Cálculo 2   2022/2

Aula 6

Aula passada   Base

Aula Hoje   Produto escalar

Cap 9: Produto escalar

↳ associar dois vetores a um número real.

Definição O produto escalar de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ indicado por

$$\vec{u}\cdot\vec{v}$$

um número real tal que:

(a) se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ nulo então $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

(b) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulo e θ ângulo entre eles

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|u\|\|v\|\cos\theta$$

Consequências

- $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

- $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|u\|^2$

  $\Rightarrow \|u\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.

$\cos\theta = 1$

↳ ortogonais

- $\vec{u}\perp\vec{v}$ (ângulo de $90°$)

  $\cos 90° = 0$

  $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Como calcular em termos das coordenadas das base

Proposição Se, em uma base ortogonal $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$

então

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = a_1 . a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

↳ usa lei dos cossenos.

Exemplo Sendo E uma base ortogonal, determine x para que

$$\vec{u} = (x, 10, 200)_E$$

$$\vec{v} = (-10, x, 0)_E$$

sejam ortogonais

Solução

$$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} \quad -10x + 10x + 0 = 0$$

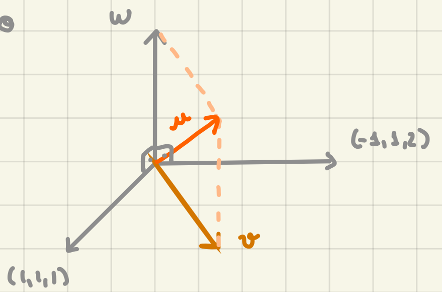
assim $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são sempre ortogonais

Exemplo Decomponha $\vec{u} = (1,0,3)$ como soma de vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que

i) v, $(1,1,1)$ e $(-1,1,2)$ são LD

ii) w é ortogonal a $(1,1,1)$ e $(-1,1,2)$

Solução



$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$$

como $(1,1,1)$ e $(-1,1,2)$ são LI:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

então para v, $(1,1,1)$, $(-1,1,2)$ serem LD

$$v = x(1,1,1) + y(-1,1,2)$$

ii) $\vec{w}\cdot(1,1,1) = \vec{w}(-1,1,2) = 0 \quad (*)$

como $\vec{v} = \vec{u} - \vec{w}$

Vamos determinar $w = (x,y,z)$ por $(*)$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$x - \frac{1}{2}z = 0$$

$$y + \frac{3}{2}z = 0$$

$$w = (x, y, z) = z\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}, 1\right) \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

escolher z tal que

$\vec{v} = \vec{u} - \vec{w}$ é LD com $(1,1,1)$ e $(-1,1,2)$

$= (1 - z/2, 3/2, 3 - z)$

ou seja

$$\begin{vmatrix} 1 - z/2 & 3/2 & 3 - z \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$2 - z - \frac{3}{2} + \cancel{3} - z + 3 - z - 1 + z/2 - \cancel{3} = 0$$

$$\frac{5}{2} - \frac{5z}{2} = 0 \qquad z = 1$$

então

$$\vec{v} = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 2\right) \text{ e } \vec{w} = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1\right)$$

$$\vec{u} = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, 2\right) + \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}, 1\right)$$

Propriedades $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores $\lambda \in \mathbb{R}$

i) $\vec{u}\cdot(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

ii) $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$

iii) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

iv) $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u} > 0$

Exemplo Mostre que se $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v} \neq 0$ são ortogonais então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI

Solução Considere

$$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0} \quad (*)$$

fazendo

$$\vec{u}\cdot(a\vec{u} + b\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{0} = 0$$

$$a\,\vec{u}\cdot\vec{u} + b\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

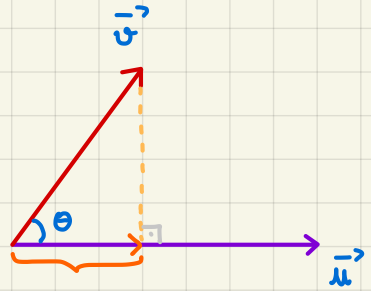
e

$$\vec{v}\cdot(a\vec{u} + b\vec{v}) = \vec{v}\cdot\vec{0} = 0$$

$$a\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{u}}_{=0} + b\,\vec{v}\cdot\vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

$\therefore$ (*) só admite solução nula $a = b = 0$

Note que



$$\|\vec{v}\|\cos\theta \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

$$= \|u\|\|v\|.\cos\theta . \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \underbrace{\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}}_{\text{múltiplo do vetor } \vec{u}} \cdot \vec{u}$$

"é a sombra de $\vec{v}$ em $\vec{u}$"

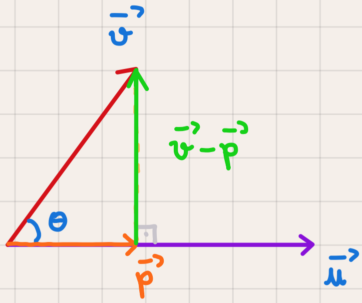
definição Dado $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{v}$ quaisquer vetores, o vetor

$$\vec{p} = \text{proj}_{\vec{u}}\,\vec{v} := \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|u\|^2} \cdot \vec{u}$$

é dito projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$

Note que

- $\vec{p} \,//\, \vec{u}$
- $\vec{v} - \vec{p} \perp \vec{u}$

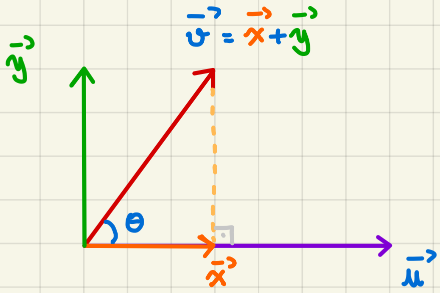


Assim sempre vale a decomposição:

$$\vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$$

onde $\vec{x} \parallel \vec{u}$ a saber $\vec{x} = \vec{p}$

e $\vec{y} \perp \vec{u}$ a saber $\vec{y} = \vec{v} - \vec{p}$



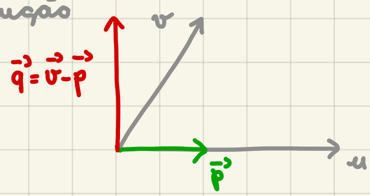
Exemplo Dada uma base ortonormal $B = \{i, j, k\}$, sejam

$$\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$
$$v = 3\vec{i} - 6\vec{j}$$

(a) obtenha a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$

(b) Determine $\vec{p}$ e $\vec{q}$ tais que $p \parallel \vec{u}$ e $q \perp \vec{u}$

Solução



(a) $$\text{proj}_u v = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|u\|^2} \cdot \vec{u}$$

$$= \frac{(2.3 + (-2)(-6) + 1.0)}{4 + 4 + 1} \cdot \vec{u}$$

$$= 2 \cdot \vec{u} = 2(2,-2,1) = (4,-4,2)$$

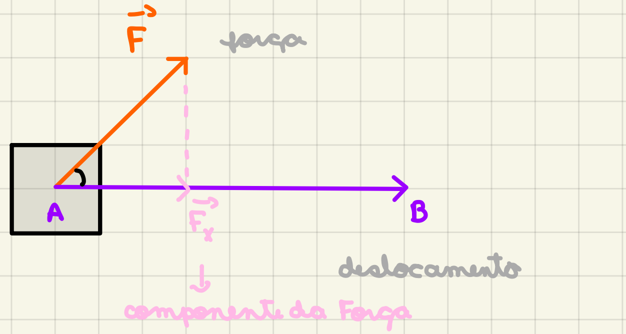
(b) $\vec{p} = \text{proj}_u v \parallel \vec{u}$

$$\vec{q} = \vec{v} - \vec{p} = (3,-6,0) - (4,-4,2)$$
$$= (-1,-2,-2)$$

$$\vec{v} = (4,-4,2) + (-1,-2,-2)$$ //

Exemplo (trabalho)

trabalho: é força vezes deslocamento



Vimos que $\|\vec{F_x}\| = \|\vec{F}\| \cos\theta$

Assim $W = \underbrace{\|\vec{F}\| \cos\theta}_{\text{força}} \; \overbrace{\|\vec{AB}\|}^{\text{deslocamento}}$

$$= \vec{F} \cdot \vec{AB}$$