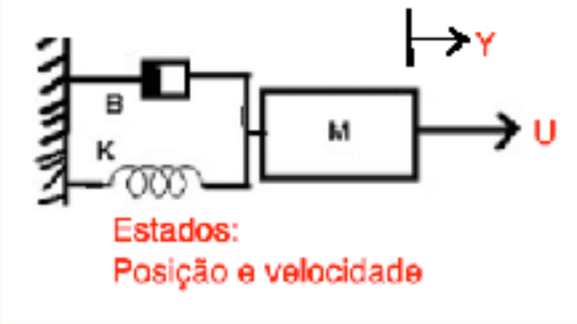
Realimentação de estados e observadores de estados

Sistemas Realimentados

Conteúdo

- Justificativa
- Modelos em variáveis de estados
- Decomposição de funções de transferência
- Relações entre modelos no espaço de estados e funções de transferência
- Controlabilidade
- Controle via realimentação de estados
- Observadores de estados
- Realimentação integral de estados

Justificativa



- A informação dos estados pode ser utilizada para gerar os sinais de controle U

Modelos em variáveis de estados

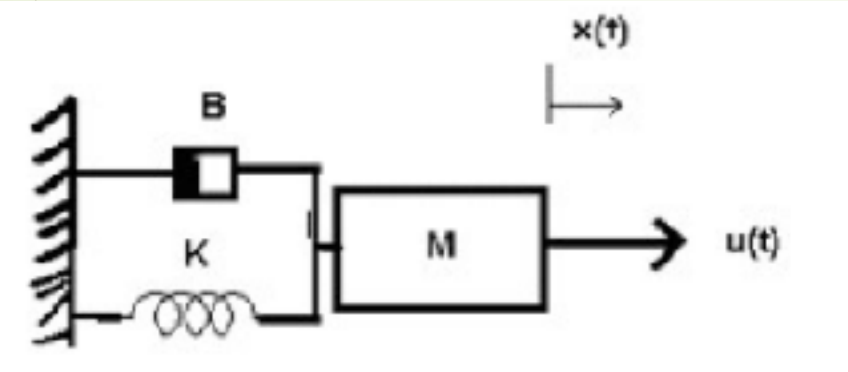
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$A_{n.n}, B_{n.m}, C_{p.n}, D_{p.m}$$

onde A, B, C, D são matrizes e x, u, y são vetores

Exemplo: sistema mecânico



Equação diferencial

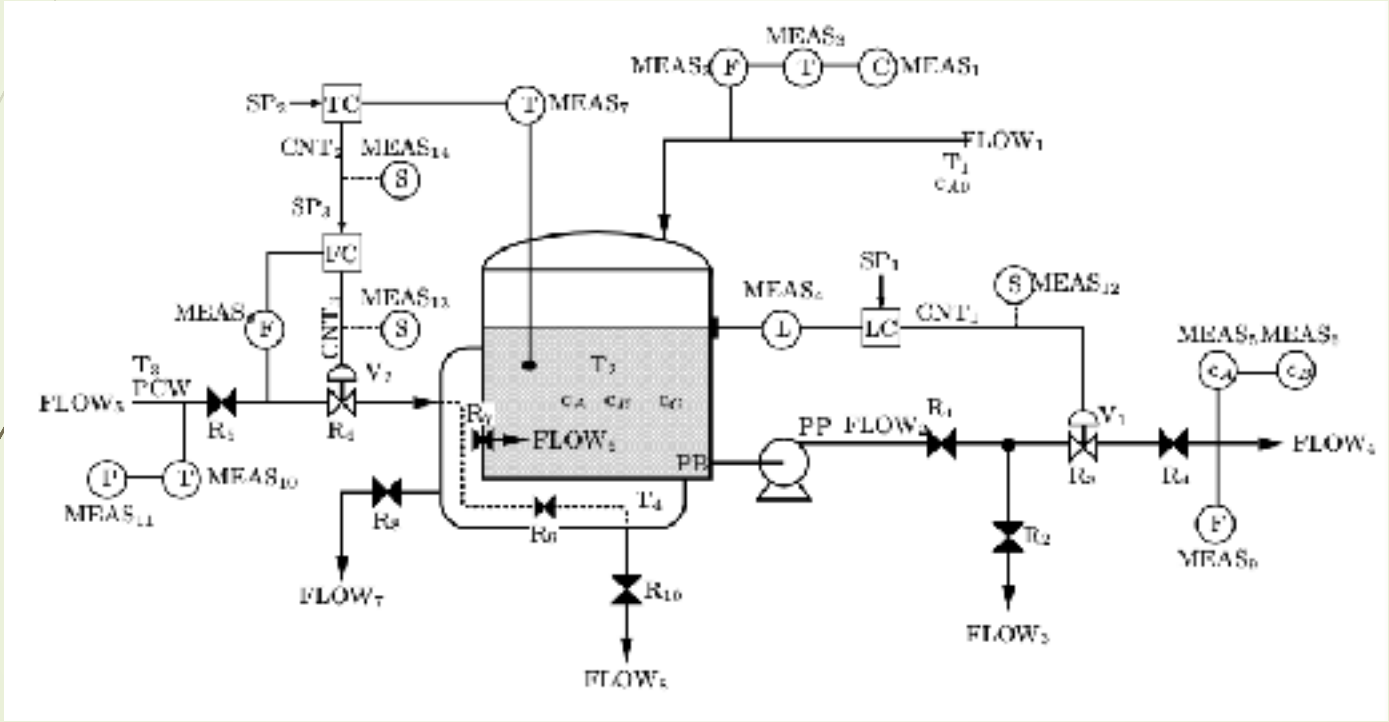
$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = u(t)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -B/M \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Modelo em variáveis de estado, sendo os estados a posição e a velocidade.

Exemplo: CSTR(Reator-tanque Agitado Contínuo)



Esse reator possui duas malhas de controle que interagem entre si. Como controlar usando apenas controladores PID?

Obtendo G(s) do modelo em variáveis de estados

$$L[\dot{x}] = sX(s) - x(0)$$
$$L[Ax + Bu] = AX(s) + BU(s)$$

$$L[y(t)] = CX(s) + DU(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Simulando os dois modelos no Matlab

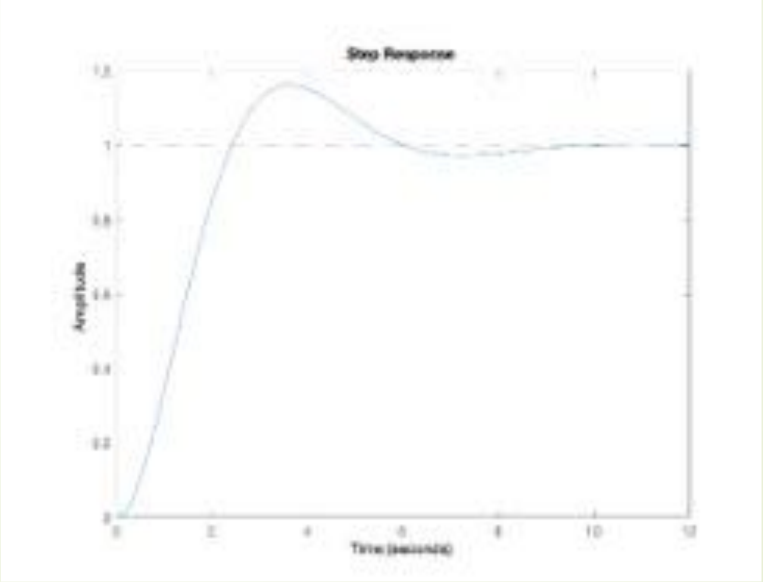
```
>> g=tf(1,[1 1 1 ])

g =

      1
 -----------
 s^2 + s + 1
```

Ver comandos:
ss2tf
tf2ss

```
>> a=[0 1;-1 -1]

a =

     0     1
    -1    -1

>> b=[0;1]

b =

     0
     1

>> c=[1 0]

c =

     1     0

>> s1=ss(a,b,c,0)

s1 =

  A =
        x1  x2
   x1    0   1
   x2   -1  -1

  B =
        u1
   x1    0
   x2    1
```

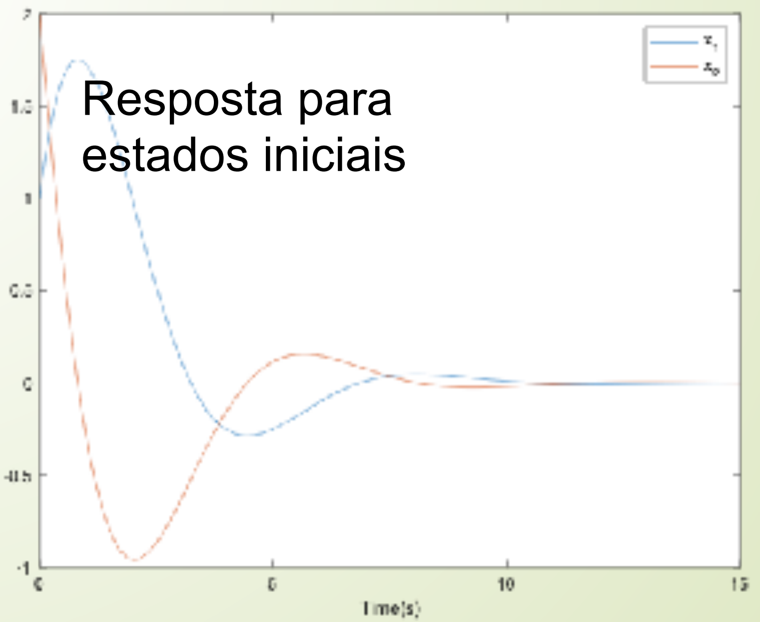
Simulando os dois modelos no Matlab

- Simulação de G(s):
- Para entradas degrau, rampa, etc:
- Y=step(g);
- Y=impulse(g)
- Y=lsim(g,u,t);



Simulando os dois modelos no Matlab

- Simulação do modelo em variáveis de estado
- O mesmo de G(s), mas também pode incluir estados iniciais.
- y=lsim(s1,u,t,[1;2]);
- [y,t,x]=lsim(s1);



Obtendo o modelo em variáveis de estado a partir de G(s)

Método da decomposição direta

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Multiplicando e dividindo (4) por $s^{-3}X(s)$,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^{-1} + b_1 s^{-2} + b_0 s^{-3}}{1 + a_2 s^{-1} + a_1 s^{-2} + a_0 s^{-3}} \cdot \frac{X(s)}{X(s)}$$

Decomposição direta

Multiplicando e dividindo (4) por $s^{-3}X(s)$, (5)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^{-1} + b_1 s^{-2} + b_0 s^{-3}}{1 + a_2 s^{-1} + a_1 s^{-2} + a_0 s^{-3}} \cdot \frac{X(s)}{X(s)}$$

De (5), segue que

$$Y(s) = \left[b_2 s^{-1} + b_1 s^{-2} + b_0 s^{-3}\right] X(s) \qquad (6.1)$$

e

$$U(s) = \left[1 + a_2 s^{-1} + a_1 s^{-2} + a_0 s^{-3}\right] X(s) \qquad (6.2)$$

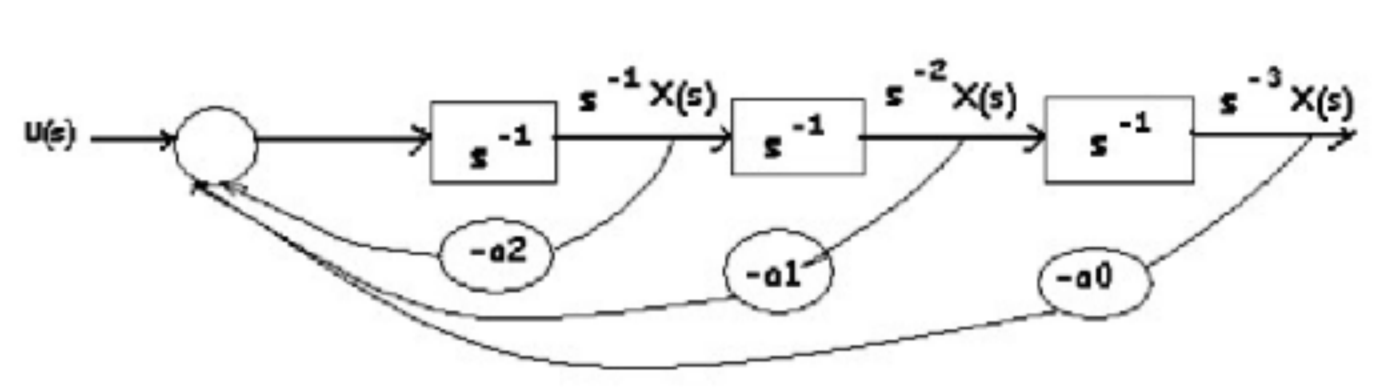
Decomposição direta

Rearranjando (6.2), vem

$$X(s) = U(s) - a_2 s^{-1} X(s) - a_1 s^{-2} X(s) - a_0 s^{-3} X(s)$$

Decomposição direta

$$X(s) = U(s) - a_2 s^{-1} X(s) - a_1 s^{-2} X(s) - a_0 s^{-3} X(s)$$



Decomposição direta

- Escolhendo os estados

$$x_1 = s^{3}X(s)$$
$$x_2 = s^{-2}X(s)$$
$$x_3 = s^{-1}X(s)$$

- V

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = u(t) - a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3$$

Decomposição direta

Na forma matricial,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Forma canônica controlável

Decomposição direta

- Saída,

$$y(t) = b_2 x_3 + b_1 x_2 + b_0 x_1$$

ou, na forma matricial,

$$y = \begin{bmatrix} b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} x$$

Diagrama completo

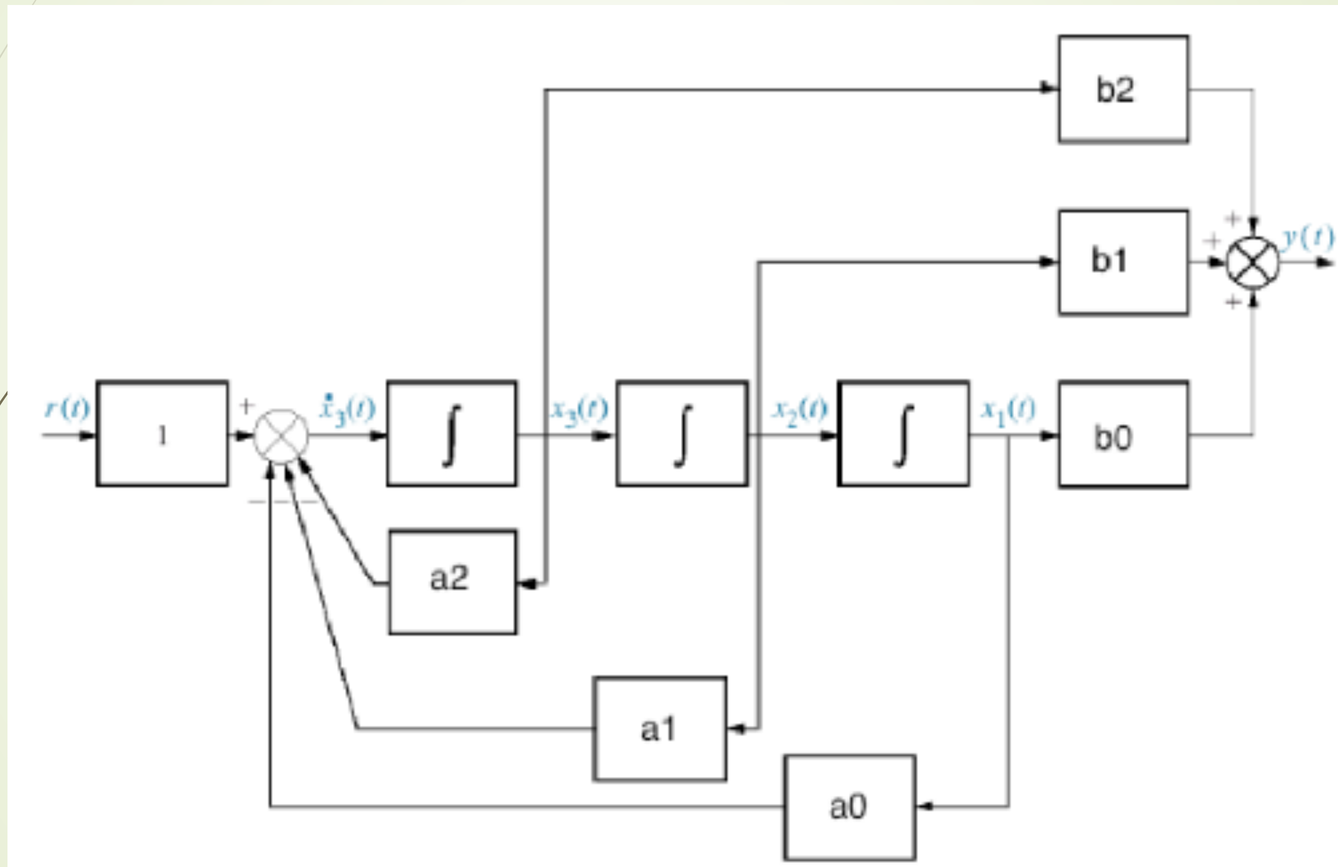
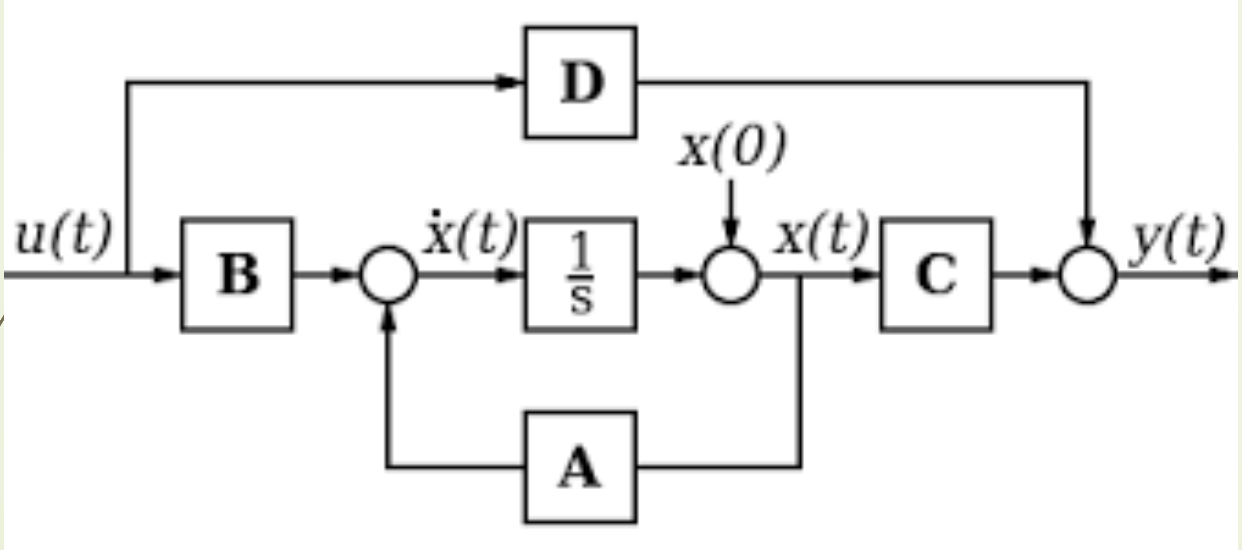


Diagrama de variáveis de estado usando matrizes



$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Observações

- Número de estados = número de integradores = grau do denominador de G(s)
- Diferentes modelos no EE podem ser obtidos para a mesma G(s)

Exemplo

- Seja

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

- Obtenha a FT e dela o sistema no EE, usando o método da decomposição direta. Para uma mesma FT, haverá 2 diferentes modelos no EE.

Exemplo

- Seja

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

s1=ss(a,b,c,d)
tf(s1)

```
>> tf(s1)

ans =

      s + 4
   -----------
   s^2 + s - 2
```

Uma FT e 2 modelos diferentes em variáveis de estado

[a1,b1,c1,d1]=tf2ss([1 4],[1 1 -2])

```
>> s2=ss(a1,b1,c1,d1)

s2 =

  A =
         x1   x2
   x1    -1    2
   x2     1    0

  B =
         u1
   x1     1
   x2     0

  C =
         x1   x2
   y1     1    4

  D =
         u1
   y1     0
```

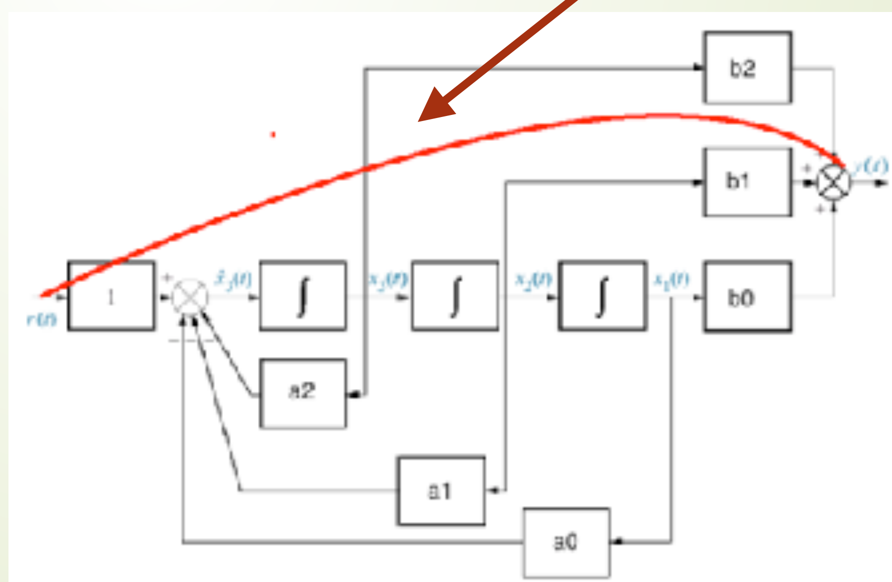
Ordem do numerador = ordem do denominador

- Se o grau do numerador fosse 3, este deveria ser dividido pelo denominador para depois aplicar a decomposição

$$G(s)=\frac{s^3+b_2s_2+b_1s+b_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}=\frac{f_2s^2+f_1s+f_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}+d$$

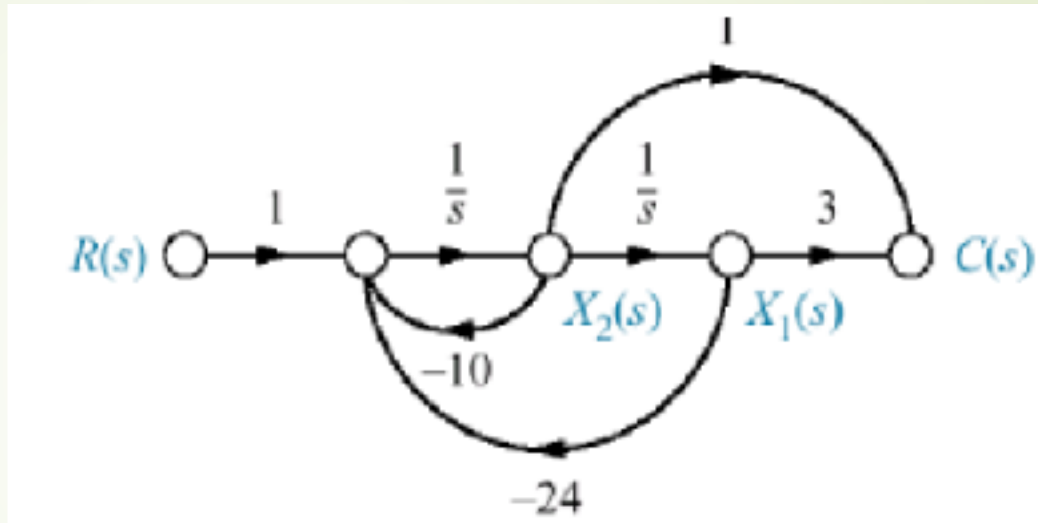
Ordem do numerador = ordem do denominador

$$G(s) = \frac{s^3 + b_2 s_2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{f_2 s^2 + f_1 s + f_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} + d$$



Outras decomposições

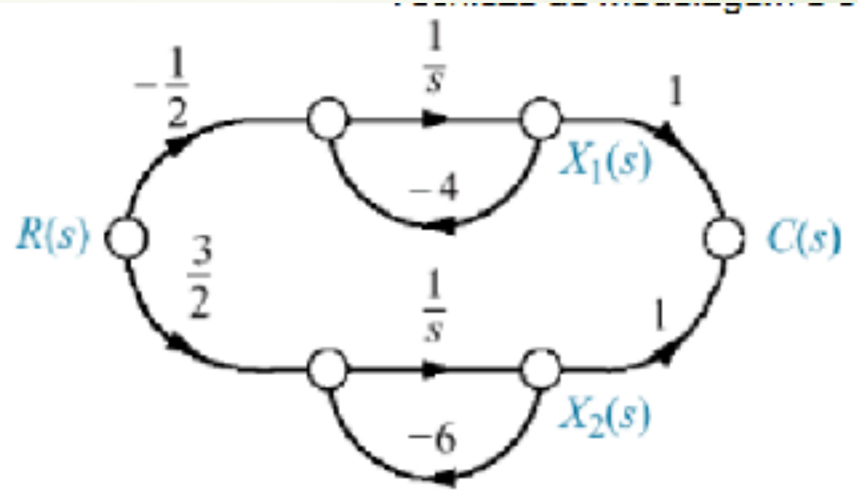
$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+10+24}$$



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -24 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,\ y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} x$$

Decomposição paralela

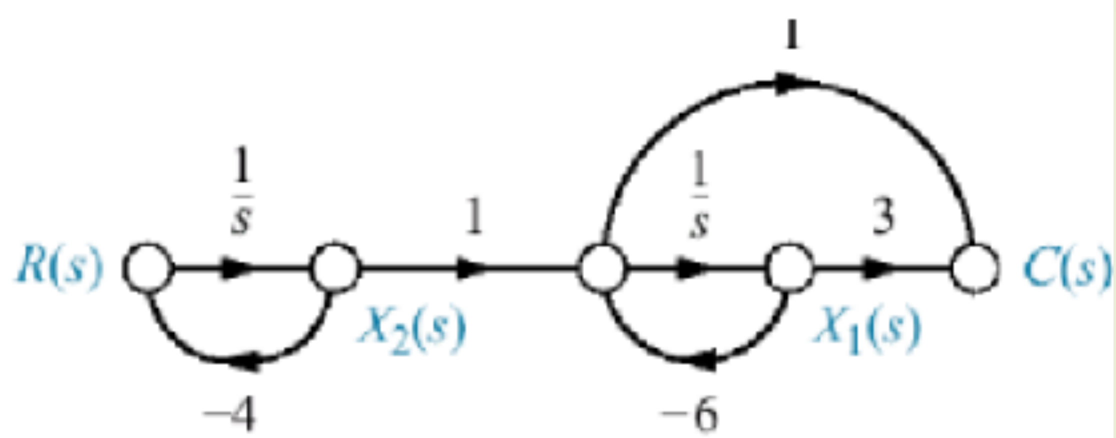
$$G(s) = \frac{-1/2}{s+4} + \frac{3/2}{s+6}$$



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} u, \; y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

Decomposição em cascata

$$G(s) = \frac{1}{s+4} . \frac{s+3}{s+6}$$



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \ y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix} x$$

Decomposições

Observa-se que cada decomposição gera um modelo em variáveis de estado diferente.

Relações entre modelos no espaço de estados e funções de transferência

Autovalores de uma matriz quadrada

Os autovalores λ de uma matriz quadrada A e os autovetores associados $x \neq 0$ satisfazem a equação

$$Ax = \lambda x$$

.

$$Ax = \lambda x$$

$$\left(A - \lambda I\right)x = 0$$

Esta equação só é verdadeira se

$$\det\left[\left(A - \lambda I\right)\right] = 0,$$

uma vez que x$\neq$0 e $\left[\left(A - \lambda I\right)\right]$ é uma matriz não nula.

Resolvendo

$$\det[(A - \lambda I)] = 0$$

resulta o polinômio de ordem n denominado polinômio característico da matriz A.

Exemplo

Exemplo: autovalores de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$

$$\det[(A - \lambda I)] = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & -5-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

Autovetores

São obtidos das equações abaixo.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} x = 0 \text{ e } \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} x = 0$$

Relação entre polos de G(s) e autovalores da matriz A

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + E = C\frac{Adjunta[sI - A]}{\det(sI - A)}B + E = \frac{N(s)}{D(s)} + E$$

- O denominador de G(s) é o polinômio característico da matriz A.
- Portanto, em geral, os polos de G(s) são os autovalores de A.
- Isso não ocorre quando existe cancelamento de zeros e polos. Neste caso, a FT terá um número de polos inferior ao número de autovalores.

Relação entre polos de G(s) e autovalores da matriz A

Portanto, para analisar a estabilidade de um sistema em variáveis de estado, basta verificar os autovalores da matriz A.

Controlabilidade

- Seja o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Ele será controlável se seu estado pode ser levado de x(0) a x(t) em um tempo finito t através da entrada u(t).

Teste de controlabilidade

O sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

é controlável se

$$posto\left[W_c\right] = posto\left[B \quad AB \quad A^2B\ldots \quad A^{n-1}B\right] = n$$

- onde n é a ordem do sistema e Wc é chamada matriz de controlabilidade.

Exemplo: sistema mecânico

- Seja

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -B/M \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$posto\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = posto\begin{bmatrix} 0 & 1/M \\ 1/M & -B/M^2 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 1/M \\ 1/M & -B/M^2 \end{bmatrix} = -1/M^2$$

Número de entradas

- A matriz Wc é quadrada para o caso de 1 entrada.
- Para m entradas, Wc tem ordem n.(m*n)

Forma canônica controlável

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = b_2 x_3 + b_1 x_2 + b_0 x_1$$

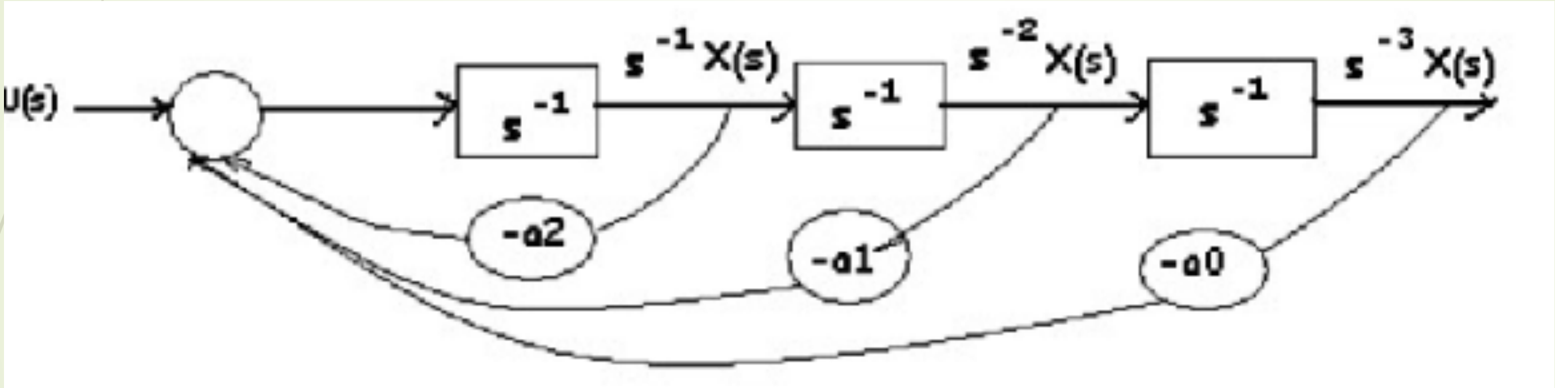
Forma canônica controlável

$$posto\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} =$$

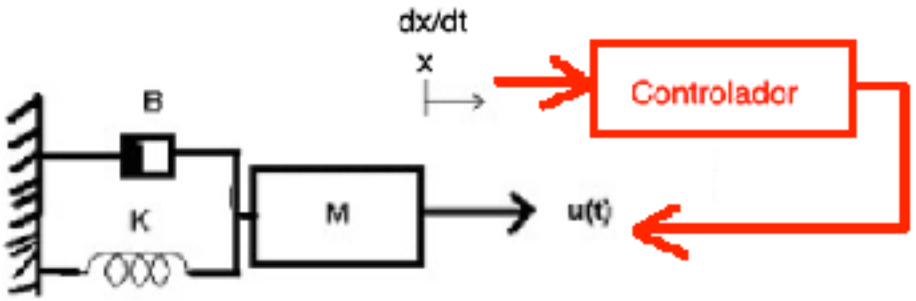
$$posto\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 1 & -a_2 & -a_1 + a_2^{\ 2} \end{bmatrix} = 3$$

- Portanto, um sistema na forma canônica controlável é controlável!

Sistema controlável: todos estados são afetados pela entrada



Controle via realimentação de estados



$$u(t) = r(t) - k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t)$$

Sendo: x_1: posição e x_2: velocidade.

O controlador usa os estados para calcular o sinal de controle.

Controle via realimentação de estados

Especificações semelhantes às do projeto do PID no tempo

- Estabilidade
- Erro em regime
- Sobreelevação
- Tempo de estabelecimento
- IAE

Os polos de malha fechada devem ser escolhidos para atender essas especificações.

Controle via realimentação de estados

A estabilidade é garantida escolhendo polos no SPE.

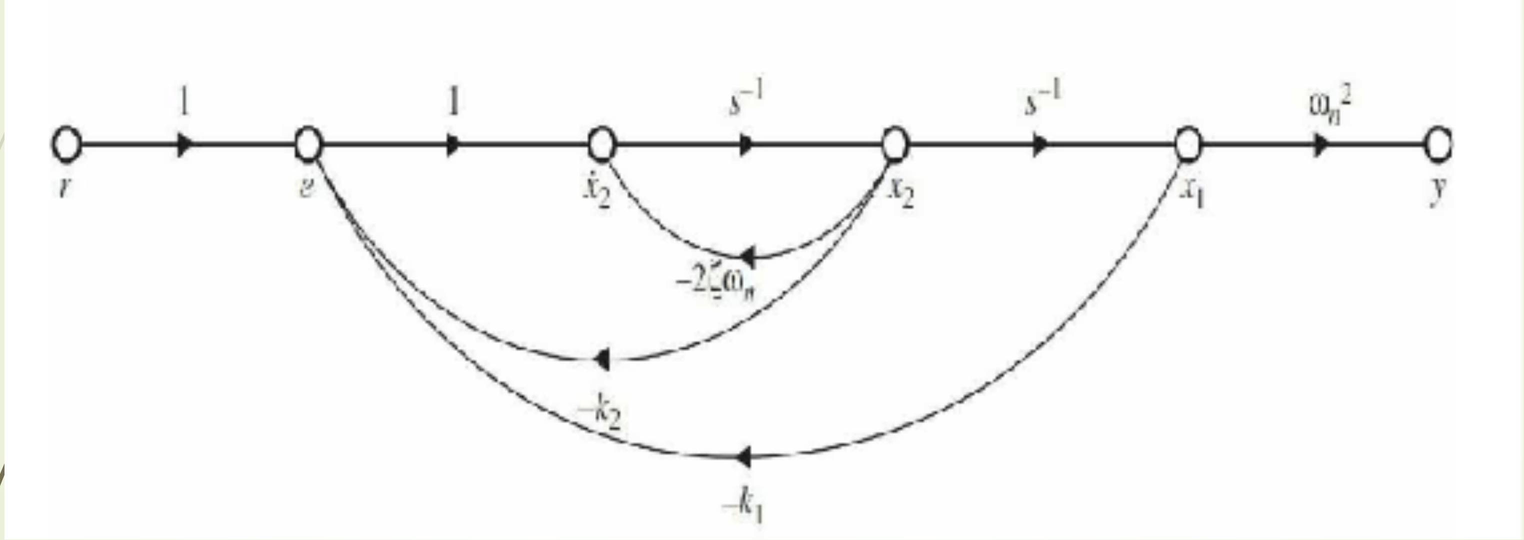
O erro em regime não é atendido, mas será pela realimentação integral de estados.
Sobreelevação e o tempo de estabelecimento são atendidos pela escolha dos polos de MF.

O IAE somente faz sentido com a realimentação integral de estados.

Protótipo de segunda ordem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

Fazendo a realimentação de estados:



Sinal de controle: $u(t) = r - k_1 x_1 - k_2 x_2$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = M(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + K_2)s + K_1}$$

Aplicação ao protótipo de segunda ordem

A escolha da sobreelevação UP e do tempo de estabelecimento T_s permitem definir $\bar{\zeta}, \bar{\omega}_n$ e com isso K_1 e K_2.

$$\bar{\zeta} = \sqrt{\frac{a^2}{\pi^2 + a^2}} \qquad a = log(UP/100) \qquad \bar{\omega}_n = \frac{4}{T_s \bar{\zeta}}$$

$$s^2 + (2\zeta\omega_n + K_2)s + K_1) = s^2 + 2\bar{\zeta}\bar{\omega}_n s + \bar{\omega}_n{}^2 \Rightarrow K_1, K_2$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = M(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + K_2)s + K_1)}$$

Aplicação ao protótipo de segunda ordem

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = M(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + K_2)s + K_1)}$$

Como $\omega_n \neq \bar{\omega}_n$ a saída y não tenderá para a referência r, mas sim para

$$y(\infty) = \frac{r\,.\,wn^2}{K_1}$$

Portanto, o erro em regime não é considerado no projeto.

Reduzindo o erro em regime

Uma forma de reduzir o erro em regime é introduzir um fator multiplicador da referência ρ, ou seja,

$$u(t) = \rho r(t) - k_1 x_1(s) - k_2 x_2(t)$$

Tem-se agora

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = M(s) = \frac{\rho \omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n + K_2)s + K_1)}$$

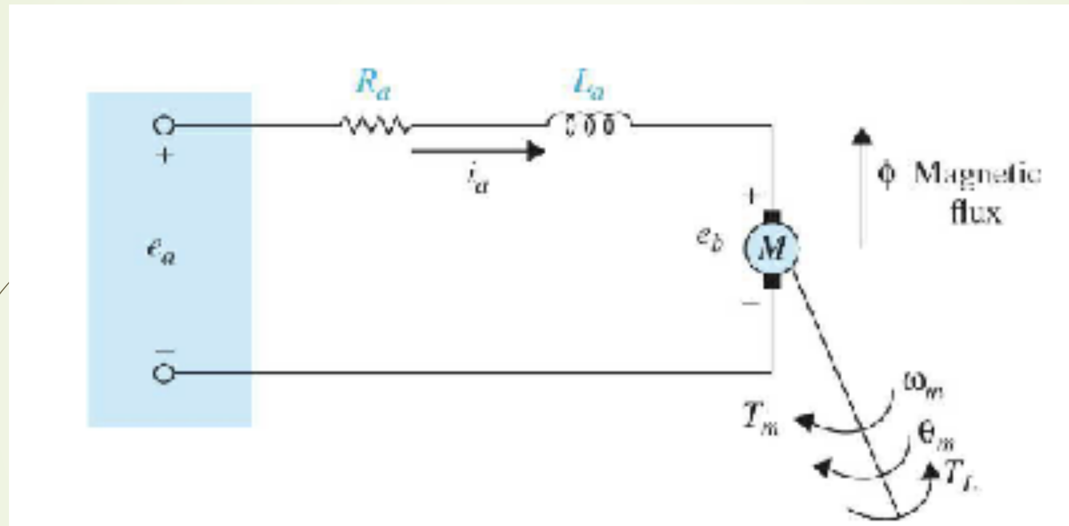
$$y(\infty) = \frac{\rho r \,.\, wn^2}{K_1}$$

Escolhendo $\rho = \dfrac{K_1}{\omega_n^2}$

Resulta $y(\infty) = r$

Essa solução não é robusta, pois wn é incerto

Realimentação de estados de um motor CC



$$\begin{bmatrix} \frac{di_a(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{d\theta_m(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_i}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_m(t) \\ \theta_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_a(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_m} \\ 0 \end{bmatrix} T_L(t)$$

Medir:
Corrente
Velocidade
Ângulo do eixo

Realimentação de estados de um motor CC

Mede-se corrente, a velocidade e o ângulo do eixo

Verifocar a controlabilidade:

Controlador:

$$u(t) = r - k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t) - k_3 x_3(t)$$

Escolher 3 polos que dêem a resposta desejada.

Controle via realimentação de estados: caso geral.

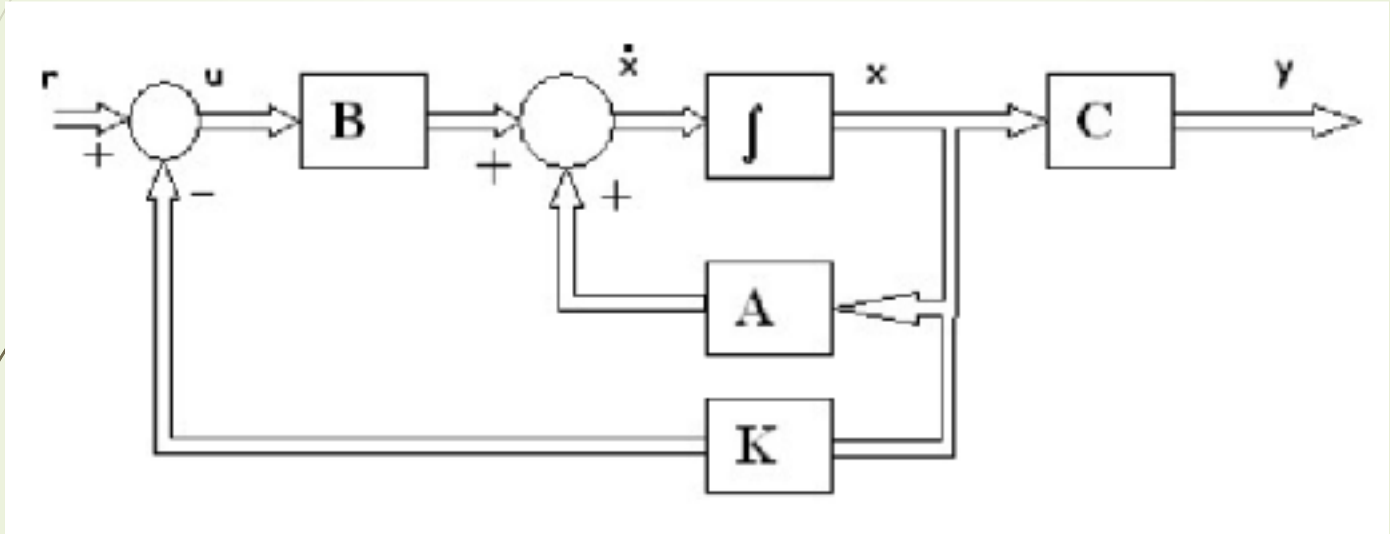
- Seja o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

E a lei de controle $u(t) = r(t) - Kx(t)$

Sistema em MF



Sistema em malha fechada

- Equações,

$$\dot{x} = Ax + B(r - Kx)$$

$$y = Cx + D(r - Kx)$$

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br$$

$$y = (C - DK)x + Dr$$

Sistema em malha fechada

O autovalores da nova matriz do sistema (A-BK) são alterados pela matriz de ganho K.

Sistema em malha fechada

- Aplicando a realimentação de estados ao sistema na FCC

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(r - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} x\right)$$

Sistema em malha fechada

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 - k_1 & -a_1 - k_2 & -a_2 - k_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\lambda(A - BK) = s^3 + (a_2 - k_3)s^2 + (a_1 - k_2)s + (a_0 - k_1)$$

Sistema em malha fechada

- Observa-se que pela escolha adequada dos ganhos pode-se obter qualquer polinômio característico de malha fechada, com as raízes que se desejar. Em outras palavras, os autovalores, que são os polos malha fechada, podem ser livremente escolhidos a partir dos ganhos do vetor K.

- Para que isto seja possível, basta que o sistema seja controlável!
- Se ele estiver na forma canônica controlável, esta condição é atendida!

Exemplo: calculando os ganhos do vetor K.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

- Escolher K tal que tenha os polos de malha fechada sejam {-1, -10}.

Exemplo:

$$\det(SI-(A-BK)) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2k_1 & -2-2k_2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 2k_1 & s+2+2k_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= s^2 + (1+2k_2)s + (2k_1 - 2k_2 - 2)$$

Exemplo

Para obter os polos de MF devemos ter

$$(s+1)(s+10) = s^2 + 11s + 10$$

Ou

$$(1 + 2k_2) = 11$$
$$(2k_1 - 2k_2 - 2) = 10$$

Alocação de polos no Matlab

```
>> a=[1 1;0 -2];
>> b=[0;2];
>> l=[-1 -2];
>> k=place(a,b,l)

k =[    3     1]
```

```
>> eig(a-b*k)
ans =
   -1.0000
   -2.0000
```

c=[1 0]

M=ss(a-b*k, b,c,0) Sistema em malha fechada

- Limitação da rotina place: os polos não podem ser repetidos

FT de MA e MF

$$G_{ma} = \frac{2}{s^2 + s - 2}$$

- Apenas o denominador da FT muda após a realimentação de estados, pois os polos são alterados pela realimentação.

$$G_{mf} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

- O numerador somente muda se um polo for alocado para a mesma posição de um zero.

Vantagens e desvantagens da realimentação de estados

- A principal vantagem é a possibilidade de escolher quaisquer polos de malha fechada desejados.
- No caso abaixo, um controlador PID não permite escolher todos os coeficientes do denominador!
-

Seja o sistema $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^3}$ e um controlador PID

$$C(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

Em malha fechada temos

$$M(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s^4 + 3s^3 + (3 + K_d)s^2 + (1 + K_p)s + K_i}$$

Vantagens e desvantagens da realimentação de estados

- Uma desvantagem é que o erro em regime não é considerado no projeto. Além disto, o ganho da FT de MF fica menor quando se esocolhe polos que dêem respostas mais rápidas.

Vantagens e desvantagens da realimentação de estados

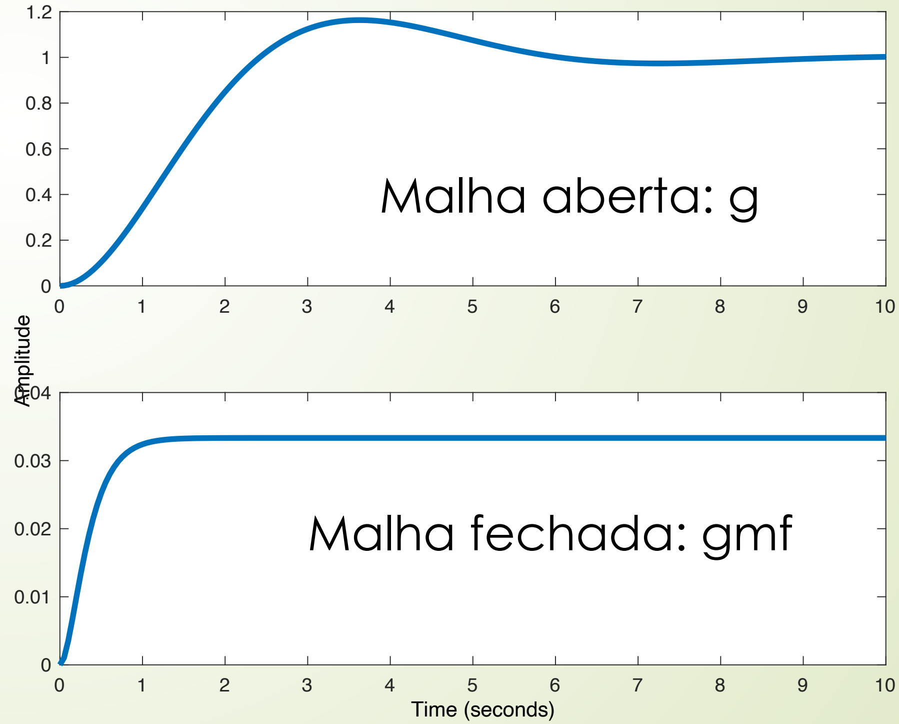
- Seja por exemplo o sistema mecânico com m=b=k=1,

```
>> s1=ss(a,b,c,0)

s1 =

  A =
        x1   x2
   x1    0    1
   x2   -1   -1

  B =
        u1
   x1    0
   x2    1

  C =
        x1   x2
   y1    1    0
```

- K=place(a,b,[-5 -6])
- smf=ss(a-b*K,b,c,0)
- gmf=tf(smf)
- step(g,gmf)

Vantagens e desvantagens da realimentação de estados

- Seja por exemplo o sistema mecânico com m=b=k=1,
- K=place(a,b,[-5 -6])
- smf=ss(a-b*K,b,c,0)
- gmf=tf(smf)
- step(g,gmf)



Vantagens e desvantagens da realimentação de estados

Cálculo do sinal de controle u(t);

```
M=ss(a-b*K,b,c,0)
[y,t,x]=step(M);
u=1-K*(x');
plot(t,u);
```

Quando um fator ρ for utilizando para corrigir o erro em regime, a simulação deve ser feita usando o comando lsim e aplicando uma entrada multplicada por ρ

Cálculo do sinal de controle com ρ

Novo cálculo do sinal de controle u(t);

```
M=ss(a-b*K,b,c,0)
[y,t]=step(M);


r=rho*ones(size(y));
[y,t,x]=lsim(M,r,t);
u=rho-K*(x');
plot(t,u);
```

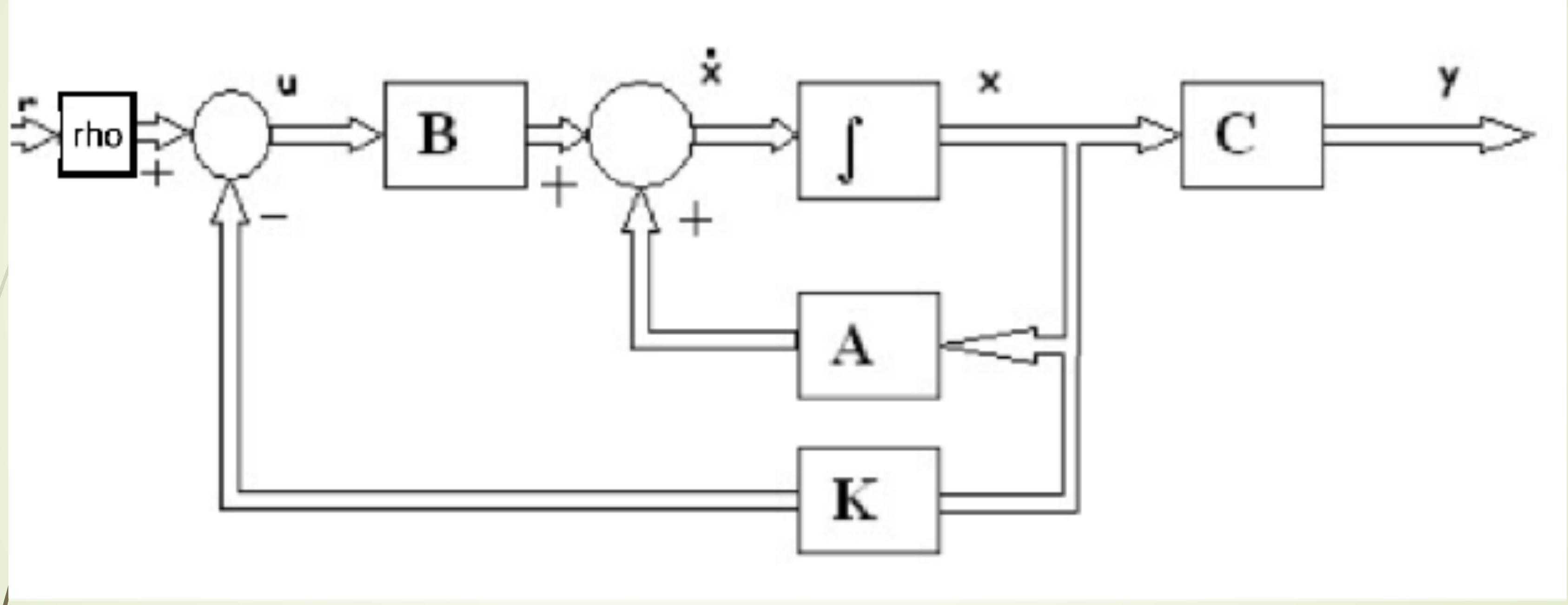
Referência vezes rho

$$u(t) = \rho r(t) - Kx(t)$$

Testando o sinal de controle:
M0=ss(a,b,c,0); malha aberta
y1=lsim(M0,u,t); U obtido em MF
plot(t,y,t,y1): devem ser iguais!

Cálculo do sinal de controle com ρ

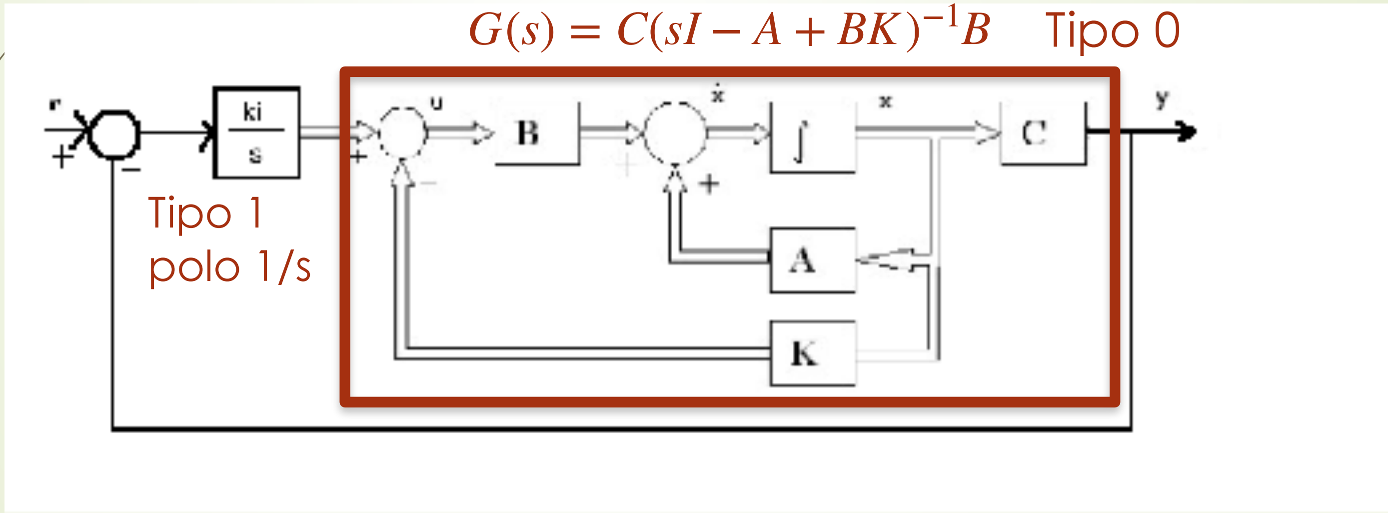
Olhando o diagrama



$$u(t) = \rho r(t) - Kx(t)$$

Controle via realimentação integral de estados

- Essa estratégia visa conseguir erro nulo em regime para entrada em degrau usando alimentação de estados.



FT de Malha aberta: $\frac{k_i}{s}G(s)$

Os polos de G(s) foram alocados no SPE pela matriz K

Realimentação integral de estados

$$u(t) = -Kx - kix_i = [K \quad ki]\begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_i = r(t) - y(t)$$

- Em MF,

$$\bar{x}(t) = (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix}$$

Realimentação integral de estados

- $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{K} = [K \quad ki]$

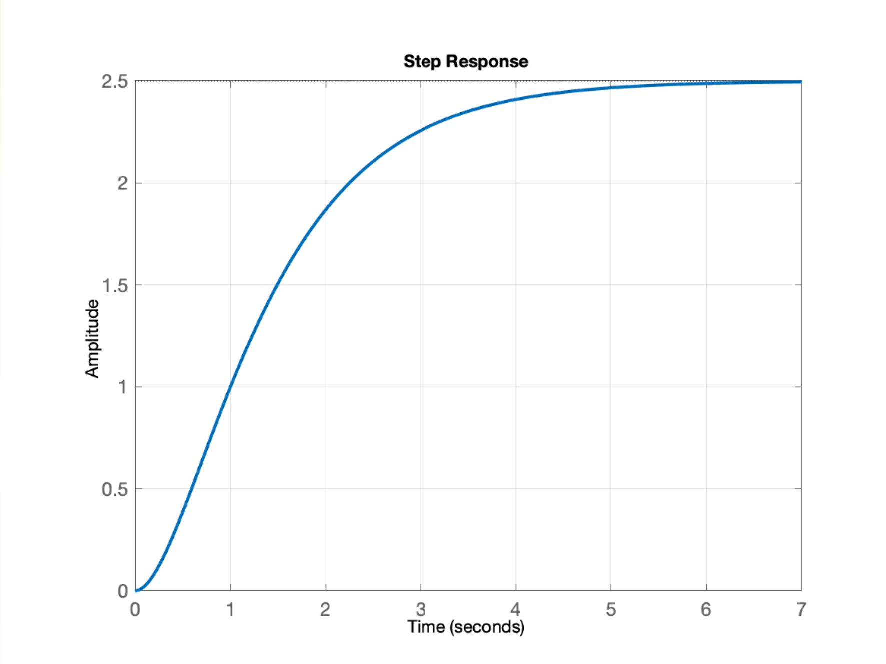
Se o par $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ for controlável,

os autovalores de $(\bar{A} - \bar{B}\bar{K})$ poderão ser livremente alocados.

- O integrador adiciona um polo a mais (um estado a mais) no sistema. Devido a isto, deve-se escolher mais um polo para ser alocado, que deve ser mais rápido que os demais.

Exemplo:

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)}$$



Deseja obter uma resposta com com UP<4% e Ts<2s

$$\zeta = 0.707$$

$$\omega_n = \frac{4}{Ts * \zeta} \geq 2.8$$

Polos de MF para obter UP e Ts:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 = -2 \pm j2$$

Exemplo:

Modelo em variáveis de estado de G(s):

$$\dot{x} = Ax + Bu \;=\; [0\,1;-2\;\;-3]x + [0;1]u$$

$$y = Cx = [0\,1]x$$

Sistema aumentado:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{K} = [K \quad ki]$$

```
A =

     0     1     0
    -3    -2     0
    -1     0     0

>> B=[b;0]

B =

     0
     1
     0
```

Exemplo:

K=place(A,B,[-2-2j -2+2j -10])=

46.0000   11.0000   80.0000

Escolheu-se o terceiro polo em -10, mais rápido que os outros 2.

Portanto, K1=46, K2=11, Ki=-80.

B1=[0;0;1];

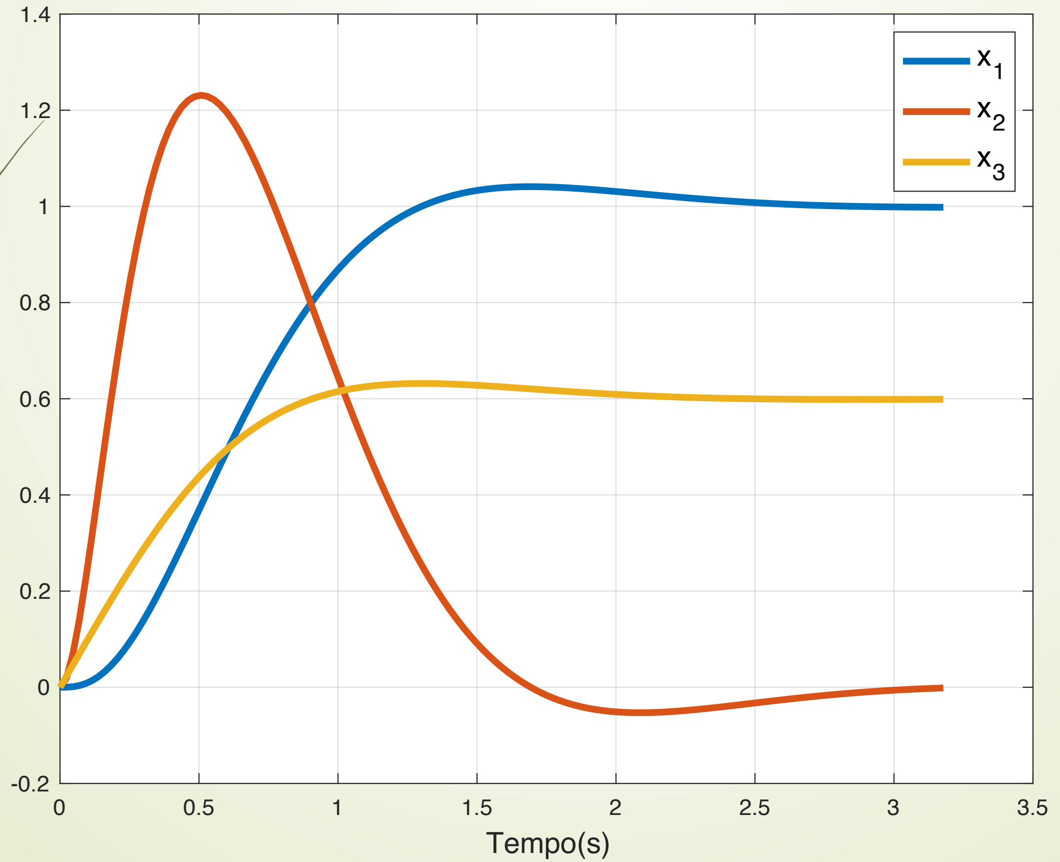
M=ss(A-B*K,B1,[c 0],0);

Exemplo

[y,t,x]=step(M);

plot(t,x);

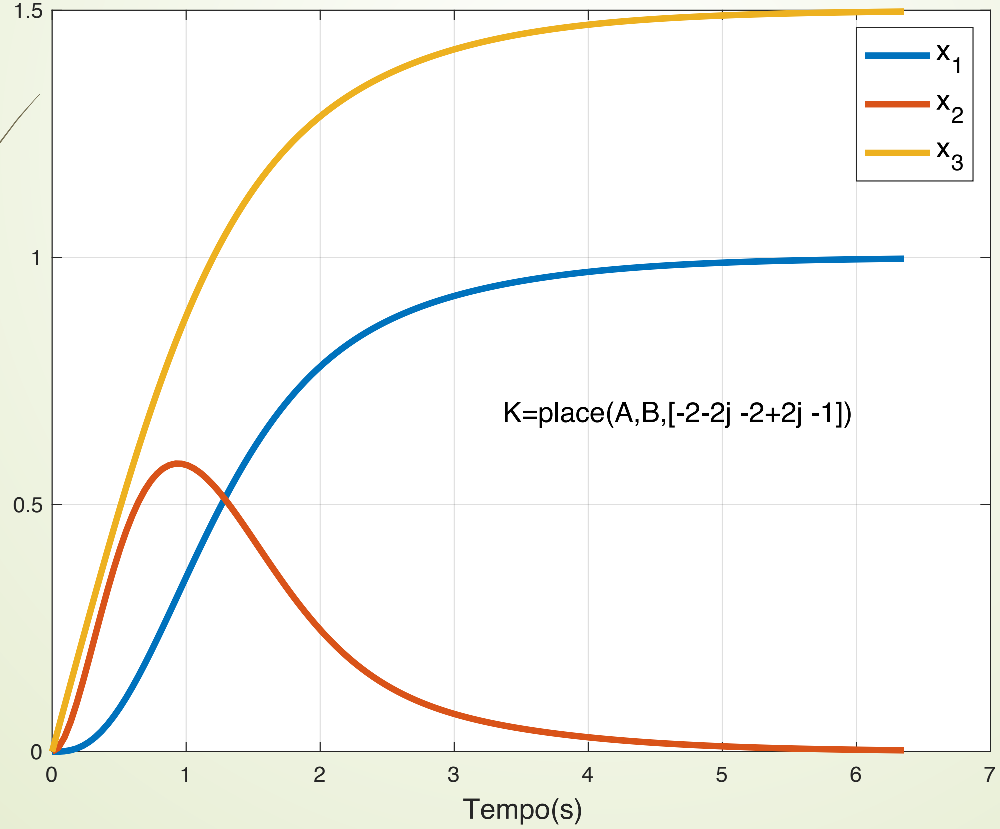
Polos de MF em {-2-2j, -2+2j, -10}



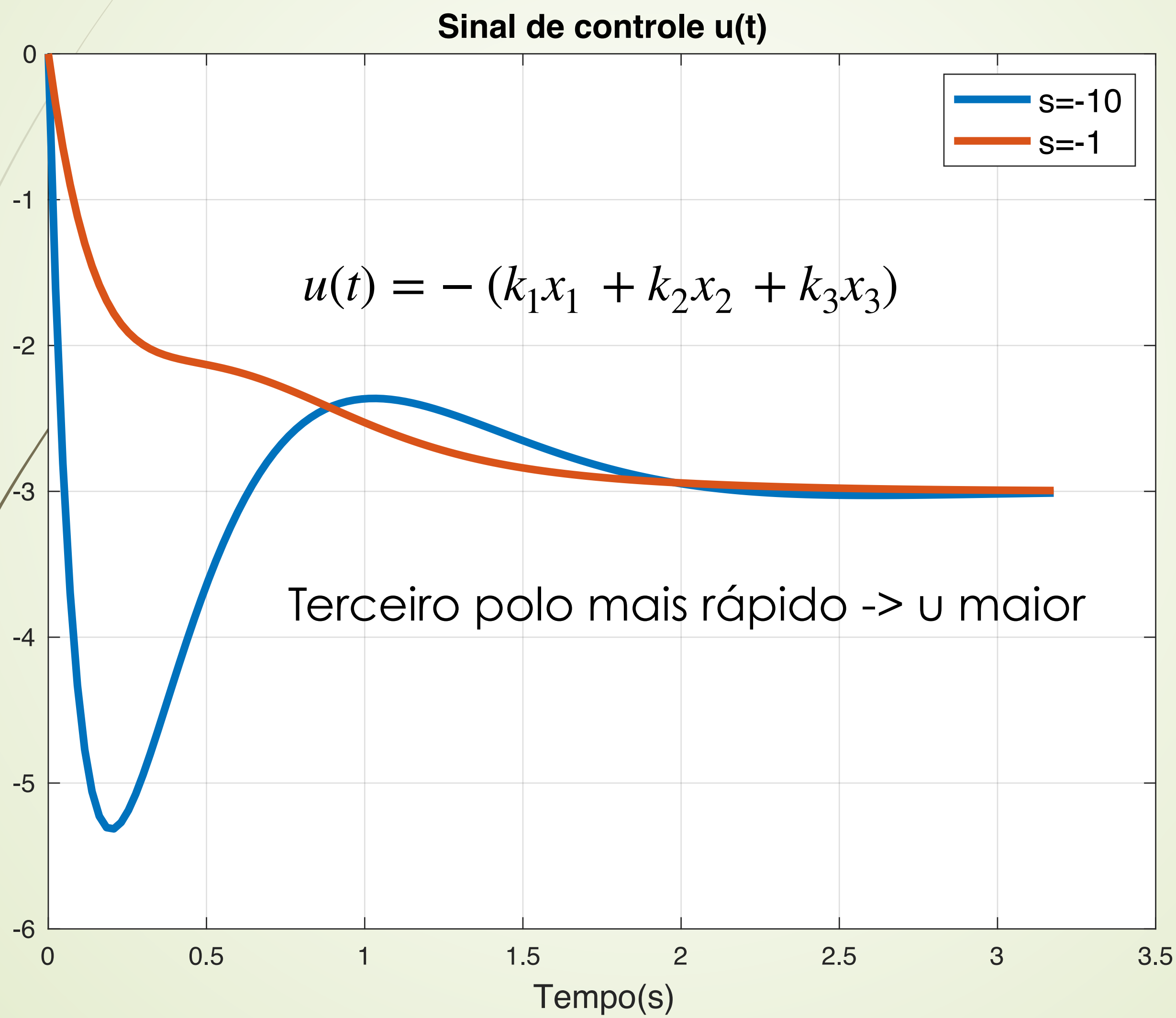
Exemplo

[y,t,x]=step(M); Polos de MF em {-2-2j, -2+2j, -1}

plot(t,x); Escolheu-se o terceiro polo em -1, mais lento que os outros 2.



Exemplo



$$u(t) = -\left(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3\right)$$

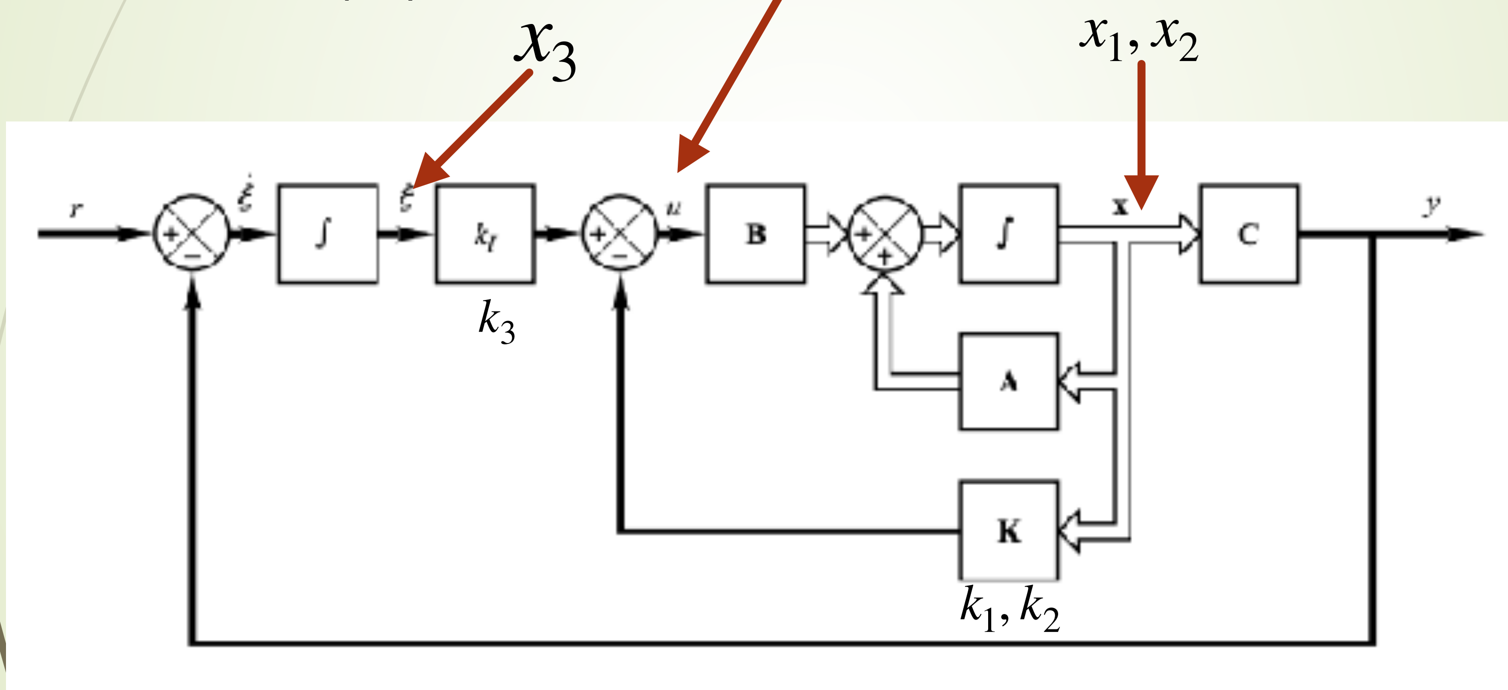
Terceiro polo mais rápido -> u maior

Exemplo

[y,t,x]=step(M);

plot(t,x);

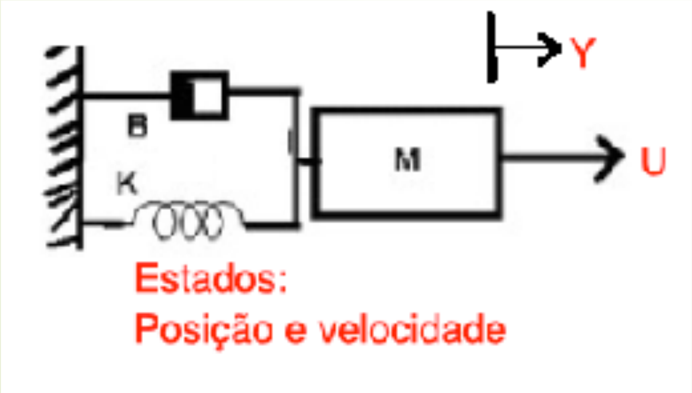
$$u(t) = -(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3)$$



Realimentação com observadores

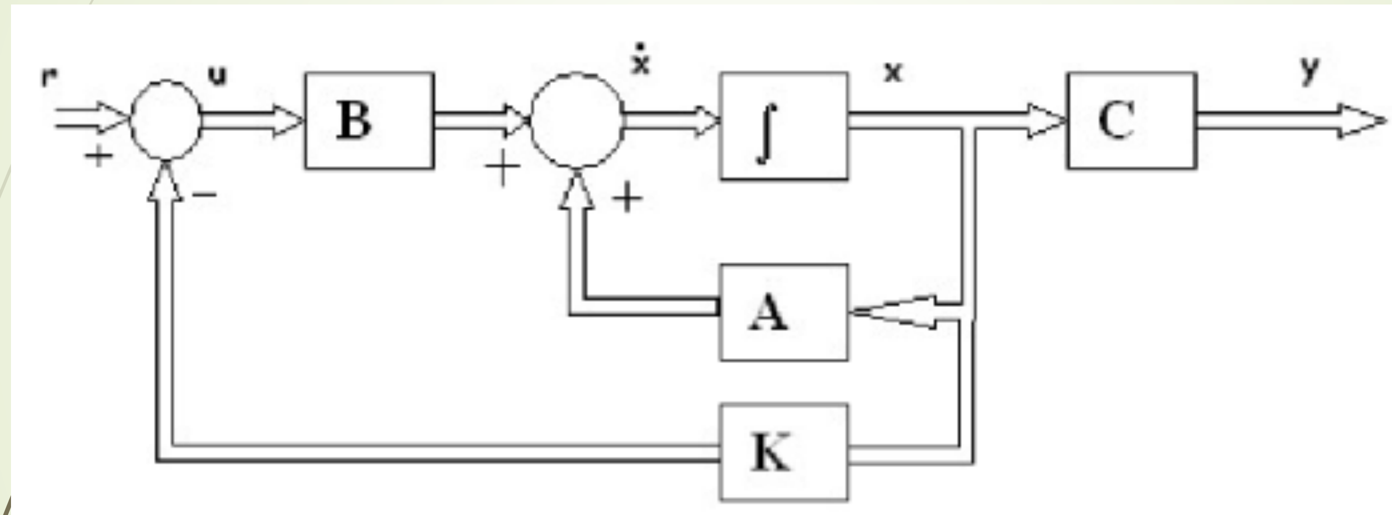
A realimentação de estados assume que os estados são medidos, e podem ser usados para controle.

Caso não sejam, devem ser estimados.



No sistema massa-mola, mede-se a posição. A velocidade pode ser estimada pela derivada da posição.

Necessidade de observadores



$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$u(t) = r(t) - Kx(t),$$

- Em geral, o estados não são todos medidos, e não está disponíveis para realimentação.

Observabilidade

Definição: o sistema é observável se for possível determinar o estado inicial x(0) a partir das informações de entrada u e de saída y, durante um tempo finito t.

Teste de observabilidade

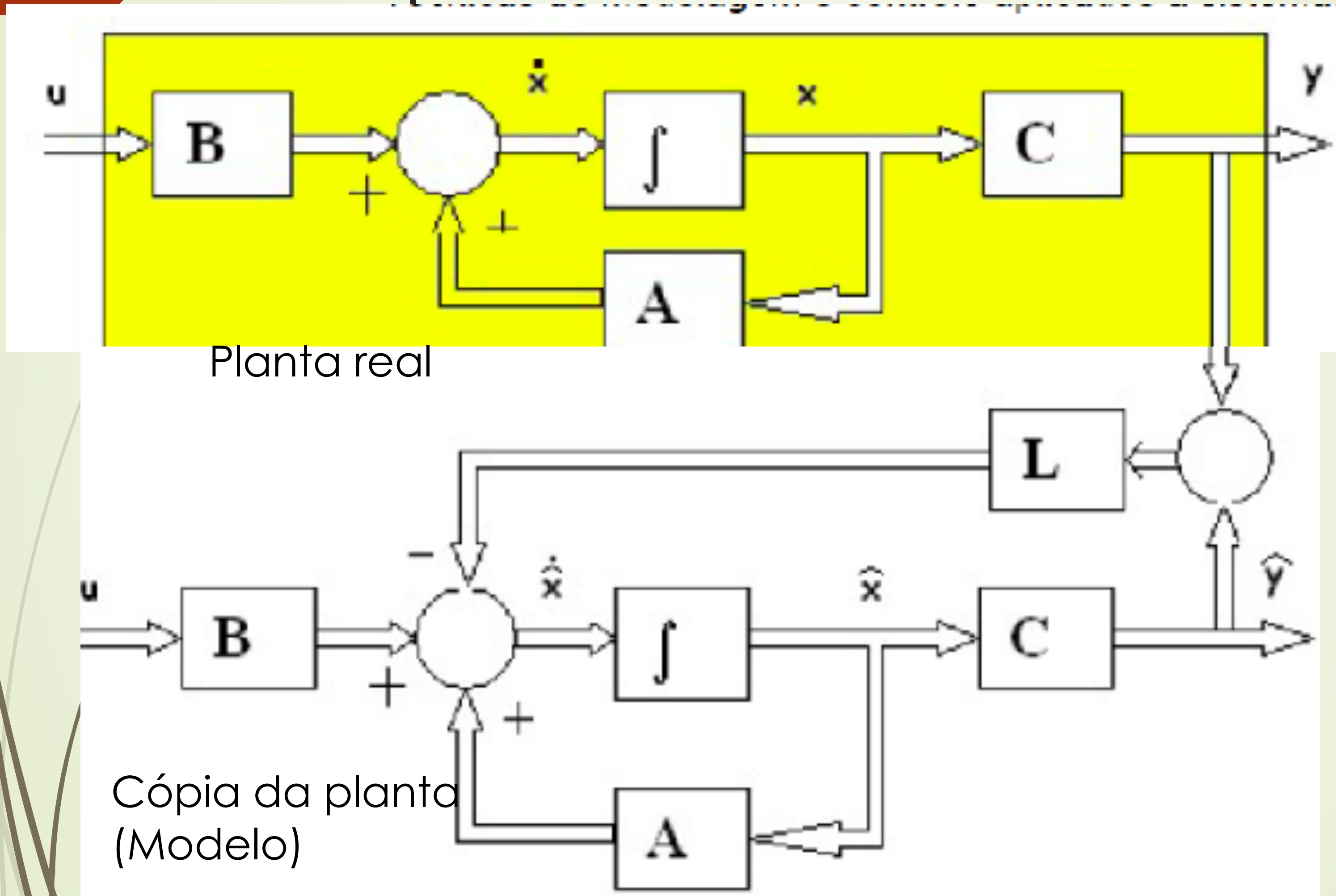
Seja W_o a matriz de observabilidade dada por

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \text{ onde n é a ordem do sistema.}$$

O sistema é dito ser observável se

$$posto[W_o] = n$$

Projeto do observador



Equação do observador

As equações do observador são

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})$$
$$\hat{y} = C\hat{x}$$

ou

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$
$$\hat{y} = C\hat{x}$$

Como calcular L?

Erro:

$$e = x - \hat{x}$$

e

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

$$\dot{e} = Ax + Bu - [(A - LC)\hat{x} + Ly + Bu]$$

$$\dot{e} = Ax + LC\hat{x} - A\hat{x} - Ly$$

$$\dot{e} = (A - LC)x + (A - LC)\hat{x}$$

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

$$e(t) = e^{(A-LC)t}e(0)$$

- O erro tende a zero se os autovalores da matriz A-LC tiverem parte real negativa.

Como calcular L?

Portanto, a matriz L deve ser calculada de modo que os autovalores de (A-LC) tenham parte real negativa.

Pode-se usar o comando place da seguinte forma:

L=place(A',C',polos)

L=L' (transposta)

Tem-se assim que eig(A-L*C)=polos.

Os polos do observador devem ser mais rápidos que a realimentação de estados.

Exemplo no Matlab

Seja o exemplo anterior, com

```
>> a=[1 1;0 -2];
>> b=[0;2];
>> l=[-1 -2];
>> k=place(a,b,l)
k =[ 3 1]
```

Cont...

Os polos do observador podem ser alocados para

>> lo=5*l=[-5 -10]   (5 vezes mais rápidos)

lo pode ser obtido através do comando place,

>>L=place(a',c',lo)

L =

14.0000 24.0000

>> eig(a-L*c)= [10.0000 -5.0000]

Controle ótimo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u(t) = -Kx(t)$$

$$J = \int_0^\infty (x^*Qx + u^*RU)dt$$

Controle ótimo!

K=lqr(A,B,Q,R)

Função do Matlab que obtêm o ganho K para as matrizes Q e R escolhidas.

Controle ótimo

Seja o modelo em variáveis de estado:

$$\dot{x} = Ax + Bu = [0\,1; -2\ -3]x + [0; 1]u$$

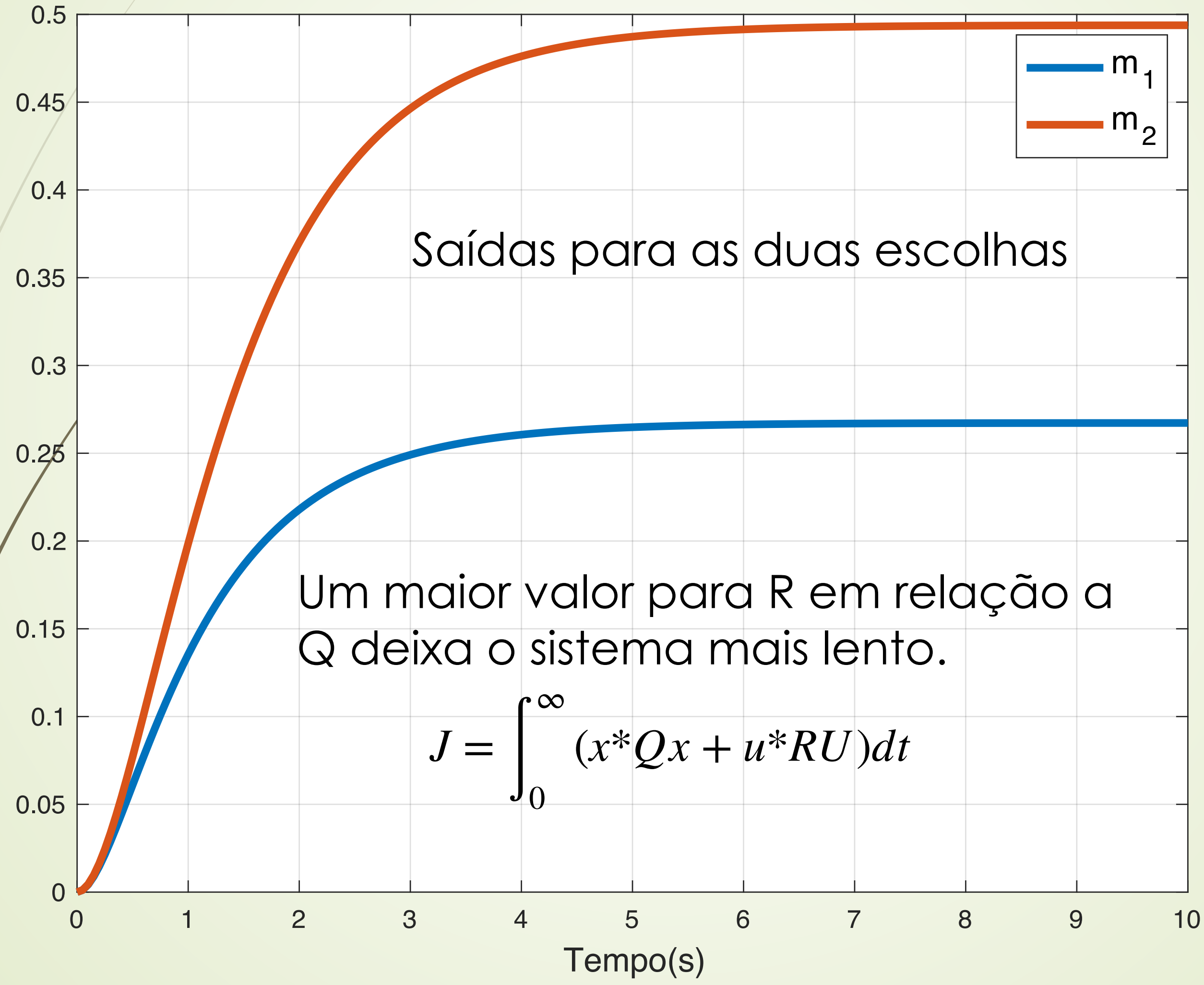
Escolhendo Q=10 e R=1, resulta
k1=lqr(a,b,10,1)=[1.7417 1.7417]

Escolhendo Q=11 e R=10, resulta
k2=lqr(a,b,1,10)=[0.0248 0.0248]

m1=ss(a-b*k1,b,[1 0],0)

m2=ss(a-b*k2,b,[1 0],0)

Controle ótimo

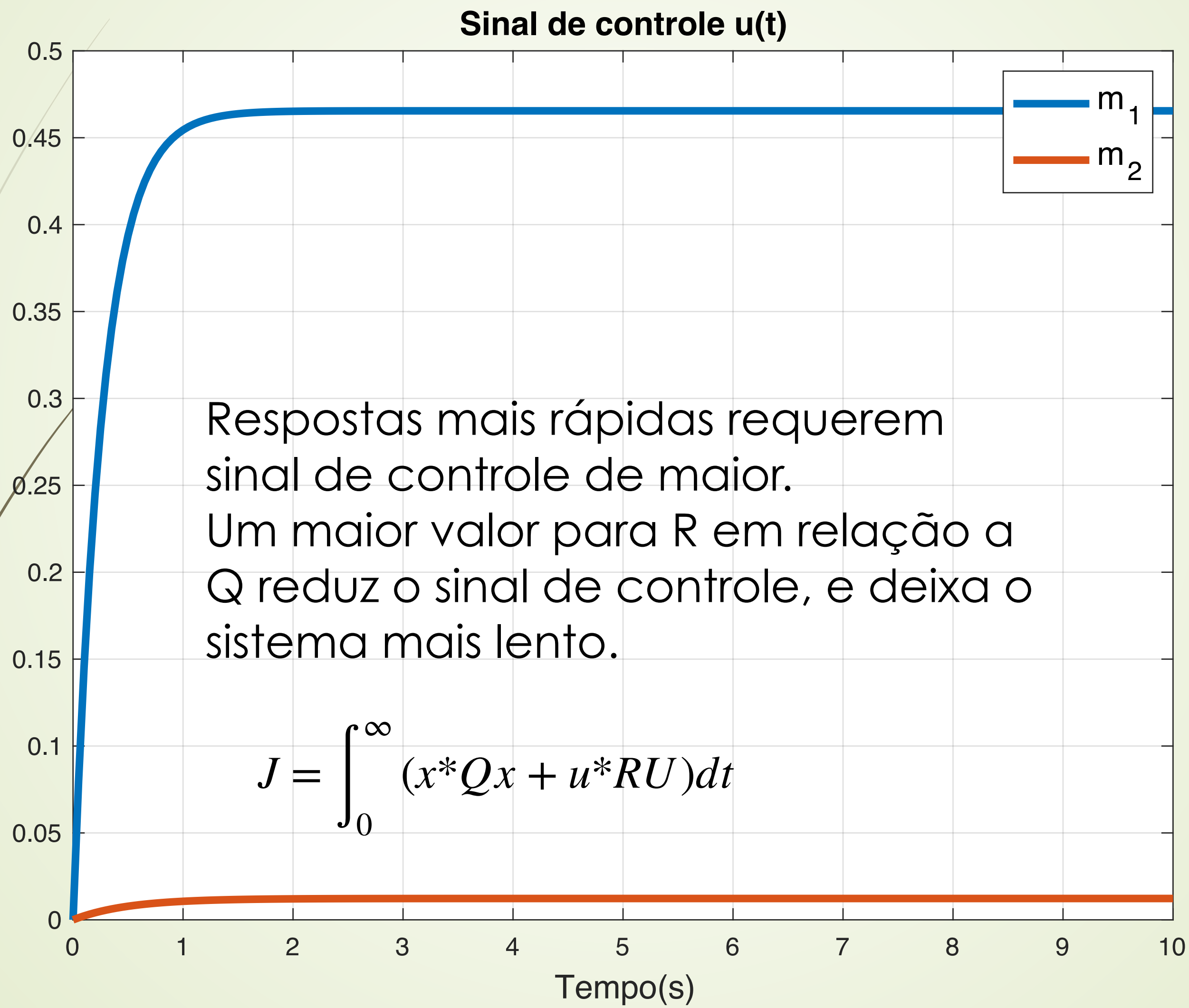


Saídas para as duas escolhas

Um maior valor para R em relação a Q deixa o sistema mais lento.

$$J = \int_0^\infty (x^*Qx + u^*RU)dt$$

Controle ótimo



Respostas mais rápidas requerem sinal de controle de maior.
Um maior valor para R em relação a Q reduz o sinal de controle, e deixa o sistema mais lento.

$$J = \int_0^\infty (x^*Qx + u^*RU)dt$$

Comentários finais sobre controle moderno:

1) A realimentação de estados permite estabilizar o sistema via realimentação de estados desde que ele seja controlável

2) A realimentação de estados só pode ser implementada se os estados puderem ser medidos ou observados (observabilidade)

3) O objetivo da realimentação de estados é estabilização, mas o erro em regime pode ser considerado adicionando um integrador ao sistema de controle.