Algoritmos e Fundamentos da Teoria de Computação

Lista de Exercícios 00

1 Sejam os conjuntos $\mathsf{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathsf{Y} = \{0, 2, 4, 6\}$. Defina explicitamente os conjuntos pedidos nos itens abaixo.

a. $\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}$
b. $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y}$
c. $\mathsf{X} - \mathsf{Y}$
d. $\mathsf{Y} - \mathsf{X}$
e. $\mathcal{P}(\mathsf{X})$

a. $\mathsf{X} \cup \mathsf{Y} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$

b. $\mathsf{X} \cap \mathsf{Y} = \{2, 4\}$

c. $\mathsf{X} - \mathsf{Y} = \{1, 3\}$

d. $\mathsf{Y} - \mathsf{X} = \{0, 6\}$

e.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathsf{X}) = \{\ & \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \\ & \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\ \}\end{aligned}$$

2 Sejam os conjuntos $\mathsf{X} = \{a, b, c\}$ e $\mathsf{Y} = \{1, 2\}$.

a. Liste todos os subconjuntos de X.
b. Liste todos os elementos de $\mathsf{X} \times \mathsf{Y}$.
c. Liste todas as funções totais de Y para X.

a. $\mathcal{P}(\mathsf{X}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

b. $\mathsf{X} \times \mathsf{Y} = \{[a, 1], [a, 2], [b, 1], [b, 2], [c, 1], [c, 2]\}$.

c. Um argumento simples de contagem é suficiente para sabermos que existem $3^2 = 9$ funções totais de Y para X. (De forma geral, há n^m funções totais, aonde m é o número de elementos do domínio e n é o número de elementos do co-domínio.) As nove funções são descritas a seguir.

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \{[1,a],[2,a]\} \\
f_1 &= \{[1,a],[2,b]\} \\
f_2 &= \{[1,a],[2,c]\} \\
f_3 &= \{[1,b],[2,a]\} \\
f_4 &= \{[1,b],[2,b]\} \\
f_5 &= \{[1,b],[2,c]\} \\
f_6 &= \{[1,c],[2,a]\} \\
f_7 &= \{[1,c],[2,b]\} \\
f_8 &= \{[1,c],[2,c]\}
\end{aligned}
$$

3 Mostre que o conjunto dos números naturais pares é enumerável.

Um conjunto é enumerável se ele tem a mesma cardinalidade que $\mathbf{N}$, o conjunto dos números naturais. Dois conjuntos têm a mesma cardinalidade se existe uma bijeção entre os seus elementos. Assim, para mostrar que o conjunto P dos naturais pares é enumerável, basta apresentar uma função $f : \mathbf{N} \to \mathsf{P}$ que seja bijetora. A função $f(n) = 2n$ satisfaz essa condição.

4 Mostre que o conjunto dos números inteiros pares é enumerável. (*Obs.:* um número inteiro i é par se o valor absoluto $|i|$ é divisível por 2.)

Seja IP o conjunto dos inteiros pares. Para mostrar que IP é enumerável, basta apresentar uma função $f : \mathbf{N} \to \mathsf{IP}$ que seja bijetora. A função abaixo satisfaz essa condição.

$$
f(n) = \begin{cases} n+1 & n \text{ ímpar} \\ -n & n \text{ par} \end{cases}
$$

5 Mostre que o conjunto dos números racionais positivos é enumerável. *(Obs.: Considere que ambos o numerador e o denominador são naturais positivos.)*

Basta perceber que o conjunto dos números racionais positivos Q^+ pode ser representado por elementos de $\mathbf{N}^+ \times \mathbf{N}^+$, aonde para todo $[i,j] \in \mathbf{N}^+ \times \mathbf{N}^+$, i é o numerador e j é o denominador. Assim, uma demonstração de que $\mathbf{N}^+ \times \mathbf{N}^+$ é enumerável, similar ao Exemplo 1.4.2 do livro do Sudkamp, é suficiente. É possível modificar a função dada no exemplo para obtermos uma nova bijeção sobre os conjuntos de interesse dessa questão. Uma função como abaixo resolve esse problema.

$$
f([i,j]) = \frac{1}{2}((i+j-2)\cdot(i+j-1)) + i - 1
$$

Desenvolva um programa (em Python, por exemplo) que traça a construção dos pontos no semi-plano Q^+ segundo o mapeamento da função f, para se certificar que a construção é uma bijeção.

6 *(Desafio)* Prove que o conjunto dos números reais no intervalo $[0,1]$ é incontável. *Dica: Use o argumento de diagonalização sobre a casas decimais (dígitos à direita da vírgula) destes números reais.*

Para mostrar que o conjunto dos números reais no intervalo $[0,1]$ é incontável, primeiramente observamos que qualquer número real no intervalo $[0,1]$ pode ser expressado por um decimal infinito da forma $.x_0x_1x_2\ldots x_n\ldots$.

Assuma que o conjunto dos números reais no intervalo $[0,1]$ é contável. Isso implica que existe uma sequência

$$r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

que contém todos os números reais no intervalo $[0,1]$. Faça a expansão decimal de r_n ser denotada por $.x_{n0}x_{n1}x_{n2}\ldots$. A sequência dos números reais é utilizada para construir uma matriz bidimensional infinita, aonde a i-ésima linha corresponde à expansão decimal de r_i.

$$\begin{array}{lcllll} r_0 & = & x_{00} & x_{01} & x_{02} & \cdots \\ r_1 & = & x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots \\ r_2 & = & x_{20} & x_{21} & x_{22} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Dois números são distintos se eles diferem em pelo menos uma posição das suas expansões decimais. Um número real $r = x_0x_1\ldots$ é definido usando os elementos x_{ii} da diagonal da matriz, como a seguir:

$$x_i = \begin{cases} 2 & \text{se } x_{ii} = 1 \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Percebe-se que $r \neq r_i$ para qualquer i, dado que a i-ésima posição de r, x_i, não é idêntica à i-ésima posição de r_i. Assim, a suposição de que a enumeração contém todos os números reais em $[0,1]$ falha, e concluímos que o conjunto é incontável.

7 Apresente uma definição recursiva para a relação binária de *igualdade* sobre $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, usando a função de *sucessor* s.

Definição recursiva para a relação binária EQ (*equal to*):

1. **Base:** O par $[0,0] \in$ EQ.
2. **Passo recursivo:** Se $[n,n] \in$ EQ então $[s(n), s(n)] \in$ EQ.
3. **Fecho:** O par $[n,n] \in$ EQ se e somente se ele pode ser obtido a partir de $[0,0]$ através de um número finito de aplicações das operações do passo recursivo.

8 Apresente uma definição recursiva para a relação binária *maior que* sobre $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, usando a função de *sucessor* s.

Definição recursiva para a relação binária GT (*greater than*):

1. **Base:** O par $[1,0] \in$ GT.
2. **Passo recursivo:** Se $[m,n] \in$ GT então $[s(m), n] \in$ GT e $[s(m), s(n)] \in$ GT.
3. **Fecho.**

9 Apresente uma definição recursiva para o conjunto de pontos $[m,n]$ que ficam sobre a reta $n = 3m$ em $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Use a função de *sucessor* s na sua definição.

Definição recursiva do conjunto L de pontos sobre a linha $n = 3m$:

1. **Base:** O par $[0, 0] \in$ L.
2. **Passo recursivo:** Se $[m, n] \in$ L então $[s(m), s(s(s(n)))] \in$ L.
3. **Fecho.**

10 Apresente uma definição recursiva da operação de multiplicação de números naturais usando as operações de *sucessor* s e adição.

Definição recursiva da operação de multiplicação de números naturais usando as operações de *sucessor* s e adição:

1. **Base:** Se $n = 0$ então $m \cdot n = 0$.
2. **Passo recursivo:** $m \cdot s(n) = m + (m \cdot n)$.
3. **Fecho.**

11 Prove que $2n + 1 < 2^n$, para todo $n > 2$. Considere como universo do discurso o conjunto dos naturais **N**.

Prova por indução:

1. **Caso Base** ($n = 3$): $2n + 1 = 7 < 8 = 2^3$.
2. **Hipótese Indutiva (HI)**: Assumir que $2k + 1 < 2^k$ para $k = 3, 4, 5, \ldots, n$.
3. **Passo Indutivo**: Devemos provar que $2(n + 1) + 1 < 2^{n+1}$.

$$\begin{array}{rcll}
2(n+1)+1 & = & 2n+1+2 & \\
 & < & 2^n+2 & \text{(HI)} \\
 & < & 2^n+2^n & \text{(dado que } 2 < 2^n \text{ para } n > 1) \\
 & = & 2^{n+1} &
\end{array}$$