1)

Seja a função de transferência em malha aberta G, tal que:

$$G(s)=\frac{K(s+a)}{s(s+b)(s^2+4s+8)}.$$

Onde:

a é o último algarismo do número de matrícula diferente de zero

b é o penúltimo algarismo do número de matricula diferente de zero

$a=2;\ b=5$

$$\Rightarrow G(s)=\frac{K(s+2)}{s(s+5)(s^2+4s+8)}$$

• Em malha fechada:

$$\Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{K(s+2)}{s(s+5)(s^2+4s+8)+K(s+2)}=\frac{K(s+2)}{(s^2+5s)(s^2+4s+8)+Ks+2K}$$

$$\Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K(s+2)}{s^4+4s^3+8s^2+5s^3+20s^2+40s+Ks+2K}=\frac{K(s+2)}{s^4+9s^3+28s^2+(40+K)s+2K}$$

1.1 Determine a faixa do ganho K, usando o método de Routh-Hurwitz, para garantir a estabilidade deste sistema em malha fechada.

s^4	1	28	2K
s^3	9	40+k	
s^2	$\frac{212-K}{9}$	2k	
s^1	β		
s^0	2k		

$$\beta=\frac{\frac{(40+k)(212-k)}{9}-18k}{\frac{212-k}{9}}=40+k-\frac{9\cdot 18k}{212-k}=40+k-\frac{162k}{212-k}$$

$$(40+k)(212-k)>162k$$

$\Rightarrow k>0;\ 212-k>0;\ \beta>0 \Rightarrow (40+k)(212-k)-162k>0;$

$k<212;$

$-k^2+(212-40)k+(212\cdot 40)-162k>0$

$-k^2+10k+8480>0$

raízes: $k_1=97{,}22$

$k_2=-87{,}22<0$

⇒ Para que o sistema seja estável: $\boxed{97{,}22<K<212}$

1.2 Obtenha o valor do ganho K para que o sistema em malha fechada seja marginalmente estável.

⇒ Para ser marginalmente estável uma linha da tabela tem que ser nula:

• fazendo $k=97{,}22$ anula-se a linha s^1;

(Calculando-se as raízes do polinômio auxiliar $P(s)=\left(\frac{212-97{,}22}{9}\right)s^2+(2\cdot 97{,}22)$ observa-se duas raízes no eixo $j\omega$. Com isso verifica-se que o sistema agora é marginalmente estável)

1.3 Sem usar o computador, calcule as raízes da equação característica (polinômio do denominador da FT em malha fechada = 0)

→ Eq característica: $s^4+9s^3+28s^2+(40+K)s+2K$; $K=97{,}22$

$\Rightarrow s^4+9s^3+28s^2+137{,}22s+194{,}44$

→ Achando as raízes:

• duas delas são as raízes do polinomio $P(s)=12{,}753s^2+194{,}44$

$$\Rightarrow P(s)=0 \Rightarrow s=\pm\sqrt{-\frac{194{,}44}{12{,}753}}=\pm j3{,}9$$

$(s-j3{,}9)(s+j3{,}9)=s^2+15{,}21$

$$\begin{array}{l|l} s^4+9s^3+28s^2+137{,}22s+194{,}44 & s^2+15{,}21 \\ -(s^4+15{,}21s^2) & s^2+9s+12{,}79 \\ \hline 9s^3+12{,}79s^2+137{,}22s+194{,}44 & \\ -(9s^3+136{,}89s) & \\ \hline 12{,}79s^2+0{,}33s+194{,}44 & \\ -(12{,}79s^2+194{,}53) & \\ \hline \underbrace{0{,}33s-0{,}09}_{\approx 0} & \end{array}$$

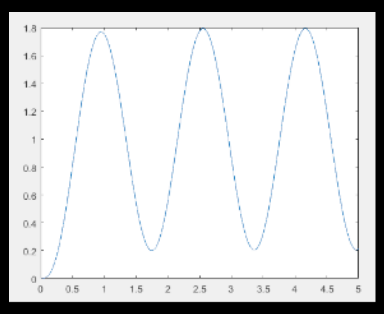
$q(s)=(s^2+9s+12{,}79)(s-j3{,}9)(s+j3{,}9)=(s+1{,}77)(s+7{,}23)(s-j3{,}9)(s+j3{,}9)$

• Portanto, raízes são aproximadamente: $\begin{cases} s_1=-1{,}77 \\ s_2=-7{,}23 \\ s_3=j3{,}9 \\ s_4=-j3{,}9 \end{cases}$

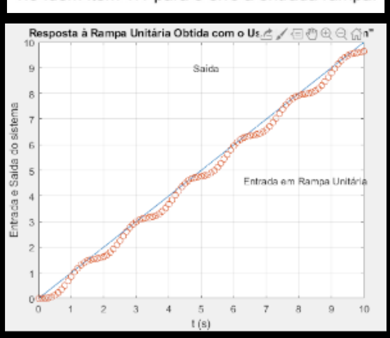
1.4 Obtenha o erro em regime à entrada degrau através do teorema do valor final e compare-o com o erro em regime obtido graficamente através da resposta simulada.

• $e_{ss}(\infty)=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}$; $R(s)=1/s$; $G(s)=\frac{97{,}22(s+2)}{s(s+5)(s^2+4s+8)}$

$\Rightarrow e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G(s)} \Rightarrow G(s)\to\infty \Rightarrow e_{ss}(\infty)\to 0$



1.5 Idem item 1.1 para o erro à entrada rampa.



$R(s)=1/s^2$; $G(s)=\frac{97{,}22(s+2)}{s(s+5)(s^2+4s+8)}$

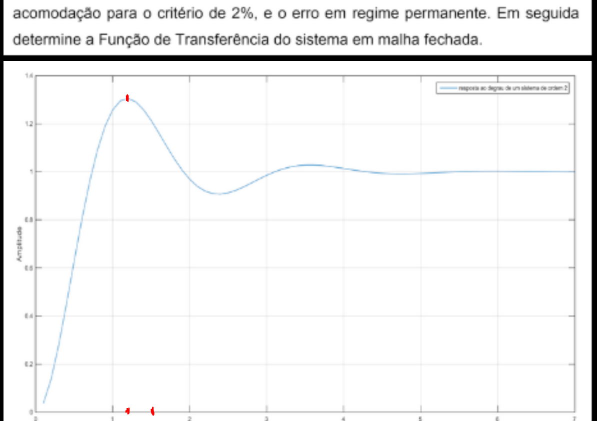
$e_{ss}(\infty)=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}$

$$\Rightarrow e_{ss}(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\frac{97{,}22(s+2)}{s(s+5)(s^2+4s+8)}}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{\frac{97{,}22\cdot 2}{5\cdot 8}}=\frac{40}{194{,}44}$$

$\Rightarrow e(\infty)\to 0{,}21$

3ª Questão: 1,5 pontos

Seja a resposta ao degrau unitário de um sistema em malha fechada de ordem 2 dada pela figura a seguir. Obtenha o tempo de subida, o sobressinal, o tempo de acomodação para o critério de 2%, e o erro em regime permanente. Em seguida determine a Função de Transferência do sistema em malha fechada.



• $M_s=0{,}3 \Rightarrow \zeta\approx 0{,}35$ (tabela)

• $t_p\approx 1{,}2 \Rightarrow t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-0{,}35^2}}$

$\Rightarrow \omega_n=\frac{\pi}{1{,}2\sqrt{1-0{,}35^2}}\approx 2{,}8$

$\Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\boxed{\frac{7{,}84}{s^2+1{,}96s+7{,}84}}$

$\Rightarrow t_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_d}$; $\beta=tg^{-1}\frac{\omega_d}{\sigma}$; $\omega_d=2{,}8\sqrt{1-0{,}35^2}$

$\omega_d=2{,}62$

$\Rightarrow t_r=\frac{\pi-tg^{-1}\left(\frac{2{,}62}{2{,}8\cdot 0{,}35}\right)}{2{,}62} \Rightarrow \boxed{t_r=0{,}74s}$

$\Rightarrow t_s=\frac{4}{\sigma}$ (critério de 2%) $\Rightarrow \boxed{t_s=\frac{4}{2{,}8\cdot 0{,}35}=4{,}08s}$

⇒ TF malha aberta: $G(s)=\frac{7{,}84}{s(s+1{,}96)}$

$\Rightarrow e_{ss}(\infty)=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G(s)} \Rightarrow G(s)\to\infty \Rightarrow \boxed{e(\infty)\to 0}$

4ª Questão: 2 pontos

Considere a seguinte equação de estados:

$$\frac{dX}{dt}=AX+BU, Y=CX,$$

onde

$$A=\begin{bmatrix}0 & -a\\ -b & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

a é o último algarismo do número de matrícula diferente de zero

b é o penúltimo algarismo do número de matricula diferente de zero.

3.1 Verifique se este sistema é estável usando o método de Routh-Hurwitz;

3.2 Obtenha a função de transferência *Y(s)/U(s);*

3.3 Determine *X(t)*

$a=2;\ b=5$

3.1) polinômio característico dado por $|sI-A|$

$$(sI-A)=\begin{bmatrix}s & 2\\ 5 & s+1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det(sI-A)=s^2+s-10$

→ como trata-se de um polinomio de grau 2, para que o sistema seja estável é condição suficiente que todos os coeficientes sejam positivos, o que não é o caso, logo, o sistema é instável.

$$\left.\begin{array}{lll} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & \\ s^0 & \frac{a_0a_1}{a_1}=a_0 & \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_2>0 \\ a_1>0 \\ a_0>0 \end{array}$$

3.2) $\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B$

$$\Rightarrow (sI-A)=\frac{1}{s^2+s-10}\begin{bmatrix}s+1 & -5\\ -2 & s\end{bmatrix}^T=\frac{1}{\underbrace{s^2+s-10}_{\Delta(s)}}\begin{bmatrix}s+1 & -2\\ -5 & s\end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+1}{\Delta(s)} & \frac{-2}{\Delta(s)}\\ \frac{-5}{\Delta(s)} & \frac{s}{\Delta(s)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{s+1}{\Delta(s)} & \frac{-2}{\Delta(s)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\boxed{\frac{s-1}{s^2+s-10}}$$

$$3.3)\ X(s)=\Phi BU(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+1}{\Delta(s)} & \frac{-2}{\Delta(s)}\\ \frac{-5}{\Delta(s)} & \frac{s}{\Delta(s)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{s}=\begin{bmatrix}\frac{s-1}{s(s^2+s-10)}\\ \frac{s-5}{s(s^2+s-10)}\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\mathcal{L}^{-1}\left(\begin{bmatrix}\frac{s-1}{s(s^2+s-10)}\\ \frac{s-5}{s(s^2+s-10)}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0{,}1-0{,}1e^{-0{,}5t}\cosh(3{,}2t)-3\,\text{senh}(3{,}2t)\\ 0{,}5-0{,}5e^{-0{,}5t}\cosh(3{,}2t)-0{,}47\,\text{senh}(3{,}2t)\end{bmatrix}$$

(usando o matlab)