ANÁLISE DIMENSIONAL E SEMELHANÇA

Ana Luiza Graça Ribeiro, André Cetto Vieira, João Phellipe R. Hautequestt e Wezador de Jesus Santos Suzano

Definição e Aplicações

Há problemas em mecânica dos fluidos que não podem ser resolvidos usando apenas as equações diferenciais e integrais

Métodos experimentais

Definição e Aplicações

Análise Dimensional

Homogeneidade dimensional: todos os termos de uma equação devem ter as mesmas dimensões.

Definição e Aplicações

Exemplo: Equação de Bernoulli

$$\frac{\overbrace{V_1^2}^{m^2/s^2}}{\underbrace{2g}_{m/s^2}} + \frac{\overbrace{p_1}^{kg/m\cdot s^2}}{\underbrace{\gamma}_{kg/m^2s^2}} + \overbrace{z_1}^{m} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

Dividindo por Z1:

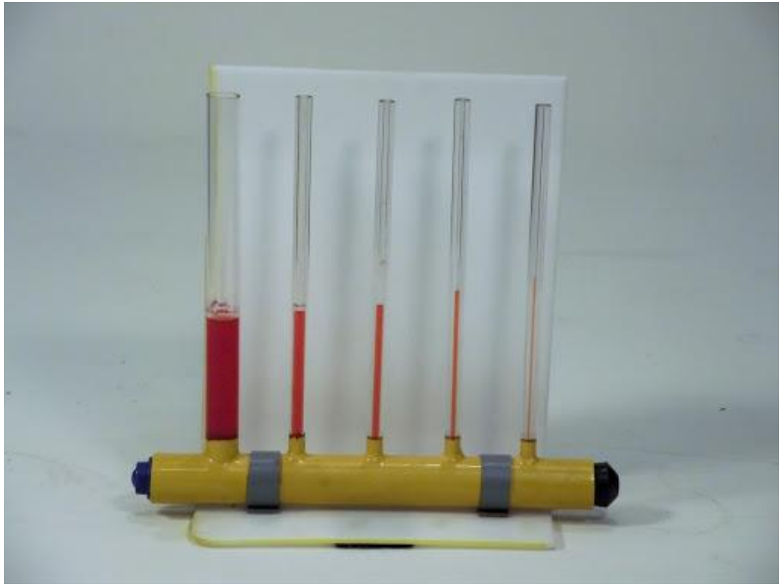
$$\frac{V_1^2}{2gz_1} + \frac{p_1}{\gamma z_1} + 1 = \frac{V_2^2}{2gz_1} + \frac{p_2}{\gamma z_1} + \frac{z_2}{z_1}$$

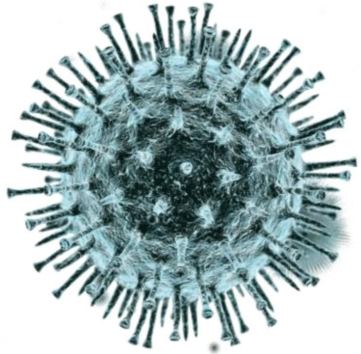
Definição e Aplicações

Análise dimensional

Definição e Aplicações

Análise dimensional





Definição e Aplicações

Análise de Semelhança: Estudo das condições do protótipo a partir de observações de modelos.

$\Downarrow$

Parâmetros Adimensionais

$\Downarrow$

Análise Dimensional

Definição e Aplicações

1. Teorema π de Buckingham:
- Organiza os passos para assegurar a homogeneidade dimensional
- Requer conhecimento do fenômeno estudado

1. Extraímos os parâmetros adimensionais

Teorema π de Buckingham

Seja uma equação que envolva n variáveis dimensionais representadas por r dimensões independentes, a equação pode ser reescrita como uma equação de p = n - r variáveis adimensionais (parâmetros π), construídas a partir das variáveis originais.

Método das variáveis repetidas

Passo 1: Listar os “n” parâmetros do problema;

Passo 2: Listar as “r” dimensões de cada parâmetro;

Passo 3: Determine o número de π’s (p);

Passo 4: Escolher r parâmetros repetidos:

Passo 5: Construir p π’s e efetuar as manipulações necessárias;

Passo 6: Escrever a relação final e verificar os cálculos.

Método das variáveis repetidas

- Procedimentos para escolher os parâmetros repetidos (Passo 4):
  - Nunca escolha a variável dependente;
  - Os parâmetros escolhidos não devem formar um grupo adimensional;
  - Os parâmetros devem representar todas as dimensões do problema;

Método das variáveis repetidas

- Procedimentos para escolher os parâmetros repetidos (Passo 4):
    - Nunca escolha parâmetros que já são adimensionais;
    - Nunca escolha parâmetros com as mesmas dimensões;

Método das variáveis repetidas

- Procedimentos para escolher os parâmetros repetidos (Passo 4):
    - Selecione constantes dimensionais ao invés de variáveis dimensionais preferencialmente;
    - Escolha parâmetros comuns;

Método das variáveis repetidas

Exemplo: Considere um corpo em queda livre cuja equação do espaço é:

$$S = S_0 + v_0 t - g/2 * t^2$$

Método das variáveis repetidas

Passo 1: Identificando os parâmetros neste problema:

Parâmetros dependente S;

Parâmetros independentes: S_0, v_0, t e g;

n = 5

Método das variáveis repetidas

Passo 2: Identificar as dimensões de cada parâmetro:

S	S_0	v_0	t	g
L^1	L^1	L^1t^{-1}	t^1	L^1t^{-2}

$$r = 2$$

Método das variáveis repetidas

Passo 3: Calcular o número de π's (p):

Pelo teorema de Buckingham:

$$p = n - r$$

$$p = 5 - 2$$

$$p = 3$$

Passo 4: Escolher os parâmetros repetidos:

$$S_0 \text{ e } v_0$$

Método das variáveis repetidas

Passo 5: Construir os π's:

Para π_1 utilizamos a variável dependente S:

$$S.S_0^a.v_0^v = L^1.(L^1)^a.(L^1t^{-1})^v = L^0.t^0$$

$$1 + a + v = 0; \qquad v = 0; \qquad a = -1$$

$$\pi_1 = S/S_0$$

Método das variáveis repetidas

Passo 5: Construir os π's:

Para π_2 utilizamos a variável independente t:

$$t.S_0^a.v_0^v = t^1.(L^1)^a.(L^1t^{-1})^v = L^0.t^0$$

$a + v = 0$; $1 - v = 0$; $v = 1$; $a = -1$

$$\pi_2 = v_0 * t / S_0$$

Método das variáveis repetidas

Passo 5: Construir os π's:

Para π_3 utilizamos a variável independente g:

$$g.S_0^a.v_0^v = L^1t^{-2}.(L^1)^a.(L^1t^{-1})^v = L^0.t^0$$

$1 + a + v = 0;$ $-2 - v = 0;$ $v = -2;$ $a = 1$

$$\pi_3 = g*S_0/v_0^2$$

Método das variáveis repetidas

Passo 6:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$$

$$S/S_0 = f(v_0 * t/S_0,\ g * S_0/v_0^2)$$

O método das variáveis repetidas prevê a relação funcional entre os grupos adimensionais mas não pode prever a forma matemática exata da equação.

Principais Grupos Adimensionais na Mecânica dos Fluidos

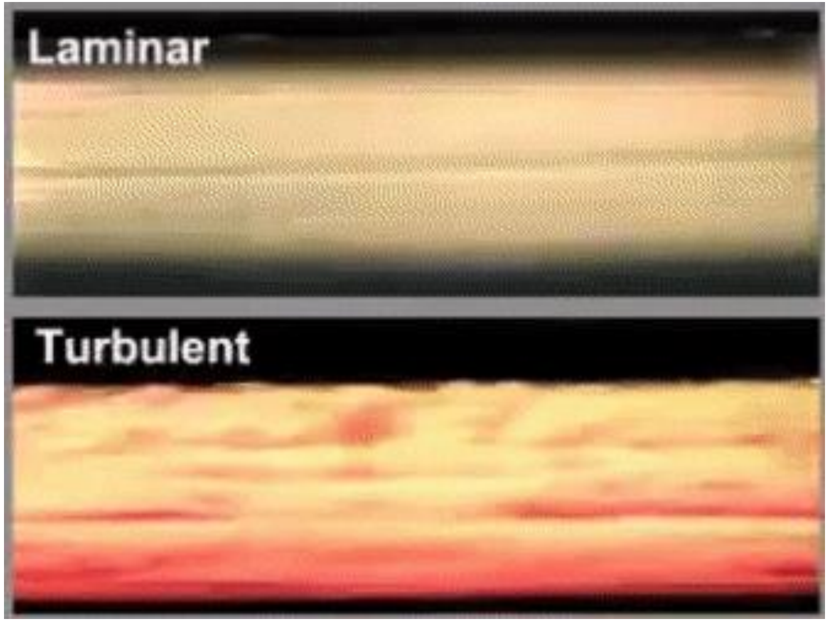
Número de Reynolds, Re: Razão entre as forças inerciais de um elemento fluido e as forças viscosas no elemento.

Regime de Escoamento do Fluido: Laminar (Re ≤ 2400), Turbulento (Re ≥4000), Transição entre eles.

$$Re = \frac{\rho . V . L}{\mu}$$

ρ é a densidade do fluido [kg/m³]
V é a velocidade média do escoamento [m/s]
D é o comprimento característico da geometria [m]
μ é a viscosidade do fluido [kg/m.s].

Principais Grupos Adimensionais na Mecânica dos Fluidos



Principais Grupos Adimensionais na Mecânica dos Fluidos

Número de Mach, Ma: Razão entre a velocidade do escoamento e a velocidade do som.

Ma=1,0: O objeto possui a mesma velocidade local do som.

$$\mathrm{Ma} = \frac{V}{c}$$

V é a velocidade do escoamento e c é a velocidade do som.

Principais Grupos Adimensionais na Mecânica dos Fluidos

Principais Grupos Adimensionais na Mecânica dos Fluidos

Número de Euler, Eu: Razão entre as forças gravitacionais e as forças inerciais do fluido.

Número de Euler igual a zero: Fluxo sem atrito.

$$Eu = \frac{p}{\rho . V^2}$$

Δp = diferença entre a pressão na superfície do fluido e a pressão atmosférica.
ρ = massa específica do fluido.
v = velocidade do escoamento,

Principais Grupos Adimensionais na Mecânica dos Fluidos

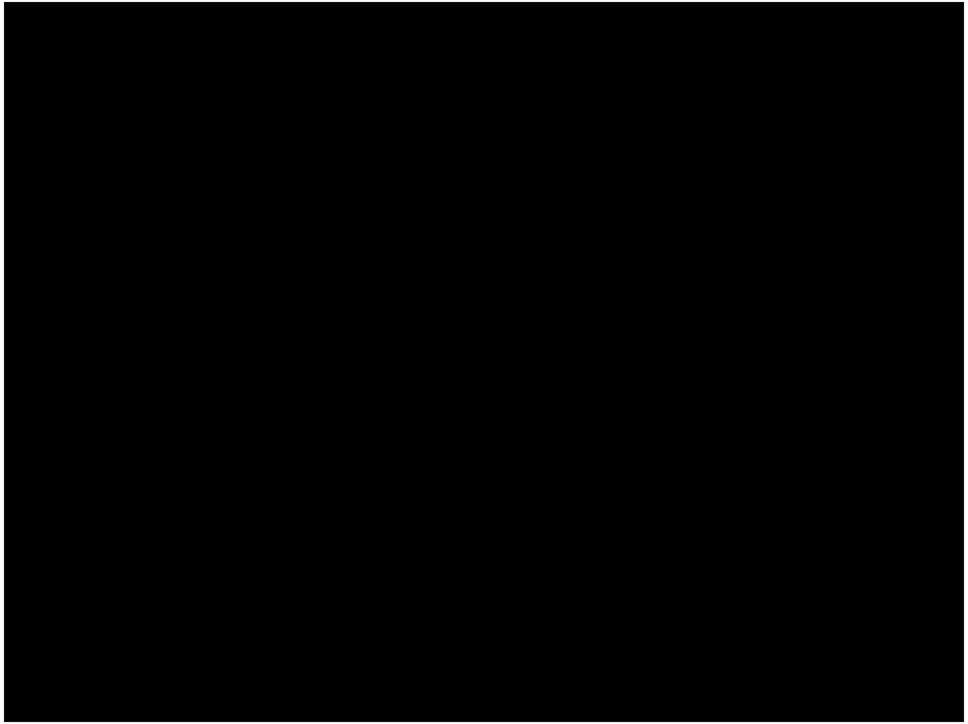
Número de Froude, Fr: Razão entre as forças de inércia e a força gravitacional do elemento fluido.

Classificação: Fluxo Crítico (Fr=1), Fluxo Supercrítico (Fr>1), Fluxo Subcrítico (Fr<1).

$$\mathrm{Fr} = \frac{V}{\sqrt{g.L}}$$

V= velocidade do fluxo.
g= gravidade.
v = comprimento característico.

Principais Grupos Adimensionais na Mecânica dos Fluidos



Semelhança

-Protótipo → Sistema estudado;

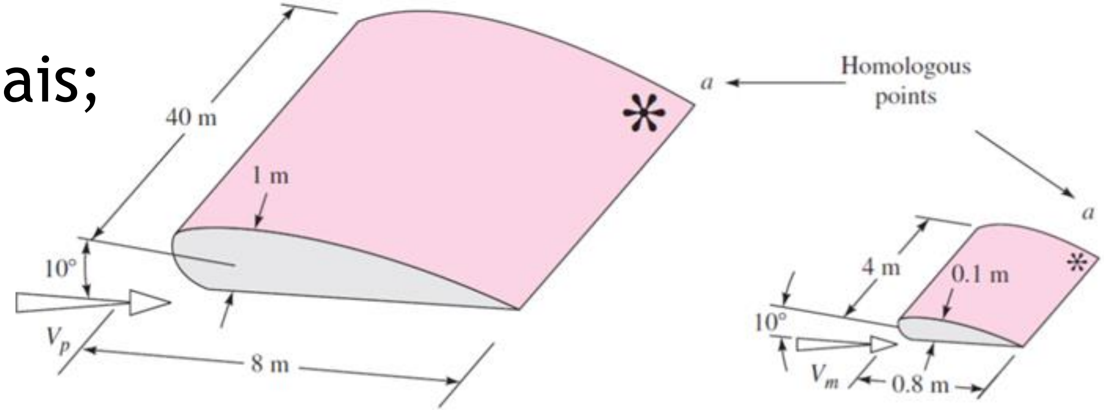
-Modelo → Representação simplificada do sistema estudado;

$$\text{Semelhança}\begin{cases}\textit{Geométrica}\\ \textit{Cinemática}\\ \textit{Dinâmica}\end{cases}$$

Semelhança Geométrica

-Dimensões correspondentes se relacionam por uma constante K;

-Os ângulos são iguais;

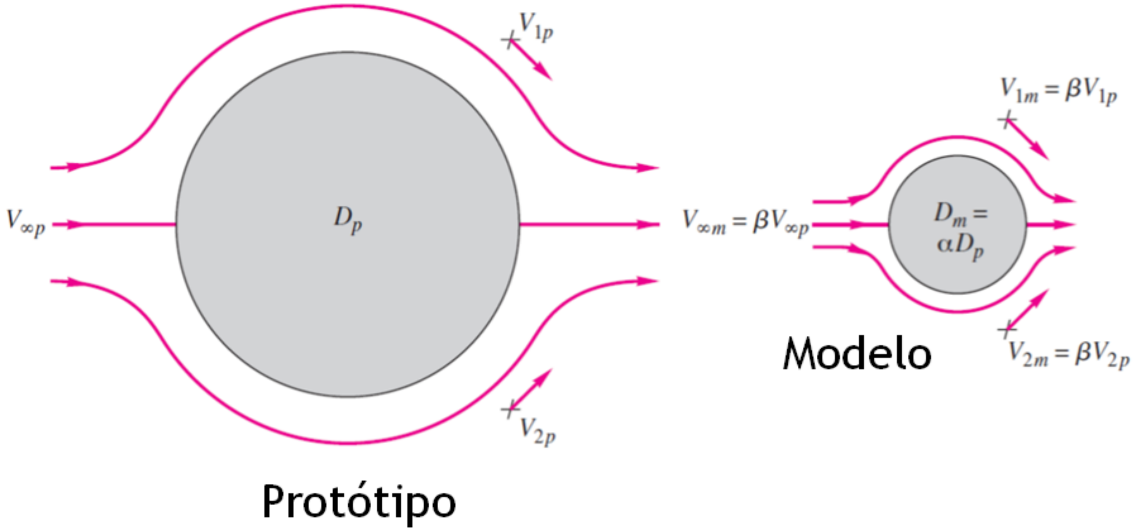


$$d_p = K \cdot d_m \qquad \theta_m = \theta_p$$

Semelhança Cinemática

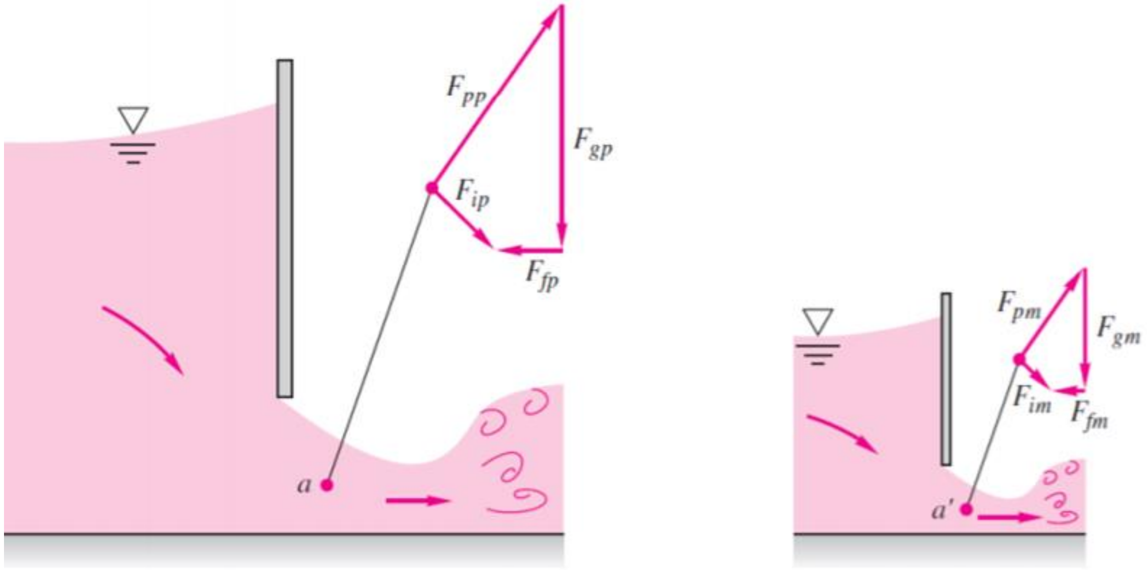
-Velocidades possuem mesma direção e sentido;

-Os módulos das velocidades são proporcionais;



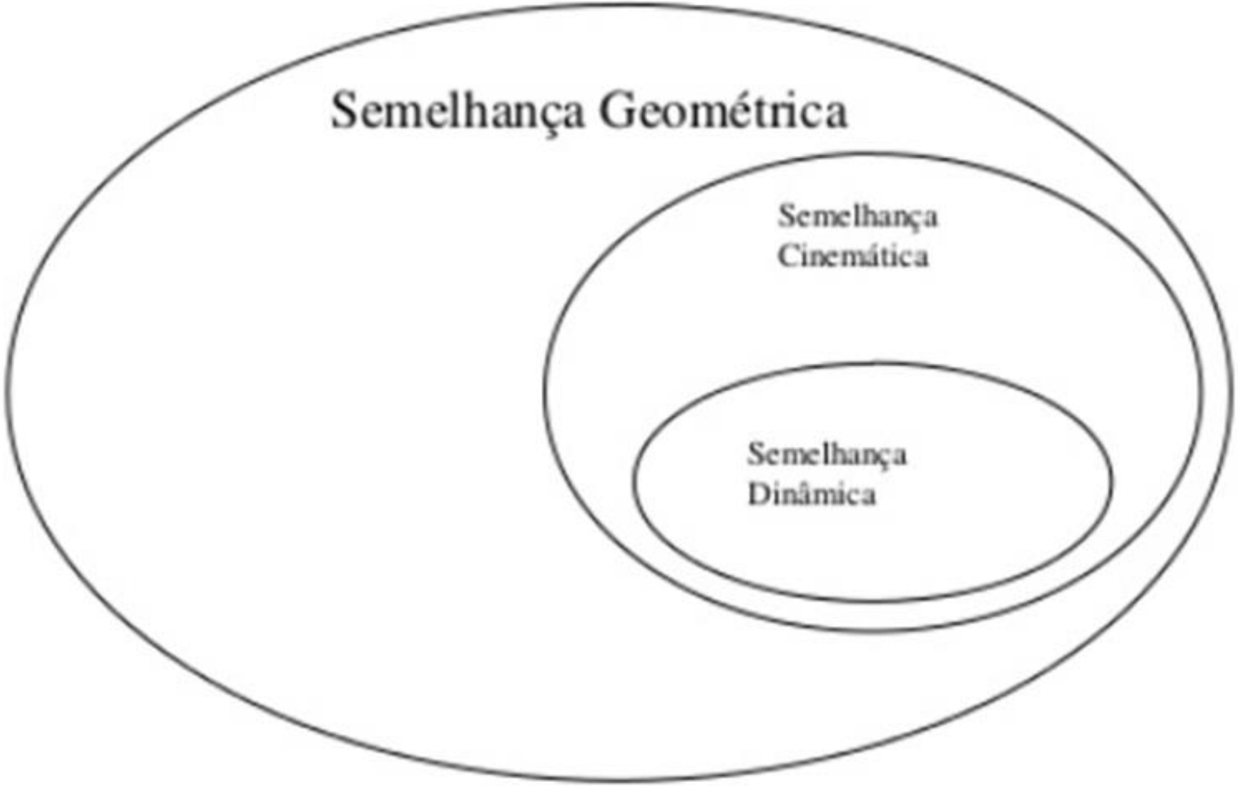
Semelhança Dinâmica

-As forças atuantes no modelo possuem suas correspondentes no protótipo;



$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_f = \mathbf{F}_i$$

Relação entre as semelhanças



Semelhança Completa

Se as três semelhanças são verificadas temos que:

- Número de Reynolds → $Re_m = Re_p$
- Número de Euler → $Eu_m = Eu_p$
- Número de Froude → $Fr_m = Fr_p$

Etc.

Exercício

O protótipo da estrutura de uma plataforma oceânica deve enfrentar correntes de 1,5 m/s e ondas com períodos de 12s e 3m de altura. Se um modelo de escala 1:15 é testado em um canal de ondas, qual velocidade o modelo deve suportar assumindo que há similaridade completa?

$$V_p = 1{,}5\,\frac{m}{s}\ ,L_p = 3m$$

$$Fr_m = Fr_p \quad \Rightarrow \quad \frac{V_m^2}{gL_m} = \frac{V_p^2}{gL_p}$$

$$\frac{V_m^2}{gL_m} = \frac{V_p^2}{gL_p} \quad \Rightarrow \quad V_m = \sqrt{\frac{L_m \cdot V_p^2}{L_p}}$$

$$Escala \rightarrow 1{:}15 \quad \Rightarrow \quad L_m = \frac{3}{15} = 0{,}2m$$

$$V_m = \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 1{,}5^2}{3}} \cong 0{,}39\,\frac{m}{s}$$

Referências

- Çengel, Y.A. e Cimbala, J.M. 2007. Mecânica dos Fluidos - Fundamentos e Aplicações, McGraw-Hill Interamericana do Brasil Ltda, 819 p.
- Fox, R.W., McDonald, A.T. and Pritchard, P.J.; “ Introdução à Mecânica dos Fluidos”, LTC, 8a ed. (2004)
- Análise Dimensional e Semelhança Parte 1. Youtube. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=wBiSU7h7zJo&ab_channel=MECFLU>. Acesso em: 29 de dez. 2020.