Cálculo 2 — 2022/2

Aula 2

Aula passada: vetor e soma

Aula Hoje: multip por escalar
soma com ponto.

Capítulo 3: Produto de um número real por um vetor

definição sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}$ vetor.

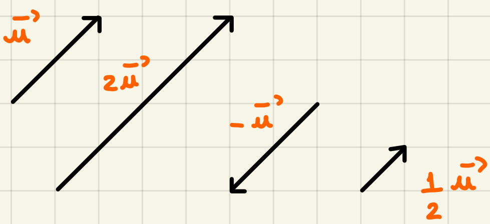
(a) Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$

(b) Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ o vetor $\alpha\vec{v}$ é caracterizado por

- $\alpha\vec{v} \,//\, \vec{v}$
- $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido se $\alpha > 0$ e contrário se $\alpha < 0$
- $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\,\|\vec{v}\|$

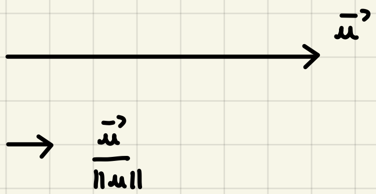
↳ estica ou contrai o vetor

Exemplo



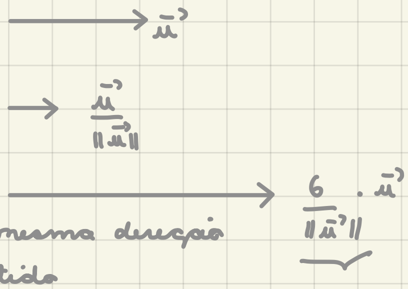
Nomenclatura

O vetor $\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$ é dito versor — tem norma 1



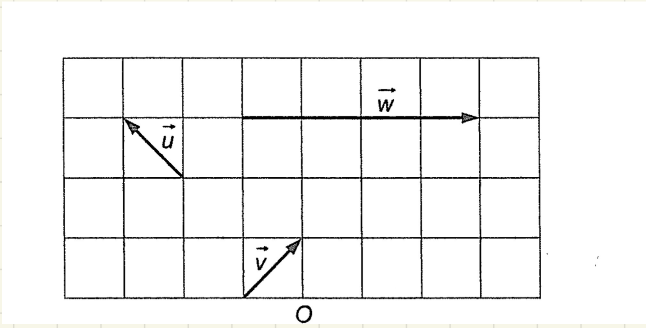
Exemplo Dado $\vec{u}$ não nulo, determine v de norma 6 paralelo a $\vec{u}$ e com mesmo sentido de u.

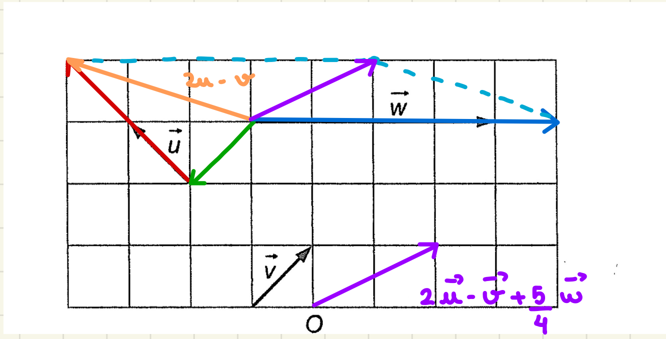
Solução



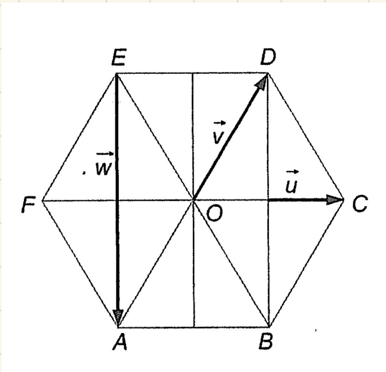
paralelo = mesma direção
mesmo sentido

Exemplo Represente $\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} + \frac{5}{4}\vec{w}$ por uma flexa com origem O ($\frac{5}{4} = 1{,}25$)

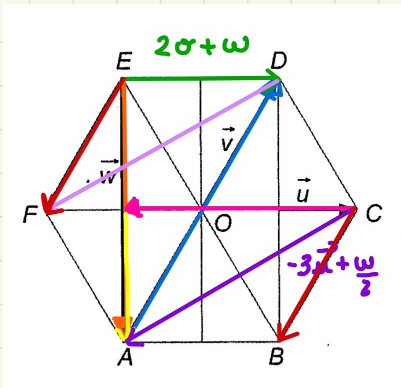




Exemplo Determine X tal que $\vec{CX} = -3\vec{u} + 2\vec{v} + \frac{3}{2}\vec{w}$



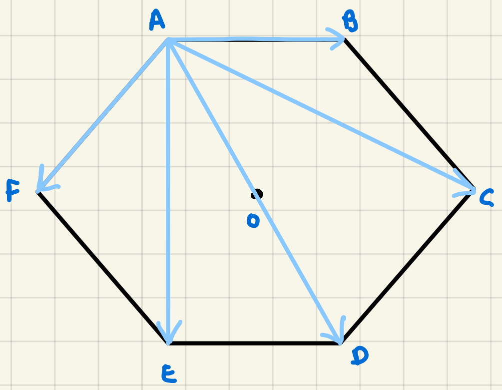
$\overbrace{-3\vec{u} + 2v + w}+ \frac{1}{2}w$



X = B

Exemplo Considere um hexágono regular. Mostre que

$$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = 6\vec{AO}$$



Solução

$AB + AE = AD = 2AO$

$AD = 2AO$

$AC + AF = AD = 2AO$

$AB + AE + AD + AC + AF = 6AO$

Proposição Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e u, v vetores

i) $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

ii) $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

iii) $1.\vec{v} = \vec{v}$

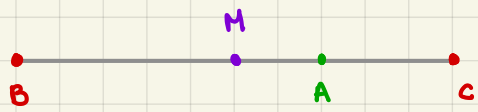
iv) $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v} = \beta(\alpha\vec{v})$

Proposição Dois vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se e só se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que
$\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ($\Rightarrow \lambda \neq 0$ e $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\lambda}$)

(ou se tem mesma direção se e só se é um múltiplo do outro.

Exemplo Sejam B e C pontos distintos e M o ponto médio de BC. Prove que se A é um ponto qualquer então
$\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM}$

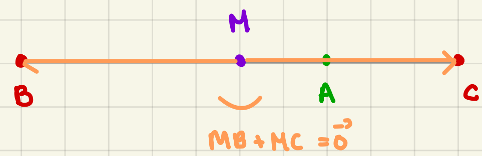
Solução



$\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}$

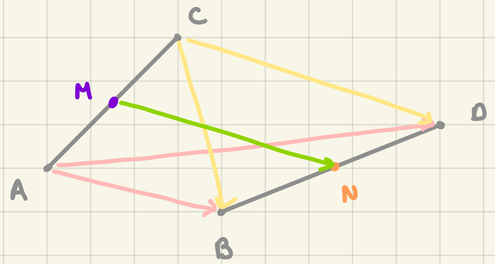
$\vec{AC} = \vec{AM} + \vec{MC}$

$\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM} + \underbrace{\vec{MB} + \vec{MC}}_{=0} = 2\vec{AM}$



Exemplo Sendo M o ponto médio de AC, N o de BD e $\vec{x} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{CD}$, prove $\vec{x} \parallel \vec{MN}$.

Sol



$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}$

$\vec{CB} = \vec{CD} + \vec{DB}$

$AM = MC$

$NB = ND$

$x = \vec{AB} + \vec{AB} + \cancel{\vec{BD}} + \vec{CD} + \cancel{\vec{DB}} + \vec{CD}$

$= 2\vec{AB} + 2\vec{CD}$

$= 2[\vec{AM} + \vec{MN} + \vec{NB}] + 2[\vec{CM} + \vec{MN} + \vec{ND}]$

$= 4\vec{MN}$ pela proposição

$x \parallel \vec{MN}$

Proposição Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos então $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

se $\alpha \neq 0 \Rightarrow u = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}$ e $\vec{u} \parallel \vec{v}$