Universidade Federal do Espírito Santo
Prova Final de Álgebra Linear - Semestre EARTE
Vitória, 16 de dezembro de 2020
GABARITO

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS!!!

1. $(2,0\,\text{pontos})$: Encontre a matriz canônica da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que primeiro faz uma reflexão em relação ao eixo horizontal e, depois, faz uma rotação no sentido anti-horário de $-\pi/2$ radianos em torno da origem.

Solução: Seja $R_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação reflexão em relação ao eixo horizontal Ox. Logo, temos que $R_x(x, y) = (x, -y)$ e tem por matriz canônica

$$[R_x]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

onde $B = \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ é a base canônica.

Agora, considere $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação rotação de um ângulo θ em torno da origem $O = (0, 0, 0)$. Logo, temos que $R_\theta(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$ e tem por matriz canônica

$$[R_\theta]_B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

No caso presente, a rotação é no sentido anti-horário de $\theta = -\pi/2$ radianos em torno da origem, e então,

$$[R_\theta]_B = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/2) & -\sin(-\pi/2) \\ \sin(-\pi/2) & \cos(-\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) \\ -\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por fim, a matriz canônica da transformação T procurada é a matriz da transformação composta $T = R_\theta \circ R_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, isto é, $[T]_B = [R_\theta]_B[R_x]_B$, e esta é dada por

$$[T]_B = [R_\theta]_B \cdot [R_x]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

2. $(2,0\,\text{pontos})$: O ângulo α em A do triângulo isósceles ABC mede $2\pi/3$. Sabendo que $A = (1, 1, 1)$ e que BC está contido na reta $r : X = (2, 1, 0) + \lambda(1, -1, 0)$, determine B e C e calcule o comprimento da altura relativa ao vértice A.

Solução: Visto que BC está contido na reta $r : X = (2, 1, 0) + \lambda(1, -1, 0)$, temos então que $B = (2 + \lambda_1, 1 - \lambda_1, 0)$ e $C = (2 + \lambda_2, 1 - \lambda_2, 0)$ para certos escalares λ_1, λ_2.

Sendo o triângulo isósceles com o ângulo α em A medindo $2\pi/3$, então temos que $||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{AC}||$.

Temos então,

$$||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{AC}|| \Rightarrow \lambda_1 + {\lambda_1}^2 = \lambda_2 + {\lambda_2}^2 \qquad (*)$$

e

$$||\overrightarrow{AB}||^2 = (1 + \lambda_1)^2 + (-\lambda_1)^2 + (-1)^2 = 1 + 2\lambda_1 + {\lambda_1}^2 + {\lambda_1}^2 + 1 = 2({\lambda_1}^2 + \lambda_1 + 1).$$

Como

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC}|| \cos\alpha = ||\overrightarrow{AB}||^2 \cos\alpha,$$

segue então,

$$(1 + \lambda_1, -\lambda_1, -1) \cdot (1 + \lambda_2, -\lambda_2, -1) = 2({\lambda_1}^2 + \lambda_1 + 1) \cdot \Big(-\frac{1}{2}\Big)$$

$$\Rightarrow 2+\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_1\lambda_2 = -{\lambda_1}^2-\lambda_1-1 \Rightarrow {\lambda_1}^2+(2+2\lambda_2)\lambda_1+(\lambda_2+3)=0$$

Daí,

$$\Delta = (2+2\lambda_2)^2 - 4\cdot 1\cdot(\lambda_2+3) = 4({\lambda_2}^2+\lambda_2-2).$$

Logo,

$$\Delta = 0 \Longleftrightarrow {\lambda_2}^2+\lambda_2-2=0 \Longleftrightarrow \lambda_2 = 1 \ \text{ ou } \ \lambda_2=-2.$$

Pela identidade $(*)$ acima, podemos tomar $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$ e deste modo, temos $B = (0,3,0)$ e $C = (3,0,0)$.

Para finalizar o problema, vamos agora calcular o comprimento da altura relativa ao vértice A. Se h denota a altura solicitada, temos então que $h = ||\overrightarrow{AD}||$ onde D é o ponto médio do segmento BC.

Temos,

$$D = \frac{B+C}{2} = \frac{1}{2}(3,3,0) \Rightarrow D = \Big(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\Big).$$

Então,

$$h = ||\overrightarrow{AD}|| = \sqrt{\Big(\frac{3}{2}-1\Big)^2+\Big(\frac{3}{2}-1\Big)^2+(0-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

*Outra forma de se obter a altura h é:

$$h = ||\overrightarrow{BA} - proj_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA}||$$

Temos: $\overrightarrow{BA} = (1,-2,1)$, $\overrightarrow{BC} = (3,-3,0)$ e então,

$$proj_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA} = \Big(\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}}\Big)\overrightarrow{BC} = \frac{(1,-2,1)\cdot(3,-3,0)}{(3,-3,0)\cdot(3,-3,0)}\ (3,-3,0) = \frac{9}{18}\ (3,-3,0) = \Big(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0\Big).$$

Daí,

$$\overrightarrow{BA} - proj_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA} = (1,-2,1) - \Big(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0\Big) = \Big(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\Big),$$

e portanto,

$$h = ||\overrightarrow{BA} - proj_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA}|| = \Big|\Big|\Big(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\Big)\Big|\Big|$$
$$= \sqrt{\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2+\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2+1^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

■

3. $(2,0\,\text{pontos})$: Encontre uma matriz $A_{3\times 3}$ com autovalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$ e autovetores associados $\overrightarrow{u}_1 = (0,1,-1)$, $\overrightarrow{u}_2 = (1,-1,1)$ e $\overrightarrow{u}_3 = (0,1,1)$, respectivamente.

Solução: Visto que os autovetores $\overrightarrow{u}_i's$ de A são associados a autovalores distintos $\lambda_i's$, temos assim que o conjunto $B = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$ é LI e disto, sabemos da teoria que a matriz A é inversível e que a matriz inversível $P = [\overrightarrow{u}_1 \ \ \overrightarrow{u}_2 \ \ \overrightarrow{u}_3]$, a matriz 3×3 de colunas os vetores da base B, "diagonaliza"a matriz A no sentido de que $P^{-1}AP = D$, onde D uma matriz diagonal com $a_{ii} = \lambda_i$, $i = 1,2,3$. Assim,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ e } \ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De $P^{-1}AP = D$, temos que $A = PDP^{-1}$ e desta forma, se obtivermos a matriz P^{-1}, facilmente encontraremos a matriz A pretendida.

Cálculo da matriz P^{-1}:

$$[P:I]:\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) : [I \vdots P^{-1}].$$

Assim,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

e,

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = A.$$

$\blacksquare$

4. (a) $(1,0\,\text{ponto})$ Seja A a matriz de uma projeção. Calcule $A(v - Av)$. Justifique.
   (b) $(1,0\,\text{ponto})$ Seja $A_{3\times 3}$ a matriz da projeção sobre um certo plano. Se $(2,0,1)$ é projetado em $(1,1,0)$. Determine A.

Solução:

(a) Seja A uma matriz de uma projeção e v um vetor qualquer. Logo, Av é a projeção de v sobre um dado subespaço. Sabemos que $v - Av$ é ortogonal ao vetor Av, por definição de vetor projeção.
Assim, $proj_{Av}(v - Av) = 0 \Rightarrow A(v - Av) = 0$.
Ainda mais, $A(v - Av) = 0 \Rightarrow Av - A^2v = 0 \Rightarrow (A - A^2)v = 0 \Rightarrow A = A^2$. Isto é, $A(Av) = Av$. $\blacksquare$

(b) Seja A a matriz da projeção sobre um plano π tal que projeta o vetor $\overrightarrow{v} = (2,0,1)$ no vetor $\overrightarrow{u} = (1,1,0) \in \pi$. Isto é, $A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}$.
Logo, o vetor $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v} - A\overrightarrow{v} = (2,0,1) - (1,1,0) = (1,-1,1)$ é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u}$, isto é, $\overrightarrow{n}$ é perpendicular ao plano π. O vetor $\overrightarrow{n}$ é um vetor normal ao plano π.
Assim o plano tem por equação $\pi : x - y + z = 0$, visto que $(1,1,0) \in \pi$.
Devemos agora encontrar um outro vetor $\overrightarrow{w} = (a,b,c)$ tal que $\overrightarrow{w} \in \pi$ e que $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} = 0$. Assim,

$$\left\{\begin{array}{rcl} a - b + c & = & 0 \\ (a,b,c)\cdot(1,1,0) & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & r \\ b & = & -r \\ c & = & -2r \end{array}\right. \quad \text{onde } r \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Tomemos $r = 1$ e temos $\overrightarrow{w} = (1,-1,-2)$.
Assim, o plano π é o lugar geométrico de todos os vetores que são combinações lineares dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$.
Desta forma, se $\overrightarrow{x} = (x,y,z)$ é um vetor arbitrário do $\mathbb{R}^3$, sua projeção sobre o plano π possui uma componente na direção de $\overrightarrow{u}$ e uma componente na direção $\overrightarrow{w}$. Isto é,

$$proj_{\pi}\overrightarrow{x} = proj_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{x} + proj_{\overrightarrow{w}}\overrightarrow{x}$$

Então,

$$\begin{aligned} proj_{\pi}\overrightarrow{x} &= \Big(\frac{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}}\Big)\overrightarrow{u} + \Big(\frac{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{w}}{\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w}}\Big)\overrightarrow{w} = \frac{x+y}{2}(1,1,0) + \frac{x-y-2z}{6}(1,-1,-2) \\ &= \Big(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, 0\Big) + \Big(\frac{x-y-2z}{6}, -\frac{x-y-2z}{6}, -\frac{2x-2y-4z}{6}\Big) \\ &= \Big(\frac{2x+y-z}{3}, \frac{x+2y+z}{3}, -\frac{x-y-2z}{3}\Big). \end{aligned}$$

Assim, a matriz canônica da projeção $proj_\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$A[\overrightarrow{v}] = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A[\overrightarrow{n}] = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

■

5. Verifique se cada uma das seguintes afirmações é Verdadeira ou Falsa. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, dê um contra-exemplo.

   (a) $(1,0\,\text{ponto})$ Sejam $A_{n\times n}$ matriz inversível e $\{\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto LI. Então, $\{A\overrightarrow{v}_1, \cdots, A\overrightarrow{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é LI.

   (b) $(1,0\,\text{ponto})$ Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear não nula, então T é sobrejetora.

Solução:

(a) VERDADEIRO

Sejam A uma matriz $n \times n$ inversível e $\{\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto LI. Desejamos provar que $\{A\overrightarrow{v}_1, \cdots, A\overrightarrow{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é também LI.

Considere a equação:

$$c_1 A\overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_k A\overrightarrow{v}_k = 0,$$

onde $c_1, \cdots, c_k$ são escalares. Devemos mostrar que tal equação só admite a solução trivial, a saber, $c_1 = \cdots = c_k = 0$.

Temos:

$$\begin{aligned} c_1 A\overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_k A\overrightarrow{v}_k = 0 &\Rightarrow A^{-1}(c_1 A\overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_k A\overrightarrow{v}_k) = A^{-1}(0) \\ \Rightarrow A^{-1}(c_1 A\overrightarrow{v}_1) + \cdots + A^{-1}(c_k A\overrightarrow{v}_k) = 0 &\Rightarrow c_1 A^{-1}(A\overrightarrow{v}_1) + \cdots + c_k A^{-1}(A\overrightarrow{v}_k) = 0 \\ \Rightarrow c_1(A^{-1}A)\overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_k(A^{-1}A)\overrightarrow{v}_k = 0 &\Rightarrow c_1\overrightarrow{v}_1 + \cdots + c_k\overrightarrow{v}_k = 0. \end{aligned}$$

Visto que $\{\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_k\}$ é um conjunto LI, segue então que $c_i = 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, k\}$, conforme se pretendia provar. Portanto, $\{A\overrightarrow{v}_1, \cdots, A\overrightarrow{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é LI. ■

(b) FALSO

Tome $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T : (x, y, z) = (x, 0)$.

Podemos ver:

$$\begin{aligned} T(a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2)) &= T(ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2, az_1 + bz_2) = (ax_1 + bx_2, 0) \\ &= (ax_1, 0) + (bx_2, 0) = a(x_1, 0) + b(x_2, 0) = aT(x_1, y_1, z_1) + bT(x_2, y_2, z_2), \end{aligned}$$

provando ser T uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. Além disso, se $x \neq 0$ temos que $T(x, 0, 0) = (x, 0) \neq (0, 0)$ mostrando T ser não nula.

Agora, observe que $Im(T) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, Assim, $Im(T) = \langle (1, 0) \rangle \subset \mathbb{R}^2$, $dim(Im(T)) = 1$ e então $Im(T) \subsetneqq \mathbb{R}^2$.

Mas, T sobrejetora se, e somente se, $Im(T) = \mathbb{R}^2$. Portanto, T não é sobrejetora. ■