Cálculo 2

Aula 13

Aula passada: Cálculo com polares

Aula Hoje:

13.1 Funções vetoriais
↳ Em $\mathbb{R}^3$

definição Uma função vetorial

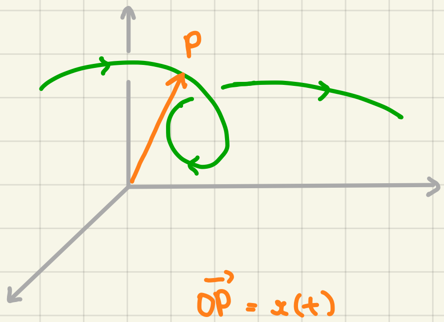
$x : \mathbb{R} \longrightarrow V^3$ — componentes

$t \longmapsto x(t) = f(t)\,i + g(t)\,j + h(t)\,\vec{k}$

$= \underbrace{(f(t), g(t), h(t))}_{\vec{v}}$ vetor

associa um valor a um vetor

As equações $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$ são as equações paramétricas de uma curva espacial
↳ em $\mathbb{R}^3$



$\vec{OP} = x(t)$

e $P = (f(t), g(t), h(t))$

Exemplos

1) $x(t) = (1, 2, 3)$ vetor constante

2) $x(t) = (t, 1+t, 1)$

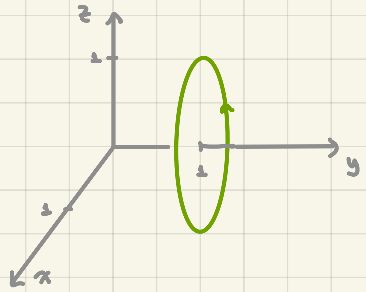
$\begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = 1 \end{cases}$ equações de uma reta que passa por $P_0 = (0,1,1)$ e direção $(1,1,0)$

3) $x(t) = \cos t\, i + j + \operatorname{sen} t\, k$

$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 \\ z = \operatorname{sen} t \end{cases}$

Note que $x^2 + z^2 = 1$ e $y = 1$

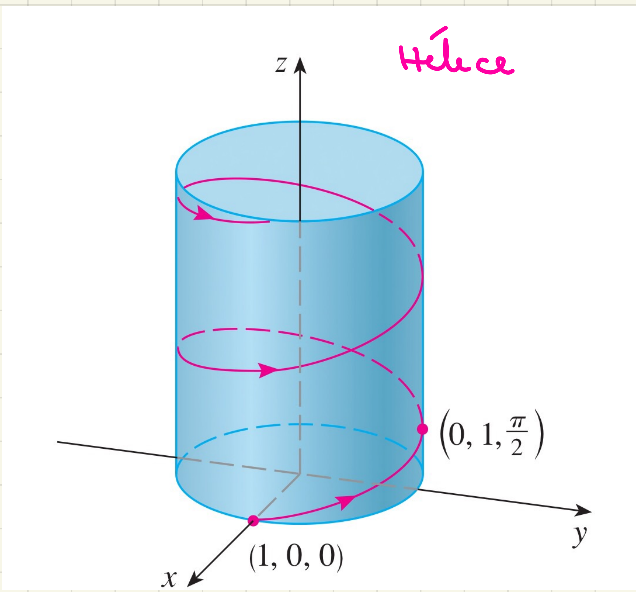
um disco no plano $y = 1$



4) $x(t) = \cos t\, i + \operatorname{sen} t\, j + t\, k$

$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = t \end{cases}$ note que $x^2 + y^2 = 1$

então a curva está contida no cilindro



5) $x(t) = 2\cos t\, i + \operatorname{sen} t\, j + t\, k$

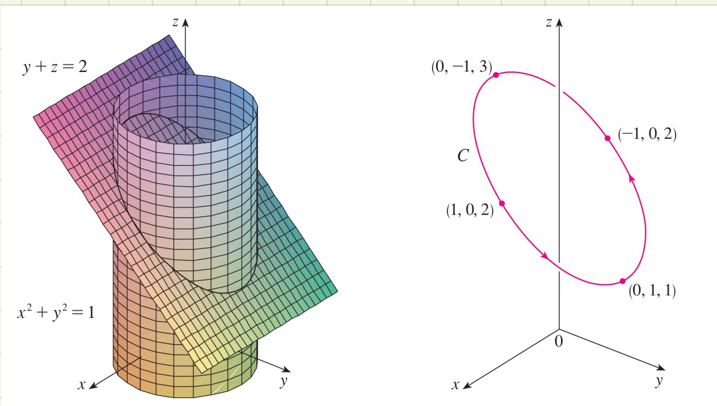
$x = 2\cos t$
$y = \operatorname{sen} t$ } elipse $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$
$z = t$

também uma hélice

6) $x(t) = \cos t\, i + \operatorname{sen} t\, j + (2 - \operatorname{sen} t)\, k$

$x = \cos t$
$y = \operatorname{sen} t$
$z = 2 - \operatorname{sen} t$ $\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \text{disco} \\ z = 2 - y & \text{plano} \end{cases}$ tem que satisfazer as duas equações

é um disco no plano $y - z = 2$
= interseção do
cilindro $x^2 + y^2 = 1$, z livre
e o plano $y - z = 2$



13.2 Derivadas e Integrais
13.4 Velocidade e aceleração

Considere uma função vetorial

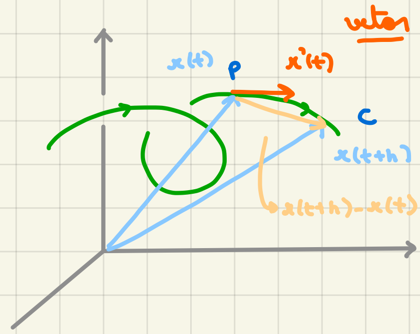
$$r : \mathbb{R} \to V^3$$
$$r(t) = f(t)\,i + g(t)\,j + h(t)\,k$$

Teorema

$$r'(t) = f'(t)\,i + g'(t)\,j + h'(t)\,\vec{k}$$

↳ vetor tangente

Representação



Notação

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$$ vetor tangente unitário se $r'(t) \neq \vec{0}$

A reta tangente à curva C no ponto P é a reta que passa em P e gerada por $r'(t)$.

Movimento no espaço

Se $r(t)$ representa o movimento de uma partícula no espaço

$r'(t) =: \vec{v}(t)$ representa o vetor velocidade

A velocidade escalar é dada por $|\vec{v}(t)|$

e a aceleração é dada por $r''(t) =: a(t)$

Exemplo Calcule a velocidade, aceleração e velocidade escalar da partícula com vetor posição

$$r(t) = (t^2, e^t, te^t)$$

Solução

velocidade

$$r'(t) = (2t, e^t, e^t + te^t) = v(t)$$

velocidade escalar

$$\|r'(t)\| = \sqrt{4t^2 + e^{2t} + (e^t + te^t)^2}$$

aceleração

$$r''(t) = (2, e^t, 2e^t + te^t)$$

Teorema (Regras de derivação)
u, v funções vetoriais
f função real, $c \in \mathbb{R}$

1. $\frac{d}{dt}[u(t) + v(t)] = u'(t) + v'(t)$
2. $\frac{d}{dt}[c\,u(t)] = c\,u'(t)$
3. $\frac{d}{dt}[f(t) \cdot u(t)] = f'(t)\,u(t) + f(t)\,u'(t)$
4. $\frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t)$
   ↳ produto escalar
5. $\frac{d}{dt}[u(t) \times v(t)] = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t)$
   ↳ produto vetorial
6. $\frac{d}{dt}[u(f(t))] = u'(f(t)) \cdot f'(t)$

Exemplo Mostre que se $|x(t)| = c$ então $x(t)$ e $x'(t)$ são ortogonais

Solução

Note que $|x(t)|^2 = c^2$

é um vetor

$\Leftrightarrow \quad x(t) \cdot x(t) = c^2$

produto escalar

derivando

$x'(t) \; x(t) + x(t) \cdot x'(t) = 0$

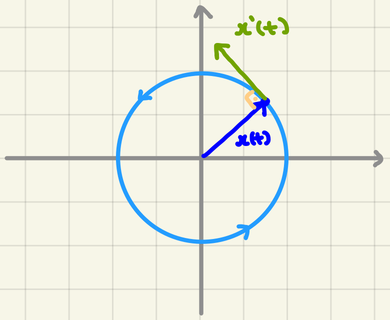
$2\, x(t) \cdot x'(t) = 0$

$\Rightarrow \quad x(t) \cdot x'(t) = 0$ ✓

vetores ortogonais

Em particular

$x(t) = \cos t \, i + \operatorname{sen} t \, j$ círculo



$|x(t)| = 1$