Universidade Federal do Espírito Santo
Terceira prova de Álgebra Linear
Vitória, 11 de julho de 2019

Nome Legível: André Oliveira Cunha

Justifique seu raciocínio

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

   (a) Encontre os autovalores de A e determine suas multiplicidades (algébricas);

   (b) Encontre bases para os autoespaços de A e verifique se A é diagonalizável.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o espaço-linha da matriz A, denotado por $\text{LIN}(A)$. Calcule uma base para $(\text{LIN}(A))^{\perp}$ e obtenha as dimensões de $\text{LIN}(A)$ e $(\text{LIN}(A))^{\perp}$.

3. Seja A uma matriz simétrica 4×4. Sabemos que 1 e 2 são os únicos autovalores de A. Sabendo que a reta gerada pelo vetor $v_1 = (1, 1, 1, 0)$ é o auto-espaço do autovalor 1, escreva $A = PDP^T$, com D matriz diagonal e P matriz ortogonal.

   Dica: Note que $\text{Aut}_A(2) = (\text{Aut}_A(1))^{\perp}$

4. Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

   (a) Toda matriz diagonalizável é invertível.

   (b) Se A é uma matriz ortogonal então $\det A = \pm 1$;

   (c) Seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Se $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ então

$$\| \mathbf{x} \|^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2.$$

$\{v_1\ v_2\ v_3\}$ $\{w_1\ w_2\ w_3\}$

Boa Prova!

André Oliveira Cunha - Engenharia de Computação

RESOLUÇÃO DA P3

① Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

a) Para encontrar os autovalores de A usaremos a equação $Ax = \lambda x$ como base. Rescrevendo a equação temos:

$Ax = \lambda x \Rightarrow Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0.$

Para encontrar os autovalores de A, $\det(A - \lambda I) = 0$, pois não pode ser invertível.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & 4 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (4-\lambda)(4-\lambda)(-2-\lambda) + 4 + 4 - [(4-\lambda) + (4+2\lambda) + (-32+8\lambda)] = 0$$

$$= (4-\lambda)^2(-2-\lambda) + \cancel{8} \cancel{-8} + 32 - 9\lambda = 0$$

$$(16 - 8\lambda + \lambda^2)(-2-\lambda) + 32 - 9\lambda = 0$$

$$\cancel{-32} + \cancel{16\lambda} - 2\lambda^2 \cancel{-16\lambda} + 8\lambda^2 - \lambda^3 \cancel{+32} - 9\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda = 0$$

$$\lambda(-\lambda^2 + 6\lambda - 9) = 0 \qquad \boxed{\lambda = 0}$$

$$-\lambda^2 + 6\lambda - 9 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4(-1).(-9) = 0$$

$$\lambda = \frac{-6}{-2} = 3 \qquad \boxed{\lambda = 3}$$

Autovalores de A $\to \lambda = 0$ (multiplicidade 1) e $\lambda = 3$ (multiplicidade 2)

b) para $\lambda = 0 \to$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{L1 \leftrightarrow L2}{\overset{L3 \to L3 - L2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{L2 \to L2 - 4L1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{L1 \to L1 - 4L2}{\overset{L2 \to \frac{L2}{-18}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_3 é livre

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{x_3}{2} \\ x_3 \text{ é livre} \end{cases}$$

logo $x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

$\text{Aut}(0) = \mathcal{L}\{(0, \frac{1}{2}, 1)\}$

para $\lambda=3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right] \underset{L3 \to L3 - L1}{\overset{L2 \to L2 - L1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right] \underset{L2 \to \frac{L2}{3}}{\overset{L3 \to L3 - 2L2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{L1 \to L1 + 2L2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \text{ é livre} \end{cases} \qquad x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{Aut(3) = \mathcal{L}\{(1,1,1)\}}$$

Então as bases para os autoespaços de A são $\mathcal{L}\{(0, \frac{1}{2}, 1), (1,1,1)\}$

Como A é uma matriz 3x3, para ela ser diagonizável teria que ter 3 vetores em sua base para autoespaço, no entanto só tem 2. Logo, A não é diagonizável.

---

② Pelo teorema dada uma matriz A $m \times n$, o complemento ortogonal do espaço linha de A é o espaço nulo de A. Ou seja, $(Lin(A))^{\perp} = Nul(A)$
Basta encontrarmos uma base para o espaço nulo de A.

Escalonando a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L3 \to L3 - L1}{\overset{L2 \to L2 + L1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L3 \to \frac{L3}{-2}}{\overset{L2 \to L2 + L3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{L1 \to L1 - L2}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{L1 \to L1 - L3}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x_1 = x_4 + 3x_5 \\ x_2 = -x_4 - 4x_5 \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 \text{ é livre} \\ x_5 \text{ é livre} \end{cases}$$

$\underbrace{x_4 \quad x_5}_{\text{livres}}$

$$x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Base de $Nul(A) = (Lim(A))^{\perp} = \mathcal{L}\{(1,-1,-1,1,0); (3,-4,0,0,1)\}$

Logo a $\dim (Lin A)^{\perp} = 2$ e $\dim lin A = 3$

André Oliveira Cunha - Engenharia de Computação

③ Como a matriz A é 4x4 e é simétrica, ela terá 4 autovetores já que a soma das multiplicidades de seus autovalores é igual a 4. E esses autovetores são ortogonais (consequentemente L.I.) quando seus valores são distintos. Foi dado que 1 e 2 são os únicos autovalores de A, e que o vetor $v_1 = (1,1,1,0)$ forma uma reta que é subespaço do autovalor 1. Como o subespaço do autovetor 1 é uma reta, então ele possui apenas um autovetor.

Então o subespaço do autovalor 1 é ~~só o~~ gerado pelo vetor $(1,1,1,0)$, logo o subespaço do autovalor 2 tem que ser formado por 3 autovetores, uma vez que a soma das multiplicidades dos autovalores é igual a 4.

Sabe-se que os autovetores de 1 e de 2 são ortogonais, e os autovetores de 2 vão estar em $\mathbb{R}^4$, então temos:

$$v_1 \cdot v_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} = 0 \qquad x + y + z = 0$$

Assim y, z, w são variáveis livres

$$\text{então } \begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-y-z\\y\\z\\w\end{bmatrix} = y\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Então

$$\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}}_{u_2}, \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}}_{u_3}, \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}}_{u_4} \right\}$$

é uma base de $Aut_A(2)$ que não é ortogonal. Para ortogonalizar esta base basta aplicar o processo de Gram-Schmidt:

$$\vec{v_2} = \vec{u_2}$$

$$\vec{v_3} = \vec{u_3} - \frac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} \cdot v_2$$

$$v_4 = u_4 - \frac{u_4 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 - \frac{u_4 \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3} \cdot v_3$$

$$v_3 = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$v_4 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}}\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1/2\\1/2\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/2\\-1/2\\1\\0\end{bmatrix}$$

Logo, $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1/2\\-1/2\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ é uma base ortogonal de $Aut_A(2)$

Transformando em vetores unitário, ou seja, normalizando os vetores temos:

$$\frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\0\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \frac{1}{1}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\|v_3\|} v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\|v_4\|} v_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\0\end{bmatrix}$$

Portanto $P = \begin{bmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 0\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 0\\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

e D seria:

$$D = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

André Oliveira Cunha - Engenharia de Computação

④ a) Falso. A matriz nula é diagonal, logo diagonalizável, mas não é invertível.

Outro exemplo seria:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = 0$ $\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$ $(1-\lambda)(-\lambda) = 0$

$\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$

para $\lambda = 0$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

para $\lambda = 1$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

portanto A é diagonalizável, mas não é invertível, uma vez que $\det A = 0$.

b) Verdadeiro.

Como A é ortogonal $A^{-1} = A^T \Rightarrow A^T . A = I \Rightarrow \det(A^T . A) = \det I$

$\Rightarrow \det A^T . \det A = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$

c) Falso.

Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, por propriedade temos que $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = 0$

Tem-se que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{3} c_i . c_i \langle v_i, v_i \rangle$ então

$\|x\|^2 = c_1^2 \langle v_1, v_1 \rangle + c_2^2 \langle v_2, v_2 \rangle + c_3^2 \langle v_3, v_3 \rangle$

$\|x\|^2 = c_1^2 \|v_1\|^2 + c_2^2 \|v_2\|^2 + c_3^2 \|v_3\|$

então $\|x\|^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$ só seria verdadeira se $\{v_1, v_2, v_3\}$ fossem ortonormal, pois $\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = 1$.