Os Métodos iterativos Gauss Jacobi e Gauss Seidel

Algoritmos Numéricos - Topico 2-5
Ideia da construção dos métodos iterativos

Prof. Cláudia G. Varassin DI/UFES
emails:claudia.varassin@ufes.br e galarda@inf.ufes.br

Março de 2021

Métodos Iterativos (estacionários)

1. Ideia da construção dos métodos iterativos estacionários
2. Método de Gauss-Jacobi
3. Método de Gauss-Seidel

Os métodos iterativos para resolver um sistema $Ax = b$.
Para os sistemas lineares o processo consiste em repetir a seguinte atualização:
Dado um vetor em uma iteração $x^{(k)}$ calcula-se um novo $x^{(k+1)}$.

$$
\begin{array}{l}
x^{(0)} \\
x^{(1)} \\
\vdots \\
x^{(k)} \\
x^{(k+1)} \\
\vdots \Downarrow \\
x_{exato}
\end{array}
$$

Ideia:ir obtendo melhores soluções caminhando com alguma estratégia.
O processo consiste na seguinte atualização:

$$x^{Nova} = x^{Antiga} + \delta.$$

Ideia:ir obtendo melhores soluções caminhando com alguma estratégia.
O processo consiste na seguinte atualização:

$$x^{Nova} = x^{Antiga} + \delta.$$

O ideial seria somar o erro.

$$x_{exato} = x^{Antiga} + erro$$

O erro contido em uma aproximação em x^{Antiga} é dado por:

$$erro = x_{exato} - x^{Antiga}$$

$$erro + x^{Antiga} = x_{exato}$$

$$x_{exato} = x^{Antiga} + erro$$

O erro contido em uma aproximação x^k é:

$$erro^k = x_{exato} - x^k$$

Multiplicando por A

$$A(erro^k) = Ax_{exato} - Ax^k$$

$$A(erro^k) = b - Ax^k$$

Assim, o erro poderia ser obtido via

$$erro^k = A^{-1}[b - Ax^k].$$

O erro contido em uma aproximação x^k é:

$$erro^k = x_{exato} - x^k$$

Multiplicando por A

$$A(erro^k) = Ax_{exato} - Ax^k$$

$$A(erro^k) = b - Ax^k$$

Assim, o erro poderia ser obtido via

$$erro^k = A^{-1}[b - Ax^k].$$

$$x_{exato} = x^k + erro^k$$

Mas, em vez de somar o $erro^k$ soma-se apenas uma aproximação, e o processo iterativo fica:

$$x^{k+1} = x^k + \delta^k$$

$$erro^k = A^{-1}[b - Ax^k]$$

$$\delta^k = (A^{-1})_{aprox} * [b - Ax^k]$$

onde $(A^{-1})_{aprox}$ consiste em uma aproximação para a matriz (A^{-1}).

Desta forma, a atualização de x^{k+1} é dada por,

$$x^{k+1} = x^k + ((A^{-1})_{aprox} * [b - Ax^k])$$

Os diversos métodos iterativos diferem entre si na forma de obter uma aproximação para a matriz (A^{-1}), isto é, diferem entre si no cálculo de $(A^{-1})_{aprox}$, resultando em diferentes formas de obter o δ^k.

Como obter $(A^{-1})_{aprox}$???
L: triangular esquerda, D: a diagonal (D) e L: triangular da direita.
então A = L + D + R.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

O método de Gauss Jacobi usa: $(A^{-1})_{aprox} = D^{-1}$.
O método de Gauss Seidel usa : $(A^{-1})_{aprox} = (L + D)^{-1}$.

Usando $(A^{-1})_{aprox} = D^{-1}$, o processo iterativo é dado por:

$$x^{k+1} = x^k + D^{-1}[b - Ax^k]$$

Usando $(A^{-1})_{aprox} = D^{-1}$, o processo iterativo é dado por:

$$x^{k+1} = x^k + D^{-1}[b - Ax^k]$$

$$x^{k+1} = x^k + D^{-1}[b - (L + D + R)x^k]$$
$$x^{k+1} = x^k + D^{-1}b - D^{-1}Dx^k - D^{-1}(L + R)x^k$$
$$x^{k+1} = x^k + D^{-1}b - Ix^k - D^{-1}(L + R)x^k$$

Ou seja, a atualização do vetor é:

$$x^{k+1} = D^{-1}b - D^{-1}(L + R)x^k.$$

$$x^{k+1} = D^{-1}b - D^{-1}(L+R)x^k.$$
$$x^{k+1} = g - Mx^k.$$

Escrevendo cada membro da equação matricial acima temos:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$g = D^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$(L+R) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$D^{-1}(L+R)$ é dada por

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/a_{11} & a_{12}/a_{11} & \dots & a_{1n}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0/a_{22} & \dots & a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}/a_{nn} & a_{n2}/a_{nn} & \dots & 0/a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$(L+R) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$D^{-1}(L+R)$ é dada por

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/a_{11} & a_{12}/a_{11} & \dots & a_{1n}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0/a_{22} & \dots & a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}/a_{nn} & a_{n2}/a_{nn} & \dots & 0/a_{nn} \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$x^{k+1} = D^{-1}b - D^{-1}(L+R)x^k = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0/a_{11} & a_{12}/a_{11} & \dots & a_{1n}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0/a_{22} & \dots & a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}/a_{nn} & a_{n2}/a_{nn} & \dots & 0/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix}$$

$$x^{k+1} = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (0 + a_{12}x_2^k + a_{13}x_3^k + \dots + a_{1n}x_n^k)/a_{11} \\ (a_{21}x_1^k + 0 + a_{23}x_3^k + \dots + a_2x_n^k)/a_{22} \\ \vdots \\ (a_{n1}x_1^k + a_{n2}x_2^k + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}^k + 0)/a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x^{k+1} = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (0 + a_{12}x_2^k + a_{13}x_3^k + ... + a_{1n}x_n^k)/a_{11} \\ (a_{21}x_1^k + 0 + a_{23}x_3^k + ... + a_2x_n^k)/a_{22} \\ \vdots \\ (a_{n1}x_1^k + a_{n2}x_2^k + ... + a_{nn-1}x_{n-1}^k + 0)/a_{nn} \end{bmatrix}$$

Assim, a atualização de uma componente i é dada por:

$$x_i^{k+1} = [b_i - (a_{i1}x_1^k + a_{i2}x_2^k + ... + a_{i,i-1}x_{i-1}^k + a_{i,i+1}x_{i+1}^k + ... + a_{i,n}x_n^k)]/a_{ii}$$

Escrito de forma mais compacta, tem -se:

$$x_i^{k+1} = [b_i - (\sum_{j=1}^{j=(i-1)} (a_{ij} * x_j^k) + \sum_{j=(i+1)}^{j=n} (a_{ij} * x_j^k))]/a_{ii}$$

No método de Gauss Seidel, como $(A^{-1})_{aprox} = (L + D)^{-1}$, a atualização é dada por:

$$x^{k+1} = x^k + (L + D)^{-1}[b - Ax^k]$$

No método de Gauss Seidel, como $(A^{-1})_{aprox} = (L + D)^{-1}$, a atualização é dada por:

$$x^{k+1} = x^k + (L + D)^{-1}[b - Ax^k]$$

$$x^{k+1} = x^k + (L + D)^{-1}[b - (L + D + R)x^k]$$

$$x^{k+1} = x^k + (L + D)^{-1}b - Ix^k - (L + D)^{-1}Rx^k$$

$$x^{k+1} = (L + D)^{-1}b - (L + D)^{-1}Rx^k$$

Multiplicando a expressão acima por $(L + D)$ tem se:

$$(L + D)x^{k+1} = b - Rx^k$$

Componente a componente

$$\sum_{j=1}^{j=i-1} a_{ij} * x_j^{k+1} + a_{ii} * x_i^{k+1} = b_i - \sum_{j=i+1}^{j=n} a_{ij} * x_j^k$$

ou

$$x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{j=1}^{j=i-1} a_{ij} * x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{j=n} a_{ij} * x_j^k)/a_{ii}$$

RESUMINDO: Para se resolver sistemas lineraes do tio $Ax = b$ é possivel usar métodos iterativos. São métodos que calculam a solução via sucessivas aproximações, fazendo:

$$x^{k+1} = x^k + \delta^k$$

onde δ^k é uma aproximação o erro $erro^k$ contido na aproximação x^k
O delta é calculado via

$$\delta^k = (A^{-1})_{aprox} * [b - Ax^k]$$

O método de Gauss Jacobi usa: $(A^{-1})_{aprox} = D^{-1}$.
O método de Gauss Seidel usa : $(A^{-1})_{aprox} = (L + D)^{-1}$.

Bibliografia Básica

[1] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[2] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.