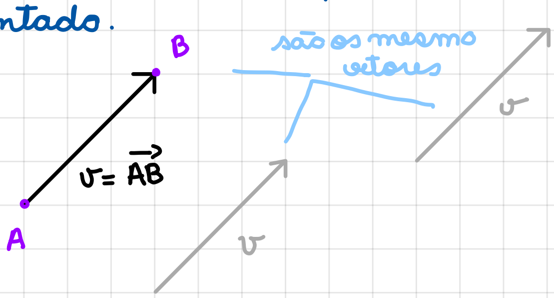
AULA 1   Calculo 3A   2020.2

Capítulo 16: Cálculo Vetorial

16.1 Campo de vetores

Recorde

Um vetor é um segmento de reta orientado.



um vetor possui:
- Tamanho
- direção
- sentido

e infinitos representantes

definição

Um campo de vetores é uma aplicação que associa um ponto (x,y) (ou (x,y,z)) a um vetor

$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ funções componentes

$$(x,y) \longmapsto F(x,y) = \underbrace{P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}}_{\text{vetor}}$$

Um esboço de um campo de vetores é uma forma de representar o campo e consiste em:

- desenhar o segmento orientado que representa o vetor $F(x,y)$ começando no ponto (x,y)
- como é impossível fazer para todos os pontos, fazemos para pontos representativos e tentamos observar alguma recorrência.

Exemplo Faça um esboço do campo de vetores $F(x,y) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$

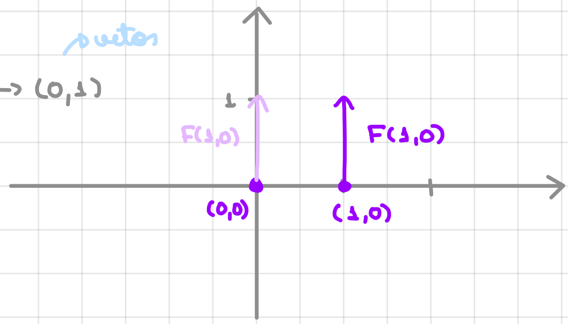
Solução

Tabela de pontos representativos

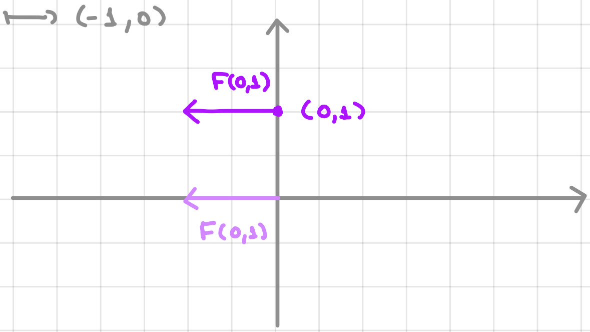
(x,y)	$F(x,y)$
$(0,0)$	$(0,0)$
$(1,0)$	$(0,1)$
$(0,1)$	$(-1,0)$
$(1,1)$	$(-1,0)$

Desenhar no plano o vetor $F(x,y)$ começando em (x,y) (separado)

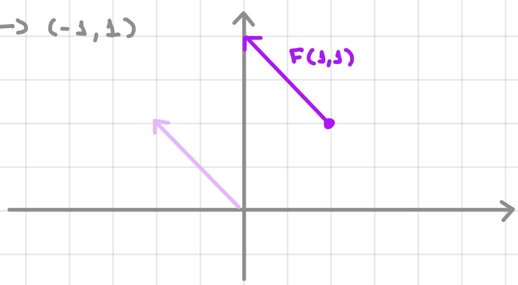
para
$(1,0) \longmapsto (0,1)$



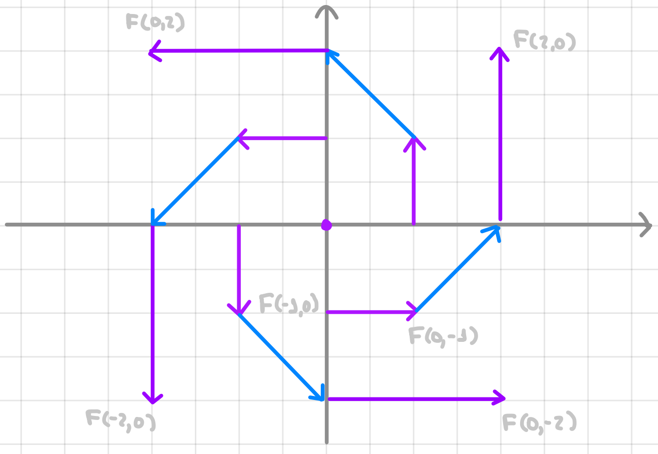
para
$(0,1) \longmapsto (-1,0)$



Para
$(1,1) \longmapsto (-1,1)$



juntando



Note que o vetor posição (x,y) é perpendicular a $F(x,y)$:

$$\langle (x,y), (-y,x) \rangle = -xy + xy = 0.$$

Exemplos de campos de vetores são:

- campo de velocidades:

  ↳ escoamento de um fluido
  em cada ponto (partícula)
  age um vetor velocidade

- campo de Forças

  em cada ponto age uma força

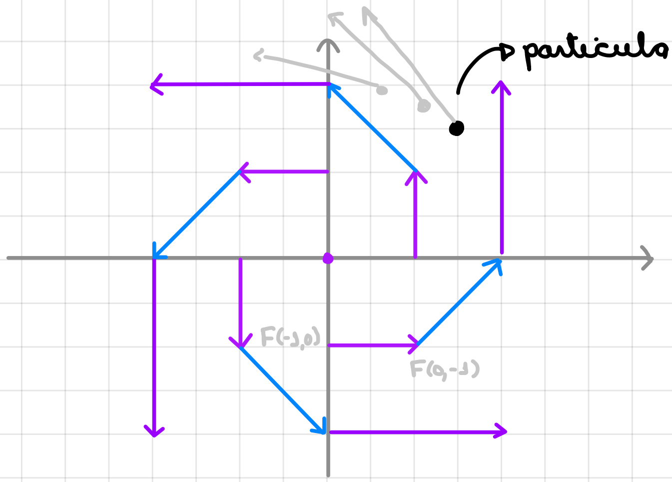
  - campo gravitacional
  - campo elétrico

<u>Exemplo</u> No exemplo anterior, se $F(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ é um campo de velocidades e uma partícula é solta nesse campo. Qual a trajetória da partícula?

Solução

- Recorde que o vetor velocidade é o vetor tangente a curva (que mais se parece com ela)

- intuitivamente pelo desenho



podemos dizer que vai fazer uma circular.

Algebricamente

seja $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$ uma curva

tal que em cada ponto da curva o vetor velocidade coincide com o campo F, isto é

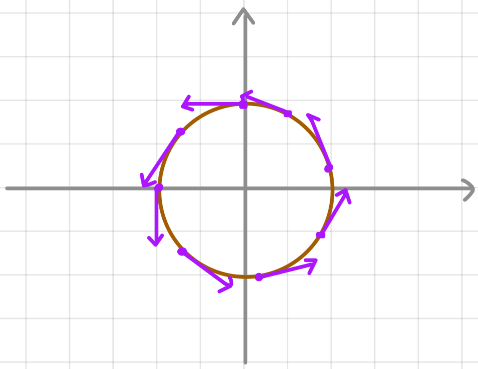
$$\vec{x}'(t) = (x'(t), y'(t)) = F(x(t))$$
$$= (y(t), x(t))$$

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

↳ Note que $\underbrace{\begin{matrix} x(t) = x\cos t \\ y(t) = x\,\mathrm{sen}\,t \end{matrix}}_{\text{equações paramétricas do círculo}}$

satisfaz $*$

- x depende da posição inicial da partícula



Exemplo: Represente o campo de vetores

$$F(x,y) = x\vec{j}$$

Solução

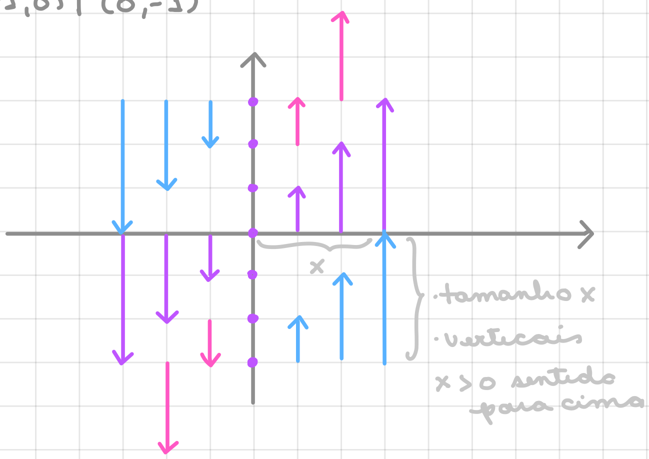
Tabela de pontos representativos

(x,y)	$(0,x)$
$(0,y)$	$(0,0)$
$(1,0)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(0,1)$
$(-1,0)$	$(0,-1)$

→ vetor verticais (direção)

→ o tamanho depende de x

→ o sentido depende do sinal de x



Novamente,

Se F é um campo de velocidades qual a trajetória traçada por uma partícula?

- intuitivamente: retas verticais
- algebricamente:

Seja $x(t) = (x(t), y(t))$ tal que
↳ curva

$$x'(t) = F(x(t))$$

$$(x'(t), y'(t)) = (0, x(t))$$

$\Rightarrow$ $x'(t) = 0$ → $x(t) = c$

$y'(t) = x(t)$ ↳ $\underbrace{y(t) = ct + k}$

Eq. paramétricas de retas verticais

Exemplo Represente o campo

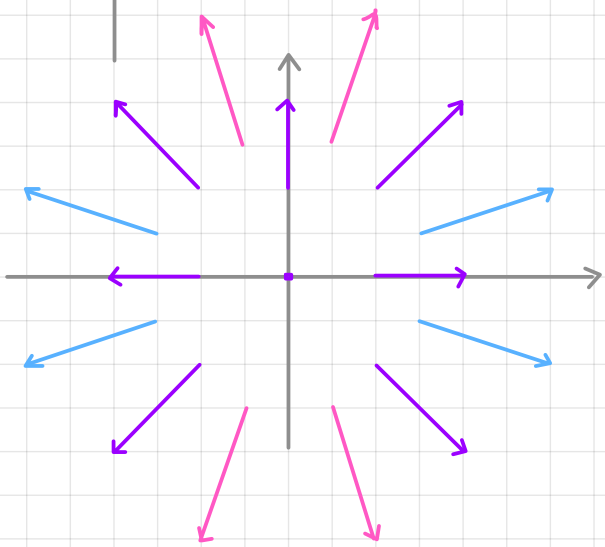
$$F(x,y) = xi + yj$$

Solução

Tabela de pontos:

(x,y)	$F(x,y)$
$(0,0)$	$(0,0)$
$(1,0)$	$(1,0)$
$(0,1)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$

→ mesmo vetor posição



Definição

Dada uma função escalar $f(x,y)$

$$\nabla f(x,y) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

é dito **campo gradiente** de f

Exemplo Determine o campo gradiente da função $f(x,y) = x^2y - y^3$.

Solução:

$$\nabla f(x,y) = \left(2xy, x^2 - 3y^2 \right)$$

$$= 2xy\,i + (x^2 - 3y^2)\,j$$