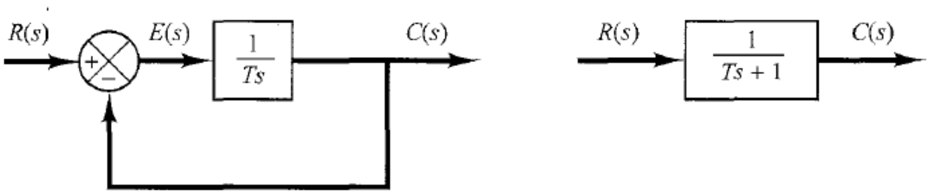
CAPÍTULO 3 - ANÁLISE DA RESPOSTA TRANSITÓRIA E DE REGIME ESTACIONÁRIO

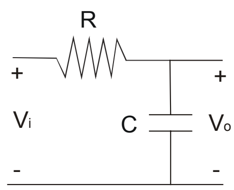
3.1. Sistemas de 1ª ordem

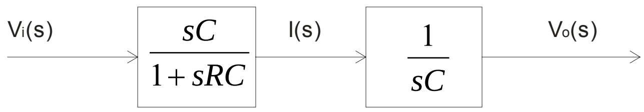
Considere o sistema de 1ª ordem mostrado na figura abaixo. Fisicamente, este sistema pode representar um circuito RC, um sistema térmico, etc.



Exemplos de sistemas de 1ª ordem:

a) Circuito elétrico



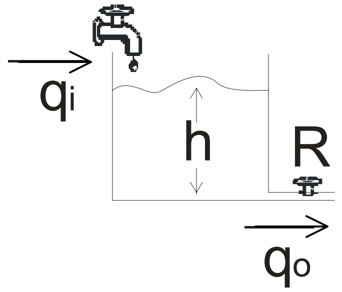


$$Vi(s) = R.I(s) + \frac{1}{sC} I(s)$$

$$Vo(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

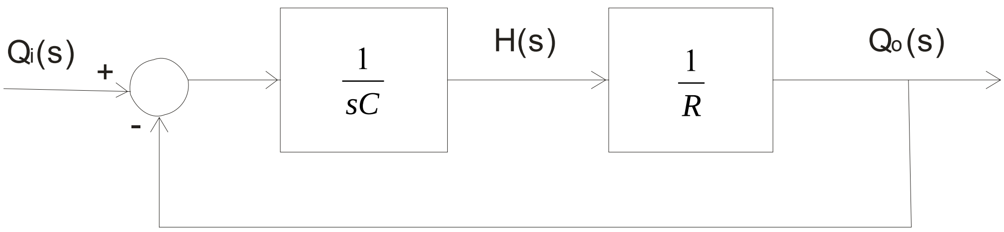
$$\Rightarrow \frac{Vi(s) - Vo(s)}{R} = I(s)$$

b) Sistema de nível de líquido

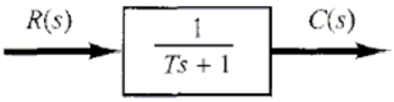


$$C\frac{dH}{dt} = q_i - q_o \qquad\qquad sCH(s) = Qi(s) - Qo(s)$$

$$q_o = \frac{h}{R} \qquad \Rightarrow \qquad Qo(s) = \frac{H(s)}{R}$$



Resposta ao impulso unitário para o sistema de 1ª ordem

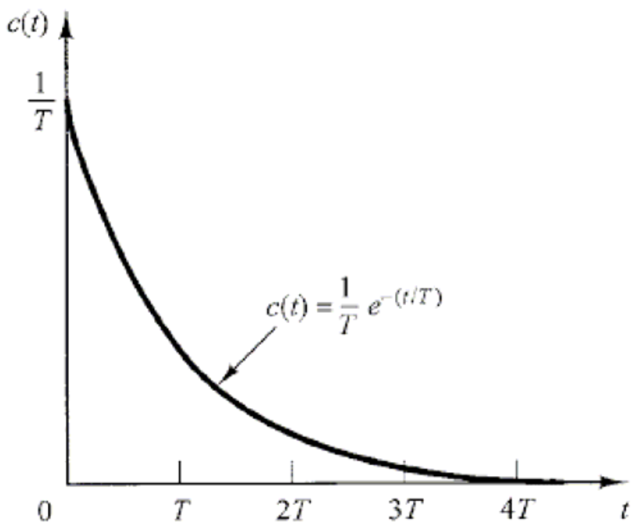


$$R(s) = 1$$

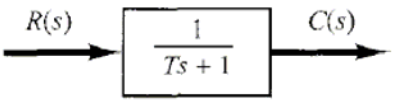
$$C(s) = \frac{1}{1+Ts}\cdot 1$$

$$C(s) = \frac{1/T}{s + 1/T}$$

$$c(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}$$



Resposta ao degrau para o sistema de 1ª ordem



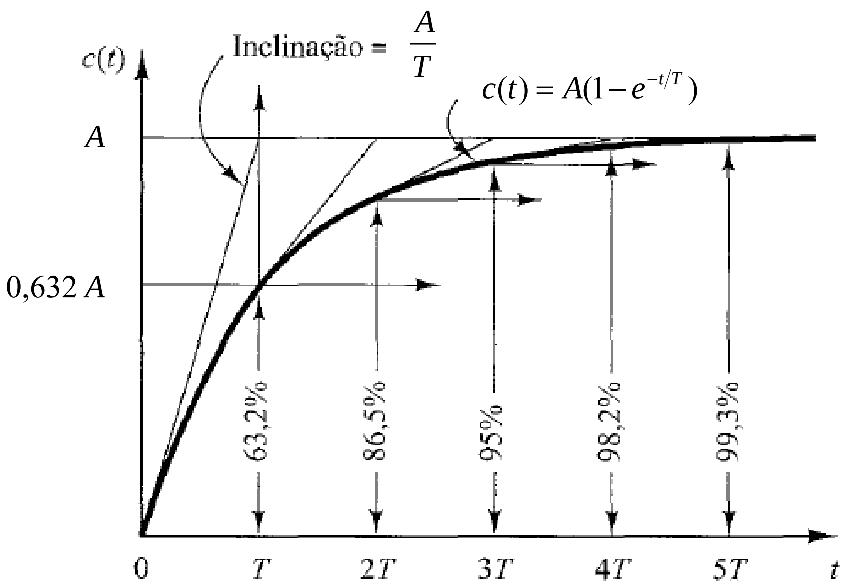
$$R(s)=\frac{A}{s}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+Ts}$$

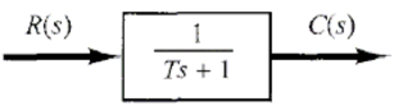
$$C(s)=\frac{1}{1+Ts}\cdot\frac{A}{s}$$

$$C(s)=\frac{A}{s}-\frac{AT}{1+Ts}$$

$$c(t)=(A-Ae^{-t/T})u(t)$$



Resposta à rampa para o sistema de 1ª ordem

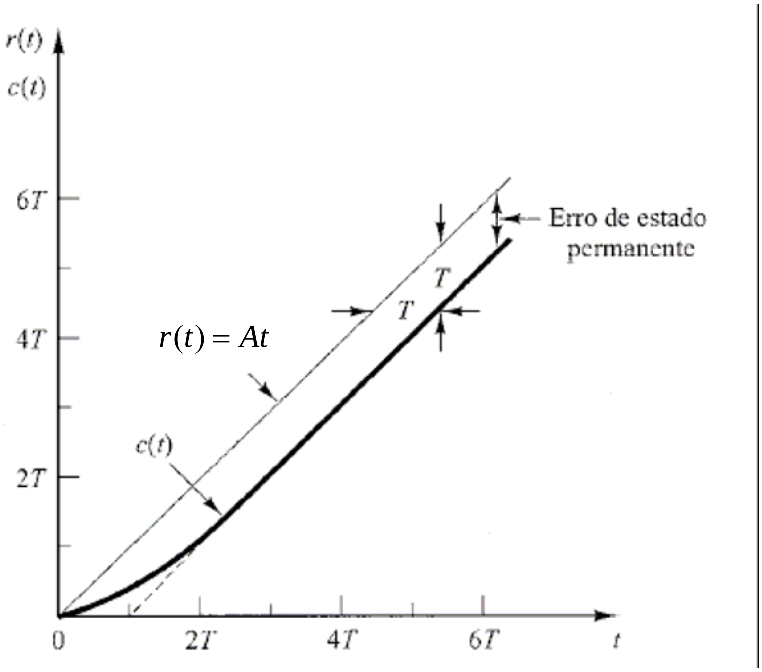


$$R(s)=\frac{A}{s^2}$$

$$C(s)=\frac{1}{1+Ts}\cdot\frac{A}{s^2}$$

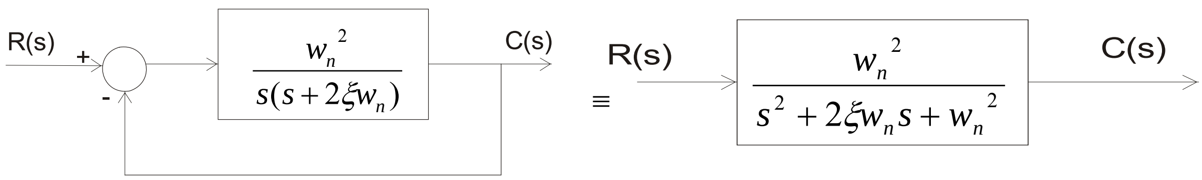
$$C(s)=\frac{A}{s^2}-\frac{AT}{s}+\frac{AT^2}{1+Ts}$$

$$c(t)=A(t-T+AT^2e^{-t/T})$$



3.2. Sistemas de 2ª ordem

De um modo geral, um sistema de 2ª ordem pode ser representado através de um dos diagramas de blocos mostrados a seguir:



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{w_n^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2}$$

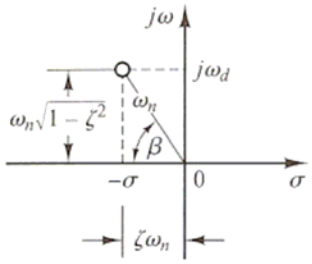
$$s^2+2\xi w_n s+w_n^2=0$$
$$s=-\xi w_n \pm w_n\sqrt{\xi^2-1}$$

$\xi \rightarrow$ fator de amortecimento

$w_n \rightarrow$ freqüência natural não amortecida

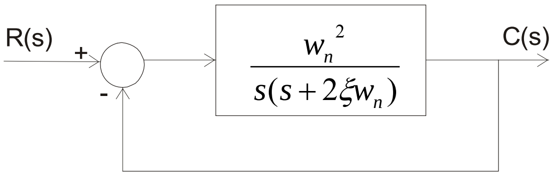
Casos

a) *Subamortecido* $(0 < \xi < 1)$



$$s = -\xi w_n \pm j w_n \sqrt{1-\xi^2}$$

Resposta ao degrau de amplitude A



$$R(s) = \frac{A}{s}$$

$$C(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} \cdot \frac{A}{s}$$

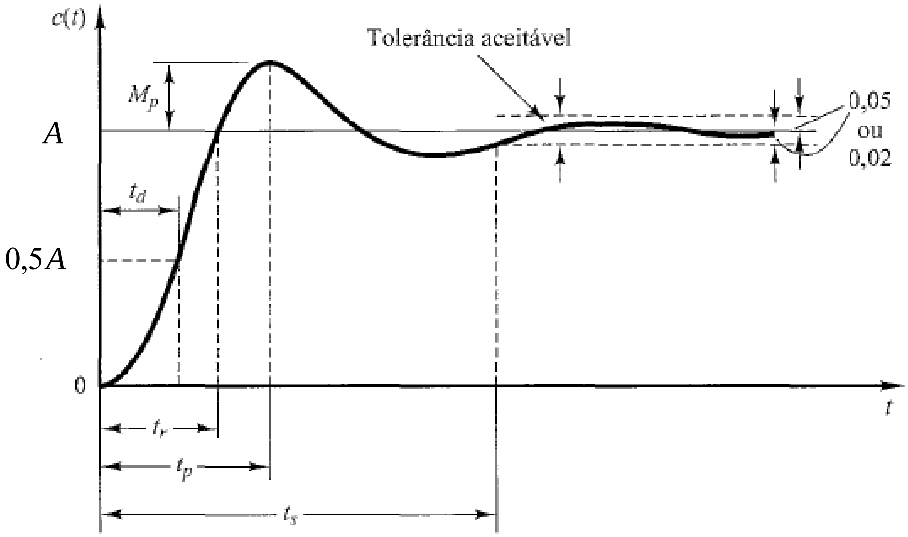
$$c(t) = A\left[1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}(w_d t + \beta)\right] \quad \text{para} \quad t \geq 0$$

$$w_d = w_n \sqrt{1-\xi^2}$$

$$Sen(w_d t_p) = 0$$

$$w_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi ...$$

$$t_p = \frac{\pi}{w_d}$$



$w_d \rightarrow$ freqüência natural amortecida

$t_r \rightarrow$ tempo de subida

$t_s \rightarrow$ tempo de acomodação

$t_p \rightarrow$ tempo de pico

$M_p \rightarrow$ máximo *overshoot*

- ✓ Cálculo do tempo de subida (t_r)

$$c(t_r) = c(\infty)\cdot\left[1 - \frac{e^{-\xi w_n t_r}}{\sqrt{1-\xi^2}}\mathrm{sen}(w_d t_r + \beta)\right] = c(\infty)$$

$$\mathrm{sen}(w_d t_r + \beta) = 0$$
$$w_d t_r + \beta = k\pi \quad \text{onde } k = 0,1,2,3...$$

$$*\ \text{Para } k = 0 \text{ tem-se que } t_r = \frac{-\beta}{w_d} < 0$$
$$*\ \text{Para } k = 1 \text{ tem-se que } t_r = \frac{\pi - \beta}{w_d} \quad \text{onde } \beta < \pi$$

- ✓ Cálculo do tempo de estabilização (t_s)

$$t_{2\%} \cong 4\tau = \frac{4}{\xi w_n}$$
$$t_{5\%} \cong 3\tau = \frac{3}{\xi w_n}$$

- ✓ Cálculo do máximo *overshoot* (M_p)

$$M_p = c(t_p) - c(\infty)$$
$$c(t_p) = c(\infty)\left[1 - e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}\right]$$
$$M_p\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}\cdot 100\%$$

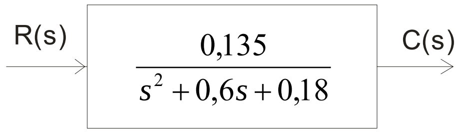
- ✓ Cálculo da constante de amortecimento (ξ)

É feito através da retirada do sobre-sinal, utilizando a equação:

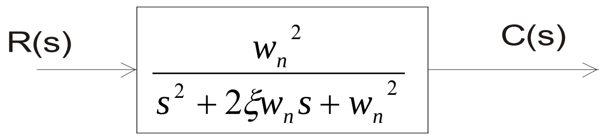
$$M_p\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}\cdot 100\%$$

O sobre-sinal percentual depende única e exclusivamente do valor de ξ. Portanto, um dado sistema sempre terá o mesmo $M_p\%$, independente do valor da amplitude do degrau aplicado e das condições iniciais.

<u>Exercício1</u>: Obtenha a resposta do sistema abaixo para uma entrada em degrau de amplitude 2.

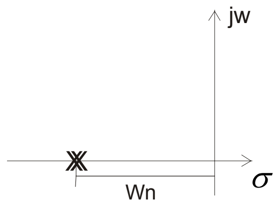


b) *Amortecimento crítico* $(\xi = 1)$



Para $\xi = 1$

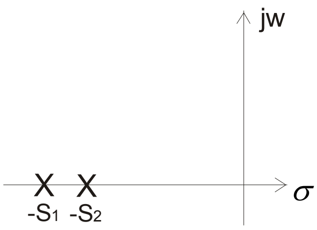
$$s^2 + 2w_n s + w_n^{\ 2} = 0$$
$$(s + w_n)^2 = 0$$
$$s_{1,2} = -w_n$$



<u>Resposta ao degrau unitário</u>

$$C(s) = \frac{w_n^{\ 2}}{(s+w_n)^2}\cdot\frac{1}{s}$$
$$c(t) = 1 - e^{-w_n t}(1 + w_n t) \rightarrow (t \geq 0)$$

c) *Superamortecido* $(\xi > 1)$



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^{\ 2}}{s^2 + 2w_n s + w_n^{\ 2}}$$

$$s^2 + 2w_n s + w_n^{\ 2} = 0$$
$$s_{1,2} = \xi w_n \pm w_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

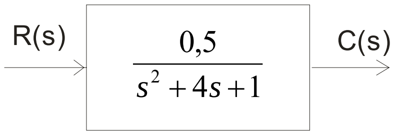
Resposta ao degrau unitário

$$C(s) = \frac{w_n{}^2}{(s+s_1)(s+s_2)} \cdot \frac{1}{s}$$

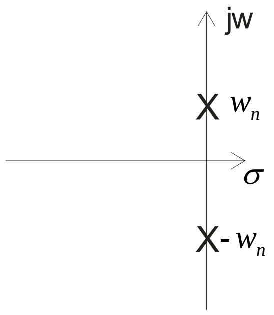
$$c(t) = 1 + \frac{w_n}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right] \rightarrow (t \geq 0)$$

Quando ξ é consideravelmente maior que 1, uma das exponenciais decai mais rapidamente do que a outra de tal forma que a resposta é ditada (dominada) pela exponencial mais lenta (pólo mais próximo da origem). Nestes casos, para obter uma solução aproximada para a resposta do sistema (entrada em degrau), pode-se *desprezar o pólo* localizado mais longe da origem.

Exercício: Calcule a resposta ao degrau de amplitude 4 para o sistema abaixo:



d) *Não amortecido (oscilatório)* $(\xi = 0)$



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + w_n{}^2}$$

$$s^2 + w_n{}^2 = 0$$

$$s_{1,2} = \pm j w_n$$

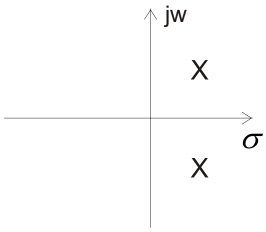
Resposta ao degrau unitário

$$C(s) = \frac{k}{s^2 + w_n{}^2} \cdot \frac{A}{s}$$

$$c(t) = \frac{Ak}{w_n{}^2} [1 - \cos w_n t]$$

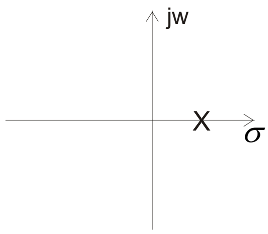
e) *Sistemas negativamente amortecidos* $(\xi < 0)$

- Pólos complexos conjugados no semiplano direito do plano complexo



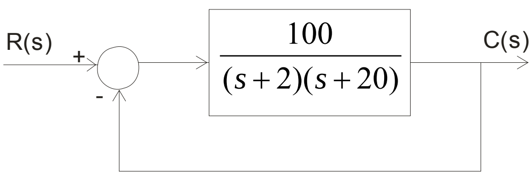
<u>Exemplo</u>: Considere o sistema cuja função de transferência é dada por: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 - 2s + 4}$. Qual a resposta deste sistema para uma entrada em degrau unitário?

- Pólos reais no semiplano direito do plano “s” (ao menos um pólo)

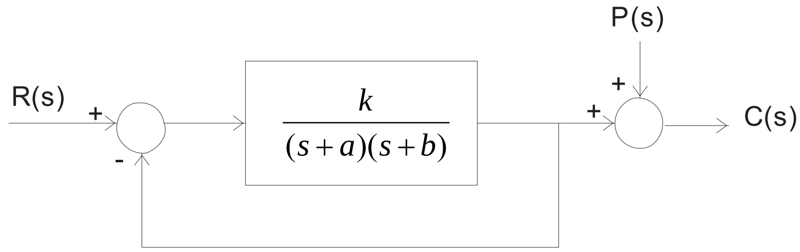


<u>Exemplo</u>: Considere o sistema cuja função de transferência é dada por: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s - 4}$. Qual a resposta deste sistema para uma entrada em degrau unitário?

<u>Exercício 1</u>: Obtenha a resposta do sistema abaixo para uma entrada em degrau de amplitude 3. Calcule todos os valores importantes.



Exercício 2: Considere o sistema de 2ª ordem com realimentação unitária mostrado abaixo. Determine a resposta deste sistema considerando que R(s) é uma entrada em degrau de amplitude 10 e que P(s) é uma entrada em degrau de amplitude 2. Considere que k=ab e a=2b.



Obs.: Os valores de amplitude são numéricos. Já os valores para os tempos devem depender apenas de a.

Influência de um zero adicional na resposta transitória de sistema de 2ª ordem

Suponha que o sistema de 2ª ordem apresente um zero, conforme mostrado na função de transferência abaixo. Quais alterações na resposta transitória este zero provocará?

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k(s+z)}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^{\,2}}$$

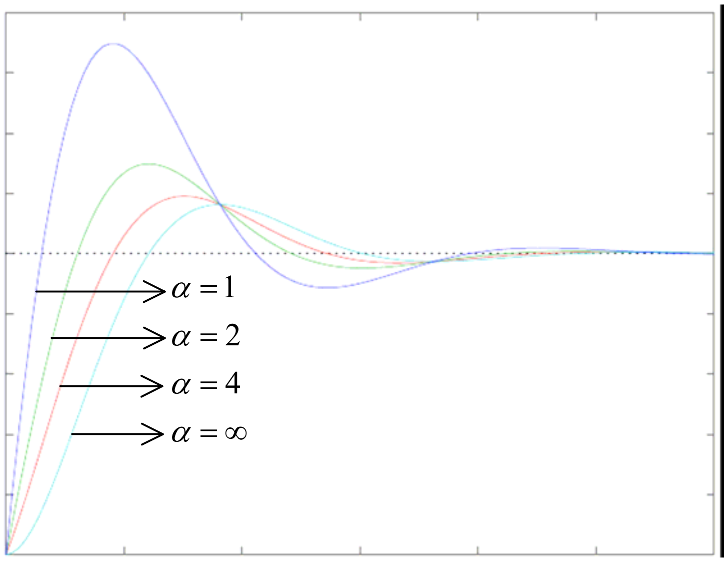
A resposta ao degrau unitário é dada por:

$$c(t) = \frac{kz}{w_n^{\,2}}\left[1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{z\sqrt{\frac{1-\xi^2}{z^2 - 2\xi w_n z + w_n^{\,2}}}}\, sen\left(w_d t + tg^{-1}\left(\frac{z\sqrt{1-\xi^2}}{\xi z - w_n}\right)\right)\right]$$

Quando um sistema de 2ª ordem tem um zero perto dos pólos de malha fechada, o comportamento da resposta transitória torna-se consideravelmente diferente daquele de um sistema de 2ª ordem sem o zero.

Se o zero está localizado perto do eixo jw, o seu efeito é bastante significativo.

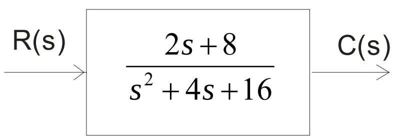
Curvas de resposta ao degrau unitário típicas deste sistema com $\xi = 0{,}5$ e com vários valores para $\frac{-z}{\xi w_n}$ são vistas na figura abaixo:



Quanto mais próximo do eixo jw estiver o zero, maior será o sobre-sinal e menor serão os temos de pico e de subida. $\alpha = \frac{z}{\xi w_n}$

A expressão para o tempo de subida é $t_r = \dfrac{-tg^{-1}\left(\dfrac{z\sqrt{1-\xi^2}}{\xi z - w_n}\right)}{w_d}$ e para os tempos de estabilização ($t_{2\%}$ e $t_{5\%}$): $t_s = \dfrac{-\log\left[tol \cdot z\sqrt{\dfrac{1-\xi^2}{z^2 - 2\xi w_n z + w_n^{\ 2}}}\right]}{\xi w_n}$ onde *tol*= $\begin{cases} 0{,}02\, p/t_{2\%} \\ 0{,}05\, p/t_{5\%} \end{cases}$.

<u>Exercício</u>: Esboce a curva de resposta do sistema abaixo calculando todos os valores importantes. Considere uma entrada em degrau de amplitude 4.



Resposta transitória de sistemas de 3ª ordem e de ordem superior

a) Resposta ao degrau de sistemas de 3ª ordem

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)(s+p)}$$

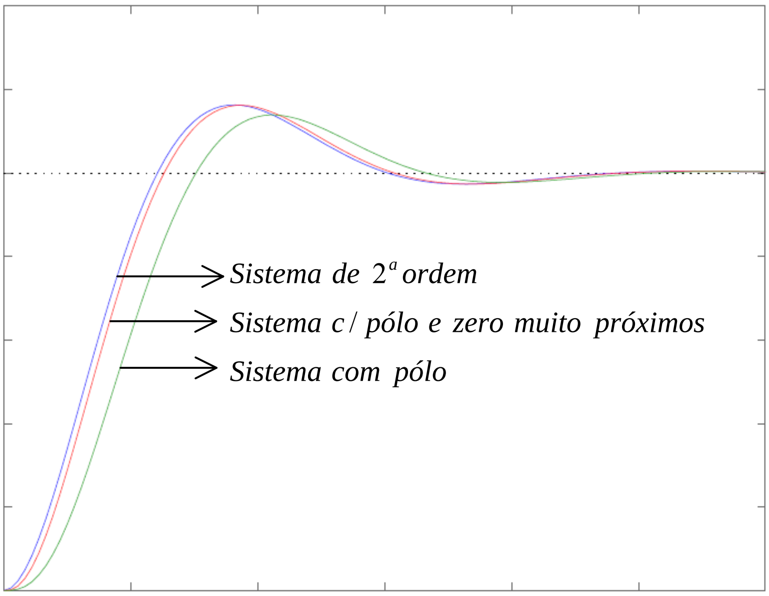
A equação que descreve a resposta *c(t)* para uma entrada em degrau unitário é como segue:

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\beta\xi^2(\beta-2)+1}\left\{\beta\xi^2(\beta-2)\cos\left(\sqrt{1-\xi^2}\,w_n t\right) + \frac{\beta\xi\left(\xi^2(\beta-2)+1\right)}{\sqrt{1-\xi^2}} sen\left(\sqrt{1-\xi^2}\,w_n t\right)\right\} - \frac{e^{-pt}}{\beta\xi^2(\beta-2)+1}$$

onde $\beta = \frac{p}{\xi w_n}$.

Se todos os pólos de malha fechada estão no semiplano esquerdo do plano complexo, as magnitudes relativas aos resíduos determinam a importância relativa dos componentes na forma expandida de *C(s)*.

Se há um zero em malha fechada perto de um pólo de malha fechada, então o resíduo deste pólo é pequeno e o coeficiente do termo da resposta transitória correspondente a esse pólo se torna pequeno.



O efeito do pólo real em $s = -p$ na resposta ao degrau é de reduzir o sobre-sinal máximo e aumentar os tempos de pico e de subida.

Análise da estabilidade

A característica mais importante do comportamento dinâmico de um sistema de controle é a *estabilidade absoluta*, isto é, se o sistema é estável ou instável.

Um sistema linear invariante no tempo é estável se a saída volta ao seu estado de equilíbrio quando o sistema é sujeito a uma perturbação. Se, no entanto, a saída oscila indefinidamente ou diverge sem limite, o sistema é instável.

A condição necessária e suficiente para que um sistema realimentado seja estável é que todos os seus pólos de malha fechada estejam no semiplano esquerdo do plano s, ou seja, tenham parte real negativa.

É importante destacar ainda que o fato de um sistema ser estável ou instável é uma propriedade do sistema em si e não depende da entrada aplicada ao mesmo. Sendo assim, um sistema é estável se e somente se qualquer entrada limitada produz uma saída limitada.

A *estabilidade relativa* está relacionada ao grau de estabilidade do sistema. Se o sistema é estável, quão próximo está de se tornar instável?

Critério de estabilidade de Routh

Para um sistema cuja função de transferência é dada na forma polinomial, o critério de Routh nos ajuda a estabelecer rapidamente se o sistema é estável ou instável sem necessitarmos calcular as raízes do polinômio do denominador.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} \qquad m \le n$$

O critério de Routh nos diz se entre as raízes de uma equação polinomial (no caso, $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n$) há raízes positivas ou não, sem ter que fatorar o polinômio. A seguir é descrito o procedimento para a utilização do critério.

1- Escreva o polinômio em "s" na forma $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$ onde os coeficientes são grandezas reais e $a_n \neq 0$, ou seja, o sistema (polinômio) não tem raízes nulas.

2- Se qualquer dos coeficientes a_i for nulo ou negativo, na presença de no mínimo um coeficiente positivo, há uma ou mais raízes imaginárias ou com parte real positiva.

3- Se todos os coeficientes são positivos, arranje-os da seguinte forma:

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
\hline
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}$$

onde $b_1 = \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$ $\quad b_2 = \dfrac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$ . . . . .

$c_1 = \dfrac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$ $\quad c_2 = \dfrac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$ . . . . .

$\vdots \qquad \vdots$

Obs.: Uma linha inteira pode ser multiplicada ou dividida por um número positivo a fim de simplificar os cálculos subseqüentes sem que a conclusão obtida através do critério de Routh seja modificada.

O critério de Routh estabelece que o número de raízes com parte real positiva (raízes no semiplano direito do plano s) é igual ao número de mudanças no sinal dos coeficientes da primeira coluna do arranjo de Routh. Sendo assim, a condição necessária e suficiente para que todas as raízes estejam no semiplano esquerdo do plano s é que todos os coeficientes do polinômio sejam positivos e todos os termos na primeira coluna do arranjo de Routh tenham sinais positivos.

Exemplo: Verifique se o polinômio abaixo tem todas as suas raízes no semiplano esquerdo do plano s.

$$P(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$$

Uma vez que todos os coeficientes do polinômio são maiores do que zero, nada se pode afirmar a respeito de suas raízes. Sendo assim, montaremos o arranjo de Routh.

s^4	1	3	5
s^3	2	4	
s^2	1	5	
s^1	- 6		
s^0	5		

Analisando a primeira coluna do diagrama de Routh observamos que há duas trocas de sinal nos coeficientes desta coluna. Sendo assim, podemos afirmar que há duas raízes com parte real positiva.

Exercício: Repita o procedimento para os polinômios abaixo:

a) $P(s) = s^3 + 6s^2 + 12s + 8$

b) $P(s) = s^5 + s^4 + 10s^3 + 72s^2 + 152s + 240$

Casos especiais

1. Existência de um coeficiente nulo na 1ª coluna

Se o primeiro termo em qualquer linha for zero, porém os termos restantes desta mesma linha não forem nulos, substitua o termo nulo por ε, sendo ε um número muito pequeno positivo.

$$P(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3$$

s^4	1	2	3
s^3	1	2	
s^2	0	3	
s^1			
s^0			

s^4	1	2	3
s^3	1	2	
s^2	ε	3	
s^1	$\frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon}$		
s^0	3		

Se $\varepsilon \to 0^+$ então $\frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon} \to -\infty$

Desta forma, há duas trocas de sinal na primeira coluna do arranjo de Routh e então o polinômio P(s) tem duas raízes no semiplano direito do plano s.

2. <u>Ocorrência de uma linha toda nula</u>

Quando ocorre uma linha toda nula, procede-se da seguinte forma:

i) Formar um polinômio auxiliar com os coeficientes da linha que precede a linha nula. (As raízes deste polinômio auxiliar são também raízes do polinômio original);

ii) Completar a tabela de Routh substituindo os coeficientes nulos pelos coeficientes da derivada do polinômio auxiliar.

<u>Exemplo</u>: $P(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50$

Analisando-se o polinômio verificamos que existem coeficientes com sinal negativo, o que é suficiente para afirmar que este polinômio terá raízes no semiplano direito do plano s. No entanto, utilizaremos o critério de Routh para verificar esta afirmação e aproveitar para exercitar sua utilização.

s^5	1	24	-25	
s^4	$\cancel{2}_{1}$	$\cancel{48}_{24}$	$-\cancel{50}_{-25}$	←Dividindo toda a linha por 2
s^3	0	0		
s^2				
s^1				
s^0				

Observe que a existência de uma linha nula impede a continuação da construção do arranjo de Routh. Montando o polinômio auxiliar, temos $Q(s)=1s^4+24s^2-25=0$.

É importante lembrar que as raízes deste polinômio auxiliar são raízes também do polinômio original P(s). As raízes deste polinômio auxiliar são:

s= +1 → raiz no semiplano direito
s= –1
s= + j
s= – j

$\left.\begin{array}{l} s=+j \\ s=-j \end{array}\right\}$ raízes imaginárias

derivando o polinômio auxiliar temos: $\begin{array}{l} Q(s)=1s^4+24s^2-25=0 \\ Q'(s)=4s^3+48s \end{array}$

substituindo a linha nula utilizando os coeficientes de Q'(s) temos:

s^5	1	24	-25
s^4	1	24	-25
s^3	$\cancel{4}$ 1	$\cancel{48}$ 12	
s^2	12	-25	
s^1	$169/12$		
s^0	-25		

←Coeficientes de Q'(s). Lembre-se que uma linha pode ser dividida por um número real positivo

Analisando a primeira coluna do arranjo de Routh observamos que existe uma troca de sinal nos coeficientes, o que garante a existência de *uma raiz no semiplano direito do plano complexo "s"*. É importante notar que esta raiz foi identificada anteriormente através do polinômio auxiliar Q(s).

Obs.: Quando só existe um coeficiente numa determinada linha, e este coeficiente é nulo, podemos entender como sendo o caso especial 1 (1º elemento nulo) ou o caso especial 2 (linha toda nula).

<u>Exemplo</u>: Verifique se os polinômios abaixo possuem raízes no semiplano direito do plano complexo.

a) $P(s)=s^3+2s^2+s+2$

s^3	
s^2	
s^1	
s^0	

s^3	
s^2	
s^1	
s^0	

Observe que na linha relativa a s^1 existe apenas um coeficiente e que o mesmo é nulo. Vamos considerar que este consiste no caso de uma linha toda nula.

O polinômio auxiliar é dado por $Q(s)=s^2+1$, cujas raízes são $s=\pm j1$. Derivando o polinômio auxiliar temos $Q'(s)=2s$, logo temos que o coeficiente nulo pode ser substituído pelo coeficiente de Q'(s), conforme mostrado abaixo.

s^3	1	1	
s^2	1	1	
s^1	2		←Coef. de Q'(s)
s^0	1		

Observe que não há trocas de sinal nos coeficientes da 1ª coluna do arranjo de Routh e, portanto, o polinômio não tem raízes no semiplano direito do plano complexo.

Entretanto, a existência de uma linha toda nula indica a existência de raízes sobre o eixo imaginário jw, conforme verificado anteriormente.

Ainda considerando o polinômio $P(s)=s^3+2s^2+s+2$, podemos considerar que o arranjo de Routh recai no caso onde o 1º coeficiente de uma linha é nulo, sendo necessário então substituirmos tal coeficiente por ε, conforme mostrado abaixo.

s^3	1	1
s^2	1	1
s^1	$0\approx\varepsilon$	
s^0	1	

Como ε é um valor positivo, não há trocas de sinal na 1ª coluna do arranjo de Routh, garantindo que não existem raízes no semiplano direito do plano s.

Observe que quando uma linha possui um único coeficiente, e o mesmo é nulo, podemos recair em qualquer dos casos especiais estudados anteriormente. Entretanto, é mais conveniente enquadrar no caso de linha toda nula, pois desta forma é possível determinar se existem raízes sobre o eixo jw, bem como determinar os valores destas raízes.

b) $P(s) = s^4 + 2s^3 + 11s^2 + 18s + 18$

s^4	1	11	18			1	11	18
s^3	2	18		$\rightarrow \div 2$		1	9	
s^2	2	18				1	9	
s^1	0					2		
s^0						9		

Polinômio auxiliar Q(s) = s^2+9 = 0 ($s = \pm j3$)

Q'(s) = 2s

Uma vez que não há mudança de sinal nos coeficientes da 1ª coluna do arranjo de Routh, podemos concluir que o polinômio P(s) não possui raízes no semiplano direito do plano complexo.

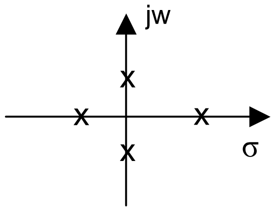
Neste momento, é importante entender como o critério de Routh é utilizado para utilizar a estabilidade de um sistema qualquer. Sabemos que um sistema é estável se e somente se todos os seus pólos de malha fechada estão no semiplano esquerdo do plano complexo. Assim, podemos utilizar o critério de Routh para verificar se todos os pólos de um sistema, ou seja, as raízes do denominador da FTMF deste sistema, então no semiplano esquerdo do plano s.

É importante lembrar ainda que um sistema com pólos puramente imaginários (sobre o eixo jw) possui uma resposta ao degrau que oscila indefinidamente, conforme estudado na seção sobre resposta transitória de sistemas de 2ª ordem. Sendo assim, é fundamental que os pólos estejam todos no semiplano esquerdo do plano complexo para que a resposta do sistema seja estável.

Se todos os coeficientes de uma linha forem nulos; então:

(i) o polinômio possui raízes reais com módulo igual mas sinais opostos; e/ou

(ii) o polinômio possui raízes imaginárias conjugadas (sobre o eixo jw).



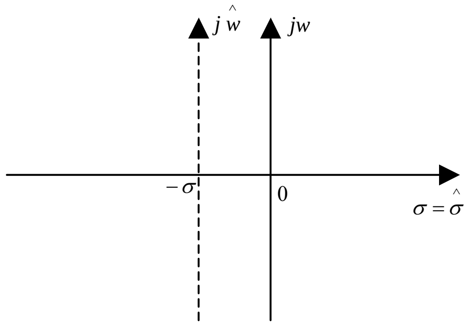
<u>Exercício</u>: Seja um sistema cuja função de transferência de malha fechada possui o denominador mostrado abaixo. Analise se este sistema é estável.

$$P(s) = s^3 - 3s + 2$$

<u>Análise da estabilidade relativa</u>

Conforme estudado anteriormente, a estabilidade relativa indica o grau de estabilidade do sistema, ou seja, se o sistema é estável, quão próximo está de se tornar instável. Uma vez que a estabilidade de um sistema depende do posicionamento de seus pólos de MF e que o sistema é estável se e somente se todos seus pólos de MF estão no semiplano esquerdo do plano complexo, a estabilidade relativa depende da distância dos pólos do sistema até a origem. Sendo assim, quanto mais longe do eixo jw estiverem os pólos de MF de um sistema, mais longe da instabilidade estará este sistema, sendo, portanto, maior sua estabilidade relativa.

O critério de Routh provê a resposta à questão de estabilidade absoluta. Isto, em muitos casos práticos, não é suficiente. Normalmente requeremos informação sobre a estabilidade relativa do sistema. Um método útil de se analisar a estabilidade relativa é o de deslocar o eixo do plano s e aplicar o critério de estabilidade de Routh, ou seja, substituímos $s = \hat{s} - \sigma \quad (\sigma = cte \quad e \quad \sigma > 0)$ na equação característica do sistema, escrevemos o polinômio em termos de $\hat{s}$ e aplicamos o critério de Routh ao novo polinômio. A figura a seguir ilustra o deslocamento do eixo.



Observe que o deslocamento do eixo do plano s consiste numa translação do eixo imaginário para a esquerda, possibilitando que o teste da estabilidade considere uma região mais restrita para análise da estabilidade relativa. Sendo assim, analisando as mudanças de sinal na 1ª coluna no critério de Routh para o polinômio em $\hat{s}$, saberemos quantas raízes situam-se à direita da reta $s = -\sigma$, ou seja, analisamos a estabilidade relativa ao ponto $s = -\sigma$.

Exemplo 1: Considere que o polinômio $P(s) = s^3 + 9s^2 + 26s + 24$ consiste na equação característica de um sistema. Verifique a estabilidade deste sistema com relação à reta s= – 1, ou seja, verifique se este sistema possui pólos à direita da reta s= – 1.

Substituindo $s = \hat{s} - 1$, ou seja, deslocando o eixo jw para s= – 1, temos

$$P(\hat{s}) = (\hat{s}^3 - 3\hat{s}^2 + 3\hat{s} - 1) + 9(\hat{s}^2 - 2\hat{s} + 1) + 26(\hat{s} - 1) + 24$$
$$P(\hat{s}) = \hat{s}^3 + 6\hat{s}^2 + 11\hat{s} + 6$$

$\hat{s}^3$	1	11	1	11
$\hat{s}^2$	6	6	1	1
$\hat{s}$			10	
$\hat{s}^0$			1	

Uma vez que não há troca de sinal na 1ª coluna do arranjo de Routh, podemos concluir que o polinômio P(s) não tem raízes à direita da reta s = – 1. Sendo assim, como o polinômio P(s) consiste na equação característica de um sistema, este sistema não tem pólos à direita da reta s = – 1.

Exemplo 2: Seja o sistema cuja função de transferência é $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3}{s^2 + 4s + 3}$.

a) Analise a estabilidade deste sistema (estabilidade absoluta)

b) Analise a estabilidade relativa ao ponto $\sigma = 1$.

a) Para analisar a estabilidade do sistema acima, vamos utilizar o critério de Routh sobre o polinômio do denominador da função de transferência, conforme mostrado a seguir: $P(s) = s^2 + 4s + 3$

s^2	1	3
s^1	4	
s^0	3	

Como não há troca de sinal nos coeficientes da 1ª coluna do arranjo de Routh, podemos concluir que o sistema é estável.

b) Para analisar a estabilidade relativa ao ponto $\sigma = 1$ faremos o deslocamento do eixo jw para a esquerda, ou seja, substituiremos $s = \hat{s} - 1$

$$P(\hat{s}) = (\hat{s} - 1)^2 + 4(\hat{s} - 1) + 3$$

$$P(\hat{s}) = \hat{s}^2 - 2\hat{s} + 1 + 4\hat{s} - 4 + 3$$

$$P(\hat{s}) = \hat{s}^2 + 2\hat{s} + 0$$

s^2	1	0
s^1	2	
s^0	0	

→ polinômio auxiliar $2\hat{s} = Q(s)$

$Q'(s) = 2$

Substituindo o coeficiente nulo pelo coeficiente de Q’(s) temos

$\hat{s}^2$	1	0
$\hat{s}$	2	
$\hat{s}^0$	2	

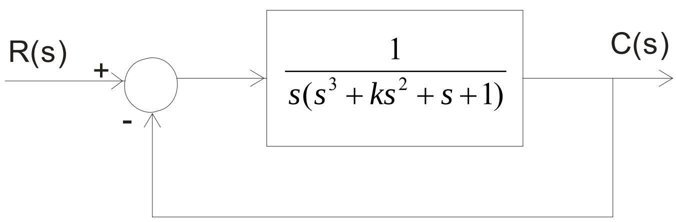
Portanto, não há trocas de sinal na 1ª coluna do arranjo de Routh, o que significa que não há pólos à direita do novo eixo $j\hat{w}$, ou seja, que não há pólos à direita do ponto –1.

Entretanto, como ocorreu uma linha toda nula, é sinal que existe um ou mais pólos sobre o eixo $j\hat{w}$, ou seja, sobre a reta em s= –1. De fato, analisando o polinômio auxiliar $Q(s) = 2\hat{s}$ verificamos que o mesmo possui uma raiz nula, ou seja, uma raiz em $\hat{s} = 0$. Logo, como $s = \hat{s} - 1$, a raiz está em s= –1.

<u>Exercício1</u>: Seja o sistema cuja função de transferência é mostrada abaixo. Verifique se o mesmo possui todos os seus pólos de malha fechada à esquerda da reta s= –2.

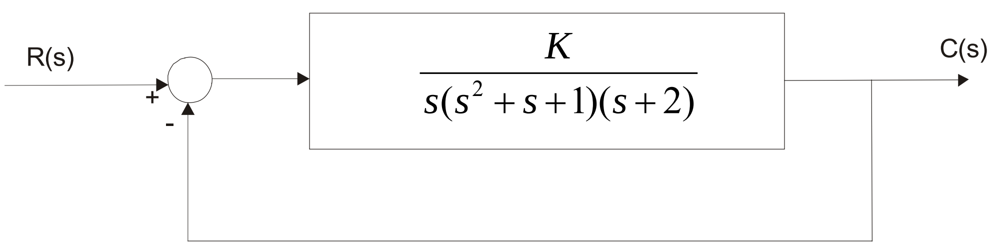
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}$$

<u>Exercício2</u>: Considere o sistema abaixo e determine a faixa de valores de k para o qual o sistema possui uma resposta degrau com $t_{5\%} < 3s$.



<u>Aplicação do critério de estabilidade de Routh na análise de sistemas de controle</u>

Considere o sistema realimentado mostrado a seguir:



Sistema de controle

Deseja-se determinar a faixa de variação de K tal que o sistema seja estável. Uma vez que a estabilidade do sistema depende do posicionamento de seus pólos em malha fechada, é necessário obter sua FTMF.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2+s+1)(s+2)+K}$$

A equação característica deste sistema é dada por:

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

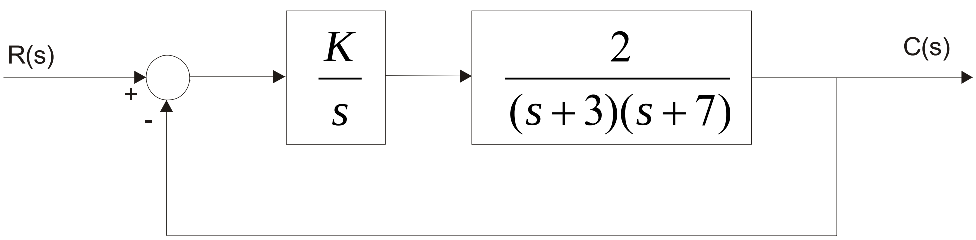
s^4	1	3	K
s^3	3	2	
s^2	$7/3$	K	
s^1	$\frac{14-9K}{7}$		
s^0	K		

Analisando a 1ª coluna do arranjo de Routh podemos observar que alguns coeficientes dependem do fator K. Sendo assim, para que todos os coeficientes tenham o mesmo sinal, garantindo então a estabilidade do sistema, é necessário que K>0 e $\frac{14-9K}{7} > 0 \Rightarrow K < \frac{14}{9}$.

Fazendo a interseção das regiões calculadas acima, temos que a faixa de variação de K para que o sistema seja estável é

$$\boxed{0 < K < \frac{14}{9}}$$

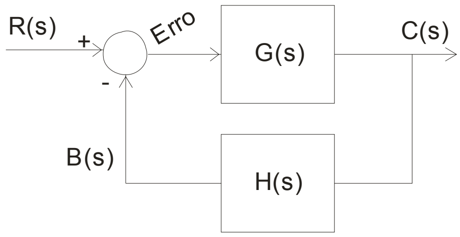
<u>Exercício</u>: Considere o sistema de controle mostrado abaixo. Determine a faixa de valores de K para que o sistema atenda as seguintes especificações.



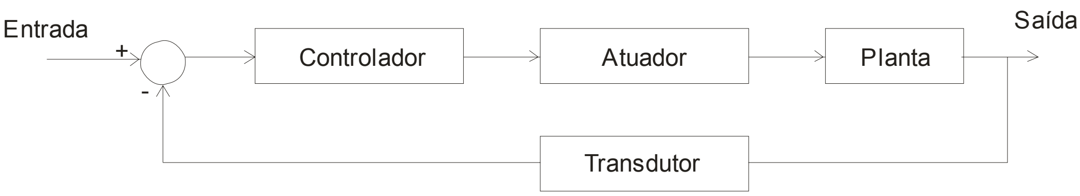
a) Seja estável.
b) Tenha pólos de MF com parte real menor que –1, ou seja, estejam alocados à esquerda da reta s= –1.
c) Tenha uma resposta ao degrau com $t_{5\%} < 3$s.

Análise do erro em regime estacionário

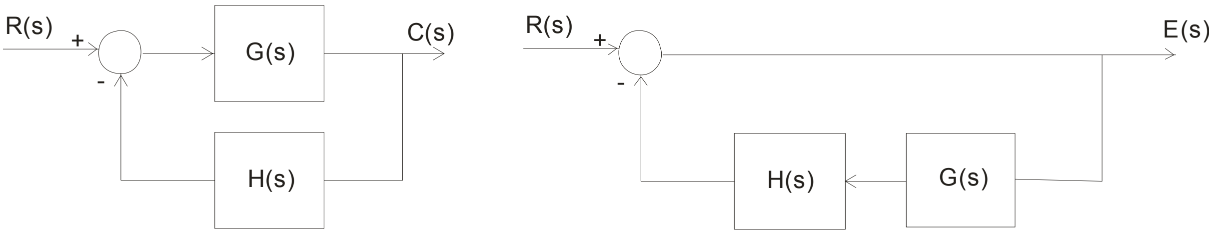
Em um sistema de controle de malha fechada conforme mostrado abaixo, o erro de regime estacionário consiste na diferença entre o valor estacionário da referência aplicada ao sistema (*R(s)*) e o valor estacionário do sinal de saída realimentado (*B(s)*).



Em geral, o bloco *H(s)* consiste num transdutor usado para adequar o sinal de saída.



A função de transferência entre o sinal de erro e o sinal de entrada é dada por:



$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

Para calcular o erro de regime estacionário, faz-se:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{1+G(s)H(s)}\right]\cdot R(s)$$

Antes de continuar, vamos estudar a classificação de sistemas quanto ao número de integrantes.

Seja a função de transferência mostrada abaixo:

$$G(s)H(s) = \frac{k(T_a s+1)...(T_m s+1)}{s^N (T_1 s+1)...(T_p s+1)}$$

Se *N=0* → Sistema do tipo 0
Se *N=1* → Sistema do tipo 1
Se *N=2* → Sistema do tipo 2
Se *N=3* → Sistema do tipo 3
Se *N=4* → Sistema do tipo 4 ...

Coeficientes de erro estacionário

a) Coeficiente de erro de posição (K_p)

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s)$$

b) Coeficiente de erro de velocidade (K_v)

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s)$$

c) Coeficiente de erro de aceleração (K_a)

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)H(s)$$

Relação entre os coeficientes de erro e o erro estacionário

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{1+G(s)H(s)}\right]\cdot R(s)$$

- Entrada em degrau $R(s) = \dfrac{A}{s}$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{1+G(s)H(s)}\right]\cdot A$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{A}{1+\lim\limits_{s\to 0} G(s)H(s)}$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{A}{1+K_p}}$$

- Entrada em rampa $R(s) = \dfrac{A}{s^2}$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0}\frac{A}{s\left(1+G(s)H(s)\right)}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{A}{\lim\limits_{s\to 0} sG(s)H(s)}$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{A}{K_v}}$$

- Entrada em parábola $R(s) = \dfrac{A}{s^3}$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0}\frac{A}{s^2\left(1+G(s)H(s)\right)}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{A}{\lim\limits_{s\to 0} s^2G(s)H(s)}$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{A}{K_a}}$$

Determinação do valor para o coeficiente de erro

a) Coeficiente de erro de posição $K_p = \lim_{s \to 0} G(s)H(s)$

✓ Sistema tipo 0 (*N*=*0*)

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{k(T_a s+1)\ldots(T_m s+1)}{s^0 (T_1 s+1)\ldots(T_p s+1)}$$
$$K_p = K$$

✓ Sistema tipo 1 (*N*=*1*)

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{k(T_a s+1)\ldots(T_m s+1)}{s(T_1 s+1)\ldots(T_p s+1)}$$
$$K_p = \infty$$

✓ Sistema tipo 2 (*N*=*2*)

$$K_p = \lim_{s \to 0} \frac{k(T_a s+1)\ldots(T_m s+1)}{s^2 (T_1 s+1)\ldots(T_p s+1)}$$
$$K_p = \infty$$

b) Coeficiente de erro de velocidade (K_v)

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)H(s)$$

✓ Sistema tipo 0 (*N*=*0*)

$$K_v = \lim_{s \to 0} s \frac{k(T_a s+1)\ldots(T_m s+1)}{(T_1 s+1)\ldots(T_p s+1)}$$
$$K_v = 0$$

✓ Sistema tipo 1 (*N*=*1*)

$$K_v = \lim_{s \to 0} s \frac{k(T_a s+1)\ldots(T_m s+1)}{s(T_1 s+1)\ldots(T_p s+1)}$$
$$K_v = K$$

✓ Sistema tipo 2 (*N*=*2*)

$$K_v = \lim_{s \to 0} s \frac{k(T_a s+1)\ldots(T_m s+1)}{s^2 (T_1 s+1)\ldots(T_p s+1)}$$
$$K_v = \infty$$

c) Coeficiente de erro de aceleração (K_a)

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)H(s)$$

✓ Sistema tipo 0 (*N*=*0*)

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 \frac{k(T_a s+1)\ldots(T_m s+1)}{(T_1 s+1)\ldots(T_p s+1)}$$
$$K_a = 0$$

- ✓ Sistema tipo 1 (*N=1*)

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 \frac{k(T_a s+1)...(T_m s+1)}{s(T_1 s+1)...(T_p s+1)}$$

$$K_a = 0$$

- ✓ Sistema tipo 2 (*N=2*)

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 \frac{k(T_a s+1)...(T_m s+1)}{s^2(T_1 s+1)...(T_p s+1)}$$

$$K_a = K$$

- ✓ Sistema tipo 3 (*N=3*)

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 \frac{k(T_a s+1)...(T_m s+1)}{s^3(T_1 s+1)...(T_p s+1)}$$

$$K_a = \infty$$

Entrada / Tipo sistema	Degrau A/s	Rampa A/s^2	Parábola A/s^3
Tipo 0	$\frac{A}{1+K_p}$	∞	∞
Tipo 1	0	$\frac{A}{K_v}$	∞
Tipo 2	0	0	$\frac{A}{K_a}$

<u>Exercício</u>: Determine o erro de regime do sistema abaixo para as seguintes entradas:

$a)\quad r(t) = 2u(t)$

$b)\quad r(t) = 3tu(t)$

$c)\quad r(t) = \frac{t^2}{2}u(t)$

$d)\quad r(t) = (2+3t)u(t)$