MAT09592 - ÁLGEBRA LINEAR - 2018/2

**Primeira prova parcial - turma da tarde - 11/09/2018**

**Nome:** ______________________________________________

2,0 1. Respeito às matrizes, indique verdadeiro (V) ou falso (F). (**justifique sua resposta**).

(a) Se $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $\mathbb{B}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ onde $n$ é um número natural.

(b) Se $A + B$ e $B$ são simétricas, então $A$ é simétrica.

(c) Se $A$ e $B$ são matrizes da mesma ordem, ambas simétricas, então $AB$ é simétrica.

(d) Se $B$ é simétrica, então $-B^2$ é antisimétrica.

1,0 2. Seja $A$ uma matriz quadrada de ordem 2x2. Se seu determinante é $\Delta$ e o traço da matriz $A^2$ é $T$, determine o valor de $[tr(A)]^2$.

1,0 3. Sabendo que o sistema: $\begin{cases} bc\,x + ac\,y = ab\,, \\ (b+c)\,x + (a+c)\,y = a+b\,, \end{cases}$ é compatível indeterminado.

Calcule: $F = \frac{(ab+bc+ac)^2}{abc}$.

0,5 4. Dada a matriz $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & k \\ 1 & k & 4 \\ 1 & k & k \end{bmatrix}$, determine o conjunto de valores de $k$ para que $\mathbb{A}$ seja inversível.

2,0 5. Calcule a matriz inversa de $\mathbb{M} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, pelo método de **Gauss-Jordan**.

0,5 6. Seja **A** uma matriz de ordem 3 tal que $\mid A \mid = 2$. Calcule: $S = \sqrt[7]{\|\, 2\,A \mid A\,A^T \mid}$

2,0 7. Resolva o sistema de equações (**aplique Cramer**):

$$\begin{cases} x + i\,y - 2\,z & = & 1 \\ x - y + 2i\,z & = & 2 \\ i\,x + 3i\,y - (1+i)\,z & = & 3 \end{cases}$$

e indique $\mathrm{Re}(x)$.

1,0 8. Seja **A** uma matriz de ordem 3x3 tal que $\mathbf{A}^3 = -\mathbb{I}$, $\mathbb{I}$ é a matriz identidade. Determine a adjunta da matriz $\mathbf{A}^{10}$, $adj(\mathbf{A}^{10})$.

## Resolução da Prova 1
### (Álgebra Linear)

**Pergunta ①:**

a) Verdadeiro

Por indução, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Rpta.

b) Verdadeiro

Se "M" é simétrica $\Rightarrow$ $M = M^T$

Temos:

$(A+B) = (A+B)^T$ e $B = B^T$

$A + B = A^T + B^T$

$A + \cancel{B} = A^T + \cancel{B}$

$\Rightarrow \therefore A = A^T$ Simétrica

Rpta

c) Falso

Temos: $A = A^T$ e $B = B^T$

Vejamos se:

$AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$

$\Rightarrow AB = BA$ Isto não necessariamente se cumpre, já que o produto de matrizes não sempre é conmutável.

d) Falso

Dado: $B = B^T$

Caso contrario: (Simétrica) $-B^2 = (-B^2)^T$

Então:

$-B^2 = -(B^2)^T = -(BB)^T = -B^T B^T$

$-B^2 = -(B^T)^2 = -(B)^2 = -B^2$

$\Rightarrow -B^2 = -B^2$ ✓

$\therefore -B^2$ é simétrica. Rpta.

**Pergunta ②:**

Seja: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = ad - bc \cdots (1)$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow tr(A^2) = a^2 + bc + bc + d^2$

$tr(A^2) = (a+d)^2 - 2ad + 2bc$

$tr(A^2) = (a+d)^2 - 2(ad - bc)$

$\Rightarrow tr(A^2) = (a+d)^2 - 2(ad-bc) = T \cdots (2)$

Pedem:

$[tr(A)]^2 = (a+d)^2 \cdots (3)$

Logo (1) em (2) e (2) em (3):

$$\therefore [tr(A)]^2 = T + 2\Delta$$ Rpta

## GUNTA ③:

Das equações temos:

$$y = -\frac{bc}{ac}x + \frac{ab}{ac}$$

$$y = -\frac{b+c}{a+c}x + \frac{a+b}{b+c}$$

Compatível indeterminado = Infinitas soluções

$$\Rightarrow \frac{bc}{ac} = \frac{b+c}{a+c} \wedge \frac{ab}{ac} = \frac{a+b}{b+c}$$

$$a = b \qquad b^2 = ac \qquad a = c$$

$$\boxed{a = b = c}$$

Então:

$$F = \frac{(3a^2)^2}{a^3} = 9a = 3(a+b+c)$$

Rpta.

## PERGUNTA ④:

Para que "A" seja inversível:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & k \\ 1 & k & 4 \\ 1 & k & k \end{vmatrix} \neq 0$$

$F_3 \rightarrow F_3 - F_2 \wedge F_2 \rightarrow F_2 - F_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & k \\ 0 & k-4 & 4-k \\ 0 & 0 & k-4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow (k-4)^2 \neq 0 \Rightarrow k \neq 4$$

$$\therefore k \in \mathbb{R} - \{4\}$$

Rpta

## PERGUNTA ⑤:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 - 5F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -14 & -22 & -5 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & -9 & -14 & -3 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$F_1 \rightarrow F_1 - F_4 \; ; \; F_2 \rightarrow F_2 + 5F_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & -9 & -14 & -3 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$F_3 \rightarrow F_3 + 9F_2 \; ; \; F_4 \rightarrow F_4 - 3F_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 13 & -3 & 45 & 9 & 1 & -48 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -14 & -3 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

$F_3 \rightarrow F_3 + 3F_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -14 & -3 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

$F_2 \rightarrow F_2 - 3F_3 \; ; \; F_4 \rightarrow F_4 + 4F_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$F_1 \to F_1 - F_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\therefore M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -2 \\ -4 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

rpta.

**Solução ⑥:** Calculando:

$$|2A| = 2^3|A| = 2^3 \cdot 2 = 2^4$$

$$\Rightarrow S = \sqrt[7]{|2^4 A A^T|} = \sqrt[7]{(2^4)^3 |A||A^T|}$$

$$S = \sqrt[7]{2^{14}} = 2^2 \Rightarrow S = 4 \quad \text{rpta.}$$

**Solução ⑦:**

Temos: $\Delta_S = 6 - 8i$

$\Delta_x = -7 - 9i$

$$\Rightarrow x = \frac{-7-9i}{6-8i}$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{50} - i\frac{55}{50}$$

$$\therefore \operatorname{Re}(x) = \frac{3}{10}$$

**Solução ⑧:**

Temos: $A^3 = -I$

Pedem: $\operatorname{adj}(A^{10}) = ??$

Sabemos:

$$B^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(B)}{|B|} \Rightarrow \operatorname{adj}(B) = |B| \cdot B^{-1}$$

Então:

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 A = (-1)^3 I^3 A$$

$$A^{10} = -A$$

$$\Rightarrow \operatorname{adj}(A^{10}) = |A^{10}| \cdot (A^{10})^{-1}$$

$$= |-A| (-A)^{-1} = |A| A^{-1}$$

$$\therefore \operatorname{adj}(A^{10}) = |A| A^{-1} \quad \text{rpta}$$