Resolvendo problemas do mundo real empregando a matemática e os algoritmos numéricos

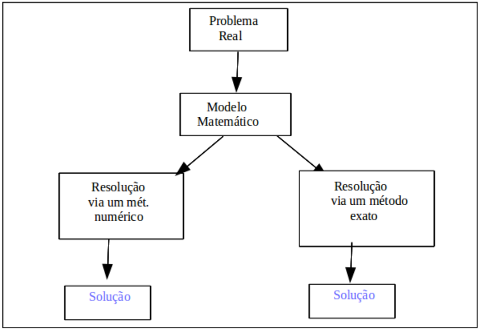
Algoritmos Numéricos - Topico 1
Computação numérica e Erros
Prof. Cláudia G. Varassin DI/UFES
emails:claudia.varassin@ufes.br e claudiavarassin@gmail.com

Setembro 2020

Sumário

1. 'Resolvendo" um problema real via modelos matemáticos
2. Tipos de erros envolvidos no percurso

Etapas a percorrer para se "resolver" um problema real:
obs: etapas ao se adotar o caminho "matemático".
caminhos alternativos: protótipos em escala menor, etc...



Exemplos

- Suponha que se queira projetar uma barragem de alteamento de rejeitos de mineração (para ela não romper!!)
- Suponha que se queira descrever como é a dispersão de poluentes na baía de Guanabara:

- Suponha que se queira descrever como é a disseminação do coronavírus no Brasil!!
- Há muuuuitos problemas!

Feita a descrição (“transcrição“) do problema real (fisíco, biológico, etc..) em um um modelo matemático será necessário resolvê-lo.
Exemplo:

- Problema real (físico):
  Quer-se dimensionar a seção transversal de um mastro em um barco à vela
- Modelo matemático: Suponha, hipoteticamente, que para dimensioná-lo seja necessário calcular:

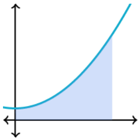
$$I = \int_a^b f(x)dx$$

onde a, b são parâmetros associados à geometria da vela e $f(x)$ é uma função associada à descrição do fenômeno.

- Modelo matemático:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Supondo que este problema possa ser representado pelo seguinte gráfico:

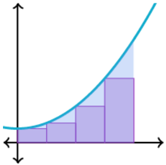


Ele poderia ser resolvido empregando um método exato

Obter a função $F(x)$ (a primitiva de $f(x)$) e calcular

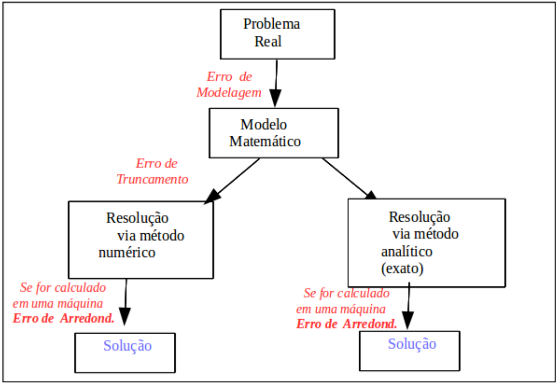
$$I = F(b) - F(a)$$

- Ele poderia ser resolvido também empregando um método numérico simples
  Por exemplo, para resolvê-lo pode-se usar a regra dos retângulos (à esquerda).



$$I \approx \sum_{i=1}^{4} AreaRet_i$$

Nesse "percurso" - do problema real até a sua solução - surgem diversas fontes de erros Os erros que aparecem nas diversas etapas:



Os erros que aparecem nas diversas etapas:

1. Erros de Modelagem: erros que aparecem devido à representação matemática simplificada (ou até incorreta) do fenômeno e/ou também devido à coleta imprecisa dos dados envolvidos na descrição.

Os erros que aparecem nas diversas etapas:

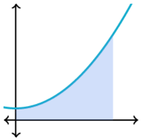
1. Erros de Modelagem: erros que aparecem devido à representação matemática simplificada (ou até incorreta) do fenômeno e/ou também devido à coleta imprecisa dos dados envolvidos na descrição.
2. Erros de Truncamento (ou de discretização): erros que aparecem devido à resolução do problema matemático via um método aproximado.

Os erros que aparecem nas diversas etapas:

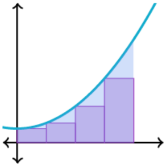
1. Erros de Modelagem: erros que aparecem devido à representação matemática simplificada (ou até incorreta) do fenômeno e/ou também devido à coleta imprecisa dos dados envolvidos na descrição.
2. Erros de Truncamento (ou de discretização): erros que aparecem devido à resolução do problema matemático via um método aproximado.
3. Erros de Arredondamento (ou de quantização): erros que aparecem devido à representação aproximada dos valores reais pelos computadores, isto é, devido à quantidade limitada algarismos que as máquinas conseguem armazenar. (ex: π, $1/3$, terão representações aproximadas)

Entendendo um pouco mais sobre o erro de trucamento

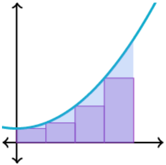
Suponha que se tenha o seguinte problema: $I = \int_a^b f(x)dx$
e que ele tenha a seguinte representação gráfica:



Uma das possibilidades para resolvê-lo é usar a regra dos retângulos (à esquerda).

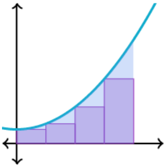


A regra dos retângulos (à esquerda).



Nesta regra, divide-se o intervalo $[a, b]$ em N subintervalos de largura fixa h (gerando os pontos $x_0 = a, x_1 = a + h, ..., x_N = b$).

A regra dos retângulos (à esquerda).



Nesta regra, divide-se o intervalo $[a, b]$ em N subintervalos de largura fixa h (gerando os pontos $x_0 = a, x_1 = a + h, ..., x_N = b$). Aproximação de I é obtida somando-se a área dos retângulos, com base $h = x_{i+1} - x_i$ e altura $f(x_i)$, ou seja, via:

$$I \approx \sum AreaRetang = \sum_{i=0}^{N-1} h * f(x_i) = h * \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i).$$

Vamos ver com mais detalhes a regra dos retângulos (à esquerda)
Para N=2 (dois retângulos)

$$I \approx \sum_{i=0}^{1} h * f(x_i) = h * (\sum_{i=0}^{1} f(x_i))$$

$$I \approx h * (f(x_0) + f(x_1)) = h * (f(a) + f(a+h)).$$

Para N=4 (quatro retângulos)

$$I \approx \sum_{i=0}^{3} h * f(x_i) = h * (\sum_{i=0}^{3} f(x_i))$$

$$I \approx h * (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)).$$

$$I \approx h * (f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h)).$$

Um exemplo específico

Suponha que se queira obter $I = \int_{1.0}^{2.0} x^2 dx$ por esta regra. Considerando que se tenha um computador, hipotético, que armazene apenas $t = 8$ dígitos dos valores envolvidos.

Para N=2 (dois retângulos): $h = 0.5$

$x_0 = a = 1.0, x_1 = a + h = 1.5, x_2 = b = 2.0$

$$I \approx h * (\sum_{i=0}^{1} f(x_i)) = h * (f(x_0) + f(x_1))$$

$$I \approx h * (f(1.0) + f(1.5)) = 0.5 * (1 + 1.5^2)$$

$$I \approx 0.5 * (1 + 1.5^2) = 0.5(1 + 2.25) = 0.5(3.25) = 1.625$$

- Para N=4 (4 retângulos) $h = 0.25$
  $x_0 = a = 1.0, x_1 = 1.25, x_2 = 1.5, x_3 = 1.75$

$$I \approx h * \sum_{i=0}^{3} f(x_i)) = h * (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$$

$$I \approx 0.5 * (1 + 1.25^2 + 1.5^2 + 1.75^2) = 1.96875$$

- Para N=4 (4 retângulos) $h = 0.25$
  $x_0 = a = 1.0, x_1 = 1.25, x_2 = 1.5, x_3 = 1.75$

$$I \approx h * \sum_{i=0}^{3} f(x_i)) = h * (f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$$

$$I \approx 0.5 * (1 + 1.25^2 + 1.5^2 + 1.75^2) = 1.96875$$

- Para N=8 (8 retângulos): $h = 0.125$
  $x_0 = a = 1.0, x_1 = 1.125, x_2 = 1.25, x_3 = 1.375, ...$

$$I \approx h * \sum_{i=0}^{7} f(x_i)) = h * (f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_7))$$

$$I \approx 0.5{*}(1{+}1.125^2{+}1.25^2{+}1.375^2{+}...{+}1.875^2{+}) = 2.14843755$$

Como medir o erro (sabendo a solução real)?
Definindo a nomenclatura que será usada...
Erro verdadeiro:

$$E_v = ValorReal - ValorObtido$$

Como medir o erro (sabendo a solução real)?

Definindo a nomenclatura que será usada...

Erro verdadeiro:

$$E_v = ValorReal - ValorObtido$$

Erro relativo :

$$E_{rel} = \frac{ValorReal - ValorObtido}{ValorReal}$$

Erro relativo (em módulo, desconsidera o sinal):

$$|E_{rel}| = |\frac{ValorReal - ValorObtido}{ValorReal}|$$

Voltando ao problema $I = \int_{1.0}^{2.0} x^2 dx$ sendo calculado pela soma de retângulos (à esquerda).
Sabendo que a solução exata é

$$I = \int_{1.0}^{2.0} x^2 dx = (\frac{x^3}{3})]_1^2 = 7/3 = 2.3333333$$

Voltando ao problema $I = \int_{1.0}^{2.0} x^2 dx$ sendo calculado pela soma de retângulos (à esquerda).
Sabendo que a solução exata é

$$I = \int_{1.0}^{2.0} x^2 dx = (\frac{x^3}{3})]_1^2 = 7/3 = 2.3333333$$

O erro na aproximação obtida
Para N=2 (dois retângulos) $h = 0.5$
Erro verdadeiro (em módulo) é:

$$|E_v| = |ValorReal - ValorObtido| = 2.3333333 - 1.625 = 0.70833333$$

Erro relativo (em módulo):

$$|E_{rel}| = |\frac{0.70833333}{2.33333333}| = 0.3035714 \Rightarrow 30.3\%$$

O erro na aproximação obtida com

Para N=4 (dois retângulos) $h = 0.5$
Erro verdadeiro (em valor módulo) é:

$$|E_v| = |ValorReal - ValorObtido| = 2.3333333 - 1.96875 = 0.364583$$

Erro relativo (em módulo):

$$|E_{rel}| = |\frac{0.364583}{2.33333333}| = 0.156249 \Rightarrow 15.6\%$$

Exercício: calcular o erro para N=8 .

- No exemplo anterior todos os valores numéricos envolvidos nos cálculos têm apenas 8 dígitos (caso específico, escolhido para tal) assim os valores envolvidos puderam ser representados pelo computador hipotético. O erro em I pelas as regras usadas (com N=2, N=4 e N=8) é unicamente um erro de truncamento (erro do método).

- No exemplo anterior todos os valores numéricos envolvidos nos cálculos têm apenas 8 dígitos (caso específico, escolhido para tal) assim os valores envolvidos puderam ser representados pelo computador hipotético. O erro em I pelas as regras usadas (com N=2, N=4 e N=8) é unicamente um erro de truncamento (erro do método).
- MAS e se os valores envolvidos NÃO puderam ser representados pela máquina, ou seja, e SE aparecer, por exemplo, o valor $v = \pi$ (infinitos dígitos) ou o valor $v = 0.123456789123456789123456789$ (que tem 27 digitos)?

- No exemplo anterior todos os valores numéricos envolvidos nos cálculos têm apenas 8 dígitos (caso específico, escolhido para tal) assim os valores envolvidos puderam ser representados pelo computador hipotético. O erro em I pelas as regras usadas (com N=2, N=4 e N=8) é unicamente um erro de truncamento (erro do método).
- MAS e se os valores envolvidos NÃO puderam ser representados pela máquina, ou seja, e SE aparecer, por exemplo, o valor $v = \pi$ (infinitos dígitos) ou o valor $v = 0.123456789123456789123456789$ (que tem 27 digitos)?
  O Computador irá adotar uma representação aproximada!
  Vamos ver, em momento, como isso é feito!!
  Assim, há uma nova fonte de erro: os erros de arredondamentos.

RESUMINDO:
Ao se "resolver" um problema "REAL" usando a matemática:

(1) Se o problema matemático for resolvido via um método exato e as operações realizadas em um computador haverá:

erro inertente à modelagem(transcrição do real em matemática)

$+$

o erro de arredondamento (associado ao armazenamento dos valores na máquina).

obs:o erro da modelagem não nos concerne neste curso: fica para (vocês) os especialistas...

RESUMINDO:
Ao se "resolver" um problema "REAL" usando a matemática:

(2) Se o problema matemático for resolvido via um método numérico aproximado em um computador haverá:

erro inertente à modelagem(transcrição do real em matemática)
$+$
o erro de truncamento (associado ao método)
$+$
o erro de arredondamento (associado ao armazenamento dos valores na máquina).

EXEMPLO/EXERCICIO

Suponha, agora que se queira obter $I = \int_{1.0}^{2.0} \sqrt{x}dx$ pela regra dos retangulos à esquerda.

Considerando que se tenha o mesmo um computador (que só consegue armazenar $t = 8$ dígitos) e fazendo as contas empregando N=2, N=4 e N=8 é possível verificar que, nesse exemplo, além dos erros inerentes ao método, haverá o erro de arredondamento pois o computador não consegue armazenar todos os envolvidos (muitos têm mais de 8 dígitos).

Exercício: fazer estas aproximações.

Bibliografia Básica

[2] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[1] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.