Sistemas de numeração, operações e códigos

Introdução

- Os sistemas de numeração binário e os códigos digitais são fundamentais para os computadores e para a eletrônica digital

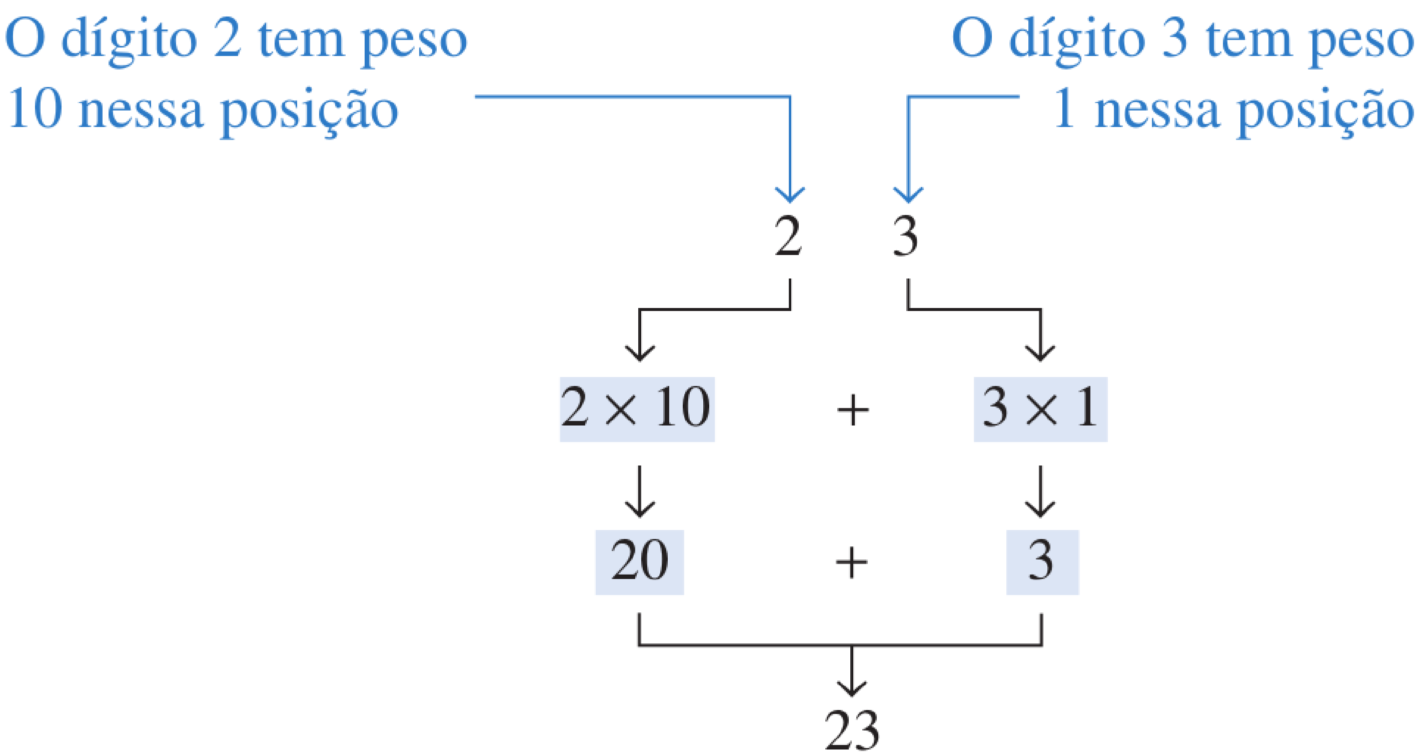
Conteúdo

- Sistemas de numeração binária, decimal, hexadecimal e octal
- Operações aritméticas com números binários
- Código BCD, Gray e ASCII
- Métodos de detecção e correção de erro

Números decimais

$$10^2\ 10^1\ 10^0,10^{-1}\ 10^{-2}\ 10^{-3}\ldots$$

vírgula decimal



Números binários

$$2^{n-1} \ldots 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0,\ 2^{-1}\ 2^{-2} \ldots 2^{-n}$$

vírgula binária

POTÊNCIAS DE DOIS POSITIVAS NÚMEROS INTEIROS									POTÊNCIAS DE DOIS NEGATIVAS NÚMEROS FRACIONÁRIOS					
2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}
256	128	64	32	16	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64
									0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625

Peso: $2^6\ 2^5\ 2^4\ 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0$

Número binário: 1 1 0 1 1 0 1

$$1101101 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0$$
$$= 64 + 32 + 8 + 4 + 1 = \mathbf{109}$$

Números binários

$$2^{n-1} \ldots 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0,\ 2^{-1}\ 2^{-2} \ldots 2^{-n}$$

vírgula binária

POTÊNCIAS DE DOIS POSITIVAS NÚMEROS INTEIROS									POTÊNCIAS DE DOIS NEGATIVAS NÚMEROS FRACIONÁRIOS					
2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}
256	128	64	32	16	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64
									0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625

Peso:		2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}
Número binário:	0,	1	0	1	1

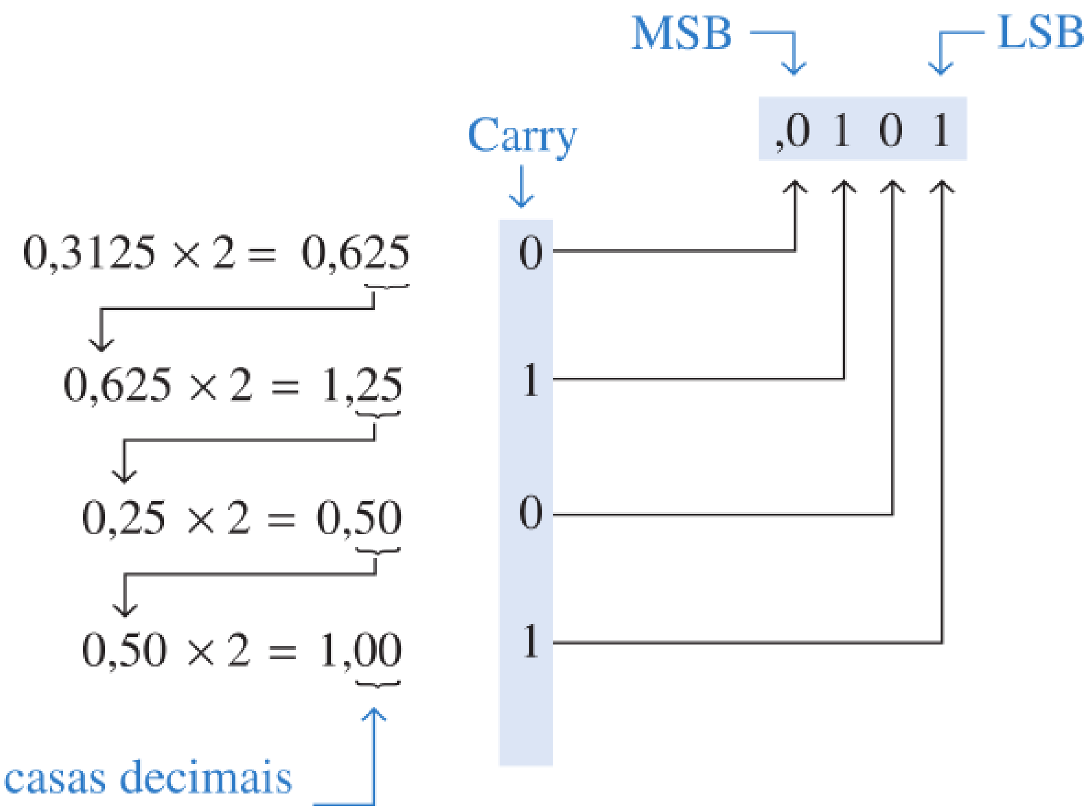
$$0{,}1011 = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4}$$
$$= 0{,}5 + 0{,}125 + 0{,}0625 = \mathbf{0{,}6875}$$

Conversão: decimal para binário

- Método de soma dos pesos
- Método de divisão (multiplicação) sucessiva por 2

$$0,625 = 0,5 + 0,125 = 2^{-1} + 2^{-3} = 0,101$$

Conversão: decimal para binário



Continue para o número desejado de casas decimais
ou pare quando a parte fracionária for apenas zeros.

Aritmética binária

$$\begin{array}{ll} 0+0=0 & \text{Resultado: 0; carry: 0} \\ 0+1=1 & \text{Resultado: 1; carry: 0} \\ 1+0=1 & \text{Resultado: 1; carry: 0} \\ 1+1=10 & \text{Resultado: 0; carry: 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 0-0=0 & \\ 1-1=0 & \\ 1-0=1 & \\ 10-1=1 & \text{sendo o empréstimo igual a 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0\times 0=0 \\ 0\times 1=0 \\ 1\times 0=0 \\ 1\times 1=1 \end{array}$$

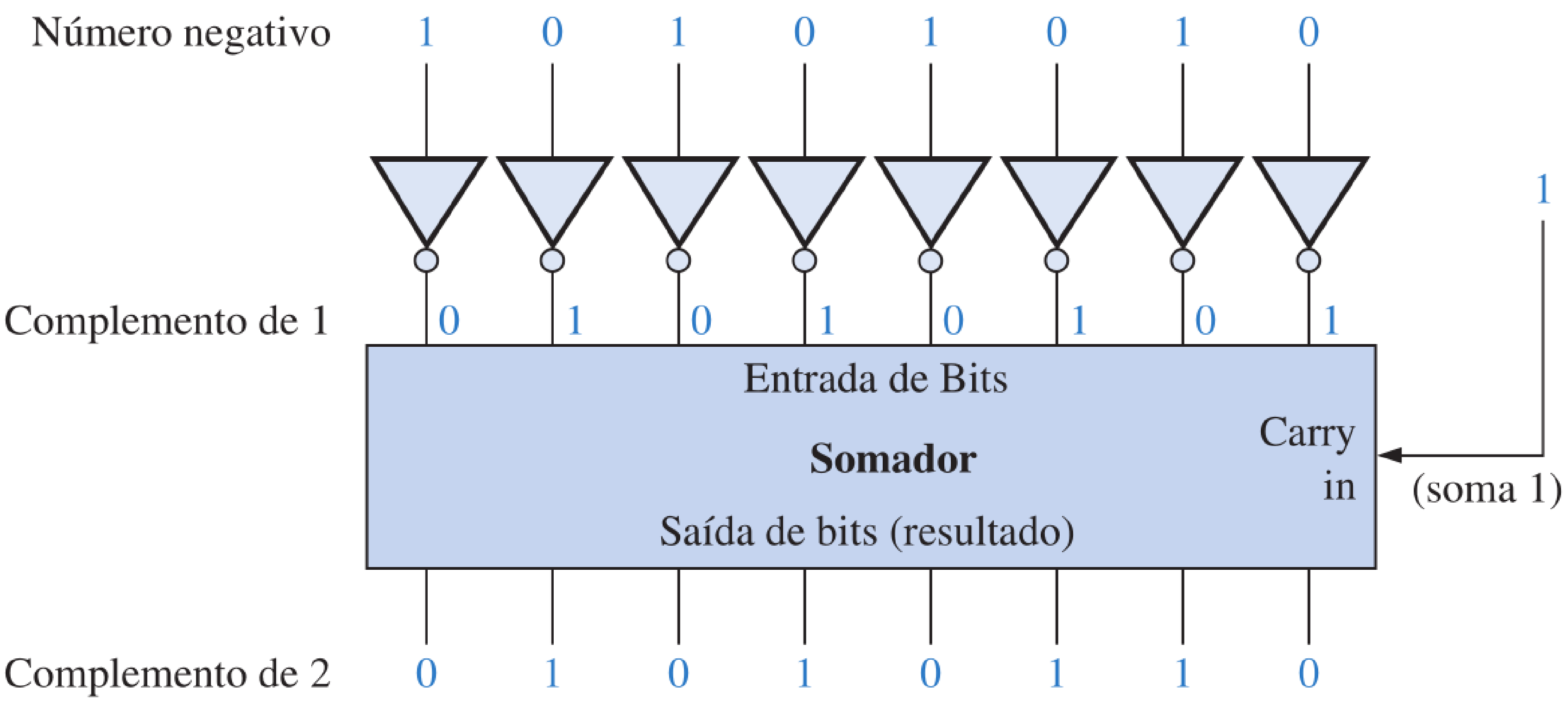
Realize as seguintes divisões binárias:

(a) $110 \div 11$ **(b)** $110 \div 10$

(a) $\begin{array}{r} \mathbf{10} \\ 11\overline{)110} \\ 11 \\ \hline 000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 3\overline{)6} \\ 6 \\ \hline 0 \end{array}$

(b) $\begin{array}{r} \mathbf{11} \\ 10\overline{)110} \\ 10 \\ \hline 10 \\ 10 \\ \hline 00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 2\overline{)6} \\ 6 \\ \hline 0 \end{array}$

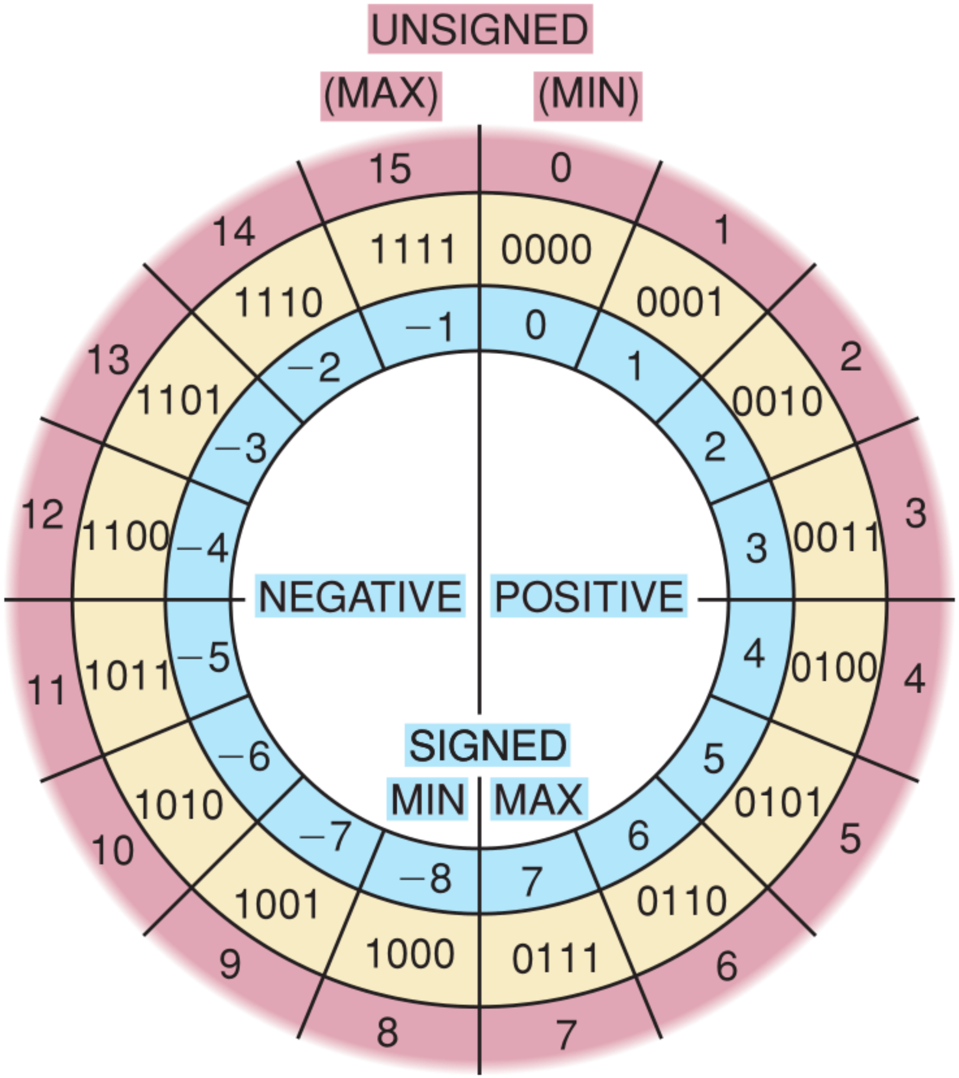
Complemento de 1 e de 2



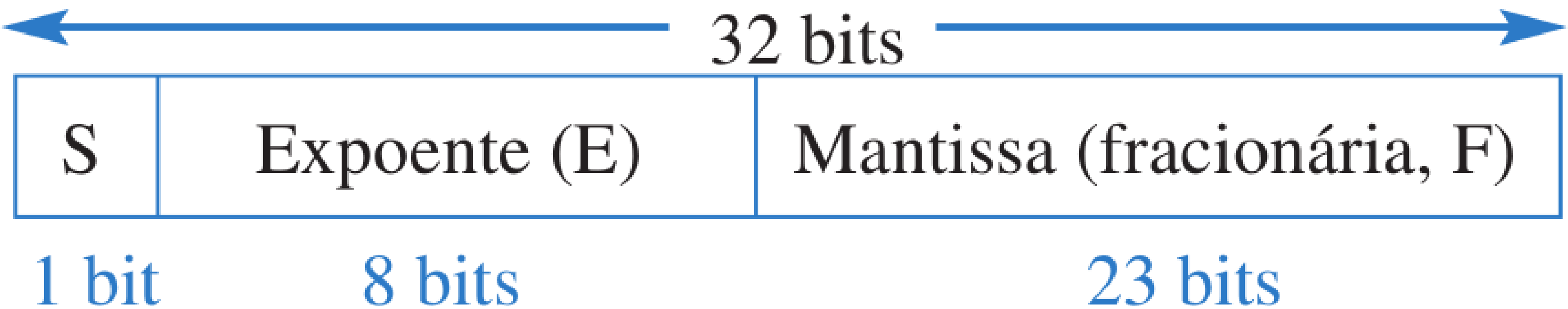
Números sinalizados

- Forma Sinal-Magnitude - Bit de sinal
- Forma Complemento de 1
- Forma Complemento de 2

Faixa de números representados



Números em ponto flutuante



$$\text{Número} = (-1)^S(1 + F)(2^{E-127})$$

Números em ponto flutuante

$$1011010010001 = 1{,}011010010001 \times 2^{12}$$

S	E	F
0	10001011	01101001000100000000000

Números em ponto flutuante

S	E	F
1	10010001	10001110001000000000000

$$\text{Número} = (-1)^1(1{,}10001110001)(2^{145-127})$$
$$= (-1)(1{,}10001110001)(2^{18}) = -1100011100010000000$$

Operações: números sinalizados

- Adição
- Subtração
- Multiplicação
- Divisão

Números hexadecimais

DECIMAL	BINÁRIO	HEXADECIMAL
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Números hexadecimais

- Conversão decimal-hexadecimal
- Conversão hexadecimal-decimal
- Conversão binário-hexadecimal
- Conversão hexadecimal-binário

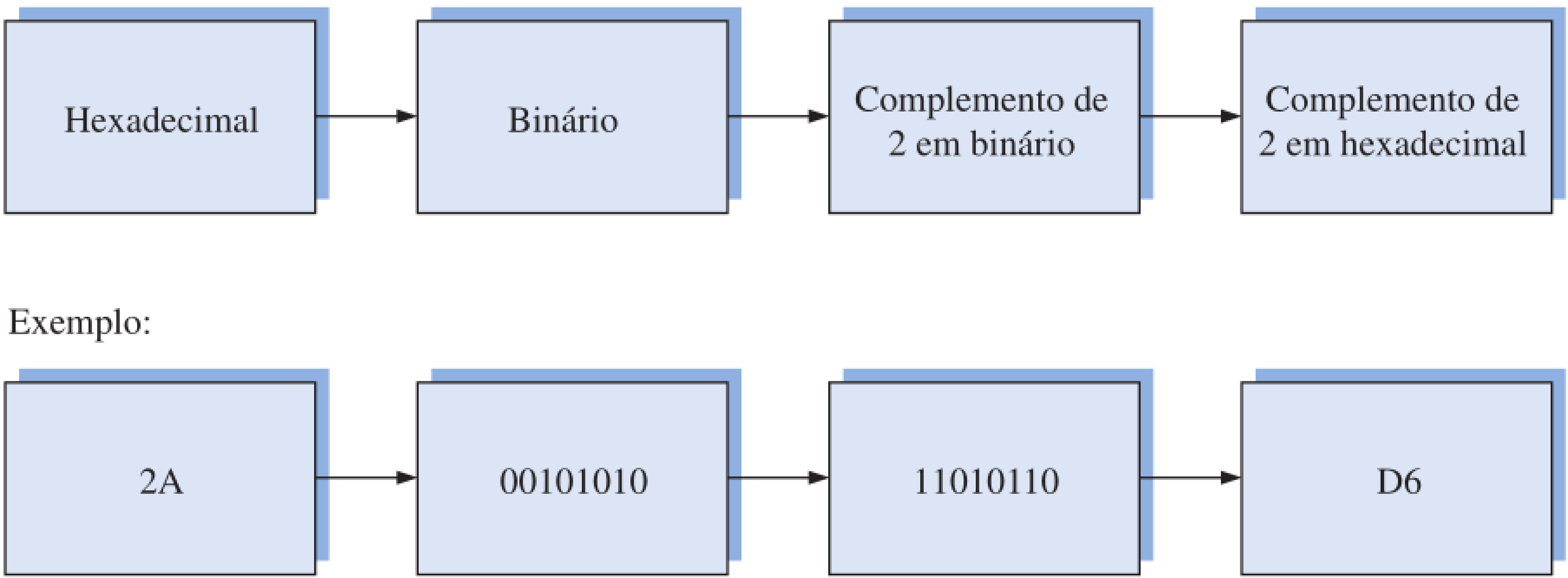
Números hexadecimais

$$\underbrace{1100}_{\downarrow\; C}\underbrace{1010}_{\downarrow\; A}\underbrace{0101}_{\downarrow\; 5}\underbrace{0111}_{\downarrow\; 7} = \mathbf{CA57}_{16}$$

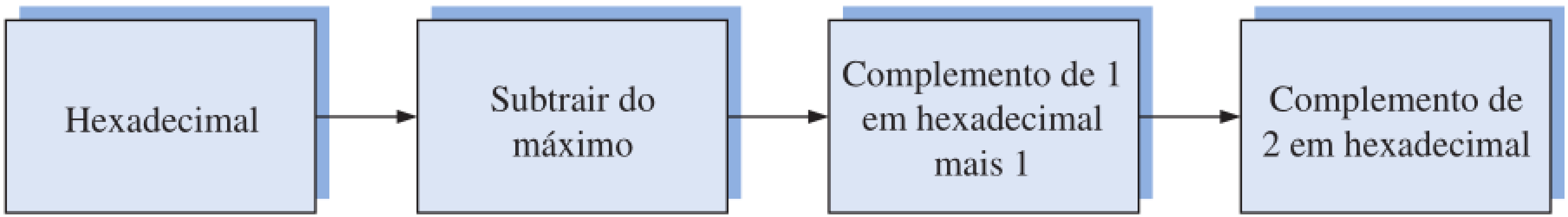
$$10A4_{16}$$

$$\mathbf{1}\overbrace{\mathbf{0000}}^{0\;\downarrow}\overbrace{\mathbf{1010}}^{A\;\downarrow}\overbrace{\mathbf{0100}}^{4\;\downarrow}$$

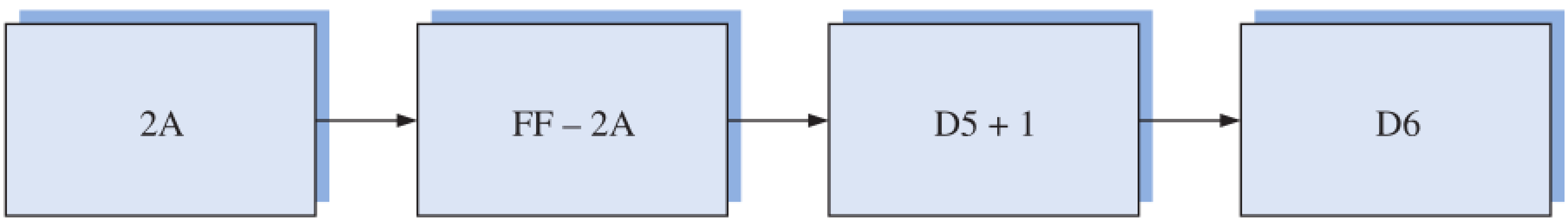
Adição e subtração hexadecimal



Adição e subtração hexadecimal



Exemplo:



Números octais

- Conversão octal-hexadecimal
- Conversão hexadecimal-octal
- Conversão binário-octal
- Conversão octal-binário

Decimal codificado em binário BCD

- Código 8421

DÍGITO DECIMAL	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
BCD	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001

(a) $\underbrace{1000}_{\downarrow\ \mathbf{8}}\underbrace{0110}_{\downarrow\ \mathbf{6}}$

(b) $\underbrace{0011}_{\downarrow\ \mathbf{3}}\underbrace{0101}_{\downarrow\ \mathbf{5}}\underbrace{0001}_{\downarrow\ \mathbf{1}}$

(c) $\underbrace{1001}_{\downarrow\ \mathbf{9}}\underbrace{0100}_{\downarrow\ \mathbf{4}}\underbrace{0111}_{\downarrow\ \mathbf{7}}\underbrace{0000}_{\downarrow\ \mathbf{0}}$

Decimal codificado em binário BCD

- Adição

$$010001010000 + 010000010111$$

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 0100 & 0101 & 0000 \\
+ & 0100 & 0001 & 0111 \\
\hline
 & \mathbf{1000} & \mathbf{0110} & \mathbf{0111}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
450 \\
+\ 417 \\
\hline
867
\end{array}
$$

Decimal codificado em binário BCD

- Adição

	1001		9
	+ 1001		+ 9
1	0010	Inválido por causa do carry	18
	+ 0110	Somar 6	
$\underbrace{\mathbf{0001}}_{1}$	$\underbrace{\mathbf{1000}}_{8}$	Número BCD válido	

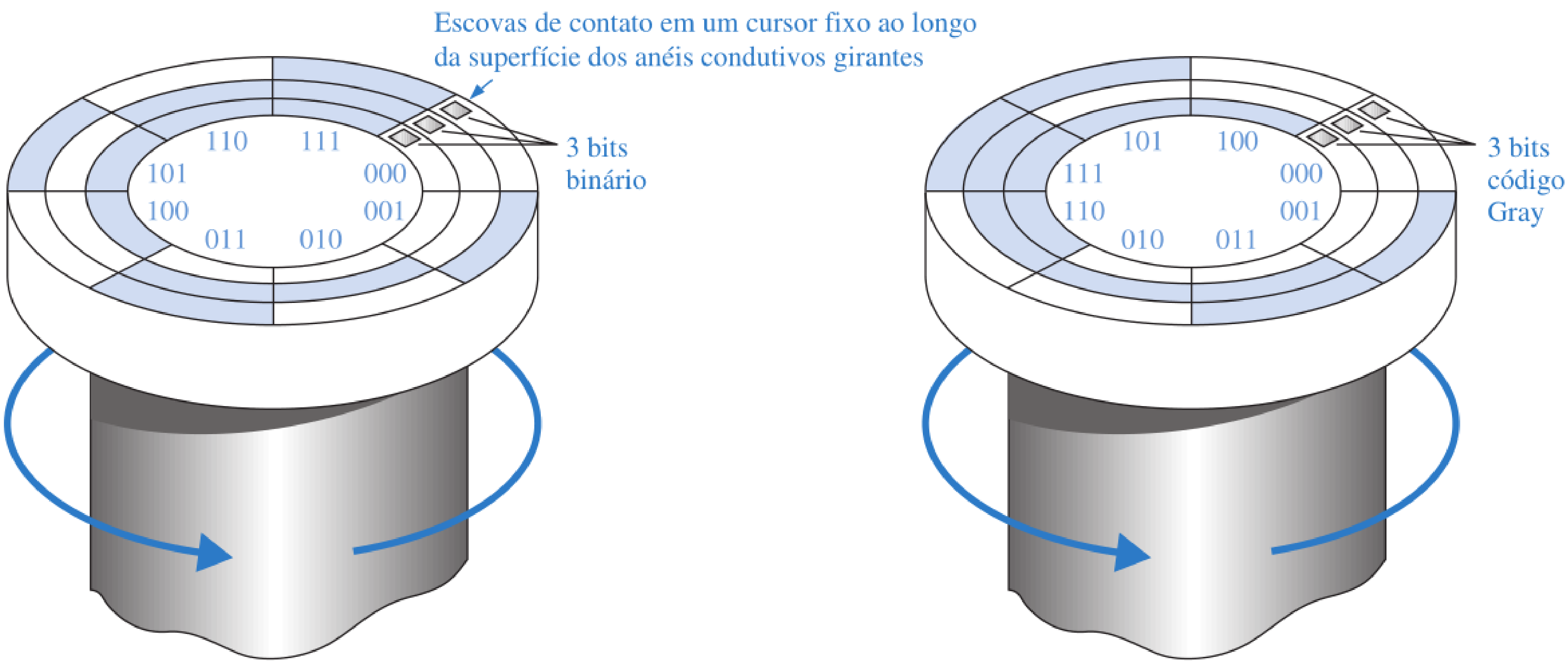
Código Gray

DECIMAL	BINÁRIO	CÓDIGO GRAY	DECIMAL	BINÁRIO	CÓDIGO GRAY
0	0000	0000	8	1000	1100
1	0001	0001	9	1001	1101
2	0010	0011	10	1010	1111
3	0011	0010	11	1011	1110
4	0100	0110	12	1100	1010
5	0101	0111	13	1101	1011
6	0110	0101	14	1110	1001
7	0111	0100	15	1111	1000

$$\begin{array}{cccccccl} 1 & - + \rightarrow & 0 & - + \rightarrow & 1 & - + \rightarrow & 1 & \quad \text{Binário} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 0 & \quad \text{Gray} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccl} 1 & & 1 & & 0 & & 1 & \quad \text{Gray} \\ \downarrow & \nearrow + \nearrow & \downarrow & \nearrow + \nearrow & \downarrow & \nearrow + \nearrow & \downarrow & \\ 1 & & 0 & & 0 & & 1 & \quad \text{Binário} \end{array}$$

Código Gray



(a) Binário

(b) Código Gray

Código Alfanumérico ASCII

CARACTERES DE CONTROLE				SÍMBOLO GRÁFICO											
NOME	DEC	BINÁRIO	HEXA	SÍMBOLO	DEC	BINÁRIO	HEXA	SÍMBOLO	DEC	BINÁRIO	HEXA	SÍMBOLO	DEC	BINÁRIO	HEXA
NUL	0	0000000	00	espaço	32	0100000	20	@	64	1000000	40	`	96	1100000	60
SOH	1	0000001	01	!	33	0100001	21	A	65	1000001	41	a	97	1100001	61
STX	2	0000010	02	"	34	0100010	22	B	66	1000010	42	b	98	1100010	62
ETX	3	0000011	03	#	35	0100011	23	C	67	1000011	43	c	99	1100011	63
EOT	4	0000100	04	$	36	0100100	24	D	68	1000100	44	d	100	1100100	64
ENQ	5	0000101	05	%	37	0100101	25	E	69	1000101	45	e	101	1100101	65
ACK	6	0000110	06	&	38	0100110	26	F	70	1000110	46	f	102	1100110	66
BEL	7	0000111	07	'	39	0100111	27	G	71	1000111	47	g	103	1100111	67
BS	8	0001000	08	(	40	0101000	28	H	72	1001000	48	h	104	1101000	68
HT	9	0001001	09	)	41	0101001	29	I	73	1001001	49	i	105	1101001	69
LF	10	0001010	0A	*	42	0101010	2A	J	74	1001010	4A	j	106	1101010	6A
VT	11	0001011	0B	+	43	0101011	2B	K	75	1001011	4B	k	107	1101011	6B
FF	12	0001100	0C	,	44	0101100	2C	L	76	1001100	4C	l	108	1101100	6C
CR	13	0001101	0D	–	45	0101101	2D	M	77	1001101	4D	m	109	1101101	6D
SO	14	0001110	0E	.	46	0101110	2E	N	78	1001110	4E	n	110	1101110	6E
SI	15	0001111	0F	/	47	0101111	2F	O	79	1001111	4F	o	111	1101111	6F
DLE	16	0010000	10	0	48	0110000	30	P	80	1010000	50	p	112	1110000	70
DC1	17	0010001	11	1	49	0110001	31	Q	81	1010001	51	q	113	1110001	71
DC2	18	0010010	12	2	50	0110010	32	R	82	1010010	52	r	114	1110010	72
DC3	19	0010011	13	3	51	0110011	33	S	83	1010011	53	s	115	1110011	73
DC4	20	0010100	14	4	52	0110100	34	T	84	1010100	54	t	116	1110100	74
NAK	21	0010101	15	5	53	0110101	35	U	85	1010101	55	u	117	1110101	75
SYN	22	0010110	16	6	54	0110110	36	V	86	1010110	56	v	118	1110110	76
ETB	23	0010111	17	7	55	0110111	37	W	87	1010111	57	w	119	1110111	77
CAN	24	0011000	18	8	56	0111000	38	X	88	1011000	58	x	120	1111000	78
EM	25	0011001	19	9	57	0111001	39	Y	89	1011001	59	y	121	1111001	79
SUB	26	0011010	1A	:	58	0111010	3A	Z	90	1011010	5A	z	122	1111010	7A
ESC	27	0011011	1B	;	59	0111011	3B	[	91	1011011	5B	{	123	1111011	7B
FS	28	0011100	1C	<	60	0111100	3C	\	92	1011100	5C	|	124	1111100	7C
GS	29	0011101	1D	=	61	0111101	3D	]	93	1011101	5D	}	125	1111101	7D
RS	30	0011110	1E	>	62	0111110	3E	^	94	1011110	5E	~	126	1111110	7E
US	31	0011111	1F	?	63	0111111	3F	_	95	1011111	5F	Del	127	1111111	7F

Código Alfanumérico ASCII

20 PRINTI “A=”;X

O código ASCII para cada símbolo é encontrado na Tabela 2–7.

Símbolo	Binário	Hexadecimal
2	0110010	32_{16}
0	0110000	30_{16}
Espaço	0100000	20_{16}
P	1010000	50_{16}
R	1010010	52_{16}
I	1001001	49_{16}
N	1001110	$4E_{16}$
T	1010100	54_{16}
Espaço	0100000	20_{16}
"	0100010	22_{16}
A	1000001	41_{16}
=	0111101	$3D_{16}$
"	0100010	22_{16}
;	0111011	$3B_{16}$
X	1011000	58_{16}

Códigos de detecção de erro

PARIDADE PAR		PARIDADE ÍMPAR	
P	BCD	*P*	BCD
0	0000	1	0000
1	0001	0	0001
1	0010	0	0010
0	0011	1	0011
1	0100	0	0100
0	0101	1	0101
0	0110	1	0110
1	0111	0	0111
1	1000	0	1000
0	1001	1	1001

Bit de paridade par

$0\underbrace{0101}_{\text{Código BCD}}$

Bit de paridade par

00001

Bit errado

Códigos de correção de Hamming

$$2^p \geq d + p + 1$$

DESIGNAÇÃO DOS BITS	P_1	P_2	D_1	P_3	D_2	D_3	D_4
POSIÇÃO DOS BITS	1	2	3	4	5	6	7
NÚMERO DA POS. EM BINÁRIO	001	010	011	100	101	110	111
Bits de dados			1		0	0	1
Bits de paridade	0	0		1			

$$2^p = 2^2 = 4$$

$$d + p + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$$

$$2^p = 2^3 = 8$$

$$d + p + 1 = 4 + 3 + 1 = 8$$

Códigos de correção de Hamming

DESIGNAÇÃO DOS BITS	P_1	P_2	D_1	P_3	D_2	D_3	D_4
POSIÇÃO DOS BITS	1	2	3	4	5	6	7
NÚMERO DA POSIÇÃO EM BINÁRIO	001	010	011	100	101	110	111
Código recebido	0	0	1	0	0	0	1

Primeira verificação de paridade:
O bit P_1 verifica as posições 1, 3, 5 e 7.
Existem dois 1s nesse grupo.
A verificação de paridade é correta. $\longrightarrow$ 0 (LSB)

Segunda verificação de paridade:
O bit P_2 verifica as posições 2, 3, 6 e 7.
Existem dois 1s nesse grupo.
A verificação de paridade é correta. $\longrightarrow$ 0

Terceira verificação de paridade:
O bit P_3 verifica as posições 4, 5, 6 e 7.
Existe um 1 nesse grupo.
A verificação de paridade é incorreta. $\longrightarrow$ 1 (MSB)

Atividades

- Revisão do Capítulo 2
- Resolução dos problemas 1-67 do Capítulo 2
- Leitura do Capítulo 3