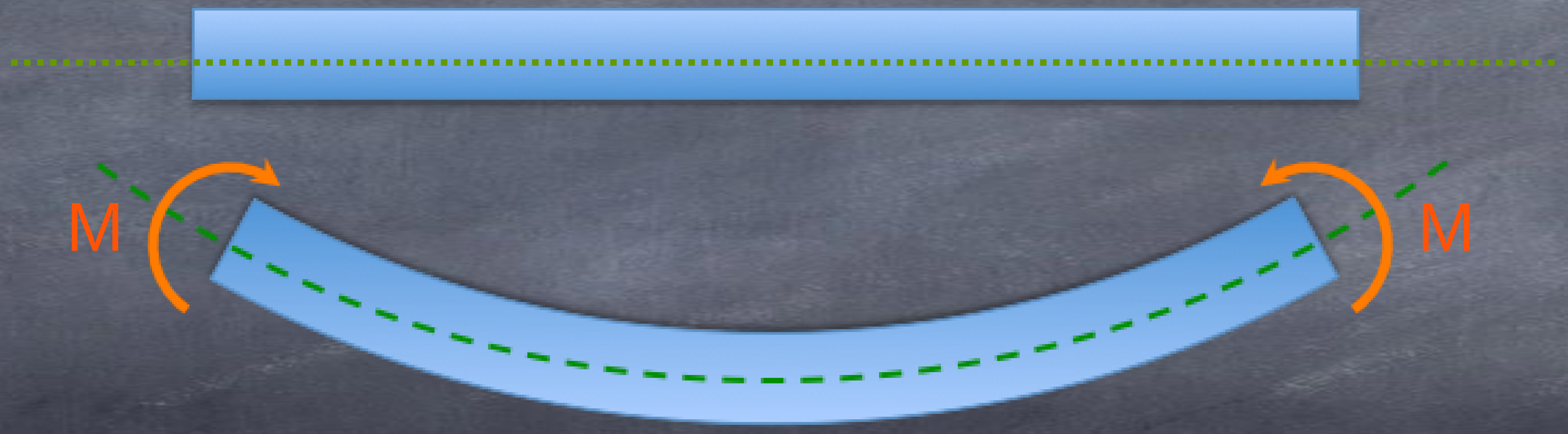
Mecânica dos Sólidos

Flexão

Diagramas de força cortante e momento fletor

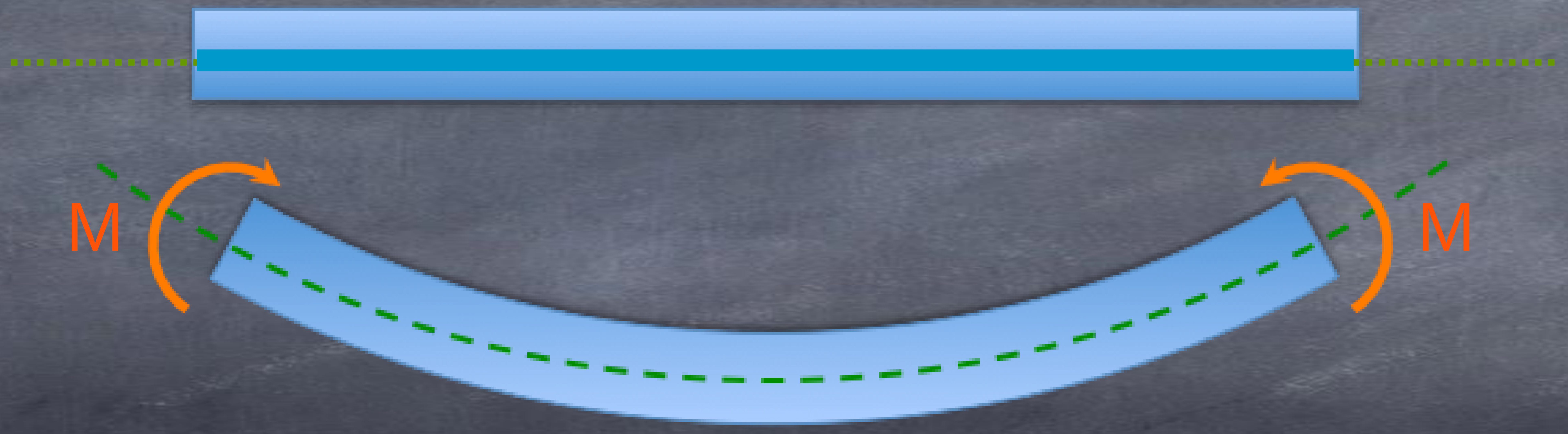
Diagramas de força cortante e momento fletor

Flexão pura



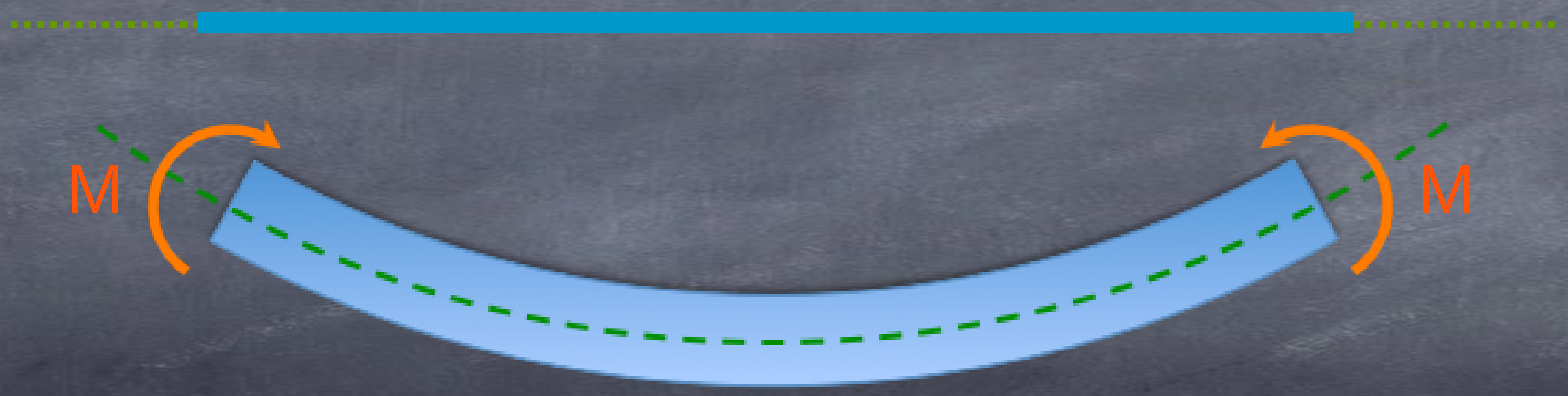
Diagramas de força cortante e momento fletor

Flexão pura



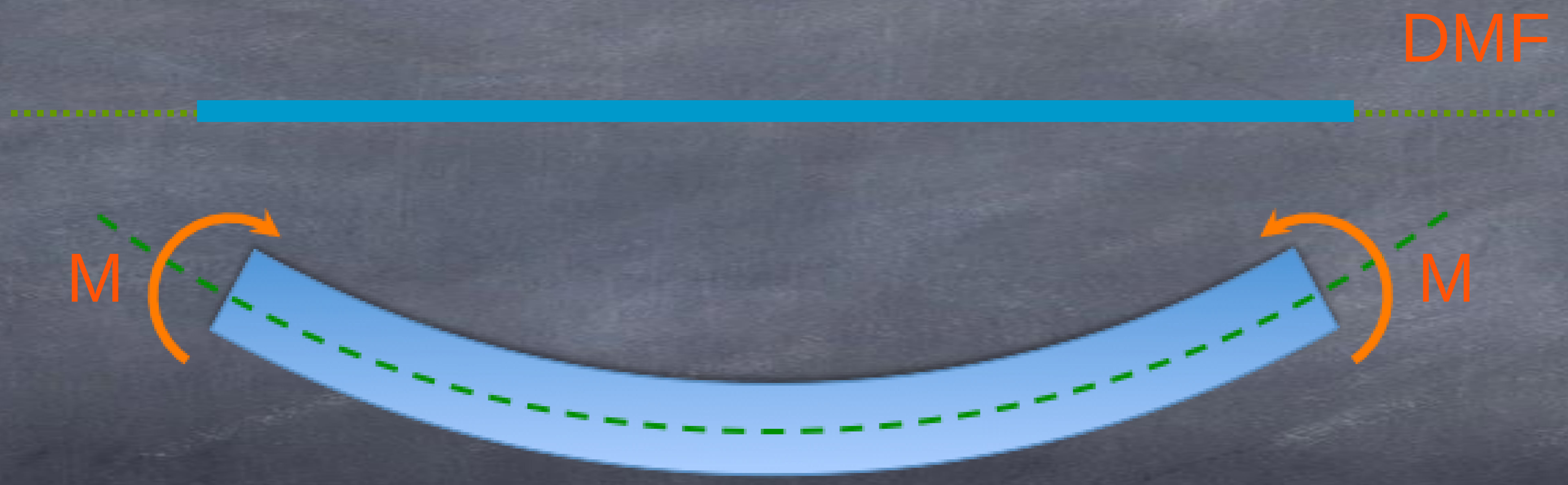
Diagramas de força cortante e momento fletor

Flexão pura

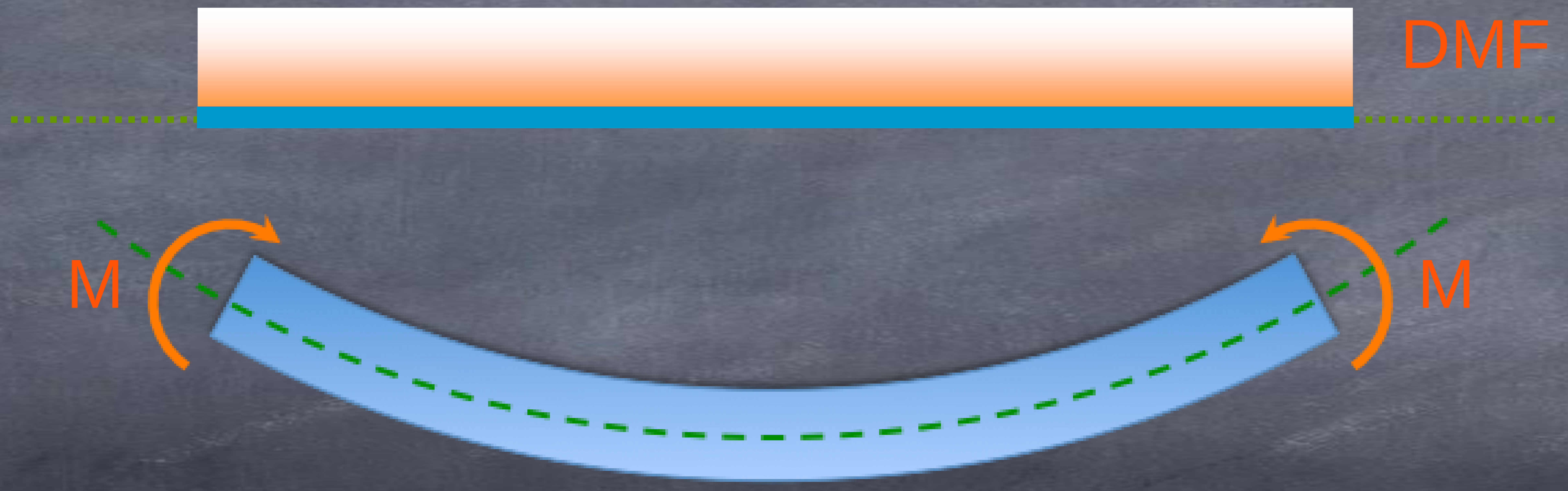


Diagramas de força cortante e momento fletor

Flexão pura

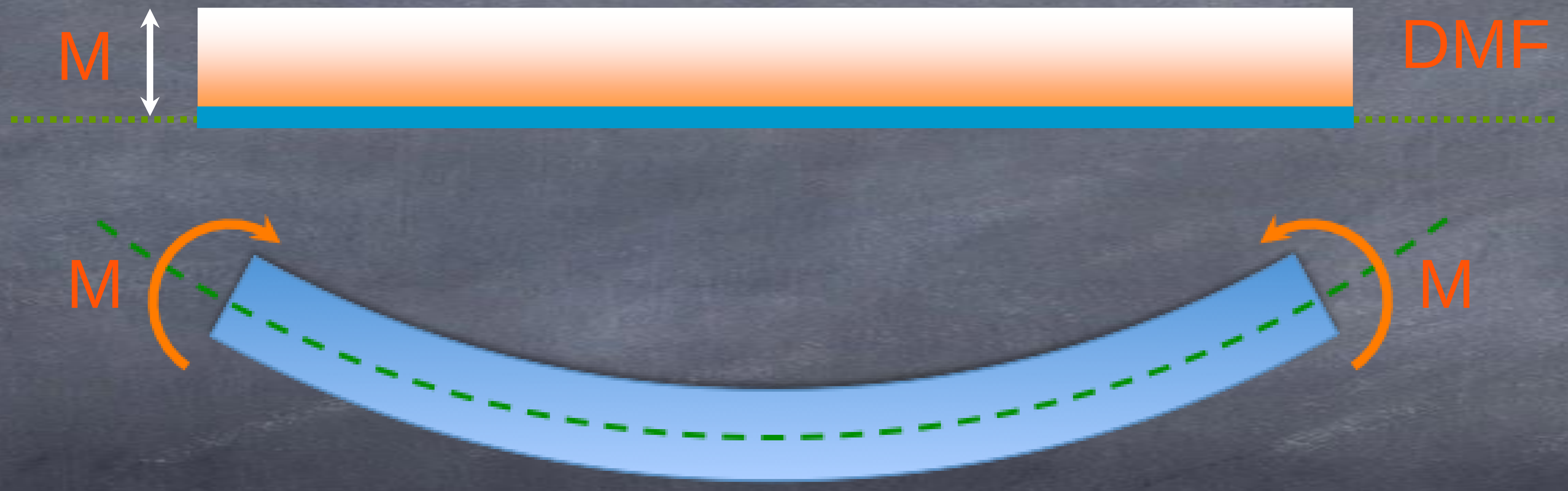


Diagramas de força cortante e momento fletor



Flexão pura

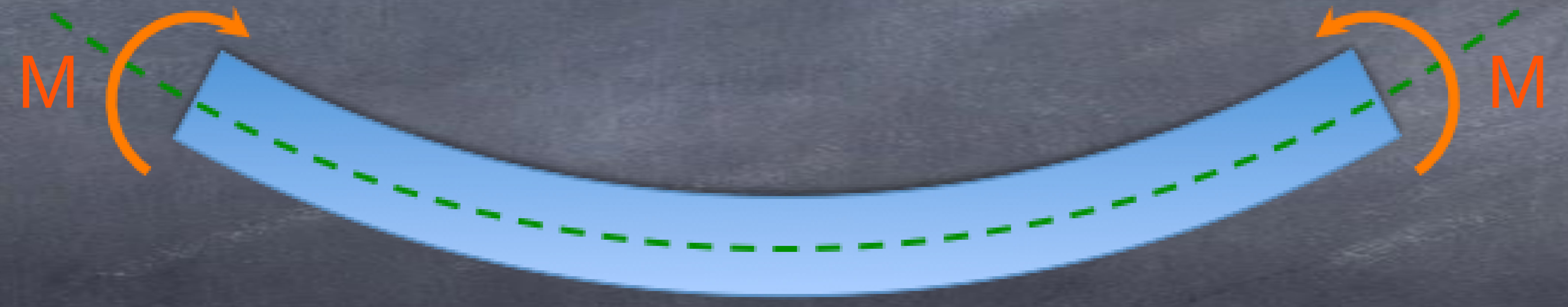
Diagramas de força cortante e momento fletor



Flexão pura

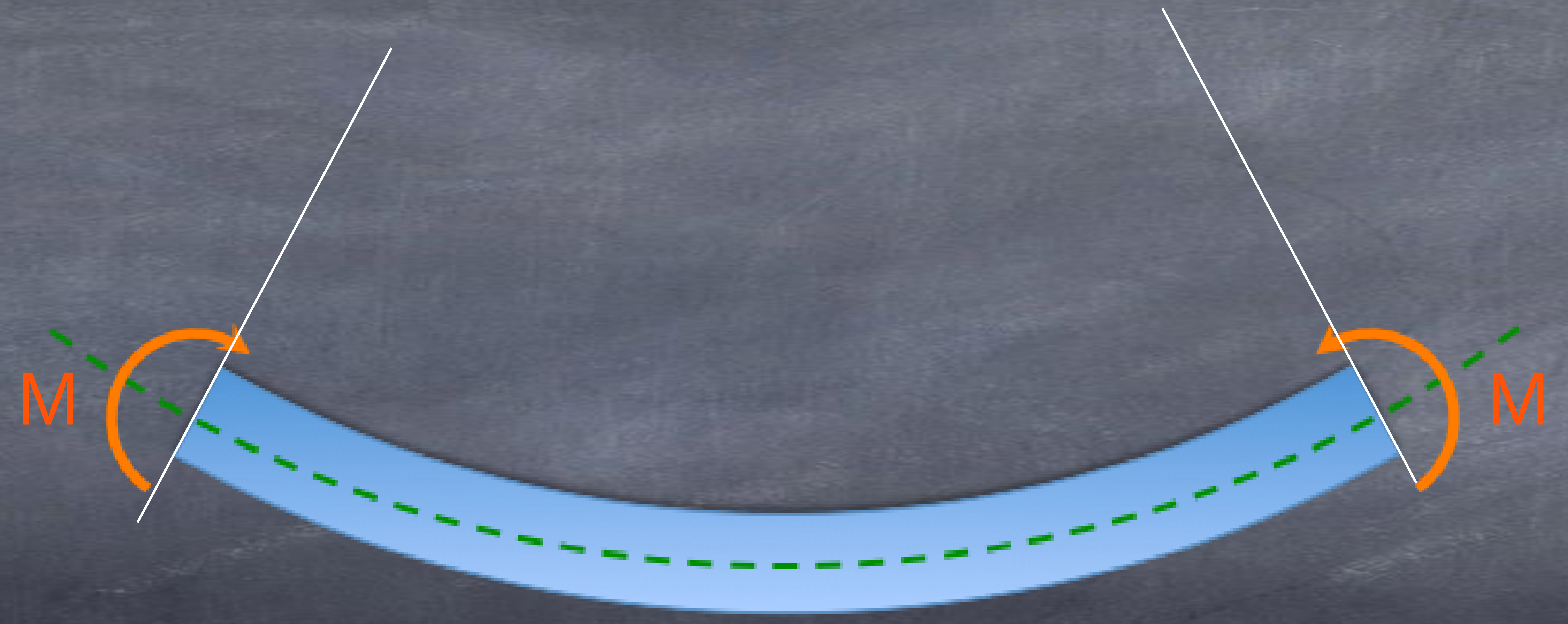
Diagramas de força cortante e momento fletor

Flexão pura



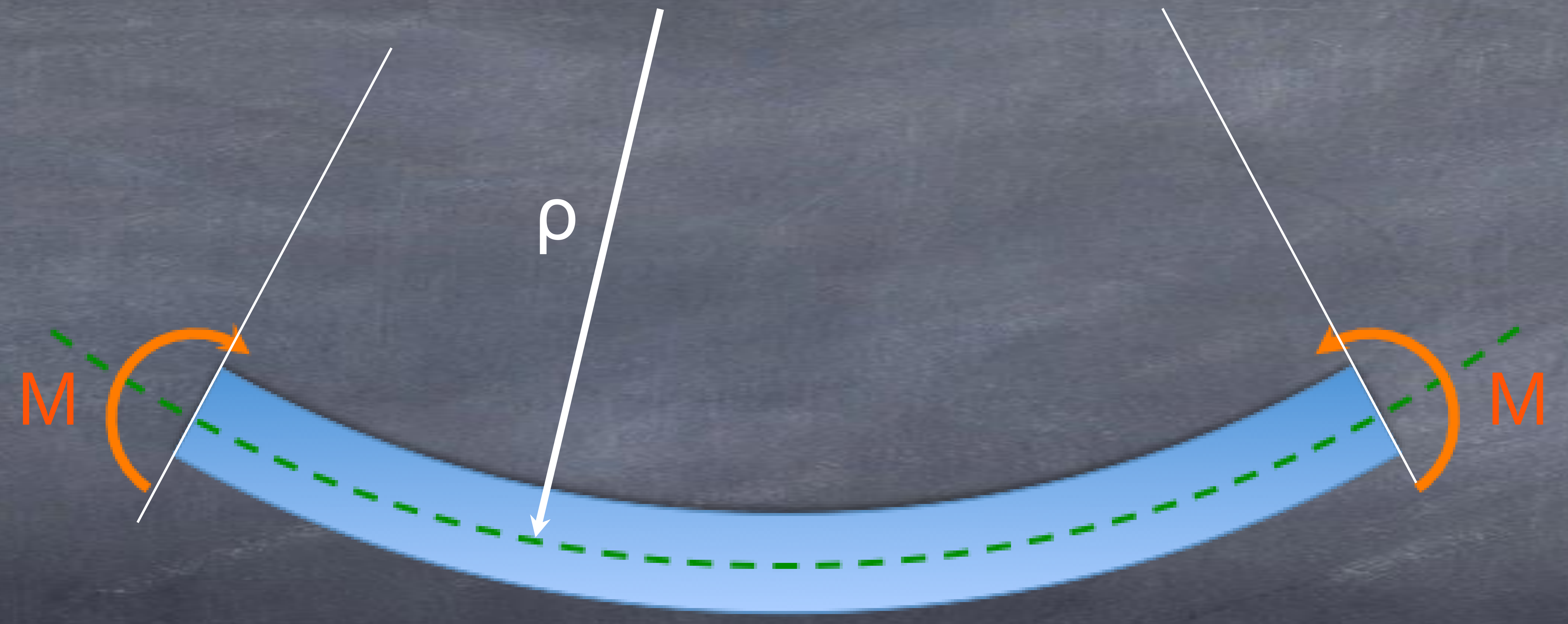
Diagramas de força cortante e momento fletor

Flexão pura



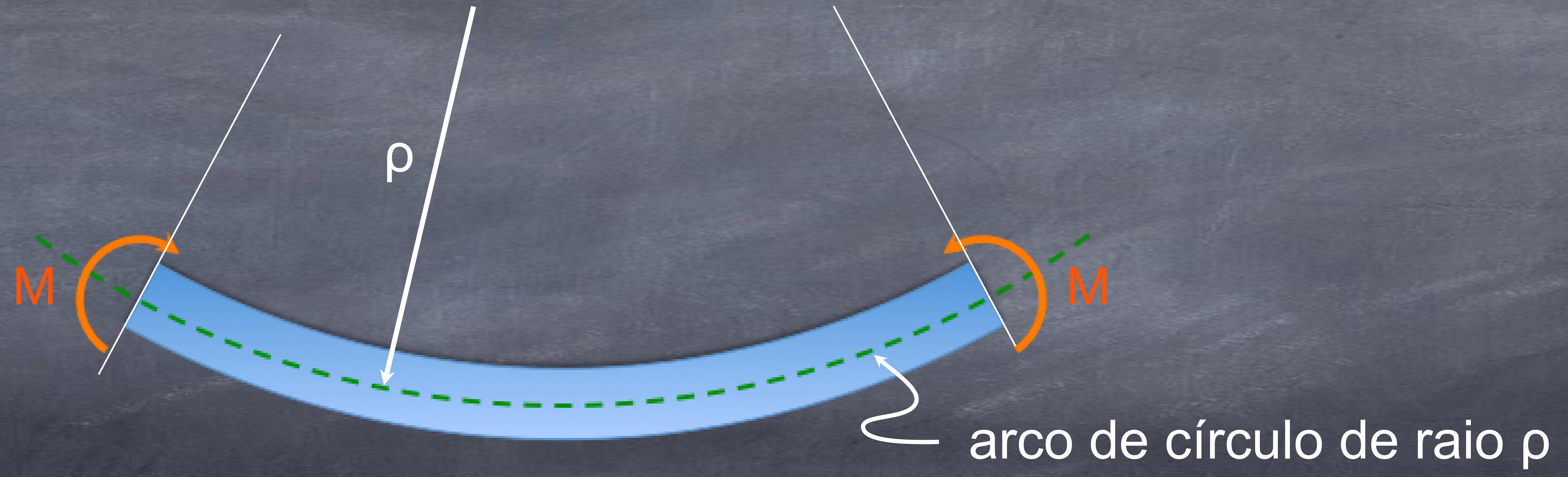
Diagramas de força cortante e momento fletor

Flexão pura



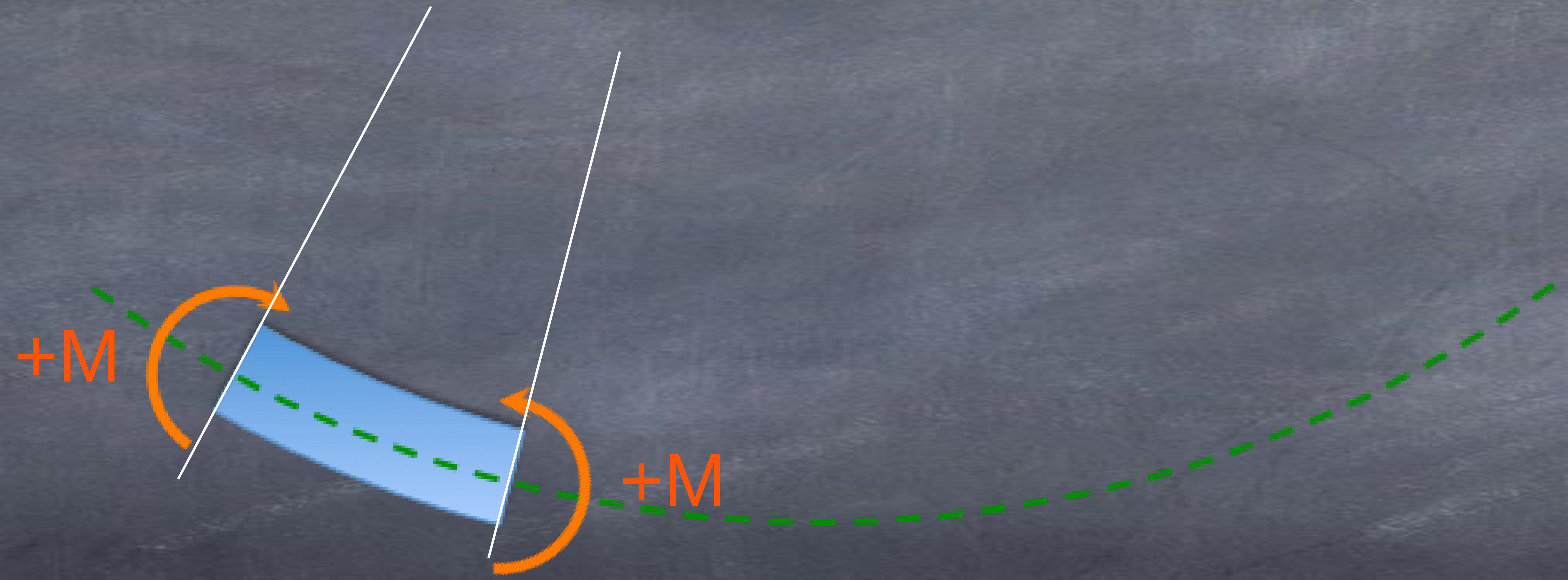
Diagramas de força cortante e momento fletor

Flexão pura



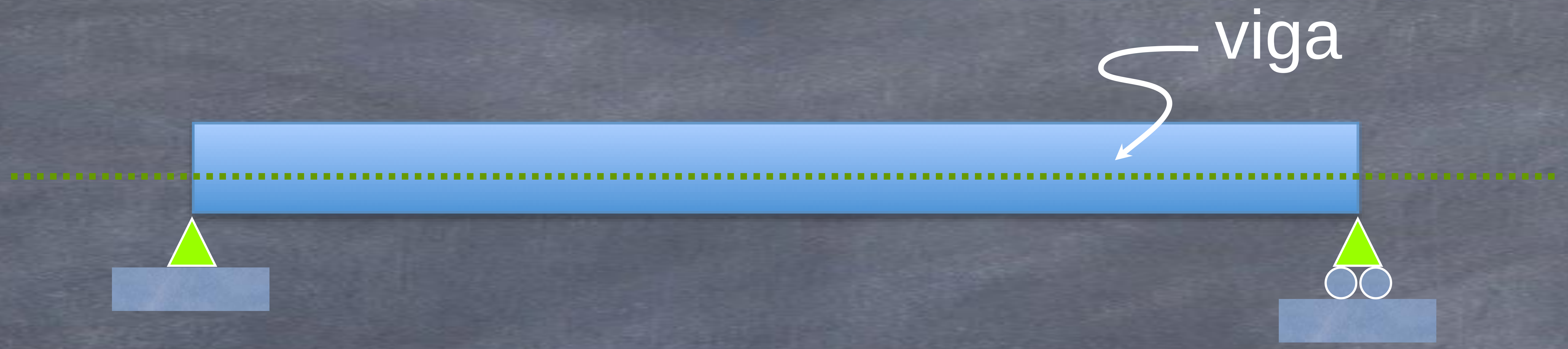
Diagramas de força cortante e momento fletor

Flexão pura



Diagramas de força cortante e momento fletor

Diagramas de força cortante e momento fletor

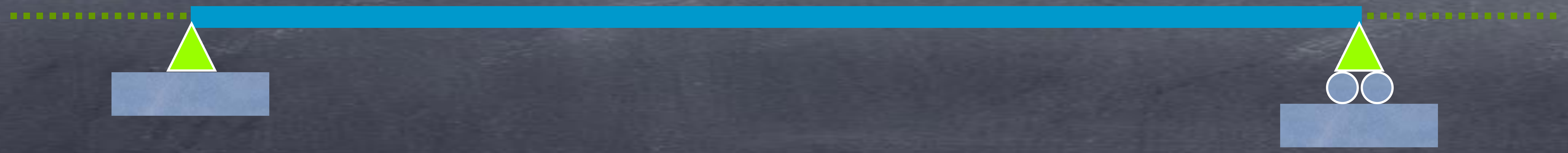


Diagramas de força cortante e momento fletor

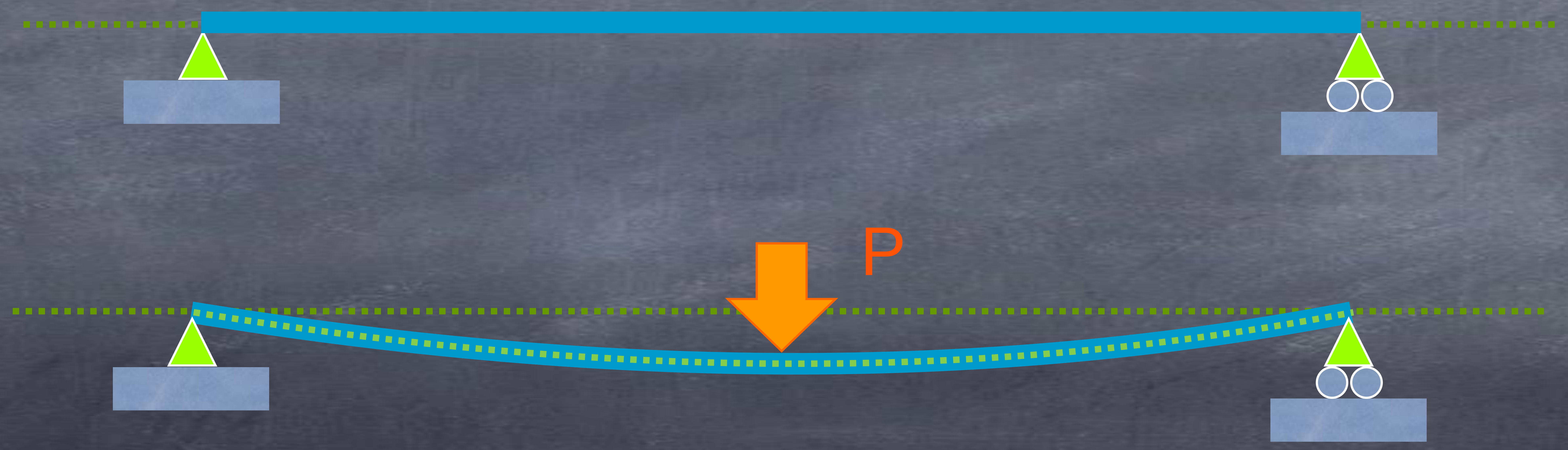
Diagramas de força cortante e momento fletor

Diagramas de força cortante e momento fletor

Diagramas de força cortante e momento fletor

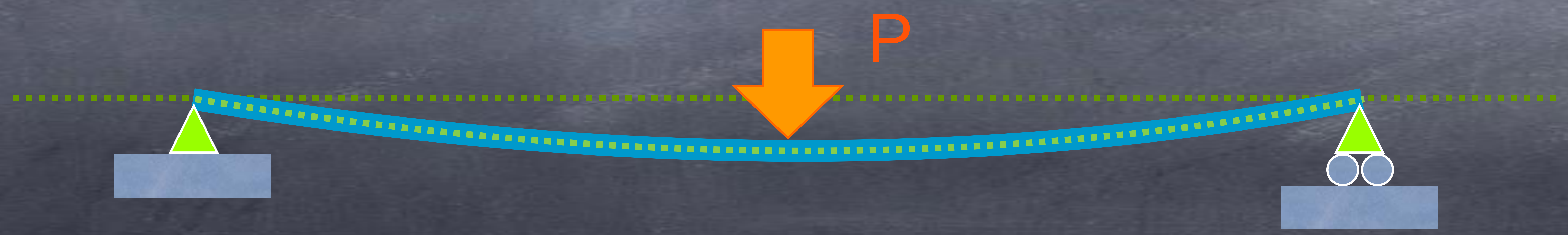


Diagramas de força cortante e momento fletor



Diagramas de força cortante e momento fletor

Flexão por
esforço cortante

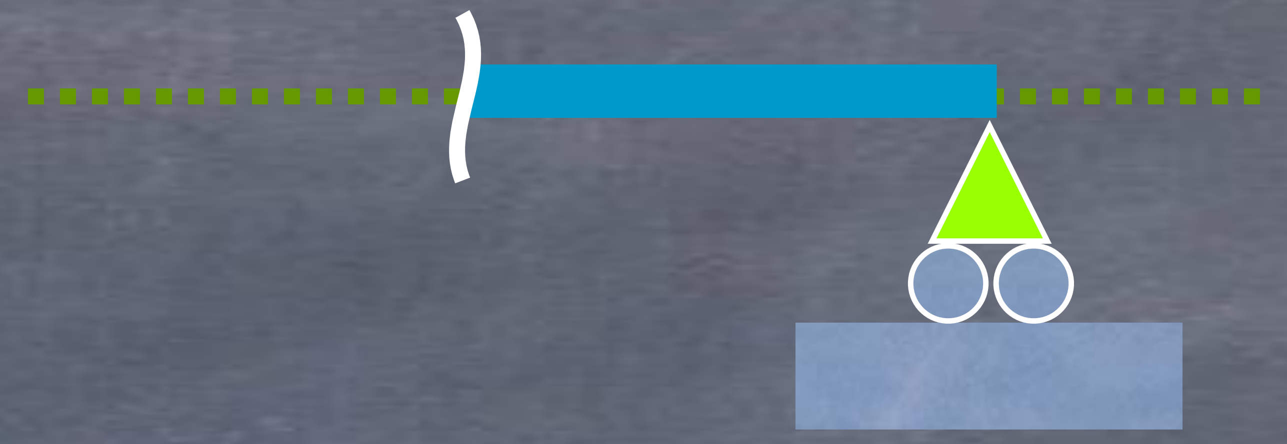


Diagramas de força cortante e momento fletor

Tipos de apoio

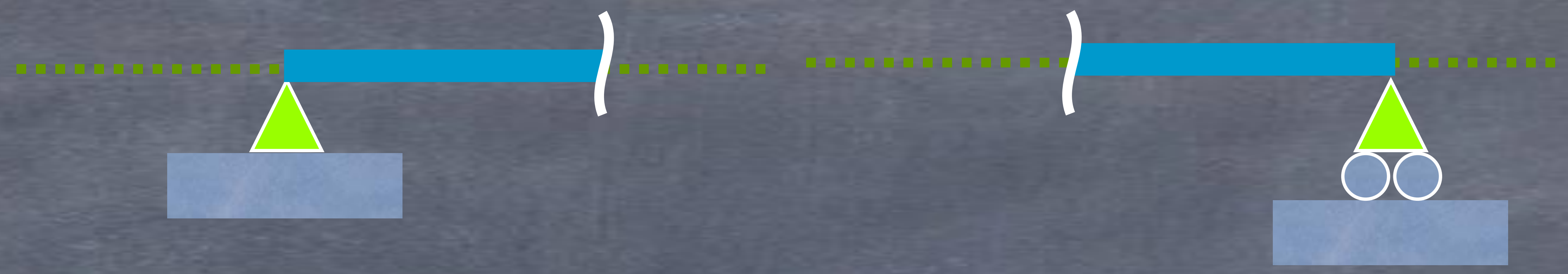
Diagramas de força cortante e momento fletor

Tipos de apoio



Diagramas de força cortante e momento fletor

Tipos de apoio



simplesmente apoiada

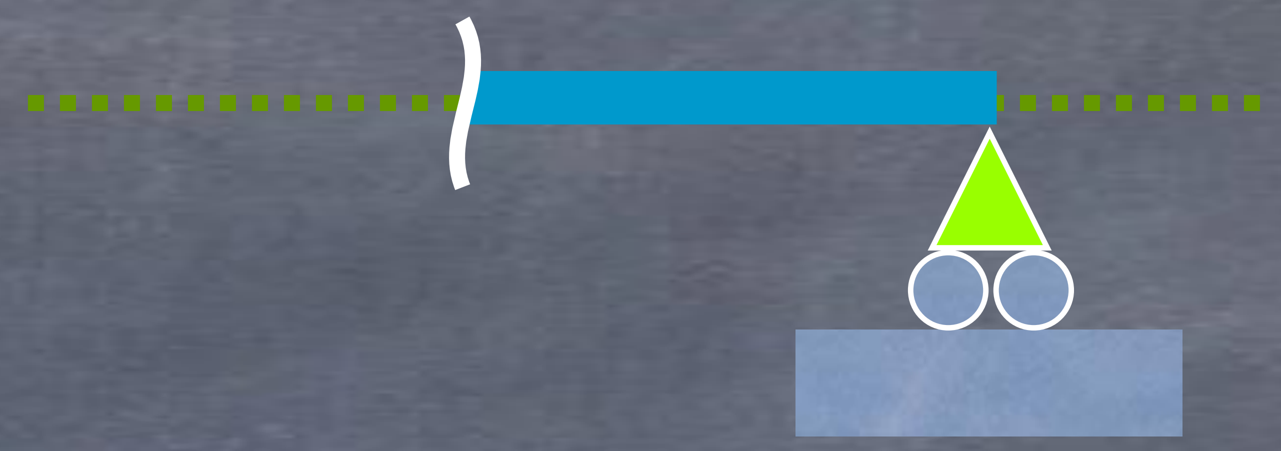
Diagramas de força cortante e momento fletor

Tipos de apoio

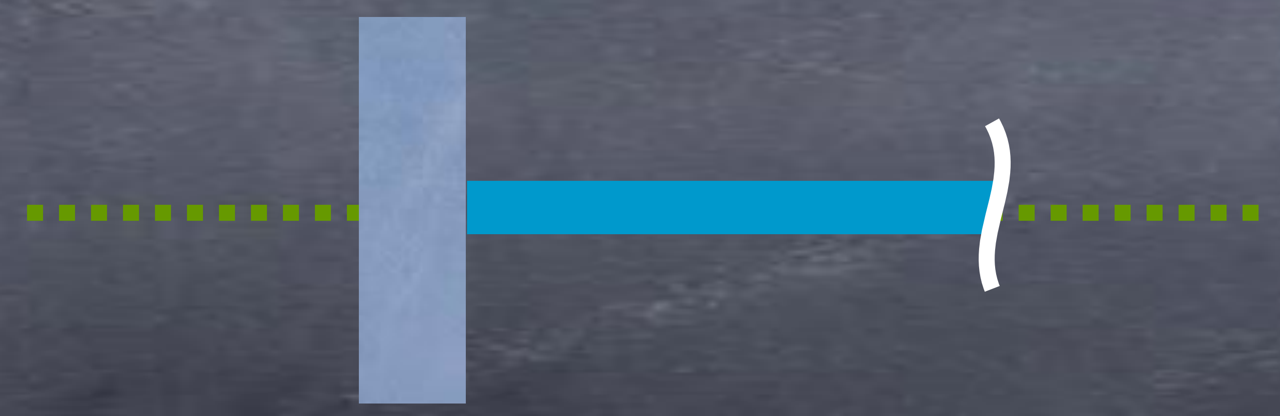
simplesmente apoiada

Diagramas de força cortante e momento fletor

Tipos de apoio



simplesmente apoiada

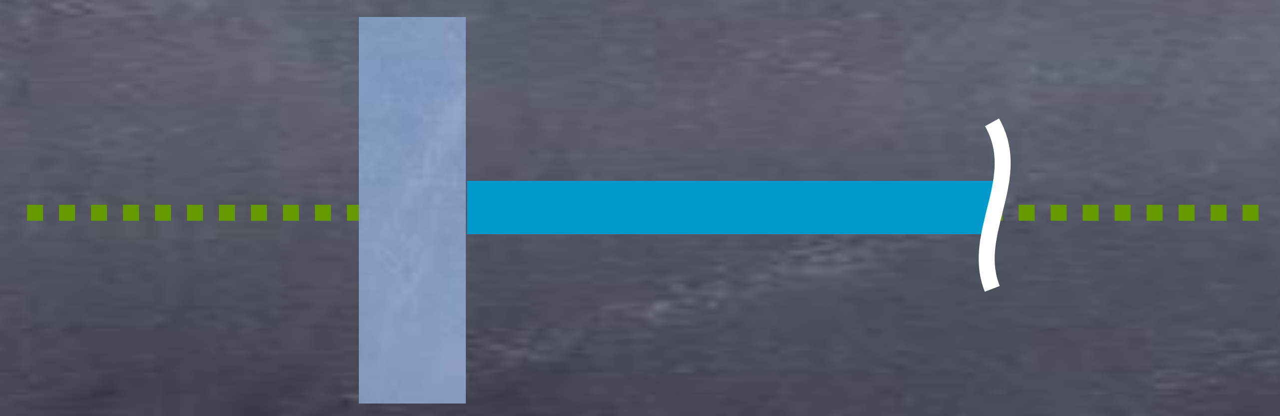


engastada,

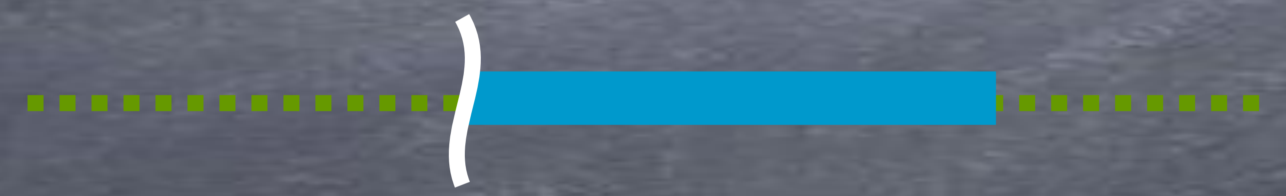
Diagramas de força cortante e momento fletor

Tipos de apoio

simplesmente apoiada



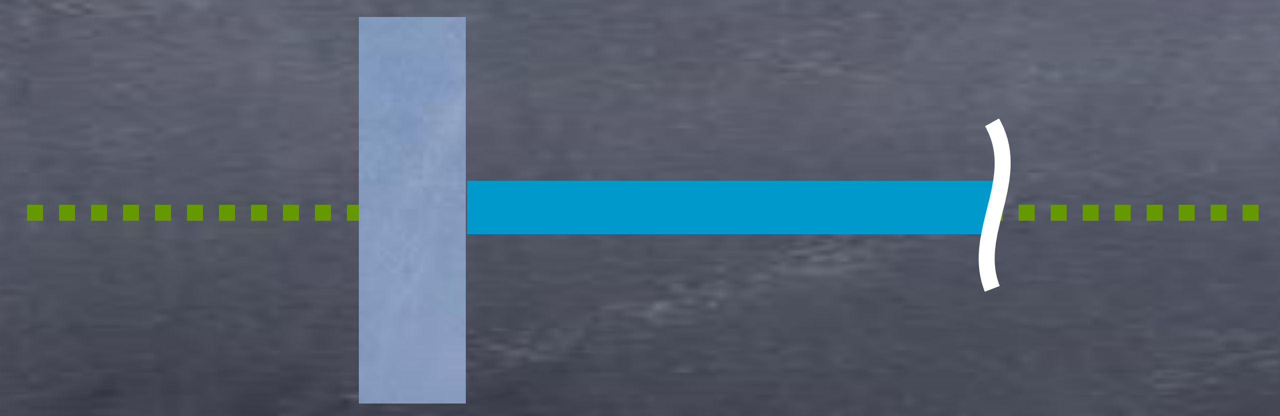
engastada, ou
em balanço



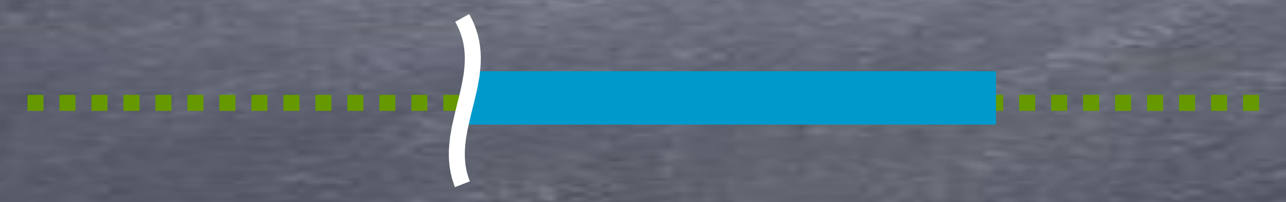
Diagramas de força cortante e momento fletor

Tipos de apoio

simplesmente apoiada



engastada, ou em balanço



≈

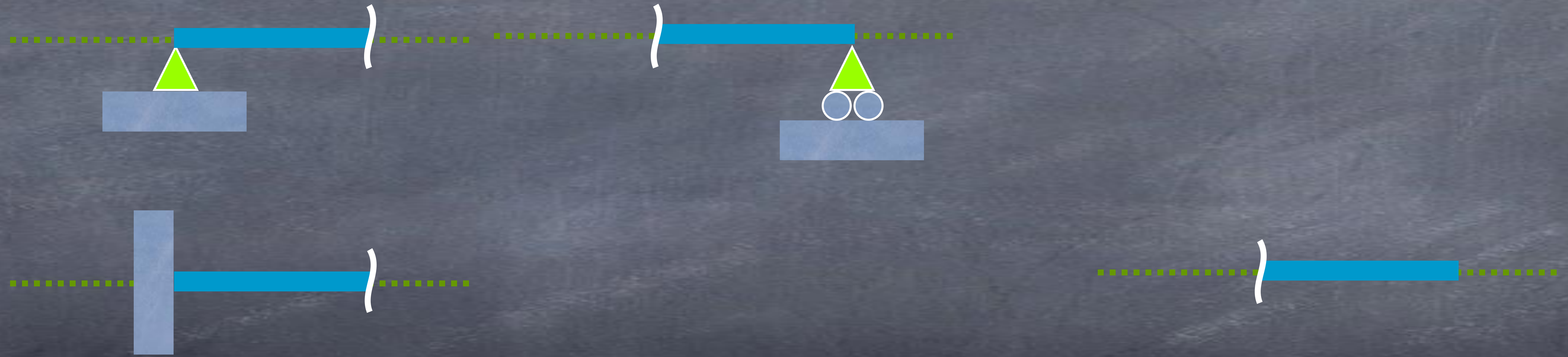
Diagramas de força cortante e momento fletor

Tipos de apoio

Diagramas de força cortante e momento fletor

Tipos de apoio

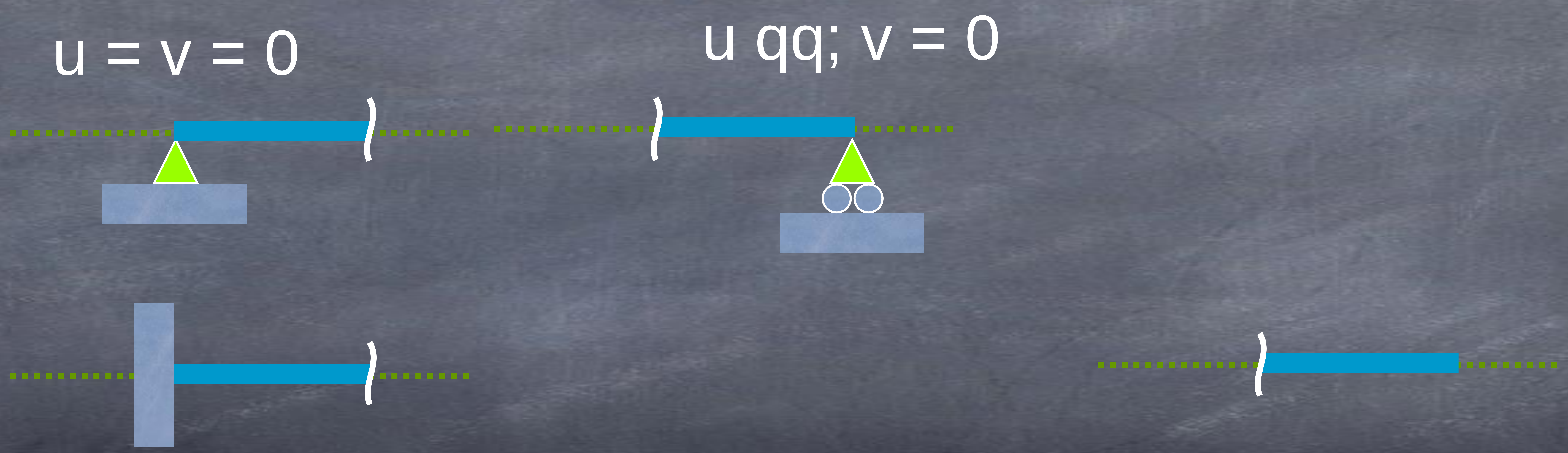
$u = v = 0$



31

Diagramas de força cortante e momento fletor

Tipos de apoio

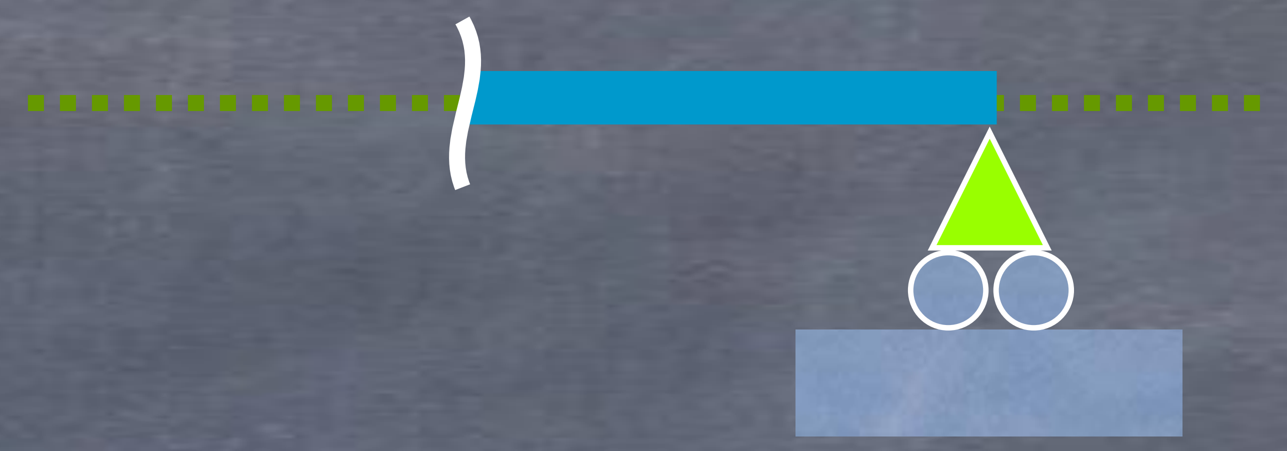


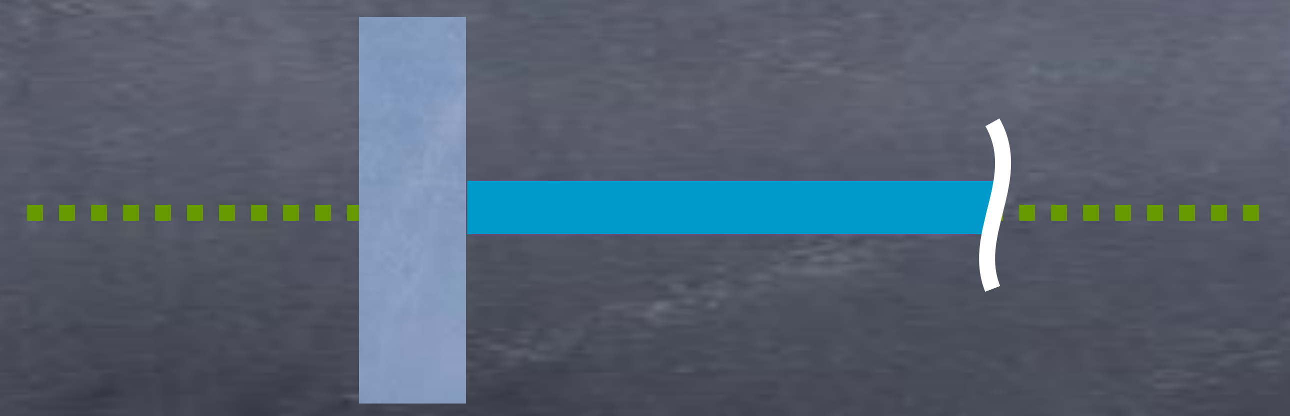
Diagramas de força cortante e momento fletor

Tipos de apoio

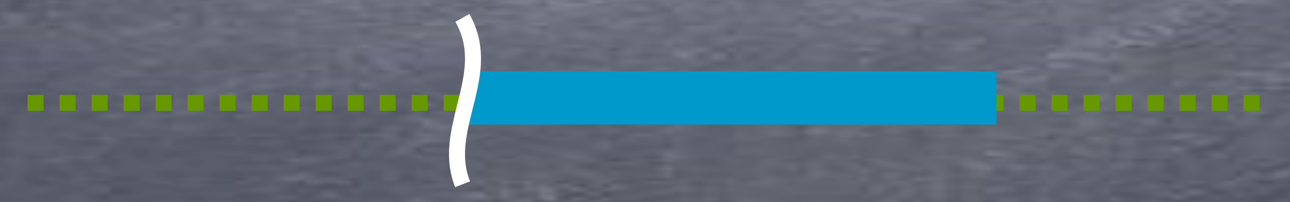
u = v = 0

u qq; v = 0





u = v = 0

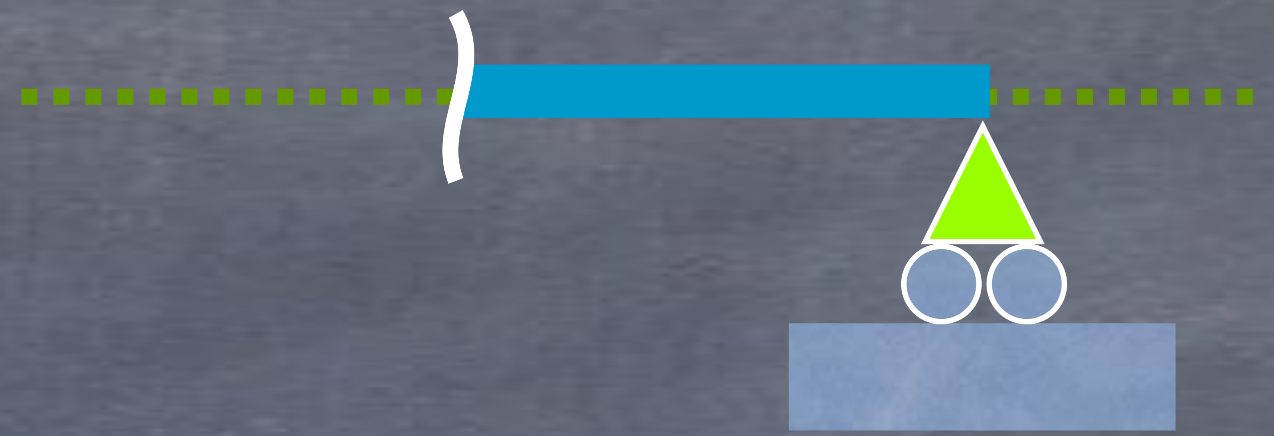


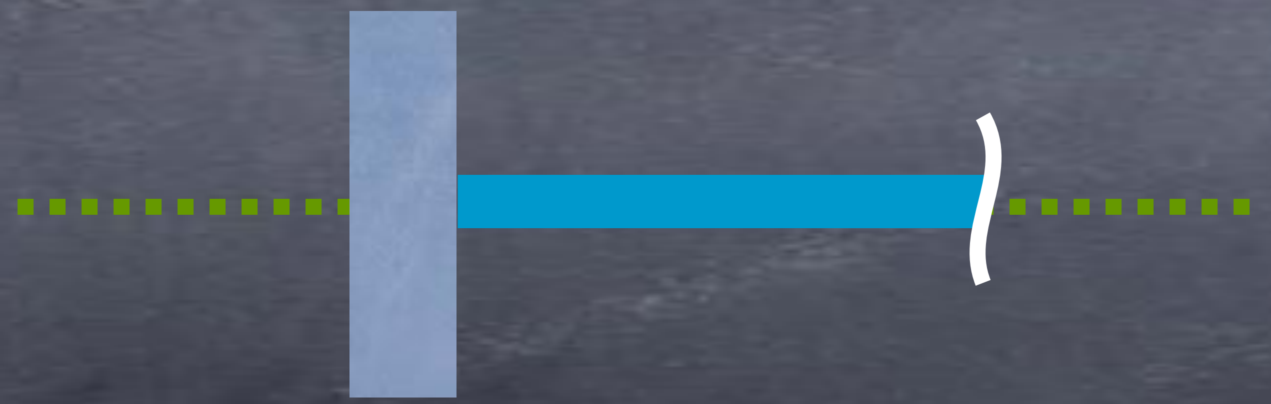
Diagramas de força cortante e momento fletor

Tipos de apoio

u = v = 0

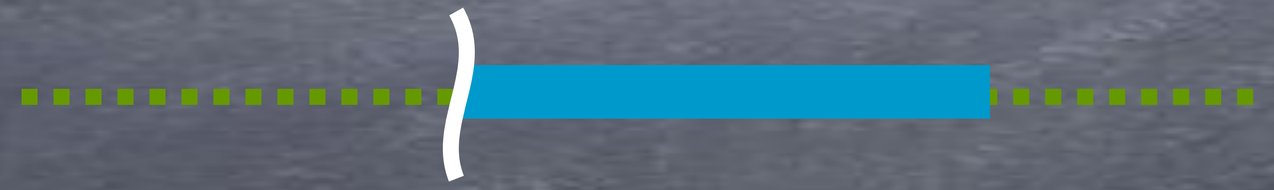
u qq; v = 0





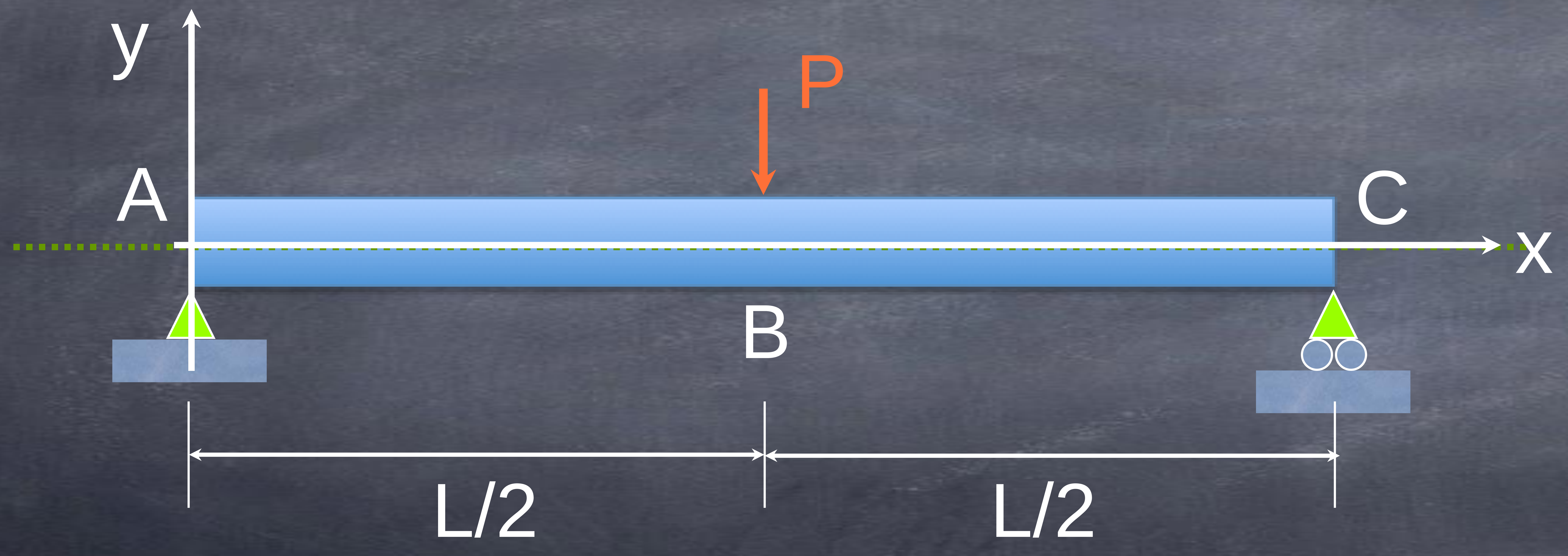
u = v = 0

u, v qq

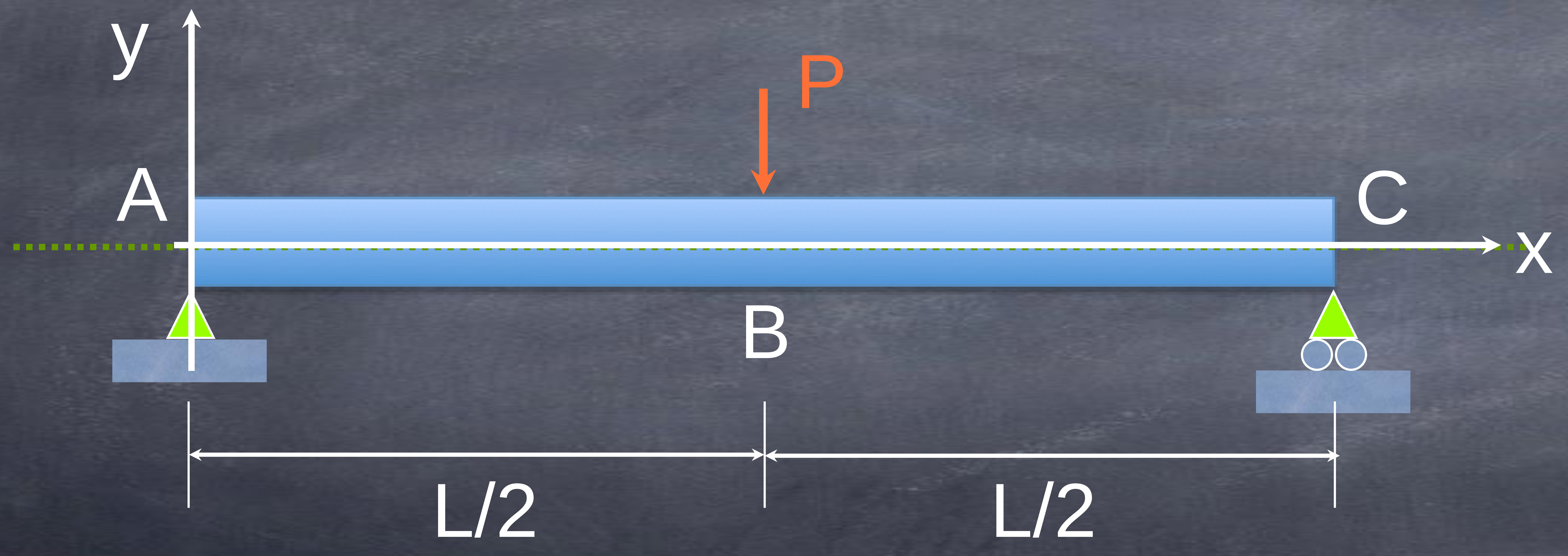


Diagramas de força cortante e momento fletor

Diagramas de força cortante e momento fletor

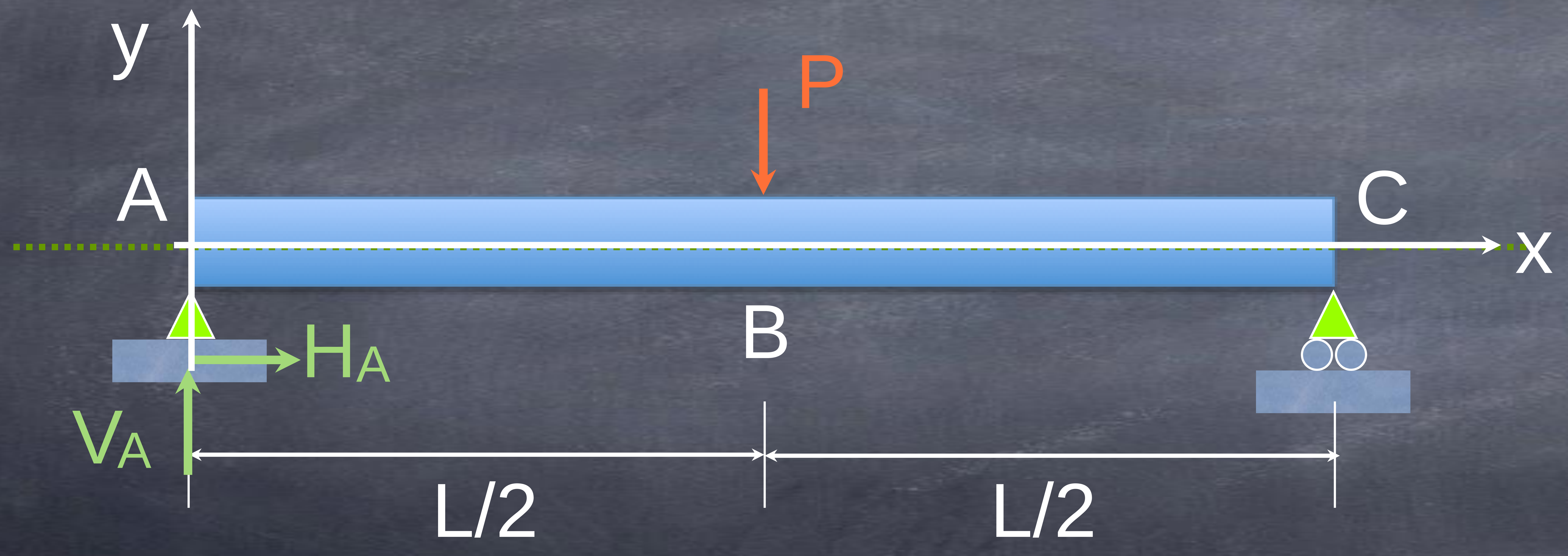


Diagramas de força cortante e momento fletor



Reações nos apoios

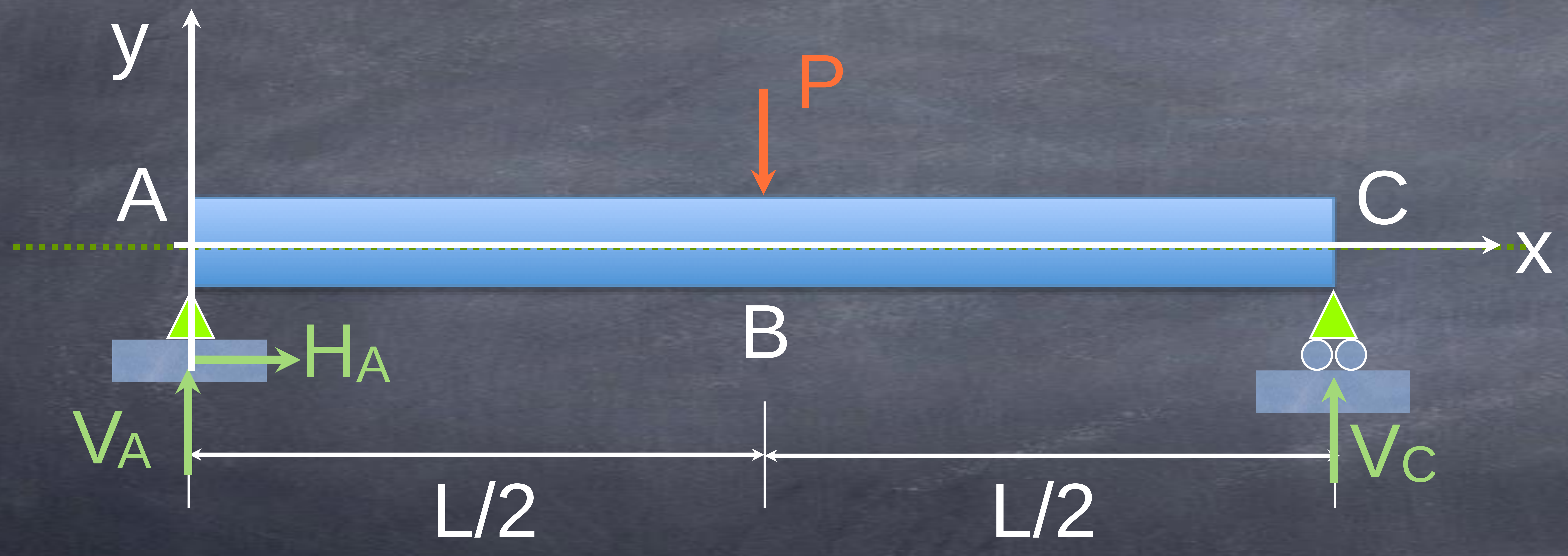
Diagramas de força cortante e momento fletor



Reações nos apoios

- em A: H_A, V_A

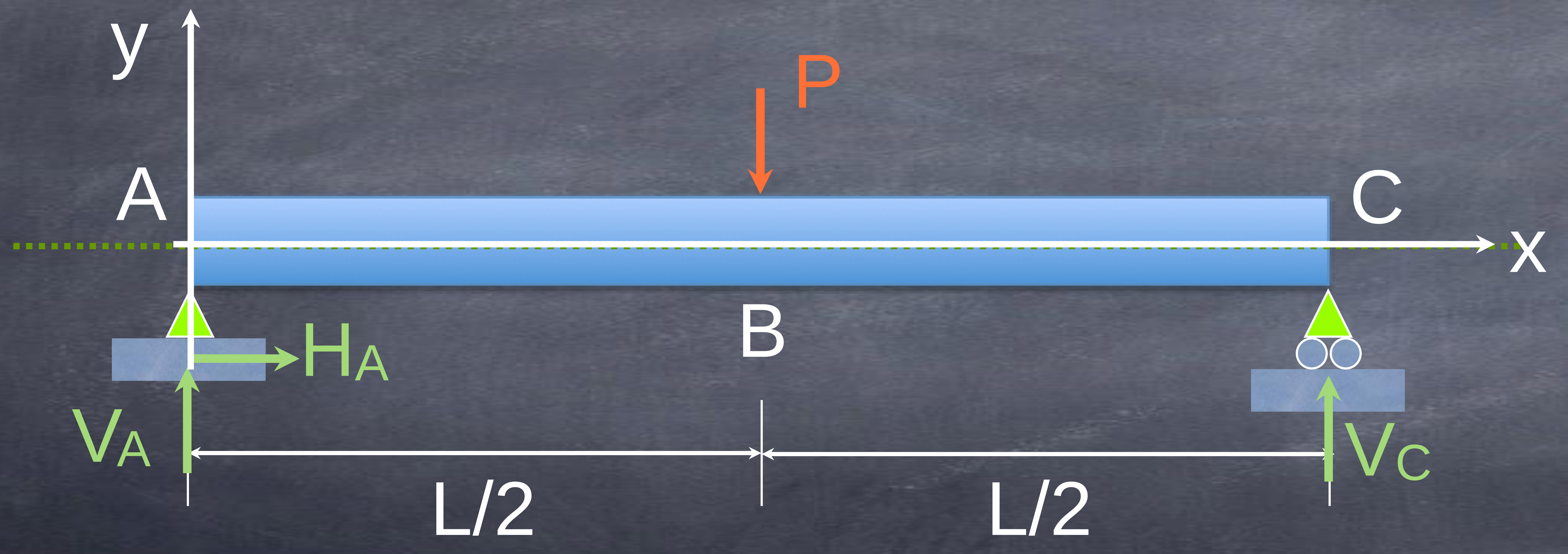
Diagramas de força cortante e momento fletor



Reações nos apoios

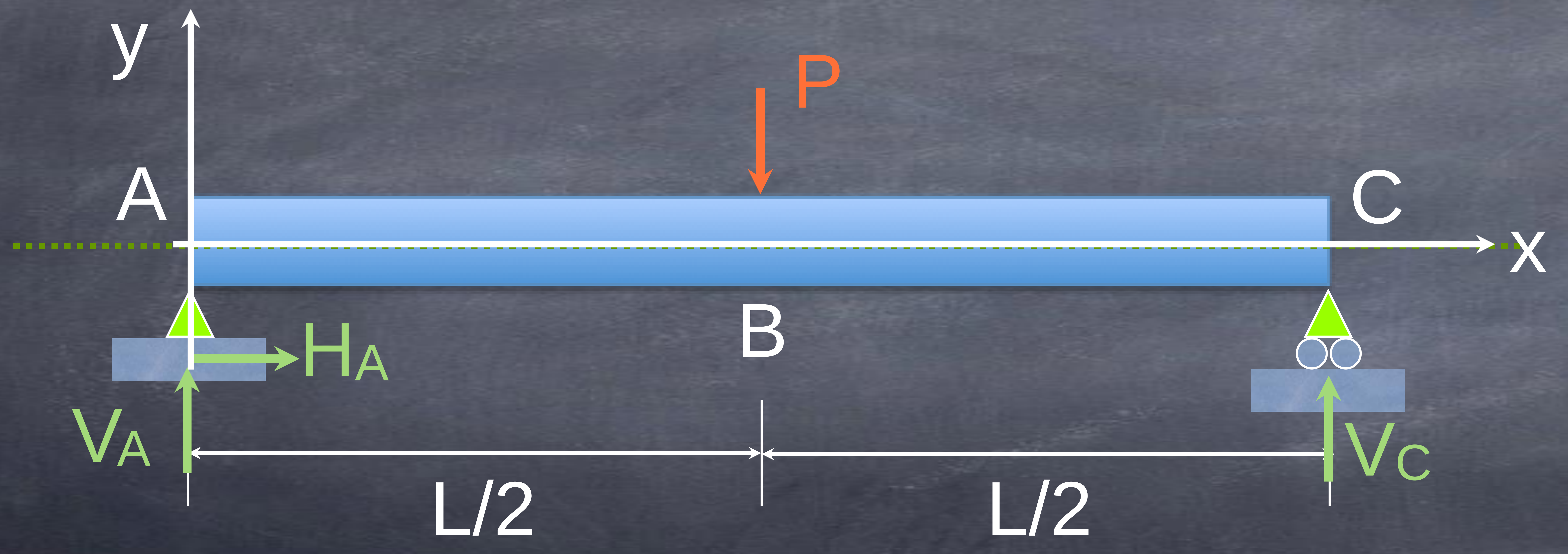
- em A: H_A, V_A
- em C: V_C

Diagramas de força cortante e momento fletor



Equações de equilíbrio:

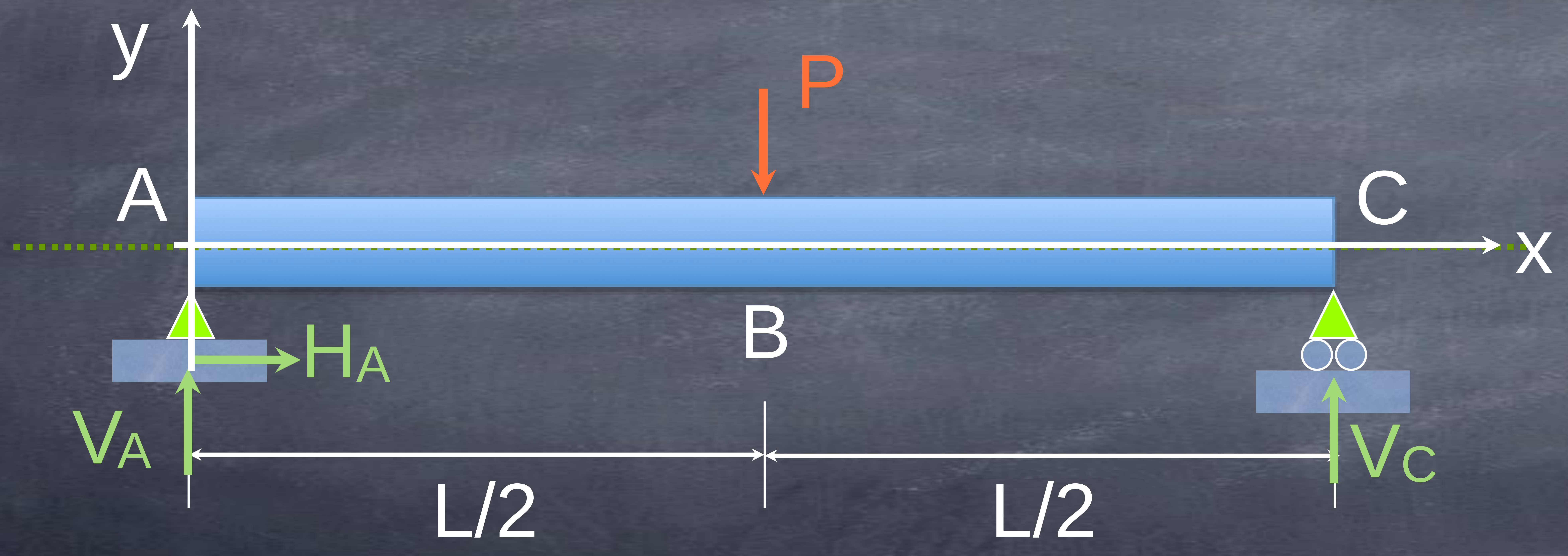
Diagramas de força cortante e momento fletor



Equações de equilíbrio:

- em x: $\sum F_x = H_A = 0$

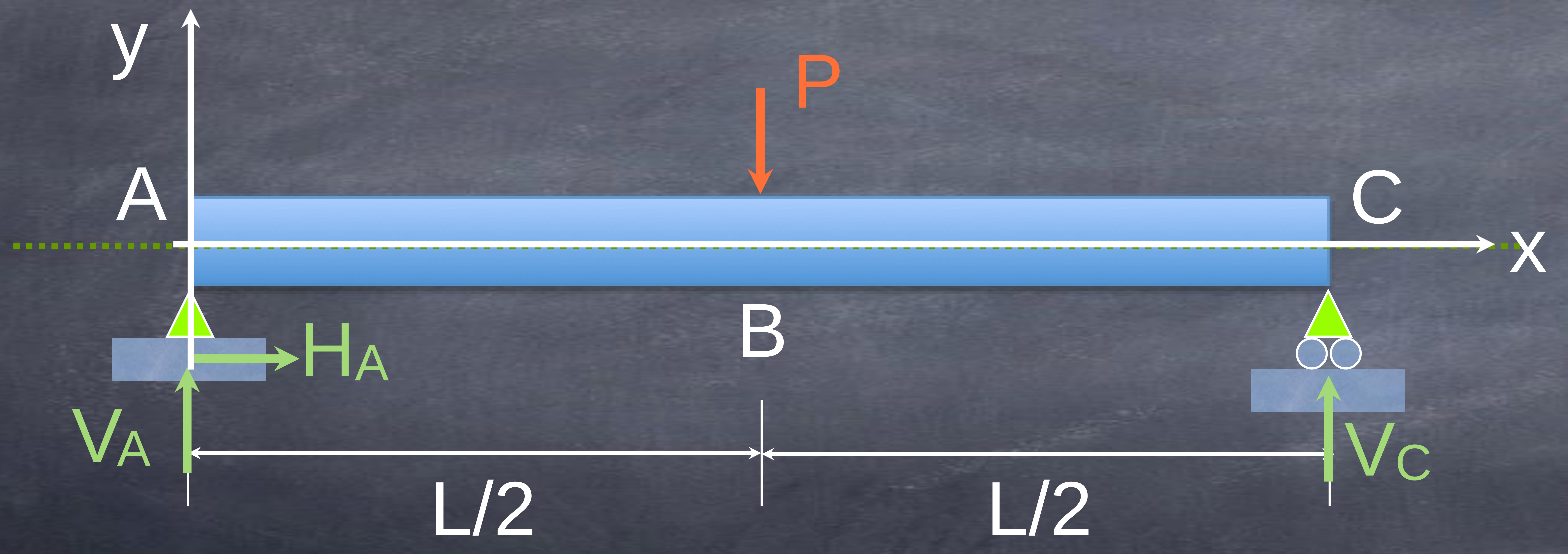
Diagramas de força cortante e momento fletor



Equações de equilíbrio:

- em x: $\sum F_x = H_A = 0$
- em y: $\sum F_y = -P + V_A + V_C = 0$

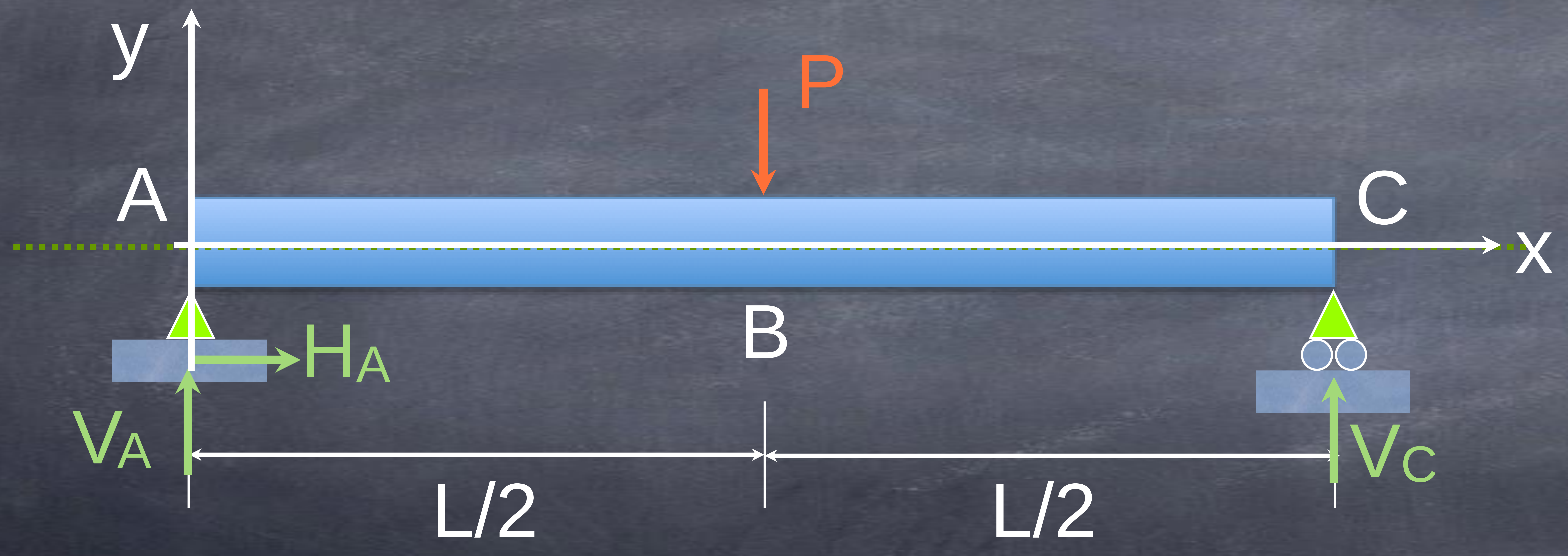
Diagramas de força cortante e momento fletor



Equações de equilíbrio:

- em x: $\sum F_x = H_A = 0$
- em y: $\sum F_y = -P + V_A + V_C = 0$
- z: $\sum M_A = -P.(L/2) + V_C.L = 0$

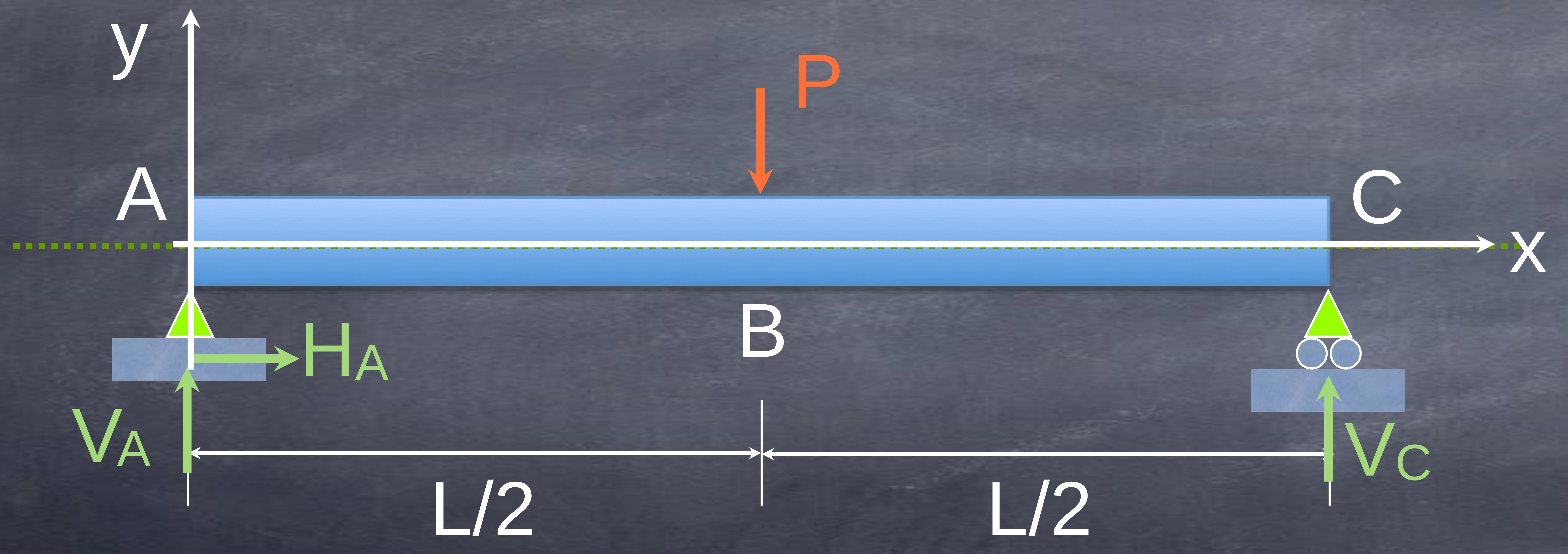
Diagramas de força cortante e momento fletor



Equações de equilíbrio:

- em x: $H_A = 0$
- em y: $P = V_A + V_C$
- z: $V_C = P/2$

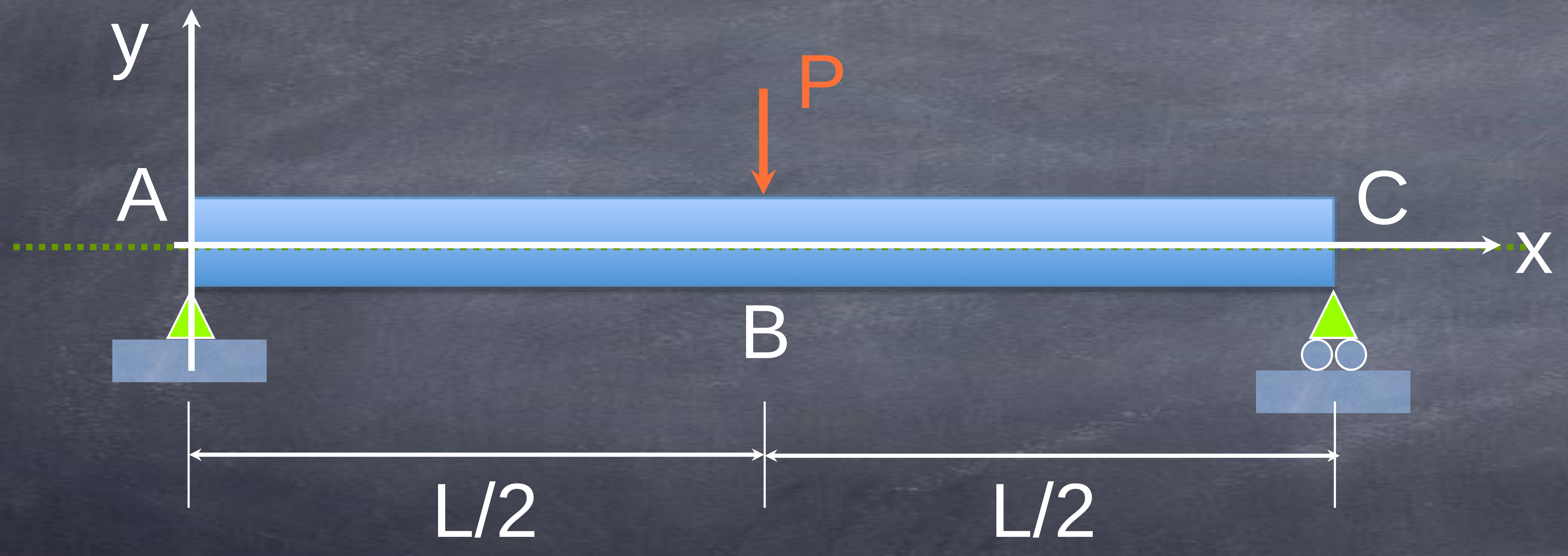
Diagramas de força cortante e momento fletor



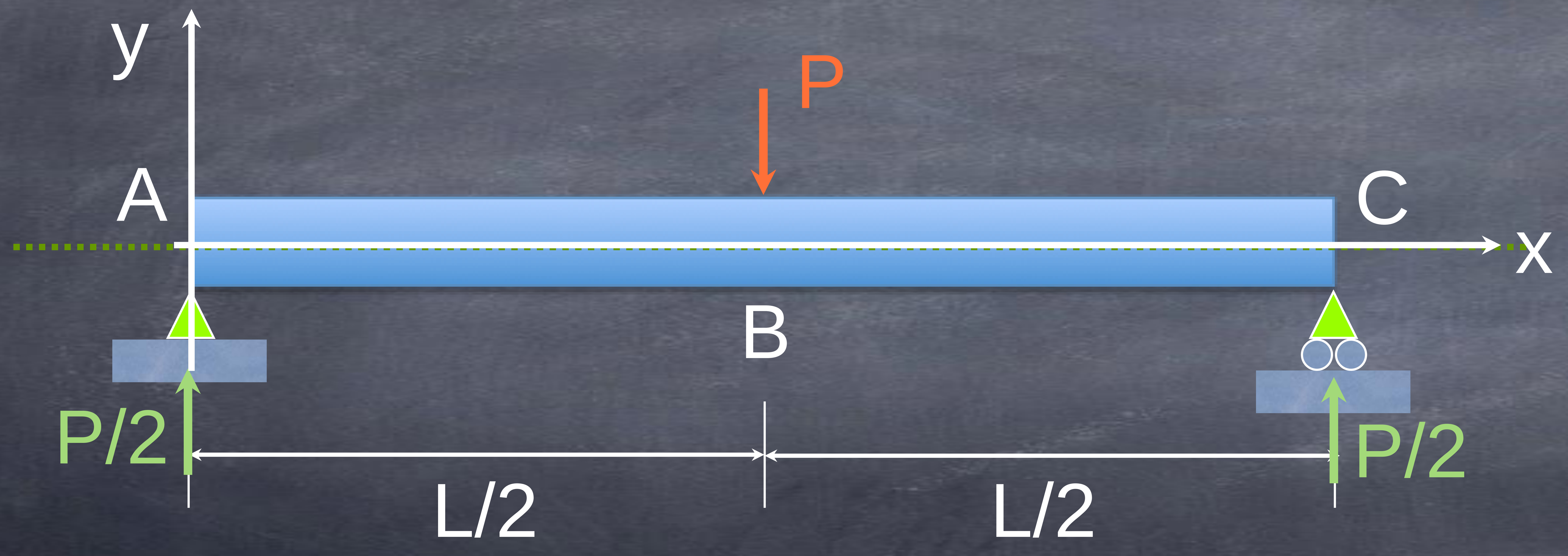
Equações de equilíbrio:

- em x: $H_A = 0$
- em y: $P = V_A + V_C$
- ↻ z: $V_C = P/2 \Rightarrow V_A = P/2$

Diagramas de força cortante e momento fletor



Diagramas de força cortante e momento fletor



Diagramas de força cortante e momento fletor

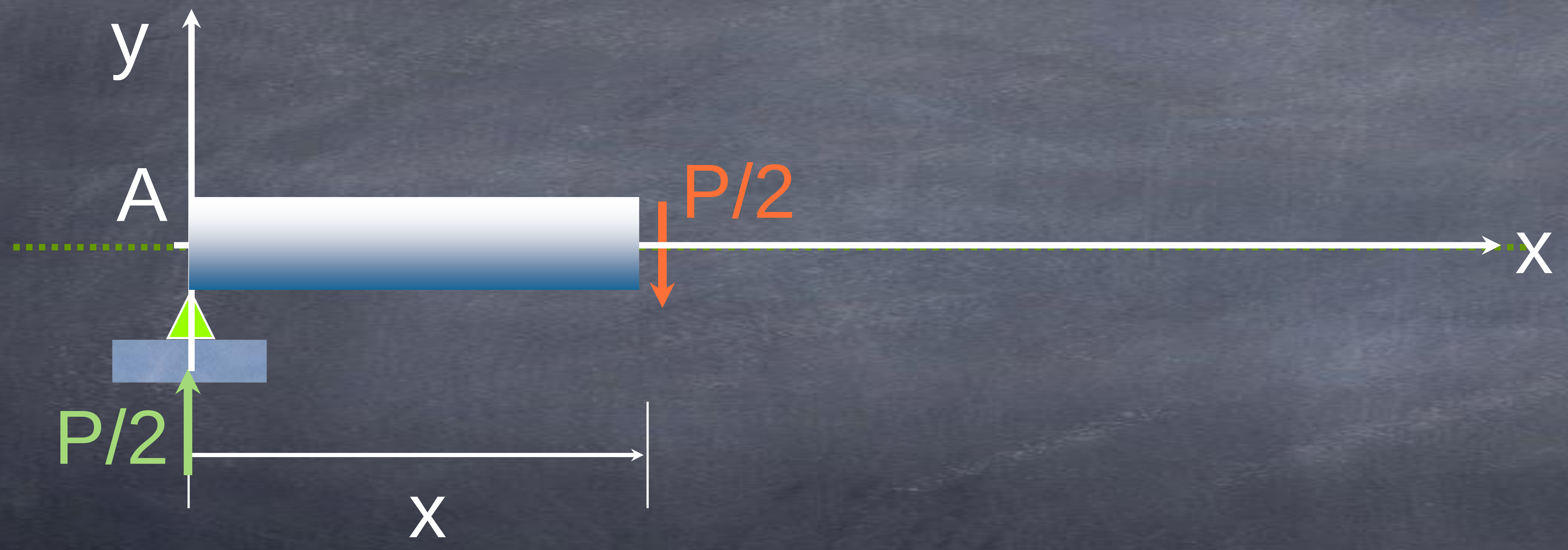
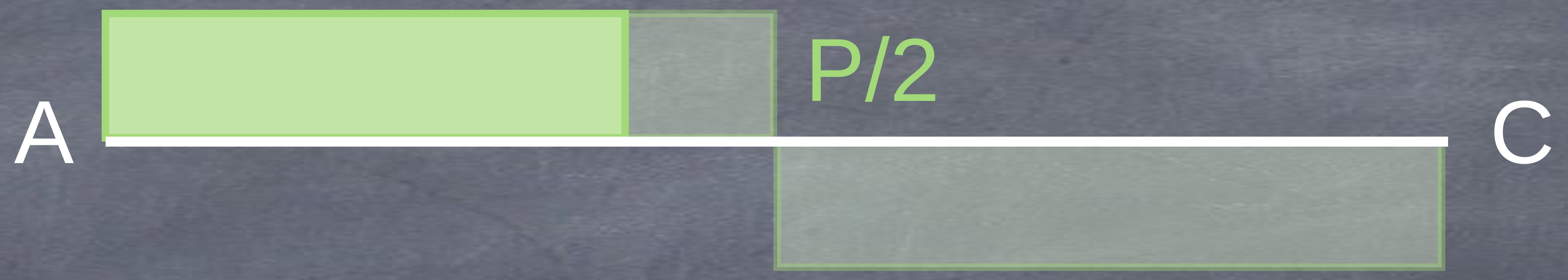


Diagrama de Esforço Cortante (DEF)



Diagramas de força cortante e momento fletor

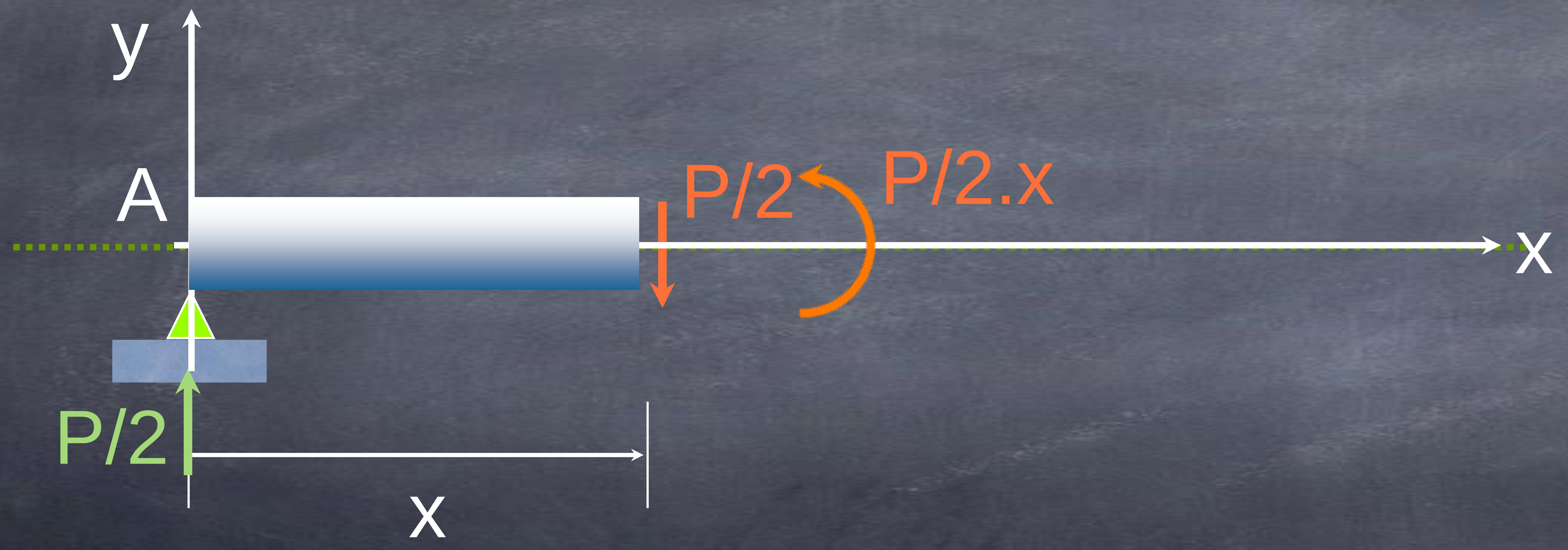


Diagrama de Esforço Cortante (DEF)

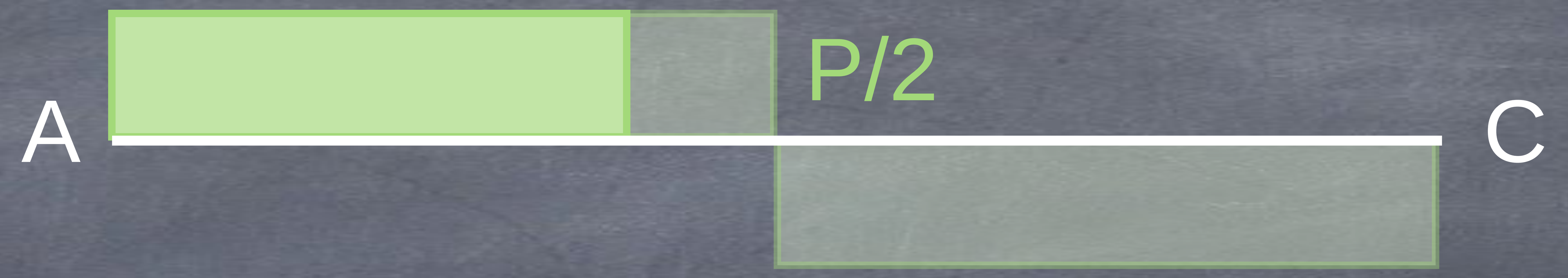
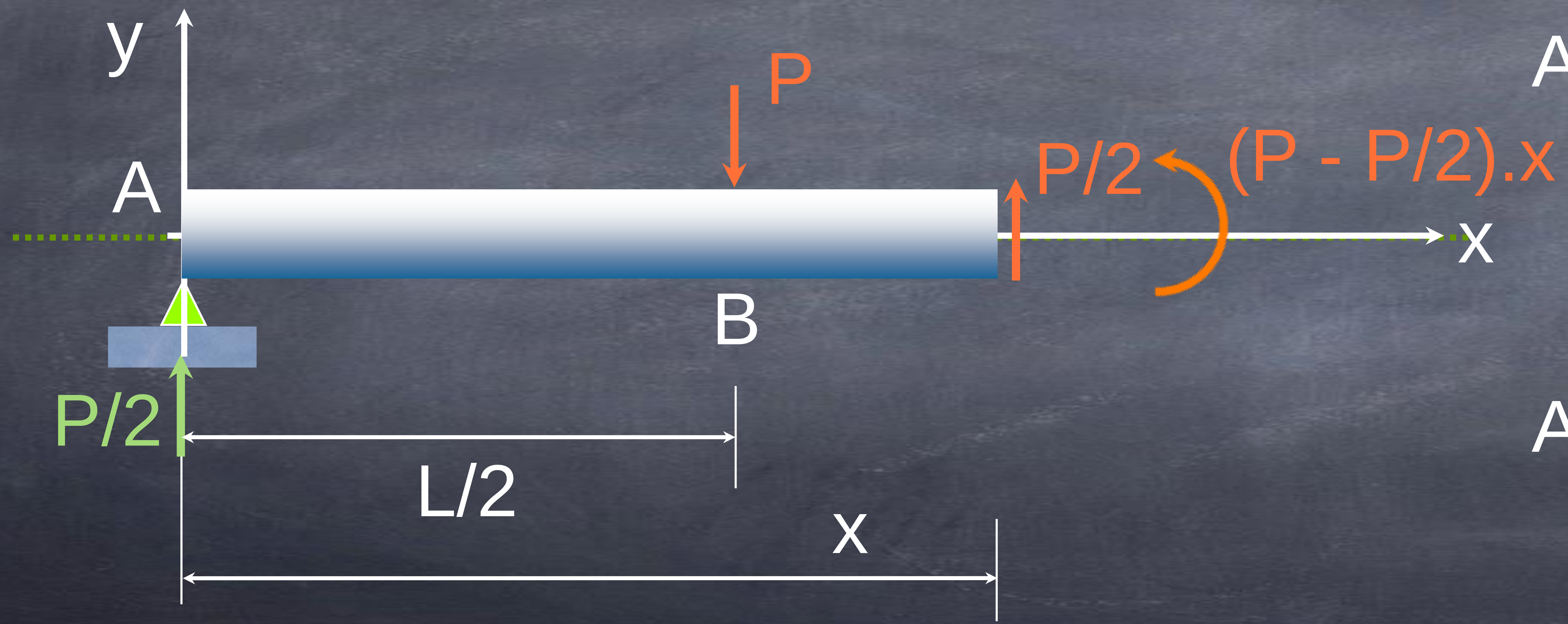
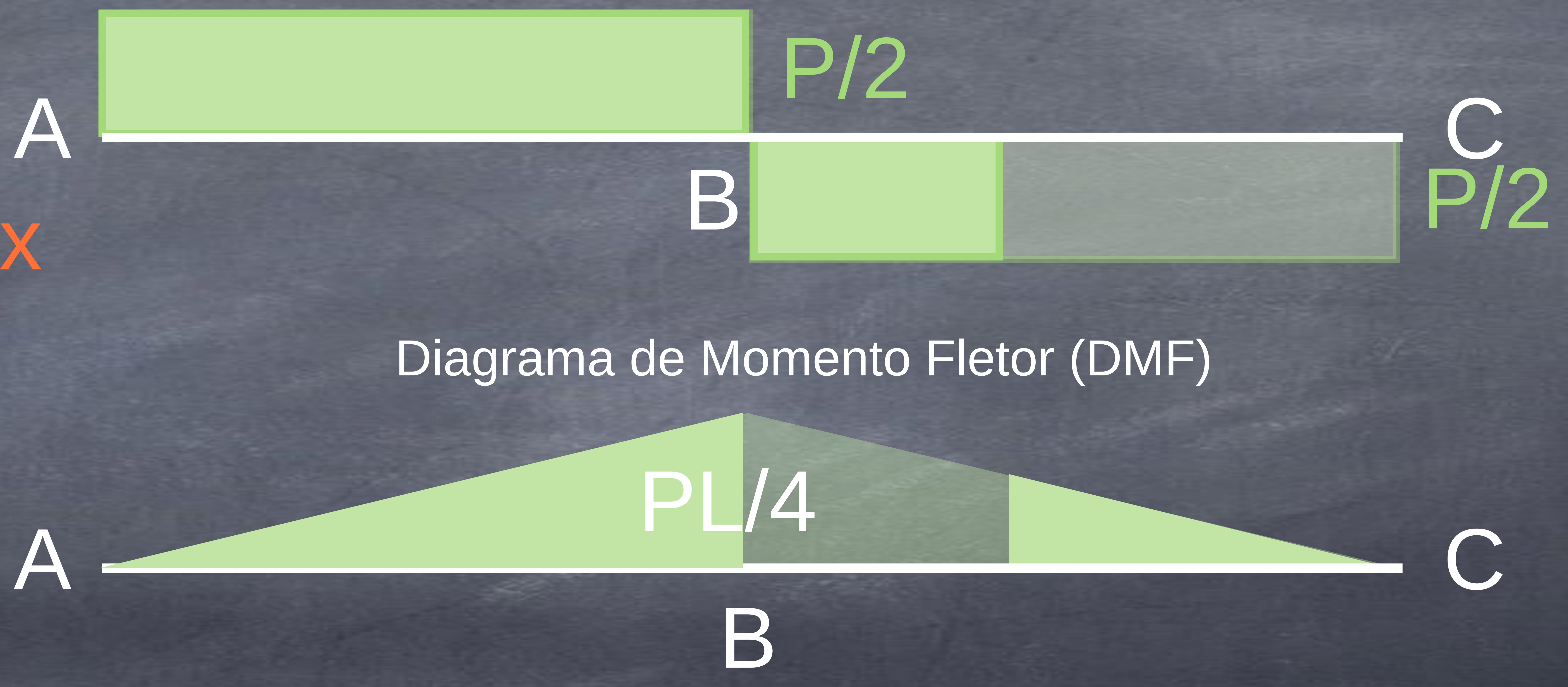


Diagrama de Momento Fletor (DMF)

Diagramas de força cortante e momento fletor





Diagramas de força cortante e momento fletor

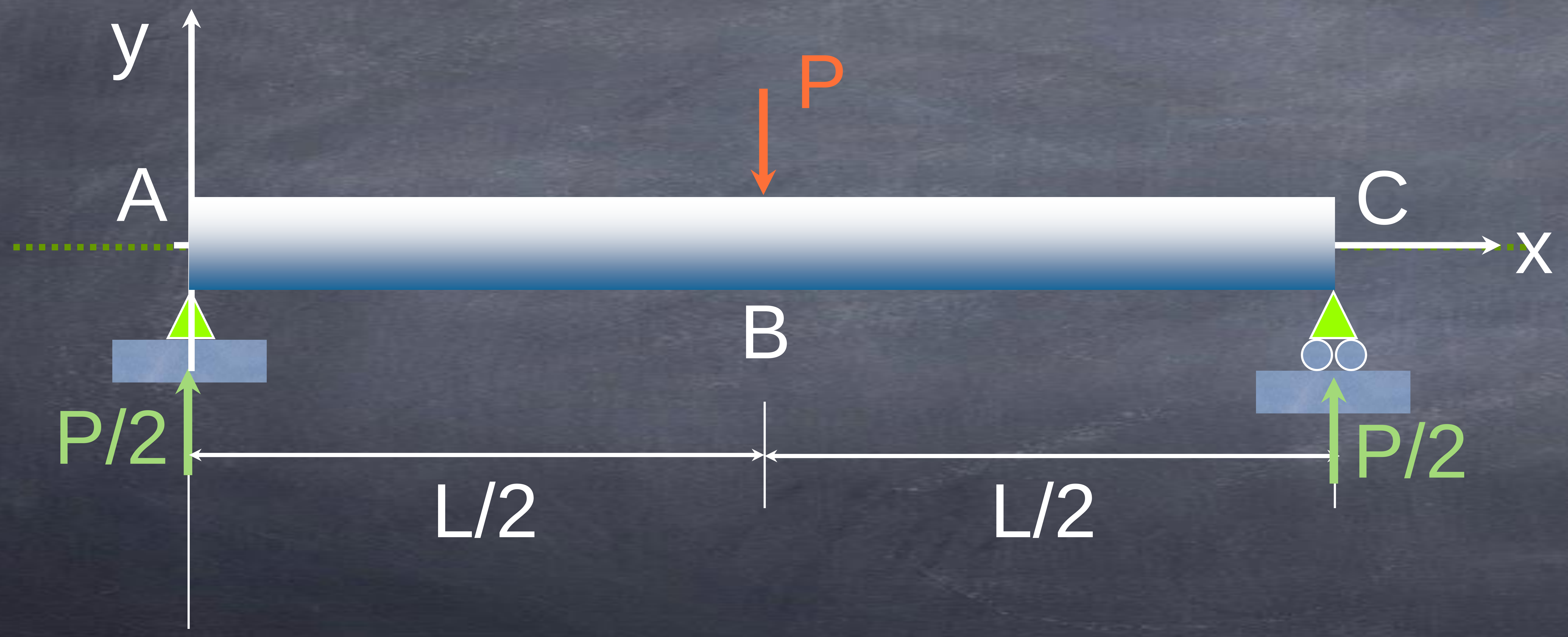


Diagrama de Esforço Cortante (DEF)

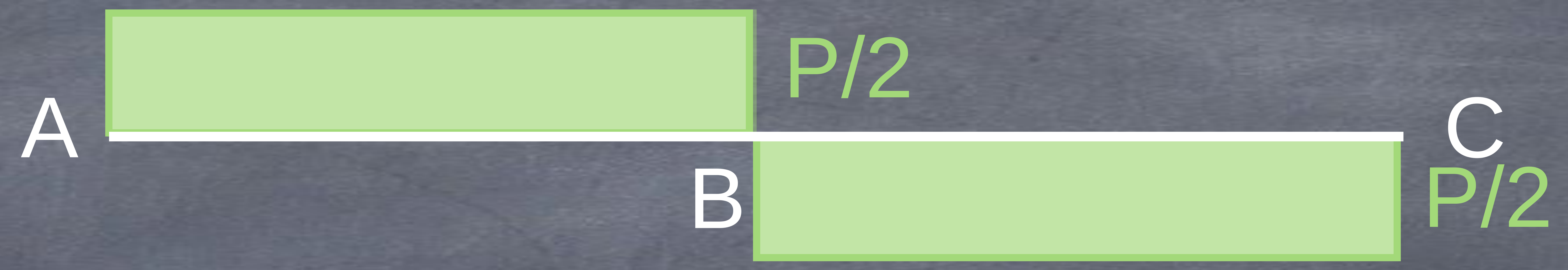
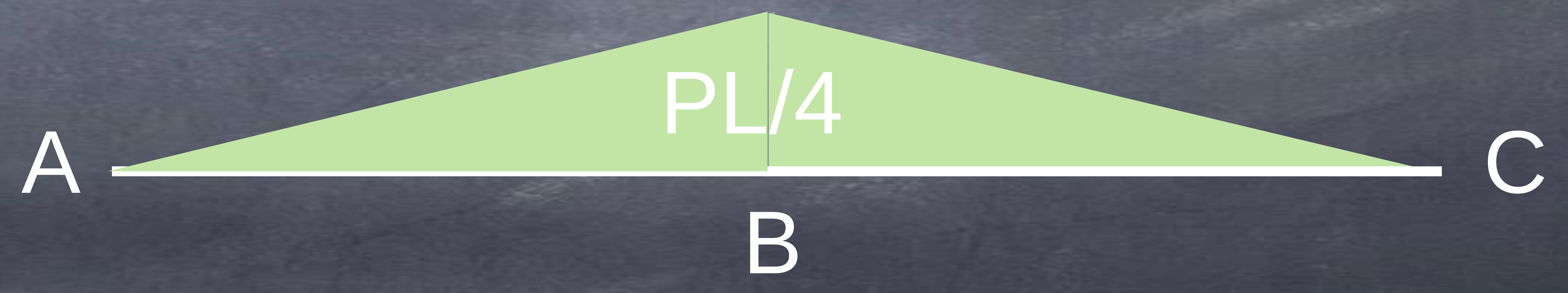
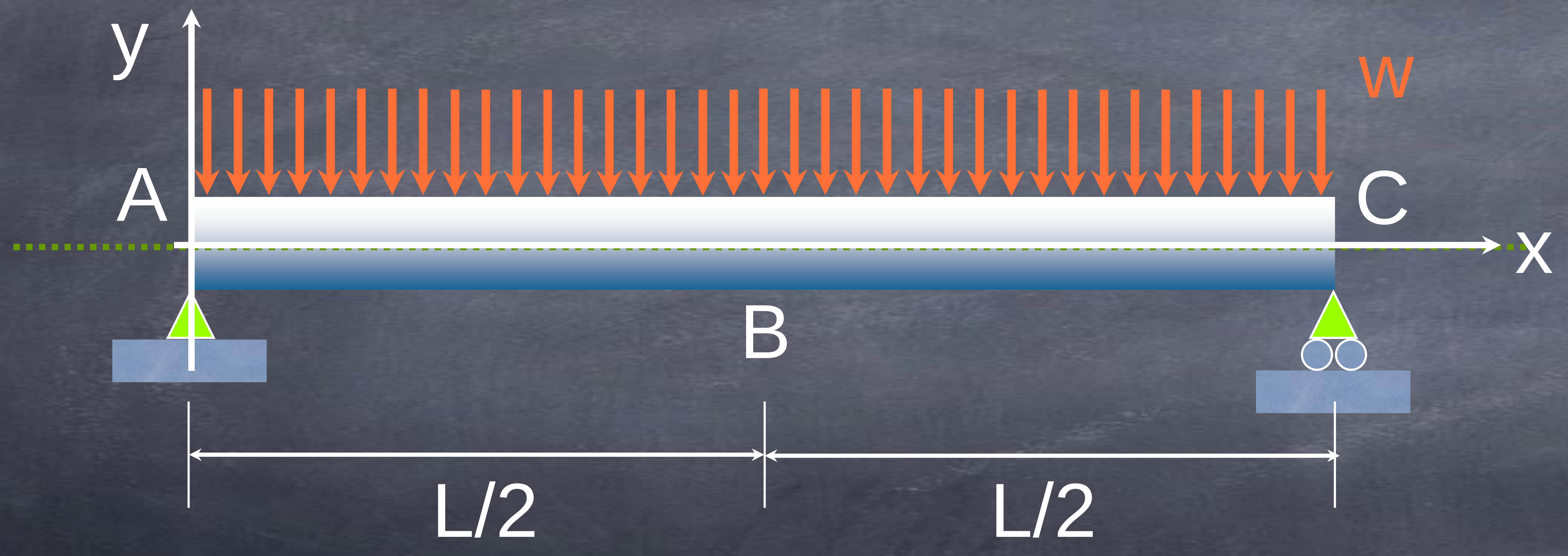


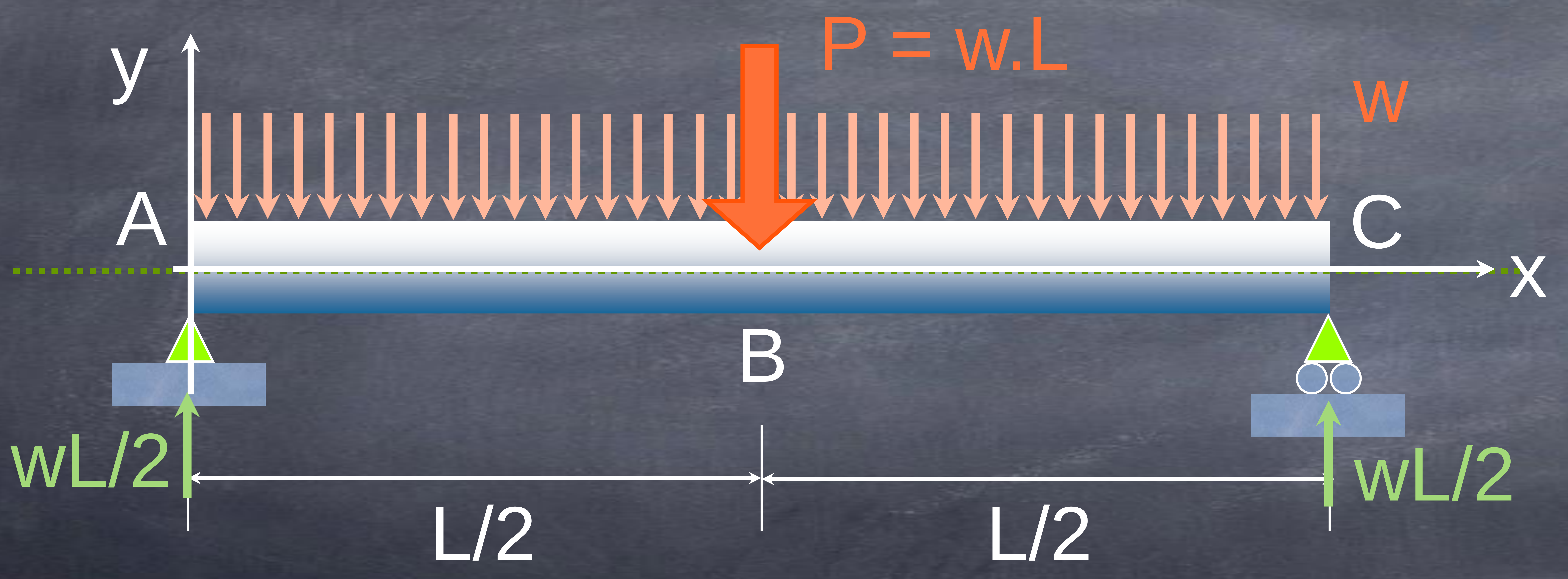
Diagrama de Momento Fletor (DMF)



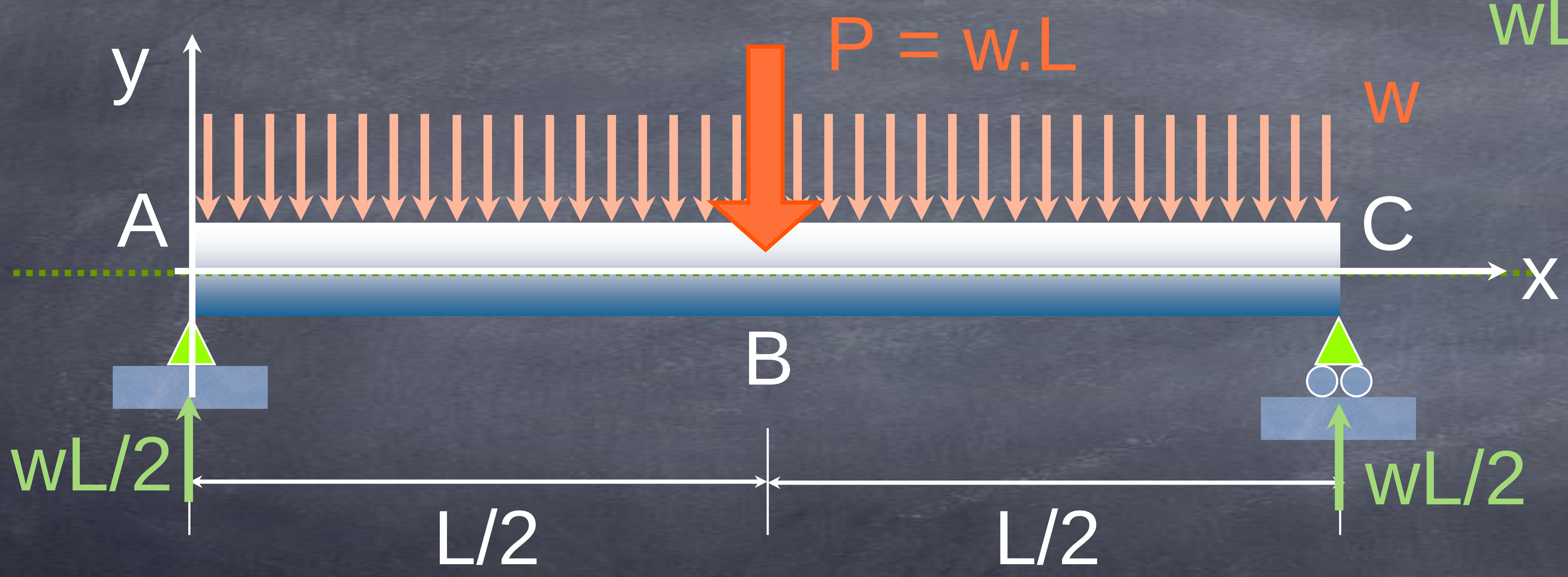
Diagramas de força cortante e momento fletor

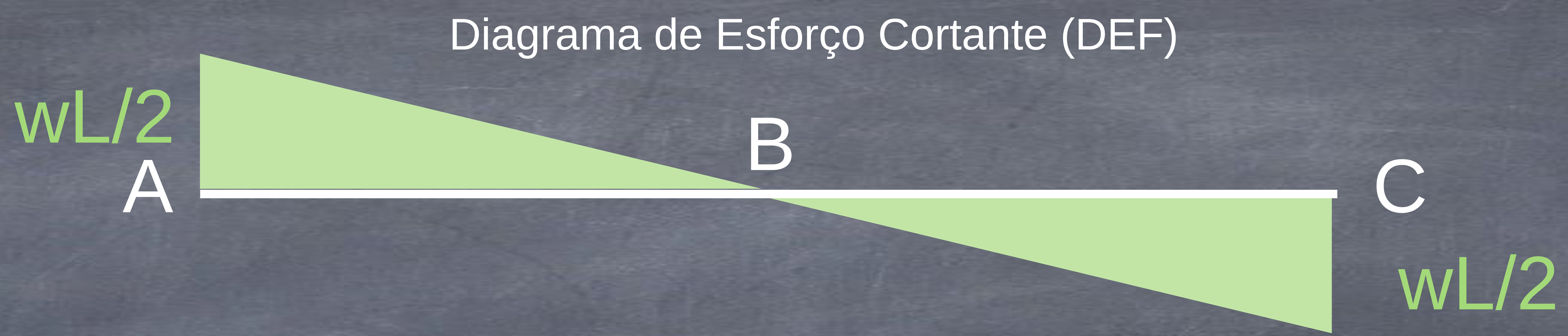


Diagramas de força cortante e momento fletor



Diagramas de força cortante e momento fletor





Diagramas de força cortante e momento fletor

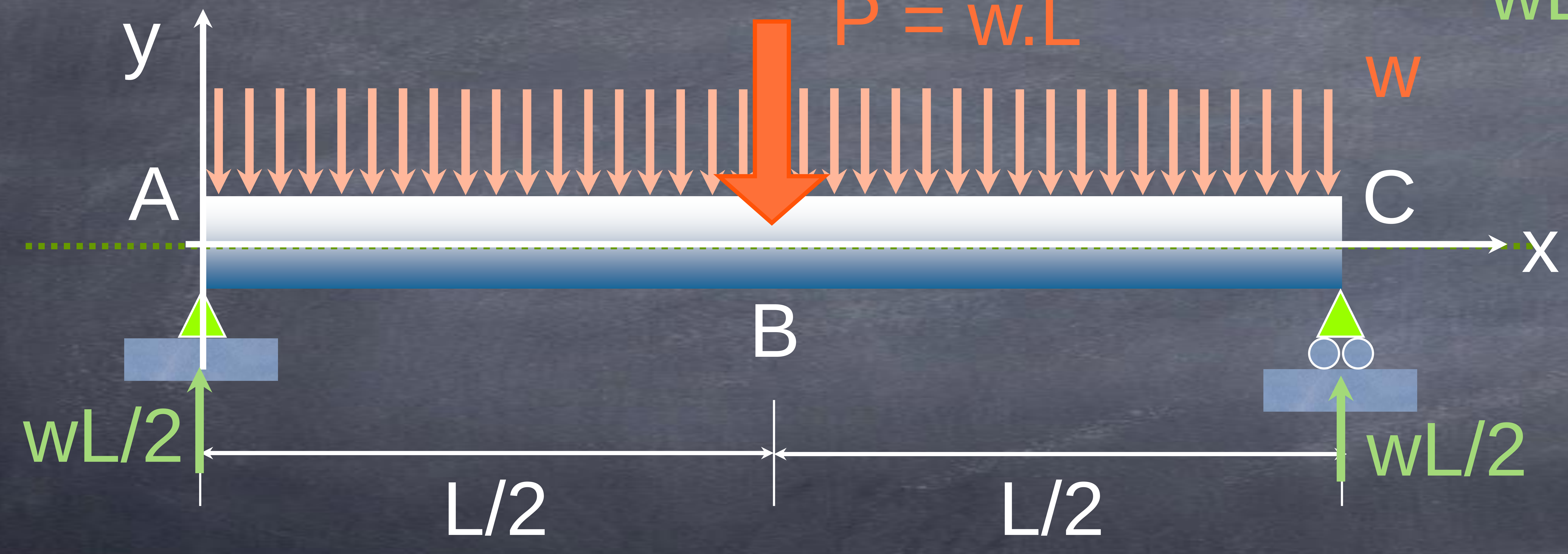


Diagrama de Esforço Cortante (DEF)

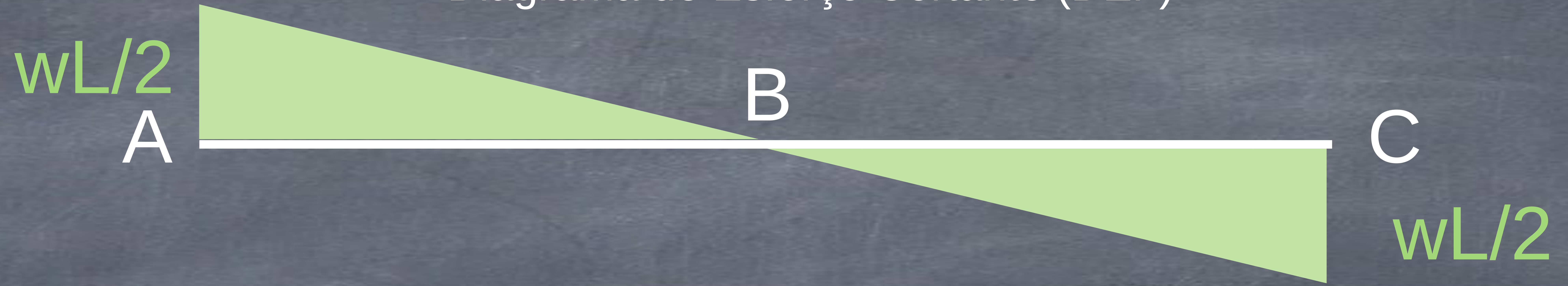
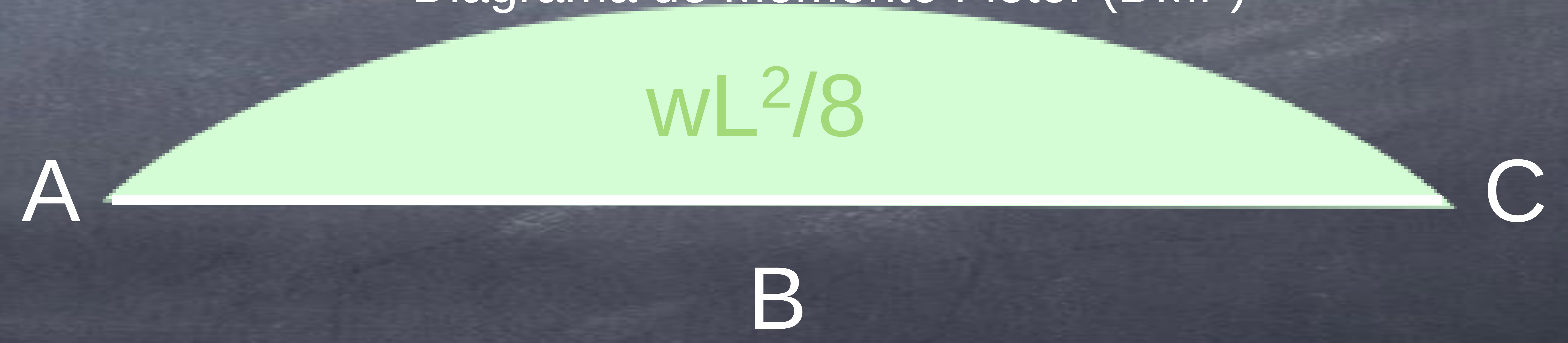


Diagrama de Momento Fletor (DMF)

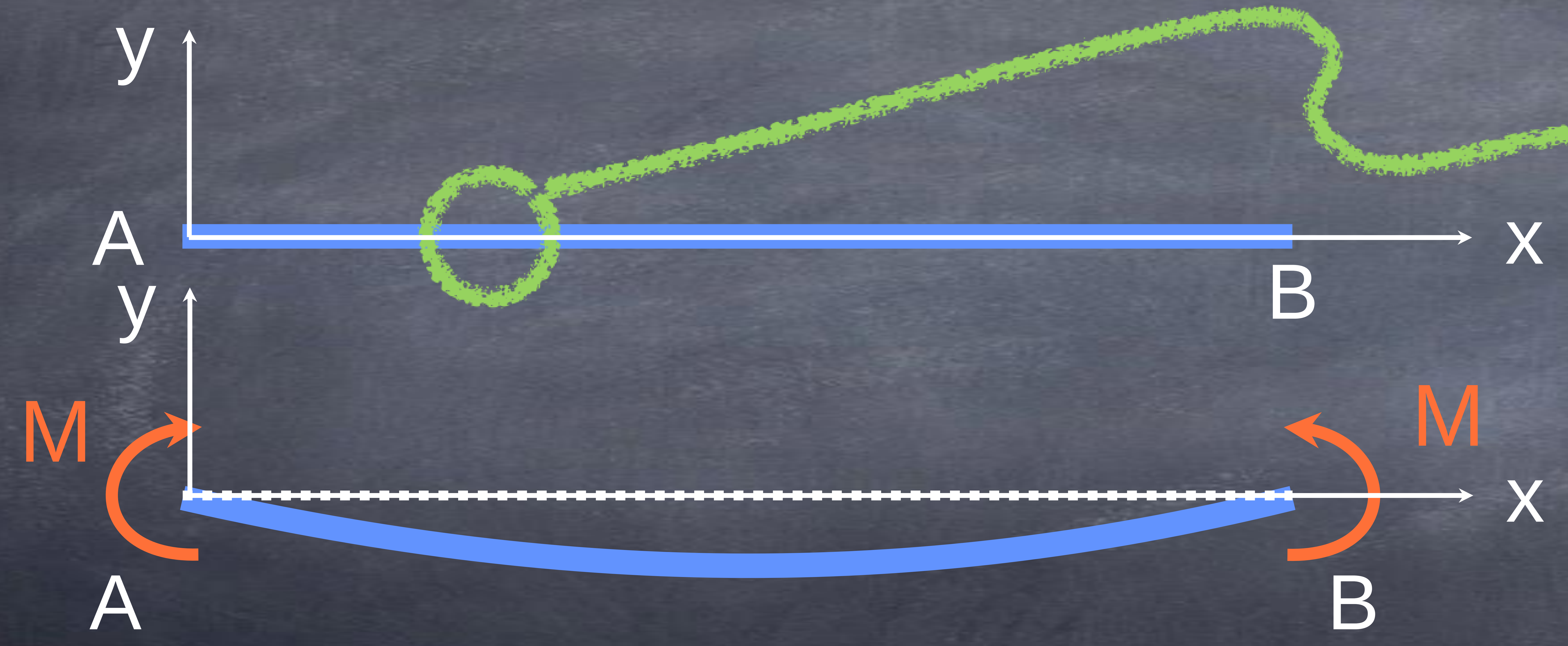


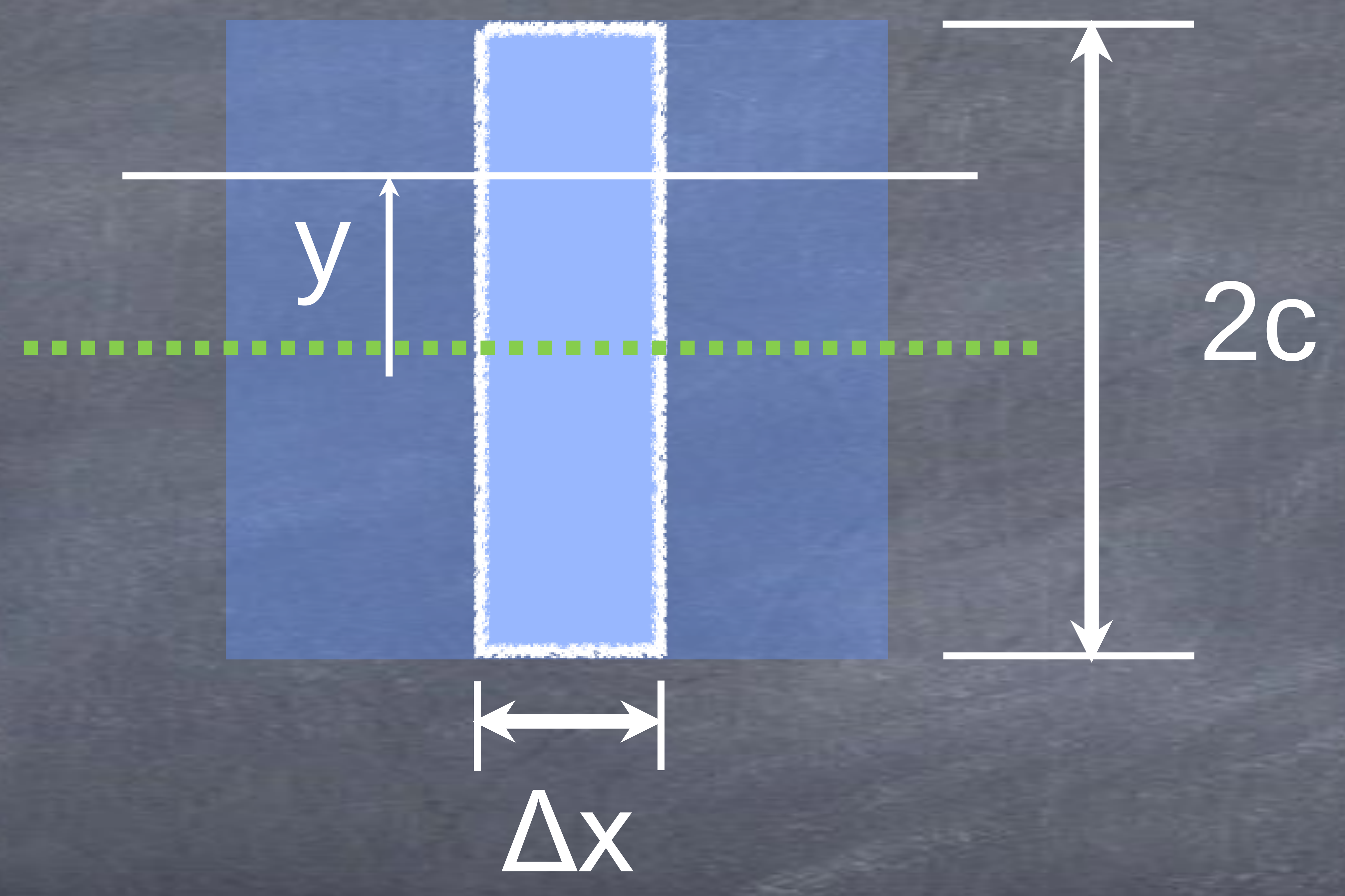
Deformação de uma viga por flexão

Deformação de uma viga por flexão

Deformação de uma viga por flexão

Deformação de uma viga por flexão





Deformação de uma viga por flexão

Deformação de uma viga por flexão

Deformação de uma viga por flexão

A deformação na fibra distante y do eixo neutro será

$$\epsilon = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

Deformação de uma viga por flexão

mas

$$\Delta s' = (\rho - y)\,\Delta\theta$$

e

$$\Delta s = \rho\,\Delta\theta.$$

Deformação de uma viga por flexão

mas

$$\Delta s' = (\rho - y)\,\Delta\theta$$

e

$$\Delta s = \rho\,\Delta\theta.$$

Logo,

$$\epsilon = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{(\rho - y)\,\Delta\theta - \rho\Delta\theta}{\rho\Delta\theta}$$

Deformação de uma viga por flexão

mas

$$\Delta s' = (\rho - y)\,\Delta\theta$$

e

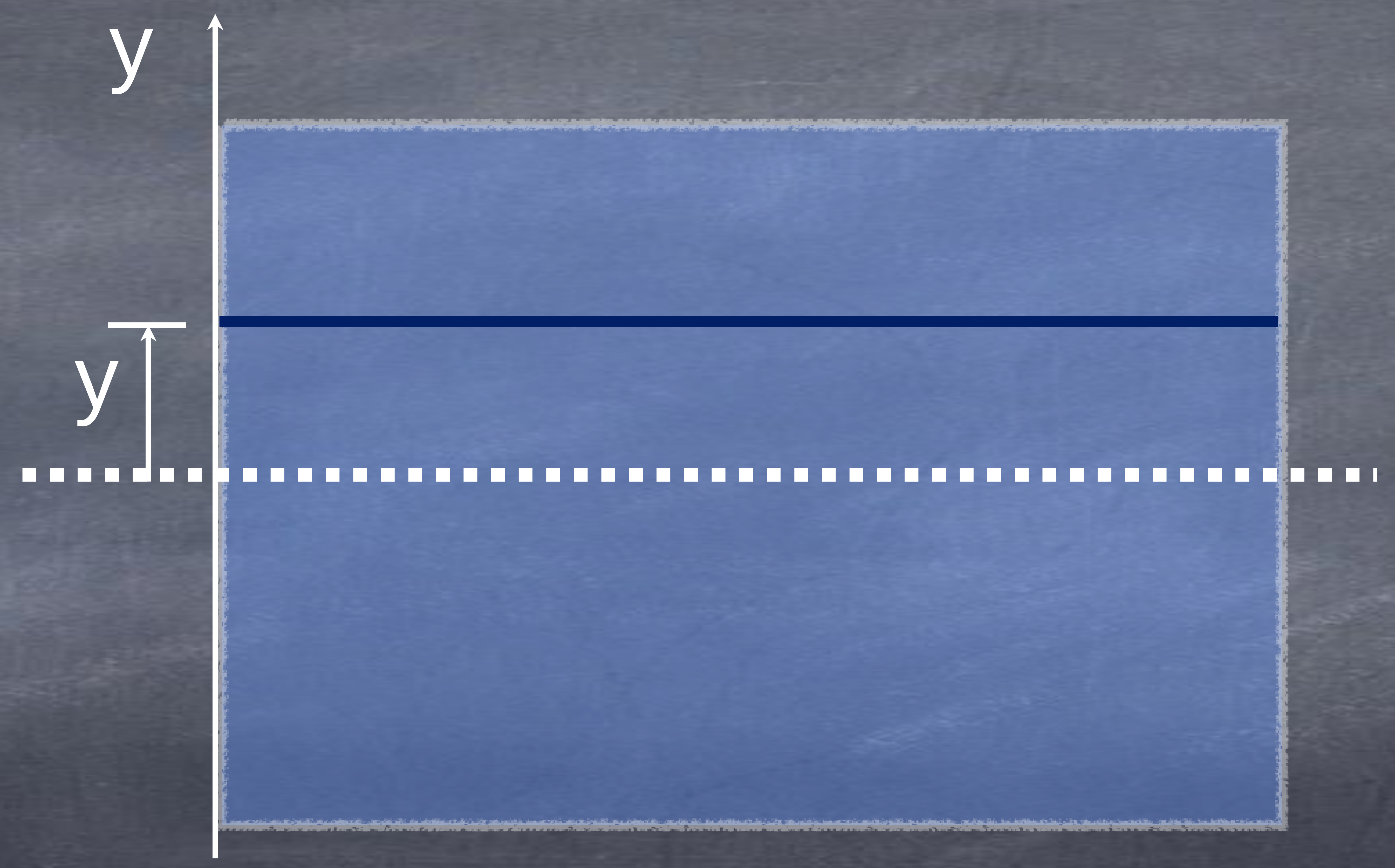
$$\Delta s = \rho\,\Delta\theta.$$

Logo,

$$\epsilon = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{(\rho - y)\,\Delta\theta - \rho\Delta\theta}{\rho\Delta\theta}$$

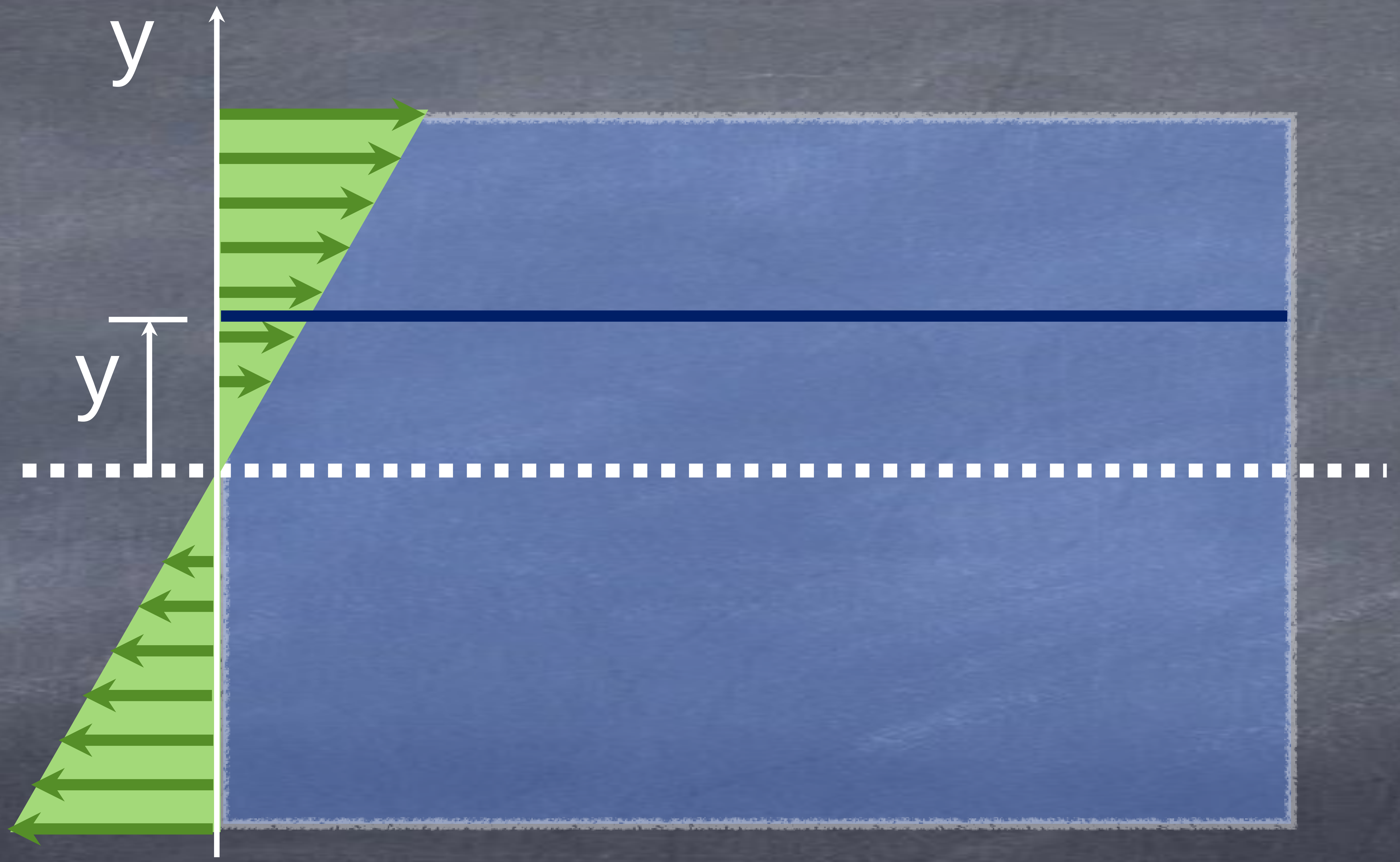
$$\epsilon = -(y/\rho)$$

Deformação de uma viga por flexão



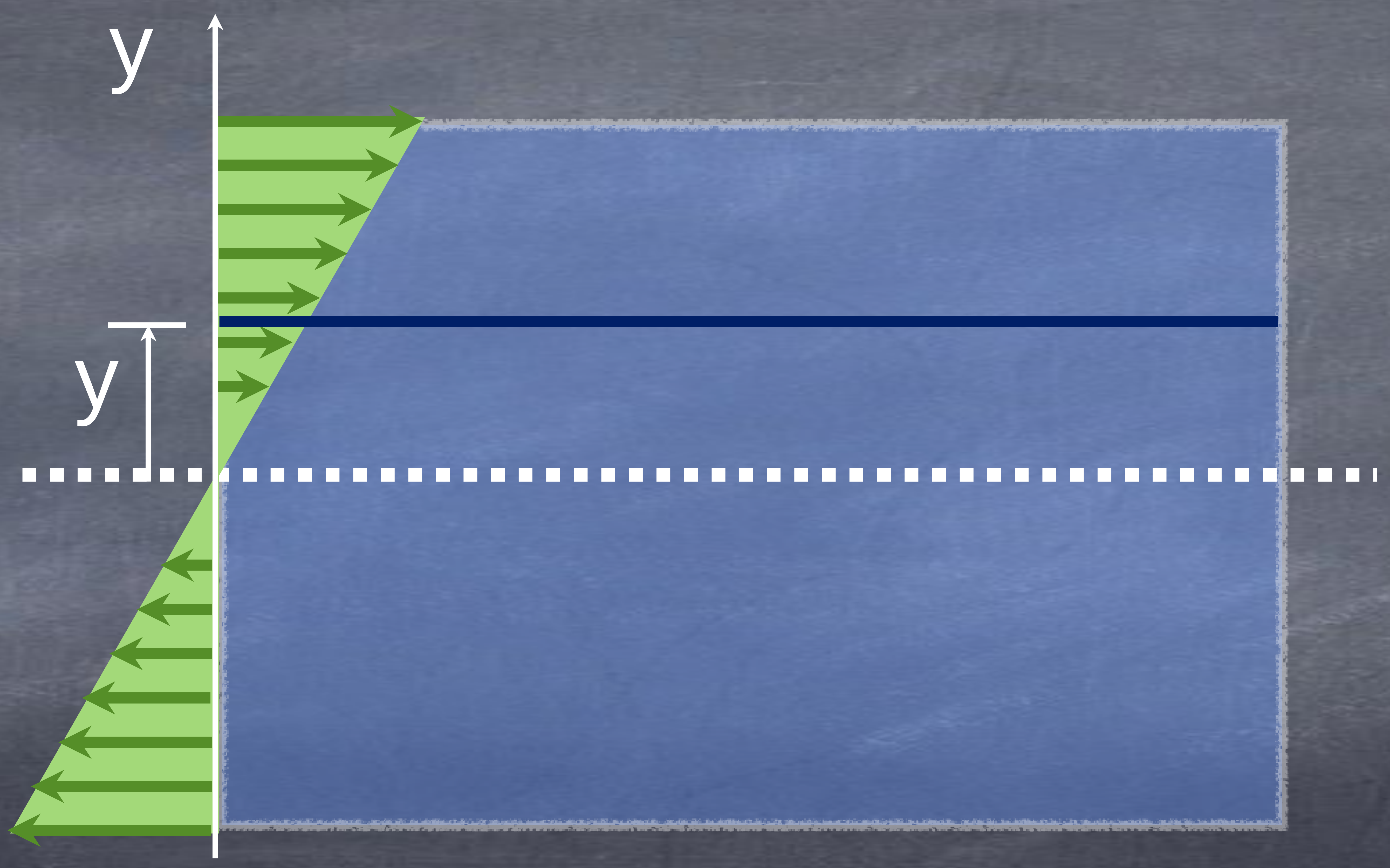
Deformação de uma viga por flexão

$$\epsilon = -(y/\rho)$$



Deformação de uma viga por flexão

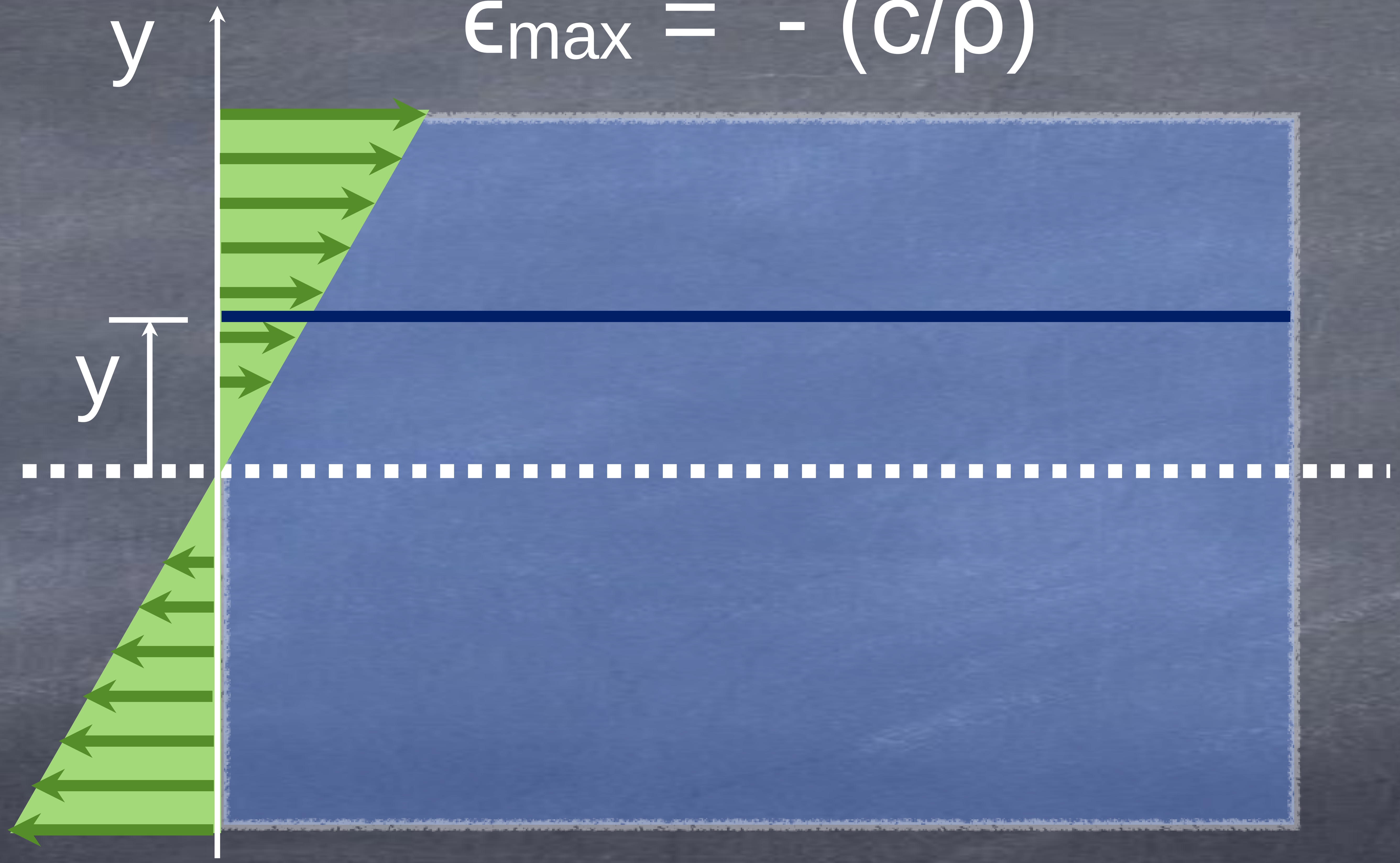
$$\epsilon = -(y/\rho)$$



$$\epsilon_{max} = (c/\rho)$$

Deformação de uma viga por flexão

$$\epsilon = -(y/\rho)$$



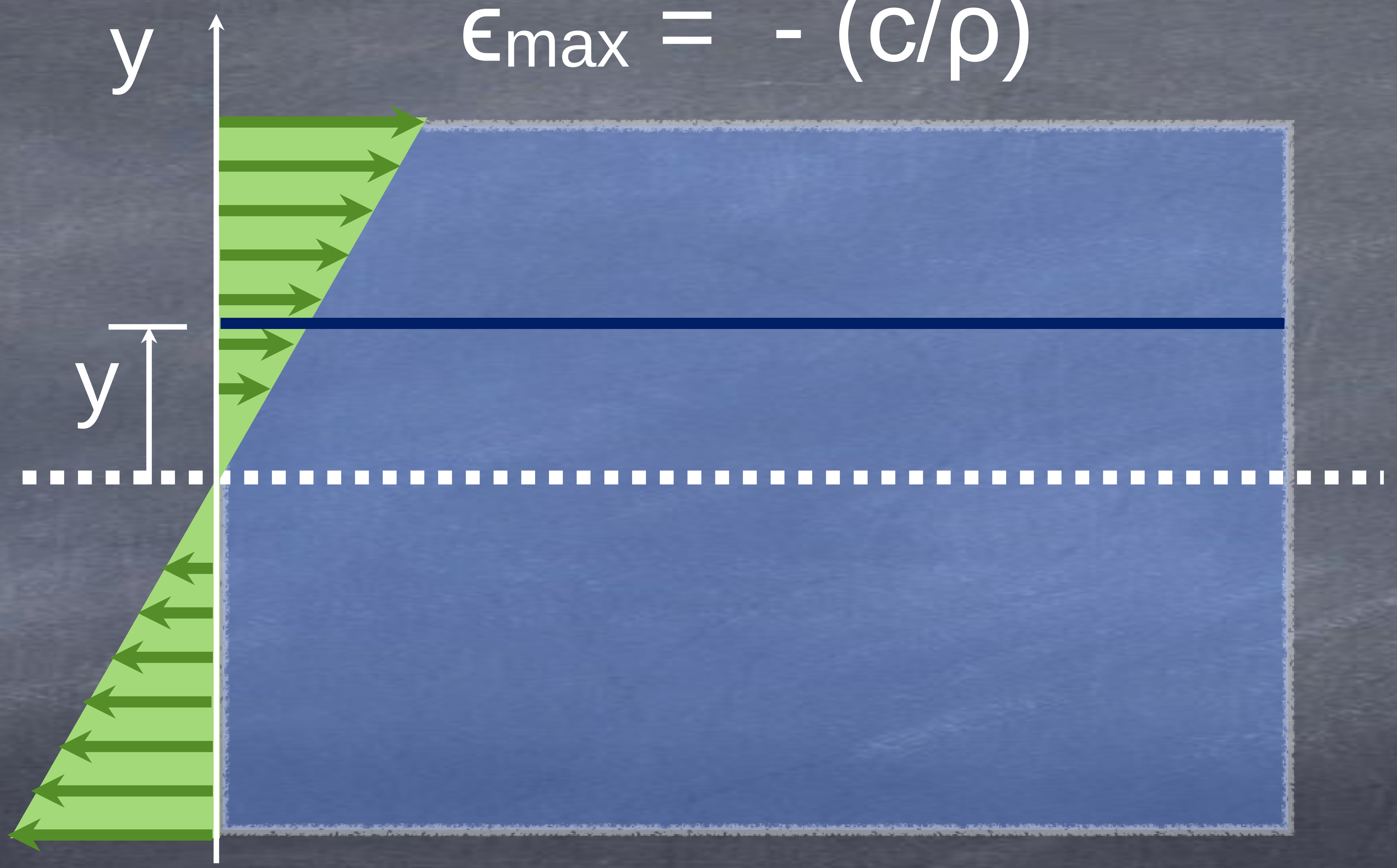
$$\epsilon_{max} = -(c/\rho)$$

$$\epsilon_{max} = (c/\rho)$$

Deformação de uma viga por flexão

$$\epsilon_{max} = -(c/\rho)$$

$$\epsilon = -(y/\rho)$$



$$\epsilon = -(y/c)\,\epsilon_{max}$$

$$\epsilon_{max} = (c/\rho)$$

Tensão em uma viga devido à flexão

Pela Lei de Hooke

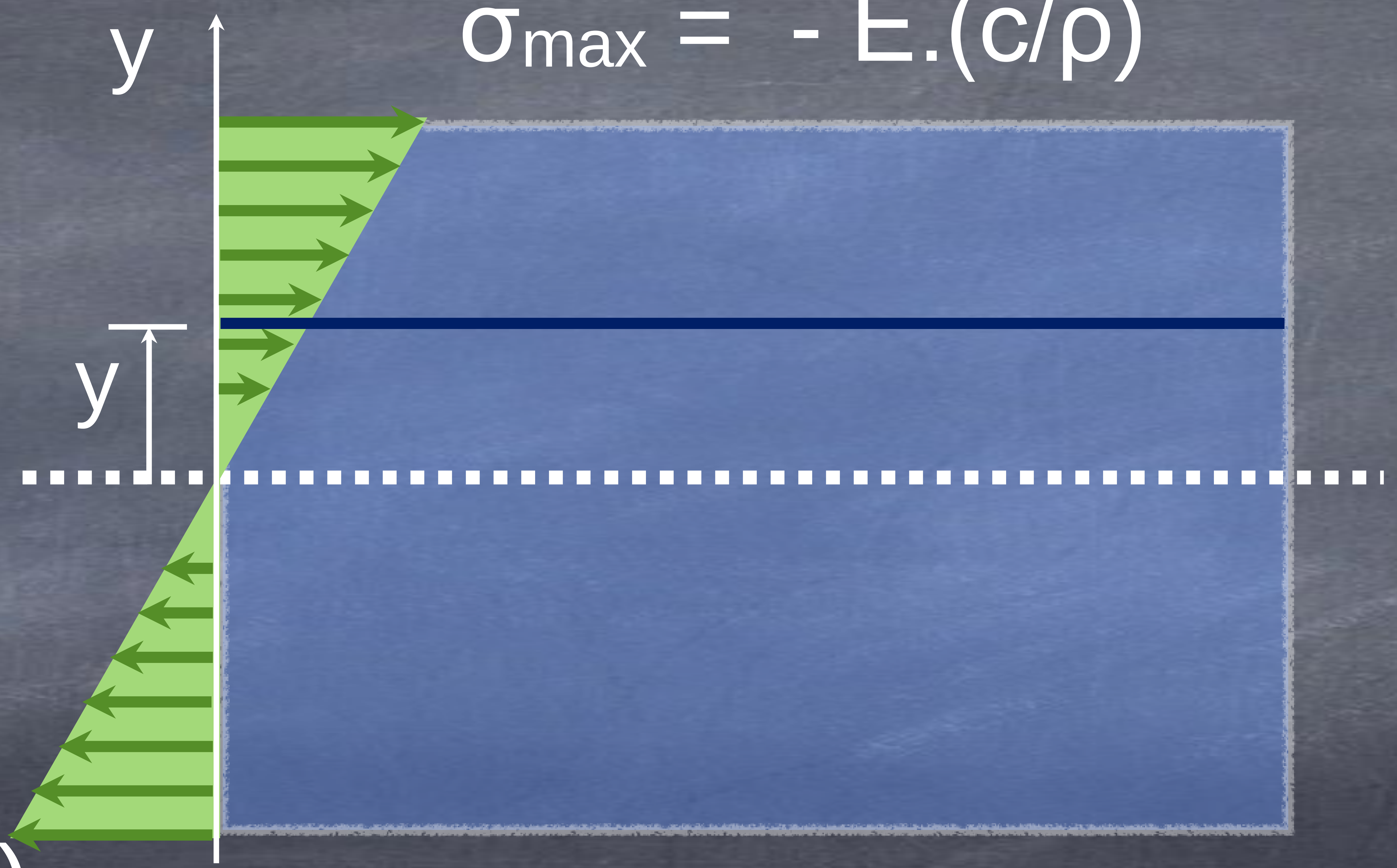
$$\sigma = E \,.\, \epsilon \;=\; -\,(y/c)\, E \,.\, \epsilon_{max} = \;-\,(y/c)\, \sigma_{max}$$

Tensão em uma viga devido à flexão

$\sigma_{max} = -E.(c/\rho)$

$\sigma = -E.(y/\rho)$

$$\sigma = -(y/c)\,\sigma_{max}$$



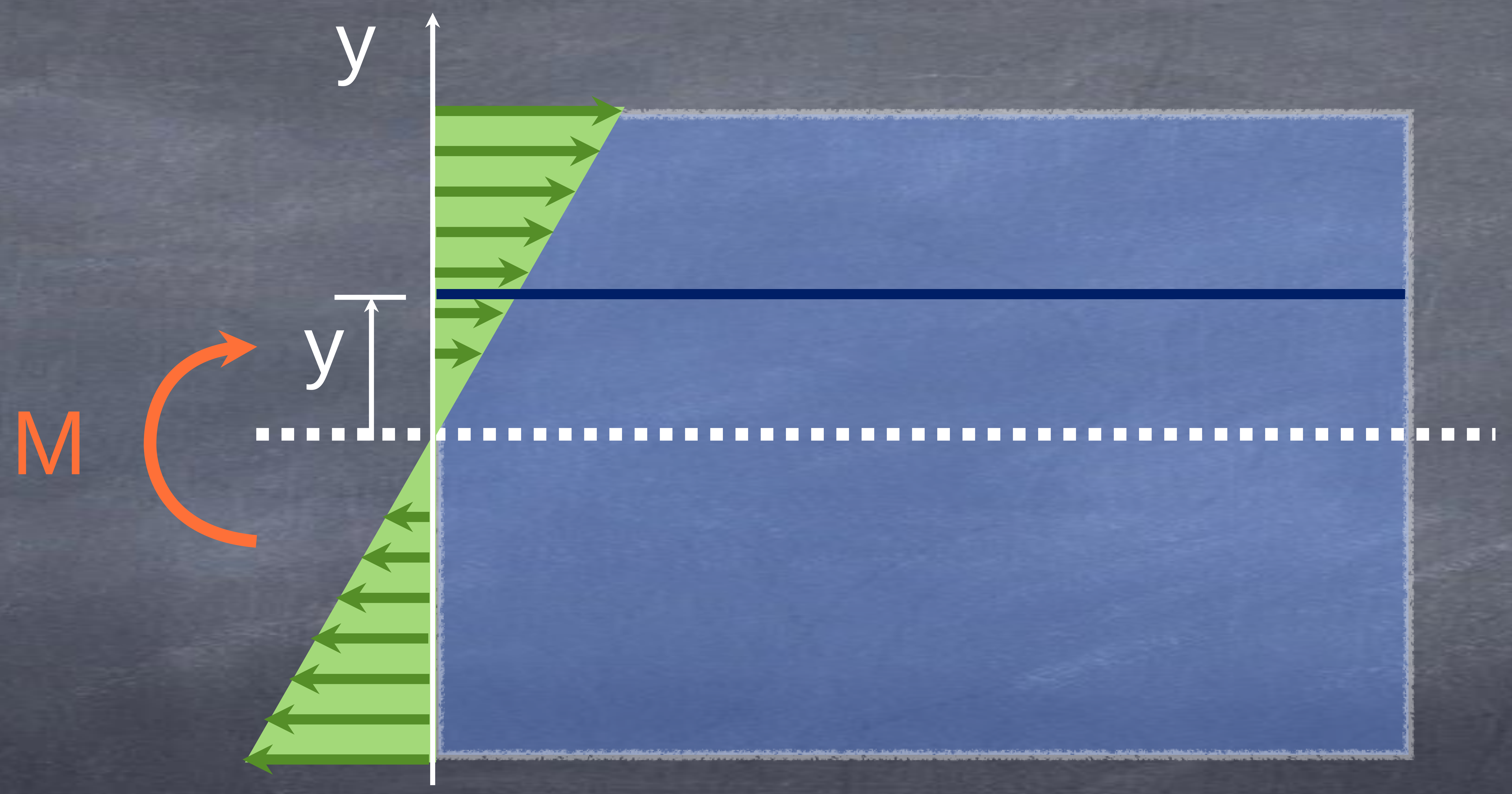
$\sigma_{max} = E.(c/\rho)$

Tensão em uma viga devido à flexão

Observa-se que a distribuição da tensão ao longo da seção é resultado da aplicação de um momento fletor em torno do eixo neutro.

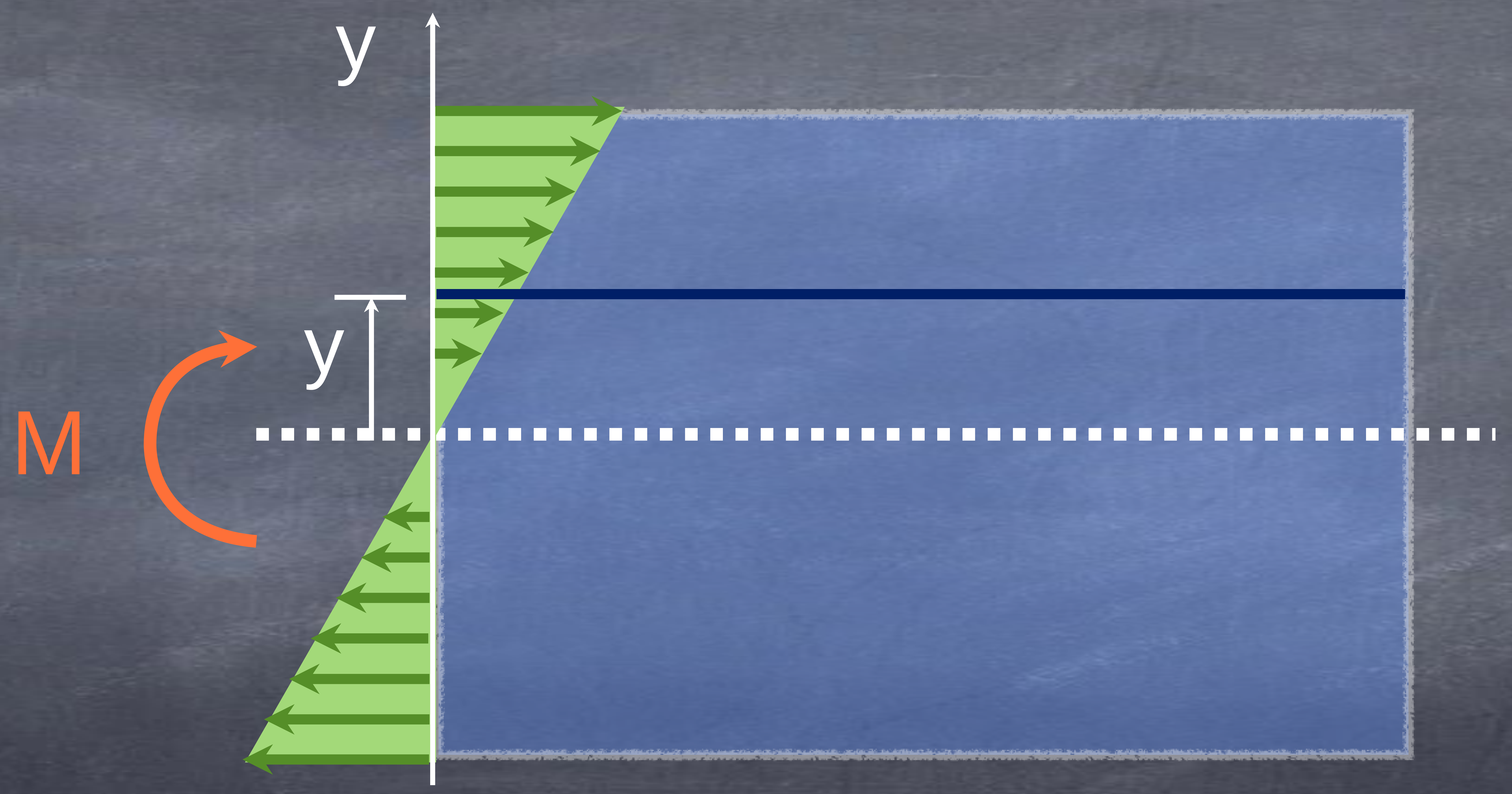
Tensão em uma viga devido à flexão

Observa-se que a distribuição da tensão ao longo da seção é resultado da aplicação de um momento fletor em torno do eixo neutro.



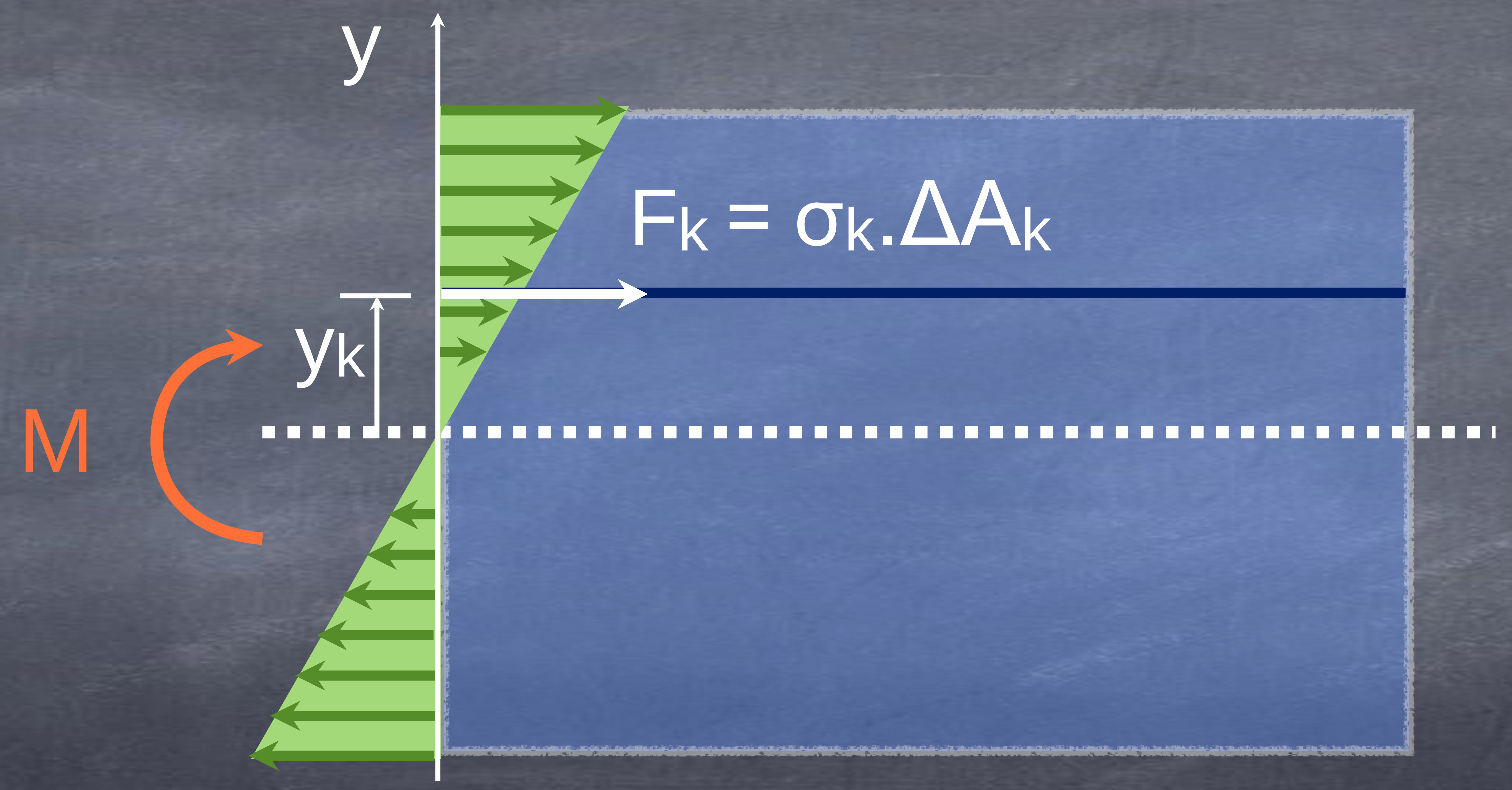
Tensão em uma viga devido à flexão

Para se determinar este momento fletor, basta somar o produto da tensão σ(y) pela área ΔA, que resulta na força, vezes o braço de alavanca y. Assim,



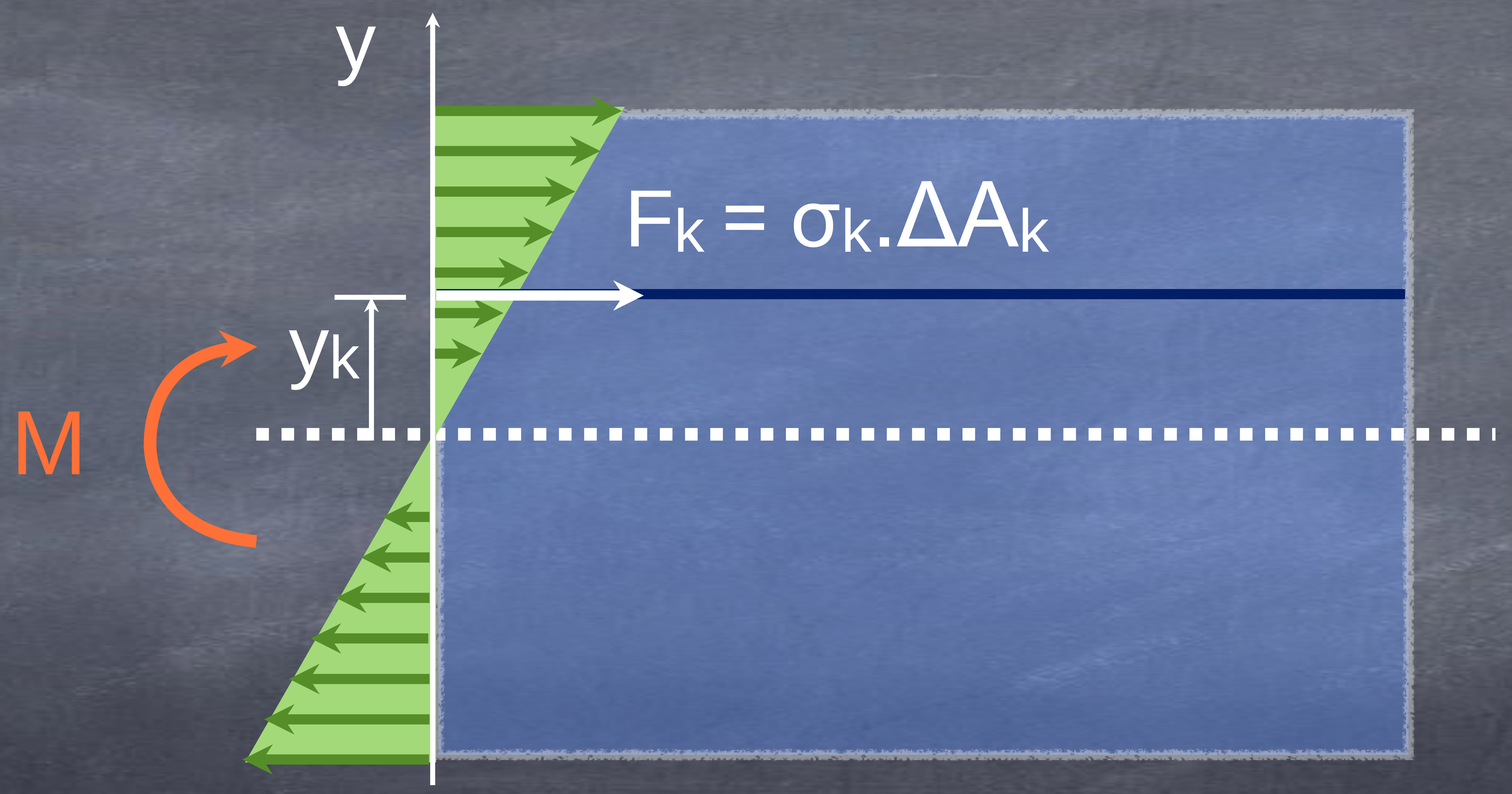
Tensão em uma viga devido à flexão

Para se determinar este momento fletor, basta somar o produto da tensão σ(y) pela área ΔA, que resulta na força, vezes o braço de alavanca y. Assim,



Tensão em uma viga devido à flexão

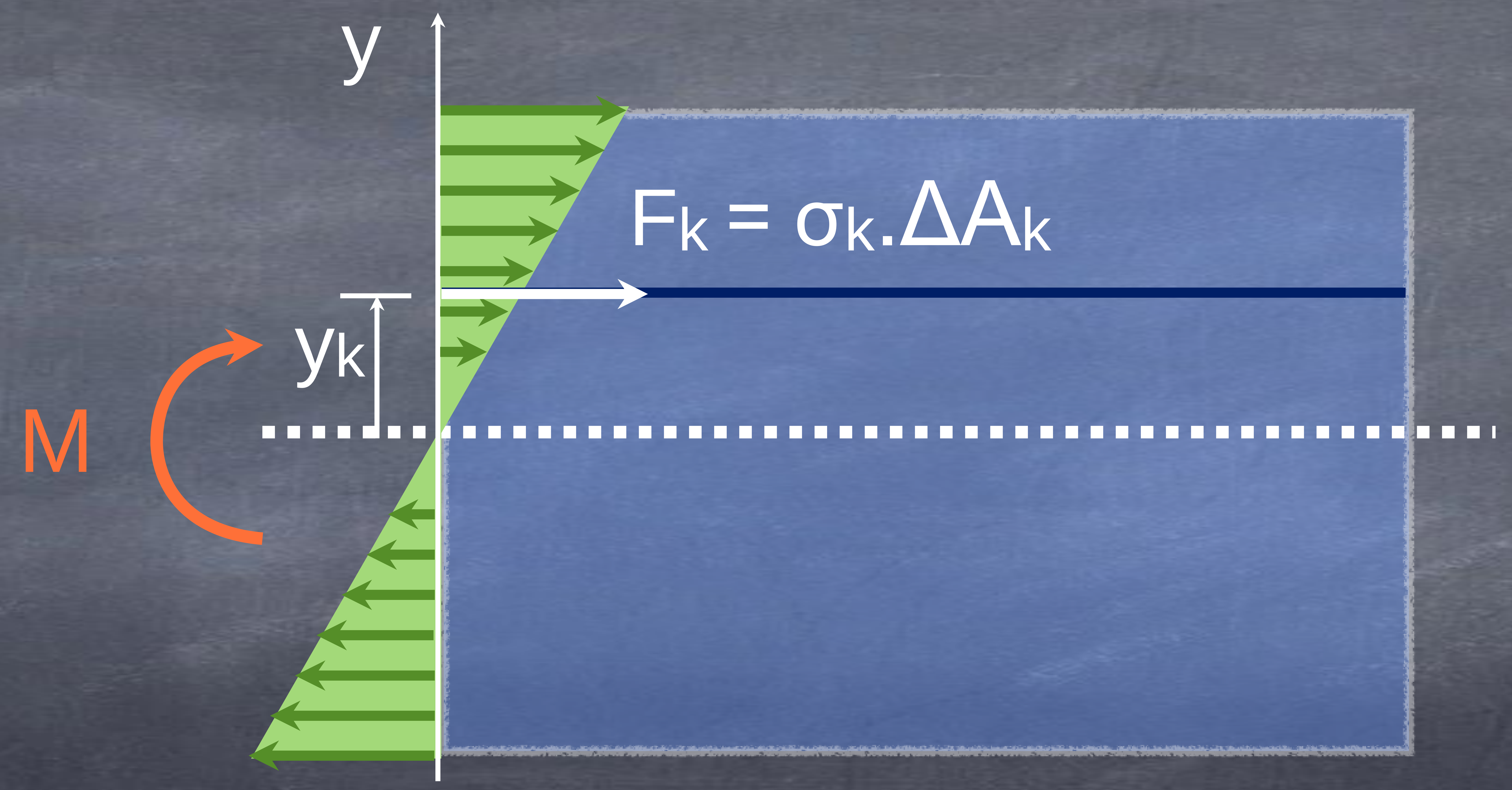
Para se determinar este momento fletor, basta somar o produto da tensão σ(y) pela área ΔA, que resulta na força, vezes o braço de alavanca y. Assim,



$$\Delta M = \sum \sigma_k(y) \;.\; y_k \,\Delta A_k$$

Tensão em uma viga devido à flexão

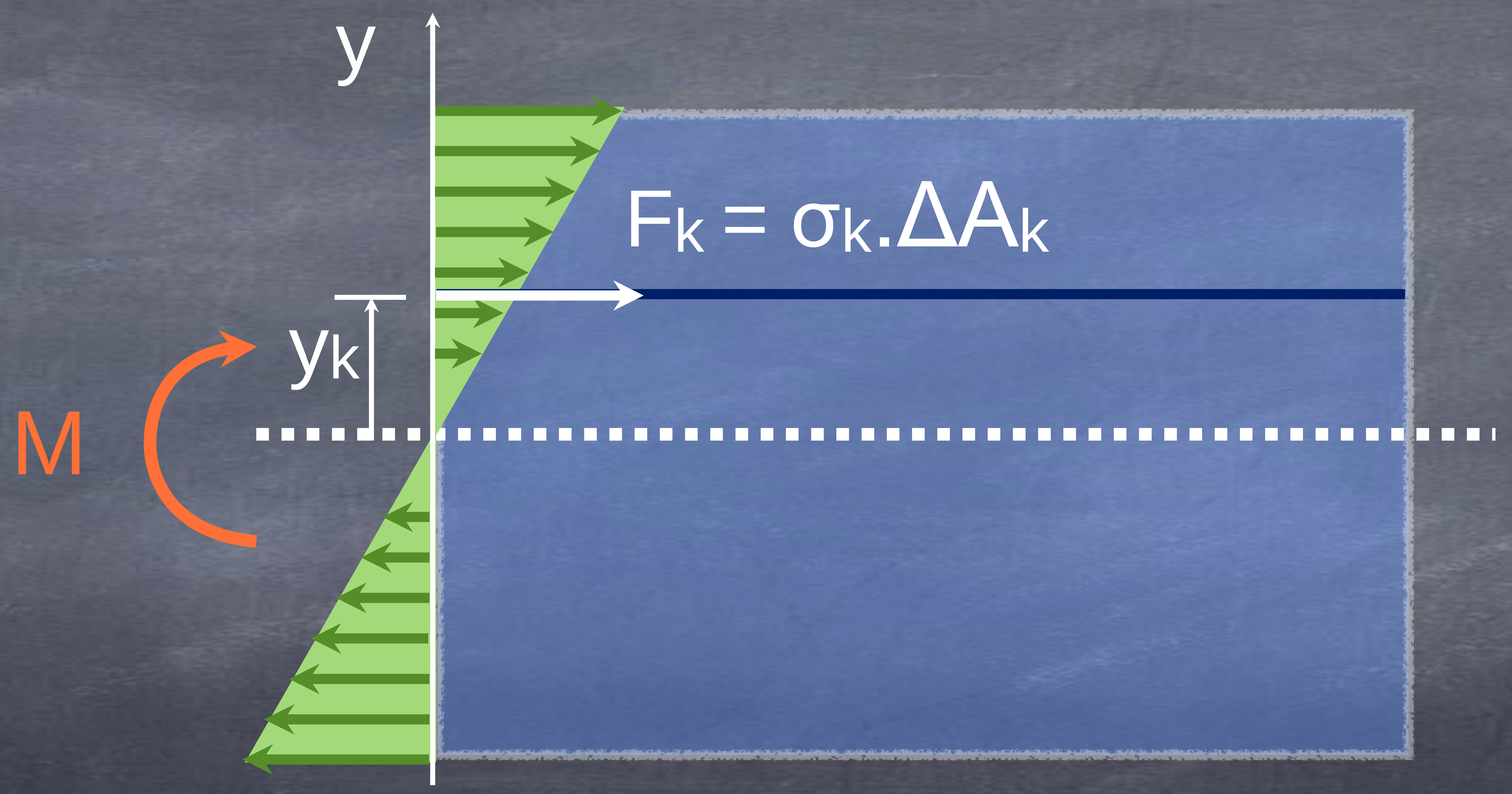
No limite, quando $||P|| \rightarrow 0$,



Tensão em uma viga devido à flexão

No limite, quando $||P||\to 0$,

$$M = \int_A \sigma(y) \cdot y \, dA ,$$



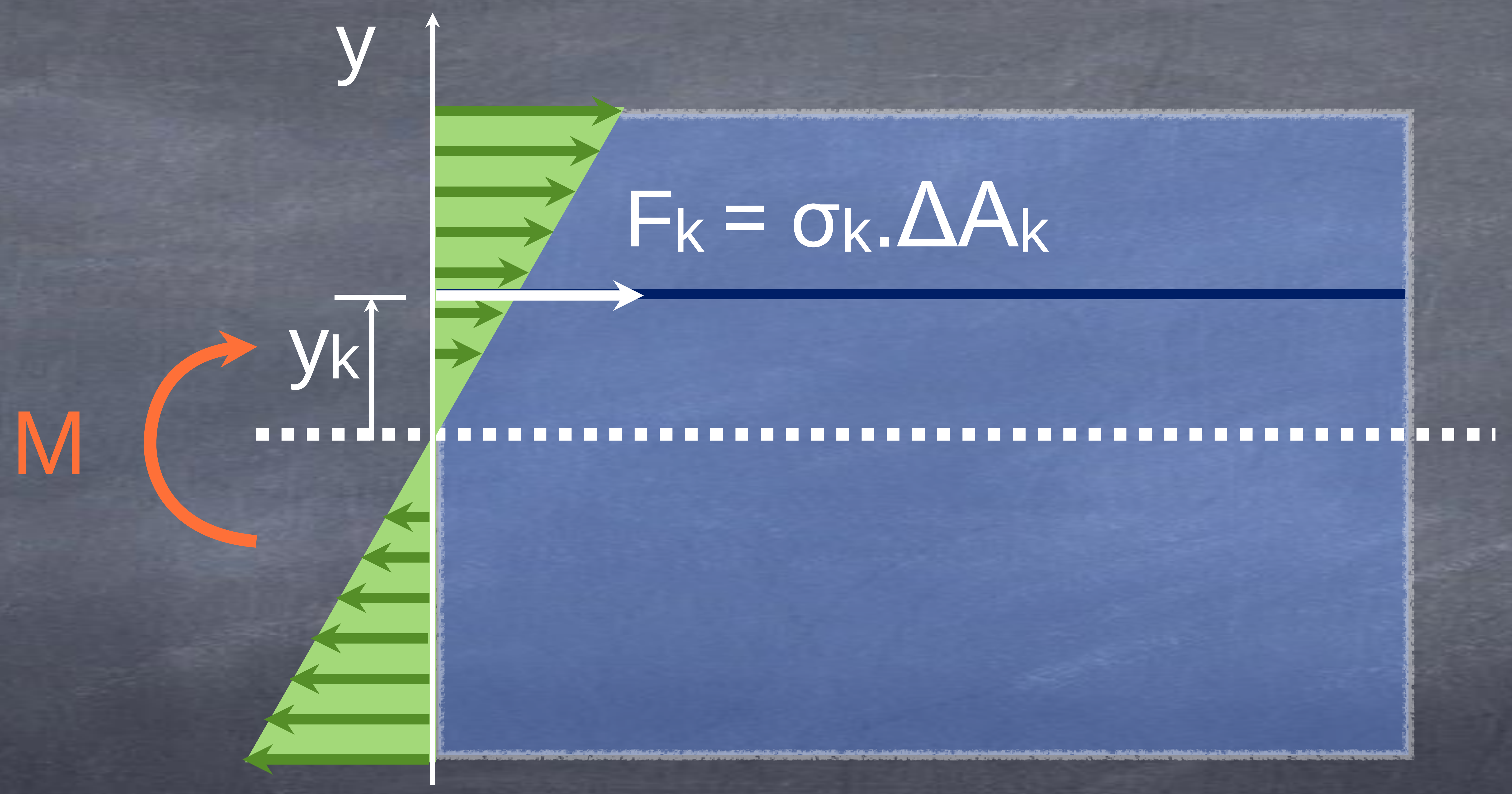
Tensão em uma viga devido à flexão

No limite, quando ||P||→0,

$$M = \int_A \sigma(y) \, . \, y \, dA \, ,$$

ou

$$M = (\sigma_{max}/c) \, . \int_A y^2 \, dA \, .$$

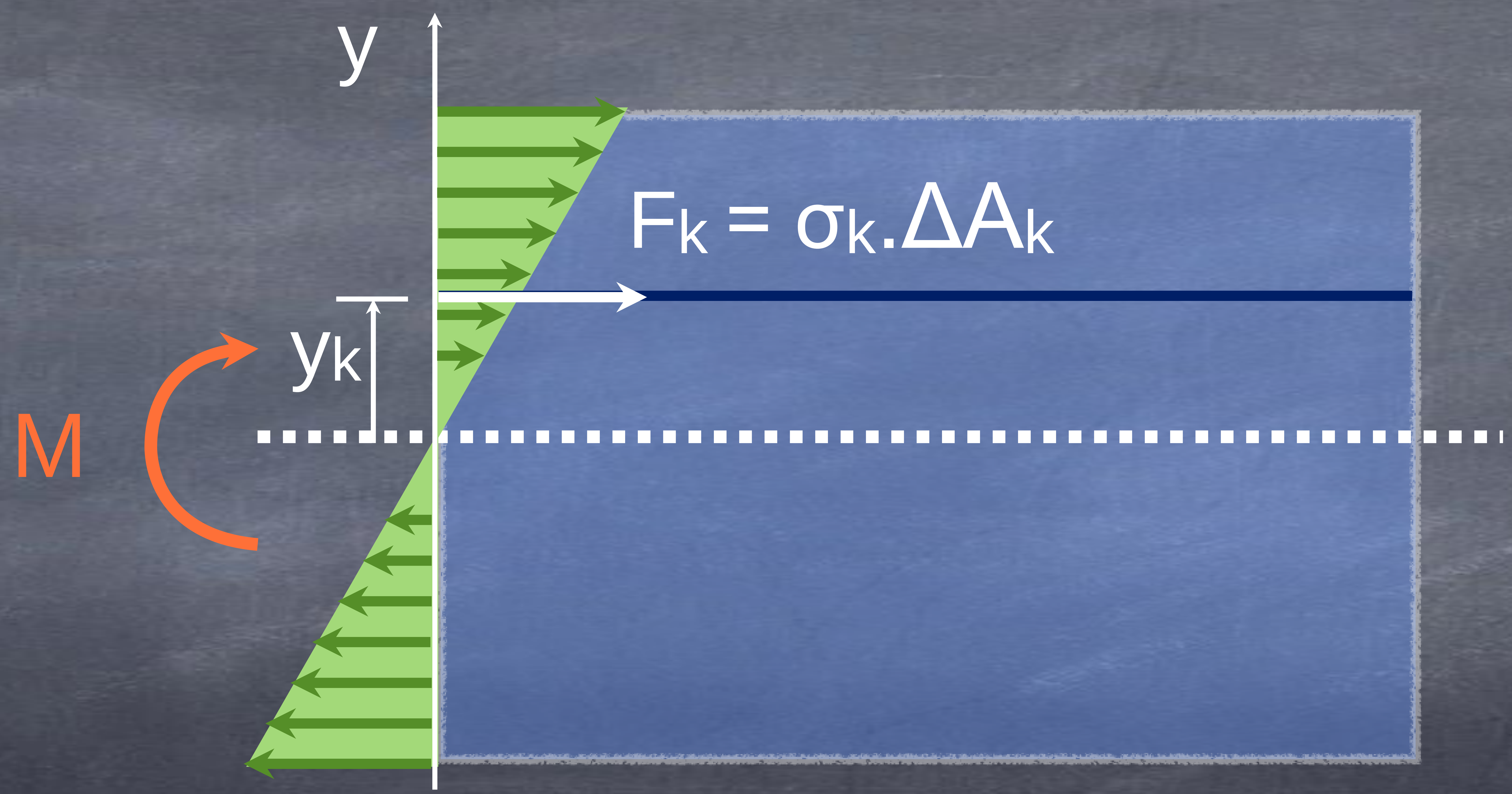


Tensão em uma viga devido à flexão

Porém,

$$I = \int_A y^2 \, dA \, ,$$

é o momento de inércia da seção.



Tensão em uma viga devido à flexão

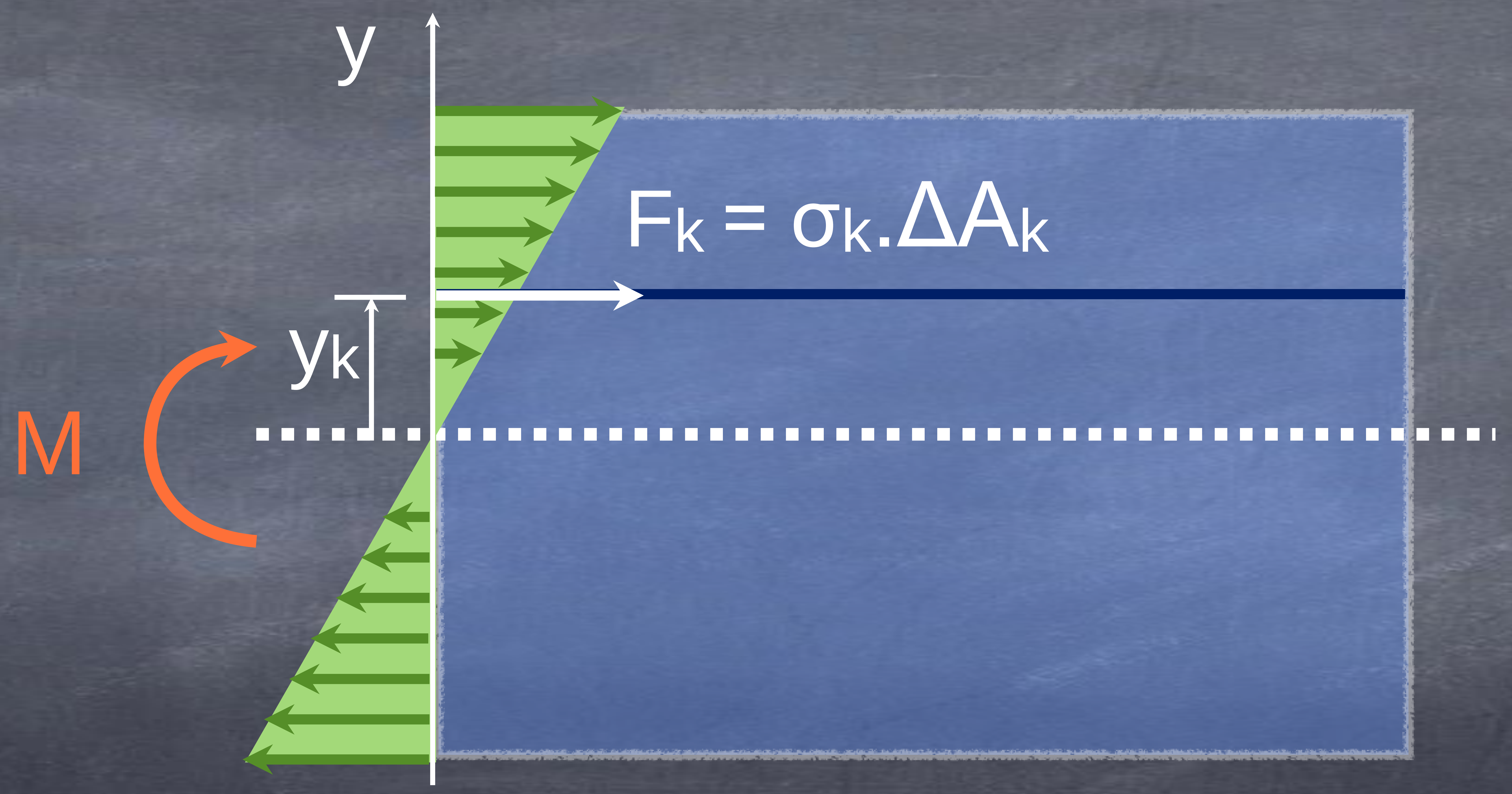
Porém,

$$I = \int_A y^2\, dA\ ,$$

é o momento de inércia da seção.

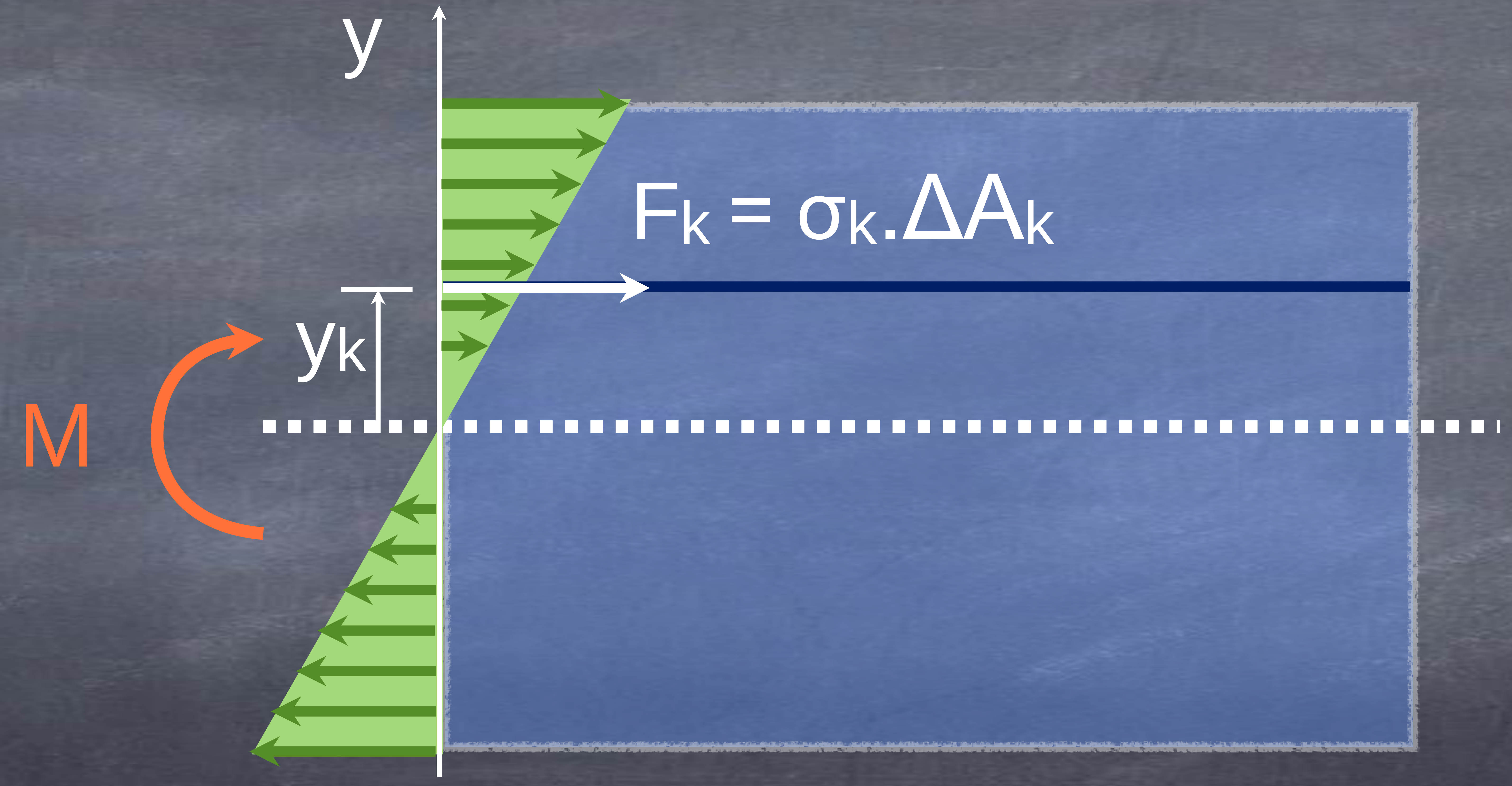
Assim,

$$M = (\sigma_{max}/c)\ .\int_A y^2\, dA\ .$$



Tensão em uma viga devido à flexão

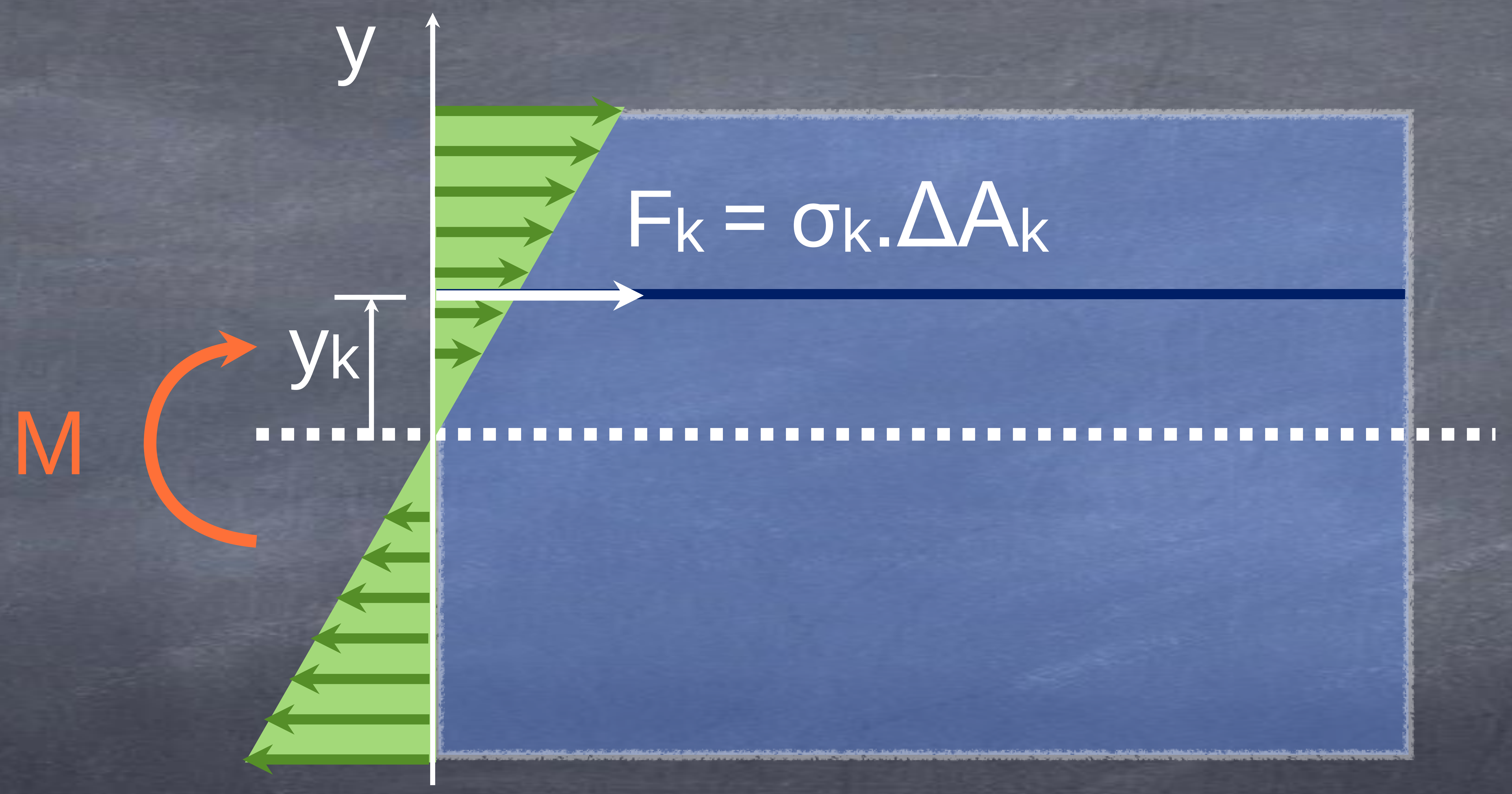
Portanto,



Tensão em uma viga devido à flexão

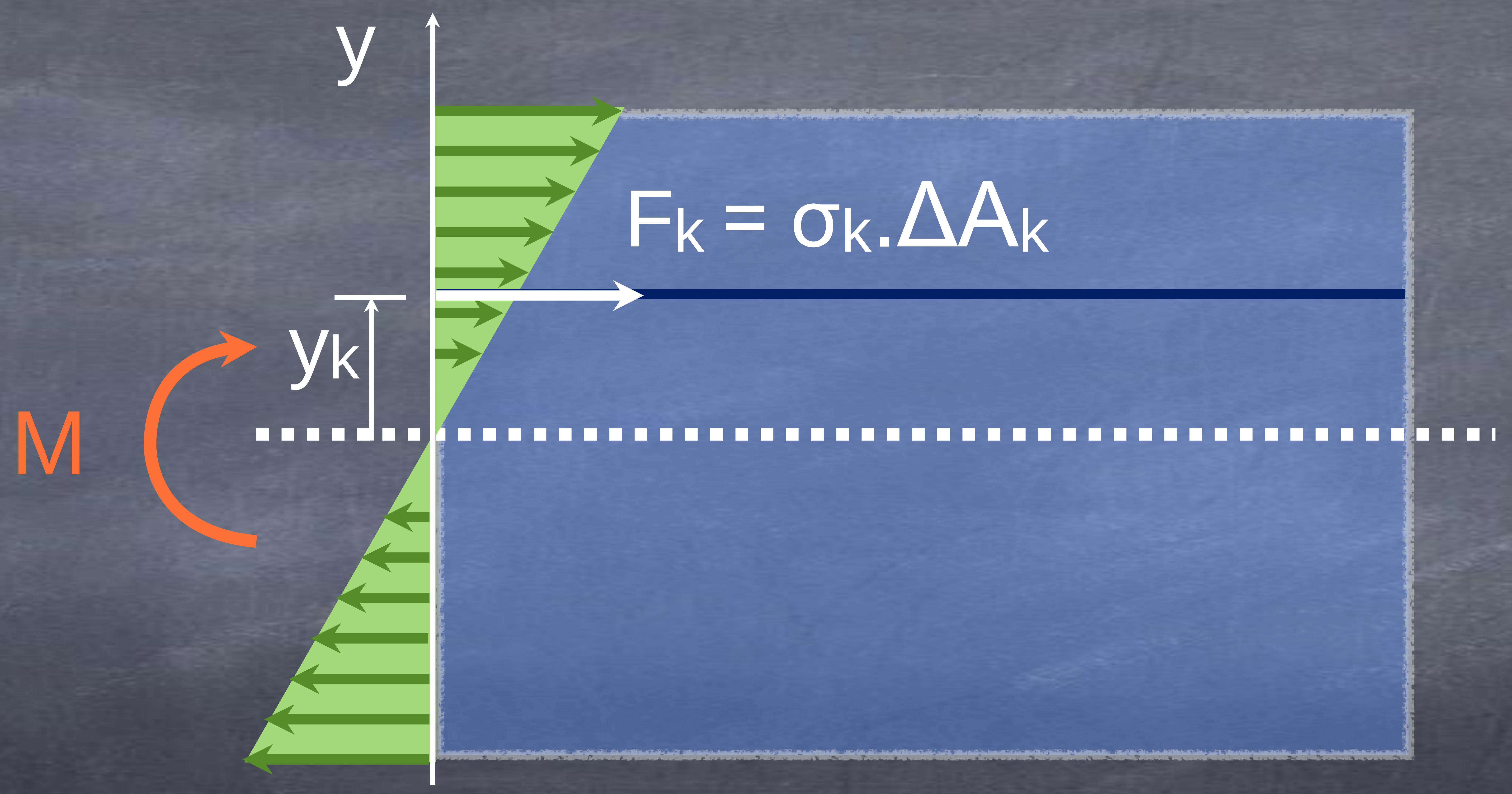
Portanto,

$$\sigma_{max} = \frac{M \, . \, c}{I}$$



Tensão em uma viga devido à flexão

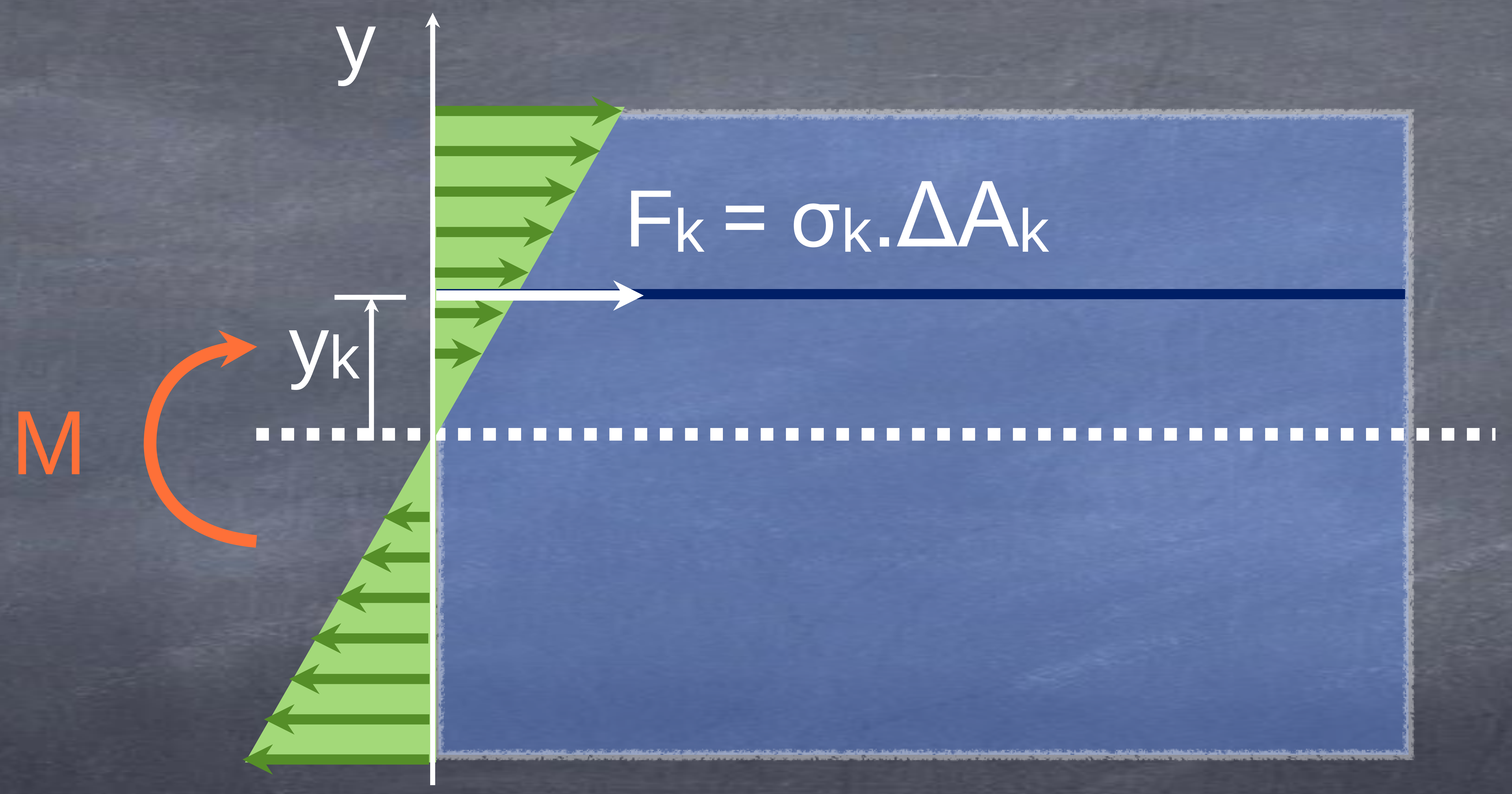
O mesmo pode ser obtido para a região inferior e, então,



Tensão em uma viga devido à flexão

O mesmo pode ser obtido para a região inferior e, então,

$$\sigma_{max} = -\frac{M \cdot c}{I}$$

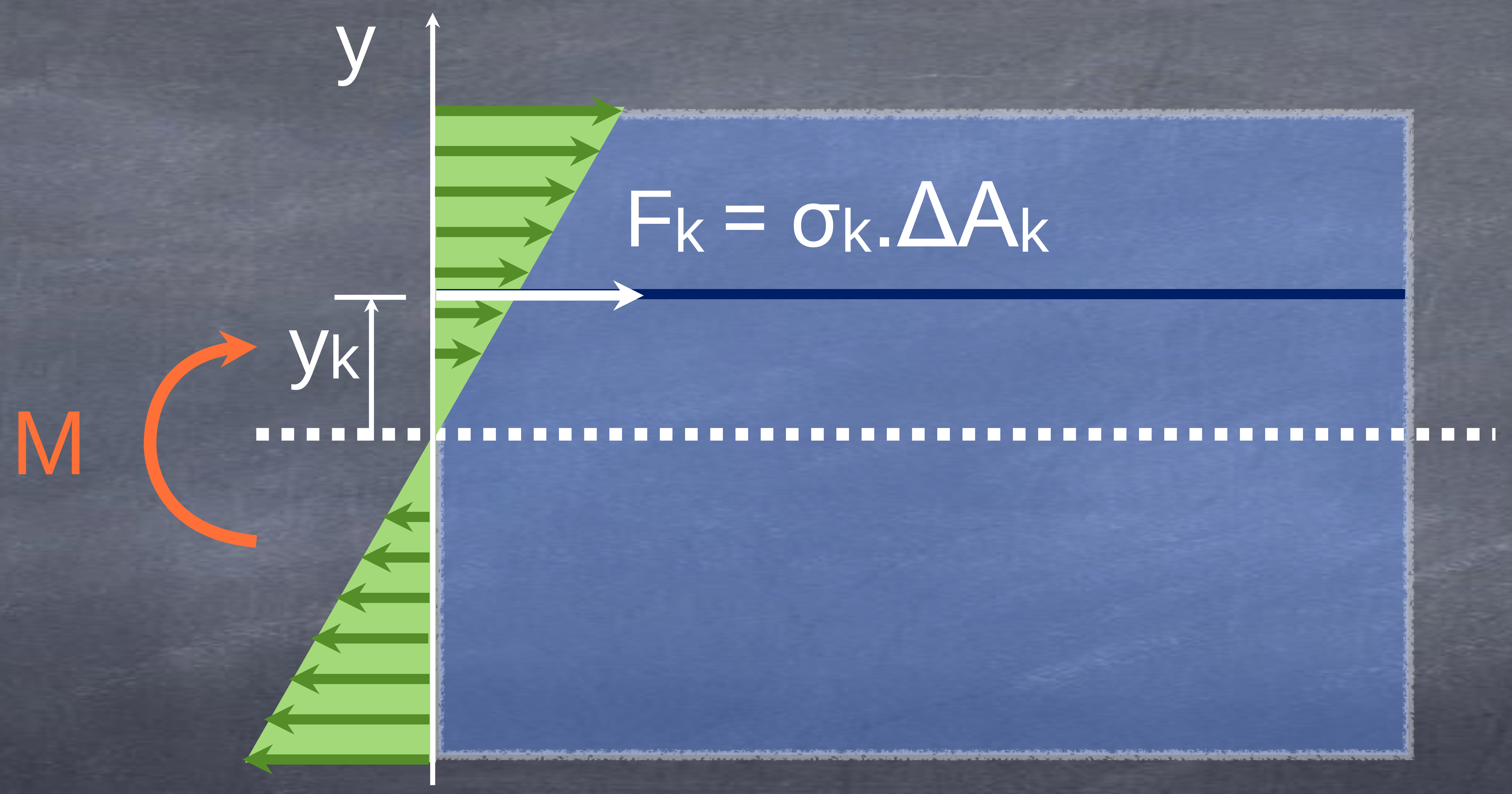


Tensão em uma viga devido à flexão

O mesmo pode ser obtido para a região inferior e, então,

$$\sigma_{max} = -\frac{M \cdot c}{I}$$

Logo,



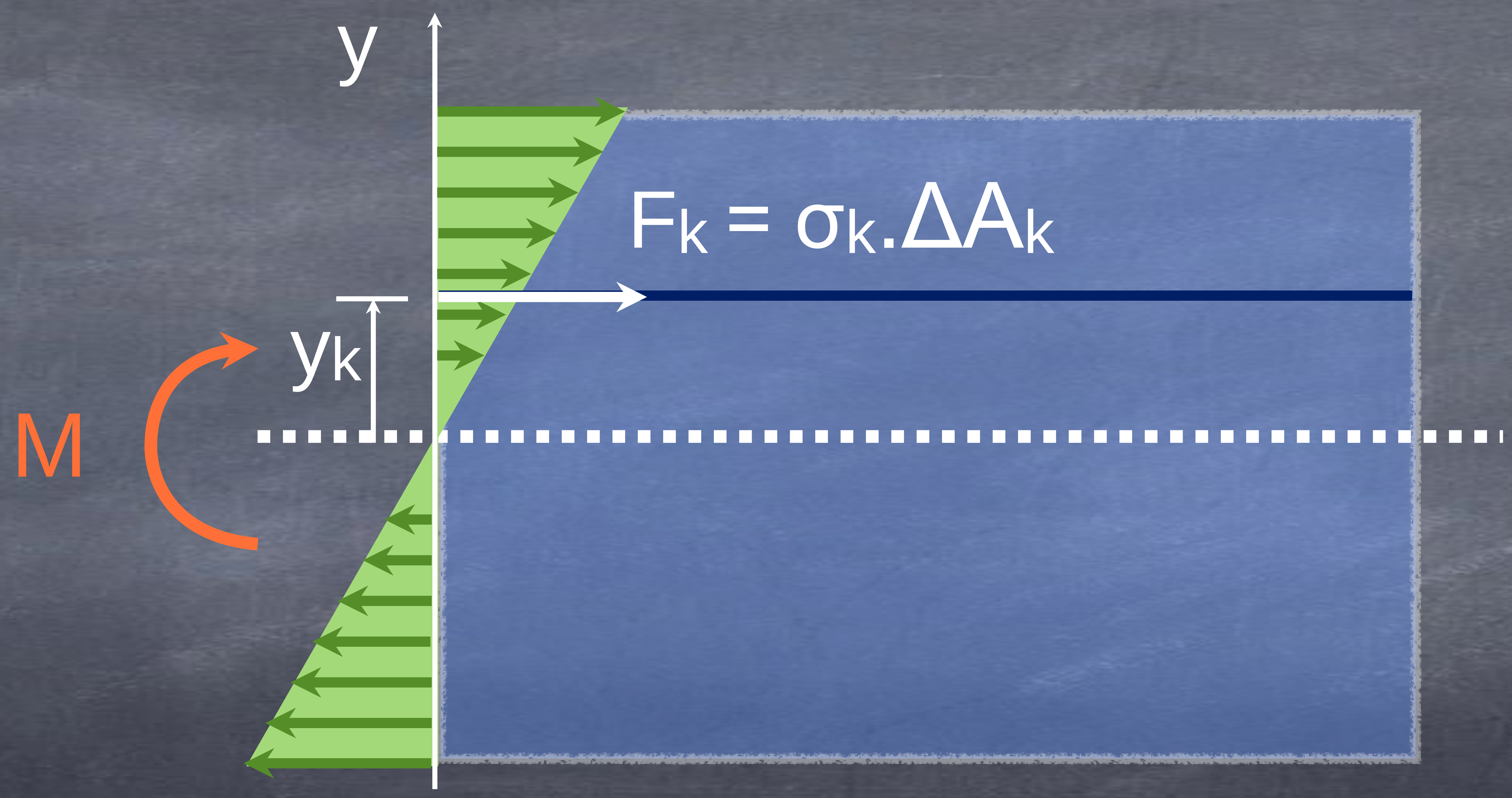
Tensão em uma viga devido à flexão

O mesmo pode ser obtido para a região inferior e, então,

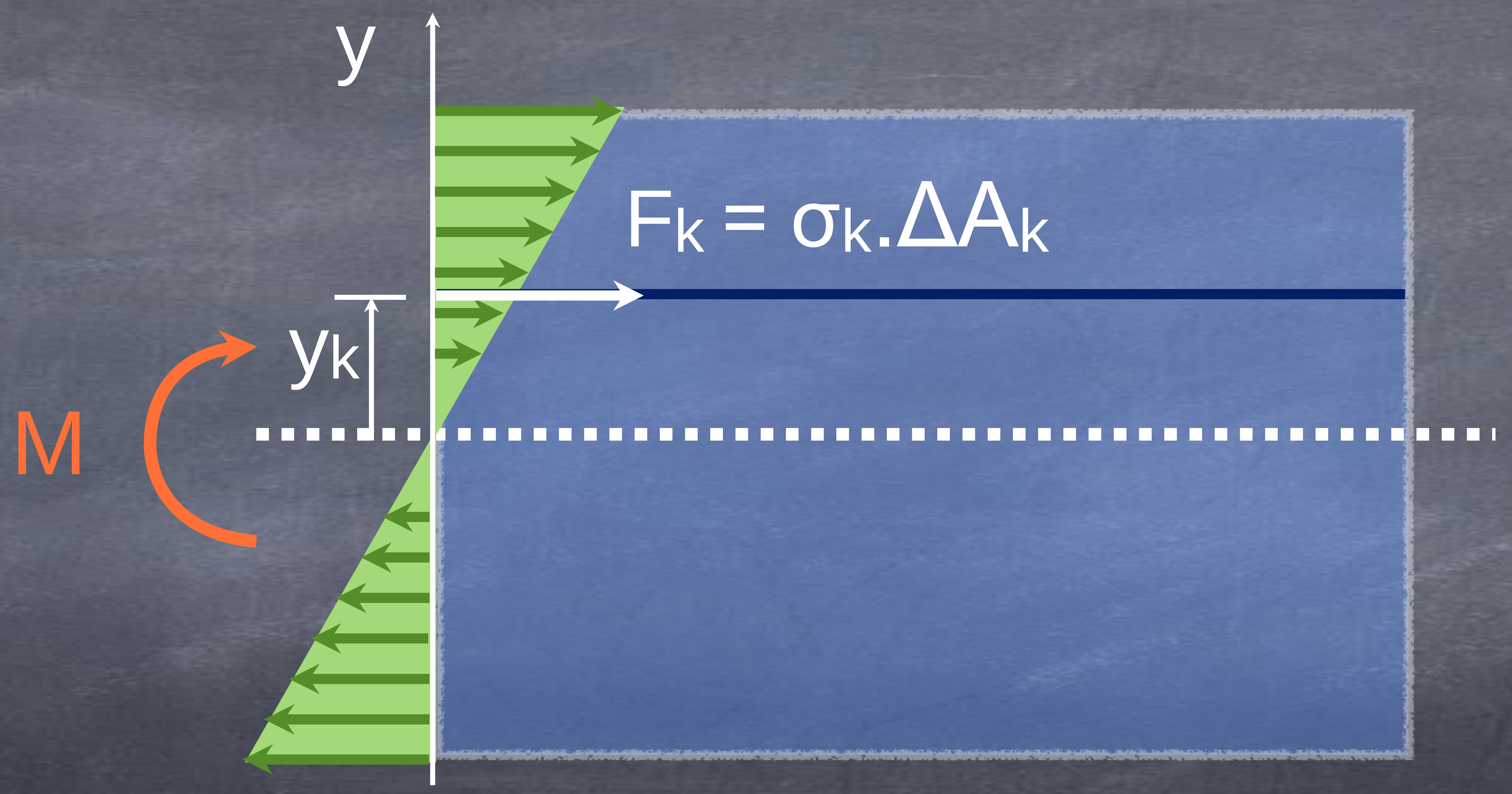
$$\sigma_{max} = - \frac{M \, . \, c}{I}$$

Logo,

$$\boxed{\sigma_{max} = \pm \frac{M \, . \, c}{I} \, .}$$

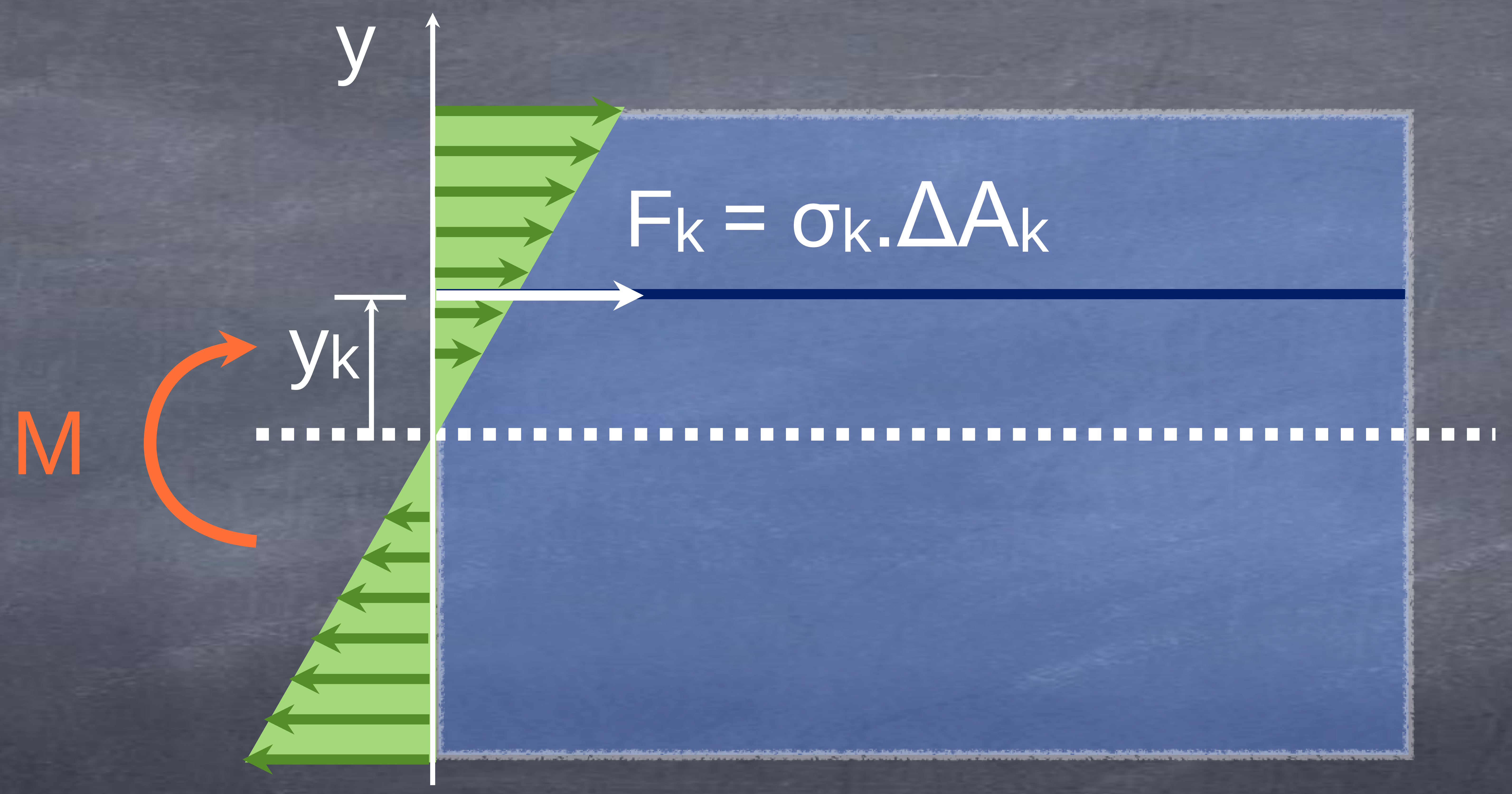


Determinação do eixo neutro



Determinação do eixo neutro

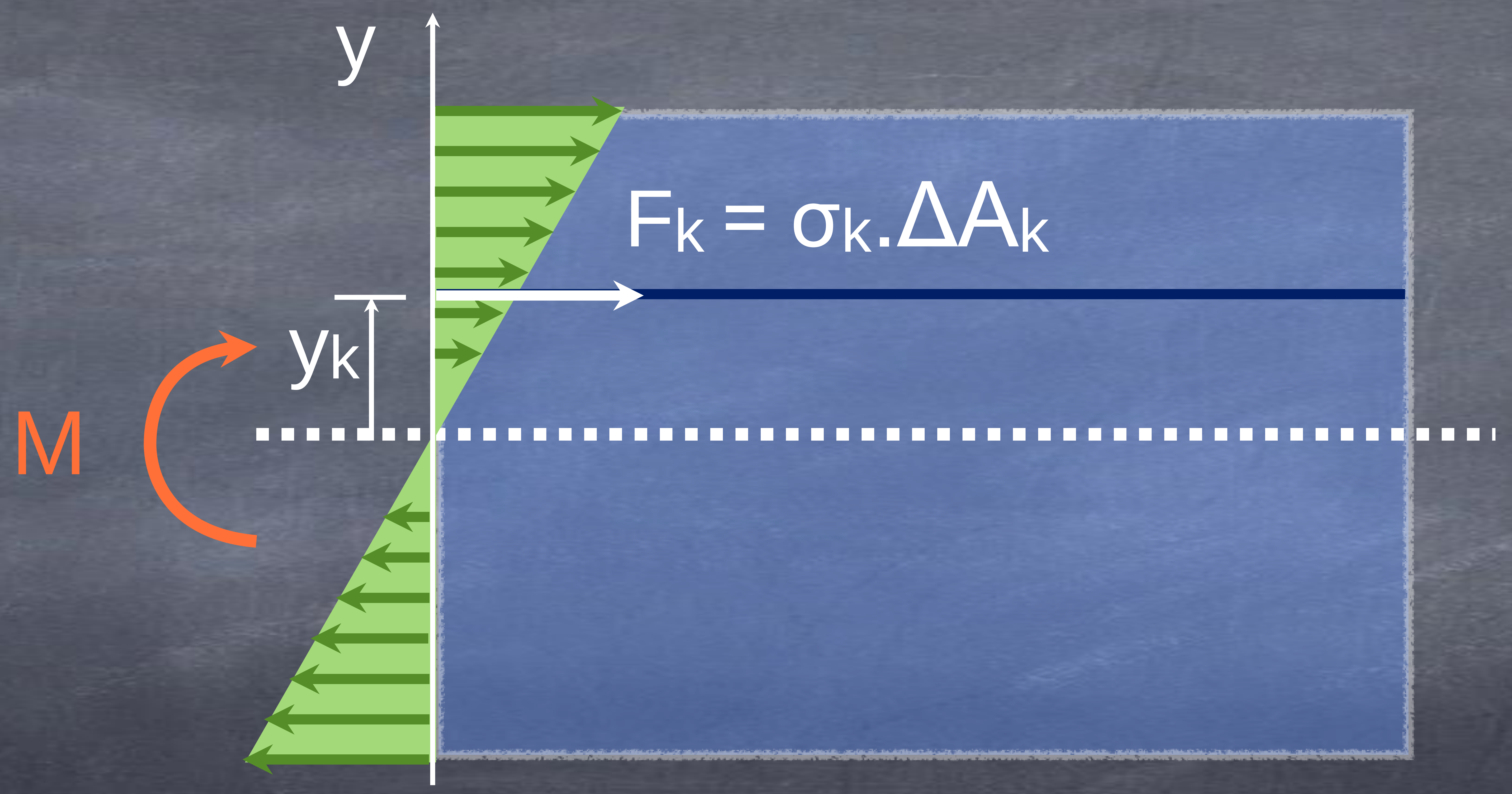
Para se determinar a posição do eixo neutro, basta reconhecer que



Determinação do eixo neutro

Para se determinar a posição do eixo neutro, basta reconhecer que

$$0 = \int_A \sigma(y)\, dA$$

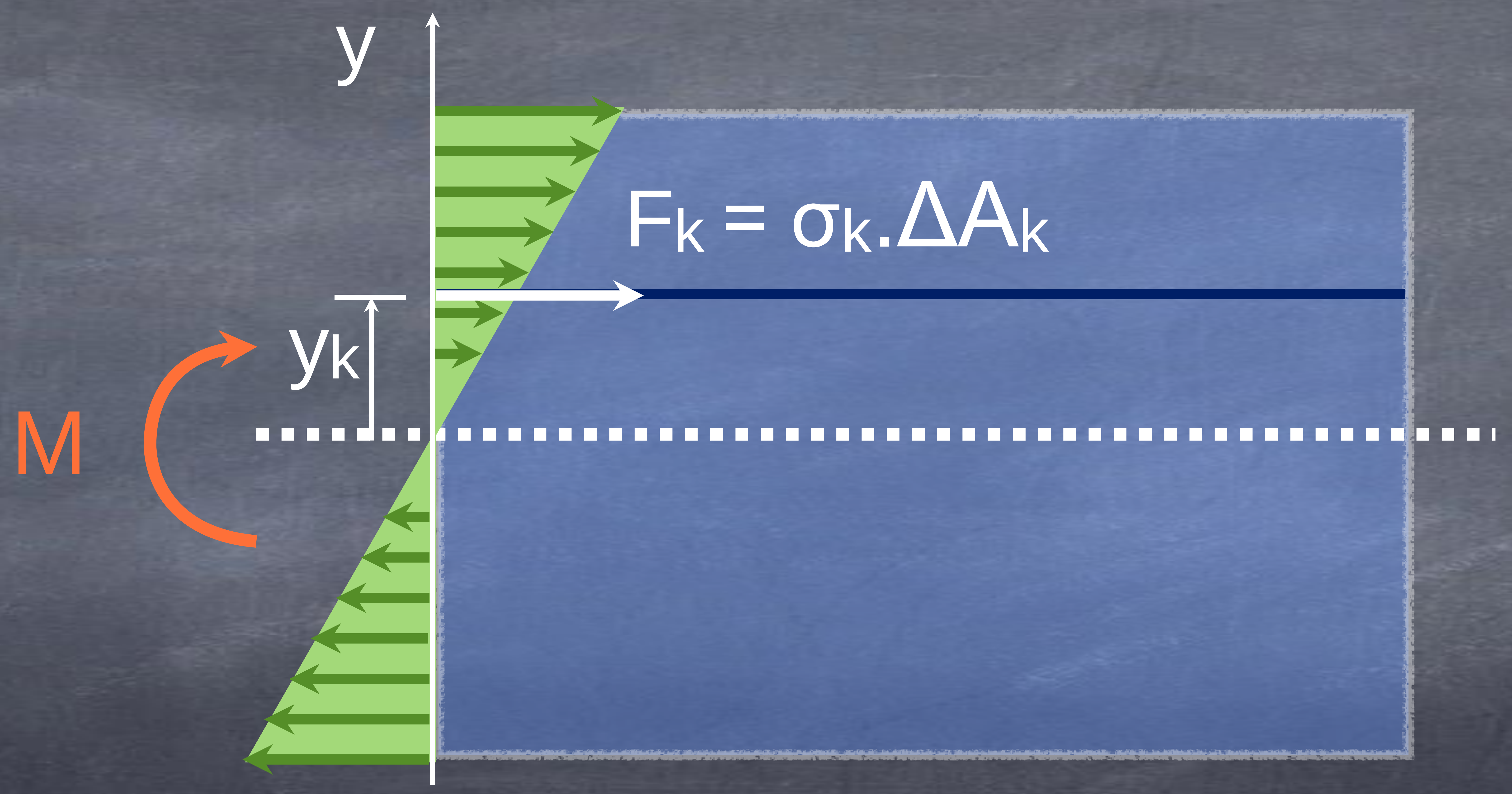


Determinação do eixo neutro

Para se determinar a posição do eixo neutro, basta reconhecer que

$$0 = \int_A \sigma(y)\, dA$$

$$= \int_A - (y/c)\, \sigma_{max}\, dA$$



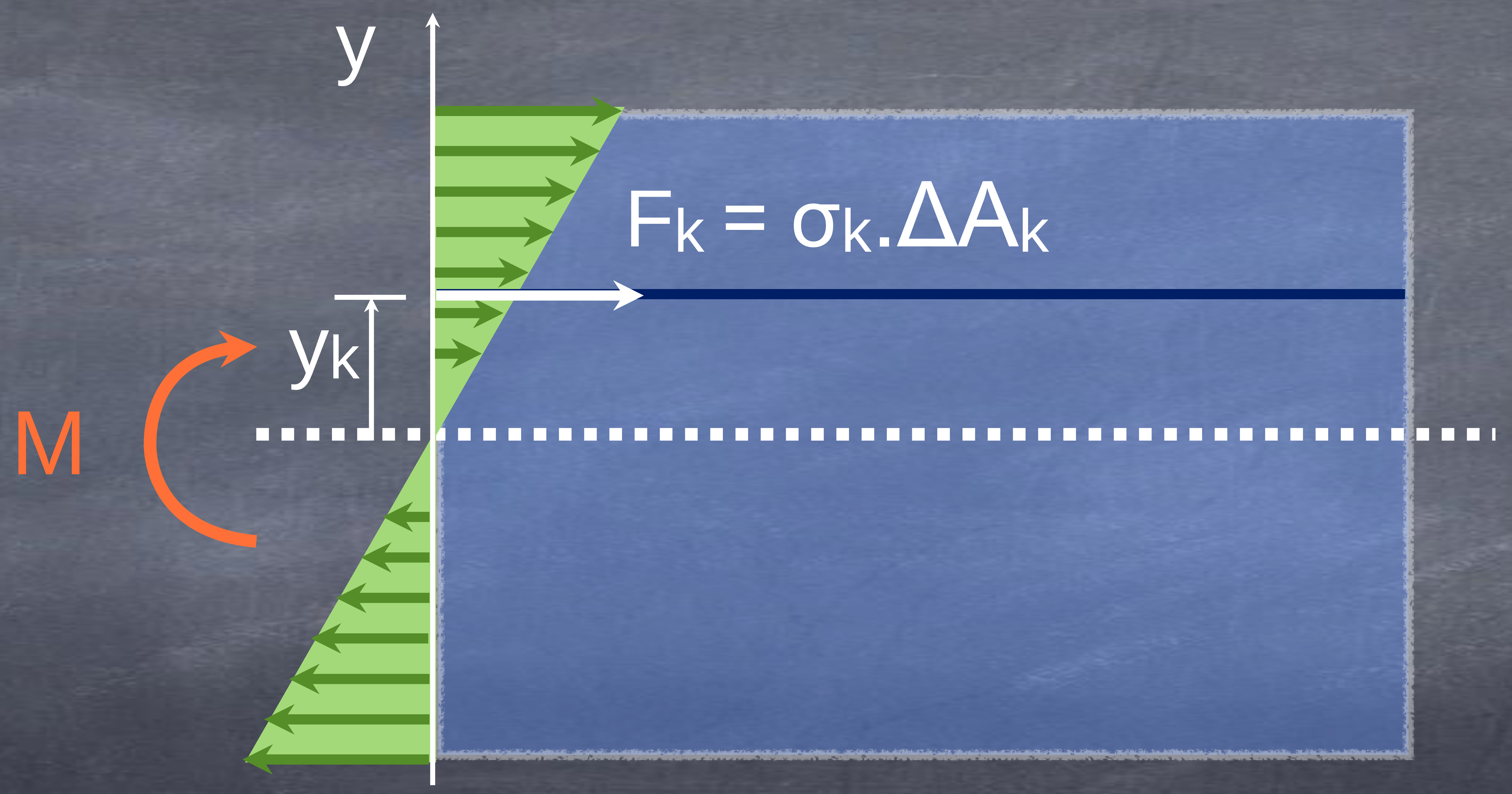
Determinação do eixo neutro

Para se determinar a posição do eixo neutro, basta reconhecer que

$$0 = \int_A \sigma(y)\, dA$$

$$= \int_A -(y/c)\, \sigma_{max}\, dA$$

$$\boxed{\int_A y\, dA = 0}$$



Determinação do eixo neutro

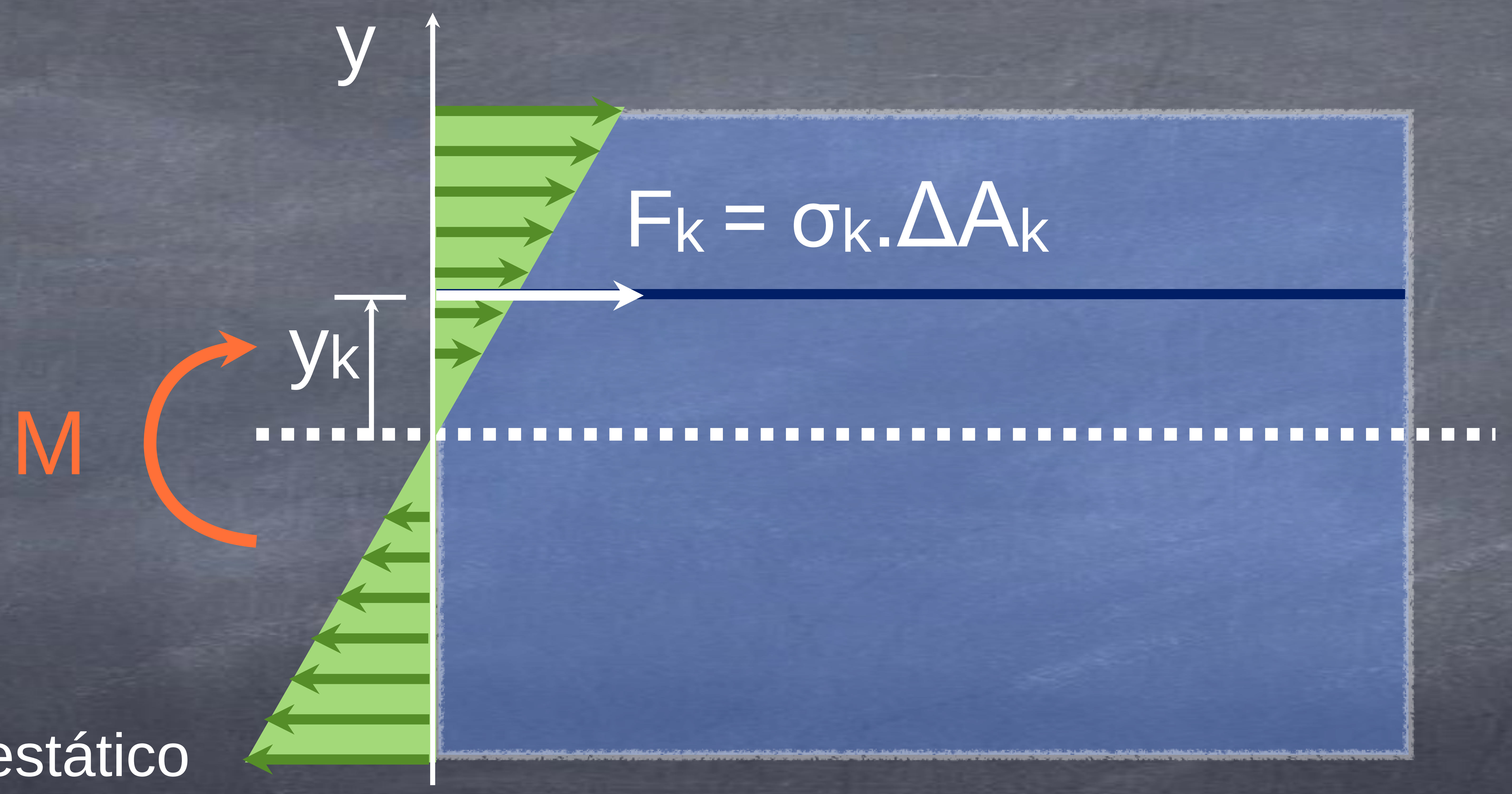
Para se determinar a posição do eixo neutro, basta reconhecer que

$$0 = \int_A \sigma(y)\, dA$$

$$= \int_A - (y/c)\, \sigma_{max}\, dA$$

$$\boxed{\int_A y\, dA = 0}$$

Momento estático de área da seção

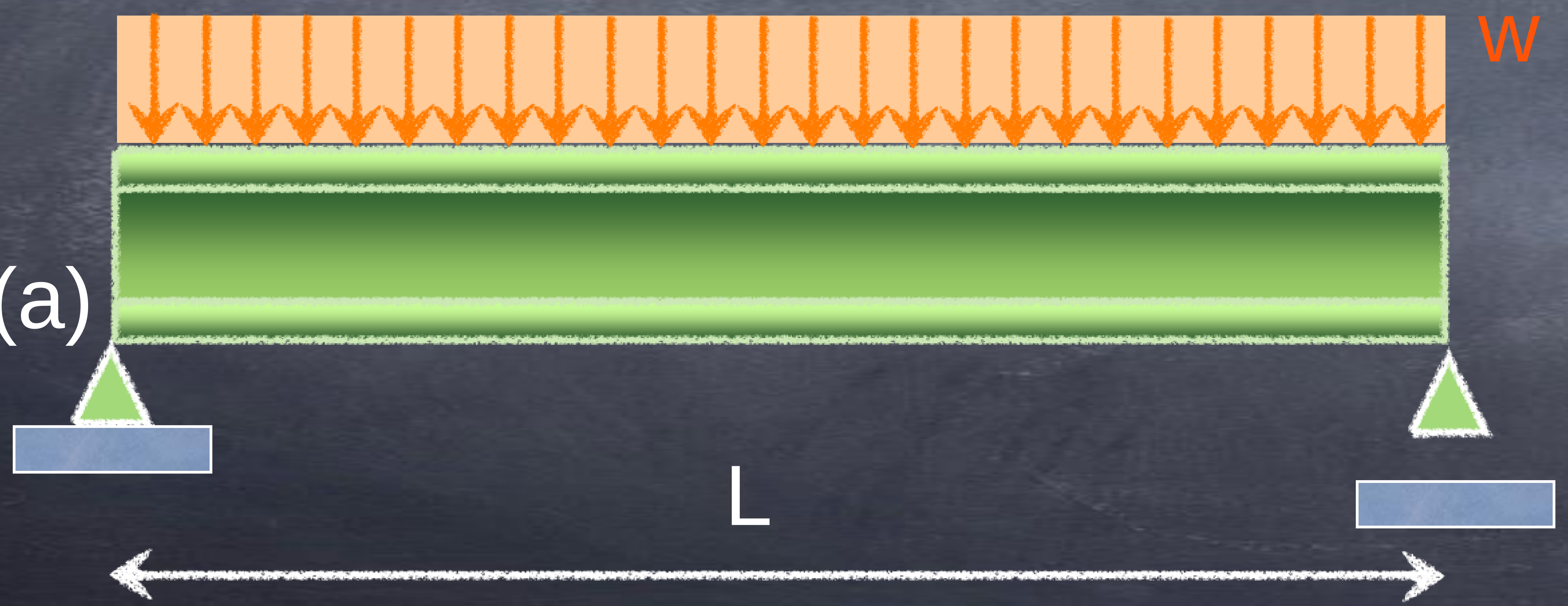


Exemplo

Exemplo

A viga I biapoiada da Fig. 1(a) tem a seção transversal mostrada na Fig. 1(b). Determinar a tensão normal máxima na viga devida à flexão.

Fig.1(a)



Exemplo

A viga I biapoiada da Fig. 1(a) tem a seção transversal mostrada na Fig. 1(b). Determinar a tensão normal máxima na viga devida à flexão.

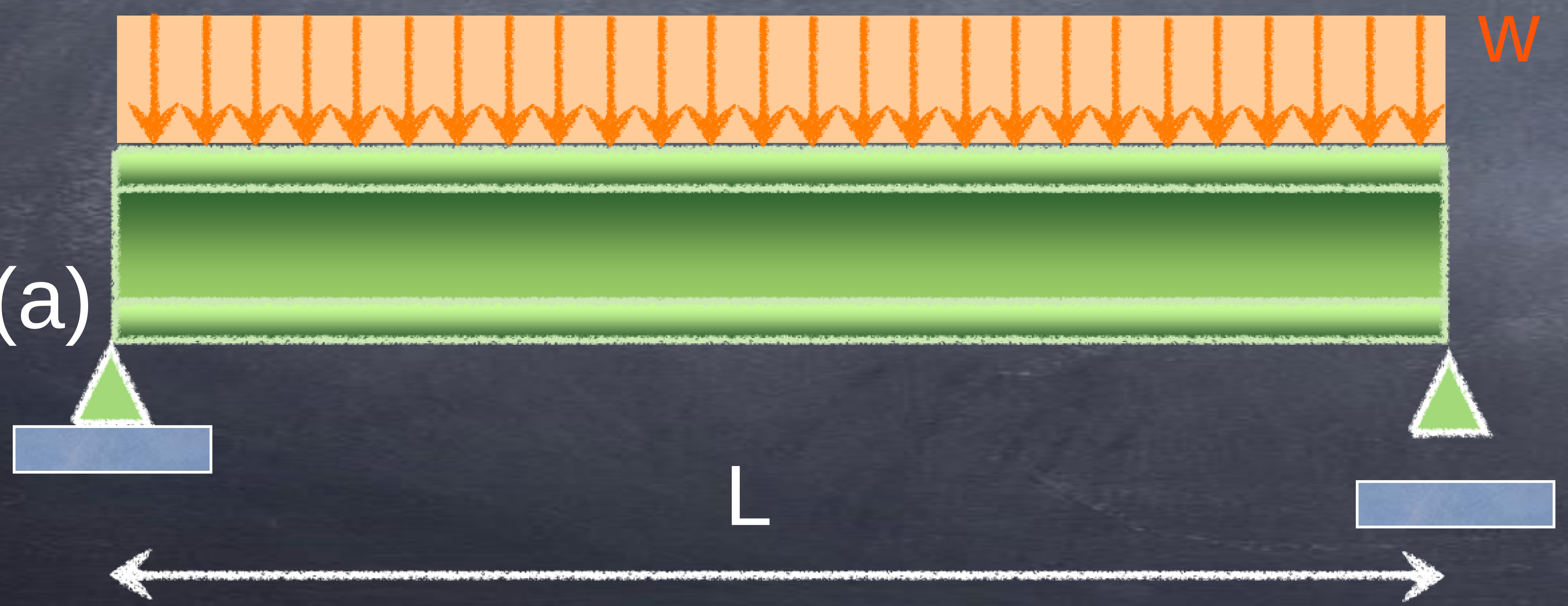


Fig.1(a)

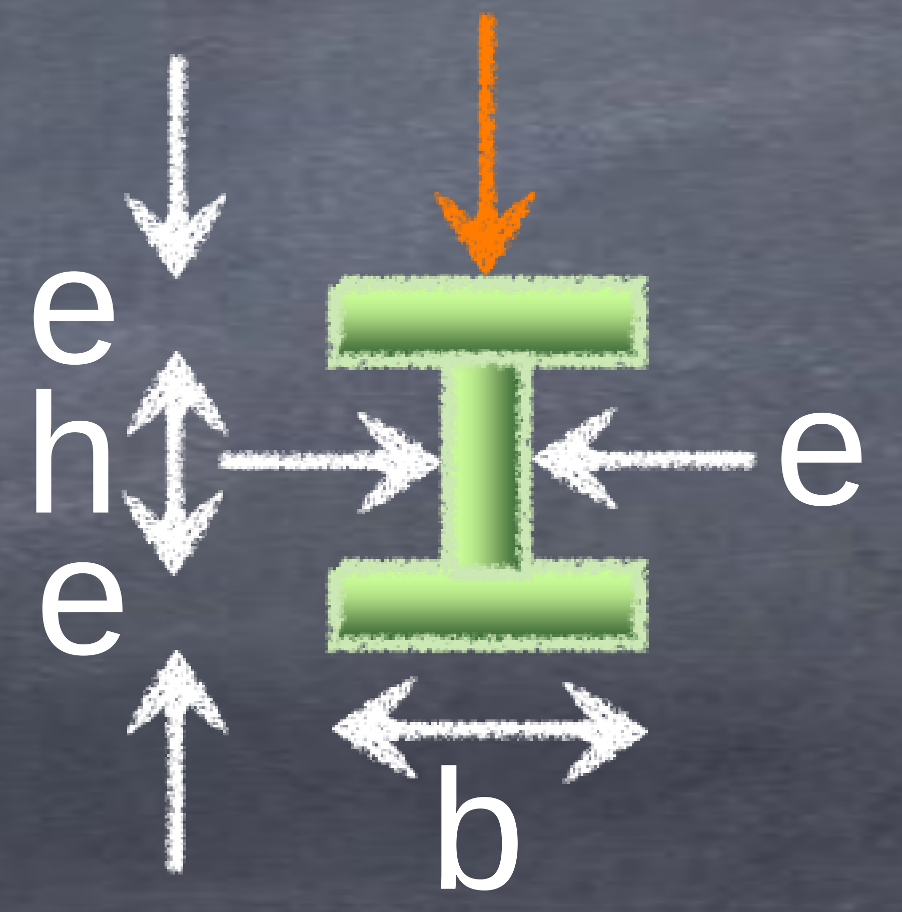


Fig.1(b)

Dados: L = 6 m

w = 5 kN/m

e = 20 mm

h = 300 mm

b = 250 mm

Exemplo

A máxima tensão normal à seção transversal pode ser determinada por

$$\sigma_{max}(x, y_{max}) = \pm [M_{max}(x) . c]/ I ,$$

Exemplo

A máxima tensão normal à seção transversal pode ser determinada por

$$\sigma_{max}(x, y_{max}) = \pm [M_{max}(x) . c]/ I ,$$

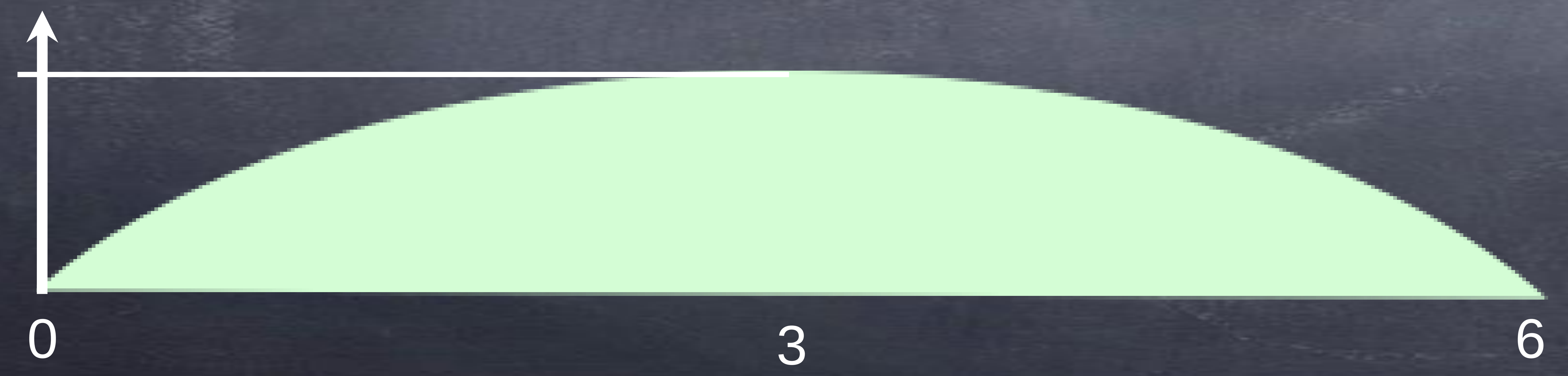
onde $M_{max}(x)$ é o máximo momento fletor que ocorre na viga. Neste caso,

Exemplo

A máxima tensão normal à seção transversal pode ser determinada por

$$\sigma_{max}(x, y_{max}) = \pm [M_{max}(x) \,.\, c\,]/ I\ ,$$

onde $M_{max}(x)$ é o máximo momento fletor que ocorre na viga. Neste caso,

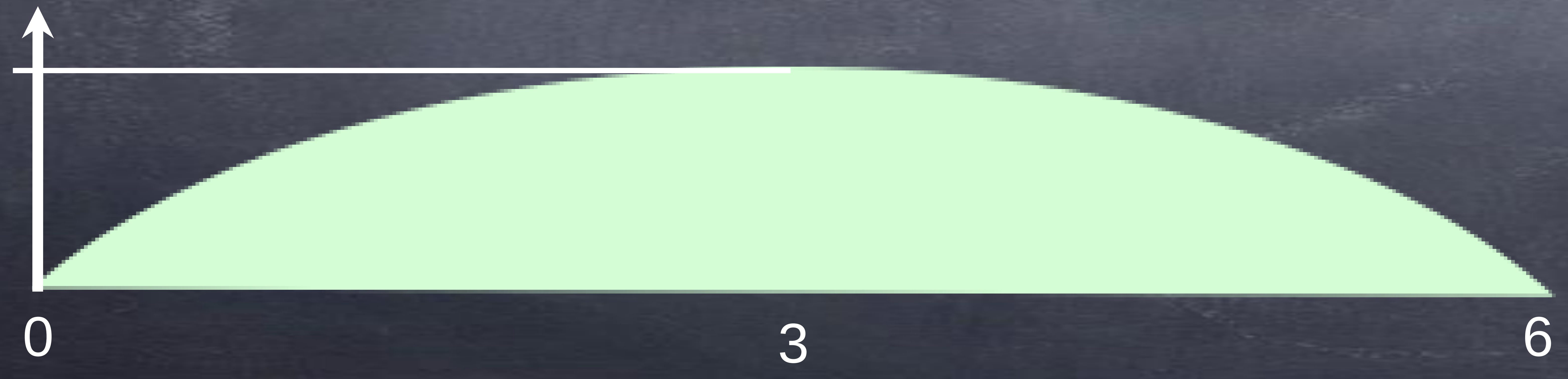


Exemplo

A máxima tensão normal à seção transversal pode ser determinada por

$$\sigma_{max}(x, y_{max}) = \pm\, [M_{max}(x)\ .\ c\ ]/\ I\ ,$$

onde $M_{max}(x)$ é o máximo momento fletor que ocorre na viga. Neste caso,



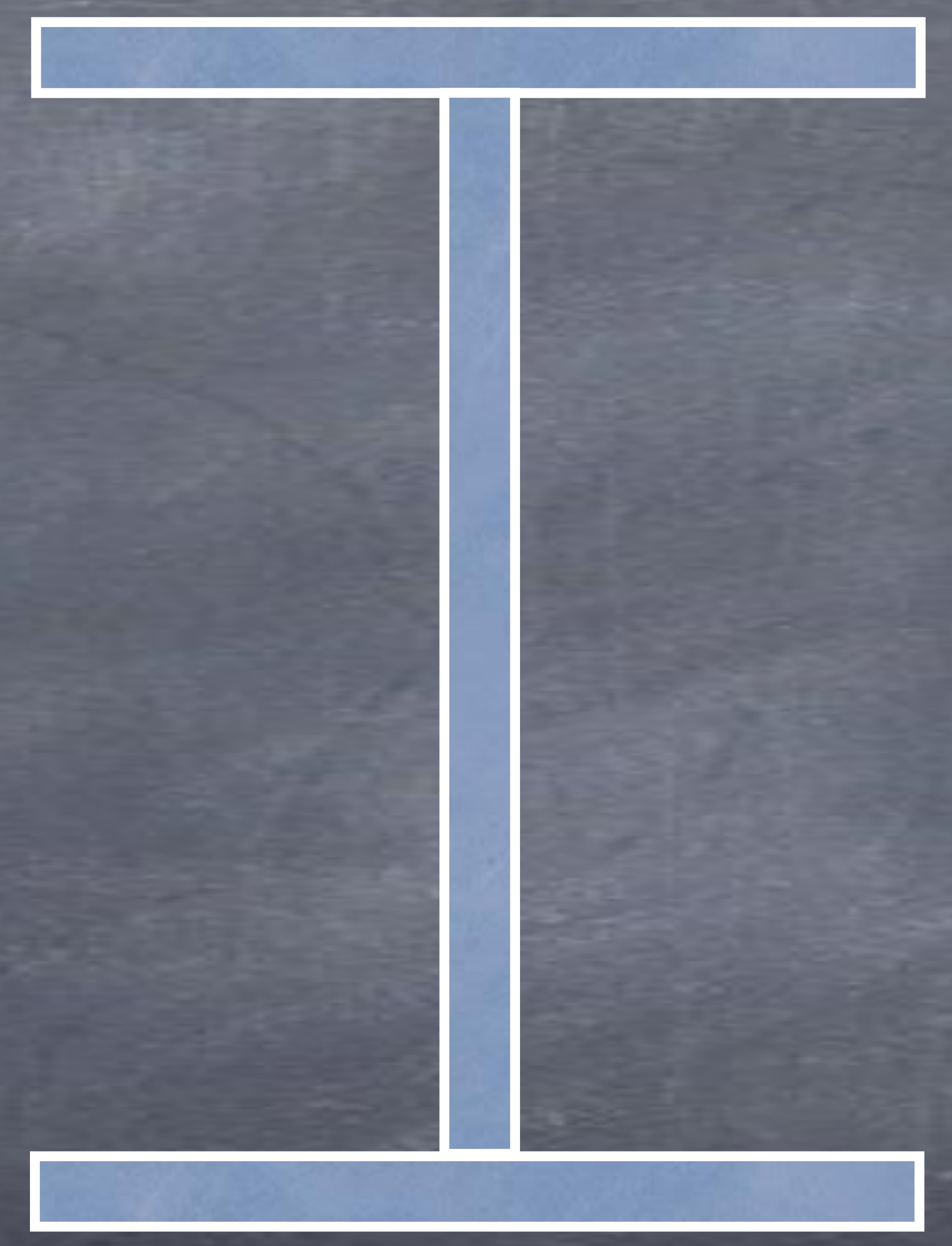
$$M_{max}(L/2) = w.L^2/8 = 5\ .\ (6)^2\ /\ 8 = 22{,}5\ \text{kN.m}$$

Exemplo

O momento de inércia da seção composta é determinado em relação aos eixos de simetria da seção.

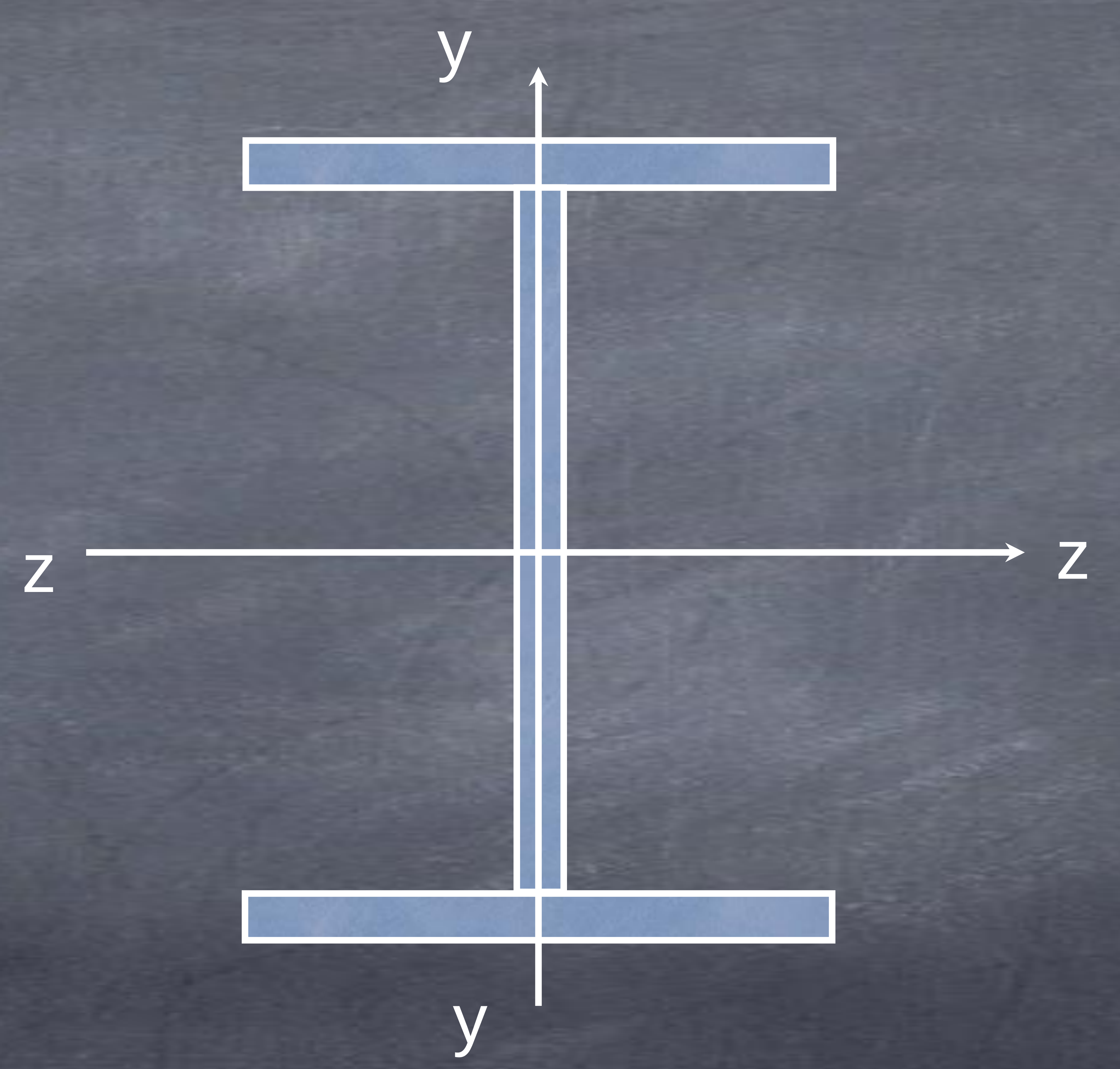
Exemplo

O momento de inércia da seção composta é determinado em relação aos eixos de simetria da seção.



Exemplo

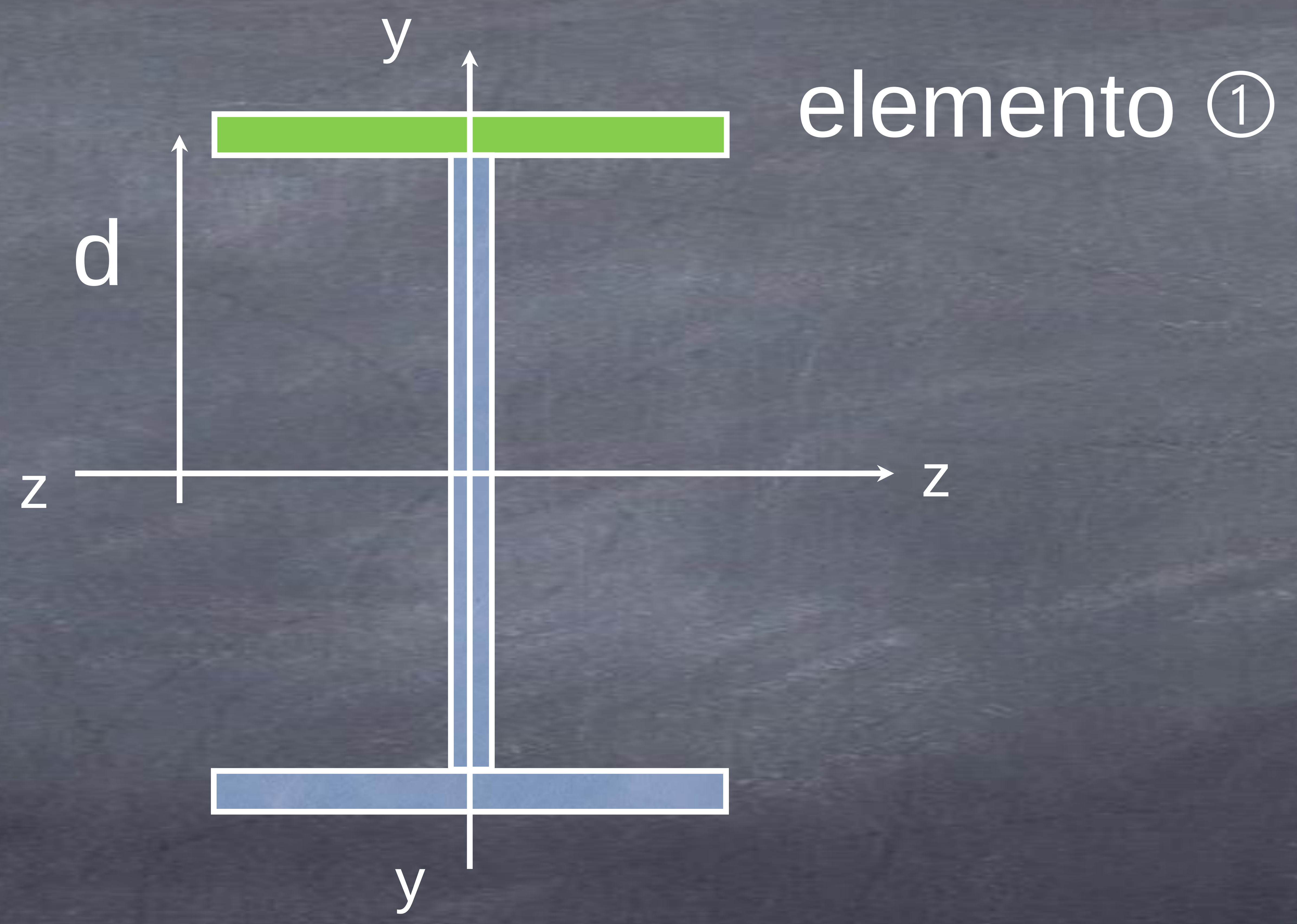
O momento de inércia da seção composta é determinado em relação aos eixos de simetria da seção.



Exemplo

Para o elemento ①:

$$I_{zz}^{①} = \overline{I_{zz}} + A \cdot d^2 ,$$



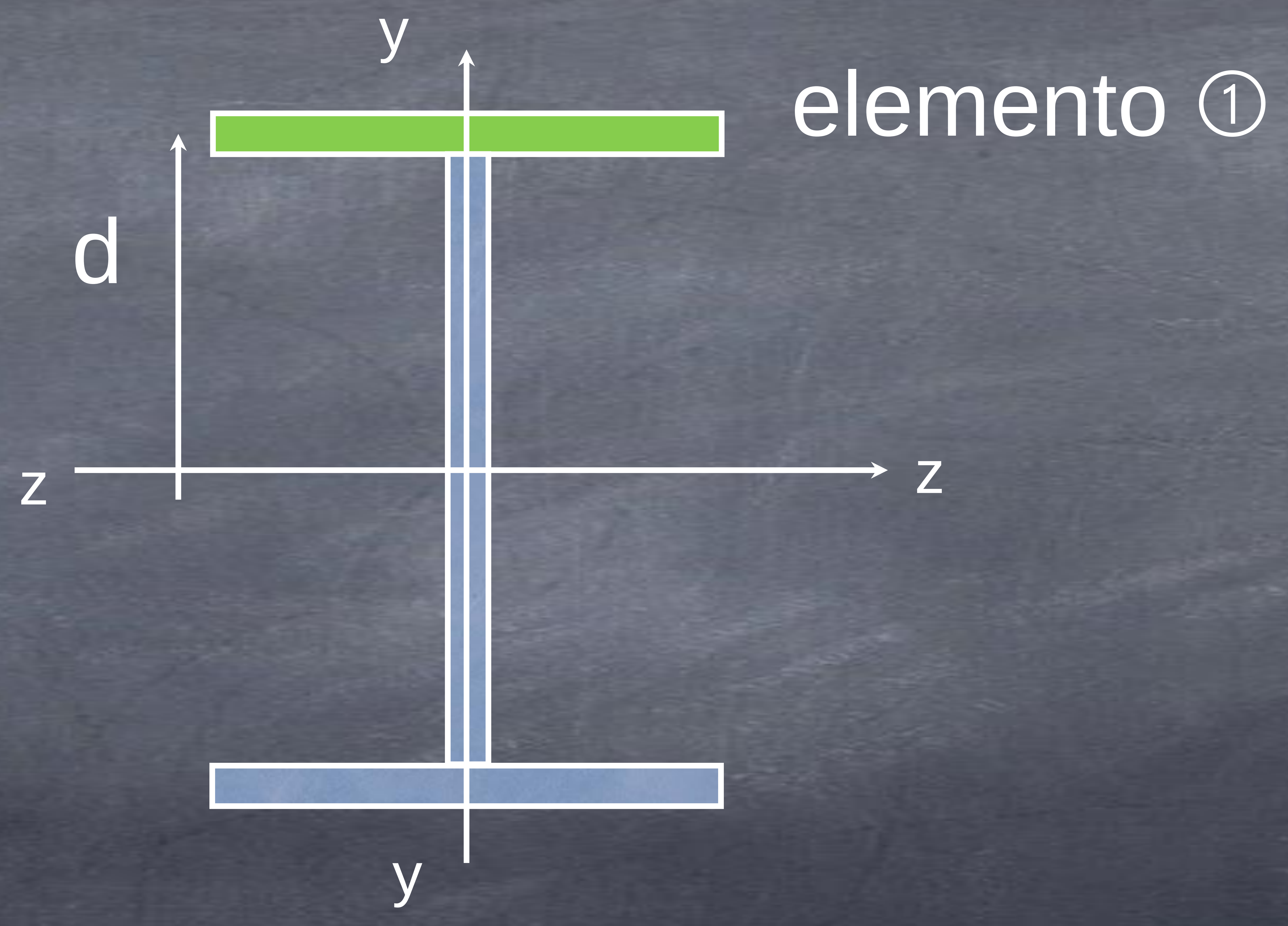
Flexão

Exemplo

Para o elemento ①:

$$I_{zz}^{①} = \overline{I_{zz}} + A \cdot d^2 ,$$

onde $\overline{I_{zz}}$ é o momento de inércia em relação ao baricentro do elemento, dado por



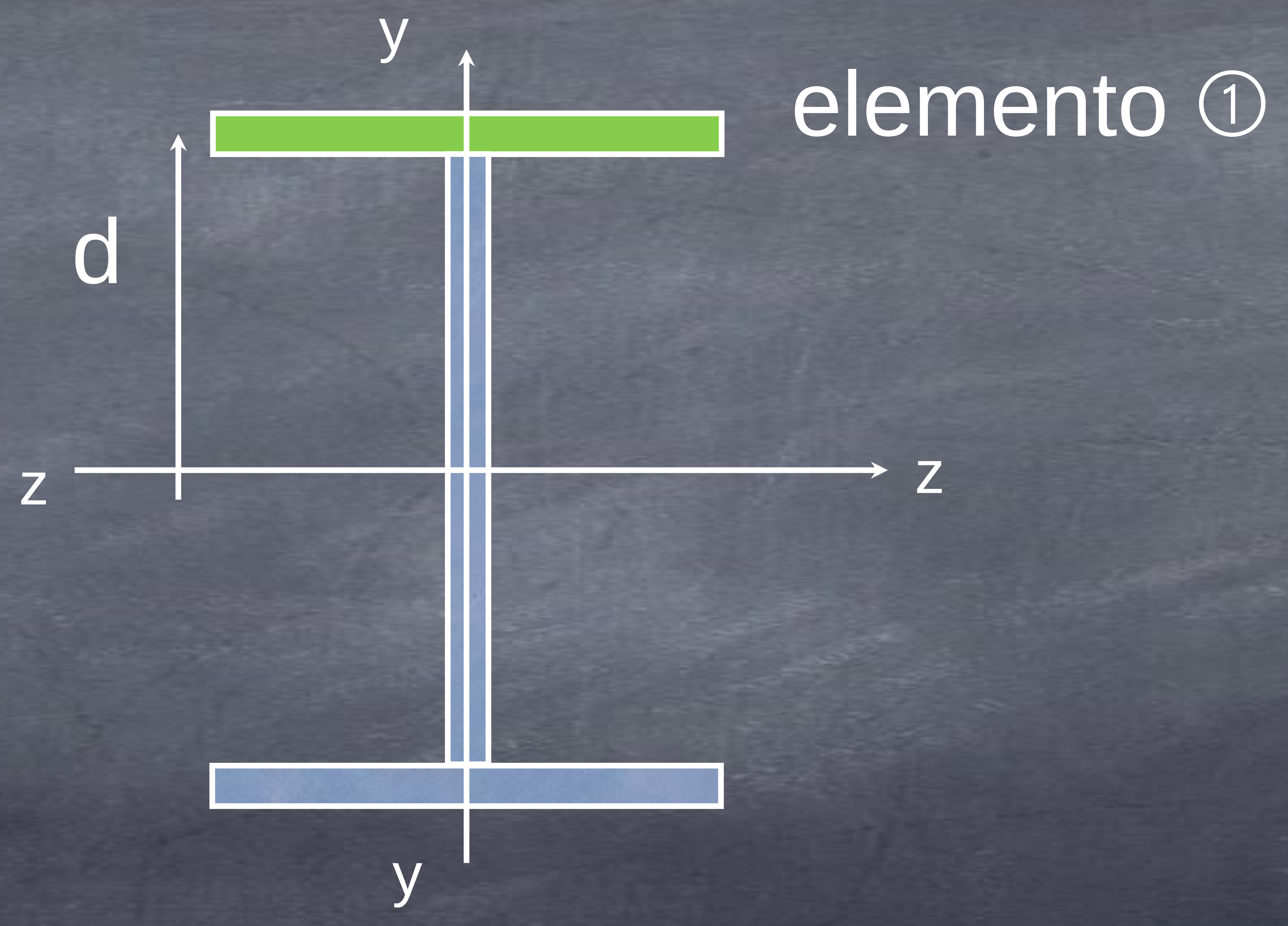
Exemplo

Para o elemento ①:

$$I_{zz}^{①} = \overline{I_{zz}} + A \cdot d^2 ,$$

onde $\overline{I_{zz}}$ é o momento de inércia em relação ao baricentro do elemento, dado por

$$\overline{I_{zz}} = b. h^3/12 = 0{,}25 \cdot (0{,}02)^3 /12 = 166{,}67 \times 10^{-9}\ m^4$$

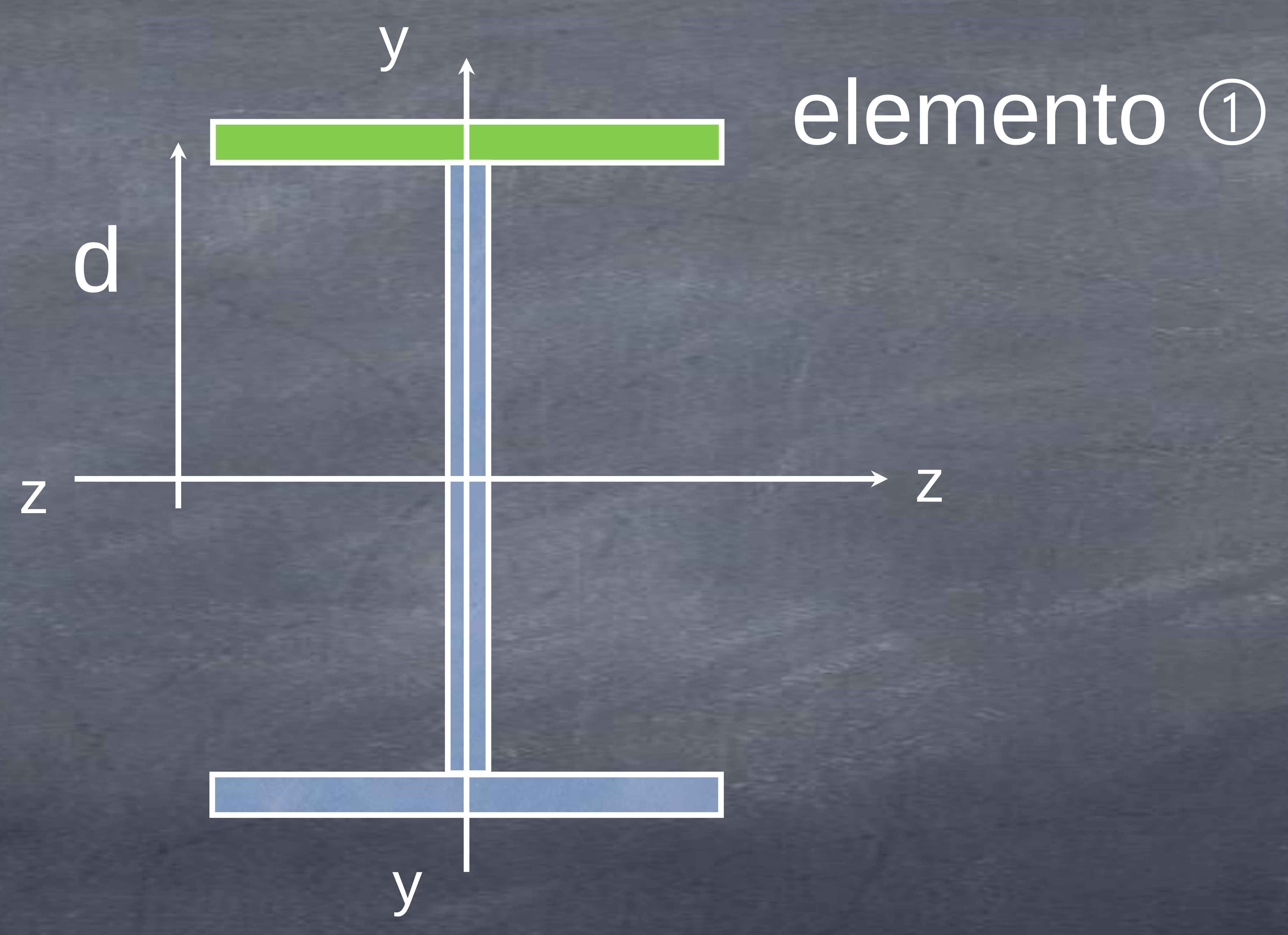


Exemplo

Para o elemento ①:

$$I_{zz}^{①} = \overline{I_{zz}} + A \cdot d^2 ,$$

A é a área do elemento, dada por



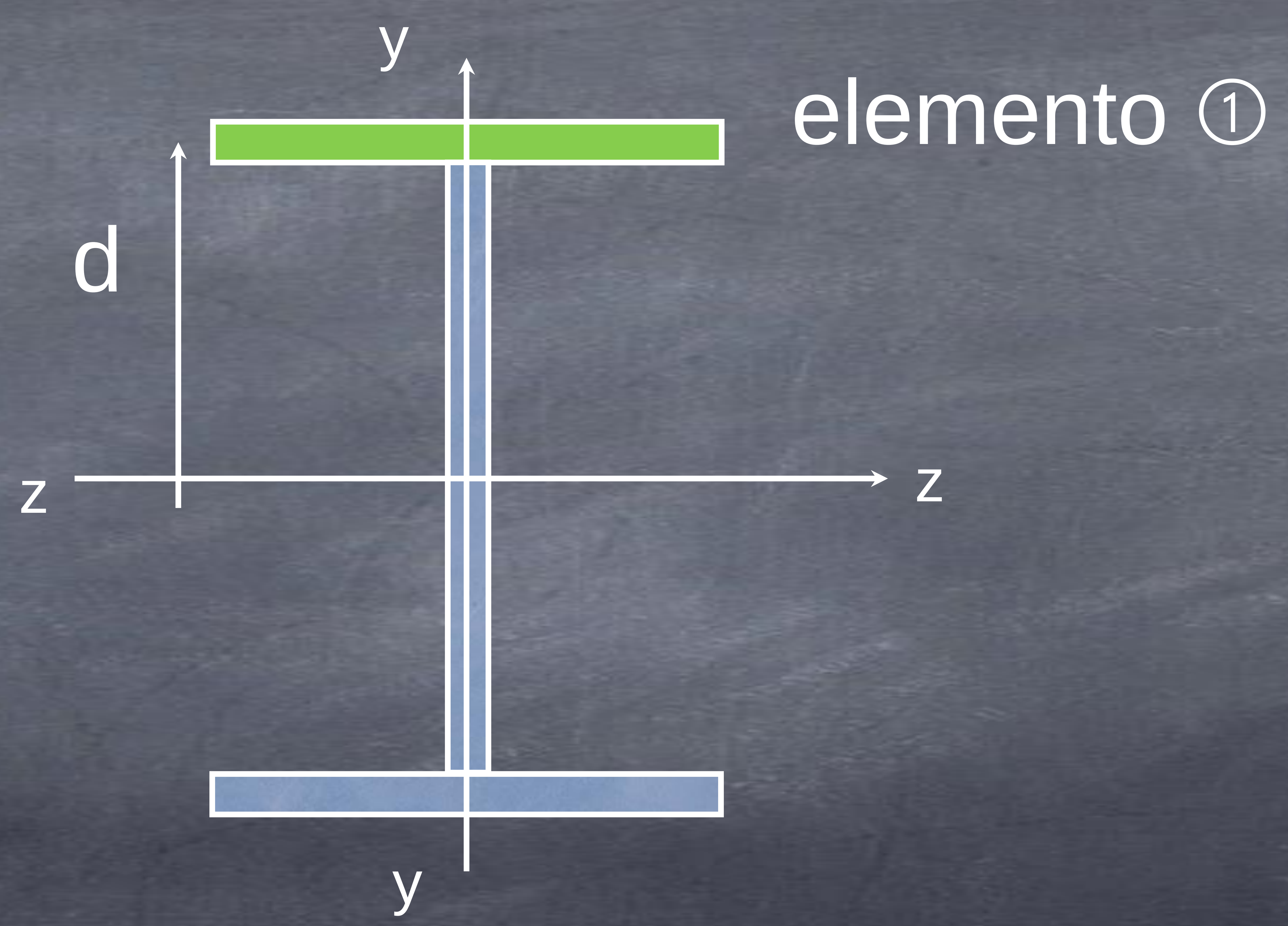
Exemplo

Para o elemento ①:

$I_{zz}^{①} = \overline{I_{zz}} + A \,.\, d^2$,

A é a área do elemento, dada por

$A = 0{,}25 \,.\, 0{,}02 = 0{,}005\ m^2$

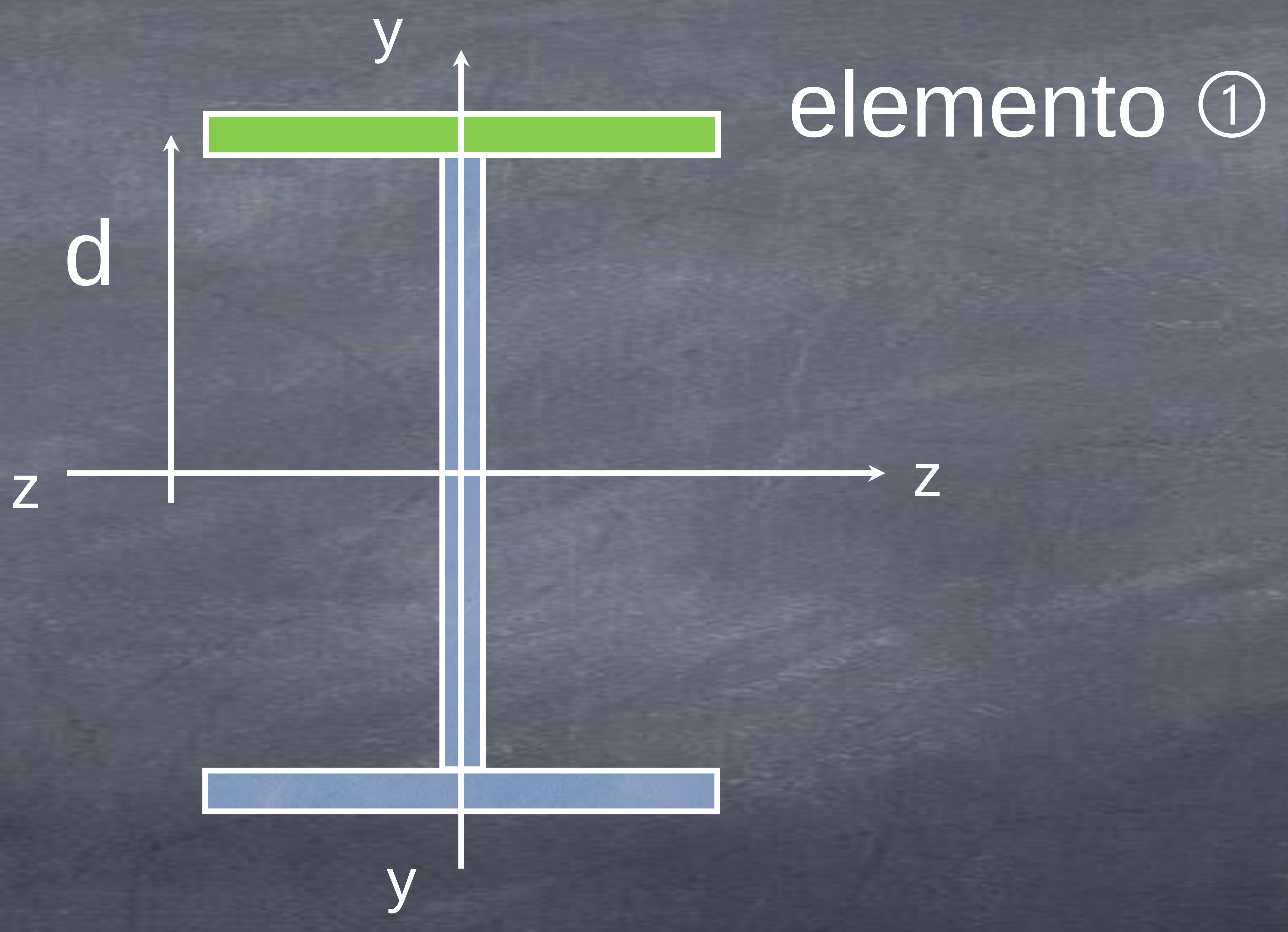


Exemplo

Para o elemento ①:

$$I_{zz}^{①} = \overline{I_{zz}} + A \,.\, d^2 \,,$$

e d é a distância do baricentro da figura até o eixo z-z, isto é,



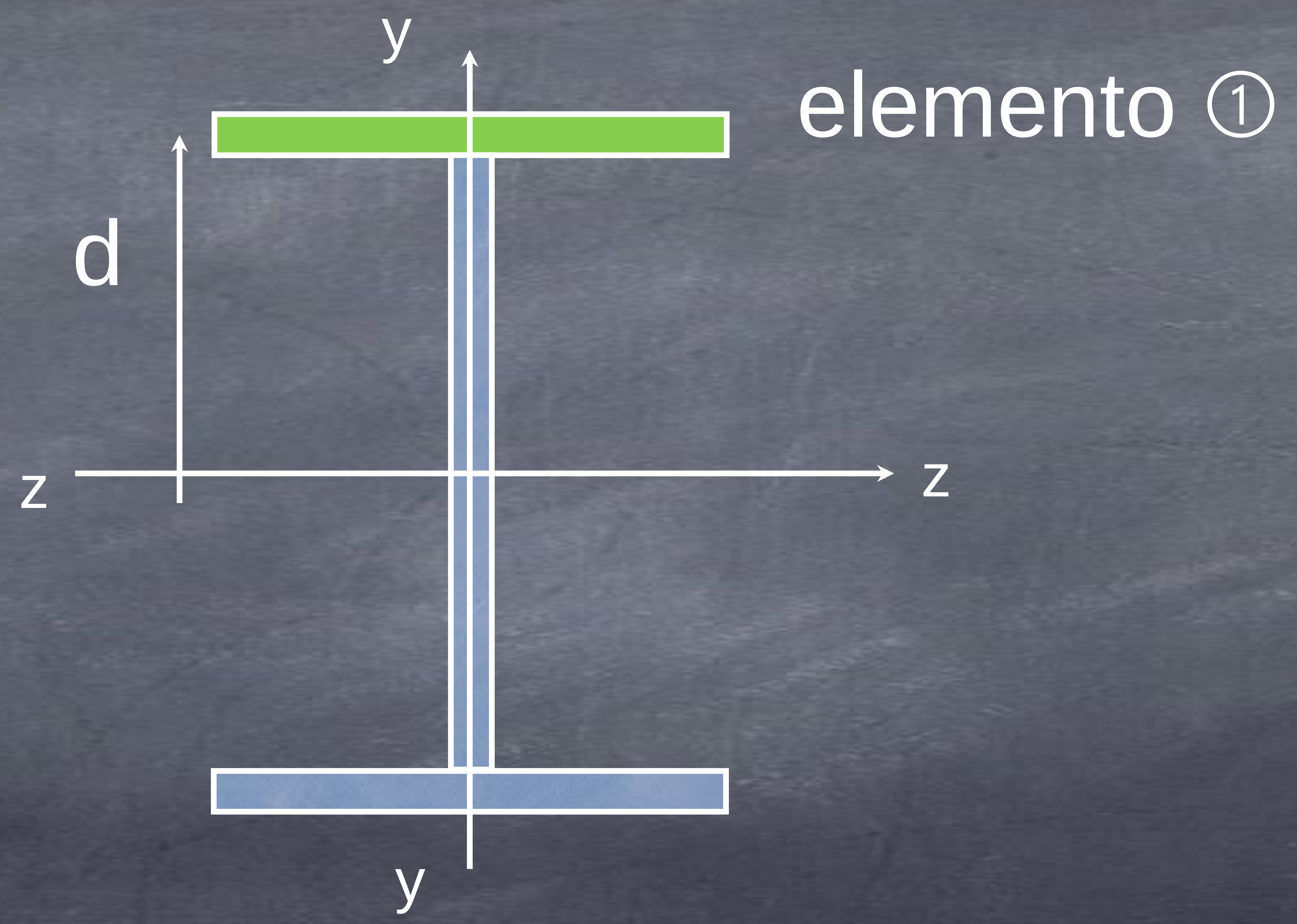
Exemplo

Para o elemento ①:

$$I_{zz}^{①} = \overline{I_{zz}} + A \, . \, d^2 \,,$$

e d é a distância do baricentro da figura até o eixo z-z, isto é,

$$d = 0{,}15 + 0{,}02/2 = 0{,}16 \text{ m.}$$



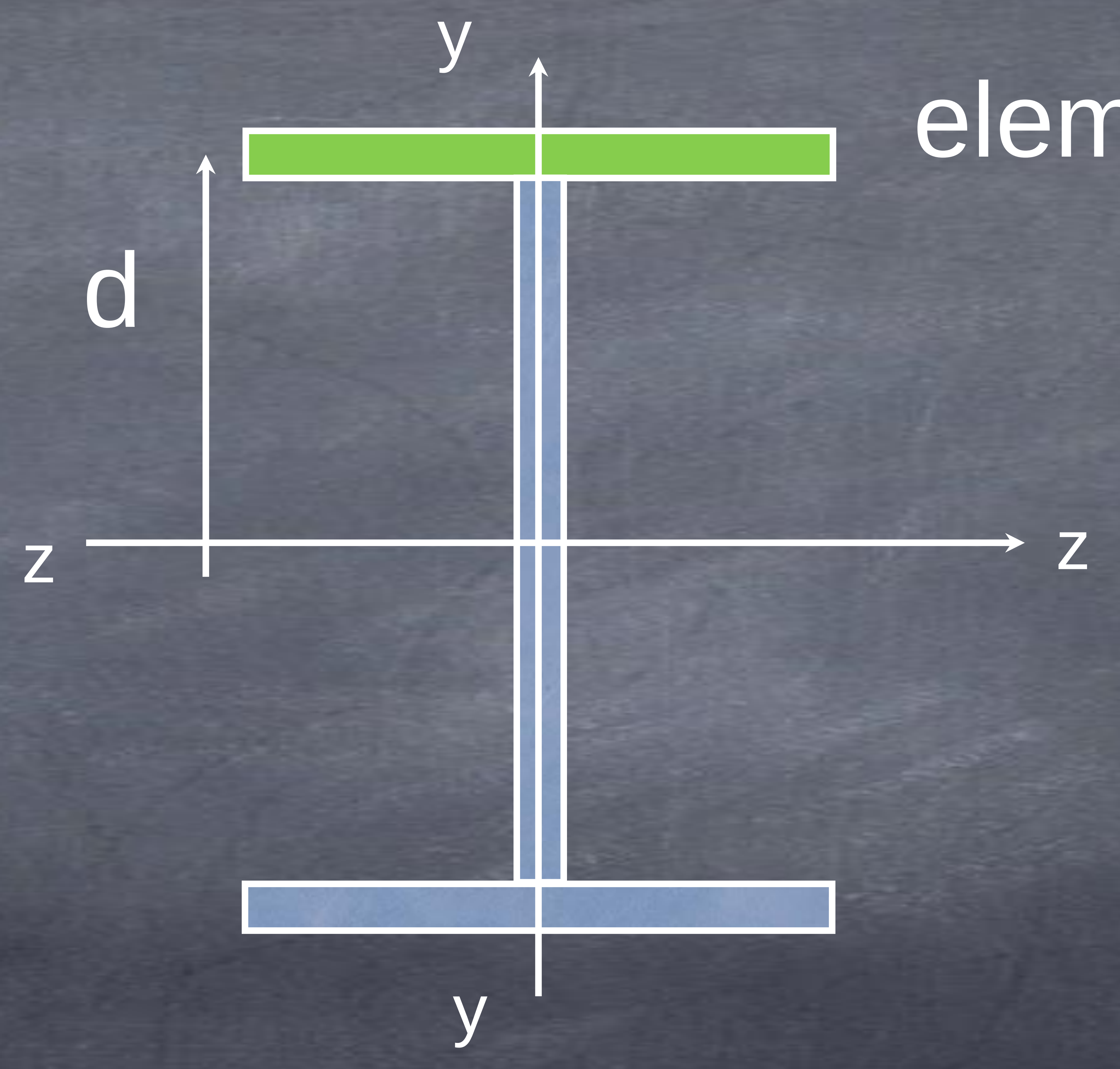
Exemplo

Assim,

$$I_{zz}^{①} = \overline{I_{zz}} + A \,.\, d^2 \,,$$

$$I_{zz}^{①} = 166{,}67 \times 10^{-9} + 0{,}005 \,.\, 0{,}16^2$$

$$I_{zz}^{①} = 128{,}17 \times 10^{-6}\ m^4$$



elemento ①

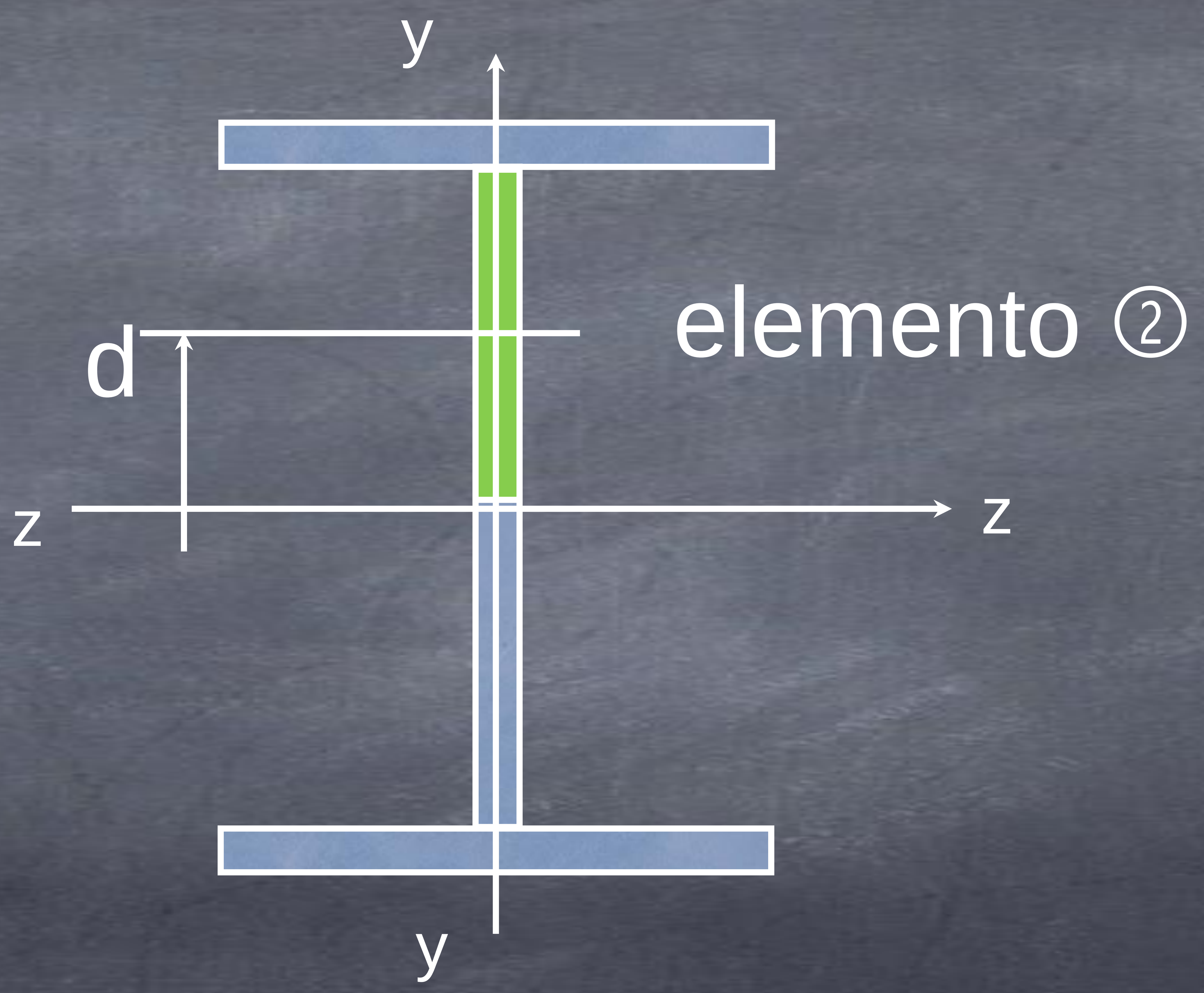
Exemplo

Para o elemento ②:

$I_{zz}^{②} = \overline{I_{zz}} + A \cdot d^2$,

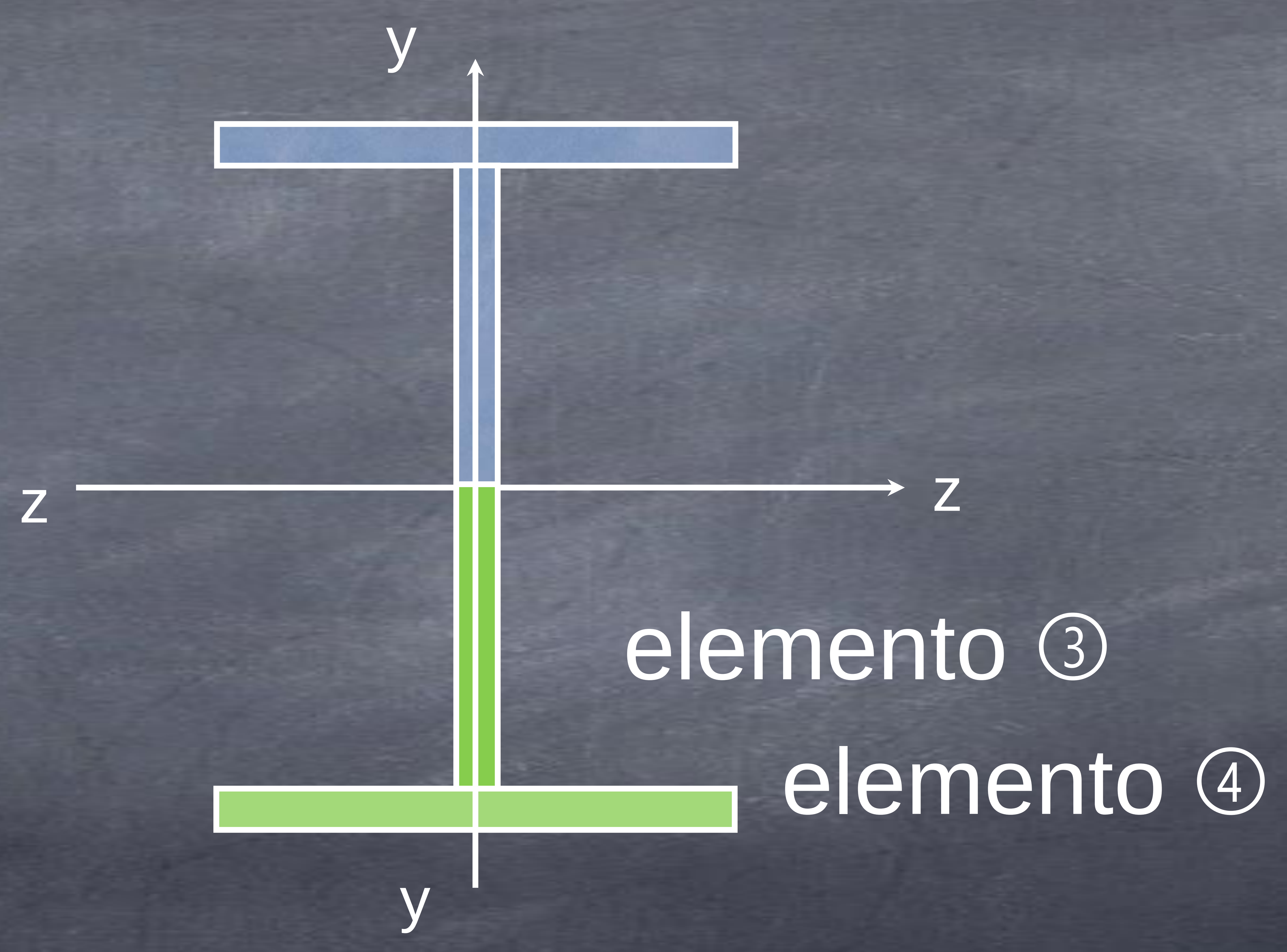
$I_{zz}^{②} = 5,63 \times 10^{-6} + 0,003 \cdot 0,075^2$

$$I_{zz}^{②} = 22,5 \times 10^{-6}\ m^4$$



Exemplo

Para os elementos ③ e ④, podemos considerar que os momentos de inércia anteriores são os mesmos, isto é, $I_{zz}^{①} = I_{zz}^{④}$ e $I_{zz}^{②} = I_{zz}^{③}$.



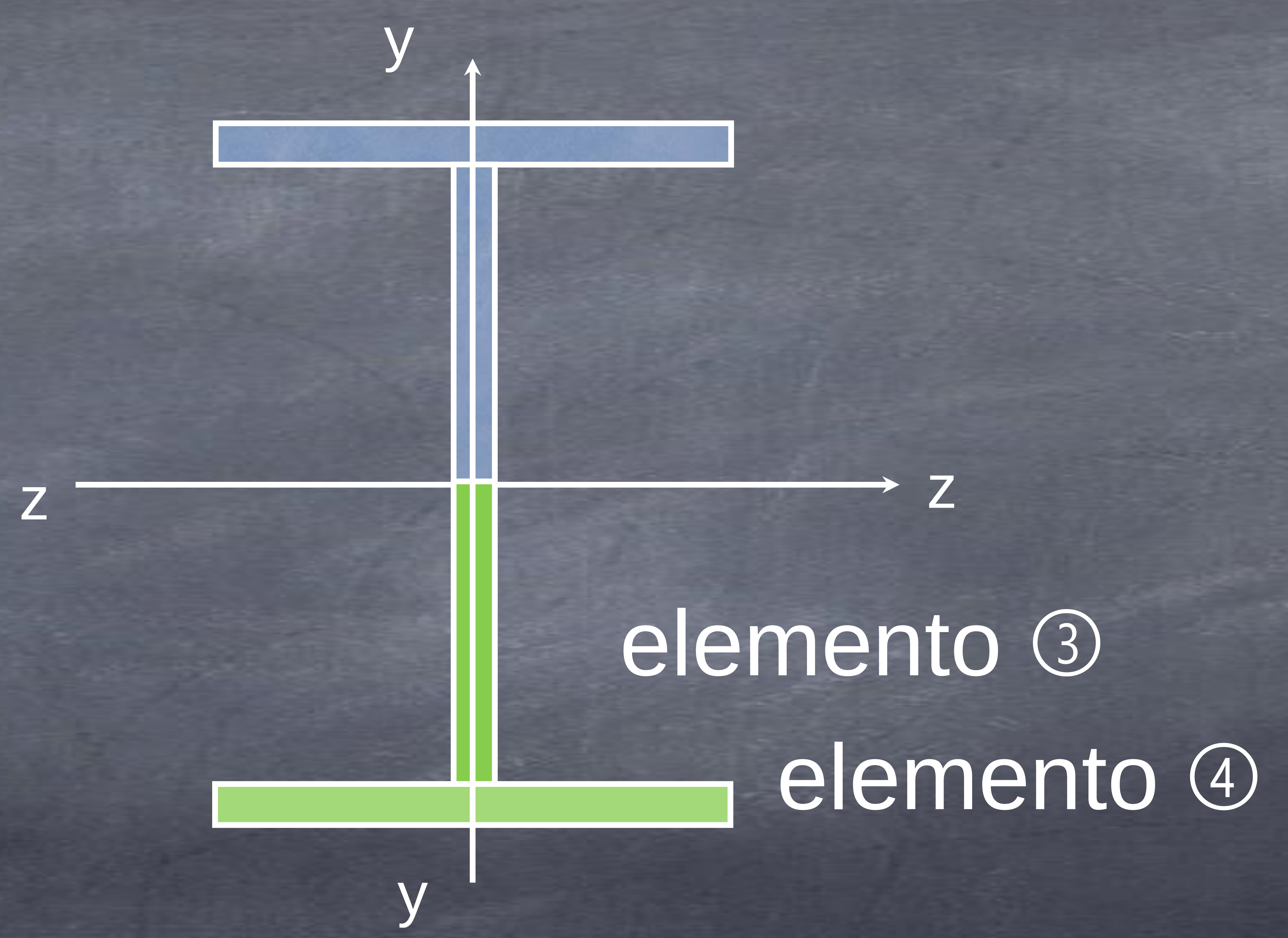
Exemplo

Para os elementos ③ e ④, podemos considerar que os momentos de inércia anteriores são os mesmos, isto é, $I_{zz}^{①} = I_{zz}^{④}$ e $I_{zz}^{②} = I_{zz}^{③}$.

Logo,

$$I_{zz} = \sum I_{zz}^{k} = 2\,(\,I_{zz}^{①} + I_{zz}^{②}\,)$$

$$I_{zz} = 301{,}3 \times 10^{-6}\ m^4.$$



Exemplo

A tensão máxima será, então,

Exemplo

A tensão máxima será, então,

$$\sigma_{max} = \pm Mc / I_{zz}$$

Exemplo

A tensão máxima será, então,

$$\sigma_{max} = \pm Mc / I_{zz}$$

$$\sigma_{max} = \pm 22{,}5 \times 10^3 \times 0{,}17 / 301{,}3 \times 10^{-6}$$

Exemplo

A tensão máxima será, então,

$$\sigma_{max} = \pm Mc / I_{zz}$$

$$\sigma_{max} = \pm 22{,}5 \times 10^{3} \times 0{,}17 / 301{,}3 \times 10^{-6}$$

$$\sigma_{max} = \pm 12{,}7\ \text{MPa}$$

Concentração de tensões

Concentração de tensões

Como nos esforços axial e de torção, as tensões oriundas dos esforços de flexão também apresentam uma sensibilidade quando em presença de entalhes, furos e reduções.

Concentração de tensões

Como nos esforços axial e de torção, as tensões oriundas dos esforços de flexão também apresentam uma sensibilidade quando em presença de entalhes, furos e reduções.

Nestes casos, as descontinuidades da geometria da viga gera concentração de tensões que obedecem à regra geral $\sigma_{max} = K\,\sigma$, isto é, $\sigma_{max} = K\,Mc/I$, onde K é o fator de concentração de tensões, obtido de gráficos apropriados.