Universidade Federal
do Espírito Santo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Prof. Thiago Filipe da Silva
Turma: 8.1 2019/1
Valor: 11 pontos

3ª AVALIAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR - MAT09592 - 11/07/2019

1. (2,5) Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

   a) Encontre os autovalores de A e determine suas multiplicidades (algébricas);

   b) Encontre bases para os autoespaços de A e verifique se A é diagonalizável.

2. (2,5) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Seja $\mathrm{Lin}(A)$ o espaço-linha da matriz A. Calcule uma base para $(\mathrm{Lin}(A))^{\perp}$ e obtenha as dimensões de $\mathrm{Lin}(A)$ e $(\mathrm{Lin}(A))^{\perp}$.

3. (3,0) Seja A uma matriz simétrica 4×4. Sabemos que 1 e 2 são os únicos autovalores de A. Sabendo que a reta gerada pelo vetor $v_1 = (1, 1, 1, 0)$ é o autoespaço do autovalor 1, escreva $A = PDP^T$, com D matriz diagonal e P matriz ortogonal.

   Dica: Note que $\mathrm{Aut}_A(2) = (\mathrm{Aut}_A(1))^{\perp}$

4. (3,0) Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

   a) Toda matriz diagonalizável é invertível;

   b) Se A é uma matriz ortogonal então $\det A = \pm 1$;

   c) Seja $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Se $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ então
   $$\| \mathbf{x} \|^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2.$$

Boa sorte!

SOLUÇÃO P3 - Álgebra Linear - 2019/1 Manhã

1) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

(a) Temos $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 & -1 \\ -1 & \lambda-4 & 2 \\ -1 & -4 & \lambda+2 \end{vmatrix}$

$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = \lambda.(\lambda-3)^2.$

Logo 0 é um autovalor de A com multiplicidade algébrica 1, e 3 é autovalor de A com multiplicidade algébrica 2.

(b)(i) Base para $Aut_A(0)$

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in Aut_A(0) \iff \begin{cases} 4x - 2y + z = 0 \\ x + 4y - 2z = 0 \\ x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$

Vamos encontrar o conjunto-solução do sistema Linear acima

$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] -4L_1 + L_2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2L_2+L_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Logo: $x = 0$

$z = 2y$

Assim, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 2y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base para $Aut_A(0)$.

(ii) Base para $Aut_A(3)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in Aut_A(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y + z = 3x \\ x + 4y - 2z = 3y \\ x + 4y - 2z = 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -L_1+L_2 \\ -L_1+L_3 \end{array} \overset{\text{depois}}{\left(\cdot \tfrac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, z é variável livre, $\boxed{y = z}$

e $x - 2y + z = 0 \Rightarrow x = 2y - z = 2z - z = z \Rightarrow \boxed{x = z}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ é base para $Aut_A(3)$.

Logo, A não possui 3 autovetores L.I.

$\Rightarrow A$ não é diagonalizável.

---

2) Observe que para um vetor $u \in \mathbb{R}^5$, temos que

$u \in (\text{Lin}\, A)^\perp \iff u$ é ortogonal a todas as linhas de A

Sendo $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^5$ as 3 linhas de A, segue que

$$\begin{cases} v_1 \bullet u = 0 \\ v_2 \bullet u = 0 \\ v_3 \bullet u = 0 \end{cases}$$

. Como $Au = \begin{bmatrix} — v_1 — \\ — v_2 — \\ — v_3 — \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} | \\ u \\ | \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} v_1 \bullet u \\ v_2 \bullet u \\ v_3 \bullet u \end{bmatrix}$, então $u \in (\text{Lin}\, A)^\perp \iff u \in \text{Nul}\, A$

Logo, $(\text{Lin}\, A)^\perp = \text{Nul}\, A$. Basta encontrarmos uma base p/ o espaço nulo de A.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_1 + L_2 \\ -L_1 + L_3 \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_4; x_5$ variáveis Livres

$x_3 = -x_4$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_3 - 3x_4 - 4x_5$$
$$= 2x_4 - 3x_4 - 4x_5$$
$$\boxed{= -x_4 - 4x_5}$$

$$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = x_4 + 4x_5 + \cancel{x_4} - \cancel{x_4} - x_5$$
$$= \boxed{x_4 + 3x_5}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 + 3x_5 \\ -x_4 - 4x_5 \\ -x_4 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ é base de $(\mathrm{Lin}\,A)^\perp$, logo $\dim (\mathrm{Lin}\,A)^\perp = 2$

$\dim (\mathrm{Lin}\,A) = 3$.

5|0

3) (i) $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ é base ortogonal de $Aut_A(1)$

$\Rightarrow$ $\boxed{B_1' = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ é base ortonormal de } Aut_A(1).}$

(ii) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in Aut_A(2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in (Aut_A(1))^{\perp}$

$\Leftrightarrow x + y + z = 0$ Assim, y, z, w são variáveis

livres e $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y-z \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Logo, $B_2 := \left\{ \overset{u_1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}, \overset{u_2}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}, \overset{u_3}{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$ é uma base de $Aut_A(2)$

que não é ortogonal. Para ortogonalizar esta base, vamos aplicar o processo de Gram-Schmidt:

$w_1 := u_1$

$w_2 := u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = u_2 - \frac{0}{\|w_1\|^2} w_1 = u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$w_3 := u_3 - \frac{\langle u_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle u_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2$$

$$= u_3 - \frac{0}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{1}{2} w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo, $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ é base ortogonal de

$Aut_A(2) \Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ é base ortogonal de

$Aut_A(2)$

$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base ortonormal

de $Aut_A(2)$. Como A é simétrica então

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 0 & 2/\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ é uma matriz ortogonal

e sendo $D := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, segue que $A = P.D.P^T$.

4) (a) Falso. A matriz nula é diagonal, logo diagonalizável, mas não é invertível.

(b) VERDADEIRO

A ortogonal $\Rightarrow A^T \cdot A = I_n \Rightarrow \det(A^T \cdot A) = \det I_n$

$\Rightarrow \det A^T \cdot \det A = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1.$ $\square$

(c) FALSO

$$\|x\|^2 = \sum_{i,j=1}^{3} c_i \cdot c_j \cdot \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{3} c_i \cdot c_i \langle v_i, v_i \rangle$$

$= c_1^2 \|v_1\|^2 + c_2^2 \|v_2\|^2 + c_3 \|v_3\|^2$. Logo, o resultado seria verdadeiro apenas se $\{v_1, v_2, v_3\}$ fosse ortonormal.