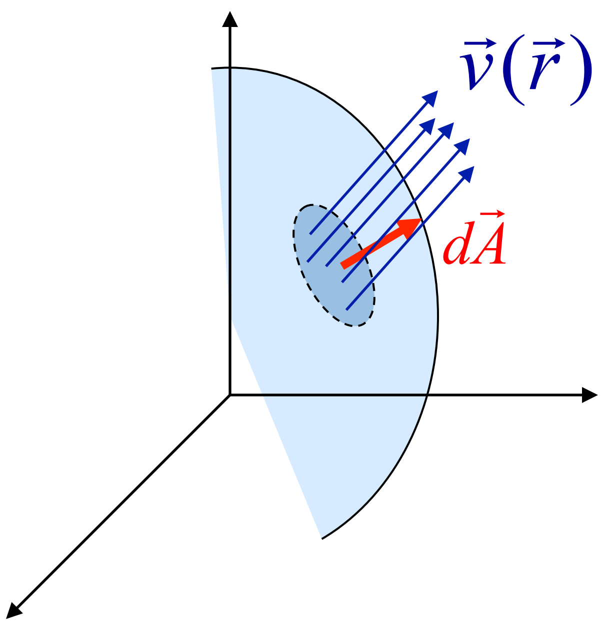
Aula 3: A Lei de Gauss

Curso de Física Geral F-328
1º semestre, 2013

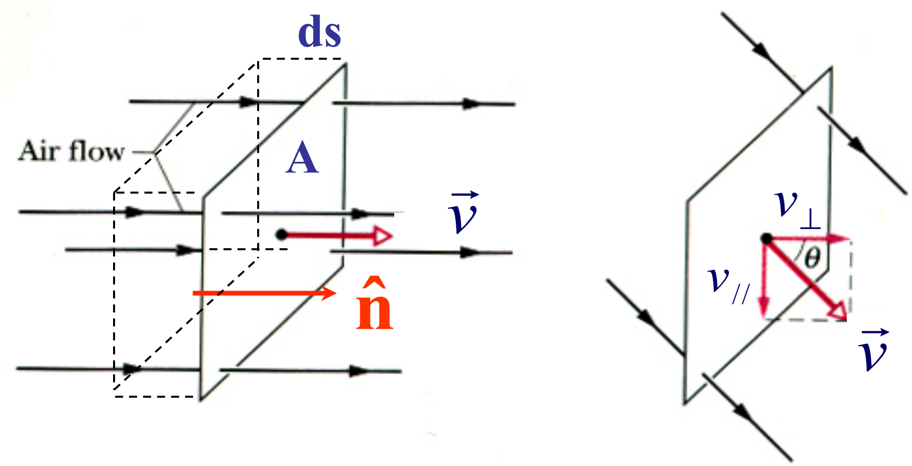
Fluxo de um campo vetorial

Definição:

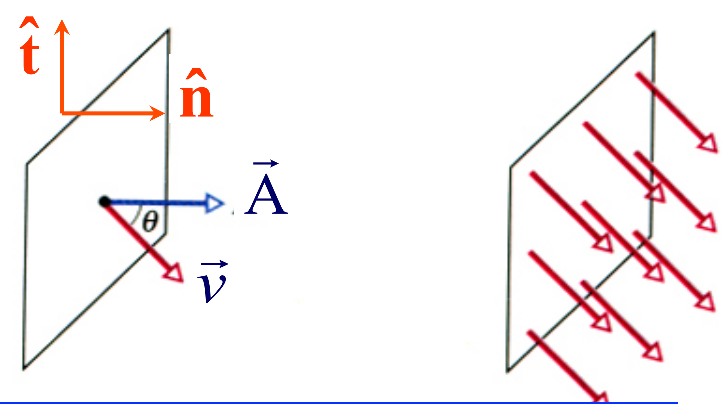
$$\phi = \int_S \vec{v}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dA$$



$$d\vec{A} = \hat{n}\, dA$$



$$\phi = \frac{dV}{dt};\ dV = A\,ds \rightarrow \phi = A\frac{ds}{dt} = A v_\perp$$



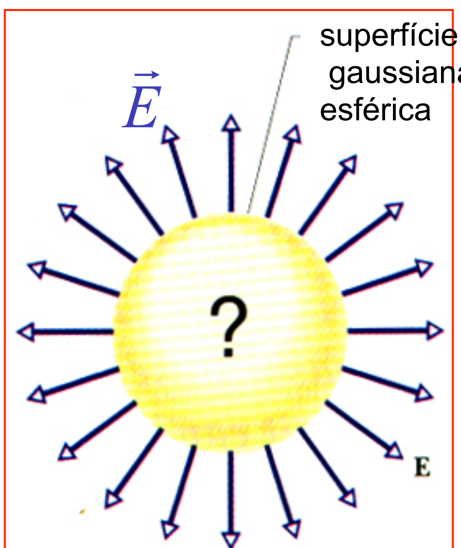
$$\phi = \vec{A}.\vec{v} = A\hat{n}.(v_\perp \hat{n} + v_{//}\hat{t}) = A v_\perp$$

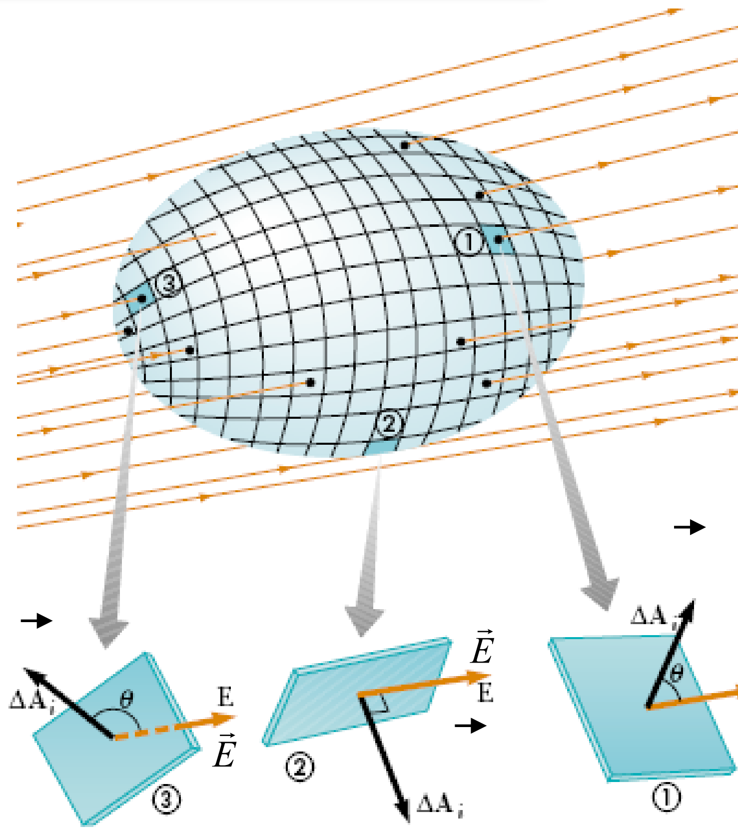
Fluxo de um campo vetorial

O fluxo do campo elétrico

Qual é o fluxo do campo elétrico de uma dada distribuição de cargas através de uma superfície *fechada*?

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dA$$





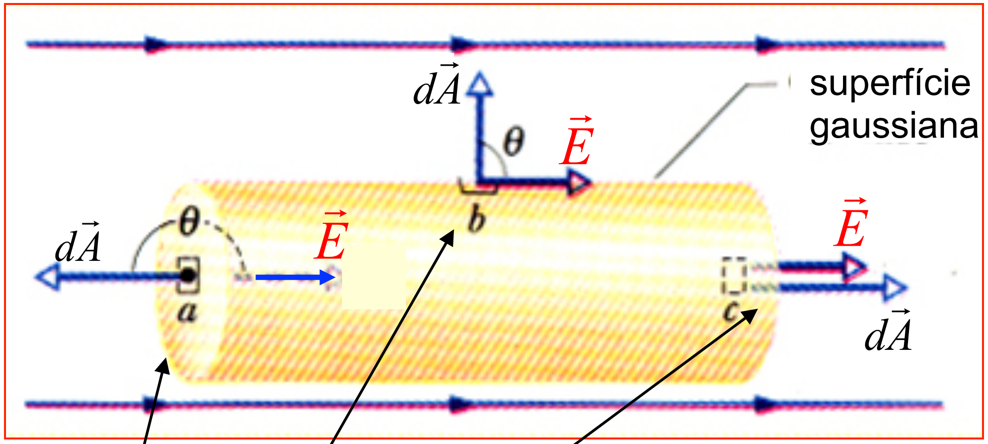
$$d\phi = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dA < 0$$

$$d\phi = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dA > 0$$

$$d\phi = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dA = 0$$

Fluxo de um campo vetorial

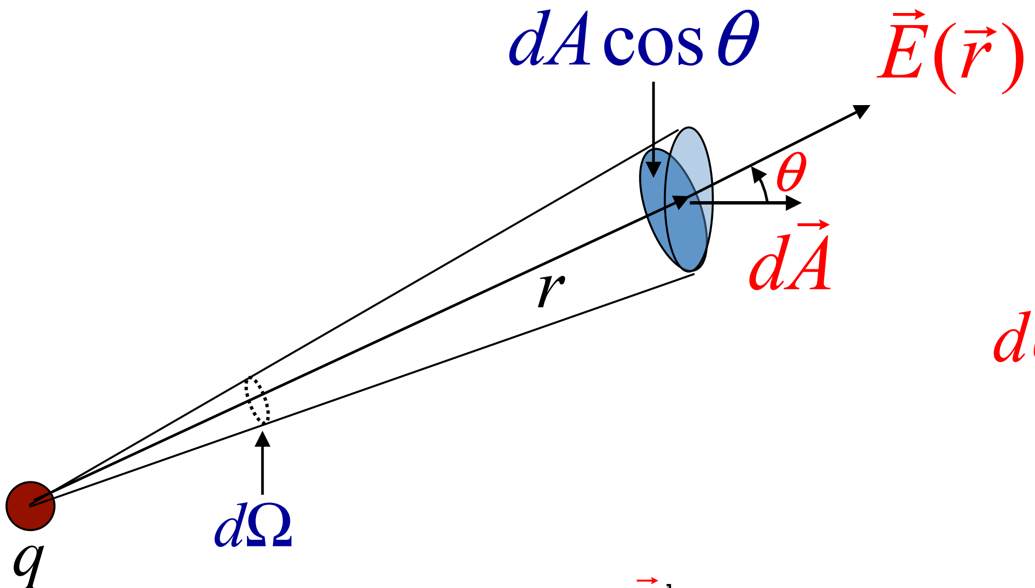
Superfície cilíndrica cujo eixo coincide com a direção de um campo elétrico uniforme



$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = -EA + 0 + EA = 0$$

Fluxo de um campo vetorial

Ângulo sólido e lei de Gauss



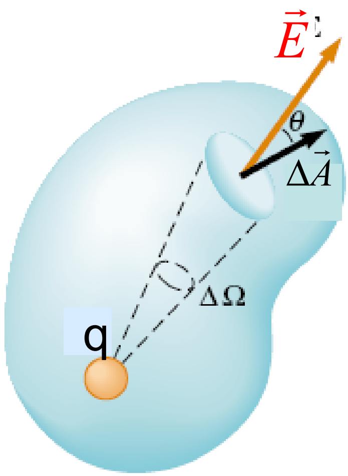
$$d\Omega = \frac{dA\cos\theta}{r^2}$$

$$dA\cos\theta = r^2 d\Omega$$

$$d\phi = \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}dA = E(\vec{r})\,dA\cos\theta$$

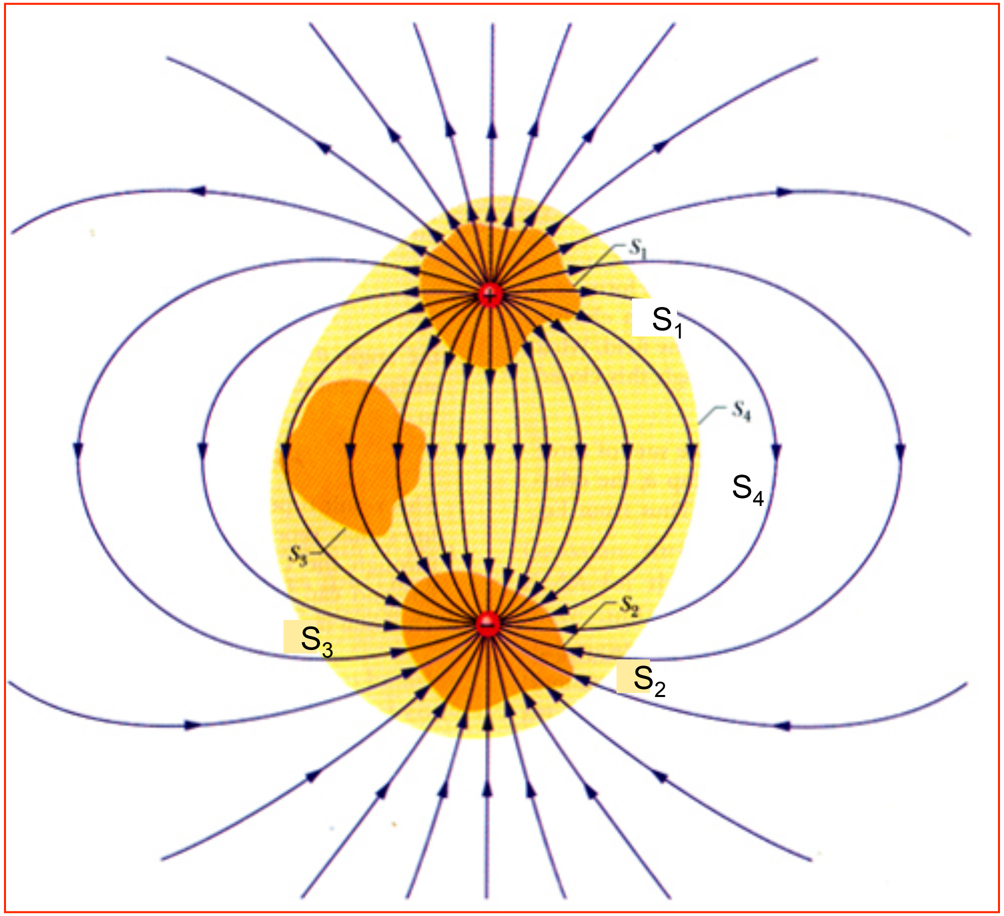
$$d\phi = E(\vec{r})\,r^2 d\Omega$$

$$\phi = \int d\phi = \int_0^{4\pi}\frac{q r^2 d\Omega}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

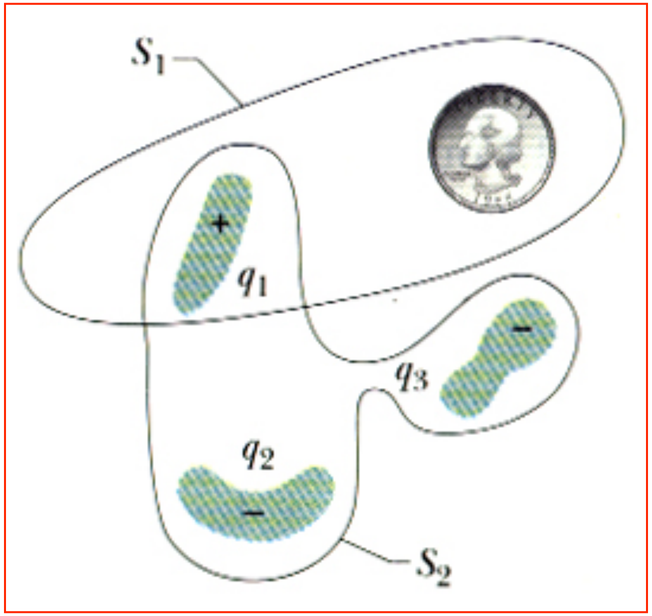


A Lei de Gauss

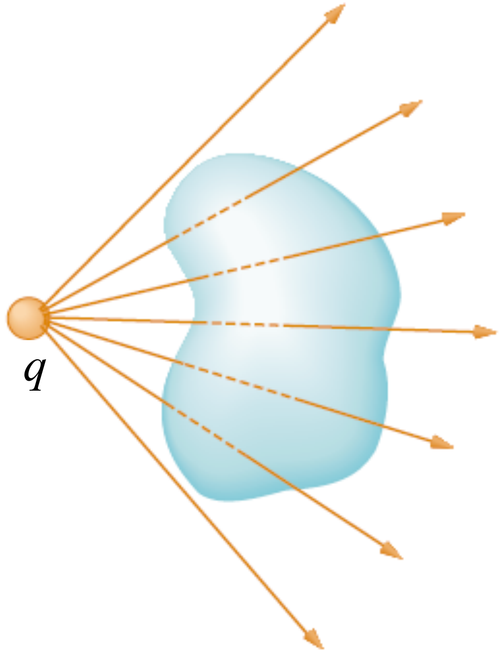
Esta lei relaciona os valores do campo elétrico em pontos de uma superfície (*gaussiana*) com a *carga total dentro* da superfície:

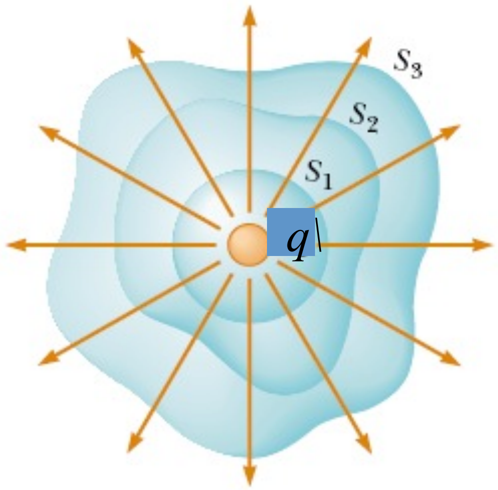


$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



A Lei de Gauss: Ilustrações





Uma carga puntiforme fora de uma superfície fechada. O número de linhas de força que entram na superfície é igual ao número de linhas que saem dela. O fluxo total é nulo.

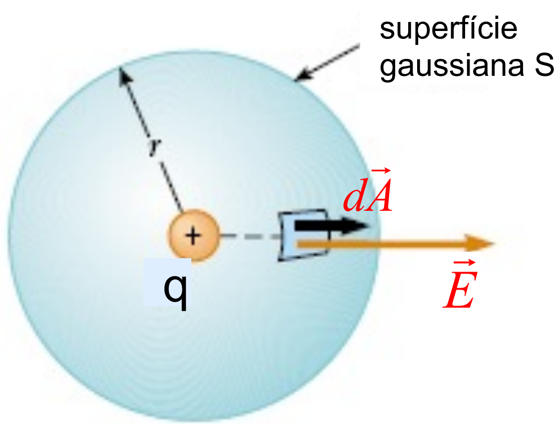
Superfícies fechadas de vários formatos envolvendo uma carga *q*. O fluxo através de todas as superfícies é o mesmo.

Cálculo de campo elétrico

A lei de Gauss é *geral*, mas a sua utilidade no cálculo do campo elétrico criado por uma distribuição de cargas depende da simetria desta distribuição.

Carga puntiforme (simetria esférica)

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



Nos pontos de S: $\begin{cases} \vec{E} \quad \text{paralelo a } \hat{n} \\ |\vec{E}| = \text{uniforme} \end{cases}$

Então:

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n} dA = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \therefore$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}}$$

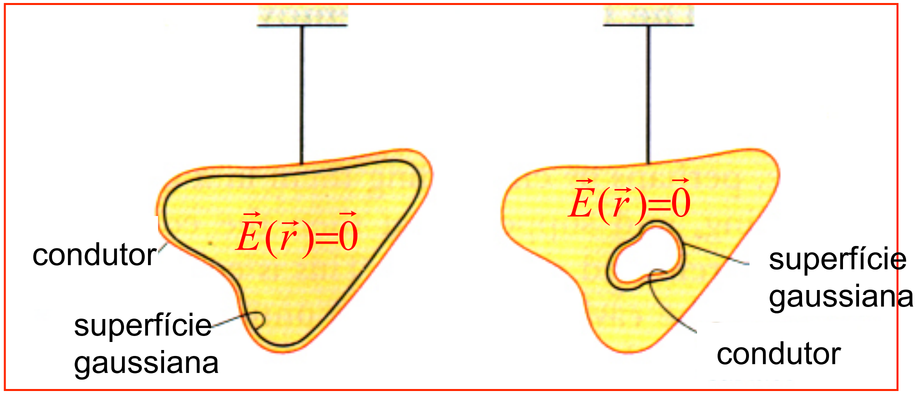
Cálculo de campo elétrico: Condutores

O campo elétrico no interior de um condutor *em equilíbrio eletrostático* é sempre nulo. Assim sendo, a lei de Gauss nos permite demonstrar que todo o excesso de carga no condutor deverá migrar para a sua superfície.

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\Downarrow$$

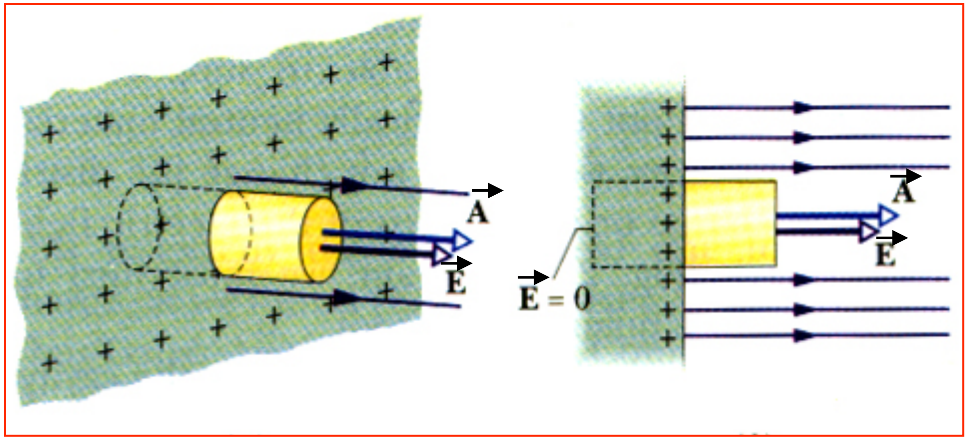
$$\phi = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0$$



No caso de haver uma cavidade no condutor, a lei de Gauss nos diz que o excesso de carga se situa na superfície *externa* do condutor.

Cálculo de campo elétrico

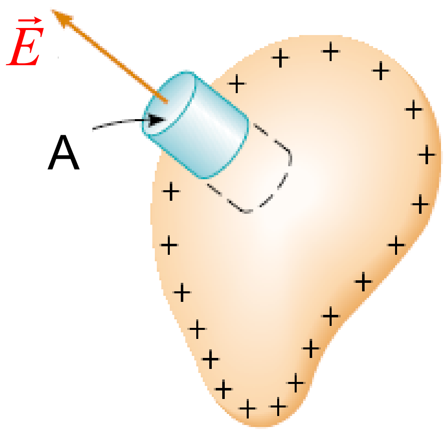
Simetria plana: camada condutora



$$\phi=\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dA=\frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0 EA=\sigma A$$

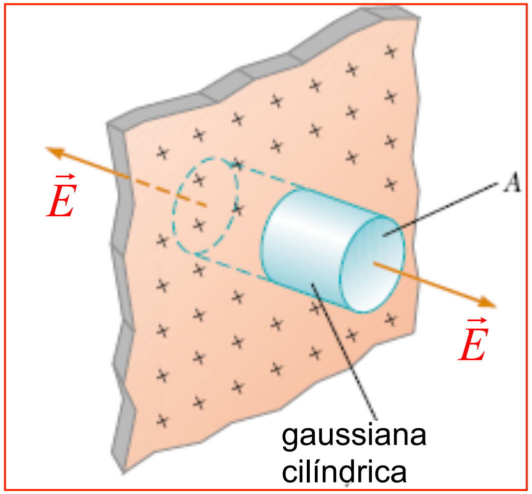
$$\boxed{\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}}$$

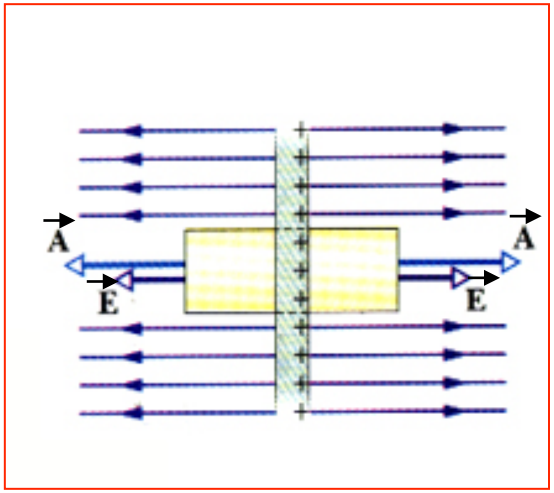


O campo deve ser sempre perpendicular à superfície do condutor carregado, em equilíbrio eletrostático. Por quê?

Cálculo de campo elétrico

Simetria plana: placa não condutora





$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

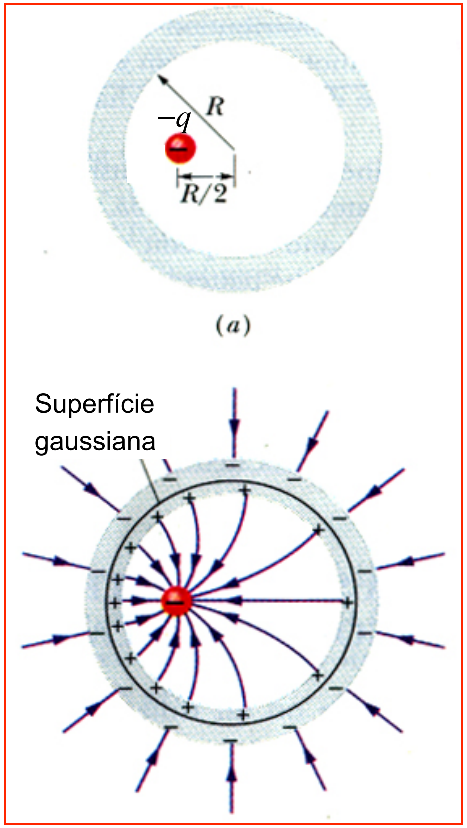
$$2\varepsilon_0 EA = \sigma A \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Cálculo de campo elétrico

Carga induzida em uma camada condutora neutra

Determinar as cargas induzidas nas superfícies interna e externa da camada.

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



Para uma gaussiana no interior da camada:

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dA = \frac{-q}{\varepsilon_0} + \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\Downarrow$$

$q_{\text{int}} = +q$ e $q_{ext} = -q$

Note que σ_{int} *não é uniforme*. E σ_{ext}?

Cálculo de campo elétrico

Simetria cilíndrica: fio infinito uniformemente carregado

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

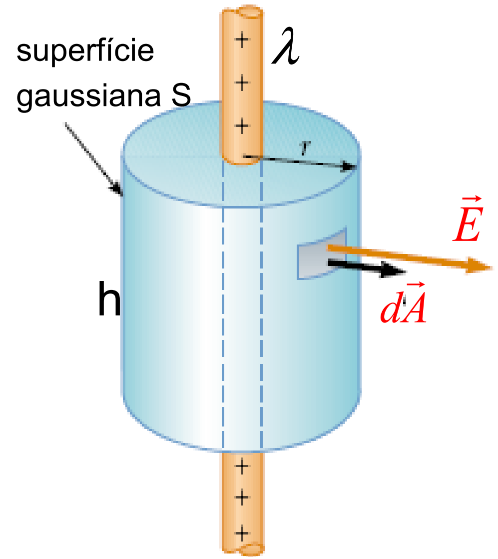
Nos pontos de S: $\begin{cases} \vec{E} \text{ paralelo a } \hat{n} \\ |\vec{E}| = \text{constante} \end{cases}$

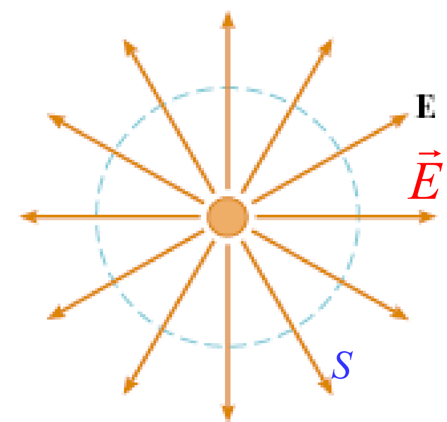
$$\Downarrow$$

$$\phi = E(\vec{r})\,2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\hat{r}}$$





vista de topo

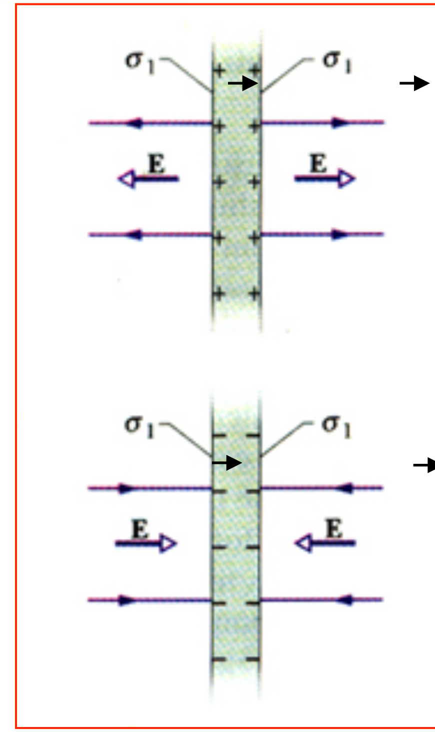
Cálculo de campo elétrico

Duas placas condutoras

Densidades superficiais de carga σ_1 e $-\sigma_1$

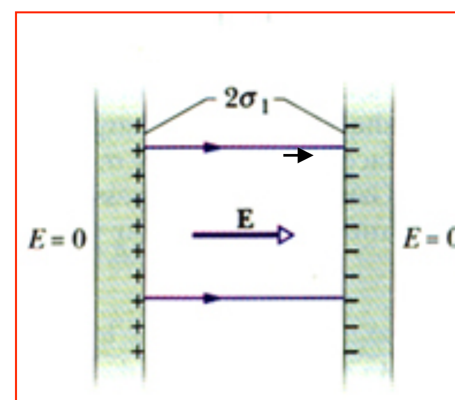
$$E_1 = \begin{cases} \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \text{ à direita da placa} \\ -\dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \text{ à esquerda da placa} \end{cases}$$

$$E_2 = \begin{cases} -\dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \text{ à direita da placa} \\ \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \text{ à esquerda da placa} \end{cases}$$



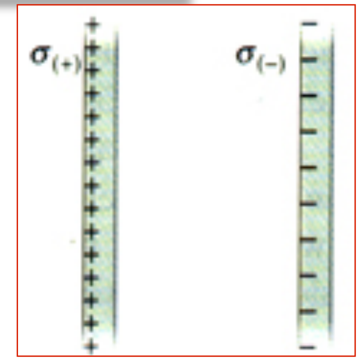
Aproximando as placas:

$$E_{total} = E_1 + E_2 = \begin{cases} \dfrac{2\sigma_1}{\varepsilon_0} \quad \text{entre as placas} \\ 0 \quad \text{fora das placas} \end{cases}$$



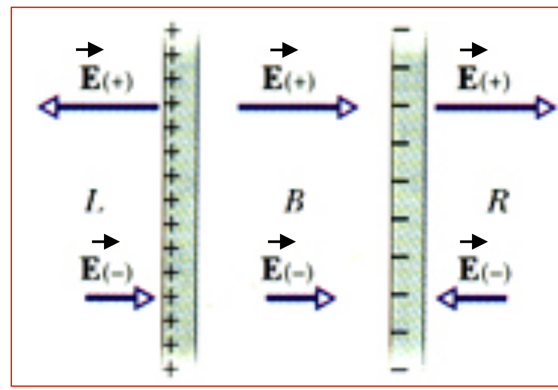
Cálculo de campo elétrico

Duas placas não condutoras

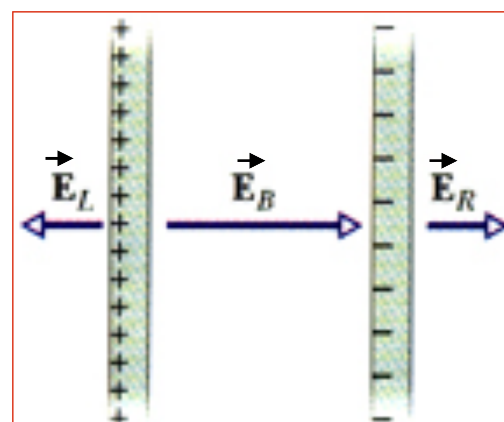


Densidades superficiais de carga $\sigma_{(+)}$ e $-\sigma_{(-)}$

$$E_{(+)} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_{(+)}}{2\varepsilon_0} & \text{à direita da placa} \\ -\dfrac{\sigma_{(+)}}{2\varepsilon_0} & \text{à esquerda da placa} \end{cases}$$



$$E_{(-)} = \begin{cases} -\dfrac{\sigma_{(-)}}{2\varepsilon_0} & \text{à direita da placa} \\ \dfrac{\sigma_{(-)}}{2\varepsilon_0} & \text{à esquerda da placa} \end{cases}$$



$$E_R = \frac{\sigma_{(+)} - \sigma_{(-)}}{2\varepsilon_0} \; ; \; E_L = \frac{\sigma_{(-)} - \sigma_{(+)}}{2\varepsilon_0} \; ; \; E_B = \frac{\sigma_{(+)} + \sigma_{(-)}}{2\varepsilon_0}$$

Cálculo de campo elétrico

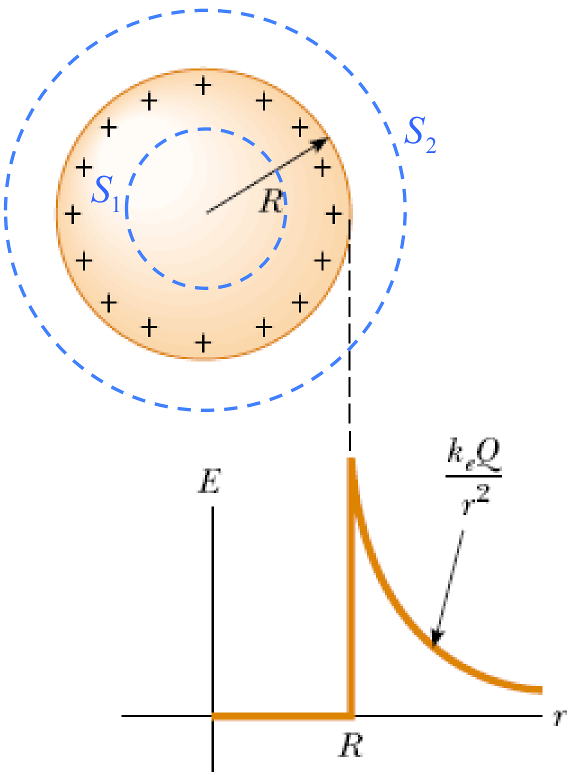
<u>Simetria esférica</u>: esfera condutora carregada (ou casca esférica carregada)

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\Downarrow$$

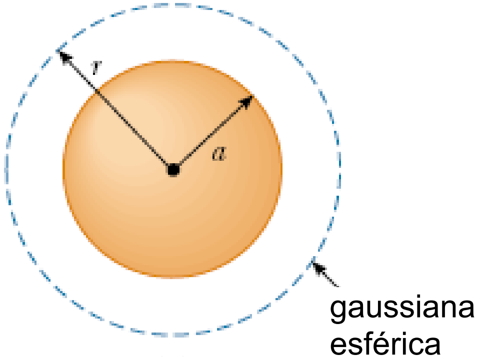
$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & \text{se } r > R \\ 0, & \text{se } r < R \end{cases}$$

$\Rightarrow$

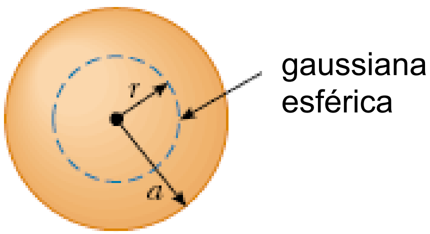


Cálculo de campo elétrico

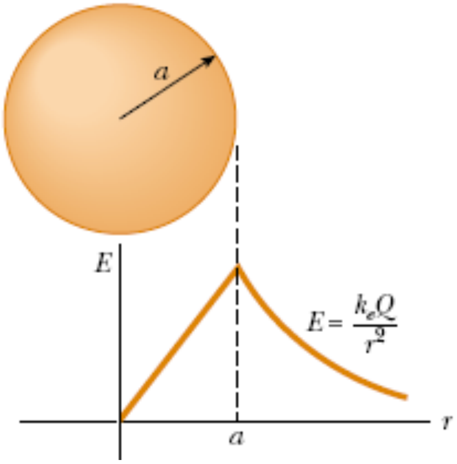
Simetria esférica: esfera não condutora uniformemente carregada



$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dA = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & \text{se } r > R \\ \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, & \text{se } r < R \end{cases}$$



Lista de exercícios do Capítulo 23

Os exercícios sobre Lei de Gauss estão na página da disciplina : (http://www.ifi.unicamp.br).
Consultar: Graduação → Disciplinas → F 328-Física Geral III

Aulas gravadas:
http://lampiao.ic.unicamp.br/weblectures (Prof. Roversi)
ou
UnivespTV e Youtube (Prof. Luiz Marco Brescansin)