AULA 4 Cálculo 3A 2020.2

16.5 Rotacional e Divergente

↳ espécie de "derivadas" em campos

A: Vetor rotacional

Definição

$F(x,y,z) = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,J + R(x,y,z)\,K$ um campo de vetores em $\mathbb{R}^3$ tal que as derivadas parciais de P, Q e R são existem

o vetor

$$\text{rot}\,F := \begin{vmatrix} i & J & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$ é dito

rotacional de F.

Na notação acima:

> efetuar o falso determinante

> $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ são as ações de derivar parcialmente

$$\text{rot}\,F = \begin{vmatrix} i & J & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) J + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) K$$

Para cada (x,y,z) $\text{rot}\,F(x,y,z)$ é um vetor

Assim o $\text{rot}\,F(x,y,z)$ é um campo de vetores.

Exemplo

Determine $\text{rot}\,F(x,y,z)$ onde

$F(x,y,z) = xz\,i + xyz\,J - y^2\,K$

Solução

$$\text{rot}\,F(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & J & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix}$$

$$i\left(-2y - xy\right) - J\left(0 - x\right)$$

$$K(yz - 0) = \underline{(-2y-xy)\,i + x\,J + yz\,K}$$

Notação

Recorde do calculo II

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

o operador nabla. Então podemos escrever

$$\text{rot}\,F = \nabla \times F$$

↓ produto vetorial

Exemplo (vetor rotacional em $\mathbb{R}^2$)

Seja $F(x,y) = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,J$
Calcule $\nabla \times F$.

Solução

Consideramos $R(x,y,z) \equiv 0$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix}$$

não dependem de z

$$= i\left(0\right) + j\left(0\right) + k\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k$$

Significado do rotacional

Considerando

- Um fluido
- F um campo de velocidades

A partículas perto de um ponto (x,y,z) tendem a rodar em torno do eixo do $\mathrm{rot}F(x,y,z)$ (obedecendo a regra da mão direita)

Casos

(I) $\nabla \times F(x,y,z) = \vec{0}$

Neste caso, não há tendência de rotação das partículas próximas de (x,y,z) girarem em torno desse ponto

Neste caso, dizemos que o campo é irrotacional em (x,y,z)

(II) $\nabla \times F(x,y,z) \neq \vec{0}$

há, uma tendência em formas um redemuinho e a medida de o quão rápido as partículas se movem em torno desse eixo é o comprimento do vetor $\nabla \times F(x,y,z)$

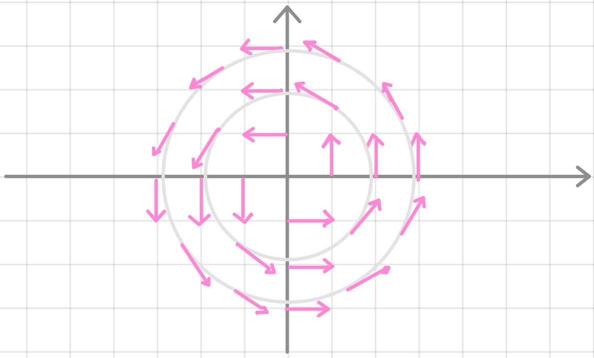
↳ um redemuinho

Atenção

Considere o campo

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

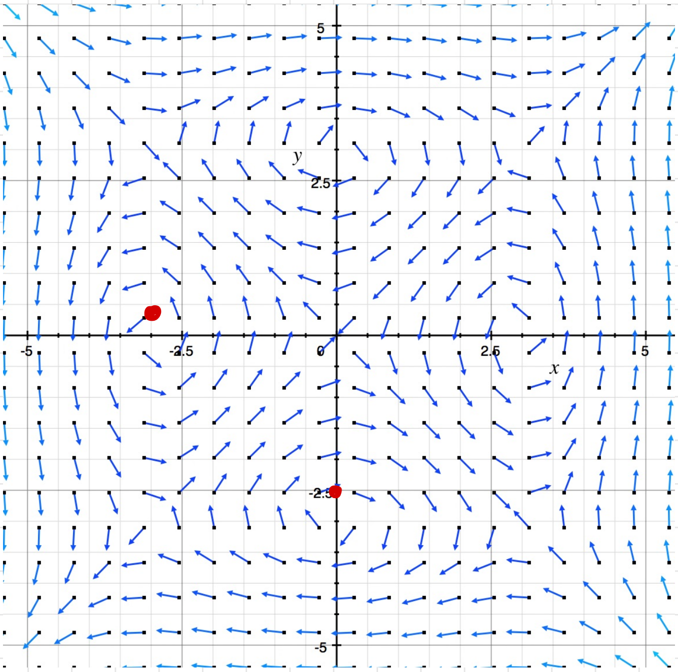
que tem o seguinte representação



Neste campo, uma partícula faz uma trajetória circular. Mas fixo um ponto não a tendência que as partículas perto do ponto estão girando em torno deste ponto

Exercício Calcule o rot F.

Exemplo Considere a representação do campo de velocidades de um certo fluido



Nos pontos vermelhos há uma tendência de rotação

Exemplo (rotacional de um campo gradiente)

Calcule $\text{rot}(\nabla f)$, f com derivadas parciais contínuas.

Solução

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\text{rot}\, \nabla f(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \overbrace{\left(\frac{\partial f^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial f^2}{\partial z \partial y}\right)}^{0} i + \overbrace{\left(\frac{\partial f^2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial f^2}{\partial x \partial z}\right)}^{0} j$$

$$+ \overbrace{\left(\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f^2}{\partial y \partial x}\right)}^{0} k = \vec{0}$$

$$\boxed{\text{rot}\, \nabla f = \vec{0}}$$

Assim, para $\mathbb{R}^3$ temos o seguinte critério para um campo ser conservativo

Teorema

Seja F um campo de vetores definido em todo $\mathbb{R}^3$ cujas as componentes possuem derivadas de segunda ordem contínuas

F é conservativo se, somente se,

$\text{rot}\, F = \vec{0}$

Exemplo

Determine se o campo

$$F(x,y,z) = i + \text{sen}\, z\, j + y \cos z\, k$$

é conservativo ou não.

Solução

F é definido em $\mathbb{R}^3$

$$\text{rot}\, F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 1 & \text{sen}\, y & y \cos z \end{vmatrix}$$

$= (\cos z - \cos z) i + (0-0) j + (0-0) j$

$= \vec{0}$ F é conservativo

B: Divergente

Definição

$F(x,y,z) = P(x,y,z) i + Q(x,y,z) j + R(x,y,z) k$ um campo tal que as derivadas parciais de P, Q e R existem

$$\text{div}\, F(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

é dito divergente de F

Notação

Recorde $\nabla = \left(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z \right)$

o operador nabla

Escrevemos

$$\text{div } F = \nabla \cdot F$$

↳ produto escalar

Exemplo (Divergente do Gradiente)

Calcule $\nabla \cdot F$ onde $F = \nabla f$.

Solução:

$$\nabla \cdot \nabla f = \underbrace{\nabla^2 f}_{\text{notação}} =: \underbrace{\Delta f}_{\text{notação}}$$

chama-se Laplaciano de f.

$$= \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

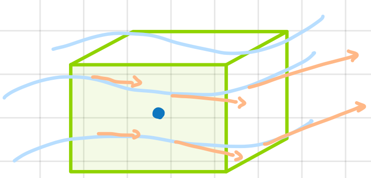
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Significado do divergente

Considerando

- um fluido ou Gás
- F um campo de velocidades

Assim $\nabla \cdot F(x,y,z)$ é a taxa de variação total (com relação ao tempo) da massa escoando por unidade de volume



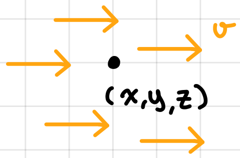
Isto é, calcula a tendência do fluido divergir de um ponto (x,y,z)

Casos

(I) $\nabla \cdot F(x,y,z) = 0$

Uma representação típica do campo perto desse ponto seria

$F(x,y) = \vec{v}$



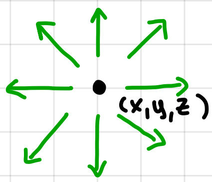
Acontece com líquidos

Neste caso, dizemos que o campo F é incompressível neste ponto

(II) $\nabla \cdot F(x,y,z) > 0$

Uma representação típica do campo perto desse ponto seria

$F(x,y) = xi + yj$

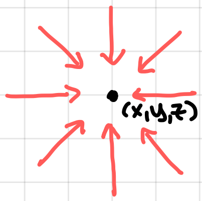


Isso acontece, por exemplo, quando o ar esquenta, ele se expande (sai mais partículas de perto do ponto, do que sai)

Neste caso (x,y,z) é dito fonte

(III) $\nabla \cdot F(x,y,z) < 0$

Uma representação típica do campo perto desse ponto seria



$F(x,y) = -x\,i - y\,j$

Isso acontece quando, por exemplo, o ar esfria, ele se contrai (se aproxima mais partículas perto do ponto do que se afasta)

Neste caso (x,y,z) é dito **sumidouro**

Exemplo

Seja $F = P\,i + Q\,j + R\,k$

Calcule $\text{div}(\text{rot}\,F)$

Solução

$$\text{rot}\,F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

$$\text{div}(\text{rot}\,F) = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0.$$

Exemplo

Existe um campo G tal que $\text{rot}\,G = \underbrace{xyz\,i - y^2z\,j + yz^2\,k}_{F}$?

Solução

Pelo exemplo anterior

$\text{div rot}\,G = 0$ para qualquer campo G.

Note que

$$\text{div}\,F = yz(-2yz) + 2yz = yz \neq 0$$

então não existe G tal que $\text{rot}\,G = F$