Cálculo 2 2022.2

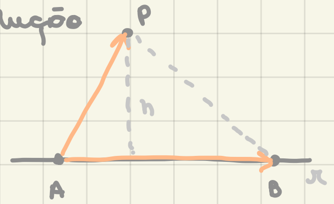
Aula 11

Aula passada: Distância

Aula hoje: Exercícios

Exemplo Calcule a distância de $P=(1,1,-1)$ à interseção de $\pi_1: x-y=1$
$\pi_2: x+y-z=0$

Solução



Identificar dois pontos em r.

$x=0$ $\quad \pi_1: y=-1$
$\pi_2: y-z=0$
$z=-1$

$A=(0,-1,-1)\in \pi_1\cap\pi_2$

$x=1$ $\quad \pi_1: 1-y=1 \Rightarrow y=0$
$1+y-z=0$
$z=1$

$B=(1,0,1)$

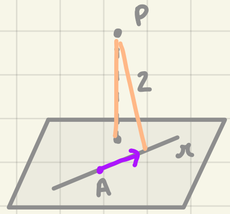
Assim $\vec{AB}=(1,1,2)$ vetor diretor de r
$\vec{AP}=(1,2,0)$

$$d(P,r)=\frac{\|\vec{AP}\wedge AB\|}{\|AB\|}=\frac{\sqrt{16+4+1}}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-4i+2j+k$$

Exemplo Obtenha uma equação qual π que contém a reta r:
$X=(1,0,1)+t(1,1,-1)$ e dista $\sqrt{2}$ do ponto $P=(1,1,-1)$
A $\vec{x}$

Solução:



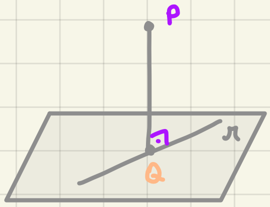
Note que $\vec{AP}=(0,1,-2)$

e $d(P,r)\geq d(P,\pi)$

$$\frac{\|\vec{AP}\wedge r\|}{\|r\|}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

$$\vec{AP}\wedge r=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=i-2j-k$$

então $d(P,r)=d(P,\pi)$ e



então $\vec{PQ}\perp\vec{x}$ $\quad Q\in\vec{x}$
$\vec{PQ}=\vec{n}$

$Q=(1,0,1)+t(1,1,-1)$
$=(1+t,t,1-t)$

• $\vec{PQ}=(t,t-1,2-t)$

$t+(t-1)-(2-t)=0$

$3t=3$ $\quad \vec{n}=(1,0,1)$
$t=1$

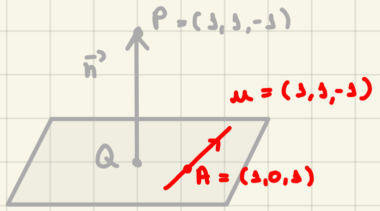
$\pi: (x-1)+(y-0)+(z-1)=0$
$x+z=2$ //

Exemplo Se no exercício anterior $d=2$

Solução
$d=2$ como vimos
$\sqrt{2}=d(P,r)\geq d(P,\pi)=2$
absurdo então não existe plano com essa propriedade

Exemplo E se $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Solução



• $d(P,\pi) = \frac{|AP \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ (*)   • $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow a + b - c = 0$

Seja $\vec{n} = \vec{QP} = (a,b,c)$

$d(P,\pi)^2 = \|\vec{n}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}$

$AP = (0,1,-2)$

em (*) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|b-2c|}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\Rightarrow b - 2c = 1/2$

$b - 2c = -\frac{1}{2}$

Caso 1

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ b - 2c = 1/2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1/2 \end{cases} \quad a = -b + c = -2c - \frac{1}{2} + c = -c - \frac{1}{2} \quad \to b = 2c + 1/2$$

$$\left(\frac{-2c-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4c+1}{2}\right)^2 + \frac{4c^2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$4c^2 + 4c + \cancel{1} + 16c^2 + 8c + \cancel{1} + 4c^2 = \cancel{2}$$

$$24c^2 + 12c = 0$$

$c = 0$, $c = -1/2$

$\Rightarrow$ $a = -1/2$, $b = 1/2$; $b = -1/2$, $a = 0$

$\vec{n} = (-1/2, 1/2, 0)$ e passa por A   ou $\vec{n} = (0, -1/2, -1/2)$

$\Rightarrow \pi_1: -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}y = 0$ $\boxed{-x + y = -1}$ $\pi_2: -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(z-1) = 0$

$y + z = 0$

Caso 2 $a + b - c = 0$ $a = -c + 1/2$

$b - 2c = -1/2 \to b = 2c - \frac{1}{2}$

$$(-c + 1/2)^2 + (2c - 1/2)^2 + c^2 = \frac{1}{2}$$

$$c^2 - c + \cancel{\tfrac{1}{4}} + 4c^2 - 2c + \cancel{\tfrac{1}{4}} + c^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}$$

$$6c^2 - 3c = 0$$

$c = 0$ $c = 1/2$

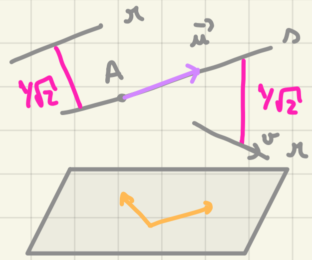
$a = 1/2$ $a = 0$

$b = -1/2$ $b = 1/2$

mesmo π_1 mesmo π_2

Exemplo Obtenha a reta r que contém o ponto $A = (1,1,2)$, é paralela a $\pi: x - 2y + 2z - 4 = 0$ e dista $1/\sqrt{2}$ da reta $s: X = (3,1,1) + t\underbrace{(4,1,-1)}_{\vec{v}}$

Solução



Falta acha $\vec{u} = (a,b,c) \perp \vec{n}$

$\vec{n} = (1,-2,2)$

$\Rightarrow a - 2b + 2c = 0$

• Caso 1 r e s são reversas $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq 0$

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i(-b-c) - j(-a-4c) + k(a-4b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = d(r,s) = \frac{\|AB \cdot u \wedge v\|}{\|u \wedge v\|} \quad (**)$$

onde B é um ponto de s

Podemos pegar $B = (3,1,1)$ $(t=0)$

$\vec{AB} = (2,0,-1)$

e $\|\vec{AB} \cdot u \wedge v\| = 2(-b-c) - (a - 4b)$

$= -a + 2b - 2c = 0$

↳ por (*)

então em (**) não tem solução

Caso 2 r e s paralelas: então r passa em A tem direção $v = (4,1,-1)$

$r = (1,1,2) + t(4,1,-1)$

verificar se ela satisfaz as condições

$$\left.\begin{array}{c} r \parallel \pi \\ \text{então é} \\ r \perp \vec{n} \end{array}\right\} : r \cdot \vec{n} = 4 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot -1 = 0$$

e $d(r, s) = d(A, s)$

$$= \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|u\|} = \frac{\sqrt{1+4+4}}{\sqrt{16+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{18}}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -i + 2j + 2k$$

$$= \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$