Cálculo 2 - 2022/2

Aula 0

Apresentação: Jaqueline da Costa

email: jaqueline.c.ferreira@ufes.br
sala: 210 prédio PPGMAT/PPGQUI

Provas:

P1	17/10/2022	10 pontos
P2	23/11/2022	10 pontos
P3	01/02/2023	10 pontos
PF	13/02/2023	

75% de presença +

$$MF_1 = \frac{P1+P2+P3}{3} \geq 7$$

↳ Aprovado

$MF_1 < 7$ → prova final

$$MF = \frac{MF_1 + PF}{2} \geq 5 \rightarrow \text{Aprovado}$$

Bibliografia:

1. Boulos Geometria analítica
2. Stewart Cálculo Vol. 2
3. Notas e listas

Ementa:

1. Vetores: operações geométricas/algébricas coordenadas
2. Reta e planos cônicas e quádricas
3. curvas planas: · coordenadas polares · cálculo

Funções vetoriais

Sobre o curso

- alinhou a parte de G.A. para uso em Cal 3
- Parte de curvas paramétricas

Extra: Sistemas lineares

(para resolver os exercícios de GA)

Motivação

Há dois tipos de moedas, indistinguíveis exceto pelo peso
Material A - 10 gramas
Material B - 20 gramas

Se um conjunto de 100 moedas pesa 1,250 gramas, quantas moedas são do material A

Solução: Denote
$x :=$ quantidade de moeda do material A
$y :=$ quantidade de moeda do material B

Modelando:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 10x + 20y = 1250 \end{cases}$$

→ "conjunto de 100 moeda"
↳ peso total

A isto vamos chamar de sistema de equações lineares

Objetivo: estudar as soluções, se possível achar, se tem uma única ou mais soluções

definição Um sistema de equações lineares é uma coleção de uma ou mais equações lineares nas mesmas variáveis:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Obs: m número de equações
n número de incógnitas
dizemos que é um sistema $m \times n$ (m por n)

definição Uma solução do sistema (*) é uma n-upla de números $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ que satisfazem as m equações simultaneamente

* Vamos trabalhar com sistema no máximo 3x3.

<u>Exemplo</u> a) $\begin{cases} x + y = 100 \\ 10x + 20y = 1250 \end{cases}$

é um sistema 2×2

interseção de duas retas

b) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y \quad = 0 \end{cases}$ um sistema 2×3

interseção de dois planos
ou um plano e uma reta

Sobre a solução de um sistema

Teorema Para um sistema linear, uma das 3 opções ocorrem

(I) O sistema tem uma ÚNICA solução
(possível, determinado)

(II) O sistema tem infinitas soluções
(possível, indeterminado)

(III) O sistema não tem soluções
(impossível)

<u>Exemplo</u>:
Vamo analizar a intersecção de duas retas

CASO 1

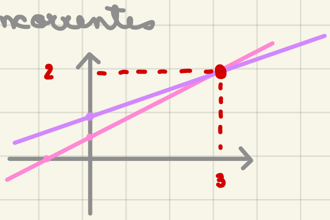
$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}$ $\rightarrow$ $x = 2y - 1$
Substituindo na 2ª eq.

$$-(2y-1) + 3y = 3$$
$$y = 2$$

voltando $x = 3$

A solução do sistema é $P = (3,2)$
e é única

Geometricamente: as duas retas são concorrentes



CASO 2

$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 2y = -3 \end{cases}$ $\rightarrow$ $x = 2y+1$

$-(2y+1) + 2y = -3$
$-1 = -3$
absurdo

Portanto não existe solução

Geometricamente: duas retas paralelas

Resolvendo um sistema linear

<u>Exemplo</u> Considere o sistema

$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}$ $\rightarrow$ $x = 2y - 1$
Substituindo na segunda equação:

reescrevemos como:

$$-(2y-1) + 3y = 3$$
$$y = 2$$

e obtemos o sistema $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

Note que os dois sistemas tem a mesma solução, mais fácil de ver no segundo sistema

Note que de modo análogo:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 & =: L_1 \\ -x + 3y = 3 & =: L_2 \end{cases}$$
$$\overline{\quad y = 2 \quad} \qquad L_2 := L_2 + L_1$$

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

ou ainda como as variáveis são representações podemos trabalhar só com os coeficientes

↱ coef que acompanha y

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{array}\right]$$
→ termos independentes

↳ coef que acompanha x

Em geral:

definição Seja o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é dita matriz dos coeficientes (tipo $m \times n$)

e a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

é dita matriz ampliada ou completa

e

Essa notação simplifica os cálculos

Operações elementares sobre linhas:

- trocar linhas
- Multiplicar uma linha por um escalar
- Substituir uma linha por esta somada com um múltiplo de outra linha

As operações elementares podem ser aplicadas a qualquer matriz e é chamado de escalonamento

Vamos apresentar um exemplo e algumas nomenclaturas

Exemplo Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

Solução Considerar a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right]$$

Pivô: primeiro elemento não nulo de uma linha

- efetue operações elementares para anular as posições abaixo e acima do pivô

$L_2 = L_2 - 2L_1$

$L_3 = L_3 - L_1$

$L_2 = -\frac{1}{3}L_2$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & -7 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

pivô

$L_1 = L_1 - 4L_2$

$L_3 = L_3 + 7L_2$

$-5 + 14/3 = -1/3$

$5 - 14/3 = 1/3$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & -2 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & -2 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$L_3 = -3L_3$

$L_1 = L_1 - 1/3\,L_3$ $\quad -2 + \frac{1}{3} = -5/3 \quad 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$

$L_2 = L_2 - 2/3\,L_3$ $\quad 2 + 2/3 = 8/3 \quad 2 - 4 = -2$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

→ FORMA ESCADA REDUZIDA

Sobre existência e unicidade

Teorema

(I) Um sistema tem solução se somente se a matriz escalonada reduzida **não tem** uma linha na forma

$$[0 \quad 0 \ \dots \ 0 \quad b] \qquad b \neq 0$$

II) E a solução é única se não há variáveis livres, e infinitas se tem variáveis livres

Sistemas com variáveis livres e como representar a solução

Exemplo

a)
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Solução Associar a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \qquad L_2 = L_2 - L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad L_1 = L_1 + \frac{3}{2} L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad L_2 = -\frac{L_2}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

↳ coluna sem pivô = variável livre z

Voltando ao sistema

$$\begin{aligned} x + \tfrac{7}{2} z &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}$$

por x e y em termos de z

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{7}{2} z \\ y &= z \end{aligned}$$

e escrever na forma paramétrica

$$(x,y,z) = z\left(-\tfrac{7}{2}, 1, 1\right) \qquad z \in \mathbb{R}$$

Aula 2 Extra: Ainda sobre sistemas

Definição O **determinante** de uma matriz, denotado por det ou | | é dado por:

a)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

b)
$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$(a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

$$- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}a_{21}.a_{33})$$

Exemplo Note que um sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

tem sempre $(x,y,z) = (0,0,0)$ como solução

Proposição Um sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

tem solução não nula

se só se
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo Determine m tal que

$$\begin{cases} \left(\frac{m}{3} - 1\right)x - y - z = 0 \\ -mx + y = 0 \\ \frac{m}{2}x + z = 0 \end{cases}$$

tem solução não nula

Solução

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{m}{3}-1 & -1 & -1 \\ -m & 1 & 0 \\ \frac{m}{2} & 0 & 1 \end{array} \right| \begin{array}{cc} \frac{m}{3}-1 & -1 \\ -m & 1 \\ \frac{m}{3} & 0 \end{array}$$

$$= \frac{m}{3}-1 + 0 + 0 + \frac{m}{2} + 0 - m = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m}{3} - \frac{m}{2} = 1$$

$$-\frac{m}{6} = 1 \quad \Rightarrow m = -6$$