Continuidade

Conceito

A noção de continuidade em Matemática é a que utilizamos no dia a dia, isto é, onde não há interrupção ou, então, onde não existem partes separadas umas das outras.

Nos parágrafos anteriores, estudamos o comportamento de uma função $y = f(x)$ para valores de x próximos de um ponto a.

Pode acontecer que o limite de $f(x)$ quando x tende a a exista, mas que f não seja definida em a; ou ainda, pode acontecer que o limite seja diferente de $f(a)$.

Estudaremos, agora, uma classe especial de funções, onde se verifica que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Continuidade

Definição

Seja f uma função e $a \in Dom(f)$, onde $Dom(f)$ é um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos. f é dita **contínua em** *a, se:*

1. $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe.*
2. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Se f não verifica qualquer das condições da definição, f é dita **descontínua** em a.

Em outras palavras, uma função f é contínua em um número a se

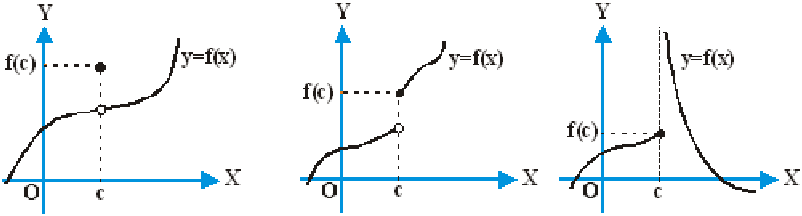
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Continuidade

Uma função f é contínua em um número a se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Veja graficamente exemplos de funções que não são contínuas em c



Intuitivamente, a continuidade de uma função em um ponto indica que o gráfico da função não apresenta saltos neste ponto.

Continuidade

Uma função f é contínua em um número a se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Para verificar se uma função é contínua, seguimos três passos:

1. Verificar se $f(a)$ está definida (isto é, a está no domínio de f).
2. Calcular $\lim_{x \to a} f(x)$.
3. Verificar se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Continuidade à Direita e à Esquerda

Definição

Uma função f é **contínua à direita em um número** a se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

e f é**contínua à esquerda** em a se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Definição - **Continuidade em um intervalo**

Uma função f é **contínua em um intervalo** se for contínua em todos os números do intervalo.

Continuidade

Definição

Uma função f é contínua em $A \subset \mathbb{R}$ se f é contínua em cada ponto de A. Se f é contínua em A e $B \subset A$, então f é contínua em B.

Teorema

Se f e g são continuas em a e se c for uma constante, então as seguintes funções também são contínuas em a

- $f + g$
- $f - g$
- cf
- fg
- $\dfrac{f}{g}$ se $g(a) \neq 0$

Continuidade

Teorema

Os seguintes tipos de funções são contínuas para todo o número de seus domínios

- polinômios
- funções racionais
- funções raízes
- funções trigonométricas
- funções trigonométricas inversas
- funções exponenciais
- funções logarítmicas

Continuidade

Teoremas

- Seja f contínua em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$, então
$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

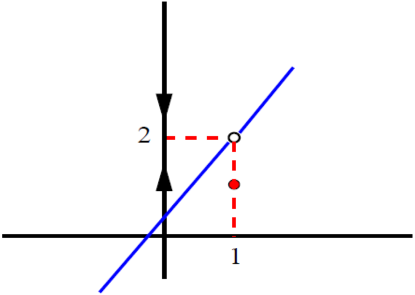
- Se g for contínua em a e f em $g(a)$, então a função composta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em a.

Continuidade

Exemplo Considere: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1. \end{cases}$

Note que $Dom(f) = \mathbb{R}$, mas f não é contínua em 1.

De fato, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2 \neq f(1)$.



Observe que se redefinirmos a função, fazendo $f(1) = 2$, a função será contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

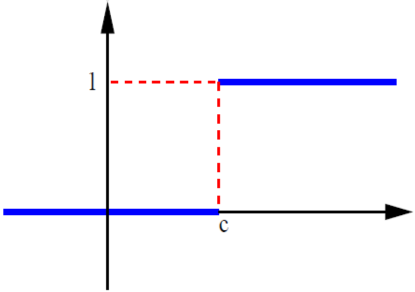
Continuidade

Exemplo $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ é uma função contínua em todo ponto de seu domínio.

De fato $f(x) = x + 1$ se $x \neq 1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0 + 1 = f(x_0)$.

Exemplo Seja: $$u_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \geq c \\ 0 & \text{se} \quad x < c. \end{cases}$$

A função degrau unitário $y = u_c(x)$ não é contínua em c, pois não existe $\lim_{x \to c} u_c(x)$



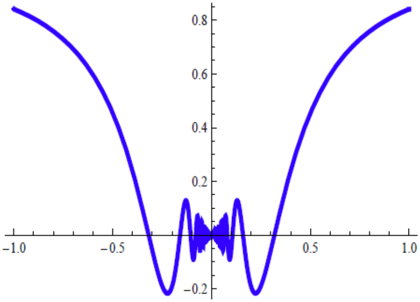
Função degrau unitário.

Continuidade

Exemplo

A seguinte função é contínua em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x\, sen\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

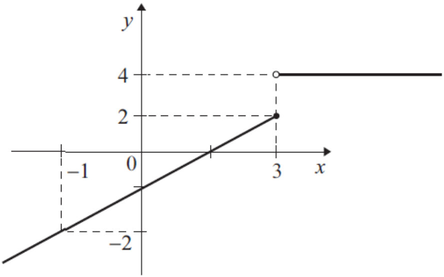


Continuidade

Exemplo *Seja* $f(x) = \begin{cases} x-1, \text{ se } x \leq 3 \\ 4, \quad \text{ se } x > 3 \end{cases}$.

A função $f(x)$ é descontínua no ponto $x = 3$, pois, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x-1) = 3-1 = 2$ e $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 4 = 4$, logo não existe $\lim_{x \to 3} f(x)$.

Observe que $f(3) = 3-1 = 2$, mas isto não é suficiente para a continuidade de $f(x)$. Seria necessário que se tivesse $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$ o que jamais poderia ocorrer, visto que não existe $\lim_{x \to 3} f(x)$.



Continuidade

Exemplo Onde cada uma das seguintes funções é descontínua?

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

SOLUÇÃO

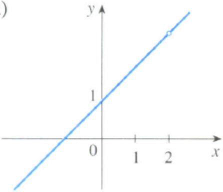
(a) Observe que $f(2)$ não está definida; logo, f é descontínua em 2. Mais à frente veremos por que f é contínua em todos os demais números.

(b) Aqui $f(0) = 1$ está definida, mas

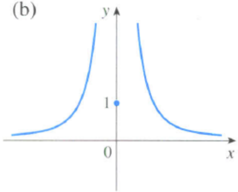
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Logo f é descontínua em 0.

(a)



(b)



$$\text{(c) } f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

SOLUÇÃO

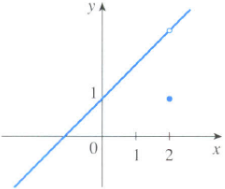
Aqui $f(2) = 1$ está definida e

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 1) = 3$$

existe. Porém

$$\lim_{x \to 2} (x) \neq f(2)$$

logo, f não é contínua em 2.



Continuidade

Exemplo

Calcule $\lim_{x\to\pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2+\cos x}$.

SOLUÇÃO

A função $y = \operatorname{sen} x$ é contínua. A função no denominador, $y = 2 + \cos x$, é a soma de duas funções contínuas e, portanto, é contínua. Observe que esta função nunca é 0, pois $\cos x \geqslant -1$ para todo x e assim $2 + \cos x > 0$ em toda parte. Logo, a razão

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2+\cos x}$$

é sempre contínua. Portanto, pela definição de função contínua,

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2+\cos x} = \lim_{x\to\pi} f(x) = f(\pi) = \frac{\operatorname{sen} \pi}{2+\cos \pi} = \frac{0}{2-1} = 0$$

$\square$

Continuidade

Exemplo *As funções* $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x$ *são contínuas para todo número real* x, *logo,* $(f+g)(x) = x^2 + 3x$ *é contínua para todo número real* x.

Exemplo *As funções* $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \cos x$ *são contínuas para todo número real* x, *logo,* $(f \times g)(x) = (x+1) \times \cos x$ *é contínua para todo número real* x.

Exemplo *As funções* $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2 + 1$ *são contínuas para todo número real* x, *logo,* $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ *é contínua para todo número real* x.

Exemplo *A função* $f(x) = 2x^5 - x^3 + 3\,x^2 - 1$ *é contínua para todo número real* x.

Exemplo *As funções* $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 2x$ *são contínuas para todo número real* x, *logo* $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2\,x) = 4x + 1$, *isto é,* $(f \circ g)(x) = 4x + 1$ *é contínua para todo número real* x.

Continuidade

Exemplos

[1] A função $g(x) = e^x$ é contínua em $\mathbb{R}$; logo, se existe $\lim_{x\to a} f(x)$, então:

$$\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}.$$

[2] As funções $g(x) = sen(x)$ e $h(x) = cos(x)$ são funções contínuas em $\mathbb{R}$; logo, se existe $\lim_{x\to a} f(x)$, então:

$$\lim_{x\to a} sen(f(x)) = sen(\lim_{x\to a} f(x)); \quad \lim_{x\to a} cos(f(x)) = cos(\lim_{x\to a} f(x)).$$

[3] A função $g(x) = ln(x)$ é contínua em $(0, +\infty)$; logo, se $\lim_{x\to a} f(x) \in (0, +\infty)$, então:

$$\lim_{x\to a} ln(f(x)) = ln(\lim_{x\to a} f(x)).$$

[4] $\lim_{x\to 1} ln(\frac{x^5 + x^3 + 1}{x^2 + 1}) = ln(\lim_{x\to 1} \frac{x^5 + x^3 + 1}{x^2 + 1}) = ln(\frac{3}{2}).$

[5] $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} ln(sen(x)) = ln(\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} sen(x)) = ln(sen(\frac{\pi}{2})) = ln(1) = 0.$

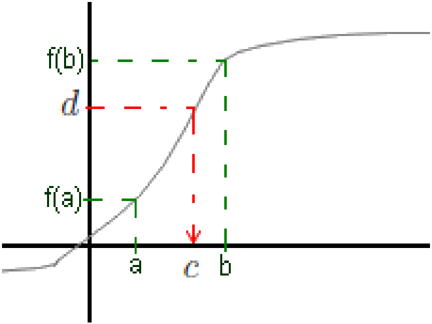
[6] $\lim_{x\to 1} e^{\frac{x^2-1}{x+1}} = e^{\lim_{x\to 1}(x-1)} = e^0 = 1.$

[7] $\lim_{x\to 0} cos(x^2 + sen(x) + \pi) = cos(\pi) = -1.$

Continuidade

Teorema do Valor Intermediário

Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma contínua em [a,b] e $f(a) < d < f(b)$, então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.



Exemplo

Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - cos(\pi x) + 1$; então f assume o valor $\frac{3}{2}$.

De fato f é contínua e $1 = f(-1) < \frac{3}{2} < f(1) = 3$; logo, do teorema, temos que existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = \frac{3}{2}$.

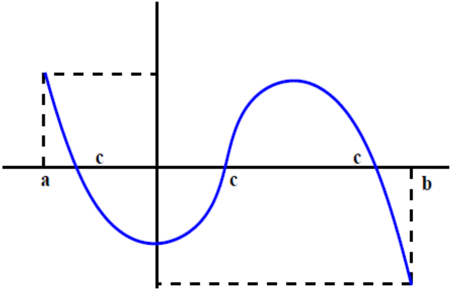
Continuidade

Corolário

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$.

Se $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, ou seja $f(a)\,f(b) < 0$,

então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.



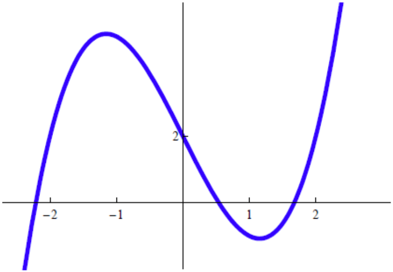
Continuidade

Exemplo A equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ possui 3 raízes reais distintas.

De fato, a função $f(x) = x^3 - 4x + 2$ é contínua em $\mathbb{R}$; logo, é contínua em qualquer intervalo fechado.

Considere:

x_1	x_2	$f(x_1) \cdot f(x_2)$	Conclusão
-3	-2	-26	Existe $c_1 \in (-3, -2)$ tal que $f(c_1) = 0$.
0	1	-2	Existe $c_1 \in (0, 1)$ tal que $f(c_2) = 0$.
1	2	-2	Existe $c_3 \in (1, 2)$ tal que $f(c_3) = 0$.



Continuidade

Exercício

Mostre que existe uma raiz da equação

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 e 2.

Solução:

Continuidade

Exercício
Mostre que existe uma raiz da equação

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 e 2.
Solução:
Temos que f é contínua, pois é um polinômio. Temos ainda que:

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

e

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Logo,

$$f(1) < 0 < f(2).$$

Portanto, existe $c \in (1, 2)$, tal que $f(c) = 0$, ou seja, existe $c \in (1, 2)$, que é raiz da equação acima.

O conteúdo da primeira prova

é até aqui!!!