[UFES-CCE-DMAT-Prova Final-manhã-Cálculo1-Equipe-2017.1, 02/08/17]

Leia a prova com atenção e justifique suas respostas.

1. Determine:

(a) (1pt) $\displaystyle\int \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx &\overset{x=\operatorname{sen}\theta}{=} 2\int \operatorname{sen}^2\theta d\theta = \int(1-\cos(2\theta))d\theta = \theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} + C\\ &= \theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta + C = \operatorname{arcsen} x - x\sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

(b) (1pt) a derivada de $f(x) = x^2 e^{\operatorname{tg} x}\ln(\operatorname{sen} x)$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\cdot e^{\operatorname{tg} x}\cdot \ln(\operatorname{sen} x)\right) =$$
$$2x\cdot e^{\operatorname{tg} x}\cdot\ln(\operatorname{sen} x) + x^2\cdot \sec^2 x\cdot e^{\operatorname{tg} x}\cdot \ln(\operatorname{sen} x) + x^2\cdot e^{\operatorname{tg} x}\cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

(c) (1pt) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$\int_0^{1/2}\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx \overset{x=\operatorname{sen}\theta}{=} 2\int_0^{\pi/6}\operatorname{sen}\theta d\theta = -2\left[\cos\theta\right]_0^{\pi/6} = 2-\sqrt{3}.$

(d) (0,5pts) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}.$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x} = 0.$

2. Seja $f(x) = \frac{2x^2}{9-x^2}$. Temos $f'(x) = \frac{36x}{(9-x^2)^2}$ e $f''(x) = \frac{108(3+x^2)}{(9-x^2)^3}$. Acerca de f, determine:

(a) (0,5pts) as assíntotas verticais e horizontais

A.V.: $x = 3$, $x = -3$, pois $\lim_{x\to 3^+}\frac{2x^2}{9-x^2} = -\infty$ e $\lim_{x\to -3^+}\frac{2x^2}{9-x^2} = +\infty$. A.H.: $y = -2$, pois $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{9-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{9/x^2-1} = -2$, e, analogamente, $\lim_{x\to-\infty}\frac{36x}{(9-x^2)^2} = -2$.

(b) (0,5pts) os intervalos onde é crescente/decrescente, máximos e mínimos locais

Temos $f'(x) = \frac{36x}{(9-x^2)^2}$. Números críticos: 0, -3, 3. O sinal de $f'(x)$ é igual ao do fator x descrito em baixo junto com os intervalos onde é crescente/decrescente:

		-3		0		3	
f'	$-$	$n.d.$	$-$	0	$+$	$n.d.$	$+$
f	$\searrow$	$n.d.$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$n.d.$	$\nearrow$

Extremos locais: apenas um mínimo local $f(0) = 0$.
Nota: é *falso* afirmar que f é decrescente em $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ e é *falso* afirmar que f é crescente em $(0, 3) \cup (3, +\infty)$.

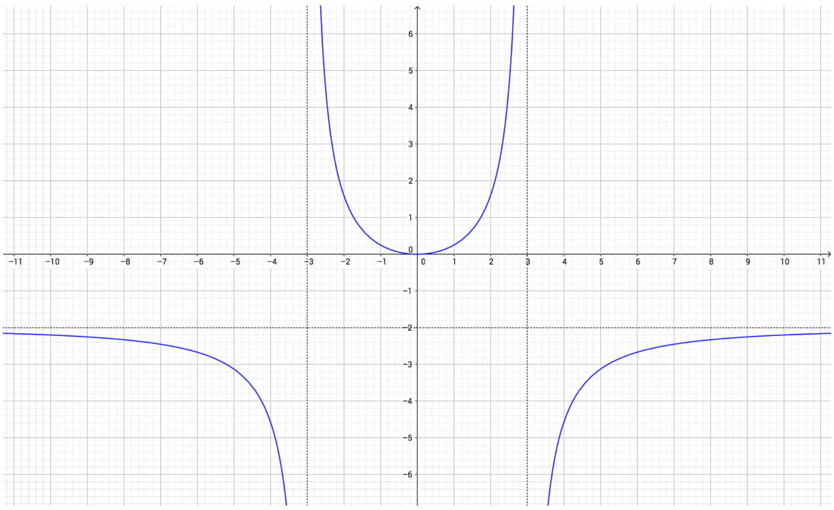
(c) (0,5pts) os intervalos de concavidade e pontos de inflexão

Temos $f''(x) = \frac{108(3+x^2)}{(9-x^2)^3}$. Números críticos: -3, 3. O sinal de $f''(x)$ é igual ao do fator $9 - x^2$, descrito em baixo junto com os intervalos de concavidade:

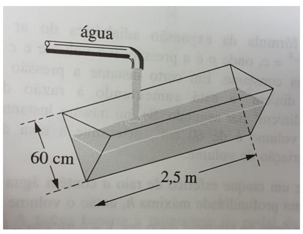
		-3		3	
f''	$-$	$n.d.$	$+$	$n.d.$	$-$
f	$\cap$	$n.d.$	$\cup$	$n.d.$	$\cap$

Não existem pontos de inflexão.

(d) (0,5pts) um esboço do gráfico.

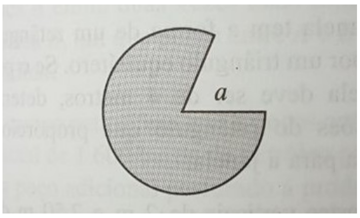


3. (1,5pts) As extremidades de um cocho de 2,5m de comprimento são triângulos equiláteros cujos lados medem 60cm de comprimento (ver figura) Se a água está entrando no cocho à razão de 142 litros por minuto, determine a taxa em que o nível de água está subindo quando a profundidade da água é 20cm.



É dada a taxa $\frac{dV}{dt} = 142$ (litro/min, i.e., $142 \cdot 10^3 \text{cm}^3/\text{min}$), onde V é o volume do cocho em cm^3 e o tempo t é medido em minutos. Queremos determinar a taxa $\frac{dh}{dt}$, onde h é o nível da água em cm. Temos a relação de volume $V = \frac{5}{2} \cdot 10^2 \cdot \frac{b \cdot h}{2}$, em que b é obtido pela razão de semelhança entre triângulos retângulos: $b/(2h) = 30/\sqrt{60^2 - 30^2} = 1/\sqrt{3}$, i.e. $b = 2h/\sqrt{3}$. Assim $V = \frac{5 \cdot 10^2}{2\sqrt{3}} h^2$. Derivando em ordem a t, $\frac{dV}{dt} = \frac{5 \cdot 10^2}{2\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot h \cdot \frac{dh}{dt}$ e, quando $h = 20$ cm, obtemos $\frac{dh}{dt} = \frac{71}{5\sqrt{3}}$ (cm/min).

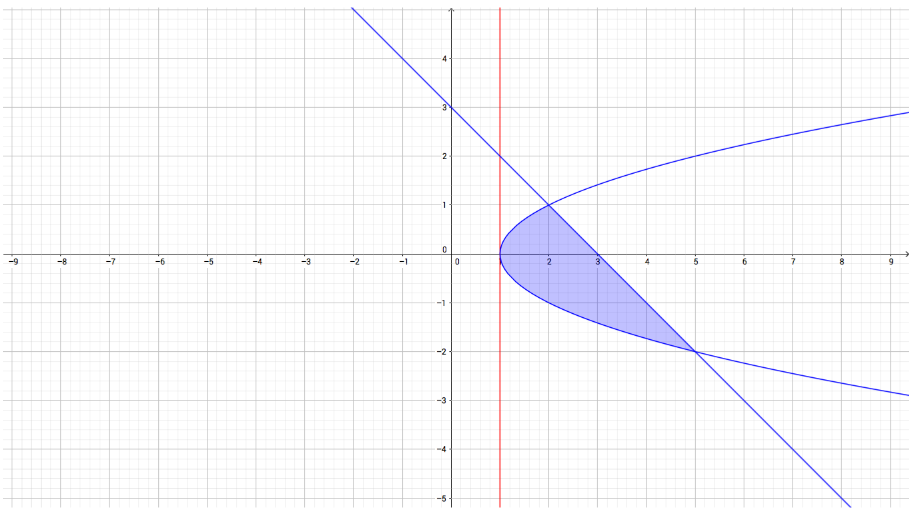
4. (1,5pts) Para construir uma taça em forma de cone circular reto, remove-se um setor circular de uma folha circular de cartolina de raio a, e unem-se as duas margens retilíneas do corte (ver figura). Determine o volume da maior taça que pode ser construída.



O cone tem volume $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, em que h é a altura do cone e r é o raio do da base circular. Por construção, $r^2 = a^2 - h^2$ (Teorema de Pitágoras). Procuremos o máximo de $V(h) = \frac{\pi}{3}(a^2 - h^2)h = \frac{\pi a^2 h}{3} - \frac{\pi h^3}{3}$, para $h \in [0, a]$. Temos $V'(h) = \frac{\pi a^2}{3} - \pi \cdot h^2 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{a}{\sqrt{3}}$ donde o volume máximo é $V(\frac{a}{\sqrt{3}}) = \frac{2\pi a^3}{9\sqrt{3}}$.
Nota: o máximo global de V existe (TVE) e é atingido num número crítico no interior desse intervalo, pois nos extremos V se anula.

5. Seja R a região delimitada pelas curvas $x = y^2 + 1$, $y = 3 - x$. Seja S o sólido obtido rodando a região R em torno da reta $x = 1$.

   (a) (0,5pts) Esboce a região R.



   (b) (1,0pt) Determine o volume do sólido S.

Pelo método das fatias: um corte perpendicular ao eixo de rotação $x = 1$, para $y \in [-2, 1]$ origina uma seção transversal (anel) com raio exterior $(3 - y) - 1 = 2 - y$ e raio interior $(y^2 + 1) - 1 = y^2$. Logo o volume de S é

$$\pi \int_{-2}^{1} (2 - y)^2 - (y^2)^2 dy = \pi[4y - 2y^2 + y^3/3 - y^5/5]_{-2}^{1} = 72\pi/5.$$