Algoritmos Numéricos DI/CT/UFES

Roteiro para o Estudo dirigido sobre Interpolação Polinomial

1. Dados os pontos da função na forma tabelar abaixo:

x_k	0.5	0.8	1.0
$y_k = f(x_k)$	2.4	1.5	1.7

(a) Quer se obter o polinômio interpolador, de grau 2, escrito na forma $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Escreva as restrições de interpolação que devem ser satisfeitas, monte o sistema linear $Xa = y$ correspondente e obtenha o polinômio interpolador. Resolva o sistema linear da forma que achar melhor.

(b) Obtenha o polinômio interpolador de grau 2 via forma de Newton.

(c) Represente graficamente o que foi feito em (a), isto é, trace os pontos envolvidos e o polinômio obtido em um par de eixos cartesianos. Use uma escala que permita a visualização.

2. Seja a tabela de pontos distintos do plano dada abaixo:

x_k	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$y_k = f(x_k)$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

Quer se obter $f(z)$ para um valor de z em $D = [x_0, x_5]$ não fornecido na tabela adotando dois caminhos:
(1) Caminho 1: montando um sistema linear $Xa = y$ onde X é a matriz de Vandermonde
(2) Caminho 2: via forma de Newton.
É de se esperar que os valores obtidos para $f(z)$ pelo caminho 1 e pelo caminho e 2 sejam distintos ou iguais? Justifique a sua resposta.

3. Funções conhecidas como funções de Bessel (há diversos tipos) são muito empregadas em vários ramos da engenharia. Avaliação destas funções em um ponto x é muito custosa pois envolve uma série. Assim, é comum encontrar estas funções apresentadas na forma tabelar. A tabela abaixo apresenta os valores (exibindo apenas 3 casas decimais) de uma função de Bessel específica (a de 1^a espécie e de índice 0, denotada comumente por $J_o(x)$), em $D = [1.8, 2.4]$:

x_i	1.8	2.0	2.2	2.4
$y_i = J_o(x_i)$	0.582	0.578	0.556	0.520

Usando o código DifDivididasAsc.m (disponibilizado) calcule todas as diferenças divididas ascendentes que podem ser obtidas com os dados fornecidos e obtenha o polinômio interpolador da função de Bessel em $D = [1.8, 2.4.]$ usando todos os pontos fornecidos na tabela, via interpolação de Newton.

Calcule $f(2.1)$ pelo polinômio obtido, na forma de Newton, avaliando o polinômio em $z = 2.1$ SEM usar a forma de parênteses encaixados (a forma, também, chamada de forma de Horner).

Escreva a expressão do polinômio obtido USANDO parênteses encaixados e calcule $f(2.1)$ usando esta forma com parênteses encaixados.

4. Dado um conjunto P de pontos no plano P=((x_0, y_0), (x_0, y_0), ... (x_n, y_n)), um ponto z em $D = [x_0, x_n]$ e polinômio interpolador deste pontos na forma Newton.

   Considere que todas as diferenças divididas ascendentes, de ordem 0 até n, calculadas em torno do ponto y_0 estão dadas, isto é, considere o polinômio interpolador fornecido.

   (a) Escreva uma função, no octave, que avalie o polinômio interpolador de grau n dos pontos P=((x_0, y_0), (x_0, y_0), ... (x_n, y_n)) em um ponto z SEM usar a forma de parênteses encaixados.

   Considere como dados de entrada: os pontos de interpolação (fornecidos via dois vetores x e y, com $(n + 1)$ posições cada), os coeficientes do polinômio na forma de Newton (passados pelo vetor b) e o ponto z. A função seria algo do tipo:

   ```
   function pz= avaliapolinomio(x, y, b, z)
   ```

   (b) Escreva uma função, no octave, que avalie o polinômio interpolador de grau n dos pontos P=((x_0, y_0), (x_0, y_0), ... (x_n, y_n)) em um ponto z USANDO a forma de parênteses encaixados.

   Considere, novamente, os seguintes dados de entrada: os pontos de interpolação (fornecidos via dois vetores x e y, com $(n + 1)$ posições cada), os coeficientes do polinômio na forma de Newton (passados pelo vetor b) e o ponto z.

1 Observações e dicas

- Leia as notas de aulas e veja as videoaulas antes de começar a fazer os exercícios
- Lembrando que a expressão do polinômio interpolador de Newton é:

  $$p_n(x) = \triangle^0 y_0 + \triangle^1 y_0 (x - x_0) + \triangle^2 y_0 (x - x_0)(x - x_1) + ... + \triangle^n y_0 (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

  Na forma de parênteses encaixados fica:

  $$p_n(x) = \triangle^0 y_0 + (x - x_0)(\triangle^1 y_0 + (x - x_1)(\triangle^2 y_0 + (x - x_2)(... + ...(x - x_{n-1})(\triangle^n y_0)...)))$$

  Avaliando em um ponto z, tem-se:

  $$p_n(z) = \triangle^0 y_0 + (z - x_0)(\triangle^1 y_0 + (z - x_1)(\triangle^2 y_0 + (z - x_2)(... + ...(z - x_{n-1})(\triangle^n y_0)...)))$$

  Assim, por exemplo, se houver um vetor b, que contenha, na posição i, as diferenças divididas ascendentes de ordem i em torno do ponto y_0, o polinômio avaliado em um ponto z, poderia ser expresso por

  Avaliando em um ponto z:

  $$p_n(z) = b[0] + b[1](z - x_0) + b[2](z - x_0)(z - x_1) + ... + b[n](z - x_0)(z - x_1)...(z - x_{n-1})$$

  Na forma de parênteses encaixados seria:

  $$p_n(z) = b[0] + (z - x_0)(b[1] + (z - x_1)(b[2] + (z - x_2)(... + ...(z - x_{n-1})(b[n])...)))$$