Teste 3 2020/2- Algoritmos Numéricos- DI

NOME: ____.

Leia **atentamente** as questões até o fim. Está sendo usada a notação americana, ou seja, usa-se o ponto (.) para denotar a parte fracionária.
Todas as soluções (menos os códigos) devem ser escritas pelo aluno (com sua letra) e, em seguida, digitalizadas. Se possível, coloque as soluções em único arquivo pdf. Escreva de forma bem legível. Use uma caneta preta ou lápis bem escuro para o contraste.

1. **(2.0)** Suponha que se queira estudar a relação do entre a quantidade de flores em um uma dada espécie de planta em função da temperatura média do solo, A tabela abaixo mostra o resultado (fictício) de medidas experimentais realizadas para 4 valores de temperaturas:

temperatura média do solo, em graus (x)	1	4	9	20
a quantidade de flores (y)	2	3	5	7

(a) (1.0) Com os dados fornecidos e fazendo um ajuste, via método dos mínimos quadrados, por uma função do tipo $\phi(x) = \beta_0 + \beta_1\sqrt{x}$ obtenha a quantidade de flores esperada por esta dada espécie em um solo com temperatura média de 15 graus.
(b) (1.0) Seria possível ajustar aos pontos acima uma reta, pelo método dos mínimos quadrados? Justifique a sua resposta sem fazer contas, apenas com argumentos teóricos.

2. **(1.0)** Ao fazer um ajuste de uma função $fx)$ a um conjunto de pontos $P : ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n))$, o resíduo, é um valor levado em consideração. O resíduo, em um ponto x_k, é definido por:

$$r_k = f(x_k) - y_k$$

Por que motivo o método dos mínimos quadrados emprega o seguinte critério:

$$Min(\sum_{k=1}^{n} r_k^2)$$

em vez de

$$Min(\sum_{k=1}^{n} |r_k|)$$

Justifique.

3. Questão **(3.0)** Seja a função $f(x) = x^3 - e^x$
(a)(0.5) Localize graficamente a(s) raízes de $f(x)$ indicando, em um par de eixos cartesianos, os intervalo(s) (de tamanho igual a 1) onde se encontra(m) a(s) raíz(es).
(b)(1.0) Partindo de um intervalo definido na letra (a), obtenha a menor raíz de $f(x)$ pelo método pelo método da bisseção, com precisão $tol = 0.05$.

Use o seguinte critério: $(b - a) \leq tol$, como critério de parada.
(c)(0.5) Obtenha a menor raíz de $f(x)$, com precisão $tol = 10^{-6}$ pelo método da tangente. Use o seguinte critério: $|f(x_k)| \leq tol$ como critério de parada. Use para x_0 algum valor dentro do intervalo indicado na letra (a).

(d)(1.0) Usando $x_0 = 0.5$, obtenha 3 novas aproximações para raíz de $f(x)$ via método da tangente (ou seja, gere x_1, x_2 e x_3) e Represente, graficamente, o que foi feito nestes 3 passos, explicando a ideia geométrica de como foi gerada a nova aproximação x_1 em função de x_0, como se gerou x_2 em função de x_1 e, por fim, como x_3 foi gerada em função de x_2. Trace a reta tangente envolvida em cada passo. Use uma escala conveniente para que fique vi?ivel o que se está sendo mostrado.

Explique, usando argumentos sobre o comportamento da função, a diferença de compor

4. **(4.0)**

   Implementar os método da secante para determinar a(s) raíz(es) reais de uma dada função, contínua e definida em um dado intervalo $I = [a, b]$, com precisão *tol*.

   Para se resolver uma equação do tipo$f(x) = 0$ é possível empregar métodos iterativos. Dentres eles, há o método da secante. O método faz o uso de uma reta secante à função para "guiar" a obtenção da raíz.

   O método consistem em, dados x_{i-1}, x_i, $f(x_i)$ e $f(x_{i-1})$ obter uma nova aproximação x_{i+1} para a raíz via:

$$x_{i+1} = x_i - \left(\frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}\right)$$

   A implementação deve ser tal que, dado um dado intervalo $I = [a, b]$ que contenha uma raíz, e uma função $f(x)$ definida e contínua neste intervalo $I = [a, b]$, seja possível obter a raíz em $I = [a, b]$, com precisão *tol*.
   Use como critério de parada o seguinte critério:
   Parar quando $DistRel = |x_{k+1} - x_k|/|x_{k+1}| \leq tol$.

   Para obter a raiz da função, deve ser implementado, pelo menos, dois blocos (rotinas/e ou funcões computacionais *.m) que executem as seguintes tarefas:

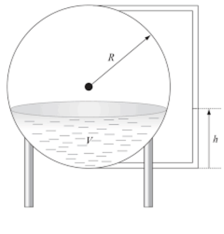
   (a) dados dois valores x_0 e x_1, obter a raíz da função que está em $I = [a, b]$, pelo método da secante, com precisão *tol*.
   (b) um código (script) principal que faça a chamada de outras "rotinas/funções computacionais" necessárias para executar uma dada tarefa.

   Se necessário, outros "scripts/functions" podem ser criados.

   A implementação deve ser tal que resolva, pelo menos, os seguintes problemas:

   (a) **Resolução de um problema 1 (de validação).**
   Determinar a menor raíz de $g(x) = x^2 - 7$.
   (b) **O volume de agua em um tanque**

   Um tanque esférico armazenar água. O volume $V(h)$ de água que ele armazena é dado por:



$$V(h) = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$

onde h representa altura da água no tanque. Escrevendo a expressão acima em função de x em vez de h onde x representa altura da água no tanque, tem se que

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2(3r - x)$$

onde x representa nível (altura) da água no tanque.

Se o raio do tanque é $r = 3m$ até que altura o tanque deve estar cheio para armazenar $25m^3$ de água?

Este problema pode ser equacionado da seguinte forma: quer se o valor de x tal que $V(x) = 25m^3$, isto é, resolver

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2(3r - x) = 25$$

ou

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2(3r - x) - 25 = 0$$

(c) **Resolução de um problema escolhido pelo aluno (problema 3)**. Determinar uma das raízes de um problema que o aluno vai escolher. Deve estar bem definido. Este problema pode ter uma ou mais raízes.

Seu código deve exibir, inicialmente, na tela, um menu para o usuário, similar ao menu abaixo:
Digite uma opção:
1 - Resolver o problema 1 (validação).
2 - Resolver o problema 2 (do tanque esférico)
3 - Resolver o problema 3 (um exemplo qualquer escolhido pelo aluno).
4 - Sair
Escolha:

Após a escolha da opção acima, o usuário deve fornecer os dados necessários para continuar a resolução, ou seja, deve fornecer os valores x_0, x_1, a precisão *tol.* Um número Maximo de Iterações a ser realizado (importante para parar o processo quando não houver convergência) deve ser escolhido e pode ser mantido fixo.