Capítulo 3: CÁLCULO PROPOSICIONAL

SINTAXE E SEMÂNTICA

3.1 - Gramática do Cálculo Proposicional (Sintaxe)

i) As letras proposicionais são fórmulas bem formadas (ditas fórmulas simples ou atômicas).

ii) Se α e β são fórmulas bem formadas, então $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, $(\sim \alpha)$, são fórmulas bem formadas (ditas fórmulas compostas).

iii) As únicas fórmulas bem formadas do Cálculo Proposicional são as obtidas por um número finito de aplicações de i), ii).

3.2 Semântica

◆ Interpretação

- A semântica do Cálculo Proposicional consiste na interpretação de suas fórmulas.

Ex1 $\alpha: p \rightarrow (q \vee r)$

3.2 Semântica

◆ Interpretação

.

Ex1 $\alpha: p \rightarrow (q \vee r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \rightarrow (q \vee r)$
V	F	F	F	F

3.2 Semântica

◆ Interpretação

.

Ex1 $\alpha: p \rightarrow (q \vee r)$

	p	q	r	$q \vee r$	$p \rightarrow (q \vee r)$
Interpretação 1 →	V	F	F	F	F

Concluimos assim, que α é **falsa** segundo essa interpretação

3.2 Semântica

◆ Interpretação

Ex1 $\alpha: p \rightarrow (q \vee r)$

	p	q	r	$q \vee r$	$p \rightarrow (q \vee r)$
Interpretação 1 →	V	F	F	F	F

Concluimos assim, que α é **falsa** segundo essa interpretação

- Uma interpretação para a fórmula "**α**" consiste em atribuir valores lógicos **V** ou **F** às fórmulas atômicas componentes de α.

3.2 Semântica

◆ Interpretação

.

Ex1 $\alpha: p \rightarrow (q \vee r)$

	p	q	r	$q \vee r$	$p \rightarrow (q \vee r)$
Interpretação 2 →	F	V	F	V	V

Concluimos assim, que α é **verdadeira** segundo essa interpretação

	p	q	r	$q \lor r$	$p \to (q \lor r)$
Interpretação 1 →	V	F	F	F	F
Interpretação 2 →	F	V	F	V	V

Obs: α é um enunciado (fórmula), **satisfatível** e **inválida.**

	p	q	r	$q \vee r$	$p \to (q \vee r)$
Interpretação 1 →	V	F	F	F	F
Interpretação 2 →	F	V	F	V	V
Interpretação 3 →	F	F	V	V	V

	p	q	r	q ∨ r	p → (q ∨ r)
Interpretação 1 →	V	F	F	F	F
Interpretação 2 →	F	V	F	V	V
Interpretação 3 →	F	F	V	V	V
Interpretação 4 →	F	V	V	V	V
Interpretação 5 →	V	F	V	V	V
Interpretação 6 →	V	V	F	V	V
Interpretação 7 →	V	V	V	V	V
Interpretação 8 →	F	F	F	F	V

◆ Interpretação

β:

	p	q	$p \vee q$
I1 →	V	V	V
I2 →	V	F	V
I3 →	F	V	V
I4 →	F	F	F

γ:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

δ:

p	$p \vee \sim p$
V	V
F	V

Θ:

p	$p \wedge \sim p$
V	F
F	F

β é uma fórmula satisfatível e inválida

γ é uma fórmula satisfatível e inválida

δ é uma fórmula Satisfatível (consistente) e válida

Θ é uma fórmula insatisfatível (inconsistente) e inválida

Semântica

Consequência lógica

Def.:

β é **consequência lógica** de α_1, α_2, quando cada interpretação I que torna simultaneamente, α_1, α_2, verdadeira, torna β verdadeira.

Semântica

Consequência lógica

Def.:

β é **consequência lógica** de α_1, α_2, quando cada interpretação I que torna α_1, α_2 verdadeira, torna β verdadeira.

$$\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2 \vDash \beta}$$

OBS: Diz-se também, que $\boldsymbol{\beta}$ segue-se logicamente de $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2}$.

Consequência lógica

Ex1. seja **α1**: p → q; **α2:** q e β: ~p. Logo, podemos afirmar que

α1, α2 ⊨ **β** ?

p	q	~p	p → q	
	α2	β	α1	
V	V	F	V	➢ I1
V	F	F	F	➢ I2
F	V	V	V	➢ I3
F	F	V	V	➢ I4

Consequência lógica

Ex1. seja **α_1**: $p \rightarrow q$; **α_2:** q e β: $\sim p$. Logo, podemos afirmar que

$\alpha_1, \alpha_2 \vDash \beta$?

	α_2	β	α_1	
p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	
V	V	F	V	➢ I_1
V	F	F	F	➢ I_2
F	V	V	V	➢ I_3
F	F	V	V	➢ I_4

F, pois há ao menos uma interpretação, a saber, I_1 que torna, **α_1** e **α_2**, **V,** mas torna **β, F.**

Logo, **$\alpha_1, \alpha_2 \nvDash \beta$**

Consequência lógica

Ex2. seja α: $p \wedge q$ e β: $p \vee q$. Logo,

p	q	$\overbrace{p \wedge q}^{\alpha}$	$\overbrace{p \vee q}^{\beta}$	
V	V	V	V	➢ I1
V	F	F	V	➢ I2
F	V	F	V	➢ I3
F	F	F	V	➢ I4

Consequência lógica

Ex2. seja α: $p \wedge q$ e β: $p \vee q$. Logo,

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	
V	V	V	V	➢ I1
V	F	F	V	➢ I2
F	V	F	V	➢ I3
F	F	F	V	➢ I4

Dai, $\boldsymbol{\alpha \vDash \beta}$

Consequência lógica

Ex3. seja α_1: $p \rightarrow q$; α_2: $q \rightarrow r$; α_3: p e β: r.

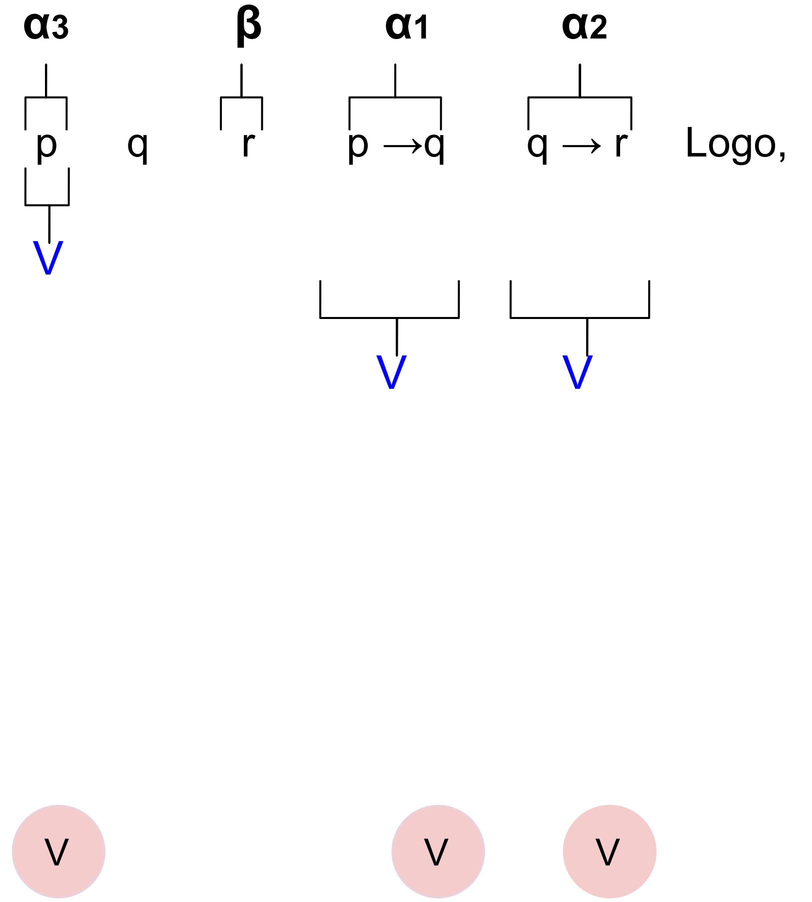
Podemos afirmar que $\boldsymbol{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3 \vDash \beta}$ **?**

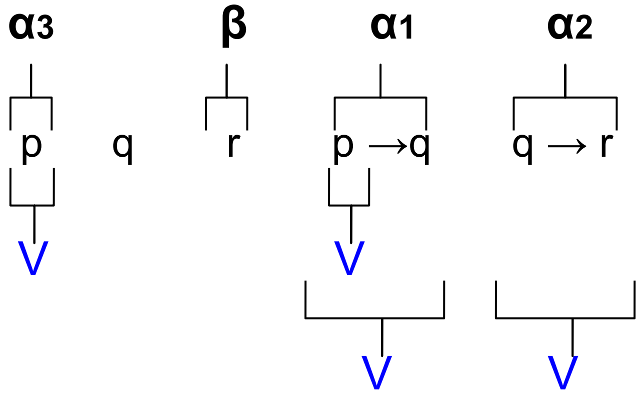
	α_3 p	q	β r	α_1 $p \rightarrow q$	α_2 $q \rightarrow r$	Logo,
Interpretação 1 →	V	F	F	F	V	
Interpretação 2 →	F	V	F	V	F	
Interpretação 3 →	F	F	V	V	V	
Interpretação 4 →	F	V	V	V	V	
Interpretação 5 →	V	F	V	F	V	
Interpretação 6 →	V	V	F	V	F	
Interpretação 7 →	V	V	V	V	V	
Interpretação 8 →	F	F	F	v	V	

	α_3		β	α_1	α_2
	p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$
Interpretação 1 →	V	F	F	F	V
Interpretação 2 →	F	V	F	V	F
Interpretação 3 →	F	F	V	V	V
Interpretação 4 →	F	V	V	V	V
Interpretação 5 →	V	F	V	F	V
Interpretação 6 →	V	V	F	V	F
Interpretação 7 →	V	V	V	V	V
Interpretação 8 →	F	F	F	v	V

Logo, $\boldsymbol{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3 \models \beta}$

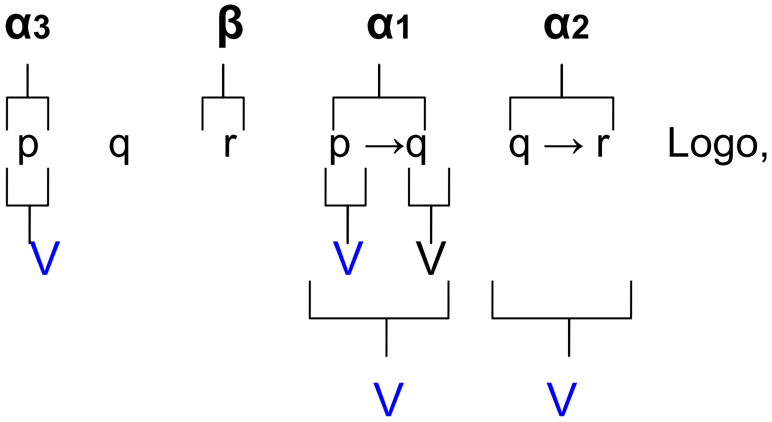
Outra forma...





Logo,

V V V

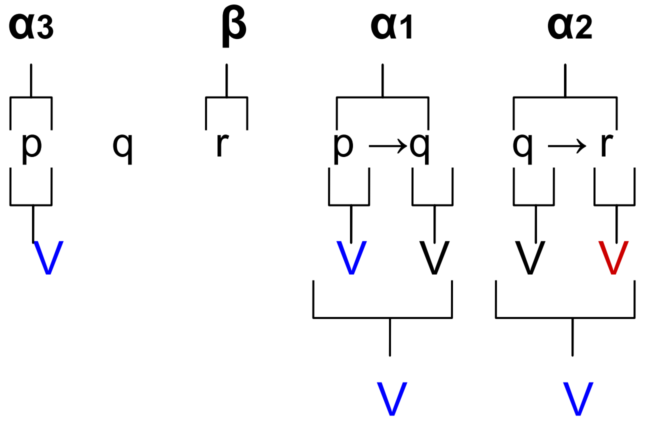

α3
β
α1
α2
p q r p →q q → r Logo,
V
V V
V V

$\boldsymbol{\alpha_3}$ $\quad$ $\boldsymbol{\beta}$ $\quad$ $\boldsymbol{\alpha_1}$ $\quad$ $\boldsymbol{\alpha_2}$

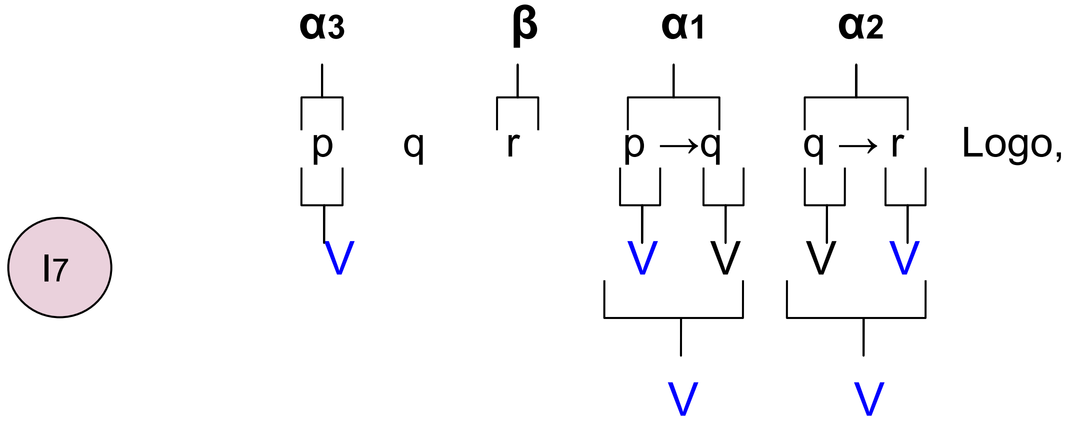
$p \quad q \quad r \quad p \rightarrow q \quad q \rightarrow r$ Logo,

V $\quad$ V $\quad$ V $\quad$ V

V $\quad$ V



Logo,



Logo, conclui-se que **α1; α2; α3 ⊨ β**, pois toda interpretação, a saber **I7**, que torna **α1, α2 e α3** simultaneamente **V,** então torna **β** també**m V.**

Consequência lógica

Podemos afirmar que o enuciado abaixo é verdadeiro?

$\alpha 1; \alpha 2; \alpha 3 \models \beta$ se e somente se **$(\alpha 1 \land \alpha 2 \land \alpha 3)$** $\rightarrow$ **β** é uma fórmula válida.

Equivalências

1. $\alpha \land \alpha \equiv \alpha$
2. $\alpha \lor \alpha \equiv \alpha$
3. $\alpha \land \beta \equiv \beta \land \alpha$
4. $\alpha \lor \beta \equiv \beta \lor \alpha$
5. $(\alpha \land \beta) \land \delta \equiv \alpha \land (\beta \land \delta)$
6. $(\alpha \lor \beta) \lor \delta \equiv \alpha \lor (\beta \lor \delta)$
7. $\alpha \land (\beta \lor \delta) \equiv (\alpha \land \beta) \lor (\alpha \land \delta)$
8. $\alpha \lor (\beta \land \delta) \equiv (\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \delta)$
9. $\alpha \rightarrow \beta \equiv {\sim}\alpha \lor \beta$
10. ${\sim}{\sim}\alpha \equiv \alpha$
11. $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \land (\beta \rightarrow \alpha)$
12. ${\sim}(\alpha \land \beta) \equiv {\sim}\alpha \lor {\sim}\beta$
13. ${\sim}(\alpha \lor \beta) \equiv {\sim}\alpha \land {\sim}\beta$
14. ${\sim}(\alpha \rightarrow \beta) \equiv \alpha \land {\sim}\beta$
15. ${\sim}(\alpha \land \beta) \equiv \alpha \rightarrow {\sim}\beta$
16. $(\alpha \land \beta) \rightarrow \delta \equiv \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta)$
17. $\alpha \rightarrow \beta \equiv {\sim}\beta \rightarrow {\sim}\alpha$
18. $\alpha \rightarrow (\beta \land \delta) \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \land (\alpha \rightarrow \delta)$
19. $(\alpha \lor \beta) \rightarrow \delta \equiv (\alpha \rightarrow \delta) \land (\beta \rightarrow \delta)$
20. $\alpha \land \mathbf{V} \equiv \alpha$
21. $\alpha \land \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
22. $\alpha \lor \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$

Equivalências

23, $\alpha \vee \mathbf{F} \equiv \alpha$

24. $\alpha \wedge \sim\alpha \equiv \mathbf{V}$

25. $\alpha \vee \sim \alpha \equiv \mathbf{F}$

26. $(\alpha \wedge \beta) \vee \alpha \equiv \alpha$

27. $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \equiv \alpha$

Equivalências

Exercício:

1. Determine um enunciado equivalente ao enunciado $\sim p \lor (\sim q \lor r)$ onde ocorre apenas o conectivo lógico $\rightarrow$.

Equivalências

Exercício:

1. Determine um enunciado equivalente ao enunciado $\sim p \vee (\sim q \vee r)$ onde ocorre apenas o conectivo lógico $\rightarrow$.

$$\sim p \vee (\sim q \vee r)$$

Eq 9 $\equiv$

$$p \rightarrow (\sim q \vee r)$$

Eq 9 $\equiv$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

Forma Normal Conjuntiva (FNC)

α está na forma normal conjuntiva (FNC) quando **α** está na forma

$$\boldsymbol{\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_n}$$

Onde, ($n \geq 1$), e cada β_i é uma

disjunção de literais, ou um literal, $1 \leq i \leq n$.

Forma Normal Conjuntiva (FNC)

Literais	**disjunção de literiais**
p	$p \vee \sim q$
$\sim p$	$p \vee \sim q \vee r$

Não é literal	**não são disjunções de literiais**
$\sim\sim p$	$\sim(p \vee \sim q \vee r)$
	$P \vee \sim\sim q \vee r$

Forma Normal Conjuntiva (FNC)

Determine um enunciado na FNC equivalente ao enunciado

$$p \wedge (q \rightarrow \sim (r \wedge s))$$

Forma Normal Conjuntiva (FNC)

Determine um enunciado na FNC equivalente ao enunciado

$$p \land (q \rightarrow \sim (r \land s))$$

Equiv 9 $\equiv$

$$p \land (\sim q \lor \sim (r \land s))$$

Equiv 13 $\equiv$

$$\underbrace{p}_{\boldsymbol{\beta 1}} \land \underbrace{(\sim q \lor (\sim r \lor \sim s))}_{\boldsymbol{\beta 2}}$$

Forma Normal Conjuntiva (FNC)

Determine um enunciado na FNC, equivalente ao enunciado

$$p \vee (q \wedge (s \rightarrow r))$$

Forma Normal Conjuntiva (FNC)

Determine um enunciado na FNC, equivalente ao enunciado

$$p \vee (q \wedge (s \rightarrow r))$$

Equiv 9 $\equiv$

$$p \vee (q \wedge (\sim s \vee r))$$

Equiv 8 $\equiv$

FNC ➢ $\underbrace{(p \vee q)}_{\boldsymbol{\beta 1}} \wedge \underbrace{(p \vee (\sim s \vee r))}_{\boldsymbol{\beta 2}}$

EXERCÍCIOS

1. Encontre um enunciado equivalente a $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ onde só ocorram os conectivos ~ e $\vee$
2. Verifique quais dos enunciados abaixo são equivalentes ao enunciado $\sim(p \vee \sim q) \rightarrow (q \rightarrow r)$

a. $\sim (p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \vee r)$
b. $(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim(q \wedge \sim r)$
c. $\sim(\sim q \vee r) \rightarrow (q \rightarrow p)$
d. $q \rightarrow (p \vee r)$

EXERCÍCIOS

3. Encontre um enunciado **s** que implique logicamente o enunciado

$$\sim(\sim p \land p) \rightarrow (q \lor r)$$