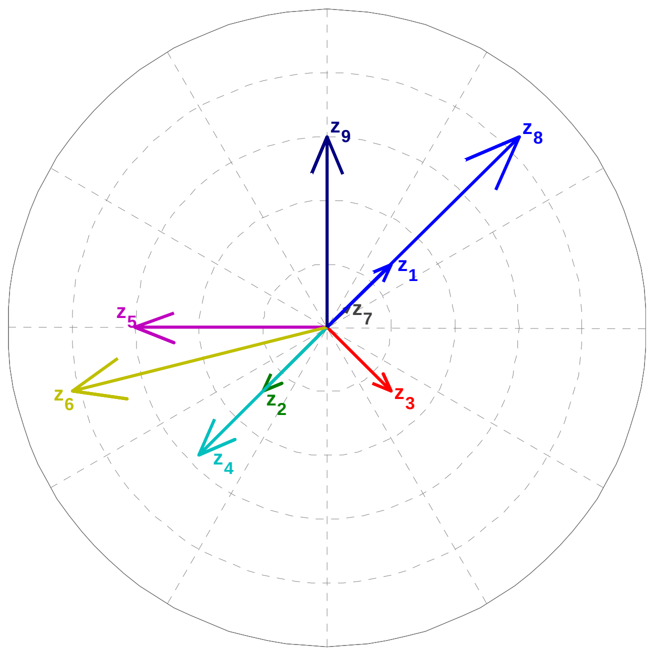
NÚMEROS COMPLEXOS

Folhas de Apoio da disciplina de Teoria dos Sinais e dos Sistemas



Abril de 2004

Isabel Milho

Secção de Análise de Sinais
Departamento de Engenharia de Electrónica e de Telecomunicações e de Computadores
Instituto Superior de Engenharia de Lisboa

Índice

1. Representação de Números Complexos

FORMA CARTESIANA

Seja um número complexo z, que expresso na *forma cartesiana* (rectangular ou algébrica) vem

$$z = a + jb\,, \tag{1}$$

PARTES REAL E IMAGINÁRIA

onde $j = \sqrt{-1}$, $a = \mathrm{Re}[z]$ é a *parte real* de z e $b = \mathrm{Im}[z]$ é a *parte imaginária* de z,
Na forma polar, o número complexo z vem

FORMA POLAR

$$z = re^{j\theta}\,, \tag{2}$$

MÓDULO E FASE

onde $r > 0$ é o *módulo* de z, $r = |z|$, e $\theta = \arg[z]$ é o *ângulo* (ou *fase*) de z.

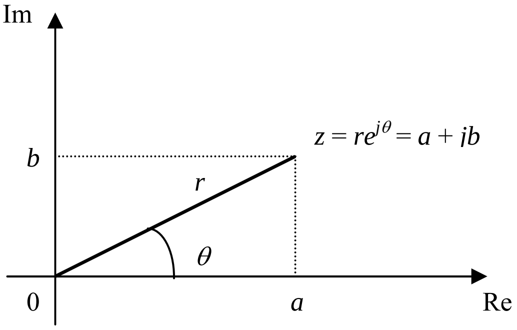


Figura 1: O plano complexo.

PLANO COMPLEXO
DIAGRAMA - ARGAND

Na Figura 1 vêm ilustradas as representações cartesiana e polar para o número complexo z. Esta representação geométrica dos números complexos é conhecida por *plano complexo* (ou *diagrama de Argand*). Através da Figura 1, ou usando a *fórmula de Euler*,

FÓRMULA DE EULER

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta\,, \tag{3}$$

as relações entre as representações cartesiana e polar são

POLAR→CARTESIANA

$$a = r\cos\theta \qquad b = r\sin\theta\,, \tag{4}$$

CARTESIANA→POLAR

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \theta = \arctan\frac{b}{a}\,. \tag{5}$$

2. Complexo Conjugado

COMPLEXO CONJUGADO

O *complexo conjugado* de z é designado por z^* e é dado por

$$z^* = a - jb = re^{j\theta}\,. \tag{6}$$

3. Adição, Multiplicação e Divisão

Sejam os números complexos $z_1 = a_1 + jb_1$ e $z_2 = a_2 + jb_2$. Para a adição de complexos temos de usar a representação cartesiana.,

ADIÇÃO

$$z_1 + z_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)\,. \tag{7}$$

Para a multiplicação e a divisão, ambas as representações são possíveis para obter o resultado. Na forma cartesiana, temos que

MULTIPLICAÇÃO

$$z_1 z_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + b_1a_2)\,, \tag{8}$$

DIVISÃO

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + j(-a_1b_2 + b_1a_2)}{a_2^2 + b_2^2}\,. \tag{9}$$

Na forma polar o resultado é imediato. Sendo $z_1 = r_1e^{j\theta_1}$ e $z_2 = r_2e^{j\theta_2}$, vem

MULTIPLICAÇÃO

$$z_1 z_2 = r_1e^{j\theta_1} r_2e^{j\theta_2} = r_1r_2e^{j(\theta_1+\theta_2)}\,, \tag{10}$$

DIVISÃO

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{j\theta_1}}{r_2e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_1-\theta_2)}\,. \tag{11}$$

4. Relações Úteis

Usando a definição de complexo conjugado (6), temos algumas relações úteis:

RELAÇÕES ÚTEIS

$$zz^* = r^2\,, \tag{12}$$

$$z + z^* = 2\,\mathrm{Re}[z]\,, \tag{13}$$

$$z - z^* = j2\,\mathrm{Im}[z], \quad (14)$$

$$\left(z_1 + z_2\right)^* = z_1^* + z_2^*, \quad (15)$$

$$\left(z_1 z_2\right)^* = z_1^* z_2^*. \quad (16)$$

Aplicando (13) e (14), a fórmula de Euler (3) pode ser usada para derivar fórmulas para as funções coseno e seno em termos de $e^{j\theta}$:

COSENO

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad (17)$$

SENO

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}. \quad (18)$$

5. MATLAB

O MATLAB suporta tratamento de números complexos. Para definir um número complexo na forma cartesiana, escreve-se:

FORMA CARTESIANA

```
>> z1=1+i
z1 =
   1.0000 + 1.0000i
```

Ambos os símbolos `i` e `j` são iniciados com $\sqrt{-1}$ pelo MATLAB. Do mesmo modo, o símbolo `pi` é iniciado com o valor da constante π. Assim, também podemos usar as funções `cos` e `sin` para definir um número complexo na forma cartesiana:

```
>> z2=cos(pi/4)+j*sin(pi/4)
z2 =
   0.7071 + 0.7071i
```

FORMA POLAR

Na forma polar, podemos usar a função `exp`:

```
>> z3=3*exp(-j*pi)
z3 =
  -3.0000 - 0.0000i
```

OPERAÇÕES

As operações aritméticas sobre números complexos usam-se como para os números reais:

```
>> z3-z1
ans =
   -4.0000 - 1.0000i
>> z3*z1
ans =
   -3.0000 - 3.0000i
>> z1/z3
ans =
   -0.3333 - 0.3333i
>> z1^2
ans =
     0 + 2.0000i
```

A Tabela 1 mostra algumas funções disponíveis no MATLAB para realizar operações, como o complexo conjugado, o módulo e a fase do número.

FUNÇÕES ÚTEIS

Função	Significado	Definição ($z = a + jb$)
`real`	parte real	a
`imag`	parte imaginária	b
`abs`	valor absoluto (módulo)	$r = \|z\|$
`angle`	fase do ângulo (argumento)	$\theta = \arctan(b/a)$
`conj`	complexo conjugado	$z^* = a - jb$

Tabela 1: Funções MATLAB de complexos

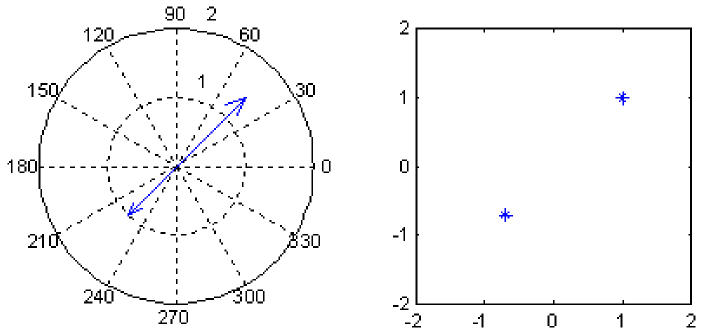
Para representar graficamente números complexos no MATLAB podemos usar as funções `compass` ou `plot`:

```
>> compass(z1), hold on, compass(-z2)
```

O resultado desta sequência de comandos produz o gráfico da Figura 2(a). O resultado obtido com o comando `plot`,

```
>> plot(real(z1), imag(z1), '*'), hold on
>> plot(real(-z2), imag(-z2), '*'), axis([-2 2 -2 2])
```

não é tão claro (ver Figura 2(b)), embora se possa marcar a origem e traçar linhas da origem até aos pontos.



(a) `compass` (b) `plot`

Figura 2: Representações gráficas dos números complexos $z_1 = 1\text{-}j1$ e $-z_2 = -\sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2$, usando os comandos `compass` e `plot`.

6. Exemplos

Para melhor compreensão das representações apresentam-se exemplos de números complexos na Tabela 2. Os complexos são representados nas duas formas, cartesiana e polar, e a sua representação gráfica no plano complexo ilustra-se na Figura 3.

	Forma cartesiana	Forma polar
$z_1 = 1 + j1$	$1 \quad + \quad j1$	$\sqrt{2} \quad e^{j\pi/4}$
$z_2 = -z_1$	$-1 \quad - \quad j1$	$\sqrt{2} \quad e^{-j3\pi/4}$
$z_3 = z_1^*$	$1 \quad - \quad j1$	$\sqrt{2} \quad e^{-j\pi/4}$
$z_4 = 2\, z_2$	$2 \quad + \quad j2$	$2\sqrt{2} \quad e^{-j3\pi/4}$
$z_5 = 3\, e^{-j\pi}$	-3	$3 \quad e^{-j\pi}$
$z_6 = z_2 + z_5$	$-4 \quad - \quad j1$	$\sqrt{(4^2+1)} \quad e^{j\arctan(-4/-1)}$
$z_7 = z_2 / z_5$	$1/3 \quad + \quad j1/3$	$\sqrt{2}/3 \quad e^{j\pi/4}$
$z_8 = z_2\ z_5$	$3 \quad + \quad j3$	$3\sqrt{2} \quad e^{j\pi/4}$

Tabela 2: Números complexos nas formas cartesiana e polar.

Note que a conversão de coordenadas (cartesianas para polares e vice-versa), assim como as operações de adição, multiplicação e divisão, se podem realizar graficamente no plano complexo. O número complexo z_6 é o único caso da Tabela 2 que, depois de adicionar os dois vectores graficamente, é necessário aplicar a transformação da forma cartesiana para a forma polar em (5), a fim de determinar os valores do módulo e do argumento.

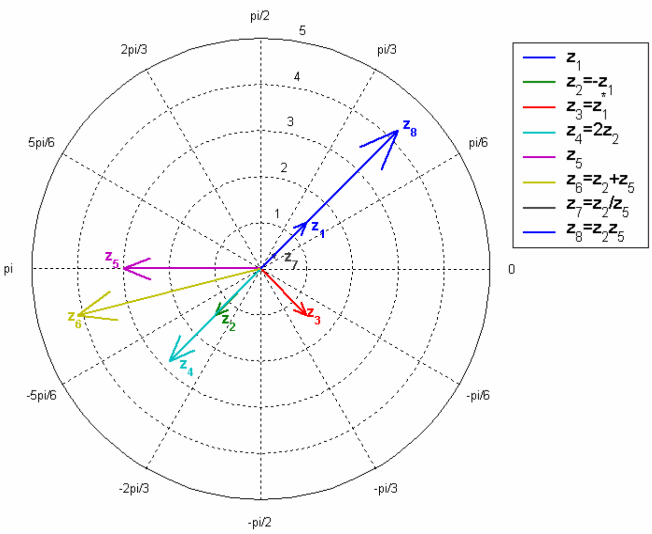


Figura 3: Representação gráfica dos números complexos da Tabela 2 no plano complexo.

Bibliografia

[1] S. Haykin, B. V. Veen, *Signals and Systems,* John Wiley & Sons, 1999.

[2] H. P. Hsu, *Signals and Systems*, McGraw-Hill, 1995.

[3] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, *Second Edition*, Prentice Hall, 1999.

[4] P. Smith, *Part IB Computing Course - Tutorial Guide to Matlab*, http://mi.eng.cam.ac.uk/~pas1001/Teaching/tutorial.pdf, 2003.