Resolvendo sistemas lineares
A Eliminação de Gauss com pivoteamento

Algoritmos Numéricos - Topico 2-3
A Eliminação de Gauss com pivoteamento

Profa. Cláudia G. Varassin DI/UFES
emails:claudia.varassin@ufes.br e galarda@inf.ufes.br

Março 2021

Sumário

1. A eliminação de Gauss (versão ingênua)
2. A estratégia de pivoteamento
3. A eliminação de Gauss (versão completa)

Um sistema de equações lineares

Um sistema de equações lineares de dimensão n

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & + & \ldots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 & & & \ldots & \ldots & & \vdots & & \ldots & = & \ldots \\
a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + & a_{i,3}x_3 & + & \ldots & + & a_{i,n}x_n & = & b_i \\
 & & & \ldots & \ldots & & \vdots & & \ldots & = & \ldots \\
a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & a_{n,3}x_3 & + & \ldots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}
\right.
$$

Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

O método de eliminação de Gauss

É um método exato empregado para resolver sistemas lineares do tipo $Ax = b$ (com A matriz quadrada e $detA \neq 0$).

Consiste em transformar o sistema original em um o sistema equivalente que seja triangular superior.

$$Ax = b \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{A}x = \tilde{b}$$

via operações elementares

onde $\tilde{A}$ é uma matriz triangular superior.

Em seguida, resolver o sistema
$\tilde{A}x = \tilde{b}$ via substituição regressiva.

A matriz em uma etapa k, na triangularização

A $k^{ésima}$ Etapa consiste em eliminar a variável x_k das equaçoes $(k+1)$ até a n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{k,k} & \cdots & a_{k,n-1} & a_{k,n} \\ 0 & 0 & a_{k+1,k} & \cdots & a_{k+1,n-1} & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{i,k} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{n,k} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_k \\ b_{k+1} \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

k^a Etapa: eliminar a variável x_k das equaçoes $k+1$ até n

$$L_i = L_i - m * L_k$$

Algoritmo de Triangularização
INICIO
Ler(A,b,n)
Para k = 1 : (n-1) *"% as etapas"*
Para i= (k+1):n
m = a(i,k)/a(k,k)

atualizando os elementos da linha i

Fim do i
Fim do k
FIM

$$a_{ij} = a_{ij} - m a_{kj}$$

```
Algoritmo de Triangularização (versão ingênua)
INICIO
Ler(A,b,n)
Para k = 1 : (n-1)     "% as etapas"
   Para i= (k+1):n
         m = a(i,k)/a(k,k)
         a(i,k)=0   "% para visualização"
         Para j= (k+1):n
               a(i,j)= a(i,j)- m*a(k,j)
         Fim do j
   Fim do i
Fim do k
FIM
```

$$a_{ij} = a_{ij} - m * a_{kj}$$

$$m = a_{i,k} / a_{k,k}$$

$$a_{ij} = a_{ij} - m * a_{kj}$$

$$m = a_{i,k} / a_{k,k}$$

Algoritmo de Triangularização com PIVOTEAMENTO
INICIO
Ler(A,b,n)
Para k = 1 : (n-1)   *"% as etapas"*
  Qual é a MELHOR linha para ser a linha pivo ?
  Verificar em que linha há o maior pivô e fazer a troca

  Para i= (k+1):n
      m = a(i,k)/ a(k,k)
      . . .
      atualizando os elementos da linha i
  Fim do i
Fim do k
FIM

Exemplo

Fazendo a triangularização do sistema $Ax = b$.
Análise do "melhor" pivô.

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 2.0 & 2.0 & 1.0 & 4.0 \\ 55.0 & 2.0 & 5.0 & 5.0 \\ 1.0 & -10.0 & 10.0 & 6.0 \end{array}\right]$$

1^a Etapa: eliminar a variável x_1

Exemplo
Fazendo a triangularização do sistema $Ax = b$.
Análise do "melhor" pivô.

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 2.0 & 2.0 & 1.0 & 4.0 \\ 55.0 & 2.0 & 5.0 & 5.0 \\ 1.0 & -10.0 & 10.0 & 6.0 \end{array}\right]$$

1^a Etapa: eliminar a variável x_1
Busca o melhor pivô e troca linhas. Assim, tem-se:

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 55.0 & 2.0 & 5.0 & 5.0 \\ 2.0 & 2.0 & 1.0 & 4.0 \\ 1.0 & -10.0 & 10.0 & 6.0 \end{array}\right]$$

1^a Etapa:

Altera as eq. 2 até $n = 3$. Após a 1^a Etapa

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 55.0 & 2.0 & 5.0 & 5.0 \\ 0.0 & 1.927 & 0.818 & 3.818 \\ 0.0 & -10.036 & 9.909 & 5.909 \end{array}\right]$$

1ª Etapa:

Altera as eq. 2 até $n = 3$. Após a 1ª Etapa

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 55.0 & 2.0 & 5.0 & 5.0 \\ 0.0 & 1.927 & 0.818 & 3.818 \\ 0.0 & -10.036 & 9.909 & 5.909 \end{array}\right]$$

Antes da 2ª Etapa

Busca o melhor pivô e troca linhas. Assim, tem-se:

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 55.0 & 2.0 & 5.0 & 5.0 \\ 0.0 & -10.036 & 9.909 & 5.909 \\ 0.0 & 1.927 & 0.818 & 3.818 \end{array}\right]$$

Após a 2ª Etapa

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 55.0 & 2.0 & 5.0 & 5.0 \\ 0.0 & -10.036 & 9.909 & 5.909 \\ 0.0 & 0.0 & 2.721 & 4.9529 \end{array}\right]$$

k^a Etapa: eliminar a variável x_k das equaçoes $k+1$ até n

$$m = a_{i,k}/a_{k,k}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{k,k} & \cdots & a_{k,n-1} & a_{k,n} \\ 0 & 0 & a_{k+1,k} & \cdots & a_{k+1,n-1} & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{i,k} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & a_{n,k} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_k \\ b_{k+1} \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = a_{ij} - m * a_{kj}$$

Algoritmo de Triangularização com PIVOTEAMENTO
INICIO
Ler(A,b,n)
Para k = 1 : (n-1)   *"% as etapas"*

* Verificar em que linha há o maior pivô
(o maior entre os elementos $|a_{i,k}|$ será o pivô)

* Identificada a "melhor" linha, trocar com a linha k
Para i= (k+1):n
m = a(i,k)/ a(k,k)
...
Fim do i
Fim do k
FIM

RESUMINDO:

Para resolver um sistema linear $Ax = b$ (quadrado, não singular) pode-se usar o método de eliminação de Gauss. O método consiste em:

- transformar o sistema em um sistema triangular Superior
- o sistema triangular é resolvido por substituição regressiva

A triangularização deve ser realizada com a estratégia de pivoteamento. O objetivo é controlar o aumento de erros de arredondamento (e, também, evitar divisões por zero).

A estratégia é usar sempre um multiplicador tal que $|m| \leq 1$.
Isso é conseguido escolhendo, a cada etapa, como linha pivô aquela que tenha, na coluna k, o maior elemento em módulo.

Bibliografia Básica

- Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.
- Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.
- https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico