[UFES-CCE-DMAT-Prova2-Cálculo1-Equipe-Tarde, 20/05/15]

Gabarito

1. **(2,0)** Calcule [1,0] Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

Solução: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$

2. **(2,0)** Derive as seguintes funções:

   (a) $f(x) = \frac{\ln(3x+1)}{x^2 - \sin(2^x)}$.

   Solução: $f'(x) = \frac{\frac{3}{(3x+1)}(x^2 - \sin(2^x)) - \ln(3x+1)[2x - 2^x \ln 2 \cos(2^x)]}{(x^2 - \sin(2^x))^2}$.

   (b) $g(x) = \sec(\ln(1 + \sqrt[3]{2x-1}))$.

   Solução: $g'(x) = \sec(\ln(1 + \sqrt[3]{2x-1})) \tan(\ln(1 + \sqrt[3]{2x-1})) \frac{1}{(1+\sqrt[3]{2x-1})} \frac{1}{3}(2x-1)^{-2/3} 2.$

3. **(1,0)** Dada a função $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1$, determine:

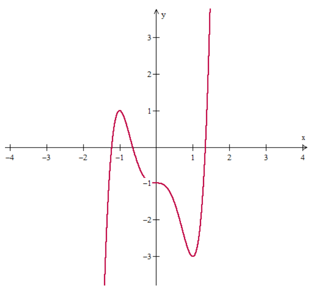
   (a) Os pontos críticos e os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

   Solução: $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2-1)$, cujas raízes são 0 e ± 1, e possui o mesmo sinal de $x^2 - 1$. Com isso, f é crescente em $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e é decrescente em $[-1, 1]$.

   (b) Intervalos de concavidade e pontos de inflexão do gráfico de f.

   Solução: $f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1)$, cujas raízes são 0 e $\pm\sqrt{2}/2$, sendo positiva em $[-\sqrt{2}/2, 0] \cup [\sqrt{2}/2, +\infty)$ e negativa em $(-\infty, -\sqrt{2}/2] \cup [0, \sqrt{2}/2]$. Com isso, os pontos de inflexão são 0 e $\pm\sqrt{2}/2$ e f é côncava para cima em $[-\sqrt{2}/2, 0] \cup [\sqrt{2}/2, +\infty)$ e côncava para baixo em $(-\infty, -\sqrt{2}/2] \cup [0, \sqrt{2}/2]$.

   (c) Um esboço do gráfico de f:



4. Um barco deixa as docas às 14h e viaja para o sul com velocidade de 20 km/h. Outro barco estava rumando leste a 15 km/h e alcança a mesma doca às 15h. Em que momento os dois botes estavam mais próximos?

Solução: Sejam L o barco remando a Leste e S o barco remando para o Sul. Note que às 14h o barco L está a 15km das docas. Esta é a situação inicial. Após t horas, o espaço percorrido por L é $15t$ e por S é $20t$. Assim, a distância entre os barcos é $d(t) = \sqrt{(15 - 15t)^2 + (20t)^2}$. Derivando e igualando a zero obtemos $t = 9/25h$.

5. Um objeto se desloca sobre uma muralha reta a uma velocidade de 4 m/s. Um holofote localizado a 20 metros de distância da muralha e com mesma altura que esta focaliza o objeto. A que taxa o holofote está girando quando o objeto se encontra a 15 metros do ponto da muralha que está mais próximo do holofote?

Solução: A situação inicial é quando o holofote está perpendicular à parede. Após t segundos, o espaço percorrido pelo objeto é $4t$ e seja $\theta(t)$ o ângulo que o holofote forma com a direção inicial. Assim, $\tan\theta(t) = 4t/20 = t/4$. Derivando obtemos $\sec^2\theta(t) \cdot \theta'(t) = 1/5$, ou seja, $\theta'(t) = (\cos^2\theta(t))/5$. No instante t_0 em que o objeto percorreu 15m temos $cos\theta(t_0) = 4/5$; logo $\theta'(t_0) = 16/125$ rad/s.