Resolvendo sistemas lineares
Eliminação progressiva
Eliminação de Gauss

Algoritmos Numéricos - Topico 2-2
Eliminação de Gauss (eliminação progressiva e substituição regressiva)
Profa. Cláudia G. Varassin DI/UFES
emails:claudia.varassin@ufes.br e galarda@inf.ufes.br

Feveriro 2021

Sumário

Equações lineares e sistemas de equações lineares

Equação linear:

$$ax = b$$

se $a \neq 0$, a solução existe
e é obtida facilmente via:

$$ax = b \Rightarrow x = b/a$$

exemplo:

$$3.2x = 1.0 \Rightarrow x = 1.0/3.2 = 0.3152$$

Um sistema de equações lineares

Um sistema de equações lineares de dimensão n

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & + & \ldots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 & & & \ldots & \ldots & & \vdots & & \ldots & = & \ldots \\
a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + & a_{i,3}x_3 & + & \ldots & + & a_{i,n}x_n & = & b_i \\
 & & & \ldots & \ldots & & \vdots & & \ldots & = & \ldots \\
a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & + & \ldots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}\right.$$

Na forma matricial

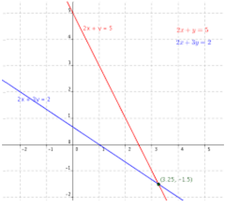
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

O que é a solução?

Exemplo no $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 = & b_2 \end{cases}$$

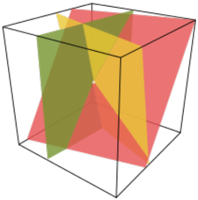
Geometricamente o sistema é representado por duas retas.
Exemplo:



Exemplo no $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & = & b_2 \\ a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & + & a_{3,3}x_3 & = & b_3 \end{array}\right.$$

Geometricamente o sistema é representado por:



O método de eliminação de Gauss

Para resolver um sistema linear $Ax = b$.
O método de eliminação de Gauss:
Transformar o sistema original em um sistema equivalente que tenha uma configuração que facilite a obtenção da solução.
(1) Realizar operações elementares nas equações para que o sistema equivalente seja triangular superior.

$$Ax = b \quad \underset{\text{operações elementares}}{\Longrightarrow} \quad \tilde{A}x = \tilde{b}$$

onde $\tilde{A}$ é uma matriz triangular superior.

(2) Resolver o sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$ via substituição regressiva

O processo de triangularização consiste em eliminar variáveis de forma convenientemente escolhida, via operações elementares.

$$L_i = L_i - m * L_k$$

1ª Etapa: eliminar a variável x_1 das equações 2 até n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

1^a Etapa: eliminar a variável x_1 das equaçoes 2 até n
("zerar" os elementos abaixo da $a_{1,1} \Rightarrow L_i = Li - m * L_1$

Linha 2: $m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \Rightarrow \qquad L_2 = L_2 - m_{21} L_1$

col 1: $a_{21} = a_{21} - m_{21} a_{11} \Rightarrow a_{21} = a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{11} = 0$ (verif!)

1^a Etapa: eliminar a variável x_1 das equaçoes 2 até n
("zerar" os elementos abaixo da $a_{1,1} \Rightarrow L_i = Li - m * L_1$

Linha 2: $m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \quad \Rightarrow \qquad L_2 = L_2 - m_{21} L_1$

$$
\begin{aligned}
&\text{col 1: } a_{21} = a_{21} - m_{21} a_{11} \Rightarrow a_{21} = a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{11} = 0 \text{ (verif!)} \\
&\text{col 2: } a_{22} = a_{22} - m_{21} a_{12} \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\text{col j: } a_{2j} = a_{2j} - m_{21} a_{1j} \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\text{col } n\text{: } a_{2n} = a_{2n} - m_{21} a_{1n} \\
&\\
&\qquad \text{b: } b_2 = b_2 - m_{21} b_1
\end{aligned}
$$

1^a Etapa: eliminar a variável x_1 das equações 2 até n

Linha 3: $m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \Rightarrow \qquad L_3 = L_3 - m_{31} L_1$

col 1: $a_{31} = a_{31} - m_{31} a_{11} \Rightarrow a_{31} = a_{31} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{11} = 0$ (verif!)

col 2: $a_{32} = a_{32} - m_{31} a_{12}$

$\vdots$

col j: $a_{3j} = a_{3j} - m_{31} a_{1j}$

$\vdots$

col n: $a_{3n} = a_{3n} - m_{31} a_{1n}$

b: $b_3 = b_3 - m_{31} b_1$

Após manipular a linha 2 e 3 na 1ª Etapa, a matriz está com a seguinte configuração:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

1^a Etapa: eliminar a variável x_1 das equaçoes 2 até n

Linha i: $m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad \Rightarrow \qquad\qquad L_i = L_i - m_{i1} L_1$

$$\begin{array}{l} \text{col 1: } a_{i1} = a_{i1} - m_{i1} a_{11} \Rightarrow a_{i1} = a_{i1} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{11} = 0 \text{ (verif!)} \\ \text{col 2: } a_{i2} = a_{i2} - m_{i1} a_{i2} \\ \qquad\qquad \vdots \end{array}$$

1^a Etapa: eliminar a variável x_1 das equaçoes 2 até n

Linha i: $m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad \Rightarrow \qquad L_i = L_i - m_{i1} L_1$

col 1: $a_{i1} = a_{i1} - m_{i1} a_{11} \Rightarrow a_{i1} = a_{i1} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{11} = 0$ (verif!)
col 2: $a_{i2} = a_{i2} - m_{i1} a_{i2}$

$\vdots$

col j: $a_{ij} = a_{ij} - m_{i1} a_{1j}$

$\vdots$

col n: $a_{in} = a_{in} - m_{i1} a_{1n}$

b: $b_i = b_i - m_{i1} b_1$

Após manipular todas as linhas da 1ª Etapa, a matriz está com a seguinte configuração:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

2^a Etapa: eliminar a variável x_2 das equaçoes 3 até n
("zerar" os elementos abaixo da $a_{2,2} \Rightarrow L_i = L_i - m * L_2$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

2^a Etapa: eliminar a variável x_2 das equaçoes 3 até n

Linha i: $m_{i2} = \frac{a_{i2}}{a_{22}} \Rightarrow \qquad L_i = L_i - m_{i2} L_2$

$$
\begin{aligned}
\text{col } 2: a_{i2} &= a_{i2} - m_{i2} a_{22} = \cdots = 0(verif!) \\
\text{col } 3: a_{i3} &= a_{i3} - m_{i2} a_{23} \\
&\vdots \\
\text{col j: } a_{ij} &= a_{ij} - m_{i2} a_{2j} \\
&\vdots \\
\text{col n: } &\cdots \\
\text{b: } b_i &= b_i - m_{i1} b_2
\end{aligned}
$$

k^a Etapa: eliminar a variável x_k das equaçoes $k+1$ até n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{k,k} & \cdots & a_{k,n-1} & a_{k,n} \\ 0 & 0 & a_{k+1,k} & \cdots & a_{k+1,n-1} & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{n-1,k} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & a_{n,k} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_k \\ b_{k+1} \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 10x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \\ -x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \end{array}\right.$$

Matricialmente

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 10.0 & -2.0 & 1.0 & 0.0 \\ 5.0 & 2.0 & 5.0 & 4.0 \\ -1.0 & -1.0 & 0.0 & 1.0 \end{array}\right]$$

1^a Etapa: eliminar a variável x_1 das equaçoes 2 até $n = 3$
$L_i = L_i - m_{i1} L_1$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 10.0 & -2.0 & 1.0 & 0.0 \\ 5.0 & 2.0 & 5.0 & 4.0 \\ -1.0 & -1.0 & 0.0 & 1.0 \end{array}\right]$$

Linha 2: $m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 5/10 = 0.5$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 10.0 & -2.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 3.0 & 4.5 & 4.0 \\ -1.0 & -1.0 & 0.0 & 1.0 \end{array}\right]$$

1^a Etapa: eliminar a variável x_1 das equaçoes 2 até $n = 3$
$L_i = L_i - m_{i1} L_1$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 10.0 & -2.0 & 1.0 & 0.0 \\ 5.0 & 2.0 & 5.0 & 4.0 \\ -1.0 & -1.0 & 0.0 & 1.0 \end{array}\right]$$

Linha 2: $m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 5/10 = 0.5$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 10.0 & -2.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 3.0 & 4.5 & 4.0 \\ -1.0 & -1.0 & 0.0 & 1.0 \end{array}\right]$$

Linha 3: $m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = (-1)/10 = -0.1$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 10.0 & -2.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 3.0 & 4.5 & 4.0 \\ 0 & -1.2 & 0.1 & 1.0 \end{array}\right]$$

2^a Etapa: eliminar a variável x_2 das equaçoes 3 até $n = 3$
$L_i = L_i - m_{i1} L_1$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 10.0 & -2.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 3.0 & 4.5 & 4.0 \\ 0 & -1.2 & 0.1 & 1.0 \end{array}\right]$$

Linha 3: $m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = (-1.2)/3.0 = -0.4$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 10.0 & -2.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0 & 3.0 & 4.5 & 4.0 \\ 0 & 0 & 1.9 & 2.6 \end{array}\right]$$

k^a Etapa: eliminar a variável x_k das equaçoes $k+1$ até n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{k,k} & \cdots & a_{k,n-1} & a_{k,n} \\ 0 & 0 & a_{k+1,k} & \cdots & a_{k+1,n-1} & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{i,k} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{n,k} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_k \\ b_{k+1} \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

k^a Etapa: eliminar a variável x_k das equaçoes $k+1$ até n
("zerar" os elementos abaixo da $a_{k,k} \Rightarrow L_i = L_i - m * L_k$

Linha i: $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \Rightarrow \qquad L_i = L_i - m_{ik} L_k$

$$\text{col } k: a_{i,k} = a_{i,k} - m_{ik} a_{k,k} \Rightarrow a_{i,k} = a_{i,k} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{k,k} = 0 (verif!)$$

$$\vdots$$

col j: $a_{ij} = a_{ij} - m_{ik} a_{kj}$

$$\vdots$$

b: $b_i = b_i - m_{ik} b_k$

k^a Etapa: eliminar a variável x_k das equaçoes $k+1$ até n

$$L_i = L_i - m * L_k$$

Algoritmo de Triangularização
INICIO
Ler(A,b,n)
Para k = 1 : (n-1)   *"% as etapas"*
  Para i= (k+1):n
    m = a(i,k)/a(k,k)

    atualizar os elementos da linha i

  Fim do i
Fim do k
FIM

$$a_{ij} = a_{ij} - m_{ik} a_{kj}$$

```
Algoritmo de Triangularização
INICIO
Ler(A,b,n)
Para k = 1 : (n-1)     "% as etapas"
  Para i= (k+1):n
        m = a(i,k)/a(k,k)
        Para j= (k+1):n
              a(i,j)= a(i,j)- m*a(k,j)
        Fim do j
  Fim do i
Fim do k
FIM
```

O processo de triangularização ou eliminação progressiva consiste em eliminar variavéis convenientemente, de certas equações, via as operações elementares.
Exemplo no $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 = & b_1 & eq.(A) \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 = & b_2 & eq.(B) \end{cases}$$

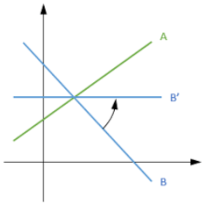
$$L_2 = L_2 - m * L_1 \Rightarrow = L_2 - (a_{2,1}/a_{1,1}) * L_1$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 = & b_1 & eq.(A) \\ & & \tilde{a_{2,2}}x_2 = & \tilde{b_2} & eq.(B') \end{cases}$$

Geometricamente:
O sistema original: composto pelas retas A e B
O sistema modific. composto: pelas retas A e B' (é o triangular)
Os sistemas são equivalentes (têm a mesma solução):

Figura: A reta B é transformada (reescrita) em B'



Há uma "reoganização" das equações sem mudar o pto solução

Exemplo: sistema 4×4

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & -1 & 2 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & 1 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & 6 & 2 & 7 \end{array}\right]$$

1a Etapa: pivô: $a_{11} = -3$
multiplicadores: $m_{21} = -7/3$, $m_{31} = 2/3$, $m_{41} = -1/3$
$\Rightarrow L_2 : L_2 - (-7/3)L_1$, $L_3 : L_3 - (2/3)L_1$, $L_4 : L_4 - (-1/3)L_1$

Exemplo: sistema 4×4

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 & 3 & | & 6 \\ 7 & -1 & 2 & 3 & | & 11 \\ -2 & 3 & 1 & 6 & | & 8 \\ 1 & -2 & 6 & 2 & | & 7 \end{bmatrix}$$

1a Etapa: pivô: $a_{11} = -3$
multiplicadores: $m_{21} = -7/3$, $m_{31} = 2/3$, $m_{41} = -1/3$
$\Rightarrow L_2 : L_2 - (-7/3)L_1,\ L_3 : L_3 - (2/3)L_1,\ L_4 : L_4 - (-1/3)L_1$

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 & 3 & | & 6 \\ 7 & 17.667 & -2.667 & 10 & | & 25.000 \\ -2 & -2.333 & 2.333 & 4 & | & 4.000 \\ 1 & 0.667 & 5.333 & 3 & | & 9.000 \end{bmatrix}$$

2a Etapa: pivô: $a_{22} = 17.667$

multiplicadores: $m_{32} = -2.333/17.667$, $m_{42} = 0.667/17.667$

$\Rightarrow L_3 : L_3 - (-2.333/17.667)L_2,\ L_4 : L_4 - (0.667/17.667)L_2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & 17.667 & -2.667 & 10 & 25.000 \\ -2 & -2.333 & 1.981 & 5.321 & 7.301 \\ 1 & 0.667 & 5.434 & 2.623 & 8.056 \end{array}\right]$$

3a Etapa: pivô: $a_{33} = 1.981$

multiplicadores: $m_{43} = 5.434/1.981$

Operações: $L_4 : L_4 - (5.434/1.981)L_3$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 8 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & 17.667 & -2.667 & 10 & 25.000 \\ -2 & -2.333 & 1.981 & 5.321 & 7.301 \\ 1 & 0.667 & 5.434 & -11.971 & -11.971 \end{array}\right]$$

Após a 3a etapas, o sistema triangular equivalente é:

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 & 3 \\ 7 & 17.667 & -2.667 & 10 \\ -2 & -2.333 & 1.981 & 5.321 \\ 1 & 0.667 & 5.434 & -11.971 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 25.000 \\ 7.301 \\ -11.971 \end{bmatrix}$$

Substituição Regressiva:

$$\begin{aligned} -11.971\, x_4 = -11.971 \Rightarrow x_4 &= 1.000 \\ 1.981x_3 + 5.321x_4 = 7.301 \Rightarrow x_3 &= 0.999 \\ 17.667x_2 - 2.667x_3 + 10x_4 = 25.000 \Rightarrow x_2 &= 1.000 \\ -3x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 6 \Rightarrow x_1 &= 1.001 \end{aligned}$$

```
Algoritmo de Triangularização
INICIO
Ler(A,b,n)
Para k = 1 : (n-1)    “% as etapas”
  Para i= (k+1):n
        m = a(i,k)/a(k,k)
        a(i,k)=0   “% para visualização”
        Para j= (k+1):n
              a(i,j)= a(i,j)- m*a(k,j)
        Fim do j
  Fim do i
Fim do k
FIM
```

Após a 3a etapas, o sistema triangular equivalente é:

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 & 3 \\ 0 & 17.667 & -2.667 & 10 \\ 0 & 0 & 1.981 & 5.321 \\ 0 & 0 & 0 & -11.971 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 25.000 \\ 7.301 \\ -11.971 \end{bmatrix}$$

RESUMINDO:
Dado um sistema linear, não singular, quadrado, uma forma possível para resolvê-lo é pelo método de eliminação de Gauss.
O processo consiste em:

- transformar o sistema em um sistema Triangular Superior $\triangle$
- o sistema triangular é resolvido por substituição regressiva

Na prática, na triangularização (eliminação progressiva) deve se adotar uma estratégia chamanda de pivoteamento.
O objetivo é controlar o aumento de erros de arredondamento.
A eliminação de Gauss, sem esta estratégia, como foi visto nesta aula, é chamada de eliminação de Gauss ingênua.

Bibliografia Básica

- Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.
- Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.
- https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-oct/*sdsl* − *sistemas* − *triangulares*.*html*