Gabarito

1. Calcule

(a) **(1pt)** $\int x \sec^2 x\, dx$

$\int x \sec^2 x\, dx \overset{PP}{=} x\text{tg}\, x - \int \text{tg}\, x dx = x\text{tg}\, x + \int \frac{-\text{sen}\, x}{\cos x} dx \overset{(y=\cos x)}{=} x\text{tg}\, x + \int \frac{1}{y} dy =$ $x\text{tg}\, x + \ln|\cos x| + c.$

(b) **(1.5pt)** $\int \frac{(1-x^2)^{3/2}}{x^6} dx$

$\int \frac{(1-x^2)^{3/2}}{x^6} dx \overset{(x=\text{sen}\,\theta)}{=} \int \frac{\cos^4\theta}{\text{sen}^6\theta} d\theta = \int \frac{\cos^4\theta}{\text{sen}^4\theta} \frac{1}{\text{sen}^2\theta} d\theta =$ $\int (\text{cotg}\,\theta)^4 (\text{cosec}\,\theta)^2 d\theta \overset{(y=\text{cotg}\,\theta)}{=} -\int y^4 dy = -\frac{y^5}{5} + c = -\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5 + c.$

(c) **(1.5pt)** $\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} dx$

$\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} dx = \int \frac{4x^2+13x-9}{x(x+3)(x-1)} dx \overset{FP}{=}$ $\int \frac{3}{x} - \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-1} dx = 3\ln|x| - \ln|x+3| + 2\ln|x-1| + c.$

(d) **(1pt)** $\int_0^1 x^2 \sqrt[3]{x^3-1}\, dx$

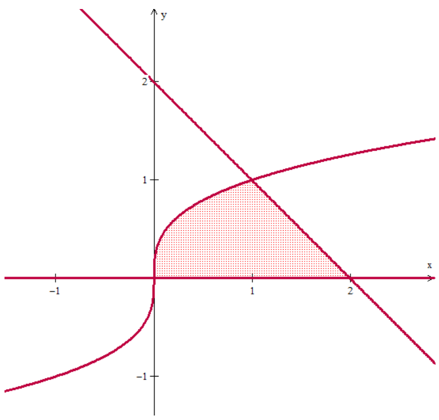
$\int_0^1 x^2 \sqrt[3]{x^3-1}\, dx \overset{(y=x^3-1)}{=} \frac{1}{3}\int_{-1}^0 \sqrt[3]{y} dy = \left.\frac{y^{4/3}}{4}\right|_{-1}^0 = -\frac{1}{4}.$

Analogamente, $\int_1^2 x^2 \sqrt[3]{x^3-1}\, dx = \left.\frac{y^{4/3}}{4}\right|_0^7 = \frac{7}{4}\sqrt[3]{7}.$

(e) **(1pt)** $\int_0^4 |\sqrt{x}-1|\, dx$

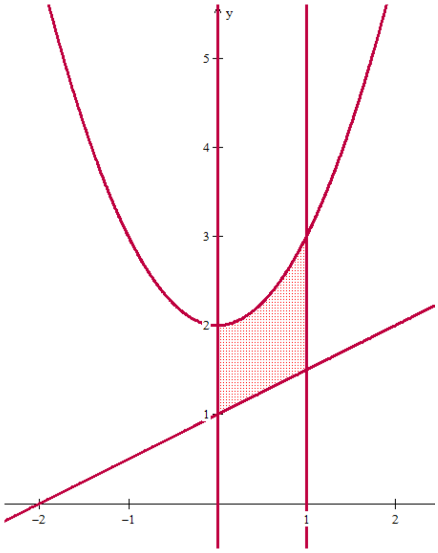
$\int_0^4 |\sqrt{x}-1|\, dx = \int_0^1 -(\sqrt{x}-1) dx + \int_1^4 \sqrt{x} - 1 dx = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2.$

2. **(2pts)** Esboce e determine área da região limitada por $x = y^3$, $x + y = 2$ e $y = 0$.



$\int_0^1 (2-y) - y^3 dy = \frac{5}{4}.$

3. **(2pts)** Seja R a região limitada por $x^2 = y - 2$, $2y - x - 2 = 0$, $x = 0$ e $x = 1$. Esboce R e determine o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo x.



$\int_0^1 \pi(x^2+2)^2 - \pi(\frac{x+2}{2})^2 dx = \frac{79\pi}{20}$.

4. **Extra (1pt)** Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva. Rodando em torno do eixo x a região limitada pelo gráfico de f, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = t$, obtemos um sólido com volume $V(t) = \pi\left(\frac{t^3}{3} + t^2 + t\right)$. Encontre uma expresão explícita para f.

Por um lado, o volume é $V(t) = \int_0^t \pi(f(x))^2 dx$, por outro lado, $V(t) = \pi\left(\frac{t^3}{3} + t^2 + t\right)$. Com isso, $\pi\left(\frac{t^3}{3} + t^2 + t\right) = \int_0^t \pi(f(x))^2 dx$. Derivando ambos lados desta última identidade (e simplificando) obtemos $t^2 + 2t + 1 = f^2(t)$ donde $f(x) = \sqrt{(x+1)^2} = x + 1$, pois $x \geq 0$.