Universidade Federal do Espírito Santo
Uma Solução - Primeira Prova de Álgebra Linear - 2012/2
Vitória, 20 de dezembro de 2012

1. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a & -1 \\ 1 & 2 & b & 0 & b^2 \\ 2 & b & -1 & b & -2 \end{bmatrix}$$
a matriz ampliada de um sistema linear. Determine os valores de a e b para que o sistema tenha: (a) solução única; (b) infinitas soluções e (c) nenhuma solução.
Sol.: Como o sistema associado a A tem mais variáveis que equações, o sistema não terá solução única, independente dos valores de a e b. Escalonando A obtemos:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 2 & b+1 & -a & b^2+1 \\ 0 & 0 & \frac{2-b-b^2}{2} & b(1+\frac{a}{2})-2a & \frac{-b}{2}(b^2+1) \end{bmatrix}$$
Se $2-b-b^2 \neq 0$, isto é se $b \neq 1$ e $b \neq -2$, o sistema terá infinitas soluções, independente de a.
Se $b = 1$ então escalonando A obtemos
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -a & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\frac{a}{2})-2a & -1 \end{bmatrix}$$
Neste caso, o sistema terá infinitas soluções se $(1+\frac{a}{2})-2a \neq 0$, ou seja, se $a \neq \frac{2}{3}$ e não terá soluções se $a = \frac{2}{3}$.
Se $b = -2$ então escalonando A obtemos
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -a & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2(1+\frac{a}{2})-2a & 5 \end{bmatrix}$$
Neste caso, o sistema terá infinitas soluções se $-2(1+\frac{a}{2})-2a \neq 0$, ou seja, se $a \neq -\frac{2}{3}$ e não terá soluções se $a = -\frac{2}{3}$.

2. Determine a inversa de

   (a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

   Sol.: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

   (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sol.: $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Encontre uma matriz escalonada T e matrizes elementares $E_1, E_2, \cdots, E_k$ tais que

   $$E_1\,E_2 \cdots E_k\,A = T\ .$$

   Sol.: Sejam $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ *Então* $E_6E_5E_4E_3E_2E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = T$.

   (b) Encontre uma matriz P tal que $A = PT$, sendo T a matriz obtida no item (a).

   Sol.: Seja $P = (E_6E_5E_4E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}E_6^{-1}$, $A = PT$.

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine valores de λ tais que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, onde $\mathbf{x}$ é uma matriz coluna, 2×1, não-nula.
   Sol.: $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ *é equivalente a* $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *cuja matriz ampliada é* $\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \end{bmatrix}$. *Escalonando obtemos:* $\begin{bmatrix} 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-(3-\lambda)(1-\lambda) & 0 \end{bmatrix}$. *Logo, se* $-1-(3-\lambda)(1-\lambda) \neq 0$, *ou seja, se* $\lambda \neq 2$ *o sistema homogêneo* $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *terá apenas a solução trivial. Se* $\lambda = 2$ *o sitema terá infinitas soluções.*

   (b) Para cada valor de λ obtido no item (a), encontre o conjunto solução do sistema $(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
   Sol.: Para $\lambda = 2$ *a matriz ampliada escalonada fica* $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Logo o conjunto solução do sistema associado é* $\{(t,t) \in \mathbb{R}^2; t \in \mathbb{R}\}$.

5. Verdadeiro ou falso? Justifique.

   (a) Se A é um matriz quadrada tal que $A^4 = 0$, então $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$.
   Sol.: VERDADEIRO, pois $(I-A)(I+A+A^2+A^3) = I+A+A^2+A^3-A-A^2-A^3-A^4 = I$.

   (b) Se E é elementar, então E^T também é elementar.
   Sol.: VERDADEIRO, pois se E *é obtida da identidade multiplicando uma linha por constante não nula, ou trocando linhas então* E *é simétrica, isto é* $E^T = E$. *Se* E *é obtida da identidade trocando a linha* i *por ela mais* c *vezes a linha* j, *então* E^T *pode ser obtida da identidade trocando a linha* j *por ela mais* c *vezes a linha* i *e portanto* E^T *é elementar.*