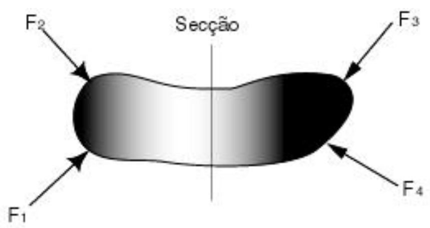
Aula 03 – Mecânica dos Sólidos - revisão

O estudo e aplicação da Mecânica dos Sólidos teve início com Galileu no início do Século XVII no estudo de carregamentos de vigas e eixos feitos com diversos materiais. Notável progresso foi observado no final do Século XIX pelos pesquisadores franceses (Saint –Vénant, Poisson, Lamé, Navier, Coulomb e Cauchy), com o estabelecimento de experimentos denominados Resistência dos Materiais, mecanismos dos corpos deformáveis e mecânica dos sólidos. Posterior avanço derivou na teoria da elasticidade e teoria da plasticidade.

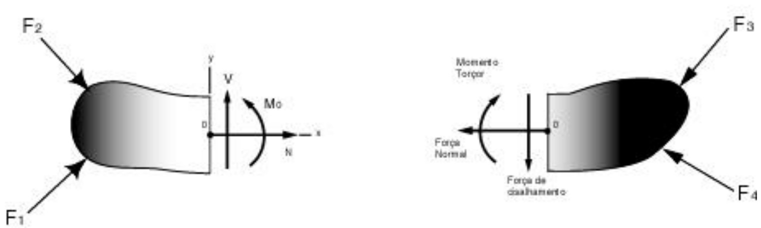
Equações de Equilíbrio

O equilíbrio de um corpo requer um ***balanço de forças*** que evite que o corpo translade ou tenha aceleração ao longo de um reta ou curva e o ***balanço de momentos*** para evitar que o corpo tenha translação.



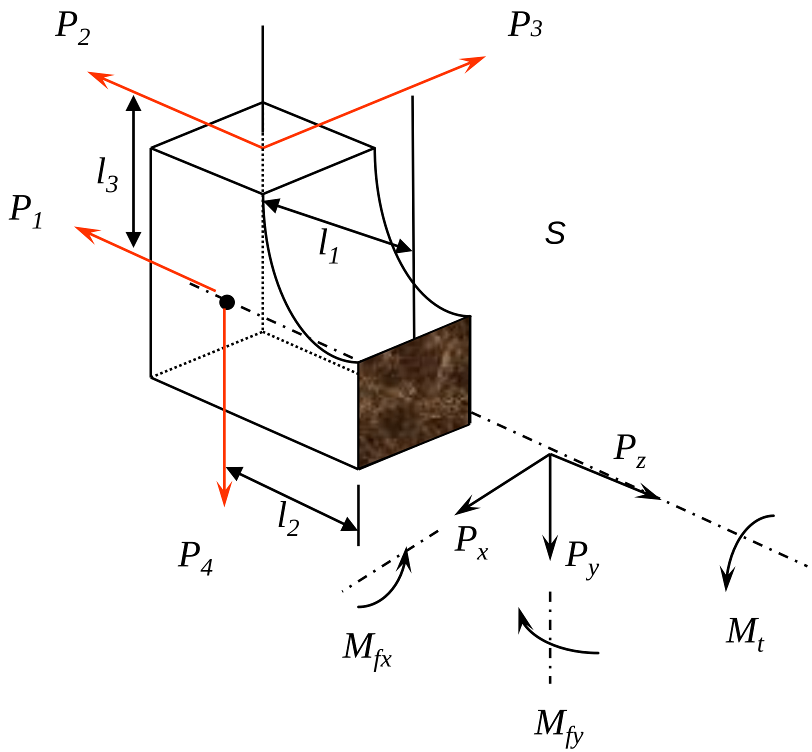
$$\Sigma F=0 \rightarrow \Sigma F_x=0; \Sigma F_y=0; \Sigma F_z=0$$

$$\Sigma M_0=0 \rightarrow \Sigma M_x=0; \Sigma M_y=0; \Sigma M_z=0$$



Na seção investigada o sistema de forças internas necessário para manter a parte isolada em equilíbrio consiste de uma força axial, de uma de cisalhamento, de um momento fletor e de um conjugado (torque)

3.1- Esforços solicitantes



P_z - Força normal

P_x , P_y - Forças cortantes

M_{fx}, M_{fy} – Momentos de flexão

M_t – Momento de torção

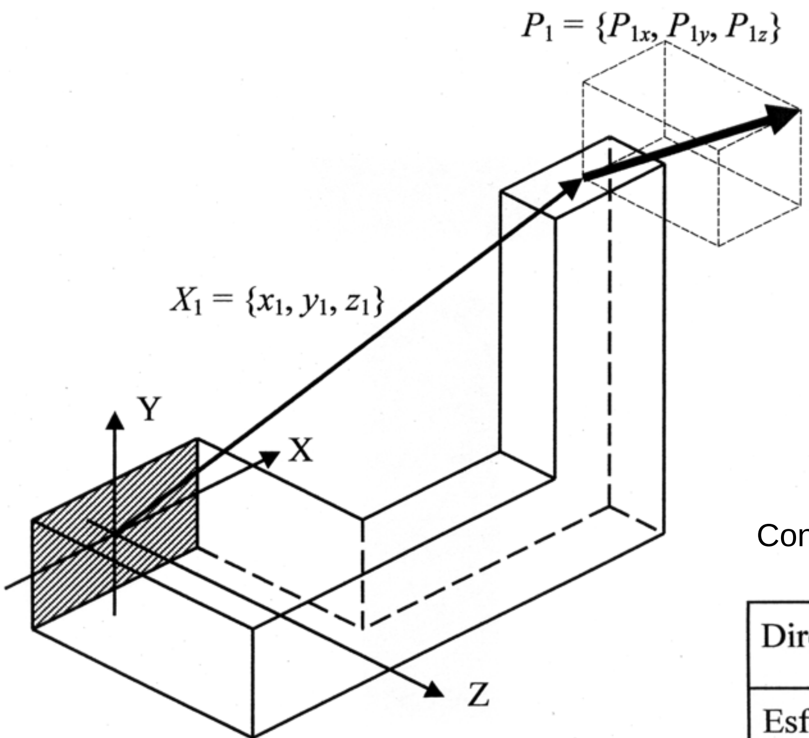
Condições de equilíbrio na seção *S*:

$$\begin{cases} P_x - P_3 = 0 \\ P_4 + P_y = 0 \\ P_z - P_1 - P_2 = 0 \end{cases}$$

$$M_{fx} + P_2 L_3 + P_4 L_2 = 0$$

$$M_{fy} + P_3 L_1 = 0$$

$$M_t - P_3 L_3 = 0$$



Condições de equilíbrio

Direção	X	Y	Z	θX	θY	θZ
Esforço	Q_x	Q_y	N_z	M_{fx}	M_{fy}	M_{tz}
P_{1x}	$+ P_{1x}$	-----	-----	-----	$+ P_{1x} . z_1$	$- P_{1x} . y_1$
P_{1y}	-----	$+ P_{1y}$	-----	$- P_{1y} . z_1$	-----	$+ P_{1y} . x_1$
P_{1z}	-----	-----	$+ P_{1z}$	$+ P_{1z} . y_1$	$- P_{1z} . x_1$	-----

3.2 - Reações vinculares - Diagramas M, N, Q

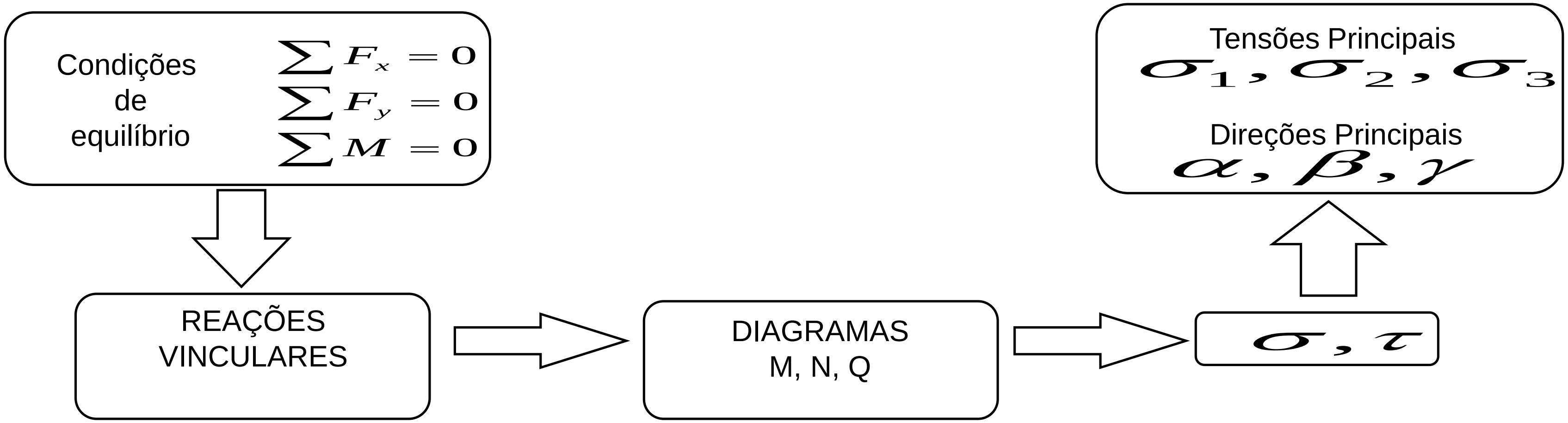
Determinação estática

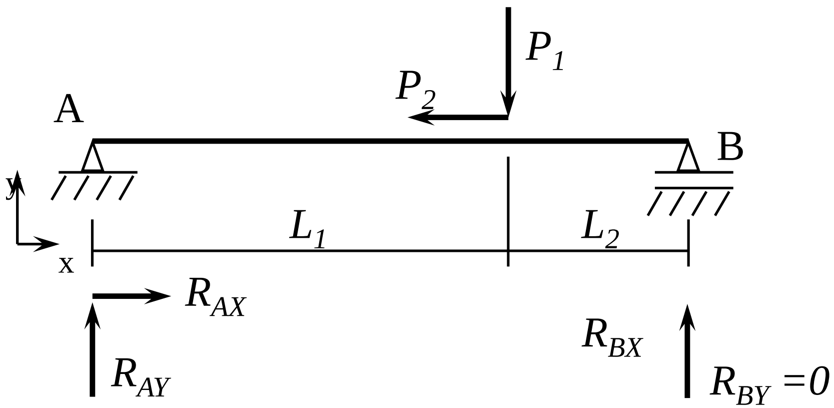
Sistemas elásticos
- Indeterminado(móvel) , hipostático
- Determinado , isostático
- Superdeterminado , hiperestático

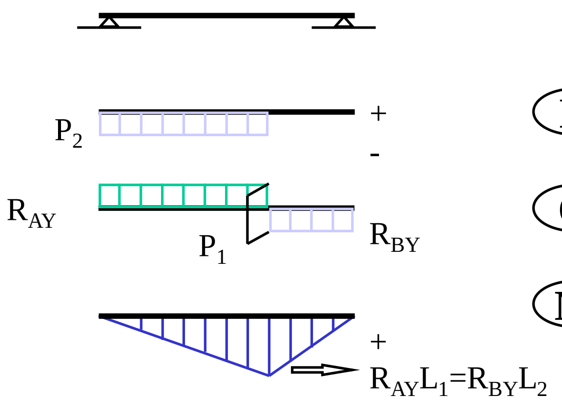
• Sistemas móveis : Não suportam carga

• Sistemas hiperestáticos : Cálculos mais difíceis
Uso de elementos finitos

Sistemas isostáticos : Normais







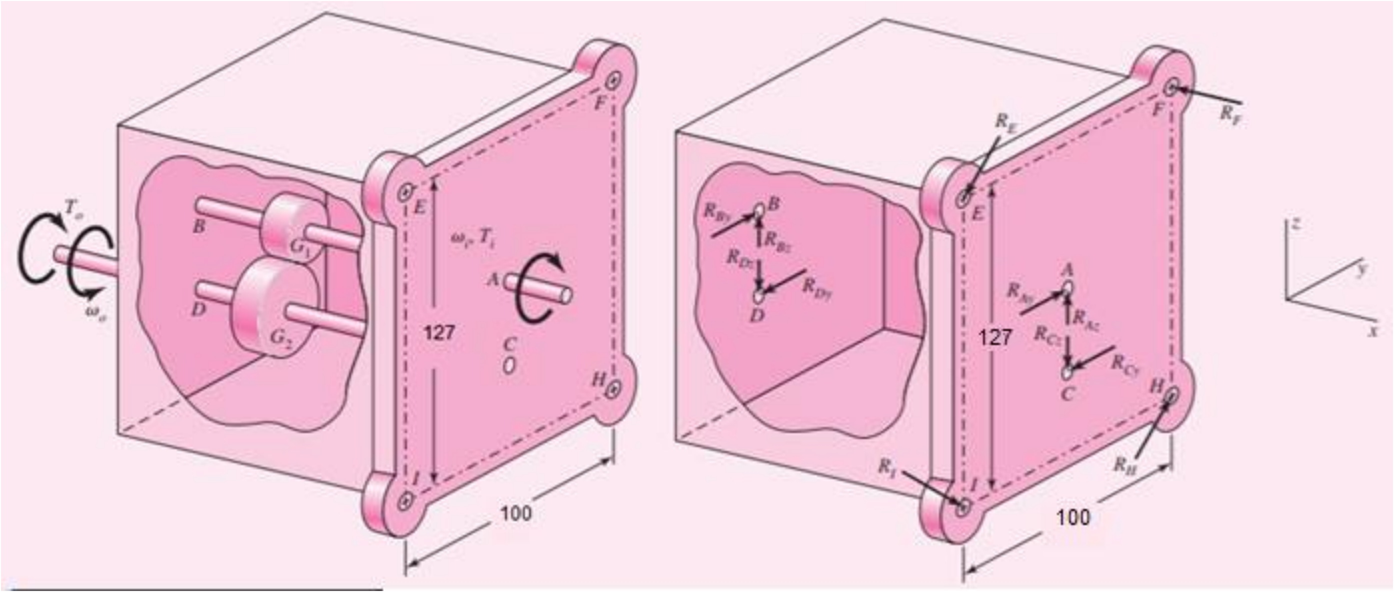
Convenção de sinal :

N { + tração; - compressão

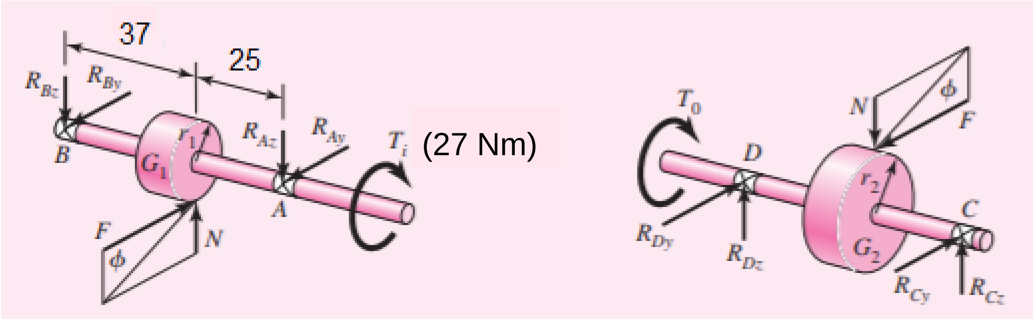
Q { + sentido horário; - sentido anti-horário

M { + tração no lado inferior (desenha-se diagrama do lado tracionado)

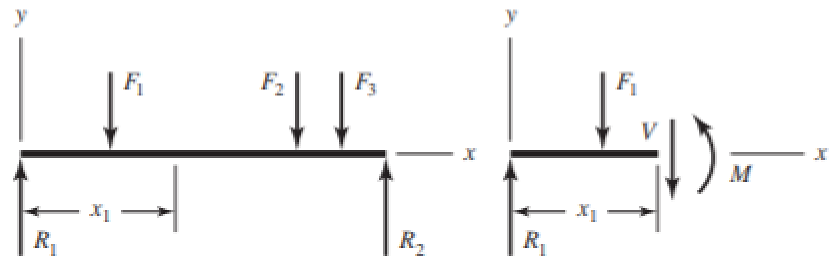
EXEMPLO



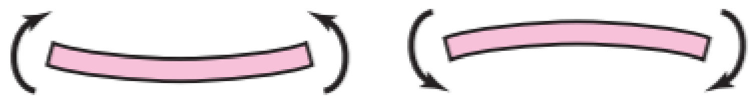
T_o
ω_o
B
D
G_1
G_2
E
F
ω_i, T_i
A
C
H
I
127
100
R_E
R_F
R_{By}
R_{Bz}
R_{Dz}
R_{Dy}
R_{Ay}
R_{Az}
R_{Cz}
R_{Cy}
R_I
R_H
z
y
x



37
25
R_{Bz}
R_{By}
B
G_1
r_1
R_{Az}
R_{Ay}
A
T_i (27 Nm)
F
ϕ
N
T_0
D
R_{Dy}
R_{Dz}
r_2
G_2
C
R_{Cy}
R_{Cz}



$$V = \frac{dM}{dx}$$



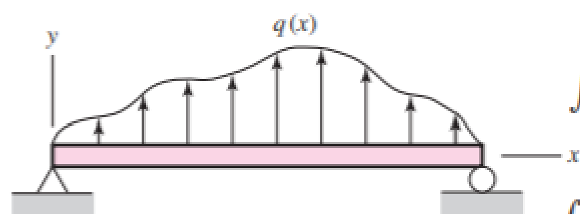
positivo

negativo

positivo

negativo

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = q$$

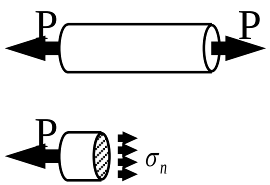


$$\int_{V_A}^{V_B} dV = V_B - V_A = \int_{x_A}^{x_B} q\, dx$$

$$\int_{M_A}^{M_B} dM = M_B - M_A = \int_{x_A}^{x_B} V\, dx$$

3.3- Tensão normal

Estado uniaxial de tensão



$$\boxed{\sigma_n = \frac{P}{S}}$$

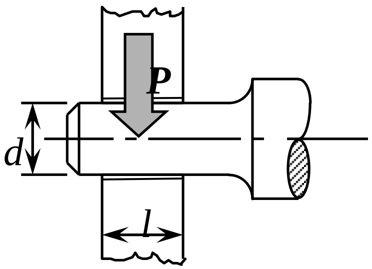
[N/m^2]
[MPa]

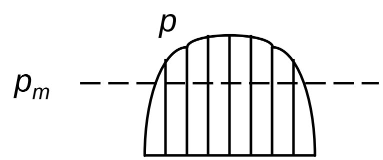
<u>Sistema de unidades</u>:

- Cuidado!
- Dê preferência ao S.I. (MKS)
- Pode-se usar unidades de maior sensibilidade para engenharia (Kgf/mm^2). Cuidado!

Grandeza	Nome	[mm]	[cm]	[m]
σ	Tensão	1 [Kgf/mm^2]	100 [Kgf/cm^2]	10 [MPa] 1[N/mm^2] = 1 [MPa]
$E_{aço}$	Módulo de elasticidade	2.10x10^4 [Kgf/mm^2]	2.10x10^6 [Kgf/cm^2]	2.10x10^5 [MPa]
$G_{aço}$	Módulo de elasticidade transversal	0.81x10^4 [Kgf/mm^2]	0.81x10^6 [Kgf/cm^2]	0.81x10^5 [MPa]
υ	Coeficinte de Poisson	0.3	0.3	0.3
$\rho_{aço}$	Densidade	7.85x10^{-3} [g/mm^3]	7.85 [g/cm^3]	7.85x10^3 [Kg/m^3]
g	Aceleração da gravidade	9810 [mm/s^2]	981 [cm/s^2]	9.81 [m/s^2]
M_t	Momento de torção	1[kgf.mm]	0,1 [kgf.cm]	0,01 [N.m]

3.4 - Tensão normal de contato entre 2 superfícies (pressão específica)

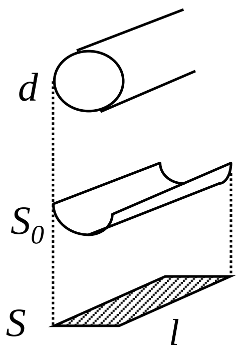


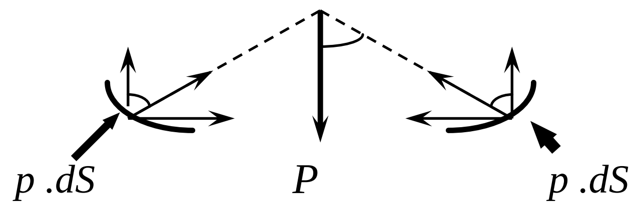


Distribuição
de Hertz

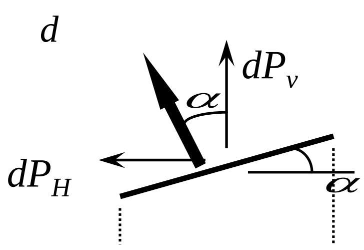
$$\boxed{p_m = \frac{P}{S}}$$

$$S = d \,.\, l$$





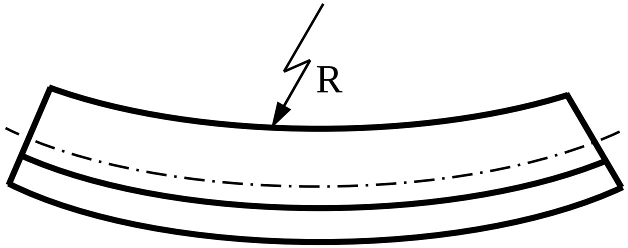
Componentes horizontais se anulam

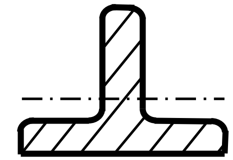


$$dP_v = (p.dS).\cos\alpha$$
$$dP_v = p.(dS.\cos\alpha)$$
$$P = \int_{S_0} p.\cos\alpha.dS = p_m.\int_S dS = p_m.S$$

dS . cosα = área projetada

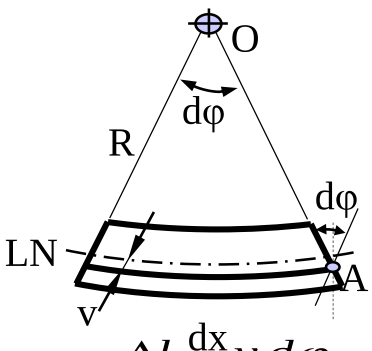
3.5 - Tensão normal oriunda de momento fletor

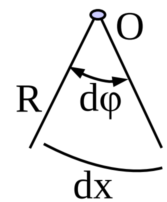


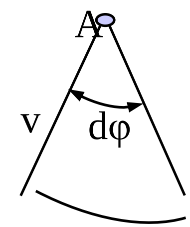


HIPÓTESES:

- Flexão pura (só Momento fletor)
- Secções planas permanecem planas após flexão
- Raio de curvatura *R* para cada ponto







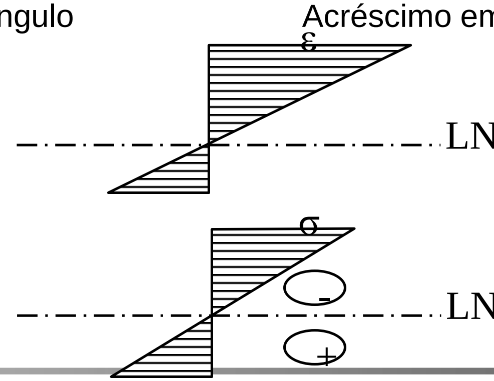
Arco = raio x ângulo

Acréscimo em dx

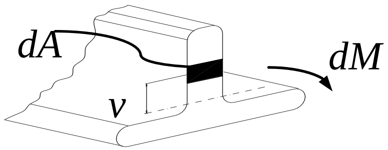
$$S = R.\theta$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{v.d\varphi}{dx} \qquad dx = R.d\varphi$$

$$\varepsilon = \frac{v}{R}\frac{d\varphi}{d\varphi} \quad \Rightarrow \quad \text{mas } \varepsilon = \frac{1}{R}v \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \propto v$$



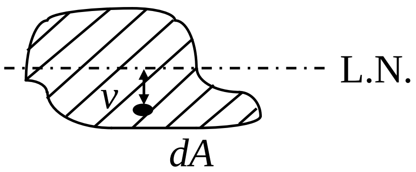
Lei de Hooke $\sigma = \mathrm{E}\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{R}E.v$



• Num elemento de área $\Rightarrow$ $dF = \sigma.dA$

• Não há força normal na secção devida à flexão $\Rightarrow$ $F = \int_S \sigma.dA = 0$

$$\int \frac{E.v}{R}.dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_S v.dA = 0$$



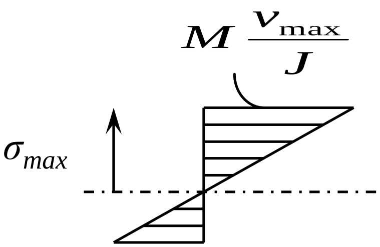
$\Rightarrow$ LN passa pelo CG na flexão simples

$$dF = \sigma.dA \quad \text{e} \quad dM = dF.v = v.\sigma.dA$$

$$M = \int_S v.\sigma.dA = \int_S v.\frac{E.v}{R}.dA = \frac{E}{R}.\underbrace{\int_S v^2.dA}_{J}$$

Segundo momento de área ou momento de inércia de área

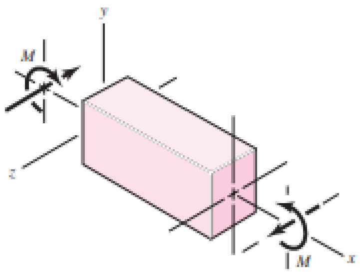
$$\sigma = \frac{1}{R}E.v \Longrightarrow \frac{E}{R} = \frac{\sigma}{v} \Longrightarrow M = \sigma.\frac{J}{v} \Longrightarrow \boxed{\sigma = M.\frac{v}{J}}$$

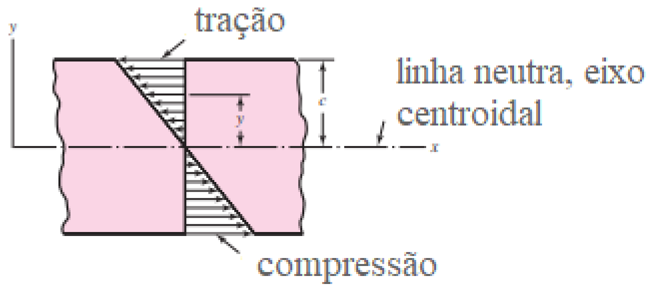


$\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_{max} = \dfrac{M}{W_f}}$ com $W_f = \dfrac{J}{v_{max}}$

W_f = Módulo de resistência à flexão

3.5 - Tensão normal oriunda de momento fletor





$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \qquad I = \int y^2 dA$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I}$$

3.5 - Tensão normal oriunda de momento fletor em dois planos

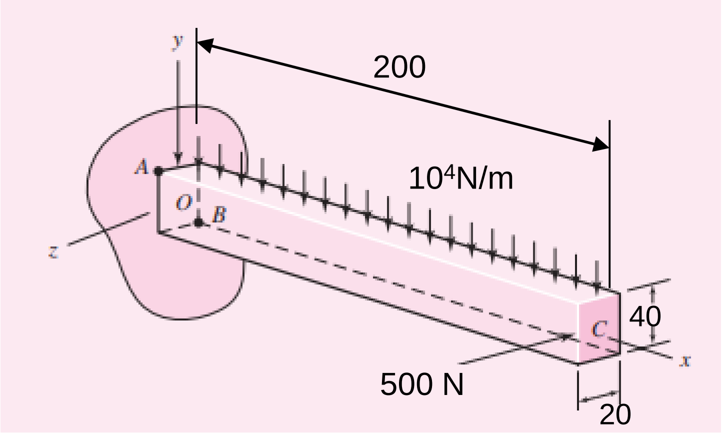
$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

Para seção circular de diâmetro d

c = d/2 $\qquad I = \dfrac{\pi d^4}{64}$ $\qquad$ (tabela A-18)

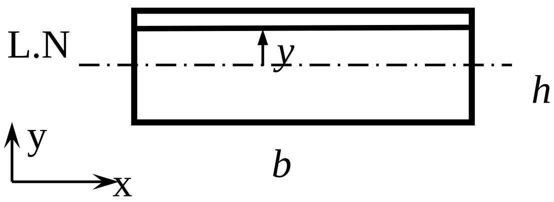
$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(M_y^2 + M_z^2)^{1/2}(d/2)}{\pi d^4/64} = \frac{32}{\pi d^3}(M_y^2 + M_z^2)^{1/2}$$

EXEMPLO



Determinação de *J (I)* de secções

a) Secções simples



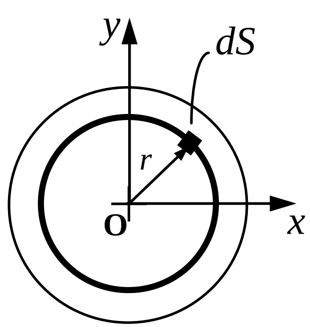
$$J_X = \int_S y^2.dS = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b.y^2.dy = b.\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$\boxed{J_X = \frac{b.h^3}{12}} \qquad \boxed{J_Y = \frac{b^3.h}{12}}$$

Secções simples

Tabelas de *J´s*

b) Momento de Inércia de Torção (Polar) : J_T ou J_Z *(J)*



$$J_p = \int_s r^2 ds \qquad \text{mas} \qquad r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{quando} \qquad O \equiv CG$$

$$J_p = \int r^2 dS = \int x^2.dS + \int y^2.dS \quad \Longrightarrow \quad \boxed{J_P = J_Y + J_X}$$

No caso do círculo :

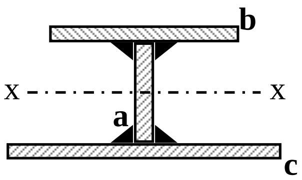
$$J_P = \int_S r^2.dS \qquad \text{com} \qquad dS = 2\pi.r.dr$$

$$J_P = 2\pi.\int_S r^2.r.dr = 2\pi.\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{\frac{d}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{J_P = \frac{\pi.d^4}{32}}$$

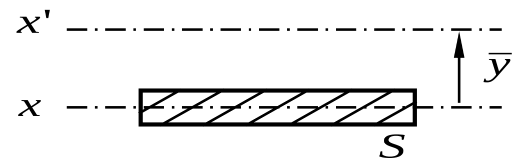
Como $J_P = J_X + J_Y$ e $J_X = J_Y$ $\Longrightarrow$ $\boxed{J_{círculo} = \frac{\pi.d^4}{64}}$

c) Secções compostas

c_1) Teorema dos eixos paralelos ou de Steiner



$$\boxed{J_{X'} = J_X + \bar{y}^2.dS}$$



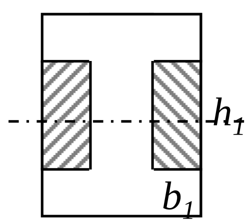
No exemplo acima:

$$J_{x-x} = b_a.h_a^{\;3}.\frac{1}{12} + b_b.h_b^{\;3}.\frac{1}{12} + (h_a + h_b)^2.\frac{1}{4}.b_b.h_b + b_c.h_c^{\;3}.\frac{1}{12} + (h_a + h_c)^2.\frac{1}{4}.b_c.h_c$$

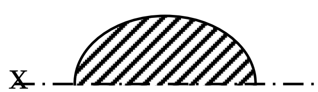
c_2) Soma de *J's*

$$J_X = \int_S y^2.dS \qquad \text{e} \qquad \int_{S_1 \pm S_2} f(x).dx = \int_{S_1} f(x).dx + \int_{S_2} f(x).dx$$

$$J = \sum J_i$$ Referidos ao mesmo eixo !



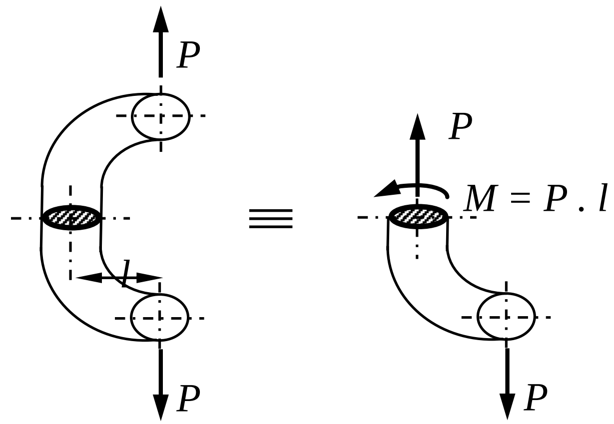
$$J_{perfil\,\mathrm{I}} = J_{total} - 2.\frac{b_1.h_1^{\;3}}{12}$$



$$J_{\frown} = \frac{1}{2}.J_{\bigcirc}$$

$$J_{\frown} = \frac{\pi d^4}{128}$$

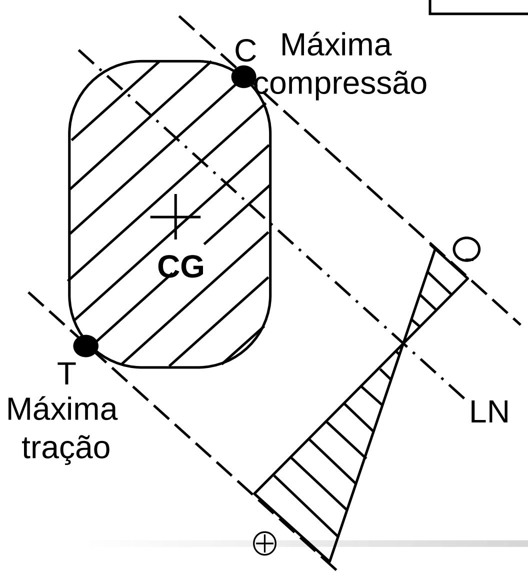
3.6- Tensão normal resultante de força normal e momento fletor



Princípio da superposição:

- Efeito de carregamento complexo é a soma de efeitos de carregamentos simples.
- Válido para pequenas deformações em regime elástico

$$\boxed{\sigma = \frac{F_{Z\zeta}}{S} + \frac{M_{fx}}{J_X}.y + \frac{M_{fy}}{J_Y}.x}$$

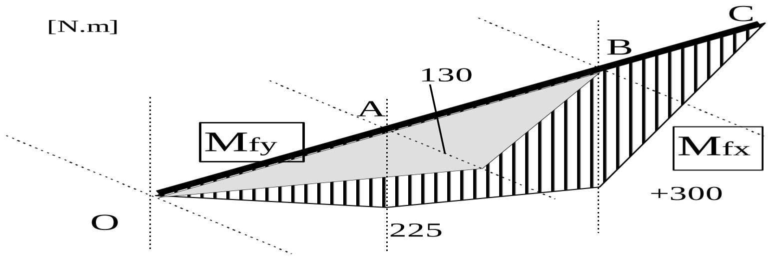


Impondo σ = 0 :

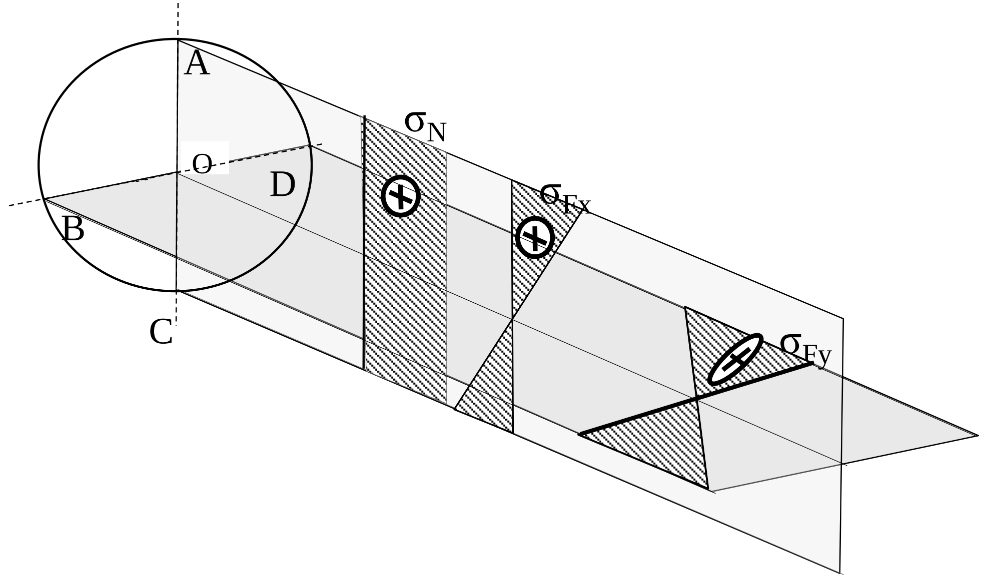
$$A.x + B.y + C = 0$$ (Equação da LN)

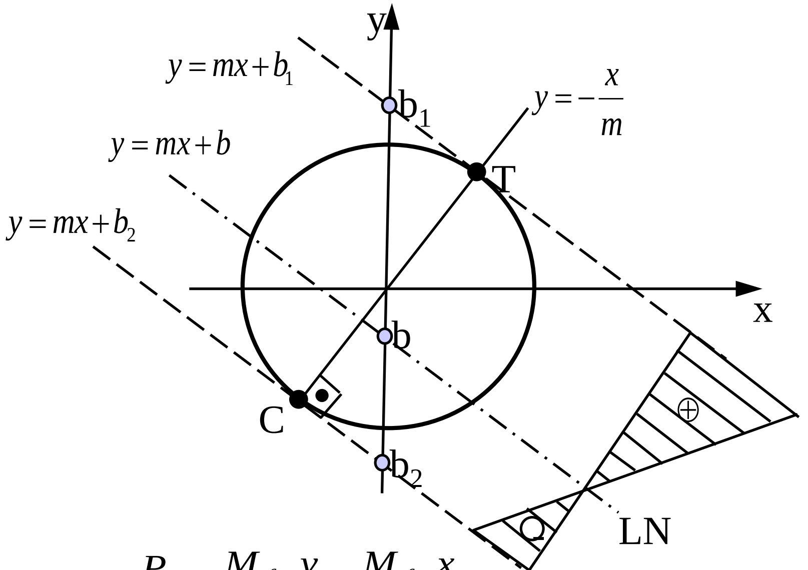
LN não passa pelo CG !

$$\sigma_{max-tração} = \sigma_T = \frac{P_Z}{S} + \frac{M_{fx}}{J_X}.y_T + \frac{M_{fy}}{Jy}.x_T$$



notar que os momentos M_{fx} e M_{fy} (como na figura acima) e as tensões normais devidas a eles estão em planos diferentes, normais entre si (como na figura abaixo). As tensões normais entretanto tem a mesma direção e portanto podem ser somadas.





$$\sigma = \frac{P_Z}{S} + \frac{M_{fx}.y}{J_X} + \frac{M_{fy}.x}{J_Y}$$

Para σ = 0 $\Longrightarrow$ Equação da LN

$$y = -\left(\frac{M_{fy}}{M_{fx}} \cdot \frac{J_X}{J_Y}\right).x - \frac{P_Z}{S} \cdot \frac{J_X}{M_{fx}}$$

$$y = m.x + b \Longrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{M_{fy}}{M_{fx}} \\ b = -\dfrac{P_Z.J}{S.M_{fx}} \end{cases}$$

Pontos de tração e compressão máximas:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{m}.x \\ y^2 + x^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{1}{m}.x\right)^2 + x^2 = r^2$$

$$x^2 = \frac{r^2}{1 + \dfrac{1}{m}} \qquad y^2 = \frac{r^2}{1 + m^2}$$

$$x^2 = \frac{1}{1+\left(-\frac{M_{fx}}{M_{fy}}\right)^2}.r^2 = \frac{M_{fy}{}^2}{M_{fy}{}^2+M_{fx}{}^2}.r^2 \qquad x_{T,C} = \pm\frac{M_{fy}.r}{\sqrt{M_{fy}{}^2+M_{fx}{}^2}}$$

$$y^2 = \frac{1}{1+\left(-\frac{M_{fy}}{M_{fx}}\right)^2}.r^2 = \frac{M_{fx}{}^2}{M_{fx}{}^2+M_{fy}{}^2}.r^2 \qquad y_{T,C} = \pm\frac{M_{fx}.r}{\sqrt{M_{fx}{}^2+M_{fy}{}^2}}$$

$$M_R = \sqrt{M_{fx}{}^2+M_{fy}{}^2} \quad \rightarrow \quad \text{momento resultante}$$

como $\sigma = \frac{P_Z}{S}+\frac{1}{J}.\left(M_{fx}.y+M_{fy}.x\right)$, temos :

$$\sigma_T = \frac{P_Z}{S}+\frac{1}{J}.\left(M_{fx}.\frac{M_{fx}.r}{\sqrt{M_{fx}{}^2+M_{fy}{}^2}}+M_{fy}.\frac{M_{fy}.r}{\sqrt{M_{fx}{}^2+M_{fy}{}^2}}\right)$$

$$\sigma_T = \frac{P_Z}{S}+\frac{r}{J}.\left(\frac{M_{fx}{}^2+M_{fy}{}^2}{M_R}\right) = \frac{P_Z}{S}+\frac{r}{J}.\frac{M_R{}^2}{M_R}$$

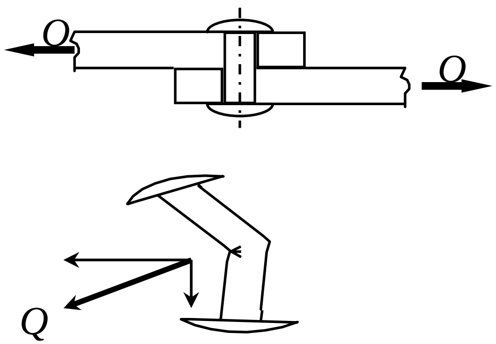
$$\sigma_T = \frac{P_Z}{S}+\frac{r}{J}.M_R \qquad \text{ou} \qquad \sigma_T = \frac{P_Z}{S}+\frac{M_R}{W_f}$$

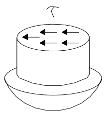
$W_f =$ módulo de resistência à flexão $= \frac{J}{r}$

para $\left|\frac{P_Z}{S}\right| > \left|\frac{M_R}{W_f}\right| \quad \Rightarrow$ só tração ou só compressão

3.7- Tensão de cisalhamento

a) Cisalhamento puro ("corte")





$$\boxed{\tau_m = \frac{Q}{S}}$$

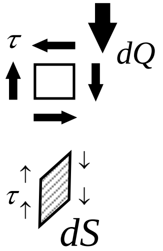
- distribuição de τ não é uniforme sobre a seção tranversal
- despreza-se flexão e normal

$$\tau_m \leq \tau_{adm} = 0.55 \text{ a } 0.60.\sigma_{adm} \Longrightarrow \text{Fadiga}$$

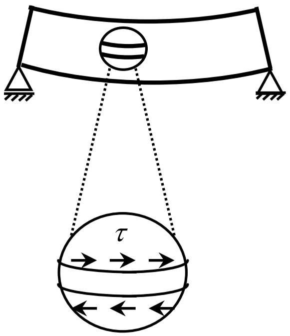
$$\tau_m \leq \tau_{adm} = 0.80.\sigma_{adm} \Longrightarrow \text{Estático}$$

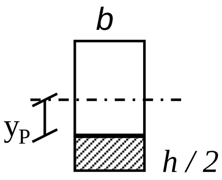
b) Cisalhamento em flexão (efeito Q)

b.1- em uma viga de seção retangular



$$\int_S \tau.dS = dQ$$





$$\boxed{\tau = \frac{Q.M_S}{b.J}}$$

M_S = Momento estático da seção

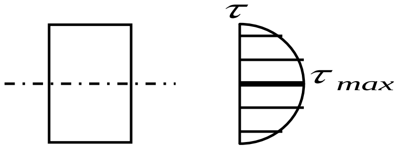
$$\boxed{M_S = \int_{y_P}^{\frac{h}{2}} y.dS} = b.\frac{y^2}{2}\bigg|_{y_p}^{\frac{h}{2}}$$

$$M_S = \frac{b}{2}.y^2\Big|_y^{\frac{h}{2}} \qquad = \frac{b.h^2}{8}.\left[1-\left(\frac{2.y}{h}\right)^2\right]$$

** A tensão de cisalhamento devido a cortante será máxima na linha neutra (y=0) e nula na fibra externa (y=h/2), o inverso do que é observado nas tensões normais devido a flexão, raramente um estado de tensão originará situação de tensão no interior pior que o verificado nas fibras externas.

$$M_S = A - B\ .\ y^2$$

- Quadrática em *y*
- Depende da forma da secção



$$\tau_{\text{retang}} = \frac{3}{2}.\frac{Q}{b.h}.\left[1-\left(\frac{2.y}{h}\right)^2\right] \quad , \quad \tau_{\max} = \frac{3}{2}.\frac{Q}{b.h} = \frac{3}{2}.\tau_{med}$$

Observações:

1. τ não é distribuído uniformemente e depende da forma da secção

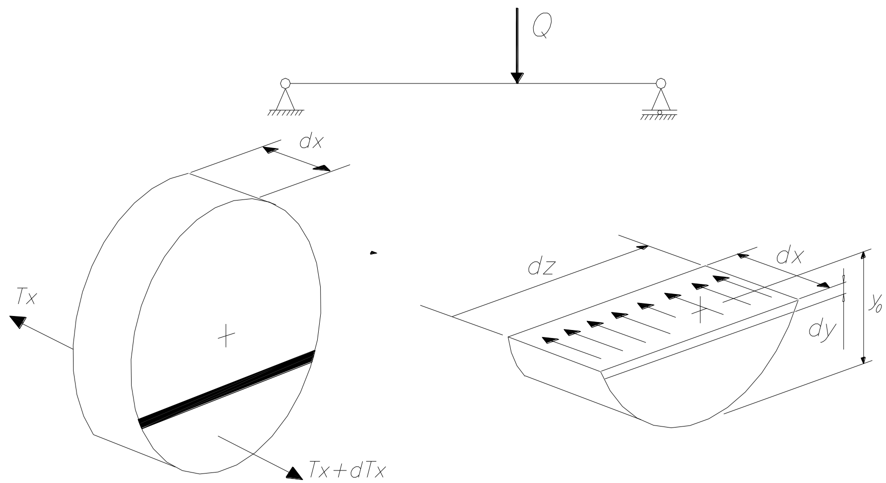
2. Para $\frac{l}{h} > 5$,(*l* = vão) τ_{max} é 2% a 5% de $\sigma_{flexão}$

   ⇒ desprezível ! Se $\frac{l}{h} < 3$ a teoria apresentada <u>não vale</u> !

3. Em alguns casos somente se preocupa com τ na flexão.
   Ex: colagem, rebites

4. Se a secção não é simétrica em relação a P_y ,Q <u>não</u> se aplica no C.G. mas no <u>centro de torção</u> T da secção.

b.2- em um eixo de seção circular



$$\tau . dx . dz = dT_X$$

$$T_X = \int_y^{y_1} \frac{M_X}{J} . y . dS = \frac{M_X}{J} . M_S$$

$$T_{X+dX} = \frac{M_{X+dX}}{J} . M_S$$

$$\therefore \quad dT_X = T_{X+dX} - T_X = \frac{M_{X+dX} - M_X}{J} . M_S$$

como $\quad dM = Q . dx \quad$ temos:

$$\tau . dx . dz = dTx = \frac{Q . dx}{J} . M_S$$

$$\tau . dz = \frac{Q}{J} . M_S$$

$$\tau(y) = \frac{Q}{J} . \frac{1}{dz} . M_S$$

$$\tau_{\Theta} = \frac{Q}{J}.\frac{1}{dz}.\int_y^r y.dS = \frac{Q}{J}.\frac{1}{dz}.\int_y^r y.dz.dy$$

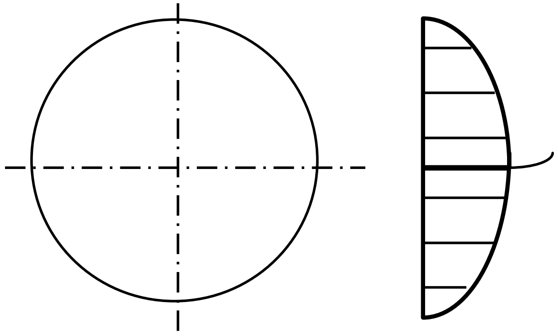
$$\tau_{\Theta}(y) = \frac{Q}{J}.\int_y^r y.dr = \frac{Q}{J}.\frac{y^2}{2}\bigg|_y^r = \frac{Q}{J}.\left(\frac{r^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right)$$

para secção circular:

$$J = \frac{\pi.d^4}{64} = \frac{\pi.r^4}{2}$$

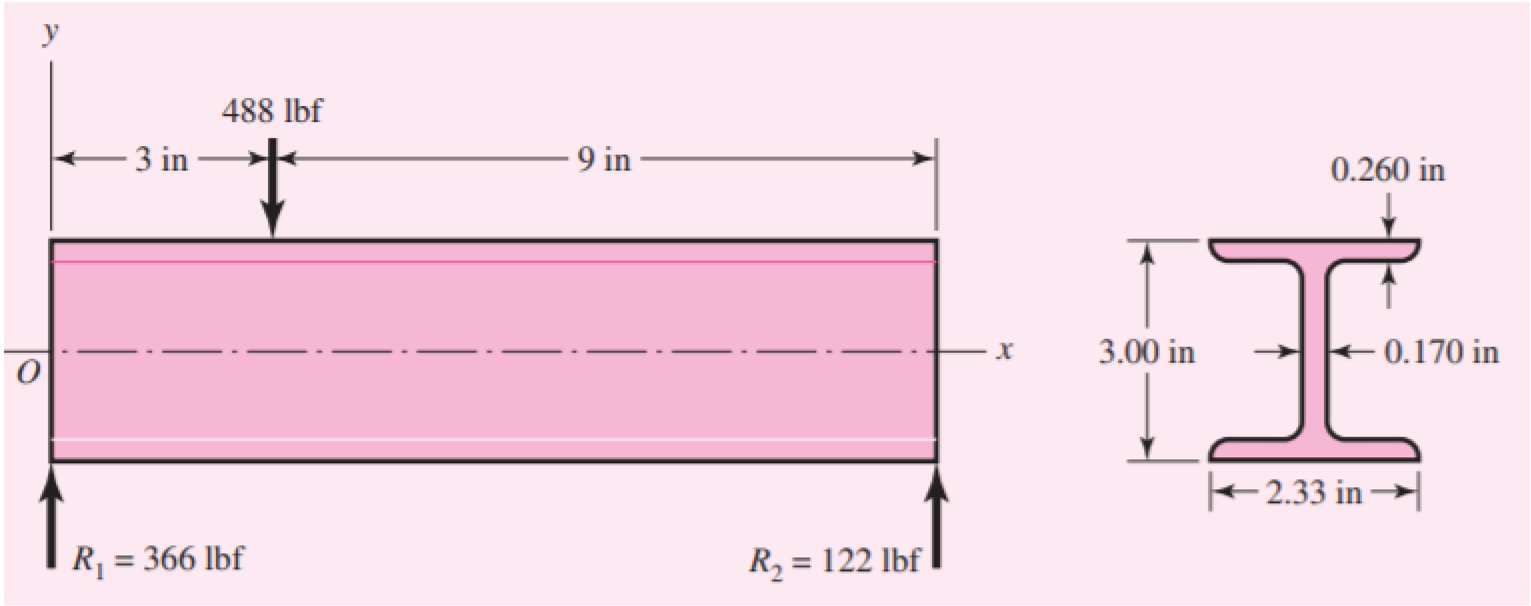
$$\tau(y) = \frac{Q}{\frac{\pi.r^4}{2}}.\frac{r^2}{2}.\left[1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right] = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi.r^2}.\left[1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right]$$

$$\tau_y = \tau_{m.}.\left[1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right]$$



$$\tau_{\max} = \frac{4}{3}\frac{Q}{A}$$

EXEMPLO

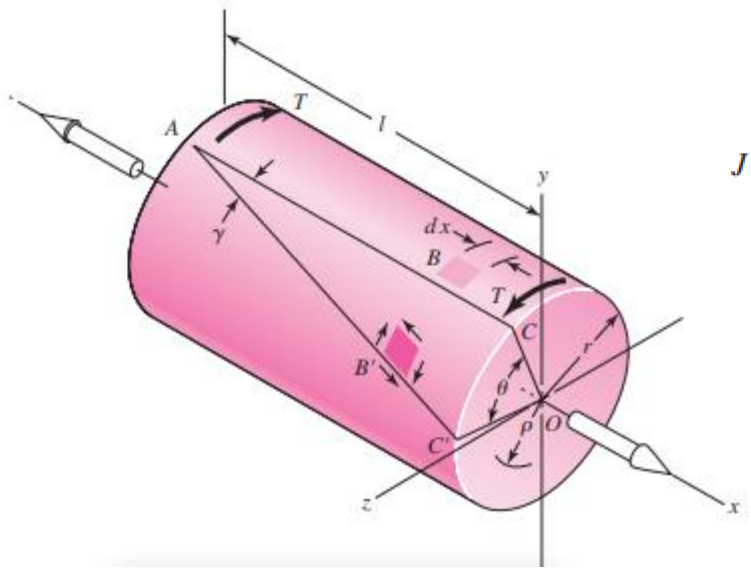

y
488 lbf
3 in
9 in
0.260 in
O
x
3.00 in
0.170 in
2.33 in
R_1 = 366 lbf
R_2 = 122 lbf

3.8- Torção

$$\theta = \frac{Tl}{GJ}$$

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

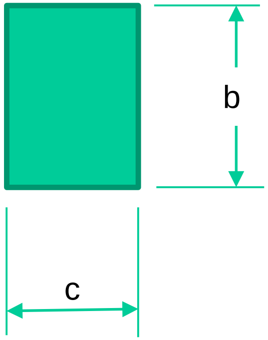
$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J}$$



$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$ Seção circular

$$J = \frac{\pi}{32}\left(d_o^4 - d_i^4\right)$$ Seção circular oca

PARA SEÇÕES RETANGULARES

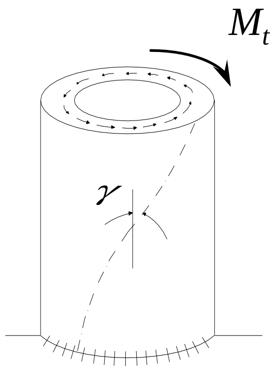


$$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2} \doteq \frac{T}{bc^2}\left(3 + \frac{1.8}{b/c}\right)$$

$$\theta = \frac{Tl}{\beta b c^3 G}$$

b/c	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	4.00	6.00	8.00	10	∞
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.196	0.214	0.228	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333

3.8- Torção



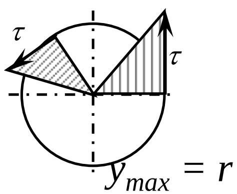
$$\tau = G.\gamma$$

$$G = \frac{E}{2.(1+\upsilon)}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \quad ; \quad W_t = \frac{J_t}{y_{\max}}$$

- Distribuição de τ <u>não</u> é linear em geral
- empenamento (*warp*) em secções não-circulares

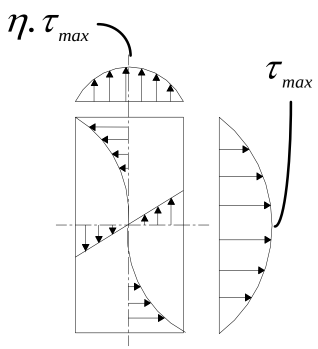
a) Seções circulares



- Distribuição linear

$$J_t = J_p = J_X + J_Y = \frac{\pi.d^4}{32} \quad , \quad W_t = \frac{\pi.d^3}{16}$$

b) Seções retangulares



$$J_t = \frac{b.h^3}{12} + \frac{h.b^3}{12} \qquad y_{\max} = \frac{h}{2} \text{ ou } \frac{b}{2}$$

- Nas faces: parábolas p/ *h < 3b*

  parábola achatada p/ *h > 3b*

face maior $\tau_{\max} = \dfrac{M_t}{W_t}$, $W_t = \eta_2.b^2.h$

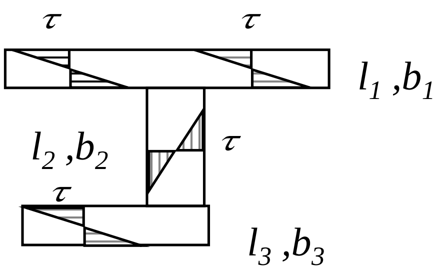
$$J_t = \eta_3.b^3.h$$

face menor $\tau_{\max menor} = \eta_1.\tau_{\max}$

$\eta_1 , \eta_2 , \eta_3 \rightarrow$ tabelados (Ex : tab. 3.1 Nieman)

•no interior : não-linear

c) Secções compostas



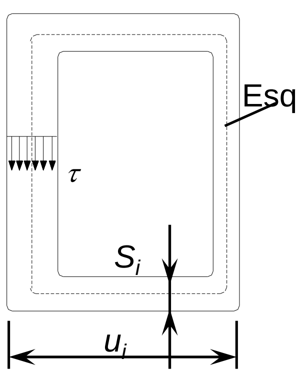
$$\tau_{\max} \frac{M_t}{J_t}.b_{\max}$$

$$J_t \cong \frac{1}{3}.\left(b_1^{\,3}.l_1 + b_2^{\,3}.l_2 + ...\right)$$

$$W_t = \frac{J_t}{b_{\max}}$$

d) Tubos de paredes finas

• Distribuição <u>constante</u> ao longo da espessura



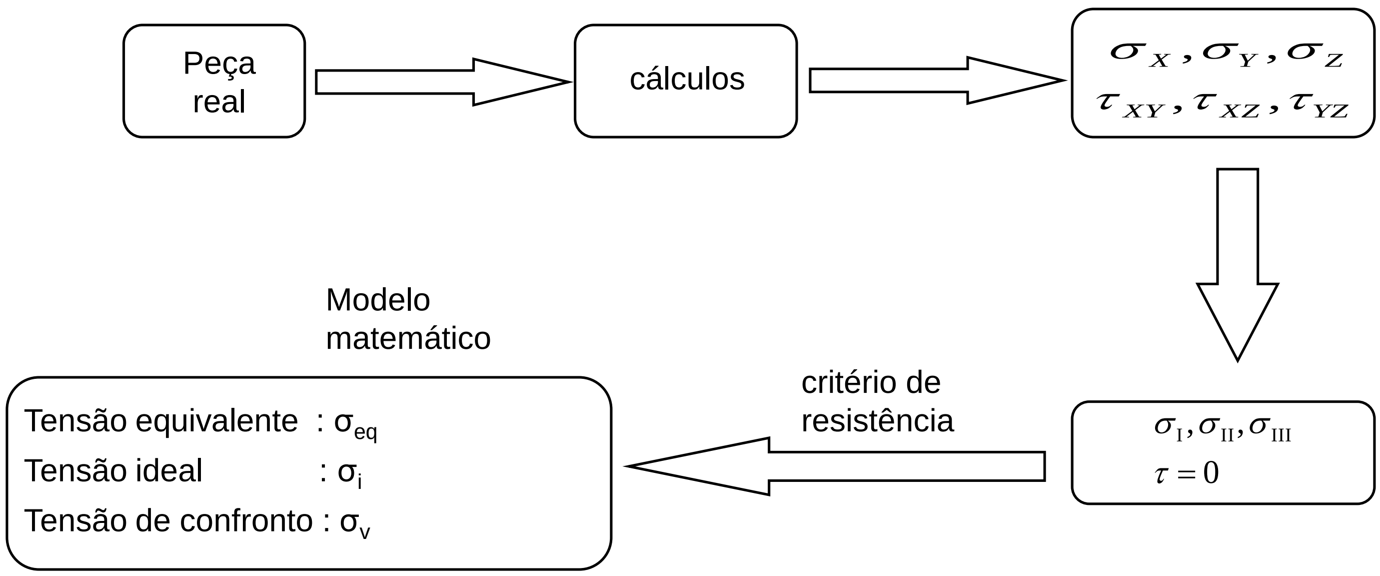
$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2.S_\mu.s_{min}}$$

S_μ = área interna do esqueleto

s_{min} = espessura mínima

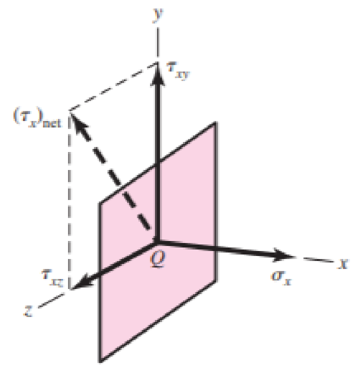
$$J_t = \frac{4.S_\mu^{\,2}}{\sum \frac{\mu_i}{s_i}} \quad ; \quad W_t = 2.S_\mu.s_{min}$$

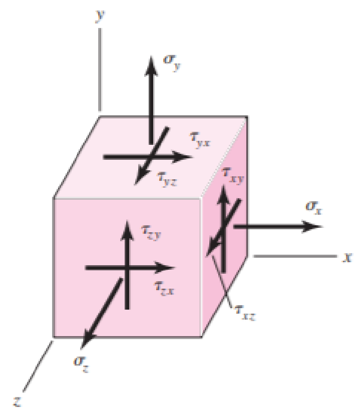
3.9- Tensão equivalente e tensão admissível

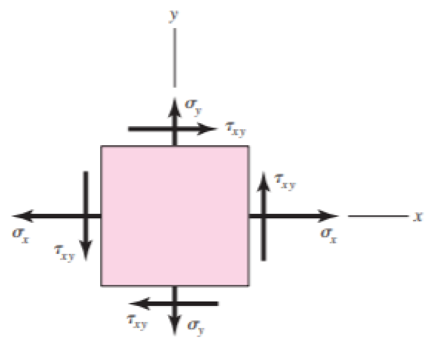


Se $\sigma_{eq} \leq \sigma_{adm}$ a peça não romperá !

3.9.1- Estado plano de tensões

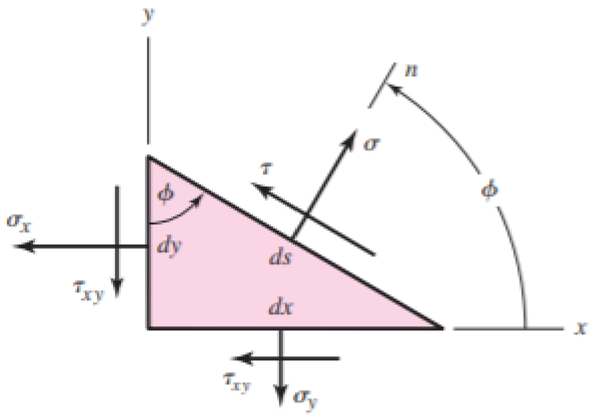






$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\phi + \tau_{xy}\,\mathrm{sen}2\phi \qquad \tan 2\phi_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\mathrm{sen}\ 2\phi_p - \tau_{xy}\cos 2\phi_p = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

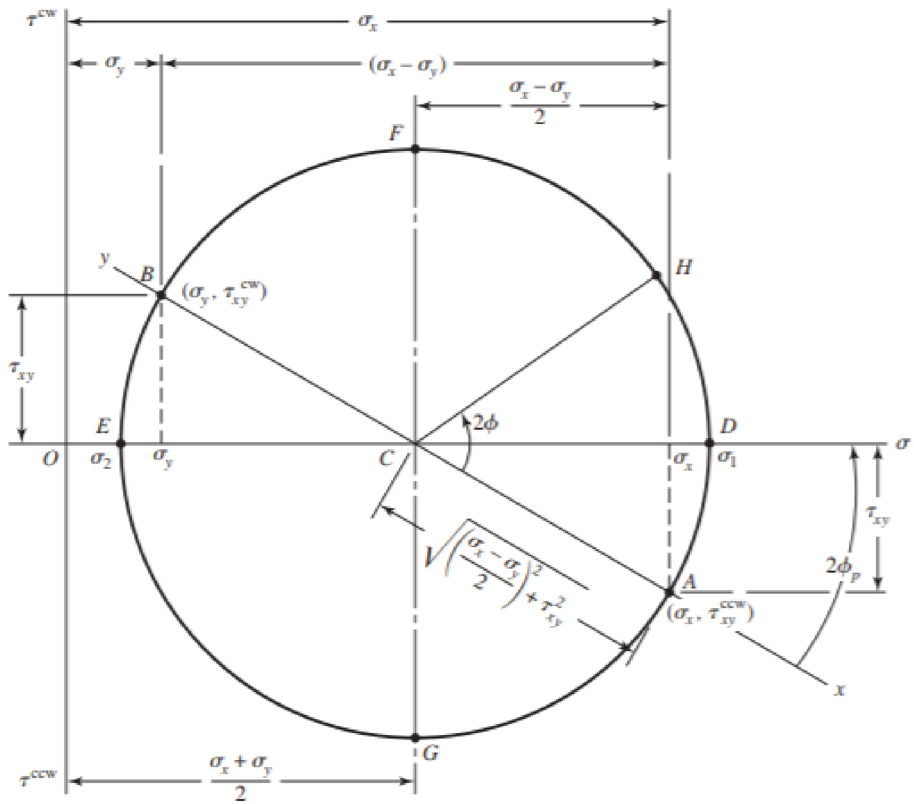
$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\mathrm{sen}2\phi + \tau_{xy}\cos 2\phi \qquad \tan 2\phi_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \Rightarrow \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\phi_p + \tau_{xy}\,\mathrm{sen}2\phi_p = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$



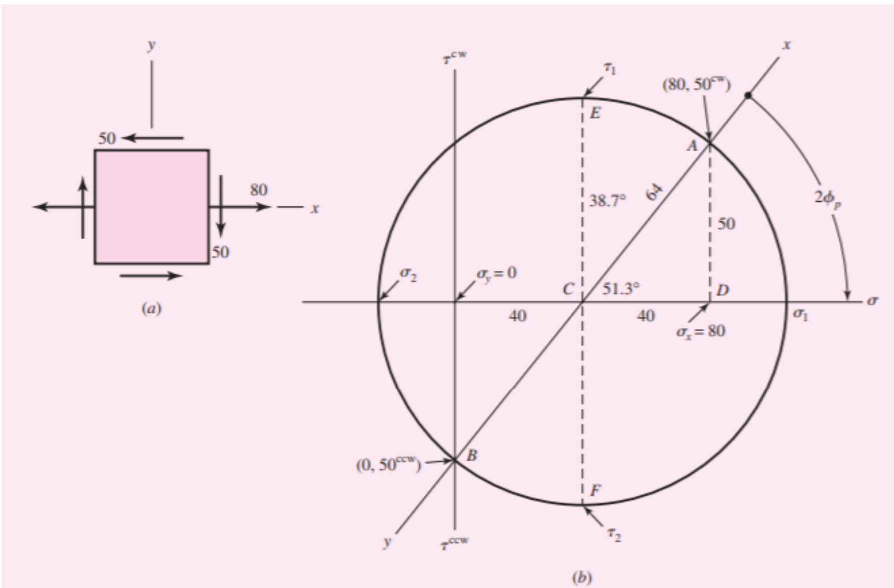
$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_1, \tau_2 = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

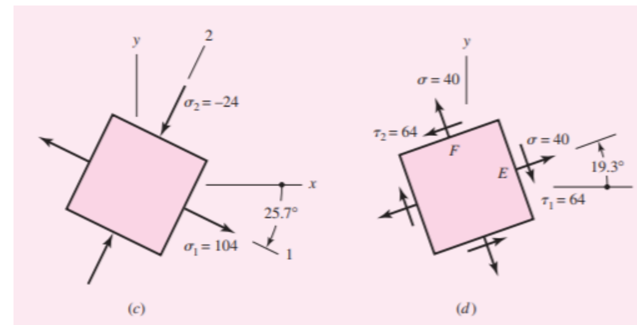
Círculo de Mohr - convenções



EXEMPLO



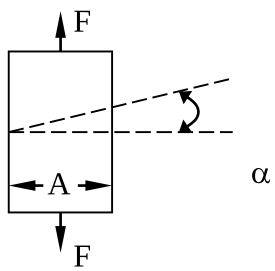
y
50
80
x
50
(a)
τ^{cw}
τ_1
(80, 50^{cw})
x
E
A
38.7°
64
$2\phi_p$
50
σ_2
$\sigma_y = 0$
C
51.3°
D
σ
40
40
σ_1
$\sigma_x = 80$
(0, 50^{ccw})
B
F
y
τ^{ccw}
τ_2
(b)

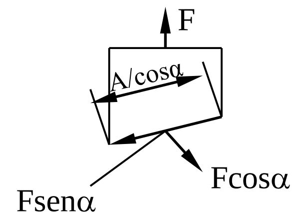


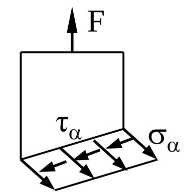
y
2
$\sigma_2 = -24$
x
25.7°
$\sigma_1 = 104$
1
(c)
y
$\sigma = 40$
$\tau_2 = 64$
F
$\sigma = 40$
E
19.3°
x
$\tau_1 = 64$
(d)

3.9.1- Estado de tensões

a) Estado simples de tensões





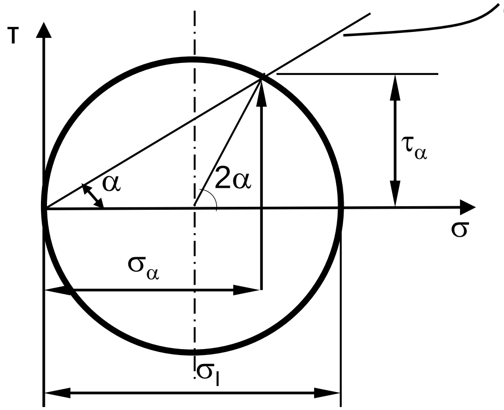


Tensão normal : $\sigma_\alpha = \frac{F}{A}.\cos^2\alpha = \frac{F}{2.A}.(1+\cos(2.\alpha))$

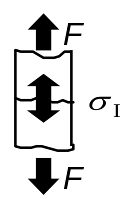
Tensão tangencial : $\tau_\alpha = \frac{F}{A}.sen\,\alpha.\cos\alpha = \frac{F}{2.A}.sen(2.\alpha)$

Equações paramétricas do círculo

Círculo de Mohr



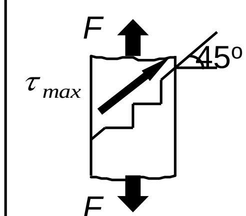
∃ direção α (no caso α = 0°) onde :



$$\sigma_\alpha = \sigma_I$$
$$\tau_\alpha = 0$$

Fratura frágil

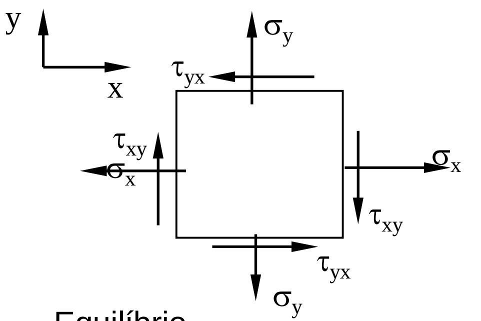
Para α’ = α + 45°



$$\sigma_{\alpha'} = \sigma_I / 2$$
$$\tau_{\alpha'} = \tau_{max} = \sigma_{I/2}$$

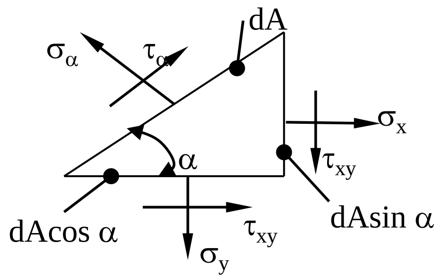
Fratura dúctil

b) Estado duplo de tensões



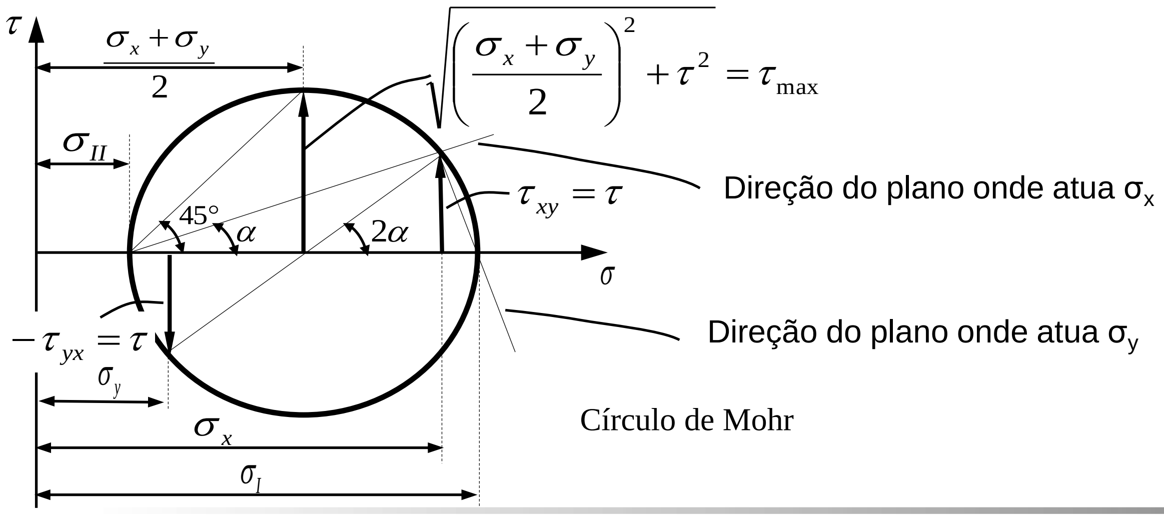
Equilíbrio
de
forças

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$$



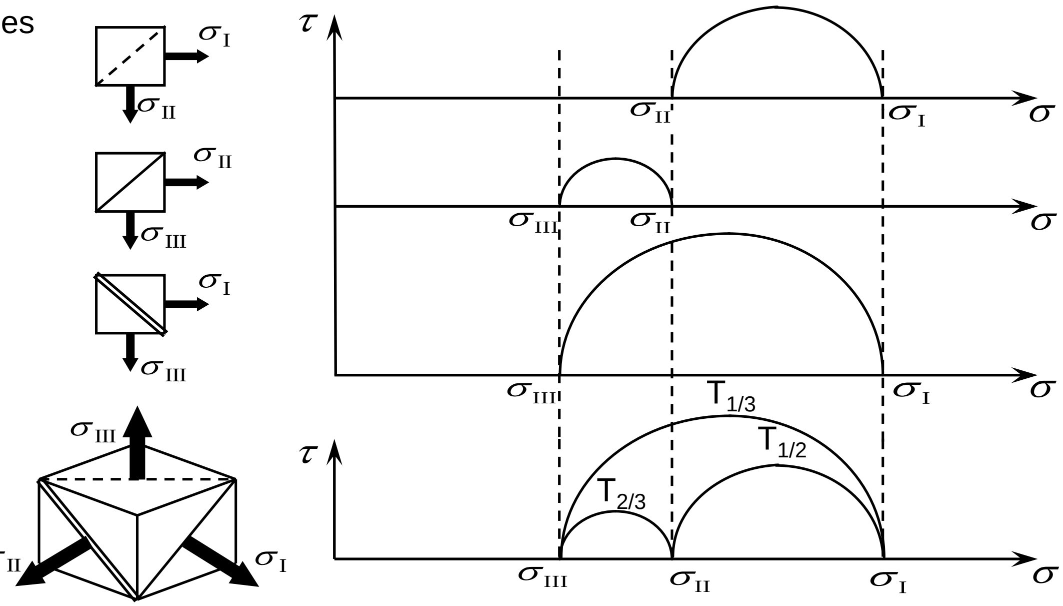
$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} + \frac{\sigma_Y - \sigma_X}{2}.\cos(2.\alpha) + \tau.sen(2.\alpha)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}.sen(2.\alpha) - \tau.\cos(2.\alpha)$$



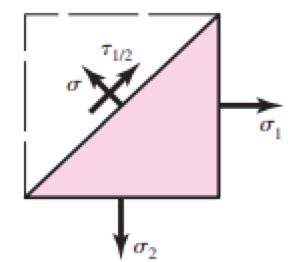
Círculo de Mohr

c) Estado triplo de tensões



- Tensões principais

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$



- Tensão tangencial máxima

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_X - \sigma_Y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

- Ângulo dos planos principais

$$\tan(2.\alpha) = \frac{2.\tau}{\sigma_X - \sigma_Y}$$

- Tensões em um ângulo qualquer

$$\begin{cases} \sigma_{X,Y} = \dfrac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} + \dfrac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}.\cos(2.\alpha) \\ \tau = \dfrac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}.\text{sen}(2.\alpha) \end{cases}$$

3.9.3. Critérios de resistência

Um componente mecânico, associado em conjunto a outros componentes, tem seu comportamento não tão bem delimitado e podem apresentar falha. São aplicados Critérios de Resistências que se utilizam de conceitos de segurança para o dimensionamento de componentes.

Resistência de uma peça mecânica (projeto)

- ✓ material;
- ✓ tratamento térmico;
- ✓ processamento.

Utiliza-se de dados de corpos de prova → mesmas condições de carregamento, fabricação, acabamento.

Resistência da peça fabricada

- ✓ quantidade do lote;
- ✓ variações no processo;
- ✓ acabamento superficial;
- ✓ esforços na conformação;
- ✓ combinações com outros no conjunto.

Falha

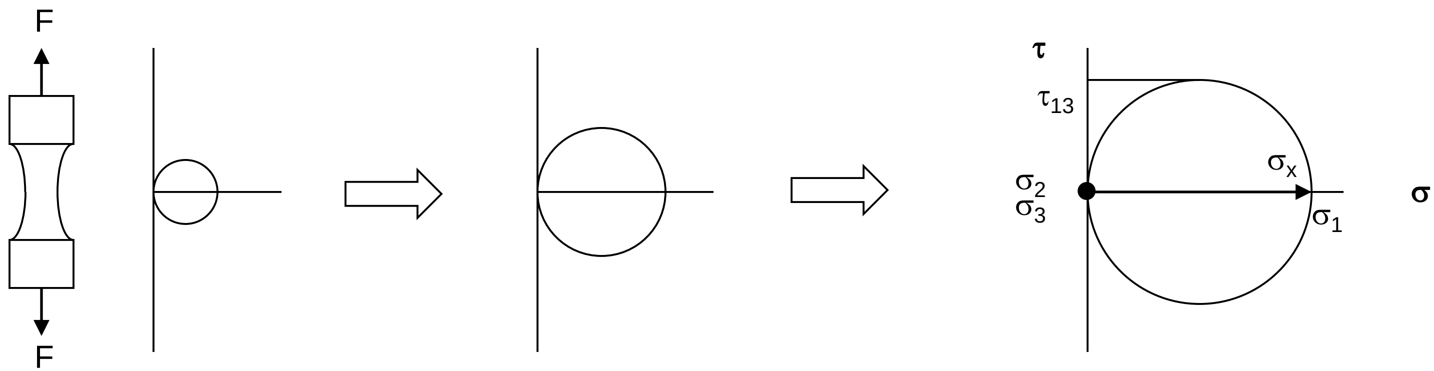
- ✓ quebra;
- ✓ deformação permanente;

A falha depende da:

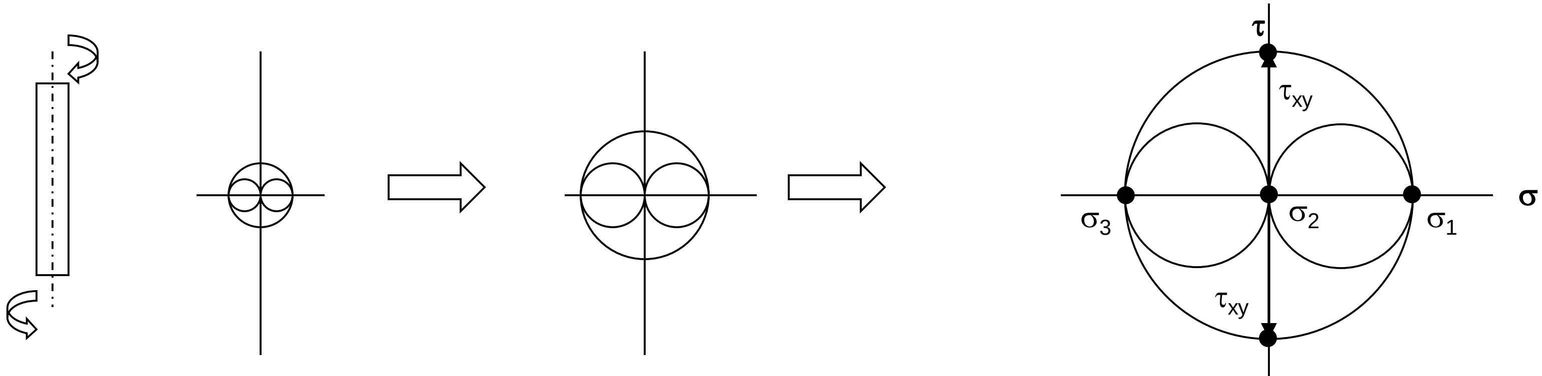
- ✓ tipo de tensão (tração, compressão, cisalhamento);
- ✓ tipo de carregamento (estático, dinâmico).

QUAL TENSÃO CAUSOU A FALHA??

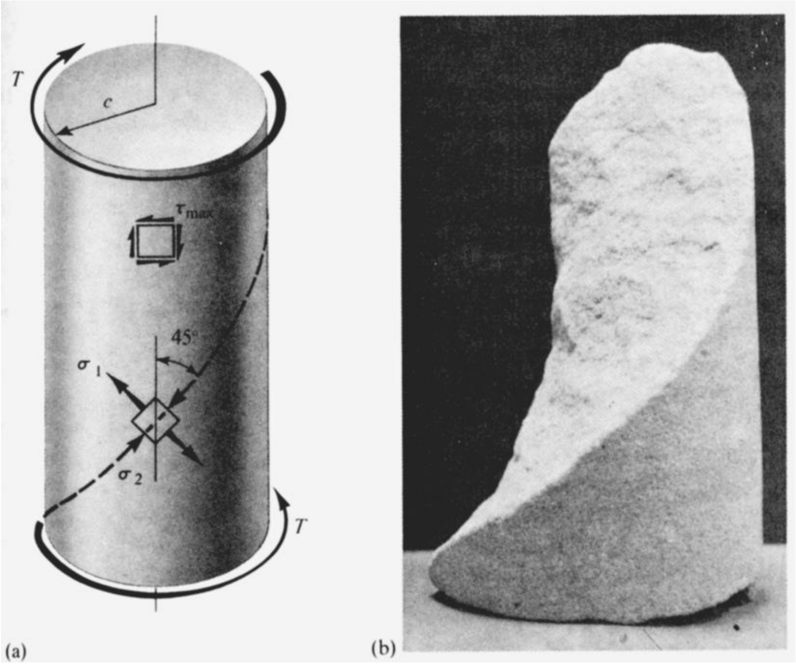
Se observarmos o círculo de Mohr para tração pura aplicada lentamente nota-se que há também a existência de tensão de cisalhamento, cujo valor máximo é exatamente a metade da tensão normal.



Se observarmos o círculo de Mohr para torção pura aplicada lentamente nota-se que há também a presença de tensão normal cujo valor máximo é igual a tensão de cisalhamento.



Em geral materiais duteis submetidos a carregamentos estáticos são limitados pelas suas tensões de cisalhamento, enquanto que os materiais frágeis pela tensão normal.



a) Descrição alternativa das tensões para um eixo em torção, b) amostra de pedra arenosa após ensaio de torção

O mesmo ensaio feito em materiais de baixa resistência ao cisalhamento, como o aço doce, quebra em uma superfície perpendicular ao eixo.

Fonte: POPOV, E.P. *Introdução à mecânica dos sólidos*. Trad. AMORELLI, M.O.C. Ed. Edgard Blücher, 1978.

Materiais dúteis $\varepsilon \geq 0{,}05$ e $S_{yc} = S_{yt} = S_Y$

Critérios de escoamento

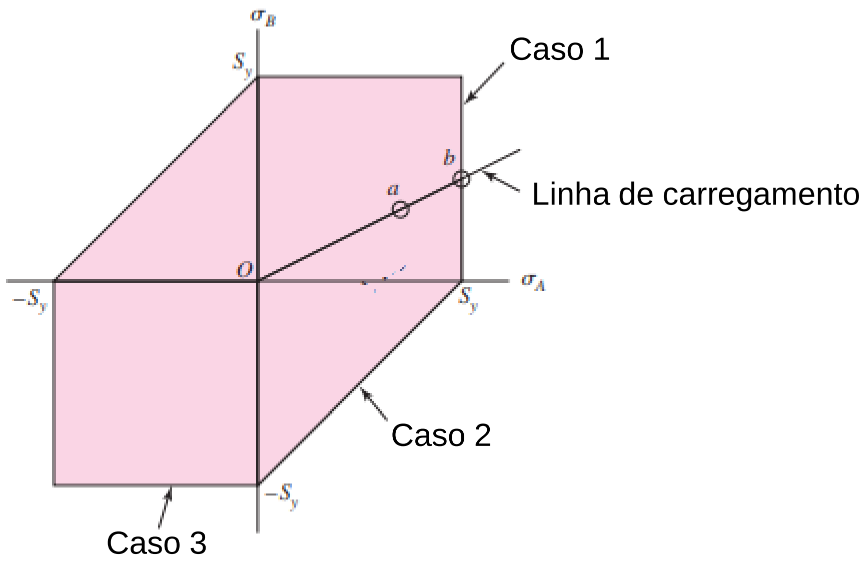
- Tensao máxima de cisalhamento (MSS)
- Energia de distorsão (DE)
- Coulomb-Mohr dútil (DCM)

Materiais frágeis $\varepsilon < 0{,}05$ caracterizados por S_{ut} e S_{uc}

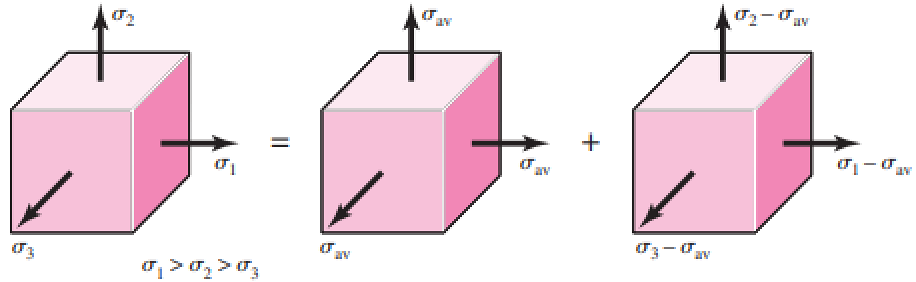
Critérios de fratura

- Tensão normal máxima (MNS)
- Coulomb-Mohr frágil (BCM)

TEORIA DA TENSÃO MÁXIMA DE CISALHAMENTO



TEORIA DA ENERGIA DE DISTORÇÃO PARA MATERIAIS DÚTEIS



tensões triaxiais componente hidrostático componente distorcional

$$\sigma_{av} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right]$$

$$u_v = \frac{3\sigma_{av}^2}{2E}(1 - 2\nu)$$

$$u_v = \frac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1\right)$$

$$u_d = u - u_v = \frac{1+\nu}{3E}\left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}\right]$$

$$u_d = \frac{1+\nu}{3E}S_y^2$$

$$\left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}\right]^{1/2} \geq S_y$$

$$\sigma' \geq S_y$$

TENSÃO DE VON MISES:

$$\sigma' = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}\right]^{1/2}$$

TENSÃO PLANA:

$$\sigma' = \left(\sigma_A^2 - \sigma_A\sigma_B + \sigma_B^2\right)^{1/2}$$

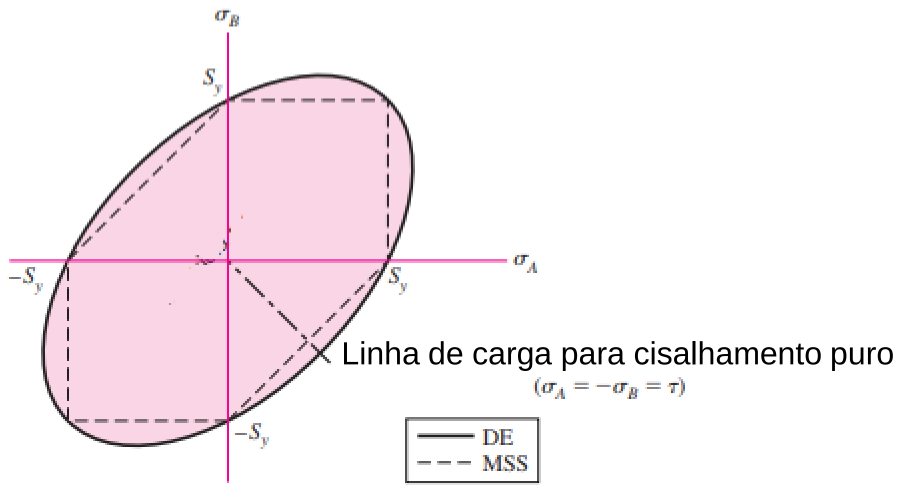
USANDO COMPONENTES DO TENSOR DAS TENSÕES (CASO GERAL)

$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)\right]^{1/2}$$

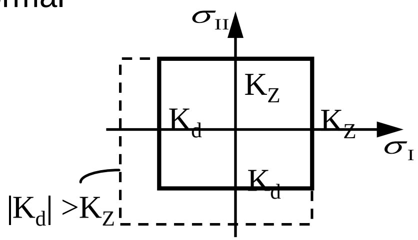
PARA O CASO PLANO DE TENSÕES:

$$\sigma' = \left(\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2\right)^{1/2}$$

TEORIA DA ENERGIA DE DISTORÇÃO PARA MATERIAIS DÚTEIS

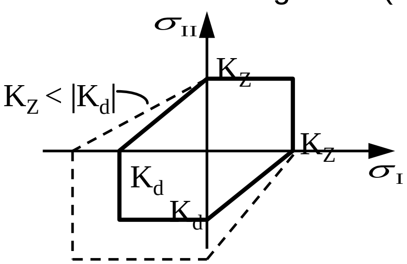


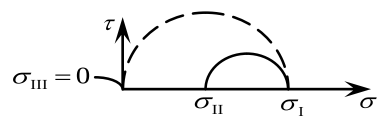
a) Máxima tensão normal



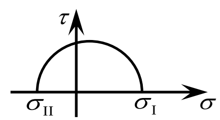
$$\sigma_V = \sigma_I \leq K_{Z \text{ ou } D}$$

b) Máxima tensão tangencial (Tresca)





$$\sigma_V = \sigma_I \leq K_{Z \text{ ou } D}$$



$$\sigma_V = \pm(\sigma_I + \sigma_{II}) \leq K$$

c) Máxima energia de distorção (Von Mises)

A energia total de deformação em uma peça carregada consiste em duas componentes: uma devido ao carregamento hidrostático que muda seu volume; e outra devido a distorção que muda sua forma.

A tensão de cisalhamento presente deve-se a parcela da energia de distorção.

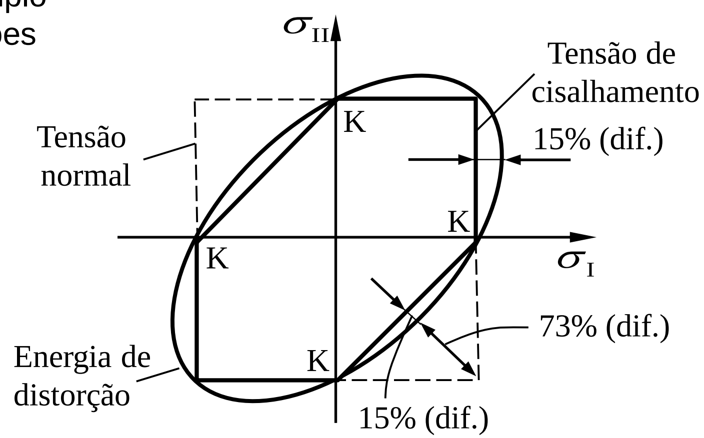
Elipse inclinada à 45º com semi-eixos $\begin{cases} K.\sqrt{2} \\ K.\sqrt{2/3} \end{cases}$

$$\sigma_V = \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{(\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})^2 + (\sigma_{\mathrm{II}} - \sigma_{\mathrm{III}})^2 + (\sigma_{\mathrm{III}} - \sigma_{\mathrm{I}})^2}$$

Estado triplo de tensões

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_{\mathrm{I}}^{\ 2} - \sigma_{\mathrm{I}}.\sigma_{\mathrm{II}} + \sigma_{\mathrm{II}}^{\ 2}}$$

Estado duplo de tensões



3.9.4. Casos estáticos

a) Tensão equivalente

Critério + usado p/ aço $\Rightarrow$ energia de distorção (Von Mises)

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{array}\right\} \Rightarrow \text{tensões principais } \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \Rightarrow \sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}.\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}$$

b) Tensão admissível

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{ruptura}}{\text{coef. de segurança}}$$

3.9.5. Casos de solicitação dinâmica (fadiga)

a) Tensão equivalente

Critério leva em conta a fadiga do material

$$\sigma_e = \sqrt{(\sigma_{\max}.\beta_{Kf})^2 + H^2.(\tau_{\max}.\beta_{Kt})^2}$$

$$\beta_K{}'\text{s} = \text{coef. de entalhe}$$

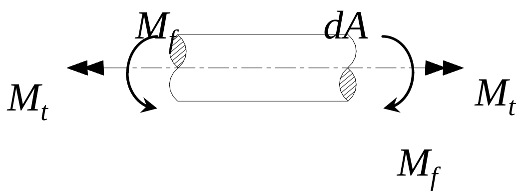
$$H = \frac{\sigma_{\lim.\,fadiga}}{\tau_{\lim.\,fadiga}}$$

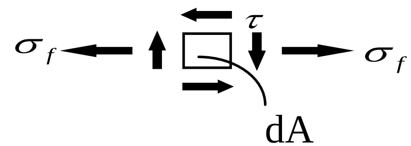
b) Tensão admissível

$$\sigma_{adm} \longrightarrow \text{teoria de fadiga}$$

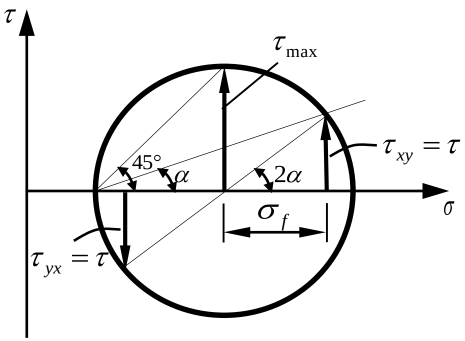
3.9.7. Aplicação dos critérios de resistência

- Eixo submetido à flexo-torção





- Círculo de Mohr



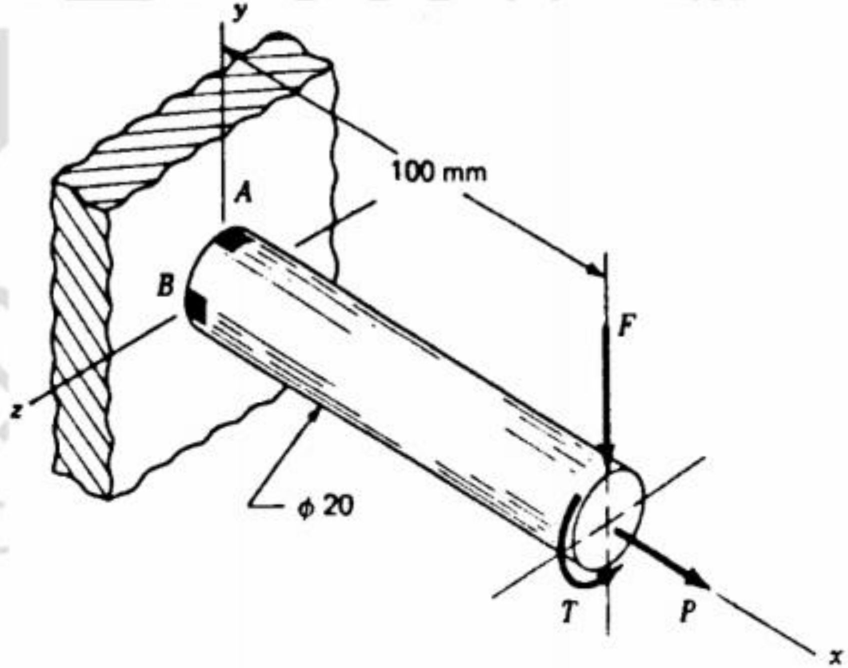
$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma_f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_f}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_f}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

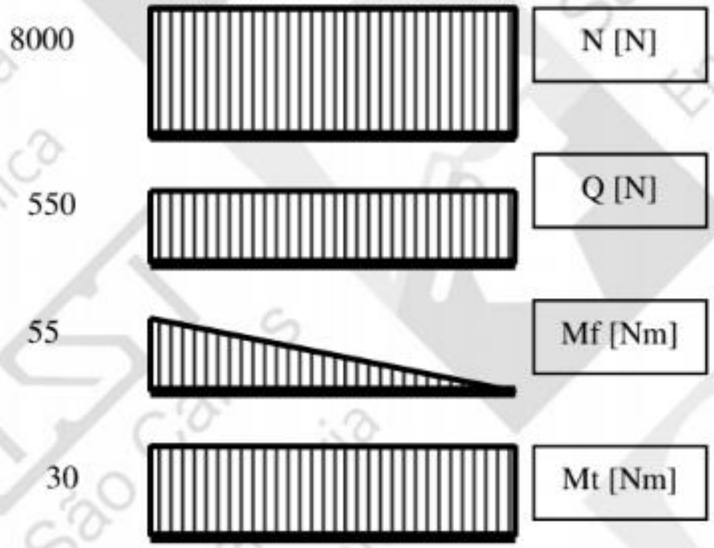
Critério de Resistência	Tensão de Confronto (σ_v)
Máx. tensão normal	$\sigma_{eq} = \sigma_I = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$
Máx. tensão tangencial	$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4.\tau^2}$
Máx. energia de distorção (Von Mises)	$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3.\tau^2}$

EXERCÍCIO

Determine as tensões nos pontos A e B da viga engastada mostrada na figura abaixo. O elemento de tensão que contem o ponto A fica na parte superior da superfície da viga e é paralelo ao plano xz. O elemento de tensão que contem o ponto B, fica na lateral da superfície da viga e é paralelo ao plano xy. O carregamento consiste das forças F = 0,55 [kN] e P = 8 [kN], e do torque (momento de torção) T = 30 [N.m]. Desenhar ambos os elementos de tensão, identificando os eixos e as tensões com suas intensidades e direções adequadas.

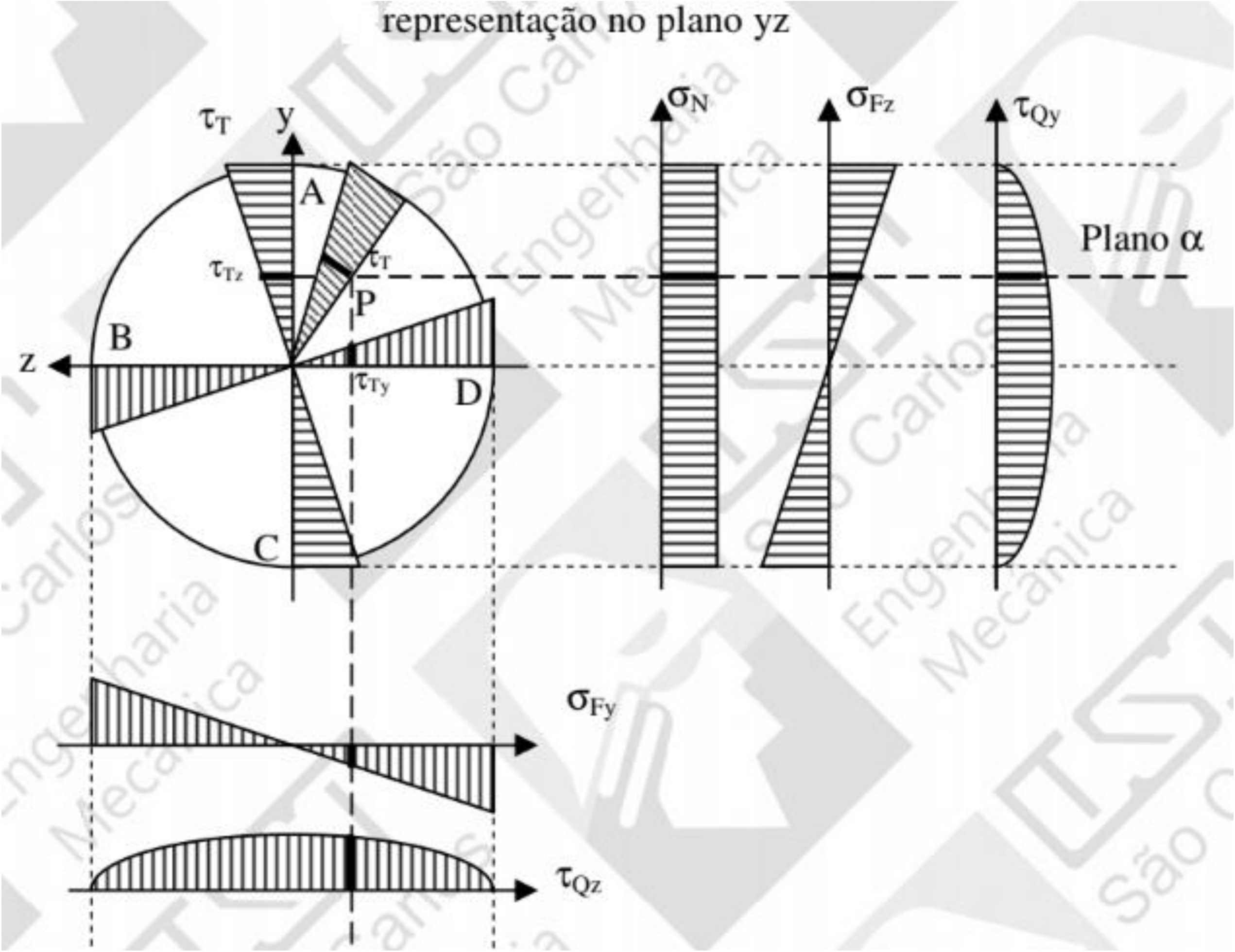


Os diagramas dos esforços solicitantes são bastante simples e podem ser vistos abaixo.

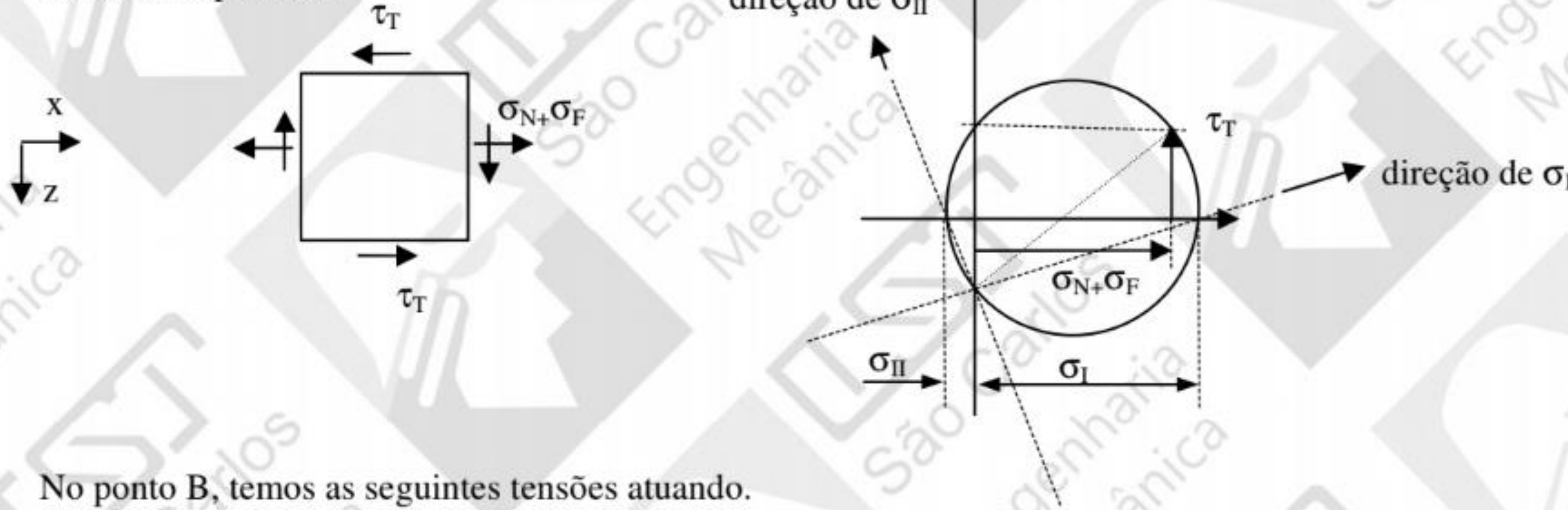


Os valores máximos destas tensões são:

$$\begin{cases} \sigma_N = \dfrac{P}{A} = \dfrac{P}{\dfrac{\pi d^2}{4}} = \dfrac{8000\ [\text{N}]}{\dfrac{\pi \times 0{,}02^2}{4}[\text{m}^2]} = 25{,}46\ [\text{MPa}] \\ \sigma_f = \dfrac{M_f}{W_f} = \dfrac{M_f}{\dfrac{\pi d^3}{32}} = \dfrac{55\ [\text{N.m}]}{\dfrac{\pi \times 0{,}02^3}{32}[\text{m}^3]} = 70{,}03\ [\text{MPa}] \\ \tau_t = \dfrac{M_t}{W_t} = \dfrac{M_t}{\dfrac{\pi d^3}{16}} = \dfrac{30[\text{N.m}]}{\dfrac{\pi \times 0{,}02^3}{16}[\text{m}^3]} = 19{,}10\ [\text{MPa}] \\ \tau_q = \dfrac{4.Q}{3.A} = \dfrac{4 \text{x}\ 550\ [\text{N}]}{\dfrac{3 \text{x}\ \pi\ \text{x}\ 0{,}02^2[\text{m}^2]}{4}} = 23{,}34\ [\text{kPa}] \end{cases}$$


representação no plano yz
τ_T
y
A
τ_T
τ_{Tz}
P
B
z
τ_{Ty}
D
C
σ_N
σ_{Fz}
τ_{Qy}
Plano α
σ_{Fy}
τ_{Qz}

Tensões no ponto A



No ponto B, temos as seguintes tensões atuando.