Cálculo 2   2022.1

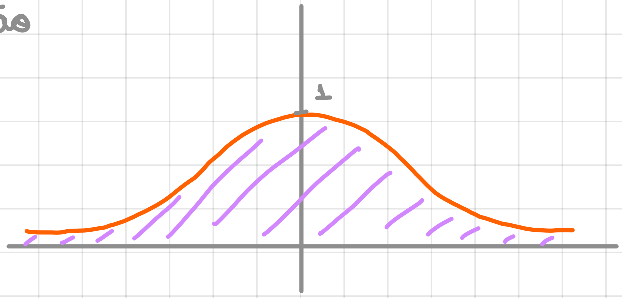
Aula 2

7.8 Integrais impróprias

Exemplo A integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

converge ou diverge?

Solução



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx}$$

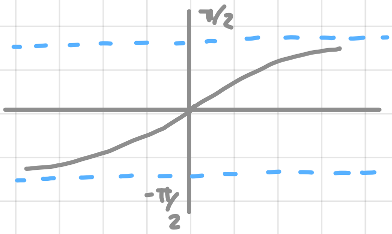
pela simetria vamos verificar só essa

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} t = \pi/2$$

↳ recorde



inversa da tgt.

Assim $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$

CONVERGE

Exemplo: Para quais valores de p a integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{converge?}$$

Solução:

Para $p = 1$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln x \Big|_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \ln t - 1 = \nexists$$

Diverge

para $p \neq 1$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right]$$

- $p - 1 > 0 \Rightarrow p > 1 \rightsquigarrow \frac{1}{t^{p-1}} \to 0$, $t \to +\infty$

Então

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1} \quad \text{converge}$$

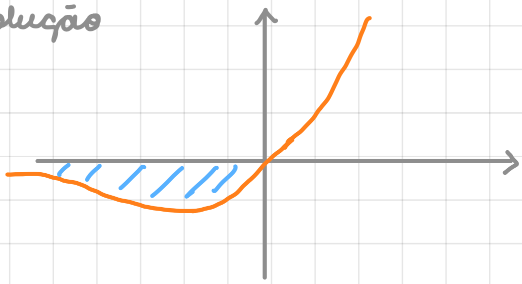
- $p - 1 < 0 \Rightarrow p < 1 \rightsquigarrow \frac{1}{t^{p-1}} \to \infty$, $t \to \infty$

Então

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p} \quad \text{diverge}$$

Exemplo: A integral $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$ diverge ou converge?

Solução



$$\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x dx}_{dv}$$

$du = dx$
$v = e^x$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left[xe^x - \int_t^0 e^x dx \right]$$

$$= \lim_{t\to-\infty} xe^x - e^x \Big|_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty} -1 - te^t + e^t = -1$$

$$\hookrightarrow \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}} \overset{\text{L'Hosp}}{=}$$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{1}{-e^{-t}} = 0$$

CONVERGE

Exemplo $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} . dx$ diverge

Exemplo A integral $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$

converge ou diverge?

Solução

Não podemos aplicar o TFC pois $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$

não está definido em $x = 2$

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx = \lim_{t\to 2^-} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$$

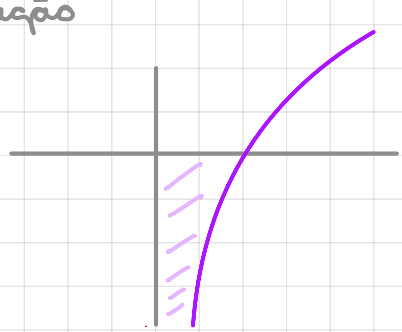
$$= \lim_{t\to 2^-} 2\sqrt{x-2} \Big|_t^5$$

$$= \lim_{t\to 2^-} 2\sqrt{3} - 2\sqrt{t-2}$$

$$= 2\sqrt{3}$$ CONVERGE

Exemplo: Calcule $\int_0^1 \ln x \, dx$:

Solução



$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \underbrace{\ln x}_{u}\, \overbrace{dx}^{dv}$$

$v = x$
$du = 1/x$

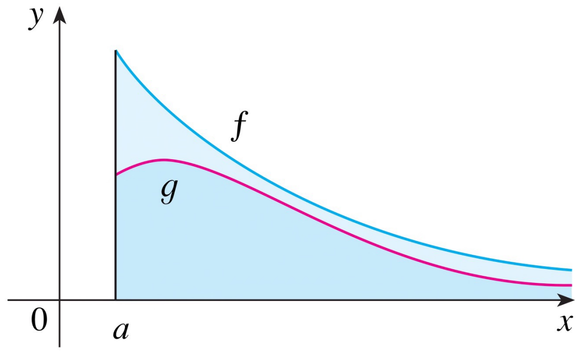
$$= \lim_{t\to 0^+} x\ln x - \int_t^1 dx$$

$$= \lim_{t\to 0^+} x\ln x - x \Big|_t^1$$

$$\lim_{t\to 0^+} -1 - \underbrace{t\ln t}_{} + t = -1$$

$\rightarrow$ L'Hosp

Teste de comparação para integrais impróprias



Teorema Seja f e g contínuas com $f(x) \geq g(x)$ para $x \geq a$

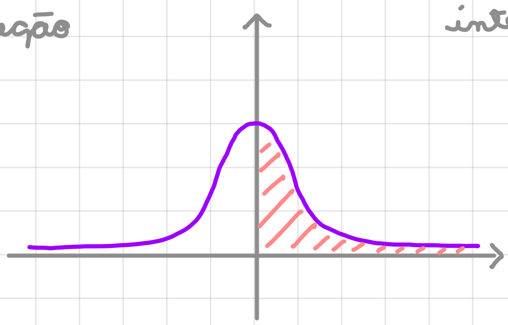
(a) Se $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge

então $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge

(b) Se $\int_a^{\infty} g(x)dx$ diverge então $\int_a^{\infty} f(x)dx$ diverge

Exemplo Calcule $\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx}_{\text{não sei integral}}$

Solução



- Primeiro passo é ter um palpite se a integral converge ou diverge

- Depois buscar uma função por cima ou por baixo a qual sabemos como se comporta a integral imprópria.

- Palpite: como $e^{-x^2} \to 0$ muito rapidamente

CONVERG

- Função que compara:

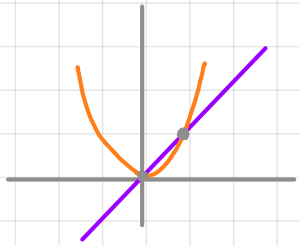
e^{-x} parece bom pois

$x \geq 1$

$\Rightarrow x^2 \geq x$

$\Rightarrow -x^2 \leq -x$

$\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$



Assim

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} . dx = \int_0^{1} e^{-x^2} . dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} . dx$$

$$\leq \int_0^{1} e^{-x^2} . dx + \int_1^{\infty} e^{-x} . dx$$

$$= \int_0^1 e^{-x^2} dx + \lim_{t \to \infty} \int_1^t e^{-x} dx$$

$$= \int_0^1 e^{-x^2} dx + \lim_{t \to \infty} -e^{-x} \Big|_1^t$$

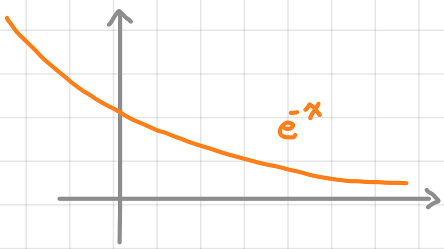
$$= \int_0^1 e^{-x^2} dx + \lim_{t \to \infty} -e^{-t} + e = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2} dx}_{\text{integral definida, número finito}} + e$$

CONVERGE

Exemplo Mostre que a integral $\int_1^{\infty} \underbrace{\frac{1+e^{-x}}{x}}_{\text{difícil integrar}} dx$ diverge.

Solução:

Vamos usar comparação



$e^{-x} > 0$

$e^{-x} + 1 > 1$

para $x > 0$

$$\Rightarrow \frac{e^{-x}+1}{x} > \frac{1}{x}$$

e $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge então

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}+1}{x} dx \text{ diverge}$$