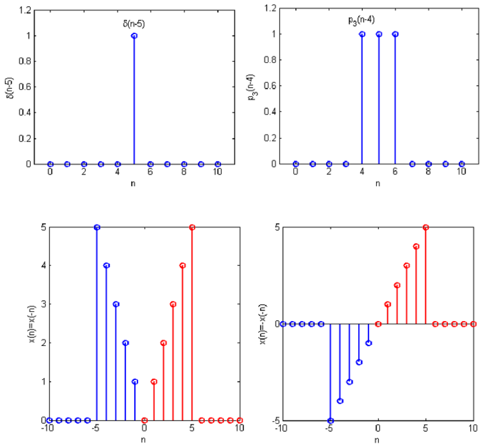
Sinais de Tempo Discreto (Parte II)

Professor
Dr. Jorge Leonid Aching Samatelo
jlasam001@gmail.com

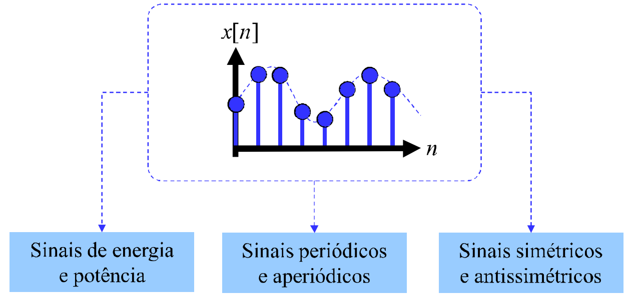


Índice

Classificação dos sinais discretos

Classificação dos sinais discretos

Introdução



Classificação dos sinais discretos

Sinais de energia e sinais de potência

- *Energia de um sinal*
  - Define-se energia de um sinal discreta como a soma ao longo do tempo do valor de $x[n]$ elevado ao quadrado.

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\| x[n] \right\|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left\| x[n] \right\|^2$$

- *Potência média de um sinal*
  - Define-se potência de um sinal discreta como o valor da energia por unidade de tempo. Sendo de utilidade quando a amplitude de $x[n]$ não converge para zero com o passar do tempo

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left\| x[n] \right\|^2$$

Classificação dos sinais discretos

Sinais de energia e de potência

- *Sinal de energia*
  - Se E_∞ é finita ($0<E_\infty<\infty$) então, $x[n]$ é chamado ***sinal de energia***.
- *Sinal de potência*
  - Se P_∞ é finita ($0<P_\infty<\infty$) então, $x[n]$ é chamado ***sinal de potência***.
- *Propriedades*
  - Sinais de energia tem potência média zero:

$$0 < E_\infty < \infty \Rightarrow P_\infty = 0$$

  - Sinais de potência tem energia infinita:

$$0 < P_\infty < \infty \Rightarrow E_\infty = \infty$$

  - Sinais de duração e amplitude finita tem energia finita:

$$x[n] \neq 0 \;\; \forall n \in \leq n_0, n_1 \geq \;\; \Rightarrow 0 < E_\infty < \infty$$

Classificação dos sinais discretos

Sinais de energia e sinais de potência

Exemplo

- Determinar a potência e a energia do sinal degrau unitário.

$$u[n] = 1 \;\; ; n \geq 0$$

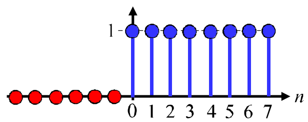
Classificação dos sinais discretos

Sinais de energia e sinais de potência

Solução

- Calculando a energia do degrau unitário em um intervalo finito

$$\sum_{n=-N}^{N} \left\| u[n] \right\|^2 = \cancel{\sum_{n=-N}^{-1} \underbrace{\left\| u[n] \right\|^2}_{=0}} + \sum_{n=0}^{N} \underbrace{\left\| u[n] \right\|^2}_{=1}$$



$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} 1^2$$

$$= \sum_{n=0}^{N} 1$$

$$= \underset{n=0}{\underset{\downarrow}{1}} + \underset{n=1}{\underset{\downarrow}{1}} + \cdots + \underset{n=N}{\underset{\downarrow}{1}} = N+1$$

Classificação dos sinais discretos

Sinais de energia e sinais de potência

Solução

- Calculando a energia do degrau unitário em um intervalo finito

$$\sum_{n=-N}^{N}\|u[n]\|^2 = N+1$$

- Determinando:
  - A energia do sinal E_∞

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\|x[n]\|^2 = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\|x[n]\|^2 = \lim_{N\to\infty}(N+1) = \infty$$

  - A potência média do sinal P_∞

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\|x[n]\|^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}(N+1) = \lim_{N\to\infty}\frac{1+1/N}{2+1/N} = \frac{1}{2}$$

- Então:
  - *Como* $0 < P_\infty < \infty$ $x[n]$ é um sinal de potência.

Classificação dos sinais discretos

Sinais de energia e sinais de potência

Exercício

- Determinar a potência e a energia de um sinal exponencial real decrescente.

$$x[n] = \alpha^n u[n] \quad ;|\alpha| < 1$$

- *Dica*

$$\sum_{n=0}^{N-1} A^n = 1 + A + A^2 + \cdots + A^{N-1} = \frac{1-A^N}{1-A}$$

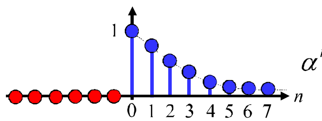
Classificação dos sinais discretos

Sinais de energia e sinais de potência

Solução

- Calculando a energia do degrau unitário em um intervalo finito

$$\sum_{n=-N}^{N}\|x[n]\|^2 = \cancel{\underbrace{\sum_{n=-N}^{-1}\|\alpha^n u[n]\|^2}_{=0}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{N}\|\alpha^n u[n]\|^2}_{=1}$$



$$\alpha^n u[n] = \begin{cases} \alpha^n & n \ge 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\|\alpha^n\|^2 = \sum_{n=0}^{N}\left(|\alpha|^2\right)^n = \frac{1-|\alpha|^{2(N+1)}}{1-|\alpha|^2}$$

Lembrando que:

$$\sum_{n=0}^{N-1} A^n = 1 + A + A^2 + \cdots + A^{N-1} = \frac{1-A^N}{1-A}$$

$$\boxed{A = |\alpha|^2}$$

Classificação dos sinais discretos

Sinais de energia e sinais de potência

Solução

- Calculando a energia do degrau unitário em um intervalo finito

$$\sum_{n=-N}^{N}\|x[n]\|^2 = \frac{1-|\alpha|^{2(N+1)}}{1-|\alpha|^2}$$

- Determinando:
  - A energia do sinal E_∞

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\|x[n]\|^2 = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\|x[n]\|^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{1-|\alpha|^{2(N+1)}}{1-|\alpha|^2} = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$$

  - A potência média do sinal P_∞

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\|x[n]\|^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\left(\frac{1-|\alpha|^{2(N+1)}}{1-|\alpha|^2}\right) = 0$$

- Então:
  - *Como* $0 < E_\infty < \infty$ $x[n]$ é um sinal de energia.

Classificação dos sinais discretos

Sinais de energia e de potência

- *Resumo*

Sinal de Energia	Sinal de Potência
$0<E_\infty<\infty$	$0<P_\infty<\infty$
$P_\infty = 0$	$E_\infty = \infty$
Duração Finita	Duração Infinita

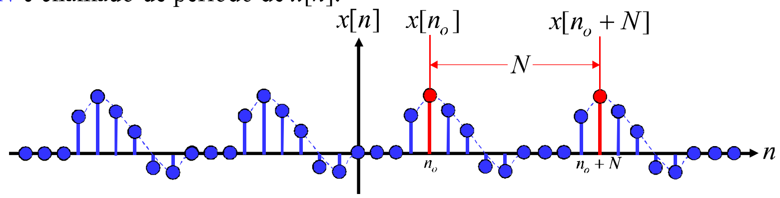
Classificação dos sinais discretos

Sinais periódicos e aperiódicos

- Um sinal $x[n]$ é periódico se cumpre com a seguinte relação:

$$x[n] = x[n+N]\ ;N \in \mathbb{N}$$

- Onde:
  - N é chamado de período de $x[n]$.



Um sinal periódico $x[n]$ fica imutável se fizermos um deslocamento (*shift*) de N. amostras.

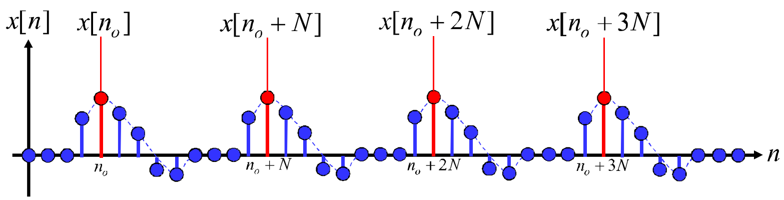
- Se a definição de um sinal periódica não se cumpre para nenhum valor de N, a sinal é aperiódico.

OBS: A definição de um sinal periódica tem uma exceção que é o caso de $x[n] = constante\ ,\ \forall\ \ n$

Classificação dos sinais discretos

Sinais periódicos e aperiódicos

- Se um sinal é periódico de período N então também é periódico de período $2N$, $3N$, $4N$, …
  - O ***período fundamental*** de $x[n]$, N_0 , é o menor valor positivo de N para o qual a relação anterior é valida.



Classificação dos sinais discretos

Sinais periódicos e aperiódicos

Exemplo

- Determinar se o sinal:

$$x[n] = (-1)^n$$

- é periódico.

Classificação dos sinais discretos

Sinais periódicos e aperiódicos

Solução

- Partindo da definição de um sinal periódico.

$$x[n] = x[n+N]\ ; N \in \mathbb{N}$$

$$(-1)^n = (-1)^{n+N} = (-1)^n.(-1)^N$$

- A condição para que a igualdade seja verdadeira é:

$$(-1)^N = 1 \Rightarrow N \text{ é par}$$

- Então:
  - O menor valor de N que pode tomar para cumprir a igualdade é $N_0 = 2$.

Classificação dos sinais discretos

Sinais periódicos e aperiódicos

Exemplo

- Determinar se o sinal:

$$x[n] = e^{j2\pi n}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$$

- é periódico.

Classificação dos sinais discretos

Sinais periódicos e aperiódicos

Solução

- Partindo da definição de um sinal periódico.

$$x[n] = x[n+N]\ ; N \in \mathbb{N}$$

$$e^{j2\pi n} = e^{j2\pi(n+N)} = e^{j2\pi n}.e^{j2\pi N}$$

- A condição para que a igualdade seja verdadeira é:

$$e^{j2\pi N} = 1$$

$$\cos(2\pi N) + j\sin(2\pi N) = 1$$

- Assim temos que

$$\begin{cases} \cos(2\pi N) = 1 \\ sen(2\pi N) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\pi N = 2\pi k\ ; k \in \mathbb{Z} \\ N = \{1, 2, 3, 4, \cdots\} \end{cases}$$

- Então:
  - O menor valor de N que pode tomar para cumprir a igualdade é $N_0 = 1$

Classificação dos sinais discretos

Sinais periódicos e aperiódicos

Exemplo

- Determinar se o sinal:

$$x[n] = (-1)^{n^2}$$

- é periódico.

Classificação dos sinais discretos

Sinais periódicos e aperiódicos

Solução

- Partindo da definição de um sinal periódico.

$$x[n] = x[n+N]\ ; N \in \mathbb{N}$$

$$(-1)^{n^2} = (-1)^{(n+N)^2} = (-1)^{n^2}.(-1)^{N^2}.(-1)^{2nN}$$

$$= (-1)^{n^2}.(-1)^{N^2}$$

$$(-1)^{2nN} = \left((-1)^2\right)^{nN} = (1)^{nN} = 1$$

- A condição para que a igualdade seja verdadeira é:

$$(-1)^{N^2} = 1 \Rightarrow N \text{ é par}$$

- Então:
  - O menor valor de N que pode tomar para cumprir a igualdade é

$$N_0 = 2$$

Classificação dos sinais discretos

Sinais periódicos e aperiódicos

- Energia sobre um único período E_T

$$E_N = \sum_{n \in Periodo_N} \|x[n]\|^2$$

- *Potencia media de um sinal periódico*

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n \in Periodo_N} \|x[n]\|^2$$

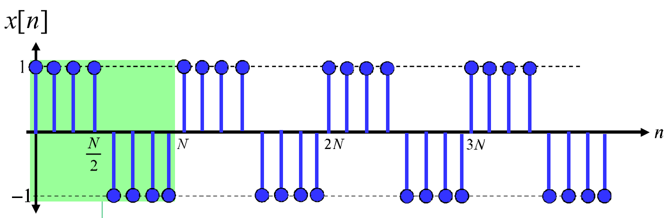
- *Propriedades*
  - A energia sobre um único período E_N de um sinal periódico é finita.
  - A potência media P_∞ de um sinal periódico é finita. Em consequência os sinais periódicos são sinais de potência

Classificação dos sinais discretos

Sinais periódicos e aperiódicos

Exemplo

- Qual é a potência média da onda quadrada mostrada na figura a seguir?



$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0,1,\cdots,N/2 \\ -1 & n = N/2+1,1,\cdots,N-1 \end{cases}$$

Classificação dos sinais discretos

Sinais periódicos e aperiódicos

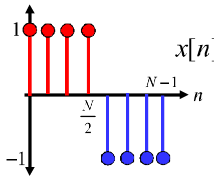
Solução

- Determinamos a energia do sinal em um período.

$$E_N = \sum_{n \in Periodo_N} \|x[n]\|^2$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \|x[n]\|^2$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2} \underbrace{\|x[n]\|^2}_{=+1} + \sum_{n=N/2+1}^{N-1} \underbrace{\|x[n]\|^2}_{=-1}$$



$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0,1,\cdots,N/2 \\ -1 & n = N/2+1,1,\cdots,N-1 \end{cases}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2} (+1)^2 + \sum_{n=N/2+1}^{N-1} (-1)^2$$

Classificação dos sinais discretos

Sinais periódicos e aperiódicos

Solução

- Determinamos a energia do sinal em um período.

$$E_N = \sum_{n=0}^{N/2}(+1)^2 + \sum_{n=N/2+1}^{N-1}(-1)^2$$
$$= \sum_{n=0}^{N/2}1 + \sum_{n=N/2+1}^{N-1}1$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1}1$$
$$= \underset{n=0}{\underset{\downarrow}{1}} + \underset{n=1}{\underset{\downarrow}{1}} + \cdots + \underset{n=N-1}{\underset{\downarrow}{1}} = N$$

Classificação dos sinais discretos

Sinais periódicos e aperiódicos

Solução

- Determinamos a energia do sinal em um período.

$$E_N = \sum_{n\in Periodo_N} \|x[n]\|^2 = N$$

- Determinando a potência media do sinal.

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\in Periodo_N}\|x[n]\|^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{N}{N} = \lim_{N\to\infty} 1 = 1$$

- Então:
  - *Como* $0 < P_\infty < \infty$ $x[n]$ é um sinal de potência.

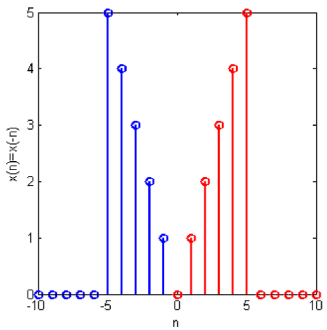
Classificação dos sinais discretos

Sinais simétricos (pares) e antissimétricos (ímpares)

Sinal simétrica (par)

- Um sinal é Par quando é igual ao seu inverso no tempo.

$$x[n] = x[-n]\ ;\ x[n]\in\mathbb{R}$$

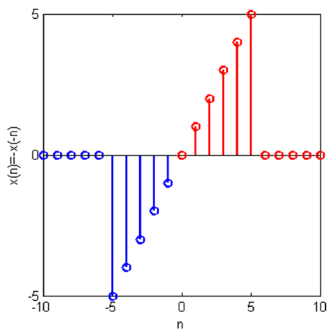


Simetria em relação ao eixo ordenadas

Sinal asimetrico (impar)

- Um sinal é Impar quando é igual ao simétrico do seu inverso no tempo.

$$x[n] = -x[-n]\ ;\ x[n]\in\mathbb{R}$$



Simetria em relação ao origem

Classificação dos sinais discretos

Sinais simétricos (pares) e antissimétricos (ímpares)

- *Propriedade*
  - Todo sinal $x[n]$ pode ser representada como a soma de um sinal par e ímpar.

$$x[n] = x_{par}[n] + x_{impar}[n]$$

  - A parte par e ímpar do sinal $x[n]$, são obtidos a partir de $x[n]$ através das expressões

$$x[n] = x_{par}[n] + x_{impar}[n]$$

$$x_{par}[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right) \qquad x_{impar}[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right)$$

Classificação dos sinais discretos

Sinais simétricos (pares) e antissimétricos (ímpares)

Exemplo

- Determinar os componentes pares e ímpares da seguinte sequência.

$$x[n] = \{\ldots\ 0,1,1,1,1,1,\underset{\uparrow}{0},0.2,0.4,0.6,0.8,1,1,1,1,1,1,0,\ldots\}$$

Classificação dos sinais discretos

Sinais simétricos (pares) e antissimétricos (ímpares)

Solução

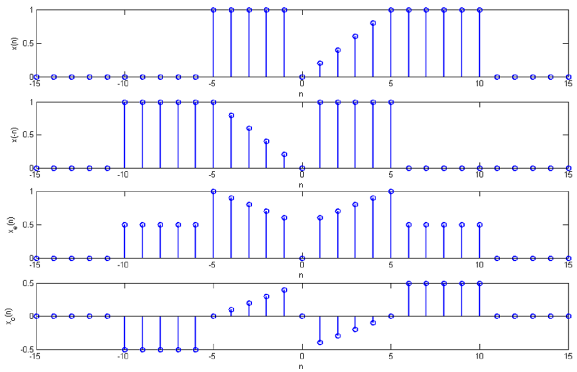
- Aplicando o método gráfico:

original $x[n]$

Reflexão no tempo $x[-n]$

$$x_{par}[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right)$$

$$x_{impar}[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right)$$



Operações básicas com sinais discretos

Operações básicas com sinais discretos

Soma de sinais

$$\{x_1[n]\} + \{x_2[n]\} = \{x_1[n] + x_2[n]\}$$

- Por exemplo:

$$x_1[n] = \{\ldots,0,\underset{\uparrow}{1},1,1,1,1,1,0,\ldots\} +$$

$$x_2[n] = \{\ldots,1,\underset{\uparrow}{2},2,2,2,2,2,\ldots\}$$

$$x_1[n] + x_2[n] = \{\ldots,1,\underset{\uparrow}{3},3,3,3,3,3,\ldots\}$$

A SOMA de sinais discretos, consiste em somar, para cada valor de n os elementos das sequências correspondentes.

Operações básicas com sinais discretos

Multiplicação de sinais

$$\{x_1[n]\}.\{x_2[n]\} = \{x_1[n].x_2[n]\}$$

- Por exemplo:

$$x_1[n] = \{\ldots,0,\underset{\uparrow}{1},1,1,1,1,1,0,\ldots\}\times$$
$$x_2[n] = \{\ldots,1,\underset{\uparrow}{2},2,2,2,2,2,\ldots\}$$

$$x_1[n]+x_2[n] = \{\ldots,0,\underset{\uparrow}{2},2,2,2,2,2,\ldots\}$$

A MULTIPLICAÇÃO de sinais discretos, consiste em multiplicar, para cada valor de n os elementos das sequências correspondentes.

Operações básicas com sinais discretos

Escalamento

$$\{x[n]\} = \{\alpha x[n]\}$$

- Por exemplo:

$$x_1[n] = \{\ldots,0,\underset{\uparrow}{1},1,1,1,1,1,0,\ldots\}\times$$
$$3$$

$$3x_1[n] = \{\ldots,0,\underset{\uparrow}{3},3,3,3,3,3,\ldots\}$$

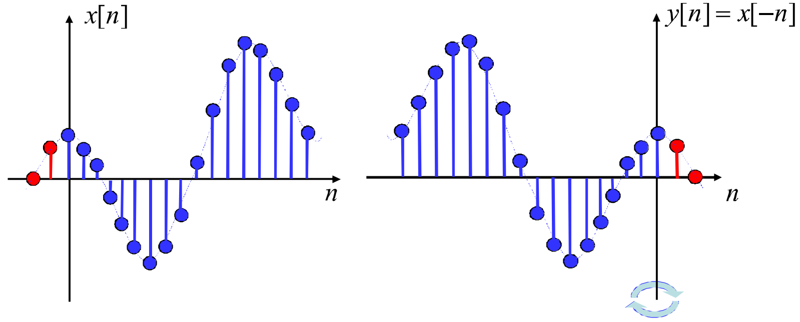
O ESCALAMENTO de um sinal discreto, consiste em multiplicar pelo fator de escalamento, α, cada valor da sequência.

Operações básicas com sinais discretos

Reflexão

$$y[n] = \{x[-n]\}$$

- A reflexão é feita em relação a $n = 0$:



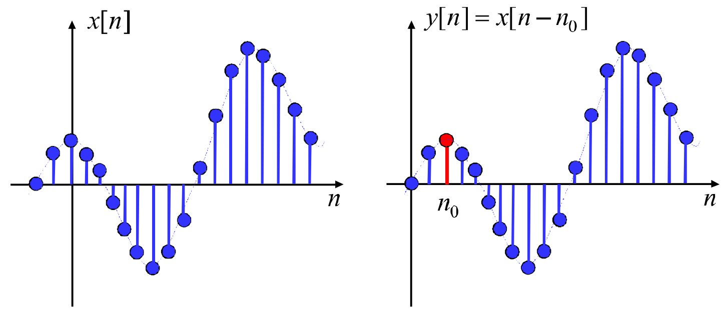
- Um sinal par é igual a sua versão refletida
- Um sinal ímpar é igual ao negativo de sua versão refletida

Operações básicas com sinais discretos

Deslocamento

$$y[n] = \{x[n-n_0]\}$$

- Deslocamento para direita (retardo)
  - Se $n_0>0$ o sinal é deslocado para direita (→). É produzido um ***retardo do sinal*** em n_0 amostras.



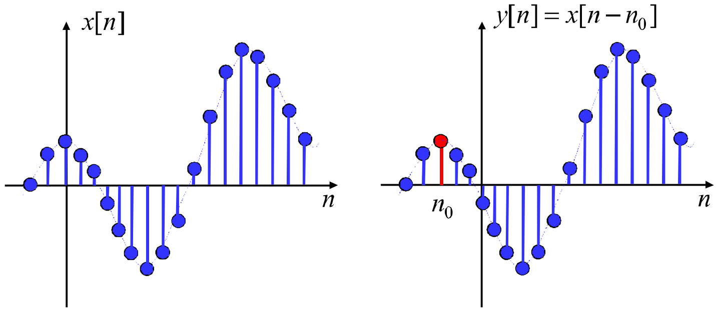
O que acontecia na posição 0 agora acontece n_0 amostras depois (retardo).

Operações básicas com sinais discretos

Deslocamento

$$y[n] = \{x[n - n_0]\}$$

- Deslocamento para esquerda (avanço)
  - Se $n_0 < 0$ o sinal é deslocado para a esquerda ($\leftarrow$). Se produz um ***avanço do sinal*** em n_0 amostras.



O que acontece na posição 0 já aconteceu n_0 amostras anteriores (avanço).

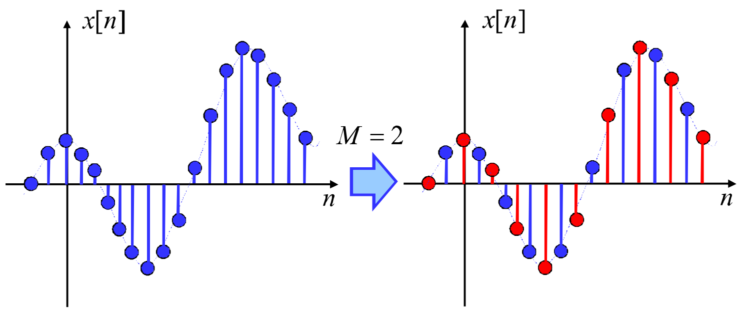
Operações básicas com sinais discretos

Sub amostragem ou Decimação

$$y[n] = \{x[M.n]\} \;; M \in \mathbb{Z}$$

- O sinal $x[n]$ é comprimido por um fator M.
- Alguns valores de $x[n]$ são perdidos (**sub amostragem**)

Seleciona-se todas as amostras múltiplas de M e coloca-se zero para as demais.



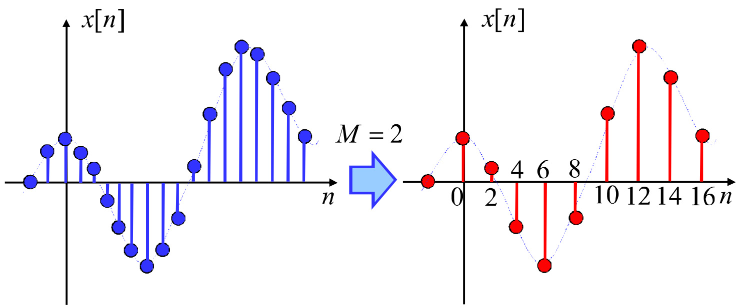
Operações básicas com sinais discretos

Sub amostragem ou Decimação

$$y[n] = \{x[M.n]\} \;; M \in \mathbb{Z}$$

- O sinal $x[n]$ é comprimido por um fator M.
- Alguns valores de $x[n]$ são perdidos (**sub amostragem**)

Seleciona-se todas as amostras múltiplas de M e coloca-se zero para as demais.



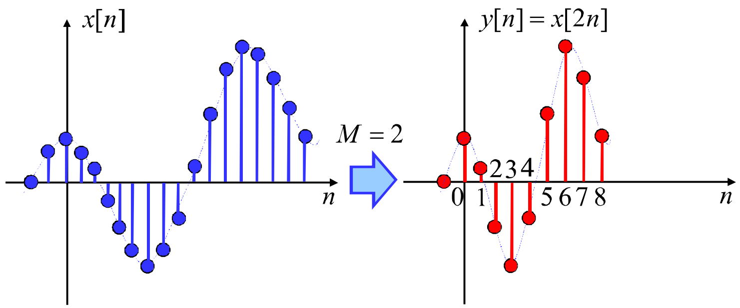
Operações básicas com sinais discretos

Sub amostragem ou Decimação

$$y[n] = \{x[M.n]\} \;; M \in \mathbb{Z}$$

- O sinal $x[n]$ é comprimido por um fator M.
- Alguns valores de $x[n]$ são perdidos (**sub amostragem**)

Seleciona-se todas as amostras múltiplas de M e coloca-se zero para as demais.



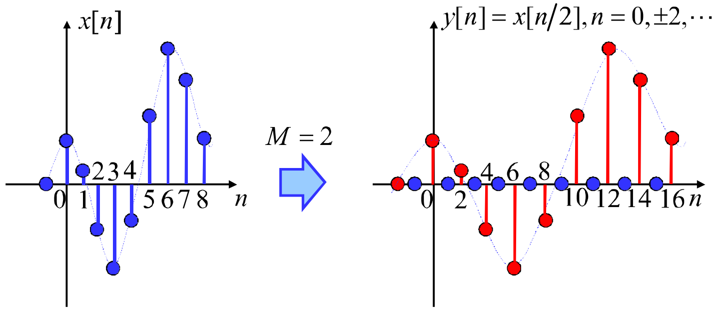
Operações básicas com sinais discretos

Interpolação

$$y[n]=\begin{cases} x[n/M] & n=0,\pm M,\pm M,\cdots \\ 0 & caso\ contrario \end{cases};M\in\mathbb{Z}$$

- ❑ O sinal $x[n]$ é esticada por um fator M.
- ❑ Alguns valores de $x[n]$ são adicionados (**interpolação**)

Expande-se o sinal e em seguida atualiza-se os valores com zero.



Operações básicas com sinais discretos

Exemplo

- ❑ Se temos a seguinte sequência:

$$x[n] = \{\ldots, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, \ldots\}$$

- ❑ Determinar a gráfica da seguinte sequência:

$$y[n] = \overbrace{x[3-n] + \overbrace{x[n-4].x[2n]}^{\text{Multiplicação}}}^{\text{Soma}}$$

Reflexão e deslocamento para a esquerda

Deslocamento para a direita

Mudança de escala (sub amostra)

Operações básicas com sinais discretos

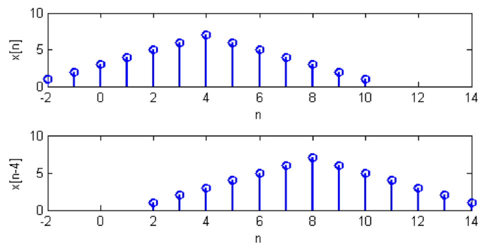
Solução

- ❑ Determinando as sequências $x[n\text{-}4]$:

$$x[n] = \{\ldots, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, \ldots\}$$

$$x[n\text{-}4] = \{\ldots, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, \ldots\}$$

$n_0>0$ Deslocamento para a direita



Operações básicas com sinais discretos

Solução

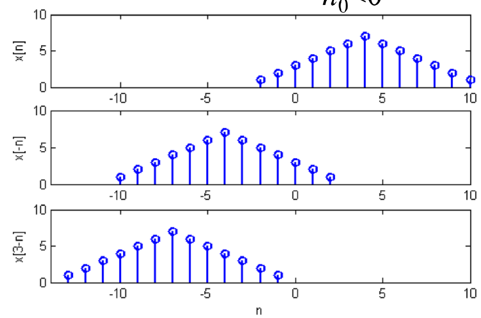
- ❑ Determinando as sequências $x[\text{-}n]$ e $x[3\text{-}n]$:

$$x[n] = \{\ldots, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, \ldots\}$$

$$x[\text{-}n] = \{\ldots 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, \ldots\}$$

$$x[3\text{-}n] = \{\ldots 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, \ldots\}$$

Deslocamento para a esquerda $n_0<0$



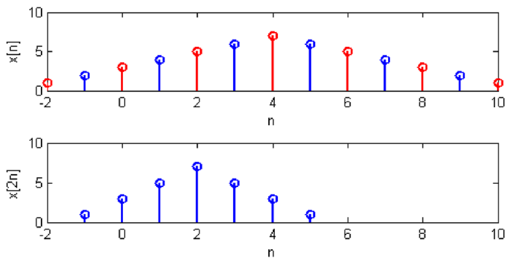
Operações básicas com sinais discretos

Solução

- Determinando as sequências $x[2n]$:

$$x[n] = \{\ldots, 0, 1, 2, \underset{\uparrow}{3}, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, \ldots\}$$

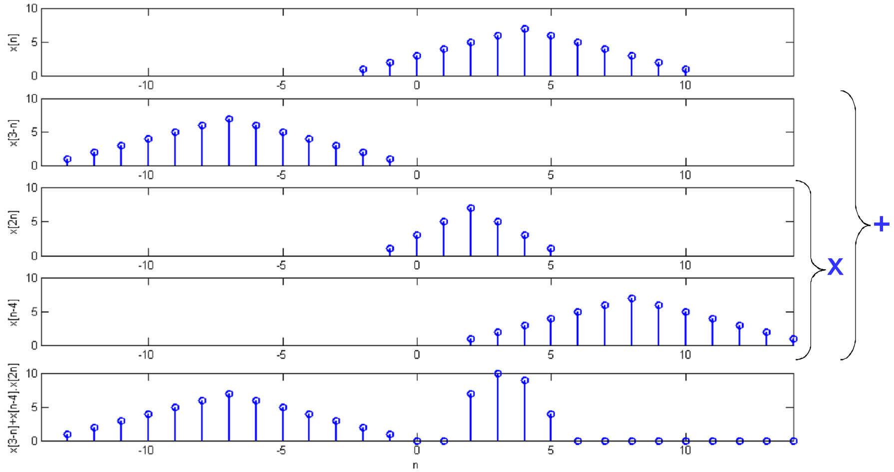
$$x[2n] = \{\ldots, 0, 1, \underset{\uparrow}{3}, 5, 7, 5, 3, 1, 0, \ldots\}$$



Operações básicas com sinais discretos

Solução

- Aplicando o método gráfico:



Bibliografia

Bibliografia

John G. Proakis, and Dimitris K. Manolakis. *Digital Signal Processing* (4th Edition). Pearson, USA, 2007