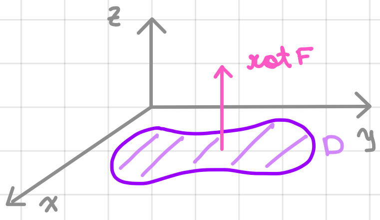
AULA 9 Cálculo 3A 2020.2

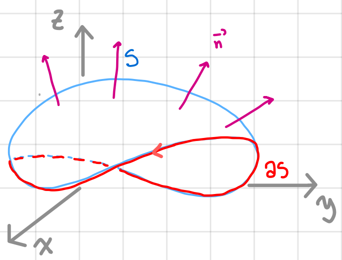
16.8 Teorema de Stokes

Em resumo o teorema Stokes estende o teorema de Green para superfície



Green

$$\iint_D \text{rot}\, F \cdot k\, dA = \int_{\partial D} F \cdot dr$$



Stokes

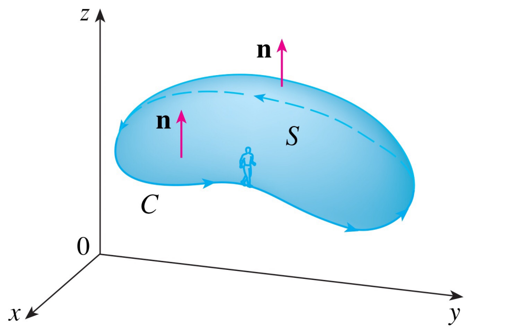
$$\iint_S \text{rot}\, F \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot dr$$

Mas precisa trabalhar outros elementos

Definição

Seja $\vec{n}$ uma orientação para a superfície S
A fronteira de S, denotamos por $\partial S : x(t),\ a \leq t \leq b$ tem **orientação positiva** se ao andar pela curva ∂S no sentido crescente de t com a cabeça na direção do velor $\vec{n}$ a superfície estará sempre a esquerda

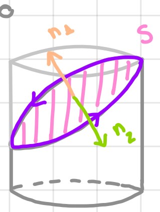
(a orientação da curva ∂S é compatível com a regra da mão direita: polegar da mão direita aponta para $\vec{n}$ e os dedos se dobram na direção de ∂S



Exemplo

S é a parte do plano $y+z=2$ dentro do cilindro $x^2+y^2=1$.
Qual a orientação de S para que ∂S seja compatível
é orientada no sentido anti-horário quando visto de cima

Solução



normal ao plano

$ax+by+cz=d$

$\vec{n}=(a,b,c)$ é o normal

$0x+y+z=2$

$\vec{n_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$

$\vec{n_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,-1)$

para a orientação ∂S e S serem compatível $n = n_1$.

Nestas condições que se aplica o Stokes. Vamos ver o enunciado

Teorema de Stokes

Seja S uma superfície orientada, suave por partes, cuja a fronteira é formada por uma curva fechada, simples, suave por partes, com orientação positiva
Seja F um campo de vetores cujas componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta de $\mathbb{R}^3$ que contém S.
Então

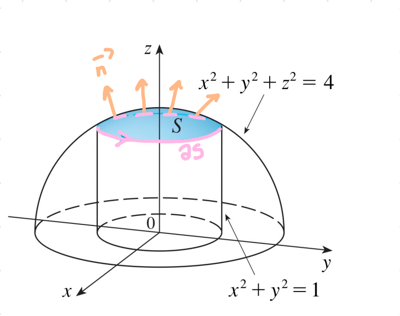
$$\iint_S \text{rot}\, F\, dS = \int_{\partial S} F \cdot dx$$

Exemplo

Calcule $\iint_S \text{rot} F \cdot dS$ onde $F(x,y,z) = xz\,i + yz\,j + xy\,k$

e S é a esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que está dentro do cilindro $x^2+y^2=1$ acima do plano xy ($\vec{n}$ com a coordenada k positiva.

Solução: usar o Stokes que é mais fácil



$$\underbrace{\iint_S \text{rot} F \, dS}_{\text{nem}} = \int_{\partial S} F \cdot dr$$

precisa calcular

parametrizar ∂S:

interseção: $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$

$$1 + z^2 = 4 \to \underbrace{z = \sqrt{3}}_{\substack{\text{parte de} \\ \text{cima} \\ \text{de } xy}}$$

$$\partial S: r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \sqrt{3}) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$r'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$$

$$F(r(t)) = \sqrt{3}\cos t\, i + \sqrt{3}\operatorname{sen} t\, j + \cos t \operatorname{sen} t\, k$$

$$\iint_S \text{rot} F \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{t} -\sqrt{3}\cos t \operatorname{sen} t + \sqrt{3}\operatorname{sen} t \cos t = 0$$

Observação

Segue do teorema de Stokes que se S_1, S_2 são superfície com mesma fronteira C então

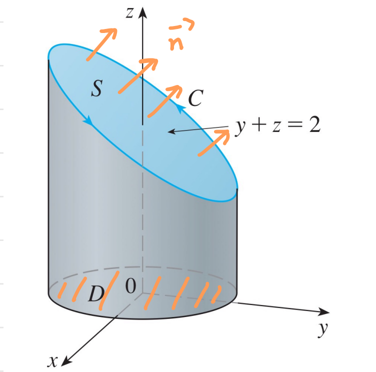
$$\iint_{S_1} \text{rot} F \cdot dS = \iint_{S_2} \text{rot} F \cdot dS$$

Exemplo

Calcule $\int_C F \cdot dr$ onde $F(x,y,z) = -y^2 i + x j + z^2 k$

e C é a curva da interseção do plano $y+z=2$ com o cilindro $x^2+y^2=1$ orientado no sentido anti-horário visto de cima.

Solução



Vamos usar o Stokes, mais fácil pois o F não é conservativo

$$\text{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1+2y)\vec{k}$$

S: superfície dada pelo plano $y+z=2$ que está dentro do cilindro

↳ $r(x,y) = y\,j + (2-y)\,k \quad (x,y) \in D$

o normal é $r_x \times r_y = (0,1,1)$

$\vec{n}$ e a orientação da curva estão compatíveis

$$\int_C F\cdot dr = \iint_S \text{rot}\, F\cdot dS = \iint_D \text{rot}\,F(r(x,y))\cdot r_x\times r_y \, dA$$

$$= \iint_D \underbrace{(0,0,1+2y)}_{= \text{rot}\,F(r(x,y))} \cdot (0,1,1)\, dA$$

D: região circular, usar coordenadas polares $\quad x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+2r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

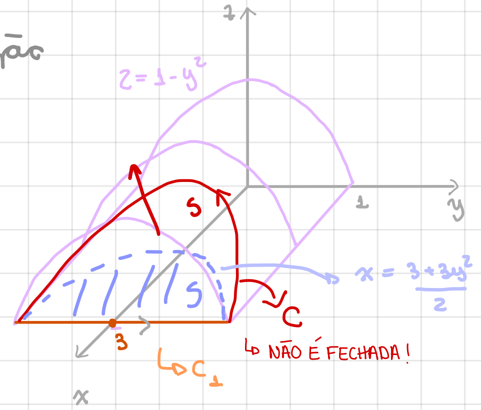
$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} - \frac{2r^3}{3}\,\text{sen}\,\theta \,\Big|_0^1 \, d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{2}{3}\cos\theta \,\Big|_0^{2\pi}\right] = \pi$$

Exemplo

Calcule $\int_C F\cdot dr$ onde $F(x,y,z) = (z^2, xz, xy)$ e C é a curva obtida pela interseção da superfície $z = 1-y^2$, $z \geq 0$ com o plano $2x+3z=6$ orientação, quando visto de cima, no sentido anti-horário

Solução



usar Stoke: $= \int_{C_1\cup C} F\cdot dr = \iint_S \text{rot}\,F\cdot dS$

$$\int_C F\cdot dr + \underbrace{\int_{C_1} F\,dr}_{\text{calcular também}} \leftarrow \int_{\underbrace{C_1\cup C}_{\text{fronteira de S (curva fechada)}}}$$

$$\text{rot}\,F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z^2 & xz & xy \end{vmatrix} = xi + 2(z-y)j + zk$$

$S:\quad z = \frac{6-2x}{3}, \quad (x,y)\in D$

descrever D: $\quad z = 1-y^2$, $2x+3z = 6$ $\quad 2x+3(1-y^2) = 6$, $x = \frac{3+3y^2}{2}$

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R} : -1\leq y\leq 1,\ \frac{3+3y^2}{2}\leq x\leq 3\right\}$$

$$\iint_S \text{rot}\,F\cdot dS = \int_{-1}^{1}\int_{\frac{3+3y}{2}}^{3} \text{rot}\,F\left(x,y,2-\frac{2}{3}x\right)\cdot \underbrace{\left(\frac{2}{3},0,1\right)}_{\text{gráfico de função } -\frac{\partial g}{\partial x}i-\frac{\partial g}{\partial y}j+k}\, dA$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{\frac{3+3y^2}{2}}^{3} \frac{2}{3}x + 2 - \frac{2}{3}x \, dx\,dy = \int_{-1}^{1} 2x\,\Big|_{\frac{3+3y^2}{2}}^{3}$$

$$= \int_{-1}^{1} 6-3-3y^2\,dy = 3\left[y-\frac{y^3}{3}\,\Big|_{-1}^{1}\right]$$

$$= 4.$$

Agora calcular $\int_{C_1} F\cdot dr$

$C_1:\ r(t) = (3,t,0) \quad -1\leq t\leq 1$

$r'(t) = (0,1,0)$

$F(r(t))\cdot r'(t) = 0$

portanto $\int_{C_1} F\cdot dr = 0$

Assim

$$\int_C F\cdot dr = -\int_{C_1} F\cdot dr + \iint_S \text{rot}\,F\cdot dS = 4$$