Exercícios retirados do livro: BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. Oitava edição. 2006

Aula 12

Introdução e Modelagem

Seção 1.3 pág 14

1. Determine a ordem da equação e diga se ela é linear ou não.
   (a) $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2}+t\dfrac{dy}{dt}+2y=sent$
   (b) $(1+y^2)\dfrac{d^2y}{dt^2}+t\dfrac{dy}{dt}+y=e^t$
   (c) $y^{(4)}+y^{(3)}+y''+y'+y=1$
   (d) $y'+ty^2=0$
   (e) $y''+sen(t+y)=sent$
2. Verifique que cada função dada é solução da equação diferencial
   (a) $y''-y=0$, $y(t)=e^t$;
   (b) $ty'-y=t^2$, $y(t)=3t+t^2$;
   (c) $t^2y''+5ty'+4y=0$, $t>0$, $y_1(t)=t^{-2}$ e $y_2(t)=t^{-2}lnt$
3. Determine os valores de r para os quais a equação diferencial $y'-2y=0$ tem uma solução da forma $y=e^{rt}$.
4. Determine os valores de r para os quais a equação diferencial $t^2y''+4ty'+2y=0$ tem uma solução da forma $y=t^r$.

Aula 13

Equações lineares 1ª ordem:
Método dos fatores integrantes;
Comportamento das soluções.

Seção 2.1 pág 23

1. Encontre a solução geral da equação diferencial dada e a use-a para determinar o comportamento das soluções quando $t\to\infty$.
   (a) $y'+3y=t+e^{-2t}$ $(y=ce^{-3t}+(t/3)-(1/9)+e^{-2t})$
   (b) $y'-2y=t^2e^{2t}$ $(y=ce^{2t}+t^2e^{2t}/3)$
   (c) $ty'+2y=sent$, $t>0$ $(y=(c-tcost+sent)/t^2)$
   (d) $y'+2ty=2te^{-t^2}$, $t>0$ $(y=t^2e^{-t^2}+ce^{-t^2})$
   (e) $ty'-y=t^2e^{-t}$, $t>0$ $(y=-te^{-t}+ct)$
2. Encontre solução do problema de valor inicial dado.
   (a) $y'-y=2te^{2t}$, $y(0)=1$ $(y=3e^t+2(t-1)e^{2t})$
   (b) $y'+2y=te^{-2t}$, $y(1)=0$ $(y=(t^2-1)e^{-2t}/2)$
   (c) $ty'+2y=t^2-t+1$, $y(1)=\dfrac{1}{2}$, $t>0$ $(y=(3t^4-4t^3+6t^2+1)/12t^2)$
   (d) $y'+\dfrac{2}{t}y=\dfrac{cost}{t^2}$, $y(\pi)=0$, $t>0$ $(y=(sent)/t^2)$
   (e) $y'-2y=e^{2t}$, $y(0)=2$ $(y=(t+2)e^{2t})$
   (f) $ty'+2y=sent$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1, t>0$ $(y=t^{-2}((\pi^2/4)-1-tcost+sent)$
   (g) $t^3y'+4t^2y=e^{-t}$, $y(-1)=0$, $t<0$ $(y=-(1+t)e^{-t}/t^4)$
   (h) $ty'+(t+1)y=t$, $y(ln2)=1$, $t>0$ $(y=-(t-12e^{-t})/t)$
3. Considere o problema de valor inicial
$$\begin{cases} y'+\frac{1}{2}y=2cost,\\ y(0)=-1.\end{cases}$$
   Encontre as coordenadas do primeiro ponto de máximo local da solução para $t>0$.
   Precisa do auxílio de um programa para achar efetivamente o valor de t.
4. Considere o problema de valor inicial
$$\begin{cases} y'+\frac{1}{2}y=-t,\\ y(0)=-1.\end{cases}$$
   Encontre as coordenadas do primeiro ponto crítico da solução para $t>0$ e verifique se ele é máximo ou mínimo local. $(t=-2ln(4/5)>0)$
5. Considere o problema de valor inicial
$$\begin{cases} y'+\frac{2}{3}y=1-\frac{1}{2}t,\\ y(0)=y_0.\end{cases}$$
   Encontre o valor de y_0 para o qual a solução encosta no eixo t mas não atravessa.
6. Encontre o valor de y_0 para o qual a solução do problema de valor inicial
$$\begin{cases} y'-y=1+3sent,\\ y(0)=y_0.\end{cases}$$
   permanece finita quando $t\to\infty$. $(y_0=-5/2)$
7. Considere o problema de valor inicial
$$\begin{cases} y'-\frac{3}{2}y=3t+2e^t,\\ y(0)=y_0.\end{cases}$$
   Encontre o valor de y_0 que separa as soluções que crescem positivamente quando $t\to\infty$ das que crescem em módulo com sinal negativo. Como a solução correspondente a esse valor crítico de y_0 se comporta quando $t\to\infty$? $(y_0=-16/3)$

8. Mostre que, se a e λ são constantes positivas e se b é qualquer número real, então toda a solução da equação
$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$
tem a propriedade que $y \to 0$ quando $t \to \infty$.

9. Construa uma equação diferencial linear de primeira ordem cujas soluções têm limite 3 quando $t \to \infty$.

Aula 14

Equações não lineares 1ª ordem:
Método de equações separáveis.
Substituição tipo 1.

Seção 2.2 pág 27

1. Resolva a equação diferencial dada
   (a) $y' = \dfrac{x^2}{y}$ $(3y^2 - 2x^3 = c,\ y \neq 0)$
   (b) $y' = \dfrac{x^2}{y(1+x^3)}$ $(3y^2 - 2ln|1+x^3| = 3,\ x \neq -1,\ y \neq 0)$
   (c) $y' + y^2 senx = 0$ $(y^{-1} + cosx = c$ se $y \neq 0$ e $y = 0$ em toda parte$)$
   (d) $xy' = \sqrt{1-y^2}$ $(y = sen(ln|x| + c)$ se $x \neq 0$ e $|y| < 1;$ $y = -1,\ y = 1)$
   (e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^y}$ $(y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = c,\ y + e^y \neq 0)$
   (f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1+y^2}$ $(3y + y^3 - x^3 = c)$

2. Resolva o problema de valor inicial. Quando possível de a solução explícita e determine, aproximadamente, o intervalo no qual a solução está definida.
   (a) $y' = (1-2x)y^2,\quad y(0) = -\dfrac{1}{6}$ $(y = 1/(x^2 - x - 6))$
   (b) $y' = \dfrac{1-2x}{y},\quad y(1) = -2$ $(y = -\sqrt{2x - 2x^2 + 4})$
   (c) $y' = 2x/(y + x^2 y),\quad y(0) = -2$ $(y = -(2ln(1+x^2) + 4)^{1/2})$
   (d) $y' = \dfrac{3x^2 - e^x}{2y - 5},\quad y(0) = 1$ $(y = 5/2 - \sqrt{x^3 - e^x + 13/4})$

3. Resolva o problema de valor incial
$$\begin{cases} y' = 2y^2 + xy^2, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
e determine onde a solução atinge seu valor mínimo.
$(y = -1/(x^2/2 + 2x - 1);\ x = -2))$

4. Resolva o problema de valor incial
$$\begin{cases} y' = \dfrac{2cos2x}{3+2y}, \\ y(0) = -1 \end{cases}$$
e determine onde a solução atinge seu valor máximo.
$(y = -3/2 + \sqrt{sen2x + 1/4};\ x = \pi/4))$

5. Resolva o problema de valor inicial
$$\begin{cases} y' = 2(1+x)(1+y^2), \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
e determine onde a solução atinge seu valor mínimo.
$(y = tg(x^2 + 2x);\ x = -1)$

6. Considere o problema de valor inicial
$$\begin{cases} y' = \dfrac{ty(4-y)}{3}, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$
Determine como o comportamento da solução quando t aumenta depende do valor inicial y_0.
$(y \to 4$ se $y_0 > 0;\ y = 0$ se $y_0 = 0;\ y \to -\infty$ se $y_0 < 0)$

7. Resolva a equação diferencial dada por meio de uma substituição apropriada.
   (a) $y' = (x+y+1)^2$
   (b) $y' = \dfrac{1-x-y}{x+y}$
   (c) $y' = tg^2(x+y)$
   (d) $y' = sen^2(x+y) - 1$

8. Resolva o problema de valor inicial dado
   (a) $y' = (-2x+y)^2 - 7\quad y(0) = 0$
   (b) $y' = \dfrac{3x+2y}{3x+2y+2},\ y(-1) = -1$

Aula 15

Equações não lineares 1ª ordem:
Método de substituição.
Homogênea, Bernoulli e Riccati.

Substituição: pág 28 (Homogênea) 43 (Bernoulli)

1. Mostre que a equação dada é homogênea e resolva.
   (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$ $(arctg(y/x) - ln|x| = c)$
   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 3y^2}{2xy}$ $(x^2 + y^2 - cx^3 = 0)$
   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y - 3x}{2x - y}$ $(y = -3x$ e $|y - x| = c|y + 3x|^5)$
   (d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y}{x - y}$ $(y = -x$ e $2x/(x+y) + ln|x| = c)$
   (e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 3y^2}{2xy}$ $(|x|^3|x^2 - 5y^2| = c)$

2. As equações dadas são equações de Bernoulli, use substituição para resolve-las.
   (a) $t^2y' + 2ty - y^3 = 0,\quad t > 0$ $(y = \pm(5t/(2 + 5ct^5)^{1/2}))$
   (b) $y' = ry - ky^2,\quad r > 0,$ e $k > 0$ $(y = r/(k + cre^{-rt}))$
   (c) $y' = y - y^3$ $(y = \pm(1/(1ce^{-2t})^{1/2}))$
   (d) $xy' + y = \dfrac{1}{y^2}$ $(y = y^3 = 1 + cx^{-3})$
   (e) $y' = y(xy^3 - 1)$ $(y = y^{-3} = x + 1/3 + ce^{3x})$

Final da lista para P2