

Análise de resposta transitória e de regime estacionário

5.1 | Introdução

Em capítulos anteriores, foi dito que o primeiro passo para a análise de um sistema de controle é a obtenção de um modelo matemático do sistema. Uma vez obtido esse modelo, é possível analisar o desempenho do sistema a partir dos vários métodos disponíveis.

Na prática, o sinal de entrada de um sistema de controle não é conhecido previamente: ele é de caráter aleatório e seus valores instantâneos não podem ser expressos de maneira analítica. Somente em alguns casos especiais o sinal de entrada é conhecido antecipadamente e pode ser expresso de maneira analítica ou por meio de curvas, como no caso do controle automático das máquinas-ferramentas.

Na análise e no projeto de sistemas de controle, devemos ter uma base de comparação do desempenho de vários sistemas de controle. Essa base pode ser estabelecida detalhando-se sinais de entrada de teste específicos e, em seguida, comparando-se as respostas dos vários sistemas com esses sinais.

Muitos dos critérios de projeto têm como base as respostas a esses sinais ou a resposta dos sistemas às mudanças das condições iniciais (sem qualquer sinal de teste). O uso de sinais de teste pode ser justificado em virtude da correlação existente entre as características das respostas de um sistema a um sinal de entrada típico de teste e a capacidade de o sistema responder aos sinais de entrada reais.

Sinais típicos de testes. Os sinais de entrada de teste geralmente utilizados são as funções degrau, rampa, parábola de aceleração, impulso, senoidais e ruído branco. Neste capítulo, usamos sinais de teste como degrau, rampa, parábola de aceleração e impulso. Com esses sinais de teste, tanto a análise experimental como a análise matemática dos sistemas de controle podem ser obtidas facilmente, uma vez que esses sinais são funções de tempo muito simples.

Pode-se determinar quais desses sinais típicos de entrada devem ser utilizados na análise das características do sistema, pelo comportamento da entrada a que o sistema será submetido, com maior frequência, sob condições normais de operação. Se as entradas de um sistema de controle são funções de tempo que variam gradualmente, então a rampa em função do tempo pode ser um bom sinal de teste. Da mesma maneira, se um sistema estiver sujeito a variações bruscas de entrada, a função degrau poderá ser um bom sinal de teste. Da mesma forma, se o sistema estiver sujeito a entradas de impacto, uma função impulso poderá ser a melhor opção. Uma vez projetado o sistema de controle com base nos sinais de teste, o desempenho do sis-

tema em resposta a entradas reais geralmente é satisfatório. O uso desses sinais possibilita a comparação do desempenho de vários sistemas em relação à mesma base.

Resposta transitória e resposta estacionária. A resposta temporal de um sistema de controle consiste em duas partes: a resposta transitória e a resposta estacionária. Por resposta transitória, entende-se aquela que vai do estado inicial ao estado final. Por resposta estacionária, entendemos o comportamento do sinal de saída do sistema na medida em que t tende ao infinito. Assim, a resposta $c(t)$ do sistema pode ser escrita como:

$$c(t) = c_{tr}(t) + c_{ss}(t)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação é a resposta transitória e o segundo é a resposta estacionária.

Estabilidade absoluta, estabilidade relativa e erro estacionário. No projeto de um sistema de controle, deve ser possível prever seu comportamento dinâmico a partir do conhecimento de seus componentes. A característica mais importante do comportamento dinâmico do sistema de controle é a estabilidade absoluta, isto é, se o sistema é estável ou instável. Um sistema de controle está em equilíbrio se, na ausência de qualquer distúrbio ou sinal de entrada, a saída permanece no mesmo estado. Um sistema de controle linear e invariante no tempo é estável se a saída sempre retorna ao estado de equilíbrio quando o sistema é submetido a uma condição inicial. Um sistema de controle linear e invariante no tempo é criticamente estável se as oscilações do sinal de saída se repetirem de maneira contínua. É instável se a saída divergir sem limites a partir do estado de equilíbrio quando o sistema for sujeito a uma condição inicial. Nos casos reais, o sinal de saída de um sistema físico pode aumentar até certo valor, mas pode ser limitado por fins de curso mecânicos, ou o sistema pode se romper ou se tornar não linear, após o sinal de saída ultrapassar certa amplitude e, desse modo, as equações diferenciais do modelo não terão mais validade.

Outros comportamentos importantes do sistema (além da estabilidade absoluta), com os quais se deve ter uma consideração especial, são a estabilidade relativa e o erro estacionário. Como um sistema físico de controle contém energia armazenada, a saída do sistema, quando este é submetido a um sinal de entrada, não pode seguir a entrada imediatamente, mas apresenta uma resposta transitória antes que um regime permanente seja obtido. A resposta transitória de um sistema de controle prático frequentemente apresenta oscilações amortecidas antes de atingir o estado permanente. Se o sinal de saída de um sistema em regime permanente não coincidir exatamente com a entrada, diz-se que o sistema apresenta um erro estacionário. Esse erro é indicativo da precisão do sistema. Na análise de um sistema de controle, deve-se examinar o comportamento da resposta transitória e do estado estacionário.

Visão geral do capítulo. Este capítulo trata das respostas do sistema aos sinais aperiódicos (como degrau, rampa, aceleração e impulso, em função do tempo). Eis o resumo do capítulo: a Seção 5.1 apresenta a matéria introdutória do capítulo. A Seção 5.2 trata da resposta dos sistemas de primeira ordem a entradas aperiódicas. A Seção 5.3 apresenta a resposta transitória de sistemas de segunda ordem. São estudadas análises detalhadas das respostas dos sistemas de segunda ordem a excitações em degrau, rampa e impulso. A Seção 5.4 discute a análise da resposta transitória de sistemas de ordem superior. A Seção 5.5 apresenta uma introdução à abordagem do MATLAB na solução de problemas de resposta transitória. A Seção 5.6 fornece um exemplo de um problema de resposta transitória resolvido com o MATLAB. A Seção 5.7 apresenta o critério de estabilidade de Routh. A Seção 5.8 discute os efeitos das ações de controle integral e derivativa no desempenho dos sistemas. Por fim, a Seção 5.9 trata de erros estacionários e sistemas de controle com realimentação unitária.

5.2 | Sistemas de primeira ordem

Considere o sistema de primeira ordem mostrado na Figura 5.1(a). Fisicamente, esse sistema pode representar um circuito RC , um sistema térmico ou algo semelhante. A Figura 5.1(b) traz um diagrama de blocos simplificado. A relação entrada-saída é dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (5.1)$$

A seguir, analisaremos as respostas do sistema a entradas como as funções de degrau unitário, rampa unitária e impulso unitário. As condições iniciais são consideradas nulas.

Note que todos os sistemas que têm a mesma função de transferência apresentarão a mesma saída em resposta ao mesmo impulso. Para determinado sistema físico, pode ser dada uma interpretação física à resposta matemática.

Resposta ao degrau unitário do sistema de primeira ordem. Como a transformada de Laplace da função de degrau unitário é $1/s$, substituindo $R(s) = 1/s$ na Equação 5.1, obtemos:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

Expandindo $C(s)$ em frações parciais, temos:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/T)} \quad (5.2)$$

Considerando a transformada inversa de Laplace da Equação 5.2, obtemos:

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5.3)$$

A Equação 5.3 estabelece que, inicialmente, a resposta $c(t)$ é zero e, no fim, torna-se unitária. Uma característica importante de uma curva de resposta exponencial $c(t)$ é que em $t = T$ o valor de $c(t)$ é 0,632 ou a resposta $c(t)$ alcançou 63,2% de sua variação total. Isso pode ser facilmente comprovado substituindo-se $t = T$ em $c(t)$. Ou seja,

$$c(T) = 1 - e^{-1} = 0,632$$

Note que, quanto menor a constante de tempo T , mais rapidamente o sistema responde. Outra característica importante da curva exponencial de resposta é que a inclinação da linha tangente em $t = 0$ é $1/T$, uma vez que

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{1}{T} e^{-t/T} \right|_{t=0} = \frac{1}{T} \quad (5.4)$$

A saída alcançaria o valor final em $t = T$ se fosse mantida a velocidade inicial de resposta. A partir da Equação 5.4, vemos que a inclinação da curva de resposta $c(t)$ decresce monotonicamente de $1/T$ em $t = 0$ a zero em $t = \infty$.

A curva exponencial de resposta $c(t)$ dada pela Equação 5.3 é mostrada na Figura 5.2. Em uma constante de tempo, a curva da resposta exponencial vai de 0% a 63,2% do valor final. Em duas constantes de tempo, a resposta atinge 86,5% da resposta final. Para $t = 3T, 4T$ e $5T$, a resposta alcança 95%, 98,2% e 99,3%, respectivamente, da resposta final. Assim, para $t \geq 4T$, a resposta se mantém a 2% do valor final. Como se vê na Equação 5.3, o estado permanente é alcançado matematicamente apenas depois de um tempo infinito. Na prática, entretanto, é razoável que o tempo

FIGURA 5.1

- (a) Diagrama de blocos de um sistema de primeira ordem;
- (b) diagrama de blocos simplificado.

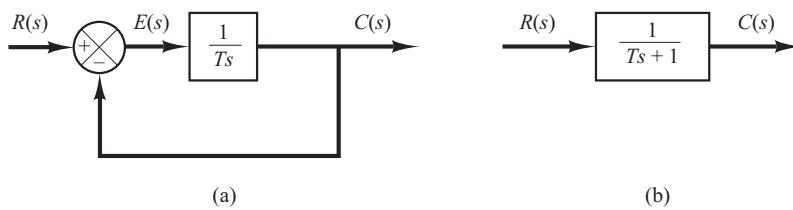
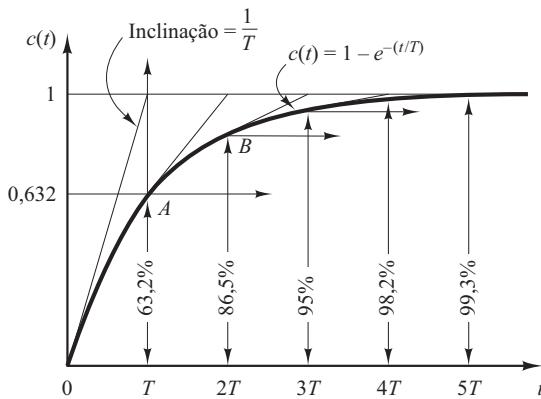


FIGURA 5.2

Curva exponencial de resposta.



estimado de resposta seja o intervalo de tempo necessário para a curva alcançar e permanecer a 2% da linha do valor final, ou quatro constantes de tempo.

Resposta à rampa unitária de sistemas de primeira ordem. Como a transformada de Laplace da rampa unitária é $1/s^2$, obtemos a saída do sistema da Figura 5.1(a) como:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s^2}$$

Expandindo $C(s)$ em frações parciais, temos:

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts + 1} \quad (5.5)$$

Considerando a transformada inversa de Laplace da Equação 5.5, obtemos:

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5.6)$$

Então, o sinal de erro $e(t)$ é:

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - c(t) \\ &= T(1 - e^{-t/T}) \end{aligned}$$

Conforme t tende ao infinito, $e^{-t/T}$ se aproxima de zero e, assim, o sinal de erro $e(t)$ se aproxima de T ou

$$e(\infty) = T$$

A Figura 5.3 mostra a rampa unitária de entrada e a resposta do sistema. O erro do sistema para seguir a rampa unitária como sinal de entrada é igual a T para t suficientemente grande. Quanto menor a constante de tempo T , menor o erro estacionário ao seguir a entrada em rampa.

Resposta ao impulso unitário de sistemas de primeira ordem. Para o impulso unitário de entrada, $R(s) = 1$ e a resposta do sistema da Figura 5.1(a) pode ser obtida como:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (5.7)$$

A transformada inversa de Laplace da Equação 5.7 resulta em:

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5.8)$$

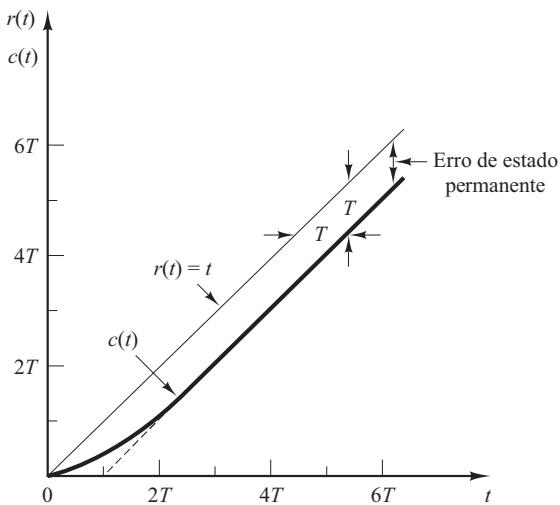
A curva de resposta dada pela Equação 5.8 é mostrada na Figura 5.4.

Uma propriedade importante de sistemas lineares invariantes no tempo. Na análise anterior, mostrou-se que, para a entrada em rampa unitária, a saída $c(t)$ é:

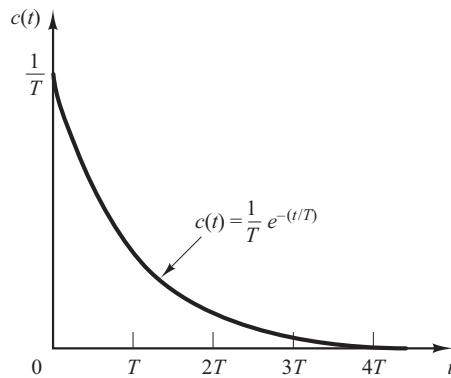
$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (\text{Veja a Equação 5.6})$$

FIGURA 5.3

Resposta de rampa unitária do sistema mostrado na Figura 5.1(a).

**FIGURA 5.4**

Resposta ao impulso unitário do sistema exposto na Figura 5.1(a).



Para a entrada em degrau unitário, que é a derivada da entrada em rampa unitária, a saída $c(t)$ é:

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (\text{Veja a Equação 5.3})$$

Por fim, para a entrada em impulso unitário, que é a derivada da entrada em degrau unitário, a saída $c(t)$ é:

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (\text{Veja a Equação 5.8})$$

A comparação das respostas do sistema com essas três entradas indica claramente que a resposta à derivada de um sinal de entrada pode ser obtida diferenciando-se a resposta do sistema para o sinal original. Pode-se ver também que a resposta à integral do sinal original pode ser obtida pela integração da resposta do sistema ao sinal original e pela determinação da constante de integração a partir da condição inicial de resposta nula. Esta é uma propriedade dos sistemas lineares invariantes no tempo. Os sistemas lineares variantes no tempo e sistemas não lineares não possuem essa propriedade.

5.3 | Sistemas de segunda ordem

Nesta seção, obteremos a resposta do sistema de controle típico de segunda ordem às entradas em degrau, rampa e impulso. Aqui, consideraremos um servossistema como um exemplo de sistema de segunda ordem.

Servossistema. A Figura 5.5(a) mostra um servossistema constituído por um controlador proporcional e elementos de carga (elementos de inércia e de atrito viscoso). Suponha que se deseja controlar a posição da saída c de acordo com a posição de entrada r .

A equação para os elementos de carga é:

$$J\ddot{c} + B\dot{c} = T$$

onde T é o torque produzido pelo controlador proporcional cujo ganho é K . Considerando as transformadas de Laplace de ambos os lados dessa última equação e supondo condições iniciais nulas, obtemos:

$$Js^2C(s) + BsC(s) = T(s)$$

Então, a função de transferência entre $C(s)$ e $T(s)$ é:

$$\frac{C(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js + B)}$$

Pelo uso dessa função de transferência, a Figura 5.5(a) pode ser redesenhada como na Figura 5.5(b), que pode ser modificada para o esquema mostrado na Figura 5.5(c). A função de transferência de malha fechada é então obtida como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{K/J}{s^2 + (B/J)s + (K/J)}$$

Esse sistema, em que a função de transferência de malha fechada possui dois polos, é chamado sistema de segunda ordem. (Alguns sistemas de segunda ordem podem conter um ou dois zeros.)

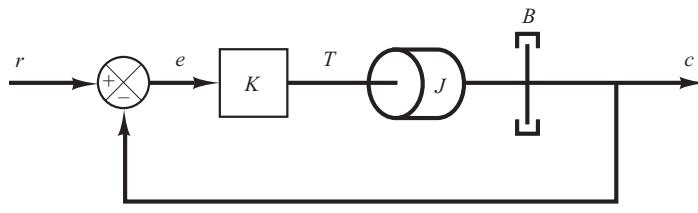
Resposta ao degrau do sistema de segunda ordem. A função de transferência de malha fechada do sistema mostrado na Figura 5.5(c) é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} \quad (5.9)$$

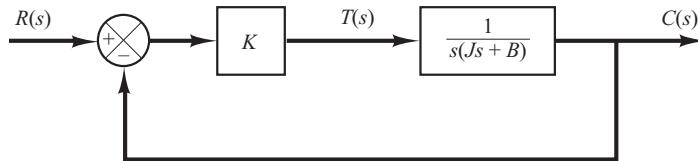
que pode ser reescrita como:

FIGURA 5.5

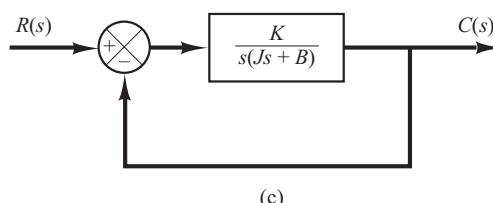
- (a) Servossistema;
- (b) diagrama de blocos;
- (c) diagrama de blocos simplificado.



(a)



(b)



(c)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{J}}{\left[s + \frac{B}{2J} + \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}}\right] \left[s + \frac{B}{2J} - \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}}\right]}$$

Os polos de malha fechada são complexos conjugados se $B^2 - 4JK < 0$ e são reais se $B^2 - 4JK \geq 0$. Na análise da resposta transitória, é conveniente escrever:

$$\frac{K}{J} = \omega_n^2, \quad \frac{B}{J} = 2\zeta\omega_n = 2\sigma$$

onde σ é chamado *atenuação*; ω_n é a *frequência natural não amortecida*; e ζ é o *coeficiente de amortecimento* do sistema. O coeficiente de amortecimento ζ é a relação entre o amortecimento real B e o amortecimento crítico ou $B_c = 2\sqrt{JK}$ ou

$$\zeta = \frac{B}{B_c} = \frac{B}{2\sqrt{JK}}$$

Em termos de ζ e ω_n , o sistema da Figura 5.5(c) pode ser modificado conforme mostra a Figura 5.6 e a função de transferência de malha fechada $C(s)/R(s)$, dada pela Equação 5.9, pode ser escrita como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.10)$$

Essa forma é chamada *forma-padrão* do sistema de segunda ordem.

O comportamento dinâmico do sistema de segunda ordem pode ser descrito em termos de dois parâmetros ζ e ω_n . Se $0 < \zeta < 1$, os polos de malha fechada são complexos conjugados e se situam no semiplano esquerdo do plano s . O sistema é então chamado subamortecido, e a resposta transitória é oscilatória. Se $\zeta = 0$, a resposta transitória não decai. Se $\zeta = 1$, o sistema é denominado criticamente amortecido. Os sistemas superamortecidos correspondem a $\zeta > 1$.

Determinaremos agora a resposta do sistema mostrado na Figura 5.6 a uma entrada em degrau unitário. Consideraremos três diferentes casos: subamortecido ($0 < \zeta < 1$), criticamente amortecido ($\zeta = 1$) e superamortecido ($\zeta > 1$).

(1) *Sistema subamortecido* ($0 < \zeta < 1$): nesse caso, $C(s)/R(s)$ pode ser escrito como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

onde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. A frequência ω_d é chamada *frequência natural amortecida* do sistema. Para uma entrada em degrau unitário, $C(s)$ pode ser escrita como:

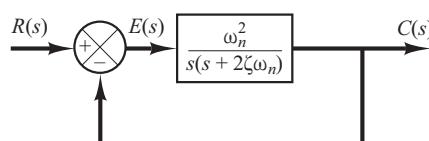
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} \quad (5.11)$$

A transformada inversa de Laplace da Equação 5.11 pode ser obtida facilmente se $C(s)$ for escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$

FIGURA 5.6

Sistema de segunda ordem.



Consultando a tabela de transformadas de Laplace no Apêndice A, podemos demonstrar que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

Então, a transformada inversa de Laplace da Equação 5.11 é obtida como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[C(s)] &= c(t) \\ &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right), \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

A partir da Equação 5.12, pode-se ver que a frequência da oscilação transitória é a frequência natural amortecida do sistema ω_d e, assim, varia de acordo com o coeficiente de amortecimento ζ . O sinal de erro para esse sistema é a diferença entre a entrada e a saída e é:

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - c(t) \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right), \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

Esse sinal de erro apresenta uma oscilação senoidal amortecida. Em regime permanente ou em $t = \infty$, não existe erro entre a entrada e a saída.

Se o coeficiente de amortecimento ζ for igual a zero, a resposta não será amortecida e as oscilações continuarão indefinidamente. A resposta, $c(t)$ no caso de o amortecimento ser nulo, pode ser obtida substituindo $\zeta = 0$ na Equação 5.12, o que resulta em:

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5.13)$$

Assim, a partir da Equação 5.13, vemos que ω_n representa a frequência natural do sistema sem amortecimento. Isto é, ω_n é a frequência em que a resposta do sistema poderá oscilar, se o amortecimento for reduzido a zero. Se o sistema linear tiver algum amortecimento, a frequência natural não amortecida do sistema não poderá ser observada experimentalmente. A frequência que pode ser observada é a frequência natural amortecida, ω_d , que é igual a $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, que é sempre menor que a frequência natural não amortecida. Um aumento em ζ poderia reduzir a frequência natural amortecida ω_d . Se ζ for aumentado acima da unidade, a resposta se tornará superamortecida e não oscilará.

(2) *Sistema criticamente amortecido ($\zeta = 1$)*: se os dois polos de $C(s)/R(s)$ forem iguais, o sistema será dito criticamente amortecido.

Para uma entrada em degrau unitário, $R(s) = 1/s$ e $C(s)$ podem ser escritas como:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \quad (5.14)$$

A transformada inversa de Laplace da Equação 5.14 pode ser determinada como:

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5.15)$$

Esse resultado pode também ser obtido fazendo-se ζ se aproximar da unidade na Equação 5.12 e utilizando o seguinte limite:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sin \omega_d t}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \omega_n t$$

(3) *Sistema superamortecido ($\zeta > 1$)*: nesse caso, os dois polos de $C(s)/R(s)$ são reais, negativos e desiguais. Para uma entrada em degrau unitário, $R(s) = 1/s$ e $C(s)$ podem ser escritas como:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s} \quad (5.16)$$

A transformada inversa de Laplace da Equação 5.16 é:

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \\ &= 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right), \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde $s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ e $s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$. Assim, a resposta $c(t)$ inclui dois termos exponenciais decrescentes.

Quando ζ for, de modo considerável, maior que a unidade, uma das duas exponenciais decrescentes decaí mais rápido que a outra e, assim, o termo que decaí mais rápido (o que corresponde à menor constante de tempo) pode ser desprezado. Ou seja, se $-s_2$ estiver situado muito mais próximo do eixo $j\omega$ que $-s_1$ (que significa $|s_2| \ll |s_1|$), então, para uma solução aproximada, poderemos desprezar $-s_1$. Isso é permitido porque o efeito de $-s_1$ na resposta é muito menor que o de $-s_2$, já que o termo que contém s_1 na Equação 5.17 decresce muito mais rapidamente que o termo que contém s_2 . Uma vez que o termo exponencial que decresce mais rapidamente tenha desaparecido, a resposta será análoga à de um sistema de primeira ordem e $C(s)/R(s)$ poderá ser aproximada para:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} = \frac{s_2}{s + s_2}$$

Esse modo de aproximação é uma consequência direta do fato de que os valores iniciais e finais, tanto de $C(s)/R(s)$ original como da aproximação, são coincidentes.

Com a função de transferência de $C(s)/R(s)$ aproximada, a resposta ao degrau unitário pode ser obtida como:

$$C(s) = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s}$$

A resposta no tempo $c(t)$ é, então, igual a:

$$c(t) = 1 - e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0$$

Isso fornece uma resposta aproximada ao degrau unitário, quando um dos polos de $C(s)/R(s)$ puder ser desprezado.

A Figura 5.7 mostra uma família de curvas $c(t)$ como resposta ao degrau unitário para diversos valores de ζ , onde a abscissa é a variável adimensional $\omega_n t$. As curvas são funções somente de ζ . Essas curvas são obtidas a partir das equações 5.12, 5.15 e 5.17. O sistema descrito por essas equações inicialmente estava em repouso.

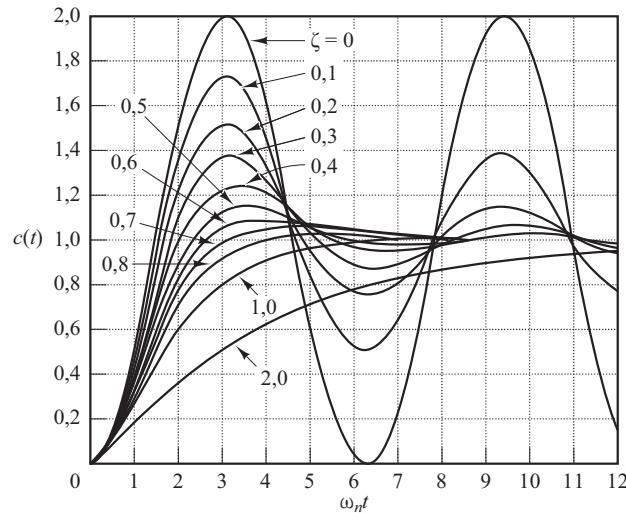
Note que dois sistemas de segunda ordem que tenham o mesmo valor de ζ , mas valores de ω_n diferentes, apresentam o mesmo sobressinal e o mesmo padrão oscilatório. Diz-se que esses sistemas têm a mesma estabilidade relativa.

A partir da Figura 5.7, vemos que um sistema subamortecido com ζ que varia entre 0,5 e 0,8 se aproxima mais rapidamente do valor final do que um sistema criticamente amortecido ou superamortecido. Entre os sistemas que apresentam resposta sem oscilação, um sistema criticamente amortecido é o que fornece a resposta mais rápida. A resposta de um sistema superamortecido é sempre mais lenta, qualquer que seja o sinal de entrada.

É importante notar que, para sistemas de segunda ordem cujas funções de transferência de malha fechada sejam diferentes da que foi apresentada pela Equação 5.10, as curvas de resposta ao degrau podem parecer completamente diferentes das mostradas na Figura 5.7.

FIGURA 5.7

Curva de resposta ao degrau unitário do sistema mostrado na Figura 5.6.



Definição das especificações da resposta transitória. Com frequência, as características de desempenho de um sistema de controle são especificadas em termos de resposta transitória a uma entrada em degrau unitário, já que se trata de entrada suficientemente brusca e gerada com facilidade. (Quando a resposta a uma entrada em degrau é conhecida, é possível calcular matematicamente a resposta a qualquer tipo de sinal de entrada.)

A resposta transitória de um sistema a uma entrada em degrau unitário depende das condições iniciais. Por conveniência, na comparação entre as respostas transitórias de vários sistemas, é uma prática comum utilizar uma condição inicial padrão que é a do sistema inicialmente em repouso, com o valor da variável de saída e todas as suas derivadas em função do tempo iguais a zero. Assim, as características de resposta dos vários sistemas poderão ser facilmente comparadas.

Na prática, antes de atingir o regime permanente, a resposta transitória de um sistema de controle apresenta, frequentemente, oscilações amortecidas. Na especificação das características das respostas transitórias de um sistema de controle a uma entrada em degrau unitário, é comum especificar o seguinte:

1. Tempo de atraso, t_d
2. Tempo de subida, t_r
3. Tempo de pico, t_p
4. Máximo sobressinal (ou apenas sobressinal), M_p
5. Tempo de acomodação, t_s

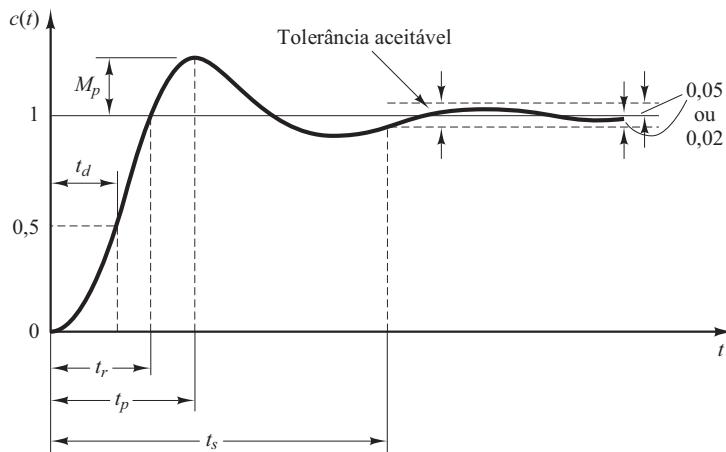
Essas especificações são definidas a seguir e são mostradas graficamente na Figura 5.8.

1. Tempo de atraso, t_d : trata-se do tempo requerido para que a resposta alcance metade de seu valor final pela primeira vez.
2. Tempo de subida, t_r : é o tempo requerido para que a resposta passe de 10 a 90%, ou de 5% a 95%, ou de 0% a 100% do valor final. Para sistemas de segunda ordem subamortecidos, o tempo de subida de 0% a 100% é o normalmente utilizado. Para os sistemas superamortecidos, o tempo de subida de 10% a 90% é o mais comumente utilizado.
3. Tempo de pico, t_p : é o tempo para que a resposta atinja o primeiro pico de sobressinal.
4. Máximo sobressinal (em porcentagem), M_p : é o valor máximo de pico da curva de resposta, medido a partir da unidade. Se o valor final da resposta em regime permanente diferir da unidade, então é comum utilizar porcentagem máxima de sobressinal, definida por:

$$\text{Porcentagem máxima de sobressinal} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

FIGURA 5.8

Curva de resposta em degrau unitário que mostra t_d , t_r , t_p , M_p e t_s .



O valor máximo (em porcentagem) do sobressinal indica diretamente a estabilidade relativa do sistema.

5. Tempo de acomodação, t_s : é o tempo necessário para que a curva de resposta alcance valores em uma faixa (geralmente de 2% ou 5%) em torno do valor final, aí permanecendo indefinidamente. O tempo de acomodação está relacionado à maior constante de tempo do sistema de controle. Pode-se determinar qual porcentagem deve ser utilizada no critério de erro a partir dos objetivos do projeto do sistema em questão.

As especificações no domínio de tempo dadas anteriormente são muito importantes, porque a maioria dos sistemas de controle é sistema no domínio de tempo, isto é, devem fornecer respostas temporais aceitáveis. (Isso quer dizer que o sistema de controle deve ser modificado até que a resposta transitória seja satisfatória.)

Observe que nem todas essas especificações se aplicam necessariamente a todos os casos dados. Por exemplo, para um sistema superamortecido, os termos tempo de pico e máximo sobressinal não se aplicam. (No caso dos sistemas que resultam em erros estacionários para entradas em degrau, esse erro deve ser conservado em um nível de porcentagem específico. Discussões detalhadas sobre erros estacionários serão apresentadas posteriormente na Seção 5.8.)

Alguns comentários sobre as especificações da resposta transitória. Exceto para certas aplicações nas quais as oscilações não podem ser toleradas, é desejável que a resposta transitória seja suficientemente rápida e amortecida. Assim, para uma resposta transitória desejável de um sistema de segunda ordem, o coeficiente de amortecimento deve se situar entre 0,4 e 0,8. Valores pequenos de ζ (ou seja, $\zeta < 0,4$) resultam em excessivo sobressinal na resposta transitória, e um sistema com um grande valor de ζ (ou seja, $\zeta > 0,8$) responde lentamente.

Veremos adiante que o máximo sobressinal e o tempo de subida são conflitantes entre si. Em outras palavras, tanto o máximo sobressinal como o tempo de subida não podem ser diminuídos simultaneamente. Se um deles diminui, o outro necessariamente se torna maior.

Sistemas de segunda ordem e especificações da resposta transitória. A seguir, obteremos o tempo de subida, o tempo de pico, o máximo sobressinal e o tempo de acomodação do sistema de segunda ordem dado pela Equação 5.10. Esses valores serão obtidos em termos de ζ e ω_n . Supõe-se que o sistema seja subamortecido.

Tempo de subida t_r : referente à Equação 5.12, obtemos o tempo de subida t_r com $c(t_r) = 1$.

$$c(t_r) = 1 = 1 - e^{-\zeta \omega_n t_r} \left(\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t_r \right) \quad (5.18)$$

Como $e^{-\zeta \omega_n t_r} \neq 1$, obtemos a partir da Equação 5.18 a seguinte equação:

$$\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t_r = 0$$

Como $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \omega_d$ e $\zeta \omega_n = \sigma$, temos

$$\operatorname{tg} \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} = -\frac{\omega_d}{\sigma}$$

Assim, o tempo de subida t_r é

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad (5.19)$$

onde o ângulo β é definido na Figura 5.9. Evidentemente, para um menor valor de t_r , ω_d deve ser maior.

Tempo de pico t_p : com o auxílio da Equação 5.12, podemos obter o tempo de pico diferenciando $c(t)$ em relação ao tempo e igualando essa derivada a zero. Como

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= \zeta \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \\ &\quad + e^{-\zeta \omega_n t} \left(\omega_d \sin \omega_d t - \frac{\zeta \omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos \omega_d t \right) \end{aligned}$$

e os termos em cosseno nessa última equação cancelam-se mutuamente, dc/dt , calculada em $t = t_p$, pode ser simplificada para:

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=t_p} = (\operatorname{sen} \omega_d t_p) \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t_p} = 0$$

Dessa última equação resulta a seguinte expressão:

$$\operatorname{sen} \omega_d t_p = 0$$

ou

$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Como o tempo de pico corresponde ao primeiro pico do sobressinal, $\omega_d t_p = \pi$. Então,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (5.20)$$

O tempo de pico t_p corresponde a meio ciclo da frequência de oscilação amortecida.

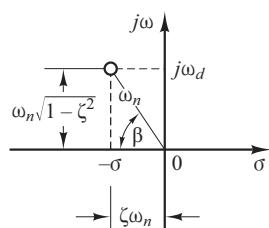
Máximo sobressinal M_p : o máximo sobressinal ocorre no tempo de pico ou em $t = t_p = \pi/\omega_d$. Ao supor que o valor final da saída seja unitário, M_p é obtido a partir da Equação 5.12 como:

$$\begin{aligned} M_p &= c(t_p) - 1 \\ &= -e^{-\zeta \omega_n(\pi/\omega_d)} \left(\cos \pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \pi \right) \\ &= e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(\zeta/\sqrt{1 - \zeta^2})\pi} \end{aligned} \quad (5.21)$$

A porcentagem máxima de sobressinal é $e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} \times 100\%$.

FIGURA 5.9

Definição do ângulo β .



Se o valor final $c(\infty)$ da saída não for unitário, então será necessário utilizar a seguinte equação:

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)}$$

Tempo de acomodação t_s : para um sistema subamortecido de segunda ordem, a resposta transitória é obtida a partir da Equação 5.12 como:

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right), \quad \text{para } t \geq 0$$

As curvas $1 \pm (e^{-\zeta\omega_n t}/\sqrt{1-\zeta^2})$ são as curvas envoltórias da resposta transitória à entrada em degrau unitário. A curva-resposta $c(t)$ permanece sempre dentro de um par de curvas envoltórias, como mostra a Figura 5.10. A constante de tempo dessas curvas envoltórias é $1/\zeta\omega_n$.

A velocidade de decaimento da resposta transitória depende do valor da constante de tempo $1/\zeta\omega_n$. Para dado valor de ω_n , o tempo de acomodação t_s é uma função do coeficiente de amortecimento ζ . A partir da Figura 5.7, vemos que, para o mesmo ω_n e para uma faixa de valores de ζ entre 0 e 1, o tempo de acomodação t_s para um sistema ligeiramente amortecido é maior que para um sistema adequadamente amortecido. Para um sistema superamortecido, o tempo de acomodação t_s se torna grande porque a resposta é lenta.

O tempo de acomodação correspondente à faixa de tolerância $\pm 2\%$ ou $\pm 5\%$ pode ser medido em termos da constante de tempo $T = 1/\zeta\omega_n$, a partir das curvas da Figura 5.7 para valores diferentes de ζ . O resultado é mostrado na Figura 5.11. Para $0 < \zeta < 0,9$, se for utilizado o critério de 2%, t_s será aproximadamente quatro vezes a constante de tempo do sistema. Se for usado o critério de 5%, então t_s será aproximadamente três vezes a constante de tempo. Note que o tempo de acomodação atinge um valor mínimo em torno de $\zeta = 0,76$ (para o critério de 2%) ou $\zeta = 0,68$ (para o critério de 5%) e, então, aumenta quase linearmente para valores grandes de ζ . A descontinuidade nas curvas da Figura 5.11 surge porque uma variação infinitesimal do valor de ζ pode causar uma variação finita no tempo de acomodação.

Por conveniência, na comparação das respostas dos sistemas, definimos comumente o tempo de acomodação t_s como:

$$t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (\text{critério de } 2\%) \quad (5.22)$$

ou

FIGURA 5.10

Par de curvas envoltórias para a curva de resposta ao degrau unitário do sistema mostrado na Figura 5.6.

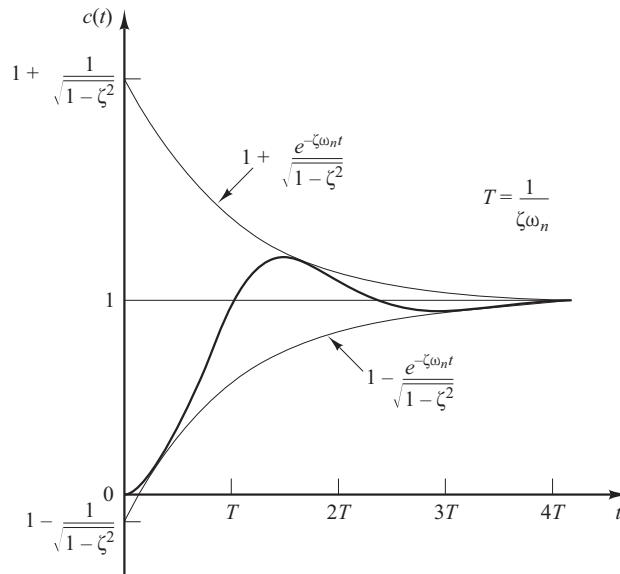
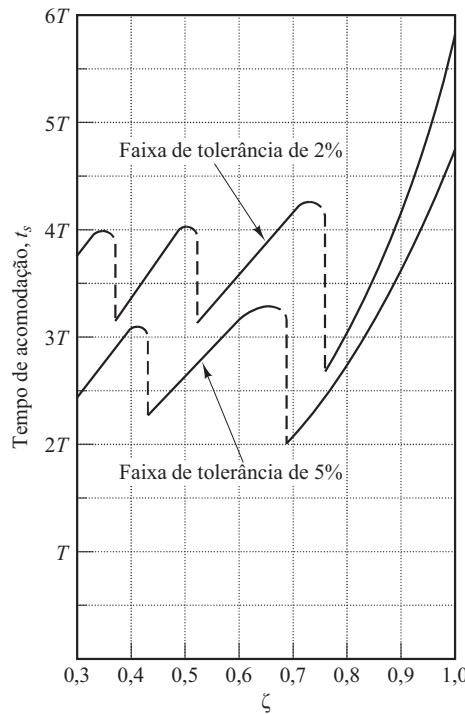


FIGURA 5.11

Curva de tempo de acomodação, t_s versus curvas ζ .



$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (\text{critério de } 5\%) \quad (5.23)$$

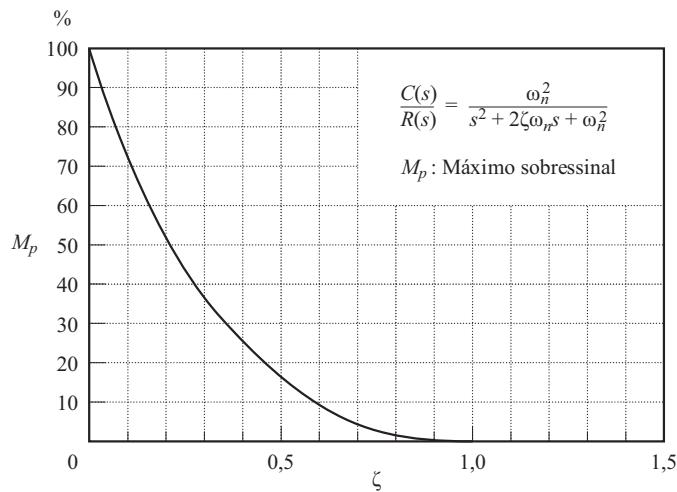
Note que o tempo de acomodação é inversamente proporcional ao produto do coeficiente de amortecimento pela frequência natural do sistema não amortecido. Como o valor de ζ é, em geral, determinado a partir da especificação do sobressinal máximo aceitável, o tempo de acomodação é determinado principalmente pela frequência natural não amortecida ω_n . Isso significa que a duração do período transitório pode variar, sem alteração do máximo sobressinal, pelo ajuste da frequência natural não amortecida ω_n .

A partir da análise anterior, é evidente que, para uma resposta rápida, ω_n deve ser grande. Para limitar o máximo sobressinal M_p e fazer que o tempo de acomodação seja pequeno, o coeficiente de amortecimento ζ não deve ser muito pequeno. A relação entre a porcentagem do máximo sobressinal e o coeficiente de amortecimento M_p é apresentada na Figura 5.12. Note que, se o coeficiente de amortecimento estiver situado entre 0,4 e 0,7, então a porcentagem do máximo sobressinal para a resposta ao degrau estará entre 25% e 4%.

É importante notar que as equações para a obtenção do tempo de subida, tempo de pico, máximo sobressinal e tempo de acomodação são válidas somente para o sistema-padrão de segunda ordem, definido pela Equação 5.10. Se o sistema de segunda ordem contiver um zero ou dois zeros, a forma da curva de resposta ao degrau unitário será muito diferente daquela mostrada na Figura 5.7.

FIGURA 5.12

Curva de M_p versus ζ .



Exemplo 5.1 Considere o sistema mostrado na Figura 5.6, onde $\zeta = 0,6$ e $\omega_n = 5$ rad/s. Obteremos o tempo de subida t_r , o tempo de pico t_p , o máximo sobressinal M_p , e o tempo de acomodação t_s quando o sistema for submetido a uma entrada em degrau unitário.

A partir dos valores de ζ e ω_n , obtemos $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 4$ e $\sigma = \zeta \omega_n = 3$.

Tempo de subida t_r : o tempo de subida é:

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{3,14 - \beta}{4}$$

onde β é dado por:

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega_d}{\sigma} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{4}{3} = 0,93 \text{ rad}$$

O tempo de subida t_r é, então, igual a:

$$t_r = \frac{3,14 - 0,93}{4} = 0,55 \text{ s}$$

Tempo de pico t_p : o tempo de pico é:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3,14}{4} = 0,785 \text{ s}$$

Máximo sobressinal M_p : o máximo sobressinal é:

$$M_p = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(3/4)\times 3,14} = 0,095$$

O máximo sobressinal em porcentagem é, então, 9,5%.

Tempo de acomodação t_s : para o critério de 2%, o tempo de acomodação é:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{3} = 1,33 \text{ s}$$

Para o critério de 5%,

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{3} = 1 \text{ s}$$

Servossistema com realimentação de velocidade. A derivada do sinal de saída pode ser utilizada para melhorar o desempenho do sistema. Na obtenção da derivada do sinal de saída de posição, é desejável utilizar um tacômetro em vez de diferenciar fisicamente o sinal de saída. (Note que a derivação amplifica os efeitos do ruído. De fato, se houver ruídos descontínuos, a derivação amplificará mais o ruído descontínuo do que o sinal útil. Por exemplo, o sinal de

saída de um potenciômetro é um sinal de tensão descontínuo, porque, com o cursor em movimento sobre as espirais do enrolamento, são induzidas tensões por ocasião da comutação entre espirais gerando, assim, transitórios. Portanto, a saída do potenciômetro não pode ser seguida por um elemento diferenciador.)

O tacômetro, um gerador *cc* especial, é frequentemente utilizado para medir a velocidade sem o processo de derivação. O sinal de saída de um tacômetro é proporcional à velocidade angular do motor.

Considere o servossistema mostrado na Figura 5.13(a). Nesse dispositivo, o sinal de velocidade, com o sinal de posição, é realimentado como sinal de entrada, produzindo o sinal de erro atuante. Em qualquer servossistema, esse sinal de velocidade pode ser gerado facilmente por um tacômetro. A Figura 5.13(a) mostra o diagrama de blocos que pode ser simplificado, como se pode ver na Figura 5.13(b), resultando em:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + (B + KK_h)s + K} \quad (5.24)$$

Comparando-se as equações 5.24 e 5.9, notamos que a realimentação de velocidade tem como efeito aumentar o amortecimento. O coeficiente de amortecimento ζ torna-se:

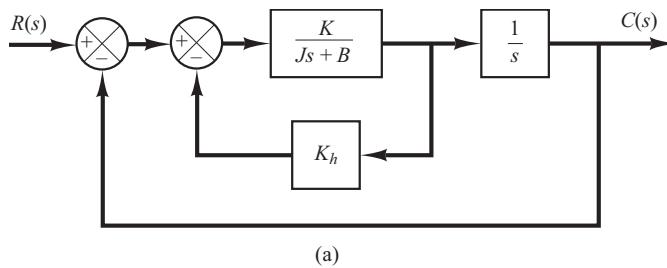
$$\zeta = \frac{B + KK_h}{2\sqrt{KJ}} \quad (5.25)$$

A frequência natural não amortecida $\omega_n = \sqrt{K/J}$ não é afetada pela realimentação de velocidade. Observando que o máximo sobressinal da resposta a uma entrada em degrau unitário pode ser controlado pelo coeficiente de amortecimento ζ , podemos reduzir esse máximo sobressinal ajustando o valor da constante de realimentação de velocidade K_h , a fim de fazer que ζ fique situado entre 0,4 e 0,7.

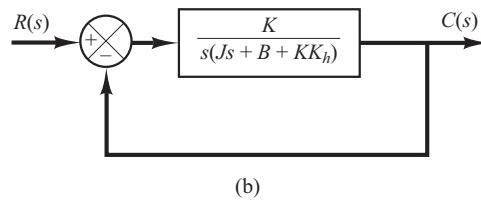
Lembre-se de que a realimentação de velocidade tem o efeito de aumentar o coeficiente de amortecimento sem afetar a frequência natural não amortecida do sistema.

FIGURA 5.13

(a) Diagrama de blocos de um servossistema;
(b) diagrama de blocos simplificado.



(a)



(b)

Exemplo 5.2 Para o sistema da Figura 5.13(a), determine os valores de ganho K e a constante de realimentação de velocidade K_h , de modo que o máximo sobressinal da resposta ao degrau unitário seja 0,2 e o tempo de pico seja 1 s. Com esses valores de K e K_h , obtenha o tempo de subida e o tempo de acomodação. Suponha que $J = 1 \text{ kg-m}^2$ e $B = 1 \text{ N-m/rad/s}$.

Determinação dos valores de K e K_h : o máximo sobressinal M_p é dado pela Equação 5.21 como:

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

Esse valor deve ser 0,2. Assim,

$$e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} = 0,2$$

ou

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1,61$$

que resulta em:

$$\zeta = 0,456$$

O tempo de pico t_p é especificado como 1 s; portanto, a partir da Equação 5.20,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1$$

ou

$$\omega_d = 3,14$$

Como ζ é 0,456, ω_n é igual a:

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 3,53$$

Como a frequência natural ω_n é igual a $\sqrt{K/J}$,

$$K = J\omega_n^2 = \omega_n^2 = 12,5 \text{ N-m}$$

Então, a partir da Equação 5.25, K_h é:

$$K_h = \frac{2\sqrt{KJ}\zeta - \beta}{K} = \frac{2\sqrt{K}\zeta - 1}{K} = 0,178 \text{ s}$$

Tempo de subida t_r : a partir da Equação 5.19, o tempo de subida t_r é:

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

onde

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega_d}{\sigma} = \operatorname{tg}^{-1} 1,95 = 1,10$$

Portanto, t_r é

$$t_r = 0,65 \text{ s}$$

Tempo de acomodação t_s : para o critério de 2%,

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 2,48 \text{ s}$$

Para o critério de 5%,

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = 1,86 \text{ s}$$

Resposta ao impulso dos sistemas de segunda ordem. Para um impulso unitário de entrada $r(t)$, a transformada de Laplace correspondente é unitária, ou seja, $R(s) = 1$. A resposta ao impulso unitário $C(s)$ do sistema de segunda ordem mostrado na Figura 5.6 é igual a:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

A transformada inversa de Laplace dessa equação fornece a solução para a resposta no tempo $c(t)$, como segue:

Para $0 \leq \zeta < 1$,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5.26)$$

Para $\zeta = 1$,

$$c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5.27)$$

Para $\zeta > 1$,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (5.28)$$

Note que, sem necessidade de recorrer à transformada inversa de Laplace de $C(s)$, podemos também obter a resposta no tempo $c(t)$ derivando a resposta ao degrau unitário correspondente, já que a função impulso unitário é a derivada da função degrau unitário. Uma família de curvas de resposta ao impulso unitário dada pelas equações 5.26 e 5.27 para vários valores de ζ é mostrada na Figura 5.14. As curvas $c(t)/\omega_n$ estão representadas no gráfico em função da variável adimensional $\omega_n t$ e, portanto, são funções somente de ζ . Para os casos de amortecimento crítico e superamortecimento, a resposta ao impulso unitário é sempre positiva ou nula, isto é, $c(t) \geq 0$. Isso pode ser visto a partir das equações 5.27 e 5.28. Para o caso de subamortecimento, a resposta ao impulso unitário $c(t)$ oscila em torno de zero e assume valores tanto positivos quanto negativos.

A partir da análise anterior, podemos concluir que, se a resposta $c(t)$ ao impulso não muda de sinal, o sistema deve ser criticamente amortecido ou superamortecido, caso em que a resposta correspondente a um degrau não possui sobressinal, mas aumenta ou diminui monotonicamente, aproximando-se de um valor constante.

O máximo sobressinal para a resposta ao impulso unitário do sistema subamortecido ocorre em:

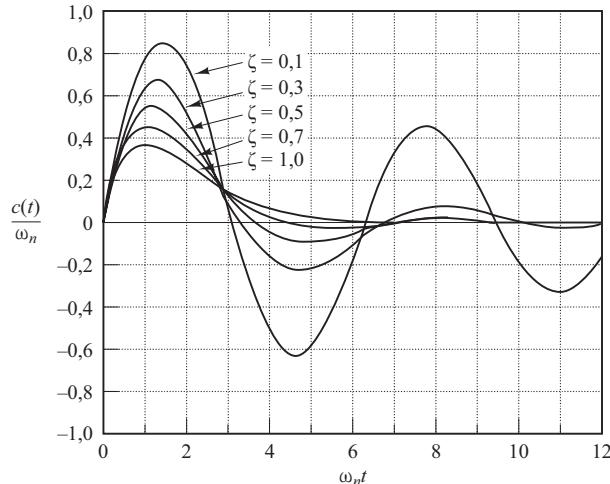
$$t = \frac{\operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad \text{onde } 0 < \zeta < 1 \quad (5.29)$$

(A Equação 5.29 pode ser obtida igualando dc/dt a zero e determinando t .) O máximo sobressinal é:

$$c(t)_{\max} = \omega_n \exp \left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right), \quad \text{onde } 0 < \zeta < 1 \quad (5.30)$$

FIGURA 5.14

Curvas de resposta ao impulso unitário do sistema mostrado na Figura 5.6.

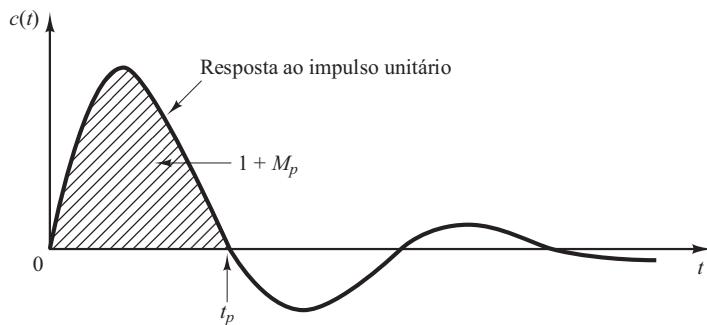


(A Equação 5.30 pode ser obtida substituindo a Equação 5.29 na Equação 5.26.)

Como a função de resposta ao impulso unitário é a derivada em relação ao tempo da função de resposta ao degrau unitário, o máximo sobressinal M_p para a resposta ao degrau unitário pode ser determinado a partir da resposta ao impulso unitário correspondente. Ou seja, a área sob a curva de resposta ao impulso unitário a partir de $t = 0$ até o instante do primeiro zero, como mostra a Figura 5.15, é $1 + M_p$, onde M_p é o máximo sobressinal (da resposta ao degrau unitário) dado pela Equação 5.21. O tempo de pico t_p (da resposta ao degrau unitário) dado pela Equação 5.20 corresponde ao tempo necessário para que a resposta ao impulso unitário cruze pela primeira vez o eixo do tempo.

FIGURA 5.15

Curva de resposta ao impulso unitário do sistema mostrado na Figura 5.6.



5.4 | Sistemas de ordem superior

Nesta seção, apresentaremos uma análise da resposta transitória de sistemas de ordem superior em termos gerais. Veremos que a resposta dos sistemas de ordem superior é a soma das respostas de sistemas de primeira e de segunda ordem.

Resposta transitória de sistemas de ordem superior. Considere o sistema mostrado na Figura 5.16. A função de transferência de malha fechada é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (5.31)$$

Em geral, $G(s)$ e $H(s)$ são dadas como relação de polinômios em s ou

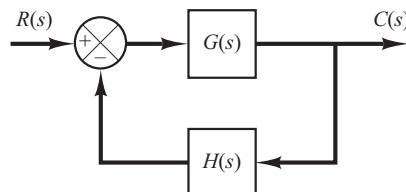
$$G(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \quad \text{e} \quad H(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

onde $p(s)$, $q(s)$, $n(s)$ e $d(s)$ são polinômios em s . A função de transferência de malha fechada dada pela Equação 5.31 pode, então, ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{p(s)d(s)}{q(s)d(s) + p(s)n(s)} \\ &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (m \leq n) \end{aligned}$$

FIGURA 5.16

Sistema de controle.



A resposta transitória desse sistema para dado sinal de entrada pode ser obtida por uma simulação de computador. (Veja a Seção 5.5.) Se uma expressão analítica para a resposta transitória for desejada, então é necessário fatorar o polinômio do denominador. [O MATLAB pode ser utilizado para encontrar as raízes do polinômio do denominador. Utilize o comando `roots(den)`.] Uma vez que o numerador e o denominador tenham sido fatorados, $C(s)/R(s)$ pode ser escrita como a seguir:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \quad (5.32)$$

Examinaremos o comportamento da resposta desse sistema para uma entrada em degrau unitário. Considere primeiro o caso em que os polos de malha fechada são todos reais e distintos. Para uma entrada em degrau unitário, a Equação 5.32 pode ser escrita como:

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + p_i} \quad (5.33)$$

onde a_i é o resíduo do polo em $s = -p_i$. (Se o sistema contém polos múltiplos, então $C(s)$ terá termos multipolares.) [A expansão em frações parciais de $C(s)$, dada pela Equação 5.33, pode ser obtida facilmente com o MATLAB. Utilize o comando `residue`. (Consulte o Apêndice B.)]

Se todos os polos de malha fechada se situarem no semiplano esquerdo do plano s , os valores dos resíduos determinarão a importância relativa dos componentes na forma expandida de $C(s)$. Se existir um zero de malha fechada próximo a um polo de malha fechada, então o resíduo nesse polo será pequeno e o do termo correspondente da resposta transitória para esse polo se tornará pequeno. Um par de polos e zeros próximos vai se cancelar mutuamente. Se um polo estiver localizado muito longe da origem, o resíduo nesse polo poderá ser pequeno. Os transitórios correspondentes a esse polo remoto são pequenos e de curta duração. Os termos na forma expandida de $C(s)$ que tenham resíduos muito pequenos contribuem pouco para a resposta transitória e podem ser desprezados. Nesse caso, o sistema de ordem superior pode se aproximar de um de maior ordem. (Essa aproximação frequentemente nos possibilita avaliar as características da resposta de um sistema de ordem superior a partir de um sistema mais simplificado.)

A seguir, considere o caso em que os polos de $C(s)$ sejam constituídos pelos polos reais e de pares de polos complexos conjugados. Um par de polos complexos conjugados resulta em um termo de segunda ordem em s . Como a forma fatorada da equação característica de ordem elevada consiste em termos de primeira e segunda ordens, a Equação 5.33 pode ser reescrita como:

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s + p_i} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k(s + \zeta_k \omega_k) + c_k \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2} \quad (q + 2r = n)$$

onde supomos que todos os polos de malha fechada sejam distintos. [Se entre os polos de malha fechada existirem polos múltiplos, $C(s)$ deverá ter termos multipolares.] A partir dessa última equação, vemos que a resposta de um sistema de ordem superior é composta por uma série de termos que contêm funções simples encontradas em respostas dos sistemas de primeira e segunda ordens. A transformada inversa de Laplace $c(t)$, da resposta ao degrau unitário $C(s)$, é, então, igual a:

$$\begin{aligned} c(t) = a &+ \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t \\ &+ \sum_{k=1}^r c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t, \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Assim, a curva de resposta de um sistema estável de ordem superior é a soma de uma série de curvas exponenciais e curvas senoidais amortecidas.

Se todos os polos de malha fechada estiverem no semiplano esquerdo do plano s , então os termos exponenciais e os termos exponenciais amortecidos da Equação 5.34 tenderão a zero à medida que t aumentar. A saída em regime permanente é, então, $c(\infty) = a$.

Vamos supor que o sistema considerado seja estável. Então, os polos de malha fechada que estiverem situados distantes do eixo $j\omega$ terão grandes partes reais negativas. Os termos exponenciais que correspondem a esses polos decrescem rapidamente, tendendo a zero. (Note que a distância horizontal a partir de um polo de malha fechada até o eixo $j\omega$ determina o tempo de acomodação dos componentes transitórios daquele polo. Quanto menor a distância, maior é o tempo de acomodação.)

Devemos lembrar que o tipo de resposta transitória é determinado pelos polos de malha fechada, enquanto a forma da resposta transitória é determinada principalmente pelos zeros de malha fechada. Como vimos anteriormente, os polos da entrada $R(s)$ resultam em termos da resposta de regime permanente na solução, enquanto os polos de $C(s)/R(s)$ introduzem os termos da resposta transitória exponencial e/ou os termos da resposta transitória senoidal amortecida. Os zeros de $C(s)/R(s)$ não afetam os expoentes dos termos exponenciais, mas afetam os valores e os sinais dos resíduos.

Polos dominantes em malha fechada. O domínio relativo dos polos de malha fechada é determinado pela relação das partes reais dos polos de malha fechada, bem como pelo valor dos resíduos calculados nos polos. As magnitudes dos resíduos dependem tanto dos polos como dos zeros de malha fechada.

Se as relações das partes reais forem maiores que 5 e não houver zeros nas proximidades, então os polos de malha fechada mais próximos do eixo $j\omega$ serão dominantes no comportamento da resposta transitória porque correspondem aos termos da resposta transitória que decrescem lentamente. Os polos que têm efeitos dominantes no comportamento da resposta transitória são chamados polos *dominantes de malha fechada*. Muito frequentemente, os polos dominantes apresentam-se sob a forma de um par complexo conjugado. Os polos dominantes de malha fechada são os de maior importância entre todos os polos de malha fechada.

Note que o ganho de um sistema de ordem superior é frequentemente ajustado para ter um par de polos complexos conjugados dominantes de malha fechada. A presença desses polos em um sistema estável reduz o efeito de certas não linearidades, como zona morta, folga e atrito de Coulomb.

Análise de estabilidade no plano complexo. A estabilidade de um sistema linear de malha fechada pode ser determinada a partir da localização dos polos de malha fechada no plano s . Se qualquer um desses polos estiver no semiplano direito do plano s , então, com o decorrer do tempo, eles darão origem ao modo dominante e a resposta transitória aumentará monotonicamente ou oscilará com amplitude crescente. Isso representa um sistema instável. Assim que for ligada, a saída desse sistema poderá aumentar com o tempo. Se não for alcançado um ponto de saturação do sistema ou se não houver um fim de curso mecânico, então o sistema poderá estar sujeito a danos e apresentar falhas, já que a resposta de um sistema físico real não pode aumentar indefinidamente. Por isso, nos usuais sistemas lineares de controle, não são permitidos polos de malha fechada no semiplano direito do plano s . Se todos os polos de malha fechada se situarem à esquerda do eixo $j\omega$, qualquer resposta transitória poderá alcançar o equilíbrio. Isso caracteriza um sistema estável.

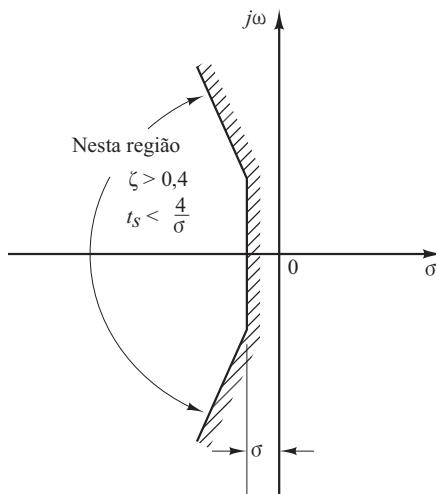
A estabilidade ou a instabilidade de um sistema linear é propriedade do próprio sistema e não depende da entrada ou da função de excitação do sistema. Os polos da entrada ou da função de excitação não afetam a estabilidade do sistema, mas contribuem somente para os termos da resposta de regime permanente na solução. Assim, o problema da estabilidade absoluta pode ser resolvido prontamente pela escolha dos polos de malha fechada no semiplano direito do plano s , incluindo o eixo $j\omega$. (Matematicamente, os polos de malha fechada no eixo $j\omega$ resultarão em oscilações cuja amplitude não vai decrescer nem aumentar com o tempo. Nos casos práticos, em que existem ruídos, entretanto, a amplitude das oscilações pode aumentar a uma taxa determinada pelo nível de potência do ruído. Portanto, um sistema de controle não deve ter polos de malha fechada no eixo $j\omega$.)

Observe que o simples fato de que todos os polos de malha fechada estejam situados no semiplano esquerdo do plano s não garante que as características da resposta transitória sejam satisfatórias. Se os polos complexos conjugados dominantes de malha fechada estiverem situados próximos ao eixo $j\omega$, a resposta transitória poderá apresentar oscilações excessivas ou poderá ser muito lenta. Dessa maneira, para garantir que as características da resposta transitória sejam rápidas, mas também suficientemente amortecidas, é necessário que os polos de malha fechada do sistema se situem em uma região conveniente do plano complexo, tal como a região delimitada pela área sombreada na Figura 5.17.

Como a estabilidade relativa e o desempenho da resposta transitória de um sistema de controle de malha fechada estão diretamente relacionados à configuração de polos e zeros de malha fechada no plano s , frequentemente é necessário ajustar um ou mais parâmetros do sistema, a fim de obter configurações satisfatórias. Os efeitos da variação dos parâmetros do sistema nos polos de malha fechada serão discutidos com detalhes no Capítulo 6.

FIGURA 5.17

Região no plano complexo que satisfaz as condições $\zeta > 0,4$ e $t_s < 4/\sigma$.



5.5 | Análise da resposta transitória com o MATLAB

Introdução. O processo prático para a representação gráfica das curvas de resposta em função do tempo dos sistemas de ordem maior que 2 é feito por meio de simulação por computador. Nesta seção, apresentaremos a abordagem computacional para a análise da resposta transitória com o MATLAB. Em particular, discutiremos resposta ao degrau, resposta ao impulso, resposta à rampa e resposta a outras entradas simples.

Representação de sistemas lineares com o MATLAB. A função de transferência de um sistema é representada por dois vetores de números. Considere o sistema

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s + 25}{s^2 + 4s + 25} \quad (5.35)$$

Esse sistema pode ser representado por dois vetores-linha, cada um com os coeficientes dos polinômios com potências de s decrescentes, como segue:

```
num = [2 25]
den = [1 4 25]
```

Uma alternativa de representação é:

```
num = [0 2 25]
den = [1 4 25]
```

Nessa expressão, foi acrescentado um zero. Note que, se forem convenientemente completadas com zeros, as dimensões dos vetores 'num' e 'den' tornam-se as mesmas. Uma vantagem de acrescentar zeros é que os vetores 'num' e 'den' podem ser somados diretamente. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \text{num} + \text{den} &= [0 \ 2 \ 25] + [1 \ 4 \ 25] \\ &= [1 \ 6 \ 50] \end{aligned}$$

Se num e den (o numerador e o denominador da função de transferência de malha fechada) forem conhecidos, comandos como

$$\text{step}(\text{num}, \text{den}), \quad \text{step}(\text{num}, \text{den}, t)$$

gerarão as curvas das respostas ao degrau unitário. (O parâmetro t no comando step é o tempo especificado pelo usuário.)

Para um sistema de controle definido em uma forma de espaço de estados, onde a matriz de estado **A**, a matriz de controle **B**, a matriz de saída **C** e a matriz de transmissão direta **D** das equações de espaço de estados são conhecidas, o comando

$$\text{step}(\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D}), \quad \text{step}(\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D}, t)$$

gerará as curvas de respostas ao degrau unitário. O vetor tempo é determinado de maneira automática quando t não for explicitamente incluído nos comandos step.

Note que o comando step(sys) pode ser utilizado para obter a resposta ao degrau unitário de um sistema. Primeiro, defina o sistema como:

$$\text{sys} = \text{tf}(\text{num}, \text{den})$$

ou

$$\text{sys} = \text{ss}(\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D})$$

Então, para obter, por exemplo, a resposta ao degrau unitário, forneça o comando

$$\text{step}(\text{sys})$$

ao computador.

Quando os comandos do degrau têm argumentos do lado esquerdo, como

$$\begin{aligned} [\text{y}, \text{x}, \text{t}] &= \text{step}(\text{num}, \text{den}, \text{t}) \\ [\text{y}, \text{x}, \text{t}] &= \text{step}(\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D}, \text{iu}) \\ [\text{y}, \text{x}, \text{t}] &= \text{step}(\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D}, \text{iu}) \end{aligned} \quad (5.36)$$

nenhum gráfico é apresentado na tela. Então, é necessário utilizar um comando plot para ver as curvas de resposta. As matrizes y e x contêm os valores de saída e de estado do sistema, respectivamente, calculados nos pontos computacionais do tempo t . (y tem tantas colunas quantas forem as saídas e uma linha para cada elemento em t ; x tem tantas colunas quantos forem os estados e uma linha para cada elemento em t .)

Note que, na Equação 5.36, o escalar iu é um índice nas entradas do sistema e especifica qual entrada é utilizada para a resposta, e t é o tempo especificado pelo usuário. Se o sistema tiver múltiplas entradas e múltiplas saídas, o comando step, tal como é dado pela Equação 5.36, fornecerá uma série de gráficos de resposta ao degrau, um para cada combinação de entrada e saída de

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

(Para mais detalhes, veja o Exemplo 5.3.)

Exemplo 5.3 Considere o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Obtenha as curvas de resposta ao degrau unitário.

Embora não seja necessário conhecer a expressão da matriz de transferência do sistema para obter as curvas de resposta ao degrau unitário com o MATLAB, deduziremos essa expressão para referência.

Sendo o sistema definido como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

a matriz de transferência $\mathbf{G}(s)$ é a matriz que relaciona $\mathbf{Y}(s)$ e $\mathbf{U}(s)$ como segue:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

Transformando por Laplace as equações de espaço de estados, obtemos:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s) \quad (5.37)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DU}(s) \quad (5.38)$$

Na dedução da matriz de transferência, supomos que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Então, a partir da Equação 5.37, obtemos:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s) \quad (5.39)$$

Substituindo a Equação 5.39 na Equação 5.38, temos:

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{U}(s)$$

Assim, a matriz de transferência $\mathbf{G}(s)$ é dada por:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

A matriz de transferência $\mathbf{G}(s)$ para o sistema dado resulta em:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -6,5 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + s + 6,5} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6,5 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + s + 6,5} \begin{bmatrix} s-1 & s \\ s+7,5 & 6,5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s^2 + s + 6,5} & \frac{s}{s^2 + s + 6,5} \\ \frac{s+7,5}{s^2 + s + 6,5} & \frac{6,5}{s^2 + s + 6,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Como esse sistema contém duas entradas e duas saídas, podemos definir quatro funções de transferência, dependendo de quais sinais forem considerados entrada e saída. Note que, quando consideramos o sinal u_1 como entrada, supomos que o sinal u_2 seja zero e vice-versa. As quatro funções de transferência são:

$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{s-1}{s^2 + s + 6,5}, \quad \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} = \frac{s}{s^2 + s + 6,5}$$

$$\frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s+7,5}{s^2 + s + 6,5}, \quad \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{6,5}{s^2 + s + 6,5}$$

Considere que u_1 e u_2 são funções de degrau unitário. As quatro curvas individuais de resposta ao degrau podem ser representadas com a utilização do comando

`step(A,B,C,D)`

O Programa 5.1 em MATLAB produz essas quatro curvas de resposta ao degrau. As curvas são mostradas na Figura 5.18. (Note que o vetor de tempo t é automaticamente determinado, uma vez que o comando não inclui t .)

Programa 5.1 em MATLAB

```
A = [-1 -1;6.5 0];
B = [1 1;1 0];
C = [1 0;0 1];
D = [0 0;0 0];
step(A,B,C,D)
```

Para traçar duas curvas de resposta ao degrau para a entrada u_1 em um diagrama e duas curvas de resposta ao degrau para a entrada u_2 em outro diagrama, podemos utilizar os comandos

```
step(A,B,C,D,1)
```

e

```
step(A,B,C,D,2)
```

respectivamente. O Programa 5.2 em Matlab é um programa para traçar duas curvas de resposta ao degrau para a entrada u_1 em um diagrama e duas curvas de resposta ao degrau para a entrada u_2 em outro diagrama. A Figura 5.19 mostra os dois diagramas, cada um constituído por duas curvas de resposta ao degrau. (Esse programa Matlab usa comandos de texto. Para tais comandos, consulte o parágrafo seguinte a este exemplo.)

FIGURA 5.18

Curvas de
resposta ao
degrau unitário.

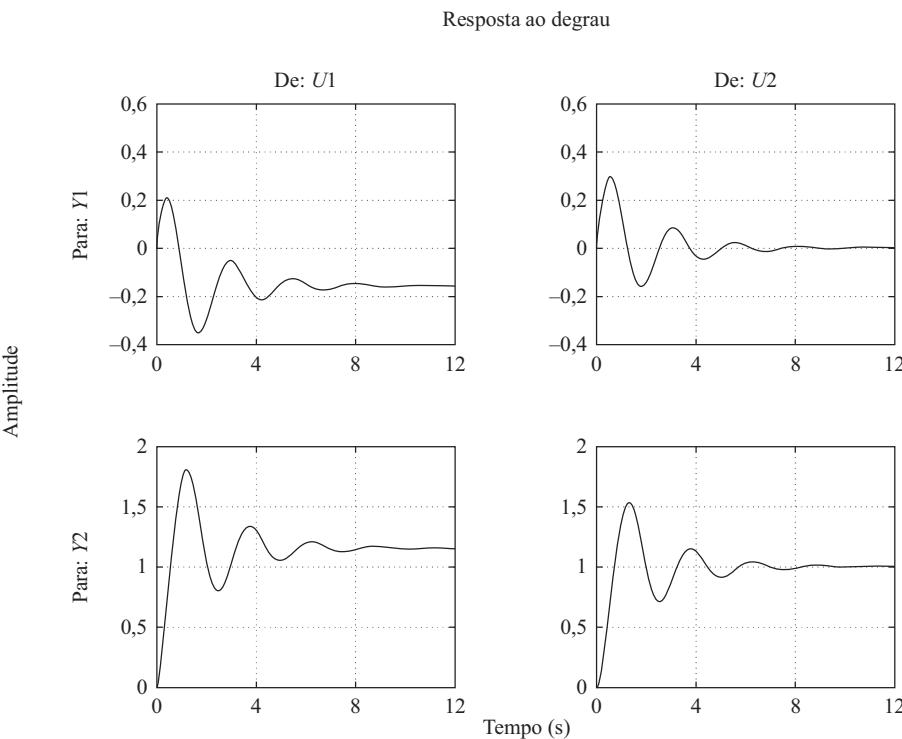
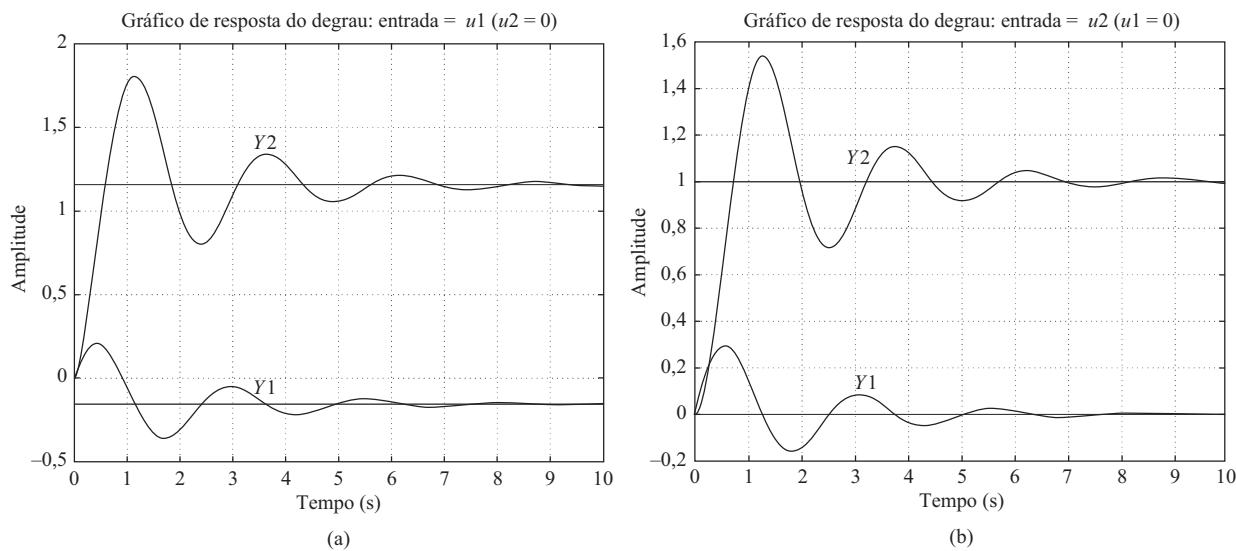


FIGURA 5.19

Curvas de resposta ao degrau unitário. (a) u_1 é a entrada ($u_2 = 0$); (b) u_2 é a entrada ($u_1 = 0$).



Programa 5.2 em MATLAB

```
% ***** Neste programa, desenharemos curvas de resposta em degrau para
% um sistema com duas entradas (u1 e u2) e duas saídas (y1 e y2) *****
%
% ***** Primeiro, desenharemos as curvas de resposta em degrau quando a
% entrada for u1. Em seguida, desenharemos as curvas de resposta em
% degrau quando a entrada for u2 *****
%
% ***** Entram as matrizes A, B, C e D *****
A = [-1 -1;6.5 0];
B = [1 1;1 0];
C = [1 0;0 1];
D = [0 0;0 0];
%
% ***** Para desenhar as curvas de resposta em degrau quando a entrada
% for u1, dê o comando 'step(ABCD1)' *****
step(A,B,C,D,1)
grid
title ('Gráficos de Resposta ao Degrau Unitário: Entrada = u1 (u2 = 0)')
text(3.4, -0.06,'Y1')
text(3.4, 1.4,'Y2')
%
% ***** Em seguida, desenharemos as curvas de
% resposta em degrau quando a entrada for u2. Dê
% o comando 'step(ABCD2)' *****
step(A,B,C,D,2)
grid
title ('Gráficos de Resposta ao Degrau: Entrada = u2 (u1 = 0)')
text(3,0.14,'Y1')
text(2.8,1.1,'Y2')
```

Escrevendo texto nos gráficos da tela. Para escrever texto nos gráficos da tela, digite, por exemplo, os seguintes comandos:

```
text(3.4, -0.06,'Y1')
e
text(3.4,1.4,'Y2')
```

O primeiro comando informa ao computador para escrever ‘Y1’ começando nas coordenadas $x = 3,4$ e $y = -0,06$. Da mesma maneira, o segundo comando diz ao computador para escrever ‘Y2’ começando nas coordenadas $x = 3,4$ e $y = 1,4$. [Veja o Programa 5.2 em MATLAB e a Figura 5.19(a).]

Outro modo de escrever um texto no gráfico é utilizando o comando gtext. A sintaxe é:

```
gtext('text')
```

Quando o comando gtext é executado, o computador espera até o cursor ser posicionado (utilizando-se o mouse) na posição desejada na tela. Quando o botão esquerdo do mouse for pressionado, o texto entre aspas será escrito no gráfico, na posição onde está o cursor. Pode-se utilizar o comando gtext em um gráfico quantas vezes forem necessárias. (Veja, por exemplo, o Programa 5.15 em MATLAB.)

Descrição do sistema-padrão de segunda ordem com o MATLAB. Como foi mencionado anteriormente, o sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.40)$$

é chamado sistema-padrão de segunda ordem. Dados ω_n e ζ , o comando

```
printsys(num,den) ou printsy(num,den,s)
```

imprime num/den como uma relação de polinômios em s .

Considere, por exemplo, o caso em que $\omega_n = 5$ rad/s e $\zeta = 0,4$. O Programa 5.3 em MATLAB gera o sistema-padrão de segunda ordem, onde $\omega_n = 5$ rad/s e $\zeta = 0,4$. Note que, no programa MATLAB 5.3, ‘num 0’ é 1.

Programa 5.3 em MATLAB
<pre>wn = 5; damping_ratio = 0.4; [num0,den] = ord2(wn,damping_ratio); num = 5^2*num0; printsys(num,den,'s') num/den = 25 _____ S^2 + 4s + 25</pre>

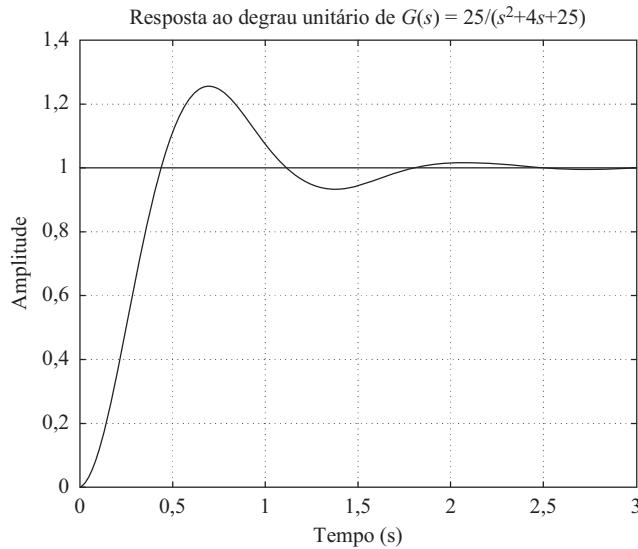
Obtenção da resposta ao degrau unitário a partir da função de transferência do sistema. Consideraremos a resposta ao degrau unitário do sistema definido por:

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}$$

O Programa 5.4 em MATLAB fornecerá o gráfico da curva de resposta ao degrau unitário desse sistema. O gráfico da curva de resposta ao degrau unitário é mostrado na Figura 5.20.

FIGURA 5.20

Curva de resposta ao degrau unitário.

**Programa 5.4 em MATLAB**

```
% ----- Resposta ao degrau unitário -----
% ***** Digite o numerador e o denominador da função de transferência *****
num = [25];
den = [1 4 25];
% ***** Digite o seguinte comando de resposta ao degrau *****
step(num,den)
% ***** Digite os comandos para inserir a grade e o título do gráfico *****
grid
title (' Resposta ao Degrau Unitário de G(s) = 25/(s^2+4s+25)' )
```

Note que, na Figura 5.20 (e em muitas outras), as legendas dos eixos x e y são determinadas automaticamente. Se for desejado rotular os eixos x e y de modo diferente, será necessário modificar o comando `step`. Por exemplo, se quisermos rotular o eixo x como ' t (s)' e o eixo y como 'Saída', então deveremos utilizar os comandos de resposta ao degrau com argumentos do lado esquerdo da igualdade como:

$$c = step(num,den,t)$$

ou, mais genericamente,

$$[y,x,t] = step(num,den,t)$$

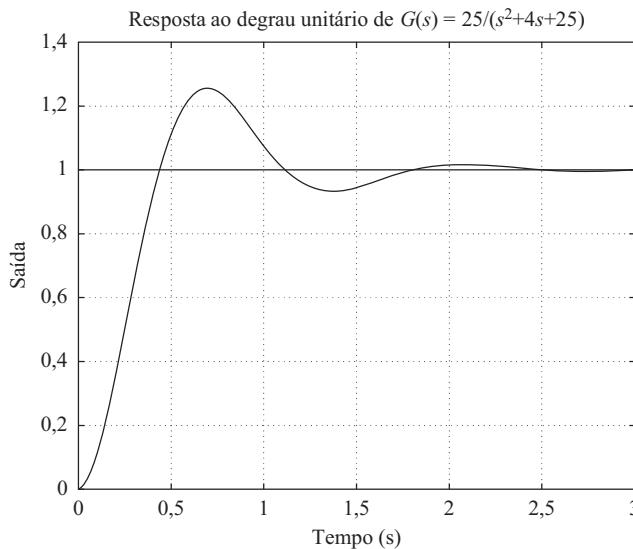
e usar o comando `plot(t,y)`. Veja, por exemplo, o Programa 5.5 em MATLAB e a Figura 5.21.

Programa 5.5 em MATLAB

```
% ----- Resposta ao degrau unitário -----
num = [25];
den = [1 4 25];
t = 0:0.01:3;
[y,x,t] = step(num,den,t);
plot(t,y)
grid
title('Resposta ao Degrau Unitário de G(s)=25/s^2+4s+25')
xlabel('t Sec')
ylabel('Output')
```

FIGURA 5.21

Curva de resposta ao degrau unitário.



Obtenção do gráfico tridimensional das curvas de resposta ao degrau unitário com MATLAB. O MATLAB permite traçar facilmente gráficos tridimensionais. Os comandos para a obtenção de um gráfico tridimensional são ‘mesh’ e ‘surf’. A diferença entre os gráficos ‘mesh’ e ‘surf’ é que, no primeiro, são desenhadas apenas as linhas e, no segundo, os espaços entre as linhas são preenchidos por cores. Neste livro, usamos apenas o comando ‘mesh’.

Exemplo 5.4 Considere o sistema de malha fechada definido por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

(A frequência natural não amortecida ω_n foi normalizada para 1.) Trace as curvas de resposta ao degrau unitário $c(t)$ quando ζ assumir os seguintes valores:

$$\zeta = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$$

Trace também um gráfico tridimensional.

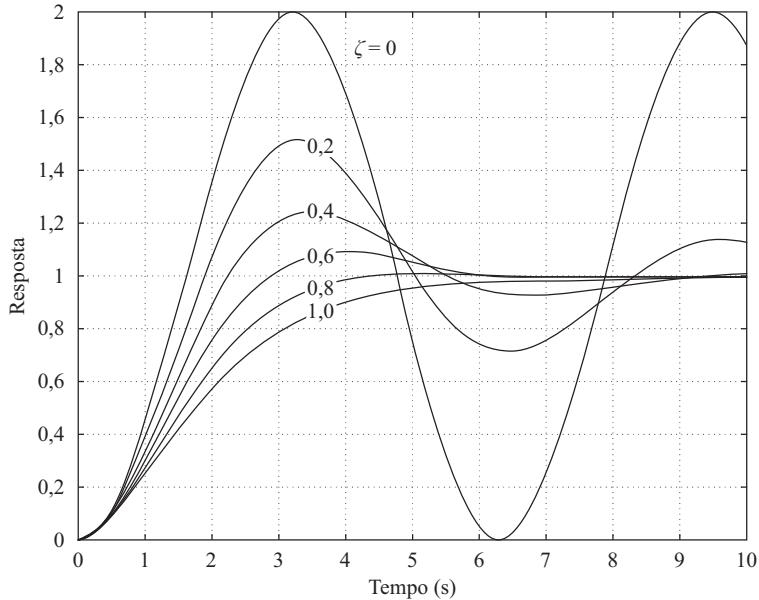
Um programa em MATLAB ilustrativo para gerar um diagrama bidimensional e um gráfico tridimensional das curvas de resposta ao degrau unitário desse sistema de segunda ordem é o Programa 5.6 em MATLAB. Os gráficos resultantes são mostrados nas figuras 5.22(a) e (b), respectivamente. Observe que usamos o comando `mesh(t,zeta,y')` para o gráfico tridimensional. Podemos usar um comando `mesh(y')` para obter o mesmo resultado. [Note que o comando `mesh(t,zeta,y)` ou `mesh(y)` produzirá um gráfico tridimensional igual ao da Figura 5.22(b), mas com os eixos x e y permutados. Veja o Problema A.5.15.]

Quando queremos resolver um problema usando o MATLAB e se o processo de solução implica muitos cálculos repetitivos, várias abordagens podem ser concebidas para simplificar o programa. Uma abordagem frequentemente utilizada para simplificar os cálculos é ‘for loops’. O Programa 5.6 em MATLAB usa um ‘for loop’. Neste livro, muitos programas em MATLAB diferentes que utilizam ‘for loops’ são apresentados para a solução de vários problemas. Aconselha-se ao leitor estudar atentamente esses problemas e familiarizar-se com a abordagem.

FIGURA 5.22

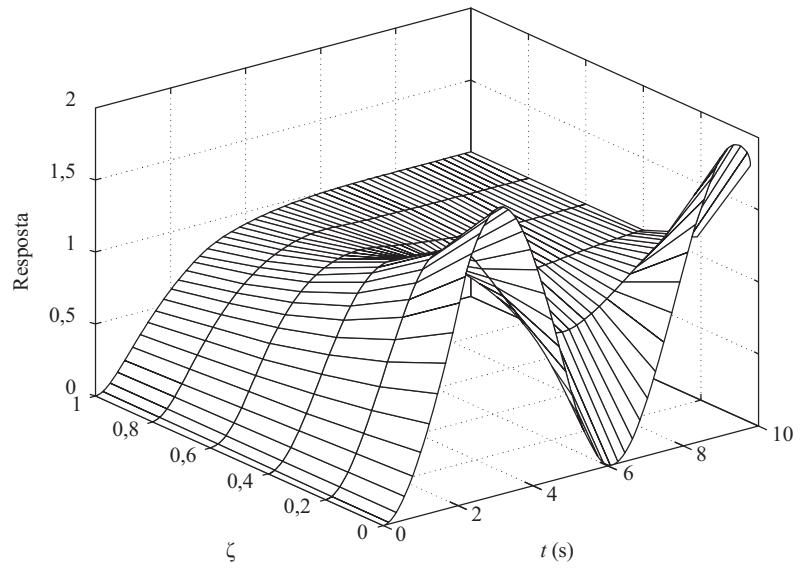
(a) Gráfico bidimensional das curvas de resposta ao degrau unitário para $\zeta = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ e 1,0.
 (b) gráfico tridimensional das curvas de resposta ao degrau unitário.

Gráfico das curvas de resposta ao degrau unitário com $\omega_n = 1$ e $\zeta = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1$



(a)

Gráfico tridimensional das curvas de resposta ao degrau unitário



(b)

Programa 5.6 em MATLAB

```
% ----- Gráficos bidimensional e tridimensional das curvas de resposta
% ao degrau unitário para um sistema padrão de segunda ordem com wn = 1
% e zeta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 e 1. -----
t = 0:0.2:10;
zeta = [0 0.2 0.4 0.6 0.8 1];
for n = 1:6;
    num = [1];
    den = [1 2*zeta(n) 1];
    [y(1:51,n),x,t] = step(num,den,t);
end

% Para gerar o diagrama bidimensional utilize o comando plot(t,y).

plot(t,y)
grid
title('Gráfico das Curvas de Resposta ao Degrau com \omega_n = 1 and \
zeta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1')
xlabel('t (sec)')
ylabel('Resposta')
text(4.1,1.86,'zeta = 0')
text(3.5,1.5,'0.2')
text(3.5,1.24,'0.4')
text(3.5,1.08,'0.6')
text(3.5,0.95,'0.8')
text(3.5,0.86,'1.0')

% Para gerar o gráfico tridimensional, utilize o comando mesh(t,zeta,y').

mesh(t,zeta,y')
title('Gráfico Tridimensional das Curvas de Resposta ao Degrau Unitário')
xlabel('t Sec')
ylabel('\zeta')
zlabel('Resposta')
```

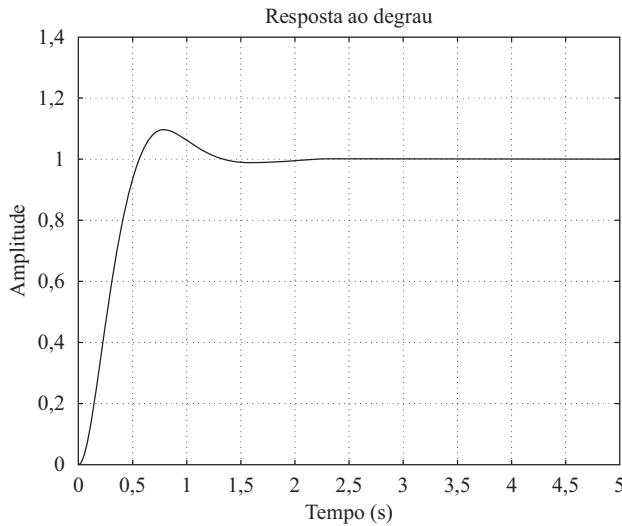
Obtenção do tempo de subida, tempo de pico, máximo sobressinal e tempo de acomodação com o MATLAB. O MATLAB pode ser convenientemente utilizado para obter o tempo de subida, o tempo de pico, o máximo sobressinal e o tempo de acomodação. Considere o sistema definido por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

O Programa 5.7 em MATLAB calcula o tempo de subida, o tempo de pico, o máximo sobressinal e o tempo de acomodação. Uma curva de resposta para esse sistema é mostrada na Figura 5.23 para verificação dos resultados obtidos pelo Programa 5.7 em MATLAB. (Note que esse programa também pode ser aplicado a sistemas de ordem superior. Veja o Problema A.5.10.)

FIGURA 5.23

Curva de resposta ao degrau unitário.


Programa 5.7 em MATLAB

```
% ----- Este é um programa em MATLAB para determinar o
% tempo de subida, o tempo de pico, o máximo sobressinal e
% o tempo de acomodação de um sistema de segunda ordem e de
% um sistema de ordem superior -----
%
% ----- Neste exemplo, admitimos que zeta = 0.6 e wn = 5 -----
num = [25];
den = [1 6 25];
t = 0:0.005:5;
[y,x,t] = step(num,den,t);
r = 1; while y(r) < 1.0001; r = r + 1; end;
rise_time = (r - 1)*0.005
rise_time = 0.5550
[ymax, tp] = max(y);
peak_time = (tp - 1)*0.005
peak_time = 0.7850
max_overshoot = ymax-1
max_overshoot = 0.0948
s = 1001; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02; s = s - 1; end;
settling_time = (s - 1)*0.005
settling_time = 1.1850
```

Resposta ao impulso. A resposta ao impulso unitário de um sistema de controle pode ser obtida pelo uso de um dos seguintes comandos do MATLAB:

$$\begin{aligned} &\text{impulse}(\text{num}, \text{den}) \\ &\text{impulse}(A, B, C, D) \\ &[y, x, t] = \text{impulse}(\text{num}, \text{den}) \\ &[y, x, t] = \text{impulse}(\text{num}, \text{den}, t) \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$[y, x, t] = \text{impulse}(A, B, C, D) \quad (5.42)$$

$$[y, x, t] = \text{impulse}(A, B, C, D, iu) \quad (5.43)$$

$$[y, x, t] = \text{impulse}(A, B, C, D, iu, t) \quad (5.43)$$

O comando `impulse(num,den)` traça a curva de resposta ao impulso unitário na tela. O comando `impulse(A,B,C,D)` produz uma série de gráficos de curvas de resposta ao impulso unitário, uma para cada combinação de entrada e saída do sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Observe que, nas equações 5.42 e 5.43, o escalar i_u é um índice nas entradas do sistema e especifica qual a entrada a ser utilizada para a resposta ao impulso.

Note também que, se o comando usado não inclui explicitamente ‘t’, o vetor tempo é determinado automaticamente. Se o comando incluir o vetor ‘t’ fornecido pelo usuário, como os comandos dados nas equações 5.41 e 5.43, esse vetor especifica os instantes de tempo nos quais se deseja que a resposta ao impulso seja calculada.

Se um comando do MATLAB for escrito com o argumento `[y,x,t]`, do lado esquerdo da igualdade, como no caso em que `[y,x,t] = impulse(A,B,C,D)`, esse comando retornará as saídas, as respostas de estado do sistema e o vetor de tempo t . Nenhum gráfico é desenhado na tela. As matrizes y e x contêm os valores das saídas e das respostas de estado do sistema calculadas para os elementos nos pontos de tempo t . (y tem tantas colunas quantas forem as saídas e uma linha para cada elemento em t ; x tem tantas colunas quantas forem as variáveis de estado e uma linha para cada elemento em t .) Para traçar a curva de resposta, temos de incluir um comando `plot`, por exemplo, `plot(t,y)`.

Exemplo 5.5 Obtenha a resposta ao impulso unitário do seguinte sistema:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2 + 0,2s + 1}$$

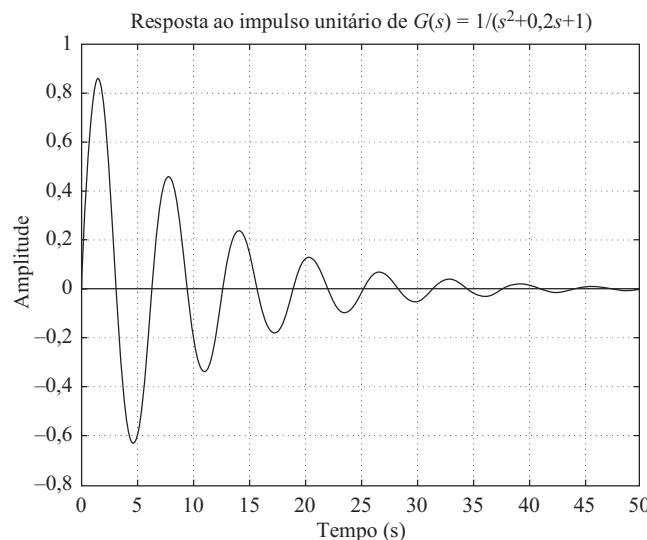
O Programa 5.8 em MATLAB produzirá a resposta ao impulso unitário. A Figura 5.24 mostra o gráfico resultante.

Programa 5.8 em MATLAB

```
num = [1];
den = [1 0.2 1];
impulse(num,den);
grid
title('Resposta ao impulso unitário de G(s) = 1/(s^2 + 0.2s + 1)')
```

FIGURA 5.24

Curva de resposta ao impulso unitário.



Método alternativo para obter resposta ao impulso. Note que, quando as condições iniciais são nulas, a resposta ao impulso unitário de $G(s)$ é a mesma que a resposta ao degrau unitário de $sG(s)$.

Considere a resposta ao impulso unitário do sistema apresentado no Exemplo 5.5. Como $R(s) = 1$ para a entrada em impulso unitário, temos:

$$\begin{aligned}\frac{C(s)}{R(s)} &= C(s) = G(s) = \frac{1}{s^2 + 0,2s + 1} \\ &= \frac{s}{s^2 + 0,2s + 1} \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Assim, podemos converter a resposta ao impulso unitário de $G(s)$ na resposta ao degrau unitário de $sG(s)$.

Se digitarmos os seguintes valores de num e den no MATLAB,

```
num = [0 1 0]
den = [1 0.2 1]
```

e utilizarmos o comando de resposta ao degrau; como indicado no Programa 5.9 em MATLAB, obteremos uma curva de resposta ao impulso unitário do sistema, como mostra a Figura 5.25.

Programa 5.9 em MATLAB

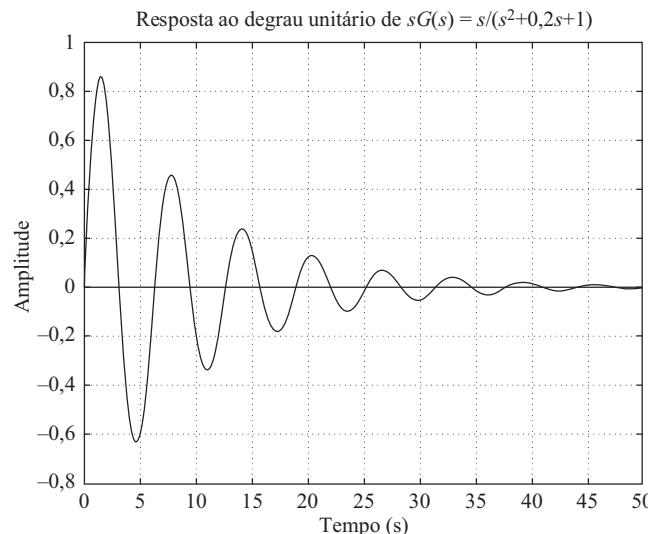
```
num = [1 0];
den = [1 0.2 1];
step(num,den);
grid
title('Resposta ao Degrau Unitário de sG(s) = s/(s^2 + 0.2s + 1)')
```

Resposta à rampa. Não existe um comando específico para rampa no MATLAB. Assim, é necessário utilizar o comando degrau ou o comando lsim (que será visto adiante) para obter a resposta à rampa. Especificamente, para obter a resposta à rampa do sistema de função de transferência $G(s)$, divide-se $G(s)$ por s e utiliza-se o comando para a resposta ao degrau. Por exemplo, considere o sistema de malha fechada

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s + 1}{s^2 + s + 1}$$

FIGURA 5.25

Curva de resposta ao impulso unitário obtida como a resposta ao degrau unitário de $sG(s) = s/(s^2 + 0,2s + 1)$.



Para uma entrada em rampa unitária, $R(s) = 1/s^2$. Então,

$$C(s) = \frac{2s+1}{s^2+s+1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2s+1}{(s^2+s+1)s} \cdot \frac{1}{s}$$

Para obter a resposta desse sistema à rampa unitária, digite os seguintes valores de numerador e denominador no programa em MATLAB:

```
num = [2 1];
```

```
den = [1 1 1 0];
```

e utilize o comando de resposta ao degrau. Veja o Programa 5.10 em MATLAB. O gráfico que resulta do processamento do programa é mostrado na Figura 5.26.

Programa 5.10 em MATLAB

```
% ----- Resposta à rampa unitária -----
% ***** A resposta à rampa unitária é obtida como a resposta ao degrau unitário de
% G(s)/s *****
% ***** Digite o numerador e o denominador de G(s)/s *****
num = [2 1];
den = [1 1 1 0];
% ***** Especifique os instantes de tempo para o cálculo (tais como t = 0:0.1:10)
% e então digite o comando de resposta ao degrau: c = step(num,den,t) *****
t = 0:0.1:10;
c = step(num,den,t);

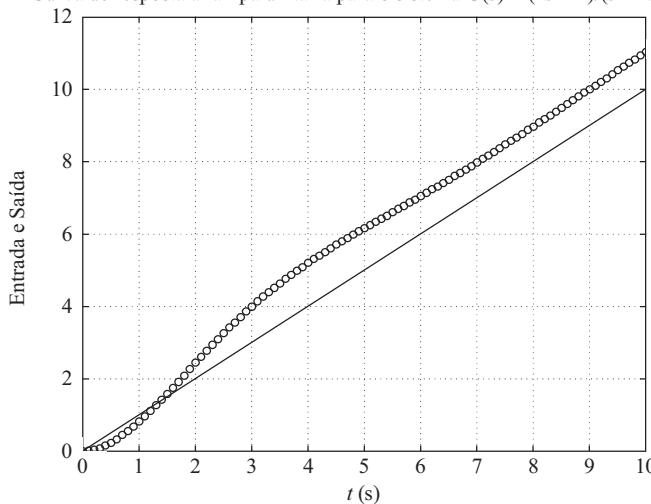
% ***** No gráfico da curva de resposta à rampa, adicione a referência.
% A entrada de referência é t. Acrescente ao argumento do comando
% plot o seguinte: t,t,'-'. Assim o comando plot fica como a seguir:
% plot(t,c,'o',t,t,'-') *****
plot(t,c,'o',t,t,'-')

% ***** Acrescente grade, título, xlabel e ylabel *****
grid
title('Curva de Resposta à Rampa Unitária para o Sistema G(s) = (2s + 1)/(s^2 + s + 1)')
xlabel('t (s)')
ylabel('Entrada e Saída')
```

FIGURA 5.26

Curva de resposta em rampa unitária.

Curva de resposta à rampa unitária para o sistema $G(s) = (2s + 1)/(s^2 + s + 1)$



Resposta à rampa unitária de um sistema definido no espaço de estados. A seguir, trataremos da resposta à rampa unitária do sistema no modelo de espaço de estados. Considere o sistema definido por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$y = \mathbf{Cx} + Du$$

onde u é a função rampa unitária. A seguir, apresentaremos um exemplo simples para explicar o método. Considere o caso em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{C} = [1 \ 0], \quad D = [0]$$

Quando as condições iniciais forem nulas, a resposta à rampa unitária será a integral da resposta ao degrau unitário. Então, a resposta à rampa unitária pode ser dada por:

$$z = \int_0^t y dt \quad (5.44)$$

A partir da Equação 5.44, obtemos:

$$\dot{z} = y = x_1 \quad (5.45)$$

Vamos definir

$$z = x_3$$

Então, a Equação 5.45 torna-se:

$$\dot{x}_3 = x_1 \quad (5.46)$$

Combinando a Equação 5.46 com a equação original do espaço de estados, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (5.47)$$

$$z = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

onde u aparece na Equação 5.47 como a função de degrau unitário. Essas equações podem ser escritas como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{AAx} + \mathbf{Bu}$$

$$z = \mathbf{Cx} + Du$$

onde

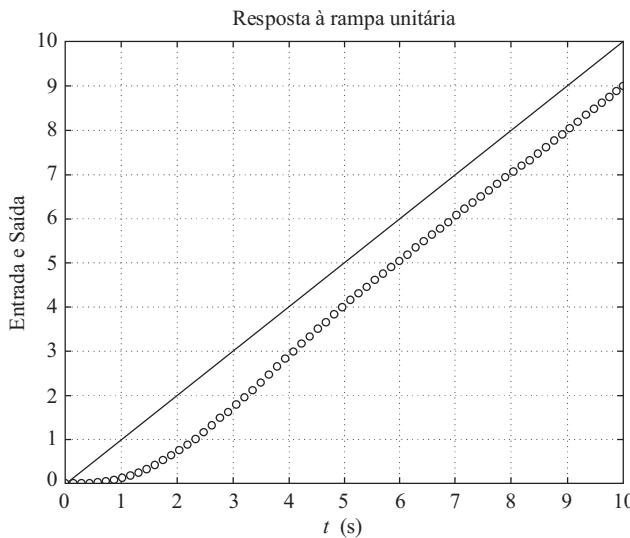
$$\mathbf{AA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CC} = [0 \ 0 \ 1], \quad DD = [0]$$

Note que x_3 é o terceiro elemento de \mathbf{x} . Um gráfico da curva de resposta à rampa unitária $z(t)$ pode ser obtido executando o Programa 5.11 em MATLAB. Um gráfico da curva de resposta à rampa unitária obtida como resultado desse programa em MATLAB é mostrado na Figura 5.27.

FIGURA 5.27

Curva de resposta à rampa unitária.

**Programa 5.11 em MATLAB**

```
% ----- Resposta à rampa unitária -----
% ***** A resposta à rampa unitária é obtida pela adição de uma
% nova variável de estado x3. A dimensão da equação de estado
% é acrescida de 1 *****
% ***** Digite as matrizes A, B, C e D das equações originais
% de estado e de saída *****
A = [0 1;-1 -1];
B = [0; 1];
C = [1 0];
D = [0];
% ***** Digite as matrizes AA, BB, CC e DD das novas,
% equações de estado e de saída aumentados *****
AA = [A zeros(2,1);C 0];
BB = [B;0];
CC = [0 0 1];
DD = [0];
% ***** Digite o comando de resposta ao degrau: [z,x,t] = step(AA,BB,CC,DD) *****
[z,x,t] = step(AA,BB,CC,DD);
% ***** No gráfico x3, adicione a entrada em rampa unitária t
% digitando o seguinte comando: plot(t,x3,'o',t,t,'-') *****
x3 = [0 0 1]*x';
grid
title('Resposta à Rampa Unitária')
xlabel('t (s)')
ylabel('Entrada e Saída')
```

Obtenção da resposta a uma entrada arbitrária. Para obter a resposta a uma entrada arbitrária, pode-se utilizar o comando `lsim`. Os comandos como:

```
lsim(num,den,r,t)
lsim(A,B,C,D,u,t)
y = lsim(num,den,r,t)
y = lsim(A,B,C,D,u,t)
```

gerarão a resposta a uma entrada em função do tempo, r ou u . Veja os dois exemplos a seguir. (Veja também os problemas A.5.14 a A.5.16.)

Exemplo 5.6 Utilizando o comando `lsim`, obtenha a resposta à rampa unitária do seguinte sistema:

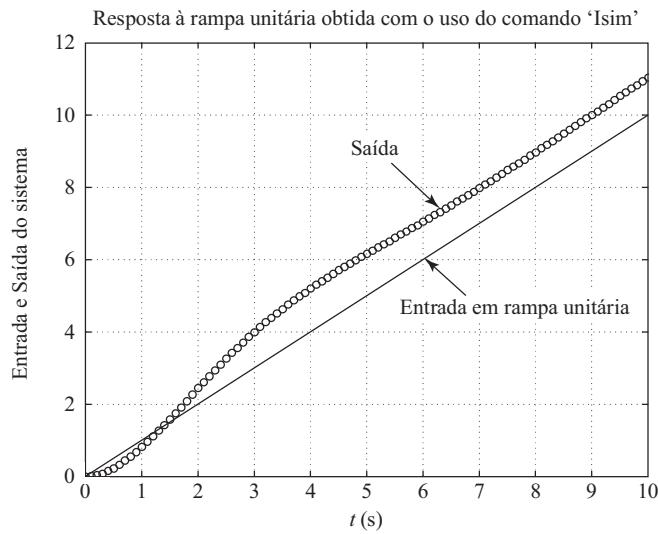
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s + 1}{s^2 + s + 1}$$

Podemos obter a resposta à rampa unitária por meio do Programa 5.12 em MATLAB. A Figura 5.28 mostra o gráfico resultante.

Programa 5.12 em MATLAB
<pre>% ----- Resposta à rampa ----- num = [2 1]; den = [1 1 1]; t = 0:0.1:10; r = t; y = lsim(num,den,r,t); plot(t,r,'-',t,y,'o') grid title('Resposta à Rampa Unitária Obtida com o Uso do Comando "lsim"') xlabel('t (s)') ylabel('Entrada e Saída do sistema') text(6.3,4.6,'Entrada em Rampa Unitária') text(4.75,9.0,'Saída')</pre>

FIGURA 5.28

Resposta à rampa unitária.



Exemplo 5.7 Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0,5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Utilizando o MATLAB, obtenha as curvas de resposta $y(t)$ quando a entrada u é dada por:

1. $u =$ entrada em degrau unitário

2. $u = e^{-t}$

Suponha que o estado inicial seja $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$.

Uma opção do programa em MATLAB para produzir as curvas de resposta desse sistema para a entrada em degrau unitário [$u = 1(t)$] e a entrada exponencial [$u = e^{-t}$] é mostrada no Programa 5.13 em MATLAB. As curvas de resposta resultantes são apresentadas nas figuras 5.29(a) e (b), respectivamente.

Programa 5.13 em MATLAB

```
t = 0:0.1:12;
A = [-1 0.5;-1 0];
B = [0;1];
C = [1 0];
D = [0];

% Para a entrada em degrau unitário u = 1(t),
% utilize o comando 'y = step(A,B,C,D,1,t)'.

y = step(A,B,C,D,1,t);
plot(t,y)
grid
title('Resposta ao Degrau Unitário')
xlabel('t (s)')
ylabel('Saída')

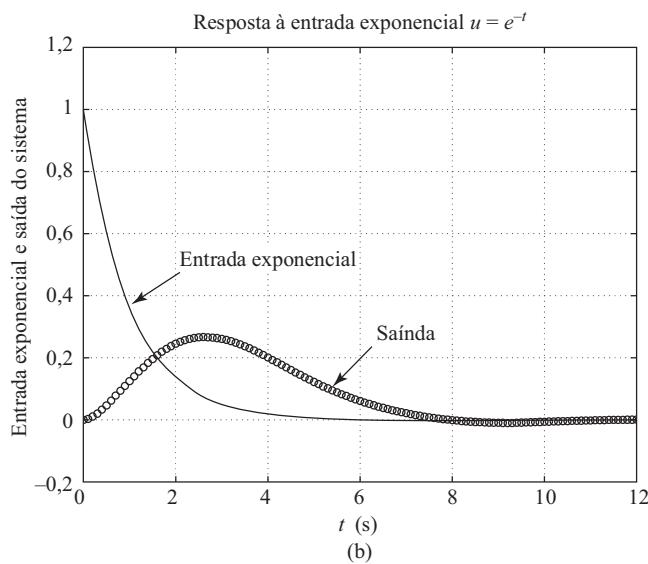
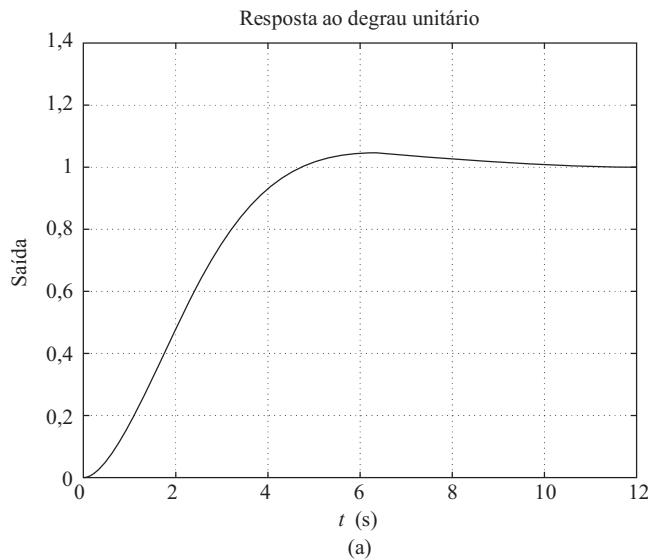
% Para a resposta à entrada exponencial
% u = exp(-t), utilize o comando
% 'z = lsim(A,B,C,D,u,t)'.

u = exp(-t);
z = lsim(A,B,C,D,u,t);
plot(t,u,'-',t,z,'o')
grid
title('Resposta à Entrada Exponencial u = exp(-t)')
xlabel('t (s)')
ylabel('Entrada Exponencial e Saída do sistema')
text(2.3,0.49,'Entrada Exponencial')
text(6.4,0.28,'Saída')
```

Resposta à condição inicial. A seguir, serão apresentados alguns métodos para a obtenção de resposta a uma condição inicial. Os comandos que podem ser utilizados são 'step' ou 'initial'. Veremos primeiro um método para obter a resposta a uma condição inicial utilizando um exemplo simples. Depois, discutiremos a resposta a uma condição inicial quando o sistema está representado na forma de espaço de estados. Por fim, apresentaremos um comando inicial para obter a resposta de dado sistema definido em um espaço de estados.

FIGURA 5.29

- (a) Resposta ao degrau unitário;
 (b) resposta à entrada $u = e^{-t}$.



Exemplo 5.8 Considere o sistema mecânico mostrado na Figura 5.30, onde $m = 1 \text{ kg}$, $b = 3 \text{ N-s/m}$ e $k = 2 \text{ N/m}$. Suponha que em $t = 0$ a massa m seja puxada para baixo, de modo que $x(0) = 0,1 \text{ m}$ e $\dot{x}(0) = 0,05 \text{ m/s}$. O deslocamento $x(t)$ é medido a partir da posição de equilíbrio antes que a massa seja puxada para baixo. Obtenha o movimento da massa sujeita à condição inicial. (Considere a inexistência de uma força externa.)

A equação do sistema é:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

com as condições iniciais $x(0) = 0,1 \text{ m}$ e $\dot{x}(0) = 0,05 \text{ m/s}$ (x é medido a partir da posição de equilíbrio.) A transformada de Laplace da equação do sistema resulta em:

$$m[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + b[sX(s) - x(0)] + kX(s) = 0$$

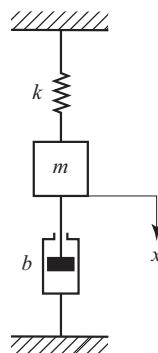
ou

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = mx(0)s + m\dot{x}(0) + bx(0)$$

Resolvendo essa última equação para $X(s)$ e substituindo os valores numéricos dados, obtemos:

FIGURA 5.30

Sistema
mecânico.



$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{mx(0)s + m\dot{x}(0) + bx(0)}{ms^2 + bs + k} \\ &= \frac{0,1s + 0,35s}{s^2 + 3s + 2} \end{aligned}$$

Essa equação pode ser escrita como segue:

$$X(s) = \frac{0,1s^2 + 0,35s}{s^2 + 3s + 2} \frac{1}{s}$$

Então, o movimento da massa m pode ser obtido como a resposta ao degrau unitário do seguinte sistema:

$$G(s) = \frac{0,1s^2 + 0,35s}{s^2 + 3s + 2}$$

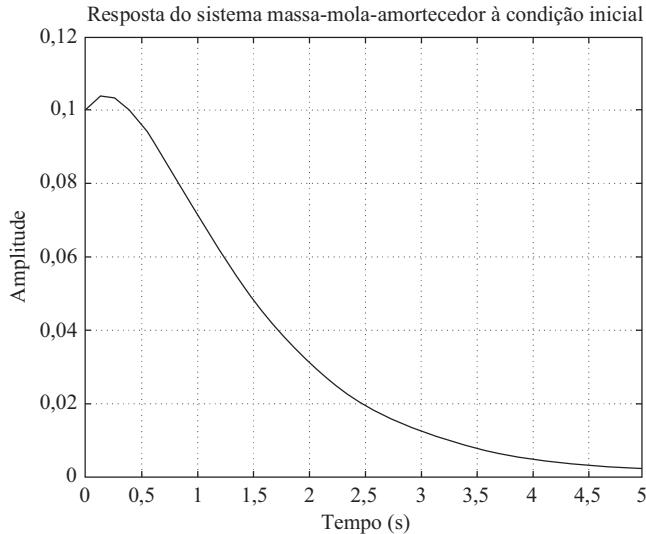
O Programa 5.14 em MATLAB fornecerá o gráfico do movimento da massa. O gráfico é mostrado na Figura 5.31.

Programa 5.14 em MATLAB

```
% ----- Resposta à condição inicial -----
% ***** A resposta do sistema à condição inicial é convertida
% a uma resposta ao degrau unitário modificando-se o polinômio
% do numerador *****
%
% ***** Digite o numerador e o denominador da função de
% transferência G(s) *****
num = [0.1 0.35 0];
den = [1 3 2];
%
% ***** Digite o comando de resposta ao degrau a seguir *****
step(num,den)
%
% ***** Insira a grade e o título do gráfico *****
grid
title('Resposta do sistema Massa-Mola-Amortecedor à Condição Inicial')
```

FIGURA 5.31

Resposta do sistema mecânico considerado no Exemplo 5.8.



Resposta à condição inicial (enfoque no espaço de estados, caso 1). Considere o sistema definido por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.49)$$

Vamos obter a resposta $\mathbf{x}(t)$ quando a condição inicial $\mathbf{x}(0)$ for especificada. Suponha que não exista entrada de forças externas que atuem sobre esse sistema. Suponha também que \mathbf{x} seja um vetor de ordem n .

Primeiro, obtenha as transformadas de Laplace de ambos os lados da Equação 5.49.

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{AX}(s)$$

A equação pode ser escrita como:

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{x}(0) \quad (5.50)$$

Considerando a transformada inversa de Laplace da Equação 5.50, temos:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{x}(0) + \delta(t) \quad (5.51)$$

(Note que, ao obter inicialmente a transformada de Laplace de uma equação diferencial e, depois, considerar a transformada inversa de Laplace dessa equação transformada, geramos uma equação diferencial que envolve a condição inicial.)

Agora, defina

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{x} \quad (5.52)$$

Então, a Equação 5.51 pode ser escrita como:

$$\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{x}(0) + \delta(t) \quad (5.53)$$

Integrando a Equação 5.53 em relação a t , obtemos:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{x}(0)\mathbf{1}(t) = \mathbf{Az} + \mathbf{Bu} \quad (5.54)$$

onde

$$\mathbf{B} = \mathbf{x}(0), \quad u = \mathbf{1}(t)$$

Referindo-se à Equação 5.52, o estado $\mathbf{x}(t)$ é dado por $\mathbf{z}(t)$. Assim,

$$\mathbf{x} = \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{Bu} \quad (5.55)$$

A solução das equações 5.54 e 5.55 fornece a resposta à condição inicial.

Em resumo, a resposta da Equação 5.49 à condição inicial $\mathbf{x}(0)$ é obtida resolvendo-se as seguintes equações no espaço de estados:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{Az} + \mathbf{Bu}$$

onde

$$\mathbf{B} = \mathbf{x}(0), \quad u = 1(t)$$

Os comandos do MATLAB para obter as curvas de resposta, onde não especificamos o vetor de tempo t (isto é, deixamos o vetor de tempo ser determinado automaticamente pelo MATLAB) são dados a seguir:

```
% Especificar matrizes A e B
[x,z,t] = step(A,B,A,B);
x1 = [1 0 0 ... 0]*x';
x2 = [0 1 0 ... 0]*x';
⋮
xn = [0 0 0 ... 1]*x';
plot(t,x1,t,x2, ..., t,xn)
```

Se escolhermos o vetor de tempo t (por exemplo, considere que o intervalo de tempo no cálculo seja de $t = 0$ a $t = tp$, com o incremento de cálculo de Δt), então usaremos os seguintes comandos MATLAB:

```
t = 0: Δt: tp;
% Especificar matrizes A e B
[x,z,t] = step(A,B,A,B,1,t);
x1 = [1 0 0 ... 0]*x';
x2 = [0 1 0 ... 0]*x';
⋮
xn = [0 0 0 ... 1]*x';
plot(t,x1,t,x2, ..., t,xn)
```

(Veja, o Exemplo 5.9.)

Resposta à condição inicial (enfoque no espaço de estados, caso 2). Considere o sistema definido por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.56)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad (5.57)$$

(Suponha que \mathbf{x} seja um vetor de ordem n e que \mathbf{y} seja um vetor de ordem m .)

Da mesma maneira que o caso 1, definindo

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{x}$$

podemos obter a seguinte equação:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{x}(0)1(t) = \mathbf{Az} + \mathbf{Bu} \quad (5.58)$$

onde

$$\mathbf{B} = \mathbf{x}(0), \quad u = 1(t)$$

Observando que $\mathbf{x} = \dot{\mathbf{z}}$, a Equação 5.57 pode ser escrita como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cz} \quad (5.59)$$

Substituindo a Equação 5.58 na Equação 5.59, obtemos:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{Az} + \mathbf{Bu}) = \mathbf{CAz} + \mathbf{CBu} \quad (5.60)$$

A solução das equações 5.58 e 5.60, reescritas aqui

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{Az} + \mathbf{Cb}u$$

onde $\mathbf{B} = \mathbf{x}(0)$ e $u = 1(t)$ fornecem a resposta do sistema para dada condição inicial. Os comandos do MATLAB para a obtenção das curvas de resposta (curvas de saída y_1 versus t , y_2 versus t , ..., y_m versus t) são mostrados a seguir para dois casos:

Caso A. Quando o vetor de tempo t não é especificado (ou seja, o vetor de tempo t deverá ser determinado automaticamente pelo MATLAB):

```
% Especificar matrizes A, B e C
[y,z,t] = step(A,B,C*A,C*B);
y1 = [1 0 0 ... 0]*y';
y2 = [0 1 0 ... 0]*y';
⋮
ym = [0 0 0 ... 1]*y';
plot(t,y1,t,y2, ..., t,ym)
```

Caso B. Quando o vetor de tempo t é especificado:

```
t = 0: Δt: tp;
% Especificar matrizes A, B e C
[y,z,t] = step(A,B,C*A,C*B,1,t)
y1 = [1 0 0 ... 0]*y';
y2 = [0 1 0 ... 0]*y';
⋮
ym = [0 0 0 ... 1]*y';
plot(t,y1,t,y2, ..., t,ym)
```

Exemplo 5.9 Obtenha a resposta do sistema submetido à dada condição inicial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

Obter a resposta do sistema à dada condição inicial vem a ser o mesmo que obter a resposta ao degrau unitário do seguinte sistema:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{Az} + \mathbf{Bu}$$

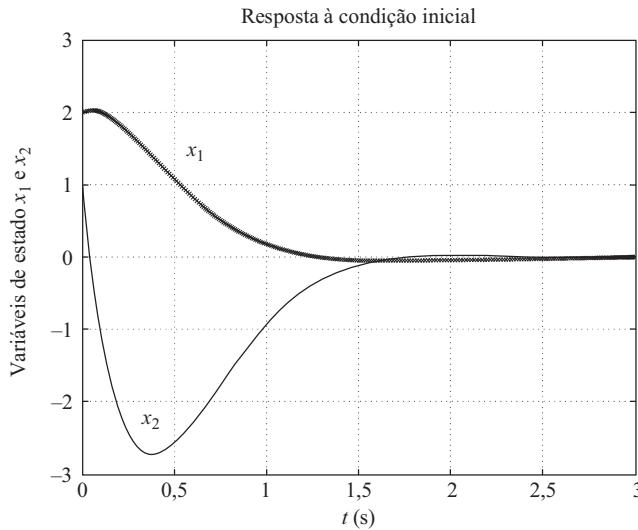
onde

$$\mathbf{B} = \mathbf{x}(0), \quad u = 1(t)$$

Então, uma opção do programa em MATLAB para obter a resposta é o Programa 5.15 em MATLAB. As curvas de resposta resultantes são mostradas na Figura 5.32.

FIGURA 5.32

Resposta do sistema do Exemplo 5.9 à condição inicial.

**Programa 5.15 em MATLAB**

```
t = 0:0.01:3;
A = [0 1;-10 -5];
B = [2;1];
[x,z,t] = step(A,B,A,B,1,t);
x1 = [1 0]*x';
x2 = [0 1]*x';
plot(t,x1,'x',t,x2,'-')
grid
title('Resposta à Condição Inicial')
xlabel('t (s)')
ylabel('Variáveis de Estado x1 e x2')
gtext('x1')
gtext('x2')
```

Para um exemplo ilustrativo de como usar as equações 5.58 e 5.60 para encontrar a resposta à condição inicial, veja o Problema A.5.16.

Obtenção da resposta à condição inicial pelo uso do comando `initial`. Se o sistema for definido no espaço de estados, então o comando

`initial(A,B,C,D,[initial condition],t)`

produzirá a resposta à condição inicial.

Considerando o sistema definido por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

onde

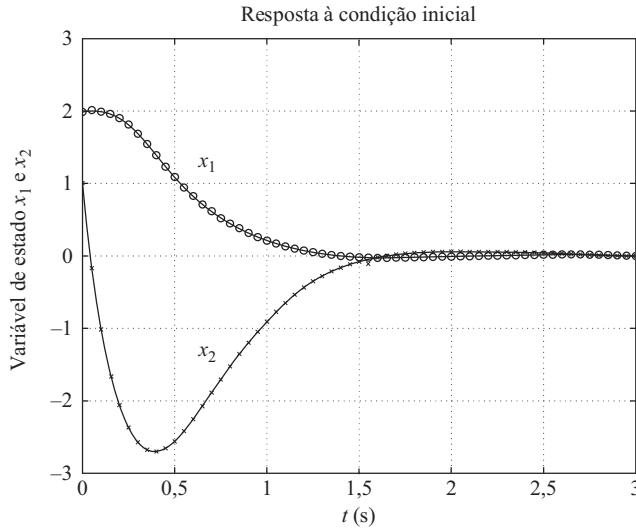
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \ 0], \quad D = 0$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

então o comando 'initial' pode ser utilizado como mostra o Programa 5.16 em MATLAB para a obtenção da resposta à condição inicial. As curvas de resposta $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são mostradas na Figura 5.33. Elas são as mesmas que as da Figura 5.32

FIGURA 5.33

Curvas de resposta à condição inicial.

**Programa 5.16 em MATLAB**

```
t = 0:0.05:3;
A = [0 1;-10 -5];
B = [0;0];
C = [0 0];
D = [0];
[y,x] = initial(A,B,C,D,[2;1],t);
x1 = [1 0]*x';
x2 = [0 1]*x';
plot(t,x1,'o',t,x1,t,x2,'x',t,x2)
grid
title('Resposta à Condição Inicial')
xlabel('t (s)')
ylabel('Variáveis de Estado x1 e x2')
gtext('x1')
gtext('x2')
```

Exemplo 5.10 Considere o seguinte sistema submetido às condições iniciais. (Não existem forças externas atuantes.)

$$\ddot{y} + 8\dot{y} + 17y + 10y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 1, \quad \ddot{y}(0) = 0,5$$

Obtenha a resposta $y(t)$ para a condição inicial dada.

Definindo as variáveis de estado como:

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y}$$

obtemos a seguinte representação para o sistema no espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

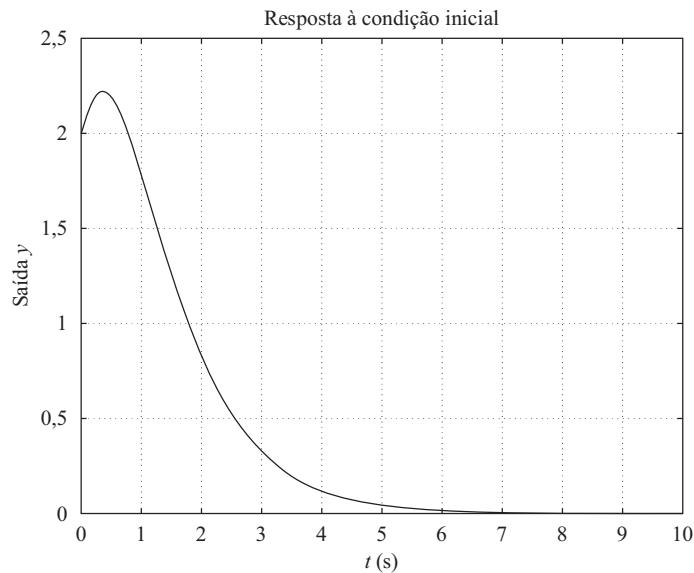
$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Uma opção do programa em MATLAB para a obtenção da resposta $y(t)$ é o Programa 5.17 em MATLAB. A curva de resposta resultante é mostrada na Figura 5.34.

Programa 5.17 em MATLAB
<pre>t = 0:0.05:10; A = [0 1 0;0 0 1;-10 -17 -8]; B = [0;0;0]; C = [1 0 0]; D = [0]; y = initial(A,B,C,D,[2;1;0.5],t); plot(t,y) grid title('Resposta à Condição Inicial') xlabel('t (s)') ylabel('Saída y')</pre>

FIGURA 5.34

Resposta $y(t)$ à condição inicial.



5.6 | Critério de estabilidade de Routh

O problema mais importante relacionado aos sistemas de controle lineares é o da estabilidade. Isto é, sob quais condições um sistema se tornará instável? Se for instável, como deveríamos estabilizá-lo? Na Seção 5.4, foi visto que um sistema de controle é estável se e somente se todos os polos de malha fechada estiverem situados no semiplano esquerdo do plano s . A maioria dos sistemas lineares de malha fechada tem funções de transferência de malha fechada da forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

onde a e b são constantes e $m \leq n$. Um critério simples, conhecido como critério de estabilidade de Routh, nos possibilita determinar o número de polos de malha fechada que se situam no semiplano direito do plano s , sem ter de fatorar o polinômio do denominador. (O polinômio pode incluir parâmetros que o MATLAB não pode tratar.)

Critério de estabilidade de Routh. O critério de estabilidade de Routh nos diz se existem ou não raízes instáveis em uma equação polinomial, sem que seja necessário resolvê-la. Este critério de estabilidade aplica-se somente a polinômios com um número finito de termos. Quando o critério é aplicado a um sistema de controle, as informações sobre a estabilidade absoluta podem ser obtidas diretamente dos coeficientes da equação característica.

Eis o procedimento no critério de estabilidade de Routh:

1. Escreva o polinômio em s da seguinte maneira:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (5.61)$$

onde os coeficientes são grandezas reais. Suponha que $a_n \neq 0$, isto é, qualquer raiz nula foi removida.

2. Se algum dos coeficientes for zero ou negativo na presença de pelo menos um coeficiente positivo, então existirão uma ou várias raízes imaginárias ou que tenham partes reais positivas. Assim, nesse caso, o sistema não será estável. Se estivermos interessados somente na estabilidade absoluta, não haverá necessidade de continuar o procedimento. Observe que todos os coeficientes devem ser positivos. Esta é uma condição necessária, como podemos ver no argumento a seguir: um polinômio em s tendo coeficientes reais sempre poderá ser fatorado em fatores lineares e quadráticos, como $(s + a)$ e $(s^2 + bs + c)$, onde a, b e c são reais. Os fatores lineares resultam em raízes reais e os fatores quadráticos, em raízes complexas conjugadas do polinômio. O fator $(s^2 + bs + c)$ resulta em raízes com partes reais negativas somente se b e c forem ambos positivos. Para que todas as raízes tenham partes reais negativas, as constantes a, b, c etc., em todos os fatores, devem ser positivas. O produto de qualquer número de fatores lineares e quadráticos que contenha somente coeficientes positivos resulta sempre em um polinômio com coeficientes positivos. É importante notar que a condição de que todos os coeficientes sejam positivos não é suficiente para assegurar estabilidade. A condição necessária, mas não suficiente para a estabilidade, é que os coeficientes da Equação 5.61 estejam todos presentes e que todos tenham sinais positivos. (Se todos os a forem negativos, estes podem ser feitos positivos, multiplicando ambos os lados da equação por -1 .)
3. Se todos os coeficientes forem positivos, organize os coeficientes do polinômio em linhas e colunas, de acordo com o seguinte padrão:

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	...
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	...
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	...
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	...
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	...
⋮	⋮	⋮			
s^2	e_1	e_2			
s^1	f_1				
s^0	g_1				

O processo de formação das linhas continua até que se esgotem todos os elementos. (O número total de linhas é $n + 1$.) Os coeficientes b_1, b_2, b_3 etc. são calculados como segue:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

⋮

O cálculo dos b continua até que os elementos restantes sejam todos zeros. O mesmo padrão de multiplicação em cruz dos coeficientes das duas linhas anteriores é seguido para o cálculo de c , d , e etc. Ou seja,

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

⋮

e

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

⋮

Esse processo continua até que a n -ésima linha seja completada. A matriz completa de coeficientes é triangular. Observe que, ao desenvolver essa matriz, uma linha inteira pode ser dividida ou multiplicada por um número positivo, de modo a simplificar os cálculos numéricos subsequentes, sem alterar a conclusão sobre a estabilidade.

O critério de estabilidade de Routh afirma que o número de raízes da Equação 5.61 com partes reais positivas é igual ao número de mudanças no sinal dos coeficientes da primeira coluna da matriz. Deve-se notar que os valores exatos dos termos na primeira coluna não precisam ser conhecidos; do contrário, apenas os sinais são necessários. A condição necessária e suficiente para que todas as raízes da Equação 5.61 se situem no semiplano esquerdo do plano s é que todos os coeficientes da Equação 5.61 sejam positivos e que todos os elementos da primeira coluna da matriz tenham sinais positivos.

Exemplo 5.11 Vamos aplicar o critério de estabilidade de Routh ao seguinte polinômio de terceira ordem:

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

onde todos os coeficientes são números positivos. A matriz dos coeficientes é:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & a_0 & a_2 \\ s^2 & a_1 & a_3 \\ s^1 & \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & \\ s^0 & a_3 & \end{array}$$

A condição para que todas as raízes tenham partes reais negativas é dada por:

$$a_1 a_2 > a_0 a_3$$

Exemplo 5.12 Considere o seguinte polinômio:

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

Vamos seguir o procedimento visto e construir a matriz de coeficientes. (As duas primeiras linhas podem ser obtidas diretamente a partir do polinômio dado. Os termos restantes são obtidos a partir destes. Se algum dos coeficientes for inexistente, este poderá ser substituído por zeros na tabela.)

s^4	1	3	5	s^4	1	3	5
s^3	2	4	0	s^3	2	4	0
s^2	1	5		s^2	1	5	
s^1	-6			s^1	-3		
s^0	5			s^0	5		

A segunda linha é dividida por 2.

Neste exemplo, o número de mudanças no sinal dos coeficientes na primeira coluna é 2. Isso quer dizer que existem duas raízes com partes reais positivas. Note que o resultado não se altera quando os coeficientes de uma linha são multiplicados ou divididos por um número positivo, visando simplificar o cálculo.

Casos especiais. Se um termo na primeira coluna de qualquer linha for nulo, mas os termos restantes não forem nulos ou não existirem, então o termo nulo será substituído por um número positivo muito pequeno ϵ e o resto da matriz será calculada. Considere, por exemplo, a seguinte equação:

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0 \quad (5.62)$$

A matriz de coeficientes é

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0 & \approx \epsilon \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

Se o sinal do coeficiente acima do zero (ϵ) é o mesmo do coeficiente abaixo, isso indica que existe um par de raízes imaginárias. De fato, a Equação 5.62 tem duas raízes em $s = \pm j$.

Entretanto, se o sinal do coeficiente acima do zero (ϵ) for oposto ao do coeficiente abaixo, isso indica que existe uma mudança de sinal. Por exemplo, na equação

$$s^3 - 3s + 2 = (s - 1)^2(s + 2) = 0$$

a matriz dos coeficientes é:

$$\begin{array}{ccccc} & s^3 & 1 & -3 & \\ \text{Uma mudança de sinal:} & s^2 & 0 & \approx \epsilon & 2 \\ & s^1 & -3 & -\frac{2}{\epsilon} & \\ \text{Uma mudança de sinal:} & s^0 & & 2 & \end{array}$$

Ocorreram duas mudanças de sinal dos coeficientes na primeira coluna. Portanto, há duas raízes no semiplano direito do plano s . Isso está de acordo com o resultado correto indicado pela forma fatorada da equação polinomial.

Se todos os coeficientes em uma linha calculada forem nulos, isso indica que há raízes de mesmo valor, radialmente opostas, situadas no plano s — isto é, duas raízes reais de igual valor e sinais opostos e/ou duas raízes imaginárias conjugadas. Nesse caso, pode-se continuar o cálculo do resto da matriz, formando-se um polinômio auxiliar com os coeficientes da última linha e utilizando os coeficientes da derivada desse polinômio na próxima linha. Essas raízes de igual valor e situadas radialmente opostas no plano s podem ser determinadas resolvendo o polinômio

auxiliar, que é sempre par. Para um polinômio auxiliar de grau $2n$, existem n pares de raízes iguais e opostas. Por exemplo, considere a seguinte equação:

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

A matriz de coeficientes é:

$$\begin{array}{rrrr} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \quad \leftarrow \text{Polinômio auxiliar } P(s) \\ s^3 & 0 & 0 & \end{array}$$

Os termos na linha s^3 são todos nulos. (Note que esse caso ocorre somente em uma linha de número ímpar.) O polinômio auxiliar é, então, formado a partir dos coeficientes da linha s^4 . O polinômio auxiliar $P(s)$ é:

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

o que indica que existem dois pares de raízes de igual valor e sinais opostos (isto é, duas raízes reais com o mesmo valor, mas sinais opostos ou duas raízes complexas conjugadas no eixo imaginário). Esses pares são obtidos resolvendo-se a equação polinomial auxiliar $P(s) = 0$. A derivada de $P(s)$ em relação a s é:

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

Os termos na linha s^3 são substituídos pelos coeficientes da última equação — isto é, 8 e 96. A matriz de coeficientes torna-se, então:

$$\begin{array}{rrrr} s^5 & 1 & 24 & -25 \\ s^4 & 2 & 48 & -50 \\ s^3 & 8 & 96 & \leftarrow \text{Coeficientes de } dP(s)/ds \\ s^2 & 24 & -50 & \\ s^1 & 112,7 & 0 & \\ s^0 & -50 & & \end{array}$$

Vemos que ocorre uma mudança de sinal na primeira coluna da nova matriz. Assim, a equação original tem uma raiz com uma parte real positiva. Resolvendo-se as raízes da equação polinomial auxiliar:

$$2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$$

obtemos

$$s^2 = 1, \quad s^2 = -25$$

ou

$$s = \pm 1, \quad s = \pm j5$$

Esses dois pares de raízes de $P(s)$ fazem parte das raízes da equação original. De fato, a equação original pode ser escrita na forma fatorada, como a seguir:

$$(s + 1)(s - 1)(s + j5)(s - j5)(s + 2) = 0$$

É evidente que a equação original tem uma raiz com uma parte real positiva.

Análise da estabilidade relativa. O critério de estabilidade de Routh fornece a resposta para a questão da estabilidade absoluta. Isso, em muitos casos práticos, não é suficiente. Normalmente é necessária uma informação sobre a estabilidade relativa do sistema. Um método eficiente para examinar a estabilidade relativa é deslocar o eixo do plano s e aplicar o critério de estabilidade de Routh. Isto é, substitui-se

$$s = \hat{s} - \sigma \quad (\sigma = \text{constante})$$

na equação característica do sistema, escreve-se o polinômio em termos de \hat{s} e aplica-se o critério de estabilidade de Routh ao novo polinômio em \hat{s} . O número de mudanças de sinal na primeira

coluna da matriz desenvolvida para o polinômio em s é igual ao número de raízes que estão localizadas à direita da linha vertical $s = -\sigma$. Assim, esse teste revela o número de raízes que se situam à direita da linha vertical $s = -\sigma$.

Aplicação do critério de estabilidade de Routh à análise de sistemas de controle. O critério de estabilidade de Routh é de utilidade limitada na análise de sistemas de controle lineares, principalmente porque não sugere como melhorar a estabilidade relativa ou como estabilizar um sistema instável. É possível, entretanto, determinar os efeitos da mudança de um ou dois parâmetros de um sistema examinando os valores que causam a instabilidade. A seguir, consideraremos o problema da determinação do intervalo de variação de um parâmetro, compatível com a estabilidade do sistema.

Considere o sistema mostrado na Figura 5.35. Vamos determinar o intervalo de valores de K para que haja estabilidade. A função de transferência de malha fechada é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$

A equação característica é:

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

A matriz de coeficientes é, então,

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 3 & K \\ s^3 & 3 & 2 & 0 \\ s^2 & \frac{7}{3} & K \\ s^1 & 2 - \frac{9}{7}K \\ s^0 & K \end{array}$$

Para que haja estabilidade, K e todos os coeficientes na primeira coluna devem ser positivos. Assim,

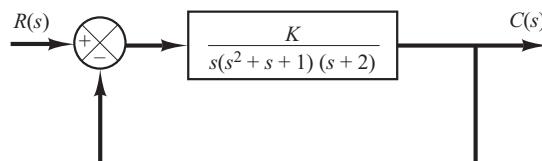
$$\frac{14}{9} > K > 0$$

Quando $K = \frac{14}{9}$, o sistema torna-se oscilatório e, matematicamente, a oscilação é mantida com amplitude constante.

Note que os limites dos parâmetros de projeto que levam à estabilidade podem ser determinados pelo uso do critério de estabilidade de Routh.

FIGURA 5.35

Sistema de controle.



5.7 | Efeitos das ações de controle integral e derivativo no desempenho dos sistemas

Nesta seção, estudaremos os efeitos das ações de controle integral e derivativo no desempenho do sistema. Aqui, serão considerados somente sistemas simples, de modo que os efeitos das ações de controle integral e derivativo sobre o desempenho do sistema possam ser vistos com clareza.

Ação de controle integral. No controle proporcional de uma planta, cuja função de transferência não possui um integrador $1/s$, existe um erro estacionário, ou erro residual, na resposta a uma entrada em degrau. Esse erro residual pode ser eliminado se uma ação de controle integral for incluída no controlador.

No controle integral de uma planta, o sinal de controle — o sinal de saída do controlador — em qualquer instante é a área sob a curva do sinal de erro atuante, até aquele momento. O sinal de controle $u(t)$ pode ter um valor não nulo quando o sinal de erro atuante $e(t)$ for zero, como se pode ver na Figura 5.36(a). Isso é impossível no caso do controlador proporcional, uma vez que um sinal de controle não nulo requer um sinal de erro atuante não nulo. (Um sinal de erro atuante em regime permanente significa que existe um erro residual.) A Figura 5.36(b) mostra a curva $e(t)$ versus t e a curva correspondente $u(t)$ versus t quando o controlador é do tipo proporcional.

Observe que a ação de controle integral, embora remova o erro residual ou o erro estacionário, pode conduzir a uma resposta oscilatória com uma amplitude que decresce lentamente ou mesmo uma amplitude sempre crescente, ambas, em geral, indesejáveis.

Sistemas de controle proporcional. Veremos que, para uma entrada em degrau, o controle proporcional de um sistema sem integrador ocasionará um erro estacionário. Mostraremos, então, que esse erro pode ser eliminado se for incluída no controlador uma ação de controle integral.

Considere o sistema mostrado na Figura 5.37. Obteremos o erro estacionário da resposta do sistema ao degrau unitário. Defina

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

Como

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - C(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$$

o erro $E(s)$ é dado como:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s) = \frac{1}{1 + \frac{K}{Ts + 1}} R(s)$$

FIGURA 5.36

- (a) Gráficos das curvas $e(t)$ e $u(t)$ mostrando sinal de controle não nulo quando o sinal de erro atuante é zero (controle integral);
- (b) gráficos das curvas $e(t)$ e $u(t)$ mostrando sinal de controle nulo quando o sinal de erro atuante é zero (controle proporcional).

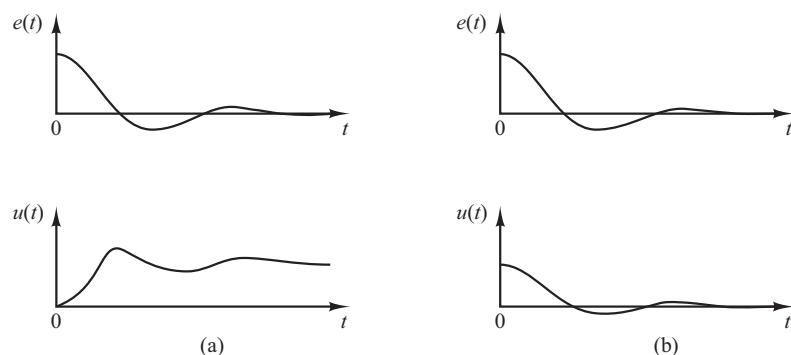
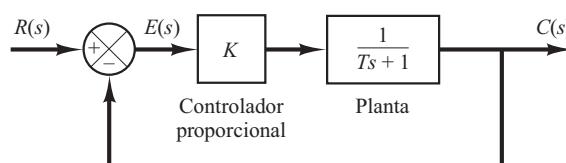


FIGURA 5.37

- Sistema de controle proporcional.



Para a entrada em degrau unitário $R(s) = 1/s$, temos:

$$E(s) = \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + K} \frac{1}{s}$$

O erro estacionário é:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ts + 1}{Ts + 1 + K} = \frac{1}{K + 1}$$

Esse sistema sem um integrador no ramo direto sempre tem um erro estacionário na resposta ao degrau. Esse erro estacionário é chamado erro residual. A Figura 5.38 mostra a resposta ao degrau unitário e o erro residual.

Controle integral de sistemas. Considere o sistema exposto na Figura 5.39. O controlador é integral. A função de transferência de malha fechada do sistema é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(Ts + 1) + K}$$

Portanto:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - C(s)}{R(s)} = \frac{s(Ts + 1)}{s(Ts + 1) + K}$$

Como o sistema é estável, o erro estacionário para a resposta ao degrau unitário pode ser obtido aplicando-se o teorema do valor final, como segue:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(Ts + 1)}{Ts^2 + s + K} \frac{1}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

O controle integral do sistema elimina, então, o erro estacionário na resposta ao degrau de entrada. Este é um importante aperfeiçoamento em relação ao controle proporcional puro, que não impede o erro residual.

Resposta a distúrbios do tipo torque (controle proporcional). Vamos estudar os efeitos de um distúrbio do tipo torque ou conjugado, que ocorre no elemento de carga. Considere o sistema mostrado na Figura 5.40. O controlador proporcional transmite o torque T para posicionar o

FIGURA 5.38

Resposta ao degrau unitário e erro residual.

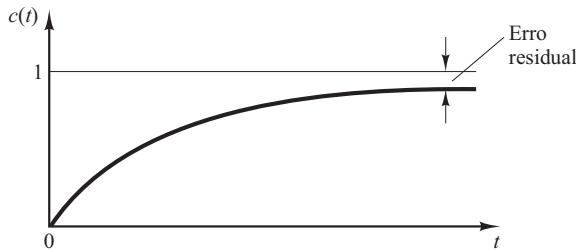


FIGURA 5.39

Sistema de controle integral.

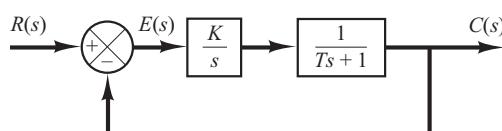
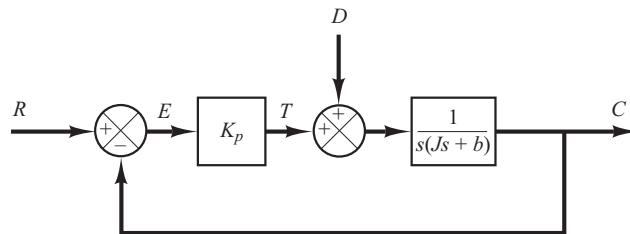


FIGURA 5.40

Sistema de controle de distúrbio por torque.



elemento de carga, que consiste em momento de inércia e atrito viscoso. O torque que age como distúrbio é designado como D .

Supondo que a entrada de referência seja nula, ou $R(s) = 0$, a função de transferência entre $C(s)$ e $D(s)$ será dada por:

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs + K_p}$$

Portanto:

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{C(s)}{D(s)} = -\frac{1}{Js^2 + bs + K_p}$$

O erro estacionário causado pelo torque de perturbação em degrau, de valor T_d , é dado por:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s}{Js^2 + bs + K_p} \frac{T_d}{s} \\ &= -\frac{T_d}{K_p} \end{aligned}$$

Em regime permanente, o controlador proporcional fornece um torque $-T_d$, que é igual em valor, mas de sinal oposto ao torque de perturbação T_d . A saída em regime permanente pelo torque de perturbação em degrau é:

$$c_{ss} = -e_{ss} = \frac{T_d}{K_p}$$

O erro estacionário pode ser reduzido aumentando-se o valor do ganho K_p . O aumento desse valor, entretanto, tornará a resposta do sistema mais oscilatória.

Resposta a distúrbios do tipo torque (controle proporcional-integral). Para eliminar o erro residual em virtude de um distúrbio do tipo torque, o controlador proporcional pode ser substituído por um controlador proporcional-integral.

Se for acrescentada uma ação de controle integral ao controlador, enquanto existir um sinal de erro, um torque será desenvolvido pelo controlador para reduzir esse erro, desde que o sistema de controle seja estável.

A Figura 5.41 mostra um controle proporcional-integral em um sistema cujo elemento de carga é constituído pelo momento de inércia e atrito viscoso.

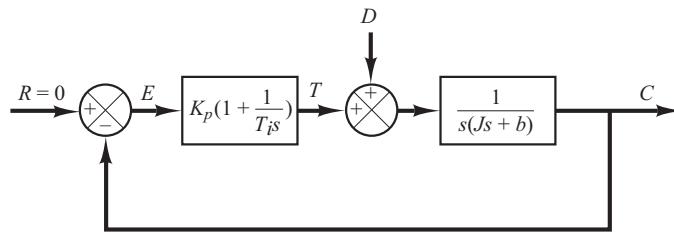
A função de transferência de malha fechada entre $C(s)$ e $D(s)$ é:

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{s}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}}$$

Na ausência da entrada de referência, ou $r(t) = 0$, o sinal de erro é obtido a partir de:

FIGURA 5.41

Controle proporcional-integral de um elemento de carga que consiste em momento de inércia e atrito viscoso.



$$E(s) = -\frac{s}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}} D(s)$$

Se o sistema de controle for estável, isto é, se as raízes da equação característica

$$Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i} = 0$$

tiverem partes reais negativas, então o erro estacionário na resposta a um torque de distúrbio em degrau unitário pode ser obtido pela aplicação do teorema do valor final, como segue:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s^2}{Js^3 + bs^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}} \frac{1}{s} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim, o erro estacionário relativo ao torque de perturbação em degrau pode ser eliminado se o controlador for do tipo proporcional-integral.

Observe que a ação de controle integral acrescentada ao controlador proporcional converteu o sistema originalmente de segunda ordem em um sistema de terceira ordem. Então, para um valor muito alto de K_p , o sistema de controle pode se tornar instável, uma vez que as raízes da equação característica podem conter partes reais positivas. (Um sistema de segunda ordem é sempre estável se os coeficientes da equação diferencial do sistema forem todos positivos.)

É importante destacar que, se o controlador fosse um controlador integral, como na Figura 5.42, então o sistema sempre se tornaria instável, porque a equação característica

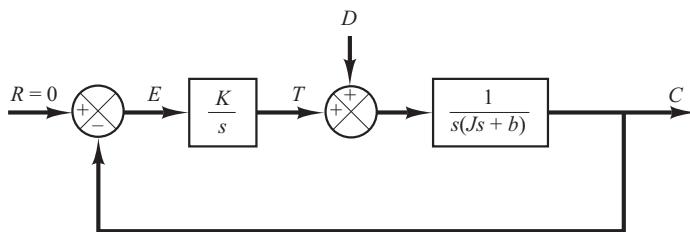
$$Js^3 + bs^2 + K = 0$$

teria raízes com partes reais positivas. Esse sistema instável não poderia ser utilizado na prática.

Note que, no sistema da Figura 5.41, a ação de controle proporcional tende a estabilizar o sistema, enquanto a ação de controle integral tende a eliminar ou reduzir o erro estacionário na resposta a várias entradas.

FIGURA 5.42

Controle integral de um elemento de carga que consiste em momento de inércia e atrito viscoso.



Ação de controle derivativo. Uma ação de controle derivativo, quando acrescentada a um controlador proporcional, permite que se obtenha um controlador de alta sensibilidade. Uma vantagem em utilizar a ação de controle derivativo é que esta responde a uma taxa de variação do erro atuante e pode produzir uma correção significativa antes que o valor do erro atuante se torne muito elevado. Portanto, o controle derivativo prevê o erro atuante, inicia uma ação corretiva antecipada e tende a aumentar a estabilidade do sistema.

Embora o controle derivativo não afete diretamente o erro estacionário, ele aumenta o amortecimento do sistema, permitindo, assim, o uso de um valor mais elevado do ganho K , o que resultará em maior precisão no regime permanente.

Pelo fato de o controle derivativo operar sobre a taxa de variação do erro atuante e não sobre o próprio erro atuante, esse modo nunca é utilizado sozinho. Ele é sempre utilizado em combinação com uma ação de controle proporcional ou proporcional-integral.

Controle proporcional de sistemas com carga inercial. Antes de discutirmos o efeito da ação de controle derivativo no desempenho do sistema, vamos considerar o controle proporcional de uma carga inercial.

Considere o sistema mostrado na Figura 5.43(a). A função de transferência de malha fechada é obtida como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{Js^2 + K_p}$$

Como as raízes da equação característica

$$Js^2 + K_p = 0$$

são imaginárias, a resposta à entrada em degrau unitário continua a oscilar indefinidamente, como mostra a Figura 5.43(b).

Os sistemas de controle que apresentam essas características de resposta não são desejáveis. Veremos que a adição do controle derivativo estabilizará o sistema.

Controle proporcional-derivativo de sistemas com carga inercial. Vamos transformar um controlador proporcional em um controlador proporcional-derivativo cuja função de transferência é $K_p(1 + T_d s)$. O torque desenvolvido pelo controlador é proporcional a $K_p(e + T_d \dot{e})$. O controle derivativo é essencialmente antecipatório, medindo a velocidade dos erros instantâneos, prevendo um grande sobressinal antes que ele ocorra e produzindo ações apropriadas de limitação, antes que o sobressinal assuma um valor muito elevado.

Considere o sistema apresentado na Figura 5.44(a). A função de transferência de malha fechada é dada por:

FIGURA 5.43

- (a) Controle proporcional de um sistema com carga inercial;
- (b) resposta a uma entrada em degrau unitário.

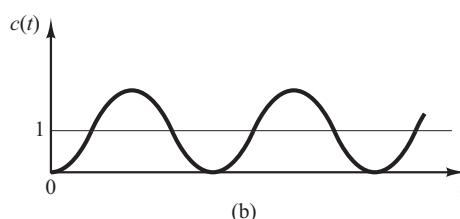
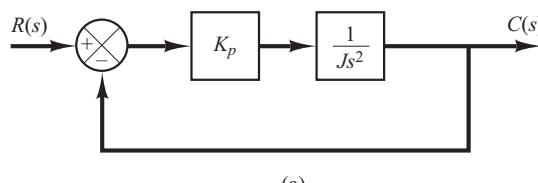
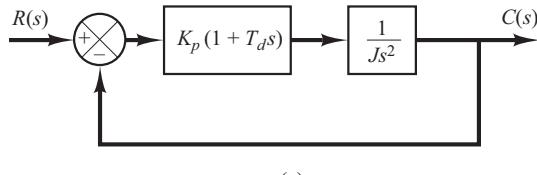
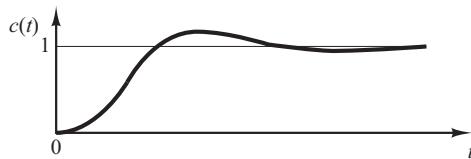


FIGURA 5.44

(a) Controle proporcional-derivativo de um sistema com carga inercial;
 (b) resposta a uma entrada em degrau unitário.



(a)



(b)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p(1 + T_d s)}{J s^2 + K_p T_d s + K_p}$$

A equação característica

$$J s^2 + K_p T_d s + K_p = 0$$

tem agora duas raízes com partes reais negativas para os valores de J , K_p e T_d . Assim, o controle derivativo introduz um efeito de amortecimento. A Figura 5.44(b) apresenta uma curva típica de resposta $c(t)$ para uma entrada em degrau unitário. Evidentemente, a curva de resposta mostra uma melhoria significativa em relação à curva de resposta original da Figura 5.46(b).

Controle proporcional-derivativo de sistemas de segunda ordem. Pode-se obter uma conciliação entre o comportamento da resposta transitória aceitável e o comportamento aceitável em regime permanente utilizando uma ação de controle proporcional-derivativo.

Considere o sistema da Figura 5.45. A função de transferência de malha fechada é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p + K_d s}{J s^2 + (B + K_d)s + K_p}$$

O erro estacionário para uma entrada em rampa unitária é:

$$e_{ss} = \frac{B}{K_p}$$

A equação característica é:

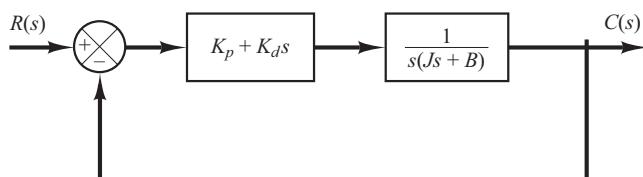
$$J s^2 + (B + K_d)s + K_p = 0$$

O coeficiente de amortecimento efetivo desse sistema é, então, $B + K_d$, em lugar de B . Como o coeficiente de amortecimento ζ do sistema é:

$$\zeta = \frac{B + K_d}{2\sqrt{K_p J}}$$

FIGURA 5.45

Sistema de controle.



é possível obter valores pequenos tanto para o erro estacionário e_{ss} , correspondente a uma entrada em rampa, como para o máximo sobressinal para uma entrada em degrau, fazendo que o valor de B seja pequeno, o de K_p , elevado, e o de K_d seja grande o bastante para que o valor de ζ fique entre 0,4 e 0,7.

5.8 | Erros estacionários em sistemas de controle com realimentação unitária

Os erros em um sistema de controle podem ser atribuídos a muitos fatores. Alterações na entrada de referência causarão erros inevitáveis durante o regime transitório, podendo causar também erros estacionários. Imperfeições nos componentes do sistema, como atrito estático, folga e deriva dos amplificadores, bem como desgaste ou deterioração, causarão erros em regime permanente. Nesta seção, entretanto, não discutiremos erros causados por imperfeições nos componentes do sistema. Em vez disso, vamos estudar um tipo de erro estacionário que é causado pela incapacidade de um sistema em seguir determinados tipos de sinais de entradas.

Qualquer sistema de controle físico apresenta, inherentemente, erros estacionários na resposta a certos tipos de entradas. Um sistema pode não apresentar um erro estacionário a uma entrada em degrau, mas o mesmo sistema pode apresentar um erro estacionário não nulo a uma entrada em rampa. (A única maneira possível de eliminar esse erro é modificando a estrutura do sistema.) O erro estacionário que um sistema apresenta em relação a determinado tipo de entrada depende do tipo de função de transferência de malha aberta desse sistema, o que será discutido a seguir.

Classificação dos sistemas de controle. Os sistemas de controle podem ser classificados de acordo com sua habilidade em seguir os sinais de entrada em degrau, em rampa, em parábola etc. Este é um critério razoável de classificação, pois as entradas reais com frequência podem ser consideradas combinações das entradas citadas. Os valores dos erros estacionários relativos a essas entradas individuais são indicadores de qualidade do sistema.

Considere o sistema de controle com realimentação unitária, com a seguinte função de transferência de malha aberta $G(s)$:

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_p s + 1)}$$

Essa função de transferência contém o termo s^N no denominador, representando um polo de multiplicidade N na origem. O presente método de classificação tem como base o número de integrações indicadas pela função de transferência de malha aberta. Um sistema é chamado tipo 0, tipo 1, tipo 2, ..., se $N = 0, N = 1, N = 2, \dots$, respectivamente. Note que essa classificação é diferente da que se refere à ordem de um sistema. Conforme o tipo N aumenta, a precisão aumenta; por outro lado, agrava-se a estabilidade do sistema. É sempre necessária uma conciliação entre precisão em regime permanente e estabilidade relativa.

Veremos adiante que, se $G(s)$ for escrita de modo que cada termo no numerador e no denominador, exceto os termos s^N , se aproxime da unidade à medida que s se aproxima de zero, então o ganho K de malha aberta estará diretamente relacionado ao erro estacionário.

Erros estacionários. Considere o sistema mostrado na Figura 5.46. A função de transferência de malha fechada é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

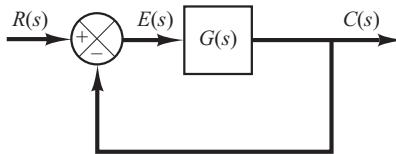
A função de transferência entre o sinal de erro $e(t)$ e o sinal de entrada $r(t)$ é:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$$

onde o erro $e(t)$ é a diferença entre o sinal de entrada e o sinal de saída.

FIGURA 5.46

Sistema de controle.



O teorema do valor final oferece um modo conveniente de determinar o desempenho em regime permanente de um sistema estável. Como $E(s)$ é:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

o erro estacionário é:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

As constantes de erro estático definidas a seguir são figuras de mérito dos sistemas de controle. Quanto mais altas as constantes, menor o erro estacionário. Em dado sistema, a saída pode ser a posição, a velocidade, a pressão, a temperatura ou outros fatores. A natureza física da saída, entretanto, é irrelevante nesta análise. Assim, a seguir, chamaremos a saída de ‘posição’, a taxa de variação da saída de ‘velocidade’ etc. Isso significa que, no sistema de controle de temperatura, ‘posição’ representa a temperatura de saída, ‘velocidade’ representa a taxa de variação da temperatura de saída, e assim por diante.

Constante de erro estático de posição K_p . O erro estacionário do sistema para uma entrada em degrau é:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{1 + G(0)} \end{aligned}$$

A constante de erro estático de posição K_p é definida por:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0)$$

Então, o erro estacionário em termos da constante de erro estático de posição K_p é dado por:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p}$$

Para um sistema do tipo 0,

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K$$

Para um sistema do tipo 1 ou maior,

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = \infty, \quad \text{para } N \geq 1$$

Então, para um sistema do tipo 0, a constante de erro estático de posição K_p é finita, ao passo que, para um sistema do tipo 1 ou maior, K_p é infinita.

Para uma entrada em degrau unitário, o erro estacionário e_{ss} pode ser resumido como segue:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K}, \quad \text{para sistemas do tipo 0}$$

$$e_{ss} = 0, \quad \text{para sistemas do tipo 1 ou maiores}$$

A partir da análise anterior, pode-se ver que a resposta de um sistema de controle com realimentação a uma entrada em degrau conterá um erro estacionário, se não houver integração no ramo direto. (Se erros pequenos para entradas em degrau puderem ser tolerados, então um sistema do tipo 0 poderá ser admissível, desde que o ganho K seja suficientemente grande. Se este for muito grande, entretanto, será difícil obter uma estabilidade relativa adequada.) Se for desejável um erro estacionário nulo para uma entrada em degrau, o tipo do sistema deverá ser 1 ou maior.

Constante de erro estático de velocidade K_v . O erro estacionário do sistema com uma entrada em rampa unitária é dado por:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \cdot \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)} \end{aligned}$$

A constante de erro estático de velocidade K_v é definida por:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

Assim, o erro estacionário em termos da constante de erro estático de velocidade K_v é dado por:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

O termo *erro de velocidade* é empregado aqui para expressar o erro estacionário para uma entrada em rampa. A dimensão do erro de velocidade é a mesma do erro do sistema. Ou seja, o erro de velocidade não é um erro na velocidade, e sim um erro de posição em decorrência de uma entrada em rampa. Para um sistema do tipo 0,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0$$

Para um sistema do tipo 1,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K$$

Para um sistema do tipo 2 ou maior,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = \infty, \quad \text{para } N \geq 2$$

O erro estacionário e_{ss} para a entrada em rampa unitária pode ser resumido como segue:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty, \quad \text{para sistemas do tipo 0}$$

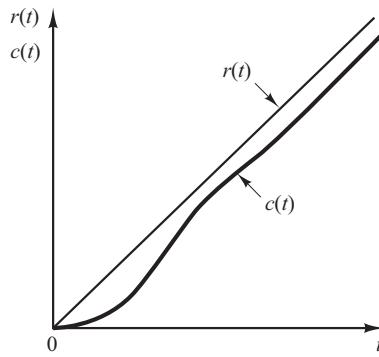
$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}, \quad \text{para sistemas do tipo 1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0, \quad \text{para sistemas do tipo 2 ou maiores}$$

A análise anterior indica que um sistema do tipo 0 é incapaz de seguir, em regime estacionário, uma entrada em rampa. O sistema do tipo 1 com realimentação unitária pode seguir a entrada em rampa com um erro finito. Em uma operação em regime estacionário, a velocidade de saída é exatamente a mesma velocidade de entrada, mas existe um erro de posição. Esse erro é proporcional à velocidade de entrada e é inversamente proporcional ao ganho K . A Figura 5.47 mostra um exemplo da resposta de um sistema do tipo 1 com realimentação unitária a uma entrada em rampa. O sistema de tipo 2 ou maior pode seguir uma entrada em rampa, em regime estacionário, com erro nulo.

FIGURA 5.47

Resposta de um sistema do tipo 1 com realimentação unitária a uma entrada em rampa.



Constante de erro estático de aceleração K_a . O erro estacionário do sistema com uma entrada em parábola unitária (entrada em aceleração), definida como:

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{t^2}{2}, \quad \text{para } t \geq 0 \\ &= 0, \quad \text{para } t < 0 \end{aligned}$$

é dado por:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \cdot \frac{1}{s^3} \\ &= \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} \end{aligned}$$

A constante de erro estático de aceleração K_a é definida pela equação

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

O erro estacionário é, então:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

Note que o erro de aceleração, isto é, o erro estacionário em virtude da entrada em parábola, é um erro de posição.

Os valores de K_a são obtidos como segue:

Para um sistema do tipo 0,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0$$

Para um sistema do tipo 1,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = 0$$

Para um sistema do tipo 2,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = K$$

Para um sistema do tipo 3 ou maior,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots} = \infty, \quad \text{para } N \geq 3$$

Assim, o erro estacionário para uma entrada em parábola unitária é:

$$e_{ss} = \infty, \quad \text{para sistemas dos tipos 0 e 1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K}, \quad \text{para sistemas do tipo 2}$$

$$e_{ss} = 0, \quad \text{para sistemas do tipo 3 ou maiores}$$

Observe que tanto os sistemas do tipo 0 como os do tipo 1 são incapazes de seguir uma entrada em parábola no estado permanente. O sistema do tipo 2 com realimentação unitária pode seguir uma entrada em parábola com um sinal de erro finito. A Figura 5.48 mostra um exemplo da resposta de um sistema do tipo 2 com realimentação unitária a uma entrada em parábola. O sistema do tipo 3 ou maior com realimentação unitária, em regime permanente, segue uma entrada em parábola com erro zero.

Resumo. A Tabela 5.1 resume os erros estacionários para sistemas dos tipos 0, 1 e 2, quando estes forem submetidos a diversas entradas. Os valores finitos para erros estacionários aparecem na linha diagonal. Acima da diagonal, os erros estacionários são infinitos; abaixo da diagonal, são nulos.

Deve-se lembrar que os termos *erro de posição*, *erro de velocidade* e *erro de aceleração* significam desvios em regime estacionário na posição da saída. Um erro na velocidade finita implica que, depois que os transitórios tenham desaparecido, a entrada e a saída se movem na mesma velocidade, mas têm uma diferença de posição finita.

As constantes de erro K_p , K_v e K_a descrevem a habilidade de um sistema com realimentação unitária para reduzir ou eliminar o erro estacionário. Portanto, são indicativos do desempenho em regime permanente. Em geral, é desejável aumentar as constantes de erro, enquanto se mantém a resposta transitória dentro de um limite aceitável. Observe que, para melhorar o desempenho

FIGURA 5.48

Resposta de um sistema do tipo 2 com realimentação unitária a uma entrada em parábola.

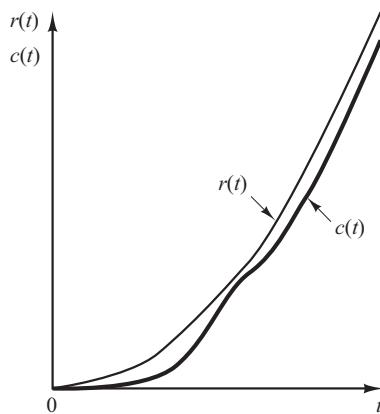


TABELA 5.1

Erro estacionário em termos do ganho de K .

	Entrada em degrau $r(t) = 1$	Entrada em rampa $r(t) = t$	Entrada em aceleração $r(t) = \frac{1}{2}t^2$
Sistema do tipo 0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
Sistema do tipo 1	0	$\frac{1}{K}$	∞
Sistema do tipo 2	0	0	$\frac{1}{K}$

em regime permanente, é necessário aumentar o tipo do sistema, adicionando um integrador ou integradores no ramo direto. Entretanto, isso introduz um problema adicional de estabilidade. O projeto de um sistema satisfatório com mais de dois integradores em série no ramo direto geralmente não é fácil.

| Exemplos de problemas com soluções

- A.5.1** No sistema da Figura 5.49, $x(t)$ é o deslocamento de entrada e $\theta(t)$ é o deslocamento angular de saída. Suponha que as massas envolvidas sejam desprezíveis e a restrição de todos os movimentos seja pequena; então, o sistema pode ser considerado linear. As condições iniciais de x e θ são nulas, ou seja, $x(0-) = 0$ e $\theta(0-) = 0$. Mostre que esse sistema é um elemento derivador. Em seguida, obtenha a resposta $\theta(t)$ quando $x(t)$ for um degrau unitário.

Solução. A equação para o sistema é:

$$b(\dot{x} - L\dot{\theta}) = kL\theta$$

ou

$$L\dot{\theta} + \frac{k}{b}L\theta = \dot{x}$$

A transformada de Laplace dessa última equação, considerando condições iniciais nulas, é:

$$\left(Ls + \frac{k}{b}L\right)\Theta(s) = sX(s)$$

Assim,

$$\frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{1}{L} \frac{s}{s + (k/b)}$$

Portanto, o sistema dado é um sistema derivador.

Para uma entrada em degrau unitário $X(s) = 1/s$, a saída $\Theta(s)$ torna-se:

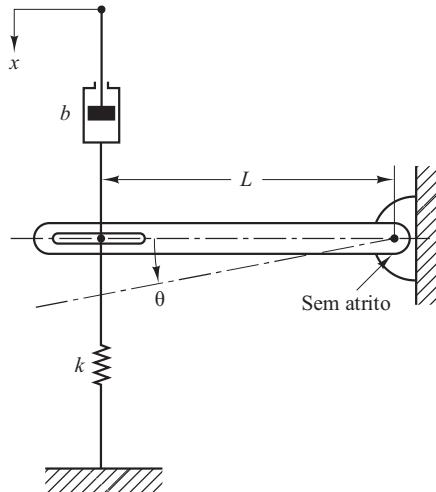
$$\Theta(s) = \frac{1}{L} \frac{1}{s + (k/b)}$$

A transformada inversa de Laplace de $\Theta(s)$ nos fornece:

$$\theta(t) = \frac{1}{L} e^{-(k/b)t}$$

FIGURA 5.49

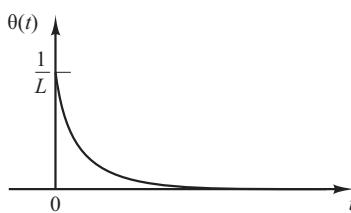
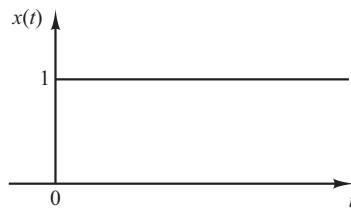
Sistema
mecânico.



Note que, se o valor de k/b for grande, a resposta $\theta(t)$ se aproximará de um sinal em forma de pulso, como mostra a Figura 5.50.

FIGURA 5.50

Entrada em degrau unitário e resposta do sistema mecânico mostrado na Figura 5.49.



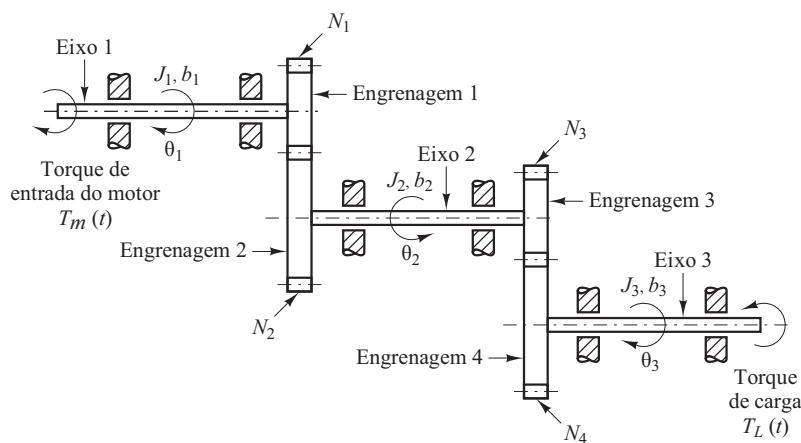
- A.5.2** Conjuntos de engrenagens são frequentemente utilizados nos servossistemas para reduzir a velocidade, aumentar o torque ou obter transferência de potência mais eficaz, adequando a rotação do motor com a da carga considerada.

Considere o sistema de engrenagens mostrado na Figura 5.51. Nesse sistema, a carga é acionada por um motor, por meio de um conjunto de engrenagens. Supondo que a rigidez dos eixos do conjunto de engrenagens seja infinita (não exista nem folga nem deformação elástica) e que o número de dentes de cada engrenagem seja proporcional ao respectivo raio, obtenha o momento de inércia equivalente e o coeficiente de atrito viscoso equivalente, referidos ao eixo do motor e ao eixo da carga.

Na Figura 5.51, o número de dentes nas engrenagens 1, 2, 3 e 4 são N_1, N_2, N_3 e N_4 , respectivamente. O deslocamento angular dos eixos 1, 2 e 3 são θ_1, θ_2 e θ_3 , respectivamente. Assim, $\theta_2/\theta_1 = N_1/N_2$ e $\theta_3/\theta_2 = N_3/N_4$. O momento de inércia e o coeficiente de atrito viscoso de cada engrenagem são designados como $J_1, b_1; J_2, b_2$; e J_3, b_3 , respectivamente. (J_3 e b_3 incluem o momento de inércia e o coeficiente de atrito da carga.)

FIGURA 5.51

Sistema de engrenagens.



Solução. Para esse sistema de engrenagens, podemos obter as seguintes equações: para o eixo 1,

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + b_1 \dot{\theta}_1 + T_1 = T_m \quad (5.63)$$

onde T_m é o torque desenvolvido pelo motor e T_1 é o torque de carga na engrenagem 1, em razão do restante do conjunto de engrenagens. Para o eixo 2,

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + b_2 \dot{\theta}_2 + T_2 = T_1 \quad (5.64)$$

onde T_2 é o torque transmitido à engrenagem 2 e T_3 é o torque de carga da engrenagem 3, em razão do restante do conjunto de engrenagens. Como o trabalho realizado pela engrenagem 1 é igual ao realizado pela engrenagem 2, então

$$T_1 \theta_1 = T_2 \theta_2 \quad \text{ou} \quad T_2 = T_1 \frac{N_2}{N_1}$$

Se $N_1/N_2 < 1$, a relação das engrenagens reduz a velocidade tanto quanto aumenta o torque. Para o eixo 3,

$$J_3 \ddot{\theta}_3 + b_3 \dot{\theta}_3 + T_3 = T_2 \quad (5.65)$$

onde T_3 é o torque de carga e T_4 é o torque transmitido para a engrenagem 4. T_3 e T_4 estão relacionados por:

$$T_4 = T_3 \frac{N_4}{N_3}$$

e θ_3 e θ_1 estão relacionados por:

$$\theta_3 = \theta_2 \frac{N_3}{N_4} = \theta_1 \frac{N_1}{N_2} \frac{N_3}{N_4}$$

Eliminando T_1 , T_2 , T_3 e T_4 das equações 5.63, 5.64 e 5.65, temos:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + b_1 \dot{\theta}_1 + \frac{N_1}{N_2} (J_2 \ddot{\theta}_2 + b_2 \dot{\theta}_2) + \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4} (J_3 \ddot{\theta}_3 + b_3 \dot{\theta}_3 + T_L) = T_m$$

Eliminando θ_2 e θ_3 dessa última equação e escrevendo a equação resultante em termos de θ_1 e suas derivadas em relação ao tempo, obtemos:

$$\begin{aligned} & \left[J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 J_2 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4} \right)^2 J_3 \right] \ddot{\theta}_1 \\ & + \left[b_1 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 b_2 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4} \right)^2 b_3 \right] \dot{\theta}_1 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right) \left(\frac{N_3}{N_4} \right) T_L = T_m \end{aligned} \quad (5.66)$$

Assim, o momento de inércia e o coeficiente de atrito viscoso equivalentes do conjunto de engrenagem, referentes ao eixo 1, são dados, respectivamente, por:

$$J_{1\text{eq}} = J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 J_2 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4} \right)^2 J_3$$

$$b_{1\text{eq}} = b_1 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 b_2 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4} \right)^2 b_3$$

Da mesma maneira, o momento de inércia e o coeficiente de atrito viscoso equivalentes do conjunto de engrenagens, referentes ao eixo da carga (eixo 3), são dados, respectivamente, por:

$$J_{3\text{eq}} = J_3 + \left(\frac{N_4}{N_3} \right)^2 J_2 + \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \left(\frac{N_4}{N_3} \right)^2 J_1$$

$$b_{3\text{eq}} = b_3 + \left(\frac{N_4}{N_3} \right)^2 b_2 + \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \left(\frac{N_4}{N_3} \right)^2 b_1$$

A relação entre $J_{1\text{eq}}$ e $J_{3\text{eq}}$ é, então,

$$J_{1\text{eq}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_{3\text{eq}}$$

e entre $b_{1\text{eq}}$ e $b_{3\text{eq}}$ é:

$$b_{1\text{eq}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 b_{3\text{eq}}$$

O efeito de J_2 e J_3 no momento de inércia equivalente é determinado pelas relações de engrenagens N_1/N_2 e N_3/N_4 . Para conjuntos de engrenagens redutores de velocidade, as relações N_1/N_2 e N_3/N_4 normalmente são menores que a unidade. Se $N_1/N_2 \ll 1$ e $N_3/N_4 \ll 1$, então o efeito de J_2 e J_3 no momento de inércia equivalente $J_{1\text{eq}}$ é desprezível. A mesma observação se aplica ao coeficiente de atrito viscoso equivalente $b_{1\text{eq}}$ do conjunto de engrenagens. Em termos do momento de inércia equivalente $J_{1\text{eq}}$ e do coeficiente de atrito viscoso equivalente $b_{1\text{eq}}$, a Equação 5.66 pode ser simplificada, resultando:

$$J_{1\text{eq}} \ddot{\theta}_1 + b_{1\text{eq}} \dot{\theta}_1 + nT_L = T_m$$

onde

$$n = \frac{N_1 N_3}{N_2 N_4}$$

- A.5.3** Quando o sistema mostrado na Figura 5.52(a) é submetido a um degrau unitário de entrada, o sistema responde com uma saída como a indicada na Figura 5.52b. Determine os valores de K e T a partir da curva de resposta.

Solução. O máximo sobressinal de 25,4% corresponde a $\zeta = 0,4$. Da curva de resposta, obtemos:

$$t_p = 3$$

Consequentemente,

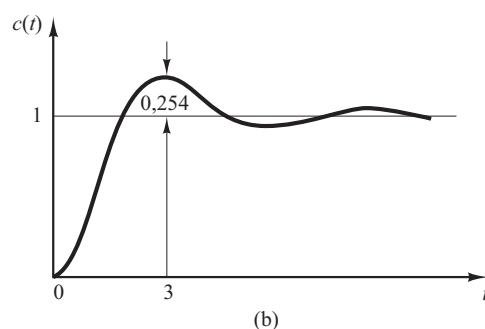
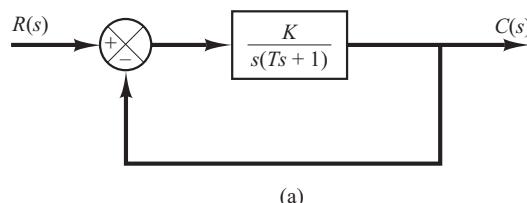
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - 0,4^2}} = 3$$

Segue-se que

$$\omega_n = 1,14$$

FIGURA 5.52

- (a) Sistema de malha fechada;
(b) curva de resposta ao degrau unitário.



A partir do diagrama de blocos, temos:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts^2 + s + K}$$

o que resulta em:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}$$

Portanto, os valores de T e K ficam determinados como:

$$T = \frac{1}{2\zeta\omega_n} = \frac{1}{2 \times 0,4 \times 1,14} = 1,09$$

$$K = \omega_n^2 T = 1,14^2 \times 1,09 = 1,42$$

- A.5.4** Determine os valores de K e k do sistema de malha fechada mostrado na Figura 5.53 para que o máximo sobressinal da resposta ao degrau unitário seja 25% e o tempo de pico seja 2 s. Suponha que $J = 1 \text{ kg-m}^2$.

Solução. A função de transferência de malha fechada é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Kks + K}$$

Substituindo $J = 1 \text{ kg-m}^2$ na última equação, teremos:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + Kks + K}$$

Note que, neste problema,

$$\omega_n = \sqrt{K}, \quad 2\zeta\omega_n = Kk$$

O máximo sobressinal M_p é:

$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

cujo valor está especificado em 25%. Então,

$$e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0,25$$

a partir do qual

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1,386$$

ou

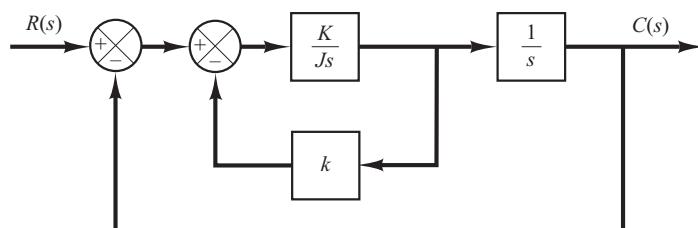
$$\zeta = 0,404$$

A especificação do tempo de pico t_p é de 2 s. Assim,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 2$$

FIGURA 5.53

Sistema de malha fechada.



ou

$$\omega_d = 1,57$$

Então, a frequência natural não amortecida ω_n é:

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{1,57}{\sqrt{1 - 0,404^2}} = 1,72$$

Portanto, obtemos:

$$K = \omega_n^2 = 1,72^2 = 2,95 \text{ N-m}$$

$$k = \frac{2\zeta\omega_n}{K} = \frac{2 \times 0,404 \times 1,72}{2,95} = 0,471 \text{ s}$$

- A.5.5** A Figura 5.54(a) mostra um sistema mecânico vibratório. Quando uma força de 8,9 N (degrau de entrada) é aplicada ao sistema, a massa oscila, como mostra a Figura 5.54(b). Determine m , b e k do sistema a partir dessa curva de resposta. O deslocamento x é medido a partir da posição de equilíbrio.

Solução. A função de transferência desse sistema é:

$$\frac{X(s)}{P(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Como

$$P(s) = \frac{8,9}{s}$$

obtemos:

$$X(s) = \frac{8,9}{s(ms^2 + bs + k)}$$

Segue-se que o valor de regime permanente de x é:

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \frac{8,9}{k} = 0,03048 \text{ m}$$

Então,

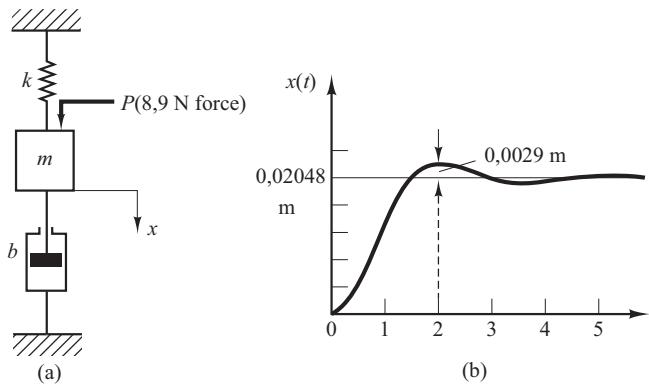
$$k = 292 \text{ N/m}$$

Note que $M_p = 9,5\%$ corresponde a $\zeta = 0,6$. O tempo de pico t_p é dado por:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\pi}{0,8\omega_n}$$

FIGURA 5.54

- (a) Sistema mecânico vibratório;
(b) curva de resposta ao degrau.



A curva experimental mostra que $t_p = 2$ s. Portanto,

$$\omega_n = \frac{3,14}{2 \times 0,8} = 1,96 \text{ rad/s}$$

Como $\omega_n^2 = k/m = 292/m$, obtemos:

$$m = \frac{292}{\omega_n^2} = \frac{292}{1,96^2} = 76 \text{ Kg}$$

Então, b é determinado a partir de

$$2\zeta\omega_n = \frac{b}{m}$$

ou

$$b = 2\zeta\omega_n m = 2 \times 0,6 \times 1,96 \times 76 = 179 \text{ N-s/m}$$

A.5.6 Considere a resposta ao degrau unitário do sistema de segunda ordem

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

A amplitude da senoide exponencialmente amortecida varia como os termos de uma série geométrica. No instante $t = t_p = \pi / \omega_d$, a amplitude é igual a $e^{-(\sigma/\omega_d)\pi}$. Depois de uma oscilação, ou seja, para $t = t_p + 2\pi / \omega_d = 3\pi / \omega_d$, a amplitude é igual a $e^{-(\sigma/\omega_d)3\pi}$; depois de outro ciclo de oscilação, a amplitude é $e^{-(\sigma/\omega_d)5\pi}$. O logaritmo da relação de amplitudes sucessivas é denominado *decremento logarítmico*. Determine o decremento logarítmico para esse sistema de segunda ordem. Descreva um método para a determinação experimental do coeficiente de amortecimento a partir da taxa de decremento da oscilação.

Solução. Vamos definir a amplitude da resposta oscilatória em $t = t_i$ como x_i , onde $t_i = t_p + (i-1)T$ (T = período de oscilação). A relação de amplitudes em cada período das oscilações amortecidas é:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-(\sigma/\omega_d)\pi}}{e^{-(\sigma/\omega_d)3\pi}} = e^{2(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{2\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Então, o decremento logarítmico δ é:

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Esta é uma função apenas do coeficiente de amortecimento ζ . Assim, o coeficiente de amortecimento ζ pode ser determinado utilizando-se o decremento logarítmico.

Na determinação experimental do coeficiente de amortecimento ζ a partir da taxa de decremento das oscilações, medimos a amplitude x_1 no instante $t = t_p$ e a amplitude x_n no instante $t = t_p + (n-1)T$. Note que é necessário escolher n suficientemente grande para que a relação x_1/x_n não seja próxima de 1. Então,

$$\frac{x_1}{x_n} = e^{(n-1)2\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

ou

$$\ln \frac{x_1}{x_n} = (n-1) \frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Portanto,

$$\zeta = \frac{\frac{1}{n-1} \left(\ln \frac{x_1}{x_n} \right)}{\sqrt{4\pi^2 + \left[\frac{1}{n-1} \left(\ln \frac{x_1}{x_n} \right) \right]^2}}$$

- A.5.7** No sistema mostrado na Figura 5.55, os valores numéricos de m , b e k são dados como $m = 1 \text{ kg}$, $b = 2 \text{ N-s/m}$ e $k = 100 \text{ N/m}$. A massa é deslocada de $0,05 \text{ m}$ e liberada sem velocidade inicial. Determine a frequência da oscilação observada. Determine também a amplitude quatro ciclos depois. O deslocamento x é medido a partir da posição de equilíbrio.

Solução. A equação de movimento para o sistema é:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Substituindo os valores numéricos de m , b e k nessa equação, temos:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 100x = 0$$

onde as condições iniciais são $x(0) = 0,05$ e $\dot{x}(0) = 0$. A partir dessa última equação, obtemos a frequência natural não amortecida ω_n e o coeficiente de amortecimento ζ como:

$$\omega_n = 10, \quad \zeta = 0,1$$

A frequência realmente observada nas oscilações é a frequência natural amortecida ω_d .

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 10 \sqrt{1 - 0,01} = 9,95 \text{ rad/s}$$

Na presente análise, $\dot{x}(0)$ é dada como zero. Assim, a solução $x(t)$ pode ser escrita como:

$$x(t) = x(0)e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

Segue-se que, para $t = nT$, onde $T = 2\pi/\omega_d$,

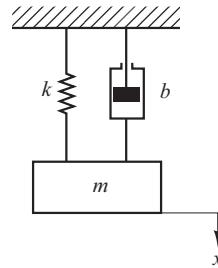
$$x(nT) = x(0)e^{-\zeta\omega_n nT}$$

Consequentemente, a amplitude após quatro ciclos é:

$$\begin{aligned} x(4T) &= x(0)e^{-\zeta\omega_n 4T} = x(0)e^{-(0,1)(10)(4)(0,6315)} \\ &= 0,05e^{-2,526} = 0,05 \times 0,07998 = 0,004 \text{ m} \end{aligned}$$

FIGURA 5.55

Sistema amortecedor massa-mola.



- A.5.8** Obtenha a resposta ao degrau unitário, tanto analítica como computacionalmente, do seguinte sistema de ordem superior:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3s^3 + 25s^2 + 72s + 80}{s^4 + 8s^3 + 40s^2 + 96s + 80}$$

[Obtenha a expansão de $C(s)$ em frações parciais com o MATLAB para o caso em que $R(s)$ seja um degrau unitário.]

Solução. O Programa 5.18 em MATLAB gera a curva de resposta ao degrau unitário mostrada na Figura 5.56. Ele também fornece a expansão de $C(s)$ em frações parciais, como segue:

$$\begin{aligned}
C(s) &= \frac{3s^3 + 25s^2 + 72s + 80}{s^4 + 8s^3 + 40s^2 + 96s + 80} \frac{1}{s} \\
&= \frac{-0,2813 - j0,1719}{s + 2 - j4} + \frac{-0,2813 - j0,1719}{s + 2 - j4} \\
&\quad + \frac{-0,4375}{s + 2} + \frac{-0,375}{(s + 2)^2} + \frac{1}{s} \\
&= \frac{-0,5626(s + 2)}{(s + 2)^2 + 4^2} + \frac{(0,3438) \times 4}{(s + 2)^2 + 4^2} \\
&\quad - \frac{0,4375}{s + 2} - \frac{0,375}{(s + 2)^2} + \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

Programa 5.18 em MATLAB

```

% ----- Resposta ao degrau unitário de
% C(s)/R(s) e expansão em frações parciais
% de C(s) -----

num = [3 25 72 80];
den = [1 8 40 96 80];
step(num,den);
v = [0 3 0 1.2]; axis(v), grid

% Para obter a expansão em frações parciais
% de C(s), digite os comandos
% num1 = [3 25 72 80];
% den1 = [1 8 40 96 80 0];
% [r,p,k] = residue(num1,den1)

num1 = [25 72 80];
den1 = [1 8 40 96 80 0];
[r,p,k] = residue(num1,den1)

r =
- 0.2813 - 0.1719i
- 0.2813 + 0.1719i
- 0.4375
- 0.3750
- 1.0000

p =
- 2.0000 + 4.0000i
- 2.0000 - 4.0000i
- 2.0000
- 2.0000
- 0

k =
[]

```

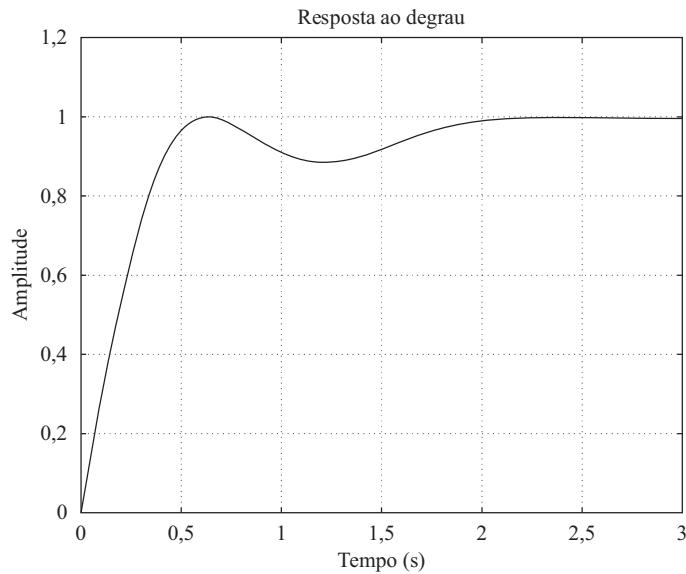
Então, a resposta no tempo $c(t)$ pode ser dada por:

$$\begin{aligned}
c(t) &= -0,5626e^{-2t} \cos 4t + 0,3438e^{-2t} \sin 4t \\
&\quad - 0,4375e^{-2t} - 0,375te^{-2t} + 1
\end{aligned}$$

A curva de resposta é uma superposição de uma curva exponencial com uma senoide amortecida, conforme se pode ver na Figura 5.56.

FIGURA 5.56

Curva de resposta ao degrau unitário.



- A.5.9** Quando um sistema de malha fechada envolve uma dinâmica no numerador, a curva de resposta ao degrau unitário pode apresentar um grande sobressinal. Obtenha a resposta ao degrau unitário do seguinte sistema, utilizando o MATLAB:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10s + 4}{s^2 + 4s + 4}$$

Obtenha também a resposta à rampa unitária com o MATLAB.

Solução. O Programa 5.19 em MATLAB produz tanto a resposta ao degrau unitário como a resposta à rampa unitária do sistema dado. A curva de resposta ao degrau unitário e a curva de resposta à rampa unitária, juntamente com a entrada em rampa unitária, são mostradas nas figuras 5.57(a) e (b), respectivamente.

Observe que a curva de resposta ao degrau unitário apresenta um sobressinal superior a 215%. A curva de resposta à rampa unitária está avançada em relação à curva do sinal de entrada. Esses fenômenos ocorrem por causa da presença de um grande termo derivativo no numerador.

Programa 5.19 em MATLAB

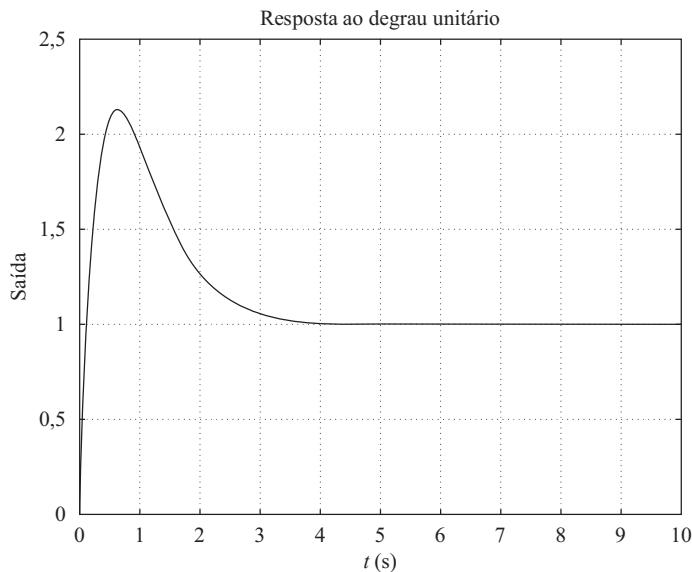
```

num = [10 4];
den = [1 4 4];
t = 0:0.02:10;
y = step(num,den,t);
plot(t,y)
grid
title('Resposta do Degrau Unitário')
xlabel('t (s)')
ylabel('Output')

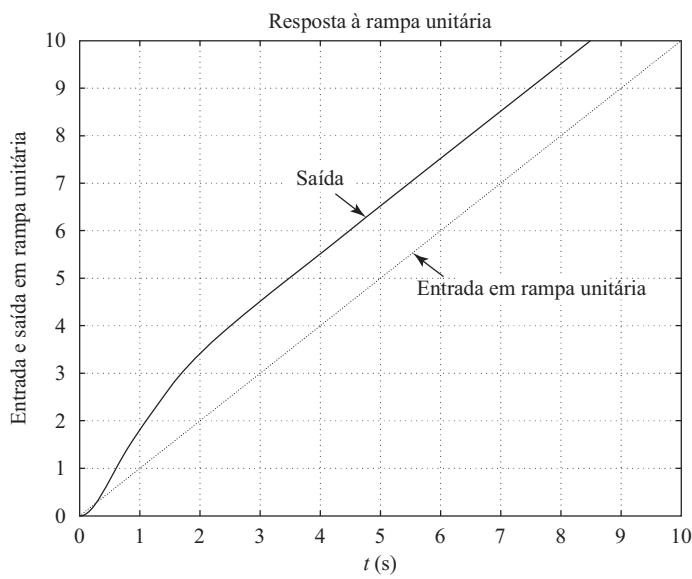
num1 = [10 4];
den1 = [1 4 4 0];
y1 = step(num1,den1,t);
plot(t,t,'--',t,y1)
v = [0 10 0 10]; axis(v);
grid
title('Resposta à Rampa Unitária')
xlabel('t (s)')
ylabel('Entrada e Saída em Rampa Unitária')
text(6.1,5.0,'Entrada em Rampa Unitária')
text(3.5,7.1,'Saída')
```

FIGURA 5.57

- (a) Curva de resposta ao degrau unitário
 (b) curva de resposta à rampa unitária com entrada em rampa unitária.



(a)



(b)

A.5.10 Considere o sistema de ordem superior definido por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{6,3223s^2 + 18s + 12,811}{s^4 + 6s^3 + 11,3223s^2 + 18s + 12,811}$$

Utilizando o MATLAB, desenhe a curva de resposta ao degrau unitário desse sistema. Utilizando o MATLAB, obtenha o tempo de subida, o tempo de pico, o máximo sobressinal e o tempo de acomodação.

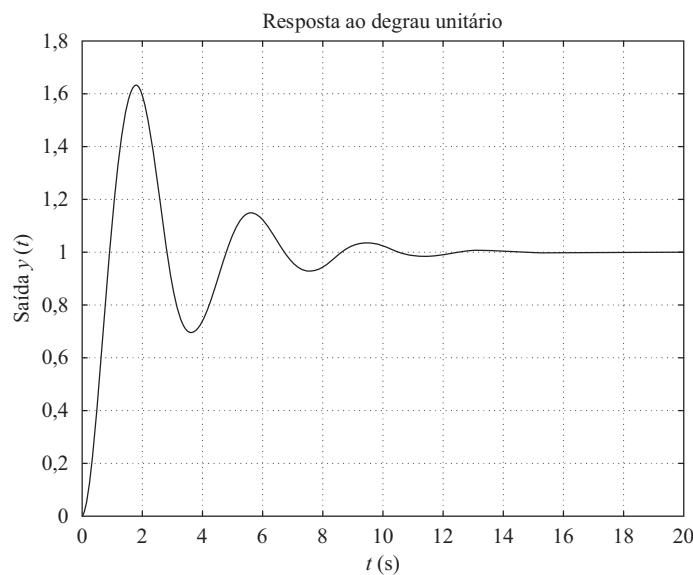
Solução. O Programa 5.20 em MATLAB imprime a curva de resposta ao degrau unitário, bem como fornece o tempo de subida, o tempo de pico, o máximo sobressinal e o tempo de acomodação. A curva de resposta ao degrau unitário é mostrada na Figura 5.58.

Programa 5.20 em MATLAB

```
% ----- Este programa destina-se a desenhar a curva de resposta ao degrau
% unitário bem como fornece o tempo de subida, o tempo de pico, o máximo sobressinal
% e o tempo de acomodação.
% Neste programa o tempo de subida é o tempo requerido para que a resposta suba
% desde 10% até 90% de seu valor final. -----
num = [6.3223 18 12.811];
den = [1 6 11.3223 18 12.811];
t = 0:0.02:20;
[y,x,t] = step(num,den,t);
plot(t,y)
grid
title('Resposta ao Degrau Unitário')
xlabel('t (s)')
ylabel('Saída y(t)')
r1 = 1; while y(r1) < 0.1, r1 = r1+1; end;
r2 = 1; while y(r2) < 0.9, r2 = r2+1; end;
rise_time = (r2-r1)*0.02
rise_time =
0.5800
[ymax,tp] = max(y);
peak_time = (tp-1)*0.02
peak_time =
1.6600
max_overshoot = ymax-1
max_overshoot =
0.6182
s = 1001; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02; s = s-1; end;
settling_time = (s-1)*0.02
settling_time =
10.0200
```

FIGURA 5.58

Curva de
resposta ao
degrau unitário.



A.5.11 Considere o sistema de malha fechada definido por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Utilizando um 'for loop', escreva um programa em MATLAB para obter a resposta ao degrau unitário desse sistema para os quatro casos seguintes:

Caso 1: $\zeta = 0,3$, $\omega_n = 1$

Caso 2: $\zeta = 0,5$, $\omega_n = 2$

Caso 3: $\zeta = 0,7$, $\omega_n = 4$

Caso 4: $\zeta = 0,8$, $\omega_n = 6$

Solução. Defina $\omega_n^2 = a$ e $2\zeta\omega_n = b$. Então, os vetores a e b têm quatro elementos cada um, como segue:

$$a = [1 \quad 4 \quad 16 \quad 36]$$

$$b = [0,6 \quad 2 \quad 5,6 \quad 9,6]$$

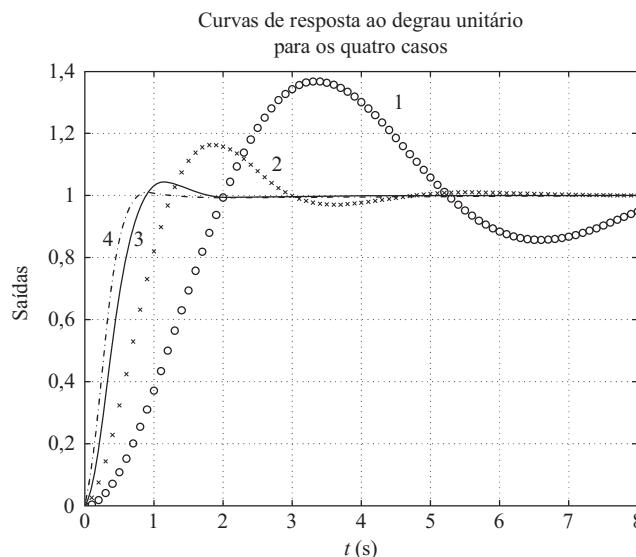
Utilizando os vetores a e b , o Programa 5.21 em MATLAB fornece as curvas de resposta ao degrau unitário, como mostra a Figura 5.59.

Programa 5.21 em MATLAB

```
a = [1 4 16 36];
b = [0.6 2 5.6 9.6];
t = 0:0.1:8;
y = zeros(81,4);
for i = 1:4;
    num = [a(i)];
    den = [1 b(i) a(i)];
    y(:,i) = step(num,den,t);
end
plot(t,y(:,1),'o',t,y(:,2),'x',t,y(:,3),'-',t,y(:,4),'-.')
grid
title('Curvas de Resposta ao Degrau Unitário para os Quatro Casos')
xlabel('t (s)')
ylabel('Saídas')
gtext('1')
gtext('2')
gtext('3')
gtext('4')
```

FIGURA 5.59

Curvas de resposta ao degrau unitário para os quatro casos.



- A.5.12** Utilizando o MATLAB, obtenha a resposta à rampa unitária do sistema de controle de malha fechada, cuja função de transferência é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s + 10}{s^3 + 6s^2 + 9s + 10}$$

Obtenha também a resposta desse sistema quando a entrada for dada por:

$$r = e^{-0.5t}$$

Solução. O Programa 5.22 em MATLAB fornece a resposta à rampa unitária e a resposta à entrada exponencial $r = e^{-0.5t}$. As curvas de resposta resultantes são mostradas nas figuras 5.60(a) e (b), respectivamente.

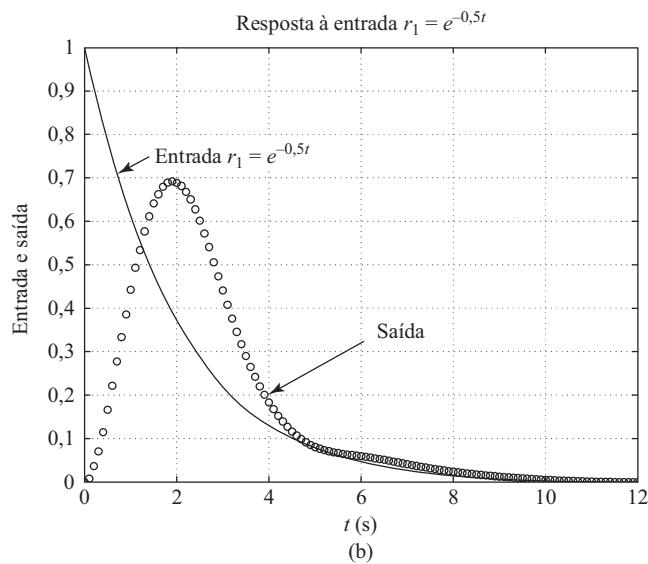
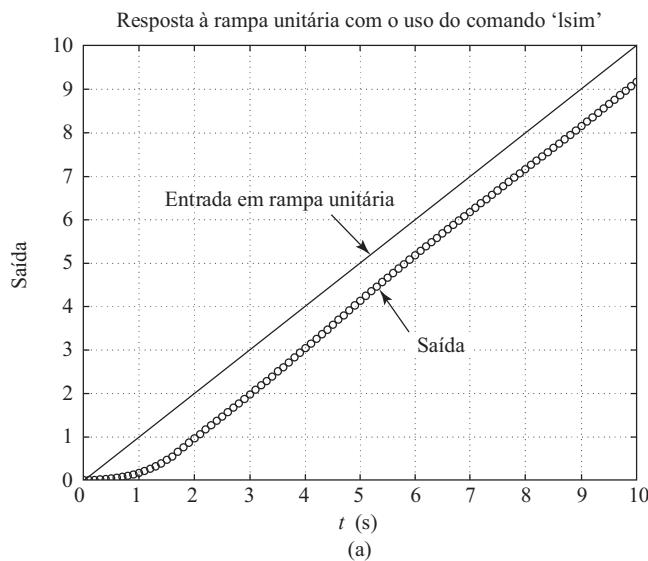
Programa 5.22 em MATLAB

```
% ----- Resposta à Rampa Unitária -----
num = [1 10];
den = [1 6 9 10];
t = 0:0.1:10;
r = t;
y = lsim(num,den,r,t);
plot(t,r,'-',t,y,'o')
grid
title('Resposta à Rampa Unitária com o Uso de Comando "lsim"')
xlabel('t (s)')
ylabel('Saída')
text(3.2,6.5,'Entrada em Rampa Unitária')
text(6.0,3.1,'Saída')

% ----- Resposta à Entrada r1 = exp(-0.5t). -----
num = [0 0 1 10];
den = [1 6 9 10];
t = 0:0.1:12;
r1 = exp(-0.5*t);
y1 = lsim(num,den,r1,t);
plot(t,r1,'-',t,y1,'o')
grid
title('Resposta à Entrada r1 = exp(-0.5t)')
xlabel('t (s)')
ylabel('Entrada e Saída')
text(1.4,0.75,'Entrada r1 = exp(-0.5t)')
text(6.2,0.34,'Saída')
```

FIGURA 5.60

- (a) Curva de resposta à rampa unitária;
 (b) resposta à entrada exponencial $r_1 = e^{-0.5t}$.



A.5.13 Obtenha a resposta do sistema de malha fechada definido por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^2 + s + 5}$$

quando a entrada $r(t)$ for dada por:

$$r(t) = 2 + t$$

[A entrada $r(t)$ é uma entrada em degrau de valor 2 mais a entrada em rampa unitária.]

Solução. Um programa possível é o Programa 5.23 em MATLAB. A Figura 5.61 mostra a curva de resposta resultante, juntamente com o traçado da função de entrada.

Programa 5.23 em MATLAB

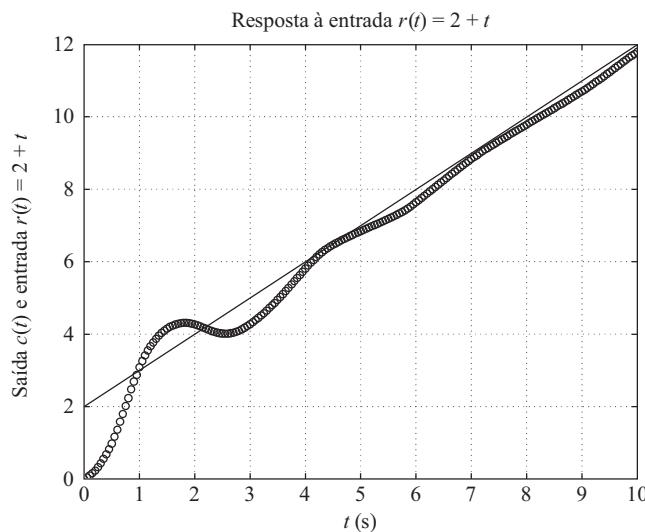
```

num = [5];
den = [1 1 5];
t = 0:0.05:10;
r = 2+t;
c = lsim(num,den,r,t);
plot(t,r,'-',t,c,'o')
grid
title('Resposta à Entrada r(t) = 2 + t')
xlabel('t (s)')
ylabel('Saída c(t) e Entrada r(t) = 2 + t')

```

FIGURA 5.61

Resposta à
entrada
 $r(t) = 2 + t$



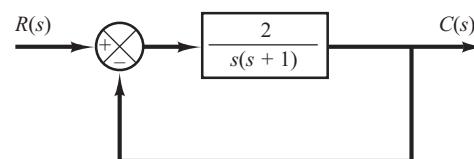
A.5.14 Obtenha a resposta do sistema mostrado na Figura 5.62, quando a entrada $r(t)$ for dada por:

$$r(t) = \frac{1}{2}t^2$$

[A entrada $r(t)$ é uma entrada em aceleração unitária.]

FIGURA 5.62

Sistema de
controle.



Solução. A função de transferência de malha fechada é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + s + 2}$$

O Programa 5.24 em MATLAB fornece a resposta à aceleração unitária. A Figura 5.63 mostra a resposta resultante, juntamente com a entrada em aceleração unitária.

Programa 5.24 em MATLAB

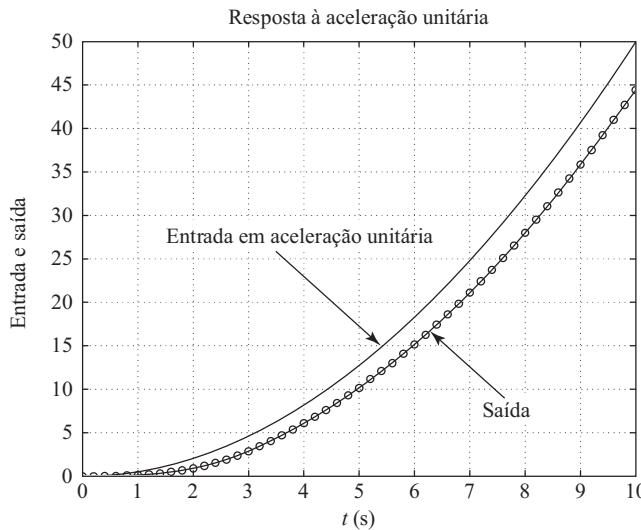
```

num = [2];
den = [1 1 2];
t = 0:0.2:10;
r = 0.5*t.^2;
y = lsim(num,den,r,t);
plot(t,r,'-',t,y,'o',t,y,'-')
grid
title('Resposta à Aceleração Unitária')
xlabel('t (s)')
ylabel('Entrada e Saída')
text(2.1,27.5,'Entrada em Aceleração Unitária')
text(7.2,7.5,'Saída')

```

FIGURA 5.63

Resposta à
entrada em
aceleração
unitária.



A.5.15 Considere o sistema definido por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

onde $\zeta = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ e $1,0$. Escreva um programa em MATLAB utilizando um 'for loop' para obter os gráficos bidimensional e tridimensional da saída do sistema. A entrada é a função de degrau unitário.

Solução. O Programa 5.25 em MATLAB é uma opção de programa para obter os gráficos bidimensional e tridimensional. A Figura 5.64(a) mostra o gráfico bidimensional das curvas de resposta ao degrau unitário para vários valores de ζ . A Figura 5.64(b) exibe o gráfico tridimensional obtido pelo comando 'mesh(y)' e a Figura 5.64(c) é obtida com o uso do comando 'mesh(y')'. (Esses dois gráficos tridimensionais são basicamente os mesmos. A única diferença é que o eixo x e o eixo y são permutados.)

Programa 5.25 em MATLAB

```
t = 0:0.2:12;
for n = 1:6;
    num = [1];
    den = [1 2*(n-1)*0.2 1];
    [y(1:61,n),x,t] = step(num,den,t);
end
plot(t,y)
grid
title('Curvas de Resposta ao Degrau Unitário')
xlabel('t s')
ylabel('Saídas')
gtext('\zeta = 0'),
gtext('0.2')
gtext('0.4')
gtext('0.6')
gtext('0.8')
gtext('1.0')

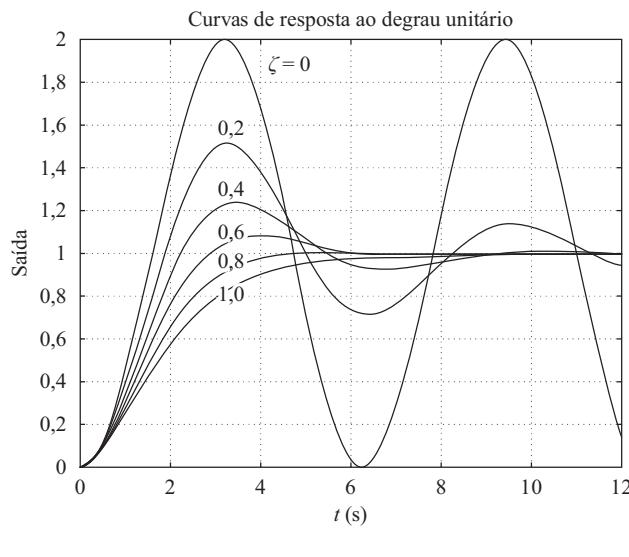
% Para desenhar um gráfico tridimensional, digite o seguinte comando: mesh(y) ou mesh(y').
% Mostramos dois gráficos tridimensionais, um usando 'mesh(y)' e o outro usando
% 'mesh(y')'. Esses dois gráficos são os mesmos, exceto que os eixos x e y são
% permutados.

mesh(y)
title('Gráfico Tridimensional das Curvas de Resposta do Degrau Unitário com o Uso do Comando
"mesh(y)"')
xlabel('n, onde n = 1,2,3,4,5,6')
ylabel('Valores de Tempo Computados')
zlabel('Saídas')

mesh(y')
title('Gráfico Tridimensional das Curvas de Resposta ao Degrau Unitário com o Uso do Comando
"mesh(y' permutado)"')
xlabel('Valores de Tempo Computados')
ylabel('n, onde n = 1,2,3,4,5,6')
zlabel('Saídas')
```

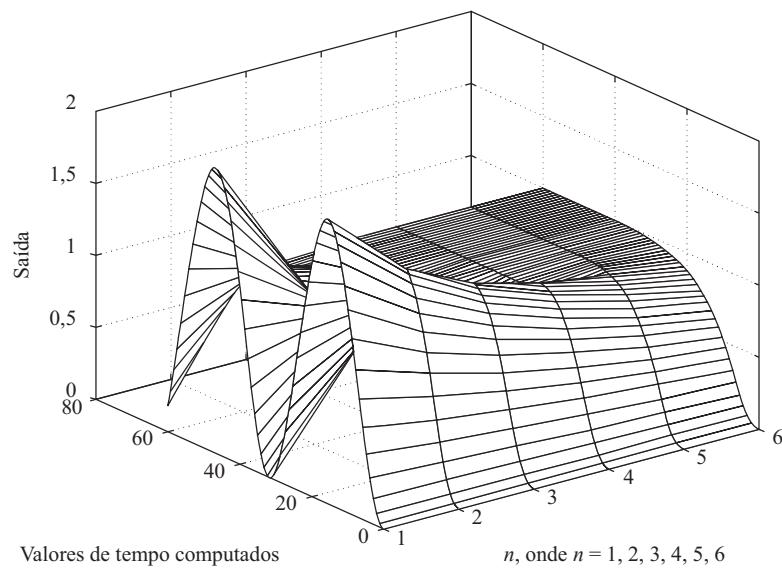
FIGURA 5.64

- (a) Gráfico bidimensional das curvas de resposta ao degrau unitário;
 (b) gráfico tridimensional das curvas de resposta ao degrau unitário com o uso do comando 'mesh(y)'
 (c) gráfico tridimensional das curvas de resposta ao degrau unitário com o uso do comando 'mesh(y')'.



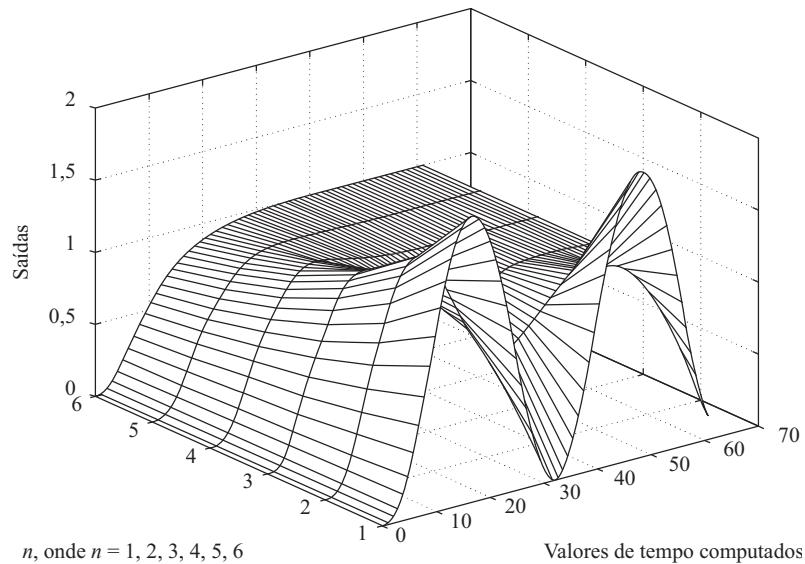
(a)

Gráfico tridimensional das curvas de resposta ao degrau unitário com o uso do comando 'mesh(y)'.



(b)

Gráfico tridimensional das curvas de resposta ao degrau unitário com o uso do comando 'mesh(y permutado)'.



(c)

A.5.16 Considere o sistema submetido à condição inicial dada a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(Não há função de entrada ou função de força nesse sistema.) Obtenha a resposta $y(t)$ versus t para a condição inicial dada, utilizando as equações 5.58 e 5.60.

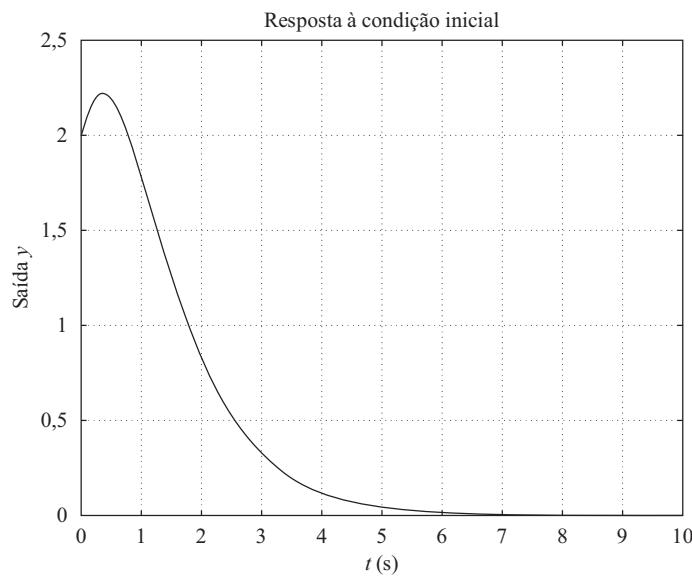
Solução. Uma opção de programa MATLAB baseado nas equações 5.58 e 5.60 é o Programa 5.26 em MATLAB. A Figura 5.65 mostra a curva de resposta resultante. (Note que o problema foi resolvido com o uso do comando 'initial' no Exemplo 5.16. A curva de resposta resultante aqui é exatamente a mesma mostrada na Figura 5.34).

Programa 5.26 em MATLAB

```
t = 0:0.05:10;
A = [0 1 0;0 0 1;-10 -17 -8];
B = [2;1;0.5];
C=[1 0 0];
[y,x,t] = step(A,B,C*A,C*B,1,t);
plot(t,y)
grid;
title('Resposta à Condição Inicial')
xlabel('t (s)')
ylabel('Saída y')
```

FIGURA 5.65

Resposta $y(t)$ à condição inicial dada.



A.5.17 Considere a seguinte equação característica:

$$s^4 + Ks^3 + s^2 + s + 1 = 0$$

Determine o intervalo de valores de K para que o sistema seja estável.

Solução. A matriz dos coeficientes de Routh é:

$$\begin{array}{ccccc} s^4 & 1 & 1 & 1 \\ s^3 & K & 1 & 0 \\ s^2 & \frac{K-1}{K} & 1 \\ s^1 & 1 - \frac{K^2}{K-1} & \\ s^0 & 1 & \end{array}$$

para que haja estabilidade, é necessário que:

$$K > 0$$

$$\frac{K-1}{K} > 0$$

$$1 - \frac{K^2}{K-1} > 0$$

A partir da primeira e da segunda condição, K deve ser maior que 1. Note que, para $K > 1$, o termo $1 - [K^2/(K-1)]$ é sempre negativo, pois

$$\frac{K-1-K^2}{K-1} = \frac{-1+K(1-K)}{K-1} < 0$$

Assim, as três condições não podem ser satisfeitas simultaneamente. Então, não existe um valor de K que permita a estabilidade do sistema.

- A.5.18** Considere a equação característica dada por:

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \quad (5.67)$$

O critério de estabilidade de Hurwitz, apresentado a seguir, fornece condições para que todas as raízes tenham partes reais negativas em termos dos coeficientes dos polinômios. Conforme as discussões sobre o critério de estabilidade de Routh, na Seção 5.6, para que todas as raízes tenham partes reais negativas, todos os coeficientes a devem ser positivos. Esta é uma condição necessária, mas não suficiente. Se essa condição não for satisfeita, isso indicará que algumas das raízes têm partes reais positivas ou são imaginárias ou nulas. A condição suficiente para que todas as raízes tenham parte real negativa é dada pelo seguinte critério de estabilidade de Hurwitz: se todos os coeficientes do polinômio forem positivos, eles serão organizados no seguinte determinante:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & . & . & . \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_n & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 \\ . & . & . & & a_{n-2} & a_n & 0 \\ . & . & . & & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

onde, para $s > n$, substituímos a_s por zero. Para que todas as raízes tenham parte real negativa, é necessário e suficiente que os menores principais sucessivos de Δ_n sejam positivos. Os menores principais sucessivos são os seguintes determinantes:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdots & a_{2i-1} \\ a_0 & a_2 & \cdots & a_{2i-2} \\ 0 & a_1 & \cdots & a_{2i-3} \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

onde $a_s = 0$ se $s > n$. (Note que algumas das condições para os determinantes de ordem inferior estão incluídas nas condições dos determinantes de ordem mais elevada.) Se todos esses determinantes forem positivos e $a_0 > 0$, como foi admitido anteriormente, o estado de equilíbrio do sistema, cuja equação característica é dada pela Equação 5.67, será assintoticamente estável. Observe que, para o critério de estabilidade, não são necessários os valores exatos dos determinantes, mas somente o sinal desses determinantes. Agora, considere a seguinte equação característica:

$$a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0$$

Obtenha as condições de estabilidade utilizando o critério de estabilidade de Hurwitz.

Solução. As condições para que se tenha estabilidade são que todos os coeficientes a sejam positivos e que

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 (a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_0 a_3^2 \\ &= a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0 \end{aligned}$$

É evidente que, se todos os coeficientes a forem positivos e se a condição $\Delta_3 > 0$ for satisfeita, a condição $\Delta_2 > 0$ também será atendida. Portanto, para que todas as raízes da equação característica em questão tenham parte real negativa, é necessário e suficiente que todos os coeficientes a sejam positivos e que $\Delta_3 > 0$.

A.5.19 Mostre que a primeira coluna da matriz de Routh de

$$s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

é dada por:

$$1, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

onde

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2r-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_r \end{vmatrix} \quad (n \geq r \geq 1)$$

$$a_k = 0 \quad \text{se } k > n$$

Solução. A matriz dos coeficientes de Routh tem a seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & a_n \\ a_1 & a_3 & a_5 & \dots & & \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & & \\ c_1 & c_2 & \dots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{array}$$

O primeiro termo da primeira coluna da matriz de Routh é 1. O próximo termo da primeira coluna é a_1 , que é igual a Δ_1 . O próximo termo é b_1 , que é igual a:

$$\frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

O próximo termo na primeira coluna é c_1 , que é igual a:

$$\begin{aligned}
 \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} &= \frac{\left[\frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} \right] a_3 - a_1 \left[\frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1} \right]}{\left[\frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} \right]} \\
 &= \frac{a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 + a_1 a_5}{a_1 a_2 - a_3} \\
 &= \frac{\Delta_3}{\Delta_2}
 \end{aligned}$$

Os termos restantes na primeira coluna da matriz de Routh podem ser determinados de modo análogo.

A matriz de Routh possui a propriedade de que os últimos termos não nulos de qualquer coluna são os mesmos, isto é, se a matriz for:

$$\begin{array}{cccc}
 a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\
 a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\
 b_1 & b_2 & b_3 & \\
 c_1 & c_2 & c_3 & \\
 d_1 & d_2 & & \\
 e_1 & e_2 & & \\
 f_1 & & & \\
 g_1 & & &
 \end{array}$$

então

$$a_7 = c_3 = e_2 = g_1$$

e se a matriz for:

$$\begin{array}{cccc}
 a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\
 a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\
 b_1 & b_2 & b_3 & \\
 c_1 & c_2 & 0 & \\
 d_1 & d_2 & & \\
 e_1 & 0 & & \\
 f_1 & & &
 \end{array}$$

então

$$a_6 = b_3 = d_2 = f_1$$

Em qualquer um dos casos, o último termo da primeira coluna é igual a a_n , ou

$$a_n = \frac{\Delta_{n-1} a_n}{\Delta_{n-1}} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

Por exemplo, se $n = 4$, então

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \Delta_3 a_4$$

Assim, foi demonstrado que a primeira coluna da matriz de Routh é dada por:

$$1, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

- A.5.20** Mostre que o critério de estabilidade de Routh e o critério de estabilidade de Hurwitz são equivalentes.

Solução. Se escrevermos todos os determinantes de Hurwitz na forma triangular

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{ii} \end{vmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

onde os elementos abaixo da linha diagonal são todos zeros e os elementos acima são valores quaisquer, então as condições de Hurwitz para a estabilidade assintótica se tornam:

$$\Delta_i = a_{11}a_{22} \dots a_{ii} > 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

que são equivalentes às condições

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad \dots, \quad a_{nn} > 0$$

Mostraremos que essas condições são equivalentes a

$$a_1 > 0, \quad b_1 > 0, \quad c_1 > 0, \quad \dots$$

onde a_1, b_1, c_1, \dots são elementos da primeira coluna na matriz de Routh.

Considere, por exemplo, o seguinte determinante de Hurwitz, que corresponde a $i = 4$:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

O determinante ficará inalterado se a linha i for subtraída k vezes da linha j . Subtraindo da segunda linha a_0/a_1 vezes a primeira linha, obtemos:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

onde

$$a_{11} = a_1$$

$$a_{22} = a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3$$

$$a_{23} = a_4 - \frac{a_0}{a_1} a_5$$

$$a_{24} = a_6 - \frac{a_0}{a_1} a_7$$

De forma similar, subtraindo da quarta linha a_0/a_1 vezes a terceira linha, obtemos

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 0 & \hat{a}_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{a}_{43} &= a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3 \\ \hat{a}_{44} &= a_4 - \frac{a_0}{a_1} a_5\end{aligned}$$

Em seguida, subtraindo da terceira linha a_1/a_{22} vezes a segunda linha, temos:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & \hat{a}_{43} & \hat{a}_{44} \end{vmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}a_{33} &= a_3 - \frac{a_1}{a_{22}} a_{23} \\ a_{34} &= a_5 - \frac{a_1}{a_{22}} a_{24}\end{aligned}$$

Por fim, subtraindo da última linha \hat{a}_{43}/a_{33} vezes a terceira linha, obtemos:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

onde

$$a_{44} = \hat{a}_{44} - \frac{\hat{a}_{43}}{a_{33}} a_{34}$$

A partir dessa análise, vemos que:

$$\Delta_4 = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$$

$$\Delta_3 = a_{11} a_{22} a_{33}$$

$$\Delta_2 = a_{11} a_{22}$$

$$\Delta_1 = a_{11}$$

As condições de Hurwitz para a estabilidade assintótica

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad \dots$$

reduzem-se às condições

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{33} > 0, \quad a_{44} > 0, \quad \dots$$

A matriz de Routh para o polinômio

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$$

onde $a_0 > 0$ e $n = 4$, é dada por:

$$\begin{array}{ccc} a_0 & a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 & \\ b_1 & b_2 & \\ c_1 & & \\ d_1 & & \end{array}$$

Observando a matriz de Routh, vemos que:

$$a_{11} = a_1$$

$$a_{22} = a_2 - \frac{a_0}{a_1}a_3 = b_1$$

$$a_{33} = a_3 - \frac{a_1}{a_{22}}a_{23} = \frac{a_3b_1 - a_1b_2}{b_1} = c_1$$

$$a_{44} = \hat{a}_{44} - \frac{\hat{a}_{43}}{a_{33}}a_{34} = a_4 = d_1$$

(A última equação é obtida a partir do fato de que $a_{34} = 0$, $\hat{a}_{44} = a_4$ e $a_4 = b_2 = d_1$.) Então, as condições de Hurwitz para a estabilidade assintótica tornam-se:

$$a_1 > 0, \quad b_1 > 0, \quad c_1 > 0, \quad d_1 > 0$$

Assim, fica demonstrado que as condições de Hurwitz para a estabilidade assintótica podem ser reduzidas às condições de Routh para a estabilidade assintótica. O mesmo argumento pode ser estendido aos determinantes de Hurwitz de qualquer ordem, e a equivalência entre o critério de estabilidade de Routh e o de Hurwitz pode ser estabelecida.

A.5.21 Considere a equação característica

$$s^4 + 2s^3 + (4 + K)s^2 + 9s + 25 = 0$$

Utilizando o critério de estabilidade de Hurwitz, determine o intervalo de valores de K para que haja estabilidade.

Solução. Comparando a equação característica a seguir:

$$s^4 + 2s^3 + (4 + K)s^2 + 9s + 25 = 0$$

com a seguinte equação característica de quarta ordem:

$$a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0$$

temos:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 4 + K, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 25$$

O critério de estabilidade de Hurwitz estabelece que Δ_4 é dado por:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

Para que todas as raízes tenham parte real negativa, é necessário e suficiente que os menores sucessivos principais de Δ_4 sejam positivos. Os menores sucessivos principais são:

$$\Delta_1 = |a_1| = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 + K \end{vmatrix} = 2K - 1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 1 & 4 + K & 25 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 18K - 109$$

Para que todos os menores principais sejam positivos, é necessário que Δ_i ($i = 1, 2, 3$) seja positivo. Portanto, devemos ter:

$$2K - 1 > 0$$

$$18K - 109 > 0$$

de onde concluímos que a região de K para que haja estabilidade é:

$$K > \frac{109}{18}$$

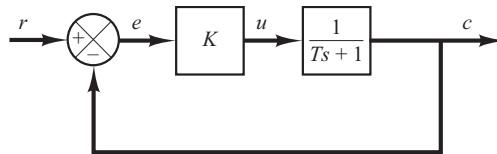
- A.5.22** Explique por que o controle proporcional de uma planta que não possui propriedade de integração (o que significa que a função de transferência da planta não inclui o fator $1/s$) apresenta erro residual na resposta ao degrau.

Solução. Considere, por exemplo, o sistema mostrado na Figura 5.66. Se, em regime permanente, c for igual a uma constante não nula igual a r , então $e = 0$ e $u = Ke = 0$, resultando em $c = 0$, o que contradiz a suposição de que $c = r = \text{constante não nula}$.

Esse sistema de controle requer um erro residual não nulo. Em outras palavras, se e for igual, em regime permanente, a $r/(1 + K)$, então $u = Kr/(1 + K)$ e $c = Kr/(1 + K)$, o que resulta no sinal de erro $e = r/(1 + K)$. Assim, o erro residual de $r/(1 + K)$ deve existir nesse sistema em particular.

FIGURA 5.66

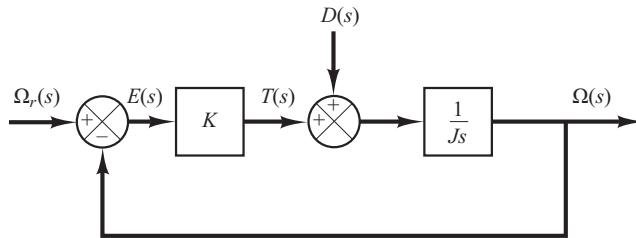
Sistema de controle.



- A.5.23** O diagrama de blocos da Figura 5.67 mostra um sistema de controle de velocidade no qual o elemento de saída do sistema é submetido a um distúrbio de torque. No diagrama, $\omega_r(s)$, $\omega(s)$, $T(s)$ e $D(s)$ são as transformadas de Laplace da velocidade de referência, da velocidade de saída, do torque de excitação e do distúrbio de torque, respectivamente. Na ausência de um distúrbio de torque, a velocidade de saída é igual à velocidade de referência.

FIGURA 5.67

Diagrama de blocos de um sistema de controle de velocidade.



Analise a resposta desse sistema a um degrau unitário do torque de distúrbio. Suponha que a entrada de referência seja zero ou $\omega_r(s) = 0$.

Solução. A Figura 5.68 é um diagrama de blocos convenientemente modificado para essa análise. A função de transferência de malha fechada é:

$$\frac{\Omega_D(s)}{D(s)} = \frac{1}{Js + K}$$

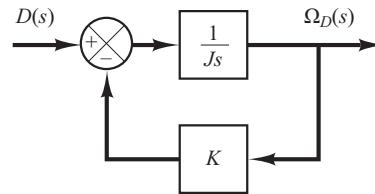
onde $\omega_D(s)$ é a transformada de Laplace da velocidade de saída causada pelo torque de distúrbio. Para um torque de distúrbio em degrau unitário, a velocidade de saída em regime permanente é:

$$\begin{aligned}\omega_D(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s\Omega_D(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{Js + K} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{K}\end{aligned}$$

A partir dessa análise, concluímos que, se um distúrbio de torque em degrau for aplicado ao elemento de saída do sistema, resultará em um erro de velocidade, de modo que o torque resultante do motor cancelará exatamente o distúrbio de torque. Para desenvolver esse torque do motor, é necessário que haja o erro na velocidade, de modo que resulte em um torque não nulo. (A discussão continua no Problema A.5.24.)

FIGURA 5.68

Diagrama de blocos do sistema de controle de velocidade da Figura 5.67, quando $\omega_r(s) = 0$.



- A.5.24** No sistema considerado no Problema A.5.23, deseja-se eliminar, tanto quanto possível, os erros de velocidade causados por distúrbios de torque.

É possível cancelar o efeito de um distúrbio de torque em regime permanente, de tal modo que um distúrbio de torque constante aplicado ao elemento de saída não cause alteração da velocidade em regime permanente?

Solução. Suponha que escolhamos um controlador conveniente, cuja função de transferência é $G_c(s)$, como mostra a Figura 5.69. Então, na ausência da entrada de referência, a função de transferência de malha fechada entre a velocidade de saída $\omega_D(s)$ e o distúrbio de torque $D(s)$ é:

$$\begin{aligned}\frac{\Omega_D(s)}{D(s)} &= \frac{\frac{1}{Js}}{1 + \frac{1}{Js}G_c(s)} \\ &= \frac{1}{Js + G_c(s)}\end{aligned}$$

A velocidade de saída em regime permanente em virtude de um distúrbio de torque em degrau unitário é:

$$\begin{aligned}\omega_D(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s\Omega_D(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{Js + G_c(s)} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{G_c(0)}\end{aligned}$$

Para satisfazer a condição

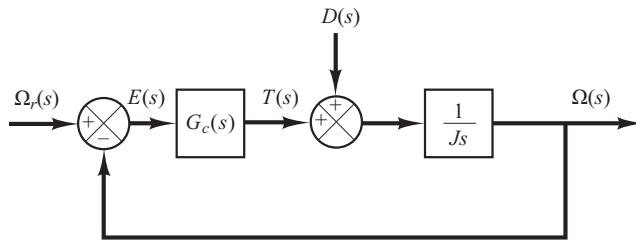
$$\omega_D(\infty) = 0$$

devemos optar por $G_c(0) = \infty$. Isso pode ser realizado se escolhermos

$$G_c(s) = \frac{K}{s}$$

FIGURA 5.69

Diagrama de blocos de um sistema de controle de velocidade.



A ação de controle integral continuará a corrigir o erro até que ele se anule. Esse controlador, entretanto, apresenta um problema de estabilidade, porque a equação característica mostra duas raízes imaginárias.

Um método de estabilização para esse sistema é adicionar um modo proporcional ao controlador, ou seja, escolher

$$G_c(s) = K_p + \frac{K}{s}$$

Com esse controlador, o diagrama de blocos da Figura 5.69, na ausência da entrada de referência, pode ser modificado para o da Figura 5.70. A função de transferência de malha fechada $\omega_D(s)/D(s)$ torna-se:

$$\frac{\Omega_D(s)}{D(s)} = \frac{s}{Js^2 + K_p s + K}$$

Para um torque de distúrbio em degrau unitário, a velocidade de saída em regime permanente é:

$$\omega_D(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Omega_D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{Js^2 + K_p s + K} \frac{1}{s} = 0$$

Então, vemos que o controlador proporcional-integral elimina o erro de velocidade em regime permanente.

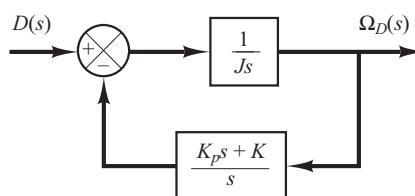
O uso da ação de controle integral aumenta a ordem do sistema em uma unidade. (Isso tende a produzir uma resposta oscilatória.)

No presente sistema, um torque de distúrbio em degrau causará um erro transitório na velocidade de saída, mas o erro se tornará nulo em regime permanente. O integrador produz uma saída não nula com erro nulo. (A saída não nula do integrador produz um torque no motor que cancela exatamente o torque de distúrbio.)

Note que, mesmo que o sistema tenha um integrador na planta (por exemplo, um integrador na função de transferência da planta), isso não elimina o erro estacionário em razão de um torque de distúrbio em degrau. Para eliminá-lo, devemos ter um integrador antes do ponto de entrada do torque de distúrbio.

FIGURA 5.70

Diagrama de blocos do sistema de controle de velocidade da Figura 5.69, quando $G_c(s) = K_p + (K/s)$ e $\Omega_r(s) = 0$.



- A.5.25** Considere o sistema mostrado na Figura 5.71(a). O erro estacionário a uma entrada em rampa unitária é $e_{ss}=2\zeta/\omega_n$. Mostre que esse erro pode ser eliminado, se a entrada no sistema for feita por meio de um filtro proporcional-derivativo, como pode ser visto na Figura 5.71(b), e o valor de k for estabelecido adequadamente. Note que o erro $e(t)$ é dado por $r(t) - c(t)$.

Solução. A função de transferência de malha fechada do sistema mostrado na Figura 5.71(b) é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(1+ks)\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Então,

$$R(s) - C(s) = \left(\frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s - \omega_n^2 k s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) R(s)$$

Se a entrada for uma rampa unitária, então o erro estacionário será:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= r(\infty) - c(\infty) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s - \omega_n^2 k s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{2\zeta\omega_n - \omega_n^2 k}{\omega_n^2} \end{aligned}$$

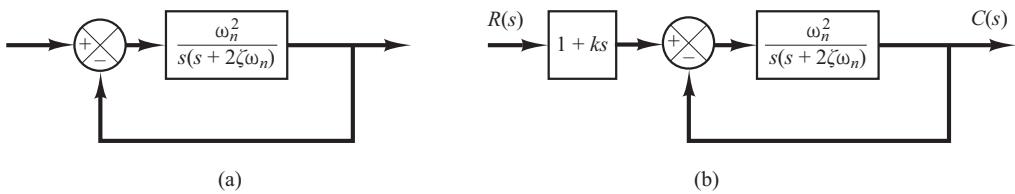
Portanto, se k é escolhido como

$$k = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

pode-se fazer que o erro estacionário, para seguir a entrada em rampa, seja zero. Note que, se existir variação nos valores de ζ e/ou ω_n causada por mudanças ambientais ou de envelhecimento dos componentes, pode-se ter como resultado um erro estacionário não nulo.

FIGURA 5.71

- (a) Sistema de controle;
(b) sistema de controle com filtro de entrada.



- A.5.26** Considere o sistema de controle estável com realimentação unitária, com função de transferência no ramo direto $G(s)$. Suponha que a função de transferência de malha fechada possa ser escrita como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{(T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots (T_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} \quad (m \leq n)$$

Mostre que

$$\int_0^\infty e(t) dt = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

onde $e(t) = r(t) - c(t)$ é o erro na resposta ao degrau unitário. Mostre também que

$$\frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s G(s)} = (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) - (T_a + T_b + \cdots + T_m)$$

Solução. Vamos definir

$$(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1) = P(s)$$

e

$$(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_n s + 1) = Q(s)$$

Então

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

e

$$E(s) = \frac{Q(s) - P(s)}{Q(s)} R(s)$$

Para uma entrada em degrau unitário, $R(s) = 1/s$ e

$$E(s) = \frac{Q(s) - P(s)}{sQ(s)}$$

Como o sistema é estável, $\int_0^\infty e(t)dt$ converge para um valor constante. Observando que

$$\int_0^\infty e(t)dt = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{E(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} E(s)$$

temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e(t)dt &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Q(s) - P(s)}{sQ(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Q'(s) - P'(s)}{Q(s) + sQ'(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} [Q'(s) - P'(s)] \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{s \rightarrow 0} P'(s) = T_a + T_b + \dots + T_m$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} Q'(s) = T_1 + T_2 + \dots + T_n$$

temos

$$\int_0^\infty e(t)dt = (T_1 + T_2 + \dots + T_n) - (T_a + T_b + \dots + T_m)$$

Para uma entrada em degrau unitário $r(t)$, sendo

$$\int_0^\infty e(t)dt = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{1}{K_v}$$

temos:

$$\frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = (T_1 + T_2 + \dots + T_n) - (T_a + T_b + \dots + T_m)$$

Observe que os zeros no semiplano esquerdo (isto é, T_a, T_b, \dots, T_m positivos) melhorarão K_v . Polos próximos à origem ocasionam baixas constantes de erro de velocidade, a menos que existam zeros nas proximidades.

| Problemas

- B.5.1** Um termômetro requer 1 minuto para indicar 98% da resposta a uma entrada em degrau. Supondo que o termômetro seja um sistema de primeira ordem, determine a constante de tempo.

Se o termômetro for imerso em um banho, cuja temperatura muda linearmente a uma taxa de 10°/min, qual será o erro apresentado pelo termômetro?

- B.5.2** Considere a resposta ao degrau unitário do sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência de malha aberta seja:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Obtenha o tempo de subida, o tempo de pico, o máximo sobressinal e o tempo de acomodação.

- B.5.3** Considere o sistema de malha fechada dado por:

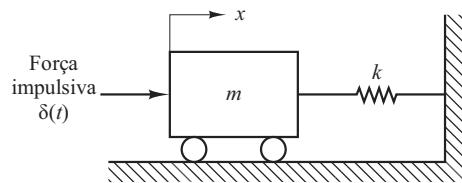
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Determine os valores de ζ e de ω_n de modo que o sistema responda a uma entrada em degrau com aproximadamente 5% de sobressinal e com um tempo de acomodação de 2 segundos. (Utilize o critério de 2%).

- B.5.4** Considere o sistema mostrado na Figura 5.72. O sistema está inicialmente em repouso. Suponha que o carro seja posto em movimento por uma força impulsiva de valor unitário. O sistema pode ser parado por outra força impulsiva?

FIGURA 5.72

Sistema
mecânico.



- B.5.5** Obtenha a resposta ao impulso unitário e a resposta ao degrau unitário de um sistema com realimentação unitária cuja função de transferência de malha aberta seja:

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2}$$

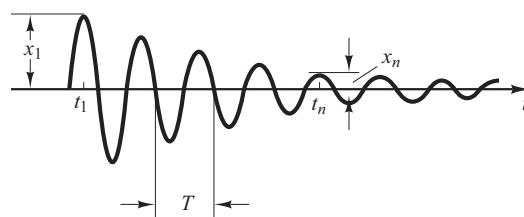
- B.5.6** Sabe-se que a função de transferência de um sistema oscilatório tem a seguinte forma:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Suponha que haja um registro da oscilação com amortecimento, como mostra a Figura 5.73. Determine o coeficiente de amortecimento ζ do sistema a partir do gráfico.

FIGURA 5.73

Oscilação
decrescente.

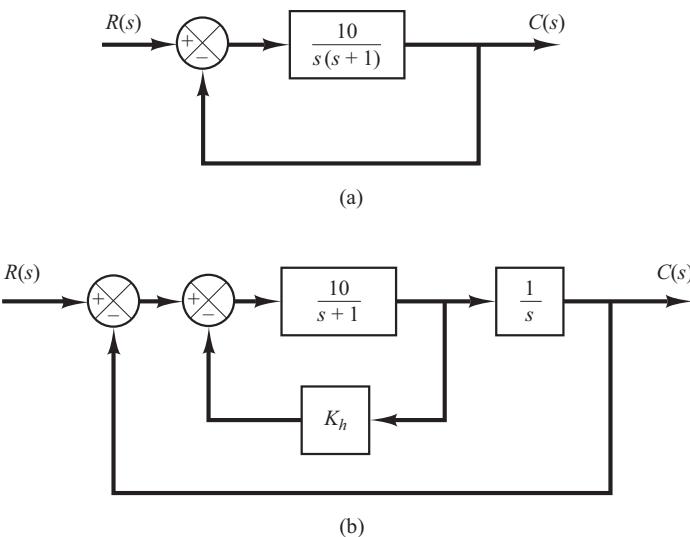


- B.5.7** Considere o sistema mostrado na Figura 5.74(a). O coeficiente de amortecimento do sistema é 0,158 e a frequência natural não amortecida é 3,16 rad/s. Para melhorar a estabilidade relativa, utilizamos a realimentação tacométrica. A Figura 5.74(b) mostra esse sistema com o tacômetro no ramo de realimentação.

Determine o valor de K_h de modo que o coeficiente de amortecimento seja 0,5. Desenhe as curvas de resposta ao degrau unitário do sistema original e do sistema com realimentação tacométrica. Desenhe também as curvas de erro *versus* tempo para a resposta à rampa unitária de ambos os sistemas.

FIGURA 5.74

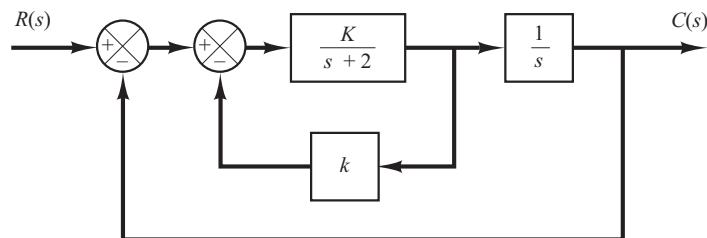
- (a) Sistema de controle;
(b) sistema de controle com realimentação tacométrica.



- B.5.8** Considerando o sistema apresentado na Figura 5.75, determine os valores de K e k , de modo que o sistema tenha um coeficiente de amortecimento ζ igual a 0,7 e uma frequência natural não amortecida ω_n de 4 rad/s.

FIGURA 5.75

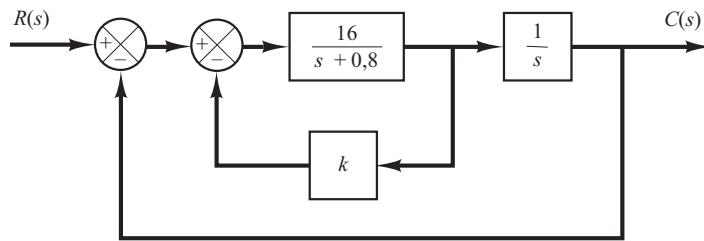
- Sistema de malha fechada.



- B.5.9** Considere o sistema mostrado na Figura 5.76. Determine o valor de k de modo que o coeficiente de amortecimento ζ seja 0,5. Então, obtenha o tempo de subida t_r , o tempo de pico t_p , o máximo sobressinal M_p e o tempo de acomodação t_s na resposta ao degrau unitário.

FIGURA 5.76

Diagrama de blocos de um sistema.



- B.5.10** Utilizando o MATLAB, obtenha a resposta ao degrau unitário, à rampa unitária e ao impulso unitário do seguinte sistema:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

onde $R(s)$ e $C(s)$ são as transformadas de Laplace da entrada $r(t)$ e da saída $c(t)$, respectivamente.

- B.5.11** Utilizando o MATLAB, obtenha a resposta ao degrau unitário, à rampa unitária e ao impulso unitário do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0,5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

onde u é a entrada e y , a saída.

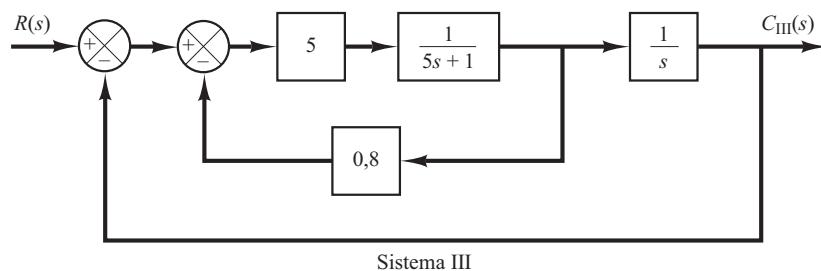
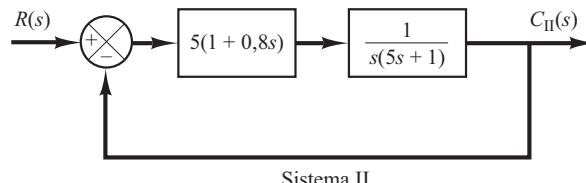
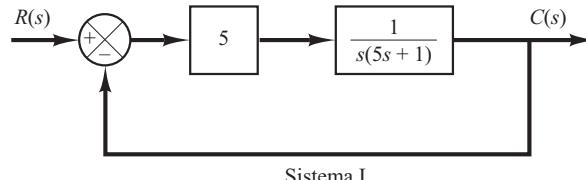
- B.5.12** Obtenha o tempo de subida, o tempo de pico, o máximo sobressinal e o tempo de acomodação, na resposta ao degrau unitário, do sistema de malha fechada dado a seguir, tanto analítica como computacionalmente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{36}{s^2 + 2s + 36}$$

- B.5.13** A Figura 5.77 mostra três sistemas. O sistema I é um servossistema posicionador. O sistema II é um servossistema posicionador com ação de controle PD. O sistema III é um servossistema posicionador com realimentação de velocidade. Compare as respostas ao degrau unitário, ao impulso unitário e à rampa unitária dos três sistemas. Qual dos sistemas é melhor com respeito à velocidade de resposta e ao máximo sobressinal na resposta ao degrau?

FIGURA 5.77

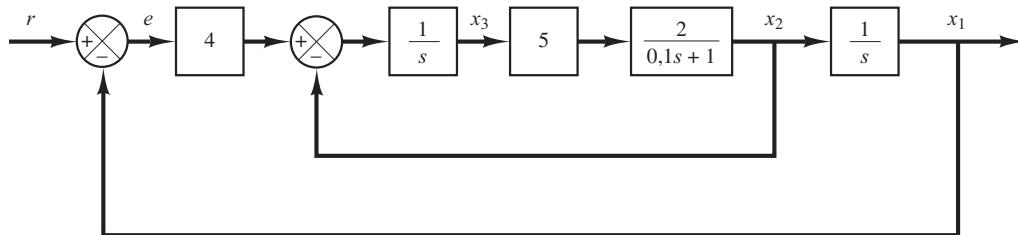
Servossistema posicionador (Sistema I), servossistema posicionador com ação de controle PD (Sistema II) e servossistema posicionador com realimentação de velocidade (Sistema III).



- B.5.14** Considere o sistema de controle de posição mostrado na Figura 5.78. Escreva um programa em MATLAB para obter a resposta do sistema ao degrau unitário, bem como a resposta à rampa unitária. Desenhe as curvas $x_1(t)$ versus t , $x_2(t)$ versus t , $x_3(t)$ versus t e $e(t)$ versus t [onde $e(t) = r(t) - x_1(t)$] tanto para a resposta ao degrau unitário como para a resposta à rampa unitária.

FIGURA 5.78

Sistema de controle de posição.



- B.5.15** Utilizando o MATLAB, obtenha a curva de resposta ao degrau unitário do sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência de malha aberta seja

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+4)}$$

Utilizando o MATLAB, obtenha também o tempo de subida, o tempo de pico, o máximo sobre-sinal e o tempo de acomodação na curva de resposta ao degrau unitário.

B.5.16 Considere o sistema de malha fechada definido por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2\zeta s + 1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

onde $\zeta = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ e $1,0$. Utilizando o MATLAB, desenhe um gráfico bidimensional das curvas de resposta ao impulso unitário. Desenhe também um gráfico tridimensional dessas curvas de resposta.

B.5.17 Considere o sistema de segunda ordem definido por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s + 1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$

onde $\zeta = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ e $1,0$. Desenhe um gráfico tridimensional das curvas de resposta ao degrau unitário.

B.5.18 Obtenha a resposta à rampa unitária do sistema definido por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

onde u é a entrada em rampa unitária. Utilize o comando Isim para obter a resposta.

B.5.19 Considere o sistema dado pela equação diferencial

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0, \quad y(0) = 0,1, \quad \dot{y}(0) = 0,05$$

Usando o MATLAB, obtenha a resposta $y(t)$, sujeita à condição inicial indicada.

B.5.20 Determine o intervalo de valores de K para a estabilidade do sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência de malha aberta seja:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

B.5.21 Considere a seguinte equação característica:

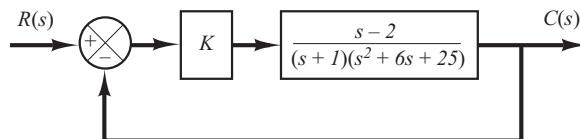
$$s^4 + 2s^3 + (4 + K)s^2 + 9s + 25 = 0$$

Utilizando o critério de estabilidade de Routh, determine o intervalo de K para a estabilidade.

B.5.22 Considere o sistema de malha fechada mostrado na Figura 5.79. Determine o intervalo de valores de K compatíveis com a estabilidade do sistema. Suponha que $K > 0$.

FIGURA 5.79

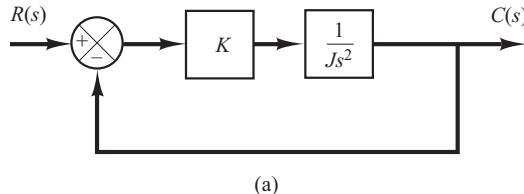
Sistema de malha fechada.



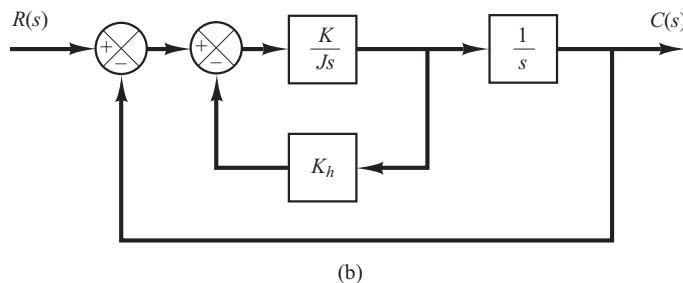
B.5.23 Considere o sistema de controle de posição de um satélite mostrado na Figura 5.80(a). A saída do sistema apresenta oscilações continuadas não desejáveis. Esse sistema pode ser estabilizado pelo uso de realimentação tacométrica, como mostra a Figura 5.80(b). Se $K/J = 4$, que valor de K_h resultará em um coeficiente de amortecimento igual a 0,6?

FIGURA 5.80

(a) Sistema instável de controle de atitude de um satélite; (b) sistema estabilizado.



(a)

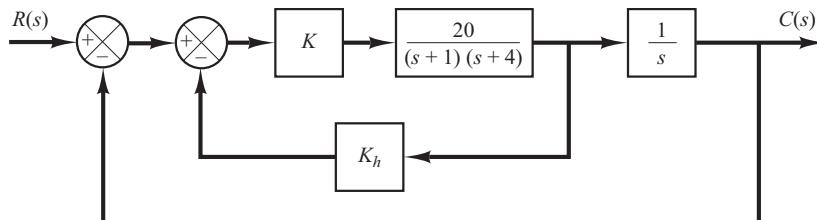


(b)

- B.5.24** Considere o servossistema com realimentação tacométrica mostrado na Figura 5.81. Determine os intervalos de valores de K e de K_h que tornam o sistema estável. (Note que K_h deve ser positivo.)

FIGURA 5.81

Servossistema com realimentação tacométrica.



- B.5.25** Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

onde a matriz \mathbf{A} é dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b_3 & 0 & 1 \\ 0 & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix}$$

(\mathbf{A} é chamada matriz de Schwarz.) Mostre que a primeira coluna da tabela de Routh da equação característica $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ consiste em 1, b_1 , b_2 e $b_1 b_3$.

- B.5.26** Considere um sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência de malha fechada seja:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Ks + b}{s^2 + as + b}$$

Determine a função de transferência de malha aberta $G(s)$. Mostre que o erro estacionário na resposta à rampa unitária é dado por:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{a - K}{b}$$

- B.5.27** Considere um sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência de malha aberta seja:

$$G(s) = \frac{K}{s(Js + B)}$$

Discuta os efeitos que as variações de K e de B produzem sobre o erro estacionário da resposta à entrada em rampa unitária. Esboce curvas típicas de resposta à rampa unitária para valores pequenos, médios e elevados de K , supondo que B seja constante.

- B.5.28** Se o ramo direto de um sistema de controle contiver pelo menos um integrador, então a saída continua variando enquanto o erro estiver presente. Ela deixa de variar somente quando o erro for precisamente zero. Se um distúrbio externo entra no sistema, é conveniente que haja um elemento integrador entre o elemento medidor de erro e o ponto de entrada do distúrbio, de modo que o efeito do distúrbio externo possa ser anulado em regime permanente.

Mostre que, se o distúrbio for uma função rampa, então o erro estacionário causado por esse distúrbio em rampa somente poderá ser eliminado se houver dois integradores antes do ponto de entrada do distúrbio.