Algoritmos Numéricos 2^a edição

Capítulo 2: Sistemas lineares

Capítulo 2: Sistemas lineares

Conceitos fundamentais

- Matriz é um conjunto de elementos dispostos em forma retangular.
- Tamanho ou dimensão de uma matriz definido pelo número de linhas e colunas.
- Matriz com m linhas e n colunas é dita ser $m \times n$ e se $m = n$, então ela é quadrada de ordem m.
- Elementos da matriz delimitados por colchetes ou parênteses

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

- Elemento referenciado por dois índices:
  – o primeiro indica a linha e o segundo a coluna onde está o elemento.

Alguns tipos de matrizes

- Coluna: $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$.

- Linha: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix}$.

- Nula: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

Alguns tipos de matrizes

- Diagonal: $\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$.

- Identidade: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

Alguns tipos de matrizes

- Triangular inferior: $\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}$.

- Triangular superior: $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1m} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2m} \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix}$.

Alguns tipos de matrizes

- Densa: $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -9 \\ 5 & 8 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 6 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

- Esparsa: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

- Simétrica: $m_{ij} = m_{ji}$, $\forall\, i, j$, ou seja, $M = M^T$.

Exemplo 1 A matriz simétrica M e sua transposta M^T

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 9 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 9 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Transposição

- Transposta A^T da matriz A é obtida trocando-se as linhas pelas colunas.

Exemplo 2 A transposição da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 6 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Adição e subtração

- $C = A + B$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall\ i, j$.

Exemplo 3 As operações de adição e subtração das matrizes A e B

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ C = A + B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 1 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \text{ e } D = A - B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Multiplicação por escalar

- $B = kA$, tal que $b_{ij} = ka_{ij}$, $\forall\ i, j$.

Exemplo 4 O produto de matriz por escalar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Multiplicação Matriz-vetor

- A $(n \times m)$ multiplicada por v $(m \times 1) = x$ $(n \times 1)$, de forma que

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j, \ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Exemplo 5 O produto de matriz por vetor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \ v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow x = Av = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Multiplicação Matriz-Matriz

- $A\ (n \times p)$ multiplicada por $B\ (p \times m) = C = AB\ (n \times m)$, tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj},\ i = 1, 2, \ldots, n \ \text{ e } \ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Exemplo 6 O produto de matriz por matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow C = AB = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 41 & 48 \end{bmatrix}.$$

Multiplicação por matriz diagonal

- Pré-multiplicação de uma matriz A por uma matriz diagonal D:

$$\begin{bmatrix} d_{11} & & \\ & d_{22} & \\ & & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}a_{11} & d_{11}a_{12} & d_{11}a_{13} \\ d_{22}a_{21} & d_{22}a_{22} & d_{22}a_{23} \\ d_{33}a_{31} & d_{33}a_{32} & d_{33}a_{33} \end{bmatrix}.$$

- Pós-multiplicação de uma matriz A por uma matriz diagonal D:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & & \\ & d_{22} & \\ & & d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_{11} & a_{12}d_{22} & a_{13}d_{33} \\ a_{21}d_{11} & a_{22}d_{22} & a_{23}d_{33} \\ a_{31}d_{11} & a_{32}d_{22} & a_{33}d_{33} \end{bmatrix}.$$

Produtos vetoriais

- Produto interno:

$$k = x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

- Produto externo:

$$M = xy^T = \begin{bmatrix} x_1 y_1 \cdots x_1 y_m \\ \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ x_n y_1 \cdots x_n y_m \end{bmatrix}; m_{ij} = x_i y_j,\ i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m.$$

Exemplo 7 O produto interno e externo de dois vetores

$$x = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \longrightarrow k = x^T y = 10 \text{ e } M = xy^T = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 20 \\ -1 & -3 & -4 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Determinante

- Valor pode ser obtido pela fórmula de recorrência

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(M_{1n}).$$

- Particularmente,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = a_{11},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \text{ e}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}). \tag{1}$$

- Matriz A é singular se $\det(A) = 0$.

Determinante

Exemplo 8 O determinante de uma matriz de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = 2 \times 5 - 4 \times 1 = 6.$$

Posto

- Seqüência de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ linearmente dependente

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = 0.$$

- Escalares α_1, α_2, $\ldots$, α_p, não todos nulos.
- Vetores $v_1, v_2, \ldots, v_p$ linearmente independentes se a igualdade acima só se verificar com os α_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ iguais a zero.
- Posto da matriz A $(m \times n)$: número máximo de vetores linhas ou de vetores colunas de A que são linearmente independentes.
- $\text{posto}(A) \leq \min(m, n)$.

Posto

Exemplo 9 Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & -2 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -7 & 8 & 0 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Linhas 2 e 4 são obtidas pela combinação linear das linhas 1 e 3, pois

$$\text{linha } 2 = \text{linha } 1 + \text{linha } 3$$

$$\text{linha } 4 = 2(\text{linha } 1) - \text{linha } 3.$$

Linhas 1, 3 e 5 são linearmente independentes.

$$\text{posto}(A) = 3.$$

Traço

- Soma dos elementos da diagonal principal

$$\text{traço}(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemplo 10 A matriz $M = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

tem $\text{traço}(M) = 5 + 3 + 9 = 17.$

Inversa

- A inversa da matriz quadrada A de ordem n é A^{-1} tal que
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$
- Lei comutativa existe para o produto de uma matriz por sua inversa.

Exemplo 11 Uma matriz A e sua inversa A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix},\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Operações com transposta e inversa

- $(A^T)^T = A$.
- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-T}$.
- Se $A = BCD$, então $A^T = D^T C^T B^T$ e $A^{-1} = D^{-1} C^{-1} B^{-1}$.
- $(A + B)^T = A^T + B^T$.
- $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

Noções sobre autovalores e autovetores

- Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$$

- e a igualdade

$$\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- A matriz A possui um autovalor $\lambda = 2$ e um correspondente autovetor $v = [1 \ \ 2]^T$.
- Também é verdade para $\lambda = 4$ e $v = [2 \ \ 3]^T$

$$\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- Relação fundamental de uma matriz A de ordem n com seus n autovalores λ e os correspondentes autovetores v

$$Av = \lambda v. \tag{2}$$

Problema do autovalor

- Solução não trivial (ou não nula) do sistema homogêneo

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Teorema 1 *Se M for uma matriz de ordem n, então o sistema homogêneo $My = 0$ tem solução não trivial se, e somente se, M for singular.*

- Pelo Teorema 1 e sabendo que uma matriz singular tem determinante nulo, então

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{3}$$

Exemplo

Exemplo 12 Para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 10-\lambda & -4 \\ 12 & -4-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0,$$

$$= (10-\lambda)(-4-\lambda) - 12(-4) = 0,$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 8,$$

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0.$$

Autovalores

- Valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$ são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$.
- Para $\lambda = 2$

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - 2I) = \det\left(\begin{bmatrix} 10 - 2 & -4 \\ 12 & -4 - 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(A - 2I) = 8 \times -6 - 12 \times -4 = 0.$$

- Para $\lambda = 4$

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - 4I) = \det\left(\begin{bmatrix} 10 - 4 & -4 \\ 12 & -4 - 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(A - 4I) = 6 \times -8 - 12 \times -4 = 0.$$

- Para $\lambda \neq 2$ ou $\lambda \neq 4$, por exemplo, $\lambda = 1$

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - I) = \det\left(\begin{bmatrix} 10 - 1 & -4 \\ 12 & -4 - 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(A - I) = 9 \times -5 - 12 \times -4 = 3 \neq 0.$$

Polinômio característico

- Determinante (3) é da forma

$$D_n(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

$$D_n(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}\right). \quad (4)$$

- Polinômio $D_n(\lambda)$ de grau n é chamado de polinômio característico de A.
- Os n zeros λ_i de $D_n(\lambda)$ são os autovalores de A.

Expansão do polinômio característico

- Expandindo o determinante para $n = 3$

$$D_3(\lambda) = -\lambda^3 + [a_{11} + a_{22} + a_{33}]\lambda^2 -$$

$$[(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})]\lambda +$$

$$[a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})].$$

- $D_3(\lambda) = d_3\lambda^3 + d_2\lambda^2 + d_1\lambda + d_0$.
- $d_{n-1} = d_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \text{traço}(A)$.
- $d_0 = \det(A)$, conforme (1).

Relações de Girard

- Relações entre raízes e coeficientes de uma equação algébrica

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -\frac{d_{n-1}}{d_n} \text{ e}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = (-1)^n \frac{d_0}{d_n}.$$

- Soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz (traço) é igual à soma dos seus autovalores

$$\text{traço}(A) = -\frac{d_{n-1}}{d_n} \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

- Determinante de uma matriz é igual ao produto dos seus autovalores

$$\det(A) = (-1)^n \frac{d_0}{d_n} \longrightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Exemplo

Exemplo 13 Para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$$

tem-se que

$$\text{traço}(A) = 10 + (-4) = 6 = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 + 4 \ \text{ e}$$

$$\det(A) = 10(-4) - 12(-4) = 8 = \lambda_1 \lambda_2 = 2 \times 4.$$

Propriedades do polinômio característico

- Uma matriz com elementos reais tem seu polinômio característico com coeficientes reais.
- Se os coeficientes de uma equação algébrica forem reais, então suas raízes complexas serão complexos conjugados em pares.
- Uma matriz com elementos reais tem autovalores reais e/ou complexos conjugados em pares.

Exemplo

Exemplo 14 Calcular os autovalores da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

- Por (4), o polinômio característico é

$$D_2(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 2 \times 2,$$
$$D_2(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

- Zeros do polinômio característico $D_2(\lambda)$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2. \end{cases}$$

- Verifica-se que

$$\text{traço}(A) = 2 + (-1) = 1 = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i = 3 + (-2) \quad \text{e}$$
$$\det(A) = 2(-1) - 2 \times 2 = -6 = \prod_{i=1}^{2} \lambda_i = 3 \times (-2).$$

Cálculo de autovalores via polinômios característicos

- Esquematicamente simples.
- Computacionalmente ineficiente.
- Métodos baseados em transformações ortogonais.

Forma quadrática

- Seja A uma matriz simétrica de ordem n com autovalores λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ e v um vetor qualquer não nulo de tamanho n.
- Forma quadrática de A é o escalar

$$q = v^T A v, \ \forall \ v \neq 0.$$

- A matriz pode ter diferentes nomes dependendo do valor da forma quadrática.

Valores da forma quadrática

|⇐

Forma quadrática	Nome de A	Autovalores de A
$v^T Av > 0$	definida positiva	$\lambda_i > 0$
$v^T Av \geq 0$	semidefinida positiva	$\lambda_i \geq 0$
$v^T Av < 0$	definida negativa	$\lambda_i < 0$
$v^T Av \leq 0$	semidefinida negativa	$\lambda_i \leq 0$

- Matriz indefinida: quando não for enquadrada em nenhum dos nomes acima.
- Autovalores, no caso, podem ser negativos, nulos e positivos.

Propriedades dos autovalores

- Considerando que $\det(A) = \det(A^T)$, então os autovalores λ de A, representados por $\lambda(A)$, são iguais a $\lambda(A^T)$.
- Se A for uma matriz triangular de ordem n, então, por (4)

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) = 0.$$

Os autovalores de uma matriz triangular ou diagonal são iguais aos elementos da diagonal principal.

- O posto de uma matriz quadrada é igual ao número de autovalores não nulos.
- Se λ_i são os autovalores de A, então λ_i^{-1} são os autovalores de A^{-1}

$$A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v,$$

$$Iv = \lambda A^{-1}v \longrightarrow A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v.$$

Exemplo

Exemplo 15 Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Então

- Autovalores de $A : \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 5.$
- Posto de $A = 3$.
- Autovalores de $A^{-1} : \tau_1 = \lambda_1^{-1} = 0{,}5; \quad \tau_2 = \lambda_2^{-1} = 1; \quad \tau_3 = \lambda_3^{-1} = 0{,}2.$
- Sendo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}7 \\ 0 & 1 & -0{,}6 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \end{bmatrix}.$$

Normas

- Expressar a magnitude de um vetor ou de uma matriz por meio de um escalar.
- Normas vetoriais definidas em termos da norma-p

$$\boxed{\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}}.$$

Normas vetoriais mais comuns

- Norma-1 ou norma de soma de magnitudes

$$\boxed{\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|}.$$

- Norma-2 ou norma Euclidiana

$$\boxed{\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}}.$$

- Norma-∞ ou norma de máxima magnitude

$$\boxed{\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} = \max_{1\le i\le n} |x_i|}.$$

Condições das normas vetoriais

- Norma vetorial é uma função $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, que associa um número real a cada vetor.
- Satisfaz às condições

$$\|x\| \geq 0 \text{ e } \|x\| = 0 \text{ se, e somente se, } x = 0,$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ e}$$

$$\|kx\| = |k|\|x\|,$$

onde $x,\ y \in \mathbb{C}^n$ são vetores e $k \in \mathbb{C}$ é um escalar.

Exemplo de normas vetoriais

Exemplo 16 Calcular as normas 1, 2 e ∞ do vetor $x = [3 \;\; -5 \;\; 1]^T$.

$$\|x\|_1 = |3| + |-5| + |1| \leadsto \|x\|_1 = 9,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|3|^2 + |-5|^2 + |1|^2} \leadsto \|x\|_2 = \sqrt{35} \approx 5{,}9161 \text{ e}$$

$$\|x\|_\infty = \max(|3|, |-5|, |1|) \leadsto \|x\|_\infty = 5.$$

Exemplo de normas vetoriais

Exemplo 17 Calcular as normas 1, 2 e ∞ do vetor $v = [1 \ \ -3 \ \ 4{+}3i \ \ 4{-}3i]^T$.

$$\|v\|_1 = |1| + |-3| + |4{+}3i| + |4{-}3i| = 1 + 3 + 5 + 5 \leadsto \|v\|_1 = 14,$$

$$\|v\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |-3|^2 + |4{+}3i|^2 + |4{-}3i|^2} \leadsto \|v\|_2 = \sqrt{60} \approx 7{,}7460 \text{ e}$$

$$\|v\|_\infty = \max(|1|, |-3|, |4{+}3i|, |4{-}3i|) \leadsto \|v\|_\infty = 5.$$

Condições das normas matriciais

- Satisfazem às condições

$$\|A\| \geq 0 \text{ e } \|A\| = 0 \text{ se, e somente se, } A = 0,$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \text{ e}$$

$$\|kA\| = |k|\|A\|,$$

onde as matrizes A e $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e $k \in \mathbb{C}$ é um escalar.

Normas matriciais mais comuns de $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$

- Norma-1 ou norma de soma máxima de coluna

$$\boxed{\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|}.$$

- Norma-∞ ou norma de soma máxima de linha

$$\boxed{\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}.$$

- Norma de Frobenius

$$\boxed{\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}}.$$

Normas matriciais mais comuns de $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$

- Norma-2 ou norma espectral

$$\boxed{\|A\|_2 = \begin{cases} \lambda_{\max} & \text{se} \quad A = A^T \\ \sigma_{\max} & \text{se} \quad A \neq A^T \end{cases}} \tag{5}$$

onde

- $\lambda_{\max}$ é o maior autovalor de A em módulo e
- $\sigma_{\max}$ é o maior valor singular de A, sendo $\sigma_{\max} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$ (raiz quadrada do maior autovalor em módulo da matriz A^TA).

Normas consistentes e subordinadas

- Uma norma matricial $\|A\|$ é dita consistente com uma norma vetorial $\|x\|$ se, para qualquer matriz A $(m \times n)$ e vetor x $(n \times 1)$

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|.$$

- Uma norma matricial consistente $\|A\|$ é dita subordinada a uma norma vetorial $\|y\|$ se para qualquer matriz A $(m \times n)$ existe um vetor y $(n \times 1)$, $y \neq 0$, tal que

$$\|Ay\| = \|A\|\|y\|.$$

- Se a norma for subordinada, então

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

- As normas matriciais 1, 2 e ∞ são consistentes e subordinadas às respectivas normas vetoriais.

- A norma de Frobenius é consistente, mas não subordinada à norma-2 vetorial.

Exemplo de normas matriciais

Exemplo 18 Calcular as normas 1, ∞, F e 2 da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\|A\|_1 = \max(|2| + |3|, |-1| + |5|) = \max(5, 6) \leadsto \|A\|_1 = 6,$$

$$\|A\|_\infty = \max(|2| + |-1|, |3| + |5|) = \max(3, 8) \leadsto \|A\|_\infty = 8,$$

$$\|A\|_F = \sqrt{|2|^2 + |-1|^2 + |3|^2 + |5|^2} \leadsto \|A\|_F = \sqrt{39} \approx 6{,}2450 \text{ e}$$

$$\|A\|_2 = \max\left(\sqrt{\lambda(A^T A)}\right) = \max(2{,}2284;\ 5{,}8339) \leadsto \|A\|_2 = 5{,}8339.$$

Exemplo de normas matriciais

Exemplo 19 Calcular as normas 1, ∞, F e 2 da matriz $B = \begin{bmatrix} 3+4i & -2i \\ 3-4i & 9 \end{bmatrix}$.

$$\|B\|_1 = \max(|3+4i| + |3-4i|, |-2i| + |9|) = \max(10, 11) \leadsto \|B\|_1 = 11,$$

$$\|B\|_\infty = \max(|3+4i| + |-2i|, |3-4i| + |9|) = \max(7, 14) \leadsto \|B\|_\infty = 14,$$

$$\|B\|_F = \sqrt{|3+4i|^2 + |-2i|^2 + |3-4i|^2 + |9|^2} \leadsto \|B\|_F = \sqrt{135} \approx 11{,}6190 \text{ e}$$

$$\|B\|_2 = \max\left(\sqrt{\lambda(B^T B)}\right) = \max(5{,}2831;\ 10{,}3484) \leadsto \|B\|_2 = 10{,}3484.$$

Sistemas de equações lineares

- Conjunto de m equações polinomiais com n variáveis x_i de grau 1

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\vdots \qquad\qquad &\vdots \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}$$

- Forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Sistemas de equações lineares

- $Ax = b$, onde A é a matriz dos coeficientes, x é o vetor solução e b é o vetor dos termos independentes.
- Se A for uma matriz quadrada $(n \times n)$ não singular

$$Ax = b \longrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \longrightarrow x = A^{-1}b.$$

Classificação de sistemas: forma da matriz

- **Sobredeterminado**: têm-se mais equações do que incógnitas

$$A\ (m \times n),\ m \geq n \text{ e posto}(A) = n.$$

- Problema de quadrados mínimos lineares

$$\underset{x}{\text{minimize}}\ \|b - Ax\|_2$$

possui uma única solução, chamada de solução de quadrados mínimos.

- **Subdeterminado**: existem mais incógnitas do que equações

$$A\ (m \times n),\ m < n \text{ e posto}(A) = m.$$

- Sistema não tem solução ou existe um número infinito de soluções que satisfazem $b - Ax = 0$.
- Encontrar a solução única x que minimiza $\|x\|_2$.
- Determinar a solução de norma mínima do sistema linear (6).
- Resolver um sistema de ordem n.

Classificação de sistemas: número de soluções

- Número de soluções depende do valor do determinante da matriz dos coeficientes.
- Há três situações possíveis:
  - única solução,
  - infinitas soluções e
  - sem solução.

Sistema com única solução

- Exemplo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \det(A) \neq 0 \text{ e } x = [1 \;\; 2]^T.$$

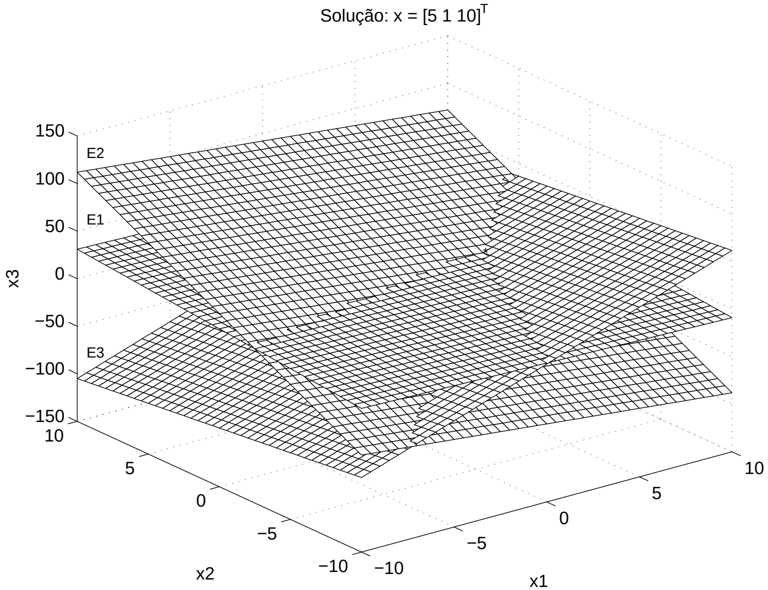
- $\det(A) \neq 0$: sistema admite uma única solução.

Geometria de sistema com solução única

- Solução de um sistema linear de ordem n é um ponto no $\mathbb{C}^n$ comum aos n hiperplanos descritos por cada uma das n equações

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -20 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -12 \\ -65 \end{bmatrix}.$$

- Vetor solução x é a interseção dos três planos descritos por cada uma das três equações E1, E2 e E3: $x = [5 \ \ 1 \ \ 10]^T$.



Sistema com infinitas soluções

- Exemplo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \leadsto \det(A) = 0 \text{ e } x = [\theta \;\; 2-\theta]^T.$$

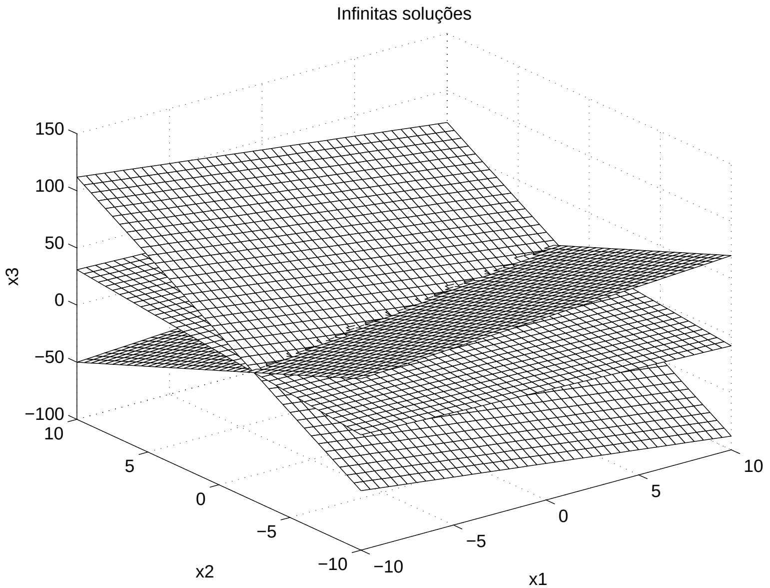
- $\det(A) = 0$: sistema admite infinitas soluções, uma para cada valor de θ.

Geometria de sistema com infinitas soluções

- Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -12 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

- Com $\det(A) = 0$, os três planos se interceptam em uma linha reta descrita por $x = [70-6{,}5\theta \;\; 16-1{,}5\theta \;\; \theta]^T$.
- Para cada valor de θ ter-se-á uma solução do sistema linear.



Sistema sem solução

- Exemplo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \ \ \ 1 \\ x_1 + x_2 &= -1 \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \det(A) = 0 \text{ e } \nexists \ x.$$

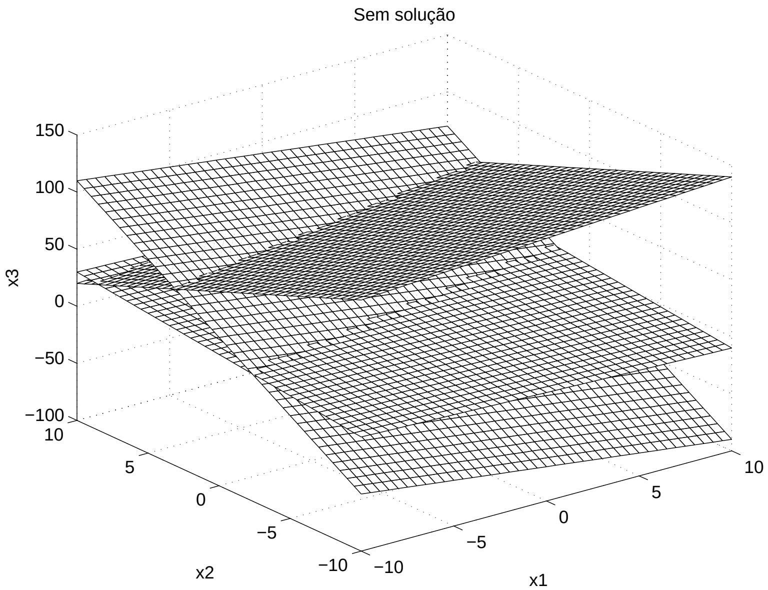
- $\det(A) = 0$: sistema não tem solução.

Geometria de sistema sem solução

- Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 80 \end{bmatrix}$$

- Com $\det(A) = 0$ os planos não têm nenhum ponto em comum.



Sistema triangular inferior

- Apresenta a forma

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

- Solução via substituições sucessivas

$$l_{11}x_1 = c_1 \leadsto x_1 = \frac{c_1}{l_{11}},$$

$$l_{21}x_1 + l_{22}x_2 = c_2 \leadsto x_2 = \frac{c_2 - l_{21}x_1}{l_{22}},$$

$$l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + l_{33}x_3 = c_3 \leadsto x_3 = \frac{c_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2}{l_{33}},$$

$$\cdots$$

Sistema triangular inferior

- Generalizando

$$l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \cdots + l_{n,n-1}x_{n-1} + l_{nn}x_n = c_n \rightsquigarrow$$

$$x_n = \frac{c_n - l_{n1}x_1 - l_{n2}x_2 - \cdots - l_{n,n-1}x_{n-1}}{l_{nn}}.$$

- Esquematicamente

$$\boxed{x_i = \frac{c_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j}{l_{ii}},\ i = 1, 2, \ldots, n.} \tag{7}$$

Exemplo de substituições sucessivas

Exemplo 20 Calcular a solução do sistema triangular inferior

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 48 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$2x_1 = 4,\ x_1 = \frac{4}{2} \rightsquigarrow x_1 = 2,$$

$$3x_1 + 5x_2 = 1,\ x_2 = \frac{1 - 3(2)}{5} \rightsquigarrow x_2 = -1,$$

$$x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 48,\ x_3 = \frac{48 - (2) + 6(-1)}{8} \rightsquigarrow x_3 = 5 \text{ e}$$

$$-x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 6,\ x_4 = \frac{6 + (2) - 4(-1) + 3(5)}{9} \rightsquigarrow x_4 = 3.$$

- Solução do sistema triangular inferior: $x = [2\ \ -1\ \ 5\ \ 3]^T$.

Algoritmo: substituições sucessivas

```
Algoritmo Substituições_Sucessivas
{ Objetivo: Resolver o sistema triangular inferior Lx = c }
{                pelas substituições sucessivas }
parâmetros de entrada n, L, c
  { ordem, matriz triangular inferior e vetor independente }
parâmetros de saída x  { solução do sistema triangular inferior }
  x(1) ← c(1)/L(1, 1)
  para i ← 2 até n faça
    Soma ← 0
    para j ← 1 até i − 1 faça
      Soma ← Soma + L(i, j) ∗ x(j)
    fimpara
    x(i) ← (c(i) − Soma)/L(i, i)
  fimpara
fimalgoritmo
```

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 21 Resolver o sistema triangular inferior do Exemplo 20 usando o algoritmo.

```
% Os valores de entrada
n = 4
L =
     2     0     0     0
     3     5     0     0
     1    -6     8     0
    -1     4    -3     9
c =
     4
     1
    48
     6
% produzem o resultado
x =
     2
    -1
     5
     3
```

Sistema triangular superior

- Apresenta a forma

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & u_{33} & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}.$$

- Solução via substituições retroativas

$$u_{nn}x_n = d_n \rightsquigarrow x_n = \frac{d_n}{u_{nn}},$$

$$u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = d_{n-1} \rightsquigarrow x_{n-1} = \frac{d_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}},$$

$$\ldots$$

Sistema triangular superior

- Continuando

$$u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + \cdots + u_{2n}x_n = d_2 \rightsquigarrow x_2 = \frac{d_2 - u_{23}x_3 - \cdots - u_{2n}x_n}{u_{22}} \text{ e}$$

$$u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \cdots + u_{1n}x_n = d_1$$

$$\rightsquigarrow x_1 = \frac{d_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3 - \cdots - u_{1n}x_n}{u_{11}}.$$

- Esquematicamente

$$\boxed{x_i = \frac{d_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j}{u_{ii}}, \quad i = n, n-1, \ldots, 1.} \tag{8}$$

Exemplo de substituições retroativas

Exemplo 22 Determinar a solução do sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 28 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

$$2x_4 = 8,\ x_4 = \frac{8}{2} \leadsto x_4 = 4,$$

$$4x_3 + 5x_4 = 28,\ x_3 = \frac{28 - 5(4)}{4} \leadsto x_3 = 2,$$

$$3x_2 + 7x_3 - 4x_4 = -2,\ x_2 = \frac{-2 - 7(2) + 4(4)}{3} \leadsto x_2 = 0 \text{ e}$$

$$5x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 1,\ x_1 = \frac{1 + 2(0) - 6(2) - (4)}{5} \leadsto x_1 = -3.$$

- Solução do sistema triangular superior: $x = [-3\ \ 0\ \ 2\ \ 4]^T$.

Algoritmo: substituições retroativas

```
Algoritmo Substituições_Retroativas
{ Objetivo: Resolver o sistema triangular superior Ux = d }
{           pelas substituições retroativas }
parâmetros de entrada n, U, d
  { ordem, matriz triangular superior e vetor independente }
parâmetros de saída x  { solução do sistema triangular superior }
  x(n) ← d(n)/U(n, n)
  para i ← n − 1 até 1 passo −1 faça
    Soma ← 0
    para j ← i + 1 até n faça
      Soma ← Soma + U(i, j) ∗ x(j)
    fimpara
    x(i) ← (d(i) − Soma)/U(i, i)
  fimpara
fimalgoritmo
```

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 23 Resolver o sistema triangular superior do Exemplo 22 usando o algoritmo.

```
% Os valores de entrada
n = 4
U =
     5    -2     6     1
     0     3     7    -4
     0     0     4     5
     0     0     0     2
d =
     1
    -2
    28
     8
% produzem o resultado
x =
    -3
     0
     2
     4
```

Complexidade computacional: substituições sucessivas

- Considerando
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$
a complexidade computacional do algoritmo de substituições sucessivas é
- Adições: $\sum_{i=2}^{n}[(i-1)+1] = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1;$
- Multiplicações: $\sum_{i=2}^{n}(i-1) = \frac{n(n+1)}{2} - 1 - (n-1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2};$
- Divisões: $1 + \sum_{i=2}^{n} 1 = 1 + n - 1 = n.$

Complexidade computacional: substituições retroativas

- A complexidade computacional do algoritmo de substituições retroativas é
- Adições: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}[(n-i)+1] = (n-1)n - \frac{(n-1)n}{2} + n - 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1;$
- Multiplicações: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = (n-1)n - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2};$
- Divisões: $\displaystyle 1 + \sum_{i=1}^{n-1} 1 = 1 + n - 1 = n.$

Complexidades dos algoritmos de substituições para sistemas de ordem n

Substituições sucessivas	
Operações	Complexidade
adições	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1$
multiplicações	$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
divisões	n

Substituições retroativas	
Operações	Complexidade
adições	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1$
multiplicações	$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
divisões	n

- Número de operações aritméticas das substituições sucessivas e retroativas é descrito por polinômios.
- Consequentemente, estes algoritmos são polinomiais.

Eliminação de Gauss

- Classes de métodos para resolução de sistemas de equações lineares: métodos diretos e iterativos.
- Métodos diretos: a solução exata do sistema é obtida, teoricamente, com um número finito de operações aritméticas.
  - Na prática, os erros de arredondamento devidos à aritmética de ponto flutuante interferem no resultado verdadeiro.
- Métodos iterativos: solução exata somente com um número infinito de operações.
  - Em cada passo dos métodos iterativos a solução é calculada com um nível de exatidão crescente.
  - Esse nível é limitado pelo número finito de *bytes* utilizados para armazenar as variáveis do programa que implementa o método iterativo.

Sistemas equivalentes

Dois sistemas de equações lineares são ditos equivalentes quando possuem o mesmo vetor solução.

$$A \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = & 8 \\ x_1 - x_2 & = & -1 \end{cases}$$

e

$$B \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 & = & -2 \\ x_1 + 4x_2 & = & 9 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x^A = x^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow A \sim B.$$

Operações l-elementares

Um sistema de equações lineares pode ser transformado em um outro sistema equivalente utilizando as três operações l-elementares (operações de linha)

- Trocar a ordem de duas equações.
- Multiplicar uma equação por uma constante não nula.
- Somar uma equação à outra.

Trocar a ordem de duas equações

$$B\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 & = & -2 \\ x_1 + 4x_2 & = & 9 \end{cases}$$

e

$$C\begin{cases} x_1 + 4x_2 & = & 9 \\ 2x_1 - 2x_2 & & -2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x^B = x^C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow B \sim C.$$

Multiplicar uma equação por uma constante não nula

$$C \begin{cases} x_1 + 4x_2 & = \quad 9 \\ 2x_1 - 2x_2 & = -2 \end{cases}$$

e

$$D \begin{cases} x_1 + 4x_2 & = \quad 9 \\ x_1 - x_2 & = -1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x^C = x^D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow C \sim D.$$

Somar uma equação à outra

$$D\begin{cases} x_1 + 4x_2 & = \quad 9 \\ x_1 - x_2 & = -1 \end{cases}$$

e

$$E\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = \quad 8 \\ x_1 - x_2 & = -1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x^D = x^E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow D \sim E = A.$$

Sistema triangular equivalente

- Método de eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

- Transformação $Ax = b \sim Ux = d$.
- Solução do sistema triangular superior $Ux = d$ obtida pelas substituições retroativas.
- Vetor resíduo $r = b - Ax$.

Exemplo de eliminação de Gauss

Exemplo 24 Resolver o sistema abaixo pelo método de eliminação de Gauss e verificar a exatidão da solução

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Eliminar os elementos da primeira coluna

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -15 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

- Eliminar o elemento da segunda coluna

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Dispositivo prático

L	Multiplicador	A			b	Operações
1		$\underline{1}$	-3	2	11	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	-2	8	-1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4	-6	5	29	
4		0	$\underline{2}$	3	7	$2L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0	6	-3	-15	$-4L_1 + L_3$
6		0	0	$\underline{-12}$	-36	$-3L_4 + L_5$

.

- Sistema triangular superior equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}.$$

Vetor solução

- Sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}.$$

- Substituições retroativas

$$-12x_3 = -36,\ x_3 = \frac{-36}{-12} \leadsto x_3 = 3,$$

$$2x_2 + 3x_3 = 7,\ x_2 = \frac{7-3(3)}{2} \leadsto x_2 = -1 \text{ e}$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11,\ x_1 = \frac{11+3(-1)-2(3)}{1} \leadsto x_1 = 2.$$

- Vetor solução do sistema: $x = [2\ \ -1\ \ 3]^T$.

Vetor resíduo

- Vetor resíduo: $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Solução exata.

Exemplo de eliminação de Gauss

Exemplo 25 Resolver o sistema abaixo pelo método de eliminação de Gauss e verificar a exatidão da solução

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 19 & 4 & 15 \\ 1 & 4 & 8 & -12 \\ 5 & 33 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 25 \\ 18 \\ 72 \end{bmatrix}.$$

Dispositivo prático

L	Multiplicador	A				b	Operações
1		$\underline{1}$	6	2	4	8	
2	$m_{21} = 3/1 = 3$	3	19	4	15	25	
3	$m_{31} = 1/1 = 1$	1	4	8	-12	18	
4	$m_{41} = 5/1 = 5$	5	33	9	3	72	
5		0	$\underline{1}$	-2	3	1	$-3L_1 + L_2$
6	$m_{32} = (-2)/1 = -2$	0	-2	6	-16	10	$-L_1 + L_3$
7	$m_{42} = 3/1 = 3$	0	3	-1	-17	32	$-5L_1 + L_4$
8		0	0	$\underline{2}$	-10	12	$2L_5 + L_6$
9	$m_{43} = 5/2 = 2{,}5$	0	0	5	-26	29	$-3L_5 + L_7$
10		0	0	0	$\underline{-1}$	-1	$-2{,}5L_8 + L_9$

.

- Sistema triangular superior equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vetor solução

- Sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \Longrightarrow x = \begin{bmatrix} -138 \\ 20 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Substituições retroativas

$$-1x_4 = -1,\ x_4 = \frac{-1}{-1} \rightsquigarrow x_4 = 1,$$

$$2x_3 - 10x_4 = 12,\ x_3 = \frac{12 + 10(1)}{2} \rightsquigarrow x_3 = 11,$$

$$x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1,\ x_2 = \frac{1 + 2(11) - 3(1)}{1} \rightsquigarrow x_2 = 20 \text{ e}$$

$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8,\ x_1 = \frac{8 - 6(20) - 2(11) - 4(1)}{1} \rightsquigarrow x_1 = -138.$$

Vetor resíduo

$$r = b - Ax,$$

$$r = \begin{bmatrix} 8 \\ 25 \\ 18 \\ 72 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 19 & 4 & 15 \\ 1 & 4 & 8 & -12 \\ 5 & 33 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -138 \\ 20 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Solução exata.

Cálculo do determinante

- Determinante da matriz dos coeficientes pode ser obtido como um subproduto do método de eliminação de Gauss.
- Relações entre os determinantes das matrizes dos sistemas equivalentes intermediários obtidos pelas operações l-elementares.

Operação l-elementar: trocar a ordem de duas equações

a) Se duas linhas quaisquer de uma matriz A forem trocadas, então o determinante da nova matriz B será

$$\det(B) = -\det(A).$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 10 \text{ e}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = -10.$$

Operação l-elementar: multiplicar uma equação por uma constante não nula

b) Se todos os elementos de uma linha de A forem multiplicados por uma constante k, então o determinante da matriz resultante B será

$$\det(B) = k \det(A).$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = -10 \text{ e}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = -5.$$

Operação l-elementar: somar uma equação à outra

c) Se um múltiplo escalar de uma linha de A for somado a outra linha, então o determinante da nova matriz B será

$$\det(B) = \det(A).$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = -5 \text{ e}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = -5.$$

Determinante de matriz triangular ou diagonal

d) Se A for uma matriz triangular ou diagonal de ordem n, então o seu determinante será igual ao produto dos elementos da diagonal principal,

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = -2 \text{ e}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = 15.$$

Determinante do produto de matrizes

e) Se uma matriz A for multiplicada por uma matriz B, o determinante da matriz resultante C será

$$\det(C) = \det(A)\det(B).$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 10,$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = 3 \text{ e}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 13 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(C) = 30.$$

Exemplo de cálculo do determinante

Exemplo 26 Calcular o determinante da matriz do Exemplo 24

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Seqüência de matrizes obtidas pelas operações l-elementares foram as dos sistemas (9) e (10)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes obtidas somente por intermédio de combinações lineares das linhas.
- As três matrizes possuem determinantes com o mesmo valor.
- Determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal.
- Determinante é o produto dos pivôs

$$\det(A) = 1 \times 2 \times -12 = -24.$$

Pivotação parcial

- Método de Gauss falha quando um pivô for nulo.
- Consiste em escolher como pivô o maior elemento em módulo da coluna, cujos elementos serão eliminados.
- A pivotação parcial garante que o pivô seja não nulo, exceto quando a matriz for singular.
- Todos os multiplicadores satisfazem

$$-1 \leq m_{ij} \leq 1.$$

- Multiplicadores grandes podem ampliar os erros de arredondamento.

Exemplo de pivotação parcial

Exemplo 27 Resolver o sistema pelo método de Gauss com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

L	Multiplicador	A			b	Operações
1	$m_{11} = 1/4 = 0{,}25$	1	-3	2	11	
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0{,}5$	-2	8	-1	-15	
3		$\underline{4}$	-6	5	29	
4	$m_{12} = (-1{,}5)/5 = -0{,}3$	0	$-1{,}5$	$0{,}75$	$3{,}75$	$-0{,}25L_3 + L_1$
5		0	$\underline{5}$	$1{,}5$	$-0{,}5$	$0{,}5L_3 + L_2$
6		0	0	$\underline{1{,}2}$	$3{,}6$	$0{,}3L_5 + L_4$

.

- Sistema triangular superior equivalente

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -0{,}5 \\ 3{,}6 \end{bmatrix}.$$

Vetor solução

- Sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -0{,}5 \\ 3{,}6 \end{bmatrix}.$$

- Substituições retroativas

$$1{,}2x_3 = 3{,}6;\ x_3 = \frac{3{,}6}{1{,}2} \rightsquigarrow x_3 = 3,$$

$$5x_2 + 1{,}5x_3 = -0{,}5;\ x_2 = \frac{-0{,}5 - 1{,}5(3)}{5} \rightsquigarrow x_2 = -1 \text{ e}$$

$$4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 29,\ x_1 = \frac{29 + 6(-1) - 5(3)}{4} \rightsquigarrow x_1 = 2.$$

- Vetor solução: $x = [2 \ \ -1 \ \ 3]^T$.

Decomposição LU

- Uma matriz quadrada pode ser escrita como o produto de duas matrizes

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- A matriz A foi fatorada tal que $A = LU$.
- L é uma matriz triangular inferior unitária ($l_{ii} = 1, \ \forall \ i$).
- U é uma matriz triangular superior.
- Para resolver o sistema $Ax = b$

$$Ax = b \longrightarrow LUx = b.$$

$$Ux = y, \ \text{ então } \ Ly = b.$$

Cálculo dos fatores

- A matriz pode ser fatorada usando-se o método de eliminação de Gauss.
- A matriz triangular superior U é a mesma do método de Gauss.
- A matriz triangular inferior unitária L, além de $l_{ii} = 1$, $l_{ij} = 0, i < j$, possui $l_{ij} = m_{ij}, i > j$, sendo m_{ij} os multiplicadores usados no processo de eliminação de Gauss.

Exemplo de decomposição LU

Exemplo 28 Resolver o sistema do Exemplo 24 usando a decomposição LU

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

L	m	A			Operações
1		$\underline{1}$	-3	2	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	-2	8	-1	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4	-6	5	
4		0	$\underline{2}$	3	$2L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0	6	-3	$-4L_1 + L_3$
6		0	0	$\underline{-12}$	$-3L_4 + L_5$

.

- Matrizes L e U

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

Verificação da igualdade $A = LU$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

Sistema triangular superior $Ly = b$

- Substituições sucessivas $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix},$$

$$y_1 = 11,$$

$$-2y_1 + y_2 = -15,\ y_2 = -15 + 2(11) \leadsto y_2 = 7 \text{ e}$$

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 = 29,\ y_3 = 29 - 4(11) - 3(7) \leadsto y_3 = -36.$$

- Vetor intermediário: $y = [11\ \ 7\ \ -36]^T$.

Sistema triangular superior $Ux = y$

- Substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix},$$

$$-12x_3 = -36, \ x_3 = \frac{-36}{-12} \rightsquigarrow x_3 = 3,$$

$$2x_2 + 3x_3 = 7, \ x_2 = \frac{7 - 3(3)}{2} \rightsquigarrow x_2 = -1 \text{ e}$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11, \ x_1 = \frac{11 + 3(-1) - 2(3)}{1} \rightsquigarrow x_1 = 2.$$

- Vetor solução: $x = [2 \ \ -1 \ \ 3]^T$.

Observações sobre a decomposição LU

- Diferença entre os dispositivos práticos da eliminação de Gauss e da decomposição LU: ausência da coluna relativa ao vetor b.
- Efetuar as substituições sucessivas para resolver $Ly = b$ na decomposição LU é o mesmo que fazer as operações l-elementares em b na eliminação de Gauss.
- A solução de $Ly = b$ funciona como uma memória de cálculo para ser efetuada sobre o vetor b.
- Resolver vários sistemas lineares com a mesma matriz dos coeficientes com a fatoração da matriz feita uma única vez.

Pivotação parcial

- Evitar pivô nulo.
- Evitar multiplicadores com valores muito grandes.
- Decomposição da forma

$$PA = LU.$$

- P: matriz de permutações.
- L: matriz triangular inferior unitária formada pelos multiplicadores m_{ij}.
- U: matriz triangular superior.
- Resolver o sistema $Ax = b$

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb.$$

$$\boxed{Ux = y, \text{ então } Ly = Pb}. \quad (11)$$

Exemplo de decomposição LU

Exemplo 29 Resolver o sistema do Exemplo 27 pela decomposição LU usando pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

L	m	A			Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11} = 1/4 = 0{,}25$	1	-3	2		1
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0{,}5$	-2	8	-1		2
3		$\underline{4}$	-6	5		$\underline{3}$
4	$m_{12} = (-1{,}5)/5 = -0{,}3$	0	$-1{,}5$	$0{,}75$	$-0{,}25L_3 + L_1$	1
5		0	$\underline{5}$	$1{,}5$	$0{,}5L_3 + L_2$	$\underline{2}$
6		0	0	$\underline{1{,}2}$	$0{,}3L_5 + L_4$	$\underline{1}$

- Índices das linhas pivotais: $\underline{p} = [\underline{3}\ \ \underline{2}\ \ \underline{1}]$.

- Matrizes L, U e P

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & -0{,}3 & 1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} \ \text{e}\ P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução de $Ly = Pb$

- Vetor Pb: formado pelos elementos de b dispostos na ordem das linhas pivotais contidas em $\underline{p}$.
- Solução de $Ly = Pb$ via substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & -0{,}3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -15 \\ 11 \end{bmatrix},$$

$$y_1 = 29,$$

$$-0{,}5y_1 + y_2 = -15,\ y_2 = -15 + 0{,}5(29) \leadsto y_2 = -0{,}5 \text{ e}$$

$$0{,}25y_1 - 0{,}3y_2 + y_3 = 11,\ y_3 = 11 - 0{,}25(29) + 0{,}3(-0{,}5) \leadsto y_3 = 3{,}6.$$

- Vetor intermediário: $y = [29\ \ -0{,}5\ \ 3{,}6]^T$.

Vetor solução

- Solução de $Ux = y$ pelas substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -0{,}5 \\ 3{,}6 \end{bmatrix},$$

$$1{,}2x_3 = 3{,}6;\ x_3 = \frac{3{,}6}{1{,}2} \leadsto x_3 = 3,$$

$$5x_2 + 1{,}5x_3 = -0{,}5;\ x_2 = \frac{-0{,}5 - 1{,}5(3)}{5} \leadsto x_2 = -1 \text{ e}$$

$$4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 29,\ x_1 = \frac{29 + 6(-1) - 5(3)}{4} \leadsto x_1 = 2,$$

- Vetor solução: $x = [2\ \ -1\ \ 3]^T$.

Vetor resíduo

$$r = b - Ax,$$

$$r = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Solução exata.

Cálculo do determinante

- Pelas propriedades dos determinantes

$$PA = LU \longrightarrow \det(PA) = \det(LU),$$

$$\det(A) = \frac{\det(L)\det(U)}{\det(P)},$$

$$\det(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii} = 1, \quad \det(U) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii} \quad \text{e} \quad \det(P) = (-1)^t,$$

- t: número de trocas de linhas necessárias para transformar a matriz de permutações P em uma matriz identidade.

- Determinante de A

$$\boxed{\det(A) = (-1)^t \prod_{i=1}^{n} u_{ii}}. \tag{12}$$

Exemplo de cálculo do determinante

Exemplo 30 Calcular o determinante da matriz do Exemplo 29

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes U e P

$$U = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Valor de t

t	Linhas pivotais	Comentário
0	3 2 1	trocar 3 com 1
1	1 2 3	ordem crescente

- Determinante

$$\det(A) = (-1)^t \prod_{i=1}^{3} u_{ii} = (-1)^1 \times 4 \times 5 \times 1{,}2 \leadsto \det(A) = -24.$$

Exemplo

Exemplo 31 Resolver o sistema abaixo pela decomposição LU, usando pivotação parcial, e verificar a exatidão e a unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Cálculo dos fatores

L	m	A				Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11} = 4/5 = 0{,}8$	4	−1	0	−1		1
2	$m_{21} = 1/5 = 0{,}2$	1	−2	1	0		2
3	$m_{31} = 0/5 = 0$	0	4	−4	1		3
4		$\underline{5}$	0	5	−1		$\underline{4}$
5	$m_{12} = (-1)/4 = -0{,}25$	0	−1	−4	−0, 2	$-0{,}8L_4 + L_1$	1
6	$m_{22} = (-2)/4 = -0{,}5$	0	−2	0	0,2	$-0{,}2L_4 + L_2$	2
7		0	$\underline{4}$	−4	1	$0L_4 + L_3$	$\underline{3}$
8		0	0	$\underline{-5}$	0,05	$0{,}25L_7 + L_5$	$\underline{1}$
9	$m_{23} = (-2)/(-5) = 0{,}4$	0	0	−2	0,7	$0{,}5L_7 + L_6$	2
10		0	0	0	$\underline{0{,}68}$	$-0{,}4L_8 + L_9$	$\underline{2}$

- Vetor $\underline{p} = [\underline{4}\ \ \underline{3}\ \ \underline{1}\ \ \underline{2}]$.
- Matrizes L, U e P

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & -0{,}25 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & -0{,}5 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0{,}05 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}68 \end{bmatrix}\ \text{e}\ P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sistemas triangulares

- Substituições sucessivas para $Ly = Pb$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}8 & -0{,}25 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & -0{,}5 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \leadsto y = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2{,}95 \\ -3{,}12 \end{bmatrix}.$$

- Substituições retroativas para $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0{,}05 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2{,}95 \\ -3{,}12 \end{bmatrix} \leadsto x = \begin{bmatrix} -0{,}6617 \\ 0{,}9412 \\ 0{,}5441 \\ -4{,}5882 \end{bmatrix}.$$

Verificação da exatidão do vetor x

- Vetor resíduo $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}6617 \\ 0{,}9412 \\ 0{,}5441 \\ -4{,}5882 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0002 \\ 0{,}0000 \\ -0{,}0002 \\ -0{,}0002 \end{bmatrix}.$$

- Solução quase exata.

Verificação da unicidade da solução

- Valor de t

t	Linhas pivotais				Comentário
0	4	3	1	2	trocar 4 com 1
1	1	3	4	2	trocar 3 com 2
2	1	2	4	3	trocar 4 com 3
3	1	2	3	4	ordem crescente

.

- Determinante

$$\det(A) = (-1)^t \prod_{i=1}^{4} u_{ii} = \det(A) = (-1)^3 \times 5 \times 4 \times -5 \times 0{,}68 = 68 \neq 0.$$

- Solução única.

Sistema com matriz singular

- infinitas soluções ou
- não ter solução.

Exemplo de sistema com matriz singular

Exemplo 32 Resolver os sistemas $Ax = b$ e $Ax = c$ usando decomposição LU com pivotação parcial, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 22 \\ -12 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ e } c = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

Cálculo dos fatores

- Dispositivo prático

L	m	A			Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11} = 1/(-2) = -0{,}5$	1	−3	2		1
2		$\underline{-2}$	8	−1		$\underline{2}$
3	$m_{31} = (-1)/(-2) = 0{,}5$	−1	5	1		3
4		0	$\underline{1}$	1,5	$0{,}5L_2 + L_1$	$\underline{1}$
5	$m_{32} = 1/1 = 1$	0	1	1,5	$-0{,}5L_2 + L_3$	3
6		0	0	0	$-L_4 + L_5$	$\underline{3}$

.

- Os três fatores são

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sistema $Ax = b$

- Solução de $Ly = Pb$ pelas substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 22 \\ 10 \end{bmatrix} \leadsto y = \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Solução de $Ux = y$ pelas substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$0x_3 = 0 \leadsto x_3 = \theta \quad \text{(qualquer valor de } x_3 \text{ é solução)},$$

$$x_2 + 1{,}5x_3 = 16 \leadsto x_2 = 16 - 1{,}5\theta \text{ e}$$

$$-2x_1 + 8x_2 - x_3 = -12,\ x_1 = \frac{-12 - 8(16 - 1{,}5\theta) + \theta}{-2} \leadsto x_1 = 70 - 6{,}5\theta.$$

- Vetor solução $x = [70 - 6{,}5\theta \;\; 16 - 1{,}5\theta \;\; \theta]^T$ (Figura).

Sistema $Ax = c$

- Solução de $Ly = Pc$ via substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ 80 \end{bmatrix} \leadsto y = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ 70 \end{bmatrix}$$

- Solução de $Ux = y$ via substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ 70 \end{bmatrix}$$

$$0x_3 = 70 \longrightarrow \nexists\ x_3 \leadsto \nexists\ x.$$

- Sistema $Ax = c$ não tem solução porque $\nexists\ x_3$ tal que $0x_3 \neq 0$ (Figura).

Algoritmo: decomposição LU

```
Algoritmo Decomposição_LU
{ Objetivo: Fazer a decomposição LU de uma matriz A }
parâmetros de entrada n, A { ordem e matriz a ser decomposta }
parâmetros de saída A, Det, Pivot
   { matriz decomposta A = U + L − I, determinante, pivôs }
   para i ← 1 até n faça Pivot(i) ← i, fim para; Det ← 1
   para j ← 1 até n − 1 faça
      { escolha do elemento pivô }
      p ← j; Amax ← abs(A(j, j))
      para k ← j + 1 até n faça
         se abs(A(k, j)) > Amax então
            Amax ← abs(A(k, j)); p ← k
         fim se
      fim para
      se p ≠ j então
      { troca de linhas }
         para k ← 1 até n faça
            t ← A(j, k); A(j, k) ← A(p, k); A(p, k) ← t
         fim para
         m ← Pivot(j); Pivot(j) ← Pivot(p); Pivot(p) ← m
         Det ← −Det
      fim se
      Det ← Det ∗ A(j, j)
      se abs(A(j, j)) ≠ 0 então
      { eliminação de Gauss }
         r ← 1/A(j, j)
         para i ← j + 1 até n faça
            Mult ← A(i, j) ∗ r; A(i, j) ← Mult
            para k ← j + 1 até n faça
               A(i, k) ← A(i, k) − Mult ∗ A(j, k)
            fim para
         fim para
      fim se
   fim para
   Det ← Det ∗ A(n, n)
fim algoritmo
```

Detalhes do algoritmo para decomposição LU

- As matrizes triangulares L e U são escritas sobre a matriz original A.

$$\begin{array}{ccc} A\text{, **antes** da decomposição} & \longrightarrow & A\text{, **após** a decomposição} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

- Se necessário a matriz A deve ser previamente copiada em uma outra matriz.
- Matriz L: triangular inferior unitária.
- Esquema da pivotação parcial é utilizado.
- Algoritmo das substituições sucessivas para solução de $Ly = b$ deve ser modificado para resolver $Ly = Pb$.

Algoritmo: substituições sucessivas pivotal

Algoritmo Substituições_Sucessivas_Pivotal
{ **Objetivo:** Resolver o sistema triangular inferior $Ly = Pb$ }
{ pelas substituições sucessivas, com a matriz L }
{ obtida de decomposição LU com pivotação parcial }
parâmetros de entrada n, L, b, $Pivot$
  { ordem, matriz triangular inferior unitária, }
  { vetor independente e posição dos pivôs }
parâmetros de saída y { solução do sistema triangular inferior }
  $k \leftarrow Pivot(1)$; $y(1) \leftarrow b(k)$
  para $i \leftarrow 2$ **até** n **faça**
    $Soma \leftarrow 0$
    para $j \leftarrow 1$ **até** $i - 1$ **faça**
      $Soma \leftarrow Soma + L(i, j) * y(j)$
    fimpara
    $k \leftarrow Pivot(i)$; $y(i) \leftarrow b(k) - Soma$
  fimpara
fimalgoritmo

$\Vdash\!\Leftarrow$

Complexidade da decomposição LU de uma matriz de ordem n

Operações	Complexidade
adições	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$
multiplicações	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$
divisões	$n - 1$

- Desconsiderando operações para o cálculo do determinante.
- Complexidade computacional do algoritmo de substituições sucessivas pivotal difere do algoritmo padrão somente quanto ao número de divisões, que é nulo.
- Como L é unitária, não há necessidade de divisão.

Exemplo de uso dos algoritmos

Exemplo 33 Resolver o sistema do Exemplo 31 usando os algoritmos decomposição LU, substituições sucessivas pivotal e substituições retroativas.

```
% Os valores de entrada
n = 4
A =
     4    -1     0    -1
     1    -2     1     0
     0     4    -4     1
     5     0     5    -1
% produzem os resultados pela decomposicao LU
A =
    5.0000         0    5.0000   -1.0000
         0    4.0000   -4.0000    1.0000
    0.8000   -0.2500   -5.0000    0.0500
    0.2000   -0.5000    0.4000    0.6800
Det = 68.0000
Pivot =     4     3     1     2
% vetor de termos independentes
b =
     1
    -2
    -3
     4
% As substituicoes sucessivas pivotal produzem
y =
    4.0000
   -3.0000
   -2.9500
   -3.1200
% As substituicoes retroativas resultam em
x =
   -0.6618
    0.9412
    0.5441
   -4.5882
```

Sistemas lineares complexos

- Sistemas de equações que envolvam números complexos podem ser solucionados pelos algoritmos apresentados.
- Algoritmos implementados em uma linguagem de programação que suporta aritmética complexa.
- Algoritmos implementados com aritmética real, com o sistema complexo previamente transformado em um sistema real.

Sistema complexo usando aritmética real

- Seja o sistema complexo $Ax = b$.
- Fazendo $A = A_r + iA_i,\ x = x_r + ix_i,\ b = b_r + ib_i$.
- Substituindo na equação acima

$$(A_r + iA_i)(x_r + ix_i) = b_r + ib_i,$$

$$A_r x_r - A_i x_i + i(A_i x_r + A_r x_i) = b_r + ib_i.$$

- Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} A_r & -A_i \\ A_i & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_r \\ b_i \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Exemplo de sistema complexo usando aritmética complexa

Exemplo 34 Resolver o sistema abaixo, utilizando os algoritmos substituições retroativas, decomposição LU e substituições sucessivas pivotal implementados em uma linguagem com aritmética complexa.

$$\begin{bmatrix} 1+2i & -3i & 5 \\ 2+3i & 1+i & 1-i \\ 4 & 2i & 3-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-16i \\ -5+12i \\ 13+2i \end{bmatrix}.$$

Resultados com aritmética complexa

```
% Os valores de entrada
n = 3
A =
   1.0000+ 2.0000i        0- 3.0000i   5.0000
   2.0000+ 3.0000i   1.0000+ 1.0000i   1.0000- 1.0000i
   4.0000                 0+ 2.0000i   3.0000- 2.0000i
% Produzem os resultados pela decomposicao LU
A =
   4.0000                 0+ 2.0000i   3.0000- 2.0000i
   0.2500+ 0.5000i   1.0000- 3.5000i   3.2500- 1.0000i
   0.5000+ 0.7500i   0.1887+ 0.6604i  -3.2736- 4.2075i
Det =
 -72.0000+29.0000i
Pivot =
     3     1     2
% vetor de termos independentes
b =
  10.0000-16.0000i
  -5.0000+12.0000i
  13.0000+ 2.0000i
% As substituicoes sucessivas pivotal produzem
y =
  13.0000+ 2.0000i
   7.7500-23.0000i
 -26.6509+ 0.4717i
% As substituicoes retroativas resultam em
x =
   3.0000+ 4.0000i
   2.0000+ 0.0000i
   3.0000- 4.0000i
```

Exemplo de sistema complexo usando aritmética real

Exemplo 35 Resolver o sistema do Exemplo 34, utilizando os algoritmos substituições retroativas, decomposição LU e substituições sucessivas pivotal implementados em uma linguagem que não tem aritmética complexa.

$$\begin{bmatrix} 1+2i & -3i & 5 \\ 2+3i & 1+i & 1-i \\ 4 & 2i & 3-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-16i \\ -5+12i \\ 13+2i \end{bmatrix}.$$

- Por (13), o sistema complexo pode ser resolvido por meio do sistema real

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 13 \\ -16 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Resultados com aritmética real

```
% Os valores de entrada
n = 6
A =
     1     0     5    -2     3     0
     2     1     1    -3    -1     1
     4     0     3     0    -2     2
     2    -3     0     1     0     5
     3     1    -1     2     1     1
     0     2    -2     4     0     3
% produzem os resultados pela decomposicao LU
A =
    4.0000         0    3.0000         0   -2.0000    2.0000
    0.5000   -3.0000   -1.5000    1.0000    1.0000    4.0000
    0.2500         0    4.2500   -2.0000    3.5000   -0.5000
         0   -0.6667   -0.7059    3.2549    3.1373    5.3137
    0.7500   -0.3333   -0.8824    0.1747    5.3735   -0.5361
    0.5000   -0.3333   -0.2353   -0.9639    0.7780    6.7545
Det =
  6.0250e+03
Pivot =
     3     4     1     6     5     2
% vetor de termos independentes
b =
    10
    -5
    13
   -16
    12
     2
% As substituicoes sucessivas pivotal produzem
y =
   13.0000
  -22.5000
    6.7500
   -8.2353
    2.1446
  -27.0179
```

Vetor solução

```
% As substituicoes retroativas resultam em
x =
    3.0000
    2.0000
    3.0000
    4.0000
    0.0000
   -4.0000
```

- Vetor solução

$$x = \begin{bmatrix} 3+4i \\ 2 \\ 3-4i \end{bmatrix}.$$

Decomposição de Cholesky e LDL^T

- Matriz dos coeficientes A simétrica e definida positiva

$$v^T A v > 0,\ \forall\ v \neq 0, \quad \text{(tabela)}.$$

- A pode ser decomposta tal que

$$A = LL^T,$$

- L: matriz triangular inferior e,
- L^T: matriz triangular superior.

Teorema 2 (Cholesky) *Se A for uma matriz simétrica e definida positiva, então existe uma única matriz triangular L com elementos da diagonal positivos tal que $A = LL^T$.*

Cálculo do fator

- Produto $LL^T = A$ de uma matriz de ordem 4

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

- Elemento l_{44} da diagonal

$$l_{41}^2+l_{42}^2+l_{43}^2+l_{44}^2=a_{44}\rightarrow l_{44}=\sqrt{a_{44}-(l_{41}^2+l_{42}^2+l_{43}^2)} \rightsquigarrow l_{44}=\sqrt{a_{44}-\sum_{k=1}^{3} l_{4k}^2}.$$

- Elemento qualquer da diagonal de L

$$\boxed{l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}, \ j = 1, 2, \ldots, n.} \tag{14}$$

Cálculo do fator cont.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

- Elemento l_{43} abaixo da diagonal

$$l_{41}l_{31}+l_{42}l_{32}+l_{43}l_{33}=a_{43}\rightarrow l_{43}=\frac{a_{43}-(l_{41}l_{31}+l_{42}l_{32})}{l_{33}} \rightsquigarrow l_{43}=\frac{a_{43}-\displaystyle\sum_{k=1}^{2} l_{4k}l_{3k}}{l_{33}}.$$

- Elemento genérico abaixo da diagonal principal

$$\boxed{l_{ij}=\frac{a_{ij}-\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}},\ j=1,2,\ldots,n-1 \ \text{e} \ i=j+1,j+2,\ldots,n.} \qquad (15)$$

Solução do sistema $Ax = b$ pela decomposição de Cholesky

- Seja

$$Ax = b \longrightarrow LL^T x = b.$$

- Fazendo

$$\boxed{L^T x = y \ \text{ então } \ Ly = b}. \tag{16}$$

- Sistema triangular inferior $Ly = b$ resolvido pelas substituições sucessivas

$$\boxed{y_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right) / l_{ii}, \ i = 1, 2, \ldots, n.} \tag{17}$$

- Sistema triangular superior $L^T x = y$ obtido pelas substituições retroativas

$$\boxed{x_i = \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji} x_j \right) / l_{ii}, \ i = n, n-1, \ldots, 1.} \tag{18}$$

Cálculo do determinante

- Pelas propriedades dos determinantes

$$\det(A) = \det(L)\det(L^T),$$

$$\boxed{\det(A) = \left(\prod_{i=1}^{n} l_{ii}\right)^2}. \tag{19}$$

Exemplo da decomposição de Cholesky

Exemplo 36 Resolver o sistema abaixo usando a decomposição de Cholesky e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix}.$$

- Pelo uso de (14) e (15)
- Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2,\ l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-2}{2} = -1,\ l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{2}{2} = 1.$$

- Coluna 2:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{10 - (-1)^2} = 3,\ l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}} = \frac{-7 - (1)(-1)}{3} = -2.$$

- Coluna 3:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = \sqrt{30 - ((1)^2 + (-2)^2)} = 5.$$

Dispositivo prático

A				L			
i\j	1	2	3	i\j	1	2	3
1	4			1	2		
2	−2	10		2	−1	3	
3	2	−7	30	3	1	−2	5

.

- Verificação que $LL^T = A$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix}.$$

Solução dos sistemas triangulares

- Sistema $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

- Sistema $L^T x = y$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

- Vetor solução

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Verificação da exatidão e unicidade da solução

- Vetor resíduo $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{solução exata.}$$

- Cálculo do determinante por (19)

$$\det(A) = \left(\prod_{i=1}^{3} l_{ii} \right)^2 = ((2)(3)(5))^2 = 900 \neq 0 \longrightarrow \text{ solução única.}$$

Exemplo

Exemplo 37 Resolver o sistema abaixo usando a decomposição de Cholesky e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 20 & 2 & 22 \\ -3 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 22 & 2 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 64 \\ 4 \\ 82 \end{bmatrix}.$$

Cálculo das colunas

- Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{9} = 3,\ l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{6}{3} = 2,\ l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{-3}{3} = -1,$$

$$l_{41} = \frac{a_{41}}{l_{11}} = \frac{3}{3} = 1.$$

- Coluna 2:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{20 - (2)^2} = 4,\ l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{2 - (-1)(2)}{4} = 1,$$

$$l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41}l_{21}}{l_{22}} = \frac{22 - (1)(2)}{4} = 5.$$

Cálculo das colunas cont.

- Coluna 3:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = \sqrt{6 - ((-1)^2 + (1)^2)} = 2,$$

$$l_{43} = \frac{a_{43} - (l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32})}{l_{33}} = \frac{2 - ((1)(-1) + (5)(1))}{2} = -1.$$

- Coluna 4:

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - (l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2)} = \sqrt{28 - ((1)^2 + (5)^2 + (-1)^2)} = 1.$$

Dispositivo prático

A					L				
i\j	1	2	3	4	i\j	1	2	3	4
1	9				1	3			
2	6	20			2	2	4		
3	-3	2	6		3	-1	1	2	
4	3	22	2	28	4	1	5	-1	1

.

Solução dos sistemas triangulares

- Sistema $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 64 \\ 4 \\ 82 \end{bmatrix} \leadsto y = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- Sistema $L^T x = y$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \longrightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \text{(vetor solução).}$$

Verificação da exatidão e unicidade da solução

- Vetor resíduo $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 12 \\ 64 \\ 4 \\ 82 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 20 & 2 & 22 \\ -3 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 22 & 2 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{solução exata.}$$

- Determinante

$$\det(A) = \left(\prod_{i=1}^{4} l_{ii} \right)^2 = ((3)(4)(2)(1))^2 = 576 \neq 0 \longrightarrow \text{ solução única.}$$

Exemplo

Exemplo 38 Resolver o sistema abaixo usando a decomposição de Cholesky e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

- Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{5} = 2{,}2361;$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-1}{2{,}2361} = -0{,}4472;\ l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{2}{2{,}2361} = 0{,}8944.$$

- Coluna 2:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{8 - (-0{,}4472)^2} = 2{,}7929;$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{4 - (0{,}8944)(-0{,}4472)}{2{,}7929} = 1{,}5754.$$

- Coluna 3:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = \sqrt{10 - ((0{,}8944)^2 + (1{,}5754)^2)} = 2{,}5919.$$

Dispositivo prático

A				L			
i\j	1	2	3	i\j	1	2	3
1	5			1	2,2361		
2	-1	8		2	$-0{,}4472$	2,7929	
3	2	4	10	3	0,8944	1,5754	2,5919

.

Solução dos sistemas triangulares

- Sistema $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 2{,}2361 & 0 & 0 \\ -0{,}4472 & 2{,}7929 & 0 \\ 0{,}8944 & 1{,}5754 & 2{,}5919 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} 9{,}3914 \\ 5{,}0843 \\ 12{,}9598 \end{bmatrix}.$$

- Sistema $L^T x = y$

$$\begin{bmatrix} 2{,}2361 & -0{,}4472 & 0{,}8944 \\ 0 & 2{,}7929 & 1{,}5754 \\ 0 & 0 & 2{,}5919 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}3914 \\ 5{,}0843 \\ 12{,}9598 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x = \begin{bmatrix} 2{,}0000 \\ -1{,}0000 \\ 5{,}0001 \end{bmatrix}.$$

Verificação da exatidão e unicidade da solução

- Vetor resíduo $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}0000 \\ -1{,}0000 \\ 5{,}0001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0002 \\ -0{,}0004 \\ -0{,}0010 \end{bmatrix}.$$

- Solução não exata devido aos erros de arredondamento.

- Determinante

$$\det(A) = \left(\prod_{i=1}^{3} l_{ii} \right)^2 \approx ((2{,}2361)(2{,}7929)(2{,}5919))^2 ,$$

$$\det(A) \approx 262{,}0171 \neq 0 \longrightarrow \text{ solução única.}$$

Algoritmo: decomposição de Cholesky

```
Algoritmo Cholesky
{ Objetivo: Fazer a decomposição LL^T de uma matriz A }
{           simétrica e definida positiva }
parâmetros de entrada n, A { ordem e matriz a ser decomposta }
parâmetros de saída A, Det, CondErro
  { fator L escrito sobre A, determinante e condição de erro }
  CondErro ← 0; Det ← 1
  para j ← 1 até n faça
    Soma ← 0
    para k ← 1 até j − 1 faça
      Soma ← Soma + A(j, k)^2
    fim para
    t ← A(j, j) − Soma
    se t > 0 então
      A(j, j) ← raiz2(t); r ← 1/A(j, j); Det ← Det ∗ t
    senão
      CondErro ← 1, escreva "a matriz não é definida positiva", abandone
    fim se
    para i ← j + 1 até n faça
      Soma ← 0
      para k ← 1 até j − 1 faça
        Soma ← Soma + A(i, k) ∗ A(j, k)
      fim para
      A(i, j) ← (A(i, j) − Soma) ∗ r
    fim para
  fim para
fim algoritmo
```

Exemplo de uso dos algoritmos

Exemplo 39 Resolver o sistema do Exemplo 37 usando os algoritmos de decomposição de Cholesky, substituições sucessivas e substituições retroativas.

```
% Os valores de entrada
n = 4
A =
     9
     6    20
    -3     2     6
     3    22     2    28
```

Resultados dos algoritmos

```
% produzem os resultados pela decomposicao de Cholesky
A =
     3
     2     4
    -1     1     2
     1     5    -1     1
Det = 576
CondErro = 0
% vetor de termos independentes
b =
    12
    64
     4
    82
% As substituicoes sucessivas resultam em
y =
     4
    14
    -3
     5
% As substituicoes retroativas produzem
x =
     2
    -3
     1
     5
```

Complexidade da decomposição de Cholesky de matriz de ordem n

Operações	Complexidade
adições	$\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$
multiplicações	$\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{2}{3}n$
divisões	n
raízes quadradas	n

- Desconsiderando as n multiplicações efetuadas para o cálculo do determinante.
- Operação de potenciação computada como uma multiplicação.

Fatoração LDL^T

- Uma matriz A simétrica pode ser decomposta, tal que
$$A = LDL^T,$$
- L: matriz triangular inferior unitária ($l_{jj} = 1,\ \forall\ j$).
- D: matriz diagonal.
- Matriz D
$$\boxed{d_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 d_{kk},\ j = 1, 2, \ldots, n.} \quad (20)$$
- Matriz unitária L
$$\boxed{l_{ij} = \frac{a_{ij} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_{kk} l_{jk}}{d_{jj}},\ j = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ e } i = j+1, j+2, \ldots, n.} \quad (21)$$

Solução do sistema $Ax = b$ pela fatoração LDL^T

- Seja
$$Ax = b \longrightarrow LDL^T x = b.$$
- Fazendo
$$L^T x = t \ \text{ e } \ Dt = y \ \text{ então } \ Ly = b.$$
- Sistema $Ly = b$ resolvido pelas substituições sucessivas.
- Solução do sistema diagonal $Dt = y$ é $t_i = y_i / D_{ii}$.
- Vetor solução x do sistema $L^T x = t$ obtido pelas substituições retroativas.

Cálculo do determinante

- Pelas propriedades dos determinantes

$$\det(A) = \det(L)\det(D)\det(L^T),$$

$$\boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}}. \quad (22)$$

Exemplo de fatoração LDL^T

Exemplo 40 Resolver o sistema do Exemplo 38 usando a decomposição de LDL^T e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

- Pelo uso de (20) e (21)
- Coluna 1:

$$d_{11} = a_{11} = 5,\ l_{21} = \frac{a_{21}}{d_{11}} = \frac{-1}{5} = -0{,}2;\ l_{31} = \frac{a_{31}}{d_{11}} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

- Coluna 2:

$$d_{22} = a_{22} - l_{21}^2 d_{11} = 8 - (-0{,}2)^2(5) = 7{,}8;$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}d_{11}l_{21}}{d_{22}} = \frac{4 - (0{,}4)(5)(-0{,}2)}{7{,}8} = 0{,}5641.$$

- Coluna 3:

$$d_{33} = a_{33} - (l_{31}^2 d_{11} + l_{32}^2 d_{22}) = 10 - ((0{,}4)^2(5) + (0{,}5641)^2(7{,}8)) = 6{,}7180.$$

Verificação que $A = LDL^T$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}2 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5641 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 6{,}7180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0{,}5641 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução dos sistemas

- Sistema $Ly = b$ pelas substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}2 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5641 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} 21 \\ 14{,}2 \\ 33{,}5898 \end{bmatrix}.$$

- Sistema $Dt = y$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 6{,}7180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 14{,}2 \\ 33{,}5898 \end{bmatrix} \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 4{,}2 \\ 1{,}8205 \\ 5{,}0000 \end{bmatrix}.$$

- Sistema $L^T x = t$ pelas substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0{,}5641 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}2 \\ 1{,}8205 \\ 5{,}0000 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x = \begin{bmatrix} 2{,}0000 \\ -1{,}0000 \\ 5{,}0000 \end{bmatrix}.$$

Verificação da exatidão e unicidade da solução

- Vetor resíduo $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}0000 \\ -1{,}0000 \\ 5{,}0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Solução exata com quatro decimais.
- Cálculo do determinante por (22)

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{3} d_{ii} \approx (5)(7{,}8)(6{,}7180) = 262{,}0020 \neq 0 \longrightarrow \text{ solução única.}$$

Algoritmo: decomposição LDL^T

Algoritmo Decomposição_LDL^T
{ **Objetivo:** Fazer a decomposição LDL^T de uma matriz A }
{ simétrica e definida positiva }
parâmetros de entrada n, A { ordem e matriz a ser decomposta }
parâmetros de saída A, Det
  { matriz decomposta $A = L - I + D$ e determinante }
  $Det \leftarrow 1$
  para $j \leftarrow 1$ **até** n **faça**
    $Soma \leftarrow 0$
    para $k \leftarrow 1$ **até** $j - 1$ **faça**
      $Soma \leftarrow Soma + A(j,k)^2 * A(k,k)$
    fimpara
    $A(j,j) \leftarrow A(j,j) - Soma$
    $r = 1/A(j,j)$; $Det \leftarrow Det * A(j,j)$
    para $i \leftarrow j + 1$ **até** n **faça**
      $Soma \leftarrow 0$
      para $k \leftarrow 1$ **até** $j - 1$ **faça**
        $Soma \leftarrow Soma + A(i,k) * A(k,k) * A(j,k)$
      fimpara
      $A(i,j) \leftarrow (A(i,j) - Soma) * r$
    fimpara
  fimpara
fimalgoritmo

$\Vert\!\Leftarrow$

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 41 Decompor a matriz do sistema do Exemplo 40 utilizando o algoritmo decomposição LDL^T.

```
% Os valores de entrada
n = 3
A =
     5
    -1     8
     2     4    10
% produzem os resultados pela decomposicao LDLt
A =
    5.0000
   -0.2000    7.8000
    0.4000    0.5641    6.7179
Det =  262.0000
```

Complexidade computacional da decomposição LDL^T

Operações	Complexidade
adições	$\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$
multiplicações	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$
divisões	n

- Desconsiderando as n multiplicações efetuadas para o cálculo do determinante.
- Operação de potenciação contada como multiplicação.
- Vantagem da fatoração LDL^T é evitar o cálculo de raiz quadrada.
- Não deve ser usada em matriz simétrica que não seja definida positiva.
- A decomposição não é estável para essas matrizes.
- Recomendado o uso de outros métodos, como o de Aasen.

Decomposição espectral

- Seja uma matriz A de ordem n com autovalores $\lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$.
- Cada autovalor tem um autovetor correspondente.
- Generalizando a relação $Av_i = \lambda_i v_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$

$$AV = V\Lambda.$$

- $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$: matriz diagonal contendo os autovalores λ_i.
- V: matriz, cujas colunas são os autovetores v_i.
- Pós-multiplicando por V^{-1},

$$\boxed{A = V\Lambda V^{-1}}. \tag{23}$$

- Matriz A decomposta em termos de seus autovalores e autovetores.

Cálculo dos autovetores

- Relação fundamental $Av_i = \lambda_i v_i$

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0. \tag{24}$$

- Matriz $(A - \lambda_i I)$ é singular

$$\det(A - \lambda_i I) = 0.$$

- Sistema $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ é homogêneo.
- Ele apresenta infinitas soluções v_i.
- Atribuir um valor arbitrário a um elemento de v_i, por exemplo $v_{i1} = 1$.
- Obter os demais elementos do autovetor pela solução do sistema resultante de ordem $n - 1$.

Exemplo de decomposição espectral

Exemplo 42 Fazer a decomposição espectral da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Polinômio característico

$$D_3(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 7-\lambda & 14 & -2 \\ -3 & -10-\lambda & 2 \\ -12 & -28 & 5-\lambda \end{bmatrix}\right).$$

- Desenvolvendo o determinante: $D_3(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 11\lambda - 12$.
- Três zeros do polinômio característico: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -3$.
- Matriz Λ contendo os autovalores

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Autovetor v correspondente ao autovalor $\lambda_1 = 4$

- Resolver o sistema $(A - \lambda_1 I)v = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & 14 & -2 \\ -3 & -14 & 2 \\ -12 & -28 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- As equações 1 e 2 são redundantes.
- Elimina-se a segunda e faz-se $v_1 = 1$.

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -28 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix} \rightarrow v_2 = -0{,}5 \ \text{ e } \ v_3 = -2 \longrightarrow$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Autovetor w correspondente ao autovalor $\lambda_2 = 1$

- Resolver o sistema $(A - \lambda_2 I)w = 0$

$$\begin{bmatrix} 6 & 14 & -2 \\ -3 & -11 & 2 \\ -12 & -28 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- As equações 1 e 3 são redundantes.

- Elimina-se a terceira e faz-se $w_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -11 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} \to w_2 = -1 \text{ e } w_3 = -4 \longrightarrow$$

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Autovetor z correspondente ao autovalor $\lambda_3 = -3$

- Resolver o sistema $(A - \lambda_3 I)z = 0$

$$\begin{bmatrix} 10 & 14 & -2 \\ -3 & -7 & 2 \\ -12 & -28 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- As equações 2 e 3 são redundantes.

- Elimina-se a terceira e faz-se $z_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow z_2 = -1 \ \text{ e } \ z_3 = -2 \longrightarrow$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Decomposição espectral de A

- Matriz V contendo os autovetores de A

$$V = [v\ w\ z] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0{,}5 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

- Inversa de V

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & -2 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

- Decomposição espectral $A = V\Lambda V^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0{,}5 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & -2 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Solução de sistema linear

- Solução do sistema $Ax = b$ obtida por $x = A^{-1}b$.
- Por (23)

$$x = (V\Lambda V^{-1})^{-1}b \rightsquigarrow \boxed{x = (V\Lambda^{-1}V^{-1})b}. \quad (25)$$

- Vetor solução x depende dos recíprocos dos autovalores λ_i.
- Quase singularidade de $A \Longrightarrow x$ tenha elementos muito grandes.

Exemplo de solução de sistema via decomposição espectral

Exemplo 43 Calcular a solução do sistema abaixo, o qual envolve a matriz dos coeficientes do Exemplo 42

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Por (25) e utilizando os resultados do Exemplo 42

$$x = (V\Lambda^{-1}V^{-1})b$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0{,}5 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & -2 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 29 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Verificação da exatidão

- Solução exata

$$r = \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Grande custo computacional.
- Normalmente, não é utilizada para a solução de sistemas de equações lineares.

Uso da decomposição

- Resolver sistemas de equações lineares.
- Calcular o determinante de uma matriz.
- Refinar a solução de sistema.
- Calcular a matriz inversa.

Refinamento da solução

- Seja x^0 uma solução aproximada de $Ax = b$ calculada via decomposição LU com pivotação parcial

$$LUx^0 = Pb \longrightarrow Lt = Pb \text{ e } Ux^0 = t.$$

- Fatores L e U perdem exatidão devido aos erros de arredondamento.
- Solução melhorada $x^1 = x^0 + c^0$.
- c^0: vetor de correção

$$Ax^1 = b \longrightarrow A(x^0 + c^0) = b \longrightarrow Ac^0 = b - Ax^0 \leadsto Ac^0 = r^0.$$

- Correção c^0: solução do sistema $Ac^0 = r^0$ dada por

$$LUc^0 = Pr^0 \longrightarrow Lt = Pr^0 \text{ e } Uc^0 = t.$$

- Melhor aproximação $x^2 = x^1 + c^1$.
- c^1: solução de $Ac^1 = r^1$ obtida por $LUc^1 = Pr^1 \longrightarrow Lt = Pr^1$ e $Uc^1 = t$.

Esquema do refinamento de solução

$$LUx^0 = Pb \longrightarrow Lt = Pb \text{ e } Ux^0 = t,$$

$$\left.\begin{array}{l} r^k = b - Ax^k \\ LUc^k = Pr^k \longrightarrow Lt = Pr^k \text{ e } Uc^k = t \\ x^{k+1} = x^k + c^k \end{array}\right\} k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Processo repete até que um critério de parada seja satisfeito.
- Outras decomposições podem ser usadas para o refinamento da solução.

Exemplo de refinamento de solução

Exemplo 44 Resolver o sistema abaixo e refinar a solução até que $\|c\|_\infty < 10^{-3}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

- Decomposição LU com pivotação parcial

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}67 & 1 & 0 \\ -0{,}33 & 0{,}42 & 1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 0 & 6{,}33 & 3 \\ 0 & 0 & 2{,}74 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Cálculo de x^0

$$Ax^0 = b \longrightarrow LUx^0 = Pb,$$

$$Lt = Pb \leadsto t = \begin{bmatrix} 19 \\ 8{,}73 \\ 13{,}6034 \end{bmatrix} \text{ e } Ux^0 = t \leadsto x^0 = \begin{bmatrix} 1{,}9731 \\ -0{,}9738 \\ 4{,}9647 \end{bmatrix}.$$

Refinamento do vetor x

$$x^0 = \begin{bmatrix} 1{,}9731 \\ -0{,}9738 \\ 4{,}9647 \end{bmatrix}$$

$$r^0 = b - Ax^0 = \begin{bmatrix} -0{,}0601 \\ 0 \\ 0{,}0712 \end{bmatrix}, \quad LUc^0 = Pr^0 \leadsto c^0 = \begin{bmatrix} 0{,}0268 \\ -0{,}0262 \\ 0{,}0352 \end{bmatrix},$$

$$x^1 = x^0 + c^0 = \begin{bmatrix} 1{,}9999 \\ -1{,}0000 \\ 4{,}9999 \end{bmatrix},$$

$$r^1 = b - Ax^1 = \begin{bmatrix} 0{,}0001 \\ 0 \\ 0{,}0002 \end{bmatrix}, \quad LUc^1 = Pr^1 \leadsto c^1 = \begin{bmatrix} 0{,}0001 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0001 \end{bmatrix},$$

$$x^2 = x^1 + c^1 = \begin{bmatrix} 2{,}0000 \\ -1{,}0000 \\ 5{,}0000 \end{bmatrix}.$$

- Refinamento interrompido: $\|c^1\|_\infty = 0{,}0001 < 10^{-3}$.

Cálculo da matriz inversa

- Matriz inversa: $AA^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- $V = A^{-1}$: usado para simplificar a notação.
- Cálculo de V pela solução de n sistemas

$$Av_i = e_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

- v_i: i-ésima coluna da matriz inversa e
- e_i: i-ésima coluna da matriz identidade.
- Fazer uma decomposição de A.
- Calcular os n vetores v_i que compõem a inversa via substituições sucessivas e retroativas.

Exemplo de cálculo da inversa

Exemplo 45 Calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -5 \\ 2 & -5 & 30 \end{bmatrix}.$$

- Matriz A simétrica.
- Decomposição de Cholesky

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Cálculo das colunas da matriz inversa

- Coluna 1: $Av_1 = e_1$

$$LL^Tv_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow Lt = e_1 \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \text{ e } L^Tv_1 = t \rightsquigarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2{,}75 \\ 1{,}70 \\ 0{,}10 \end{bmatrix}.$$

- Coluna 2: $Av_2 = e_2$

$$LL^Tv_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow Lt = e_2 \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} \text{ e } L^Tv_2 = t \rightsquigarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1{,}70 \\ 1{,}16 \\ 0{,}08 \end{bmatrix}.$$

- Coluna 3: $Av_3 = e_3$

$$LL^Tv_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow Lt = e_3 \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} \text{ e } L^Tv_3 = t \rightsquigarrow v_3 = \begin{bmatrix} 0{,}10 \\ 0{,}08 \\ 0{,}04 \end{bmatrix}.$$

Matriz inversa

- $A^{-1} = V = [v_1 \; v_2 \; v_3]$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2{,}75 & 1{,}70 & 0{,}10 \\ 1{,}70 & 1{,}16 & 0{,}08 \\ 0{,}10 & 0{,}08 & 0{,}04 \end{bmatrix}.$$

- Verificação da relação $AA^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -5 \\ 2 & -5 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2{,}75 & 1{,}70 & 0{,}10 \\ 1{,}70 & 1{,}16 & 0{,}08 \\ 0{,}10 & 0{,}08 & 0{,}04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Métodos iterativos estacionários

- Gerar, a partir de x^0, uma seqüência de vetores

$$\{x^1, x^2, x^3, \ldots, x^k, \ldots\} \longrightarrow x.$$

- Uma mesma série de operações é repetida várias vezes.
- Existem várias classes de métodos iterativos.
- Seja M a matriz de iteração e c um vetor constante.

$$\boxed{x^{k+1} = Mx^k + c.} \tag{26}$$

- Método iterativo é dito estacionário quando a matriz M for fixa.
- Métodos iterativos estacionários: Jacobi, Gauss-Seidel e sobre-relaxação sucessiva.

Condição de convergência

Teorema 3 (Condição necessária) *O método iterativo (26) converge com qualquer valor inicial* x^0 *se, e somente se,* $\rho(M) < 1$*, sendo* $\rho(M)$ *o raio espectral (maior autovalor em módulo) da matriz de iteração* M*.*

Teorema 4 (Condição suficiente) *É condição suficiente para a convergência dos métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel que a matriz dos coeficientes* A *seja diagonal estritamente dominante, ou seja,*

$$\boxed{|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \ i = 1, 2, \ldots, n.} \qquad (27)$$

- A convergência não depende da escolha do vetor inicial x^0.

Critério de parada

- A cada passo do método iterativo a solução é obtida com exatidão crescente

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x.$$

- Processo deve ser interrompido quando algum critério de parada for satisfeito

$$\boxed{\frac{||x^k - x^{k-1}||}{||x^k||} \leq \varepsilon} \quad \text{ou} \tag{28}$$

$$\boxed{k \geq k_{\max}}, \tag{29}$$

- ε: tolerância e
- $k_{\max}$: número máximo de iterações.

Critério de parada adotado

- Com norma-∞

$$\boxed{\frac{\displaystyle\max_{1\le i\le n}\left|x_i^k - x_i^{k-1}\right|}{\displaystyle\max_{1\le i\le n}\left|x_i^k\right|} \le \varepsilon},$$

- x_i^k: i-ésimo componente do vetor x^k obtido na k-ésima iteração.
- A tolerância ε define com qual exatidão a solução é calculada.
- Em aritmética de ponto flutuante a exatidão não pode ser tão grande quanto se queira.
- Ela é limitada de acordo com o número de *bytes* das variáveis do programa.

Método de Jacobi

- Decompor a matriz A de modo que

$$A = D + E + F,$$

- D é uma matriz diagonal e E e F são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com diagonais nulas.
- O sistema $Ax = b$ escrito na forma

$$(D + E + F)x = b \longrightarrow Dx = -(E + F)x + b.$$

- Igualdade convertida em um processo iterativo

$$\boxed{x^{k+1} = \left(-D^{-1}(E + F)\right) x^k + D^{-1}b \longrightarrow x^{k+1} = Jx^k + c}, \tag{30}$$

- Matriz de iteração do método de Jacobi $J = -D^{-1}(E + F)$.

Forma análoga de dedução do método de Jacobi

- Sistema de equações lineares na forma

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} .$$

- Explicitar x_i na i-ésima equação.

- Equações de iterações do método de Jacobi

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k + b_1\right), \\ x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}\left(-a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k + b_2\right), \\ x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}}\left(-a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k - \cdots - a_{3n}x_n^k + b_3\right), \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}\left(-a_{n1}x_1^k - a_{n2}x_2^k - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^k + b_n\right), \end{array}\right\} \qquad (31)$$

Forma de recorrência $x^{k+1} = Jx^k + c$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} \end{bmatrix}}_{x^{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix}}_{x^k} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}}_{c}.$$

- Convergência independe do valor inicial x^0.
- Vetor inicial

$$\boxed{x_i^0 = \frac{b_i}{a_{ii}}}. \tag{32}$$

Algoritmo: método iterativo de Jacobi

```
Algoritmo Jacobi
{ Objetivo: Resolver o sistema Ax = b pelo método iterativo de Jacobi }
parâmetros de entrada n, A, b, Toler, IterMax
  { ordem, matriz, vetor independente, tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída x, Iter, CondErro
  { vetor solução, número de iterações e condição de erro }
  { construção das matrizes para as iterações }
  para i ← 1 até n faça
    r ← 1/A(i, i)
    para j ← 1 até n faça
      se i ≠ j então A(i, j) ← A(i, j) * r, fim se
    fim para; b(i) ← b(i) * r; x(i) ← b(i)
  fim para; Iter ← 0
  { iterações de Jacobi }
  repita
    Iter ← Iter + 1
    para i ← 1 até n faça
      Soma ← 0
      para j ← 1 até n faça
        se i ≠ j então Soma ← Soma + A(i, j) * x(j), fim se
      fim para; v(i) ← b(i) − Soma
    fim para
    NormaNum ← 0; NormaDen ← 0
    para i ← 1 até n faça
      t ← abs(v(i) − x(i))
      se t > NormaNum então NormaNum ← t, fim se
      se abs(v(i)) > NormaDen então NormaDen ← abs(v(i)), fim se; x(i) ← v(i)
    fim para
    NormaRel ← NormaNum/NormaDen; escreva Iter, x, NormaRel
    { teste de convergência }
    se NormaRel ≤ Toler ou Iter ≥ IterMax então interrompa, fim se
  fim repita
  se NormaRel ≤ Toler então CondErro ← 0, senão CondErro ← 1
  fim se
fim algoritmo
```

⊫

Complexidade computacional

Operações	Complexidade
adições	$kn^2 + kn + k$
multiplicações	$(k+1)n^2 - kn$
divisões	$n + k$

- Complexidade de Jacobi usando k iterações em sistema de ordem $n > 1$.

Exemplo do método de Jacobi

Exemplo 46 Resolver o sistema de equações pelo método de Jacobi com $\varepsilon < 10^{-5}$ e $k_{\max} = 50$ usando os critérios (28) e (29)

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

- Matriz dos coeficientes diagonal estritamente dominante

$$|10| > |3| + |-2|, \quad |8| > |2| + |-1| \text{ e } |5| > |1| + |1|.$$

- Equações de iterações

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{10}\left(-3x_2^k + 2x_3^k + 57\right),$$
$$x_2^{k+1} = \frac{1}{8}\left(-2x_1^k + x_3^k + 20\right) \text{ e}$$
$$x_3^{k+1} = \frac{1}{5}\left(-x_1^k - x_2^k - 4\right).$$

- Vetor inicial $x^0 = [5{,}7 \;\; 2{,}5 \;\; -0{,}8]^T$.

Coordenadas do vetor da primeira iteração

$$x_1^1 = \frac{1}{10}\left(-3x_2^0 + 2x_3^0 + 57\right) = \frac{1}{10}(-3(2{,}5) + 2(-0{,}8) + 57) \leadsto x_1^1 = 4{,}79,$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8}\left(-2x_1^0 + x_3^0 + 20\right) = \frac{1}{8}(-2(5{,}7) + (-0{,}8) + 20) \leadsto x_2^1 = 0{,}975 \text{ e}$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5}\left(-x_1^0 - x_2^0 - 4\right) = \frac{1}{5}(-(5{,}7) - (2{,}5) - 4) \leadsto x_3^1 = -2{,}44.$$

- Vetor da primeira iteração: $x^1 = [4{,}79 \;\; 0{,}975 \;\; -2{,}44]^T$.
- Critério de parada

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(|4{,}79 - 5{,}7|, |0{,}975 - 2{,}5|, |-2{,}44 - (-0{,}8)|)}{\max(|4{,}79|, |0{,}975|, |-2{,}44|)},$$

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(0{,}91;\; 1{,}525;\; 1{,}64)}{\max(4{,}79;\; 0{,}975;\; 2{,}44)} = 0{,}3424.$$

Resultados gerados pelo algoritmo

```
% Os valores de entrada
n = 3
A =
    10     3    -2
     2     8    -1
     1     1     5
b =
    57
    20
    -4
Toler = 1.0000e-05
IterMax = 50
% produzem os resultados
  Solucao de sistema linear pelo metodo de Jacobi
Iter      x1          x2          x3      NormaRelativa
  0    5.70000    2.50000   -0.80000
  1    4.79000    0.97500   -2.44000    3.42380e-01
  2    4.91950    0.99750   -1.95300    9.89938e-02
  3    5.01015    1.02600   -1.98340    1.80933e-02
  4    4.99552    0.99954   -2.00723    5.29725e-03
  5    4.99869    1.00022   -1.99901    1.64413e-03
  6    5.00013    1.00045   -1.99978    2.88007e-04
  7    4.99991    0.99999   -2.00012    9.12629e-05
  8    4.99998    1.00001   -1.99998    2.72243e-05
  9    5.00000    1.00001   -2.00000    4.59167e-06

Solucao  =    5.00000    1.00001   -2.00000
Iter     =  9
CondErro =  0
```

- Vetor solução

$$x \approx x^9 = [5{,}00000 \;\; 1{,}00001 \;\; -2{,}00000]^T.$$

Exemplo do método de Jacobi

Exemplo 47 Calcular três aproximações do vetor solução do sistema do Exemplo 46 utilizando a formulação (30):

$$x^{k+1} = -D^{-1}(E+F)x^k + D^{-1}b = Jx^k + c.$$

- Decompondo $A = D + E + F$

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Matriz J e vetores c e x^0

$$J = -D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}3 & 0{,}2 \\ -0{,}25 & 0 & 0{,}125 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$c = D^{-1}b = x^0 = [5{,}7 \;\; 2{,}5 \;\; -0{,}8]^T.$$

Primeiras aproximações da solução

- Por (30)

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	5,70000	2,50000	$-0{,}80000$
1	4,79000	0,97500	$-2{,}44000$
2	4,91950	0,99750	$-1{,}95300$
3	5,01015	1,02600	$-1{,}98340$

.

Exemplo do método de Jacobi

Exemplo 48 Resolver o sistema pelo método de Jacobi com $\varepsilon < 10^{-3}$ e $k_{\max} = 50$ usando os critérios (28) e (29)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Matriz dos coeficientes diagonalmente dominante

$$|5| > |2| + |0| + |-1|, |8| > |1| + |-3| + |2|,$$

$$|6| > |0| + |1| + |1| \text{ e } |9| > |1| + |-1| + |2|.$$

Equações de iterações

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{5}\left(-2x_2^k + x_4^k + 6\right),$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{8}\left(-x_1^k + 3x_3^k - 2x_4^k + 10\right),$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{6}\left(-x_2^k - x_4^k - 5\right) \text{ e}$$

$$x_4^{k+1} = \frac{1}{9}\left(-x_1^k + x_2^k - 2x_3^k\right).$$

- Vetor inicial: $x^0 = [1{,}2 \ \ 1{,}25 \ \ -0{,}8333 \ \ 0]^T$.

Coordenadas do vetor da primeira iteração

- Pelas equações de iterações

$$
\begin{aligned}
x_1^1 &= \tfrac{1}{5}\left(-2x_2^0 + x_4^0 + 6\right) = \tfrac{1}{5}\left(-2(1{,}25) + (0) + 6\right) = 0{,}7;\\
x_2^1 &= \tfrac{1}{8}\left(-x_1^0 + 3x_3^0 - 2x_4^0 + 10\right) = \tfrac{1}{8}\left(-(1{,}2) + 3(-0{,}8333) - 2(0) + 10\right) = 0{,}7875;\\
x_3^1 &= \tfrac{1}{6}\left(-x_2^0 - x_4^0 - 5\right) = \tfrac{1}{6}\left(-(1{,}25) - (0) - 5\right) = -1{,}0417;\\
x_4^1 &= \tfrac{1}{9}\left(-x_1^0 + x_2^0 - 2x_3^0\right) = \tfrac{1}{9}\left(-(1{,}2) + (1{,}25) - 2(-0{,}8333)\right) = 0{,}1907.
\end{aligned}
$$

- Vetor da primeira iteração: $x^1 = [0{,}7 \;\; 0{,}7875 \;\; -1{,}0417 \;\; 0{,}1907]^T$.
- Critério de parada

$$
\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(|0{,}7-1{,}2|, |0{,}7875-1{,}25|, |-1{,}0417-(-0{,}8333)|, |0{,}1907-0|)}{\max(|0{,}7|, |0{,}7875|, |-1{,}0417|, |0{,}1907|)},
$$

$$
\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(0{,}5;\ 0{,}4625;\ 0{,}2084;\ 0{,}1907)}{\max(0{,}7;\ 0{,}7875;\ 1{,}0417;\ 0{,}1907)} = 0{,}4800.
$$

Resultados gerados pelo algoritmo

```
% Os valores de entrada
n = 4
A =
     5     2     0    -1
     1     8    -3     2
     0     1     6     1
     1    -1     2     9
b =
     6
    10
    -5
     0
Toler = 1.0000e-03
IterMax = 50
% produzem os resultados
  Solucao de sistema linear pelo metodo de Jacobi
Iter     x1         x2         x3         x4      NormaRelativa
  0    1.20000    1.25000   -0.83333    0.00000
  1    0.70000    0.78750   -1.04167    0.19074    4.80000e-01
  2    0.92315    0.72419   -0.99637    0.24120    2.23960e-01
  3    0.95856    0.70067   -0.99423    0.19931    4.21369e-02
  4    0.95960    0.70751   -0.98333    0.19229    1.10879e-02
  5    0.95545    0.71323   -0.98330    0.19051    5.81305e-03
  6    0.95281    0.71420   -0.98396    0.19160    2.68474e-03
  7    0.95264    0.71402   -0.98430    0.19215    5.56291e-04

Solucao  =    0.95264    0.71402   -0.98430    0.19215
Iter     =  7
CondErro =  0
```

- Vetor solução: $x \approx x^7 = [0{,}95264 \;\; 0{,}71402 \;\; -0{,}98430 \;\; 0{,}19215]^T$.

Método de Gauss-Seidel

- Decompor a matriz A tal que

$$A = D + E + F,$$

- D é uma matriz diagonal e E e F são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com diagonais nulas.
- Sistema linear $Ax = b$ escrito na forma

$$(D + E + F)x = b \longrightarrow (D + E)x = -Fx + b.$$

- Forma de iteração obtida pela recorrência

$$\boxed{x^{k+1} = \left(-(D + E)^{-1}F\right) x^k + (D + E)^{-1}b \longrightarrow x^{k+1} = Sx^k + d}. \qquad (33)$$

- Matriz de iteração do método de Gauss-Seidel: $S = -(D + E)^{-1}F$.

Forma alternativa de dedução do método de Gauss-Seidel

- Seja

$$(D+E+F)x = b \longrightarrow (D+E)x = -Fx + b.$$

- Na forma de recorrência

$$(D+E)x^{k+1} = -Fx^k + b \longrightarrow Dx^{k+1} = -Ex^{k+1} - Fx^k + b.$$

- Escrevendo a segunda equação na forma matricial

$$Dx^{k+1} = -\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} \end{bmatrix}}_{x^{k+1}} -$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix}}_{x^k} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{b},$$

Equações de iterações do método de Gauss-Seidel

$$\left.\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}}\Big(-a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k + b_1\Big),\\
x_2^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}}\Big(-a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k + b_2\Big),\\
x_3^{k+1} &= \frac{1}{a_{33}}\Big(-a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - \cdots - a_{3n}x_n^k + b_3\Big),\\
&\vdots\\
x_n^{k+1} &= \frac{1}{a_{nn}}\Big(-a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} + b_n\Big).
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

- Vetor x^{k+1} obtido a partir dos elementos mais recentes, incluindo o próprio x^{k+1} e x^k.
- Vetor inicial

$$x_i^0 = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

Algoritmo: método iterativo de Gauss-Seidel

```
Algoritmo Gauss-Seidel
{ Objetivo: Resolver o sistema Ax = b pelo método iterativo de Gauss-Seidel }
parâmetros de entrada n, A, b, Toler, IterMax
   { ordem, matriz, vetor independente, tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída x, Iter, CondErro
   { vetor solução, número de iterações e condição de erro }
   { construção das matrizes para as iterações }
   para i ← 1 até n faça
      r ← 1/A(i, i)
      para j ← 1 até n faça
         se i ≠ j então A(i, j) ← A(i, j) ∗ r, fim se
      fim para; b(i) ← b(i) ∗ r; x(i) ← b(i)
   fim para; Iter ← 0
   { iterações de Gauss-Seidel }
   repita
      Iter ← Iter + 1
      para i ← 1 até n faça
         Soma ← 0
         para j ← 1 até n faça
            se i ≠ j então Soma ← Soma + A(i, j) ∗ x(j), fim se
         fim para; v(i) ← x(i); x(i) ← b(i) − Soma
      fim para; NormaNum ← 0; NormaDen ← 0
      para i ← 1 até n faça
         t ← abs(x(i) − v(i))
         se t > NormaNum então NormaNum ← t, fim se
         se abs(x(i)) > NormaDen então NormaDen ← abs(x(i)), fim se
      fim para; NormaRel ← NormaNum/NormaDen; escreva Iter, x, NormaRel
      { teste de convergência }
      se NormaRel ≤ Toler ou Iter ≥ IterMax então interrompa, fim se
   fim repita
   se NormaRel ≤ Toler então CondErro ← 0, senão CondErro ← 1
   fim se
fim algoritmo
```

Complexidade computacional

Operações	Complexidade
adições	$kn^2 + kn + k$
multiplicações	$(k+1)n^2 - kn$
divisões	$n + k$

- Complexidade de Gauss-Seidel usando k iterações em sistema de ordem $n > 1$.

Exemplo do método de Gauss-Seidel

Exemplo 49 Resolver o sistema do Exemplo 46 pelo método de Gauss-Seidel com $\varepsilon < 10^{-5}$ e $k_{\max} = 50$ usando os critérios (28) e (29)

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

- Matriz dos coeficientes é diagonalmente dominante.
- Eequações de iterações

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{10}\left(-3x_2^k + 2x_3^k + 57\right),$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{8}\left(-2x_1^{k+1} + x_3^k + 20\right) \text{ e}$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{5}\left(-x_1^{k+1} - x_2^{k+1} - 4\right).$$

- Vetor inicial: $x^0 = [5{,}7 \;\; 2{,}5 \;\; -0{,}8]^T$.

Coordenadas do vetor da primeira iteração

$$x_1^1 = \frac{1}{10}\left(-3x_2^0 + 2x_3^0 + 57\right) = \frac{1}{10}(-3(2{,}5) + 2(-0{,}8) + 57) \rightsquigarrow x_1^1 = 4{,}79,$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8}\left(-2x_1^1 + x_3^0 + 20\right) = \frac{1}{8}(-2(4{,}79) + (-0{,}8) + 20) \rightsquigarrow x_2^1 = 1{,}2025 \text{ e}$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5}\left(-x_1^1 - x_2^1 - 4\right) = \frac{1}{5}(-(4{,}79) - (1{,}2025) - 4) \rightsquigarrow x_3^1 = -1{,}9985.$$

- Vetor da primeira iteração: $x^1 = [4{,}79 \;\; 1{,}2025 \;\; -1{,}9985]^T$.
- Condição de parada

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(|4{,}79 - 5{,}7|, |1{,}2025 - 2{,}5|, |-1{,}9985 - (-0{,}8)|)}{\max(|4{,}79|, |1{,}2025|, |-1{,}9985|)},$$

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(0{,}91;\; 1{,}2975;\; 1{,}1985)}{\max(4{,}79;\; 1{,}2025;\; 1{,}9985)} = 0{,}2709.$$

Resultados gerados pelo algoritmo

```
% Os valores de entrada
n = 3
A =
    10     3    -2
     2     8    -1
     1     1     5
b =
    57
    20
    -4
Toler = 1.0000e-05
IterMax = 50
% produzem os resultados
  Solucao de sistema linear pelo metodo de Gauss-Seidel
Iter      x1          x2          x3       NormaRelativa
  0    5.70000    2.50000   -0.80000
  1    4.79000    1.20250   -1.99850    2.70877e-01
  2    4.93955    1.01530   -1.99097    3.78982e-02
  3    4.99722    1.00182   -1.99981    1.15396e-02
  4    4.99949    1.00015   -1.99993    4.55035e-04
  5    4.99997    1.00002   -2.00000    9.55994e-05
  6    5.00000    1.00000   -2.00000    5.32440e-06

Solucao  =    5.00000    1.00000   -2.00000
Iter     =  6
CondErro =  0
```

- Vetor solução: $x \approx x^6 = [5{,}00000\ 1{,}00000\ \ -2{,}00000]^T$.

Exemplo do método de Gauss-Seidel

Exemplo 50 Calcular três aproximações do vetor solução do sistema do Exemplo 49 usando a formulação (33):

$$x^{k+1} = -(D+E)^{-1}Fx^k + (D+E)^{-1}b = Sx^k + d.$$

- Decompondo $A = D + E + F$

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Matriz $(D+E)^{-1}$ calculada utilizando o esquema: $(D+E)(D+E)^{-1} = I$.
- Matrizes $(D+E)^{-1}$ e S

$$(D+E)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ -0{,}025 & 0{,}125 & 0 \\ -0{,}015 & -0{,}025 & 0{,}2 \end{bmatrix} \text{ e } S = -(D+E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}075 & 0{,}075 \\ 0 & 0{,}045 & -0{,}055 \end{bmatrix}.$$

- Vetores d e x^0

$$d = (D+E)^{-1}b = [5{,}7 \;\; 1{,}075 \;\; -2{,}155]^T \text{ e } x^0 = D^{-1}b = [5{,}7 \;\; 2{,}5 \;\; -0{,}8]^T.$$

Primeiras aproximações da solução

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	5,70000	2,50000	−0,80000
1	4,79000	1,20250	−1,99850
2	4,93955	1,01530	−1,99097
3	4,99722	1,00182	−1,99981

.

Exemplo do método de Gauss-Seidel

Exemplo 51 Resolver o sistema do Exemplo 48 pelo método de Gauss-Seidel com $\varepsilon < 10^{-3}$ e $k_{\max} = 50$ usando os critérios (28) e (29)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Matriz dos coeficientes diagonal estritamente dominante

$$|5| > |2| + |0| + |-1|, |8| > |1| + |-3| + |2|,$$

$$|6| > |0| + |1| + |1| \text{ e } |9| > |1| + |-1| + |2|.$$

- Equações de iterações

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \tfrac{1}{5}\left(-2x_2^k + x_4^k + 6\right), \\ x_2^{k+1} &= \tfrac{1}{8}\left(-x_1^{k+1} + 3x_3^k - 2x_4^k + 10\right), \\ x_3^{k+1} &= \tfrac{1}{6}\left(-x_2^{k+1} - x_4^k - 5\right) \text{ e} \\ x_4^{k+1} &= \tfrac{1}{9}\left(-x_1^{k+1} + x_2^{k+1} - 2x_3^{k+1}\right). \end{aligned}$$

- Vetor inicial: $x^0 = [1{,}2 \;\; 1{,}25 \;\; -0{,}8333 \;\; 0]^T$.

Coordenadas do vetor da primeira iteração

$$x_1^1 = \frac{1}{5}\left(-2x_2^0 + x_4^0 + 6\right) = \frac{1}{5}(-2(1{,}25) + (0) + 6) = 0{,}7;$$
$$x_2^1 = \frac{1}{8}\left(-x_1^1 + 3x_3^0 - 2x_4^0 + 10\right) = \frac{1}{8}(-(0{,}7) + 3(-0{,}8333) - 2(0) + 10) = 0{,}85;$$
$$x_3^1 = \frac{1}{6}\left(-x_2^1 - x_4^0 - 5\right) = \frac{1}{6}(-(0{,}85) - (0) - 5) = -0{,}975;$$
$$x_4^1 = \frac{1}{9}\left(-x_1^1 + x_2^1 - 2x_3^1\right) = \frac{1}{9}(-(0{,}7) + (0{,}85) - 2(-0{,}975)) = 0{,}2333.$$

- Vetor da primeira iteração: $x^1 = [0{,}7 \;\; 0{,}85 \;\; -0{,}975 \;\; 0{,}2333]^T$.
- Condição de parada

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(|0{,}7-1{,}2|, |0{,}85-1{,}25|, |-0{,}975-(-0{,}8333)|, |0{,}2333-0|)}{\max(|0{,}7|, |0{,}85|, |-0{,}975|, |0{,}2333|)},$$

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(0{,}5;\; 0{,}4;\; 0{,}1417;\; 0{,}2333)}{\max(0{,}7;\; 0{,}85;\; 0{,}975;\; 0{,}2333)} = 0{,}5128.$$

Resultados obtidos pelo algoritmo

```
% Os valores de entrada
n = 4
A =
     5     2     0    -1
     1     8    -3     2
     0     1     6     1
     1    -1     2     9
b =
     6
    10
    -5
     0
Toler = 1.0000e-03
IterMax = 50
% produzem os resultados
  Solucao de sistema linear pelo metodo de Gauss-Seidel
Iter     x1         x2         x3         x4      NormaRelativa
  0    1.20000    1.25000   -0.83333    0.00000
  1    0.70000    0.85000   -0.97500    0.23333    5.12821e-01
  2    0.90667    0.71271   -0.99101    0.19867    2.08542e-01
  3    0.95465    0.70937   -0.98467    0.19156    4.87314e-02
  4    0.95456    0.71354   -0.98418    0.19193    4.22999e-03
  5    0.95297    0.71383   -0.98429    0.19216    1.61801e-03
  6    0.95290    0.71374   -0.98432    0.19216    9.20739e-05

Solucao  =    0.95290    0.71374   -0.98432    0.19216
Iter     =  6
CondErro =  0
```

- Vetor solução: $x \approx x^6 = [0{,}95290 \;\; 0{,}71374 \;\; -0{,}98432 \;\; 0{,}19216]^T$.

Método da sobre-relaxação sucessiva

- Decompor a matriz A de modo que
$$A = D + E + F,$$
- D é uma matriz diagonal e E e F são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com diagonais nulas.
- Multiplicando o sistema linear $Ax = b$ por um parâmetro ω
$$\omega(D + E + F)x = \omega b.$$
- Somando o vetor nulo $(D - D)x$ ao primeiro termo
$$(D - D)x + \omega(D + E + F)x = \omega b.$$
- Rearranjando
$$(D + \omega E)x = [(1 - \omega)D - \omega F]x + \omega b.$$
- Forma de iteração
$$(D + \omega E)x^{k+1} = [(1 - \omega)D - \omega F]x^k + \omega b, \tag{35}$$
$$\boxed{x^{k+1} = (D+\omega E)^{-1}\left[(1-\omega)D - \omega F\right]x^k + \omega(D+\omega E)^{-1}b \longrightarrow x^{k+1} = Rx^k + e}. \tag{36}$$
- Matriz de iteracao do método SOR: $R = (D + \omega E)^{-1}\left[(1 - \omega)D - \omega F\right]$.
- *SOR: successive over-relaxation.*

Convergência do método SOR

- Depende do parâmetro ω.
- Para garantir a convergência: $0 < \omega < 2$.
- Usualmente: $1 < \omega < 2$.
- Para $\omega = 1$, a recorrência (36) torna-se

$$x^{k+1} = -(D+E)^{-1}Fx^k + (D+E)^{-1}b,$$

- Método de Gauss-Seidel é um caso particular da sobre-relaxação sucessiva.

Equações de iterações do método SOR

- Por (35)

$$(D+\omega E)x^{k+1} = [(1-\omega)D - \omega F]x^k + \omega b,$$
$$Dx^{k+1} = \omega(-Ex^{k+1} - Fx^k + b) + (1-\omega)Dx^k,$$
$$x^{k+1} = \omega D^{-1}(-Ex^{k+1} - Fx^k + b) + (1-\omega)x^k.$$

$$\left.\begin{array}{l}
x_1^{k+1} = \frac{\omega}{a_{11}}\left(-a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k + b_1\right) + (1-\omega)x_1^k, \\
x_2^{k+1} = \frac{\omega}{a_{22}}\left(-a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k + b_2\right) + (1-\omega)x_2^k, \\
x_3^{k+1} = \frac{\omega}{a_{33}}\left(-a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - \cdots - a_{3n}x_n^k + b_3\right) + (1-\omega)x_3^k, \\
\vdots \\
x_n^{k+1} = \frac{\omega}{a_{nn}}\left(-a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} + b_n\right) + (1-\omega)x_n^k.
\end{array}\right\} \quad (37)$$

Algoritmo: método da sobre-relaxação sucessiva

```
Algoritmo SOR
{ Objetivo: Resolver o sistema Ax = b pelo método iterativo da sobre-relaxação sucessiva }
parâmetros de entrada n, A, b, Omega, Toler, IterMax
  { ordem, matriz, vetor independente, parâmetro ω, tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída x, Iter, CondErro
  { vetor solução, número de iterações e condição de erro }
  { construção das matrizes para as iterações }
  para i ← 1 até n faça
    r ← 1/A(i, i)
    para j ← 1 até n faça
      se i ≠ j então A(i, j) ← A(i, j) ∗ r, fimse
    fimpara; b(i) ← b(i) ∗ r; x(i) ← b(i)
  fimpara; Iter ← 0
  { iterações da sobre-relaxação sucessiva }
  repita
    Iter ← Iter + 1
    para i ← 1 até n faça
      Soma ← 0
      para j ← 1 até n faça
        se i ≠ j então Soma ← Soma + A(i, j) ∗ x(j), fimse
      fimpara; v(i) ← x(i); x(i) ← Omega ∗ (b(i) − Soma) + (1 − Omega) ∗ x(i)
    fimpara; NormaNum ← 0; NormaDen ← 0
    para i ← 1 até n faça
      t ← abs(x(i) − v(i))
      se t > NormaNum então NormaNum ← t, fimse
      se abs(x(i)) > NormaDen então NormaDen ← abs(x(i)), fimse
    fimpara; NormaRel ← NormaNum/NormaDen; escreva Iter, x, NormaRel
    { teste de convergência }
    se NormaRel ≤ Toler ou Iter ≥ IterMax então interrompa, fimse
  fimrepita
  se NormaRel ≤ Toler então CondErro ← 0, senão CondErro ← 1
  fimse
fimalgoritmo
```

|⇐

Influência do parâmetro ω no raio espectral

Exemplo 52 Resolver o sistema pelo método SOR, com $\varepsilon < 10^{-5}$ e $k_{\max} = 500$ usando os critérios (28) e (29)

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 10 & 0 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 15 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 56 \\ 74 \\ 57 \\ 107 \end{bmatrix}.$$

- Influência do parâmetro ω no raio espectral ρ da matriz de iteração

$$R = (D + \omega E)^{-1} [(1 - \omega)D - \omega F]$$

ω	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
$\rho(R)$	0,9357	0,8618	0,7747	0,6674	0,5231	0,4459	0,7506	1,0660	1,3943
iterações	118	63	41	29	20	17	44	>500	>500

.

- Quanto menor $\rho(R)$ menor será o número de iterações.

Sobre o teorema da condição suficiente

- Teorema 4 não se aplica ao método da sobre-relaxação sucessiva devido ao parâmetro ω.
- No Exemplo 51, onde a matriz A é diagonal estritamente dominante, o método de Gauss-Seidel converge com 6 iterações.
- Sobre-relaxação sucessiva não converge com $\omega = 1{,}8$ porque neste caso $\rho(R_{\omega=1,8}) = 1{,}0131 > 1$.

Análise de convergência

- Seja o erro ϵ^k na k-ésima iteração

$$\epsilon^k = x^k - x^*,$$

- x^*: solução exata do sistema $Ax = b$ de ordem n e
- x^k: aproximação da solução.
- Substituindo a equação acima para ϵ^{k+1} em (26)

$$\epsilon^{k+1} = x^{k+1} - x^* = Mx^k + c - x^*.$$

- Sendo $x^k = \epsilon^k + x^*$

$$\epsilon^{k+1} = M(\epsilon^k + x^*) + c - x^*,$$
$$\epsilon^{k+1} = M\epsilon^k + (Mx^* + c - x^*). \tag{38}$$

- Tomando o limite de (26),

$$\lim_{k\to\infty} x^{k+1} = \lim_{k\to\infty} Mx^k + c \longrightarrow x^* = Mx^* + c.$$

Análise de convergência cont.

- Propagação de erro é da forma

$$\epsilon^{k+1} = M\epsilon^{k}. \tag{39}$$

- Sendo λ_i um autovalor de M e v_i o seu correspondente autovetor

$$Mv_i = \lambda_i v_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \ \text{ ou}$$

$$MV = V\Lambda$$

- $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$: matriz diagonal contendo os autovalores λ_i e
- V: matriz composta pelos autovetores v_i.
- Expressando o vetor erro inicial ϵ^0 como uma combinação linear dos autovetores V de M

$$\epsilon^0 = Vc$$

- c: um vetor de coeficientes obtido pela solução do sistema linear acima.

Análise de convergência cont.

- Substituindo em (39)

$$\epsilon^1 = M\epsilon^0 = MVc \longrightarrow \epsilon^1 = V\Lambda c.$$
$$\epsilon^2 = M\epsilon^1 = MV\Lambda c \longrightarrow \epsilon^2 = V\Lambda^2 c.$$
$$\boxed{\epsilon^k = V\Lambda^k c}, \tag{40}$$
$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^k \\ \epsilon_2^k \\ \vdots \\ \epsilon_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\lambda_1^k \\ c_2\lambda_2^k \\ \vdots \\ c_n\lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

- Quando k aumentar, o vetor erro ϵ^k irá reduzir se, e somente se, o módulo de todos os autovalores λ_i da matriz de iteração M for menor que a unidade.

- A taxa de convergência será controlada pela magnitude do maior autovalor em módulo, o chamado raio espectral $\rho(M)$ (ver Teorema 3).

Resultados da expressão $\epsilon^k = V\Lambda^k c$

Exemplo 53 Seja o sistema $Ax = b$ do Exemplo 49 e sua solução exata x^*

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ e } x^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- A partir dos resultados do Exemplo 50, obtêm-se os valores para a fórmula de recorrência de Gauss-Seidel $x^{k+1} = Sx^k + d$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}300 & 0{,}200 \\ 0 & 0{,}075 & 0{,}075 \\ 0 & 0{,}045 & -0{,}055 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 5{,}700 \\ 1{,}075 \\ -2{,}155 \end{bmatrix} \text{ e } x^0 = \begin{bmatrix} 5{,}7 \\ 2{,}5 \\ -0{,}8 \end{bmatrix}.$$

- Vetor erro inicial: $\epsilon^0 = x^0 - x^* = [0{,}7\ 1{,}5\ 1{,}2]^T$.

- Autovalores Λ da matriz de iteração S e seus respectivos autovetores V

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}09718 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}07718 \end{bmatrix} \text{ e } V = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}92174 & -0{,}97074 \\ 0 & 0{,}37189 & -0{,}10615 \\ 0 & 0{,}10997 & 0{,}21538 \end{bmatrix}.$$

Resultados da expressão $\epsilon^k = V\Lambda^k c$ cont.

- Por (40) o vetor erro na k-ésima iteração

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^k \\ \epsilon_2^k \\ \epsilon_3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}92174 & -0{,}97074 \\ 0 & 0{,}37189 & -0{,}10615 \\ 0 & 0{,}10997 & 0{,}21538 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8{,}19997(0)^k \\ 4{,}90841(0{,}09718)^k \\ 3{,}06538(-0{,}07718)^k \end{bmatrix},$$

- vetor c: solução do sistema linear $Vc = \epsilon^0$.
- Calcula-se o vetor erro ϵ^k a cada iteração.
- Como $x^k = \epsilon^k + x^*$, é possível obter a solução aproximada x^k para comparar com os valores mostrados no Exemplo 50

k	ϵ_1^k	ϵ_2^k	ϵ_3^k	$\epsilon_1^k + x_1^*$	$\epsilon_2^k + x_2^*$	$\epsilon_3^k + x_3^*$
0	0,70000	1,50000	1,20000	5,70000	2,50000	−0,80000
1	−0,21001	0,20250	0,00150	4,78999	1,20250	−1,99850
2	−0,06045	0,01530	0,00903	4,93955	1,01530	−1,99097
3	−0,00278	0,00182	0,00019	4,99722	1,00182	−1,99981

.

Resultados da expressão $\epsilon^k = V\Lambda^k c$ cont.

- Processo converge, pois $|\lambda_i| < 1 \; \forall \; i$

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_i^k = 0 \longrightarrow \lim_{k\to\infty} \epsilon^k = 0,$$

- Solução divergiria se pelo menos um $|\lambda_i| > 1$

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_i^k = \infty \longrightarrow \lim_{k\to\infty} \epsilon^k = \infty,$$

Comparação dos métodos iterativos estacionários

- Matriz dos coeficientes A diagonal estritamente dominante: solução converge pelos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel (Teorema 4).
- Se A não for diagonalmente dominante: previsão de convergência feita usando o raio espectral $\rho(M)$ da matriz de iteração (Teorema 3).
- Neste caso, um método pode convergir e o outro não.

Exemplo de convergência

Exemplo 54 Verificar se o sistema abaixo pode ser resolvido pelo método de Jacobi ou de Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0{,}4 & -0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ -0{,}6 \end{bmatrix}.$$

- Matriz A não é diagonal estritamente dominante.
- Matrizes de iteração

$$J = -D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}2 & -0{,}6 \\ -1 & 0 & -1 \\ -0{,}4 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(J) = 1{,}1200 \text{ e}$$

$$S = -(D+E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}2 & -0{,}6 \\ 0 & 1{,}2 & -0{,}4 \\ 0 & 0{,}96 & 0{,}08 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(S) = 0{,}6928.$$

- Raios espectrais: $\rho(J) > 1$ e $\rho(S) < 1$.

Dez primeiras iterações

```
 Solucao de sistema linear pelo metodo de Jacobi
Iter     x1          x2          x3      NormaRelativa
  0    0.40000    0.00000   -0.60000
  1    0.76000    0.20000   -0.76000    4.73684e-01
  2    0.61600    0.00000   -0.82400    2.42718e-01
  3    0.89440    0.20800   -0.84640    3.11270e-01
  4    0.65824   -0.04800   -0.87456    2.92719e-01
  5    0.98234    0.21632   -0.88250    3.29924e-01
  6    0.66991   -0.09984   -0.90641    3.48806e-01
  7    1.06365    0.23649   -0.90790    3.70176e-01
  8    0.66095   -0.15575   -0.93086    4.32612e-01
  9    1.14542    0.26991   -0.92668    4.22963e-01
 10    0.63211   -0.21874   -0.95020    5.40209e-01
```

```
 Solucao de sistema linear pelo metodo de Gauss-Seidel
Iter     x1          x2          x3      NormaRelativa
  0    0.40000    0.00000   -0.60000
  1    0.76000   -0.16000   -0.96800    3.80165e-01
  2    1.17280   -0.20480   -1.15104    3.51978e-01
  3    1.33638   -0.18534   -1.20869    1.22408e-01
  4    1.34763   -0.13894   -1.19463    3.44366e-02
  5    1.28350   -0.08887   -1.14895    4.99639e-02
  6    1.19602   -0.04707   -1.09723    7.31440e-02
  7    1.11482   -0.01759   -1.05296    7.28318e-02
  8    1.05288    0.00008   -1.02112    5.88269e-02
  9    1.01258    0.00854   -1.00161    3.98065e-02
 10    0.99071    0.01090   -0.99193    2.20409e-02
```

Exemplo de convergência

Exemplo 55 Verificar se o sistema a seguir pode ser resolvido pelo método de Jacobi ou de Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0{,}4 & -0{,}4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ -0{,}6 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes de iteração

$$J = -D^{-1}(E+F) = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}2 & -0{,}6 \\ 1 & 0 & 1 \\ -0{,}4 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(J) = 0{,}8266 \text{ e}$$

$$S = -(D+E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}2 & -0{,}6 \\ 0 & -1{,}2 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0{,}4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(S) = 1{,}2000.$$

- Raios expectrais: $\rho(J) < 1$ e $\rho(S) > 1$.

Dez primeiras iterações

Solucao de sistema linear pelo metodo de Jacobi

Iter	x1	x2	x3	NormaRelativa
0	0.40000	0.00000	-0.60000	
1	0.76000	-0.20000	-0.76000	4.73684e-01
2	1.09600	0.00000	-0.98400	3.06569e-01
3	0.99040	0.11200	-1.03840	1.07858e-01
4	0.88864	-0.04800	-0.95136	1.68180e-01
5	1.02842	-0.06272	-0.97466	1.35914e-01
6	1.06006	0.05376	-1.03645	1.09881e-01
7	0.95736	0.02360	-1.00252	1.02439e-01
8	0.97319	-0.04516	-0.97350	7.06332e-02
9	1.03829	-0.00032	-1.00734	6.27033e-02
10	1.00478	0.03095	-1.01544	3.30007e-02

Solucao de sistema linear pelo metodo de Gauss-Seidel

Iter	x1	x2	x3	NormaRelativa
0	0.40000	0.00000	-0.60000	
1	0.76000	0.16000	-0.84000	4.28571e-01
2	0.71200	-0.12800	-0.93600	3.07692e-01
3	1.11520	0.17920	-0.97440	3.61549e-01
4	0.76960	-0.20480	-0.98976	3.87973e-01
5	1.23962	0.24986	-0.99590	3.79163e-01
6	0.69772	-0.29819	-0.99836	5.48944e-01
7	1.35684	0.35848	-0.99934	4.85781e-01
8	0.56943	-0.42992	-0.99974	7.88605e-01
9	1.51574	0.51600	-0.99990	6.24324e-01
10	0.38073	-0.61916	-0.99996	1.13522e+00

Velocidade de convergência

- Vetor erro $\epsilon^k = V\Lambda^k c$.
- Quanto menor o valor de $\rho(M)$, mais rápida será a convergência do método iterativo.
- Matrizes de iteração para o sistema do Exemplo 46

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}3 & 0{,}2 \\ -0{,}25 & 0 & 0{,}125 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0 \end{bmatrix} \leadsto \rho(J) = 0{,}2725 \ \text{ e}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}3 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}075 & 0{,}075 \\ 0 & 0{,}045 & -0{,}055 \end{bmatrix} \leadsto \rho(S) = 0{,}0972.$$

- Raios espectrais: $\rho(S) < \rho(J)$.
- Método de Gauss-Seidel converge mais rápido.
- Gasta 6 iterações (Exemplo 49) contra 9 do método de Jacobi (Exemplo 46).

Refinamento como método estacionário

- Refinar a solução de um sistema linear a partir dos fatores da decomposição.
- Rearranjando as equações

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k + c^k \\
&= x^k + U^{-1}L^{-1}Pr^k \\
&= x^k + U^{-1}L^{-1}P(b - Ax^k) \\
x^{k+1} &= x^k - U^{-1}L^{-1}PAx^k + U^{-1}L^{-1}Pb,
\end{aligned}
$$

- Resulta em

$$x^{k+1} = (I - U^{-1}L^{-1}PA)x^k + U^{-1}L^{-1}Pb, \tag{41}$$

- Forma de um método iterativo estacionário.

Exemplo de refinamento como método estacionário

Exemplo 56 Resolver o sistema do Exemplo 44, utilizando a formulação mostrada em (41)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

- Três fatores obtidos pela decomposição LU com pivotação parcial

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}67 & 1 & 0 \\ -0{,}33 & 0{,}42 & 1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 0 & 6{,}33 & 3 \\ 0 & 0 & 2{,}74 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Matriz de iteração

$$(I - U^{-1}L^{-1}PA) = \begin{bmatrix} -3{,}6384 & 2{,}2421 & 7{,}2768 \\ 4{,}0359 & -6{,}1000 & -8{,}0719 \\ -5{,}1825 & 6{,}2044 & 10{,}365 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

Refinamento como método estacionário cont.

- Vetores

$$U^{-1}L^{-1}Pb = x^0 = [1{,}9731 \ \ -0{,}9738 \ \ 4{,}9647]^T.$$

- Iterações calculadas por (41)

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	1,9731	−0,9738	4,9647
1	1,9999	−1,0000	4,9999
2	2,0000	−1,0000	5,0000

- Comparando com os resultados do Exemplo 44
- Raio espectral $\rho(I - U^{-1}L^{-1}PA) = 6{,}2355 \times 10^{-4} < 1$: processo convergiu.
- Perturbação nos fatores L e U for grande o suficiente para $\rho(I - U^{-1}L^{-1}PA) \geq 1$: processo não mais convergirá.

Malcondicionamento

- Sistema linear $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}98 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 1{,}99 \\ 1{,}97 \end{bmatrix}.$$

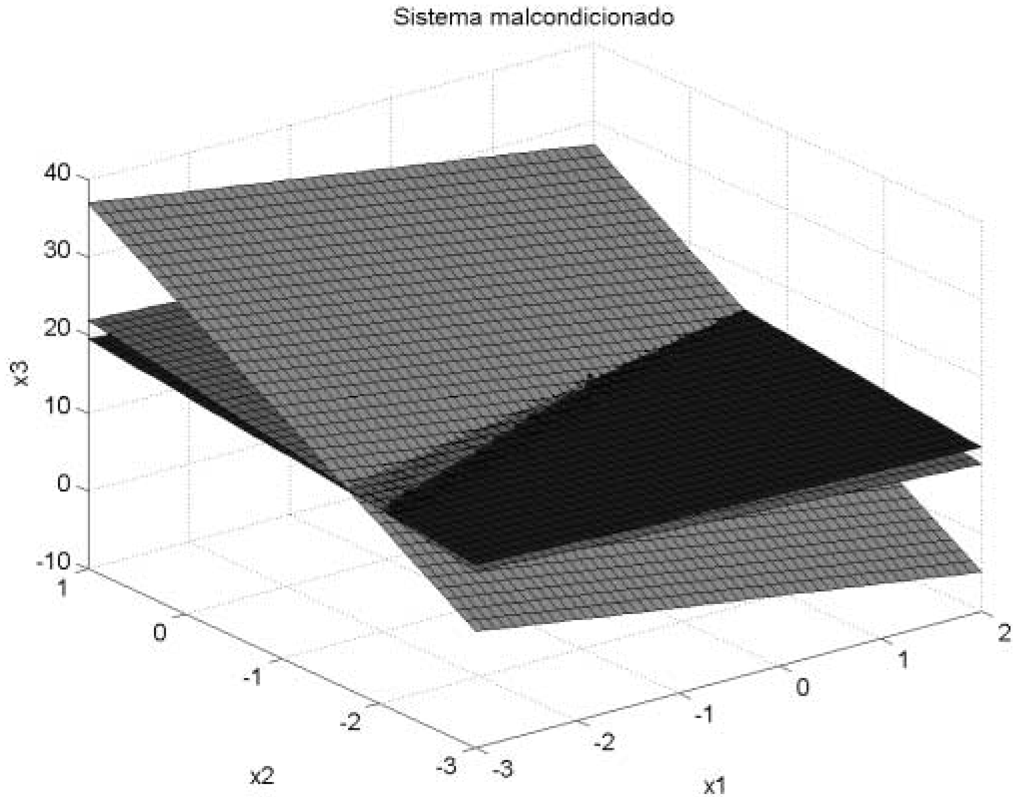
- Solução exata: $x = [1\ 1]^T$.
- Vetor $\tilde{b} = [1{,}99\ 1{,}98]^T \approx b$.
- Solução exata de $Ay = \tilde{b}$: $y = [100\ \ -99]^T$.
- Seja a matriz

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}99 \end{bmatrix} \approx A.$$

- Solução exata de $\tilde{A}z = b$: $z = [2\ \ -1/99]^T$.
- Matriz A é quase singular ($\det(A) = -10^{-4}$).
- Sistema linear malcondicionado.

Interpretação geométrica do malcondicionamento

- Três planos definidos por um sistema linear.
- Dois planos são quase coincidentes.
- Deslocamento no ponto de interseção.



|⇐

Problemas do malcondicionamento

- Solução exata de $Ax = b$: $x = [1 \;\; 1]^T$.
- Resíduo para $\tilde{x} = [0{,}9 \;\; 1{,}1]^T$

$$\tilde{r} = b - A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1{,}99 \\ 1{,}97 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ 1{,}1 \end{bmatrix} \leadsto \tilde{r} = \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

- Vetor $\tilde{x} \neq x$, mas $\tilde{r} \approx 0$.
- Resíduo não é bom indicador de exatidão da solução quando o sistema for malcondicionado.
- Instabilidade da solução.
- Se A e/ou b forem medidas experimentais.

Singularidade da matriz

- Medir singularidade de A pelo determinante não constitui boa prática.
- $\det(A) \approx 0$ não indica necessariamente a ocorrência de malcondicionamento.
- Por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}001 & 0{,}001 \\ -0{,}001 & 0{,}001 \end{bmatrix}$$

- $\det(A) = 2{\times}10^{-6}$ e é muito bem-condicionada.
- Seu determinante é pequeno porque seus elementos são pequenos.

Número de condição

- Número de condição

$$\text{condição}(A) = \kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|. \tag{42}$$

- $\|\cdot\|$: uma norma matricial qualquer.
- Valor de $\kappa(A)$ depende da norma utilizada.
- Por exemplo

$$\boxed{\kappa_2(A) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} & \text{se } \ A = A^T \\ \\ \dfrac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} & \text{se } \ A \neq A^T \end{cases}} \tag{43}$$

- $\lambda(A^{-1}) = \lambda^{-1}(A)$.
- Sistema $Ax = b$ é malcondicionado se $\kappa(A) \gg 1$.

Exemplo de número de condição

Exemplo 57 Calcular $\kappa_2(A)$ e $\kappa_2(B)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}98 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

- Por (43)

$$\lambda(A) = (1{,}9801,\ -5{,}0504{\times}10^{-5}) \leadsto$$

$$\kappa_2(A) = \frac{|1{,}9801|}{|-5{,}0504{\times}10^{-5}|} = 3{,}9206{\times}10^{4} \text{ e}$$

$$\lambda(B^T B) = (1{,}7423{\times}10^{2},\ 3{,}7222{\times}10^{1},\ 2{,}4548{\times}10^{1}) \leadsto$$

$$\kappa_2(B) = \sqrt{\frac{1{,}7423{\times}10^{2}}{2{,}4548{\times}10^{1}}} = 2{,}6641.$$

- Com A: sistema linear malcondicionado.
- Com B: bem-condicionado.

Exemplo clássico de malcondicionamento

- Matriz de Hilbert de ordem n

$$H_n = \frac{1}{i+j-1},\ i,j = 1,2,\ldots,n.$$

- Por exemplo

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ e } H_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Exemplo de matriz de Hilbert

Exemplo 58 Matriz de Hilbert de ordem 4 e sua inversa.

```
H =
    1.0000    0.5000    0.3333    0.2500
    0.5000    0.3333    0.2500    0.2000
    0.3333    0.2500    0.2000    0.1667
    0.2500    0.2000    0.1667    0.1429
NinfH = 2.0833
Hinv =
          16        -120         240        -140
        -120        1200       -2700        1680
         240       -2700        6480       -4200
        -140        1680       -4200        2800
NinfHinv = 13620
```

- Considerando que

$$\|H_4\|_\infty = \frac{25}{12} \approx 2{,}0833 \;\text{ e }\; \|H_4^{-1}\|_\infty = 13620,$$

- H_4 é malcondicionada

$$\kappa_\infty(H_4) = \|H_4\|_\infty \|H_4^{-1}\|_\infty = \frac{25}{12} 13620 = 28375 \gg 1.$$

Normas-∞ e número de condição das matrizes de Hilbert

n	$\|H_n\|_\infty$	$\|H_n^{-1}\|_\infty$	$\kappa_\infty(H_n)$
1	1,00000	$1{,}00000 \times 10^{0}$	$1{,}00000 \times 10^{0}$
2	1,50000	$1{,}80000 \times 10^{1}$	$2{,}70000 \times 10^{1}$
3	1,83333	$4{,}08000 \times 10^{2}$	$7{,}48000 \times 10^{2}$
4	2,08333	$1{,}36200 \times 10^{4}$	$2{,}83750 \times 10^{4}$
5	2,28333	$4{,}13280 \times 10^{5}$	$9{,}43656 \times 10^{5}$
6	2,45000	$1{,}18654 \times 10^{7}$	$2{,}90703 \times 10^{7}$
7	2,59286	$3{,}79965 \times 10^{8}$	$9{,}85195 \times 10^{8}$
8	2,71786	$1{,}24631 \times 10^{10}$	$3{,}38728 \times 10^{10}$
9	2,82897	$3{,}88712 \times 10^{11}$	$1{,}09965 \times 10^{12}$
10	2,92897	$1{,}20716 \times 10^{13}$	$3{,}53574 \times 10^{13}$

Sensibilidade da solução

- Sistema $Ax = b$ e δb sendo uma pequena perturbação em b.
- Modificação δx na solução $x = A^{-1}b$ satisfaz

$$\delta x = A^{-1}\delta b.$$

- Pelas propriedades das normas consistentes

$$\|A\|\|x\| \geq \|b\| \ \text{ e } \ \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\|.$$

- Combinando

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

- Em vista de (42)

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}. \tag{44}$$

- Limite superior ao erro relativo na solução x.
- Número de condição $\kappa(A)$.

Exemplo de perturbação no vetor de termos independentes

Exemplo 59 Verificar (44) para o sistema $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}98 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1{,}99 \\ 1{,}97 \end{bmatrix} \text{ e } \delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}01 \end{bmatrix}.$$

- Sejam $x = [1 \ \ 1]^T$, $\kappa_2(A) = 3{,}9206_{\times}10^4$ (ver Exemplo 57), $\|b\|_2 = 2{,}8002$ e $\|\delta b\|_2 = 10^{-2}$.
- Limite superior ao erro relativo em termos da norma-2

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \kappa_2(A)\frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} = 3{,}9206_{\times}10^4 \frac{10^{-2}}{2{,}8002} \rightsquigarrow \frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq 1{,}4001_{\times}10^2.$$

- Com δb, a solução x variou de $[1 \ \ 1]^T$ para $[100 \ \ -99]^T \longrightarrow$ $\delta x = [100-1 \ \ -99-1]^T \rightsquigarrow \|\delta x\|_2 = 1{,}4072_{\times}10^2$.
- Sendo $\|x\|_2 = 1{,}4142$, na realidade, o erro relativo cometido foi

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} = \frac{1{,}4072_{\times}10^2}{1{,}4142} = 9{,}9505_{\times}10^1.$$

Perturbação na matriz dos coeficientes

- Seja

$$(A+\delta A)(x+\delta x)=b \longrightarrow Ax + A\,\delta x + \delta A\,x + \delta A\,\delta x = b \leadsto$$

$$A\,\delta x = -\delta A(x+\delta x).$$

- Tomando as normas consistentes

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|x+\delta x\| \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}. \tag{45}$$

- Maior malcondicionamento de $Ax=b$: maior a influência de δA em A na solução x.

- Coeficientes de A conhecidos com precisão de quatro decimais e número de condição 10^3: solução x pode ter precisão de uma decimal.

Exemplo de perturbação na matriz dos coeficientes

Exemplo 60 Verificar (45) para o sistema $Ax = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}98 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1{,}99 \\ 1{,}97 \end{bmatrix} \text{ e } \delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}01 \end{bmatrix}.$$

- Sejam $\kappa_2(A) = 3{,}9206_{\times}10^4$, $\|\delta A\|_2 = 10^{-2}$ e $\|A\|_2 = 1{,}9801$.
- Erro relativo em termos da norma-2

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x+\delta x\|_2} \leq \kappa_2(A)\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} = 3{,}9206_{\times}10^4\frac{10^{-2}}{1{,}9801} \rightsquigarrow \frac{\|\delta x\|_2}{\|x+\delta x\|_2} \leq 1{,}9800_{\times}10^2.$$

- Com a perturbação δA, x variou de $x = [1\ \ 1]^T$ para $\tilde{x} = [2\ \ -1/99]^T$.
- Variação na solução $\delta x = [2-1\ \ \ -1/99-1]^T$.
- Erro relativo real

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x+\delta x\|_2} = \frac{1{,}4214}{2{,}0000} = 7{,}1070_{\times}10^{-1}.$$

Fim

Capítulo 2: Sistemas lineares