Algoritmos e Fundamentos da Teoria de Computação

Lista de Exercícios 07

1 Mostre que o seguinte problema, dito *4TA-SAT*, é NP-completo. O problema é definido como:

ENTRADA: Uma fórmula Booleana $\phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
PROBLEMA: A fórmula ϕ possui *ao menos quatro* soluções? (Uma solução é uma atribuição de valores às variáveis $X_1, X_2, \dots, X_n$ de ϕ que torna a fórmula verdadeira.)

Você deve reduzir o problema *SAT* para *4TA-SAT*. A demonstração de que *4TA-SAT* é NP-completo requer os seguintes passos:

1. Provar que *4TA-SAT* está em $\mathcal{NP}$.
2. Descrever uma redução em tempo polinomial de *SAT* para *4TA-SAT*. Sua redução deve tomar uma fórmula *SAT* ψ e construir uma instância do problema *4TA-SAT*, a fórmula ϕ.
(*Dica:* Adicione uma ou mais proposições atômicas (variáveis) à formula ψ, mas sem alterar as cláusulas já existentes. Suponha que ψ tinha k soluções originalmente. Quantas soluções a nova fórmula ϕ terá agora?)
3. Mostrar que ψ é satisfatível se e somente se ϕ possui ao menos quatro soluções.

Seguem as provas de cada um dos passos apresentados no enunciado.

1. É evidente que *4TA-SAT* está em $\mathcal{NP}$ uma vez que *SAT* está em $\mathcal{NP}$. No entanto, para provar tal fato efetivamente, apresentamos uma NTM que resolve o problema em tempo polinomial. Tal máquina é composta de duas partes:

   (a) Inicialmente usamos a propriedade não-determinística da máquina para "adivinhar" quatro atribuições de valores para as proposições atômicas de ϕ.

   (b) A seguir, cada conjunto de quatro atribuições gerado é avaliado, de forma a testar se cada atribuição torna a fórmula verdadeira. Se as quatro atribuições satisfazem a fórmula então a máquina para e aceita a entrada.

   Note que a parte (b) é determinística. O fato que outros caminhos da NTM podem não levar ao aceite não tem influência no resultado, uma vez que, pela definição de NTM, se há ao menos um caminho que aceita a entrada, a máquina como um todo aceita a entrada.

   Se ϕ tem tamanho n, então a parte (a) pode ser realizada em tempo $O(n)$ em uma NTM multi-fita. Já a avaliação de uma atribuição pode ser feita em $O(n^2)$ por DTM. Como é necessário avaliar quatro atribuições, a computação da parte (b) leva $T(n) = [4O(n^2)] \in O(n^2)$. Com isso, temos que a NTM resolve o problema em tempo polinomial, e portanto *4TA-SAT* está em $\mathcal{NP}$.

2. Seguindo a sugestão do enunciado, devemos incluir uma sub-fórmula em ψ para obtermos ϕ. Existem várias possibilidades para a escolha da sub-fórmula, no entanto, para simplificar a prova do item 3, tomamos a tautologia $(p \to q) \vee (q \to p)$. Sendo uma tautologia, todas as quatro possíveis atribuições de valores para p e q são soluções. Assim, a redução simplesmente toma uma fórmula *SAT* ψ e cria ϕ fazendo:

   $$\phi = \psi \wedge ((p \to q) \vee (q \to p)) \quad .$$

   Na redução acima, assumimos sem perda de generalidade que $p, q \notin \psi$ (caso contrário, basta escolher outras variáveis que não ocorram em ψ). É imediato ver que a redução proposta é polinomial. ($p \to q \equiv \neg p \vee q$).

3. Devemos provar que "ψ é satisfatível" $\Leftrightarrow$ "ϕ possui ao menos quatro soluções".

   Prova de $\Rightarrow$: se ψ é satisfatível então a fórmula possui ao menos uma solução. Seja $v(\psi)$ a atribuição de valores para as proposições atômicas de ψ que corresponde a tal solução. Utilizando $v(\psi)$, podemos criar quatro soluções para ϕ, variando os valores de p e q. Isto é, $\forall X \in \phi$:

$$v_1(X) = \begin{cases} v(X) & \text{se } X \in \psi \\ F & \text{se } X = p \\ F & \text{se } X = q \end{cases} \quad v_2(X) = \begin{cases} v(X) & \text{se } X \in \psi \\ T & \text{se } X = p \\ F & \text{se } X = q \end{cases}$$

$$v_3(X) = \begin{cases} v(X) & \text{se } X \in \psi \\ F & \text{se } X = p \\ T & \text{se } X = q \end{cases} \quad v_4(X) = \begin{cases} v(X) & \text{se } X \in \psi \\ T & \text{se } X = p \\ T & \text{se } X = q \end{cases}.$$

   Prova de $\Leftarrow$: Se ϕ possui quatro soluções $v_1(\phi), \ldots, v_4(\phi)$, elas necessariamente possuem uma sub-solução $v(\psi)$ comum, conforme ilustrado na prova do item anterior. (Em outras palavras, como ϕ possui uma tautologia como o último termo da conjunção, a satisfatibilidade de ϕ depende unicamente da satisfatibilidade de ψ.) Se $v(\psi)$ é uma solução então ψ é satisfatível e a prova está completa.

2 Seja $G = (\mathsf{N}, \mathsf{A})$ um grafo não-direcionado. O conjunto $\mathsf{I} \subseteq \mathsf{N}$ é dito *independente* se nenhum par de nós em I está ligado por uma aresta de G. (Formalmente, $\mathsf{I} \subseteq \mathsf{N}$ é um conjunto independente se para quaisquer $v, u \in \mathsf{I}$: $\{v, u\} \notin \mathsf{A}$.)

Considere o problema de decisão abaixo.

PROBLEMA: Conjunto Independente (*CI*)
ENTRADA: Um grafo não-direcionado $G = (\mathsf{N}, \mathsf{A})$ e um natural k entre 1 e *card* (N).
SAÍDA:

- "Sim", se G possui um conjunto independente I com *card* $(\mathsf{I}) = k$.
- "Não", caso contrário.

Mostre que CI é NP-completo. *(Dica: faça uma redução de* 3-SAT *para* CI.*)*

Como sempre, para provar que *CI* é NP-completo, devemos seguir os três passos indicados no enunciado do exercício anterior. Seguem as provas destes passos.

1. **Provar que *CI* está em $\mathcal{NP}$.** Esse passo é simples e segue os mesmos argumentos para os variados problemas já vistos.

   Dado o grafo G e um natural k como entrada, projetamos uma NTM de duas fitas que *escolhe de forma não-determinística* k nós de G e verifica se esses k nós são independentes. Após a escolha dos k nós, a NTM inicia na fita 2 a construção de todos os possíveis pares de k nós do conjunto. Assim, temos um *arranjo* de k nós tomados 2 a 2, o que leva a $\frac{k!}{(k-2)!} = \frac{k(k-1)(k-2)!}{(k-2)!} = k(k-1)$ possíveis pares de nós. (Usamos um arranjo ao invés de uma combinação porque um par de nós pode aparecer em qualquer ordem nas arestas de G. Se tivéssemos certeza que as arestas estão ordenadas de forma crescente, isto é, para toda aresta $\{v_i, v_j\} \in \mathsf{A}$, $i \leq j$, poderíamos então utilizar uma combinação. De qualquer forma, isso não afetaria o resultado pois só diminuiria o número de testes pela metade.)

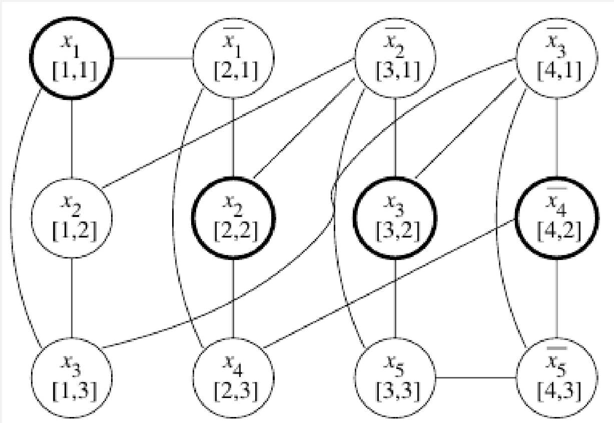
   Após a geração de todos os pares (arestas) na fita 2, a NTM percorre a fita 1, buscando a ocorrência de cada um dos pares no conjunto A de G. Se nenhum dos pares for encontrado, a NTM para e aceita; caso contrário, para e rejeita. Seja n o tamanho da representação do grafo G. A verificação de um par da fita 2 exige, no máximo, $2n + 2$ passos na fita 1 (percorrer a fita toda verificando e depois rebobinar). Como essa verificação precisa ser realizada no máximo $k(k-1)$ vezes, vemos que o desempenho de pior caso da NTM ocorre quando há um aceite, o que exige $k(k-1) \cdot 2(n+1)$ passos da máquina. Assim, fica claro que a complexidade de tempo da NTM é polinomial, e, portanto, *CI* está em $\mathcal{NP}$.

2. **Construir uma redução de *3-SAT* para *CI*.** Essa construção é muito similar à realizada para a problema da cobertura de vértices (VCP). Veja os *slides* 11 a 17 da Aula 07 para revisar.

   Seja $E = (e_1)(e_2) \cdots (e_m)$ uma expressão em 3-CNF. A partir de E, vamos construir um grafo G com $3m$ nós, nomeados por pares ordenados $[i, j]$, aonde $1 \leq i \leq m$ e $j = 1, 2, 3$. O nó $[i, j]$ representa o j-ésimo literal da cláusula e_i. A figura abaixo mostra um grafo de exemplo, construído a partir da fórmula 3-CNF

   $$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)$$

   aonde $\bar{x}_i$ representa a negação de um literal.



   As colunas da figura acima representam as cláusulas. A interpretação das arestas é dada a seguir.

   O "truque" na construção de G é utilizar as arestas para forçar qualquer conjunto independente com m nós a representar uma solução que satisfaz a expressão E. Há duas ideias fundamentais:

   (a) Devemos nos certificar que somente um nó de cada cláusula seja escolhido. Assim, fazemos a configuração de "triângulo", igual ao exemplo da Aula 07. Na figura acima, isso é caracterizado pelas arestas ligando os nós de uma mesma coluna.

   (b) Literais complementares não podem ser escolhidos simultaneamente. As arestas horizontais e "diagonais" na figura ilustram essa restrição para o exemplo.

   O natural k do problema *CI* equivale a m. A construção do grafo G pode ser realizada em tempo proporcional ao quadrado do tamanho de E. Logo, a conversão de E para G é uma redução em tempo polinomial.

3. **Provar que E é satisfatível $\Leftrightarrow$ G possui um conjunto independente de tamanho m.**

   Prova de $\Leftarrow$: Primeiramente, observe que um conjunto independente não pode incluir dois nós de uma mesma cláusula, devido à restrição do item (a), acima. Assim, se existe um conjunto independente de tamanho m, este conjunto deve incluir *exatamente* um nó de cada cláusula.

   Além disso, o conjunto independente não pode incluir literais conflitantes (variável x e sua negação $\bar{x}$), devido à restrição do item (b), acima. Assim, um conjunto independente I de tamanho m produz uma atribuição de valores T que satisfaz E, como descrito a seguir. Se um nó correspondente a uma variável x está em I, tome $T(x) = 1$; e se um nó correspondente a uma variável negada $\bar{x}$ está em I, tome $T(x) = 0$. Se não há um nó em I que corresponda nem a x e nem a $\bar{x}$, tome $T(x)$ de forma arbitrária (isto é, qualquer valor binário serve). Assim, se um conjunto independente de tamanho m existe em G, então T satisfaz E.

   Prova de $\Rightarrow$: Agora suponha que E é satisfeita por alguma atribuição de valores T. Dado que T torna cada cláusula de E verdadeira, nós podemos identificar um literal de cada cláusula que T torna verdadeiro. Para algumas cláusulas, pode haver uma escolha de dois ou três literais; nesse caso, escolhemos um arbitrariamente. Construa um conjunto I com m nós, tomando o nó correspondente ao literal selecionado em cada cláusula.

   O conjunto I é independente. As arestas entre nós que vêm da mesma cláusula (colunas da figura) não podem ter ambos os nós em I, porque nós selecionamos para I somente os nós que correspondem a literais que são verdadeiros pela atribuição T. Claro que T vai tornar ou x ou $\bar{x}$ verdadeiro, mas nunca ambos. Logo, se E é satisfatível, então G possui um conjunto independente de tamanho m.

Assim, há uma redução polinomial de *3SAT* para *CI*, e podemos concluir que *CI* é NP-hard. Como *CI* está em $\mathcal{NP}$, temos finalmente que *CI* é NP-complete.