

Aula 14: Magnetismo da Matéria e Equações de Maxwell

Curso de Física Geral III

F-328

1º semestre, 2014



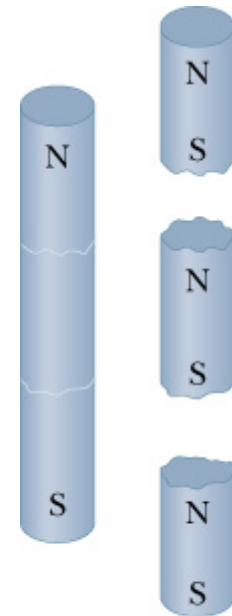
Ímãs – Polos e dipolos

Introdução

As propriedades magnéticas dos materiais podem ser compreendidas pelo que ocorre com seus átomos e elétrons.

A estrutura mais simples na eletricidade é, como vimos, uma carga isolada q ; no magnetismo, é um *dipolo magnético*, do qual uma barra imantada (ímã) é um exemplo. Um ímã é caracterizado por dois polos: o polo *norte* (de onde emergem as linhas do campo magnético) e o polo *sul* (para onde as linhas migram). Não somos capazes de isolar um único polo (*monopolo* magnético): um ímã partido ao meio se subdivide em dois outros e assim sucessivamente até o nível microscópico de átomos, núcleos e elétrons.

Até onde sabemos, *não existem*, pois, *monopolos magnéticos*.



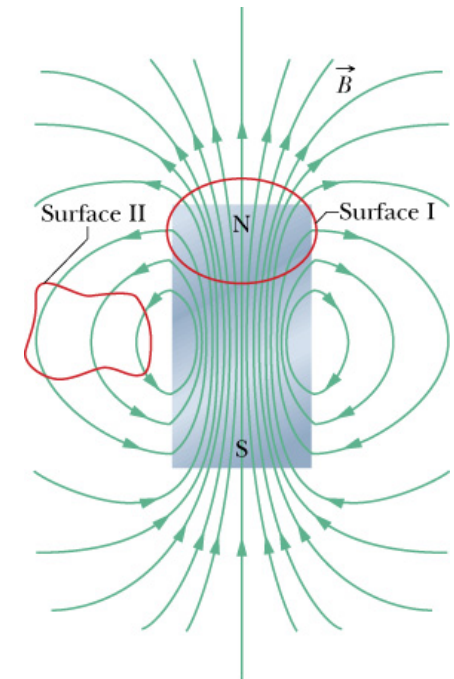
A Lei de Gauss do magnetismo

A lei de Gauss para campos magnéticos é uma maneira formal de se dizer que não existem monopolos magnéticos:

$$\phi_B = \oint \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0$$

O fluxo de \vec{B} através de qualquer superfície fechada é nulo, já que não pode existir qualquer “**carga magnética**” isolada envolvida pela superfície.

Vemos que $\phi_B = 0$ através das superfícies I e II da figura. As linhas de \vec{B} são fechadas.



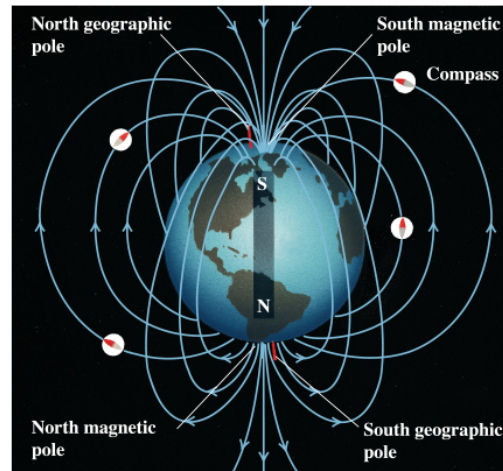
A lei de Gauss do magnetismo é válida mesmo para estruturas mais complicadas do que um dipolo magnético.

O Magnetismo da Terra

Em 1600, William Gilbert descobriu que a **Terra era um ímã natural permanente** com **polos magnéticos próximos aos polos norte e sul geográficos**: seu campo magnético pode ser aproximado pelo de uma enorme barra imantada (um dipolo magnético) que atravessa o centro do planeta. Uma vez que o polo norte da agulha imantada de uma bússola aponta na direção do polo sul de um ímã, o que é denominado **polo norte da Terra**, é na realidade, **um polo sul do dipolo magnético terrestre**.



O Magnetismo da Terra



A direção do campo magnético sobre a superfície da Terra pode ser especificada em termos de dois ângulos: a *declinação* e a *inclinação* do campo.

O campo observado em qualquer local da superfície varia com o tempo. Por exemplo, entre 1580 e 1820 a direção indicada pelas agulhas de uma bússola variou de 35° em Londres.

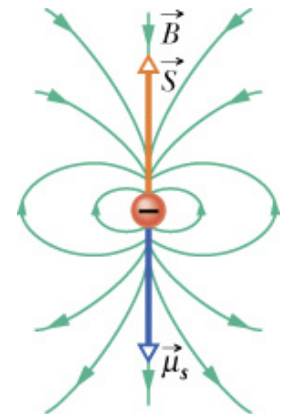
Magnetismo e Elétrons

Já vimos que elétrons constituindo uma corrente elétrica num fio geram um campo magnético ao redor do fio. Há mais duas maneiras, cada um envolvendo um momento de dipolo magnético, de produzir um campo magnético. Contudo, a compreensão destes mecanismos exige conhecimentos de Física Quântica não abordados nesta disciplina.

Momento de Dipolo Magnético de Spin

Um elétron isolado pode ser considerado classicamente como uma minúscula carga negativa em rotação, possuindo um momento angular *intrínseco* ou *spin* \vec{S} ; associado a este *spin* existe *um momento de dipolo magnético de spin* $\vec{\mu}_s$, relacionado a \vec{S} por:

$$\vec{\mu}_s = -\frac{e}{m} \vec{S} \quad (1)$$



Magnetismo e Elétrons

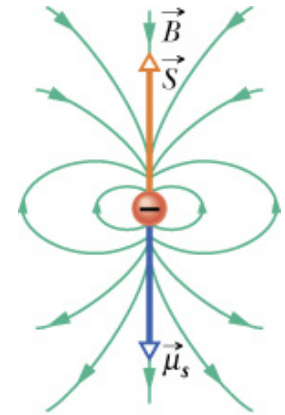
O próprio spin \vec{S} **não pode ser medido (*)**; a componente S_z (medida ao longo do eixo z, por exemplo) é quantizada e pode ter dois valores que diferem apenas em sinal:

$$S_z = m_s \hbar, \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

onde $\hbar \equiv h/2\pi$ e $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ é a *constante de Planck*.

(m_s é chamado *número quântico magnético de spin*.)

(*) a mecânica quântica prevê (e a experiência confirma) que apenas uma das componentes do spin e o quadrado do seu módulo podem ser medidos simultaneamente.



Magnetismo e Elétrons

O momento de dipolo magnético $\vec{\mu}_s$ também não pode ser medido; apenas a sua componente ao longo do eixo z , por exemplo, que também é quantizada. Tomando a componente z de (1) :

$$\mu_{s,z} = -\frac{e}{m} S_z = \pm \frac{eh}{4\pi m} \quad (2)$$

A grandeza do lado direito de (2) é chamada *magneton de Bohr* (μ_B):

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = \frac{e\hbar}{2m} = 9,27 \times 10^{-24} \frac{J}{T}$$

Momentos de dipolo magnético de elétrons e de outras partículas elementares podem ser expressos em termos de μ_B .

Para um elétron, a componente z medida de $\vec{\mu}_s$ é: $\mu_{s,z} = 1 \mu_B$

Momento de Dipolo Magnético Orbital

Os elétrons ligados aos átomos possuem um momento angular orbital, \vec{L}_{orb} , ao qual se pode associar um *momento de dipolo magnético orbital* $\vec{\mu}_{orb}$. Os dois estão relacionados por:

$$\vec{\mu}_{orb} = -\frac{e}{2m} \vec{L}_{orb} \quad (3)$$

Analogamente, nem \vec{L}_{orb} nem $\vec{\mu}_{orb}$ podem ser medidos, mas apenas suas componentes ao longo de um eixo (z), e estas componentes são também quantizadas:

$$L_{orb,z} = m_l \frac{h}{2\pi}, \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{e} \quad \mu_{orb,z} = -m_l \frac{eh}{4\pi m}$$

Ou:
$$\mu_{orb,z} = -m_l \mu_B$$

(m_l é chamado *número quântico magnético orbital*)

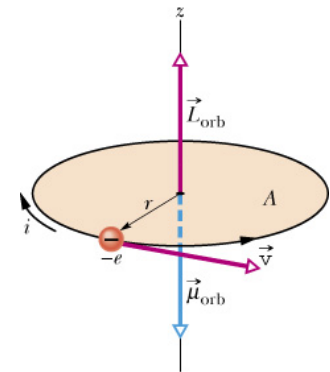
Magnetismo e Elétrons

Modelo de Espira para Órbitas de Elétrons

Podemos obter a equação (3) de modo clássico, supondo que o elétron, em seu movimento circular em torno do átomo, é uma “*espira de corrente*”. Temos:

$$\vec{\mu}_{orb} = i \vec{A}$$

Mas: $i = \frac{\text{carga}}{\text{tempo}} = \frac{ev}{2\pi r} \rightarrow \mu_{orb} = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2}$ (4)



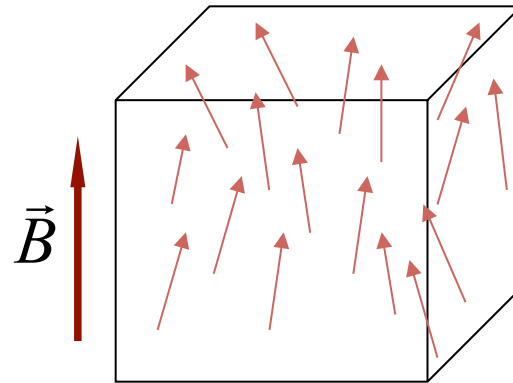
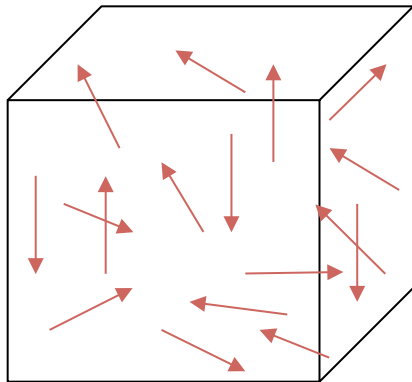
Temos ainda: $L_{orb} = mrv$ (5)

Combinando as equações (4) e (5) e levando em conta os sentidos de \vec{L}_{orb} e $\vec{\mu}_{orb}$, podemos escrever vetorialmente:

$$\vec{\mu}_{orb} = -\frac{e}{2m} \vec{L}_{orb}$$

Paramagnetismo

Em materiais paramagnéticos, os átomos têm **momentos de dipolo magnéticos permanentes** que interagem fracamente e estão orientados aleatoriamente na ausência de um campo magnético externo. Na presença de um campo externo, eles tendem a se **alinhar paralelamente ao campo**, mas isto é dificultado pelo movimento caótico provocado pela agitação térmica. O grau de alinhamento dos momentos com o campo depende da intensidade deste e da temperatura.



Um material paramagnético colocado num campo externo não uniforme é **atraído** para a região onde o **campo é mais intenso**.

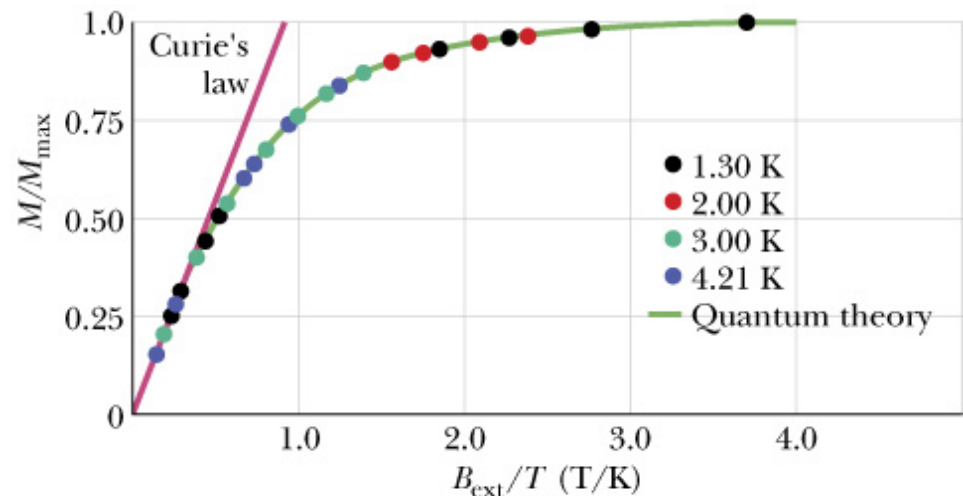
Paramagnetismo

A *magnetização* M de um material (*momento de dipolo total por unidade de volume*) dá uma idéia da extensão deste alinhamento.

Em 1895, Pierre Curie descobriu experimentalmente a relação entre a magnetização de uma substância, o campo externo e a temperatura:

$$M = C \frac{B_{ext}}{T}$$

(Lei de Curie)

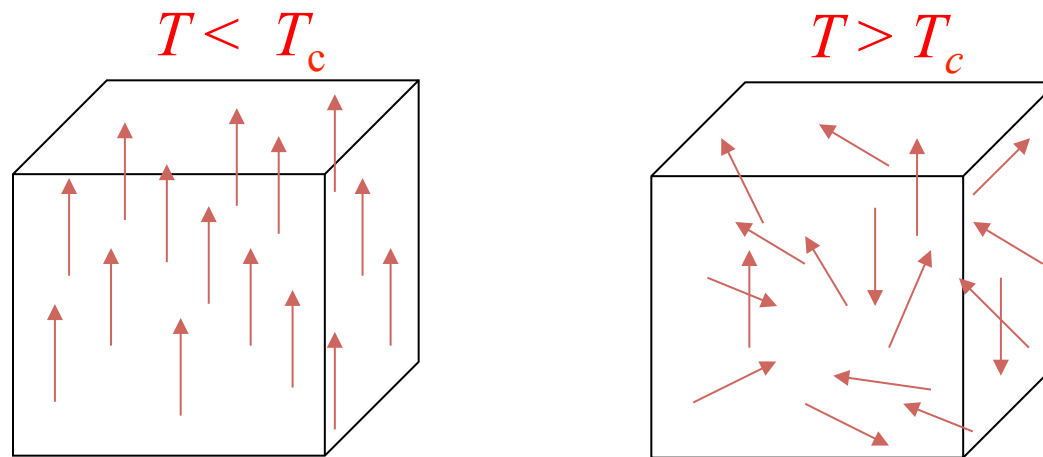


Curva de magnetização para o sulfato de cromo-potássio.

Ferromagnetismo

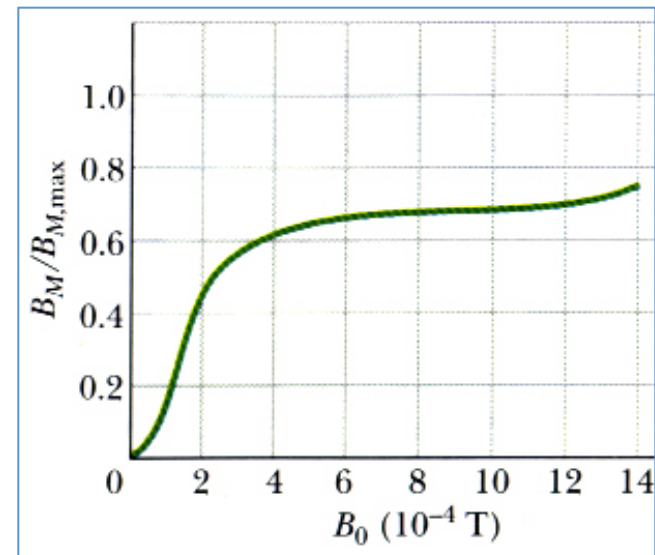
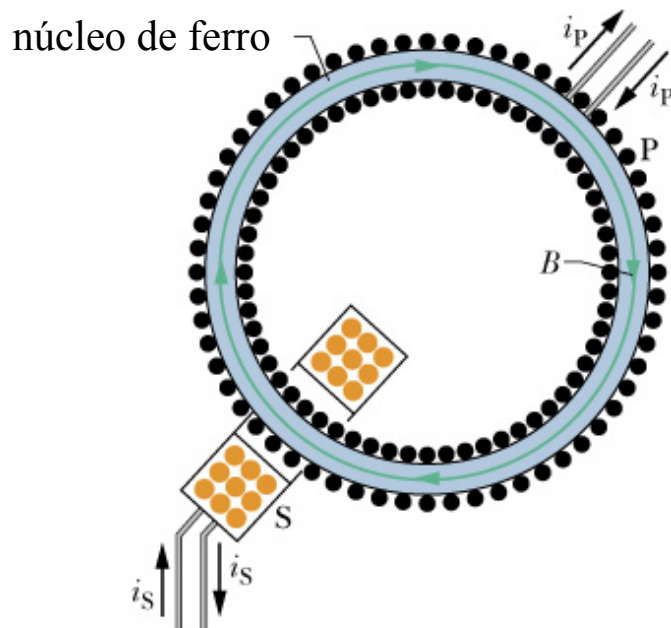
Esta é a forma mais forte de magnetismo, exibida por materiais como ferro, cobalto, níquel, gadolínio, etc e por suas ligas. O ferromagnetismo surge devido a uma interação quântica especial, chamada *acoplamento de troca*, que permite o alinhamento dos dipolos atômicos em rígido paralelismo, apesar da tendência à desordem devida à agitação térmica.

Acima de uma certa temperatura crítica, chamada *temperatura de Curie*, o acoplamento de troca deixa de ter efeito e o material torna-se *paramagnético*.



Ferromagnetismo

O *anel de Rowland* (figura) é um dispositivo para estudar a magnetização de um material (núcleo toroidal circundado por uma bobina primária). O campo no interior do núcleo é: $B = B_0 + B_M$, onde B_0 é o campo da bobina e B_M está associado ao alinhamento dos dipolos do núcleo, isto é, há um $B_{M,\max}$, correspondendo à saturação.

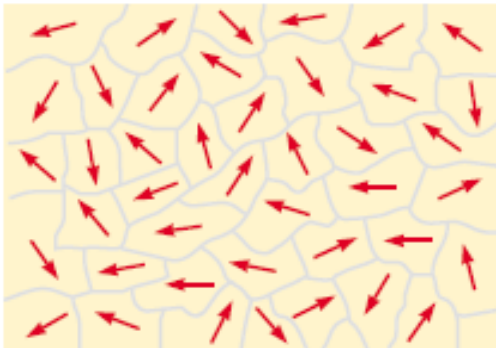


Ferromagnetismo

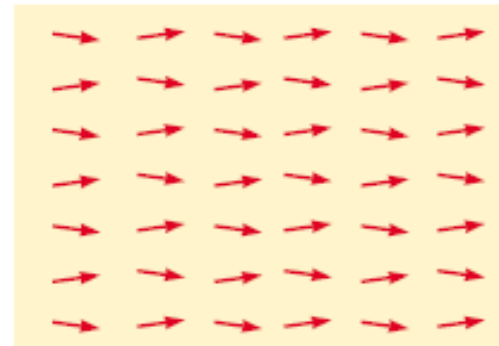
Por que o momento magnético de uma amostra não atinge logo o seu valor de saturação, mesmo para pequenos valores de B_0 ?


Por que cada prego de ferro em estado natural não é um ímã permanente?

Um material ferromagnético, em seu estado normal, é constituído de um número muito grande de *domínios magnéticos*, dentro dos quais o alinhamento dos dipolos atômicos é perfeito.



$$\vec{B} = 0$$

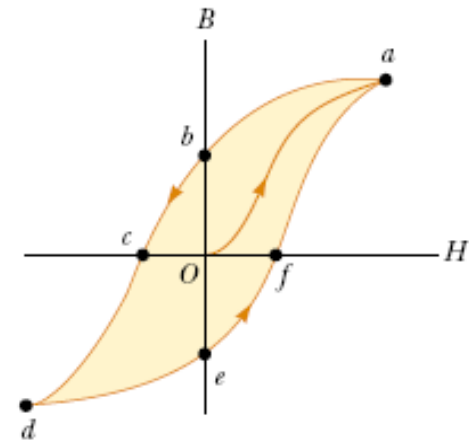



$$\vec{B}$$

Ferromagnetismo - Histerese

Como a orientação dos domínios é *aleatória*, seus efeitos magnéticos em grande parte se cancelam. Quando o material é magnetizado, os domínios tendem a se alinhar, dando forte contribuição para o campo magnético no material. Este alinhamento pode persistir mesmo quando o campo externo é removido, deixando o material permanentemente magnetizado, graças a um *campo remanescente* (ponto *b* da figura).

A curva externa da figura é chamada *curva de histerese*. As fronteiras dos domínios não retornam completamente à sua configuração original quando o campo externo é diminuído ou mesmo reduzido a zero (*memória magnética*).



Diamagnetismo

É o tipo de magnetismo manifestado por todos os materiais comuns, mas é tão fraco que é mascarado se o material exibir também magnetismo de um dos outros dois tipos. Um material diamagnético não possui momento de dipolo magnético permanente; quando o material é submetido a um campo magnético externo, fracos momentos de dipolo magnético são produzidos nos átomos do material.

A combinação destes momentos de dipolo *induzidos* produz um fraco campo magnético resultante, que desaparece quando o campo externo é removido.

O momento de dipolo induzido por um campo externo \vec{B}_{ext} tem sentido oposto a \vec{B}_{ext} . Se este for *não uniforme*, o material diamagnético é *repelido* de uma região de **campo mais intenso** para uma região de **campo menos intenso**.

Diamagnetismo



Campos Magnéticos Induzidos

Vimos que um fluxo magnético variável no tempo produz um campo elétrico. Será que um fluxo elétrico variável no tempo pode produzir um campo magnético? A experiência diz que *sim*.

Por analogia com a lei de Faraday reformulada, podemos escrever:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \quad (\text{Lei de Maxwell da indução})$$

Consegue-se \vec{E} uniforme variando à taxa constante $\frac{dE}{dt}$ no interior de um capacitor que está sendo carregado com uma corrente constante (figura (a)).

O campo elétrico variável produz um campo magnético dentro e fora da região cilíndrica.

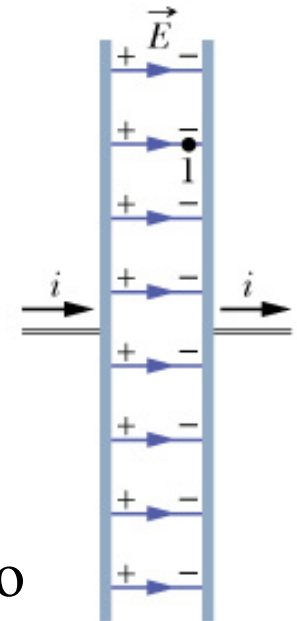


figura (a)

Lei de Ampère-Maxwell

Vê-se que há duas diferenças entre os casos elétrico e magnético: a) no laço de circuitação (figura (b)), o sentido de \vec{B} induzido é oposto ao do campo \vec{E} induzido, razão pela qual **não aparece o sinal negativo** na equação anterior; b) as constantes μ_0 e ϵ_0 aparecem por causa da adoção do sistema SI de unidades.

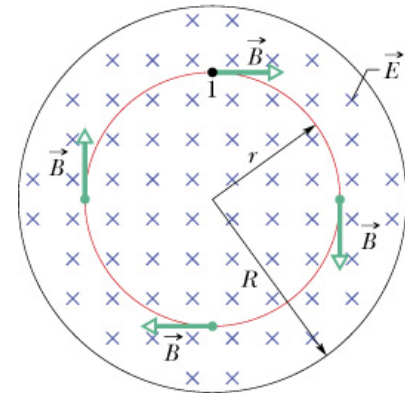


figura (b)

A lei de Ampère-Maxwell

Considerando as duas maneiras de se obter um campo magnético (uma corrente ou um campo \vec{E} variável no tempo), podemos combinar as equações correspondentes em uma só:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} + \mu_0 i_{env}$$

(Lei de Ampère-Maxwell)

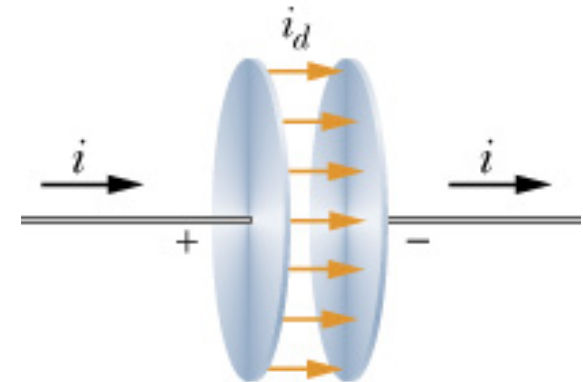
Corrente de Deslocamento

Observamos que o termo $\epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$ tem dimensão de corrente e o chamamos de *corrente de deslocamento* (i_d):

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

Então a lei de Ampère-Maxwell fica:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_{env} + i_d)$$



Para o caso de um capacitor sendo carregado (figura), mostra-se facilmente que $i_d = i$; então podemos considerar a corrente fictícia i_d como dando continuidade à corrente real i que está carregando o capacitor.

→ i_d tem significado real?

Campo Magnéticos Induzidos

Calculando o campo magnético induzido

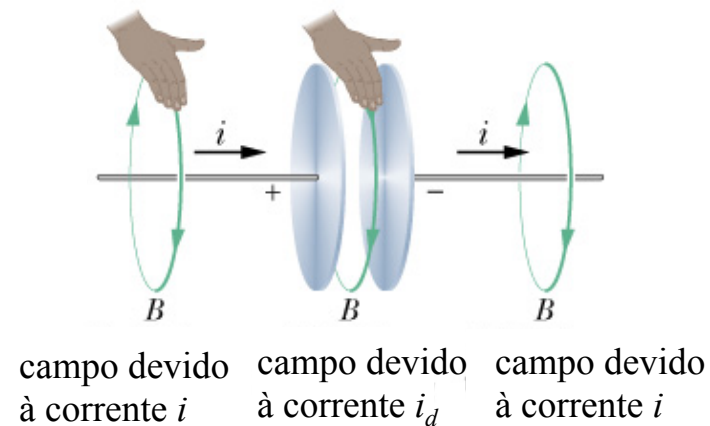
Embora nenhuma carga realmente se mova entre as placas do capacitor sendo carregado, o conceito de corrente de deslocamento pode nos ajudar a calcular o campo magnético induzido.

Como a corrente de deslocamento está uniformemente distribuída entre as placas do capacitor circular de raio R :

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi R^2} r \quad (r < R)$$

E fora do capacitor:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi r} \quad (r > R)$$



O sentido de \vec{B} está mostrado na figura.

As equações de Maxwell

As **equações de Maxwell** são **equações básicas do eletromagnetismo**, capazes de explicar uma grande variedade de fenômenos e são a base do funcionamento de muitos dispositivos eletromagnéticos. São elas:

Forma integral

Forma diferencial

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{env}}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\oint \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} + \mu_0 i_{env} \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

A Equação de uma Onda Eletromagnética

Vamos deduzir uma equação diferencial cujas soluções descrevem uma onda eletromagnética e descobrir a sua velocidade de propagação no vácuo. Consideremos as equações de Maxwell com $\rho = J = 0$.
Tomando-se o rotacional de (3) e utilizando (1) :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Mas: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$

E como $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$:

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (5)$$

Analogamente, tomando-se o rotacional de (4) e utilizando (2) :

$$\nabla^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (6)$$

As equações (5) e (6) equivalem a **seis equações diferenciais escalares** (uma para cada componente de \vec{E} e \vec{B}) **formalmente idênticas**.

A Equação de uma Onda Eletromagnética

Para simplificar, consideremos que \vec{E} e \vec{B} estejam nas direções y e z , respectivamente e ainda que $E_y = E_y(x, t)$ e $B_z = B_z(x, t)$ somente. Então, as equações (5) e (6) se simplificam para:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \quad (7)$$

Cada uma destas equações é formalmente idêntica à equação:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} ,$$

que representa uma onda oscilando na direção y e propagando-se na direção x com velocidade v . Então, as equações (7) acima representam uma onda que se propaga na direção x com velocidade

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cong 3,0 \times 10^8 \frac{m}{s} = c$$

A Equação de uma Onda Eletromagnética

Ou seja, uma onda *EM* se propaga no vácuo *com velocidade da luz*.
A equação de onda para um escalar ψ qualquer (representando qualquer componente de \vec{E} ou \vec{B}) é:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

cuja solução mais geral para propagação numa direção genérica do espaço é do tipo:

$$\psi = \psi_m e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)} \quad , \quad \text{com} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Para uma onda propagando-se na direção x :

$$\psi = \psi_m \sin(kx \pm \omega t)$$

Exemplos

<http://www.walter-fendt.de/ph11e/emwave.htm>

(uma onda eletromagnética)

<http://people.seas.harvard.edu/~jones/ap216/applets/emWave/emWave.html>

(a propagação de uma onda eletromagnética)