Calculo 2 2022.2

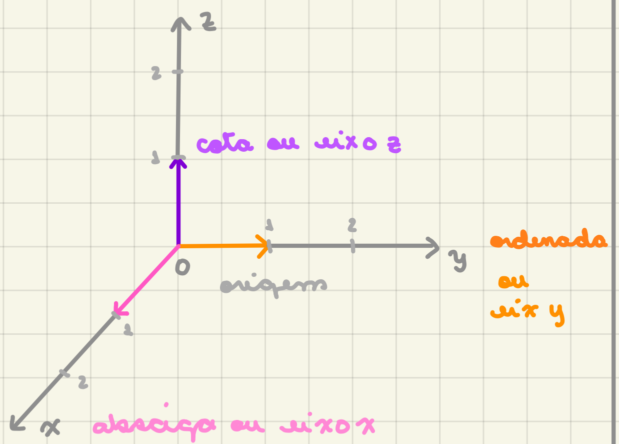
Aula 8

Aula passada: vetores

Aula Hoje: coordenadas e reta

Cap 13 Sistemas de Coordenadas

Fixa $\{i, j, k\}$



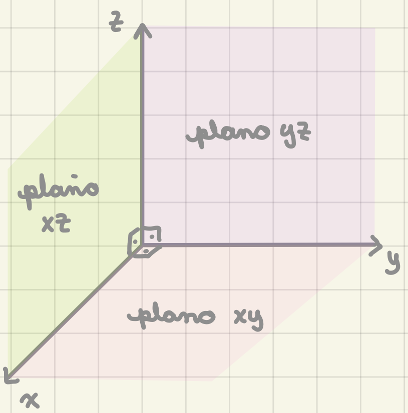
Sabemos que:

- $\vec{OP} = (x_0, y_0, z_0)$

Assim definimos

- $P = (x_0, y_0, z_0)$ as coordenadas do ponto P

Os planos coordenados são:



Consequência

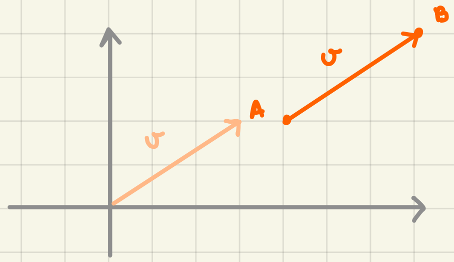
$A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$

o vetor

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB}$$

$$= (-x_1, -y_1, -z_1) + (x_2, y_2, z_2)$$

$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = \overset{\text{vetor}}{B - A}$$



e

$A = (x, y, z)$, $t \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} = (a, b, c)$

$$A + tv = B \iff \vec{AB} = tv = B - A$$

$$\iff B = A + tv = (x + ta, y + tb, z + tb)$$

Exemplo Sejam $P = (1, 3, -3)$ e $Q = (-2, -1, 4)$ e $u = (-1, 4, 0)$. Determine

(a) $\vec{QP}$

(b) $P + \vec{u}$

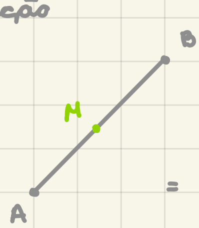
Solução

(a) $\vec{QP} = P - Q = (3, 4, -7)$ vetor

(b) $P + \vec{u} = (0, 7, -3)$ ponto

Exemplo $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$. Qual a coordenada do ponto médio de AB

Solução



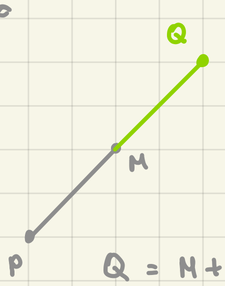
$$M = A + \frac{AB}{2}$$

$$= (x_1, y_1, z_1) + \left(\frac{x_2 - x_1}{2}, \frac{y_2 - y_1}{2}, \frac{z_2 - z_1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Exemplo: Determine Q simétrico a $P=(1,0,3)$ e $M=(1,2,-1)$.

Solução



$PM = M - P = (0,2,-4)$

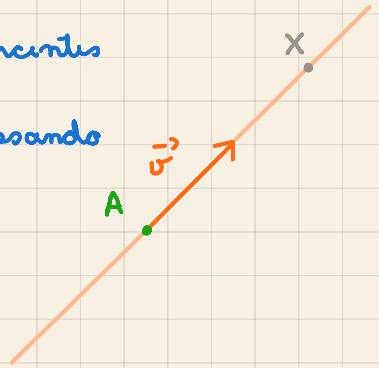
$Q = M + \vec{PM} = (1,2,-1) + (0,2,-4)$
$= (1,4,-5)$

Cap 14. Equação da Reta e do plano

Reta

definição Fixe um ponto A e um vetor $\vec{v}$:
Os pontos X pertencentes a reta r com vetor diretor $\vec{v}$ passando por A

$X = A + t\vec{v}$
$\forall\, t \in \mathbb{R}$



$r: \quad X = A + t\vec{v}$ é dita equação vetorial

Consequentemente se $X=(x,y,z)$
$A=(x_0,y_0,z_0)$ e $v=(a,b,c)$

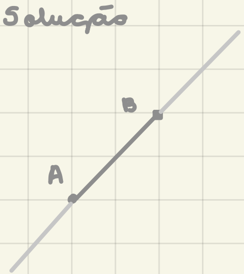
$(x,y,z) = (x_0+ta,\ y_0+tb,\ z_0+tb)$

$$\Leftrightarrow \quad r: \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

dita equações paramétricas de r

Exemplo Obtenha a equação vetorial e paramétrica a reta determinada pelos pontos $A=(1,0,1)$ e $B=(3,-2,3)$

Solução



reta com vetor diretor
$\vec{v} = \vec{AB} = (2,-2,2)$
passando por $A=(1,0,1)$

$r: \quad X = (1,0,1) + t(2,-2,2)$

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad (*)$$

$A \qquad \vec{v}$

Exemplo: Verifique que $P=(-9,10,-9)$ pertence a r (exercício anterior)

Solução acha único t que P satisfaz $(*)$

$$\begin{cases} -9 = 1 + 2t \\ 10 = -2t \\ -9 = 1 + 2t \end{cases} \quad \rightarrow \quad t = -5$$

verifica

verifica

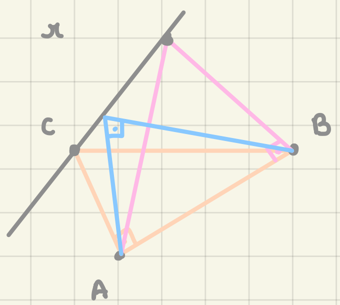
Como t deve ser o mesmo em

$$r: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad a,b,c \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} t &= \frac{x-x_0}{a} \\ t &= \frac{y-y_0}{b} \\ t &= \frac{z-z_0}{c} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}}$$

dita equações simétricas de r

Exemplo São dados $A=(0,1,8)$ e $B=(-3,0,9)$ e a reta $r: X=(1,2,0)+t(1,1,-3)$. Determine C de r tal que A,B,C sejam vértices de um triângulo retângulo



• Note $A,B \notin r$:

$$\begin{cases} 0 = 1 + t \\ 1 = 2 + t \\ 8 \neq -3t = 6 \end{cases} \quad t = -1$$

$$\begin{cases} -3 = 1 + t \\ 0 \neq 2 + t \end{cases} \quad \rightarrow t = -4$$

Caso 1 $\vec{AB}$ hipotenusa $\Rightarrow \vec{CB} \cdot \vec{CA} = 0$

$C = (1+t,\ 2+t,\ -3t)$ e

$\vec{CB} = (\underbrace{-3-1}_{-4}-t, -2-t, 9+3t)$

$\vec{CA} = (-1-t, 1-2-t, 8+3t)$

$\vec{CB}\cdot\vec{CA} = (-4-t)(-1-t) + (-2-t)(-1-t) + (9+3t)(8+3t)$

$= 4+5t+t^2 + 2+3t+t^2 + 72+9t^2+51t = 0$

$11t^2 + 59t + 78 = 0$

$\lambda = -3 \quad , \quad \lambda = -26/11$

então $C_1 = (-2, -1, 9)$

$C_2 = (-15/11, -2/11, 52/11)$

Caso 2 $\vec{AC}$ hipotenusa $\Rightarrow$

$\vec{BC}\cdot\vec{BA} = 0$

$\vec{BC} = (4+t, 2+t, -9-3t)$

$\vec{BA} = (3, 1, -1)$

$\vec{BC}\cdot\vec{BA} = 3(4+t) + (2+t) + 9+3t = 0$

$7t + 23 = 0 \Rightarrow t = -23/7$

$C_3 = (-16/7, -9/7, 69/7)$

Caso 3 $\vec{CB}$ hipotenusa $\Rightarrow$

$\vec{AC}\cdot\vec{AB} = 0$

$(1+t, 1+t, -8-3t)\cdot(-3,-1,1) = 0$

$-3(1+t) - (1+t) - 8 - 3t = 0$

$-7t - 12 = 0 \qquad t = 12/7$

$C = (19/7, 36/7, -36/7)$