

# CAPÍTULO VI

## ANÁLISE DE SISTEMA DE CONTROLE NO DOMÍNIO DO TEMPO

### TÓPICOS

- Sinais de teste
- Erro estacionário
- Constantes de erro
- Resposta transiente de sistemas de 1ª e 2ª ordem
- Mapeamento de pólos

### 6.1 INTRODUÇÃO - RESPOSTA TEMPORAL DE SISTEMAS CONTINUOS

A resposta no tempo de um sistema de controle é normalmente dividida em duas partes: **a resposta transiente** e a **resposta estacionária**. Seja  $y(t)$  a resposta no tempo de um sistema contínuo; então, em geral, pode ser escrita:

$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t) \quad 6.1$$

onde  $y_t(t)$  é a resposta transitória e  $y_{ss}(t)$  é a resposta estacionária.

Em sistema de controle, a resposta transiente é definida como a parte da resposta no tempo que tende para zero assim que o tempo tende para o infinito. De modo que temos a propriedade:

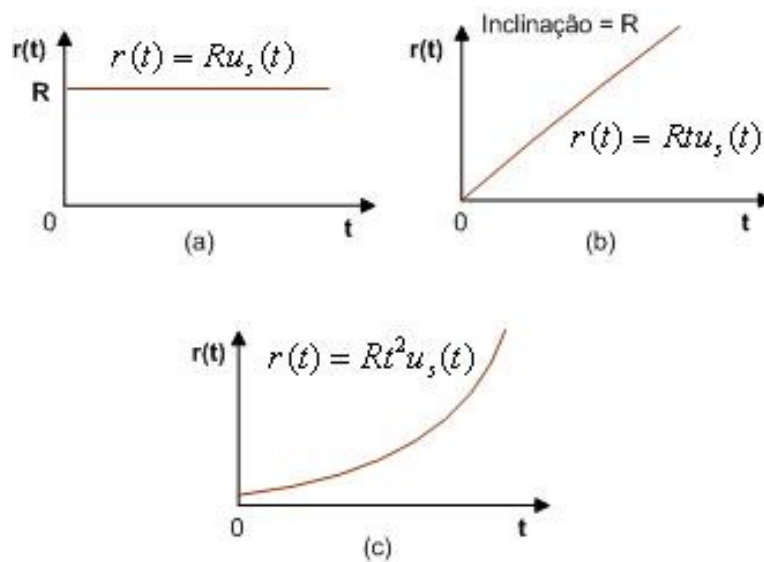
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t(t) = 0 \quad 6.2$$

A resposta estacionária é simplesmente a parte da resposta total que se mantém após o desaparecimento da parte transitória.

Se a resposta estacionária da saída não é exatamente igual à referência desejada, o sistema tem um **erro estacionário**. Este é definido na seção 6.3.

## 6.2 SINAIS DE TESTE TÍPICOS PARA A RESPOSTA NO TEMPO DE SISTEMAS DE CONTROLE

Para efeito de análise em sistemas, utilizamos alguns sinais de testes, nesta seção apresentamos a seguir os sinais: degrau, rampa e parábola.



**Figura 6.1** Entradas degrau, rampa e parábola

Considerando entrada do sistema como um desses ou uma composição dos mesmos pode-se fazer análises estacionária e transitória de um sistema.

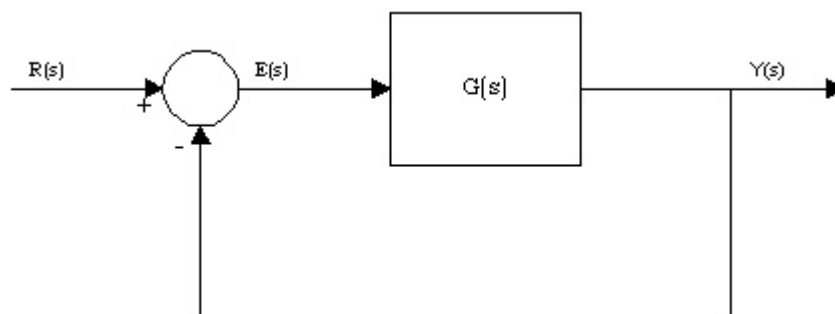
## 6.3 ERRO ESTACIONÁRIO

Um dos objetivos do sistema de controle é que a resposta de saída do sistema siga uma referência desejada com precisão no estado estacionário. A diferença entre a referência (valor desejado ou *set-point*) e a saída no estado estacionário é o erro estacionário. Nos processos reais, devido aos atritos (zona-morta, histereses) e outras imperfeições, e à própria composição natural do sistema, a resposta da saída raramente concorda exatamente com a referência. Em um projeto, um dos objetivos é assegurar o erro estacionário abaixo de uma certa tolerância e ao mesmo tempo satisfazer certas especificações de desempenho da resposta transitória.

### 6.3.1 Erro estacionário de sistemas de controle contínuos lineares com realimentação unitária

Sistemas de controle contínuo estão sujeitos a erros estacionários e normalmente esses erros dependem do tipo de **signal de referência** e do **tipo do sistema**.

Inicialmente, vamos considerar o sistema de controle com realimentação unitária conforme mostrado na Figura 6.2:



**Figura 6.2.** Sistema contínuo com realimentação unitária

### Definição do erro estacionário

O erro estacionário é o sinal composto pela diferença da referência e da saída, definido como:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad 6.3$$

onde  $e(t)$  é o sinal de erro dado por:

$$e(t) = r(t) - y(t). \quad 6.4$$

Aplicando a transformada de Laplace em cada um dos sinais temos:

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad 6.5$$

e sendo  $Y(s) = E(s)G(s)$ , temos:

$$E(s) = R(s) - E(s)G(s) \quad 6.6$$

logo:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)} \quad 6.7$$

Utilizando o teorema do valor final, temos:

$$e_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} \quad 6.8$$

Esta equação calcula o erro estacionário a partir de  $R(s)$  e  $G(s)$ . Conforme afirmado anteriormente, o erro estacionário depende da referência  $R(s)$  e das características de  $G(s)$ . Mais especificamente, podemos mostrar que  $e_{ss}$  depende do número de pólos de  $G(s)$  na origem (ou número de integradores na malha aberta de controle). Este número é conhecido como o tipo do sistema de controle, ou simplesmente, como o **tipo do sistema**. Vamos formalizar o tipo do sistema com relação à função de transferência de malha aberta. De forma geral,  $G(s)$  pode ser escrita como:

$$G(s) = \frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots(1+T_{m1}s+T_{m2}s^2)}{s^N(1+T_as)(1+T_bs)\cdots(1+T_{n1}s+T_{n2}s^2)} e^{-T_d s} \quad 6.9$$

onde K e todos os T's são constantes reais. **O tipo do sistema refere-se à ordem do pólo de G(s) na origem (em s = 0), ou seja, o número N.**

### Exemplo 6.1

Qual o tipo dos sistemas representados pelas FT's de malha direta abaixo?

$$G(s) = \frac{K(1+0.5s)}{s(1+s)(1+2s)(1+s+s^2)} \quad 6.10$$

$$G(s) = \frac{K(1+2s)}{s^3} \quad 6.11$$

A seguir vamos formalizar um procedimento de cálculo do erro estacionário com base na equação 6.8 para diferentes sinais de teste na referência e sistemas de controle.

Vamos considerar cada um daqueles sinais de testes já apresentados para diferentes sistemas.

Considerando a referência  $r(t) = \begin{cases} A & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$  temos  $R(s) = A/s$

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1+G(s)} = \frac{A}{1+\lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{A}{1+K_p} \quad 6.12$$

onde  $K_p$  é a constante de erro de posição, dada por:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0) \quad 6.13$$

A partir das Equações 6.9, 6.12 e 6.13, para o sistema:

- i) tipo 0,  $K_P = K$ , conseqüentemente  $e_{ss} = A/(1+K)$  para a referência degrau;
- ii) tipo 1 em diante,  $K_P \rightarrow \infty$ , conseqüentemente  $e_{ss} \rightarrow 0$  para a referência degrau.

Considerando a referência  $r(t) = \begin{cases} At & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$  temos  $R(s) = A/s^2$

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s + sG(s)} = \frac{A}{0 + \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{A}{K_V} \quad 6.14$$

onde  $K_V$  é a constante de erro de velocidade, dada por:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad 6.15$$

A partir das Equações 6.9, 6.14 e 6.15, para o sistema:

- i) tipo 0,  $K_V = 0$ , conseqüentemente  $e_{ss} \rightarrow \infty$  para a referência rampa.
- ii) tipo 1,  $K_V = K$ , conseqüentemente  $e_{ss} = A/K$  para a referência rampa.
- iii) tipo 2 em diante  $K_V \rightarrow \infty$ , conseqüentemente  $e_{ss} \rightarrow 0$  para a referência rampa.

Considerando a referência  $r(t) = \begin{cases} At^2/2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$  temos  $R(s) = A/s^3$

$$e_{ss}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s^2 + s^2G(s)} = \frac{A}{0 + \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)} = \frac{A}{K_A} \quad 6.16$$

onde  $K_A$  é a constante de erro de aceleração, dada por:

$$K_A = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s) \quad 6.17$$

A partir das Equações 6.9, 6.16 e 6.17, para o sistema:

- i) tipo 0 e tipo 1,  $K_A = 0$ , conseqüentemente  $e_{ss} \rightarrow \infty$  para a referência parábola.
- ii) tipo 2,  $K_A = K$ , conseqüentemente  $e_{ss} = 1/K$  para a referência parábola.

iii) tipo 3 em diante,  $K_A \rightarrow \infty$ , conseqüentemente  $e_{ss} \rightarrow 0$  para a referência parábola.

Dessa forma, podemos resumir esses cálculos do erro estacionário conforme mostrado na Tabela 6.1:

<b>Tabela 6.1.</b> Sumário dos erros estacionários devido a degrau, rampa e parábola.						
<b>Tipo</b>	<b>Constantes de erro</b>			<b>Erro estacionário <math>e_{ss}</math></b>		
j	$K_P$	$K_V$	$K_A$	Degrau $A/(1+K_P)$	Rampa $A/K_V$	Parábola $A/K_A$
0	K	0	0	$A/(1+K)$	$\infty$	$\infty$
1	$\infty$	K	0	0	$A/K$	$\infty$
2	$\infty$	$\infty$	K	0	0	$A/K$
3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	0	0

### Exemplo 6.2

Sejam os sistemas dos itens abaixo conforme a Figura 6.2 com as funções de transferência dadas abaixo. Analise o erro estacionário para entradas degrau, rampa e parábola:

a)

$$G(s) = \frac{K(s+3.15)}{s(s+1.5)(s+0.5)} \quad 6.18$$

b)

$$G(s) = \frac{K}{s^2(s+12)} \quad 6.19$$

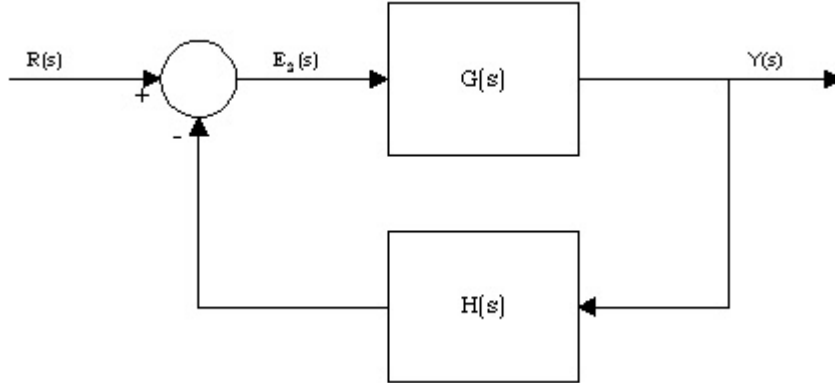
c)

$$G(s) = \frac{5(s+1)}{s^2(s+12)(s+5)} \quad 6.20$$

**Resolução em sala de aula.**

### 6.3.2 Erro estacionário de sistemas de controle contínuos lineares com realimentação não unitária

Nesta seção vamos considerar o sistema de controle com realimentação não unitária conforme mostrado na Figura 6.3:



**Figura 6.3** Sistema com realimentação não unitária

$e(t)$  é o sinal de erro dado por:

$$e(t) = r(t) - y(t). \quad 6.21$$

Aplicando a transformada de Laplace em cada um dos sinais temos:

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad 6.22$$

Porém neste caso,

$$Y(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad 6.23$$

logo:

$$E(s) = R(s) - \frac{R(s)G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \left(1 - \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}\right) R(s) = \frac{1 + G(s)H(s) - G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad 6.24$$

Utilizando o teorema do valor Final, temos:

$$e_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{[1 + G(s)H(s) - G(s)]R(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad 6.25$$

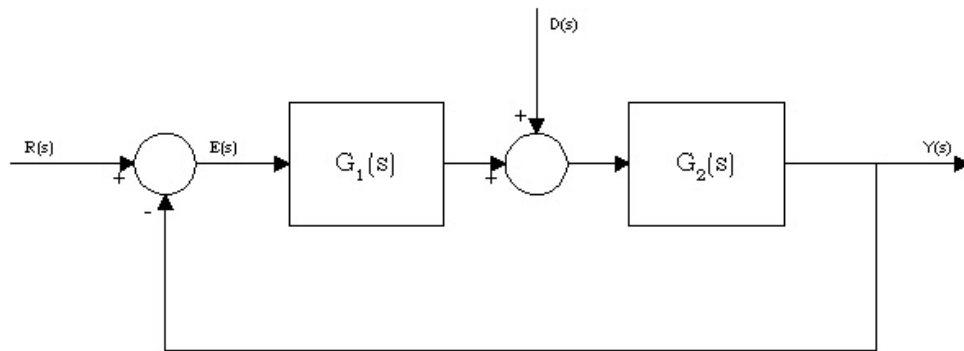


Neste caso, o erro estacionário depende não somente de  $R(s)$  e  $G(s)$ , como também de  $H(s)$ , conforme a equação 6.25.

Neste caso não utilizaremos um método sistemático conforme seção anterior, mas sim, faremos uso da equação 6.25 para o cálculo do erro estacionário  $e_{ss}$  para entrada  $R(s)$  e sistema genéricos,  $G(s)$  e  $H(s)$ . Observe que a equação 6.8 é um caso particular da equação 6.25, para  $H(s) = 1$ .

### 6.3.3 Erro estacionário de sistemas de controle contínuo linear considerando distúrbio

Nesta seção vamos considerar o sistema de controle com realimentação unitária com um distúrbio conforme mostrado na Figura 6.4:



**Figura 6.4.** Sistema com distúrbio  $D(s)$

$e(t)$  é o sinal de erro dado por:

$$e(t) = r(t) - y(t). \quad 6.26$$

Aplicando a transformada de Laplace em cada um dos sinais temos:

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad 6.27$$

Porém neste caso,

$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s) \quad 6.28$$

logo:

$$E(s) = R(s) - \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s) - \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s) \quad 6.29$$

logo,

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s) - \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s) \quad 6.30$$

Utilizando o teorema do valor final, temos:

$$e_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s) - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s) \quad 6.31$$

Neste caso, o erro estacionário depende das entradas  $R(s)$  e  $D(s)$  e de  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$ .

**Exemplo 6.3** Para o sistema da Figura 6.4 e sendo

$$G_1(s) = \frac{1}{s+2} \quad 6.32$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s} \quad 6.33$$

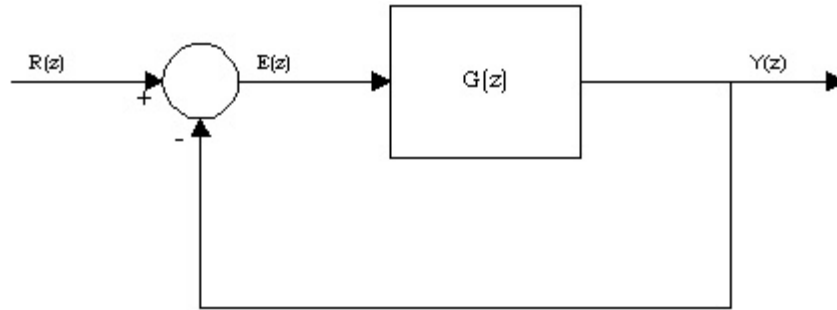
Calcule o erro estacionário  $e_{ss}$  para:

- i)  $R(s) = 1/s$  e  $D(s) = 0$ .
- ii)  $R(s) = 1/s$  e  $D(s) = 1/s$
- iii) Com  $G_1(s) = \frac{1}{s+2} G_c(s)$ , onde  $G_c(s) = k_p \frac{s+1/T_i}{s}$ , sendo  $G_c(s)$  um controlador proporcional e integral e  $k_p$  e  $T_i$  seus parâmetros.

**Resolução em sala de aula.**

### 6.3.4 Erro estacionário de sistemas de controle discretos

Vamos considerar o sistema de controle discreto com realimentação unitária conforme mostrado na Figura 6.5:



**Figura 6.5** Sistema de controle discreto com realimentação unitária

onde  $G(z) =$  Transformada  $z$  de  $G_{h0}(s)G(s)$ , em que  $G(s)$  é dado pela Equação 6.9 e  $G_{h0}(s) = (1 - e^{-Ts})/s$ . Assim temos  $G(z)$  dado pela Equação 6.34:

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] \quad 6.34$$

O cálculo do sinal de erro é muito semelhante à Seção 6.3.1, exceto com relação ao teorema do valor final:

$$e_{ss}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + G(z)} \quad 6.35$$

Esta equação calcula o erro estacionário a partir de  $R(z)$  e  $G(z)$ . No caso discreto, o **tipo do sistema** é definido como o número de pólos em  $z = 1$ .

O procedimento de cálculo de erro estacionário é resumido na Tabela 6.2 abaixo:

**Tabela 6.2.** Sumário dos erros estacionários devido a degrau, rampa e parábola.

Tipo	Constantes de erro			Erro estacionário $e_{ss}$		
	$K_P^*$	$K_V^*$	$K_A^*$	Degrau $A/(1+K_P^*)$	Rampa $A/K_V^*$	Parábola $A/K_A^*$
0	K	0	0	$A/(1+K)$	$\infty$	$\infty$
1	$\infty$	K	0	0	$A/K$	$\infty$
2	$\infty$	$\infty$	K	0	0	$A/K$
3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	0	0

onde as constantes de erro para sistema discreto são:

$$K_P^* = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) \quad 6.36$$

$$K_V^* = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) \quad 6.37$$

$$K_A^* = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) \quad 6.38$$

Considerando-se as entradas discretas:

- Degrau unitário
- Rampa unitária  $AkT$
- Parábola  $\frac{A(kT)^2}{2}$

Para os casos de realimentação não unitária ou de distúrbio conforme vistos para o caso contínuo, não apresentaremos para o discreto, mas observe que as deduções são similares com a utilização do teorema do valor final para sistemas discretos.

## 6.4 ESPECIFICAÇÕES NO TEMPO DA RESPOSTA AO DEGRAU

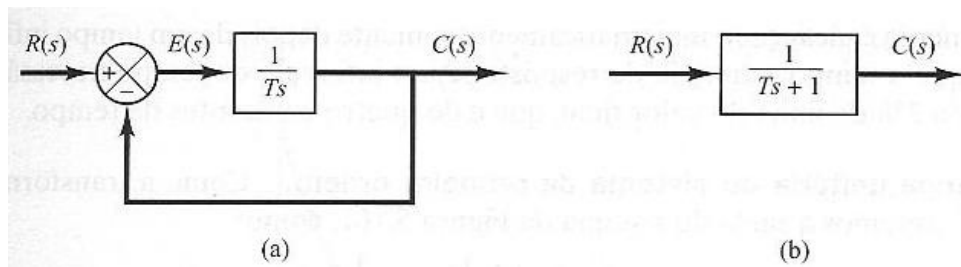
Para sistemas de controle linear, a caracterização da resposta transiente é feita frequentemente a partir da resposta ao degrau unitário.

### 6.4.1 Sistemas de primeira ordem

Considere o sistema de primeira ordem mostrado na figura 6.6 (a). Fisicamente, esse sistema pode representar um circuito RC, um sistema térmico ou algo semelhante. A figura 6.6 (b) mostra um diagrama de blocos simplificado. A relação entrada-saída é dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad 6.39$$

A seguir, vamos analisar as respostas do sistema às entradas degrau unitário, rampa unitária e impulso unitário. As condições iniciais são consideradas nulas.



**Figura 6.6** Diagrama de blocos de sistema de 1ª ordem

**Resposta ao degrau unitário do sistema de primeira ordem.** Como a transformada de Laplace da função degrau unitário é  $1/s$ , substituindo  $R(s) = 1/s$  na equação 6.39, obtemos:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \times \frac{1}{s} \quad 6.40$$

Expandindo  $C(s)$  em frações parciais, temos:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+(1/T)} \quad 6.41$$

Considerando a transformada inversa de Laplace da equação 6.41, obtemos:

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad 6.42$$

A equação 6.42 estabelece que, inicialmente, a resposta  $c(t)$  é zero e no fim se torna unitária. Uma característica importante de uma curva exponencial  $c(t)$  é que em  $t = T$  o valor de  $c(t)$  é 0,632 ou a resposta  $c(t)$  alcançou 63,2% de sua variação total. Isso pode ser facilmente comprovado substituindo-se  $t = T$  em  $c(t)$ . Ou seja,

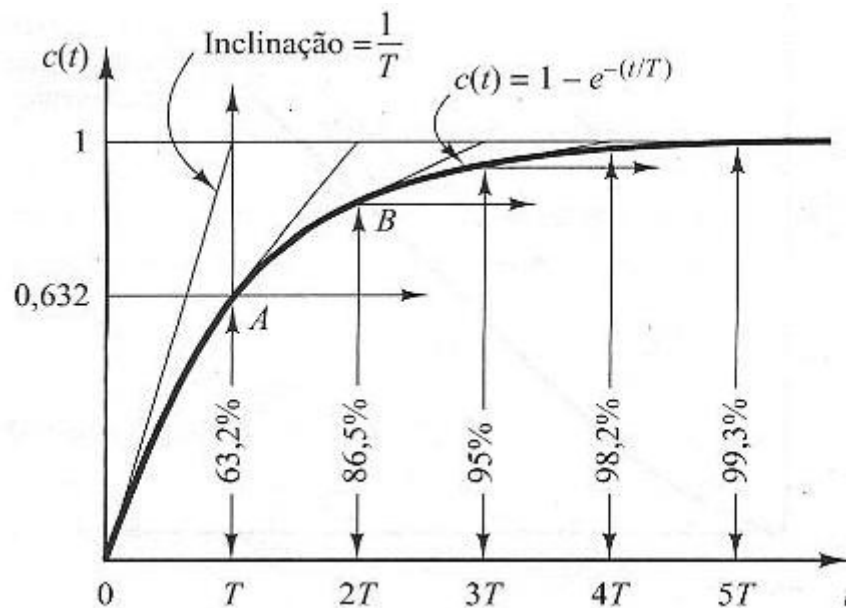
$$c(t) = 1 - e^{-1} = 0,632 \quad 6.43$$

Note que, quanto menor a constante de tempo  $T$ , mais rapidamente o sistema responde. Uma outra característica importante da curva exponencial de resposta é que a inclinação da linha tangente em  $t = 0$  é  $1/T$ , uma vez que:

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{1}{T} e^{-t/T} \right|_{t=0} = \frac{1}{T} \quad 6.44$$

A saída alcançaria o valor final em  $t = T$  se fosse mantida a velocidade inicial da resposta. A partir da equação 6.44, vemos que a inclinação da curva de resposta  $c(t)$  decresce monotonicamente de  $1/T$  em  $t = 0$  a zero em  $t = \infty$ .

A curva exponencial de resposta  $c(t)$  dada pela equação 6.42 é mostrada na figura 6.7. Em uma constante de tempo, a curva da resposta exponencial vai de 0 a 63,2% do valor final. Em duas constantes de tempo, a resposta atinge 86,5% da resposta final. Para  $t = 3T$ ,  $4T$  e  $5T$ , a resposta alcança 95%, 98,2% e 99,3%, respectivamente, da resposta final. Assim, para  $t \geq 4T$ , a resposta se mantém a 2% do valor final. Como se vê na equação 6.42, o estado permanente é alcançado matematicamente somente depois de um tempo infinito. Na prática, entretanto, é razoável que o tempo estimado de resposta seja o intervalo de tempo necessário para a curva alcançar e permanecer a 2% do valor final, que é de quatro constantes de tempo.



**Figura 6.7** Resposta de um sistema de 1ª ordem a uma entrada degrau unitário

**Resposta à rampa unitária do sistema de primeira ordem.** Como a transformada de Laplace da rampa unitária é  $1/s^2$ , obtemos a saída do sistema da figura 6.6 como:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \times \frac{1}{s^2} \quad 6.45$$

Expandindo  $C(s)$  em frações parciais, temos:

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1} \quad 6.46$$

Considerando a transformada inversa de Laplace da equação 6.46, obtemos:

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad 6.47$$

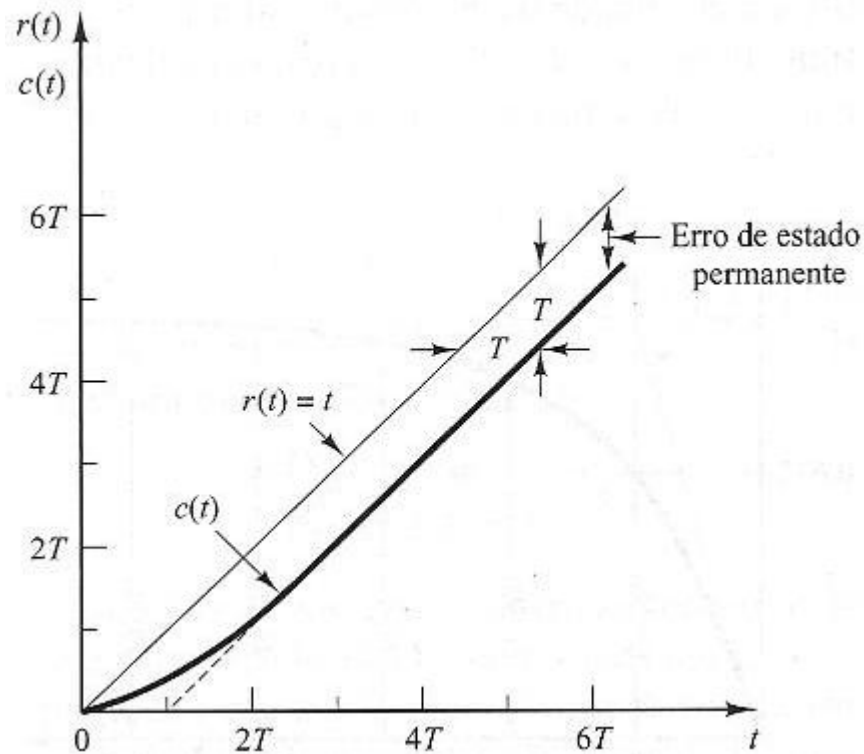
O sinal de erro  $e(t)$  é, então,

$$e(t) = r(t) - c(t) = T(1 - e^{-t/T}) \quad 6.48$$

Conforme  $t$  tende ao infinito,  $e^{-t/T}$  se aproxima de zero e, assim, o sinal de erro  $e(t)$  se aproxima de  $T$  ou  $e(\infty) = T$ .

A figura 6.8 mostra a rampa unitária de entrada e a resposta do sistema. O erro do sistema para seguir a rampa unitária como sinal de entrada é igual a  $T$  para  $t$  suficientemente grande. Por conseguinte, quanto menor a constante de tempo  $T$ , menor o erro estacionário ao seguir a entrada em rampa.





**Figura 6.8** Resposta de um sistema de 1ª ordem a uma entrada rampa unitária

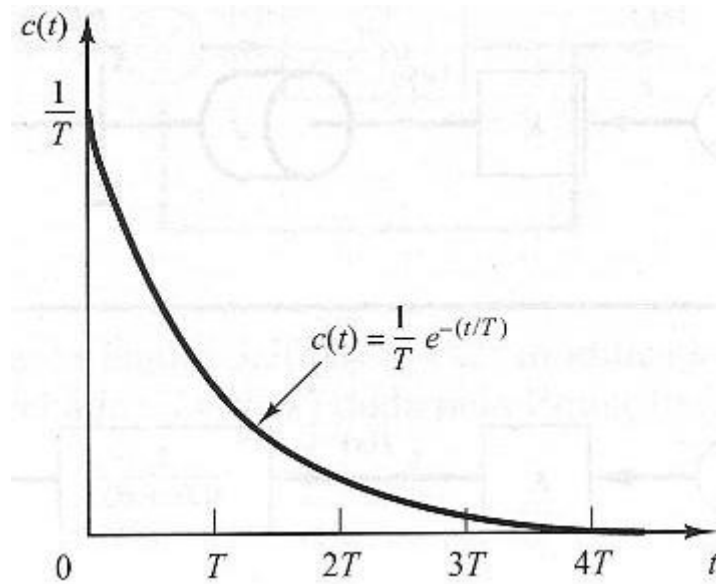
**Resposta ao impulso unitário do sistema de primeira ordem.** Para um impulso unitário de entrada  $R(s) = 1$  e a resposta do sistema da figura 6.6 pode ser obtida como:

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad 6.49$$

A transformada inversa de Laplace da equação 6.49 resulta em:

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad 6.50$$

A curva de resposta dada pela equação 6.50 é mostrada na figura 6.9.



**Figura 6.9** Resposta de um sistema de 1ª ordem a uma entrada impulso unitário

**Propriedade importante de sistemas lineares invariantes no tempo.**

Na análise anterior, mostrou-se que para a entrada em rampa unitária a saída  $c(t)$  é:

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad 6.51$$

Para a entrada em degrau unitário, que é a derivada da entrada em rampa unitária, a saída  $c(t)$  é:

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad 6.52$$

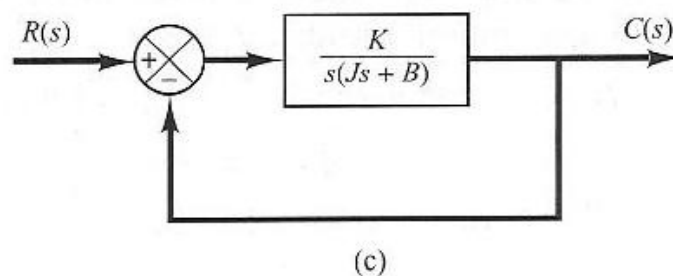
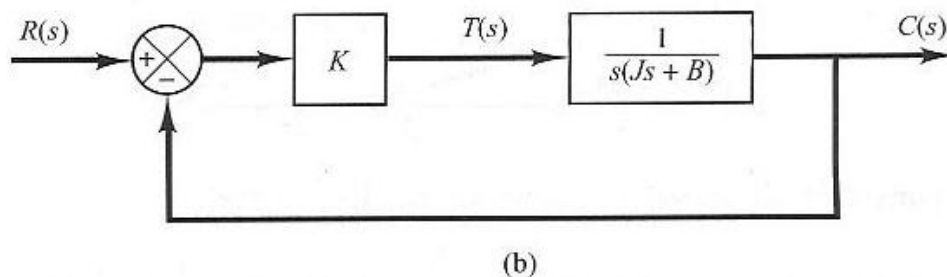
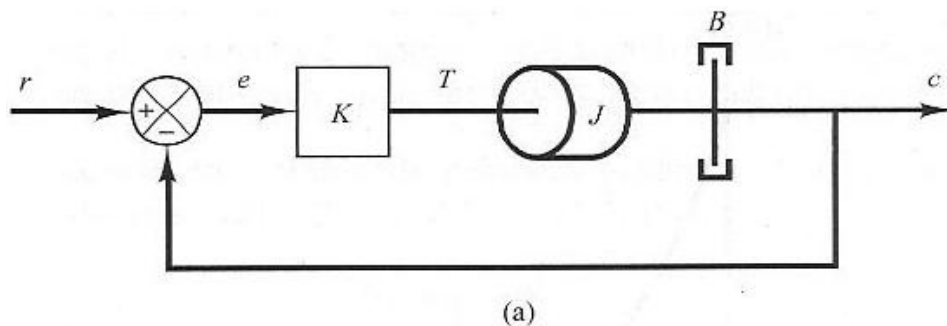
Por fim, para a entrada em impulso unitário, que é a derivada da entrada em degrau unitário, a saída  $c(t)$  é:

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad 6.53$$

A comparação das respostas do sistema a essas três entradas indica claramente que **a resposta à derivada de um sinal de entrada pode ser obtida diferenciando-se a resposta do sistema para o sinal original**. Pode-se ver também que a resposta à integral do sinal original pode ser obtida pela integração da resposta do sistema ao sinal original e pela determinação da constante de integração a partir da condição inicial de resposta nula. Esta é uma propriedade dos sistemas lineares invariantes no tempo. Os sistemas lineares variantes no tempo e sistemas não-lineares não possuem essa propriedade.

#### 6.4.2 Sistema de segunda ordem

Nesta seção, vamos obter a resposta do sistema de controle típico de segunda ordem às entradas em degrau, rampa e impulso. Aqui, vamos considerar um servossistema como um exemplo de sistema de segunda ordem.



**Figura 6.10** Servossistema de 2ª ordem

**Servossistema.** A figura 6.10(a) mostra um servossistema constituído de um controlador proporcional e elementos de carga (elementos de inércia e atrito viscoso). Suponha que se deseje controlar a posição da saída  $c(t)$  de acordo com a posição de entrada  $r(t)$ .

A equação para os elementos de carga é:

$$J\ddot{c}(t) + B\dot{c}(t) = T \quad 6.54$$

em que  $T$  é o torque produzido pelo controlador proporcional, cujo ganho é  $K$ . Considerando as transformadas de Laplace de ambos os lados dessa última equação e supondo condições iniciais nulas, obtemos:

$$Js^2C(s) + BsC(s) = T(s) \quad 6.55$$

Então, a função de transferência entre  $C(s)$  e  $T(s)$  é:

$$\frac{C(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js + B)} \quad 6.56$$

Pelo uso dessa função de transferência, a figura 6.10(a) pode ser redesenhada como na figura 6.10(b), que pode ser modificada para o esquema mostrado na figura 6.10(c). A função de transferência de malha fechada é então obtida como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} = \frac{K/J}{s^2 + (B/J)s + (K/J)} \quad 6.57$$

Esse sistema, em que a função de transferência de malha fechada possui dois pólos, é chamada de sistema de segunda ordem. (alguns sistemas de segunda ordem podem conter um ou dois zeros.)

**Reposta ao degrau do sistema de segunda ordem.** A função de transferência de malha fechada do sistema mostrado na figura 6.10(c) é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} \quad 6.58$$

Que pode ser reescrita como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K/J}{\left[ s + \frac{B}{2J} + \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right] \left[ s + \frac{B}{2J} - \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right]} \quad 6.59$$

Os pólos de malha fechada são complexos conjugados se  $B^2 - 4JK < 0$  e são reais se  $B^2 - 4JK \geq 0$ . Na análise da resposta transitória, é conveniente escrever:

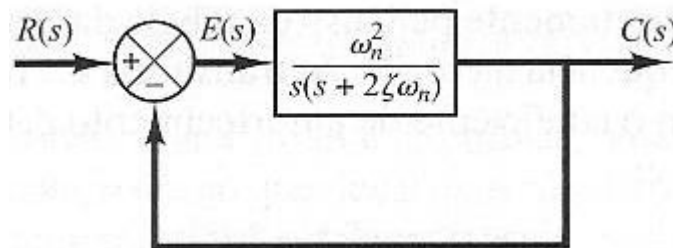
$$\frac{K}{J} = \omega_n^2, \quad \frac{B}{J} = 2\zeta\omega_n = 2\sigma \quad 6.60$$

Onde  $\sigma$  é chamado de atenuação,  $\omega_n$  é a frequência natural não amortecida e  $\zeta$  é o coeficiente de amortecimento do sistema. O coeficiente de amortecimento  $\zeta$  é a relação entre o amortecimento real  $B$  e o amortecimento crítico ou  $B_c = 2\sqrt{JK}$  ou

$$\zeta = \frac{B}{B_c} = \frac{B}{2\sqrt{JK}} \quad 6.61$$

Em termos de  $\zeta$  e  $\omega_n$ , o sistema da figura 6.10(c) pode ser modificado conforme mostra a figura 6.11 e a função de transferência de malha fechada  $C(s)/R(s)$  dada pela equação 6.58 pode ser escrita como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad 6.62$$



**Figura 6.11** Diagrama de blocos de sistema de 2ª ordem padrão

Essa forma é chamada *forma-padrão* do sistema de segunda ordem. O comportamento dinâmico do sistema de segunda ordem pode ser descrito em termos de dois parâmetros  $\zeta$  e  $\omega_n$ . Se  $0 < \zeta < 1$ , os pólos de malha fechada são complexos conjugados e se situam no semiplano esquerdo do plano  $s$ . O sistema é então chamado subamortecido e a resposta transitória é oscilatória. Se  $\zeta = 0$ , a resposta transitória não decai. Se  $\zeta = 1$ , o sistema é dito criticamente amortecido. Os sistemas superamortecidos correspondem a  $\zeta > 1$ .

Vamos determinar agora a resposta do sistema mostrado na figura 6.11 a uma entrada em degrau unitário. Consideraremos três diferentes casos: subamortecido ( $0 < \zeta < 1$ ), criticamente amortecido ( $\zeta = 1$ ) e superamortecido ( $\zeta > 1$ ).

(1) *Sistema subamortecido* ( $0 < \zeta < 1$ ): nesse caso,  $C(s)/R(s)$  pode ser escrito como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)} \quad 6.63$$

onde  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ . A frequência  $\omega_d$  é chamada frequência natural amortecida do sistema. Para uma entrada em degrau unitário,  $C(s)$  pode ser escrito como:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} \quad 6.64$$

A transformada inversa de Laplace da equação 6.64 pode ser obtida facilmente se  $C(s)$  for escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned} \quad 6.65$$

Como:

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[ \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] &= e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t \\ L^{-1} \left[ \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] &= e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \end{aligned} \quad 6.66$$

Então, a transformada inversa de Laplace da equação 6.65 é obtida como:

$$\begin{aligned}
L^{-1}[C(s)] &= c(t) \\
&= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \\
&= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \cos^{-1} \zeta), \quad \text{para } t \geq 0
\end{aligned} \tag{6.67}$$

Esse resultado pode ser obtido diretamente pelo uso da tabela das transformadas de Laplace. A partir da equação 6.67, pode-se ver que a frequência da oscilação transitória é a frequência natural amortecida do sistema  $\omega_d$  e assim, varia de acordo com o coeficiente de amortecimento  $\zeta$ . O sinal de erro para esse sistema é a diferença entre a referência e a saída:

$$\begin{aligned}
e(t) &= r(t) - c(t) \\
&= e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \quad \text{para } t \geq 0
\end{aligned} \tag{6.68}$$

Esse sinal de erro apresenta uma oscilação senoidal amortecida. Em regime permanente ou em  $t = \infty$ , não existe erro entre a entrada e a saída.

Se o coeficiente de amortecimento  $\zeta$  for igual a zero, a resposta não será amortecida e as oscilações continuarão indefinidamente. A resposta,  $c(t)$  no caso de o amortecimento ser nulo, pode ser obtida substituindo  $\zeta = 0$  na equação 6.68, o que resulta em:

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t \quad \text{para } t \geq 0 \tag{6.69}$$

Assim, a partir da equação 6.69, vemos que  $\omega_n$  representa a frequência natural do sistema sem amortecimento, isto é,  $\omega_n$  é a frequência em que a resposta do sistema poderá oscilar, se o amortecimento for reduzido a



zero. Se o sistema linear tiver algum amortecimento, a frequência natural não amortecida do sistema não poderá ser observada experimentalmente. A frequência que pode ser observada é a frequência natural amortecida,  $\omega_d$ , que é igual a  $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ , que é sempre menor que a frequência natural não amortecida. Um aumento em  $\zeta$  poderia reduzir a frequência natural amortecida  $\omega_d$ . Se  $\zeta$  for aumentando acima da unidade, a resposta se tornará superamortecida e não oscilará.

(2) *Sistema criticamente amortecido* ( $\zeta = 1$ ): se os dois pólos de  $C(s)/R(s)$  forem iguais, o sistema será dito criticamente amortecido.

Para uma entrada em degrau unitário,  $R(s) = 1/s$  e  $C(s)$  podem ser escritos como:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2 s} \quad 6.70$$

A transformada inversa de Laplace da equação 6.70 pode ser determinada como:

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad \text{para } t \geq 0 \quad 6.71$$

Esse resultado pode também ser obtido fazendo-se com que  $\zeta$  se aproxime da unidade na equação 6.67 e utilizando o seguinte limite:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sin \omega_d t}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \omega_n t \quad 6.72$$

(3) *Sistema superamortecido* ( $\zeta > 1$ ): nesse caso, os dois pólos de  $C(s)/R(s)$  são reais, negativos e desiguais.

Para uma entrada em degrau unitário,  $R(s) = 1/s$  e  $C(s)$  podem ser escritos como:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s} \quad 6.73$$

A transformada inversa de Laplace da equação 6.73 é:

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \\ &= 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right), \quad \text{para } t \geq 0 \end{aligned} \quad 6.74$$

onde  $s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$  e  $s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ . Assim, a resposta  $c(t)$  inclui dois termos exponenciais decrescentes.

Quando  $\zeta$  for, de modo considerável, maior do que a unidade, uma das duas exponenciais decrescentes decai mais rápido do que a outra e, assim, o termo que decai mais rápido (o que corresponde à menor constante de tempo) pode ser desprezado. Ou seja, se  $-s_2$  estiver situado muito mais próximo do eixo  $j\omega$  do que  $-s_1$  (que significa  $|s_2| \ll |s_1|$ ), então para uma solução aproximada poderemos desprezar  $-s_1$ . Isso é permitido porque o efeito  $-s_1$  na resposta é muito menor que o de  $-s_2$  e, assim, o termo que contém  $s_1$  na equação 6.74 decresce muito mais rapidamente do que o termo que contém  $s_2$ . Logo que o termo exponencial que decresce mais rapidamente tenha desaparecido, a resposta será análoga a de um sistema de primeira ordem e  $C(s)/R(s)$  poderá ser aproximada para:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} = \frac{s_2}{s + s_2} \quad 6.75$$

Esse modo de aproximação é uma consequência direta do fato de que os valores iniciais e finais tanto de  $C(s)/R(s)$  original como da aproximação são coincidentes.

Com a função de transferência  $C(s)/R(s)$  aproximada, a resposta ao degrau unitário pode ser obtida como:

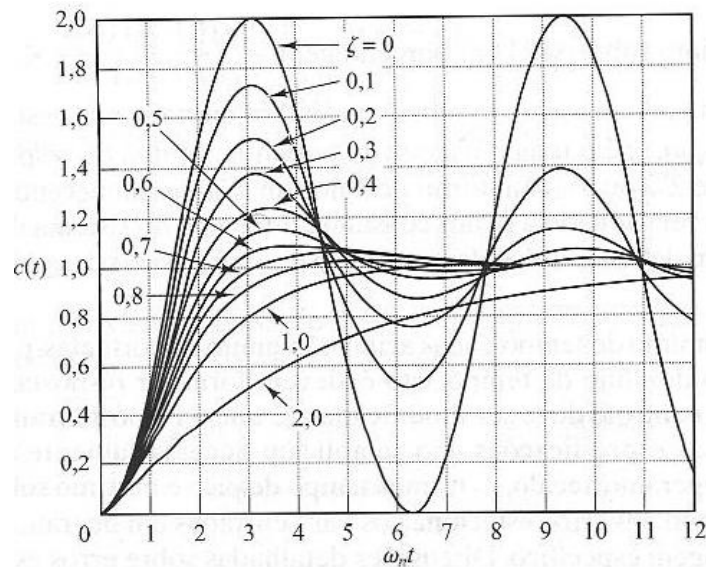
$$C(s) = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}{(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s} \quad 6.76$$

A resposta no tempo  $c(t)$  é então igual a:

$$c(t) = 1 - e^{-\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad 6.77$$

Isso fornece uma resposta aproximada ao degrau unitário, quando um dos pólos de  $C(s)/R(s)$  puder ser desprezado.

A figura 6.12 mostra uma família de curvas  $c(t)$  como resposta ao degrau unitário para diversos valores de  $\zeta$ , onde a abscissa é a variável adimensional  $\omega_n t$  de menor dimensão.



**Figura 6.12** Curvas de resposta ao degrau em função de  $\zeta$

As curvas são funções somente de  $\zeta$ . Essas curvas são obtidas a partir das equações 6.67, 6.71 e 6.74. O sistema descrito por essas equações estava inicialmente em repouso. Note que dois sistemas de segunda ordem que tenham o mesmo valor de  $\zeta$  com valores de  $\omega_n$  diferentes, apresenta o mesmo sobre-sinal e o mesmo andamento oscilatório. Diz-se que esses têm a mesma estabilidade relativa.

É importante notar que, para sistemas de segunda ordem cujas funções de transferência de malha fechada sejam diferentes da que foi apresentada pela equação 6.62, as curvas de resposta ao degrau podem parecer completamente diferentes das mostradas pela figura 6.12.

A partir da figura 6.12, vemos que um sistema subamortecido com  $\zeta$  que varia entre 0,5 e 0,8 se aproxima mais rapidamente do valor final do que um sistema criticamente amortecido ou superamortecido. Entre os sistemas que apresentam resposta sem oscilação, um sistema criticamente amortecido é o que fornece a resposta mais rápida. A resposta de um sistema superamortecido é sempre mais lenta, qualquer que seja o sinal de entrada.

**Definição das especificações da resposta transitória.** Em muitos casos práticos, as características de desempenho desejadas de um sistema de controle são especificadas em termos de grandezas no domínio do tempo. Os sistemas com energia armazenada não podem responder instantaneamente e vão fornecer respostas transitórias sempre que estiverem sujeitos a sinais de entrada ou distúrbios.

Com frequência, as características de desempenho de um sistema de controle são especificadas em termos de resposta transitória a uma entrada em degrau unitário, já que se trata de entrada suficientemente brusca e gerada com facilidade. (Quando a resposta a uma entrada em degrau é conhecida, é possível calcular matematicamente a resposta a qualquer tipo de sinal de entrada.)

A resposta transitória de um sistema a uma entrada em degrau unitário depende das condições iniciais. Na comparação entre as respostas transitórias de vários sistemas, é uma prática comum, por conveniência, utilizar uma condição inicial padrão que é a do sistema inicialmente em repouso, com o valor da variável de saída e todas as suas derivadas em função do tempo iguais a zero. Assim, as características de resposta dos vários sistemas poderão ser comparadas facilmente.

Na prática, antes de atingir o regime permanente, a resposta transitória de um sistema de controle apresenta, freqüentemente, oscilações amortecidas. Na especificação das características das respostas transitórias de um sistema de controle a uma entrada em degrau unitário, é comum se especificar o seguinte:

1. Tempo de atraso,  $t_d$
2. Tempo de subida,  $t_r$
3. Tempo de pico,  $t_p$
4. Máximo sobre-sinal (ou apenas sobre-sinal),  $M_p$
5. Tempo de acomodação,  $t_s$

Essas especificações são definidas a seguir e são mostradas graficamente na figura 6.13.

1. Tempo de atraso,  $t_d$ : trata-se do tempo requerido para que a resposta alcance metade de seu valor final pela primeira vez.
2. Tempo de subida,  $t_r$ : é o tempo requerido para que a resposta passe de 10% a 90%, ou de 5% a 95%, ou de 0% a 100% do valor final. Para sistemas de segunda ordem subamortecidos, o tempo de subida de 0% a 100% é o normalmente utilizado. Para os sistemas superamortecidos, o tempo de subida de 10% a 90% é o mais comumente utilizado.
3. Tempo de pico,  $t_p$ : é o tempo para que a resposta atinja o primeiro pico de sobre-sinal.
4. Máximo sobre-sinal (ou apenas sobre-sinal),  $M_p$ : é o valor máximo de pico da curva de resposta, medido a partir da unidade. Se o valor final da resposta em regime permanente diferir da unidade, então é comum utilizar porcentagem máxima de sobre-sinal, definida por:

$$\text{Máximo sobre-sinal em porcentagem} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

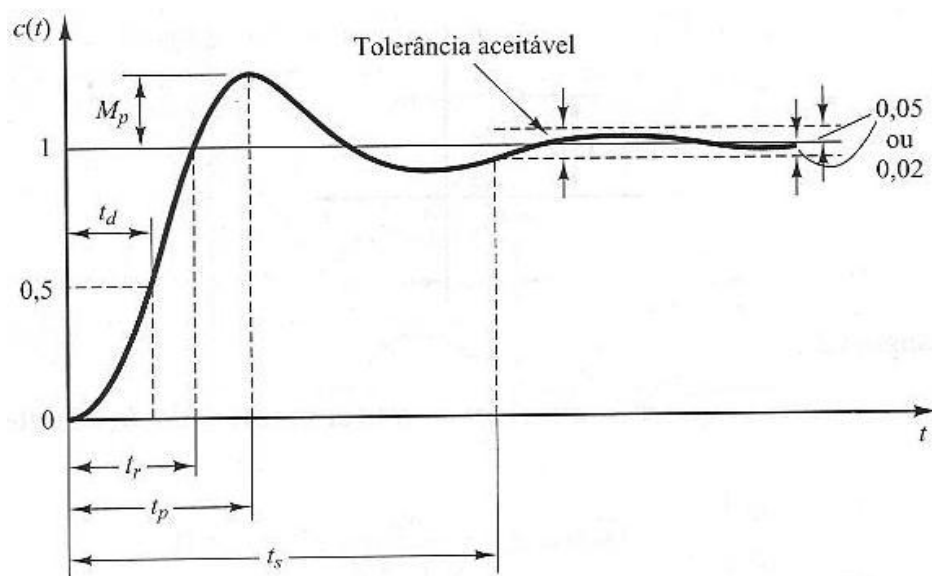
O valor máximo (em porcentagem) do sobre-sinal indica diretamente a estabilidade relativa do sistema.

5. Tempo de acomodação,  $t_s$ : é o tempo necessário para que a curva de resposta alcance valores em uma faixa (usualmente de 2% a 5%) em torno do valor final, aí permanecendo indefinidamente. O tempo de acomodação está relacionado à maior constante de tempo do sistema de controle. Pode-se determinar que porcentagem deve ser utilizada no critério de erro a partir dos objetivos do projeto do sistema em questão.

As especificações no domínio do tempo dadas acima são muito importantes, porque a maioria dos sistemas de controle são sistemas no domínio do tempo, isto é, devem fornecer respostas temporais

aceitáveis. (Isso quer dizer que o sistema de controle deve ser modificado até que a resposta transitória seja satisfatória.)

Observe que todas essas especificações não se aplicam necessariamente a todos os casos dados. Por exemplo, para um sistema superamortecido, os termos tempo de pico e máximo sobre-sinal não se aplicam. (No caso dos sistemas que resultam em erros estacionários para entradas em degrau, esse erro deve ser conservado em um nível de porcentagem específico.)



**Figura 6.13**

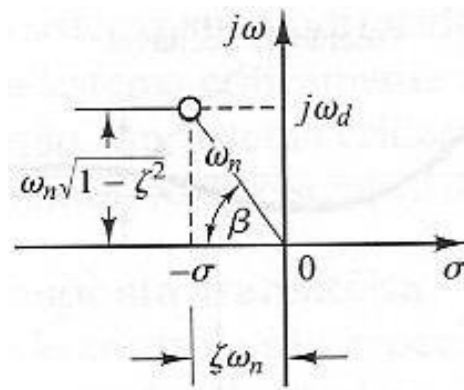
### **Alguns comentários sobre as especificações da resposta transitória.**

Exceto para certas aplicações em que as oscilações não podem ser toleradas, é desejável que a resposta transitória seja suficientemente rápida e amortecida. Assim, para uma resposta transitória aceitável de um sistema de segunda ordem, o coeficiente de amortecimento deve se situar entre 0,4 e 0,8. Valores pequenos de  $\zeta$  ( $\zeta < 0,4$ ) resultam em excessivo sobre-sinal na resposta transitória, e um sistema com um grande valor de  $\zeta$  ( $\zeta > 0,8$ ) responde lentamente.

Veremos mais adiante que o máximo sobressinal e o tempo de subida são conflitantes entre si. Em outras palavras, tanto o máximo sobressinal como o tempo de subida não podem ser diminuídos

simultaneamente. Se um deles diminui, o outro necessariamente se torna maior.

**Sistemas de segunda ordem e especificações da resposta transitória.** A seguir, vamos obter o tempo de subida, o tempo de pico, o máximo sobre-sinal e o tempo de acomodação do sistema de segunda ordem dado pela equação 6.62. Esses valores serão obtidos em termos de  $\zeta$  e  $\omega_n$ . Supõe-se que o sistema seja subamortecido.



**Figura 6.14** Definição do angula  $\beta$

*Tempo de subida  $t_r$* : referindo-se à equação 5.12, obtemos o tempo de subida  $t_r$  fazendo-se  $c(t_r) = 1$ .

$$c(t_r) = 1 = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r} \left( \cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r \right) \quad 6.78$$

Como  $e^{-\zeta\omega_n t_r} \neq 0$ , obtemos a partir da equação 6.78 a seguinte equação:

$$\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r = 0 \quad 6.79$$

Ou



$$\tan \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = -\frac{\omega_d}{\sigma} \quad 6.80$$

Assim, o tempo de subida  $t_r$  é igual a

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left( \frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad 6.81$$

Onde  $\beta$  é definido na figura 6.14. Evidentemente, para um menor valor de  $t_r$ ,  $\omega_d$  deve ser maior.

*Tempo de pico  $t_p$* : com o auxílio da equação 6.67, podemos obter o tempo de pico diferenciando  $c(t)$  em relação ao tempo e igualando essa derivada a zero. Então,

$$\frac{dc}{dt} = \zeta \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) + e^{-\zeta \omega_n t} \left( \omega_d \cos \omega_d t - \frac{\zeta \omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

e os termos em cosseno nessa última equação cancelam-se mutuamente e  $dc/dt$ , calculada em  $t = t_p$ , pode ser simplificada para:

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=t_p} = (\sin \omega_d t_p) \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t_p} = 0 \quad 6.82$$

Dessa última equação resulta a seguinte expressão:

$$\sin \omega_d t_p = 0 \quad 6.83$$

Ou

$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \quad 6.84$$

Como o tempo de pico corresponde ao primeiro pico do sobressinal,

$$\omega_d t_p = \pi . \text{ Então,}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad 6.85$$

O tempo de pico  $t_p$  corresponde a meio ciclo da frequência de oscilação amortecida.

*Máximo sobressinal  $M_p$*  : o máximo sobressinal ocorre no tempo de pico ou em  $t = t_p = \pi / \omega_d$ . Ao supor que o valor final da saída seja unitário,  $M_p$  é obtido a partir da equação 6.67 como:

$$\begin{aligned} M_p &= c(t_p) - 1 \\ &= -e^{-\zeta \omega_n (\pi / \omega_d)} \left( \cos \pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \pi \right) \\ &= e^{-(\sigma / \omega_d) \pi} = e^{-(\zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}) \pi} \end{aligned} \quad 6.86$$

A porcentagem máxima de sobressinal é  $e^{-(\sigma / \omega_d) \pi} \times 100\%$ .

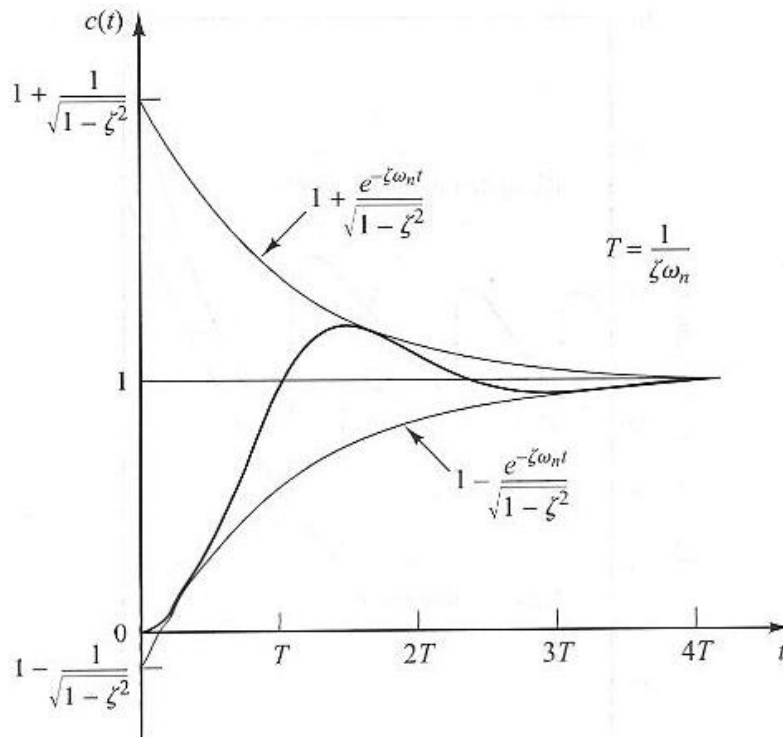
Se o valor final  $c(\infty)$  da saída não for unitário, então será necessário utilizar a seguinte equação:

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \quad 6.87$$

*Tempo de acomodação  $t_s$*  : para um sistema subamortecido de segunda ordem, a resposta transitória é obtida a partir da equação 6.67 como:

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right), \quad \text{para } t \geq 0 \quad 6.88$$

As curvas  $1 \pm \left(e^{-\zeta\omega_n t} / \sqrt{1-\zeta^2}\right)$  são curvas envoltórias da resposta transitória à entrada em degrau unitário. A curva-resposta  $c(t)$  permanece sempre dentro de um par de envoltórias, como mostra a figura 6.15. A constante de tempo dessas curvas envoltórias é  $1/\zeta\omega_n$ .

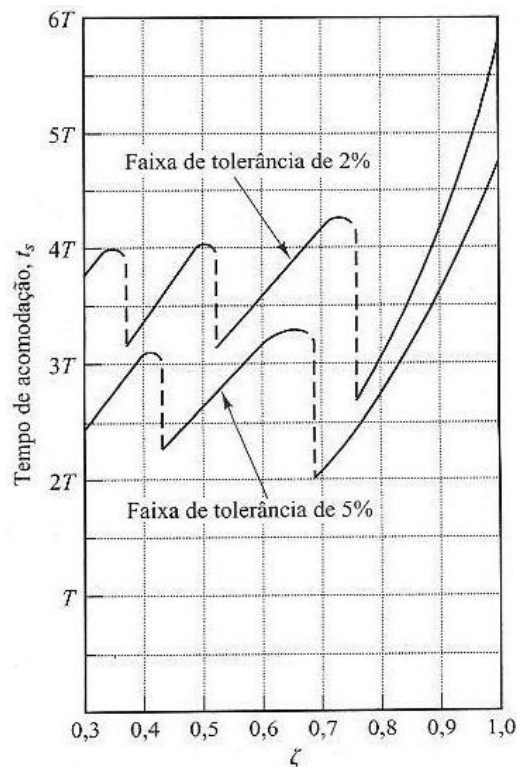


**Figura 6.15** Par de curvas envoltórias para a curva de resposta ao degrau unitário do sistema mostrado na Figura

A velocidade de decaimento da resposta transitória depende do valor da constante de tempo  $1/\zeta\omega_n$ . Para um dado valor de  $\omega_n$ , o tempo de acomodação  $t_s$  é uma função do coeficiente de amortecimento  $\zeta$ . A partir da figura 6.11, vemos que, para o mesmo  $\omega_n$  e para uma faixa de valores de  $\zeta$  entre 0 e 1, o tempo de acomodação  $t_s$  para um sistema ligeiramente amortecido é maior do que para um sistema

adequadamente amortecido. Para um sistema superamortecido, o tempo de acomodação  $t_s$  se torna grande porque a resposta é lenta.

O tempo de acomodação correspondente à faixa de tolerância  $\pm 2\%$  ou  $\pm 5\%$  pode ser medido em termos da constante de tempo  $T = 1/\zeta\omega_n$  a partir das curvas da figura 6.12 para valores diferentes de  $\zeta$ . O resultado é mostrado na figura 6.16. Para  $0 < \zeta < 0,9$ , se for utilizado o critério de 2%,  $t_s$  será aproximadamente quatro vezes a constante de tempo do sistema. Se for usado o critério de 5%, então  $t_s$  será aproximadamente três vezes a constante de tempo. Note que o tempo de acomodação atinge um valor mínimo em torno de  $\zeta = 0,76$  (para o critério de 2%) ou  $\zeta = 0,68$  (para o critério de 5%) e, então, aumenta quase linearmente para valores grandes de  $\zeta$ . A descontinuidade nas curvas da figura 6.16 surge porque uma variação infinitesimal do valor de  $\zeta$  pode causar uma variação finita no tempo de acomodação.



**Figura 6.16** Curva de tempo de acomodação  $t_s$  versus  $\zeta$

Por conveniência, na comparação das respostas dos sistemas, definimos comumente o tempo  $t_s$ , como:

$$t_s = 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (\text{critério de 2\%}) \quad 6.89$$

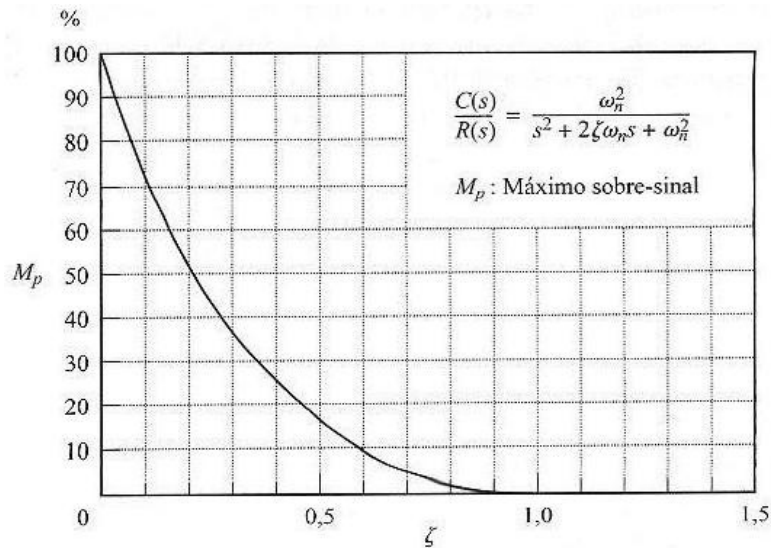
Ou

$$t_s = 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\zeta \omega_n} \quad (\text{critério de 5\%}) \quad 6.90$$

Note que o tempo de acomodação é inversamente proporcional ao produto do coeficiente de amortecimento pela frequência natural do sistema não amortecido. Como o valor de  $\zeta$  é em geral determinado a partir da especificação do sobressinal máximo aceitável, o tempo de acomodação é determinado principalmente pela frequência natural não amortecida  $\omega_n$ . Isso significa que a duração do período transitório pode variar sem alteração do máximo sobressinal, pelo ajuste da frequência natural não amortecida  $\omega_n$ .

A partir da análise anterior, é evidente que, para uma resposta rápida,  $\omega_n$  deve ser grande. Para limitar o máximo sobressinal  $M_p$  e fazer com que o tempo de acomodação seja pequeno, o coeficiente de amortecimento  $\zeta$  não deve ser muito pequeno. A relação entre a porcentagem do máximo sobressinal e o coeficiente de amortecimento  $M_p$  é apresentada na figura 6.17. Note que, se o coeficiente de amortecimento estiver situado entre 0,4 e 0,7, então a porcentagem do máximo sobressinal para a resposta ao degrau estará entre 25% e 4%. É importante notar que as equações para a obtenção do tempo de subida, tempo de pico, máximo sobre-sinal e tempo de acomodação são válidas somente para o sistema-padrão de segunda ordem, definido pela equação 6.62. Se o sistema de segunda ordem contiver um zero ou dois

zeros, a forma da curva de resposta ao degrau unitário será muito diferente daquela mostrada na figura 6.12.



**Figura 6.17** Curvas de  $M_p$  versus  $\zeta$

#### Exemplo 6.4

Considere o sistema mostrado na figura 6.11, onde  $\zeta = 0,6$  e  $\omega_n = 5$  rad/s. Vamos obter o tempo de subida  $t_r$ , o tempo de pico  $t_p$ , o máximo sobressinal  $M_p$  e o tempo de acomodação  $t_s$  quando o sistema for submetido a uma entrada em degrau unitário.

A partir dos valores de  $\zeta$  e  $\omega_n$ , obtemos  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 4$  e  $\sigma = \zeta \omega_n = 3$ .

*Tempo de subida  $t_r$* : o tempo de subida é:  $t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{3,14 - \beta}{4}$

onde  $\beta$  é dado por:  $\beta = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\sigma} = \tan^{-1} \frac{4}{3} = 0,93 \text{ rad}$

O tempo de subida  $t_r$  é, então, igual a:  $t_r = \frac{3,14 - 0,93}{4} = 0,55 \text{ s}$

*Tempo de pico  $t_p$* : o tempo de pico é:  $t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3,14}{4} = 0,785 \text{ s}$

*Máximo sobressinal  $M_p$* : o máximo sobre-sinal é:

$$M_p = e^{-(\sigma / \omega_d) \pi} = e^{-(3/4) \times 3,14} = 0,095$$

O máximo sobre-sinal em porcentagem é, então, 9,5%.

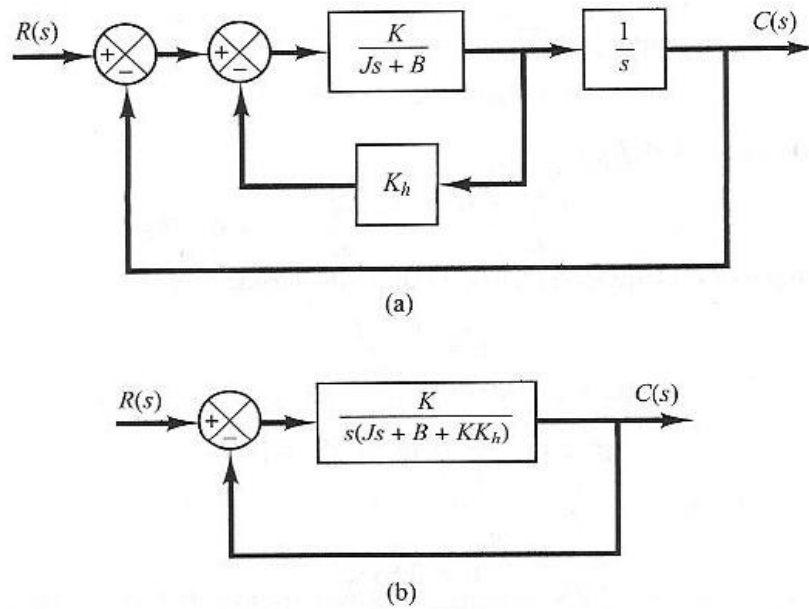
*Tempo de acomodação*  $t_s$  : para o critério de 2%, o tempo de acomodação

$$\text{é: } t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{3} = 1,33 \text{ s}$$

$$\text{Para o critério de 5\%, } t_s = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{3} = 1 \text{ s}$$

**Servossistema com realimentação de velocidade.** A derivada do sinal de saída pode ser utilizada para melhorar o desempenho do sistema. Na obtenção da derivada do sinal de saída de posição, é desejável utilizar um tacômetro em vez de diferenciar fisicamente o sinal de saída. (Note que a derivação amplifica os efeitos do ruído. De fato, se forem apresentados ruídos descontínuos, a derivação amplificará mais as descontinuidades do ruído do que o sinal útil. Por exemplo, o sinal de saída de um potenciômetro é um sinal de tensão descontínuo, porque, com um cursor em movimento sobre as espirais do enrolamento, serão induzidas tensões por ocasião da comutação entre espirais. Portanto, a saída do potenciômetro não pode ser seguida por um elemento diferenciador.)

O tacômetro, um gerador cc especial, é freqüentemente utilizado para medir a velocidade sem o processo de derivação. O sinal de saída de um tacômetro é proporcional à velocidade angular do motor.



**Figura 6.18** (a) Diagrama de blocos de um servossistema (b) diagrama de blocos simplificado

Considere o servossistema mostrado na figura 6.18(a). Nesse dispositivo, o sinal de velocidade e o sinal de posição são realimentados como sinal de entrada, produzindo o sinal de erro atuante. Em qualquer servossistema, esse sinal de velocidade pode ser gerado facilmente por um tacômetro. A figura 6.18(a) mostra o diagrama de blocos que pode ser simplificado, como mostra a figura 6.18(b), resultando em:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + (B + KK_h)s + K} \quad 6.91$$

Comparando-se as equações 6.91 e 6.58, notamos que a realimentação de velocidade tem como efeito aumentar o amortecimento. O coeficiente de amortecimento  $\zeta$  torna-se:

$$\zeta = \frac{B + KK_h}{2\sqrt{KJ}} \quad 6.92$$



A frequência natural não amortecida  $\omega_n = \sqrt{K/J}$  não é afetada pela realimentação de velocidade. Notando que o máximo sobressinal da resposta a uma entrada em degrau unitário pode ser controlado pelo coeficiente de amortecimento  $\zeta$ , podemos reduzir esse máximo sobressinal ajustando o valor da constante de realimentação de velocidade  $K_h$ , a fim de fazer com que  $\zeta$  fique situado entre 0,4 e 0,7.

Lembre-se de que a realimentação de velocidade tem o efeito de aumentar o coeficiente de amortecimento sem afetar a frequência natural não amortecida do sistema.

### Exemplo 6.5

Para o sistema da figura 6.18(a), determine os valores do ganho  $K$  e a constante de realimentação de velocidade  $K_h$  de modo que o sobressinal da resposta ao degrau unitário seja 0,2 e o tempo de pico seja 1s. Com esses valores de  $K$  e  $K_h$ , obtenha o tempo de subida e o tempo de acomodação. Suponha que  $J = 1 \text{ kg.m}^2$  e  $B = 1 \text{ N.m/rad/s}$ .

*Determinação dos valores de  $K$  e  $K_h$ :* o máximo sobressinal  $M_p$  é dado

pela equação 6.86 como:  $M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$

Esse valor deve ser 0,2. Assim,  $e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} = 0,2$

Que resulta em:  $\zeta = 0,456$

O tempo de pico  $t_p$  é especificado como 1s; portanto, a partir da

equação 6.85,  $t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 1$

Ou  $\omega_d = 3,14$

Como  $\zeta$  é 0,456,  $\omega_n$  é igual a:  $\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 3,53$

Como a frequência natural  $\omega_n$  é igual a  $\sqrt{K/J}$ ,  $K = J\omega_n^2 = \omega_n^2 = 12,5 \text{ N.m}$

Então, a partir da equação 6.92,  $K_h$  é:  $K_h = \frac{2\sqrt{KJ}\zeta - B}{K} = \frac{2\sqrt{KJ}\zeta - 1}{K} = 0,178$

s

*Tempo de subida  $t_r$* : a partir da equação 6.81, o tempo de subida  $t_r$  é:

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

Onde  $\beta = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\sigma} = \tan^{-1} 1,95 = 1,10$

Então,  $t_r$  é:  $t_r = 0,65$  s

*Tempo de acomodação  $t_s$* : para o critério de 2%,  $t_s = \frac{4}{\sigma} = 2,48$  s

Para o critério de 5%,  $t_s = \frac{3}{\sigma} = 1,86$  s

**Resposta ao impulso dos sistemas de segunda ordem.** Para um impulso unitário de entrada  $r(t)$ , a transformada de Laplace correspondente é unitária, ou seja,  $R(s) = 1$ . A resposta ao impulso unitário  $C(s)$  do sistema de segunda ordem mostrado na figura 6.11 é igual a:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad 6.93$$

A transformada inversa de Laplace dessa equação fornece a solução para a resposta no tempo  $c(t)$ , como se segue:

Para  $0 \leq \zeta < 1$ ,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t, \quad \text{para } t \geq 0 \quad 6.94$$

Para  $\zeta = 1$ ,

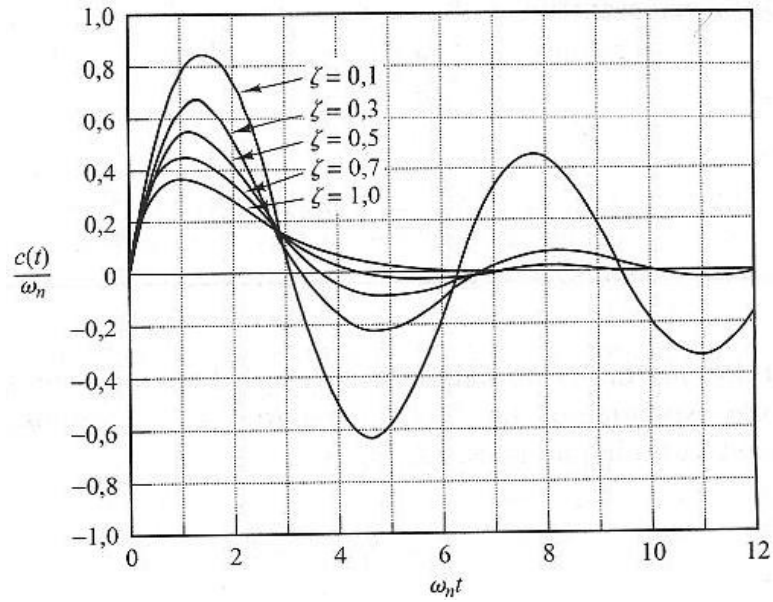
$$c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad 6.95$$

Para  $\zeta > 1$ ,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad 6.96$$

Note que, sem necessidade de recorrer à transformada inversa de Laplace de  $C(s)$ , podemos também obter a resposta no tempo  $c(t)$  derivando a resposta ao degrau unitário correspondente, já que a função impulso unitário é a derivada da função degrau unitário. A família de curvas de resposta ao impulso unitário dada pelas equações 6.94 e 6.95 para vários valores de  $\zeta$  é mostrada na figura 6.19. As curvas  $c(t)/\omega_n$  estão representadas no gráfico em função da variável adimensional  $\omega_n t$  e, portanto, são funções somente de  $\zeta$ . Para os casos de amortecimento crítico e superamortecimento, a resposta ao impulso unitário é sempre positiva ou nula, isto é,  $c(t) \geq 0$ . Isso pode ser visto a partir das equações 6.95 e 6.96. Para o caso de subamortecimento, a resposta ao impulso unitário  $c(t)$  oscila em torno de zero e assume tanto valores positivos como negativos.

A partir da análise anterior, podemos concluir que, se a resposta  $c(t)$  ao impulso não muda de sinal, o sistema deve ser criticamente amortecido ou superamortecido, caso em que a resposta correspondente a um degrau não possui sobressinal, mas aumenta ou diminui monotonicamente, aproximando-se de um valor constante.



**Figura 6.19** Curvas de resposta ao impulso unitário do sistema mostrado na Figura 6.11

O máximo sobressinal para a resposta ao impulso unitário do sistema subamortecido ocorre em:

$$t = \frac{\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \text{onde} \quad 0 < \zeta < 1 \quad 6.97$$

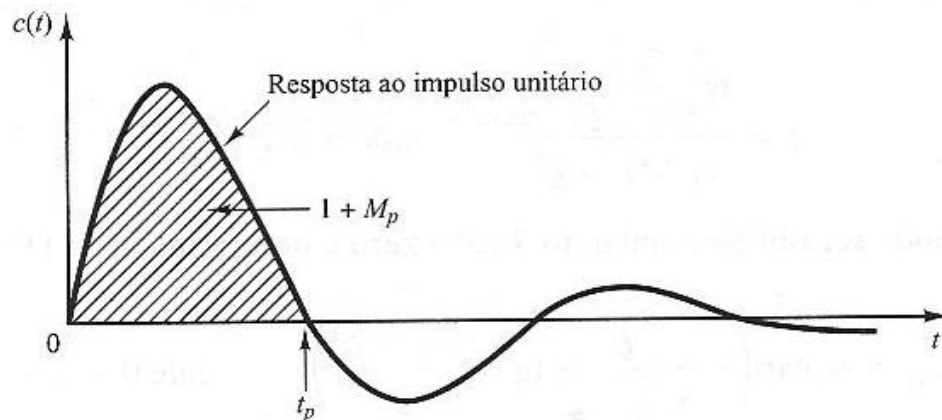
[A equação 6.97 pode ser obtida igualando  $dc/dt$  a zero e determinando  $t$ .] O máximo sobressinal é:

$$c(t)_{\max} = \omega_n \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right), \quad \text{onde} \quad 0 < \zeta < 1 \quad 6.98$$

[A equação 6.98 pode ser obtida substituindo a equação 6.97 na equação 6.94.]

Como a função de resposta ao impulso unitário é a derivada em relação ao tempo da função de resposta ao degrau unitário, o máximo sobressinal  $M_p$  para a resposta ao degrau unitário pode ser

determinado a partir da resposta ao impulso unitário correspondente. Ou seja, a área sob a curva de resposta ao impulso unitário a partir de  $t = 0$  até o instante do primeiro zero, como mostra a figura 6.20, é  $1 + M_p$ , onde  $M_p$  é o máximo sobressinal (da resposta ao degrau unitário) dado pela equação 6.86. O tempo de pico  $t_p$  (da resposta ao degrau unitário) dado pela equação 6.85 corresponde ao tempo necessário para que a resposta ao impulso unitário cruze pela primeira vez o eixo do tempo.



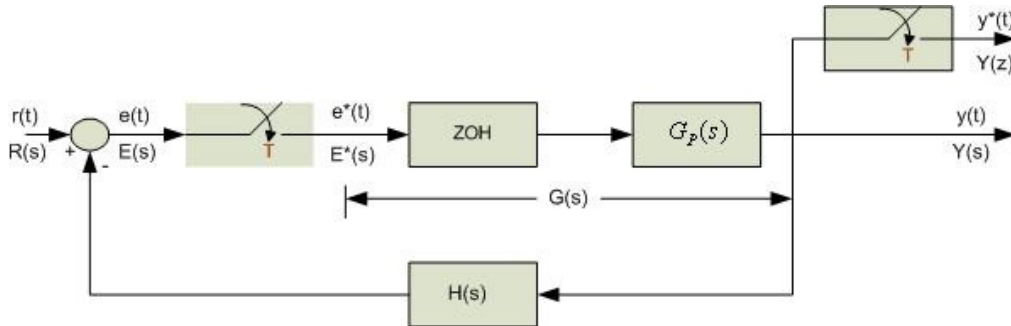
**Figura 6.20** Curva de resposta ao impulso unitário do sistema mostrado na Figura 6.11

## 6.10 PROPRIEDADES NO DOMÍNIO DO TEMPO DE SISTEMAS DISCRETOS

### 6.10-1 Resposta no tempo de sistemas de controle discreto

Para o projeto de sistemas de controle discreto no domínio do tempo ou  $z$ , precisamos primeiramente estudar as propriedades desses sistemas nesses domínios. No domínio do tempo, as especificações tais como sobressinal máximo, tempo de subida, entre outras; podem ainda ser utilizadas em sistemas discretos. A diferença é que no caso discreto faremos o uso da transformada  $z$  ou da amostragem de sinais contínuos por  $t = kT$ , onde  $T$  é o período de amostragem. Também, ao em vez de

utilizar o plano  $s$ , faremos o uso do plano  $z$  para avaliar as especificações de desempenho da resposta transiente.



**Figura 6.21** Diagrama de blocos do sistema de controle discreto

A função de transferência discreta do sistema da Figura 6.21 é:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \quad 6.99$$

onde  $GH(z)$  é a transformada  $z$  de  $G(s)H(s)$ . Uma vez que  $R(z)$  é dado, a sequência  $y(kT)$  pode ser determinada usando uns dos dois métodos a seguir:

- i) Aplicar a transformada inversa de  $Y(z)$  usando a tabela de transformada  $z$ .
- ii) Expandir  $Y(z)$  em séries de potência de  $z^{-k}$ .

A transformada  $z$  da saída é definida como:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} \quad 6.100$$

A resposta discreta  $y(kT)$  pode ser determinada pelos coeficientes referentes a  $z^{-k}$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$ . O período de amostragem ( $T$ ) precisa ser escolhido de forma adequada para representar com razoável exatidão  $y(t)$ .

**Exemplo 6.6** Considere um sistema de controle de posição, conforme a Figura 6.21 para  $H(s) = 1$ , em que:

$$G_p(s) = \frac{65250}{s(s + 361.2)} \quad 6.101$$

A função de transferência de malha direta discreta é dada por:

$$G_{h0}G_p(z) = Z[G_{h0}G_p(s)] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right] \quad 6.102$$

Considerando  $T = 10^{-3}$  segundos, A função de transferência discreta da equação 6.101 é calculada para:

$$G_{h0}G_p(z) = \frac{0.029z + 0.0257}{z^2 - 1.697z + 0.697} \quad 6.103$$

A função de transferência de malha fechada é:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_{h0}G_p(z)}{1 + G_{h0}G_p(z)} = \frac{0.029z + 0.0257}{z^2 - 1.668z + 0.7226} \quad 6.104$$

onde  $R(z)$  e  $Y(z)$  representam a transformada  $z$  da entrada e da saída, respectivamente. Para o degrau unitário,  $R(z) = z/(z-1)$ . A transformada da saída  $Y(z)$  torna-se:

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} \times \left[ \frac{0.029z + 0.0257}{z^2 - 1.668z + 0.7226} \right] \quad 6.105$$

Se considerarmos  $T = 0.01$  segundo, a função de transferência de malha direta é:

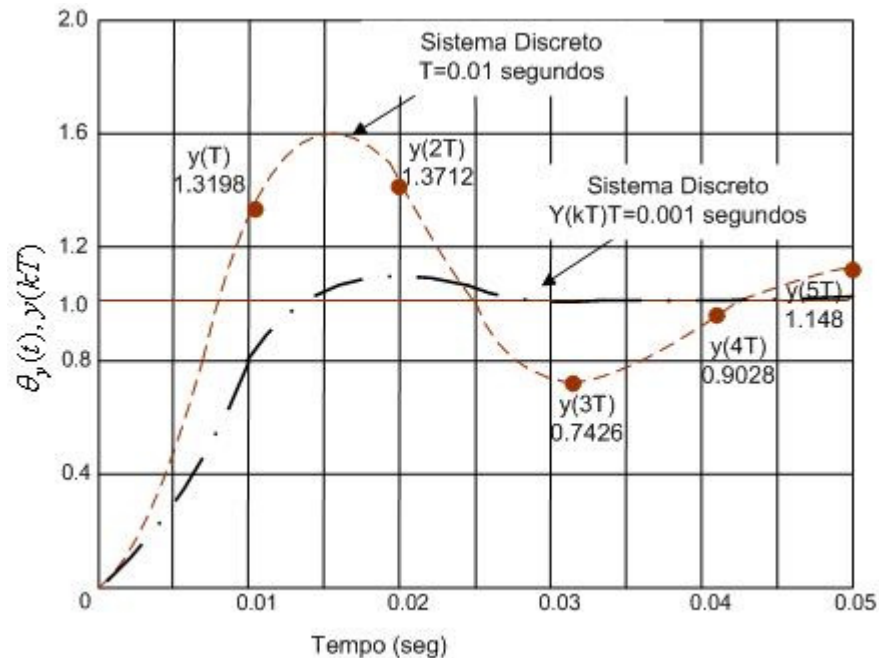
$$G_{h0}G_p(z) = \frac{1.3198z + 0.4379}{z^2 - 1.027z + 0.027} \quad 6.106$$

e a de malha fechada é:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1.3198z + 0.4379}{z^2 + 0.2929z + 0.4649} \quad 6.107$$

As respostas ao degrau unitário podem ser obtidas pelos dois métodos anteriormente descritos (estudados na 2ª parte do nosso curso).

A Figura 6.22 ilustra as respostas para  $T = 0.001$  e  $T = 0.01$  comparativamente com a resposta do sistema contínuo. A Figura 6.23 ilustra o posicionamento de pólos dos sistemas.



**Figura 6.22** Comparação de respostas ao degrau unitário de sistemas contínuos e discretos.

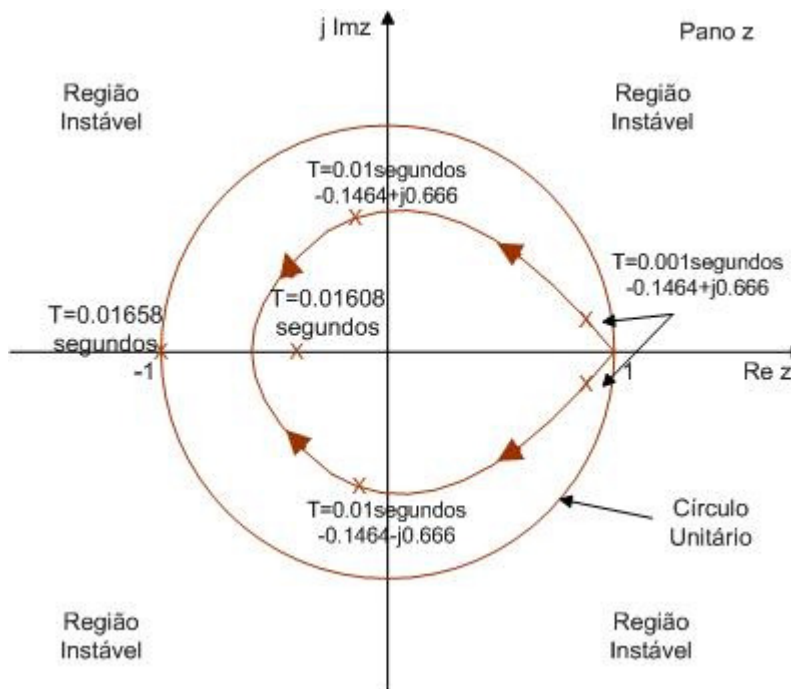
A partir de  $T = 0.01658$  segundos, a equação característica do sistema discreto é:

$$z^2 + 1.4938z + 0.4939 = 0 \quad 6.108$$

que tem raízes  $z_1 = -0.494$  e  $z_2 = -1.000$ , sendo que esta raiz causa oscilação no sistema e o mesmo se torna marginalmente estável. De modo que para  $T > 0.01658$  o sistema de controle será instável.

A Figura 6.23 mostra a trajetória dos pólos do sistema de controle discreto:

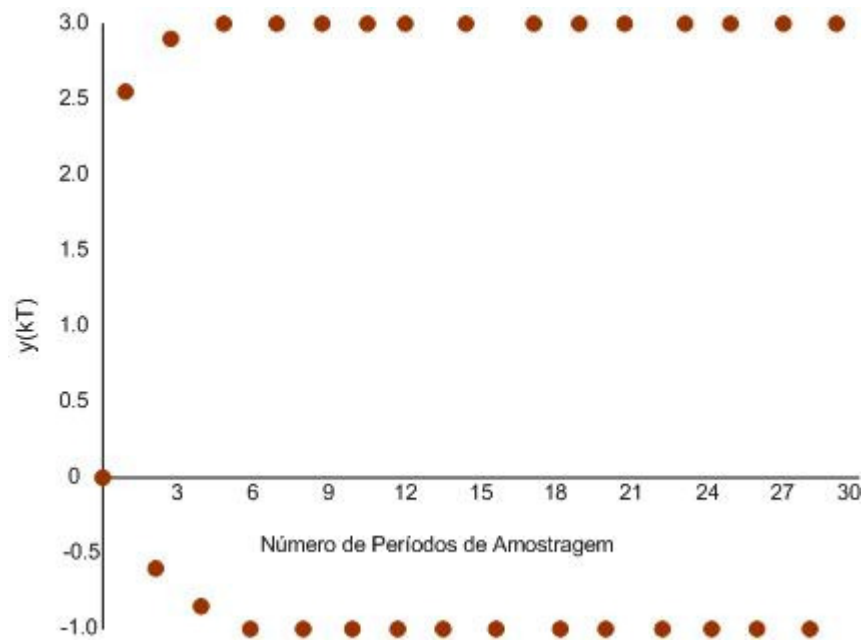




**Figura 6.23** Trajetórias dos polos de um sistema de controle de 2ª ordem com a variação do período de amostragem  $T$

Podemos observar que à medida reduzimos  $T$ , os polos localizam-se próximo de  $z = 1$  e são complexas.

Quando  $T = 0.01608$ , as raízes são iguais sobre o eixo real negativo. Em sistemas discretos, diferentemente de sistemas contínuos, raízes iguais sobre o eixo negativo indicam resposta oscilatória entre valores positivo e negativo, conforme pode ser observado na Figura 6.24:



**Figura 6.24.** Resposta oscilatória de um sistema discreto com  $T = 0.01658$ .

### 6.10.2 Mapeamento entre trajetórias do plano $s$ e do plano $z$

Para análise e projeto, é importante estudar a relação entre a locação dos pólos no plano  $z$  e a resposta temporal do sistema discreto. Assim temos:

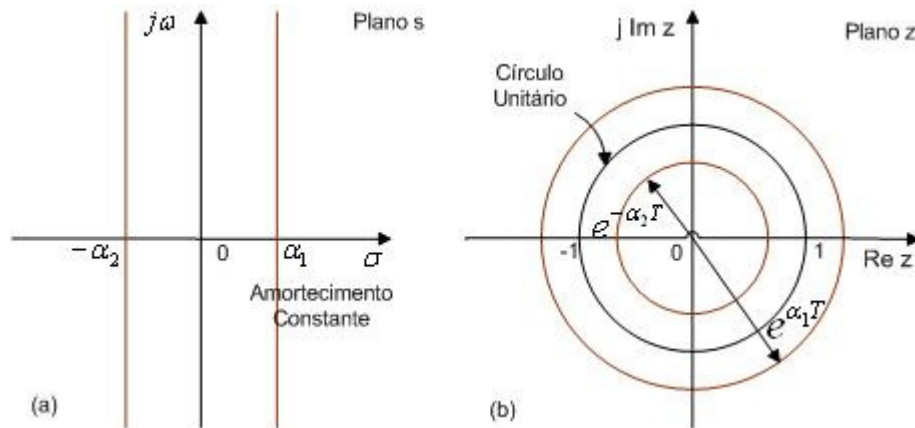
- i) o eixo  $j\omega$  no plano  $s$  é mapeado pelo círculo unitário,  $|z| = 1$  no plano  $z$ .
- ii) lado esquerdo do plano  $s$  é mapeado pela região interior ao círculo unitário,  $|z| < 1$  no plano  $z$ .
- iii) lado direito do plano  $s$  é mapeado pela região exterior ao círculo unitário,  $|z| > 1$  no plano  $z$ .
- iv) o ponto  $z = 1$  do plano  $z$  corresponde à origem  $s = 0$  no plano  $s$ .
- v) o ponto  $z = 0$  do plano  $z$  corresponde à origem  $s = -\infty$  no plano  $s$ .

**Atenuação constante.** Para uma atenuação  $\sigma = \alpha$  no plano  $s$ , a trajetória correspondente no plano  $z$  é descrita por:

$$z = e^{\alpha T + j\omega_d T}$$

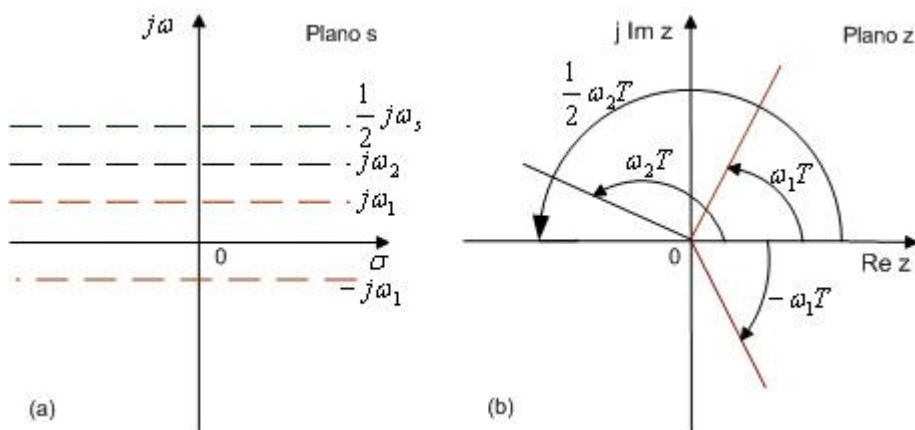
6.109

que é um círculo centrado na origem com um raio de  $e^{\alpha T}$ , como mostrado na Figura 6.25:



**Figura 6.25** Mapeamento em relação a  $\alpha$

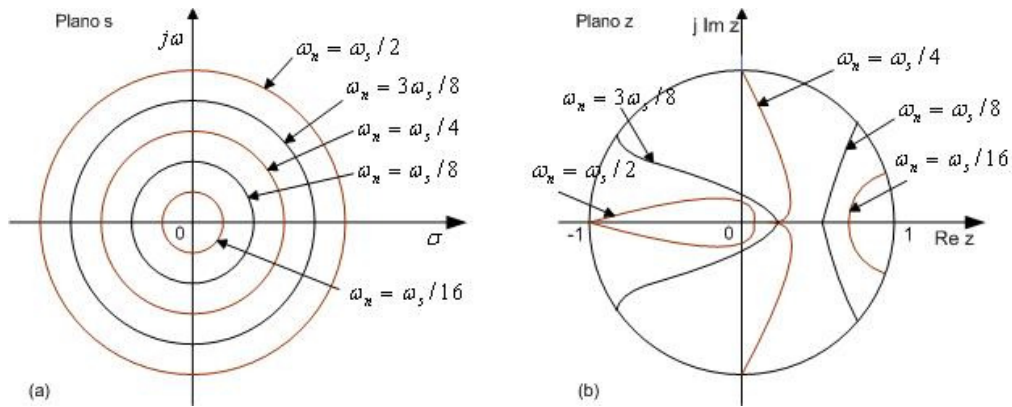
**Frequência constante.** O lugar das raízes com frequência constante  $\omega_d = \omega_1$  no plano  $s$  é uma reta horizontal paralela ao eixo- $\sigma$ . O lugar correspondente no plano  $z$  é uma reta da origem com ângulo  $\theta = \omega_1 T$  radianos, medido a partir do eixo real, conforme mostrado na Figura 6.26.



**Figura 6.26** Mapeamento em relação a  $\omega$

**Frequência natural constante.** O lugar das raízes com frequência constante  $\omega_n$  no plano  $s$  são círculos concêntricos com o centro na origem e raio igual  $\omega_n$ . O lugar correspondente no plano  $z$  é mostrado na Figura 6.27

para  $\omega_n = \omega_s/16$  a  $\omega_n = \omega_s/2$ . Apenas os lugares dentro do círculo unitário são mostrados.



**Figura 6.27** Mapeamento em relação a  $\omega_n$

**Coefficiente de amortecimento constante.** O lugar das raízes para o coeficiente de amortecimento  $\zeta$  é dado por

$$s = -\omega_d \tan \beta + j\omega_d \quad 6.110$$

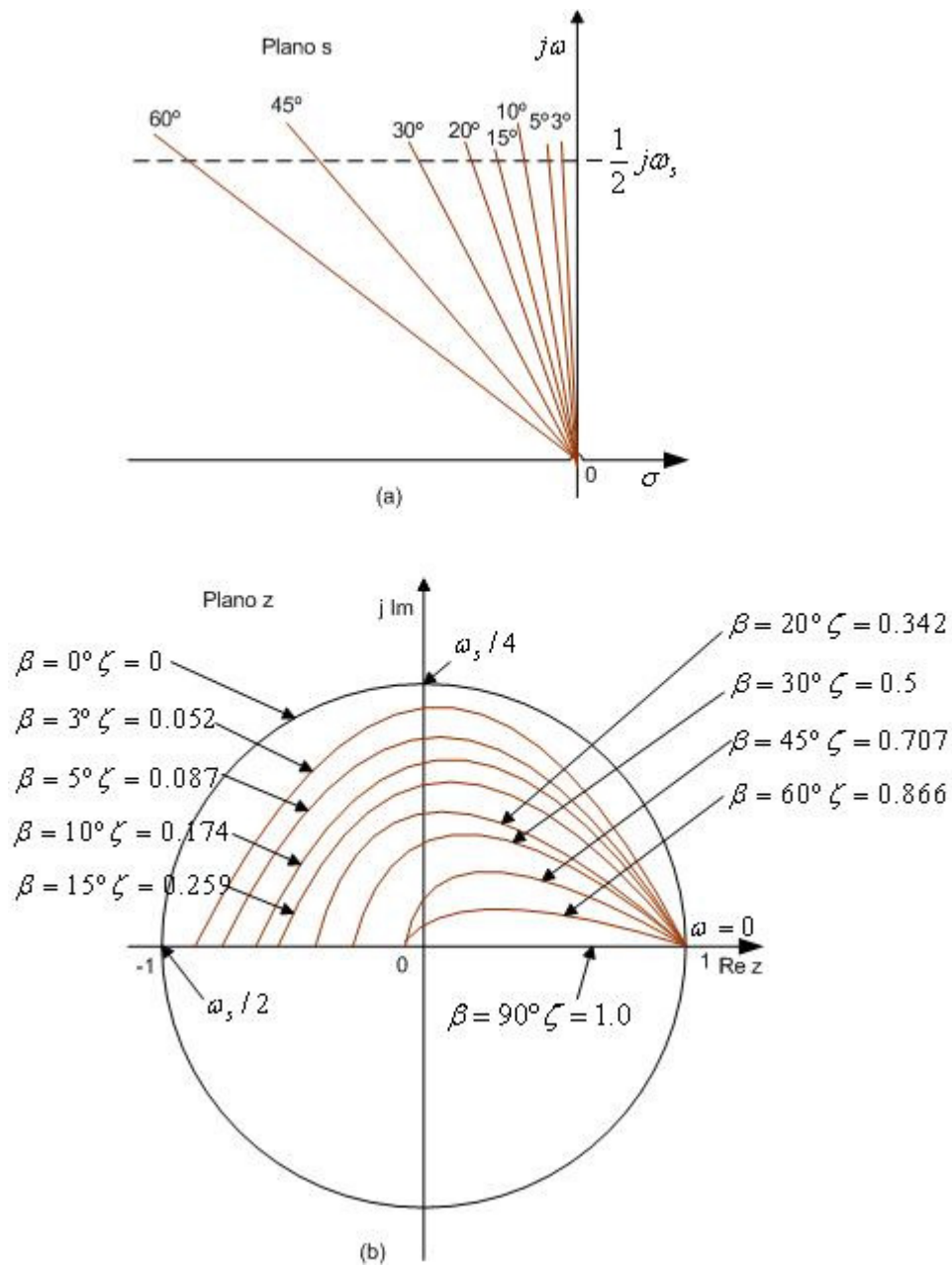
A correspondente no plano z é

$$z = e^{Ts} = e^{(-\omega_d \tan \beta + j\omega_d)T} = e^{-2\pi(\omega_d \tan \beta)/\omega_s} \angle 2\pi\omega_d / \omega_s \quad 6.111$$

onde

$$\beta = \cos^{-1} \zeta = \text{constante} \quad 6.112$$

Para valores de  $\beta$  dados, o traçado no plano z com  $\zeta$  constante é uma espiral logarítmica para  $0^\circ < \beta < 90^\circ$ . A Figura 6.28(b) mostra algumas curvas típicas no semi-plano superior do plano z para  $\zeta$  constante.

**Figura 6.28** Mapeamento em relação a  $\zeta$