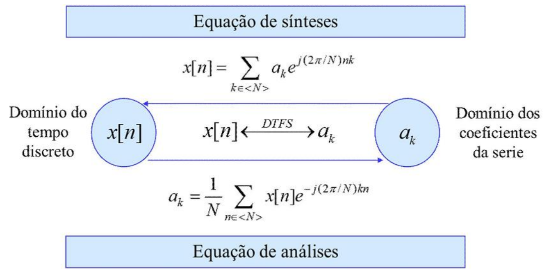
Series de Fourier de Tempo Discreto -DTFS



Professor
Jorge Leonid Aching Samatelo
jlasam001@gmail.com

Índice

Introdução

Introdução

Analise de Fourier

		Sinal	
		Periódica	Aperiódica
Tempo	Valor contínuo $x \in \mathbb{R}$	**Series de Fourier de Tempo Continuo (CTFS)**	Transformada de Fourier de Tempo Continuo (CTFT)
	Valor Discreto $x \in \mathbb{Z}$	Series de Fourier de Tempo Discreto (**DTFS**)	Transformada de Fourier de Tempo Discreto (**DTFT**)

DTFS

DTFS

Definição

$$x[n] \xleftrightarrow[N]{DTFS} a_k$$

$$a_k = DTFS\{x[n]\}$$

$$x[n] = DTFS^{-1}\{a_k\}$$

- De forma geral podemos definir a Serie de Fourier de Tempo Discreto (DTFS- ***Discrete Time Fourier Series***) como:
  - uma transformação linear *DTFS*{} de ida e volta, aplicada sobre um sinal periódica de período *N*, que permite determinar os coeficientes da serie harmônica que descreve a $x[n]$.

DTFS

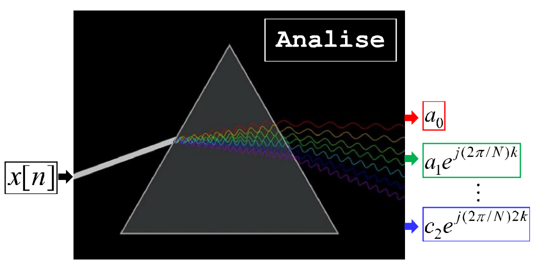
Definição

- *Equação de Analise (forma direta)*

$$\boxed{a_k} \;\square\; DTFS\{x[n]\}$$

$$\square\; \frac{1}{N}\sum_{n\in<N>} x[\boxed{n}]e^{-j(2\pi/N)kn}$$

Do *domínio do tempo* ao *domínio da frequência*

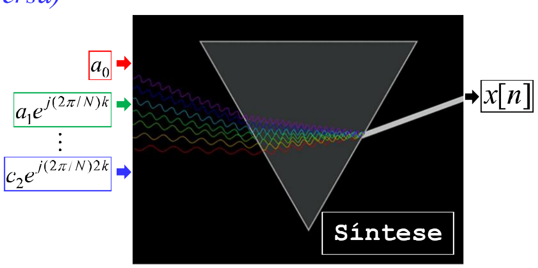


- *Equação de Síntese (forma inversa)*

$$x[\boxed{n}] \;\square\; DTFS^{-1}\{a_k\}$$

$$\square \sum_{k\in<N>} \boxed{a_k} e^{j(2\pi/N)nk}$$

Do *domínio da frequência* ao *domínio do tempo*



DTFS

Definição

- Observe que, tanto na equação de analise ou síntese:

$$\boxed{a_k} \;\square\; DTFS\{x[n]\} \qquad x[\boxed{n}] \;\square\; DTFS^{-1}\{a_k\}$$

$$\square\; \frac{1}{N}\sum_{n\in<N>} x[\boxed{n}]e^{-j(2\pi/N)kn} \qquad \square \sum_{k\in<N>} \boxed{a_k} e^{j(2\pi/N)nk}$$

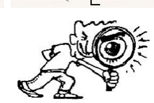
Do *domínio do tempo* ao *domínio da frequência* — Do *domínio da frequência* ao *domínio do tempo*

A notação dos somatórios $k \in <N>$ indica que o índice k varia ao longo de quaisquer intervalo de comprimento N.

$$\sum_{k\in<N>} = \sum_{k=0}^{N-1} = \sum_{k=n_o}^{n_o+N-1} = \sum_{k=-\lfloor N/2\rfloor}^{\lfloor N/2\rfloor}$$

N impar

$$k=\{0,1,\cdots,N-1\} \qquad k=\{n_0,1,\cdots,n_0+N-1\} \qquad k=\{-\lfloor N/2\rfloor,1,\cdots,\lfloor N/2\rfloor\}$$

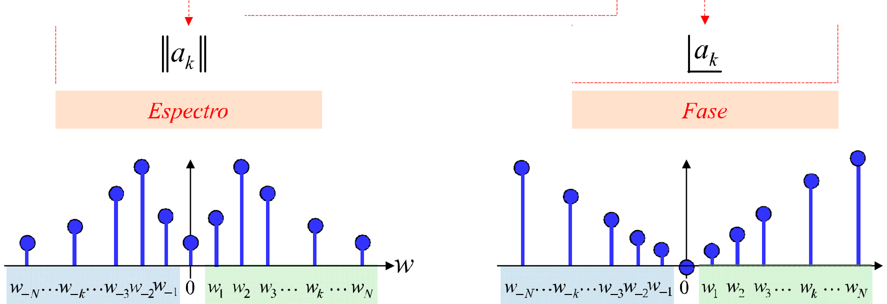


DTFS

Representação Espectral

- A representação espectral da serie de Fourier discreta será:

$$a_k = \mathrm{Re}\{a_k\} + j\,\mathrm{Im}\{a_k\}$$

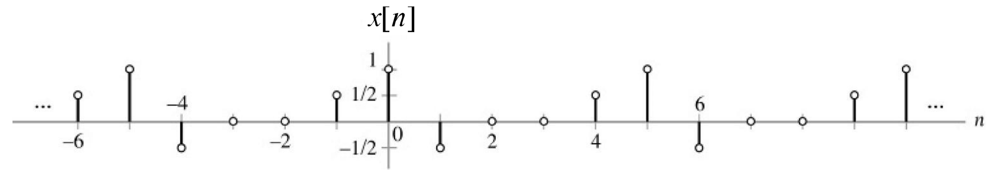


DTFS

Calculo da DTFS

Exemplo

- Determine a DTFS do seguinte sinal discreto periódico.



- *Dica*:
  - Usando a equação de analise determinar os coeficientes a_k da serie de Fourier Discreta:

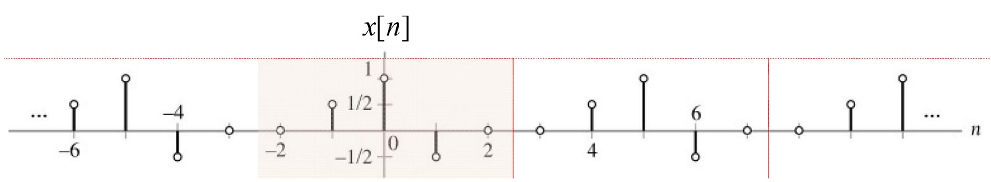
$$a_k \triangleq DTFS\{x[n]\} = \frac{1}{N}\sum_{n\in<N>} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}$$

  - Então:
    - Primeiro, determinamos o valor de N.
    - Segundo, selecionamos um intervalo de comprimento N para calcular o somatório da DTFS.

DTFS

Calculo da DTFS

Solução



- Observando o gráfico podemos ver que:

$$x[n] = x[n+5]$$

$$N = 5$$

- Onde:

$$x[n] = \{0, 1/2, \underset{\uparrow}{1}, -1/2, 0\}$$

DTFS

Calculo da DTFS

Solução

- Calculamos os coeficientes da DTFS do sinal discreto $x[n]$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n\in<N>} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{n=-2}^{2} x[n]e^{-j(2\pi/5)kn}$$

$$= \frac{1}{5}\Big(x[-2]e^{-j\frac{2\pi}{5}(-2)k} + x[-1]e^{-j\frac{2\pi}{5}(-1)k}$$

$$+ x[0]e^{-j\frac{2\pi}{5}(0)k} + x[1]e^{-j\frac{2\pi}{5}(1)k} + x[2]e^{-j\frac{2\pi}{5}(2)k}\Big)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{5}k} + 1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{5}k}\right)$$

DTFS

Calculo da DTFS

Solução

- Calculamos os coeficientes da DTFS do sinal discreto $x[n]$

$$a_k = \frac{1}{10}(2 + e^{j\frac{2\pi}{5}k} - e^{-j\frac{2\pi}{5}k}) \qquad \sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{j2}$$
$$= \frac{1}{5}(1 + j\sin(\tfrac{2\pi}{5}k))$$

DTFS

Calculo da DTFS

Solução

- Então, a representação de $x[n]$ como uma combinação de harmônicos é

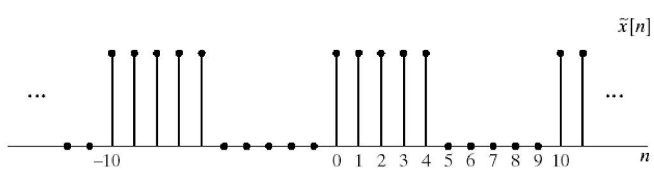
$$x[n] = \sum_{k\in<N>} a_k e^{j(2\pi/N)nk}$$
$$= \sum_{k=-2}^{2}\left(\frac{1}{5}(1 + j\sin(\tfrac{2\pi}{5}k))\right)e^{j(2\pi/5)kn}$$

DTFS

Calculo da DTFS

Exemplo

- Determine a DTFS de um pulso retangular periódico.



- *Dica*:
  - Usando a equação de analise determinar os coeficientes a_k da serie de Fourier Discreta:

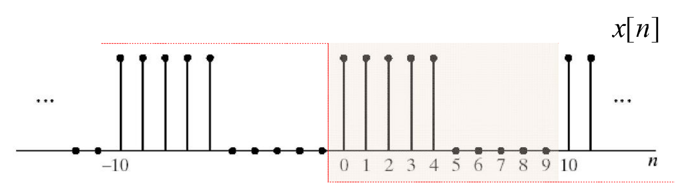
$$a_k \triangleq DTFS\{x[n]\} = \frac{1}{N}\sum_{n\in<N>} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}$$

  - Então:
    - Primeiro, determinamos o valor de N.
    - Segundo, selecionamos um intervalo de comprimento N para calcular o somatório da DTFS.

DTFS

Calculo da DTFS

Solução



- Observando o gráfico podemos ver que:

$$x[n] = x[n+10]$$
$$\Downarrow$$
$$N = 10$$

- Onde:

$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{1},1,1,1,1,0,0,0,0,0\}$$

DTFS

Calculo da DTFS

Solução

- Calculamos os coeficientes da DTFS do pulso retangular periódico.

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{N}\sum_{n\in<N>} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}\\
&= \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9} x[n]e^{-j(2\pi/10)kn}\\
&= \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{4} \underbrace{x[n]}_{=1}e^{-j(2\pi/10)kn} + \frac{1}{10}\sum_{n=5}^{9} \underbrace{x[n]}_{=0}e^{-j(2\pi/10)kn}\\
&= \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{4} e^{-j(2\pi/10)kn}\\
&= \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{4} \left(e^{-j(2\pi/10)k}\right)^n
\end{aligned}
$$

DTFS

Calculo da DTFS

Solução

- Calculamos os coeficientes da DTFS do pulso retangular periódico.

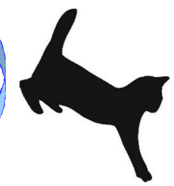
$$a_k = \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{4} \left(e^{-j(2\pi/10)k}\right)^n$$

Lembrando que:

$$1 + A^1 + A^2 + \cdots + A^{N-1} = \frac{1-A^N}{1-A}$$

$$\boxed{A = e^{-j(2\pi/10)k}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{10}\left(\frac{1-e^{-j(2\pi/10)k5}}{1-e^{-j(2\pi/10)k}}\right)\\
&= \frac{1}{10}\frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}e^{-j(2\pi k/5)}
\end{aligned}
$$



Identidades de importancia sobre exponencias complexas imaginarias puras

OPCIONAL

- Identidade 1:

$$
\begin{aligned}
f(\varphi) &= 1 - e^{j\varphi}\\
&= e^{j\varphi/2}e^{-j\varphi/2} - e^{j\varphi}\\
&= e^{j\varphi/2}(e^{-j\varphi/2} - e^{j\varphi/2})\\
&= -e^{j\varphi/2}(e^{j\varphi/2} - e^{-j\varphi/2})\\
&= -e^{j\varphi/2}(j2)\left(\frac{e^{j\varphi/2} - e^{-j\varphi/2}}{j2}\right)\\
&= -j2e^{j\varphi/2}\sin(\varphi/2)
\end{aligned}
$$

- Identidade 2:

$$
\begin{aligned}
g(\varphi_1,\varphi_2) &= \frac{1-e^{j\varphi_1}}{1-e^{j\varphi_2}}\\
&= \frac{-j2e^{j\varphi_1/2}\sin(\varphi_1/2)}{-j2e^{j\varphi_2/2}\sin(\varphi_2/2)}\\
&= \frac{\sin(\varphi_1/2)}{\sin(\varphi_2/2)}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)/2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(\varphi) &= 1 - e^{j\varphi}\\
&= -j2e^{j\varphi/2}\sin(\varphi/2)
\end{aligned}
$$

DTFS

Calculo da DTFS

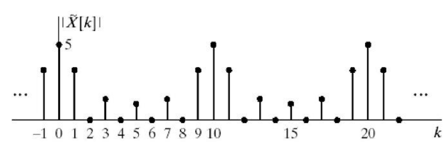
Solução

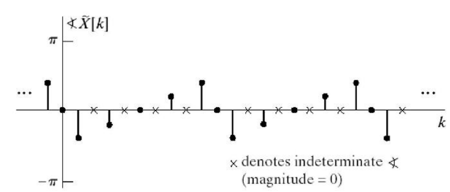
- Calculamos os coeficientes da DTFS do pulso retangular periódico.

$$a_k = \frac{1}{10}\frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}e^{-j(4\pi k/10)}$$

$$\|a_k\| \qquad\qquad \angle a_k$$

Espectro | *Fase*





DTFS

Resumo

Equação de sínteses

$$x[n] = \sum_{k \in <N>} a_k e^{j(2\pi/N)nk}$$

Domínio do tempo discreto

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFS} a_k$$

Domínio dos coeficientes da serie

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in <N>} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn}$$

Equação de análises

Propriedades da DTFS

Propriedades da DTFS

Introdução

Linearidade

Dualidade

$$x[n] \xleftrightarrow[N]{DTFS} a_k$$

$$a_k = DTFS\{x[n]\}$$

$$x[n] = DTFS^{-1}\{a_k\}$$

Convolução

- No domínio do tempo
- No domínio dos coeficientes

Simétria

Reflexão

- No domínio do tempo
- No domínio dos coeficientes

Deslocamento

- No domínio do tempo
- No domínio dos coeficientes

Propriedades

Linearidade

$$x_1[n] \xleftrightarrow[N]{DTFS} a_{1k}$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow[N]{DTFS} a_{2k}$$

$$y[n] = Ax_1[n] + Bx_2[n] \xleftrightarrow[N]{DTFS} b_k = Aa_{1k} + Ba_{2k}$$

- A DTFS de uma combinação linear de sinais periódicas é igual a combinação linear dos coeficientes de cada uma dos sinais.

Propriedades

Deslocamento

- *Deslocamento no domínio do tempo*

Deslocamento no tempo		*Conjugação no domínio dos coeficientes*
$x[n]$	$\xleftrightarrow[N]{DTFS}$	a_k
$y[n] = x[n-n_0]$	$\xleftrightarrow[N]{DTFS}$	$b_k = a_k e^{-j(2\pi/N)n_0 k}$

- Um deslocamento no tempo corresponde a multiplicação dos coeficientes da serie original por uma exponencial complexa imaginaria pura.

Propriedades

Deslocamento

- *Deslocamento no domínio dos coeficientes*

$$x[n] \xleftrightarrow[N]{DTFS} a_k$$
$$y[n] = x[n]e^{j(2\pi/N)k_0 n} \xleftrightarrow[N]{DTFS} b_k = a_{k-k_0}$$

- Um deslocamento no domínio dos coeficientes corresponde a multiplicação do sinal do tempo por uma exponencial complexa imaginaria pura.

Propriedades

Convolução

- *Convolução no tempo*

Convolução no tempo		*Modulação no domínio dos coeficientes*
$x_1[n]$	$\xleftrightarrow[N]{DTFS}$	a_{1k}
$x_2[n]$	$\xleftrightarrow[N]{DTFS}$	a_{2k}
$y[n] = x_1[n] * x_2[n]$	$\xleftrightarrow[N]{DTFS}$	$b_k = N a_{1k} a_{2k}$

- A DTFS da convolução de dois sinais periódicas tem como coeficientes o produto dos coeficientes desses sinais.

Propriedades

Convolução

- *Convolução no domínio dos coeficientes*

Modulação no tempo		*Convolução no domínio dos coeficientes*
$x_1[n]$	$\xleftrightarrow[N]{DTFS}$	a_{1k}
$x_2[n]$	$\xleftrightarrow[N]{DTFS}$	a_{2k}
$y[n] = x_1[n]x_2[n]$	$\xleftrightarrow[N]{DTFS}$	$b_k = \frac{1}{N} a_{1k} * a_{2k}$

- A DTFS da modulação de dois sinais periódicas tem como coeficientes o produto dos coeficientes desses sinais.

Propriedades

Exemplo

- Determinar a DTFS do seguinte sistema
  - *Diferenciador*

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

- *Dica*:
  - Usar:
    - A propriedade de deslocamento no tempo

$$x[n] \xleftrightarrow[N]{DTFS} a_k$$

$$y[n] = x[n-n_0] \xleftrightarrow[N]{DTFS} b_k = a_k e^{-j(2\pi/N)n_0 k}$$

    - A propriedade de linearidade

$$x_1[n] \xleftrightarrow[N]{DTFS} a_{1k}$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow[N]{DTFS} a_{2k}$$

$$y[n] = Ax_1[n] + Bx_2[n] \xleftrightarrow[N]{DTFS} b_k = Aa_{1k} + Ba_{2k}$$

Propriedades

Solução

- *Diferenciador*: $y[n] = x[n] - x[n-1]$
  - Aplicando a propriedade de deslocamento no tempo

$$x[n] \xleftrightarrow[N]{DTFS} a_k$$

$$x[n-1] \xleftrightarrow[N]{DTFS} a_k e^{-j(2\pi/N)k}$$

  - Aplicando a propriedade de linearidade

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow[N]{DTFS} b_k = a_k - a_k e^{-j(2\pi/N)k}$$

$$= (1 - e^{-j(2\pi/N)k})a_k$$

  - Então, a DTFS de $y[n]$ é

$$y[n] = \sum_{k \in <N>} b_k e^{j(2\pi/N)nk}$$

$$= \sum_{k \in <N>} (1 - e^{-(2\pi/N)k})a_k e^{j(2\pi/N)nk}$$

Propriedades

Exemplo

- Determinar a DTFS do seguinte sistema
  - *Acumulador*

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

- *Dica*:
  - Primeiro, determinar a equação recursiva para $y[n]$.
  - Depois, usar:
    - A propriedade de deslocamento no tempo

$$x[n] \xleftrightarrow[N]{DTFS} a_k$$

$$y[n] = x[n-n_0] \xleftrightarrow[N]{DTFS} b_k = a_k e^{-j(2\pi/N)n_0 k}$$

    - A propriedade de linearidade

$$x_1[n] \xleftrightarrow[N]{DTFS} a_{1k}$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow[N]{DTFS} a_{2k}$$

$$y[n] = Ax_1[n] + Bx_2[n] \xleftrightarrow[N]{DTFS} b_k = Aa_{1k} + Ba_{2k}$$

Propriedades

Solução

- *Acumulador*: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$
  - Determinamos a equação recursiva para a saída $y[n]$.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$= x[n] + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]}_{=y[n-1]}$$

$$= x[n] + y[n-1]$$

Propriedades

Solução

- *Acumulador*: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$
  - Aplicando a propriedade de deslocamento no tempo

$$y[n] \overset{DTFS}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} b_k$$

$$y[n-1] \overset{DTFS}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} b_k e^{-j(2\pi/N)k}$$

  - Aplicando a propriedade de linearidade

$$y[n] = x[n] + y[n-1] \overset{DTFS}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} b_k = a_k + b_k e^{-j(2\pi/N)k}$$

  - Então, os coeficientes da DTFS de $y[n]$ é definido pela relação

$$b_k = a_k + b_k e^{-j(2\pi/N)k}$$

$$(1 - e^{-j(2\pi/N)k}) b_k = a_k$$

$$b_k = \frac{a_k}{1 - e^{-j(2\pi/N)k}}$$

  - Portanto, a DTFS de $y[n]$ é:

$$y[n] = \sum_{k \in <N>} b_k e^{j(2\pi/N)nk} = \sum_{k \in <N>} \frac{a_k}{1 - e^{-j(2\pi/N)k}} e^{j(2\pi/N)nk}$$

DTFS e Sistemas LTI

DTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma DTFS

- *Sabemos que*
  - A resposta de um sistema LTI de tempo discreto a uma entrada exponencial complexa imaginaria pura é outra exponencial imaginaria pura modulada pela resposta em frequência do sistema LTI:

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \Rightarrow \boxed{h[n]} \Rightarrow y[n] = H(e^{j\Omega_0}) e^{j\Omega_0 n}$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Frequência Angular

$$x[n] \xrightarrow{T} y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$H(e^{j\Omega_0}) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\Omega_0 k}$$

$$H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} = H(e^{j\Omega})$$

DTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma DTFS

- *Então*
  - Como será a resposta de um sistema LTI de tempo discreto a uma serie discreta de Fourier com frequência fundamental Ω_0?

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\Omega_0 nk} \Rightarrow \boxed{h[n]} \Rightarrow y[n] = ?$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Frequência Fundamental

$$x[n] \xrightarrow{T} y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Aqui é bom lembrar do principio de superposição

DTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma DTFS

- *Pode-se demonstrar que:*
  - A saída também será uma serie discreta de Fourier com frequência fundamental Ω_0, onde cada coeficientes da serie é dependente da resposta em frequência do sistema e dos coeficientes da serie de entrada.

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\Omega_0 nk} \Rightarrow \boxed{h[n]} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k H(e^{j\Omega_0 k}) e^{j\Omega_0 nk}$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Frequência Fundamental

$$x[n] \xrightarrow{T} y[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

- Para entradas periódicas, pode-se determinar a saída de um sistema discreto LTI por meio da resposta em frequência e os coeficientes da DTFS da entrada ao invés da convolução.

DTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma DTFS

- *Tal resultado permite*
  - Definir uma PROCEDIMENTO para determinar a saída de um sistema continuo LTI por meio da resposta em frequência e os coeficientes da DTFS da entrada ao invés da convolução.
- *Procedimento*
  - **PASO 1**: determinamos a resposta em frequência $H(e^{j\Omega})$ do sistema LTI.
  - **PASO 2**: determinamos a DTFS do sinal de entrada.
  - **PASO 3**: Calculando o sinal de saída, usando a resposta em frequência do sistema e os coeficientes da DTFS do sinal de entrada.

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\Omega_0 nk} \Rightarrow \boxed{h[n]} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k H(e^{j\Omega_0 k}) e^{j\Omega_0 nk}$$

2 3

1 $$H(e^{j\Omega}) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\Omega k} = H(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$$

DTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma exponencial complexa

Exercício

- Seja o sistema discreto LTI
  - *Acumulador*

$$h[n] = u[n]$$

- Determinar a saída quando a entrada é:

$$x[n] = \sin(\Omega_0 n)$$

$$x[n] = \sin(\Omega_0 n) \Rightarrow \boxed{h[n] = u[n]} \Rightarrow y[n] = ?$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Frequência Angular

Bibliografia

Bibliografia

John G. Proakis, and Dimitris K. Manolakis. *Digital Signal Processing* (4th Edition). Pearson, USA, 2007