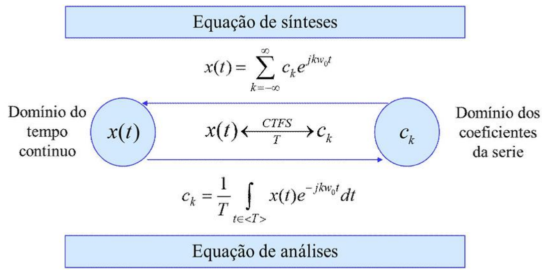
Series de Fourier de Tempo Continuo - CTFS (Parte II)



Professor
Jorge Leonid Aching Samatelo
jlasam001@gmail.com

Índice

- ❑ Introdução.
- ❑ CTFS.
- ❑ **CTFS para Sinais Reais.**
- ❑ **Propriedades de simetria da CTFS para Sinais Reais.**
- ❑ **CTFS e Sistemas LTI.**
- ❑ Bibliografia

CTFS para sinais reais

CTFS para sinais reais

Introdução

- ❑ No caso que a sequência periódica $x(t)$ com período T, seja **REAL** a Série de Fourier de Tempo Continuo (CTFS) no intervalo $[t_o, t_o+T]$, toma a forma

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kw_0t)+b_k sen(kw_0t)\right) \quad , \; t_0<t<t_0+T \quad , \; T=\tfrac{2\pi}{w_0}$$

- ❑ Onde, os coeficientes da série de Fourier são calculados com a expressão

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{t\in<T>} x(t)dt$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{t\in<T>} x(t)\cos(kw_0t)dt \quad k=1,2,3,\cdots$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{t\in<T>} x(t)\sin(kw_0t)dt \quad k=1,2,3,\cdots$$

CTFS para sinais reais

Introdução

❑ *Relação com CTFS exponencial*

Representação polar

Representação cartesiana

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0 t}$$

$$a_0 = 2c_0$$
$$a_k = 2\,\mathrm{Re}\{c_k\}$$
$$b_k = -2\,\mathrm{Im}\{c_k\}$$

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kw_0t)+b_k\sin(kw_0t)\right)$$

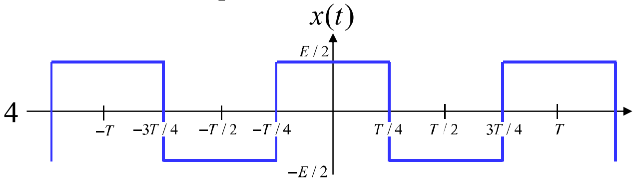
CTFS para sinais reais

Calculo da CTFS para sinais reais

Exemplo

❑ Determine a CTFS e o espectro de uma onda quadrada.

$$x(t)=\begin{cases} E/2 & 0<t<T/4 \\ -E/2 & T/4<t<3T/4 \\ E/2 & 3T/4<t<T \end{cases}$$



❑ *Dica*:

➢ Usando a equação de analise determinar os coeficientes c_k da serie de Fourier:

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{t\in<T>} x(t)dt$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{t\in<T>} x(t)\cos(kw_0t)dt \qquad k=1,2,3,\cdots$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{t\in<T>} x(t)\sin(kw_0t)dt \qquad k=1,2,3,\cdots$$

CTFS para sinais reais

Calculo da CTFS para sinais reais

Solução

❑ Calculamos os coeficientes da CTFS da onda quadrada

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_{t\in<T>} x(t)dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{T/4}\left(\frac{E}{2}\right)dt+\frac{2}{T}\int_{T/4}^{3T/4}\left(-\frac{E}{2}\right)dt+\frac{2}{T}\int_{3T/4}^{T}\left(\frac{E}{2}\right)dt \\
&= \frac{E}{T}\left(t\Big|_0^{T/4}\right)-\frac{E}{T}\left(t\Big|_{T/4}^{3T/4}\right)+\frac{E}{T}\left(t\Big|_{3T/4}^{T}\right) \\
&= \frac{E}{T}\left(\frac{T}{4}-\left(\frac{3T}{4}-\frac{T}{4}\right)+\left(T-\frac{3T}{4}\right)\right) \\
&= \frac{E}{T}\left(\frac{T}{4}-\frac{3T}{4}+\frac{T}{4}+T-\frac{3T}{4}\right)=0
\end{aligned}$$

CTFS para sinais reais

Calculo da CTFS para sinais reais

Solução

❑ Calculamos os coeficientes da CTFS da onda quadrada

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_{t\in<T>} x(t)\cos(kw_0t)dt \quad , \quad k=1,2,3,\cdots \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(kw_0t)dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{T/4}\left(\frac{E}{2}\right)\cos(kw_0t)dt+\frac{2}{T}\int_{T/4}^{3T/4}\left(-\frac{E}{2}\right)\cos(kw_0t)dt+\frac{2}{T}\int_{3T/4}^{T}\left(\frac{E}{2}\right)\cos(kw_0t)dt \\
&= \frac{E}{T}\int_0^{T/4}\cos(kw_0t)dt-\frac{E}{T}\int_{T/4}^{3T/4}\cos(kw_0t)dt+\frac{E}{T}\int_{3T/4}^{T}\cos(kw_0t)dt \\
&= \frac{E}{kw_0T}\left(\sin(kw_0t)\Big|_0^{T/4}\right)-\frac{E}{kw_0T}\left(\sin(kw_0t)\Big|_{T/4}^{3T/4}\right)+\frac{E}{kw_0T}\left(\sin(kw_0t)\Big|_{3T/4}^{T}\right) \\
&= \frac{E}{nw_0T}\left(2\sin(kw_0\tfrac{T}{4})-2\sin(kw_0\tfrac{3T}{4})+2\sin(kw_0T)\right)
\end{aligned}$$

CTFS para sinais reais

Calculo da CTFS para sinais reais

Solução

- Calculamos os coeficientes da CTFS da onda quadrada

$$a_k = \frac{E}{nw_0T}\left(2\sin(kw_0\tfrac{T}{4}) - 2\sin(kw_0\tfrac{3T}{4}) + 2\sin(kw_0T)\right) \qquad w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{E}{n\left(\frac{2\pi}{T}\right)T}\left(2\sin\left(k\left(\tfrac{2\pi}{T}\right)\tfrac{T}{4}\right) - 2\sin\left(k\left(\tfrac{2\pi}{T}\right)\tfrac{3T}{4}\right) + 2\sin\left(k\left(\tfrac{2\pi}{T}\right)T\right)\right)$$

$$= \frac{E}{k\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}k\right) + \sin(2\pi k)\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin\left(\frac{3\pi}{2}k\right) = \sin\left(2\pi k - \frac{\pi}{2}k\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)\\ &\sin(2\pi k) = 0\end{aligned}}$$

$$= \frac{2E}{k\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

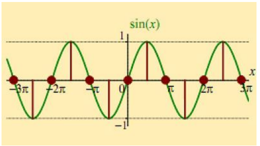
CTFS para sinais reais

Calculo da CTFS para sinais reais

Solução

- Calculamos os coeficientes da CTFS da onda quadrada

$$a_k = \frac{2E}{k\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) = \begin{cases} 0 & k \text{ é par} \\ 1 & k = 1,5,9,\cdots \\ -1 & k = 3,7,11,\cdots \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2E}{k\pi} & k = 1,5,9,\cdots \\ -\dfrac{2E}{k\pi} & k = 3,7,11,\cdots \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

CTFS para sinais reais

Calculo da CTFS para sinais reais

Solução

- Calculamos os coeficientes da CTFS da onda quadrada

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{t\in\langle T\rangle} x(t)\sin(kw_0t)dt \quad , \quad k = 1,2,3,\cdots$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(kw_0t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/4}\left(\frac{E}{2}\right)\sin(kw_0t)dt + \frac{2}{T}\int_{T/4}^{3T/4}\left(-\frac{E}{2}\right)\sin(kw_0t)dt + \frac{2}{T}\int_{3T/4}^{T}\left(\frac{E}{2}\right)\sin(kw_0t)dt$$

$$= \frac{E}{T}\int_0^{T/4}\sin(kw_0t)dt - \frac{E}{T}\int_{T/4}^{3T/4}\sin(kw_0t)dt + \frac{E}{T}\int_{3T/4}^{T}\sin(kw_0t)dt$$

$$= \frac{E}{kw_0T}\left(-\cos(kw_0t)\Big|_0^{T/4}\right) - \frac{E}{kw_0T}\left(-\cos(kw_0t)\Big|_{T/4}^{3T/4}\right) + \frac{E}{kw_0T}\left(-\cos(kw_0t)\Big|_{3T/4}^{T}\right)$$

$$= \frac{2E}{kw_0T}\left(\cos(kw_0\tfrac{3T}{4}) - \cos(kw_0\tfrac{T}{4})\right)$$

CTFS para sinais reais

Calculo da CTFS para sinais reais

Solução

- Calculamos os coeficientes da CTFS da onda quadrada

$$b_k = \frac{2E}{kw_0T}\left(\cos(kw_0\tfrac{3T}{4}) - \cos(kw_0\tfrac{T}{4})\right) \qquad w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{2E}{kw_0T}\left(\cos(k\tfrac{2\pi}{T}\tfrac{3T}{4}) - \cos(k\tfrac{2\pi}{T}\tfrac{T}{4})\right)$$

$$= \frac{2E}{kw_0T}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}k\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)\right)$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{3\pi}{2}k\right) = \cos\left(2\pi k - \frac{\pi}{2}k\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)}$$

$$= \frac{2E}{kw_0T}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)\right)$$

$$= 0$$

CTFS para sinais reais

Calculo da CTFS para sinais reais

Solução

- Então, a representação de $x(t)$ como uma combinação de harmônicos é

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kw_0t) + b_k sen(kw_0t)\right) \quad a_0 = 0,\; b_k = 0$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kw_0 t)$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{2E}{k\pi} & k = 1,5,9,\cdots \\ -\dfrac{2E}{k\pi} & k = 3,7,11,\cdots \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

$$= \frac{2E}{\pi}\left(\cos(w_0t) - \frac{1}{3}\cos(3w_0t) + \frac{1}{5}\cos(5w_0t) + \cdots\right)$$

CTFS para sinais reais

Calculo da CTFS para sinais reais

Solução

- Determinando o espectro

$$\| c_k \| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad b_k = 0$$

$$= \sqrt{a_k^2 + 0}$$

$$= \| a_k \|$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2E}{k\pi} & k = 1,3,5,7,9,\cdots \\ 0 & caso\ contrario \end{cases} \qquad a_k = \begin{cases} \dfrac{2E}{k\pi} & k = 1,5,9,\cdots \\ -\dfrac{2E}{k\pi} & k = 3,7,11,\cdots \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

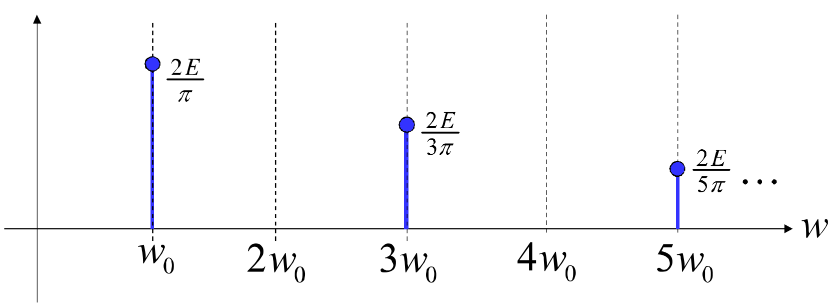
CTFS para sinais reais

Calculo da CTFS para sinais reais

Solução

- Determinando o espectro

$$\| c_k \| = \begin{cases} \dfrac{2E}{k\pi} & k = 1,3,5,7,9,\cdots \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$



CTFS para sinais reais

Resumo

Equação de sínteses

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kw_0t) + b_k sen(kw_0t)\right)$$

Domínio do tempo continuo $\quad x(t) \quad x(t) \xleftrightarrow[T]{CTFS} \{a_k, b_k\} \quad a_k, b_k \quad$ Domínio dos coeficientes da serie

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t\in<T>} x(t)dt$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t\in<T>} x(t)\cos(kw_0t)dt \quad k = 1,2,3,\cdots$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{t\in<T>} x(t)\sin(kw_0t)dt \quad k = 1,2,3,\cdots$$

Equação de análises

CTFS e Sistemas LTI

CTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma CTFS

- *Sabemos que*
  - A resposta de um sistema LTI de tempo continuo a uma entrada exponencial complexa imaginaria pura é outra exponencial imaginaria pura modulada pela resposta em frequência do sistema LTI:

$$x(t) = e^{jw_0 t} \Rightarrow \boxed{h(t)} \Rightarrow y(t) = H(jw_0)e^{jw_0 t}$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Frequência Angular

$$x(t) \xrightarrow{T} y(t) = T\{x(t)\} = x(t) * h(t)$$

$$H(jw_0) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-jw_0\tau}d\tau$$

$$H(jw_0) = H(s)\big|_{s=jw_0}$$

CTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma CTFS

- *Então*
  - Como será a resposta de um sistema LTI de tempo continuo a uma serie continua de Fourier com frequência fundamental w_0?

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0 t} \Rightarrow \boxed{h(t)} \Rightarrow y(t) = ?$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Frequência Angular

$$x(t) \xrightarrow{T} y(t) = T\{x(t)\} = x(t) * h(t)$$

Aqui é bom lembrar do principio de superposição

CTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma CTFS

- *Pode-se demonstrar que:*
  - A saída também será uma serie continua de Fourier com frequência fundamental w_0, onde cada coeficientes da serie é dependente da resposta em frequência do sistema e dos coeficientes da serie de entrada.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0 t} \Rightarrow \boxed{h(t)} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(jkw_0)e^{jkw_0 t}$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Frequência Angular

$$x(t) \xrightarrow{T} y(t) = T\{x(t)\} = x(t) * h(t)$$

CTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma CTFS

- *Em detalhe*
  - Considerando que os sinais são reais:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0t} \Rightarrow \boxed{h(t)} \Rightarrow y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(jkw_0) e^{jkw_0t}$$

$$c'_k = c_k H(jkw_0)$$

$$a_0 = 2c_0 \qquad a_k = 2\,\mathrm{Re}\{c_k\} \qquad b_k = -2\,\mathrm{Im}\{c_k\}$$

$$a'_0 = 2c'_0 \qquad a'_k = 2\,\mathrm{Re}\{c'_k\} \qquad b'_k = -2\,\mathrm{Im}\{c'_k\}$$

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kw_0t)+b_k\sin(kw_0t)\right)$$

$$y(t)=\frac{a'_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a'_k\cos(kw_0t)+b'_k\sin(kw_0t)\right)$$

CTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma CTFS

- *Tal resultado permite*
  - Definir uma PROCEDIMENTO para determinar a saída de um sistema continuo LTI por meio da resposta em frequência e os coeficientes da CTFS da entrada ao invés da convolução.
- *Procedimento*
  - **INICIO**: determinamos a resposta em frequência *H(jw)* do sistema LTI.
  - **PASO 1**: determinamos a CTFS do sinal de entrada.
  - **PASO 2**: Calculando o sinal de saída, usando a resposta em frequência do sistema e os coeficientes da CTFS do sinal de entrada.

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0t} \Rightarrow \boxed{h(t)} \Rightarrow y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(jkw_0) e^{jkw_0t}$$

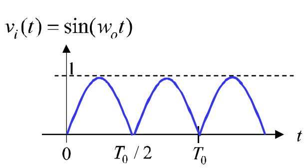
$$H(jw)=H(s)\big|_{s=jw}$$

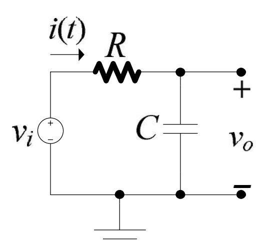
CTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma CTFS

Exemplo

- Determinar a tensão no capacitor $v_o(t)$ no circuito *RC*, considerando como entrada





CTFS e Sistemas LTI

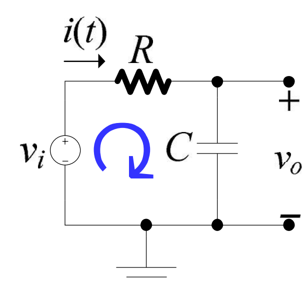
Resposta a uma CTFS

Solução

- **INICIO**: determinamos a resposta em frequência *H(jw)* do sistema LTI.
  - **[A]** Determinando a função de transferência do filtro *RC*.
    - Calculando a EDO linear de coeficientes constantes que representa a dinâmica do sistema:
      - Aplicando a Lei de Malhas de *Kirchoff*

$$-v_i(t)+Ri(t)+-v_0(t)=0$$

$$-v_i(t)+RC\frac{dv_0(t)}{dt}+-v_0(t)=0$$



CTFS e Sistemas LTI

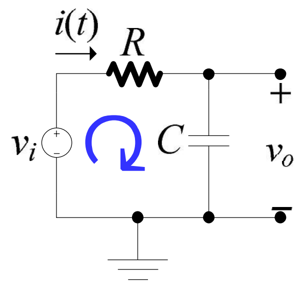
Resposta a uma CTFS

Solução

- **INICIO**: determinamos a resposta em frequência $H(jw)$ do sistema LTI.
  - **[A]** Determinando a função de transferência do filtro *RC*.
    - Calculando a EDO linear de coeficientes constantes que representa a dinâmica do sistema:
      - Aplicando a Lei de Malhas de *Kirchoff*

$$-v_i(t) + Ri(t) + -v_0(t) = 0$$

$$-v_i(t) + RC\frac{dv_0(t)}{dt} + -v_0(t) = 0$$



CTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma CTFS

Solução

- **INICIO**: determinamos a resposta em frequência $H(jw)$ do sistema LTI.
  - **[A]** Determinando a função de transferência do filtro *RC*.
    - Aplicando a transformada de Laplace na expressão anterior determinamos a função de transferência

$$-L\{v_i(t)\} + RCL\left\{\frac{dv_0(t)}{dt}\right\} + L\{v_0(t)\} = 0$$

$$-V_i(s) + RC(sV_o(s)) + V_o(s) = 0$$

$$(1 + RCs)V_o(s) = V_i(s)$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + RCs}$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + RCs}$$

CTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma CTFS

Solução

- **INICIO**: determinamos a resposta em frequência $H(jw)$ do sistema LTI.
  - **[B]** Usando a função de transferência do filtro *RC*, determinamos a correspondente resposta em frequência.

$$H(jw) = H(s)\big|_{s=jw}$$

$$= \frac{1}{1 + RCs}\bigg|_{s=jw}$$

$$= \frac{1}{1 + jRCw}$$

CTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma CTFS

Solução

- **PASO 1**: determinamos a CTFS do sinal de entrada
  - **[A]** Calculamos os coeficientes da CTFS do sinal retificada $v_i(t)$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{t\in<T>} x(t)e^{-jkw_0t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0/2}\int_0^{T_0/2} \sin(w_0t)e^{-jkw_0t}dt$$

$$= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2}\left(\frac{e^{jw_0t} - e^{-jw_0t}}{j2}\right)e^{-jkw_0t}dt$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{j2}$$

$$= \frac{1}{jT_0}\int_0^{T_0/2}\left(e^{j(1-k)w_0t} - e^{-j(1+k)w_0t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{jT_0}\left(\int_0^{T_0/2} e^{j(1-k)w_0t}dt - \int_0^{T_0/2} e^{-j(1+k)w_0t}dt\right)$$

CTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma CTFS

Solução

- **PASO 1**: determinamos a CTFS do sinal de entrada
  - **[A]** Calculamos os coeficientes da CTFS do sinal retificada $v_i(t)$

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{jT_0}\left(\int_0^{T_0/2} e^{j(1-k)w_0 t}dt - \int_0^{T_0/2} e^{-j(1+k)w_0 t}dt\right) \\
&= \frac{1}{jT_0}\left(\left.\frac{e^{j(1-k)w_0 t}}{j(1-k)w_0}\right|_{t=0}^{T_0/2} + \left.\frac{e^{-j(1+k)w_0 t}}{j(1+k)w_0}\right|_{t=0}^{T_0/2}\right) \\
&= \frac{1}{jT_0}\left(\frac{e^{j(1-k)w_0 T_0/2}-1}{j(1-k)w_0} + \frac{e^{-j(1+k)w_0 T_0/2}-1}{j(1+k)w_0}\right) \\
&= \frac{1+e^{-j2\pi k}}{\pi(1-2k^2)} \\
&= \frac{2}{\pi(1-4k^2)}
\end{aligned}
$$

$$\int e^{at}dt = \frac{e^{at}}{a}$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_0/2}$$

CTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma CTFS

Solução

- **PASO 1**: determinamos a CTFS do sinal de entrada
  - **[B]** Então, a representação de $v_i(t)$ como uma combinação de exponenciais complexas é

$$
\begin{aligned}
v_i(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0 t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi(1-4k^2)}\right) e^{jkw_0 t}
\end{aligned}
$$

CTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma CTFS

Solução

- **PASO 1**: determinamos a CTFS do sinal de entrada
  - **[C]** Tomando em conta que $v_i(t)$ é um sinal real, também determinamos representação de $v_i(t)$ como uma combinação de harmônicos sinusoidais:
    - ❖Calculando os coeficientes

$$a_0 = 2c_0 = \left.\frac{4}{\pi(1-4k^2)}\right|_{k=0} = \frac{4}{\pi}$$

$$a_k = 2\,\mathrm{Re}\{c_k\} = \frac{4}{\pi(1-4k^2)}$$

$$b_k = -2\,\mathrm{Im}\{c_k\} = 0$$

- ❖A representação será:

$$
\begin{aligned}
v_i(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kw_0 t) + b_k \sin(kw_0 t)\right) \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kw_0 t)}{(1-4k^2)}
\end{aligned}
$$

CTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma CTFS

Solução

- **PASO 2**: Calculando a saída $v_o(t)$.
  - **[A]** A representação de $v_o(t)$ como uma combinação de exponenciais complexas é:

$$
\begin{aligned}
v_o(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(jkw_0) e^{jkw_0 t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{\pi(1-4k^2)}\right)\left(\frac{1}{1+jRCkw_0}\right)}_{=c'_k} e^{jkw_0 t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k\, e^{jkw_0 t}
\end{aligned}
$$

- Onde:

$$c'_k = \left(\frac{2}{\pi(1-4k^2)}\right)\left(\frac{1}{1+jRCkw_0}\right) = \frac{2}{\pi(1-4k^2)(1+(RCw_0)^2k^2)}(1-jRCkw_0)$$

CTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma CTFS

Solução

- **PASO 2**: Calculando a saída $v_o(t)$.
  - **[B]** Tomando em conta que $v_i(t)$ e a resposta do sistema são sinais reais, o sinal de saída $v_o(t)$ também pode ser representada como uma combinação de harmônicos sinusoidais.
    - ❖Calculando os coeficientes

$$a'_0 = 2c'_0 = 2\left(\frac{2}{\pi(1-4k^2)}\right)\left(\frac{1}{1+jRCkw_0}\right)\Bigg|_{k=0} = \frac{4}{\pi}$$

$$a'_k = 2\operatorname{Re}\{c'_k\} = \frac{4}{\pi(1-4k^2)(1+(RCw_0)^2k^2)}$$

$$b'_k = -2\operatorname{Im}\{c'_k\} = \frac{4RCkw_0}{\pi(1-4k^2)(1+(RCw_0)^2k^2)}$$

CTFS e Sistemas LTI

Resposta a uma CTFS

Solução

- **PASO 2**: Calculando a saída $v_o(t)$.
  - **[B]** Tomando em conta que $v_i(t)$ e a resposta do sistema são sinais reais, o sinal de saída $v_o(t)$ também pode ser representada como uma combinação de harmônicos sinusoidais.
    - ❖A representação será:

$$v_o(t) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a'_k\cos(kw_0t) + b'_k\sin(kw_0t)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kw_0t) + (RCkw_0)\sin(kw_0t)}{(1-4k^2)(1+(RCw_0)^2k^2)}$$

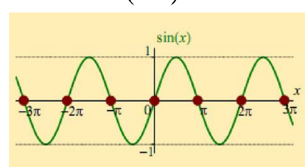
Anexos

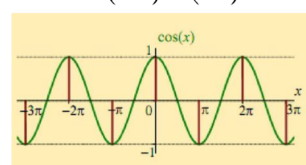
Anexos

Resultados de utilidade para solucionar problemas

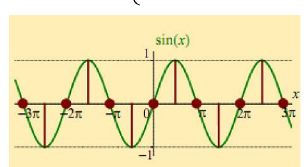
- Quando calculamos os coeficientes da CTFS na e bn, para os quais n = ...,–2, –0,1,2,... os seguintes resultados são de utilidade (cada um destes resultados pode ser deduzido das curvas correspondentes as funções seno e cosseno.

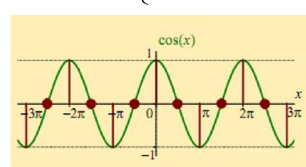
$$\sin(n\pi) = 0 \qquad \cos(n\pi) = (-1)^n$$





$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ é par} \\ 1 & n = 1,5,9,\cdots \\ -1 & n = 3,7,11,\cdots \end{cases} \qquad \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ é impar} \\ 1 & n = 0,4,8,\cdots \\ -1 & n = 2,6,10,\cdots \end{cases}$$





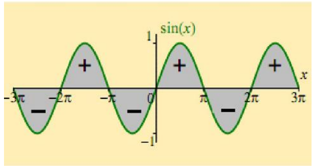
Anexos

Resultados de utilidade para solucionar problemas

- Quando calculamos os coeficientes da CTFS na e bn, para os quais n = ...,–2, –0,1,2,... os seguintes resultados são de utilidade (cada um destes resultados pode ser deduzido das curvas correspondentes as funções seno e cosseno.

$$\int_{2\pi} \sin(nx)dx = 0$$

$$\int_{2\pi} \cos(nx)dx = 0$$



Áreas são canceladas quando são integradas em um período

Bibliografia

Bibliografia

John G. Proakis, and Dimitris K. Manolakis. *Digital Signal Processing* (4th Edition). Pearson, USA, 2007