Aula 10   Cálculo 3B   2021.1

Aula passada

EDO 2ª ordem
* lineares : a solução geral é gerada por duas soluções LI
* linearidade

Aula Hoje
* achar as soluções LI no caso $ay'' + by' + cy = 0$

3.1 Equação homogênea com coeficiente constante

Considere a equação

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Queremos achar duas soluções LI.
Vejamos um exemplo para motivar

Exemplo Resolva $y'' - y = 0$.

Solução

Podemos escrever $y'' = y$

isto é, que função que a segunda derivada é ela mesma?

Repetindo : * $y_1(t) = e^t$

* $y_2(t) = e^{-t}$

Note que

$$W(e^t, e^{-t}) = \det \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} = -1 - 1 = 2 \neq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

portanto $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{-t}$ são LI

Pela nossa discussão teórica anterior qualquer solução dessa EDO é escrita como

$$\boxed{y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}} \qquad c_1, c_2 \text{ constantes}$$

↳ solução geral

Exemplo Resolva o PVI
$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Solução

Note que $y_1(t) = e^t$ nem $y_2(t) = e^{-t}$ satisfazem o problema de valor inicial

Mas existem c_1 e c_2 (únicos) tais que

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

é solução do PVI. Vamos determiná-los

$$y(0) = c_1 + c_2 = 2$$
$$y'(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$$
$$y'(0) = c_1 - c_2 = -1$$

Resolver este sistema:

$$\begin{array}{r} c_1 + c_2 = 2 \\ + \quad c_1 - c_2 = -1 \\ \hline 2c_1 = 1 \\ c_1 = \frac{1}{2} \end{array} \qquad \frac{1}{2} - c_2 = -1 \qquad c_2 = 1 + 1/2 = 3/2$$

portanto $\boxed{y(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t}}$ é a solução do PVI

Voltando em $ay'' + by' + cy = 0$ Vamos motivados pelo teorema anterior procurar soluções do tipo

$$\boxed{y(t) = e^{rt}}$$

para algum $r \in \mathbb{R}$.
Derivando e substituindo na equação

$$y'(t) = re^{rt}$$
$$y''(t) = r^2 e^{rt}$$

$$a r^2 e^{rt} + b r e^{rt} + c e^{rt} = 0$$

$$\underbrace{e^{rt}}_{\neq 0}(ar^2 + br + c) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{ar^2 + br + c = 0}$$ ↳ Equação Característica

Nota: 3 casos :
- → o polinômio tem duas raízes distintas
- → o polinômio tem raízes complexas
- → o polinômio tem raiz múltipla.

para polinômio de 2º grau

Nota 2 Em polinômios de grau maior tem mais casos

Exemplo $ax^3+bx^2+cx+d=0$

pode ter:

→ 3 raízes reais distintas

→ 1 raiz real e $\underbrace{\text{duas complexa}}_{\text{aparece sempre aos pares}}$

→ 2 raízes iguais e outra diferente

→ 3 raízes iguais

Tente pensar os casos para um polinômio de grau 4.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ O polinômio tem duas raízes reais distintas: $r_1 \neq r_2$

Desse modo $y_1(t)=e^{r_1 t}$ $y_2(t)=e^{r_2 t}$ são soluções e

$$W(e^{r_1 t}, e^{r_2 t}) = \det\begin{pmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t}\end{pmatrix}$$

$$= r_2 e^{r_1 t} \cdot e^{r_2 t} - r_1 e^{r_2 t} \cdot e^{r_1 t}$$

$$= (r_2 - r_1)\, e^{(r_1+r_2)t} \neq 0 \quad \text{pois} \quad r_1 \neq r_2$$

portanto $\boxed{y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}}$ solução geral

Exemplo Encontre a solução geral de

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Solução Equação característica:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = 0$$

$$\left(x + 5/2\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x + 5/2 = \pm 1/2$$

$$x = -3 \quad e \quad x = -2$$

solução geral: $y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-2t}$

Exemplo Encontre a solução do PVI

$$\begin{cases} 4y'' - 8y' + 3y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e estude o comportamento da solução quando $t \to \infty$

Solução:

equação característica:

$$4x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + \frac{3}{4} = 0$$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_1 = 3/2 \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Então $y(t) = c_1 e^{3/2\, t} + c_2 e^{t/2}$ é a solução geral

para $y(0) = 2$, $y'(0) = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $y(0) = c_1 + c_2 = 2$, $y'(0) = \frac{3}{2}c_1 + \frac{c_2}{2} = \frac{1}{2}$ (2)

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 3c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \; -$$

$$-2c_1 = 1 \qquad c_1 = -1/2$$

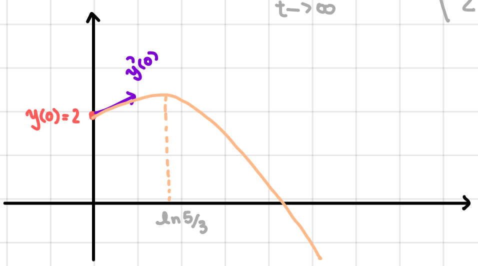
$$-\frac{1}{2} + c_2 = 2 \qquad c_2 = 5/2$$

então a solução do PVI é $y(t) = -\frac{1}{2} e^{3/2\, t} + \frac{5}{2} e^{t/2}$

Vamos analisar o comportamento

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2} e^{3/2\, t} + \frac{5}{2} e^{t/2}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \underbrace{e^{t/2}}_{\to\infty} \Big(\underbrace{\frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{t}}_{\to -\infty}\Big) = -\infty$$



$$y'(t) = -\frac{3}{4} e^{3/2\, t} + \frac{5}{4} e^{t/2} = 0$$

$$\Rightarrow e^{t/2}\left(-\frac{3}{4} e^{t} + \frac{5}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 3e^{t} = 5$$

$$t = \ln 5/3$$

Exemplo: Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} 4y'' - y = 0 \\ y(0) = 2 \quad y'(0) = \beta \end{cases}$$

e encontre o valor de β em que a solução tenda a zero quando $t \to \infty$

Solução

$$4y'' - y = 0$$

↳ equação característica:

$$4x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

raízes distintas

$$y(t) = c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 e^{-\frac{t}{2}}$$

$$y(0) = c_1 + c_2 = 2$$

$$y'(t) = \frac{1}{2} c_1 e^{t/2} - \frac{c_2}{2} e^{-t/2}$$

$$y'(0) = \frac{1}{2} c_1 - \frac{1}{2} c_2 = \beta$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1 + c_2 = 2$$

$$c_1 - c_2 = 2\beta$$

$$2c_1 = 2 + 2\beta$$

$$c_1 = 1 + \beta$$

$$c_2 = 1 - \beta$$

$$y(t) = \underbrace{(1+\beta)}\, e^{t/2} + (1-\beta) e^{-t/2}$$

β para $\underset{t \to \infty}{y \to 0}$

anular esta parte

$$\beta = -1$$

3.4 Raízes complexas da Equação característica

Número complexo e a Fórmula de Euler

seja $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

se $b^2 - 4ac < 0$ as raízes são

$$x_1 = \lambda + \mu i \quad \text{onde} \quad \boxed{i^2 = -1}$$

parte real ↲ ↳ parte imaginária

$$x_2 = \lambda - \mu i$$

números complexos

Exemplo

a) $x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1 \Rightarrow x_1 = i$, $x_2 = -i$

b) $x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3(-1)}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} \qquad \sqrt{-1} = i$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Polinômio com raízes complexas

Sabemos que para $\boxed{ay'' + by' + cy = 0}$ (*)

as soluções são do tipo $y(t) = e^{xt}$

onde x satisfaz

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$ ↳ equação característica

Então precisamos saber o que é a exponencial de um número complexo

Fórmula de Euler

$$\boxed{e^{\mu i} = \cos\mu + i\,\text{sen}\,\mu}$$

Verificação

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{(pela parte de séries)}$$

vamos substituir $x = \mu i$ note que

$$i^1 = i = i^5$$
$$i^2 = -1 = i^6$$
$$i^3 = -1.i = -i = i^7$$
$$i^4 = 1 = i^8$$

então

$$e^{i\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\mu)^n}{n!} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu^{2n}}{2n!}}_{\cos\mu} + i\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\text{sen}\,\mu}$$

$$= \cos\mu + i\,\text{sen}\,\mu$$

Assim

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t}(\cos\mu t + i\,\text{sen}\,\mu t) = \underbrace{e^{\lambda t}\cos\mu t}_{= y_1(t)} + i\underbrace{e^{\lambda t}\cos\mu t}_{= y_2(t)}$$

Verifique que

(I) $y_1(t) = e^{\lambda t}\cos\mu t$ e $y_2 = e^{\lambda t}\,\text{sen}\,\mu t$ são soluções

(II) $W(e^{\lambda t}\cos\mu t, e^{\lambda t}\,\text{sen}\,\mu t) = \mu e^{2\lambda t} \neq 0$ (se $\mu \neq 0$)

se $\mu = 0$ temos raízes reais

portanto para raízes complexas a forma da solução geral é:

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{\lambda t}\cos\mu t + c_2 e^{\lambda t}\,\text{sen}\,\mu t}$$

↳ Solução geral

Exemplo: Encontre a solução geral de $y'' + y' + y = 0$

Solução: Equação característica:

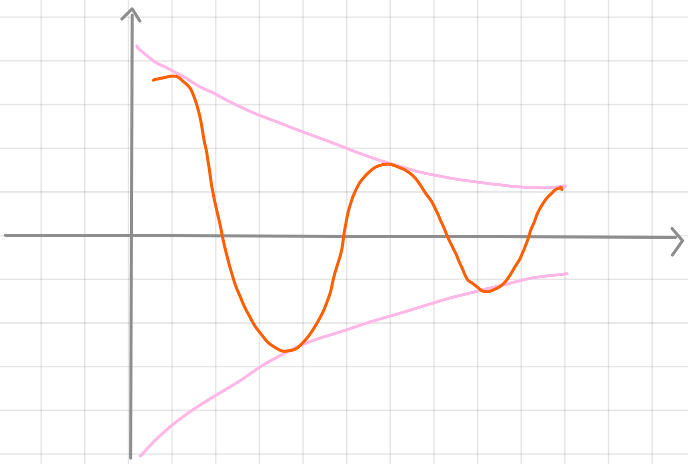
$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4.1.1}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Raízes complexas:

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 e^{-\frac{t}{2}}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)}$$

Note que $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$



Exemplo: Encontre a solução do PVI $\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Solução: Eq. característica:

$$r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i$$

↳ complexo

$$y(t) = c_1\cos 3t + c_2\,\text{sen}\,3t$$

determinar c_1, c_2:

$$-2 = y(0) = c_1$$
$$y'(t) = -3c_1\,\text{sen}\,3t + 3c_2\cos 3t$$
$$1 = y'(0) = 3c_2$$
$$c_2 = 1/3$$

Assim $\boxed{y(t) = -2\cos 3t + \frac{1}{3}\,\text{sen}\,3t}$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \nexists$$