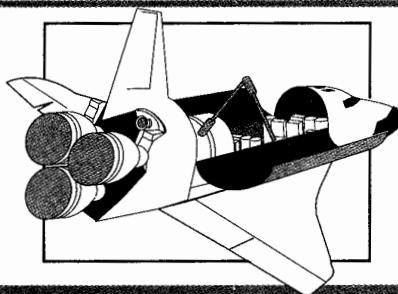


# 8 La técnica del lugar geométrico de las raíces



## PALABRAS CLAVE Y TEMAS

- ▲ Lugar geométrico de las raíces
- ▲ Propiedades del lugar geométrico de las raíces
- ▲ Sensibilidad de las raíces
- ▲ Contornos de las raíces
- ▲ Lugar geométrico de las raíces de sistemas en tiempo discreto

### 8-1 Introducción

En el capítulo anterior, se mostró la importancia de los polos y ceros de la función de transferencia en lazo cerrado de un sistema de control lineal sobre el desempeño dinámico del sistema. Las raíces de la ecuación característica, las cuales son los polos de la función de transferencia en lazo cerrado, determinan la estabilidad relativa y absoluta de un sistema lineal SISO. Se debe tener en mente que las propiedades transitorias del sistema también dependen de los ceros de la función de transferencia en lazo cerrado.

Un estudio importante en sistemas de control lineales es la investigación de las trayectorias en las raíces de la ecuación característica—o, simplemente, **lugar geométrico de las raíces**—cuando cierto parámetro del sistema varía. En el Cap. 7, varios ejemplos ilustraron la utilidad del lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica en el estudio de sistemas de control lineal.

▲ El lugar geométrico de las raíces son las trayectorias de la ecuación característica cuando un parámetro del sistema varía.

▲ El lugar geométrico de las raíces es una representación gráfica de las trayectorias de las raíces de la ecuación característica en el plano complejo de los polos y ceros, que muestra cómo变參數影响系统的稳定性.

Las propiedades básicas de la construcción sistemática del lugar geométrico de las raíces se debe, en primer lugar, a W. R. Evans [1, 3]. En este capítulo se muestra cómo construir estos lugares geométricos mediante el seguimiento de algunas reglas simples. Para dibujar el lugar geométrico de las raíces en forma exacta, se puede emplear un programa del lugar geométrico de las raíces y una computadora digital. Por ejemplo, los programas **ROOTLOCI** en el paquete **ACSP**, **rplot** en la caja de herramientas **CSAD**, y **ROOT LOCUS** en el **Program CC**, solo por nombrar algunos, se pueden emplear para generar los datos y las gráficas de los lugares geométricos de las raíces a partir de la función de transferencia del lazo. Si se está en un curso para técnico, todo lo que se tiene que hacer es familiarizarse con uno de estos programas. Sin embargo, es más importante aprender las bases del lugar geométrico de las raíces, sus propiedades, así como la forma de interpretar los datos proporcionados por el lugar geométrico de las raíces para fines de análisis y diseño. Como un ingeniero inteligente, se debe saber si los datos provistos por el lugar geométrico de las raíces son en realidad correctos, y ser capaz de obtener información vital del lugar geométrico de las raíces. El material en este capítulo está preparado con estos objetivos en mente.

La técnica del lugar geométrico de las raíces no está confinada al estudio de sistemas de control. En general, el método se puede aplicar al estudio del comportamiento de las raíces de cualquier ecuación algebraica con parámetros variables. El problema del lugar geométrico de las raíces se puede formular con referencia a la siguiente ecuación algebraica de la variable compleja  $s$ :

$$\boxed{F(s) = P(s) + KQ(s) = 0} \quad (8-1)$$

donde  $P(s)$  es un polinomio en  $s$  de grado  $n$ ,

$$\boxed{P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (8-2)$$

y  $Q(s)$  es un polinomio en  $s$  de grado  $m$ ;  $n$  y  $m$  son enteros positivos.

$$\boxed{Q(s) = s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0} \quad (8-3)$$

Para el presente, no se establecen limitaciones para las magnitudes relativas entre  $n$  y  $m$ .  $K$  en la ecuación (8-1) es una constante real que puede variar desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ .

Los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$  se consideran reales y fijos.

El lugar geométrico de las raíces de parámetros variables múltiples se puede tratar al variar un parámetro a la vez. Los lugares geométricos de las raíces resultantes se denominan **contornos de las raíces**, y serán tratados en la sección 8-6. Al reemplazar  $s$  por  $z$  en la ecuación (8-1) hasta la (8-3), se puede construir el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica de sistemas en tiempo discreto lineales en forma similar.

*a.* El lugar geométrico de las raíces de parámetros múltiples se llaman contornos de las raíces.

Para propósitos de identificación, en este libro se definen las siguientes categorías de lugares geométricos de las raíces basados en el signo de  $K$ :

▲ RL se refiere al lugar geométrico de las raíces con valores positivos de  $K$ .

▲ CRL se refiere al lugar geométrico de las raíces con valores negativos de  $K$ .

1. **RL:** la porción del lugar geométrico de las raíces donde  $K$  es positiva;  $0 \leq K < \infty$ .
2. **CRL (lugar geométrico de las raíces complementario):** la porción del lugar geométrico de las raíces donde  $K$  es negativa;  $-\infty < K \leq 0$ .
3. **RC (contornos de las raíces):** contornos de las raíces cuando varía más de un parámetro.
4. **Lugar geométrico de las raíces:** se refiere al lugar geométrico de las raíces total para  $-\infty < K < \infty$ .

## 8-2 Propiedades básicas del lugar geométrico de las raíces

Como nuestro principal interés son los sistemas de control, se considera la función de transferencia en lazo cerrado de un sistema de un sólo lazo:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (8-4)$$

manteniendo en mente que la función de transferencia de sistemas SISO con múltiples lazos también se pueden expresar en forma similar. La ecuación característica del sistema en lazo cerrado se obtiene al igualar al polinomio denominador de  $Y(s)/R(s)$  a cero. Por tanto, las raíces de la ecuación característica deben satisfacer:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (8-5)$$

suponga que  $G(s)H(s)$  contiene un parámetro variable  $K$  como un factor multiplicativo, de forma que la función racional se puede expresar como:

$$\left| G(s)H(s) = \frac{KQ(s)}{P(s)} \right. \quad (8-6)$$

donde  $P(s)$  y  $Q(s)$  son polinomios definidos por las ecuaciones (8-2) y (8-3), respectivamente. La ecuación (8-5) se escribe como:

$$\left| 1 + \frac{KQ(s)}{P(s)} = \frac{P(s) + KQ(s)}{P(s)} = 0 \right. \quad (8-7)$$

El polinomio numerador de la ecuación (8-7) es idéntico al de la (8-1). Por tanto, al considerar que la función de transferencia de lazo  $G(s)H(s)$  se puede escribir en la forma de la ecuación (8-6), se puede identificar el lugar geométrico de las raíces de un sistema de control con el problema general del lugar geométrico de las raíces.

Cuando el parámetro variable  $K$  no aparece como un factor multiplicativo de  $G(s)H(s)$ , siempre se pueden escribir las funciones en la forma de la ecuación (8-1). Como ejemplo ilustrativo, considere que la ecuación característica de un sistema de control es:

$$s(s + 1)(s + 2) + s^2 + (3 + 2K)s + 5 = 0 \quad (8-8)$$

Para expresar esta última ecuación en la forma de la ecuación (8-7), se dividen ambos miembros de la ecuación entre el término que no contiene a  $K$ , y se obtiene:

$$1 + \frac{2Ks}{s(s + 1)(s + 2) + s^2 + 3s + 5} = 0 \quad (8-9)$$

Al comparar esta última ecuación con la (8-7), se obtiene:

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{2s}{s^3 + 4s^2 + 5s + 5} \quad (8-10)$$

Ahora  $K$  está aislada como un factor multiplicativo de la función  $Q(s)/P(s)$ .

Ahora se mostrará que el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-5) se puede construir con base en las propiedades de  $Q(s)/P(s)$ . En el caso donde  $G(s)H(s) = KQ(s)/P(s)$ , el problema del lugar geométrico de las raíces es otro ejemplo en el que las características del sistema en lazo cerrado, en este caso representada por las raíces de la ecuación característica, están determinadas del conocimiento de la función de transferencia de lazo  $G(s)H(s)$ .

Ahora se investigarán las condiciones bajo las cuales las ecuaciones (8-5) y (8-7) se satisfacen.  $G(s)H(s)$  se expresa como:

$$\left| G(s)H(s) = KG_1(s)H_1(s) \right. \quad (8-11)$$

donde  $G_1(s)H_1(s)$  no contiene el parámetro variable  $K$ . Entonces la ecuación (8-5) se escribe como:

$$\left| G_1(s)H_1(s) = -\frac{1}{K} \right. \quad (8-12)$$

Para obtener la ecuación (8-12), las condiciones siguientes se deben satisfacer en forma simultánea:

#### Condición de magnitud

$$\left| G_1(s)H_1(s) \right| = \frac{1}{|K|} \quad -\infty < K < \infty \quad (8-13)$$

### Condiciones de ángulo

$$\begin{aligned} \angle G_1(s)H_1(s) &= (2i+1)\pi & K \geq 0 \\ &= \text{múltiplos impares de } \pi \text{ radianes o } 180^\circ \end{aligned} \quad (8-14)$$

$$\begin{aligned} \angle G_1(s)H_1(s) &= 2i\pi & K \leq 0 \\ &= \text{múltiplos pares de } \pi \text{ radianes o } 180^\circ \end{aligned} \quad (8-15)$$

donde  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (cualquier entero).

En la práctica, las condiciones establecidas en las ecuaciones (8-13) a (8-15) juegan diferentes roles en la construcción del lugar geométrico de las raíces.

- ▲ La condiciones de ángulos en las ecuaciones (8-14) u (8-15) se emplean para determinar las trayectorias del lugar geométrico de las raíces en el plano  $s$ .
- ▲ Una vez que se dibuja el lugar geométrico de las raíces, los valores de  $K$  sobre el lugar geométrico se determina mediante el empleo de la condición de magnitud de la ecuación (8-13).

La construcción del lugar geométrico de las raíces es básicamente un problema gráfico, aunque algunas de sus propiedades se obtuvieron en forma analítica. La construcción gráfica del lugar geométrico de las raíces se basa en el conocimiento de los polos y ceros de la función de  $G(s)H(s)$ . En otras palabras,  $G(s)H(s)$  se debe escribir primero como:

$$G(s)H(s) = KG_1(s)H_1(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2) \cdots (s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2) \cdots (s+p_n)} \quad (8-16)$$

donde los ceros y los polos de  $G(s)H(s)$  son reales o en pares complejos conjugados.

Al aplicar las condiciones de las ecuaciones (8-13), (8-14), y (8-15) a la ecuación (8-16), se tiene:

$$\left| G_1(s)H_1(s) \right| = \frac{\prod_{k=1}^m |s+z_k|}{\prod_{j=1}^n |s+p_j|} = \frac{1}{|K|} \quad -\infty < K < \infty \quad (8-17)$$

Para  $0 \leq K < \infty$  (RL):

$$\angle G_1(s)H_1(s) = \sum_{k=1}^m \angle(s+z_k) - \sum_{j=1}^n \angle(s+p_j) = (2i+1) \times 180^\circ \quad (8-18)$$

Para  $-\infty < K \leq 0$  (CRL):

$$\angle G_1(s)H_1(s) = \sum_{k=1}^m \angle(s + z_k) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) = 2i \times 180^\circ \quad (8-19)$$

donde  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

La interpretación de la ecuación (8-18) es que cualquier punto  $s_1$  sobre el RL que corresponde a un valor positivo de  $K$  debe satisfacer la condición:

*La diferencia entre las sumas de los ángulos de los vectores dibujados desde los ceros y aquellos desde los polos de  $G(s)H(s)$  a  $s_1$  es un múltiplo impar de  $180^\circ$ .*

Para valores negativos de  $K$ , cualquier punto  $s_1$  sobre el CRL debe satisfacer la condición:

*La diferencia entre las sumas de los ángulos de los vectores dibujados desde los ceros y aquellos trazados desde los polos de  $G(s)H(s)$  a  $s_1$  es un múltiplo par de  $180^\circ$ .*

Una vez que el lugar geométrico de las raíces se ha construido, los valores de  $K$  a lo largo del lugar geométrico se pueden determinar al escribir la ecuación (8-17) como:

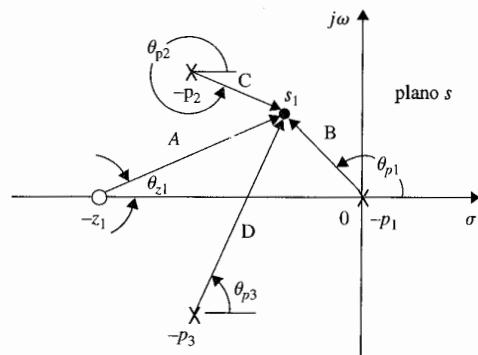
$$|K| = \frac{\prod_{j=1}^n |s + p_j|}{\prod_{k=1}^m |s + z_k|} \quad (8-20)$$

El valor de  $K$  en cualquier punto  $s_1$  sobre el lugar geométrico de las raíces se obtiene al sustituir el valor de  $s_1$  en la ecuación (8-20). En forma gráfica, el numerador de la ecuación (8-20) representa el producto de las longitudes de los vectores dibujados desde los polos de  $G(s)H(s)$  a  $s_1$ , y el denominador representa el producto de las longitudes de los vectores dibujados desde los ceros de  $G(s)H(s)$  a  $s_1$ . Si el punto  $s_1$  está sobre el RL,  $K$  es positiva; si  $s_1$  está sobre el CRL, entonces  $K$  es negativa.

Para ilustrar el empleo de las ecuaciones (8-18) a (8-20) para la construcción del lugar geométrico de las raíces, se considera la función:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)}{s(s + p_2)(s + p_3)} \quad (8-21)$$

La localización de los polos y ceros de  $G(s)H(s)$  se asigna en forma arbitraria como se muestra en la Fig. 8-1. Se selecciona un punto de prueba arbitrario  $s_1$  en el plano  $s$  y se dibujan los



**Figura 8-1** Configuración de polos y ceros de  $G(s)H(s) = K(s + z_1)/(s(s + p_2)(s + p_3))$ .

vectores desde los polos y ceros de  $G(s)H(s)$  al punto de prueba. Si  $s_1$  es en verdad punto sobre el RL ( $K$  es positiva), debe satisfacer la ecuación (8-18); esto es, los ángulos de los vectores mostrados en la Fig. 8-1 deben satisfacer:

$$\begin{aligned} \angle(s_1 + z_1) - \angle s_1 - \angle(s_1 + p_2) - \angle(s_1 + p_3) \\ = \theta_{z1} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3} = (2i + 1) \times 180^\circ \end{aligned} \quad (8-22)$$

donde  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Como se muestra en la Fig. 8-1, los ángulos de los vectores se miden con respecto al eje real positivo. De forma similar, si  $s_1$  es un punto sobre el CRL ( $K$  es negativa), debe satisfacer la ecuación (8-19); esto es:

$$\begin{aligned} \angle(s_1 + z_1) - \angle s_1 - \angle(s_1 + p_2) - \angle(s_1 + p_3) \\ = \theta_{z1} - \theta_{p1} - \theta_{p2} - \theta_{p3} = 2i \times 180^\circ \end{aligned} \quad (8-23)$$

donde  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Si  $s_1$  satisface ya sea la ecuación (8-22) o la (8-23), la ecuación (8-20) se emplea para encontrar la magnitud de  $K$  en dicho punto. Como se muestra en la Fig. 8-1, las longitudes de los vectores se representan por  $A, B, C$ , y  $D$ . La magnitud de  $K$  es:

$$|K| = \frac{|s_1||s_1 + p_2||s_1 + p_3|}{|s_1 + z_1|} = \frac{BCD}{A} \quad (8-24)$$

El signo de  $K$  depende de si  $s_1$  está sobre el RL o en el CRL. Por tanto, dada la función  $G(s)H(s)$  con  $K$  como un factor multiplicativo y los polos y ceros son conocidos, la construcción del lugar geométrico de las raíces de los ceros de  $1 + G(s)H(s)$  involucra los dos pasos siguientes:

1. La búsqueda de todos los puntos  $s_1$  que satisfacen la ecuación (8-18) para  $K$  positiva. Si requiere el lugar geométrico de las raíces para valores negativos de  $K$ , se debe satisfacer la ecuación (8-19).
2. Para encontrar las magnitudes de  $K$  sobre el lugar geométrico de las raíces se emplea la ecuación (8-20).

Se han establecido las condiciones básicas sobre la construcción del diagrama del lugar geométrico de las raíces. sin embargo, si se desea emplear el método de prueba y error descrito anteriormente, la búsqueda de todos los puntos del lugar geométrico de las raíces en el plano  $s$  que satisfacen la ecuación (8-18) o la (8-19) y la ecuación (8-20) podría ser una tarea muy tediosa. Hace años, cuando Evans inventó la técnica del lugar geométrico de las raíces, la tecnología de computadoras digitales estaba aún en su infancia; él tuvo que inventar una herramienta especial, denominada la **Spirula**, la cual se puede emplear para sumar y restar los ángulos de los vectores en forma rápida, de acuerdo a las ecuaciones (8-18) u (8-19). Aun con la spirula, para que dicho dispositivo fuera efectivo, el usuario aún tenía que conocer la ubicación aproximada de las raíces sobre el plano  $s$ .

Con la disponibilidad de las computadoras digitales y de subrutinas eficientes para encontrar raíces, la spirula y el método de prueba y error se han vuelto obsoletos. No obstante, aun con computadoras de alta velocidad y un programa eficiente para el lugar geométrico de las raíces, el analista debe tener una comprensión profunda de las propiedades del lugar geométrico de las raíces para ser capaz de buscar en forma manual lugares geométricos de las raíces de sistemas simples y moderadamente complejos e interpretar los resultados de la computadora en forma correcta, cuando se aplica el lugar geométrico de las raíces para el análisis y diseño de sistemas de control.

### 8-3 Propiedades y construcción del lugar geométrico de las raíces

Las siguientes propiedades del lugar geométrico de las raíces son útiles para construir el lugar geométrico de las raíces en forma manual y para comprenderlo. Las propiedades se desarrollan con base en la relación entre los polos y ceros de  $G(s)H(s)$  y los ceros de  $1 + G(s)H(s)$ , que son las raíces de la ecuación característica.

#### 8-3-1 Puntos donde $K = 0$ y $K = \pm\infty$

*Los puntos sobre el lugar geométrico de las raíces donde  $K = 0$  son los polos de  $G(s)H(s)$ . Los puntos sobre el lugar geométrico de las raíces donde  $K = \pm\infty$  son los ceros de  $G(s)H(s)$ .*

Los polos y ceros referidos aquí incluyen los que están en el infinito, si es que existen.

La razón para esto se ve en la condición del lugar geométrico de las raíces dado por la ecuación (8-12).

$$G_1(s)H_1(s) = -\frac{1}{K} \quad (8-25)$$

Cuando la magnitud de  $K$  se aproxima a cero,  $G_1(s)H_1(s)$  se aproxima a infinito, por lo que  $s$  se aproxima a los polos de  $G_1(s)H_1(s)$  o de  $G(s)H(s)$ . De forma similar, si la magnitud de  $K$  se aproxima a infinito,  $s$  se aproxima a los ceros de  $G(s)H(s)$ .

Considere la ecuación:

$$s(s + 2)(s + 3) + K(s + 1) = 0 \quad (8-26)$$

Cuando  $K = 0$ , las tres raíces de la ecuación están en  $s = 0, -2$ , y  $-3$ . Cuando la magnitud de  $K$  es infinita, las tres raíces de la ecuación están en  $s = -1, \infty$ , e  $\infty$ . Es útil considerar que el infinito en el

#### Ejemplo

8-1

plano  $s$  es un concepto crucial. se puede visualizar que el plano  $s$  finito es sólo una pequeña porción de una esfera con radio infinito. Entonces, el infinito en el plano  $s$  es un punto en el lado opuesto de la esfera que se está observando.

Al dividir ambos miembros de la ecuación (8-26) entre los términos que no contienen a  $K$ , se obtiene:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} = 0 \quad (8-27)$$

lo cual da:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \quad (8-28)$$

Por tanto, las tres raíces de la ecuación (8-26) cuando  $K = 0$  son las mismas que los polos de la función  $G(s)H(s)$ . Las tres raíces de la ecuación (8-26) cuando  $K = \pm \infty$  son los tres ceros de  $G(s)H(s)$ , incluidos los del infinito. Los tres puntos sobre el lugar geométrico de las raíces en donde  $K = 0$  y aquellos donde  $K = \pm \infty$  se muestran en la Fig. 8-2. ▲

### 8-3-2 Número de ramas sobre el lugar geométrico de las raíces

Una rama del lugar geométrico de las raíces es el lugar geométrico de una raíz cuando  $K$  varía entre  $-\infty$  e  $\infty$ . La siguiente propiedad del lugar geométrico de las raíces resulta, ya que el número de ramas del lugar geométrico de las raíces es igual al número de raíces de la ecuación.

*El número de ramas del lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-1) o ecuación (8-5) es igual al orden del polinomio.*

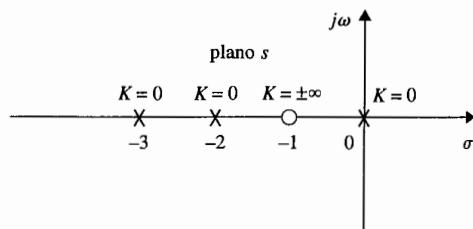
El mantener el seguimiento de las ramas individuales y del número total de ramas del diagrama del lugar geométrico de las raíces es importante para verificar que la gráfica se ha realizado en forma correcta. Esto es en particular cierto cuando la gráfica del lugar geométrico de las raíces se realiza mediante computadora, ya que a menos que las ramas del lugar geométrico de las raíces se dibujen en diferente color, se deja al usuario hacer la distinción.

El número de ramas del lugar geométrico de las raíces de:

$$s(s+2)(s+3) + K(s+1) = 0 \quad (8-29)$$

es tres, ya que la ecuación es de tercer orden. En otras palabras, la ecuación tiene tres raíces y por tanto, debe haber tres lugares de las raíces. ▲

**Figura 8-2** Puntos en los cuales  $K = 0$  sobre el lugar geométrico de las raíces de  $s(s+2)(s+3) + K(s+1) = 0$ .



### 8-3-3 Simetría del lugar geométrico de las raíces

▲ Es importante poner atención en la simetría del lugar geométrico de las raíces.

*El lugar geométrico de las raíces es simétrico respecto al eje real del plano s. En general, el lugar geométrico de las raíces es simétrico respecto a los ejes de simetría de la configuración de polos y ceros de G(s)H(s).*

La razón detrás de esta propiedad es porque como los coeficientes de la ecuación (8-1) son reales, las raíces deben ser reales o en pares complejos conjugados. En general, si los polos y ceros de  $G(s)H(s)$  son simétricos respecto a un eje además del eje real en el plano s, este eje de simetría se puede ver como el eje real de un nuevo plano s obtenido mediante una transformación lineal.

Consideré la ecuación:

#### Ejemplo 8-3

$$s(s + 1)(s + 2) + K = 0 \quad (8-30)$$

Al dividir ambos miembros de la ecuación entre los términos que no contienen a  $K$ , se obtiene:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)} \quad (8-31)$$

El lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-30) se muestra en la Fig. 8-3 para  $K = -\infty$  hasta  $K = \infty$ . Ya que la configuración de los polos y ceros de  $G(s)H(s)$  es simétrica respecto al eje real así como el eje  $s = -1$ , la gráfica del lugar geométrico de las raíces es simétrica a los dos ejes.

Como una revisión de estas propiedades del lugar geométrico de las raíces presentadas hasta ahora, se tiene el siguiente ejercicio que visualiza al lugar geométrico de las raíces de la Fig. 8-3. Los puntos en los que  $K = 0$  son los polos de  $G(s)H(s)$ ,  $s = 0, -1$  y  $-2$ . La función  $G(s)H(s)$  tiene tres ceros en  $s = \infty$  en donde  $K = \pm\infty$ . El lector debe tratar de seguir las tres ramas separadas del lugar geométrico de las raíces desde el comienzo cuando  $K = -\infty$ , pasando por  $K = 0$  y termina en  $K = \infty$  en  $s = \infty$ . ▲

#### Ejemplo 8-4

Cuando la configuración de polos y ceros de  $G(s)H(s)$  es simétrica con respecto a algún punto en el plano s, el lugar geométrico de las raíces también será simétrico a ese punto. Esto se ilustra con la gráfica del lugar geométrico de las raíces de:

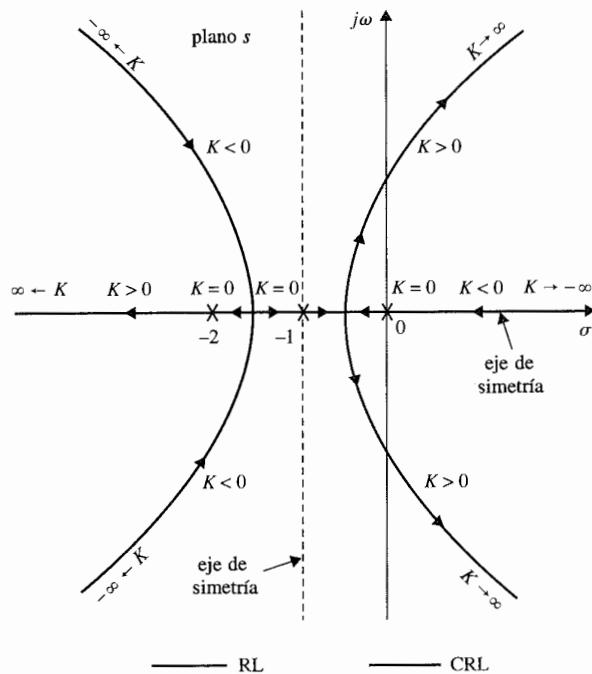
$$s(s + 2)(s + 1 + j)(s + 1 - j) + K = 0 \quad (8-32)$$

que se muestra en la Fig. 8-4. ▲

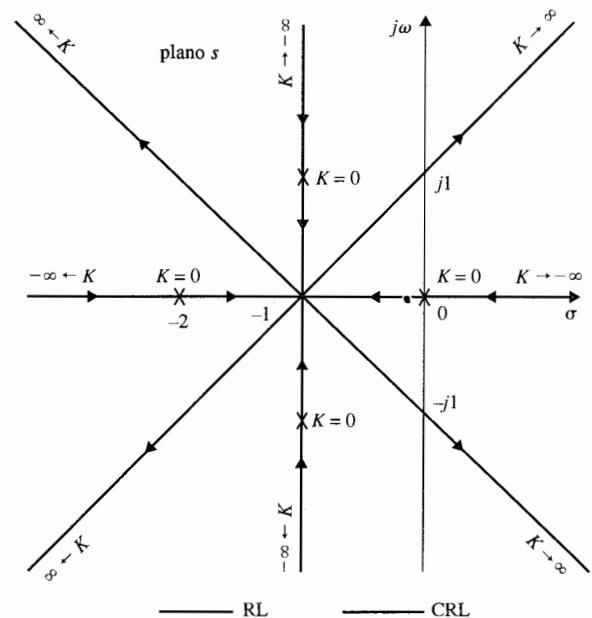
▲ Las asíntotas del lugar geométrico de las raíces se refiere al comportamiento del lugar geométrico de las raíces cuando  $s \rightarrow \infty$ .

### 8-3-4 Ángulos de las asíntotas del lugar geométrico de las raíces: Comportamiento del lugar geométrico de las raíces en $|s| = \infty$

Como se muestra por los lugares geométricos de las raíces de las Figs. 8-3 y 8-4, cuando  $n$ , el orden de  $P(s)$ , no es igual a  $m$ , el orden de  $Q(s)$ , algunos de los lugares geométricos se aproximarán a infinito en el plano s. Las propiedades del lugar geométrico de las raíces cerca del infinito en el plano s se escriben mediante las **asíntotas** del lugar geométrico cuando  $|s| \rightarrow \infty$ .



**Figura 8-3** Lugar geométrico de las raíces de  $s(s + 1)(s + 2) + K = 0$ , que muestran las propiedades de simetría



**Figura 8-4** Lugar geométrico de las raíces de  $s(s+2)(s^2+2s+2)+K=0$ , que muestran las propiedades de simetría.

En general, cuando  $n \neq m$ , habrá  $2|n - m|$  asíntotas que describen el comportamiento del lugar geométrico de las raíces en  $|s| = \infty$ . Los ángulos de las asíntotas y su intersección con el eje real del plano  $s$  se describen como sigue:

*Para valores grandes de  $s$ , el lugar geométrico de las raíces para  $K \geq 0$  (RL), son asíntoticas con asíntotas con ángulos dados por:*

$$\left| \theta_i = \frac{2i + 1}{|n - m|} \times 180^\circ \quad n \neq m \right. \quad (8-33)$$

donde  $i = 0, 1, 2, \dots, |n - m| - 1$ ;  $n$  y  $m$  son el número de polos finitos y ceros de  $G(s)H(s)$ , respectivamente. Para  $K \leq 0$  (CRL), los ángulos de las asíntotas son:

$$\left| \theta_i = \frac{2i}{|n - m|} \times 180^\circ \quad n \neq m \right. \quad (8-34)$$

donde  $i = 0, 1, 2, \dots, |n - m| - 1$ .

### 8-3-5 Intersección de las asíntotas (centroide)

*La intersección de las  $2|n - m|$  asíntotas del lugar geométrico de las raíces cae en el eje real del plano  $s$  como:*

$$\left| \sigma_1 = \frac{\sum \text{polos finitos de } G(s)H(s) - \sum \text{ceros finitos de } G(s)H(s)}{n - m} \right. \quad (8-35)$$

en donde  $n$  es el número de polos finitos y  $m$  es el número de ceros finitos de  $G(s)H(s)$ , respectivamente. La intersección de las asíntotas  $\sigma_1$  representa el centro de gravedad del lugar geométrico de las raíces, y siempre es un número real.

Ya que los polos y ceros de  $G(s)H(s)$  ya sea reales o en pares complejos conjugados, las partes imaginarias en el numerador de la ecuación (8-35) siempre se cancelan con otras. Por tanto, en la ecuación (8-35), los términos de la sumatoria se reemplazan por las partes reales de los polos y ceros de  $G(s)H(s)$  respectivamente. Esto es:

$$\left| \sigma_1 = \frac{\sum \text{partes reales de polos de } G(s)H(s) - \sum \text{partes reales de ceros de } G(s)H(s)}{n - m} \right. \quad (8-36)$$

**Ejemplo**  
**8-5**

Considere la función de transferencia:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)} \quad (8-37)$$

que corresponde a la ecuación característica:

$$s(s+4)(s^2+2s+2) + K(s+1) = 0 \quad (8-38)$$

La configuración de polos y ceros de  $G(s)H(s)$  se muestra en la Fig. 8-5. De las seis propiedades del lugar geométrico de las raíces discutidas hasta ahora, la siguiente información concerniente al lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-38), cuando  $K$  varía desde  $-\infty$  a  $\infty$  se obtiene:

1.  $K = 0$ : Los puntos en los que  $K = 0$  sobre el lugar geométrico de las raíces son los polos de  $G(s)H(s)$ :  $s = 0, -4, -1+j, y -1-j$ .
2.  $K = \pm\infty$ : Los puntos en donde  $K = \pm\infty$  sobre el lugar geométrico de las raíces son los ceros de  $G(s)H(s)$ :  $s = -1, \infty, \infty, e \infty$ .
3. Hay cuatro ramas del lugar geométrico de las raíces, ya que las ecuaciones (8-37) y (8-38) son de cuarto orden.
4. Los lugares geométricos de las raíces son simétricos con respecto al eje real.
5. Ya que el número de polos finitos de  $G(s)H(s)$  excede el número de ceros finitos de  $G(s)H(s)$  por tres ( $n - m = 4 - 1 = 3$ ), cuando  $K = \pm\infty$ , el lugar geométrico de las raíces se aproxima a

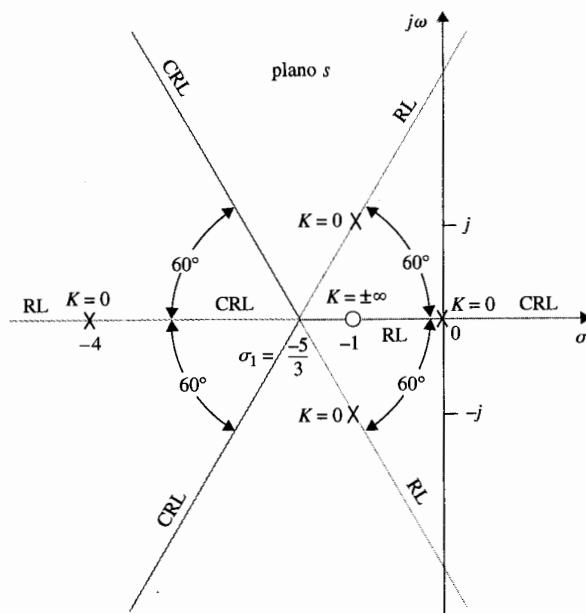


Figura 8-5 Asintotas del lugar geométrico de las raíces de  $s(s+4)$   
 $(s^2+2s+2) + K(s+1) = 0$

$s = \infty$  a lo largo de seis asíntotas. Los ángulos de las asíntotas del RL, ( $K \geq 0$ ) se dan en la ecuación (8-33).

$$\begin{aligned} i = 0: \quad \theta_0 &= \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ \\ i = 1: \quad \theta_1 &= \frac{540^\circ}{3} = 180^\circ \\ i = 2: \quad \theta_2 &= \frac{900^\circ}{3} = 300^\circ \end{aligned}$$

Los ángulos de las asíntotas del CRL ( $K \leq 0$ ) están dados por la ecuación (8-34) y se calculan en  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  y  $240^\circ$ .

6. La intersección de las asíntotas está dada por la ecuación (8-36):

$$\sigma_1 = \frac{(-4 - 1 - 1) - (-1)}{4 - 1} = -\frac{5}{3} \quad (8-39)$$

Las asíntotas del lugar geométrico de las raíces se muestran en la Fig. 8-5. ▲

### Ejemplo 8-6

Como una ilustración posterior, las asíntotas del lugar geométrico de las raíces de varias ecuaciones se muestran en la Fig. 8-6. ▲

#### 8-3-6 Lugar geométrico de las raíces sobre el eje real.

▲ El eje real completo del plano  $s$  está ocupado por el lugar geométrico de las raíces.

- El eje real completo del plano  $s$  está ocupado por el lugar geométrico de las raíces (es decir, ya sea el RL o el CRL).*
1. *RL: sobre una sección dada del eje real, RL se encuentra en la sección sólo si el número total de polos y ceros de  $G(s)H(s)$  a la derecha de la sección es impar.*
  2. *CRL: sobre una sección dada del eje real, el CRL se encuentra en la sección sólo si el número total de polos y ceros reales de  $G(s)H(s)$  a la derecha de la sección es par. Los polos y ceros complejos de  $G(s)H(s)$  no afectan el tipo del lugar geométrico de las raíces encontrados sobre el eje real.*

Estas propiedades se basan en las siguientes observaciones:

1. En cualquier punto  $s_i$  sobre el eje real, los ángulos de los vectores dibujados desde los polos y ceros complejos de  $G(s)H(s)$  se suman y su suma es igual a cero. Por tanto, sólo los ceros y polos reales de  $G(s)H(s)$  contribuyen a la relación angular de las ecuaciones (8-18) y (8-19).

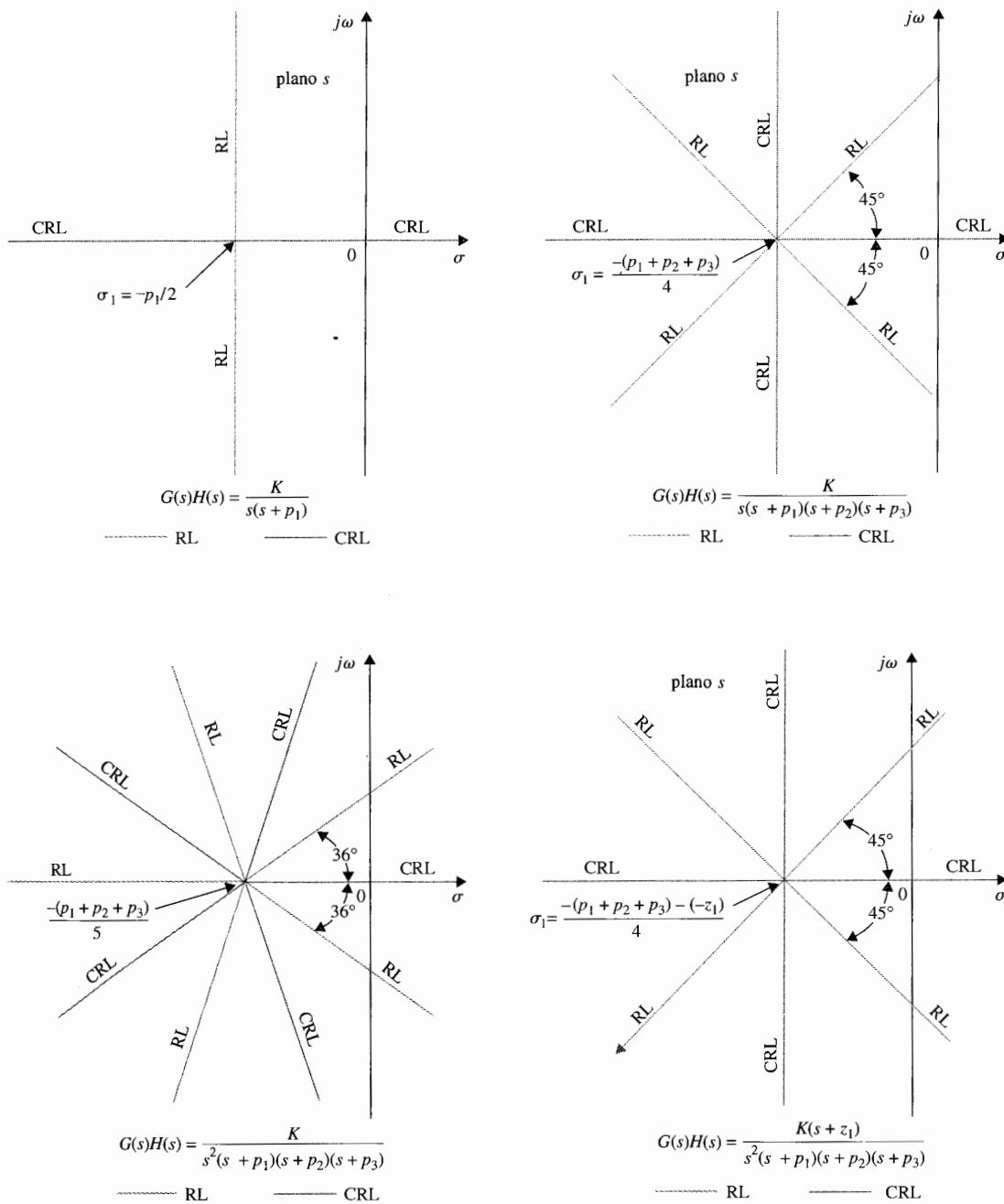


Figura 8-6 Ejemplos de las asíntotas del lugar geométrico de las raíces (RL y CRL).

2. Sólo los ceros y polos reales de  $G(s)H(s)$  que caen a la derecha del punto  $s_1$  contribuyen en las ecuaciones (8-18) y (8-19), ya que los polos y ceros reales que caen a la izquierda del punto contribuyen con cero grados a las ecuaciones (8-18) y (8-19).
3. Cada polo real de  $G(s)H(s)$  a la derecha de  $s_1$  contribuye con  $-180^\circ$ , y cada cero real de  $G(s)H(s)$  a la derecha de  $s_1$  contribuye con  $+180^\circ$  a las ecuaciones (8-18) y (8-19).

La última observación muestra que para que  $s_1$  sea un punto sobre el RL, debe haber un número **impar** de polos y ceros de  $G(s)H(s)$  a la derecha del punto. Para que  $s_1$  sea un punto sobre el CRL, el número total de ceros y polos de  $G(s)H(s)$  a la derecha del punto debe ser **par**. El ejemplo siguiente ilustra cómo determinar las propiedades del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real del plano  $s$ .

### Ejemplo 8-7

El lugar geométrico de las raíces sobre el eje real para la configuración de dos polos y ceros de  $G(s)H(s)$  se muestra en la Fig. 8-7. Observe que el eje real completo está ocupado ya sea por el RL o el CRL. ▲

#### 8-3-7 Ángulos de salida y ángulos de llegada del lugar geométrico de las raíces

*El ángulo de salida o llegada de un lugar geométrico de las raíces a un cero o polo de  $G(s)H(s)$ , respectivamente, denotan el ángulo de la tangente del lugar geométrico cerca del punto.*

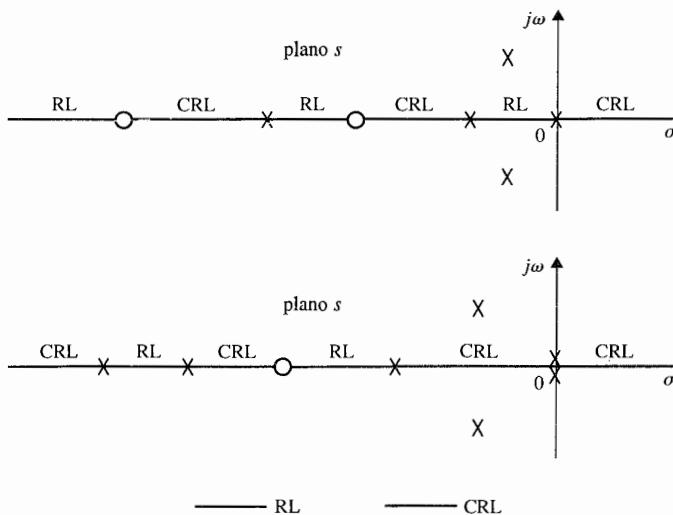


Figura 8-7 Propiedades del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real.

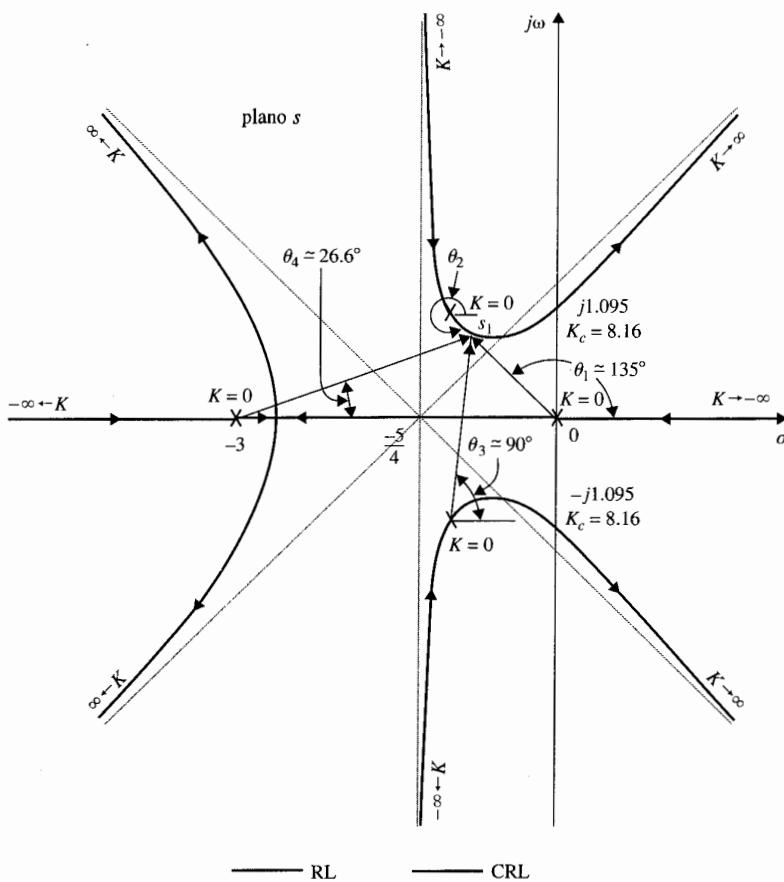
Los ángulos de salida y llegada se determinan utilizando la ecuación (8-18) para RL y la ecuación (8-19) para CRL. Los detalles se ilustran en el ejemplo siguiente.

### Ejemplo 8-8

Para el diagrama del lugar geométrico de las raíces que se muestra en la Fig. 8-8, el lugar geométrico de las raíces cerca del polo  $s = -1 + j$  puede ser dibujado con mayor exactitud conociendo el ángulo en donde el lugar geométrico de las raíces deja al polo. Como se muestra en la Fig. 8-8, el ángulo de salida del lugar geométrico de las raíces en  $s = -1 + j$  está representado por  $\theta_2$ , medida con respecto al eje real. Si se asigna  $s_1$  al punto sobre el RL que deja al polo en  $-1 + j$  y que está muy cerca al polo. Entonces  $s_1$  debe satisfacer la ecuación (8-18). Por tanto:

$$\angle G(s_1)H(s_1) = -(\theta_1' + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = (2i + 1)180^\circ \quad (8-40)$$

en donde  $i$  es cualquier entero. Ya que se supone que  $s_1$  está muy cerca al polo en  $-1 + j$ , los ángulos



**Figura 8-8** Lugar geométrico de las raíces de  $s(s + 3)(s^2 + 2s + 2) + K = 0$  para ilustrar los ángulos de salida y llegada.

de los vectores dibujados desde los otros tres polos se aproximan al considerar que  $s_1$  está en  $-1 + j$ . De la Fig. 8-8, la ecuación (8-40) se escribe como:

$$-(135^\circ + \theta_2 + 90^\circ + 26.6^\circ) = (2i + 1)180^\circ \quad (8-41)$$

en donde  $\theta_2$  es el ángulo desconocido. En este caso, se puede hacer que  $i$  sea  $-1$ , y el resultado para  $\theta_2$  es  $-71.6^\circ$ .

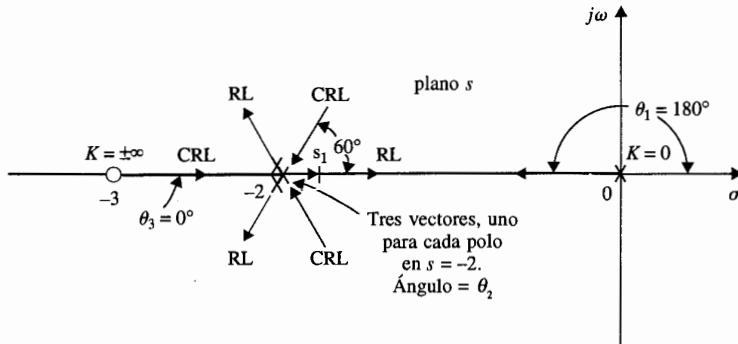
Cuando el ángulo de salida o llegada de RL a un polo o cero simple de  $G(s)H(s)$  se determina, el ángulo de llegada o salida del CRL al mismo punto, difiere por un ángulo de  $180^\circ$ , y la ecuación (8-19) se utiliza. La Fig. 8-8 muestra que el ángulo de llegada del CRL a  $-1 + j$  es  $108.4^\circ$ , que es  $180^\circ - 71.6^\circ$ . En forma similar, para el diagrama del lugar geométrico de las raíces en la Fig. 8-8, se puede mostrar que el CRL llega al polo en  $s = -3$  con un ángulo de  $180^\circ$ , y el RL deja al mismo polo en  $0^\circ$ . Para el polo en  $s = 0$ , el ángulo de llegada del CRL es  $0^\circ$ , mientras que el ángulo de salida del RL es  $180^\circ$ . Estos ángulos también se determinan el conocimiento del tipo de lugar geométrico de las raíces sobre las secciones del eje real separadas por los polos y ceros de  $G(s)H(s)$ . Ya que el ángulo total de los vectores dibujados desde los polos y ceros complejos conjugados a cualquier punto del eje real se suman para ser cero, los ángulos de llegada y salida del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real no son afectados por los polos y ceros complejos de  $G(s)H(s)$ . ▲

### Ejemplo 8-9

En este ejemplo se examinan los ángulos de salida y llegada del lugar geométrico de las raíces en polos y ceros de orden múltiple de  $G(s)H(s)$ . Considere que  $G(s)H(s)$  tiene un polo de orden múltiple (tercer orden) sobre el eje real, como se muestra en la Fig. 8-9. Sólo se muestran los polos y ceros reales de  $G(s)H(s)$ , ya que los complejos no afectan los tipos de ángulos de llegada y salida del lugar geométrico de las raíces sobre el eje real. Para el polo de tercer orden en  $s = -2$ , hay tres RL de salida y tres CRL de llegada en cada punto. Para encontrar los ángulos de salida del RL, se asigna un punto  $s_1$  en uno de los RL cerca de  $s = -2$ , y se aplica la ecuación (8-18). El resultado es:

$$-\theta_1 - 3\theta_2 + \theta_3 = (2i + 1)180^\circ \quad (8-42)$$

en donde  $\theta_1$  y  $\theta_3$  denotan los ángulos de los vectores dibujados desde el polo en  $0$  y el cero en  $-3$ , respectivamente, a  $s_1$ . El ángulo  $\theta_2$  se multiplica por 3, ya que hay tres polos en  $s = -2$ , por tanto hay tres



**Figura 8-9** Ángulos de salida y llegada en un polo de tercer orden.

vectores dibujados desde  $-2$  a  $s_1$ . Haciendo  $i$  igual a cero en la ecuación (8-42), y si  $\theta_1 = 180^\circ$ ,  $\theta_3 = 0^\circ$ , se tiene que  $\theta_2 = 0^\circ$ , el cual es el ángulo de salida del RL que está entre  $s = 0$  y  $s = -2$ . Para los ángulos de salida de los otros dos RLs, se tiene  $i = 1$  e  $i = 2$ , sucesivamente en la ecuación (8-42), y se tiene que  $\theta_2 = 120^\circ$  y  $-120^\circ$ . En forma similar, para los tres CRL que llegan a  $s = -2$ , la ecuación (8-19) se emplea y los ángulos de llegada se encuentran como  $60^\circ$ ,  $180^\circ$ , y  $-60^\circ$ . ▲

### 8-3-8 Intersección del lugar geométrico de las raíces con el eje imaginario

- ▲ El criterio de Routh-Hurwitz puede ser utilizado para encontrar las intersecciones en el lugar geométrico de las raíces con el eje imaginario.

Los puntos donde el lugar geométrico de las raíces interceptan con el eje imaginario del plano  $s$ , si existen, y los valores correspondientes de  $K$  se pueden determinar por medio del criterio de Routh-Hurwitz. Para situaciones complejas cuando el lugar geométrico de las raíces tiene varias ramas de intersección con el eje imaginario, la intersección y los valores críticos de  $K$  se pueden determinar con la ayuda del programa de computadora del lugar geométrico de las raíces. El método del diagrama de Bode en el Cap. 9, asociado con la respuesta en frecuencia se puede emplear para este propósito.

#### Ejemplo 8-10

El lugar geométrico de las raíces que se muestra en la Fig. 8-8 es para la ecuación:

$$s(s + 3)(s^2 + 2s + 2) + K = 0 \quad (8-43)$$

La Fig. 8-8 muestra la intersección de RL con el eje  $j\omega$  en dos puntos. Al aplicar el criterio de Routh-Hurwitz a la ecuación (8-43), y resolviendo la ecuación auxiliar, se tiene el valor crítico de  $K$  para la estabilidad en  $K = 8.16$ , y los puntos de cruce correspondientes en el eje  $j\omega$  están en  $\pm j1.095$ .

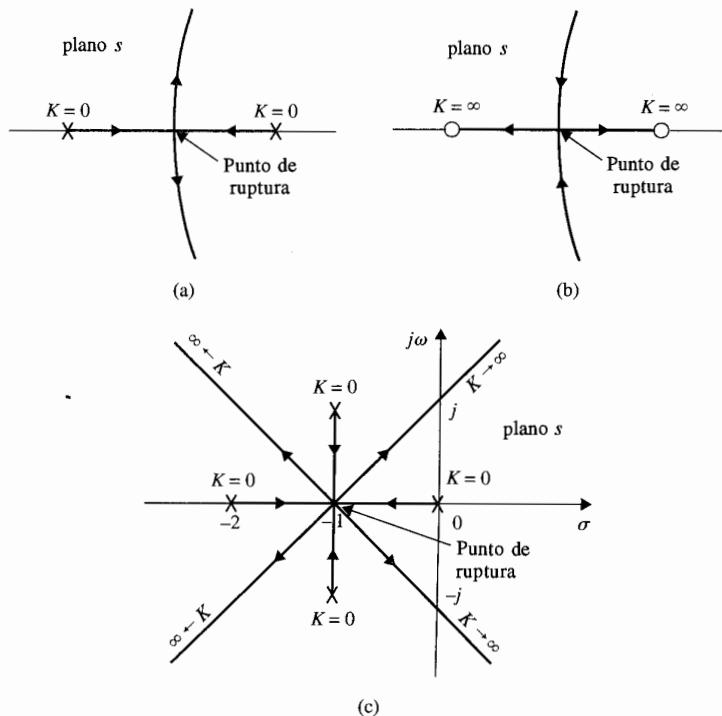
### 8-3-9 Puntos de ruptura (puntos de silla) sobre el lugar geométrico de las raíces

*Los puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces de una ecuación corresponden a raíces de orden múltiple de la ecuación.*

- ▲ Una gráfica del lugar geométrico de las raíces puede tener más de un punto de ruptura.
- ▲ Los puntos de ruptura pueden ser complejos conjugados en el plano  $s$ .

La Fig. 8-10(a) ilustra un caso en el que dos ramas del lugar geométrico de las raíces se juntan en un punto de ruptura sobre el eje real y después parten desde el eje en direcciones opuestas. En este caso el punto de ruptura representa una raíz doble de la ecuación cuando se asigna el valor de  $K$  correspondiente al punto. La Fig. 8-10(b) muestra otra situación como cuando dos lugares geométricos de las raíces de polos complejos conjugados se aproximan al eje real, se encuentran en un punto de ruptura y después parten en direcciones opuestas a lo largo del eje real. En general un punto de ruptura puede involucrar más de dos lugares geométricos de las raíces. La Fig. 8-10(c) ilustra una situación cuando el punto de ruptura representa una raíz de cuarto orden.

Un diagrama del lugar geométrico de las raíces puede tener por supuesto, más de un punto de ruptura, sin embargo los puntos de ruptura no siempre necesitan estar sobre el eje real. Debido a la simetría conjugada del lugar geométrico de las raíces, los puntos de ruptura



**Figura 8-10** Ejemplos de puntos de ruptura sobre el eje real en el plano  $s$ .

que no están sobre el eje real deben estar en pares complejos conjugados. Refiérase a la Fig. 8-13 para un ejemplo del lugar geométrico de las raíces con puntos de ruptura complejos. Las propiedades de los puntos de ruptura del lugar geométrico de las raíces se dan a continuación.

*Los puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces de  $1 + KG_1(s)H_1(s) = 0$  deben satisfacer:*

$$\boxed{\frac{dG_1(s)H_1(s)}{ds} = 0} \quad (8-44)$$

Es importante apuntar que la condición para un punto de ruptura dada en la ecuación (8-44) es *necesaria* pero *no suficiente*. En otras palabras, todos los puntos de ruptura sobre RL y CRL deben satisfacer la ecuación (8-44), pero no todas las soluciones de la ecuación (8-44) son puntos de ruptura. Para que sea un punto de ruptura, la solución de la ecuación (8-44) debe satisfacer la ecuación  $1 + KG_1(s)H_1(s) = 0$ ; esto es, deben ser un punto del lugar geométrico

geométrico de las raíces para algún valor real de  $K$ . En general, las conclusiones siguientes se pueden hacer al observar las soluciones de la ecuación (8-44);

1. Todas las soluciones *reales* de la ecuación (8-44) son puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces (RL y CRL), ya que el eje real entero del plano  $s$  está ocupado por el lugar geométrico de las raíces.
2. Las soluciones complejas conjugadas de la ecuación (8-44) son puntos de ruptura solo si satisfacen la ecuación característica o son puntos sobre el lugar geométrico de las raíces.
3. Ya que la condición del lugar geométrico de las raíces es

$$K = -\frac{1}{G_1(s)H_1(s)} \quad (8-45)$$

al tomar la derivada en ambos miembros de la ecuación con respecto a  $s$  se tiene

$$\frac{dK}{ds} = \frac{dG_1(s)H_1(s)/ds}{[G_1(s)H_1(s)]^2} \quad (8-46)$$

Por tanto, la condición de punto de ruptura también se escribe como:

$$\boxed{\frac{dK}{ds} = 0} \quad (8-47)$$

en donde  $K$  se expresa como en la ecuación (8-45).

### Ángulo de llegada y de salida del lugar geométrico de las raíces en los puntos de ruptura

Los ángulos en los cuales el lugar geométrico de las raíces llega o sale desde un punto de ruptura depende del número de lugar geométrico que están involucrados en el punto. Por ejemplo, el lugar geométrico de las raíces que se muestra en la Fig. 8-10(a) y (b) todos llegan y se van en  $90^\circ$ , mientras que en la Fig. 8-10(c), los cuatro lugares geométricos de las raíces llegan y se van con ángulos de  $45^\circ$ . En general,

*n lugares geométricos de las raíces (RL o CRL) llegan o se van de un punto de ruptura con  $180/n$  grados*

Muchos programas de computadora para el lugar geométrico de las raíces tienen funciones que obtendrán los puntos de ruptura que es una de las propiedades del lugar geométrico de las raíces que es más tediosa de hacer en forma manual.

**Ejemplo**  
**8-11**

Considere la ecuación de segundo orden:

$$s(s + 2) + K(s + 4) = 0 \quad (8-48)$$

Con base en algunas propiedades del lugar geométrico de las raíces descritas anteriormente, el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-48) se bosqueja como se muestra en la Fig. 8-11 para  $-\infty < K < \infty$ . Se puede probar que la porción compleja del lugar geométrico de las raíces es un círculo. Los dos puntos de ruptura están sobre el eje real, uno entre cero y  $-2$  y el otro entre  $-4$  y  $-\infty$ . De la ecuación (8-48) se tiene:

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{s+4}{s(s+2)} \quad (8-49)$$

Al aplicar la ecuación (8-44) los puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces deberán satisfacer:

$$\frac{dG_1(s)H_1(s)}{ds} = \frac{s(s+2) - 2(s+1)(s+4)}{s^2(s+2)^2} = 0 \quad (8-50)$$

o

$$s^2 + 8s + 8 = 0 \quad (8-51)$$

Al resolver la ecuación (8-51), se pueden encontrar los dos puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces en  $s = -1.172$  y  $-6.828$ . La Fig. 8-11 muestra que los dos puntos de ruptura están sobre RL. ▲

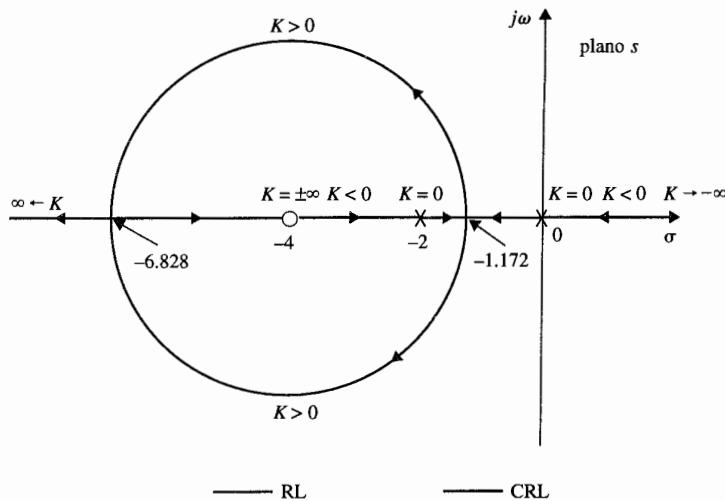


Figura 8-11 Lugar geométrico de las raíces de  $s(s + 2) + K(s + 4) = 0$

**Ejemplo  
8-12**

Considere la ecuación:

$$s^2 + 2s + 2 + K(s + 2) = 0 \quad (8-52)$$

La  $G(s)H(s)$  equivalente se obtiene al dividir ambos miembros de la ecuación (8-52) entre los términos que no contienen a  $K$ . Se tiene:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 2)}{s^2 + 2s + 2} \quad (8-53)$$

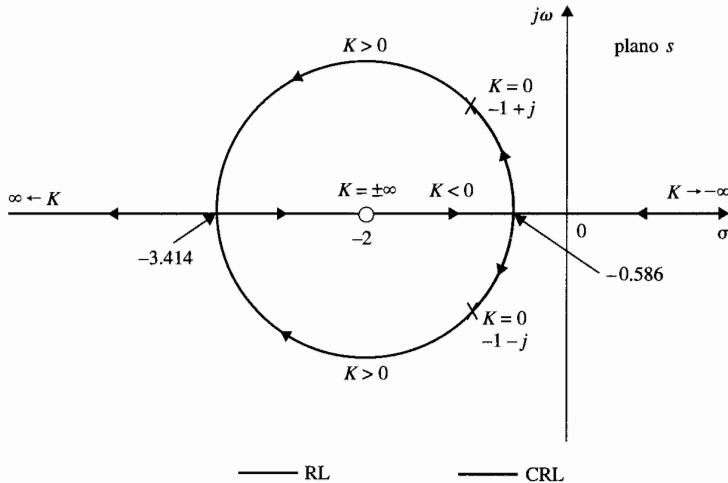
Con base en los polos y ceros de  $G(s)H(s)$ , el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-52) se dibuja como se muestra en la Fig. 8-12. La gráfica muestra que RL y CRL, cada uno tiene un punto de ruptura. Estos puntos de ruptura se determinan de:

$$\frac{dG_1(s)H_1(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{s+2}{s^2+2s+2} \right) = \frac{s^2+2s+2 - 2(s+1)(s+2)}{(s^2+2s+2)^2} = 0 \quad (8-54)$$

o bien:

$$s^2 + 4s + 2 = 0 \quad (8-55)$$

La solución a esta ecuación da los puntos de ruptura en  $s = -0.586$ , que está sobre el CRL, y  $s = -3.414$ , que es un punto de ruptura del RL. ▲



**Figura 8-12** Lugar geométrico de las raíces de  $s^2 + 2s + 2 + K(s + 2) = 0$ .

**Ejemplo  
8-13**

La Fig. 8-13 muestra el lugar geométrico de las raíces de la ecuación:

$$s(s + 4)(s^2 + 4s + 20) + K = 0 \quad (8-56)$$

Al dividir ambos miembros de la última ecuación entre los términos que no contienen a  $K$ , se tiene:

$$1 + KG_1(s)H_1(s) = 1 + \frac{K}{s(s + 4)(s^2 + 4s + 20)} = 0 \quad (8-57)$$

Ya que los polos de  $G_1(s)H_1(s)$  son simétricos alrededor del eje  $\sigma = -2$  y  $\omega = 0$  en el plano  $s$ , el lugar geométrico de las raíces de la ecuación es simétrico con respecto a estos dos ejes.

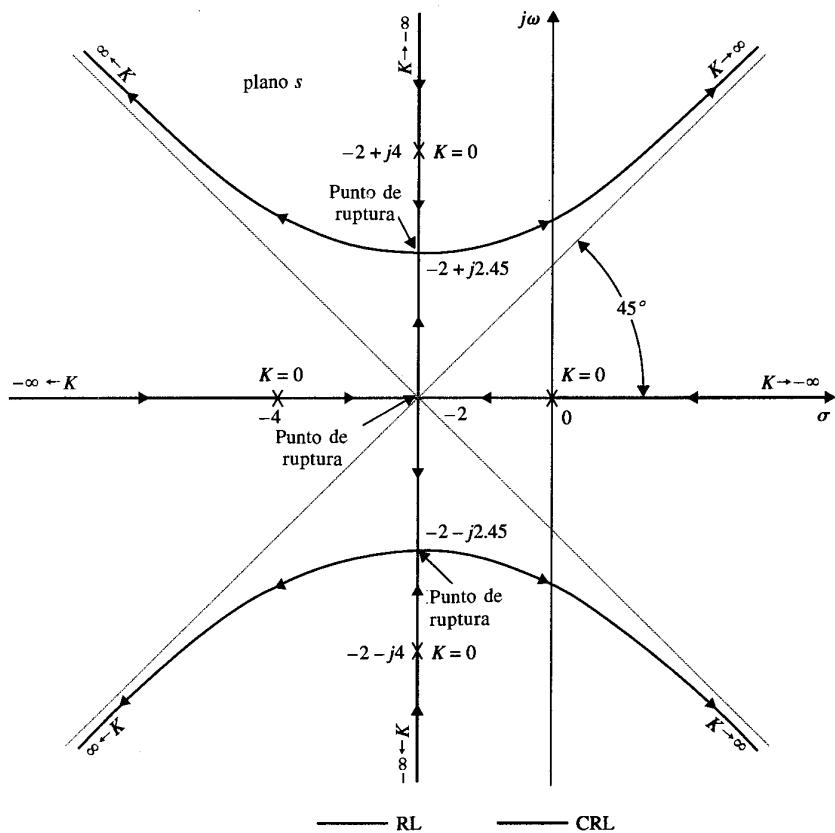


Figura 8-13 Lugar geométrico de las raíces de  $s(s + 4)(s^2 + 4s + 20) + K = 0$ .

Al tomar la derivada de  $G_1(s)H_1(s)$  con respecto a  $s$ , se tiene:

$$\frac{dG_1(s)H_1(s)}{ds} = -\frac{4s^3 + 24s^2 + 72s + 80}{[s(s+4)(s^2 + 4s + 20)]^2} = 0 \quad (8-58)$$

o

$$s^3 + 6s^2 + 18s + 20 = 0 \quad (8-59)$$

Las soluciones de estas últimas ecuaciones son  $s = -2, -2 + j2.45$ , y  $-2 - j2.45$ . En este caso, la Fig. 8-13 muestra que todas las soluciones de la ecuación (8-59) son puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces y dos de estos puntos son complejos. ▲

### Ejemplo 8-14

En este ejemplo se muestra que no todas las soluciones de la ecuación (8-44) son puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces. El lugar geométrico de las raíces de la ecuación:

$$s(s^2 + 2s + 2) + K = 0 \quad (8-60)$$

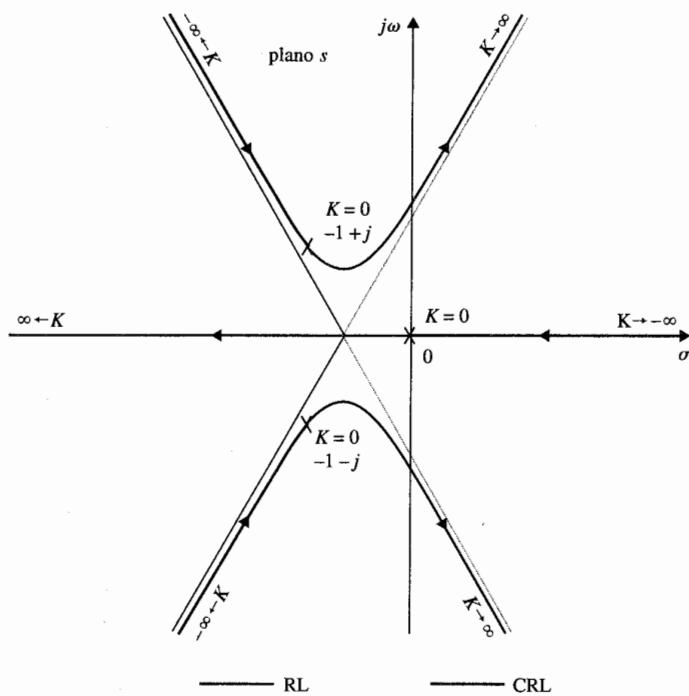


Figura 8-14 Lugar geométrico de las raíces de  $s(s^2 + 2s + 2) + K = 0$

se muestra en la Fig. 8-14. El lugar geométrico de las raíces muestra que tanto el RL como el CRL no tienen ningún punto de ruptura en este caso. Sin embargo, al escribir la ecuación (8-60) como:

$$1 + KG_1(s)H_1(s) = 1 + \frac{K}{s(s^2 + 2s + 2)} = 0 \quad (8-61)$$

y al aplicar la ecuación (8-44) se tiene la ecuación para los puntos de ruptura:

$$3s^2 + 4s + 2 = 0 \quad (8-62)$$

Las raíces de la ecuación (8-62) son  $s = -0.667 + j0.471$  y  $-0.667 - j0.471$ . Estas dos raíces no son puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces, ya que no satisfacen la ecuación (8-60) para algún valor real de  $K$ . ▲

### 8-3-10 Sensibilidad de las raíces [20 – 22]

▲ La sensibilidad en la raíz en los puntos de ruptura es infinita.

La condición sobre los puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces en la ecuación (8-47) nos lleva a la **sensibilidad de las raíces** de la ecuación característica. La sensibilidad de las raíces de la ecuación característica cuando  $K$  varía se define como la **sensibilidad de las raíces**, y está dada por:

$$\left| S_K = \frac{ds/s}{dK/K} = \frac{K}{s} \frac{ds}{dK} \right| \quad (8-63)$$

▲ Desde el punto de vista de la sensibilidad de las raíces un sistema no debe operar en los puntos de ruptura.

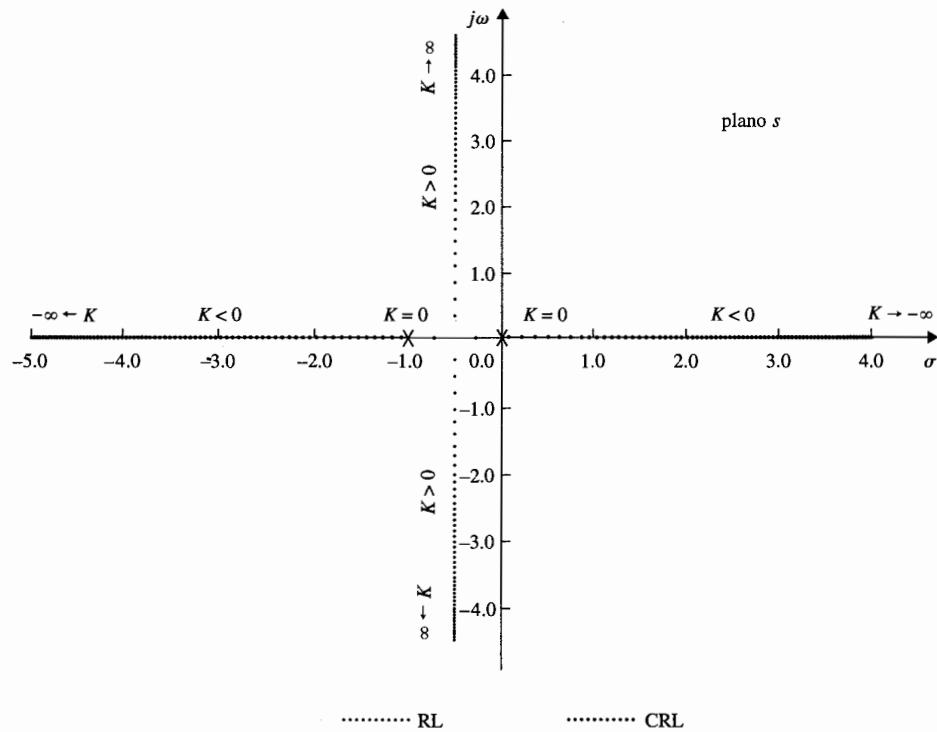
Por tanto, la ecuación (8-63) muestra que la *sensibilidad de las raíces de los puntos de ruptura es infinita*. Desde el punto de vista de sensibilidad de las raíces, debemos evitar seleccionar los valores de  $K$  que operan sobre puntos de ruptura, que corresponden a raíces de orden múltiple de la ecuación característica. En el diseño de sistemas de control, no sólo es importante llegar a sistemas que tengan una característica deseada, sino también es importante que el sistema deba ser insensible a la variación de los parámetros. Por ejemplo, un sistema que pueda desarrollar satisfactoriamente con una cierta  $K$ , pero que si es muy sensible a la variación de  $K$  pueda caer en la región indeseable o volverse inestable si  $K$  varía sólo en una pequeña cantidad. En terminología formal de sistema de control, un sistema que es insensible a la variación de los parámetros se llama un **sistema robusto**. Por tanto, el estudio del lugar geométrico de las raíces de sistemas de control debe involucrar no sólo la forma del lugar geométrico de las raíces con respecto al parámetro variable de  $K$ , sino también como las raíces a lo largo del lugar geométrico varían con la variación de  $K$ .

La Fig. 8-15 muestra el diagrama del lugar geométrico de las raíces de:

$$s(s + 1) + K = 0 \quad (8-64)$$

cuando  $K$  se incrementa uniformemente sobre 100 valores desde -20 a 20. El lugar geométrico de las raíces fue calculado con el programa ROOTLOCI de ACSP y dibujado en forma digital. Cada punto

### Ejemplo 8-15



**Figura 8-15** Lugar geométrico de las raíces de  $s(s + 1) + K = 0$  que muestra la sensibilidad de la raíz con respecto a  $K$ .

sobre la gráfica del lugar geométrico de las raíces representa una raíz para un valor distinto de  $K$ . Por tanto, se ve que la sensibilidad de las raíces es baja cuando la magnitud de  $K$  es grande. Cuando la magnitud de  $K$  se decrementa, los movimientos de las raíces se vuelven más grandes para los mismos incrementos en  $K$ . En el punto de ruptura,  $s = -0.5$ , la sensibilidad de las raíces es infinita.

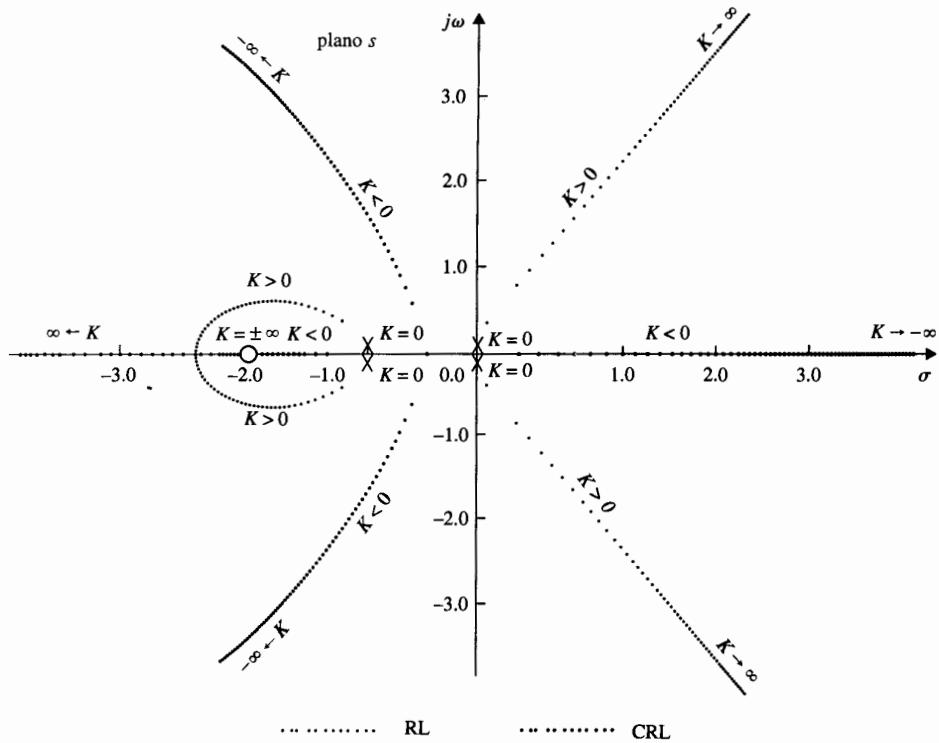
La Fig. 8-16 muestra el lugar geométrico de las raíces de:

$$s^2(s + 1)^2 + K(s + 2) = 0 \quad (8-65)$$

con  $K$  incrementada uniformemente por 200 valores desde -40 a 50. Otra vez el lugar geométrico muestra que la sensibilidad de las raíces incrementa cuando las raíces se aproximan a los puntos de ruptura en  $s = 0, -0.543, -1.0$ , y  $-2.457$ .

Se puede investigar la sensibilidad de las raíces posteriormente mediante el uso de la expresión en la ecuación (8-47). Para la ecuación de segundo orden en la ecuación (8-64):

$$\frac{dK}{ds} = -2s - 1 \quad (8-66)$$



**Figura 8-16** Lugar geométrico de las raíces de  $s^2(s+1) + K(s+2) = 0$ , que muestra la sensibilidad de la raíz con respecto a  $K$ .

De la ecuación (8-64),  $K = -s(s+1)$ ; la sensibilidad de las raíces se convierte en:

$$S_K = \frac{ds}{dK} \frac{K}{s} = \frac{s+1}{2s+1} \quad (8-67)$$

en donde  $s = \sigma + j\omega$ , y  $s$  debe tomar valores sobre el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-64). Para las raíces sobre el eje real,  $\omega = 0$ . Por tanto la ecuación (8-67) lleva a:

$$|S_K|_{\omega=0} = \left| \frac{\sigma+1}{2\sigma+1} \right| \quad (8-68)$$

Cuando las dos raíces son complejas,  $\sigma = -0.5$  para todos los valores de  $\omega$ . La ecuación (8-67) da:

$$|S_K|_{\sigma=-0.5} = \left( \frac{0.25 + \omega^2}{4\omega^2} \right)^{1/2} \quad (8-69)$$

De la ecuación (8-69) es claro que la sensibilidad de las raíces en pares complejos conjugados es la misma, ya que  $\omega$  aparece sólo como  $\omega^2$  en la ecuación. La ecuación (8-68) indica que las sensibilidades de las dos raíces reales son diferentes para un valor de  $K$  dado. La tabla 8-1 da las magnitudes de las sensibilidades de las dos raíces de la ecuación (8-64) para diferentes valores de  $K$ , donde  $|S_{K1}|$  denota la sensibilidad de la primera raíz y  $|S_{K2}|$  denota lo mismo para la segunda raíz. Estos valores indican que aunque las dos raíces reales alcanzan  $\sigma = -0.5$  para el mismo valor de  $K = 0.25$ , y cada raíz viaja la misma distancia desde  $s = 0$  y  $s = -1$ , respectivamente, la sensibilidad de las dos raíces reales no es la misma.

### 8-3-11 Cálculo de $K$ sobre el lugar geométrico de las raíces

Una vez que se construye el lugar geométrico de las raíces, los valores de  $K$  en cualquier punto  $s_1$  sobre el lugar geométrico de las raíces se pueden determinar mediante el uso de la ecuación (8-20). En forma gráfica la magnitud de  $K$  se puede escribir como:

$$|K| = \frac{\prod \text{longitudes de los vectores dibujados desde los polos de } G_1(s)H_1(s) \text{ a } s_1}{\prod \text{longitudes de los vectores dibujados desde los ceros de } G_1(s)H_1(s) \text{ a } s_1} \quad (8-70)$$

#### Ejemplo 8-16

Una ilustración sobre cómo determinar los valores de  $K$  sobre el lugar geométrico de las raíces, el lugar geométrico de las raíces de la ecuación:

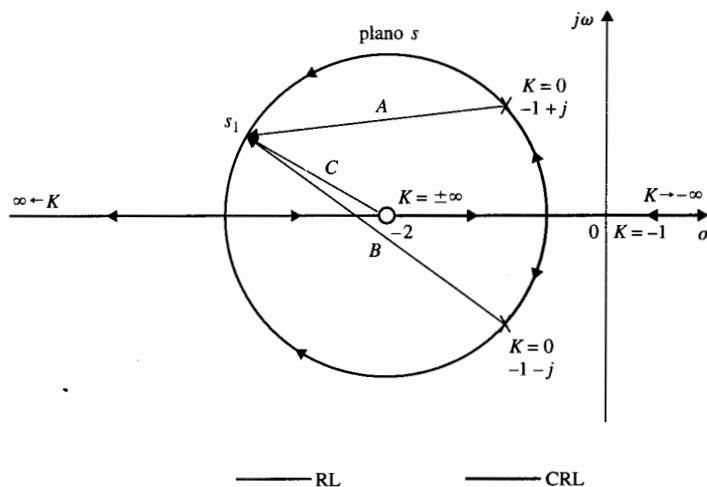
$$s^2 + 2s + 2 + K(s + 2) = 0 \quad (8-71)$$

como se muestra en la Fig. 8-17. El valor de  $K$  en el punto  $s_1$  está dado por:

$$K = \frac{A \times B}{C} \quad (8-72)$$

**Tabla 8-1 |Sensibilidad de las raíces**

<b><math>K</math></b>	<b>Raíz 1</b>	<b><math> S_{K1} </math></b>	<b>Raíz 2</b>	<b><math> S_{K2} </math></b>
0	0	1.000	-1.000	0
0.04	-0.042	1.045	-0.958	0.454
0.16	-0.200	1.333	-0.800	0.333
0.24	-0.400	3.000	-0.600	2.000
0.25	-0.500	$\infty$	-0.500	$\infty$
0.28	-0.5 + $j0.173$	1.527	-0.5 - $j0.173$	1.527
0.40	-0.5 + $j0.387$	0.817	-0.5 - $j0.387$	0.817
1.20	-0.5 + $j0.975$	0.562	-0.5 - $j0.975$	0.562
4.00	-0.5 + $j1.937$	0.516	-0.5 - $j1.937$	0.516
$\infty$	-0.5 + $j\infty$	0.500	-0.5 - $j\infty$	0.500



**Figura 8-17** Método gráfico para encontrar los valores de  $K$  sobre el lugar geométrico de las raíces.

donde  $A$  y  $B$  son longitudes de los vectores dibujados desde los polos de  $G(s)H(s) = K(s+2)/(s^2+2s+2)$  al punto  $s_1$ , y  $C$  es la longitud de los vectores dibujados desde el cero de  $G(s)H(s)$  a  $s_1$ . En este caso,  $s_1$  está sobre el RL, por lo que  $K$  es positiva. En general, el valor de  $K$  en los puntos donde el lugar geométrico de las raíces intersecta el eje imaginario se puede encontrar por el método descrito anteriormente. La Fig. 8-17 muestra que el valor de  $K$  en  $s = 0$  es  $-1$ . El método de la computadora y el criterio de Routh-Hurwitz son otras alternativas convenientes para encontrar los valores críticos de  $K$  para la estabilidad. ▲

En resumen, excepto para casos extremadamente complejos, las propiedades sobre el lugar geométrico de las raíces presentadas con anterioridad, se deben adecuar para hacer un bosquejo razonablemente exacto del diagrama del lugar geométrico de las raíces al graficar punto por punto. Los programas de computadora se pueden utilizar para resolver la localización exacta de las raíces, los puntos de ruptura y algún otro detalle específico del lugar geométrico de las raíces, incluyendo la gráfica final del mismo. Sin embargo, uno no puede confiar por completo en la solución por computadora, ya que los usuarios aún tienen que decidir en qué rango y la resolución de  $K$  para que el diagrama del lugar geométrico de las raíces aparezca en forma razonable. Para rápida referencia, las propiedades importantes descritas se resumen en la tabla 8-2.

El siguiente ejemplo ilustra la construcción del diagrama de lugar geométrico de las raíces en forma manual, paso por paso, empleando las propiedades del lugar geométrico de las raíces dadas en la tabla 8-2.

Consideré la ecuación:

### Ejemplo 8-17

$$s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2) + K(s+3) = 0 \quad (8-73)$$

Al dividir ambos miembros de la última ecuación entre los términos que no contienen a  $K$ , se tiene:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)} \quad (8-74)$$

Las siguientes propiedades del lugar geométrico de las raíces se determinan:

1. Los puntos en  $K = 0$  son los polos de  $G(s)H(s)$ :  $s = 0, -5, -6, -1 + j$ , y  $-1 - j$ .
2. Los puntos en  $K = \pm\infty$  son los ceros de  $G(s)H(s)$ :  $s = -3, \infty, \infty, \infty, \infty$ .
3. Hay cinco ramas separadas sobre el lugar geométrico de las raíces.
4. Los lugares geométricos de las raíces son simétricos con respecto al eje real del plano  $s$ .

**Tabla 8-2 Propiedades del lugar geométrico de las raíces de  $1 + KG_1(s)H_1(s) = 0$**

1. Los puntos en $K = 0$	Los puntos en $K = 0$ son en los polos en $G(s)H(s)$ , incluyendo aquellos en $s = \infty$ .
2. Los puntos en $K = \pm\infty$	Los puntos en $K = \pm\infty$ son los ceros de $G(s)H(s)$ , incluyendo aquellos en $s = \infty$ .
3. Número de los lugares geométricos de las raíces separados	El número total del lugar geométrico de las raíces es igual al orden de la ecuación $F(s) = 0$ .
4. Simetría del lugar geométrico de las raíces	Los lugares geométricos de las raíces son simétricos respecto a los ejes de simetría de la configuración de polos y ceros de $G(s)H(s)$ .
5. Asintotas del lugar geométrico de las raíces cuando $s \rightarrow \infty$	Para valores grandes de $s$ , el RL ( $K > 0$ ) son asintóticos o son asíntotas con ángulos dados por:

$$\theta_i = \frac{2i + 1}{|n - m|} \times 180^\circ$$

Para CRL ( $K < 0$ ),

$$\theta_i = \frac{2i}{|n - m|} \times 180^\circ$$

en donde:

$$i = 0, 1, 2, \dots, |n - m| - 1$$

$n$  = número de polos finitos de  $G(s)H(s)$

$m$  = número de ceros finitos de  $G(s)H(s)$

6. Intersección de las asíntotas:

- La intersección de las asíntotas cae solamente sobre el eje real en el plano  $s$ .
- El punto de intersección de las asíntotas está dado por:

$$\sigma_1 = \frac{\Sigma \text{ partes reales de polos de } G(s)H(s) - \Sigma \text{ partes reales de ceros de } G(s)H(s)}{|n - m|}$$

**Tabla 8-2 Continuación**

7. Lugar geométrico de las raíces sobre el eje real	RL ( $K > 0$ ) se encuentran en una sección del eje real sólo si el número total de polos y ceros reales de $G(s)H(s)$ a la <b>derecha</b> de la sección es <b>impar</b> . Si el número total de polos reales y ceros a la derecha de una sección dada es <b>par</b> , se encuentra CRL ( $K < 0$ ).
8. Ángulos de salida	Los ángulos de salida o llegada del un lugar de raíces desde un polo o un cero de $G(s)H(s)$ se puede determinar al suponer un punto $s_1$ que está muy cercano al polo, o cero, y al aplicar la ecuación:
	$\begin{aligned}\angle G(s_1)H(s_1) &= \sum_{k=1}^m \angle(s_1 + z_k) - \sum_{j=1}^n \angle(s_1 + p_j) \\ &= 2(i+1)180^\circ \quad RL \\ &= 2i \times 180^\circ \quad CRL\end{aligned}$
9. Intersección del lugar geométrico de las raíces con el eje imaginario	en donde $i = 0, \pm 1, \pm 2$ . Los puntos de cruce del lugar geométrico de las raíces sobre el eje imaginario y el valor correspondiente de $K$ se pueden encontrar al emplear el criterio de Routh-Hurwitz.
10. Puntos de ruptura	Los puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces se determinan al encontrar las raíces de $dK/ds = 0$ , o $dG(s)H(s)/ds = 0$ . Estas son condiciones necesarias solamente
11. Cálculo de los valores de $K$ sobre el lugar geométrico de las raíces	El valor absoluto de $K$ en cualquier punto $s_1$ sobre el lugar geométrico de las raíces se determina de la ecuación:

$$|K| = \frac{1}{|G_1(s_1)H_1(s_1)|}$$

5. Ya que  $G(s)H(s)$  tiene cinco polos y un cero finito, cuatro de el RL y CRL se deben de aproximar al infinito a lo largo de las asíntotas. Los ángulos de las asíntotas de el RL están dadas por [Ecuación (8-33)]:

$$\theta_i = \frac{2i+1}{|n-m|} 180^\circ = \frac{2i+1}{|5-1|} 180^\circ \quad 0 \leq K < \infty \quad (8-75)$$

para  $i = 0, 1, 2, 3$ . Por tanto, los cuatro lugares geométricos de las raíces que se aproximan a infinito cuando  $K$  se aproxima a infinito deben aproximarse asintóticamente con ángulos de  $45^\circ, -45^\circ, 135^\circ$ , y  $-135^\circ$ , respectivamente. Los ángulos de las asíntotas de el CRL en el infinito están dados por [Ecuación (8-34)]:

$$\theta_i = \frac{2i}{|n-m|} 180^\circ = \frac{2i}{|5-1|} 180^\circ \quad -\infty < K \leq 0 \quad (8-76)$$

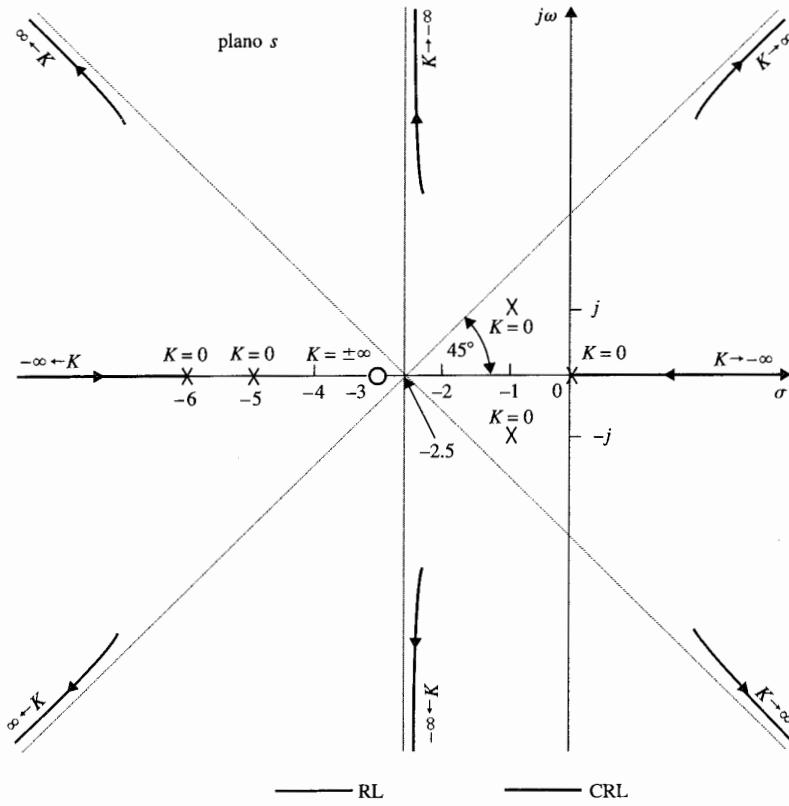
para  $i = 0, 1, 2, 3$ . Por tanto, cuando  $K$  se aproxima a  $-\infty$ , los cuatro CRL deben aproximarse a infinito a lo largo de las asíntotas con ángulos de  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ , y  $270^\circ$ .

6. La intersección de las asíntotas está dada por [Ecuación (8-36)]:

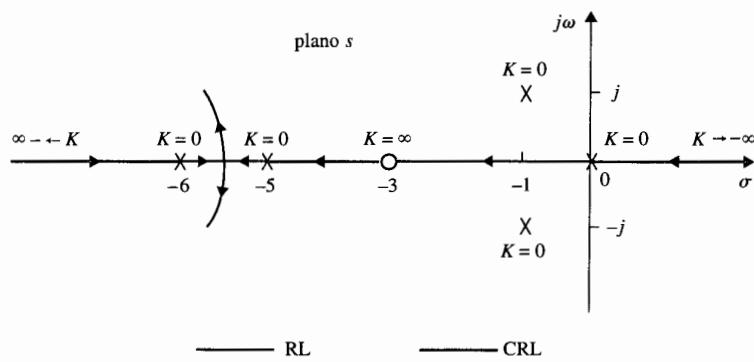
$$\sigma_1 = \frac{\sum (-5 - 6 - 1 - 1) - (-3)}{4} = -2.5 \quad (8-77)$$

Los resultados de estos seis pasos se ilustran en la Fig. 8-18. Se debe de señalar que en general las propiedades de las asíntotas no indican en qué lado cae el lugar geométrico de las raíces. Las asíntotas no indican nada más que el comportamiento del lugar geométrico de las raíces cuando  $s \rightarrow \infty$ . De hecho, el lugar geométrico de las raíces puede aun cruzar una asíntota en el dominio  $s$  finito. Los segmentos de RL y CRL que se muestran en la Fig. 8-18 se pueden dibujar exactamente sólo si se da información adicional.

7. El lugar geométrico de las raíces sobre el eje real: Hay RL sobre el eje real entre  $s = 0$  y  $-3$ ,  $s = -5$  y  $-6$ . Hay CRL en las porciones restantes del eje real, esto es entre  $s = -3$  y  $-5$ , y  $s = -6$  y  $-\infty$ , como se muestra en la Fig. 8-19.



**Figura 8-18** Cálculos preliminares del lugar geométrico de las raíces de  $s(s + 5)(s + 6)(s^2 + 2s + 2) + K(s + 3) = 0$ .



**Figura 8-19** Lugar geométrico de las raíces de  $s(s+5)(s+6)$  ( $s^2 + 2s + 2 + K(s+3) = 0$ ) sobre el eje real.

8. Los ángulos de salida: Los ángulos de salida  $\theta$  de el RL que dejan el polo en  $-1 + j$  se determinan al emplear la ecuación (8-18). Si  $s_1$  es un punto de el RL que deja el polo en  $-1 + j$ , y  $s_1$  está muy cerca al polo, como se muestra en la Fig. 8-20, la ecuación (8-18) da:

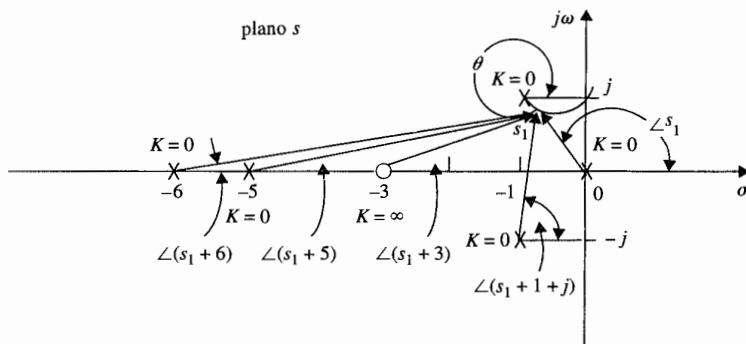
$$\begin{aligned} \angle(s_1 + 3) - \angle s_1 - \angle(s_1 + 1 + j) - \angle(s_1 + 5) - \angle(s_1 + 1 - j) \\ = (2i + 1)180^\circ \end{aligned} \quad (8-78)$$

o

$$26.6^\circ - 135^\circ - 90^\circ - 14^\circ - 11.4^\circ - \theta \cong (2i + 1)180^\circ \quad (8-79)$$

para  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Por tanto, al seleccionar  $i = 2$  se obtiene:

$$\theta \cong -43.8^\circ \quad (8-80)$$



**Figura 8-20** Cálculo de los ángulos de salida del lugar geométrico de las raíces de  $s(s+5)(s+6)(s^2 + 2s + 2) + K(s+3) = 0$ .

En forma similar la ecuación (8-19) se utiliza para determinar los ángulos de llegada  $\theta$  de el CRL al llegar al polo  $-1 + j$ . Es fácil ver que  $\theta'$  difiere de  $\theta$  por  $180^\circ$ ; por tanto:

$$\theta' = 180^\circ - 43.8^\circ = 136.2^\circ \quad (8-81)$$

9. La intersección del lugar geométrico de las raíces con el eje imaginario se determina mediante la tabla de Routh. La ecuación (8-73) se escribe como:

$$s^5 + 13s^4 + 54s^3 + 82s^2 + (60 + K)s + 3K = 0 \quad (8-82)$$

La tabla de Routh es:

$s^5$	1	54	$60 + K$
$s^4$	13	82	$3K$
$s^3$	47.7	0.769K	0
$s^2$	$65.6 - 0.212K$	$3K$	0
$s^1$	$\frac{3940 - 105K - 0.163K^2}{65.6 - 0.212K}$	0	0
$s^0$	$3K$	0	0

Para la ecuación (8-82) no se tienen raíces sobre el eje imaginario o en el semiplano derecho del plano  $s$ , los elementos en la primera columna de la tabla de Routh deben ser todos del mismo signo. Por tanto, las siguientes desigualdades se deben satisfacer:

$$65.6 - 0.212K > 0 \quad \text{o} \quad K < 309 \quad (8-83)$$

$$3940 - 105K - 0.163K^2 > 0 \quad \text{o} \quad K < 35 \quad (8-84)$$

$$K > 0 \quad (8-85)$$

Por tanto, todas las raíces de la ecuación (8-82) deben permanecer en el lado izquierdo del plano  $s$  si  $K$  permanece entre 0 y 35, lo que significa que el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-82) cruza el eje imaginario cuando  $K = 35$  y  $K = 0$ . Las coordenadas de los puntos de cruce sobre el eje imaginario que corresponden a  $K = 35$  se determinan de la ecuación auxiliar:

$$A(s) = (65.6 - 0.212K)s^2 + 3K = 0 \quad (8-86)$$

que se obtiene al utilizar los coeficientes del renglón justo abajo del renglón de ceros en el renglón  $s^1$  que sucede cuando  $K$  se coloca en 35. Al sustituir  $K = 35$  en la ecuación (8-86), se obtiene:

$$58.2s^2 + 105 = 0 \quad (8-87)$$

Las raíces de la ecuación (8-87) son  $s = j1.34$  y  $-j1.34$ , que son los puntos en que el lugar geométrico de las raíces cruza el eje  $j\omega$ .

10. Puntos de ruptura: Con base a la información reunida de los nueve puntos anteriores, se bosqueja una prueba del lugar geométrico de las raíces que indica que sólo puede haber un punto de ruptura en el lugar geométrico de las raíces completo, y el punto debe estar

entre dos polos de  $G(s)H(s)$  en  $s = -5$  y  $-6$ . Para encontrar el punto de ruptura se toma la derivada en ambos miembros de la ecuación (8-74) con respecto a  $s$  y se iguala a cero, el resultado de la ecuación es:

$$s^5 + 13.5s^4 + 66s^3 + 142s^2 + 123s + 45 = 0 \quad (8-88)$$

Ya que sólo se espera un punto de ruptura únicamente la raíz de la ecuación (8-88) es la solución correcta del punto de ruptura. Las cinco raíces de la ecuación (8-88) son:

$$\begin{aligned} s &= -3.33 + j1.204 & s &= -3.33 - j1.204 \\ s &= -0.656 + j0.468 & s &= -0.656 - j0.468 \\ s &= -5.53 \end{aligned}$$

Claramente, el punto de ruptura está en  $-5.53$ . Las otras cuatro soluciones no satisfacen la ecuación (8-82) y por tanto no son puntos de ruptura. Con base en la información obtenida en los últimos 10 pasos, el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-82) se bosqueja como se muestra en la Fig. 8-21. ▲

## 8-4 Soluciones por computadora

En esta sección se demuestra que las soluciones por computadora del lugar geométrico de las raíces usando **rlplot** de las herramientas de **CSAD** y **root** del Programa **CC**.

### 8-4-1 **rlplot** de CSAD

La función de transferencia  $G(s)H(s)$  en la ecuación (8-74) se introduce a **rlplot** en formato de  $N(s)/D(s)$ .

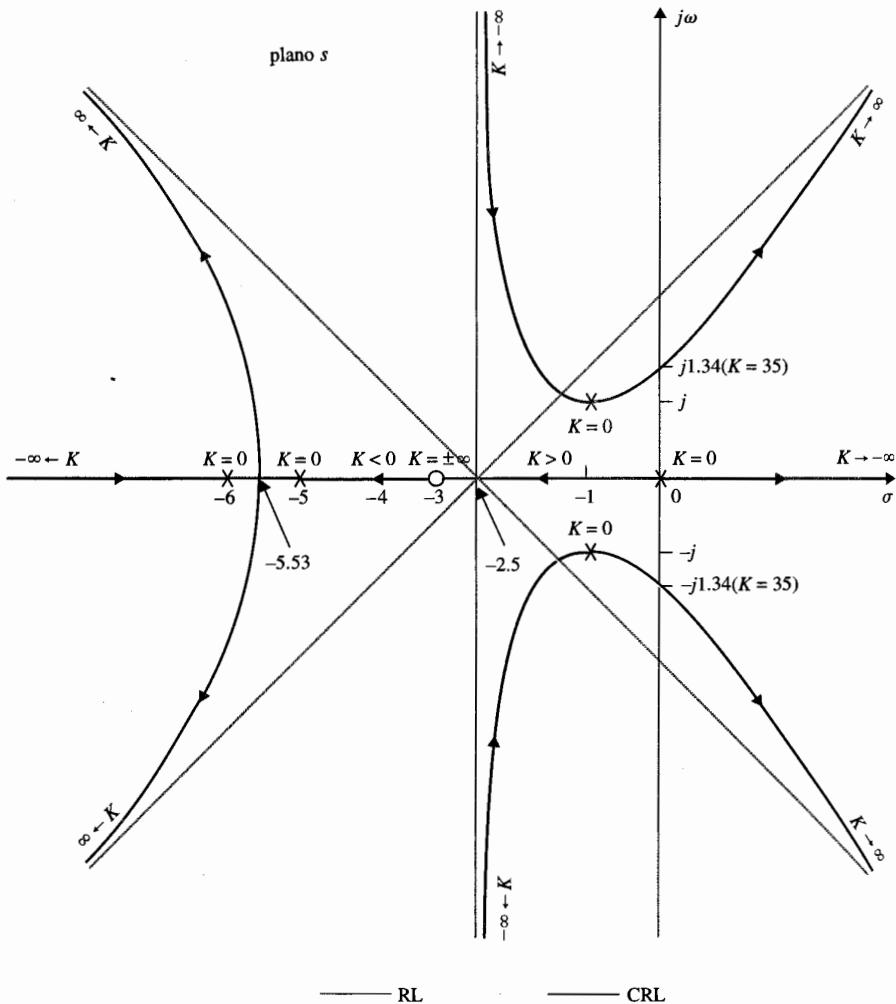
```
>>n=[1 3] <CR>
>>d=pmult([1 0],[1 5],[1 6],[1 2 2]) <CR>
>>rlplot <CR>
```

Aparecerá el siguiente menú:

```
- RL PLOT OPTIONS -

K values      Zeta line
Single K       Wn circle
Find K         Rule info
Grid           New/clear
Title          Display TF
               Quit

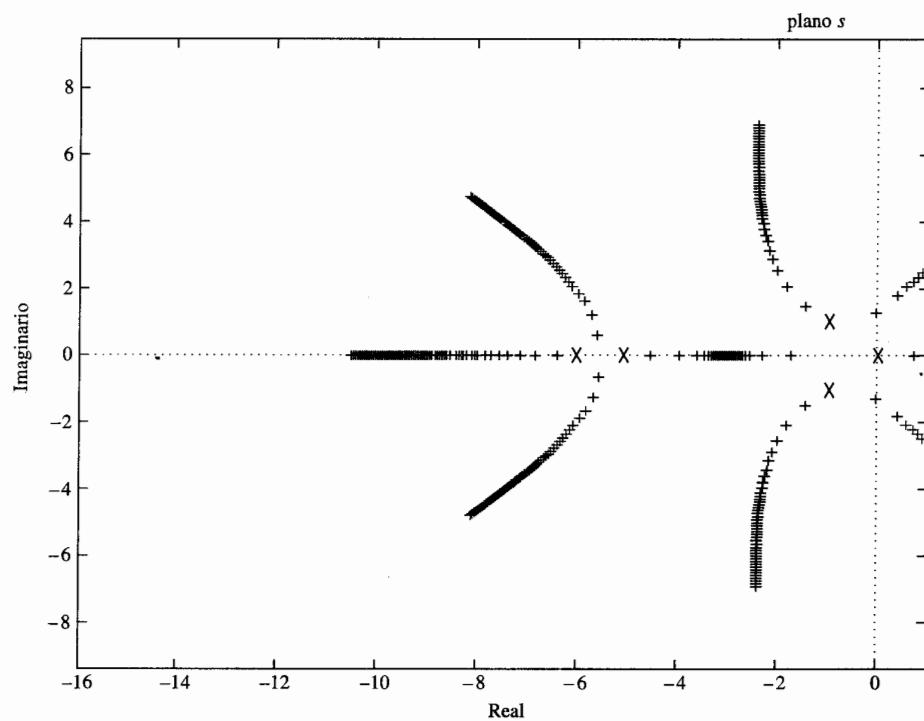
Option? >k <CR>   (Select K values to plot root loci)
Enter k values to plot >linspace(-3000,3000) <CR>   (K = -3000 to 3000)
```



**Figura 8-21** Lugar geométrico de las raíces de  $s(s + 5)(s + 6)(s^2 + 2s + 2) + K(s + 3) = 0$

Este comando producirá una gráfica del lugar geométrico de las raíces de 100 puntos linealmente espaciados (por omisión) comenzando en  $K = -3000$  a  $K = 3000$ . La gráfica del lugar geométrico de las raíces se muestra en la Fig. 8-22. Estas gráficas se obtienen con la tecla de shift-PrtSc para hacer una impresión de pantalla con **MATLAB**. Con un monitor a color, el RL se grafica en rojo y el CRL en verde.

Al seleccionar la opción de **Rule info** desde el menú, se obtiene la siguiente información sobre el lugar geométrico de las raíces:



**Figura 8-22** Lugar geométrico de las raíces de  $G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$  para  $-3000 < K < 3000$  dibujado con **rlplot** de **CSAD**.

K=0 points

```
0
-6.0000e+000
-5.0000e+000
-1.0000e+000+ 1.0000e+000i
-1.0000e+000- 1.0000e+000i
```

K=inf points

```
-3.0000e+00
∞
∞
∞
∞
```

Asymptote angles in degrees for .

K>0	K<0
45	0
135	90
225	180
315	270

```

Asymptote Intersection is: -2.5
Press any key to continue . . .
K>0 root loci appears on the real axis between:
0 and -3
-5 and -6
K<0 root loci appears along all
other sections of the real axis.
Angles of departure for K>0 are
Pole           Angle (deg)
-1.0000+000- 1.0000e+000i  4.3781e+001
-1.0000+000+ 1.0000e+000i  -4.3781e+001
Possible Breakaway Points, and associated |K| values are:
Point          |K|
-5.5257e+000   1.1718e+001      (This is the only breakaway point)
-3.3311e+000+ 1.2040e+001i  1.2830e+002
-3.3311e+000- 1.2040e+001i  1.2830e+002
-6.5604e-000+ 4.6768e-001i  7.5478e+000
-6.5604e-000- 4.6768e-001i  7.5478e+000
Find a jw-axis crossing? (y/n) [y] ><CR>
Enter a value of K that gives stability [0.001]><CR>
Enter a value of K that gives Instability [1000]><CR>
A jw-axis crossing occurs at K=35.519
Associated system poles are
-5.5803 + 0.7077i
-5.5803 - 0.0707i
-1.8393
-0.0000 + 1.3531i
-0.0000 - 1.3531i

```

Este programa tiene otras funciones, encontrar los valores de las raíces para un valor de  $K$  dado, encontrar las raíces para valores de  $K$  en un punto sobre el lugar geométrico de las raíces indicado por el cursor del ratón, etcétera.

#### **8-4-2 Lugar geométrico de las raíces del Programa CC**

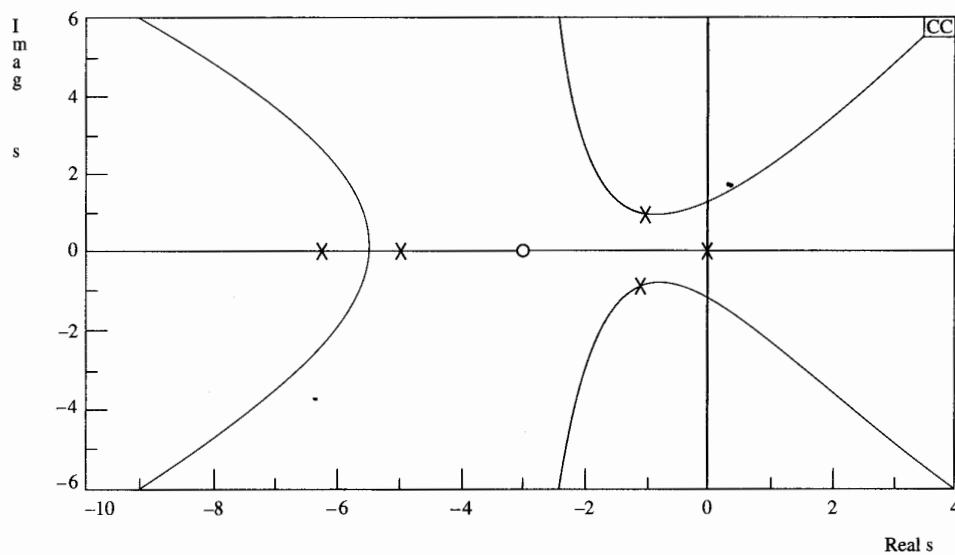
El **Programa CC** tiene un comando, **root, g**, que calcula y gráfica el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica de la función de transferencia de  $G(s)$ . Los siguientes mandatos de entrada se dan para la función de transferencia de la ecuación (8-74):

```

>g=(s+3)/(s*(s+5)*(s+6)*(s^2+2*s+2)) <CR>
>root,g,auto <CR>    (auto implies that automatic scales are selected for both axes)

```

La gráfica del lugar geométrico de las raíces de la Fig. 8-23 se muestra en la pantalla del monitor para el RL y para el CRL utilizando la opción N para ganancias negativas. Sin embargo, el vaciado de la pantalla en la versión de CC para estudiantes toma un tiempo muy largo para ejecutarse. La opción I despliega información sobre polos en lazo abierto, ceros, puntos de ruptura, ángulos de salida y llegada, y comportamiento de las asíntotas. Otros detalles del programa no se presentan aquí.



**Figura 8-23** Lugar geométrico de las raíces de  $G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2 + 2s + 2)}$  dibujado con root de Program CC.

## 8-5 Algunos aspectos importantes de la construcción del lugar geométrico de las raíces

Uno de los aspectos importantes de la técnica del lugar geométrico de las raíces es que para la mayoría de los sistemas de control con una complejidad moderada, el analista o diseñador puede tener información vital sobre el desempeño del sistema al hacer un rápido bosquejo del lugar geométrico de las raíces empleando algunas de las propiedades del lugar geométrico de las raíces. Es importante entender todas las propiedades del lugar geométrico de las raíces aun cuando el diagrama será graficado con la ayuda de una computadora digital. Desde el punto de vista de diseño, es útil aprender los efectos sobre el lugar geométrico de las raíces cuando polos y ceros de  $G(s)H(s)$  se añaden o mueven del plano  $s$ . Algunas de estas propiedades son de utilidad en la construcción del diagrama del lugar geométrico de las raíces.

### 8-5-1 Efectos de añadir polos y ceros a $G(s)H(s)$

El problema general del diseño de controladores en sistemas de control se debe tratar como el investigar los efectos sobre el lugar geométrico de las raíces cuando se añaden polos y ceros a la función de transferencia de lazo  $G(s)H(s)$ .

- ▲ El añadir un polo a  $G(s)H(s)$  tiene el efecto de empujar el lugar geométrico de las raíces hacia la derecha.

### Ejemplo 8-18

#### La Adición de polos a $G(s)H(s)$

*Añadir un polo a  $G(s)H(s)$  tiene el efecto de empujar el lugar geométrico de las raíces hacia el semiplano derecho del plano s.*

El efecto de añadir un polo a  $G(s)H(s)$  se puede ilustrar mediante varios ejemplos:

Considere la función:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+a)} \quad a > 0 \quad (8-89)$$

El RL de  $1 + G(s)H(s) = 0$  se muestra en la Fig. 8-24(a). Estos lugares geométricos de las raíces se construyen con base a los polos de  $G(s)H(s)$ , que son  $s = 0$  y  $-a$ . Ahora se introduce un polo en  $s = -b$  con  $b > a$ . La función  $G(s)H(s)$  ahora se convierte:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+a)(s+b)} \quad (8-90)$$

La Fig. 8-24(b) muestra que el polo en  $s = -b$  causa que la parte compleja del lugar geométrico de las raíces se mueva hacia el semiplano derecho del plano s. Los ángulos de las asíntotas para raíces complejas cambian desde  $\pm 90^\circ$  hasta  $\pm 60^\circ$ . La intersección de las asíntotas también se mueve desde  $-a/2$  hasta  $-(a+b)/2$  sobre el eje real. Si  $G(s)H(s)$  representa la función de transferencia de lazo de un sistema de control, el sistema con el lugar geométrico de las raíces en la Fig. 8-24(b) se puede volver inestable si los valores de  $K$  exceden el valor crítico para la estabilidad, mientras que el sistema representado por el lugar geométrico de las raíces en la Fig. 8-24(a) está siempre estable para  $K > 0$ . La Fig. 8-24(c) muestra que el lugar geométrico de las raíces con otro polo añadido a  $G(s)H(s)$  es  $s = -c$ ,  $c > b$ . El sistema es ahora de cuarto orden, y los lugares geométricos de las raíces son complejos y se mueven hacia la derecha. Los ángulos de las asíntotas de estos lugares geométricos complejos son ahora de  $\pm 45^\circ$ . La condición de estabilidad al sistema de cuarto orden es ahora más aguda que para el sistema de tercer orden. La Fig. 8-24(d) ilustra que la adición de un par de polos complejos conjugados a la función de transferencia de la ecuación (8-89) resultará en un efecto similar. Por tanto, se puede delinear una conclusión general de que la adición de polos a  $G(s)H(s)$  tiene el efecto de mover la porción dominante del lugar geométrico de las raíces hacia el semiplano derecho del plano s. ▲

#### Adición de ceros a $G(s)H(s)$

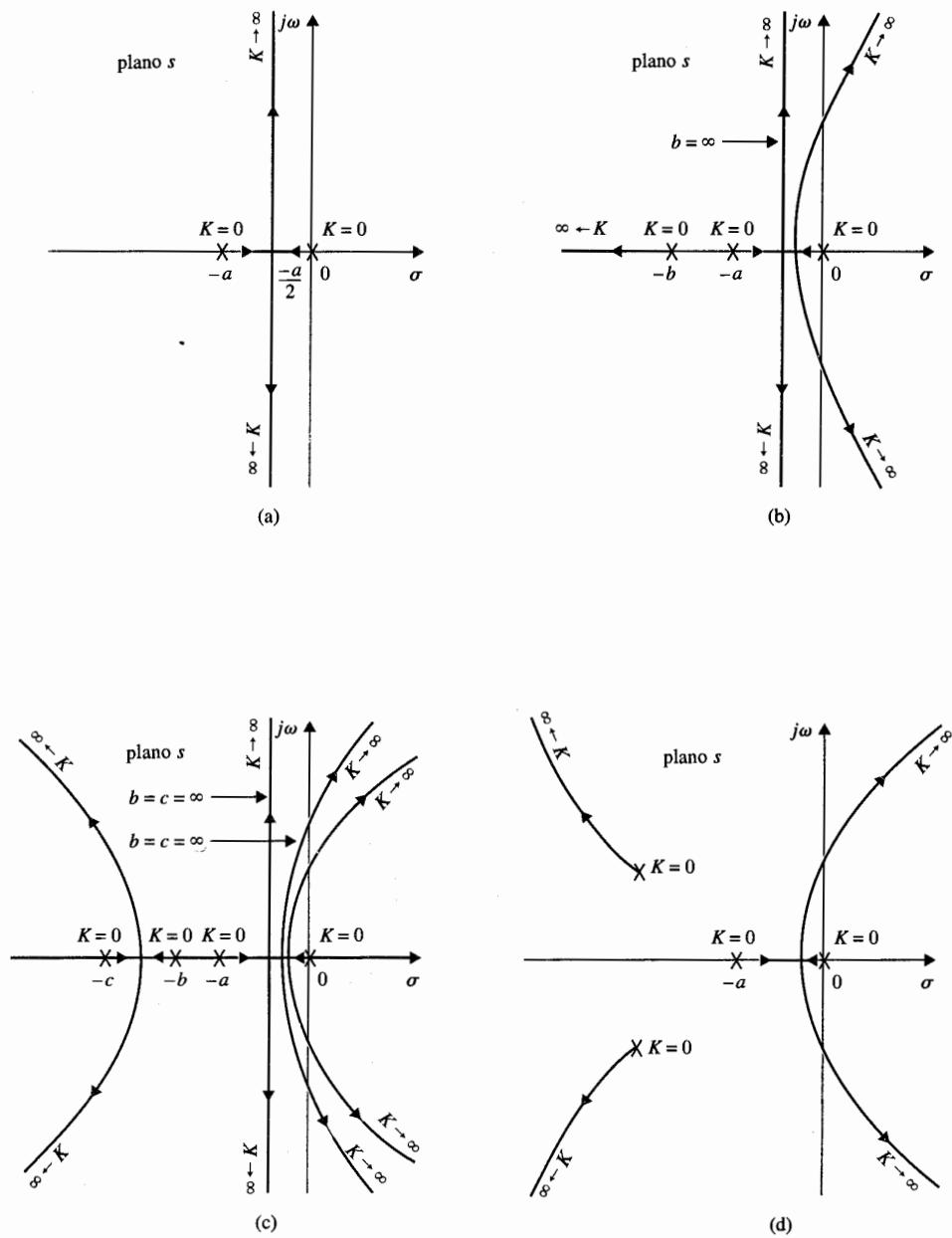
- ▲ El añadir ceros a  $G(s)H(s)$  tiende a empujar el lugar geométrico de las raíces hacia la izquierda.

### Ejemplo 8-19

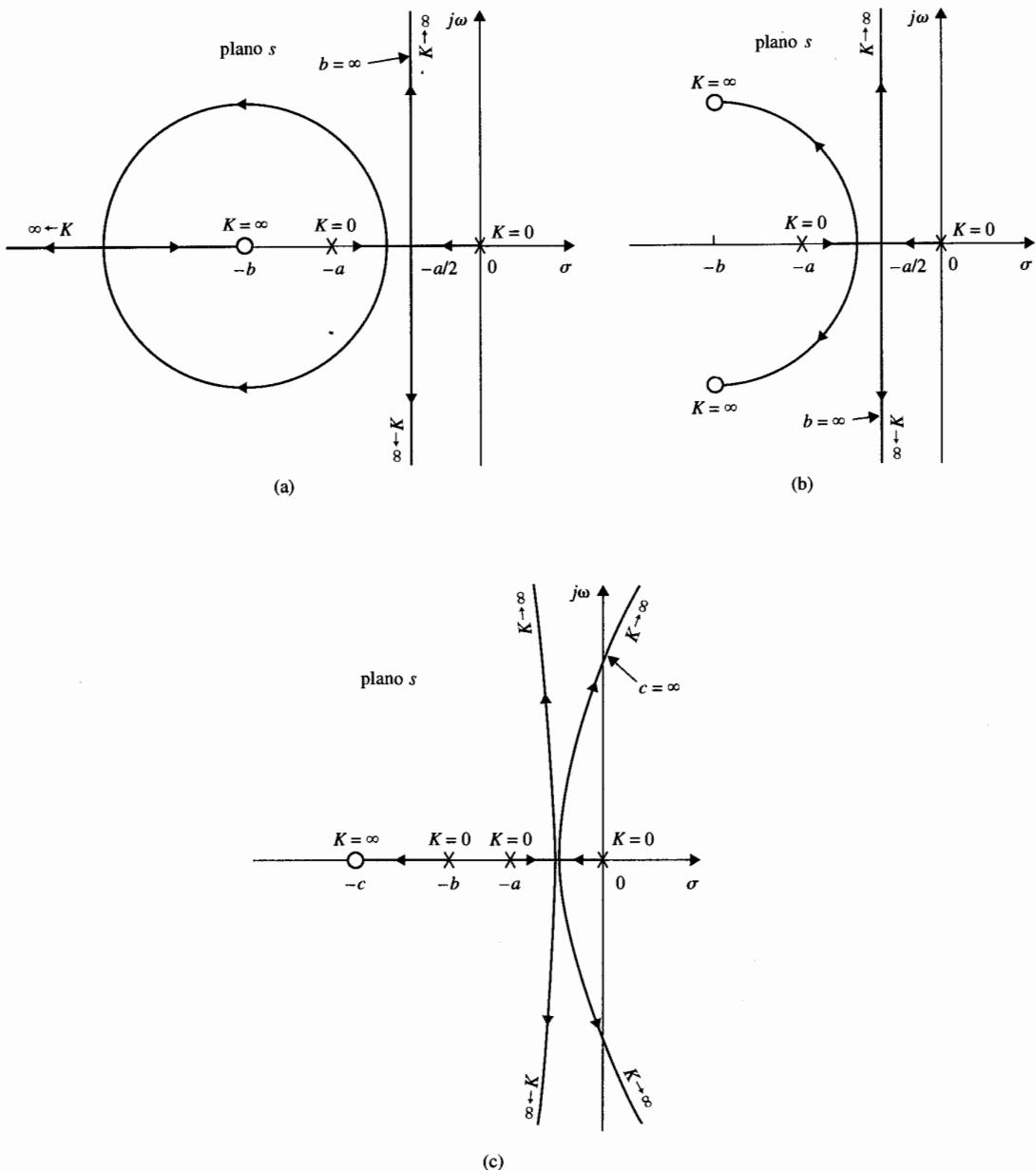
*El añadir ceros en el semiplano izquierdo a la función  $G(s)H(s)$  generalmente tiene el efecto de mover y colocar el lugar geométrico de las raíces hacia el semiplano izquierdo del plano s.*

El siguiente ejemplo ilustra el efecto de adicionar un cero y ceros a  $G(s)H(s)$  sobre el lugar geométrico de las raíces.

La Fig. 8-25(a) muestra el RL de  $G(s)H(s)$  en la ecuación (8-89) con un cero añadido a  $s = -b$  ( $b > a$ ). Las partes complejas conjugadas de el RL del sistema original se mueven hacia la izquierda y forman un círculo. Por tanto, si  $G(s)H(s)$  es la función de transferencia de lazo de un sistema de control, la estabilidad relativa del sistema se incrementa al añadir el cero. La Fig. 8-25(b) muestra que un efecto similar se puede producir cuando un par de ceros complejos conjugados se añade a la función de la ecuación



**Figura 8-24** Diagramas del lugar geométrico de las raíces que muestran los efectos de añadir polos a  $G(s)H(s)$ .



**Figura 8-25** Diagramas del lugar geométrico de las raíces que muestran los efectos de añadir un cero a  $G(s)H(s)$ .

(8-89). La Fig. 8-25(c) muestra el RL, cuando un cero en  $s = -c$  se añade a la función de transferencia de la ecuación (8-90). ▲

### Ejemplo 8-20

Considere la ecuación:

$$s^2(s + a) + K(s + b) = 0 \quad (8-91)$$

Al dividir ambos lados de la ecuación (8-91) entre los términos que no contienen a  $K$ , se tiene la función de transferencia de lazo:

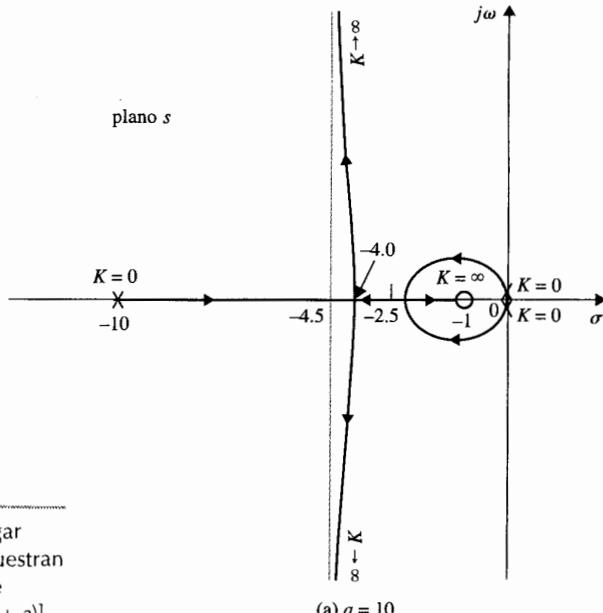
$$G(s)H(s) = \frac{K(s + b)}{s^2(s + a)} \quad (8-92)$$

se puede mostrar que los puntos de ruptura no cero dependen del valor de  $a$ , y son:

$$s = -\frac{a+3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - 10a + 9} \quad (8-93)$$

La Fig. 8-26 muestra el RL de la ecuación (8-91) con  $b = 1$  y valores diferentes de  $a$ . Los resultados se resumen a continuación:

- ▲ La Fig. 8-26(a):  $a = 10$ . Puntos de ruptura:  $s = -2.5$  y  $-4.0$ .
- ▲ La Fig. 8-26(b):  $a = 9$ . Los dos puntos de ruptura dados por la ecuación (8-93) convergen a un punto que es igual a  $s = -3$ . Observe el cambio en el RL cuando el polo en  $-a$  se mueve de  $-10$  hacia  $-9$ .



**Figura 8-26** Diagramas del lugar geométrico de las raíces que muestran los efectos de mover un polo de  $G(s)H(s)$ .  $G(s)H(s) = K(s+1)/[s^2(s+a)]$ .

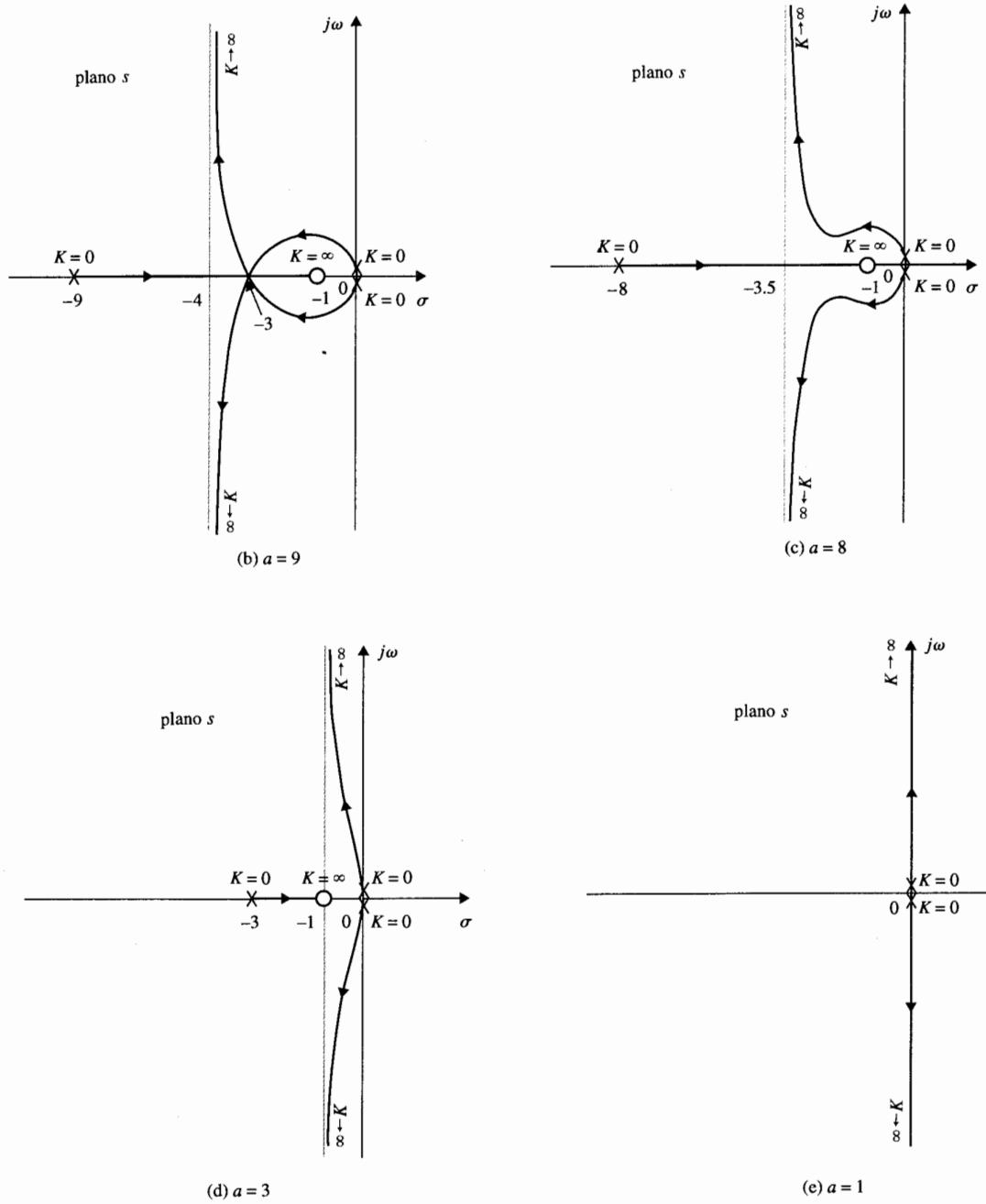


Figura 8-26 (Continuación.)

Para los valores de  $a$  menores a 9, los valores de  $s$  dados por la ecuación (8-93) no satisfacen la ecuación (8-91), lo que significa que no hay puntos de ruptura finitos, otro mas que  $s = 0$ .

- ▲ La Fig. 8-26(c):  $a = 8$ . No hay puntos de ruptura sobre el RL, excepto en  $s = 0$ .

Como el polo en  $s = -a$  se mueve más lejos hacia la derecha sobre el eje real, la porción compleja de el RL es empujada lejos hacia el semiplano derecho.

- ▲ La Fig. 8-26(d):  $a = 3$
- ▲ La Fig. 8-26(e):  $a = b = 1$ . El polo en  $s = -a$  y el cero en  $-b$  se cancelan uno con otro, y el RL degenera en un sistema de segundo orden y cae enteramente dentro del eje  $j\omega$ . ▲

Considere la ecuación:

### Ejemplo 8-21

que nos lleva a  $G(s)H(s)$  equivalente como:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s(s^2 + 2s + a)} \quad (8-95)$$

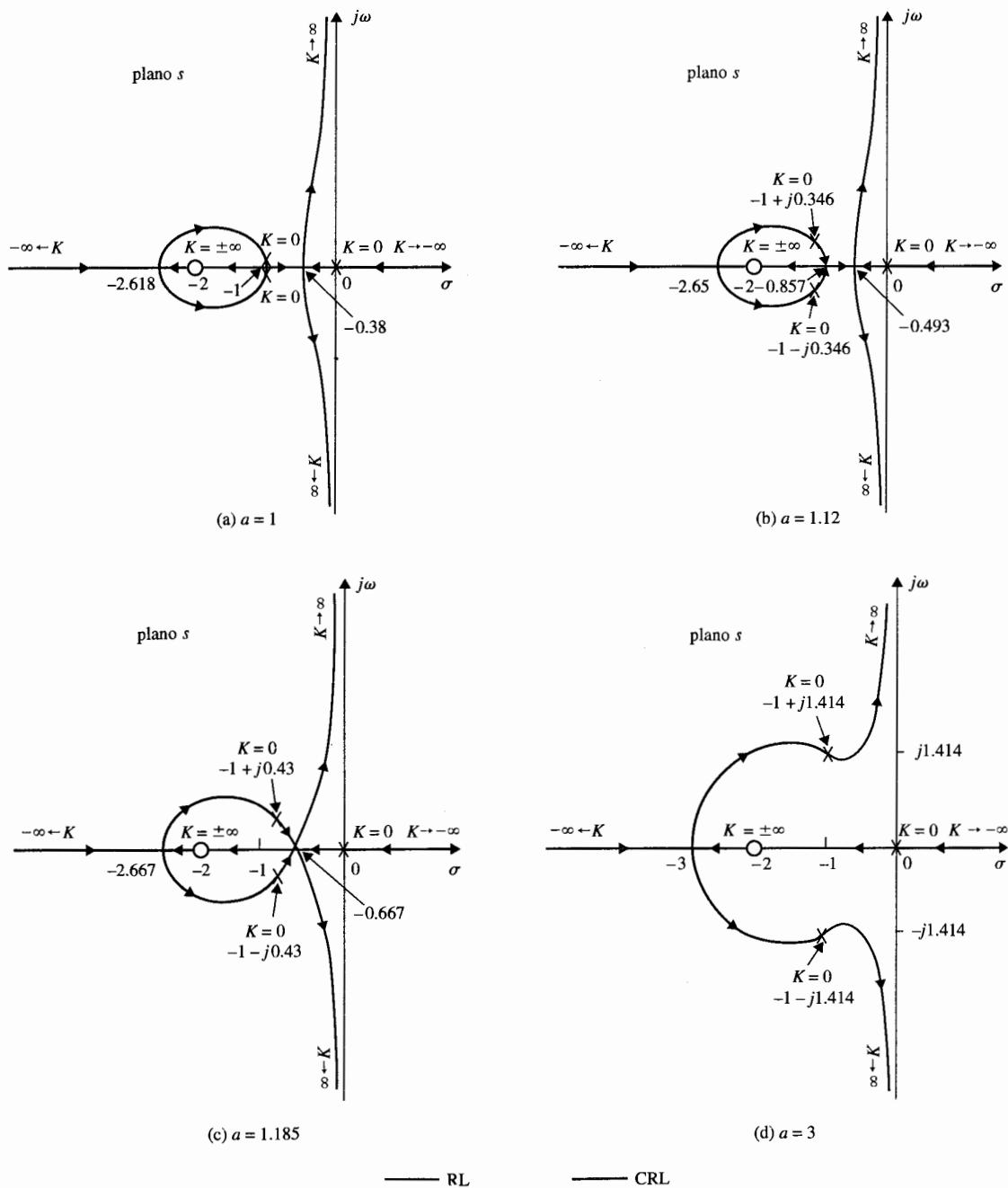
El objetivo es estudiar el RL para varios valores de  $a$  ( $>0$ ). La ecuación del punto de ruptura del RL se determina como:

$$s^3 + 4s^2 + 4s + a = 0 \quad (8-96)$$

La Fig. 8-27 muestra el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-94) bajo las siguientes condiciones.

- ▲ Fig. 8-27(a):  $a = 1$ . Puntos de ruptura:  $s = -0.38, -1.0$ , y  $-2.618$ , con el último punto sobre el CRL. A medida que el valor de  $a$  incrementa desde uno, dos polos dobles de  $G(s)H(s)$  en  $s = -1$  se moverán en forma vertical de arriba hacia abajo, con las partes reales igual a  $-1$ . Los puntos de ruptura en  $s = -0.38$  y  $s = -2.618$  se moverán a la izquierda, mientras que el punto de ruptura en  $s = -1$  se moverán hacia la derecha.
- ▲ Fig. 8-27(b):  $a = 1.12$ . Puntos de ruptura:  $s = -0.493, -0.857$ , y  $-2.65$ . Ya que las partes reales de los ceros y polos de  $G(s)H(s)$  no se afectan por el valor de  $a$ , la intersección de asíntotas siempre está en  $s = 0$ .
- ▲ Fig. 8-27(c):  $a = 1.185$ . Puntos de ruptura:  $s = -0.667, -0.667$ , y  $-2.667$ . Los dos puntos de ruptura de RL que están entre  $s = 0$  y  $-1$  convergen a un punto.
- ▲ Fig. 8-27(d):  $a = 3$ . Puntos de ruptura:  $s = -3$ . Cuando  $a$  es mayor que 1.185, la ecuación (8-96) da una solución para el punto de ruptura.

El lector puede investigar las diferencias entre el lugar geométrico de las raíces en la Fig. 8-27(c) y (d), y cubrir la evolución del lugar cuando el valor de  $a$  se cambia gradualmente desde 1.185 hasta 3 y más allá. ▲



**Figura 8-27** Diagramas del lugar geométrico de las raíces que muestran los efectos de mover un polo de  $G(s)H(s) = K(s+2)/(s(s^2 + 2s + 2))$ .

## 8-6 Contornos de las raíces: Variación de parámetros múltiples

La técnica del lugar geométrico de las raíces estudiada hasta ahora se limita sólo a un parámetro variable en  $K$ . En muchos problemas de sistemas de control, a menudo los efectos de la variación de diferentes parámetros se deben investigar. Por ejemplo, cuando se diseña un controlador que está representado por una función de transferencia con polos y ceros, es útil investigar los efectos sobre las raíces de la ecuación característica cuando estos polos y ceros toman varios valores. En la Sec. 8-5 el lugar geométrico de las raíces de ecuaciones con dos parámetros variables se estudiaron con un parámetro fijo y asignación de diferentes valores al otro. En esta sección, el problema de parámetros múltiples se investiga a través de un método más sistemático. Cuando más de un parámetro varía en forma continua desde  $-\infty$  hasta  $\infty$ , el lugar geométrico de las raíces se refiere como los **contornos de las raíces** (RCs). Se mostrará que los contornos de las raíces poseen todavía las mismas propiedades que el lugar geométrico de las raíces de un parámetro sencillo, por lo que los métodos de construcción discutidos hasta ahora son aplicables.

El principio de los contornos de las raíces puede describirse al considerar la ecuación:

$$P(s) + K_1 Q_1(s) + K_2 Q_2(s) = 0 \quad (8-97)$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  son los parámetros variables y  $P(s)$ ,  $Q_1(s)$  y  $Q_2(s)$  son polinomios de  $s$ . El primer paso involucra hacer el valor de uno de los parámetros a cero. Consideré que  $K_2$  es cero. Entonces, la ecuación (8-97) se convierte en:

$$P(s) + K_1 Q_1(s) = 0 \quad (8-98)$$

que sólo tiene un parámetro variable en  $K_1$ . El lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-98) se puede determinar al dividir ambos miembros de la ecuación entre  $P(s)$ . Por tanto:

$$1 + \frac{K_1 Q_1(s)}{P(s)} = 0 \quad (8-99)$$

La última ecuación es de la forma de  $1 + K_1 G_1(s)H_1(s) = 0$ , por lo que se puede construir el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-98) con base en la configuración de polos y ceros de  $G_1(s)H_1(s)$ . Despues se restaura el valor de  $K_2$ , mientras que se considera que el valor de  $K_1$  está fijo, y se dividen ambos miembros de la ecuación (8-97) entre los términos que no contengan a  $K_2$ . Se obtiene:

$$1 + \frac{K_2 Q_2(s)}{P(s) + K_1 Q_1(s)} = 0 \quad (8-100)$$

que es de la forma de  $1 + K_2 G_2(s)H_2(s) = 0$ . Los contornos de las raíces de la ecuación (8-97) cuando  $K_2$  varía (mientras  $K_1$  es fija), se construye con base en la configuración de polos y ceros de:

$$G_2(s)H_2(s) = \frac{Q_2(s)}{P(s) + K_1 Q_1(s)} \quad (8-101)$$

Es importante notar que los polos de  $G_2(s)H_2(s)$  son idénticos a las raíces de la ecuación (8-98). Por tanto, los contornos de las raíces de la ecuación (8-97) cuando  $K_2$  varía deben todos comenzar ( $K_2 = 0$ ) en los puntos en que están sobre el lugar geométrico de las raíces de la ecuación (8-98). Esta es la razón por la cual el problema del contorno de una raíz se considera incluido en otros. El mismo procedimiento se puede extender a la variación de más de dos parámetros. Los siguientes ejemplos ilustran la construcción de RCs cuando existen situaciones de variación en parámetros múltiples.

Consideré la ecuación:

### Ejemplo 8-22

en donde  $K_1$  y  $K_2$  son los parámetros variables, que varían desde 0 hasta  $\infty$ .

Como primer paso, se asume que  $K_2 = 0$ , y la ecuación (8-102) se convierte a:

$$s^3 + K_1 s^2 + K_1 s + K_1 = 0 \quad (8-102)$$

Al dividir ambos miembros de la última ecuación entre  $s^3$ , que es el término que no contienen a  $K_1$ , se tiene:

$$1 + \frac{K_1(s+1)}{s^3} = 0 \quad (8-103)$$

El RC de la ecuación (8-103) se dibuja con base en la configuración de polos y ceros de:

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{s+1}{s^3} \quad (8-104)$$

como se muestra en la Fig. 8-28(a). A continuación se deja que  $K_2$  varíe desde 0 hasta  $\infty$  mientras se mantiene constante a  $K_1$  en un valor diferente de cero. Al dividir ambos lados de la ecuación (8-102) entre los términos que no contienen a  $K_2$ , se tiene:

$$1 + \frac{K_2 s^2}{s^3 + K_1 s + K_1} = 0 \quad (8-105)$$

Por tanto, los contornos de las raíces de la ecuación (8-102) cuando  $K_2$  varía se puede dibujar de la configuración de polos y ceros de:

$$G_2(s)H_2(s) = \frac{s^2}{s^3 + K_1 s + K_1} \quad (8-106)$$

Los ceros de  $G_2(s)H_2(s)$  están en  $s = 0, 0$ ; pero los polos están en los ceros de  $1 + K_1 G_1(s)H_1(s)$ , que se encuentran sobre el RL de la Fig. 8-28(a). Por tanto, para  $K_1$  fija, el RC cuando  $K_2$  varía debe emergir de el RC de la Fig. 8-28(a). La Fig. 8-28(b) muestra el RC de la ecuación (8-102) cuando  $K_2$  varía desde 0 hasta  $\infty$ , para  $K_1 = 0.0184, 0.25$ , y  $2.56$ . ▲

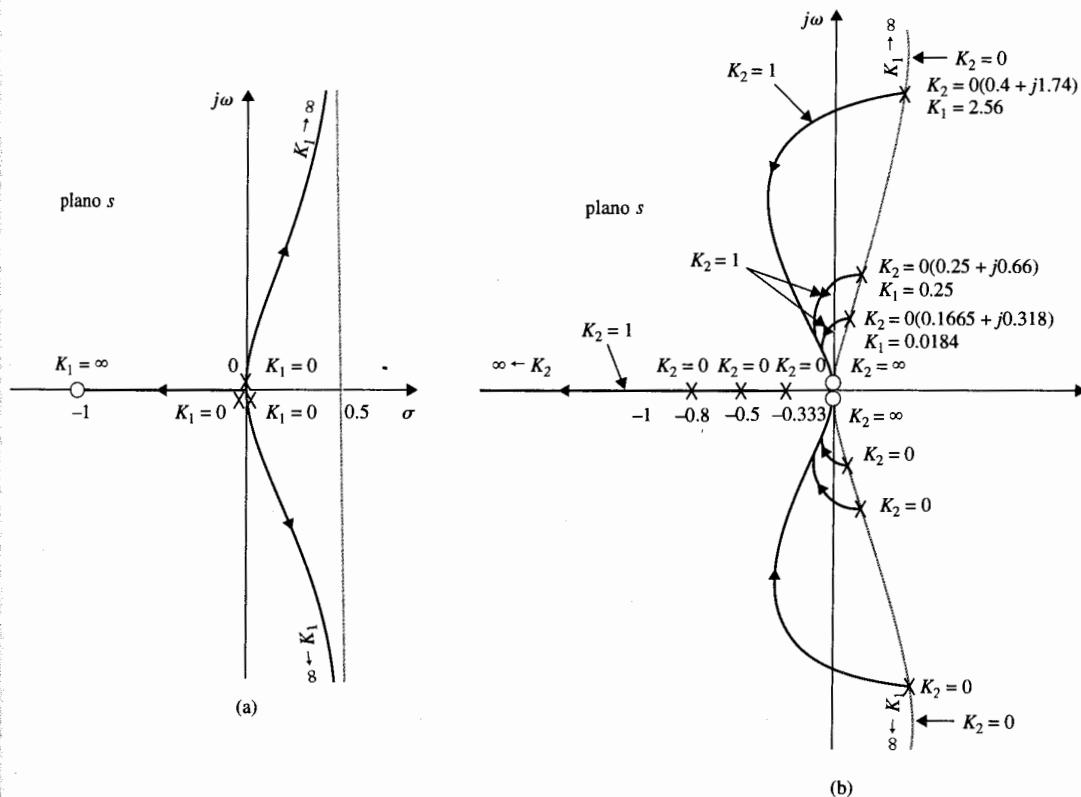


Figura 8-28 Contornos de las raíces de  $s^3 + K_2 s^2 + K_1 s + K_1 = 0$ .  
(a)  $K_2 = 0$ . (b)  $K_2$  varía y  $K_1$  es constante.

### Ejemplo 8-23

Considere la función de transferencia de lazo:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(1 + Ts)(s^2 + 2s + 2)} \quad (8-108)$$

de un sistema de control en lazo cerrado. Se desea construir el RC de la ecuación característica con  $K$  y  $T$  como parámetros variables. La ecuación característica del sistema es:

$$s(1 + Ts)(s^2 + 2s + 2) + K = 0 \quad (8-109)$$

Primero, se hace a  $T$  igual a cero. La ecuación característica se convierte en:

$$s(s^2 + 2s + 2) + K = 0 \quad (8-110)$$

El RC de esta ecuación cuando  $K$  varía se dibuja con base en la configuración de polos y ceros de:

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} \quad (8-111)$$

como se muestra en la Fig. 8-29(a). A continuación se hace a  $K$  fija y se considera que  $T$  es el parámetro variable.

Al dividir ambos miembros de la ecuación (8-109) entre el término que no contiene a  $T$ , se tiene:

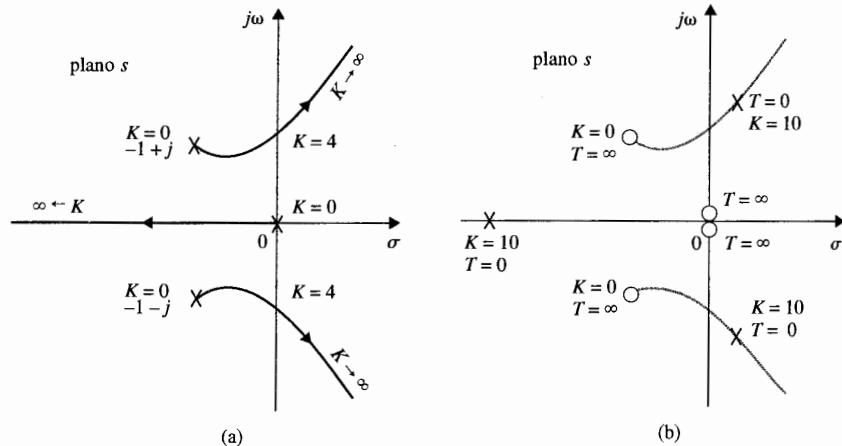
$$1 + TG_2(s)H_2(s) \doteq 1 + \frac{T s^2(s^2 + 2s + 2)}{s(s^2 + 2s + 2) + K} = 0 \quad (8-112)$$

Los RCs cuando  $T$  varía se construyen con base en la configuración de polos y ceros de  $G_2(s)H_2(s)$ . Cuando  $T = 0$ , los puntos sobre los RCs son los polos de  $G_2(s)H_2(s)$ , que están sobre los RC de la ecuación (8-110). Cuando  $T = \infty$ , las raíces de la ecuación (8-109) son los ceros de  $G_2(s)H_2(s)$ , que están en  $s = 0, 0, -1 + j$ , y  $-1 - j$ . La Fig. 8-29(b) muestra la configuración de polos y ceros de  $G_2(s)H_2(s)$  para  $K = 10$ . Observe que  $G_2(s)H_2(s)$  tiene tres polos finitos y cuatro ceros finitos. Los RCs de la ecuación (8-109) cuando  $T$  varía se muestran en las Figs. 8-30, 8-31, y 8-32 para tres valores diferentes de  $K$ . Los RCs en la Fig. 8-31 muestran que cuando  $K = 0.5$  y  $T = 0.5$ , la ecuación característica en la ecuación (8-109) tiene una raíz cuádruple en  $s = -1$ . ▲

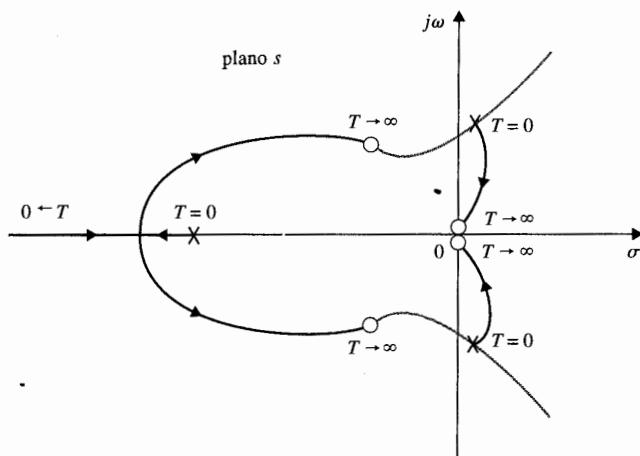
Como ejemplo para ilustrar el efecto de la variación de un cero de  $G(s)H(s)$ , considere la función:

### Ejemplo 8-24

$$G(s)H(s) = \frac{K(1 + Ts)}{s(s + 1)(s + 2)} \quad (8-113)$$



**Figura 8-29** (a) Lugar geométrico de las raíces para  $s(s^2 + 2s + 2) + K = 0$ . (b) Configuración de polos y ceros de  $G_2(s)H_2(s) = Ts^2(s^2 + 2s + 2)/[s(s^2 + 2s + 2) + K]$ .



**Figura 8-30** Contornos de las raíces para  $s(1 + Ts)(s^2 + 2s + 2) + K = 0$ ,  $K > 4$ .

La ecuación característica es:

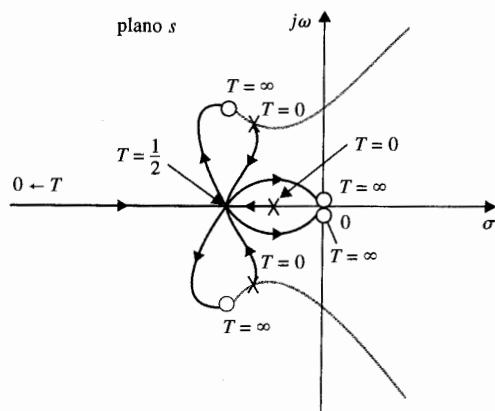
$$s(s + 1)(s + 2) + K(1 + Ts) = 0 \quad (8-114)$$

Haciendo que  $T$  sea igual a cero y considerando el efecto de variable  $K$ . La ecuación (8-114) se convierte en:

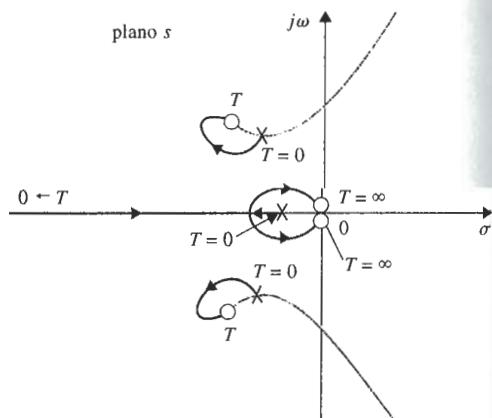
$$s(s + 1)(s + 2) + K = 0 \quad (8-115)$$

que lleva a:

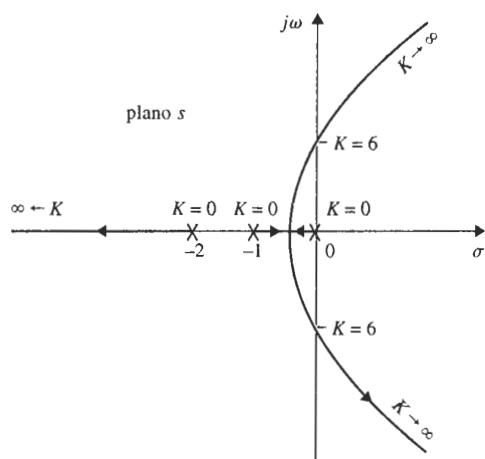
$$G_1(s)H_1(s) = \frac{1}{s(s + 1)(s + 2)} \quad (8-116)$$



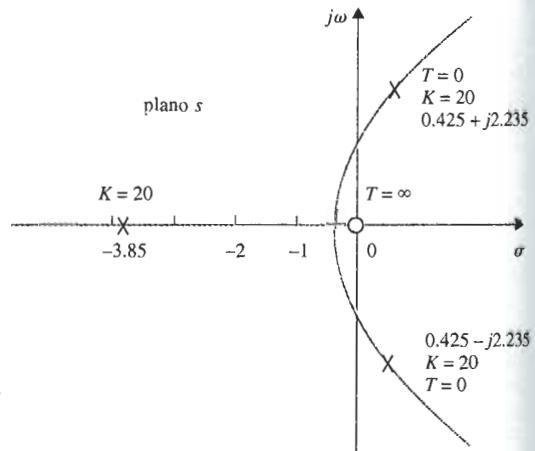
**Figura 8-31** Contornos de las raíces para  $s(1 + Ts)(s^2 + 2s + 2) + K = 0$ ,  $K = 0.5$ .



**Figura 8-32** Contornos de las raíces para  $s(1 + Ts)(s^2 + 2s + 2) + K = 0$ .  $K < 0.5$ .



**Figura 8-33** RC para  $s(s+1)(s+2) + K = 0$ .



**Figura 8-34** Configuración de polos y ceros de  $G_2(s)H_2(s) = TKs/[s(s+1)(s+2) + K]$ .  $K = 20$ .

El RL de la ecuación (8-115) se dibuja con base en la configuración de polos y ceros de la ecuación (8-116) y se muestra en la Fig. 8-33.

Cuando  $K$  está fija y no cero, se dividen ambos miembros de la ecuación (8-114) entre el término que no contiene  $T$ , y se tiene:

$$1 + TG_2(s)H_2(s) = 1 + \frac{TKs}{s(s+1)(s+2)+K} = 0 \quad (8-117)$$

Los puntos que corresponden a  $T=0$  en los RCs son los polos de  $G_2(s)H_2(s)$  o los ceros de  $s(s+1)(s+2)+K$ , cuyos RC se bosquejan como se muestra en la Fig. 8-33 cuando  $K$  varía. Si se selecciona  $K=20$  tal como se ilustra, la configuración de polos y ceros de  $G_2(s)H_2(s)$  se muestra en la Fig. 8-34. Los RCs de la ecuación (8-114) para  $0 \leq T < \infty$  se muestran en la Fig. 8-35 para tres diferentes valores de  $K$ .

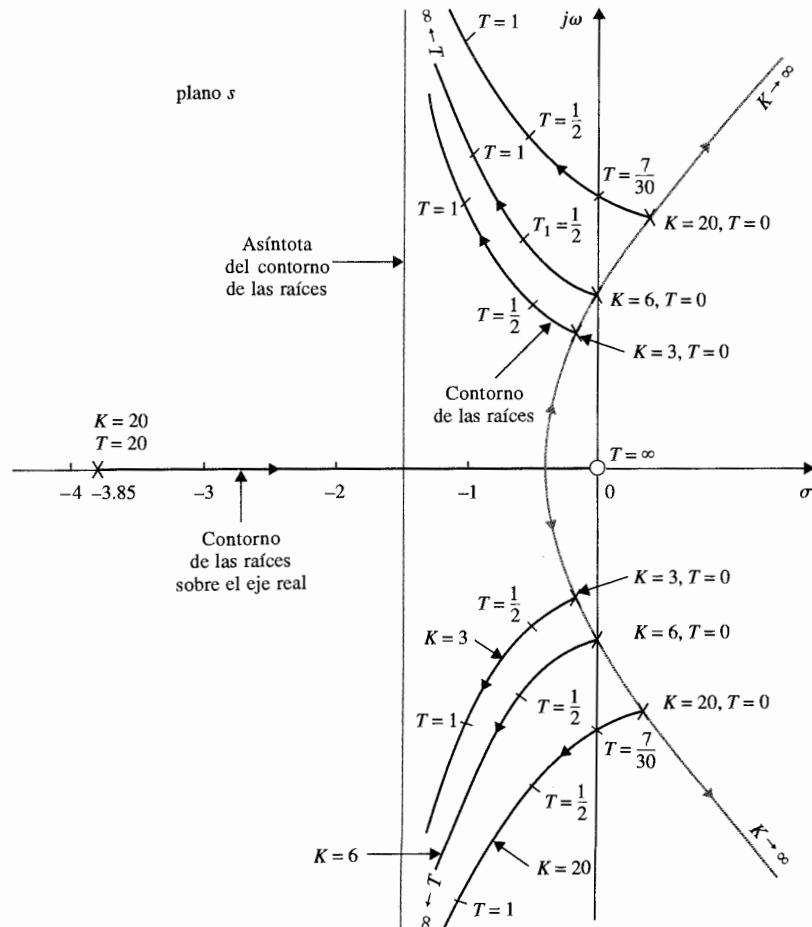


Figura 8-35 Contorno de las raíces de  $s(s+1)(s+2)+K+KTs=0$ .

Ya que  $G_2(s)H_2(s)$  tiene tres polos y un cero, los ángulos de las asíntotas de los RCs cuando  $T$  varía son  $90^\circ$  y  $-90^\circ$ . Se puede mostrar que la intersección de las asíntotas es siempre  $s = 1.5$ . Esto se debe a que la suma de los polos de  $G_2(s)H_2(s)$ , que está dada por los negativos de los coeficientes del término  $s^2$  en el polinomio denominador de la ecuación (8-117), es 3, la suma de ceros de  $G_2(s)H_2(s)$  es 0, y  $n - m$  en la ecuación (8-36) es 2.

Los RCs en la Fig. 8-35 muestran que al añadir un cero en la función de transferencia de lazo por lo general se mejora la estabilidad relativa del sistema en lazo cerrado al mover la raíz de la ecuación característica hacia la izquierda en el plano  $s$ . Como se muestra en la Fig. 8-35, para  $K = 20$ , el sistema se estabiliza para todos los valores de  $T$  mayores que 0.2333. Sin embargo, el factor de amortiguamiento relativo más grande que puede tener el sistema al incrementar  $T$  es aproximadamente del 30%. ▲

## 8-7 Lugar geométrico de las raíces de sistemas en tiempo discreto [23,24]

La técnica del lugar geométrico de las raíces se puede aplicar a sistemas en tiempo discreto sin ninguna complicación. Con la función de transferencia en términos de la transformada  $z$ , el lugar geométrico de las raíces para sistemas en tiempo discreto se grafica en el plano  $z$ , en lugar de en el plano  $s$ . Considerese el sistema en tiempo discreto que se muestra en la Fig. 8-36. Las raíces de la ecuación característica del sistema satisfacen a la ecuación siguiente:

$$1 + GH^*(s) = 0 \quad (8-118)$$

en el plano  $s$ , o

$$1 + GH(z) = 0 \quad (8-119)$$

en el plano  $z$ . Del Cap. 3,  $GH^*(s)$  se escribe como:

$$GH^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s)H(s + jn\omega_s) \quad (8-120)$$

que es una serie infinita. Por lo tanto, los polos y ceros de  $GH^*(s)$  en el plano  $s$  serán infinito en número. Esto evidentemente hace que la construcción del lugar geométrico de las raíces

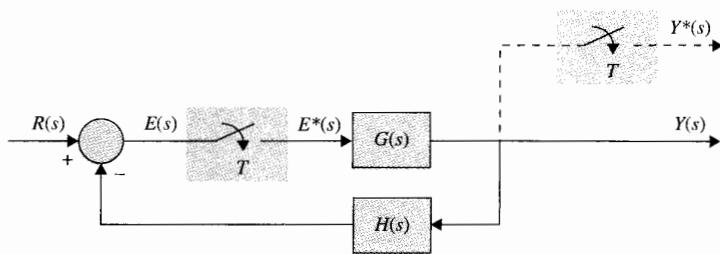


Figura 8-36 Sistema de control en tiempo discreto.

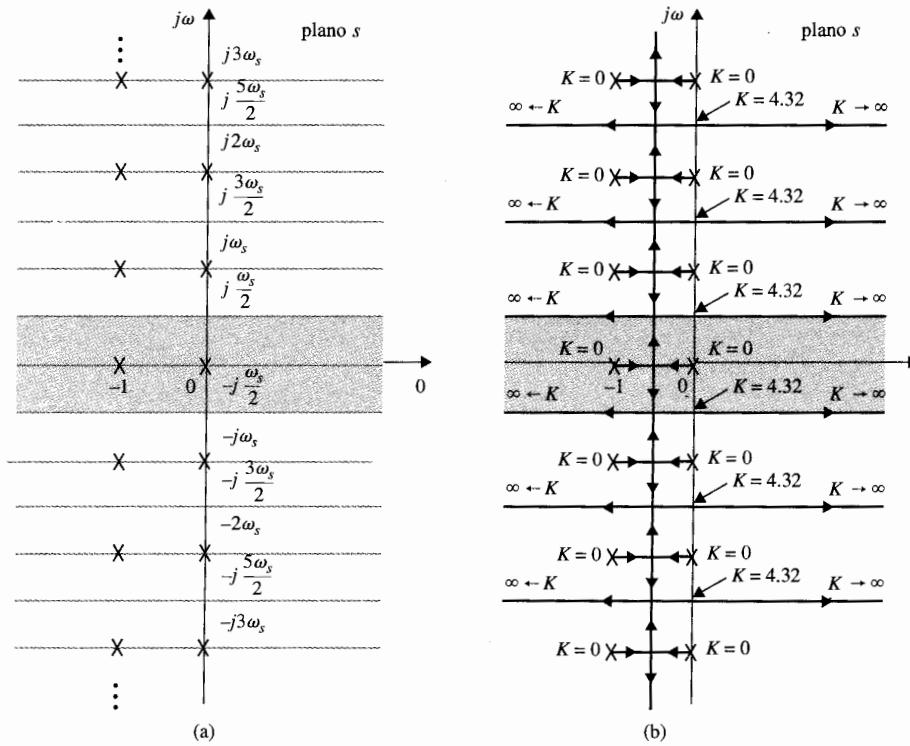
de la ecuación (8-118) en el plano  $s$  sea muy complicada. Como ilustración, considere que para el sistema de la Fig. 8-36:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad (8-121)$$

Al substituir la ecuación (8-121) en la ecuación (8-120), se tiene:

$$GH^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K}{(s+jn\omega_s)(s+jn\omega_s + 1)} \quad (8-122)$$

que tiene polos en  $s = -jn\omega_s$  y  $s = -1 - jn\omega_s$ , en donde  $n$  toma todos los valores enteros entre  $-\infty$  e  $\infty$ . La configuración de polos de  $GH^*(s)$  se muestra en la Fig. 8-37(a). Mediante el uso de las propiedades de el RL en el plano  $s$ , el RL de  $1 + GH^*(s) = 0$  se dibuja como se muestra



**Figura 8-37** Configuración de polos de  $GH^*(s)$  y el diagrama del lugar geométrico de las raíces en el plano  $s$  para el sistema en tiempo discreto de la Fig. 8-36 con  $G(s)H(s) = K/[s(s+1)]$ ,  $T = 1$  s.

▲ Los mismos procedimientos de construcción del lugar geométrico de las raíces de sistemas en tiempo continuo se pueden aplicar al lugar geométrico de las raíces de sistemas en tiempo discreto en el plano z.

en la Fig. 8-37(b) para un periodo de muestreo  $T = 1$  s. El RL contiene un número infinito de ramas y estas indican claramente que el sistema en lazo cerrado es inestable para todos los valores de  $K$  mayores que 4.32. En contraste, es bien sabido que el mismo sistema sin muestreo es estable para todos los valores de  $K$ .

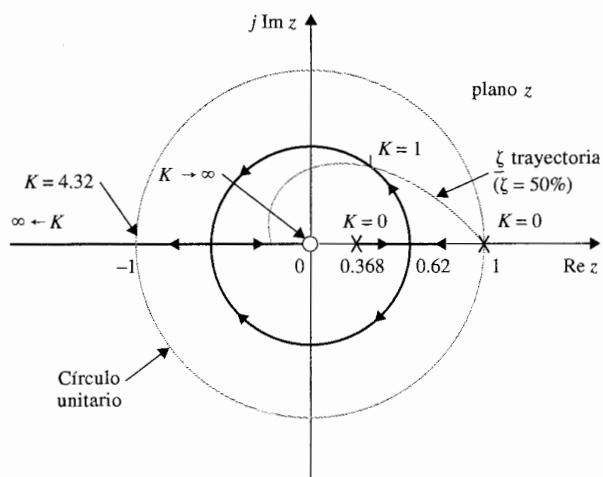
El problema del lugar geométrico de las raíces para sistemas en tiempo discreto se simplifica si el lugar geométrico de las raíces se construye en el plano  $z$  usando la ecuación (8-119). Ya que la ecuación (8-119) es, en general, una función racional en  $z$  con coeficientes constantes, sus polos y ceros son finitos en número, y el número de lugares geométricos de las raíces es finito en el plano  $z$ . Los mismos procedimientos de construcción para sistemas en tiempo continuo se aplican de forma directa en el plano  $z$  para sistemas en tiempo discreto. Los siguientes ejemplos ilustran la construcción del lugar geométrico de las raíces para sistemas en tiempo discreto en el plano  $z$ .

## Ejemplo 8-25

Consideré que para el sistema en tiempo discreto mostrado en la Fig. 8-36, la función de transferencia de lazo en el dominio  $z$  es:

$$GH(z) = \frac{0.632 Kz}{(z - 1)(z - 0.368)} \quad (8-123)$$

El RL de la ecuación característica en lazo cerrado se construye con base en la configuración de polos y ceros de  $GH(z)$ , como se muestra en la Fig. 8-38. Note que cuando el valor de  $K$  excede a 4.32, una de las dos raíces se mueve fuera del círculo unitario y el sistema se vuelve inestable. El lugar geométrico del factor de amortiguamiento relativo constante se puede dibujar sobre el RL para determinar el valor requerido de  $K$  para un factor de amortiguamiento relativo específico. En la Fig. 8-38, el lugar geométrico del factor de amortiguamiento relativo constante para  $\zeta = 0.5$  se dibuja y la intersección con el RL da el



**Figura 8-38** Diagrama del lugar geométrico de las raíces de un sistema de control en tiempo discreto sin retén de orden cero.  $G(s)H(s) = K/[s(s+1)]$ .  $T = 1$  s.

valor deseado de  $K = 1$ . Para el mismo sistema, si el periodo de muestreo  $T$  se incrementa a dos segundos, la función de transferencia en términos de la transformada  $z$  se convierte en:

$$GH(z) = \frac{0.865 K z}{(z - 1)(z - 0.135)} \quad (8-124)$$

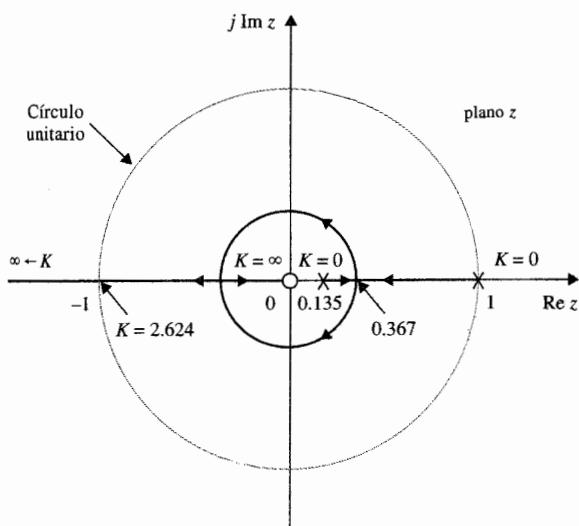
El RL para este caso se muestra en la Fig. 8-39. Observe que aunque la parte compleja de el RL para  $T = 2$  s, toma la forma de un círculo más pequeño que para cuando  $T = 1$  s, y sin embargo el sistema es menos estable, ya que el valor marginal de  $K$  para estabilidad es 2.624, como se compara con el valor de  $K$  marginal de 4.32 para  $T = 1$  s.

A continuación se considera que un retén de orden cero se inserta entre el muestreador y el proceso controlado  $G(s)$  en el sistema de la Fig. 8-36. La función de transferencia del sistema con el retén de orden cero es:

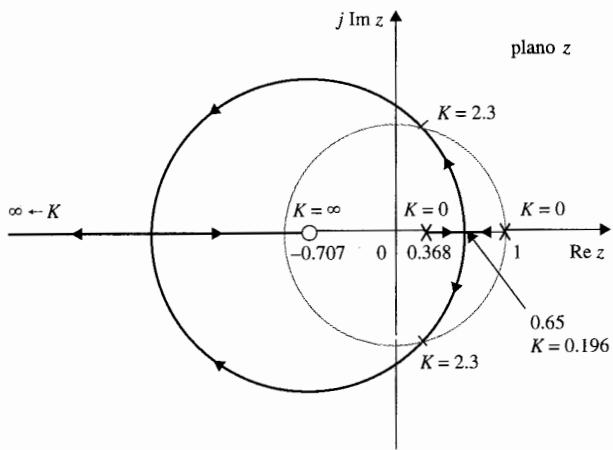
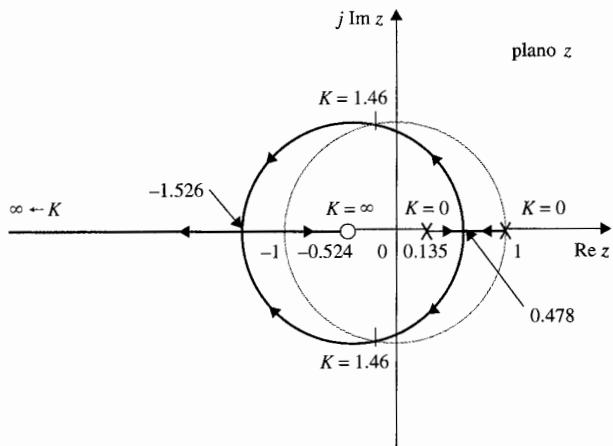
$$G_{ho}GH(z) = \frac{K[(T - 1 + e^{-T})z - Te^{-T} + 1 - e^{-T}]}{(z - 1)(z - e^{-T})} \quad (8-125)$$

El RL del sistema con ROC para  $T = 1$  y 2 s se muestran en las Figs. 8-40(a) y (b), respectivamente. En este caso, el valor marginal de estabilidad para  $K$  es 2.3 para  $T = 1$  s y 1.46 para  $T = 2$  s. Al comparar el lugar geométrico de las raíces del sistema con y sin el ROC, se observa que el ROC reduce el margen de estabilidad del sistema en tiempo discreto.

En conclusión, el lugar geométrico de las raíces de sistemas en tiempo discreto se puede construir en el plano  $z$  utilizando en esencia los mismos procedimientos de aquellas que para sistemas en tiempo continuo en el plano  $s$ . Sin embargo, las condiciones de estabilidad absoluta y relativa de sistemas en tiempo discreto se deben investigar con respecto al círculo unitario e investigar otra interpretación del desempeño con respecto a las regiones en el plano  $z$ . ▲



**Figura 8-39** Diagrama del lugar geométrico de las raíces de un sistema de control en tiempo discreto sin retén de orden cero.  
 $G(s)H(s) = K/[s(s+1)]$ ,  $T = 2$  s.

(a) Lugar geométrico de las raíces para  $T = 1 \text{ s}$ .(b) Lugar geométrico de las raíces para  $T = 2 \text{ s}$ .

**Figura 8-40** Diagramas del lugar geométrico de las raíces de un sistema en tiempo discreto con muestreo y retén.  
 $G(s)H(s) = K/[s(s+1)]$ .

## 8-8 Resumen

En este capítulo se han presentado las técnicas del lugar geométrico de las raíces para sistemas de control lineales. La técnica representa un método gráfico para investigar las raíces de la ecuación característica de un sistema lineal e invariante con el tiempo cuando uno o más parámetros varían. En el Cap. 10, el método del lugar geométrico de las raíces será utilizado de manera exhaustiva para el diseño en sistemas de control. Sin embargo, se debe mantener en mente que las raíces de la ecuación

característica dan una indicación exacta de la estabilidad absoluta de sistemas lineales SISO, pero dan sólo información cualitativa sobre la estabilidad relativa, ya que los ceros de la función de transferencia en lazo cerrado, si existen, también juegan un papel importante en el desempeño dinámico del sistema.

La técnica del lugar geométrico de las raíces también se aplica a sistemas en tiempo discreto con la ecuación característica expresada en términos de la transformada  $z$ . Las propiedades y construcción del lugar geométrico de las raíces en el plano  $z$  son en esencia los mismos que aquellos para sistemas en tiempo continuo en el plano  $s$ , excepto que la interpretación de la localización de las raíces en el desempeño del sistema deben hacerse con respecto al círculo unitario  $|z| = 1$  y el significado de las regiones en el plano  $z$ .

El material en este capítulo provee una guía de las bases fundamentales del lugar geométrico de las raíces y del bosquejo manual del lugar geométrico de las raíces. Los programas de computadora tales como **rootloci** en **ACSP**, **rlplot** en **CSAD/MATLAB**, y **root** en **Program CC**, solo por nombrar algunos, se pueden utilizar para realizar la gráfica del lugar geométrico de las raíces y dan información detallada de la gráfica. Sin embargo, el autor cree que los programas de computadora sólo se emplean como herramienta, y que el investigador inteligente no puede estar sin comprender lo fundamental de este tema.

La técnica del lugar geométrico de las raíces también se puede aplicar a sistemas lineales con tiempos de retraso puros en el lazo del sistema [25, 26]. El material no se trata aquí, ya que los sistemas con retardos puros se tratan más fácil con los métodos del dominio de la frecuencia que se estudiarán en el Cap. 9.

## Preguntas de repaso

Las siguientes preguntas y los problemas de falso y verdadero se refieren a la ecuación  $P(s) + KQ(s) = 0$ , en donde  $P(s)$  y  $Q(s)$  son polinomios en  $s$  con coeficientes constantes.

1. Dé la condición para lo cual el lugar geométrico de las raíces se construye.
2. Determine los puntos sobre el lugar geométrico de las raíces completo en los cuales  $K = 0$  con referencia a los polos y ceros de  $Q(s)/P(s)$ .
3. Determine los punios sobre el lugar geométrico de las raíces en los que  $K = \pm\infty$ , con referencia a los polos y ceros de  $Q(s)/P(s)$ .
4. De el significado de los puntos de ruptura con respecto a las raíces de  $P(s) + KQ(s) = 0$ .
5. De la ecuación de intersección de las asíntotas
6. Las asíntotas del lugar geométrico de las raíces se refieren a los ángulos del lugar geométrico de las raíces cuando  $K = \pm\infty$ . (V) (F)
7. Hay sólo una intersección de las asíntotas del lugar geométrico de las raíces. (V) (F)
8. La intersección de las asíntotas debe siempre estar sobre el eje real. (V) (F)
9. Los puntos de ruptura del lugar geométrico de las raíces deben siempre estar sobre el eje real. (V) (F)
10. Dada la ecuación  $1 + KG_1(s)H_1(s) = 0$ , en donde  $G_1(s)H_1(s)$  es una función racional de  $s$  y no contiene  $K$ , las raíces de la derivada de  $dG_1(s)H_1(s)/ds$  son todos los puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces ( $-\infty < K < \infty$ ). (V) (F)
11. En los puntos de ruptura sobre el lugar geométrico de las raíces, la sensibilidad de las raíces es infinita. (V) (F)
12. Sin modificación todas las reglas y propiedades para la construcción del lugar geométrico de las raíces en el plano  $s$ , se puede aplicar en la construcción del lugar geométrico de las raíces de sistemas en tiempo discreto en el plano  $z$ . (V) (F)

13. La determinación de las intersecciones del lugar geométrico de las raíces en el plano  $s$  con el eje  $j\omega$  se pueden obtener al resolver la ecuación auxiliar de la tabla de Routh de la ecuación. (V) (F)
  14. Añadir un polo a  $Q(s)/P(s)$  tiene el efecto general de empujar el lugar geométrico de las raíces a la derecha, mientras que añadir un cero empuja el lugar a la izquierda. (V) (F)
- Las respuestas a las preguntas de falso y verdadero se dan al terminar la sección de problemas.

## Referencias

### Temas generales

1. **W. R. EVANS**, "Graphical Analysis of Control Systems," *Trans. AIEE*, Vol. 67, pp. 547-551, 1948.
2. **W. R. EVANS**, "Control System Synthesis by Root Locus Method," *Trans. AIEE*, Vol. 69, pp. 66-69, 1950.
3. **W. R. EVANS**, *Control System Dynamics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.

### Construcción y propiedades del lugar geométrico de las raíces

4. **C. C. MACDUFF**, *Theory of Equations*, pp. 29-104, John Wiley & Sons, New York, 1954.
5. **C. S. LORENS and R. C. TITSWORTH**, "Properties of Root Locus Asymptotes," *IRE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-5, pp. 71-72, Jan. 1960.
6. **C. A. STAPLETON**, "On Root Locus Breakaway Points," *IRE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-7, pp. 88-89, Apr. 1962.
7. **M. J. REMEC**, "Saddle-Points of a Complete Root Locus and an Algorithm for Their Easy Location in the Complex Frequency Plane," *Proc. Natl. Electronics Conf.*, Vol. 21, pp. 605-608, 1965.
8. **C. F. CHEN**, "A New Rule for Finding Breaking Points of Root Loci Involving Complex Roots," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-10, pp. 373-374, July 1965.
9. **V. KRISHRAN**, "Semi-analytic Approach to Root Locus," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-11, pp. 102-108, Jan. 1966.
10. **R. H. LABOUNTY and C. H. HOUPIS**, "Root Locus Analysis of a High-Grain Linear System with Variable Coefficients; Application of Horowitz's Method," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-11, pp. 255-263, Apr. 1966.
11. **A. FREGOSI and J. FEINSTEIN**, "Some Exclusive Properties of the Negative Root Locus," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-14, pp. 304-305, June 1969.

### Representación analítica del lugar geométrico de las raíces

12. **G. A. BENDRIKOV and K. F. TEODORCHIK**, "The Analytic Theory of Constructing Root Loci," *Automatic and Remote Control*, pp. 340-344, Mar. 1959.
13. **K. STEIGLITZ**, "Analytical Approach to Root Loci," *IRE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-6, pp. 326-332, Sept. 1961.