Aula 20 Cálculo 3B | Aula 29 Cálculo 3A

Aula passada: transformada inversa

Aula Hoje: Aplicação em EDO
função degrau

6.2 Solução de Problemas de Valor inicial

Propriedade 5 (teorema 6.2.1)

$$\boxed{\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)}$$

Solução: Suponha f' contínua

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f'(t)\,ds \quad \text{por partes} \quad \begin{cases} u = e^{-st} \\ du = -se^{-st} \\ dv = f'(t)dt \\ v = f(t) \end{cases}$$

$$= \lim_{z\to\infty} \int_0^z e^{-st} \cdot f'(t)\,dt$$

$$= \lim_{z\to\infty} e^{-st} \cdot f(t)\Big|_0^z - \int_0^z -se^{-st} \cdot f(t)\,dt$$

$$= \lim_{z\to\infty} \cancel{e^{-sz} f(z)}^{\,0} - f(0) + \underbrace{\lim_{z\to\infty}\int_0^z e^{-st} f(t)dt}_{\mathcal{L}\{f(t)\}}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \quad \blacksquare$$

Consequência:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\left[s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)\right] - f'(0)$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)}$$

↳ a transformada de Laplace "quebra" as derivadas

Em geral

$$\boxed{\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)}$$

Exemplo Resolva por Transformada de Laplace

$$\begin{cases} y'' + y = \operatorname{sen} 2t \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Solução

$$\mathcal{L}\{y'' + y\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\}$$

$$s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - s\underbrace{y(0)}_{=2} - \underbrace{y'(0)}_{=1} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$(s^2+1)\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{2}{s^2+4} + 2s + 1$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{2 + (s^2+4)(2s+1)}{(s^2+4)\cdot(s^2+1)}$$

$$y(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2 + (s^2+4)(2s+1)}{(s^2+4)\cdot(s^2+1)}\right\}}$$

resolver esta transformada inversa

(*) frações parciais

$$\frac{2 + (s^2+4)(2s+1)}{(s^2+4)\cdot(s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

porque não tem raízes reais

$$\frac{2s^3+s^2+8s+6}{(s^2+4)\cdot(s^2+1)} = \frac{(As+B)(s^2+1) + (Cs+D)(s^2+4)}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

$$= \frac{(A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (A+4C)s + B+4D}{(s^2+4)\cdot(s^2+1)}$$

$$\begin{cases} A+C = 2 \\ B+D = 1 \\ A+4D = 8 \\ B+4D = 6 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A=0 & B=-2/3 \\ C=2 & D=5/3 \end{matrix}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2 + (s^2+4)(2s+1)}{(s^2+4)\cdot(s^2+1)}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2/3}{s^2+4} + \frac{2s}{s^2+1} + \frac{5/3}{s^2+1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{3}\operatorname{sen} 2t + 2\cos t + \frac{5}{3}\operatorname{sen} t}$$

6.3 Função degrau

Como antes — função degrau

$$\boxed{u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}}$$

↳ Notação

Objetivo Escrever funções descontínua com uso da função degrau

Por que fazer isso?

R: • modelos de eletrônica envolvem funções descontínua no termo não homogêneo $G(t)$

• $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \dfrac{e^{-cs}}{s}$ $s > 0$

• $\mathcal{L}\{u_c(t).f(t-c)\} = e^{-cs}.\mathcal{L}\{f(t)\}$

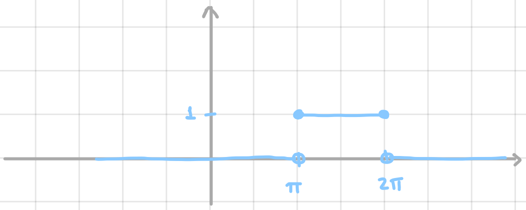
Exemplo Esboce a função $h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$

Solução

$$u_\pi(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ 1, & t \geq \pi \end{cases}$$

$$u_{2\pi}(t) = \begin{cases} 0, & t < 2\pi \\ 1, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

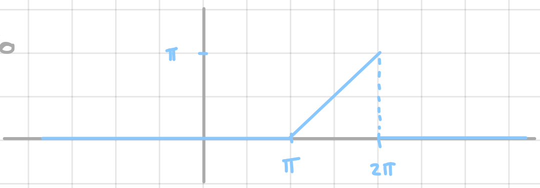
$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ 1, & \pi \leq t \leq 2\pi \\ 0, & t > 2\pi \end{cases}$$



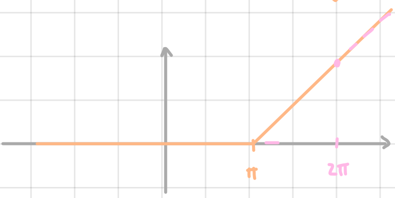
Exemplo Escreva em termos de função degrau e calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$

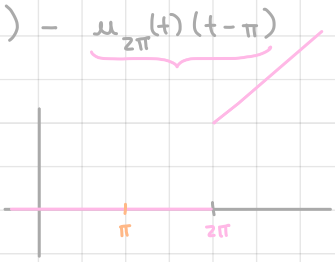
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ t-\pi, & \pi \leq t \leq 2\pi \\ 0, & t > 2\pi \end{cases}$$

Solução



$$f(t) = \underbrace{u_\pi(t)(t-\pi)} - \underbrace{u_{2\pi}(t)(t-\pi)}$$





$$\boxed{\mathcal{L}\{u_c(t).f(t-c)\} = e^{-cs}\,\mathcal{L}\{f(t)\}}$$

$$f(t) = \underbrace{u_\pi(t)(t-\pi)}_{\text{OK}} - u_{2\pi}(t)(t-\pi \overset{-\pi+\pi}{})$$

$$- u_{2\pi}(t-2\pi) - \pi.u_{2\pi}(t)$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f\} = e^{-\pi s}.\frac{1}{s^2} - e^{-2\pi s}.\frac{1}{s^2} - \pi\frac{e^{-2\pi s}}{s}}$$

Em geral: $\boxed{u_a(t).f(t) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ f(t) & , t \geq 0 \end{cases}}$

Exemplo Escreva em termos de função degrau e calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & 0 \leq t < 1 \\ 2t & t \geq 1 \end{cases}$$

Solução

$$f(t) = \underbrace{t^2 - u_1(t)t^2}_{\text{pedaço parábola}} + \underbrace{u_1(t)2t}_{\text{pedaço de reta}}$$

$$f(t) = t^2 - u_1(t)(t-1+1)^2 + u_1(t)2(t-1+1)$$

u^2+2u+1

$$= t^2 - u_1(t)\left[(t-1)^2 + 2(t-1) + 1\right]$$

$$+ u_1(t)\left[2(t-1) + 1\right]$$

$2u+1$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2}{s^3} - e^{-s}.\mathcal{L}\{u^2+2u+1\} + e^{-s}\mathcal{L}\{2u+1\}$$

$$= \frac{2}{s^3} - e^{-s}\left[\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right] + e^{-s}\left[\frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right]$$

$$= \frac{2}{s^3} - \frac{2e^{-s}}{s^3}$$