Aula 14 — Cálculo 3B — Aula 23 — Cálculo 3A

Aula passada

Equações homogêneas

Aula Hoje

Eq. lineares não homogênea

Equação lineares não homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = G(t)$$

Teorema A solução geral da equação não homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = G(t)$$

é escrita como

$$\boxed{y(t) = y_H(t) + y_p(t)}$$

onde * $y_H(t)$ é a solução geral a equação homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

e * $y_p(t)$ é uma solução particular da equação não homogênea

Prova

Sejam $y(t)$, $y_p(t)$ duas soluções da equação não homogênea, então para $y(t) - y_p(t)$ temos

$$(y - y_p)'' + p(t)(y - y_p)' + q(t)(y - y_p)$$

$$= \underbrace{y'' + p(t)y' + q(t)y}_{} - (\underbrace{y_p'' + p(t)y_p' + q(t)y_p}_{})$$

$$= G(t) - G(t) = 0$$

isto é $y(t) - y_p(t) =: y_H(t)$ solução da homogênea

então

$$y = y_H + y_p$$

Nota Já sabemos resolver algumas equações homogêneas. Vamos desenvolver dois métodos para encontrar uma solução particular da não homogênea

3.6 Método dos coeficientes a determinar

↳ este método serve quando:

$$\underbrace{ay'' + by' + cy}_{\text{equação de coeficientes constantes}} = G(t)$$

- = exponencial
- = trigonométrica (sen e cos)
- = polinômio

Exemplo: Resolva

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

Solução $y(t) = \underbrace{C_1y_1 + C_2y_2}_{\text{sol. Homogênea}} + y_p(t)$ — solução particular não Homo

Passo 1 Solução da homogênea

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

$$r^2 - 3r - 4 = 0$$

$$\left(r - \frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

$$r = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \quad \begin{cases} r = 4 \\ r = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{y_H(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{-t}}$$

Passo 2) Candidata a solução (tentativa)

Que tipo função poderia ser solução de $y'' - 3y' + 4y = 3e^{2t}$?

candidata: $y_p(t) = Ae^{2t}$ — coef. a determinar

Derivar e substituir:

$Y'(t) = 2Ae^{2t}$ $\quad Y''(t) = 4Ae^{2t}$

$$4Ae^{2t} - 6Ae^{2t} - 4Ae^{2t} = 3e^{2t}$$

$$\Rightarrow -6Ae^{2t} = 3e^{2t}$$

$A = -1/2$ $\quad Y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}$

Solução geral $\boxed{y(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{-t} - \frac{1}{2}e^{2t}}$

Exemplo: Resolva $y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$

Solução $Y_H(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{4t}$ → solução da homogênea

Passo 2 Candidata (motivado pelo exemplo anterior) a solução particular

$$y_p(t) = Ae^{-t}$$

Note, no entanto, que

$$y_H(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{4t}$$

isto é para $c_1 = A$ e $c_2 = 0$

$y_p(t) = Ae^{-t}$ é solução da equação homogênea

E portanto não é possível ser solução da não homogênea

Motivado pelo método de D'Alembert (para raiz repetida - redução de ordem)

candidata: $y_p(t) = \underbrace{A}_{\text{coeficiente a determinar}}te^{-t}$

Passo 3 Derivar, substituir e achar A

$$y_p'(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t}$$
$$y_p''(t) = -2Ae^{-t} + Ate^{-t}$$

$$(-2Ae^{-t} + Ate^{-t}) - 3(Ae^{-t} - Ate^{-t}) - 4te^{-t} = 2e^{-t}$$
$$A = -2/5$$

$$y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{4t} - \frac{2}{5}te^{-t}$$

Exemplo: Resolva $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t}$

Solução:

Passo 1 solução do homogêneo

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$x = 2$ raiz repetida

$$\boxed{y_H(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}}$$

Passo 2 Candidata a solução do não-homogêneo

I $y_p(t) = Ae^{2t}$ aparece na solução da homogênea

II $y_p(t) = Ate^{2t}$ aparece na solução do homogêneo

III $y_p(t) = At^2e^{2t}$ boa candidata

Passo 3 Derivar e substituir

$$y_p'(t) = 2Ate^{2t} + 2At^2e^{2t}$$

$$y_p''(t) = 2Ae^{2t} + 4Ate^{2t} + 4At^2e^{2t} + 4Ate^{2t}$$

$$2A\cancel{e^{2t}} + 4At\cancel{e^{2t}} + 4At^2\cancel{e^{2t}} + 4At\cancel{e^{2t}} - 4(2At\cancel{e^{2t}} + 2At^2\cancel{e^{2t}})$$

$$+4.(At^2\cancel{e^{2t}}) = 2\cancel{e^{2t}}$$

$$2A - \cancel{4At} - \cancel{4At^2} + \cancel{4At} + \cancel{4At^2} = 2$$

$$A = 1$$

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + t^2e^{2t}$$

Até agora

$G(t)$	$y_p(t)$
e^{at}	At^se^{at}, $\underbrace{s = 0, 1, 2}$

de forma que não tenha repetição com a solução da homogênea.

Exemplo Resolva

$$y'' - 3y' - 4y = 2\,\text{sen}\,t$$

Solução: $Y_H(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{4t}$ → Fiz antes

Passo 2: Candidata: Note que $(\text{sen}\,t)' = \cos$!

$$y_p(t) = \underbrace{A\cos t + B\,\text{sen}\,t}_{\text{coef. a determinar}}$$

Passo 3 Derivar e substituir na equação

$$y_p'(t) = -A\,\text{sen}\,t + B\cos t$$
$$y_p''(t) = -A\cos t - B\,\text{sen}\,t$$

$$(-A\,\text{sen}\,t - B\cos t) - 3(A\cos t - B\,\text{sen}\,t) + 4(A\,\text{sen}\,t + B\cos t) = 2\,\text{sen}\,t$$

$$(-A - 3B - 4A)\cos t + (-B + 3A - 4B)\,\text{sen}\,t = 2\,\text{sen}\,t$$

$$\begin{cases} -5A - 3B = 0 \\ +3A - 5B = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{3}{17},\ B = -\frac{5}{17}$$

$$y_p(t) = \frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\,\text{sen}\,t$$

solução geral $\boxed{y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{4t} + \frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\,\text{sen}\,t}$

Exemplo: Resolva

$$y'' - 3y' - 4y = 4t^2 - 1$$

Solução:

Passo 1: $y_H(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{4t}$

Passo 2: candidata $Y(t) = \underbrace{At^2 + Bt + C}_{\text{coef. a determinar}}$

Passo 3 derivar e substituir:

$Y'(t) = 2At + B$

$Y''(t) = 2A$

$$2A - 3(2At+B) - 4(At^2+Bt+C) = 4t^2 - 1$$

$$(-4A)t^2 + (-6A-4B)t + (2A-3B-4C) = 4t^2 - 1$$

$A = -1$ $\quad B = 3/2$

$6 - 4B = 0$ $\quad C = -11/8$

$$y_p(t) = -t^2 + \frac{3t}{2} - \frac{11}{8}$$

Solução geral $\boxed{y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{4t} - t^2 + \frac{3t}{2} - \frac{11}{8}}$

Teorema Se $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ são soluções particulares respectivamente

$$ay'' + by' + cy = G_1(t)$$

$$ay'' + by' + cy = G_2(t)$$

então $Y_1(t) + Y_2(t)$ é solução de

$$\boxed{ay'' + by' + cy = G_1(t) + G_2(t)}$$

e $Y_1(t).Y_2(t)$ é solução de

$$\boxed{ay'' + by' + cy = G_1(t).G_2(t)}$$

Exemplo: Resolva

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} + 2\,\text{sen}\,t$$

Solução:

Passo 1: $y_H(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{4t}$

Passo 2: $Y_p(t) = \underbrace{Ae^{2t} + B\cos t + C\,\text{sen}\,t}_{\text{determinar}}$

já fizemos   já fizemos

$$= -1e^{2t} + \frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\,\text{sen}\,t$$

solução geral

$$\boxed{y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\,\text{sen}\,t}$$

Exemplo: Resolva $y'' - 3y' - 4y = -8e^{t}\cos 2t$

Solução:

Passo 1 $\quad y_H(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{4t}$

Passo 2:

candidata $Y_p(t) = \underbrace{Ae^{t}\cos 2t + Be^{t}}_{\text{determinar}}\text{sen}\,2t$

Derivar e substituir:

$$Y_p'(t) = (A-2B)e^{t}\cos 2t + (-2A+B)e^{t}\,\text{sen}\,2t$$

$$Y_p''(t) = (-3A+4B)e^{t}\cos 2t + (-4A-3A)e^{t}\,\text{sen}\,2t$$

comparando depois de substituir

$$A = \frac{10}{13}, \quad B = \frac{2}{13}$$

$$Y_p(t) = \frac{10}{13}e^{t}\cos 2t + \frac{2}{13}e^{t}\,\text{sen}\,t$$

solução geral:

$$\boxed{y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{4t} + \frac{10}{13}e^{t}\cos 2t + \frac{2}{13}e^{t}\,\text{sen}\,t}$$

Resumo

$G(t)$	$y_p(t)$
$P_n(t) = a_nt^n + \ldots + a_1t + a_0$	$t^s(A_nt^n + \ldots + A_1t + A_0)$
$P_n(t).e^{\alpha t}$	$t^s(A_nt^n + \ldots + A_1t + A_0)e^{\alpha t}$
$P_n(t).e^{\alpha t}.\begin{cases}\cos\beta t\\ \text{sen}\,\beta t\end{cases}$	$t^s(A_nt^n + \ldots + A_1t + A_0)e^{\alpha t}\cos\beta t + t^s(B_nt^n + \ldots + B_1t + B_0)e^{\alpha t}\,\text{sen}\,\beta t$