Exercícios retirados do livro: BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. Oitava edição. 2006

Aula 6

Equações 1ª ordem:
Modelagem: Misturas

Seção 1.1 pág 5

1. Para objetos pequenos, caindo devagar, a ipótese feita no texto sobre a sobre a resistência do par ser proporcional à velocidade é boa. Para objetos maiores, caindo rapidamente, é mais preciso supor que a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade.
   (a) Escreva um equação diferencial para a velocidade de um objeto em queda de massa m se a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade.
   (b) Determine a velocidade-limite* após um longo período de tempo.
   *Velocidade-limite: as força de resistência e gravitacional se contrabalaçam, fazendo com que o objeto caia sem aceleração com uma velocidade constante.
   (c) Se $m = 10kg$, encontre o coeficiente de resistência do ar de modo que a velocidade-limite seja $49m/s$.
2. Uma gota de chuva esférica evapora a uma taxa proporcional à sua área de superfície. Escreva uma equação diferencial para o volume de uma gota de chuva em função do tempo.
3. A lei de esfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto varia a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura e do objeto e a temperatura do meio em que está inserido. Suponha que a temperatura ambiente é 70^oF e que a taxa é de $0,05$ por minuto. Escreva uma equação diferencial para a temperatura do objeto em qualquer instante t.

Seção 2.3 pág 34

1. Considere um tanque usado em determinados experimentos hidrodinâmico. Após um experimento, o tanque contém 200 litros de uma solução de tinta a uma concentração de $1g/l$. Para preparar para o próximo experimento, o tanque tem que ser lavado com água fresca entrando a uma taxa de 2 litros por minuto, a solução bem misturada saindo a mesma taxa. Encontre o tempo necessário para que a concentração de tinta no tanque atinja 1 porcento de seu valor original. $(t = 100ln100min)$
2. Um tanque contém, inicialmente 120 litros de água pura. Uma mistura contendo uma concentração de $\gamma g/l$ de sal entra no tanque a uma taxa de $2l/min$ e a solução, bem misturada, sai do tanque a mesma taxa. Encontre uma fórmula, em função de γ, para a quantidade de sal no tanque em qualquer instante t. Encontre, também, a quantidade limite de sal no tanque quando $t \to \infty$. $(Q(t) = 120\gamma(1 - exp(-t/60)); 120\gamma)$
3. Um tanque contém, originalmente, 100 galões de água fresca. É despejada, então, água no tanque contendo 1/2 lb de sal por galão a uma taxa de 2 galões por minuto e a mistura sai do tanque a mesma taxa. Após 10 minutos, o processo é parado e é despejado água fresca no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto, com mistura saindo, novamente, a mesma taxa. Encontre a quantidade de sal no tanque após mais 10 minutos. $(Q = 50e^{-0,2}(1 - E^{-0,2})lb)$
4. Um tanque, com capacidade para 500 galões, contém, originalmente, 200 galões de uma solução de água com 100lb de sal. Uma solução de água contendo 1lb de sal por galão entra a uma taxa de 3 galões por minuto e permite-se que a mistura saia a uma taxa de 2 galões por minuto. Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante anterior ao instante em que o tanque começa a transborda. Encontre a concentração de sal no tanque quando está a ponto de transbordar. Compare essa concentração com o limite teórico de concentração se o tanque tivesse capacidade infinita. $(Q(t = 200 + t - (100(200)^2)/(200 + t)^2)lb,\ t < 300;$ concentração$= 121/125lb/gal)$
5. Uma tanque contém 100 galões de (455L) água e 50 onças (1,42 kg) de sal. Água contendo um concentração de sal de $\frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2}\sin t)$oz/gal entra no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto e a mistura no tanque e sai a mesma taxa. Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante. $(Q(t) = \frac{63150}{2501}e^{-t/50} + 25 - \frac{625}{2501}cost + \frac{25}{5002}sent)$
6. A lei de resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto muda a uma taxa proporcional a diferença entre sua temperatura e a do ambiente que o rodeia. Suponha que a temperatura de uma xícara de café obedece a lei do resfriamento de Newton. Se o café estava a uma temperatura de 200^oF ao ser colocado na xícara e, um minuto depois, esfriou para 190^o em uma sala a 70^o determine quando o café atinge a temperatura de 150^o.

Aula 7

Equações diferenciais:
Teorema de Existência e Unicidade

Seção 2.4 pág 42

1. Determine (sem resolver o problema) um intervalo no qual a solução do problema de valor inicial dado certamente existe.

(a) $(t-3)y' + (lnt)y = 2t$, $y(1) = 2$;$(0 < t < 3)$
(b) $y' + (tgt)y = sent$, $y(\pi) = 0$; $(\pi/2 < t < 3\pi/2)$
(c) $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2$, $y(-3) = 1$; $(-\infty < t < -2)$
(d) $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2$, $y(1) = -3$; $(-2 < t < 2)$

2. Seja $y_1(t)$ uma solução de $y' + p(t)y = 0$ e $y_2(t)$ uma solução de $y' + p(t)y = g(t)$. Mostre que $y = y_1(t) + y_2(t)$ também é solução de $y' + p(t)y = g(t)$

3. Determine a região do plano ty onde as hipóteses do teorema de existência e unicidade são satisfeitas.

   (a) $y' = \dfrac{t-y}{2t+5y}$;
   (b) $y' = (t^2+y^2)^{3/2}$;
   (c) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1+t^2}{3y-y^2}$.

4. Resolva o problema de valor inicial dado e determine de que modo o intervalo no qual a solução existe depende do valor inicial y_0.

   (a) $y' = \dfrac{-4t}{y}$, $y(0) = y_0$; $(y = \pm\sqrt{y_0^2 - 4t^2}$ se $y_0 \neq 0$; $|t| < |y_0|/2)$
   (b) $y' = 2ty^2$, $y(0) = y_0$; $(y = ((1/y_0) - t^2)^{-1}$ se $y_0 \neq 0$; $y = 0$ se $y_0 = 0$; o intervalo é $|t| < 1/\sqrt{y_0}$ se $y_0 > 0$; $-\infty < t < +\infty$ se $y_0 \leq 0)$
   (c) $y' = \dfrac{t^2}{y(1+t^3)}$, $y(0) = y_0$; $(y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}ln(1+t^3) + y_0^2}; -(1 - exp(-3y_0^2/2)^{1/3} < t < \infty))$

5. (a) Verifique que ambas as funções $y_1(t) = 1-t$ e $y_2(t) = \dfrac{-t^2}{4}$ são soluções do problema de valor inicial

$$y' = \frac{-t + (t^2+4y)^{1/2}}{2}, \quad y(2) = -1$$

   Onde essas soluções são válidas?

   (b) Explique porque a existência de duas soluções do problema dado não contradiz a parte de unicidade do Teorema de existência e unicidade.
   (c) Mostre que $y = ct + c^2$, onde c é uma constante arbitrária, satisfaz a equação diferencial no item (a) para $t \geq -2c$. Se $c = -1$, a condição inicial também é satisfeita e obtém-se a solução $y_1(t)$. Mostre que não existe escolha de c que forneça a segunda solução $y = y_2(t)$.

6. (a) Mostre que $\phi(t) = e^{2t}$ é uma solução de $y' - 2y = 0$ e que $y = c\phi(t)$ também é solução dessa equação para qualquer valor da constante c.
   (b) Mostre que $\phi(t) = 1/t$ é uma solução de $y' + y^2 = 0$ para $t > 0$, mas que $y = c\phi(t)$ não é solução dessa equação a menos que $c = 0$ ou $c = 1$.

Aula 8

Equações diferenciais:
Dinâmica populacional

Seção 2.5 pág 48

1. Os problemas a seguir envolvem equações da forma $dy/dt = f(y)$. Em cada problema, esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y, determine os pontos críticos (de equilíbrio) e classifique cada um deles como assintoticamente estável ou instável. Desenhe a reta de fase e esboce diversos gráficos das soluções no plano ty.

   (a) $dy/dt = ay + by^2, \quad a > 0, b > 0, \quad y_0 \geq 0$ ($y = 0$ é instável)
   (b) $dy/dt = y(y-1)(y-2), \; y_0 \geq 0$ ($y = 1$ é ass estável, $y = 0$ e $y = 2$ são instável)
   (c) $dy/dt = e^y - 1, \; -\infty < y_0 < +\infty$ ($y = 0$ é instável)

2. Algumas vezes uma solução de equilíbrio tem a propriedade que a as soluções de um lado da solução tende a ela, enquanto as do outro lado se afastam dela. neste caso. a solução de equilíbrio é dita **semi-estável**.

   (a) Considere a equação

$$\frac{dy}{dt} = k(1-y)^2$$

   onde k é uma constante positiva. Mostre que $y = 1$ é o único ponto crítico, a solução de equilíbrio correspondente $\phi(t) = 1$.

   (b) Esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y. Mostre que a y é crescente como função de t se $y < 1$ e se $y > 1$. A reta de fase tem setas apontando para cima tanto abaixo quando acima de $y = 1$. Assim, as soluções abaixo da solução de equilíbrio tendem a ela, e as acima se afastam dela. Portanto $\phi(t) = 1$ é semi estável.
   (c) Resolva a equação sujeita a condição inicial $y(0) = y_0$ e confirme as conclusões a que você chegou no item (b).

3. Em cada problema, esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y, determine os pontos críticos (de equilíbrio) e classifique cada um deles como assintoticamente estável, instável ou semi-estável. Desenhe a reta de fase e esboce diversos gráficos das soluções.

   (a) $\dfrac{dy}{dt} = y^2(y^2-1), -\infty < y_0 < +\infty$ ($y = -1$ é ass estável, $y = 0$ é semi-estável e $y = 1$ é instável)
   (b) $\dfrac{dy}{dt} = y(1-y^2), -\infty < y_0 < +\infty$ ($y = 1$ e $y = -1$ são ass estáveis e $y = 0$ é instável)
   (c) $\dfrac{dy}{dt} = y^2(4-y^2), -\infty < y_0 < +\infty$ ($y = 2$ é ass estável, $y = 0$ semi-estável e $y = -2$ instável)

4. Suponha que uma determinada população obedece a equação logística $\dfrac{dy}{dt} = ry\,[1-(y/K)]$.

   (a) Se $y_0 = K/3$, encontre o instante τ no qual a população inicial dobrou. Encontre o valor τ correspondente a $r = 0,025$ por ano. $(\tau = (1/r)ln4; 55,452anos)$
   (b) Se $y_0/k = \alpha$, encontre o instante T no qual $y(T)/K = \beta$, onde $0 < \alpha, \beta < 1$. Note que $T \to \infty$ quando $\alpha \to 0$ ou $\beta \to 1$.$T = (1/r)ln(\beta(1-\alpha)/(1-\beta)\alpha)$

5. Outra equação que tem sido usada para modelar o crescimento populacional é a equação de Gompertz

$$\frac{dy}{dt} = ryln(K/y)$$

onde r e K são constantes positivas.

(a) Esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y, encontre os pontos críticos e determine se cada um deles é assintoticamente estável ou instável. ($y = 0$ é instável, $y = K$ é ass estável)

(b) Resolva a equação de Gompertz. (Sugestão: faça a substituição $u = ln(K/y)$). ($y = Kexp((ln(y_0/K))e^{-rt})$)

6. A população de mosquitos em determinada área cresce a uma taxa proporcional a população atual e, na ausência de outros fatores, a população dobra a cada semana. Existem, inicialmente, 200.000 mosquitos na área e os predadores comem 20.000 mosquitos por dia. Determine a população de mosquitos na área em qualquer instante t.

Aula 9

Equações de 2º ordem:
Tipos especiais.

Pág 72

1. Use o método de substituição $v = y'$ para reduzir a ordem e resolver as equações de segunda ordem.

   (a) $t^2y'' + 2ty' - 1 = 0 \quad t > 0$ $\quad y = c_1t^{-1} + c_2 + lnt$

   (b) $ty'' + y' = 1 \quad t > 0$ $\quad y = c_1lntt + c_2 + t$

   (c) $2t^2y'' + (y')^3 = 2ty',\ t > 0$ (sugestão $\mu(t) = v^{-3}$ é um fator integrante) $\quad y = \pm 2/3(t - c_1)\sqrt{t + c_1} + c^2$ e $y = c$

   (d) $y'' + y' = e^{-t}$ $\quad y = c_1e^{-t} + c_2 - te^{-t}$

2. Use o método de substituição $v(y) = y'$ para reduzir a ordem e resolver as equações de segunda ordem.

   (a) $yy'' + (y')^2 = 0$ $\quad y^2 = c_1t + c_2$

   (b) $y'' + y(y')^3 = 0$ $\quad 1/3y^3 - 2c_1y + c_2 = 2t$ e $y = c$

   (c) $2y^2y'' + 2y(y')^2 = 1$

   (d) $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$ (se transforma em uma Bernoulli) $\quad e^y = (t + c_2)^2 + c_1$

3. Resolva o problema de valor inicial usando os método de substituição para redução de ordem.

   (a) $y'y'' = 2\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$ $\quad y = 4/3(t + 1)^3/2 - 1/3$

   (b) $y'' - 3y^2 = 0\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4$ $\quad y = 2(1 - t)^{-2}$

   (c) $(1 + t^2)y'' + 2ty' + 3t^{-2} = 0,\ y(1) = 2,\ y'(1) = -1$ $\quad y = c_1t^{-1} + c_2 + lnt$

   (d) $y'y'' - t = 0,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 1$ $\quad y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}$

Final da lista para P2