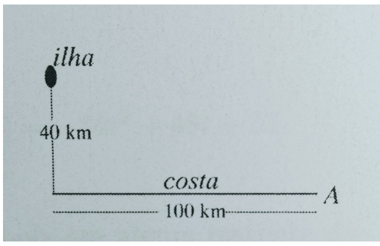
[UFES-CCE-DMAT-Prova 2-Manhã-Cálculo1-Equipe, 09/06/17]

Leia a prova com atenção e justifique suas respostas.

1. (2pts) Uma ilha situada a 40 km da costa deve ter um serviço de barcos para uma cidade A (ver figura).



Se os barcos têm velocidade média de 25km/h e os carros têm uma velocidade média de 45km/h, onde, na costa, deverá estar situada a estação de barcos, a fim de tornar a viagem de A para ilha a mais rápida possível. Condição externa: o local que torna a viagem mais rápida está estritamente entre a cidade A e o local, na costa, mais próximo da ilha.

(Baseado em Lista 16, ex. 3)

Minimizamos (o tempo) $T(x) = \frac{100-x}{45} + \frac{\sqrt{1600+x^2}}{25}$, onde $x \in [0,100]$ é distância em km entre a estação e o local, na costa, mais próximo da ilha. Pela condição externa dada, sabemos que o mínimo global $T(x_0)$ é atingido para certo $x_0 \in (0,100)$. Temos $T'(x) = -\frac{1}{45} + \frac{x}{25\sqrt{1600+x^2}}$ e $T'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1600\cdot 25}{56} \Rightarrow x = \frac{50}{7}\sqrt{14}$, além disso, $T''(x) = \frac{64}{\sqrt{1600+x^2}} > 0$, donde T atinge o mínimo em $x_0 = \frac{50}{7}\sqrt{14}$. Concluímos que a estação deverá ficar a $\frac{50}{7}\sqrt{14}$ km do local, na costa, mais próximo da ilha (i.e., a $100 - \frac{50}{7}\sqrt{14}$ km da cidade A).

2. (2pts) Cascalho está caindo e formando uma pilha cônica que aumenta a uma taxa de $3\text{m}^3/\text{min}$, de modo que o raio do cone é sempre igual à sua altura. Encontre a taxa de variação da altura da pilha quando a altura é de 3m.

(Lista 9, ex. 7)

É dada a taxa $\frac{dV}{dt} = 3$ (m^3/min) onde $V = \frac{h\pi r^2}{3}$, r metros e h metros são, respetivamente, o volume, raio e a altura da pilha cônica. Olhamos estas variáveis como funções do tempo t em minutos. Queremos $\frac{dh}{dt}$ quando $h = 2$. Como $r = h$, $V = \frac{h^3\pi}{3}$. Derivando em ordem a t, $\frac{dV}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt}$, logo a taxa pretendida é $\frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{1}{\pi h^2} = \frac{1}{3\pi}$ (m/min).

3. (2pts) Calcule:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$

(Lista 12, ex. 4)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{RH}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}}{\frac{1}{x}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

(b) $\frac{d}{dx}\frac{e^{\sin 2x}\sqrt{x}}{e^{\cos 3x}}$

(Lista 11, ex.6)
Derivação logarítmica: seja $y = \frac{e^{\sin 2x}\sqrt{x}}{e^{\cos 3x}}$, temos $\ln y = \sin 2x + \frac{1}{2}\ln x - \cos 3x$, e derivando em ordem a x

$$\frac{y'}{y} = 2\cos 2x + \frac{1}{2x} + 3\sin 3x$$

e

$$y' = \frac{e^{\sin 2x}\sqrt{x}}{e^{\cos 3x}} \cdot \left(2\cos 2x + \frac{1}{2x} + 3\sin 3x\right) = \frac{e^{\sin 2x} \cdot (4x\cos 2x + 1 + 6x\sin 3x)}{2e^{\cos 3x}\sqrt{x}}$$

4. (4pts) Acerca de $f(x) = \frac{x^3-2}{x}$, determine:

(a) domínio, zeros, assíntotas verticais e horizontais

(Lista 15, ex.1)
Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeros: $\sqrt[3]{2}$. A.H.: não existem, pois $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 - \frac{2}{x} = +\infty$ e, analogamente, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{x} = +\infty$. A.V.: $x = 0$, pois $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-2}{x} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$ (e $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3-2}{x} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$).

(b) intervalos onde é crescente/decrescente, máximos e mínimos locais

Temos $f'(x) = \frac{2(x^3+1)}{x^2}$. Números críticos: 0, -1. O sinal de $f'(x)$ é igual ao sinal do fator $x^3 + 1$ descrito em baixo junto com os intervalos onde é crescente/decrescente:

		-1		0	
f'	$-$	0	$+$	$n.d.$	$+$
f	$\searrow$	3	$\nearrow$	$n.d.$	$\nearrow$

Extremos locais: apenas um mínimo local $f(-1) = 3$.

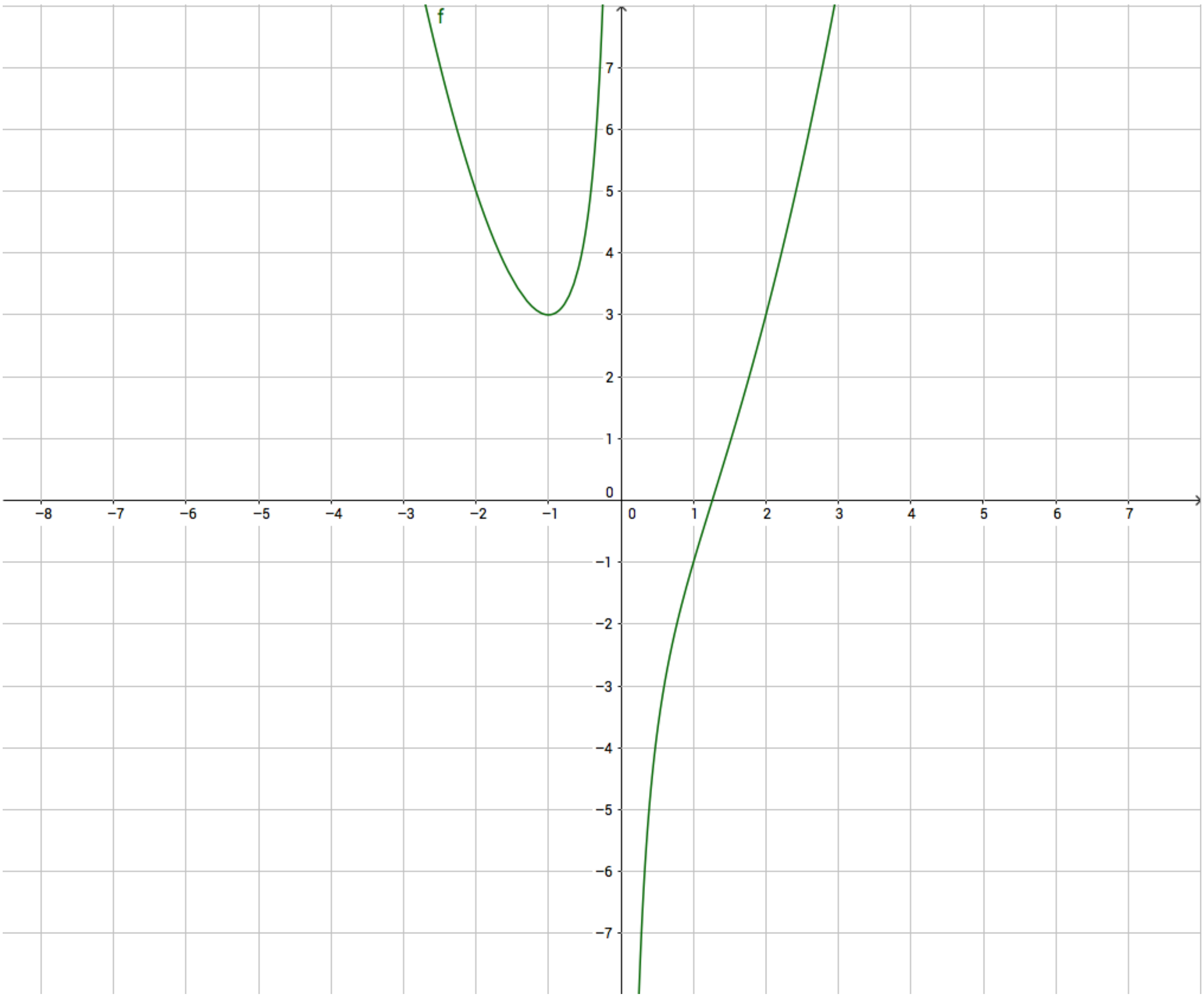
(c) intervalos de concavidade e pontos de inflexão

Temos $f''(x) = \frac{2(x^3-2)}{x^3}$. Números críticos: $\sqrt[3]{2}$, 0. O sinal de $f''(x)$ está descrito em baixo com os intervalos de concavidade:

		0		$\sqrt[3]{2}$	
x^3+2	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^3	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	$n.d.$	$-$	0	$+$
f	$\bigcup$		$\bigcap$	0	$\bigcup$

Ponto de inflexão: $(\sqrt[3]{2}, f(\sqrt[3]{2})) = (\sqrt[3]{2}, 0)$

(d) esboce o gráfico.



5.

Extra (1pt) Encontre a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ e que é paralela à reta secante que contém os pontos $(0, 0)$, $(2, 4)$.

A equação da reta tangente a $y = x^2$ num ponto (a, a^2) será necessariamente da forma $y - a^2 = 2a(x - a)$ com declive $2a = 2$ (igual ao declive da secante). Logo, $a = 1$ e a equação da tangente é: $y = 2x - 1$.