STA001996 – Probabilidade e Estatística

Lista de exercícios 4 – Modelos Contínuos

Exercício 1. Seja *X* uma variável aleatória com densidade

$$f(x) = c\ x^2, \quad -1 < x < 1$$

(a) Determine o valor da constante *c*.
(b) Obtenha a média e a variância da variável aleatória *X*.
(c) Encontre o valor de α tal que $F_X(\alpha) = 1/4$, isto é, encontre o primeiro quartil da distribuição de *X*.
(d) Encontre o valor de β tal que $F_X(\beta) = 1/2$, isto é, encontre a mediana da distribuição de *X*.

Exercício 2. Seja $X \sim N(90,100)$ e $Y \sim N(-5, 10)$, calcule:

(a) $P(X \leq 115)$.
(b) $P(X \geq 80)$.
(c) $P(85 < X < 110)$.
(d) O valor de *a* tal que $P(90-a < X < 90+a) = \lambda$, onde $\lambda = 0.95$.
(e) $P(-5 < Y \leq 2)$.

Exercício 3. Admite-se que uma pane pode ocorrer em qualquer ponto de uma rede elétrica de 10 quilômetros.

(a) Qual é a probabilidade de a pane ocorrer no primeiros 500 metros? E de ocorrer nos 3 quilômetros centrais da rede?
(b) O custo de reparo da rede depende da distância do centro de serviço ao local da pane. Considere que o centro de serviço está na origem da rede e que o custo é de R$ 200,00 para distâncias até 3 quilômetros, de R$ 400,00 entre 3 e 8 e de R$ 1000,00 para distâncias acima de 8 quilômetros. Qual é o custo médio do conserto?

Exercício 4. O tempo de vida (em horas) de um transistor é uma variável aleatória *T*, com distribuição exponencial. O tempo médio de vida do transistor é de 500 horas.

(a) Calcule a probabilidade de o transistor durar mais do que 500 horas.
(b) Calcule a probabilidade de o transistor durar entre 300 e 1000 horas.
(c) Sabendo-se que o transistor já durou 500 horas, calcule a probabilidade de ele durar mais 500 horas.

Exercício 5. Usando a definição de probabilidade condicional, mostre que se *T* é uma variável aleatória exponencial, então para *s*, *t* > 0, vale a seguinte relação:

$$P(T > s + t \mid T > s) = P(T > t)$$

Esta propriedade é conhecida como "falta de memória", pois não importa o que aconteceu no passado ($T \leq s$), mas apenas a partir do momento em que se iniciou a observação.

Exercício 6. Um teste de aptidão para o exercício de certa profissão exige uma sequência de operações a serem executadas rapidamente uma após a outra. Para passar no teste, o candidato deve completá-lo em 80 minutos no máximo. Admita que o tempo para completar o teste seja uma variável aleatória $N(90, 400)$.

(a) Qual a porcentagem dos candidatos tem chance de ser aprovado?
(b) Os melhores 5% receberão um certificado especial. Qual o tempo máximo para fazer jus a tal certificado?

Exercício 7. É sabido que, para os adultos do sexo masculino, gozando de boa saúde, em uma certa população, a temperatura corporal segue distribuição normal com média de 36,8 graus e desvio-padrão de 0,15 graus.

(a) Se considerarmos 1000 dessas pessoas, quantas se esperariam com temperatura entre 36,8 e 37,2 graus?
(b) Em qual intervalo de temperaturas estão 98% dos adultos masculinos sadios desta população?

Exercício 8. Certo tipo de conserva tem peso líquido (X_1) com média de 900 gramas e desvio-padrão de 10g. A embalagem tem peso (X_2) com média de 100 gramas e desvio-padrão de 4g. Suponha que X_1 e X_2 são independentes.

(a) Qual é a probabilidade de o peso bruto ser superior a 1020 g?
(b) Qual é a probabilidade de o peso bruto estar entre 980 e 1020 g?

Exercício 9. De um lote de produtos manufaturados, extraímos 100 itens ao acaso. Se 10 % dos itens do lote são defeituosos, calcular a probabilidade de:

(a) 12 itens serem defeituosos,
(b) mais do que 12 itens serem defeituosos.

Exercício 10. Uma empresa de auxílio à lista telefônica recebe, em média, sete solicitações por minuto, segundo uma distribuição de Poisson. Qual é a probabilidade de ocorrer mais de 80 solicitações nos próximos 10 minutos?

Exercício 11. Obtenha a expressão da função geradora de momentos dos seguintes modelos, calcule a sua média e variância.

a) Binomial (n, p)
b) Poisson(ג)
c) Geo(p)
d) N(0, 1)
e) Exponencial(ג)
f) $N(\mu, \sigma^2)$

Exercício 12. Para a e b constantes, expresse a função geradora de momentos de $Y = aX + b$ em função de $M_X(t)$.

Exercício 13. Mostre via f.g.m. que se $X_1, \ldots, X_n$ são independentes tais que $X_i \sim Po(\lambda_i)$, i = 1, ..., n, então $X_1 + \ldots + X_n \sim Po(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$.