

# Mecânica dos Sólidos

# Carga axial

# Carga axial

Determinação da tensão normal em elementos carregados axialmente;

# Carga axial

Determinação da tensão normal em elementos carregados axialmente;  
Determinação das deformações em elementos carregados axialmente;

# Carga axial

Determinação da tensão normal em elementos carregados axialmente;  
Determinação das deformações em elementos carregados axialmente;  
Determinação das reações em problemas estaticamente indeterminados;

# Carga axial

- Determinação da tensão normal em elementos carregados axialmente;
- Determinação das deformações em elementos carregados axialmente;
- Determinação das reações em problemas estaticamente indeterminados;
- Efeitos da temperatura na determinação das tensões.

# Carga axial

Determinação da tensão normal em elementos carregados axialmente;  
Determinação das deformações em elementos carregados axialmente;  
Determinação das reações em problemas estaticamente indeterminados;  
Efeitos da temperatura na determinação das tensões.

# Carga axial

Determinação da tensão normal em elementos carregados axialmente;  
Determinação das deformações em elementos carregados axialmente;  
Determinação das reações em problemas estaticamente indeterminados;  
Efeitos da temperatura na determinação das tensões.



# Carga axial

Determinação da tensão normal em elementos carregados axialmente;  
Determinação das deformações em elementos carregados axialmente;  
Determinação das reações em problemas estaticamente indeterminados;  
Efeitos da temperatura na determinação das tensões.

# Carga axial

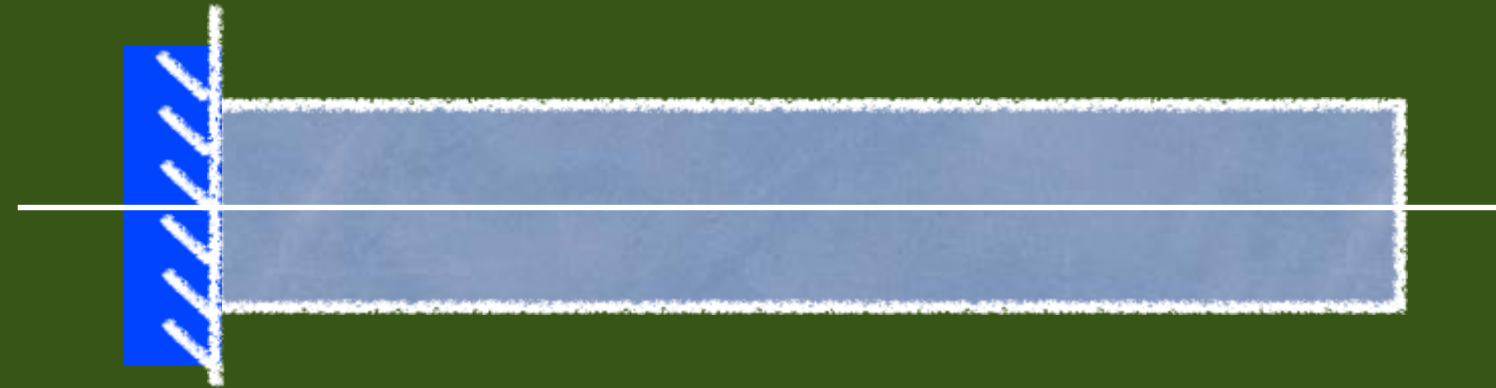
Determinação da tensão normal em elementos carregados axialmente;  
Determinação das deformações em elementos carregados axialmente;  
Determinação das reações em problemas estaticamente indeterminados;  
Efeitos da temperatura na determinação das tensões.

Princípio de Saint-Venant

# Carga axial

Determinação da tensão normal em elementos carregados axialmente;  
Determinação das deformações em elementos carregados axialmente;  
Determinação das reações em problemas estaticamente indeterminados;  
Efeitos da temperatura na determinação das tensões.

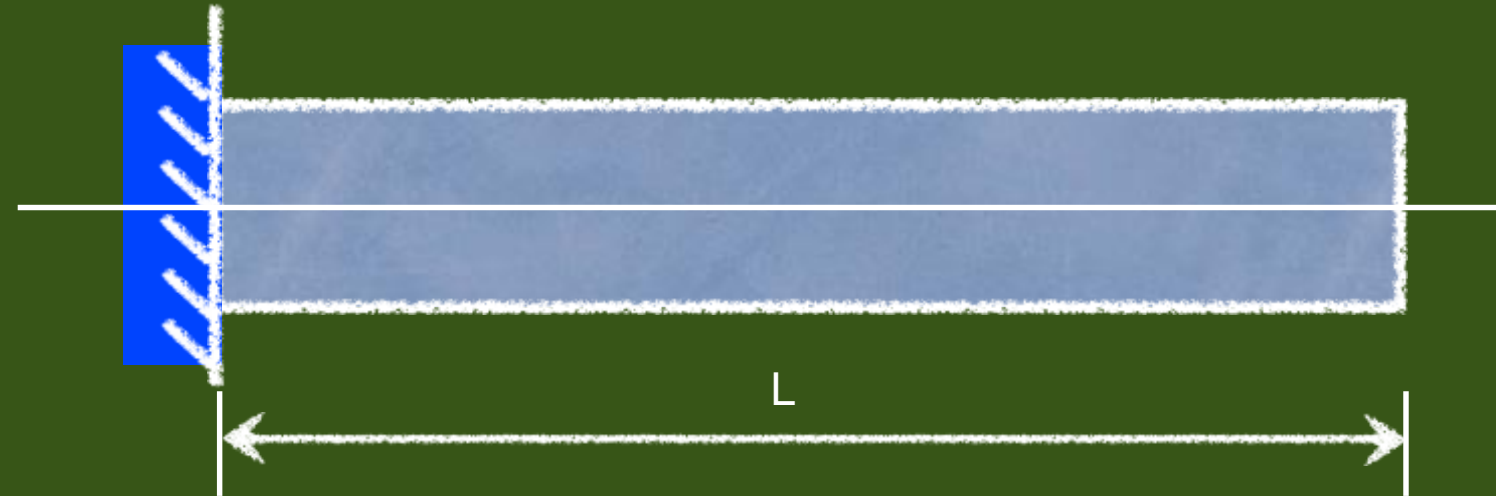
## Princípio de Saint-Venant



# Carga axial

Determinação da tensão normal em elementos carregados axialmente;  
Determinação das deformações em elementos carregados axialmente;  
Determinação das reações em problemas estaticamente indeterminados;  
Efeitos da temperatura na determinação das tensões.

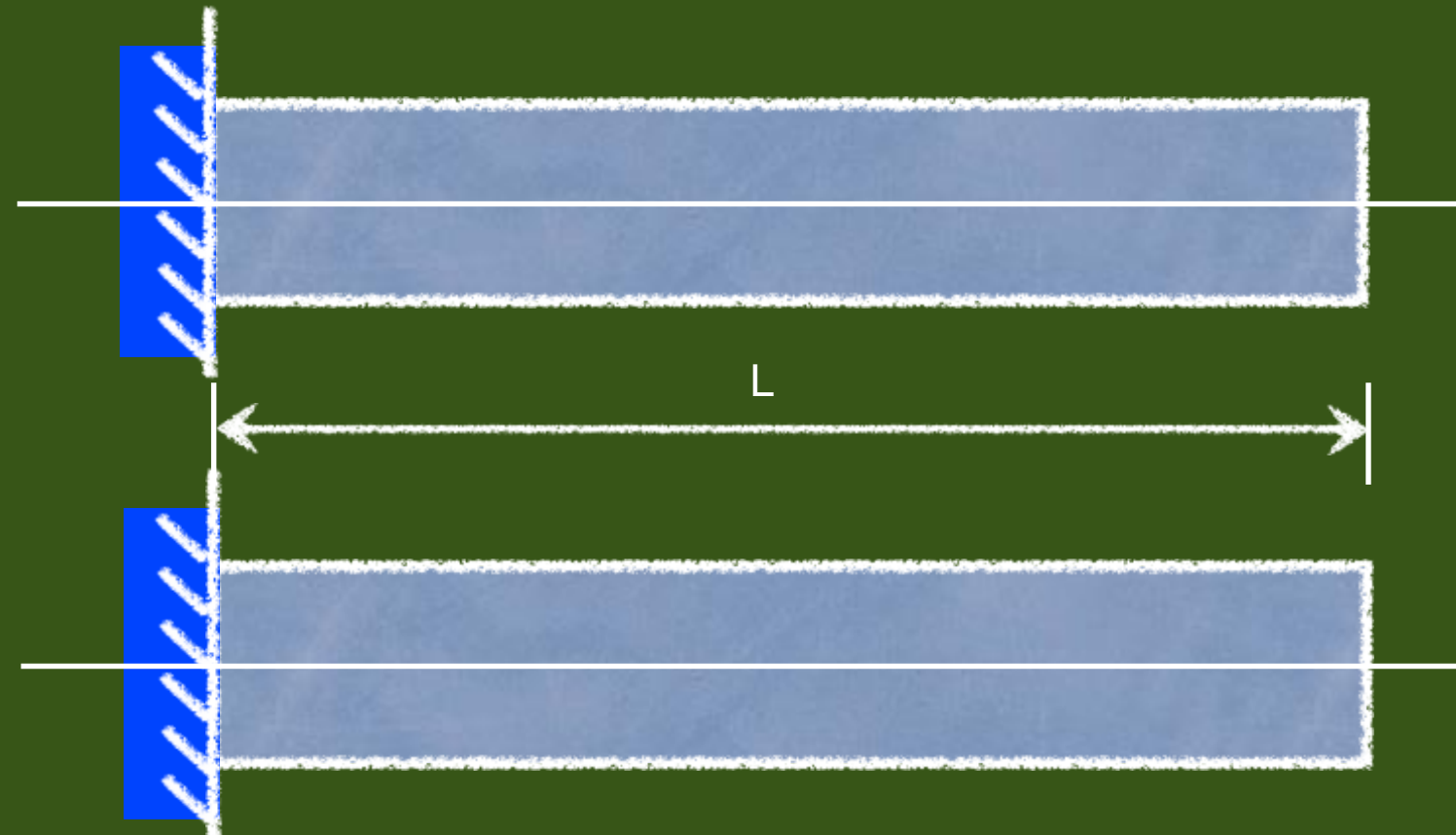
Princípio de Saint-Venant



# Carga axial

Determinação da tensão normal em elementos carregados axialmente;  
Determinação das deformações em elementos carregados axialmente;  
Determinação das reações em problemas estaticamente indeterminados;  
Efeitos da temperatura na determinação das tensões.

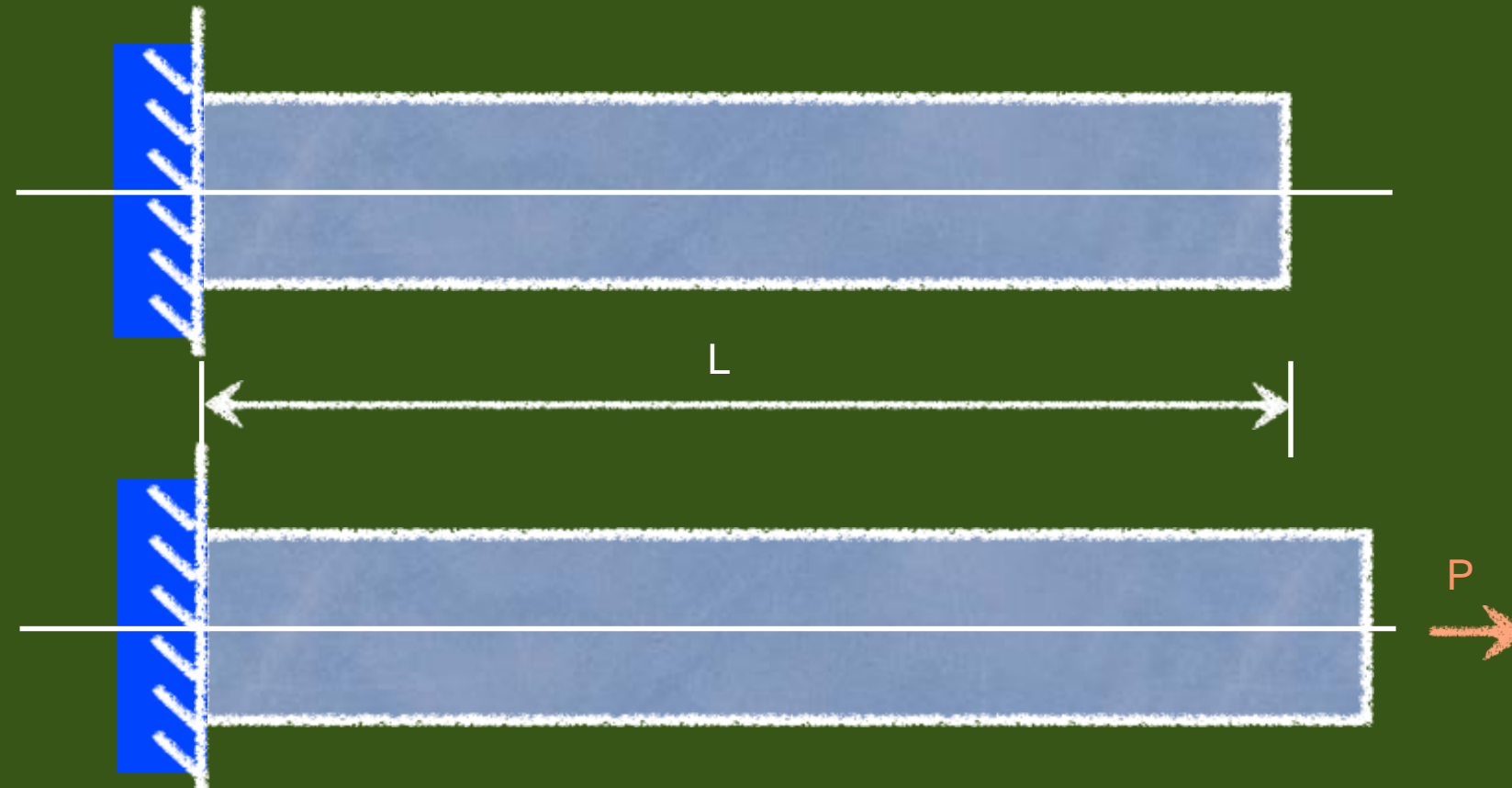
## Princípio de Saint-Venant



# Carga axial

Determinação da tensão normal em elementos carregados axialmente;  
Determinação das deformações em elementos carregados axialmente;  
Determinação das reações em problemas estaticamente indeterminados;  
Efeitos da temperatura na determinação das tensões.

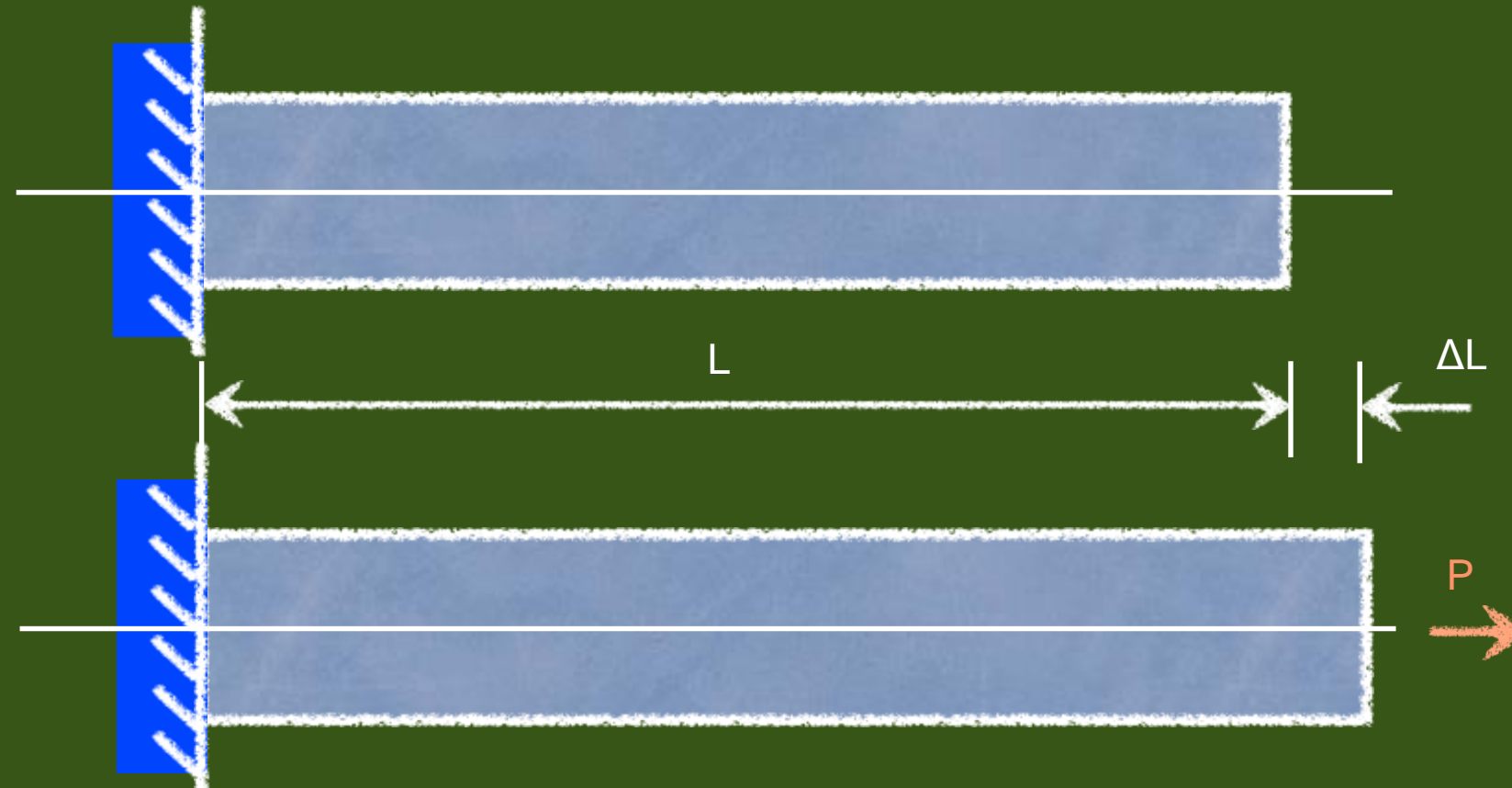
## Princípio de Saint-Venant



# Carga axial

Determinação da tensão normal em elementos carregados axialmente;  
Determinação das deformações em elementos carregados axialmente;  
Determinação das reações em problemas estaticamente indeterminados;  
Efeitos da temperatura na determinação das tensões.

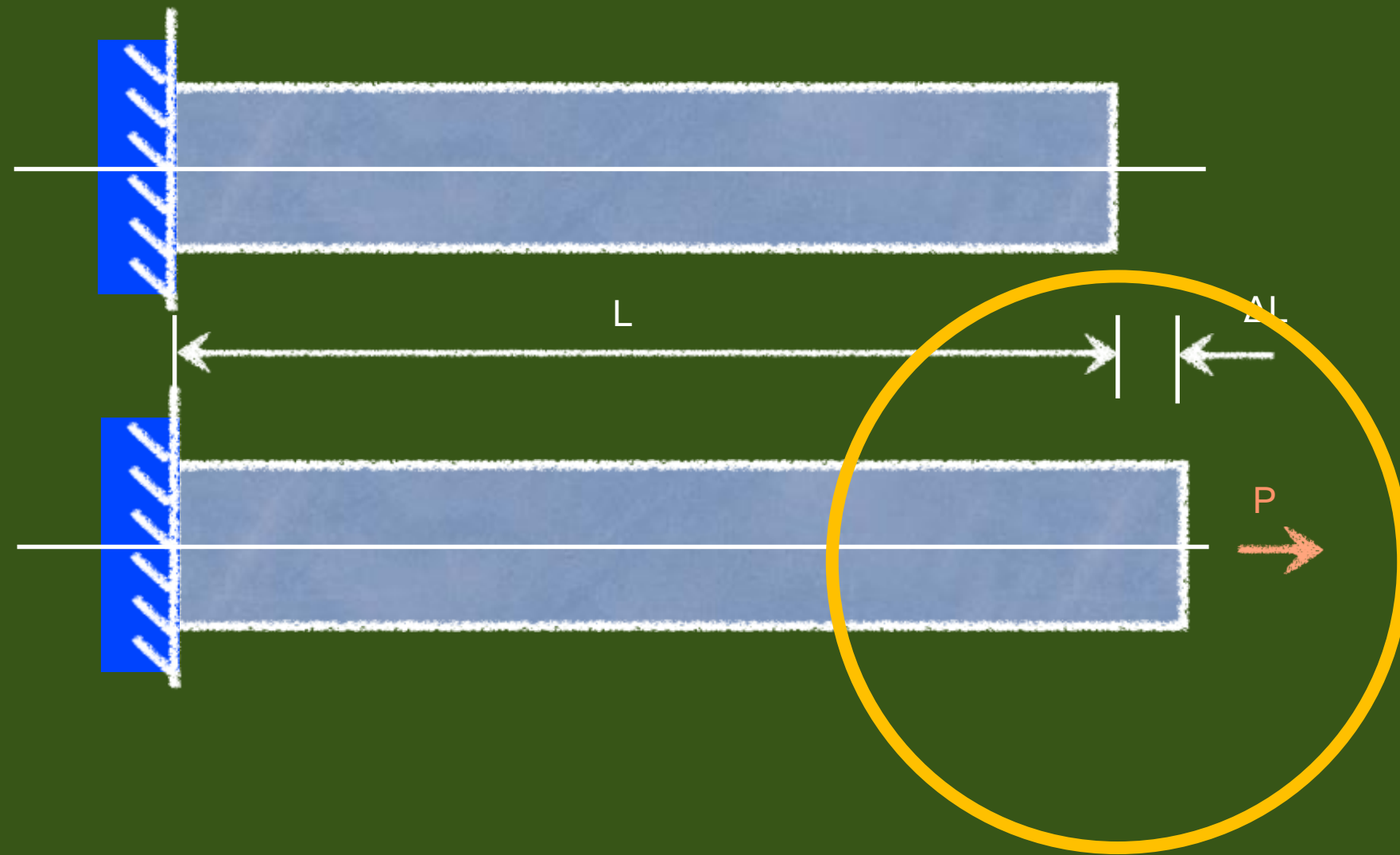
## Princípio de Saint-Venant



# Carga axial

Determinação da tensão normal em elementos carregados axialmente;  
Determinação das deformações em elementos carregados axialmente;  
Determinação das reações em problemas estaticamente indeterminados;  
Efeitos da temperatura na determinação das tensões.

## Princípio de Saint-Venant





# Carga axial

## Princípio de Saint-Venant



# Carga axial

Princípio de Saint-Venant



# Carga axial

## Princípio de Saint-Venant



# Carga axial

## Princípio de Saint-Venant



$$\overline{\sigma_x} = \frac{P}{A}$$



$\sigma_x$  max

# Carga axial

## Princípio de Saint-Venant



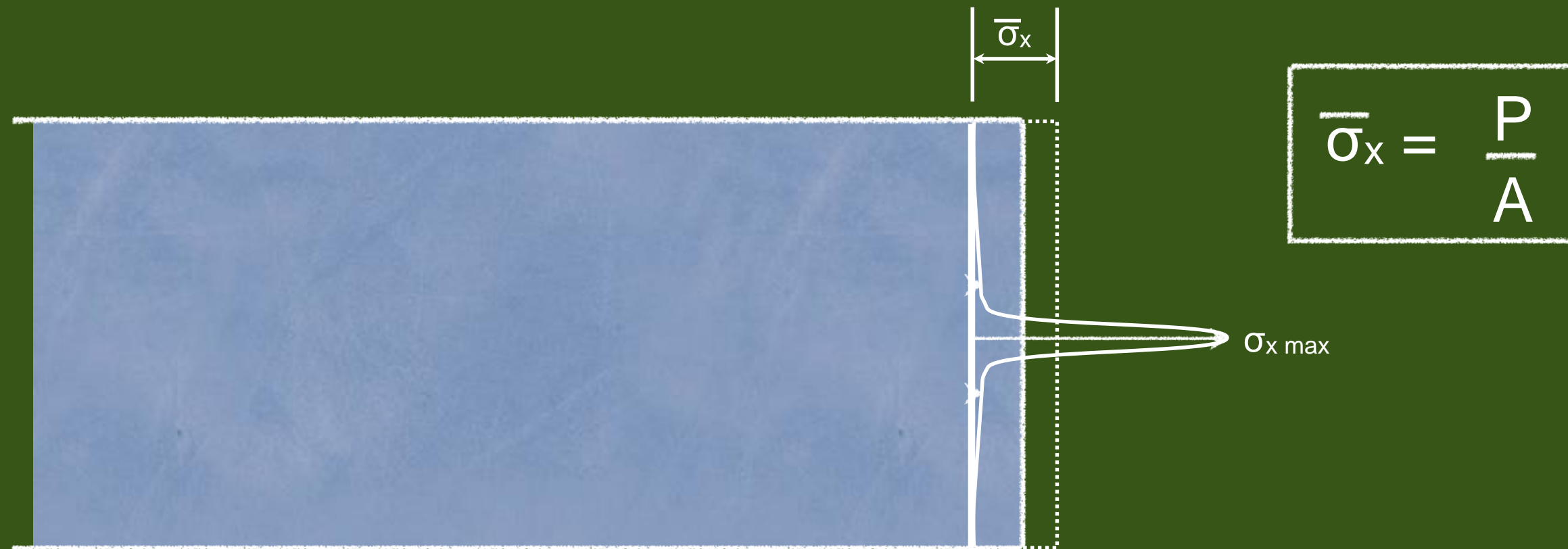
# Carga axial

## Princípio de Saint-Venant



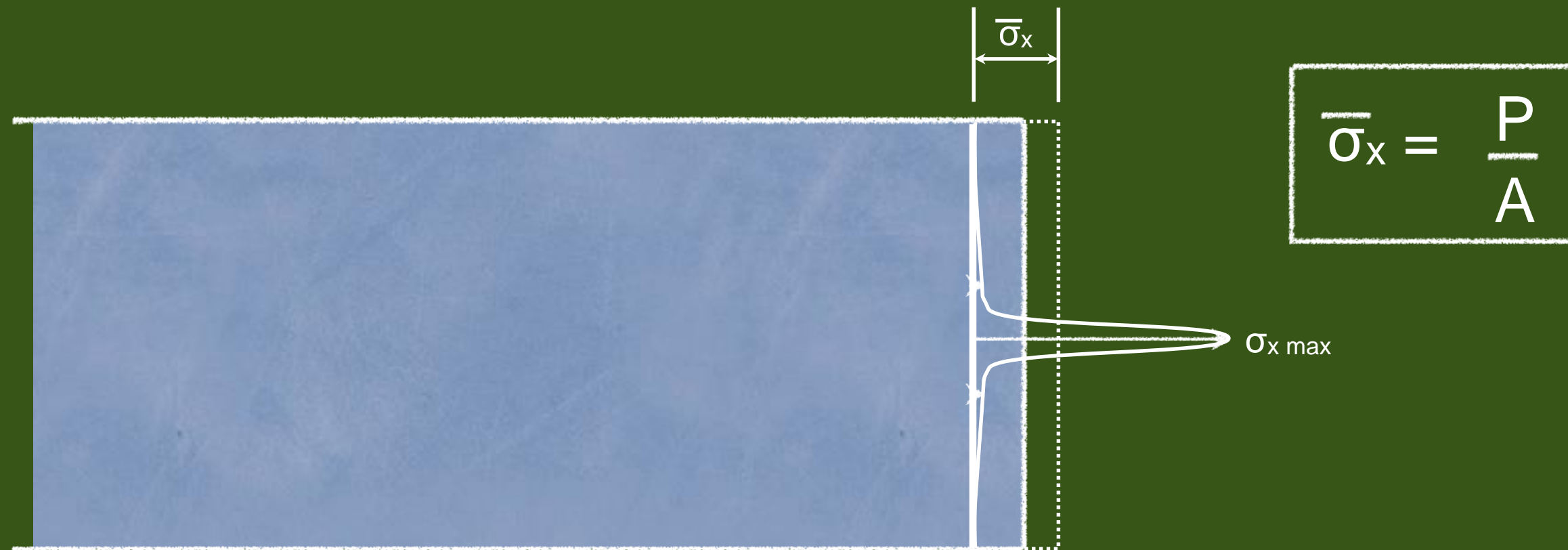
# Carga axial

## Princípio de Saint-Venant



# Carga axial

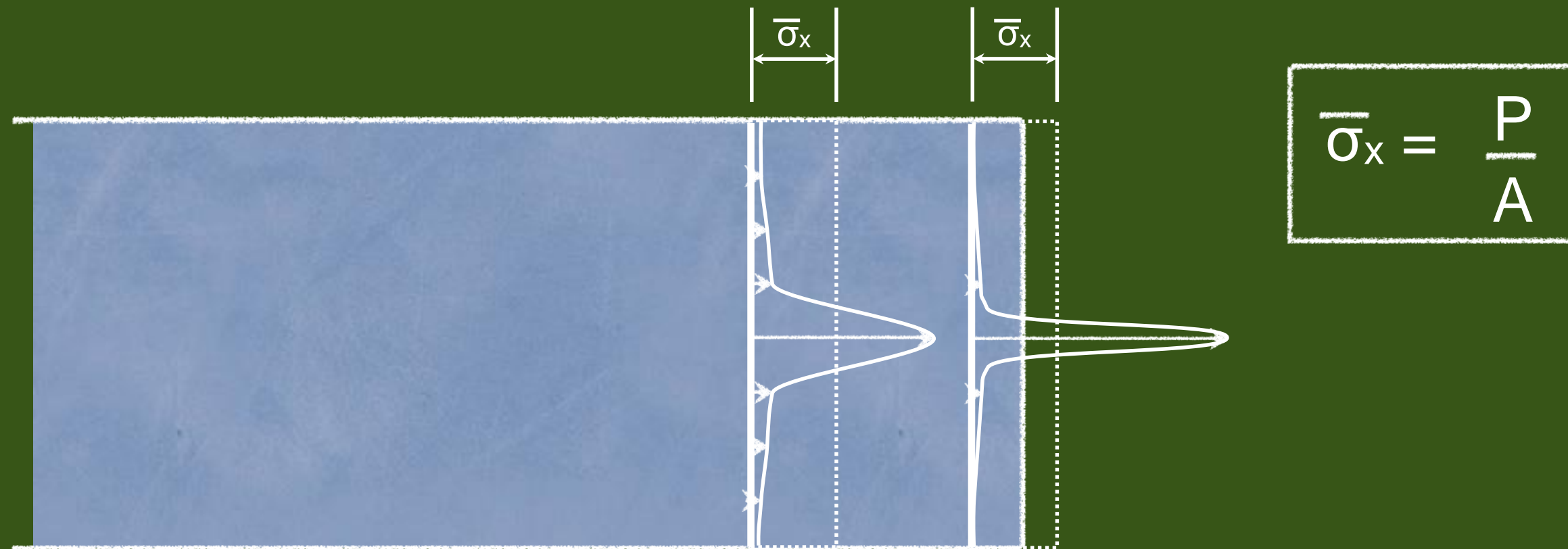
## Princípio de Saint-Venant





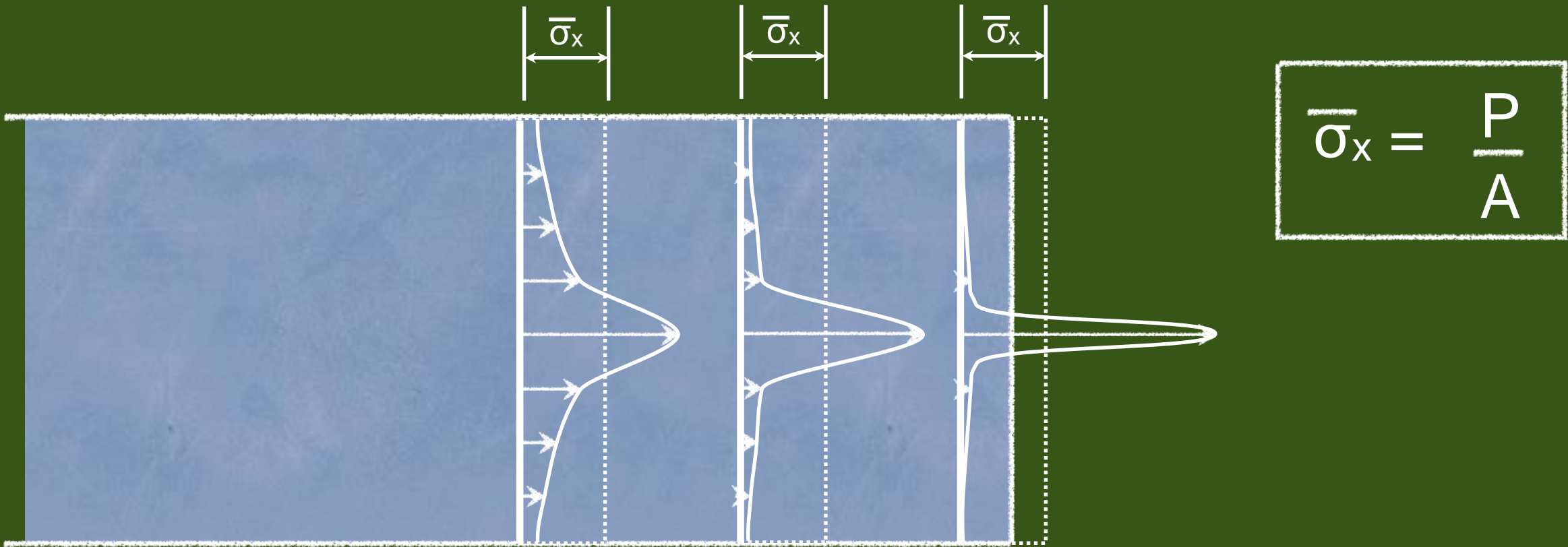
# Carga axial

## Princípio de Saint-Venant



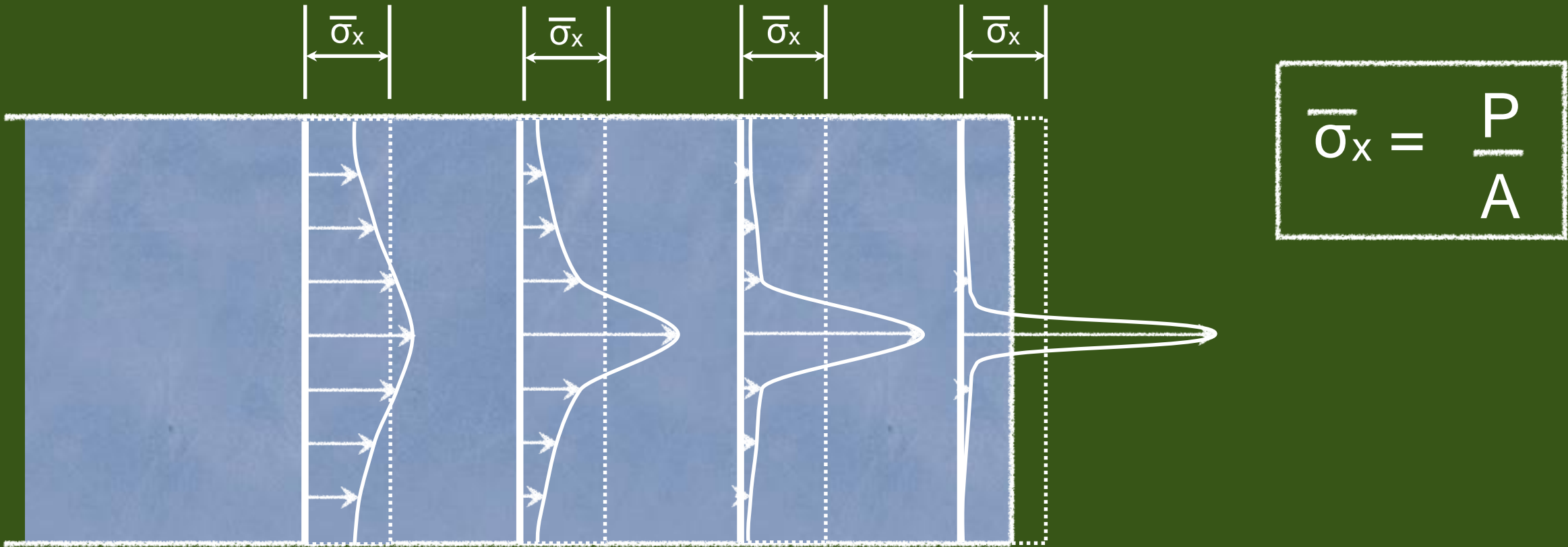
# Carga axial

Princípio de Saint-Venant



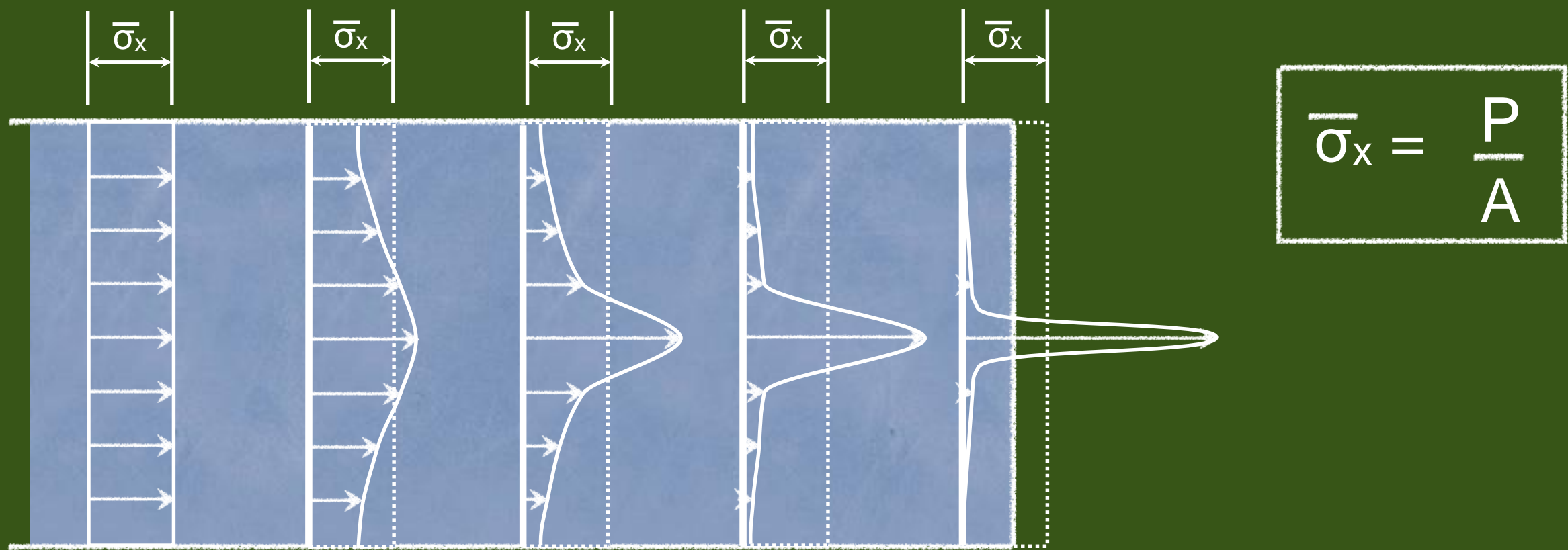
# Carga axial

Princípio de Saint-Venant



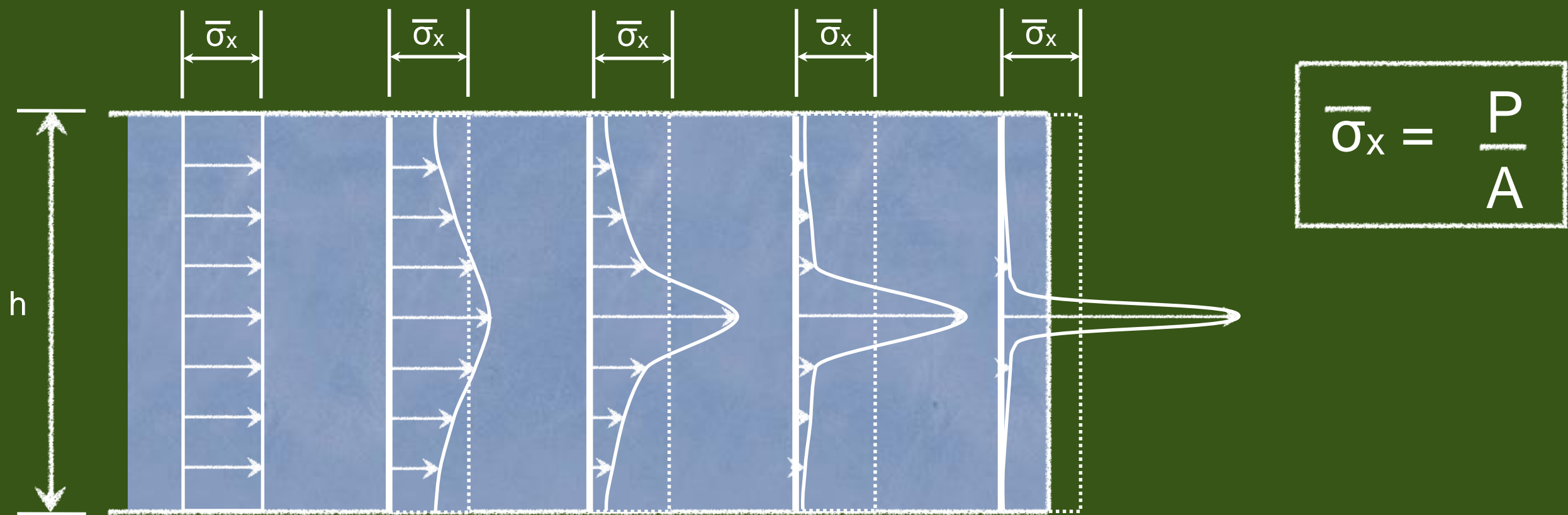
# Carga axial

Princípio de Saint-Venant



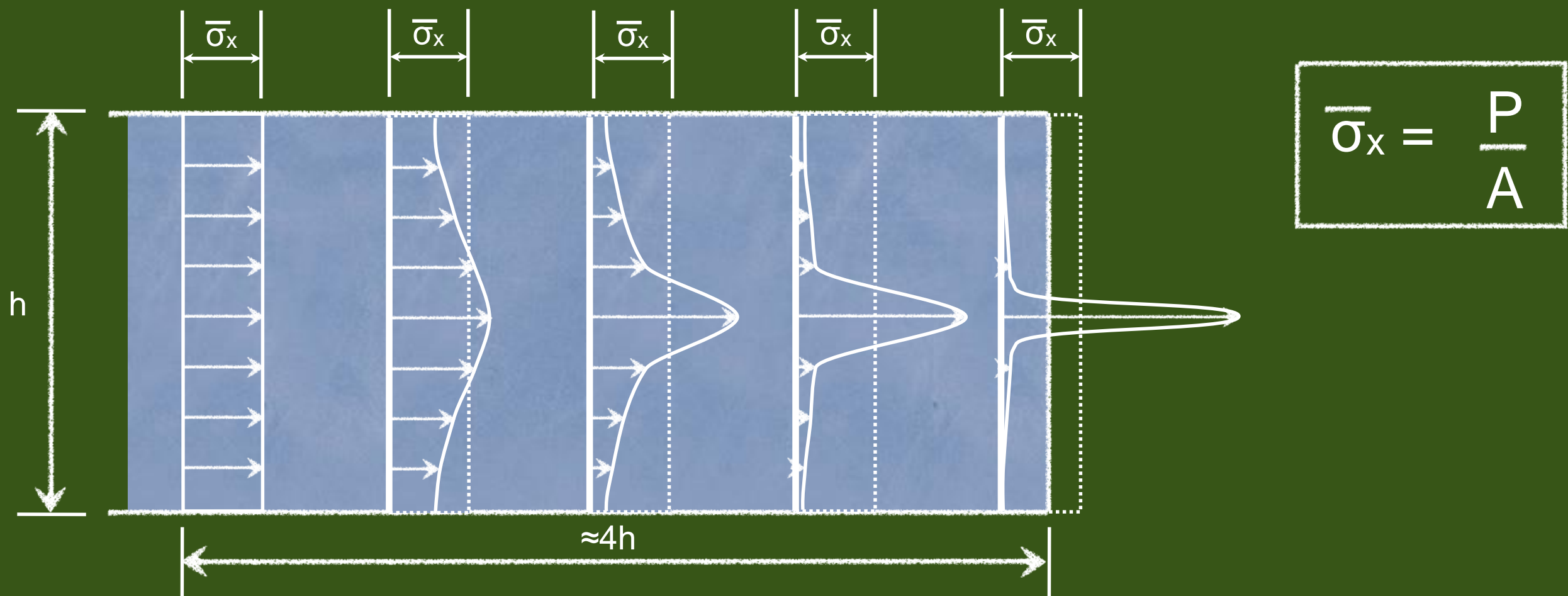
# Carga axial

Princípio de Saint-Venant



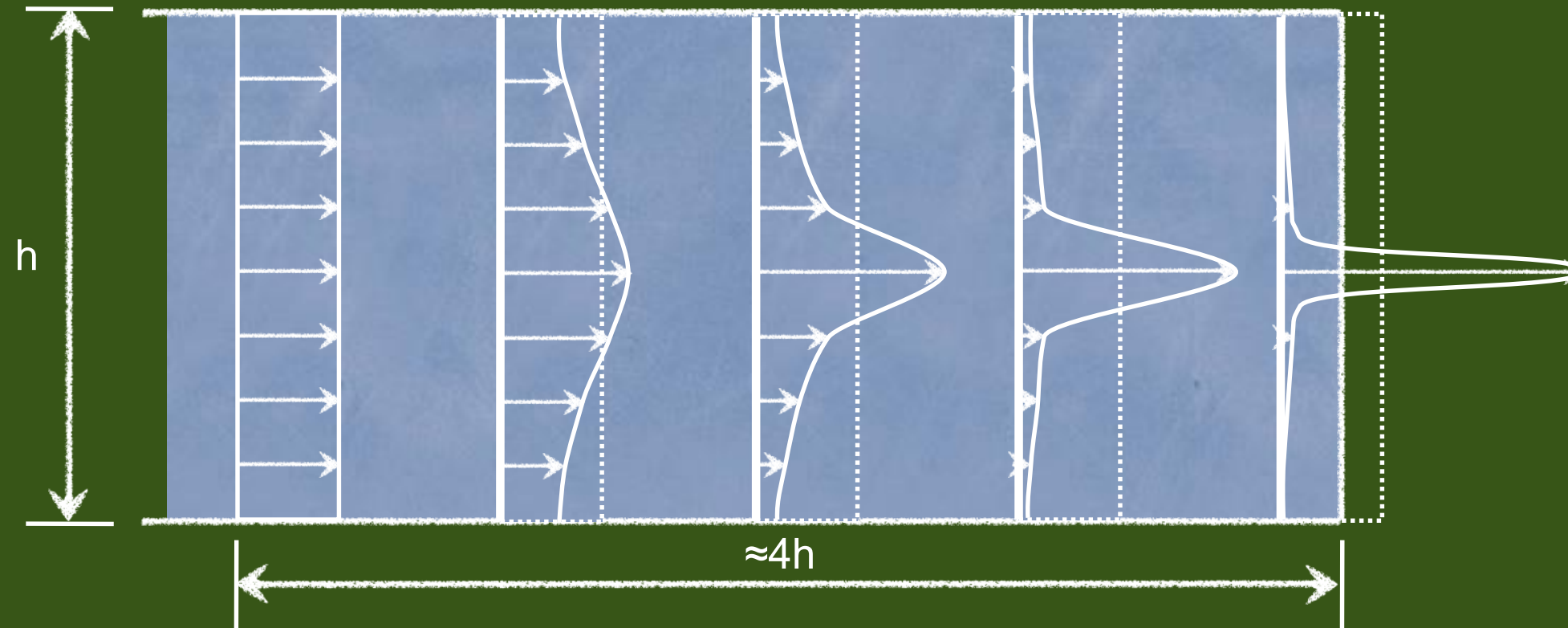
# Carga axial

## Princípio de Saint-Venant



# Carga axial

## Princípio de Saint-Venant

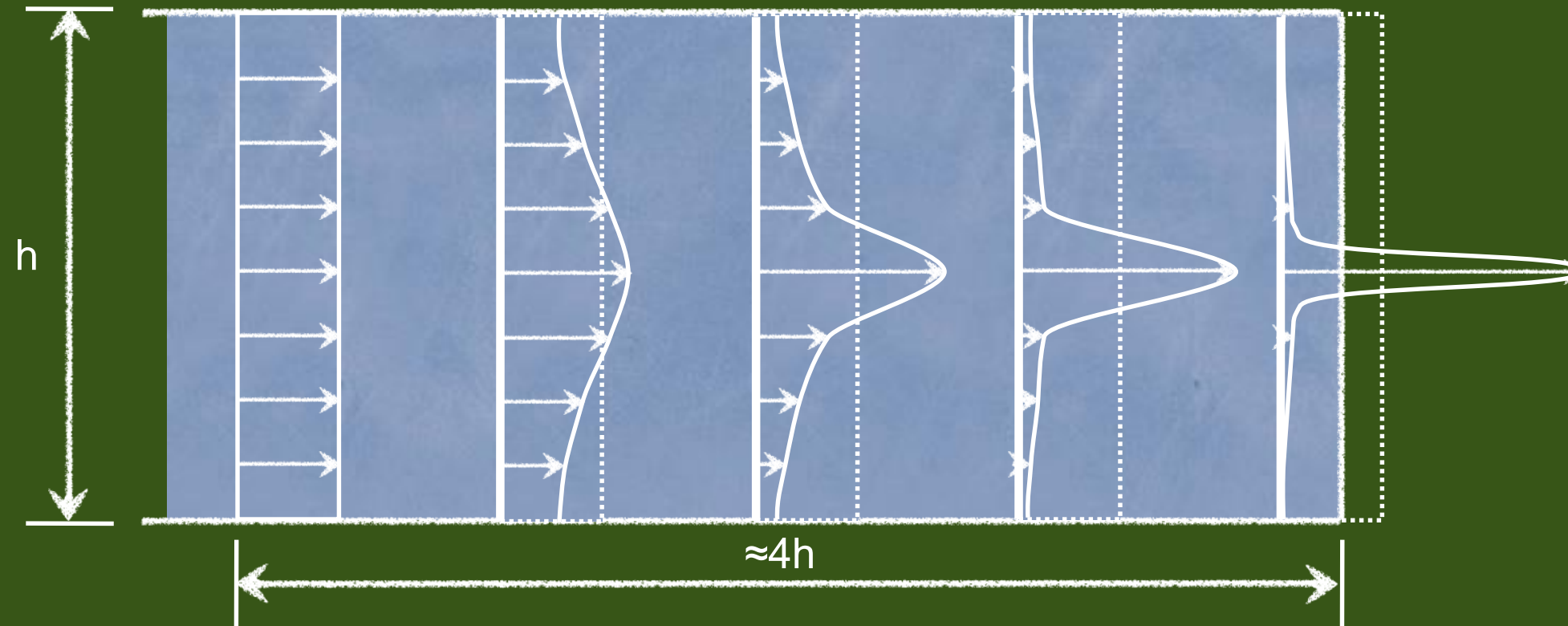


Uma distribuição de tensões relativamente complexa pode se desenvolver em regiões próximas ao ponto de aplicação da força.



# Carga axial

## Princípio de Saint-Venant



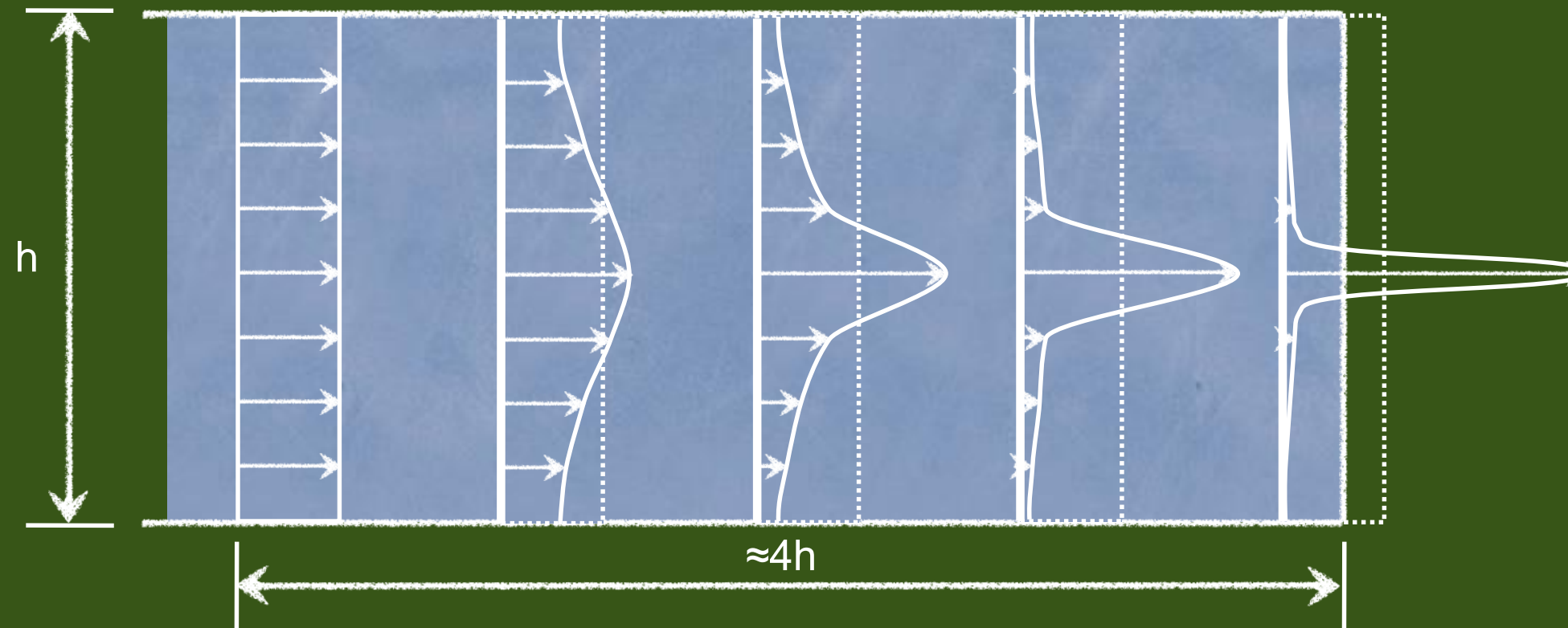
Uma distribuição de tensões relativamente complexa pode se desenvolver em regiões próximas ao ponto de aplicação da força.

Em regiões distantes do ponto de aplicação da força, o efeito se dissipa e as tensões se igualam à tensão média.



# Carga axial

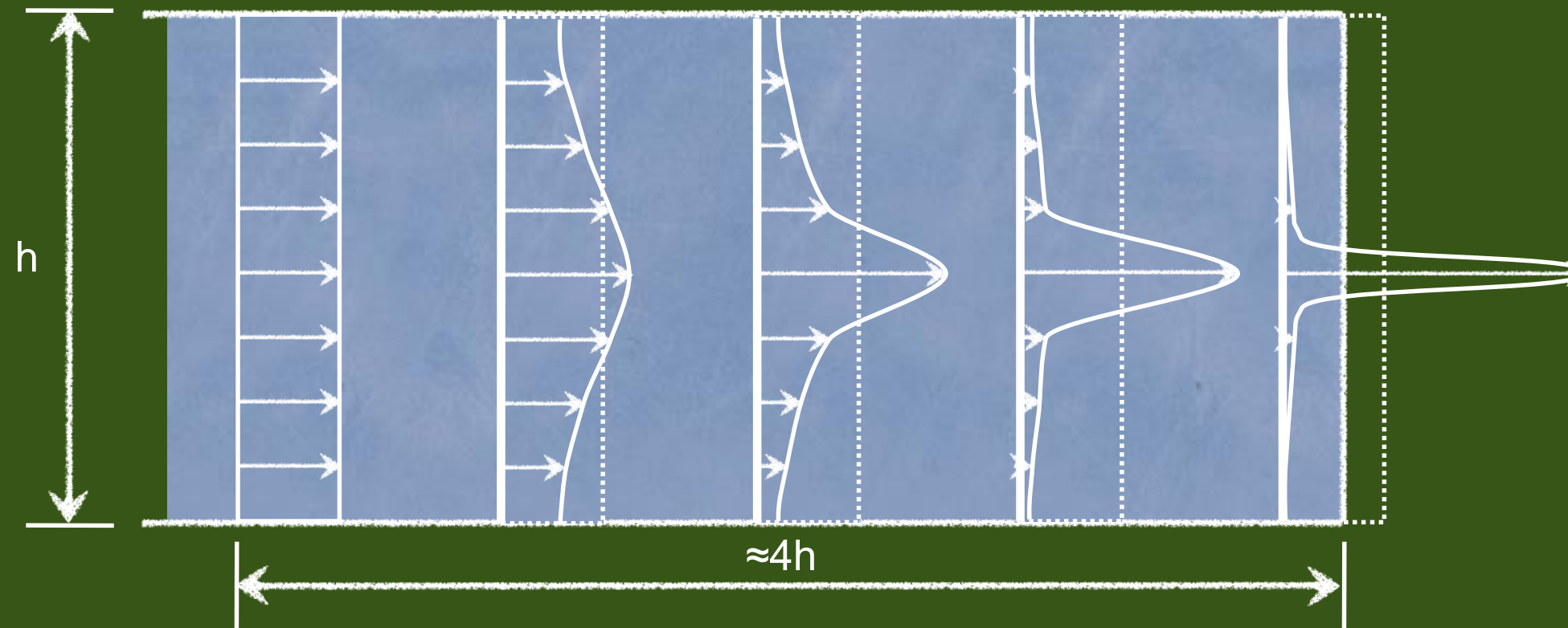
## Princípio de Saint-Venant



“Efeitos localizados provocados pela aplicação de uma carga qualquer (isto é, uma descontinuidade) aplicada sobre o corpo dissipam-se nas regiões suficientemente distantes do ponto de aplicação desta força.”

# Carga axial

## Princípio de Saint-Venant



“Efeitos localizados provocados pela aplicação de uma carga qualquer (isto é, uma descontinuidade) aplicada sobre o corpo dissipam-se nas regiões suficientemente distantes do ponto de aplicação desta força.”

A tensão resultante será a mesma provocada por qualquer outra carga estaticamente equivalente a esta força.

# Carga axial

Deformação elástica de elementos carregados axialmente

# Carga axial

Deformação elástica de elementos carregados axialmente

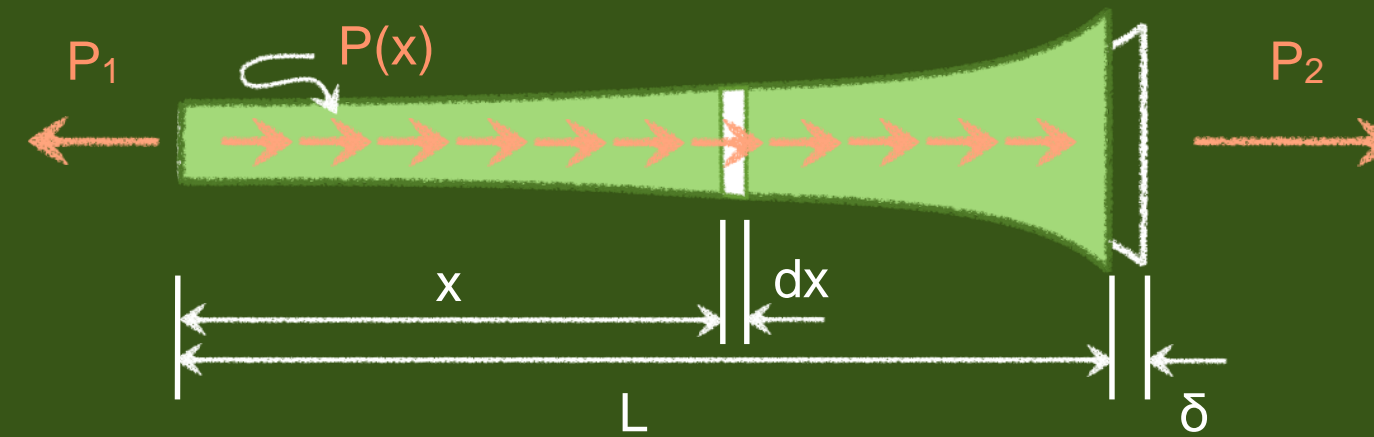
Muitas vezes é necessário se determinar o deslocamento provocado em um corpo elástico pela aplicação de uma força sobre ele.

# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

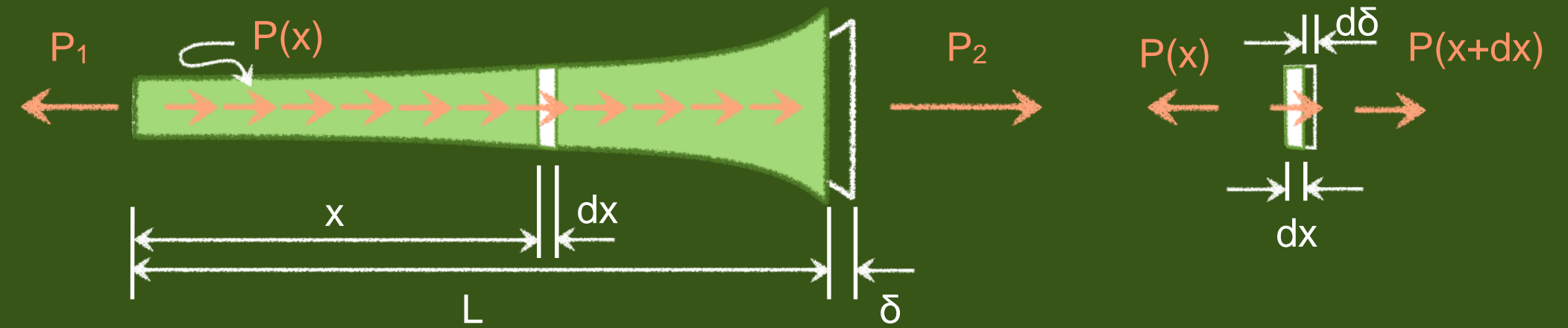
Muitas vezes é necessário se determinar o deslocamento provocado em um corpo elástico pela aplicação de uma força sobre ele.

Como um exemplo, vamos determinar o deslocamento em um ponto  $x$  qualquer localizado ao longo da barra da figura ao lado, submetida a uma carga distribuída ao longo do seu comprimento e a duas forças nas extremidades,  $P_1$  e  $P_2$ .



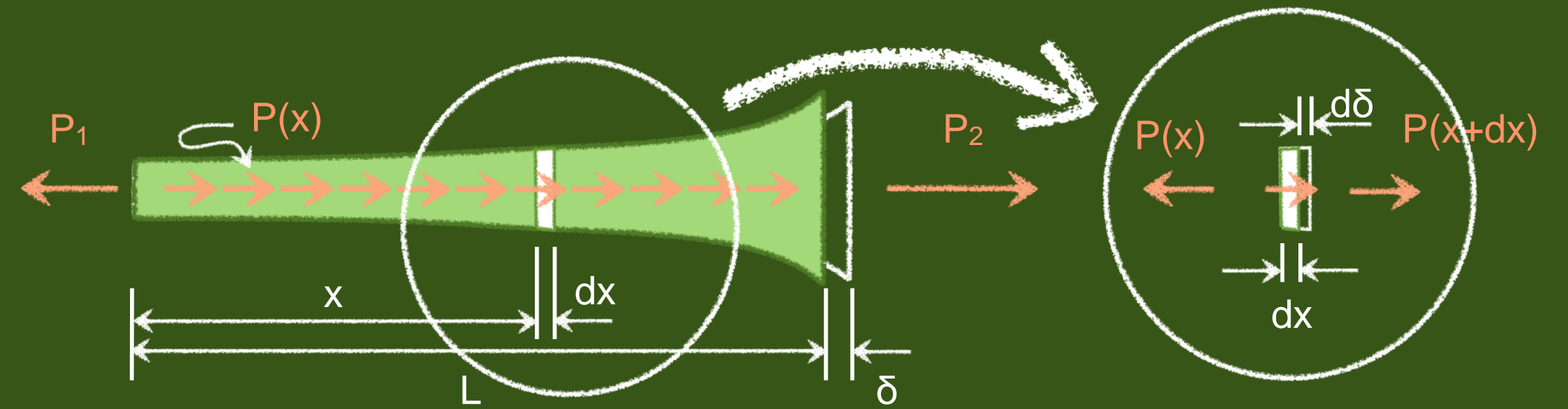
# Carga axial

Deformação elástica de elementos carregados axialmente



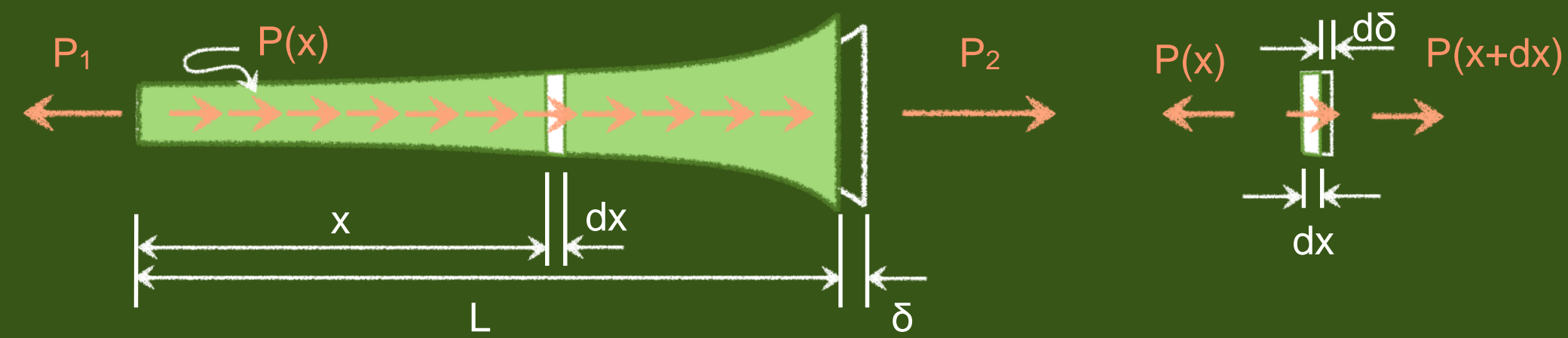
# Carga axial

Deformação elástica de elementos carregados axialmente



# Carga axial

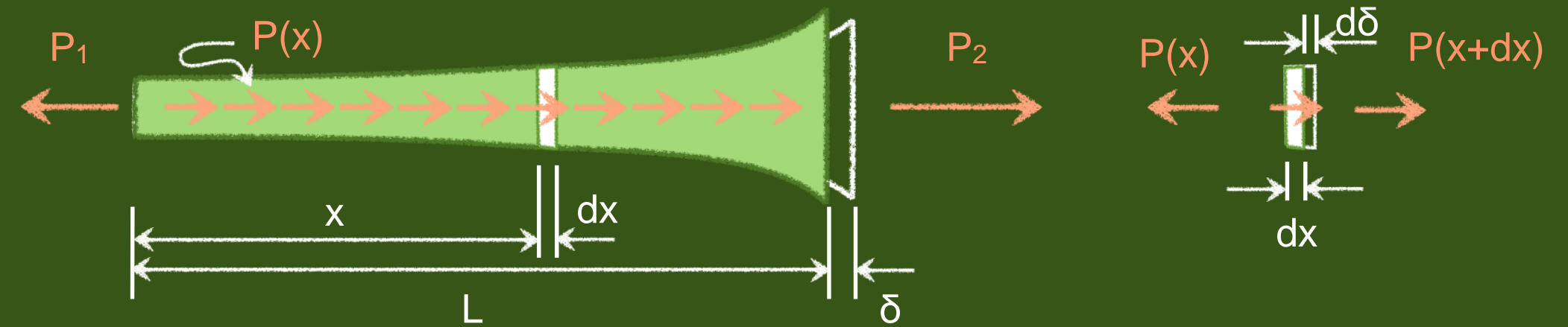
Deformação elástica de elementos carregados axialmente





# Carga axial

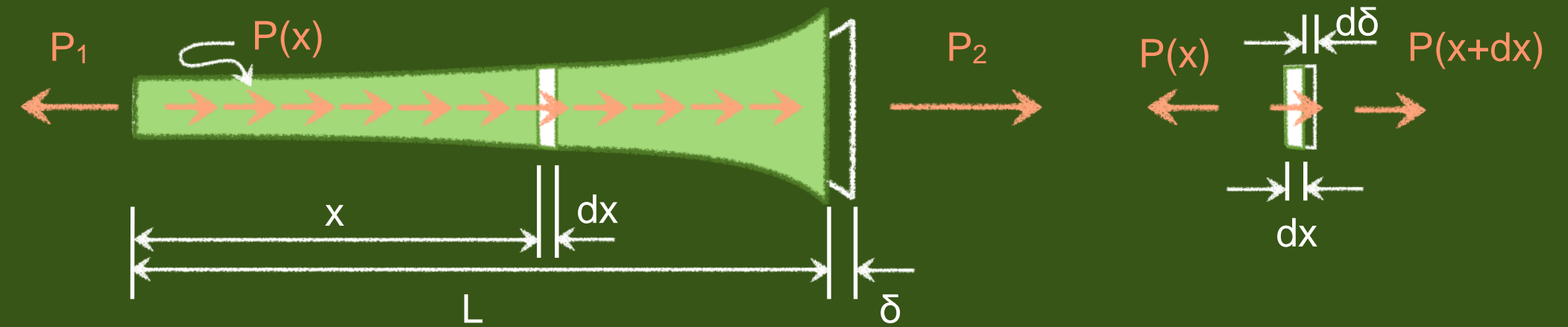
Deformação elástica de elementos carregados axialmente



$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)} \quad \varepsilon = \frac{d\delta}{dx} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon$$

# Carga axial

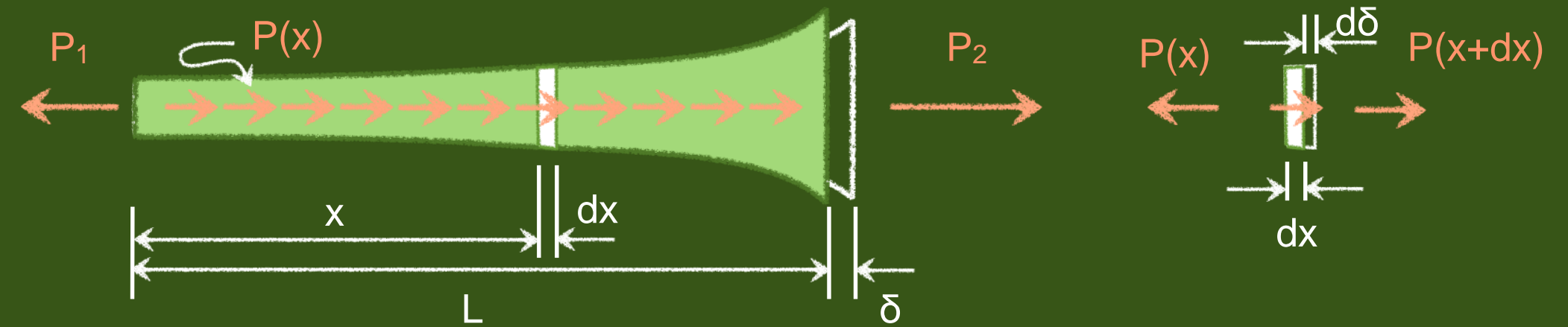
Deformação elástica de elementos carregados axialmente



$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)} = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{d\delta}{dx}$$

# Carga axial

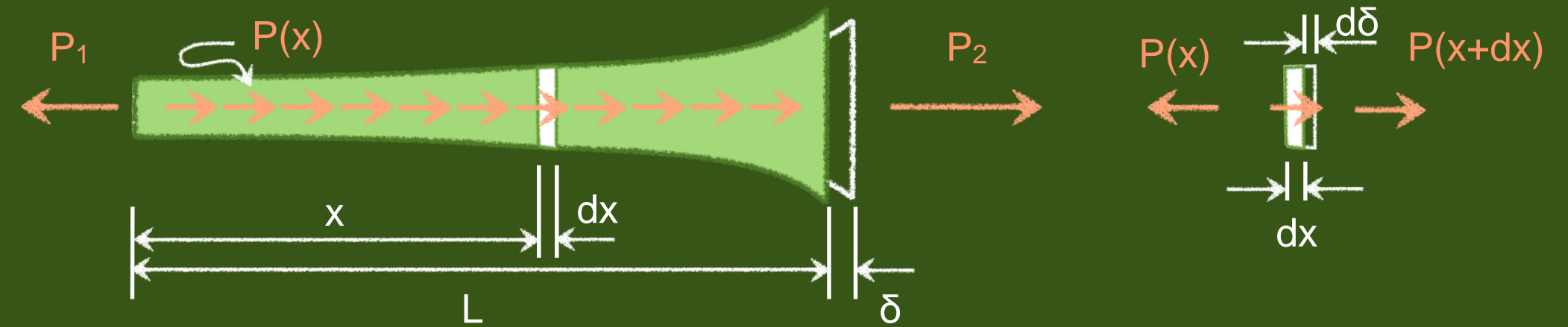
Deformação elástica de elementos carregados axialmente



$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)} = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{d\delta}{dx} \quad \therefore d\delta = \frac{1}{E} \frac{P(x)}{A(x)} dx$$

# Carga axial

Deformação elástica de elementos carregados axialmente

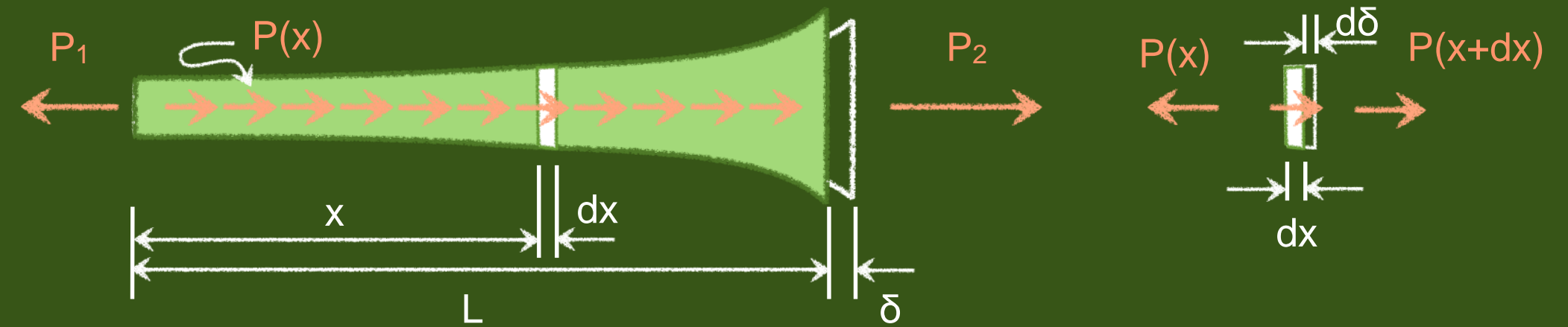


$$\delta = \int_0^L \frac{1}{E} \frac{P(x)}{A(x)} dx$$

# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Se a área da seção da barra é constante e também a força nas extremidades, isto é, não dependem de  $x$ , então, o deslocamento na extremidade da barra pode ser encontrado calculando-se



$$\delta = \frac{P L}{E A}$$

# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

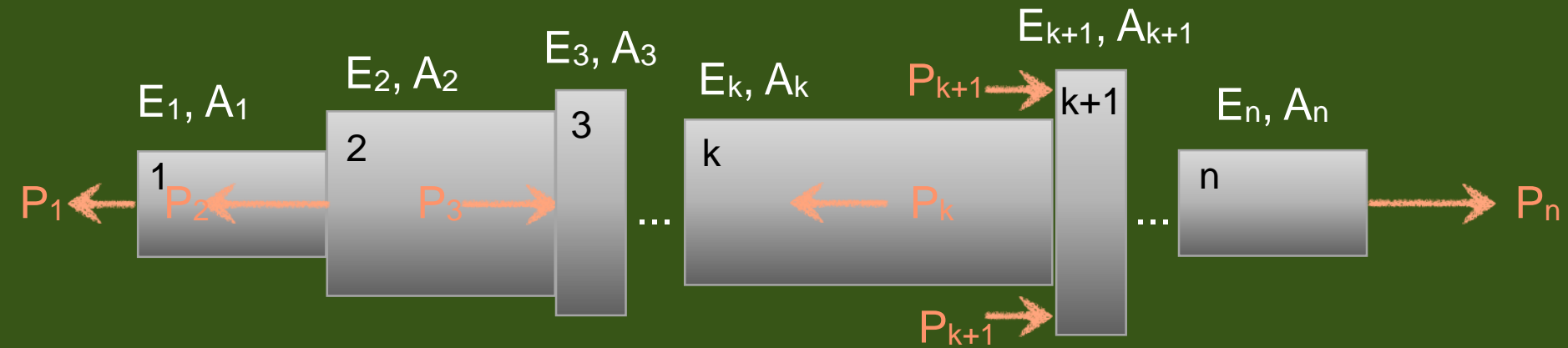
Caso a barra esteja submetida a diferentes cargas concentradas, ou, ainda, quando houver um outro tipo de descontinuidade, como materiais diferentes e seções diferentes, o deslocamento de cada um das partes homogêneas pode ser encontrado por

$$\delta = \frac{P L}{E A}$$

# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

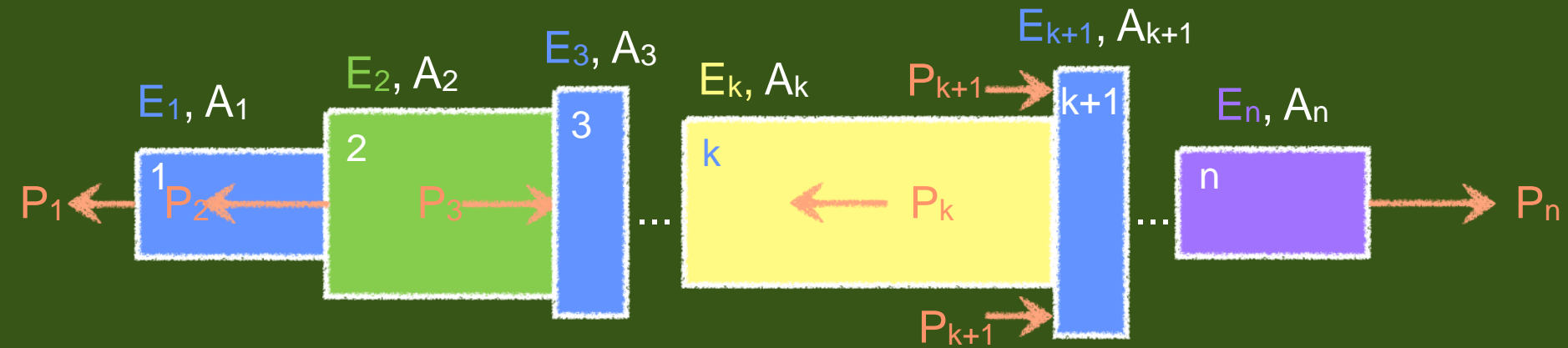
Caso a barra esteja submetida a diferentes cargas concentradas, ou, ainda, quando houver um outro tipo de descontinuidade, como materiais diferentes e seções diferentes, o deslocamento de cada um das partes homogêneas pode ser encontrado por



# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Caso a barra esteja submetida a diferentes cargas concentradas, ou, ainda, quando houver um outro tipo de descontinuidade, como materiais diferentes e seções diferentes, o deslocamento de cada um das partes homogêneas pode ser encontrado por

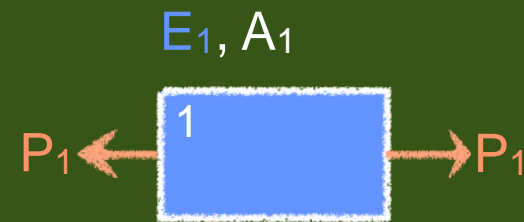




# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Caso a barra esteja submetida a diferentes cargas concentradas, ou, ainda, quando houver um outro tipo de descontinuidade, como materiais diferentes e seções diferentes, o deslocamento de cada um das partes homogêneas pode ser encontrado por

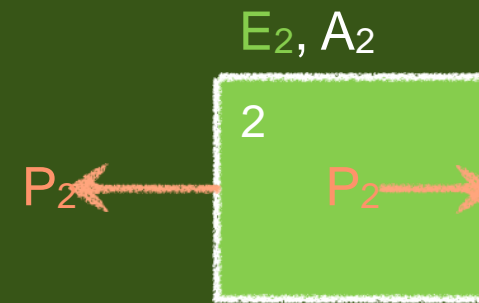


$$\delta_1 = \frac{P_1 L_1}{E_1 A_1}$$

# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Caso a barra esteja submetida a diferentes cargas concentradas, ou, ainda, quando houver um outro tipo de descontinuidade, como materiais diferentes e seções diferentes, o deslocamento de cada um das partes homogêneas pode ser encontrado por

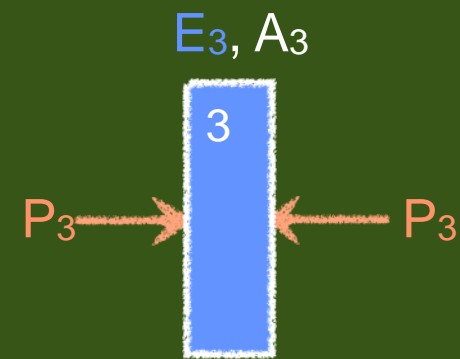


$$\delta_2 = \frac{P_2 L_2}{E_2 A_2}$$

# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Caso a barra esteja submetida a diferentes cargas concentradas, ou, ainda, quando houver um outro tipo de descontinuidade, como materiais diferentes e seções diferentes, o deslocamento de cada um das partes homogêneas pode ser encontrado por

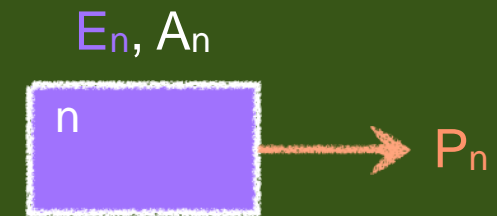


$$\delta_3 = \frac{P_3 L_3}{E_3 A_3}$$

# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Caso a barra esteja submetida a diferentes cargas concentradas, ou, ainda, quando houver um outro tipo de descontinuidade, como materiais diferentes e seções diferentes, o deslocamento de cada um das partes homogêneas pode ser encontrado por

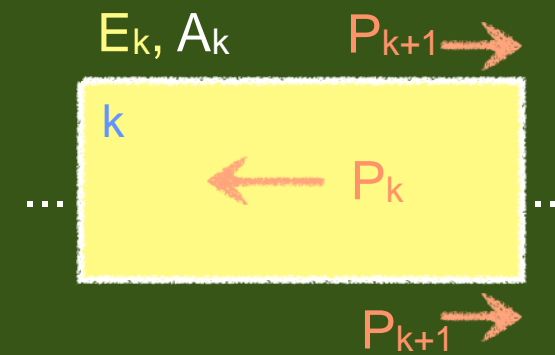


$$\delta_n = \frac{P_n L_n}{E_n A_n}$$

# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Caso a barra esteja submetida a diferentes cargas concentradas, ou, ainda, quando houver um outro tipo de descontinuidade, como materiais diferentes e seções diferentes, o deslocamento de cada um das partes homogêneas pode ser encontrado por

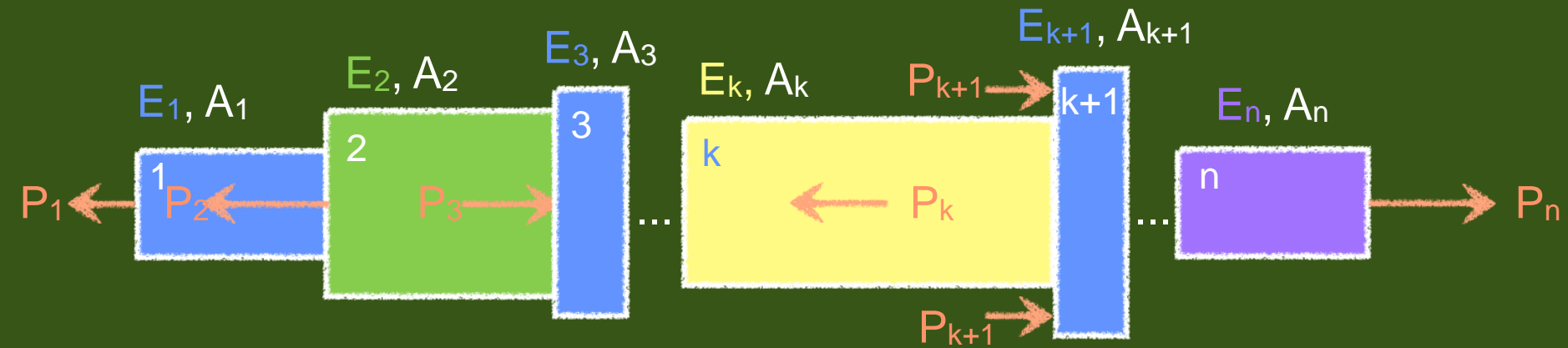


$$\bar{\delta}_k = \frac{P_k L_k}{E_k A_k}$$

# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

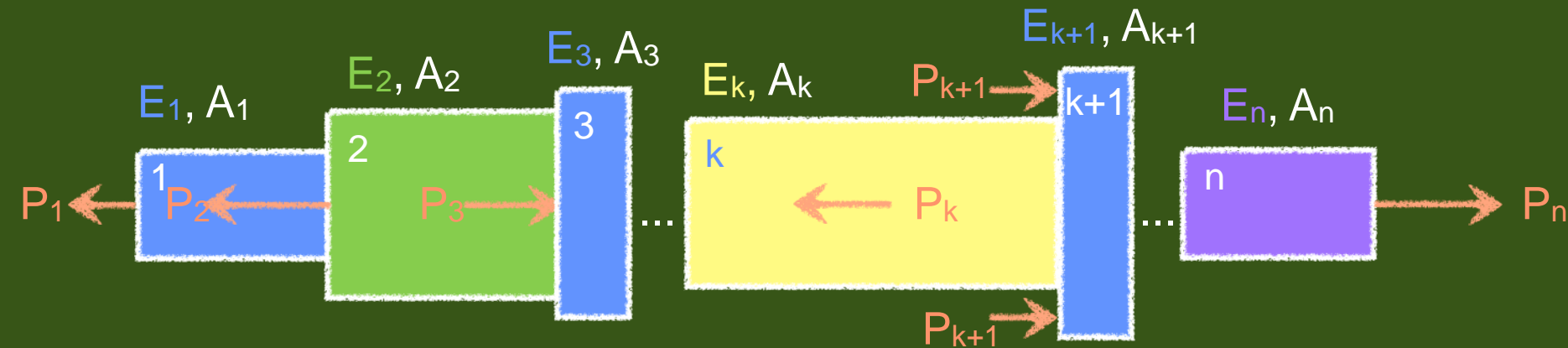
Caso a barra esteja submetida a diferentes cargas concentradas, ou, ainda, quando houver um outro tipo de descontinuidade, como materiais diferentes e seções diferentes, o deslocamento de cada um das partes homogêneas pode ser encontrado por



# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Caso a barra esteja submetida a diferentes cargas concentradas, ou, ainda, quando houver um outro tipo de descontinuidade, como materiais diferentes e seções diferentes, o deslocamento de cada um das partes homogêneas pode ser encontrado por

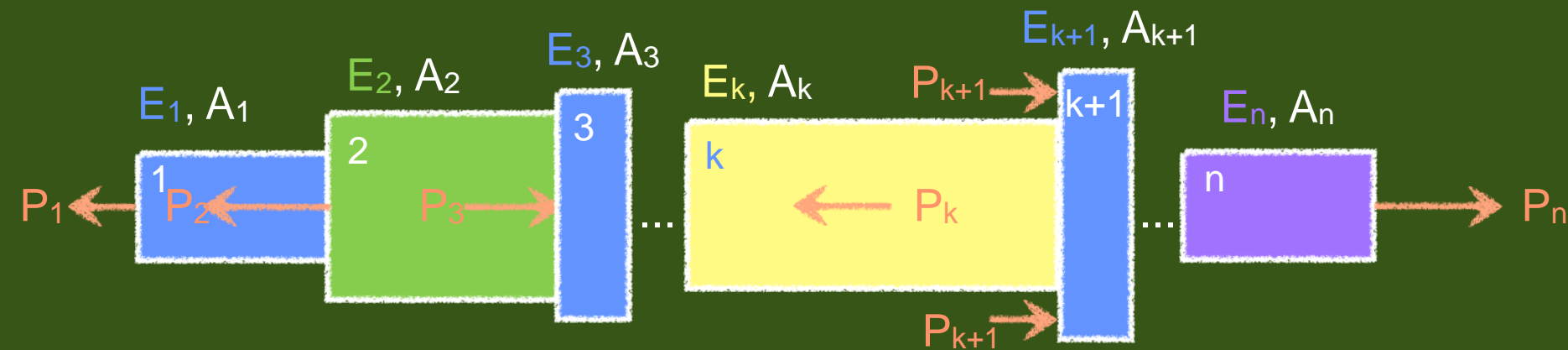


$$\delta_k = \frac{P_k L_k}{E_k A_k}$$

# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Caso a barra esteja submetida a diferentes cargas concentradas, ou, ainda, quando houver um outro tipo de descontinuidade, como materiais diferentes e seções diferentes, o deslocamento de cada um das partes homogêneas pode ser encontrado por



$$\bar{\delta}_k = \frac{P_k L_k}{E_k A_k}$$

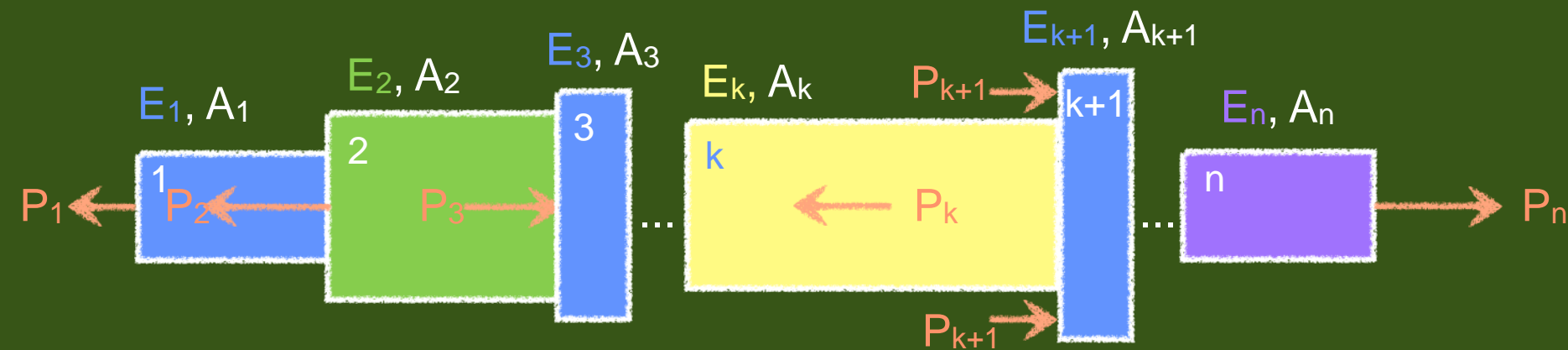
O deslocamento total pode ser encontrado pela soma de cada um dos deslocamentos individuais, isto é  $\bar{\delta}_{TOT} = \bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2 + \bar{\delta}_3 + \dots + \bar{\delta}_k + \dots + \bar{\delta}_n$



# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Caso a barra esteja submetida a diferentes cargas concentradas, ou, ainda, quando houver um outro tipo de descontinuidade, como materiais diferentes e seções diferentes, o deslocamento de cada um das partes homogêneas pode ser encontrado por



$$\delta_k = \frac{P_k L_k}{E_k A_k}$$

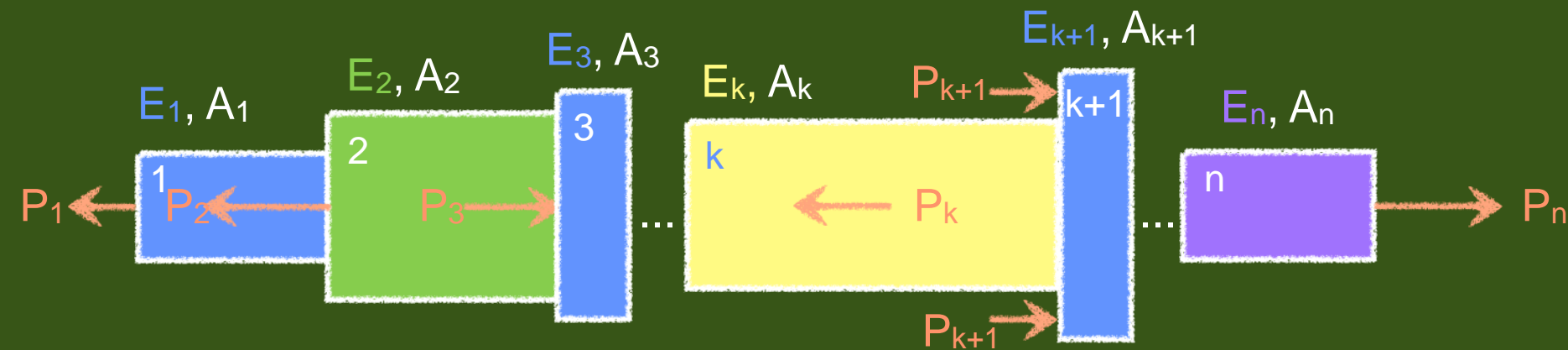
O deslocamento total pode ser encontrado pela soma de cada um dos deslocamentos individuais, isto é

$$\delta_{TOT} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_k + \dots + \delta_n = \frac{P_1 L_1}{E_1 A_1} + \frac{P_2 L_2}{E_2 A_2} + \dots + \frac{P_k L_k}{E_k A_k} + \dots + \frac{P_n L_n}{E_n A_n}$$

# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Caso a barra esteja submetida a diferentes cargas concentradas, ou, ainda, quando houver um outro tipo de descontinuidade, como materiais diferentes e seções diferentes, o deslocamento de cada um das partes homogêneas pode ser encontrado por



$$\delta_k = \frac{P_k L_k}{E_k A_k}$$

O deslocamento total pode ser encontrado pela soma de cada um dos deslocamentos individuais, isto é

$$\delta_{TOT} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_k + \dots + \delta_n = \frac{P_1 L_1}{E_1 A_1} + \frac{P_2 L_2}{E_2 A_2} + \dots + \frac{P_k L_k}{E_k A_k} + \dots + \frac{P_n L_n}{E_n A_n}$$

$$\delta_{TOT} = \sum_{k=1}^n \frac{P_k L_k}{E_k A_k}$$

# Carga axial

Deformação elástica de elementos carregados axialmente



Convenção de  
sinais

# Carga axial

Deformação elástica de elementos carregados axialmente



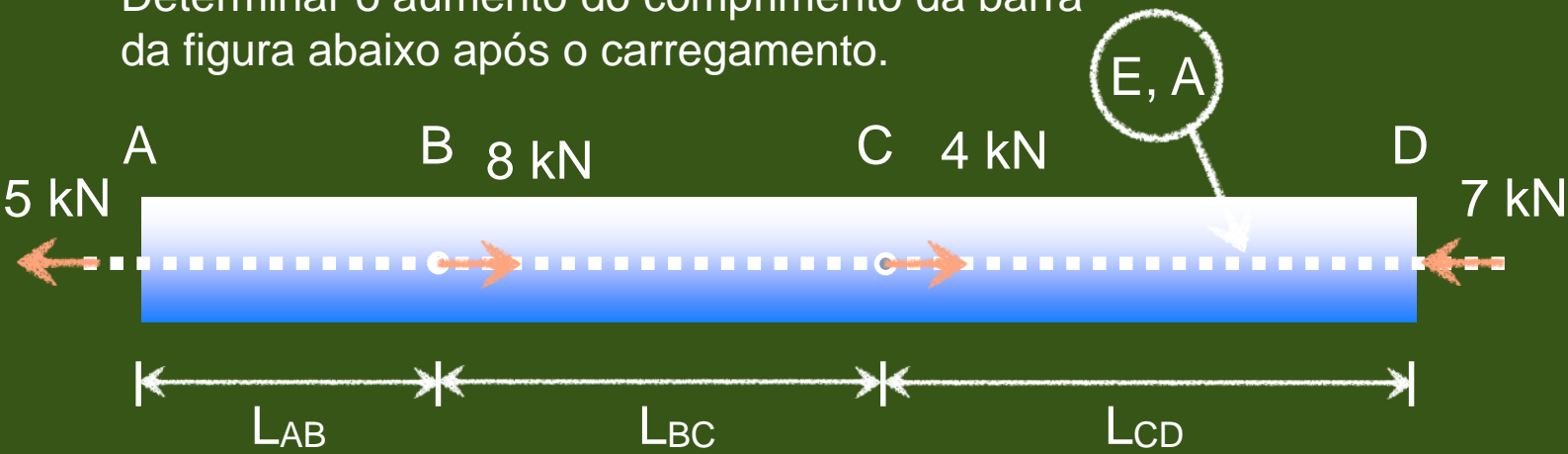
Convenção de  
sinais

# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Exemplo:

Determinar o aumento do comprimento da barra da figura abaixo após o carregamento.

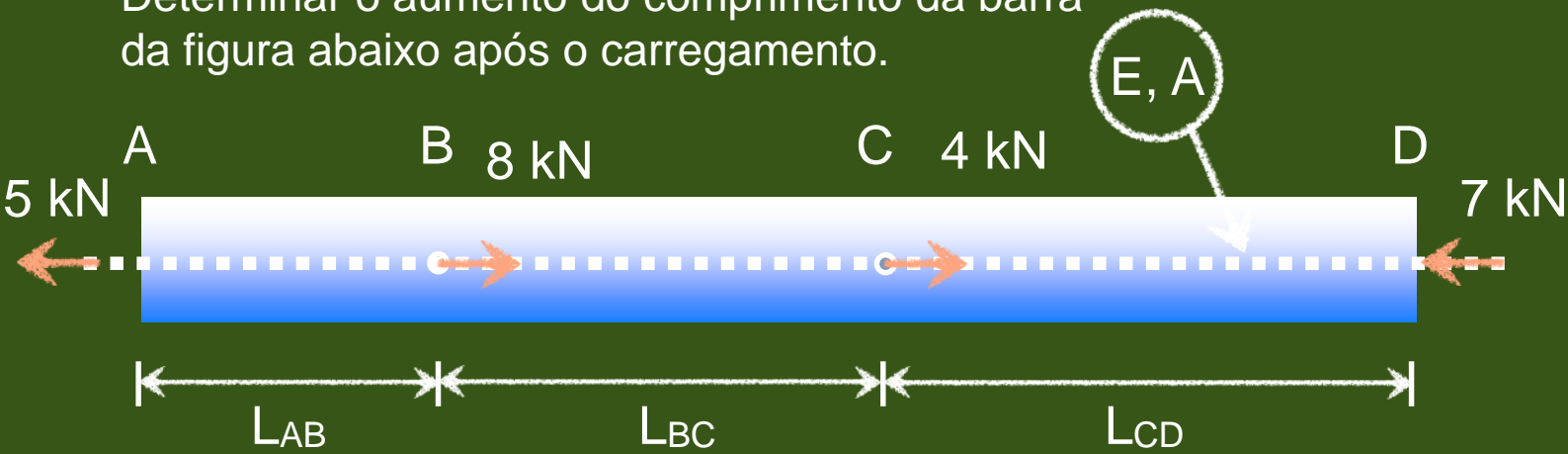


# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Exemplo:

Determinar o aumento do comprimento da barra da figura abaixo após o carregamento.



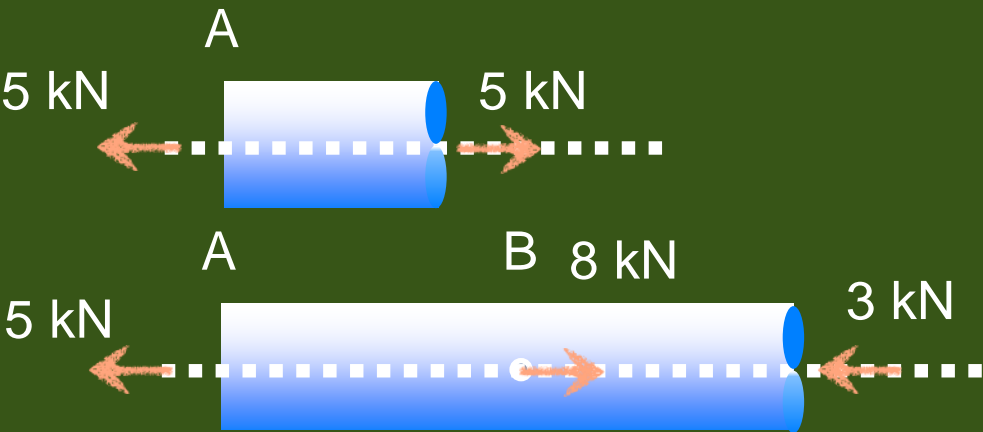
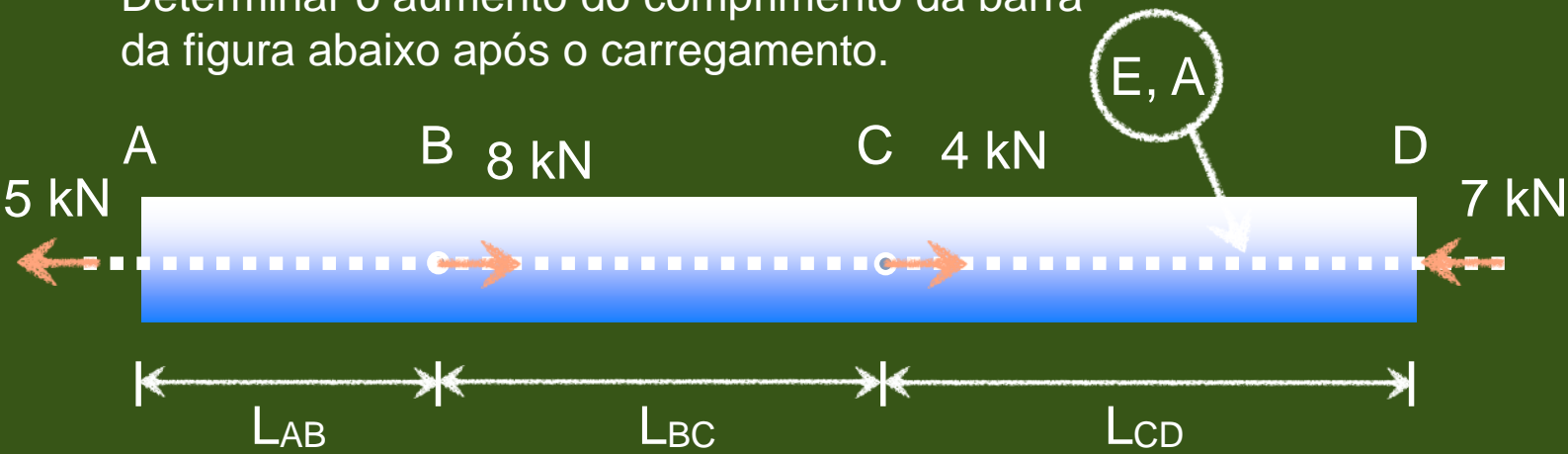
$$\delta_{AB} = \frac{(5 \text{ kN}) L_{AB}}{E A}$$

# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Exemplo:

Determinar o aumento do comprimento da barra da figura abaixo após o carregamento.



$$\delta_{AB} = \frac{(5 \text{ kN}) L_{AB}}{E A}$$

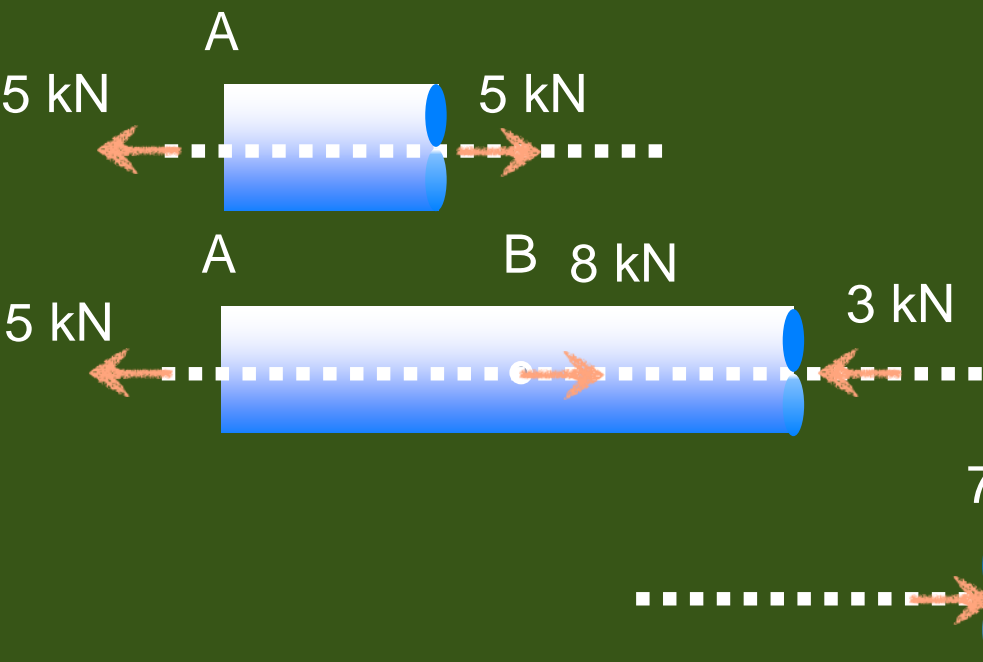
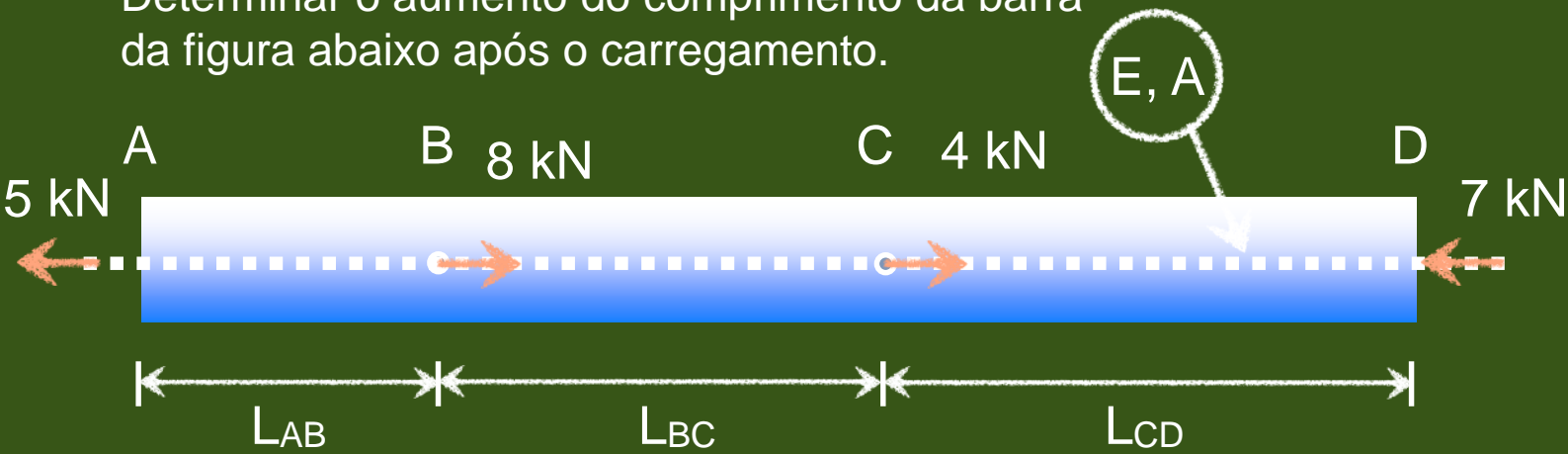
$$\delta_{BC} = \frac{(-3 \text{ kN}) L_{BC}}{E A}$$

# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Exemplo:

Determinar o aumento do comprimento da barra da figura abaixo após o carregamento.



$$\delta_{AB} = \frac{(5 \text{ kN}) L_{AB}}{E A}$$

$$\delta_{BC} = \frac{(-3 \text{ kN}) L_{BC}}{E A}$$

$$\delta_{CD} = \frac{(-7 \text{ kN}) L_{CD}}{E A}$$

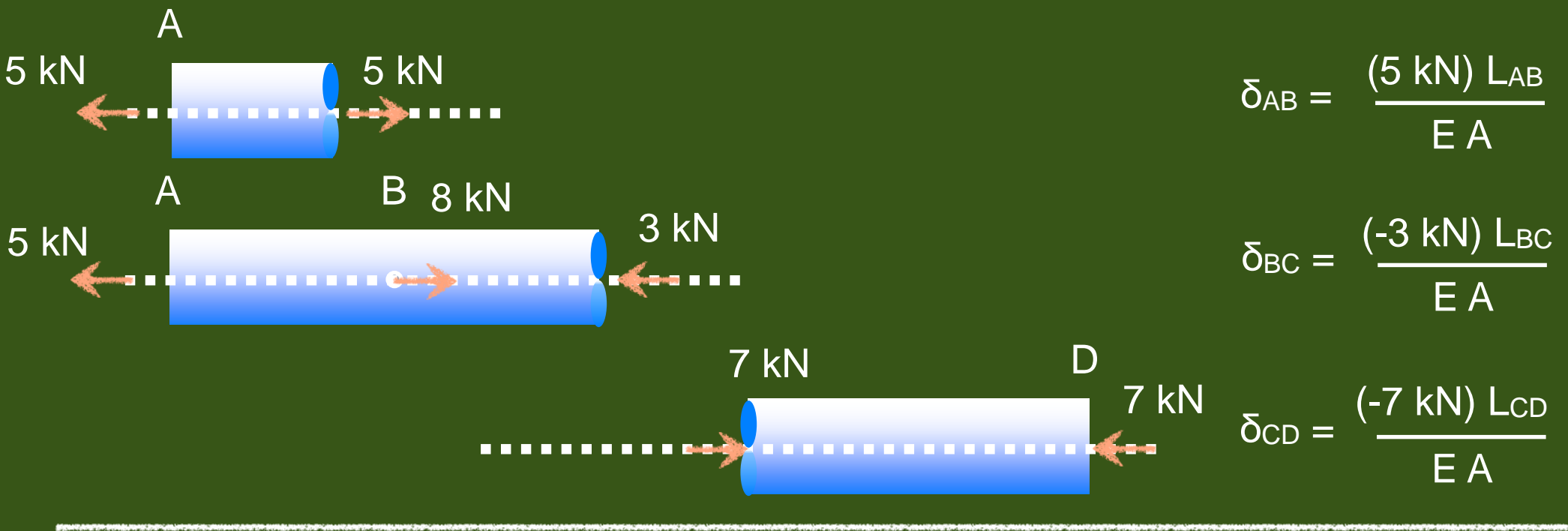
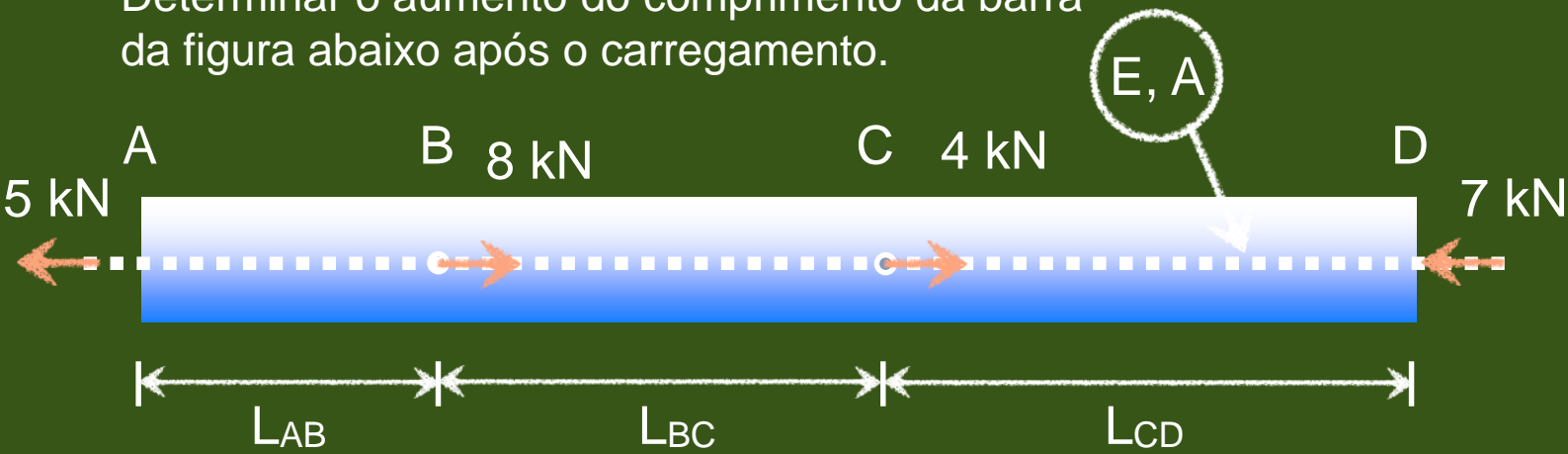


# Carga axial

## Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Exemplo:

Determinar o aumento do comprimento da barra da figura abaixo após o carregamento.



$$\delta_{AB} = \frac{(5 \text{ kN}) L_{AB}}{E A}$$

$$\delta_{BC} = \frac{(-3 \text{ kN}) L_{BC}}{E A}$$

$$\delta_{CD} = \frac{(-7 \text{ kN}) L_{CD}}{E A}$$

$$\delta_{TOT} = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} = \frac{(5 \text{ kN}) L_{AB}}{E A} + \frac{(-3 \text{ kN}) L_{BC}}{E A} + \frac{(-7 \text{ kN}) L_{CD}}{E A}$$

# Carga axial

Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Pontos importantes

# Carga axial

Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Pontos importantes

Princípio de Saint-Venant: efeito local das perturbações (descontinuidades) no elemento;

# Carga axial

Deformação elástica de elementos carregados axialmente

Pontos importantes

Princípio de Saint-Venant: efeito local das perturbações (descontinuidades) no elemento;

Estabelecida a relação entre deslocamento e força aplicada;

# Carga axial

Deformação elástica de elementos carregados axialmente

## Pontos importantes

Princípio de Saint-Venant: efeito local das perturbações (descontinuidades) no elemento;

Estabelecida a relação entre deslocamento e força aplicada;

Relação só é válida para forças que não acarretem no escoamento do material.

# Carga axial

Princípio de superposição

# Carga axial

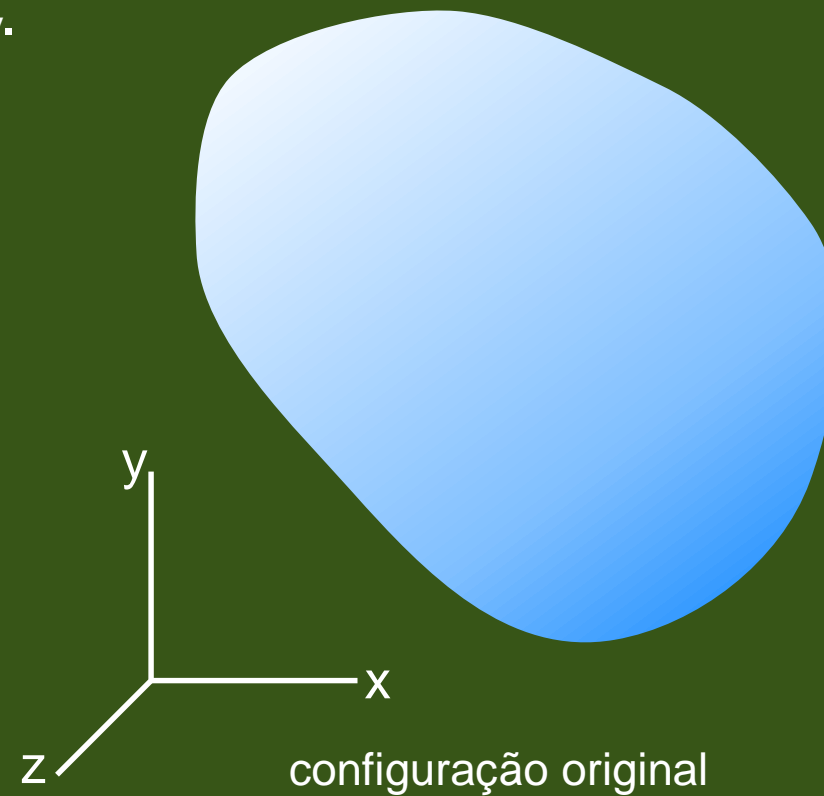
## Princípio de superposição

Seja o corpo elástico da figura ao lado, confeccionado com um determinado material, cujo limite de escoamento é  $S_y$ .

# Carga axial

## Princípio de superposição

Seja o corpo elástico da figura ao lado, confeccionado com um determinado material, cujo limite de escoamento é  $S_y$ .



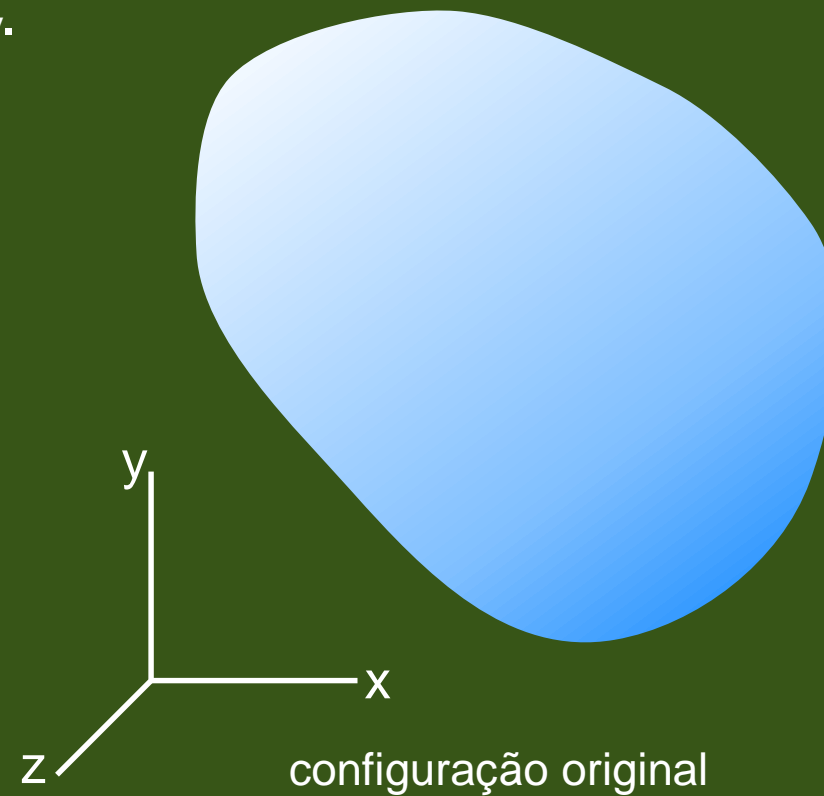


# Carga axial

## Princípio de superposição

Seja o corpo elástico da figura ao lado, confeccionado com um determinado material, cujo limite de escoamento é  $S_y$ .

Se ele é submetido a um conjunto de forças  $F_i$  e se a tensão em nenhum ponto do corpo atinge  $S_y$ , então, a sua configuração final depende da soma dos deslocamentos de cada tomados isoladamente para cada carga.

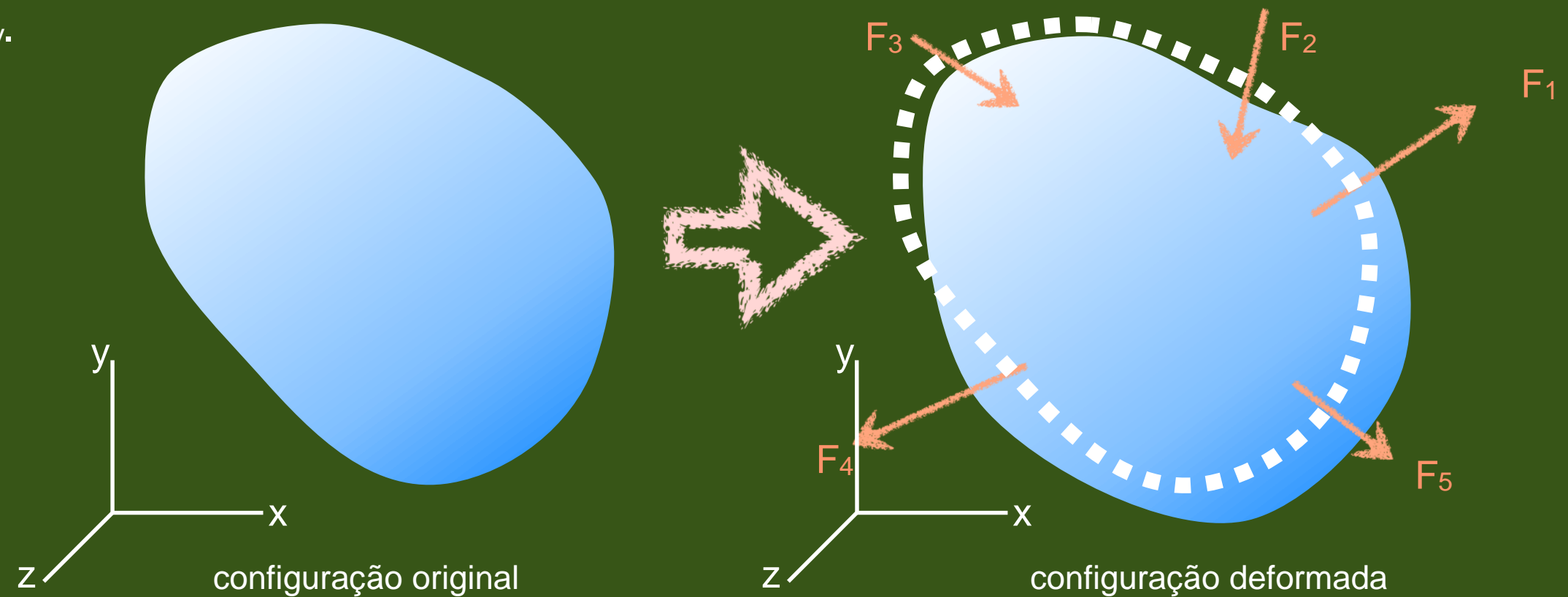


# Carga axial

## Princípio de superposição

Seja o corpo elástico da figura ao lado, confeccionado com um determinado material, cujo limite de escoamento é  $S_y$ .

Se ele é submetido a um conjunto de forças  $F_i$  e se a tensão em nenhum ponto do corpo atinge  $S_y$ , então, a sua configuração final depende da soma dos deslocamentos de cada tomados isoladamente para cada carga.



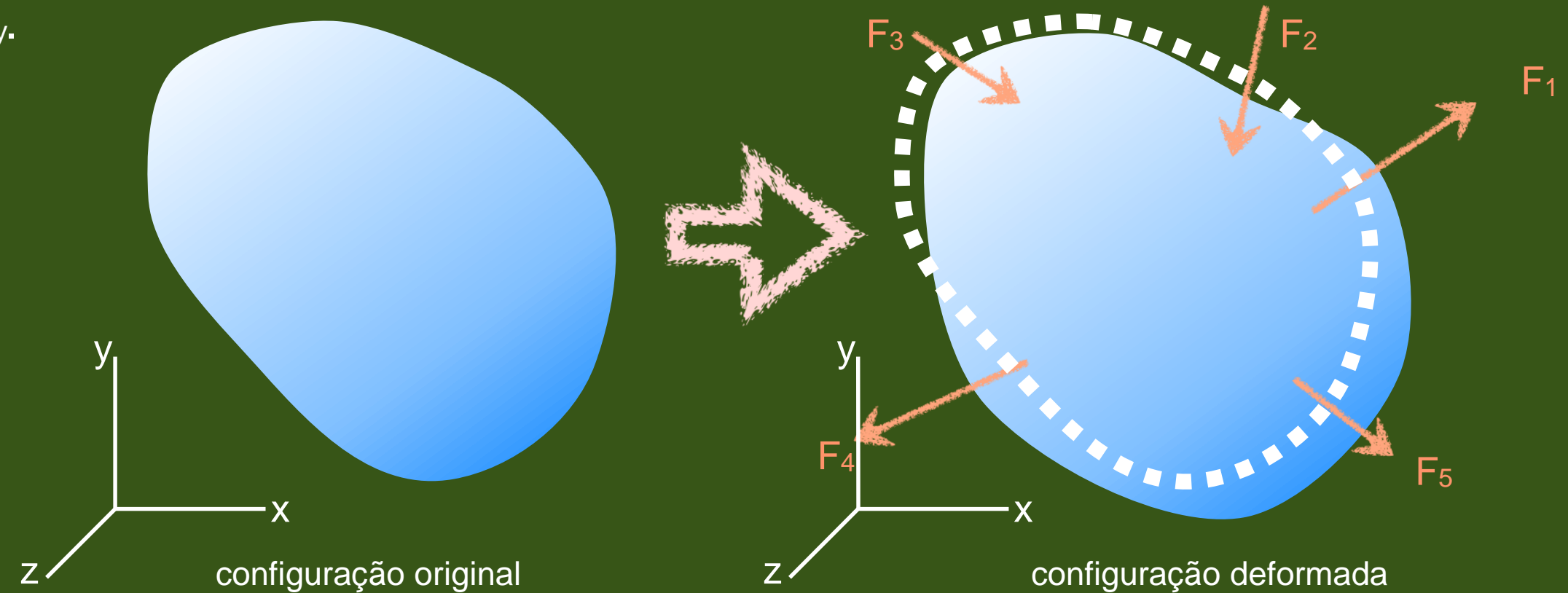
# Carga axial

## Princípio de superposição

Seja o corpo elástico da figura ao lado, confeccionado com um determinado material, cujo limite de escoamento é  $S_y$ .

Se ele é submetido a um conjunto de forças  $F_i$  e se a tensão em nenhum ponto do corpo atinge  $S_y$ , então, a sua configuração final depende da soma dos deslocamentos de cada tomados isoladamente para cada carga.

Isto só acontece se o maior deslocamento envolvido no problema for muito pequeno em relação às dimensões do corpo.



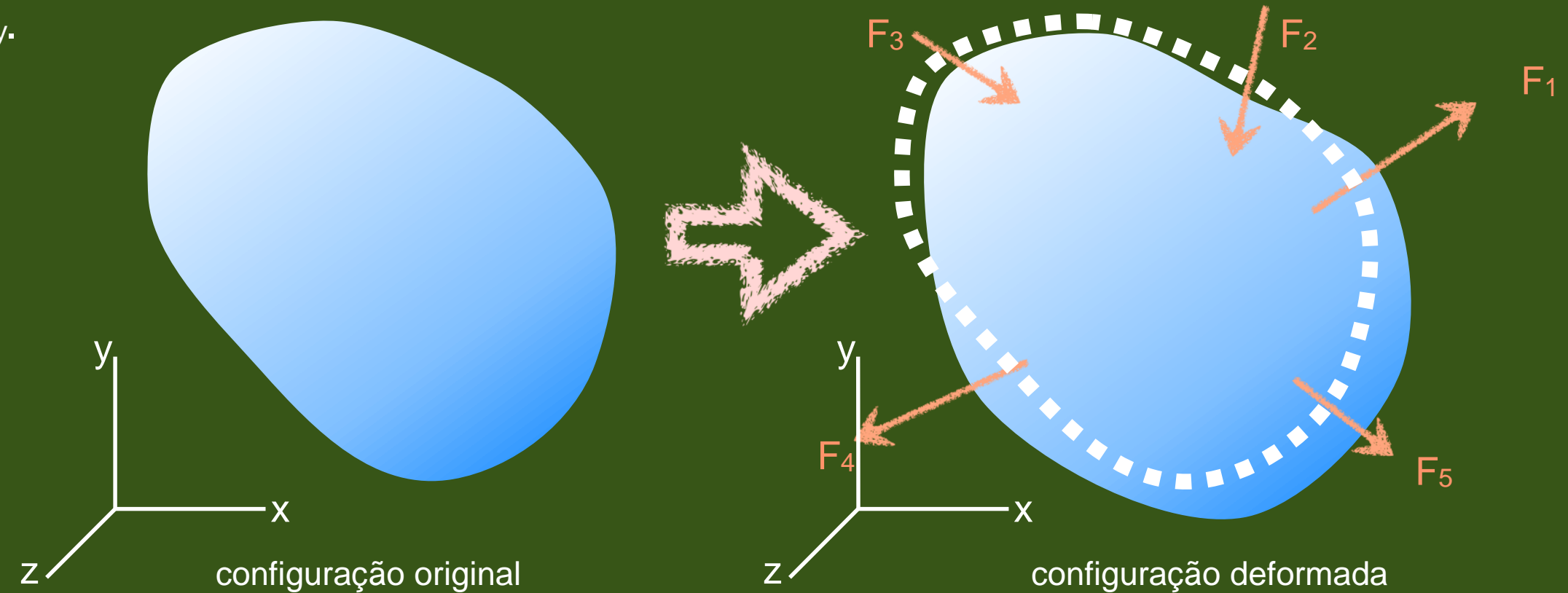
# Carga axial

## Princípio de superposição

Seja o corpo elástico da figura ao lado, confeccionado com um determinado material, cujo limite de escoamento é  $S_y$ .

Se ele é submetido a um conjunto de forças  $F_i$  e se a tensão em nenhum ponto do corpo atinge  $S_y$ , então, a sua configuração final depende da soma dos deslocamentos de cada tomados isoladamente para cada carga.

Isto só acontece se o maior deslocamento envolvido no problema for muito pequeno em relação às dimensões do corpo.



Assim,

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_n ,$$

onde  $\delta_i = \delta_i(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) , \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$

# Carga axial

Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

# Carga axial

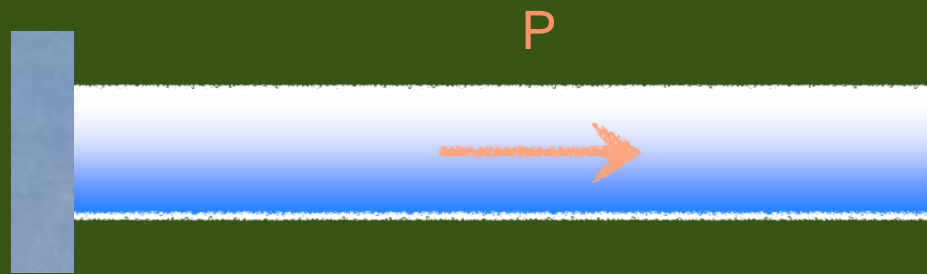
Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

**Barra estaticamente determinda**

# Carga axial

Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

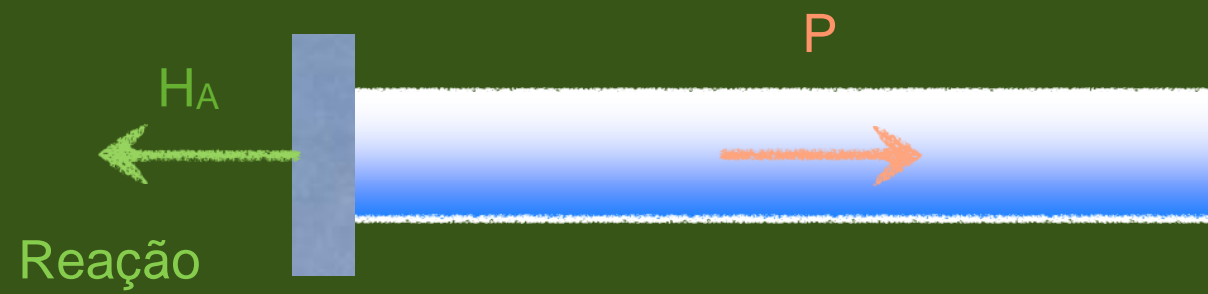
## Barra estaticamente determinada



# Carga axial

Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

## Barra estaticamente determinada

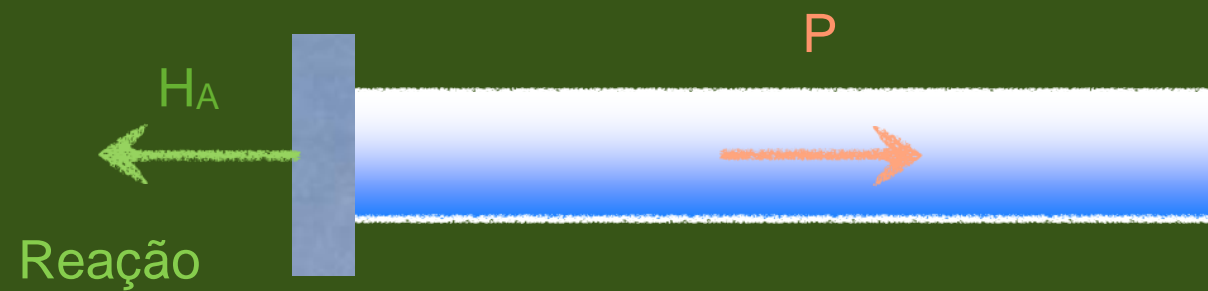




# Carga axial

Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

## Barra estaticamente determinada

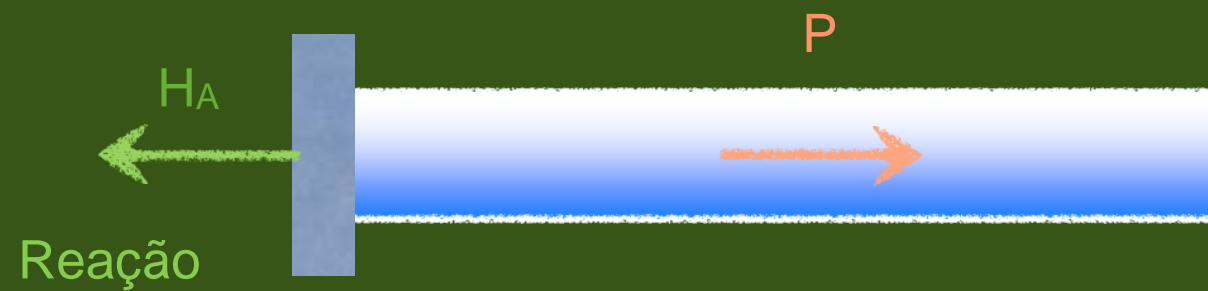


$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad +P + (-H_A) = 0$$

# Carga axial

Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

## Barra estaticamente determinada

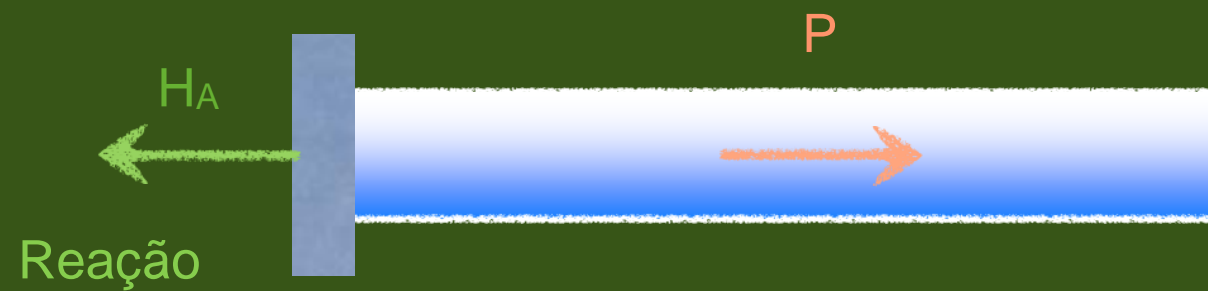


$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad +P + (-H_A) = 0$$

# Carga axial

Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

## Barra estaticamente determinada



uma incógnita, uma equação

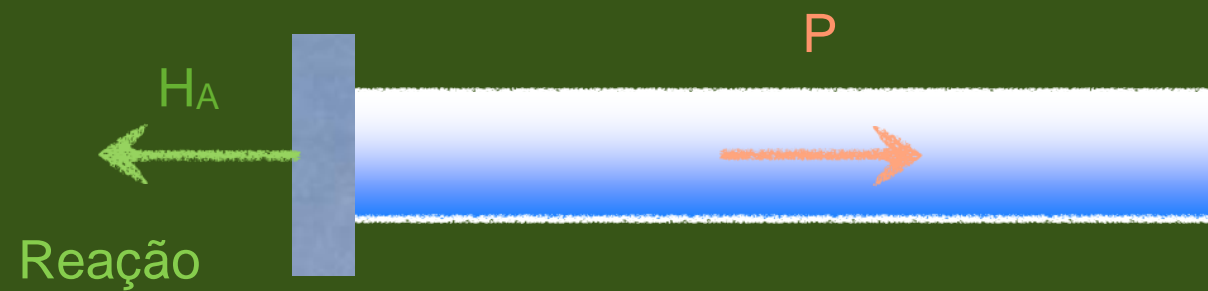
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad +P + (-H_A) = 0$$

# Carga axial

Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

**Barra estaticamente determinada**

**Barra estaticamente indeterminada**

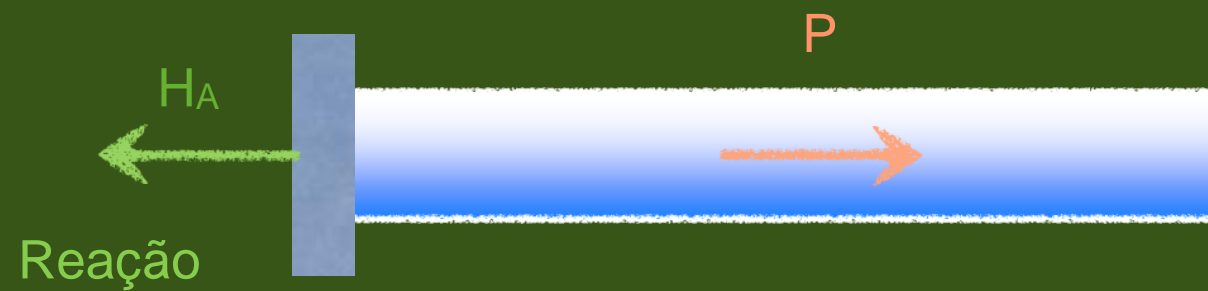


$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad +P + (-H_A) = 0$$

# Carga axial

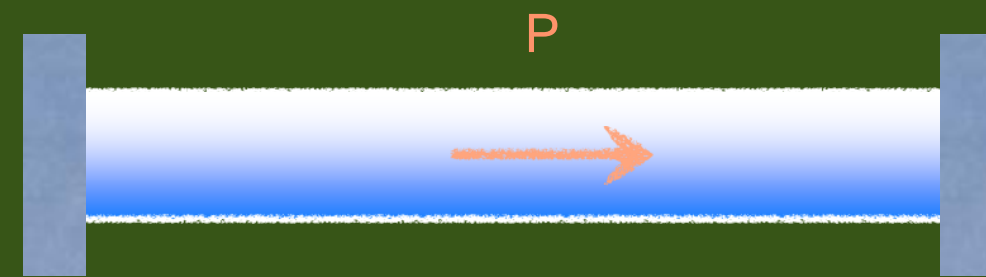
Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

**Barra estaticamente determinada**



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +P + (-H_A) = 0$$

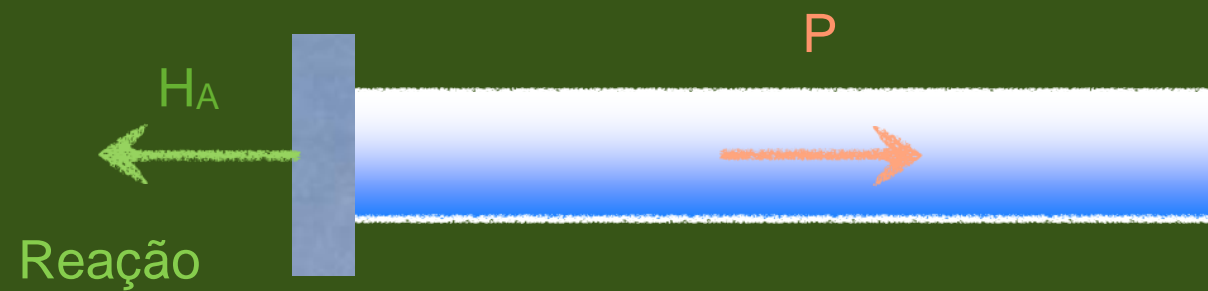
**Barra estaticamente indeterminada**



# Carga axial

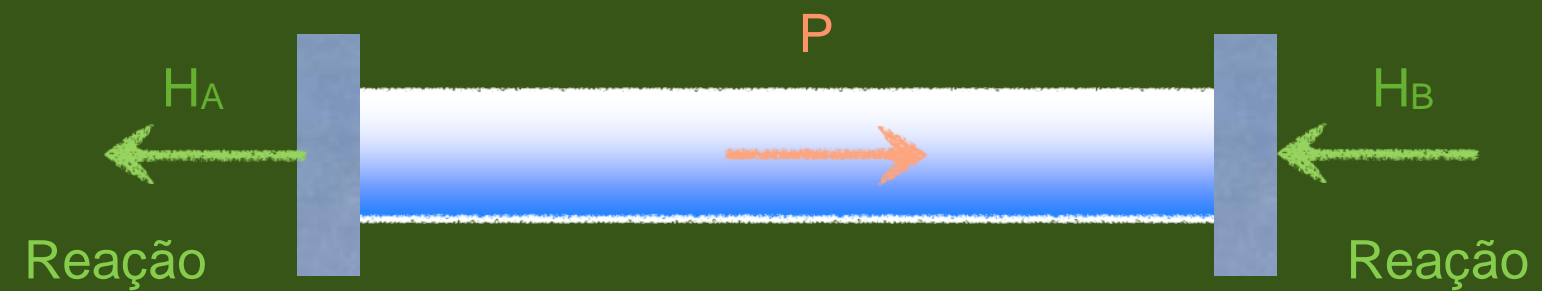
Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

## Barra estaticamente determinada



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +P + (-H_A) = 0$$

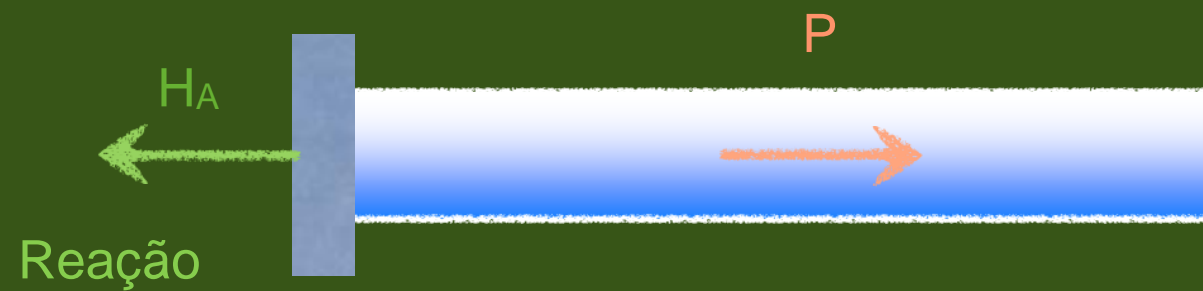
## Barra estaticamente indeterminada



# Carga axial

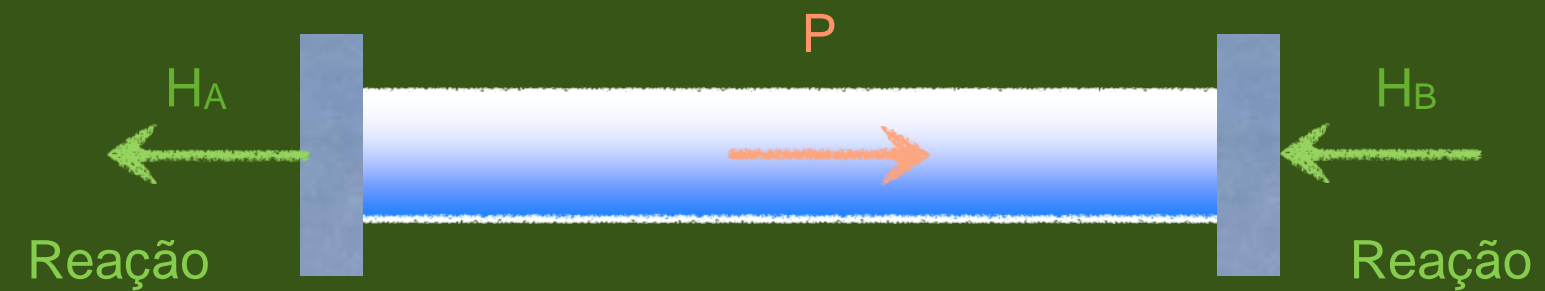
Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

## Barra estaticamente determinada



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +P + (-H_A) = 0$$

## Barra estaticamente indeterminada

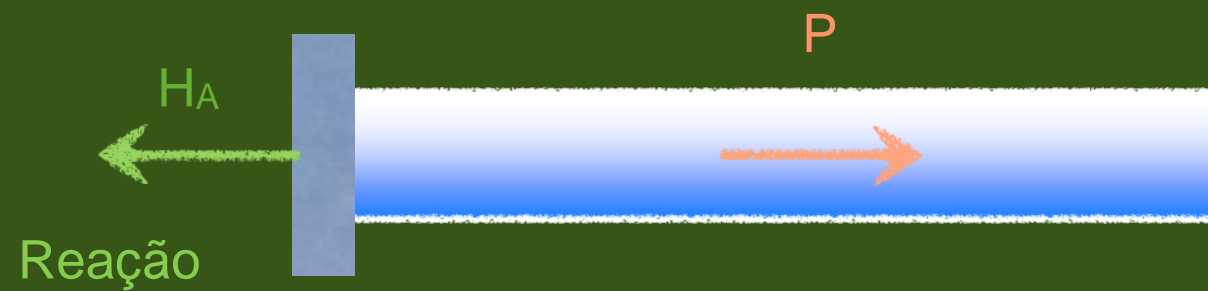


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +P + (-H_A) + (-H_b) = 0$$

# Carga axial

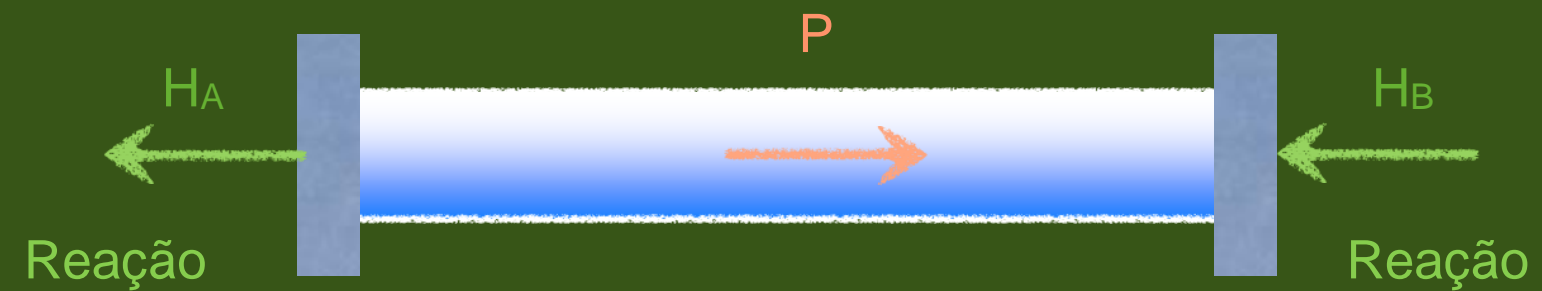
Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

## Barra estaticamente determinada



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +P + (-H_A) = 0$$

## Barra estaticamente indeterminada



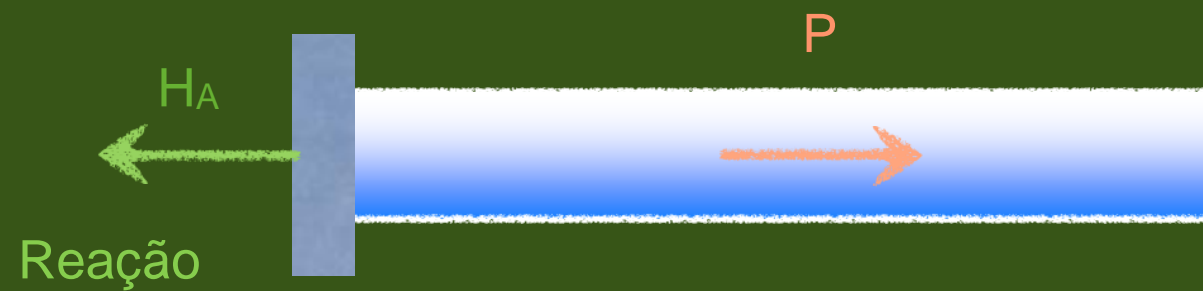
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +P + (-H_A) + (-H_b) = 0$$



# Carga axial

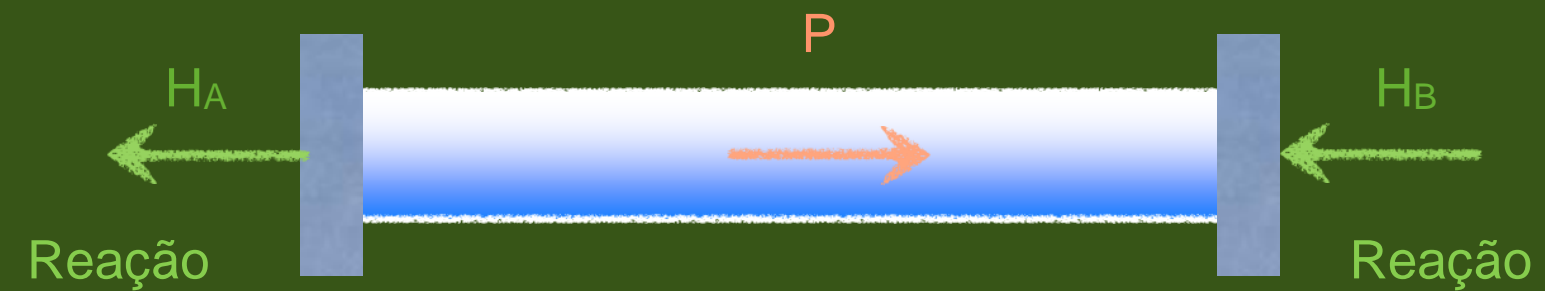
Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

## Barra estaticamente determinada



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +P + (-H_A) = 0$$

## Barra estaticamente indeterminada



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +P + (-H_A) + (-H_b) = 0$$

duas incógnitas, uma única equação

# Carga axial

Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

A solução só pode ser encontrada se mais uma equação for estabelecida.

# Carga axial

Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

A solução só pode ser encontrada se mais uma equação for estabelecida.

Esta equação surge das relações de deslocamento e é, portanto, denominada equação de compatibilidade, ou equação cinemática.

# Carga axial

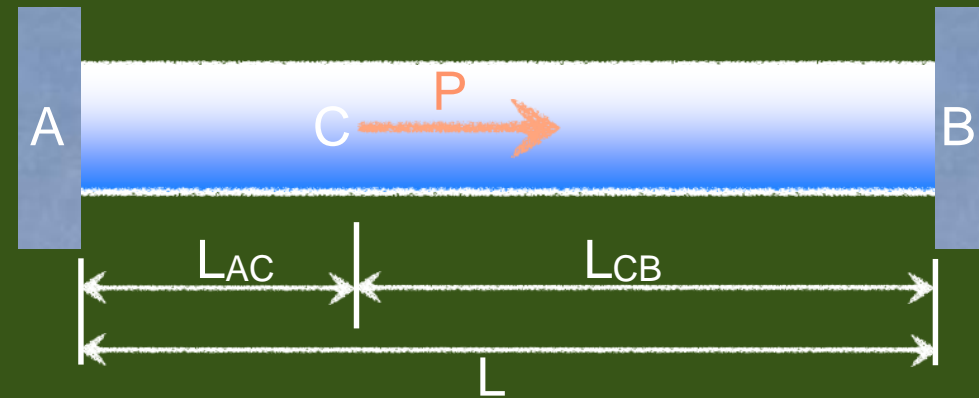
## Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

A solução só pode ser encontrada se mais uma equação for estabelecida.

Esta equação surge das relações de deslocamento e é, portanto, denominada equação de compatibilidade, ou equação cinemática.

No exemplo ao lado, esta equação é

$$\delta_{AB} = 0.$$



# Carga axial

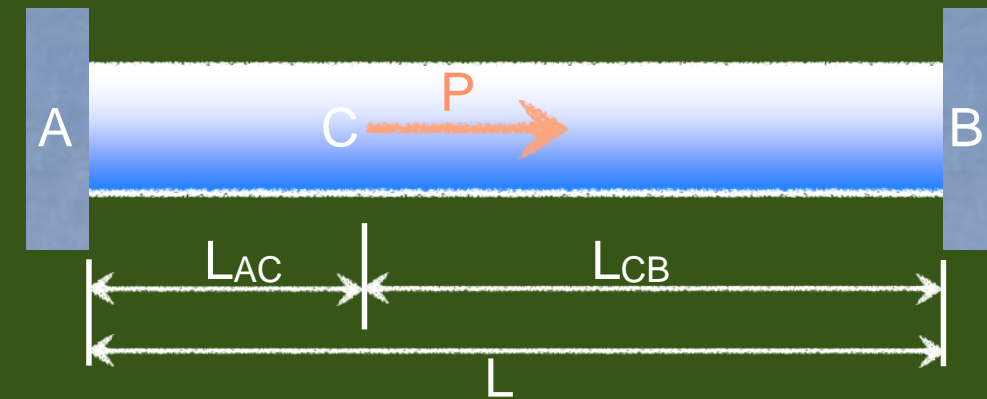
## Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

A solução só pode ser encontrada se mais uma equação for estabelecida.

Esta equação surge das relações de deslocamento e é, portanto, denominada equação de compatibilidade, ou equação cinemática.

No exemplo ao lado, esta equação é

$$\delta_{AB} = 0.$$



Como os deslocamentos dos segmentos AC e CB podem ser determinados por

$$\delta_{AC} = \frac{P_{AC} L_{AC}}{E A} \quad \text{e} \quad \delta_{CB} = -\frac{P_{CB} L_{CB}}{E A}$$

# Carga axial

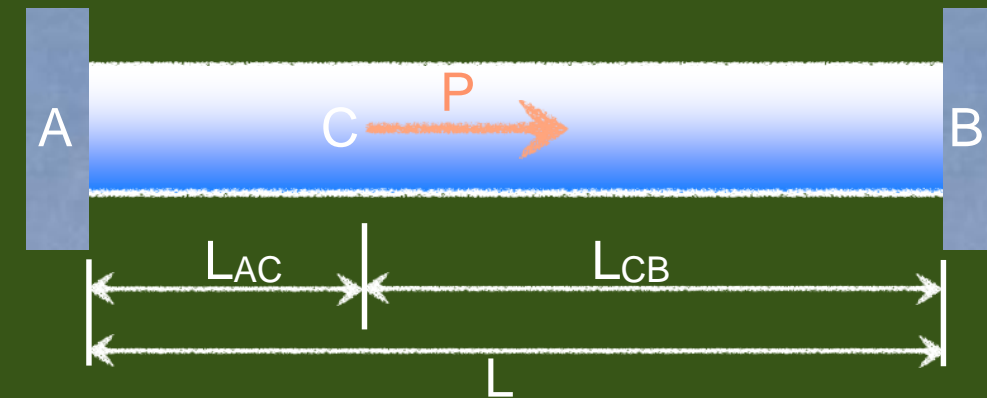
## Elementos carregados axialmente e estaticamente indeterminados

A solução só pode ser encontrada se mais uma equação for estabelecida.

Esta equação surge das relações de deslocamento e é, portanto, denominada equação de compatibilidade, ou equação cinemática.

No exemplo ao lado, esta equação é

$$\delta_{AB} = 0.$$



Como os deslocamentos dos segmentos AC e CB podem ser determinados por

$$\delta_{AC} = \frac{P_{AC} L_{AC}}{E A} \quad \text{e} \quad \delta_{CB} = -\frac{P_{CB} L_{CB}}{E A}$$

e as reações podem ser encontradas por

$$H_A = \frac{L_{CB}}{L} P \quad \text{e} \quad H_B = \frac{L_{AC}}{L} P$$

# Carga axial

Método da força - Carga axial

# Carga axial

## Método da força - Carga axial

Problemas estaticamente indeterminados podem ser resolvidos pelo Método da Força;



# Carga axial

## Método da força - Carga axial

Problemas estaticamente indeterminados podem ser resolvidos pelo Método da Força;

Também conhecido como Método da Flexibilidade;

# Carga axial

## Método da força - Carga axial

Problemas estaticamente indeterminados podem ser resolvidos pelo Método da Força;

Também conhecido como Método da Flexibilidade;

Consiste em retirar temporariamente a redundância de um dos apoios para, em seguida, aplicar uma força contrária ao deslocamento encontrado necessária para anular este mesmo deslocamento.

# Carga axial

## Método da força - Carga axial

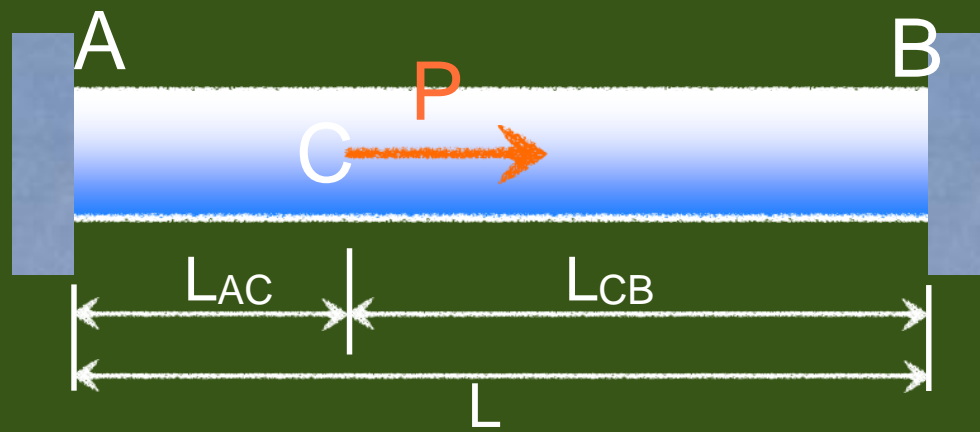
Exemplo:

# Carga axial

## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Determinar as reações nos apoios A e B.

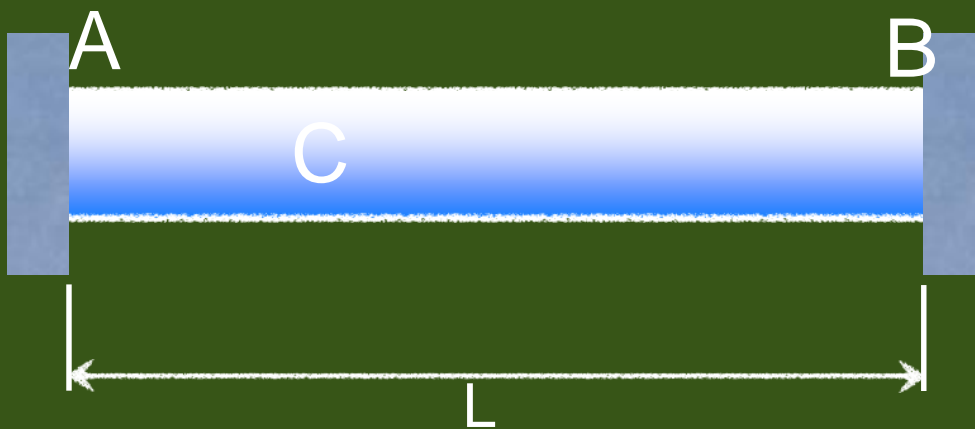


# Carga axial

## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Determinar as reações nos apoios A e B.

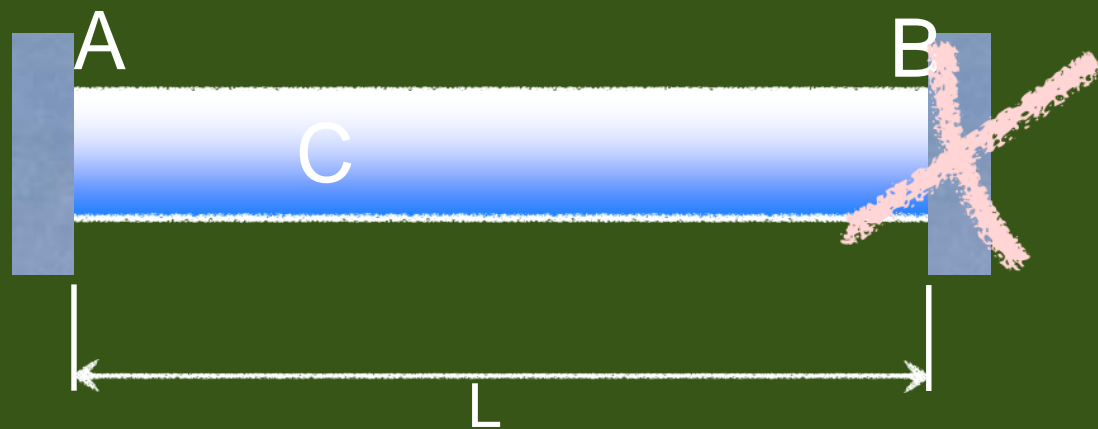


# Carga axial

## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Determinar as reações nos apoios A e B.

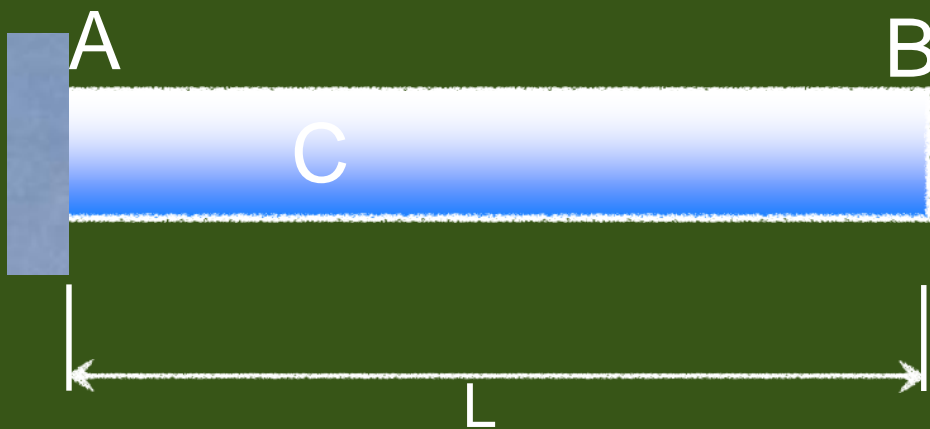


# Carga axial

## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Determinar as reações nos apoios A e B.

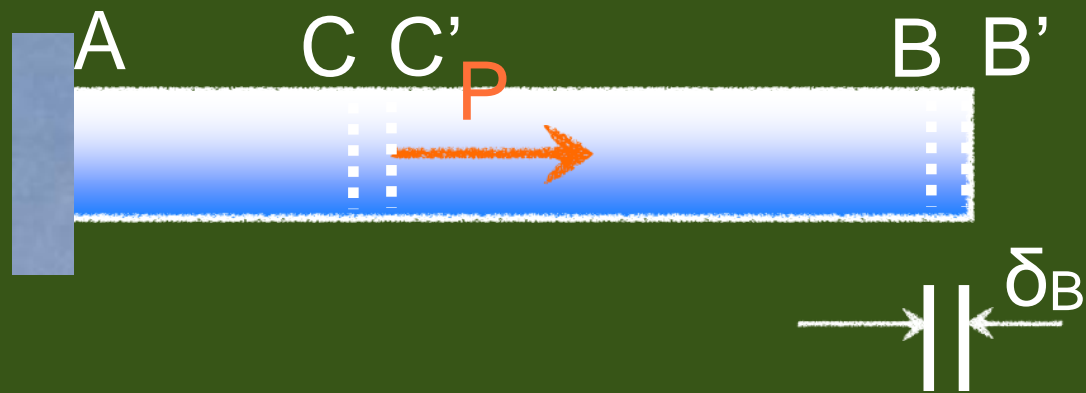


# Carga axial

## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Determinar as reações nos apoios A e B.



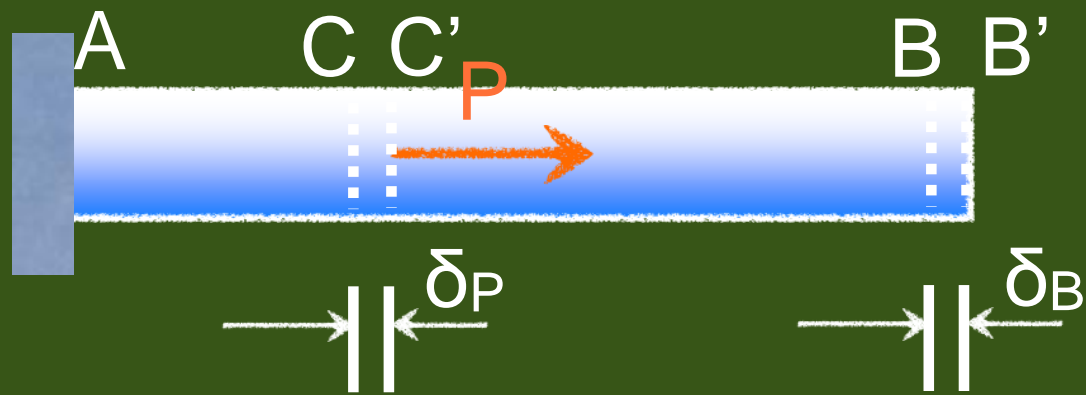


# Carga axial

## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Determinar as reações nos apoios A e B.

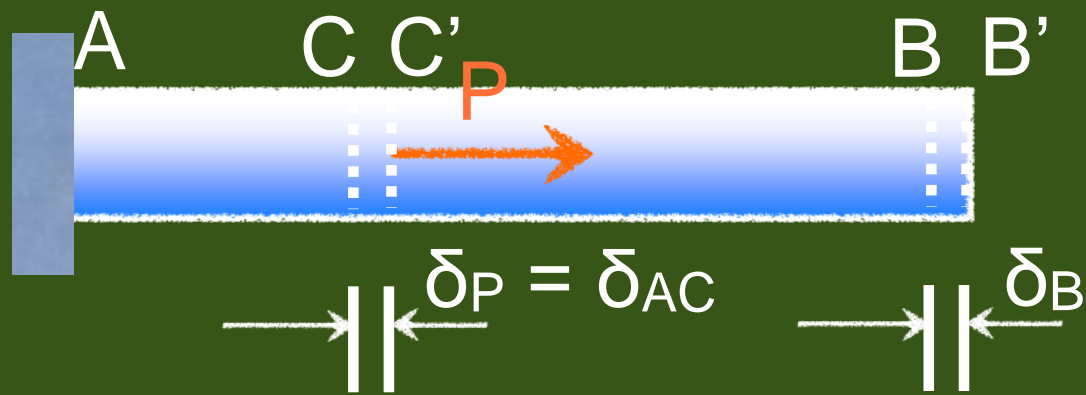


# Carga axial

## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Determinar as reações nos apoios A e B.

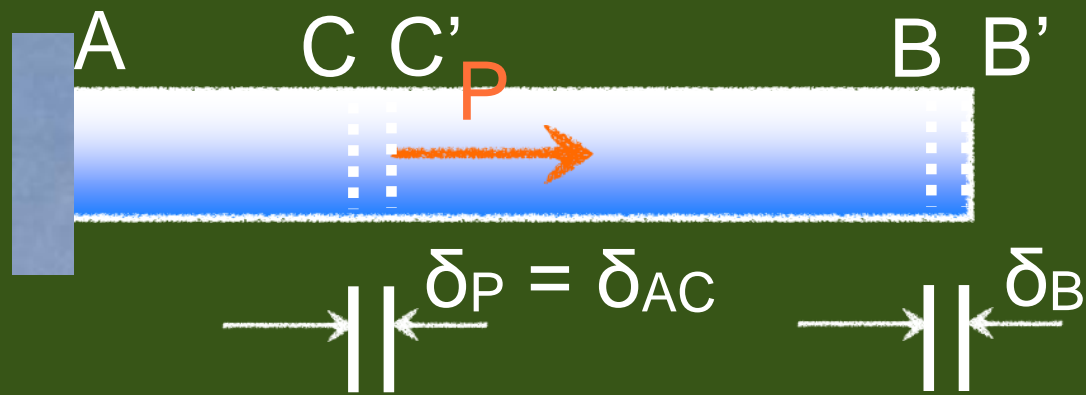


# Carga axial

## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Determinar as reações nos apoios A e B.



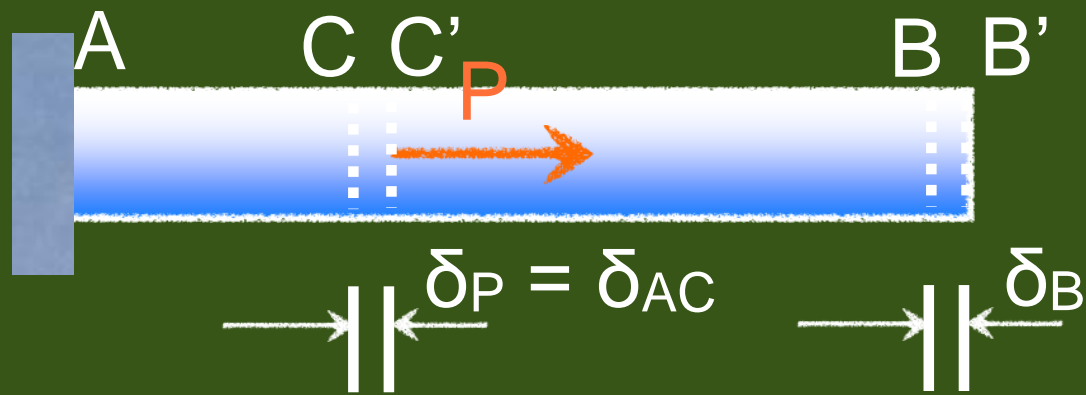
$$\delta_P = \delta_{AC} = \frac{L_{AC}}{EA} P = \delta_B$$

# Carga axial

## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Determinar as reações nos apoios A e B.



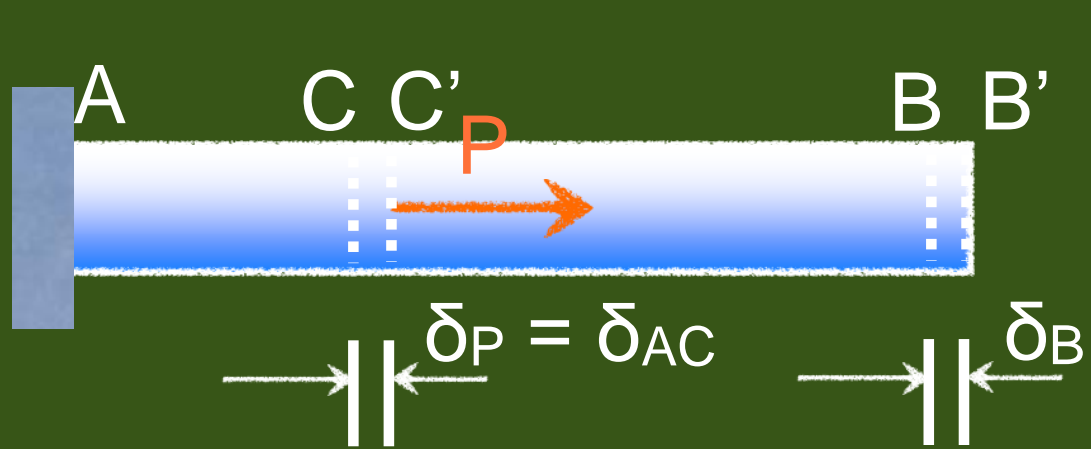
$$\delta_P = \delta_{AC} = \frac{L_{AC}}{EA} P = \delta_B$$

# Carga axial

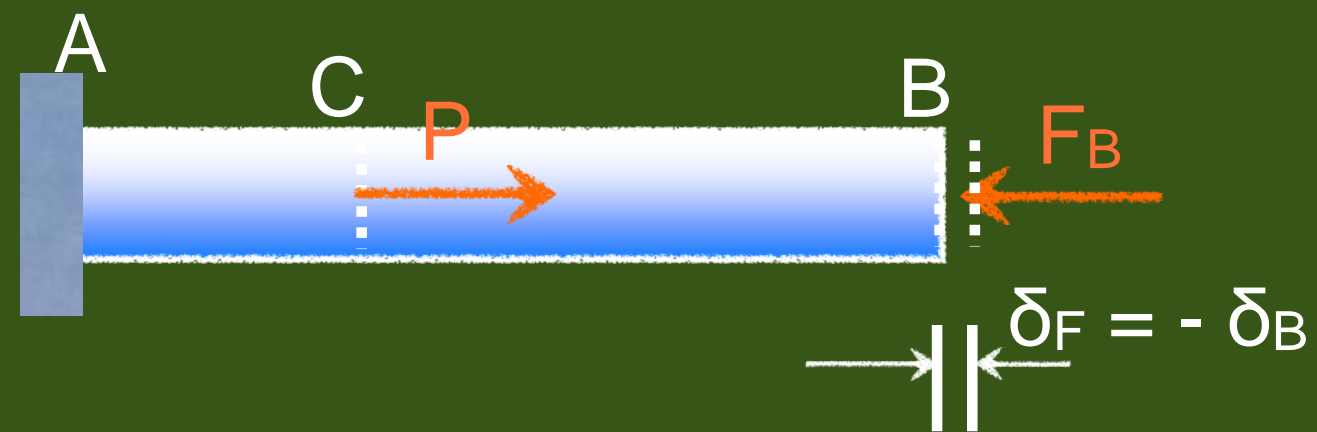
## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Determinar as reações nos apoios A e B.



$$\delta_P = \delta_{AC} = \frac{L_{AC}}{EA} P = \delta_B$$

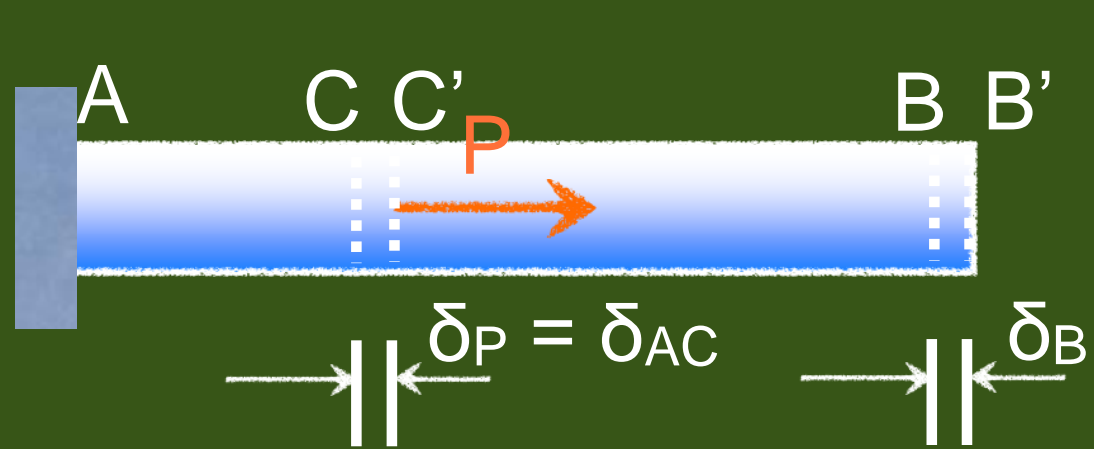


# Carga axial

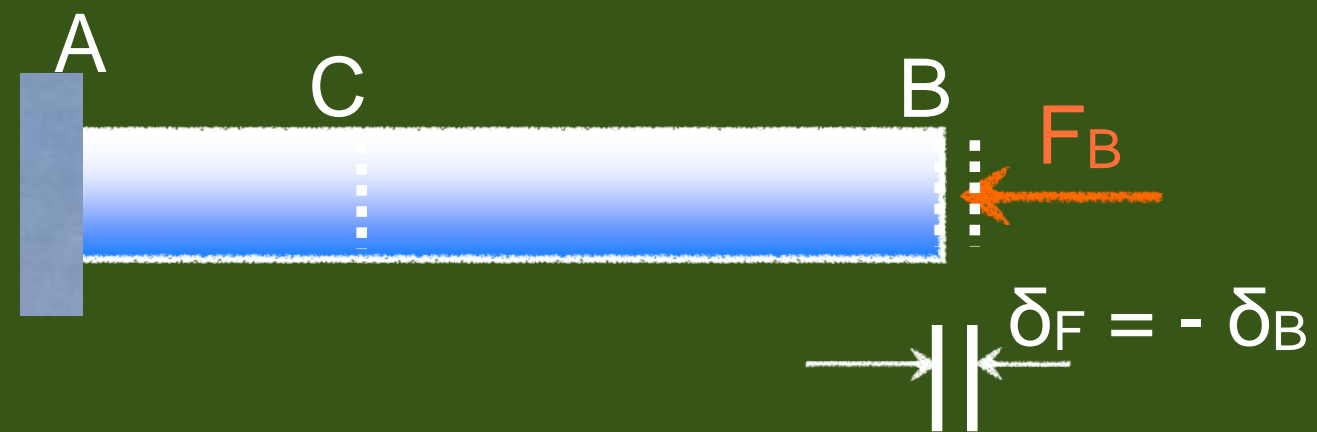
## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Determinar as reações nos apoios A e B.



$$\delta_P = \delta_{AC} = \frac{L_{AC}}{EA} P = \delta_B$$



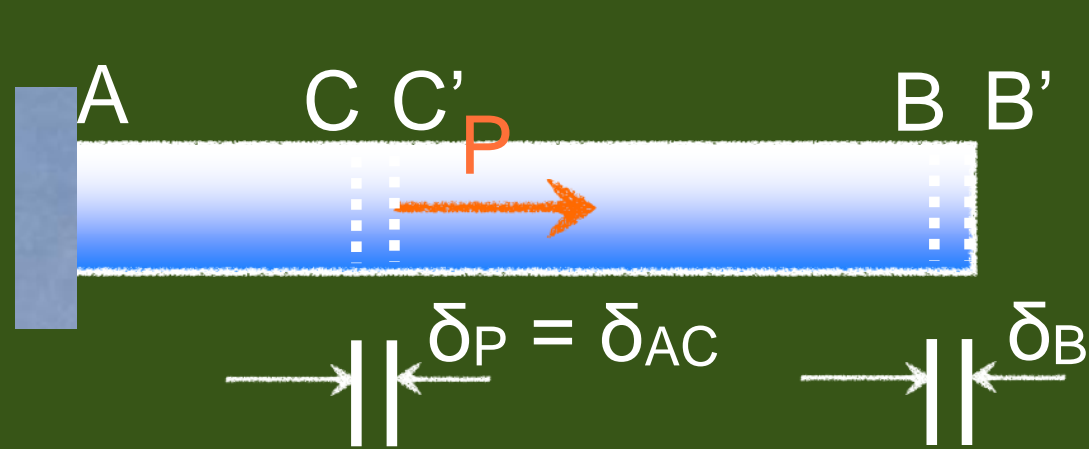
$$F_B = -\frac{EA}{L} \delta_B$$

# Carga axial

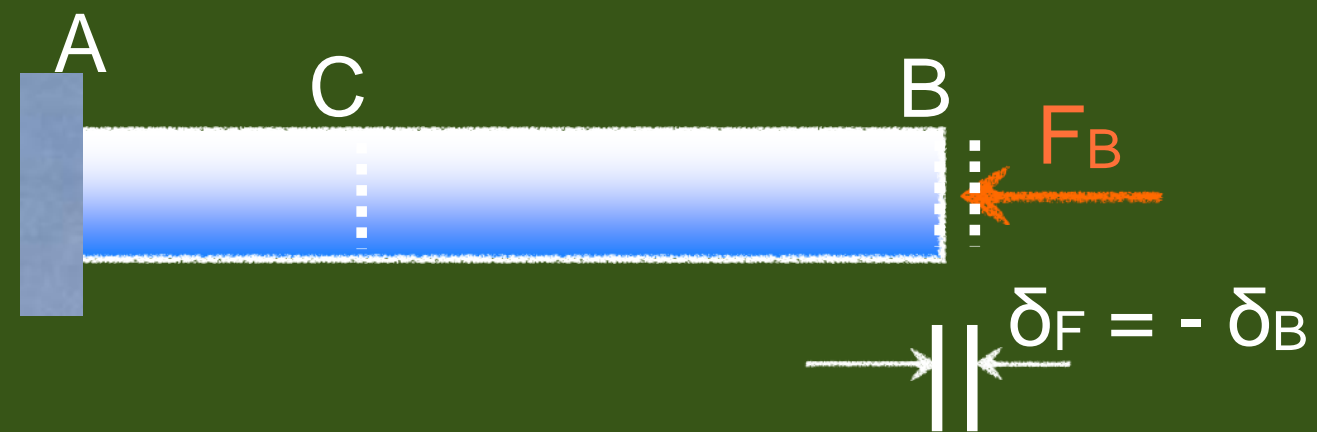
## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Determinar as reações nos apoios A e B.



$$\delta_P = \delta_{AC} = \frac{L_{AC}}{EA} P = \delta_B$$



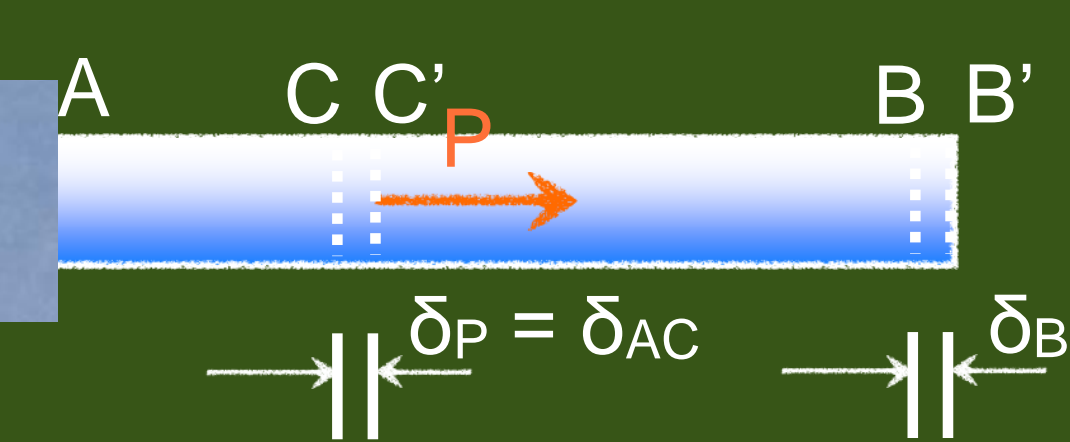
$$F_B = -\frac{EA}{L} \delta_B = -\frac{EA}{L} \frac{L_{AC}}{EA} P$$

# Carga axial

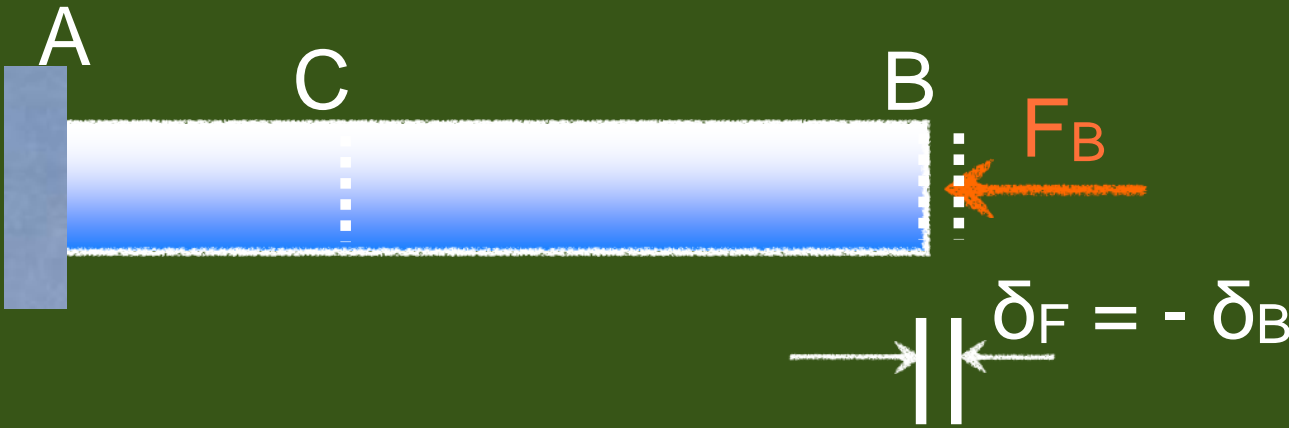
## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Determinar as reações nos apoios A e B.



$$\delta_P = \delta_{AC} = \frac{L_{AC}}{EA} P = \delta_B$$



$$F_B = - \frac{EA}{L} \delta_B = - \frac{EA}{L} \frac{L_{AC}}{EA} P$$

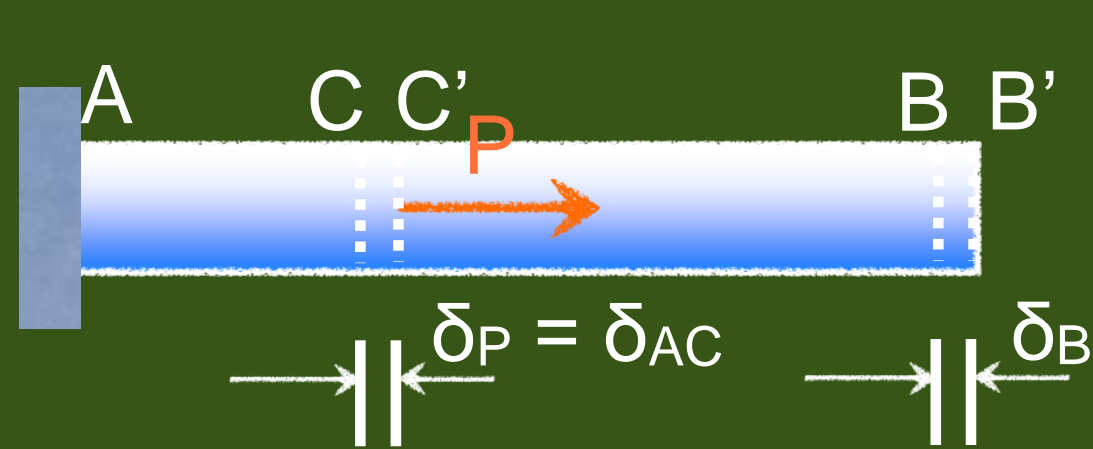


# Carga axial

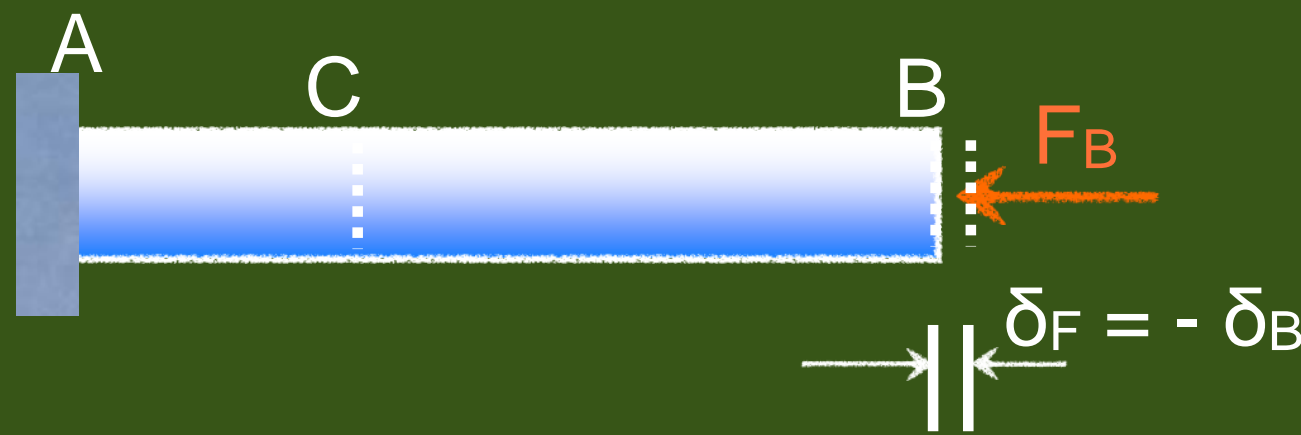
## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Determinar as reações nos apoios A e B.



$$\delta_P = \delta_{AC} = \frac{L_{AC}}{EA} P = \delta_B$$



$$F_B = - \frac{EA}{L} \delta_B = - \frac{EA}{L} \frac{L_{AC}}{EA} P = - \frac{L_{AC}}{L} P$$

# Carga axial

## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Com este resultado e sabendo que  $\sum F_x = 0$  (eq. equilíbrio em x),

# Carga axial

## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Com este resultado e sabendo que  $\sum F_x = 0$  (eq. equilíbrio em x),

$$- \frac{L_{AC}}{L} P + F_A + P = 0$$

# Carga axial

## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Com este resultado e sabendo que  $\sum F_x = 0$  (eq. equilíbrio em x),

$$- \frac{L_{AC}}{L} P + F_A + P = 0 \quad \therefore \quad F_A = \frac{L_{CB}}{L} P$$

# Carga axial

## Método da força - Carga axial

Exemplo:

Com este resultado e sabendo que  $\sum F_x = 0$  (eq. equilíbrio em x),

$$- \frac{L_{AC}}{L} P + F_A + P = 0 \quad \therefore \quad F_A = \frac{L_{CB}}{L} P$$

onde  $L_{CB} = L - L_{AC}$ .

# Carga axial

## Tensão térmica

# Carga axial

## Tensão térmica

A mudança de temperatura causa expansão ou contração dos materiais;

# Carga axial

## Tensão térmica

A mudança de temperatura causa expansão ou contração dos materiais;

A alteração das dimensões pode ser acompanhada por restrições ao movimento do corpo;



# Carga axial

## Tensão térmica

A mudança de temperatura causa expansão ou contração dos materiais;

A alteração das dimensões pode ser acompanhada por restrições ao movimento do corpo;

Restrições implicam em forças aplicadas sobre o corpo que geram tensões;

# Carga axial

## Tensão térmica

A mudança de temperatura causa expansão ou contração dos materiais;

A alteração das dimensões pode ser acompanhada por restrições ao movimento do corpo;

Restrições implicam em forças aplicadas sobre o corpo que geram tensões;

As tensões oriundas da variação de temperatura do corpo se denominam tensões térmicas;

# Carga axial

## Tensão térmica

A mudança de temperatura causa expansão ou contração dos materiais;

A alteração das dimensões pode ser acompanhada por restrições ao movimento do corpo;

Restrições implicam em forças aplicadas sobre o corpo que geram tensões;

As tensões oriundas da variação de temperatura do corpo se denominam tensões térmicas;

A expansão, ou a contração das dimensões do corpo está diretamente relacionada à variação da temperatura que o corpo sofreu.

# Carga axial

## Tensão térmica

A mudança de temperatura causa expansão ou contração dos materiais;

A alteração das dimensões pode ser acompanhada por restrições ao movimento do corpo;

Restrições implicam em forças aplicadas sobre o corpo que geram tensões;

As tensões oriundas da variação de temperatura do corpo se denominam tensões térmicas;

A expansão, ou a contração das dimensões do corpo está diretamente relacionada à variação da temperatura que o corpo sofreu.

$$\delta_T = \alpha L (T_f - T_i)$$

# Carga axial

## Tensão térmica

A mudança de temperatura causa expansão ou contração dos materiais;

A alteração das dimensões pode ser acompanhada por restrições ao movimento do corpo;

Restrições implicam em forças aplicadas sobre o corpo que geram tensões;

As tensões oriundas da variação de temperatura do corpo se denominam tensões térmicas;

A expansão, ou a contração das dimensões do corpo está diretamente relacionada à variação da temperatura que o corpo sofreu.

$$\delta_T = \alpha L (T_f - T_i)$$

onde  $\alpha \equiv$  coeficiente linear de expansão térmica (unid.: 1/°C, 1/K, ou 1/°F).

# Carga axial

## Tensão térmica

A mudança de temperatura causa expansão ou contração dos materiais;

A alteração das dimensões pode ser acompanhada por restrições ao movimento do corpo;

Restrições implicam em forças aplicadas sobre o corpo que geram tensões;

As tensões oriundas da variação de temperatura do corpo se denominam tensões térmicas;

A expansão, ou a contração das dimensões do corpo está diretamente relacionada à variação da temperatura que o corpo sofreu.

$$\delta_T = \alpha L (T_f - T_i)$$

onde  $\alpha \equiv$  coeficiente linear de expansão térmica (unid.:  $1/^\circ\text{C}$ ,  $1/\text{K}$ , ou  $1/^\circ\text{F}$ ).

propriedade  
do material!!!

# Carga axial

## Tensão térmica

A mudança de temperatura causa expansão ou contração dos materiais;

A alteração das dimensões pode ser acompanhada por restrições ao movimento do corpo;

Restrições implicam em forças aplicadas sobre o corpo que geram tensões;

As tensões oriundas da variação de temperatura do corpo se denominam tensões térmicas;

A expansão, ou a contração das dimensões do corpo está diretamente relacionada à variação da temperatura que o corpo sofreu.

$$\delta_T = \alpha L (T_f - T_i)$$

onde  $\alpha \equiv$  coeficiente linear de expansão térmica (unid.:  $1/^\circ\text{C}$ ,  $1/\text{K}$ , ou  $1/^\circ\text{F}$ ).

$T_i \equiv$  temperatura inicial do corpo

# Carga axial

## Tensão térmica

A mudança de temperatura causa expansão ou contração dos materiais;

A alteração das dimensões pode ser acompanhada por restrições ao movimento do corpo;

Restrições implicam em forças aplicadas sobre o corpo que geram tensões;

As tensões oriundas da variação de temperatura do corpo se denominam tensões térmicas;

A expansão, ou a contração das dimensões do corpo está diretamente relacionada à variação da temperatura que o corpo sofreu.

$$\delta_T = \alpha L (T_f - T_i)$$

onde  $\alpha \equiv$  coeficiente linear de expansão térmica (unid.:  $1/^\circ\text{C}$ ,  $1/\text{K}$ , ou  $1/^\circ\text{F}$ ).

$T_i \equiv$  temperatura inicial do corpo

$T_f \equiv$  temperatura final do corpo



# Carga axial

## Tensão térmica

Se a variação de temperatura não é uniforme ao longo do corpo

# Carga axial

## Tensão térmica

Se a variação de temperatura não é uniforme ao longo do corpo

$$\Delta T = (T_f - T_i) = \Delta T(x)$$

# Carga axial

## Tensão térmica

Se a variação de temperatura não é uniforme ao longo do corpo

$$\Delta T = (T_f - T_i) = \Delta T(x)$$

e

$$\delta_T = \int_0^L \alpha (T_f - T_i) dx$$

# Carga axial

## Tensão térmica

Quando o corpo não sofre restrições à expansão, ou à contração, o deslocamento devido à variação de temperatura é livre.

# Carga axial

## Tensão térmica

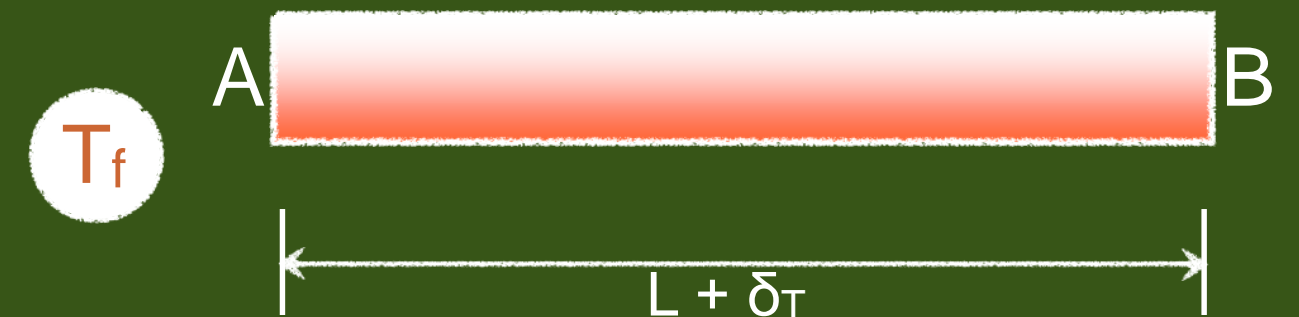
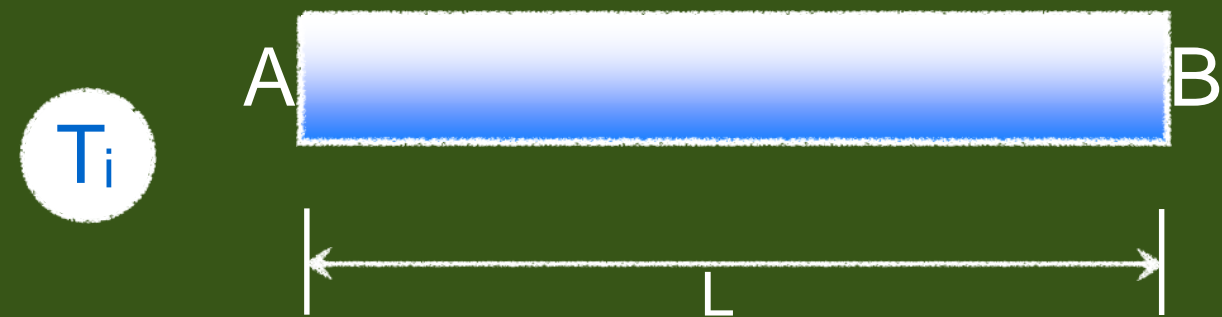
Quando o corpo não sofre restrições à expansão, ou à contração, o deslocamento devido à variação de temperatura é livre.



# Carga axial

## Tensão térmica

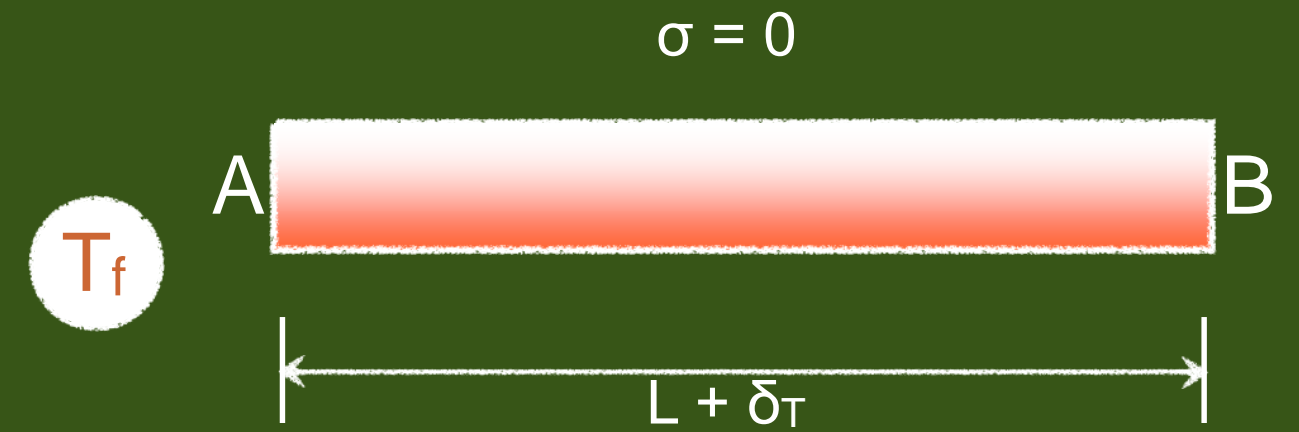
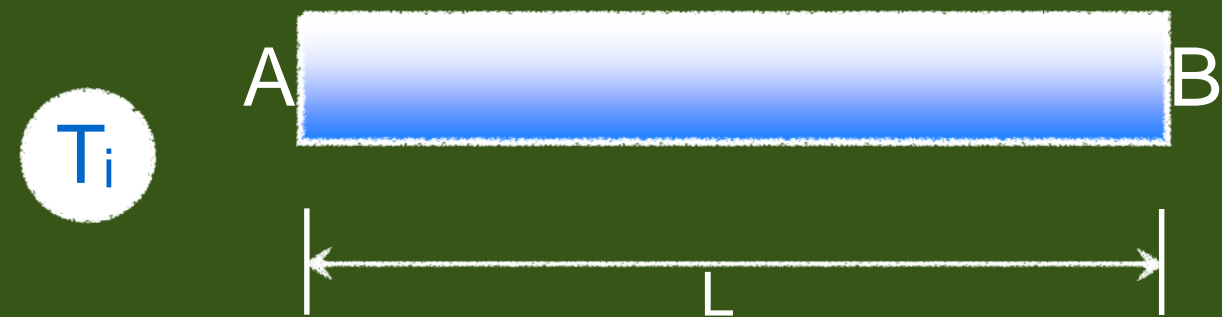
Quando o corpo não sofre restrições à expansão, ou à contração, o deslocamento devido à variação de temperatura é livre.



# Carga axial

## Tensão térmica

Quando o corpo não sofre restrições à expansão, ou à contração, o deslocamento devido à variação de temperatura é livre.



# Carga axial

## Tensão térmica

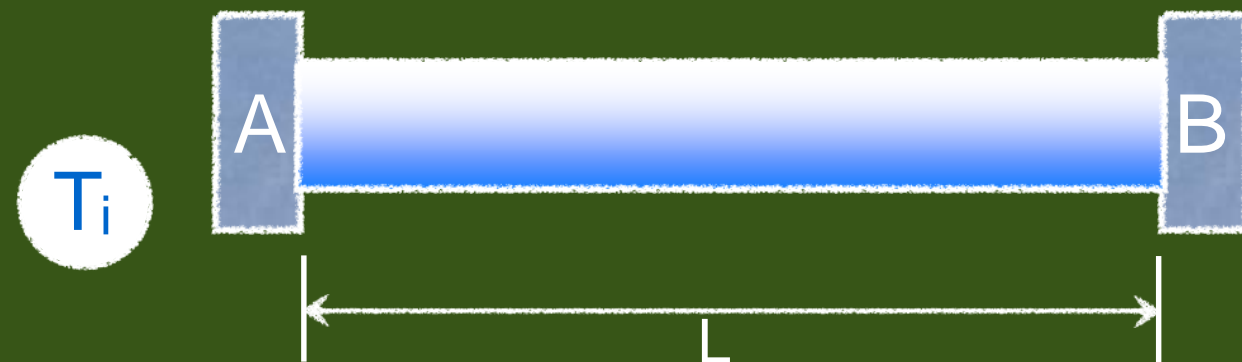
Mas, se o corpo tem uma restrição ao movimento, então surge, desta restrição, uma força que resulta em uma tensão.



# Carga axial

## Tensão térmica

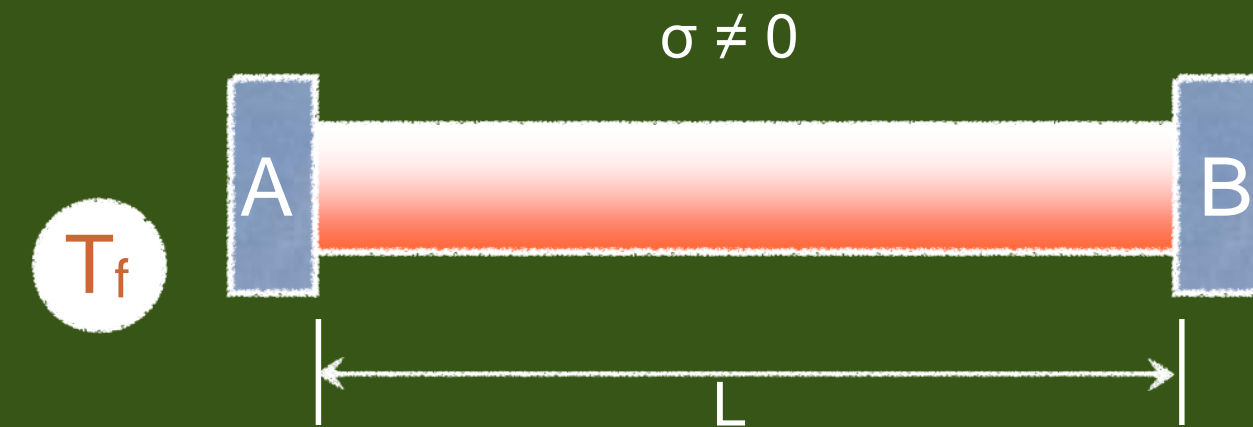
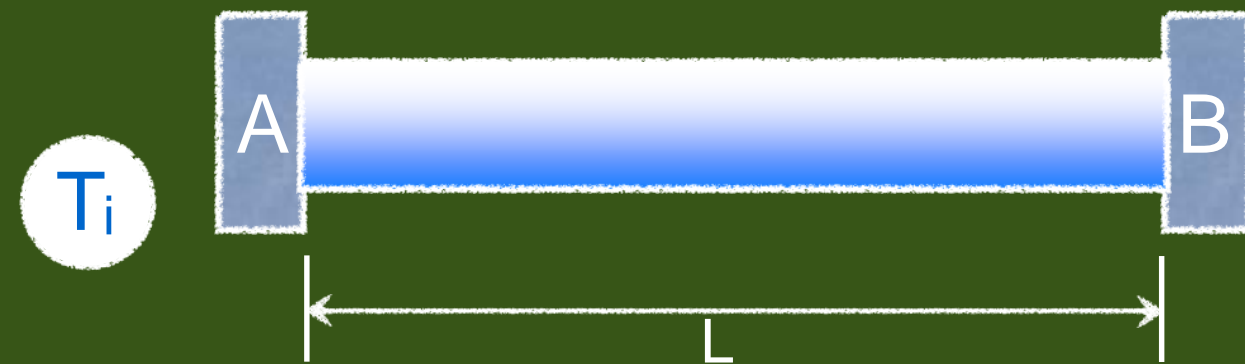
Mas, se o corpo tem uma restrição ao movimento, então surge, desta restrição, uma força que resulta em uma tensão.



# Carga axial

## Tensão térmica

Mas, se o corpo tem uma restrição ao movimento, então surge, desta restrição, uma força que resulta em uma tensão.



# Carga axial

## Tensão térmica

O problema é tratado como estaticamente indeterminado, calculando-se a força necessária para que o corpo expandido, ou contraído, volte à sua configuração original.

# Carga axial

## Tensão térmica

O problema é tratado como estaticamente indeterminado, calculando-se a força necessária para que o corpo expandido, ou contraído, volte à sua configuração original.

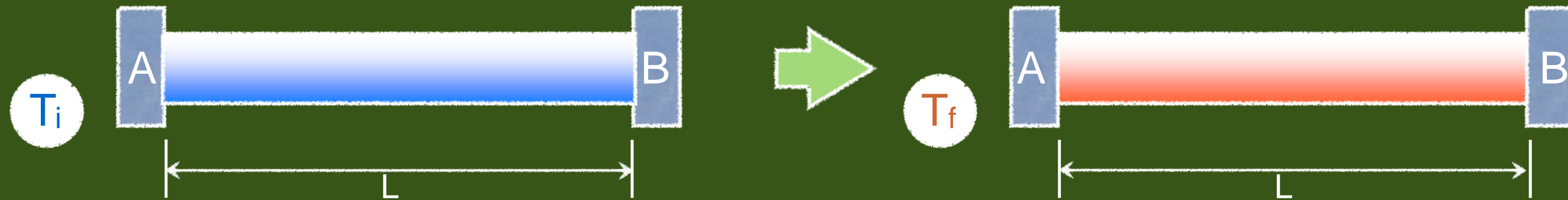
A diferença é que as forças surgem em função da variação da temperatura.

# Carga axial

## Tensão térmica

O problema é tratado como estaticamente indeterminado, calculando-se a força necessária para que o corpo expandido, ou contraído, volte à sua configuração original.

A diferença é que as forças surgem em função da variação da temperatura.



# Carga axial

## Tensão térmica

O problema é tratado como estaticamente indeterminado, calculando-se a força necessária para que o corpo expandido, ou contraído, volte à sua configuração original.

A diferença é que as forças surgem em função da variação da temperatura.

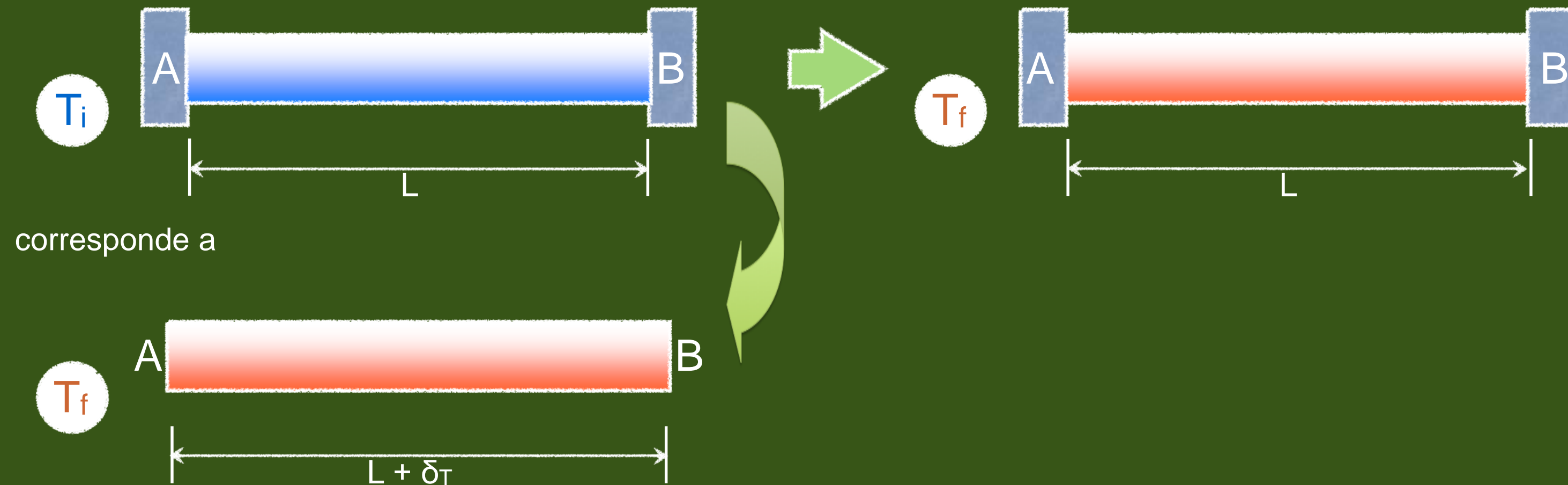


# Carga axial

## Tensão térmica

O problema é tratado como estaticamente indeterminado, calculando-se a força necessária para que o corpo expandido, ou contraído, volte à sua configuração original.

A diferença é que as forças surgem em função da variação da temperatura.

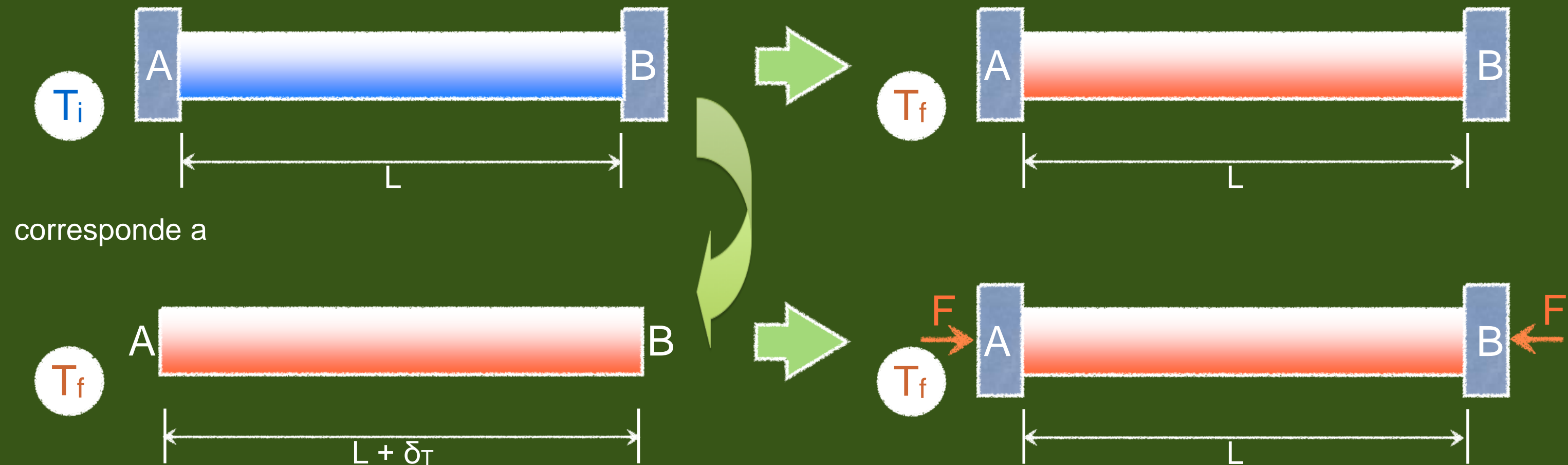


# Carga axial

## Tensão térmica

O problema é tratado como estaticamente indeterminado, calculando-se a força necessária para que o corpo expandido, ou contraído, volte à sua configuração original.

A diferença é que as forças surgem em função da variação da temperatura.



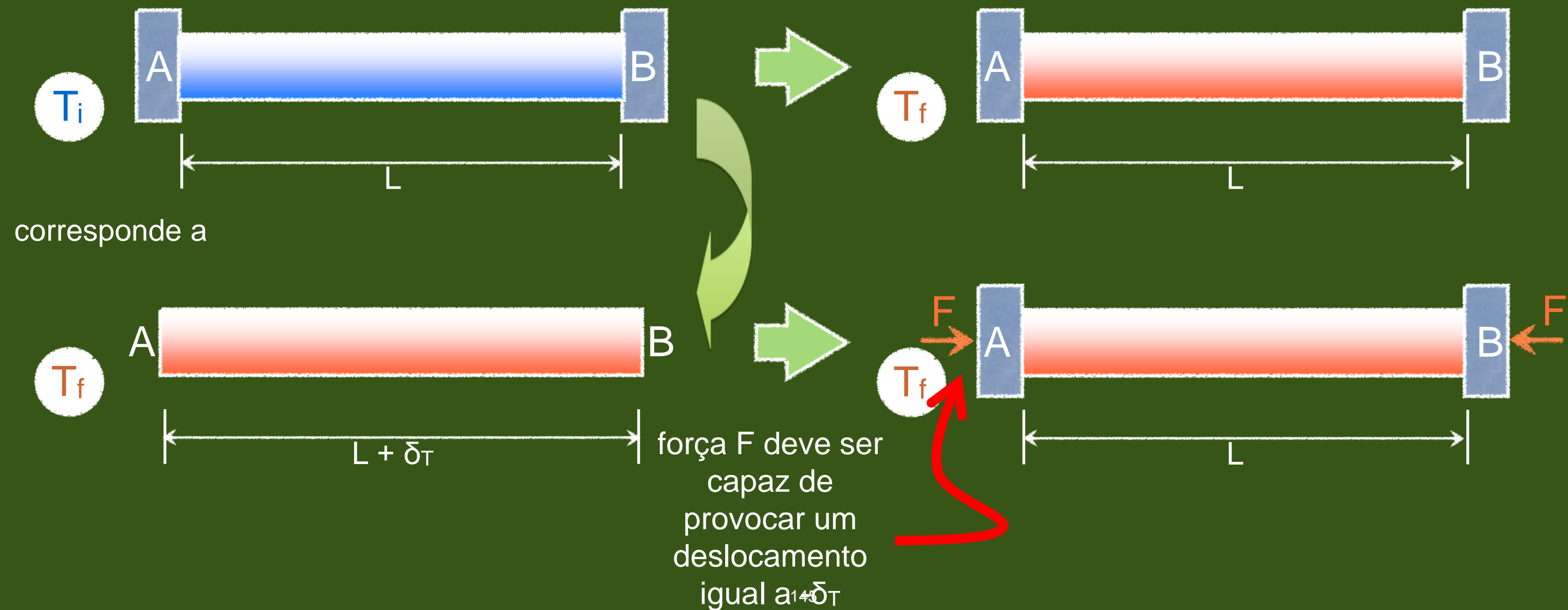


# Carga axial

## Tensão térmica

O problema é tratado como estaticamente indeterminado, calculando-se a força necessária para que o corpo expandido, ou contraído, volte à sua configuração original.

A diferença é que as forças surgem em função da variação da temperatura.

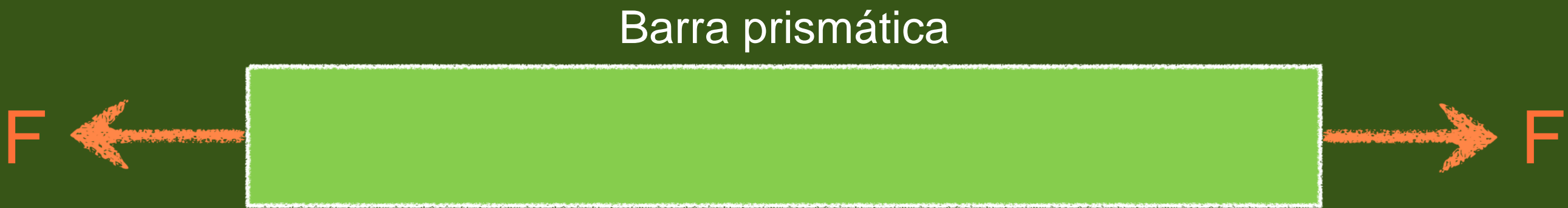


# Carga axial

## Concentração de tensões

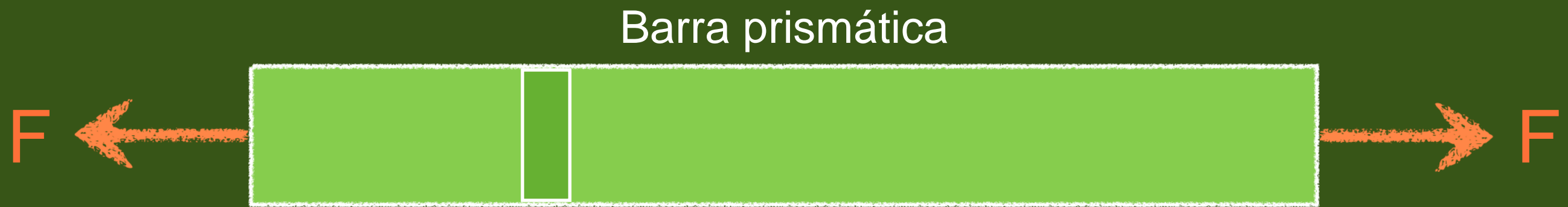
# Carga axial

Concentração de tensões



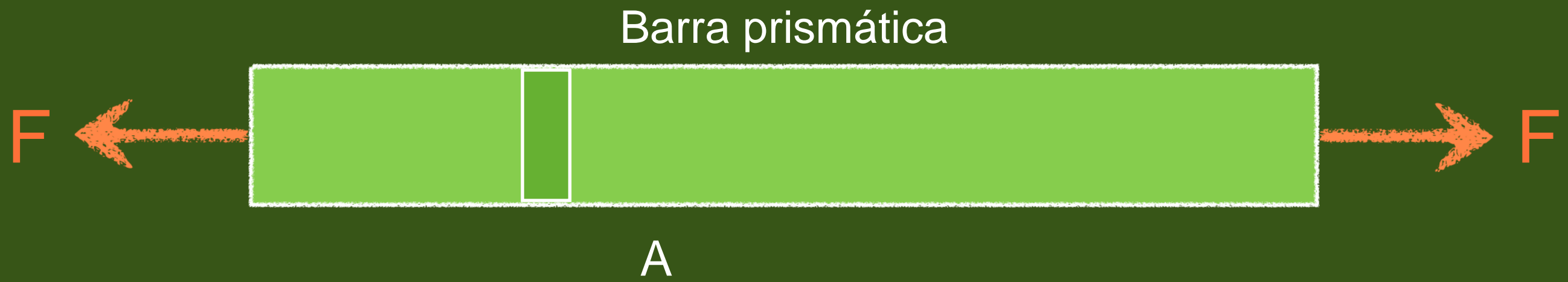
# Carga axial

Concentração de tensões



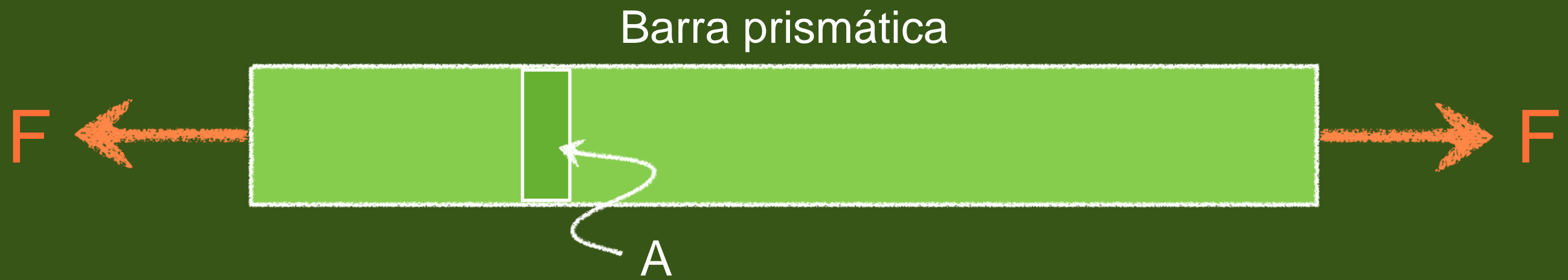
# Carga axial

Concentração de tensões



# Carga axial

Concentração de tensões



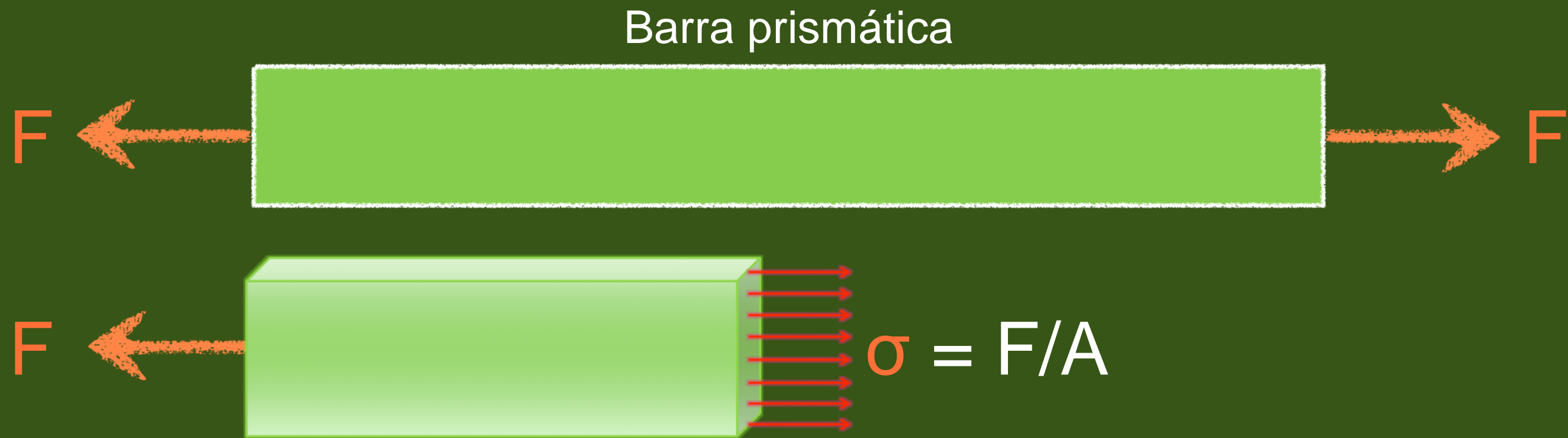
# Carga axial

## Concentração de tensões



# Carga axial

## Concentração de tensões





# Carga axial

Concentração de tensões



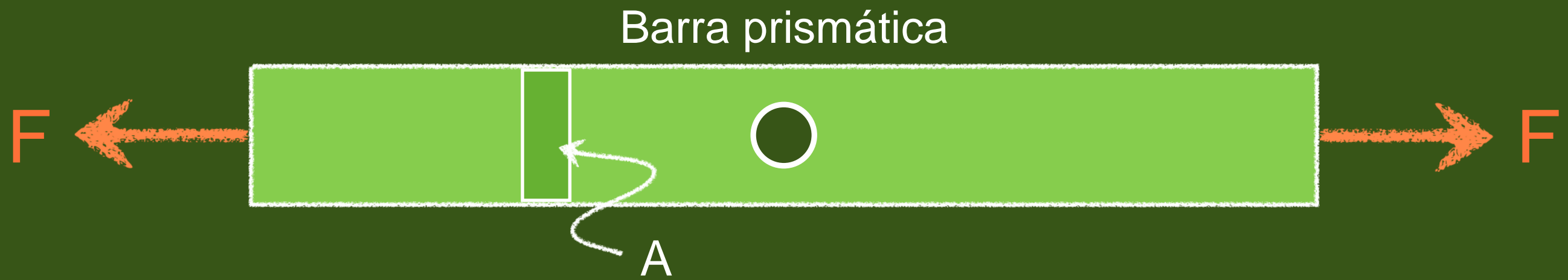
# Carga axial

Concentração de tensões



# Carga axial

Concentração de tensões



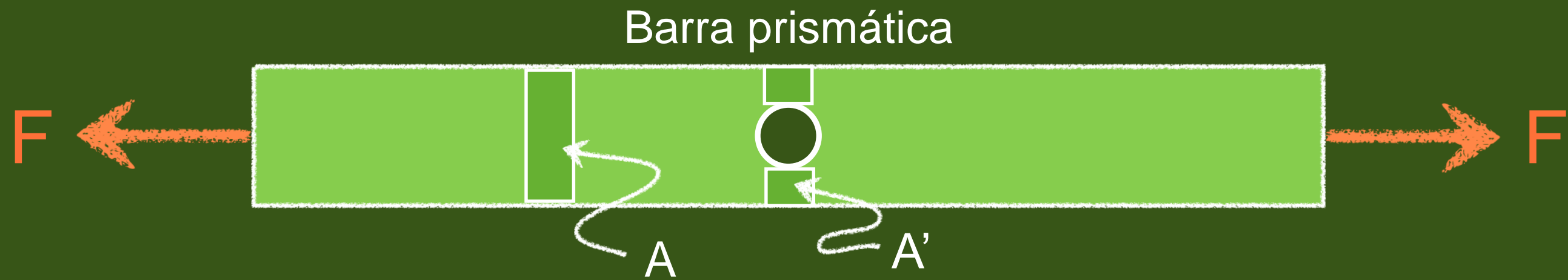
# Carga axial

Concentração de tensões



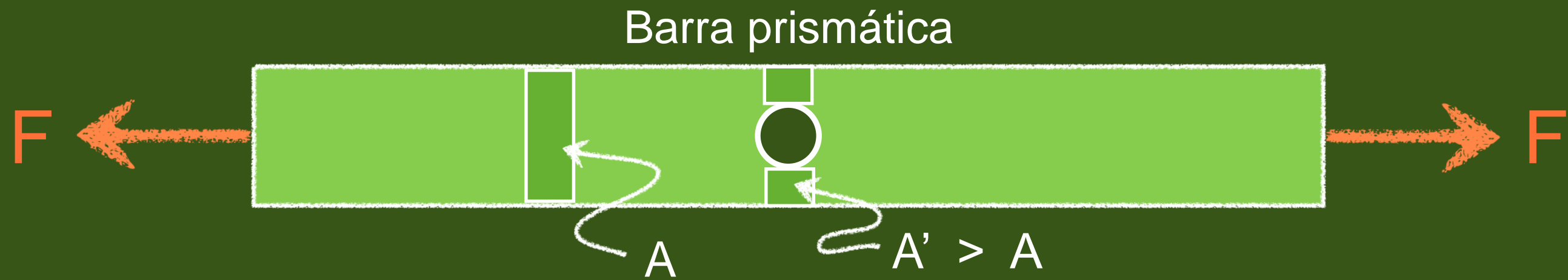
# Carga axial

## Concentração de tensões



# Carga axial

## Concentração de tensões



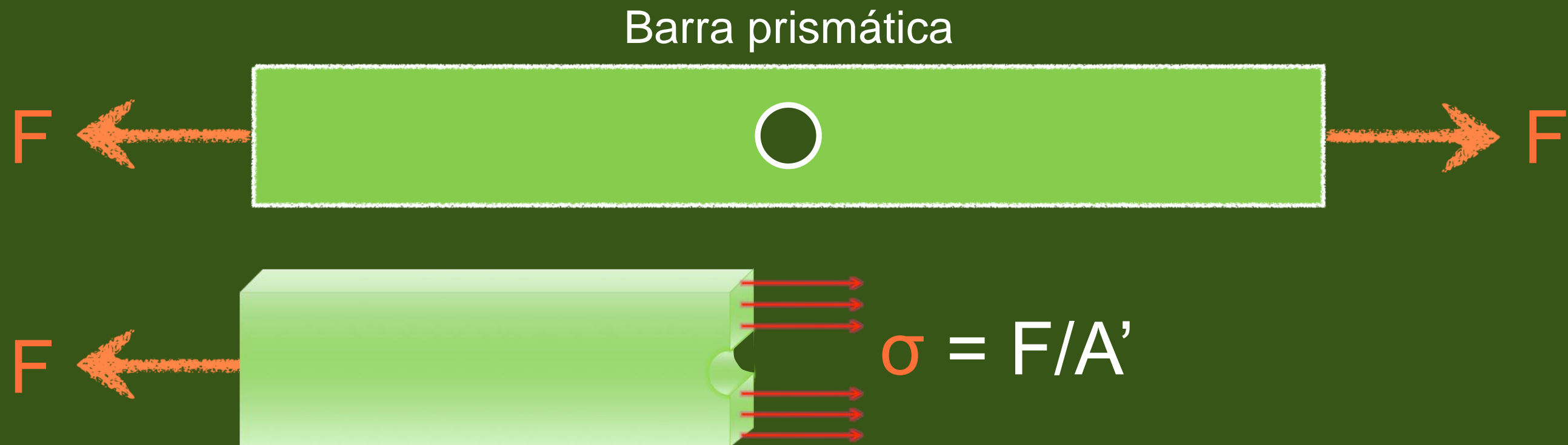
# Carga axial

Concentração de tensões



# Carga axial

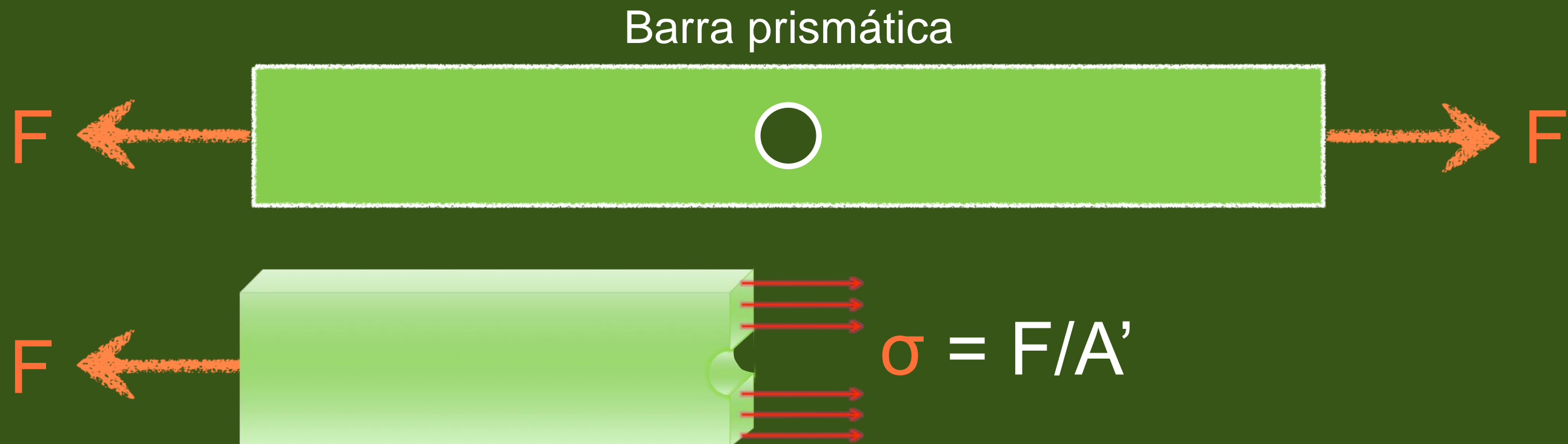
## Concentração de tensões





# Carga axial

## Concentração de tensões



A tensão calculada é a tensão média!...

# Carga axial

## Concentração de tensões

A distribuição da tensão é mais complexa.

# Carga axial

## Concentração de tensões

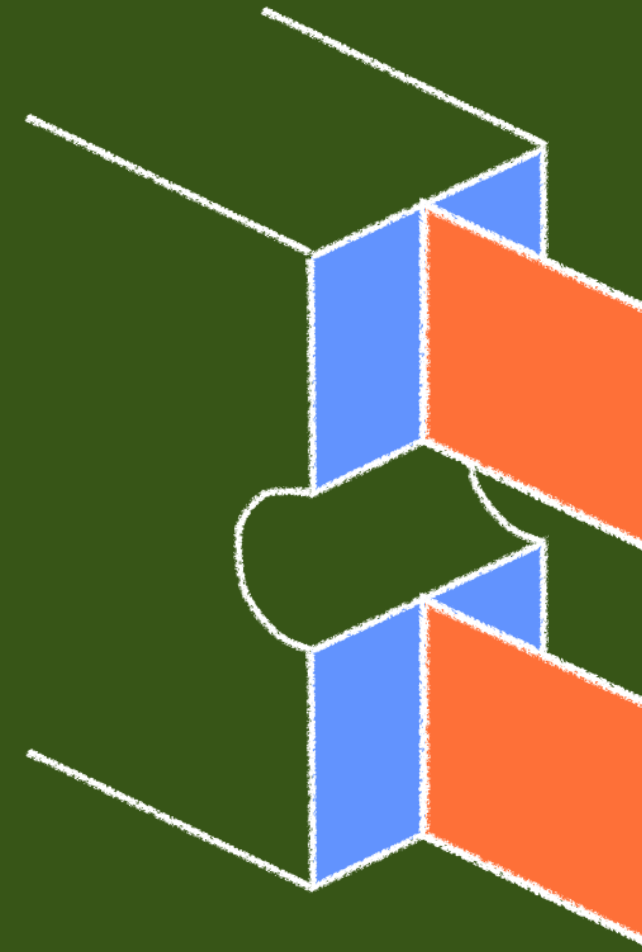
A distribuição da tensão é mais complexa.



# Carga axial

## Concentração de tensões

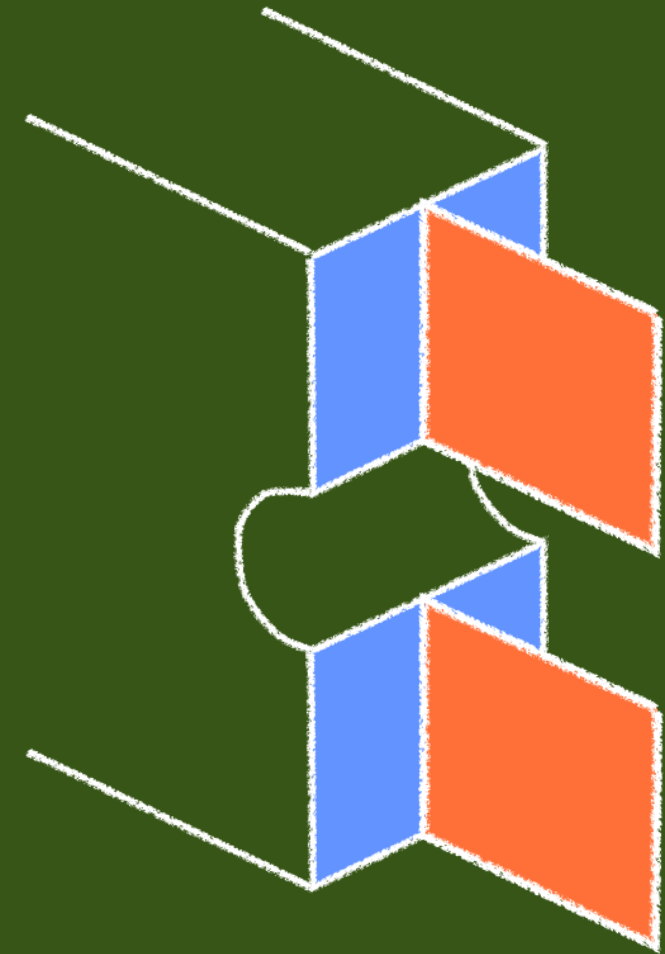
A distribuição da tensão é mais complexa.



# Carga axial

## Concentração de tensões

A distribuição da tensão é mais complexa.

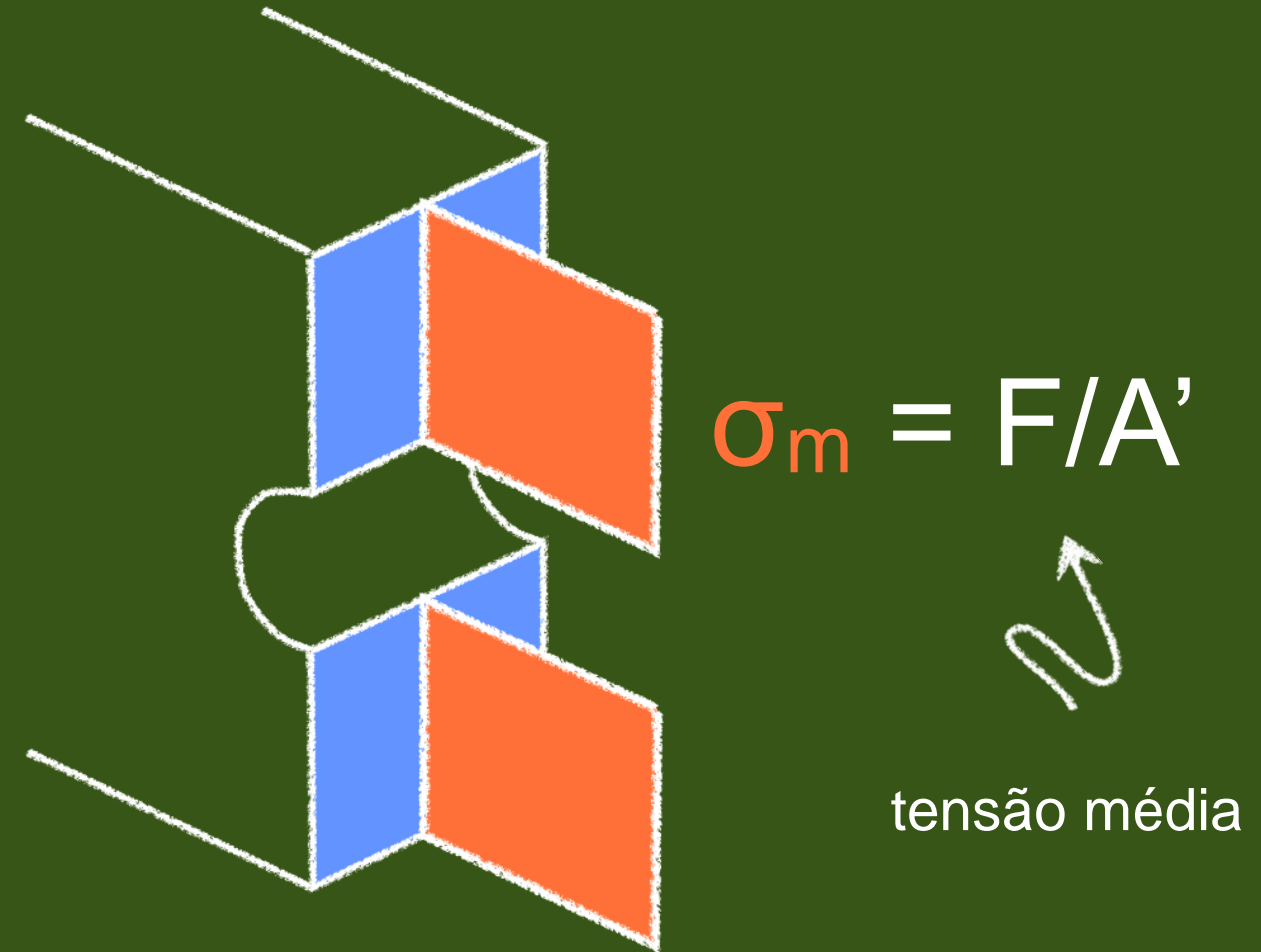


$$\sigma_m = F/A'$$

# Carga axial

## Concentração de tensões

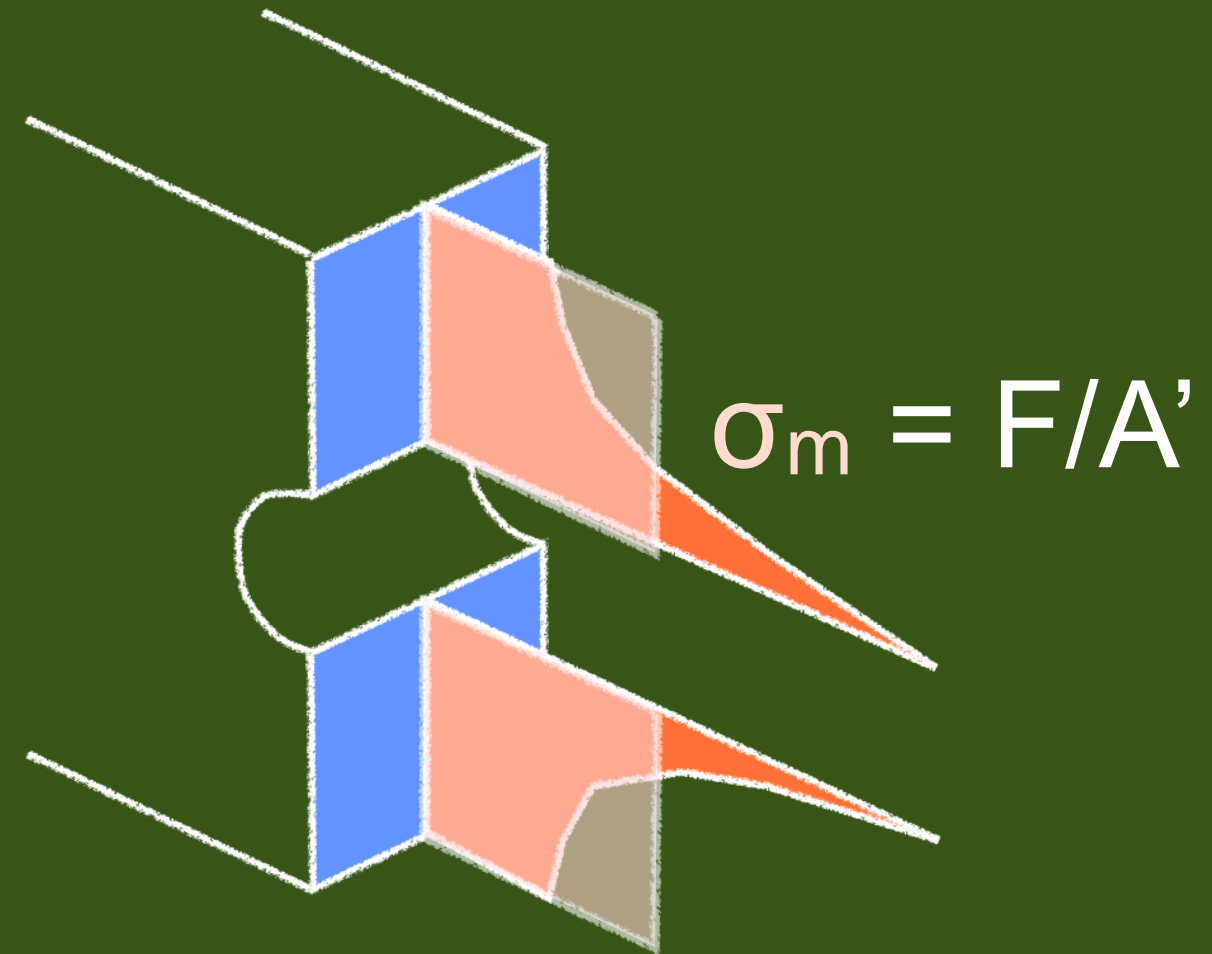
A distribuição da tensão é mais complexa.



# Carga axial

## Concentração de tensões

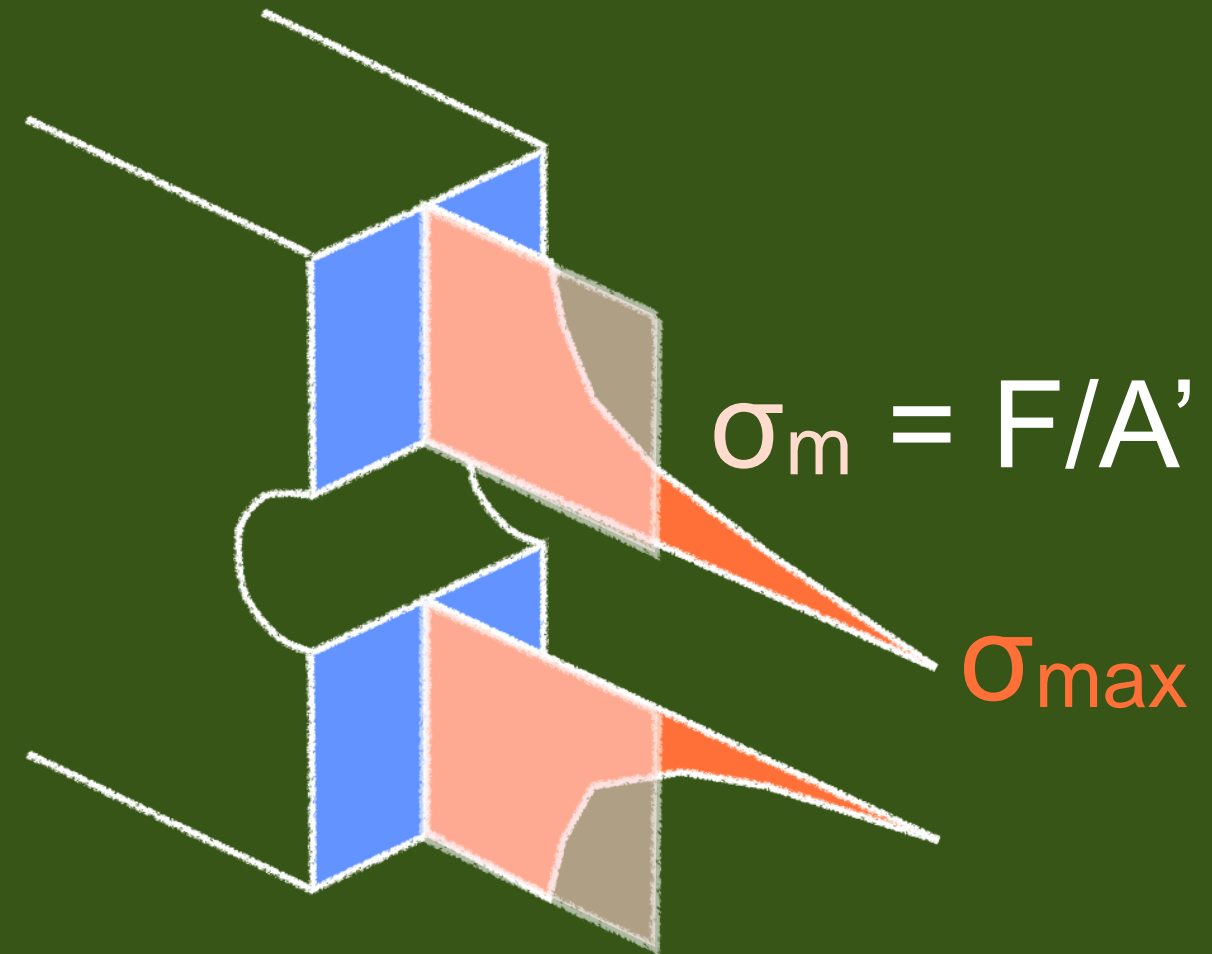
A distribuição da tensão é mais complexa.



# Carga axial

## Concentração de tensões

A distribuição da tensão é mais complexa.



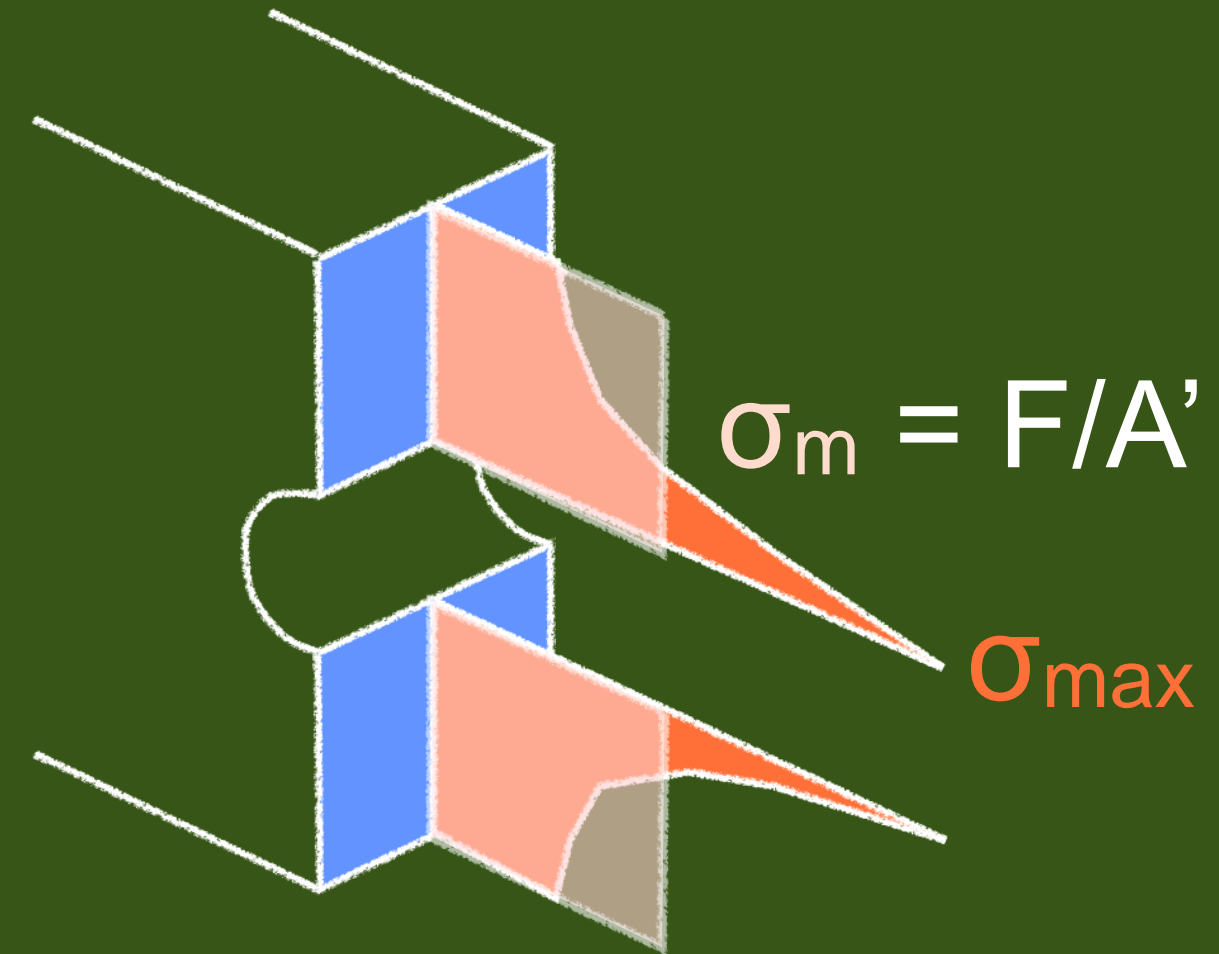


# Carga axial

## Concentração de tensões

A distribuição da tensão é mais complexa.

A relação entre a tensão máxima e a tensão média é



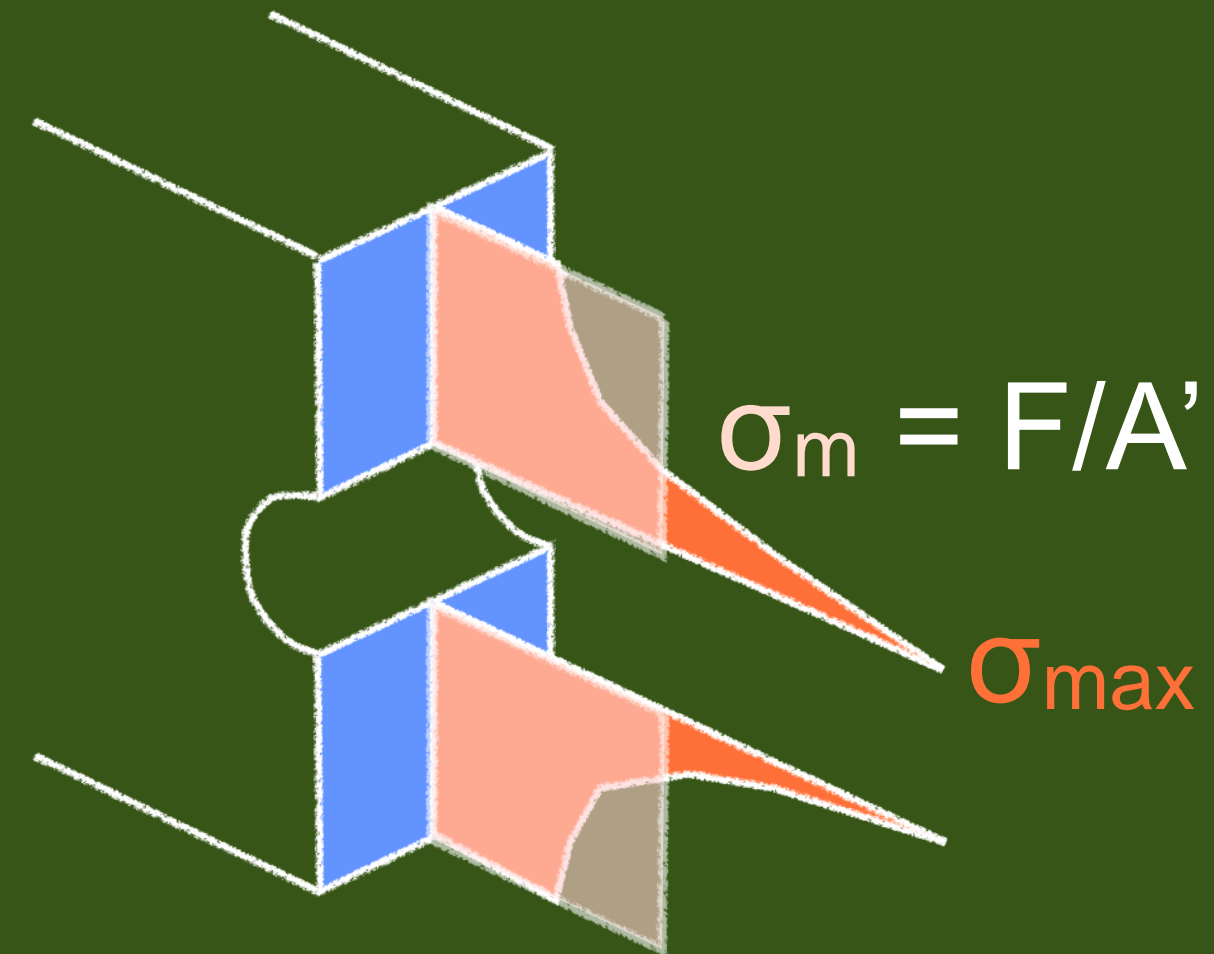
# Carga axial

## Concentração de tensões

A distribuição da tensão é mais complexa.

A relação entre a tensão máxima e a tensão média é

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m}$$



# Carga axial

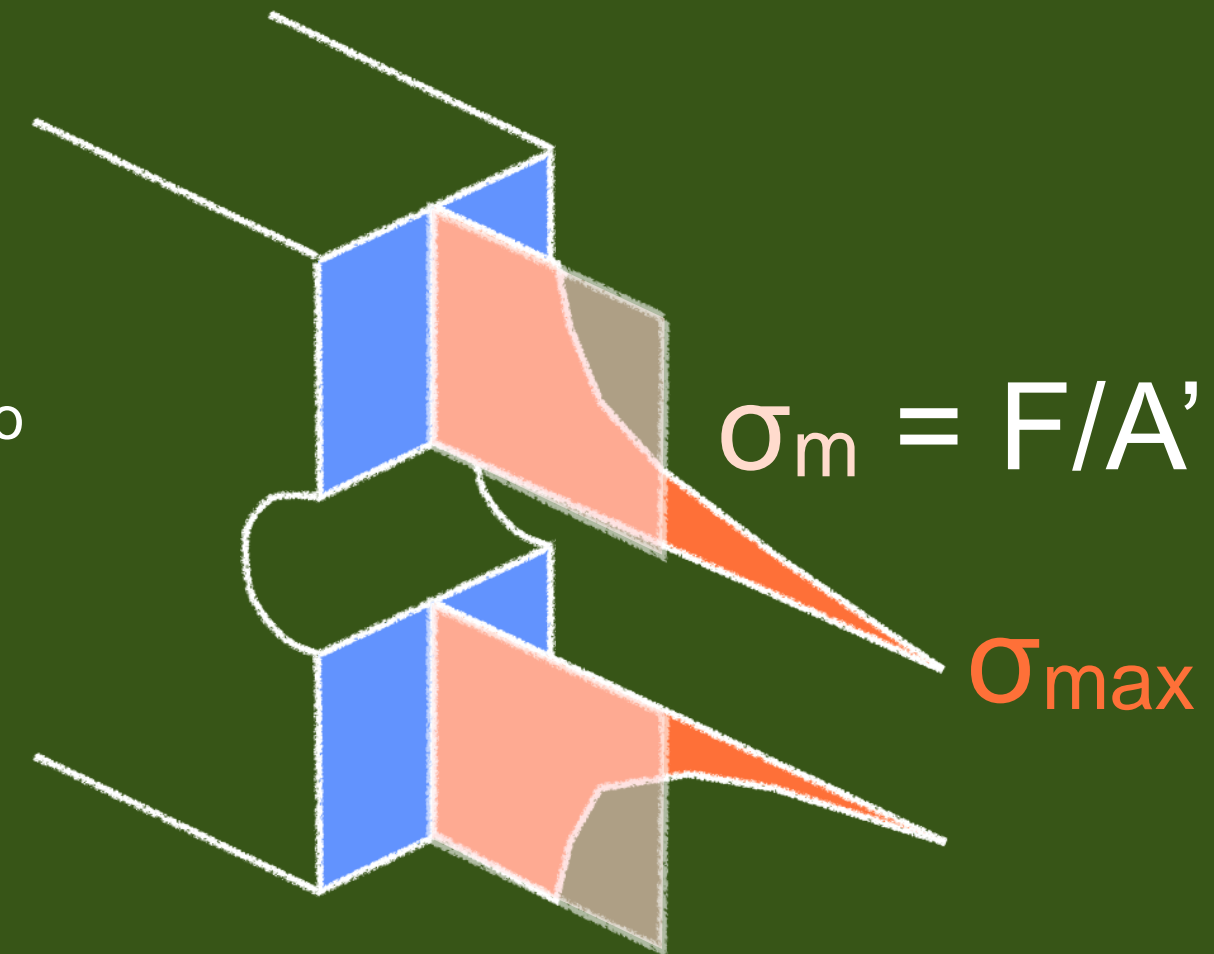
## Concentração de tensões

A distribuição da tensão é mais complexa.

A relação entre a tensão máxima e a tensão média é

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m}$$

fator de concentração  
de tensão



# Carga axial

## Concentração de tensões

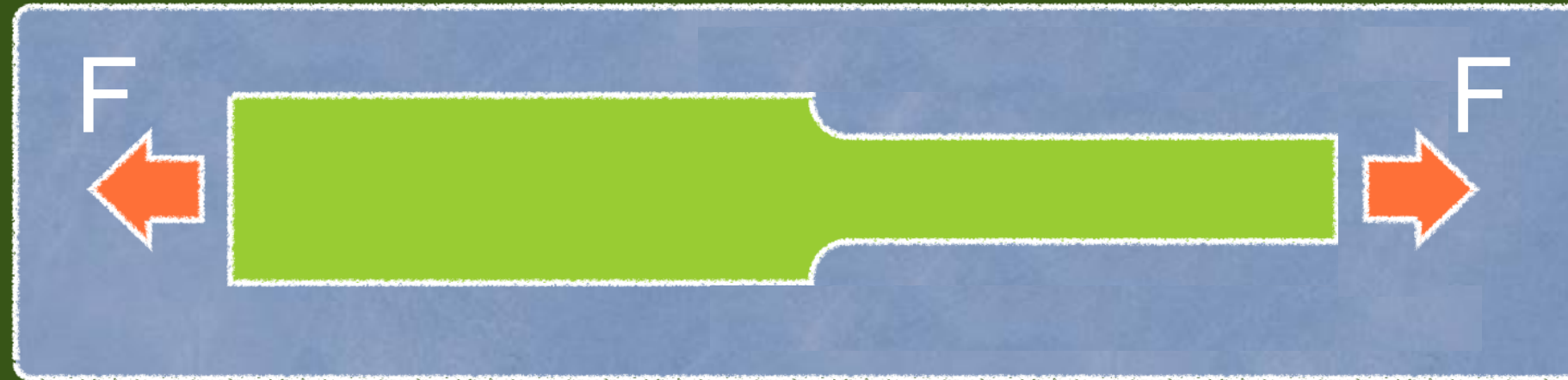
A distribuição de tensões sobre a seção da peça é tal que a força total é calculada por

$$F = \iint \sigma(y, z) \, dz \, dy = \int_A \sigma(A) \, dA$$

# Carga axial

## Concentração de tensões

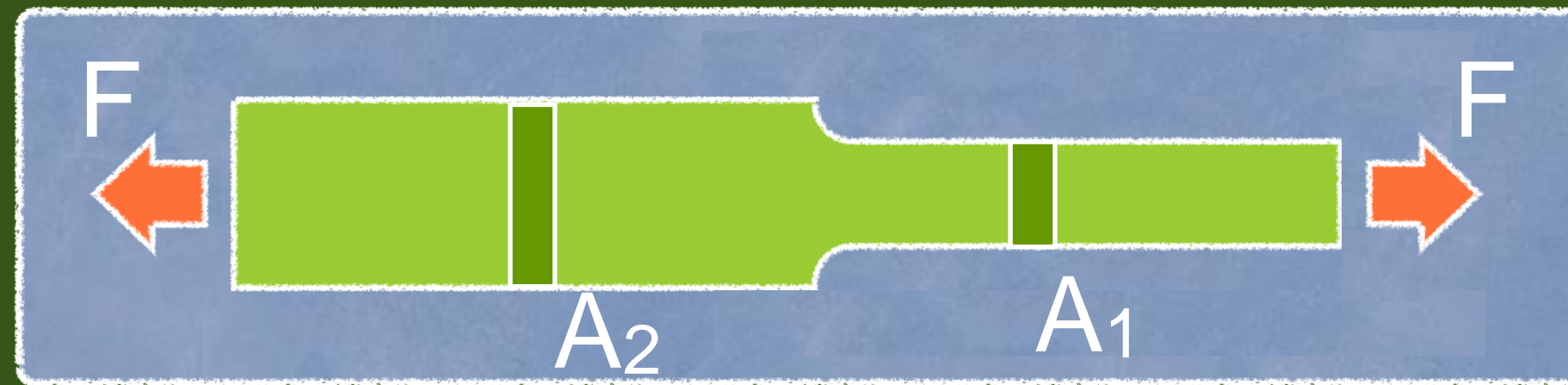
Exemplo:



# Carga axial

## Concentração de tensões

Exemplo:

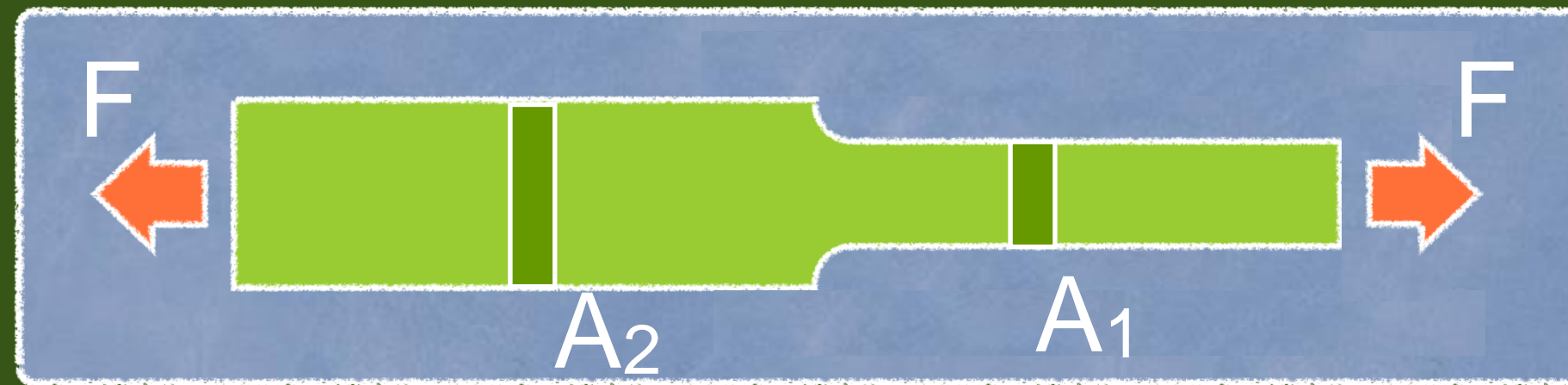


duas seções

# Carga axial

## Concentração de tensões

Exemplo:



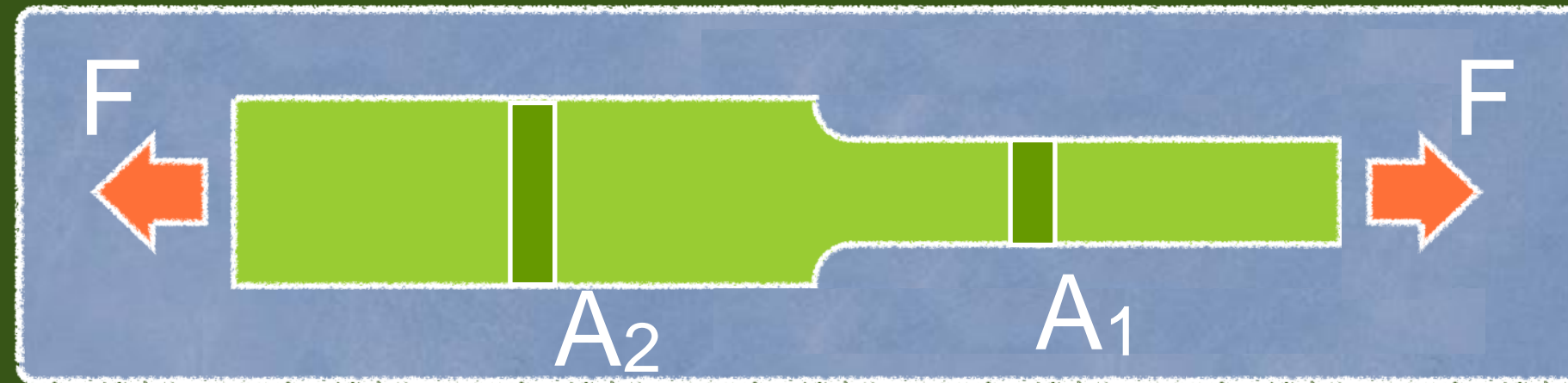
$$A_1 < A_2$$

duas seções

# Carga axial

## Concentração de tensões

Exemplo:



$$A_1 < A_2$$

$$\sigma_m = F/A_1$$



# Carga axial

## Concentração de tensões

Exemplo:



$$A_1 < A_2$$

$$\sigma_m = F/A_1$$

# Carga axial

## Concentração de tensões

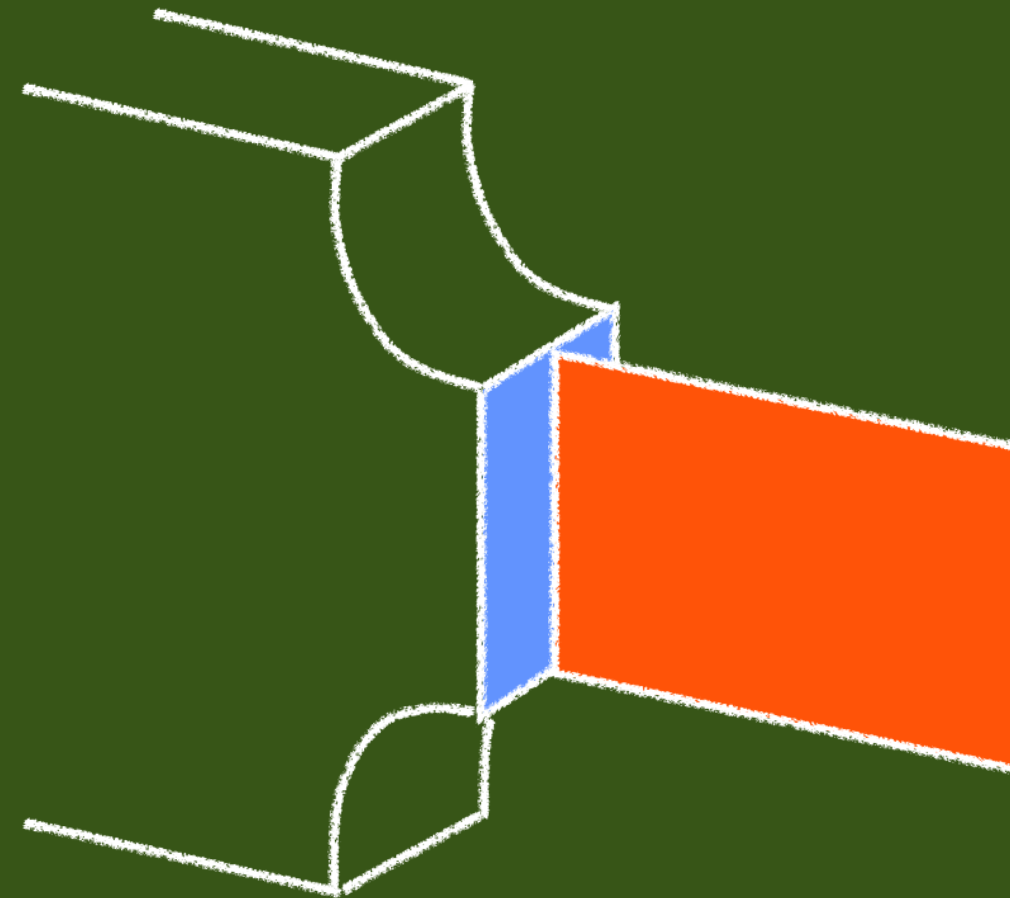
Exemplo:



# Carga axial

## Concentração de tensões

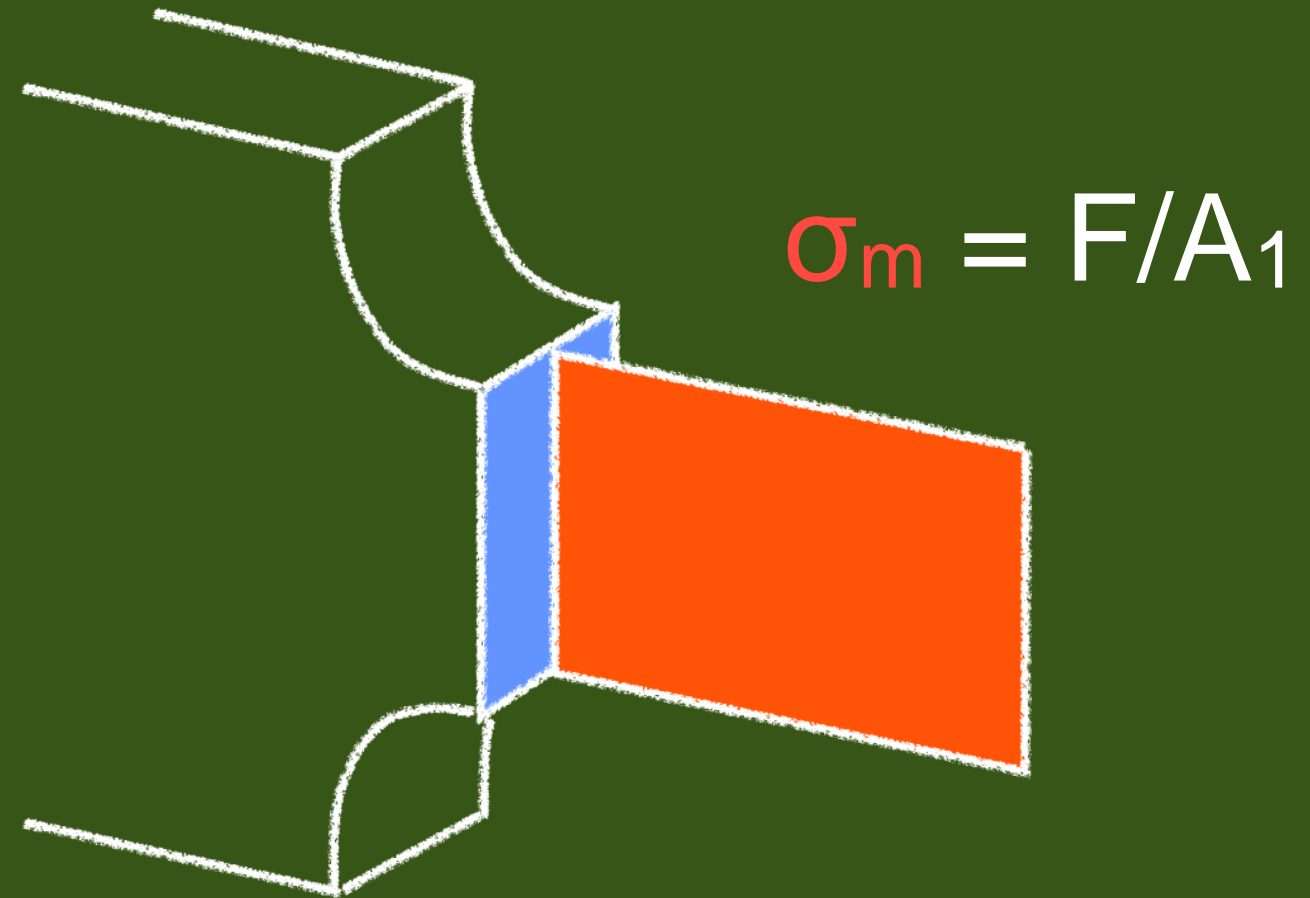
Exemplo:



# Carga axial

## Concentração de tensões

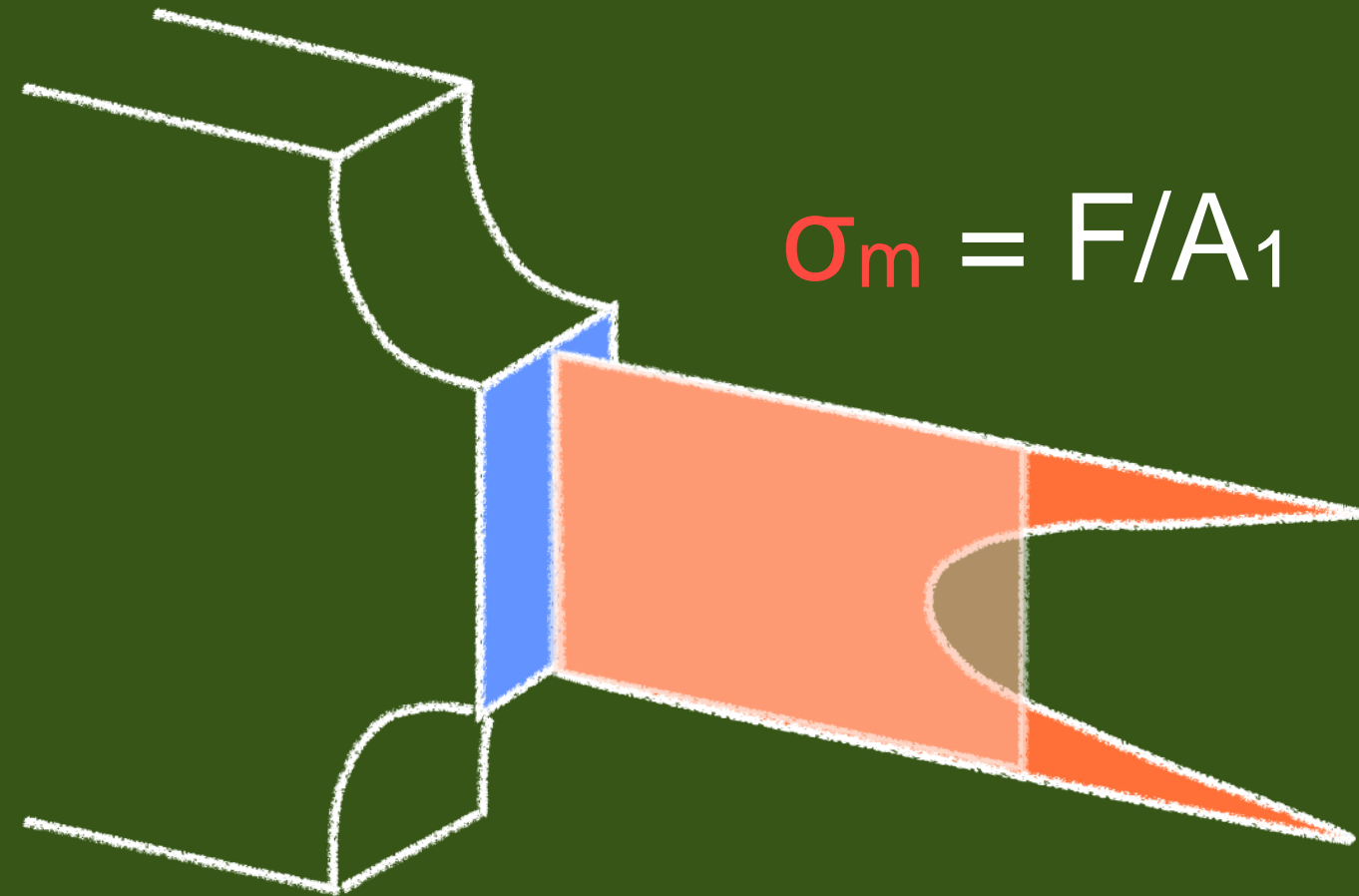
Exemplo:



# Carga axial

## Concentração de tensões

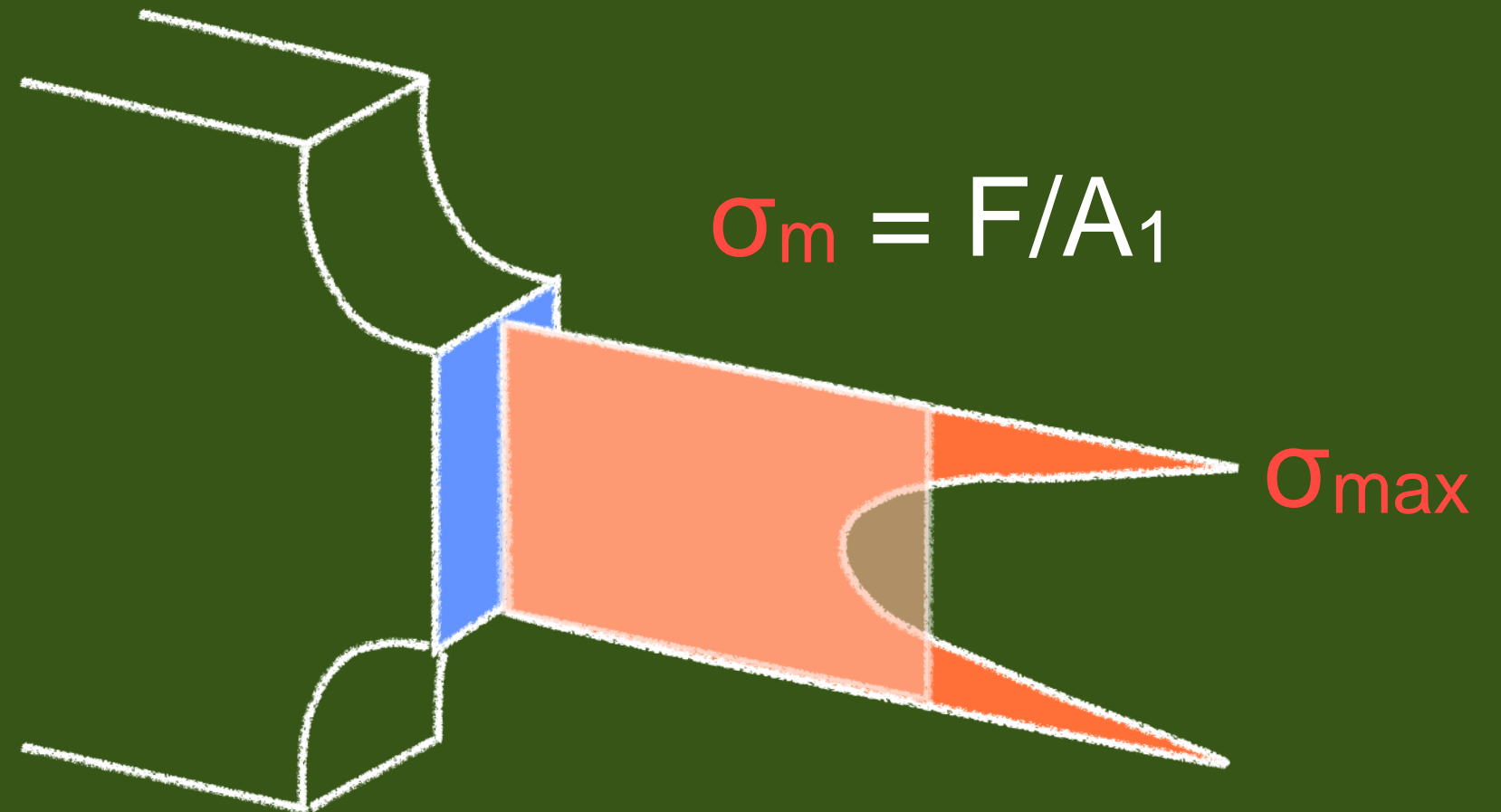
Exemplo:



# Carga axial

## Concentração de tensões

Exemplo:

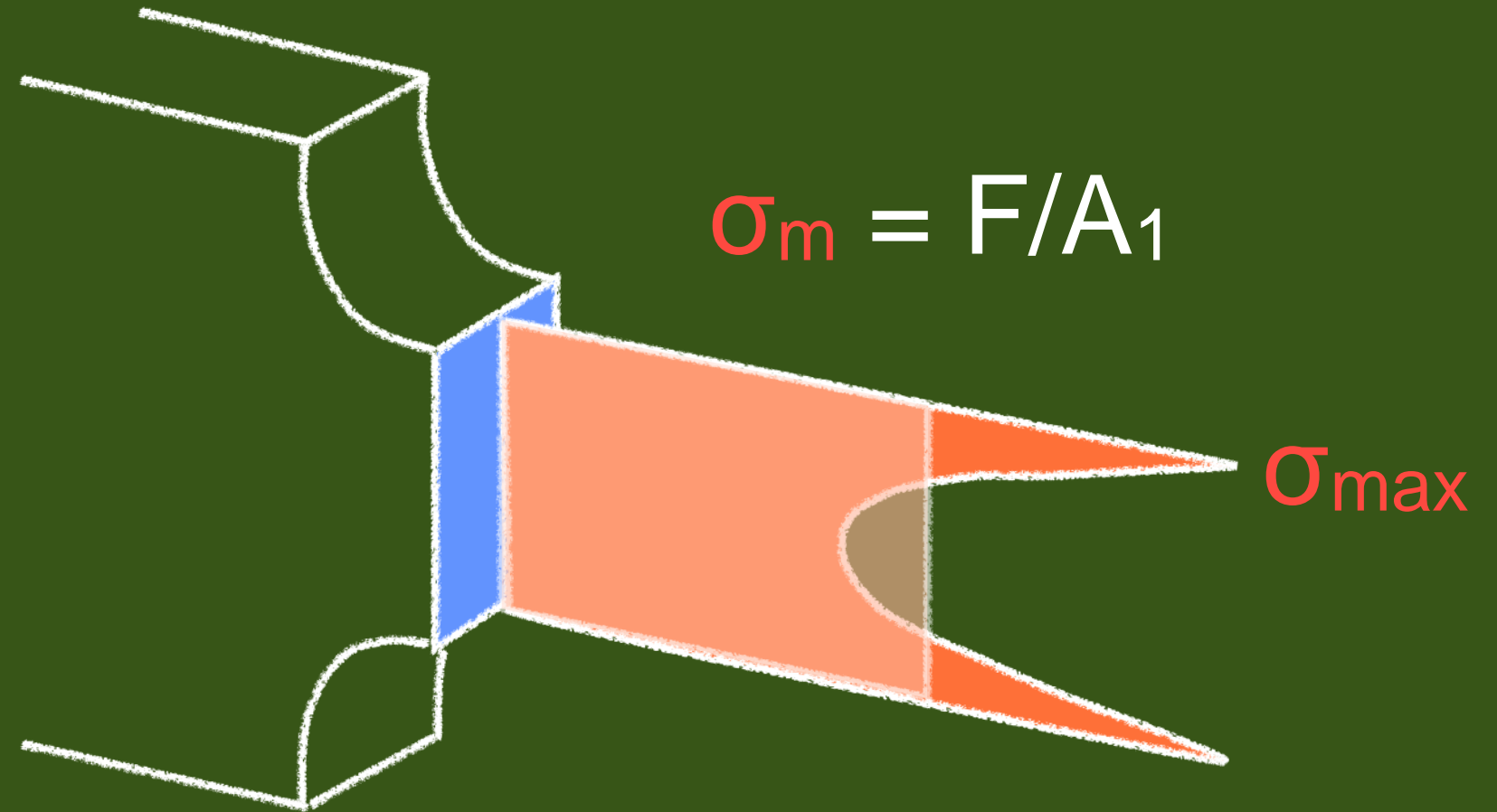


# Carga axial

## Concentração de tensões

Exemplo:

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m}$$



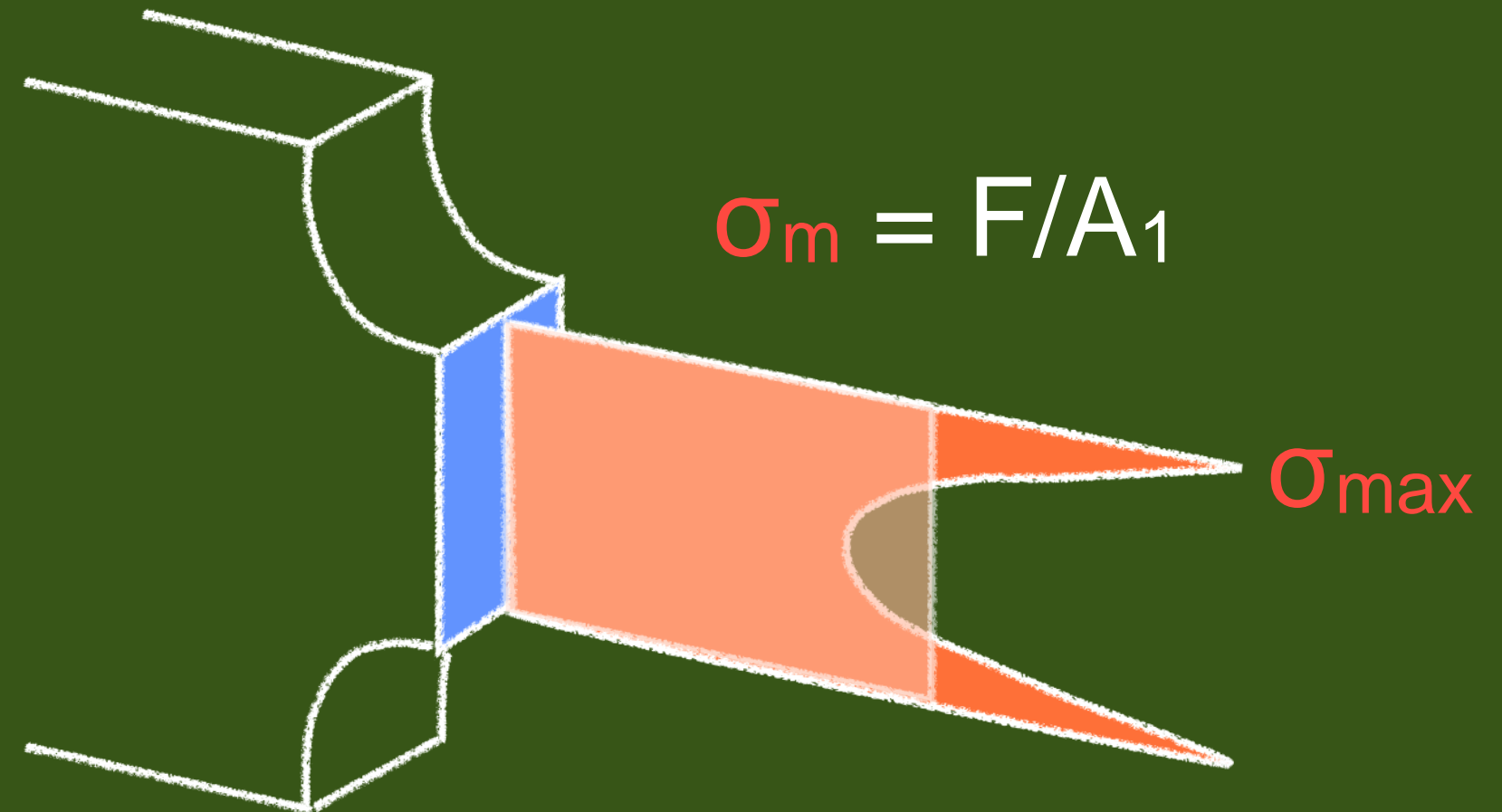
# Carga axial

## Concentração de tensões

Exemplo:

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m}$$

fator de concentração  
de tensão





# Carga axial

## Concentração de tensões

# Carga axial

## Concentração de tensões

A variação da tensão ocorre pela presença da descontinuidade na geometria da peça.

# Carga axial

## Concentração de tensões

A variação da tensão ocorre pela presença da descontinuidade na geometria da peça.

Descontinuidades bruscas levam a fatores de concentração maiores.

# Carga axial

## Concentração de tensões

A variação da tensão ocorre pela presença da descontinuidade na geometria da peça.

Descontinuidades bruscas levam a fatores de concentração maiores.

Variações suaves da geometria resultam em fatores de concentração menores.

# Carga axial

## Concentração de tensões

A variação da tensão ocorre pela presença da descontinuidade na geometria da peça.

Descontinuidades bruscas levam a fatores de concentração maiores.

Variações suaves da geometria resultam em fatores de concentração menores.

Fatores de concentração de tensão dependem da geometria e do tipo de carregamento!

# Carga axial

## Concentração de tensões

A variação da tensão ocorre pela presença da descontinuidade na geometria da peça.

Descontinuidades bruscas levam a fatores de concentração maiores.

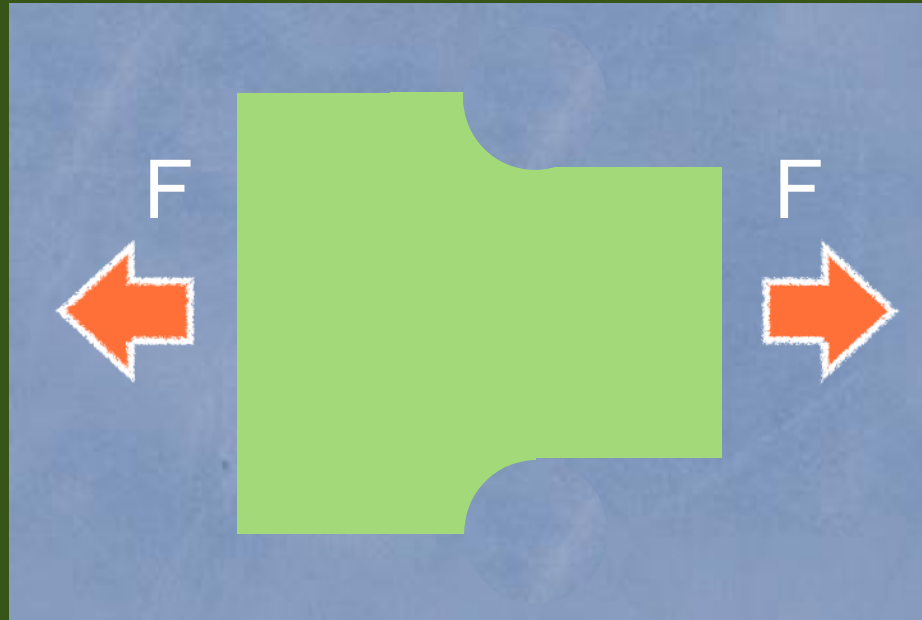
Variações suaves da geometria resultam em fatores de concentração menores.

Fatores de concentração de tensão dependem da geometria e do tipo de carregamento!

Gráficos envolvendo dados da geometria.

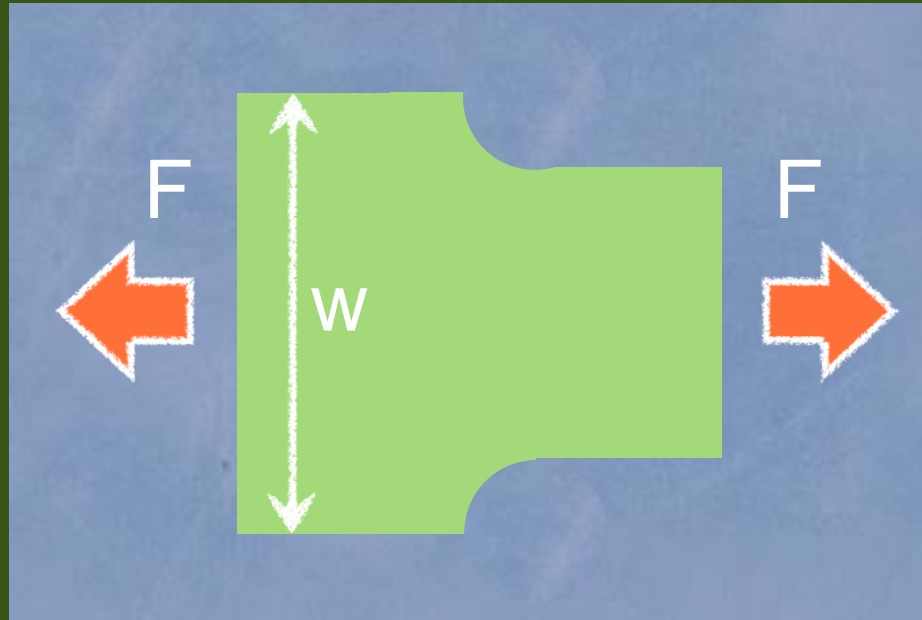
# Carga axial

## Concentração de tensões



# Carga axial

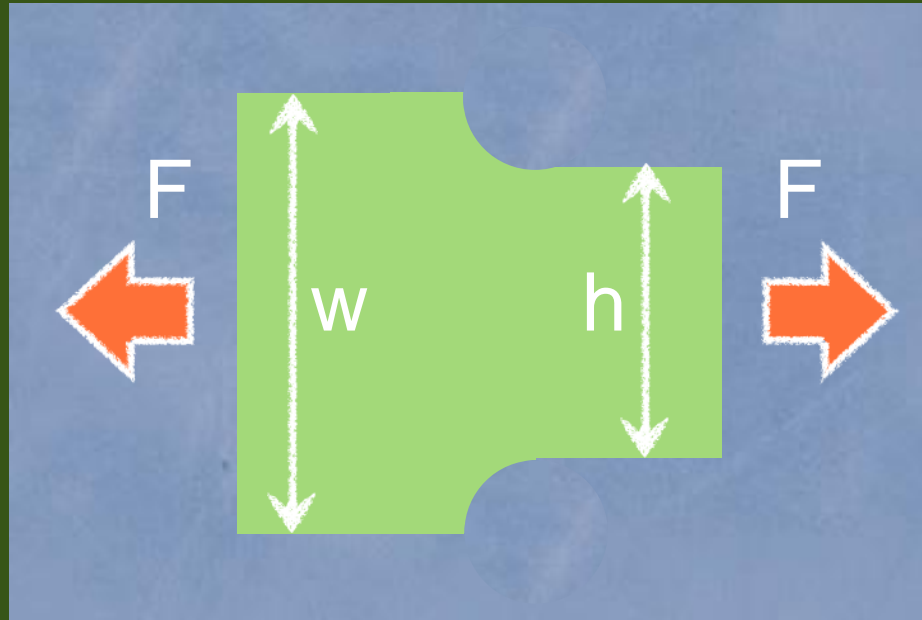
## Concentração de tensões





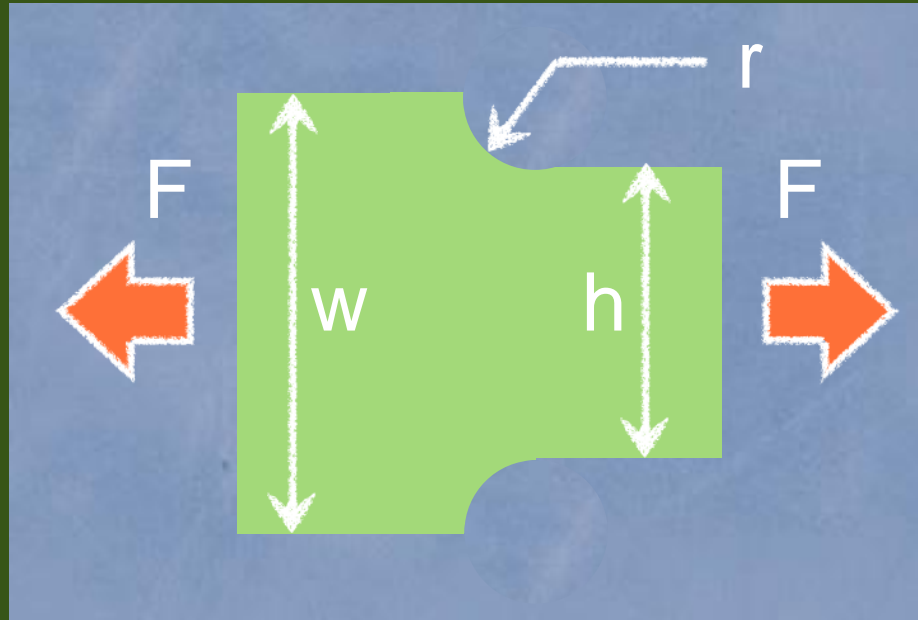
# Carga axial

## Concentração de tensões



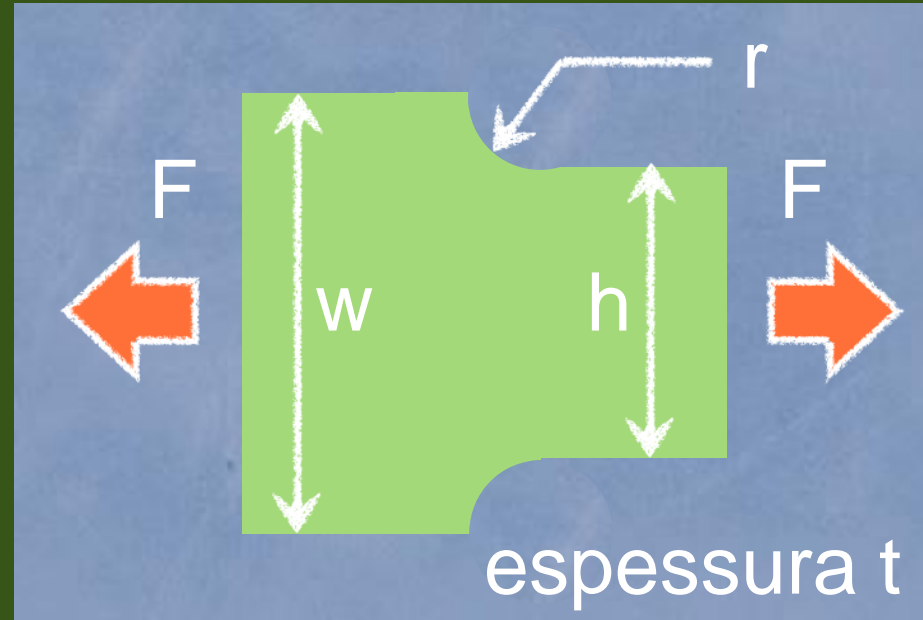
# Carga axial

## Concentração de tensões



# Carga axial

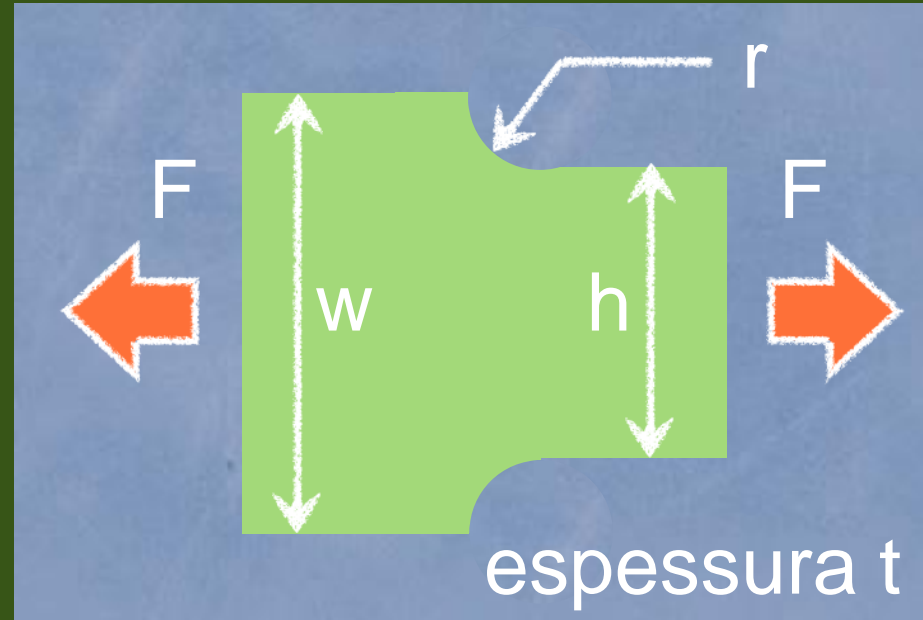
## Concentração de tensões



$$\sigma_m = F/A$$

# Carga axial

## Concentração de tensões

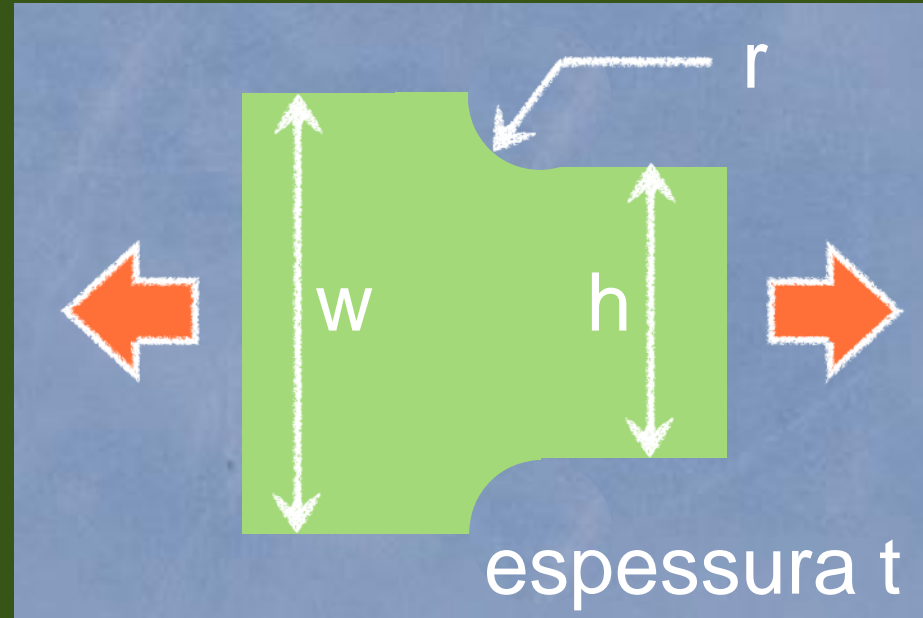


$$\sigma_m = F/A$$

$$\sigma_m = F/ht$$

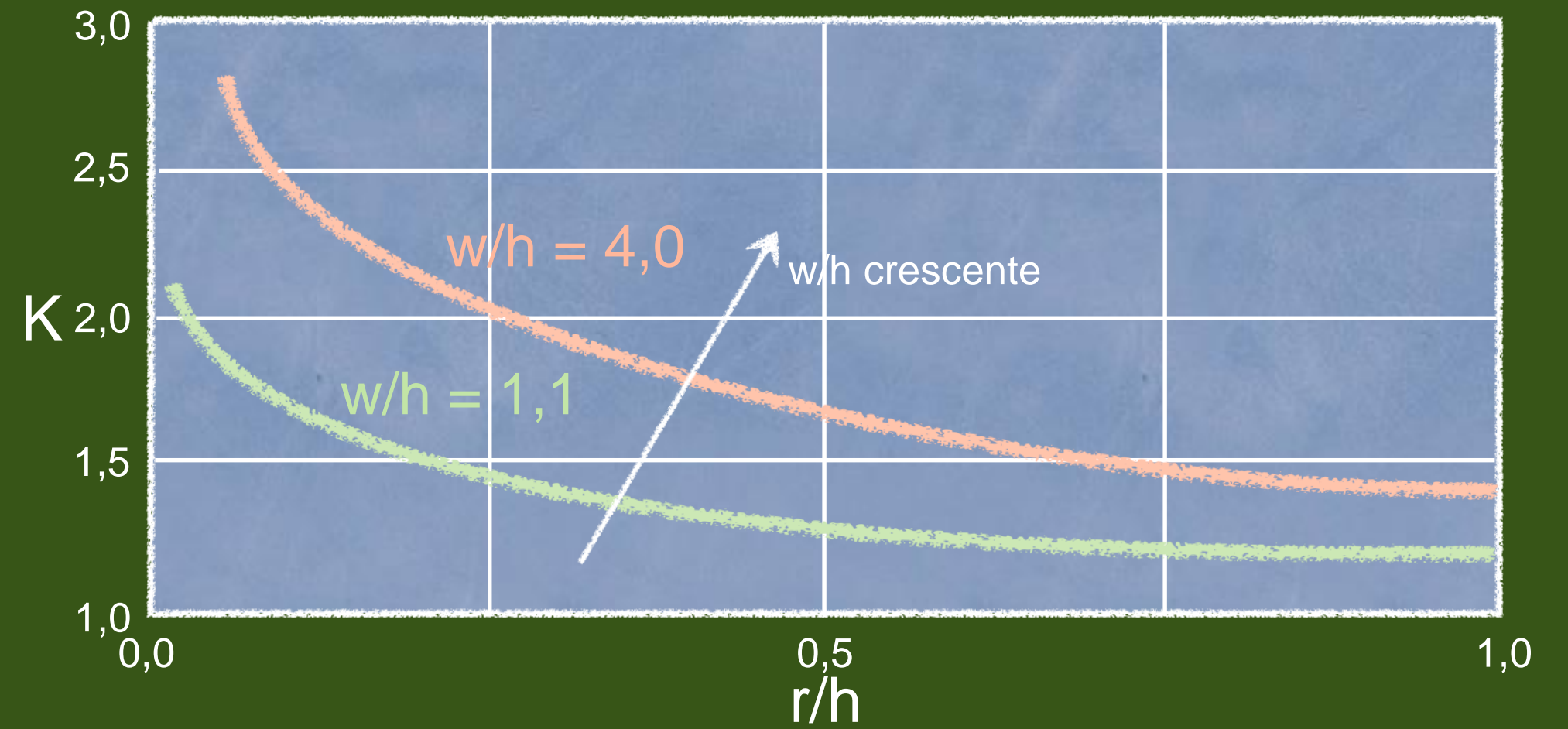
# Carga axial

## Concentração de tensões



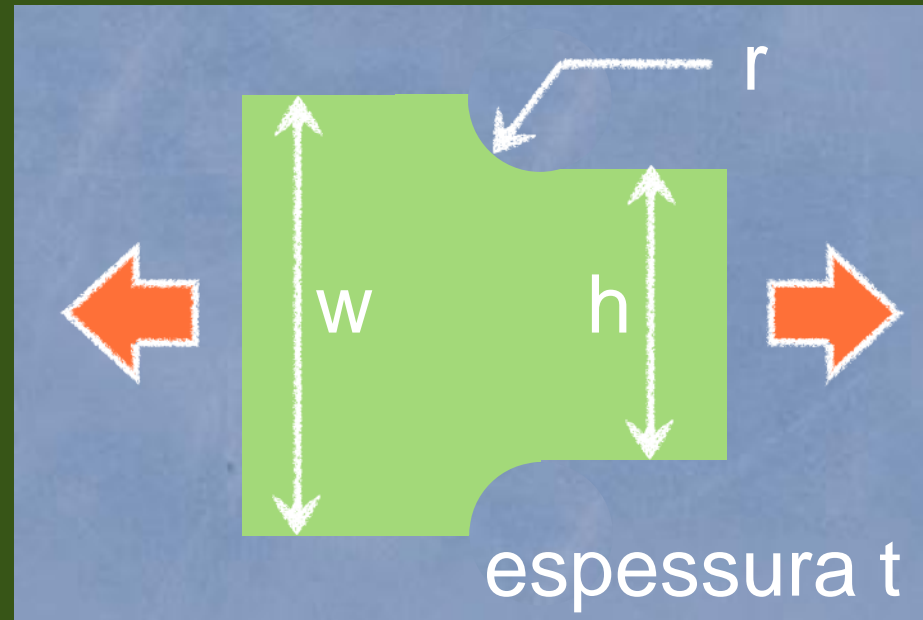
$$\sigma_m = F/A$$

$$\sigma_m = F/ht$$



# Carga axial

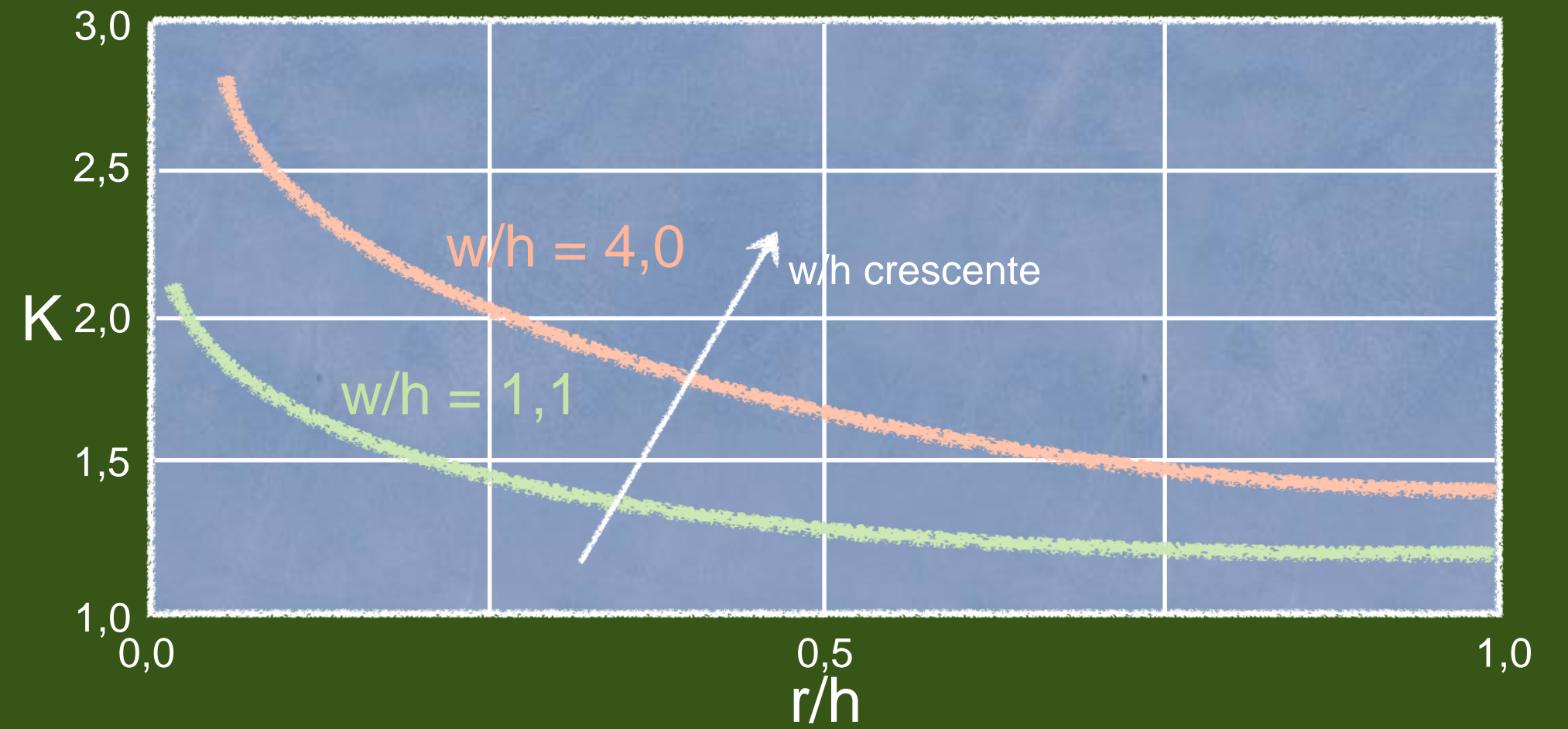
## Concentração de tensões



$$\sigma_m = F/A$$

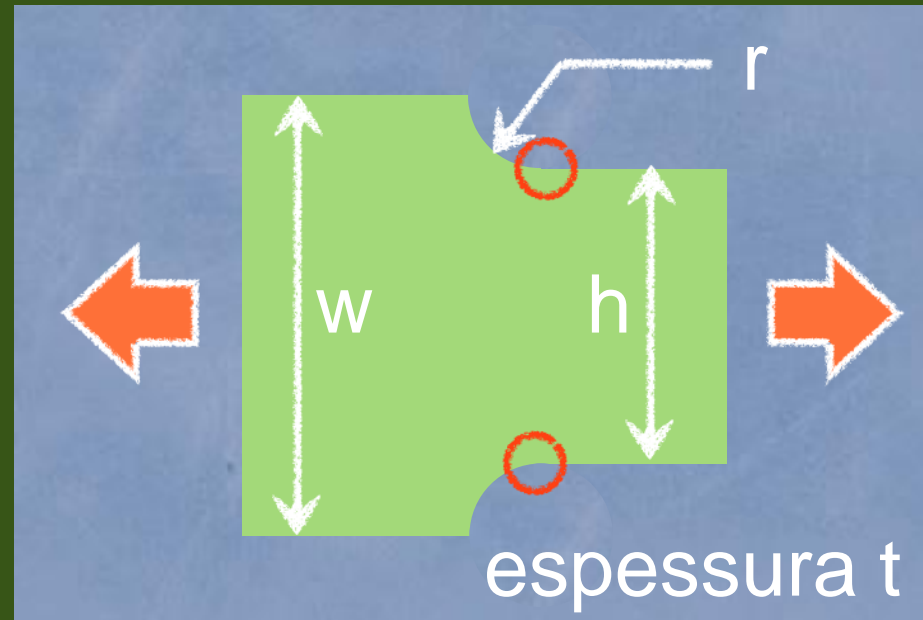
$$\sigma_m = F/ht$$

$$\sigma_{\max} = K \cdot \sigma_m$$



# Carga axial

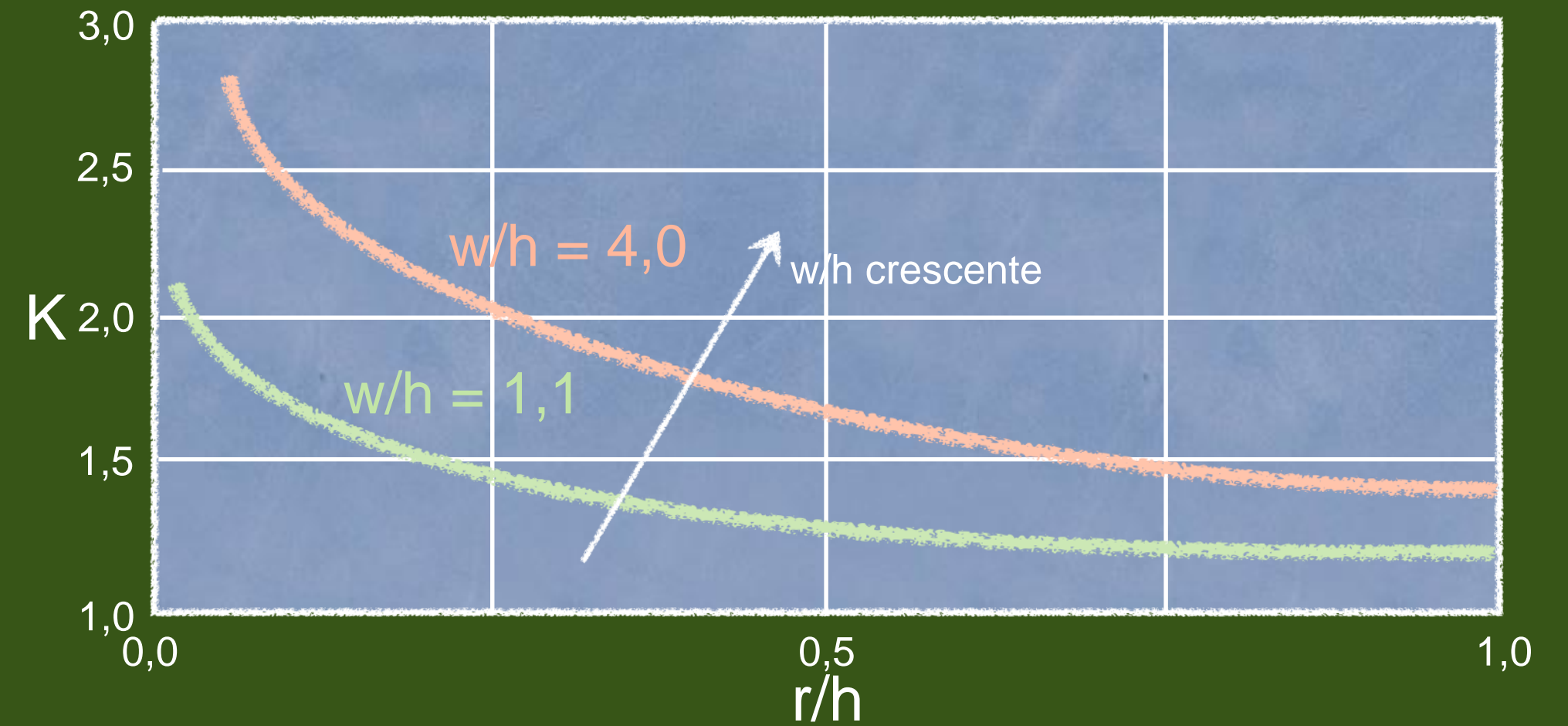
## Concentração de tensões



$$\sigma_m = F/A$$

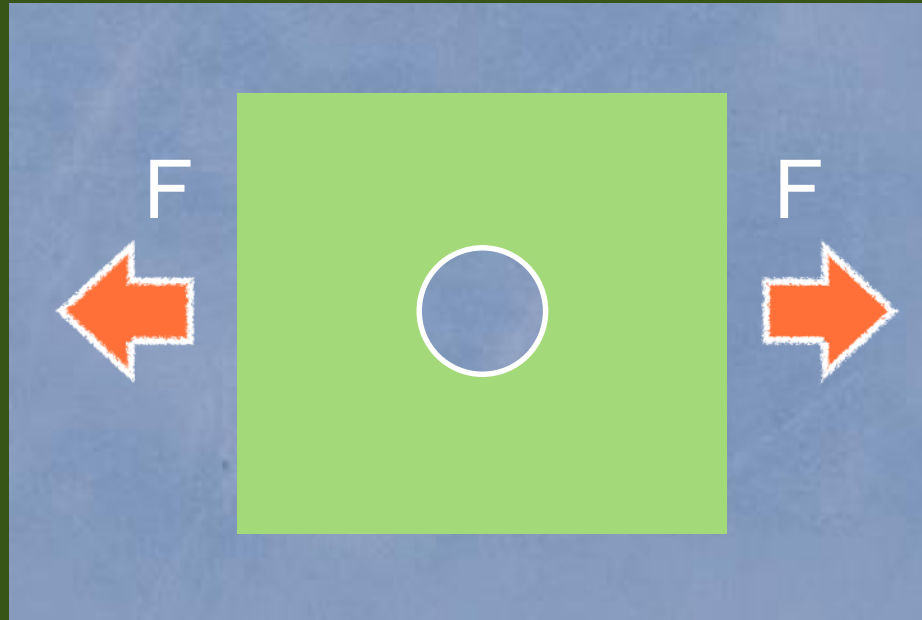
$$\sigma_m = F/ht$$

$$\sigma_{\max} = K \cdot \sigma_m$$



# Carga axial

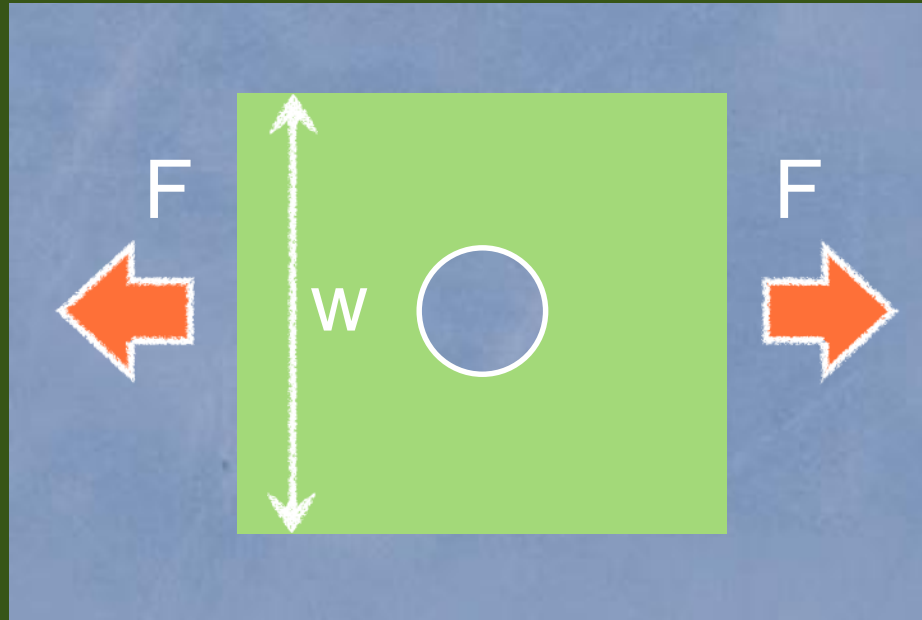
## Concentração de tensões





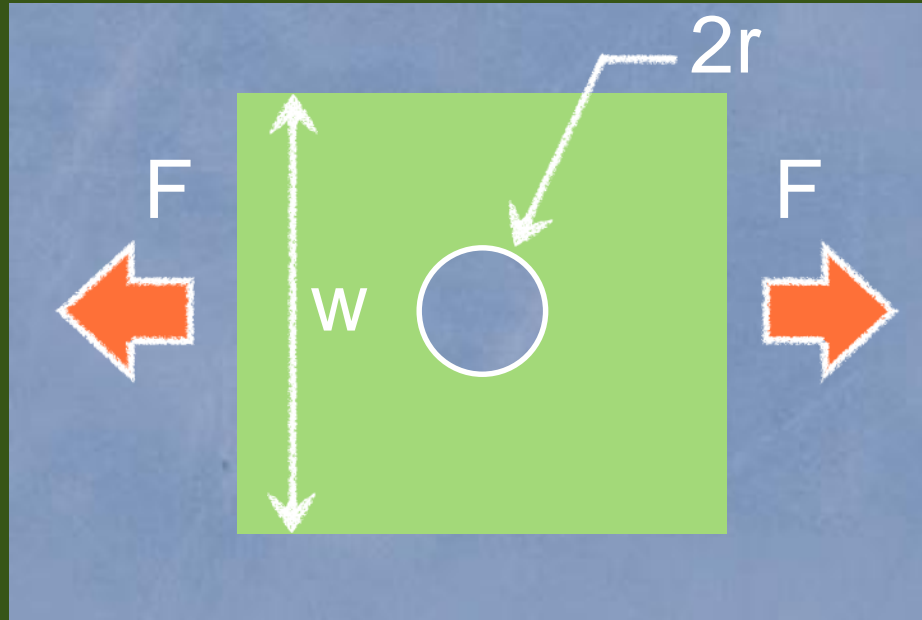
# Carga axial

## Concentração de tensões



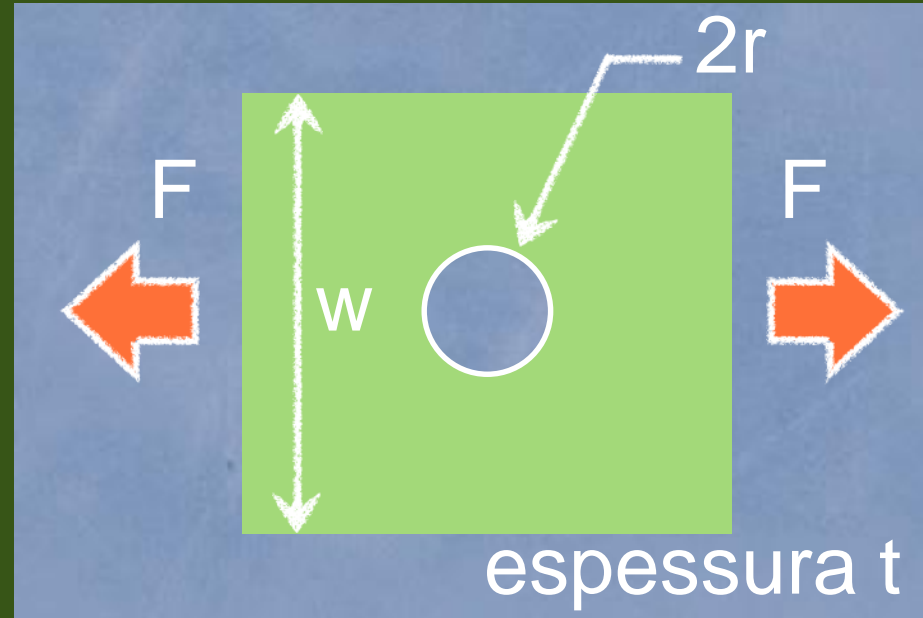
# Carga axial

## Concentração de tensões



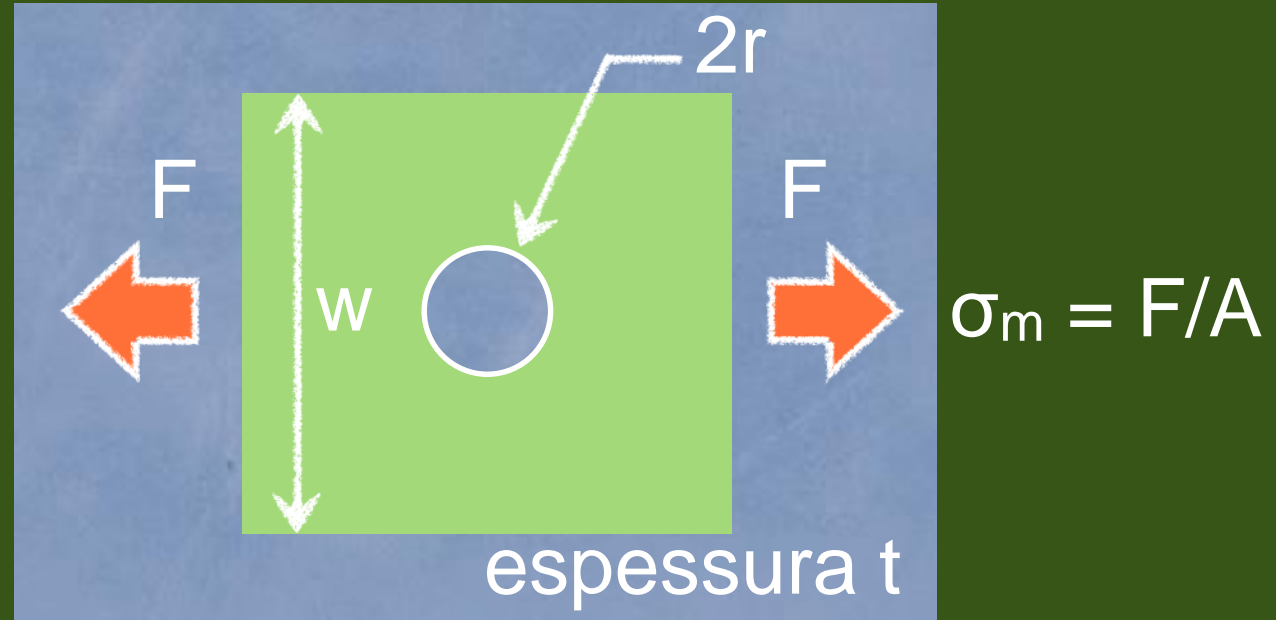
# Carga axial

## Concentração de tensões



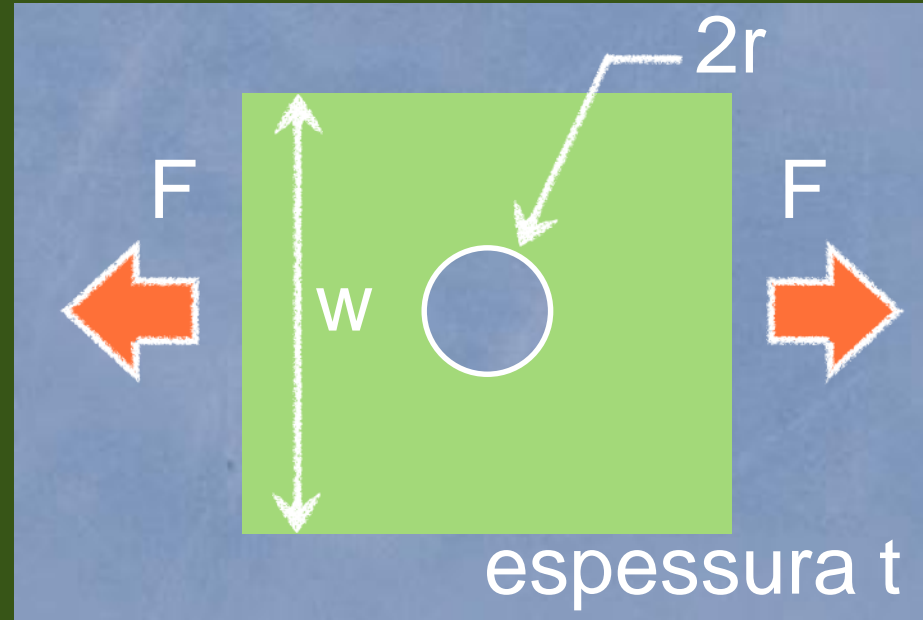
# Carga axial

## Concentração de tensões



# Carga axial

## Concentração de tensões

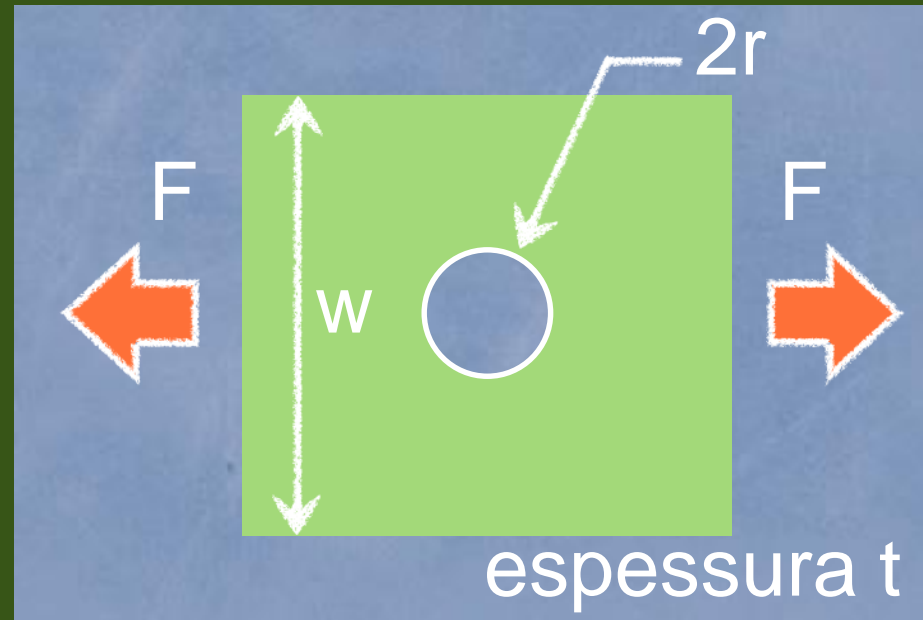


$$\sigma_m = F/A$$

$$\sigma_m = F/[(w-2r)t]$$

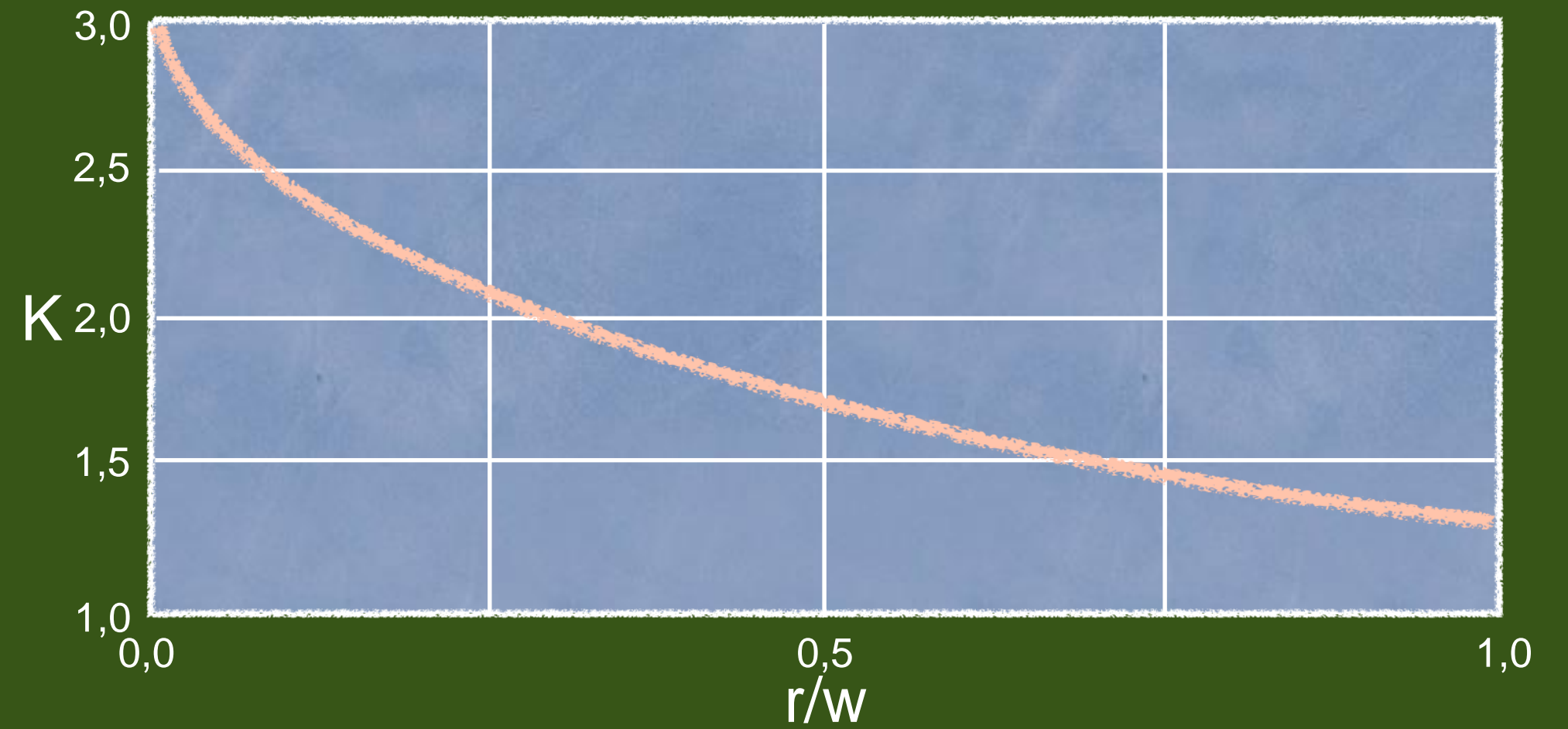
# Carga axial

## Concentração de tensões



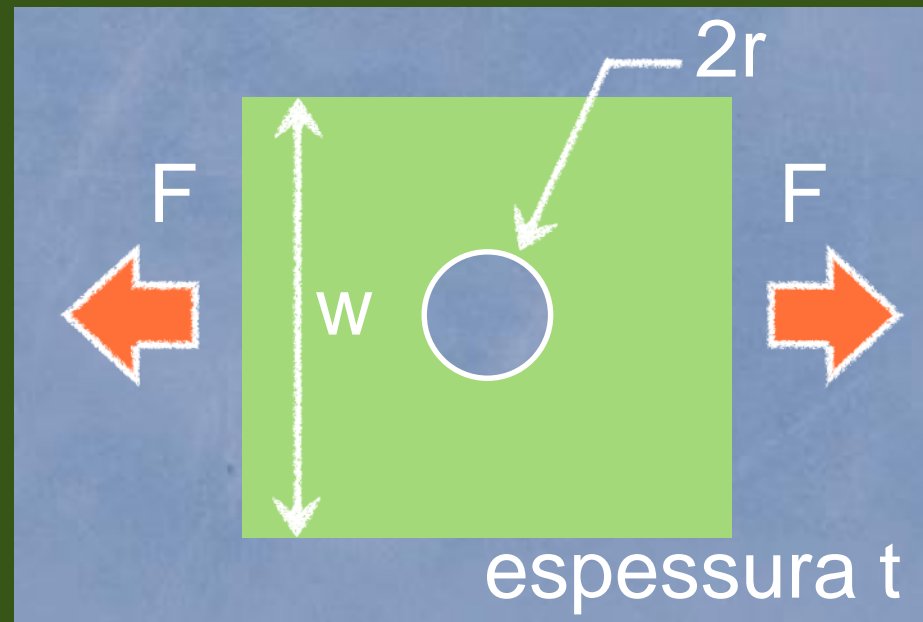
$$\sigma_m = F/A$$

$$\sigma_m = F/[(w-2r)t]$$



# Carga axial

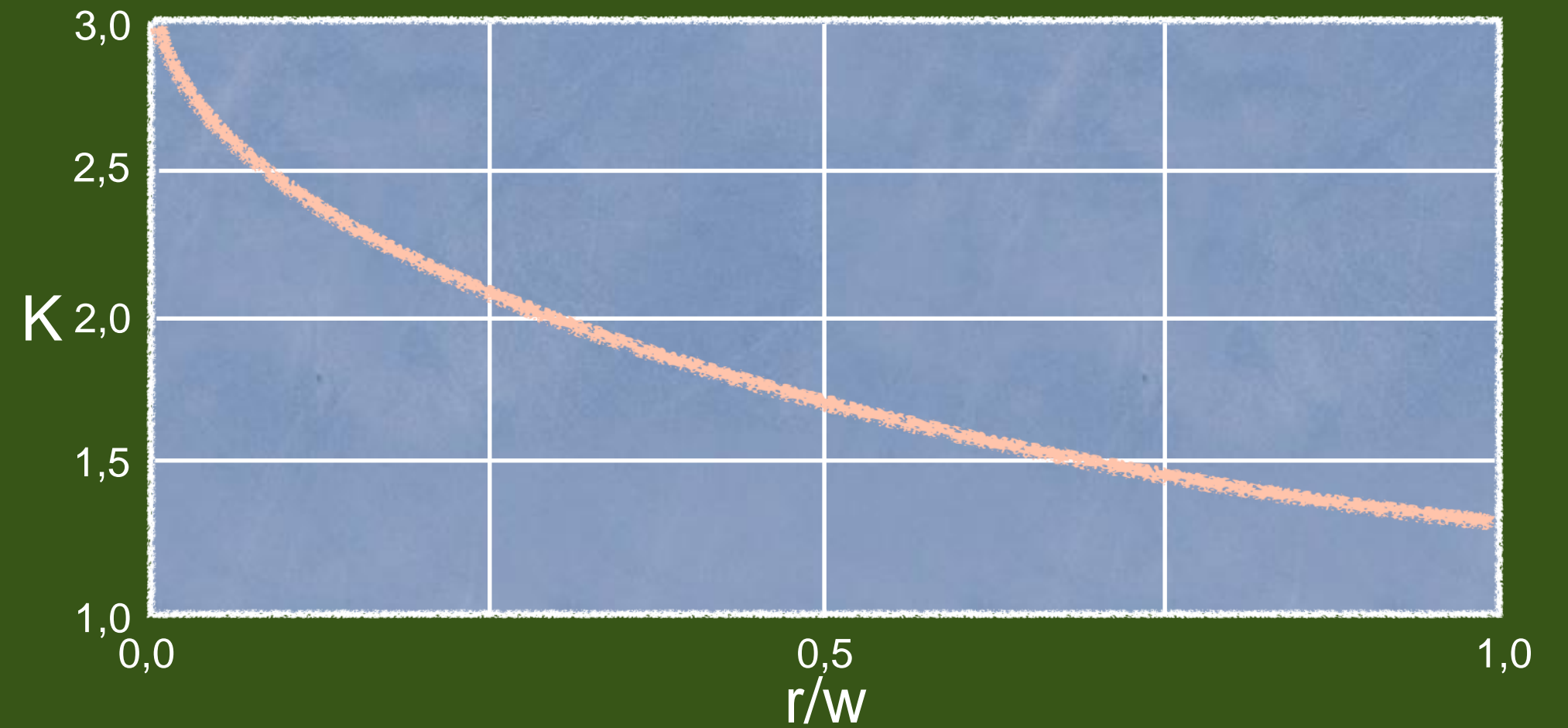
## Concentração de tensões



$$\sigma_m = F/A$$

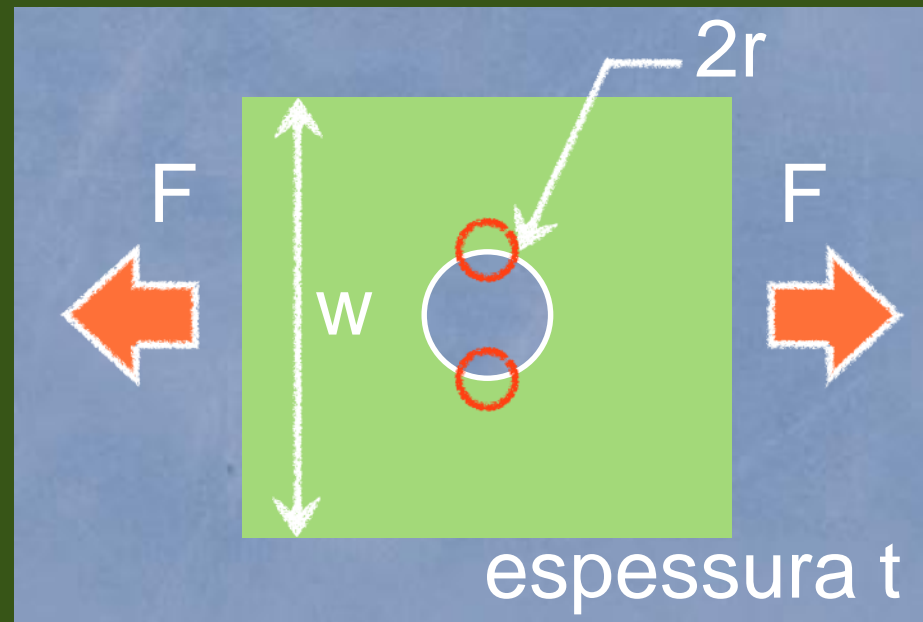
$$\sigma_m = F/[(w-2r)t]$$

$$\sigma_{\max} = K \cdot \sigma_m$$



# Carga axial

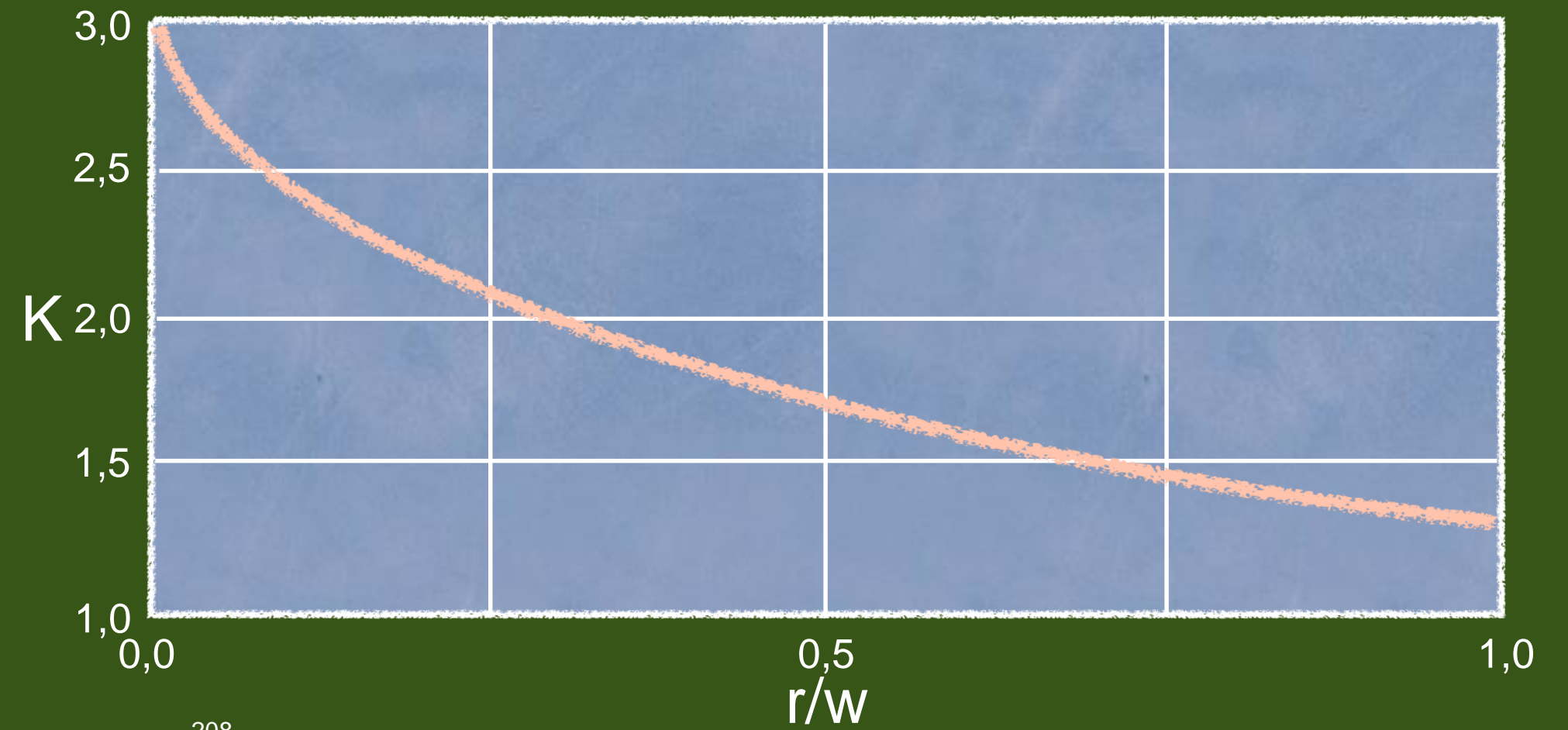
## Concentração de tensões



$$\sigma_m = F/A$$

$$\sigma_m = F/[(w-2r)t]$$

$$\sigma_{\max} = K \cdot \sigma_m$$





# Carga axial

## Concentração de tensões

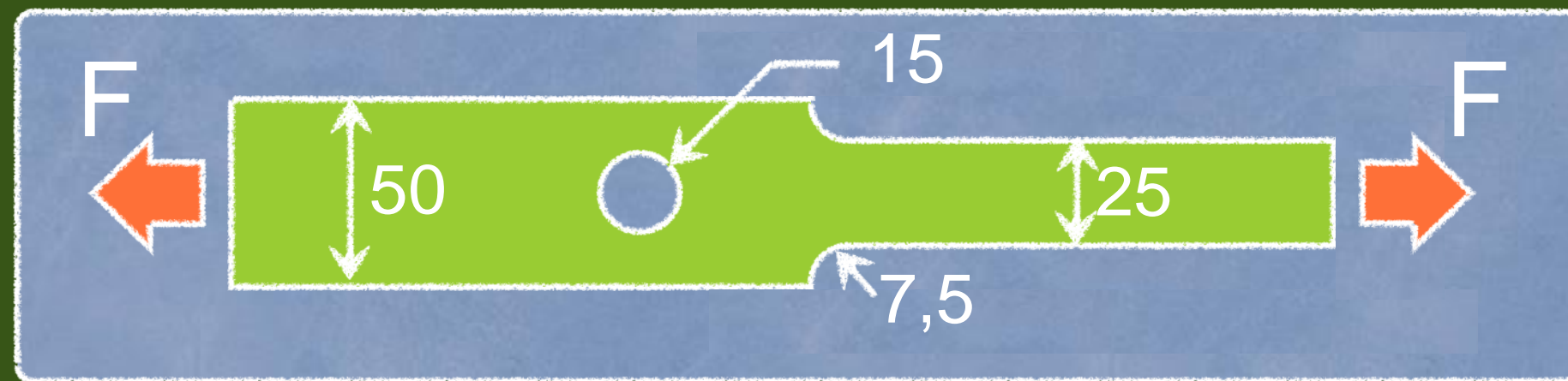
Exemplo:

# Carga axial

## Concentração de tensões

Exemplo:

Determinar a maior tensão na barra para  $F=5\text{kN}$ ,  $t=10\text{ mm}$ .

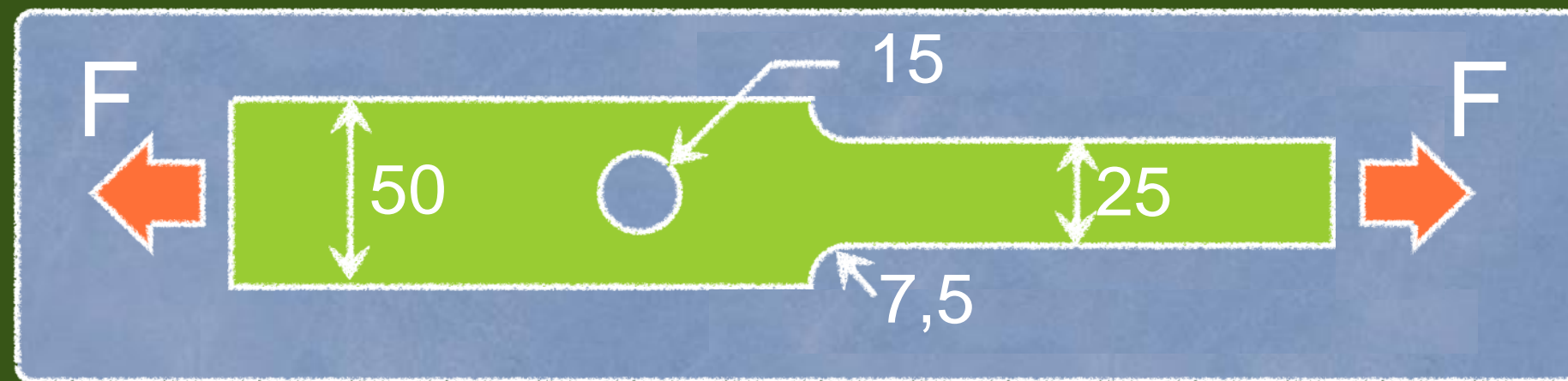


# Carga axial

## Concentração de tensões

Solução:

As descontinuidades estão presentes nas seções a-a e b-b.

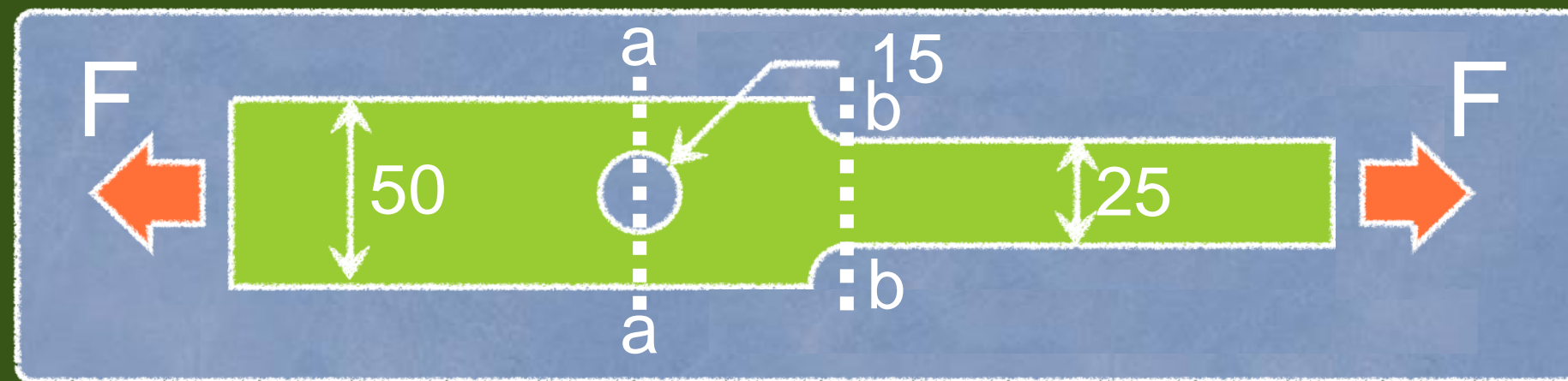


# Carga axial

## Concentração de tensões

Solução:

As descontinuidades estão presentes nas seções a-a e b-b.



# Carga axial

Concentração de tensões

Solução:

Seção a-a:

# Carga axial

## Concentração de tensões

Solução:

Seção a-a:

$$\text{Tensão média nominal} \Rightarrow \sigma_m = 50 \times 10^3 / [(50 - 15) \times 10 \times 10^{-6}]$$
$$\sigma_m = 143 \text{ MPa}$$

$$r/w = 7,5/50 = 0,15 \quad \Rightarrow \quad K = 2,55$$

$$\text{Tensão máxima} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\max} = 143 \times 2,55 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\max} = 365 \text{ MPa}$$

# Carga axial

## Concentração de tensões

Solução:

Seção b-b:

$$\text{Tensão média nominal} \Rightarrow \sigma_m = 50 \times 10^3 / (25 \times 10 \times 10^{-6})$$
$$\sigma_m = 200 \text{ MPa}$$

$$r/h = 5/25 = 0,2 \quad w/h = 50/25 = 2 \quad \Rightarrow \quad K = 1,82$$

$$\text{Tensão máxima} \Rightarrow \sigma_{\max} = 200 \times 1,82 \Rightarrow \sigma_{\max} = 364 \text{ MPa}$$

# Carga axial

## Concentração de tensões

Resposta:

As tensões nas seções a-a e b-b são equivalentes, sendo a tensão na seção a-a (365 MPa) ligeiramente superior à tensão na seção b-b (364 MPa).



# Carga axial

F I M