Gabarito - Lista Complementar de exercícios.

1 a) $\forall x(\text{Esporte}(x) \to \text{gosta}(\text{leonardo}, x))$

ou

$\forall x(E(x) \to G(l,x))$ onde: $E(x)$ é x é esporte
$G(l,x)$: l gosta de x
l: leonardo

b) $[\forall x \exists y(\text{esporte}(y) \wedge \text{pratica}(x,y) \to \text{saudável}(x))]$ (*)

$\wedge$

$\exists x((\text{pessoa}(x) \wedge \text{saudavel}(x)) \wedge \sim\exists y(\text{Esporte}(y) \wedge \text{Pratica}(x,y)))$

ou

$\forall x \exists y(\text{esporte}(y) \wedge \text{pratica}(x,y) \to \text{saudável}(x))$

$\wedge$

$\sim\forall x[(\text{pessoa}(x) \wedge \text{saudável}(x) \to \exists y(\text{esporte}(y) \wedge \text{pratica}(x,y))]$

OBS Está implícito em (*), que a variável x toma valores num universo de pessoas. Assim poderíamos entender (*) como:

$\forall x(\text{Pessoa}(x) \wedge \exists y(\text{esporte}(y) \wedge \text{pratica}(x,y)) \to \text{saudável}(x))$

c) $\forall x(\text{atleta}(x) \to \exists y(\text{modalidade}(y) \wedge \text{especializa}(x,y))$

(1)

2) $(p \to q) \to (p \leftrightarrow r) \equiv \sim(p \to q) \vee [(p \to r) \wedge (r \to p)]$

$\equiv (p \wedge \sim q) \vee [(\sim p \vee r) \wedge (\sim r \vee p)]$

$\equiv [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee r)] \wedge [(p \wedge \sim q) \vee (\sim r \vee p)]$

$\equiv [((\sim p \vee r) \vee p) \wedge ((\sim p \vee r) \vee \sim q)] \wedge [((\sim r \vee p) \vee p) \wedge ((\sim r \vee p) \vee \sim q)]$

$\equiv [((\sim p \vee p) \vee r) \wedge (\sim p \vee r \vee \sim q)] \wedge [((p \vee p) \vee \sim r) \wedge (\sim r \vee p \vee \sim q)]$

$\equiv [V \wedge (\sim p \vee r \vee \sim q)] \wedge [(p \vee \sim r) \wedge (\sim r \vee p \vee \sim q)]$

$\equiv (\sim p \vee r \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim r) \wedge (\sim r \vee p \vee \sim q)$ ok

3) $(p \to q) \to [(p \to (q \to r)) \to (p \to r)]$

9 $\equiv$

$\sim(p \to q) \vee ((p \to (q \to r)) \to (p \to r))$

14; 9 $\equiv$

$(p \wedge \sim q) \vee (\sim(p \to (q \to r)) \vee (p \to r))$

14; 9 $\equiv$

$(p \wedge \sim q) \vee ((\underbrace{p}_{\beta} \wedge \underbrace{(q \wedge \sim r)}_{\gamma}) \vee \underbrace{(\sim p \vee r)}_{\alpha})$

8 $\equiv$

$(p \wedge \sim q) \vee (\underbrace{((\sim p \vee r) \vee p)}_{\overset{22}{\equiv}\ V} \wedge \underbrace{((\sim p \vee r) \vee (q \wedge \sim r))}_{\alpha})$ → Note que: → $\alpha \wedge V \equiv \alpha$

20 $\equiv$

$(p \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee r) \vee (q \wedge \sim r))$

$\equiv$

$(p \wedge \sim q) \vee ((\sim p \vee r \vee q) \wedge \underbrace{(\sim p \vee r \vee \sim r)}_{\equiv V}) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee r \vee q)$

$\equiv \underbrace{(\sim p \vee r \vee q \vee p)}_{\equiv V} \wedge \underbrace{(\sim p \vee r \vee q \vee \sim q)}_{\equiv V} \equiv V \wedge V \equiv V$ ok!

veja um caminho

③ outra forma:

$$(p\to q)\to[(p\to(q\to r))\to(p\to r)]$$

$$\overset{9}{\equiv}$$

$$\sim(p\to q)\vee[(p\to(q\to r))\to(p\to r)]$$

$$\overset{9}{\equiv}$$

$$\sim(\sim p\vee q)\vee[\sim(p\to(q\to r))\vee(\sim p\vee r)]$$

$$\overset{14}{\equiv}$$

$$\sim(\sim p\vee q)\vee[(p\wedge\sim(q\to r))\vee(\sim p\vee r)]$$

$$\overset{14}{\equiv}$$

$$\sim(\sim p\vee q)\vee[(p\wedge(q\wedge\sim r))\vee(\sim p\vee r)]$$

NOTE QUE: $\mathbb{V}\vee\alpha\equiv\mathbb{V}$

$$\overset{8}{\equiv}$$

$$\sim(\sim p\vee q)\vee[(\underbrace{p\vee\sim p}_{\mathbb{V}}\vee r)\wedge((q\wedge\sim r)\vee(\sim p\vee r))]$$

$$\equiv$$

$$\sim(\sim p\vee q)\vee[\underbrace{\mathbb{V}\wedge((q\wedge\sim r)\vee(\sim p\vee r))}_{\overset{20}{\equiv}\ ((q\wedge\sim r)\vee(\sim p\vee r))}]\equiv\sim(\sim p\vee q)\vee((q\wedge\sim r)\vee(\sim p\vee r))$$

note que
$\mathbb{V}\wedge\alpha\equiv\alpha$

$$\overset{8}{\equiv}$$

$$\sim(\sim p\vee q)\vee[(q\vee\sim p\vee r)\wedge(\underbrace{\sim r\vee r}_{\mathbb{V}}\vee\sim p)]$$

$$\equiv$$

$$\underbrace{\sim(\sim p\vee q)\vee(\sim p\vee q)}_{\mathbb{V}}\vee r\equiv\mathbb{V}\vee r\equiv\mathbb{V}$$

④ a) $\underbrace{p\vee q}_{\alpha_1},\ \underbrace{\sim q}_{\alpha_2},\ \underbrace{q\to p}_{\alpha_3}\vDash\underbrace{\sim(\sim p\vee q)}_{\beta}$?

Para que $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\vDash\beta$, é preciso, que todas as interpretações que tornam os α_i simultaneamente verdadeiros (V), tornem também β verdadeiro (V).

Usaremos o esquema de raciocínio abaixo para investigar se isto acontece.

$$\overbrace{\underbrace{p\vee q}_{\underset{①}{V}}}^{\alpha_1}\ ;\ \overbrace{\underbrace{\sim q}_{\underset{②}{V}}}^{\alpha_2}\ ;\ \overbrace{\underbrace{q\to p}_{\underset{③}{V}}}^{\alpha_3}\ \vDash\ \overbrace{\sim(\sim p\vee q)}^{\beta}$$

Partindo do pressuposto que ①, ② e ③ são simultaneamente V;

Daí e de ②, como $\sim q$ é V, tem-se que $\boxed{q \text{ é } F}$;

Daí e de ①, conclui-se que p é V. Logo

$\sim(\sim p\vee q)$ é V, pois

$$\underbrace{\sim\underbrace{(\underbrace{\sim p}_{\underset{F}{V}}\vee \underset{F}{q})}_{F}}_{V}$$

Portanto, cada interpretação, a saber: $I_1=\begin{cases}p: V\\ q: F\end{cases}$, que torna α_1,α_2 e α_3 simultaneamente V, torna também β, V. Logo

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\vDash\beta$.

b) $\sim \forall x (x \in \mathbb{N} \to \exists y (y \in \mathbb{N} \wedge x . y = 0)$ é falso?

Falso; a informação dada no item **b)** é verdadeira, pois:

se $x = 0$, temos que $0 \in \mathbb{N}$ e $\forall y (y \in \mathbb{N} \to 0 . y = 0)$

logo há mais de um $y \in \mathbb{N}$, tal que $y . x = 0$

portanto se $x = 0$ não há no máximo um y natural cujo produto deste x com y é zero, há infinitos!!!

Assim

$$\forall x (x \in \mathbb{N} \to \exists y (y \in \mathbb{N} \wedge x . y = 0))$$ é falso,

portanto,

$$\sim \forall x (x \in \mathbb{N} \to \exists y (y \in \mathbb{N} \wedge x . y = 0))$$ é verdadeiro.

c) V, pois

se $x \in \mathbb{Z}_+$ daí $\exists! y (y \in \mathbb{Z}_- \wedge x + y = 0)$

e

se $x \in \mathbb{Z}_-^*$, daí $\sim \exists y (y \in \mathbb{Z}_- \wedge x + y = 0)$

Como por definição $\exists x \alpha(x) \equiv \exists! x \alpha(x) \vee \sim \exists x \alpha(x)$,

Assim

$$\forall x (x \in \mathbb{Z} \to \exists y (y \in \mathbb{Z}_- \wedge x + y = 0))$$ é verdadeiro.

5 $\sim \forall x (\text{atleta}(x) \to \exists y (\text{modalidade}(y) \wedge \text{especializa}(x, y))$ ← negação

$\equiv$

$\exists x (\text{atleta}(x) \wedge \sim \exists y (\text{modalidade}(y) \wedge \text{especializa}(x, y))$

$\equiv$

$\exists x (\text{atleta}(x) \wedge \forall y (\text{modalidade} \to \sim \text{especializa}(x, y))$ ← negação simplifica

6. a)

pr	1-	$\sim(q \to p) \to \sim r$
pr	2-	$\sim q \to w$
pr	3-	$\sim u \vee s \to \sim p$
pr	4-	$\sim(\sim r \vee \sim s)$
pr	5-	$w \to t$
pr	6-	$t \to v$
4, equiv.	7-	$r \wedge s$
7, S	8-	r
7, S	9-	s
1, 8, MT	10-	$\sim\sim(q \to p)$
10, equiv.	11-	$q \to p$
9, A	12-	$\sim u \vee s$
3, 12, MP	13-	$\sim p$
11, 13, MT	14-	$\sim q$
2, 14, MP	15-	w
15, 5, MP	16-	t
6, 16, MP	17-	v
17, A	18-	$\sim x \vee v$
18, equiv.	19-	$x \to v$
15, 19, C	20-	$w \wedge (x \to v)$

6 -

b)

pr	1 - $G(h, f)$
pr	2 - $\forall x (G(x, f) \to G(x, a))$
pr	3 - $\forall x (G(h, x) \to E(x))$
2, I.U.	4 - $G(h, f) \to G(h, a)$
1, 4, MP	5 - $G(h, a)$
3, I.U.	6 - $G(h, a) \to E(a)$
5, 6, MP	7 - $E(a)$