Sistemas Realimentados

EP 18 - Gráficos de Bode e critério de Nyquist

Data: 28 de maio

Nomes: Mariana Olm Rezende e Thyago Vieira Piske

Seja a FT $G(s) = \dfrac{2(s+1)}{s(s-1)}$

1.1) Faça o gráfico de Bode dos polos, zero e ganho e depois some seus efeitos, como foi feito no exemplo 1 das notas de aula.

$G(s) = \dfrac{2(s+1)}{s(s-1)}$, sendo o ganho $K = 2\ (K > 0)$, o zero $N(s) = (s+1)$ e os polos $\dfrac{1}{D(s)} = \dfrac{1}{s(s-1)}$.

Para fazer o gráfico de Bode, analisa-se os efeitos do ganho, dos zeros e dos polos separadamente e depois adiciona-se cada efeito para se ter o diagrama final.

<u>1) Efeitos no módulo:</u>

i) GANHO:

Para o cálculo do módulo [dB] : $20\log_{10}(K) = 6.02$ para todos os valores de ω.

ii) ZERO:

$N(j\omega) = 1 + j\omega$

$|N(j\omega)| = \sqrt{1^2 + \omega^2}$

Para o cálculo do módulo [dB] : $20 * \log_{10}(|N(j\omega)|) = 20 * \log_{10}(1^2 + \omega^2)^{\frac{1}{2}} = 10{*}\log_{10}(1^2 + \omega^2)$

iii) POLOS:

$$\frac{1}{D(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)(j\omega - 1)}$$

$$\left|\frac{1}{D(j\omega)}\right| = \frac{1}{\omega(\sqrt{\omega^2 + 1^2})}$$

Para o cálculo do módulo $[\mathrm{dB}]$:

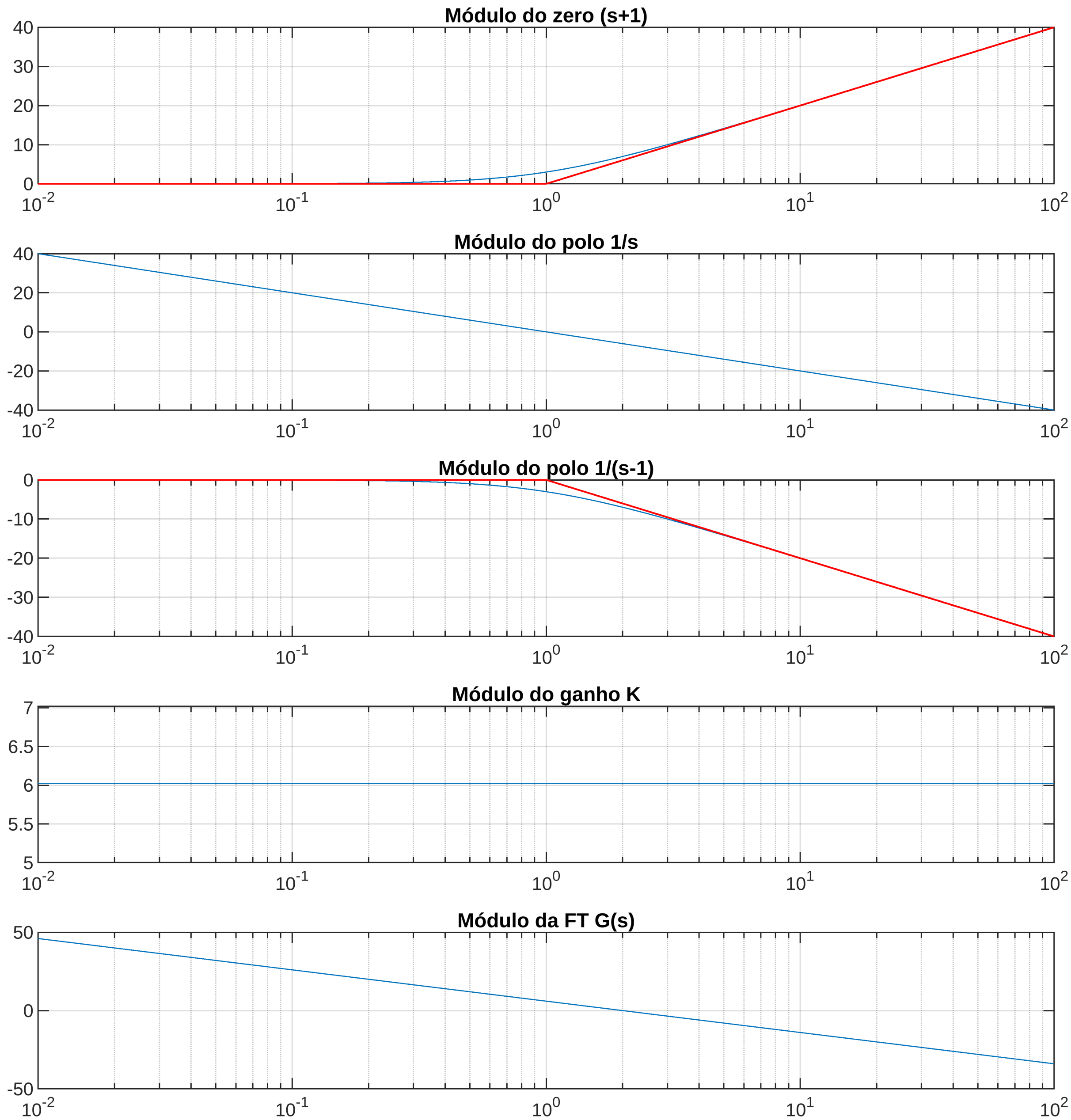
$$20 * \log_{10}\left(\left|\frac{1}{D(j\omega)}\right|\right) = -20 * \log_{10}\left(\omega\left(\sqrt{\omega^2 + 1^2}\right)\right) = -20 * \log_{10}(\omega) - 10*\log_{10}(1^2 + \omega^2)$$

Perceba que a parcela $-10*\log_{10}(1^2 + \omega^2)$ dos polos anula o efeito $10*\log_{10}(1^2 + \omega^2)$ do zero, dessa forma o módulo do diagrama de bode será $-20 * \log_{10}(\omega) + 6.02$, relativo ao efeito do ganho.

A tabela abaixo mostra o efeito de cada um dos elementros que compõem a FT. É esperado que o zero mantenha o módulo próximo de 0dB até a frequência $\omega = 1\,\frac{\mathrm{rad}}{s}$, aumentando 20dB a cada década. Já os polos possuem um efeito contrário de decrementar dB. O polo na origem, na frequência de $\omega = 0.01\,\frac{\mathrm{rad}}{s}$, influencia a fase em 40dB e diminui 20dB a cada década que passa, enquanto o polo no semi plano direito (SPD) mantém o módulo próximo de 0dB até a frequência $\omega = 1\,\frac{\mathrm{rad}}{s}$, diminuindo 20dB a cada década que passa, dessa forma, anulando o efeito do zero. Note que esse efeito de "anulamento" é causado pois $|j\omega + 1| = |j\omega - 1|$.

Figura 1 - Tabela com os efeitos de cada elemento no módulo para cada frequência.

	GANHO	ZERO	POLOS		
Frequência	**K = 2**	**s+1**	**1/s**	**1/(s-1)**	**Soma**
0.01	6	0	40	0	46
0.1	6	0	20	0	26
1	6	0	0	0	6
10	6	20	-20	-20	-14
100	6	40	-40	-40	-34



2) Efeitos na fase:

i) GANHO:

Para o cálculo da fase [graus] : $\begin{cases} 0^\circ, & K > 0 \\ 180^\circ, & K < 0 \end{cases}$, portanto a fase é 0° para qualquer valor de ω

ii) ZERO:

$N(j\omega) = 1 + j\omega$

$\arg(1 + j\omega) = \text{tg}^{-1}(\omega)$

iii) POLOS

$$\frac{1}{D(j\omega)} = \frac{1}{(j\omega)(j\omega - 1)}$$

Note que $\frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega * e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{\omega} * e^{-j\frac{\pi}{2}}$, dessa forma, $\arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) = -90^\circ$. Ou seja, um polo na origem sempre atrasa a fase em 90°.

Já para a parcela $\frac{1}{j\omega - 1}$, pode ser reescrita como $\frac{-1}{1 - j\omega}$.

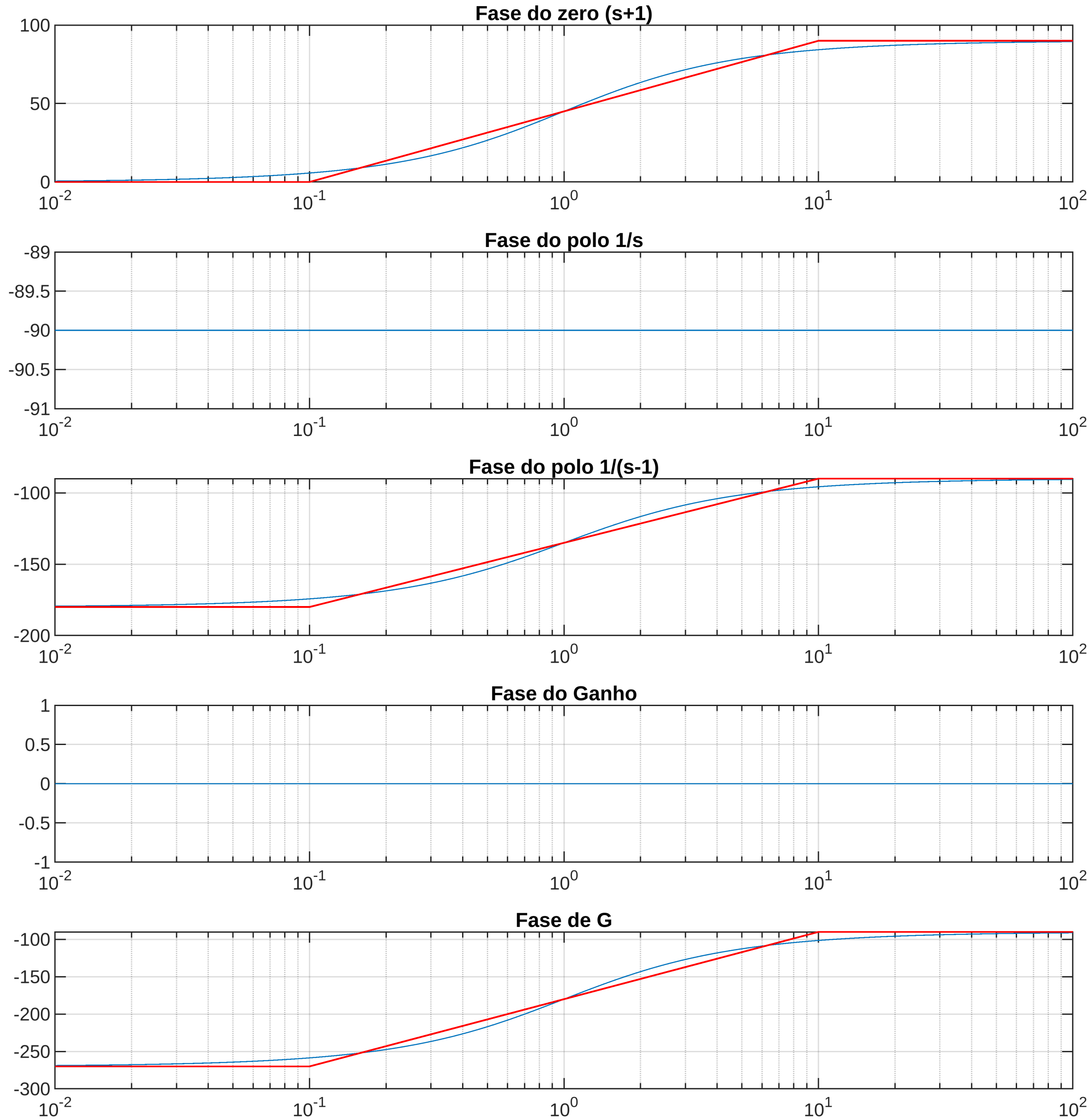
$\arg\left(\frac{-1}{1 - j\omega}\right) = \arg(-1) - \arg(1 - j\omega) = -180^\circ - \text{tg}^{-1}(-\omega)$, como $-\text{tg}^{-1}(-\omega) = \text{tg}^{-1}(\omega)$, o efeito da fase desssa parcela é $-180^\circ + \text{tg}^{-1}(\omega)$.

Dessa forma, o efeito na fase causado pelos polos é: $-270^\circ + \text{tg}^{-1}(\omega)$.

A tabela abaixo mostra o efeito na fase de cada um dos elementros que compõem a FT. Para o ganho, espera-se uma contribuição constante de fase 0°. Para o zero no SPE, é esperado que a fase se mantenha em 0° até $\omega = 0.1 \frac{\text{rad}}{s}$, que é uma década antes de $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{s}$, na qual a fase terá aumentado em 45° e tenderá a um aumento até 90° quando $\omega \to \infty$ (na prática, ao se desenhar o diagrama de bode assintótico, considera-se que a fase aumenta/diminui 90° uma década depois de aumentar/diminuir 45°). Já para os polos, um polo na origem sempre atrasa 90° na fase, um polo no SPE causaria um decrescimento na fase à partir da sua fase inicial e um polo no SPD teria um efeito de incremento na fase à partir da sua fase inicial, o que pode ser percebido no caso do polo no SPD $\frac{1}{s - 1}$, que começou em -180° e atingiu -90° uma década depois de aumentar 45°.

Figura 2 - Tabela com os efeitos de cada elemento na fase para cada frequência.

	GANHO	ZERO	POLOS		
Frequência	**K = 2**	**s+1**	**1/s**	**1/(s-1)**	**Soma**
0.01	0	0	-90	-180	-270
0.1	0	0	-90	-180	-270
1	0	45,0	-90	-135,0	-180
10	0	90	-90	-90	-90
100	0	90	-90	-90	-90



1.2) Esboce o gráfico polar de G(s) analisando o módulo e o ângulo de G(jw) para $\omega \to 0$ e para $\omega \to \infty$ (como nas notas de aula) e verificando como encontrar o ponto de interseção do gráfico com o eixo real negativo, e formas de obtê-lo.

Fazendo $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{2(j\omega + 1)}{j\omega(j\omega - 1)}$$

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{2|j\omega + 1|}{|j\omega||j\omega - 1|} = \frac{2\sqrt{\omega^2 + 1}}{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}} = \frac{2}{\omega}$$

$$\angle(j\omega + 1) = \mathrm{tg}^{-1}(\omega)$$

$$\angle j\omega = 90^o$$

$\angle(j\omega - 1) = 180 + \mathrm{tg}^{-1}(-\omega) = 180 - \mathrm{tg}^{-1}(\omega)$ (pois $j\omega - 1$ está no segundo quadrante)

$$\Rightarrow \angle G(j\omega) = \mathrm{tg}^{-1}(\omega) - 90 - 180 + \mathrm{tg}^{-1}(\omega) = 2\mathrm{tg}^{-1}(\omega) - 270$$

Análise do módulo:

Quando $\omega \to 0$, $|G(j\omega)| \to \infty$

Quando $\omega \to \infty$, $|G(j\omega)| \to 0$

Análise do ângulo:

Quando $\omega \to 0$, $\angle G(j\omega) \to -270^o$

Quando $\omega \to \infty$, $\angle G(j\omega) \to -90^o$

Para encontrar a interseção do gráfico com o eixo real negativo, precisamos encontrar ω tal que a parte imaginária de $G(j\omega) = 0$.

Para isso, reescrevemos $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = \frac{2(j\omega + 1)}{j\omega(j\omega - 1)} = \frac{2j\omega + 2}{-\omega^2 - j\omega}$$

O ponto chave dessa manipulação é multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, tornando real o denominador da fração resultante:

$$G(j\omega) = \frac{(2j\omega + 2)(-\omega^2 + j\omega)}{(-\omega^2 - j\omega)(-\omega^2 + j\omega)} = \frac{-4\omega^2 + 2j(\omega - \omega^3)}{\omega^2 + \omega^4}$$

Para que a parte imaginária seja 0,

$$\omega - \omega^3 = 0 \Rightarrow \omega(1 - \omega^2) = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0, \omega_2 = 1, \omega_3 = -1$$

$$\omega > 0 \Rightarrow \omega_{\text{interseção}} = 1$$

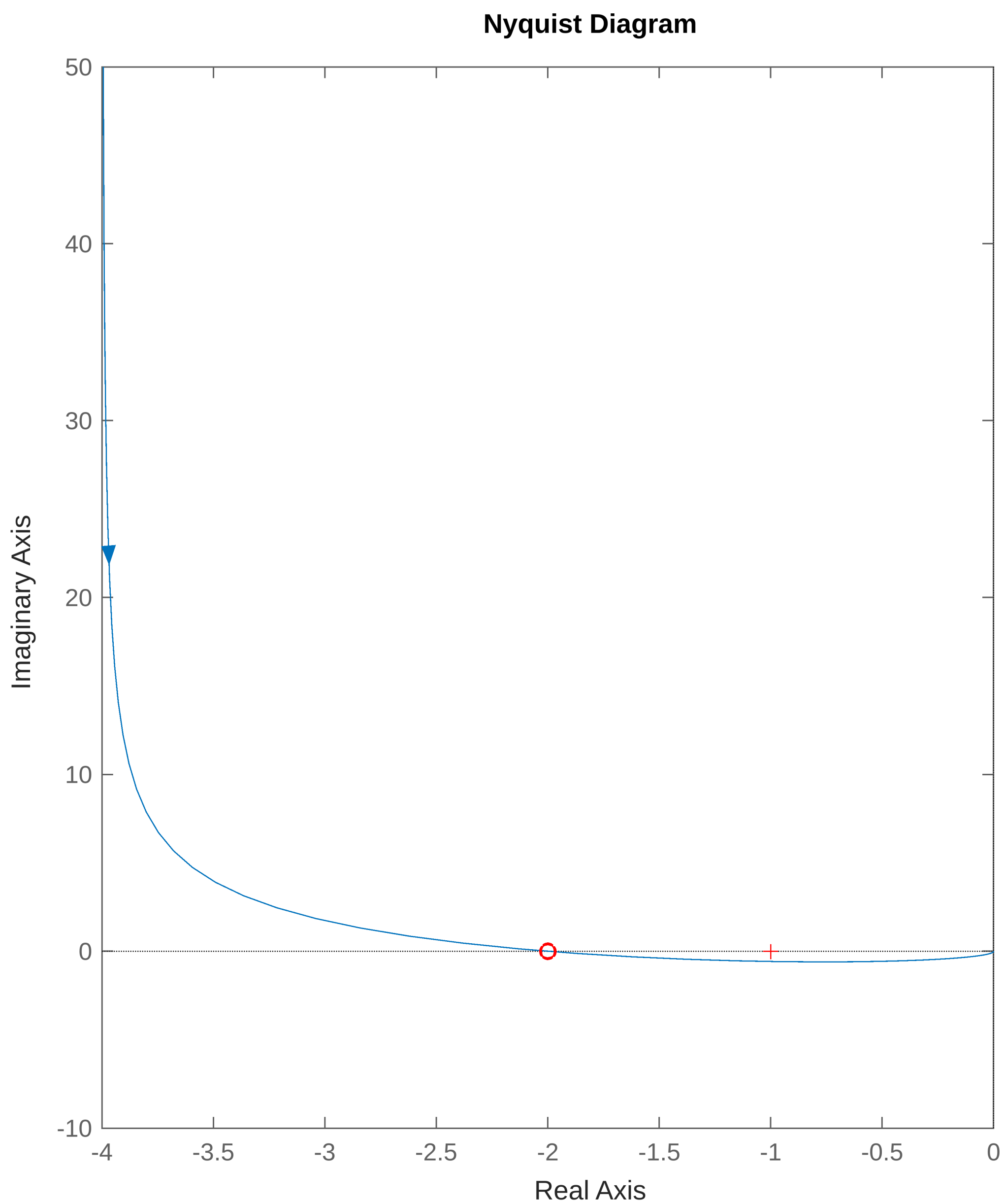
$$G(\mathrm{j}1) = \frac{-4}{2} = -2$$

Outra forma de encontrar o ponto de interseção é pela expressão do ângulo, encontrando o ω tal que $\angle G(j\omega) = -180^o$:

$$\angle G(j\omega) = 2\mathrm{tg}^{-1}(\omega) - 270 \Rightarrow -180 = 2\mathrm{tg}^{-1}(\omega) - 270 \Rightarrow \mathrm{tg}^{-1}(\omega) = 45^o \Rightarrow \omega = 1$$

Da mesma forma, substituímos na expressão de $G(j\omega)$ para encontrar $G(\mathrm{j}1) = -2$

Com essas informações, é possível construir o gráfico polar:



1.3) Use o critério de Nyquist para verificar se este sistema é estável.

Seja $F(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s) + D(s)}{D(s)}$

$$\phi = \left(Z_d - \frac{P_w}{2} - P_d \right) * 180$$

Lembrando que:

Z_d é a quantidade de zeros de F(s) (polos de malha fechada) que estão no semi-plano direito.

P_w é a quantidade de polos de F(s) (polos de G(s)H(s)) que estão sobre o eixo jw.

P_d é a quantidade de polos de F(s) (polos de G(s)H(s)) no semi-plano direito.

ϕ é o ângulo de G(s)H(s) em torno do ponto -1 quando ω varia de ∞ a 0.

Malha fechada: queremos saber;

Polos de G(s)H(s): conhecidos.

No caso, H(s) = 1.

De G(s) temos que

$P_\omega = 1$, pois é há um polo de G(s)H(s) sobre o eixo $j\omega$.

$P_d = 1$ pois é um polo de G(s)H(s) no semi-plano direito (s = 1).

Logo, $\phi = (Z_d - 1.5) * 180$

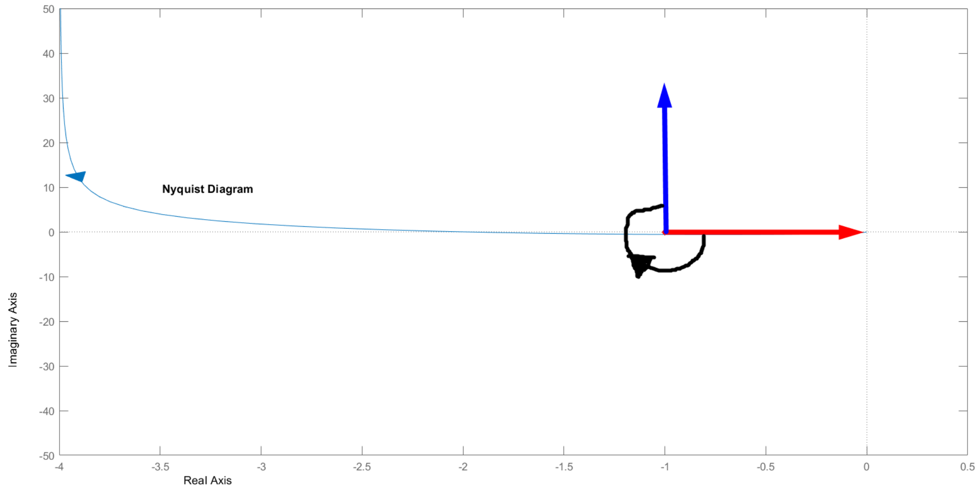
Agora temos as seguintes opções para verificar a estabilidade:

Opção 1: assumimos $Z_d = 0$ e verificamos que valor de ϕ garante estabilidade.

Opção 2: fazemos o gráfico polar de G(s) e medimos ϕ. Da equação, vemos qual valor de Z_d que satisfaz a equação.

Vamos utilizar a opção 2.

Para medir o ângulo ϕ, desenhamos no gráfico polar de G(s) um fasor do ponto -1 ao ponto do gráfico polar correspondente à frequência $j\infty$ e outro fasor do ponto -1 ao ponto do gráfico polar correspondente à frequência $j0$, como na imagem abaixo:



Observa-se que esse fasor variou -270º desde a frequência $j\infty$ até a frequência $j0$.

Assim,

$$-270 = (Z_d - 1.5) * 180$$

Essa equação é satisfeita para $Z_d = 0$. Portanto, não há polos de malha fechada no semi-plano direito então podemos concluir que o sistema é estável.