$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercicios Algoritmos Numéricos- DI
Representação dos números na máquina e tipos de erro

1. Pode se obter aproximações para $I = \int_a^b f(x)dx$, usando um método bem simples: a regra dos retângulos. Nesta regra, divide-se o intervalo $[a, b]$ em N subintervalos de largura fixa h (gerando os pontos $x_0 = a, x_1 = a+h, ..., x_N = b$) e então soma-se a área dos retângulos, ou seja, via $I \approx \sum_{i=0}^{N-1} h * f(x_i)$. Suponha que se queira obter $I = \int_{1.0}^{3.0} \sqrt{x}dx$ por esta regra. Considere uma máquina que opere com aritmética de ponto flutuante normalizada com $t = 3$ dígitos significativos na mantissa, base 10 e expoente em $[-9, 9]$ e faça arredondamentos por corte (*chopping*).

   (a) Calcule o valor de I obtido por este método usando, apenas, $N = 2$ subintervalos, ou seja, fazendo: $I \approx \sum_{i=0}^{i=1} h * \sqrt{x_i} = (h * \sqrt{x_0} + h * \sqrt{x_1})$.

   (b) Calcule o valor de I obtido por este método usando $N = 4$ subintervalos.

   (c) Sabendo que o valor exato é $I_{ex} = 2.79743494...$ calcule o erro verdadeiro relativo contido na soluções obtidas na letra (a) e (b) (relativas à exata). Efetue estas contas com a precisão de sua calculadora.

   (d) Descreva o(s) tipo(s) de erro(s) existente(s) no valor de I obtido em (b).

2. Considere uma máquina que opere com aritmética de ponto flutuante normalizada com $t = 3$ dígitos significativos na mantissa, base 10 e expoente (inteiro) em $I = [-7, 7]$. Como ficam representados os valores de:
   (a) $x = (40000/3)$ nesta máquina?
   (b) e de $y = (3.45/100)$, nesta máquina?
   (c)e o valor de $z = 123000$, nesta máquina?
   (d)e o valor de $p = x * y$, nesta máquina?
   (e)e o valor de $q = x * z$, nesta máquina?
   OBS: Os arredondamentos devem ser feitos por corte (chopping). Não é necessário ficar escrevendo os valores numéricos obtidos usando potências de 10 (mas, se preferir, pode empregá-las). É importante mostrar o valor que fica armazenado na memória após cada cálculo.

3. Suponha que se queira calcular

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$$

   para um valor n inteiro positivo. Na expressão acima, o n de I_n representa o índice da integração, ou seja, I_n representa a integração com x elevando a n. Usando integração por partes é possível obter a seguinte relação:
   (1): $I_k = 1 - kI_{k-1}$, válida para k inteiro positivo. Rearranjando, tem-se também a expressão **(2)**: $I_{k-1} = (1 - I_k)/k$.

   Sabendo que $I_1 = e^{-1} = 0.367879441...$, um aluno escreveu o código abaixo para calcular o valor de I_9, usando a recorrência (1).

```
Algoritmo A
1. INICIO
2.   I=0.36788
```

```
3.   Para k de 2 ate 9, (passo 1)
4        I= 1-k*I
5.       Escreva ('O valor de I, neste ponto do codigo  e: ', I)
6.   Fim {Para k}
7. FIM
```

(a) Simulando um computador que opere com aritmética de ponto flutuante normalizada com $t = 5$ dígitos significativos na mantissa, base 10 e expoente (inteiro) na faixa de -9 a 9, mostre os valores de I que são exibidos na linha 5 do código. Considere que a máquina usa arredondamento para o mais próximo.

(b) Simulando a mesma máquina obter o valor de I_9 via $I_{k-1} = (1 - I_k)/k$ partindo de $I_{19} = 1/20$. Mostre os valores intermediários.

(c) Dados n e I_1, escreva um algoritmo que calcule I_n, usando a fórmula $I_k = 1 - kI_{k-1}$ partindo de I_1. Implemente o código e faça vários experimentos.

(d) Sabendo que $0 \leq I_N \leq (1/(N+1))$ escreva um algoritmo que calcule I_n dados n, N (com $N >> n$) e I_N usando a fórmula $I_{k-1} = (1 - I_k)/k$, partindo de $I_N = 1/(N+1)$. Implemente o código e faça vários experimentos.

4. O valor de $sen(x)$, para valores de $0 < x < \pi/4$, pode ser obtido através de uma série infinita dada abaixo:

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + ...$$

Ao se tomar apenas alguns termos da série tem se uma aproximação. Suponha que se queira calcular $sen(0.5)$ pela série empregando apenas os três primeiros termos da série, ou seja, os termos:

$$sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

(a) Simulando as operações executadas por um computador que opere com aritmética de ponto flutuante normalizada com $t = 4$ dígitos significativos na mantissa, base 10 e expoente em $I = [-99, 99]$ calcule o valor de $sen(0.5)$. Para isso simule as operações fazendo as contas obedecendo as regras de precedência natural das operações aritméticas (ou seja, potenciação como a prioritária, seguida de divisão e multiplicação e só então soma e subtração) e também seguindo a ordem dada pelos parênteses abaixo:

$$sin(x) \approx (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{x^5}{120}$$

OBS: Os arredondamentos devem ser feitos para o mais próximo. Não é necessário ficar escrevendo os valores numéricos obtidos usando potências de 10 (mas, se preferir, pode empregá-las). É importante mostrar o valor que fica armazenado na memória após cada cálculo.

(b) Sabendo que o valor exato de $sen(0.5)$ (com 9 dígitos) é $sen(0.5) = 0.479425538$, calcule o erro verdadeiro relativo contido na solução obtida (relativo ao exato fornecido). Efetue estas contas com a precisão de sua calculadora.

(c) Descreva o(s) tipo(s) de erro(s) existente(s) no valor de $sen(0.5)$ obtido.

5. Pode se obter aproximações para $I = \int_a^b f(x)dx$, usando um método bem simples: a regra dos retângulos à direita. Nesta regra, divide-se o intervalo $[a, b]$ em N subintervalos de largura fixa h (gerando os pontos $x_0 = a, x_1 = a + h, ..., x_N = b$) e então soma-se a área dos retângulos. Neste caso, a altura de cada retângulo é tomada com referência no ponto x_i "da direita" de cada retângulo, ou seja, a regra é: $I \approx \sum_{i=1}^{N} h * f(x_i)$.

   (a) Calcule o valor de $I = \int_{1.0}^{3.0} \sqrt{x}dx$ por esta regra, usando, apenas, $N = 4$ subintervalos. Considere uma máquina que opere com aritmética de ponto flutuante normalizada com $t = 3$ dígitos significativos na mantissa, base 10 e expoente em $[-9, 9]$ e faça arredondamentos por corte (*chopping*).

   b) Escreva um algoritmo para obter $I = \int_a^b \sqrt{x}dx$ pela regra dos retângulos à direita, colocando o h em evidência, ou seja, via, $I \approx h * (\sum_{i=1}^{N} f(x_i))$. Considere dados: a, b e N. Implemente a regra usando uma linguagem de programação e faça vários experimentos, ou seja, para vários valores de N compare a solução obtida com a solução exata.

   (c) Repita o procedimento para uma outra função $f(x)$ (que quiser) para qual se saiba a solução exata.

   (d) Escreva um algoritmo para obter $I = \int_a^b \sqrt{x}dx$ pela regra dos trapézios. Tente bolar este método! (dica: tome em cada subintervalo um trapézio e não mais um retângulo). Compare as soluções com aquelas obtidas via regra dos retângulos à direita (implementada na letra c) para vários valores de N.