Aqui inicia o conteúdo da terceira prova!!!

Valores Máximos e Mínimos de Funções

Definição (Máximo e Mínimo Global)

Uma função f tem **máximo absoluto(ou máximo global)** em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em D, onde D é o domínio de f. O número $f(c)$ é chamado **valor máximo** de f em D.

Analogamente, f tem **mínimo absoluto(ou mínimo global)** em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em D, onde D é o domínio de f. O número $f(c)$ é chamado **valor mínimo** de f em D.

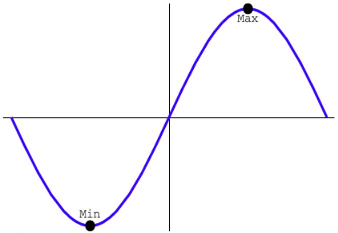
Os valores máximos e mínimos de f são chamados de **valores extremos** de f.

Valores Máximos e Mínimos de Funções

Definição (Máximo e Mínimo Local)

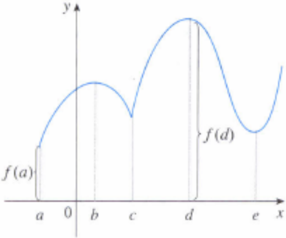
Uma função f tem **máximo relativo (ou máximo local)** em c se $f(c) \geq f(x)$ quando x estiver nas proximidades de c. Isto significa que $f(c) \geq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.

Analogamente, f tem **mínimo relativo(ou mínimo local)** em c se $f(c) \leq f(x)$ quando x estiver próximo de c.

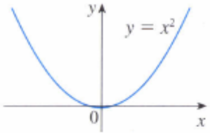


Pontos de mínimo e máximo.

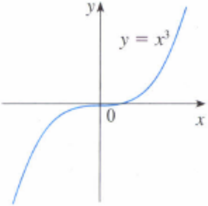
Valores Máximos e Mínimos de Funções



Valor mínimo absoluto $f(a)$ e Valor máximo absoluto $f(d)$



Valor mínimo 0 e nenhum máximo



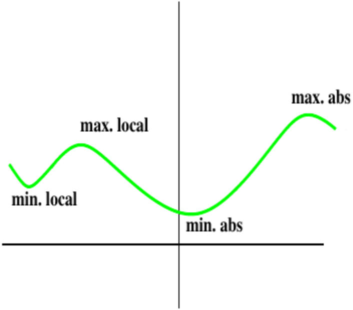
Nenhum mínimo e nenhum máximo

Valores Máximos e Mínimos de Funções

Teorema do valor extremo

Se f for continua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.

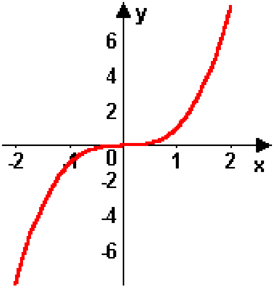
Um ponto de máximo absoluto é um ponto de máximo local. A recíproca é falsa. Analogamente para mínimo absoluto.



Valores Máximos e Mínimos de Funções

Teorema de Fermat
Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Importante: A volta do Teorema de Fermat não é verdadeira, ou seja, nem sempre que $f'(c) = 0$ temos um ponto de máximo ou mínimo local. Exemplo $f(x) = x^3$, cuja derivada $(f'(x) = 3x^2)$ em $x = 0$ é nula $(f'(0) = 0)$, mas não temos nem ponto de máximo nem de mínimo em $x = 0$.



Valores Máximos e Mínimos de Funções

Números críticos de $f(x)$

Um **número crítico** de uma função f é um número c no domínio de f onde $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Com a definição acima, podemos dizer que se f tiver um máximo ou mínimo local em c, então c é um número crítico de f.

Valores Máximos e Mínimos de Funções

Exemplo

Ache os números críticos da função f definida por

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$$

Solução

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{4}{3}x^{1/3} + \tfrac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \tfrac{4}{3}x^{-2/3}(x+1) \\ &= \frac{4(x+1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

Quando $x = -1$, $f'(x) = 0$ e quando $x = 0$, $f'(x)$ não existe. Ambos -1 e 0 estão no domínio de f; logo, os pontos críticos de f são -1 e 0.

Valores Máximos e Mínimos de Funções

Exemplo

Encontre os números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

SOLUÇÃO A Regra do Produto nos dá que

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4 - x)\left(\tfrac{3}{5}x^{-2/5}\right) = -x^{3/5} + \frac{3(4 - x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x + 3(4 - x)}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

[O mesmo resultado poderia ter sido obtido escrevendo-se primeiro $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.] Portanto, $f'(x) = 0$ se $12 - 8x = 0$, isto é, $x = \frac{3}{2}$, e $f'(x)$ não existe quando $x = 0$. Assim, os números críticos são $\frac{3}{2}$ e 0.

Valores Máximos e Mínimos de Funções

Método do Intervalo Fechado

Para encontrar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função f em um intervalo fechado $[a, b]$, seguimos os passos:

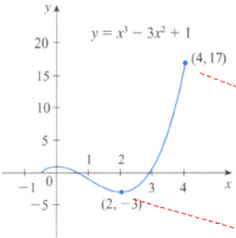
1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b).
2. Encontre os valores de f nas extremidades do intervalo, ou seja $f(a)$ e $f(b)$.
3. Compare os valores dos passos 1 e 2, o maior valor entre as etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor valor é o valor mínimo absoluto.

Obs. Este método é utilizado para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função f definida em um **intervalo fechado** $[a, b]$.

Valores Máximos e Mínimos de Funções

Exemplo: Utilizando o método do intervalo fechado, encontre os valores de máximo e mínimo absolutos da função

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\frac{1}{2} \leq x \leq 4$$



SOLUÇÃO Uma vez que f é contínua em $[-\frac{1}{2}, 4]$, podemos usar o Método do Intervalo Fechado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

Uma vez que $f'(x)$ existe para todo x, os únicos números críticos de f ocorrem quando $f'(x) = 0$, isto é, $x = 0$ ou $x = 2$. Observe que cada um desses números críticos está no intervalo $(-\frac{1}{2}, 4)$. Os valores de f nesses números críticos são

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Os valores de f nas extremidades do intervalo são

$$f(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Comparando esses quatro números, vemos que o valor máximo absoluto é $f(4) = 17$ e o valor mínimo absoluto, $f(2) = -3$.

Observe que neste exemplo o máximo absoluto ocorre em uma extremidade, enquanto o mínimo absoluto acontece em um número crítico.

Crescimento e Decrescimento de Funções

Teorema

Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b), então f é constante em (a, b).

Teste crescente/decrescente

a. Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então f é crescente nele.

b. Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então f é decrescente nele.

Derivadas e gráficos

Teste da primeira derivada

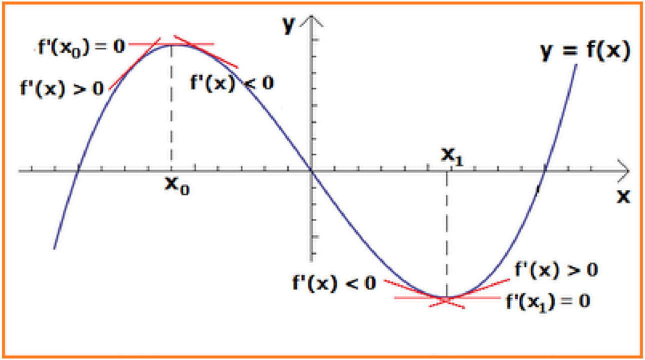
Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.

a. Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

b. Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.

c. Se f' não mudar de sinal em c (isto é, se em ambos os lados de c o sinal de f' for positivo ou negativo), então f não tem máximo ou mínimo locais em c.

Derivadas e gráficos

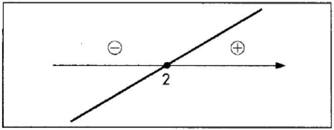


Derivadas e gráficos

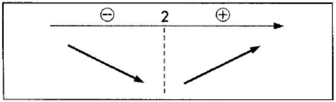
Exemplo: Consideremos a função $f(x) = x^2 - 4x$. Temos

$$f'(x) = 2x - 4.$$

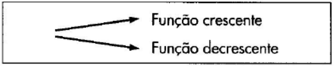
- Sinal de f':



- Comportamento de f:



Usamos a simbologia:



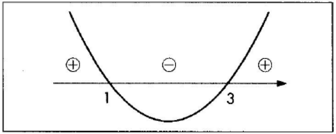
Assim, a função $f(x)$ é decrescente em $]-\infty, 2[$ e crescente em $]2, \infty[$. Como ela é contínua em 2, concluímos que $x = 2$ é um ponto de mínimo de $f(x)$.

Derivadas e gráficos

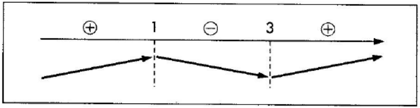
Exemplo: Consideremos a função $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 10$.

Temos que $f'(x) = x^2 - 4x + 3$.

- Sinal de f':



- Comportamento de f:



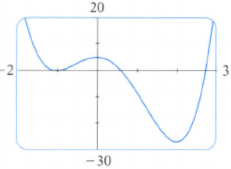
Assim, $f(x)$ é crescente em $]-\infty, 1[$ e $]3, \infty[$ e $f(x)$ é decrescente em $]1, 3[$. Como $f(x)$ é contínua em 1 e 3, segue que 1 é ponto de máximo, e 3 é ponto de mínimo.

Notemos que $x = 1$ é um ponto de máximo relativo e $x = 3$ é um ponto de mínimo relativo. Além disso, não há ponto de máximo absoluto, pois a função é crescente depois de 3, com imagens que acabam superando $f(1)$. Da mesma forma, não há ponto de mínimo absoluto.

Exemplo: Encontre onde a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ é crescente e onde ela é decrescente.

SOLUÇÃO $$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$$

Para usar o Teste C/D devemos saber onde $f'(x) > 0$ e onde $f'(x) < 0$. Isso depende dos sinais dos três fatores de $f'(x)$, isto é, $12x$, $x - 2$ e $x + 1$. Dividimos a reta real em intervalos cujas extremidades são os números críticos -1, 0 e 2 e dispomos o que fizemos em uma tabela. Um sinal de mais indica que a expressão dada é positiva, e um sinal de menos indica que é negativa. A última coluna da tabela fornece a conclusão baseada no Teste C/D. Por exemplo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$, logo f é decrescente em $(0, 2)$. (Seria também verdade dizer que f é decrescente no intervalo fechado $[0, 2]$.)



Intervalo	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	decrescente em $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	crescente em $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	decrescente em $(0, 2)$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente em $(2, \infty)$

Exemplo: Encontre onde a função $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + 5$ é crescente e onde ela é decrescente.
Solução:

Derivando f temos $f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x-2)(x+1)$; logo, $f'(x) = 0$ se, e somente se $x = 0$, $x = 2$ e $x = -1$.

Intervalos	$x(x-2)(x+1)$	$f(x)$
$-1 < x < 0$	> 0	crescente
$0 < x < 2$	< 0	decrescente
$x > 2$	> 0	crescente
$x < -1$	< 0	decrescente

f é crescente em $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$ e decrescente em $(0, 2) \cup (-\infty, -1)$.

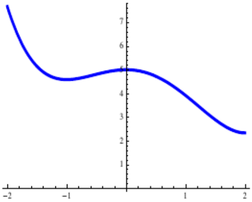


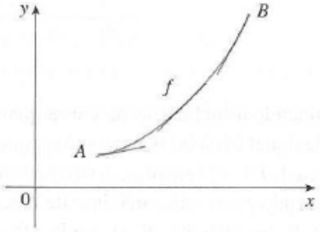
Gráfico de $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + 5$

Derivadas e gráficos

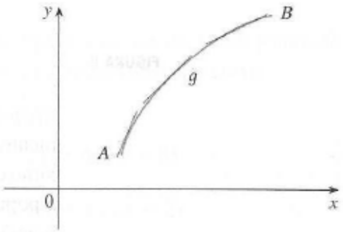
Definição de concavidade

Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I, então ele é dito **côncavo para cima** em I.

Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, é dito **côncavo para baixo** em I.



(a) Côncava para cima



(b) Côncava para baixo

Derivadas e gráficos

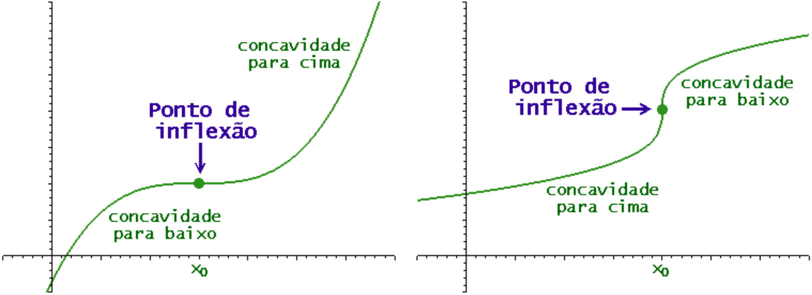
Teste de concavidade

a. Se $f''(x) > 0$ para todo x em I, então f é côncava para cima em I.

b. Se $f''(x) < 0$ para todo x em I, então f é côncava para baixo em I.

Ponto de Inflexão

Um ponto P na curva $y = f(x)$ é chamado **ponto de inflexão** se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo ou vice-versa em P.



Derivadas e gráficos

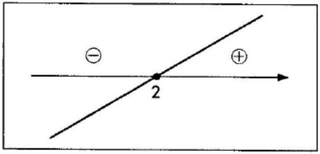
Exemplo

Consideremos a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x - 10$ e estudemos seu comportamento no que diz respeito à concavidade.

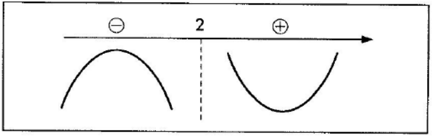
Temos:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 4 \text{ e } f''(x) = 6x - 12.$$

- Sinal de f'':



- Comportamento de f:



Portanto, f é côncava para baixo no intervalo $]-\infty, 2[$ e côncava para cima em $]2, \infty[$. Além disso, $x = 2$ é um ponto de inflexão.

Derivadas e gráficos

Exemplo

Seja $f(x) = x^3$; então: $f''(x) = 6\,x$. Por outro lado, $f''(x) > 0$ se $x > 0$ e $f''(x) < 0$ se $x < 0$; logo, $x_0 = 0$ é ponto de inflexão de f.

Teste da segunda derivada

Suponha que f'' seja contínua na proximidade de um número crítico c.

a. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.
b. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.

Derivadas e gráficos

Exemplo

Encontre os pontos de máximo e mínimo da função $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 3$.

Temos que

$$f'(x) = x^2 - 5x + 4.$$

Impondo que $f'(x) = 0$, teremos:

$$x^2 - 5x + 4 = 0, \text{ cuja solução é } x = 1 \text{ ou } x = 4.$$

Por outro lado, $f''(x) = 2x - 5$. Assim:

$$f''(1) = -3 < 0 \Rightarrow x = 1 \text{ é ponto de máximo;}$$
$$f''(4) = 3 > 0 \Rightarrow x = 4 \text{ é ponto de mínimo.}$$

Exemplo

Examine a curva $y = x^4 - 4x^3$ em relação à concavidade, aos pontos de inflexão e mínimos e máximos locais. Use essa informação para esboçar a curva.

SOLUÇÃO Se $f(x) = x^4 - 4x^3$, então

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

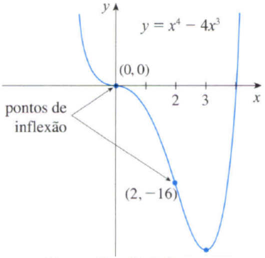
$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

Para achar os números críticos fazemos $f'(x) = 0$ e obtemos $x = 0$ e $x = 3$. Para usar o Teste da Segunda Derivada, calculamos f nesses pontos críticos:

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

Uma vez que $f'(3) = 0$ e $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ é um mínimo local. Uma vez que $f''(0) = 0$, o Teste da Segunda Derivada não fornece informações sobre o número crítico 0. Mas, uma vez que $f'(x) < 0$ para $x < 0$ e também para $0 < x < 3$, o Teste da Primeira Derivada nos diz que f não tem um máximo ou mínimo local em 0. [De fato, a expressão para $f'(x)$ mostra que f decresce à esquerda de 3 e cresce à direita de 3.]

Derivadas e gráficos



Como $f''(x) = 0$ quando $x = 0$ ou 2, dividimos a reta real em intervalos com esses números como extremidades e completamos a seguinte tabela.

Intervalo	$f''(x) = 12x(x-2)$	Concavidade
$(-\infty, 0)$	$+$	para cima
$(0, 2)$	$-$	para baixo
$(2, \infty)$	$+$	para cima

O ponto $(0, 0)$ é um ponto de inflexão, uma vez que a curva muda de côncava para cima para côncava para baixo aí. Também $(2, -16)$ é um ponto de inflexão, uma vez que é ali que a curva muda de côncava para baixo para côncava para cima.

Problemas de Otimização

Exemplo

Determine dois números reais positivos cuja soma é 70 e tal que seu produto seja o maior possível.

Considere x, $y > 0$ tal que $x + y = 70$; logo, x, $y \in [0, 70]$; o produto é: $P = x\,y$. Esta é a função que devemos maximizar. Como $y = 70 - x$, substituindo em P:

$$P(x) = x\,y = x\,(70 - x).$$

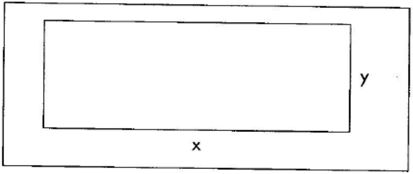
$P : [0, 70] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável. Derivando: $P'(x) = 70 - 2\,x = 2\,(35 - x)$; o ponto crítico é $x = 35$. Analisando o sinal de P', é claro que este ponto é ponto de máximo para P e $y = 35$; logo, $P = 1225$ é o produto máximo. Os números são $x = y = 35$. Note que $P(0) = P(70) = 0$.

Problemas de Otimização

Exemplo

Deseja-se construir uma área de lazer, com formato retangular, e $1.600\,m^2$ deárea. Quais as dimensões para que o perímetro seja mínimo?

Sejam x e y as dimensões do retângulo.



Temos

$$x \cdot y = 1.600 \text{ e queremos minimizar o perímetro } P = 2x + 2y.$$

De $xy = 1.600$ tiramos $y = \dfrac{1.600}{x}$. Substituindo esse valor de y em P, obtemos:

$$P = 2x + 2 \cdot \frac{1.600}{x} = 2x + \frac{3.200}{x}.$$

Em resumo, queremos minimizar a função $P(x) = 2x + \dfrac{3.200}{x}$.

Problemas de Otimização

Assim,

$$P'(x) = 2 - \frac{3.200}{x^2}.$$

Impondo que $P'(x) = 0$, teremos

$$2 - \frac{3.200}{x^2} = 0, \text{ ou seja, } x^2 = 1.600.$$

Logo

$x = 40$ ou $x = -40$ (a resposta negativa não convém, pois x, sendo comprimento do retângulo, é necessariamente positivo).

Para confirmarmos que $x = 40$ é efetivamente um ponto de mínimo, calculamos $P''(x)$:

$$P''(x) = \frac{6.400}{x^3} \quad \text{e} \quad P''(40) = \frac{6.400}{40^3} > 0$$

Portanto $x = 40$ é de fato ponto de mínimo.

Como $xy = 1.600 \Rightarrow 40y = 1.600$ e, portanto, $y = 40$.

Assim, as dimensões do retângulo são $x = 40$ m e $y = 40$ m.