Aula 19 Cálculo 3B | Aula 28 Cálculo 5A

Aula passada: Definição e cálculo

Aula Hoje: Transformada inversa

## 6.1 Definição da Transformada de Laplace

Queremos formalizar quando existe a transformada de Laplace de uma função.

**Exemplo** Calcule a transformada de $f(t) = \frac{1}{t}$, $t > 0$.

Solução:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot \frac{1}{t} \, dt$$

↳ os dois tipos de integral imprópria

$$= \lim_{v \to 0} \int_v^1 \underbrace{e^{-st} \cdot \frac{1}{t}}_{\text{partes}} dt + \underbrace{\lim_{u \to \infty} \int_1^u e^{-st} \cdot \frac{1}{t} \, dt}_{I_1}$$

$$= \lim_{v \to 0} \left[ -\frac{e^{-st}}{t} \Big|_v^1 + \int_v^1 e^{-st} \cdot \frac{1}{t^2} \, dt \right] + I_1$$

$$= \lim_{v \to 0} \underbrace{\frac{e^{-sv}}{t}}_{\to \infty} - \frac{e^{-s}}{t} + \int_v^1 e^{-st} \cdot \frac{1}{t^2} \, dt + I_1$$

→ ∞ independente do valor de s

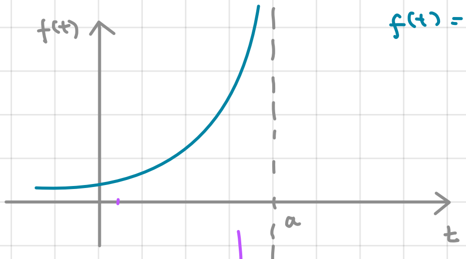
$= \nexists$ a integral diverge portanto não existe a transformada de Laplace de $f(t) = 1/t$.

Não é para todas funções que existe a transformada de Laplace.

**Definição 1** Uma função $f(t)$ é dita de ordem exponencial quando existem $c$, $M$ e $T$ tal que

$$\boxed{|f(t)| \leq M e^{ct} \quad \text{para } t > T}$$

→ isto é a função não cresce mais que uma exponencial



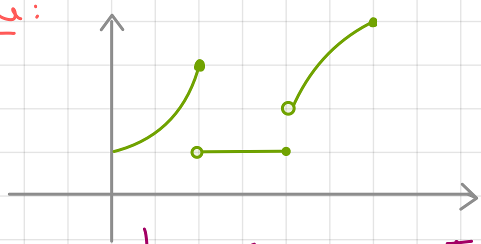

$f(t) = \frac{1}{a-t}$

↳ não tem ordem exponencial

**Teorema** (Condições para existir a TL)

Seja $f(t)$ uma função contínua por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial $c$ então $\mathcal{L}\{f(t)\}$ está definida para $s > c$

Recorde:



↳ contínua por partes.

## Transformada inversa de Laplace

↳ para solucionar certos tipos de equações precisamos também da inversa da transformada de Laplace

**Definição 2**

Se $F(s)$ representa a transformada de Laplace de uma função $f(t)$, isto é,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

dizemos que $f(t)$ é a Transformada inversa de Laplace de $F(s)$ e escrevemos

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} := f(t)}$$

**Exemplo**

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$ pois $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$

pois $\mathcal{L}\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$

pois $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

funções

$$\mathcal{L} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

$$f \longmapsto F$$

$$\mathcal{L}^{-1} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

$$F \longmapsto f$$

Queremos calcular mais transformadas inversas

**Propriedade 1**

A transformada e sua inversa são lineares isto é:

- $\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$
- $\mathcal{L}\{k f(t)\} = k\,\mathcal{L}\{f(t)\}$
- $\mathcal{L}^{-1}\{f(t)+g(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} + \mathcal{L}^{-1}\{g(t)\}$
- $\mathcal{L}^{-1}\{k f(t)\} = k\,\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\}$

Prova: segue das propriedades de integral

- $\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\,(f(t)+g(t))\,dt$

$$= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt + \int_0^\infty e^{-st}\, g(t)\,dt$$

$$= \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$$

**Atenção 1:**

→ primeiro ajuste para identificar a transformada inversa pode ser multiplicar e dividir por um número

**Exemplo** Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+4}\right\}$.

Solução:

Sabemos que $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\} = \dfrac{2}{s^2+4}$

pela propriedade

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$$

**Exemplo** Calcule as transformada inversa

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2+4}\right\}$

Solução:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s+4} + \frac{1}{s^2+4}\right\}$$

→ prop 1

$$= \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s+4}\right\}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}}$$

$$\cos 2t + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$\boxed{\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t}$$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{20e^{-s}-3}{s}\right\}, \; s>0$

Solução

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{20e^{-s}}{s} - \frac{3}{s}\right\} = 20\,\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s}\right\}} - 3\,\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}}$$

$$= \boxed{20u_1(t) - 3}$$

**Propriedade 2**

Seja $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ para $s > a \geq 0$ e c uma constante.

(6.3.1) $\mathcal{L}\{u_c(t).f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}$

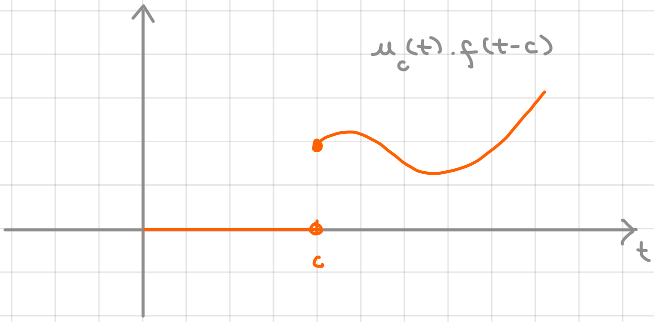
$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}.F(s)\} = u_c(t)f(t-c)$$

(6.3.2) $\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s-c)$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\} = e^{ct}f(t)$$




**Prova** :

6.3.1)

• $\mathcal{L}\{u_c(t).f(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-st}.u_c(t).f(t-c)\,dt$

$$= \lim_{u\to\infty} \int_0^c e^{-st}.0.\cancel{f(t-c)dt} + \int_c^u e^{-st}.f(\underbrace{t-c}_{\tau})\,dt$$

substituição

$d\tau = dt$

$t=0 \rightarrow \tau = c$

$$\lim_{u\to\infty}\int_0^{u+c} e^{-s(\tau+c)}.f(\tau).d\tau$$

$$= e^{-sc}\lim_{u\to\infty}\int_0^{u+c} e^{-s\tau}.f(\tau)d\tau = e^{-sc}\int_0^\infty e^{-s\tau}.f(\tau)d\tau$$

$$= e^{-sc}.\mathcal{L}\{f(t)\}$$

portanto

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-sc}.F(s)\} = u_c(t).f(t-c)$$

6.3.2)

$$\mathcal{L}\{e^{ct}.f(t)\} = \lim_{u\to\infty}\int_0^u e^{-st}.e^{ct}.f(t).dt$$

$$= \lim_{u\to\infty}\int_0^u e^{-(s-c)t}.f(t).dt$$

$$= F(s-c)$$

**Exemplo** : Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-1)^3}\right\}$

Solução

• $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = t^2$

• $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\} = e^{ct}.f(t)$

sabemos

↳ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-1)^3}\right\} = 2.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-\underbrace{1}_{c})^3}\right\}$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-1)^3}\right\} = 2e^{t}.t^2}$$

**Atenção 2** Completar quadrado para reconhecer a translação

**Exemplo** : Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4s+5}\right\}$

Solução : Completar quadrados!

• $s^2-4s+5 = (s-2)^2+1$

• $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \text{sen}\,t$

Note que $\frac{1}{(s-2)^2+1} = F(s-2)$ ) translação

onde $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$$\boxed{\text{Então } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2+1}\right\} = e^{2t}.\text{sen}\,t}$$

**Exemplo** Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s e^{-\frac{\pi}{4}\cdot s}}{s^2+1}\right\}$

Solução

• $\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-cs}\cdot F(s)\right\} = u_c(t)\cdot f(t-c)$

• $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t$

Então

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\frac{\pi}{4}s}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right\} = u_{\frac{\pi}{4}}(t)\cdot\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)}$$

**Atenção 3** Decompor em raízes e frações parciais

**Recorde:**

**Exemplo**

a) Raízes reais:

$$\frac{x-3}{x^2+2x-3} \qquad \frac{x-3}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)}$$

b) Raízes complexas

$$\frac{x-3}{(x^2+1)(x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+3}$$

**Exemplo:** Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-s+2}\right\}$

Solução

• as raízes de $s^2-s+2=0$ são $s=-1$ e $s=2$

podemos escrever

$$s^2-s+2 = (s-2)(s+1)$$

Frações parciais

$$\frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s+1)}$$

$$= \frac{A(s+1)+B(s-2)}{(s-2)(s+1)} = \frac{(A+B)s+(A-2B)}{(s-2)(s+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A-2B=-1 \end{cases} \quad A=\frac{1}{3}, \; B=\frac{2}{3}$$

Assim

$$\frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{1/3}{(s-2)} + \frac{2/3}{(s+1)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-2)(s+1)}\right\} = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-2)(s+1)}\right\} = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}}$$

**Exemplo** Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{(s^2+4)(s^2+1)}\right\}$

Solução:

Frações parciais:

porque o termo de baixo é irredutível

$$\frac{2s+1}{(s^2+1)(s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$= \frac{As^3+Bs^2+As+B+Cs^3+Ds^2+4Cs+4D}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

$$= \begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A+4C=2 \\ B+4D=1 \end{cases} \quad \begin{matrix} 3C=2 & C=3/2 & A=-3/2 \\ 3D=1 & D=1/3 & B=-1/3 \end{matrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-3/2\, s}{s^2+4} + \frac{-1/3}{s^2+4} + \frac{3/2\, s}{s^2+1} + \frac{1/3}{s^2+1}\right\}$$

$$-\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{2\cdot 3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}$$

$$+\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\boxed{= -\frac{3}{2}\cos 2t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2t + \frac{3}{2}\cos t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} t}$$

RESUMO :

a) $\mathcal{L}^{-1}$ é linear

b) completar quadrados
frações parciais

c) As propriedades de translação

d) atenção multiplicar e dividir pelo mesmo número