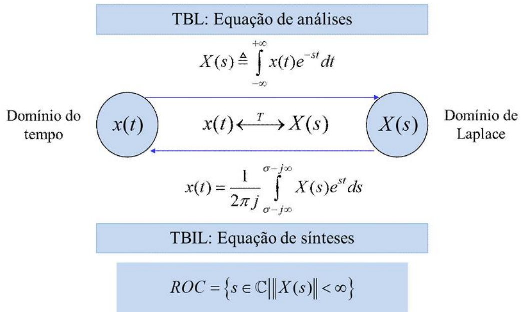
A Transformada de Laplace Bilateral (Parte I)

Professor
Jorge Leonid Aching Samatelo
jlasam001@gmail.com



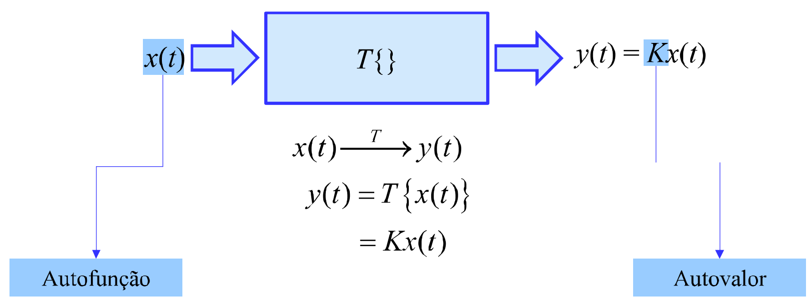
Índice

Introdução

Introdução

Autofunções de um sistema LTI

- Chama-se autofunção de um sistema, um sinal que aplicado como entrada, gera como saída o mesmo sinal de entrada multiplicado por um valor constante chamado autovalor.



Introdução

Autofunções de um sistema LTI

- Para sistemas LTI de tempo contínuo as exponenciais complexas são autofunções do sistema

$$x(t)=e^{st} \Rightarrow \boxed{h(t)} \Rightarrow y(t)=Ke^{st}$$

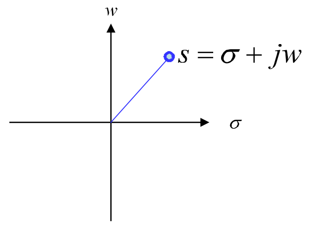
$s=\sigma+jw$

Valor complexo

$K=?$

$$x(t)\xrightarrow{T}y(t)$$

$$y(t)=x(t)*h(t)$$



Introdução

Autofunções de um sistema LTI

- Determinando o valor do autovalor, via o calculo da integral de convolução:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)*h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{st}e^{-s\tau}d\tau \\ &= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right)}_{\text{Autovalor}} e^{st} \end{aligned}$$

$x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$

$x(t)=e^{st}$

$e^{a+b}=e^{a}e^{b}$

Introdução

Autofunções de um sistema LTI

- Então o valor do autovalor é definido como a transformada de Laplace Bilateral da resposta ao impulso $h(t)$:

$$H(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$x(t)=e^{st} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)=H(s)e^{st}$$

Introdução

Definição

- A transformada de Laplace Bilateral (TLB) de um sinal $x(t)$: é definida como uma integral impropria.

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

- Para que exista a TLB $x(t)$ é necessário a convergência da integral.

$$\|X(s)\| < \infty$$

- O anterior implica que:
  - Não todos os sinais tem transformada de Laplace Bilateral.

Introdução

Definição

$$x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s)$$
$$X(s) = L\{x(t)\}$$

- De forma geral podemos definir a TLB como:
  - uma transformação linear $L\{\}$ de ida e volta, aplicada sobre um sinal continua, gerando uma expressão algébrica $X(s)$ no domínio complexo dependente da variável complexa s.
    - Normalmente o domínio complexo é denominado domínio de Laplace.

Introdução

Definição

$$x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s)$$
$$X(s) = L\{x(t)\}$$
$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

- A TLB é uma integral impropria, portanto, existe para aqueles valores de s para os quais a integral **converge**.

Introdução

Definição

$$x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s)$$
$$X(s) = L\{x(t)\}$$
$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$
$$ROC = \left\{ s \in \mathbb{C} \,\middle|\, \|X(s)\| < \infty \right\}$$

- A região de convergência **ROC** (***R****egion* ***O****f* ***C****onvergence*) de $X(s)$ é o conjunto de todos os valores de s para os quais $X(s)$ é **finita**.

Sempre que falamos de uma TLB devemos indicar também seu *ROC*.

ROC

ROC

Determinação do ROC

$$ROC = \{ s \in \mathbb{C} \mid \|X(s)\| < \infty \}$$

- ❑ *Importante*
  - ➢ para determinar o ROC da TBL de um sinal $x(t)$, devemos encontrar aquele domínio no plano s onde a integral converge.

ROC

Determinação do ROC

Exemplo

- ❑ Determine a TBL do sinal:
  - ➢ Degrau Unitário

$$x(t) = u(t)$$

- ❑ *Dica*
  - ➢ Lembrar que:
    - ❖ Definição da TBL

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

    - ❖ Degrau Unitário

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

    - ❖ Integral de uma exponencial

$$\int_{t_o}^{t_1} e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} \Big|_{t_o}^{t_1}$$

ROC

Determinação do ROC

Solução

- ❑ Solucionando a integral:

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$x(t) = u(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-st} dt$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$= \cancel{\int_{-\infty}^{0} (0) e^{-st} dt} + \int_{0}^{+\infty} (1) e^{-st} dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-st} dt$$

$$= \lim_{\tau \to \infty} \int_{0}^{\tau} e^{-st} dt$$

ROC

Determinação do ROC

Solução

- ❑ Solucionando a integral:

$$X(s) = \lim_{\tau \to \infty} \int_{0}^{\tau} e^{-st} dt$$

$$\int_{t_o}^{t_1} e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} \Big|_{t_o}^{t_1}$$

$$= \lim_{\tau \to \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0}^{\tau} \right)$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{\tau \to \infty} (e^{-s\tau} - e^{-s0})$$

$$= -\frac{1}{s} \lim_{\tau \to \infty} (e^{-s\tau} - 1)$$

$$= -\frac{1}{s} (0 - 1)$$

$$= \frac{1}{s}$$

$$\operatorname{Re}\{s\} > 0 \Rightarrow \lim_{\tau \to \infty} e^{-s\tau} = 0$$

$$\lim_{\tau \to \infty} e^{-s\tau} = \lim_{\tau \to \infty} e^{-(\sigma + jw)\tau}$$

$$= \lim_{\tau \to \infty} e^{-\sigma\tau} e^{-jw\tau}$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{\tau \to \infty} e^{-\sigma\tau} \right)}_{=0\ ,\ \sigma > 0} \underbrace{\left(\lim_{\tau \to \infty} e^{-jw\tau} \right)}_{=conts}$$

$$= 0\ ,\ \sigma > 0$$

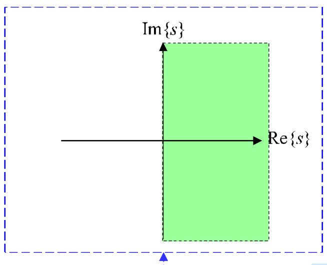
ROC

Determinação do ROC

Solução

- Então a solução da integral é:

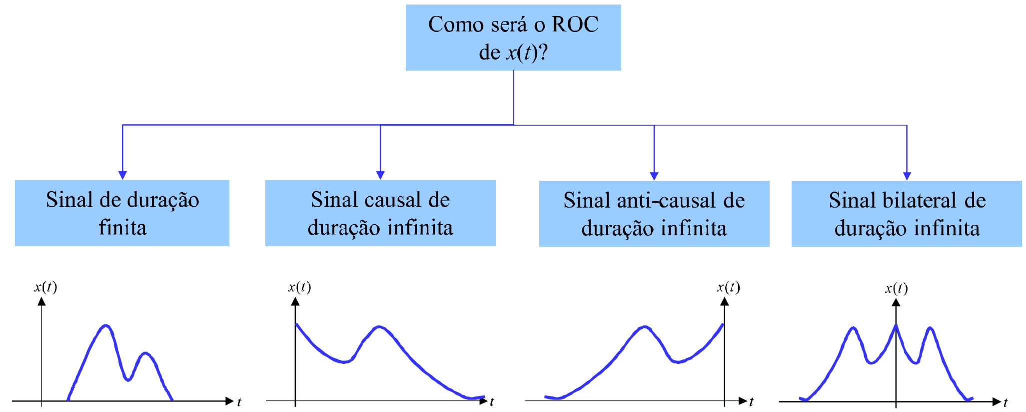
$$X(s)=\frac{1}{s}\,,\ \mathrm{Re}\{s\}>0 \qquad ROC$$



$$ROC=\left\{s\in\mathbb{C}\ \middle|\ \mathrm{Re}\{s\}>0\right\}$$

ROC

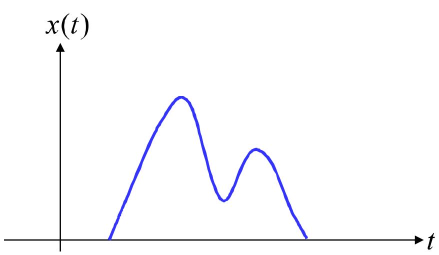
Propriedades

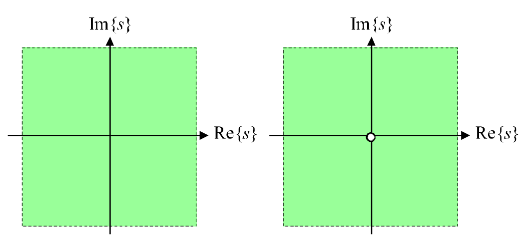


ROC

Propriedades

- *Caso 1*
  - Todo **sinal de duração finita** apresenta como ROC: o plano complexo exceto possivelmente para $s = 0$ e/ou $s = \infty$.





ROC

Propriedades

Exemplo

- Determine a TBL dos sinais,
  - Impulso Unitário

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ +\infty & t=0\end{cases}$$

  - Pulso Unitário

$$p_T(t)=\begin{cases}1/T & 0<t<T\\ 0 & caso\ contrario\end{cases}$$

ROC

Propriedades

Solução

- Impulso Unitário
  - Solucionando a integral:

$$
\begin{aligned}
X(s) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt && x(t)=\delta(t)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt && x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-s0}dt\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt\\
&=1
\end{aligned}
$$

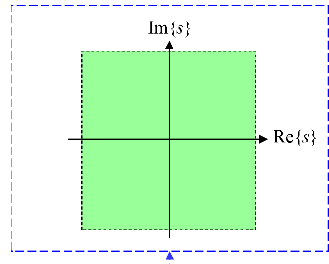
ROC

Propriedades

Solução

- Impulso Unitário
  - Então a solução da integral é:

$$X(s)=1\ ,\ s\in\mathbb{C} \quad ROC$$



$$ROC=\{s\in\mathbb{C}\}$$

ROC

Propriedades

Solução

- Pulso Unitário
  - Solucionando a integral:

$$
\begin{aligned}
X(s) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt && x(t)=p_T(t)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} p_T(t)e^{-st}dt && p_T(t)=\begin{cases}1/T & 0<t<T\\ 0 & caso\ contrario\end{cases}\\
&= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} e^{-st}dt && \int_{t_o}^{t_1} e^{at}dt=\frac{1}{a}e^{at}\Big|_{t_o}^{t_1}\\
&= -\frac{1}{Ts}e^{-st}\Big|_0^T\\
&= -\frac{1}{Ts}(e^{-sT}-1)
\end{aligned}
$$

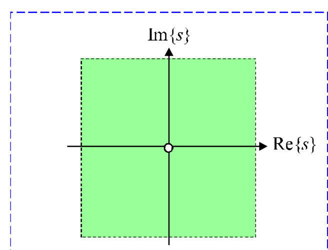
ROC

Propriedades

Solução

- Pulso Unitário
  - Então a solução da integral é:

$$X(s)=\frac{1}{Ts}(1-e^{-sT})\ ,\ s\in\mathbb{C}-\{0\} \quad ROC$$



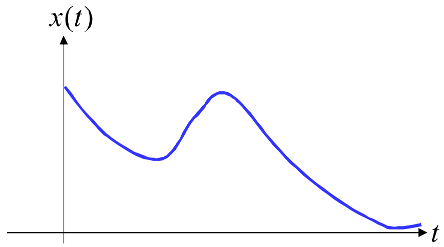
$$ROC=\{s\in\mathbb{C}-\{0\}\}$$

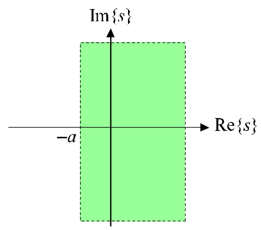
ROC

Propriedades

- *Caso 2*
  - Para todo sinal causal de duração infinita, seu ROC estará ao lado direito do plano complexo.

$$ROC = \{ s \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\{s\} > -a \ , \ a > 0 \}$$





ROC

Propriedades

Exemplo

- Determine a TBL do sinal,
  - Exponencial

$$x(t) = e^{-at}u(t) \ , \ a > 0$$

ROC

Propriedades

Solução

- Solucionando a integral:

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt \qquad x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt \qquad u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+a)t}dt$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \int_0^{\tau} e^{-(s+a)t}dt$$

ROC

Propriedades

Solução

- Solucionando a integral:

$$X(s) = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^{\tau} e^{-(s+a)t}dt \qquad \int_{t_o}^{t_1} e^{at}dt = \frac{1}{a}e^{at}\Big|_{t_o}^{t_1}$$

$$= \lim_{\tau\to\infty}\left(-\frac{1}{(s+a)}e^{-(s+a)t}\Big|_0^{\tau} \right)$$

$$= -\frac{1}{(s+a)} \lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-(s+a)\tau} - e^{-(s+a)0}\right)$$

$$= -\frac{1}{(s+a)} \lim_{\tau\to\infty}\left(e^{-(s+a)\tau} - 1\right) \qquad \mathrm{Re}\{s\} > 0 \Rightarrow \lim_{\tau\to\infty} e^{-s\tau} = 0$$

$$= -\frac{1}{(s+a)} \lim_{\tau\to\infty}(0-1) \qquad \mathrm{Re}\{s+a\} > 0 \Rightarrow \lim_{\tau\to\infty} e^{-(s+a)\tau} = 0$$

$$= \frac{1}{(s+a)} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

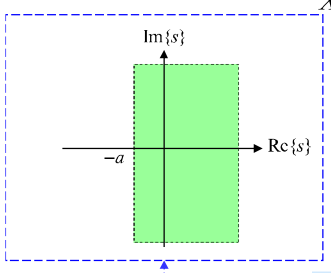
ROC

Propriedades

Solução

- Então a solução da integral é:

$$X(s)=\frac{1}{s+a}\ ,\ \mathrm{Re}\{s\}>-a \quad ROC$$



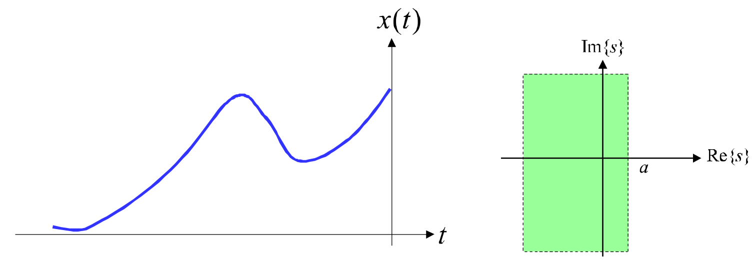
$$ROC=\{s\in\mathbb{C}\ |\mathrm{Re}\{s\}>-a\}$$

ROC

Propriedades

- *Caso 3*
  - Para todo sinal anti-causal de duração infinita, seu ROC estará ao lado esquerdo do plano complexo.

$$ROC=\{s\in\mathbb{C}\ |\mathrm{Re}\{s\}<a\}$$

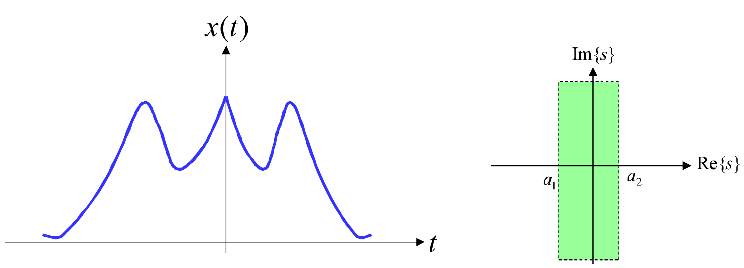


ROC

Propriedades

- *Caso 4*
  - Todo sinal bilateral de duração infinita apresentara como ROC uma faixa do plano complexo

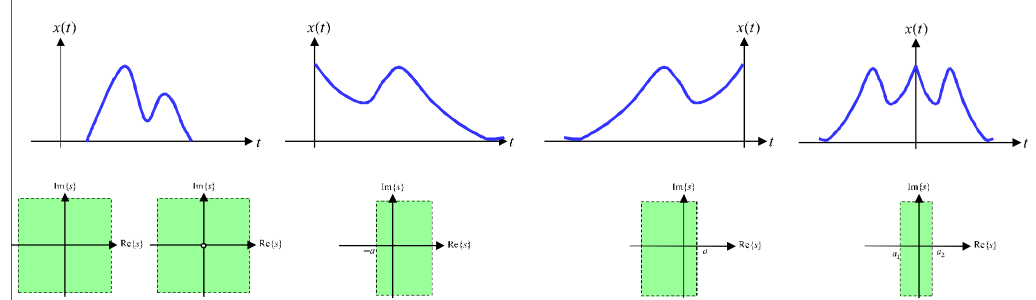
$$ROC=\{s\in\mathbb{C}\ |a_1<\mathrm{Re}\{s\}<a_2\}$$



ROC

Resumo

Sinal de duração finita	Sinal causal de duração infinita	Sinal anti-causal de duração infinita	Sinal bilateral de duração infinita



ROC será todo o plano complexo exceto possivelmente para s = 0 e/ou $s = \infty$.	ROC estará ao lado direito do plano complexo.	ROC estará ao lado esquerdo do plano complexo.	ROC será uma faixa no plano complexo.

Diagrama de Polos e Zeros

Diagrama de Polos e Zeros

Funções Racionais

- A forma mais comum de representação de $X(s)$ é dada por uma função racional em s, na forma

Ordem do denominador

Ordem do numerador

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{M-1} s^{M-1} + b_M s^{M}}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{N-1} s^{N-1} + a_N s^{N}}$$

Diagrama de Polos e Zeros

Funções Racionais

- Tal forma racional pode ser expressada através de seus fatores

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{M-1} s^{M-1} + b_M s^{M}}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{N-1} s^{N-1} + a_N s^{N}} = \frac{b_0 \prod_{\ell=1}^{M} (s - z_\ell)}{a_0 \prod_{\ell=1}^{N} (s - p_\ell)}$$

Zeros de $X(s)$

Polos de $X(s)$

Diagrama de Polos e Zeros

Funções Racionais

- Podemos plotar os polos e zeros no plano complexo s.

$$X(s) = \frac{b_0 \prod_{\ell=1}^{M} (s - z_\ell)}{a_0 \prod_{\ell=1}^{N} (s - p_\ell)}$$

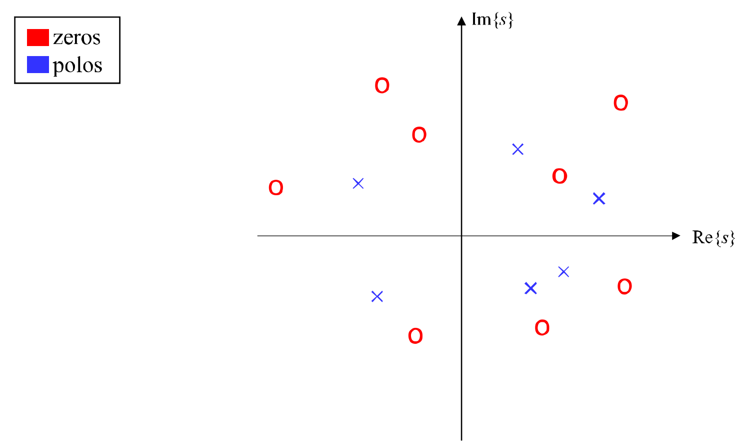


Diagrama de Polos e Zeros

Funções Racionais

- Podemos plotar os polos e zeros no plano complexo s.

$$X(s)=\frac{b_0\prod_{\ell=1}^{M}(s-z_\ell)}{a_0\prod_{\ell=1}^{N}(s-p_\ell)}$$

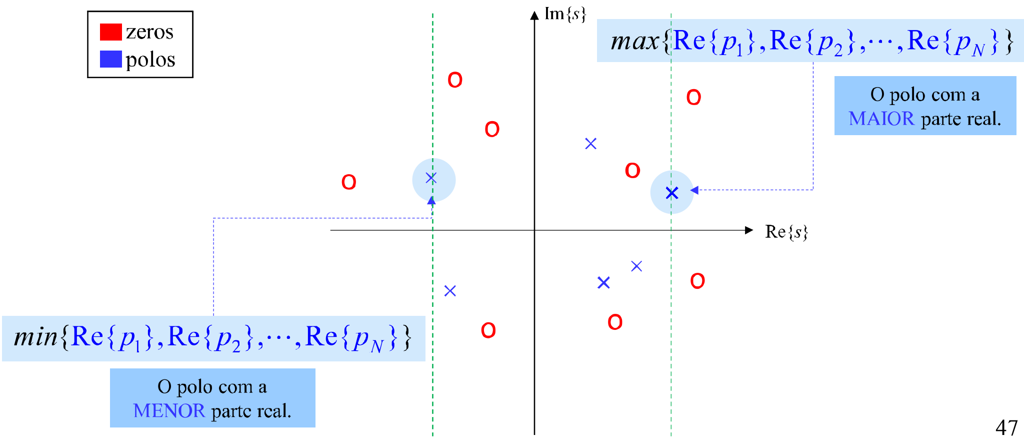


Diagrama de Polos e Zeros

Funções Racionais

- Se consideramos que o sinal $x(t)$ é um **sinal causal de duração infinita**, a ROC da função racional é:

$$ROC=\left\{s\in\mathbb{C}\;\middle|\;\mathrm{Re}\{s\}>max\{\mathrm{Re}\{p_1\},\mathrm{Re}\{p_2\},\cdots,\mathrm{Re}\{p_N\}\}\right\}$$

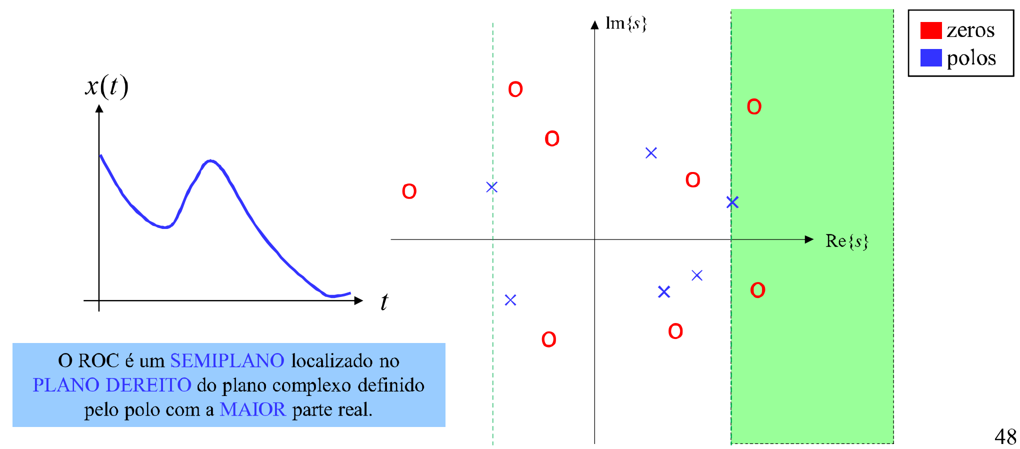


Diagrama de Polos e Zeros

Funções Racionais

- Se consideramos que o sinal $x(t)$ é um **sinal anti-causal de duração infinita**, a ROC da função racional é:

$$ROC=\left\{s\in\mathbb{C}\;\middle|\;\mathrm{Re}\{s\}<min\{\mathrm{Re}\{p_1\},\mathrm{Re}\{p_2\},\cdots,\mathrm{Re}\{p_N\}\}\right\}$$

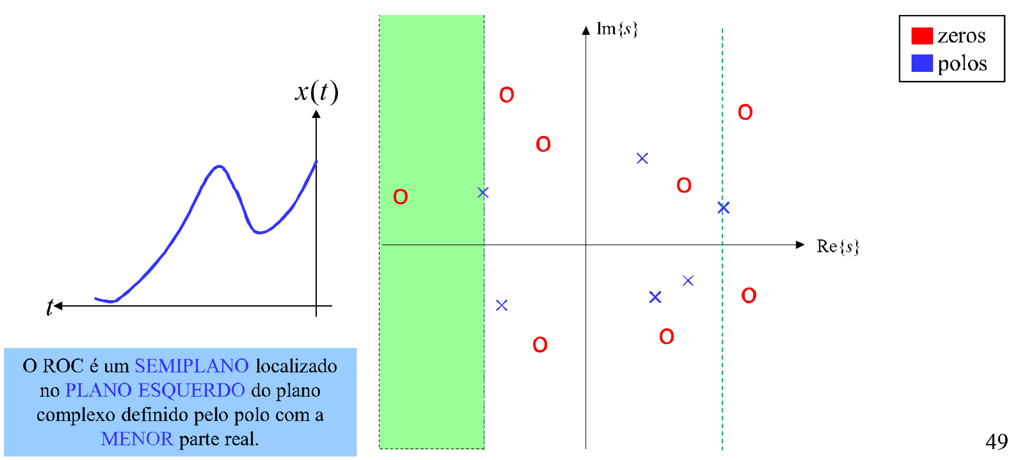


Diagrama de Polos e Zeros

Funções Racionais

- Se consideramos que o sinal $x(t)$ é um **sinal bilateral**, a ROC da função racional é:

$$ROC=\left\{s\in\mathbb{C}\;\middle|\;min\{\mathrm{Re}\{p_1\},\cdots,\mathrm{Re}\{p_N\}\}<\mathrm{Re}\{s\}<max\{\mathrm{Re}\{p_1\},\cdots,\mathrm{Re}\{p_N\}\}\right\}$$

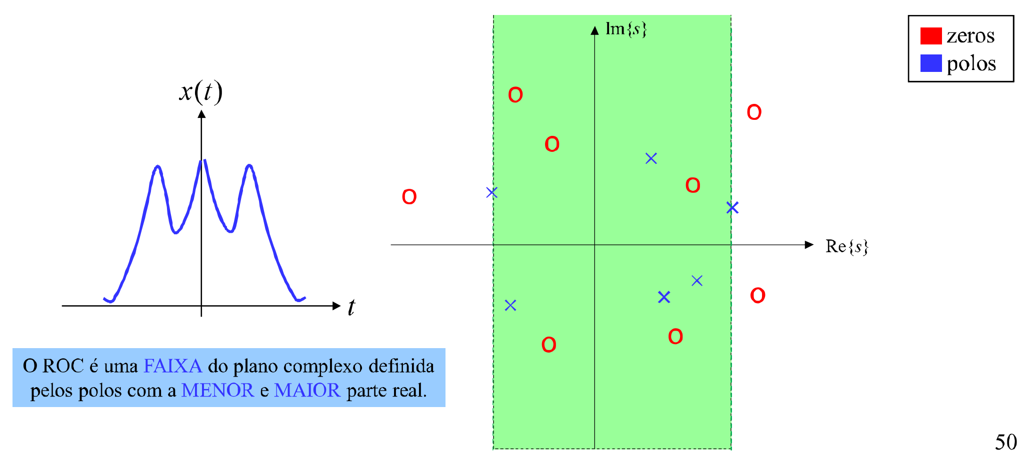


Diagrama de Polos e Zeros

Funções Racionais

Exemplo

- Seja a função racional

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s+1}{s^2 - s - 6}$$

- Determinar o ROC de $X(s)$ supondo que $x(t)$ é bilateral

Diagrama de Polos e Zeros

Funções Racionais

Solução

- Determinando a forma fatorada da expressão racional.

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2 - s - 6} = \frac{s+1}{(s+2)(s-3)} = \frac{s - \overbrace{(-1)}^{=z_1}}{(s - \underbrace{(-2)}_{=p_1})(s - \underbrace{3}_{=p_2})}$$

- Evidentemente:
  - Polos de X(s) são: $p_1 = -2$ e $p_2 = 3$
  - Zeros de X(s) são: $z_1 = -1$

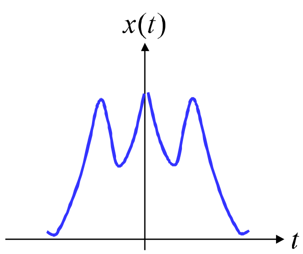
Diagrama de Polos e Zeros

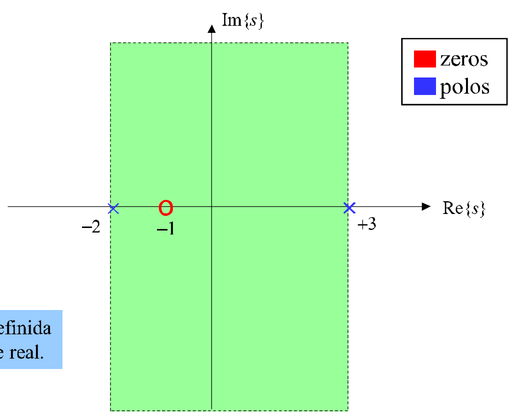
Funções Racionais

Solução

- Plotando os polos e zeros no plano complexo s.

$$ROC = \left\{ s \in \square \,\middle|\, min\{\mathrm{Re}\{p_1\}, \mathrm{Re}\{p_2\}\} < \mathrm{Re}\{s\} < max\{\mathrm{Re}\{p_1\}, \mathrm{Re}\{p_2\}\} \right\}$$
$$= \left\{ s \in \square \,\middle|\, min\{-2, 3\} < s < max\{-2, 3\} \right\} = \left\{ s \in \square \,\middle|\, -2 < \mathrm{Re}\{s\} < 3 \right\}$$



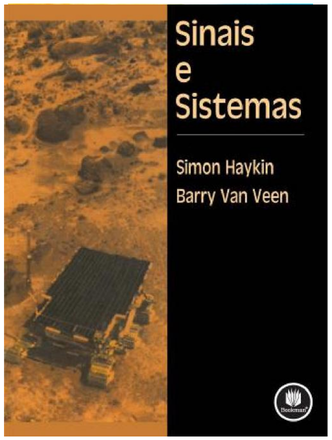


O ROC é uma FAIXA do plano complexo definida pelos polos com a MENOR e MAIOR parte real.

Bibliografia

Bibliografia

HAYKIN, S. e VAN VEEN, B. **Sinais e sistemas**. Porto Alegre: Bookman, 2001. (19).



Indicação das seções do livro a ler em relação aos temas abordados na apresentação.

- A transformada de Laplace Bilateral (6.6).