

Nome Legível: _____

Justifique seu raciocínio.

1. (2 pontos) Seja $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e $\beta' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bases de um espaço vetorial V . Sabendo que, para $\mathbf{v} \in V$,

$$[\mathbf{v}]_{\beta} = (a, b, c) \Rightarrow [\mathbf{v}]_{\beta'} = (a + b + c, a - b + c, a - b - c)$$

determine a matriz de mudança de base de β' para β .

2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a matriz do operador linear $T : V \longrightarrow V$ numa base $\beta = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

- (a) (1 ponto) Determine $[T(\mathbf{u})]_{\beta}$ e $[T(\mathbf{u}) - 3T(\mathbf{v}) + 2T(\mathbf{w})]_{\beta}$.
(b) (1,5 pontos) O operador T é diagonalizável? T é ortogonalmente diagonalizável?

3. Considere as transformações matriciais $T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

- (a) (1 ponto) Quais são todas as possíveis dimensões do núcleo de T_A ?
(b) (1,5 pontos) Para cada dimensão possível n , dê exemplo numérico de uma matriz A com dimensão do núcleo de T_A igual a n .

4. Seja π o plano dado por $x - y + z = 0$.

- (a) (1 ponto) Encontre um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que
. $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \pi$;
. $\dim(\text{Nuc}(T)) = 1$;
. T é ortogonalmente diagonalizável.
(b) (1 ponto) Determine a matriz A do operador T , encontrado no item (a), na base canônica.
(c) (1 ponto) Encontre matrizes P e D , sendo D diagonal, tal que $P^{-1}AP = D$.

Boa Prova!!!



UFES

Prof.: Etereldes
06/11/2012

Solução esperada da prova III - Álgebra Linear

1. Sejam U a matriz cujas colunas são u_1 , u_2 e u_3 , V a matriz cujas colunas são v_1 , v_2 e v_3 e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então $U \cdot [v]_{\beta} = V \cdot A \cdot [v]_{\beta'}$. Logo, $U \cdot A^{-1} \cdot [v]_{\beta} = V \cdot [v]_{\beta'}$ e a matriz de mudança de base de β' para β é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

2. (a) $[T(u)]_{\beta} = (1, 0, 0)$ e $[T(u) - 3T(v) + 2T(w)]_{\beta} = [T(u)]_{\beta} - 3[T(v)]_{\beta} + 2[T(w)]_{\beta} = (0, -4, 0)$.

- (b) Os autovalores de T são as raízes reais de

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-1)(4-\lambda).$$

O autoespaço associado a $\lambda = 1$ é o conjunto solução de

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, O autoespaço associado a $\lambda = 1$ é $\text{ger}\{(1, 0, 0), (0, 1, -1)\}$. Como o autoespaço associado a $\lambda = 4$ tem dimensão 1, temos uma base de autovetores de T e portanto T é diagonalizável. T não é ortogonalmente diagonalizável, pois A não é simétrica.

- (a) $\dim(\text{Nuc}(T_A)) = 3 - \dim(\text{Im}(T_A))$. Logo, temos os seguintes pares possíveis para $(\dim(\text{Nuc}(T_A)), \dim(\text{Im}(T_A)))$ que são $(3, 0)$, $(2, 1)$ e $(1, 2)$. Veja que T_A não pode ser injetiva e não podemos ter $(0, 3)$.

- (b) i. A é a matriz nula.

ii. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

iii. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

3. (a) $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\} = \{(y - z, y, z); y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1); y, z \in \mathbb{R}\}$, que é o espaço gerado pelos vetores $u_1 = (1, 1, 0)$ e $u_2 = (-1, 0, 1)$. Então, se $u_3 = (1, -1, 1)$ temos que $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 . Definindo $T(u_3) = 0$, temos que T definido na base β por $T(u_1) = -u_1$, $T(u_2) = -u_2$ e $T(u_3) = 0$ tem as propriedades desejadas.

- (b) Um vetor qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vetores de β . Isto é, existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que $(x, y, z) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$. Resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Temos $\alpha_1 = \frac{x+2y+z}{3}$, $\alpha_2 = \frac{-x+y+2z}{3}$ e $\alpha_3 = \frac{x-y+z}{3}$.

Logo, $T(x, y, z) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \alpha_3 T(u_3) = \frac{x+2y+z}{3} T(1, 1, 0) + \frac{-x+y+2z}{3} T(-1, 0, 1) + \frac{x-y+z}{3} T(1, -1, 1) = \frac{x+2y+z}{3} (-1, -1, 0) + \frac{-x+y+2z}{3} (1, 0, -1)$.

Portanto, $T(x, y, z) = \left(\frac{-2x-y+z}{3}, \frac{-x-2y-z}{3}, \frac{+x-y-2z}{3} \right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Logo

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

- (c) Defina $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Então, $AP = PD$, pois as duas primeiras colunas de P são autovetores de A associados ao autovalor -1 e a terceira é um autovetor associado ao autovalor 0 . Veja que T tem uma base ortonormal de autovetores, pois A é simétrica e podemos encontrar tal base ortogonalizando os autovetores associados ao autovalor -1 .