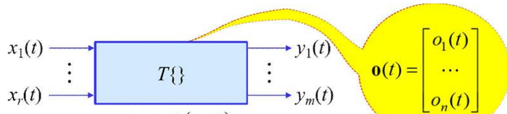
Representação de Sistemas contínuos LTI por Variáveis de Estado



$$\mathbf{y}(t) = T\{\mathbf{x}(t)\}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{Ao}(t) + \mathbf{Bx}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Co}(t) + \mathbf{Dx}(t)$$

Professor

Jorge Leonid Aching Samatelo

jlasam001@gmail.com

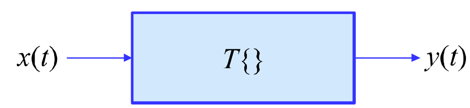
Índice

Tipos de Sistemas em relação ao número de I/O

Tipos de Sistemas em relação ao número de I/O

Classificação

- ❑ SISO (*Single Input Single Output*): uma entrada e uma saída.



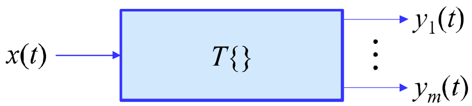
$$x(t) \xrightarrow{T} y(t)$$

$$y(t) = T\{x(t)\}$$

Tipos de Sistemas em relação ao número de I/O

Classificação

- SIMO (*Single Input Multiple Outputs*): uma entrada e múltiplas saídas.



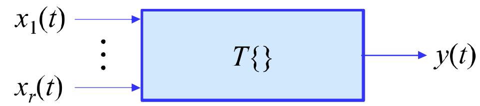
$$x(t) \xrightarrow{T} \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \cdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = T\{x(t)\}$$

Tipos de Sistemas em relação ao número de I/O

Classificação

- MISO (*Multiple Inputs Single Output*): múltiplas entradas e uma saída.



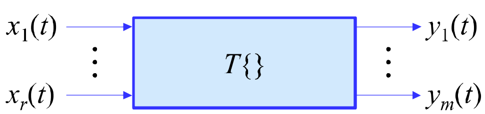
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ x_r(t) \end{bmatrix} \xrightarrow{T} y(t)$$

$$y(t) = T\{\mathbf{x}(t)\}$$

Tipos de Sistemas em relação ao número de I/O

Classificação

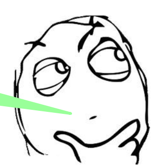
- MIMO (*Multiple Inputs Multiple Output*): múltiplas entradas e múltiplas saídas.



$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ x_r(t) \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \cdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = T\{\mathbf{x}(t)\}$$

Como podemos representar uma sistema LTI quando é MIMO?



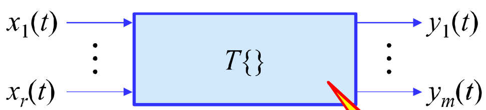
Através do uso de **variáveis de estado**

Representação por Variáveis de Estado

Representação por Variáveis de Estado

Variáveis de estado

- *Que é um estado*?
  - Denotadas como $o_1(t)$, $o_2(t)$, ..., $o_n(t)$ é o conjunto de variáveis tais que o conhecimento do valor destas variáveis e das entradas, com as equações que descrevem a dinâmica, fornece os estados futuros e as saídas futuras do sistema.



$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ \cdots\\ x_r(t)\end{bmatrix}\xrightarrow{T}\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\ \cdots\\ y_m(t)\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t)=T\{\mathbf{x}(t)\}$$

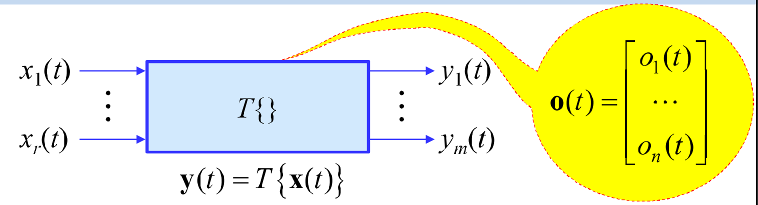
As variáveis de estados permitem descrever o funcionamento interno do sistema

$$\mathbf{o}(t)=\begin{bmatrix}o_1(t)\\ \cdots\\ o_n(t)\end{bmatrix}$$

Em outras áreas da ciência as **variáveis de estado** são chamadas de **variáveis ocultas**, já que, ao ser internas ao sistema não são observadas

Representação por Variáveis de Estado

Modelo por variáveis de estado para sistemas LTI MIMO

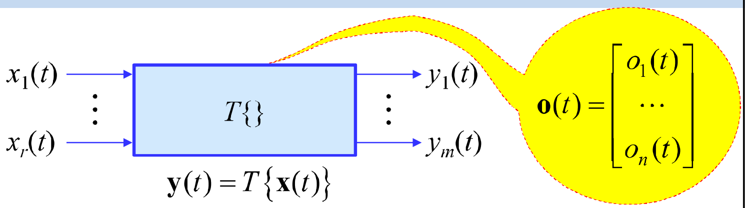


$$\mathbf{y}(t)=T\{\mathbf{x}(t)\}$$

- Supondo que o sistema MIMO seja LTI a representação por variáveis de estado vem descrita em duas partes.
  - **Equações de saída**. m equações lineares, especificamente, uma equação para cada saída.
  - **Equações de estado**. n EDO lineares de primeiro ordem, especificamente, é uma EDO de 1ro ordem para cada estado.

Representação por Variáveis de Estado

Modelo por variáveis de estado para sistemas LTI MIMO



$$\mathbf{y}(t)=T\{\mathbf{x}(t)\}$$

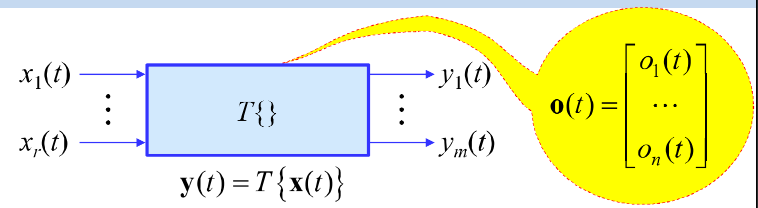
- **Equações de saída**. As saídas e as entradas considerando as variáveis de estado estão relacionadas linearmente, especificamente, cada saída é uma combinação linear das variáveis de estado e das entradas.

$$y_1(t)=c_{11}o_1(t)+c_{12}o_2(t)+\cdots+c_{1n}o_n(t)+d_{11}x_1(t)+d_{12}x_2(t)+\cdots+d_{1r}x_n(t)$$
$$y_2(t)=c_{21}o_1(t)+c_{22}o_2(t)+\cdots+c_{2n}o_n(t)+d_{21}x_1(t)+d_{22}x_2(t)+\cdots+d_{2r}x_n(t)$$
$$\vdots$$
$$y_m(t)=c_{m1}o_1(t)+c_{m2}o_2(t)+\cdots+c_{mn}o_n(t)+d_{m1}x_1(t)+d_{m2}x_2(t)+\cdots+d_{mr}x_n(t)$$

O conjunto de equações que relaciona as entradas com as saídas via as variáveis de estado pode ser representado elegantemente com a notação matricial.

Representação por Variáveis de Estado

Modelo por variáveis de estado para sistemas LTI MIMO



$$\mathbf{y}(t)=T\{\mathbf{x}(t)\}$$

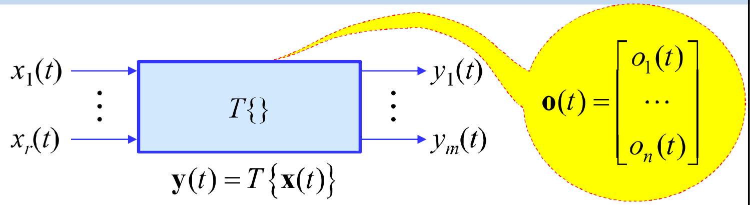
- **Equações de saída**. As saídas e as entradas considerando as variáveis de estado estão relacionadas linearmente, especificamente, cada saída é uma combinação linear das variáveis de estado e das entradas.

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{Co}(t)+\mathbf{Dx}(t)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ \vdots\\ y_m(t)\end{bmatrix}}_{=\mathbf{y}(t)}=\underbrace{\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\ c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ c_{m1}&c_{m2}&\cdots&c_{mn}\end{bmatrix}}_{=\mathbf{C}}\underbrace{\begin{bmatrix}o_1(t)\\ o_2(t)\\ \vdots\\ o_n(t)\end{bmatrix}}_{=\mathbf{o}(t)}+\underbrace{\begin{bmatrix}d_{11}&d_{12}&\cdots&d_{1r}\\ d_{21}&d_{22}&\cdots&d_{2r}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ d_{m1}&d_{m2}&\cdots&d_{mr}\end{bmatrix}}_{=\mathbf{D}}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}(t)}$$

Representação por Variáveis de Estado

Modelo por variáveis de estado para sistemas LTI MIMO



$$\mathbf{y}(t) = T\{\mathbf{x}(t)\}$$

- **Equações de estado**. As derivadas das variáveis de estado estão relacionadas linearmente, especificamente, cada derivada de 1ro ordem de um estado é uma combinação linear das variáveis de estado e das entradas.

$$\frac{do_1(t)}{dt} = a_{11}o_1(t) + a_{12}o_2(t) + \cdots + a_{1n}o_n(t) + b_{11}x_1(t) + b_{12}x_2(t) + \cdots + b_{1r}x_n(t)$$

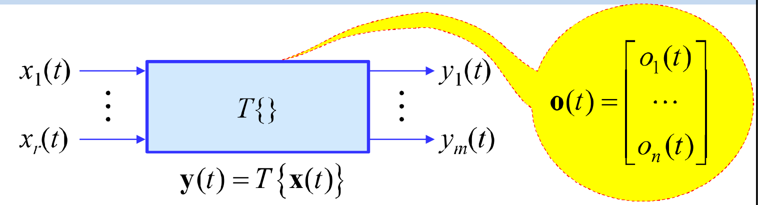
$$\frac{do_2(t)}{dt} = a_{21}o_1(t) + a_{22}o_2(t) + \cdots + a_{2n}o_n(t) + b_{21}x_1(t) + b_{22}x_2(t) + \cdots + b_{2r}x_n(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{do_n(t)}{dt} = a_{n1}o_1(t) + a_{n2}o_2(t) + \cdots + a_{nn}o_n(t) + b_{n1}x_1(t) + b_{n2}x_2(t) + \cdots + b_{nr}x_n(t)$$

Representação por Variáveis de Estado

Modelo por variáveis de estado para sistemas LTI MIMO



$$\mathbf{y}(t) = T\{\mathbf{x}(t)\}$$

- **Equações de estado**. As derivadas das variáveis de estado estão relacionadas linearmente, especificamente, cada derivada de 1ro ordem de um estado é uma combinação linear das variáveis de estado e das entradas.

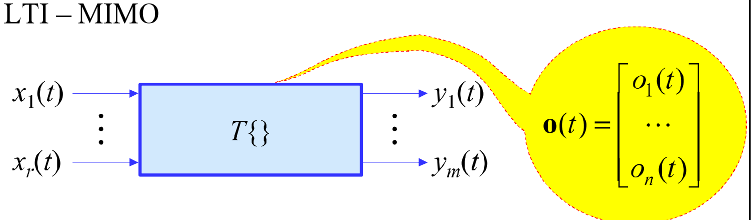
$$\frac{d}{dt}\mathbf{o}(t) = \mathbf{A}\mathbf{o}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{o}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} o_1(t) \\ o_2(t) \\ \vdots \\ o_n(t) \end{bmatrix}}_{=\mathbf{o}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{=\mathbf{x}(t)}$$

Representação por Variáveis de Estado

Modelo por variáveis de estado para sistemas LTI MIMO

- *Resumindo*
  - Seja o sistema LTI – MIMO



  - Seu modelo de variáveis de estado tem a forma

Matriz de estado **Matriz de entrada**

$$\frac{d}{dt}\mathbf{o}(t) = \mathbf{A}\mathbf{o}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{o}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t)$$

Matriz de saída **Matriz de Trasmissão Direta**

Representação por Variáveis de Estado

Modelo por variáveis de estado para sistemas LTI MIMO

- Muitas técnicas estão disponíveis para obtenção da representação por variáveis de estado de sistemas LTI descritos por EDO lineares de coeficientes constantes. Mas a representação não é única.

- Modelos com variáveis físicas
- Modelos a partir de EDO lineares
  - Controlável.
  - Observável.
  - Diagonal.
  - Jordan.

Representação por Variáveis de Estado

Modelos com variáveis físicas

- Esta modelagem consiste em determinar as equações diferenciais que descrevem a dinâmica do SISTEMA FÍSICO analisado e posteriormente organizá-las na forma matricial.

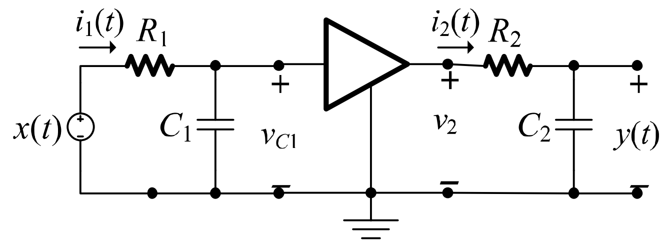
- O número de variáveis de estado que definem completamente a dinâmica do sistema é igual ao número de elementos armazenadores de energia presentes no sistema (capacitores e indutores em circuitos elétricos).

- Implicando que, as grandezas relacionadas com os elementos armazenadores de energia (correntes e tensões dos capacitores e indutores) POSSAM ser escolhidas como as variáveis de estado.

Representação por Variáveis de Estado

Exemplo

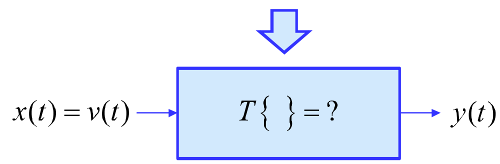
- Para o circuito da figura, determine um modelo por variáveis de estado, onde a entrada é fonte de tensão e a saída é a tensão no segundo capacitor



$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

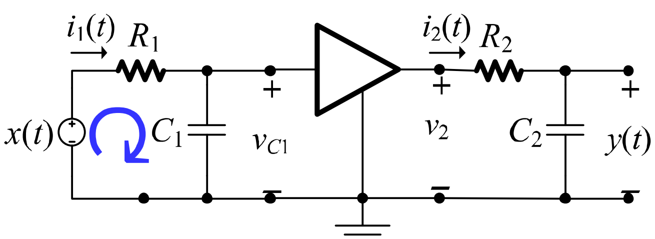
$$v_{o(AMP)}(t) = Kv_{i(AMP)}(t)$$



Representação por Equações Diferenciais

Solução

- **Paso 1**. Determinamos as equações lineares que caracterizam ao sistema.



- Usando a Lei de Malhas de *Kirchoff* na primeira malha obtemos:

$$x(t) = Ri_1(t) + v_{C1}(t)$$

- Onde,

$$i_1(t) = C_1\frac{dv_{C1}(t)}{dt}$$

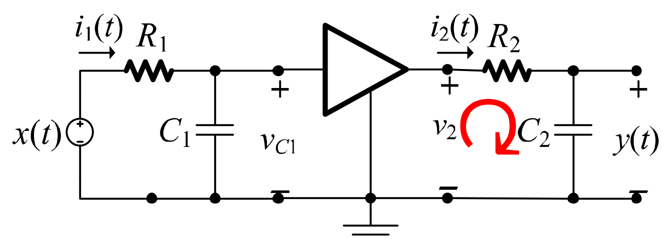
- Substituindo a 2da equação na 1ra equação obtemos:

$$x(t) = RC_1\frac{dv_{C1}(t)}{dt} + v_{C1}(t)$$

Representação por Equações Diferenciais

Solução

- **Paso 1**. Determinamos as equações lineares que caracterizam ao sistema.



- Usando a Lei de Malhas de *Kirchoff* na segunda malha obtemos:

$$v_2(t) = Ri_2(t) + v_{C2}(t)$$

- Onde,

$$i_2(t) = C_2\frac{dv_{C2}(t)}{dt}$$

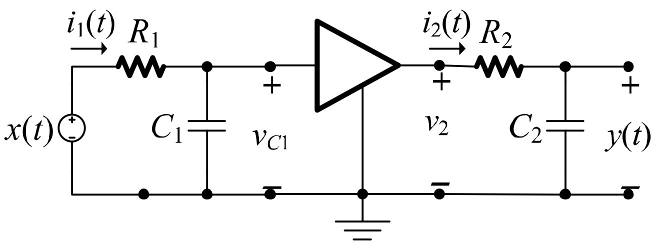
$$v_2(t) = Kv_{C1}(t)$$

- Substituindo a 2da e 3ra equação na 1ra equação obtemos:

$$Kv_{C1}(t) = RC_2\frac{dv_{C2}(t)}{dt} + v_{C2}(t)$$

Solução

- **Paso 1**. Determinamos as equações lineares que caracterizam ao sistema.



  - Determinamos a equação de saída.

$$y(t) = v_{C2}(t)$$

Representação por Equações Diferenciais

Solução

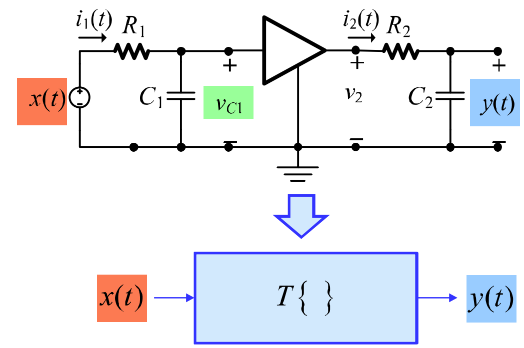
- **Paso 1**. Determinamos as equações lineares que caracterizam ao sistema.
  - Então o sistema de EDOs lineares que determina a relação de entrada e saída do circuito são:

$$x(t) = RC_1\frac{dv_{C1}(t)}{dt} + v_{C1}(t)$$

$$Kv_{C1}(t) = RC_2\frac{dv_{C2}(t)}{dt} + v_{C2}(t)$$

$$y(t) = v_{C2}(t)$$

Variáveis de entrada
Variáveis de saída
Variáveis de estado.



  - Podemos ver que as variáveis ocultas do sistema são:

$$v_{C1}(t)$$
$$v_{C2}(t)$$

Representação por Equações Diferenciais

Solução

- **Paso 2**. Determinamos o modelo em variáveis de estado
  - Admitindo como variáveis de estado

$$o_1(t) = v_{C1}(t)$$
$$o_2(t) = v_{C2}(t)$$

  - O conjunto de equações do sistemas será rescrito como:

$$x(t) = RC_1\frac{do_1(t)}{dt} + o_1(t)$$

$$Ko_1(t) = RC_2\frac{do_2(t)}{dt} + o_2(t)$$

$$y(t) = o_2(t)$$

  - Ou equivalentemente:

$$\frac{do_1(t)}{dt} = -\frac{1}{RC_1}o_1(t) + \frac{1}{RC_1}x(t)$$

$$\frac{do_2(t)}{dt} = \frac{K}{RC_2}o_1(t) - \frac{1}{RC_2}o_2(t)$$

$$y(t) = o_2(t)$$

Representação por Equações Diferenciais

Solução

- **Paso 2**. Determinamos o modelo em variáveis de estado
  - Determinando as **Equações de estado**.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{do_1(t)}{dt} \\ \dfrac{do_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC_1}o_1(t) + \dfrac{1}{RC_1}x(t) \\ \dfrac{K}{RC_2}o_1(t) - \dfrac{1}{RC_2}o_2(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC_1}o_1(t) \\ \dfrac{K}{RC_2}o_1(t) - \dfrac{1}{RC_2}o_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{RC_1}x(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC_1} & 0 \\ \dfrac{K}{RC_2} & -\dfrac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}} \begin{bmatrix} o_1(t) \\ o_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{RC_1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}} x(t)$$

Representação por Equações Diferenciais

Solução

- **Paso 2**. Determinamos o modelo em variáveis de estado
  - Determinando as **Equações de saída**.

$$
\begin{aligned}
y(t) &= o_2(t) \\
&= 0.o_2(t) + 1.o_2(t) \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{C}} \begin{bmatrix} o_1(t) \\ o_2(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- Finalmente, o modelo de estado com variáveis físicas do sistema em estudo é:

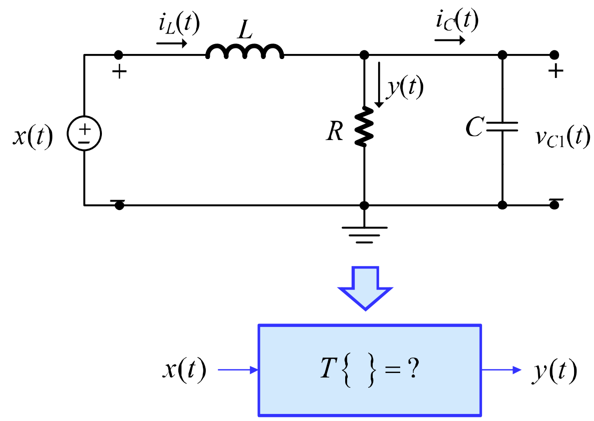
$$
\begin{bmatrix} \dfrac{do_1(t)}{dt} \\ \dfrac{do_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC_1} & 0 \\ \dfrac{K}{RC_2} & -\dfrac{1}{RC_2} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}} \begin{bmatrix} o_1(t) \\ o_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{RC_1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}} x(t) = \mathbf{A} \begin{bmatrix} o_1(t) \\ o_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}x(t)
$$

$$
y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{C}} \begin{bmatrix} o_1(t) \\ o_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} o_1(t) \\ o_2(t) \end{bmatrix}
$$

Representação por Variáveis de Estado

Exercício

- Para o circuito da figura, determine um modelo por variáveis de estado, onde a entrada é fonte de tensão e a saída é a corrente através do resistor.



$$v_R(t) = Ri_R(t)$$

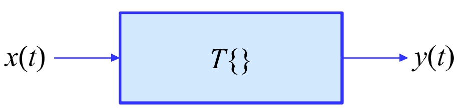
$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

Representação por Variáveis de Estado

Modelos a partir de EDO lineares

- Suponhamos que temos o sistema LTI-SISO



$$x(t) \xrightarrow{T} y(t)$$

$$y(t) = T\{x(t)\}$$

- Caracterizado por uma EDO linear de coeficientes constantes é:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + \cdots + a_N \frac{d^N}{dt^N} y(t) = b_0 x(t) + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + \cdots + b_M \frac{d^M}{dt^M} x(t)$$

- Tal sistema pode ser representado via variáveis de estado.

Representação por Variáveis de Estado

Modelos a partir de EDO lineares

- *Casos*
  - A entrada NÃO POSSUI derivadas.

$$a_0 y(t) + \cdots + a_{N-1} \frac{d^N}{dt^N} y(t) + \frac{d^N}{dt^N} y(t) = b_0 x(t)$$

  - A entrada POSSUI derivadas.

$$a_0 y(t) + \cdots + a_{N-1} \frac{d^N}{dt^N} y(t) + \frac{d^N}{dt^N} y(t) = b_0 x(t) + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + \cdots + b_N \frac{d^N}{dt^N} x(t)$$

Casos: A entrada não possui derivadas.

$$a_0 y(t)+\cdots+a_{N-1}\frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}}y(t)+\frac{d^N}{dt^N}y(t)=b_0x(t)$$

Vetor de estados

$$\mathbf{o}(t)=\begin{bmatrix} o_1(t)\\ o_2(t)\\ \vdots\\ o_N(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y(t)\\ dy(t)/dt\\ \vdots\\ do_{N-1}(t)/dt\end{bmatrix}$$

Matriz de estado

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{N-1}\end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{o}(t)=\mathbf{A}\mathbf{o}(t)+\;x(t)$$

$$y(t)=\mathbf{C}\mathbf{o}(t)$$

Matriz de entrada

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ b_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N-1)\times 1}\\ b_0\end{bmatrix}$$

Matriz de saída

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}_{1\times(N-1)}\end{bmatrix}$$

Casos: A entrada não possui derivadas.

$$a_0 y(t)+\cdots+a_{N-1}\frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}}y(t)+\frac{d^N}{dt^N}y(t)=b_0x(t)+b_1\frac{d}{dt}x(t)+\cdots+b_N\frac{d^N}{dt^N}x(t)$$

Vetor de estados

$$\mathbf{o}(t)=\begin{bmatrix} o_1(t)\\ o_2(t)\\ \vdots\\ o_N(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v(t)\\ dv(t)/dt\\ \vdots\\ dv_{N-1}(t)/dt\end{bmatrix}$$

Matriz de estado

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{N-1}\end{bmatrix}$$

Matriz de saída

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} b_0-b_Na_0\\ b_1-b_Na_1\\ \vdots\\ b_{N-1}-b_Na_{N-1}\end{bmatrix}^T$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{o}(t)=\mathbf{A}\mathbf{o}(t)+\;x(t)$$

$$y(t)=\mathbf{C}\mathbf{o}(t)+\mathbf{D}x(t)$$

Matriz de entrada

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N-1)\times 1}\\ 1\end{bmatrix}$$

Matriz de Tx Direta

$$\mathbf{D}=b_N$$

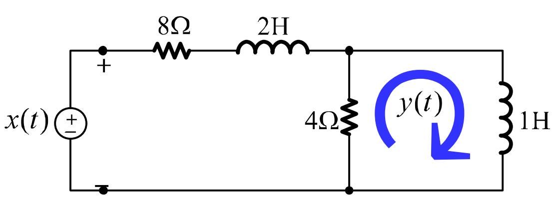
Representação por Variáveis de Estado

Exemplo

- Para o circuito da figura, cuja EDO linear é

$$16y(t)+10\frac{d}{dt}y(t)+\frac{d^2}{dt^2}y(t)=2x(t)$$

- Onde, a entrada é a tensão aplicada e a saída é a corrente na segunda malha. Determinar o modelo por variáveis de estado.



Representação por Variáveis de Estado

1ra Solução

- Reconhecendo variáveis:

$$16y(t)+10\frac{d}{dt}y(t)+\frac{d^2}{dt^2}y(t)=2x(t)$$

$a_0=16$ $a_1=10$ $b_0=2$ $N=2$

Vetor de estados

$$\mathbf{o}(t)=\begin{bmatrix} o_1(t)\\ o_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y(t)\\ dy(t)/dt\end{bmatrix}$$

Matriz de estado

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -16 & -10\end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{o}(t)=\mathbf{A}\mathbf{o}(t)+\;x(t)$$

$$y(t)=\mathbf{C}\mathbf{o}(t)$$

Matriz de saída

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

Matriz de entrada

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0\\ b_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 2\end{bmatrix}$$

Representação por Variáveis de Estado

2da Solução

- **Paso 1**. a saída $y(t)$ e as derivadas de ordem superior de $y(t)$ são definidas como variáveis de estado.

$$16y(t)+10\frac{d}{dt}y(t)+\frac{d^2}{dt^2}y(t)=2x(t)$$

DEFINIMOS $o_1(t)=y(t)$ $\quad o_2(t)=\frac{d}{dt}y(t)$

OBSERVAMOS $o_2(t)=\frac{d}{dt}o_1(t)$ $\quad \frac{d}{dt}o_2(t)=\frac{d^2}{dt^2}y(t)$

Representação por Variáveis de Estado

2da Solução

- **Paso 2**. Rescrevemos a EDO linear em relação à variáveis de estado definidas.

$$16y(t)+10\frac{d}{dt}y(t)+\frac{d^2}{dt^2}y(t)=2x(t)$$

$o_1(t)=y(t)$ $\quad o_2(t)=\frac{d}{dt}y(t)$ $\quad \frac{d}{dt}o_2(t)=\frac{d^2}{dt^2}y(t)$

$$16o_1(t)+10o_2(t)+\frac{d}{dt}o_2(t)=2x(t)$$

$$\frac{d}{dt}o_2(t)=-16o_1(t)-10o_2(t)+2x(t)$$

Representação por Variáveis de Estado

2da Solução

- **Paso 3**. Determinando as **Equações de estado**.

OBSERVADO $\frac{d}{dt}o_1(t)=o_2(t)$

DETERMINADO $\frac{d}{dt}o_2(t)=-16o_1(t)-10o_2(t)+2x(t)$

- Agrupando e operando

$$\begin{bmatrix}\frac{do_1(t)}{dt}\\ \frac{do_2(t)}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}o_2(t)\\ -16o_1(t)-10o_2(t)+2x(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}o_2(t)\\ -16o_1(t)-10o_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 2x(t)\end{bmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -16 & -10\end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}}\begin{bmatrix}o_1(t)\\ o_2(t)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}}x(t)$$

Representação por Variáveis de Estado

2da Solução

- **Paso 4**. Determinando as **Equações de saída**.

DEFINIDO $y(t)=o_1(t)$

$$=1.o_1(t)+0.o_2(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{=\mathbf{C}}\begin{bmatrix}o_1(t)\\ o_2(t)\end{bmatrix}$$

- Finalmente, o modelo de estado do sistema em estudo é:

$$\begin{bmatrix}\frac{do_1(t)}{dt}\\ \frac{do_2(t)}{dt}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -16 & -10\end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}}\begin{bmatrix}o_1(t)\\ o_2(t)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}}x(t)=\mathbf{A}\begin{bmatrix}o_1(t)\\ o_2(t)\end{bmatrix}+\mathbf{B}x(t)$$

$$y(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{=\mathbf{C}}\begin{bmatrix}o_1(t)\\ o_2(t)\end{bmatrix}=\mathbf{C}\begin{bmatrix}o_1(t)\\ o_2(t)\end{bmatrix}$$