Aula 3 Cálculo 3B **Aula 12** Cálculo 3A

Aula Passada

Introdução e classificação de equações

Aula Hoje

eq lineares 1ª ordem

EDO
- 1ª ordem
  - lineares
  - não lineares
- 2ª ordem

2.1 Equações lineares de 1ª ordem: Fator integrante

$$\boxed{y' + p(t)y = f(t)}$$ → equação linear

(linear na variável y)

$(y_1+y_2)' + p(t)(y_1+y_2) = f(t)$

$\Leftrightarrow (y_1' + p(t)y_1) + (y_2' + p(t)y_2) = f(t)$

Vamos desenvolver um método para resolver este tipo de EDO

Caso 0

$y' = f(t)$ ($p(t) \equiv 0$)

→ Por cálculo I $\boxed{y(t) = \int f(t)\,dt + c}$

Caso 1

$y' + ay = 0$ ($f(t) \equiv 0$ $p(t) = a$)

→ $y' = -ay$ $y > 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{y'(t)}{y(t)}}_{\text{integrável}} = -a$

$\Rightarrow \int \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \int -a\,dt$

(regra da cadeia

$\Rightarrow \ln(y(t)) = -at + c$ $y > 0$

$\Leftrightarrow y(t) = e^{-at+c} = e^{c}\cdot e^{-at} = Ke^{-at}$

$\boxed{y(t) = Ke^{-at}}$ K constante

Caso 2

$y' + ay = f(t)$ ($p(t) = a$)

→ Note que $\frac{d}{dt}[e^{at}\cdot y(t)] = ae^{at}y(t) + e^{at}y'(t)$
$= e^{at}\underbrace{(y'(t) + ay(t))}$

Multiplicando e^{at} em ambos os lados da equação

$\underbrace{e^{at}(y' + ay)} = e^{at}f(t)$

$\underbrace{\frac{d}{dt}[e^{at}y]}_{\text{integrável}} = e^{at}f(t)$

Integrando com relação a t.

$$\int \frac{d}{dt}[e^{at}y]\,dt = \int e^{at}f(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow e^{at}y(t) = \int e^{at}f(t)\,dt + C$$

$$\boxed{y(t) = e^{-at}\cdot\left[\int e^{at}f(t)\,dt + C\right]}$$ → difícil, o quanto a f for

Caso Geral Método do fator integrante

$$y' + p(t)y = f(t)$$

Queremos caracterizar $\mu(t)$ tal que ao multiplicar na equação:

$$\underbrace{\mu(t)y' + \mu(t)p(t)y}_{\text{quero isso}} = \mu(t)f(t) \quad (*)$$

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)\cdot y(t)]$$

torne o lado esquerdo integrável

Vamos achar uma expressão para $\mu(t)$:

$\mu(t)y' + \mu(t)p(t)y = \frac{d}{dt}[\mu(t)y(t)] = \mu(t)y' + \mu'(t)y$ (regra do produto)

$\Leftrightarrow \mu(t)p(t) = \mu'(t)$ $\mu > 0$

$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = p(t)$

$\Rightarrow \ln \mu(t) = \int p(t)\,dt + C^{=0}$

$\boxed{\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt}}$ Fator integrante

Voltando em (*) $\frac{d}{dt}[\mu(t)y(t)] = \mu(t)f(t)$

integrando

$$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)\cdot f(t)\,dt + C$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\cdot\left[\int \mu(t)\cdot f(t)\,dt + C\right]}$$ → não precisa decorar

Exemplo Resolva a EDO $y' - 2y = 4 - t$

Solução: LINEAR 1ª ORDEM

• Determinar o fator integrante:

$$\mu(t) = e^{\int -2\,dt} = e^{-2t}$$

• Multiplica $\mu(t)$ na equação

$$\underbrace{e^{-2t}y' - 2e^{-2t}y} = e^{-2t}(4-t)$$

$$\int \frac{d}{dt}\left[e^{-2t}\cdot y\right]dt = \int e^{-2t}(4-t)\,dt$$

$$e^{-2t}y = \int \left(4e^{-2t} - \underbrace{t}_{u}\underbrace{e^{-2t}}_{dv}\right)dt = \frac{4}{-2}e^{-2t} + \left[\frac{1}{2}t\cdot e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t}\right] + c$$

partes

$$= -2e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + C$$

$$y(t) = -2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + Ce^{2t}$$

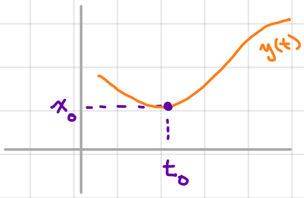
$$\boxed{y(t) = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + Ce^{2t}}$$ Solução Geral

Note que acima obtemos uma família de soluções

definição Um problema de valor inicial é a expressão

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \rightarrow \text{equação} \\ y(t_0) = y_0 \rightarrow \text{condição inicial} \end{cases}$$

Além disso, uma solução do PVI é uma função que satisfaz a EDO e passa pelo ponto (t_0, x_0)



↳ Resolver a equação e achar o C

Exemplo Resolva o PVI $\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

Solução LINEAR 1ª ORDEM

ATENÇÃO! a equação não está na forma do método

$$ty' + 2y = 4t^2$$

para $t>0$ dividindo por t:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \qquad \frac{2}{t} = p(t)$$

1) Calculando o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} \underset{t>0}{=} e^{2\ln t} = e^{\ln t^2} = t^2$$

2) Multiplicando na equação

$$t^2\left(y' + \frac{2}{t}y\right) = (4t)t^2$$

$$\underbrace{t^2y' + 2ty} = 4t^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[t^2\cdot y(t)\right] = 4t^3$$

pelo método

integrando: $\displaystyle\int \frac{d}{dt}\left[t^2 y(t)\right]dt = \int 4t^3\,dt$

$$\Leftrightarrow t^2\cdot y(t) = t^4 + C$$

$$\boxed{y(t) = t^2 + \frac{C}{t^2}}$$ solução geral

3) Achando a constante C tal que $y(1) = 2$

$$2 = y(1) = 1^2 + \frac{C}{1^2} \Leftrightarrow 1 = \frac{C}{1} \Leftrightarrow \boxed{C = 1}$$

substituindo $\boxed{y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}}$ Solução do PVI

Exemplo: Resolva o PVI $\begin{cases} ty'(t) - 3y(t) = t^4\cos t \\ y(2\pi) = 0 \end{cases}$

Solução LINEAR 1ª ORDEM

1) Pondo da forma $y' + p(t)y = f(t)$:

para $t>0$, dividindo por t

$$y' - \frac{3}{t}y = t^3\cos t$$

2) Calculando o fator integrante:

$$\mu(t) = e^{\int -\frac{3}{t}dt} = e^{-3\ln t} = e^{\ln t^{-3}} = t^{-3}$$

3) Multiplicando na equação

$$t^{-3}\left(y' - \frac{3}{t}y\right) = t^3\cos t\cdot t^{-3}$$

$$\underbrace{t^{-3}y' - \frac{3}{t^4}y} = \cos t$$

$$\frac{d}{dt}\left[t^{-3}\cdot y\right] = \cos t$$

integrando

$$t^{-3}\cdot y(t) = \int \frac{d}{dt}\left[t^{-3}\cdot y\right] = \int \cos t = \operatorname{sen} t + c$$

$$y(t) = t^3\operatorname{sen} t + ct^3$$

4) Achando c:

$0 = y(2\pi) = (2\pi)^3 \operatorname{sen} 2\pi + c.(2\pi)^3$

$\Leftrightarrow \quad c = 0$

Substituindo $\boxed{y(t) = t^3 \operatorname{sen} t}$ solução do PVI

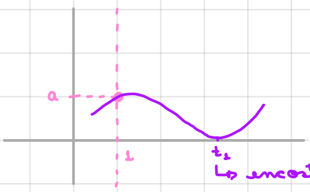
$0 = y(0) = 1 + \frac{(a-3)}{e}$

$a - 3 = -e$

$\boxed{a = 3 - e}$

Exemplo Determine a tal que a solução de $\begin{cases} y' - 2y = -4t \\ y(1) = a \end{cases}$ encoste mas NÃO atravesse o eixo t.

Solução



↳ encosta $\to y(t_1) = 0$

não atravessa $\to y'(t_1) = 0$

1) Seja t_1 tal que $\begin{cases} y(t_1) = 0 \\ y'(t_1) = 0 \end{cases}$

Substituindo na equação

$$\cancel{y'(t_1)}^{0} - 2\cancel{y(t_1)}^{0} = -4t_1$$

$$\Rightarrow t_1 = 0$$

2) Resolvendo a equação linear

- $\mu(t) = e^{\int -2.dt} = e^{-2t}$

- multiplicando: $\underbrace{e^{-2t}y' - 2e^{-2t}y}$ $= -4te^{-2t}$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-2t}.y\right] = -4te^{-2}$$

- Integrando

$$\int \frac{d}{dt}\left[e^{-2t}.y\right]dt = \int -\overbrace{4t}^{u}\underbrace{e^{-2t}.dt}_{dv}$$

partes $u = 4t$ $dv = -e^{-2t}.dt$

$du = 4dt$ $v = \frac{1}{2}e^{-2t}$

$$e^{-2t}.y = 2e^{-2t}.t - \int \frac{1}{\cancel{2}}.e^{-2t}.\cancel{4}dt$$

$$= 2e^{-2t}t + e^{-2t} + c$$

$$y(t) = 2t + 1 + e^{2t}.c$$

- Achando c para $y(1) = a$:

$$a = y(1) = 2 + 1 + eC$$

$$C = (a-3)e^{-1}$$

Substituindo

$$y(t) = 2t + 1 + \underline{(a-3)}.e^{2t-1}$$

Determinando a

Exemplo Encontre o valor de y_0 para o qual a solução de $\begin{cases} y' - y = 1 + 3 \operatorname{sen} t \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ permanece finita quando $t \to \infty$

Solução

LINEAR 1ª ORDEM

1) fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int -dt} = e^{-t}$$

2) Multiplicando na equação

$$\underbrace{e^{-t}.y' - e^{-t}y} = e^{-t} + 3e^{-t}\operatorname{sen} t$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(e^{-t}.y\right) dt = \int e^{-t} + 3e^{-t}\operatorname{sen} t \; dt$$

$$e^{-t}y = -e^{-t} + \underbrace{\int 3e^{-t}\operatorname{sen} t .dt}_{\text{resolver esta!}} \quad (*)$$

$dv = -3e^{-t}dt$

$u = \operatorname{sen} t$

$$\int \overbrace{3e^{-t}}^{v}\underbrace{\operatorname{sen} t .dt}_{du} = -3e^{-t}\cos t - \int \overbrace{3e^{-t}}^{v}\underbrace{\cos t dt}_{du}$$

$dv = -3e^{-t}.dt$

$u = -\cos t$

$$= -3e^{-t}\cos t - \left[3e^{-t}\operatorname{sen} t + \int 3e^{-t}\operatorname{sen} t \, dt\right]$$

$$2\int 3e^{-t}\operatorname{sen} t dt = -3e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t)$$

$$\int 3e^{-t}\operatorname{sen} t dt = -\frac{3}{2}e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t)$$

Voltando em (*)

$$e^{-t}y = -e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t) + C$$

constante

$$y(t) = -1 - \frac{3}{2}(\cos t + \operatorname{sen} t) + Ce^{t}$$

3) achar C em função de y_0

$$y_0 = y(0) = -1 - \frac{3}{2} + C$$

$$\Rightarrow C = y_0 + 5/2$$

esse termo vai para ∞ quando $t \to \infty$

Então $y(t) = -1 - \frac{3}{2}(\cos t + \operatorname{sen} t) + \underbrace{(y_0 + 5/2)}_{\parallel \; 0}e^{t}$

para a solução ficar finita

$$\Rightarrow \boxed{y_0 = -5/2}$$