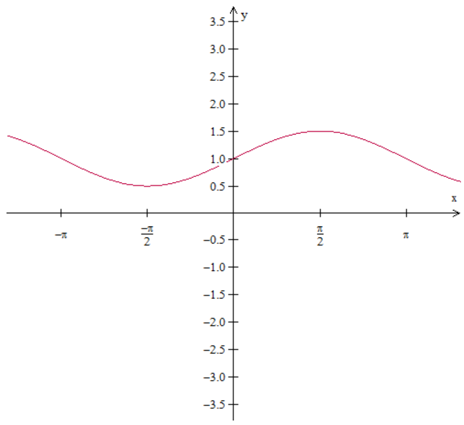
[UFES-CCE-DMAT-Prova1-Cálculo1-Equipe-manhã, 31/08/15]

Gabarito

1. **(2,0)** Esboce o gráfico da função $f(x) = \left|\dfrac{\sin(x+\pi)}{2} - 1\right|$



2. **(1,0 cada)** Calcule o limite se existir e justifique caso não exista.

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^3-3x-18}$ $= \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{(x-3)(x^2+3x+6)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x^2+3x+6)(\sqrt{x+1}+2)} = 1/96$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{|x^2-2|}{(x-\sqrt{2})}$ $= \lim_{x\to\sqrt{2}^{\pm}} |(x+\sqrt{2})| \frac{|(x-\sqrt{2})|}{(x-\sqrt{2})} = \lim_{x\to\sqrt{2}^{\pm}} \pm|(x+\sqrt{2})| = \pm 2\sqrt{2}$.

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\sin(\frac{\pi}{x})}$ =0 pois $\sqrt{x}e^{-1} \leq \sqrt{x}\, e^{\sin(\frac{\pi}{x})} \leq \sqrt{x}e^{1}$. Aqui usamos o Teorema do Sanduíche e que e^x é crescente.

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3-5x$ $\lim_{x\to-\infty} x^3(1-\frac{5}{x^2}) = -\infty$.

3. Considere as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfazendo

   - g é decrescente;
   - $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} g(x) = 1$;
   - f é contínua em $x=3$;
   - $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$;
   - $\displaystyle\lim_{x\to 2} g(x) = 3$;
   - $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} g(x) = 2$;
   - $f(3) = 5$;
   - $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = 9$.

   Considerando que g é decrescente, calcule:

   (a) **(0,5)** $\displaystyle\lim_{x\to 2} f\circ g(x)$ $\displaystyle= \lim_{x\to 2} f(g(x)) \overset{y=g(x)}{=} \lim_{y\to 3} f(y) = 5$.

   (b) **(0,5)** $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} f\circ g(x)$ $\displaystyle= \lim_{x\to 3^+} f(g(x)) \overset{y=g(x)}{=} \lim_{y\to 1^-} f(y) = 2$. Aqui usamos que g é decrescente.

   (c) **(0,5)** $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f\circ g(x)$ $\displaystyle= \lim_{x\to 3^-} f(g(x)) \overset{y=g(x)}{=} \lim_{y\to 2^+} f(y) = 9$. Aqui usamos que g é decrescente.

4. **(1,0)** Encontre os valores de a e b para que a seguinte função f seja contínua em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+2, & \text{se } x<1; \\ 2, & \text{se } x=1; \\ ax+3, & \text{se } x>1. \end{cases}$$

   $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax^2+bx+2 = a+b+2$; $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} ax+3 = a+3$. Logo, deve ocorrer $a+b+2 = a+3 = 2$. Isto implica que devemos tomar $a=-1$ e $b=1$.

5. **(1,5)** Considere a função $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2+1} + 5x + 3$. Prove que existe x tal que $f(x)=0$. Agora prove que para qualquer $c\in\mathbb{R}$ existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=c$.

   Note que f é contínua, $f(0) = 3 > 0$ e $f(-\pi) = 3-5\pi < 0$. Pelo T.V.I., existe uma raiz no intervalo $(-\pi, 0)$. Observe também que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Logo, dado $c\in\mathbb{R}$, existem $a<0$ e $b>0$ tais que $f(a) < c < f(b)$. O resto segue do T.V.I.