Sistemas Realimentados

EP - 21

Nomes: Breno e Rafael

1) Faça os gráficos de Bode e polar mostrando o ponto -1+j0 nos dois casos.

É possível esboçar os gráficos analisando os efeitos dos polos da função de transferência $G(s)$.

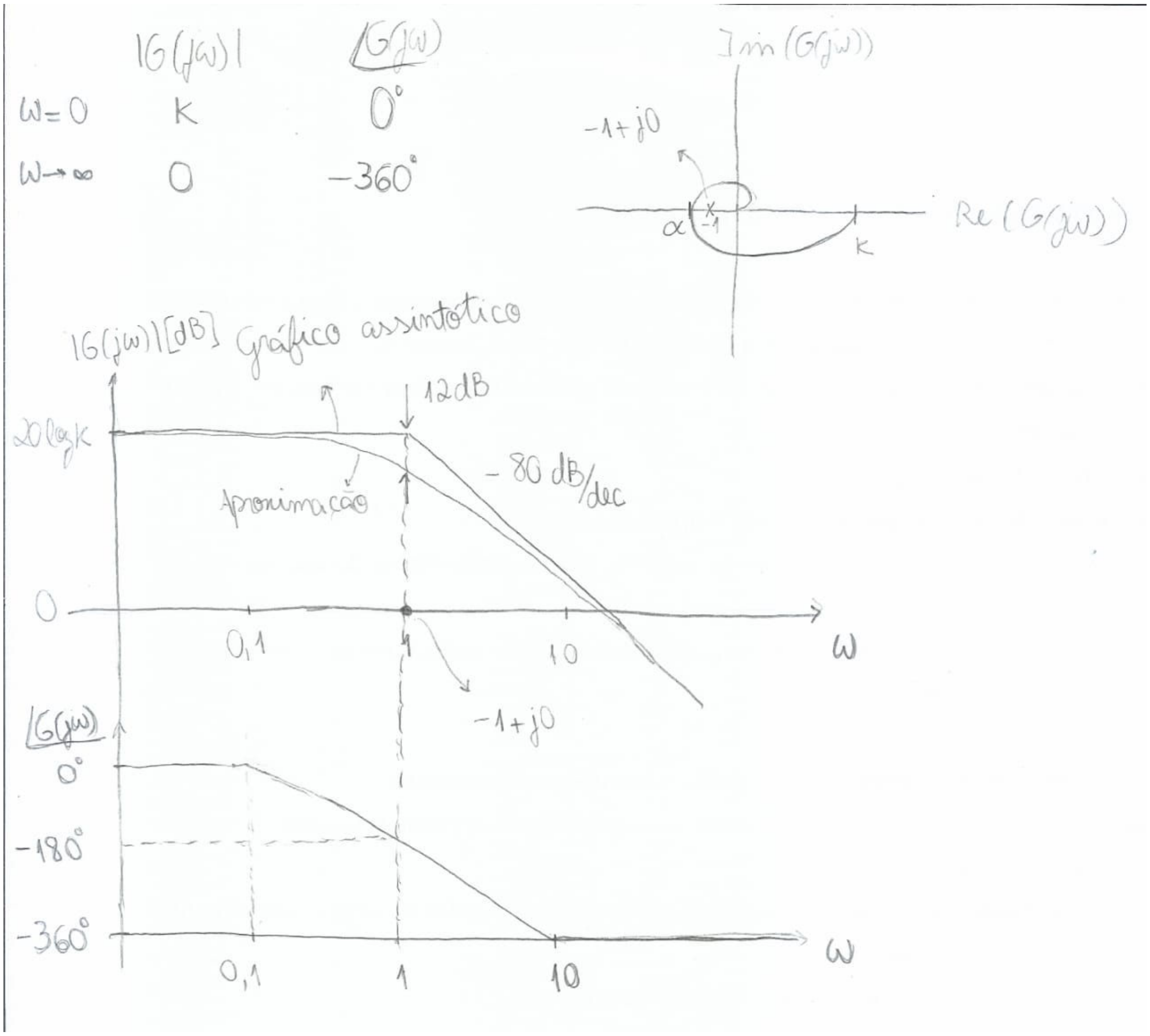
A função não possui nenhum zero e possui 4 polos em $s = -1$. Como explicado nas notas de aula e em EPs anteriores, é possível aproximar o efeito de um polo no SPE para:

- Atraso de 90º iniciando-se uma década antes da frequência do polo e terminando uma década após a frequência do polo;
- Redução da amplitude da função de transferência em 20 dB/década a partir da frequência do polo.

Elabora-se uma tabela com os valores do módulo e ângulo da função de transferência para $\omega = 0$ e $\omega \to \infty$ para desenhar o gráfico polar. Nota-se que o gráfico polar terá pontos em função de K e a posição do ponto -1+j0 em relação à curva dependerá desse valor (o esboço foi feito considerando -1 interior à curva).

Para desenhar o gráfico de Bode, deve-se determinar a amplitude de $G(j\omega)$ para $\omega \to 0^+$. Como a função $G(s)$ já se encontra normalizada, esse valor é $20 \log K$.

O ponto -1+j0 no gráfico de Bode ocorreria onde $|G(j\omega)| = 1 = 0dB$ e $\angle G(j\omega) = \pm 180^o$.

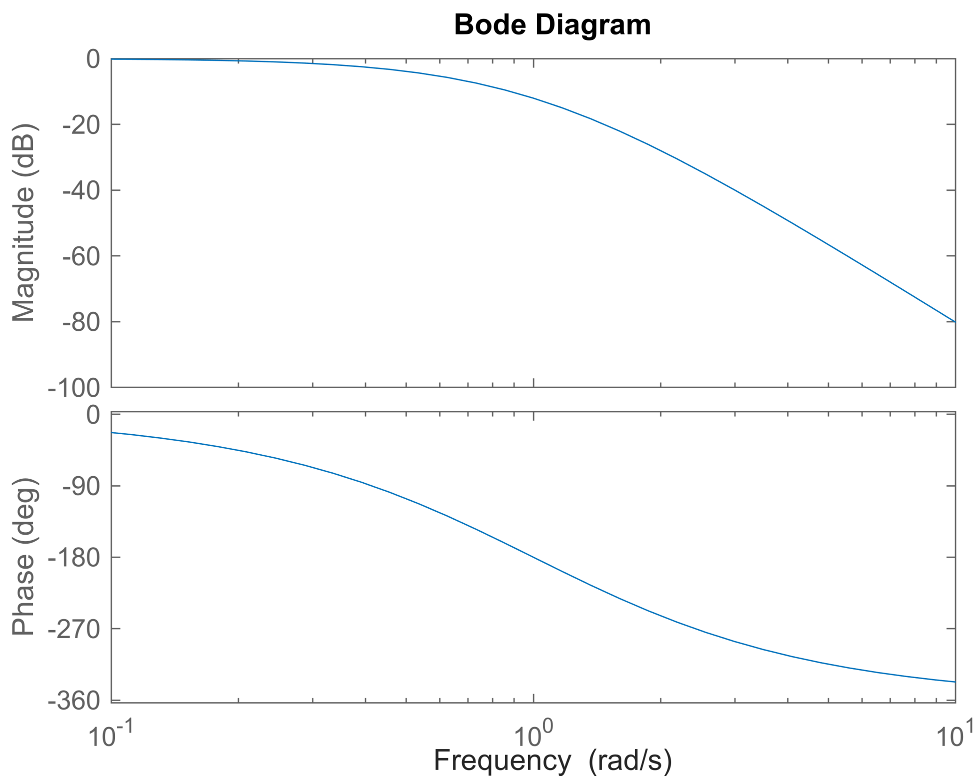


Usando o Matlab

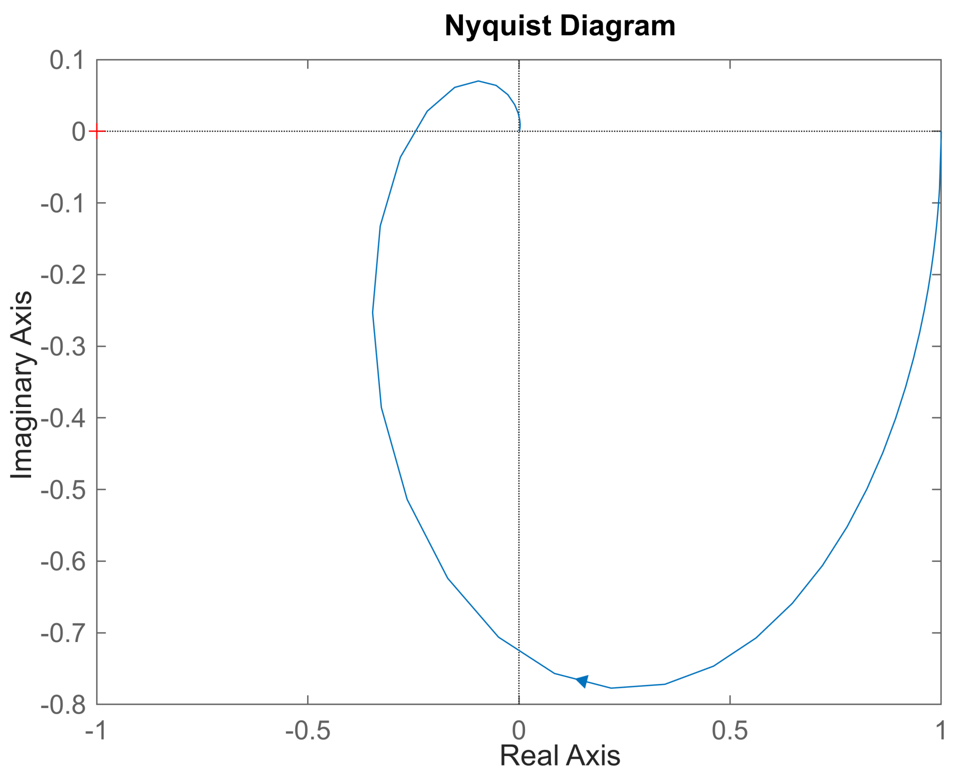
```
G = tf([1], poly([-1, -1, -1, -1]))
```

```
G =

                1
  -----------------------------
  s^4 + 4 s^3 + 6 s^2 + 4 s + 1

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
bode(G)
```




```
h=nyquistplot(G);
set(h,'ShowFullContour','off')
```



2) Analise a margem de fase e a margem de ganho para K=1.

Margem de ganho:

Como se observa na figura abaixo, o ângulo de -180º ocorre para $\omega = 1$, que corresponde à frequência dos polos. É sabido que na frequência de corte de um polo, a função de transferência decresce em e 3dB (um pouco diferente da aproximação assintótica). Como a função analisada apresenta 4 polos na mesma frequência, em $\omega = 1$ tem-se:

$$|G(j1)|[dB] = 20 \log K - 12$$

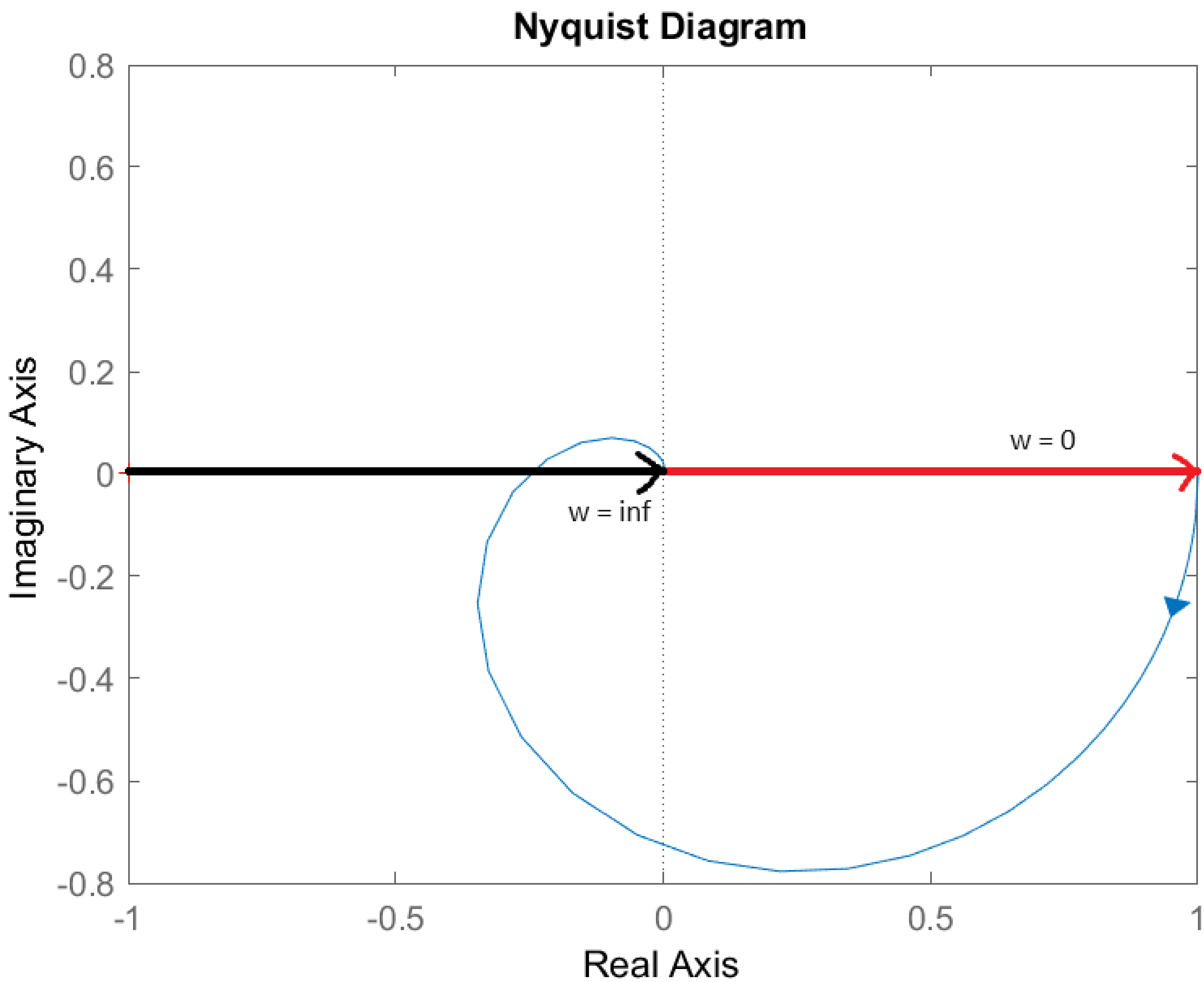
Assim, a interseção da curva no gráfico polar com o ponto -1+j0 ocorrerá quando $|G(j1)| = 1 = 0dB$ que ocorrerá para

$$20 \log K = 12$$

$$K = 3,98$$

Desse forma, à medida que o valor de K aumenta, a curva no plano polar se expande (em direção raidal) até que em $K = 3.98$ a interseção com o eixo real ocorre em -1 ($\alpha = 1$).

Quando o ponto -1 é externo à curva ($\alpha < 1$), tem-se



$\Phi = 0^o$

Portanto, usando que

$\Phi = (Z_d - P_\omega/2 - P_d)180^o$

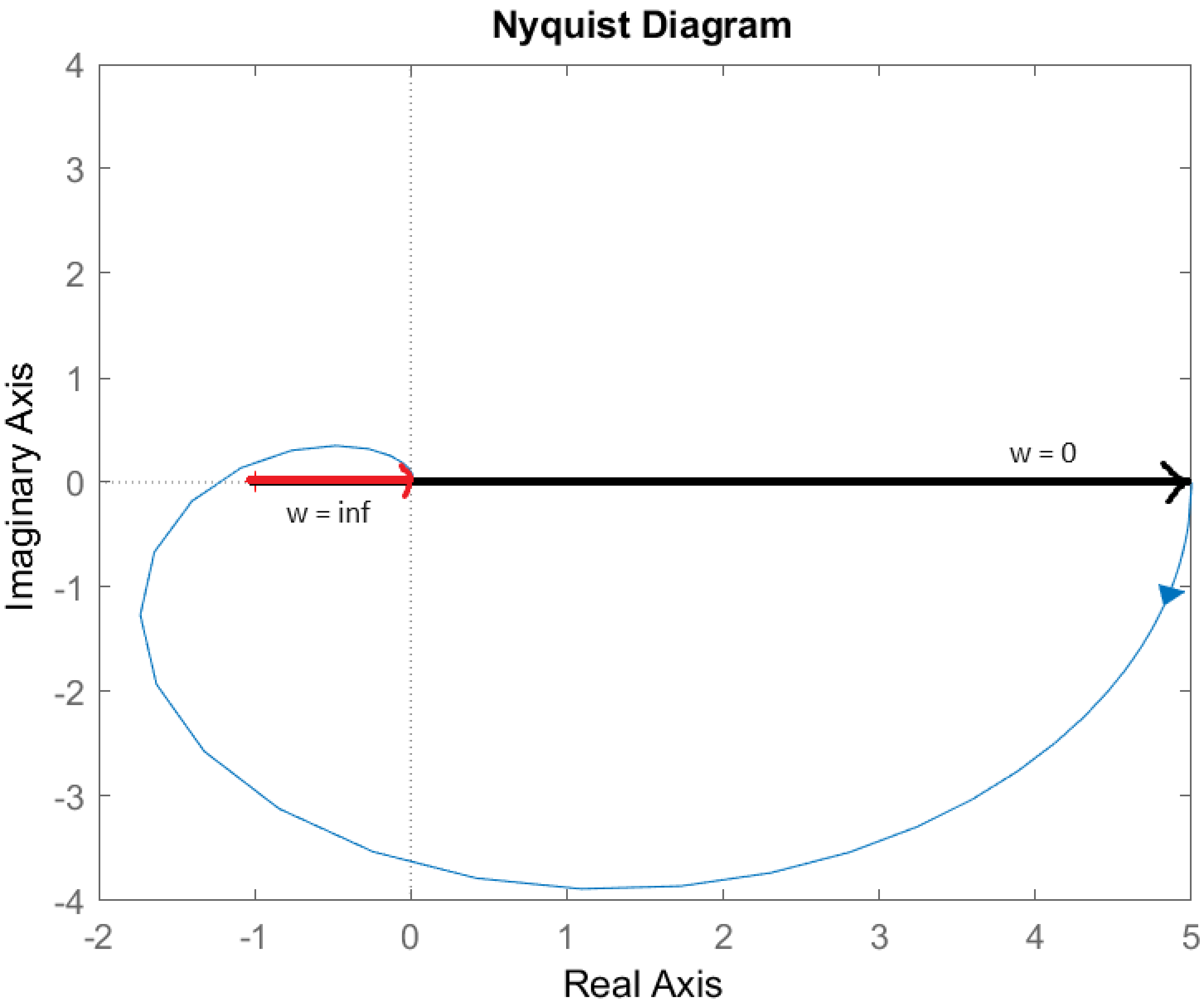
Onde Z_d, P_ω e P_d representam o número de zeros no SPD, polos no eixo imaginário e polos no SPD da função $F(s) = 1 + G(s)H(s)$, respectivamente. Como zeros no SPD da função $F(s)$ equivalem a polos de malha fechada no SPD, então a condição para estabilidade é $Z_d = 0$. Então, será encontrado a seguir o valor de Z_d para cada situação para se analisar estabilidade.

Como os polos de $F(s)$ são os mesmos que os polos de $G(s)H(s)$, considerando $H(s) = 1$, os polos de $F(s)$ são os polos de $G(s)$. Portanto, $P_\omega = P_d = 0$. Assim,

$Z_d = \Phi/180^o$

Para a condição acima, $\Phi = 0^{a}$ implica $Z_d = 0$ e o sistema é estável.

Caso o ganho seja maior que $K = 3.98$:



Neste caso, $\Phi = +360^{o}$. Assim, $Z_d = 2$ e existem 2 polos no SPD em malha fechada, tornando o sistema instável.

Conclui-se que o sistema é estável para $0 < K < 3,98$ e o sistema é instável para $K > 3,98$.

Como a margem de ganho é definida pela variação necessária de K (em dB) para que o sistema se torne instável,

$MG_1 = 20\log(3,98) - 20\log(1) = 12dB$

Margem de fase:

A margem de fase é definida como o ângulo que a curva de $G(j\omega)$ deve rotacionar para que cruze com o ponto -1+j0.

Para determinar isto, é preciso encontrar $\angle G(j\omega_0)$ tal que $|G(j\omega_0)| = 1$.

OBS: Neste caso $K = 1$, se verifica no gráfico de Nyquist que ocorre em $\omega_0 = 0$, porém as equações serão desenvolvidas aqui, pois serão úteis para o próximo exercício.

$$\frac{|K|}{|j\omega_0 + 1|^4} = 1$$

$$(1 + \omega_0^2)^2 = |K|$$

Como estamos analisando apenas ganhos positivos,

$$\omega_0 = \sqrt{\sqrt{K} - 1}$$

$$\angle G(j\omega_0) = -4 \arctan \omega_0$$

Substituindo $K = 1$,

$$\omega_0 = 0$$

$$\angle G(j\omega_0) = 0$$

Assim, o gráfico teria que ser rotacionado em 180º (atraso máximo) para intersectar com -1+j0. Portanto,

$$MF_1 = 180^o$$

Correção: a margem de fase neste caso, é infinita, pois como o módulo é sempre menor que 1, atrasar a fase não faz com que o ponto -1+j0 seja envolvido.

3) Analise a margem de fase e a margem de ganho para K=2 comparando com o caso de K=1.

Margem de ganho:

Seguindo a análise feita anteriormente, temos que:

$$MG_2 = 20\log(3,98) - 20\log(2) = 6dB.$$

Como, $MG_2 < MG_1$, isso implica que a resposta ao degrau para o ganho de $K = 2$, é uma resposta mais oscilatória (menor amortecimento), já que a menor margem de ganho implica em uma menor distância do ponto (-1,j0), o que no LR seria uma maior aproximação dos polos do eixo jw.

```
G = tf([1], poly([-1, -1, -1, -1]))
```

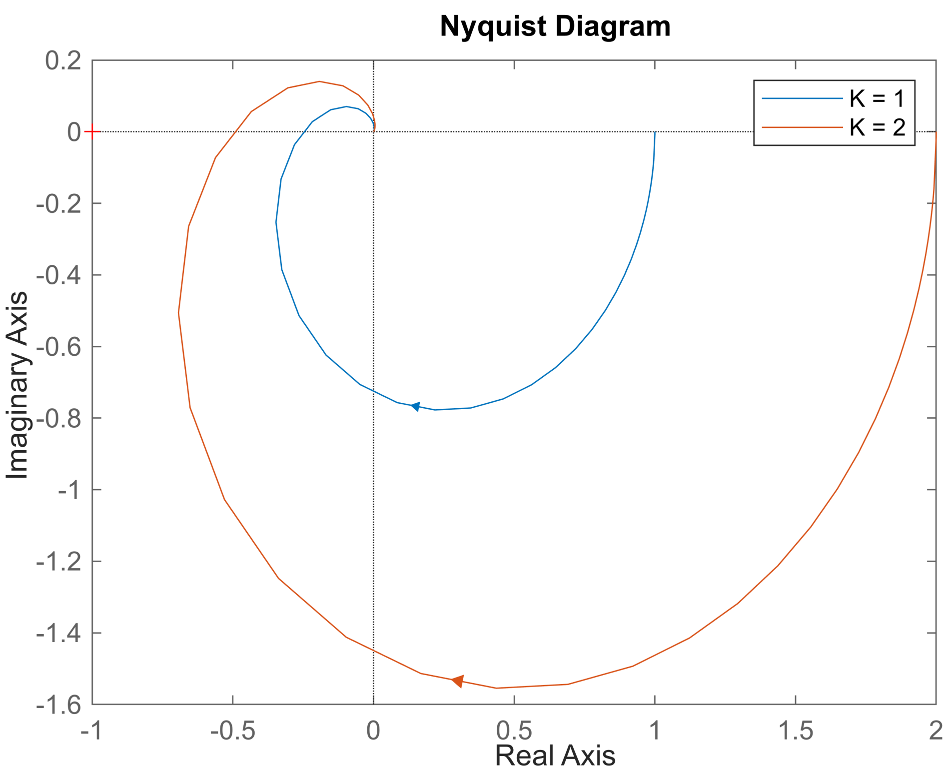
```
G =

               1
  -----------------------------
  s^4 + 4 s^3 + 6 s^2 + 4 s + 1

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
h=nyquistplot(G);
```

```
set(h,'ShowFullContour','off');
hold on
G = tf([2], poly([-1, -1, -1, -1]))
```

```
G =

                2
  -----------------------------
  s^4 + 4 s^3 + 6 s^2 + 4 s + 1

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
h=nyquistplot(G);
set(h,'ShowFullContour','off');
legend("K = 1","K = 2");
hold off
```



Margem de fase:

Partindo da análise anterior, e usando a equações:

$\omega_0 = \sqrt{\sqrt{K} - 1}$

$\angle G(j\omega_0) = -4 \arctan \omega_0$

Substituindo $K = 2$, temos :

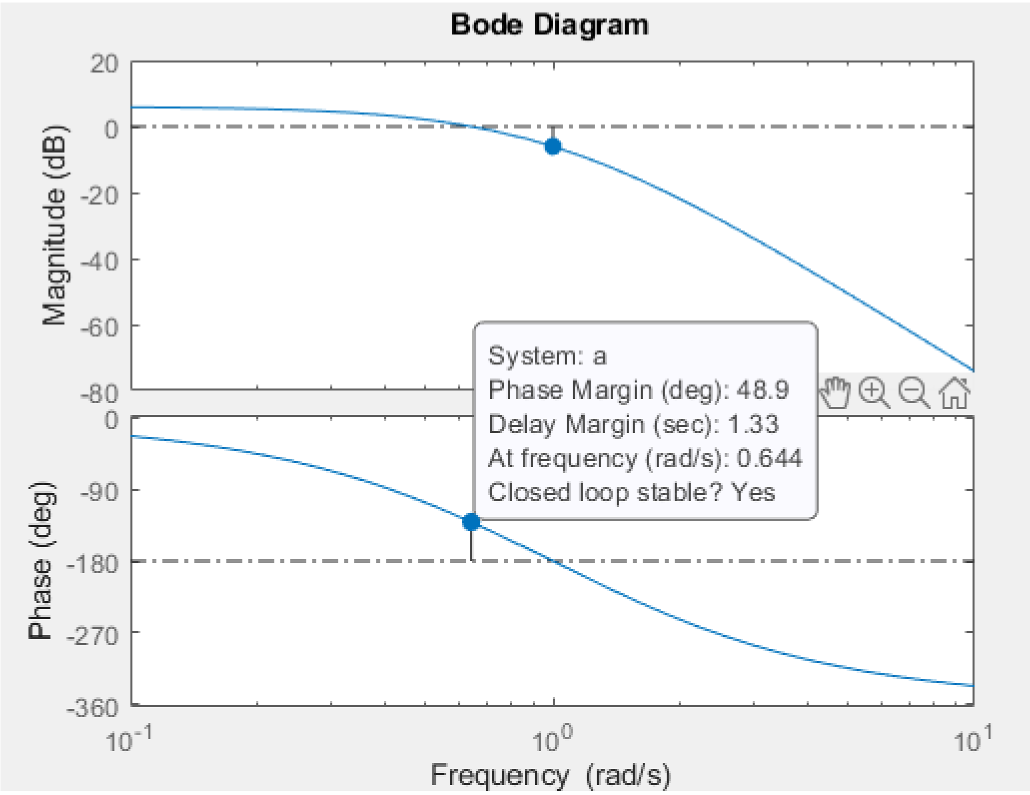
$\omega_0 = 0,643$

$\angle G(j\omega_0) = -4 \arctan 0,4349 = -131^o$

Portanto :

$MF_2 = 180^o - 131^o = 49^o$

Isso implica que, um menor atraso ocasiona a instabilidade do sistema.



4) Para K=2, qual o atraso de tempo em segundos que torna este sistema instável?

O máximo atraso em segundos é dado por :

$$d \leq \frac{\pi \cdot MF}{180w}$$

Substituindo nossas variáveis, temos a seguinte equação:

$$d \leq \frac{\pi \cdot MF_2}{180\omega_0} \rightarrow d \leq \frac{\pi \cdot 49}{180 \cdot 0.643} \rightarrow d \leq 1.33$$

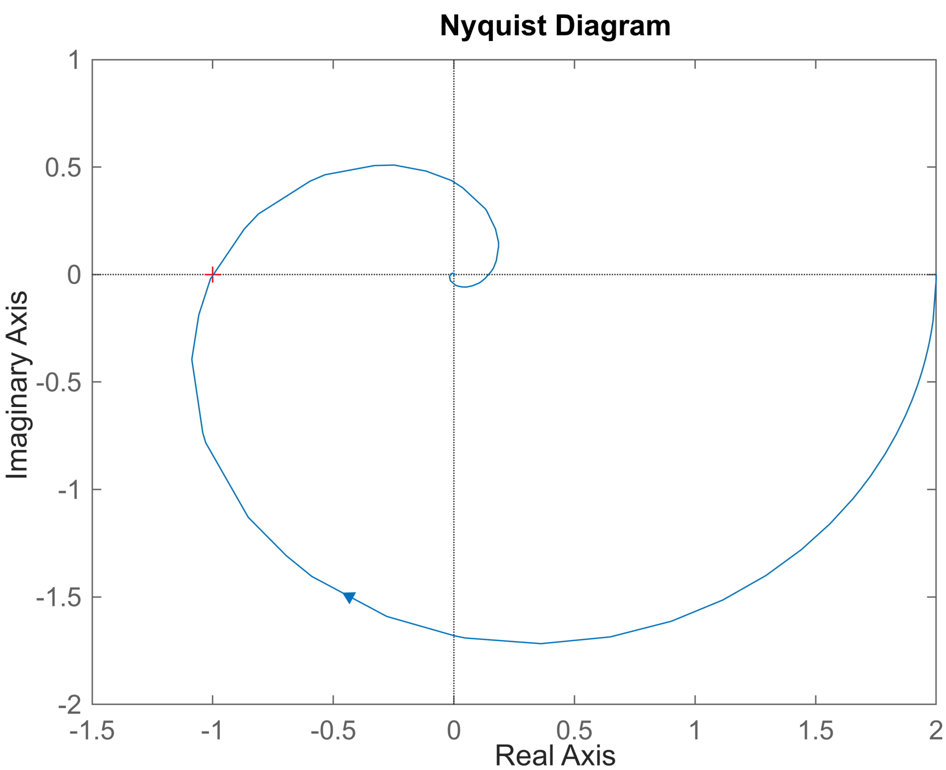
Isso implica que, caso o d da exponencial e^{-ds} seja maior que 1.33, o sistema é instável, e caso seja exatamente 1.33, o sistema é marginalmente instável.

```
num = 2;
den =  poly([-1, -1, -1, -1]);
G = tf(num,den,'InputDelay',1.33)
```

```
G =

                                  2
```

```
  exp(-1.33*s) * ----------------------------
                 s^4 + 4 s^3 + 6 s^2 + 4 s + 1

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
h=nyquistplot(G);
set(h,'ShowFullContour','off')
```

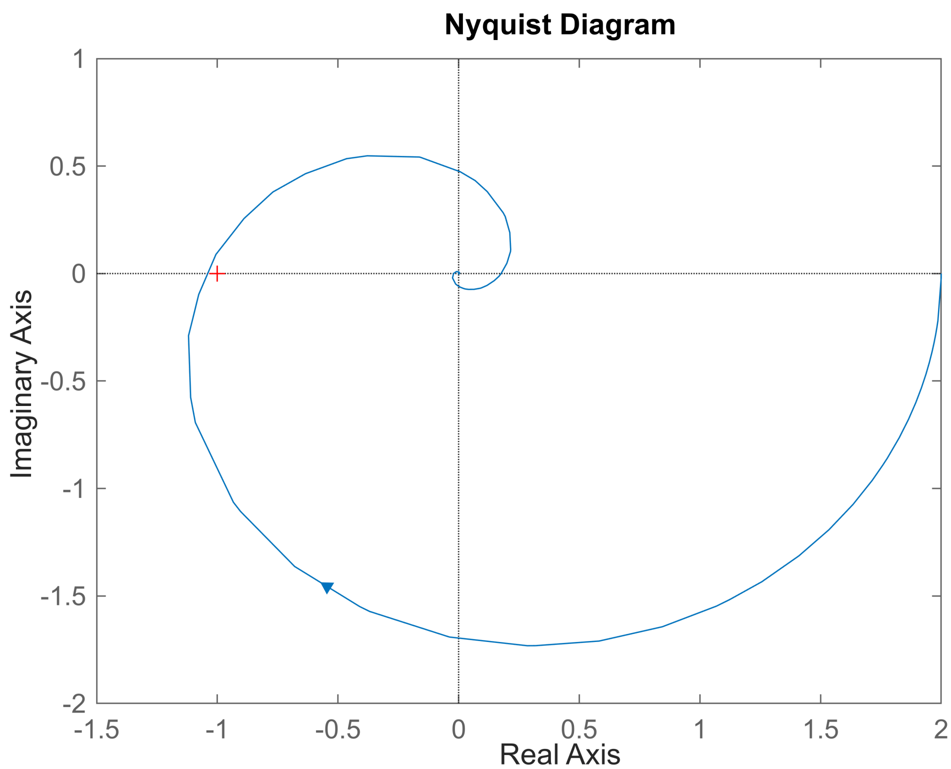


Caso o atraso seja maior, o sistema é instável:

```
num = 2;
den =  poly([-1, -1, -1, -1]);
G = tf(num,den,'InputDelay',1.5)
```

```
G =

                                2
  exp(-1.5*s) * ----------------------------
                s^4 + 4 s^3 + 6 s^2 + 4 s + 1

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

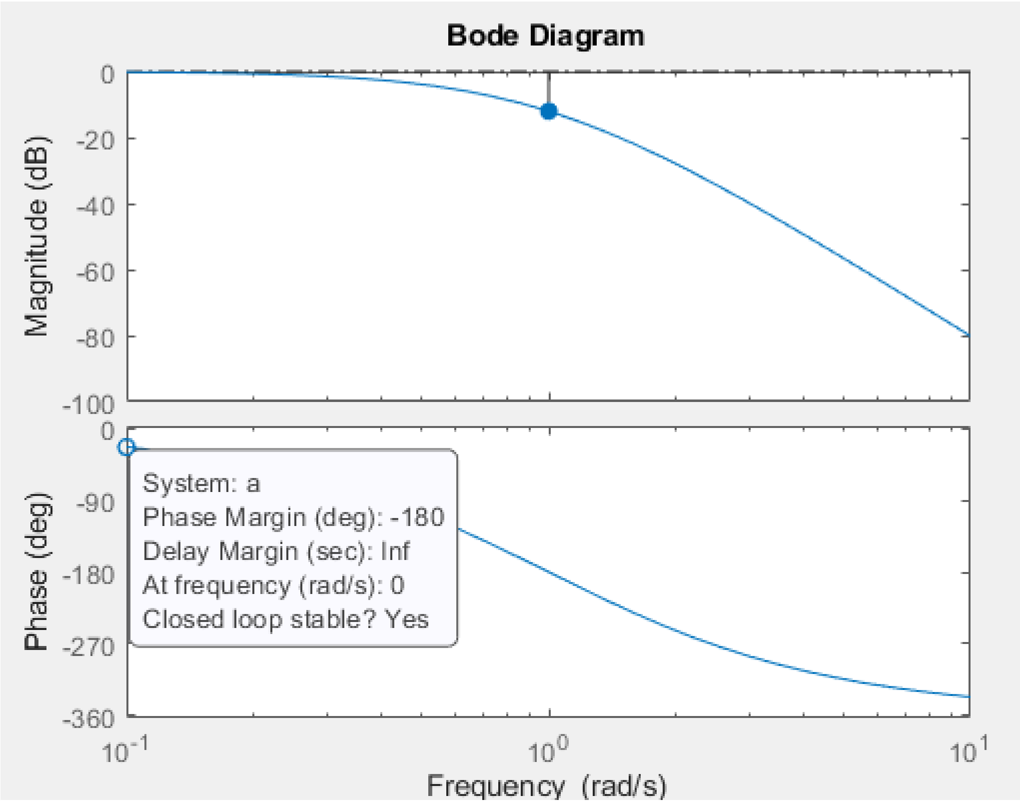
```
h=nyquistplot(G);
set(h,'ShowFullContour','off')
```



Provando a afirmação que um ganho menor, pode ter um atraso maior. Para o ganho de K = 1 temos :

$$d \leq \frac{\pi \cdot MF_1}{180\omega_0} \rightarrow \lim_{\omega_0 \to 0} d \leq \frac{\pi}{\omega_0} \rightarrow \lim_{\omega_0 \to 0} d \leq \infty$$

O sistema quando K = 1 pode ter qualquer atraso, que o sistema não irá deixar de ser estável.

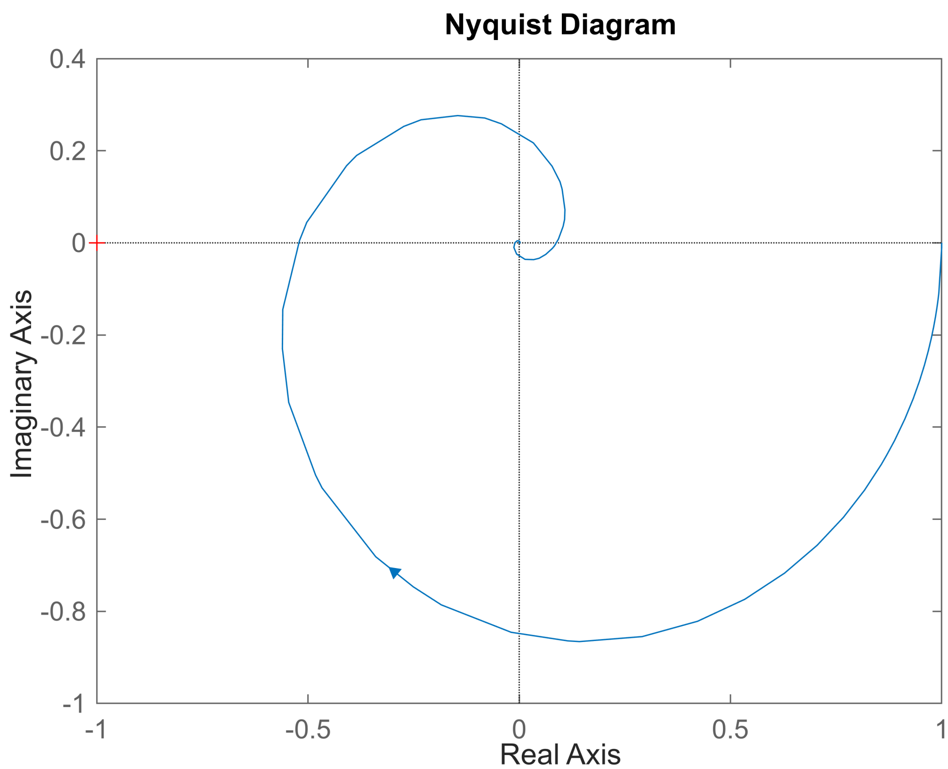


Escolhendo atrasos cada vez maiores:

```
num = 1;
den =  poly([-1, -1, -1, -1]);
G = tf(num,den,'InputDelay',1.5)
```

```
G =

                            1
  exp(-1.5*s) * ----------------------------
                s^4 + 4 s^3 + 6 s^2 + 4 s + 1

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

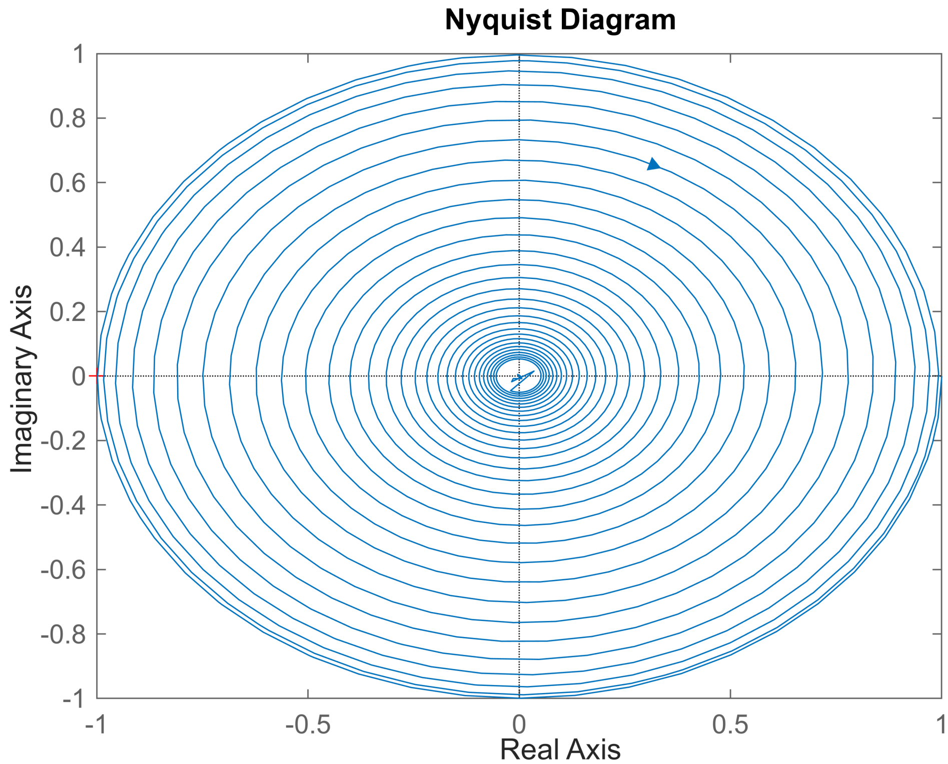
```
h=nyquistplot(G);
set(h,'ShowFullContour','off')
```




```
num = 1;
den =  poly([-1, -1, -1, -1]);
G = tf(num,den,'InputDelay',100)
```

```
G =
 
                               1
  exp(-100*s) * -----------------------------
                s^4 + 4 s^3 + 6 s^2 + 4 s + 1
 
Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
h=nyquistplot(G);
set(h,'ShowFullContour','off')
```



Nyquist Diagram
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
Imaginary Axis
-1
-0.5
0
0.5
1
Real Axis