Aula 17 Cálculo 3B Aula 26 Cálculo 3A

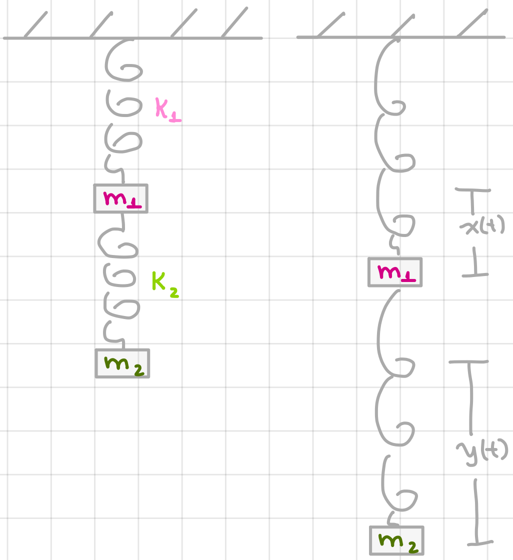
Aula passada

Eq. lineares não homogênea
↳ variação dos parametros

Aula Hoje Eq de ordem n { teoria geral / coef. constantes

Cap 4 Equações lineares de ordem n

Motivação: Massa - Mola



$$\begin{cases} (1) & m_1 x'' = -K_1 x + K_2(y-x) \\ (2) & m_2 y'' = -K_2(y-x) \end{cases}$$

sistema de duas equações de 2ª ordem

Vamos transformá-lo em uma equação de ordem maior

Em (2) $\quad m_2 y'' = -K_2 y + K_2 x$

$$x = \frac{m_2 y''}{K_2} + y$$

derivando

$$x'' = \frac{m_2}{K_2} y^{(4)} + y''$$

substituindo

$$m_1\left(\frac{m_2}{K_2} y^{(4)} + y''\right) = -K_1\left(\frac{m_2 y''}{K_2} + y\right) + K_2\left(y - \frac{m_2 y''}{K_2} - y\right)$$

$$\underbrace{\left(\frac{m_1 m_2}{K_2}\right) y^{(4)} + \left(m_1 + \frac{K_1 m_2}{K_2} + \frac{K_2 m_2}{K_2}\right) y'' + (K_1 - K_2) y = 0}$$

↳ constantes

4.1 Teoria geral

derivada de ordem n

$$\boxed{y^{(n)} + p_1(t) y^{(n-1)} + \dots + p_2(t) y'' + p_1(t) y' + p_0(t) y = 0}$$

Equação linear de ordem n homogênea

Teorema Se $p_1, \dots p_n$ são contínuas em um intervalo aberto e funções $y_1, \dots y_n$ são soluções de

$$(*) \quad \boxed{y^{(n)} + p_1(t) y^{(n-1)} + \dots + p_2(t) y'' + p_1(t) y' + p_0(t) y = 0}$$

com

$$W(y_1, \dots y_n) = \det\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \neq 0$$

(isto é são n soluções LI's)

então a solução geral de (*) é expressa por

$$\boxed{y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n}$$

Além disso, para a equação não homogênea

$$(**) \quad \boxed{y^{(n)} + p_1(t) y^{(n-1)} + \dots + p_2(t) y'' + p_1(t) y' + p_0(t) y = G(t)}$$

a solução geral é

$$\boxed{y(t) = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + Y_p(t)}$$

onde $Y_p(t)$ é uma solução particular de (**)

4.2 Equações de coeficientes constantes

$$\boxed{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0} \quad (*)$$

Como no caso de ordem 2

A função $\boxed{y(t) = e^{xt}}$ é solução de (*) desde que x seja raiz do polinômio

$$\boxed{a_n x^n + \dots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0}$$

Diferente de um polinômio de 2º grau, um polinômio de grau n pode ter simultaneamente

- raízes distintas reais : $x_1, \dots x_k$

$y_1(t) = e^{x_1 t}, \dots, y_k(t) = e^{x_k t}$ são soluções

- raízes repetidas reais: x de multiplicidade k

$y_1(t) = e^{xt}, \quad y_2(t) = te^{xt}, \quad y_3(t) = \underbrace{t^2}_{\text{repete o método de D'Alembert}} e^{xt}, \dots$

$y_k(t) = \underbrace{t^{k-1}}_{\text{repete o método de D'Alembert}} e^{xt}$

- raízes complexas :

$x_1 = \alpha_1 + \beta_1 i, \dots, x_k = \alpha_k + \beta_k i$

$y_1(t) = e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \quad y_2(t) = e^{\alpha_1 t}\operatorname{sen}\beta_1 t, \dots$

$y_{2k-1}(t) = e^{\alpha_k t}\cos\beta_k t, \quad y_{2k}(t) = e^{\alpha_k t}\operatorname{sen}\beta_k t.$

- raízes complexas repetidas :

$x = \alpha + \beta i$ de multiplicidade k

$y_1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad y_2(t) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t,$

$y_3(t) = \underbrace{t}_{\text{repete o método de D'Alembert}} e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad y_4(t) = \underbrace{t}_{\text{repete o método de D'Alembert}} e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t, \dots,$

$y_{k-1}(t) = \underbrace{t^{k-1}}_{\text{repete o método de D'Alembert}} e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad y_k(t) = \underbrace{t^{k-1}}_{\text{repete o método de D'Alembert}} e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$

Observação: (Raízes racionais)

$$\boxed{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0}$$

As possíveis raízes racionais do polinômio são $\pm$ os divisores de a_0.

Exemplo: $x^3 - 7x + 6 = 0$

possíveis raízes racionais : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Verifique para: -1 : $-1+7+6 \neq 0$
1 : $1-7+6=0$
-2 : $-8+14+6 \neq 0$
2 : $8-14+6=0$
-3 : $-27+21+6=0$
3 : $27-21+6 \neq 0$
± 6 : $\pm(6)^3 \mp 42+6 \neq 0$

$1, 2, -3$ são raízes

Exemplo Dê a solução geral

$$y^{(4)} - y = 0$$

Solução

Equação característica : $x^4 - 1 = 0$

$(x^2)^2 - 1 = 0$

$(x^2)^2 = 1$

$\Rightarrow x^2 = 1$, $x^2 = -1$

$x = \pm 1$ (reais) , $x = \pm i$ complexas

$$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t$$

↳ solução geral

Exemplo Resolva

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

Solução : Eq. característica : $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

$(x^2)^2 + 2x^2 + 1 = 0$

$x^2 = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4.1}}{2}$

$x^2 = -1$

$\Rightarrow x = \pm i$ complexas repetidas

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 t \cos t + c_4 t \operatorname{sen} t$$

Exemplo Resolva $y''' - y = 0$

Solução: Eq. característica

$$x^3 - 1 = 0$$
$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 1 \qquad \text{raiz real}$$
$$x^2 + x + 1 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

raízes complexas

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 e^{-t/2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

Exemplo Resolva $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

1
1 2 1
1 3 3 1

Solução: Eq. característica

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0$$
$$(x-1)^3 = 0$$
$$x = 1 \qquad \text{raízes repetivas}$$

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t$$

Exemplo Resolva $y''' - 4y' = 0$

Solução: Eq. característica: $x^3 - 4x = 0$

$$x(x^2 - 4) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = \pm 2$$

raízes distintas

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}$$

4.3 Equação linear não homogênea: coeficiente a determinar

↳ para eq com coef. constantes

$$\boxed{a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = G(t)}$$

serve para

$$G(t) = \begin{cases} \text{polinômio} \\ \text{exponencial} \\ \text{sen/cos} \end{cases}$$

ou soma e multiplicação destas

Objetivo: Determinar uma solução y_p particular da eq não homogênea

Recorde: $y(t) = \underbrace{y_H(t)}_{\text{solução geral da homogênea}} + y_p \}$ → solução particular da não homogênea

Método. a candidata $y_p(t)$ é uma função do mesmo tipo de $G(t)$, multiplique por t^n para eliminar repetições

Exemplo: Dê a candidata a solução de (não determine os coeficientes de y_p)

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 4e^t$$

Solução

Passo 1 solução do homogeneo

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

↳ eq. característica

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0$$
$$(x-1)^3 = 0, \quad x = 1$$

repetida

$$y_H(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t$$

Passo 2 candidata: $y_p(t) = A e^t$

$G(t) = 4e^t$

Mas esta é solução da homogênea não há como ser da não homogênea!

2ª tentativa: $y_p(t) = \underbrace{A t e^t}$

também é solução da homogênea

3ª tentativa $y_p(t) = \underbrace{A t^2 e^t}$

também é solução da homogênea

Finalmente

$$y_p(t) = A t^3 e^t$$

↳ é uma boa candidata

(isto é para algum A ela é solução da não-homogênea)

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t + A t^3 e^t$$

Exemplo Resolva $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\,\text{sen}\,t - 5\cos t$

Solução **Passo 1**: Homogênea

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0$$

$$x = \pm 1 \qquad x = \pm i$$

$$y_H(t) = c_1\cos t + c_2\,\text{sen}\,t + c_3 t\cos t + c_4 t\,\text{sen}\,t$$

Passo 2 Candidata a solução particular

$$y_p(t) = \underbrace{A\cos t + B\,\text{sen}\,t}_{\text{do mesmo tipo que } G(t)}$$

↳ é solução da homogênea

↳ multiplicar por potência de t para eliminar repetições

$$y_p(t) = At^2\cos t + Bt^2\,\text{sen}\,t$$

$$y(t) = c_1\cos t + c_2\,\text{sen}\,t + c_3 t\cos t + c_4 t\,\text{sen}\,t + At^2\cos t + Bt^2\,\text{sen}\,t$$

Exemplo. Resolva $y''' - 4y' = t + 3\cos t + e^{-2t}$

Solução

Passo 1 solução da homogênea

$$y''' - y' = 0$$

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0 \qquad x = 0,\ x = \pm 1$$

$$y_H(t) = c_1 + c_2 e^{t} + c_3 e^{-t}$$

Passo 2 solução particular

$$y_p(t) = \underbrace{(At + B)}_{\text{para } G_1(t) = t} t + \underbrace{C\cos t + D\,\text{sen}\,t}_{\text{para } G_2(t) = 3\cos t} + \underbrace{Fe^{-t}}_{\text{para } G_3(t) = e^{-t}} t$$

para eliminar repetições das soluções do homogêneo