UFES - CCE - DMAT

MAT09592 - ÁLGEBRA LINEAR - 2018/2

Segunda prova parcial - turma da noite - 24/10/2018

Nome: EDDY GIUSEPE CHIRINOS ISIDRO

1,0 1. Indique verdadeiro (V) ou falso (F). (**justifique sua resposta**).

(a) O *vetor simétrico* é aquele que tem o mesmo módulo, mesmo sentido e apenas diferente direção.

(b) O resultado do produto escalar de dois vetores é um *escalar* e o produto vetorial de dois vetores é um vetor.

(c) A base de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ é um conjunto LD que gera o espaço e essa base não é única.

(d) $dim(\mathbb{R}^n) = n,\quad dim\, M_2(\mathbb{R}) = 5$ e $dim(\mathbb{P}_n) = n+1$.

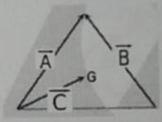
(e) Se T é uma transformação linear, então a transformação T^{-1} existirá sempre.

(f) Imagem de $T:\ \mathbb{U} \implies \mathbb{V}$ é $Im(T) = \{\,\overline{u} \in \mathbb{U}\ /\ T(\overline{u}) = \overline{0}\,\}$.

1,0 2. Seja: $\mathbb{V} = \mathbb{C} = \{a + bi\,/a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$ o conjunto dos números complexos. Considerando as operações usuais, $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

1,0 3. Seja $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$. Se $\overline{u} = (x_1, x_2)$ e $\overline{v} = (y_1, y_2) \in \mathbb{V}$, então $\mathbb{V}$, com as operações de ADIÇÃO: $\overline{u}+\overline{v} = (3x_2 + 3y_2, -x_1 - y_1)$ e MULTIPLICAÇÃO por escalar: $\beta\,\overline{u} = (3\beta x_2, -\beta x_1)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

0,5 4. Determine $\overrightarrow{C}$ em função dos vetores $\overrightarrow{A}$ e $\overrightarrow{B}$. (*ponto* **G** *é o baricentro do triângulo.*)



0,5 5. Dois vetores $\overrightarrow{A}$ e $\overrightarrow{B}$ originam uma resultante mínima de $3u$. Se quando formam um ângulo de $60°$, a resultante é $39u$, calcule os módulos dos vetores. (Os módulos são números inteiros.)

1,0 6. Determinar :

(a) **núcleo** $T:\ \mathbb{R}^3 \implies \mathbb{R}^2\ /\ T(x,y,z) = (2x - y + z\ ,\ 3x + y - 2z)$,

(b) **imagem** $T:\ \mathbb{R}^2 \implies \mathbb{R}^3\ /\ T(x,y) = (x + y\ ,\ x - y\ ,\ x - 2y)$.

1,0 7. Com $k,\, m \in \mathbb{R}$, sejam T_k e T_m as transformações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ dadas, respectivamente, por:
$T_k(x,y,z) = (x - y - z\ ,\ x + y + z) + (k,k)$,
$T_m(x,y,z) = (x^m - y^m - z^m\ ,\ y^{m-1}\,z)$.
Para que valores de k e m são T_k e T_m transformações lineares?

3,0 8. $\mathbf{B} = \{\,\overline{v}_1, \overline{v}_2\,\}$ constitui uma base de $\mathbb{R}^2$, onde $\overline{v}_1 = (1,1)$ e $\overline{v}_2 = (1,2)$.

(a) Qual é a representação matricial (A) da transformação linear $T:\ \mathbb{R}^2 \implies \mathbb{R}^2$ na base **B**, se na base *canônica* de $\mathbb{R}^2$ ela é representada pela matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$?

(b) Calcule a matriz de transformação inversa (A^{-1}), na base **B**.

(c) Supondo que T é representada na base **B** pela matriz $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, determine a expressão analítica para $T(x,y)$.

1,0 9. Aplicar o método de GRAM-SCHMIDT para obter uma base *ortonormal* de $\mathbb{R}^3$, a partir da base $\mathbf{B} = \{\,\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\,\}$, com $\overline{v}_1 = (1,1,1)$, $\overline{v}_2 = (1,-1,1)$ e $\overline{v}_3 = (0,1,1)$.

PROVA 2. ÁLGEBRA LINEAR

Prof. CHIRINOS ISIDRO EDDY GIUSEPE.

06 2018207170 GABRIEL SCHETTINO LUCAS

Solução ①:

a) F b) V c) F d) F e) F f) F

Solução ②: Seja: $\bar{u} = a_1 + b_1 i$; $\bar{v} = a_2 + b_2 i$

$\bar{w} = a_3 + b_3 i$

i.- $(\bar{u}+\bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v}+\bar{w})$ ✓

$(\bar{u}+\bar{v}) + \bar{w} = (a_1+a_2) + (b_1+b_2)i + a_3 + b_3 i$

$= a_1 + a_2 + a_3 + (b_1+b_2+b_3)i$

ii.- $\bar{u}+\bar{v} = \bar{v}+\bar{u}$ ✓

iii.- $\bar{u}+\bar{0} = \bar{u}$ ✓

$a_1 + b_1 i + 0 + 0i = a_1 + b_1 i$

iv.- $\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$ ✓

$a_1 + b_1 i + (-a_1 - b_1 i) = 0 + 0i = \bar{0}$

v.- $a(\bar{u}+\bar{v}) = a\bar{u} + a\bar{v}$ ✓

vi.- $(a+b)\bar{u} = a\bar{u} + b\bar{u}$ ✓

vii.- $(ab)\bar{u} = a(b\bar{u})$ ✓

viii.- $1\bar{u} = \bar{u}$ ✓

Solução ③: Temos: $\bar{u} = (x_1, x_2)$, $\bar{v} = (y_1, y_2)$; $\bar{w} = (z_1, z_2)$

Adição: $\bar{u}+\bar{v} = (3x_2 + 3y_2, -x_1 - y_1)$

Multiplicação: $\beta\bar{u} = (3\beta x_2, -\beta x_1)$

i.- $(\bar{u}+\bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v}+\bar{w})$ X Não cumpre

$(\bar{u}+\bar{v}) = (3x_2 + 3y_2, -x_1 - y_1)$ (+)

$\bar{w} = (z_1, z_2)$

$(\bar{u}+\bar{v}) + \bar{w} = (-3x_1 - 3y_1 + 3z_2, -3x_2 - 3y_2 - z_1)$

$\bar{u} = (x_1, x_2)$ (+)

$(\bar{v}+\bar{w}) = (3y_2 + 3z_2, -y_1 - z_1)$

$\bar{u} + (\bar{v}+\bar{w}) = (3x_2 - 3x_1 - 3z_1, -x_1 - 3y_2 - 3z_2)$

ii.- $\bar{u}+\bar{v} = \bar{v}+\bar{u}$ ✓ Sim cumpre

- $\bar{u}+\bar{v} = (3x_2 + 3y_2, -x_1 - y_1)$
- $\bar{v}+\bar{u} = (3y_2 + 3x_2, -y_1 - x_1)$

iii.- $\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$ X Não cumpre.

$\bar{u} = (x_1, x_2)$ (+)

$-\bar{u} = (-3x_2, +x_1)$

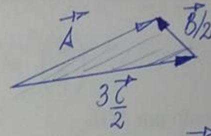
$\bar{u} + (-\bar{u}) = (3x_2 - 3x_1, -x_1 + 3x_2)$

iv.- $\underbrace{\bar{u} + \bar{0}} = \bar{u}$ X Não cumpre.

$(3x_2 + 3(0), -x_1 - 0) = (3x_2, -x_1)$

⋮

Solução ④: Temos:



$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\vec{B}}{2} + 3\frac{\vec{C}}{2}$

$2\vec{A} = \vec{B} + 3\vec{C}$

$\therefore \vec{C} = \frac{2\vec{A} - \vec{B}}{3}$ Rpta.

Solução ⑤:

Interpretando temos:

- $A - B = 3$ ...(1)

- $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$

$\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos 60^\circ} = 39 \Rightarrow A \cdot B = 504$ ...(2)

De (1) e (2):

$A = 24u \wedge B = 21u$ Rpta.

Solução ⑥:

Núcleo: $N(T) = \{\bar{u} \in \mathbb{R}^3 / T(\bar{u}) = (0,0)\}$

$\Rightarrow T(x,y,z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z) = (0,0)$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad (+)$$

$\Rightarrow 5x - z = 0 \Rightarrow z = 5x$

Também: $y = 7x$

$\therefore N(T) = \{(x, 7x, 5x) / x \in \mathbb{R}\}$ Rpta.

2018103719 GABRIEL ALTOE DE OLIVEIRA

...ção:

Devemos encontrar os vetores $\bar{w} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ para os quais existe $\bar{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(\bar{v}) = w$.

$\Rightarrow T(x,y) = (x+y, x-y, x-2y) = (a,b,c)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = a \\ x-y = b \\ x-2y = c \end{cases} \Rightarrow a-3b+2c=0$$

$\therefore \operatorname{Im}(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / a-3b+2c=0\}$ Rpta.

Solução (7): Aplicando as condições.

- $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$
- $T(\alpha \bar{u}) = \alpha T(\bar{u})$

$\therefore$ $k=0 \wedge m=1$

Solução (8):

a) Base Canônica de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} \bar{e}_1 = (1,0) \\ \bar{e}_2 = (0,1) \end{cases}$

$\Rightarrow T(\bar{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge T(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Achando a forma da transformação:

$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x,y) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) = x(1,0) + y(0,1)$

$\Rightarrow T(x,y) = x\,T(1,0) + y\,T(0,1) = (2x+y, x+2y)$

$\Rightarrow T(x,y) = (2x+y, x+2y)$

$\Rightarrow T(1,1) = (3,3) \wedge T(1,2) = (4,5)$

$\therefore A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj}(A)$

$A_{11} = 5$; $A_{21} = -4$

$A_{12} = -3$; $A_{22} = 3$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ Rpta.

c) Temos: $T(1,1) = (3,1)$, $T(1,2) = (2,2)$

Se $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x,y) = \alpha(1,1) + \beta(1,2)$

$(x,y) = (\alpha+\beta, \alpha+2\beta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = x \\ \alpha+2\beta = y \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha = 2x-y \wedge \beta = y-x$

$\Rightarrow (x,y) = (2x-y)(1,1) + (y-x)(1,2)$

$T(x,y) = (2x-y)(3,1) + (y-x)(2,2)$

$\boxed{T(x,y) = (4x-y, y)}$ Rpta.

Solução (9): Aplicando Gram-Schmidt

- $\bar{w}_1 = \frac{\bar{v}_1}{|\bar{v}_1|} \Rightarrow \boxed{\bar{w}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$
- $\boxed{\bar{w}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)}$
- $\boxed{\bar{w}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

$\therefore$ Base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ é: $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$.