Algoritmos Numéricos DI/CT/UFES

Roteiro para o Estudo dirigido sobre os métodos para resolução EDOs de 1^a ordem e sistemas de EDOs de 1^a ordem

1 EDOs de 1^a ordem

Problema matemático
Resolver uma EDO de 1^a ordem, com valor inicial (PVI) do tipo abaixo:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y(x_0) = y_a \end{cases}$$

em $D = [a,b]$.

1.1 Métodos de Euler, de Taylor de 2^a e de Runge Kutta de 2^a ordem

Para resolver via métodos numéricos é necessário discretizar o domínio $D = [a,b]$ usando m subintervalos.

1. Com as implementações dos métodos de Euler e de Taylor de 2^a ordem fornecidas (códigos Euler.m e Taylor2a.m), determinar a solução do PVI de 1^a ordem abaixo, em $D = [0.0; 1.0]$

$$\begin{cases} y' = -x * y \\ y(a = 0) = y_0 = 1.0 \end{cases}$$

(a) via Euler com: (i) $m = 10$, e (ii) $m = 20$.
(b)via Taylor de 2^a ordem, com: (i) $m = 10$, e (ii) $m = 20$.

Observe que os dados de entrada são: a, b, y_a, f e m para Euler e a, b, y_a, f, f' e m, para Taylor onde m é o tamanho da partição do domínio.

2. Sabendo que a solução exata do problema acima é:

$$y_{ex}(x) = e^{-(x^2/2)}$$

(a) Calcule o erro verdadeiro da solução obtida por Euler em cada ponto x_i da discretização.
Calcule o erro verdadeiro via:

$$Erro(x_i) = |y_{ex}(x_i) - y_{Euler}(x_i)|$$

Faça isso usando (i) $m = 10$ e (ii) $m = 20$ subintervalos.

(b) Calcule o erro verdadeiro da solução obtida pelo método de Taylor de 2^a ordem em cada ponto x_i da discretização. Calcule o erro verdadeiro via:

$$Erro(x_i) = |y_{ex}(x_i) - y_{Taylor}(x_i)|$$

Faça isso usando para (i) $m = 10$ e (ii) $m = 20$ subintervalos.

3. Implementar o método de Runge Kutta de 2^a ordem para resolver uma EDO de 1^a ordem, com valor inicial (PVI) do tipo abaixo:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y(x_0) = y_a \end{cases}$$

Os dados fornecidos pelo usuário devem ser a, b, y_a , f e m, onde m é o tamanho da partição do domínio.

A solução numérica dever ser gravada em um vetor.

4. Usando o código implementado
   (a) determinar a solução do PVI de 1^a ordem abaixo, em $D = [0.0; 1.0]$, com $m = 10$.

$$\begin{cases} y' = -x * y \\ y(a = 0) = y_0 = 1.0 \end{cases}$$

   (b) Comparar a solução obtida via Runge Kutta 2^a ordem com a solução obtida via Taylor de 2^a ordem $m = 10$. Para esta comparação, calcule o erro verdadeiro (em relação à solução exata) da solução obtida pelo método de Taylor de 2^a ordem em cada ponto x_i da discretização assim como erro da solução obtida pelo método de Runge Kutta de 2^a ordem.

5. **Escoamento de um líquido em um recipiente cilíndrico**.
   Seja um tanque cilíndrico vertical com um orifício em sua base. Pode-se mostrar, adotando algumas simplificações, que a taxa pela qual o nível $y(t)$ do líquido abaixa neste tanque é dada por:
$$\frac{dy}{dt} = -ky^{0.5}.$$
   onde k é uma constante que depende do tipo do orifício existente na base, do tipo do líquido e da área da seção transversal do tanque. O nível do líquido é medido em metros e o tempo em minutos.

   Usando o método de Runge Kutta 2^a ordem, e sabendo que o nível do líquido está inicialmente a 3 metros, calcule o nível após 30 minutos ($y(t = 30)$. Considere $k = 0.06$

2 EDOs de 1^a ordem

Problema matemático
Um sistema de EDOs de 1^a ordem, com valores iniciais, dado abaixo

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_1(x_0) = y_{1,0} = y_{1a} \\ y_2(x_0) = y_{2,0} = y_{12} \\ \vdots \\ y_n(x_0) = y_{n,0} = y_{na} \end{cases}$$

onde as $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ $(1 \leq i \leq n)$ são funções definidas em um domínio $D = [a = x_0, b]$

1. Veja a implementação do método de Euler fornecida, que resolve o problema acima para o problema com duas equações (código EulerSistema2Eq.m).
   Observe que os dados de entrada são: $a, b, y_1a,\ y_2a,\ f_1,\ f_2$ e m.

   Usando implementação fornecida, calcule a solução do PVI abaixo, em $D = [0.0; 1.2]$, com $m = 12$ $(h = 0.1)$.
$$\begin{cases} {y_1}' = y_1 + y_2 + 3x \\ {y_2}' = 2y_1 - y_2 - x \\ y_1(0.0) = 0.0 \\ y_2(0.0) = -1.0 \end{cases}$$

2. **O Modelo Presa - Predador**

   O modelo de duas espécies coexistindo, uma sendo uma presa e a outra um predador, pode ser descrita por:
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = ry_1 - \alpha y_1 y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -my_2 + \delta y_1 y_2 \end{cases}$$

   onde y_1 é o número da indivíduos da população da presa (como, por exemplo, o coelho), y_2 é o número de indivíduos da população de predador (como, por exemplo, a raposa) e t representa tempo (em anos).

O modelo é construído baseado nas seguintes hipóteses:
1) Na ausência da predador, a presa cresce a uma taxa proporcional à população presente (ou seja, $dy_1/dt = ry_1$, com $r > 0$).
2) Na ausência da presa, o predador desaparece, com uma taxa de mortalidade m (ou seja, $dy_2/dt = -my_2$, $m > 0$).
3) O número de encontros do predador com a presa é proporcional ao produto das respectivas populações. Cada encontro tende a promover o crescimento do predador e inibir o crescimento da presa. Assim a taxa de crescimento da presa é diminuída por uma parcela $-\alpha y_1 y_2$ enquanto taxa de crescimento do predador é acrescida por uma parcela da forma $\delta y_1 y_2$

Há, portanto, duas constantes positivas de proporcionalidade envolvidas nesse produto, sendo que α representa taxa de predação e δ de conversão da caça em novos predadores.

Tarefa Específica
Supondo que as populações de presa e predador são, inicialemente, de 16 e 2 indivíduos, respectivamente, (ou seja, $y_1(0) = 16$ e $y_2(0) = 2$) e que os parâmentos dos modelos são: $r = 1.4$; $\alpha = 0.4$; $m = 0.65$; $\delta = 0.1$ descrever o comportamento das populações (da presa e do predador), nos próximos 15 anos, isto é, resolver o sistema para t em $t = [0, 15]$.

Use $m = 60$, $m = 120$ e, em seguida, $m = 240$. Plotar as soluções numéricas (das duas espécies) para $m = 240$.

2.1 Observações e dicas

- Uma forma de definir uma expressão matemática para uma função, no octave, é fazê-lo com a seguinte sintaxe:

```
<nomefunçao> =  @(lista de variaveis)   <expressao>
Exemplos:
 quad =  @(x)   x^2;
 % exemplo do problema tratado em sala (f e f')
 f = @(x,y) -x/y;
 df= @(x,y) -1.0*( x^2 + y^2)/(y.^3);
 % exemplo do exercicio 1 deste roteiro  (f e f')
 f = @(x,y) -x*y;
 df= @(x,y) y*(x^2 -1.0) ;
 % exemplo do exercicio   do escoamento do  liquido
 f = @(t,y)  - 0.06*(y)^(0.5);
 % exemplo do sistema de 2 Equacoes deste roteiro
 f1 = @ (x,y1,y2)  y1  +  y2+ 3*x ;
 f2 = @ (x,y1,y2)  2*y1 - y2 - x ;
```

  A função definida pode ter um ou mais argumentos (variáveis de entrada).

- Para fazer gráficos no plano, no octave, pode-se usar o comando "plot". Deve ser passado sempre um (ou mais) par de vetores que se quer traçar e, opcionalemente, um terceiro argumento representando o formato. Os pares (de vetores) devem ter com dimensões compatíveis.

```
x=[ 1 2 3]
y=[ 1 4 9]
plot(x,y)
plot(x,y, "b*")
% se X,YEuler e X,YTaylor estiverem definidos então poderia se traçar:
plot(X,YEuler, "g*", X,YTaylor, "ro");
```