AULA 2 Cálculo 3A - 2020.2

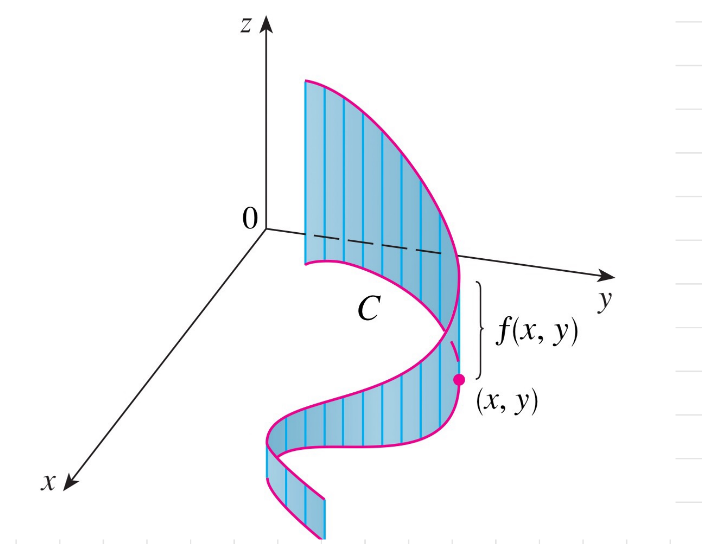
16.2 Integrais de linha

A: Integrais de linha de funções escalares

Considere

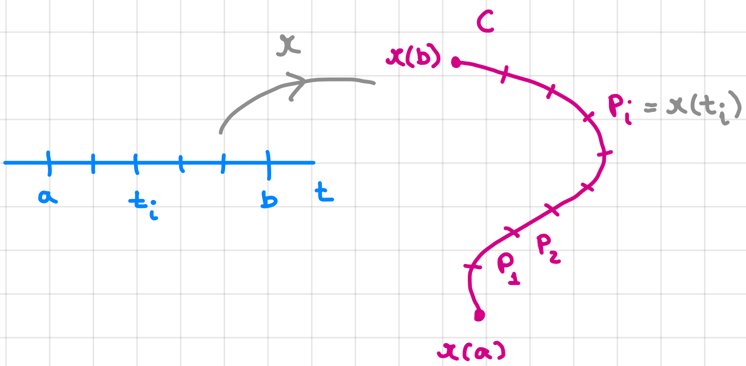
- $z = f(x,y) \geq 0$ uma função de duas variáveis
- $C: \vec{x}(t) = (x(t), y(t)) \quad a \leq t \leq b$ uma curva plana suave $(\vec{x}'(t) \neq \vec{0} \ \forall t)$

Objetivo: Calcular a área da "cortina" acima da curva C e abaixo do gráfico de $z = f(x,y)$ como na figura



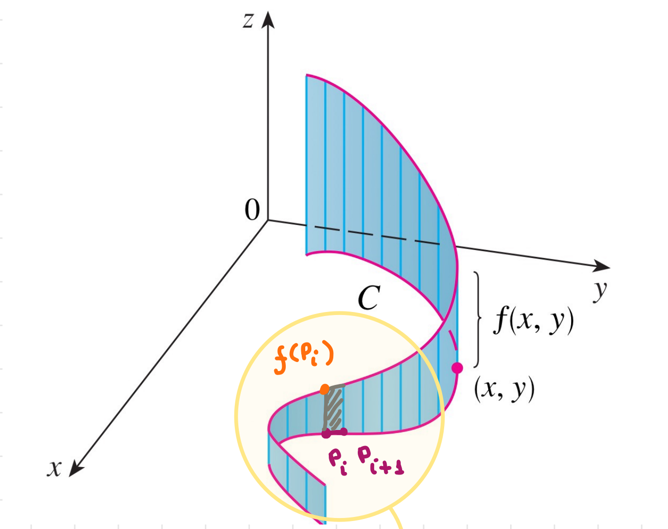
Para isso

- Subdivida a curva C:



- denotamos

$$\Delta s_i = \underbrace{\overset{\frown}{P_i P_{i+1}}}_{\text{comprimento de arco } t_i \leq t \leq t_{i+1}}$$



- $\underbrace{A_i = f(P_i) \cdot \Delta s_i}_{\text{área}}$

Definimos:

definição 1

A integral de linha de f sobre C é definida e denotada por:

$$\underbrace{\int_C f(x,y)\,ds}_{\text{notação}} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta s_i \quad (1)$$

A integral existe quando o limite existe e a integral de linha calcula a área acima da curva e abaixo do gráfico de f restrita a curva

Adiante vamos dar outra aplicação da integral de linha.

Teorema 1

Se $z = f(x,y)$ é uma função contínua então o limite (1) existe e a integral é calculada pela fórmula

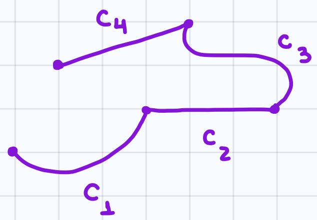
$$\boxed{\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t)) \cdot \|x'(t)\|\,dt}$$

onde $C : x(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ é a parametrização da curva e

$$\|x'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Observação

Se $C = C_1 \cup C_2 \dots \cup C_n$

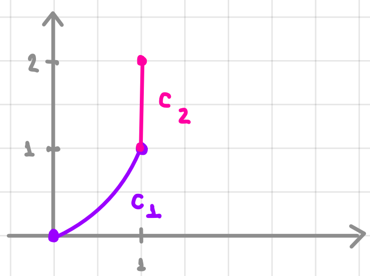


então

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds + \int_{C_2} f(x,y)ds + \dots + \int_{C_n} f(x,y)ds$$

Exemplo Calcule a integral de linha $\int_C 2x\,ds$, onde C é formada pelo arco de parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ seguido da reta vertical de $(1,1)$ a $(1,2)$

Solução



$$\int_C 2x\,ds = \int_{C_1} 2x\,ds + \int_{C_2} 2x\,ds$$

- Parametrizar as curvas

$C_1 : y = x^2 \rightarrow x_1(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$

substituindo

$$\|x_1'(t)\| = \sqrt{1 + (2t)^2} = \sqrt{4t^2+1}$$

$$\int_{C_1} 2x\,ds = \int_0^1 2 \cdot t \cdot \underbrace{\sqrt{4t^2+1}}_{u}\,dt = \int_1^5 2\cancel{t}\sqrt{u}\,\frac{1}{8\cancel{t}}\,du$$

$du = 8t\,dt$ $\quad t = 0 \rightarrow u = 1$, $\quad t = 1 \rightarrow u = 5$

$$= \int_1^4 \frac{1}{4}\sqrt{u}\,du = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{u^3}\Big|_1^5$$

$$= \frac{1}{6}\left(5\sqrt{6} - 1\right)$$

C_2 : segmento de reta $(1,1)$ a $(1,2)$ $\quad x_2(t) = (1, t)$ $\quad 1 \leq t \leq 2$

$$\|x_2'(t)\| = \sqrt{0 + 1} = 1$$

$$\int_{C_2} 2x\,ds = \int_1^2 2 \cdot 1 \cdot 1\,dt = 2$$

portanto

$$\boxed{\int_C 2x\,ds = \frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 1) + 2}$$

Outra aplicação

Considere

- um fio de arame no formato da curva C.
- $\rho(x,y)$ representa densidade linear em um ponto (x,y) do fio.

Então

$$\boxed{m = \int_C \rho(x,y)\,ds} \quad \text{massa total do fio}$$

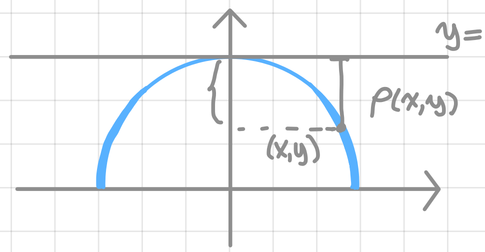
$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{m}\int_C x\,\rho(x,y)\,ds \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\,\rho(x,y)\,ds}$$

centro de massa do fio

Exemplo

Um arame com formato de um semi-círculo $x^2+y^2=1$, $y\geq 0$ é mais grosso perto da base que no topo. Ache o centro de massa desse arame se a função densidade linear é proporcional à sua distância a reta $y=1$

Solução



- função densidade linear

↳ constante de proporção

$$\rho(x,y) = k\,(\underline{1} - y)$$

- parametrização de C:

$$r(t) = (\cos t, \sin t) \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

✓ semi círculo

$$\|r'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

Note que $r(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ é uma outra parametrização mais difícil de trabalhar

$$m = \int_C \rho(x,y)\,ds = \int_0^\pi \underbrace{k(1-\sin t)}_{\rho(r(t))}\cdot 1\,dt$$

$$= k(t+\cos t)\Big|_0^\pi = k(\pi-2)$$

$$\bar{x} = \int_C x\cdot\rho(x,y)\,ds = \frac{1}{m}\int_0^\pi \cos t\cdot k(1-\sin t)\,dt$$

$$\frac{k}{m}\int_0^\pi (\cos t - \underbrace{\cos t \sin t}_{\frac{1}{2}\sin 2t})\,dt$$

$$= \frac{k}{m}\left(\sin t - \frac{1}{4}\cos 2t\right)\Big|_0^\pi = 0$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\,\rho(x,y)\,ds = \frac{1}{m}\int_0^\pi \sin t\,k(1-\sin t)\cdot 1\,dt$$

$$= \frac{k}{m}\int_0^\pi (\sin t - \underbrace{\sin^2 t}_{\frac{1}{2}(1-\cos 2t)})\,dt = \frac{k}{m}\left(-\cos t - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}(\pi-2)}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

B: Integrais de linha de campos de vetores (integrais do tipo trabalho)

Recorde:

Trabalho (energia) é, força vezes distância, $W = F.d$

- Se $f(x)$ é uma força variável que move uma partícula de um ponto a a um ponto b no eixo x

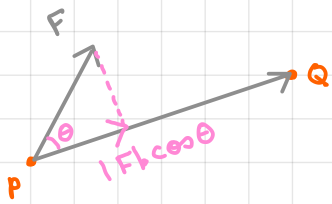
$$W = \int_a^b f(x)\,dx \rightarrow \text{Cálculo I}$$

- No espaço, se F é uma força constante que move uma partícula de um ponto P à um ponto Q

$$W = F \cdot \overrightarrow{PQ} = |F||\overrightarrow{PQ}|.\cos\theta$$

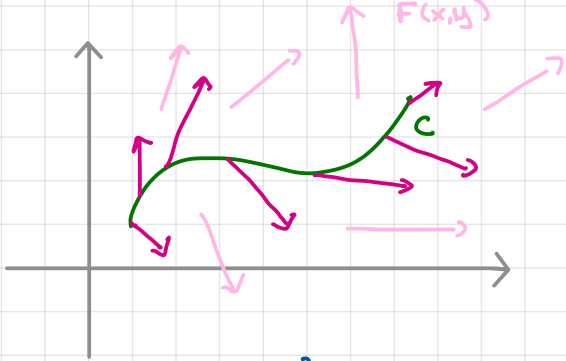
↳ produto escalar

↙ Cálculo II



Objetivo

Calcular o trabalho realizado por um campo de forças para deslocar uma partícula ao longo de uma curva C.

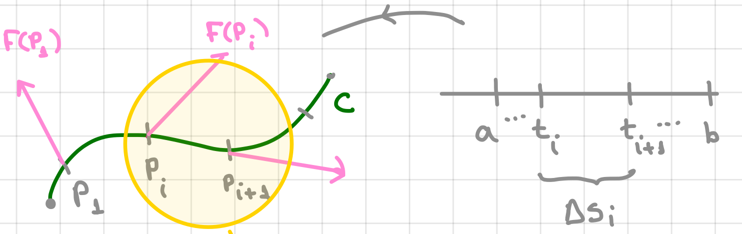


↳ Em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

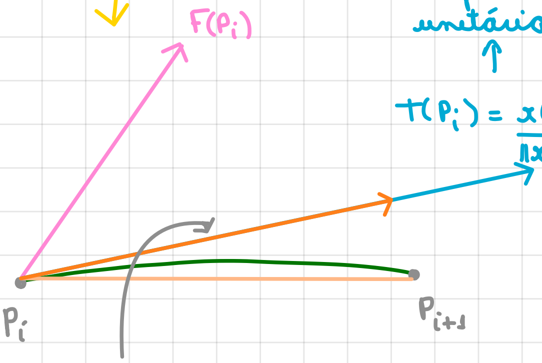
Para isso, considere

- $C: \; r(t) = (x(t), y(t)) \qquad a \leq t \leq b$
  parametrização da curva
- $F(x,y)$ um campo de forças (vetores)

Subdivida a curva C:



Em cada subintervalo



$$T(P_i) = \frac{r'(t_i)}{\|r'(t_i)\|}$$

$$\boxed{\overline{P_iP_{i+1}} \approx T(P_i) \cdot \Delta s_i}$$

$$W_i = \underbrace{F(P_i)}_{\text{força}} \overset{\text{produto escalar}}{\cdot} \underbrace{T(P_i)\,\Delta s_i}_{\text{deslocamento}}$$

↳ trabalho em cada subintervalo

$$W = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i) \cdot T(x_i, y_i)\, \Delta s$$

↓
trabalho realizado

onde $P_i =: (x_i, y_i)$

Note que $\overbrace{F(x,y) \cdot T(x,y)}^{f(x,y)}$ é uma função escalar e observando a definição de integral de linha (definição 1)

$$W = \int_C F \cdot T \, ds \qquad \text{(pelo Teorema 1)}$$

$$= \int_a^b F(r(t)) \cdot \frac{r'(t)}{\cancel{\|r'(t)\|}} \cdot \cancel{\|r'(t)\|}\, dt$$

como essa integral muito especial definimos (e usamos outra notação)

Definição 2

Seja F um campo vetorial contínuo sobre uma curva $C: r(t)$, $a \leq t \leq b$. A integral de linha de F ao longo de C (ou integral do tipo trabalho) é dada por

$$\int_C F \cdot dr = \int_C F \cdot T \, ds = \int_a^b \underset{\text{produto escalar}}{F(r(t)) \cdot r'(t)}\, dt$$

Observações

- A integral independe da parametrização de C (respeitando o sentido

- $$\int_{-C} F.dr = -\int_{C} F.dr$$

  ↳ curva percorrida ao contrário

- $$\int_{C_1 \cup C_2} F.dr = \int_{C_1} F.dr + \int_{C_2} F.dr$$

- Se F é um campo de velocidades $\int_C F.dr$ calcula o escoamento de um fluido ao longo de C.

Exemplo

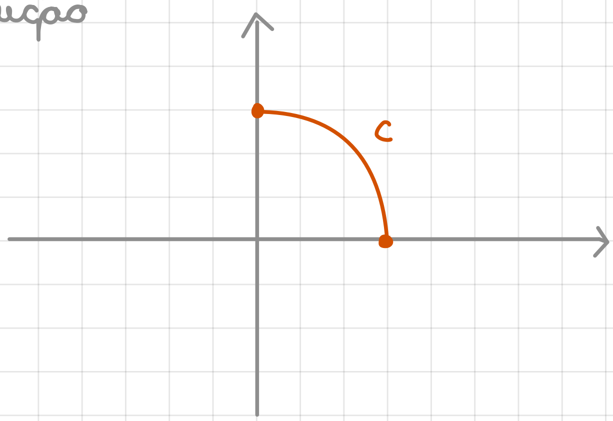
Calcule o Trabalho realizado pelo campo de forças

$$F(x,y) = x^2 i - xy j$$

ao mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo.

$$x(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$
$$0 \leq t \leq \pi/4$$

Solução



$$W = \int_C F.dr = \int_0^{\pi/2} F(x(t)) \cdot x'(t).dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t\, i - \cos t \operatorname{sen} t\, j).(-\operatorname{sen} t\, i + \cos t\, j)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t \operatorname{sen} t - \cos^2 t \operatorname{sen} t) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} -2\cos^2 t.\operatorname{sen} t\,.dt = \frac{2\cos^3 t}{3} \Big|_0^{\pi/2} = \underbrace{-2/3}_{\text{Forças contrário ao movimento}}$$

Vamos apresentar outros resultados para resolver integrais de linha de campos

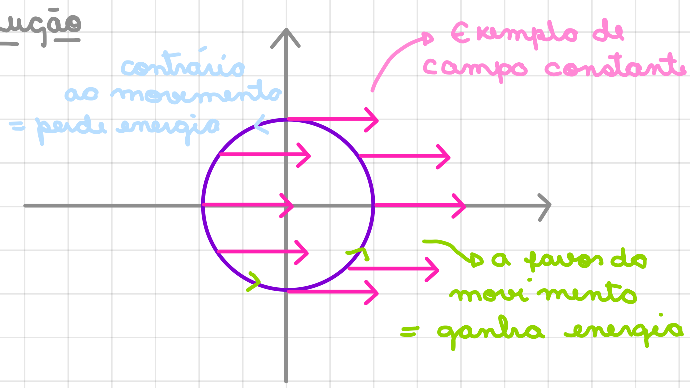
- Teorema fundamental
- Teorema de Green (plano)
- Teorema de Stokes (espaço)

Não tente resolver usando a definição

Exemplo:

Qual o Trabalho realizado por um campo de vetores constante sobre uma partícula que dá uma volta completa pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

Solução



- Intuitivamente o trabalho realizado é nulo

- Fazer a conta

$F(x,y) = \vec{v} = a\,i + b\,j$ campo constante

$C: x(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi$

$x'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} (a,b) \cdot (-\sin t, \cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-a \sin t + b\cos t)\,dt$$

$$= a\cos t \Big|_0^{2\pi} + b \sin t \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Outra Notação para integral de linha

- Escrevendo o campo de vetores

$F(x,y) = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j + R(x,y)\,k$

- $C: x(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$x'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$
$a \le t \le b$

$$\int_C F \cdot dr = \int_a^b F(x(t)) \cdot x'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \Big[P(x(t),y(t),z(t))\,i + Q(x(t),y(t),z(t))\,j + R(x(t),y(t),z(t))\,k\Big] \cdot (x'(t), y'(t), z'(t))\,dt$$

$$= \int_a^b (P x' + Q y' + R z')\,dt$$

$\dfrac{dx}{dt} = x' \rightsquigarrow dx = x'dt$

$dy = y'dt$

$dz = z'dt$

Então denotamos

$$\boxed{\int_C F \cdot dr = \underbrace{\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz}_{\text{outra notação para integral de linha}}}$$

Exemplo

Calcule a integral de linha

$$\int_C -y\,dx + z\,dy + 2x\,dz$$

onde C é a hélice $x(t) = \cos t\, i + \sin t\, j + t\,k$
$0 \le t \le 2\pi$

Solução

- $x'(t) = (\underbrace{-\sin t}_{dx}, \underbrace{\cos t}_{dy}, \underbrace{1}_{dz})$

componentes do campo

$$\int_C -y\,dx + z\,dy + 2x\,dz =$$

$x'(t)$

notação já faz o produto escalar basta fazer $F(x(t))$

$$= \int_0^{2\pi} \Big[-\sin t \cdot (-\sin t) + t\cos t + 2\cos t \cdot 1\Big]dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\underbrace{\sin^2 t}_{= \frac{1-\cos 2t}{2}} + \underbrace{t\cos t}_{\text{partes}} + 2\cos t)\,dt = \pi$$

FAÇA!