Probabilidade e Estatística
Tema: Variáveis Aleatórias

Profa. Luciana Graziela de Godoi
Departamento de Estatística
CCE-UFES

Material desenvolvido no projeto Elaboração de Material Didático para o Ensino da Estatística na UFES.
Elaborado em parceria com o Prof. Dr. Alessandro José Queiroz Sarnaglia.

Apoio: Programa de aprimoramento e desenvolvimento do ensino (PRÓ-ENSINO).

Introdução

Consideremos os experimentos:

1. E_1 = "duas peças de uma linha de produção são inspecionadas e classificadas como 'defeituosa' (D) ou 'não defeituosa' (N)";
2. E_2 = "uma linha de produção é observada até a produção da primeira peça defeituosa";
3. E_3 = "um ponto em um círculo de raio unitário é escolhido ao acaso".

Introdução

Consideremos os experimentos:

1. E_1 = "duas peças de uma linha de produção são inspecionadas e classificadas como 'defeituosa' (D) ou 'não defeituosa' (N)";
2. E_2 = "uma linha de produção é observada até a produção da primeira peça defeituosa";
3. E_3 = "um ponto em um círculo de raio unitário é escolhido ao acaso".

Defina:

1. em E_1, X_1 = "número de peças defeituosas observadas";
2. em E_2, X_2 = "número de peças produzidas até a interrupção";
3. em E_3, X_3 = "distância do ponto sorteado ao centro do círculo".

Introdução

Consideremos os experimentos:

1. E_1 = "duas peças de uma linha de produção são inspecionadas e classificadas como 'defeituosa' (D) ou 'não defeituosa' (N)";
2. E_2 = "uma linha de produção é observada até a produção da primeira peça defeituosa";
3. E_3 = "um ponto em um círculo de raio unitário é escolhido ao acaso".

Defina:

1. em E_1, X_1 = "número de peças defeituosas observadas";
2. em E_2, X_2 = "número de peças produzidas até a interrupção";
3. em E_3, X_3 = "distância do ponto sorteado ao centro do círculo".

Observe que X_1, X_2 e X_3 são funções (numéricas) dos resultados (não necessariamente numéricos) do experimento aleatório ao qual estão associadas. Neste caso, dizemos que X_1, X_2 e X_3 são **variáveis aleatórias**.

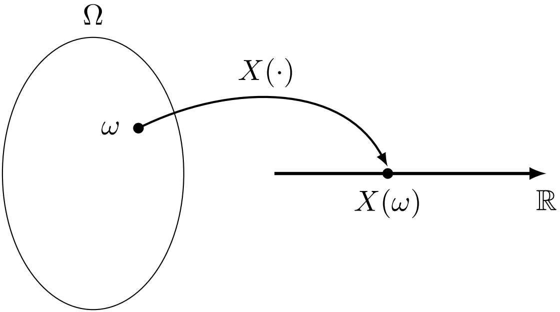
Definição de variável aleatória

Definição

Sejam Ω espaço amostral de um experimento aleatório E e $\omega \in \Omega$ um de seus resultados. Se

$$\begin{aligned} X : \quad & \Omega \to \mathbb{R} \\ & \omega \mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

dizemos que X é variável aleatória (v.a.).



Tipos de variáveis aleatórias

Definição

O conjunto de todos os possíveis valores que uma variável aleatória X pode assumir é denominado **imagem** *de X e denotado por $Im(X)$.*

Temos que

1. $Im(X_1) = \{0, 1, 2\}$;
2. $Im(X_2) = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
3. $Im(X_3) = \{x : 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$.

Tipos de variáveis aleatórias

Definição

O conjunto de todos os possíveis valores que uma variável aleatória X pode assumir é denominado **imagem** *de X e denotado por $Im(X)$.*

Temos que

1. $Im(X_1) = \{0, 1, 2\}$;
2. $Im(X_2) = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
3. $Im(X_3) = \{x : 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$.

Há diferenças entre $Im(X_1)$, $Im(X_2)$ e $Im(X_3)$:

1. $Im(X_1)$ é um conjunto finito;
2. $Im(X_2)$ é um conjunto infinito contável (ou enumerável);
3. $Im(X_3)$ é um conjunto infinito não contável (ou não enumerável).

Definição

Dizemos que uma variável aleatória X é **discreta** *se $Im(X)$ é um conjunto finito ou infinito enumerável.*

Definição

Dizemos que uma variável aleatória X é **contínua** *se $Im(X)$ é um conjunto não-enumerável.*

Portanto, X_1 e X_2 são v.a. discretas, enquanto X_3 é v.a. contínua.

Exemplos

- O tempo que um projétil gasta para retornar à Terra

Exemplos

- O tempo que um projétil gasta para retornar à Terra $\rightarrow$ contínua;
- O número de filmes atualmente em exibição no país

Exemplos

- O tempo que um projétil gasta para retornar à Terra $\rightarrow$ contínua;
- O número de filmes atualmente em exibição no país $\rightarrow$ discreta;
- O tempo exato de execução de uma música selecionada aleatoriamente

Exemplos

- O tempo que um projétil gasta para retornar à Terra $\rightarrow$ contínua;
- O número de filmes atualmente em exibição no país $\rightarrow$ discreta;
- O tempo exato de execução de uma música selecionada aleatoriamente $\rightarrow$ contínua;
- O faturamento mensal de um pousada.

Exemplos

- O tempo que um projétil gasta para retornar à Terra $\rightarrow$ contínua;
- O número de filmes atualmente em exibição no país $\rightarrow$ discreta;
- O tempo exato de execução de uma música selecionada aleatoriamente $\rightarrow$ contínua;
- O faturamento mensal de um pousada. $\rightarrow$ contínua;
- O número de ligações necessárias até conseguir a primeira doação

Exemplos

- O tempo que um projétil gasta para retornar à Terra $\rightarrow$ contínua;
- O número de filmes atualmente em exibição no país $\rightarrow$ discreta;
- O tempo exato de execução de uma música selecionada aleatoriamente $\rightarrow$ contínua;
- O faturamento mensal de um pousada. $\rightarrow$ contínua;
- O número de ligações necessárias até conseguir a primeira doação $\rightarrow$ discreta;

1. O resultado ω é desconhecido *a priori*;
2. O valor resultante da v.a. $X(\omega)$ também o é;
3. Devemos tratar probabilisticamente X;
4. Abordagens diferentes nos casos discreto e contínuo.

Definida uma variável aleatória discreta e sob certas suposições temos duas informações:

- quais os possíveis resultados do experimento aleatório e
- qual a probabilidade de cada resultado acontecer.

Definição

Se X for uma v. a. discreta, com possíveis valores $\{x_1, x_2, ...\}$ então a distribuição de probabilidades de X pode ser apresentada pela chamada **função de probabilidade**, *que associa a cada valor possível x_i sua probabilidade de ocorrência $p(x_i)$, ou seja,*

$$P_X(x_i) = P(X = x_i), \quad , i = 1, 2, ... \tag{1}$$

Uma função de probabilidade (f.p.) deve satisfazer as seguintes condições:

- $P(X = x_i) \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, ...$
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1.$

Exemplo: Suponha que um dado é arremessado. Qual a função de probabilidade da v.a. discreta X = "número obtido na face do dado voltada para cima"?

Temos que $Im(X) = \{1, 2, \ldots, 6\}$.

Assumimos que :

- o dado é honesto equilibrado e
- o lançamento é imparcial.

Logo, podemos dizer que todas as faces ocorrem com a mesma probabilidade.

Assim, a f.p. de X é dada por

Tabela: Função de probabilidade

Valores possíveis (x)	1	2	3	4	5	6	Total
$P(X = x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	1

Assim, a f.p. de X é dada por

Tabela: Função de probabilidade

Valores possíveis (x)	1	2	3	4	5	6	Total
$P(X=x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	1

Resumidamente, a f.p. de X é dada por

$$P_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{6},\ x = 1, 2, \ldots, 6.$$

Assim, a f.p. de X é dada por

Tabela: Função de probabilidade

Valores possíveis (x)	1	2	3	4	5	6	Total
$P(X = x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Resumidamente, a f.p. de X é dada por

$$P_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{6},\ x = 1, 2, \ldots, 6.$$

Questão: Se repetíssemos o arremesso do dado uma quantidade grande de vezes, quais resultados seriam esperados se de fato o dados fosse equilibrado?

Assim, a f.p. de X é dada por

Tabela: Função de probabilidade

Valores possíveis (x)	1	2	3	4	5	6	Total
$P(X = x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	1

Resumidamente, a f.p. de X é dada por

$$P_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}, \; x = 1, 2, \ldots, 6.$$

Questão: Se repetíssemos o arremesso do dado uma quantidade grande de vezes, quais resultados seriam esperados se de fato o dados fosse equilibrado?

Esperaríamos que a frequência relativa da face x se aproximasse do modelo postulado $P_X(x)$.

Na tabela a seguir mostramos um estudo em que simulamos n = 50, 200 e 10000 arremessos de um dado equilibrado.

	n	Face					
		1	2	3	4	5	6
Prob.	-	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167
Freq.	50	0.220	0.200	0.120	0.100	0.160	0.200
	200	0.145	0.150	0.195	0.185	0.180	0.145
	10000	0.159	0.166	0.165	0.175	0.168	0.168

Na tabela a seguir mostramos um estudo em que simulamos n = 50, 200 e 10000 arremessos de um dado equilibrado.

	n	Face					
		1	2	3	4	5	6
Prob.	-	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167
Freq.	50	0.220	0.200	0.120	0.100	0.160	0.200
	200	0.145	0.150	0.195	0.185	0.180	0.145
	10000	0.159	0.166	0.165	0.175	0.168	0.168

Note que a medida em que se aumenta o número de lançamentos do dado, a frequência relativa de se sair cada face tende a se aproximar da probabilidade teórica conhecida. Tal construção está associada a ideia frequentista de probabilidade.

Função de distribuição acumulativa

Suponha que no exemplo anterior (arremesso do dado), estejamos interessados em $P(X \leq 2)$. Essa probabilidade é facilmente obtida. De fato

$$P(X \leq 2) =$$

Função de distribuição acumulativa

Suponha que no exemplo anterior (arremesso do dado), estejamos interessados em $P(X \leq 2)$. Essa probabilidade é facilmente obtida. De fato

$$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Função de distribuição acumulativa

Suponha que no exemplo anterior (arremesso do dado), estejamos interessados em $P(X \leq 2)$. Essa probabilidade é facilmente obtida. De fato

$$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Podemos generalizar a probabilidade **acumulada** acima.

Definição

Seja X v.a. discreta com f.p. $P(X = x)$. A função de distribuição acumulada (f.d.a.) de X é definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Note que:

- O domínio de F são os reais,
- o contradomínio é o intervalo $[0, 1]$.

Note que:

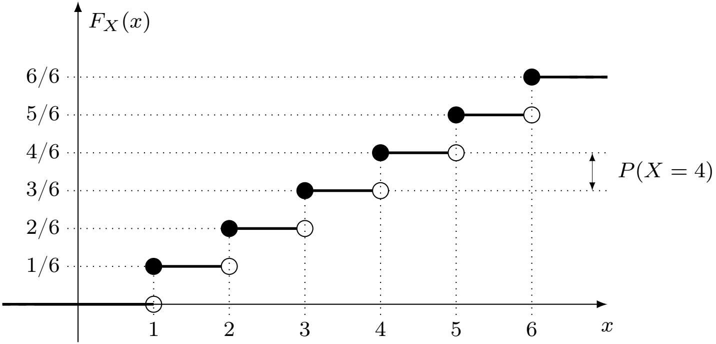
- O domínio de F são os reais,
- o contradomínio é o intervalo $[0, 1]$.

Portanto,

$F_X(x)$ de uma v.a. discreta X é definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e não somente para aqueles $x \in Im(X)$.

Exemplo: Retornemos ao exemplo do arremesso do dado. Temos que,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & se \;\; x < 1, \\ 1/6, & se \;\; 1 \leq x < 2, \\ 2/6, & se \;\; 2 \leq x < 3, \\ 3/6, & se \;\; 3 \leq x < 4, \\ 4/6, & se \;\; 4 \leq x < 5, \\ 5/6, & se \;\; 5 \leq x < 6, \\ 1, & se \;\; x \geq 6. \end{cases}$$


$F_X(x)$
6/6
5/6
4/6
3/6
2/6
1/6
1
2
3
4
5
6
x
$P(X = 4)$

Comentário

É possível utilizar a f.d.a. de uma v.a. discreta para determinar a sua função de probabilidade.

Observe no gráfico que

$$P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-),\ x \in Im(X),$$

isto é, a f.p. de X no ponto x, $P(X = x)$, é o **salto** que ocorre na f.d.a. de X neste ponto. Na equação acima, a expressão

$$F_X(x^-) := \lim_{t \to x^-} F_X(t),$$

isto é, o limite de $F_X(t)$ quando t tende a x pela esquerda.

Outras propriedades da f.d.a. são:

- $F_X(x) \to 0$, quando $x \to -\infty$;
- $F_X(x) \to 1$, quando $x \to \infty$;
- $x \leq y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$.

Exercício: Obtenha a f.p. e a f.d.a. da v.a. número de caras obtido no lançamento de duas moedas honestas.

Esperança e variância

Definição

Seja X v.a. discreta com f.p. $P_X(x)$. A **esperança** *e a* **variância** *de X são definidas, respectivamente, por*

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in Im(X)} x P_X(x) = \sum_{x \in Im(X)} x P(X = x)$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{x \in Im(X)} (x - \mu)^2 P_X(x) = \sum_{x \in Im(X)} (x - \mu)^2 P(X = x).$$

- Nas duas expressões vemos que valores com maior probabilidade têm mais peso no cálculo da esperança e da variância.

- Nas duas expressões vemos que valores com maior probabilidade têm mais peso no cálculo da esperança e da variância.
- Na literatura, a esperança de uma variável aleatória também pode ser referenciada como valor esperado ou média de uma variável aleatória.

- Nas duas expressões vemos que valores com maior probabilidade têm mais peso no cálculo da esperança e da variância.
- Na literatura, a esperança de uma variável aleatória também pode ser referenciada como valor esperado ou média de uma variável aleatória.
- **Fórmula alternativa para o cálculo da variância:**

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu^2, \text{ em que } E(X^2) = \sum_{x \in Im(X)} x^2 P(X = x).$$

- Nas duas expressões vemos que valores com maior probabilidade têm mais peso no cálculo da esperança e da variância.
- Na literatura, a esperança de uma variável aleatória também pode ser referenciada como valor esperado ou média de uma variável aleatória.
- **Fórmula alternativa para o cálculo da variância:**

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu^2, \text{ em que } E(X^2) = \sum_{x \in Im(X)} x^2 P(X = x).$$

- Assim como a f.p. representa um modelo teórico para as frequências relativas, a esperança μ e a variância σ^2 representam valores teóricos para a média $\bar{x}$ e a variância s^2.

Definição

Seja X v.a. discreta com f.p. $P_X(x)$. O desvio-padrão de X é definido por

$$\sigma = DP(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

Exemplo: Retornemos ao exemplo do arremesso do dado.

Temos que X = "número obtido na face do dado voltada para cima" e sabemos que $Im(X) = \{1, 2, \ldots, 6\}$ e a f.p. de X é dada por

$$P_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}, \; x = 1, 2, \ldots, 6.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\mu = E(X) &= \sum_{x=1}^{6} xP(X = x) \\
&= 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + ... + 6 \times P(X = 6) \\
&= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} \cdots + 6 \times \frac{1}{6} \\
&= 3.5
\end{aligned}
$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - 3.5^2.$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x=1}^{6} x^2 P(X=x) \\
&= 1^2 \times P(X=1) + 2^2 \times P(X=2) + ... + 6^2 \times P(X=6) \\
&= 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} \cdots + 6^2 \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1^2 + \cdots + 6^2}{6} \\
&= \frac{91}{6} \\
&= 15.167.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 = Var(X) &= E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - 3.5^2 \\
&= 15.167 - 12.25 \\
&= 2.917.
\end{aligned}
$$

Interpretação: A esperança pode ser entendida com a média aritmética dos resultados da variável aleatória se o experimento pudesse ser repetido infinitas vezes sob as mesmas circunstâncias. A variância nos informaria sobre a dispersão desses valores.

Interpretação: A esperança pode ser entendida com a média aritmética dos resultados da variável aleatória se o experimento pudesse ser repetido infinitas vezes sob as mesmas circunstâncias. A variância nos informaria sobre a dispersão desses valores.

Na tabela a seguir simulamos o lançamento de um dado por 50, 200 e 10000 vezes. Uma vez lançado os dados e colhida a amostra, foi calculado a média amostral e a variância amostral.

Valores	μ	σ^2
teóricos	3.5	2.917
n	$\bar{x}$	s^2
50	3.380	3.424
200	3.630	2.948
10000	3.499	2.904

Interpretação: A esperança pode ser entendida com a média aritmética dos resultados da variável aleatória se o experimento pudesse ser repetido infinitas vezes sob as mesmas circunstâncias. A variância nos informaria sobre a dispersão desses valores.

Na tabela a seguir simulamos o lançamento de um dado por 50, 200 e 10000 vezes. Uma vez lançado os dados e colhida a amostra, foi calculado a média amostral e a variância amostral.

Valores teóricos	μ	σ^2
	3.5	2.917
n	$\bar{x}$	s^2
50	3.380	3.424
200	3.630	2.948
10000	3.499	2.904

Como esperado, a medida que o número de lançamentos aumenta, a média e a variância amostrais se aproximam da média μ e da variância σ^2 da variável aleatória.

Exemplo: Um agricultor produz quatro tipos de variedades de flores, sendo as do tipo I com probabilidade 0.20, do tipo II com probabilidade 0.36, do tipo III com probabilidade 0.28 e do tipo IV com probabilidade 0.16. Sabendo-se que o lucro por caixa do tipo I exportada é de 10 u.m, do tipo II é de 30 u.m., do tipo III é de 20 u.m. e do tipo IV é 15 u.m., pergunta-se qual o lucro médio esperado por caixa, sua variância e desvio-padrão?

Exemplo: Um agricultor produz quatro tipos de variedades de flores, sendo as do tipo I com probabilidade 0.20, do tipo II com probabilidade 0.36, do tipo III com probabilidade 0.28 e do tipo IV com probabilidade 0.16. Sabendo-se que o lucro por caixa do tipo I exportada é de 10 u.m, do tipo II é de 30 u.m., do tipo III é de 20 u.m. e do tipo IV é 15 u.m., pergunta-se qual o lucro médio esperado por caixa, sua variância e desvio-padrão?

Seja X = "o lucro por caixa de semente exportada". Pelo enunciado, $Im(X) = \{10, 15, 20, 30\}$ e a f.p. de X é dada por

Tabela: Função de probabilidade

Valores possíveis (x)	10	15	20	30	Total
$P(X = x)$					

Exemplo: Um agricultor produz quatro tipos de variedades de flores, sendo as do tipo I com probabilidade 0.20, do tipo II com probabilidade 0.36, do tipo III com probabilidade 0.28 e do tipo IV com probabilidade 0.16. Sabendo-se que o lucro por caixa do tipo I exportada é de 10 u.m, do tipo II é de 30 u.m., do tipo III é de 20 u.m. e do tipo IV é 15 u.m., pergunta-se qual o lucro médio esperado por caixa, sua variância e desvio-padrão?

Seja X = "o lucro por caixa de semente exportada". Pelo enunciado, $Im(X) = \{10, 15, 20, 30\}$ e a f.p. de X é dada por

Tabela: Função de probabilidade

Valores possíveis (x)	10	15	20	30	Total
$P(X = x)$	0.20	0.16	0.28	0.36	1

Assim,

$$\begin{aligned}
\mu = E(X) &= \sum_{x=1}^{4} xP(X=x) \\
&= 10P(X=10) + 15P(X=15) + 20P(X=20) + 30P(X=30) \\
&= 10 \times 0.2 + 15 \times 0.16 + 20 \times 0.28 + 30 \times 0.36 \\
&= 20.80 \;\; u.m.
\end{aligned}$$

e

Assim,

$$\begin{aligned}
\mu = E(X) &= \sum_{x=1}^{4} xP(X = x) \\
&= 10P(X = 10) + 15P(X = 15) + 20P(X = 20) + 30P(X = 30) \\
&= 10 \times 0.2 + 15 \times 0.16 + 20 \times 0.28 + 30 \times 0.36 \\
&= 20.80 \ \ u.m.
\end{aligned}$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - 20.80^2.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\mu = E(X) &= \sum_{x=1}^{4} xP(X = x) \\
&= 10P(X = 10) + 15P(X = 15) + 20P(X = 20) + 30P(X = 30) \\
&= 10 \times 0.2 + 15 \times 0.16 + 20 \times 0.28 + 30 \times 0.36 \\
&= 20.80 \ \ u.m.
\end{aligned}
$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - 20.80^2.$$

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x=1}^{4} x^2 P(X = x) \\
&= 10^2 P(X = 10) + 15^2 P(X = 15) + 20^2 P(X = 20) + 30^2 P(X = 30) \\
&= 10^2 \times 0.2 + 15^2 \times 0.16 + 20^2 \times 0.28 + 30^2 \times 0.36 \\
&= 492 \ \ (u.m.)^2
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sigma^2 = Var(X) &= E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - 20.80^2 \\ &= 492 - 432.64 \\ &= 59.36(u.m.)^2.\end{aligned}$$

Então

$$\sigma = DP(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{59.36} = 7.71 \;\; u.m.$$

Sejam X e Y v.a. discretas e c uma constante. As seguintes propriedades são satisfeitas:

- $E(c) = c$;

Sejam X e Y v.a. discretas e c uma constante. As seguintes propriedades são satisfeitas:

- $E(c) = c$;
- $E(X + c) = E(X) + c$;

Sejam X e Y v.a. discretas e c uma constante. As seguintes propriedades são satisfeitas:

- $E(c) = c$;
- $E(X + c) = E(X) + c$;
- $E(cX) = cE(X)$;

Sejam X e Y v.a. discretas e c uma constante. As seguintes propriedades são satisfeitas:

- $E(c) = c$;
- $E(X + c) = E(X) + c$;
- $E(cX) = cE(X)$;
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;

Sejam X e Y v.a. discretas e c uma constante. As seguintes propriedades são satisfeitas:

- $E(c) = c$;
- $E(X + c) = E(X) + c$;
- $E(cX) = cE(X)$;
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;
- $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$;

Sejam X e Y v.a. discretas e c uma constante. As seguintes propriedades são satisfeitas:

- $E(c) = c$;
- $E(X + c) = E(X) + c$;
- $E(cX) = cE(X)$;
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;
- $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$;
- $Var(c) = 0$;

Sejam X e Y v.a. discretas e c uma constante. As seguintes propriedades são satisfeitas:

- $E(c) = c$;
- $E(X + c) = E(X) + c$;
- $E(cX) = cE(X)$;
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;
- $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$;
- $Var(c) = 0$;
- $Var(X + c) = Var(X)$;

Sejam X e Y v.a. discretas e c uma constante. As seguintes propriedades são satisfeitas:

- $E(c) = c$;
- $E(X + c) = E(X) + c$;
- $E(cX) = cE(X)$;
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;
- $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$;
- $Var(c) = 0$;
- $Var(X + c) = Var(X)$;
- $Var(cX) = c^2Var(X)$;

Sejam X e Y v.a. discretas e c uma constante. As seguintes propriedades são satisfeitas:

- $E(c) = c$;
- $E(X + c) = E(X) + c$;
- $E(cX) = cE(X)$;
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;
- $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$;
- $Var(c) = 0$;
- $Var(X + c) = Var(X)$;
- $Var(cX) = c^2 Var(X)$;
- Se X e Y são v.a. discretas independentes, $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Exemplo

Suponha que o número de falhas X em uma liga tem a seguinte f.p.:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.4	0.3	0.2	0.1

Exemplo

Suponha que o número de falhas X em uma liga tem a seguinte f.p.:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.4	0.3	0.2	0.1

O lucro L obtido na venda da liga depende do número de falhas X na mesma da seguinte forma, $L = 4 - 2X$. Na venda da liga, qual o lucro esperado e a sua variância?

Exemplo

Suponha que o número de falhas X em uma liga tem a seguinte f.p.:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.4	0.3	0.2	0.1

O lucro L obtido na venda da liga depende do número de falhas X na mesma da seguinte forma, $L = 4 - 2X$. Na venda da liga, qual o lucro esperado e a sua variância?

Temos que

$$\mu = E(X) = 0.3 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.1 = 1$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{x=0}^{3} x^2 P(X = x) - \mu^2 = 0.3 + 4 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0.1 - 1 = 1.$$

Exemplo

Suponha que o número de falhas X em uma liga tem a seguinte f.p.:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.4	0.3	0.2	0.1

O lucro L obtido na venda da liga depende do número de falhas X na mesma da seguinte forma, $L = 4 - 2X$. Na venda da liga, qual o lucro esperado e a sua variância?

Temos que

$$\mu = E(X) = 0.3 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.1 = 1$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{x=0}^{3} x^2 P(X = x) - \mu^2 = 0.3 + 4 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0.1 - 1 = 1.$$

Logo $E(L) = 4 - 2E(X) = 2$ e $Var(L) = 2^2 Var(X) = 4$.

Alguns Modelos Discretos

Vamos estudar alguns modelos probabilítiscos padrões que podem ser usados em diversas situações práticas.

Modelo uniforme discreto

É o caso mais simples de modelagem de uma variável aleatória, em que cada valor possível da variável ocorre com a mesma probabilidade.

Definição

Uma v.a. discreta X, assumindo valores em x_1, x_2, ..., x_k, tem distribuição uniforme discreta se, e somente, se

$$P_X(x) = P(X = X_i) = \frac{1}{k}, \ \forall i = 1, \ldots, k.$$

Sua esperança e variância são dadas, respectivamente, por:

$$\mu = E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{1}{k}\left\{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{k} x_i)^2}{k}\right\}.$$

Exemplo: Número obtido no lançamento de um dado.

Muitos experimentos são tais que os resultados da variável aleatória está a ocorrência ou não de determinada característica (dicotômica/indicadora) e são conhecidos por ensaios de Bernoulli. Por exemplo,

$$(1) \quad \text{lançamento de um moeda:} \begin{cases} \text{cara} \\ \text{ou} \\ \text{coroa;} \end{cases}$$

Modelo Bernoulli

Muitos experimentos são tais que os resultados da variável aleatória está a ocorrência ou não de determinada característica (dicotômica/indicadora) e são conhecidos por ensaios de Bernoulli. Por exemplo,

$$(1) \quad \text{lançamento de um moeda:} \begin{cases} \text{cara} \\ \text{ou} \\ \text{coroa;} \end{cases}$$

$$(2) \quad \text{lançamento de um dado:} \begin{cases} \text{face 5 ocorre} \\ \text{ou} \\ \text{não } (1, 2, 3, 4, 6); \end{cases}$$

Modelo Bernoulli

Muitos experimentos são tais que os resultados da variável aleatória está a ocorrência ou não de determinada característica (dicotômica/indicadora) e são conhecidos por ensaios de Bernoulli. Por exemplo,

$$\text{(1)} \quad \text{lançamento de um moeda:} \begin{cases} \text{cara} \\ \text{ou} \\ \text{coroa;} \end{cases}$$

$$\text{(2)} \quad \text{lançamento de um dado:} \begin{cases} \text{face 5 ocorre} \\ \text{ou} \\ \text{não } (1, 2, 3, 4, 6); \end{cases}$$

$$\text{(3)} \quad \text{peça selecionada em um lote:} \begin{cases} \text{tem defeito} \\ \text{ou} \\ \text{não.} \end{cases}$$

Definição

Uma v.a. discreta X segue o modelo Bernoulli se atribui 0 ou 1 à ocorrência de fracasso ou sucesso, respectivamente. Se p representa a probabilidade de sucesso, a função de probabilidade da variável aleatória é dada por

$X = x$	0	1	Total
$P(X = x)$			

Definição

Uma v.a. discreta X segue o modelo Bernoulli se atribui 0 ou 1 à ocorrência de fracasso ou sucesso, respectivamente. Se p representa a probabilidade de sucesso, a função de probabilidade da variável aleatória é dada por

$X = x$	0	1	Total
$P(X = x)$	$1-p$	p	1

Definição

Uma v.a. discreta X segue o modelo Bernoulli se atribui 0 ou 1 à ocorrência de fracasso ou sucesso, respectivamente. Se p representa a probabilidade de sucesso, a função de probabilidade da variável aleatória é dada por

$X = x$	0	1	Total
$P(X = x)$	1-p	p	1

Resumidamente,

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \text{ em que } x = 0, 1.$$

Definição

Uma v.a. discreta X segue o modelo Bernoulli se atribui 0 ou 1 à ocorrência de fracasso ou sucesso, respectivamente. Se p representa a probabilidade de sucesso, a função de probabilidade da variável aleatória é dada por

$X = x$	0	1	Total
$P(X = x)$	1-p	p	1

Resumidamente,

$$P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}, \text{ em que } x = 0, 1.$$

Ou seja, $P(X = 0) = 1 - p$ e $P(X = 1) = p$.

Notação: $X \sim Ber(p)$.

Sua esperança e variância são dadas, respectivamente, por:

$$\mu = E(X) = p$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = p(1-p).$$

O valor esperado de uma variável aleatória Bernoulli é igual a probabilidade de ocorrência do evento desejado; isto significa que se esse experimento fosse repetido um número grande de vezes, a proporção de experimentos com a ocorrência do evento desejado seria p.

Exemplo: Seja X sair a face 5 no lançamento de um dado. Obtenha a f.p. da v.a. X, sua média e variância.

Exemplo: Seja X sair a face 5 no lançamento de um dado. Obtenha a f.p. da v.a. X, sua média e variância.

$$\mathrm{X} = \begin{cases} 0, \text{ se não sair a face 5,} \\ 1, \text{ se sair a face 5.} \end{cases}$$

Assim, $X \sim Ber(1/6)$, sua f.p. é dada por:

X = x	0	1	Total
P(X = x)			

Exemplo: Seja X sair a face 5 no lançamento de um dado. Obtenha a f.p. da v.a. X, sua média e variância.

$$\mathrm{X} = \begin{cases} 0, \text{ se não sair a face } 5, \\ 1, \text{ se sair a face } 5. \end{cases}$$

Assim, $X \sim Ber(1/6)$, sua f.p. é dada por:

X = x	0	1	Total
P(X = x)	5/6	1/6	1

$$\mu = E(X) = p = 1/6$$

$$\sigma^2 = Var(X) = p(1-p) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}.$$

Modelo binomial

Considere cada um dos seguintes experimentos aleatórios:

1. um dado é lançado 3 vezes, qual a probabilidade de se obter a face 5 em 2 desses lançamentos?
2. uma moeda é lançada 5 vezes, qual a probabilidade de no máximo três caras?
3. duas pessoas são selecionadas ao acado, com reposição, de uma carteira de crédito em que 25% das pessoas são inadimplentes.

Cada um dos experimentos aleatórios apresentados pode ser entendido como uma repetição de n ensaios de Bernoulli, independentes, todos com a **mesma** probabilidade de sucesso p.

Exemplo: Em (1), considera-se o lançamento de um dado "honesto", então:

Exemplo: Em (1), considera-se o lançamento de um dado "honesto", então:

$$P(sucesso) =$$

Exemplo: Em (1), considera-se o lançamento de um dado "honesto", então:

$$P(sucesso) = P(sair\ face\ 5) = \frac{1}{6}.$$

Evento de interesse (sair face 5 em 2 dos 3 lançamentos):

$$A = \{SSF, SFS, FSS\}.$$

Então

$$P(A) = P(SSF) + P(SFS) + P(FSS)$$

Pela independência dos lançamentos,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(S)P(S)P(F) + P(S)P(F)P(S) + P(F)P(S)P(S) \\ &= \frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{6} \\ &= \frac{15}{216}. \qquad (2) \end{aligned}$$

Suponha que a $P(sucesso) = p$, $0 < p < 1$, então $P(fracasso) =$

Suponha que a $P(sucesso) = p$, $0 < p < 1$, então $P(fracasso) = 1 - p$ e

- $P(SSF) = P(S)P(S)P(F) = p\ p\ (1-p) = p^2(1-p)$
- $P(SFS) = P(S)P(F)P(S) = p\ (1-p)\ p = p^2(1-p)$
- $P(FSS) = P(F)P(S)P(S) = (1-p)\ p\ p = p^2(1-p)$

Então $P(A) = P(SSF) + P(SFS) + P(FSS) = 3p^2(1-p)$.

Seja X a variável número de sucessos em 3 lançamentos. Na tabela apresentamos a f.p.

Tabela: Número de sucesso em 3 lançamentos e sua função de probabilidade.

X	$P(sucesso) = p$	$P(sucesso) = \frac{1}{6}$
0	$(1-p)^3$	$\frac{125}{216}$
1	$3p(1-p)^2$	$\frac{75}{216}$
2	$3p^2(1-p)$	$\frac{15}{216}$
3	p^3	$\frac{1}{216}$

De maneira geral, define-se experimento binomial aquele que

(a) consiste em n ensaios de Bernoulli,

(b) cujos ensaios são independentes

(c) e a probabilidade de sucesso em cada ensaio é **sempre** igual a p $(0 < p < 1)$.

Definição

Seja X o número total de sucessos obtidos na realização de n ensaios de Bernoulli, independentes, com probabilidade de sucesso p. Dizemos que X segue o modelo binomial com parâmetros n e p se a sua f.p. dada por

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \ x = 0, 1, \ldots, n.$$

Notação: $X \sim Bin(n, p)$.

Se $X \sim Bin(n, p)$, então sua esperança e sua variância são dadas, respectivamente, por

$$\mu = E(X) = np$$

e

$$\sigma^2 = Var(X) = np(1-p).$$

Exemplo

Um estudante faz um teste de múltipla escolha com 25 questões, cada uma com 4 alternativas, apenas chutando as respostas. Qual a probabilidade de o estudante acertar mais do que 20 questões? Quantas questões ele acerta em média e com qual variância?

Exemplo

Um estudante faz um teste de múltipla escolha com 25 questões, cada uma com 4 alternativas, apenas chutando as respostas. Qual a probabilidade de o estudante acertar mais do que 20 questões? Quantas questões ele acerta em média e com qual variância?

Estamos interessados em X = "número de questões certas das 25 do teste".

Exemplo

Um estudante faz um teste de múltipla escolha com 25 questões, cada uma com 4 alternativas, apenas chutando as respostas. Qual a probabilidade de o estudante acertar mais do que 20 questões? Quantas questões ele acerta em média e com qual variância?

Estamos interessados em X = "número de questões certas das 25 do teste".

Temos que $X \sim Bin(25, \frac{1}{4})$. Logo,

$$P(X > 20) = \sum_{x=21}^{25} P(X = x) = \sum_{x=21}^{25} \binom{25}{x} (0.25)^x (0.75)^{25-x} = 9 \cdot 10^{-10},$$

$$E(X) = np = 25 \cdot 0.25 = 6.25$$

e

$$Var(X) = np(1-p) = 25 \cdot 0.25 \cdot 0.75 = 4.6875.$$

Modelo geométrico e binomial negativo

Considere o experimento E que consiste em uma sequência de ensaios de de Bernoulli independentes, todos com probabilidade de sucesso p. Suponha agora que o experimento é repetido até a ocorrência do primeiro sucesso. Defina $X =$ "número de fracassos até a ocorrência do primeiro sucesso".

Modelo geométrico e binomial negativo

Considere o experimento E que consiste em uma sequência de ensaios de de Bernoulli independentes, todos com probabilidade de sucesso p. Suponha agora que o experimento é repetido até a ocorrência do primeiro sucesso. Defina $X =$ “número de fracassos até a ocorrência do primeiro sucesso”. Qual o conjunto imagem de X?

Modelo geométrico e binomial negativo

Considere o experimento E que consiste em uma sequência de ensaios de de Bernoulli independentes, todos com probabilidade de sucesso p. Suponha agora que o experimento é repetido até a ocorrência do primeiro sucesso. Defina $X =$ "número de fracassos até a ocorrência do primeiro sucesso". Qual o conjunto imagem de X?

Modelo geométrico e binomial negativo

Considere o experimento E que consiste em uma sequência de ensaios de de Bernoulli independentes, todos com probabilidade de sucesso p. Suponha agora que o experimento é repetido até a ocorrência do primeiro sucesso. Defina X = "número de fracassos até a ocorrência do primeiro sucesso". Qual o conjunto imagem de X? $Im(X) = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Definição

Seja X v.a. discreta com conjunto imagem $Im(X) = \{0, 1, 2, \ldots\}$ e f.p. dada por

$$P_X(x) = P(X = x) = (1 - p)^x p, \; x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dizemos que X tem distribuição geométrica com probabilidade de sucesso p. Notação: $X \sim Geo(p)$.

Se $X \sim Geo(p)$, então

$$\mu = E(X) = \frac{1-p}{p} \text{ e } \sigma^2 = Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Exemplo: Uma linha de produção está sendo analisada para efeito de controle de qualidade das peças produzidas. Como o custo de produção é alto, a produção é interrompida toda vez que que uma peça defeituosa é observada. Se 0.01 é a probabilidade de uma peça ser defeituosa, qual a probabilidade de que o número de peças boas produzidas seja menor ou igual a 3 antes de parar a produção? Qual o número esperado de peças boas produzidas antes de parar a produção?

A v.a. de interesse é dada por $X =$ "número de peças boas produzidas antes de parar a produção". Quem é o sucesso aqui?

A v.a. de interesse é dada por $X =$ "número de peças boas produzidas antes de parar a produção". Quem é o sucesso aqui?

$$p = P(sucesso) = P(\text{peça} \ \ \text{defeituosa}) = 0.01.$$

A v.a. de interesse é dada por $X =$ "número de peças boas produzidas antes de parar a produção". Quem é o sucesso aqui?

$$p = P(sucesso) = P(\text{peça defeituosa}) = 0.01.$$

Assim, $X \sim Geo(0.01)$ e, para $x = 0, 1, 2, \ldots$, A v.a. de interesse é dada por X = "número de peças boas produzidas antes de parar a produção". Quem é o sucesso aqui?

$$p = P(sucesso) = P(\text{peça defeituosa}) = 0.01.$$

Assim, $X \sim Geo(0.01)$ e, para $x = 0, 1, 2, \ldots$,

$$P(X = x) = (1 - p)^x p = (1 - 0.01)^x 0.01 = 0.99^x\ 0.01.$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 0.99^0\ 0.01 + 0.99^1\ 0.01 + 0.99^2\ 0.01 + 0.99^3\ 0.01 \\ &= 0.039 \end{aligned}$$

Além disso,

$$\mu = E(X) = \frac{1-p}{p} = \frac{1-0.01}{0.01} = 99$$

Ou seja, espera-se, em média, a produção de 99 peças boas antes da primeira parada da produção.

Exercício: E seu desvio-padrão? Que informação esse resultado agregaria ao problema?

Binomial Negativa

- A ideia é repetir o experimentos de Bernoulli de maneira independente e parar quando o evento de interesse ocorrer pela k-ésima vez.

Binomial Negativa

- A ideia é repetir o experimentos de Bernoulli de maneira independente e parar quando o evento de interesse ocorrer pela k-ésima vez.

- Continuamos a denominar esse evento de interesse como "sucesso".

Binomial Negativa

- A ideia é repetir o experimentos de Bernoulli de maneira independente e parar quando o evento de interesse ocorrer pela k-ésima vez.

- Continuamos a denominar esse evento de interesse como "sucesso".

- O termo negativa vem da inversão do interesse de análise (o número de réplicas é aleatório e o número de sucessos é constante) em relação à distribuição binomial (o número de réplicas é constante e o número de sucessos é aleatório).

Binomial Negativa

- A ideia é repetir o experimentos de Bernoulli de maneira independente e parar quando o evento de interesse ocorrer pela k-ésima vez.

- Continuamos a denominar esse evento de interesse como "sucesso".

- O termo negativa vem da inversão do interesse de análise (o número de réplicas é aleatório e o número de sucessos é constante) em relação à distribuição binomial (o número de réplicas é constante e o número de sucessos é aleatório).

- Aqui $X =$ “número de fracassos até a ocorrência do k-ésimo sucesso”

Definição

Seja X v.a. discreta com conjunto imagem $Im(X) = \{0, 1, 2 \ldots\}$ e f.p. dada por

$$P_X(x) = P(X = x) = \binom{k+x-1}{x} p^k (1-p)^x, x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dizemos que X tem distribuição binomial negativa com k sucessos e probabilidade de sucesso p. Notação: $X \sim BN(k, p)$.

Definição

Seja X v.a. discreta com conjunto imagem $Im(X) = \{0, 1, 2 \ldots\}$ e f.p. dada por

$$P_X(x) = P(X = x) = \binom{k+x-1}{x} p^k (1-p)^x, x = 0, 1, 2, \ldots .$$

Dizemos que X tem distribuição binomial negativa com k sucessos e probabilidade de sucesso p. Notação: $X \sim BN(k, p)$.

Se $X \sim BN(k, p)$, então

$$\mu = E(X) = k\frac{1-p}{p} \text{ e } \sigma^2 = Var(X) = k\frac{1-p}{p^2}.$$

Comentário

Observações:

- *é possível mostrar que uma v.a. binomial negativa com k sucessos e probabilidade de sucesso p é a soma de k v.a. geométricas independentes com probabilidade de sucesso p;*
- *se* $X \sim BN(k, p)$, *com* $k = 1$, *então* $X \sim Geo(p)$.

Exemplo

Você resolver ajudar um vizinho a vender 5 rifas para a escola e vão para uma rua movimentada. Supondo que a probabilidade das pessoas comprarem uma rifa é 0.4 (e que ninguém compre mais de uma rifa, e que as pessoas comprem a rifa de forma independente umas das outras), pergunta-se qual o número de abordagens fracassadas até a venda de tudo? E seu desvio-padrão?

Exemplo

Você resolver ajudar um vizinho a vender 5 rifas para a escola e vão para uma rua movimentada. Supondo que a probabilidade das pessoas comprarem uma rifa é 0.4 (e que ninguém compre mais de uma rifa, e que as pessoas comprem a rifa de forma independente umas das outras), pergunta-se qual o número de abordagens fracassadas até a venda de tudo? E seu desvio-padrão?

Defina X = "número de abordagens fracassadas até a venda da 5ª rifa ".
Temos que

$$\mu = E(X) = k\frac{1-p}{p} =$$

Defina $X =$ "número de abordagens fracassadas até a venda da $5^{\underline{a}}$ rifa ". Temos que

$$\mu = E(X) = k\frac{1-p}{p} = 5\left(\frac{1-0.4}{0.4}\right) = 7.5$$

$$\sigma^2 = Var(X) = k\frac{1-p}{p^2} =$$

Defina $X =$ "número de abordagens fracassadas até a venda da $5^{\underline{a}}$ rifa ".
Temos que

$$\mu = E(X) = k\frac{1-p}{p} = 5\left(\frac{1-0.4}{0.4}\right) = 7.5$$

$$\sigma^2 = Var(X) = k\frac{1-p}{p^2} = 5\left(\frac{1-0.4}{0.4^2}\right) = 18.75$$

Assim,

$$\sigma = DP(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{18.75} = 4.3$$

Em média, são necessárias 7.5 abordagens fracassadas antes de vender as 5 rifas, com um desvio-padrão de 4.3 abordagens.

Modelo Hipergeométrico

Considere um lote de N peças com K defeituosas. Suponha que n peças serão sorteadas **sem** reposição desse lote e serão inspecionadas. Seja $X =$ "número de peças defeituosas encontradas nas n sorteadas".

Comentário

Vale ressaltar alguns comentários:

1. *podemos enxergar o processo de inspeção de cada peça como uma realização de um experimento de Bernoulli, onde ela será classificada como defeituosa (sucesso) ou não defeituosa (fracasso);*

Modelo Hipergeométrico

Considere um lote de N peças com K defeituosas. Suponha que n peças serão sorteadas **sem** reposição desse lote e serão inspecionadas. Seja $X =$ "número de peças defeituosas encontradas nas n sorteadas".

Comentário

Vale ressaltar alguns comentários:

1. *podemos enxergar o processo de inspeção de cada peça como uma realização de um experimento de Bernoulli, onde ela será classificada como defeituosa (sucesso) ou não defeituosa (fracasso);*
2. *porém, as repetições de cada experimento não são mais independentes;*

Modelo Hipergeométrico

Considere um lote de N peças com K defeituosas. Suponha que n peças serão sorteadas **sem** reposição desse lote e serão inspecionadas. Seja $X =$ "número de peças defeituosas encontradas nas n sorteadas".

Comentário

Vale ressaltar alguns comentários:

1. *podemos enxergar o processo de inspeção de cada peça como uma realização de um experimento de Bernoulli, onde ela será classificada como defeituosa (sucesso) ou não defeituosa (fracasso);*
2. *porém, as repetições de cada experimento não são mais independentes;*
3. *portanto, embora parecida com a v.a. binomial, pelo fato das repetições dos experimentos de Bernoulli não serem independentes, X tem outra função de probabilidade.*

Modelo Hipergeométrico

Definição

Seja X v.a. discreta com conjunto imagem $Im(X) = \{\max(0, n - (N - K)), \ldots, \min(K, n)\}$ e f.p. dada por

$$P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \ x \in Im(X).$$

Dizemos que X tem distribuição hipergeométrica com N elementos, K do tipo 1 e n sorteados. Notação: $X \sim HG(N, K, n)$.

É possível mostrar que, se $X \sim HG(N, K, n)$, então

$$\mu = E(X) = np \quad \text{e} \quad \sigma^2 = Var(X) = np(1-p)\overbrace{\frac{(N-n)}{(N-1)}}^{(*)},$$

onde $p = K/N$. O termo $(*)$ é conhecido como fator de correção.

Exemplo

Numa caixa com 10 CD´s, sabemos que 2 são defeituosos. Se 3 CD´s são escolhidos ao acaso, qual a probabilidade de exatamente 2 serem defeituosos?

Exemplo

Numa caixa com 10 CD´s, sabemos que 2 são defeituosos. Se 3 CD´s são escolhidos ao acaso, qual a probabilidade de exatamente 2 serem defeituosos?

Defina X = "número de CD´s defeituosos encontrados no sorteio de 3 CD's".

Temos que $N = 10$ números no total de CD´s na caixa, $n = 3$ são escolhidos pelo indivíduo e $K = 2$ são os elementos defeituosos na caixa.. Queremos encontrar, a $P(X = 2)$, assim,

$$P(X = 2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{10-2}{3-2}}{\binom{10}{3}} = \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = 0.056.$$

Modelo Poisson

Definição

Suponha X v.a. discreta com conjunto imagem $Im(X) = \{0, 1, \ldots\}$. Admita que a f.p. de X seja

$$P_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, \ldots,$$

onde $\lambda > 0$. Dizemos que X tem v.a. Poisson com parâmetro λ. Notação: $X \sim Poisson(\lambda)$.

É possível mostrar que se $X \sim Poisson(\lambda)$, então $\mu = E(X) = \lambda$ e $\sigma^2 = Var(X) = \lambda$.

A distribuição de Poisson é muito utilizada para modelar o número de ocorrências de eventos em um intervalo contínuo (seja de tempo, comprimento, área e etc.).

A distribuição de Poisson é muito utilizada para modelar o número de ocorrências de eventos em um intervalo contínuo (seja de tempo, comprimento, área e etc.).

Alguns exemplos:

- Número de chamadas telefônicas recebidas em uma central telefônica em 10 minutos;
- Número de falhas de um computador numa semana de operação;
- número de relatórios de acidentes enviados a uma companhia de seguros em um mês.

Exemplo

As consultas em uma banco de dados ocorrem de forma independente e aleatória, com uma taxa média de três consultas por minuto.

Exemplo

As consultas em uma banco de dados ocorrem de forma independente e aleatória, com uma taxa média de três consultas por minuto. Qual a probabilidade de se observar menos que 3 ocorrências nos próximos dois minutos?

Exemplo

As consultas em uma banco de dados ocorrem de forma independente e aleatória, com uma taxa média de três consultas por minuto. Qual a probabilidade de se observar menos que 3 ocorrências nos próximos dois minutos?

Primeiramente, temos que $\lambda = 3 \times 2 = 6$, ou seja, espera-se uma taxa média de 6 ligações em 2 minutos. Assim, o número de ocorrências em dois minutos é modelado por $X \sim Poisson(6)$ e

$$
\begin{aligned}
P(X < 3) = \sum_{x=0}^{2} P(X = x) &= \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-6}\,6^{x}}{x!} \\
&= e^{-6}\left(1 + 6 + \frac{6^2}{2}\right) = e^{-6}(1 + 6 + 18) \\
&= 25\, e^{-6} \approx 0.062.
\end{aligned}
$$