Raízes reais de funções

Algoritmos Numéricos - Topico 4 -1
Raízes de funções: o método da bisseção
Prof. Cláudia G. Varassin DI/UFES
emails:claudia.varassin@ufes.br e galarda@inf.ufes.br

Março de 2021

Raízes de Equações

1. Introdução
2. O método da Bisseção

Raízes

É bastante comum, em problemas na área das ciências exatas, ser necessário resolver equações do tipo:

$$f(x) = 0$$

Estes valores são chamados de raízes da equação $f(x) = 0$.
São os valores de x que "zeram" a função.

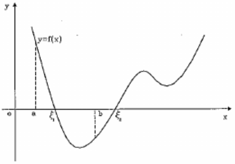


Figura 6.1 Raízes da equação $f(x) = 0$.

Os valores de x que resolvem a equação $f(x) = 0$ são as raízes.
Exemplos

$$
\begin{aligned}
f(x) = x^2 + x - 2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 1.0; x_2 = 2.0 \\
f(x) = e^{-x} - x = 0 \quad &\Rightarrow \quad ? \\
f(x) = sen x - 0.5 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \textit{infinitas} \\
f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0 \quad &\Rightarrow \quad ? \\
f(x) = x^2 + 1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{não há raiz em } \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Há duas fases:

1. a fase de localização das raízes: consiste em identificar intervalos $I_i = [a_i, b_i]$ que contenham raízes $f(x) = 0$. Em alguns métodos é necessário determinar intervalos $I_i = [a_i, b_i]$ que contenham somente uma raiz em cada intervalo (isolamento).

Há duas fases:

1. a fase de localização das raízes: consiste em identificar intervalos $I_i = [a_i, b_i]$ que contenham raízes $f(x) = 0$. Em alguns métodos é necessário determinar intervalos $I_i = [a_i, b_i]$ que contenham somente uma raiz em cada intervalo (isolamento).
2. a fase de refinamento: consiste em obter a raíz para uma dada precisão pré-definida.

O refinamento pode ser de feito via duas formas distintas:

- via os métodos intervalares: partem de um intervalo $I = [a, b]$ e vão, iterativamente, refinando este intervalo.
- via os métodos abertos: partem de uma aproximação inicial (chute x_0) e vão, iterativamente, obtendo novas aproximações Geram uma sequência $x_1, x_2, \cdots, x_k$ de aproximações que irão convergir (ou não) para uma raíz.

A fase de localização de raízes

Identificar intervalos $I_i = [a_i, b_i]$ que contenham raízes $f(x) = 0$.

Analisar a função e identificar regiões onde ela corta o eixo x.

Exemplo: suponha que se queira obter as raízes de $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$

x	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0
$f(x)$	-	-	$+$	$+$	$+$

Analisando $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$

A fase de localização de raízes

Identificar intervalos $I_i = [a_i, b_i]$ que contenham raízes $f(x) = 0$.

Analisar a função e identificar regiões onde ela corta o eixo x.

Exemplo: suponha que se queira obter as raízes de $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$

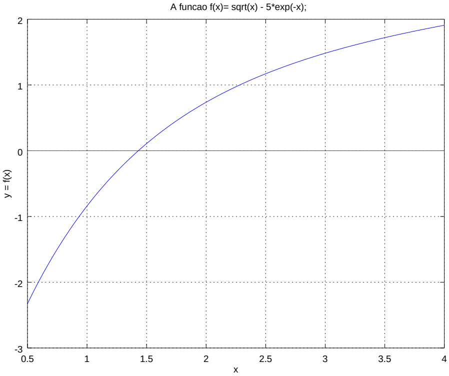
x	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0
$f(x)$	-	-	$+$	$+$	$+$

Analisando $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$

Derivando $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5e^{-x}$

Como $f'(x) > 0$ para todo x então...

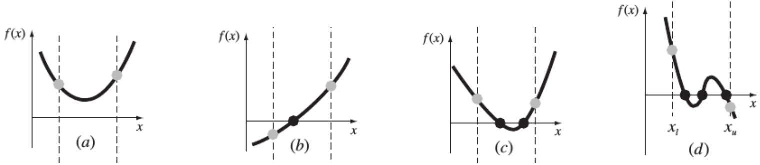
Gráfico de $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$



A abordagem gráfica

Seja $f(x)$ uma função contínua em $I = [a, b]$.

Se a função troca de sinal em $I = [a, b]$ então existe pelo menos um ponto x entre a e b tal que $f(x) = 0$.



Para as equações algébricas há resultados teóricos que fornecem a quantidade máxima de raízes [1].
Exemplos:
$f(x) = ax^2 + bx + c$ tem no máximo 2 raízes
$f(x) = x^3 - 5x^2 + 1$ tem no máximo 3 raízes

Equações transcendentes: não existem teoremas que forneçam informações sobre os limites e o número de raízes reais. O método gráfico é a maneira empregada para achar intervalos que contenham raízes.

O método da bisseção

Feita a identificação de intervalos $I = [a, b]$ que contenham raízes, fazer o refinamento para obter cada raíz com maior precisão.

O método da bisseção exige que se identifique intervalos $I = [a, b]$ que contenham uma ÚNICA raíz.

O método da bisseção

Feita a identificação de intervalos $I = [a, b]$ que contenham raízes, fazer o refinamento para obter cada raíz com maior precisão.

O método da bisseção exige que se identifique intervalos $I = [a, b]$ que contenham uma ÚNICA raíz.

Ideia:
Partindo de um intervalo $I = [a, b]$ que contenha uma raíz (com $f(x)$ contínua em I), o refinamento consiste em:
Dividir o intervalo em 2 e verificar em qual subintervalo está a raíz
A raíz estará em $I = [a, xr]$ OU em $I = [xr, b]$

O método da bisseção

Dado $I = [a, b]$ que contenha uma raíz e $f(x)$ contínua em I

Passos:
Calcular o ponto médio $\rightarrow xr = (a + b)/2$
Se houver troca de sinal em $I = [a, xr] \Rightarrow$ A raiz está ali

Se houver troca de sinal em $I = [xr, b] \Rightarrow$ A raiz está ali

O método da bisseção

Dado $I = [a, b]$ que contenha uma raíz e $f(x)$ contínua em I

Passos:
Calcular o ponto médio $\rightarrow xr = (a + b)/2$
Se houver troca de sinal em $I = [a, xr] \Rightarrow$ A raiz está ali

Se houver troca de sinal em $I = [xr, b] \Rightarrow$ A raiz está ali

Para testar se há troca de sinal $\Rightarrow f(a) \cdot f(xr) < 0$

Exemplo: suponha que se queira obter a raíz de $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$.
Sabe-se que em $I = [1.0, 2.0]$ há uma raiz (única).

1^a **Iteração**
$I = [1.0, 2.0]$, ponto médio $\rightarrow xr = 1.5$
$f(1) = -0.83$, $f(1.5) = 0.10$, $f(2.0) = 0.73$ assim $\Rightarrow I = [1.0, 1.5]$

Exemplo: suponha que se queira obter a raíz de $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$. Sabe-se que em $I = [1.0, 2.0]$ há uma raiz (única).

1^a **Iteração**
$I = [1.0, 2.0]$, ponto médio $\rightarrow xr = 1.5$
$f(1) = -0.83$, $f(1.5) = 0.10$, $f(2.0) = 0.73$ assim $\Rightarrow I = [1.0, 1.5]$

2^a **Iteração**
$I = [1.0, 1.5]$ ponto médio $\rightarrow xr = 1.25$
$f(1) = -0.83$, $f(1.25) = -0.31$, $f(1.5) = 0.10$ assim $\Rightarrow I = [1.25, 1.5]$

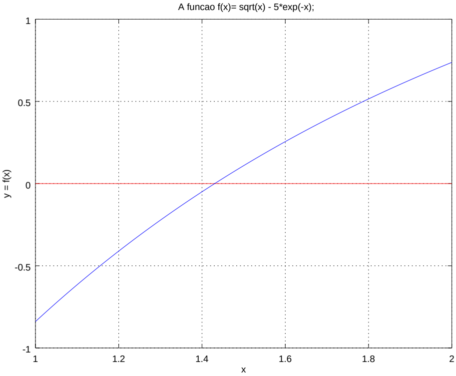
Exemplo: suponha que se queira obter a raíz de $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$.
Sabe-se que em $I = [1.0, 2.0]$ há uma raiz (única).

1^a **Iteração**
$I = [1.0, 2.0]$, ponto médio $\rightarrow xr = 1.5$
$f(1) = -0.83$, $f(1.5) = 0.10$, $f(2.0) = 0.73$ assim $\Rightarrow I = [1.0, 1.5]$

2^a **Iteração**
$I = [1.0, 1.5]$ ponto médio $\rightarrow xr = 1.25$
$f(1) = -0.83$, $f(1.25) = -0.31$, $f(1.5) = 0.10$ assim $\Rightarrow I = [1.25, 1.5]$

3^a **Iteração**
$I = [1.25, 1.5]$, ponto médio $\rightarrow xr = 1.375$
$f(1.25) = -0.31$, $f(1.375) = sinal$, $f(1.5) = 0.10$ assim $\Rightarrow I = [a, b]$

Grafico de $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$



Dada uma função f(x) contínua em $I = [a, b]$ e sabendo que existe uma única raíz em $I = [a, b]$

PASSOS:
REPETIR

    xr= (a+b)/2
    SE $(f(a) \cdot f(xr)) < 0$ *"% há troca sinal entre a e xr "*
        b = xr
    SENAO *"% há troca sinal entre xr e b"*
        a = xr
    FIM Se/Senao

ATÉ que...

```
INICIO
Ler(f, a, b, tol)
d=(b-a)
REPETIR
   xr= (a+b)/2
   SE f(xr)== 0
         d = 0
   SENAO
         SE (f(a) * f(xr)) < 0   "% há troca sinal entre a e xr "
               b = xr
         SENAO                   "% há troca sinal entre xr e b"
               a = xr
         FIM Se/Senao
         d = d/2
   FIM Se/Senao
ATÉ que (d < tol)
FIM
```

RESUMINDO...
O problema: resolver equações do tipo $f(x) = 0$.
Os valores que resolvem a equação são as raízes.

- A primeira etapa consiste em identificar se há raizes e os intervalos onde estão localizadas (estudo do comportamento da função, análise gráfica).
- A segunda etapa é aplicar um método de refinamento.
  Aqui, foi descrito um método intervalar: o método da bisseção.
  O método consiste em dividir o intervalo em dois e verificar em qual dos subintervalos a raíz se encontra: onde ocorrer a troca de sinal é o subintervalo de interesse.
  Repete se o processo partindo deste novo subintervalo.

Bibliografia Básica

[1] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[2] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.