

Exercícios - Argumentos Cálculo Proposicional

Regras de Inferências: **MP:** $\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\alpha} \quad \beta$ **MT:** $\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\neg \beta} \quad \neg \alpha$ **SH:** $\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\beta \rightarrow \gamma} \quad \alpha \rightarrow \gamma$

SD: $\frac{\alpha \vee \beta}{\neg \alpha} \quad \neg \beta$ $\frac{\alpha \vee \beta}{\neg \beta} \quad \alpha$

A: $\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad \frac{\beta}{\beta \vee \alpha}$

C: $\frac{\alpha}{\beta} \quad \alpha$ $\frac{\alpha}{\beta} \quad \beta$
 $\alpha \wedge \beta$ $\beta \wedge \alpha$

S: $\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$

1 - Verifique se os argumentos abaixo são válidos:

a) Se Ana obtiver o título de mestre então ingressará no doutorado e lecionará em Campinas. Ana não lecionará em Campinas. L

b) $p \rightarrow (q \vee r)$
 $\neg(\neg p \vee r)$
 $s \rightarrow r$
Logo $s \vee q$

2. Use as regras de inferências e as equivalências dadas, para mostrar a validade dos argumentos abaixo:

a) Se os bombeiros chegarem a tempo então o fogo será apagado e as vítimas serão salvas. As vítimas não foram salvas. Logo, os bombeiros não chegaram a tempo.

b) Se for determinada a paralização então a prova será adiada e seu resultado será proveitoso. Será determinada a paralização ou os alunos marcarão nova assembleia. A prova não será adiada. Logo, se os alunos não marcaram nova assembleia e o resultado da prova não for proveitoso então os alunos farão uma nova avaliação.

c) Se Ana estudar, será aprovada. Se José não estudar, será zubilado do colégio. Ana não será aprovada ou José não será zubilado. Logo, se Ana estudar, José estudará.

d) $\neg (q \rightarrow p) \rightarrow \neg r$
 $\neg q \rightarrow w$
 $(\neg u \vee s) \rightarrow \neg p$
 $\neg (\neg r \vee \neg s)$
Logo $w \wedge (\neg u \vee r)$

e) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg u \wedge r)$
 $\neg (r \vee s)$
 $t \rightarrow \neg p$
 $\neg t \rightarrow \neg w$
Logo $w \rightarrow v$

$$\begin{aligned}
 f) \quad & (p \vee q) \rightarrow (s \leftrightarrow v) \\
 & \neg (s \vee t) \rightarrow x \\
 & t \rightarrow (p \vee q) \\
 & \neg x \wedge \neg s \\
 & \text{Logo } v \rightarrow s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g) \quad & p \rightarrow (q \vee r) \\
 & \neg (\neg q \wedge \neg r) \rightarrow s \\
 & \neg (\neg p \wedge \neg t) \\
 & t \rightarrow u \\
 & \neg (u \wedge \neg v) \\
 & \text{Logo } s \vee v
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h) \quad & (p \rightarrow q) \rightarrow (u \wedge r) \\
 & \neg (x \vee s) \\
 & p \rightarrow x \\
 & q \vee t \\
 & \neg z \leftrightarrow \neg t \\
 & ((x \wedge z) \wedge \neg s) \rightarrow \neg w \\
 & \text{Logo } w \rightarrow v
 \end{aligned}$$

1.

a) p: Ana obterá o título de mestre
 q: Ana ingressará no doutorado
 r: Ana lecionará em Campinas

conclusão: p

pre 1- $p \rightarrow (q \wedge r)$ (v)
 p q r
 F ? F

pre 2- $\neg r$ (v)
 r
 v

O argumento é inválido
 pois há ao menos
 uma interpretação
 que torna as premissas
 V, mas torna a conclu-
 são F; a saber, por ex:

I_1^* : p é F ou I_2^* : p é F
 q é V q é F
 r é F r é F

2.

a)

C: $\neg b$

pre 1- $b \rightarrow (f \wedge v)$

(b: os homens chegaram a tempo)

pr 2- $\neg v$

(f: o fogo será apagado)

2, A

3- $\neg f \vee \neg v$

(v: as vítimas serão salvas)

3, eq₁₂

4- $\neg(f \wedge v)$

1, 4, MT

5- $\neg b$

ou

C : $\sim b$

equiv 18 : $\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma)$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $b \quad \neg b \quad b \quad \neg b$

pre

1. $b \rightarrow (\neg \perp \wedge \neg \perp)$

pre

2. $\sim \neg \perp$

1, equiv 18

3. $(b \rightarrow \neg \perp) \wedge (b \rightarrow \neg \perp)$

3, S

4. $b \rightarrow \neg \perp$

4, 2, MT

5. $\sim b$

equiv 17 : $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg \beta \rightarrow \neg \alpha$

$\swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow$
 $\neg \neg \quad \neg \neg \quad \neg \neg \quad \neg \neg$

pre

c) C : $a \rightarrow \neg f$

pre

1. $a \rightarrow p$

pre

2. $\neg \neg f \rightarrow \neg \neg f$

pre

3. $\neg p \vee \neg q$

1, 4, SH 6. $a \rightarrow \neg q$

6, 5, SH 7. $a \rightarrow \neg f$

3, eq 9

4. $p \rightarrow \neg q$

2, eq 17

5. $\neg q \rightarrow \neg f$

equiv 9 : $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg \alpha \vee \beta$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $p \quad \neg q \quad \neg p \quad \neg q$

equiv 13 : $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg \alpha \wedge \neg \beta$

d)

C : $\omega \wedge (\neg \mu \vee \pi)$

pre

1. $\neg(q \rightarrow p) \rightarrow \neg \pi$

pre

2. $\neg q \rightarrow \omega$

pre

3. $(\neg \mu \vee \pi) \rightarrow \neg p$

pre

4. $\neg(\neg \pi \vee \neg \pi)$

4, eq

5. $\pi \wedge \pi$

5, S

6. π

5, S

7. π

6, 1, MT

8. $q \rightarrow p$

7, A

9. $\neg \mu \vee \pi$

9, 3, MP

10. $\neg p$

8, 10, MT 11. $\neg q$

11, 2, MP

12. ω

6, A

13. $\neg \mu \vee \pi$

12, 13, C

14. $\omega \wedge (\neg \mu \vee \pi)$

ou

d)

C : $\omega \wedge (\neg \mu \vee \pi)$

- | | | |
|-----------|-----|---|
| pr | 1_ | $\neg(q \rightarrow p) \rightarrow \neg \pi$ |
| pr | 2_ | $\neg q \rightarrow \omega$ |
| pr | 3_ | $(\neg \mu \vee \neg s) \rightarrow \neg p$ |
| pr | 4_ | $\neg(\neg \pi \vee \neg s)$ |
| 4, eq, 13 | 5_ | $\pi \wedge s$ |
| 5, S | 6_ | π |
| 5, S | 7_ | s |
| 6, 1, MT | 8_ | $q \rightarrow p$ |
| 3, eq, 9 | 9_ | $(\neg \mu \rightarrow \neg p) \wedge (s \rightarrow \neg p)$ |
| 9, S | 10_ | $s \rightarrow \neg p$ |
| 7, 10, MP | 11_ | $\neg p$ |
| 11, 8, MT | 12_ | $\neg q$ |
| 2, 12, MP | 13_ | ω |
| 6, A | 14_ | $\neg \mu \vee \pi$ |
| 13, 14, C | 15_ | $\omega \wedge (\neg \mu \vee \pi)$ |

$$(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma \equiv (\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 $\neg \mu$ s $\neg p$

9. C: $v \rightarrow s$

pre 1. $(p \vee q) \rightarrow (s \leftrightarrow v)$

pre 2. $\neg(s \vee t) \rightarrow x$

pre 3. $t \rightarrow (p \vee q)$

pre 4. $\neg x \wedge \neg s$

4, S 5. $\neg x$

4, S 6. $\neg s$

2, 5, MT 7. $s \vee t$

6, 7, SD 8. t

3, 8, MP 9. $p \vee q$

1, 9, MP 10. $s \leftrightarrow v$

10, eq 11. $(s \rightarrow v) \wedge (v \rightarrow s)$

11, S 12. $v \rightarrow s$

8)

C: $S \vee U \equiv \neg S \rightarrow U \equiv \neg U \rightarrow S$ ^{eq 9}

pre

1- $p \rightarrow (q \vee r)$

(SH)

pre

2- $\neg(\neg p \wedge \neg t) \equiv p \vee t$ ^{eq 12}
 $\equiv \neg p \rightarrow t$ ^{eq 9}

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

pre

3- $\neg(\neg q \wedge \neg r) \rightarrow S$

pre

4- $t \rightarrow u$

pre

5- $\neg(u \wedge \neg v) \equiv \neg u \vee v \equiv u \rightarrow v$ ^{eq 12} ^{eq 9}

3, equiv.

6- $(q \vee r) \rightarrow S$

1, 6, SH

7- $p \rightarrow S$

7, eq 17

8- $\neg S \rightarrow \neg p$

2, eq 12

9- $p \vee t$

9, eq 9

10- $\neg p \rightarrow t$

8, 10, SH

11- $\neg S \rightarrow t$

11, 4, SH

12- $\neg S \rightarrow u$

5, eq 12

13- $\neg u \vee v$

13, eq 9

14- $u \rightarrow v$

12, 14, SH

15- $\neg S \rightarrow v$

15, eq 9

16- $S \vee v$

eq 17: $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg \beta \rightarrow \neg \alpha$

h) . $(p \rightarrow q) \rightarrow (u \wedge x)$

• $\neg(x \vee s)$ • $\neg z \rightarrow \neg t$

• $p \rightarrow x$ • $[(x \wedge z) \wedge \neg s] \rightarrow \neg w$

• $q \vee t$

Logo $w \rightarrow \neg v \equiv$ $\neg w \vee \neg v$

pre

1- $(p \rightarrow q) \rightarrow (u \wedge x)$

pre

2- $\neg(x \vee s)$

pre

3- $p \rightarrow x$

pre

4- $q \vee t$

pre

5- $\neg z \rightarrow \neg t$

pre

6- $[(x \wedge z) \wedge \neg s] \rightarrow \neg w$

2, eq₁₃

7- $\neg x \wedge \neg s$

7, S

8- $\neg x$

7, S

9- $\neg s$

1, eq₁₈

10- $[(p \rightarrow q) \rightarrow u] \wedge [(p \rightarrow q) \rightarrow x]$

10, S

11- $(p \rightarrow q) \rightarrow x$

8, 11, MT

12- $\neg(p \rightarrow q)$

12, eq₁₄

13- $p \wedge \neg q$

13, S

14- p

13, S

15- $\neg q$

15, 4, SD

16- t

14, 3, MP

17- x

5, 16, MT

18- z

15, 16, C

19- $(x \wedge z)$

17, 9, C

20- $(x \wedge z) \wedge \neg s$

6, 18, MP

21- $\neg w$

eq₁₈ $\alpha \rightarrow (\beta \wedge \delta)$
 \equiv
 $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \delta)$

$\alpha \rightarrow (\beta \wedge \delta)$
eq₁₈ \equiv
 $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \delta)$

exemplar da MT

$\neg z \rightarrow \neg t$
t
$\hline \neg(\neg z) \equiv t$

19, A 20- $\neg w \vee \neg v$
20, eq₉ 21- $w \rightarrow v$
 $\equiv \alpha$