Estrutura de Dados II (ED2)

Aula 17 – Heap Sort

Departamento de Informática (DI)
Centro Tecnológico (CT)
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

(Material baseado nos slides do Professor Eduardo Zambon)

Introdução

- **Aula de hoje**: Algoritmo de ordenação *heap sort*.

Referências

Chapter 9 – Priority Queues and Heapsort
R. Sedgewick

Revisão – O que é um heap?

Desafio – De heap para vetor ordenado

Heap Sort – Intuição

Heap sort

Heap sort: novo algoritmo de ordenação baseado em fila com prioridade.

```
void sort(Item *a, int lo, int hi) {
    int N = hi - lo + 1;
    PQ_init(N);
    for (int i = 0; i < N; i++) {
        PQ_insert(a[i]);
    }
    for (int i = N-1; i >= 0; i--) {
        a[i] = PQ_delmax();
    }
}
```

Propriedades:

- Pior caso: ordem de $N \log N$ comparações.
- *In-place*? Não, mas é possível melhorar. (Veja adiante.)
- Estável? Não. *Heap* pode embaralhar chaves iguais.

Heap sort in-place "top-down"

Ideia geral para *sort in-place*:

- Entrada é um *array* com N chaves e ordenação arbitrária.
- Suposição: entradas indexadas de 1 a N.
- (Possível começar de 0, feito somente por conveniência.)
- Construção do *heap*: usa um método *top-down* para construir um *max-heap* com as N chaves.
- *Sort down*: *loop* simples que joga o máximo para o fim do *array*.

Heap sort in-place "top-down"

```
void sort(Item *a, int lo, int hi) {
    int N = hi - lo + 1;
    for (int i = lo; i <= hi; i++)
        fix_up(a, i);     // "Top-down" heap construction.
    while (N > 1) { // Sort down.
        exch(a[1], a[N]);
        fix_down(a, --N, 1);
    }
}
```

```
4 8 6 3 1 7 9 2 0 5
4|8 6 3 1 7 9 2 0 5
8 4|6 3 1 7 9 2 0 5
8 4 6|3 1 7 9 2 0 5
8 4 6 3|1 7 9 2 0 5
8 4 6 3 1|7 9 2 0 5
8 4 7 3 1 6|9 2 0 5
9 4 8 3 1 6 7|2 0 5
9 4 8 3 1 6 7 2|0 5
9 4 8 3 1 6 7 2 0|5
9 5 8 3 4 6 7 2 0 1|
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

Invariante da construção:

- A cada passo do *loop* o *heap* cresce uma posição.
- Posição `i` é o novo elemento.
- Chaves à esquerda de `i` formam o *heap*.
- Chaves à direita de `i` ainda não foram vistas.

Heap sort in-place "top-down"

Número de comparações no pior caso:

- Construção do *heap*: N chamadas de `fix_up`. Custo total:

$$N(1 + \lg N)$$

- *Sort down*: N chamadas de `fix_down`. Custo total:

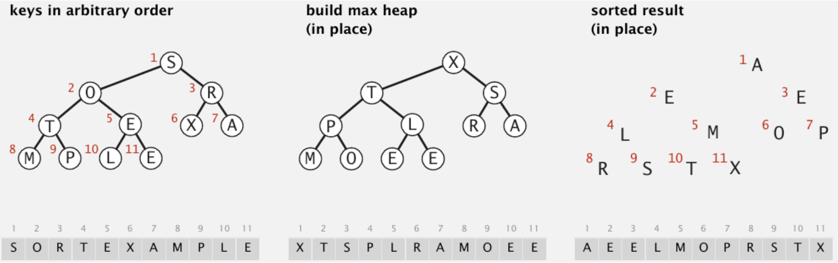
$$2N \lg N$$

- $\Rightarrow$ Pior caso é $\sim 3N \lg N$.

Próxima versão é a equivalente "*bottom-up*".

Ideia geral para *sort in-place*:

- Considera *array* de entrada como uma árvore binária completa.
- Construção do *heap*: Constrói um *max-heap* com as N chaves.
- *Sort down*: remove repetidamente a chave maior.



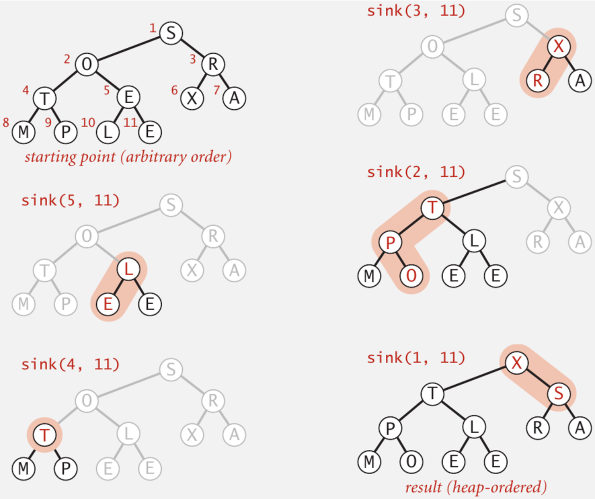
Heap sort demo

- Entrada é um *array* com ordenação arbitrária.
- Suposição: entradas indexadas de 1 a N.
- (Possível começar de 0, feito somente para ficar compatível com as figuras.)
- Construção do *heap*: usa um método *bottom-up*.
- Invariante da construção é indutivo: assume que *heaps* menores já foram construídos para construir um *heap* maior.
- *Sort down*: *loop* simples que joga o máximo para o fim do *array*.

Ver arquivo `24DemoHeapsort.mov`.

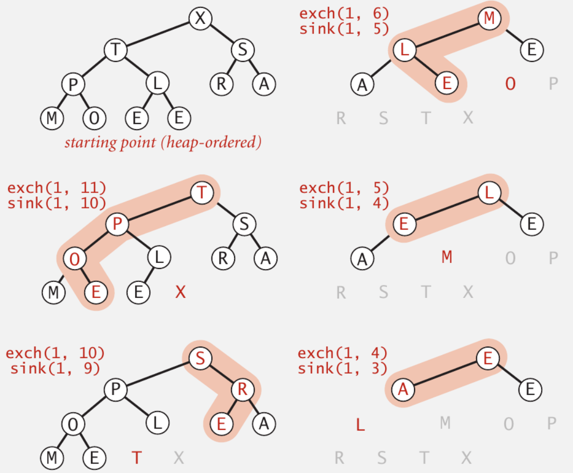
Heap sort - 1a. passada: construção do *heap*

```
for (int k = N/2; k >= 1; k--)
    fix_down(a, N, k); // "Bottom-up" heap construction.
```



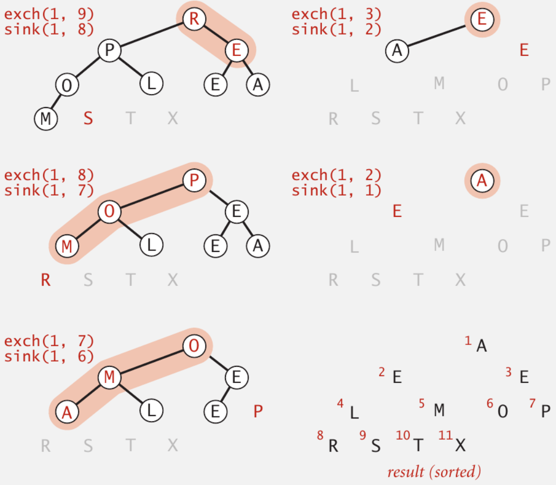
Heap sort - 2a. passada: *sort down*

```
while (N > 1) { // Sort down.
    exch(a[1], a[N]);
    fix_down(a, --N, 1); }
```



Heap sort - 2a. passada: *sort down*

```
while (N > 1) { // Sort down.
    exch(a[1], a[N]);
    fix_down(a, --N, 1); }
```



Heap sort: implementação em C

```
void sort(Item *a, int lo, int hi) {
    int N = hi - lo + 1;
    for (int k = N/2; k >= 1; k--)
        fix_down(a, N, k); // "Bottom-up" heap construction.
    while (N > 1) { // Sort down.
        exch(a[1], a[N]);
        fix_down(a, --N, 1); }
}
```

In-place: ✓

Estável: $\times$

Heap sort: trace

N	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
initial values			S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
11	5		S	O	R	T	L	X	A	M	P	E	E
11	4		S	O	R	T	L	X	A	M	P	E	E
11	3		S	O	X	T	L	R	A	M	P	E	E
11	2		S	T	X	P	L	R	A	M	O	E	E
11	1		X	T	S	P	L	R	A	M	O	E	E
heap-ordered			X	T	S	P	L	R	A	M	O	E	E
10	1		T	P	S	O	L	R	A	M	E	E	X
9	1		S	P	R	O	L	E	A	M	E	T	X
8	1		R	P	E	O	L	E	A	M	S	T	X
7	1		P	O	E	M	L	E	A	R	S	T	X
6	1		O	M	E	A	L	E	P	R	S	T	X
5	1		M	L	E	A	E	O	P	R	S	T	X
4	1		L	E	E	A	M	O	P	R	S	T	X
3	1		E	A	E	L	M	O	P	R	S	T	X
2	1		E	A	E	L	M	O	P	R	S	T	X
1	1		A	E	E	L	M	O	P	R	S	T	X
sorted result			A	E	E	L	M	O	P	R	S	T	X

Heapsort trace (array contents just after each sink)

Heap sort: análise

Ordem de crescimento no pior caso (versão "*bottom-up*"):

- Construção do *heap*: # comparações é $N/2(2 \lg N)$.
- *Sort down*: # comparações é $2N \lg N$.
- $\Rightarrow$ Pior caso é $\sim 3N \lg N$.

Significância: nenhum outro algoritmo *in-place* tem esse desempenho.

- *Merge sort*: espaço extra linear.
  (*Merge sort in-place* é possível mas não é prático.)
- *Quick sort*: quadrático no pior caso. (*Quick sort* com pior caso $N \lg N$ é possível mas não é prático.)
- *Heap sort*: algoritmo ótimo para tempo e espaço!

Na prática:

- Não é estável.
- Não usa bem o cache.
- Menos eficiente que *quick sort* na maioria da vezes.

Intro sort

Objetivos:

- Algoritmo tão rápido quanto *quick sort* na prática.
- Com ordem de crescimento $N \log N$ no pior caso.
- *In-place*.

Intro sort:

- Executa *quick sort*.
- *Cut-off* para *heap sort* se tamanho pilha exceder $2 \lg N$.
- *Cut-off* para *insertion sort* quando $N = 16$.

Amplamente utilizado na prática:

- C++ STL.
- .NET Framework.

Algoritmos de ordenação: sumário

	inplace?	stable?	best	average	worst	remarks
selection	✔		½ n^2	½ n^2	½ n^2	n exchanges
insertion	✔	✔	n	¼ n^2	½ n^2	use for small n or partially ordered
shell	✔		$n \log_3 n$	?	$c\, n^{3/2}$	tight code; subquadratic
merge		✔	½ $n \lg n$	$n \lg n$	$n \lg n$	$n \log n$ guarantee; stable
timsort		✔	n	$n \lg n$	$n \lg n$	improves mergesort when preexisting order
quick	✔		$n \lg n$	$2\, n \ln n$	½ n^2	$n \log n$ probabilistic guarantee; fastest in practice
3-way quick	✔		n	$2\, n \ln n$	½ n^2	improves quicksort when duplicate keys
heap	✔		$3\, n$	$2\, n \lg n$	$2\, n \lg n$	$n \log n$ guarantee; in-place
?	✔	✔	n	$n \lg n$	$n \lg n$	holy sorting grail