Teste 5 - Algoritmos Numéricos- DI

NOME: ____.

Leia **atentamente** as questões até o fim. Está sendo usada a notação americana, ou seja, usa-se o ponto (.) para denotar a parte fracionária.
Todas as soluções (menos os códigos) devem ser escritas pelo aluno (com sua letra) e, em seguida, fotografadas. Se possível, coloque as soluções (as que foram escritas pelo aluno) em único arquivo pdf. Escreva de forma bem legível. Use uma caneta preta ou lápis bem escuro para o contraste.

1. Questão (1.5)
   Suponha que se conheça o valor de uma função $f(x)$ em apenas 2 pontos:
   para $x = -1.0$, $f(-1.0) = 4.5$ e para $x = 2.0$, $f(2.0) = 3.0$.

   (a) (1.0) Quer se obter o polinômio interpolador de grau 1 (uma reta) escrito na forma $p_1(x) = a_0 + a_1x$, em $D = [-1.0; 2.0]$
   Escreva as restrições de interpolação que devem ser satisfeitas, monte o sistema linear $Xa = y$ correspondente e obtenha o polinômio interpolador. Resolva o sistema linear da forma que achar melhor.

   (b) (0.5) Obtenha a reta interpoladora via a forma de Newton.

2. Questão (4.5)
   Seja a função
   $$f(x) = \frac{1}{2x-1}$$

   (a)(0.5) Obter o polinômio interpolador de grau 1, em $D = [1.0, 2.5]$, usando como pontos de interpolação, os seguintes pontos: $(1.0, f(1.0))$ e $(2.5, f(2.5))$. Use a forma que preferir para obtê-lo.

   (b)(0.5) Obter o polinômio interpolador de grau 2, em $D = [1.0, 2.5]$, usando os pontos $(1.0, f(1.0))$, $(1.75, f(1.75))$ e $(2.5, f(2.5))$ como pontos de interpolação, isto é, usando pontos igualmente espaçados em $D = [1.0, 2.5]$. Use a forma que preferir para obtê-lo.

   (c) (0.5) Obter o polinômio interpolador $p_3(x)$ de grau 3, usando os pontos $(1.0, f(1.0))$, $(1.5, f(1.5))$, $(2.0, f(2.0))$ e $(2.5, f(2.5))$ como pontos de interpolação, isto é, usando pontos igualmente espaçados em $D = [1.0, 2.5]$. Use a forma de Newton para obtê-lo.

   (d)(0.5) Calcule a integral $I = \int_{1.0}^{2.5} \frac{1}{2x-1}dx$ pela regra (método de integração) do Trapézio (regra simples).

   (e)(0.5) Calcule a integral $I = \int_{1.0}^{2.5} \frac{1}{2x-1}dx$ pela regra (método de integração) 1/3 de Simpson (regra simples).

   (f)(0.5) Represente graficamente, em um par de eixos cartesianos, o que foi feito em (d) traçando a função $f(x) = \frac{1}{2x-1}$, os pontos envolvidos no cálculo via a regra numérica e a área numérica obtida (com o polinômio envolvido na regra numérica).

(g)(0.5) Represente graficamente, em um par de eixos cartesianos, o que foi feito em (e) traçando a função $f(x) = \frac{1}{2x-1}$, os pontos envolvidos no cálculo via a regra numérica e a área numérica obtida (com o polinômio envolvido na regra numérica).

(h)(0.5) Integre o polinômio obtido em (c), isto é, calcule $\int_{1.0}^{2.5} p_3(x)dx$ com o polinômio $p_3(x)$ interpolador da função $f(x)$ e observe que isso representa uma aproximação para $I = \int_{1.0}^{2.5} \frac{1}{2x-1}dx$.

(i)(0.5) Represente graficamente, em um par de eixos cartesianos, o que foi feito em (h) traçando a função $f(x) = \frac{1}{2x-1}$, os pontos envolvidos no cálculo via a regra numérica e a área numérica obtida (com o polinômio envolvido na regra numérica).

Use um tamanho para os seus gráficos que permita a visualização dos pontos, da função $f(x)$ e do que mais se está representando.

3. Questão (2.0)
   Dado um conjunto P de pontos no plano P=((x_0, y_0), (x_0, y_0), ... (x_n, y_n)), um ponto z em $D = [x_0, x_n]$ e polinômio interpolador deste pontos na forma Newton.

   Considere que todas as diferenças divididas ascendentes, de ordem 0 até n, calculadas em torno do ponto y_0 estão dadas, isto é, considere o polinômio interpolador fornecido. O polinômio interpolador é, forma de parênteses encaixados é:

   $$p_n(x) = \triangle^0 y_0 + (x - x_0)(\triangle^1 y_0 + (x - x_1)(\triangle^2 y_0 + (x - x_2)(... + ...(x - x_{n-1})(\triangle^n y_0)...)))$$

   Avaliando em um ponto z, tem-se:

   $$p_n(z) = \triangle^0 y_0 + (z - x_0)(\triangle^1 y_0 + (z - x_1)(\triangle^2 y_0 + (z - x_2)(... + ...(z - x_{n-1})(\triangle^n y_0)...)))$$

   Assim, por exemplo, se houver um vetor b, que contenha, na posição i, as diferenças divididas ascendentes de ordem i, em torno do ponto y_0, o polinômio avaliado em um ponto z, poderia ser expresso por

   Avaliando em um ponto z:

   $$p_n(z) = b[0] + b[1](z - x_0) + b[2](z - x_0)(z - x_1) + ... + b[n](z - x_0)(z - x_1)...(z - x_{n-1})$$

   Na forma de parênteses encaixados seria:

   $$p_n(z) = b[0] + (z - x_0)(b[1] + (z - x_1)(b[2] + (z - x_2)(... + ...(z - x_{n-1})(b[n])...)))$$

   Escreva uma função, no octave, que avalie o polinômio interpolador de grau n dos pontos P=((x_0, y_0), (x_0, y_0), ... (x_n, y_n)) em um ponto z USANDO a forma de parênteses encaixados.

   Considere, os seguintes dados de entrada: os pontos de interpolação (fornecidos via dois vetores x e y, com $(n + 1)$ posições cada), os coeficientes do polinômio na forma de Newton (passados pelo vetor b) e o ponto z.

   A função seria algo do tipo:

   ```
   function pz= avaliapol(x, y, b, z)
   ```

4. Questão (2.0)

Vimos, no começo do curso, que pode se obter aproximações para $I = \int_a^b f(x)dx$, usando um método bem simples: a regra dos retângulos. Nesta regra, divide-se o intervalo $[a, b]$ em N subintervalos de largura fixa h (gerando os pontos $x_0 = a, x_1 = a + h, ..., x_N = b$) e então soma-se a área dos retângulos, ou seja, via $I \approx \sum_{i=0}^{N-1} h * f(x_i)$. Na regra acima o que é feito é aproximar, em cada sunbitervalo, a função por um polinômio de grau 0 (valor constante).

Pretende se obter agora $I = \int_{1.0}^{3.0} \sqrt{x}dx$ via uma regra melhor (mais precisa), uma regra que empregue um polinômio de grau 2 construído a cada 2 subintervalos, isto é, empregando a regra 1/3 de Simpson composta.

(a) Escreva uma função, no octave, que calcule a integral de uma função $f(x)$ de a até b via a regra 1/3 de Simpson com N subintervalos, sendo dados: a função $f(x)$, os pontos a, b e o valor de N (com N par).

Observe que haverá um total de $N/2$ regras pois a cada 2 subintervalos tem se a aplicação de uma regra 1/3 de Simpson.

(b) Calcule o valor de $I = \int_{1.0}^{3.0} \sqrt{x}dx$ pelo seu código usando $N = 10$ subintervalos.