Coleção de Provas

Disciplina: Álgebra Linear I
Curso: Matemática
Período: 2011/1
Prova: P1
Professor: Ana Claudia

1. (a) Mostre que $W = \{p(X) \in P^3 | 1$ é raiz de p(X)$\}$ é um subespaço vetorial de P^3

   (b) Mostre que se $T : V \to W$ é uma transformação linear injetora e $v_1, ..., v_n$ são vetores LI de V, então $T(v_1), ..., T(v_n)$ são vetores LI de W.

2. Seja $W = \{(a - c + 3d, a + 2b + c + 3d, a + b - c + 4d, -a + 2b) | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

   (a) Determine uma base para W.

   (b) Complete a base obtida em (a) até uma base de $\mathbb{R}^4$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por

$$T(x, y, z, w) = (-x + y + z + w, -x + y + z, -2x + 2y + 2z - w)$$

   (a) Determine as dimensões de $Ker(T)$ e $IM(T)$.

   (b) Determine $[T]^{\beta}_{\alpha}$, onde $\beta = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 0)\}$ é base de $\mathbb{R}^4$, e α é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que consiste na reflexão pelo plano de equação $x + 2y - z = 0$.

   (a) Determine uma base β de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   (b) Determine $T(x, y, z)$.

[Questão 1 - Solução]

a) Para Verificar se W é um subespaço vetorial de P^3 precisamos verificar se as seguintes propriedades são satisfeitas

i) $0 \in W$;

ii) Se $u, v \in W$ então $u + v \in W$;

iii) Se $v \in W$ então, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha v \in W$;

De fato, observe se 1 é raiz de $p(x)$ então $p(1) = 0$

i) $0 \in W$ pois para $p(x) \equiv 0$ então $p(1) = 0$

ii) Seja $H(x), Q(x) \in W$ vamos mostrar que $H(x) + Q(x) \in W$.

Se $H(x) \in W \Rightarrow H(1) = 0$ e se $Q(x) \in W \Rightarrow Q(1) = 0$ então temos que $H(x) + Q(x) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow H(x) + Q(x) \in W$

iii) Seja $Q(x) \in W$ queremos mostrar que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha Q(x) \in W$ mas temos que $Q(1) = 0 \Rightarrow \alpha Q(1) = 0 \Rightarrow \alpha Q(x) \in W$

Conclusão: como as três condições foram satisfeitas então W é subespaço vetorial de P^3

b) Se $T : V \to W$ é transformação linear injetora então pelo teorema

$$Ker(T) = \{0\}$$

Ou seja se $u \in V$ então $T(u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

Sabemos que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ são LI então

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = 0$$

com $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ só existe a solução trivial.

Para saber se $T(v_1) + ... + T(v_n)$ são LI precisamos resolver a seguinte equação.

$$b_1 T(v_1) + ... + b_n T(v_n) = 0$$

Onde $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$

Como T é uma transformação linear então usaremos as seguintes propriedades

$$T(b_1 v_1 + ... + b_n v_n) = 0$$

Como T é injetora

$$b_1 v_1 + ... + b_n v_n = 0$$

Mas como $v_1, v_2, ..., v_n$ são LI e portanto existe apenas a solução trivial logo $T(v_1), ..., T(v_n)$ são LI

[Questão 2 - Solução]

b) Seja $w_1 \in W$ um vetor de genérico de W então:

$w_1 = (a - c + 3d, a + 2b + c + 3d, a + b - c + 4d, -a + 2b)$

$w_1 = a(1, 1, 1, -1) + b(0, 2, 1, 2) + c(-1, 1, 1, 0) + d(3, 3, 4, 0)$

Podemos concluir que os vetores $\{(1,1,1,-1),(0,2,1,2),(-1,1,-1,0),(3,3,4,0)\}$ geram o subespaço W para ser base precisamos ver se os vetores são LI.

$$a_1(1,1,1,-1)+a_2(0,2,1,2)+a_3(-1,1,-1,0)+a_4(3,3,4,0)=0$$

logo

$$\begin{cases} a_1+0a_2-a_3+3a_4=0 \\ a_1+2a_2+a_3+3a_4=0 \\ a_1+2a_2-a_3+4a_4=0 \\ -a_1+2a_2+0a_3+0a_4=0 \end{cases}$$

Escrevendo como matriz temos

$$(*)\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}=0$$

Fazendo as operações com matrizes elementares na primeira matriz chegaremos na seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que $l_3=2l_4$ logo existem infinitas soluções ou seja existem soluções não triviais logo os vetores são LD. Então algum vetor é combinação de outros e os "suspeitos"são l_3 ou l_4

$(3,3,4,0)=b_1(1,1,1,-1)+b_2(0,2,1,2)+b_3(-1,1,-1,0)$

$(3,3,4,0)=(b_1-b_3,b_1+2b_2+b_3,b_1+b_2-b_3,-b_1+2b_2)$

$$\begin{cases} b_1-b_3=3 \\ b_1+2b_2=3 \\ b_1+b_2-b_3=4 \\ 2b_2-b_1=0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $b_1=\dfrac{3}{2}, b_2=\dfrac{3}{4}, b_3\dfrac{-7}{4}$

Logo o vetor $(3,3,4,0)$ é combinação linear dos outros vetores.
Temos que $U\{(1,1,1,-1),(0,2,1,2),(-1,1,-1,0)\}$ geram o subespaço W e esses vetores são LI pois na matriz $(*)$ só obtivemos uma variavel livre.

Conclusão: U é base de W

b) Para completarmos um vetor para formar uma base de $\mathbb{R}^4$, precisamos de quatro vetores LI pois como $dim\mathbb{R}^4=4$, pelo teorema esses vetores formam uma base de $\mathbb{R}^4$. Seja $v\in\mathbb{R}^4$, onde v é combinação dos outros vetores, então:

$$v=a(1,1,1,-1)+b(0,2,1,2)+c(-1,1,-1,0)(*)$$

Ou seja $v=(a-c,a+2b+c,a+b-c,-a+2b)$

Precisamos de um vetor que não satisfaça as condições acima seja $u\in\mathbb{R}^4$ com $u=(0,0,1,0)$ e observe que o vetor u não satisfaz $(*)$, ou seja o vetor u é LI com os outros vetores logo

$\{(1,1,1,-1),(0,2,1,2),(-1,1,-1,0),(0,0,1,0)\}$ formam uma base de $\mathbb{R}^4$

[Questão 3 - Solução]

a) $T(x,y,z,w) = (-x+y+zw, -x+y+z, -2x+2y+2z-w), ker(T) = \{(x,y,z,w)\mathbb{R}^4; T(x,y,z,w) = 0\}$

$$\begin{cases} -x+y+z+w = 0 \\ -x+y+z = 0 \\ -2x+2y+2z-w = 0 \end{cases}$$

Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = 0$$

Fazendo o escalonamento

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que temos uma linha nula logo o posto da matriz é 2 e a nulidade é 1. Pelo teorema podemos concluir que

$$dim\ ker(T) = 1 \qquad dim\ Im(T) = 2$$

b) Vamos calcular $[T]_\alpha^\beta$ primeiro temos que aplicar T em β e escrever como combinação linear de α e essa combinação é vetor coluna

$T(1,1,0,0) = (0,0,0)$
$T(1,0,1,0) = (0,0,0)$
$T(0,1,0,1) = (2,1,1)$
$T(0,1,0,0) = (1,1,2)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

[Questão 4 - Solução]

a) Como a Transformação T trata-se de uma reflexão sobre um plano então precisamos de dois vetores LI que geram o plano e um vetor perpendicular ao plano, no caso podemos tomar um vetor normal, temos que:

$T(v_1) = v_1$ $T(v_2) = v_2$ $T(v_3) = -v_3$, então podemos tomar $v_1 = (1,0,1)$ $v_2 = (0,1,2)$ $v_3 = (1,2,-1)$

Como são 3 vetores LI entaõ esse vetores geram $\mathbb{R}^3$ portanto $v_1 = (1,0,1)$ $v_2 = (0,1,2)$ $v_3 = (1,2,-1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$

b) $T(x,y,z) = T(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1)(*)$

Escrevendo os vetores da base canônica na forma da base encontrada na letra **a** temos:

$(1,0,0) = \frac{5}{6}(1,0,1) - \frac{1}{3}(0,1,2) + \frac{1}{6}(1,2,-1)$

$(0,1,0) = -\frac{1}{3}(1,0,1) + \frac{1}{3}(0,1,2) + \frac{1}{3}(0,1,2)$

$(0,0,1) = \frac{1}{6}(1,0,1) + \frac{1}{3}(0,1,2) + \frac{-1}{6}(0,1,2)$

substituindo em $(*)$ temos:

$T(x,y,z) = (\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z, \frac{-2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z, \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z)$