Sistema Realimentados

EP20 - Gráfico Polar e estabilidade relativa
Data: 04 de junho

HEBER LIMA SILVA e LUCAS MANFIOLETTI

Sejam os gráficos polares mostrados nas figuras 1 e 2.

1.1 Verifique se existem valores de K para os quais os sistemas em malha fechada são estáveis.

O critério de Nyquist se baseia na análise da contribuição de polos e zeros ao ângulo da função de transferência para descobrir se há polos de malha fechada no semiplano direito, o que corresponde a um sistema instável.

Seja a função de transferência de malha aberta G(s)H(s), que em malha fechada resulta na função de transferência

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \qquad (1.4)$$

Para que o sistema dado por 1.4 seja estável, os zeros de

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0 \qquad (1.5)$$

devem estar todos no SPE.

Escrevendo $G(s)H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, temos de (1.5)

$$1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)+D(s)}{D(s)} = 0 \; (1.6)$$

De (1.6), os zeros de $N(s) + D(s) = 0$ são os polos de malha fechada de (1.4), que desejamos saber se estão no SPD.

Com isso, é possível checar se existem polos da malha fechada no SPD avaliando o número de zeros de F(s) no SPD, pela equação da variação total do ângulo.

A variação total do ângulo de uma determinada função de transferência F(s), é dada por:

$$\phi = (Z_d - P_w/2 - P_d) * 180$$

$Z_d =$ $número\ de\ zeros\ de\ F(s)\ no\ SPD$

$P_w =$ $número\ de\ polos\ de\ F(s)\ sobre\ o\ eixo\ j\omega$

$P_d =$ $número\ de\ polos\ de\ F(s)\ no\ SPD$

FIGURA 1:

Para k < 0 e α < 1:

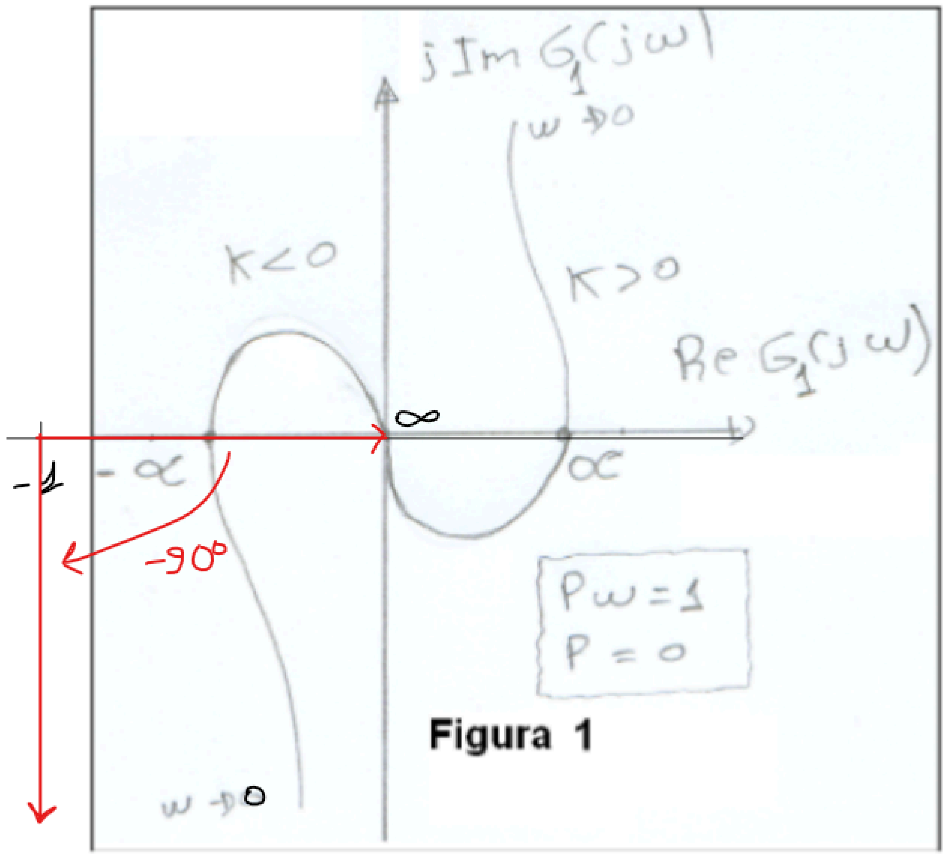


Figura 1

Seguindo no sentido da curva de $\omega \rightarrow \infty$ para $\omega \rightarrow 0$ temos um $\phi\ =\ -\ 90°$

Aplicando a fórmula utilizando os valores disponibilizados no enunciado de Pw e Pd, temos:

$$\Phi_0^{\infty} = (Z_d - P_w/2 - P_d) * 180$$

$$-\ 90\ =\ (Z_d - 0.5) * 180$$

$$-\ 0.5\ =\ Z_d - 0.5$$

$$Z_d = 0$$

Como $Z_d = 0$, não existe nenhum polo da FTMF no SPD, portanto o sistema é estável.

Para k < 0 e α > 1:

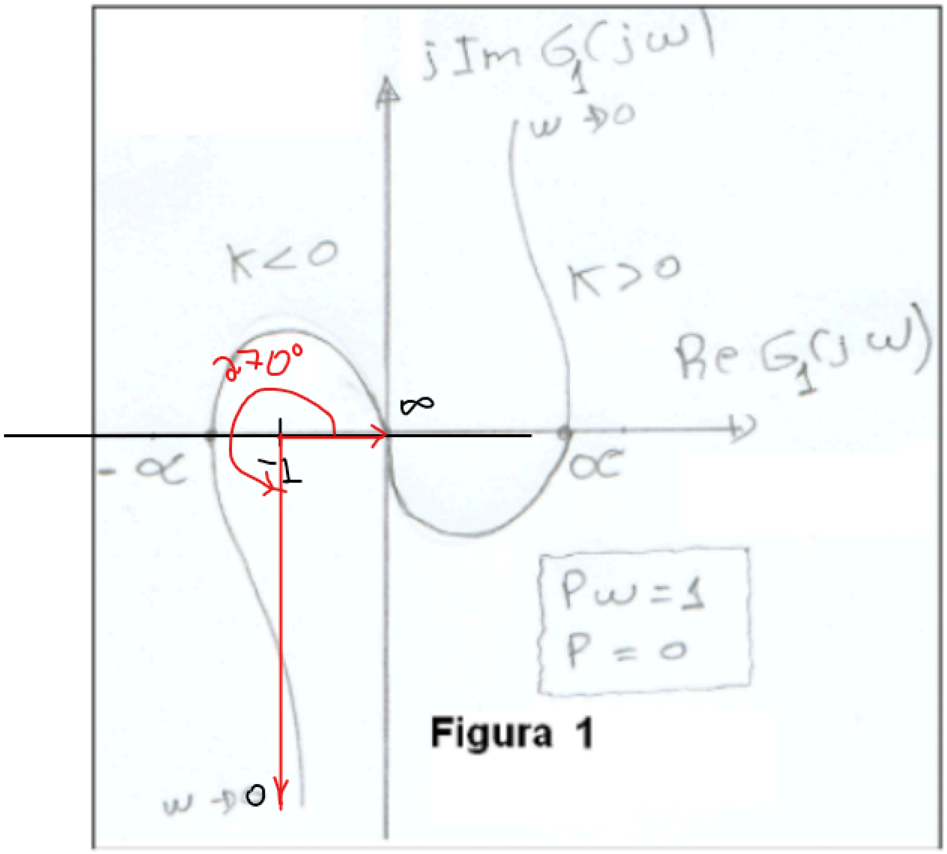


Figura 1

Seguindo no sentido da curva de $\omega \to \infty$ para $\omega \to 0$ temos um $\phi = 270°$.

Aplicando a fórmula utilizando os valores disponibilizados no enunciado de Pw e Pd, temos:

$$\Phi_0^\infty = (Z_d - P_w/2 - P_d) * 180$$

$$270 = (Z_d - 0.5) * 180$$

$$1.5 = Z_d - 0.5$$

$$Z_d = 2$$

Como $Z_d = 2$, existe 2 polo da FTMF no SPD, portanto o sistema é instável.

Para k > 0, α < 1 e α > 1:

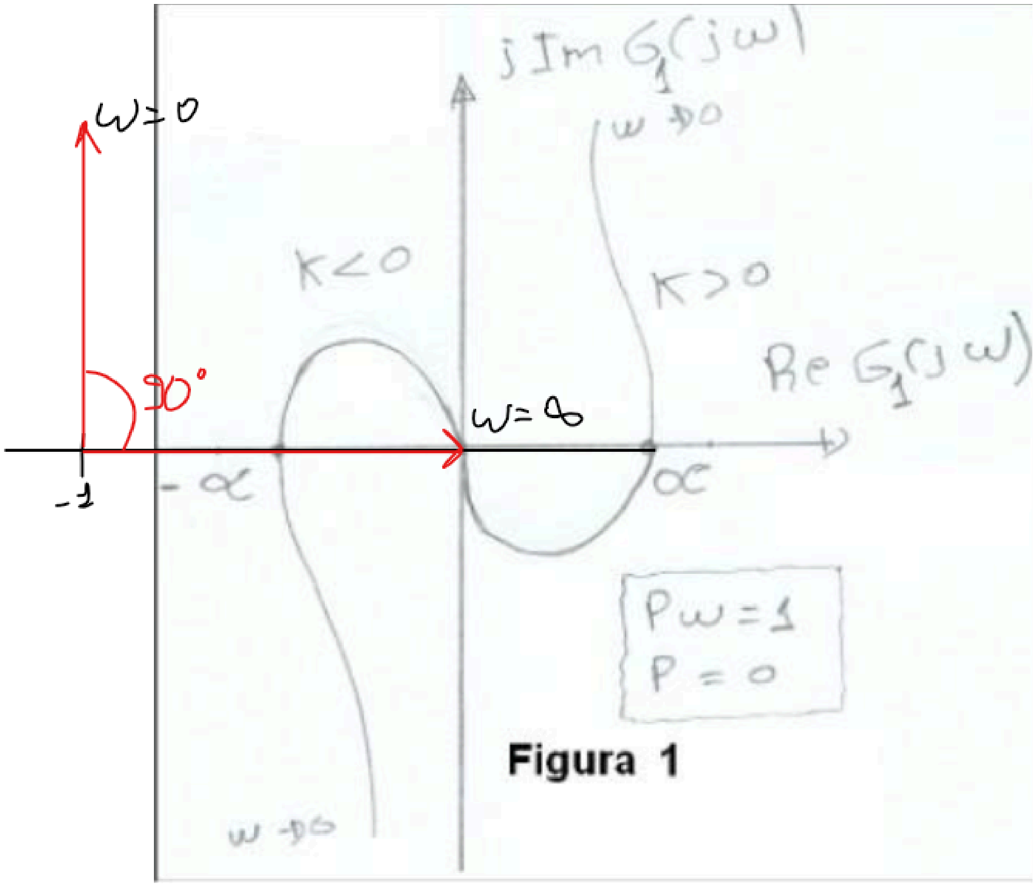


Figura 1

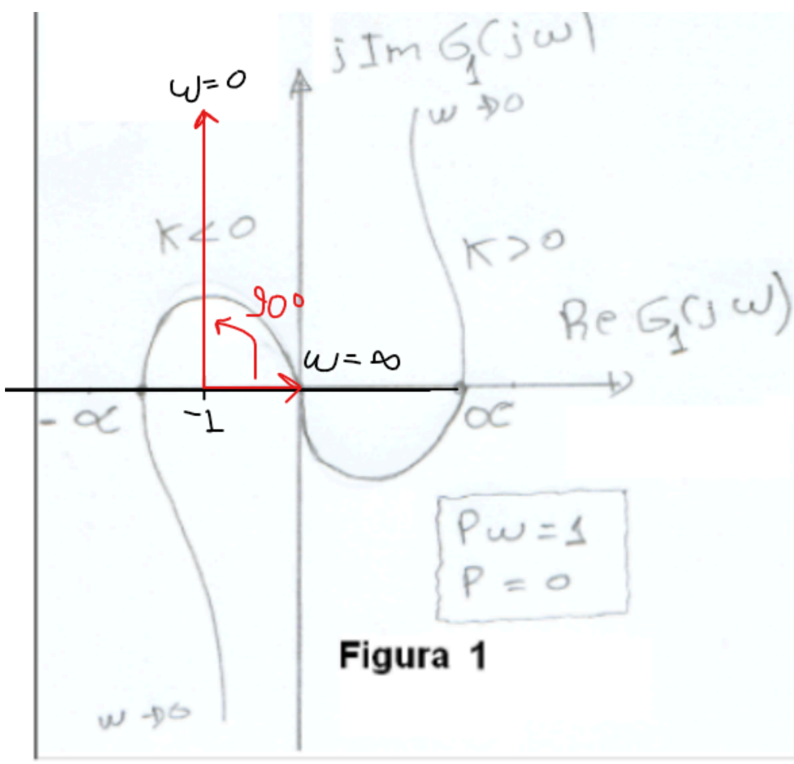


Figura 1

Seguindo no sentido da curva de $\omega \rightarrow \infty$ para $\omega \rightarrow 0$ temos um $\phi = 90°$ para os dois valores de α.

Aplicando a fórmula utilizando os valores disponibilizados no enunciado de Pw e Pd, temos:

$$\Phi_0^\infty = (Z_d - P_w/2 - P_d) * 180$$

$$90 = (Z_d - 0.5) * 180$$

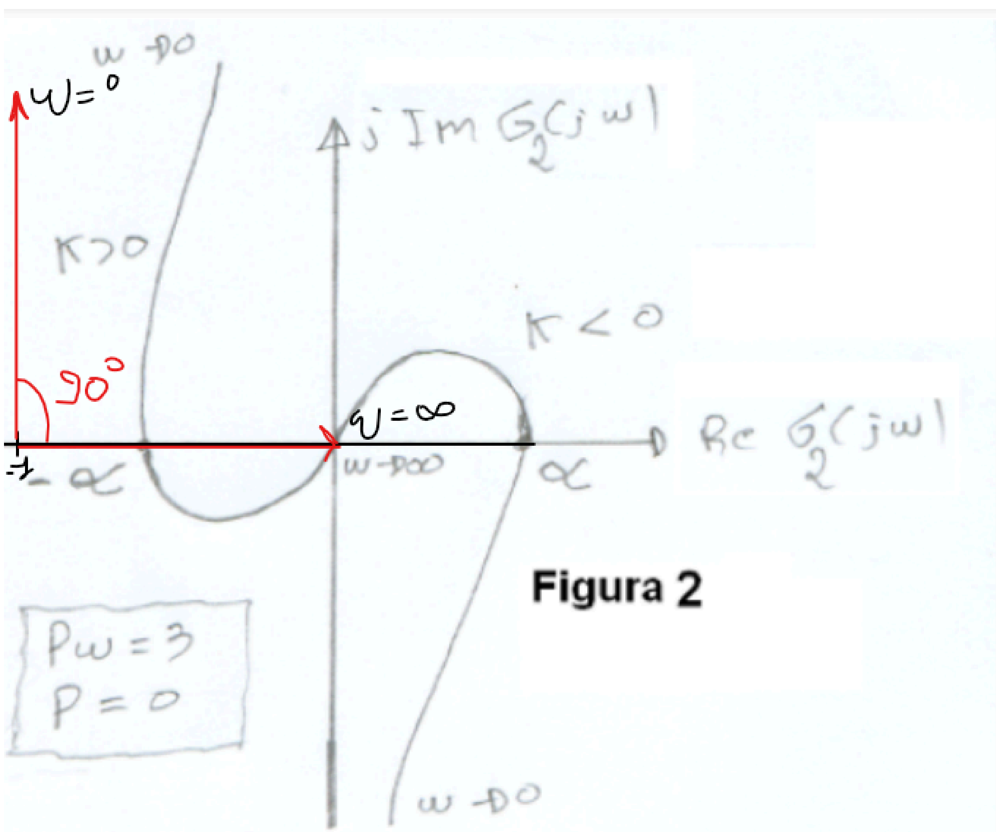
$$0.5 = Z_d - 0.5$$

$$Z_d = 1$$

Como $Z_d = 1$, existe 1 polo da FTMF no SPD, portanto o sistema é instável para qualquer valor de α para k > 0.

FIGURA 2:

Para k > 0 e α < 1:



Seguindo no sentido da curva de $\omega \rightarrow \infty$ para $\omega \rightarrow 0$ temos um $\phi = 90°$.

Aplicando a fórmula utilizando os valores disponibilizados no enunciado de Pw e Pd, temos:

$$\Phi_0^{\infty} = (Z_d - P_w/2 - P_d) * 180$$

$$90 = (Z_d - 1.5) * 180$$

$$0.5 = Z_d - 1.5$$

$$Z_d = 2$$

Como $Z_d = 2$, existem 2 polos da FTMF no SPD, portanto o sistema é instável.

Para k > 0 e α > 1:

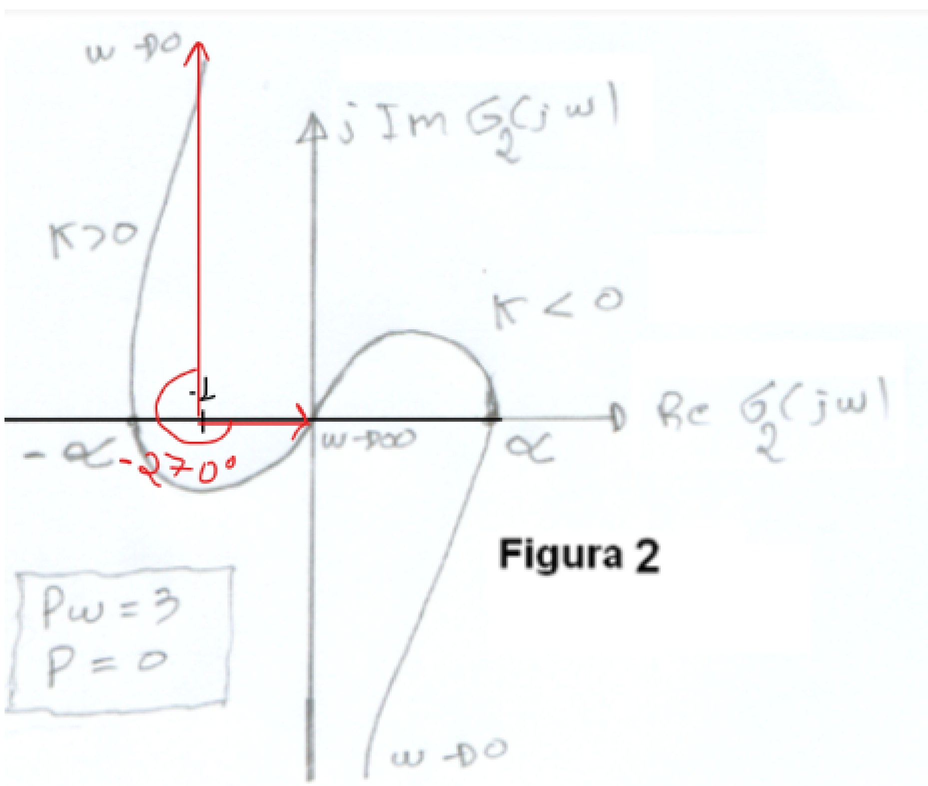


Figura 2

Seguindo no sentido da curva de $\omega \rightarrow \infty$ para $\omega \rightarrow 0$ temos um $\phi = -270$º.

Aplicando a fórmula utilizando os valores disponibilizados no enunciado de Pw e Pd, temos:

$$\Phi_0^{\infty} = (Z_d - P_w/2 - P_d) * 180$$

$$-270 = (Z_d - 1.5) * 180$$

$$- 1.5 = Z_d - 1.5$$

$$Z_d = 0$$

Como $Z_d = 0$, não existe nenhum polo da FTMF no SPD, portanto o sistema é estável.

Para k < 0, α < 1 e α > 1:

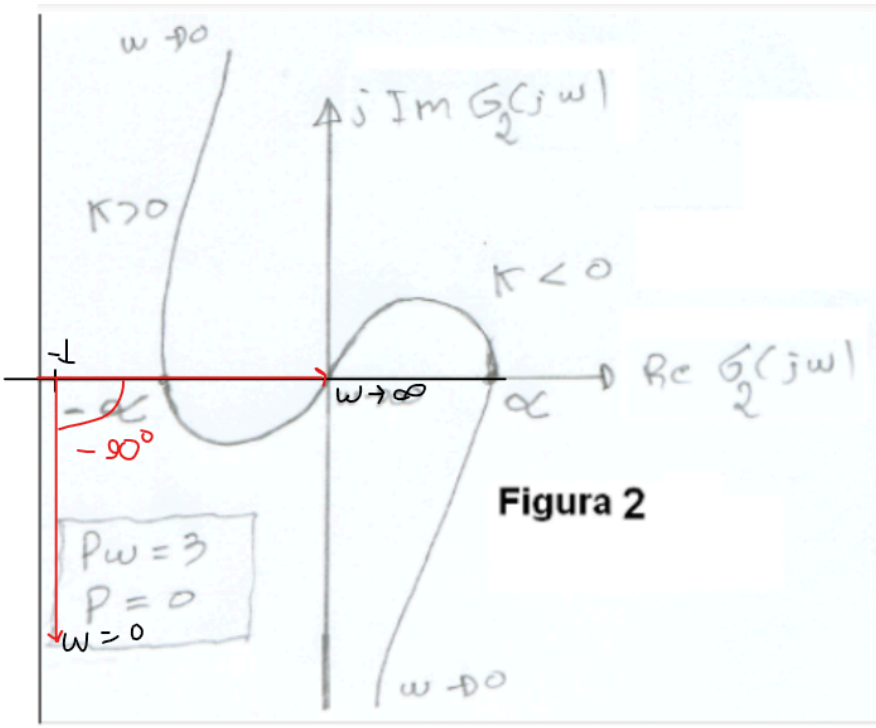


Figura 2

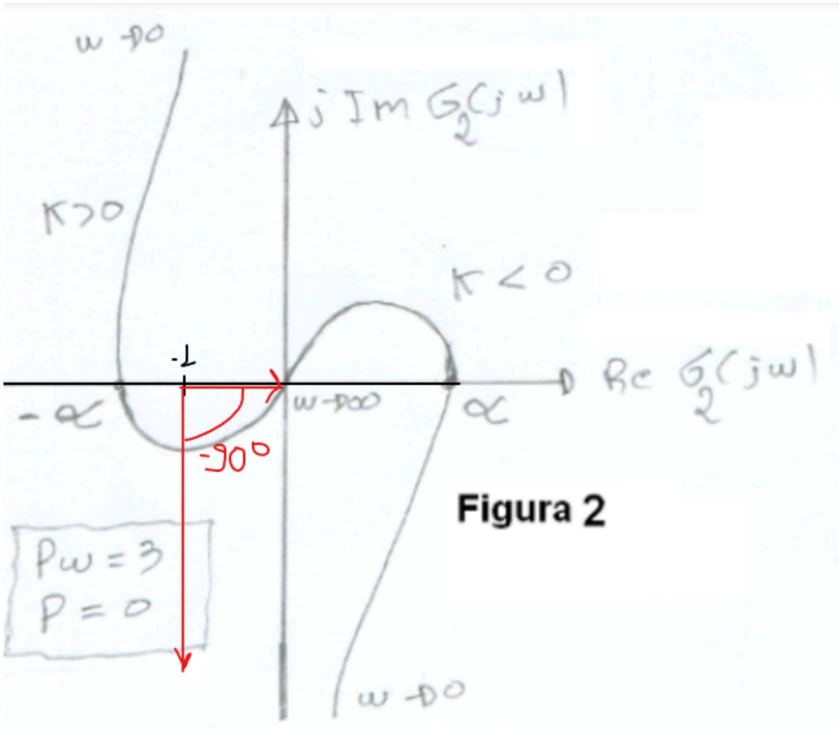


Figura 2

Seguindo no sentido da curva de $\omega \rightarrow \infty$ para $\omega \rightarrow 0$ temos um $\phi \ = \ -\ 90^{o}$ para os dois valores de α.

Aplicando a fórmula utilizando os valores disponibilizados no enunciado de Pw e Pd, temos:

$$\Phi_{0}^{\infty} = \ (Z_{d} - P_{w}/2 \ - P_{d}) \ * \ 180$$

$$-\ 90 \ = \ (Z_{d} - \ 1.5) \ * \ 180$$

$$-\ 0.5 \ = \ Z_{d} - \ 1.5$$

$$Z_{d} = \ 1$$

Como $Z_{d} \ = \ 1$, existe 1 polo da FTMF no SPD, portanto o sistema é instável para qualquer valor de α para k < 0.

Contextualizando e agrupando tudo que foi analisado, podemos perceber que na Figura 1 existem apenas valores de k < 0 que tornam o sistema estável, desde que seu módulo não seja grande o suficiente para deslocar o α para a esquerda de -1, já que para α > 1, o sistema se tornou instável. Além disso como essa função é desenhado para K=1, então:

$$k \ * \ \alpha \ < \ 1$$

$$k < \frac{1}{a}$$

Logo, para valores de k < $1/a$ o gráfico polar sempre cruzará o eixo real entre 0 e -1, mantendo assim um $\phi = -90$, que garantirá um sistema estável..

Ainda na figura 1 e para k < 0, podemos afirmar que para α = 1 o sistema se torna marginalmente estável, uma vez que para valores de α < 1 o sistema é estável e α > 1 o sistema é instável.

Sobre a figura 2, tivemos um comportamento contrário, onde apenas com valores de k > 0 podemos obter um sistema estável, desde que seu módulo não seja pequeno o suficiente para deslocar o α para direita de -1. Além disso, como essa função é desenhada para K = 1, então:

$$k * \alpha > 1$$

$$k > \frac{1}{a}$$

Logo, para valores de k > $1/a$ o gráfico polar sempre cruzará o eixo real a esquerda de -1, mantendo assim um $\phi = -270$, que garantirá um sistema estável.

Além disso, podemos afirmar que para α = 1 o sistema se torna marginalmente estável, uma vez que para valores de α > 1 o sistema é estável e α < 1 o sistema é instável.

1.2 Analise a estabilidade relativa nos dois casos quando fizer sentido.

Analisando as figuras anteriores, temos que na figura 1 somente faz sentido analisar a estabilidade relativa no caso em que para **k < 0 e α < 1** já que para os demais casos, existem polos da FTMF no SPD, portanto o sistema é instável.

Observado a figura para **k < 0 e α < 1** temos:

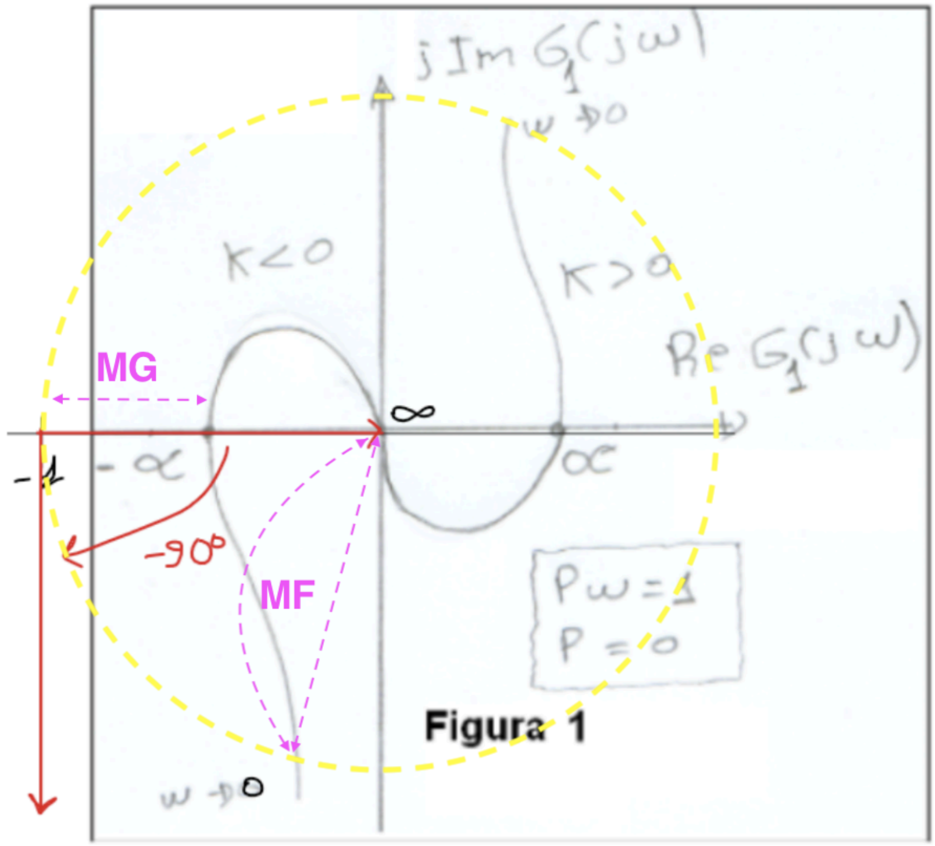


Figura 1

A margem de ganho é o incremento no ganho do sistema quando a fase é −180, que resultará em um sistema marginalmente estável com a intersecção do ponto (−1, 0) e será dada pela distância entre -1 e -α, já a margem de fase será a quantidade de deslocamento em fase na magnitude 1 que resultará em um sistema marginalmente estável com a intersecção do ponto (−1, 0).

Analisando também na figura 1, desta vez para α **> 1,** em que há instabilidade, temos:

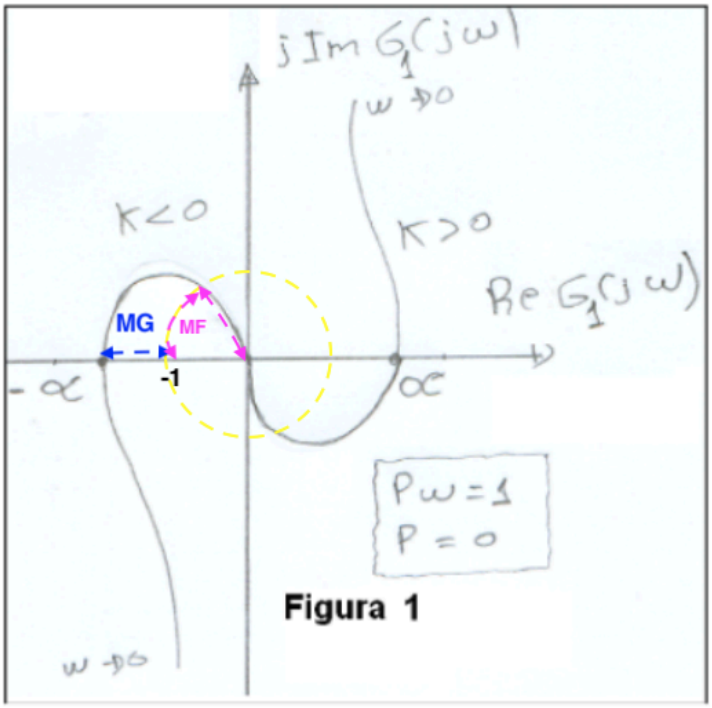
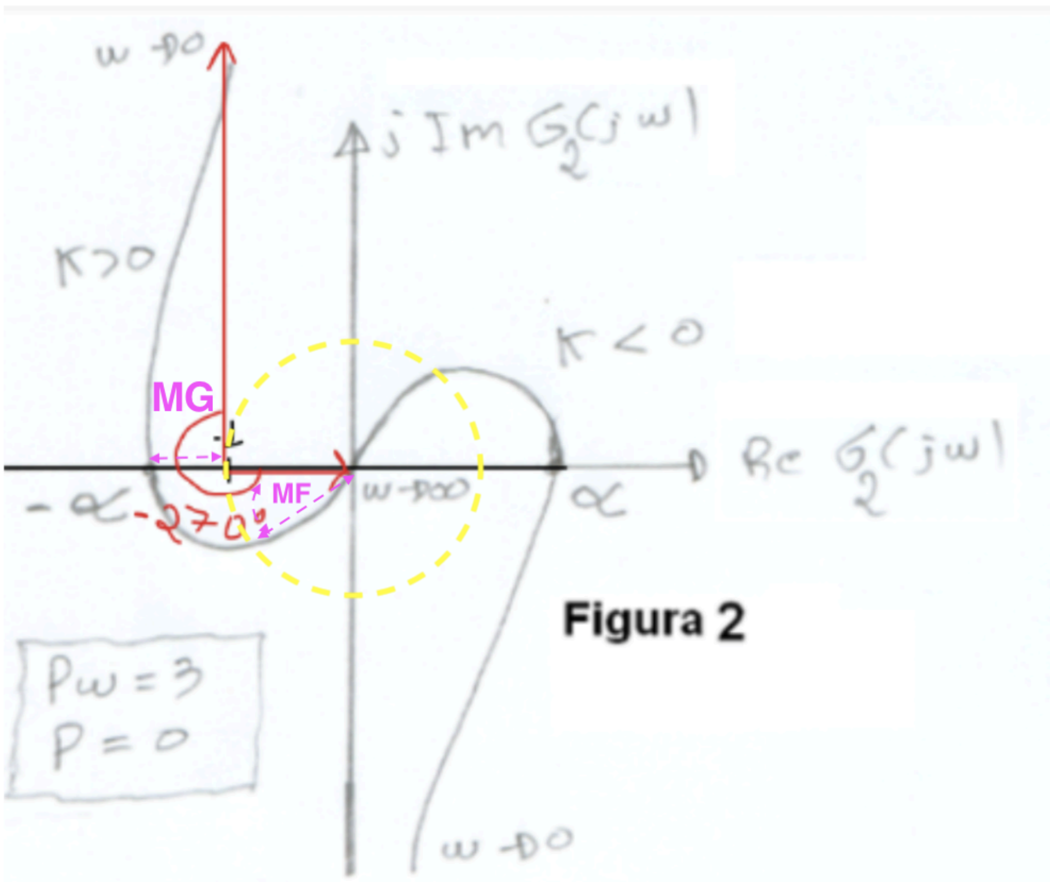


Figura 1

A margem de ganho será dada pela distância entre -α e -1, já a margem de fase pelo ângulo formado entre o valor que cruza o círculo unitário e o ponto -1 no eixo real, dada neste caso acima do eixo real, mostrando assim que o sistema é instável novamente.

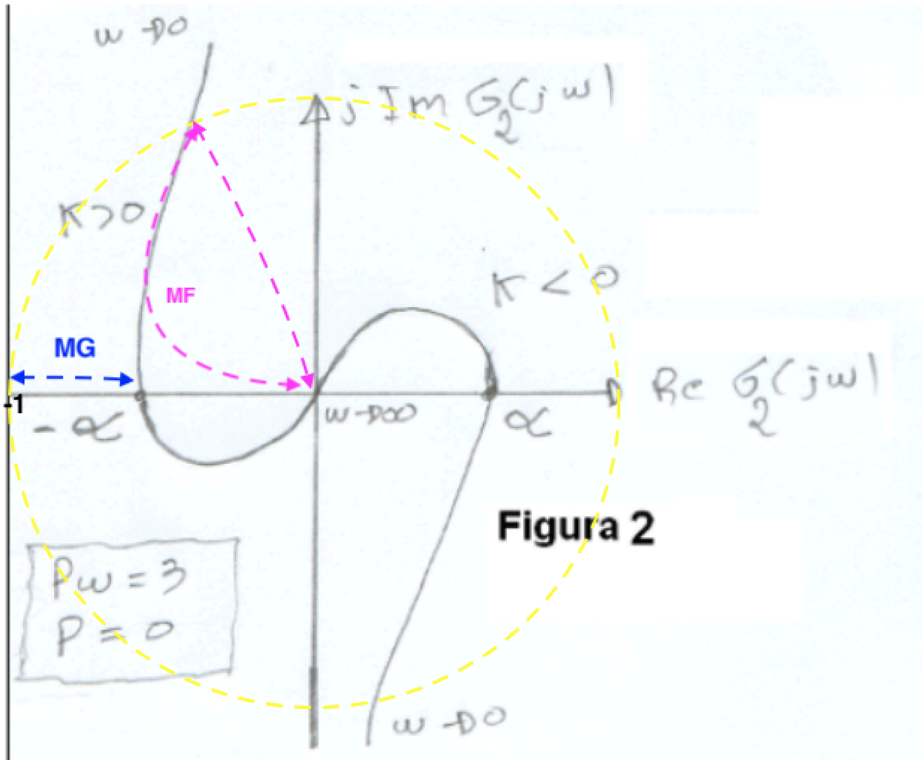
Já para a figura 2, podemos analisar para **k > 0 e α > 1,** já que para os demais pontos da análise, o sistema é instável pelo critério de Nyquist:



Margem de ganho positiva: mas deve-se reduzir o ganho para o sistema se tornar instável
Margem de fase positiva: deve-se atrasar a fase para o sistema se tornar estável

A margem de ganho será dada pela distância entre -α e -1, já a margem de fase pelo ângulo formado entre o valor que cruza o círculo unitário e o ponto -1 no eixo real.

Analisando também na figura 2, desta vez para α **< 1,** em que há instabilidade, temos:



Margem de ganho negativa: deve-se aumentar o ganho para o sistema se tornar estável
Margem de fase negativa: deve-se avançar a fase para o sistema se tornar estável

A margem de ganho será dada pela distância entre $-\alpha$ e -1, já a margem de fase pelo ângulo formado entre o valor que cruza o círculo unitário e o ponto -1 no eixo real, dada neste caso acima do eixo real, mostrando assim que o sistema é instável novamente.

Dessa forma, conseguimos ter uma noção de para quais intervalos o sistema apresenta uma melhor estabilidade relativa, já que o mesmo pode se tornar marginalmente estável com a escolha dos parâmetros que impactam diretamente no MG e MF, diminuindo assim a margem de estabilidade do sistema. Por serem gráficos esboçados, os gráficos polares não são adequados para medir a margem de ganho e de fase, mas conseguem oferecer uma noção para projetos mais nominais.