Cálculo 2 2022.2

Aula 7

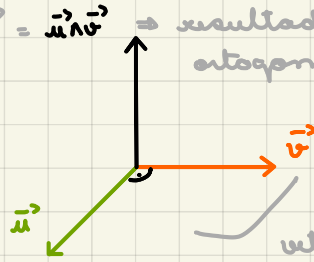
Aula passada Produto escalar

Aula Hoje Produto vetorial e misto

Cap. 11 Produto vetorial

↳ operação entre vetores que dá um vetor associado a área

$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ ⇒ resultado é um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ + $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é "positiva" regra da mão



vetores LI's direita

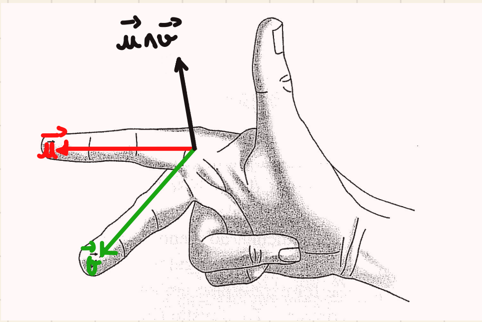
definição O **produto vetorial** de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ denotado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é um vetor tal que

i) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD ⇒ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

ii) $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI e o ângulo formado é θ então

- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta$
- $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ e $\vec{v}$
- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ é uma base positiva

isto é LI's e satisfaz a regra da mão direita



A definição anterior não ajuda a calcular as coordenadas do vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$

Supondo que $\vec{u} \wedge \vec{v} = (x, y, z)$ na base ortonormal $\{i, j, k\}$ usando a definição chegamos ao seguinte resultado (as contas são longas)

Proposição Seja $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal se

$$\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$$

$$\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$$

então

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Exemplo Em relação à base ortonormal $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, são dados

$\vec{u} = (1, 2, 3)$

$\vec{v} = (-1, 1, 2)$

Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Solução

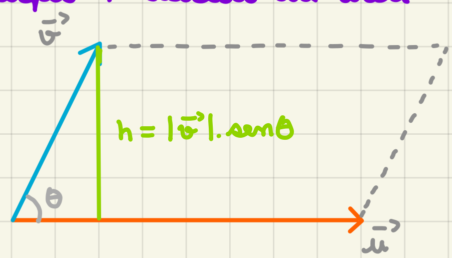
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & j \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

$$4i - 3j + k + 2k - 3i - 2j$$

$$= i - 5j + 3k$$

$$= (1, -5, 3)$$

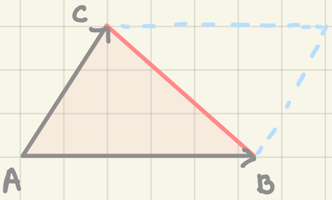
Aplicação : Cálculo da área



Área do paralelogramo $= b.h = \|\vec{u}\|. \|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

Exemplo Calcule a área do triângulo ABC sendo $\vec{AB} = (-1,1,0)$
$\vec{AC} = (0,1,3)$

Solução



$$\text{Área } ABC = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|$$

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} i & j \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

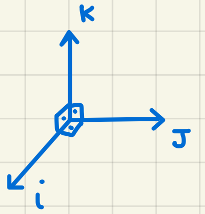
$$= 3i + 0j - k + 0k + 0i + 3j$$

$$= 3i + 3j - k = (3,3,-1)$$

$$\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\| = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19}$$

$$\text{Área } ABC = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

Particularmente: sem conta



- $\vec{i}\wedge\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\wedge\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\wedge\vec{i} = \vec{j}$

  $\vec{j}\wedge\vec{i} = -\vec{k}$ $\quad \vec{k}\wedge\vec{j} = -\vec{i}$ $\quad \vec{i}\wedge\vec{k} = -\vec{j}$

Propriedades Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores
$\lambda \in \mathbb{R}$

i) $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$

ii) $\vec{u}\wedge(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\wedge\vec{v})$

iii) $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\vec{w}$

e

$(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{w} + \vec{v}\wedge\vec{w}$

Exemplo Calcule
$$(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})\wedge(2\vec{j}+\vec{k})$$

Solução

Podemos fazer $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Mas para usar as propriedades

$$(i+j-k)\wedge(2j+k) = 2\underbrace{i\wedge j}_{=k} + \underbrace{i\wedge k}_{=-j}$$
$$+ 2\underbrace{j\wedge j}_{=0} + \underbrace{j\wedge k}_{=i}$$
$$- 2\underbrace{k\wedge j}_{-i} - \underbrace{k\wedge k}_{=0}$$

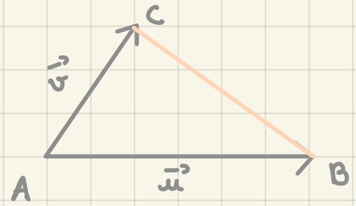
$$= 2k - j + i + i$$
$$= 2i - j + 2k = (2,-1,2)$$

Exemplo O triângulo ABC tem área 4 sendo $B = A+\vec{u}$ e $C = A+\vec{v}$

Calcule $\|u\wedge v\|$.

Solução

$B = A+\vec{u} \iff \vec{u} = \vec{AB}$
$C = A+\vec{v} \iff \vec{v} = \vec{AC}$

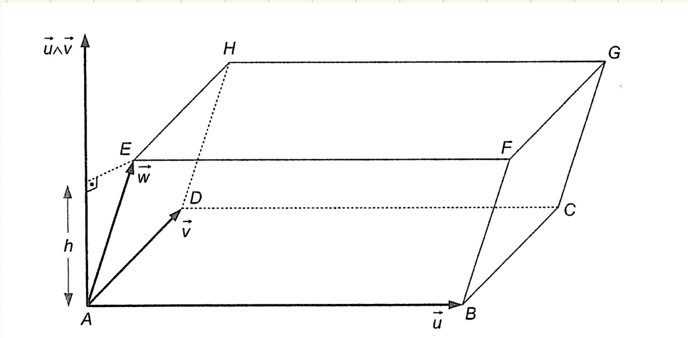


$$\text{Área triang} = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\| = 4$$

$$\Rightarrow \|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = 8.$$

Cap 12: Produto misto

Motivação volume:



$$V = (\text{área da base}) \cdot \text{altura}$$

Note que

$$\text{altura } h = \left\| \operatorname{proj}_{\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{q}} \vec{w} \right\|$$

$$= \left\| \frac{\vec{w}\cdot\vec{q}}{\|\vec{q}\|^2} \cdot \vec{q} \right\|$$

$$= \frac{\| \vec{w}\cdot\vec{q} \|}{\|\vec{q}\|}$$

então

$$\text{Volume paralelepípedo} = \frac{\| \vec{u}\wedge\vec{v} \cdot \vec{w} \|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|} \cdot \underbrace{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}_{\text{área da base}}$$

$$= \| \vec{u}\wedge\vec{v} \cdot \vec{w} \|$$

↳ produto escalar com o produto vetorial

Definição O produto misto de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ nesta ordem é o número real

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$$

Em termos das coordenadas temos o resultado

Proposição $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e

$\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$

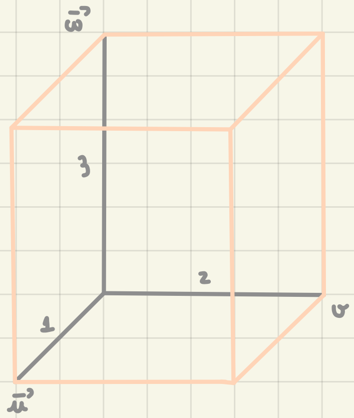
$\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$

$\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo Os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ formam uma base ortogonal com normas 1, 2 e 3 respectivamente.

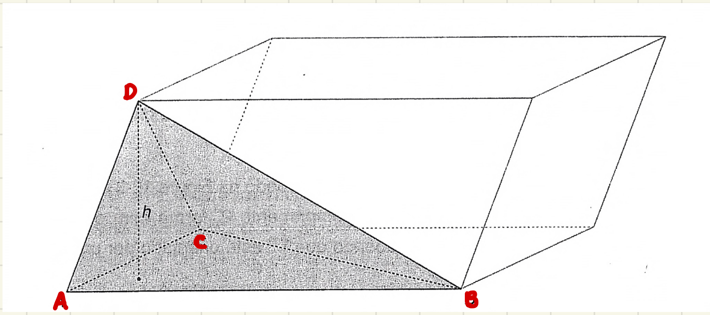
Solução



$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \text{Volume} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Exemplo Calcule o volume do tetraedro ABCD.

Solução



$$\text{Volume} = \frac{1}{3}\,\text{Área da base} \cdot h$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2} \| \vec{AB}\wedge\vec{AC} \| \right] \cdot h$$

$$= \frac{1}{6}\left[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \right]$$