

Aula 11 Cálculo 3B Aula 70 Cálculo 3A

Aula passada

EDO 2ª ordem * lineares : a solução
qual é dada por duas
soluções LI
* linearidade

Aula Hoje

* achar as soluções LI
no caso $ay'' + by' + cy = 0$

3.1 Equação homogênea com coeficiente constante

Considere a equação

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Queremos achar duas soluções LI.
Vejamos um exemplo para motivar

Exemplo Resolva $y'' - y = 0$.

Solução

Podemos escrever $y'' = y$

isto é, que função que a segunda derivada
é ela mesma?

Repetindo : * $y_1(t) = e^t$

* $y_2(t) = e^{-t}$

Note que

$$W(e^t, e^{-t}) = \det \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= -1 - 1 = -2 \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

portanto $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{-t}$ são LI

Pelo nossa discussão teórica anterior
qualquer solução dessa EDO é escrita
como

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \quad c_1, c_2 \text{ constantes}$$

é a solução geral

Exemplo Resolva o PVI $\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Solução

Note que $y_1(t) = e^t$ nem $y_2(t) = e^{-t}$
satisfazem o problema de valor inicial

Mas existem c_1 e c_2 (únicos) tais que

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

é solução do PVI. Vamos determiná-los

$$y(0) = c_1 + c_2 = 2$$

$$y'(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$$

$$y'(0) = c_1 - c_2 = -1$$

Resolva este sistema:

$$\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 & = & 2 \\ + & & \\ c_1 - c_2 & = & -1 \\ \hline 2c_1 & = & 1 \\ c_1 & = & \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \searrow \\ \frac{1}{2} - c_2 = -1 \\ c_2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \end{array}$$

portanto

$$y(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{3}{2} e^{-t}$$

é a solução
do PVI

Voltando em $ay'' + by' + cy = 0$ Vamos
motivados pelo teorema anterior
procurar soluções do tipo

$$y(t) = e^{xt}$$

para algum $x \in \mathbb{R}$.

Derivando e substituindo na equação

$$y'(t) = x e^{xt}$$

$$y''(t) = x^2 e^{xt}$$

$$a x^2 e^{xt} + b x e^{xt} + c e^{xt} = 0$$

$$e^{xt} (a x^2 + b x + c) = 0$$

$$\Rightarrow a x^2 + b x + c = 0 \quad \text{Equação Característica}$$

Nota : 3 casos : \rightarrow o polinômio tem duas
raízes distintas

para polinô
mio de 2º grau

\rightarrow o polinômio tem
raízes complexas

\rightarrow o polinômio tem raiz
múltipla.

Nota 2 Em polinômios de grau maior tem mais casos

Exemplo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

podemos ter:

→ 3 raízes reais distintas

→ 1 raiz real e duas complexa
aparece sempre aos pares

→ 2 raízes iguais e outra diferente

→ 3 raízes iguais

Tente pensar os casos para um polinômio de grau 4.

Caso 1 O polinômio tem duas raízes reais distintas: $x_1 \neq x_2$

Nesse modo $y_1(t) = e^{x_1 t}$ $y_2(t) = e^{x_2 t}$ são soluções e

$$W(e^{x_1 t}, e^{x_2 t}) = \det \begin{pmatrix} e^{x_1 t} & e^{x_2 t} \\ x_1 e^{x_1 t} & x_2 e^{x_2 t} \end{pmatrix}$$

$$= x_2 e^{x_1 t} \cdot e^{x_2 t} - x_1 e^{x_2 t} \cdot e^{x_1 t}$$

$$= (x_2 - x_1) e^{(x_1 + x_2)t} \neq 0 \text{ pois } x_1 \neq x_2$$

portanto $y(t) = c_1 e^{x_1 t} + c_2 e^{x_2 t}$ solução geral

Exemplo Encontre a solução geral de

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Solução Equação característica:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = 0$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x + \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

$$x = -3 \text{ e } x = -2$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-2t}$$

Exemplo Encontre a solução do PVI

$$\begin{cases} 4y'' - 8y' + 3y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e estude o comportamento da solução quando $t \rightarrow \infty$

Solução:

Equação característica:

$$4x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + \frac{3}{4} = 0$$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Então $y(t) = c_1 e^{\frac{3}{2}t} + c_2 e^{\frac{1}{2}t}$ é a solução geral

para $y(0) = 2$ $y'(0) = \frac{1}{2}$ \Rightarrow $y(0) = c_1 + c_2 = 2$
 $y'(0) = \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2}$ (2)

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 3c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \begin{matrix} c_1 + c_2 = 2 \\ 3c_1 + c_2 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \begin{matrix} -1 + c_2 = 2 \\ c_2 = 5/2 \end{matrix}$$

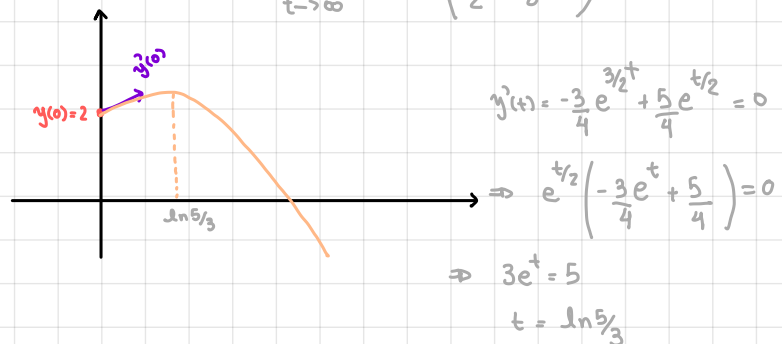
$$-2c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = -1/2$$

então a solução do PVI é: $y(t) = -\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}t} + \frac{5}{2}e^{\frac{1}{2}t}$

Vamos analisar o comportamento

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}t} + \frac{5}{2}e^{\frac{1}{2}t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{2}t} \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^t \right) = -\infty$$



Exemplo: Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} 4y'' - y = 0 \\ y(0) = 2 \quad y'(0) = \beta \end{cases}$$

e encontre o valor de β em que a solução tenda a zero quando $t \rightarrow \infty$

Solução

$$4y'' - y = 0$$

↳ equação característica:

$$4x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

raízes distintas

$$y(t) = c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 e^{-\frac{t}{2}}$$

$$y(0) = c_1 + c_2 = 2$$

$$y'(t) = \frac{1}{2}c_1 e^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}c_2 e^{-\frac{t}{2}}$$

$$y'(0) = \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 = p$$

$$\Leftrightarrow c_1 + c_2 = 2$$

$$c_1 - c_2 = 2p$$

$$\hline$$

$$2c_1 = 2 + 2p$$

$$c_1 = 1 + p$$

$$c_2 = 1 - p$$

$$y(t) = (1+p)e^{\frac{t}{2}} + (1-p)e^{-\frac{t}{2}}$$

p para $y \rightarrow 0$
 $t \rightarrow \infty$

anular esta parte

$$p = -1$$

3.4 Raízes complexas da Equação característica

Número complexo e a Fórmula de Euler

$$\text{sup } ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

se $b^2 - 4ac < 0$ as raízes são

$$x_1 = \lambda + \mu i \quad \text{onde } i^2 = -1$$

parte real \rightarrow parte imaginária

$$x_2 = \lambda - \mu i$$

números complexos

Exemplo

a) $x^2 + 1 = 0$

$$x^2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = -i \end{cases}$$

b) $x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3(-1)}}{2}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3} \sqrt{-1}}{2} = i$$

$$x_1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Caso 2

Polinômio com raízes complexas

Sabemos que para $ay'' + by' + cy = 0$ (*)

as soluções são do tipo $y(t) = e^{xt}$
onde x satisfaz

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \text{equação característica}$$

Então precisamos saber o que é a exponencial de um número complexo

Fórmula de Euler

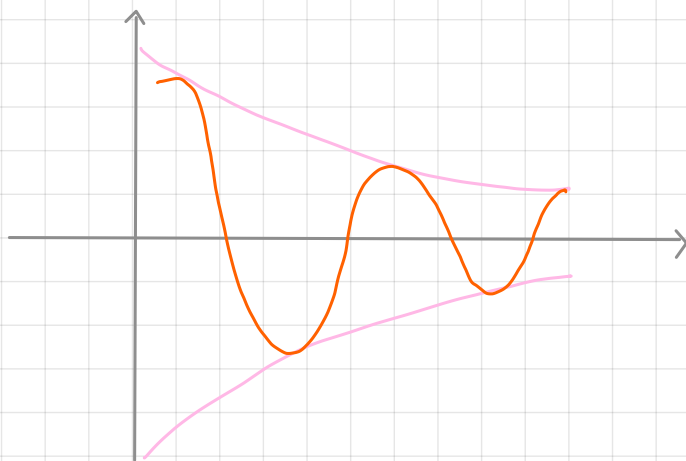
$$e^{i\mu} = \cos \mu + i \sin \mu$$

Verificação

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{pela parte de séries})$$

Vamos substituir $x = i\mu$ note que

$$\begin{aligned} i^1 &= i &= i^5 \\ i^2 &= -1 &= i^6 \\ i^3 &= -i &= i^7 \\ i^4 &= 1 &= i^8 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} e^{i\mu} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\mu)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos \mu + i \sin \mu \end{aligned}$$

Assim

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t} (\cos \mu t + i \sin \mu t) = \underbrace{e^{\lambda t} \cos \mu t}_{y_1(t)} + i \underbrace{e^{\lambda t} \sin \mu t}_{y_2(t)}$$

Verifique

$$(I) \quad y_1(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{\lambda t} \sin \mu t$$

são soluções

$$(II) \quad W(e^{\lambda t} \cos \mu t, e^{\lambda t} \sin \mu t) = \mu e^{2\lambda t} \neq 0 \quad (\text{se } \mu \neq 0)$$

se $\mu=0$ temos raízes reais
portanto para raízes complexas a
forma da solução geral é:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \sin \mu t$$

↳ Solução geral

Exemplo: Encontre a solução geral de
 $y'' + y' + y = 0$

Soluções: Equação característica:

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= 0 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

Raízes complexas:

$$y(t) = c_1 e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}t} + c_2 e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}t}$$

Note que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$

Exemplo: Encontre a solução do PVI $\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Solução: Eq. característica:

$$x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3i$$

↳ complexo

$$y(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$$

determinar c_1, c_2 :

$$-2 = y(0) = c_1$$

$$y'(t) = -3c_1 \sin 3t + 3c_2 \cos 3t$$

$$1 = y'(0) = 3c_2$$

$$c_2 = \frac{1}{3}$$

Assim

$$y(t) = -2 \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \text{?}$$