**Gabarito**

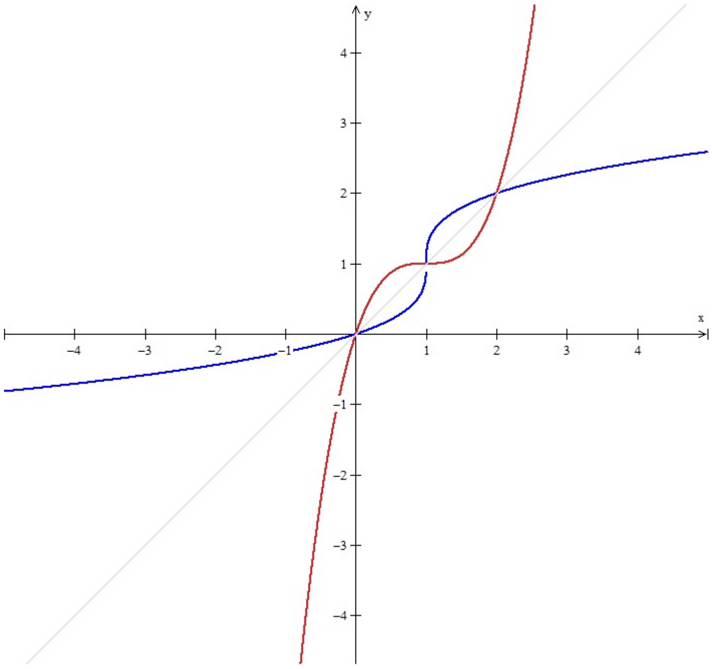
1. **(1.5pts)** Seja $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$.

   (a) Determine $f^{-1}(x)$.

(a) $\sqrt[3]{x-1} + 1 = y \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = y - 1 \Leftrightarrow x - 1 = (y-1)^3 \Leftrightarrow x = (y-1)^3 + 1$. Logo $f^{-1}(x) = (x-1)^3 + 1$.

   (b) Esboce o gráfico de $f$ e de $f^{-1}$.

(b) O gráfico de $f$ é obtido do gráfico de $\sqrt[3]{x}$ deslocando-o para direita uma unidade e depois para cima por uma unidade. Nota: $f(0) = 0$. Os gráficos de $f$ e $f^{-1}$ são simétricos com respeito à reta $y = x$ como em baixo ($f$ a azul).




2. (**1.0 pts**) Sejam $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

   (a) Determine $(f \circ g)(x)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)^2 + 1}{g(x)} = \frac{\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 + 1}{\frac{x+1}{x+2}} = \frac{\frac{(x+1)^2 + (x+2)^2}{(x+2)^2}}{\frac{x+1}{x+2}} = \frac{2x^2 + 6x + 5}{(x+1)(x+2)}.$$

   (b) Determine, justificando, o domínio de $f \circ g$.

Lembre que

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}; x \in D_g \text{ e } g(x) \in D_f\}.$$

Temos $x \in D_g \Leftrightarrow x \neq -2$.
Temos $g(x) \in D_f \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Logo,

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}.$$

3. **(2.0pts)** Esboce o gráfico de uma função $g$ que satisfaça todas as seguintes condições:

   (a) $g$ é ímpar;

   (b) $g$ tem domínio $(-\infty, +\infty)$;

   (c) $x = 0$ é assíntota vertical de $g$;

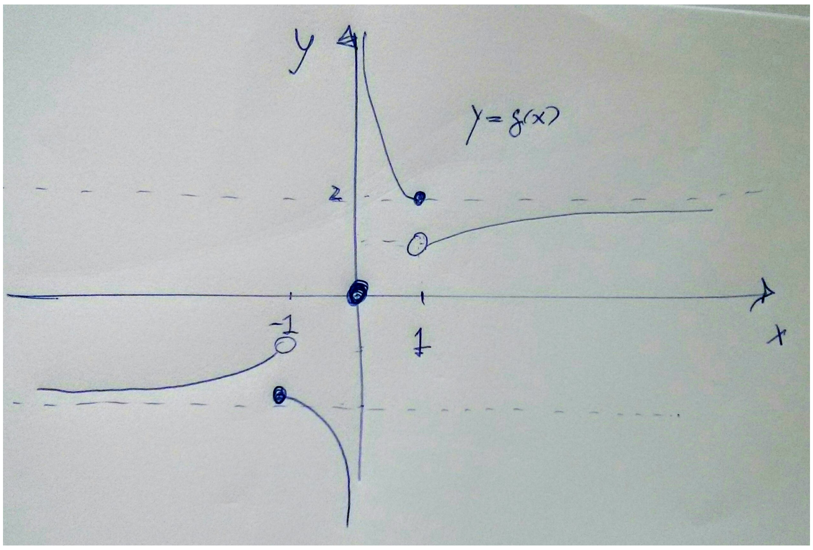
   (d) $g$ é decrescente no intervalo $(0, 1)$;

   (e) $g(1) = 2$;

   (f) $g$ é contínua à esquerda de 1;

   (g) $g$ tem uma descontinuidade por salto em $x = 1$;

   (h) $y = 2$ é assíntota horizontal de $g$.




4. Determine, se existirem:

   (a) **(1.0pts)** $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-3x^2+x}{x^3-x+2}$

"Dividindo pela maior potência de $x$ do denominador":

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^4 - 3x^2 + x)/x^3}{(x^3 - x + 2)/x^3} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x - 3/x + 1/x^2}{1 - 1/x + 2/x} \\
&= \frac{+\infty - 0 + 0}{1 - 0 + 0} \\
&= +\infty \text{ (não existe).}
\end{aligned}$$

(b) **(1.25pts)** $\lim_{x\to-\infty}(x^2 - \sqrt{x^4-3})$

Utilizando o conjugado $a-b$ na fatoração de $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(x^2-\sqrt{x^4-3}) &= \lim_{x\to-\infty}(x^2-\sqrt{x^4-3})\frac{x^2+\sqrt{x^4-3}}{x^2+\sqrt{x^4-3}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-(x^4-3)}{x^2+\sqrt{x^4-3}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2+\sqrt{x^4-3}} \\
&= \text{“}\frac{3}{+\infty}\text{”} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(c) **(1.25pts)** $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{|x-2|}$

Substituição direta leva-nos a uma indeterminação $0/0$. Contudo

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases}$$

e $x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$ donde

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+x-6}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} x+3 = 5.$$

Analogamente,

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+x-6}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} -(x+3) = -5.$$

Portanto, não existe $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{|x-2|}$.

(d) **(1.0pts)** $\lim_{x\to 1^+}\sin(\frac{1}{x-1})\ln x$.

Para todo $x > 1$,

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq 1 \quad \text{e} \quad \ln x > 0,$$

logo

$$-\ln x \leq \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\ln x \leq \ln x.$$

Como $\lim_{x\to 1^+} -\ln x = \lim_{x\to 1^+}\ln x = 0$, segue, pelo teorema do confronto, que $\lim_{x\to 1^+}\sin(\frac{1}{x-1})\ln x = 0$.

5. **(1.0pts)** Considere um número real $c$ e considere a função

$$f(x) = \begin{cases} cx^2+2x, & x \leq 2 \\ x^3-cx, & x > 2. \end{cases}$$

Determine o valor de $c$ de modo a que $f$ seja contínua em toda a reta real.

Basta determinar $c$ tal que $f$ seja contínua para $x = 2$, pois para $x \neq 2$, $f$ é polinomial. Como

$$f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} cx^2 + 2x = 4c + 4,$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^3 - cx = 8 - 2c,$$

concluímos que $f$ é contínua para $x = 2$ se e só se $4c + 4 = 8 - 2c$, i.e., $c = 2/3$.