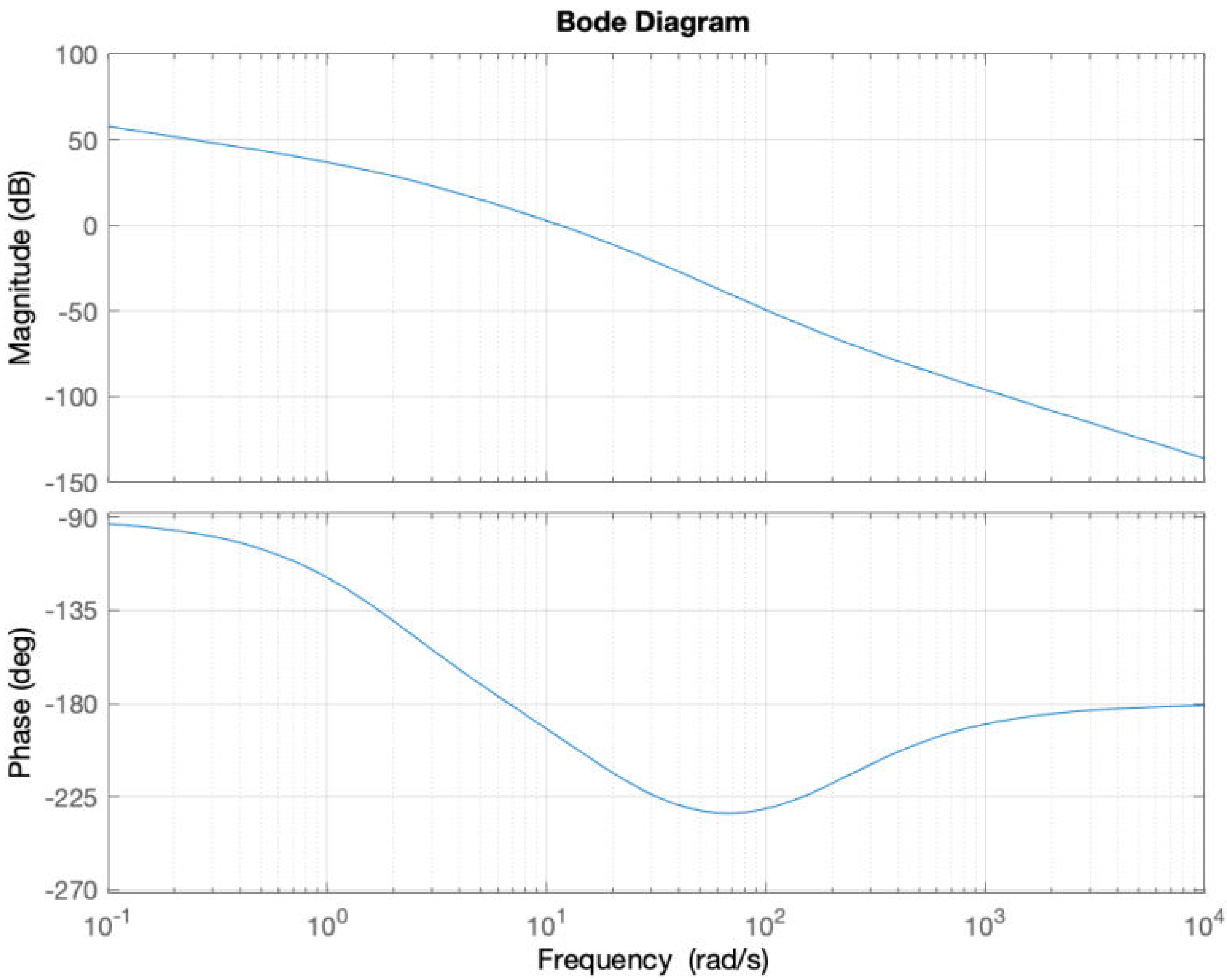
Sistemas Realimentados

EP16 - Gráficos de Bode

Data: 23 de maio

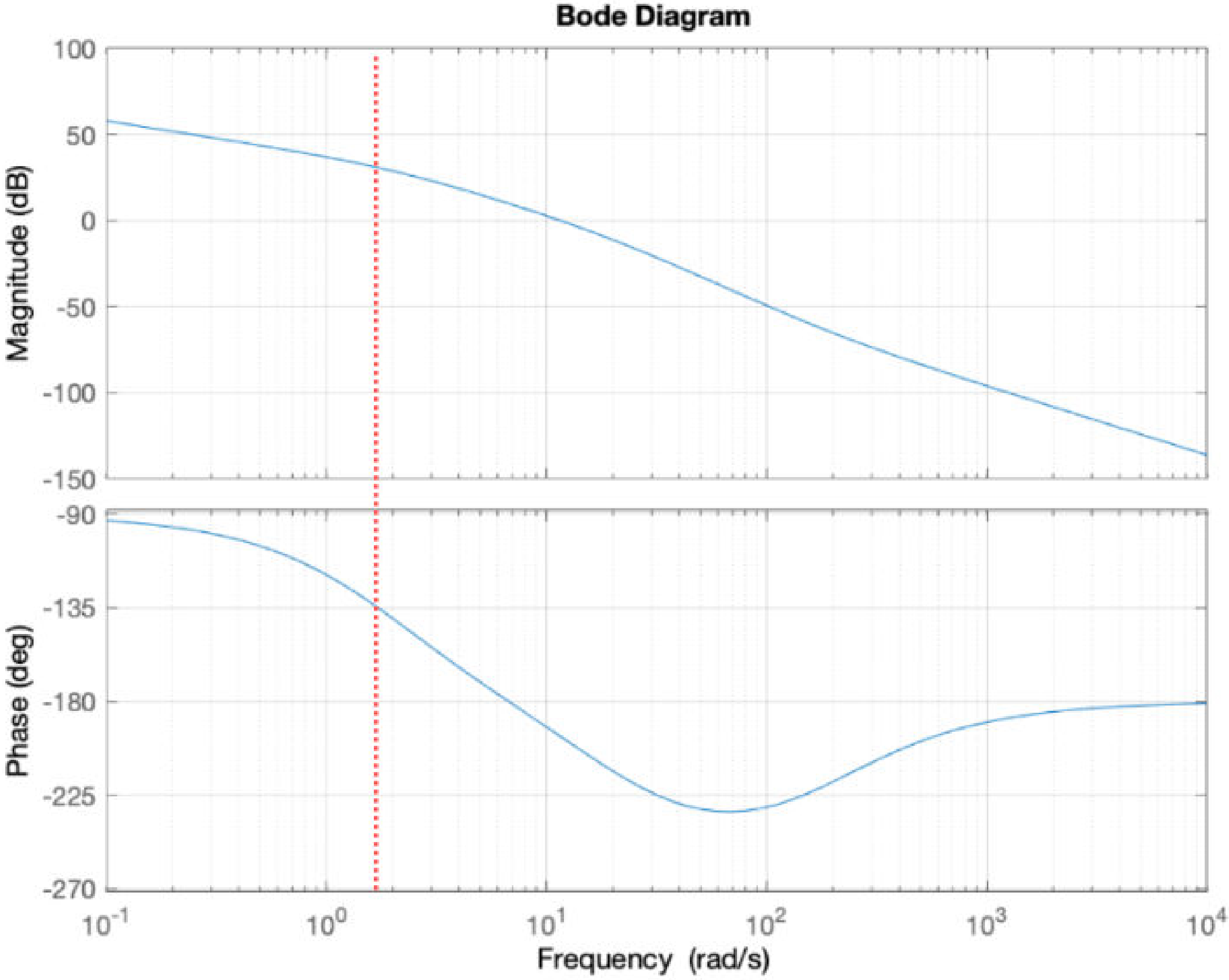
Alunos: Davi Agatti e Guilherme Raibolt

O gráfico de Bode abaixo contém ganhos, polos e zeros, todos afastados de pelo menos uma década.

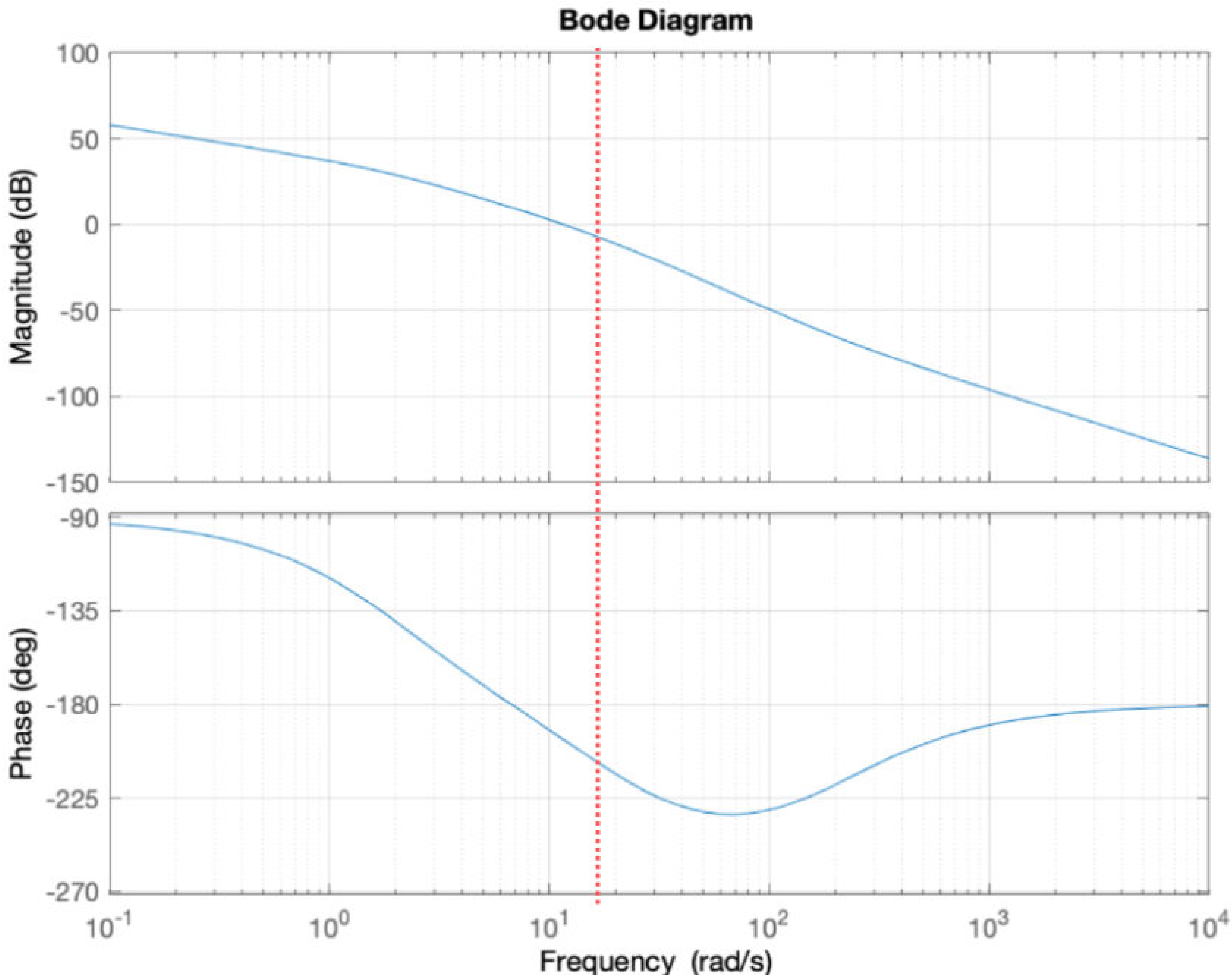


1.1 Obtenha a localização dos polos e dos zeros

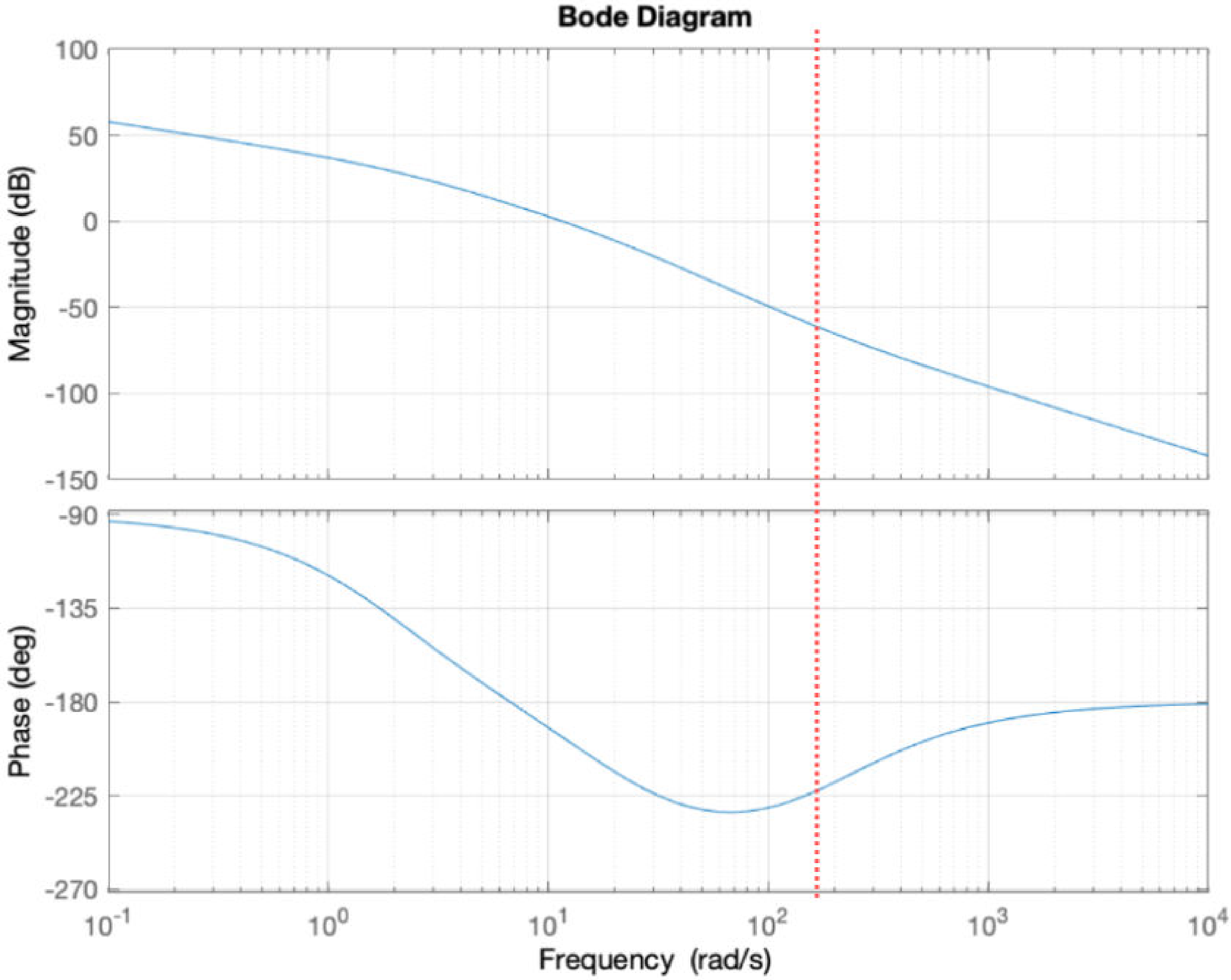
A primeira coisa que deve ser observada é que o gráfico de Bode da fase inicia em -90° e que $jw = 10^{-1}$ a amplitude é positiva, indicando que existe um polo na origem. Um polo no SPE implica em uma contribuição de -45° para quando a frequência jw é igual ao polo. Note que ele atinge -135° de fase (decresce 45°) em, aproximadamente 1.8, o que indica a presença de um polo em $s = -1.8$.



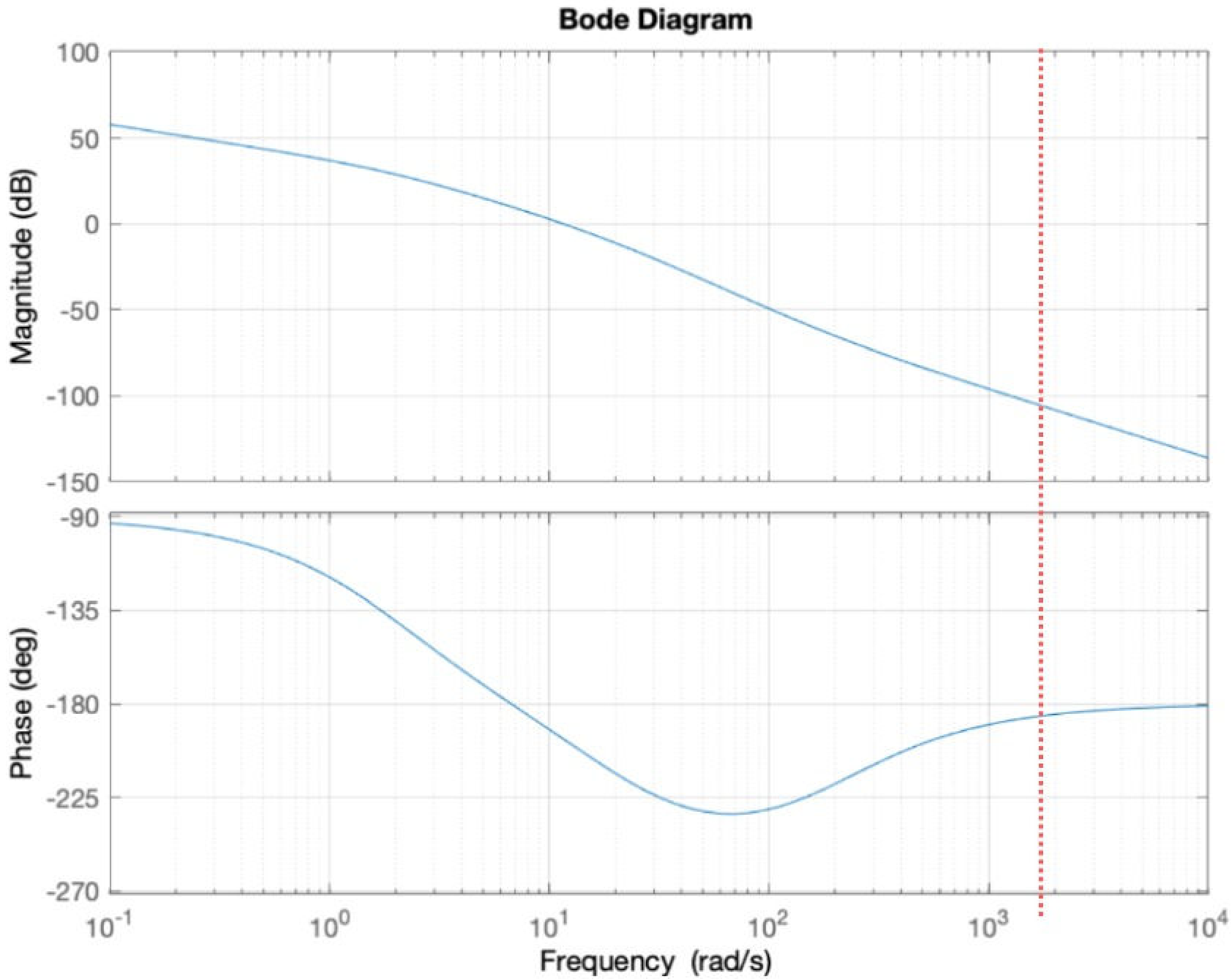
Olhando para o gráfico da amplitude, para a frequência $jw = 1.8\,\mathrm{rad}/s$ a amplitude se encontra em 30dB. Após uma década, em $jw = 18\,\mathrm{rad}/s$, como dois polos passam a atuar, espera-se que a resposta caia -40dB/ década. Olhando no gráfico da amplitude, vimos que para tal frequência a amplitude está em -10dB. Olhando o diagrama da fase, nota-se que a fase da resposta está abaixo de -180°, que era o ângulo que o sistema estabilizaria tendo somente polos em $s = 0$ e $s = -1.8$. Isso indica que há um polo em torno desta frequência.



Uma década depois, nota-se que para a frequência de $jw = 180\,\mathrm{rad}/s$, era esperado uma amplitude de -50dB, mas a amplitude do gráfico é de -70dB. Uma diferença de -20dB do esperado indica a presença de um polo no SPE (visto que amplitude e fase diminuem), que se iniciou há uma década. Portanto, é passivel estimar que existe um polo em $s = -18$.



Na década seguinte ($jw = 1800\,\mathrm{rad}/s$), nota-se que a fase da resposta torna a aumentar (fase em -225°). Isso indica ou a presença de um zero no SPE ou um polo no SPD, sendo necessário avaliar o que acontece com a amplitude nesse intervalo para determiná-lo. Olhando para o gráfico da magnitude, era esperado uma amplitude de de -130dB para a frequência de $jw = 1800\,\mathrm{rad}/s$, já que existem 3 polos (queda de 60dB/década). Contudo, a amplitude é de -110dB. Portanto, é passível estimar a presença de um zero no SPE que começou há um década, ou seja, em $s = -190$.



Como o a fase estabiliza em -180°, conclui-se que não há mais presença de polos ou zeros na fução de transferência.

Portanto, a função de transferência será:

$$G(s) = \frac{K(s+180)}{s(s+1.8)(s+18)}$$

1.2 Obtenha a função de transferência e refaça o gráfico de Bode para verificar se está igual ao fornecido.

Para obter-se a função de transferência completa é necessário calcular o seu ganho.

A função obtida pela localização dos polos e zeros é

$$G(s) = \frac{K(s+180)}{s(s+1.8)(s+18)}$$

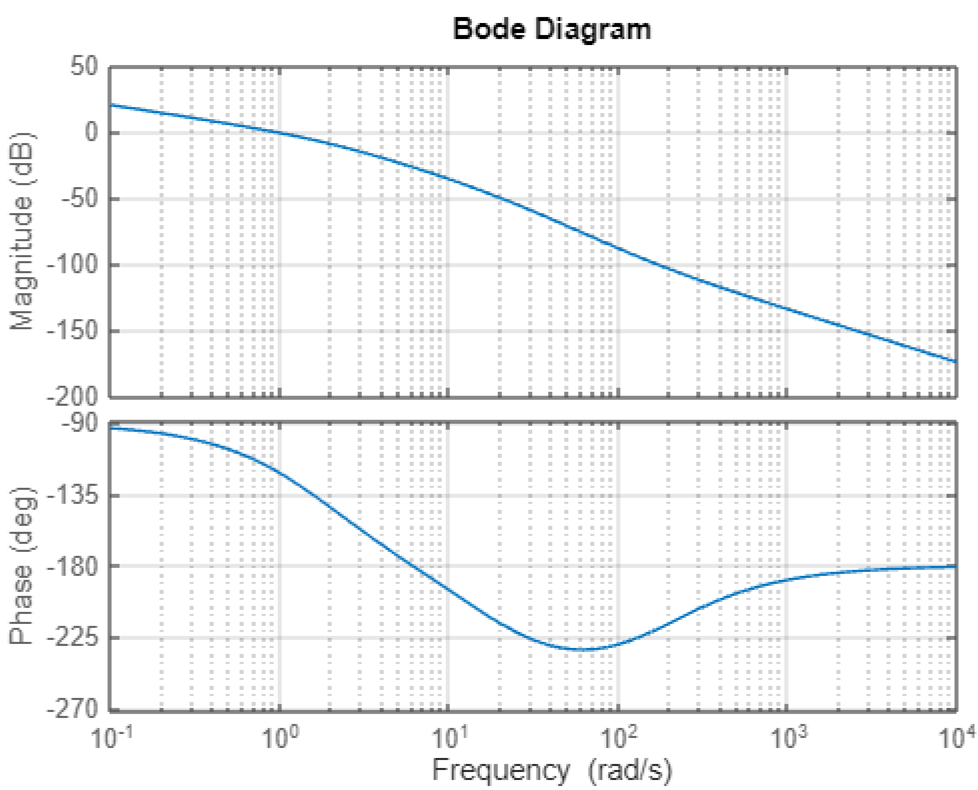
Colocando na forma padrão para construção do gráfico de Bode, tem-se

$$G(s) = \frac{180K\left(\frac{1}{180}s + 1\right)}{(1.8 * 18)s\left(\frac{1}{1.8}s + 1\right)\left(\frac{1}{18}s + 1\right)}$$

$$G(s) = \frac{5.5556K\left(\frac{1}{180}s + 1\right)}{\left(\frac{1}{1.8}s + 1\right)\left(\frac{1}{18}s + 1\right)}$$

Nota-se que, caso o $K = \frac{1}{5.5556}$, anula-se o efeito do ganho conferido pelos polos e zeros (visto que $20\log(1) = 0$), e tem-se, portanto, um diagrama de Bode começando em 20dB para a $jw = 10^{-1}\ \mathrm{rad}/s$. Ou seja, torna-se uma situação em que o valor do ganho é influenciado apenas pelo polo na origem.

```
figure;
g= tf((1/5.5556)*poly(-180), poly([0 -1.8 -18])); bode(g); grid on;
```



Observando o gráfico dado no exercício, nota-se que para mesma frequência, a função de transferência tem amplitude de aproximadamente 60dB, ou seja, um acréscimo de 40dB. Para isso, deve-se ter um ganho de 100 em cima do ganho aplicado anteriormente. Assim, o ganho final do sistema é $K = 100\left(\frac{1}{5.5556}\right) \Rightarrow K = 18$

Logo, a função de transferência é

$$G(s) = \frac{18(s + 180)}{s(s + 1.8)(s + 18)}$$

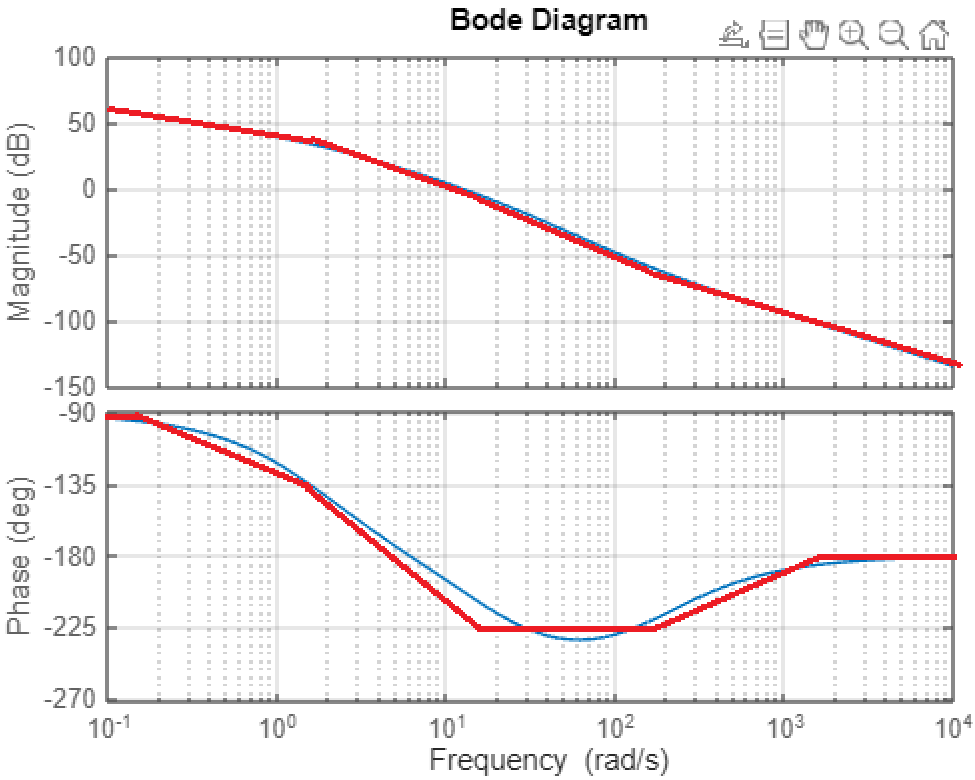
As tabelas abaixo resumem o comportamento, respectivamente, da fase quanto da magnitude da resposta para uma análise assintótica do diagrama de bode.

Frequência	K	(s+180)	1/(s+1.8)	1/(s+18)	1/s	Soma
0.18	0	0	0	0	-90	-90
1.8	0	0	-45	0	-90	-135
18	0	0	-90	-45	-90	-225
180	0	45	-90	-90	-90	-225
1800	0	90	-90	-90	-90	-180

Frequência	K	(s+180)	1/(s+1.8)	1/(s+18)	1/s	Soma
0.1	40	0	0	0	20	60
0.18	40	0	0	0	14,9	54,9
1.8	40	0	0	0	-5,1	34,9
18	40	0	-20	0	-25,1	-5,1
180	40	0	-40	-20	-45,1	-65,1
1800	40	20	-60	-40	-65,1	-105,1

Comparando o esboço através da análise assintótica, feita em vermelho de acordo com as frequências assinaladas nas tabelas acima, com o plot do matlab:

```
figure;
g= tf(18*poly(-180), poly([0 -1.8 -18])); bode(g); grid on;
```



1.3 Refaça o gráfico de Bode supondo um atraso de 0.5s inserido na FT.

Sabendo que a função de transferência com atraso de 0.5s é dada por:

$$G(s) = \frac{18(s+180)e^{-0.5s}}{s(s+1.8)(s+18)}$$

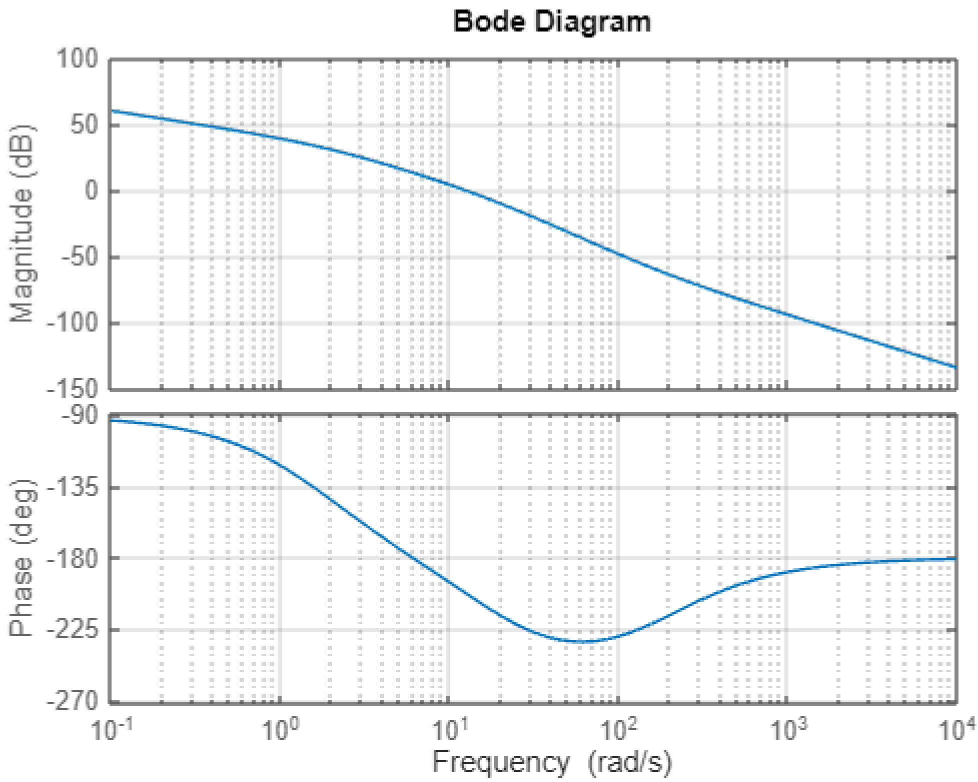
A amplitude do gráfico de Bode em dB é dada por

$$A(jw) = 20\log(|G(jw)|)$$

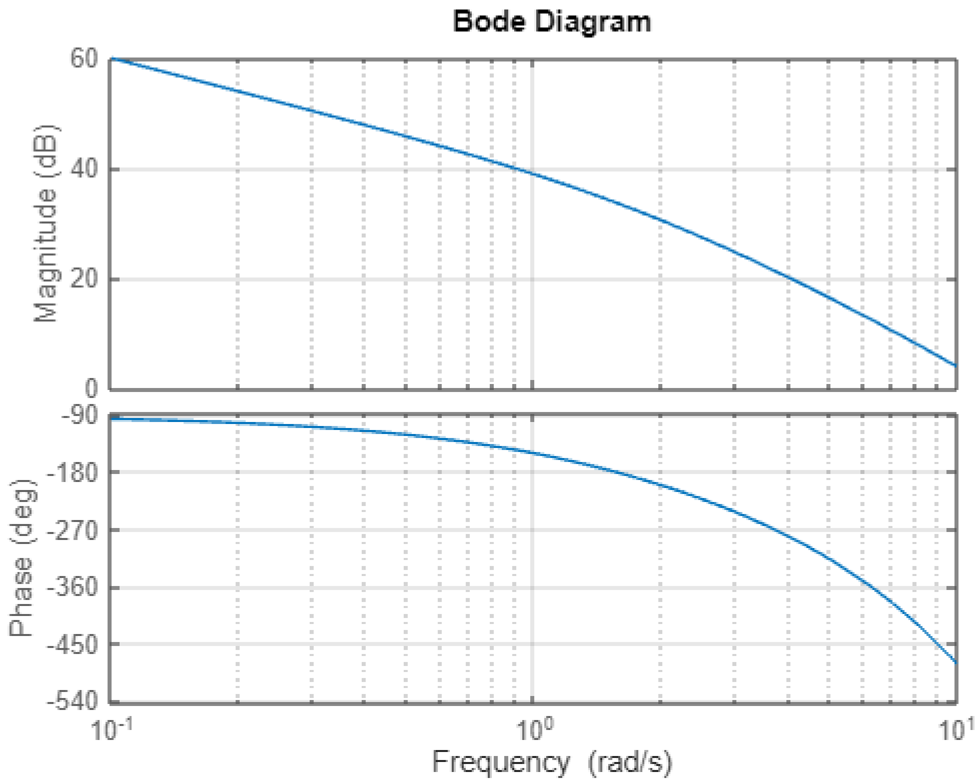
Nota-se que, sem fazer qualquer aproximação do atraso, $|e^{-0.5jw}| = 1$ para quaisquer valores de jw. Isso implica que o módulo do atraso não impacta na amplitude da resposta ao longo da frequência.

No entanto, o ângulo do atraso é $\angle e^{-0.5jw} = -0.5jw$. Ou seja, ele faz com que o ângulo decresça proporcionalmente à jw.

```
figure();
g = tf(18*poly(-180), poly([0 -1.8 -18])); bode(g); grid on;
```




```
figure();
g_atrasada = tf(18*poly(-180), poly([0 -1.8
-18]),'InputDelay',0.5);bode(g_atrasada); grid on;
xlim([0.1 10]);
```

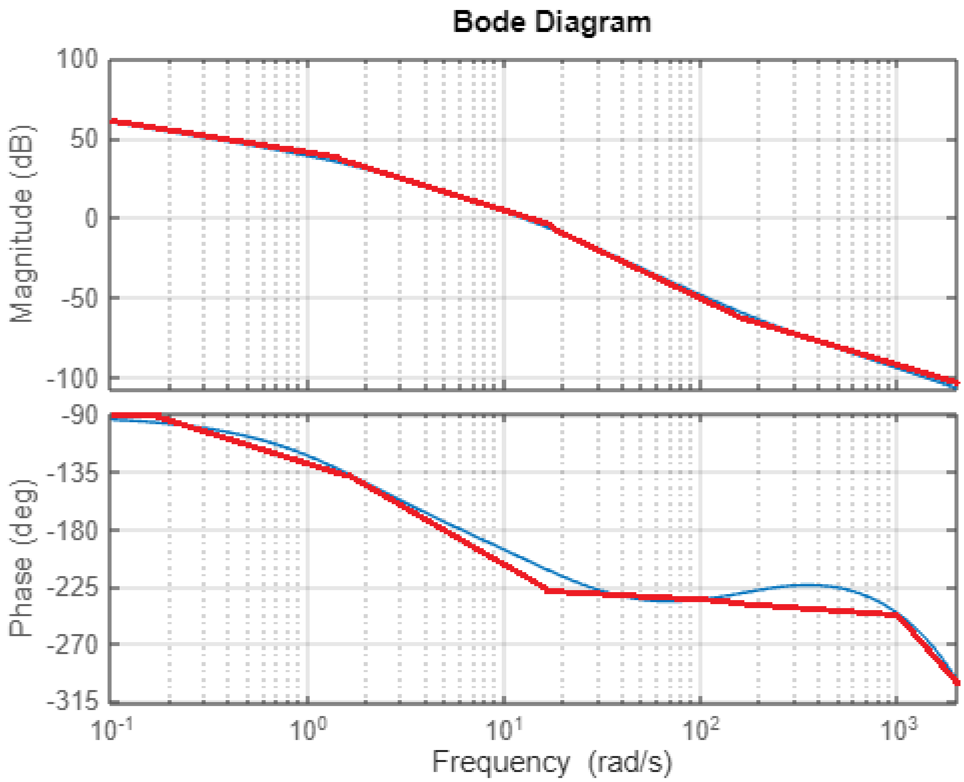


Nota-se que a inserção de um atraso de 0.5s na FT, leva a um acentuado do avanço da fase com o aumento da frequência, tornando difícil a visualização clara do seu efeito antes de se tornar dominante na resposta. Para isso, avaliaremos a mesma FT com um atraso menor, por exemplo, 0.001s, para melhor entender o seu efeito sobre a resposta. Para isso, é interessante calcular o valor da fase para algumas frequências para entender o seu comportamento quando um atraso é inserido no sistema. Sabendo que o valor da amplitude não muda com a inserção do atraso, não há necessidade de recalcular o seu valor em função da amplitude, visto que isso já foi feito.

Frequência	K	exp(-0.001s)	(s+180)	1/(s+1.8)	1/(s+18)	1/s	Soma
0.18	0	-0,01	0	0	0	-90	-90
1	0	-0,06	0	0	0	-90	-90
1.8	0	-0,10	0	-45	0	-90	-135
10	0	-0,57	0	-79,80	0	-90	-170
18	0	-1,03	0	-90	-45	-90	-226
100	0	-5,73	0	-90	-79,80	-90	-266
180	0	-10,31	45	-90	-90	-90	-235
1000	0	-57,30	79,80	-90	-90	-90	-247
1800	0	-103,13	90	-90	-90	-90	-283
10000	0	-572,96	90	-90	-90	-90	-753

Os valores do ângulo, em graus, do atraso foram calculados por $\phi = \frac{180\,w}{\pi}$. Demais ângulos foram calculados por $\phi_i = -\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{w}{p_i}\right)$ para os polos e $\phi_i = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{w}{z_i}\right)$ para os zeros. Comparando o esboço através da análise assintótica, feita em vermelho de acordo com as frequências assinaladas nas tabelas acima, com o plot do matlab:

```
figure();
g_atrasada = tf(18*poly(-180), poly([0 -1.8
-18]),'InputDelay',0.001);bode(g_atrasada); grid on;
xlim([0.1 2000]);
```



Note que a contribuição do atraso na fase, por não estabilizar em nenhum momento, faz com que a fase do sistema tenda a $-\infty$ para frequências elevadas, não estabilizando a fase mesmo com um atraso pequeno. Essa diferença fica ainda mais explícita ao plotarmos a fase com e sem atraso. Durante as frequências iniciais, os polos próximos da origem se sobressaem, já que há um atraso pequeno. Essas diferenças são explicitadas quando são comparados diferentes atrasos numa mesma figura:

```
figure();
sem_atraso = tf(18*poly(-180), poly([0 -1.8 -18]));
g = bodeplot(sem_atraso);
grid on;
setoptions(g,'MagVisible','off');
hold on;
com_atraso = tf(18*poly(-180), poly([0 -1.8 -18]), 'InputDelay',0.001);
h = bodeplot(com_atraso);
setoptions(h,'MagVisible','off');
hold on
```

```
h2 = bodeplot(tf(18*poly(-180), poly([0 -1.8 -18]), 'InputDelay',0.01));

legend('Sem atraso','Atraso de 0.001s','Atraso de 0.01s');
ylim([-450 -85]);
```