UFES

Prof.: Etereldes
06/11/2012

Solução esperada da prova III - Álgebra Linear

1. Sejam U a matriz cujas colunas são u_1, u_2 e u_3, V a matriz cujas colunas são v_1, v_2 e v_3 e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então $U \cdot [\mathrm{v}]_\beta = V \cdot A \cdot [\mathrm{v}]_{\beta'}$. Logo, $U \cdot A^{-1} \cdot [\mathrm{v}]_\beta = V \cdot [\mathrm{v}]_{\beta'}$ e a matriz de mudança de base de β' para β é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

2. (a) $[T(\mathrm{u})]_\beta = (1,0,0)$ e $[T(\mathrm{u}) - 3T(\mathrm{v}) + 2T(\mathrm{w})]_\beta = [T(\mathrm{u})]_\beta - 3[T(\mathrm{v})]_\beta + 2[T(\mathrm{w})]_\beta = (0,-4,0)$.

   (b) Os autovalores de T são as raízes reais de

$$p(\lambda) = det(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}) = (1-\lambda)(\lambda-1)(4-\lambda).$$

   O autoespaço associado a $\lambda = 1$ é o conjunto solução de

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Logo, O autoespaço associado a $\lambda = 1$ é $ger\{(1,0,0),(0,1,-1)\}$. Como o autoespaço associado a $\lambda = 4$ tem dimensão 1, temos uma base de autovetores de T e portanto T é diagonalizável. T não é ortognalmente diagonalizável, pois A não é simétrica.

   (a) $\dim(Nuc(T_A)) = 3 - \dim(Im(T_A))$. Logo, temos os seguintes pares possíveis para $(\dim(Nuc(T_A)), \dim(Im(T_A))$ que são $(3,0)$, $(2,1)$ e $(1,2)$. Veja que T_A não pode ser injetiva e não podemos ter $(0,3)$.

   (b) i. A é a matriz nula.

   ii. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   iii. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. (a) $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\} = \{(y-z,y,z); y,z \in \mathbb{R}\} = \{y(1,1,0) + z(-1,0,1); y,z \in \mathbb{R}\}$, que é o espaço gerado pelos vetores $\mathrm{u}_1 = (1,1,0)$ e $\mathrm{u}_2 = (-1,0,1)$. Então, se $\mathrm{u}_3 = (1,-1,1)$ temos que $\beta = \{u_1,u_2,u_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Definindo $T(\mathrm{u}_3) = 0$, temos que T definido na base β por $T(\mathrm{u}_1) = -\mathrm{u}_1$, $T(\mathrm{u}_2) = -\mathrm{u}_2$ e $T(\mathrm{u}_3) = 0$ tem as propriedades desejadas.

(b) Um vetor qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vetores de β. Isto é, existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que $(x, y, z) = \alpha_1 \mathrm{u}_1 + \alpha_2 \mathrm{u}_2 + \alpha_3 \mathrm{u}_3$. Resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Temos $\alpha_1 = \frac{x+2y+z}{3}$, $\alpha_2 = \frac{-x+y+2z}{3}$ e $\alpha_3 = \frac{x-y+z}{3}$.
Logo, $T(x, y, z) = \alpha_1 T(\mathrm{u}_1) + \alpha_2 T(\mathrm{u}_2) + \alpha_3 T(\mathrm{u}_3) = \frac{x+2y+z}{3} T(1, 1, 0) + \frac{-x+y+2z}{3} T(-1, 0, 1) + \frac{x-y+z}{3} T(1, -1, 1) = \frac{x+2y+z}{3}(-1, -1, 0) + \frac{-x+y+2z}{3}(1, 0, -1)$.
Portanto, $T(x, y, z) = (\frac{-2x-y+z}{3}, \frac{-x-2y-z}{3}, \frac{+x-y-2z}{3}) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Logo $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

(c) Defina $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Então, $AP = PD$, pois as duas primeiras colunas de P são autovetores de A associados ao autovalor -1 e a terceira é um autovetor associado ao autovalor 0. Veja que T tem uma base ortonormal de de autovetores, pois A é simétrica e podemos encontrar tal base ortogonalizando os autovetores associados ao autovalor -1.