Cálculo 2

Aula 20

Aula passada funções vetoriais

Aula Hoje Integrais

13.2 Integrais

Teorema Para $r : D \subset \mathbb{R} \to V^3$
$r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ uma função vetorial temos

$$\int_a^b r(t)\,dt = i\int_a^b f(t)\,dt + j\int_a^b g(t)\,dt + k\int_a^b h(t)\,dt$$

Aplicação:
sabemos que se $a(t)$ é uma função que descreve a aceleração de uma partícula então:

$$v(t) = \int a(t)\,dt + \vec{C}_1$$ / vetor constante

↳ velocidade

e

$$s(t) = \int v(t)\,dt + \vec{C}_2$$ / vetor constante

↳ posição

13.4 Movimento

Exemplo Uma partícula movendo-se, começa numa posição inicial $r(0) = (1,0,0)$ com uma velocidade inicial $v(0) = i - j + k$. $= (1,-1,1)$
Sua aceleração é $a(t) = 4ti + 6tj + k$.
Determine a sua velocidade e posição no momento t

Solução

* $v(t) = \int a(t)\,dt = \int 4t\,dt\; i + \int 6t\,dt\; j + \int 1\,dt\; k$

$= 2t^2 i + 3t^2 j + t k + C$

$v(0) = C = (1,-1,k)$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = (2t^2+1)i + (3t^2-1)j + (t+1)k}$$

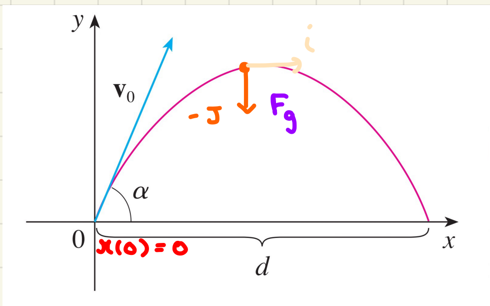
* $r(t) = \int v(t)\,dt = \int (2t^2+1)\,dt\; i + \int (3t^2-1)\,dt\; j + \int (t+1)\,dt\; k$

$= \left(\frac{2}{3}t^3 + t\right) i + (t^3 - t) j + \left(\frac{t^2}{2} + t\right) k + C$

$r(0) = (1,0,0) = C$

$$\Rightarrow \boxed{r(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 + t + 1\right) i + (t^3 - t) j + \left(\frac{t^2}{2} + t\right) k}$$

Exemplo Um projétil é disparado com um ângulo de elevação α e velocidade inicial $\vec{v}_0$. Assumindo que a resistência do ar seja desprezível e que a única força externa seja devida à gravidade, determine a função posição $r(t)$ do projétil. Para qual valor α obtemos maior alcance



Solução
sabemos que $F = m.a$

a única força envolvida é a gravidacional

$$F_g = -m.g\,j \quad , \text{onde } g = 9{,}8\ m/s^2$$

Assim

$$\cancel{m}a = -\cancel{m}g\,j$$

$\Rightarrow a(t) = -g\,j$

$\Rightarrow v(t) = \int -g\,dt\; j = -gt\,j + C$

$v(0) = \vec{v}_0 = C$

Assim $v(t) = -gt\,j + \vec{v}_0$

e $r(t) = \int v(t)\,dt\; j + \vec{v}_0$

$$= -g\frac{t^2}{2}\, j + \vec{v}_0\, t + c$$

$r(0) = 0 = c$ (*)

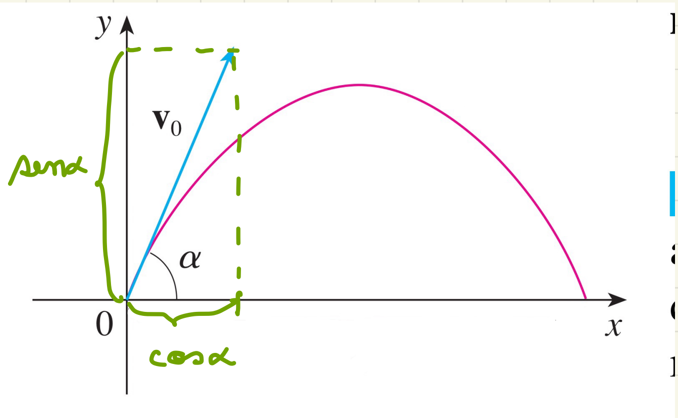
então

$$r(t) = \underbrace{v_0}_{}\, t - g\frac{t^2}{2}\, j$$

decompor e por em termos de α

supõe

$$\vec{v}_0 = |\vec{v}_0|\cos\alpha\; i + |\vec{v}_0|\operatorname{sen}\alpha\; j$$



Daí

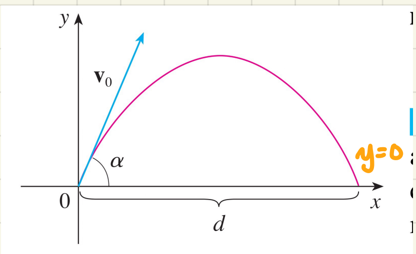
$$\boxed{r(t) = t|\vec{v}_0|\cos\alpha\; i + \left(t|\vec{v}_0|\operatorname{sen}\alpha - g\frac{t^2}{2}\right) j}$$

#

Obs se $r(0) = (a, b)$ posição inicial
então em (*)

$$r(t) = (t|\vec{v}_0|\cos\alpha + a)\, i + \left(t|\vec{v}_0|\operatorname{sen}\alpha - g\frac{t^2}{2} + b\right) j$$

Para d maior possível



isto é x tal que y = 0

igualando em (*)

$$t|\vec{v}_0|\operatorname{sen}\alpha - g\frac{t^2}{2} = 0$$

$$t\left(|\vec{v}_0|\operatorname{sen}\alpha - g\frac{t}{2}\right) = 0$$

$t = 0$ início ou

$$|\vec{v}_0|\operatorname{sen}\alpha - g\frac{t}{2} = 0$$

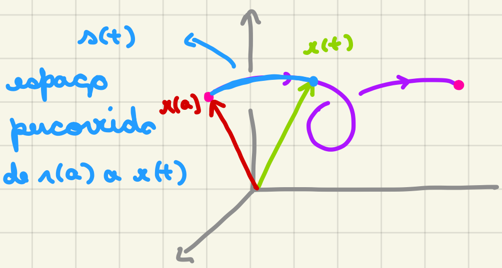
$$t = \frac{2|\vec{v}_0|\operatorname{sen}\alpha}{g}$$ substituindo em x

$$x = \frac{2|\vec{v}_0|\operatorname{sen}\alpha}{g}\cdot|\vec{v}_0|\cos\alpha$$

$$= \frac{|\vec{v}_0|^2\operatorname{sen}2\alpha}{g}$$ //

13.3 Comprimento de curva

↳ se $r(t)$ é o vetor posição
o comprimento da curva
dá a distância percorrida

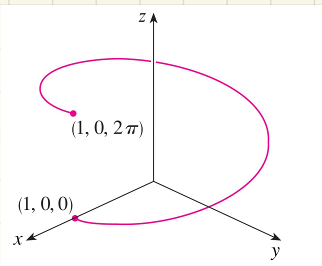


Teorema

$a \le t \le b$, $r(t) = f(t)\,i + g(t)\,j + h(t)\,k$

$$L = \int_a^b \|r'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}\,dt$$

Exemplo Calcule o comprimento de arco da hélice de equação $r(t) = \cos t\, i + \operatorname{sen} t\, j + t\, k$ do ponto $(1,0,0)$ a $(1,0,2\pi)$.



Solução

Primeiro reconhecer o instante t:

$$r(t) = (1,0,0) \Rightarrow t = 0$$

$$r(t) = (1,0,2\pi) \Rightarrow t = 2\pi$$

$$r'(t) = -\operatorname{sen} t\, i + \cos t\, j + k$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{\underbrace{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}_{} + 1} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}$$