

CAPÍTULO III

REPRESENTAÇÕES DE SISTEMAS DINÂMICOS

TÓPICOS

- Transformada de Laplace
- Funções de transferência
- Espaço de estados
- Linearização
- Fluxo de sinal
- Fórmula de Mason

3.1 CONCEITO DE VARIÁVEL COMPLEXA

Uma variável complexa s tem duas componentes: uma componente real σ e uma componente imaginária ω . Graficamente, a componente real de s é representada por um eixo- σ na direção horizontal, e a componente imaginária é medida ao longo do eixo- ω , no plano complexo- s . A Figura 3.1 ilustra no plano complexo s , um ponto arbitrário $s = s_1$, definido por $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$.

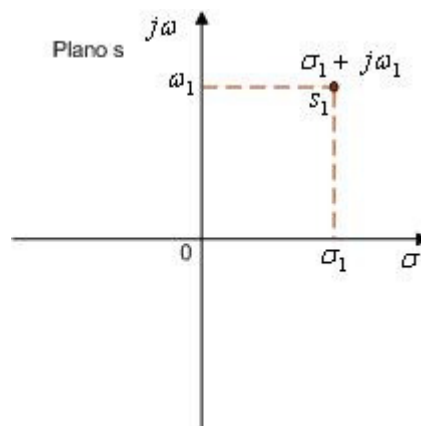


Figura 3.1 Plano complexo s

Funções de uma variável complexa

$G(s)$ é uma função de variável complexa s se para cada valor de s , existem um ou mais valores correspondentes de $G(s)$. Visto que s é definida com componentes real e imaginária, a função $G(s)$ também é representada por partes real e imaginária:

$$G(s) = \text{Re } G(s) + j \text{Im } G(s)$$

onde $\text{Re } G(s)$ denota a parte real de $G(s)$ e $\text{Im } G(s)$ denota a parte imaginária de $G(s)$.

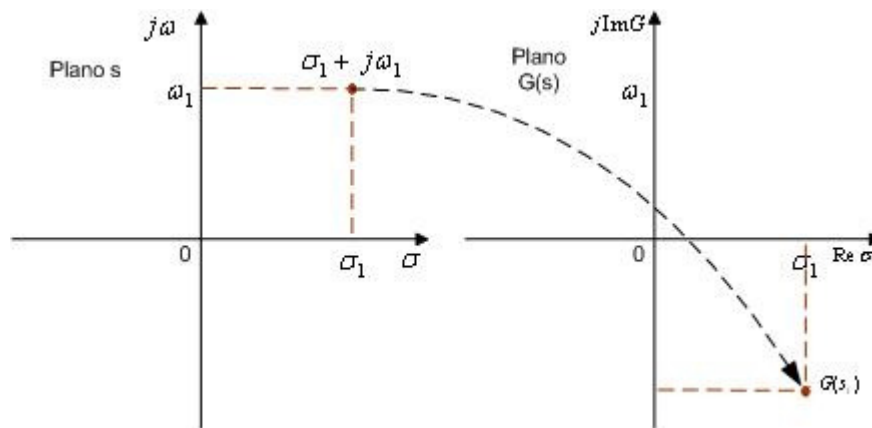


Figura 3.2 Mapeamento de um simples valor complexo do plano s para o plano $G(s)$

Os **pólos** de uma função $G(s)$ são os pontos $s = s_i$ que tornam $G(s)$ infinita; ao passo que os **zeros** são os pontos $s = s_i$ que tornam $G(s)$ nula.

Por exemplo:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad 3.1$$

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{s(s+1)(s+3)^2} \quad 3.2$$

3.2 TRANSFORMADA DE LAPLACE

A transformada de Laplace é uma das ferramentas matemáticas usadas para a solução de equações diferenciais ordinárias lineares, com as seguintes vantagens:

Se a função real $f(t)$ satisfaz a condição $\int_0^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$, sendo σ finito real,

a transformada de Laplace de $f(t)$ é definida como:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad 3.3$$

Esta definição é a transformada de Laplace unilateral, pois a integração é calculada de $t = 0$ a ∞ . Isto simplesmente significa que toda a informação contida em $f(t)$ antes de $t = 0$ é ignorada ou considerada como nula. Esta suposição não impõe qualquer limitação nas aplicações da transformada de Laplace de problemas de sistema lineares, visto que em estudos no domínio do tempo de forma geral, o tempo referencial é considerado em $t = 0$. Sobretudo, para um sistema físico quando uma entrada é aplicada no instante $t = 0$, a resposta do sistema não inicia antes de $t = 0$; isto é, a resposta não precede a excitação. Tal sistema é denominado de **causal** ou simplesmente **sistema realizável**. Em um sistema causal o sinal de saída depende apenas de valores presentes e/ou passados do sinal de entrada.

Estritamente, a transformada de Laplace unilateral deve ser definida de $t = 0^-$ a $t = \infty$. A equação $t = 0^-$ significa que o limite de $t \rightarrow 0$ é tomado do lado esquerdo de $t = 0$. Este rigor matemático deve ser feito quando a função $f(t)$ tiver uma descontinuidade ou um impulso em $t = 0$. Contudo, cabe ressaltar que a determinação das transformadas de Laplace será por meio de tabela, sendo que a equação 3.3 dificilmente será utilizada.

A seguir, alguns exemplos de determinação da transformada de Laplace:

Exemplo 3.1 Dado:

$$f(t) = \begin{cases} u_s(t) = 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad 3.4$$

A transformada de Laplace de $f(t)$ é obtida assim:

$$F(s) = \int_0^{\infty} u_s(t) e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad 3.5$$

Equação 3.5 é válida se

$$\left| \int_0^{\infty} u_s(t) e^{-\sigma t} dt \right| = \int_0^{\infty} |e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad 3.6$$

Na prática dificilmente precisaremos nos preocupar com a região de convergência. Ou seja, a transformada de Laplace do degrau unitário é igual a $1/s$.

Exemplo 3.2 Considere a função exponencial

$$f(t) = e^{-\alpha t} \quad t \geq 0 \quad 3.7$$

onde α é uma constante real. A transformada de Laplace de $f(t)$ é:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \frac{e^{-(s+\alpha)t}}{s+\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha} \quad 3.8$$

3.3 TRANSFORMADA DE LAPLACE INVERSA

Dada a transformada de Laplace $F(s)$, a operação de obtenção de $f(t)$ é a transformação inversa de Laplace.

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] \quad 3.9$$

A transformada de Laplace inversa é dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad 3.10$$

onde c é uma constante real que é maior que as partes reais de todas as singularidades de $F(s)$. A equação 3.10 representa uma integral linha que pode ser calculada no plano s . Para funções simples, a operação da transformada de Laplace inversa pode ser realizada através da tabela da Transformada de Laplace. Para funções mais complexas, a transformada de Laplace inversa pode ser realizada por expansão de frações parciais de $F(s)$ com a tabela de transformada de Laplace. A função `residue` do Matlab® pode ser usada para expansão em frações parciais. Mais detalhes na seção 3.5.

3.4 TEOREMAS IMPORTANTES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Aplicações da transformada de Laplace em muitos casos são simplificadas pela utilização de propriedades da transformada. Estas propriedades são apresentadas pelos seguintes teoremas.

Teorema 1. Multiplicação por uma constante

Seja k uma constante e $F(s)$ a transformada de Laplace de $f(t)$. Então

$$L[kf(t)] = kF(s) \quad 3.11$$

Teorema 2. Soma e diferença

Seja $F_1(s)$ e $F_2(s)$ as transformadas de Laplace de $f_1(t)$ e $f_2(t)$, respectivamente. Então

$$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s) \quad 3.12$$

Teorema 3. Diferenciação

Seja $F(s)$ a transformada de Laplace de $f(t)$, e seja $f(0)$ o limite de $f(t)$ quando t se aproxima de 0. A transformada de Laplace de $\frac{df(t)}{dt}$ é:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = sF(s) - f(0) \quad 3.13$$

Em geral, para derivadas de alta ordem de $f(t)$:

$$\begin{aligned} L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] &= s^n F(s) - \lim_{t \rightarrow 0} \left[s^{n-1} f(t) + s^{n-2} \frac{df(t)}{dt} + \dots + \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} \right] \\ &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \end{aligned} \quad 3.14$$

onde $f^{(i)}(0)$ denota a derivada de ordem i de $f(t)$ com relação ao tempo t , calculada em $t = 0$.

Teorema 4. Integração

Seja a transformada de Laplace da 1ª integral de $f(t)$ com relação ao tempo é a transformada de Laplace de $f(t)$ dividida por s , isto é:

$$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \quad 3.15$$

Para integração de ordem n :

$$L \left[\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_n} f(\tau) d\tau dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1} \right] = \frac{F(s)}{s^n} \quad 3.16$$

Teorema 5. Deslocamento no tempo

A transformada de Laplace de $f(t)$ atrasada por um tempo $= T$ é igual a transformada de $f(t)$ multiplicada por e^{-Ts} ; isto é:

$$L[f(t-T)u_s(t-T)] = e^{-Ts} F(s) \quad 3.17$$

onde $u_s(t-T)$ é a função de resposta ao degrau unitário que é deslocada no tempo à direita por T .

Teorema 6. Teorema do valor inicial

Se a transformada de Laplace de $f(t)$ é $F(s)$, então

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad 3.18$$

se o limite existe.

Teorema 7. Teorema do valor final

Se a transformada de $f(t)$ é $F(s)$ e se $sF(s)$ contém todos os pólos do lado esquerdo, então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad 3.19$$

o teorema do valor final é muito útil para análise e projeto de sistemas de controle, pois fornece o valor final de uma função no tempo pelo conhecimento do comportamento de sua transformada de Laplace em $s = 0$.

A seguir exemplos que mostram certos cuidados que devem ser tomados:

Exemplo 3.3 Considere a função

$$F(s) = \frac{5}{s(s^2 + s + 2)} \quad 3.20$$

Sendo os pólos de $sF(s)$ pertencentes ao lado esquerdo do plano s

Já que $sF(s)$ satisfaz a condição do teorema 7, então o teorema do valor final pode ser utilizado, logo temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5}{(s^2 + s + 2)} = \frac{5}{2} \quad 3.21$$

Exemplo 3.4 Considere a função

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad 3.22$$

que é a transformada de Laplace de $f(t) = \sin \omega t$. Neste caso o teorema do valor final não pode ser aplicado pois $sF(s)$ possui dois pólos sobre o eixo imaginário.

Teorema 8. Deslocamento complexo

A transformada de Laplace de $f(t)$ multiplicada por $e^{\mp \alpha t}$, onde α é uma constante, é igual a transformada de Laplace $F(s)$, com s mudado por $s \pm \alpha$; isto é,

$$L[e^{\mp \alpha t} f(t)] = F(s \pm \alpha) \quad 3.23$$

Teorema 9. Convolução real (multiplicação complexa)

Seja $F_1(s)$ e $F_2(s)$ as transformadas de Laplace de $f_1(t)$ e $f_2(t)$, respectivamente, e $f_1(t) = 0$ e $f_2(t) = 0$, para $t < 0$; então

$$F_1(s)F_2(s) = L[f_1(t) * f_2(t)] = L\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right] = L\left[\int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau\right] \quad 3.24$$

onde o símbolo “*” denota a convolução no domínio do tempo.

A equação 3.24 mostra que a multiplicação de duas funções transformadas no domínio complexo s é equivalente à convolução de duas funções reais correspondentes de t no domínio de t . É importante ressaltar que a transformada de Laplace inversa do produto de duas funções no domínio de s não é igual ao produto de duas funções reais correspondentes no domínio do tempo; isto é:

$$L^{-1}[F_1(s)F_2(s)] \neq f_1(t)f_2(t) \quad 3.25$$

Existe também uma relação dual para o teorema da convolução real, denominada por convolução complexa. O teorema estabelece que a multiplicação no domínio real do tempo é equivalente à convolução no domínio complexo s ; isto é:

$$L[f_1(t)f_2(t)] = F_1(s) * F_2(s) \quad 3.26$$

onde “*” denota a convolução complexa neste caso.

3.5 TRANSFORMADA DE LAPLACE INVERSA USANDO FRAÇÕES PARCIAIS

No cálculo da transformada inversa de Laplace, não utilizamos a equação 3.10; mas sim o método de frações parciais. Basicamente, reduzimos uma função de Laplace em termos conhecidos em uma tabela de transformadas, de tal forma que possamos realizar a conversão de forma direta.

Expansão em frações parciais

Quando a solução da transformada de Laplace de uma equação diferencial é uma função racional em s , isto pode ser escrito:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad 3.27$$

onde $P(s)$ e $Q(s)$ são polinômios de s . Consideramos que o grau de $P(s)$ em s é maior que o de $Q(s)$.

O polinômio $P(s)$ pode ser escrito por:

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s_{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad 3.28$$

onde a_0, a_1, \dots, a_{n-1} são coeficientes reais.

O método de expansão em frações parciais será apresentados para três casos: i) pólos simples, ii) pólos de ordem múltipla e iii) pólos conjugados complexos de $G(s)$.

i) $G(s)$ tem pólos simples

Se todos os pólos de $G(s)$ são pólos reais e simples, a equação 3.27 pode ser escrita por:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_n)} \quad 3.29$$

onde $s_1 \neq s_2 \neq \dots \neq s_n$. Aplicando a expansão em frações parciais, a equação 3.29 é escrita:

$$G(s) = \frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{s + s_2} + \dots + \frac{K_n}{s + s_n} \quad 3.30$$

O coeficiente K_i ($i = 1, 2, \dots, n$) é calculado pela equação 3.31:

$$K_i = \left[(s + s_i) \frac{Q(s)}{P(s)} \right]_{s=-s_i} \quad 3.31$$

Exemplo 3.5 Seja a função:

$$G(s) = \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} \quad 3.32$$

Em frações parciais pode ser escrita como:

$$G(s) = -\frac{1}{s + 1} + \frac{7}{s + 2} - \frac{6}{s + 3} \quad 3.33$$

Facilmente podemos achar a transformada inversa consultando a tabela de transformada.

ii) $G(s)$ tem pólos de múltipla-ordem

Se r dos n pólos de $G(s)$ são idênticos, o pólo $s = -s_i$ de multiplicidade r , $G(s)$ é escrito:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{Q(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_{n-r})(s + s_i)^r}$$

$i \neq 1, 2, \dots, n-r$. Então $G(s)$ pode ser expandido por:

$$G(s) = \frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{s + s_2} + \dots + \frac{K_{n-r}}{s + s_{n-r}} + \frac{A_1}{s + s_i} + \frac{A_2}{(s + s_i)^2} + \dots + \frac{A_r}{(s + s_i)^r} \quad 3.34$$

Os $(n-r)$ coeficientes, K_1, K_2, \dots, K_{n-r} , que correspondem aos pólos simples que podem ser calculados pela equação 3.31.

Para o cálculo dos coeficientes A_i , utilizaremos as equações 3.35 a 3.38:

$$A_r = \left[(s + s_i)^r G(s) \right]_{s=-s_i} \quad 3.35$$

$$A_{r-1} = \frac{d}{ds} \left[(s + s_i)^r G(s) \right]_{s=-s_i} \quad 3.36$$

$$A_{r-2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[(s + s_i)^r G(s) \right]_{s=-s_i} \quad 3.37$$

\vdots

$$A_1 = \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left[(s + s_i)^r G(s) \right]_{s=-s_i} \quad 3.38$$

Exemplo 3.6. Seja a função $G(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^3(s+2)} \quad 3.39$$

Em frações parciais pode ser escrita como:

$$G(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_{-2}}{s+2} + \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)^3} \quad 3.40$$

Assim, K_0 e K_{-2} são calculados pela equação 3.31; e A_1 , A_2 e A_3 pelas equações 3.35 a 3.38.

$$K_0 = \frac{1}{2}$$

$$K_{-2} = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = -1$$

$$A_2 = 0$$

$$A_1 = -1$$

Assim de posse $G(s)$ decomposta em frações parciais, podemos determinar facilmente determinar a transformada inversa da mesma $g(t)$.

iii) $G(s)$ tem pólos complexos conjugados complexos

Suponha que $G(s)$ da equação 3.27 contenha um par de pólos complexos:

$$s = -\alpha + j\omega \quad \text{e} \quad s = -\alpha - j\omega$$

Exemplo 3.7. Seja a função:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad 3.41$$

Assume-se que ζ e ω_n são tais que $G(s)$ tem pólos complexos conjugados. Então:

$$G(s) = \frac{K_{-\alpha+j\omega}}{s + \alpha - j\omega} + \frac{K_{-\alpha-j\omega}}{s + \alpha + j\omega} \quad 3.42$$

onde

$$\alpha = \zeta\omega_n$$

e

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Após calcular os resíduos, em frações parciais, $G(s)$ pode ser escrita:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{2j\omega} \left[\frac{1}{s + \alpha - j\omega} - \frac{1}{s + \alpha + j\omega} \right] \quad 3.43$$

A transformada inversa de $G(s)$ é:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{\omega_n^2}{2j\omega} e^{-\alpha t} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \\ &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad 3.44$$

3.6 APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES

Procedimento de resolução segue os seguintes passos:

- 1) Aplicar a transformada de Laplace na equação diferencial, incluindo as condições iniciais do problema;
- 2) Manipular algebricamente a equação e achar a variável de saída;
- 3) Expandir em frações parciais a equação algébrica da saída;
- 4) Achar a transformada inversa a partir de uma tabela de transformada de Laplace;

Exemplo 3.8: considere a equação diferencial:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5u_s(t)$$

onde $u_s(t)$ é a função degrau unitário. As condições iniciais são $y(0) = -1$ e $y^{(1)}(0) = dy(t)/dt|_{t=0} = 2$. Para solução deste problema:

Passo 1: $s^2 Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 5/s$

Passo 2: $Y(s) = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)}$

Passo 3: $Y(s) = \frac{5}{2s} - \frac{5}{s+1} + \frac{3}{2(s+2)}$

Passo 4: $y(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \quad t \geq 0$ (solução)

Aplicando-se o teorema do valor final temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-s^2 - s + 5}{s^2 + 3s + 2} = 5/2$$

O que coincide com a parte estacionária da solução obtida.

Exemplo 3.9 Ache a solução da equação diferencial:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 34.5 \frac{dy(t)}{dt} + 1000y(t) = 1000u_s(t) \quad 3.45$$

Considerando-se as condições iniciais nulas.

Aplicando a transformada de Laplace obtemos:

$$Y(s) = \frac{1000}{s(s^2 + 34.5s + 1000)} = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad 3.46$$

onde $\zeta = 0.5455$ e $\omega_n = 31.62$.

a partir de uma tabela, a transformada inversa de 3.46 é:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta) \quad t \geq 0 \quad 3.47$$

Assim sendo, a solução de 3.45 é dada por:

$$y(t) = 1 - 1.193e^{-17.25t} \sin(26.5t + 56.94^\circ) \quad t \geq 0 \text{ (solução)}$$

$$\theta = \cos^{-1} \zeta = 56.94^\circ$$

3.7 REPRESENTAÇÃO EM VARIÁVEIS DE ESTADO

A descrição por variáveis de estado para um sistema linear e invariante no tempo (LTI, linear time-invariant) consiste em uma série de equações diferenciais de primeira ordem associadas que descrevem como o estado do sistema evolui e uma equação da saída que relaciona a saída do sistema com variáveis de estado e entrada atuais. Estas equações são escritas na forma matricial. O estado de um sistema pode ser definido com um conjunto mínimo de sinais que dado somente o valor do estado em um ponto do tempo t_0 (estado inicial) e a entrada para os tempos $t \geq t_0$, podemos determinar a saída em todos os tempos $t \geq t_0$. Essa representação pode ser usada também para representar sistemas multivariáveis e/ou não lineares.

3.7.1 Descrição matemática e gráfica em diagrama de blocos

Um sistema LTI pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= AX(t) + BU(t) \\ Y(t) &= CX(t) + DU(t)\end{aligned}\tag{3.48}$$

onde

$X(t)$ = vetor de estados do sistema de dimensão $n \times 1$, n = número de estados.

$U(t)$ = entrada sistema de dimensão $nu \times 1$; nu = número de entradas

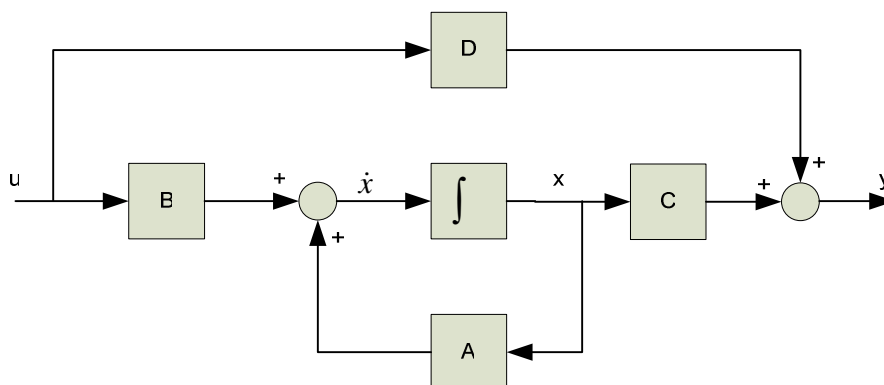
$Y(t)$ = saída do sistema de dimensão $ny \times 1$; ny = número de saídas

Assim sendo, as matrizes A , B , C e D são definidas conforme a tabela 3.1:

Tabela 3.1 Matrizes do sistema LTI em variáveis de estado

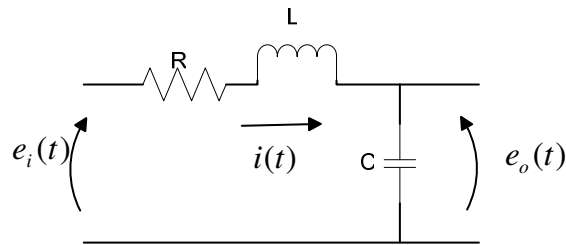
MATRIZ	NOMENCLATURA	DIMENSÃO
A	Matriz do sistema	$n \times n$
B	Matriz de entrada	$n \times n_u$
C	Matriz de saída	$n_y \times n$
D	Matriz de transmissão direta	$n_y \times n_u$

O diagrama de blocos de estados pode ser representado conforme a figura 3.3:

**Figura 3.3** Diagrama de blocos de estado de variáveis de estado

3.7.2 Exemplos em variáveis de estado

A seguir são apresentados alguns exemplos de descrição em variáveis de estado analítica e gráfica. Outros exemplos serão apresentados em sala de aula.

Exemplo 3.10 Circuito RLC**Figura 3.4** Circuito RLC

Com as equações físicas:

$$\begin{aligned} e_i(t) &= e_o(t) + L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) \\ i(t) &= C \frac{de_o(t)}{dt} \end{aligned} \quad 3.49$$

Escolhemos os estados (sugestão: corrente elétrica para o indutor e tensão no capacitor), entrada e saída.

$$\begin{aligned} x_1 &= i(t) \\ x_2 &= e_c(t) = e_o(t) \\ u(t) &= e_i(t) \\ y(t) &= e_o(t) \end{aligned} \quad 3.50$$

Substituindo nas equações físicas, temos:

$$\begin{cases} u = x_2 + L \dot{x}_1 + Rx_1 \\ x_1 = C \dot{x}_2 \end{cases} \quad 3.51$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \\ y = x_2 \end{cases}$$

Dessa forma as equações matriciais de estado e saída são:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad 3.52$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0u$$

Com o diagrama de blocos de estados dado por:

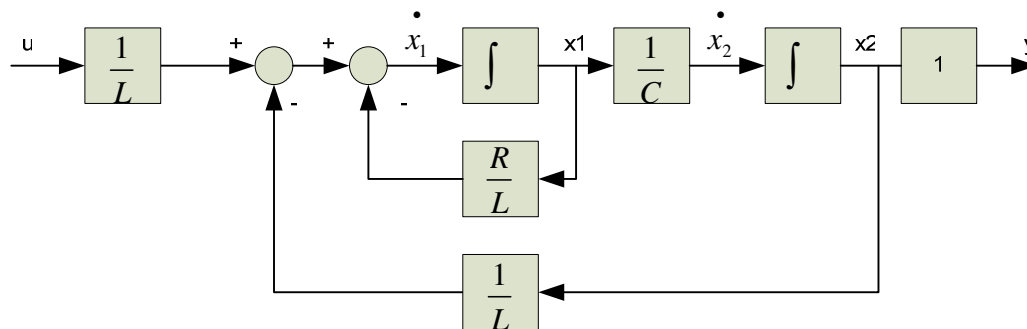


Figura 3.5 Diagrama de blocos de estado do circuito RLC

Exemplo 3.11 Motor CC

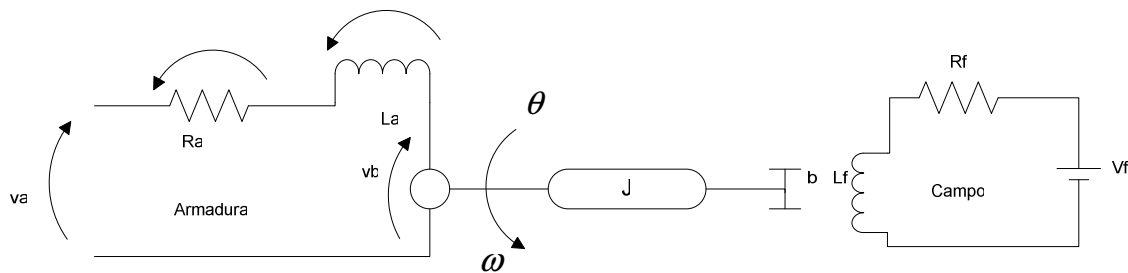


Figura 3.6 Motor DC

As equações físicas do motor cc são:

$$\begin{cases} v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + K_b \dot{\theta}(t) \\ J \dot{\theta}(t) = K_i i_a(t) - b \ddot{\theta}(t) \end{cases} \quad 3.53$$

Escolhemos os estados (corrente elétrica para o indutor, dois estados para posição e velocidade angular, pois há derivada de segunda ordem em $\theta(t)$), entrada e saída:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= i_a(t) \\
 x_2 &= \theta(t) \\
 x_3 &= \dot{\theta}(t) \\
 u &= v_a(t) \\
 y &= \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Substituímos nessas equações:

$$\begin{aligned}
 u &= R_a x_1 + L_a \dot{x}_1 + K_b x_3 \\
 J \ddot{x}_3 &= K x_1 - b x_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 \dot{x}_1 = -\frac{R_a}{L_a} x_1 - \frac{K_b}{L_a} x_3 + \frac{1}{L_a} u \\
 \dot{x}_2 = x_3 \\
 \dot{x}_3 = \frac{K}{J} x_1 - \frac{b}{J} x_3
 \end{cases} \tag{3.55}$$

$$y = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Assim as equações matriciais de estado e saída são:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{K_b}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{J} & 0 & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0u$$
3.56

Exemplo 3.12 Massa-Mola

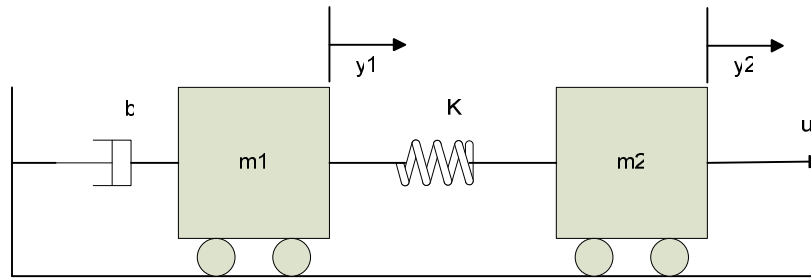


Figura 3.7 Sistema mecânico translacional – dois carrinhos

As equações físicas são dadas por:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 = -b \dot{y}_1 - K(y_1 - y_2) \\ m_2 \ddot{y}_2 = -K(y_2 - y_1 + u) \end{cases}$$
3.57

Escolhemos os estados:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ \dot{x}_1 = \dot{y}_1 \\ x_2 = y_1 \\ \dot{x}_2 = \dot{y}_1 \\ x_3 = y_2 \\ \dot{x}_3 = \dot{y}_2 \\ x_4 = y_2 \\ \dot{x}_4 = \dot{y}_2 \end{cases}$$
3.58

Substituímos nas equações físicas:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_2 = -bx_2 - Kx_1 + Kx_3 \\ m_2 \ddot{x}_4 = -Kx_3 + Kx_1 + u \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \end{cases} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad 3.59$$

Na forma matricial, temos as equações matriciais de estado e saída:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K/m_1 & -b/m_1 & K/m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K/m_2 & 0 & -K/m_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m_2 \end{bmatrix} \quad 3.60$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.13 Sistema de reservatórios interligados

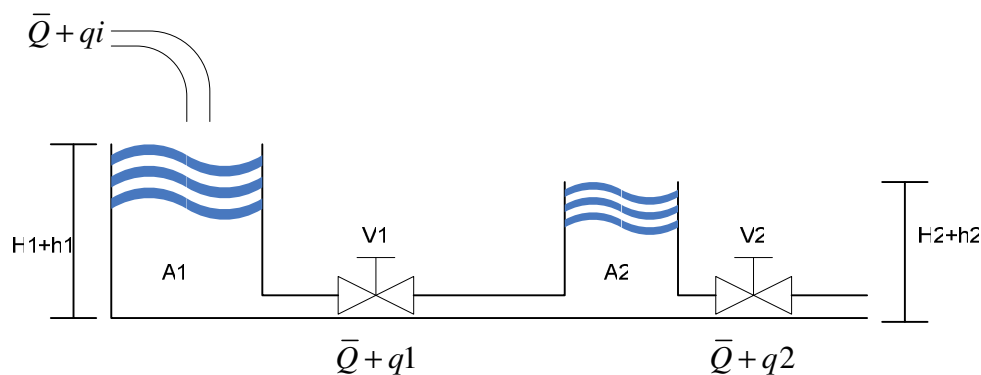


Figura 3.8 Sistema de tanques interligados

Equações físicas:

$$V_1 = A_1(H_1 + h_1)$$

$$\frac{dV_1}{dt} = A_1 \frac{dh_1}{dt} = q_i - q_1$$

$$\frac{dV_2}{dt} = A_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2$$

3.61

$$u = q_i$$

$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1}$$

$$q_2 = \frac{h_2}{R_2}$$

Equações de estados:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{u}{A_1} - \frac{h_1}{A_1 R_1} + \frac{h_2}{A_1 R_1} \\ \dot{h}_2 = \frac{h_1}{A_2 R_1} - \frac{h_2}{A_2 R_1} - \frac{h_2}{A_2 R_2} \end{cases}$$

3.62

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1 R_1} & \frac{1}{A_1 R_1} \\ \frac{1}{A_2 R_1} & -\frac{1}{A_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

3.63

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

3.8 LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

Na prática, encontramos alguns dispositivos com características não-lineares moderadas, ou as propriedades não-lineares que ocorrem numa certa região de operação. Para esses dispositivos, o **modelo linear** pode representar adequadamente **numa razoável faixa operacional**. Entretanto, existem muitos dispositivos físicos que possuem fortes características não-lineares. Para esses dispositivos, estritamente, um modelo linearizado é válido somente para uma faixa de operação limitada, e frequentemente somente no ponto de operação no qual a linearização é realizada. Mais importante, quando um sistema não-linear é linearizado em um ponto de operação, o modelo linear pode conter elementos variantes no tempo. Representamos um sistema não-linear pela seguinte matriz de equações de estado:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), r(t)] \quad 3.64$$

onde $x(t)$ representa o vetor de estado $n \times 1$, $r(t)$ o vetor de entrada $p \times 1$, e $f[x(t), r(t)]$ é um vetor $n \times 1$. Em geral, f é uma função do vetor de estado e vetor de entrada.

Podendo representar um sistema não-linear por equações de estado é uma vantagem distinta da aproximação por variáveis de estado sobre o método da função de transferência, desde que o último seja definido somente para sistemas invariantes no tempo. Como um exemplo ilustrativo, as seguintes equações de estado não-lineares são dadas:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2^2(t) \quad 3.65$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + r(t) \quad 3.66$$

Como sistemas não-lineares são difíceis de analisar e projetar, seria desejável executar a linearização sempre que a situação justifique.

Um processo de linearização que depende da expansão das equações de estado não-lineares em uma série de Taylor sobre um ponto de operação nominal ou trajetória é agora descrito. Todos os termos da série de Taylor ou de ordens maiores que a primeira são descartadas, resultando na aproximação linear das equações de estado não-lineares no **ponto nominal (ponto de operação)**. Considerando a trajetória de operação nominal $x_0(t)$, que corresponde à entrada nominal $r_0(t)$ e alguns estados iniciais fixos. Expandindo a equação de estado não-linear da eq. 3.64 em uma série de Taylor sobre $x(t) = x_0(t)$ e negligenciando todos os termos de ordem superiores

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_0, r_0) + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i(x, r)}{\partial x_j} \right|_{x_0, r_0} (x_j - x_{0j}) + \sum_{j=1}^p \left. \frac{\partial f_i(x, r)}{\partial r_j} \right|_{x_0, r_0} (r_j - r_{0j}) \quad 3.67$$

onde $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\Delta x_i = x_i - x_{0i} \quad 3.68$$

e

$$\Delta r_i = r_i - r_{0i} \quad 3.69$$

Então

$$\Delta \dot{x}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{0i} \quad 3.70$$

Desde que

$$\dot{x}_{0i} = f_i(x_0, r_0) \quad 3.71$$

Equação 3.67 é escrita

$$\Delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i(x, r)}{\partial x_j} \right|_{x_0, r_0} \Delta x_j + \sum_{j=1}^p \left. \frac{\partial f_i(x, r)}{\partial r_j} \right|_{x_0, r_0} \Delta r_j \quad 3.72$$

Equação 3.72 pode ser escrita na forma matricial:

$$\Delta \dot{x} = A^* \Delta x + B^* \Delta r \quad 3.73$$

onde

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad 3.74$$

$$B^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r_1} & \frac{\partial f_1}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial r_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r_1} & \frac{\partial f_2}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial r_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial r_1} & \frac{\partial f_n}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial r_p} \end{bmatrix} \quad 3.75$$

Exemplo 3.14 Suspensão eletromagnética

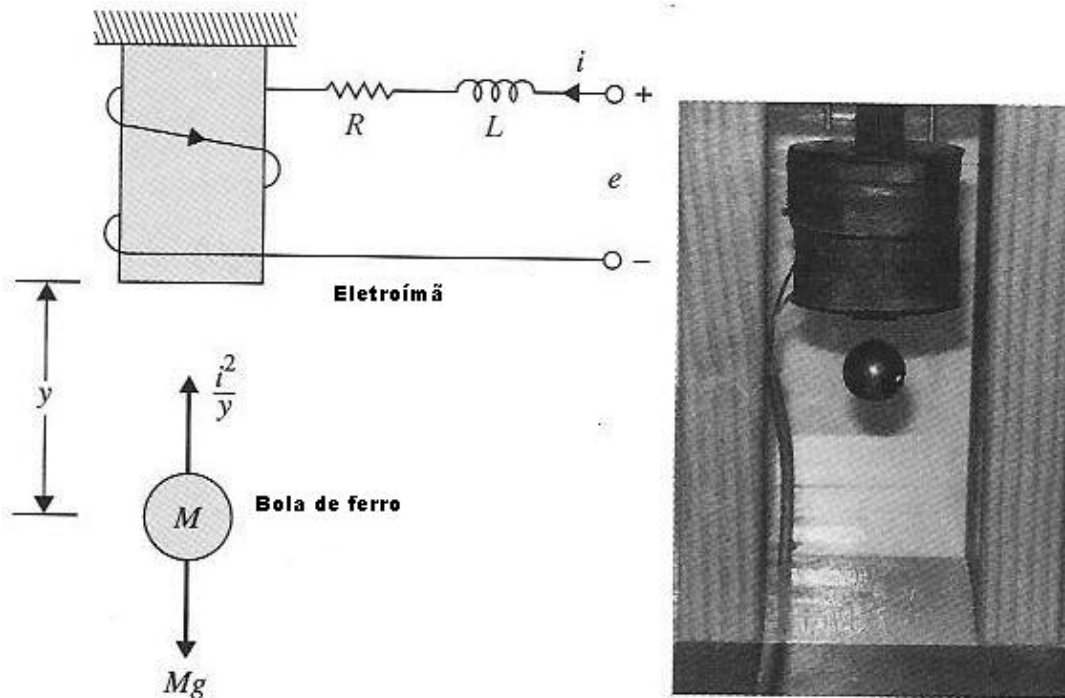


Figura 3.9 Suspensão eletromagnética

A figura 3.9 mostra o diagrama de um sistema bola-ímã. O objetivo do sistema é controlar a posição da bola de ferro ajustando a corrente no eletroímã através da tensão de entrada $e(t)$. As equações diferenciais do sistema são:

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = Mg - \frac{i^2(t)}{y(t)} \quad 3.76$$

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad 3.77$$

onde

- $e(t)$ = tensão de entrada
- $i(t)$ = corrente no enrolamento
- L = indutância do enrolamento
- g = aceleração gravitacional
- $y(t)$ = posição da bola
- R = resistência do enrolamento
- M = massa da bola

Definimos as variáveis de estado como $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = dy(t)/dt$, e $x_3(t) = i(t)$. As equações de estado do sistema são

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \quad 3.78$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = g - \frac{1}{M} \frac{x_3^2(t)}{x_1(t)} \quad 3.79$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -\frac{R}{L} x_3(t) + \frac{1}{L} e(t) \quad 3.80$$

Linearizando o sistema sobre o ponto de equilíbrio $y_0(t) = x_{01} =$ constante, temos:

$$x_{02}(t) = \frac{dx_{01}(t)}{dt} = 0 \quad 3.81$$

$$\frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} = 0 \quad 3.82$$

O valor nominal de $i(t)$ é determinado substituindo a equação 3.82 na equação 3.76. Assim

$$i_0(t) = x_{03}(t) = \sqrt{Mgx_{01}} \quad 3.83$$

A equação de estado linearizada é expressa na forma da equação 3.84, com as matrizes de coeficientes A^* e B^* :

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_{03}^2}{Mx_{01}^2} & 0 & \frac{-2x_{03}}{Mx_{01}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{x_{01}} & 0 & -2\left(\frac{g}{Mx_{01}}\right)^{1/2} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad 3.84$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad 3.85$$

3.9 FLUXO DE SINAL E FÓRMULA DE MASON

Um fluxo de sinal é um diagrama que representa um conjunto de equações algébricas lineares simultâneas. Quando aplicamos o método de fluxo de sinal para analisar sistemas de controle, precisamos antes transformar as equações diferenciais lineares em equações algébricas de s .

Um diagrama de fluxo de sinal consiste de uma rede em que nós são conectados por ramos diretos. Cada nó representa uma variável e cada ramo conectado entre dois nós atua como multiplicador de sinal.

O diagrama de fluxo de sinal contém as mesmas informações que o diagrama de blocos. O fluxo de sinal nos propiciará a utilização da fórmula de Mason no cálculo da função de transferência do sistema. Alguns dos conceitos são mostrados através dos exemplos a seguir:

3.9.1 Exemplos de fluxo de sinal

Exemplo 3.15 Dado um sistema de controle com função de transferência de malha direta igual $G(s)$ e realimentação unitária da figura 3.10:

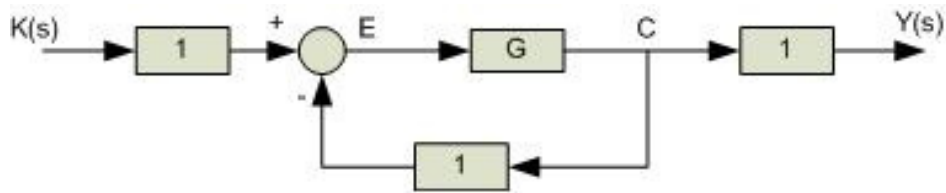


Figura 3.10 Sistema com realimentação unitária

Temos o diagrama de fluxo de sinal mostrado na figura 3.11:

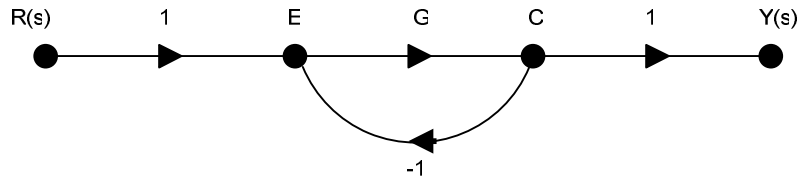


Figura 3.11 Fluxo de sinal do sistema

onde R, E, C e Y são os nós. Estes estão conectados através dos ramos.

O nó representa uma variável e o seu valor é igual a soma dos sinais que chegam no mesmo.

$$E = R - C$$

$$C = EG(s)$$

$$Y = C$$

Exemplo 3.16 Considerando agora o sistema da figura 3.12:

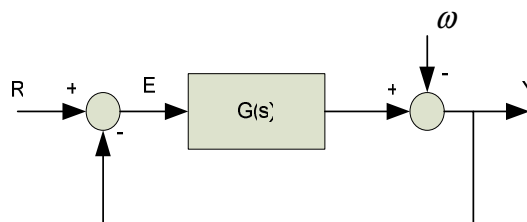


Figura 3.12 Diagrama de blocos

Temos o diagrama de fluxo de sinal:

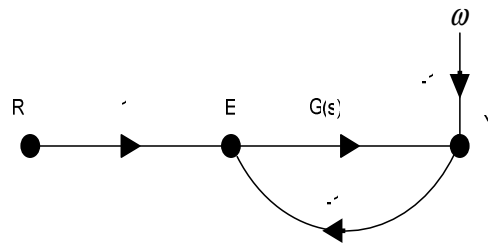


Figura 3.13 Fluxo de sinal

Este exemplo é muito semelhante ao anterior, porém neste caso temos dois nós de entrada.

Exemplo 3.17 Seja um sistema representado pelo diagrama de blocos 3.14a e seu fluxo de sinal pela figura 3.14b.

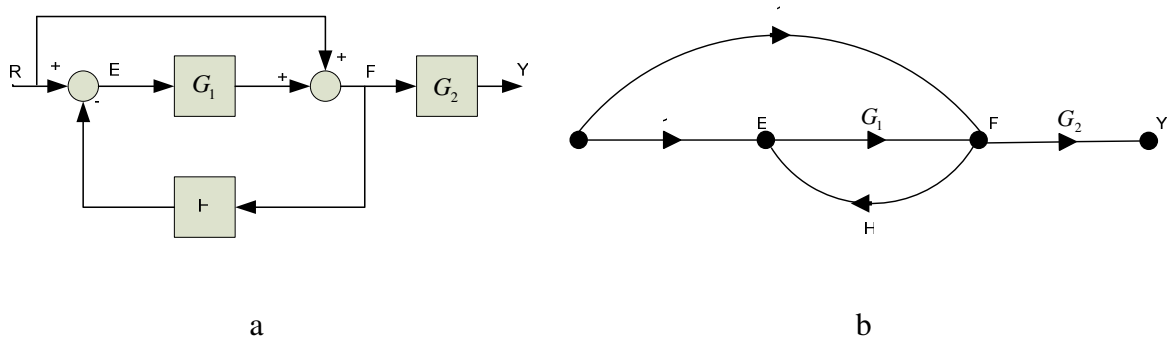


Figura 3.14 Diagrama de blocos e fluxo de sinal

Assim os percursos diretos e laço são:

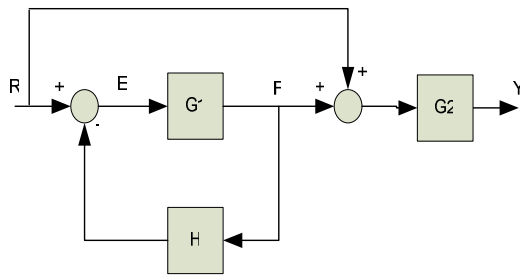
$$\begin{cases} P_1 = G_1 G_2 \\ P_2 = G_2 \\ L_1 = G_1 H \end{cases}$$

P_1 = percurso ou caminho direto com transmitância igual a $G_1 G_2$.

P_2 = percurso ou caminho direto com transmitância igual a G_2 .

L_1 = laço com transmitância igual a $G_1 H$

Observe que se alterarmos o diagrama de blocos conforme mostrado na figura 3.15 resulta em outro diagrama de fluxo de sinal.

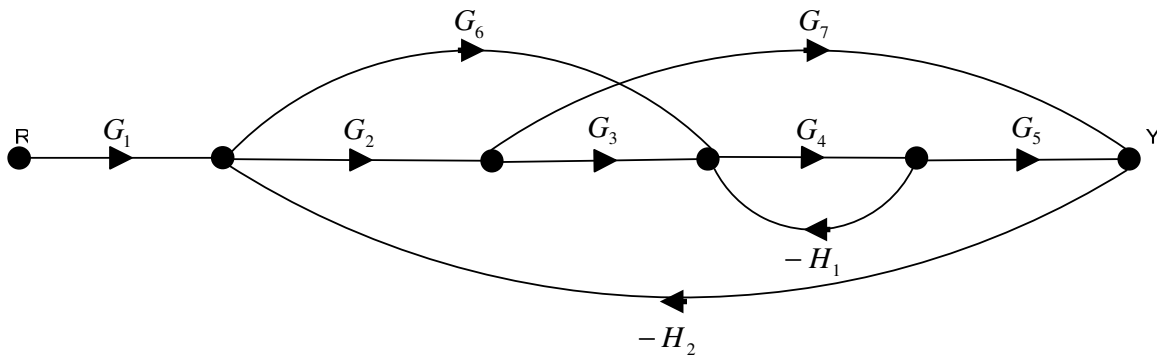


?

Figura 3.15 Diagrama de blocos do exemplo 3.17 modificado

Resolva para este caso. Solução na sala de aula.

Exemplos 3.18 Seja o diagrama de fluxo de sinal mostrado na figura 3.16:

**Figura 3.16** Fluxo de sinal

Temos os percursos diretos como segue:

$$\begin{cases} P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 \\ P_2 = G_1 G_4 G_5 G_6 \\ P_3 = G_1 G_2 G_7 \end{cases}$$

Laços:

$$\begin{cases} L_1 = -G_4 H_1 \\ L_2 = -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 \\ L_3 = -G_6 G_4 G_5 H_2 \\ L_4 = -G_2 G_7 H_2 \end{cases}$$

Laços Disjuntos são laços que não tem nenhum nó em comum.

L_1 e L_4

3.10 FÓRMULA DE MASON

Possibilita o cálculo da transmitância global entre dois nós:

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_K P_K \Delta_K = \frac{Y(s)}{R(s)} \quad 3.86$$

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \dots$$

onde:

P_k = percurso direto k

L_a = laços simples

L_b, L_c = laços disjuntos dois a dois, e assim por diante.

Δ = determinante do sistema.

Δ_k = cofator do percurso direto k , que é dado pelo determinante menos as transmitâncias dos laços que tocam o percurso direto k ;

Exemplo 3.19 Seja o fluxo de sinal da figura 3.17, determine a transmitância entre os nós R e Y.

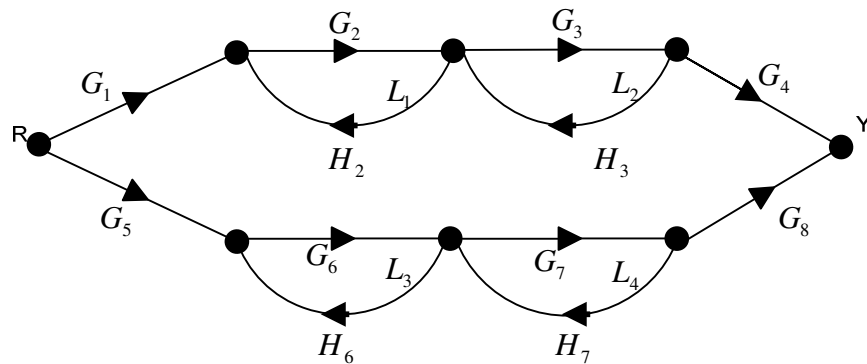


Figura 3.17 Fluxo de sinal

Percursos diretos:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4$$

$$P_2 = G_5 G_6 G_7 G_8$$

Laços:

$$L_1 = G_2 H_2$$

$$L_2 = G_3 H_3$$

$$L_3 = G_6 H_6$$

$$L_4 = G_7 H_7$$

Laços disjuntos:

L_1 e L_3 ; L_1 e L_4 ; L_2 e L_3 ; L_2 e L_4 .

Assim temos o determinante dado por:

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_3 + L_2 L_4$$

e cofatores:

$$\Delta_1 = 1 - L_3 - L_4$$

$$\Delta_2 = 1 - L_1 - L_2$$

Dessa forma temos $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} [P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2]$.

Exemplo 3.20 Seja o fluxo de sinal da figura 3.18, determine a transmitância entre os nós X e Y.

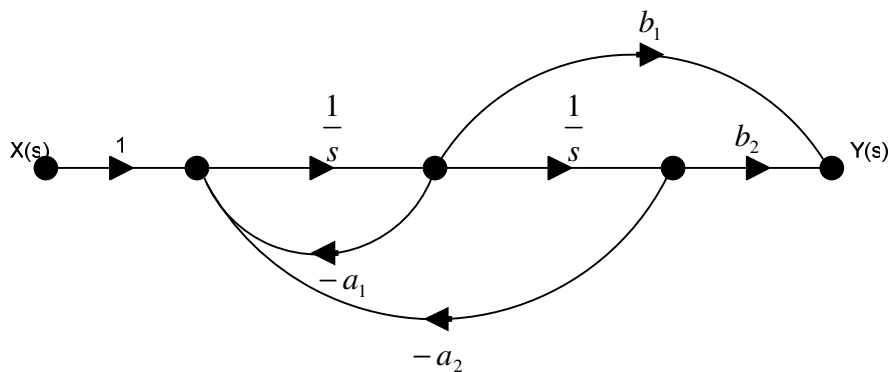


Figura 3.18 Fluxo de sinal

Percursos diretos:

$$P_1 = \frac{b_2}{s^2}$$

$$P_2 = \frac{b_1}{s}$$

Laços:

$$L_1 = \frac{-a_1}{s}$$

$$L_2 = \frac{-a_2}{s^2}$$

Cofatores:

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1$$

Determinante:

$$\Delta = 1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2}$$

Assim:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{P_1 + P_2}{\Delta} = \frac{\frac{b_2}{s^2} + \frac{b_1}{s}}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2}} = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

Exemplo 3.21 Seja o fluxo de sinal da figura 3.19 determine a transmitância entre os nós X e Y.

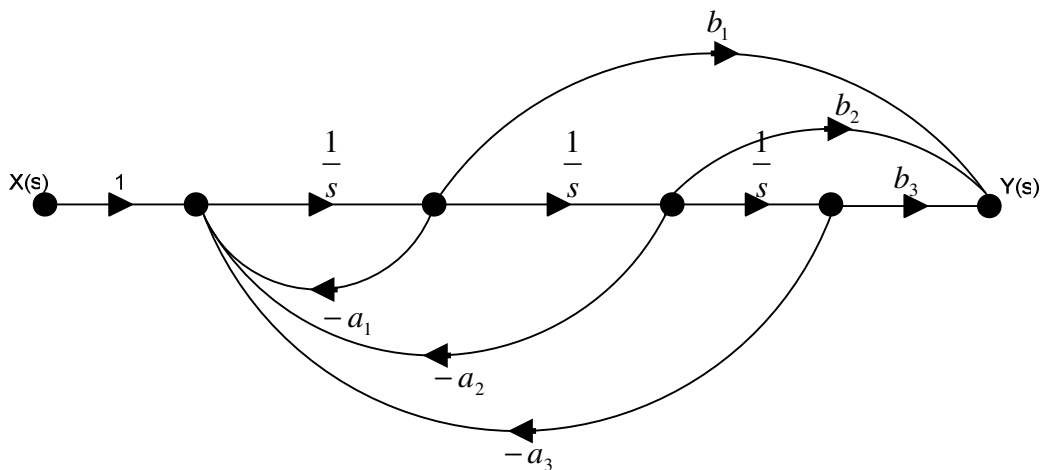


Figura 3.19 Fluxo de sinal

Percursos diretos:

$$P_1 = \frac{b_3}{s^3}$$

$$P_2 = \frac{b_1}{s}$$

$$P_3 = \frac{b_2}{s^2}$$

Laços:

$$L_1 = \frac{-a_1}{s}$$

$$L_2 = \frac{-a_2}{s^2}$$

$$L_3 = \frac{-a_3}{s^3}$$

Cofatores:

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1$$

Determinante:

$$\Delta = 1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}$$

Assim:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{b_3}{s^3} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_1}{s}}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}} = \frac{b_3 + b_2s + b_1s^2}{a_3 + a_2s + a_1s^2 + s^3}$$

3.11 CONVERSÕES

Função de transferência e variáveis de estado são descrições analíticas de sistemas. Podemos também utilizar as representações gráficas: diagramas de blocos e fluxo de sinal. Este nos possibilita o uso da fórmula de Mason. Cabe ressaltar que o diagrama de blocos de estados é uma representação em que utilizamos somente integradores e constantes. A figura 3.20 ilustra as possibilidades de conversões entre essas descrições analíticas e representações gráficas:

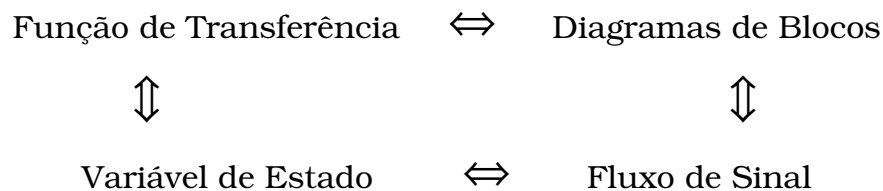


Figura 3.20 Esquema de conversões entre as representações de sistemas

REFERÊNCIAS:

KUO, B. C., Automatic Control Systems, 7th ed, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1995, Prentice Hall, 1995.

OGATA, K. Engenharia de Controle Moderno, 4^a edição. Prentice Hall, São Paulo, 2003.