Gabarito

1. **(2,0pts)** Seja $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3}$. Sobre f determine:

(a) o domínio, os zeros e as assíntotas.

Resolução:

A função f é racional logo os únicos pontos de $\mathbb{R}$ fora do seu domínio são os zeros do denominador, neste caso $x = 0$. Assim, $Dm(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Os zeros de f são os zeros do seu numerador que estão no seu domínio. Ou seja, x real tal que $x^2 - 1 = 0$, portanto $x = \pm 1$.

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2}.\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x} = 0$$

então $y = 0$ é assíntota horizontal.

Assíntotas verticais: os candidatos são os pontos onde f é descontínua:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x^3} = -\infty \ ; \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{x^3} = \infty,$$

então $x = 0$ é uma assíntota vertical.

(b) os intervalos de crescimento e decrescimento, os máximos e mínimos locais.

Resolução:

$$f'(x) = \frac{(2x)(x^3) - (x^2-1)(3x^2)}{(x^3)^2} = \frac{-2x^4 - 3x^4 + 3x^2}{x^6} = \frac{-x^4 + 3x^2}{x^6} = \frac{3-x^2}{x^4}.$$

Os pontos críticos de f são os pontos do seu domínio onde f' é zero ou não está definida. Neste caso, os zeros do seu numerador: $x = \pm\sqrt{3}$. O sinal de f' só depende do sinal do numerador, que é positivo quando x está em $(-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$ e negativo quando x está em $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. Então f é **crescente** em $(-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$ e **decrescente** em $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	-	0	+	$\nexists$	+	0	-

Logo $x = -\sqrt{3}$ é um ponto de mínimo e $x = \sqrt{3}$ é um ponto de máximo.

(c) concavidades e pontos de inflexão.

Resolução:

$$f''(x) = \frac{(-2x)(x^4) - (3-x^2)(4x^3)}{x^8} = \frac{2x^5 - 12x^3}{x^8} = \frac{2x^2 - 12}{x^5}.$$

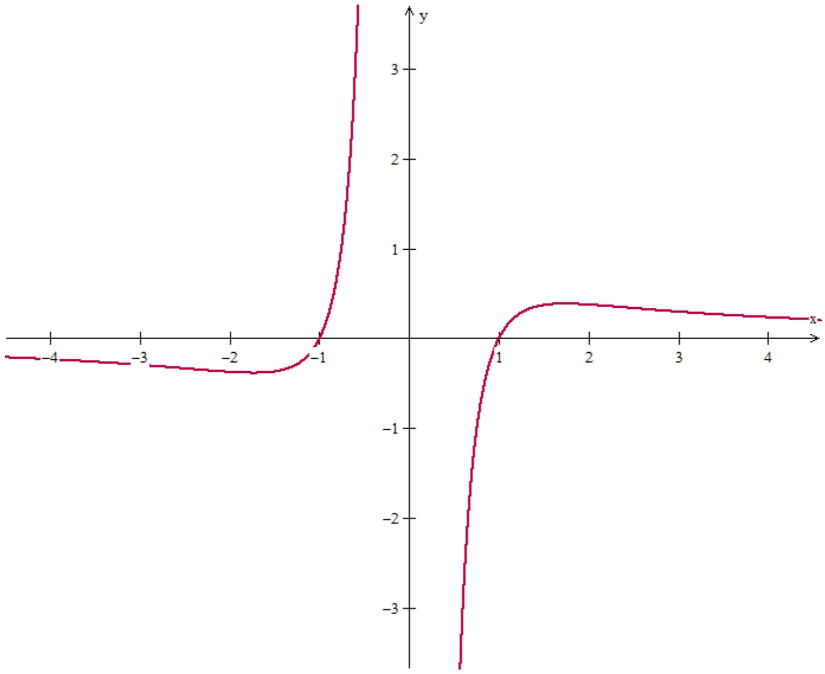
Portanto $f''(x) = 0$ se e somente se $x = \pm\sqrt{6}$. Note que f muda de concavidade nos

x		$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$	
$f''(x)$	+	0	+	$\nexists$	-	0	+

pontos $x = \pm\sqrt{6}$ e 0, que são os pontos de inflexão do gráfico de f.

(d) um esboço do gráfico.

Resolução:



2. **(1pt cada)** Calcule

   (a) a reta tangente ao gráfico de $f(x) = \ln x$ em $x = e$;
   Resolução: Temos que $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f(e) = 1$ e $f'(e) = \frac{1}{e}$. Portanto a equação da reta tangente é
   $$y(x) = 1 + \frac{1}{e}(x - e) = \frac{x}{e}.$$

   (b) $\frac{dy}{dx}$ onde $y(x) = \ln(\sqrt[3]{\cosh x})$;
   Resolução: Note que $y(x) = \dfrac{1}{3}\ln(\cosh x)$. Com isso,
   $$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{\cosh x}\mathrm{senh} x = \frac{1}{3}\tanh x.$$

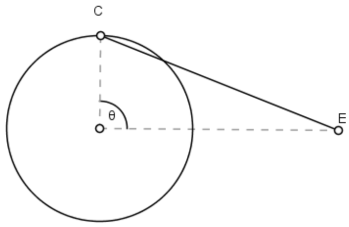
   (c) $y'(1)$ sabendo que $y(1) = 1$ e $x^y = y^x$;
   Resolução: Temos
   $$x^y = y^x \iff \ln(x^y) = \ln(y^x) \iff y\ln x = x\ln y.$$
   Derivando em x
   $$y'(x)\ln x + \frac{y(x)}{x} = \ln y(x) + \frac{x}{y(x)}y'(x).$$
   Substituindo os valores dados:
   $$y'(1)\ln 1 + \frac{1}{1} = \ln 1 + \frac{1}{1}y'(1)$$
   Então $y'(1) = 1$.

   (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\,\mathrm{sen} x}$.
   Resolução: Seja $y(x) = x^{\,\mathrm{sen} x}$ então $y(x) = e^{\ln y} = e^{\,\mathrm{sen} x \ln x}$. Como a função exponencial é contínua basta calcular o limite de $\mathrm{sen} x \ln x$. temos
   $$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{sen} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{(\mathrm{sen} x)^{-1}} \overset{L'H}{=}$$
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(-\mathrm{sen} x)^{-2}\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{sen}^2 x}{x\cos x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\,\mathrm{sen} x \cos x}{\cos x - x\,\mathrm{sen} x} = 0.$$

Com isso,

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\,\text{sen} x} = e^{\lim_{x\to 0^+}\ \text{sen} x \ln x} = e^0 = 1.$$

3. **(2,0pts)** Um ciclista corre numa pista circular de raio 100m a uma velocidade constante de 5m/s. Um expectador está a uma distância de 200m do centro da pista. Conforme a figura abaixo, quão rápido está variando a distância entre o ciclista e o expectador quando $\theta = \frac{\pi}{2}$?



Resolução: Antes de qualquer coisa, observe que 5 m/s corresponde a 0,05 rad/s, ou seja, $\theta'(t) = 0,05$ rad/s. Agora considere $d(t)$ a distância entre do expectador ao ciclista no instante t. Assim, temos a relação

$$d^2(t) = 100^2 + 200^2 - 2\cdot 100\cdot 200\cdot \cos(\theta(t)).$$

Derivando a última equação obtemos

$$2d(t)d'(t) = 40000\,\text{sen}(\theta(t))\theta'(t).$$

Pela primeira equação, no instante t_0 em que $\theta(t_0) = \pi/2$ temos $d(t_0) = 100\sqrt{5}$. Substituindo esses valores na segunda equação, junto com o fato que $\theta'(t_0) = 0,05$ rad/s, obtemos $d'(t_0) = 2\sqrt{5}$ m/s.

4. **(2,0pts)** Um agricultor deverá cercar um terreno retangular para conter $216m^2$ de área e dividi-lo em duas partes de áreas iguais com uma outra cerca paralela a um dos lados. Quais as dimensões do terreno que exigirão a menor quantidade total de cerca a ser usada pelo agricultor? Quantos metros de cerca serão utilizados?
Resolução: Sejam x e y o comprimento dos lados do retângulo. Considere que a outra cerca será paralela ao lado medindo x. Com isso, a área total é $A(x,y) = x\cdot y = 216$ e o perímetro total é $P(x,y) = 3x + 2y$. Queremos minimizar $P(x,y)$ sujeito à $A(x,y) = 216$. Substituindo $y = 216/x$ em $P(x,y)$ obtemos $P(x) = 3x + \frac{432}{x}$. Fazendo $P'(x) = 0$ obtemos $x = 12$, donde $y = 18$ e $P(12,18) = 72$.