[UFES-CCE-DMAT-Prova 3-Manhã-Cálculo1-Equipe-2017.1, 21/07/17]

Leia a prova com atenção e justifique suas respostas.

1. Determine:

(a) (1pt) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\operatorname{sen}^2 x}^{x^2} e^{y^2}\,dy$

Pelo TFC e a regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin^2 x}^{x^2} e^{y^2}dy = \frac{d}{dx}\left(G(x^2) - G(\sin^2 x)\right) = G'(x^2)\cdot 2x - G'(\sin^2 x)2\sin x\cdot\cos x,$$

onde $G'(u) = e^{u^2}$. Logo, $\frac{d}{dx}\int_{\sin^2 x}^{x^2} e^{y^2}dy = 2x\cdot e^{x^4} - e^{\sin^4 x}\cdot\sin(2x)$.

(b) (1pt) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{99} x \sec^4 x dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{99} x\sec^4 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{99} x\cdot(1+\operatorname{tg}^2 x)\cdot\sec^2 x dx\\
&\overset{u=\tan x}{=} \int_0^1 u^{99}(1+u^2)du = \left[\frac{1}{100}u^{100} + \frac{1}{102}u^{102}\right]_0^1\\
&= \frac{1}{100} + \frac{1}{102} = \frac{101}{5100}.
\end{aligned}$$

(c) (2pts) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+2x+5}dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-2}{x^2+2x+5}dx &= \int \frac{x-2}{(x+1)^2+4}dx \overset{u=x+1}{=} \int \frac{u-3}{u^2+4}du\\
&= \int \frac{u}{u^2+4}du - \int \frac{3}{u^2+4}du\\
&= \frac{1}{2}\ln(u^2+4) - \frac{3}{2}\arctan\frac{u}{2} + C\\
&= \frac{1}{2}\ln((x+1)^2+4) - \frac{3}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C.
\end{aligned}$$

(d) (1pt) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^4}dx$

$$\int \underbrace{\ln x}_{f}\cdot\underbrace{x^{-4}}_{g'}dx \overset{PP}{=} \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}x^{-3}dx - \frac{1}{3}\ln x\cdot x^{-3} = -\frac{1}{9x^3} - \frac{1}{3x^3}\ln x + C.$$

(e) (0,5pt) $\int_0^1 |x-1|dx$

$$\int_0^1 |x-1|dx = \int_0^1 -x+1dx = [-x^2/2+x]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

(área de um triângulo de base 1 e altura 1)

2. (1pt) Decomponha a função racional $\frac{2x+4}{(x-1)(x^2+2x+3)}$ em frações parciais.

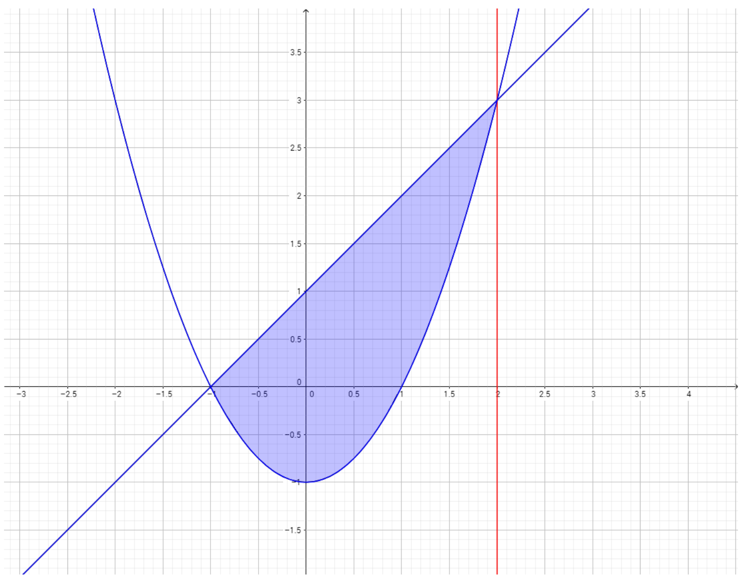
Determinemos A, B, C tais que

$$\frac{2x+4}{(x-1)(x^2+2x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}.$$

Equivalentemente, $2x+4 = (A+B)x^2+(2A+C-B)x+3A-C$ donde $A+B=0$, $2A+C-B=2$, $3A-C=4$, i.e., $A=1$, $B=C=-1$.

3. Seja R a região delimitada pelas curvas $y = x^2-1$, $y = x+1$. Seja S o sólido obtido rodando a região R em torno do eixo $x=2$.

   (a) (0,5pt) Esboce a região R.



   (b) (1pt) Calcule a área da região R.

Interseção : $x+1 = x^2-1$, i.e. $x=-1$ ou $x=2$. Assim, a área de R é

$$\int_{-1}^2 x+1-(x^2-1)dx = \left[-x^3/3+x^2/2+2x\right]_{-1}^2 = 9/2.$$

   (c) (1pt) Apresente, sob forma de integrais, uma expressão para o volume de S, utilizando o método das fatias.

Um corte perpendicular ao eixo de rotação $x = 2$ origina seções transversais de áreas:

$$A(y) = \pi(\underbrace{2+\sqrt{y+1}}_{r_{ext}})^2 - \pi(\underbrace{2-\sqrt{y+1}}_{r_{int}})^2, \quad \text{quando } y \in [-1,0]$$

e

$$B(y) = \pi(\underbrace{2-(y-1)}_{r_{ext}})^2 - \pi(\underbrace{2-\sqrt{y+1}}_{r_{int}})^2, \quad \text{quando } y \in [0,3].$$

Assim, pelo método das fatias, o volume pretendido pode ser calculado via

$$\int_{-1}^{0} A(y)dy + \int_{0}^{3} B(y)dy.$$

(d) (1pt) Apresente, sob forma de integrais, uma expressão para o volume de S, utilizando o método das cascas.

Uma casca típica no nível $x \in [-1,2]$ tem altura $x+1-(x^2-1)$ e perímetro $2\pi(2-x)$, assim o volume de S é

$$\int_{-1}^{2} \underbrace{2\pi(2-x)}_{\text{perímetro}}(\underbrace{x+1-(x^2-1)}_{altura})dx.$$

(e) (1pt) Determine o volume do sólido S.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} \underbrace{2\pi(2-x)}_{\text{perímetro}}(\underbrace{x+1-(x^2-1)}_{altura})dx &= 2\pi \int_{-1}^{2} x^3 - 3x^2 + 4dx \\
&= 2\pi \left[x^4/4 - x^3 + 4x\right]_{-1}^{2} \\
&= \frac{27\pi}{2}.
\end{aligned}$$