Aula 5 Cálculo 3B | Aula 14 Cálculo 3A

Aula passada: Separáveis $\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{h(y)}$

↳ resolve algumas não lineares principalmente

Aula Hoje: Substituição particulares

Método da Substituição

**Exemplo** $y' = (x+y)^2$ não é separável nem linear

**Exemplo** $y' = \frac{y-4x}{x-y}$ não é separável nem linear

**Tipo 1**

$$\boxed{y' = F(at+by+c)}$$

→ fazer uma substituição e transformar em uma separável

Recorde que é $y(t)$. Faça $v(t) = at + by(t) + c$ $(*)$

Então $v'(t) = a + by'$ $\Leftrightarrow$ $y' = \frac{v'-a}{b}$ $(**)$

Substituindo $(*)$ e $(**)$ na EDO obtemos:

$$\frac{v'-a}{b} = F(v) \Leftrightarrow v' = a + bF(v) \quad (*)$$

↳ separável

a) Resolve-se $(*)$

b) volta em $(*)$ para determinar $y(t)$.

**Exemplo** Resolva $y' = (x+y)^2$

Solução: faça $v(x) = x + y$ $(*)$

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow y' = v' - 1$$

Substituindo

$$v' - 1 = v^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = v^2 + 1$$

$$\int \frac{1}{v^2+1}\, dv = \int dx$$

$$\text{arctg}\, v = x + c \Rightarrow v = tg(x+c)$$

Voltando em $(*)$ $tg(x+c) = x + y$

$$\boxed{y = tg(x+c) - x}$$ solução geral

**Exemplo** Resolva a equação diferencial $y' = 1 + e^{y-x+5}$

Solução

$y' = 1 + e^{y-x+5}$

faça $v = y - x + 5$

$v' = y' - 1$

$y' = v' + 1$ substituindo

$$v' + \cancel{1} = \cancel{1} + e^{v} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = e^{v} \Rightarrow \int e^{-v} dv = \int dx$$

$$-e^{-v} = x + c$$

$$e^{-v} = c - x$$

$$-v = \ln(c-x)$$

$$v = \ln\left(\frac{1}{c-x}\right)$$

$$\| \\ y - x + 5$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x - 5 + \ln\left(\frac{1}{c-x}\right)}$$ solução geral

**Tipo 2** Equações Homogêneas (não lineares)

$$\boxed{y' = F\left(\frac{y}{t}\right)} \text{ ou } \boxed{y' = F\left(\frac{t}{y}\right)}$$

→ fazer uma substituição e transformar em uma separável

Nota $\frac{t}{y} = \frac{1}{\frac{y}{t}}$ vamos fazer para o caso $y' = F\left(\frac{y}{t}\right)$

Faça $v(t) = \frac{y}{t}$ $(*)$ então $y = t\,v(t)$ derivando:

$y' = 1.v + t v'$ $(**)$ substituindo na equação

$$v + t v' = F(v) \quad (*)$$

↳ separável

$$v' = \frac{F(v) - v}{t}$$

a) Resolve-se $(*)$

b) Volta em $(*)$ para determinar $y(t)$.

**Exemplo** Resolva $y' = \frac{y-4x}{x-y}$

Solução:

$$y' = \frac{y - 4x}{x - y} \begin{matrix} \div x \\ \div x \end{matrix}$$

$$\boxed{y' = \frac{\frac{y}{x} - 4}{1 - \frac{y}{x}}}$$

na forma homogênea

Faça $v(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow y(x) = x . v(x)$

$\Rightarrow y' = 1v + xv'$

Substituindo

$$v + xv' = \frac{v-4}{1-v}$$

$$xv' = \frac{v-4}{1-v} - v = \frac{v-4-v(1-v)}{1-v} = \frac{v^2-4}{1-v}$$

$\Rightarrow$ $x>0$

$$\int \left(\frac{1-v}{v^2-4}\right) dv = \int \frac{1}{x}\, dx$$

↳ frações parciais

$$\frac{1}{v^2-4} = \frac{A}{v-2} + \frac{B}{v+2} = \frac{A(v+2)+B(v-2)}{v^2-4}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{1}{4} \quad B = -\frac{1}{4}$

$$\int \left(\frac{1-v}{v^2-4}\right) dv = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{v^2-4} - \frac{v}{v^2-4} . dv = \ln x + c$$

substituição

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{v-2} - \frac{1}{v+2} . dv - \int \frac{v}{\underbrace{v^2-4}_{u}} dv = \ln x + C \qquad du = 2v\, dv$$

$$\frac{1}{4} \ln \left|\frac{v-2}{v+2}\right| - \int \frac{1}{2u} du = \ln x + C$$

$$\frac{1}{4} \ln \left|\frac{v-2}{v+2}\right| - \frac{1}{2} \ln|v^2-4| = \ln x + c \quad (.\ 4)$$

$$\ln\left|\frac{v-2}{v+2}\right| - \ln (v^2-4)^2 = 4 \ln x + C$$

$$\ln \left|\frac{\frac{\cancel{v-2}}{v+2}}{(v-2)^{\cancel{2}}(v+2)^2}\right| = 4 \ln x + C$$

$$\ln \left|\frac{1}{(v-2)(v+2)^3}\right| = \ln x^4 + C$$

e e

$$\left|\frac{1}{(v-2)(v+2)^3}\right| = K x^4$$ substituindo por $v = \frac{y}{x}$

$$\left|\frac{\cancel{x}^4}{(y-2x)(y+2x)^3}\right| = K\cancel{x^4}$$

$$\boxed{|y-2x||y-2x|^3 = \frac{1}{K}}$$ solução geral

## $\boxed{\text{Tipo 3}}$ Equação de Bernoulli

$$\boxed{y' + p(t)y = q(t)y^n}$$

→ fazer uma substituição e transformar em uma equação linear

Note que dividindo tudo por $y^n$ obtemos

$$y^{-n}y' + p(t)\, y^{1-n} = q(t)$$

Faça $v(t) = y^{1-n}$ (*) então $v' = (1-n)\, y^{-n} . y$

$\Rightarrow y^{-n} . y' = \frac{v'}{(1-n)}$

Substituindo obtemos

$$\frac{v'}{1-n} + p(t)\, v = q(t) \Leftrightarrow v' + (1-n)p(t)v = (1-n)q(t) \quad (\ast)$$

equação linear

a) Resolve-se (*)

b) Volta em (*) para determinar y(t)

**Exemplo** Resolva $2ty . y' = 4t^2 + 3y^2$

Solução dividindo tudo por $2ty$

$$y' = \frac{4t}{y} + \frac{3}{2t}y \Leftrightarrow y' - \left(\frac{3}{2t}\right)y = 2t . y^{-1} \quad (.y)$$

Faça $v = y^{1+1} = y^2$

$v' = 2y . y'$

$$yy' - \frac{3}{2t}y^2 = 2t$$ substituindo

$$\frac{1}{\cancel{2}}v' - \frac{3}{\cancel{2}t} . v = \cancel{2}t$$

$$v' - \frac{3}{t} . v = 4t \qquad \mu(t) = e^{\int -\frac{3}{t} . dt} = t^{-3}$$

$$\underbrace{t^{-3}v' - 3t^{-2}v}_{} = 4 . t^{-2}$$

$$\int \frac{d}{dt}\left[t^{-3} . v\right] = \int \frac{4}{t^2} \Rightarrow t^{-3}v = \frac{-4}{t} + C$$

$$v = -4t^2 + Ct^3$$

solução geral

Voltando : $\boxed{y^2 = -4t^2 + ct^3}$

**Obs** O exemplo anterior é do tipo homogênea também

**Solução 2** $2ty.y' = 4t^2+3y^2$

$$y' = \frac{4t^2+3y^2}{2ty} = \frac{2t}{y} + \frac{3}{2}\frac{y}{t} \quad (*)$$

passei $1/t$, $t>0$ ←

seja $v = y/t \Rightarrow y = v.t$, $y' = v'.t + v$

substituindo em (*)

$$v'.t + v = \frac{2}{v} + \frac{3}{2}v \qquad \text{separável}$$

$$v't = \frac{2}{v} + \frac{1}{2}v = \frac{4+v^2}{2v}$$

$$\frac{2v}{4+v^2}\,.\,dv = \frac{1}{t}dt$$

$$\int \frac{2v}{4+v^2}\,.\,dv = \int \frac{1}{t}dt$$

$u \quad du = 2v.dv$

$$\int \frac{\cancel{2v}}{4+u}\,.\,\frac{du}{\cancel{2v}} = \ln t + c \quad (t>0)$$

$>0$

$$\ln(4+v^2) = \ln t + c$$

$e \qquad e$

$$4+v^2 = te^c = Kt$$

Voltando

$$4 + \frac{y^2}{t^2} = Kt$$

$$\boxed{y^2 = -4t^2 + Kt^3} \qquad \text{solução geral}$$

**Qual método achou mais fácil?**

**Exemplo** Resolva a equação

$$ty' + y = t^2y^2$$

Solução

$$\underbrace{y' + \frac{1}{t}y}_{} = ty^2 \quad (**)$$

potência de y

Bernoulli

faça $v(t) = y^{1-2} = \dfrac{1}{y(t)}$

$\Leftrightarrow y(t) = \dfrac{1}{v(t)} \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{v^2}.v'$

(ou $y^2 = \frac{1}{v^2}$)

substituindo em (**)

$$\frac{-v'}{v^2} + \frac{1}{t}\frac{1}{v} = t.\frac{1}{v^2} \qquad (v^2)$$

$$-v' + \frac{1}{t}v = t \qquad (-1)$$

$$v' - \frac{1}{t}v = -t \qquad \text{linear}$$

$$\mu(t) = e^{\int -\frac{1}{t}.dt} = e^{-\ln t} = e^{\ln t^{-1}} = \frac{1}{t} \qquad \text{fator integrante}$$

$$\int \frac{d}{dt}\left[v.\frac{1}{t}\right]dt = \int -1\,.\,dt$$

$$v.\frac{1}{t} = -t + C \Rightarrow v(t) = -t^2 + Ct$$

Voltando $y = \dfrac{1}{v}$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{-t^2+ct}} \qquad \text{Solução geral}$$

## RESUMO

| Tipo | Equação | Método |
|---|---|---|
| LINEAR | $y' + p(t)y = q(t)$ | fator integrante $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ $\Rightarrow \int \frac{d}{dt}(\mu(t).y) = \int \mu(t)q(t)$ |
| SEPARÁVEL | $y' = \dfrac{g(t)}{h(y)}$ | $\int h(y)dy = \int g(t)dt$ |
| TIPO 1 | $y' = F(at+by+c)$ | SUBSTITUIÇÃO $u = at+by+c$ $\rightsquigarrow u' = a+by'$ cai numa separável |
| HOMOGÊNEA (Não linear) | $y' = F\left(\frac{y}{t}\right)$ | SUBSTITUIÇÃO $u = y/t \Leftrightarrow y = ut$ $\rightsquigarrow y' = u't+u$ cai numa separável |
| BERNOULLI (Não linear) | $y' + p(t)y = q(t)y^n$ | SUBSTITUIÇÃO $u = y^{1-n}$ $\rightsquigarrow u' = (1-n)y^{-n}.y'$ cai numa linear |