

CAPÍTULO II

MODELAGEM DE SISTEMAS

TÓPICOS DE MODELAGEM

Este capítulo apresenta a modelagem de alguns elementos de um sistema de controle a partir de leis físicas. Utilizamos equações diferenciais ordinárias, funções de transferência e diagramas de blocos.

- **Equações diferenciais**
- **redes elétricas**
- **elementos mecânicos**
- **motores cc**
- **circuitos com amplificadores operacionais**

2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Nossos modelos serão obtidos, nesta etapa, através de leis físicas do sistema sob modelagem. Por exemplo:

SISTEMA	LEI
Circuitos elétricos	Leis de Kirchoff
Sistemas mecânicos	2ª lei de Newton
Motor elétrico	leis eletromecânicas
⋮	⋮

Estas leis resultam em um modelo matemático composto por equações diferenciais que representam as variáveis de interesse de nosso sistema. A solução desse modelo pode ser obtida de forma analítica ou numérica; em nossas simulações faremos o uso de um método numérico de integração Runge-Kutta de 4ª ordem por meio do *Matlab®* e *Simulink®*. Dessa forma,

podemos simular o nosso sistema em relação as variáveis de interesse e, com isso, realizar etapas de análise e projeto de um sistema de controle.

2.1.1 Lineares

Consideremos um circuito série RLC, representado pela seguinte equação:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t) \quad 2.1$$

onde R é a resistência, L a indutância, C a capacitância, i(t) a corrente no circuito, e e(t) a tensão aplicada. Neste caso, e(t) é a função de entrada, t a variável independente, i(t) a variável dependente a ser determinada pela solução da equação diferencial.

A equação 2.1 é uma equação diferencial de 2ª ordem linear.

Em geral, a equação diferencial de um sistema de ordem n é escrita:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t) \quad 2.2$$

que é a equação diferencial ordinária linear de ordem n se os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_{n-1} não são funções de y(t).

No escopo de nosso curso, trataremos somente com equações diferenciais ordinárias.

2.1.2 Não lineares

Muitos sistemas são não lineares e precisam ser modelados matematicamente por equações diferenciais não lineares. Por exemplo, a equação diferencial que descreve o movimento de um pêndulo conforme a Figura 2.1 é:

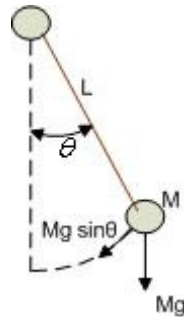


Figura 2.1 Pêndulo simples

$$ML \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + Mg \sin \theta(t) = 0 \quad 2.3$$

a parte $\sin \theta(t)$ na equação 2.3 é não linear, e assim a equação é não linear.

2.2 REDES ELÉTRICAS

Com o intuito de apresentar o assunto de modelagem de sistemas, apresentamos dois exemplos bem conhecidos dos engenheiros eletricitas, circuitos com resistências, capacitâncias e indutâncias. O modelamento dos mesmos segue algumas leis físicas de circuitos, leis de Kirchhoff e Ohm:

Exemplo 2.1 Circuito RC

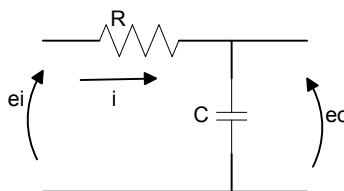


Figura 2.2 Circuito RC

Dado o circuito da Figura 2.2 considere a entrada e_i e a saída e_o :

$$e_i(t) = Ri(t) + e_o(t)$$

$$e_0(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

Aplicando-se a transformada de Laplace temos:

$$E_i(s) = RI(s) + E_0(s) \text{ ou } I(s) = \frac{E_i(s) - E_0(s)}{R}$$

$$E_0(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

Temos o diagrama de blocos deste circuito conforme a figura 2.3.

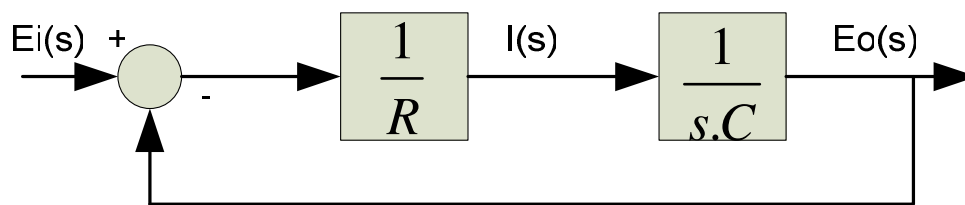


Figura 2.3 Diagrama de blocos do circuito RC

A função de transferência $G(s) = E_o(s)/E_i(s)$ é dada por:

$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

Exemplo 2.2 Circuito RLC

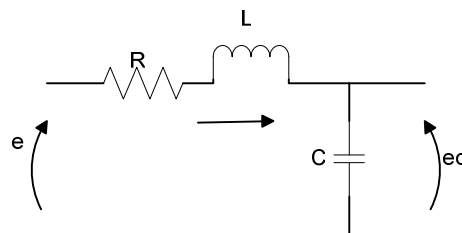


Figura 2.4 Circuito RLC

Dado o circuito da figura 2.4 considere a entrada e_i e a saída e_o :

$$e_i(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e_o(t)$$

$$e_0(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

Aplicando-se a transformada de Laplace temos:

$$E_i(s) = RI(s) + LsI(s) + E_0(s) \text{ ou } I(s) = \frac{E_i(s) - E_0(s)}{Ls + R}$$

$$E_0(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

Dessa o diagrama de blocos deste circuito é conforme figura 2.5:

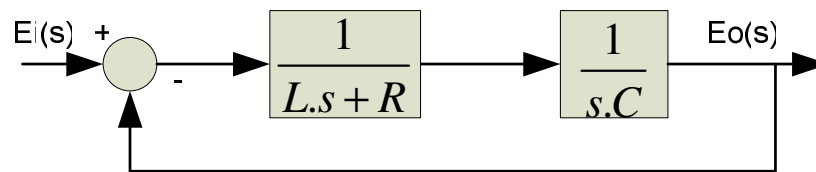


Figura 2.5 Diagrama de blocos do circuito RLC

A função de transferência $G(s) = E_o(s)/E_i(s)$ é dada por:

$$G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{1/C}{Ls^2 + Rs + 1/C}$$

2.3 SISTEMAS MECÂNICOS

Muitos sistemas de controle assim como componentes elétricos contêm componentes mecânicos, embora alguns sistemas ainda tenham elementos hidráulicos e pneumáticos. Matematicamente, a descrição de elementos elétricos e mecânicos são análogos. De fato, podemos mostrar que para um dado sistema elétrico, geralmente tem um análogo mecânico matematicamente, e vice versa.

O movimento de elementos mecânicos pode ser descrito em várias dimensões como translação, rotação e combinações. As equações que governam os movimentos dos sistemas mecânicos são frequentemente formuladas diretamente ou indiretamente pelas leis de Newton.

2.3.1 Movimento de Translação

O movimento de translação é definido como um movimento que ocorre ao longo de uma linha reta. As variáveis que são usadas para descrever a translação são aceleração, velocidade e deslocamento. A lei de Newton para o movimento diz que a soma algébrica das forças agindo sobre um corpo rígido em uma determinada direção é igual ao produto da massa do corpo e sua aceleração na mesma direção. A lei pode ser expressa como

$$\sum \text{forças} = Ma \quad 2.4$$

onde M é a massa e a é a aceleração na direção considerada. Para o movimento de translação, os seguintes elementos estão geralmente envolvidos.

1. Massa. Considerada como uma propriedade de um elemento que armazena a energia cinética do movimento de translação. Massa é análoga à indutância de redes elétricas. Se P denota o peso de um corpo, assim M é dado por:

$$M = \frac{P}{g} \quad 2.5$$

onde g é a aceleração de queda livre de um corpo devido à gravidade. ($g = 9,8066 \text{ m/s}^2$)

A figura 2.6 ilustra uma situação onde uma força está agindo sobre um corpo de massa M . A equação da força é escrita:

$$f(t) = Ma(t) = M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = M \frac{dv(t)}{dt} \quad 2.6$$

onde $v(t)$ denota velocidade.

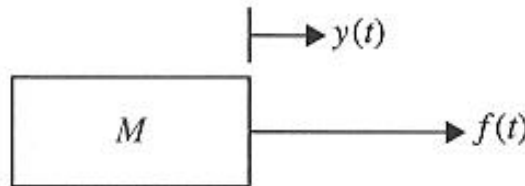


Figura 2.6 Diagrama esquemático de forças em um corpo

2. Mola linear. Na prática, uma mola linear pode ser um modelo de uma mola real ou um cabo ou uma correia. Em geral, uma mola é considerada um elemento que armazena energia potencial. É análoga ao capacitor em redes elétricas. Todas as molas reais são não-lineares a alguma extensão. Entretanto, se a deformação da mola é pequena, seu comportamento pode ser aproximado para uma relação linear:

$$f(t) = Ky(t) \quad 2.7$$

onde K é a constante da mola, ou simplesmente rigidez. A unidade básica da constante da mola é N/m

A equação 2.7 implica que a força agindo na mola é diretamente proporcional ao deslocamento (deformação) da mola. Um modelo de uma mola linear é mostrado na figura 2.7.

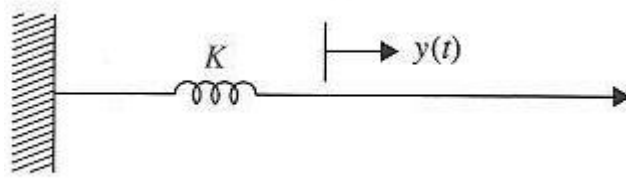


Figura 2.7 Diagrama esquemático de forças em uma mola

Se a mola é pré-carregada com uma tensão T , a equação 4-17 deve ser modificada para:

$$f(t) - T = Ky(t) \quad 2.8$$

2.3.2 Atrito no Movimento de Translação

Sempre que existe movimento ou tendência de movimento entre dois elementos físicos, existe força de atrito. As forças de atrito encontradas em sistemas físicos são geralmente de uma **natureza não-linear**. As características das forças de atrito entre duas superfícies de contato frequentemente dependem de tais fatores como a composição das superfícies, a pressão das duas superfícies, suas velocidades relativas, e outras, assim uma descrição matemática da força de atrito é difícil. Três diferentes tipos de atrito são geralmente usados em sistemas práticos: atrito viscoso, atrito estático, e atrito de Coulomb. Estes são discutidos abaixo.

1. Atrito Viscoso. Representa uma força de retardo que é uma relação linear entre a força aplicada e a velocidade. O diagrama esquemático para atrito viscoso é geralmente representado por um freio, como o mostrado na figura 2.8:

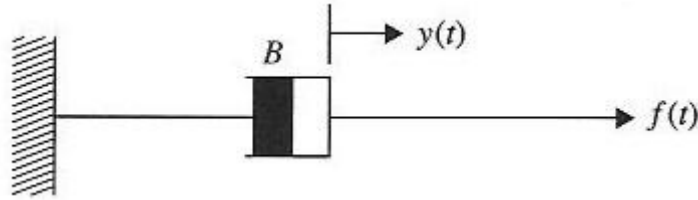


Figura 2.8 Diagrama de forças quando presente o atrito viscoso

A expressão matemática do atrito viscoso é

$$f(t) = B \frac{dy(t)}{dt} \quad 2.9$$

onde B é o coeficiente de atrito viscoso. $[B] = \text{N/m/seg}$.

A Figura 2.9(a) mostra a relação funcional entre força de atrito viscoso e velocidade.

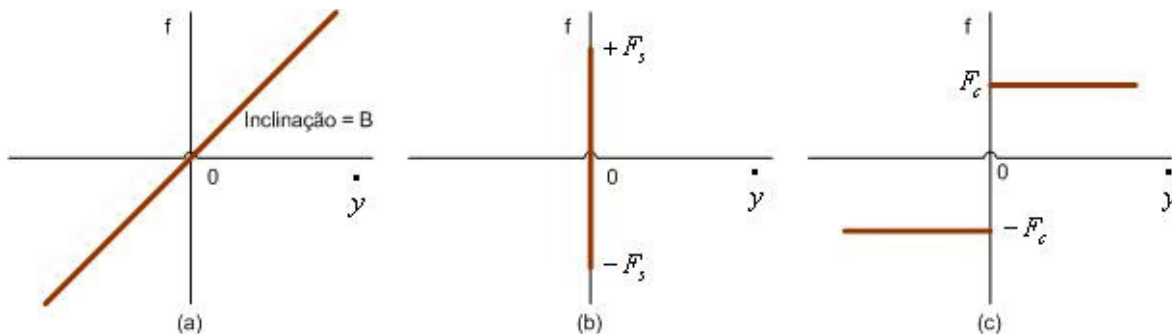


Figura 2.9 Atritos viscoso, estático e de Coulomb

2. Atrito Estático. Atrito estático representa uma força de retardo que tende a impedir o movimento de iniciar. A força de atrito estático pode ser representada pela expressão

$$f(t) = \pm (F_s) \Big|_{\dot{y}=0} \quad 2.10$$

Que é definida como uma força de atrito que existe somente quando o corpo está estacionário, mas tem tendência ao movimento. O sinal do atrito **depende do sentido do movimento** ou a direção inicial da velocidade. A relação força x velocidade do atrito estático é ilustrada na Figura 2.9(b). Note que uma vez iniciado o movimento, a força de atrito estático desaparece e outros atritos o substituem.

3. Atrito de Coulomb. Atrito de Coulomb é uma força de retardo que tem amplitude constante com relação às mudanças de velocidade, mas o sinal da força de atrito muda com a mudança do sentido da velocidade. A relação matemática para o atrito de Coulomb é dada por

$$f(t) = F_c \frac{dy(t)/dt}{|dy(t)/dt|} \quad 2.11$$

Onde F_c é o coeficiente de atrito de Coulomb. A descrição funcional da relação do atrito x velocidade é mostrada na Figura 2.9(c).

Deve-se indicar que os três tipos de atrito citados aqui são meramente modelos práticos que foram planejados para demonstrar fenômenos de atrito encontrados em sistemas físicos. Eles não são exatos. Em algumas situações incomuns, temos de usar outros modelos de atrito para representar o fenômeno mais precisamente.

2.3.3 Movimento de Rotação

O movimento de rotação de um corpo pode ser definido como movimento sobre eixo fixo. A extensão da lei de Newton do movimento rotacional diz que a soma algébrica dos momentos ou torque sobre um eixo fixo é igual ao produto da inércia e da aceleração angular sobre o eixo central; ou,

$$\sum \text{torques} = J\alpha \quad 2.12$$

onde J denota a inércia e α é a aceleração angular. Outras variáveis geralmente usadas para descrever o movimento de rotação são torque T , velocidade angular ω , e deslocamento angular θ . Os elementos envolvidos com o movimento rotacional discutidos a seguir.

1. Inércia. Inércia, J , é considerada a propriedade de um elemento que armazena energia cinética do movimento rotacional. A inércia de um dado elemento depende da sua geometria sobre o eixo de rotação e de sua densidade. Por exemplo, a inércia de um disco circular sobre seu eixo geométrico é dado por

$$J = \frac{1}{2}Mr^2 \quad 2.13$$

onde um torque é aplicado em um corpo com inércia J (kg.m²), como mostrado na figura 2.10, a equação de torque é escrita por:

$$T(t) = J\alpha(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \quad 2.14$$

onde $\theta(t)$ é o deslocamento angular (rad), $\omega(t)$ é a velocidade angular, e $\alpha(t)$ a aceleração angular. $T(t)$ (N.m) é o torque.

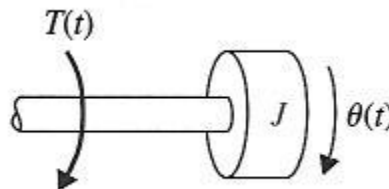


Figura 2.10 Diagrama de forças rotacional

2. Mola de Torção. Como com a mola linear para o movimento de translação, uma constante de mola de torção K , em torque por unidade de deslocamento angular, pode ser utilizada para representar a conformidade de uma haste ou um eixo quando é submetido a um torque. Figura 2.11 ilustra um sistema simples de torque-mola que poder ser representado pela equação

$$T(t) = K\theta(t) \quad 2.15$$

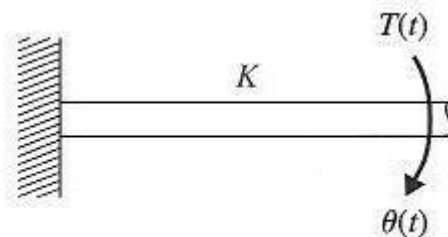


Figura 2.11 Diagrama de forças rotacional – torção no eixo

Sendo $[K] = \text{N.m/rad}$.

Se a mola de torção é carregada por uma carga de TP , a equação 2.15 é modificada para:

$$T(t) - TP = K\theta(t) \quad 2.16$$

3. Atrito no Movimento de Rotação. Os três tipos de atrito descritos para o movimento de translação podem ser utilizados no movimento de rotação. Consequentemente, equações 2.9, 2.10, e 2.11 podem ser adequadas:

$$\text{Atrito viscoso: } T(t) = B \frac{dy(t)}{dt} \quad 2.17$$

$$\text{Atrito estático: } T(t) = \pm (F_s) \Big|_{y=0} \cdot \quad 2.18$$

$$\text{Atrito de Coulomb: } T(t) = F_c \frac{dy(t)/dt}{|dy(t)/dt|} \quad 2.19$$

2.3.4 Engrenagens e acoplamentos

Um sistema de engrenagem é um dispositivo mecânico que transmite energia de uma parte de um sistema para outra, de tal forma que a força, o torque, a velocidade, e o deslocamento são alterados. Esse elemento pode também ser utilizado como dispositivo combinado para obter a máxima transferência de potência. Duas engrenagens acopladas são mostradas na figura 2.14.

i) desconsideração de inércia e atrito das engrenagens (caso ideal).

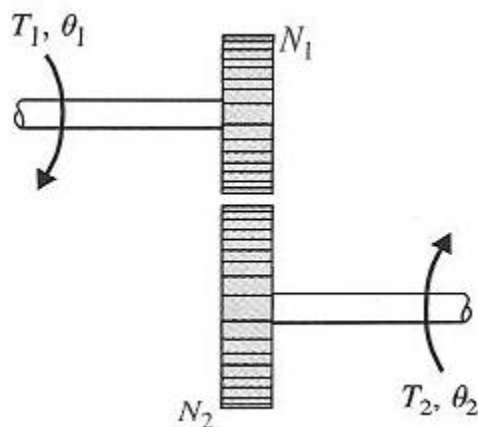


Figura 2.14 Engrenagem

As relações entre os torques, T_1 e T_2 , deslocamento angular θ_1 e θ_2 , e o número de dentes N_1 e N_2 das engrenagens são derivadas dos seguintes fatos:

1. O número de dentes na superfície das engrenagens é proporcional aos raios r_1 e r_2 das engrenagens; isso é,

$$r_1 N_2 = r_2 N_1 \quad 2.22$$

2. A distância percorrida na superfície de cada engrenagem é a mesma. Assim,

$$\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2 \quad 2.23$$

3. O trabalho feito por uma engrenagem é igual ao da outra desde que não tenha perda

$$T_1 \theta_1 = T_2 \theta_2 \quad 2.24$$

Se a velocidade angular das duas engrenagens, ω_1 e ω_2 , temos

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = n \quad 2.25$$

2.4 MOTORES CC EM SISTEMAS DE CONTROLE

Os motores de corrente contínua são uma das máquinas primárias mais utilizadas na indústria ultimamente. Anos atrás a maior parte de pequenos motores usados para controle eram motores AC. Na realidade, motores AC são mais difíceis de controlar, especialmente no controle de

posição, e suas características são não-lineares, o que dificulta a análise. Já os motores CC são mais caros, devido às suas escovas e comutadores, e a variação do fluxo só é aplicada em determinados tipos de aplicações de controle. Antes de a tecnologia de ímãs permanentes desenvolver-se completamente, o torque por unidade de volume ou peso de um motor CC com campo de ímã permanente era longe do desejável. Hoje, com o desenvolvimento de ímãs, é possível obter muito torque por volume com motores de ímãs permanentes com custos menores. Além disso, os avanços nas tecnologias de comutadores e escovas tem tornado elas livres de manutenção. Os avanços na eletrônica de potência tem tornado motores sem escovas bastante populares em sistemas de controle de alta performance. Os avanços nas técnicas de construção têm contribuído na fabricação de motores CC de baixa inércia, assim contribuindo numa relação torque inércia maior, e uma constante de tempo menor têm aberto novas aplicações para motores CC em equipamentos periféricos para computadores, como impressoras e *drivers* de CD-ROM, assim como na automatização e máquinas industriais.

2.4.1 Princípios Operacionais Básicos de Motores CC

O motor CC é basicamente um transdutor de torque que converte energia elétrica em energia mecânica. O torque desenvolvido no eixo do motor é diretamente proporcional ao fluxo de campo e da corrente de armadura.

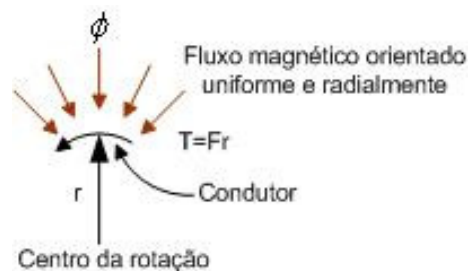


Figura 2.17 Produção de torque de um motor CC

Como mostrado na figura 2.17, um condutor com corrente é colocado em um campo magnético de fluxo Φ , e esse condutor está a uma distância r

do centro da rotação. A relação entre o torque desenvolvido, o fluxo Φ , e a corrente i_a é:

$$T_m = K_m \phi i_a \quad 2.33$$

onde T_m é o torque do motor (N.m, lb.ft), Φ o fluxo magnético (webers), i_a a corrente de armadura (amperes), e K_m é uma constante proporcional.

Junto com a formação do torque, quando o condutor se move no campo magnético, uma tensão é gerada nos seus terminais. Essa tensão, a força contra-eletromotriz, que é proporcional à velocidade do eixo, tende a se opor ao sentido da corrente. A relação entre a força contra-eletromotriz e a velocidade do eixo é

$$e_b = K_m \phi \omega_m \quad 2.34$$

onde e_b é a força contra-eletromotriz (Volts), e ω_m é a velocidade do eixo (rad/s) do motor. As equações 2.33 e 2.34 são as bases da operação do motor CC.

2.4.2 Classificações Básicas de Motores CC

Em geral, o campo magnético de um motor CC pode ser produzido por enrolamentos ou ímãs permanentes. Com a popularização dos motores CC de ímãs permanentes em aplicações de sistemas de controle, nos concentraremos nesse tipo de motor. Esses motores podem ser classificados de acordo com seu esquema de comutação e montagem da armadura. Motores CC convencionais têm escovas e comutadores mecânicos. Entretanto, em uma classe importante de motores CC a

comutação é feita eletronicamente; esse tipo de motor é chamado de motor CC sem escovas.

2.4.3 Modelamento Matemático de Motores CC com ímãs permanentes (PM)

Como motores CC são bastante usados em sistemas de controle, para finalidades analíticas, é necessário estabelecer modelos matemáticos para motores CC para aplicações de controle. Usamos o circuito equivalente da figura 2.18 para representar um motor CC de ímã permanente.

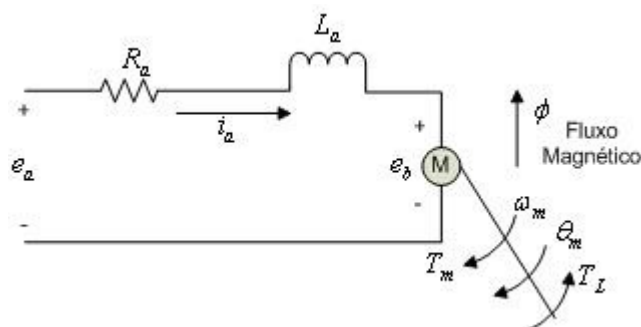


Figura 2.18 Circuito do enrolamento de armadura

A armadura é modelada como um circuito com resistência R_a conectada em série com uma indutância L_a , e uma fonte de tensão e_b representando a força contra-eletromotriz na armadura quando o rotor gira. As variáveis e os parâmetros do motor são definidos a seguir:

- $i_a(t)$ = corrente na armadura
- R_a = resistência na armadura
- $e_b(t)$ = força contra-eletromotriz
- $T_L(t)$ = torque de carga
- $T_m(t)$ = torque do motor
- $\theta_m(t)$ = deslocamento do rotor
- K_i = constante de torque
- L_a = indutância na armadura
- $e_a(t)$ = tensão aplicada
- K_b = constante da força contra-eletromotriz
- ϕ = fluxo magnético no entreferro

- $\omega_m(t)$ = velocidade angular do rotor
- J_m = inércia do rotor
- B_m = coeficiente de atrito viscoso

Com base no circuito da figura 2.18, o controle do motor CC é aplicado nos terminais da armadura na forma da tensão aplicada $e_a(t)$. Para uma análise linear, assumimos que o torque desenvolvido pelo motor é proporcional ao fluxo de entreferro e a corrente de armadura. Assim

$$T_m(t) = K_m(t)\phi i_a(t) \quad 2.35$$

Como ϕ é constante, a equação 2.33 pode ser escrita:

$$T_m(t) = K_i i_a(t) \quad 2.36$$

onde K_i é a constante de torque em N.m/A, lb.ft/A.

Começando com a tensão de controle na entrada $e_a(t)$, as equações de causa efeito para o circuito do motor na figura 2.18 são:

$$\frac{di_a(t)}{dt} = \frac{1}{L_a} e_a(t) - \frac{R_a}{L_a} i_a(t) - \frac{1}{L_a} e_b(t) \quad 2.37$$

$$T_m(t) = K_i i_a(t) \quad 2.38$$

$$e_b(t) = K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt} = K_b \omega_m(t) \quad 2.39$$

$$\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = \frac{1}{J_m} T_m(t) - \frac{1}{J_m} T_L(t) - \frac{B_m}{J_m} \frac{d\theta_m(t)}{dt} \quad 2.40$$

onde $T_L(t)$ representa um torque de carga.

Das equações 2.37 até 2.40 $e_a(t)$ é a causa inicial, $di_a(t)/dt$ é o efeito imediato devido à tensão aplicada $e_a(t)$, assim pela equação 2.38, $i_a(t)$ gera o torque $T_m(t)$, ao passo que a equação 2.39 define a força contra-

eletromotriz, e finalmente, na equação 2.40, o torque $T_m(t)$ causa a velocidade angular $\omega_m(t)$ e o deslocamento $\theta_m(t)$.

Aplicando a transformada de Laplace nas equações 2.37 a 2.40, e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos:

$$I_a(s) = [E_a(s) - E_b(s)] \frac{1}{L_a s + R_a} \quad 2.41$$

$$T_m(s) = K_i I_a(s) \quad 2.42$$

$$\Omega(s) = \frac{T_m(s) - T_L(s)}{J_m s + B_m} \quad 2.43$$

$$E_b(s) = K_b s \theta(s) = K_b \Omega(s) \quad 2.44$$

$$\theta_m(s) = \frac{1}{s} \Omega(s) \quad 2.45$$

Sendo a função de transferência entre o deslocamento do motor θ_m e a tensão de entrada E_a é

$$\frac{\Theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_i}{L_a J_m s^3 + (R_a J_m + B_m L_a) s^2 + (K_b K_i + R_a B_m) s} \quad 2.46$$

para $T_L(t)$ nulo.

A figura 2.19 mostra a representação em diagrama de blocos do sistema motor CC. A vantagem do uso de diagrama de blocos é a possibilidade de mostrar a função de transferência de cada parte do sistema. Como se pode ser colocado em evidência no denominador da equação 2.46, o significado da função de transferência $\Theta_m(s)/E_a(s)$ é que o motor CC é essencialmente um dispositivo integrador entre essas duas variáveis. Isto é esperado, já que $e_a(t)$ é uma constante de entrada, o deslocamento de saída do motor se comportará como uma saída de um integrador; ou seja, aumentará linearmente com o tempo.

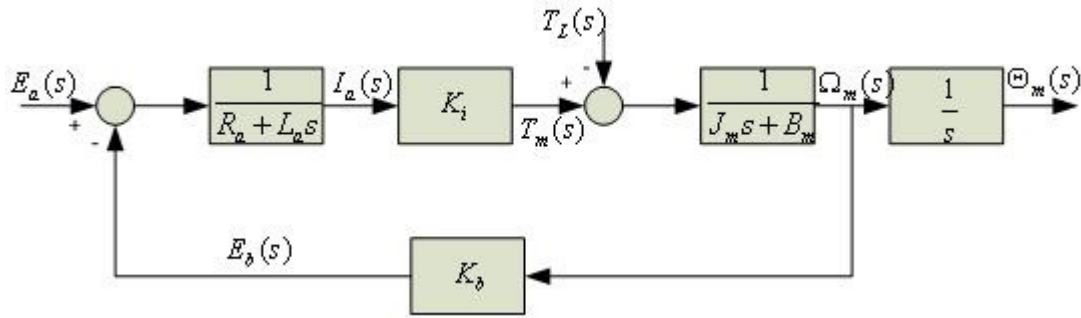


Figura 2.19 Diagrama de blocos do motor CC com ímãs permanentes

Cabe observar que embora um motor CC seja basicamente um sistema sem realimentação, o diagrama de blocos da figura 2.19 mostra que o motor tem uma realimentação interna causada pela força contra-eletromotriz. Fisicamente, a força contra-eletromotriz representa a realimentação de um sinal que é proporcional à velocidade do motor. Consequentemente, a força contra-eletromotriz tende a melhorar a estabilidade do motor, e em geral, a estabilidade do sistema.

Uma finalidade dessa representação gráfica do modelo matemático do motor CC de ímãs permanentes é a possibilidade de simulação pelo *Simulink*®. Este pacote computacional é um simulador gráfico acoplado ao Matlab®.

Exercícios computacionais (em classe)

- 1) Simular o motor CC usando *Simulink*® para $J_m = 10$ $B = 1$ $L_a = 1$ $R_a = 10$ $K_i = K_b = 1$. Consideremos as saídas posição θ e velocidade ω .
- 2) Simular o sistema de controle de posição e velocidade (servo-mecanismo). Usamos controle proporcional (P) e proporcional-integral (PI) e incluímos controles servo e regulatório.

Embora funcionalmente K_i e K_b sejam dois parâmetros separados, para um dado motor, os seus valores são idênticos se K_b é

representado em V/rad/sec e K_i é em N.m/A, ou seja, num mesmo sistema de unidades.

2.5 AMPLIFICADORES OPERACIONAIS

Amplificadores operacionais, ou simplesmente amp-ops, são uma conveniente maneira de construir, implementar, ou realizar funções de transferências em sistemas contínuos ou no domínio s. Em sistemas de controle, amp-ops são frequentemente usados para implementar os controladores ou compensadores que envolvem o processo de projeto de sistema de controle. Em consequência, é útil ilustrar configurações comuns de amp-op. Uma visão aprofundada de amp-ops vai além do escopo dessa matéria. Primeiramente iremos mostrar como implementar uma função de transferência de primeira ordem com amp-ops enquanto mantemos em mente que ordens superiores são também importantes. De fato, podemos ter funções de transferência superiores conectando configurações de amp-op de primeira ordem. Somente uma amostragem representativa das muitas configurações de amp-op é discutida.

2.5.1 Amp-Op Ideal

Quando utilizamos uma boa prática da engenharia, um amp-op pode ser analisado como ideal. O circuito do amp-op ideal é mostrado na figura 2.20 e tem as seguintes propriedades:

1. A tensão entre os terminais + e - é zero; ou seja, $e^+ = e^-$. Essa propriedade é comumente chamada de terra virtual ou curto-circuito virtual.
2. As correntes que entram nos terminais + e - são nulas. Assim, a impedância de entrada é infinita.
3. A impedância vista olhando no terminal de saída é nula. Assim, a saída é uma fonte de tensão ideal.

4. A relação entrada-saída é $e_o = A(e^+ - e^-)$, onde o ganho A tende ao infinito.

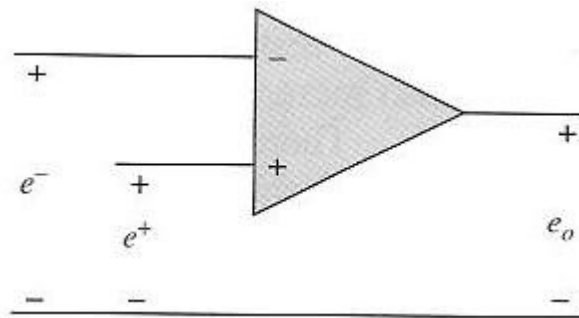


Figura 2.20 Diagrama do amplificador operacional

A aplicação dessas propriedades ideais permite determinar a relação entrada-saída para muitas configurações de amp-op. Um amp-op não pode ser usado como mostrado na figura 2.20. Na verdade, operação linear requer a adição da realimentação do sinal de saída com o terminal de entrada $-$.

2.5.2 Somas e Diferenças

O somador de sinais é um elemento importante no diagrama de blocos. Quando esses sinais são tensões, o amp-op fornece uma maneira simples de somar ou subtrair sinais como mostrado na figura 4-57, onde todos os resistores têm os mesmos valores. Usando superposição e propriedades ideais dadas anteriormente, a relação de entrada-saída na figura 2.21(a) é $v_o = -(v_a - v_b)$. Assim, a saída é a soma negativa das tensões de entrada. Quando uma soma positiva é desejada, o circuito da figura 2.21b(b) pode ser usado; neste caso, a saída e_o é dada por $e_o = e_a + e_b$. Modificando a figura 2.21(b) ligeiramente temos o circuito diferencial mostrado na figura 2.21(c), que tem uma relação entrada-saída de $e_o = e_b - e_a$.

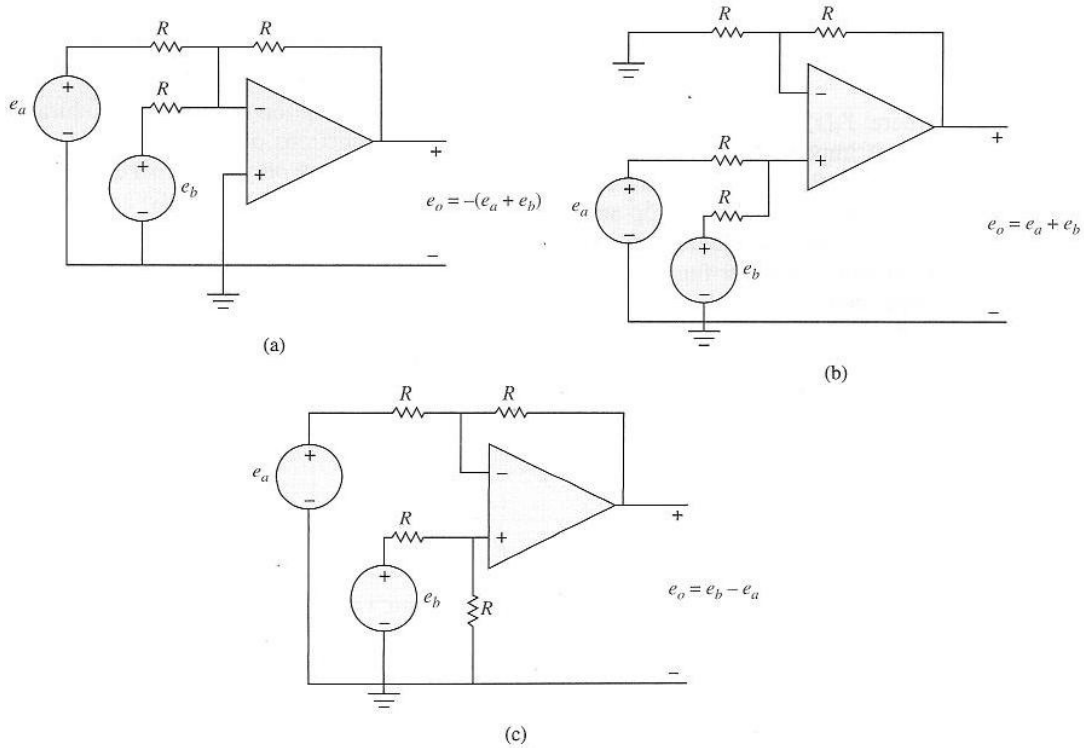


Figura 2.21 Amplificadores operacionais usados como somador e comparador

2.5.3 Configurações de Amp-Op de Primeira Ordem

Além de somar e subtrair sinais, os amp-ops podem ser usados para funções de transferência de sistemas contínuos. Quando muitas alternativas estão disponíveis, exploraremos somente aquela que usa a configuração de amp-op inversor mostrado na figura 2.22. Na figura, $Z_1(s)$ e $Z_2(s)$ são impedâncias comumente compostas de resistores e capacitores. Indutores não são comuns de serem usados porque eles tendem a ser mais volumosos e mais caros. Usando as propriedades de amp-op ideal, a relação de entrada-saída, ou função de transferência, do circuito mostrado na figura 2.22 pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = \frac{-1}{Z_1(s)Y_2(s)} \\
 &= -Z_2(s)Y_1(s) = -\frac{Y_1(s)}{Y_2(s)}
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

onde $Y_1(s) = 1/Z_1(s)$ e $Y_2(s) = 1/Z(s)$ são as admitâncias associadas com o circuito de impedâncias. As diferentes formas de função de transferência dadas na equação 2.47 se aplicam convenientemente a diferentes composições do circuito de impedância.

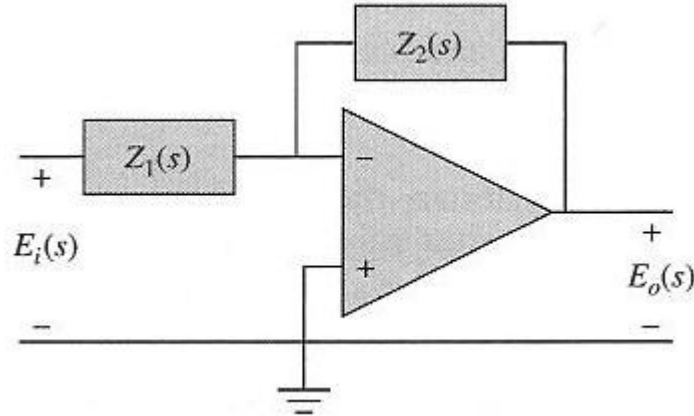
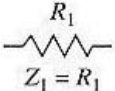
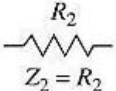
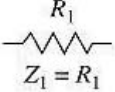


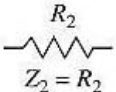
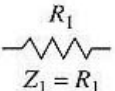
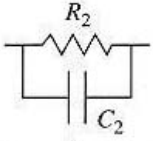
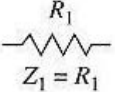
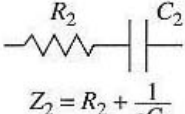
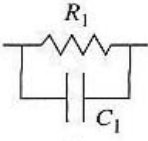
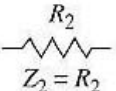
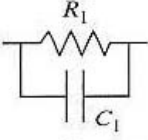
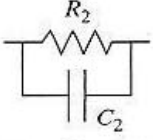


Figura 2.22

Usando a configuração de amp-op inversor mostrado na figura 2.22 e usando resistores e capacitores como elementos que compõem $Z_1(s)$ e $Z_2(s)$, a tabela 2.1 mostra algumas implementações de função de transferência. Como visto na tabela, é possível implementar pólos e zeros ao longo do eixo real negativo assim como na origem do plano s . Porque a configuração de amp-op inversor foi usada, todas as funções de transferências tem ganhos negativos. O ganho negativo é geralmente não emitido, desde que é simples adicionar um ganho de -1 ao sinal de entrada e de saída para tornar o ganho positivo.

Tabela 2.1 Funções de transferência de amp-op inversor

(a)	 $Z_1 = R_1$	 $Z_2 = R_2$	$-\frac{R_2}{R_1}$	Inversor $R_1 = R_2, e_o = -e_i$
(b)	 $Z_1 = R_1$	 $Y_2 = sC_2$	$\left(\frac{-1}{R_1 C_2}\right) \frac{1}{s}$	Pólo na origem Integrador
(c)	 $Y_1 = sC_1$	 $Z_2 = R_2$	$(-R_2 C_1)s$	Zero na origem. Diferenciador
(d)	 $Z_1 = R_1$	 $Y_2 = \frac{1}{R_2} + sC_2$	$\frac{-\frac{1}{R_1 C_2}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}}$	Pólo em $\frac{-1}{R_2 C_2}$ Com um ganho DC de $-R_2/R_1$
(e)	 $Z_1 = R_1$	 $Z_2 = R_2 + \frac{1}{sC_2}$	$\frac{-R_2}{R_1} \left(\frac{s + 1/R_2 C_2}{s} \right)$	Pólo na origem e um zero em $-1/R_2 C_2$ Controlador PI
(f)	 $Y_1 = \frac{1}{R_1} + sC_1$	 $Z_2 = R_2$	$-R_2 C_1 \left(s + \frac{1}{R_1 C_1} \right)$	Zero em $s = \frac{-1}{R_1 C_1}$ Controlador PD
(g)	 $Y_1 = \frac{1}{R_1} + sC_1$	 $Y_2 = \frac{1}{R_2} + sC_2$	$\frac{\frac{-C_1}{C_2} \left(s + \frac{1}{R_1 C_1} \right)}{s + \frac{1}{R_2 C_2}}$	Pólo em $s = \frac{-1}{R_2 C_2}$ Zero em $s = \frac{-1}{R_1 C_1}$ Controlador de atraso ou avanço

Exemplo 2.3

Como um exemplo de função de transferência com amp-op, considere a função de transferência:

$$G(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_D s$$

onde K_P , K_I , e K_D são constantes reais. Este é o controlador PID, sendo o primeiro termo um ganho proporcional, o segundo termo um ganho integral, e o terceiro termo um ganho derivativo. Usando a tabela 2.1, o ganho proporcional pode ser implementado usando a linha (a), o termo integral pode ser implementado usando a linha (b), e o termo derivativo pode ser implementado usando a linha (c). Assim, por superposição, a função de transferência $G(s)$ do PID é a soma das respostas de cada termo de $G(s)$. Essa soma pode ser implementada conforme mostrado na figura 2.23. Fazendo a soma negativa, os ganhos negativos dos termos proporcional, integral, e derivativo são cancelados.

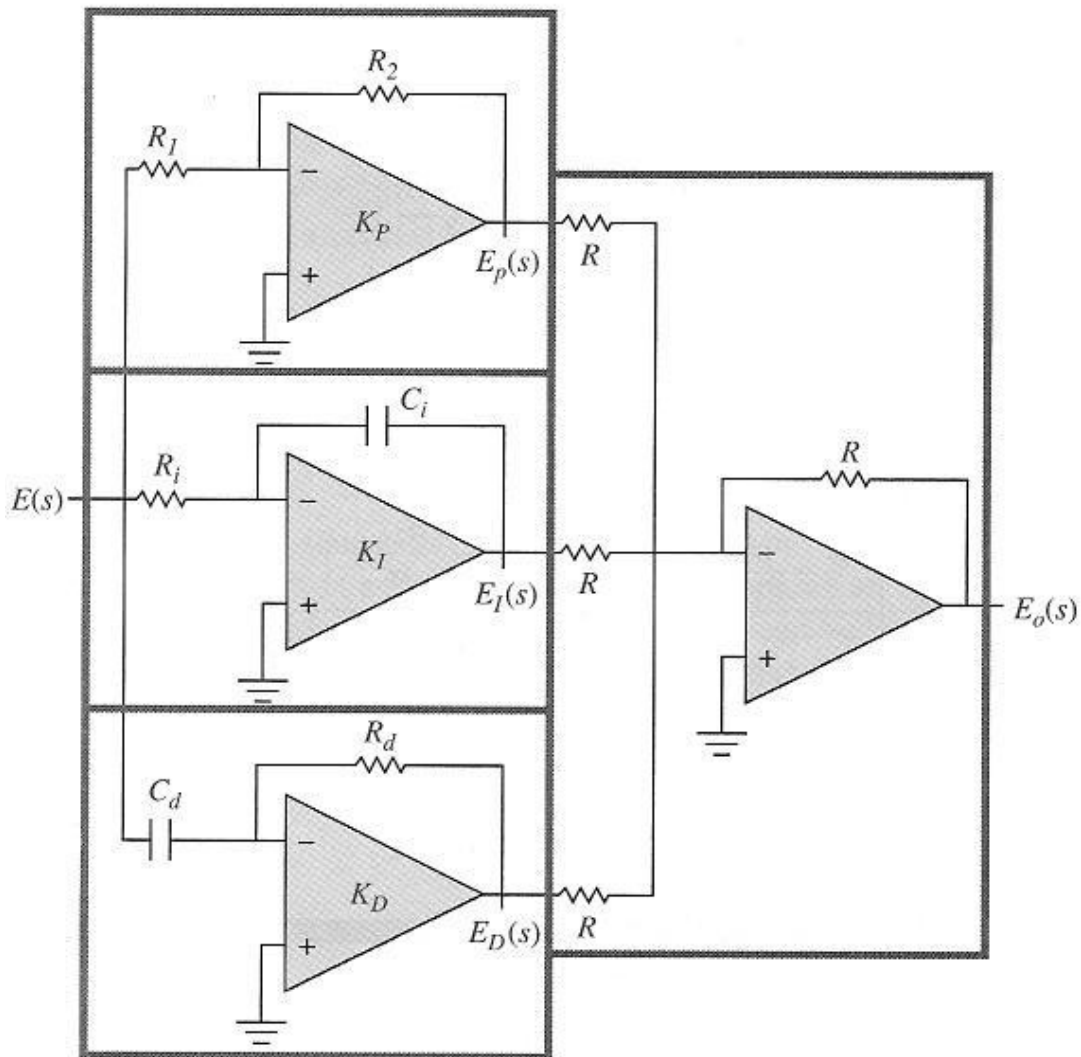


Figura 2.23 Implementação de controlador PID

As funções de transferência dos componentes do circuito amp-op na figura 2.23 são:

$$\text{Proporcional: } \frac{E_p(s)}{E(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \quad 2.49$$

$$\text{Integral: } \frac{E_I(s)}{E(s)} = -\frac{1}{R_i C_i s} \quad 2.50$$

$$\text{Derivativo: } \frac{E_D(s)}{E(s)} = -R_d C_d s \quad 2.51$$

A tensão de saída é

$$E_o(s) = -[E_p(s) + E_I(s) + E_D(s)] \quad 2.52$$

Assim, a função de transferência do circuito PID amp-op é

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E(s)} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_i C_i s} + R_d C_d s \quad 2.53$$

Igualando as equações 2.48 e 2.53, o projeto termina escolhendo os valores dos resistores e capacitores do circuito amp-op de modo que os valores desejados de K_p , K_I , e K_D sejam combinados. O projeto do controlador deve ser feito levando em consideração a disponibilidade dos capacitores e resistores padrões.

É importante notar que a Figura 2.23 é somente uma de muitas possibilidades de implementações da equação 2.48. Por exemplo, é possível implementar um controlador PID com somente três amp-ops. Também é comum adicionar componentes para limitar o ganho de alta frequência do diferenciador e limitar a magnitude de saída do integrador. Uma vantagem da implementação mostrada na figura 2.23 é

que cada uma das três constantes, K_p , K_I , e K_D , pode ser ajustada ou sintonizada individualmente variando o valor do resistor em seu respectivo circuito amp-op.

Exercício. Implemente um PID com apenas dois amp-ops. (classe)

REFERÊNCIAS:

KUO, B. C., Automatic Control Systems, 7th ed, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1995, Prentice Hall, 1995.

OGATA, K. Engenharia de Controle Moderno, 4^a edição. Prentice Hall, São Paulo, 2003.