EXERCÍCIOS RECOMENDADOS SEMANA-3

NÍVEL 2

23ª) Em vez de definir a temperatura θ como uma função linear de uma certa propriedade física X, podemos definir a temperatura θ' como uma função logarítmica da forma:

$$\theta' = a\ln(X) + b,$$

ondea e b são constantes. Suponha $\theta' = 0°$ no ponto de gelo e $\theta' = 100°$ no ponto de vapor.

a) Mostre como se calcula a temperatura θ' para $\theta = 50°$.
b) Seja X o comprimento da coluna líquida de um termômetro de mercúrio. Tomemos como pontos de referência $X_G = 5\text{ cm}$ e $\theta'_G = 0°$, $X_V = 25\text{ cm}$ e $\theta'_V = 100°$. Calcule θ' para $\theta = 50°$.

Resposta: a) $\theta' = 100\dfrac{\ln\left(\frac{X_G + X_V}{2X_G}\right)}{\ln\left(\frac{X_V}{X_G}\right)}$. b) $68{,}3°$.

a) Seja X_G e X_V os valores da propriedade termométrica para os pontos de gelo e vapor, respectivamente.

$$\begin{cases} 0 = a \log_c X_G + b & (1) \\ 100 = a \log_c X_V + b & (2) \end{cases}$$

$$(2)-(1) \Rightarrow 100 = a \log_c\left(\frac{X_V}{X_G}\right)$$

$$a = \frac{100}{\log_c(X_V/X_G)} \quad (3)$$

$$(3) \rightarrow (1)$$

$$b = -100 \frac{\log_c(X_G)}{\log_c(X_V/X_G)}$$

$$\theta' = \frac{100}{\log_c(X_V/X_G)} \log_c(X) - 100 \frac{\log_c(X_G)}{\log_c(X_V/X_G)}$$

$$\boxed{\theta' = 100 \left[\frac{\log_c(X) - \log_c(X_G)}{\log_c(X_V/X_G)}\right]}$$

Para $\theta = 50°C$ escala linear

$$\theta = a_L X + b_L$$

$$\begin{cases} 0 = a_L X_G + b_L \\ 100 = a_L X_V + b_L \end{cases}$$

$$a_L = \frac{100}{(X_V - X_G)} \rightarrow b_L = -\frac{100 X_G}{(X_V - X_G)}$$

$$\theta = 100 \frac{(X - X_G)}{(X_V - X_G)}$$

$$50° = 100 \frac{(X_{50} - X_G)}{(X_V - X_G)} \rightarrow X_V - X_G = 2X_{50} - 2X_G$$

$$X_{50} = \frac{X_V + X_G}{2}$$

$$\theta' = 100 \left[\frac{\log_c\left(\frac{X_V + X_G}{2}\right) - \log_c(X_G)}{\log_c(X_V/X_G)}\right]$$

$$\theta' = 100 \log_c\left(\frac{X_V + X_G}{2 X_G}\right) \Big/ \log_c(X_V/X_G)$$

$$\boxed{\theta' = 100 \frac{\log_c\left(\frac{X_V + X_G}{2 X_G}\right)}{\log_c\left(\frac{X_V}{X_G}\right)}}$$

b) $$\theta' = 100 \frac{\log_c\left(\frac{5+25}{2 \cdot 5}\right)}{\log_c\left(\frac{25}{5}\right)} = 100 \frac{\log_c(3)}{\log_c(5)}$$

$$\boxed{\theta' = 68{,}3°}$$

24ª) O comprimento da coluna de mercúrio em certo termômetro de mercúrio-em-vidro é de 5,00 cm, quando o termômetro está em contato com água em seu ponto tríplice. Considere o comprimento da coluna de mercúrio como a propriedade termométrica X e seja θ a temperatura empírica determinada pelo termômetro.

a) Calcule a temperatura empírica medida quando o comprimento da coluna de mercúrio é 6,00 cm. Considere a temperatura do ponto tríplice como igual a $273{,}16^0$.
b) Se X pode ser medido com precisão de 0,01 cm, este termômetro pode ser usado para distinguir o ponto de gelo e o ponto tríplice?

Resposta: a) 328°. b) Não.

$$\theta = 273{,}16 \frac{X}{X_{Tr}},$$

$$\theta = 273{,}16 \left(\frac{X}{5{,}00}\right)$$

a)

$$\theta = 273{,}16 \left(\frac{6{,}00}{5{,}00}\right) = 327{,}79$$

$$\boxed{\theta = 328^0}$$

b)

$$d\theta = 273{,}16 \frac{dX}{5{,}00}$$

$$\Delta\theta = 273{,}16 \frac{\Delta X}{5{,}00}$$

$$\Delta\theta = 273{,}16 \cdot \frac{0{,}01}{5{,}00}$$

$$\Delta\theta_{MIN} = 0{,}55$$

A precisão na medida de temperatura é $\Delta\theta_{MIN} = 0{,}55 > (\theta_{Tr} - \theta_G)$. Ptt, Não é possível distinguir o ponto de gelo do ponto tríplice.

25ª) Observa-se que objetos quentes ou frios esfriam ou esquentam, respectivamente, para atingir a temperatura do ambiente. Se a diferença de temperatura ΔT entre o objeto e sua vizinhança $\left(\Delta T = T_{objeto} - T_{vizinhança}\right)$ não for grande, a taxa de resfriamento ou aquecimento do objeto será aproximadamente proporcional à diferença de temperatura, isto é,

$$\frac{d(\Delta T)}{dt} = -A\,\Delta T,$$

onde A é uma constante. O sinal menos aparece porque se ΔT for positivo, ele decresce com o tempo e, se for negativo, cresce. Esta relação é conhecida como Lei de Newton para o resfriamento.

a) De que fatores A depende? Quais as dimensões de A?
b) Se no instante $t = 0$ a diferença de temperatura for ΔT_0, mostre que num instante t ela será

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-At}.$$

Resposta: a) O resfriamento de um objeto ocorre por propagação de calor, portanto A depende dos mesmos fatores que influenciam na propagação do calor, tais como: a natureza da substância e da vizinhança, da temperatura ambiente, pressão, etc. A dimensão de A é $[\text{tempo}]^{-1}$.

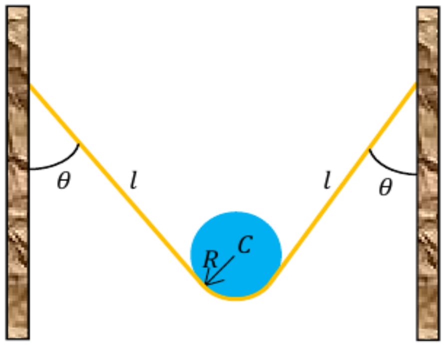
$$\frac{d(\Delta T)}{dt} = -A(\Delta T)$$

$$\int_{\Delta T_0}^{\Delta T} \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -\int_0^t A\,dt$$

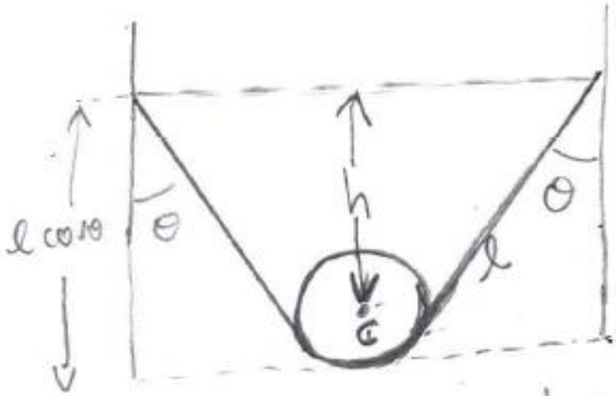
$$\ln\left(\frac{\Delta T}{\Delta T_0}\right) = -At$$

$$\boxed{\Delta T = \Delta T_0 e^{-At}}$$

26º) Um cilindro maciço de alumínio é suspenso por meio de uma cinta de aço flexível presa nas extremidades em dois pontos situados no mesmo nível, conforme indicado na figura. O eixo do cilindro não sofre nenhum deslocamento com as contrações ou expansões térmicas do cilindro e da cinta. O ângulo $\theta = 50°$ praticamente não é afetado por variações de temperatura. Calcule o raio do cilindro quando a temperatura é 290 K, sendo $l = 2{,}5$ m a essa temperatura. Despreze o peso da cinta.



Resposta: 77 cm.



$$h = l\cos\theta - R$$

$$dh = dl\cos\theta - dR$$

Para que o centro do cilindro não se desloque $dh = 0$, ptt

$$dl\cos\theta = dR$$

$$\alpha_{aço}\, l\cos\theta\, dT = \alpha_{Al} R\, dT$$

Valor de l para 290K, ptt do raio R a 290K

$$R = \frac{\alpha_{aço}\, l\cos\theta}{\alpha_{Al}} = \frac{11\cdot10^{-6}\cdot 2{,}5\cdot\cos 50°}{23\cdot10^{-6}}$$

$R = 0{,}77 m \Rightarrow \boxed{R = 77 cm}$

27º) Determine a taxa de variação com a temperatura do momento de inércia I de um corpo sólido.

Resposta: $\frac{dI}{dT} = 2\alpha I$.

O momento de inércia em relação a um eixo é dado por $I = \int r^2 dm$, onde r é a distância de um ponto do corpo ao eixo de rotação.

$$\frac{dI}{dT} = \frac{d}{dT}\int r^2 dm = \int \frac{d(r^2)}{dT} dm =$$

$$= \int 2r \frac{dr}{dT} dm = \int 2r \alpha r \, dm =$$

$$= 2\alpha \int r^2 dm = 2\alpha I$$

$$\boxed{\frac{dI}{dT} = 2\alpha I}$$

28º) Determine a variação com a temperatura do período de um pêndulo.

Resposta: $\Delta\Gamma = \frac{1}{2}\alpha \mathrm{T} \Delta T$.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$dT = \cancel{2}\pi \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{\sqrt{\ell/g}} \frac{1}{g} d\ell$$

$$dT = \pi \sqrt{\frac{1}{\ell g}} \alpha \ell dT$$

$$\Delta T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \frac{1}{2} \alpha \Delta T$$

$$\boxed{\Delta T = \frac{1}{2} \alpha T \Delta T}$$

ou

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l+\Delta l}{g}}$$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{1+\frac{\Delta l}{l}}$$

Como $\Delta l \ll l$ então $\frac{\Delta l}{l} \ll 1$

e $T' \simeq 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l}\right)$

$$T' \simeq 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} + 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{1}{2}\alpha\Delta T$$

$$T' = T + \Delta T = T + \frac{1}{2}\alpha T \Delta T$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta T = \frac{1}{2}\alpha T \Delta T}$$