Aula – Computação Gráfica

Transformações 3D

1

1

Princípio Básico

- Segue a mesma sistemática das transformações 2D
  - Porém agora com um eixo a mais
- Considerando coordenadas homogêneas
  - Matrizes 3x3 (2D) se tornam matrizes 4x4 (3D)
  - Vértices 2D $[x\ y\ 1]^T$ se tornam vértices 3D $[x\ y\ z\ 1]^T$

2

2

Matrizes Básicas

- Similar às matrizes 2D
  - Exceto a rotação

Transformação	Matriz	Comentários
Escala	$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Como a versão 2D com o termo s_z adicionado.
Rotação	(Ver próximo slide)	Em 2D só existe um eixo de rotação; agora temos infinitos! Todos deve ser considerados...
Translação	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Como a versão 2D com o termo dz adicionado.

3

3

Rotação

- Em 2D, a rotação sempre ocorre no plano xy
  - Ou seja, se analisarmos o 2D em 3D, em torno do eixo z
- Em 3D, pode-se imaginar uma rotação em torno de qualquer eixo, ou vetor nesse espaço
  - Rotação de θ em torno do vetor $\boldsymbol{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T$
- A formula de Rodrigues descreve essa rotação

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) + u_x^2(1-\cos(\theta)) & u_x u_y (1-\cos(\theta)) - u_z \sin(\theta) & u_x u_z (1-\cos(\theta)) + u_y \sin(\theta) \\ u_x u_y (1-\cos(\theta)) - u_z \sin(\theta) & \cos(\theta) + u_y^2(1-\cos(\theta)) & u_y u_z (1-\cos(\theta)) + u_x \sin(\theta) \\ u_x u_z (1-\cos(\theta)) - u_y \sin(\theta) & u_y u_z (1-\cos(\theta)) - u_x \sin(\theta) & \cos(\theta) + u_z^2(1-\cos(\theta)) \end{bmatrix}$$

- Mas ela não é muito amigável

4

4

Rotação

- Se pensarmos na rotação como uma composição de rotações
  - Podemos defini-la a partir de matrizes mais simples
  - Elas rotacionam em torno dos eixos básicos
    - *Eixo-x* no plano *yz* por ψ
    - *Eixo-y* no plano *xz* por θ
    - *Eixo-z* no plano *xy* por ϕ
- Também conhecidos como ângulos de euler
  - $\boldsymbol{R_x}$- rotação em torno de x
  - $\boldsymbol{R_y}$- rotação em torno de y
  - $\boldsymbol{R_z}$ - rotação em torno de z

$R_Z(\phi)$	$R_X(\psi)$	$R_Y(\theta)$
$\begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ 0 & \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5

Rotação

- Ainda sim, seria difícil definir 3 ângulos capazes de rotacionar
  - Em torno de um eixo qualquer $\boldsymbol{u}$ por um ângulo ψ
- Solução? Transforme o problema em um mais simples

Passo 1: Ache um θ para rotacionar em torno do eixo y colocando u no plano xy
Passo 2: Ache o ϕ para rotacionar em torno do eixo z alinhando u com o eixo x
Passo 3: Rotacione de ψ em torno do eixo x (agora coincidente com u)
Passo 4: Desfaça as transformações anteriores (inversa)

Matriz de rotação final: $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R_Y}^{-1}(\theta)\boldsymbol{R_Z}^{-1}(\phi)\boldsymbol{R_X}(\psi)\boldsymbol{R_Z}(\phi)\boldsymbol{R_Y}(\theta)$

6

6

Transformações Inversas

- Similares ao caso 2D

Transformação	Matriz Inversa
Escala	$\begin{bmatrix} 1/S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Rotação	$\begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Translação	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & 0 & -dy \\ 0 & 0 & 1 & -dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7

Exemplo em 3D

- Imagine um objeto 3D (uma esfera) centrada em (3, 3, 3)
  - Transforme o objeto em torno do seu centro
  - Rotacione o objeto de 60° em torno de z, 45° em y, e 120° em x
  - Escale o objeto de 2, 5 e 6 em x, y e z
  - Translade o objeto de (2, 3, 4) no SC do mundo
  - Transformações: $\boldsymbol{T_0^{-1} T S_{xyz} R_x R_y R_z T_0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(120) & \sin(120) & 0 \\ 0 & -\sin(120) & \cos(120) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots$$

$$\cdots \begin{bmatrix} \cos(45) & 0 & \sin(45) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(45) & 0 & \cos(45) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(60) & \sin(60) & 0 & 0 \\ -\sin(60) & \cos(60) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8

8

Transformações e o Grafo de Cena

- Objetos podem ser complexos
- Cenas 3D são geralmente armazenadas grafos acíclicos dirigidos
  - Chamado Grafos de Cena (Scene Graphs)
- Grafos de cena típicos armazenam
  - Objetos (cubos, esferas, cones, ...)
  - Atributos (cor, textura, etc.)
  - Transformações

9

9

Transformações e o Grafo de Cena

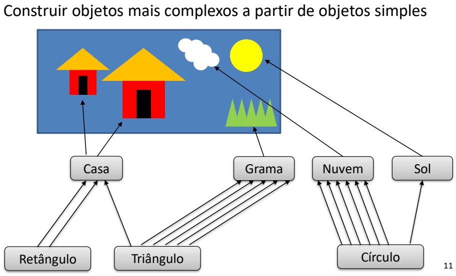
- Uma transformação afeta todas as sub-árvores
- Somente os nós folhas são objetos
- Todos os nós que não são transformações
  - São nós de grupos de objetos
- Sequencia de passos
  - Várias transformações são aplicadas a cada um dos nós folhas
  - Transformações são aplicadas a grupos de objetos
  - Assim continua até a raiz
  - Juntas, essa hierarquia forma a cena

10

10

Transformações e o Grafo de Cena

- Essa abordagem permite
  - Reusar partes de objetos
  - Construir objetos mais complexos a partir de objetos simples



11

11

Derivação de Transformações Genéricas

- Usar conceito visto na aula de transformações 2D
  - Vetores coluna da matriz de transformação linear *L* são
    - Os vetores base transformados
  - A translação *T* é o delta entre as origens
  - A transformação final é uma composição

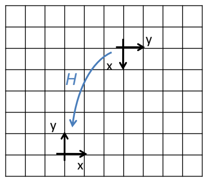
12

12

Derivação de Transformações Genéricas

- Usar conceito visto na aula de transformações 2D
  - Vetores coluna da matriz de transformação linear *L* são
    - Os vetores base transformados
  - A translação *T* é o delta entre as origens
  - A transformação final é uma composição

$$H = \begin{bmatrix} L & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



13

13

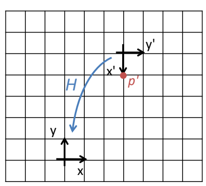
Derivação de Transformações Genéricas

- Usar conceito visto na aula de transformações 2D
  - Vetores coluna da matriz de transformação linear *L* são
    - Os vetores base transformados
  - A translação *T* é o delta entre as origens
  - A transformação final é uma composição

$$p = Hp' = H\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & o_x \\ x'_y & y'_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p = Hp' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



14

14

Derivação de Transformações Genéricas

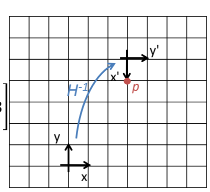
- Para inverter *H* basta fazer o análogo na direção oposta
- Opcionalmente
  - Pode-se decompor *H* em transformações básicas e invertê-las

    $H = TR \gg H^{-1}$=$R^{-1}T^{-1}$

$$p' = H^{-1}p = H^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} x_{x'} & y_{x'} & o_{x'} \\ x_{y'} & y_{y'} & o_{y'} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p' = H^{-1}p = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

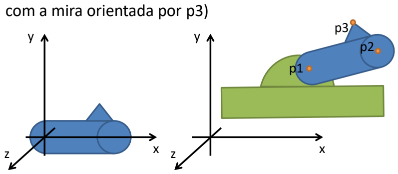


15

15

Derivação de Transformações Genéricas

- Exemplo com objetos mais complexos
  - Dado uma função *d(H)* que, com *H = I*, desenha um canhão
    - Alinhado com o eixo x
    - Com a base na origem
    - Com a mira na direção y
  - Ache a matriz *H* que faça desenhar o canhão do tanque em relação a 3 pontos (com a base em p1, apontando para p2 e com a mira orientada por p3)



16

16

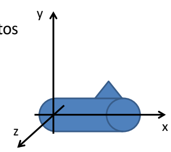
Derivação de Transformações Genéricas

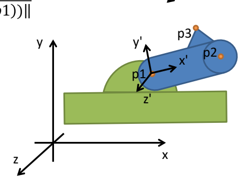
- Exemplo com objetos mais complexos
  - Ache o SC do canhão em relação aos pontos
  - Ache os vetores base transformados
  - Monte a matriz *H*

$$x' = (p2 - p1)/\|p2 - p1\|$$

$$z' = \frac{(x' <*> (p3 - p1))}{\|(x' <*> (p3 - p1))\|}$$

$$y' = z' <*> x'$$





<∗> - Produto Vetorial

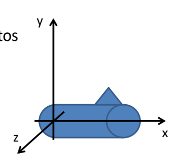
17

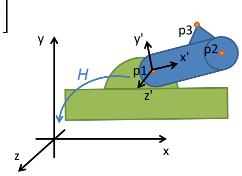
17

Derivação de Transformações Genéricas

- Exemplo com objetos mais complexos
  - Ache o SC do canhão em relação aos pontos
  - Ache os vetores base transformados
  - Monte a matriz *H*

$$H = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x & p1_x \\ x'_y & y'_y & z'_y & p1_y \\ x'_z & y'_z & z'_z & p1_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





18

18

Perguntas ?????

19

19