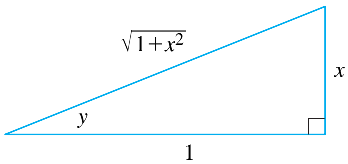


FIGURA 24

$$\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$$

$$\sec y = \sqrt{1 + x^2} \quad \text{(uma vez que } \sec y > 0 \text{ para } -\pi/2 < y < \pi/2\text{)}$$

Assim, $$\cos(\operatorname{tg}^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

SOLUÇÃO 2 Em vez de usar as identidades trigonométricas como na Solução 1, talvez seja mais fácil fazer um diagrama. Se $y = \operatorname{tg}^{-1}x$, então $\operatorname{tg} y = x$, e podemos concluir da Figura 24 (que ilustra o caso $y > 0$) que

$$\cos(\operatorname{tg}^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

A função inversa da tangente, $\operatorname{tg}^{-1} = \operatorname{arctg}$, tem domínio $\mathbb{R}$ e imagem $(-\pi/2, \pi/2)$. O gráfico está mostrado na Figura 25.

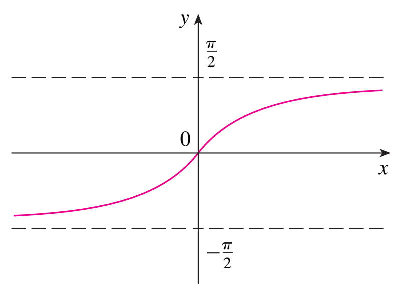


FIGURA 25
$y = \operatorname{tg}^{-1} x = \operatorname{arctg} x$

Sabemos que as retas $x = \pm\pi/2$ são assíntotas verticais do gráfico da tangente. Uma vez que o gráfico da tg^{-1} é obtido refletindo-se o gráfico da função tangente restrita em torno da reta $y = x$, segue que as retas $y = \pi/2$ e $y = -\pi/2$ são assíntotas horizontais do gráfico de tg^{-1}.

As funções inversas trigonométricas restantes não são usadas com tanta frequência e estão resumidas aqui.

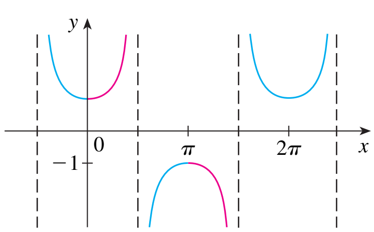


FIGURA 26
$y = \sec x$

11 $y = \operatorname{cossec}^{-1}x \; (|x| \geq 1) \iff \operatorname{cossec} y = x \;\text{ e }\; y \in (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2]$

$y = \sec^{-1}x \; (|x| \geq 1) \iff \sec y = x \;\text{ e }\; y \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$

$y = \operatorname{cotg}^{-1}x \; (x \in \mathbb{R}) \iff \operatorname{cotg} y = x \;\text{ e }\; y \in (0, \pi)$

A escolha dos intervalos para y nas definições de $\operatorname{cossec}^{-1}$ e $\sec^{-1}$ não são de aceitação universal. Por exemplo, alguns autores usam $y \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ na definição de $\sec^{-1}$. (Você pode ver do gráfico da função secante na Figura 26 que esta escolha e a feita em 11 são ambas válidas.)

1.6 Exercícios

1. (a) O que é uma função injetora?
(b) A partir do gráfico, como dizer se uma função é injetora?

2. (a) Suponha que f seja uma função injetora com domínio A e imagem B. Como a inversa da função, f^{-1}, é definida? Qual o domínio de f^{-1}? Qual a imagem de f^{-1}?
(b) Se for dada uma fórmula para f, como você encontrará uma fórmula para f^{-1}?
(c) Se for dado o gráfico de f, como você encontrará o gráfico de f^{-1}?

3–14 Uma função é dada por uma tabela de valores, um gráfico, uma fórmula ou por meio de descrição verbal. Determine se f é injetora.

3.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1,5	2,0	3,6	5,3	2,8	2,0

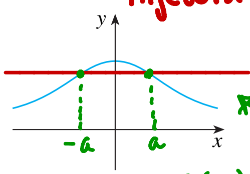
4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1,0	1,9	2,8	3,5	3,1	2,9

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador
SCA Sistema algébrico computacional necessário
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

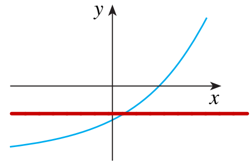
Injetora?

5.

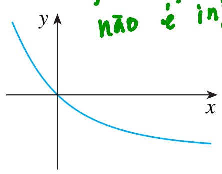


f(a) = f(-a)
não é injetora!

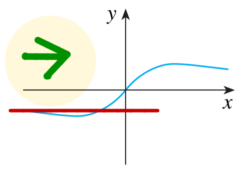
6.



7.



8.



9. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$ **10.** $f(x) = 1 + 4x - x^2$

11. $g(x) = |x|$ **12.** $g(x) = \sqrt{x}$

13. $f(t)$ é a altura de uma bola t segundos após ser chutada.

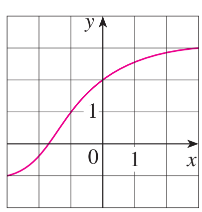
14. $f(t)$ é a sua altura com t anos de idade.

15. Suponha que f é uma função injetora.
(a) Se $f(6) = 17$, o que é $f^{-1}(17)$?
(b) Se $f^{-1}(3) = 2$, o que é $f(2)$?

16. Se $f(x) = x^5 + x^3 + x$, encontre $f^{-1}(3)$ e $f(f^{-1}(2))$.

17. Se $g(x) = 3 + x + e^x$, encontre $g^{-1}(4)$.

18. É dado o gráfico de f.
(a) Por que f é injetora?
(b) Determine o domínio e a imagem de f^{-1}?
(c) Qual o valor de $f^{-1}(2)$?
(d) Obtenha uma estimativa para o valor de $f^{-1}(0)$.



19. A fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, onde $F \geqslant -459{,}67$, expressa a temperatura C em graus Celsius como uma função da temperatura F em graus Fahrenheit. Encontre uma fórmula para a função inversa e interprete-a. Qual o domínio da função inversa?

20. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa da partícula no repouso e c é a velocidade da luz no vácuo. Encontre a função inversa de f e explique seu significado.

21–26 Encontre uma fórmula para a função inversa.

21. $f(x) = 1 + \sqrt{2 + 3x}$ **22.** $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$

23. $f(x) = e^{2x-1}$ **24.** $y = x^2 - x, \quad x \geqslant \frac{1}{2}$

25. $y = \ln(x + 3)$ **26.** $y = \dfrac{e^x}{1 + 2e^x}$

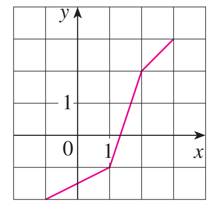
DEF:
f é injetora se $x \neq y$ implica que
$f(x) \neq f(y)$

27–28 Encontre uma fórmula explícita para f^{-1} e use-a para fazer na mesma tela os gráficos de f^{-1}, f e da reta $y = x$. Para verificar seu trabalho, veja se seus gráficos de f e f^{-1} são reflexões em torno da reta.

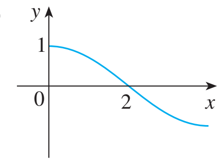
27. $f(x) = x^4 + 1, \quad x \geqslant 0$ **28.** $f(x) = 2 - e^x$

29–30 Use o gráfico dado de f para esboçar o de f^{-1}.

29.



30.



31. Seja $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.
(a) Encontre f^{-1}. Como está relacionada a f?
(b) Identifique o gráfico de f e explique a sua resposta para a parte (a).

32. Seja $g(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.
(a) Encontre g^{-1}. Como está relacionada a g?
(b) Faça um gráfico de g. Como você explica a sua resposta para a parte (a)?

33. (a) Como está definida a função logarítmica $y = \log_a x$?
(b) Qual o domínio dessa função?
(c) Qual a imagem dessa função?
(d) Esboce a forma geral do gráfico da função $y = \log_a x$ se $a > 1$.

34. (a) O que é o logaritmo natural?
(b) O que é o logaritmo comum?
(c) Esboce os gráficos, no mesmo sistema de coordenadas, das funções logaritmo natural e exponencial natural.

35–38 Encontre o valor exato de cada expressão.

35. (a) $\log_5 125$ (b) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$

36. (a) $\ln(1/e)$ (b) $\log_{10}\sqrt{10}$

37. (a) $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$
(b) $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

38. (a) $e^{-2\ln 5}$ (b) $\ln\left(\ln e^{e^{10}}\right)$

39–41 Expresse a quantidade dada como um único logaritmo.

39. $\ln 5 + 5\ln 3$

40. $\ln(a + b) + \ln(a - b) - 2\ln c$

41. $\frac{1}{3}\ln(x + 2)^3 + \frac{1}{2}[\ln x - \ln(x^2 + 3x + 2)^2]$

42. Use a Fórmula 10 para calcular cada logaritmo com precisão até a sexta casa decimal.
(a) $\log_{12} 10$ (b) $\log_2 8{,}4$

43–44 Use a Fórmula 10 para fazer o gráfico das funções dadas em uma mesma tela. Como esses gráficos estão relacionados?

43. $y = \log_{1,5} x, \quad y = \ln x, \quad y = \log_{10} x, \quad y = \log_{50} x$

44. $y = \ln x, \quad y = \log_{10} x, \quad y = e^x, \quad y = 10^x$

45. Suponha que o gráfico de $y = \log_2 x$ seja feito sobre uma malha coordenada onde a unidade de comprimento seja 1 centímetro. Quantos quilômetros à direita da origem devemos percorrer antes de a altura da curva atingir 1 m?

21–26 Encontre uma fórmula para a função inversa.

21. $f(x) = 1 + \sqrt{2 + 3x}$

22. $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$

21) $f(x) = 1 + \sqrt{2+3x} = y$

Para encontrar a inversa trocamos x pelo y e depois isolamos o y.

$$1 + \sqrt{2+3y} = x$$

isolamos o y:

$$\sqrt{2+3y} = (x-1)$$

$$2+3y = (x-1)^2$$

$$3y = (x-1)^2 - 2$$

$$\boxed{y = \frac{(x-1)^2 - 2}{3}} = g(x)$$

função inversa de f(x)!

INVERSA:

f e g são inversas se vale:

$$\begin{cases} f(g(x)) = x \\ g(f(x)) = x \end{cases}$$

24. $y = x^2 - x, \quad x \geqslant \frac{1}{2}$

CALCULAR A INVERSA DE $y = f(x) = x^2 - x$

$x \geq \frac{1}{2}$.

Na equação $y = x^2 - x$ trocamos y por x e tentamos isolar o y.

$$x = y^2 - y \Rightarrow y^2 - y - x = 0$$

Pela fórmula de Baskharam:

$a = 1$
$b = -1$
$c = -x$

$$ay^2 + by + c = 0$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4x}}{2}$$

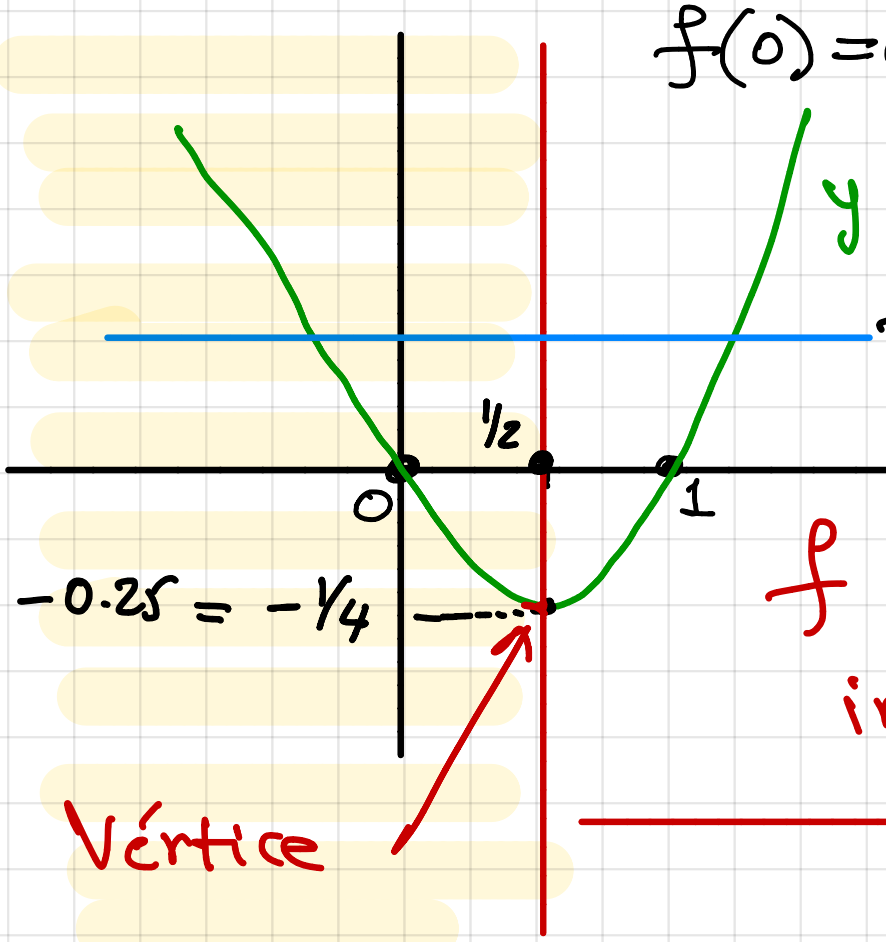
Precisamos que $1 + 4x \geq 0$. ou seja $4x \geq -1$

ou $x \geq -1/4 = -0.25$.

$$y = x^2 - x = x(x-1) = f(x)$$

PARÂBOLA.

$f(0)=0 \quad f(1)=0$



$y = x^2 - x$

$f(1/2) = \frac{1}{2} \cdot (-1/2) = -1/4$

f não é injetora

Inversa: $y = g(x) = \dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$

$f(1) = 0 \qquad g(0) = 1\ ?$

$$g(0) = \frac{1+\sqrt{1+4\times 0}}{2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{1}}{2} = 1 \checkmark$$

$$f(x) = x^2 - x \Rightarrow f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1 + \sqrt{1+4x}}{2}$$

$$x \geq 1/2$$

restrição no domínio.

$$h(x) = x^2 - x \Rightarrow h^{-1}(x) = s(x)$$

$$x \leq 1/2$$

$$= \frac{1 - \sqrt{1+4x}}{2}$$

FUNÇÕES INVERSAS

Por exemplo tome $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln(x)$.

Estas funções são inversas porque

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = e^{g(x)} = e^{\ln x} = x$$

↑ Composta

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \ln\big(f(x)\big) = \ln(e^x) = x$$

DEFINIÇÃO DE LOGARITMO:

$$\ln X = y \iff e^y = X$$

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{porque} \quad 2^3 = 8$$

↑ Base

35. (a) $\log_5 125$

SOLUÇÃO: Definição de logaritmo:

$$\log_a X = y \iff a^y = X$$

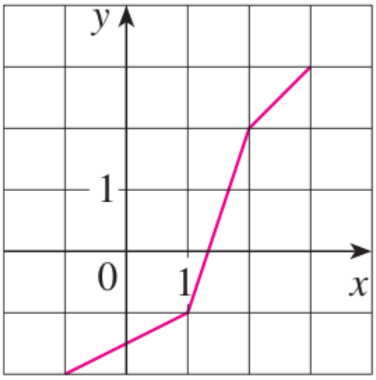
O Logaritmo é o EXPOENTE!

$$\log_5 125 = y \iff 5^y = 125$$

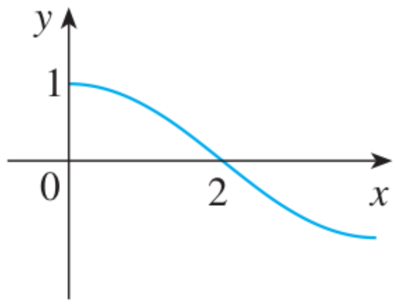
$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125 \Rightarrow \log_5 125 = 3 \;!$$

29–30 Use o gráfico dado de f para esboçar o de f^{-1}.

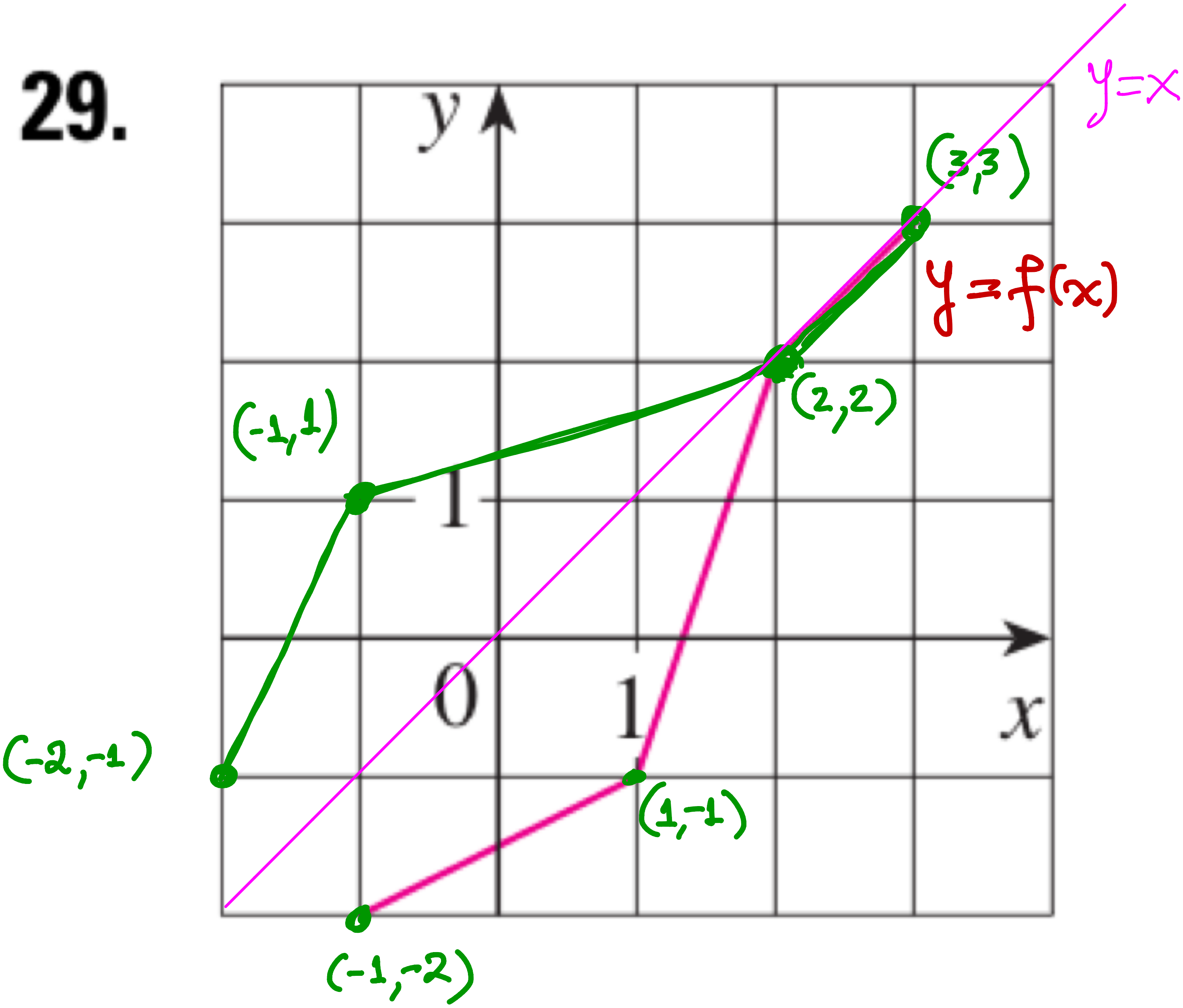
29.



30.

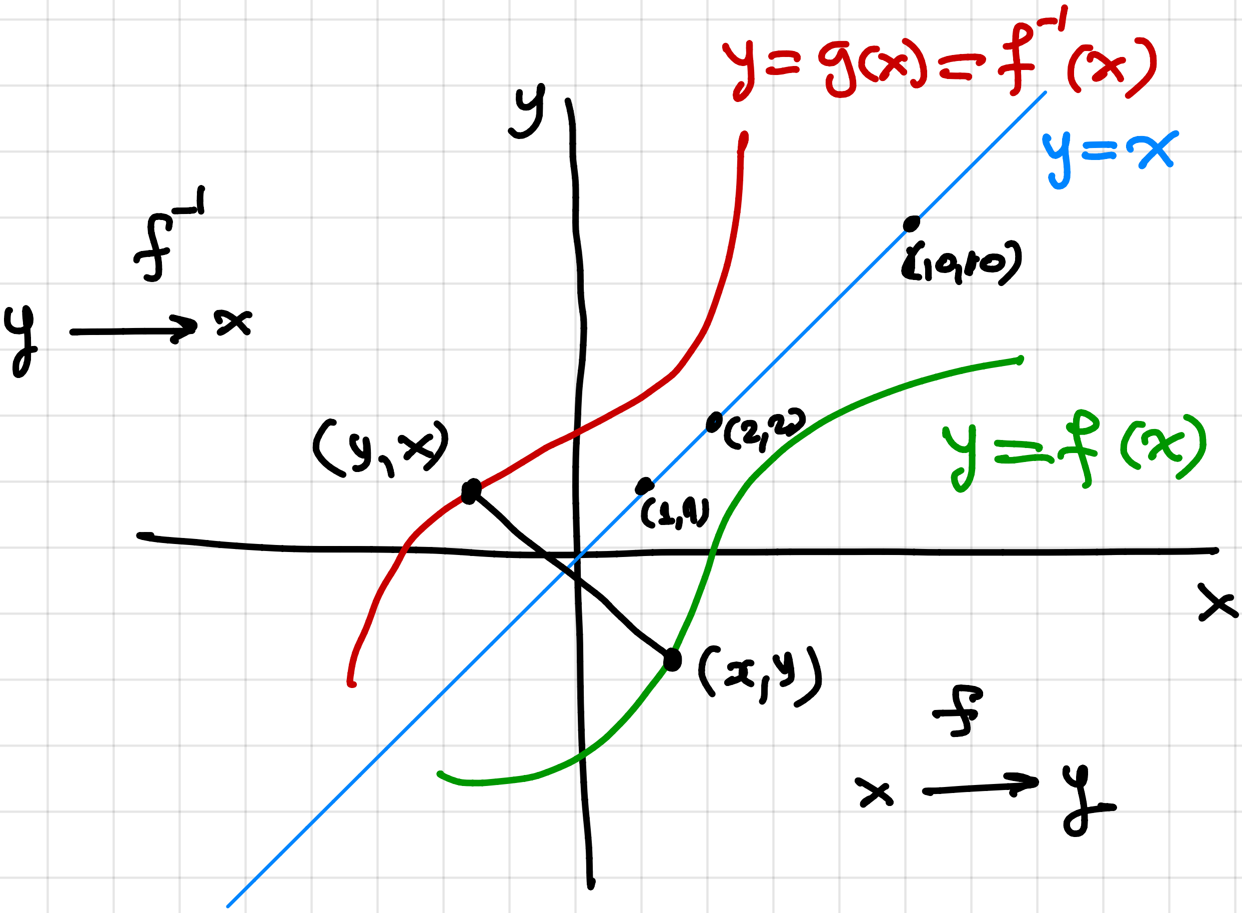


29.



$f(1) = -1$ $f(2) = 2$

g é a inversa de f. $g(-1) = 1$, $g(2) = 2$



y = g(x) = f⁻¹(x)
y = x
y = f(x)
(10,10)
(2,2)
(1,1)
(y,x)
(x,y)
f⁻¹
y → x
f
x → y

46. Compare as funções $f(x) = x^{0,1}$ e $g(x) = \ln x$ traçando os gráficos de f e g em várias janelas retangulares. Quando finalmente o gráfico de f ultrapassa o de g?

47–48 Faça o esboço do gráfico de cada função. Não use a calculadora. Use somente os gráficos dados nas Figuras 12 e 13 e, se necessário, as transformações da Seção 1.3.

47. (a) $y = \log_{10}(x + 5)$ (b) $y = -\ln x$

48. (a) $y = \ln(-x)$ (b) $y = \ln|x|$

49–50 (a) Quais são o domínio e a imagem de f?
(b) Qual é a intersecção com o eixo x do gráfico de f?
(c) Esboce o gráfico de f.

49. $f(x) = \ln x + 2$ **50.** $f(x) = \ln(x - 1) - 1$

51–54 Resolva cada equação em x.

51. (a) $2 \ln x = 1$ (b) $e^{-x} = 5$

52. (a) $e^{2x+3} - 7 = 0$ (b) $\ln(5 - 2x) = -3$

53. (a) $2^{x-5} = 3$ (b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

54. (a) $\ln(\ln x) = 1$ (b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, onde $a \neq b$

55–56 Resolva cada inequação em x.

55. (a) $\ln x < 0$ (b) $e^x > 5$

56. (a) $1 < e^{3x-1} < 2$ (b) $1 - 2 \ln x < 3$

57. (a) Encontre o domínio de $f(x) = \ln(e^x - 3)$.
(b) Encontre f^{-1} e seu domínio.

58. (a) Quais são os valores de $e^{\ln 300}$ e $\ln(e^{300})$?
(b) Utilize a sua calculadora para calcular $e^{\ln 300}$ e $\ln(e^{300})$. O que você observa? Você pode explicar por que a calculadora encontra dificuldade?

SCA **59.** Faça o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ e explique por que ela é injetora. Use então um sistema de computação algébrica (SCA) para encontrar uma expressão explícita para $f^{-1}(x)$. (Seu SCA vai produzir três expressões possíveis. Explique por que duas delas são irrelevantes neste contexto.)

SCA **60.** (a) Se $g(x) = x^6 + x^4, x \geqslant 0$, use um sistema de computação algébrica para encontrar uma expressão para $g^{-1}(x)$.
(b) Use a expressão da parte (a) para fazer na mesma tela um gráfico de $y = g(x)$, $y = x$ e $y = g^{-1}(x)$.

61. Se a população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três horas, então o número de bactérias após t horas é $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$. (Veja o Exercício 29 na Seção 1.5.)
(a) Encontre a função inversa e explique seu significado.
(b) Quando a população atingirá 50 000 bactérias?

62. Após acionado o *flash* de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do *flash*, que armazena uma carga elétrica dada por

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a}).$$

(A capacidade máxima de carga é Q_0, e t é medido em segundos.)
(a) Encontre a função inversa e explique seu significado.
(b) Quanto tempo levará para recarregar o capacitor 90% da capacidade, se $a = 2$?

63–68 Encontre o valor exato de cada expressão.

63. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$ (b) $\cos^{-1}(-1)$

64. (a) $\operatorname{tg}^{-1}(1/\sqrt{3})$ (b) $\sec^{-1} 2$

65. (a) $\operatorname{arctg} 1$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(1/\sqrt{2})$

66. (a) $\operatorname{cotg}^{-1}(-\sqrt{3})$ (b) $\arccos(-\frac{1}{2})$

67. (a) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 10)$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(7\pi/3))$

68. (a) $\operatorname{tg}(\sec^{-1} 4)$ (b) $\operatorname{sen}(2 \operatorname{sen}^{-1}(\frac{3}{5}))$

69. Demonstre que $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$.

70–72 Simplifique a expressão.

70. $\operatorname{tg}(\operatorname{sen}^{-1} x)$ **71.** $\operatorname{sen}(\operatorname{tg}^{-1} x)$

72. $\cos(2 \operatorname{tg}^{-1} x)$

73–74 Obtenha os gráficos das funções dadas em uma mesma tela. Como esses gráficos estão relacionados?

73. $y = \operatorname{sen} x, \; -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2; \quad y = \operatorname{sen}^{-1} x; \quad y = x$

74. $y = \operatorname{tg} x, \; -\pi/2 < x < \pi/2; \quad y = \operatorname{tg}^{-1} x; \quad y = x$

75. Determine o domínio e a imagem da função

$$g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(3x + 1)$$

76. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$ e explique sua aparência.
(b) Faça o gráfico da função $g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$. Como você pode explicar a aparência desse gráfico?

77. (a) Se transladamos uma curva para a esquerda, o que acontece com sua reflexão em torno da reta $y = x$? Em vista deste princípio geométrico, encontre uma expressão para a inversa de $g(x) = f(x + c)$, em que f é uma função injetora.
(b) Encontre uma expressão para a inversa de $h(x) = f(cx)$, em que $c \neq 0$.

1 Revisão

Verificação de Conceitos

1. (a) O que é uma função? O que são o domínio e a imagem de uma função?
(b) O que é o gráfico de uma função?
(c) Como podemos dizer se uma dada curva é o gráfico de uma função?
2. Discuta as quatro maneiras de representar uma função. Ilustre com exemplos.
3. (a) O que é uma função par? Como saber, a partir do gráfico, se uma função é par ou não? Dê três exemplos de uma função par.
(b) O que é uma função ímpar? Como saber, a partir do gráfico, se uma função é ímpar ou não? Dê três exemplos de uma função ímpar.
4. O que é uma função crescente?
5. O que é um modelo matemático?

51–54 Resolva cada equação em x.

51. (a) $2\ln x = 1$ (b) $e^{-x} = 5$

52. (a) $e^{2x+3} - 7 = 0$ (b) $\ln(5 - 2x) = -3$

53. (a) $2^{x-5} = 3$ (b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

54. (a) $\ln(\ln x) = 1$ (b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, onde $a \neq b$

(b) $e^{-x} = 5$ Quanto vale x ?

Tomamos logaritmo natural dos dois lados:

$$\ln\left(e^{-x}\right) = \ln(5)$$

PROP de LOGARITMO: $\log A^b = b \log A$.

$$(-x)\cancel{\ln e}^{\,1} = \ln 5 \qquad e^{\boxed{1}} = e$$

$$-x = \ln 5$$

$$\boxed{x = -\ln 5}$$

52. (a) $e^{2x+3} - 7 = 0$

SOLUÇÃO: $e^{2x+3} = 7$

Tomamos LOG a ambos lados:

$$(2x+3)\ln(e) = \ln\left(e^{2x+3}\right) = \ln(7)$$

$$1$$

$$2x+3 = \ln(7)$$

$$2x = \ln(7) - 3$$

$$\boxed{x = \frac{\ln 7 - 3}{2}}$$

54. (a) $\ln(\ln x) = 1$

Quanto vale x?

SOLUÇÃO: $\ln(\ln x) = 1$

Tomando exponencial a ambos lados:

Lembre que $e^{\ln x} = x$ porque logaritmo e exponencial são inversas.

$$\cancel{e}^{\cancel{\ln}(\ln x)} = e^{1} = e \simeq 2{,}71\ldots$$

$$\ln x = e$$

$$\cancel{e}^{\cancel{\ln} x} = e^{e}$$

$$x = e^{e} \simeq (2{,}71)^{2{,}71}$$