A Transformada de Laplace Bilateral (Parte III)

TBL: Equação de análises

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Domínio do tempo $\quad x(t) \quad x(t) \overset{T}{\longleftrightarrow} X(s) \quad X(s) \quad$ Domínio de Laplace

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma-j\infty} X(s)e^{st}ds$$

TBIL: Equação de sínteses

$$ROC = \{s \in \mathbb{C} \,|\, \|X(s)\| < \infty\}$$

Professor

Jorge Leonid Aching Samatelo

jlasam001@gmail.com

Índice

Função de Transferência

Função de Transferência

Definição

- ❑ A saída de um sistema LTI de tempo contínuo pode-se expressar via a convolução da entrada $x(t)$ e a resposta ao impulso $h(t)$:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t) * x(t)$$

- ❑ Sendo assim, no domínio de Laplace, a saída será o produto da transformada da entrada $X(s)$ pela transformada da resposta ao impulso $H(s)$.

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s) = H(s)X(s)$$

- ❑ Na literatura, denomina-se como função de transferência, a Transformada de Laplace da resposta ao impulso, podendo-se expressar como:

$$H(s) = L\{h(t)\} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Resumo

$y(t) = h(t) * x(t)$ — *Saída no tempo*

Transformada Bilateral de Laplace

$$Y(s) = L\{h(t)\}L\{x(t)\}$$
$$= H(s)X(s)$$

Saída no domínio de Laplace

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

$y(t) = L^{-1}\{Y(t)\}$ — *Saída no tempo*

Função de Transferência

Definição

Exemplo

- Calcular a saída do sistema LTI

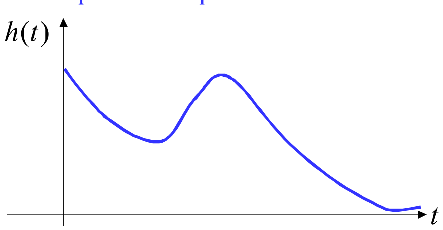
$$x(t) = 2e^{-t}u(t) + u(t) \longrightarrow \boxed{h(t) = e^{-2t}u(t)} \longrightarrow y(t)$$

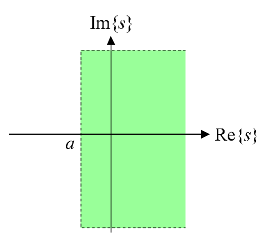
Função de Transferência

Definição

Exemplo

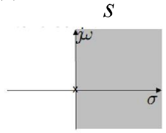
- *Dicas*
  - Observe que $h(t) = 0$ para $t < 0 \Rightarrow$ o sistema é causal $\Rightarrow$ *ROC* esta ao lado direito do plano complexo.

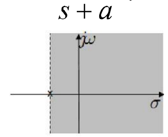




  - Lembremos que:

$$u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s}\ ,\ \mathrm{Re}\{s\} > 0 \qquad e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}\ ,\ \mathrm{Re}\{s\} > -a$$





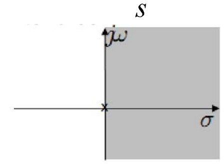
Função de Transferência

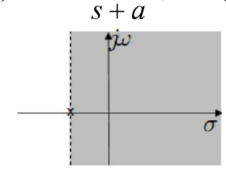
Definição

Solução

- Sabendo que:

$$u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s}\ ,\ \mathrm{Re}\{s\} > 0 \qquad e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}\ ,\ \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

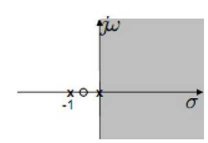




- Calculamos $X(s)$:

$$X(s) = L\{x(t)\}$$
$$= L\{2e^{-t}u(t) + u(t)\}$$
$$= 2L\{e^{-t}u(t)\} + L\{u(t)\}$$
$$= 2\left(\frac{1}{s+1}\right) + \left(\frac{1}{s}\right) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s}$$

$$ROC_X = \{\mathrm{Re}\{s\} > -1\} \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}$$
$$= \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}$$



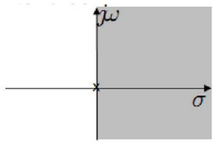
Função de Transferência

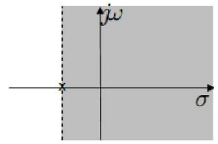
Definição

Solução

- Sabendo que:

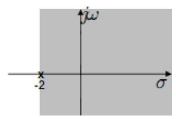
$$u(t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s}\ ,\ \operatorname{Re}\{s\}>0 \qquad e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s+a}\ ,\ \operatorname{Re}\{s\}>-a$$





- Calculamos $H(s)$:

$$\begin{aligned}H(s)&=L\{h(t)\}\\&=L\{e^{-2t}u(t)\}\\&=\frac{1}{s+2}\end{aligned} \qquad ROC_H=\{\operatorname{Re}\{s\}>-2\}$$



Função de Transferência

Definição

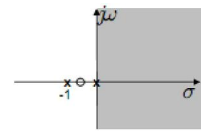
Solução

- Calculando $Y(s)$, aplicando a propriedade da convolução:

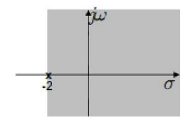
$$\begin{aligned}Y(s)&=H(s)X(s)\\&=\left(\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+2}\right)\\&=\frac{3(s+1/3)}{s(s+1)(s+2)}\end{aligned}$$

- O ROC de $Y(s)$ é a interseção dos ROCs de $X(s)$ e $H(s)$:

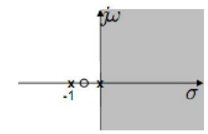
$$(\operatorname{Re}\{s\}>0)\cap(\operatorname{Re}\{s\}>-2)\equiv(\operatorname{Re}\{s\}>0)$$



$\cap$



$\equiv$



Função de Transferência

Definição

Solução

- Calculando $y(t)$, aplicando o método de frações parciais
  - Podemos ver que estamos no caso 1 (polos simples):

$$Y(s)=\frac{3(s+1/3)}{s(s+1)(s+2)}=\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{(s+1)}+\frac{a_3}{(s+2)}$$

  - Calculando o valor dos resíduos:

$$\begin{aligned}a_1&=\lim_{s\to 0}sY(s)=0{,}5\\a_2&=\lim_{s\to -1}(s+1)Y(s)=2\\a_3&=\lim_{s\to -2}(s+2)Y(s)=-2{,}5\end{aligned}$$

Função de Transferência

Definição

Solução

- Calculando $y(t)$, aplicando o método de frações parciais
  - Determinando a TBIL de cada fração:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=\begin{cases}u(t) & \operatorname{Re}\{s\}>0\\-u(-t) & \operatorname{Re}\{s\}<0\end{cases}\ =\ u(t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\}=\begin{cases}e^{-t}u(t) & \operatorname{Re}\{s\}>-1\\-e^{-t}u(-t) & \operatorname{Re}\{s\}<-1\end{cases}\ =\ e^{-t}u(t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}=\begin{cases}e^{-2t}u(t) & \operatorname{Re}\{s\}>-2\\-e^{-2t}u(-t) & \operatorname{Re}\{s\}<-2\end{cases}\ =\ e^{-2t}u(t)$$

$$\boxed{ROC_Y=\{s\in\mathbb{C}\ |\operatorname{Re}\{s\}>0\}}$$

Função de Transferência

Definição

Solução

- Calculando $y(t)$, aplicando o método de frações parciais
  - Finalmente:

$$Y(s) = \frac{0,5}{s} + \frac{2}{(s+1)} + \frac{-2,5}{(s+2)}$$

$$L^{-1}\{Y(s)\} = 0,5L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} - 2,5L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= 0,5u(t) + 2e^{-t}u(t) - 2,5e^{-2t}u(t) \\ &= (0,5 + 2e^{-t} - 2,5e^{-2t})u(t) \end{aligned}$$

Interconexão de sistemas

Interconexão de sistemas

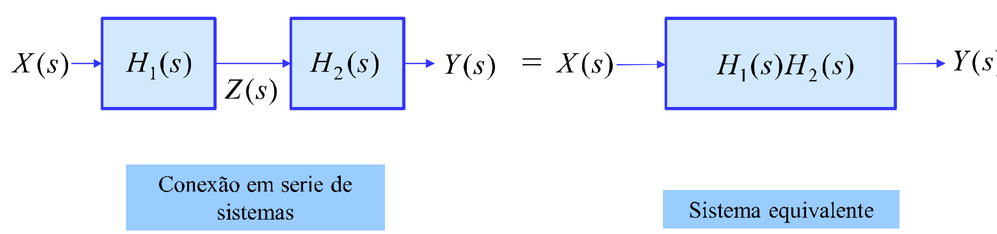
Introdução

- Sistemas complexos podem ser representados através da interconexão de subsistemas
- Cada subsistema é representado por sua função de transferência $H(s)$.
- Os tipos elementares de interconexão de subsistemas são:
  - Série.
  - Paralelo.
  - Realimentação (*feedback*).

Interconexão de sistemas

Conexão em serie de sistemas

- A função de transferência de 2 sistemas em serie é igual à multiplicação das funções de transferência dos sistemas em questão.

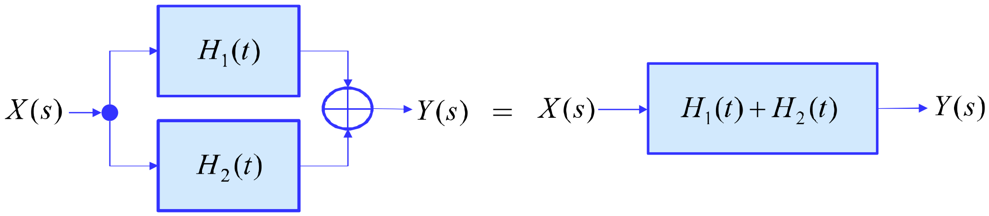


$$\begin{aligned} Y(s) &= H_2(s)Z(s) \\ &= H_2(s)(H_1(s)X(s)) \\ &= \left(H_1(s)H_2(s)\right)X(s) \end{aligned}$$

Interconexão de sistemas

Conexão em paralelo de sistemas

- A função de transferência de 2 sistemas em paralelo é igual à soma das funções de transferência dos sistemas em questão.



Conexão paralela de sistemas.

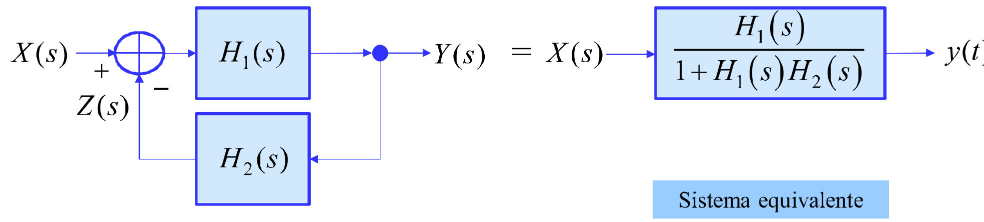
Sistema equivalente

$$Y(s) = H_1(s)X(s) + H_2(s)X(s)$$
$$= (H_1(s) + H_2(s))X(s)$$

Interconexão de sistemas

Conexão realimentada de sistemas

- A função de transferência de 2 sistemas realimentados é igual a uma expressão racional dependente das funções de transferência dos sistemas em questão.



Sistema equivalente

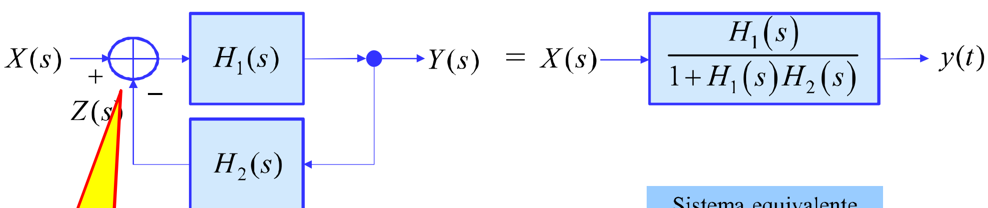
Conexão realimentada de sistemas

$$Y(s) = \left(\frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}\right)X(s)$$

Interconexão de sistemas

Conexão realimentada de sistemas

- A função de transferência de 2 sistemas realimentados é igual a uma expressão racional dependente das funções de transferência dos sistemas em questão.



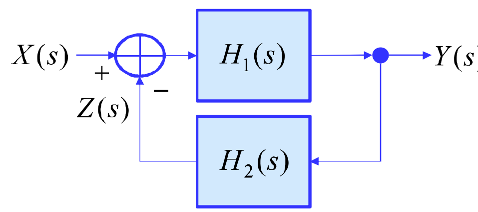
Sistema equivalente

Conexão realimentada de sistemas

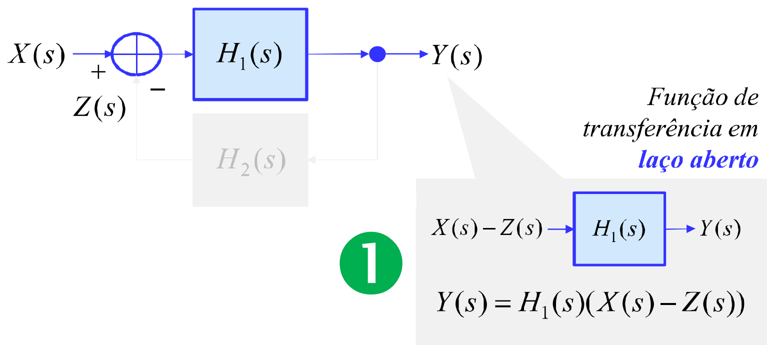
É uma realimentação NEGATIVA

$$Y(s) = \left(\frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}\right)X(s)$$

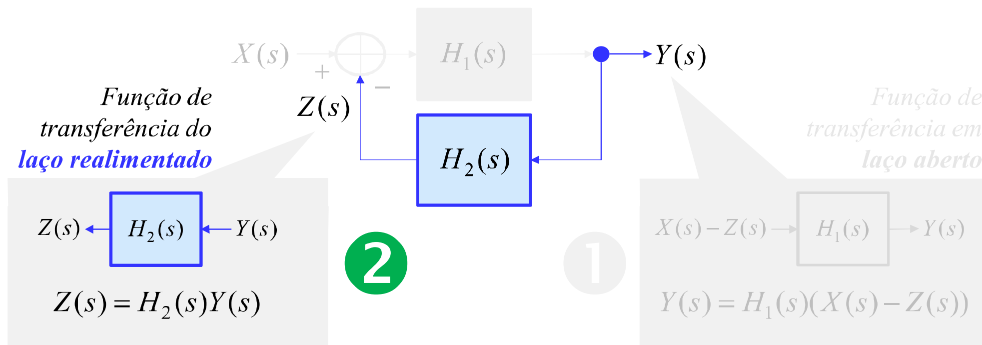
Demonstração



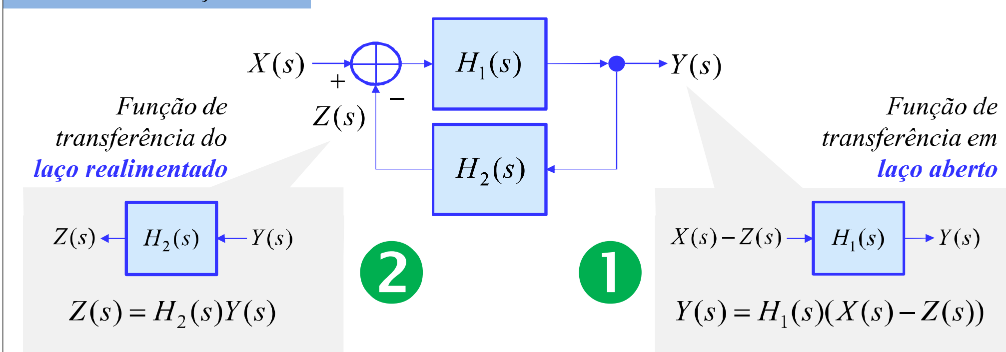
Demonstração



Demonstração



Demonstração



- Substituindo ❷ em ❶ e solucionando para $Y(s)$

$$Y(s) = H_1(s)(X(s) - Z(s))$$

$$Y(s) = H_1(s)(X(s) - H_2(s)Y(s)) \qquad Z(s) = H_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) = H_1(s)X(s) - H_1(s)H_2(s)Y(s)$$

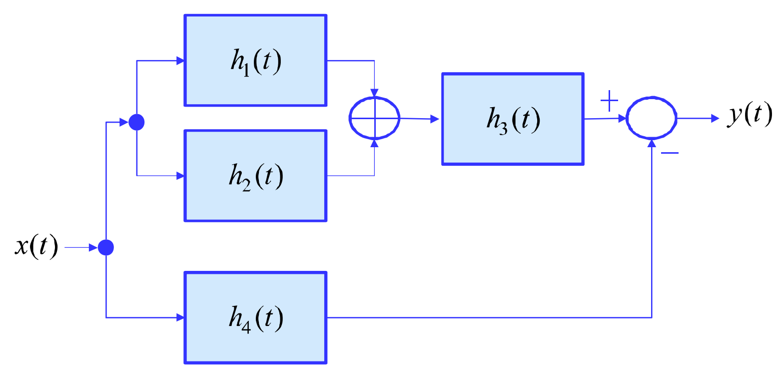
$$(1 + H_1(s)H_2(s))Y(s) = H_1(s)X(s)$$

$$Y(s) = \left(\frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}\right)X(s)$$

Interconexão de sistemas

Exemplo

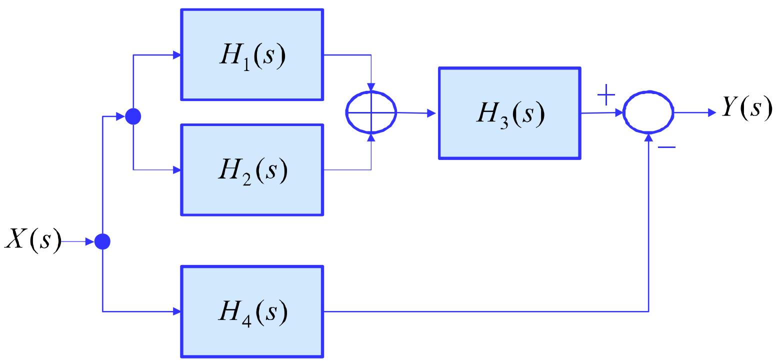
- Determinar a função de transferência $H(s)$ do seguinte sistema:



Interconexão de sistemas

Solução

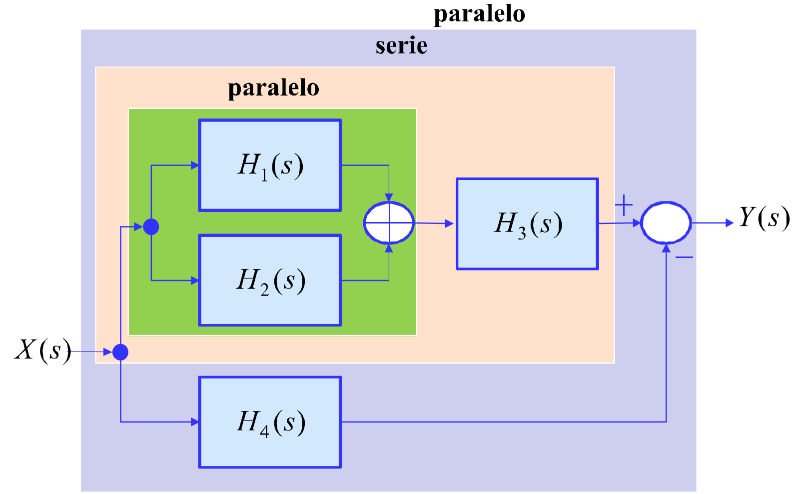
- Representando o sistema no domínio de Laplace:



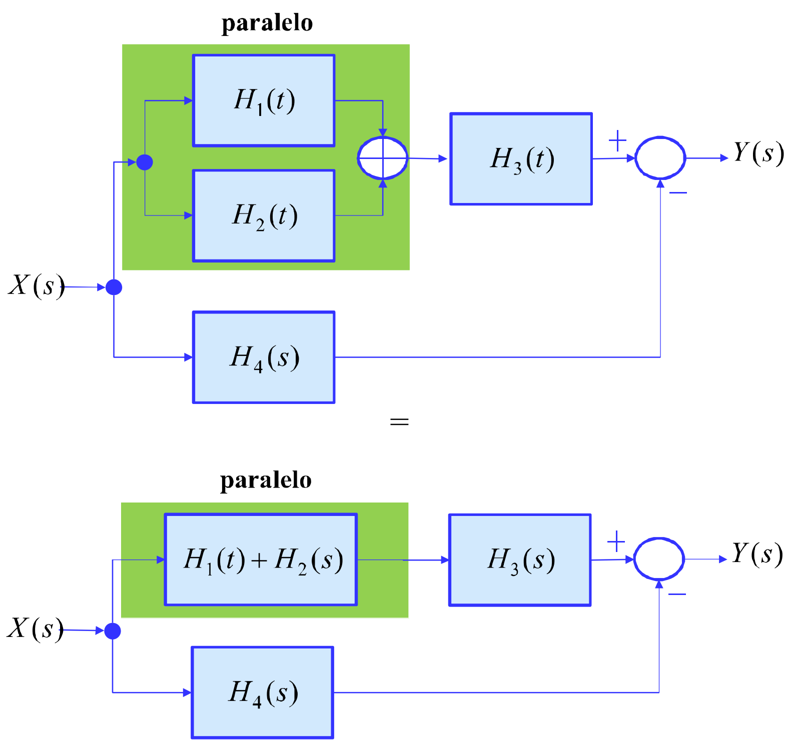
Interconexão de sistemas

Solução

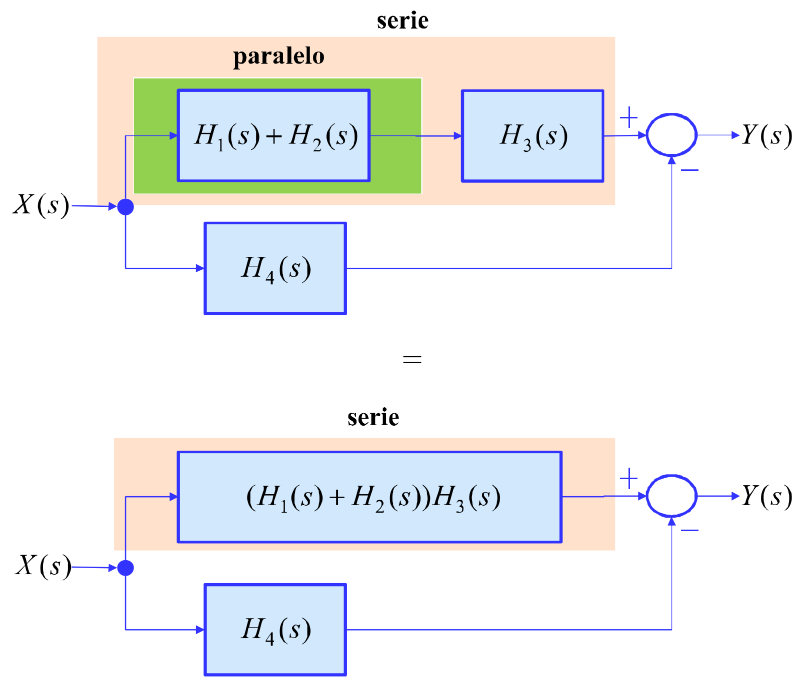
- Determinando o sistema equivalente:



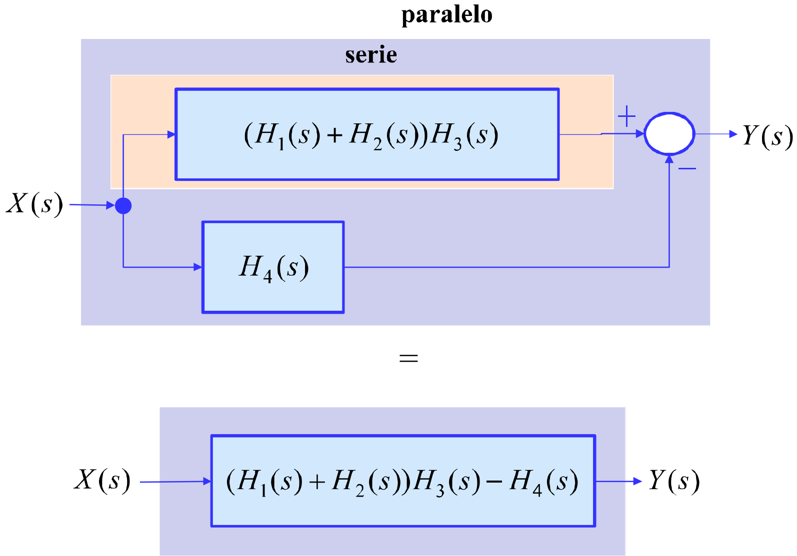
Solução



Solução



Solução

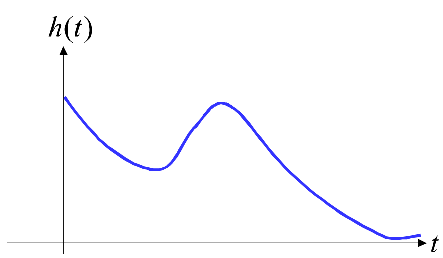


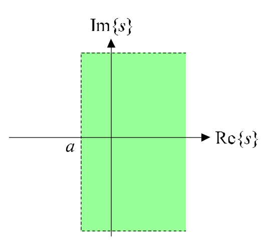
Propriedades dos Sistemas LTI a partir da ROC

Propriedades dos Sistemas LTI a partir da ROC

Causalidade

- *Seja*
  - Um sistema LTI de tempo contínuo.
- *O sistema é causal se*
  - A ROC da função de transferência do sistema esta ao lado direito do plano complexo (A ROC deve incluir $Re\{s\}=+\infty$).





Condição necessária mas não suficiente

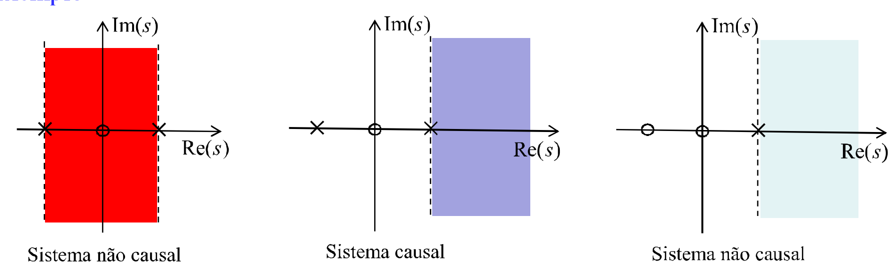
Propriedades dos Sistemas LTI a partir da ROC

Causalidade

- *Seja*
  - $H(s)$ é uma função racional.
- *O sistema é causal se*
  - A ROC da função de transferência do sistema está ao lado direito do plano complexo (A ROC deve incluir $Re\{s\}=+\infty$).
  - Número de polos é maior que o número de zeros.

$$n^{ro}\ polos \ \geq\ n^{ro}\ zeros$$

- Exemplo



Condição suficiente e necessária

Propriedades dos Sistemas LTI a partir da ROC

Estabilidade

- *Seja*
  - Um sistema de tempo contínuo.
- *O sistema é estavel se*
  - A ROC da função de transferência do sistema contem ao eixo imaginário do plano complexo.

Condição necessária mas não suficiente

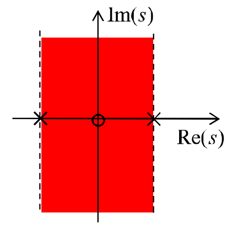
Propriedades dos Sistemas LTI a partir da ROC

Estabilidade

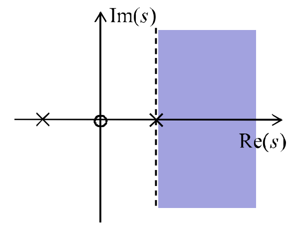
- *Seja*
  - $H(s)$ é uma função racional.
- *O sistema é estavel se*
  - A ROC da função de transferência do sistema contem ao eixo imaginário do plano complexo.
  - Número de polos é maior que o número de zeros.

$$n^{ro}\ polos \geq n^{ro}\ zeros$$

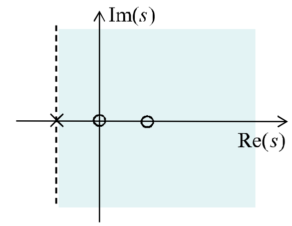
- Exemplo



Sistema estável



Sistema instável



Sistema instável

Condição suficiente e necessária

Transformada de Laplace Unilateral

Transformada de Laplace Unilateral

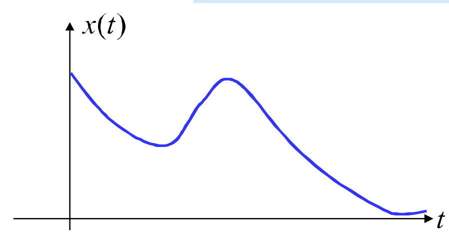
Definição

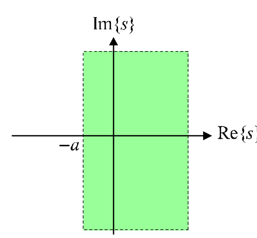
- A transformada de Laplace Unilateral (TLU) de um sinal $x(t)$: é definida como:

$$X(s) \triangleq \int_{0}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

- O anterior implica que:
  - A TLU será igual à TLB se supomos que o sinal $x(t)$ é nulo para $t < 0$, ou seja, se $x(t)$ é um sinal causal.
  - Por tanto, a ROC da TLU sempre estará ao lado direito do plano complexo.

$$ROC = \left\{ s \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}\{s\} > -a \ ,\ a > 0 \right\}$$





Transformada de Laplace Unilateral

Definição

TUL: Equação de análises

$$X(s) = L_+\{x(t)\} \triangleq \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Domínio do tempo $x(t)$ $\qquad x(t) \overset{L_+}{\longleftrightarrow} X(s) \qquad$ $X(s)$ Domínio de Laplace

$$x(t) = L_+^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma-j\infty} X(s)e^{st}ds$$

TUIL: Equação de sínteses

$$ROC = \left\{s \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}\{s\} > -a \;,\; a > 0\right\}$$

Transformada de Laplace Unilateral

Propriedades

- A maioria de propriedades são iguais à TBL, menos a diferenciação e integração.

Linearidade

$$x(t) \overset{L_+}{\longleftrightarrow} X(s)$$

$$X(s) = L_+\{x(t)\}$$

$$X(s) \triangleq \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Teorema do valor inicial e final

Diferenciação

Integração

Convolução
- No domínio do tempo
- No domínio de Laplace

Escalamento
- No domínio do tempo
- No domínio de Laplace

Deslocamento
- No domínio do tempo
- No domínio de Laplace

Transformada de Laplace Unilateral

Propriedades

- *Diferenciação no domínio do tempo*

$$x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s) \;,\; ROC_X$$

$$y(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} \overset{L}{\longleftrightarrow} Y(s) = s^n X(s) - s^{n-1}\boxed{x(0)} - s^{n-2}\boxed{x^{(1)}(0)} - \cdots - \boxed{x^{(n-1)}(0)}$$

Condições iniciais do sinal $x(t)$

$$,\; ROC_Y \supset ROC_X \qquad \frac{d^k x(0)}{dt^k} = x^{(k)}(0)$$

- A TLU da derivada n-ésima de $x(t)$ é um polinômio em relação a s de ordem n, onde os coeficientes do polinômio são definidos pela TLU de $x(t)$ e pelas n condiciones iniciais de $x(t)$.

$$\left\{x(0), x^{(1)}(0) = \frac{dx(0)}{dt}, \ldots, x^{(n-1)}(0) = \frac{d^{n-1}x(0)}{dt^{n-1}}\right\}$$

Solucionando Equações Diferenciais

Solucionando Equações Diferenciais

Introdução

- *Lembremos que:*
  - A forma geral de um sistema caracterizado por uma EDO linear de coeficientes constantes é:

$$x(t) \Rightarrow \boxed{T\{\}} \Rightarrow y(t)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

  - Onde:
    - a_k y b_k são os coeficientes constantes reais da EDO linear.
    - N é um número inteiro chamado de ordem da EDO, e corresponde à derivada mais elevada (sempre que $N > M$).

Solucionando Equações Diferenciais

Introdução

- *Lembremos que:*
  - Utilizando o operador diferencial $D=d/dt$ podemos escrever a equação anterior como:

$$x(t) \Rightarrow \boxed{T\{\}} \Rightarrow y(t)$$

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

  - Onde:

$$Q(D) = a_0 + a_1 D + \cdots + a_{N-1} D^{N-1} + a_N D^N$$

$$P(D) = b_0 + b_1 D + \cdots + b_{M-1} D^{M-1} + b_M D^M$$

Solucionando Equações Diferenciais

Introdução

- Se o sistema LTI com memoria é definido por uma EDO linear de coeficientes constantes, a resposta total $y(t)\ t \geq t_o$ será a soma de duas componentes:

$$\left\{\begin{matrix} v(t_o) \\ x(t)\ ,\ t \geq t_o \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{Q(D)y(t) = P(D)x(t)} \Rightarrow y(t) = y_n(t) + y_f(t)\ ,\ t \geq t_o$$

$$\left\{\begin{matrix} v(t_o) \\ x(t)\ ,\ t \geq t_o \end{matrix}\right\} \xrightarrow{Q(D)y(t)=P(D)x(t)} y(t) = y_n(t) + y_f(t)\ ,\ t \geq t_o$$

resposta natural

$$v(t_o) \Rightarrow \boxed{Q(D)y(t) = 0} \Rightarrow y_n(t)$$

$$\left\{\begin{matrix} v(t_o) \\ x(t) = 0\ ,\ t \geq t_o \end{matrix}\right\} \xrightarrow{T} y_n(t)\ ,\ t \geq t_o$$

resposta forçada

$$x(t) \Rightarrow \boxed{Q(D)y(t) = P(D)x(t)} \Rightarrow y_f(t)$$

$$\left\{\begin{matrix} v(t_o) = 0 \\ x(t)\ ,\ t \geq t_o \end{matrix}\right\} \xrightarrow{T} y_n(t)\ ,\ t \geq t_o$$

Solucionando Equações Diferenciais

Introdução

$$\left\{\begin{matrix} v(t_o) \\ x(t)\ ,\ t \geq t_o \end{matrix}\right\} \xrightarrow{Q(D)y(t)=P(D)x(t)} y(t) = y_n(t) + y_f(t)\ ,\ t \geq t_o$$

resposta natural

$$v(t_o) \Rightarrow \boxed{Q(D)y(t) = 0} \Rightarrow y_n(t)$$

$$\left\{\begin{matrix} v(t_o) \\ x(t) = 0\ ,\ t \geq t_o \end{matrix}\right\} \xrightarrow{T} y_n(t)\ ,\ t \geq t_o$$

resposta forçada

$$x(t) \Rightarrow \boxed{Q(D)y(t) = P(D)x(t)} \Rightarrow y_f(t)$$

$$\left\{\begin{matrix} v(t_o) = 0 \\ x(t)\ ,\ t \geq t_o \end{matrix}\right\} \xrightarrow{T} y_n(t)\ ,\ t \geq t_o$$

- Onde, as condições iniciais são os valores das N derivadas da saída e as M derivadas da entrada avaliadas no tempo t_o.

$$v(t_o) = \left\{ y(t_o), \frac{d}{dt} y(t_o), \ldots, \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(t_o), x(t_o), \frac{d}{dt} x(t_o), \ldots, \frac{d^{M-1}}{dt^{M-1}} x(t_o) \right\}$$

Solucionando Equações Diferenciais

Método

- Duas propriedades importantes da transformada de Laplace unilateral, permitem que seja usada para solucionar EDOs lineares de coeficientes constantes, a saber:
  - *A propriedade de linearidade*

$$x_1(t) \xleftrightarrow{L_+} X_1(s)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{L_+} X_2(s)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{L_+} aX_1(s) + bX_2(s)$$

  - *A propriedade de diferenciação no domínio do tempo*

$$x(t) \xleftrightarrow{L_+} X(s)$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{L_+} Y(s) = s^n X(s) - s^{n-1} x(0) - s^{n-2} x^{(1)}(0) - \cdots - x^{(n-1)}(0)$$

Condições iniciais do sinal $x(t)$

Solucionando Equações Diferenciais

Método

- Sabemos que um sistema LTI descrito por uma EDO linear de coeficientes constantes é:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

- Apliquemos a transformada de Laplace unilateral na relação anterior.

$$L_+\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t)\right\} = L_+\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)\right\}$$

- Fazendo uso da propriedade de linearidade, a transformada de Laplace unilateral será aplicado a cada um dos elementos dos somatórios.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k L_+\left\{\frac{d^k}{dt^k} y(t)\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k L_+\left\{\frac{d^k}{dt^k} x(t)\right\}$$

Solucionando Equações Diferenciais

Método

- Agora usamos a propriedade da diferenciação no domínio do tempo:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k L_+\left\{\frac{d^k}{dt^k} y(t)\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k L_+\left\{\frac{d^k}{dt^k} x(t)\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \left(s^k Y(s) - s^{k-1} y(0) \cdots - y^{(k-1)}(0)\right) = \sum_{k=0}^{M} b_k \left(s^k X(s) - s^{k-1} x(0) \cdots - x^{(k-1)}(0)\right)$$

Condições iniciais do sinal $y(t)$

Condições iniciais do sinal $x(t)$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \left(s^k Y(s) - \sum_{r=1}^{k} s^{k-r} y^{(r-1)}(0)\right) = \sum_{k=0}^{M} b_k \left(s^k X(s) - \sum_{r=1}^{k} s^{k-r} x^{(r-1)}(0)\right)$$

Solucionando Equações Diferenciais

Método

- Agrupando convenientemente temos a resposta do sistema no domínio de Laplace:
  - Em ambos lados da igualdade os somatórios são aplicados a cada um de seus argumentos.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \left(s^k Y(s) - \sum_{r=1}^{k} s^{k-r} y^{(r-1)}(0)\right) = \sum_{k=0}^{M} b_k \left(s^k X(s) - \sum_{r=1}^{k} s^{k-r} x^{(r-1)}(0)\right)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) - \sum_{k=0}^{N}\sum_{r=1}^{k} a_k s^{k-r} y^{(r-1)}(0) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s) - \sum_{k=0}^{M}\sum_{r=1}^{k} b_k s^{k-r} x^{(r-1)}(0)$$

  - $Y(s)$ e $X(s)$ são extraídos dos somatórios (em relação aos somatórios eles são constantes)

$$Y(s)\left(\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\right) - \sum_{k=0}^{N}\sum_{r=1}^{k} a_k s^{k-r} y^{(r-1)}(0) = X(s)\left(\sum_{k=0}^{M} b_k s^k\right) - \sum_{k=0}^{M}\sum_{r=1}^{k} b_k s^{k-r} x^{(r-1)}(0)$$

Solucionando Equações Diferenciais

Método

- Agrupando convenientemente temos a resposta do sistema no domínio de Laplace:
  - A partir da ultima expressão solucionamos para $Y(s)$.

$$Y(s)\left(\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\right) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{r=1}^{k} a_k s^{k-r} y^{(r-1)}(0) - \sum_{k=0}^{M}\sum_{r=1}^{k} b_k s^{k-r} x^{(r-1)}(0) + X(s)\left(\sum_{k=0}^{M} b_k s^k\right)$$

$$Y(s) = \left(\frac{\sum_{k=0}^{N}\sum_{r=1}^{k} a_k s^{k-r} y^{(r-1)}(0) - \sum_{k=0}^{M}\sum_{r=1}^{k} b_k s^{k-r} x^{(r-1)}(0)}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}\right) + \left(\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}\right) X(s)$$

Solucionando Equações Diferenciais

Método

$$Y(s) = \left(\frac{\sum_{k=0}^{N}\sum_{r=1}^{k} a_k s^{k-r} y^{(r-1)}(0) - \sum_{k=0}^{M}\sum_{r=1}^{k} b_k s^{k-r} x^{(r-1)}(0)}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}\right) + \left(\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}\right) X(s)$$

Solucionando Equações Diferenciais

Método

Condições iniciais do sinal $x(t)$

Condições iniciais do sinal $y(t)$

$$Y(s) = \left(\frac{\sum_{k=0}^{N}\sum_{r=1}^{k} a_k s^{k-r} y^{(r-1)}(0) - \sum_{k=0}^{M}\sum_{r=1}^{k} b_k s^{k-r} x^{(r-1)}(0)}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}\right) + \left(\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}\right) X(s)$$

Resposta do sistema gerada pelas condições iniciais de $x(t)$ e $y(t)$

Resposta do sistema gerada pelo sinal de entrada $x(t)$ quando todas as condições iniciais são iguais a zero.

Solucionando Equações Diferenciais

Método

Condições iniciais do sinal $x(t)$

Condições iniciais do sinal $y(t)$

$$Y(s) = \left(\frac{\sum_{k=0}^{N}\sum_{r=1}^{k} a_k s^{k-r} y^{(r-1)}(0) - \sum_{k=0}^{M}\sum_{r=1}^{k} b_k s^{k-r} x^{(r-1)}(0)}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}\right) + \left(\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}\right) X(s)$$

Resposta natural

$$y_n(t) \overset{L_+}{\longleftrightarrow} Y_n(s)$$

Resposta forçada

$$y_f(t) \overset{L_+}{\longleftrightarrow} Y_f(s)$$

$$y(t) = y_n(t) + y_f(t) \overset{L_+}{\longleftrightarrow} Y(s) = Y_n(s) + Y_f(s)$$

Solucionando Equações Diferenciais

Método

- Suponhamos que todas as condições iniciais são zeradas, então

$$Y(s) = \left(\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \right) X(s)$$

Resposta forçada

$$y_f(t) \xleftrightarrow{L_+} Y_f(s)$$

Solucionando Equações Diferenciais

Método

- Suponhamos que todas as condições iniciais são zeradas, então

$$Y_f(s) = \left(\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \right) X(s)$$

$$\left(\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \right) = \frac{Y_f(s)}{X(s)} = H(s)$$

Função de Transferência do Sistema

Solucionando Equações Diferenciais

Método

- Então, a resposta do sistema no domínio de Laplace, pode ser expressada como:

$$Y(s) = Y_n(s) + H(s)X(s)$$

Resposta natural

$$Y_n(s) = \frac{c_0 + c_1 s + \cdots + c_{\max(N,M)} s^{\max(N,M)}}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_N s^N} = \frac{R(s)}{Q(s)}$$

Resposta forçada

$$Y_f(s) = H(s)X(s)$$

Função de Transferência

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_N s^N}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_N s^N} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Polinômio Característico do sistema LTI

Solucionando Equações Diferenciais

Método

- Finalmente, a resposta do sistema no domínio do tempo é:

$$L_+^{-1}\{Y(s)\} = L_+^{-1}\{Y_n(s) + H(s)X(s)\}$$

$$y(t) = L_+^{-1}\{Y_n(s)\} + L_+^{-1}\{H(s)X(s)\}$$

$Y_n(s)$ é uma expressão racional ⇒ O calculo da transformada inversa é feita usando o Método de Expansão em Frações Parciais

$$y(t) = y_n(t) + \underbrace{h(t) * x(t)}_{= y_f(t)}$$

De maneira geral o calculo da transformada inversa do produto $H(s)Y(s)$ é feita usando a integral de convolução, mas no caso em que o produto seja uma expressão racional usamos o Método de Expansão em Frações Parciais.

Resumo

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$ *Eq. Diferencial*

Transformada Unilateral de Laplace

$$Y(s) = Y_n(s) + H(s)X(s)$$ *Eq. Algébrica*

Transformada Inversa Unilateral de Laplace

$$y(t) = y_n(t) + \underbrace{h(t) * x(t)}_{=y_f(t)}$$ *Solução da Eq. Diferencial*

Solucionando Equações Diferenciais

Método

Exemplo

- Seja o sistema LTI definido via uma EDO linear de coeficientes constantes

$$\begin{Bmatrix} x(t) = e^{-3t}, \ t \geq 0 \\ v(0) = \{y(0) = 4\} \end{Bmatrix} \Rightarrow T\{\} \Rightarrow y(t)$$

$$\frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = x(t)$$

- Determinar
  a) A função de transferência.
  b) A resposta total do sistema.

- *Dica*

$$L_+\left\{\frac{d}{dt} y(t)\right\} \xleftrightarrow{L_+} sY(s) - y(0)$$

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L_+} \frac{1}{s+a}$$

Solucionando Equações Diferenciais

Método

Solução

- a) Determinando a função de transferência:

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ v(0) = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow T\{\} \Rightarrow y_f(t)$$

- Calculando a Transformada Unilateral de Laplace do sistema, considerando que todas as condições iniciais são iguais a zero.

$$\frac{d}{dt} y_f(t) + 2y_f(t) = x(t)$$

$$L_+\left\{\frac{d}{dt} y_f(t) + 2y_f(t)\right\} = L_+\{x(t)\}$$

$$L_+\left\{\frac{d}{dt} y_f(t)\right\} + 2L_+\{y_f(t)\} = X(s)$$

$$sY_f(s) + 2Y_f(s) = X(s)$$

$$L_+\left\{\frac{d}{dt} y(t)\right\} \xleftrightarrow{L_+} sY(s) - y(0)$$

Solucionando Equações Diferenciais

Método

Solução

- a) Determinando a função de transferência:

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ v(0) = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow T\{\} \Rightarrow y_f(t)$$

- Calculando a Transformada Unilateral de Laplace do sistema, considerando que todas as condições iniciais são iguais a zero.

$$(s+2)Y_f(s) = X(s)$$

$$\frac{Y_f(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+2}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+2}$$

Solucionando Equações Diferenciais

Método

Solução

- b) Determinando a resposta total do sistema:

$$\begin{Bmatrix} x(t)=e^{-3t},\ t\geq 0 \\ v(0)=\{y(0)=4\} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{T\{\}} \Rightarrow y(t)$$

- **Passo 1**: Calculando a Transformada Unilateral de Laplace do sistema:

$$\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=x(t)$$

$$L_+\left\{\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)\right\}=L_+\{x(t)\}$$

$$L_+\left\{\frac{d}{dt}y(t)\right\}+2L_+\{y(t)\}=X(s)$$

$$sY(s)-y(0)+2Y(s)=X(s)$$

$$L_+\left\{\frac{d}{dt}y(t)\right\}\xleftrightarrow{L_+}sY(s)-y(0)$$

$$(s+2)Y(s)-y(0)=X(s)\Rightarrow Y(s)=\frac{y(0)}{s+2}+\left(\frac{1}{s+2}\right)X(s)$$

Solucionando Equações Diferenciais

Método

Solução

- a) Determinando a resposta total do sistema:

$$\begin{Bmatrix} x(t)=e^{-3t},\ t\geq 0 \\ v(0)=\{y(0)=4\} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{T\{\}} \Rightarrow y(t)$$

- **Passo 1**: Calculando a Transformada Unilateral de Laplace do sistema:

$$Y(s)=\frac{y(0)}{s+2}+\left(\frac{1}{s+2}\right)X(s)$$

$$e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{L_+}\frac{1}{s+a}$$

$$Y(s)=\underbrace{\frac{y(0)}{s+2}}_{\text{Resposta natural}}+\underbrace{\left(\frac{1}{s+2}\right)\left(\frac{1}{s+3}\right)}_{\text{Resposta forçada}}$$

Solucionando Equações Diferenciais

Método

Solução

- a) Determinando a resposta total do sistema:

$$\begin{Bmatrix} x(t)=e^{-3t},\ t\geq 0 \\ v(0)=\{y(0)=4\} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{T\{\}} \Rightarrow y(t)$$

- **Passo 2**: Calculando a transformada inversa unilateral de Laplace do sistema:

$$L_+^{-1}\{Y(s)\}=L_+^{-1}\left\{\frac{y(0)}{s+2}+\frac{1}{(s+2)(s+3)}\right\}$$

$$y(t)=L_+^{-1}\left\{\frac{y(0)}{s+2}\right\}+L_+^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s+3)}\right\}$$

Expressão racional

$$y(t)=y(0)L_+^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+L_+^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-L_+^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

Solucionando Equações Diferenciais

Método

Solução

- a) Determinando a resposta total do sistema:

$$\begin{Bmatrix} x(t)=e^{-3t},\ t\geq 0 \\ v(0)=\{y(0)=4\} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{T\{\}} \Rightarrow y(t)$$

- **Passo 2**: Calculando a Transformada Inversa Unilateral de Laplace do sistema:

$$y(t)=y(0)L_+^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+L_+^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-L_+^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

$$e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{L_+}\frac{1}{s+a}$$

$$=y(0)e^{-2t}u(t)+e^{-2t}u(t)-e^{-3t}u(t)$$

$$=(y(0)+1)e^{-2t}u(t)-e^{-3t}u(t)$$

$$=(4+1)e^{-2t}u(t)-e^{-3t}u(t)$$

$$=5e^{-2t}u(t)-e^{-3t}u(t)$$

Bibliografia

Bibliografia

HAYKIN, S. e VAN VEEN, B. **Sinais e sistemas**. Porto Alegre: Bookman, 2001. (19).