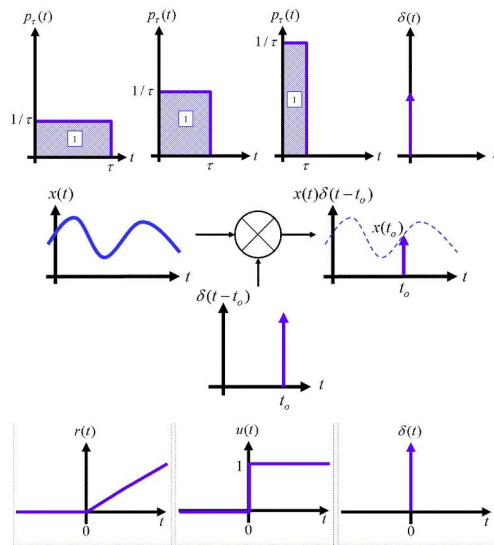


# Sinais de Tempo contínuo (Parte I)

Professor

Jorge Leonid Aching Samatelo  
[jlasm001@gmail.com](mailto:jlasm001@gmail.com)



## Índice

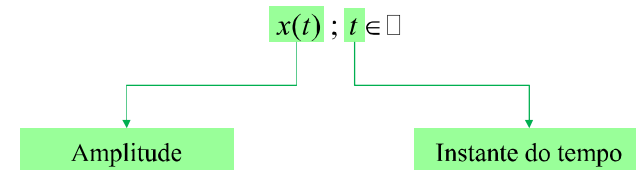
- ☐ Introdução
- ☐ Sinais Elementares
- ☐ Classificação dos sinais contínuos
- ☐ Transformações da variável independente
- ☐ Bibliografia

## Introdução

## Introdução

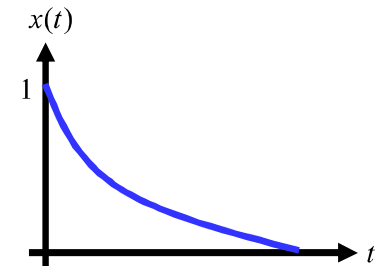
### Notação

- ☐ Os sinais de tempo contínuo são definidos para todo instante do tempo, sendo escritos normalmente em função de  $t$ .



- ☐ Exemplo de sinal de tempo contínuo.

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



## Sinais Elementares

7

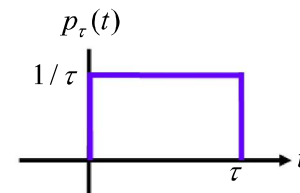
## Sinais Elementares

### Pulso Unitário

#### Função Matemática

➤ Tem largura  $\tau$  e amplitude  $1/\tau$

$$p_{\tau}(t) = \begin{cases} 1/\tau & 0 < t < \tau \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$



#### Propriedades

➤ Tem área é unitária.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\tau}(t) dt = 1$$

8

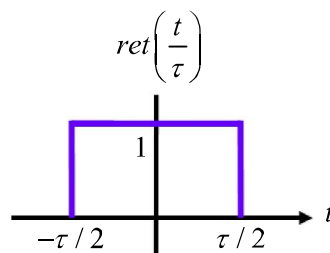
## Sinais Elementares

### Pulso Porta Unitário

#### Função Matemática

➤ Tem largura  $\tau$  e amplitude 1.

$$\text{ret}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$



#### Propriedades

➤ Tem área é unitária se  $\tau = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{ret}(t) dt = 1$$

9

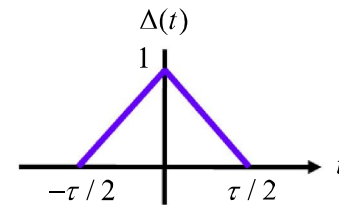
## Sinais Elementares

### Pulso Triangular Unitário

#### Função Matemática

➤ Tem base  $\tau$  e amplitude 1.

$$\Delta(t) = \begin{cases} 1 - 2\left|\frac{t}{\tau}\right| & -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$



#### Propriedades

➤ Tem área unitária se  $\tau = 2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(t) dt = 1$$

10

## Sinais Elementares

### Impulso Unitário

#### Função Matemática

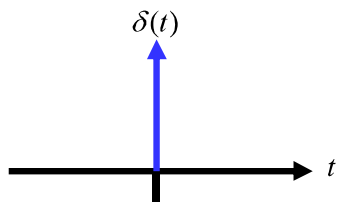
- Denominado também como: *Função Delta de Dirac*.
- Idealismo matemático para um *evento instantâneo*.
- O impulso unitário denotada por  $\delta(t)$  foi definida por Dirac como

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases}$$

#### Principal Propriedade

- Tem área unitária.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$



11

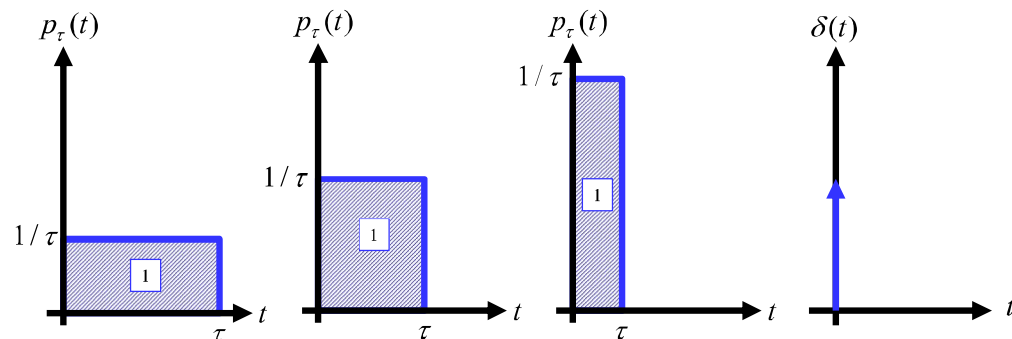
## Sinais Elementares

### Impulso Unitário

#### Interpretação geométrica

- O impulso unitário pode ser definido como um *caso limite do pulso retangular unitário*

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} p_{\tau}(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases}$$



12

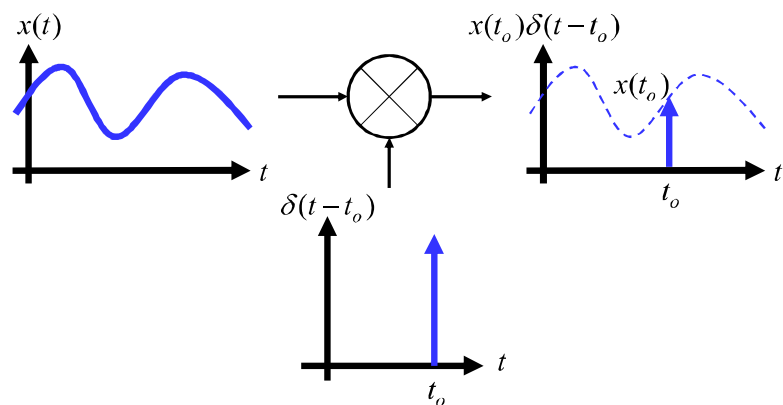
## Sinais Elementares

### Impulso Unitário

#### Propriedades

- *Translação*

$$x(t)\delta(t-t_o) = x(t_o)\delta(t-t_o)$$



14

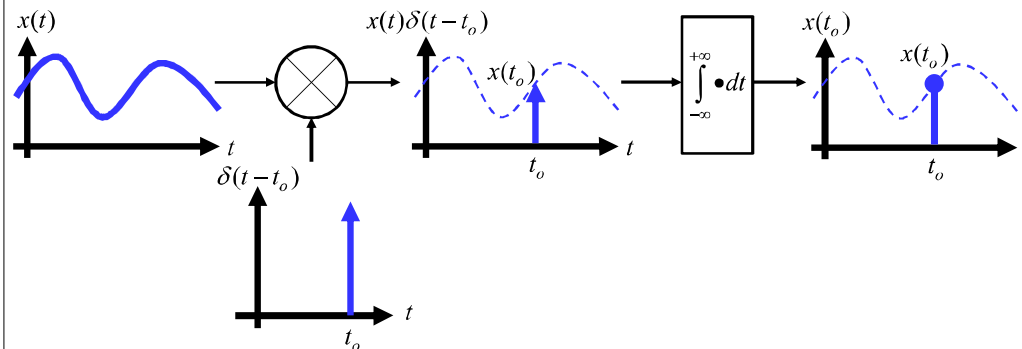
## Sinais Elementares

### Impulso Unitário

#### Propriedades

- *Propriedade da Filtragem*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_o)dt = x(t_o)$$



15

# Sinais Elementares

## Impulso Unitário

### □ Maior informação

➤ <https://jkogler.wordpress.com/2008/06/14/delta-de-dirac-ou-impulso-unitario/>

CATEGORIAS

Selecionar categoria

ARTIGOS RECENTES

EBICC 2015 – Workshop de Ciência Cognitiva

Lei de Ohm e resistores não-lineares

Programação com LabVIEW – 2

Programação com LabVIEW – 1

Imagens de webcam e câmeras USB com LabVIEW

Introdução ao LabVIEW

Série de Fourier e Transformada de Fourier – I

Delta de Dirac ou impulso unitário

Números Complexos e Exponenciais Complexas

Henrique Schützer Del Nero

Lei de Ohm versus resistência incremental – II

Lei de Ohm versus resistência incremental

Lei de Ohm

Propagação de erros

### Delta de Dirac ou impulso unitário

junho 14, 2008 in Matemática | Tags: Matemática

**Objetivos**

Apresentar o conceito e algumas propriedades importantes do impulso unitário e suas aplicações.

**O degrau unitário de Heaviside**

Considere a seguinte função  $f(x)$ , contínua e seccionalmente diferenciável:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \leq x_0 \\ \frac{x-x_0}{x_1-x_0}, & \text{para } x \in [x_0, x_1] \\ 1, & \text{para } x \geq x_1 \end{cases}$$

Essa função é conhecida como "rampa" limitada, ou rampa saturada. Sua derivada é definida em toda parte, exceto nos pontos  $x_0$  e  $x_1$ :

$$\frac{d}{dx}f(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < x_0 \\ \frac{1}{x_1-x_0}, & \text{para } x \in (x_0, x_1) \\ 0, & \text{para } x > x_1 \end{cases}$$

A função e sua derivada são ilustradas na figura 1a. Suponha, agora, que façamos  $x_1 \rightarrow x_0$ . No limite, obteremos  $H(x)$ , o chamado degrau unitário, proposta por Heaviside para descrever transições abruptas idealizadas. Sua "derivada" pode ser estimada a partir da derivada de  $f(x)$ , fazendo-se  $x_1$  tender a  $x_0$ . Essa construção está ilustrada nas figuras 1b e 1c.

16

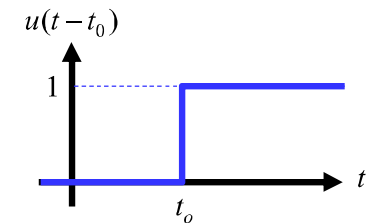
# Sinais Elementares

## Degrau Unitário

### □ Função Matemática

➤ Denominado também como: *Função de Heaviside*.

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t-t_0 \geq 0 \\ 0 & t-t_0 < 0 \end{cases}$$



17

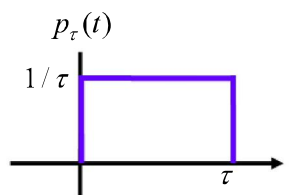
# Sinais Elementares

## Degrau Unitário

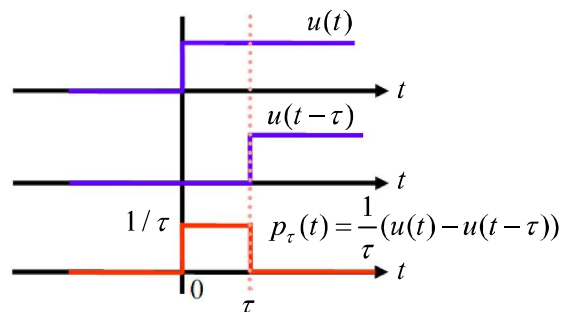
### □ Relação entre o Pulso Unitário e o Degrau Unitário

$$p_\tau(t) = \begin{cases} 1/\tau & 0 < t < \tau \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\tau}(u(t) - u(t-\tau))$$



### □ Demonstração



18

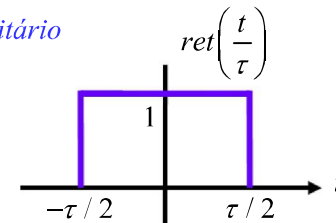
# Sinais Elementares

## Degrau Unitário

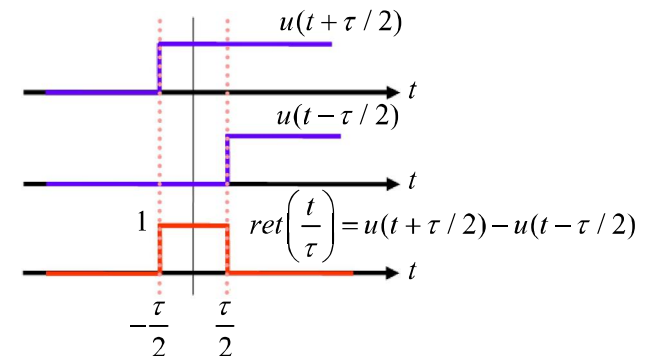
### □ Relação entre o pulso Porta Unitário e o Degrau Unitário

$$\text{ret}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$= u(t + \tau/2) - u(t - \tau/2)$$



### □ Demonstração



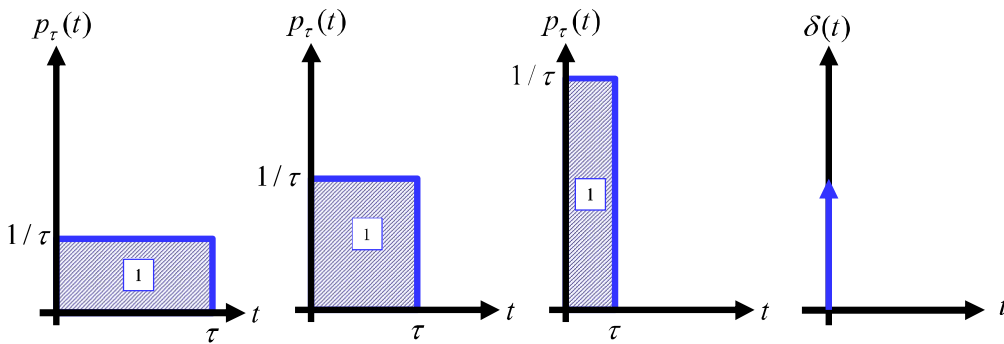
19

## Sinais Elementares

### Degrau Unitário

#### Relação entre o Impulso Unitário e o Degrau Unitário

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} p_{\tau}(t)$$



20

## Sinais Elementares

### Degrau Unitário

#### Relação entre o Impulso Unitário e o Degrau Unitário

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} p_{\tau}(t) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u(t) - u(t - \tau)}{\tau} \quad p_{\tau}(t) = \frac{1}{\tau}(u(t) - u(t - \tau)) \\ &= \frac{du(t)}{dt} \end{aligned}$$



Teorema fundamental do cálculo

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt$$

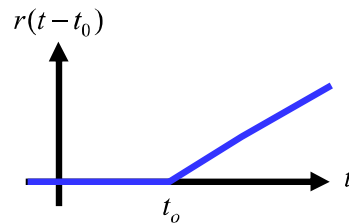
21

## Sinais Elementares

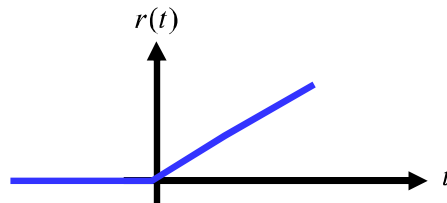
### Rampa Unitária

#### Função Matemática

$$r(t - t_0) = \begin{cases} t - t_0 & t - t_0 \geq 0 \\ 0 & t - t_0 < 0 \end{cases}$$



$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



22

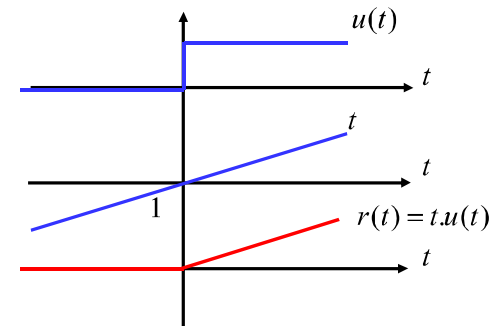
## Sinais Elementares

### Rampa Unitária

#### Relação entre a função Rampa Unitária e o Degrau Unitário

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = t \underbrace{\begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}}_{=u(t)} = tu(t)$$

#### Demonstração



23

## Sinais Elementares

### Rampa Unitária

#### Relação entre o Degrau Unitário e a Rampa Unitária

$$r(t) = t \cdot u(t)$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{d(t \cdot u(t))}{dt}$$

$$= t \frac{du(t)}{dt} + u(t) \frac{dt}{dt}$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$= t\delta(t) + u(t)$$

$$= u(t)$$

Relação entre o Impulso Unitário e o Degrau Unitário

Propriedade da Translação

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

Teorema fundamental do cálculo

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(t) dt$$

24

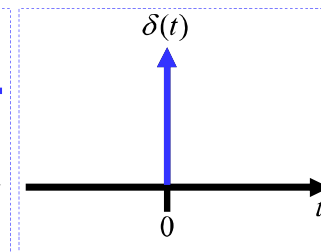
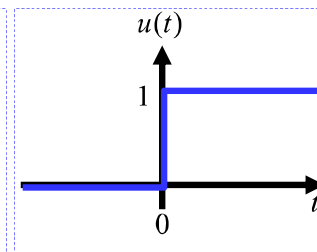
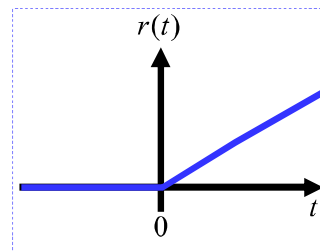
## Sinais Elementares

### Diferenciação e Integração

#### INTEGRAÇÃO

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(t) dt$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt$$



$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

#### DIFERENCIAÇÃO

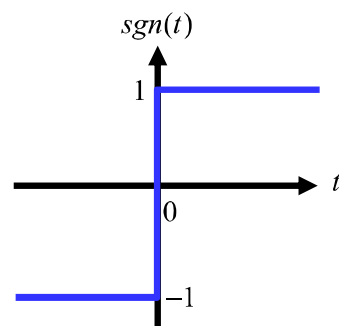
25

## Sinais Elementares

### Sign (Sinal)

#### Função Matemática

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



#### Propriedades

$$\text{sgn}(t) = -\text{sgn}(-t)$$

Sinal assimétrico (impar)

Simetria em relação ao origem

26

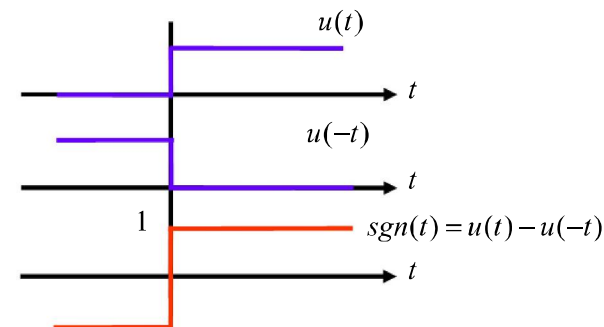
## Sinais Elementares

### Sign (Sinal)

#### Relação entre a função Sign e o Degrau Unitário

$$\begin{aligned} \text{sgn}(t) &= \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} + \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} - \begin{cases} 1 & -t > 0 \\ 0 & -t < 0 \end{cases} \\ &= u(t) - u(-t) \end{aligned}$$

#### Demonstração

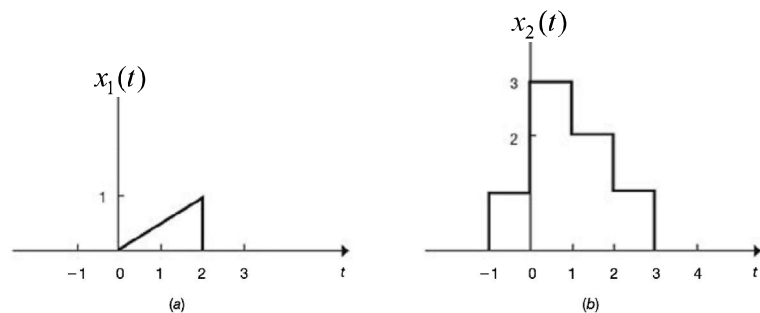


27

## Sinais Elementares

### Exemplo

- Representar a  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  como uma soma de sinais degrau.

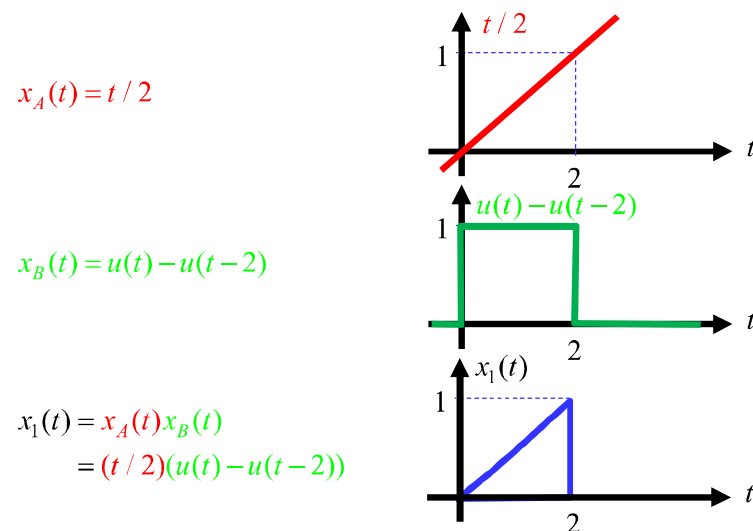


28

## Sinais Elementares

### Solução

- **Caso 1.** Representando a  $x_1(t)$  como uma soma de sinais degrau.  
 ➤ Podemos ver que,  $x_1(t)$  a multiplicação de uma reta com uma função pulso.

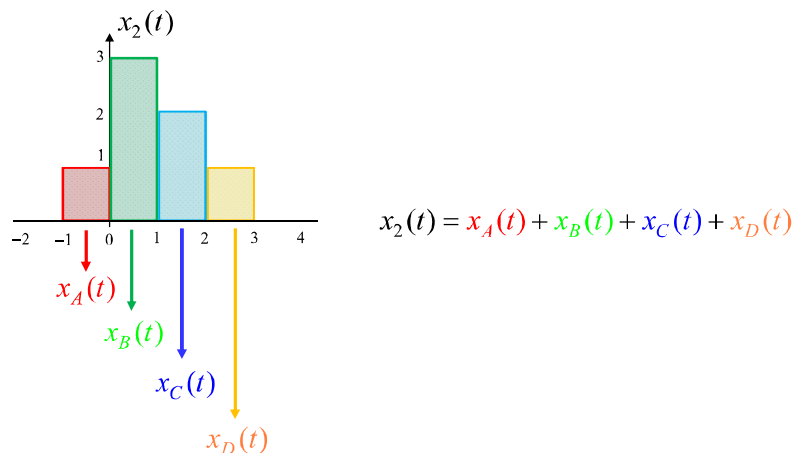


29

## Sinais Elementares

### Solução

- **Caso 2.** Representando a  $x_2(t)$  como uma soma de sinais degrau.  
 ➤ Podemos ver que,  $x_2(t)$  é a soma de um conjunto de pulsos.

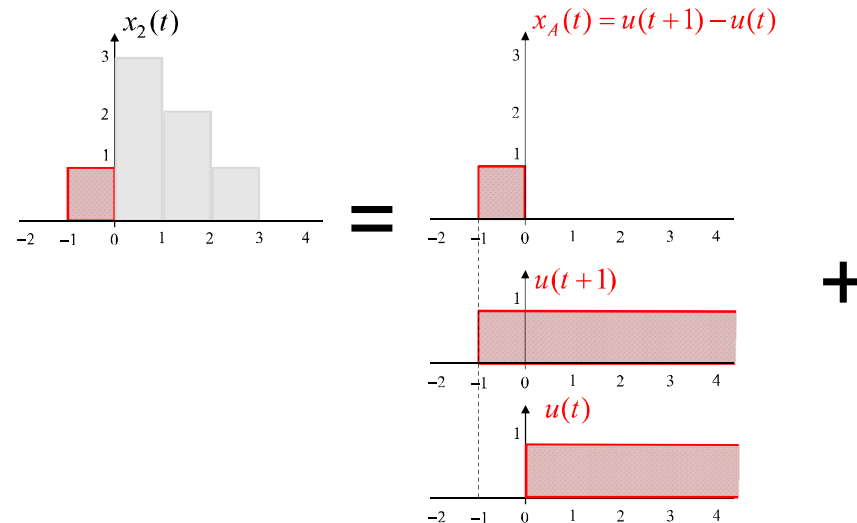


30

## Sinais Elementares

### Solução

- **Caso 2.** Representando a  $x_2(t)$  como uma soma de sinais degrau.  
 ➤ Podemos ver que,  $x_2(t)$  é a soma de um conjunto de pulsos.



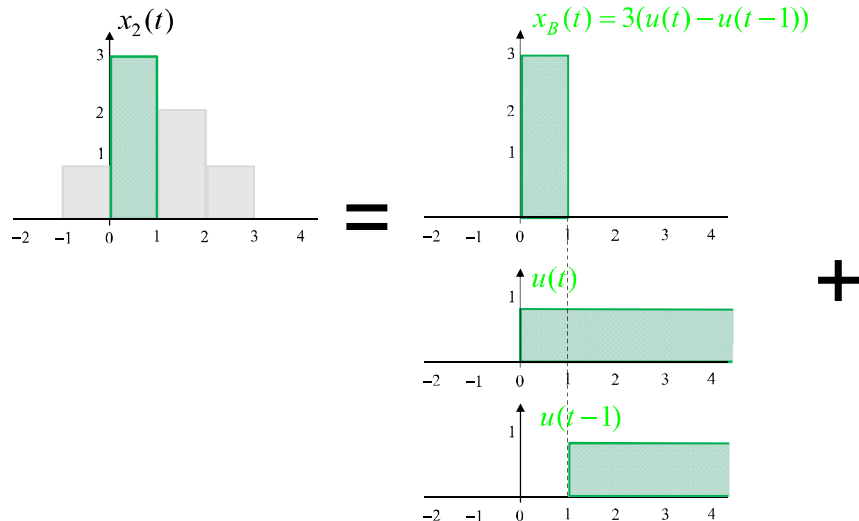
31

## Sinais Elementares

### Solução

❑ **Caso 2.** Representando a  $x_2(t)$  como uma soma de sinais degrau.

➤ Podemos ver que,  $x_2(t)$  é a soma de um conjunto de pulsos.



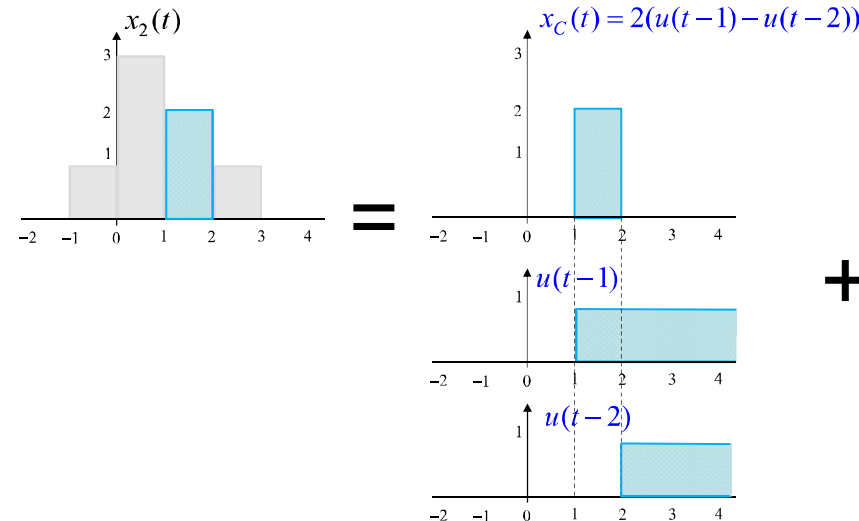
32

## Sinais Elementares

### Solução

❑ **Caso 2.** Representando a  $x_2(t)$  como uma soma de sinais degrau.

➤ Podemos ver que,  $x_2(t)$  é a soma de um conjunto de pulsos.



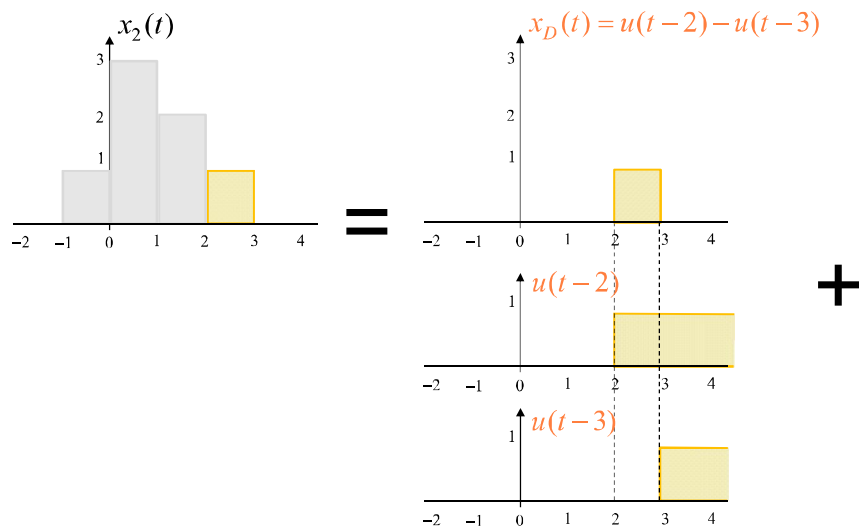
33

## Sinais Elementares

### Solução

❑ **Caso 2.** Representando a  $x_2(t)$  como uma soma de sinais degrau.

➤ Podemos ver que,  $x_2(t)$  é a soma de um conjunto de pulsos.



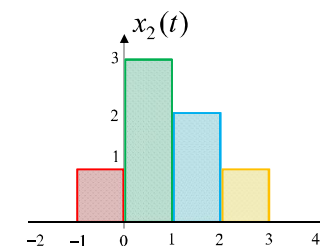
34

## Sinais Elementares

### Solução

❑ **Caso 2.** Representando a  $x_2(t)$  como uma soma de sinais degrau.

➤ Podemos ver que,  $x_2(t)$  é a soma de um conjunto de pulsos.



$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_A(t) + x_B(t) + x_C(t) + x_D(t) \\ &= (u(t+1) - u(t)) + 3(u(t) - u(t-1)) + \\ &\quad 2(u(t-1) - u(t-2)) + (u(t-2) - u(t-3)) \\ &= u(t+1) + 2u(t) - u(t-1) - u(t-2) - u(t-3) \end{aligned}$$

35



# Sinais Elementares

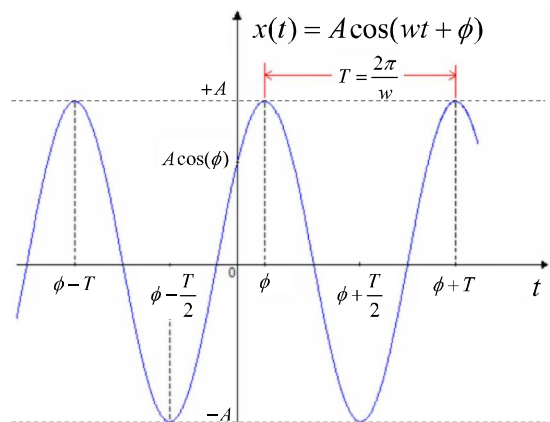
## Sinal Sinusoidal

### Função Matemática

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Diagrama de identificação de parâmetros para a equação  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ :

- Amplitude**:  $A$
- Frequência angular (rad/sg)**:  $\omega$
- fase**:  $\phi$



36

# Sinais Elementares

## Sinal Sinusoidal

### Função Matemática

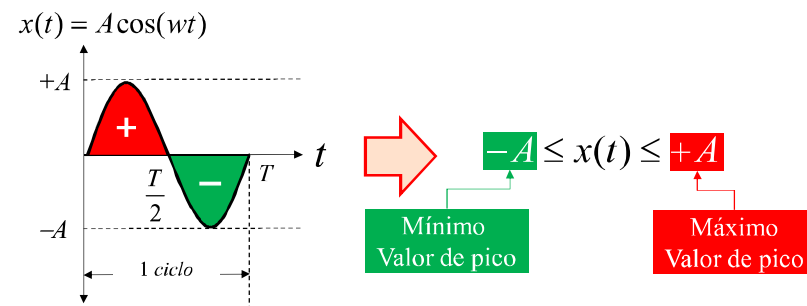
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Diagrama de identificação de parâmetros para a equação  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ :

- Amplitude**:  $A$
- Frequência angular (rad/sg)**:  $\omega$
- fase**:  $\phi$

### Amplitude

- é um valor de pico de um sinal sinusoidal, indicando o máximo e mínimo valor que pode assumir em amplitude a senoide.



37

# Sinais Elementares

## Sinal Sinusoidal

### Função Matemática

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

Diagrama de identificação de parâmetros para a equação  $x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$ :

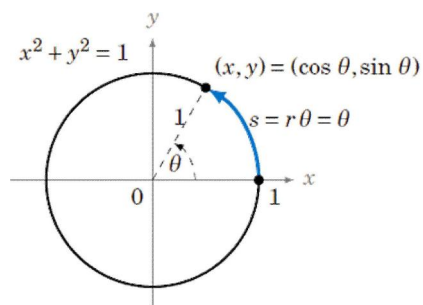
- Amplitude**:  $A$
- Frequência angular (rad/sg)**:  $\omega$
- fase**:  $\theta$

### Frequência Angular, Período e a Frequência

- Podemos representar os sinais sinusoidais (seno e cosseno) como uma coordenada (ponto) de um círculo de radio unidade.

$$x(t) = \cos(\omega t) = \cos(\theta)$$

$$y(t) = \sin(\omega t) = \sin(\theta)$$



38

# Sinais Elementares

## Sinal Sinusoidal

### Função Matemática

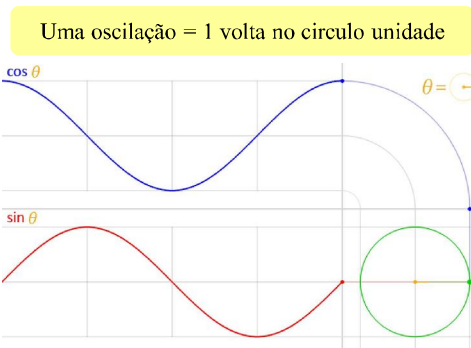
$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

Diagrama de identificação de parâmetros para a equação  $x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$ :

- Amplitude**:  $A$
- Frequência angular (rad/sg)**:  $\omega$
- fase**:  $\theta$

### Frequência Angular, Período e a Frequência

- A medida que o ponto  $(x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$  percorre o círculo unidade as componentes sinusoidais oscilam.



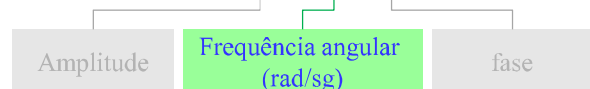
39

# Sinais Elementares

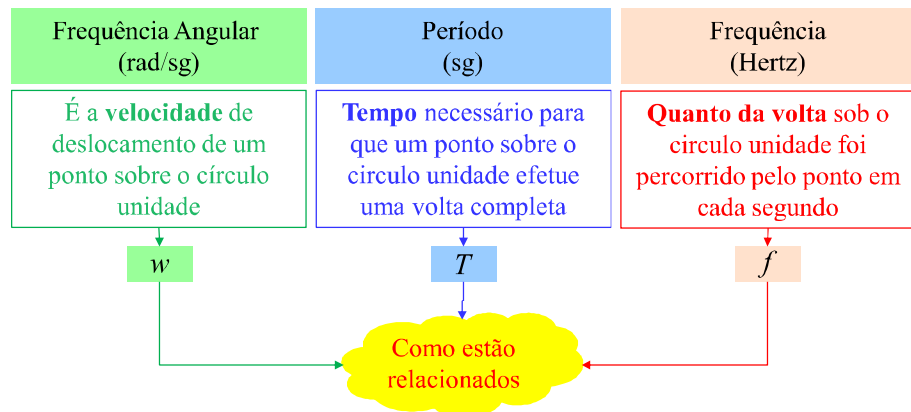
## Sinal Sinusoidal

### Função Matemática

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$



### Frequência Angular, Período e a Frequência



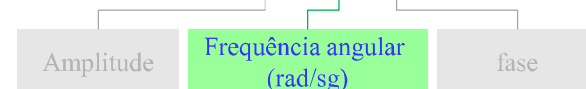
40

# Sinais Elementares

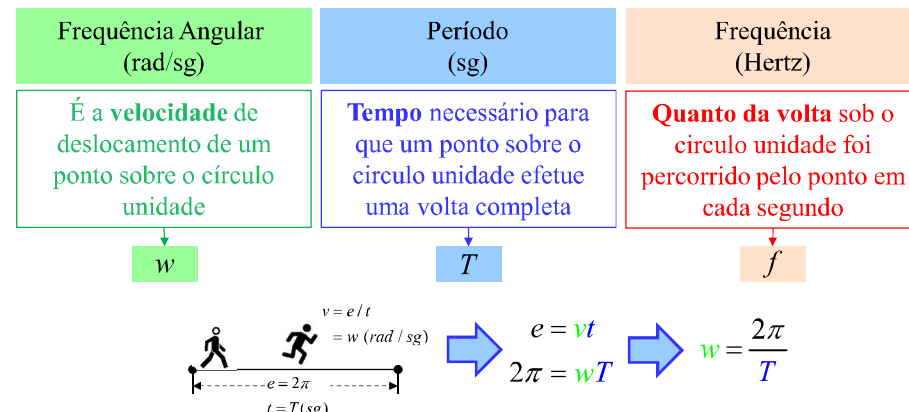
## Sinal Sinusoidal

### Função Matemática

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$



### Frequência Angular, Período e a Frequência



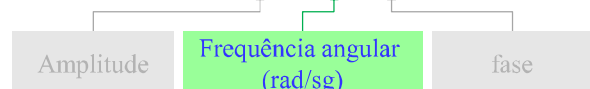
41

# Sinais Elementares

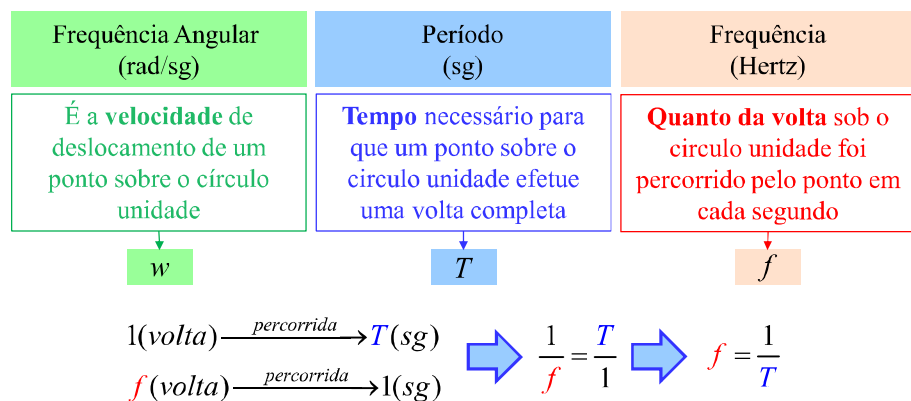
## Sinal Sinusoidal

### Função Matemática

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$



### Frequência Angular, Período e a Frequência



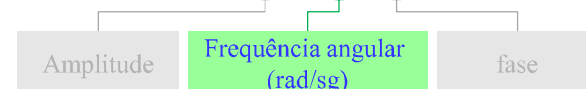
42

# Sinais Elementares

## Sinal Sinusoidal

### Função Matemática

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$



### Frequência Angular, Período e a Frequência

- Se uma volta completa de  $2\pi$  é percorrida em 8 sg, então:
- ❖ O período é  $T = 8$  (sg).
  - ❖ A frequência angular é  $\omega = 2\pi/8$  (rad/sg)
  - ❖ A frequência é  $f = 1/8$  (Hz) (Em cada sg. 1/8 de volta é percorrida).

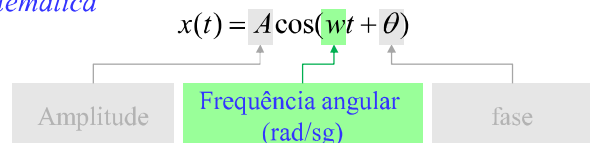


45

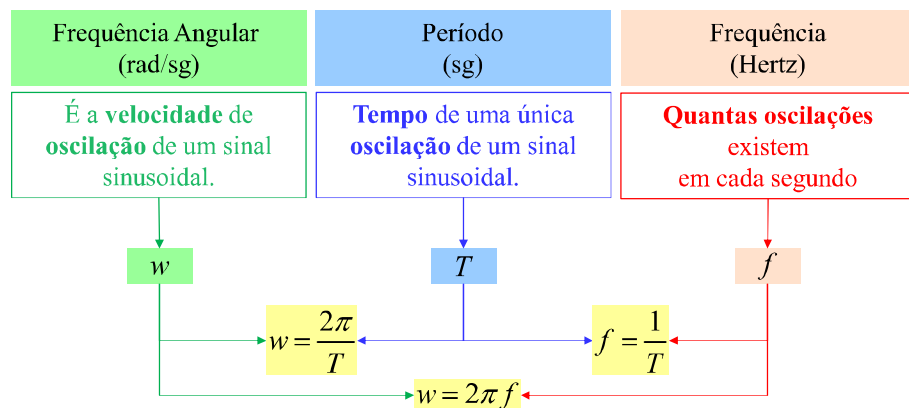
# Sinais Elementares

## Sinal Sinusoidal

### Função Matemática



### Frequência Angular, Período e a Frequência

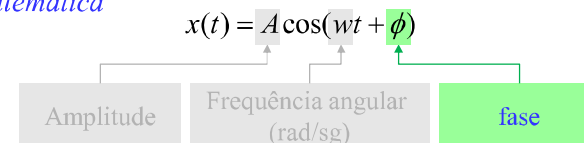


47

# Sinais Elementares

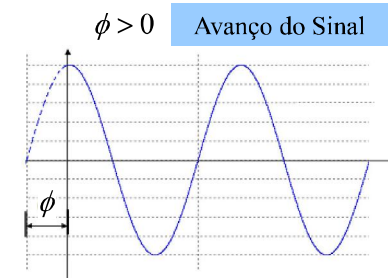
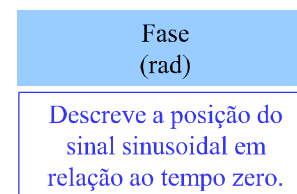
## Sinal Sinusoidal

### Função Matemática



### Fase

- Se para  $t=0$  a amplitude é diferente de zero, dizemos que o sinal tem uma fase inicial.

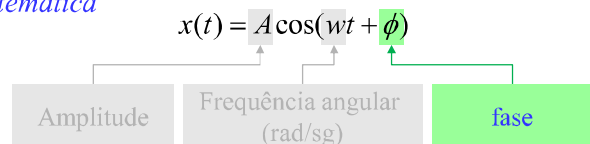


48

# Sinais Elementares

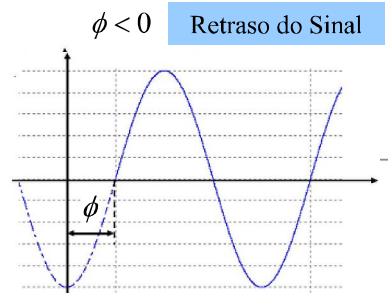
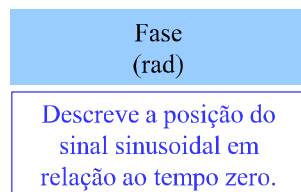
## Sinal Sinusoidal

### Função Matemática



### Fase

- Se para  $t=0$  a amplitude é diferente de zero, dizemos que o sinal tem uma fase inicial.



49

# Sinais Elementares

## Sinal Sinusoidal

### Exemplo

- Para os seguintes sinais sinusoidais determinar:

- Frequência angular ( $\omega$ ).
- Frequência ( $f$ ).
- Período ( $T$ ).
- ângulo de fase inicial ( $\phi$ ).

a)

$$x_1(t) = 10 \sin\left(20000\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

b)

$$x_2(t) = 15 \sin\left(8000\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$$

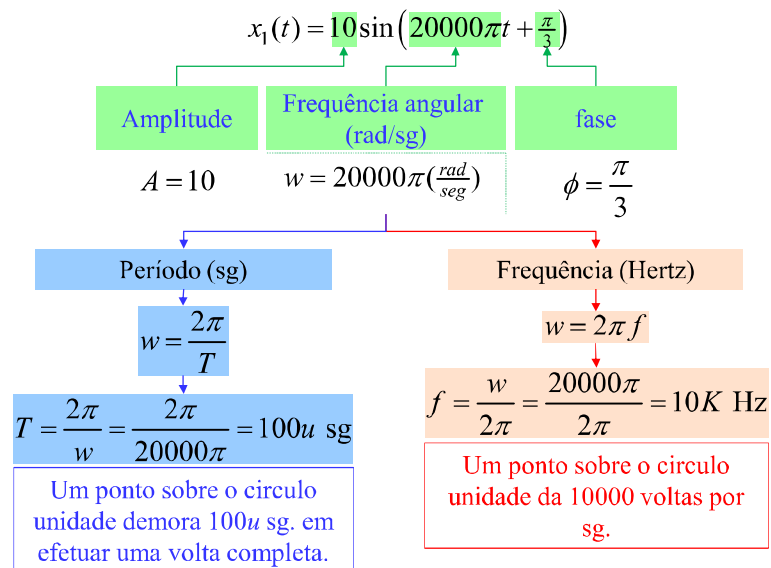
50

## Sinais Elementares

### Sinal Sinusoidal

#### Solução

□ a)



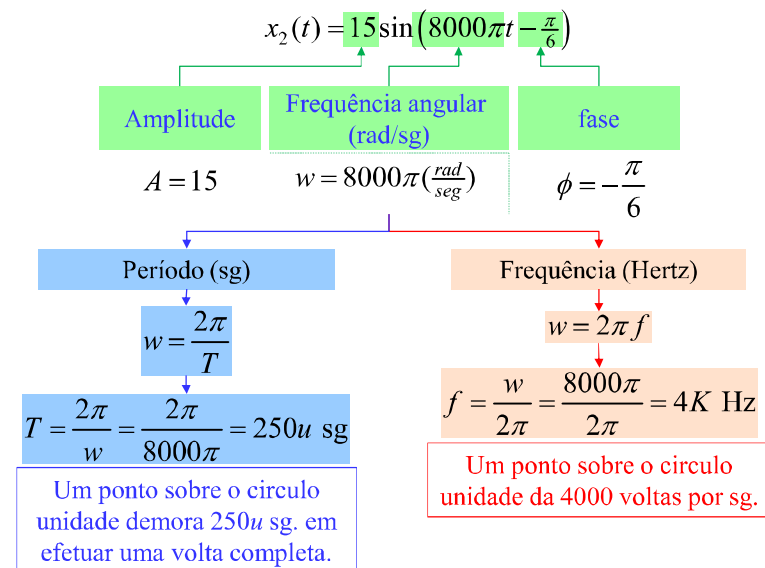
51

## Sinais Elementares

### Sinal Sinusoidal

#### Solução

□ b)



52

## Sinais Elementares

### Sinal Exponencial

#### Função Matemática

$$x(t) = \alpha^t$$

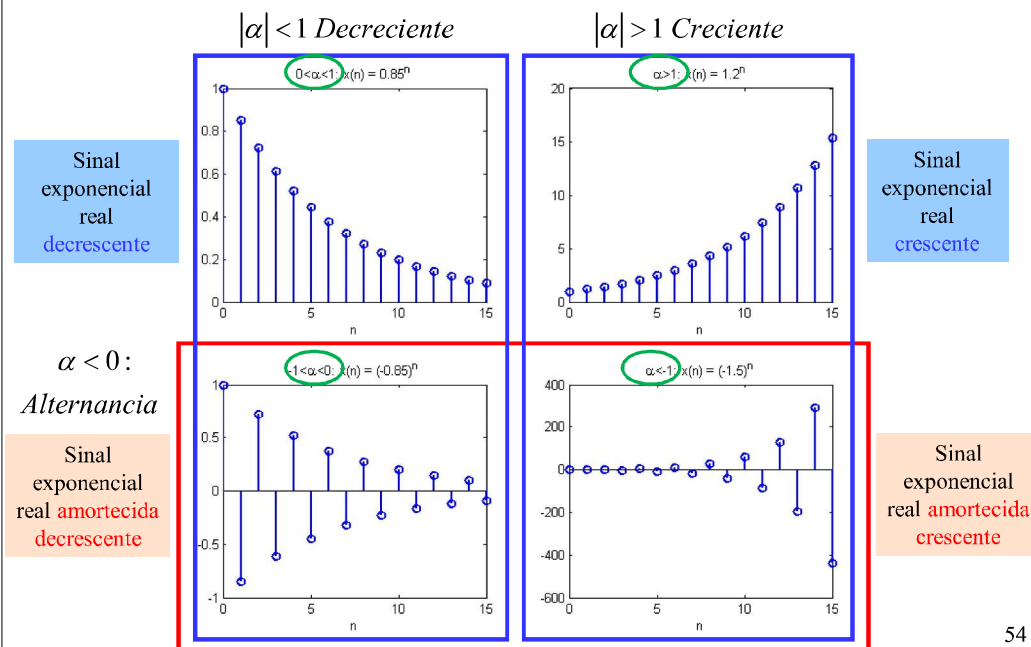
#### Casos

- Caso 1:  $\alpha$  é real
  - ❖  $x(t)$  é uma exponencial real.
- Caso 2:  $\alpha$  é puramente imaginário
  - ❖  $x(t)$  é uma exponencial complexa periódica.
- Caso 3:  $\alpha$  é um número complexo
  - ❖  $x(t)$  é uma mistura dos casos 1 e 2.

53

## Sinais Elementares

### Sinal Exponencial: Caso 1 $x(t) = \alpha^t$ ; $\alpha \in \mathbb{L}$



54

## Sinais Elementares

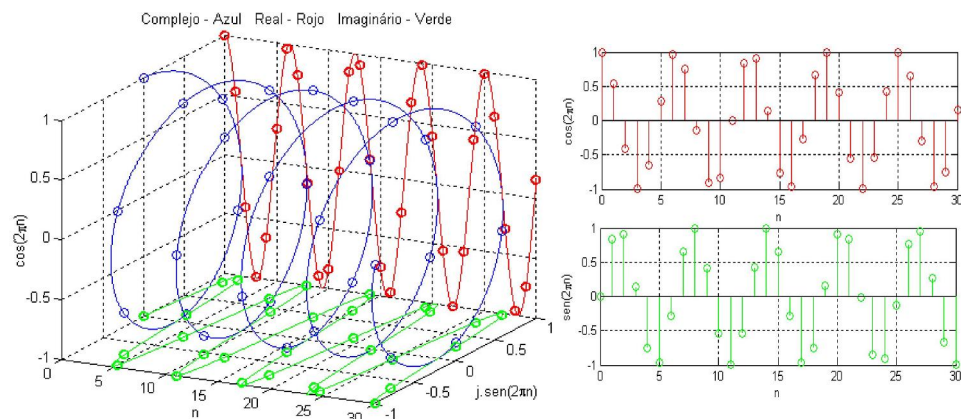
Sinal Exponencial: Caso 2  $x(t) = \alpha^t$  ;  $\alpha \in \mathbb{C} \wedge \|\alpha\| = 1$

$$x(t) = \alpha^t = (e^{jw})^t$$

$$= e^{jwt}$$

$$= \cos(wt) + j.\text{sen}(wt)$$

Formula de Euler  
 $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\text{sen}(\theta)$



55

## Sinais Elementares

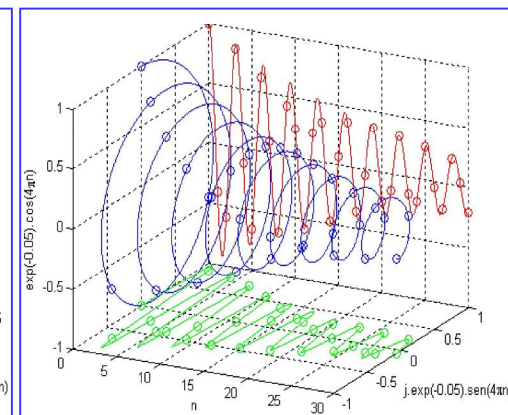
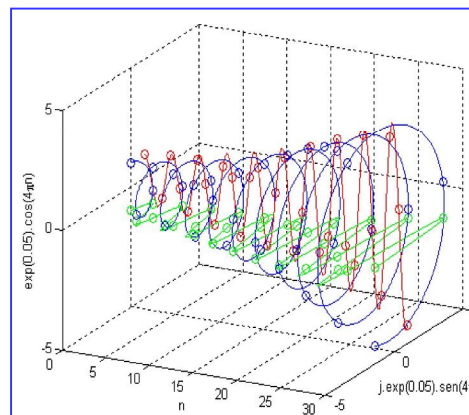
Sinal Exponencial: Caso 3  $x(t) = \alpha^t$  ;  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x(t) = \alpha^t = (e^{\sigma + jw_0})^t = e^{\sigma t} . e^{jw_0 t}$$

$$= e^{\sigma t} . \cos(w_0 t) + j . e^{\sigma t} . \text{sen}(w_0 t)$$

$\sigma > 0$  Crescente

$\sigma < 0$  Decrescente



57

## Sinais Elementares

Sinal Exponencial

Exemplo

- Para o seguinte sinal exponencial complexa pura

$$x(t) = 20e^{j(80\pi t + \frac{2\pi}{5})}$$

- Determinar para cada uma de suas componentes:

- Frequência angular ( $w$ ).
- Frequência ( $f$ ).
- Período ( $T$ ).
- angulo de fase inicial ( $\phi$ ).

58

## Sinais Elementares

Sinal Exponencial

Solução

- Operando:

$$x(t) = 20e^{j(80\pi t + \frac{2\pi}{5})}$$

$$= 20(\cos(80\pi t + \frac{2\pi}{5}) + j\sin(80\pi t + \frac{2\pi}{5}))$$

$$= 20\cos(80\pi t + \frac{2\pi}{5}) + j20\sin(80\pi t + \frac{2\pi}{5})$$

Amplitude

Frequência angular

fase

$$A = 20$$

$$w = 80\pi \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)$$

$$\phi = \frac{2\pi}{5}$$

Período (sg)

Frequência (Hertz)

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

$$w = 2\pi f$$

$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{80\pi} = 0,025 \text{ sg}$$

$$f = \frac{w}{2\pi} = \frac{80\pi}{2\pi} = 40 \text{ Hz}$$

59

# Sinais Elementares

## Sinal Exponencial

### Solução

❑ Operando:

$$x(t) = 20e^{j(80\pi t + \frac{2\pi}{5})}$$

$$= 20(\cos(80\pi t + \frac{2\pi}{5}) + j \sin(80\pi t + \frac{2\pi}{5}))$$

$$= 20 \cos(80\pi t + \frac{2\pi}{5}) + j20 \sin(80\pi t + \frac{2\pi}{5})$$

Amplitude

Frequência angular

fase

$$A = 20$$

$$\omega = 80\pi \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)$$

$$\phi = \frac{2\pi}{5}$$

Período (sg)

Frequência (Hertz)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{80\pi} = 0,025 \text{ sg}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{80\pi}{2\pi} = 40 \text{ Hz}$$

60

## Bibliografia

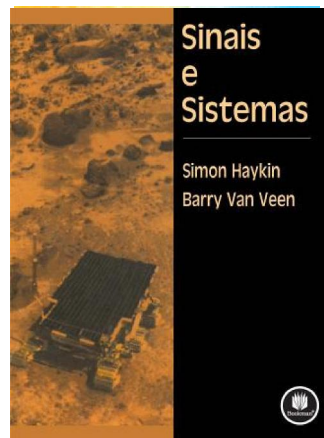
64

## Bibliografia

HAYKIN, S. e VAN VEEN, B. **Sinais e sistemas**. Porto Alegre: Bookman, 2001. (19).

*Indicação das seções do livro a ler em relação aos temas abordados na apresentação.*

- Sinais Elementares (1.6).
- Classificação dos sinais contínuos (1.4).
- Transformações da variável independente (1.5).



65