Processos Estocásticos

Berilhes

Definição e Exemplos de Processos Estocásticos

Definição

Um processo estocástico, $\{X(t) : t \in T\}$, é uma coleção de variáveis aleatórias.

Definição e Exemplos de Processos Estocásticos

Definição

Um processo estocástico, $\{X(t) : t \in T\}$, é uma coleção de variáveis aleatórias.

- Para cada $t \in T$, $X(t)$ é uma variável aleatória.

Definição e Exemplos de Processos Estocásticos

Definição

Um processo estocástico, $\{X(t) : t \in T\}$, é uma coleção de variáveis aleatórias.

- Para cada $t \in T$, $X(t)$ é uma variável aleatória.
- Geralmente t é tempo.

Definição e Exemplos de Processos Estocásticos

Definição

Um processo estocástico, $\{X(t) : t \in T\}$, é uma coleção de variáveis aleatórias.

- Para cada $t \in T$, $X(t)$ é uma variável aleatória.
- Geralmente t é tempo.
- $X(t)$ é o estado do processo no instante de tempo t.

Definição e Exemplos de Processos Estocásticos

Exemplo

Definição e Exemplos de Processos Estocásticos

Exemplo

- Número total de fregueses que chegaram a uma loja até o instante t.

Definição e Exemplos de Processos Estocásticos

Exemplo

- Número total de fregueses que chegaram a uma loja até o instante t.
- Número de caminhões aguardando descarga até o instante t.

Definição e Exemplos de Processos Estocásticos

Exemplo

- Número total de fregueses que chegaram a uma loja até o instante t.
- Número de caminhões aguardando descarga até o instante t.
- Tonelagem total transportada pela ferrovia até o instante t.

Definição e Exemplos de Processos Estocásticos

Exemplo

- Número total de fregueses que chegaram a uma loja até o instante t.
- Número de caminhões aguardando descarga até o instante t.
- Tonelagem total transportada pela ferrovia até o instante t.
- Número de pacotes que chegaram ao roteador até o instante t.

Definição e Exemplos de Processos Estocásticos

Exemplo

- Número total de fregueses que chegaram a uma loja até o instante t.
- Número de caminhões aguardando descarga até o instante t.
- Tonelagem total transportada pela ferrovia até o instante t.
- Número de pacotes que chegaram ao roteador até o instante t.
- Número de conexões web recusadas pelo servidor até o instante t.

Definição e Exemplos de Processos Estocásticos

Exemplo

- Número total de fregueses que chegaram a uma loja até o instante t.
- Número de caminhões aguardando descarga até o instante t.
- Tonelagem total transportada pela ferrovia até o instante t.
- Número de pacotes que chegaram ao roteador até o instante t.
- Número de conexões web recusadas pelo servidor até o instante t.
- Número de datagramas a serem processados pelo roteador no instante t.

Definição e Exemplos de Processos Estocásticos

$$T\ contável \Longrightarrow Processo\ Estocástico\ Discreto\ \ \{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\} \quad (1)$$

Definição e Exemplos de Processos Estocásticos

$$T \ contável \Longrightarrow Processo \ Estocástico \ Discreto \ \ \{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\} \quad (1)$$

$$T \ não \ contável \Longrightarrow Processo \ Estocástico \ Contínuo \ \ \{X_t, t \geq 0\} \quad (2)$$

Definição e Exemplos de Processos Estocásticos

Processo Estocástico

Processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias que descreve a evolução através do tempo de algum processo físico.

Estado do Processo

Indica a situação do processo em um certo instante.

Estado do Processo

Indica a situação do processo em um certo instante.

Estágio do Processo

Indica o instante de tempo em que o processo é observado.

Estado do Processo

Indica a situação do processo em um certo instante.

Estágio do Processo

Indica o instante de tempo em que o processo é observado.

Exemplo

$X_n = i$

Estado do Processo

Indica a situação do processo em um certo instante.

Estágio do Processo

Indica o instante de tempo em que o processo é observado.

Exemplo

$X_n = i$

O processo está no estado i no estágio n

Transição do Processo

Transição do Processo

$X_{n+1} = j : X_n = i$

Transição do Processo

$X_{n+1} = j : X_n = i$

transição estado i para o estado j do estágio n para o estágio $n+1$

Transição do Processo

$X_{n+1} = j : X_n = i$

transição estado i para o estado j do estágio n para o estágio $n+1$

Definição

P_{ij} é a probabilidade de transição de i para j

Propriedade de Markov

Propriedade de Markov

$$P_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$

Propriedade de Markov

$P_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$

O estado futuro independente dos estados passados, depende apenas do estado presente

- $P_{ij} \geq 0$ para todos os estados i e j.

- $P_{ij} \geq 0$ para todos os estados i e j.
- $\sum_j P_{ij} = 1$ para todos os estados i.

Cadeias de Markov para Processos Discretos

Matriz de transição de estado (ou matriz estocástica)

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0k} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{k0} & P_{k1} & \dots & P_{kk} \end{bmatrix}$$

Equações de Chapman-Kolmogorov

$$P_{ij} \Longrightarrow \textit{probabilidade de transição em um passo} \tag{3}$$

Equações de Chapman-Kolmogorov

$$P_{ij} \Longrightarrow \textit{probabilidade de transição em um passo} \tag{3}$$

$$P_{ij}^{n} \Longrightarrow \textit{probabilidade de a partir do estado i atingir o estado j após n transições} \tag{4}$$

Equações de Chapman-Kolmogorov

$$P_{ij} \Longrightarrow \textit{probabilidade de transição em um passo} \tag{3}$$

$$P_{ij}^{n} \Longrightarrow \textit{probabilidade de a partir do estado i atingir o estado j após n transições} \tag{4}$$

$$P_{ij}^{n} = P\{X_{n+m} = j : X_m = i\}, n, i, j \geq 0 \tag{5}$$

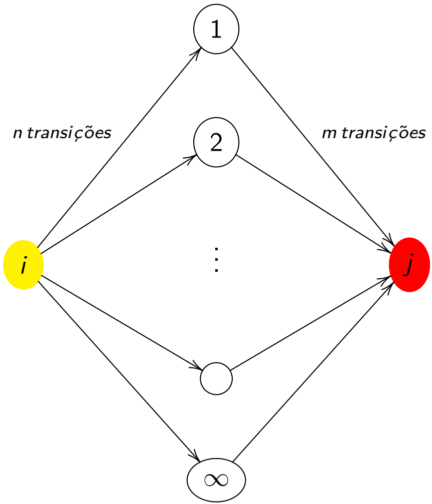
Equações de Chapman-Kolmogorov

Caso Discreto

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{n} P_{kj}^{m} \tag{6}$$

Equações de Chapman-Kolmogorov

Caso Discreto



Equações de Chapman-Kolmogorov

- $$P^{(n)} = \begin{bmatrix} P_{00}^{n} & P_{01}^{n} & \cdots & P_{0k}^{n} \\ P_{10}^{n} & P_{11}^{n} & \cdots & P_{1k}^{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{k0}^{n} & P_{k1}^{n} & \cdots & P_{kk}^{n} \end{bmatrix} \qquad P^{(m)} = \begin{bmatrix} P_{00}^{m} & P_{01}^{m} & \cdots & P_{0k}^{m} \\ P_{10}^{m} & P_{11}^{m} & \cdots & P_{1k}^{m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{k0}^{m} & P_{k1}^{m} & \cdots & P_{kk}^{m} \end{bmatrix}$$

Equações de Chapman-Kolmogorov

- $$P^{(n)} = \begin{bmatrix} P^n_{00} & P^n_{01} & \cdots & P^n_{0k} \\ P^n_{10} & P^n_{11} & \cdots & P^n_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P^n_{k0} & P^n_{k1} & \cdots & P^n_{kk} \end{bmatrix} \qquad P^{(m)} = \begin{bmatrix} P^m_{00} & P^m_{01} & \cdots & P^m_{0k} \\ P^m_{10} & P^m_{11} & \cdots & P^m_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P^m_{k0} & P^m_{k1} & \cdots & P^m_{kk} \end{bmatrix}$$

- matriz de transição em n+m passos

$$P^{(n+m)} = \begin{bmatrix} P^{n+m}_{00} & P^{n+m}_{01} & \cdots & P^{n+m}_{0k} \\ P^{n+m}_{10} & P^{n+m}_{11} & \cdots & P^{n+m}_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P^{n+m}_{k0} & P^{n+m}_{k1} & \cdots & P^{n+m}_{kk} \end{bmatrix}$$

Equações de Chapman-Kolmogorov

- $$P^{(n)} = \begin{bmatrix} P_{00}^{n} & P_{01}^{n} & \cdots & P_{0k}^{n} \\ P_{10}^{n} & P_{11}^{n} & \cdots & P_{1k}^{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{k0}^{n} & P_{k1}^{n} & \cdots & P_{kk}^{n} \end{bmatrix} \qquad P^{(m)} = \begin{bmatrix} P_{00}^{m} & P_{01}^{m} & \cdots & P_{0k}^{m} \\ P_{10}^{m} & P_{11}^{m} & \cdots & P_{1k}^{m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{k0}^{m} & P_{k1}^{m} & \cdots & P_{kk}^{m} \end{bmatrix}$$
- matriz de transição em n+m passos

$$P^{(n+m)} = \begin{bmatrix} P_{00}^{n+m} & P_{01}^{n+m} & \cdots & P_{0k}^{n+m} \\ P_{10}^{n+m} & P_{11}^{n+m} & \cdots & P_{1k}^{n+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{k0}^{n+m} & P_{k1}^{n+m} & \cdots & P_{kk}^{n+m} \end{bmatrix}$$

- $P^{(n+m)} = P^{(n)}.P^{(m)}$

Equações de Chapman-Kolmogorov

- $P^{(n+m)} = P^{(n)}.P^{(m)}$

Equações de Chapman-Kolmogorov

- $P^{(n+m)} = P^{(n)}.P^{(m)}$
- $P^{(2)} = P^{(1)}.P^{(1)}$

Equações de Chapman-Kolmogorov

- $P^{(n+m)} = P^{(n)}.P^{(m)}$
- $P^{(2)} = P^{(1)}.P^{(1)}$
- $P^{(3)} = P^{(2)}.P^{(1)}$

Equações de Chapman-Kolmogorov

- $P^{(n+m)} = P^{(n)}.P^{(m)}$
- $P^{(2)} = P^{(1)}.P^{(1)}$
- $P^{(3)} = P^{(2)}.P^{(1)}$
- $P^{(4)} = P^{(3)}.P^{(1)}$

Equações de Chapman-Kolmogorov

- $P^{(n+m)} = P^{(n)}.P^{(m)}$
- $P^{(2)} = P^{(1)}.P^{(1)}$
- $P^{(3)} = P^{(2)}.P^{(1)}$
- $P^{(4)} = P^{(3)}.P^{(1)}$
- $\vdots$

Equações de Chapman-Kolmogorov

- $P^{(n+m)} = P^{(n)}.P^{(m)}$
- $P^{(2)} = P^{(1)}.P^{(1)}$
- $P^{(3)} = P^{(2)}.P^{(1)}$
- $P^{(4)} = P^{(3)}.P^{(1)}$
- $\vdots$
- $P^{(n)} = P^{(n-1)}.P^{(1)}$

Equações de Chapman-Kolmogorov

- $P^{(n+m)} = P^{(n)}.P^{(m)}$
- $P^{(2)} = P^{(1)}.P^{(1)}$
- $P^{(3)} = P^{(2)}.P^{(1)}$
- $P^{(4)} = P^{(3)}.P^{(1)}$
- $\vdots$
- $P^{(n)} = P^{(n-1)}.P^{(1)}$

Matriz de transição n passos

Equações de Chapman-Kolmogorov

- $P^{(n+m)} = P^{(n)}.P^{(m)}$
- $P^{(2)} = P^{(1)}.P^{(1)}$
- $P^{(3)} = P^{(2)}.P^{(1)}$
- $P^{(4)} = P^{(3)}.P^{(1)}$
- $\vdots$
- $P^{(n)} = P^{(n-1)}.P^{(1)}$

Matriz de transição n passos

A matriz de transição de n passos é igual à matriz P multiplicada por ela mesma n vezes.

Obtenção da Distribuição Incondicional em um Estágio

Distribuição Incondicional

Obtenção da Distribuição Incondicional em um Estágio

Distribuição Incondicional

É necessário especificar a distribuição de probabilidades do estado inicial.

Obtenção da Distribuição Incondicional em um Estágio

Distribuição Incondicional

É necessário especificar a distribuição de probabilidades do estado inicial.

- $$\alpha_i = P\{X_0 = i\}, i \geq 0$$

Obtenção da Distribuição Incondicional em um Estágio

Distribuição Incondicional

É necessário especificar a distribuição de probabilidades do estado inicial.

- $$\alpha_i = P\{X_0 = i\}, i \geq 0$$
- $$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1$$

Obtenção da Distribuição Incondicional em um Estágio

Distribuição Incondicional

É necessário especificar a distribuição de probabilidades do estado inicial.

- $$\alpha_i = P\{X_0 = i\}, i \geq 0$$

- $$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1$$

- $$P\{X_n = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} P\{X_0 = i\}$$

Obtenção da Distribuição Incondicional em um Estágio

Distribuição Incondicional

É necessário especificar a distribuição de probabilidades do estado inicial.

- $$\alpha_i = P\{X_0 = i\}, i \geq 0$$
- $$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1$$
- $$P\{X_n = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} P\{X_0 = i\}$$
- $$P\{X_n = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}^n \alpha_i$$