Aula 19

Independência linear;
Forma da Soluções.

Seção 3.2 pág 83

1. Encontre o wronskiano do par de funções dado.

   (a) e^{2t}, $e^{-3/2t}$ $-\frac{7}{2}e^{t/2}$

   (b) x, xe^{x} x^2e^x

   (c) $e^t sent$, $e^t cost$ $-e^{2t}$

2. Determine o maior intervalo no qual o problema de valor inicial dado certamente tem solução (não tente resolver a equação).

   (a) $ty'' + 3y = t$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$ $0 < t < \infty$

   (b) $t(t-4)y'' - 3ty + 4y = 2$, $y(3) = 0$, $y'(3) = -1$ $0 < t < 4$

   (c) $(x-3)y'' + xy' + (ln|x|)y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$ $0 < x < 3$

   (d) $(x-2)y'' + y' + (x-2)(tgx)y = 0$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 2$ $2 < x < 3\pi/2$

3. Verifique que $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são duas soluções da equação diferencial $t^2y'' - 2y = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $c_1t^2 + c_1t^{-1}$ também é solução dessa equação quaisquer que sejam c_1 e c_2.

4. Verifique que $y_1(t) = 1$ e $y_2(t) = t^{1/2}$ são duas soluções da equação diferencial $yy'' + (y')^2 = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $c_1 + c_1t^{1/2}$ não é, em geral, solução dessa equação.

5. A função $sen(t^2)$ pode ser solução de uma equação da forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ em um intervalo contendo $t = 0$? Explique sua resposta.

6. Se o Wronskiano de f e g é $3e^{4t}$, e se $f(t) = e^{2t}$, encontre $g(t)$. $3te^{2t} + ce^{2t}$

7. Verifique que as soluções y_1 e y_2 são soluções da equação dada. Elas constituem um conjunto fundamental de soluções?

   (a) $y'' + 4y = 0$, $y_1(t) = cos2t$, $y_2(t) = sen2t$

   (b) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$, $x > 0$, $y_1(x) = x$, $y_2(x) = xe^x$

   (c) $(1 - xcotx)y'' - xy' + y = 0$, $0 < x < \pi$, $y_1(x) = x$, $y_2(x) = senx$

Seção 3.3 pág 87

1. Determine se o par de funções é linearmente dependentes ou independente.

   (a) $f(t) = t^2 + 5t$, $g(t) = t^2 - 5t$ independente

   (b) $f(t) = cos2t - 2cos^2t$, $g(t) = cos2t + 2sen^2t$ dependente

   (c) $f(x) = e^{3x}$, $g(x) = e^{3(x-1)}$ dependente

   (d) $f(t) = t$, $g(t) = t^{-1}$ independente

2. O Wronskiano de duas funções é $W(t) = t^2 - 4$. As funções são LI ou LD? Porque?

3. Se as funções y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, prove que c_1y_1 e c_2y_2 são, também soluções linearmente independentes, desde que nem c_1 nem c_2 sejam nulos.

4. Prove que se, y_1 e y_2, soluções de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ atigem máximo e mínimo em um mesmo ponto, então não podem formar um conjunto fundamental de soluções.

Aula 20

Raízes reais;
Raízes complexas.

Seção 3.1 pág 78

1. Encontre a solução geral da equação diferencial.

   (a) $y'' + 2y' - 3y = 0$

   (b) $6y'' - y' - y = 0$

   (c) $y'' + 3y' + 2y = 0$

   (d) $y'' + 5y' = 0$

   (e) $4y'' - 9y = 0$

   (f) $y'' - 9y' + 9y = 0$

2. Encontre a solução do problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento quando t aumenta.

   (a) $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ $y = e^t$

   (b) $y'' + 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ $y = \frac{5}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$

   (c) $6y'' - 5y' + y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$ $y = 12e^{t/3} - 8e^{t/2}$

   (d) $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 3$ $y = -1 - e^{-3t}$

   (e) $y'' + 8y' - 9y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ $y = \frac{1}{10}e^{-9(t-1)} + \frac{9}{10}e^{(t-1)}$

(f) $4y'' - y = 0,\ y(-2) = 1,\ y'(-2) = -1$ $y = -\frac{1}{2}e^{(t+2)/2} + \frac{3}{2}e^{-(t+2)/2}$

3. Encontre a equação diferencial cuja a solução geral é $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}$.

4. Encontre a solução do problema de valor inicial $2y'' - 3y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = \frac{1}{2}$. Depois, determine o valor máximo da solução e encontre, também, o ponto onde a solução se anula. máximo $y = 9/4$ em $t = ln(9/4)$, $y = 0$ em $t = ln(9)$

5. Resolva o problema de valor inicial $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = a,\ y'(0) = 2$. Depois, encontre a de modo que a solução tenda a zero quando $t \to \infty$. $a = -2$

6. Resolva o problema de valor inicial $4y'' - y = 0$, $y(0) = 2,\ y'(0) = b$. Depois, encontre b de modo que a solução tenda a zero quando $t \to \infty$. $b = -1$

7. Determine os valores de a, se existirem, para os quais todas as soluções tendem a zero quando $t \to \infty$; Determine os valores de a, se existirem, para os quais todas as soluções (não nulas) tornam-se ilimitadas quando $t \to \infty$.

   (a) $y'' - (2a-1)y' + a(a-1)y = 0$ $y \to 0$ para $a < 0$, $y \to \infty$ para $a > 1$

   (b) $y'' + (3-a)y' - 2(a-1)y = 0$ $y \to 0$ para $a < 1$

Seção 3.4 pág 90

1. Use a fórmula de Euler para escrever a expressão dada na forma $a + bi$.

   (a) $exp(1+2i)$

   (b) $e^{i\pi}$

   (c) 2^{1-i}

2. Encontre a solução geral da equação diferencial dada.

   (a) $y'' - 2y' + 2y = 0$

   (b) $y'' - 2y' + 6y = 0$

   (c) $y'' + 2y' - 8y = 0$

   (d) $y'' + 2y' + 2y = 0$

   (e) $4y'' + 9y = 0$

   (f) $9y'' + 9y' - 4y = 0$

3. Encontre a solução do problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento para valores cada vez maiores de t (oscilação decaindo, oscilação crescendo, oscilação regular).

   (a) $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ $y = \frac{1}{1}sen\ 2t$

   (b) $y'' + 4y' + 5y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ $y = e^{-2t}cost + 2e^{-2t}sent$

   (c) $y'' - 2y' + 5y = 0,\ y(\pi/2) = 0,\ y'(\pi/2) = 2$ $y = -e^{t-\pi/2}sen\ 2t$

4. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = a \geq 0$$

   (a) Encontre a solução $y(t)$ desse problema. $y = 2e^{-t}cos(\sqrt{5}t) + (a+2)/\sqrt{5}e^{-t}sen(\sqrt{5}t)$

   (b) Encontre a tal que $y = 0$ quando $t = 1$.

   (c) Encontre o menor valor positivo de t, em função de a, pra o qual $y = 0$. $t = (\pi - arctg(2\sqrt{5}/(2+a)))/\sqrt{5}$

   (d) Determine o limite da expressão encontrado no item (c) quando $a \to \infty$ $t = \pi/\sqrt{5}$

5. Suponha que as funções p e q são contínuas em um intervalo aberto I e seja $y = \phi(t) = u(t) + iv(t)$ um solução complexa de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

onde u e v são funções reais. Mostre que u e v são, também, soluções da equação. (Sugestão: Substitua y por $\phi(t)$ na equação e separe a parte real e imaginária).

Aula 21

Raízes Repetidas;
Redução de ordem

Seção 3.5 pág 94

1. Encontre a solução geral da equação diferencial dada.

   (a) $y'' - 2y' + y = 0$

   (b) $4y'' - 4y' - 3y = 0$

   (c) $9y'' + 6y' + y = 0$

   (d) $y'' - 2y' + 10y = 0$

   (e) $16y'' + 24y' + 9y = 0$

2. Resolva o problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento quando t cresce.

   (a) $9y'' - 12y' + 4y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1$ $y = 2e^{2t/3} - \frac{7}{3}te^{2t/3}$ $y \to -\infty$

   (b) $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$ $y = 2te^{3t}$ $y \to \infty$

   (c) $y'' + 4y' + 4y = 0,\ y(-1) = 2,\ y'(-1) = 1$ $y = 7e^{-2(t+1)} + 5te^{-2(t+1)}$ $y \to 0$

3. Considere o problema de valor inicial

$$y'' - y' + 0,25y = 0 \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = b$$

Encontre a solução em função b e depois determine o valor crítico de b que separa as soluções que crescem positivamente das que acabam crescendo em módulo, mas com valores negativos. $y = 2e^{t/2} + (b-1)te^{t/2}$ $b = 1$

4. Considere o problema de valor inicial

$$9y'' + 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = a > 0, \quad y'(0) = -1$$

   (a) Resolva o problema de valor inicial. $y = ae^{-2t/3} + \left(\frac{2}{3}a - 1\right)te^{-2t/3}$

   (b) Encontre o valor crítico de a que separa as soluções que se tornam negativas das que permanecem positivas. $a = \frac{3}{2}$

5. Se as raízes da equação característica são reais, mostre que uma solução de $ay'' + by' + cy = 0$ pode assumir o valor zero no máximo uma vez.

6. Use o método de redução de ordem para encontrar uma segunda solução da equação diferencial dada.

   (a) $t^2y'' - 4ty' + 6y = 0$, $t > 0$, $y_1(t) = t^2$ $y = c_1t^2 + c_2t^3$

   (b) $t^2y'' + 3ty' + y = 0$, $t > 0$ $t > 0$, $y_1(t) = t^{-1}$ $y = c_1t + c_2t^{-1}lnt$

   (c) $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$, $t > 0$, $y_1(t) = t$ $y_2(t) = te^t$

   (d) $xy'' - y' + 4x^3y = 0$, $x > 0$, $y_1(t) = senx^2$ $y_2(t) = cos\ x^2$

   (e) $(x-1)y'' - xy' + y = 0$, $x > 0$, $y_1(t) = e^x$ $y_2(t) = x$

   (f) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0,25)y = 0$, $x > 0$, $y_1(t) = x^{-1/2}senx$ $y_2(t) = x^{-1/2}cosx$

7. Se a, b e c são constante positivas, mostre que todas as soluções de $ay'' + by' + cy = 0$ tendem a zero quando $t \to \infty$

8. (a) Se $a > 0$ e $c > 0$, mas $b = 0$, mostre que o resultado do problema anterior não é válido, mas que todas as soluções permanecem limitadas quando $t \to \infty$.

   (b) Se $a > 0$ e $b > 0$, mas $c = 0$, mostre que o resultado do problema 5 não é válido, mas que tendem a uma constante, que depende da condição inicial, quando $t \to \infty$. Determinar esta constante para a condição inicial $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$.

Aula 22

Equação de Euler

Essa aula não será dada nesse curso de Cálculo 3A

Aula 23

Coeficientes a determinar

Seção 3.6 pág 100

1. Encontre a solução geral da equação diferencial dada.

   (a) $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$ $y = c_1e^{3t} + c_2e^{-1}3e^{2t}$

   (b) $y'' + 2y' + 5y = 3sen2t$ $y = c_1e^{-t}cos2t + c_2e^{-t}sent2t + \frac{3}{17}sen2t - \frac{12}{17}cos2t$

   (c) $y'' + 9y = t^2e^{3t} + 6$ $y = c_1cos3t + c_2sen3t + \frac{1}{162}(9t^2 - 6t + 1) + \frac{2}{3}$

   (d) $y'' + y = 3sen2t + tcos2t$ $y = c_1cost + c_2sent - \frac{1}{3}tcos2t - \frac{5}{9}sen2t$

2. Encontre a solução do problema de valor inicial.

   (a) $y'' + y' - 2y = 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ $y = e^t - \frac{1}{2}e^{-2t} - t - \frac{1}{2}$

   (b) $y'' + 4y = t^2 + 3e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ $y = \frac{7}{10}sen2t - \frac{19}{40}cos2t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^{-2t}$

   (c) $y'' - 2y' + y = te^t + 4$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ $y = 4te^t - 3e^t + \frac{1}{6}t^3e^t + 4$

   (d) $y'' + 4y = 3sen2t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ $y = 2cos2t - \frac{1}{8}sen2t - \frac{3}{4}tcos2t$

3. Determine uma forma adequada para $Y(t)$ para se usar no método dos coeficientes a determinar.

   (a) $y'' + 3y' = 2t^4 + t^2e^{-3t} + sen3t$

   (b) $y'' + y = t(1 + sent)$

   (c) $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-t} + 2e^{-t}cost + 4e^{-t}t^2sent$

   (d) $y'' + 4y = t^2sen2t + (6t + 7)cos2t$

4. Considere a equação diferencial $ay'' + by' + cy = g(t)$ onde a, b e c constante positivas.

   (a) Se $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ são soluções da equação diferencial acima, mostre que $Y_1(t) - Y_2(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Esse resultado é verdadeiro se $b = 0$?

   (b) Se $g(t) = d$, uma constante, mostre que toda solução da equação tente a d/c quando $t \to \infty$. O que acontece se $c = 0$? E se b também for nulo?

Aula 24

Variação do parâmetros

Seção 3.7 pág 103

1. Use o método de variação das parâmetros para encontra uma solução particular da equação diferencial dada. Depois verifique sua respostas usando o método dos coeficientes indeterminados.

   (a) $y'' - y' - 2y = 2e^{-t}$ $Y_p(t) = -\frac{2}{3}te^{-t}$

   (b) $y'' + 2y' + y = 3e^{-t}$ $Y_p(t) = \frac{3}{2}t^2e^{-t}$

2. Encontre a solução geral da equação diferencial dada.

   (a) $y'' + 4y' + 4y = t^{-2}e^{-2t}$, $t > 0$ $y(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} - e^{-2t}ln\ t$

   (b) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{1+t^2}$ $y(t)c_1e^t + c_2te^t - \frac{1}{2}e^tln(1+t^2) + te^tarctg\ t$

3. Verifique que as funções dadas y_1 e y_2 satisfazem a equação homogênea associada, depois encontre uma solução particular da equação não-homogênea.

   (a) $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3$, $y_1(t) = t$, $y_2(t) = te^t$ $Y_p(t) = -2t^2$

   (b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2lnx$, $x > 0$, $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^2lnx$ $Y_p(t) = \frac{1}{6}x^2(ln\ x)^3$

4. Use redução de ordem para resolver a equação diferencial dada.

   (a) $t^2y'' - 2ty' + 2y = 4t^2$, $t > 0$; $y_1(t) = t$ $y(t) = c_1t + c_2t^2 + 4t^2ln\ t$

   (b) $ty'' - (1+t)y' + y = t^2e^{2t}$, $t > 0$, $y_1(t) = 1 + t$ $y(t) = c_1(1+t) + c_2e^t + \frac{1}{2}(t-1)e^{2t}$

Aula 25

Vibrações mecânicas

Seção 3.8 pág 110

1. Uma massa de 2 libras (cerca de 900g) estica uma mola de 6 polegadas (cerca de 15 cm). Se a massa é puxada para baixo 3 polegadas adicionais e depois solta, e se não há amortecimento, determine a posição u da massa em qualquer instante t. Faça um gráfico de u em função de t.

2. Uma massa de 100g estica um mola de 5cm. Se a massa é colocada em movimento, a partir de sua posição de equilíbrio, como uma velocidade apontando para baixo $10cm/s$, e se não há amortecimento, determine a posição u da massa em qualquer instante t. Quando a massa retorna pela primeira vez à sua posição de equilíbrio?

   $u = \frac{5}{6}sen14t$; $t = \pi/14s$

3. Uma massa de $3lb$ (cerca de 1,36 kg) estica uma mola de $3in$ (cerca de 7,6 cm). Se a massa é empurrada para cima, contraindo a mola $1in$, e depois colocada em movimento com velocidade para baixo de $2ft/s$, e se não há amortecimento, encontre a posição u da massa em qualquer instante t. Determine frequência, o período, a amplitude e a fase do movimento.

   $u = (1/4\sqrt{2}sen(8\sqrt{2}t - \frac{1}{12}cos8\sqrt{2}t))$; $\omega = 8\sqrt{2}$; $T = \pi/4\sqrt{2}s$; $R = \sqrt{11/288}$; $\delta = \pi - arctg(3/\sqrt{2})$

4. Uma massa de 20g estica uma mola 5cm. Suponha que a massa também está presa um amortecedor viscoso com uma constante de amortecimento de 400dinas.s/cm. Se a massa é puxada para baixo mais 2cm e depois solta, encontre sua posição u em qualquer instante t.

   $u = e^{-10t}\left[2cos(4\sqrt{6}t) + (5/\sqrt{6})sen(4\sqrt{6}t)\right]$

5. Uma mola é esticada 10cm por uma força de 3 Newtons. Uma massa de 2kg é pendurada na mola e presa a uma amortecedor viscoso que exerce uma força de 3 Newtons quando a velocidade da massa é de $5m/s$. Se a massa é puxada 5 cm abaixo de sua posição de equilíbrio e dada uma velocidade inicial para baixo de $10cm/s$, determine sua posição u em qualquer instante t. Encontre a quase frequência μ e a razão entre μ e a frequência natural do movimento sem amortecimento correspondente.

Seção 3.9 pág 117

1. Uma massa de 4 lb (cerca de 1,8 kg) estica um mola de 1,5 in (cerca de 5cm). A massa é descolada 2 in no sentido positivo do movimento a partir de sua posição de equilíbrio e solta sem velocidade inicial. Suponha que não há amortecimento e qua a massa sofre uma ação externa de uma força de 2 $cos\ 3t$ lb, formule o problema de valor inicial que descreve o movimento dessa massa.

   $u'' + 256u = 16cos3t$, $u(0) = \frac{1}{6}$, $u'(0) = 0$

2. Uma massa de 5kg estica uma mola de 10cm. A massa sofre a ação de uma força externa de 10 $sen(t/2)$ N e se move em um meio que amortece o movimento com uma força vistosa de 2N quando a velocidade da massa é de $4cm/s$. Se a massa

é colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio com uma velocidade inicial de $3cm/s$ formule o problema de valor inicial que descreve o movimento da massa.

$u'' + 10u' + 98u = 2sen(t/2),\ u(0) = 0,\ u'(0) = 0,03$

3. Uma massa de 8 lb (cerca de 3,6 kg) estica uma mola de 6 in (cerca de 15 cm). Uma força externa de $8sen(8t)$ age sobre o sistema. Se a massa é puxada 3 in para baixo e depois solta, determine a posição da massa em qualquer instante de tempo. Determine os quatro primeiros instantes emq ue a velocidade da massa é nula.

4. Uma mola é esticada 6 in (cerca de 15 cm) po uma massa de 8 lb (cerca 3.6 kg). A massa está presa a um amortecedor que tem uma constante de amortecimento de 0,25 lb.s/pé e está sob ação de uma força externa igual a $4cos(2t)$ lb.

   (a) Determine a solução estado estácionário desse problema.

   (b) Se a massa dada é substituída por uma massa m, determine o valor de m para o qual a amplitude da solução estado estacionário é máxima.

Aula 26

Equações de ordem n

Seção 4.1 pág 120

1. Determine os intervalos que, com certeza, existe soluções

   (a) $y^{(4)} + 4y''' + 3y = t$

   (b) $ty''' + (sent)y'' + 3y = cost$

   (c) $(x^2 - 4)y^{(6)} + x^2y''' + 9y = 0$

2. Determine se o conjunto de funções dado é linearmente dependente ou linearmente independente.

   (a) $f_1(t) = 2t - 3,\ f_2(t) = t^2 + 1,\ f_3(t) = 2t^2 - t$

   (b) $f_1(t) = 2t - 3,\ f_2(t) = t^2 + 1,\ f_3(t) = 2t^2 - t,\ f_4(t) = t^2 + t + 1$

3. Verifique que as funções dadas são soluções da equação diferencial e determine seu wronskiano.

   (a) $y^{(4)} + y'' = 0;\quad 1, t, cost, sent$

   (b) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0;\quad e^t, e^{-t}, e^{-2t}$

   (c) $xy''' - y'' = 0;\quad 1, x, x^3$

4. Use o método de redução de ordem para resolver a equação diferencial dada. Faça $y(t) = y_1(t).v(t)$, derive, substitua e resolva a nova EDO em v fazendo a substituição $u = v'$

   (a) $(2 - t)y''' + (2t - 3)y'' - ty' + y = 0,\ t < 2;\ y_1(t) = e^t$

Seção 4.2 pág 125

1. Encontra a solução geral da equação diferencial dada. Como a solução se comporta quando $t \to \infty$?

   (a) $y''' - y'' - y' + y = 0$

   (b) $2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$

   (c) $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0$

   (d) $y^{(6)} + y = 0$

   (e) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$

   (f) $y^{(4)} - 8y = 0$

Seção 4.3 pág 127

1. Determine a solução geral da equação diferencial dada.

   (a) $y''' - y'' - y' + y = 2e^{-t} + 3$

   (b) $y^{(4)} - y = 3t + cost$

   (c) $y''' + y'' + y' + y = e^{-t} + 4t$

   (d) $y^{(6)} + y''' = t$

2. Determine uma forma adequada para $Y(t)$ se for utilizado o método das coeficientes indeterminados. Não calcule as constantes.

   (a) $y''' - 2y'' + y' = t^3 + 2e^t$

   (b) $y''' - y' = te^{-t} + 2cost$

   (c) $y^{(4)} - 2y'' + y = e^t + sent$

Fim da lista 3ª prova