Aula 23 — Cálculo 3B — 2021.2

Aula passada: função degrau

Aula Hoje: função impulso

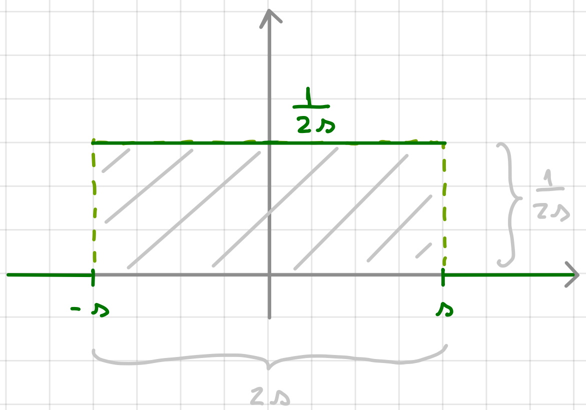
6.5 Função Impulso

exemplos:
- voltagem
- forças de módulo grande que agem em um espaço de tempo curto

Delta de Dirac

Considere $\tau > 0$ e

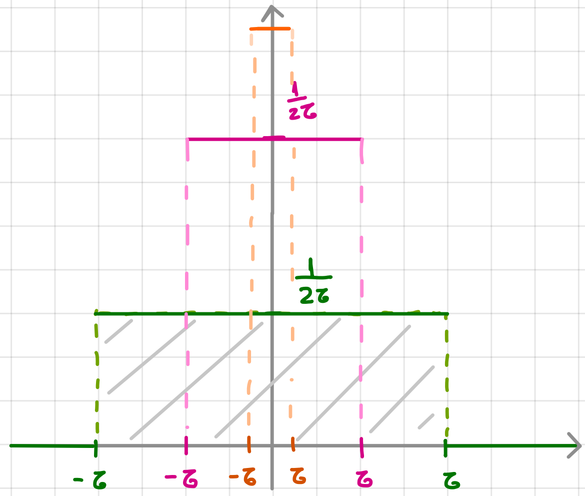
$$d_\tau(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\tau} & -\tau \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Note que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t)\,dt = 2\tau \cdot \frac{1}{2\tau} = 1$

para todo $s > 0$

Vamos considerar a função $d_\tau(t)$ para $s>0$ cada vez menores



(Note que para $0<\tau<1$, $\frac{1}{2\tau}$ é cada vez maior quando $\tau \to 0$

Temos $\boxed{\lim_{\tau\to 0} d_\tau(t) = 0}$ e $\boxed{\lim_{\tau\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t)\,dt = 1}$

Então definimos a "função" (generalizada) – não função no sentido usual da palavra delta de Dirac como tendo as propriedades:

$$\boxed{\begin{aligned} &\delta(t) = 0 \qquad t \neq 0 \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \end{aligned}}$$

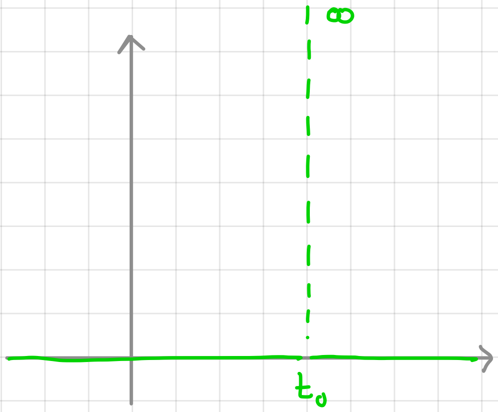
A função $\delta(t)$ corresponde ao impulso em $t=0$. Em geral temos

$$\boxed{\begin{aligned} &\delta(t-t_0) = 0 \qquad t \neq t_0 \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1 \end{aligned}}$$

↳ impulso ocorre em $t = t_0$

onde

$$\delta(t-t_0) = \lim_{\tau \to 0} d_\tau(t-t_0)$$



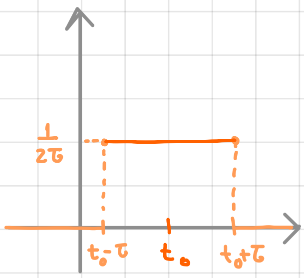
Cálculo da transformada de Laplace de $\delta(t-t_0)$.

- $t_0 > 0$
- $\delta(t-t_0) = \lim\limits_{\tau \to 0} \underbrace{d_\tau(t-t_0)}$

vamos calcular a transformada de d_τ e depois fazer o limite

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\} = \int_0^\infty e^{-st} d_\tau(t-t_0)\,dt$$

$$= \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} e^{-st} \cdot \frac{1}{2\tau}\,dt$$



$$= \frac{1}{2\tau}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]\Bigg|_{t_0-\tau}^{t_0+\tau}$$

$$= \frac{1}{2\tau}\left[\frac{e^{-s(t_0-\tau)} - e^{-s(t_0+\tau)}}{s}\right]$$

$$= e^{-st_0}\left[\frac{e^{s\tau} - e^{-s\tau}}{2s\tau}\right]$$

Fazendo o limite (L'Hospital)

$$\lim_{\tau \to 0} \mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\} = \mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}$$

$$= \lim_{\tau \to 0}\left[e^{-st_0}\left(\frac{e^{s\tau} - e^{-s\tau}}{2s\tau}\right)\right]$$

$$= \lim_{\tau \to 0} e^{-st_0}\left(\frac{\cancel{s}e^{s\tau} + \cancel{s}e^{-s\tau}}{2\cancel{s}}\right)$$

$$= e^{-st_0}$$ //

Resumo

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}}$$

em particular

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1}$$

Outra propriedade importante da delta de Dirac, $\delta(t-t_0)$.

Recorde

primitiva

- TFC : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

  onde $F'(x) = f(x)$

- TVM : $g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$

  para algum $c \in (a,b)$

Aplicando o TVM em F (primitiva de f) temos

$$\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a) = \underbrace{F'(c)}_{= f(c)}(b-a)$$

Então

Teorema valor médio integrais

$$\boxed{f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx}$$

para algum $c \in (a,b)$

Vamos calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\cdot f(t)\,dt \quad , \ f \text{ contínua}$$

Como $\quad \delta(t-t_0) = \lim\limits_{\tau \to 0} d_\tau(t-t_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0).f(t).dt = \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} \frac{1}{2\tau}\cdot f(t).dt$$

pelo TVM para Integrais

$$= \frac{1}{2\tau}\cdot 2\tau \ f(c) \quad \text{para}$$

$$t_0-\tau < c < t_0+\tau$$

$$= f(c)$$

e como $\quad c \to t_0$ quando $\tau \to 0$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0).f(t)\,dt = f(t_0)}$$

Exemplo

Resolva o PVI

$$\begin{cases} 2y''+y'+2y = \delta(t-5) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Solução

Por transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{2y''+y'+2y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-5)\}$$

$$\mathcal{L}\{y\}.(2s^2+s+2) = e^{-5s}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-5s}}{2s^2+s+2}$$

completando quadrado

$$2\left[\left(s+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}\right]$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-5s}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}\cdot\left[\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\left(s+\frac{1}{4}\right)^2+15/16}\right]$$

$\to e^{-t/4}\cdot \text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right)$

↳ linha 9 + 13 da tabela

9: $\quad \mathcal{L}\{e^{at}\,\text{sen}\,bt\} = \dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$

13: $\quad u_c(t).f(t-c) = e^{-cs}.F(t)$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}\,u_5(t)\,.\,e^{-\frac{1}{4}(t-5)}\,.\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}(t-5)\right)$$