Aula 9 — Cálculo 3B — 2021.1

Aula passada: tipos especiais (não lineares)

Aula hoje: lineares 2ª ordem

Capítulo 3 Equações lineares de 2ª ordem

Teoria abstrata

Definição uma equação diferencial de segunda ordem da forma

$$\boxed{y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)} \quad (1)$$

é dita linear. Se $g(t) \equiv 0$, (1) é dita homogênea, do contrário não homogênea.

Exemplo

a) $y'' + t^2 y = 0$

↳ linear homogênea

b) $ay'' + by' + cy = t$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

↳ linear não homogênea

c) $y'' + y'y = 0$

↳ não linear

Definição Um problema de valor inicial é uma EDO sujeita a uma condição inicial

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

↳ precisa de duas informações

Teorema (3.2.1) Existência e unicidade

Considere o PVI $\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$

onde p, q e $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas $t_0 \in I$ então existe uma única solução desse PVI $y = \phi(t)$ definida em I (intervalo aberto).

↳ Existe solução

↳ ela é única

Exemplo: Determine o maior intervalo no qual o PVI certamente tem solução

$$(*) \begin{cases} (t^2 - 3t)y'' + ty' - (t+3)y = 0 \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$$

Solução

$$y'' + \underbrace{\frac{t}{t^2 - 3t}}_{p(t)} \cdot y' - \underbrace{\frac{(t+3)}{t^2 - 3t}}_{q(t)} \cdot y = 0$$

p e q são contínuas em $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$, $(3, +\infty)$ como $1 \in (0,3)$ $(*)$ tem uma única sol. def em $(0,3)$.

3.2 Soluções fundamentais de equações homogêneas

Vamos discutir sobre a forma das soluções das edo's homogêneas

$$\boxed{y'' + p(t)y' + q(t)y = 0}$$

Teorema (Princípio da Superposição)

Se $y_1(t)$, $y_2(t)$ são soluções da equação linear
$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$
então a combinação linear $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ também é solução da equação, quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2

Prova:

Seja $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ então derivando:

$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$ novamente

$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2''$

Substituindo:

$$(c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + p(t)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(t)(c_1 y_1 + c_2 y_2)$$

$$= \{c_1 y_1'' + p(t) c_1 y_1' + q(t) c_1 y_1\}$$

$$+ \{c_2 y_2'' + p(t) c_2 y_2' + q(t) c_2 y_2\}$$

$$= c_1 \underbrace{\{y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1\}}_{=0} + c_2 \underbrace{\{y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2\}}_{=0}$$

pois y_1 é solução — pois y_2 é solução

Ou seja o conjunto as soluções de $y''+p(t)y'+q(t)=0$ é um espaço vetorial (Álgebra Linear). O Teorema a seguir garante que este espaço vetorial tem dimensão 2.

Teorema (Dimensão)

Seja $y''+p(t)y'+q(t)y=0 \quad (*)$ então

$S_0 = \{$ o espaço das soluções de $(*)\}$ tem dimensão 2

Prova Considere

$$T: S_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$y \longmapsto (y(t_0), y'(t_0))$$

i) T é uma transformação linear

$$T(y_1+y_2) = \left((y_1+y_2)(t_0), (y_1'+y_2')(t_0)\right)$$
$$= \left(y_1(t_0)+y_2(t_0), y_1'(t_0)+y_2'(t_0)\right)$$
$$= (y_1(t_0), y_1'(t_0)) + (y_2(t_0), y_2(t_0)) = T(y_1)+T(y_2)$$

$$T(\lambda y) = (\lambda y(t), \lambda y'(t)) = \lambda(y(t), y'(t)) = \lambda T(y)$$

ii) T é uma bijeção:

Seja $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ então pelo Teorema de existência e unicidade:

- Existe $y \in S_0$ isto solução de

$$y''+p(t)y'+q(t)y=0$$

tal que $y(t_0)=y_0$
$y'(t_0)=y_1$ (T sobrejetora)

- E é única esta solução (T é injetora)

Portanto

$$\dim S_0 = \dim \mathbb{R}^2 = 2.$$

Nota Seja $y_1(t), y_2(t)$ duas soluções de

$$y''+p(t)y'+q(t)y=0 \quad (**)$$

linearmente independente (LI) isto é $y_1(t)$ e $y_2(t)$ NÃO são múltiplas uma da outra então ($y_1(t), y_2(t)$ é uma base de S_0) qualquer outra solução $y(t)$ de $(**)$ é escrita da forma

$$\boxed{y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)}$$

Nosso objetivo é achar essas soluções LI

Recorde Seja V um espaço vetorial, u e v são LI se $au+bv=\vec{0}$ então $a=b=0$

se a ou $b \neq 0$ poderíamos escrever

$$u = \frac{b}{a} v$$

um é múltiplo do outro (LD) linearmente dependentes

Exemplo:

a) as funções $f(t)=t$ e $g(t)=t^2$ são LI não são múltiplos

b) as funções $f(t)=e^{t}$ e $g(t)=e^{-2t}$ são LI

c) as funções $f(t)=3t^3$ e $g(t)=-t^3$ são LD pois

$$\boxed{f(t)=-3g(t)}$$

d) as funções $f(t)=\text{sen}2t$ e $g(t)=\text{sen}t\cos t$ são LD pois

$$\text{sen}2t = 2\,\text{sen}t\cos t$$
$$\boxed{f(t)=2g(t)}$$

3.3 Independencia linear e o Wronskiano

Motivação:

sup
$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = a \\ y'(t_0) = b \end{cases}$$

e $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ solução

↳ existem c_1, c_2 únicos pelo TEU

então

$$a = y(t_0) = c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0)$$

$$b = y'(t_0) = c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0)$$

de forma matricial

$$\begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

↳ para que este sistema tenha uma única solução:

$$\det \begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

definição sejam f e g funções diferenciáveis

$$\boxed{W(f,g)(t) = \det \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{pmatrix} = f(t).g'(t) - g(t)f'(t)}$$

é dito Wronskiano de f,g

Teorema se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções de

$$\boxed{y'' + p(t)y' + q(t)y = 0}$$

e $W(y_1,y_2)(t_1) \neq 0$ para algum t_1

então $W(y_1,y_2)(t) \neq 0$ para todo $t \in I \subset \mathbb{R}$

e y_1, y_2 são LI (linearmente independente)

Exemplo Mostre que $y_1 = \sqrt{t}$ e $y_2 = \frac{1}{t}$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação

$$2t^2 y'' + 3ty' - y = 0$$

Solução

Verificar se são soluções

$y_1' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ $\quad y_1'' = -\frac{1}{4\sqrt{t^3}}$ $\to 2t^2\left(-\frac{1}{4t\sqrt{t}}\right) + 3t\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) - \sqrt{t}$

$-\frac{1}{2}\sqrt{t} + \frac{3}{2}\sqrt{t} - \sqrt{t} = 0$

$y_2' = -\frac{1}{t^2}$ $\quad y_2'' = \frac{2}{t^3}$ $\to 2t^2 . \frac{2}{t^3} + 3t.\left(-\frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{t} = 0$

Verificando que são LI:

$$W(y_1,y_2) = \det \begin{pmatrix} \sqrt{t} & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} & -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{t} . -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2\sqrt{t}} . \frac{1}{t} = \frac{-3}{2\sqrt{t^3}} \neq 0$$

$\sqrt{t}, \frac{1}{t}$ conjunto fundamental de solução

$$\boxed{y = c_1\sqrt{t} + c_2\frac{1}{t}}$$ solução geral