ muito difícil explicitar y em função de x

Exemplo Resolva o PVI $\begin{cases} y' = \dfrac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \\ y(0) = -1 \end{cases}$

NÃO LINEAR / SEPARÁVEL

Solução $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$

$\Rightarrow \int 2(y-1)\,dy = \int (3x^2+4x+2)\,dt$

$y^2-2y = x^3+2x^2+2x+C$

↳ tentar explicitar

↳ completar quadrado

$(y-1)^2-1 = x^3+2x^2+2x+C$

$(y-1)^2 = x^3+2x^2+2x+1+C$

$\boxed{y(x) = 1 \pm \sqrt{x^3+2x^2+2x+1+C}}$ solução geral

Determinar c tal que $y(0)=-1$

1) $y(x) = 1+\sqrt{x^3+2x^2+2x+1+C}$

$-1 = y(0) = 1+\sqrt{1+C} \Rightarrow \sqrt{1+C} = -2$

↳ NÃO

2) $y(x) = 1-\sqrt{x^3+2x^2+2x+1+C}$

$-1 = y(0) = 1-\sqrt{1+C} \Leftrightarrow \sqrt{1+C} = 2$

$1+C = 4$

$\boxed{C = 3}$

Então $\boxed{y(x) = 1-\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}}$ solução do PVI

Exemplo Resolva a equação $t^2y' = 1-t^2+y^2-t^2y^2$

Solução $t^2y' = (1-t^2)+y^2(1-t^2)$

$= (1-t^2)(1+y^2)$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1-t^2)}{t^2}\cdot(1+y^2)$

$\int \dfrac{1}{1+y^2}\,dy = \int\left(\dfrac{1-t^2}{t^2}\right)dt$

$\operatorname{arctg} y = \int\left(\dfrac{1}{t^2}-1\right)dt = -\dfrac{1}{t}-t+C$

$\boxed{y(t) = \operatorname{tg}\left[C-t-\dfrac{1}{t}\right]}$ solução geral

Exemplo Resolva o PVI $\begin{cases} y' = 2y^2+xy^2 \\ y(0) = 1\end{cases}$

e determine onde a solução atinge seu valor mínimo

Solução

Resolver: $\dfrac{dy}{dx} = y' = (2+x)y^2$

$\int \dfrac{1}{y^2}\,dy = \int (2+x)\,dx$

$-\dfrac{1}{y} = 2x+\dfrac{x^2}{2}+C \Rightarrow -\dfrac{1}{y} = \dfrac{4x+x^2+2C}{2}$

$y(t) = \dfrac{-2}{4x+x^2+2C} \rightsquigarrow 1 = y(0) = \dfrac{-2}{2C}$

$\Rightarrow C=-1$

Voltando

$\boxed{y(x) = \dfrac{-2}{4x+x^2-2}}$ solução

Valor mínimo:

os pontos de mínimos anulam a derivada

NÃO DERIVE $y(x)$!

Vamos usar a equação $\underset{\substack{\| \\ 0}}{y'(x)} = 2y^2+xy^2$

$\Rightarrow y^2(2+x) = 0$

$\Rightarrow y(x) = 0$ ou $x=-2$

Note que $y(x) = \dfrac{-2}{4x+x^2-2}$ não se anula

então $x=-2$ e $y(-2) = \dfrac{-2}{-8+4-2} = \dfrac{-2}{-6} = \dfrac{1}{3}$

Note que

$y'' = 4y\cdot y' + x\,2y\,y' + y^2$

se $y'=0 \Rightarrow y'' = y^2 \geq 0$

$y''\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{9} > 0$

então $\dfrac{1}{3}$ é mesmo o valor mínimo.