Philipe Rangel Remuth 2010/2

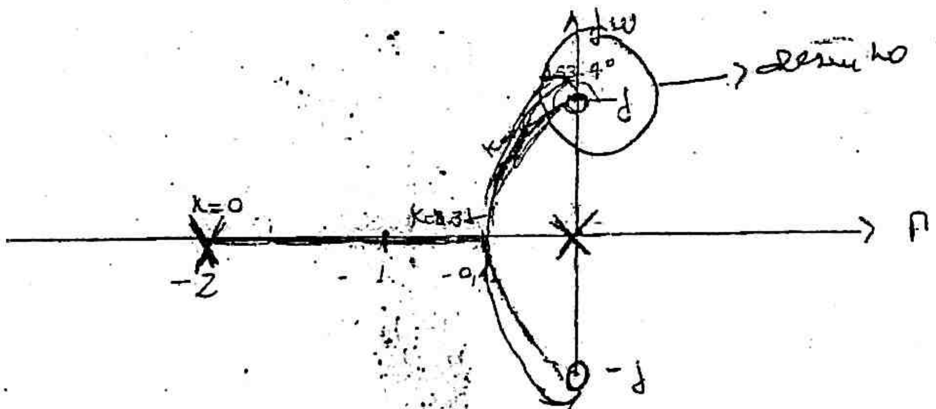
1

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES
Departamento de Engenharia Elétrica

Primeira Prova de Controle Automático II – 16/09/2010

Aluno:

1 – Seja os Pólos e Zeros da FTMA de um sistema de controle digital :



desenho incorreto do ângulo de chegada

Fig. 1: Pólos e Zeros da FTMA no Plano Z

1.1 - . Obter o Lugar das Raizes (LR) da equação característica, especificando o ângulo de saída/chegada dos pólos/zeros complexos de $G_{MA}(s)$, o LR no eixo real, as assíntotas, e o ponto de saída do eixo real caso exista. (ou chegada)

1.2 – Verifique se existe algum ganho K que estabilize este sistema. Determine este ganho.

1.3 - Determine o ganho K para que a resposta ao degrau tenha $\xi < 1$.

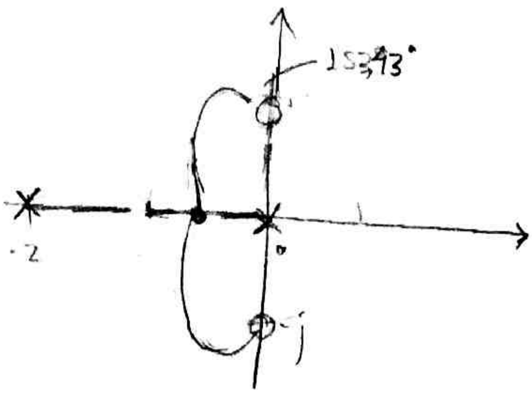
2 – Considere o sistema de controle com $G_{MA}(s) = \dfrac{25}{s(s^2+6s+25)}$. Qual controlador você escolheria (P, PD ou PI) a fim de que o sistema em malha fechada tenha par de pólos complexos dominantes com amortecimento $\xi \geq 0,9$ e a resposta à entrada degrau seja a mais rápida possível, com erro em regime a entrada rampa menor ou igual a 0,1? Projete este controlador.

3 –– Projete um controlador PID para o sistema de controle cuja FTMA é $G_{MA}(s) = \dfrac{3,6}{(s+3,6)^2}$ Calcule os parâmetros deste controlador, afim de que o sistema em malha fechada tenha resposta à entrada degrau sobre amortecida ($\xi = 1$) e seja a mais rápida possível, além do erro em regime à entrada rampa ser menor ou igual a 1.

CONTROLE AUTOMÁTICO II - 2010/2

1) ZEROS: $s = +j, -j$
PÓLOS: $s = -2, 0$

1.1



LR NO EIXO REAL: $\{-2, 0\}$

Nº ASSÍNTOTAS: $n - m = 2 - 2 = 0$

PONTO DE CHEGADA/SAÍDA (EIXO REAL):

$$N'M - NM' = 0$$

$$G_{MA}(s) = \frac{(s-(-2))(s-0)}{(s+j)(s-j)}$$

$$G_{MA}(s) = \frac{s^2+2s}{s^2+1}$$

$$(2s+2)(s^2+1) - (s^2+2s)(2s) = 0$$

$$-2s^2 + 2s + 2 = 0$$

$$\boxed{s' = -0,618} \quad s'' = 1,618$$

PONTO DE INTERSEÇÃO COM EIXO $j\omega$:

$$1 + kG_{MA}(s) = 0$$

$$1 + k\frac{(s^2+2s)}{(s^2+1)} = 0$$

$$(k+1)s^2 + 2ks + 1 = 0$$

MÉTODO DE ROUTH:

s^2	$(k+1)$	1	
s^1	$(2k)$	0	$2k = 0$
s^0	1		$\boxed{k=0}$

EQ. CARACTERÍSTICA:

$$s^2 + 1 = 0 \quad \boxed{s = \pm j}$$

PONTO DE CHEGADA DOS ZEROS COMPLEXOS:

$$\Sigma\theta - \Sigma\phi = \pm 180°$$

$$(90° + 26,56°) - (\phi + 90°) = \pm 180°$$

$$\phi_1 = 153,43° \quad \phi_2 = -206,56°$$

1.2 PARA QUE O SISTEMA SEJA ESTÁVEL, O LUGAR DAS RAÍZES DEVE ESTAR À ESQUERDA DO EIXO $j\omega$:

PARA $\boxed{s=0} \Rightarrow k = \left|\frac{1}{G_{MA}(0)}\right| = \infty$

PARA $\boxed{s = \pm j} \Rightarrow \boxed{k = 0,66}$

PORTANTO PARA QUE O SISTEMA SEJA ESTÁVEL: $\boxed{0,66 < k < \infty}$

1.3 $\zeta = 1$, $\zeta = \cos \theta = 0$, VAMOS DESCOBRIR k PARA $\zeta = 1$. É QUANDO LR TOCA O EIXO REAL: $\boxed{s = -0,618}$. ASSIM,

$$k = \left|\frac{1}{G_{MA}(s)}\right| \quad \boxed{k = 2,34}$$

$$\boxed{k \geq 2,34}$$

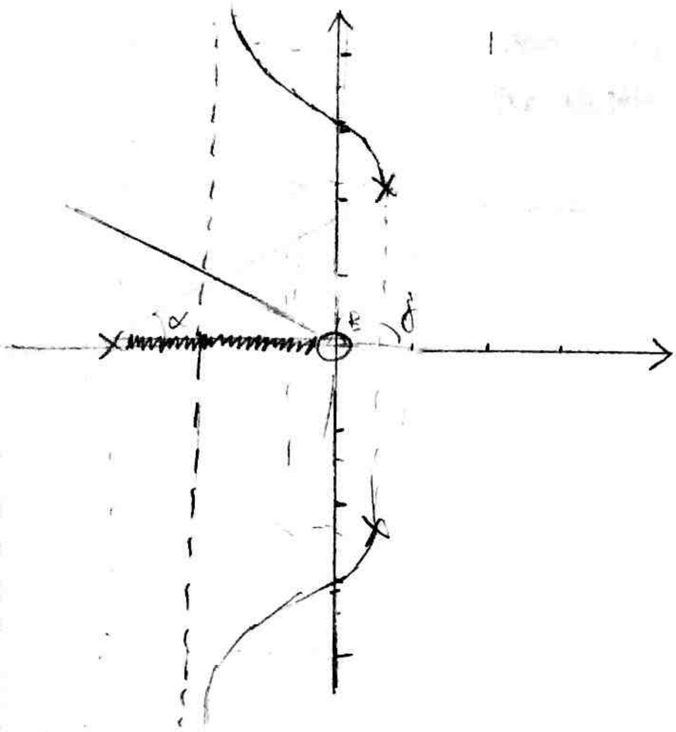
2) $G_{MA}(s) = \dfrac{25}{s(s^2+6s+25)}$

ESPECIFICAÇÕES:

- PAR COMPLEXO DE PÓLOS DOMINANTES.
- $\zeta \geq 0,9$
- RESPOSTA AO DEGRAU O MAIS RÁPIDO POSSÍVEL
- ERRO À RAMPA $\leq 0,1$

PÓLOS: $\{0, -3+4j, -3-4j\}$

ESCOLHEREMOS O CONTROLADOR PD COM INTUITO DE ADICIONAR UM ZERO AO SISTEMA



$G_c(s) = k_p + k_d s$

$e_{ss} \leq 0,1$

$\lim_{s \to 0} s . E(s) \leq 0,1$

$$\lim_{s \to 0} s . \frac{1/s^2}{1 + (k_p + k_d s) . \frac{25}{s(s^2+6s+25)}} \leq 0,1$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{s^2+6s+25}{s^3+6s^2+(25+k_d)s+25k_p} \leq 0,1$$

$\frac{25}{25k_p} \leq 0,1$ $\boxed{k_p \geq 10}$

ESCOLHEREMOS $\boxed{k_p = 20}$

ASSIM, $G_c(s) = 20 + k_d s$

$1 + G_c(s) . G_{MA}(s) = 0$

$$1 + (20 + k_d s) . \frac{25}{s(s^2+6s+25)} = 0$$

$$1 + k_d . \frac{25s}{(s^3+6s^2+25s+500)} = 0$$

$s = -9,19$

$s = 1,59 + j7,19$

$s = 1,59 - j7,19$

LR NO EIXO REAL: $\{9,19; 0\}$

PONTO DE CHEGADA/SAÍDA NO EIXO REAL:

$N'M - M'N = 0$

$25.(s^3+6s^2+25s+500) - (3s^2+12s+25)25s = 0$

$= -50s^3 - 150s^2 + 12500 = 0$

$s = 5,44 \; , -4,22 + j5,3 \; , -4,22 - j5,3$

• NÃO EXISTEM PONTO DE CHEGADA/SAÍDA NO LR.

• PONTO DE INTERSEÇÃO COM O EIXO $j\omega$:

EQ.CARAC: $s^3 + 6s^2 + (25K+25)s + 500 = 0$

MÉTODO DE ROUTH:

s^3	1	$25K+25$
s^2	6	500
s^1	$\frac{150K-350}{6}$	0
s^0	500	

$\frac{150K-350}{6} = 0$

$K = 350/150 = 2,33$

$s^3 + 6s^2 + 83,3s + 500 = 0$

$s = -6, +j9,12, -j9,12$

Nº ASSÍNTOTAS: $n - m = 3 - 1 = 2$

POSIÇÃO DAS ASSÍNTOTAS: $\sigma = (\Sigma p - \Sigma z)/(n-m)$

$= \sigma = [9,19 + 1,59 + j7,19 + 1,59 - j7,19 - 0]/(3-1)$

$\boxed{\sigma = -6}$

ÂNGULO DAS ASSÍNTOTAS:

$\theta_i = \frac{180(2i+1)}{(n-m)}, \; i = 0, 1$ $\theta_1 = 90°$ $\theta_2 = 270°$

ÂNGULO DE SAÍDA DOS PÓLOS:

$(\phi + \alpha + \gamma) - \beta = \pm 180°$ $\phi_1 = 133,83°$

$(\phi + 33,7° + 90°) - 77,53 = \pm 180°$ $\phi_2 = 226,17°$

PARA UM $\boxed{\xi = 0,9}$, NÃO CONSEGUIMOS UM LUGAR DAS RAÍZES PARA ATENDER AO SISTEMA.

CONTROLE AUTOMÁTICO II - PROVA 2010/2

$G_{MA}(s) = \frac{3,6}{(s+3,6)^2} = \frac{3,6}{s^2+7,2s+12,96}$

FAREMOS A PARTE DO PI DO PID

$G_{C_{PI}}(s) = \frac{k_P}{s}\left(s+\frac{k_I}{k_P}\right)$

ESCOLHEREMOS $\frac{k_I}{k_P} = 0,1|P|$

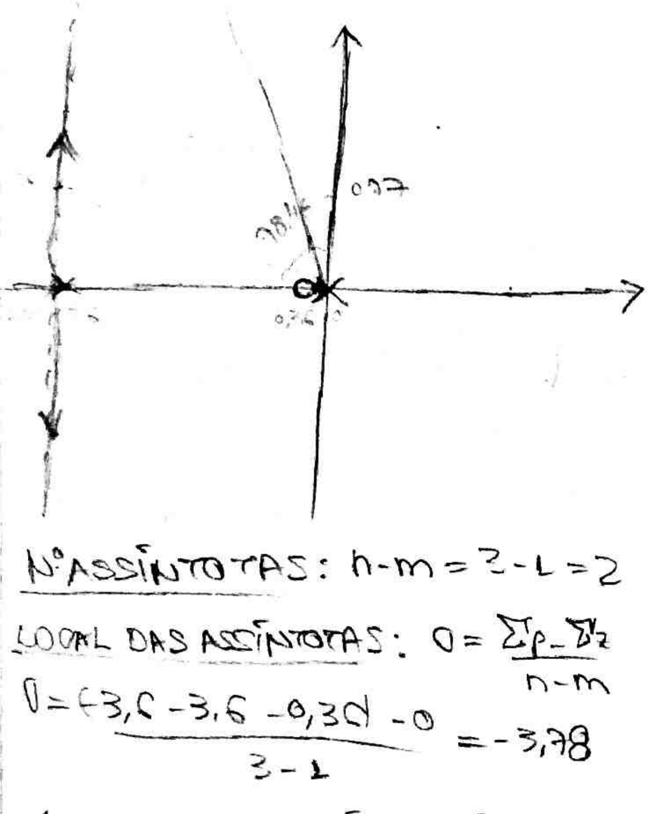
$\frac{k_I}{k_P} = 0,1|-3,6| = 0,36$

$G_{C_{PI}}(s) = \frac{k_P}{s}(s+0,36)$

$1+G_{C_{PI}}(s).G_{MA}(s)=0$

$1+\frac{k_P(s+0,36)}{s}\frac{3,6}{(s^2+7,2s+12,96)}=0$

$1+k_P\frac{(3,6s+1,296)}{s^3+7,2s^2+12,96s}=0$



Nº ASSÍNTOTAS: $n-m = 3-1 = 2$

LOCAL DAS ASSÍNTOTAS: $\sigma = \frac{\sum p - \sum z}{n-m}$

$\sigma = \frac{(-3,6-3,6-0,36)-0}{3-1} = -3,78$

ÂNGULO DAS ASSÍNTOTAS:

$\theta_i = \frac{180(2i+1)}{n-m}$, $i=0,1$ $\theta_1 = 90°$, $\theta_2 = 270°$

PONTO DE CHEGADA/SAÍDA DO EIXO REAL:

$N'M - N.M' = 0$

$3,6.(s^3+7,2s^2+12,96s) - (3,6s+1,296)(3s^2+14,4s+12,96) = 0$

$-7s^3-22s^2-18,66s-1,68=0$

$s = -0,10$, $-1,48+j0,32$, $-1,48-j0,32$

PONTO DE INTERSEÇÃO COM O EIXO $j\omega$:

$s^3+7,2s^2+(3,6k_P+12,96)s+1,296k_P=0$

s^3	1	$3,6k_P+12,96$
s^2	$7,2$	$1,296k_P$
s^1	$\frac{24,6k_P+93,3}{7,2}$	0
s^0	$1,296k_P$	

$24,6k_P+93,3=0$

$\boxed{k_P=-3,79}$

$s^3+7,2s^2-0,7s-4,92=0$

$s=-7,2, -0,82, +0,82$

NÃO EXISTE INTERSEÇÃO COM EIXO $j\omega$.

ÂNGULO DE SAÍDA DOS POLOS:

$(\theta+0+180)-180 = \pm 180°$ $\theta_1=180°, \theta_2=-180°$

TRAÇANDO A RETA CORRESPONDENTE AO AMORTECIMENTO $\xi=0,2$, ACHAMOS UM PONTO P DE INTERSEÇÃO DO MESMO COM UM LUGAR DAS RAÍZES, ONDE:

$k_P = \left|\frac{1}{G_{MA}'(P)}\right|$ $P=-3,75+j15$

$\boxed{k_P = 15,95}$

PI: $G_{C_{PI}}(s) = \frac{15,95}{s}(s+0,36)$

FAREMOS O PD PARA ATENDER AO AMORTECIMENTO $\boxed{\xi=1}$

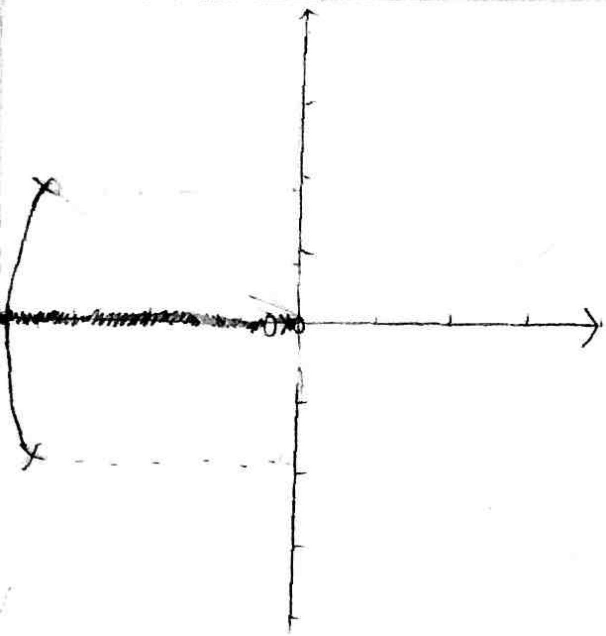
$G_{C_{PD}}(s) = k_P + k_d s = 1 + k_d s$

ASSIM,

$1+G_{C_{PI}}(s).G_{C_{PD}}(s).G_{MA}(s)=0$

$1+\frac{15,95(s+0,36)}{s}(1+k_d s).\frac{3,6}{s^2+7,2s+12,96}=0$

$1+k_d.\frac{3,6s^2+1,296s}{s^3+7,2s^2+16,56s+1,296}=0$



PÓLOS: $\{-0{,}08\ ,\ -3{,}55 \pm j1{,}82\}$

ZEROS: $\{0;\ 0{,}36\}$

LR NO EIXO REAL $\{-\infty, 0{,}36;\ -0{,}08, 0\}$

Nº ASSÍNTOTAS: $3 - 2 = 1$

LOCAL DAS ASSÍNTOTAS: $\sigma = \frac{\sum p - \sum z}{n-m}$

$$\sigma = \frac{[-3{,}5 + j1{,}82 - 3{,}5 - j1{,}82 - 0{,}08] - [0{,}36 + 0]}{3-2}$$

$$\boxed{\sigma = -7{,}44}$$

ÂNGULO DA ASSÍNTOTA: $\phi_i = \frac{180(2i+1)}{n-m}$

$$\phi_i = \frac{180\,(2 \cdot 0 + 1)}{3-2} \Rightarrow \boxed{\phi_i = 180°}$$

PONTO DE CHEGADA/SAÍDA DO EIXO REAL

$N'M - NM' = 0$

$$(\ldots 7{,}2s + 1{,}296)(s^3 + 7{,}2s^2 + 16{,}56s + 1{,}296) - (3{,}6s^2 + 1{,}296s)(3s^2 + 14{,}4s + 16{,}56) = 0$$

$$-3{,}6s^4 - 2{,}6s^3 + 50s^2 - 19{,}7s + 1{,}68 = 0$$

$s = -4{,}022$ $\quad -0{,}0927 + j0{,}1571$

$\quad\ \ 3{,}48$ $\quad -0{,}0927 - j0{,}1571$

PONTO DE INTERSEÇÃO COM O EIXO $j\omega$

$1 + Kd \cdot G_{MA} = 0$

$$s^3 + (3{,}6kd + 7{,}2)s^2 + (1{,}296kd + 16{,}56)s + 1{,}296 = 0$$

MÉTODO DE ROUTH

$s^3 \quad 1 \qquad 1{,}296kd + 16{,}56$

$s^2 \quad 3{,}6kd + 7{,}2 \qquad 1{,}296$

$s^1 \quad \frac{(3{,}6kd + 7{,}2)(1{,}296kd + 16{,}56) - 1{,}296}{3{,}6kd + 7{,}2} \qquad 0$

$s^0 \quad 1{,}296 \qquad kd = \begin{cases} -12{,}8 \\ -1{,}97 \end{cases}$

$s^3 + 14s + 1{,}296 = 0 \qquad s = -0{,}09;\ -0{,}05 + j3{,}7;\ -0{,}05 - j3{,}7$

= NÃO EXISTE INTERSEÇÃO

ÂNGULO DE SAÍDA DOS PÓLOS COMPLEXOS

$$(\theta + \alpha + \beta) - (\phi + \psi) = \pm 180°$$

$$(\theta + 152{,}32 + 90°) - (152{,}85 + 150{,}29) = \pm 180°$$

$\theta - 60{,}82° = \pm 180° \qquad \underline{\theta_1 = 240{,}82°} \quad \underline{\theta_2 = 119{,}18}$

TEMOS QUE ATENDER O AMORTECIMENTO IGUAL A UM E DEIXAR O SISTEMA O MAIS RÁPIDO POSSÍVEL, ESCOLHEREMOS O P = -4 DE INTERSEÇÃO ENTRE A CURVA DE AMORTECIMENTO E O LGR.

ASSIM: $kd = \left|\frac{1}{G_{MA}(P)}\right|$

$\boxed{kd = 3{,}93}$ $\qquad G_{CPD} = 1 + 3{,}93s$

PID: $G_{CPID} = \underbrace{\frac{1{,}595\,(s + 0{,}36)}{s}}_{PI}\ \underbrace{(1 + 3{,}93s)}_{PD}$