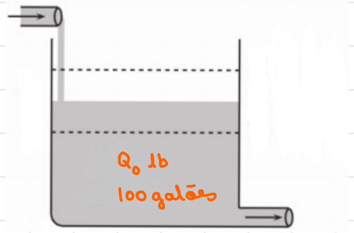
Aula 6 Cálculo 3B

Aula passada: substituição $\begin{cases} \text{Bernoulli} \\ \text{Ricatti} \\ \text{Homogênea} \end{cases}$

Aula Hoje: Modelagem: Tanque

2.3 Modelos com equações de primeira ordem

x galões/min



x galões/min

No instante $t=0$, um tanque contém Q_0 lb de sal dissolvido em 100 galões de água. Suponha que água contendo $\frac{1}{4}$ lb/gal de sal está entrando no tanque a uma taxa de x gal/min e que o líquido bem misturado está saindo a mesma taxa.

a) Escreva a EDO que descreve este processo

b) Encontre a quantidade $Q(t)$ de sal no tanque para cada instante t

c) Encontre a quantidade limite Q_L de sal no tanque após um longo período de tempo.

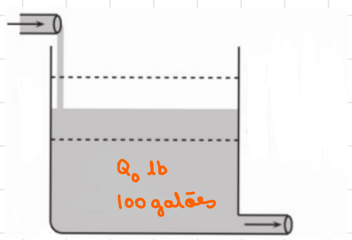
d) Para $x=3$, $Q_0 = 2Q_L$ encontre o instante T após o qual o nível de sal está dentro de uma faixa de 2% de Q_L

e) Encontre a taxa de fluxo necessário para que o valor de T não exceda 45 min

Solução

$\frac{1}{4}$ lb/gal

x galões/min



x galões/min

* Se entra x galões/min e cada galão tem $\frac{1}{4}$ de lb de sal então entra $\frac{x}{4}$ lb de sal por minuto

* Seja $Q(t)$ quantidade de sal no tanque em cada instante t.

* Como a taxa de entrada e de saída são iguais, no tanque sempre tem 100 galões

* Em cada instante t tem $\frac{Q(t)}{100}$ lb de sal em cada galão

* Se sai x galões/min e cada galão tem $\frac{Q(t)}{100}$ lb de sal então sai $x\frac{Q(t)}{100}$ lb sal/min

* $\boxed{\text{Taxa de variação de sal total no instante } t} = \boxed{\text{taxa de variação de sal entrando}} - \boxed{\text{taxa de variação de sal saindo}}$

$$\frac{dQ(t)}{dt} \qquad \frac{x}{4}\text{ lb/min} \qquad \frac{Q(t)}{100}\cdot x \text{ lb/min}$$

a) $$\begin{cases} Q'(t) = \frac{x}{4} - \frac{x}{100}Q(t) \\ Q(0) = Q_0 \end{cases}$$ → condição inicial

↳ equação que modela o problema

b) Resolver a equação linear.

$$\begin{cases} Q' + \frac{x}{100}Q = \frac{x}{4} \\ Q(0) = Q_0 \end{cases}$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{x}{100}\,dt} = e^{\frac{x}{100}t} \quad \rightarrow \text{fator integrante}$$

Multiplicando:

$$\underbrace{e^{\frac{x}{100}t}Q'(t) + \frac{x}{100}e^{\frac{x}{100}t}Q(t)}_{\frac{d}{dt}\left[Q(t)\cdot e^{\frac{x}{100}t}\right]} = \frac{x}{4}e^{\frac{x}{100}t}$$

$$\frac{d}{dt}\left[Q(t)\cdot e^{\frac{x}{100}t}\right] = \frac{x}{4}e^{\frac{x}{100}t}$$

$$\int \frac{d}{dt}\left[Q(t)\cdot e^{\frac{x}{100}t}\right] = \int \frac{x}{4}e^{\frac{x}{100}t}$$

$$Q(t)\cdot e^{\frac{x}{100}t} = 25e^{\frac{x}{100}t} + C$$

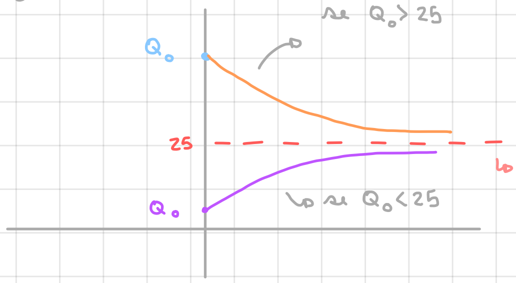
$$Q(t) = 25 + Ce^{-\frac{x}{100}t} \quad \text{para } Q(0) = Q_0$$

$$Q_0 = 25 + C \iff C = Q_0 - 25$$

$$\boxed{Q(t) = 25 + (Q_0 - 25)\, e^{-\frac{x}{100} \cdot t}}$$

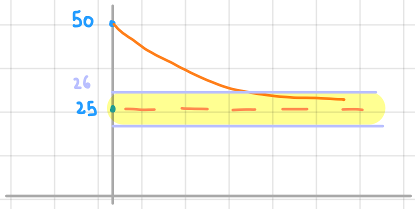
c) * ao longo do tempo = fazer $t \to \infty$ na solução

$$\lim_{t \to \infty} Q(t) = 25$$



↳ a quantidade de sal no tanque tende a 25 lb ao longo do processo

d) $x = 3$ e $Q_0 = 50$ ⟹ $Q(t) = 25 + 25\, e^{-\frac{3}{100} t}$



• 2% de Q_L = $25 \cdot \frac{2}{100} = 0{,}5$

Achar T tal que

$$25{,}5 = 25 + 25\, e^{-\frac{3}{100} \cdot T}$$

$$\frac{1}{50} = e^{-3/100\, T} \Rightarrow \frac{-3T}{100} = \ln\left(\frac{1}{50}\right) = -\ln 50$$

$$\boxed{T = \frac{100}{3} \ln 50}$$

e) $Q_0 = 2Q_L = 50$

$$Q(t) = 25 + 25\, e^{-\frac{x}{100} t}$$

Achar x quando $t = 45$ e $Q(45) = 25{,}5$:

$$25{,}5 = 25 + 25\, e^{-x \cdot \frac{45}{100}}$$

$$e^{-x \cdot \frac{45}{100}} = \frac{1}{50}$$

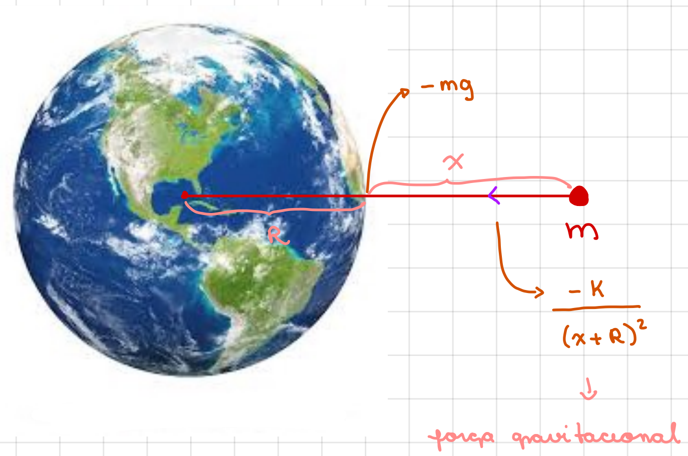
$$-x \frac{45}{100} = -\ln 50$$

$$\boxed{x = \frac{100}{45} \ln 50}$$

Para conhecimento

2.3 Modelagem com equações de 1ª ordem

Velocidade de escape



Objetivo: expressão para a velocidade do objeto

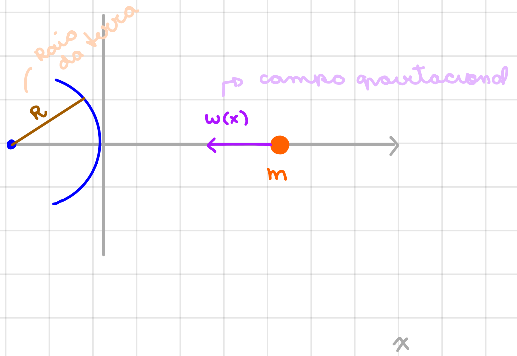
Um corpo de massa m constante é projetado para fora da terra em uma direção perpendicular a superfície da terra com velocidade inicial v_0. Suponha desprezível a resistência do ar mas levando em conta a variação do campo gravitacional da terra com relação a distância

a) Encontre uma fórmula para a velocidade desse corpo em movimento

b) Encontre a velocidade inicial necessária para levantar o corpo até uma altitude A máxima acima da superfície da terra

c) Encontre a menor velocidade inicial para qual o corpo não retorna a terra (velocidade de escape)

Solução



* Seja x a distância percorrida pelo objeto

* A força gravitacional é dada por:

$$w(x) = \frac{-K}{(x+R)^2}$$

→ Raio da terra
→ distância

Sabendo que $w(0) = -mg$ (na superfície)
então $-mg = \frac{-K}{R^2} \Rightarrow K = mgR^2$

Assim

$$\boxed{w(x) = \frac{-mgR^2}{(x+R)^2}}$$

* Não existe outras forças agindo, pela 2ª Lei de Newton:

$$\boxed{F = ma}$$

onde $a = \frac{dv}{dt}$, $v(t)$ velocidade, $a(t)$ aceleração

Assim

$$\frac{-\cancel{m}gR^2}{(x+R)^2} = \cancel{m}.\frac{dv}{dt}$$

A equação acima envolve t, x, v, vamos eliminar a variável t para obter uma EDO da velocidade com relação a distância x.

Pela regra da cadeia

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}v(x(t)) = \frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}.v$$

Substituindo

$$\boxed{\begin{cases} \frac{-gR^2}{(x+R)^2} = v'.v \\ v(0) = v_0 \end{cases}}$$

equação que rege o problema

→ EDO de 1ª ordem separável

a) Resolver o PVI acima:

$$\frac{-gR^2}{(x+R)^2} = \frac{dv}{dx}.v$$

SEPARÁVEL

$$\Rightarrow \frac{-gR^2}{(x+R)^2}dx = v.dv$$

$$\int \frac{-gR^2}{(x+R)^2}dx = \int v.dv$$

$$\frac{gR^2}{(x+R)} + C = \frac{v^2}{2}$$

para $v(0) = v_0$,

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{gR^2}{R} + C \Rightarrow C = \frac{v_0^2}{2} - gR$$

$$\boxed{v(x)^2 = \frac{2gR^2}{(x+R)} + v_0^2 - 2gR}$$

solução da velocidade em função da altitude x

↳ sinal de + corpo subindo
sinal de − corpo descendo

b) Altitude máxima = velocidade nula

$$0 = \frac{2gR^2}{(R+A)} + v_0^2 - 2gR$$

$$v_0^2 = 2gR - \frac{2gR^2}{(R+A)} = \frac{\cancel{2gR^2} + 2AgR - \cancel{2gR^2}}{(R+A)}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2AgR}{(R+A)}} \quad (\#)$$

atinge uma altitude máxima A e volta a terra (isto é, o objeto nao escapa)

c) Para que o objeto não retorne fazemos A tender a infinito em (#)

$$\lim_{A\to\infty} v_0 = \lim_{A\to\infty} \sqrt{\frac{2AgR}{R+A}} = \sqrt{\lim_{A\to\infty} \frac{2AgR}{R+A}}$$

L'Hospital

$$= \sqrt{\lim_{A\to\infty} \frac{2gR}{1}} = \sqrt{2gR}$$

velocidade de escape