Aula 1 — Cálculo 3B — 2021.1

Capítulo 1: Introdução

Exemplo 1 (Problema estático)

Modelagem para "estimativa da tarifa" para o Uber considerando:

custo fixo = 6,00 reais

preço base = 1,50 reais/Km rodado

Denote $x :=$ Km rodado

$\underbrace{T(x) := \text{tarifa estimado}}$

MODELO QUE REPRESENTA O EVENTO

$$y := T(x) = 6 + \tfrac{3}{2}x$$

$\boxed{y = 6 + 3/2\, x}$ equação algébrica

* é uma equação estática, isto é, as quantidades não variam com o tempo
* estudamos esse tipo de equação em cálculo 1

Queremos estudar equações que as quantidades variam com o tempo

quantidades que variam com o tempo $\xrightarrow{\text{significa}}$ Derivada

Então, queremos estudar equações que envolve funções e suas derivadas

Exemplo 2 (Crescimento populacional de Maltus para microorganismo)

seja

$P(t) =$ quantidade de indivíduos da população de uma espécie no instante t.

Por observação: a taxa de variação da população (natalidade − mortalidade) é proporcional a quatidade de indivíduos

MODELAGEM

$$\boxed{P'(t) = K\,P(t)}$$

taxa de variação

constante de proporção

Equação diferencial ordinária

(equação que involve $P(t)$ e sua derivada $P'(t)$)

Objetivo: Resolver a equação: determinar uma função $P(t)$ que satisfaz a equação

Resolver a equação $P' = KP$ de modo empírico

P: Que função a derivada é um múltiplo da função?

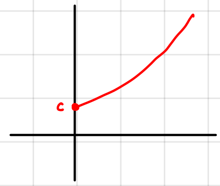
R: $P(t) = Ce^{Kt}$

Note que $P'(t) = C.Ke^{Kt} = K(Ce^{Kt}) = KP(t)$, isto é a função satisfaz a equação

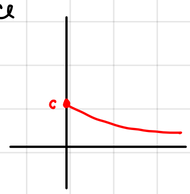
Interpretando

$P(0) = C$ população inicial da espécie

Se $K > 0$ então $P(t) = Ce^{Kt}$ cresce



Se $K < 0$ então $P(t) = Ce^{Kt}$ decresce (extinção)



Nota 1 Este modelo é bem simples, existem modelos sobre dinâmica de populações mais realísticos

Objetivo do curso:
* desenvolver métodos matemáticos para achar as soluções desse tipo de equação
* fazer algumas análises das soluções
* trabalhar com algumas modelagens simples

Nota 2 Mesmo equações algébricas são difíceis de resolver, por exemplo

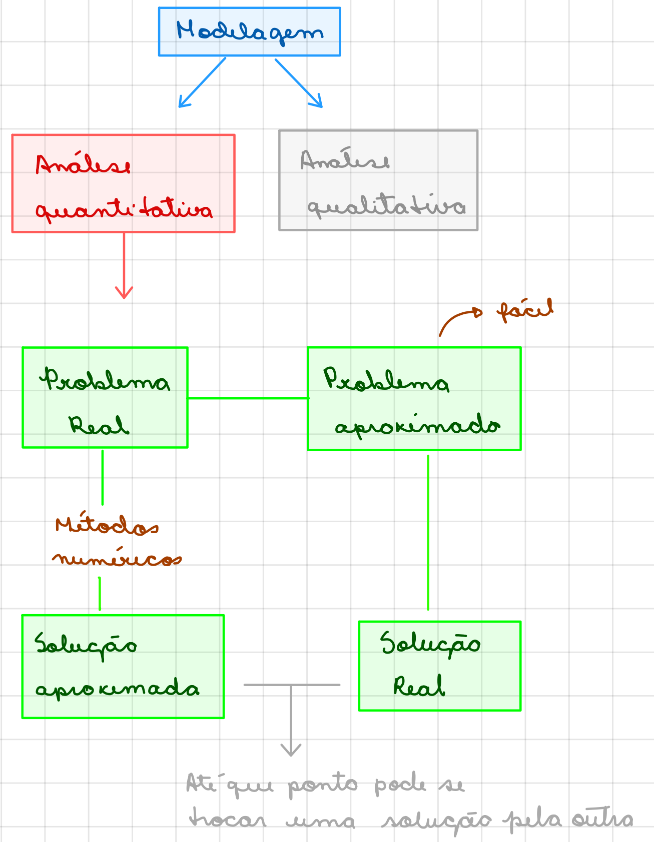
$$x^3 + x^2 + 10 = 0$$

(quais os valores de x satisfazem essa equação)

Então, imaginem, equações que o objetivo é encontrar Funções que satisfazem a equação.

Nota 3: Sobre modelagem matemática

↳ expressar determinado fenômeno da realidade com objetivo de compreendê-lo para interferir ou não em seu processo.



Formalizando

definição A expressão

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \qquad (*)$$

(a n-ésima derivada de uma função igual a uma relação envolvendo a variável t, a função e suas derivadas) é dita uma **equação diferencial ordinária de ordem n**

maior derivada envolvida

Exemplo

a) $y' = 3y$ — suprimimos a variável t ($y'(t) = 3y(t)$)

↳ equação de primeira ordem

b) $y'' + t^2 y' = t^2$ equação de segunda ordem

c) $y''' + [y']^2 = 0$ equação de terceira ordem

d) $y^{(4)} + y''' + y'' + y' + y = x$ → pode ter outra notação da variável independente

equação de ordem quatro

Vamos começar a estudar as equações de ordem menor (1ª ordem → 2ª ordem)

Definição Uma solução para EDO (*) é uma função $y(t)$:

- definida em um intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$
- n-vezes diferenciável
- que satisfaça (*)

Exemplo: Verifique se cada função é solução da EDO:

a) $y^{(4)} + 4y''' + 3y = t$, $y_1(t) = t/3$, $y_2(t) = e^{-t} + t/3$

Solução:

- Derivar e substituir para verificar a igualdade

$y_1(t) = t/3$

$y_1'(t) = \frac{1}{3}$

$y_1''(t) = y_1'''(t) = y_1^{(4)}(t) = 0$

$3 \cdot t/3 = t$ OK

$y_2(t) = e^{-t} + t/3$

$y_2'(t) = -e^{-t} + \frac{1}{3}$

$y_2''(t) = e^{-t}$

$y_2'''(t) = -e^{-t}$

$y_2^{(4)}(t) = e^{-t}$

$e^{-t} + 4(-e^{-t}) + 3\cdot(e^{-t} + t/3)$

$\underbrace{e^{-t} - 4e^{-t} + 3e^{-t}}_{=0} + t = t$ OK

b) $2t^2 y'' + 3ty' - y = 0$, $y_1(t) = \frac{1}{t}$, $y_2(t) = \sqrt{t}$ $t > 0$

- $y_1'(t) = -\frac{1}{t^2}$, $y_1''(t) = \frac{2}{t^3}$

$2t^2 \cdot \frac{2}{t^3} + 3t\left(-\frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{t}$

$= \frac{4}{t} - \frac{3}{t} - \frac{1}{t} = 0$

- $y_2'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, $y_2''(t) = \frac{-1}{4\sqrt{t^3}}$

$2t^2 \cdot \frac{(-1)}{4\sqrt{t^3}} + 3t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{t} + \frac{3}{2}\sqrt{t} - \sqrt{t} = 0$

Definição

A expressão

$$a_n(t)\,y^{(n)} + \dots + a_1(t)\,y' + a_0(t)\,y = g(t)$$

é dita **equação linear**

Além disso se $g(t) \equiv 0$, isto é,

$$a_n(t)\,y^{(n)} + \dots + a_1(t)\,y' + a_0(t)\,y = 0$$

é dita **equação linear homogênea**

Do contrário dizemos que é uma **equação linear não homogênea**.

↳ não envolve potência/raiz/trigonométrica em $y, y', \dots, y^{(n)}$

Exemplo

a) $y' + t^2 y = t + 1$ Linear não homogênea de 1ª ordem

b) $y' + y^2 = 0$ Não linear de 1ª ordem

c) $y' \cdot y = t$ Não linear de 1ª ordem

d) $y'' = \sqrt{1 - y'}$ Não linear de 2ª ordem

e) $\sqrt{t}\, y'' + 3y' + t y = \operatorname{sen} t$ linear não homogênea de 2ª ordem

f) $y'' + \frac{1}{t} y = 0$ linear homogênea de 2ª ordem

Definição

A expressão $y^{(n)} = \underbrace{F(y, y', \dots, y^{(n-1)})}_{\text{não aparece } t}$ é dita uma **equação diferencial autônoma**

Exemplo

a) $y' + t^2 y = t + 1$ Não Autônoma linear de 1ª ordem

b) $y' + y^2 = 0$ Autônoma não linear de 2ª ordem

c) $y' = 3y$ Autônoma linear de 1ª ordem

d) $y' \cdot y = t$ Não Autônoma não linear de 1ª ordem