CAPÍTULO IV

SISTEMAS DISCRETOS NO TEMPO

TÓPICOS
- Controle digital - Transformada z - Transformada inversa z - Equações a diferenças - Sistemas amostrados por impulsos - Funções de transferência discretas - Elementos em cascata

4.1 CONTROLE DE SISTEMAS DISCRETOS NO TEMPO

Em grande parte, os sistemas de controle hoje na indústria são sistemas digitais, devido principalmente aos avanços de *hardwares* e *softwares*, bem como as facilidades que tais sistemas proporcionam, tais como: flexibilidade, menor interferências de ruídos, integração corporativa, etc..

A figura 4.1 mostra o diagrama de blocos de um sistema de controle digital com os seus respectivos sinais. O sistema é caracterizado por sinais codificados digitalmente em várias partes do sistema. Entretanto, a planta do sistema é geralmente um elemento contínuo (como um forno elétrico, motor cc, processo químico, etc) alimentado por sinais analógicos. Consequentemente, a inclusão de um dispositivo digital de controle requer frequentemente interfaces de conversão de sinais digital-analógico (D/A) e analógico-digital (A/D).

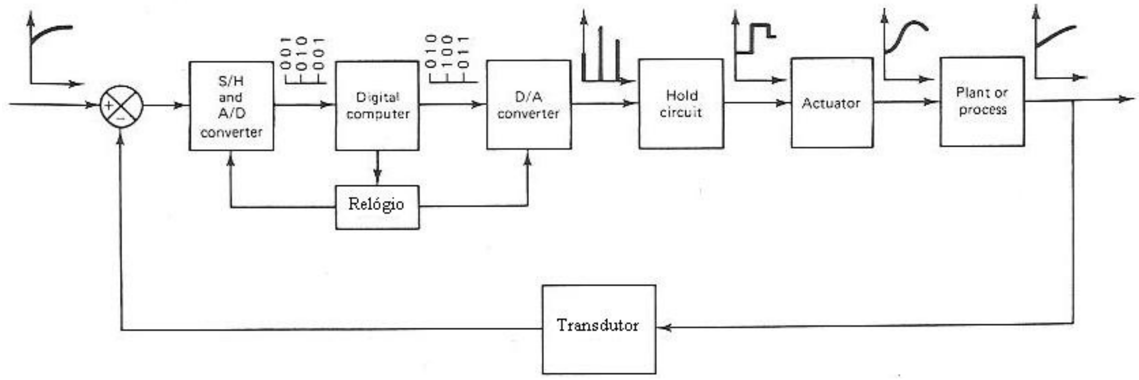

Figura 4.1 Sistema e sinais de controle digital

4.2 Transformada z

Assim como sistemas contínuos lineares são descritos por equações diferenciais, sistemas de controle digital linear são por equações a diferenças. Vimos que a transformada de Laplace é um método para resolver equações diferenciais lineares invariantes no tempo. Similarmente, a transformada z nos possibilita operacionalizar as análises necessárias de sistemas em controle discreto, além de resolver equações a diferenças lineares invariantes no tempo.

4.2.1 Definição de Transformada z

Considere a seqüência y(k), k = 0, 1, 2, ..., ∞ onde y(k) representa uma seqüência de amostras. A transformada z de y(k) é definida como:

$$Y(z) = \mathrm{Z}[y(kT)] = \mathrm{Z}[y(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} \qquad 4.1$$

onde z é uma variável complexa com partes real e imaginária. Uma importante propriedade da transformada z é a possibilidade de converter uma seqüência de números no domínio real em uma expressão no domínio complexo z. Os seguintes exemplos ilustram a transformada z, Z, de duas funções simples.

Exemplo 4.1

Considere a seqüência

$$y(k) = e^{-\alpha k} \qquad k = 0,1,2,... \tag{4.2}$$

onde α é uma constante real. Aplicando a equação 4.1, a transformada z de y(k) é escrita por:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k} z^{-k} = 1 + e^{-\alpha} z^{-1} + e^{-2\alpha} z^{-2} + ... \tag{4.3}$$

que converge para $\left| e^{-\alpha} z^{-1} \right| < 1$.

Assim temos:

$$Y(z) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-\alpha}} \tag{4.4}$$

Para ocorrer a convergência, a razão deve ser menor que 1; logo: $\left| e^{-\alpha} z^{-1} \right| < 1$.

Exemplo 4.2

No exemplo anterior, se $\alpha = 0$, temos:

$$y(k) = 1 \qquad k = 0,1,2,... \tag{4.5}$$

Que representa uma seqüência de 1. Então, a transformada Z de y(k) é

$$Y(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + ... = \frac{z}{z-1} \tag{4.6}$$

Que converge para $|z| > 1$.

4.2.2 Relação Entre a Transformada de Laplace e a Transformada Z

É mais prático representar a seqüência y(kT), k = 0, 1, 2, ... como um trem de impulsos separados por um intervalo de tempo T. O impulso no instante k, $\delta(t-KT)$, carrega o valor de y(kT). Essa situação ocorre frequentemente em sistemas de controle digitais e amostrados em que o sistema é digitalizado e amostrado a cada T segundos para formar uma seqüência no tempo que representa o sinal nos instantes amostrados. Assim, podemos relacionar a seqüência y(kT) com um sinal que pode ser expresso como:

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\delta(t-kT) \qquad 4.7$$

Usando a transformada de Laplace em ambos os lados da 4.7, temos:

$$Y^*(s) = L[(y^*(t))] = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)e^{-kTs} \qquad 4.8$$

Comparando as equações 4.8 e 4.1, vemos que a transformada z se relaciona com a transformada de Laplace através de:

$$z = e^{Ts} \qquad 4.9$$

Na verdade, a transformada z definida na equação 4.1 é um caso especial para T = 1. A definição da transformada z na equação 4.9 nos permite tratar sistemas amostrados e executar simulações digitais de sistemas contínuos. Assim, podemos definir a transformada z como

$$Y(z) = \mathrm{Z}[y(kT)] = \mathrm{Z}[y^*(t)] = \mathrm{Z}[Y^*(s)] \qquad 4.10$$

Ou

$$Y(z) = \mathrm{Z}[y(t)] = \mathrm{Z}[Y(s)] \qquad 4.11$$

Compreendendo que a função y(t) é primeiramente discretizada para obter y*(t) para depois obtermos a transformada z.

Exemplo 4.3

Considere a função no tempo

$$y(t) = e^{-\alpha t} u_s(t) \qquad 4.12$$

A transformada z de y(t) é obtida seguindo os seguintes passos:

1. Represente os valores de y(t) nos instantes de tempo t = kT, k = 0, 1, 2, ..., ∞ para formar a função y*(t):

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha kt} \delta(t - kT) \qquad 4.13$$

2. Faça a transformada de Laplace em ambos os lados da equação 4.13:

$$Y^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha kt} e^{-kTs} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(s+\alpha)kt} \qquad 4.14$$

3. Expresse Y*(s) na forma fechada e aplique a equação 4.9:

$$Y(z) = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}} \qquad 4.15$$

Em geral, transformadas z de funções mais complexas podem ser obtidas com a ajuda de alguns teoremas apresentados a seguir. Para engenharia, algumas tabelas de transformada z podem ser usadas para transformar y(k) em Y(z).

4.2.3 Teoremas Importantes da Transformada z

Assim como na transformada de Laplace, esses teoremas são muito úteis na análise da transformada z. Para uniformidade, a seqüência é expressa como y(kT).

- **Teorema 1** Adição e Subtração.

  Se $y_1(kT)$ e $y_2(kT)$ têm suas transformadas Z, $Y_1(z)$ e $Y_2(z)$, respectivamente, então

$$Z\left[y_1(kT) \pm y_2(kT)\right] = Y_1(z) \pm Y_2(z) \qquad 4.16$$

- **Teorema 2** Multiplicação por uma Constante.

$$Z\left[\alpha y(kT)\right] = \alpha Z\left[y(kT)\right] = \alpha Y(z) \qquad 4.17$$

onde α é uma constante

- **Teorema 3** Translação Real. (Atraso no Tempo e Avanço no Tempo)

$$Z\left[y(kT) - nT\right] = z^{-n} Y(z) \qquad 4.18$$

e

$$Z\left[y(kT) + nT\right] = z^{n}\left[Y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y(kT) z^{-k}\right] \qquad 4.19$$

onde n é um número inteiro positivo.

A equação 4.18 representa a transformada z de uma seqüência no tempo que é deslocada para a direita de nT, e a equação 4.19 representa que uma seqüência no tempo é deslocada para a esquerda de nT. O motivo pelo qual o lado direito da equação 4.19 não é somente $z^n Y(z)$ é porque a transformada z é unilateral definida somente para $k \geq 0$.

- **Teorema 4** Translação Complexa.

$$Z\left[e^{\mp \alpha kT} y(kT)\right] = Y(ze^{\pm \alpha T}) \qquad 4.20$$

onde α é uma constante. Y(z) é a transformada z de y(kT).

- **Teorema 5** Teorema do Valor Inicial.

$$\lim_{k \to 0} y(kT) = \lim_{z \to \infty} Y(z) \qquad 4.21$$

Se o limite existe.

- **Teorema 6** Teorema do Valor Final.

$$\lim_{k \to \infty} y(kT) = \lim_{z \to 1} \left(1 - z^{-1}\right) Y(z) \qquad 4.22$$

Se a função $\left(1 - z^{-1}\right) Y(z)$ tem pólos dentro do círculo unitário $|z| = 1$ no plano z.

- **Teorema 7** Convolução Real.

$$Y_1(z)Y_2(z) = Z\left[\sum_{k=0}^{N} y_1(kT)y_2(NT-kT)\right] = Z\left[\sum_{k=0}^{N} y_2(kT)y_1(NT-kT)\right] \quad 4.23$$
$$= Z[y_1(kT) * y_2(kT)]$$

onde "*" denota a convolução real no domínio do tempo discreto.

Assim, vemos que como na transformada de Laplace, a transformada z do produto de duas funções reais $y_1(kT)$ e $y_2(kT)$ não é igual ao produto das transformadas Z, $Y_1(z)$ e $Y_2(z)$. Uma exceção a esse caso é se uma das duas funções é o atraso e^{-NTs}, onde N é um inteiro positivo, então

$$Z\left[e^{-nTs}Y(s)\right] = Z\left[e^{-nTs}\right]Z\left[Y(s)\right] = z^{-N}Y(z) \quad 4.24$$

Exemplo 4.4

Para achar a transformada z de $y(t) = te^{-\alpha t}$, considere f(t) = t, $t \geq 0$; então:

$$F(z) = Z[tu_s(t)] = Z(kT) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad 4.25$$

Usando o teorema da translação complexa na equação 4.20, obtemos:

$$Y(z) = Z\left[te^{-\alpha t}u_s(t)\right] = F\left(ze^{\alpha T}\right) = \frac{Tze^{\alpha T}}{\left(ze^{\alpha T}-1\right)^2} = \frac{Tze^{-\alpha T}}{\left(z-e^{-\alpha T}\right)^2} \quad 4.26$$

Exemplo 4.5

Dada a função

$$Y(z) = \frac{0.792z^2}{(z-1)(z^2-0.146z+0.208)} \quad 4.27$$

Determine o valor de y(kT) com k tendendo ao infinito.

Como a função $\left(1-z^{-1}\right)Y(z)$ tem pólos dentro do círculo unitário $|z|=1$ no plano z, o teorema do valor final na equação 4.22 pode ser aplicado. Assim,

$$\lim_{k\to\infty} y(kt) = \lim_{z\to 1}\frac{0.792z}{z^2-0.146z+0.208} = ??? \qquad 4.28$$

4.2.4 Transformada z Inversa

Assim como na transformada de Laplace, um dos maiores objetivos da transformada z é que as manipulações algébricas possam ser feitas primeiro no domínio z, e então a resposta no tempo pode ser obtida pela transformada z inversa. Em geral, a transformada z inversa de uma função Y(z) carrega informação somente de y(kT), não de y(t). Em outras palavras, a transformada z carrega informação somente dos instantes amostrados. A transformada z inversa pode ser obtida através de um dos três métodos abaixo:

- Expansão em Frações Parciais;
- Método computacional
- Método da Série de Potência (divisão de polinômios);

a) Método da Expansão em Frações Parciais

A função Y(z) é expandida por frações parciais em uma soma de termos simples, e a tabela de transformadas z é usada para determinar o correspondente y(kT). Existe uma pequena diferença entre os processos de transformada z e transformada de Laplace. Com base na tabela de transformada z, percebemos que praticamente todas as funções em z possuem um termo z no numerador. Consequentemente, devemos se possível expandir Y(z) na forma de:

$$Y(z) = \frac{K_1 z}{z - e^{-\alpha T}} + \frac{K_2 z}{z - e^{-\beta T}} + \ldots \qquad 4.29$$

Para isso, primeiramente faça a expansão de Y(z)/z em frações e depois multiplique por z para obter a expressão final. Os seguintes exemplos ilustram esse procedimento.

Exemplo 4.6

Dada a função de transferência

$$Y(z) = \frac{\left(1 - e^{-\alpha T}\right) z}{(z-1)\left(z - e^{-\alpha T}\right)} \qquad 4.30$$

Ache a transformada z inversa. Expandindo Y(z)/z em frações parciais, temos

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z - e^{-\alpha T}} \qquad 4.31$$

A expressão expandida final para Y(z) é

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-\alpha T}} \qquad 4.32$$

A partir da tabela de transformada z, a correspondente transformada z inversa de Y(z) é

$$y(kT) = 1 - e^{-\alpha T} \qquad k = 0,1,2,\ldots\ \infty \qquad 4.33$$

Se Y(z) não contém nenhum fator de z no numerador, significa que a seqüência no tempo possui um atraso, e a expansão em frações parciais de Y(z) deve ser feita primeiramente sem dividir a função por z. O seguinte exemplo ilustra essa situação.

Exemplo 4.7

Considere a função

$$Y(z) = \frac{\left(1 - e^{-\alpha T}\right)}{(z-1)\left(z - e^{-\alpha T}\right)} \qquad 4.34$$

Que não contém nenhuma potência de z no numerador. Nesse caso, a expansão em frações parciais de Y(z) é obtida diretamente.

$$Y(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z - e^{-\alpha T}} \qquad 4.35$$

Embora a tabela de transformada z não contenha termos exatos da equação 4.35, vemos que a transformada z inversa do primeiro termo no lado direito pode escrito como:

$$Z^{-1}\left[\frac{1}{z-1}\right] = Z^{-1}\left[z^{-1}\frac{z}{z-1}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} z^{-1} = u_k\left[(k-1)T\right] \qquad k = 1,2,\ldots \qquad 4.36$$

Similarmente, o segundo termo no lado direito da equação 4.35 pode ser identificado como um atraso no tempo de T segundos. Assim, a transformada z inversa é escrita

$$y(kT) = \left(1 - e^{-\alpha(k-1)T}\right)u\left[(k-1)T\right] \qquad k = 1,2,\ldots \qquad 4.37$$

b) Aplicação da Transformada z na Solução Equações a Diferenças Lineares

A transformada z pode ser usada para resolver equações a diferenças lineares. Como um exemplo simples, consideremos a equação de primeira ordem:

$$y(k+1)+y(k)=0 \tag{4.41}$$

Para resolver essa equação, fazemos a transformada z em ambos os lados da equação. Significa que multiplicamos ambos os lados da equação por z^{-k} e fazemos a soma de k = 0 ate k = ∞.

$$\sum_{k=0}^{\infty} y(k+1)z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = 0 \tag{4.42}$$

Usando a definição de Y(z) e o teorema da translação real, equação 4.19, para o avanço no tempo, temos:

$$z\left[Y(z)-y(0)\right]+Y(z)=0 \tag{4.43}$$

Resolvendo para Y(z), temos:

$$Y(z)=\frac{z}{z+1}y(0) \tag{4.44}$$

A transformada z inversa da última equação pode ser obtida expandindo Y(z) em uma série de potência de z^{-1} pela divisão de polinômios. Temos

$$Y(z)=\left(1-z^{-1}+z^{-2}-z^{-3}+\ldots\right)x(0) \tag{4.45}$$

Assim, y(k) é escrita

$$y(k) = (-1)^K y(0) \qquad k = 0,1,2,... \tag{4.46}$$

Exemplo 4.9

Considere a equação a diferenças de segunda ordem

$$y(k+2) + 0.5y(k+1) + 0.2y(k) = u(k) \tag{4.47}$$

onde

$$u(k) = 1 \qquad k = 0,1,2,... \tag{4.48}$$

As condições iniciais de y(k) são: y(0) = 0 e y(1) = 0.
Fazendo a transformada z em ambos os lados da equação 4.47, temos

$$[z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1)] + 0.5[zY(z) - zy(0)] + 0.2Y(z) = U(z) \tag{4.49}$$

A transformada z de u(k) é U(z) = z/(z-1). Substituindo as condições iniciais de y(k) e a expressão de U(z) na equação 4.49 e resolvendo para Y(z), temos:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2 + 0.5z + 0.2)} \tag{4.50}$$

Note que neste caso existem raízes complexas. Calcular a y(k). Solução na sala de aula.

4.3 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE SISTEMAS DISCRETOS

Sistemas de controle discreto têm seus sinais ou na forma de trens de pulso ou codificado digitalmente, e o processo controlado frequentemente contém componentes analógicos. Por exemplo, um motor cc, que é um dispositivo analógico, pode ser controlado tanto por um controlador com saída analógica quanto por um controlador com saída digital. No último caso, uma interface como um conversor digital-analógico (D/A) é necessário para acoplar o componente digital ao dispositivo analógico. A entrada e a saída do sistema discreto na figura 4.1 podem ser representadas por uma seqüência de números com os números separados por um período de amostragem T. Para operação linear, o conversor D/A pode ser representado por um dispositivo amostrador-segurador (S/H), que consiste de um amostrador e um dispositivo segurador. O S/H mais frequentemente usado para análise de sistemas discretos consiste de um amostrador ideal e um dispositivo segurador de ordem zero (ZOH ou SOZ). Assim, o sistema mostrado na figura 4.1 pode ser representado pelo diagrama de blocos da figura 4.2.

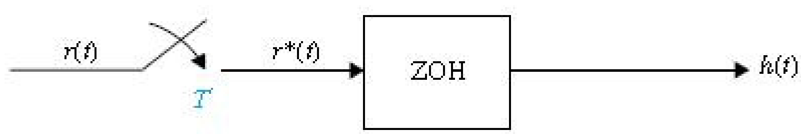

Figura 4.2 Amostrador e segurador de sinal

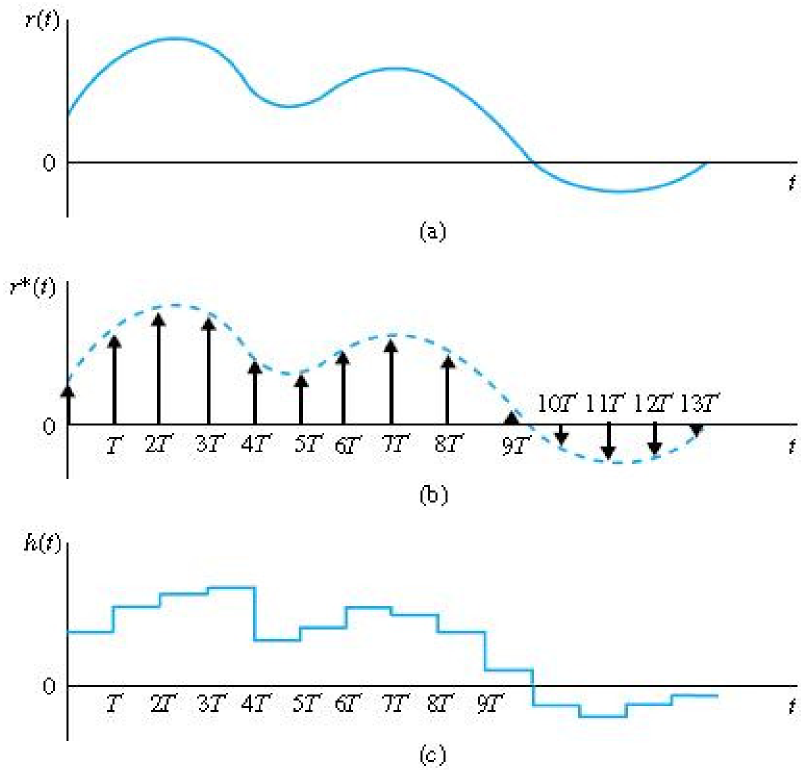

Figura 4.3 Sinais no processo do amostrador em série com o segurador

Figura 4.3 mostra a operação típica de um amostrador ideal e um ZOH. O dado contínuo r(t) é amostrado com um período de amostragem T por um amostrador ideal. A saída do amostrador ideal r*(t) é um trem de impulsos com as magnitudes de r(t). Note que o amostrador ideal não é uma entidade física. Ele é usado simplesmente para representar o sinal matemático discreto no tempo. Na figura 4.3, as setas nos instantes amostrados representam impulsos. Como, por definição, um impulso tem largura zero e altura infinita, os comprimentos das setas representam simplesmente as áreas sob os impulsos e são as magnitudes do sinal r(t) nos instantes amostrados. O ZOH simplesmente segura a magnitude do sinal do impulso em um dado instante, kT, até o próximo instante t = (k + 1)T, e assim por diante. A saída do ZOH é uma escada aproximada da entrada do amostrador ideal, r(t). Quando o período de amostragem T tende a zero, a saída do ZOH, h(t) tende a r(t), ou seja,

$$\lim_{T \to 0} h(t) = r(t) \tag{4.51}$$

Entretanto, como a saída do amostrador, r*(t), é um trem de impulsos, seu limite de T tendendo a zero não tem significado físico. Baseado nas discussões anteriores, um típico sistema de controle de malha aberta é modelado como mostrado na figura 4.4.

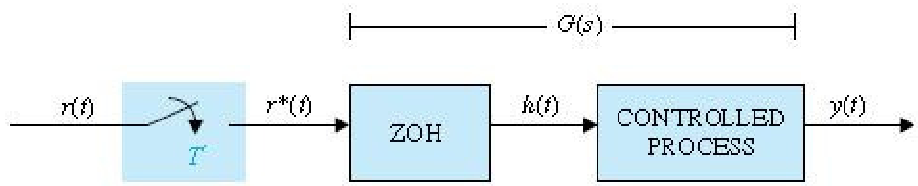

Figura 4.4 ZOH em série com a planta

4.3.1 Função de Transferência de Impulsos

Agora podemos derivar a função de transferência do sistema discreto mostrado na figura 4.4. A transformada de Laplace do sistema de saída y(t) é

$$Y(s) = G(s)R^*(s) \tag{4.52}$$

Embora a saída y(t) seja obtida a partir de Y(s) fazendo a transformada inversa de Laplace em ambos os lados da equação 4.52, esse passo é difícil de executar porque G(s) e R*(s) representam diferentes tipos de sinais. Para superar esse problema, aplicamos uma amostragem fictícia na saída do sistema, como mostrado na figura 4.5:

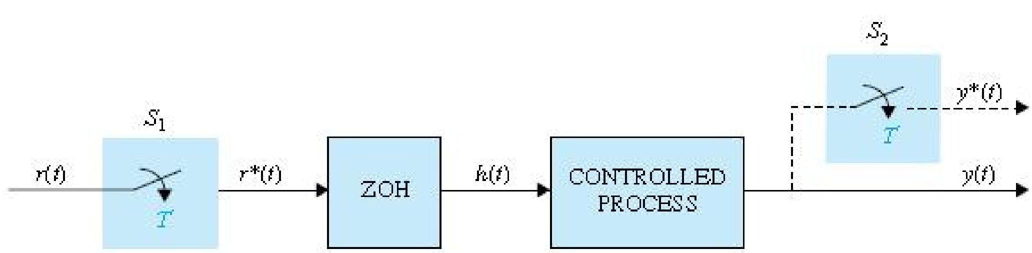

Figura 4.5 ZOH em série com a planta com amostrador fictício na saída

O amostrador fictício S_2 tem o mesmo período de amostragem T e é sincronizado com o amostrador original S_1. A transformada de Laplace da forma amostrada y*(t) é dada por:

$$Y^*(s) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} g(kT)e^{-skT}\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty} r(kT)e^{-skT}\right] = G^*(s)R^*(s) \qquad 4.53$$

onde g(kT) é a resposta ao impulso nos instantes kT do sistema representado por G(s); e G*(s) é função de transferência de impulsos.

4.3.2 Função de Transferência z

Agora que todas as funções na equação 4.53 estão na forma amostrada, podemos fazer a transformada z em ambos os lados da equação substituindo $z = e^{Ts}$. Temos:

$$Y(z) = G(z)R(z) \qquad 4.54$$

onde G(z) é definida como a função de transferência z de G(s), e é dada por

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT)z^{-k} \qquad 4.55$$

4.3.3 Função de Transferência de Sistemas Discretos com Elementos em Cascata

A representação da função de transferência de sistemas discretos com elementos conectados em cascata é um pouco mais complicada do que de sistemas contínuos, pois deve-se considerar a presença de amostrador entre os elementos. Figura 4.6 mostra dois sistemas discretos diferentes que contém dois elementos conectados em cascata:

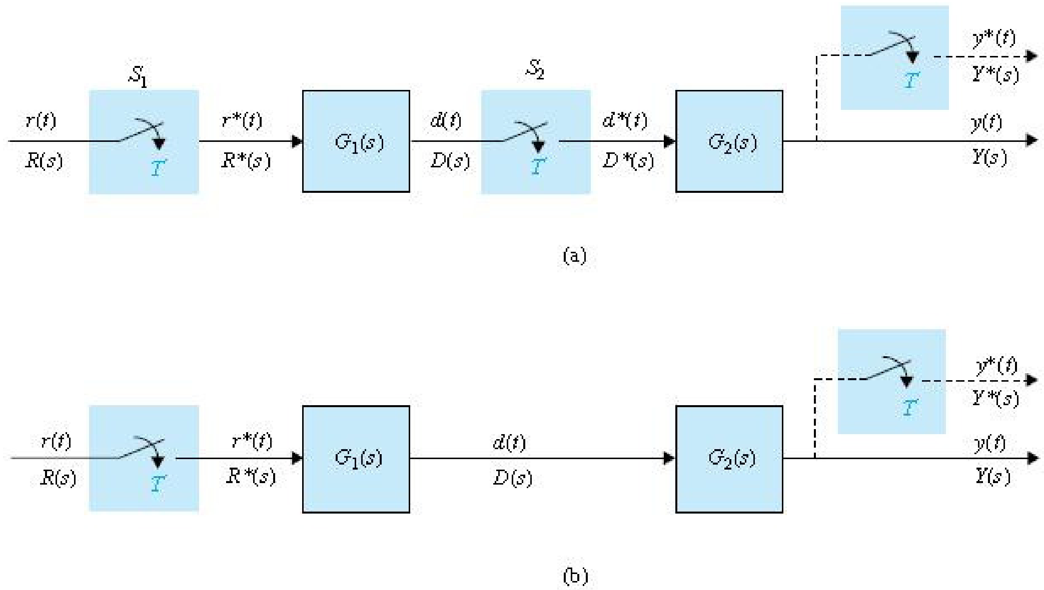

Figura 4.6 FT de Elementos em cascata

No sistema da figura 4.6(a), os dois elementos estão separados pelo amostrador S_2, que é sincronizado e tem o mesmo período de S_1. Os dois elementos da figura 4.6(b) estão conectados diretamente. É importante distinguir esses dois casos na hora de encontrar a função de transferência de impulsos e a função de transferência z. Para o sistema na figura 6(a), a saída de $G_1(s)$ é escrita:

$$D(s) = G_1(s)R^*(s) \tag{4.56}$$

E a saída do sistema é

$$Y(s) = G_2(s)D^*(s) \tag{4.57}$$

Fazendo a transformada de impulsos em ambos os lados da equação 4.56, chegamos que

$$D^*(s) = G_1^*(s)R^*(s) \tag{4.58}$$

Agora substituindo equação 4.58 na equação 4.57 e fazendo a transformada de impulsos, temos

$$Y^*(s) = G_1^*(s)G_2^*(s)R^*(s) \tag{4.58}$$

A correspondente transformada z da equação 4.58 é

$$Y(z) = G_1(z)G_2(z)R(z) \tag{4.59}$$

Concluímos que a transformada z de dois elementos separados por um amostrador é igual ao produto das transformadas z dos dois elementos.

Consideremos o 2º caso: a transformada de Laplace da saída do sistema na figura 4.6(b) é

$$Y(s) = G_1(s)G_2(s)R^*(s) \tag{4.60}$$

Fazendo a transformada de impulsos em ambos os lados da equação anterior, temos

$$Y(s) = [G_1(s)G_2(s)]^* R^*(s) \tag{4.61}$$

Note que $G_1(s)$ e $G_2(s)$ não estão separados por um amostrador, eles precisam ser tratados como um sistema conjunto quando fazemos a transformada de impulsos.

Fazendo a transformada z em ambos os lados da equação 4.61 temos

$$Y(z) = \mathrm{Z}\{[G_1(s)G_2(s)]^*\}R(z) \tag{4.62}$$

Sendo

$$\mathrm{Z}\{[G_1(s)G_2(s)]^*\} = G_1G_2(z) \quad 4.63$$

Então, equação 4.62 é escrita

$$Y(z) = G_1G_2(z)R(z) \quad 4.64$$

4.3.4 Função de Transferência do Segurador de Ordem Zero

Baseado na descrição do ZOH dado anteriormente, sua resposta ao impulso é mostrada na figura 4.7. A função de transferência do ZOH é escrita:

$$G_h(s) = L[g_h(t)] = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \quad 4.65$$

Assim, se o ZOH é conectado em cascata com um processo linear de função de transferência $G_p(s)$, como mostrado na figura 4.5, a transformada z da combinação é

$$G(z) = \mathrm{Z}\{[G_h(s)G_p(s)]\} = Z\left\{\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}G_p(s)\right)\right\} \quad 4.66$$

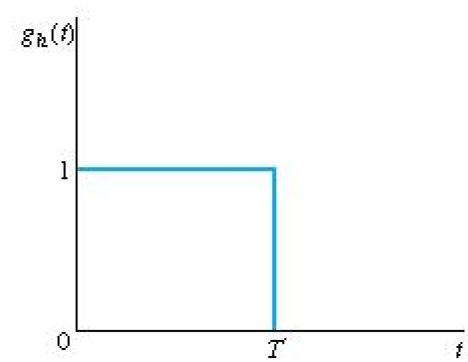

Figura 4.7 Resposta ao impuso do ZOH

Usando a propriedade do atraso no tempo da transformada z, em que $z^{-1} = e^{-sT}$, a equação 4.66 pode ser simplificada para:

$$G(z) = Z\left\{\left(\frac{G_p(s)}{s}\right)\right\}.\left(1 - z^{-1}\right) \qquad 4.67$$

Exemplo 4.10 Considere que para o sistema mostrado na figura 4.5,

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+0.5)} \qquad 4.68$$

O período de amostragem é 1 segundo. A função de transferência z do sistema entre a entrada e a saída é determinada pela equação 81.

$$G(z) = Z\left\{\left(\frac{1}{s^2(s+0.5)}\right)\right\}.\left(1 - z^{-1}\right) = Z\left\{\left(\frac{2}{s^2} - \frac{4}{s} + \frac{4}{s+0.5}\right)\right\}.\left(1 - z^{-1}\right)$$
$$= \frac{0.426z + 0.361}{z^2 - 1.606z + 0.606} \qquad 4.83$$

4.3.5 Funções de Transferência de Sistemas Discretos de Malha Fechada

As funções de transferência de sistemas de controle de malha fechada são derivadas usando os seguintes procedimentos:

1. Considerar as saídas dos amostradores como entradas do sistema.
2. Todos os sinais restantes do sistema são tratados como saída.
3. Escreva as equações de causa e efeito entre as entradas e as saídas do sistema usando a fórmula do ganho.

4. Faça a transformada z das equações obtidas no passo 3, e manipule essas equações a função de transferência Z.

Exemplo 4.11 Considere o sistema discreto de malha fechada mostrado na figura 4.8. A saída do amostrador é considerada como uma entrada do sistema. Assim, o sistema tem entradas R(s) e E*(s). Os sinais E(s) e Y(s) são considerados as saídas do sistema.

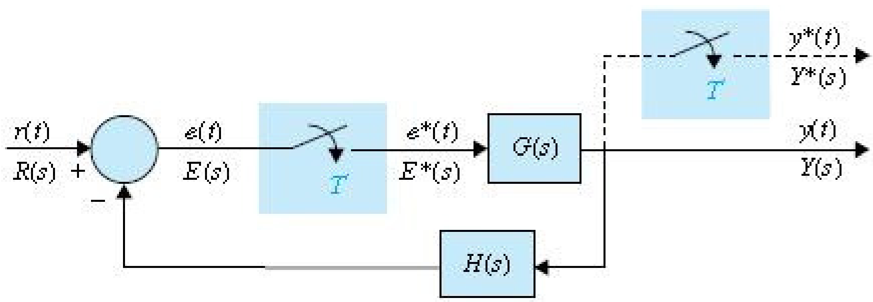

Figura 4.8 Sistema amostrado em malha fechada

Escrevendo as equações de causa efeito para E(s) e Y(s) usando a fórmula do ganho, temos

$$E(s) = R(s) - G(s)H(s)E^*(s) \qquad 4.69$$

$$Y(s) = G(s)E^*(s) \qquad 4.70$$

Fazendo a transformada de impulsos em ambas equações (4.69 e 4.70) e seguindo procedimentos algébricos, conforme visto em sala de aula, temos que:

$$\frac{Y^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G^*(s)}{1 + [G(s)H(s)]^*} \qquad 4.71$$

Fazendo a transformada z em ambos os lados da equação anterior, temos:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \qquad 4.72$$

Exemplo 4.12 Considere o sistema:

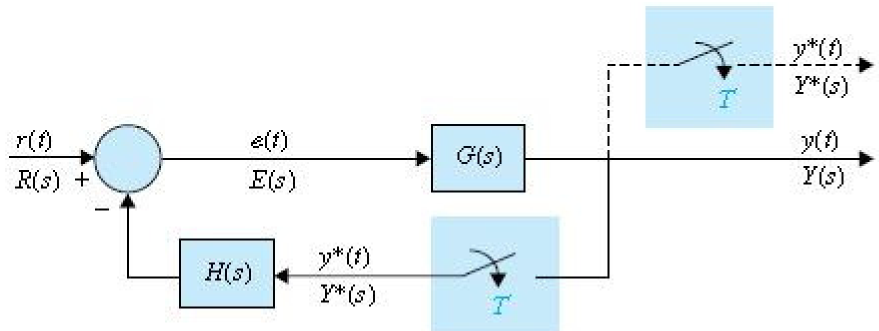

Figura 4.9 Sistema em malha fechada com amostrador na realimentação

Nesse caso, as saídas do amostrador Y*(s) e R(s) são entradas do sistema; Y(s) e E(s) são consideradas as saídas. Escrevendo E(s) e Y(s) em termos das entradas usando a fórmula do ganho, temos

$$Y(s) = G(s)E(s) \qquad 4.73$$

$$E(s) = R(s) - H(s)Y^*(s) \qquad 4.74$$

Fazendo a transformada de pulso em ambos os lados das duas equações anteriores e depois de simples manipulações algébricas, temos

$$Y^*(s) = \frac{[G(s)R(s)]^*}{1 + [G(s)H(s)]^*} \qquad 4.75$$

Note que a entrada R(s) e a função de transferência G(s) são agora combinadas como uma função, [G(s)R(s)]*, e não podemos definir uma função de transferência na forma Y*(s)/R*(s). A transformada z da saída é:

$$Y(z) = \frac{GR(z)}{1 + GH(z)} \qquad 4.76$$

Representação analítica e gráfica de variáveis de estado está em notas de sala de aula.