

Algoritmos Numéricos 2^a edição

Capítulo 5: Integração numérica

Capítulo 5: Integração numérica

5.1 Fórmulas de Newton-Cotes

5.2 Quadratura de Gauss-Legendre

5.3 Comparação dos métodos de integração simples

5.4 Integração numérica iterativa

5.5 Integração dupla pelas fórmulas de Newton-Cotes

5.6 Integração dupla via fórmulas de Gauss-Legendre

5.7 Comparação dos métodos para integração dupla

5.8 Exemplos de aplicação: distribuição de probabilidade e integral imprópria

5.9 Exercícios

Integração numérica

- Seja uma função $f(x)$ integrável no intervalo $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ onde } F'(x) = f(x).$$

- Uso de métodos numéricos para avaliar a integral de $f(x)$:
 - forma analítica de $F(x)$ de difícil obtenção ou
 - conhecidos somente valores discretos de $f(x)$.
- Aproximar a função $f(x)$ por um polinômio interpolador.
- Determinar analiticamente a integral desse polinômio no intervalo $[a, b]$.
- Integração numérica:
 - fórmulas de Newton-Cotes e
 - quadratura de Gauss-Legendre.
- Integrais simples e duplas.

Fórmulas de Newton-Cotes

- Função $f(x)$ aproximada por polinômio interpolador.
- Por exemplo, um polinômio de Gregory-Newton

$$f(x) \approx P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta^i y_0}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (u_x - j), \text{ onde } u_x = \frac{x - x_0}{h}. \quad (1)$$

Regra do trapézio

- Para (1) com $n = 1$

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_1} P_1(x) \, dx.$$

- Mudança de variável de $x \rightarrow u_x$ e simplificando a notação de $u_x \rightarrow u$

$$u = \frac{x - x_0}{h} \longrightarrow x = hu + x_0 \rightsquigarrow dx = hdu,$$

$$x = a = x_0 \longrightarrow u = \frac{x_0 - x_0}{h} \rightsquigarrow u = 0 \text{ e}$$

$$x = b = x_1 \longrightarrow u = \frac{x_1 - x_0}{h} = \frac{h}{h} \rightsquigarrow u = 1.$$

Regra do trapézio cont.

- Usando a notação $y_i = f(x_i)$

$$I_1 = \int_{a=x_0}^{b=x_1} P_1(x) dx = \int_0^1 (y_0 + u\Delta y_0)h du.$$

- Integrando, analiticamente, este polinômio de grau 1 em relação a u

$$I_1 = h \left[y_0 u + \frac{u^2}{2} \Delta y_0 \right] \Big|_0^1 = h \left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2} \right) = \frac{h}{2} (2y_0 + y_1 - y_0),$$

$$I_1 = \frac{h}{2} (y_0 + y_1). \quad (2)$$

Exemplo da regra do trapézio

Exemplo 1 Calcular $\int_1^7 \frac{1}{x} dx$ pela regra do trapézio.

- Polinômio de grau 1 passa pelos pontos com abscissas

$$a = x_0 = 1 \text{ e } b = x_1 = 7,$$

$$h = 7 - 1 = 6,$$

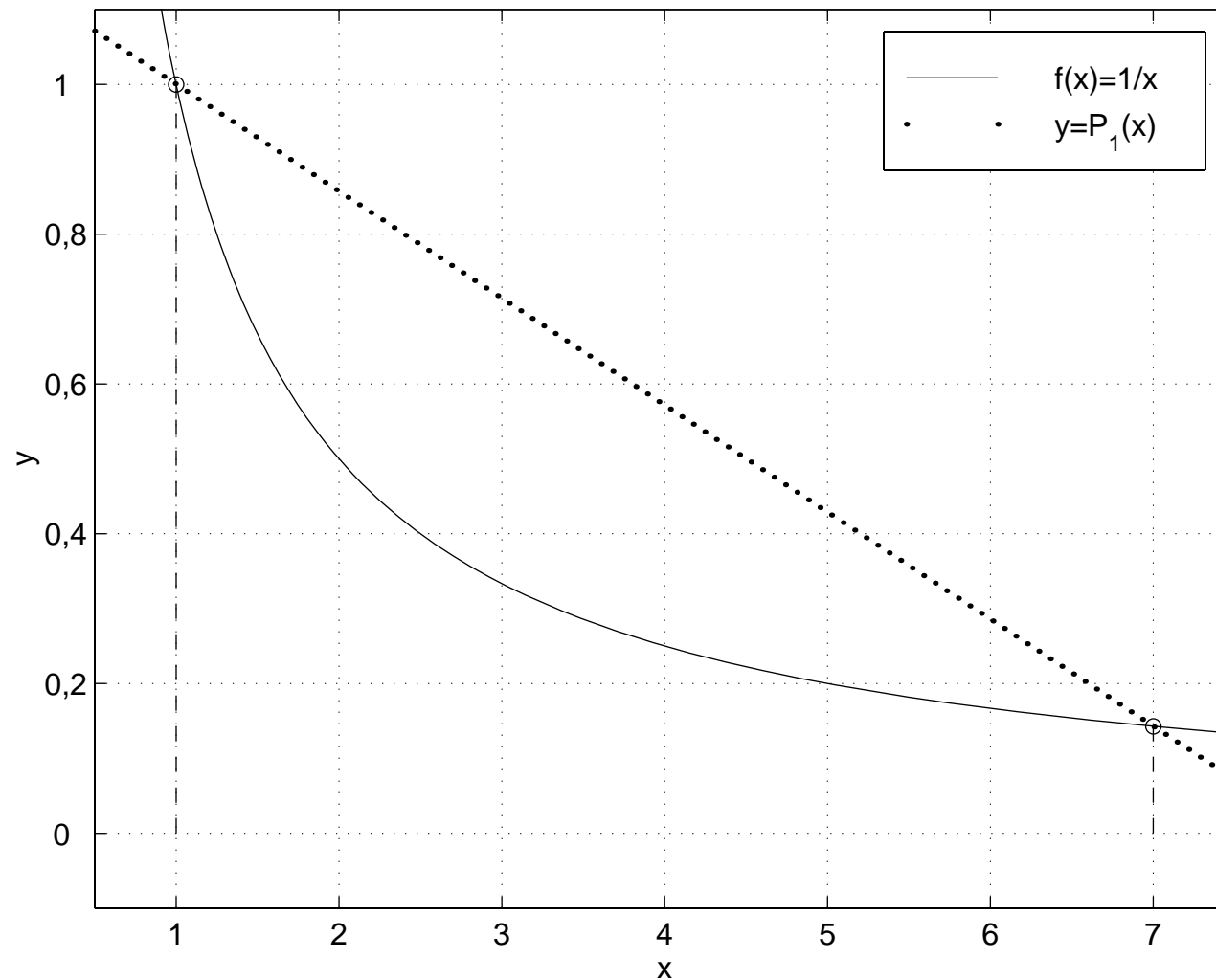
$$I_1 = \frac{6}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{7} \right) \leadsto I_1 = 3,4286.$$

Integração numérica pela regra do trapézio

- Aproximação de $f(x) = 1/x$ por polinômio interpolador $P_1(x)$ de grau 1.

||

Fórmula de Newton–Cotes com polinômio de grau 1



Regra do 1/3 de Simpson

- Aproximando $f(x)$ por um polinômio interpolador $P_2(x)$ de grau 2

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_2} P_2(x) dx.$$

- Mudança de variável

$$x = a = x_0 \longrightarrow u = \frac{x_0 - x_0}{h} \rightsquigarrow u = 0 \text{ e}$$

$$x = b = x_2 \longrightarrow u = \frac{x_2 - x_0}{h} = \frac{2h}{h} \rightsquigarrow u = 2.$$

- Equação de integração

$$I_2 = \int_{a=x_0}^{b=x_2} P_2(x) dx = \int_0^2 \left(y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u^2 - u}{2} \Delta^2 y_0 \right) h du.$$

Regra do 1/3 de Simpson cont.

- Integrando, analiticamente, este polinômio de grau 2 em relação a u

$$I_2 = h \left[y_0 u + \frac{u^2}{2} \Delta y_0 + \left(\frac{u^3}{6} - \frac{u^2}{4} \right) \Delta^2 y_0 \right] \Big|_0^2,$$
$$I_2 = h \left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0) \right],$$

$$I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

(3)

Exemplo da regra do 1/3 de Simpson

Exemplo 2 Calcular $\int_1^7 \frac{1}{x} dx$, usando a regra do 1/3 de Simpson (3).

- Para construir um polinômio de grau 2 são necessários 3 pontos.
- Polinômio de grau 2 passa pelos pontos com abscissas

$$a = x_0 = 1, \quad x_1 = 4 \quad \text{e} \quad b = x_2 = 7,$$

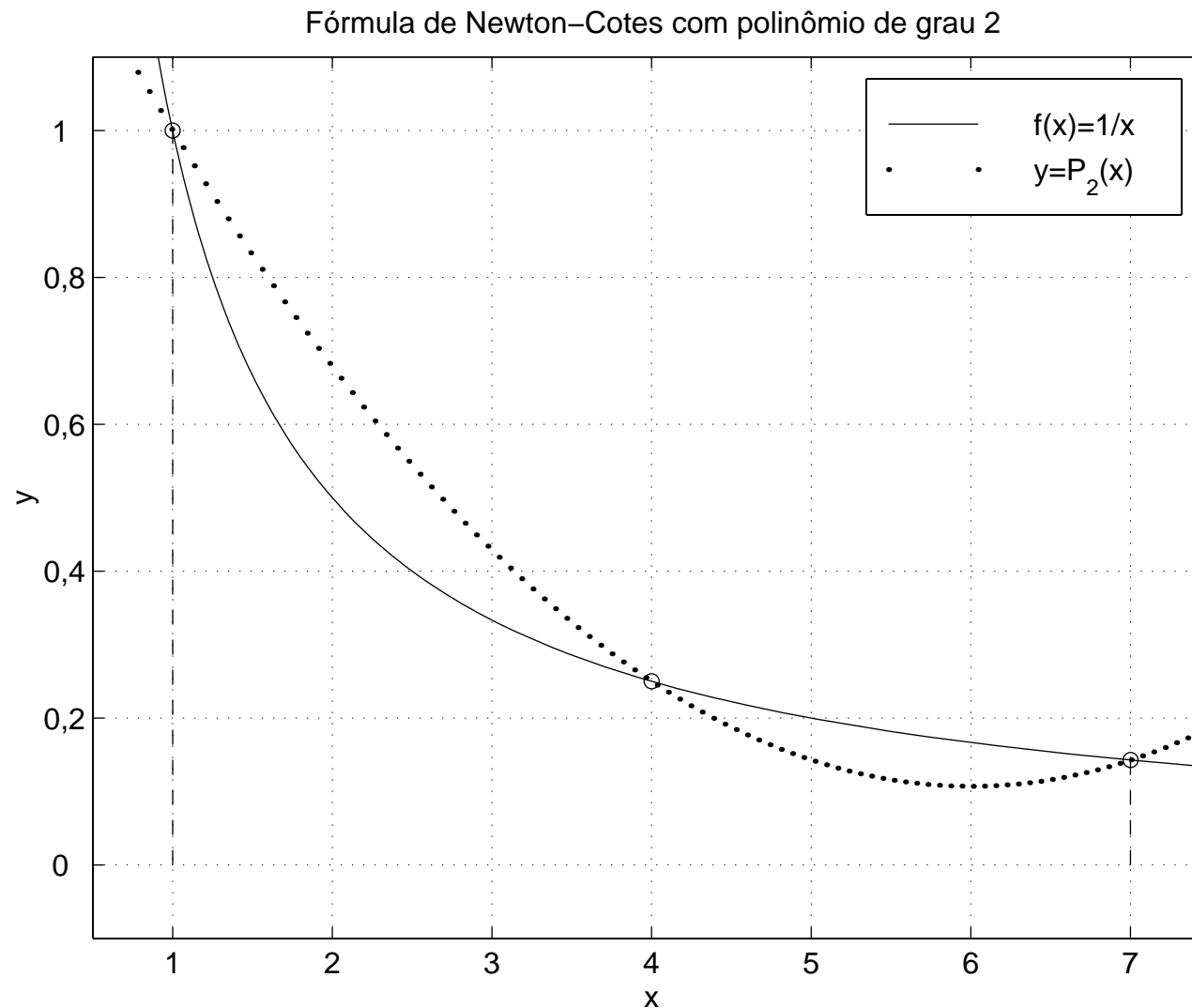
$$h = \frac{7 - 1}{2} = 3,$$

$$I_2 = \frac{3}{3} \left(\frac{1}{1} + 4\frac{1}{4} + \frac{1}{7} \right) \rightsquigarrow I_2 = 2,1429.$$

Integração numérica pela regra do 1/3 de Simpson

- Aproximação de $f(x) = 1/x$ por polinômio interpolador $P_2(x)$ de grau 2.

||=



Regra dos 3/8 de Simpson

- Aproximando $f(x)$ por um polinômio interpolador $P_3(x)$ de grau 3

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_3} P_3(x) dx.$$

- Mudança de variável

$$x = a = x_0 \longrightarrow u = \frac{x_0 - x_0}{h} \rightsquigarrow u = 0 \text{ e}$$

$$x = b = x_3 \longrightarrow u = \frac{x_3 - x_0}{h} = \frac{3h}{h} \rightsquigarrow u = 3.$$

- Equação de integração

$$I_3 = \int_{a=x_0}^{b=x_3} P_3(x) dx,$$

$$I_3 = \int_0^3 \left(y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u^2 - u}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{u^3 - 3u^2 + 2u}{6} \Delta^3 y_0 \right) h du.$$

Regra dos 3/8 de Simpson cont.

- Integrando, analiticamente, este polinômio de grau 3 em relação a u

$$I_3 = h \left[y_0 u + \frac{u^2}{2} \Delta y_0 + \left(\frac{u^3}{6} - \frac{u^2}{4} \right) \Delta^2 y_0 + \left(\frac{u^4}{24} - \frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{6} \right) \Delta^3 y_0 \right] \Big|_0^3,$$

$$I_3 = h \left[3y_0 + \frac{9}{2}(y_1 - y_0) + \frac{9}{4}(y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{3}{8}(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0) \right],$$

$$I_3 = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3). \quad (4)$$

Exemplo da regra dos 3/8 de Simpson

Exemplo 3 Calcular $\int_1^7 \frac{1}{x} dx$ pela regra dos 3/8 de Simpson (4).

- São necessários 4 pontos para construir um polinômio de grau 3.
- Abscissas

$$a = x_0 = 1, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 5 \quad \text{e} \quad b = x_3 = 7,$$

$$h = \frac{7 - 1}{3} = 2,$$

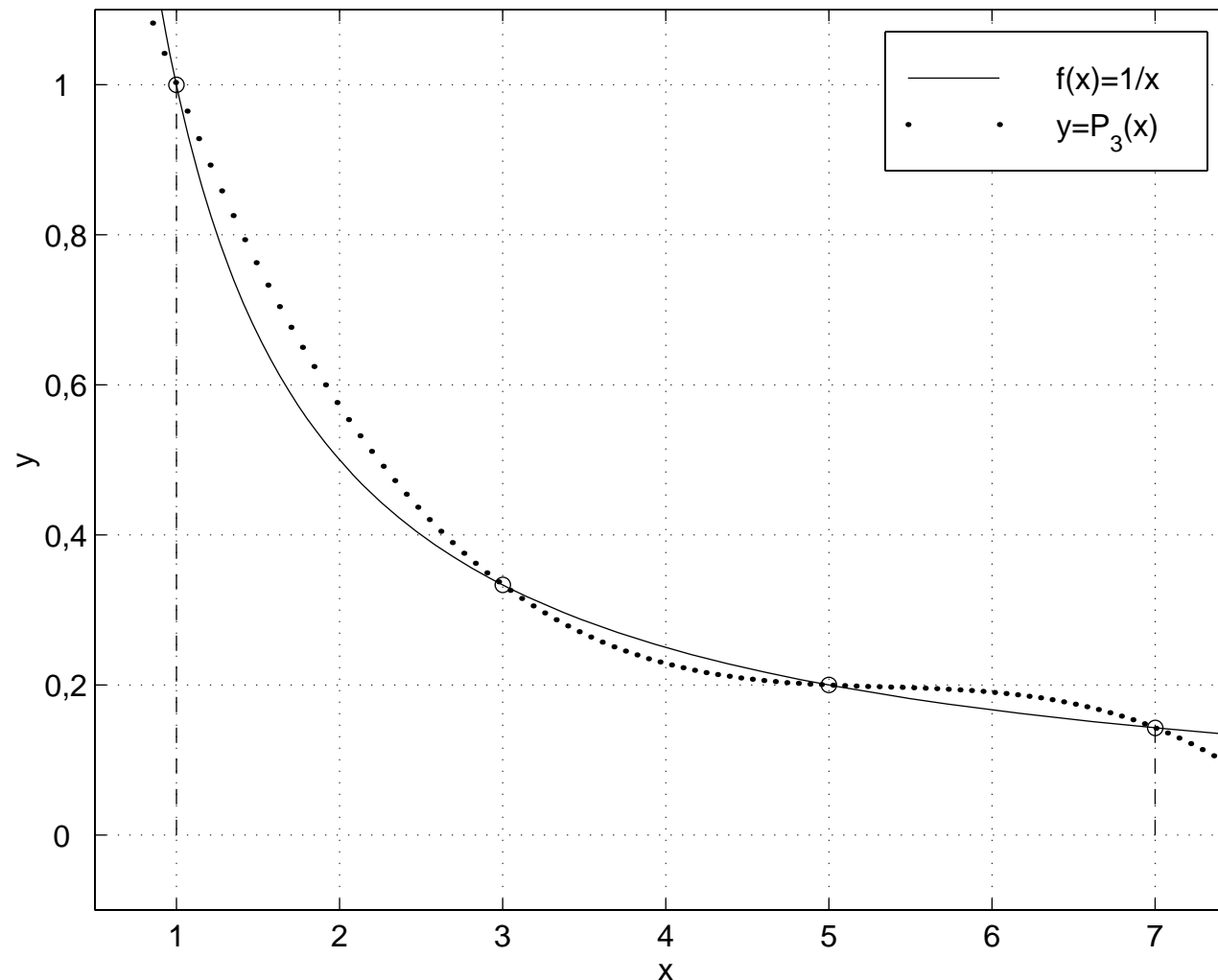
$$I_3 = \frac{3 \times 2}{8} \left(\frac{1}{1} + 3\frac{1}{3} + 3\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) \leadsto I_3 = 2,0571.$$

Integração numérica pela regra dos 3/8 de Simpson

- Aproximação de $f(x) = 1/x$ por polinômio interpolador $P_3(x)$ de grau 3.

||⇐

Fórmula de Newton–Cotes com polinômio de grau 3



Comparação das fórmulas de Newton-Cotes

- Considerando

$$\int_1^7 \frac{1}{x} dx = \log_e(x) \Big|_1^7 = \log_e(7) \approx 1,9459.$$

- Resultado da integração melhora à medida que o grau do polinômio interpolador aumenta

| n | I_n | $ I_n - \log_e(7) $ |
|-----|--------|---------------------|
| 1 | 3,4286 | 1,4827 |
| 2 | 2,1429 | 0,1970 |
| 3 | 2,0571 | 0,1112 |

Fórmula geral de Newton-Cotes

- Comparando (2), (3) e (4)

$$I_n = \frac{nh}{d_n} \sum_{i=0}^n c_i y_i, \quad (5)$$

- c_i : coeficientes de Cotes.

| n | d_n | c_0 | c_1 | c_2 | c_3 | c_4 | c_5 | c_6 | c_7 | c_8 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 2 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 2 | 6 | 1 | 4 | 1 | | | | | | |
| 3 | 8 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| 4 | 90 | 7 | 32 | 12 | 32 | 7 | | | | |
| 5 | 288 | 19 | 75 | 50 | 50 | 75 | 19 | | | |
| 6 | 840 | 41 | 216 | 27 | 272 | 27 | 216 | 41 | | |
| 7 | 17280 | 751 | 3577 | 1323 | 2989 | 2989 | 1323 | 3577 | 751 | |
| 8 | 28350 | 989 | 5888 | -928 | 10496 | -4540 | 10496 | -928 | 5888 | 989 |

⇐

- Difícilmente é usado polinômio de grau superior a 3.
- Resultado melhorado pela subdivisão do intervalo de integração e aplicação de uma fórmula de Newton-Cotes em cada subintervalo.

Regra do trapézio composta

- Integração baseada em polinômio interpolador de grau 1

$$I_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1).$$

- Subdividindo o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos iguais e aplicando a equação a cada 2 pontos

$$\int_{a=x_0}^{b=x_m} f(x) dx \approx I_1, \text{ com}$$

$$I_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \frac{h}{2}(y_2 + y_3) + \cdots + \frac{h}{2}(y_{m-1} + y_m),$$

$$I_1 = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{m-1} + y_m),$$

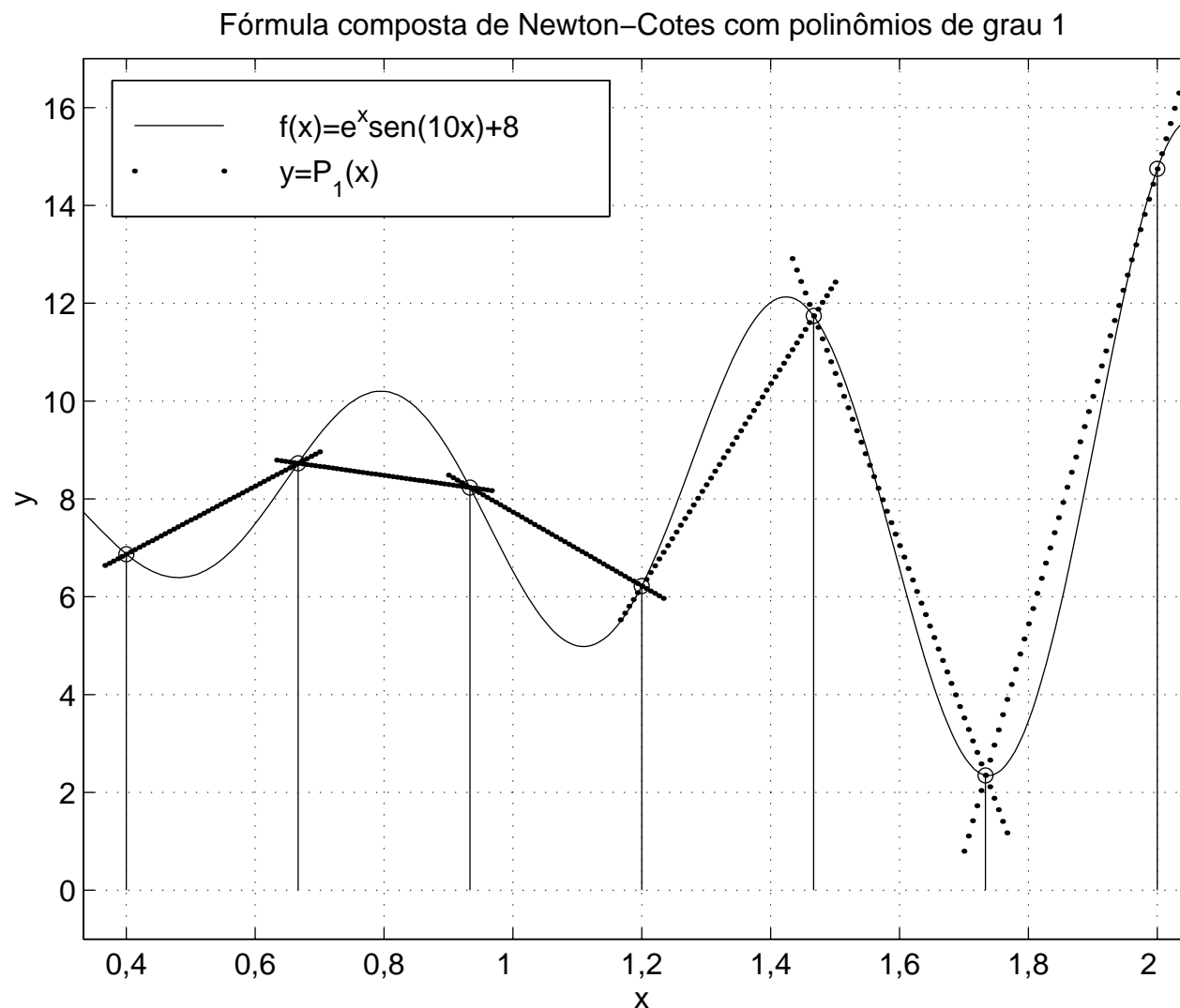
$$I_1 = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^m c_i y_i.$$

(6)

- Qualquer valor de número de subintervalos m .

Representação geométrica da integração numérica pela regra do trapézio composta

- $f(x) = e^x \sin(10x) + 8$ com 6 polinômios interpoladores $P_1(x)$ de grau 1.



Exemplo da regra do trapézio composta

Exemplo 4 Calcular $\int_1^3 x^3 \log_e(x) dx$ pela regra do trapézio composta (6) com $m = 4$ subintervalos.

$$h = \frac{b - a}{m} = \frac{3 - 1}{4} \rightarrow h = 0,5.$$

- Dispositivo prático com quatro colunas: $i = 0, 1, \dots, m$,
 $x_i = a, a + h, a + 2h, \dots, b$, $y_i = f(x_i)$ e c_i sendo os coeficientes de Cotes

| i | x_i | y_i | c_i |
|-----|-------|---------|-------|
| 0 | 1,0 | 0,0000 | 1 |
| 1 | 1,5 | 1,3684 | 2 |
| 2 | 2,0 | 5,5452 | 2 |
| 3 | 2,5 | 14,3170 | 2 |
| 4 | 3,0 | 29,6625 | 1 |

$$I_1 = \frac{0,5}{2}(0,0000 + 2(1,3684 + 5,5452 + 14,3170) + 29,6625) \rightsquigarrow I_1 = 18,0309.$$

Exemplo da regra do trapézio composta

Exemplo 5 Calcular $\int_0^2 \frac{e^{-\cos(x)}}{\sqrt{2x+4}} dx$ pela regra do trapézio composta (6) com $m = 5$ subintervalos.

$$h = \frac{b-a}{m} = \frac{2-0}{5} \rightarrow h = 0,4$$

| i | x_i | y_i | c_i |
|-----|-------|--------|-------|
| 0 | 0,0 | 0,1839 | 1 |
| 1 | 0,4 | 0,1817 | 2 |
| 2 | 0,8 | 0,2105 | 2, |
| 3 | 1,2 | 0,2751 | 2 |
| 4 | 1,6 | 0,3837 | 2 |
| 5 | 2,0 | 0,5360 | 1 |

$$I_1 = \frac{0,4}{2}(0,1839 + 2(0,1817 + 0,2105 + 0,2751 + 0,3837) + 0,5360) \rightsquigarrow I_1 = 0,5644.$$

Regra do 1/3 de Simpson composta

- Integração baseada em polinômio interpolador de grau 2

$$I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

- Subdividindo o intervalo $[a, b]$ em m (múltiplo de 2) subintervalos iguais e aplicando a equação a cada 3 pontos

$$\int_{a=x_0}^{b=x_m} f(x) dx \approx I_2, \text{ com}$$

$$I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{m-2} + 4y_{m-1} + y_m),$$

$$I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{m-2} + 4y_{m-1} + y_m),$$

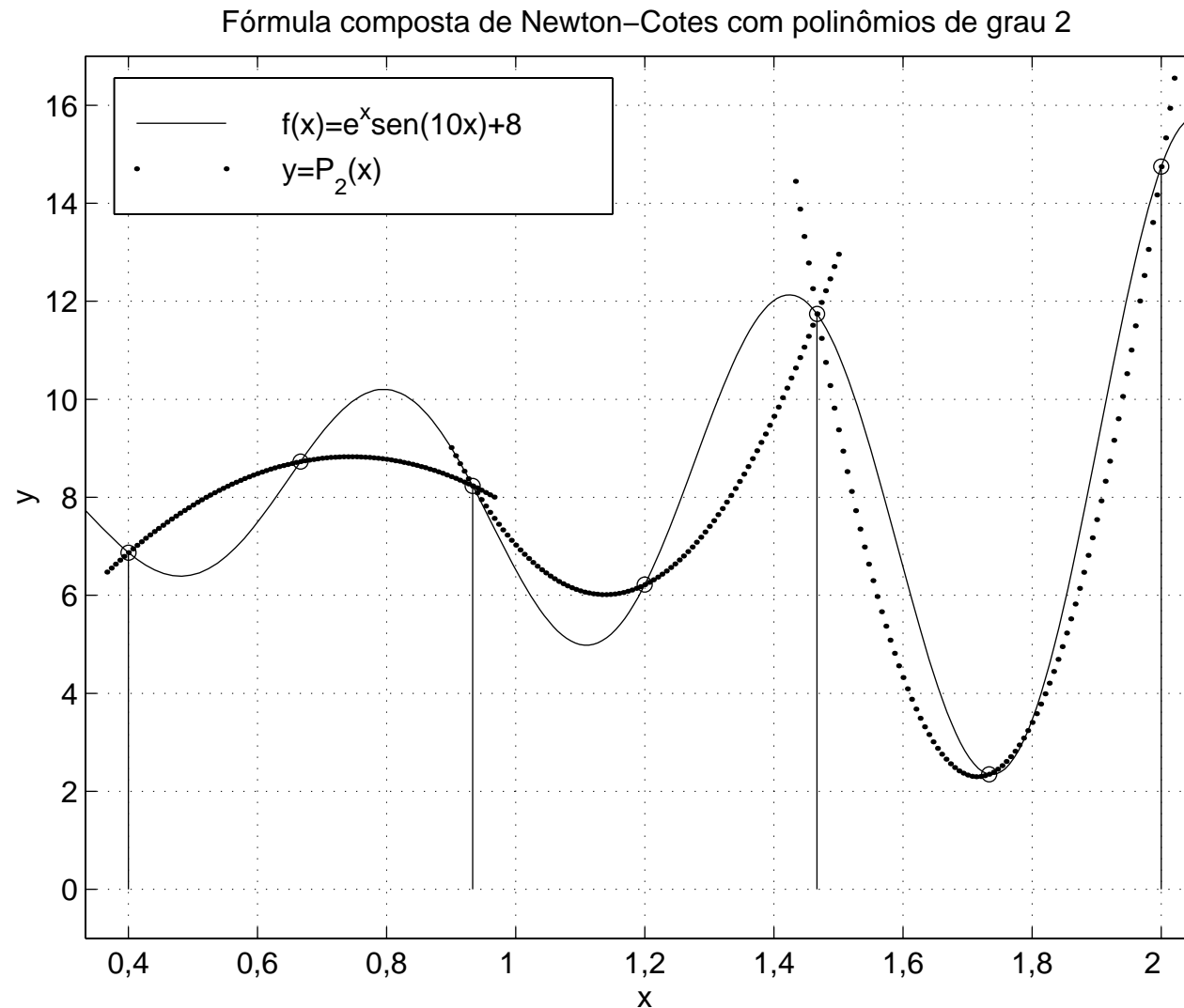
$$I_2 = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^m c_i y_i.$$

(7)

- Número de subintervalos m múltiplo de 2, grau do polinômio interpolador.

Representação geométrica da integração numérica pela regra do 1/3 de Simpson composta

- $f(x) = e^x \sin(10x) + 8$ com 3 polinômios interpoladores $P_2(x)$ de grau 2.



Exemplo da regra do 1/3 de Simpson composta

Exemplo 6 Verificar que $\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ usando a regra do 1/3 de Simpson composta (7) com passo de integração $h = 0,25$.

$$m = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0,25} \rightarrow m = 4 \quad (\text{múltiplo de 2}).$$

| i | x_i | y_i | c_i |
|-----|-------|--------|-------|
| 0 | 0,00 | 1,0000 | 1 |
| 1 | 0,25 | 0,9412 | 4 |
| 2 | 0,50 | 0,8000 | 2 |
| 3 | 0,75 | 0,6400 | 4 |
| 4 | 1,00 | 0,5000 | 1 |

$$I_2 = \frac{0,25}{3}(1,0000 + 4(0,9412 + 0,6400) + 2(0,8000) + 0,5000) \rightsquigarrow I_2 = 0,7854 \text{ e}$$

$$4 \times I_2 = 3,1416 \approx \pi.$$

Exemplo da regra do 1/3 de Simpson composta

Exemplo 7 Calcular $\int_0^3 \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2} dx$ usando a regra do 1/3 de Simpson composta (7) com $m = 6$ (múltiplo de 2) subintervalos.

$$h = \frac{b - a}{m} = \frac{3 - 0}{6} \rightarrow h = 0,5.$$

| i | x_i | y_i | C_i |
|-----|-------|---------|-------|
| 0 | 0,0 | 0,0000 | 1 |
| 1 | 0,5 | 0,3398 | 4 |
| 2 | 1,0 | 0,8210 | 2 |
| 3 | 1,5 | 1,8830 | 4 |
| 4 | 2,0 | 4,3679 | 2 |
| 5 | 2,5 | 10,3065 | 4 |
| 6 | 3,0 | 24,6997 | 1 |

$$I_2 = \frac{0,5}{3} (0,0000 + 4(0,3398 + 1,8830 + 10,3065) + 2(0,8210 + 4,3679) + 24,6997) \rightsquigarrow$$

$$I_2 = 14,1991.$$

Regra dos 3/8 de Simpson composta

- Integração baseada em polinômio interpolador de grau 3

$$I_3 = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3).$$

- Subdividindo o intervalo $[a, b]$ em m (múltiplo de 3) subintervalos iguais e aplicando a equação a cada 4 pontos

$$\int_{a=x_0}^{b=x_m} f(x) dx \approx I_3 = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) +$$

$$\frac{3h}{8}(y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6) + \cdots + \frac{3h}{8}(y_{m-3} + 3y_{m-2} + 3y_{m-1} + y_m),$$

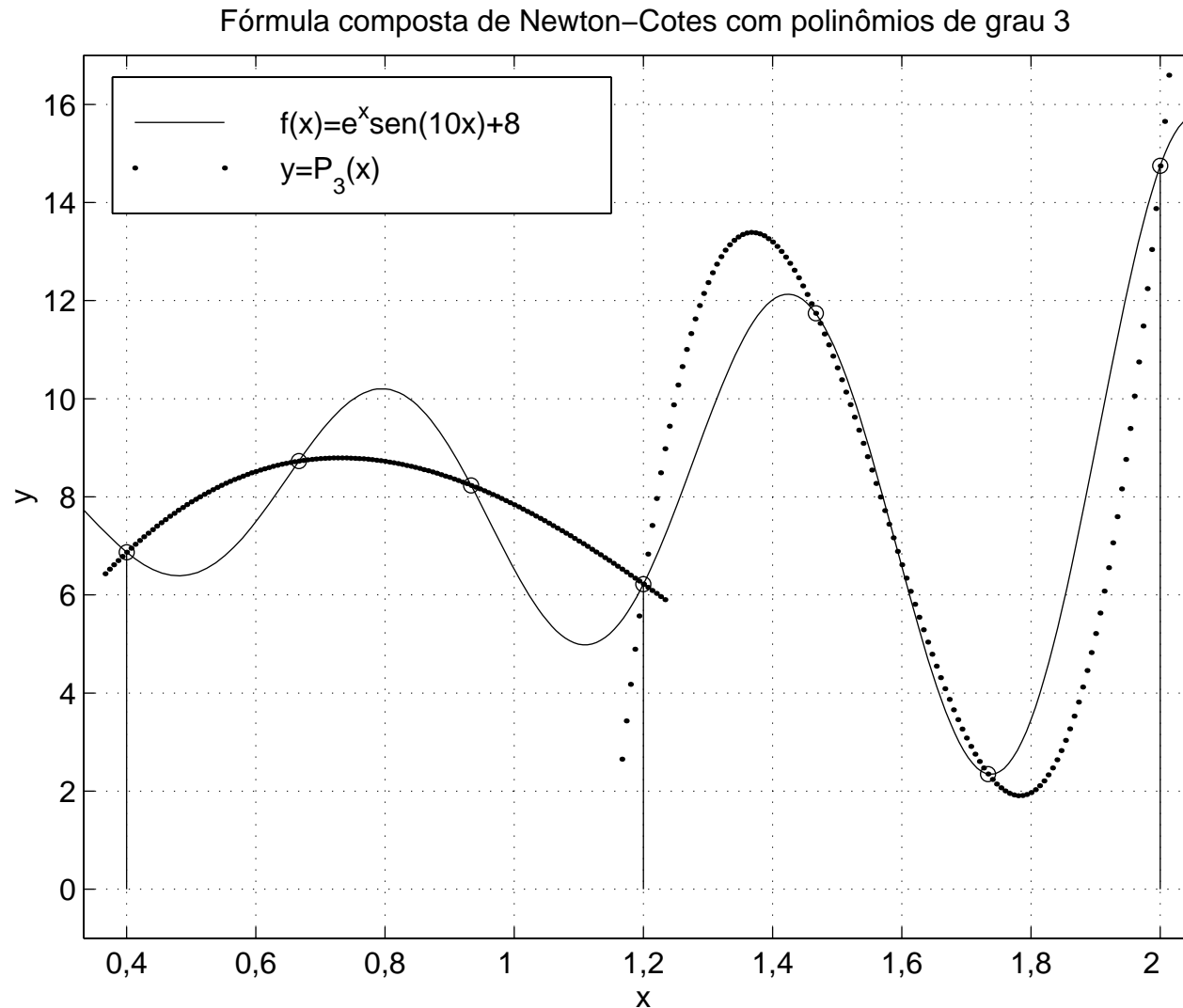
$$I_3 = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + \cdots + 2y_{m-3} + 3y_{m-2} + 3y_{m-1} + y_m),$$

$$I_3 = \frac{3h}{8} \sum_{i=0}^m c_i y_i. \quad (8)$$

- Número de subintervalos m múltiplo de 3, grau do polinômio interpolador.

Representação geométrica da integração numérica pela regra dos 3/8 de Simpson composta

- $f(x) = e^x \sin(10x) + 8$ com 2 polinômios interpoladores $P_3(x)$ de grau 3.



Exemplo da regra dos 3/8 de Simpson

Exemplo 8 Calcular $\int_1^4 \log_e \left(x^3 + \sqrt{e^x + 1} \right) dx$ pela regra dos 3/8 de Simpson composta (8) com $m = 6$ (múltiplo de 3) subintervalos.

$$h = \frac{b - a}{m} = \frac{4 - 1}{6} \rightarrow h = 0,5.$$

| i | x_i | y_i | c_i |
|-----|-------|--------|-------|
| 0 | 1,0 | 1,0744 | 1 |
| 1 | 1,5 | 1,7433 | 3 |
| 2 | 2,0 | 2,3884 | 3 |
| 3 | 2,5 | 2,9578 | 2 |
| 4 | 3,0 | 3,4529 | 3 |
| 5 | 3,5 | 3,8860 | 3 |
| 6 | 4,0 | 4,2691 | 1 |

$$I_3 = \frac{3 \times 0,5}{8} (1,0744 + 3(1,7433 + 2,3884 + 3,4529 + 3,8860) + 2 \times 2,9578 + 4,2691) \rightsquigarrow$$

$$I_3 = 8,5633.$$

Exemplo da regra dos 3/8 de Simpson

Exemplo 9 Calcular $\int_0^{2,7} \frac{x + \sin(x)}{1 + \cos(x)} dx$, usando a regra dos 3/8 de Simpson composta (8) com passo de integração $h = 0,3$.

$$m = \frac{b - a}{h} = \frac{2,7 - 0}{0,3} \rightarrow m = 9 \quad (\text{múltiplo de 3}),$$

| i | x_i | y_i | c_i |
|-----|-------|---------|-------|
| 0 | 0,0 | 0,0000 | 1 |
| 1 | 0,3 | 0,3046 | 3 |
| 2 | 0,6 | 0,6380 | 3 |
| 3 | 0,9 | 1,0381 | 2 |
| 4 | 1,2 | 1,5650 | 3 |
| 5 | 1,5 | 2,3325 | 3 |
| 6 | 1,8 | 3,5894 | 2 |
| 7 | 2,1 | 5,9844 | 3 |
| 8 | 2,4 | 11,7113 | 3 |
| 9 | 2,7 | 32,6014 | 1 |

$$I_3 = \frac{3 \times 0,3}{8} (0,0000 + 3(0,3046 + 0,6380 + 1,5650 + 2,3325 + 5,9844 + 11,7113) + 2(1,0381 + 3,5894) + 32,6014) \rightsquigarrow I_3 = 12,3147.$$

Erro de integração dos métodos de Newton-Cotes

- Erro de truncamento do polinômio de Gregory-Newton de grau n

$$T_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}, \quad x_0 < \theta < x_n.$$

- Regra do trapézio baseada em polinômio de grau $n = 1$

$$T_1(x) = (x - x_0)(x - x_1) \frac{f''(\theta_1)}{2!}, \quad x_0 < \theta_1 < x_1.$$

- Erro de integração $E_{1,1}$ cometido ao utilizar a regra do trapézio

$$E_{1,1} = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) \frac{f''(\theta_1)}{2} dx.$$

- Mudança de variável de x para $u = u_x = \frac{x - x_0}{h}$

$$E_{1,1} = \int_0^1 (hu)(h(u-1)) \frac{f''(\theta_1)}{2} h du = \frac{h^3 f''(\theta_1)}{2} \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} \right) \Big|_0^1 = -\frac{h^3 f''(\theta_1)}{12}.$$

Erro de integração dos métodos de Newton-Cotes cont.

- Erro de integração global considerando os m subintervalos

$$E_1 = \sum_{i=1}^m E_{1,i} = -\frac{h^3}{12}(f''(\theta_1) + f''(\theta_2) + \cdots + f''(\theta_m)),$$

- θ_i determinado em cada um dos m subintervalos.
- Se $f''(x)$ for contínua no intervalo $[a, b]$, então existe algum valor de $x = \theta \in [a, b]$ para o qual o somatório acima é igual a $mf''(\theta)$.
- Passo de integração: $h = (b - a)/m$.
- Erro global de integração da regra do trapézio

$$E_1 = -\frac{h^3 m f''(\theta)}{12} = -\frac{(b - a)^3 m f''(\theta)}{m^3 12}, \quad a < \theta < b,$$

$$E_1 = -\frac{(b - a)^3}{12m^2} f''(\theta), \quad a < \theta < b.$$

(9)

Erro de integração das regras de Simpson

- Regra do 1/3 de Simpson

$$E_2 = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} f^{iv}(\theta), \quad a < \theta < b. \quad (10)$$

- Regra dos 3/8 de Simpson

$$E_3 = -\frac{(b-a)^5}{80m^4} f^{iv}(\theta), \quad a < \theta < b. \quad (11)$$

- Valor de θ é o ponto no intervalo $[a, b]$, no qual a derivada de $f(x)$ apresenta o maior valor em módulo.
- Equações fornecem a cota máxima do erro de integração.

Exemplo da erro de integração

Exemplo 10 Calcular $\int_1^3 (4x^3 + 3x^2 + x + 1) dx$ utilizando a regra do 1/3 de Simpson (7) com $m = 2$ subintervalos.

$$h = \frac{b - a}{m} = \frac{3 - 1}{2} \rightarrow h = 1,$$

| i | x_i | y_i | c_i |
|-----|-------|-------|-------|
| 0 | 1 | 9 | 1 |
| 1 | 2 | 47 | 4 |
| 2 | 3 | 139 | 1 |

$$I_2 = \frac{1}{3}(9 + 4 \times 47 + 139) \rightsquigarrow I_2 = 112.$$

Exemplo do erro de integração cont.

- Erro de integração por (10)

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + x + 1, \quad f'(x) = 12x^2 + 6x + 1, \quad f''(x) = 24x + 6, \quad f'''(x) = 24,$$

$$f^{iv}(x) = 0 \longrightarrow E_2 = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} f^{iv}(\theta) = -\frac{(3-1)^5}{180 \times 2^4} \times 0 \rightsquigarrow E_2 = 0.$$

- Resultado exato

$$\int_1^3 (4x^3 + 3x^2 + x + 1) dx = \left(x^4 + x^3 + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_1^3 = 115,5 - 3,5 = 112.$$

Exemplo de comparação dos erros de integração

Exemplo 11 Calcular a integral $\int_0^{\pi} (e^x + \sin(x) + 2) dx$ usando as três primeiras fórmulas de Newton-Cotes com $m = 6$ subintervalos.

$$h = \frac{b - a}{m} = \frac{\pi - 0}{6} \rightarrow h = \frac{\pi}{6},$$

| i | x_i | y_i | $c_i(t)$ | $c_i(1S)$ | $c_i(2S)$ |
|-----|----------|---------|----------|-----------|-----------|
| 0 | 0 | 3,0000 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | $\pi/6$ | 4,1881 | 2 | 4 | 3 |
| 2 | $\pi/3$ | 5,7157 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | $\pi/2$ | 7,8105 | 2 | 4 | 2 |
| 4 | $2\pi/3$ | 10,9866 | 2 | 2 | 3 |
| 5 | $5\pi/6$ | 16,2082 | 2 | 4 | 3 |
| 6 | π | 25,1407 | 1 | 1 | 1 |

Exemplo de comparação dos erros de integração cont.

- Regra do trapézio

$$I_1 = \frac{\pi}{6 \times 2} (3,0000 + 2(4,1881 + 5,7157 + 7,8105 + 10,9866 + 16,2082) + 25,1407),$$

$$I_1 = 30,8816. \quad (||\Leftarrow)$$

- Regra do 1/3 de Simpson

$$I_2 = \frac{\pi}{6 \times 3} (3,0000 + 4(4,1881 + 7,8105 + 16,2082) + 2(5,7157 + 10,9866) + 25,1407),$$

$$I_2 = 30,4337. \quad (||\Leftarrow)$$

- Regra dos 3/8 de Simpson

$$I_3 = \frac{3\pi}{6 \times 8} (3,0000 + 3(4,1881 + 5,7157 + 10,9866 + 16,2082) + 2 \times 7,8105 + 25,1407),$$

$$I_3 = 30,4455.$$

Exemplo de comparação dos erros de integração cont.

- Determinação de θ

$$f(x) = e^x + \sin(x) + 2, \quad f'(x) = e^x + \cos(x), \quad f''(x) = e^x - \sin(x) \leadsto \theta = \pi, \\ f'''(x) = e^x - \cos(x) \text{ e } f^{iv}(x) = e^x + \sin(x) \leadsto \theta = \pi,$$

- θ : abscissa do ponto onde a derivada apresenta o maior valor em módulo.
- Erro de integração da regra do trapézio

$$E_1 = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\theta) = -\frac{(\pi-0)^3}{12 \times 6^2} (e^\pi - \sin(\pi)) \leadsto E_1 = -1,6609.$$

- Erro de integração da regra do 1/3 de Simpson

$$E_2 = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} f^{iv}(\theta) = -\frac{(\pi-0)^5}{180 \times 6^4} (e^\pi + \sin(\pi)) \leadsto E_2 = -0,0304.$$

- Erro de integração da regra dos 3/8 de Simpson

$$E_3 = -\frac{(b-a)^5}{80m^4} f^{iv}(\theta) = -\frac{(\pi-0)^5}{80 \times 6^4} (e^\pi + \sin(\pi)) \leadsto E_3 = -0,0683.$$

Exemplo de comparação dos erros de integração cont.

$$\int_0^{\pi} (e^x + \sin(x) + 2) dx = (e^x - \cos(x) + 2x) \Big|_0^{\pi} \approx 30,4239.$$

- Erro de integração máximo e real

| n | I_n | E_n | $30,4239 - I_n$ |
|-----|---------|---------|-----------------|
| 1 | 30,8816 | -1,6609 | -0,4577 |
| 2 | 30,4337 | -0,0304 | -0,0098 |
| 3 | 30,4455 | -0,0683 | -0,0216 |

- Regra do 1/3 de Simpson produziu os menores erro máximo e erro real.
- Sinal negativo de E_n indica que a integração numérica foi por excesso:
 $I_n > I_{\text{exata}}$.

Exemplo de escolha da regra

Exemplo 12 Calcular $\int_0^\pi \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + \sin(x) \right) dx$ com $E < 10^{-2}$ usando uma das três primeiras fórmulas de Newton-Cotes.

- Valor de θ para regra do trapézio

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 + \sin(x), \quad f'(x) = x^3 + 2x + \cos(x), \quad f''(x) = 3x^2 + 2 - \sin(x) \rightsquigarrow$$
$$\theta = \pi.$$

- Valor de θ para regras de Simpson

$$f'''(x) = 6x - \cos(x) \text{ e } f^{iv}(x) = 6 + \sin(x) \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplo de escolha da regra cont.

- Valor de m para regra do trapézio

$$\left| \frac{(b-a)^3}{12m_1^2} f''(\theta) \right| < 10^{-2} \rightarrow m_1 > \left(\frac{(\pi-0)^3}{12 \times 10^{-2}} (3\pi^2 + 2 - \sin(\pi)) \right)^{\frac{1}{2}} \approx 90,37 \leadsto$$
$$m_1 = 91.$$

- Valor de m para regra do 1/3 de Simpson

$$\left| \frac{(b-a)^5}{180m_2^4} f^{iv}(\theta) \right| < 10^{-2} \rightarrow m_2 > \left(\frac{(\pi-0)^5}{180 \times 10^{-2}} (6 + \sin(\pi/2)) \right)^{\frac{1}{4}} \approx 5,87 \leadsto$$
$$m_2 = 6.$$

- Valor de m para regra dos 3/8 de Simpson

$$\left| \frac{(b-a)^5}{80m_3^4} f^{iv}(\theta) \right| < 10^{-2} \rightarrow m_3 > \left(\frac{(\pi-0)^5}{80 \times 10^{-2}} (6 + \sin(\pi/2)) \right)^{\frac{1}{4}} \approx 7,19 \leadsto$$
$$m_3 = 9.$$

- Fórmula escolhida: regra do 1/3 de Simpson.

Exemplo de escolha da regra cont.

- Passo de integração: $h = \frac{b-a}{m} = \frac{\pi-0}{6} \rightarrow h = \frac{\pi}{6},$

| i | x_i | y_i | c_i |
|-----|----------|---------|-------|
| 0 | 0 | 0,0000 | 1 |
| 1 | $\pi/6$ | 0,7929 | 4 |
| 2 | $\pi/3$ | 2,2633 | 2 |
| 3 | $\pi/2$ | 4,9894 | 4 |
| 4 | $2\pi/3$ | 10,0628 | 2 |
| 5 | $5\pi/6$ | 19,0979 | 4 |
| 6 | π | 34,2219 | 1 |

- Regra do 1/3 de Simpson

$$I_2 = \frac{\pi}{6 \times 3} (0,0000 + 4(0,7929 + 4,9894 + 19,0979) + 2(2,2633 + 10,0628) + 34,2219) \rightsquigarrow I_2 = 27,6451.$$

- Verificação da exatidão

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + \sin(x) \right) dx = \left(\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{3} - \cos(x) \right) \Big|_0^{\pi} \approx 27,6364,$$

$$|27,6364 - 27,6451| = 0,0087 < 10^{-2}.$$

Algoritmo: integração numérica pelo método de Newton-Cotes

Algoritmo Newton-Cotes

{ **Objetivo:** Integrar uma função pelo método de Newton-Cotes }

parâmetros de entrada a, b, n, m

{ limite inferior, limite superior, grau do polinômio, número de subintervalos }

parâmetros de saída $Integral, CondErro$

{ valor da integral e condição de erro, sendo }

{ $CondErro = 0$ se não houve erro de consistência dos parâmetros dados, }

{ $CondErro = 1$ se $(n < 1$ ou $n > 8)$, }

{ $CondErro = 2$ se $resto(m, n) \neq 0$ e }

{ $CondErro = 3$ se ambas as condições ocorrerem }

$d(1) \leftarrow 2; d(2) \leftarrow 6; d(3) \leftarrow 8; d(4) \leftarrow 90; d(5) \leftarrow 288; d(6) \leftarrow 840$

$d(7) \leftarrow 17280; d(8) \leftarrow 28350$

$c(1) \leftarrow 1; c(2) \leftarrow 1; c(3) \leftarrow 4; c(4) \leftarrow 1; c(5) \leftarrow 3; c(6) \leftarrow 7; c(7) \leftarrow 32$

$c(8) \leftarrow 12; c(9) \leftarrow 19; c(10) \leftarrow 75; c(11) \leftarrow 50; c(12) \leftarrow 41; c(13) \leftarrow 216$

$c(14) \leftarrow 27; c(15) \leftarrow 272; c(16) \leftarrow 751; c(17) \leftarrow 3577; c(18) \leftarrow 1323$

$c(19) \leftarrow 2989; c(20) \leftarrow 989; c(21) \leftarrow 5888; c(22) \leftarrow -928; c(23) \leftarrow 10496$

$c(24) \leftarrow -4540$

$CondErro \leftarrow 0; Integral \leftarrow 0$

{ consistência dos parâmetros }

se $n < 1$ ou $n > 8$ então $CondErro \leftarrow CondErro + 1$, fimse

se $resto(m, n) \neq 0$ então $CondErro \leftarrow CondErro + 2$, fimse

se $CondErro \neq 0$ então abandone, fimse

{ cálculo da integral }

$p \leftarrow \text{trunca}(0,25 * (n * (n + 2) + \text{resto}(n, 2)))$; $h \leftarrow (b - a)/m$

para $i \leftarrow 0$ até m faça

$x \leftarrow a + i * h$

$y \leftarrow f(x)$ { avaliar a função integrando em x }

$j \leftarrow p + \text{trunca}(0,5 * n - \text{abs}(\text{resto}(i, n) - 0,5 * n))$

$k \leftarrow 1 + \text{trunca}((n - \text{resto}(i, n))/n) - \text{trunca}((m - \text{resto}(i, m))/m)$

$Integral \leftarrow Integral + y * c(j) * k$

escreva $i, x, y, c(j) * k$

fimpara

$Integral \leftarrow n * h/d(n) * Integral$

fim algoritmo

|| \leftarrow

Complexidade da integração pelo método de Newton-Cotes

| Operações | Complexidade |
|----------------|--------------|
| adições | $9m + 12$ |
| multiplicações | $5m + 9$ |
| divisões | $2m + 4$ |

- Polinômios dados em termos do número de subintervalos m .
- Complexidade independe do grau n do polinômio interpolador utilizado.

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 13 Calcular $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$ pelo algoritmo com polinômios de grau $n = 2$ e $n = 3$, utilizando $m = 6$ subintervalos.

- Para $n = 2$

% Os parametros de entrada

a = 0

b = 3.14159

n = 2

m = 6

% fornecem os resultados

Integracao por Newton-Cotes com polinomio de grau 2

| i | x(i) | y(i) | c(i) |
|---|---------|---------|------|
| 0 | 0.00000 | 0.00000 | 1 |
| 1 | 0.52360 | 0.50000 | 4 |
| 2 | 1.04720 | 0.86602 | 2 |
| 3 | 1.57080 | 1.00000 | 4 |
| 4 | 2.09439 | 0.86603 | 2 |
| 5 | 2.61799 | 0.50000 | 4 |
| 6 | 3.14159 | 0.00000 | 1 |

Integral = 2.00086

CondErro = 0

Exemplo de uso do algoritmo cont.

- Para $n = 3$

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = 0
```

```
b = 3.14159
```

```
n = 3
```

```
m = 6
```

```
% fornecem os resultados
```

```
Integracao por Newton-Cotes com polinomio de grau 3
```

| i | x(i) | y(i) | c(i) |
|---|---------|---------|------|
| 0 | 0.00000 | 0.00000 | 1 |
| 1 | 0.52360 | 0.50000 | 3 |
| 2 | 1.04720 | 0.86602 | 3 |
| 3 | 1.57080 | 1.00000 | 2 |
| 4 | 2.09439 | 0.86603 | 3 |
| 5 | 2.61799 | 0.50000 | 3 |
| 6 | 3.14159 | 0.00000 | 1 |

```
Integral = 2.00201
```

```
CondErro = 0
```

Exemplo de comparação das fórmulas de Newton-Cotes

Exemplo 14 Verificar o erro real cometido no cálculo de $\int_0^5 x \sin(3x) dx$, usando as sete primeiras fórmulas de Newton-Cotes, com $m = 420$

| n | $ I_{\text{exata}} - I_n $ |
|-----|----------------------------|
| 1 | $1,2690 \times 10^{-4}$ |
| 2 | $9,4861 \times 10^{-9}$ |
| 3 | $2,1346 \times 10^{-8}$ |
| 4 | $3,9775 \times 10^{-12}$ |
| 5 | $8,5454 \times 10^{-12}$ |
| 6 | $6,6613 \times 10^{-16}$ |
| 7 | $2,6645 \times 10^{-15}$ |

- À medida que o grau n do polinômio interpolador aumenta, o erro diminui.
- Fórmula utilizando grau par é melhor do que a de grau ímpar seguinte.

Quadratura de Gauss-Legendre

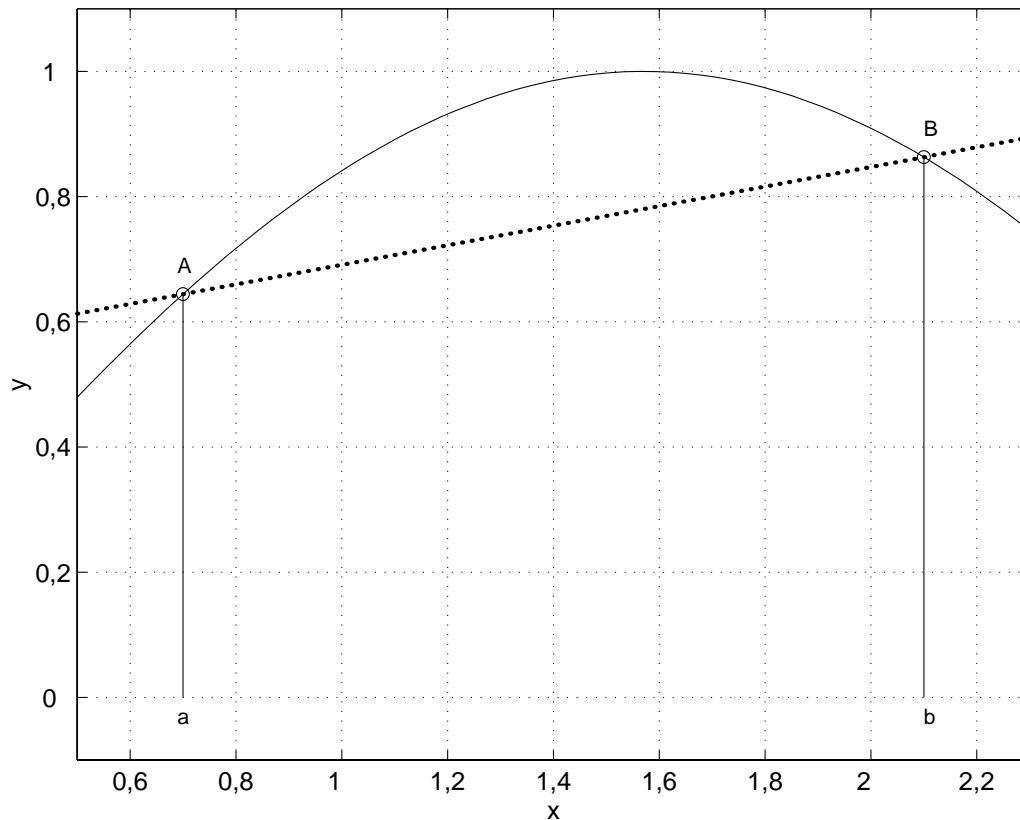
- Escolher pontos igualmente espaçados nas fórmulas de Newton-Cotes simplifica os cálculos.
- Sem imposição de espaçamento constante as fórmulas fornecem uma maior exatidão.
- Usando o mesmo número de pontos que Newton-Cotes.

Newton-Cotes X Gauss-Legendre

- Integração de $f(x)$ baseada em polinômio interpolador de grau 1.

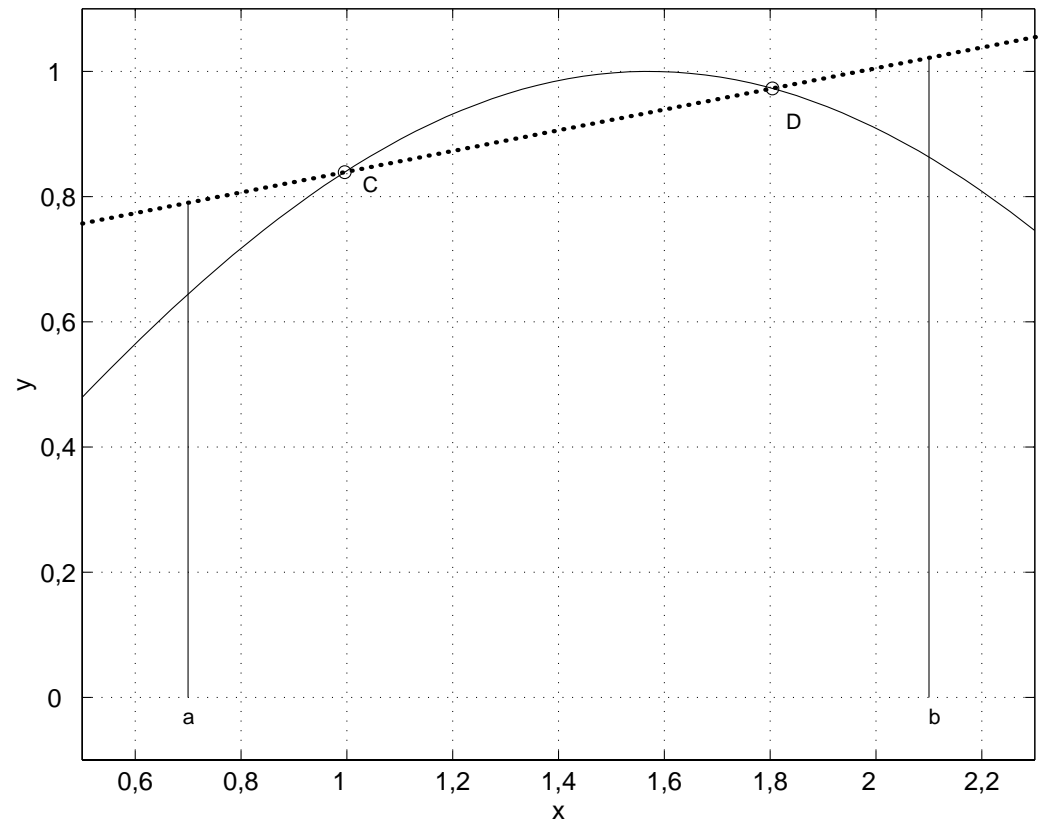


Método de Newton–Cotes com polinômio de grau 1



pontos A e B extremos

Método de Gauss–Legendre com polinômio de grau 1



pontos C e D para aproximar as áreas

Fórmula para dois pontos

- Mudança de variável de x para t , definida no intervalo $[-1, 1]$

$$x = x(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}. \quad (12)$$

- Derivando

$$dx = \frac{b-a}{2}dt,$$

- e definindo

$$F(t) = \frac{b-a}{2}f(x(t)). \quad (13)$$

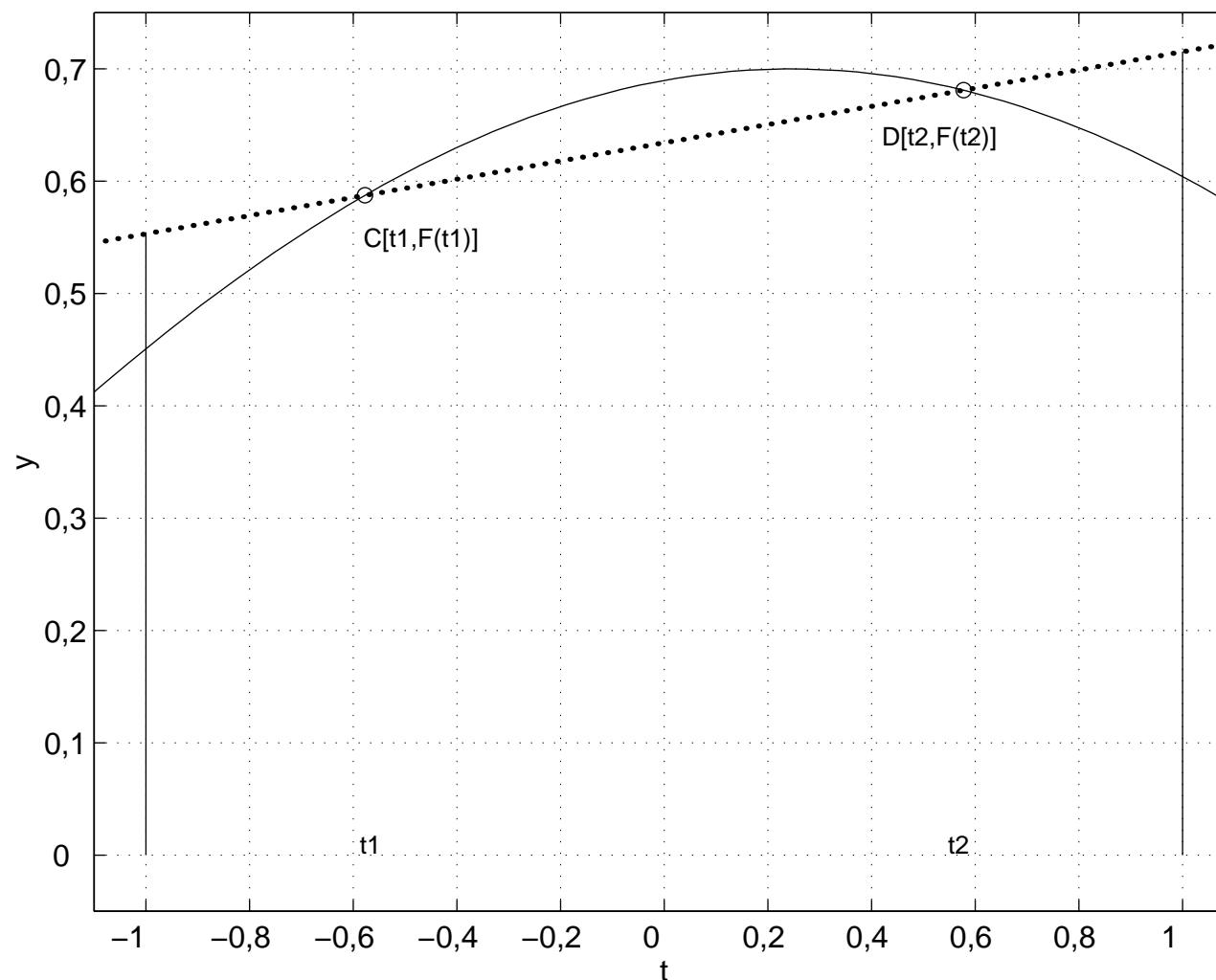
- Integral

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{b-a} F(t) \frac{b-a}{2} dt \rightsquigarrow \int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 F(t) dt.$$

Fórmula para dois pontos: escolha das abscissas

- Pontos $C[t_1, F(t_1)]$ e $D[t_2, F(t_2)]$.

Abscissas do método de Gauss–Legendre com polinômio de grau 1



Fórmula para dois pontos

- Integral

$$\int_{-1}^1 F(t) dt \approx I_2 = A_1 F(t_1) + A_2 F(t_2). \quad (14)$$

- Em vista de (13) e com $x_i = x(t_i)$

$$I_2 = \frac{b-a}{2} (A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)). \quad (15)$$

- Expressão análoga à regra do trapézio

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} f(a) + \frac{h}{2} f(b).$$

Construção da fórmula de dois pontos

- Encontrar valores de t_1 , t_2 , A_1 e A_2 que tornem a exatidão a maior possível.
- Método construído de modo a ser exato para polinômios de grau até 3.
- Ter-se-á quatro incógnitas (t_1 , t_2 , A_1 e A_2) e quatro equações

$$F(t) = t^k, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

- Impondo $I_2 = A_1F(t_1) + A_2F(t_2)$ ser igual à integral analítica de $F(t)$:

Construção da fórmula de dois pontos cont.

- para $k = 0$

$$F(t) = 1 \rightarrow \int_{-1}^1 1 \, dt = 1 - (-1) = 2 = A_1 1 + A_2 1,$$

- para $k = 1$

$$F(t) = t \rightarrow \int_{-1}^1 t \, dt = \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 = A_1 t_1 + A_2 t_2,$$

- para $k = 2$

$$F(t) = t^2 \rightarrow \int_{-1}^1 t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} = A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 \text{ e}$$

- para $k = 3$

$$F(t) = t^3 \rightarrow \int_{-1}^1 t^3 \, dt = \frac{t^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 = A_1 t_1^3 + A_2 t_2^3.$$

Sistema de equações não lineares

- Sistema de equações não lineares de ordem 4

$$A_1 + A_2 = 2,$$

$$A_1 t_1 + A_2 t_2 = 0,$$

$$A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 = \frac{2}{3} \text{ e}$$

$$A_1 t_1^3 + A_2 t_2^3 = 0.$$

- Solução

$$t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0,5774, \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,5774,$$

$$A_1 = 1 \text{ e } A_2 = 1.$$

Exemplo

Exemplo 15 Calcular $\int_1^5 (2x^3 + 3x^2 + 6x + 1)dx$, usando (15).

- Por (12): $x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{5-1}{2}t_i + \frac{1+5}{2} \leadsto x_i = 2t_i + 3$.
- Dispositivo prático

| i | t_i | x_i | $f(x_i)$ | A_i |
|-----|-----------------------|--------|----------|-------|
| 1 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1,8453 | 34,8542 | 1 |
| 2 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 4,1547 | 221,1458 | 1 |

$$I_2 = \frac{b-a}{2}(A_1f(x_1) + A_2f(x_2)) = \frac{5-1}{2}(1 \times 34,8542 + 1 \times 221,1458) \leadsto I_2 = 512,0000.$$

- Resultado exato

$$\int_1^5 (2x^3 + 3x^2 + 6x + 1)dx = \left(\frac{x^4}{2} + x^3 + 3x^2 + x \right) \Big|_1^5 = 517,5 - 5,5 = 512.$$

Exemplo

Exemplo 16 Calcular $\int_0^{\pi} (e^x + \sin(x) + 2) dx$, usando (15).

- Por (12): $x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{\pi-0}{2}t_i + \frac{0+\pi}{2} \leadsto x_i = \frac{\pi}{2}(t_i + 1)$.

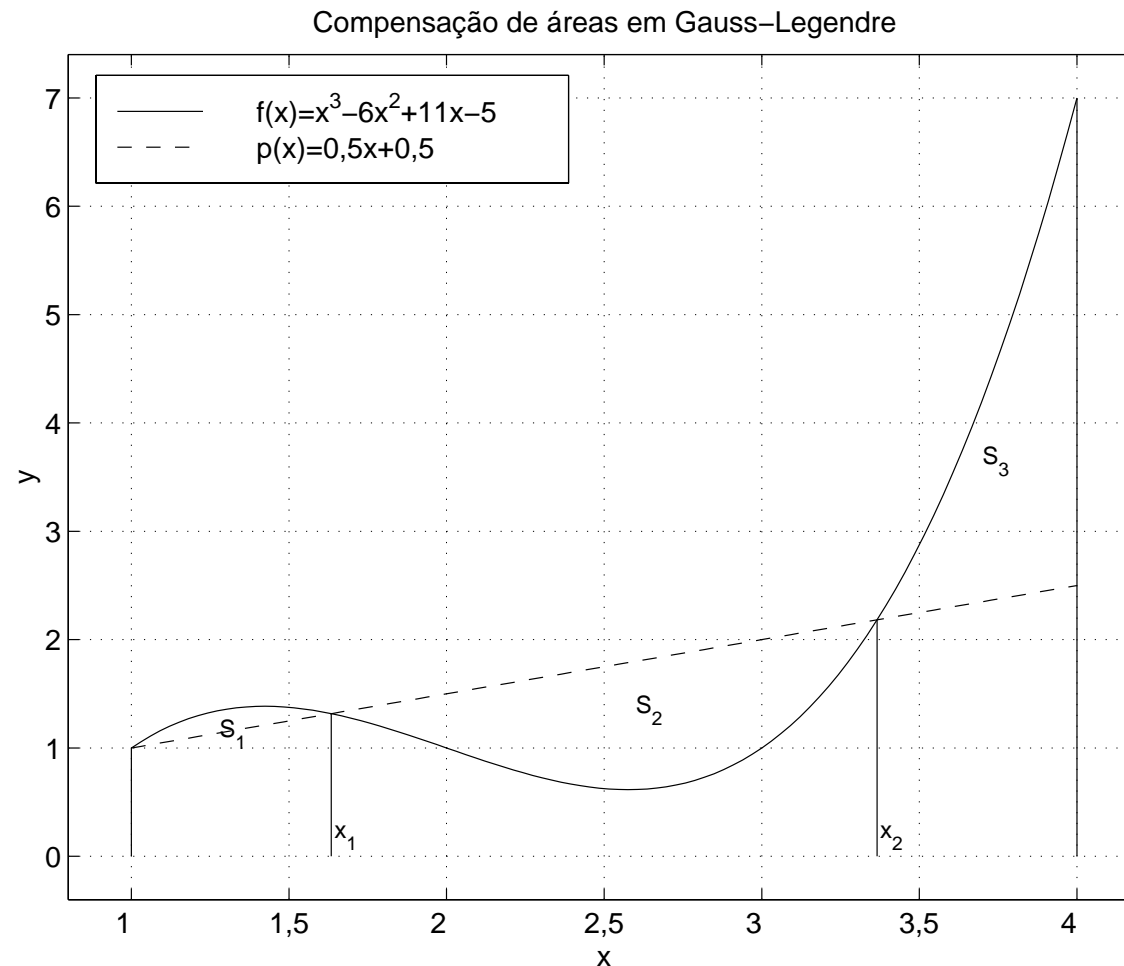
| i | t_i | x_i | $f(x_i)$ | A_i |
|-----|-----------------------|--------|----------|-------|
| 1 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0,6639 | 4,5585 | 1 |
| 2 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 2,4777 | 14,5300 | 1 |

$$I_2 = \frac{b-a}{2}(A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)) = \frac{\pi-0}{2}(1 \times 4,5585 + 1 \times 14,5300) \leadsto I_2 = 29,9841.$$

- Valor exato aproximadamente 30,4239.
- Erro cometido com 2 pontos: $|30,4239 - 29,9841| = 0,4398$.
- Regra do trapézio com 7 pontos: $(|30,4239 - 30,8816| = 0,4577)$. (exemplo)

Exemplo de áreas entre a função e o polinômio no método de Gauss-Legendre

Exemplo 17 Calcular a soma das áreas S_1 , S_2 e S_3 entre o polinômio de grau 1 construído a partir dos zeros do polinômio de Legendre de grau $n = 2$ e a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$ obtidas no intervalo $[1, 4]$.



Exemplo de cálculo das áreas

- Abscissas x_1 e x_2 a partir dos zeros do polinômio de Legendre de grau 2:

$$t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ e } t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- Por (12)

$$x_1 = \frac{4-1}{2}t_1 + \frac{1+4}{2} = \frac{5-\sqrt{3}}{2} \approx 1,63397,$$

$$x_2 = \frac{4-1}{2}t_2 + \frac{1+4}{2} = \frac{5+\sqrt{3}}{2} \approx 3,36603.$$

- Polinômio de grau 1 que passa pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$

$$p(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

$$p(x) = 0,5x + 0,5.$$

Exemplo de cálculo das áreas cont.

- Sendo $g(x) = f(x) - p(x) = x^3 - 6x^2 + 10,5x - 5,5$:

$$S_1 = \int_1^{x_1} g(x)dx \approx 0,08702,$$

$$S_2 = \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx \approx -1,29904,$$

$$S_3 = \int_{x_2}^4 g(x)dx \approx 1,21202.$$

- Soma das três áreas é igual a 0.
- Compensação exata das áreas entre o polinômio de grau 1 obtido a partir dos zeros do polinômio de Legendre de grau $n = 2$ e a função polinomial de grau 3.

Fórmula geral

- Determinar os valores dos pesos A_i e das abscissas t_i , $i = 1, 2, \dots, n$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 F(t)dt \approx I_n,$$

$$I_n = A_1F(t_1) + A_2F(t_2) + \dots + A_nF(t_n). \quad (16)$$

- Fórmula exata para polinômios de grau menor ou igual a $2n - 1$.
- Faz-se

$$F(t) = t^k, \quad k = 0, 1, \dots, 2n - 1,$$

- sabendo que

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ for ímpar,} \\ \frac{2}{k+1}, & \text{se } k \text{ for par.} \end{cases}$$

Sistema de equações não lineares

- Impondo que (16) seja exata para a integração de $F(t)$

$$\sum_{i=1}^n A_i F(t_i) = \int_{-1}^1 F(t) dt.$$

- Sistema de equações não lineares de ordem $2n$

$$A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n = 2,$$

$$A_1 t_1 + A_2 t_2 + A_3 t_3 + \cdots + A_n t_n = 0,$$

$$A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 + A_3 t_3^2 + \cdots + A_n t_n^2 = \frac{2}{3},$$

...

$$A_1 t_1^{2n-1} + A_2 t_2^{2n-1} + A_3 t_3^{2n-1} + \cdots + A_n t_n^{2n-1} = 0,$$

- Solução fornece os n pesos A_i e as n abscissas t_i .

Fórmula geral da quadratura de Gauss-Legendre

- Em vista de (13) e com $x_i = x(t_i)$, (16) é equivalente a

$$I_n = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n A_i f(x_i). \quad (17)$$

Fórmula geral via polinômios de Legendre

- Polinômios de Legendre definidos pela fórmula de recorrência

$$L_n(x) = \frac{(2n-1)xL_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x)}{n}, \quad (18)$$

- com $L_0(x) = 1$ e $L_1(x) = x$.
- Por exemplo,

$$L_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2},$$

$$L_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2},$$

$$L_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8} \text{ e}$$

$$L_5(x) = \frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{8}.$$

Propriedades dos polinômios de Legendre

- Propriedades básicas

$$L_n(1) = 1 \text{ e } L_n(-1) = (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ e}$$

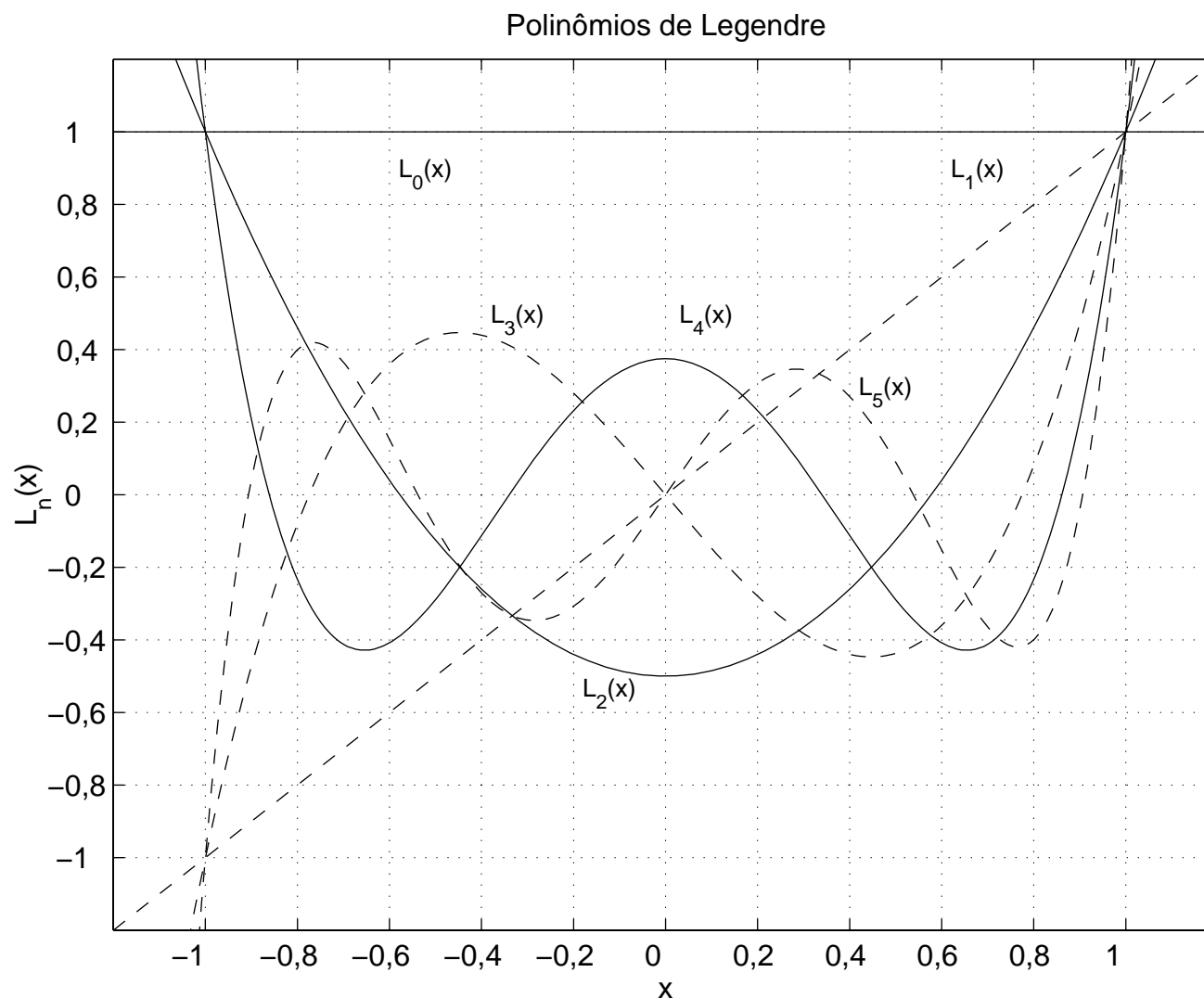
$$\int_{-1}^1 L_n(x) Q_k(x) dx = 0, \quad n > k, \quad (19)$$

- sendo $Q_k(x)$ um polinômio qualquer de grau $k < n$.
- Integral chamada de produto escalar das funções $L_n(x)$ e $Q_k(x)$.
- Duas funções são ditas ortogonais se seu produto escalar for nulo.
- Os polinômios $L_n(x)$ e $Q_k(x)$ são ortogonais.

$$\int_{-1}^1 L_n(x) L_k(x) dx \begin{cases} = 0, & \text{se } n \neq k, \\ > 0, & \text{se } n = k. \end{cases}$$

Polinômios de Legendre de grau até 5

- Equações algébricas $L_n(x) = 0$ possuem n raízes reais distintas pertencentes ao intervalo $(-1, 1)$ e simétricas em relação à origem.



Fórmula geral via polinômios de Legendre

- Sejam os polinômios $F_k(t) = t^k L_n(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$,
- $L_n(t)$: polinômio de Legendre de grau n .
- Sendo $F_k(t)$ de grau menor ou igual a $2n-1$, então (16) é exata

$$\int_{-1}^1 F_k(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i F_k(t_i), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\int_{-1}^1 t^k L_n(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i t_i^k L_n(t_i), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

- Polinômios de Legendre são ortogonais com qualquer polinômio de grau menor

$$\int_{-1}^1 t^k L_n(t) dt = 0, \quad n > k.$$

$$\sum_{i=1}^n A_i t_i^k L_n(t_i) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

- Expressão verdadeira para qualquer valor de A_i se $L_n(t_i) = 0$ para todo i .

Valores de t_i e A_i

- Para maior exatidão na fórmula de quadratura (16) é suficiente que t_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sejam os zeros do polinômio de Legendre de grau n .
- Conhecidas as abscissas t_i , sistema não linear se reduz a um sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & \cdots & t_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & t_3^{n-1} & \cdots & t_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ \vdots \\ . \end{bmatrix}.$$

- Em vez de resolver este sistema via decomposição LU , pesos A_i obtidos por

$$A_i = \frac{2}{(1 - t_i^2)(L'_n(t_i))^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (20)$$

- $L'_n(t_i)$: derivada de $L_n(x)$ na abscissa t_i .



Abscissas e pesos para quadratura de Gauss-Legendre

| n | i | t_i | A_i |
|-----|------|-----------------------------|---------------------|
| 1 | 1 | 0 | 2 |
| 2 | 2; 1 | $\pm 0,57735\ 02691\ 89626$ | 1 |
| 3 | 2 | 0 | 0,88888 88888 88889 |
| | 3; 1 | $\pm 0,77459\ 66692\ 41483$ | 0,55555 55555 55556 |
| 4 | 3; 2 | $\pm 0,33998\ 10435\ 84856$ | 0,65214 51548 62546 |
| | 4; 1 | $\pm 0,86113\ 63115\ 94053$ | 0,34785 48451 37454 |
| 5 | 3 | 0 | 0,56888 88888 88889 |
| | 4; 2 | $\pm 0,53846\ 93101\ 05683$ | 0,47862 86704 99366 |
| | 5; 1 | $\pm 0,90617\ 98459\ 38664$ | 0,23692 68850 56189 |
| 6 | 4; 3 | $\pm 0,23861\ 91860\ 83197$ | 0,46791 39345 72691 |
| | 5; 2 | $\pm 0,66120\ 93864\ 66265$ | 0,36076 15730 48139 |
| | 6; 1 | $\pm 0,93246\ 95142\ 03152$ | 0,17132 44923 79170 |
| 7 | 4 | 0 | 0,41795 91836 73469 |
| | 5; 3 | $\pm 0,40584\ 51513\ 77397$ | 0,38183 00505 05119 |
| | 6; 2 | $\pm 0,74153\ 11855\ 99394$ | 0,27970 53914 89277 |
| | 7; 1 | $\pm 0,94910\ 79123\ 42759$ | 0,12948 49661 68870 |
| 8 | 5; 4 | $\pm 0,18343\ 46424\ 95650$ | 0,36268 37833 78362 |
| | 6; 3 | $\pm 0,52553\ 24099\ 16329$ | 0,31370 66458 77887 |
| | 7; 2 | $\pm 0,79666\ 64774\ 13627$ | 0,22238 10344 53374 |
| | 8; 1 | $\pm 0,96028\ 98564\ 97536$ | 0,10122 85362 90376 |

Exemplo de ortogonalidade dos polinômios de Legendre

Exemplo 18 Verificar a ortogonalidade dos polinômios $L_2(x)$ e $L_3(x)$ de Legendre.

- Os polinômios serão ortogonais se

$$\int_{-1}^1 L_2(x)L_3(x)dx = 0.$$

- Assim,

$$\int_{-1}^1 L_2(x)L_3(x)dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{3x^2 - 1}{2} \right) \left(\frac{5x^3 - 3x}{2} \right) dx,$$

$$\int_{-1}^1 L_2(x)L_3(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{4} (15x^5 - 14x^3 + 3x) dx,$$

$$\int_{-1}^1 L_2(x)L_3(x)dx = \frac{1}{4} \left(\frac{15}{6}x^6 - \frac{7}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_{-1}^1,$$

$$\int_{-1}^1 L_2(x)L_3(x)dx = 0.$$

Exemplo de cálculo de π

Exemplo 19 Verificar que $\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ por intermédio de (17) com $n = 3$ e $n = 4$.

- Mudança de variável: $x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{1-0}{2}t_i + \frac{0+1}{2} \rightsquigarrow x_i = \frac{1}{2}(t_i + 1)$.
- t_i : zeros do polinômio de Legendre de grau n e A_i : n pesos obtidos da tabela.
- Para $n = 3$

| i | t_i | x_i | $f(x_i)$ | A_i |
|-----|----------|---------|----------|---------|
| 1 | -0,77460 | 0,11270 | 0,98746 | 0,55556 |
| 2 | 0 | 0,50000 | 0,80000 | 0,88889 |
| 3 | 0,77460 | 0,88730 | 0,55950 | 0,55556 |

- Usando (17) com $n = 3$,

$$I_3 = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^3 A_i f(x_i) \rightarrow I_3 = 0,78527 \rightsquigarrow 4 \times I_3 = 3,14108 \approx \pi.$$

Exemplo de cálculo de π cont.

- Mudança de variável: $x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{1-0}{2}t_i + \frac{0+1}{2} \rightsquigarrow x_i = \frac{1}{2}(t_i + 1)$.
- t_i : zeros do polinômio de Legendre de grau n e A_i : n pesos obtidos da tabela.
- Para $n = 4$

| i | t_i | x_i | $f(x_i)$ | A_i |
|-----|----------|---------|----------|---------|
| 1 | -0,86114 | 0,06943 | 0,99520 | 0,34785 |
| 2 | -0,33998 | 0,33001 | 0,90179 | 0,65215 |
| 3 | 0,33998 | 0,66999 | 0,69019 | 0,65215 |
| 4 | 0,86114 | 0,93057 | 0,53592 | 0,34785 |

- Utilizando (17) com $n = 4$,

$$I_4 = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^4 A_i f(x_i) \rightarrow I_4 = 0,78540 \rightsquigarrow 4 \times I_4 = 3,14160 \approx \pi.$$

Exemplo de comparação com regra de 1/3 de Simpson

Exemplo 20 Calcular $\int_0^\pi (e^x + \sin(x) + 2)dx$ do Exemplo 11, pela quadratura de Gauss-Legendre com $n = 5$.

- Mudança de variável

$$x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{\pi-0}{2}t_i + \frac{0+\pi}{2} \rightsquigarrow x_i = \frac{\pi}{2}(t_i + 1).$$

| i | t_i | x_i | $f(x_i)$ | A_i |
|-----|----------|---------|----------|---------|
| 1 | -0,90618 | 0,14737 | 3,30562 | 0,23693 |
| 2 | -0,53847 | 0,72497 | 4,72778 | 0,47863 |
| 3 | 0 | 1,57080 | 7,81050 | 0,56889 |
| 4 | 0,53847 | 2,41662 | 13,87103 | 0,47863 |
| 5 | 0,90618 | 2,99422 | 22,11662 | 0,23693 |

Exemplo de comparação com regra de 1/3 de Simpson cont.

- Usando (17) com $n = 5$,

$$I_5 = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^5 A_i f(x_i) \rightarrow I_5 = 30,42406.$$

- Resultado exato $\approx 30,42388$.
- Erro da quadratura de Gauss-Legendre com $n = 5$

$$|30,42388 - 30,42406| = 0,00018.$$

- Erro da regra do 1/3 de Simpson com $m = 6$

$$|30,42388 - 30,43369| = 0,00981. \text{ (exemplo)}$$

Erro de integração da fórmula de Gauss-Legendre

- Erro de integração da fórmula de Gauss-Legendre

$$E_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{((2n)!)^3(2n+1)} f^{2n}(\theta), \quad a < \theta < b, \quad (21)$$

- θ : abscissa na qual a derivada $f^{2n}(x)$ apresenta o maior valor em módulo no intervalo $[a, b]$.
- Cota máxima do erro de integração da fórmula de Gauss-Legendre.

Exemplo de erro de integração

Exemplo 21 Calcular $\int_0^\pi \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + \sin(x) \right) dx$ usando o método de Gauss-Legendre com $n = 2$ e o respectivo erro de integração.

- Mudança de variável

$$x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{\pi-0}{2}t_i + \frac{0+\pi}{2} \leadsto x_i = \frac{\pi}{2}(t_i + 1).$$

- Para $n = 2$

| i | t_i | x_i | $f(x_i)$ | A_i |
|-----|----------|---------|----------|-------|
| 1 | -0,57735 | 0,66390 | 1,10552 | 1 |
| 2 | 0,57735 | 2,47770 | 16,17701 | 1 |

$$I_2 = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^2 A_i f(x_i) \leadsto I_2 = 27,14733.$$

Exemplo de erro de integração cont.

- Cálculo do erro máximo

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 + \sin(x), \quad f'(x) = x^3 + 2x + \cos(x),$$
$$f''(x) = 3x^2 + 2 - \sin(x), \quad f'''(x) = 6x - \cos(x) \text{ e}$$
$$f^{iv}(x) = 6 + \sin(x) \rightsquigarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

- Por (21),

$$E_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{((2n)!)^3(2n+1)} f^{2n}(\theta) \rightarrow E_2 = \frac{(\pi-0)^5(2!)^4}{(4!)^3(5)} \left(6 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \rightsquigarrow$$

$$E_2 = 0,49587.$$

- Valor exato da integral: $\approx 27,63641$.
- Erro real: $|27,63641 - 27,14733| = 0,48908 < E_2$.

Algoritmo para cálculo das abscissas e pesos para as fórmulas de Gauss-Legendre

Algoritmo PesAbsGL

```

{ Objetivo: Calcular pesos e abscissas para a fórmula de Gauss-Legendre }
parâmetros de entrada  $n$  { número de pontos }
parâmetros de saída  $A$ ,  $T$ ,  $CondErro$ 
{ Pesos, abscissas e condição de erro, sendo }
{  $CondErro = 0$  se não houve erro ( $n \geq 1$ ) e  $CondErro = 1$  se  $n < 1$  }
se  $n < 1$  então  $CondErro \leftarrow 1$ , abandone, fimse
 $CondErro \leftarrow 0$ ;  $pi \leftarrow 3,14159265358979323846$ ;  $m \leftarrow \text{trunca}(0,5 * (n + 1))$ 
para  $i \leftarrow 1$  até  $m$  faça
   $z \leftarrow \cos(pi * (i - 0,25)/(n + 0,5))$ 
  repita
     $p1 \leftarrow 1$ ;  $p2 \leftarrow 0$ 
    para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
       $p3 \leftarrow p2$ ;  $p2 \leftarrow p1$ 
      { polinômio de Legendre no ponto  $z$  }
       $p1 \leftarrow ((2 * j - 1) * z * p2 - (j - 1) * p3)/j$ 
    fimpara
    { derivada do polinômio de Legendre no ponto  $z$  }
     $pp \leftarrow n * (z * p1 - p2)/(z^2 - 1)$ ;  $z1 \leftarrow z$ 
    { método de Newton para calcular os zeros do polinômio }
     $z \leftarrow z1 - p1/pp$ 
    se  $\text{abs}(z - z1) < 10^{-15}$  então interrompa, fimse
  fimrepita
   $T(m + 1 - i) \leftarrow z$  { abscissa }
   $A(m + 1 - i) \leftarrow 2/((1 - z^2) * pp^2)$  { peso }
  { somente as raízes não negativas são calculadas devido à simetria }
fimpara
fimalgoritmo

```



Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 22 Calcular os pesos e as abscissas para a fórmula de Gauss-Legendre com $n = 5$, utilizando o algoritmo.

```
% 0 parametro de entrada
n = 5
% produz os resultados
A = 0.568888888888889    0.47862867049937    0.23692688505619
T =                      0    0.53846931010568    0.90617984593866
CondErro = 0
```

Algoritmo para integração numérica pelo método de Gauss-Legendre

Algoritmo Gauss-Legendre

{ **Objetivo:** Integrar uma função pelo método de Gauss-Legendre }

parâmetros de entrada a , b , n

{ limite inferior, limite superior, número de pontos }

parâmetros de saída $Integral$, $CondErro$

{ valor da integral e condição de erro, sendo }

{ $CondErro = 0$ se não houve erro ($n \geq 1$) e $CondErro = 1$ se $n < 1$ }

$Integral \leftarrow 0$

{ cálculo dos pesos e abscissas }

$[Avet, Tvet, CondErro] \leftarrow \text{PesAbsGL}(n)$ (ver algoritmo)

se $CondErro \neq 0$ então abandone, fimse

{ cálculo da integral }

$e1 \leftarrow (b - a)/2$

$e2 \leftarrow (a + b)/2$

se $\text{resto}(n, 2) = 0$ então $c1 \leftarrow 1$; $c2 \leftarrow 0,5$ senão $c1 \leftarrow 0$; $c2 \leftarrow 1$, fimse

para $i \leftarrow 1$ até n faça

$k \leftarrow \text{trunca}(i - 0,5 * (n + 1) + \text{sinal}(i - 0,5 * (n + c1)) * c2)$

$t \leftarrow \text{sinal}(k) * Tvet(\text{abs}(k))$

$x \leftarrow e1 * t + e2$

$y \leftarrow f(x)$ { avaliar a função integrando em x }

$c \leftarrow Avet(\text{abs}(k))$

$Integral \leftarrow Integral + y * c$

escreva i , t , x , y , c

fimpara

$Integral \leftarrow e1 * Integral$

finalgoritmo

|| \leftarrow

Complexidade: integração pela quadratura de Gauss-Legendre



| Operações | Complexidade |
|----------------|--------------|
| adições | $7n + 2$ |
| multiplicações | $6n + 1$ |
| divisões | 2 |

- n : número de pontos.

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 23 Calcular $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$ pelo algoritmo com $n = 5$ e $n = 6$.

- Para $n = 5$

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = 0
```

```
b = 3.14159
```

```
n = 5
```

```
% produzem os resultados
```

```
Integracao numerica pelo metodo de Gauss-Legendre
```

| i | t(i) | x(i) | f(x(i)) | A(i) |
|---|----------|---------|---------|---------|
| 1 | -0.90618 | 0.14737 | 0.14684 | 0.23693 |
| 2 | -0.53847 | 0.72497 | 0.66311 | 0.47863 |
| 3 | 0.00000 | 1.57080 | 1.00000 | 0.56889 |
| 4 | 0.53847 | 2.41662 | 0.66312 | 0.47863 |
| 5 | 0.90618 | 2.99422 | 0.14684 | 0.23693 |

```
Integral = 2.0000001103
```

```
CondErro = 0
```

Exemplo de uso do algoritmo com $n = 6$

- Para $n = 6$

```
% Os parametros de entrada
a = 0
b = 3.14159
n = 6
% produzem os resultados
Integracao numerica pelo metodo de Gauss-Legendre
i      t(i)      x(i)      f(x(i))      A(i)
1    -0.93247    0.10608    0.10588    0.17132
2    -0.66121    0.53217    0.50740    0.36076
3    -0.23862    1.19597    0.93057    0.46791
4     0.23862    1.94562    0.93057    0.46791
5     0.66121    2.60942    0.50741    0.36076
6     0.93247    3.03551    0.10588    0.17132

Integral =    1.9999999995
CondErro =    0
```

Exemplo de uso do algoritmo com $n = 10$

Exemplo 24 Verificar que $\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$ com $n = 10$ utilizando o algoritmo.

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = 0
```

```
b = 1
```

```
n = 10
```

```
% produzem os resultados
```

```
Integracao numerica pelo metodo de Gauss-Legendre
```

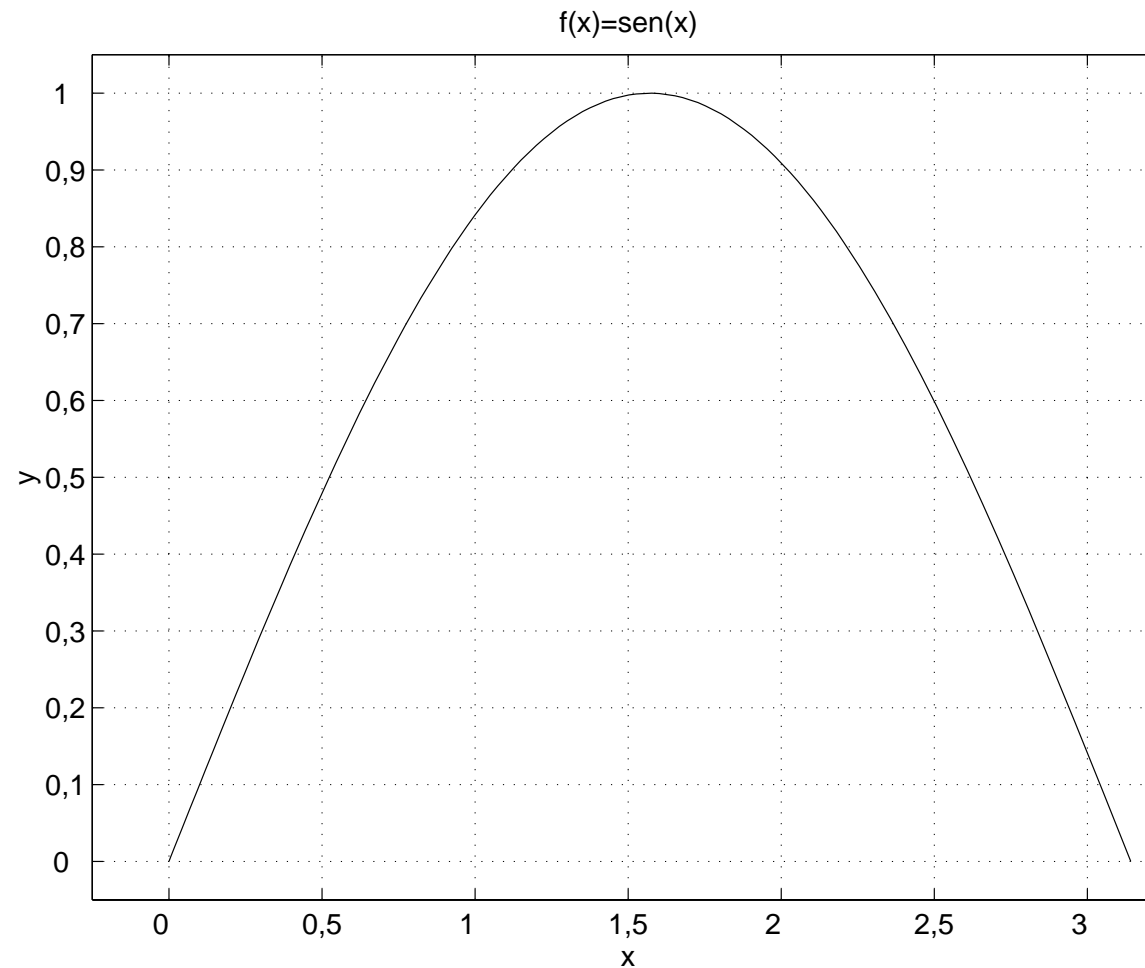
| i | t(i) | x(i) | f(x(i)) | A(i) |
|----|----------|---------|---------|---------|
| 1 | -0.97391 | 0.01305 | 3.99932 | 0.06667 |
| 2 | -0.86506 | 0.06747 | 3.98187 | 0.14945 |
| 3 | -0.67941 | 0.16030 | 3.89980 | 0.21909 |
| 4 | -0.43340 | 0.28330 | 3.70281 | 0.26927 |
| 5 | -0.14887 | 0.42556 | 3.38666 | 0.29552 |
| 6 | 0.14887 | 0.57444 | 3.00757 | 0.29552 |
| 7 | 0.43340 | 0.71670 | 2.64261 | 0.26927 |
| 8 | 0.67941 | 0.83970 | 2.34590 | 0.21909 |
| 9 | 0.86506 | 0.93253 | 2.13948 | 0.14945 |
| 10 | 0.97391 | 0.98695 | 2.02626 | 0.06667 |

```
Integral = 3.1415926536
```

```
CondErro = 0
```

Comparação dos métodos de integração simples

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = 2.$$



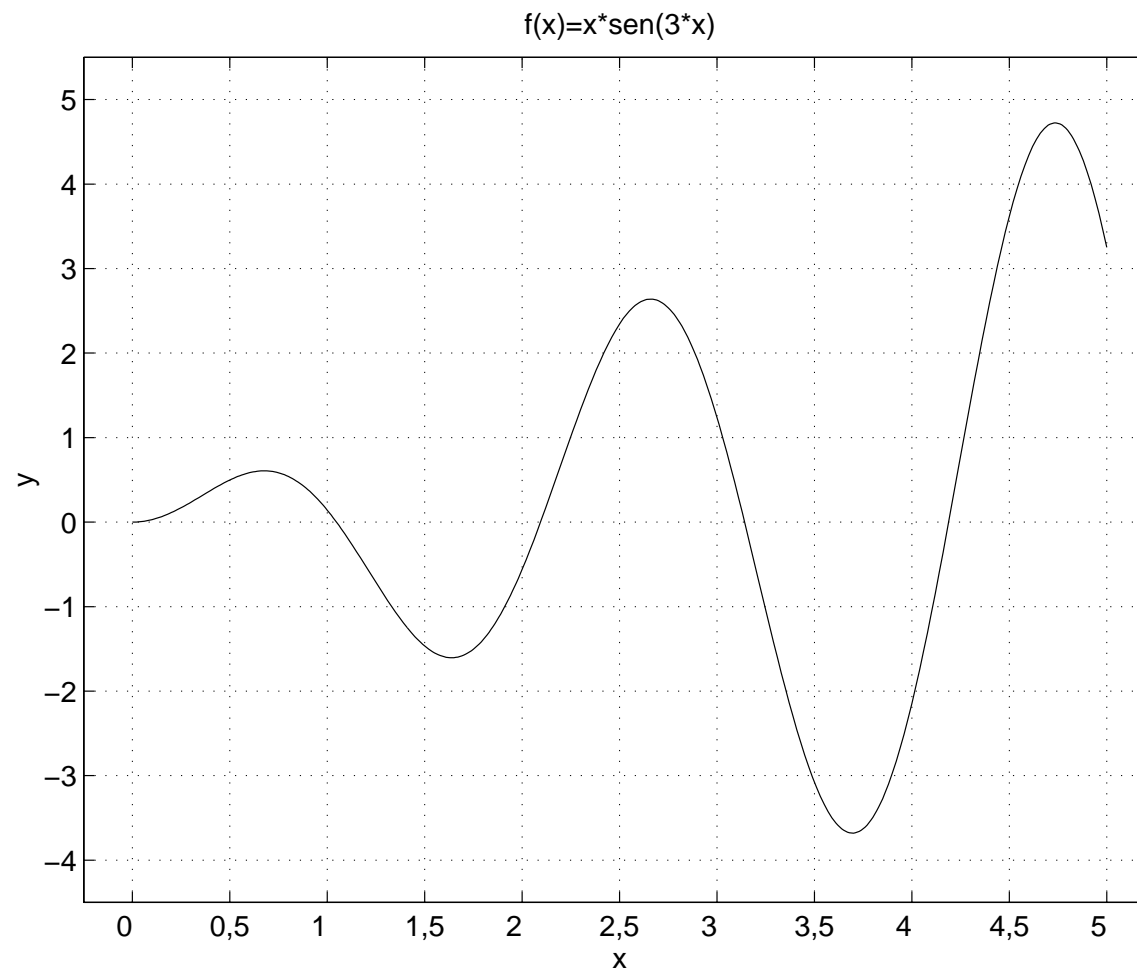
Comparação entre Newton-Cotes e Gauss-Legendre

| Grau do polinômio | Número de subintervalos | Newton-Cotes | Número de pontos | Gauss-Legendre |
|-------------------|-------------------------|------------------------|------------------|-------------------------|
| 1 | 1 | $2,000 \times 10^0$ | 2 | $6,418 \times 10^{-2}$ |
| 2 | 2 | $9,440 \times 10^{-2}$ | 3 | $1,389 \times 10^{-3}$ |
| 3 | 3 | $4,052 \times 10^{-2}$ | 4 | $1,577 \times 10^{-5}$ |
| 4 | 4 | $1,429 \times 10^{-3}$ | 5 | $1,103 \times 10^{-7}$ |
| 5 | 5 | $7,969 \times 10^{-4}$ | 6 | $5,227 \times 10^{-10}$ |
| 6 | 6 | $1,781 \times 10^{-5}$ | 7 | $1,791 \times 10^{-12}$ |
| 7 | 7 | $1,087 \times 10^{-5}$ | 8 | $4,441 \times 10^{-15}$ |
| 8 | 8 | $1,647 \times 10^{-7}$ | 9 | $4,441 \times 10^{-16}$ |

- Utilizadas regras simples de Newton-Cotes.
- Número de pontos de Gauss-Legendre igual a $m + 1$, sendo m o número de subintervalos de Newton-Cotes.

Comparação dos métodos de integração simples

$$\int_0^5 x \operatorname{sen}(3x) \, dx = \left. \frac{\operatorname{sen}(3x)}{9} - \frac{x \cos(3x)}{3} \right|_0^5 \approx 1,3384.$$

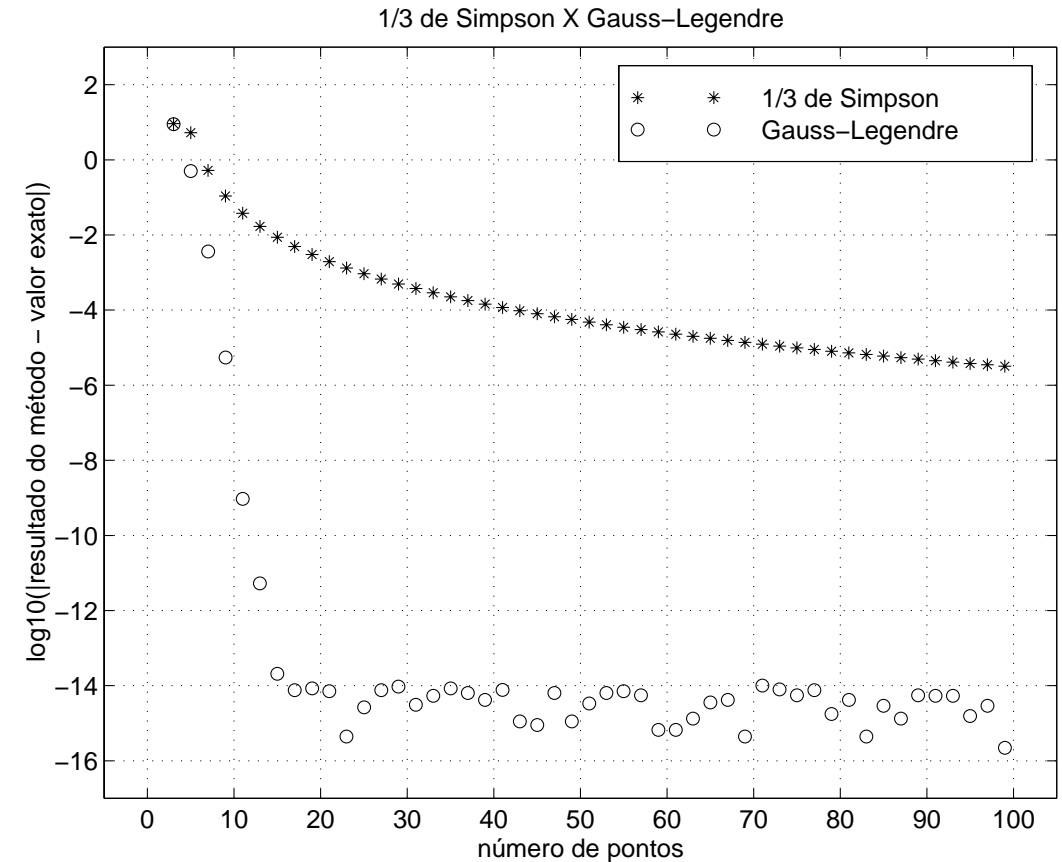


Comparação entre a regra do 1/3 de Simpson e Gauss-Legendre

| m | 1/3 de Simpson | Gauss-Legendre |
|-----|------------------------|-------------------------|
| 2 | $9,188 \times 10^0$ | $8,819 \times 10^0$ |
| 4 | $5,269 \times 10^0$ | $4,990 \times 10^{-1}$ |
| 6 | $5,221 \times 10^{-1}$ | $3,629 \times 10^{-3}$ |
| 8 | $1,093 \times 10^{-1}$ | $5,452 \times 10^{-6}$ |
| 10 | $3,799 \times 10^{-2}$ | $9,417 \times 10^{-10}$ |
| 12 | $1,688 \times 10^{-2}$ | $5,250 \times 10^{-12}$ |
| 14 | $8,689 \times 10^{-3}$ | $8,660 \times 10^{-15}$ |
| 16 | $4,944 \times 10^{-3}$ | $1,110 \times 10^{-15}$ |

| método – exato |

$\log_{10}(| \text{método} - \text{exato} |) \times m$

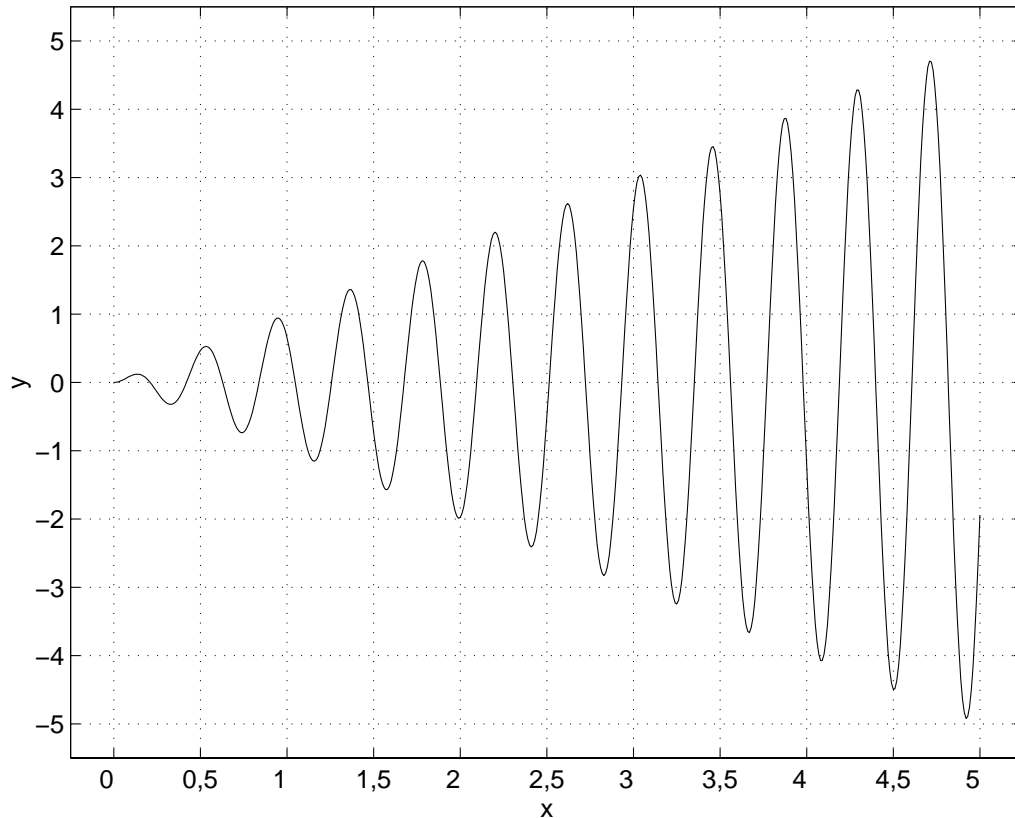


Integração de uma função não suave

$$\int_0^5 x \sin(15x) dx = \frac{\sin(15x)}{225} - \frac{x \cos(15x)}{15} \Big|_0^5 \approx -0,3090.$$

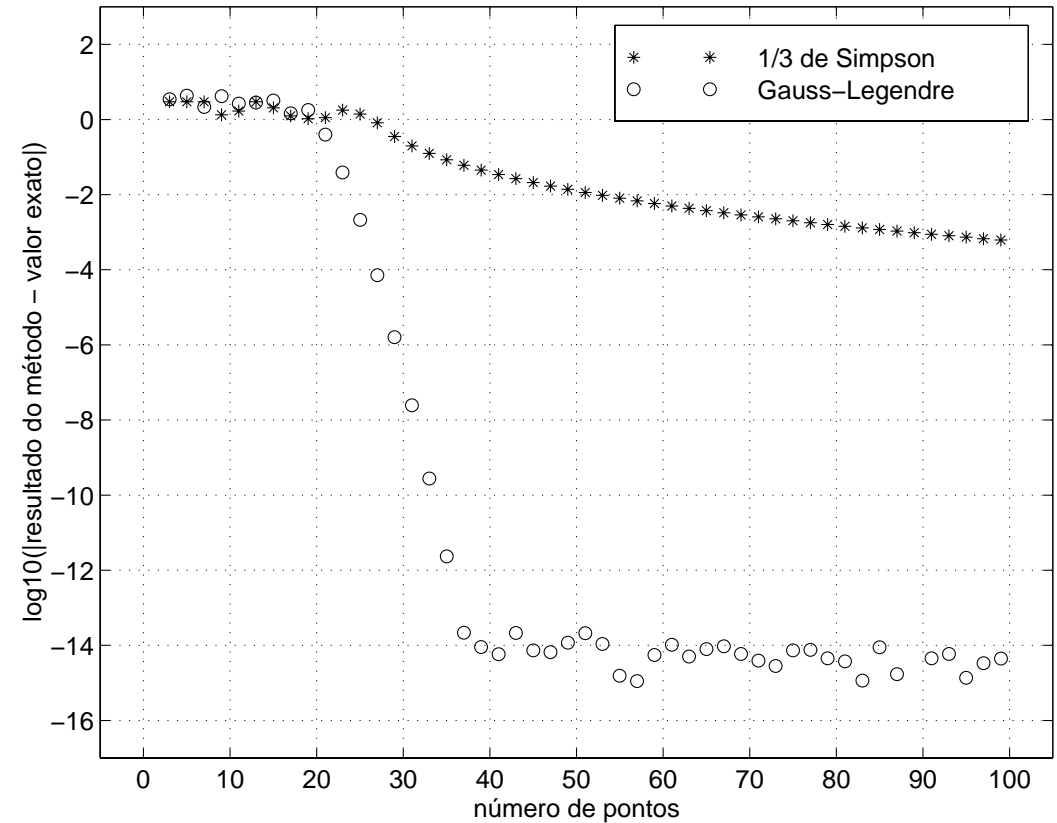


f(x)=x*sen(15*x)



$$f(x) = x \sin(15x).$$

1/3 de Simpson X Gauss-Legendre



1/3 de Simpson e Gauss-Legendre.

Integração numérica iterativa

- Fórmulas de integração calculam com grau crescente de exatidão à medida que aumenta o número de pontos.
- Principalmente a quadratura de Gauss-Legendre.
- Integração numérica iterativa:
 - inicialmente, a integral é calculada com $n = 8$ pontos;
 - depois calculada com $n = 13$ pontos;
 - se a diferença relativa entre os dois valores for menor ou igual a uma dada tolerância então o processo termina;
 - senão valor de n é incrementado, seguindo uma seqüência de Fibonacci;
 - a integral é calculada novamente;
 - processo repete até que a diferença relativa entre os dois últimos valores da integral seja menor ou igual à tolerância predefinida.

Integração iterativa pelo método de Gauss-Legendre

Algoritmo Gauss-Legendre iterativo

{ **Objetivo:** Integrar uma função iterativamente pelo método de Gauss-Legendre }

parâmetros de entrada $a, b, Toler, IterMax$

{ limite inferior, limite superior, tolerância e número máximo de iterações }

parâmetros de saída $Integral, Delta, CondErro$

{ valor da integral, menor diferença relativa obtida e condição de erro, sendo }

{ $CondErro = 0$ se $Delta \leq Toler$ e $CondErro = 1$ se $Delta > Toler$ }

$Iter \leftarrow 1; n1 \leftarrow 5; n2 \leftarrow 8$

$[Int, CondErro] \leftarrow \text{Gauss-Legendre}(a, b, n2)$ (ver algoritmo)

escreva $Iter, n2, Int$

{ sucessivos cálculos das integrais }

repita

$Iter \leftarrow Iter + 1; n \leftarrow n1 + n2$

$[Integral, CondErro] \leftarrow \text{Gauss-Legendre}(a, b, n)$

se $Integral \neq 0$ **então**

$Delta \leftarrow \text{abs}((Integral - Int) / Integral)$

senão

$Delta \leftarrow \text{abs}(Integral - Int)$

fimse

escreva $Iter, n, Integral, Delta$

se $Delta \leq Toler$ **ou** $Iter = IterMax$ **então interrompa, fimse**

$Int \leftarrow Integral; n1 \leftarrow n2; n2 \leftarrow n$

fimrepita

{ teste de convergência }

se $Delta \leq Toler$ **então** $CondErro \leftarrow 0$ **senão** $CondErro \leftarrow 1$, **fimse**

fimalgoritmo

⌞

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 25 Calcular $\int_0^{20} x \sin(15x) dx$ utilizando o algoritmo, com uma tolerância de 10^{-10} e com, no máximo, 10 iterações (ver figura).

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = 0
```

```
b = 20
```

```
Toler = 1e-10
```

```
IterMax = 10
```

```
% produzem os resultados
```

```
Integracao iterativa pelo metodo de Gauss-Legendre
```

| Iter | n | Integral | Dif. relativa |
|------|-----|----------------|---------------|
| 1 | 8 | 32.7305341124 | |
| 2 | 13 | 24.9187432521 | 3.135e-01 |
| 3 | 21 | -16.8767733573 | 2.477e+00 |
| 4 | 34 | 49.5529883366 | 1.341e+00 |
| 5 | 55 | -31.2365609799 | 2.586e+00 |
| 6 | 89 | 0.0247820806 | 1.261e+03 |
| 7 | 144 | 0.0250187998 | 9.462e-03 |
| 8 | 233 | 0.0250187997 | 1.006e-11 |

```
Integral = 2.5018799750e-02
```

```
Delta = 1.00649e-11
```

```
CondErro = 0
```

Integração dupla pelas fórmulas de Newton-Cotes

- Cálculo de integral dupla definida

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx. \quad (22)$$

- Função integrando $f(x, y)$ aproximada por polinômio interpolador.
- Integral deste polinômio é obtida analiticamente.
- Fazendo

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_c^d f(x, y) \, dy \\ I &= \int_a^b G(x) \, dx. \end{aligned} \quad (23)$$

- Cálculo de uma integral dupla consiste na solução de duas integrais simples.

Fórmulas simples

- Para resolver uma integral simples aplica-se qualquer uma das fórmulas de Newton-Cotes.
- Utilizando a regra do 1/3 de Simpson em (23),

$$I = \int_a^b G(x) dx = \frac{1}{3}h_x(G(x_0) + 4G(x_1) + G(x_2)), \quad (24)$$

$$I = \frac{1}{3}h_x \sum_{i=0}^2 c_{x_i} G(x_i),$$

- onde $h_x = (b - a)/2$, $c_{x_0} = c_{x_2} = 1$, $c_{x_1} = 4$ e

$$G(x_i) = \int_c^d f(x_i, y) dy, \quad i = 0, 1, 2.$$

Fórmulas simples cont.

- Para o cálculo de $G(x_i)$ utiliza-se qualquer uma das fórmulas de Newton-Cotes, por exemplo, a regra dos 3/8 de Simpson

$$\begin{aligned}
 G(x_i) &= \int_c^d f(x_i, y) dy \\
 &= \frac{3}{8}h_y(f(x_i, y_0) + 3f(x_i, y_1) + 3f(x_i, y_2) + f(x_i, y_3)),
 \end{aligned}$$

$$G(x_i) = \frac{3}{8}h_y \sum_{j=0}^3 c_{y_j} f(x_i, y_j), \quad (25)$$

- onde $h_y = (d - c)/3$, $c_{y_0} = c_{y_3} = 1$, $c_{y_1} = c_{y_2} = 3$ e
- $f(x_i, y_j)$: função integrando no ponto (x_i, y_j) .
- Levando os valores de $G(x_i)$ dados por (25), em (24)

$$I = \frac{1}{3}h_x \frac{3}{8}h_y \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 c_{x_i} c_{y_j} f(x_i, y_j). \quad (26)$$

Exemplo de integração dupla

Exemplo 26 Calcular $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}(x + y) \, dy \, dx$.

- Fazendo $G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}(x + y) \, dy \rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x) \, dx$.

- Utilizando a regra do 1/3 de Simpson em x ,

$$I = \frac{1}{3}h_x(G(x_0) + 4G(x_1) + G(x_2)), \text{ com } h_x = \frac{b - a}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

- Cálculo de $G(x_i) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}(x_i + y) \, dy$, $i = 0, 1, 2$ e $x_i = a + ih_x = i\frac{\pi}{4}$, utilizando a regra dos 3/8 de Simpson

$$G(x_i) = \frac{3}{8}h_y(\text{sen}(x_i + y_0) + 3\text{sen}(x_i + y_1) + 3\text{sen}(x_i + y_2) + \text{sen}(x_i + y_3)),$$

- com

$$h_y = \frac{d - c}{3} = \frac{\pi}{12} \text{ e } y_j = c + jh_y = j\frac{\pi}{12}.$$

Cálculo de $G(x_i)$

- Para $x_0 = 0 \times \frac{\pi}{4} = 0$

$$G(x_0) = \frac{3\pi}{812} (\text{sen}(0 + y_0) + 3 \text{sen}(0 + y_1) + 3 \text{sen}(0 + y_2) + \text{sen}(0 + y_3)),$$

$$G(x_0) = \frac{\pi}{32} \left(\text{sen}(0) + 3 \text{sen} \left(\frac{\pi}{12} \right) + 3 \text{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) + \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \rightsquigarrow$$

$$G(x_0) = 0,2929.$$

- Para $x_1 = 1 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$$G(x_1) = \frac{3\pi}{812} \left(\text{sen} \left(\frac{\pi}{4} + y_0 \right) + 3 \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} + y_1 \right) + 3 \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} + y_2 \right) + \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} + y_3 \right) \right),$$

$$G(x_1) = \frac{\pi}{32} \left(\text{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) + 3 \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \right) + 3 \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \rightsquigarrow$$

$$G(x_1) = 0,7071.$$

Cálculo de $G(x_i)$ cont.

- Para $x_2 = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$G(x_2) = \frac{3\pi}{8 \cdot 12} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + y_0\right) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + y_1\right) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + y_2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + y_3\right) \right),$$

$$G(x_2) = \frac{\pi}{32} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right) \rightsquigarrow \\ G(x_2) = 0,7071.$$

- Considerando que

$$I = \frac{1}{3} h_x (G(x_0) + 4G(x_1) + G(x_2)),$$

$$I = \frac{1\pi}{3 \cdot 4} (0,2929 + 4 \times 0,7071 + 0,7071) \rightsquigarrow \\ I = 1,0023.$$

Comparação com valor analítico

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}(x + y) \, dy \, dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x + y) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} dx,$$

$$I = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos(x + 0) \right) dx = - \left[\text{sen} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \text{sen}(x) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}},$$

$$I = - \left(\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) + \left(\text{sen} \left(0 + \frac{\pi}{4} \right) - \text{sen}(0) \right) \leadsto I = 1.$$

Dispositivo prático para integração dupla por Newton-Cotes

- Regra do 1/3 de Simpson utilizada para integração em x .
- Regra dos 3/8 em y .

| | | j | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-----|------------|------------------------------|--|--|--|--|
| | | y_j | c | $c + h_y$ | $c + 2h_y$ | $c + 3h_y$ |
| i | x_i | $c_{x_i} \backslash c_{y_j}$ | 1 | 3 | 3 | 1 |
| 0 | a | 1 | <div>$c_{x_0} \times c_{y_0}$</div> <div>$f(x_0, y_0)$</div> | <div>$c_{x_0} \times c_{y_1}$</div> <div>$f(x_0, y_1)$</div> | <div>$c_{x_0} \times c_{y_2}$</div> <div>$f(x_0, y_2)$</div> | <div>$c_{x_0} \times c_{y_3}$</div> <div>$f(x_0, y_3)$</div> |
| 1 | $a + h_x$ | 4 | <div>$c_{x_1} \times c_{y_0}$</div> <div>$f(x_1, y_0)$</div> | <div>$c_{x_1} \times c_{y_1}$</div> <div>$f(x_1, y_1)$</div> | <div>$c_{x_1} \times c_{y_2}$</div> <div>$f(x_1, y_2)$</div> | <div>$c_{x_1} \times c_{y_3}$</div> <div>$f(x_1, y_3)$</div> |
| 2 | $a + 2h_x$ | 1 | <div>$c_{x_2} \times c_{y_0}$</div> <div>$f(x_2, y_0)$</div> | <div>$c_{x_2} \times c_{y_1}$</div> <div>$f(x_2, y_1)$</div> | <div>$c_{x_2} \times c_{y_2}$</div> <div>$f(x_2, y_2)$</div> | <div>$c_{x_2} \times c_{y_3}$</div> <div>$f(x_2, y_3)$</div> |

$$S = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 c_{x_i} c_{y_j} f(x_i, y_j), \text{ então por (26), tem-se } I = \frac{1}{3} h_x \frac{3}{8} h_y S,$$

- S : soma obtida, tomando-se todas as células da tabela, do produto $c_{x_i} \times c_{y_j}$ dos coeficientes de Cotes pelo valor da função $f(x_i, y_j)$.

Exemplo do dispositivo prático

Exemplo 27 Calcular $I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \text{sen}(x + y) dy dx$ usando o dispositivo prático.

$$h_x = \frac{b - a}{2} = \frac{\pi/2 - 0}{2} \rightarrow h_x = \frac{\pi}{4} \text{ e } x_i = a + ih_x = 0 + i\frac{\pi}{4} \rightarrow x_i = i\frac{\pi}{4},$$

$$h_y = \frac{d - c}{3} = \frac{\pi/4 - 0}{3} \rightarrow h_y = \frac{\pi}{12} \text{ e } y_j = c + jh_y = 0 + j\frac{\pi}{12} \rightarrow y_j = j\frac{\pi}{12}.$$

| | | j | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-----|---------|------------------------------|--|---|---|--|
| | | y_j | 0 | $\pi/12$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ |
| i | x_i | $c_{x_i} \backslash c_{y_j}$ | 1 | 3 | 3 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | <div><div>1</div><div>0,0000</div></div> | <div><div>3</div><div>0,2588</div></div> | <div><div>3</div><div>0,5000</div></div> | <div><div>1</div><div>0,7071</div></div> |
| 1 | $\pi/4$ | 4 | <div><div>4</div><div>0,7071</div></div> | <div><div>12</div><div>0,8660</div></div> | <div><div>12</div><div>0,9659</div></div> | <div><div>4</div><div>1,0000</div></div> |
| 2 | $\pi/2$ | 1 | <div><div>1</div><div>1,0000</div></div> | <div><div>3</div><div>0,9659</div></div> | <div><div>3</div><div>0,8660</div></div> | <div><div>1</div><div>0,7071</div></div> |

$$I = \frac{1}{3} h_x \frac{3}{8} h_y S = \frac{1}{3} \frac{\pi}{4} \frac{3}{8} \frac{\pi}{12} 38,9975 \leadsto I = 1,0023.$$

Fórmulas compostas

- Melhorar a exatidão da integral: subdividir o intervalo $[a, b]$ em m_x subintervalos iguais.
- m_x : múltiplo do grau n_x do polinômio interpolador utilizado para obter a regra de integração em x .
- Regra do 1/3 de Simpson: m_x deve ser múltiplo de 2 ($= n_x$).
- Aplicando (24) a cada 3 ($= n_x + 1$) pontos,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_a^b G(x) \, dx \\
 &= \frac{1}{3}h_x(G(x_0) + 4G(x_1) + G(x_2)) + \frac{1}{3}h_x(G(x_2) + 4G(x_3) + G(x_4)) + \\
 &\quad \dots + \frac{1}{3}h_x(G(x_{m_x-2}) + 4G(x_{m_x-1}) + G(x_{m_x})), \\
 I &= \frac{1}{3}h_x(G(x_0) + 4G(x_1) + 2G(x_2) + 4G(x_3) + 2G(x_4) + \dots \\
 &\quad + 2G(x_{m_x-2}) + 4G(x_{m_x-1}) + G(x_{m_x})) \rightsquigarrow
 \end{aligned}$$

Fórmulas compostas cont.

$$I = \frac{1}{3}h_x \sum_{i=0}^{m_x} c_{x_i} G(x_i), \quad (27)$$

- onde $c_{x_0} = c_{x_{m_x}} = 1$, $c_{x_i} = 4$ para todo i ímpar, $c_{x_i} = 2$ para todo i par e $h_x = (b - a)/m_x$.
- Cálculo de $G(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, m_x$: pode ser utilizada qualquer uma das fórmulas de Newton-Cotes.
- Para a regra dos 3/8 de Simpson

$$G(x_i) = \int_c^d f(x_i, y) dy = \frac{3}{8}h_y (f(x_i, y_0) + 3f(x_i, y_1) + 3f(x_i, y_2) + f(x_i, y_3)). \quad (28)$$

- Para uma melhor exatidão: subdivide-se o intervalo $[c, d]$ em m_y subintervalos iguais.

Fórmulas compostas cont.

- m_y : múltiplo do grau n_y do polinômio interpolador usado para construir a regra de integração em y .
- No caso em questão múltiplo de 3 ($= n_y$).
- Aplicando-se (28) a cada 4 ($= n_y + 1$) pontos,

$$\begin{aligned} G(x_i) &= \int_c^d f(x_i, y) dy \\ &= \frac{3}{8}h_y(f(x_i, y_0) + 3f(x_i, y_1) + 3f(x_i, y_2) + f(x_i, y_3)) \\ &\quad + \frac{3}{8}h_y(f(x_i, y_3) + 3f(x_i, y_4) + 3f(x_i, y_5) + f(x_i, y_6)) + \dots \\ &\quad + \frac{3}{8}h_y(f(x_i, y_{m_y-3}) + 3f(x_i, y_{m_y-2}) + 3f(x_i, y_{m_y-1}) + f(x_i, y_{m_y})), \end{aligned}$$

Fórmulas compostas cont.

$$\begin{aligned}
 G(x_i) = & \frac{3}{8}h_y(f(x_i, y_0) + 3f(x_i, y_1) + 3f(x_i, y_2) + 2f(x_i, y_3) \\
 & + 3f(x_i, y_4) + 3f(x_i, y_5) + 2f(x_i, y_6) + \dots \\
 & + 2f(x_i, y_{m_y-3}) + 3f(x_i, y_{m_y-2}) + 3f(x_i, y_{m_y-1}) + f(x_i, y_{m_y})),
 \end{aligned}$$

$$G(x_i) = \frac{3}{8}h_y \sum_{j=0}^{m_y} c_{y_j} f(x_i, y_j), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m_x,$$

- onde $c_{y_0} = c_{y_{m_y}} = 1$, e para os j 's restantes, $c_{y_j} = 2$ se j for múltiplo de 3 e $c_{y_j} = 3$ se j não for múltiplo de 3 e $h_y = (d - c)/m_y$.
- Levando os valores de $G(x_i)$ em (27),

$$I = \frac{1}{3}h_x \sum_{i=0}^{m_x} c_{x_i} \left(\frac{3}{8}h_y \sum_{j=0}^{m_y} c_{y_j} f(x_i, y_j) \right) \rightsquigarrow I = \frac{1}{3}h_x \frac{3}{8}h_y \sum_{i=0}^{m_x} \sum_{j=0}^{m_y} c_{x_i} c_{y_j} f(x_i, y_j).$$

Equação geral da integração dupla por Newton-Cotes

- Generalizando para qualquer grau do polinômio interpolador

$$I = \frac{n_x}{d_{n_x}} h_x \frac{n_y}{d_{n_y}} h_y \sum_{i=0}^{m_x} \sum_{j=0}^{m_y} c_{x_i} c_{y_j} f(x_i, y_j), \quad (29)$$

- sendo

$$h_x = \frac{b - a}{m_x} \text{ e } h_y = \frac{d - c}{m_y}.$$

- Valores de d_{n_x} , d_{n_y} , c_{x_i} e c_{y_j} , para $n = 1, 2, \dots, 8$, são dados na tabela.

Algoritmo para integração dupla pelas fórmulas de Newton-Cotes

Algoritmo Newton-Cotes-Dupla

{ **Objetivo:** Cálculo de integral dupla pelas fórmulas de Newton-Cotes }

parâmetros de entrada $ax, bx, nx, mx, ay, by, ny, my$

{ limite inferior em x , limite superior em x , }

{ grau do polinômio em x , número de subintervalos em x , }

{ limite inferior em y , limite superior em y , }

{ grau do polinômio em y , número de subintervalos em y }

parâmetros de saída $Integral, CondErro$

{ valor da integral e condição de erro, sendo }

{ $CondErro = 0$ se não houve erro de consistência dos parâmetros dados, }

{ $CondErro = 1$ se $(n < 1$ ou $n > 8)$, }

{ $CondErro = 2$ se $resto(m, n) \neq 0$ e }

{ $CondErro = 3$ se ambas as condições ocorreram. }

$d(1) \leftarrow 2$; $d(2) \leftarrow 6$; $d(3) \leftarrow 8$; $d(4) \leftarrow 90$; $d(5) \leftarrow 288$; $d(6) \leftarrow 840$

$d(7) \leftarrow 17280$; $d(8) \leftarrow 28350$

$c(1) \leftarrow 1$; $c(2) \leftarrow 1$; $c(3) \leftarrow 4$; $c(4) \leftarrow 1$; $c(5) \leftarrow 3$; $c(6) \leftarrow 7$; $c(7) \leftarrow 32$

$c(8) \leftarrow 12$; $c(9) \leftarrow 19$; $c(10) \leftarrow 75$; $c(11) \leftarrow 50$; $c(12) \leftarrow 41$; $c(13) \leftarrow 216$

$c(14) \leftarrow 27$; $c(15) \leftarrow 272$; $c(16) \leftarrow 751$; $c(17) \leftarrow 3577$; $c(18) \leftarrow 1323$

$c(19) \leftarrow 2989$; $c(20) \leftarrow 989$; $c(21) \leftarrow 5888$; $c(22) \leftarrow -928$; $c(23) \leftarrow 10496$

$c(24) \leftarrow -4540$

{ consistência dos parâmetros }

$CondErro \leftarrow 0$; $Integral \leftarrow 0$

se $nx < 1$ ou $nx > 8$ ou $ny < 1$ ou $ny > 8$ então $CondErro \leftarrow CondErro + 1$, fim se

se $resto(mx, nx) \neq 0$ ou $resto(my, ny) \neq 0$ então $CondErro \leftarrow CondErro + 2$, fim se

se $CondErro \neq 0$ então abandone, fim se

{ cálculo da integral }

$px \leftarrow \text{trunca}(0,25 * (nx * (nx + 2) + \text{resto}(nx, 2)))$

$py \leftarrow \text{trunca}(0,25 * (ny * (ny + 2) + \text{resto}(ny, 2)))$

$hx \leftarrow (bx - ax)/mx$; $hy \leftarrow (by - ay)/my$

para $i \leftarrow 0$ até mx faça

$x \leftarrow ax + i * hx$; $jx \leftarrow px + \text{trunca}(0,5 * nx - \text{abs}(\text{resto}(i, nx) - 0,5 * nx))$

$kx \leftarrow 1 + \text{trunca}((nx - \text{resto}(i, nx))/nx) - \text{trunca}((mx - \text{resto}(i, mx))/mx)$

para $j \leftarrow 0$ até my faça

$y \leftarrow ay + j * hy$; $jy \leftarrow py + \text{trunca}(0,5 * ny - \text{abs}(\text{resto}(j, ny) - 0,5 * ny))$

$ky \leftarrow 1 + \text{trunca}((ny - \text{resto}(j, ny))/ny) - \text{trunca}((my - \text{resto}(j, my))/my)$

$fx \leftarrow f(x, y)$ { avaliar a função integrando em (x, y) }

$Integral \leftarrow Integral + fxy * c(jx) * kx * c(jy) * ky$

se $j = 0$ então escreva $i, x, c(jx) * kx, j, y, c(jy) * ky, fxy$

senão escreva $j, y, c(jy) * ky, fxy$

fim se

fim para

fim para

$Integral \leftarrow nx * ny * hx * hy / (d(nx) * d(ny)) * Integral$

fim algoritmo



Exemplo de integração dupla

Exemplo 28 Calcular $\int_2^5 \int_0^1 \sin(x^2 + y^2) dy dx$, utilizando o algoritmo, com $n_x = 3$ (regra dos 3/8), $m_x = 3$ subintervalos em x , $n_y = 2$ (regra do 1/3) e $m_y = 4$ subintervalos em y .

% Os parametros de entrada

```
ax = 2
bx = 5
nx = 3
mx = 3
ay = 0
by = 1
ny = 2
my = 4
```

% fornecem os resultados

Integracao dupla por Newton-Cotes

| i | x(i) | c(i) | j | y(j) | c(j) | f(x(i),y(j)) |
|---|-------------|------|---|-------------|------|--------------|
| 0 | 2.00000e+00 | 1 | 0 | 0.00000e+00 | 1 | -7.56802e-01 |
| | | | 1 | 2.50000e-01 | 4 | -7.96151e-01 |
| | | | 2 | 5.00000e-01 | 2 | -8.94989e-01 |
| | | | 3 | 7.50000e-01 | 4 | -9.88788e-01 |
| | | | 4 | 1.00000e+00 | 1 | -9.58924e-01 |
| 1 | 3.00000e+00 | 3 | 0 | 0.00000e+00 | 1 | 4.12118e-01 |
| | | | 1 | 2.50000e-01 | 4 | 3.54405e-01 |
| | | | 2 | 5.00000e-01 | 2 | 1.73889e-01 |
| | | | 3 | 7.50000e-01 | 4 | -1.37287e-01 |
| | | | 4 | 1.00000e+00 | 1 | -5.44021e-01 |
| 2 | 4.00000e+00 | 3 | 0 | 0.00000e+00 | 1 | -2.87903e-01 |
| | | | 1 | 2.50000e-01 | 4 | -3.47156e-01 |
| | | | 2 | 5.00000e-01 | 2 | -5.15882e-01 |
| | | | 3 | 7.50000e-01 | 4 | -7.54267e-01 |
| | | | 4 | 1.00000e+00 | 1 | -9.61397e-01 |
| 3 | 5.00000e+00 | 1 | 0 | 0.00000e+00 | 1 | -1.32352e-01 |
| | | | 1 | 2.50000e-01 | 4 | -7.01835e-02 |
| | | | 2 | 5.00000e-01 | 2 | 1.16990e-01 |
| | | | 3 | 7.50000e-01 | 4 | 4.16652e-01 |
| | | | 4 | 1.00000e+00 | 1 | 7.62558e-01 |

Integral = -0.78758

CondErro = 0

Integração dupla via fórmulas de Gauss-Legendre

- Similar à integração simples: fórmulas de Gauss-Legendre podem ser utilizadas para o cálculo aproximado da integral dupla definida (22)

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx.$$

- Fazendo

$$G(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy,$$

- tem-se que

$$I = \int_a^b G(x) \, dx.$$

- Cálculo de integral dupla por Gauss-Legendre consiste na determinação de duas integrais simples.

Fórmula para dois pontos

- Fazendo mudança de variável de x para t , sendo $-1 \leq t \leq 1$,

$$x = x(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} \longrightarrow dx = \frac{b-a}{2}dt.$$

- Tomando

$$x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2}.$$

- Definindo

$$H(t) = \frac{b-a}{2}G(x(t)),$$

- tem-se

$$I = \int_a^b G(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{b-a} H(t) \frac{b-a}{2} dt = \int_{-1}^1 H(t) dt.$$

Fórmula para dois pontos cont.

- Resolvendo a integral simples por Gauss-Legendre, com $n_x = 2$ pontos,

$$I = \int_{-1}^1 H(t) dt = A_1 H(t_1) + A_2 H(t_2), \quad (30)$$

- onde A_i , $i = 1, 2$ são os pesos e t_i são as abscissas ou os zeros do polinômio de Legendre de grau $n_x = 2$.
- Os valores de A_i e t_i podem ser obtidos na tabela ou gerados pelo algoritmo.
- Particularmente, para $n_x = 2$: $A_1 = A_2 = 1$ e $t_1 = -1/\sqrt{3}$ e $t_2 = 1/\sqrt{3}$.

Fórmula para dois pontos cont.

- Para o cálculo de $G(x_i) = \int_c^d f(x_i, y) dy$ é feita uma mudança de variável de y para u tal que $-1 \leq u \leq 1$,

$$y = y(u) = \frac{d-c}{2}u + \frac{c+d}{2} \longrightarrow dy = \frac{d-c}{2} du$$

- e, então, toma-se

$$y_j = \frac{d-c}{2}u_j + \frac{c+d}{2}.$$

- Definindo

$$F_i(u) = \frac{d-c}{2} f(x_i, y(u)),$$

- tem-se

$$G(x_i) = \int_c^d f(x_i, y) dy = \int_{-1}^1 \frac{2}{d-c} F_i(u) \frac{d-c}{2} du = \int_{-1}^1 F_i(u) du.$$

Fórmula para dois pontos cont.

- Usando a fórmula para $n_y = 2$ pontos,

$$G(x_i) = \int_{-1}^1 F_i(u) du = B_1 F_i(u_1) + B_2 F_i(u_2), \quad i = 1, 2,$$

- onde B_j , $j = 1, 2$, são os pesos e $F_i(u_j) = \frac{d-c}{2} f(x_i, y_j)$, para $j = 1, 2$.
- Logo,

$$H(t_i) = \frac{b-a}{2} G(x_i) = \frac{b-a}{2} (B_1 F_i(u_1) + B_2 F_i(u_2)), \quad i = 1, 2.$$

- Levando-se esses valores de $H(t_i)$ em (30),

$$I = A_1 \left(\frac{b-a}{2} (B_1 F_1(u_1) + B_2 F_1(u_2)) \right) + A_2 \left(\frac{b-a}{2} (B_1 F_2(u_1) + B_2 F_2(u_2)) \right).$$

Fórmula para dois pontos cont.

- Substituindo $F_i(u_j)$, $j = 1, 2$,

$$I = A_1 \left(\frac{b-a}{2} \left(B_1 \frac{d-c}{2} f(x_1, y_1) + B_2 \frac{d-c}{2} f(x_1, y_2) \right) \right) + A_2 \left(\frac{b-a}{2} \left(B_1 \frac{d-c}{2} f(x_2, y_1) + B_2 \frac{d-c}{2} f(x_2, y_2) \right) \right).$$

- Rearranjando,

$$I = \frac{(b-a)(d-c)}{2} \frac{1}{2} (A_1 B_1 f(x_1, y_1) + A_1 B_2 f(x_1, y_2) + A_2 B_1 f(x_2, y_1) + A_2 B_2 f(x_2, y_2)),$$

$$I = \frac{1}{4}(b-a)(d-c) \sum_{i=1}^2 A_i \sum_{j=1}^2 B_j f(x_i, y_j).$$

(31)

Dispositivo prático para integração dupla por Gauss-Legendre

$$I = \frac{1}{4}(b-a)(d-c)S, \quad \text{sendo} \quad S = \sum_{i=1}^2 A_i \sum_{j=1}^2 B_j f(x_i, y_j),$$

| | | | j | 1 | 2 |
|-----|---------------|-------|---------------------|---------------|---------------|
| | | | u_j | $-1/\sqrt{3}$ | $1/\sqrt{3}$ |
| | | | y_j | y_1 | y_2 |
| i | t_i | x_i | $A_i \setminus B_j$ | 1 | 1 |
| 1 | $-1/\sqrt{3}$ | x_1 | 1 | $f(x_1, y_1)$ | $f(x_1, y_2)$ |
| 2 | $1/\sqrt{3}$ | x_2 | 1 | $f(x_2, y_1)$ | $f(x_2, y_2)$ |

Exemplo de uso do dispositivo prático

Exemplo 29 Calcular $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \text{sen}(x + y) \, dy \, dx$ usando a fórmula de Gauss-Legendre para $n_x = n_y = 2$ pontos.

$$x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{\pi/2-0}{2}t_i + \frac{0+\pi/2}{2} \rightarrow x_i = \frac{\pi}{4}(t_i + 1),$$

$$y_j = \frac{d-c}{2}u_j + \frac{c+d}{2} = \frac{\pi/4-0}{2}u_j + \frac{0+\pi/4}{2} \rightarrow y_j = \frac{\pi}{8}(u_j + 1),$$

| | | | j | 1 | 2 |
|-----|---------------|--------|---------------------|---------------|--------------|
| | | | u_j | $-1/\sqrt{3}$ | $1/\sqrt{3}$ |
| | | | y_j | 0,1660 | 0,6194 |
| i | t_i | x_i | $A_i \setminus B_j$ | 1 | 1 |
| 1 | $-1/\sqrt{3}$ | 0,3319 | 1 | 0,4776 | 0,8142 |
| 2 | $1/\sqrt{3}$ | 1,2388 | 1 | 0,9863 | 0,9590 |

$$I = \frac{1}{4}(b-a)(d-c)S = \frac{1}{4}(\pi/2-0)(\pi/4-0) \times 3,2371 \leadsto I = 0,9984.$$

Fórmula geral para integração dupla por Gauss-Legendre

- Fórmula (31) para $n_x = n_y = 2$ pontos pode ser modificada para um número qualquer de pontos em x e em y .

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \frac{1}{4}(b-a)(d-c) \sum_{i=1}^{n_x} A_i \sum_{j=1}^{n_y} B_j f(x_i, y_j), \quad (32)$$

- onde $x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2}$ e $y_j = \frac{d-c}{2}u_j + \frac{c+d}{2}$.
- Pesos: A_i , $i = 1, 2, \dots, n_x$ e B_j , $j = 1, 2, \dots, n_y$.
- Abscissas: t_i e u_j podem ser obtidos na tabela ou gerados pelo algoritmo.

Dispositivo prático para integração dupla por Gauss-Legendre

$$I = \frac{1}{4}(b-a)(d-c)S, \text{ sendo } S = \sum_{i=1}^{n_x} A_i \sum_{j=1}^{n_y} B_j f(x_i, y_j),$$

| | | | j | 1 | 2 | ... | n_y |
|-------|-----------|-----------|---------------------|-------------------|-------------------|-----|-----------------------|
| | | | u_j | u_1 | u_2 | ... | u_{n_y} |
| | | | y_j | y_1 | y_2 | ... | u_{n_y} |
| i | t_i | x_i | $A_i \setminus B_j$ | B_1 | B_2 | ... | B_{n_y} |
| 1 | t_1 | x_1 | A_1 | $f(x_1, y_1)$ | $f(x_1, y_2)$ | ... | $f(x_1, y_{n_y})$ |
| 2 | t_2 | x_2 | A_2 | $f(x_2, y_1)$ | $f(x_2, y_2)$ | ... | $f(x_2, y_{n_y})$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | ⋮ |
| n_x | t_{n_x} | x_{n_x} | A_{n_x} | $f(x_{n_x}, y_1)$ | $f(x_{n_x}, y_2)$ | ... | $f(x_{n_x}, y_{n_y})$ |

Exemplo de uso do dispositivo prático

Exemplo 30 Calcular $\int_1^4 \int_0^2 (y^2 \log_{10}(3x)) \, dy \, dx$ usando Gauss-Legendre com $n_x = 3$ e $n_y = 4$.

$$x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2} = \frac{4-1}{2}t_i + \frac{1+4}{2} \leadsto x_i = 1,5t_i + 2,5,$$

$$y_j = \frac{d-c}{2}u_j + \frac{c+d}{2} = \frac{2-0}{2}u_j + \frac{0+2}{2} \leadsto y_j = u_j + 1,$$

| | | | | j | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----|---------|--------|---------------------|--------|---------|---------|--------|--------|
| | | | | u_j | -0,8611 | -0,3400 | 0,3400 | 0,8611 |
| | | | | y_j | 0,1389 | 0,6600 | 1,3400 | 1,8611 |
| i | t_i | x_i | $A_i \setminus B_j$ | 0,3479 | 0,6521 | 0,6521 | 0,3479 | . |
| 1 | -0,7746 | 1,3381 | 0,5556 | 0,0116 | 0,2629 | 1,0838 | 2,0907 | |
| 2 | 0,0000 | 2,5000 | 0,8889 | 0,0169 | 0,3812 | 1,5713 | 3,0309 | |
| 3 | 0,7746 | 3,6619 | 0,5556 | 0,0201 | 0,4534 | 1,8689 | 3,6051 | |

$$I = \frac{1}{4}(b-a)(d-c)S = \frac{1}{4}(4-1)(2-0) \times 4,5107 \leadsto I = 6,7660.$$

Algoritmo para integração dupla pelas fórmulas de Gauss-Legendre

Algoritmo Gauss-Legendre-Dupla

```

{ Objetivo: Integração dupla de função pelas fórmulas de Gauss-Legendre }
parâmetros de entrada ax, bx, nx, ay, by, ny
    { limite inferior em x, limite superior em x, número de pontos em x, }
    { limite inferior em y, limite superior em y, número de pontos em y }
parâmetros de saída Integral, CondErro
    { valor da integral e condição de erro, sendo }
    { CondErro = 0 se não houve erro ( $nx \geq 1$  e  $ny \geq 1$ ) e }
    { CondErro = 1 se  $nx < 1$  ou  $ny < 1$  }
    { cálculo dos pesos e abscissas }
    [Avet, Tvet, CondErro]  $\leftarrow$  PesAbsGL(nx) (ver Figura ??)
    Integral  $\leftarrow$  0; se CondErro  $\neq$  0, abandone, fim se
    se ny = nx então
        para j  $\leftarrow$  1 até trunca(0,5 * (nx + 1)) faça
            Bvet(j)  $\leftarrow$  Avet(j); Uvet(j)  $\leftarrow$  Tvet(j)
        fim para
    senão
        [Bvet, Uvet, CondErro]  $\leftarrow$  PesAbsGL(ny)
        se CondErro  $\neq$  0, abandone, fim se
    fim se
    { cálculo da integral dupla }
    ex1  $\leftarrow$  (bx - ax)/2; ex2  $\leftarrow$  (ax + bx)/2; ey1  $\leftarrow$  (by - ay)/2; ey2  $\leftarrow$  (ay + by)/2
    se resto(nx, 2) = 0 então cx1  $\leftarrow$  1; cx2  $\leftarrow$  0,5, senão cx1  $\leftarrow$  0; cx2  $\leftarrow$  1, fim se
    se resto(ny, 2) = 0 então cy1  $\leftarrow$  1; cy2  $\leftarrow$  0,5, senão cy1  $\leftarrow$  0; cy2  $\leftarrow$  1, fim se
    para i  $\leftarrow$  1 até nx faça
        kx  $\leftarrow$  trunca(i - 0,5 * (nx + 1) + sinal(i - 0,5 * (nx + cx1)) * cx2)
        tx  $\leftarrow$  sinal(kx) * Tvet(abs(kx)); Axx  $\leftarrow$  Avet(abs(kx))
        x  $\leftarrow$  ex1 * tx + ex2; Soma  $\leftarrow$  0
        para j  $\leftarrow$  1 até ny faça
            ky  $\leftarrow$  trunca(j - 0,5 * (ny + 1) + sinal(j - 0,5 * (ny + cy1)) * cy2)
            ty  $\leftarrow$  sinal(ky) * Uvet(abs(ky)); Ayy  $\leftarrow$  Bvet(abs(ky))
            y  $\leftarrow$  ey1 * ty + ey2
            fx  $\leftarrow$  f(x, y) { avaliar a função integrando em (x, y) }
            Soma  $\leftarrow$  Soma + Ayy * fx
            se j = 1 então escreva i, tx, x, Axx, j, ty, y, Ayy, fx
            senão escreva j, ty, y, Ayy, fx, fim se
        fim para
        Integral  $\leftarrow$  Integral + Axx * Soma
    fim para
    Integral  $\leftarrow$  ex1 * ey1 * Integral
fim algoritmo

```


Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 31 Calcular $\int_2^6 \int_1^3 \sqrt{x^2 + y} \cos(xy) dy dx$ utilizando o algoritmo, com $n_x = 5$ e $n_y = 4$.

```
% Os parametros de entrada
```

```
ax = 2
```

```
bx = 6
```

```
nx = 5
```

```
ay = 1
```

```
by = 3
```

```
ny = 4
```

```
% fornecem os resultados
```

```
Integracao dupla por Gauss-Legendre
```

| i | t(i) | x(i) | A(i) | j | u(j) | y(j) | B(j) | f(x(i),y(j)) |
|---|---------|-----------|--------|---|---------|-----------|--------|--------------|
| 1 | -0.9062 | 2.188e+00 | 0.2369 | 1 | -0.8611 | 1.139e+00 | 0.3479 | -1.93747e+00 |
| | | | | 2 | -0.3400 | 1.660e+00 | 0.6521 | -2.24020e+00 |
| | | | | 3 | 0.3400 | 2.340e+00 | 0.6521 | 1.05584e+00 |
| | | | | 4 | 0.8611 | 2.861e+00 | 0.3479 | 2.76450e+00 |
| 2 | -0.5385 | 2.923e+00 | 0.4786 | 1 | -0.8611 | 1.139e+00 | 0.3479 | -3.05731e+00 |
| | | | | 2 | -0.3400 | 1.660e+00 | 0.6521 | 4.45596e-01 |
| | | | | 3 | 0.3400 | 2.340e+00 | 0.6521 | 2.80093e+00 |
| | | | | 4 | 0.8611 | 2.861e+00 | 0.3479 | -1.64659e+00 |
| 3 | 0.0000 | 4.000e+00 | 0.5689 | 1 | -0.8611 | 1.139e+00 | 0.3479 | -6.47030e-01 |
| | | | | 2 | -0.3400 | 1.660e+00 | 0.6521 | 3.93758e+00 |
| | | | | 3 | 0.3400 | 2.340e+00 | 0.6521 | -4.27352e+00 |
| | | | | 4 | 0.8611 | 2.861e+00 | 0.3479 | 1.88500e+00 |
| 4 | 0.5385 | 5.077e+00 | 0.4786 | 1 | -0.8611 | 1.139e+00 | 0.3479 | 4.54970e+00 |
| | | | | 2 | -0.3400 | 1.660e+00 | 0.6521 | -2.84341e+00 |
| | | | | 3 | 0.3400 | 2.340e+00 | 0.6521 | 4.10146e+00 |
| | | | | 4 | 0.8611 | 2.861e+00 | 0.3479 | -2.02780e+00 |
| 5 | 0.9062 | 5.812e+00 | 0.2369 | 1 | -0.8611 | 1.139e+00 | 0.3479 | 5.57848e+00 |
| | | | | 2 | -0.3400 | 1.660e+00 | 0.6521 | -5.80491e+00 |
| | | | | 3 | 0.3400 | 2.340e+00 | 0.6521 | 3.07129e+00 |
| | | | | 4 | 0.8611 | 2.861e+00 | 0.3479 | -3.65773e+00 |

```
Integral = 1.5683954289
```

```
CondErro = 0
```

Comparação dos métodos para integração dupla

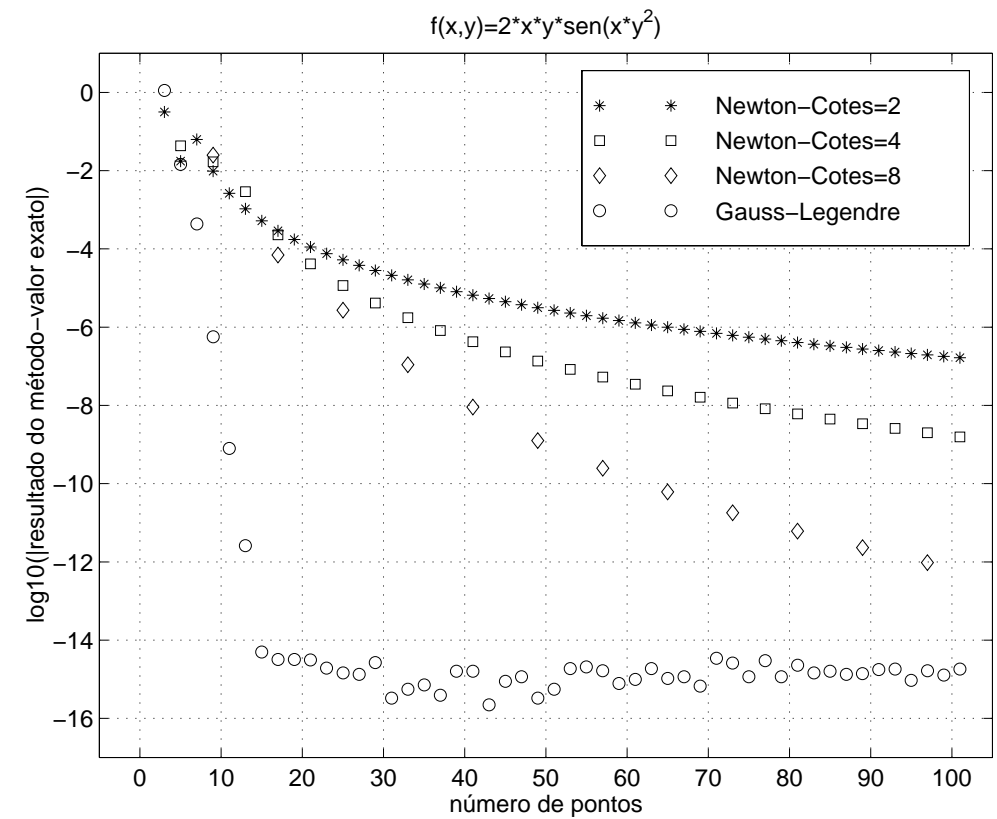
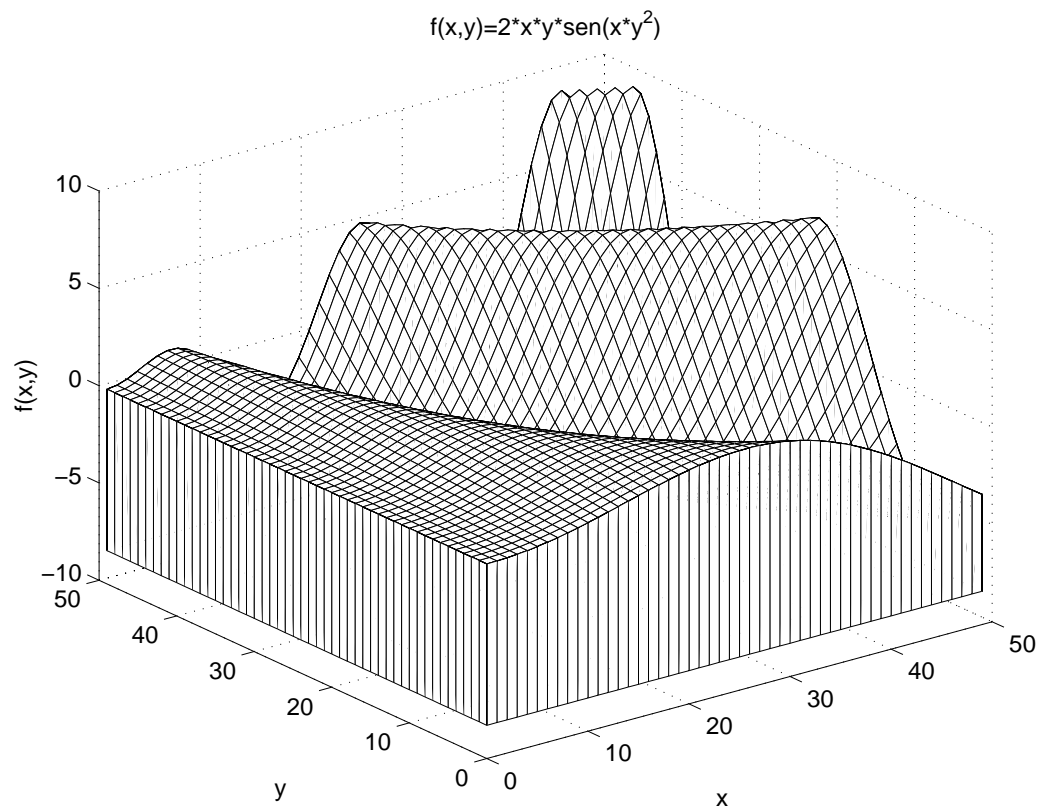
- Primeiro teste

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2xy \sin(xy^2) \, dy \, dx.$$

- Solução analítica: $I = (4 \sin(\pi^3/8) - \sin(\pi^3/2))/\pi^2 \approx -0,2921$.

| Grau do polinômio | Número de subintervalos | Newton-Cotes | Número de pontos | Gauss-Legendre |
|-------------------|-------------------------|------------------------|------------------|------------------------|
| 1 | 1 | $5,090 \times 10^{-1}$ | 2 | $2,733 \times 10^0$ |
| 2 | 2 | $3,154 \times 10^{-1}$ | 3 | $1,123 \times 10^0$ |
| 3 | 3 | $6,787 \times 10^{-1}$ | 4 | $7,703 \times 10^{-2}$ |
| 4 | 4 | $4,335 \times 10^{-2}$ | 5 | $1,448 \times 10^{-2}$ |
| 5 | 5 | $1,644 \times 10^{-1}$ | 6 | $4,001 \times 10^{-3}$ |
| 6 | 6 | $1,480 \times 10^{-2}$ | 7 | $4,331 \times 10^{-4}$ |
| 7 | 7 | $2,935 \times 10^{-2}$ | 8 | $2,440 \times 10^{-5}$ |
| 8 | 8 | $2,500 \times 10^{-2}$ | 9 | $5,705 \times 10^{-7}$ |

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2xy \operatorname{sen}(xy^2) dy dx$$



Comparação dos métodos para integração dupla

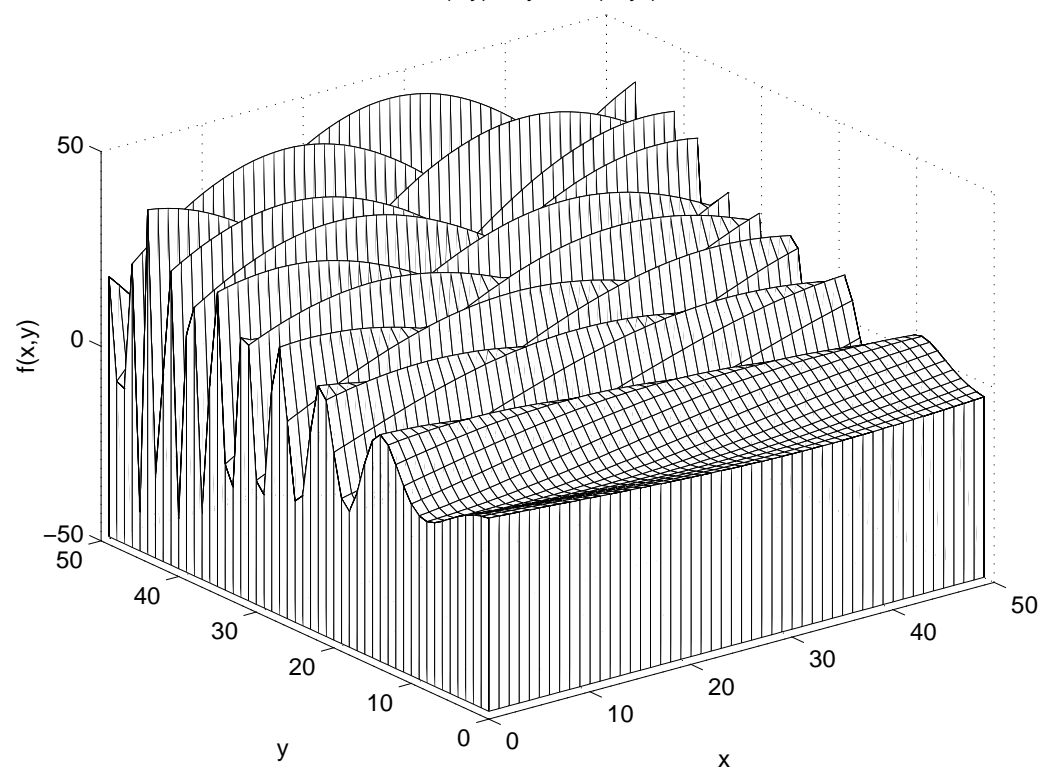
- Segundo teste

$$\int_0^{\pi} \int_1^4 3y^2 \cos(x + y^3) dy dx.$$

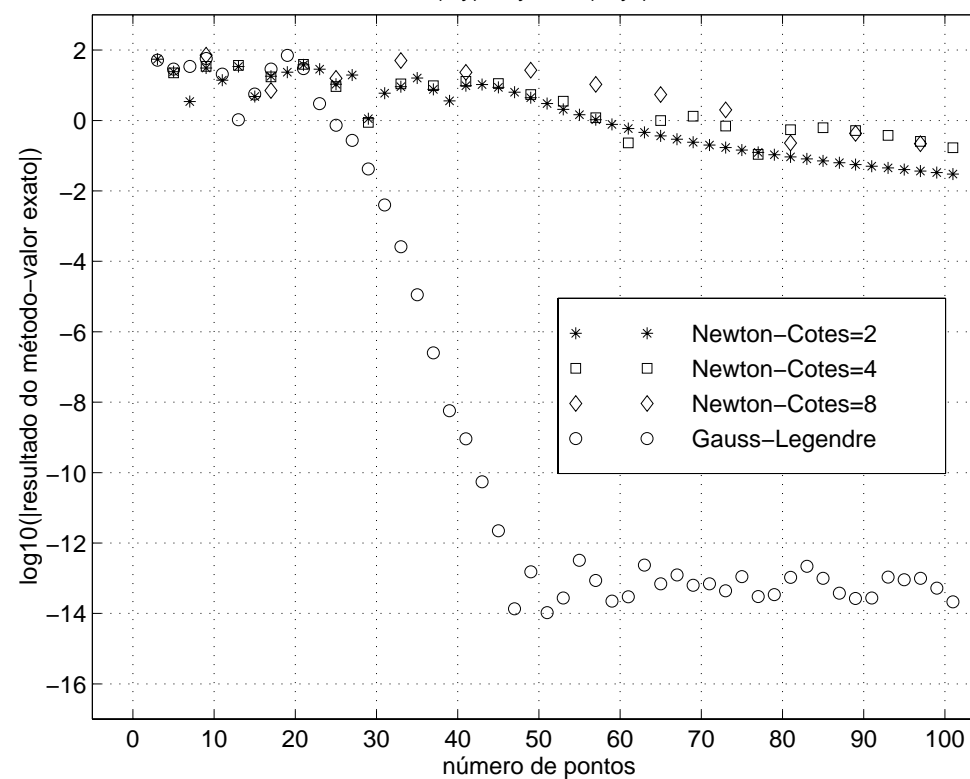
- Valor exato: $I = \cos(64) + \cos(\pi + 1) - \cos(1) - \cos(\pi + 64) \approx -0,2969$.

$$\int_0^{\pi} \int_1^4 3y^2 \cos(x + y^3) dy dx.$$

$$f(x,y)=3*y^2*\cos(x+y^3)$$



$$f(x,y)=3*y^2*\cos(x+y^3)$$



Fim

Capítulo 5: Integração numérica