

Aula passada Modelagem

Aula Hoje Teorema de existência e unicidade

2.4 Diferenças entre equações lineares e não lineares

Caso 1 Equação linear $y' + p(t)y = f(t)$ Teorema (de Existência e unicidade - TEU)

Sejam $p(t)$ e $f(t)$ funções contínuas em (a, b)
em $t_0 \in (a, b)$ então existe uma única solução
para o PVI

$$\begin{cases} y' + p(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

e a solução está definida em (a, b) mesmo intervalo em que p e f são contínuos

Exemplo: Use o teorema para encontrar
um intervalo no qual os PVI's tem
uma única solução

a)
$$\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(-1) = 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Solução:

a) Escrevendo na forma $y' + p(t)y = f(t)$

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t$$

$$p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad f(t) = 4t$$

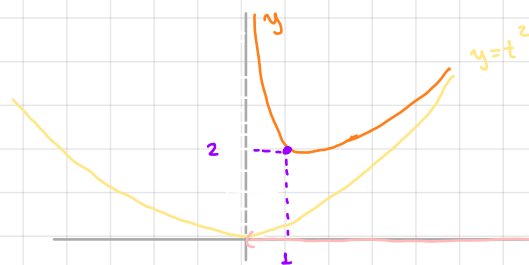
- $p(t)$ e $f(t)$ não estão definidos em $t=0$
 \Rightarrow e' contínuos em $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$
- $f(t)$ e' contínuo em \mathbb{R}

Como $1 \in (0, +\infty)$ pelo TEU existe uma
única solução definida em $(0, +\infty)$

Já resolvemos essa EDO (fator integrante)

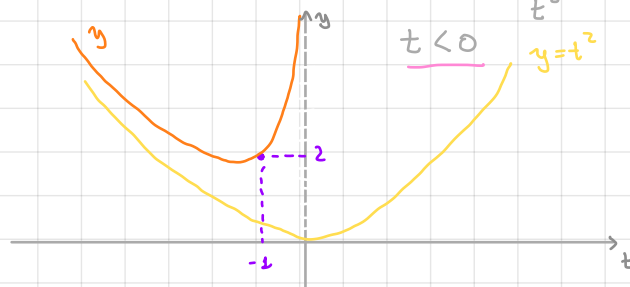
$$y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}, \quad t > 0$$

Lo se conside
rasse y
definida
 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
a solução
não seria
contínua



Lo definida aqui

b) Igual, mas agora $-1 \in (-\infty, 0)$ então
o TEU garante que existe uma única
solução definida em $(-\infty, 0)$

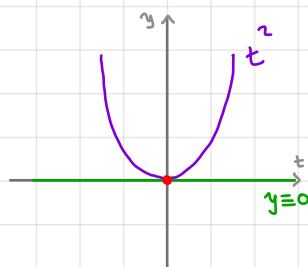
Novamente a solução e' $y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$ 

c) $p(t)$ não está sequer definida em $t=0$
então não está nas hipóteses do teorema
NÃO POSSO DIZER NADA

Mas olhando para a equação, aplicando
 $t=0$ obtemos $2y(0) = 0$ e portanto $y(0)$
não pode ser 2 - Assim não existe solução

d) Novamente não se aplica o teorema.
Neste caso por observação, notamos
que $y(t) = t^2$ satisfaz o PVI:

$$\underbrace{2t}_{y'} + \frac{2}{t} \cdot \underbrace{t^2}_y = 4t \quad e \quad y(0) = 0$$

e está definida em \mathbb{R} .E também $y \equiv 0$ também e' solução

duas soluções

Nota Use o Teorema nos itens a) e b)
no c) e d) pode acontecer qualquer coisa
↳ tem uma solução
↳ tem várias soluções
↳ não tem soluções

Paso 2 Equações não lineares $y' = f(t, y)$

Teorema de existência e unicidade (TEU)

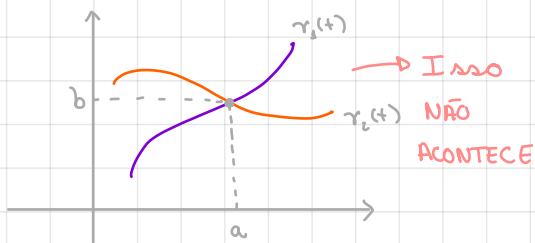
Suponha que f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas

em $(a, b) \times (c, d)$ contendo (t_0, y_0) . Então
o PVI

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tem uma única solução definida
em $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$
↳ não garante onde a
solução está definida

Nota Pelo TEU, geometricamente



Exemplo Discuta a existência e unicidade das soluções, quando possível diga onde está definida a solução

a) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y' = t\sqrt{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y' = t\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0, y_0 \neq 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y' = -\frac{y^2}{t^2} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Solução

a) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$f(y) = y^2$ contínuo em \mathbb{R}^2
 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ contínuo em \mathbb{R}^2

Pelo TEU existe uma única solução a saber usando separáveis:

$$\frac{dy}{dt} = y^2$$

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int dt$$

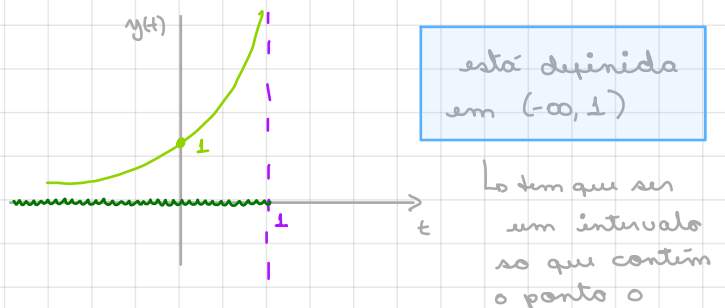
$$-\frac{1}{y} = t + c$$

$$y(t) = \frac{-1}{t+c} \quad \text{para } y(0) = 1$$

$$\text{temos } 1 = y(0) = \frac{-1}{c} \Rightarrow c = -1$$

$$\text{então } y(t) = \frac{-1}{t-1}$$

$$y(t) = \frac{1}{1-t}$$



↳ tem que ser um intervalo ao qual contém o ponto 0

b) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ Novamente existe uma única solução pelo TEU

SEM usar nenhum método note que $y(t) \equiv 0$ é uma solução

Satisfaz a equação

$$y' = y^2$$

(derivada da constante é zero)
e passa pelo ponto (0,0)

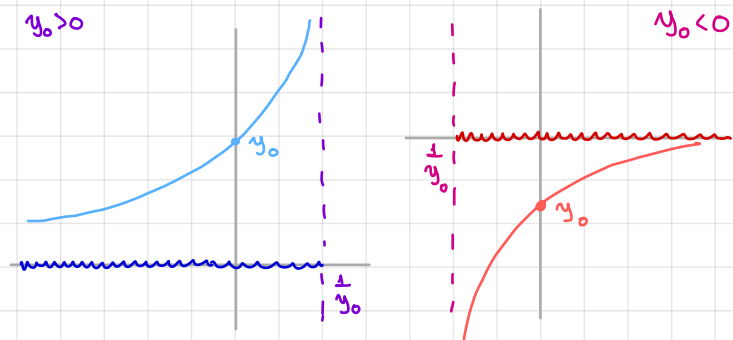
Note que a solução está definida para todo \mathbb{R} .

c) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

igualmente pelo TEU existe uma única solução e ela é dada pelo método de separáveis

$$y(t) = \frac{-1}{t+c} \quad \text{para } y(0) = y_0$$

$$y_0 = -\frac{1}{c} \Rightarrow c = -\frac{1}{y_0} \text{ então } y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t}$$



para $y_0 > 0$ a solução está definida em $(-\infty, \frac{1}{y_0})$

para $y_0 < 0$ a solução está definida em $(\frac{1}{y_0}, +\infty)$

d) $\begin{cases} y' = t\sqrt{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$. $f(t, y) = t\sqrt{y}$ contínua em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$

onde está definido

Não está definida em $(0, -1)$

Portanto não está nas hipóteses do teorema

NÃO PODEMOS DIZER NADA

Vamos fazer um esforço em resolver:

E observar que a solução $y(t)$ não pode assumir valores negativos pois de não satisfazer a equação

$$y' = t\sqrt{y} \quad \text{deve ser } \underline{\geq 0}$$

Portanto o PVI não tem solução

e) $\begin{cases} y' = t\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ novamente $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{t}{2\sqrt{y}}$ contínua em $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ e $0 \notin (0, +\infty)$ portanto não está nas condições do TEU

Neste caso note que $y \equiv 0$ é solução e

por separáveis:

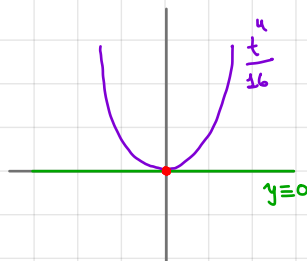
$$\frac{dy}{dt} = t\sqrt{y} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int t dt \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{t^2}{2} + C$$

$$y(t) = \left(\frac{t^2 + 2C}{4} \right)^2 \quad \text{para } y(0) = 0 \text{ temos}$$

$$0 = \left(\frac{2C}{2} \right)^2 \Leftrightarrow C = 0$$

portanto $y(t) = \frac{t^4}{16}$ é solução

o PVI possui duas soluções



f) $\begin{cases} y' = -\frac{y^2}{t^2} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$. $f(t, y) = -\frac{y^2}{t^2}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{t^2}$ é contínuo em $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$

então o PVI tem uma única solução para (t_0, y_0) tal que $t_0 \neq 0$ dada pelo método de variáveis separáveis:

$$\int -\frac{1}{y^2} dy = \int \frac{1}{t^2} dt \Rightarrow \frac{1}{y} = -\frac{1}{t} + C = \frac{tc - 1}{t}$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{t}{tc - 1} \quad \text{para } y(t_0) = y_0 \quad (y_0 \neq 0)$$

$$C = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{t_0} = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{t_0} \text{ assim}$$

$$y(t) = \frac{t}{\left(\frac{1}{y_0} + \frac{1}{t_0}\right)t - 1}$$

• $C = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{t_0}$, se $y_0, t_0 > 0$ então

a solução está definida $(\frac{1}{C}, +\infty)$

• se $y_0, t_0 < 0$ então a solução está definida em $(-\infty, \frac{1}{C})$

Para $y_0 = 0$ Note que $y \equiv 0$ é a solução $\begin{cases} y' = -\frac{y^2}{t^2} \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$

Note que para qualquer $c \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \frac{t}{tc-1} \text{ satisfaz}$$

$$y(0) = 0$$

Portanto em o PVI

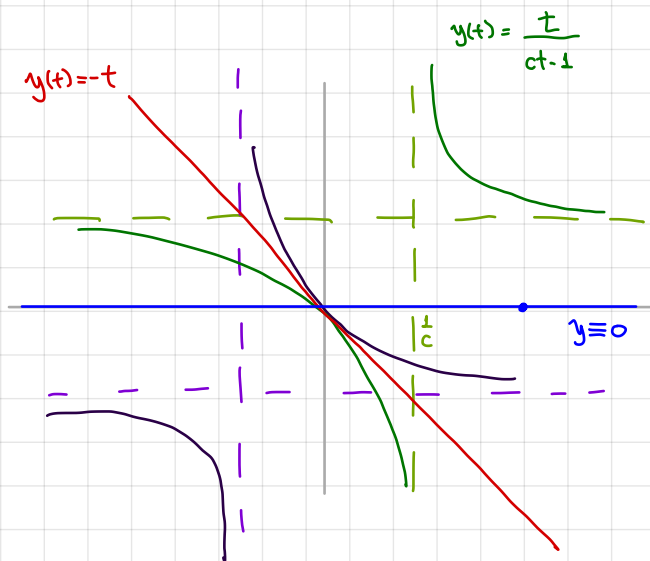
$$\begin{cases} y' = -\frac{y^2}{t^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{Tem infinitas soluções}$$

Por fim para $(0, y_0)$ $y_0 \neq 0$ como deve satisfazer a equação $\forall t$

Para $t=0$ temos

$$0 = t^2 y' = -y_0^2 = -y_0^2 \neq 0$$

Portanto não existe solução para $\begin{cases} y' = -\frac{y^2}{t^2} \\ y(0) = y_0 \neq 0 \end{cases}$



→ PRÓXIMA PÁGINA PARTE DE DINÂMICA DE POPULAÇÃO