Universidade Federal do Espírito Santo
Terceira Prova de Álgebra Linear - Turmas da tarde
Vitória, 05 de setembro de 2013

Nome Legível: ______________________________

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ onde $T(1,1,0) = (1,-1)$, $T(1,0,1) = (1,1)$ e $T(0,1,1) = (1,2)$.

   (a) (2,0) Determine a matriz canônica de T (ou seja, a matriz de T em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$);

   Sol.: Sejam $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$. A coluna i da matriz canônica de T é o vetor $T(e_i)$. Seja $\alpha = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$, base de $\mathbb{R}^3$ então $[e_1]_\alpha = (1/2, 1/2, -1/2)$, $[e_2]_\alpha = (1/2,-1/2,1/2)$ e $[e_3]_\alpha = (-1/2,1/2,1/2)$. Com isso,

$$T(e_1) = \tfrac{1}{2}T(1,1,0) + \tfrac{1}{2}T(1,0,1) - \tfrac{1}{2}T(0,1,1) = (1/2,-1/2) + (1/2,1/2) - (1/2,1) = (1/2,-1)$$
$$T(e_2) = \tfrac{1}{2}T(1,1,0) - \tfrac{1}{2}T(1,0,1) + \tfrac{1}{2}T(0,1,1) = (1/2,-1/2) - (1/2,1/2) + (1/2,1) = (1/2,0)$$
$$T(e_3) = -\tfrac{1}{2}T(1,1,0) + \tfrac{1}{2}T(1,0,1) + \tfrac{1}{2}T(0,1,1) = -(1/2,-1/2) + (1/2,1/2) + (1/2,1) = (1/2,2)$$

   Logo, a matriz canônica de T é $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   (b) (1,0) Qual a dimensão do núcleo de T? Justifique;

   Sol.: $dim(Nuc(T)) = dim(Nuc(A)) = 1$ pois o espaço linha de A tem dimensão 2 e o núcleo de A é o complemento ortogonal do espaço linha. Pode ser justificado também pelo teorema do posto e da nulidade.

   (c) (1,0) T é injetiva? T é sobrejetiva? Justifique.

   Sol.: T não é injetiva pois $Nuc(T) \neq \{0\}$. T é sobrejetora, pois $dim(Im(T)) = dim(Col(A)) = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$.

2. Seja $S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4;\ x + y - 2w = 0\}$.

   (a) (1,5) Encontre uma base ortogonal de S e uma base ortogonal de $S^\perp$.

   Sol.: $S = \{(-y+2w, y, z, w) \in \mathbb{R}^4;\ y,z,w \in \mathbb{R}\} = ger\{v_1 = (0,0,1,0), v_2 = (-1,1,0,0), v_3 = (2,0,0,1)\}$. Observe que $< v_1, v_2 >= 0$. Considere $w_3 = v_3 - \frac{<v_3,v_2>}{||v_2||^2}v_2 - \frac{<v_3,v_1>}{||v_1||^2}v_1 = (1,1,0,1)$. Logo, $\beta = \{v_1, v_2, w_3\}$ é uma base ortogonal de S.
   Basta ver que $S^\perp = ger\{(1,1,0,-2)\}$.

   (b) (1,0) Calcule a projeção ortogonal do vetor $v = (1,1,1,0)$ em S.

   Sol.: Como α é uma base ortogonal de S, a projeção ortogonal de v em S é a soma das projeções de v em cada vetor de α. Isto é,

$$proj_S v = \frac{< v, v_1 >}{||v_1||^2}v_1 + \frac{< v, v_2 >}{||v_2||^2}v_2 + \frac{< v, w_3 >}{||w_3||^2}w_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$$

3. (2,0) Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é diagonalizável e encontre uma matriz P , 3x3 e invertível, tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal. **Sol.:** $\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$ e $det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 3\,\lambda - 2$ cujas raízes são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Os autoespaços de A são $S_{\lambda_1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; -x-y-z = 0\} = ger\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ e $S_{\lambda_2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - z = 0 \text{ e } y - z = 0\} = ger\{(1,1,1)\}$.

Seja $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ então $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

4. (a) (1,0) Encontre um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Im}(T)$ e $Nuc(T)$ sejam iguais à reta $y = 3x$;

   Sol.: Basta definir T nos vetores de uma base de $\mathbb{R}^2$. Defina $T(1,0) = (1,3)$ e $T(1,3) = (0,0)$. Assim, $Im(T) = ger\{(1,3)\} = Nuc(T) = \{(x,3x) \in \mathbb{R}^2\}$.

   (b) (0,5) Mostre que o operador encontrado no item (a) não é diagonalizável;

   Sol.: Sabemos que $v_1 = (1,3)$ é um autovetor de T. Se existir v_2 não múltiplo de v_1 autovetor de T, então $Im(T) = ger\{v_2\} \neq ger\{v_1\}$. Logo, não existe base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T.

5. (EXTRA) (1,0) Existe uma matriz simétrica 3×3 que tenha $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 7$ como autovalores e $v_1 = (0,1,-1)$, $v_2 = (1,1,0)$ e $v_3 = (1,1,1)$ como autovetores correspondentes? Justifique!

   Sol.: Autoespaços associados a autovalores distintos de uma matriz simétrica são ortogonais. Como v_3 não é ortogonal a v_2, não pode existir tal matriz.