

Aula passada

Equações homogêneas

Aula Hoje

Eq. lineares não homogêneas

Equação lineares não homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = G(t)$$

Teorema A solução geral da equação não homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = G(t)$$

é escrita como

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t)$$

onde $* y_H(t)$ é a solução geral a equação homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

e $* y_p(t)$ é uma solução particular da equação não homogênea

Prova

Sejam $y(t)$, $y_p(t)$ duas soluções da equação não homogênea, então para $y(t) - y_p(t)$ temos

$$\begin{aligned} & (y - y_p)'' + p(t)(y - y_p)' + q(t)(y - y_p) \\ &= \underbrace{y'' + p(t)y' + q(t)y}_{= G(t)} - \underbrace{(y_p'' + p(t)y_p' + q(t)y_p)}_{= G(t)} \\ &= G(t) - G(t) = 0 \end{aligned}$$

isto é $y(t) - y_p(t) =: y_H(t)$ solução da homogênea

então

$$y = y_H + y_p$$

Nota Já sabemos resolver algumas equações homogêneas. Vamos desenvolver dois métodos para encontrar uma solução particular da não homogênea

3.6 Método dos coeficientes a determinar

este método serve quando:

$$ay'' + by' + cy = G(t)$$

\swarrow = exponencial
 \dashv = trigonométrico (sen e cos)
 \searrow = polinômio
 equação de coeficientes constantes

Exemplo: Resolva

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

Solução

$$y(t) = \underbrace{c_1 y_1 + c_2 y_2}_{\text{sol. Homogênea}} + y_p(t) \quad \text{solução particular não Homog}$$

Passo 1

solução da homogênea

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{4 + \frac{9}{4}}{\frac{4}{4}} = \frac{25}{4}$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \rightarrow x = 4 \quad \searrow \quad x = -1$$

$$y_H(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}$$

Passo 2

Candidata a solução (tentativa)

Que tipo função poderia ser solução de $y'' - 3y' + 4y = 3e^{2t}$?

candidata: $y_p(t) = \underbrace{A e^{2t}}_{\text{coef. a determinar}}$

Derivar e substituir:

$$y'(t) = 2Ae^{2t} \quad y''(t) = 4Ae^{2t}$$

$$4Ae^{2t} - 6Ae^{2t} - 4Ae^{2t} = 3e^{2t}$$

$$\Rightarrow -6Ae^{2t} = 3e^{2t}$$

$$A = -1/2 \quad y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}$$

solução geral

$$y(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}e^{2t}$$

Exemplo: Resolva $y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$ Solução

$$y_H(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} \rightarrow \text{solução da homogênea}$$

Passo 2 candidata (motivado pelo exemplo anterior) a solução particular

$$y_p(t) = Ae^{-t}$$

Note, no entanto, que

$$y_H(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t}$$

isto é para $c_1 = A$ e $c_2 = 0$

$y_p(t) = Ae^{-t}$ é solução da equação homogênea

E portanto não é possível ser solução da não homogênea

Motivado pelo método de D'Alembert (para raiz repetida - redução de ordem)

candidata: $y_p(t) = \underline{At} e^{-t}$
coeficiente a determinar

Passo 3 Derivamos, substituímos e achamos A

$$y_p'(t) = Ae^{-t} - At e^{-t}$$

$$y_p''(t) = -2Ae^{-t} + At e^{-t}$$

$$(-2Ae^{-t} + At e^{-t}) - 3(Ae^{-t} - At e^{-t}) - 4t e^{-t} = 2e^{-t}$$

$$A = -2/5$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} - \frac{2}{5} t e^{-t}$$

Exemplo: Resolva $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2t}$

Solução:

Passo 1 Solução do homogêneo

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$x = 2$ raiz repetida

$$y_H(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$$

Passo 2 candidata a solução do não-homogêneo

I $y_p(t) = Ae^{2t}$ aparece na solução da homogênea

II $y_p(t) = Ate^{2t}$ aparece na solução da homogênea

III $y_p(t) = At^2 e^{2t}$ boa candidata

Passo 3 Derivamos e substituímos

$$y_p'(t) = 2Ate^{2t} + 2At^2 e^{2t}$$

$$y_p''(t) = 2Ae^{2t} + 4Ate^{2t} + 4At^2 e^{2t} + 4At^2 e^{2t}$$

$$2Ae^{2t} + 4Ate^{2t} + 4At^2 e^{2t} + 4At^2 e^{2t} - 4(2Ate^{2t} + 2At^2 e^{2t})$$

$$+ 4.(At^2 e^{2t}) = 2e^{2t}$$

$$2A - 4At - 4At^2 + 4At + 4At^2 = 2$$

$$A = 1$$

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + t^2 e^{2t}$$

Aí agora

$G(t)$	$y_p(t)$
e^{at}	$At^s e^{at}$
	$s = 0, 1, 2$

de forma que não tenha repetição com a solução da homogênea.

Exemplo Resolva

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \sin t$$

Solução: $y_H(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} \rightarrow$ Fica antes

Passo 2 Candidata: Note que $(\sin t)' = \cos$!

$$y_p(t) = A \cos t + B \sin t$$

coef. a determinar

Passo 3 Derivamos e substituímos na equação

$$y_p'(t) = -A \sin t + B \cos t$$

$$y_p''(t) = -A \cos t - B \sin t$$

$$(-A \sin t - B \cos t) - 3(-A \cos t - B \sin t) + 4(A \sin t + B \cos t) = 2 \sin t$$

$$(-A - 3B - 4A) \cos t + (-B + 3A - 4B) \sin t = 2 \sin t$$

$$\begin{cases} -5A - 3B = 0 \\ +3A - 5B = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{3}{17}, B = -\frac{5}{17}$$

$$y_p(t) = \frac{3}{17} \cos t - \frac{5}{17} \sin t$$

Solução geral $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} + \frac{3 \cos t - 5 \sin t}{17}$

Exemplo: Resolva

$$y'' - 3y' - 4y = 4t^2 - 1$$

Solução:

Passo 1: $y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t}$

Passo 2: candidata $Y(t) = At^2 + Bt + C$

coef. a determinar

Passo 3 derivar e substituir:

$$Y'(t) = 2At + B$$

$$Y''(t) = 2A$$

$$2A - 3(2At + B) - 4(At^2 + Bt + C) = 4t^2 - 1$$

$$(-4A)t^2 + (6A - 4B)t + (2A - 3B - 4C) = 4t^2 - 1$$

$$A = -1 \quad B = 3/2$$

$$6 - 4B = 0 \quad C = -11/8$$

$$y_p(t) = -t^2 + \frac{3t}{2} - \frac{11}{8}$$

Solução geral $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} - t^2 + \frac{3t}{2} - \frac{11}{8}$

Teorema Se $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ são soluções particulares respectivamente

$$ay'' + by' + cy = G_1(t)$$

$$ay'' + by' + cy = G_2(t)$$

então $Y_1(t) + Y_2(t)$ é solução de

$$ay'' + by' + cy = G_1(t) + G_2(t)$$

Exemplo: Resolva

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} + 2\sin t$$

Solução:

Passo 1: $y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t}$

Passo 2: $Y_p(t) = Ae^{2t} + B \cos t + C \sin t$

determinar
já fizemos já fizemos

$$= -1e^{2t} + \frac{3}{17} \cos t - \frac{5}{17} \sin t$$

Solução geral

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} - \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{3 \cos t - 5 \sin t}{17}$$

Exemplo determine uma candidata a solução particular da equação

$$a) y'' - 3y' - 4y = t^2 e^t$$

polinômio completo como candidata

Solução:

solução da homogênea $y = c_1 e^t + c_2 e^{4t}$
Candidata

$$Y_p(t) = t(A t^2 + B t + C) e^t$$

para eliminar a repetição

$C e^t$ solução da homogênea

$$b) y'' + 2y' + 2y = (t^3 - 1) \cos t$$

polinômio completo

Solução:

solução homogênea $y(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t$

Candidata:

$$Y_p(t) = (A_1 t^3 + B_1 t^2 + C_1 t + D_1) \sin t + (A_2 t^3 + B_2 t^2 + C_2 t + D_2) \cos t$$

não tem repetição com a solução da homogênea

Resumo

$G(t)$	$y_p(t)$
$P_n(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$	$t^n (A_n t^n + \dots + A_1 t + A_0)$
$P_n(t) \cdot e^{\alpha t}$	$t^n (A_n t^n + \dots + A_1 t + A_0) e^{\alpha t}$
$P_n(t) \cdot e^{\alpha t} \begin{cases} \cos pt \\ \sin pt \end{cases}$	$t^n (A_n t^n + \dots + A_1 t + A_0) e^{\alpha t} \begin{cases} \cos pt \\ \sin pt \end{cases} + t^n (B_n t^n + \dots + B_1 t + B_0) e^{\alpha t} \begin{cases} \sin pt \\ \cos pt \end{cases}$