Gabarito

1. **(2pts)** Considere $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$.

(a) Calcule $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x+1 = 2.$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} -(x+1) = -2.$$
Logo, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ não existe pois os limites laterais são distintos.

(b) Determine o domínio e os zeros, e esboce o gráfico de f.

Domínio= $\mathbb{R} - \{1\}$; zeros: -1;

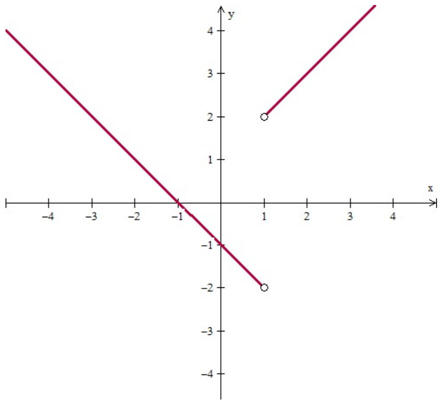


Figura 1: Gráfico de f

2. **(4pts)** Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2}$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6}-x)(\sqrt{x+6}+x)}{(x^3-3x^2)(\sqrt{x+6}+x)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+6-x^2}{x^2(x-3)(\sqrt{x+6}+x)} =$$
$$\lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)(x+2)}{x^2(x-3)(\sqrt{x+6}+x)} = \lim_{x\to 3} \frac{-(x+2)}{x^2(\sqrt{x+6}+x)} = \frac{-5}{54}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^3-2x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\frac{1}{x-2} = 1 \cdot \frac{1}{(-2)} = -\frac{1}{2}.$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \arctan(e^{-x^2})$

$$= \arctan(e^{\lim_{x\to 0} -x^2}) = \arctan(e^0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-3}$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1-\frac{3}{x})} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1-\frac{3}{x})} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{(1-\frac{3}{x})} = -1.$$

3. **(1,5pts)** Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ no ponto $(0, -1)$.

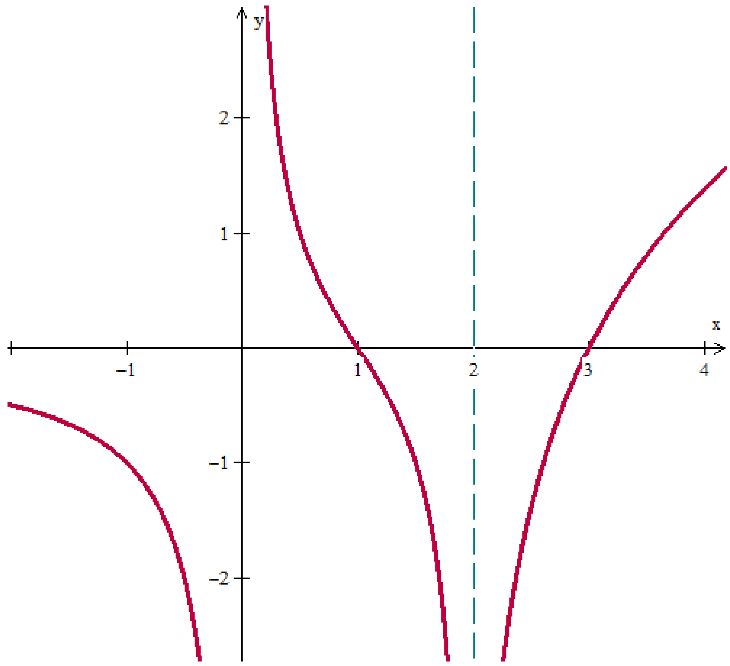
A equação da reta é $y = mx + n$ com $m = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x-1} - (-1)}{x} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[3]{x-1}+1)(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1}+1)}{x(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1}+1)} = \frac{1}{3}.$
Usando o ponto (0,-1) obtemos $n = -1$. Com isso, a equação da reta é $y = \frac{1}{3}x - 1$.

4. **(1,5pt)** Esboce o gráfico de uma função que satisfaça simultaneamente as seguintes condições:

   (a) $f(1) = f(3) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

   (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

   (c) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$



5. **(1pt)** Encontre um intervalo de tamanho 1/2 que contenha uma raiz do polinômio $p(x) = x^5 + x - 1$.

Note que $p(0) = -1 < 0$ e $p(1) = 1 > 0$. Como p é contínua, pelo T.V.I., p possui uma raiz no intervalo (0,1). Agora note que $p(1/2) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{2} < 0$. Com isso, pelo T.V.I., p possui uma raiz no intervalo (1/2, 1) como queríamos.