Aqui inicia o conteúdo da segunda prova!!!

Derivadas

Reta Tangente

Definição: A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta que passa por P que tem inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que este limite exista.

Obs. A equação da reta com inclinação m que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Derivadas

Reta Tangente

Exemplo: Encontre a equação tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

SOLUÇÃO Temos aqui $a = 1$ e $f(x) = x^2$, logo a inclinação é

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Derivadas

Reta Tangente

Definição: A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta por P que tem inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que este limite exista.

Há Outra expressão para a inclinação da reta tangente que às vezes é mais fácil de ser utilizada. Denotando $h = x - a$ então $x = a + h$ e quando x tende a a, h tende a zero, assim, a expressão para a inclinação da reta tangente pode ser reescrita como

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Derivadas

Definição: A **derivada de uma função** f **em um número** a, denotado por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

Exemplo: Encontre a derivada da função $f(x) = x^2 - 8x + 9$ em um número a.

SOLUÇÃO Da Definição, temos

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2a + h - 8) = 2a - 8$$

Derivadas

Observação: A derivada $f'(a)$ é a taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ em relação a x quando $x = a$.

Vimos que **derivada de uma função** f **em um número** a é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

A derivada como uma função:
Aqui mudamos o nosso ponto de vista e vamos variar o número a. Se substituirmos a por uma variável x, obtemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivadas

Outras notações:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x) = f_x(x)$$

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

Definição

Uma função f é **derivável ou diferenciável em** a se $f'(a)$ existir. É **derivável ou diferenciável em um intervalo aberto** (a,b), ou (a, ∞) ou $(-\infty, a)$ ou$(-\infty, \infty)$, se for diferenciável em cada número do intervalo.

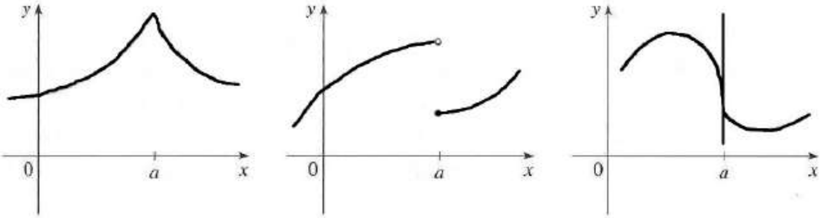
Teorema

Se f for diferenciável em a então f é contínua em a.

A recíproca deste Teorema é falsa.

Derivadas

Como pode uma função não ser diferenciável?



(a) Uma quina (b) Uma descontinuidade (c) Uma tangente vertical

Regras de derivação

Derivada de uma função constante
Se $f(x) = c$ (função constante), então $f'(x) = 0$ para todo x.

Exemplos:
a)$f(x) = 3 \Longrightarrow f'(x) = 0$ **b**)$f(x) = e^2 \Longrightarrow f'(x) = 0$

Derivada de uma função linear
Se $f(x) = mx + b,\; m, b \in \mathbb{R},\; m \neq 0$, então $f'(x) = m$.

Exemplos:
a)$f(x) = 5x - 2 \Longrightarrow f'(x) = 5$

b)$f(x) = e^3x + 17 \Longrightarrow f'(x) = e^3$

Regras de derivação

Regra da multiplicação por constante
Se c for uma constante e f uma função derivável, então

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

Exemplos: Se $f(x) = 3x - 5$, então $f'(x) = 3$, daí:
a) $(2f(x))' = 2f'(x) = 6$ **b)** $\left(\frac{1}{3}f(x)\right)' = \frac{1}{3}f'(x) = 1$

Regra da potência
Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{R}$.

Exemplos:
a)$f(x) = x^7 \Longrightarrow f'(x) = 7x^6$

b)$f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4} \Longrightarrow f'(x) = -4x^{-5} = \frac{-4}{x^5}$

c)$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Regras de derivação

Exemplo: Usando a definição:

[1] Calcule $f'(\frac{1}{4})$ e $f'(2)$, se $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(x+t)^2 - x^2}{t} = \lim_{t \to 0}(2x + t) = 2\,x.$$

Logo, $f'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ e $f'(2) = 4$.

[2] Calcule $f'(\frac{1}{2})$ se $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{1 - (x+t)^2} - \sqrt{1 - x^2}}{t} = \lim_{t \to 0} -\frac{2x + t}{\sqrt{1 - (x+t)^2} + \sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Logo, $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Regras de derivação

[3] Calcule $f'(1)$ se $f(x) = 4 - x^2$.

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} -\frac{t\,(t + 2\,x)}{t} = \lim_{t \to 0} -(t + 2\,x) = -2\,x.$$

Logo, $f'(1) = -2$.

[4] Calcule $f'(\frac{1}{2})$ se $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+t} - \dfrac{1}{x}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{-1}{x^2 + x\,t} = -\frac{1}{x^2}.$$

Logo, $f'(\frac{1}{2}) = -4$.

Regras de derivação

Exercícios

1) Encontre diretamente as derivadas, nos respectivos pontos, do exemplo anterior, exceto o exemplo 2.

2) Derive:

a)$y = 2x - 13,1$ **b**)$y = 4x^5$ **c**)$y = 4x^{-5}$

d)$y = \dfrac{3}{x^2}$ **e**)$y = \dfrac{3}{x^{-2}}$ **f**)$y = 2\sqrt[3]{x^2}$

g)$y = \dfrac{-2}{\sqrt[3]{x^2}}$ **h**)$y = 2x^3$ **i**)$y = -2x^{-3}$

3) Dado $f(x) = \dfrac{2x^3}{3}$.

Calcule: $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$.

Regras de derivação

Se f e g forem ambas diferenciáveis, então:

Regra da soma e da diferença

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

Regra do produto

$$(f\ g)' = f'\ g + f\ g'$$

Regra do Quociente

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\ g - f\ g'}{g^2}$$

Derivada da função exponencial natural

$$(e^x)' = e^x$$

Derivada da função logarítmica

$$(lnx)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Regras de derivação

Exemplos:

a) Se $f(x) = x + 186,5$, então $f'(x) = 1$

b) Se $f(x) = 5x - lnx$, então $f'(x) = 5 - \frac{1}{x}$

c) Se $f(x) = x^3 - 4x + 6$, então $f'(x) = 3x^2 - 4$

d) Se $f(x) = 6x^{-9} + 4e^x$, então $f'(x) = -54x^{-10} + 4e^x$

e) Se $f(x) = ax^2 + bx + c$, então $f'(x) = 2ax + b$

f) Se $f(x) = 2lnx - 4x^{10}$, então $f'(x) = \frac{2}{x} - 40x^9$

g) Se $f(x) = 3x^{15} - 5x^3 + 3$, então $f'(x) = 45x^{14} - 15x^2$

h) Se $f(x) = 2x - 5x^{3/4}$, então $f'(x) = 2 - \frac{15}{4}x^{-1/4}$

i) Se $f(x) = \frac{1}{4}e^x - 3x^3$, então $f'(x) = \frac{1}{4}e^x - 9x^2$

Regras de derivação

Exemplos:

[1] Calcule $u'(x)$, sendo $u(x) = \dfrac{x^4 + 3x + 1}{x^5}$; $x \neq 0$.

Note que: $u(x) = x^{-1} + 3x^{-4} + x^{-5}$, temos:

$$u'(x) = (x^{-1} + 3x^{-4} + x^{-5})' = -x^{-2} - 12x^{-5} - 5x^{-6}.$$

[2] Calcule $u'(x)$ sendo $u(x) = (x^3 + 2x + 1)\,(2x^2 + 3)$.

Aplicando diretamente as regras:

$$u'(x) = ((x^3 + 2\,x + 1))'\,(2\,x^2 + 3) + (x^3 + 2\,x + 1)\,((2\,x^2 + 3))'$$

logo, $u'(x) = 10\,x^4 + 21\,x^2 + 4\,x + 6.$

[3] Calcule $u'(x)$, sendo $u(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3 + 1}$.

$$u'(x) = \left(\frac{x^2 + x}{x^3 + 1}\right)' = \frac{(x^2 + x)'(x^3 + 1) - (x^2 + x)(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2}$$

logo, $u'(x) = \dfrac{-x^4 - 2\,x^3 + 2x + 1}{(x^3 + 1)^2}$.

Derivadas de funções trigonométricas

Derivada da função seno: $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

Derivada da função cosseno:$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

Derivada da função tangente:$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$

Derivada da função cotangente:$(\operatorname{cotg} x)' = -\operatorname{cossec}^2 x$

Derivada da função secante:$(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$

Derivada da função cossecante:$(\operatorname{cossec} x)' = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$

Regras de derivação

Exemplos:

a) Se $f(x) = 2x^2 + cos\,x$, então $f'(x) = 4x - sen\,x$

b) Se $f(x) = xlnx - sen\,x$, então $f'(x) = lnx + 1 - cos\,x$

c) Se $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4cos\,x$, então $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4sen\,x$

d) Se $f(x) = x^2 + e^x sen\,x$, então $f'(x) = 2x + e^x sen\,x + e^x cos\,x$

e) Se $f(x) = -x^3 cos\,x$, então $f'(x) = -3x^2 cos\,x + x^3 sen\,x$

f) Se $f(x) = 2lnx\,cos\,x$, então $f'(x) = \frac{2}{x} cos\,x - 2lnx\,sen\,x$

g) Se $f(x) = cos\,x\,sen\,x$, então $f'(x) = -sen^2\,x + cos^2\,x$

Derivadas de funções trigonométricas

Exemplo:

Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \operatorname{tg} x}$. Para quais valores de x o gráfico de f tem uma tangente horizontal?

SOLUÇÃO A Regra do Quociente dá

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1 + \operatorname{tg} x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x\,\dfrac{d}{dx}(1 + \operatorname{tg} x)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} \\
&= \frac{(1 + \operatorname{tg} x)\sec x \operatorname{tg} x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} \\
&= \frac{\sec x\,(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} \\
&= \frac{\sec x\,(\operatorname{tg} x - 1)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}
\end{aligned}
$$

Na simplificação da resposta, usamos a identidade $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Exemplos

[1] Se $y = sen(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Fazendo $u(x) = \alpha\, x$, temos $u'(x) = \alpha$; utilizando a tabela, temos que:

$$y' = \alpha\, cos(\alpha x).$$

Para as outras funções trigonométricas, o procedimento é análogo.

[2] Seja $y = sen^{\beta}(\alpha x)$, onde $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Fazendo $y = sen^{\beta}(\alpha x) = (sen(\alpha x))^{\beta}$, derivando como uma potência e usando o exercício anterior, temos:

$$y' = \beta\, \alpha\, sen^{\beta-1}(\alpha x)\, cos(\alpha x).$$

Para as outras funções trigonométricas, o procedimento é análogo.

[3] Seja $y = tg(sen(x))$.

Fazendo $u(x) = sen(x)$, temos $u'(x) = cos(x)$; logo, temos que:

$$y' = cos(x)\, sec^{2}(sen(x)).$$

Regra da Cadeia

Se g for derivável em x e f for derivável em $g(x)$, então a função composta $F = f \circ g$, definida por $F(x) = f(g(x))$ será

$$F'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções deriváveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Aplicação: Se $v(x) = [u(x)]^n$, então $[(v(x)]' = n[u(x)]^{n-1}\, u'(x)$

Exemplos:

a) Calcule $v'(x)$ se $v(x) = (x^9 + x^6 + 1)^{1000}$.

Neste caso $u(x) = x^9 + x^6 + 1$; logo, $u'(x) = 9\,x^8 + 6\,x^5$ e $n = 1000$; então:

$$v'(x) = ((u(x))^{1000})' = 1000\,(u(x))^{999}\, u'(x) = 1000\,(x^9 + x^6 + 1)^{999}\,(9\,x^8 + 6\,x^5)$$

Regra da Cadeia

b) Se $y = (2x+1)^5$, então $y' = 5(2x+1)^4\,2 = 10(2x+1)^4$

c) Se $y = (x^3 - x + 1)^4$, então $y' = 4(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1)$

d) Se $y = (1 - x^3)^{10}$, então
$y' = 10(1 - x^3)^9(-3x^2) = -30x^2(1 - x^3)^9$

e) Se $y = \sqrt{x^2 + 1}$, ou seja, $y = (x^2 + 1)^{1/2}$, então
$y' = \dfrac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2}\,2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

f) Se $y = \operatorname{sen}(x^3)$, então $y' = \cos(x^3)\,3x^2 = 3x^2\cos(x^3)$

g) Se $y = \operatorname{sen}^3 x$, então $y' = 3\operatorname{sen}^2 x \cos x$

h) Se $y = u^3 + u^2 - 1$ e $u = x^4 + 1$, então
$y = (x^4 + 1)^3 + (x^4 + 1)^2 - 1$ e
$y' = 3(x^4 + 1)^2 4x^3 + 2(x^4 + 1)4x^3 = 12x^3(x^4 + 1)^2 + 8x^3(x^4 + 1)$

Regra da Cadeia

Teorema (Função Inversa) Seja f uma função definida num intervalo aberto I. Se f é derivável em I e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então f possui inversa f^{-1} derivável e:

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Exemplo

[1] Seja $f(x) = x^2$, $x \geq 0$; logo sua inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ e $f'(x) = 2x \neq 0$ se $x \neq 0$; logo:

$$f'(f^{-1}(x)) = 2\sqrt{x}.$$

Aplicando o teorema: $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \neq 0.$$

[2] Seja $f(x) = x^3$; logo sua inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ e $f'(x) = 3x^2 \neq 0$ se $x \neq 0$;

$$f'(f^{-1}(x)) = 3\sqrt[3]{x^2}.$$

Aplicando o teorema: $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad x \neq 0.$$

[3] Se $n \in \mathbb{N}$, então: $(\sqrt[n]{x})' = \dfrac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n}$, para todos os valores de x tais que $\sqrt[n]{x}$ seja definida.

Derivada de segunda ordem

Após o cálculo da primeira derivada, y', se esta função for diferenciável, podemos calcular a derivada segunda de y, que é dada por

$$\frac{dy'}{dx}$$

ou seja, derivar novamente y' em função de x.
A derivada segunda é denotada por

$$y'' \quad \text{ou} \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

Derivada de segunda ordem

Exemplo

Se $f(x) = x^3 - x$, encontre e interprete $f''(x)$.

SOLUÇÃO Encontramos que a primeira derivada

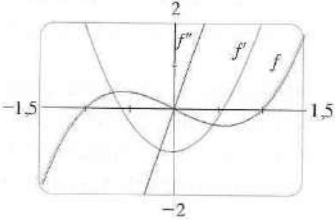
é $f'(x) = 3x^2 - 1$.

Assim, a segunda derivada é

$f''(x) = 6x$

Os gráficos de f, f' e f''

são mostrados na Figura.



Podemos interpretar $f''(x)$ como a inclinação da curva $y = f'(x)$ no ponto $(x, f'(x))$. Em outras palavras, é a taxa de variação da inclinação da curva original $y = f(x)$.

Derivada de segunda ordem

Em geral, podemos interpretar uma segunda derivada como uma taxa de variação de uma taxa de variação. O exemplo mais familiar disso é a *aceleração*, que é definida desta maneira:

Se $s = s(t)$ for a função posição de um objeto que se move em uma reta, sabemos que sua primeira derivada representa a velocidade $v(t)$ do objeto como uma função do tempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

A taxa instantânea de variação da velocidade com relação ao tempo é chamada **aceleração** $a(t)$ do objeto. Assim, a função aceleração é a derivada da função velocidade e, portanto, é a segunda derivada da função posição:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Derivadas de mais alta ordem

De maneira geral, podemos derivar a função quantas vezes necessitarmos, desde que ela seja diferenciável. Denotamos estas derivadas como

$$y', y'', y''', y^{IV}, \ldots$$

ou

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4} \ldots$$

Derivadas de mais alta ordem

Exemplos

Se $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x - 4$, teremos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^2 - 4x + 6, \\ f''(x) &= 24x - 4, \\ f'''(x) &= 24, \\ f^{(4)}(x) &= 0 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Se $f(x) = \cos x$, teremos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(0) = 0, \\ f''(x) &= -\cos x \Rightarrow f''(0) = -1, \\ f'''(x) &= \operatorname{sen} x \Rightarrow f'''(0) = 0, \\ f''''(x) &= \cos x \Rightarrow f''''(0) = 1. \end{aligned}$$

Derivadas de mais alta ordem

Exemplos

[1] Sendo $f(x) = x^4 + 2x^3 + x - 1$, calcule $f^{(n)}$.

n	1	2	3	4	5	6	7
$f^{(n)}(x)$	$4\,x^3 + 6\,x^2 + 1$	$12\,x^2 + 12\,x$	$24\,x + 12$	24	-0	0	0

Logo, $f^{(n)}(x) = 0$, se $n \geq 5$.

[2] Sendo $f(x) = \dfrac{1}{x}$, calcule $f^{(n)}$.

n	1	2	3	4	5	6	7
$f^{(n)}(x)$	$-x^{-2}$	$2\,x^{-3}$	$-6\,x^{-4}$	$24\,x^{-5}$	$-120\,x^{-6}$	$720\,x^{-7}$	$-5040\,x^{-8}$

Logo:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Derivadas de mais alta ordem

Exemplo

Encontre a 27ª derivada de $\cos x$.

SOLUÇÃO Algumas das primeiras derivadas de $f(x) = \cos x$ são:

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x$$
$$f''(x) = -\cos x$$
$$f'''(x) = \operatorname{sen} x$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x$$
$$f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen} x$$

Vemos que as derivadas sucessivas ocorrem em um ciclo de comprimento 4 e, em particular, $f^{(n)}(x) = \cos x$ sempre que n for um múltiplo de 4. Portanto,

$$f^{(24)}(x) = \cos x$$

e, derivando mais três vezes, temos

$$f^{(27)}(x) = \operatorname{sen} x \qquad \square$$

Aproximações Lineares

Considere uma curva derivável $f(x)$ e um ponto $(p, f(p))$ sobre ela. Em seguida, determinamos a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$, com equação $y = f(p) + f'(p)(x - p)$, como na figura abaixo:

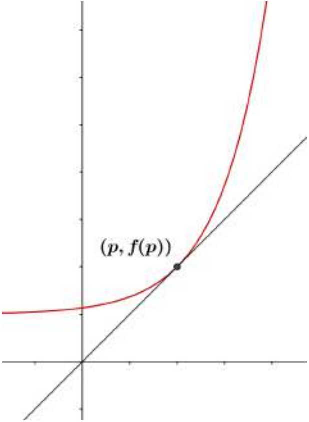
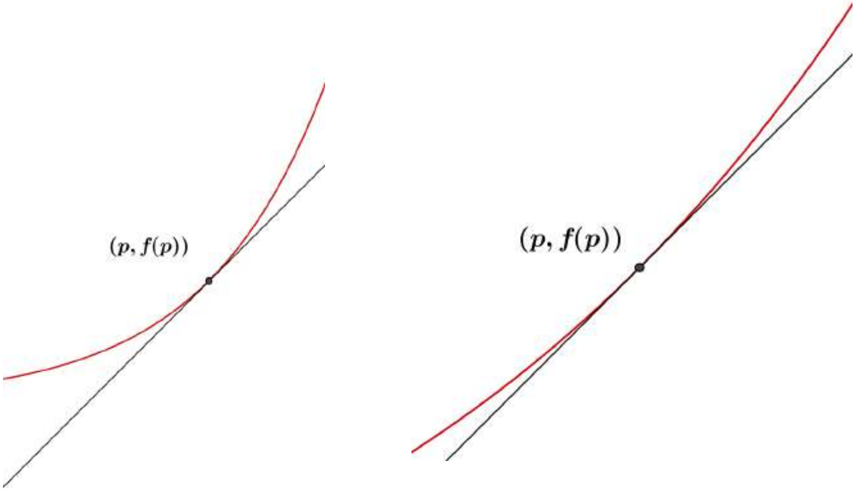


Gráfico de uma função f.

Se dermos um "zoom"na região próxima do ponto $(p, f(p))$, notamos que a curva se aproxima bastante da reta tangente, como podemos observar abaixo:



Zoom no gráfico da função f.

Dessa forma, podemos definir que a reta tangente é uma boa aproximação para a curva $f(x)$. Logo, podemos escrever que $y \approx f(x)$. E assim,

$$f(x) \approx f(p) + f'(p)(x - p)$$

Essa aproximação é chamada de **aproximação linear**. A função linear dada por

$$L(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$$

é chamada de **linearização** de f em p, e desse modo, podemos escrever a aproximação linear como sendo dada por $f(x) \approx L(x)$.

Exemplo. Encontre linearização da função $f(x) = x^4 + 3x^2$ em torno de $a = -1$.

Solução: Para obter $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ precisamos ter o ponto onde passa a reta e o coeficiente angular da reta tangente em $x = a$.
Para achar o ponto $(a, f(a))$ no plano basta achar o valor de a e $f(a)$.
Como $a = -1$, temos

$$f(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^2 = 1 + 3 = 4$$

Para encontrar o coeficiente angular da reta tangente, derivando a função f em elação a x

obtemos $$f'(x) = 4x^3 + 6x$$

e substituindo x por valor de $a = -1$ temos

$$m = f'(-1) = 4(-1)^3 + 6(-1) = -4 - 6 = -10$$

Logo substituindo na equação da reta tangente obtemos:

$$L(x) = f(-1) + f'(-1)(x-(-1)) = 4 - 10(x+1) = -10x - 6$$

Resposta: $L(x) = -10x - 6$

(a) Calcule valor aproximado de $f(-0{,}8)$ usando aproximação linear.

Solução. Como a reta $L(x) = -6 - 10x$ aproxima $f(x) = x^4 + 3x^2$ em torno de $a = -1$ o valor

$$L(-0{,}8) = -6 - 10(-0{,}8) = -6 + 8 = 2$$

Calculando diretamente temos

$$f(-0{,}8) = (-0{,}8)^4 + 3(-0{,}8)^2 = 0{,}4096 + 3 \times 0{,}64 = 0{,}4096 + 1{,}92 \cong 2{,}3296$$

Erro de 0,3296.

(b) Quanto mais perto do valor de a melhor é a aproximação.

Calcular $f(-0{,}9)$.

Resposta: $L(-0{,}9) = -6 - 10(-0{,}9) = -6 + 9 = 3$ enquanto que

$$f(-0{,}9) = (-0{,}9)^4 + 3(-0{,}9)^2 = 0{,}6561 + 3 \times 0{,}81 = 0{,}6561 + 2{,}43 = 3{,}0861$$

Erro de 0,0861.

(c) Calcular $f(-0,5)$

Solução. Usando aproximação linear

$$L(-0,5) = -6 - 10(-0,5) = -6 + 5 = -1$$

Calculando diretamente temos:

$$f(-0,5) = (-0,5)^4 + 3(-0,5)^2 = 0,0625 + 3 \times 0,25 = 0,0625 + 0,75 = 0,8125$$

Erro de 1,8125, a aproximação linear é péssima porque $-0,5$ está “longe” de $a = -1$.

As aproximações são calculadas conhecida $|x - a| < \delta$ para determinar ε para saber $dy \cong |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Geralmente os valores de δ são da ordem de 10^{-3}, 10^{-2} no máximo na ordem de 10^{-1}.

Exemplo *Encontre a linearização de $f(x) = 5x - 2$ em $p = 2$.*

Solução: Note que $f'(x) = 5$ e que $f(2) = 10 - 2 = 8$. Logo,

$$L(x) = 8 + 5(x - 2) = 5x - 2$$

Observação

Quando a função é "linear", a linearização coincide com a própria função.

Exemplo *Encontre a aproximação linear da função $g(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ em torno de $x = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt[3]{0,95}$ e $\sqrt[3]{1,1}$.*

Solução: Primeiramente, precisamos determinar a linearização de $g(x)$. Sendo assim, note que

$$g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1 + x)^2}}.$$

Logo,

$$g'(0) = \frac{1}{3} \text{ e como } g(0) = 1$$

temos que

$$L(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 0) = 1 + \frac{x}{3}$$

Assim, a aproximação linear é dada por

$$L(x) \approx g(x)$$

ou seja,

$$\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$$

Logo,

$$\sqrt[3]{0,95} = \sqrt[3]{1-0,05} \approx L(-0,05) = 1 - \frac{0,05}{3} = \frac{2,95}{3} \approxeq 0,983333$$

e

$$\sqrt[3]{1,1} = \sqrt[3]{1+0,1} \approx L(0,1) = 1 + \frac{1}{30} = \frac{31}{30} \approxeq 1,033333$$

Exemplo *Encontre a linearização da função* $f(x) = \dfrac{1}{2x}$ *em* $p = 7$*. Determine a aproximação linear correspondente.*

Solução: Note que a derivada de $f(x)$ é dada por $f'(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$.

Sendo assim, $f(7) = \dfrac{1}{14}$ e $f'(7) = -\dfrac{1}{98}$.

Portanto,

$$L(x) = f(7) + f'(7)(x-7) = \frac{1}{14} - \frac{1}{98}(x-7) = \frac{1}{7} - \frac{x}{98}$$

A aproximação linear correspondente é dada por $L(x) \approx f(x)$, então:

$$\frac{1}{2x} \approx \frac{1}{7} - \frac{x}{98}$$

para x próximos de 7.

Diferenciais

Seja $y = f(x)$ uma função derivável (diferenciável) então definimos diferencial de y como sendo

$$dy = f'(x)\,dx$$

Diferencial de uma função é a derivada dessa função vezes a diferencial da variável.

Significado geométrico da diferencial.

A notação Δx é usada para indicar uma distância entre dois pontos distintos na reta. Quando tomamos o limite em $\Delta x = |x - a|$ quando x aproxima de a, a distância fica tão pequena que usamos a notação dx, isto é

$$\lim_{x \to a} (\Delta x) = dx \cong 0$$

Também dizemos que dx é uma infinitesimal da distância.

Observemos que df depende de Δx e é fácil perceber que quanto menor for Δx, mais próximo df estará de Δf. Assim, podemos dizer que

$$df \cong \Delta f \text{ para pequenos valores de } \Delta x.$$

Dessa forma, a diferencial de uma função pode ser usada para calcular aproximadamente variações de f, para pequenos valores de Δx.

Exemplo 5.20. Consideremos a função $f(x) = 3x^2$ e os pontos de abscissa 1 e 1,01. A variação de f entrè os pontos dados é

$$\Delta f = f(1,01) - f(1) = 3 \cdot (1{,}01)^2 - 3 \cdot 1^2 = 0{,}0603.$$

A diferencial de f no ponto de abscissa 1, para $\Delta x = 0{,}01$ é

$$df = f'(1) \cdot 0{,}01.$$

Como $f'(x) = 6x$, $f'(1) = 6$ e temos $df = 6 \cdot (0{,}01) = 0{,}06$. Assim, $df \cong \Delta f$.

Exemplo Seja $f(x) = x^2 - \dfrac{x}{3} + e^{3x}$, calcule diferencial de y.

Resposta: Como $dy = f'(x)dx$ basta derivar a função f em relação a x e substituir na expressão da diferencial. Temos

$$f'(x) = \left[x^2 - \frac{x}{3} + e^{3x}\right]' = 2x - \frac{1}{3} + 3e^{3x}$$

De modo que

$$dy = \left[2x - \frac{1}{3} + 3e^{3x}\right]dx$$

Exemplo Seja $f(x) = \cos^2\left(\frac{x}{3}\right)$, calcule diferencial de y.

Resposta: Como $dy = f'(x)dx$ basta derivar a função f em relação a em relação a x e substituir na expressão da diferencial. Temos

$$f'(x) = \left[\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)\right]' = 2\cos\left(\frac{x}{3}\right)\left[-\frac{1}{3}sen\left(\frac{x}{3}\right)\right] = -\frac{2}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right)sen\left(\frac{x}{3}\right)$$

De modo que

$$dy = -\frac{2}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right)sen\left(\frac{x}{3}\right)dx$$

Exemplo Seja $u(x) = \ln(x) + 3x^2$, calcule diferencial de u.

Resposta: Como $du = u'(x)dx$, derivando $u = u(x)$ em relação a x temos:

$$u'(x) = \frac{1}{x} + 6x$$

e substituir na expressão da diferencial resulta: $du = \left[\frac{1}{x} + 6x\right]dx$

Exemplo Seja $\phi(x) = x^2 sen(2x)$, calcule diferencial de ϕ.

Resposta: Como:

$$\phi'(x) = 2xsen(2x) + 2x^2\cos(2x)$$

temos: $d\phi = 2\left[xsen(2x) + x^2\cos(2x)\right]dx$

Derivação Implícita

As funções encontradas até agora podem ser descritas expressando-se uma variável explicitamente em termos de outra, por exemplo

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \quad \text{ou} \quad y = x \operatorname{sen} x$$

ou, em geral $y = f(x)$. Algumas funções, entretanto, são definidas implicitamente por uma relação entre x e y, tal como

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{ou} \quad x^3 + y^3 = 6xy$$

Neste caso para derivar utilizamos a regra da cadeia.

Derivação Implícita

Exemplo:

a) Se $x^2 + y^2 = 25$, encontre $\dfrac{dy}{dx}$.

SOLUÇÃO

Derive ambos os lados da equação $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Lembrando que y é uma função de x e usando a **Regra da Cadeia**, temos

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Assim,
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Agora, isole dy/dx nesta equação:
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Derivação Implícita

b) Se $x^3 + y^3 = 6xy$, encontre y'.
Encontre a reta tangente a $x^3 + y^3 = 6xy$, no ponto $(3, 3)$.

SOLUÇÃO

Derivando ambos os lados de $x^3 + y^3 = 6xy$ em relação a x, considerando y como uma função de x e usando a Regra da Cadeia no termo y^3 e a Regra do Produto no termo $6xy$, obtemos

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$

ou

$$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

Agora vamos isolar y':

$$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

Quando $x = y = 3$,

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$

Logo, uma equação da tangente a $x^3 + y^3 = 6xy$ em $(3, 3)$ é

$$y - 3 = -1(x - 3) \qquad \text{ou} \qquad x + y = 6$$

Derivação Implícita

Exemplo:

Encontre y' se $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

SOLUÇÃO Derivando implicitamente em relação a x e lembrando que y é uma função de x, obtemos

$$\cos(x + y) \cdot (1 + y') = y^2(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2yy')$$

(Observe que usamos a Regra da Cadeia no lado esquerdo e as Regras da Cadeia e do Produto no lado direito.) Juntando os termos que envolvem y' obtemos

$$\cos(x + y) + y^2 \operatorname{sen} x = (2y \cos x)y' - \cos(x + y) \cdot y'$$

Portanto,

$$y' = \frac{y^2 \operatorname{sen} x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}$$

Taxas relacionadas

Problemas de taxas relacionadas são problemas em que duas ou mais grandezas variáveis estão relacionadas e leva-se em conta taxas de variação dessas grandezas.

Quando bombeamos ar para dentro de um balão, tanto o volume quanto o raio do balão crescem, e suas taxas de crescimento estão relacionadas. Mas é muito mais fácil medir diretamente a taxa de crescimento do volume do que a do raio.

Em um problema de taxas relacionadas, a ideia é calcular a taxa de variação de uma grandeza em termos da taxa de variação da outra (que pode ser medida mais facilmente). O procedimento é achar uma equação que relacione as duas grandezas e então usar a Regra da Cadeia para derivar ambos os lados em relação ao tempo.

Taxas relacionadas

Exemplo: O ar é bombeado para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa de 100 cm^3/s. Quão rápido o raio está crescendo quando o diâmetro for 50 cm?

Solução: A relação entre raio e volume da esfera é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

É dado do problema que $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 100$,

e a pergunta é o valor de $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ quando $r = 25cm$.

Derivando a equação $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ com relação à variável t temos

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \quad ,$$

e se $r = 25$ e $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 100$.

Então

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi(25)^2}100 = \frac{1}{25\pi}.$$

Logo quando o diâmetro for 50 cm o raio cresce a $\frac{1}{25\pi}$ cm/s.

Taxas relacionadas

Exemplo: Uma escada de 5 m de comprimento está recostada em uma parede. A base da escada escorrega, afastando-se da parede a uma taxa de 1 $\mathrm{cm/s}$. Com que velocidade cai o topo da escada, no momento em que a base da escada está a 3 m da parede?

Solução: Pelo teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = 25$ e derivando com relação a t ficamos com

$$2xx' + 2yy' = 0.$$

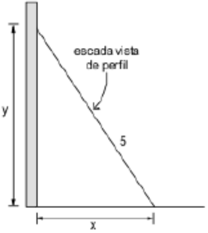
Portanto, $y' = -\frac{x}{y}x'$.

E quando $x = 3$ (dado do problema),

temos y=4 (Pitágoras).

Logo

$$y' = -\frac{3}{4}x' = -\frac{3}{4}1 = -\frac{3}{4}m/s.$$



Taxas relacionadas

Exemplo: Um avião está subindo a um angulo de 30 com a horizontal. Com que rapidez o avião estará ganhando altura se sua velocidade for de 900 quilômetros por hora?

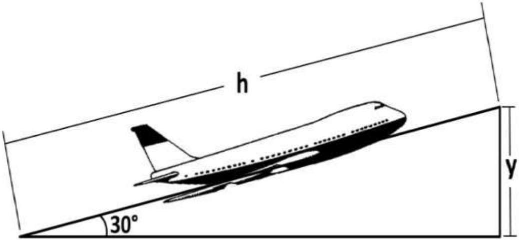
Solução: Para resolver este exercício iniciamos fazendo um esboço que representa esta situação.
Através das relações trigonométricas podemos relacionar a distância percorrida pelo avião e a altura do solo que ele se encontra:

$sen(30) = \frac{y}{h}$,

onde $sen(30) = \frac{1}{2}$,

logo tem-se:

$h = 2y$.



Taxas relacionadas

Lembre-se que ao derivar a função posição encontramos a função velocidade, que representa a taxa de variação do espaço.

Assim, derivando a equação dada em ambos os lados em função do tempo t obtemos:

$$\frac{dh}{dt} = 2\frac{dy}{dt},$$

substituindo os dados pelo problema tem-se:

$$900 = 2\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 450.$$

Deste modo chegamos a resposta do problema apresentado. O avião ganha altura a uma rapidez de $450Km/h$.