Cálculo 2 2022.2

Aula 15

Aula passada: curvas parametrizadas

Aula hoje: cálculo

10.2 Cálculo com curvas parametrizadas

Recorde Cálculo 1

$$\boxed{y = F(x)}$$ gráfico

TANGENTE: reta tangente em (x_0, y_0):

$$\boxed{y - y_0 = \underbrace{F'(x_0)}_{=\frac{dy}{dx}}(x - x_0)}$$

↳ derivada

ÁREA SOB GRÁFICO: em $[a,b]$

$$\boxed{A = \int_a^b F(x)\,dx}$$

COMPRIMENTO DA CURVA:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + (F'(x))^2}\,dx} \quad (*)$$

ÁREA DE SUPERFÍCIE: de revolução no eixo x

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b \overbrace{F(x)}^{\text{raio}} \cdot \sqrt{1 + F'(x)^2}\,.dx} \quad (**)$$

Vamos reformular estas fórmulas para a curva paramétrica

Fixe

$$C: x(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

TANGENTE

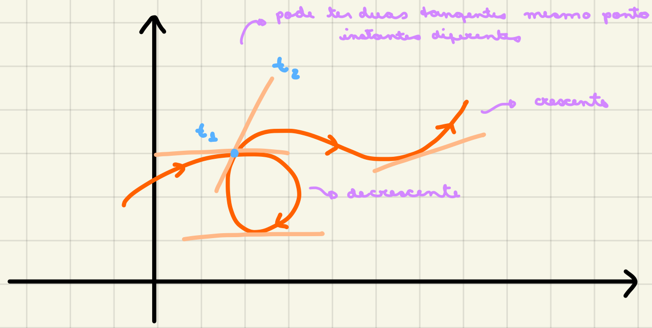
Suponde $y = y(x) = y(x(t))$ então

derivando com relação t (regra da cadeia)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad (*)}, \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

aplicado em t



$\frac{dy}{dx} > 0$, C crescente $\qquad \frac{dy}{dy} < 0$, C decrescente

Concavidade $\frac{d^2y}{dx^2}$: em $(*)$ trocar y por $\frac{dy}{dx}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}}$$

$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ $\cup$ concavidade positiva

$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ concavidade negativa $\cap$

ÁREA : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$

e $f(\alpha) = a$ e $f(\beta) = b$

Suponha $y = F(x) \Rightarrow g(t) = F(x(t))$

Note, pela mudança de variável

$$A = \int_a^b F(x).dx = \int_\alpha^\beta F(f(t))\, f'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta g(t).f'(t).dt$$

$x = f(t)$
$dx = f'(t)dt$
$x = a \to t = \alpha$
$x = b \to t = \beta$

$$\boxed{A = \int_\alpha^\beta g(t) f'(t)\, dt}$$

COMPRIMENTO substituindo $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$

em (*) $\alpha \leq t \leq \beta$, $a \leq x \leq b$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_a^b \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{\frac{dx}{dt}} .dx \quad = dt$$

$x = f(t)$
$dx = f'(t)dt = \frac{dx}{dt}.dt$
$x = a \to t = \alpha$
$x = b \to t = \beta$

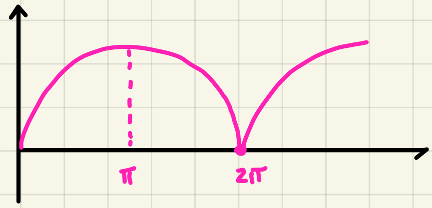
$$\boxed{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.dt} \quad (*)$$

ÁREA : substituindo (*) em (**)

$$\boxed{S = \int_\alpha^\beta 2\pi\, g(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt}$$

Exemplo Considere a cicloide

$$\begin{cases} x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) = f(\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) = g(\theta) \end{cases}$$



(a) Encontre a área sob um arco
(b) Encontre o comprimento de um arco

Solução : um arco $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$A = \int_0^{2\pi} g(\theta) f'(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} r(1-\cos\theta)\, r(1-\cos\theta)\, d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2 d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= r^2 \left[\theta \Big|_0^{2\pi} - \cancel{2 \operatorname{sen}\theta \Big|_0^{2\pi}} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta \right]$$

$$= 2\pi r^2 + \frac{r^2}{2} \left[\theta \Big|_0^{2\pi} + \cancel{\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \Big|_0^{2\pi}} \right]$$

$$= 3\pi r^2 \;//$$

(b) $$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r - r\cos\theta)^2 + (r \operatorname{sen}\theta)^2}\, d\theta$$

$$= r \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$

$$= r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$

$$= r \int_0^{2\pi} \sqrt{2\underbrace{(1-\cos\theta)}_{2\operatorname{sen}^2(\theta/2)}}\, d\theta$$

$$= r \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \operatorname{sen}^2(\theta/2)}\, d\theta = -2r \cos(\theta/2).2 \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 8r \;//$$