Métodos numéricos para resolver Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)

Algoritmos Numéricos - Topico 5 -1
Métodos numéricos para a solução de EDOs
- Prof. Cláudia G. Varassin DI/UFES
emails:claudia.varassin@ufes.br e galarda@inf.ufes.br

Março de 2021

Sumário

1. O que são as EDOs (Equações Diferenciais Ordinárias)
2. EDOs de 1ª ordem
3. O método de Euler
4. O método baseado na série de Taylor de 1ª ordem

Equações (algébricas e transcedentes):

Exemplos:

$3x = 7.8$ (linear)

$x^2 + x = 2$

$\sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$

$sen(x^2) - 7x + \frac{1}{x} = 0$

$e^{-x} - x = 0$

Solução: pontos na reta $\mathbb{R}$

Sistemas de equações (algébricas ou transcedentes):

Exemplo:

$Ax = b$

Solução: pontos no $\mathbb{R}^n$

Equações diferenciais:
Equações que envolvem derivada(s) de uma função.
Exemplos:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

Equações diferenciais:
Equações que envolvem derivada(s) de uma função.
Exemplos:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2ysenx$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = -x^2 t$$

Equações diferenciais:

Equações que envolvem derivada(s) de uma função

Exemplos:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

solucão: y(x)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g$$

solucão: y(t)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2ysenx$$

solucão: y(x)

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = -x^2 t$$

solucão: y(x,t)

Ferramentas matemáticas para a modelagem

As equações diferenciais são ferramentas úteis para descrever fenômenos físicos, biológicos, econômicos, etc.
Exemplo:
Quer se descrever o crescimento de uma dada população (coelhos, bactérias, vírus, peixes, etc).

Com é $P(t)$?
A taxa de crescimento da população é proporcional ao tamanho da população P (qte de indivíduos) em um dado instante t.

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

Equações diferenciais de 1^a ordem:
Equações que envolvem apenas a derivada primeira
Exemplos:

Eq.ordinária: $y' = \frac{dy}{dx} = 2x$

Eq. ordinária: $\frac{dy}{dx} = -xy$

Eq. ordinária: $\frac{dP}{dt} = rP$

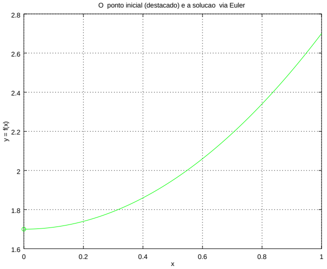
Eq. parcial: $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = -x^2 t$

Sobre a Solução

$y' = \frac{dy}{dx} = 2x$, $\Rightarrow$ Solução: $y(x) = x^2 + C$

Sobre a Solução

$y' = \frac{dy}{dx} = 2x$, $\Rightarrow$ Solução: $y(x) = x^2 + C$
Com um valor dado sobre a solução:
$y(0) = 1.7$, $\Rightarrow$ Solução: $y(x) = x^2 + 1.7$



Sobre a Solução

Exemplo :
$\frac{dP}{dt} = rP$
$P(0) = P_0$
Solução: $P(t) = P_0 e^{rt}$

Um Problema de Valor Inicial (PVI) de primeira ordem é definido por uma equação diferencial do tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \tag{1}$$

sujeita à condição inicial

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

onde $f(x, y)$ é uma função dada assim como os valores de x_0 e y_0.

A Solução do PVI é uma função $y(x)$ que satisfaz à EDO e à condição $y(x_0) = y_0$.
Resolver o PVI é encontrar tal função.

Há varios tipos de métodos numéricos para obter a solução de um PVI abaixo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Métodos de passo simples.
A estratégia dos métodos de passo simples é obter a solução em x_{i+1} tomando por base a solução no ponto vizinho x_i.
A solução obtida é uma aproximação para a solução exata.

$$y_{i+1} \approx y(x_{i+1})$$

Numericamente, só é possivel resolver em um dominio finito $D = [a, b]$
Além disso, só se pode obter a solução em um conjunto finito de pontos em $D = [a, b]$.

Numericamente, só é possivel resolver em um dominio finito $D = [a, b]$. Além disso, só se pode obter a solução em um conjunto finito de pontos em $D = [a, b]$ (em uma malha de pontos em D).
Alguns métodos de passo simples:

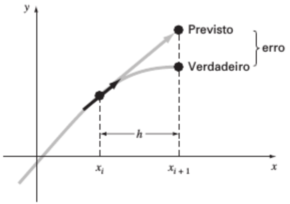
- Método de Euler
- Métodos baseados na série de Taylor
- Métodos de Runge-Kutta.

Os métodos fornecem a solução para esta malha de pontos x_i.
Será usado, neste curso, uma malha de pontos igualmente espaçados, $x_0, x_1, \cdots, x_n$, onde a distância é: $h = \frac{b-a}{n}$,

$$x_i = x_0 + i\,h, \qquad i = 0, 1, \cdots, n$$

O método de Euler

Quer se $y(x_{i+1}) \approx y_{i+1}$



Toma-se como referência a reta $r(x)$ tangente à curva $y(x)$ no ponto (x_i, y_i).
O valor previsto y_{i+1} é calculado como sendo a imagem de x_{i+1} na reta $r(x)$, ou seja, $y_{i+1} = r(x_{i+1})$.

$$\frac{r(x_{i+1}) - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{dy}{dx}\Big|_{(x_i, y_i)} = f(x_i, y_i)$$

$y_{i+1} = r(x_{i+1})$.

$$\frac{r(x_{i+1}) - y_i}{(x_{i+1} - x_i)} = f(x_i, y_i)$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{(x_{i+1} - x_i)} = f(x_i, y_i)$$

$y_{i+1} = r(x_{i+1})$.

$$\frac{r(x_{i+1}) - y_i}{(x_{i+1} - x_i)} = f(x_i, y_i)$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{(x_{i+1} - x_i)} = f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} - y_i = f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$y_{i+1} = r(x_{i+1})$.

$$\frac{r(x_{i+1}) - y_i}{(x_{i+1} - x_i)} = f(x_i, y_i)$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{(x_{i+1} - x_i)} = f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} - y_i = f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Dado o PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Resolver via o método de Euler, em $[a = x_0, b]$, com um dado h, consiste em obter, para os pontos da malha, os valores de y pela expressão:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Exemplo 1: Resolver o PVI

$$\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} = f(x, y) \\ y(1.0) = 4.0 \end{cases}$$

via o método de Euler, em $[a = x_0 = 1.0, b = 2.2]$ com um dado $h = 0.4$.

Exemplo 1: Resolver o PVI

$$\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} = f(x,y) \\ y(1.0) = 4.0 \end{cases}$$

via o método de Euler, em $[a = x_0 = 1.0, b = 2.2]$ com um dado $h = 0.4$.
A expressão geral é:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Para este problema, fica:

$$y_{i+1} = y_i + h(\frac{-x_i}{y_i})$$

Exemplo 1 (cont.)

1^0 passo:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h(\frac{-x_0}{y_0})$$

$$y_1 = 4.0 + 0.4(\frac{-1.0}{4.0}) = 3.9$$

Exemplo 1 (cont.)

1^0 passo:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h(\frac{-x_0}{y_0})$$

$$y_1 = 4.0 + 0.4(\frac{-1.0}{4.0}) = 3.9$$

2^0 passo:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h(\frac{-x_1}{y_1})$$

$$y_2 = 3.9 + 0.4(\frac{-1.4}{3.9}) = 3.756410$$

Exemplo 1 (cont.)

1^0 passo:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h(\frac{-x_0}{y_0})$$

$$y_1 = 4.0 + 0.4(\frac{-1.0}{4.0}) = 3.9$$

2^0 passo:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h(\frac{-x_1}{y_1})$$

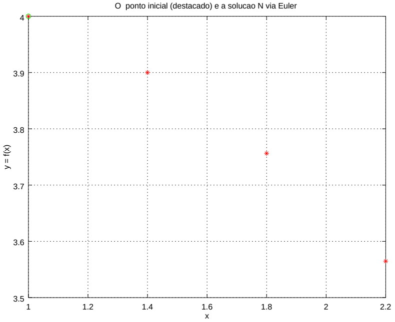
$$y_2 = 3.9 + 0.4(\frac{-1.4}{3.9}) = 3.756410$$

3^0 passo:

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = y_2 + h(\frac{-x_2}{y_2})$$

$$y_3 = 3.756410 + 0.4(\frac{-1.8}{3.756410}) = 3.564738$$

Representação da solução obtida, via Euler, em $[1.0, 2.2]$ com $h = 0.4$



Os métodos baseados na série de Taylor

A expansão em série de Taylor de uma função $y(x)$, em torno de x_i, é dada por:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_i, y_i) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_i, y_i) + \frac{1}{4!}h^4 y^{(iv)}(x_i, y_i) + \ldots$$

onde x_{i+1} é um ponto vizinho a x_i (a uma distância h).

Os métodos baseados na série de Taylor

A expansão em série de Taylor de uma função $y(x)$, em torno de x_i, é dada por:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_i, y_i) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_i, y_i) + \frac{1}{4!}h^4 y^{(iv)}(x_i, y_i) + \ldots$$

onde x_{i+1} é um ponto vizinho a x_i (a uma distância h).

Assim, o valor de $y(x_{i+1})$ pode ser obtido (aproximado) tomando alguns termos da expansão de $y(x)$ em série de Taylor, em torno de x_i.

O método baseado na série de Taylor de 2^a ordem

Por exemplo, ao considerar apenas termos até a derivada 2^a, tem se o métodos baseado na série de Taylor de 2^a ordem:

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y(x_i) + hy'(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h^2y''(x_i, y_i)$$

O método baseado na série de Taylor de 2^a ordem

Por exemplo, ao considerar apenas termos até a derivada 2^a, tem se o métodos baseado na série de Taylor de 2^a ordem:

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y(x_i) + hy'(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_i, y_i)$$

Lembrando que para o problema se sabe $y' = f(x, y)$

$$y'' = f'?$$

$$f' = (\frac{df}{dx}) = (\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx}) + (\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx})$$

O método baseado na série de Taylor de 2^a ordem

Por exemplo, ao considerar apenas termos até a derivada 2^a, tem se o métodos baseado na série de Taylor de 2^a ordem:

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y(x_i) + hy'(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_i, y_i)$$

Lembrando que para o problema se sabe $y' = f(x, y)$

$$y'' = f'?$$

$$f' = (\frac{df}{dx}) = (\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx}) + (\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx})$$

A expressão pode ser rescrita por

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y(x_i) + hf(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h^2 f'(x_i, y_i)$$

Exemplo 1: Resolver o PVI

$$\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} = f(x,y) \\ y(1.0) = 4.0 \end{cases}$$

via o método baseado na série de Taylor de 2^a ordem, em $[a = x_0 = 1.0, b = 2.2]$ tomando $h = 0.4$.

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h^2 f'(x_i, y_i)$$

$$y'' = f'?$$

$$y'' = f'?$$

$$f' = (\frac{df}{dx}) = (\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx}) + (\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx})$$

$$f' = \frac{d(-xy^{-1})}{dx}$$

$$y'' = f' = \frac{x^2 + y^2}{-y^3}$$

1^0 passo:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{1}{2}h^2 f'(x_0, y_0)$$

1^0 passo:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{1}{2}h^2 f'(x_0, y_0)$$

$$y_1 = y_0 + h(\frac{-x_0}{y_0}) + \frac{1}{2}h^2(\frac{x_0^2+y_0^2}{-y_0^3})$$

$$y_1 = 4.0 + 0.4(\frac{-1.0}{4.0}) + 0.08(\frac{1^2+4^2}{-4^3}) = 3.878750$$

1^0 passo:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{1}{2}h^2 f'(x_0, y_0)$$

$$y_1 = y_0 + h(\frac{-x_0}{y_0}) + \frac{1}{2}h^2(\frac{x_0^2+y_0^2}{-y_0^3})$$

$$y_1 = 4.0 + 0.4(\frac{-1.0}{4.0}) + 0.08(\frac{1^2+4^2}{-4^3}) = 3.878750$$

2^0 passo:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) + \frac{1}{2}h^2 f'(x_1, y_1)$$

$$y_2 = y_1 + h(\frac{-x_1}{y_1}) + \frac{1}{2}h^2(\frac{x_1^2+y_1^2}{-y_1^3})$$

$$y_2 = 3.711061$$

3^0 passo:

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) + \frac{1}{2}h^2 f'(x_2, y_2)$$

$$y_3 = 3.490418$$

Dado um PVI do tipo

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

A solução do PVI é uma função $y(x)$ que satisfaz à EDO e a $y(x_0) = y_0$. É possível obter a solução em um dado $D = [a, b]$ via métodos numéricos. Os métodos de passo simples obtêm a solução em x_{i+1} empregando "informações" do ponto vizinho x_i.

- O método de Euler calcula y_{i+1} via:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

- O método baseado na série de Taylor de 2^a ordem calcula y_{i+1} via :

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h^2 f'(x_i, y_i)$$

Bibliografia Básica

[1] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[2] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.