CAPÍTULO V

ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE LINEARES

TÓPICOS
- Definições de estabilidade
- Estabilidade absoluta
- Estabilidade relativa
- Critério de Routh-Hurwitz
- Estabilidade de sistema discretos

5.1 INTRODUÇÃO

O projeto de um sistema de controle pode ser considerado como um problema de posicionar os pólos e zeros da sua função de transferência tal que o sistema desempenhe de acordo com especificações estabelecidas.

Entre as muitas formas de especificações de desempenho usadas em projeto, a mais importante é a **estabilidade do sistema**. Um sistema instável é geralmente considerado sem utilidade. Quando todos os tipos de sistemas são considerados – linear, não lineares, invariante no tempo, variante no tempo – a definição de estabilidade pode ser dada de muitas formas diferentes, o que foge do escopo de nosso curso. Nós trataremos somente com a estabilidade de sistemas monovariáveis lineares invariantes no tempo.

Para propósitos de análise e projeto, nós podemos classificar a estabilidade como **estabilidade absoluta** e **estabilidade relativa**. Estabilidade absoluta refere-se à condição do sistema ser estável ou não; isto é: a resposta é sim ou não. Uma vez que o sistema é estável, é interessante determinar como esta estabilidade se apresenta, isto é, o grau de estabilidade é uma medida da estabilidade relativa.

Antes da definição da estabilidade, nós definimos os dois seguintes tipos de respostas para sistemas invariantes no tempo lineares:

1. **Resposta de estado zero** – devida à entrada somente; todas as condições iniciais do sistema são nulas.
2. **Resposta de entrada zero** – devida a condições iniciais somente; todas as entradas são nulas.

Do princípio da superposição, quando um sistema é submetido simultaneamente a entradas e condições iniciais (não nulas), a resposta total do sistema é dada por:

Resposta total = *resposta de estado zero* + *resposta de entrada zero*

As definições acima aplicam-se a sistema contínuos e sistemas discretos.

5.2 *BOUNDED-INPUT BOUNDED-OUTPUT STABILITY*: SISTEMAS DE DADOS CONTÍNUOS

Considere *u(t)*, *y(t)* e *g(t)* como a entrada, a saída e a resposta ao impulso de um sistema invariante no tempo linear, respectivamente. **Com as condições iniciais nulas, o sistema é considerado BIBO estável, ou simplesmente estável, se a sua saída y(t) é limitada a uma entrada u(t) limitada.**

A integral de convolução relacionando *u(t), y(t) e g(t)* é:

$$y(t) = \int_0^\infty u(t-\tau)g(\tau)d\tau \qquad 5.1$$

Considerando o valor absoluto de ambos os lados da equação, temos:

$$|y(t)| = \left|\int_0^\infty u(t-\tau)g(\tau)d\tau\right| \qquad 5.2$$

Ou

$$|y(t)| = \int_0^\infty |u(t-\tau)||g(\tau)|d\tau \qquad 5.3$$

Se a entrada é limitada,

$$|u(t)| \le M \qquad 5.4$$

Onde M é um número positivo finito. Então:

$$|y(t)| \le M\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau \qquad 5.5$$

De modo que, se y(t) é limitada, ou

$$|y(t)| \le N < \infty \qquad 5.6$$

onde N é um número positivo finito, a seguinte condição precisa ser garantida:

$$M\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau \le N < \infty \qquad 5.7$$

Ou, para algum Q positivo finito,

$$\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau \le Q < \infty \qquad 5.8$$

A condição dada pela equação anterior implica que a área sob a curva $|g(\tau)|$ versus τ precisa ser limitada.

Condição de estabilidade

Para a estabilidade BIBO, as raízes da equação característica, ou os pólos de G(s), não podem estar localizados no lado direito do plano-s ou sobre o eixo $j\omega$, eles precisam estar localizados no lado esquerdo do plano-s. Um sistema é dito instável se é BIBO instável. Quando um sistema tem raízes sobre o eixo $j\omega$, ou seja, s = $j\omega_0$ e s = $-j\omega_0$, se a entrada é uma senóide, $sen\,\omega_0 t$, a saída será da forma de $tsen\,\omega_0 t$, que é ilimitada, e o sistema é instável.

5.3 ESTABILIDADE ASSINTÓTICA E ESTABILIDADE DE ENTRADA ZERO DE SISTEMAS CONTÍNUOS

Se a resposta de entrada zero y(t), sujeita as condições iniciais finitas, alcança zero à medida que o *t* tende ao infinito, o sistema é dito estável de entrada zero, ou estável; caso contrário é instável.

Condições para estabilidade de entrada zero:

$$|y(t)| \le M < \infty \qquad \text{para } \forall t \ge t_0 \tag{5.16}$$

e

$$\lim_{t \to \infty} |y(t)| = 0 \tag{5.17}$$

Devido à condição 2, a estabilidade de entrada zero é também conhecida com estabilidade assintótica.

5.4 MÉTODOS PARA DETERMINAR A ESTABILIDADE

Vimos que a estabilidade para sistemas monovariáveis lineares invariantes no tempo pode ser determinada pela localização dos pólos da equação característica do sistema; ou seja, esses pólos precisam localizar-se no lado esquerdo plano-s complexo, caso o sistema seja estável. Assim, por motivos práticos, não existe a necessidade de calcular a resposta do sistema completa para se determinar a estabilidade. Quando os parâmetros do sistema são todos conhecidos, as raízes da equação característica podem ser determinadas por um *software* computacional. No caso do Matlab®, existe a função *roots(P)* que determina as raízes de uma equação polinomial *P*, a função *eig(A)* que determina os auto-valores de uma matriz *A*.

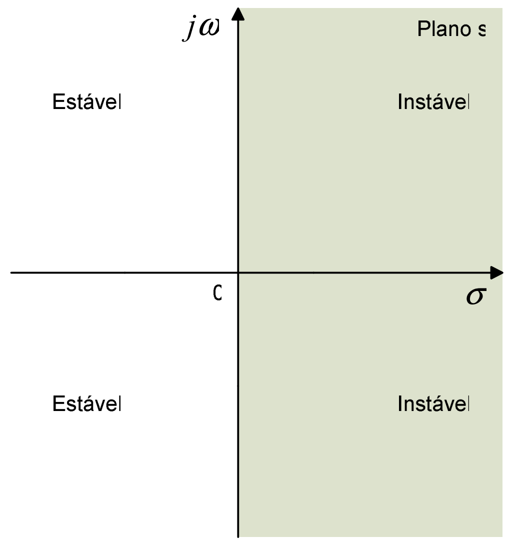

Figura 5.1. Regiões do Plano-s de estabilidade e instabilidade

Entretanto, para propósitos de projeto, haverá parâmetros variáveis e desconhecidos embutidos na equação característica, e isto não possibilitará a utilização de programas de cálculo de raízes ou auto-valores. Dessa forma, a seguir são apresentados alguns dos métodos bem conhecidos para a determinação de estabilidade de sistema contínuos lineares, sem a necessidade de cálculo das raízes.

i) **critério de estabilidade de Routh-Hurwitz.** Este critério é um método algébrico que prover a informação da estabilidade absoluta de um sistema invariante no tempo linear que tem uma equação característica com coeficientes reais e constantes. O critério nos informa se existe alguma raiz no lado direito do plano complexo s.

ii) **Critério de estabilidade de Nyquist.** Este critério é um método semi-gráfico que analisa a estabilidade a partir da observação da curva de Nyquist da função de transferência de malha aberta.

iii) **Diagrama de Bode.** O diagrama é um gráfico do módulo da função de transferência de malha aberta G($j\omega$)H($j\omega$) em dB e a fase de G($j\omega$)H($j\omega$) em graus, todas versus ω. A estabilidade do sistema em malha fechada pode ser determinada pela observação do comportamento dessas curvas.

Os dois últimos métodos serão vistos no curso de Controle Automático II. A seguir é apresentado o Critério de Routh-Hurwitz.

5.5 CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ

O critério de Routh-Hurwitz representa um método de determinar a localização de zeros de um polinômio com coeficientes reais e constantes com relação ao lado esquerdo e direito do plano-s, sem a necessidade de determinação dos zeros. Visto que existem funções computacionais que determinam os zeros de um polinômio, o Critério de Routh-Hurwitz é mais adequado para polinômios que apresentam pelo menos um parâmetro desconhecido.

5.5.2 Tabulação de Routh

Consiste em arranjar primeiramente os coeficientes do polinômio

$$F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s_{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 1 \qquad 5.21$$

em duas linhas. A primeira linha consiste do primeiro, terceiro, quinto, ..., coeficientes, e a segunda linha consiste do segundo, quarto, sexto, ..., coeficientes, contados do grau maior para o menor, conforme tabulação a seguir:

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	$\vdots$
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	$\vdots$

O passo seguinte é formar uma matriz de números por operações indicadas conforme exemplificado para a equação 5.27 de sexta ordem a seguir:

$$a_6 s_6 + a_5 s_5 + a_4 s_4 + a_3 s_3 + a_2 s_2 + a_1 s_1 + a_0 = 0 \quad 5.27$$

s^6	a_6	a_4	a_2	a_0
s^5	a_5	a_3	a_1	0
s^4	$\frac{a_5 a_4 - a_6 a_3}{a_5} = A$	$\frac{a_5 a_2 - a_6 a_1}{a_5} = B$	$\frac{a_5 a_0 - a_6 \times 0}{a_5} = a_0$	0
s^3	$\frac{A a_3 - a_5 B}{A} = C$	$\frac{A a_1 - a_5 a_0}{A} = D$	$\frac{A \times 0 - a_5 \times 0}{A} = 0$	0
s^2	$\frac{BC - AD}{C} = E$	$\frac{C a_0 - A \times 0}{C} = a_0$	$\frac{C \times 0 - A \times 0}{C} = 0$	0
s^1	$\frac{ED - C a_0}{E} = F$	0	0	0
s^0	$\frac{F a_0 - E \times 0}{F} = a_0$	0	0	0

A matriz acima é chamada de Tabulação de Routh ou Matriz de Routh. A coluna de s possibilita melhor identificação para construção da tabela. Os cálculos dos termos subseqüentes ocorrem conforme as equações dos termos da tabela. Uma vez realizados os cálculos dos termos da Tabela de Routh, o último passo consiste em investigar os sinais dos coeficientes na primeira coluna da tabela, que contém informações sobre as raízes da equação.

As raízes da equação estarão todas do lado esquerdo se todos os elementos da primeira coluna da Tabela de Routh apresentarem o mesmo sinal. **O número de mudanças de sinais nos elementos da primeira coluna é igual ao número de raízes com partes reais positivas.**

Exemplo 5.1

Considere a equação

$$(s-2)(s+1)(s-3) = s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0 \tag{5.28}$$

Ela possui um coeficiente negativo. Assim, a partir da condição necessária, nós sabemos sem aplicar o teste de Routh que nem todas as raízes da equação estão no semi-plano esquerdo do plano s. Realmente, a partir da equação fatorada, sabemos que ela possui duas raízes no semi-plano direito do plano s, s = 2 e s = 3. Abaixo está a tabela de Routh para comprovar e exemplificar sua utilização.

$$\begin{array}{lll}
s^3 & 1 & 1 \\
s^2 & -4 & 6 \\
s^1 & \dfrac{(-4)(1)-(-6)(1)}{-4} = 2.5 & 0 \\
s^0 & \dfrac{(2.5)(6)-(-4)(0)}{2.5} & 0
\end{array}$$

Como tem duas trocas de sinais na primeira coluna da tabela, a equação tem duas raízes localizadas no semi-plano direito do plano s.

Exemplo 5.2

Considere a equação

$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0 \tag{5.29}$$

Como a equação tem todos os termos determinados e todos os coeficientes tem o mesmo sinal, ela satisfaz as condições necessárias de não ter raízes no semi-plano direito ou no eixo imaginário do plano s. Entretanto, a condição suficiente deve ser checada. A tabela de Routh está abaixo.

s^4	2	3	10
s^3	1	5	0
s^2	$\dfrac{(1)(3)-(2)(5)}{1}=-7$	10	0
s^1	$\dfrac{(-7)(5)-(1)(10)}{-7}=6.43$	0	0
s^0	10	0	0

Como tem duas trocas de sinais na primeira coluna da tabela, a equação tem duas raízes no semi-plano direito do plano s. Resolvendo a equação, nós temos quatro raízes: $s = -1.0055 \pm j0.93311$ e $s = 0.7555 \pm j1.4444$, o que comprova que a equação possui duas raízes no semi-plano direito.

5.5.3 Casos especiais do Critério de Routh

Dependendo dos coeficientes da equação, as seguintes dificuldades podem impedir que a tabela de Routh complete corretamente:

1. o primeiro elemento em uma das linhas da tabela é zero, mas os outros não são;
2. os elementos de uma linha são todos zero.

No primeiro caso, se o zero aparecer no primeiro elemento de uma linha, os elementos da próxima linha tenderão ao infinito, e a tabela de Routh não poderá continuar. Para contornar a situação, substituímos o zero na primeira coluna por um número arbitrário positivo pequeno ε, e continuamos com a tabela de Routh. O exemplo seguinte ilustra esse problema.

Exemplo 5.3

Considere a equação característica de um sistema linear

$$s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0 \qquad 5.30$$

Como todos os componentes são diferentes de zero e têm o mesmo sinal, é necessário aplicar o critério de Routh-Hurwitz. A tabela de Routh é realizada como a seguir:

$$\begin{array}{c|c|cc} s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & 0 & 3 & \end{array}$$

Como o primeiro termo da linha de s^2 é zero, os elementos na linha de s^1 seriam todos infinitos. Para superar essa dificuldade, substituímos o zero em s^2 por número positivo pequeno ε e continuamos com a tabela. Começando com a linha de s^2, fica:

$$\begin{array}{c|c|c} s^2 & \varepsilon & 3 \\ s^1 & \dfrac{2\varepsilon - 3}{\varepsilon} \cong -\dfrac{3}{\varepsilon} & 0 \\ s^0 & \varepsilon & 0 \end{array}$$

Como ocorrem duas trocas de sinais na primeira coluna da tabela, a equação tem duas raízes no semi-plano direito do plano s. Resolvendo a equação, temos: s = -0.09057 ± j0.902 e s = 0.4057 ± j1.2928. Como poder ser observado, as duas últimas raízes estão no semi-plano direito do plano s.

Deve-se notar que o método ε descrito pode não dar resultados corretos se a equação tem raízes imaginárias puras.

No segundo caso especial, quando todos os elementos de uma linha da tabela de Routh forem zero antes da tabela acabar, isso indica que uma ou mais das seguintes condições existem:

1. a equação tem no mínimo um par de raízes reais de mesmo módulo mas de sinais opostos;
2. a equação tem uma ou mais pares de raízes imaginárias;
3. a equação tem pares de raízes complexas simétricas em relação à origem do plano s (por exemplo, $-1 \pm j1$, $1 \pm j1$).

A situação de uma linha inteira de zeros pode ser superada usando um **polinômio auxiliar** A(s), que é formado a partir dos coeficientes da linha logo acima da linha de zeros na tabela. **As raízes do polinômio auxiliar também satisfazem a equação polinomial original**. Assim, resolvendo a equação auxiliar, também descobrimos algo sobre as raízes da equação original. Para continuar com a tabela de Routh quando uma linha de zeros aparece, seguimos os seguintes passos:

1. formar a equação auxiliar A(s) = 0 usando os coeficientes da linha logo acima da linha de zeros;
2. determinar a derivada da equação auxiliar com relação a s, obtendo dA(s)/ds = 0;
3. substituir a linha de zeros com os coeficientes de dA(s)/ds = 0;
4. continue com a tabela da maneira usual com a nova linha formada;

Exemplo 5.4

Considere a seguinte equação

$$s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 = 0 \qquad 5.31$$

A tabela de Routh é

s^5	1	8	7
s^4	4	8	4
s^3	6	6	0
s^2	4	4	
s^1	0	0	

Como uma linha de zeros aparece prematuramente, formamos a equação auxiliar usando os coeficientes da linha de s^2:

$$A(s) = 4s^2 + 4 = 0 \qquad 5.32$$

A derivada de A(s) em relação a s é

$$\frac{dA(s)}{ds} = 8s = 0 \qquad 5.33$$

Substituímos os zeros da linha de s^1 da tabela original pelos coeficientes 8 e 0. O restante da tabela fica

s^1	8	0
s^0	4	

Como não há troca de sinais na primeira coluna da tabela inteira, a equação original não tem nenhuma raiz no semi-plano direito do plano s. Resolvendo a equação auxiliar, temos duas raízes: s = j e s = -j, que também são duas raízes da equação original. Assim, a equação tem duas raízes sobre o eixo imaginário, jω, e o sistema é marginalmente estável. Essa linha nula na tabela de Routh deve-se a essas raízes imaginárias.

Desde que todos os zeros ocorram em uma linha que corresponda a potências ímpares de s e crie uma equação auxiliar que tem somente potências ímpares de s, as raízes da equação auxiliar estarão sobre eixo imaginário, jω. Em questões de projeto, podemos usar a condição de linha nula para achar o valor marginal de um parâmetro para a estabilidade do sistema. O seguinte exemplo ilustra o real valor do critério de Routh-Hurwtiz em um problema simples de projeto.

Exemplo 5.5

Considere a equação característica do sistema de controle de terceira ordem

$$s^3 + 3408.3s^2 + 1204000s + 1.5x10^7 K = 0 \qquad 5.34$$

O Critério de Routh-Hurwitz é melhor empregado para determinar o valor crítico de K para estabilidade, ou seja, o valor de K para que pelo menos uma raiz esteja sobre o eixo imaginário e nenhuma no semi-plano direito do plano s. A tabela de Routh da equação fica

$$\begin{array}{lcc}
s^3 & 1 & 1204000 \\
s^2 & 3408.3 & 1.5x10^7 K \\
s^1 & \dfrac{410.36x10^7 - 1.5x10^7 K}{3408.3} & 0 \\
s^0 & 1.5x10^7 K &
\end{array}$$

Para o sistema ser estável, todas as raízes da equação característica devem estar no semi-plano esquerdo do plano s, e assim todos os coeficientes da primeira coluna da tabela de Routh devem ter o mesmo sinal. Isso gera a seguinte condição:

$$\frac{410.36x10^7 - 1.5x10^7 K}{3408.3} > 0 \qquad 5.35$$

e

$$1.5x10^{7}K > 0 \quad 5.36$$

A partir da primeira inequação, K < 273.57, e pela segunda K > 0. Consequentemente, a condição de K para sistema ser estável é

$$0 < K < 273.57 \quad 5.37$$

Se K = 273.57, a equação característica terá duas raízes no eixo imaginário, jω. Para obter essas raízes, substituímos K = 273.57 na equação auxiliar, que é obtida a partir da tabela de Routh usando os coeficientes da linha de s^2. Assim

$$A(s) = 3408.3s^{3} + 4.1036x10^{9} = 0 \quad 5.38$$

Que possui as seguintes raízes, s = j1097.27 e s = - j1097.27. Se o sistema for operado com K = 273.57, a resposta para entrada nula será uma senóide não amortecida com freqüência de 1097.27 rad/s.

Exemplo 5.6

Como um outro exemplo de projeto usando o critério de Routh-Hurwitz, considere que a equação característica de um sistema de controle de malha fechada é

$$s^{3} + 3Ks^{2} + (K+2)s + 4 = 0 \quad 5.39$$

É necessário achar os valores para K que tornem o sistema estável. A tabela de Routh é

$$\begin{array}{lcc}
s^{3} & 1 & K+2 \\
s^{2} & 3K & 4 \\
s^{1} & \dfrac{3K(K+2)-4}{3K} & 0 \\
s^{0} & 4 &
\end{array}$$

A partir da linha de s^2, a condição para estabilidade é K > 0, e a partir da linha de s^1, a condição para estabilidade é

$$3K^2 + 6K - 4 > 0 \qquad 5.40$$

ou

K < -2.528 ou K > 0.528.

Quando comparamos as condições de K > 0 e K > 0.528, é visível que a última condição é mais estrita. Assim, para o sistema de malha fechada ser estável, K deve satisfazer a condição K > 0.528.

A condição de K < -2.528 é desconsiderada já que K não pode ser negativo.

É interessante ressaltar que o critério de Routh-Hurwitz é válido somente se a equação característica é algébrica com coeficientes reais. Se qualquer um dos coeficientes for complexo, ou a equação for não algébrica, como contendo funções exponenciais, o critério de Routh-Hurwitz simplesmente não pode ser aplicado.

Outra limitação do critério de Routh-Hurwitz é que é valido somente para determinação da localização das raízes da equação característica com relação ao semi-plano esquerdo ou semi-plano direito do plano s. O limite da estabilidade é o eixo imaginário, jω do plano s. O critério não pode ser aplicado em nenhum outro limite de estabilidade no plano complexo, como por exemplo, o círculo unitário no plano z, que é o limite de estabilidade de sistemas discretos.

5.6 ESTABILIDADE DE SISTEMAS DISCRETOS

As definições de estabilidade de entrada-zero e BIBO podem ser diretamente estendidas a sistemas de controle discretos monovariáveis lineares invariantes no tempo.

5.6.1 Estabilidade BIBO

Considere u(kT), y(kT) e g(kT) como entrada, saída e resposta ao impulso discreto de um sistema discreto monovariável linear invariante no tempo, respectivamente. Com condições iniciais nulas, o sistema é considerado BIBO estável, ou simplesmente estável, se a sua resposta de saída y(kT) é limitada a uma entrada limitada u(kT). Assim como em 5.1, podemos mostrar que para o sistema se BIBO estável, a seguinte condição precisa ser válida:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| g(kT) \right| < \infty \qquad 5.41$$

5.6.2 Estabilidade de Entrada-Zero

Para estabilidade de entrada zero, a seqüência do sistema precisa satisfazer as seguintes condições:

1. $\left| y(kT) \right| \le M < \infty$ 5.42

e

2. $\lim_{k \to \infty} \left| \mathrm{y(kT)} \right| = 0$ 5.43

De modo que a estabilidade possa ser referenciada como estabilidade assintótica. Podemos mostrar que as estabilidades BIBO e assintótica de sistema discretos requerem que as raízes da equação característica estejam localizadas dentro do círculo unitário $|z| = 1$ no plano z. Isto não é surpreendente, visto que o eixo $j\omega$ do plano s é mapeado sobre o círculo unitário no plano z. As regiões de estabilidade e instabilidade para sistemas discretos no plano-z são mostradas na Figura 5.2.

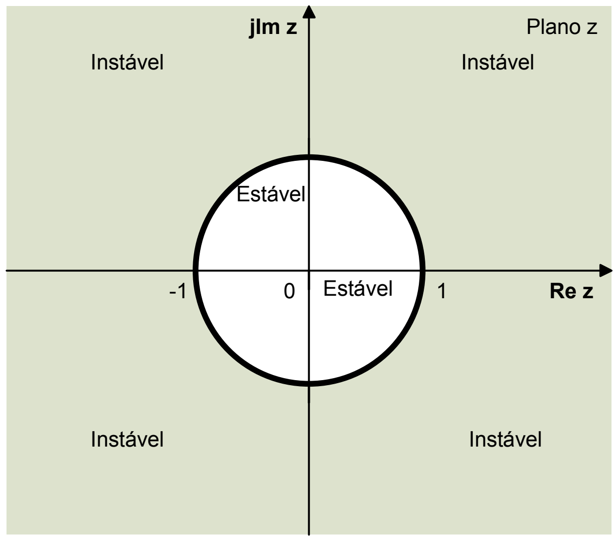

Figura 5.2. Regiões de estabilidade e instabilidade para sistemas discretos no plano-z

Considerando-se as raízes da equação característica de sistemas discretos monovariáveis lineares invariantes no tempo como sendo z_i, i=1, 2, ..., n. As condições de estabilidade do sistema estão resumidas na tabela 5.2 com relação a raízes da equação característica:

Tabela 5.2. Condições de estabilidade de sistemas discretos monovariáveis lineares invariantes no tempo.

Condição de Estabilidade	**Valores das Raízes**
Estável	$\lvert z_i \rvert < 1$ para i=1, 2, ..., n
Marginalmente Estável	$\lvert z_i \rvert = 1$ para qualquer i para raízes simples, e nenhum $\lvert z_i \rvert > 1$ para i=1, 2, ..., n.
Instável	$\lvert z_i \rvert > 1$ para qualquer i, ou $\lvert z_i \rvert = 1$ para qualquer raiz de múltipla ordem. i=1, 2, ..., n

Exemplo 5.7 Tipos de sistemas discretos

$$M(z) = \frac{5z}{(z-0.2)(z-0.8)}$$ Sistema estável

$$M(z) = \frac{5z}{(z+1.2)(z-0.8)}$$ Sistema instável devido ao pólo z = -1.2

$$M(z) = \frac{5(z+1)}{z(z-1)(z-0.8)}$$ Sistema marginalmente estável (z = 1)

$$M(z) = \frac{5(z+1.2)}{z^2(z+1)^2(z+0.1)}$$ Sistema instável devido aos pólos duplos z = -1

5.7 TESTES DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DISCRETOS

5.7.1 Método de Transformação Bilinear

Pode-se aplicar o critério de Routh-Hurwitz para sistemas discretos se fizermos a transformação do círculo unitário do plano-z para o eixo imaginário de um outro plano complexo. Utilizaremos a transformação-r:

$$z = \frac{1+r}{1-r} \qquad 5.45$$

Exemplo 5.8

Considere que a equação característica de um sistema de controle discreto é

$$z^3 + 5.94z^2 + 7.7z - 0.368 = 0 \qquad 5.52$$

Substituindo a equação 5.45 na equação 5.52 e simplificando, temos:

$$3.128r^3 - 11.74r^2 + 2.344r + 14.27 = 0 \qquad 5.53$$

A tabulação de Routh desta última equação é:

r^3	3.128	2.344
r^2	-11.74	14.27
r^1	6.146	0
r^0	14.27	

Visto que existem duas mudanças de sinais na primeira coluna da tabulação, a equação 5.53 tem duas raízes do lado direito do plano r. Isto significa que a equação 5.52 tem duas raízes fora do círculo unitário no plano-z. Este resultado pode ser checado pela solução dessas duas equação para z e r. Para a equação 5.52, as raízes são: z = -2, z = -3.984 e z = 0.0461. As três raízes correspondentes no plano-r são r = 3.0, r = 1.67 e r = -0.9117, respectivamente.

Exemplo 5.9

Vamos considerar um projeto usando a transformação bilinear e o critério de Routh-Hurwitz. A equação característica de um sistema de controle discreto é dado por:

$$F(z) = z^3 + z^2 + z + K = 0 \qquad 5.54$$

onde K é uma constate real. O problema é encontrar a faixa de K tal que o sistema seja estável. Faremos a transformação F(z) para uma equação em r usando a transformação bilinear, equação 5.45. O resultado é:

$$(1-K)r^3 + (1+3K)r^2 + 3(1-K)r + 3 + K = 0 \qquad 5.55$$

Tabulação de Routh desta última equação é:

r^3	1-K	3(1-K)
r^2	1+3K	3+K
r^1	$\frac{8K(1-K)}{1+3K}$	0
r^0	3+K	

Para o sistema ser estável, os termos da primeira coluna precisam ter o mesmo sinal. Para tanto, temos as seguintes condições:

1-K > 0   1+3K > 0   K > 0   3+K > 0

Para a garantia destas últimas inequações, K precisa ser conforme a inequação 5.56:

$$0 < K < 1 \qquad 5.56$$

5.7.2 Critério de Estabilidade de Jury

Sendo todos os coeficientes da equação característica conhecidos, podemos utilizar as condições necessárias de Jury para determinação através de inspeção se o sistema é instável.

Considerando a seguinte equação característica de um sistema discreto linear invariante no tempo

$$F(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \qquad 5.57$$

onde todos os coeficientes são reais. Para que F(z) não tenha raízes sobre e fora do círculo unitário é preciso que F(z) obedeça as seguintes **condições necessárias**:

$F(1) > 0$

$F(-1) > 0$, se n par 5.58

$F(-1) < 0$, se n ímpar

$|a_0| < a_n$

Se a equação violar alguma dessas condições, nem todas as raízes estarão dentro do círculo unitário e o sistema não será estável.

Exemplo 5.10

Considerando a equação:

$$F(z) = z^3 + z^2 + 0.5z + 0.25 = 0 \quad 5.59$$

Aplicando as condições de Jury, temos:

$F(1) = 2.75 > 0$; n=3 $F(-1) = -0.25 < 0$; $|a_0| = 0.25 < a_3 = 1$.

Como visto, as condições de Jury foram satisfeitas, mas não é suficiente para afirmar que o sistema é estável. Para verificação da estabilidade, é necessário utilizar a aproximação bilinear.

Exemplo 5.11

Considerando a equação:

$$F(z) = z^3 + z^2 + 0.5z + 1.25 = 0 \quad 5.60$$

Aplicando as condições de Jury, temos:

$F(1) = 3.75 > 0$; n=3 $F(-1) = 0.75 > 0$ (não atende); $|a_0| = 1.25 < a_3 = 1$ (não atende).

Como as condições de Jury não foram satisfeitas, é possível afirmar que pelo menos uma raiz está fora do circulo unitário, ou seja, o sistema é instável.

Sistemas de Segunda Ordem

Para sistemas de **segunda ordem**, o critério de Jury se torna, além de necessário, **suficiente**.

$$F(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \qquad 5.61$$

$$F(1) > 0$$

$$F(-1) > 0 \qquad 5.62$$

$$|a_0| < a_2$$

Exemplo 5.12

Considerando a equação:

$$F(z) = z^2 + z + 0.25 = 0 \qquad 5.63$$

Aplicando as condições de Jury para sistema de segunda ordem, temos:

$F(1) = 2.25 > 0$; $F(-1) = 0.25 > 0$; $|a_0| = 0.25 < a_2 = 1$.

Como as condições de Jury foram satisfeitas e o sistema é de segunda ordem é possível afirmar que o sistema é estável.

5.8 REVISÃO

Neste capítulo são apresentadas as definições de estabilidade BIBO e entrada-zero (assintótica) para sistemas monovariáveis lineares invariantes no tempo. Vimos que a condição de estabilidade está relacionada diretamente a raízes da equação característica. Para um sistema contínuo ser estável, as raízes da equação característica precisam estar todas localizadas no lado esquerdo do plano s. Para um sistema discreto ser estável, as raízes da equação característica precisam estar todas dentro do círculo unitário $|z| < 1$ no plano z.

As condições necessárias e suficientes para F(s) ter todos os seus zeros no lado esquerdo do plano s podem ser verificadas pelo critério de Routh-Hurwitz.

Para sistema discretos, os zeros da equação característica F(z) precisam ser verificados em relação ao círculo unitário. Por isso o critério de Routh-Hurwitz não pode ser aplicado diretamente a esta situação. Para utilização do Routh-Hurwitz, no caso discreto, é necessário fazer a transformação bilinear. Além dessa alternativa, podemos utilizar os testes de Jury para verificar a priori se o sistema é instável. No caso de sistemas discretos de 2ª ordem, a garantia dos testes de Jury é suficiente para a estabilidade do sistema.