Universidade Federal do Espírito Santo
Segunda Prova de Álgebra Linear – Semestre EARTE
Vitória, 16 de novembro de 2020

Nome Legível: ____

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS!!!

1. (2,0 pontos): Seja S o espaço solução em $\mathbb{R}^5$ do sistema dado pelas equações $x_1 + x_2 = x_4$ e $x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0$. Encontre uma base de S que contenha os vetores $\vec{u} = (1, -1, 1, 0, 1)$ e $\vec{v} = (0, 1, 2, 1, 1)$.

Solução: Temos o sistema homogêneo
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}.$$
Então, sua matriz aumentada e sua respectiva matriz escalonada reduzida são:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & \vdots\, 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & \vdots\, 0 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & \vdots\, 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & \vdots\, 0 \end{bmatrix}.$$
Daí, segue que as soluções do sistema são vetores do $\mathbb{R}^5$ dados por
$$\vec{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\beta - \alpha, \alpha, \beta + \gamma, \beta, \gamma), \text{ com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$
Ou,
$$\vec{v} = \alpha(-1, 1, 0, 0, 0) + \beta(1, 0, 1, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1, 0, 1), \text{ com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$
Desta forma, vê-se claramente que
$$S = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \rangle = \mathcal{L}\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$$

onde $\overrightarrow{v_1} = (-1, 1, 0, 0, 0)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 0, 1, 1, 0)$ e $\overrightarrow{v_3} = (0, 0, 1, 0, 1)$. Assim, $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$, por ser LI, é uma base de S.
Como é solicitado pelo enunciado do problema uma base de S contendo os vetores $\vec{u} = (1, -1, 1, 0, 1)$ e $\vec{v} = (0, 1, 2, 1, 1)$, devemos então encontrar um vetor $\vec{w} \in \mathbb{R}^5$, $\vec{w} \notin \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \mathcal{L}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ e tal que
$$S = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \mathcal{L}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}.$$
É fácil observar que:
$$(1, -1, 1, 0, 1) = -(-1, 1, 0, 0, 0) + (0, 0, 1, 0, 1) \Longrightarrow \boxed{\vec{u} = -\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}}$$
e,
$$(0, 1, 2, 1, 1) = (-1, 1, 0, 0, 0) + (1, 0, 1, 1, 0) + (0, 0, 1, 0, 1) \Longrightarrow \boxed{\vec{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}}$$
Desta forma, se tomarmos $\vec{w} = \overrightarrow{v_i}$, $i = 1, 2, 3$, teremos que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI, e consequentemente, teremos $S = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \mathcal{L}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.
Para provarmos que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI, é bastante observar que a equação linear
$$(1) \qquad k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w} = 0 \Longrightarrow k_1(-\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}) + k_2(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}) + k_3\overrightarrow{v_i} = 0$$
$$\Longrightarrow (-k_1 + k_2)\overrightarrow{v_1} + (k_2)\overrightarrow{v_2} + (k_1 + k_2)\overrightarrow{v_3} + k_3\overrightarrow{v_i} = 0,$$
considerando a independência linear dos vetores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v_3}$, produzirá uma das seguintes matrizes aumentada

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \vdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \vdots 0 \\ 1 & 1 & 0 \vdots 0 \end{bmatrix}$, se $\vec{w} = \vec{v_1}$;

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \vdots 0 \\ 0 & 1 & 1 \vdots 0 \\ 1 & 1 & 0 \vdots 0 \end{bmatrix}$, se $\vec{w} = \vec{v_2}$;

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \vdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \vdots 0 \\ 1 & 1 & 1 \vdots 0 \end{bmatrix}$, se $\vec{w} = \vec{v_3}$.

As matrizes dos coeficientes acima, a saber,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

possuem determinantes não nulos o que comprova que a equação linear (1) tem solução única trivial $k_1 = 0, k_2 = 0$ e $k_3 = 0$, e consequentemente, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI, é uma base procurada de S. ■

2. (2,0 pontos): Seja $\vec{v} = (1, 3, 5)$.
(a) Ache a projeção de $\vec{v}$ sobre o subespaço $W = \langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle = \mathcal{L}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $\vec{v_1} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v_2} = (1, 2, 3)$.
(b) Ache a equação do plano π, paralelo ao subespaço (plano) W e passando pelo ponto $P = (2, -1, -3)$.

<u>Solução</u>:

(a) Vê-se claramente que $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ não são ortogonais ($\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} > 0$). Apliquemos o processo de Gram-Schmidt para transformar a base $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ numa base $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}\}$ ortogonal.

Faça $\boxed{\vec{w_1} = \vec{v_1} = (1, 1, 1)}$.

Depois, faça

$$\vec{w_2} = \vec{v_2} - \frac{\vec{w_1} \cdot \vec{v_2}}{\|\vec{w_1}\|^2} \vec{w_1} = (1, 2, 3) - \frac{1 + 2 + 3}{3}(1, 1, 1) \Longrightarrow \boxed{\vec{w_2} = (-1, 0, 1)}$$

Logo, $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}\}$ é uma base ortogonal de W.

Daí, se $\vec{w} = proj_W \vec{v}$, onde $\vec{v} = (1, 3, 5)$, então

$$\vec{w} = \frac{\vec{w_1} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w_1}\|^2} \vec{w_1} + \frac{\vec{w_2} \cdot \vec{v}}{\|\vec{w_2}\|^2} \vec{w_2} = \frac{1 + 3 + 5}{3}(1, 1, 1) + \frac{-1 + 0 + 5}{3}(-1, 0, 1)$$

$$\Longrightarrow \vec{w} = (3, 3, 3) + \left(-\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\right) \Longrightarrow \boxed{\vec{w} = proj_W \vec{v} = \left(\frac{5}{3}, 3, \frac{13}{3}\right)}$$

(b) Sendo π paralelo a W, então o vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$ de π é ortogonal aos vetores geradores de W, $\vec{w_1}$ e $\vec{w_2}$ (ou, $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$).

Nesse caso, temos $\pi: ax + by + cz + d = 0$ onde $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ e $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ é algum ponto sobre o plano π.

Assim devemos ter:

$$\vec{n} \cdot \vec{w_1} = 0 \Longrightarrow (a, b, c) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Longrightarrow a + b + c = 0 \qquad (1)$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{w_2}=0 \Longrightarrow (a,b,c)\cdot(-1,0,1)=0 \Longrightarrow -a+c=0 \qquad (2)$$

De (1) e (2), segue que $a=\alpha, b=-2\alpha, c=\alpha$, para $\alpha\in\mathbb{R}$.
Portanto, podemos tomar $\vec{n}=(1,-2,1)$ e podemos escrever $\pi: x-2y+z+d=0$.
Visto que $P=(2,-1,-3)\in\pi$, devemos ter $d=-\big(1\cdot 2\ -2\cdot(-1)+1\cdot(-3)\big)=-1$, e então

$$\boxed{\pi: x-2y+z-1=0}$$

3. (2,0 pontos): A matriz A tem 6 colunas, denotadas por C_i com $i=1,\cdots,6$. Valem as relações $C_1-3C_2=C_3$ e $C_1+C_2+C_3+C_4=C_5$. Mostre que $\mathrm{Col}(A)$ é gerado pelas colunas $1,2,4$ e 6. Ache duas soluções LI de $AX=0$.

<u>Solução</u>: Temos que o espaço coluna de A, $\mathrm{Col}(A)$ é gerado por suas colunas. Assim, temos que $\mathrm{Col}(A)=\langle C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6\rangle=\mathcal{L}\{C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6\}$.
Pelas relações: $C_1-3C_2=C_3$ e $C_1+C_2+C_3+C_4=C_5$, podemos observar que

$$C_3\in\langle C_1,C_2\rangle;\ C_5\in\langle C_1,C_2,C_3,C_4\rangle.$$

Consequentemente, temos $C_3,C_5\in\langle C_1,C_2,C_3,C_4,C_6\rangle$, visto que podemos escrever:

$$C_3=C_1-3C_2+0C_4+0C_6;\ \ C_5=C_1+C_2+C_3+C_4+0C_6.$$

Portanto,

$$\mathrm{Col}(A)=\langle C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6\rangle=\langle C_1,C_2,,C_4,C_6\rangle$$

mostrando que que $\mathrm{Col}(A)$ é gerado pelas colunas $1,2,4$ e 6.
Agora considere o sistema homogêneo $AX=0$, onde $A=[C_1\ \vdots\ C_2\ \vdots\ C_3\ \vdots\ C_4\ \vdots\ C_5\ \vdots\ C_6]$, a matriz dada pelas colunas C_i com $i=1,\cdots,6$.
Como A possui 6 colunas, então X é uma matriz 6×1, isto é,

$$X=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6]^t.$$

Mas, $AX=0\Longrightarrow x_1C_1+x_2C_2+x_3C_3+x_4C_4+x_5C_5+x_6C_6=0$.
Pelas relações $C_1-3C_2=C_3$ e $C_1+C_2+C_3+C_4=C_5$ dadas no enunciado do problema, segue então que:

$$\begin{cases} C_1-3C_2-C_3+0C_4+0C_5+0C_6=0 \\ \ \ C_1+C_2+C_3+C_4-C_5+0C_6=0 \end{cases}$$

e desta forma, temos que $X_1=[1\quad -3\quad -1\quad 0\quad 0\quad 0]^t$ e $X_2=[1\quad 1\quad 1\quad 1\quad -1\quad 0]^t$ são duas soluções do sistema $AX=0$. A independência linear desses vetores solução é evidente em face do fato que não são múltiplos um do outro.
Assim, $X_1=(1,-3,-1,0,0,0)$ e $X_2=(1,1,1,1,-1,0)$ são duas soluções LI de $AX=0$. ■

4. (2,0 pontos): Determine condições sobre a,b e c de modo que o determinante da matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ a & b & c & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

seja igual a c.

<u>Solução</u>: Por expansão cofatorial em relação à última linha da matriz A, temos que

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ b & c & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & c & 1 \end{vmatrix} = -(4 + 3b - 3 - 2c) + 2 + 3a - 3 - c$$

$$\det(A) = 3a - 3b + c - 2.$$

Daí,

$$\det(A) = c \Leftrightarrow c = 3a - 3b + c - 2 \Leftrightarrow 3a - 3b = 2.$$

Assim, $\det(A) = c$ se $a = b + (2/3)$. (b e c escalares quaisquer)

Verificando:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ b + (2/3) & b & c & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ b & c & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ b + (2/3) & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \det(A) = 3\left(b + \frac{2}{3}\right) - 3b + c - 2 = 3b + 2 - 3b + c - 2 \Longrightarrow \det(A) = c. \qquad \blacksquare$$

5. (2,0 pontos): Verifique se cada uma das seguintes afirmações é Verdadeira ou Falsa. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, dê um contraexemplo.

(a) Se o conjunto $S = \{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_r}\} \subset \mathbb{R}^n$ é LI então qualquer subconjunto de S é LI.

(b) Se $r \in \mathbb{R}$ então $r\det(A) = \det(rA)$.

(c) Seja $\pi \subset \mathbb{R}^3$ um plano contendo a origem. Então, existe um único subespaço próprio H de $\mathbb{R}^3$, com $\pi \neq H$ tal que $\pi \subset H \subset \mathbb{R}^3$.

(d) Se $\dim\big(Nul\ (A_{5\times 4})\big) = 2$ então a dimensão do espaço linha é 3.

<u>Solução</u>:

(a) Verdadeiro.

De fato, seja $k < r$. Então o conjunto $S_0 = \{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k}\} \subset S = \{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_r}\}$.

Vamos então provar que: S LI $\Longrightarrow S_0$ LI.

Provemos por contradição. Suponha que S_0 seja LD.

Logo existem escalares $c_1, c_2, \cdots, c_k$ <u>**não todos nulos**</u> tais que

$$c_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + c_k\,\overrightarrow{v_k} = 0.$$

Mas,

$$c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k = 0 \Longrightarrow c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k + 0\vec{v}_{k+1} + \cdots + 0\vec{v}_r = 0$$

nos dizendo que existem n escalares $c_1, c_2, \cdots, c_k, c_{k+1}, \cdots, c_n$, <u>**não todos nulos**</u> tais que

$$c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k + c_{k+1}\vec{v}_{k+1} + \cdots + c_n\vec{v}_r = 0$$

contradizendo o fato de que $S = \{\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_r}\} \subset \mathbb{R}^n$ é LI. $\blacksquare$

(b) Falso.

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$5A = \begin{pmatrix} 5(1) & 5(2) \\ 5(-3) & 5(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -15 & 20 \end{pmatrix}.$$

Daí, vemos que:

$$\det(A) = 10 \text{ e } \det(5A) = 250,$$

onde vemos que $\det(5A) \neq 5\det(5A)$.
Na verdade, se A é uma matriz de ordem $n \times n$ e $r \in \mathbb{R}$, então

$$\boxed{\det(rA) = r^n \det(A)}.$$

No exemplo acima vemos que, A é 2×2 e $r = 5$ e realmente temos

$$\det(5A) = 250 = 5^2 \cdot 10 = 5^2 \det(A). \blacksquare$$

(c) Falso.
Sabemos que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Assim, se H é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, devemos ter $0 \leq \dim H \leq 3$.
Sabemos também que:

- Se $\dim H = 0$, então $H = \{(0,0,0)\}$, o subespaço nulo de $\mathbb{R}^3$.
- Se $\dim H = 1$, então $H: (x,y,z) = t(a,b,c)$, uma reta passando pela origem $(0,0,0)$.
- Se $\dim H = 2$, então $H: \pi: ax + by + cz = 0$, um plano contendo a origem $(0,0,0)$.
- Se $\dim H = 3$, então $H = \mathbb{R}^3$.

Assim, $\dim(\pi) = 2$. Logo, se existir H, subespaço de $\mathbb{R}^3$, com $\pi \subset H$, $\pi \neq H$, então $\dim H = 3$ e $H = \mathbb{R}^3$, não sendo um subespaço próprio de $\mathbb{R}^3$.
Contraexemplo:
Seja $\pi: x = 0$ um plano no $\mathbb{R}^3$. O plano π é o plano coordenado yOz, gerado pelos vetores $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$.
Agora, se H, subespaço de $\mathbb{R}^3$ com $\pi \subset H$, $\pi \neq H$, então obviamente podemos acrescentar um vetor $\vec{u} \notin= \langle \vec{j}, \vec{k} \rangle = \mathcal{L}\{\vec{j}, \vec{k}\}$ ao conjunto $\{\vec{j}, \vec{k}\}$ para obtermos uma base $\{\vec{j}, \vec{k}, \vec{u}\}$ do subespaço $H \subset \mathbb{R}^3$. Mas como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ e $\{\vec{j}, \vec{k}, \vec{u}\}$ é LI em $\mathbb{R}^3$, segue então que $H = \mathbb{R}^3$, mostrando não existir subespaço próprio H de $\mathbb{R}^3$, com $\pi \neq H$ tal que $\pi \subset H \subset \mathbb{R}^3$. $\blacksquare$

(d) Falso.
Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem (página 271 do Livro Texto):
"Seja A uma matriz $m \times n$. A soma da dimensão do núcleo de A (nulidade) com a dimensão da imagem de A (posto) é igual ao número de colunas da matriz A, ou seja,

$$\boxed{\dim\big(\mathcal{N}(A)\big) + \dim\big(\mathcal{I}(A)\big) = n} \text{ ou } \boxed{nulidade\ (A) + posto\ (A) = n}."$$

Desta forma, se A é uma matriz 5×4 e $\dim\big(Nul\ (A_{5\times4})\big) = 2$, pelo Teorema da Dimensão, temos então,

$$4 = \dim\big(Nul\ (A_{5\times4})\big) + \dim\big(Posto\ (A_{5\times4})\big) \Longrightarrow 4 = 2 + \dim\big(Posto\ (A_{5\times4})\big)$$
$$\Longrightarrow \dim\big(Posto\ (A_{5\times4})\big) = 2.$$

<u>Contraexemplo</u>: Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então vemos que as soluções do sistema $AX = 0$ são as mesmas do sistema $RX = 0$, a saber, $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\alpha, \beta, \alpha, \beta)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Se S denota o conjunto solução de $AX = 0$, então

$$S = \langle (1, 0, 1, 0)(0,1, 0, 1) \rangle,$$

e então temos que $\dim\big(Nul\ (A_{5\times4})\big) = 2$.
Visto que a matriz R possui somente 2 linhas não nulas, segue então que $Posto\ (A_{5\times4}) = 2$, verificando o Teorema da Dimensão. ■