Calculo 2   2022.2

Aula 14

Aula passada: curvas paramétricas
Aula Hoje: + curvas, tangente

10.1 Curvas paramétricas

Exemplo (Hipérbole)

Dê uma parametrização de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (*)$$

Solução

$$\begin{cases} x = \cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = \operatorname{senh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

e $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$

Assim $\begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b \operatorname{senh} t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

para $(*)$

Exemplo Esboce a curva

$x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$ $\quad t \in \mathbb{R}$

Solução

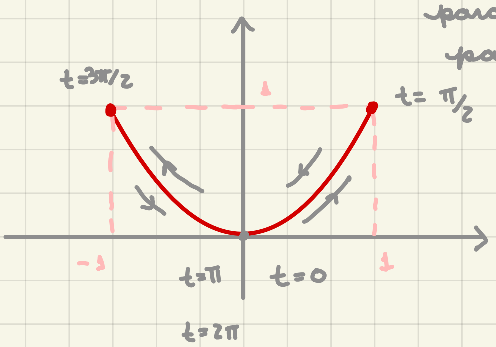
CUIDADO!!

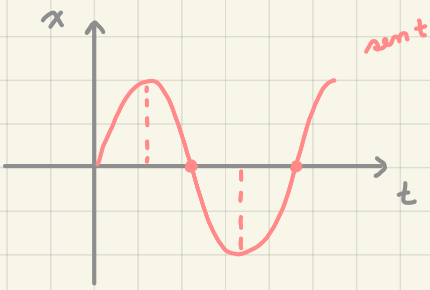
$y = x^2$ mas como $-1 \le \underset{\overset{\shortparallel}{x}}{\operatorname{sen} t} \le 1$

então

$0 \le y \le 1$

parabola para $-1 \le x \le 1$





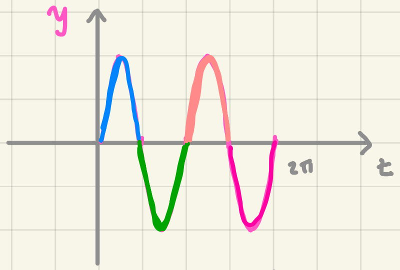
Exemplo Esboce a curva

$x(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t)$

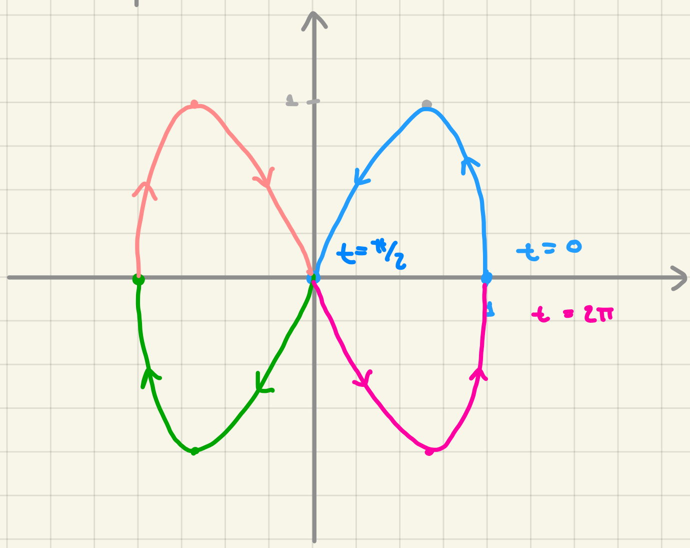
Solução: Não tem uma relação clara então usar os gráficos de

$x = \cos t$

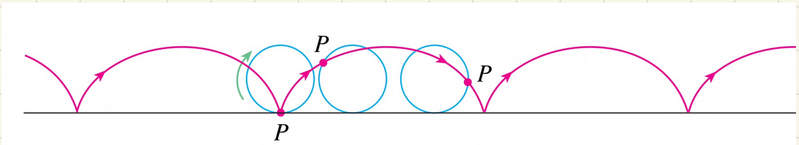
$y = \operatorname{sen} t$



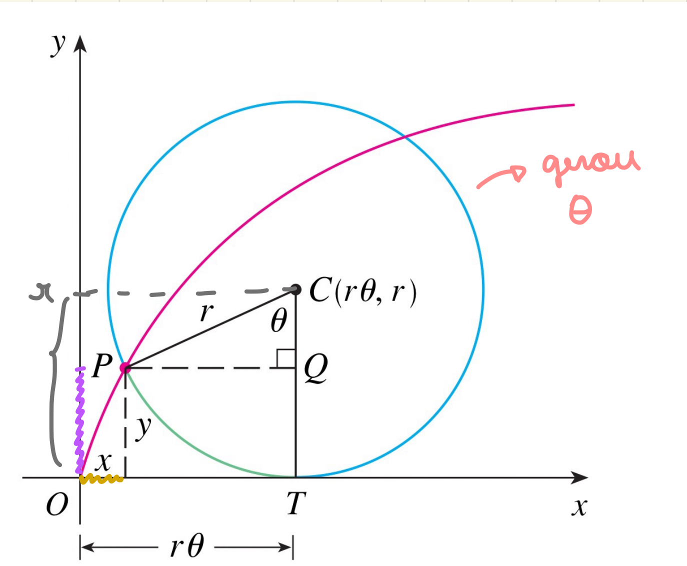
t	x	y
0	1	0
π/4	√2/2	1
π/2	0	0
3π/4	-√2/2	-1
π	-1	0

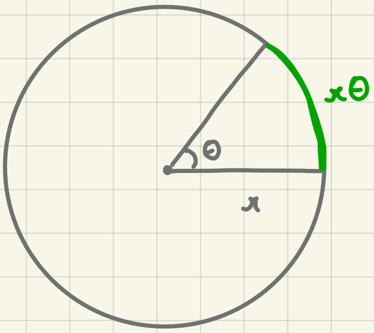


Exemplo Ciclóide: Curva traçada pelo ponto P no bordo de um círculo ao longo de uma reta.



Dê uma parametrização para a cicloide





$2\pi \longrightarrow 2\pi . r$

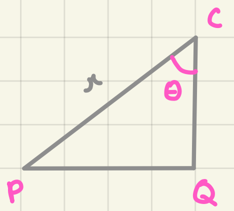
$\theta \longrightarrow x$

$x = \theta r$

- $|OT| = \theta r$
- $C = (r\theta, r)$ centro do círculo

$x = |OT| - |PQ| = r\theta - r \operatorname{sen}\theta = r(\theta - \operatorname{sen}\theta)$

$y = |TC| - |CQ| = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$

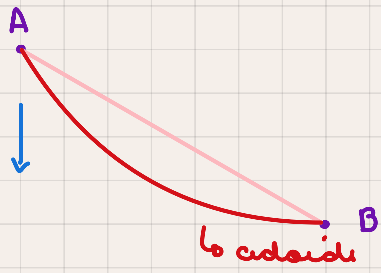


$|PQ| = r \operatorname{sen}\theta$

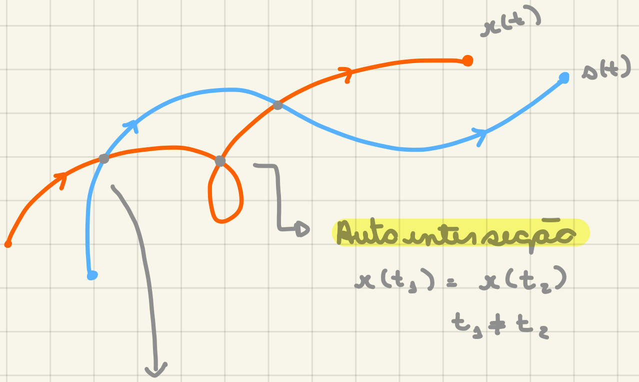
$|CQ| = r\cos\theta$

Note Curiosidade da cicloide

Problema: Curva que uma partícula irá deslizar em menor tempo sob influência da gravidade de um ponto A à B não diretamente abaixo: Cicloide



INTERSEÇÃO X COLISÃO



Auto interseção
$x(t_1) = x(t_2)$
$t_1 \neq t_2$

interseção
$x(t_1) = s(t_2)$

colisão
$x(t_1) = s(t_1)$
no mesmo instante as curvas passam no mesmo ponto

Exemplo: Duas partículas tem posições dada por

$c_1 : (3\operatorname{sen}t, 2\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$c_2 : (-3 + \cos t, 1 + \operatorname{sen}t)$ $t \in [0, 2\pi]$

(a) trace a trajetória de ambas. Quantos pontos de interseção existem?

(b) Algum destes é ponto de colisão?

Solução:

$c_1 :$ $x = 3\operatorname{sen}t$, $y = 2\cos t$ $\qquad \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

elipse $\quad$ Note $c_1(0) = (0, 2)$

$c_1(\pi/2) = (3, 0)$

c_2 : $x = -3 + \cos t$

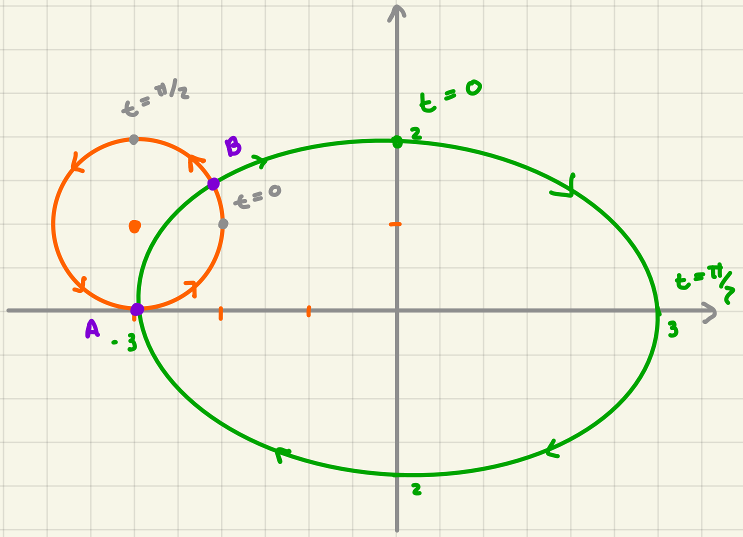
$y = 1 + \operatorname{sen} t$

$c_2(0) = (-2, 1)$

$c_2(\pi/2) = (-3, 2)$

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 1$$

círculo raio 1 centro $(-3, 1)$



tem dois pontos de intersecção das curvas

Note que $c_1(3\pi/2) = (-3, 0)$

$c_2(3\pi/2) = (-3, 0)$

Então A é ponto de colisão

Em B Note que

$c_1(t_1) = B$ para $0 < t_1 < \pi/2$

e $c_2(t_2) = B$ para $t_2 > \pi/2$

$\therefore$ não é ponto de colisão