Aula 8 Cálculo 3B 2021.1

Aula passada Equações autônomas

Aula Hoje Eq de 2^a ordem Tipo especiais
+ teoria geral 2^a ordem lineares

Algumas equações de segunda ordem especiais pag 72 exercícios.

↳ usa técnicas de 1^a ordem

$$\boxed{y'' = f(t, y, y')}$$

↳ vamos fazer um substituição para reduzir a ordem e resolver com os método que já aprendemos

Caso 1 Falta a variável dependente

$$\boxed{y'' = f(t, y')} \rightarrow \text{sem } y$$

Método: faça $v := y'$ então $v' = y''$
substituindo $\boxed{v' = f(t, v)}$ equação de 1^a ordem

Exemplo Resolva $ty'' = y'$

Solução: é do tipo anterior $v = y' \Rightarrow v' = y''$
substituindo $t.v' = v$ separável

$$t\frac{dv}{dt} = v \Rightarrow \int \frac{1}{v}.dv = \int \frac{1}{t}dt$$

$$\Rightarrow \ln v = \ln t + c$$

$$v = e^{\ln t + c} = t.\underbrace{e^c}_{=K} = Kt$$

voltando

$$y' = Kt \Rightarrow y(t) = \frac{Kt^2}{2} + K_2$$ solução geral

Exemplo Resolva $t^2y'' + 2ty' - 1 = 0$ $t > 0$

Solução: faça $v = y' \Rightarrow v' = y''$ substituindo

$$t^2v' + 2tv - 1 = 0 \quad \text{linear}$$

$$v' + \frac{2}{t}v = \frac{1}{t^2}$$

Fator integrante: $\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}.dt} = e^{2\ln t} = e^{\ln t^2} = t^2$

Multiplicando

$$\int \frac{d}{dt} t^2.v = \int 1 \Rightarrow t^2v = t + C$$

$$v(t) = \frac{1}{t} + \frac{C}{t^2}$$

Voltanto $y' = \frac{1}{t} + \frac{C}{t^2}$

$$y(t) = \ln t - \frac{C}{t} + K$$ solução geral

Caso 2 Faltando a variável independente

$$\boxed{y'' = f(y, y')} \rightarrow \text{sem } t$$

Método. faça $v(y) = y'$ então

regra da cadeia

$$\frac{dv}{dy}\underbrace{y'}_{v} = y'' \Rightarrow \frac{dv}{dy}.v = y''$$

Substituindo

$$\frac{dv}{dy}.v = f(y, v)$$

$$\boxed{\frac{dv}{dy} = \frac{f(y, v)}{v}}$$ equação de 1^a ordem em v e y

Exemplo Resolva $yy'' + (y')^2 = 0$

Solução

Não aparece t: faça $y' = v(y)$

derivando $y'' = \frac{dv}{dy}.\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy}.y' = \frac{dv}{dy}.v(y)$

Substituindo

$$y.\frac{dv}{dy}.v + v^2 = 0 \quad \text{separável}$$

temos que acha uma expressão para $v(y)$

$$y.v\frac{dv}{dy} = -v^2 \Rightarrow \int -\frac{1}{v}.dv = \int \frac{1}{y}.dy$$

$$-\ln v = \ln y + c$$

$$e^{-\ln v} = e^{\ln y + C}$$

$$e^{\ln\frac{1}{v}} = e^c.y = Ky$$

$$\frac{1}{v} = Ky \Rightarrow v(y) = \frac{1}{Ky}$$

voltando $v(y) = y' = \frac{1}{Ky}$ outra EDO

Acha a $y(t)$: é separável novamente

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{Ky}$$

$$\Rightarrow \int y.dy = \int K.dt$$

$$\frac{y^2}{2} = Kt + K_2$$

$$y(t) = \sqrt{2Kt + K_2}$$ solução