O TEOREMA DE POYNTING
(de autoria do Prof. Edson Cardoso)

Potência e energia em ondas eletromagnéticas

O teorema de Poynting diz respeito ao balanço de potência de uma onda eletromagnética. Iniciamos desenvolvendo a divergência do vetor $\vec{E}\times\vec{H}^*$,
onde $\vec{H}^*$ é o conjugado do vetor intensidade de campo magnético.

$$\nabla\cdot\vec{E}\times\vec{H}^* = (\nabla\times\vec{E})\cdot\vec{H}^* - (\nabla\times\vec{H}^*)\cdot\vec{E} \qquad (P1)$$

Substituindo as equações de Maxwell

$\nabla\times\vec{E} = -j\varpi\vec{B}$ **e** $\nabla\times\vec{H}^* = -j\varpi\vec{D}^* + \vec{J}^*$

em (P1) temos:

$$\nabla\cdot\vec{E}\times\vec{H}^* = -j\varpi\vec{B}\cdot\vec{H}^* + j\varpi\vec{D}^*\cdot\vec{E} - \vec{E}\cdot\vec{J}^*$$

A integração desta equação num volume V limitado pela superfície S resulta no teorema de Poynting. Ou

$$\frac{1}{2}\int\nabla\cdot\vec{E}\times\vec{H}^*\,dV = \frac{1}{2}\oint_S(\vec{E}\times\vec{H}^*)\cdot\vec{dS} = -j\frac{\varpi}{2}\int_V(\vec{B}\cdot\vec{H}^* - \vec{E}\cdot\vec{D}^*)dV - \frac{1}{2}\int_V(\vec{E}\cdot\vec{J}^*)dV \qquad (P2)$$

A equação (P2) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{2}\oint_S(\vec{E}\times\vec{H}^*)\cdot(-\vec{dS}) = 2j\varpi\int_V\left(\frac{\vec{B}\cdot\vec{H}^*}{4} - \frac{\vec{E}\cdot\vec{D}^*}{4}\right)dV + \frac{1}{2}\int_V(\vec{E}\cdot\vec{J}^*)dV \qquad (P3)$$

Onde $-\vec{dS}$ corresponde a um vetor de área dirigindo para dentro do volumeV.

Se o meio do volume V é caracterizado pelos parâmetros $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$ e $\mu = \mu' - j\mu''$ [3] e condutividade σ as partes real e imaginária da equação (P2) serão:

$$\mathrm{Re}\frac{1}{2}\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot (-\vec{dS}) = \frac{\varpi}{2}\int_V (\mu''\vec{H} \cdot \vec{H}^* + \varepsilon''\vec{E} \cdot \vec{E}^*)dV + \frac{1}{2}\int_V \sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^* dV \qquad (P4)$$

$$\mathrm{Im}\frac{1}{2}\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot (-\vec{dS}) = 2\varpi\int_V (\mu'\frac{\vec{H} \cdot \vec{H}^*}{4} - \varepsilon'\frac{\vec{E} \cdot \vec{E}^*}{4})dV \qquad (P5)$$

A equação (P4) representa a potência real (potência ativa ou ainda potência média) transmitida através da superfície fechada S entrando no volume V.

A primeira integral do segundo membro da equação representa a potência perdida devida às forças de amortecimento de polarização magnética e elétrica. A segunda integral representa as perdas devidas ao efeito Joule.

A equação (P5) representa a potência imaginária (ou potência reativa). É a potência armazenada nos campos magnético e elétrico. Os termos desta integral correspondem às energias magnética e elétrica armazenadas no volume V.

O teorema de Poynting complexo é uma expressão do balanço de potência ou energia.

Analogia com circuitos elétricos.

Num circuito RLC série a potência complexa é dada por:

$$\frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2}ZII^* = \frac{1}{2}II^*(R + j\varpi L - \frac{j}{\varpi C}) \qquad (P6)$$

A equação (P6) expressa o balanço de potência num circuito RLC série.

A parte real desta equação representa a potência ativa (potência dissipada no resistor R) e a parte imaginária representa a potência reativa (potência armazenada nos elementos reativos L e C).

Esta equação pode ser reescrita como se segue:

$$\frac{1}{2}VI^* = P_{ativa} + 2j\varpi(W_m - W_e) \qquad (P7)$$

onde $P_{ativa} = \frac{1}{2}RII^*$ **(potência ativa)**

$W_m = \frac{1}{4}LII^*$ **(energia no campo magnético)**

$W_e = \frac{1}{4}\frac{II^*}{\varpi^2 C}$ **(energia no campo elétrico).**

A impedância Z do circuito pode ser escrita como:

$$Z = \frac{P_{ativa} + 2j\varpi(W_m + W_e)}{\frac{1}{2}II^*} \qquad (P8)$$