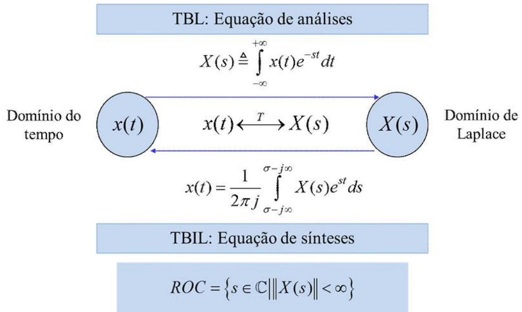
A Transformada de Laplace Bilateral (Parte II)

Professor
Jorge Leonid Aching Samatelo
jlasam001@gmail.com



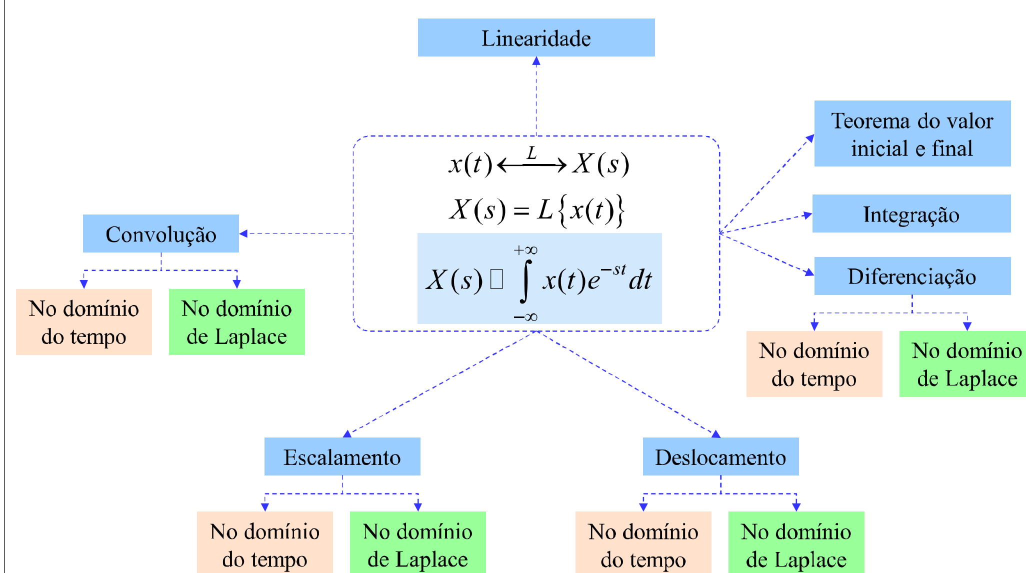
Índice

- ❑ Introdução.
- ❑ ROC.
- ❑ Diagrama de polos e zeros.
- ❑ Propriedades.
- ❑ **Algumas Transformadas Básicas.**
- ❑ **Transformada Bilateral Inversa de Laplace (TBIL).**
- ❑ Bibliografia.

Propriedades

Propriedades

Introdução



Propriedades

Linearidade

- A Transformada bilateral de Laplace de uma combinação linear é igual a combinação linear das transformadas.

$$x_1(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X_1(s)\ ,\ ROC_{X_1}$$

$$x_2(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X_2(s)\ ,\ ROC_{X_2}$$

$$y(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} Y(s) = aX_1(s) + bX_2(s)\ ,\ ROC_Y = ROC_{X_1} \cap ROC_{X_2}$$

- Aqui, ROC_Y é a interseção de ROC_{X1} e ROC_{X2}.

Propriedades

Deslocamento

- *Deslocamento no tempo*
  - A Transformada bilateral de Laplace de um sinal deslocado t_0 instantes de tempo é igual a multiplicar a transformada do sinal por e^{-st0}.

$$x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s)\ ,\ ROC_X$$

$$y(t) = x(t-t_0) \overset{L}{\longleftrightarrow} Y(s) = X(s)e^{-st_0}\ ,\ ROC_Y = ROC_X$$

- O ROC do sinal deslocada e igual ao ROC do sinal original, exceto pela adição do ponto em $s = s_0$.

Propriedades

Deslocamento

- *Deslocamento no domínio de Laplace*
  - A Transformada bilateral de Laplace de um sinal modulada pela exponencial $exp(s_0 t)$ é igual a deslocar a transformada do sinal por s_0.

$$x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s)\ ,\ ROC_X$$

$$y(t) = x(t)e^{s_0 t} \overset{L}{\longleftrightarrow} Y(s) = X(s - s_0)\ ,\ ROC_Y = ROC_X \cup \{s_0\}$$

- O ROC do sinal deslocada e igual ao ROC do sinal original, exceto pela adição do ponto em $s = s_0$.

Propriedades

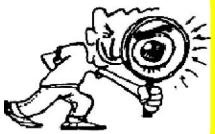
Escalamento

- *Escalamento no tempo*

Compressão no tempo | *Expansão no domínio de Laplace*

$$x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s)\ ,\ ROC_X$$

$$y(t) = x(at) \overset{L}{\longleftrightarrow} Y(s) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)\ ,\ ROC_Y = aROC_X$$



Basicamente, fazemos uma substituição de variáveis na transformada $X(s)$, onde era s agora deve ser s/a.

- Aqui $ROC_Y = aROC_X$ indica que o ROC_X é escalado pela constante a ($a > 0$ para garantir a causalidade de $x(t)$).
  - Por exemplo,
    - Se, o ROC_X é definido pela faixa de valores $r_R < \mathrm{Re}\{s\} < r_L$.
    - Então, o ROC_Y é definido pela nova faixa de valores $ar_R < \mathrm{Re}\{s\} < ar_L$.

Propriedades

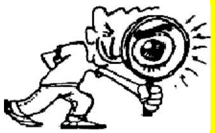
Escalamento

- *Escalamento no domínio de Laplace*

Expansão no tempo | *Compressão no domínio de Laplace*

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)\ ,\ ROC_X$$

$$y(t) = \frac{1}{|a|} x\left(\frac{t}{a}\right) \xleftrightarrow{L} Y(s) = X(as)\ ,\ ROC_Y = ROC_X / a$$



Basicamente, fazemos uma substituição de variáveis na transformada $X(s)$, onde era s agora deve ser as.

- Aqui $ROC_Y = ROC_X/a$ indica que o ROC_X é escalado pela constante a ($a > 0$ para garantir a causalidade de $x(t)$).
  - Por exemplo,
    - Se, o ROC_X é definido pela faixa de valores $r_R < \mathrm{Re}\{s\} < r_L$.
    - Então, o ROC_Y é definido pela nova faixa de valores $r_R/a < \mathrm{Re}\{s\} < r_L/a$.

Propriedades

Convolução

- *Convolução no tempo*

Convolução no tempo | *Modulação no domínio de Laplace*

$$x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s)\ ,\ ROC_{X_1}$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s)\ ,\ ROC_{X_2}$$

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = X_1(s)X_2(s)\ ,\ ROC_Y = ROC_{X_1} \cap ROC_{X_2}$$

Propriedades

Convolução

- *Convolução no domínio de Laplace*

Modulação no tempo | *Convolução no domínio de Laplace*

$$x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s)\ ,\ ROC_{X_1}$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s)\ ,\ ROC_{X_2}$$

$$y(t) = x_1(t)x_2(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X_1(w)X_2(s-w)dw,$$

$$ROC_Y = ROC_{X_1} \cap ROC_{X_2}$$

Propriedades

Diferenciação

- *Diferenciação no domínio do tempo*

Diferenciação no tempo | *Potenciação no domínio de Laplace*

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)\ ,\ ROC_X$$

$$y(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{L} Y(s) = s^n X(s)\ ,\ ROC_Y \supset ROC_X$$

- *Diferenciação no domínio de Laplace*

Potenciação no tempo | *Diferenciação no domínio de Laplace*

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)\ ,\ ROC_X$$

$$y(t) = -tx(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = \frac{d}{ds}X(s)\ ,\ ROC_Y \supset ROC_X$$

Propriedades

Diferenciação

Exemplo

- Calcular a TLB dos sinais
  - Impulso unitário

$$x(t) = \delta(t)$$

❖Sabendo que:

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

  - Rampa

$$x(t) = tu(t)$$

- *Dica*

$$u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} \ , \ \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s)$$

$$-tx(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{d}{ds}X(s)$$

Propriedades

Diferenciação

Solução

- Impulso unitário:
  - Sabemos que:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$$

$$L\{\delta(t)\} = L\left\{\frac{d}{dt}u(t)\right\} \qquad \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s)$$

$$L\{\delta(t)\} = sL\{u(t)\}$$

$$L\{\delta(t)\} = s\left(\frac{1}{s}\right) \qquad u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} \ , \ \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$L\{\delta(t)\} = 1 \ , \ s \in \mathbb{C}$$

Propriedades

Diferenciação

Solução

- Rampa:
  - Sabemos que:

$$x(t) = tu(t)$$

$$L\{x(t)\} = L\{tu(t)\} \qquad -tx(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{d}{ds}X(s)$$

$$L\{x(t)\} = -\frac{d}{ds}L\{u(t)\}$$

$$L\{x(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) \qquad u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} \ , \ \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$L\{x(t)\} = \frac{1}{s^2} \ , \ \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

Algumas Transformadas Básicas

Algumas Transformadas Básicas

Impulso unitário

- *Impulso unitário centrado no origem*

$$\delta(t) \xleftrightarrow{L} 1 \ , \ s \in \mathbb{C}$$

- *Impulso unitário deslocado no tempo*

$$\delta(t - t_o) \xleftrightarrow{L} e^{st_o} \ , \ s \in \mathbb{C}$$

Algumas Transformadas Básicas

Degrau unitário

- *Degrau unitário centrado no origem*

Causal $$u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} \ , \ \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

Anti-causal $$-u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} \ , \ \operatorname{Re}\{s\} < 0$$

- *Degrau unitário deslocado no tempo*

Causal $$u(t - t_o) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} e^{-t_o s} \ , \ \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

Anti-causal $$-u(-t + t_o) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} e^{-t_o s} \ , \ \operatorname{Re}\{s\} < 0$$

- *Degrau unitário com decaimento exponencial*

Causal $$e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s + a} \ , \ \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

Anti-causal $$-e^{-at} u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s + a} \ , \ \operatorname{Re}\{s\} < -a$$

Algumas Transformadas Básicas

Sinais Sinusoidais

- *Sinal Cosseno*

Causal $$\cos(wt) u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{s}{s^2 + w^2} \ , \ \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

Anti-causal $$-\cos(wt) u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{s}{s^2 + w^2} \ , \ \operatorname{Re}\{s\} < 0$$

- *Sinal Cosseno com decaimento exponencial*

Causal $$e^{-at} \cos(wt) u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{s + a}{(s + a)^2 + w^2} \ , \ \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

Anti-causal $$-e^{-at} \cos(wt) u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{s + a}{(s + a)^2 + w^2} \ , \ \operatorname{Re}\{s\} < -a$$

Algumas Transformadas Básicas

Sinais Sinusoidais

- *Sinal Seno*

Causal $$\sin(wt) u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{w}{s^2 + w^2} \ , \ \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

Anti-causal $$-\sin(wt) u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{w}{s^2 + w^2} \ , \ \operatorname{Re}\{s\} < 0$$

- *Sinal Seno com decaimento exponencial*

Causal $$e^{-at} \sin(wt) u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{w}{(s + a)^2 + w^2} \ , \ \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

Anti-causal $$-e^{-at} \sin(wt) u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{w}{(s + a)^2 + w^2} \ , \ \operatorname{Re}\{s\} < -a$$

Transformada Bilateral Inversa de Laplace (TBIL)

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Introdução

- A TBL tem a propriedade de ser unívoca e reversível, se é considerada a existência de uma ROC.

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s) \xrightarrow{L^{-1}} x(t) \ , \ ROC_X$$

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

?

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Introdução

- A TBL tem a propriedade de ser unívoca e reversível, se é considerada a existência de uma ROC.

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s) \xrightarrow{L^{-1}} x(t) \ , \ ROC_X$$

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma-j\infty} X(s)e^{st}ds$$

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Introdução

- A TBL tem a propriedade de ser unívoca e reversível, se é considerada a existência de uma ROC.

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s) \xrightarrow{L^{-1}} x(t) \ , \ ROC_X$$

- Então, podemos calcular a transformada inversa usando a expressão:

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} \ , \ ROC_X$$
$$= \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma-j\infty} X(s)e^{st}ds \ , \ ROC_X$$

- Dado que, a anterior integral pode resultar complicada de calcular, acostuma-se determinar a TBIL via consulta de tabelas de inversas existentes e usando as propriedades da transformada de Laplace, outras inversas são calculadas.

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

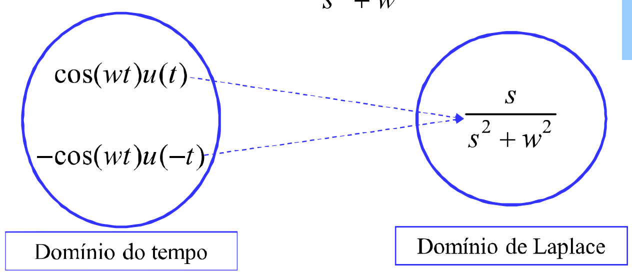
Introdução

- *Papel do ROC no calculo da TBIL*
  - Requerido para avaliar a Transformada Inversa de Laplace. A operação para achar tal Transformada requer integração no plano complexo. O caminho de integração deve estar no ROC (ou existência) para X(s).
  - O ROC é necessário para que exista correspondência um-para-um, entre $x(t)$ e $X(s)$, caso contrario, cada X(s) é a transformada de diferentes $x(t)$.
    - ❖Por exemplo:

$$\cos(wt)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{s}{s^2+w^2} \;,\; \mathrm{Re}\{s\}>0$$

$$-\cos(wt)u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{s}{s^2+w^2} \;,\; \mathrm{Re}\{s\}<0$$

Não foi especificado ROC



Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Introdução

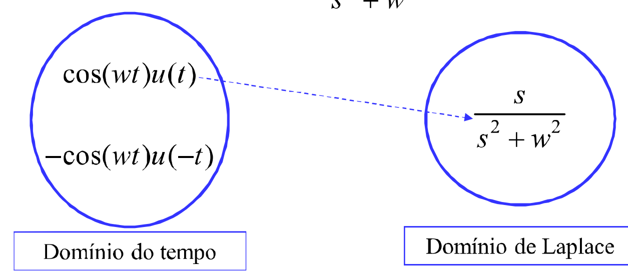
- *Papel do ROC no calculo da TBIL*
  - Requerido para avaliar a Transformada Inversa de Laplace. A operação para achar tal Transformada requer integração no plano complexo. O caminho de integração deve estar no ROC (ou existência) para X(s).
  - O ROC é necessário para que exista correspondência um-para-um, entre $x(t)$ e $X(s)$, caso contrario, cada X(s) é a transformada de diferentes $x(t)$.
    - ❖Por exemplo:

$$\cos(wt)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{s}{s^2+w^2} \;,\; \mathrm{Re}\{s\}>0$$

$$-\cos(wt)u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{s}{s^2+w^2} \;,\; \mathrm{Re}\{s\}<0$$

Especificando o ROC

$\mathrm{Re}\{s\}>0$



Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Método de Expansão em Frações Parciais

- No caso de que $X(s)$ seja uma função racional

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

$$=\frac{b_0+b_1s+\cdots+b_{M-1}s^{M-1}+b_Ms^M}{a_0+a_1s+\cdots+a_{N-1}s^{N-1}+a_Ns^N}$$

- O calculo da transformada inversa de $X(s)$ são baseados no método de expansão em frações parciais.

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Método de Expansão em Frações Parciais

- *Restrição do Método*
  - A função racional $X(s) = N(s)/D(s)$ deve ser uma função própria.
- *Que é uma função própria?*
  - É aquela função racional onde o grau do denominador é **MAIOR** que o grau do numerador.
  - Por exemplo:

$$X(s)=\underbrace{\frac{5.5+2.1s^1}{1+0.8s+0.2s^2}}_{\begin{pmatrix}\text{grau}\\ \text{numerador}\end{pmatrix}<\begin{pmatrix}\text{grau}\\ \text{denominador}\end{pmatrix}}$$

$$1<2$$

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Método de Expansão em Frações Parciais

- *Restrição do Método*
  - A função racional $X(s) = N(s)/D(s)$ deve ser uma função própria.
- *Que fazemos se a função não é própria (ou seja, ela é impropria)?*
  - Neste caso, dividimos algebricamente o numerador pelo denominador até obter uma função racional própria.
  - Por exemplo:

$$X(s) = \underbrace{\frac{2+0.8s+0.5s^2+0.3s^3}{1+0.8s+0.2s^2}}_{(\text{grau numerador}) > (\text{grau denominador}),\ 3>2}$$

$$X(s) = -3.5+1.5s+\underbrace{\frac{5.5+2.1s^1}{1+0.8s+0.2s^2}}_{(\text{grau numerador}) < (\text{grau denominador}),\ 1<2}$$

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Método de Expansão em Frações Parciais

- *Procedimento*
  - **PASSO 1**. Asseguramos que $X(s)$ seja uma função racional própria, caso contrario, dividimos algebricamente o numerador e denominador ate obter uma função racional própria.
  - **PASSO 2**. Reescrevemos a função $X(s)$ como uma soma de frações parciais:

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s) + \ldots + X_N(s)$$

  - **PASSO 3**. Determinamos a TBIL de cada fração parcial:

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s) + \ldots + X_N(s)$$

$$L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\{X_1(s) + X_2(s) + \ldots + X_N(s)\}$$

$$L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\{X_1(s)\} + L^{-1}\{X_2(s)\} + \ldots + L^{-1}\{X_N(s)\}$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \ldots + x_N(t)$$

$$ROC_X = ROC_{X_1} \cap ROC_{X_2} \cap \cdots \cap ROC_{X_N}$$

Propriedade de Linearidade

$$x_i(t) \xleftrightarrow{L} X_i(s)$$

$$ROC_{X_i}$$

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Método de Expansão em Frações Parciais

- *Casos*
  - A separação em frações parciais (passo 2), é feito considerando dois possíveis casos:
    - **Caso 1**. O denominador de $X(s)$ é um polinômio com polos distintos. Por exemplo,
      - Se consideremos que os N polos $p_1, p_2, \ldots, p_N$ são todos distintos, então o denominador poderá ser fatorado como:

$$D(s) = (s+p_1)(s+p_2)\ldots.(s+p_N)$$

    - **Caso 2**. O denominador de $X(s)$ é um polinômio com polos repetidos.
      - Por exemplo,
        - Se consideremos que o polo p_1 tem multiplicidade r e os demais $N-r$ polos $p_2,\ldots,p_{N-r}$ são todos distintos, então o denominador poderá ser fatorado como:

$$D(s) = (s+p_1)^r(s+p_2)\ldots.(s+p_{N-r})$$

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Método de Expansão em Frações Parciais

- *Caso 1*
  - *Expressão*

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s+p_1).(s+p_2)\ldots.(s+p_N)}$$

  - *Representação por frações parciais*

$$X(s) = \underbrace{\frac{a_1}{(s+p_1)} + \frac{a_2}{(s+p_2)} + \cdots + \frac{a_N}{(s+p_N)}}_{p_1,p_2,\cdots,p_N \text{ são polos simples}}$$

Valores dos resíduos dos polos simples

$$a_1 = \lim_{s\to -p_1}(s+p_1)X(s)$$

$$a_2 = \lim_{s\to -p_2}(s+p_2)X(s)$$

$$\vdots$$

$$a_N = \lim_{s\to -p_1}(s+p_N)X(s)$$

Demostração

- Considerando a expansão por frações parciais.

$$X(s) = \frac{a_1}{(s+p_1)} + \cdots + \frac{a_i}{(s+p_i)} + \cdots + \frac{a_N}{(s+p_N)}$$

- Calculo do resíduo a_i:
  - Multiplicando ambos lados da igualdade por $(s + p_i)$.

$$(s+p_i)X(s) = a_1\frac{(s+p_i)}{(s+p_1)} + \cdots + a_i + \cdots + a_N\frac{(s+p_i)}{(s+p_N)}$$

  - Avaliando a expressão resultante em $-p_i$.

$$\lim_{s\to -p_i}(s+p_i)X(s) = \cancel{\lim_{s\to -p_i} a_1\frac{(s+p_i)}{(s+p_1)}} + \cdots + \lim_{s\to -p_i} a_i + \cdots + \cancel{\lim_{s\to -p_i} a_N\frac{(s+p_i)}{(s+p_N)}}$$

$$= a_i$$

  - Então:

$$\boxed{a_i = \lim_{s\to -p_i}(s+p_i)X(s)\ ,\ i = 1,2,\cdots,N}$$

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Método de Expansão em Frações Parciais

Exemplo

- Determinar a transformada TBIL do sinal:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\ ,\ \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

- *Dica*
  - Lembra que:
    - *Degrau unitário com decaimento exponencial*

Causal $\quad e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}\ ,\ \mathrm{Re}\{s\} > -a$

Anti-causal $\quad -e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}\ ,\ \mathrm{Re}\{s\} < -a$

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Método de Expansão em Frações Parciais

Solução

- Aplicando o método de frações parciais
  - Podemos ver que estamos no caso 1 (polos simples):

$$X(s) = \frac{a_1}{(s+1)} + \frac{a_2}{(s+2)}$$

  - Calculando o valor dos resíduos:

$$a_1 = \lim_{s\to -1}(s+1)X(s) = \lim_{s\to -1}\frac{1}{(s+2)} = 1$$

$$a_2 = \lim_{s\to -2}(s+2)X(s) = \lim_{s\to -2}\frac{1}{(s+1)} = -1$$

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Método de Expansão em Frações Parciais

Solução

- Aplicando o método de frações parciais
  - Determinando a TBIL de cada fração:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} = \begin{cases} e^{-t}u(t) & \mathrm{Re}\{s\} > -1 \\ -e^{-t}u(-t) & \mathrm{Re}\{s\} < -1 \end{cases}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\} = \begin{cases} e^{-2t}u(t) & \mathrm{Re}\{s\} > -2 \\ -e^{-2t}u(-t) & \mathrm{Re}\{s\} < -2 \end{cases}$$

  - Por dado do problema, sabemos que:

$$ROC_X = \{s \in \mathbb{C}\ |\mathrm{Re}\{s\} > -1\}$$

  - Então:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} = e^{-t}u(t)\ ,\ \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\} = e^{-2t}u(t)\ ,\ \mathrm{Re}\{s\} > -2$$

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Método de Expansão em Frações Parciais

Solução

- Aplicando o método de frações parciais
  - Finalmente:

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)}+\frac{-1}{(s+2)}$$

$$L^{-1}\{X(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\}$$

$$x(t)=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$$

$$=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Método de Expansão em Frações Parciais

- *Caso 2*
  - *Expressão*

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{N(s)}{(s+p_1)^r(s+p_2)....(s+p_{N-r})}$$

- *Representação por frações parciais*

$$X(s)=\underbrace{\frac{a_1}{(s+p_1)}+\frac{a_2}{(s+p_1)^2}+\cdots+\frac{a_r}{(s+p_1)^r}}_{p_1 \text{ é um polo de multiplicidade } r}+\underbrace{\frac{a_{r+1}}{(s+p_2)}+\cdots+\frac{a_N}{(s+p_{N-r})}}_{p_2,\cdots,p_{N-r} \text{ são polos simples}}$$

Valores dos resíduos do polo com multiplicidade

$$a_r=\lim_{s\to -p_1}(s+p_1)^r X(s)$$

$$a_{r-1}=\lim_{s\to -p_1}\frac{d(s+p_1)^r X(s)}{ds}$$

$$\vdots$$

$$a_1=\frac{1}{(r-1)!}\lim_{s\to -p_1}\frac{d^{r-1}(s+p_1)^r X(s)}{ds^{r-1}}$$

Valores dos resíduos dos polos simples

$$a_{r+1}=\lim_{s\to -p_2}(s+p_2)X(s)$$

$$a_{r+2}=\lim_{s\to -p_3}(s+p_3)X(s)$$

$$\vdots$$

$$a_N=\lim_{s\to -p_{N-r}}(s+p_{N-r})X(s)$$

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Método de Expansão em Frações Parciais

Exemplo

- Determinar a transformada TBIL do sinal:

$$X(s)=\frac{s+2}{(s+1)^2}\ ,\ \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

- *Dica*
  - Lembra que:
    - *Degrau unitário com decaimento exponencial*

Causal $\quad e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s+a}\ ,\ \mathrm{Re}\{s\}>-a$

Anti-causal $\quad -e^{-at}u(-t)\xleftrightarrow{L}\frac{1}{s+a}\ ,\ \mathrm{Re}\{s\}<-a$

- *Fração parcial de um polo de multiplicidade 2*

$$X(s)=\frac{a_1}{(s+p_1)}+\frac{a_2}{(s+p_1)^2}\Rightarrow\begin{cases}a_2=\lim_{s\to -p_1}(s+p_1)^2X(s)\\ a_1=\lim_{s\to -p_1}\frac{d(s+p_1)^2X(s)}{ds}\end{cases}$$

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Método de Expansão em Frações Parciais

Solução

- Aplicando o método de frações parciais
  - Podemos ver que estamos no caso 2 (um polo com multiplicidade 2):

$$X(s)=\frac{a_1}{(s+1)}+\frac{a_2}{(s+1)^2}$$

- Calculando o valor dos resíduos:

$$a_2=\lim_{s\to -1}(s+1)^2X(s)=\lim_{s\to -1}(s+2)=1$$

$$a_1=\lim_{s\to -2}\frac{d(s+1)^2X(s)}{ds}=\lim_{s\to -2}\frac{d(s+2)}{ds}=\lim_{s\to -2}1=1$$

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Método de Expansão em Frações Parciais

Solução

- Aplicando o método de frações parciais
  - Determinando a TBIL de cada fração:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} = \begin{cases} e^{-t}u(t) & \mathrm{Re}\{s\} > -1 \\ -e^{-t}u(-t) & \mathrm{Re}\{s\} < -1 \end{cases}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = \begin{cases} te^{-t}u(t) & \mathrm{Re}\{s\} > -1 \\ -te^{-t}u(-t) & \mathrm{Re}\{s\} < -1 \end{cases}$$

  - Por dado do problema, sabemos que:

$$ROC_X = \left\{ s \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}\{s\} > -1 \right\}$$

  - Então:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} = e^{-t}u(t)\ ,\ \ \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} = te^{-t}u(t)\ ,\ \ \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

Transformada Bilateral Inversa de Laplace

Método de Expansão em Frações Parciais

Solução

- Aplicando o método de frações parciais
  - Finalmente:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$L^{-1}\{X(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}$$

$$x(t) = e^{-t}u(t) + te^{-t}u(t)$$

$$= (e^{-t} + te^{-t})u(t)$$

Resumo

TBL e TBIL

TBL: Equação de análises

$$X(s) = L\{x(t)\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Domínio do tempo

$x(t)$

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$$

$X(s)$

Domínio de Laplace

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma-j\infty} X(s)e^{st}ds$$

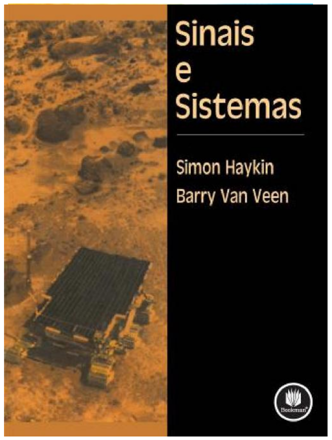
TBIL: Equação de sínteses

$$ROC = \left\{ s \in \mathbb{C} \,\middle|\, \|X(s)\| < \infty \right\}$$

Bibliografia

Bibliografia

HAYKIN, S. e VAN VEEN, B. **Sinais e sistemas**. Porto Alegre: Bookman, 2001. (19).



Indicação das seções do livro a ler em relação aos temas abordados na apresentação.

- A transformada de Laplace Bilateral (6.6).