Algoritmos Numéricos DI/CT/UFES
GABARITO do Estudo dirigido 6

1 EDOs de 1^a ordem

1. A solução do PVI abaixo, com os métodos de Euler e de Taylor de 2^a ordem

$$\begin{cases} y' = -x * y \\ y(a=0) = y_0 = 1.0 \end{cases}$$

A derivada de $f(x, y)$, isto é, $y'' = f'$ é:

$$f' = y(x^2 - 1)$$

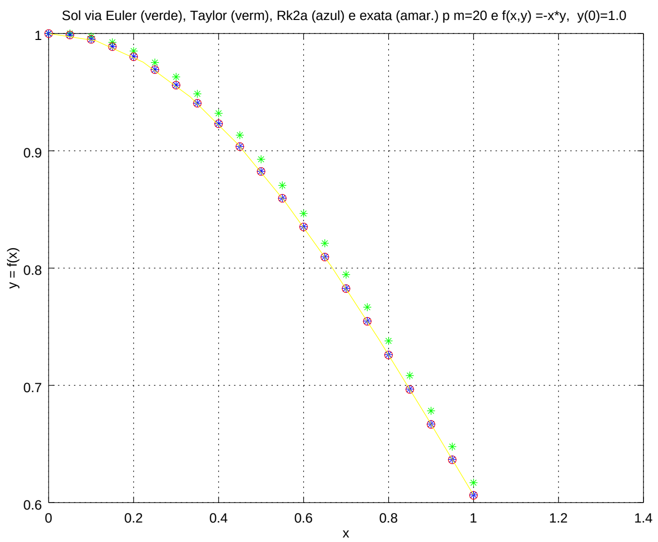
```
m=10
X =
0.00   0.10   0.20   0.30000   0.40000   0.50000   0.60000   0.70000
0.80000   0.90000   1.00000

YEuler =
1.00   1.00   0.99   0.97020   0.94109   0.90345   0.85828   0.80678
0.75031   0.69028   0.62816

YTaylor =
1.00   0.995   0.98012   0.95582   0.92279   0.88201   0.83460   0.78185
0.72513   0.66581   0.60526
```

2. Erro da solução obtida por em cada ponto x_i da discretização. Erro foi obtido via:

$$Erro(x_i) = |y_{ex}(x_i) - y_{Metodo}(x_i)|$$

```
m=10

erroEuler =
0.00   0.004988   0.009801   0.014203   0.017978   0.020953   0.023008
0.024077   0.024157   0.023305

erroTaylor =
0.00   0.0000125   0.0000739   0.0001798   0.0003222   0.0004902   0.0006714   0.0008524
0.0010203  0.0011636   0.0012731
```

Para $m = 20$ subintervalos, ver o gráfico a seguir


Sol via Euler (verde), Taylor (verm), Rk2a (azul) e exata (amar.) p m=20 e f(x,y) =-x*y, y(0)=1.0
y = f(x)
x
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4

3. Codigo do método de Runge Kutta de 2^a ordem

```
function [X,Y] = RK2( a, b, ya, m ,f)

   h=(b-a)/m;
   X(1) = a;
   Y(1) = ya;
  for i=1:m
      k1 = f( X(i),Y(i) );
      Y_Euler= Y(i) + h*k1;
      X(i+1) = X(i) + h;
      k2= f( X(i+1),Y_Euler );
      % Y via RK2
      Y(i+1) = Y(i) + h*( k1+ k2 )/2;
  endfor
endfunction
```

4. A solução de

$$\begin{cases} y' = -x * y \\ y(a=0) = y_0 = 1.0 \end{cases}$$

Com o método de Runge Kutta de 2^a ordem (a)

```
m=10
X =
0.00   0.10   0.20000   0.30000   0.40000   0.50000   0.60000
0.70000   0.80000   0.90000   1.00000

YRK2 =
1.00   0.995   0.98017   0.95596   0.92308   0.88246   0.83525
0.78271   0.72620   0.66709   0.60672
```

(b)

```
erroTaylor =
0.0000e+00    1.2479e-05   7.3923e-05   1.7983e-04   3.2219e-04   4.9025e-04   6.7141e-04
8.5239e-04 1.0203e-03   1.1636e-03   1.2731e-03

erroRK2 =
0.0000e+00   1.2479e-05   2.4173e-05   3.3292e-05   3.7325e-05   3.3358e-05   1.8466e-05
9.8721e-06   5.3393e-05   1.1274e-04   1.8729e-04
```

5. **Escoamento de um líquido em um recipiente cilíndrico**.
O nível após 30 minutos é de 0.69233m ($y(30) = 0.69233$).

1.1 Obs: sobre a derivada de $f(x, y) = -xy$

No problema 1 para obter a derivada de $f(x, y)$, isto é, calcular $y'' = f'$

$$y'' = f' = \frac{d(-xy)}{dx}$$

Lembrando que para obter f', é preciso fazer:

$$f' = (\frac{df}{dx}) = (\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx}) + (\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx})$$

Fazendo...
Obtendo a derivada em relação a x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -(1)y, \frac{dx}{dx} = 1.0$$

Obtendo a derivada em relação a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x(1), \frac{dy}{dx} = -xy$$

Portanto, com as duas contribuições

$$f' = -y(1.0) + (-x)(-xy)$$

$$f' = y(x^2 - 1)$$

2 Sobre os Sistema de EDOs de 1^a ordem

1. Solução do PVI abaixo, em $D = [0.0; 1.2]$, com $m = 12$ ($h = 0.1$).

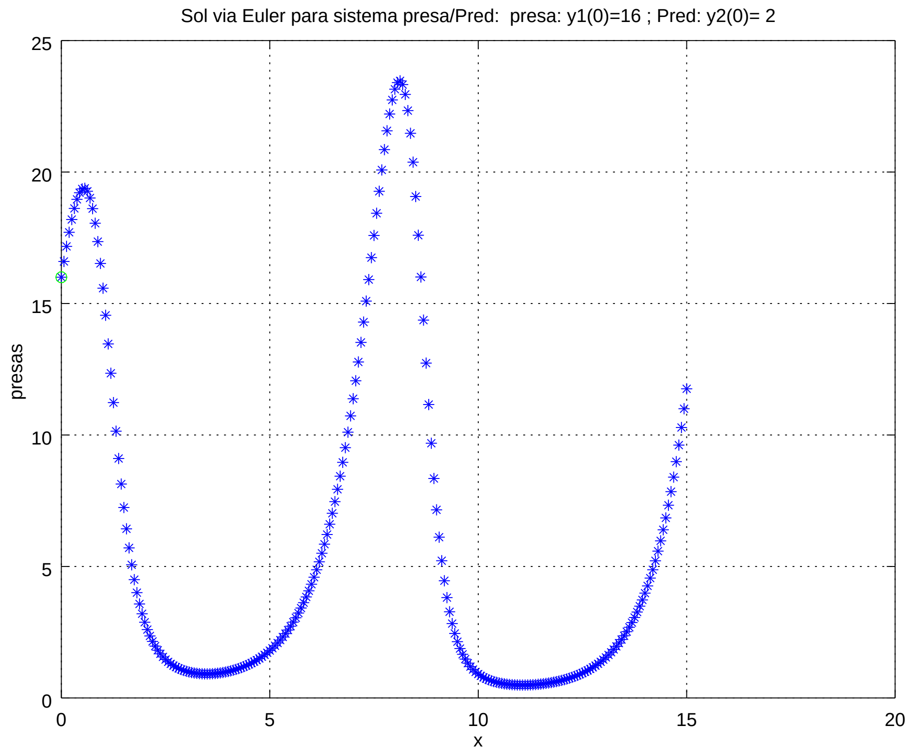
$$\begin{cases} {y_1}' = y_1 + y_2 + 3x \\ {y_2}' = 2y_1 - y_2 - x \\ y_1(0.0) = 0.0 \\ y_2(0.0) = -1.0 \end{cases}$$

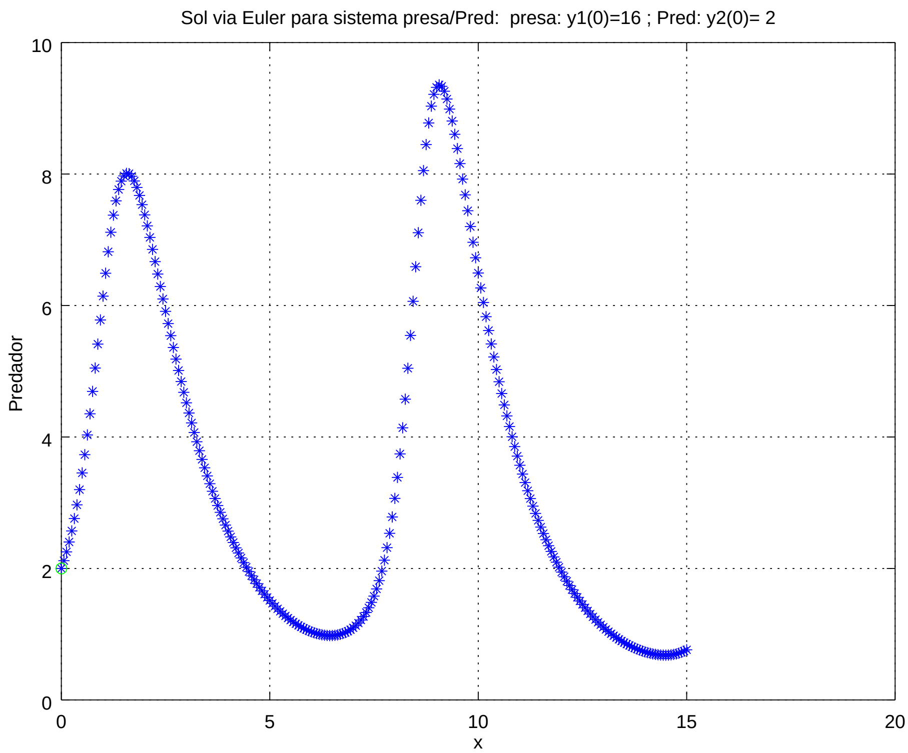
```
h =  0.10000
X =
0.0   0.10   0.20    0.30     0.40     0.50    0.60    0.70    0.80    0.90
1.00   1.10   1.20

Y1 =
0.0  -0.10 -0.170  -0.211 -0.22310  -0.20553  -0.15665  -0.07394   0.04607   0.20786
0.41704   0.68045   1.00637

Y2 =
-1.0 -0.90 -0.84  -0.810  -0.80120  -0.80570  -0.81624  -0.82594  -0.82814  -0.81611
-0.78293  -0.72123  -0.62301
```

2. **O Modelo Presa - Predador**

   Soluções numéricas (das duas espécies) para $m = 240$.

   y_1 é o número da indivíduos da população da presa (como, por exemplo, o coelho) y_2 é o número de indivíduos da população de predador (como, por exemplo, a raposa) e x representa tempo (em anos).


Sol via Euler para sistema presa/Pred: presa: y1(0)=16 ; Pred: y2(0)= 2
presas
x
0
5
10
15
20
25



Sol via Euler para sistema presa/Pred: presa: y1(0)=16 ; Pred: y2(0)= 2
Predador
x
0
2
4
6
8
10
0
5
10
15
20