

LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

1. Motivação e necessidade

- 1) Grande parte das teorias de projeto de sistemas de controle foram desenvolvidas para sistemas lineares \Rightarrow porém praticamente todos os sistemas reais são não-lineares.
- 2) O que fazer?
Pode-se obter um modelo linear para o sistema não-linear.
 \Rightarrow A questão se torna: qual a validade do modelo linear do sistema não-linear?
- 3) Técnicas de projeto de controladores para sistemas não-lineares são:
 - Complicadas e complexas;
 - Somente garantem estabilidade \Rightarrow não garantem desempenho;
 - Na maioria dos casos não justifica a complexidade \Rightarrow controle linear em geral funciona bem mesmo para sistemas não-lineares;
 - Quando controle linear não funciona adequadamente tem-se as alternativas de \Rightarrow usar programação de ganhos ou controle adaptativo.

2. Sistema dinâmico não-linear

Dado um sistema não-linear de ordem n descrito por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \text{ - vetor de funções da dinâmica dos estados;} \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \text{ - vetor de equações das saídas.} \quad (2)$$

onde:

$\mathbf{x}(t)$ - vetor de estados, $\in R^n$ (dimensão $n \times 1$);

$\mathbf{u}(t)$ - vetor de entrada, $\in R^m$ (dimensão $m \times 1$);

$\mathbf{y}(t)$ - vetor de saídas, $\in R^p$ (dimensão $p \times 1$);

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ - vetor de funções não-lineares que descreve a dinâmica do sistema, $\in R^n$ (dimensão $n \times 1$);

$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ - vetor de funções não-lineares que descreve a saída do sistema, $\in R^p$ (dimensão $p \times 1$).

O vetor de funções da dinâmica dos estados representado pela eq. (1) é dado de forma mais detalhado como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ \dot{x}_2(t) = f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \end{cases} \quad (3)$$

O vetor de funções da saída representado pela eq. (2) é dado de forma mais detalhado como:

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ y_2(t) = g_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ \vdots \\ y_p(t) = g_p(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \end{cases} \quad (4)$$

Exemplo: Sistema massa-mola não linear:

Equação diferencial:

$$m\ddot{x}(t) = -k_1x(t) - k_2x^3(t) + F(t)$$

\Rightarrow modelo de mola usualmente utilizado para suspensão de automóveis.

Escrevendo o sistema na forma de espaço de estados não-linear fica:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) = f_1(x(t), v(t), F(t)) \\ \dot{v}(t) = -k_1x(t)/m - k_2x^3(t)/m + F(t)/m = f_2(x(t), v(t), F(t)) \end{cases}$$

3. Condição de linearização

- 1) A linearização de um sistema dinâmico não-linear é feita em torno de uma condição de operação \Rightarrow denominada **condição de linearização**.
- 2) O sistema linear é válido para operação em “torno” da condição de linearização.
Quanto em torno?
Questão em aberto \Rightarrow depende do sistema!

Condição de linearização:

- Definida por:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0(t) - \text{vetor de estado na condi\c{c}\~ao de lineariza\c{c}\~ao, pode ser vari\~avel no tempo;} \\ \mathbf{u}_0(t) - \text{vetor de entrada na condi\c{c}\~ao de lineariza\c{c}\~ao, pode ser vari\~avel no tempo;} \\ \mathbf{y}_0(t) - \text{vetor de sa\c{d}a na condi\c{c}\~ao de lineariza\c{c}\~ao, pode ser vari\~avel no tempo.} \end{cases}$$

C\~alculo da condi\c{c}\~ao de lineariza\c{c}\~ao:

- Uma possibilidade \~e a condi\c{c}\~ao de lineariza\c{c}\~ao ser um ponto de equil\c{b}rio do sistema, ou seja:

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$\mathbf{y}_0(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) \quad (6)$$

- Dessas express\~oes tem-se $n + p$ equa\c{c}\~oes alg\~eblicas n\~ao-lineares cuja solu\c{c}\~ao fornece $\mathbf{x}_0(t)$, $\mathbf{u}_0(t)$ e/ou $\mathbf{y}_0(t)$.
 - Nota-se que em geral o n\~umero de sa\c{d}as de um sistema MIMO \~e igual ao n\~umero de entradas ($m = p$).
 - Conhecendo-se, por exemplo, as sa\c{d}as do sistema na condi\c{c}\~ao de lineariza\c{c}\~ao \Rightarrow pode-se a partir das eq. (5) e (6) obter o vetor de estados e o vetor de entradas na condi\c{c}\~ao de lineariza\c{c}\~ao.
- Se a condi\c{c}\~ao de lineariza\c{c}\~ao n\~ao for um ponto de equil\c{b}rio do sistema, tem-se no lugar da eq. (5) o seguinte:

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) \quad (7)$$

- A equa\c{c}\~ao da sa\c{d}a (eq. 6) n\~ao se altera.
- Nesse caso a condi\c{c}\~ao de lineariza\c{c}\~ao tem que satisfazer a equa\c{c}\~ao da din\~amica do sistema \Rightarrow pode ser dif\c{i}cil de calcular para alguns casos.
- Em geral a eq. (7) somente serve para calcular as derivadas temporais dos estados, que nem s\~ao necess\~arias.
- Dependendo do problema conhecendo-se, por exemplo, as sa\c{d}as e alguns estados do sistema na condi\c{c}\~ao de lineariza\c{c}\~ao \Rightarrow tem-se $n + p$ equa\c{c}\~oes n\~ao-lineares cuja solu\c{c}\~ao deve fornecer os vetores $\mathbf{x}_0(t)$, $\mathbf{u}_0(t)$, $\mathbf{y}_0(t)$ e $\dot{\mathbf{x}}_0(t)$.

➤ **Resumo:**

- A condi\c{c}\~ao de lineariza\c{c}\~ao \~e definida para qualquer caso genericamente por:

$\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \mathbf{y}_0(t)$

(8)

- A condi\c{c}\~ao de lineariza\c{c}\~ao deve sempre satisfazer as equa\c{c}\~oes de estado independente se for de regime estacion\~ario ou n\~ao, ou seja:

$$\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) \quad (9)$$

4. Método de linearização da dinâmica

- Define-se pequenos desvios em torno da condição de linearização $\Rightarrow \delta \mathbf{x}(t)$, $\delta \mathbf{u}(t)$ e $\delta \mathbf{y}(t)$:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \delta \mathbf{x}(t); \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(t) + \delta \mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t) + \delta \mathbf{y}(t). \end{cases} \quad (10)$$

- Dada a condição de linearização (eq. 8 e 9), expandindo o vetor de funções $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ em torno de $\mathbf{x}_0(t)$ e $\mathbf{u}_0(t)$ usando Série de Taylor \Rightarrow cada equação da dinâmica do sistema:

$\dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, para $i=1 \dots n$, fica:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) &+ \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial x_1} \right) \delta x_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial x_n} \right) \delta x_n(t) + \\ &+ \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial u_1} \right) \delta u_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial u_m} \right) \delta u_m(t) + T.O.S. \end{aligned} \quad (11)$$

onde *T.S.O.* significa termos de ordem superior e o subscrito.

Abrindo a derivada do lado esquerdo da eq. (11) e desprezando os *T.O.S.* tem-se:

$$\begin{aligned} \cancel{\dot{x}_i(t)} + \delta \dot{x}_i(t) = f_i(\cancel{\mathbf{x}_0(t)}, \cancel{\mathbf{u}_0(t)}) &+ \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial x_1} \right) \delta x_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial x_n} \right) \delta x_n(t) + \\ &+ \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial u_1} \right) \delta u_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial u_m} \right) \delta u_m(t) + T.O.S. \end{aligned} \quad (12)$$

\Rightarrow os *T.S.O.* são de fato desprezíveis desde que $\delta \mathbf{x}(t)$ e $\delta \mathbf{u}(t)$ sejam “pequenos”.

Como a condição de linearização deve obedecer a equação dinâmica do sistema (eq. 9) \Rightarrow o 1º termo do lado esquerdo da eq. (12) cancela o 1º termo do lado direito da equação (ver eq. 9). Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_i(t) = \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial x_1} \right) \delta x_1(t) &+ \dots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial x_n} \right) \delta x_n(t) + \\ &+ \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial u_1} \right) \delta u_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial u_m} \right) \delta u_m(t) \end{aligned} \quad (13)$$

Para todas as n equações de estado linearizadas tem-se na forma matricial:

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)_0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_m} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_m} \right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_m} \right)_0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}(t) \quad (14)$$

onde os termos $(\partial f_i / \partial x_j)_0$ e $(\partial f_i / \partial u_k)_0$ representam uma notação mais compacta para $(\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) / \partial x_j)_0$ e $(\partial f_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) / \partial u_k)_0$ respectivamente.

Mais compactamente,

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \delta \mathbf{u}(t). \quad (15)$$

onde $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ são matrizes dadas por:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)_0 \end{bmatrix}_{(n \times n)} \quad (16)$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_m} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_m} \right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_m} \right)_0 \end{bmatrix}_{(n \times m)} \quad (17)$$

- O mesmo processo é repetido para as p equações das saídas do sistema (eq. 4) \Rightarrow expandindo cada equação de saída de $\mathbf{x}_0(t)$ e $\mathbf{u}_0(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 y_i(t) + \delta y_i(t) &= g_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) + \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial x_1} \right) \delta x_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial x_n} \right) \delta x_n(t) + \\
 &\quad + \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial u_1} \right) \delta u_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial u_m} \right) \delta u_m(t) + T.O.S.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Como a condição de linearização deve obedecer a equação das saídas do sistema (eq. 4) \Rightarrow o 1º termo do lado esquerdo da eq. (18) cancela o 1º termo do lado direito da equação.

Desprezando os *T.O.S.*:

$$\begin{aligned}
 \delta y_i(t) &= \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial x_1} \right) \delta x_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial x_n} \right) \delta x_n(t) + \\
 &\quad + \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial u_1} \right) \delta u_1(t) + \dots + \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial u_m} \right) \delta u_m(t)
 \end{aligned} \tag{19}$$

Para todas as p equações de saídas do sistema, tem-se:

$$\delta \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_n} \right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_n} \right)_0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_m} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_m} \right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_m} \right)_0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}(t) \tag{20}$$

onde os termos $(\partial g_i / \partial x_j)_0$ e $(\partial g_i / \partial u_k)_0$ representam uma notação mais compacta para $(\partial g_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) / \partial x_j)_0$ e $(\partial g_i(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) / \partial u_k)_0$ respectivamente.

Mais compactamente,

$$\delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \delta \mathbf{u}(t). \tag{21}$$

onde $\mathbf{C}(t)$ e $\mathbf{D}(t)$ são matrizes dadas por:

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_n} \right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial g_p}{\partial x_n} \right)_0 \end{bmatrix}_{(pxn)} \quad (22)$$

$$\mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_m} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_m} \right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial g_p}{\partial u_m} \right)_0 \end{bmatrix}_{(pxm)} \quad (23)$$

- Em resumo as equações dinâmicas linearizadas de um sistema são as seguintes:

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \delta \mathbf{u}(t) \\ \delta \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \delta \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (24)$$

Nesse caso, como as matrizes do sistema, **A**, **B**, **C** e **D**, variam no tempo, o sistema é do tipo **Linear Variante no Tempo (LVT)**.

- Se a condição de linearização for uma condição de operação em regime estacionário, ou seja, $\dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{0}$, então as matrizes do sistema, **A**, **B**, **C** e **D** são constantes e o sistema é do tipo **Linear Invariante no Tempo (LIT)**. Assim a eq. (24) fica:

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \delta \mathbf{u}(t) \\ \delta \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \delta \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (25)$$

- Usualmente nas eq. (24) e (25) eliminam-se os termos de variação, “ δ ” \Rightarrow mas não se pode esquecer que para uma sistema com dinâmica linearizada os estados, as entradas e as saídas representam as variações dessas grandezas em torno da condição de linearização.

5. Exemplos

Exemplo 1: Massa-mola não-linear:

- Modelo do sistema não-linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ -k_1 x(t)/m - k_2 x^3(t)/m + F(t)/m \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x, v, F) = v(t) \\ \dot{v}(t) = f_2(x, v, F) = \frac{1}{m} [-k_1 x(t) - k_2 x^3(t) + F(t)] \end{cases}$$

- Condição de linearização:

$$\text{Adotada uma condição de regime estacionário} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_0 = \dot{v}_0 = 0 \\ F_0 = 0 \end{cases}$$

Para a condição de linearização as equações dinâmicas resultam em:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = v_0 = 0 \\ \dot{v}_0 = -k_1 x_0 - k_2 x_0^3 = 0 \end{cases}$$

Que resulta na seguinte relação:

$$k_1 x_0 + k_2 x_0^3 = 0 \Rightarrow x_0 = \pm \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$$

\Rightarrow Nota-se que x_0 somente existe se k_1 e k_2 tiverem sinais opostos.

- Linearização da dinâmica do sistema:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)_0 = 0 \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial v} \right)_0 = 1 \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial F} \right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right)_0 = \frac{1}{m} [-k_1 - 3k_2 x_0^2] \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial v} \right)_0 = 0 \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial F} \right)_0 = \frac{1}{m}$$

Portanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-k_1 - 3k_2 x_0^2)/m & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}(t) \\ \delta \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-k_1 - 3k_2 x_0^2)/m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \delta F(t)$$

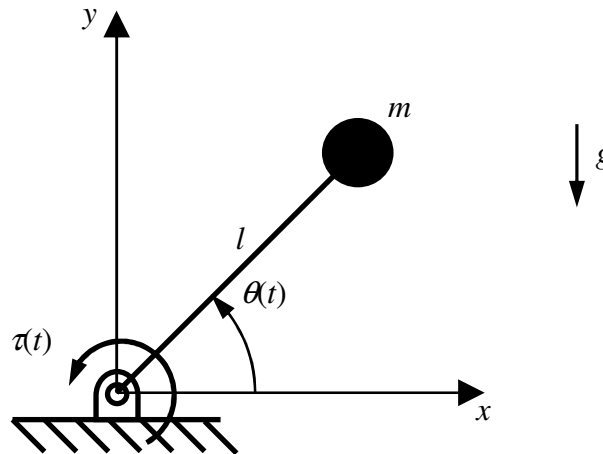
Se por exemplo: $\begin{cases} k_1 = 1\text{N/m} \\ k_2 = -0,5\text{N/m} \\ m = 2\text{kg} \end{cases} \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{1}{1/2}} = \sqrt{2} \text{ m} , \text{ então:}$

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}(t) \\ \delta \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} \delta F(t)$$

Exemplo 2: Pêndulo invertido:

- Seja um pêndulo como mostra a figura a seguir. A massa do pêndulo que é concentrada em sua ponta é m e o seu comprimento é l . Um torque $\tau(t)$ variável é aplicado no pêndulo na posição de sua articulação.
- Equação dinâmica do pêndulo:

$$ml^2 \ddot{\theta}(t) + mgl \cos(\theta(t)) = \tau(t)$$



Definindo a velocidade angular do pêndulo $\Rightarrow \omega(t) = \dot{\theta}(t)$.

O sistema na forma do espaço dos estados fica:

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) = -\frac{g}{l} \cos(\theta(t)) + \frac{\tau(t)}{ml^2} \end{cases}$$

- Condição de linearização:

Na condição de linearização desejada o pêndulo deve estar inclinado de 45° em relação à horizontal \Rightarrow existem duas condições de linearização possíveis:

- a) A condição linearização é um ponto de equilíbrio, ou seja, $\ddot{\theta}_0 = \dot{\theta}_0 = 0 \Rightarrow$ nesse caso tem-se:

$$\begin{cases} \omega_0 = 0 \\ \tau_0 = mgl \cos(\theta_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} mgl \end{cases}$$

- b) A condição de linearização não é um ponto de equilíbrio, ou seja, $\ddot{\theta}_0 \neq 0 \Rightarrow$ nesse caso tem-se:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_0 = \omega_0 \\ \dot{\omega}_0 = -\frac{g}{l} \cos(\theta_0) + \frac{1}{ml^2} \tau_0 \end{cases}$$

Para definir completamente a condição de linearização deve-se adotar ω_0 e $\dot{\omega}_0$, ou ω_0 e τ_0 :

$$\Rightarrow \text{Adotando } \omega_0 = \tau_0 = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_0 = -\frac{g}{l} \cos(\theta_0) = -\frac{\sqrt{2}g}{2l}.$$

\Rightarrow Observa-se que nessa condição de linearização o pêndulo está parado mas iniciando o movimento de queda devido à aceleração da gravidade.

➤ Dinâmica Linearizada:

Utilizando a condição de linearização (b) para linearizar o sistema, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta} \right)_0 &= 0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega} \right)_0 &= 1 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial \tau} \right)_0 &= 0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta} \right)_0 &= \frac{g}{l} \sin(\theta_0) = \frac{\sqrt{2}g}{2l} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega} \right)_0 &= 0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial \tau} \right)_0 &= \frac{1}{ml^2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}g}{2l} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\theta}(t) \\ \delta \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}g}{2l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \theta(t) \\ \delta \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \delta \tau(t)$$

6. Método alternativo de linearização

Um método alternativo para linearizar a dinâmica de um sistema é assumir pequenas variações em torno da condição de linearização, como foi definido na eq. (10), repetida abaixo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \delta\mathbf{x}(t); \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(t) + \delta\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t) + \delta\mathbf{y}(t). \end{cases} \quad (10)$$

A derivada temporal dos estados são obtidas a partir da derivação da eq. (10), resultando em:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_0(t) + \delta\dot{\mathbf{x}}(t) \quad (26)$$

Observa-se que a derivada dos estados na condição de linearização não é necessariamente zero, pois a condição de linearização, como visto, não necessita ser uma condição estacionária.

Substituindo as eqs. (10) e (26) nas equações dinâmicas dos estados e nas equações de saída do sistema e desprezando termos de ordem superior obtém-se as equações linearizadas do sistema.

➤ **Por termos de ordem superior entende-se o seguinte:**

- Qualquer variação ao quadrado $\Rightarrow \delta x_i^2$ (seja de variável de estado, de saída ou de entrada);
- Qualquer produto de duas variações $\Rightarrow \delta x_i \delta x_j$ (seja de variável de estado, de saída ou de entrada).

Exemplo 3: Pêndulo invertido:

➤ Equação dinâmica do pêndulo na forma de espaço dos estados:

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) = -\frac{g}{l} \sin(\theta(t)) + \frac{\tau(t)}{ml^2} \end{cases}$$

➤ Condição de linearização (condição (b) do exemplo 2):

$$\Rightarrow \text{Adotando: } \theta_0 = 45^\circ, \omega_0 = \tau_0 = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_0 = -\frac{g}{l} \cos(\theta_0) = -\frac{\sqrt{2}g}{2l}.$$

➤ Dinâmica Linearizada:

Substituindo as eq. (10) e (26) nas equações dinâmicas do sistema tem-se:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_0(t) + \delta\dot{\theta}(t) = \omega_0(t) + \delta\omega(t) \\ \dot{\omega}_0(t) + \delta\dot{\omega}(t) = -\frac{g}{l} \cos(\theta_0(t) + \delta\theta(t)) + \frac{1}{ml^2} (\tau_0(t) + \delta\tau(t)) \end{cases}$$

Aplicando a relação trigonométrica do cosseno da soma de dois ângulos,

$$\cos(\theta_0 + \delta\theta(t)) = \cos(\theta_0(t))\cos(\delta\theta(t)) - \sin(\theta_0(t))\sin(\delta\theta(t))$$

porém como $\delta\theta$ é pequeno $\Rightarrow \begin{cases} \cos(\delta\theta) \approx 1 \\ \sin(\delta\theta) \approx \delta\theta \end{cases}$

que resulta em $\Rightarrow \cos(\theta_0 + \delta\theta(t)) = \cos(\theta_0(t)) - \delta\theta(t) \sin(\theta_0(t))$

Substituindo nas equações dinâmicas:

$$\begin{cases} \cancel{\dot{\theta}_0(t)} + \delta\dot{\theta}(t) = \cancel{\omega_0(t)} + \delta\omega(t) \\ \cancel{\dot{\omega}_0(t)} + \delta\dot{\omega}(t) = -\frac{g}{l} \cancel{\cos(\theta_0(t))} + \frac{g}{l} \delta\theta(t) \sin(\theta_0(t)) + \frac{1}{\cancel{ml^2}} \cancel{\tau_0(t)} + \frac{1}{ml^2} \delta\tau(t) \end{cases}$$

Nota-se que a condição de linearização obedece as equações dinâmicas, assim:

- Na 1ª expressão \Rightarrow o 1º termo do lado esquerdo cancela o 1º termo do lado direito;
- Na 2ª expressão \Rightarrow o 1º termo do lado esquerdo cancela o 1º e o 3º termos do lado direito.

Portanto,

$$\begin{cases} \delta\dot{\theta}(t) = \delta\omega(t) \\ \delta\dot{\omega}(t) = \frac{g}{l} \delta\theta(t) \sin(\theta_0(t)) + \frac{1}{ml^2} \delta\tau(t) \end{cases}$$

que usando a condição de linearização fica na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\theta}(t) \\ \delta\dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}g}{2l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta(t) \\ \delta\omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \delta\tau(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}g}{2l} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}$$

7. Exercício

- 1) Considere a Equação de Van der Pol que representa um oscilador com amortecimento não-linear.

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - \mu [1 - x(t)^2] \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = u(t),$$

onde $x(t)$ representa a coordenada de posição, μ é uma grandeza que representa a quantidade de amortecimento presente no sistema e $u(t)$ é o termo forçado ou a entrada do sistema.

Essa equação foi muito utilizada na engenharia elétrica/eletrônica para o estudo de válvulas e na dinâmica dos sistemas não-lineares.

Pede-se:

- Coloque o sistema na forma de espaço de estados não-linear.
- Defina uma condição de linearização de forma que seja uma condição de regime permanente. Você tem que escolher uma condição numérica. Utilize $\mu = 0,2$.
- Linearize o sistema utilizando um dos métodos vistos em aula.
- Calcule as matrizes do sistema linear utilizando os resultados dos itens (b) e (c).
- Defina uma função no Simulink para descrever a Equação de Van der Pol.
- Utilizando as ferramentas do Matlab verifique se a condição de linearização definida em (b) está correta.
- Utilizando as ferramentas do Matlab linearize o sistema em torno da condição de linearização calculada em (b) e (f) e verifique o resultado do item (d).
- Simule os sistemas não-linear e linear para uma condição inicial igual à condição de linearização e para um degrau na entrada de amplitude 1 e compare os resultados.
- Simule os sistemas não-linear e linear para uma condição inicial $x_0 = 0.1$ e $v_0 = 0$ e compare os resultados..

Principais comandos do Matlab a serem utilizados:

- **Simulink;**
- **trim;**
- **linmod.**

- 2) Considere o sistema composto por um pêndulo invertido sobre um carro, cujo modelo dinâmico é dado abaixo.

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ ml \cos(\theta(t))\dot{v}(t) + ml^2\dot{\omega}(t) - mgl \sin(\theta(t)) = 0 \\ (M + m)\dot{v}(t) + ml \cos(\theta(t))\dot{\omega}(t) - ml \sin(\theta(t))\omega(t)^2 = f(t) \end{cases}$$

onde θ é a posição angular do pêndulo, ω é a velocidade angular do pêndulo, v é a velocidade do carro, f é a força aplicada no carro, M é a massa do carro, m é a massa do pêndulo e l é o comprimento do pêndulo.

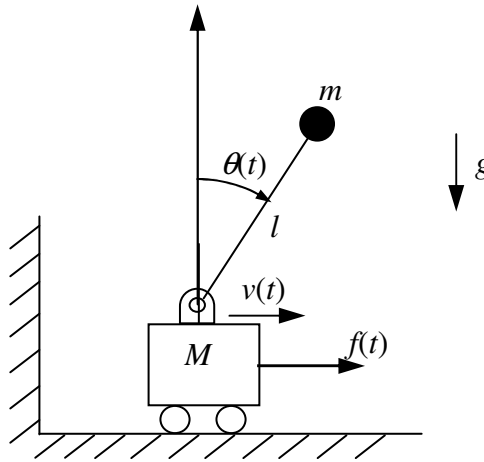


Figura. Esquema do pêndulo invertido sobre o carro.

Pede-se:

- Determine a condição de linearização onde o pêndulo permanece parado na posição vertical.
- Linearize a dinâmica do sistema.
- Calcule as matrizes do sistema linearizado.