

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

# *Mecânica dos Sólidos* *EQ*

## *Notas de Aula*

*Profa. Maria Regina Costa Leggerini*

# CAPÍTULO I

## REVISÃO DE MECÂNICA GERAL – CONCEITOS BÁSICOS

### I. FORÇA

#### A. CONCEITO:

Força é toda a grandeza capaz de provocar movimento, alterar o estado de movimento ou provocar deformação em um corpo. É uma grandeza vetorial cuja intensidade pode ser obtida pela expressão da física:

$$\vec{F} = m.a$$

onde:

F = força

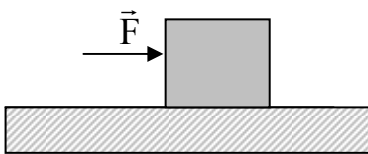
m = massa do corpo

a = aceleração provocada

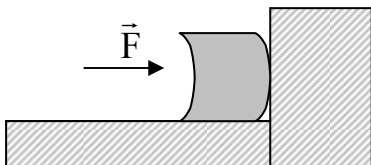
Sendo força um elemento vetorial somente se caracteriza se forem conhecidos:

- direção
- sentido
- módulo ou intensidade
- ponto de aplicação

Exemplo 1 :Força provocando movimento

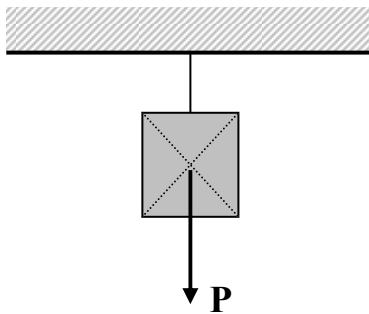


Exemplo 2: Força provocando deformação



### Exemplo 3 : PESO DOS CORPOS:

O peso dos corpos é uma força de origem gravitacional que apresenta características especiais:



$$\text{Módulo: } \vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

Direção : Vertical

Sentido : de cima para abaixo

Ponto de aplicação: centro de gravidade do corpo

### B. UNIDADES

Existem muitas unidades representando forças. As que mais vamos utilizar são:

N - Newton

kN - kiloNewton

kgf - kilograma força

$$1 \text{ kN} = 10^3 \text{ N} = 10^2 \text{ kgf}$$

### C. CARACTERÍSTICAS DAS FORÇAS

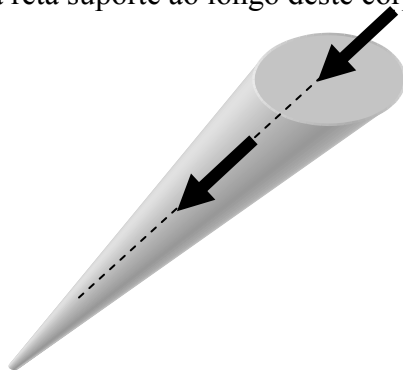
#### 1. Princípio de ação e reação:

Quando dois corpos se encontram, toda a ação exercida por um dos corpos sobre o outro corresponde uma reação do segundo sobre o primeiro de mesmo módulo e direção, mas porem com sentidos contrários, que é a 3ª lei de Newton.

Podemos observar que estas duas forças têm pontos de aplicação diferentes e portanto causam efeitos diferentes, cada uma atuando no seu ponto de aplicação.

#### 2. Princípio da transmissibilidade de uma força,

Quando aplicamos uma força em um corpo sólido a mesma se transmite com seu módulo, direção e sentido em toda a sua reta suporte ao longo deste corpo.



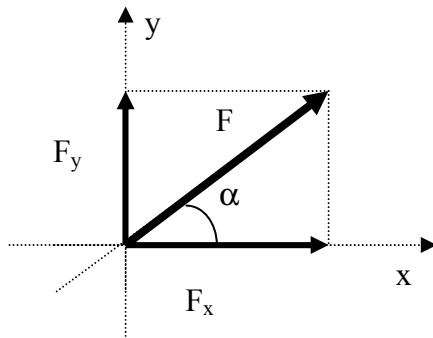
### 3. Decomposição das forças.

Qualquer força contida em um plano pode ser decomposta segundo duas direções que nos interessem.

Normalmente nos interessam duas direções perpendiculares entre si, também escolhidas de acordo com a conveniência do problema.

Vamos nos ater ao caso plano que é o mais usual

Exemplo:



$\vec{F}$  - força a ser decomposta

x e y – direções ortogonais de referência

$\alpha$  - ângulo formado por F em relação a x

$\vec{F}_x, \vec{F}_y$  - componentes da força nas direções x e y

A decomposição é feita por trigonometria:

$$\vec{F}_x = \vec{F} \cdot \cos \alpha \quad \vec{F}_y = \vec{F} \cdot \sin \alpha \quad \vec{F}_y / \vec{F}_x = \operatorname{tg} \alpha$$

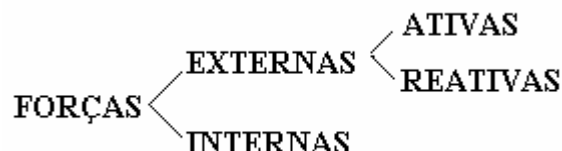
A força  $\vec{F}$  decomposta também pode ser chamada de resultante da soma vetorial de suas componentes  $\vec{F}_x$  e  $\vec{F}_y$ .

Nos problemas pode-se utilizar para cálculos apenas a força resultante, ou as suas componentes, o que se tornar mais fácil. Isto pode se constituir em uma das ferramentas mais úteis no trabalho com as forças. Observe que soma vetorial ou geométrica não corresponde a soma algébrica.

#### D. CLASSIFICAÇÃO DAS FORÇAS

As forças podem ser classificadas de acordo com a sua origem, modo de se comportar, etc. como por exemplo as forças de contato (ex: locomotivas, musculares, etc.) e as de ação à distância (ex: elétricas, gravitacionais, magnéticas, etc.)

Em análise estrutural as forças são divididas conforme esquema abaixo:



**FORÇAS EXTERNAS:** atuam na parte externa na estrutura, e são o motivo de sua existência. Podem ser ativas ou reativas.

**ativas:** São forças independentes que podem atuar em qualquer ponto de uma estrutura. Correspondem às cargas as quais estaremos submetendo a estrutura, normalmente conhecidas ou avaliadas. Ex: peso do pedestre em uma passarela, peso próprio das estruturas, etc...

**reativas:** São forças que surgem em determinados pontos de uma estrutura (vínculos ou apoios), sendo consequência das ações portanto não são independentes, devendo ser calculadas para se equivalerem as ações e assim preservarem o equilíbrio do sistema.

A partir do acima exposto podemos dizer que sempre que uma peça de estrutura carregada tiver contato com elementos externos ao sistema (vínculo), neste ponto surge uma força reativa.

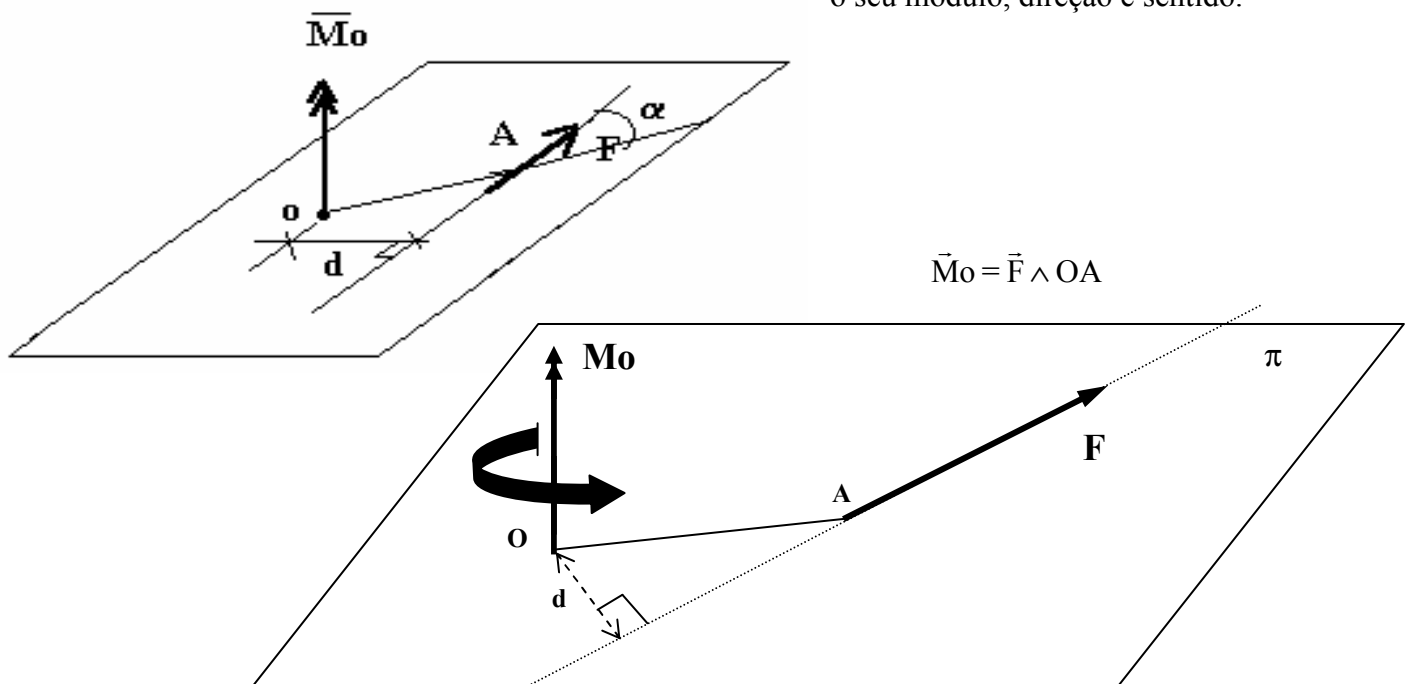
**FORÇAS INTERNAS :** são aquelas que mantêm unidos os pontos materiais que formam o corpo sólido de nossa estrutura (solicitações internas). Se o corpo é estruturalmente composto de diversas partes, as forças que mantêm estas partes unidas também são chamadas de forças internas (forças desenvolvidas em rótulas).

## II . MOMENTO DE UMA FORÇA

### A. CONCEITO:

O momento de uma força é a medida da tendência que tem a força de produzir giro em um corpo rígido. Este giro pode se dar em torno de um ponto (momento polar ) ou em torno de um eixo (momento axial). Vamos trabalhar com momento em torno de ponto, que ocorre nos casos de cargas em um plano.

**MOMENTO POLAR** (momento de uma força em relação a um ponto): Chama-se de momento de uma força  $\vec{F}$  em relação a um ponto "O", o produto vetorial do vetor  $\vec{OA}$  pela força  $\vec{F}$ , sendo "A" um ponto qualquer situado sobre a reta suporte da força  $\vec{F}$ . Logo também é um vetor, e para a sua caracterização precisamos determinar o seu módulo, direção e sentido.



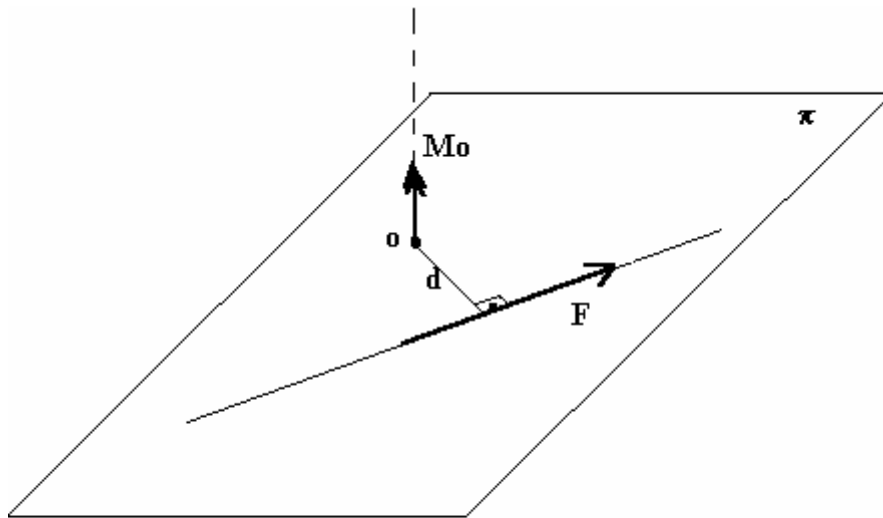
O efeito do vetor momento é o de provocar um giro com determinado sentido em relação ao ponto 'O' considerado. O vetor momento apresenta as seguintes características:

- direção : perpendicular ao plano formado pela força e pelo vetor OA
- sentido : regra da mão direita
- módulo: produto do módulo da força  $\vec{F}$  pela menor distância do ponto "O" a reta suporte da força.
- ponto de aplicação : ponto "O" em relação ao qual se calculou o momento.

$$|\vec{M}_O| = |\vec{F}| \cdot |\vec{OA}| \cdot \sin\alpha \quad \text{ou} \quad |\vec{M}_O| = |\vec{F}| \cdot d$$

A distância  $d$  que representa o módulo do vetor OA é também chamada de braço de alavanca. Ela é a menor distância entre a reta suporte da força e o ponto em relação ao qual se calcula o momento, isto é, pode ser obtida pela perpendicular à reta que passa pelo ponto.

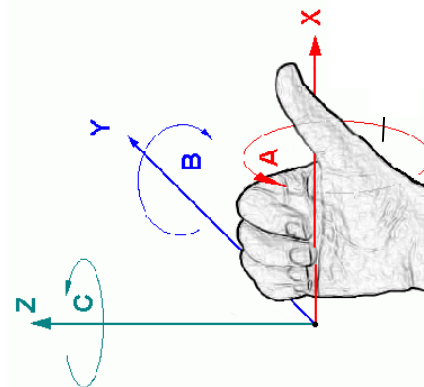
Isto simplifica em muito o cálculo do momento polar de uma força.



$$M = F \cdot d$$

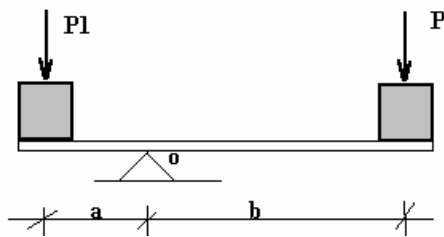
Regra da mão direita:

A regra da mão direita consiste em posicionar os dedos da mão direita no sentido da rotação provocada pela força em torno do ponto O. Neste caso o polegar indica o sentido do momento.



Podemos também convencionar sinais + ou - para cada um dos sentidos, de acordo com a nossa escolha.

Exemplo 1 : Determine o peso que devemos colocar na extremidade direita da gangorra a fim de que ela permaneça em equilíbrio estático.

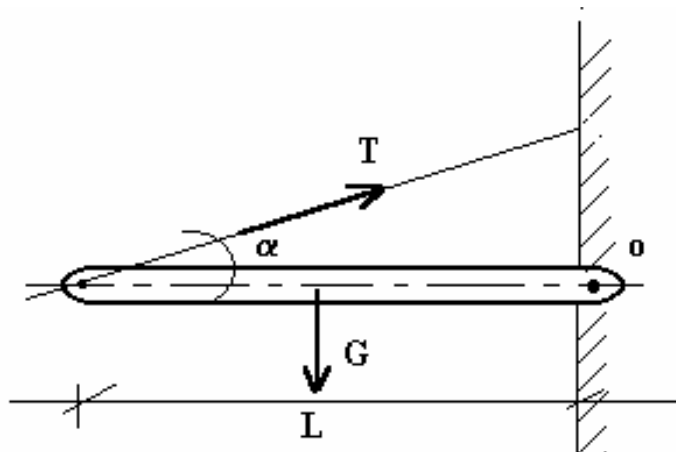


$$P1 = 30 \text{ kN}$$

$$a = 2 \text{ m}$$

$$b = 4 \text{ m}$$

Exemplo 2 : Determine a força desenvolvida no tirante da estrutura, a fim de que ela permaneça em equilíbrio, sabendo-se que a barra pesa 5 kN. A barra é presa a uma parede por meio de um pino O.



$$G = 5 \text{ kN}$$

$$L = 3 \text{ m}$$

$$\alpha = 15^\circ$$

$$T = ?$$

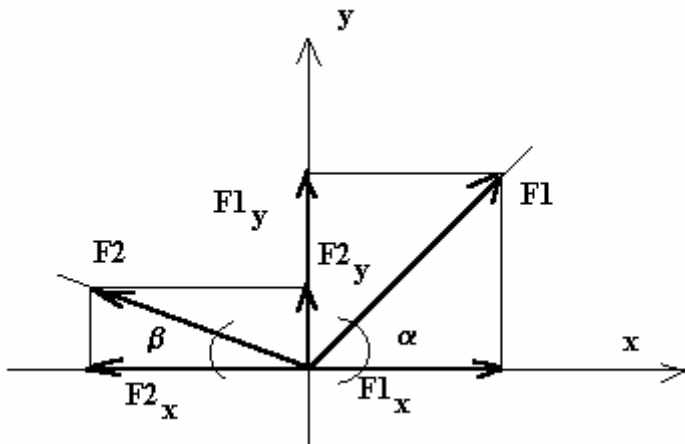
### C. UNIDADE DE MOMENTO

Sendo o momento produto de uma força por uma distância, a unidade desta grandeza é o produto de uma unidade de força por uma unidade de distância.

Exemplos: kgf.m , kN.m , N.m , kN.cm , etc

## III – RESULTANTE DE FORÇAS CONCORRENTES EM UM PONTO DE UM PLANO

A resultante de forças concorrentes em um ponto de um plano também pode ser calculada através da decomposição destas forças em relação à duas direções ortogonais escolhidas.



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \beta$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \beta$$

$$F_x = F_{1x} + F_{2x}$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y}$$

$$R = \sqrt{\Sigma(F_x)^2 + \Sigma(F_y)^2} \quad \text{PITÁGORAS}$$

#### IV . PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS

" O efeito produzido por um conjunto de forças atuando simultaneamente em um corpo é igual a soma do efeito produzido por cada uma das forças atuando isolada"

Deve-se fazer a ressalva de que a validade deste princípio se resume a casos em que o efeito produzido pela força seja diretamente proporcional a mesma. Isto acontece na maioria dos casos estudados.

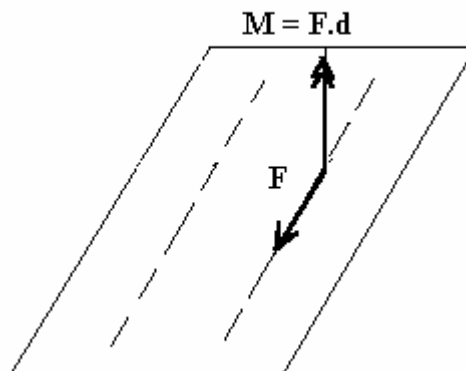
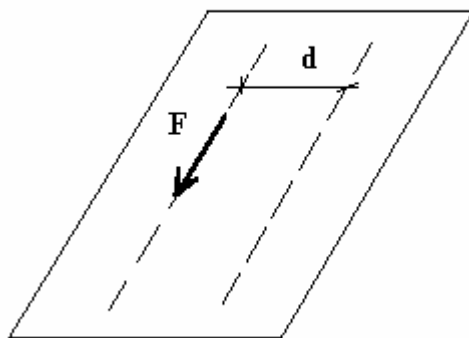
A partir deste princípio podemos dizer que:

- O momento polar resultante de um sistema de forças é a soma algébrica dos momentos polares, produzidos em relação ao mesmo ponto, por cada uma das forças atuando isolada.

#### V . TRANSLAÇÃO DE FORÇAS

Transladar uma força (como artifício de cálculo) é transportá-la de sua direção para outra direção paralela. Isto implica no acréscimo de um momento devido à translação, cujo módulo é igual ao produto da força pela distância de translação.

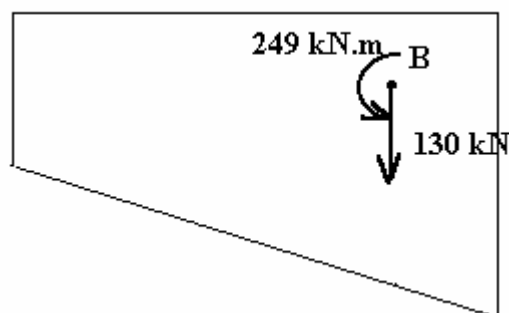
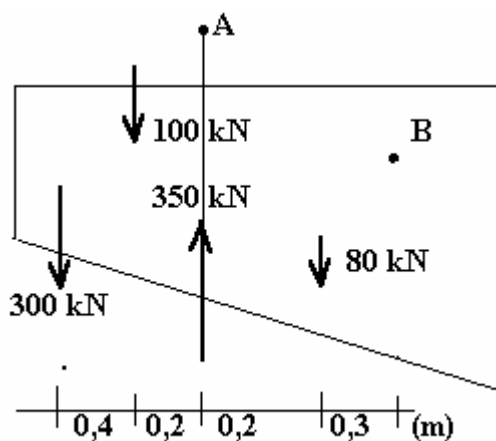




## VII . REDUÇÃO DE UM SISTEMA DE FORÇAS À UM PONTO

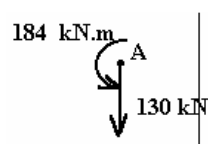
Qualquer sistema de forças pode ser reduzido à um sistema vetor-par, onde o vetor é a resultante das forças , localizada à partir de um ponto arbitrariamente escolhido e o par é o momento polar resultante do sistema em relação ao mesmo ponto.

Exemplo 1: Reduzir o sistema de forças da figura ao ponto B indicado.



Exemplo 2 : Reduzir o sistema acima ao ponto A.

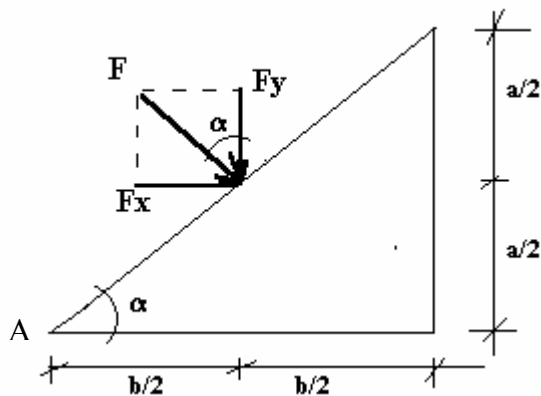
R:



## VI . EQUIVALÊNCIA DE UM SISTEMA DE FORÇAS

Dois sistemas de forças são equivalentes quando tem resultantes iguais e momentos polares em relação ao mesmo ponto também iguais.

Exemplo:



$$F = 50 \text{ kN}$$

$$\alpha =$$

$$F_y = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_x = F \cdot \sin \beta$$

$$a = 3 \text{ m}$$

$$b = 4 \text{ m}$$

F - sistema inicial

$F_x$ ,  $F_y$  - sistema equivalente

$M_A$  (sistema inicial) =

$M_A$  (sistema equivalente) =

O uso de sistemas equivalentes é um artifício de cálculo muito útil. Podemos, de acordo com a nossa conveniência substituir uma força, ou um sistema de forças por sistemas equivalentes mais adequados ao nosso uso.

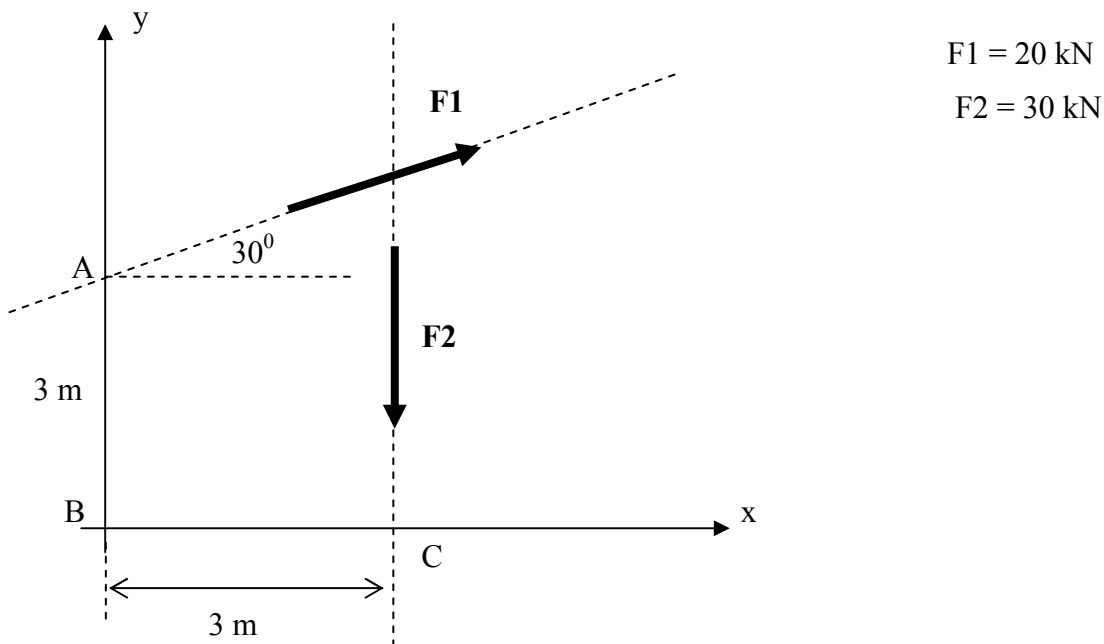
## EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

1. Suponha um plano formado pelos eixos  $x$  e  $y$ , conforme desenho, onde atuam as cargas  $F_1$  e  $F_2$ .

Calcule:

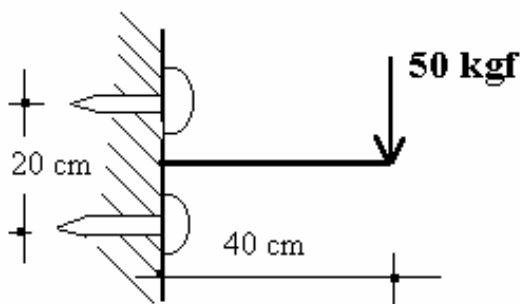
- Momentos desenvolvidos por  $F_1$  em relação aos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
- Momentos desenvolvidos por  $F_2$  em relação aos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
- Momento da resultante do sistema em relação aos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
- Resultante do sistema na direção  $x$
- Resultante do sistema na direção  $y$

Convencione o giro no sentido horário positivo.



- R:
- $M_{1A} = 0$      $M_{1B} = 69,28 \text{ kN.m}$      $M_{1C} = 109,28 \text{ kN.m}$
  - $M_{2A} = 120 \text{ kN.m}$      $M_{2B} = 120 \text{ kN.m}$      $M_{2C} = 0$
  - $M_A = 120 \text{ kN.m}$      $M_B = 189,28 \text{ kN.m}$      $M_C = 109,28 \text{ kN.m}$
  - $F_x = +17,32 \text{ kN}$     e)  $F_y = -20 \text{ kN}$

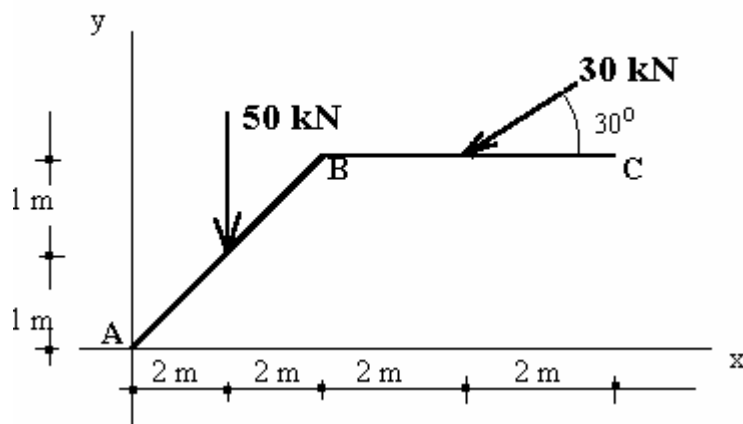
2. Qual a força horizontal que atua nos parafusos 1 e 2 da ligação abaixo, considerando o momento provocado pelo peso na ponta da haste



R :  $P_1 = 100 \text{ kgf}$      $P_2 = 100 \text{ kgf}$

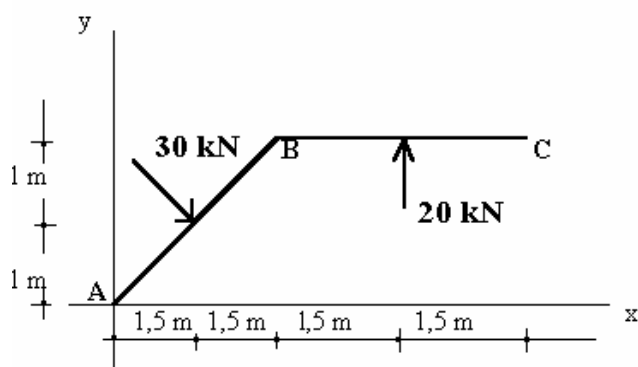
3. Suponha as estruturas planas representadas abaixo. Determine, se necessário usando sistemas equivalentes  $\Sigma F_x$ ,  $\Sigma F_y$ ,  $\Sigma M_A$ ,  $\Sigma M_B$  e  $\Sigma M_C$

a.



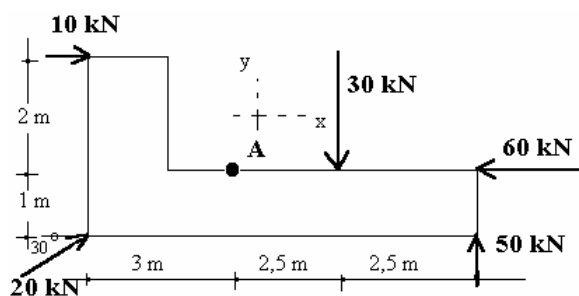
R:  $\Sigma F_x = 25,98 \text{ kN}$     $\Sigma F_y = 65 \text{ kN}$   
 $\Sigma M_A = 138,04 \text{ kN.m}$   
 $\Sigma M_B = 70 \text{ kN.m}$   
 $\Sigma M_C = 330 \text{ kN.m}$

b.



R:  $\Sigma F_x = 16,64 \text{ kN}$     $\Sigma F_y = -4,96 \text{ kN}$   
 $\Sigma M_A = -36 \text{ kN.m}$   
 $\Sigma M_B = -84 \text{ kN.m}$   
 $\Sigma M_C = -98,96 \text{ kN.m}$

4. Reduzir no ponto A o sistema de forças da figura:



R:  $32,68 \text{ kN}$  (horizontal),  $30 \text{ kN}$  (vertical),  $44,36 \text{ kN}$  (resultant at  $42^\circ$ ),  $142,32 \text{ kN.m}$  (moment)

## CAPÍTULO II

### INTRODUÇÃO À MECÂNICA DOS SÓLIDOS – EQUILÍBRIO EXTERNO

#### I. OBJETIVO PRINCIPAL DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS

O principal objetivo de um curso de mecânica dos sólidos é o desenvolvimento de relações entre as cargas aplicadas a um corpo e as forças internas e deformações nele originadas. Estas relações são obtidas através de métodos matemáticos ou experimentais, que permitam a análise destes fenômenos.

Normalmente buscamos a solução de três tipos de problemas:

- Projetos – Definição de materiais, forma e dimensões da peça estudada.
- Verificações – Diagnosticar a adequação e condições de segurança de um projeto conhecido.
- Avaliação de capacidade – Determinação da carga máxima que pode ser suportada com segurança.

As principais ferramentas adotadas neste processo são as equações de equilíbrio da estática, amplamente utilizadas.

#### II. GRAUS DE LIBERDADE (GL)

Grau de liberdade é o número de movimentos rígidos possíveis e independentes que um corpo pode executar.

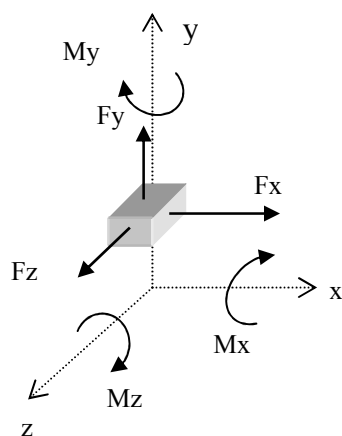
##### A. CASO ESPACIAL

Caso dos corpos submetidos a forças em todas as direções do espaço.

No espaço estas forças podem ser reduzidas a três direções ortogonais entre si ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), escolhidas como referência.

Nestes casos o corpo possui 6 graus de liberdade, pois pode apresentar três translações (na direção dos três eixos) e três rotações (em torno dos três eixos).

Exemplo:

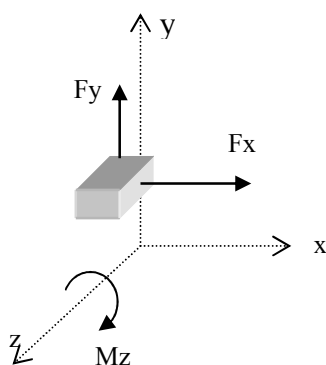


## B. CASO PLANO

Ocorre nos corpos submetidos a forças atuantes em um só plano, por exemplo, x, y.

Neste caso possuem três graus de liberdade, pois os corpos podem apresentar duas translações (na direção dos dois eixos) e uma rotação (em torno do eixo perpendicular ao plano que contém as forças externas).

Exemplo:



## III. EQUILÍBRIO

Sempre que se deseja trabalhar com uma peça componente de uma estrutura ou máquina, devemos observar e garantir o seu equilíbrio externo e interno.

### A. EQUILÍBRIO EXTERNO

Para que o equilíbrio externo seja mantido se considera a peça monolítica e indeformável. Dize-se que um corpo está em equilíbrio estático quando as forças atuantes formam entre si um sistema equivalente à zero, isto é, sua resultante e o seu momento polar em relação a qualquer ponto são nulos.

$$R = 0$$

$$M_p = 0$$

Como se costuma trabalhar com as forças e momentos referenciados a um sistema tri-ortogonal de eixos, desta maneira o equilíbrio se verifica se as seis equações abaixo são satisfeitas:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma M_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma M_y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_z = 0$$

Diante de um caso de carregamento plano, e, portanto apresentando 3 graus de liberdade, as condições de equilíbrio se reduzem apenas às equações:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma M_z = 0$$

Observe que as equações de equilíbrio adotadas devem ser apropriadas ao sistema de forças em questão, e se constituem nas equações fundamentais da estática.

## B. EQUILÍBRIO INTERNO

De uma maneira geral podemos dizer que o equilíbrio externo não leva em conta o modo como o corpo transmite as cargas para os vínculos.

O corpo quando recebe cargas vai gradativamente deformando-se até atingir o equilíbrio, onde as deformações param de aumentar (são impedidas internamente), gerando solicitações internas. Estas solicitações internas são responsáveis pelo equilíbrio interno do corpo.

O equilíbrio ocorre na configuração deformada, que admitimos ser bem próxima da inicial (campo das pequenas deformações).

## IV. DIAGRAMA DE CORPO LIVRE

O objetivo principal de um diagrama de corpo livre é mostrar as forças que atuam em um corpo de forma clara, lógica e organizada.

Consiste em separar-se o nosso “corpo de interesse” de todos os corpos do sistema com o qual ele interage.

Neste corpo isolado são representadas todas as forças que nele atuam, assim como as forças de interação ou de contato.

A palavra livre enfatiza a idéia de que todos os corpos adjacentes ao estudado são removidos e substituídos pelas forças que nele que exercem.

Lembre-se que sempre que há o contato entre dois corpos surge o princípio da ação e reação.

O diagrama do corpo livre define claramente que corpo ou que parte do corpo está em estudo, assim como identifica quais as forças que devem ser incluídas nas equações de equilíbrio.

## V. VÍNCULOS

### A. DEFINIÇÃO

É todo o elemento de ligação entre as partes de uma estrutura ou entre a estrutura e o meio externo, cuja finalidade é restringir um ou mais graus de liberdade de um corpo.

A fim de que um vínculo possa cumprir esta função, surgem no mesmo, reações exclusivamente na direção do movimento impedido.

- Um vínculo não precisa restringir todos os graus de liberdade de uma estrutura, quem o fará será o conjunto de vínculos.
- As reações desenvolvidas pelos vínculos formam o sistema de cargas externas reativas.
- Somente haverá reação se houver ação, sendo as cargas externas reativas dependentes das ativas, devendo ser calculadas.

## B. CLASSIFICAÇÃO

Os vínculos podem ligar elementos de uma estrutura entre si ou ligar a estrutura ao meio externo e, portanto, se classificam em vínculos internos e externos.

### B.1 Vínculos externos:

São vínculos que unem os elementos de uma estrutura ao meio externo e se classificam quanto ao número de graus de liberdade restringidos.

No caso plano o vínculo pode restringir até 3 graus de liberdade (GL) e, portanto se classifica em três espécies.

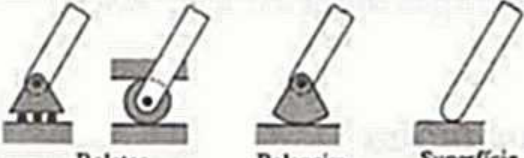

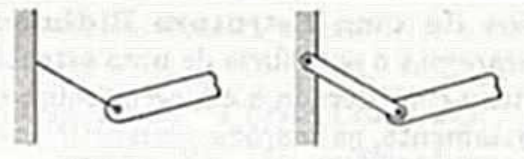

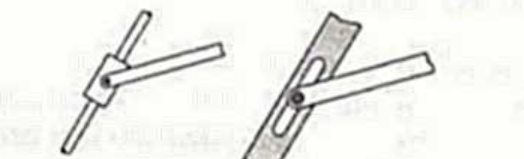



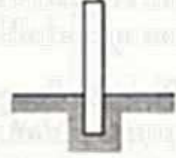

Vínculo	Reação	Número de incógnitas
 <p>Roletes      Balancim      Superfície lisa</p>	 <p>Força com linha de ação conhecida</p>	1
 <p>Cabo curto      Haste curta</p>	 <p>Força com linha de ação conhecida</p>	1
 <p>Cursor sobre haste lisa      Pino liso deslizando</p>	 <p>Força com linha de ação conhecida</p>	1
 <p>Pino liso ou articulação      Superfície áspera</p>	 <p>Força com direção desconhecida</p>	2
 <p>Apoio fixo ou engastamento</p>	 <p>Força e binário</p>	3

Figura extraída do livro Mecânica Vetorial para engenheiros  
Beer, Ferdinand P; Johnston, E. Russel.



## B.2 Vínculos internos

São aqueles que unem partes componentes de uma estrutura. Compõem as estruturas compostas.

### VI. CARGAS ATUANTES EM UMA ESTRUTURA

Quando se trabalha com uma peça de uma estrutura, devemos ter em mente a sua finalidade e, portanto, devemos avaliar a quantidade de carga que ela deve ser capaz de suportar.

Ao conjunto destas cargas damos o nome de CARGAS EXTERNAS ATIVAS.

Para que o equilíbrio desta peça seja garantido, devemos vinculá-la, ou seja, restringirmos as possibilidades de movimento da mesma. Em cada vínculo acrescido, surgem as reações na direção do movimento restringido. Estas reações são chamadas de CARGAS EXTERNAS REATIVAS.

O conjunto destas cargas, ativas e reativas, se constitui no carregamento externo da peça em estudo.

#### A. CARGAS EXTERNAS ATIVAS

As cargas aplicadas em uma peça de estrutura se classificam quanto ao modo de distribuição em:

- Concentradas - São aquelas que atuam em áreas muito reduzidas em relação às dimensões da estrutura. Neste caso ela é considerada concentrada no centro de gravidade da área de atuação.
- Cargas momento ou conjugados - momentos aplicados em determinados pontos de uma estrutura (fixos). Podem se originar de um par de forças, cargas excêntricas ou eixos de transmissão.
- Cargas distribuídas - São aquelas que atuam em uma área com dimensões na mesma ordem de grandeza da estrutura.

As cargas também se classificam quanto ao tempo de duração em:

- Permanentes - Atuam durante toda ou quase toda a vida útil de uma estrutura
- Acidentais ou sobrecarga - Podem estar ou não atuando, sendo fornecidas por normas (NBR - 6.120/80), catálogos ou avaliadas em cada caso.

A classificação quanto ao ponto de aplicação fica:

- Fixas – atuam sempre em um ponto ou uma região.
- Móveis – percorrem a estrutura podendo atuar em vários dos seus pontos.

### VII - EQUILÍBRIO EXTERNO EM DUAS DIMENSÕES

Ocorre quando as cargas que atuam na estrutura estão contidas em um mesmo plano, o que acontece na maior parte dos casos que iremos estudar.

Nestes problemas, é conhecido o sistema de cargas ativas que atua na estrutura e devemos calcular as cargas reativas capazes de manter o corpo em equilíbrio, neste plano.

Reações externas ou vinculares são os esforços que os vínculos devem desenvolver para manter em equilíbrio estático uma estrutura, considerada como um corpo rígido e indeformável.


Os vínculos são classificados de acordo com o número de graus de liberdade restringidos e só podemos restringir um GL mediante a aplicação de um esforço (força ou momento) na direção deste movimento.


A determinação das reações vinculares de uma estrutura é feita por intermédio de um sistema de equações algébricas.

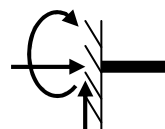
Sendo o plano das cargas x y, e sabendo-se que a estrutura possui três graus de liberdade (translação nas direções x e y e rotação em torno do eixo z), o número de equações a serem satisfeitas é três e o equilíbrio se dá quando:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$$

Convém salientar que neste caso do carregamento plano, os vínculos podem ser de três espécies, simbolizados por:

1ª espécie - restringe uma translação - 

2ª espécie - restringe duas translações - 

3ª espécie - restringe duas translações e uma rotação - 

Desta maneira, cada movimento restringido corresponde a uma reação vincular (incógnita), que deve ser determinada.

Para serem restritos três graus de liberdade, as reações devem ser em número de três.

Como se dispõe de três equações a serem satisfeitas, a aplicação destas equações leva à determinação das reações (incógnitas) desejadas.

**OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:** A eficácia vincular deve ser previamente analisada, pois muitas vezes o número de restrições é suficiente, mas a sua disposição não é eficiente.

## VIII - PROCEDIMENTO DE CÁLCULO:

→ Transforma-se a estrutura dada num corpo livre, substituindo-se todos os vínculos externos pelas reações vinculares que o mesmo pode desenvolver, arbitrando-se um sentido para cada esforço.

→ Para que o equilíbrio externo seja mantido é necessário que as três equações da estática sejam satisfeitas.

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$$

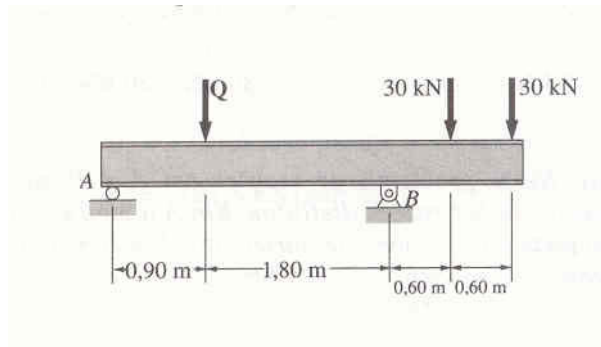
→ As cargas distribuídas devem ser substituídas por suas respectivas resultantes (este artifício é válido somente para o cálculo das reações externas).

→ Como escolhemos direções de referência (x e y), as cargas que não estiverem nestas direções devem ser decompostas, ou seja, substituídas por um sistema equivalente.

→ Resolvido o sistema de equações, reação negativa deve ter o seu sentido invertido.

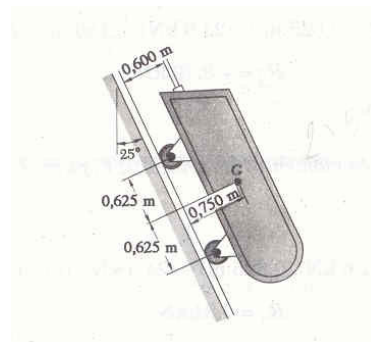
## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Observe-se na figura abaixo, três cargas aplicadas a uma viga. A viga é apoiada em um rolete em A e em uma articulação em B. Desprezando o peso próprio da viga, determine as reações em A e B quando  $Q = 75 \text{ kN}$ .



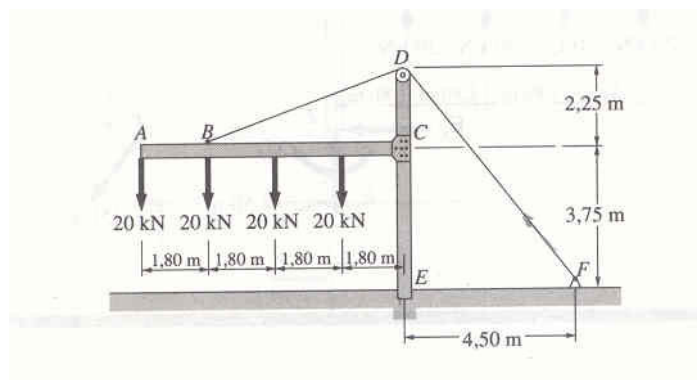
$$\begin{aligned} R: V_A &= 30 \text{ kN } (\uparrow) \\ V_B &= 105 \text{ kN } (\uparrow) \\ H_B &= 0 \end{aligned}$$

2. Um vagonete está em repouso sobre os trilhos que formam um ângulo de  $25^\circ$  com a vertical. O peso bruto do vagonete e sua carga são de  $27,5 \text{ kN}$  e está aplicado em um ponto a  $0,75 \text{ m}$  dos trilhos e igual distância aos eixos das rodas. O vagonete é seguro por um cabo atado a  $0,60 \text{ m}$  dos trilhos. Determinar a tração no cabo e a reação em cada par de rodas.



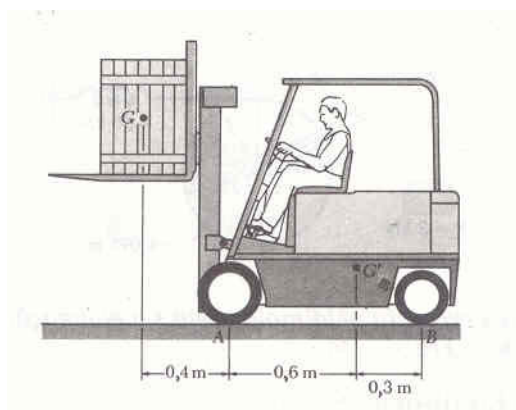
$$\begin{aligned} R: T &= 24,9 \text{ kN } (\nwarrow) \\ R_1 &= 2,81 \text{ kN } (\nearrow) \\ R_2 &= 8,79 \text{ kN } (\nearrow) \end{aligned}$$

3. A estrutura da figura suporta parte do telhado de um pequeno edifício. Sabendo que a tração no cabo é de  $150 \text{ kN}$ , determine a reação no extremo fixo E.



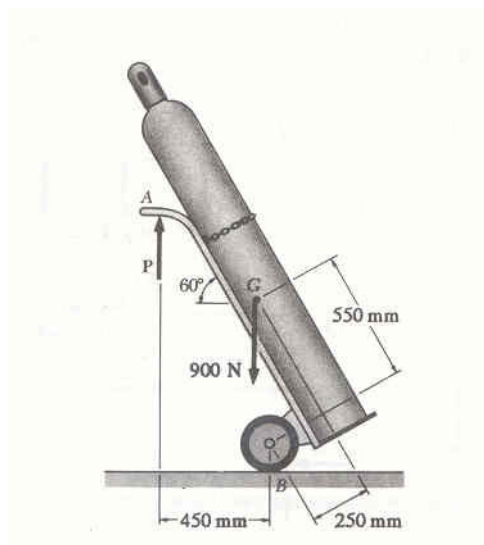
R:  $H_E = 90 \text{ kN} (\leftarrow)$        $V_E = 200 \text{ kN} (\uparrow)$        $M_E = 180 \text{ kN.m}$  (anti-horário)

4. Uma empilhadeira de 2500 kgf é utilizada para levantar uma caixa de 1200 kgf. Determine a reação em cada par de rodas: (a) dianteiras e (b) traseiras.



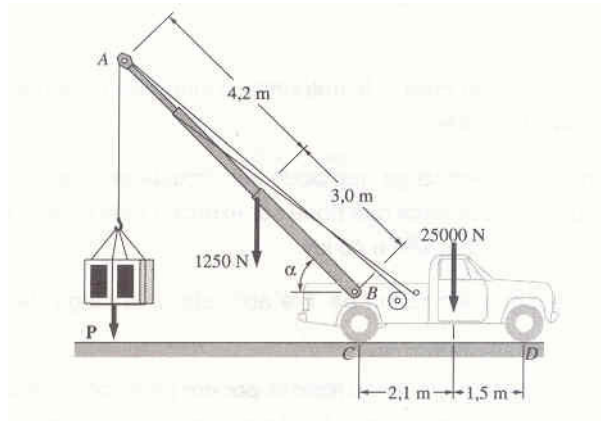
R :  $R_A = 2566 \text{ kN}$   
 $R_B = 1134 \text{ kN}$

5. Um carrinho de mão é utilizado para transportar um cilindro de ar comprimido. Sabendo-se que o peso total do carrinho e do cilindro é de 900 N, determine: (a) a força vertical P que deve ser aplicada ao braço do carrinho para manter o sistema na posição ilustrada. (b) a reação correspondente em cada uma das rodas.



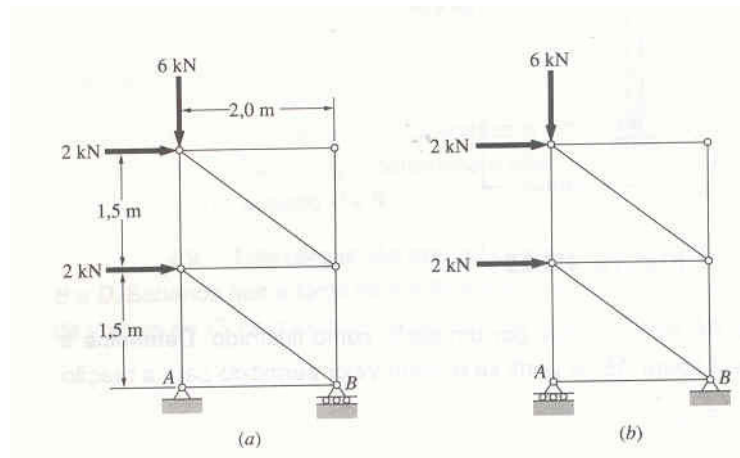
R: (a)  $117 \text{ N} (\uparrow)$   
 (b)  $392 \text{ N} (\uparrow)$

6. Um guindaste montado em um caminhão é utilizado para erguer um compressor de 3000 N. O peso da lança AB e do caminhão estão indicados, e o ângulo que a lança faz com a horizontal  $\alpha$  é de  $45^\circ$ . Determine a reação em cada uma das rodas: (a) traseiras C, (b) dianteiras D.



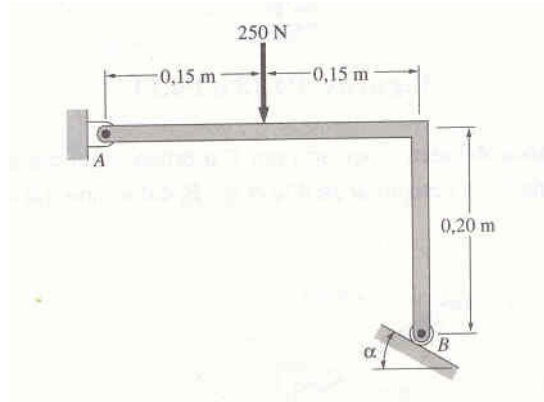
$$R: R_C = 19645 \text{ kN} \\ R_D = 9605 \text{ kN}$$

7. Uma treliça pode ser apoiada de duas maneiras, conforme figura. Determine as reações nos apoios nos dois casos.

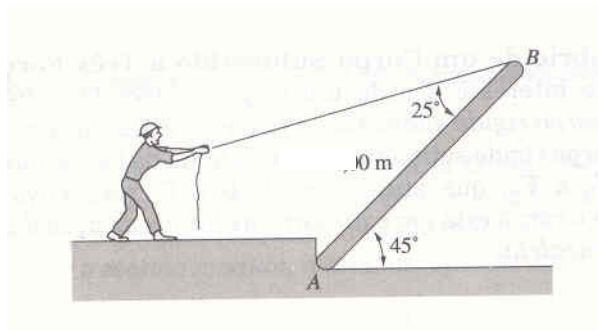


$$R: (a) R_A = 4,27 \text{ kN} (\searrow 20,6^\circ) \quad R_B = 4,5 \text{ kN} (\uparrow) \\ (b) R_A = 1,50 \text{ kN} (\uparrow) ; R_B = 6,02 \text{ kN} (\searrow 48,4^\circ)$$

8. Determine as reações em A e B quando: (a)  $\alpha = 0^\circ$  (b)  $\alpha = 90^\circ$  (c)  $\alpha = 30^\circ$

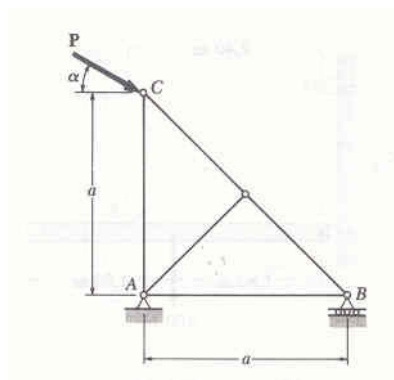


9. Um homem levanta uma viga de 10 kg e 10 m de comprimento puxando uma corda. Encontrar a força de tração  $T$  na corda e a reação em A. Suponha a aceleração da gravidade igual a  $9,81 \text{ m/s}^2$ .



R:  $T = 81,9 \text{ N}$   
 $R = 148 \text{ N} \swarrow 58,6^\circ$

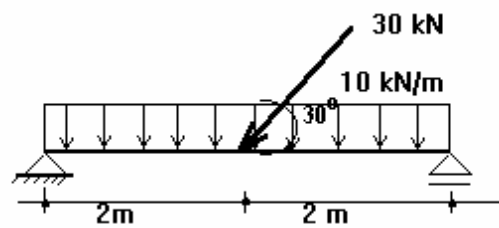
10. Uma carga  $P$  é aplicada a rotula C da treliça abaixo. Determine as reações em A e B com: (a)  $\alpha = 0^\circ$  e (b)  $\alpha = 45^\circ$ .



R: $\alpha = 0^\circ$	$V_A = -P$	$H_A = P$	$V_B = P$
$\alpha = 45^\circ$	$V_A = 0$	$H_A = 0,7 P$	$V_B = 0,7 P$

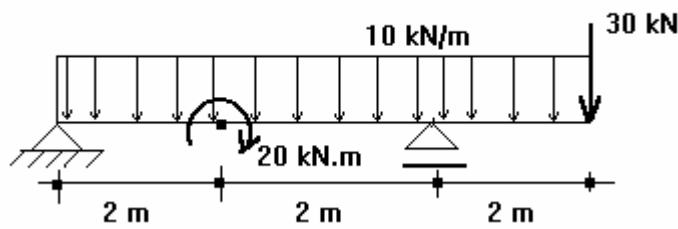
11. Calcule as reações externas das estruturas abaixo:

a.



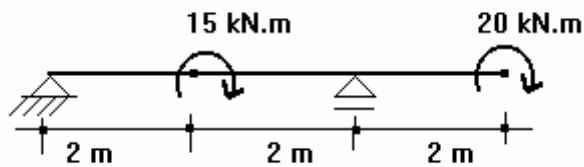
R:  $V_A = V_B = 27,5 \text{ kN}$   
 $H_A = 25,98 \text{ kN}$

b.



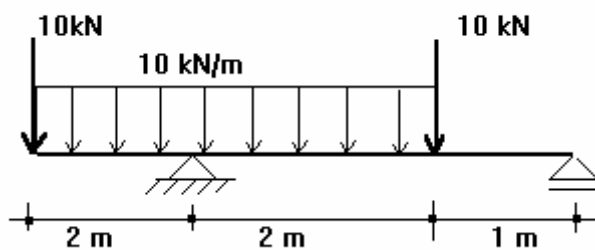
$V_A = -5 \text{ kN}$   
 $V_B = 95 \text{ kN}$   
 $H_A = 0$

c.



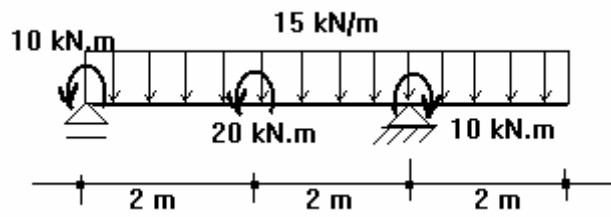
$V_A = -8,75 \text{ kN}$   
 $V_B = 8,75 \text{ kN}$   
 $H_A = 0$

d.

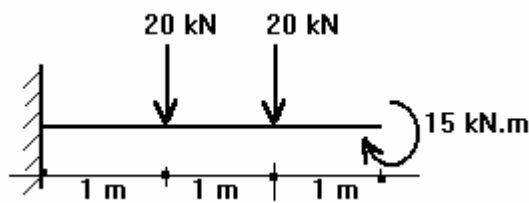


$V_A = 60 \text{ kN}$   
 $V_B = 0$   
 $H_A = 0$

e.

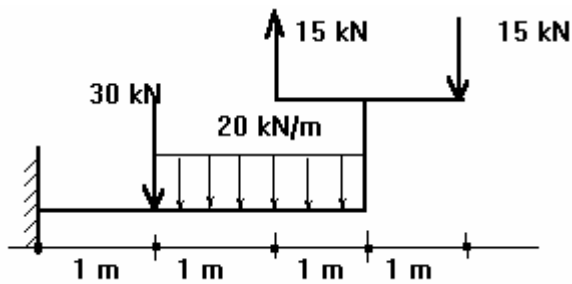


$$\begin{aligned} V_A &= 27,5 \text{ kN} \\ V_B &= 62,5 \text{ kN} \\ H_B &= 0 \end{aligned}$$



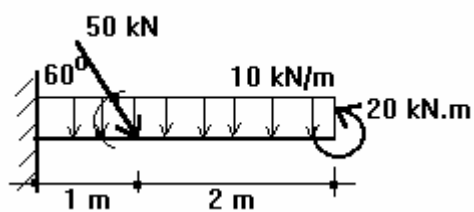
$$\begin{aligned} V_A &= 40 \text{ kN} \\ H_A &= 0 \\ M_A &= 75 \text{ kN.M (anti-horário)} \end{aligned}$$

g.



$$\begin{aligned} V_A &= 70 \text{ kN} \\ H_A &= 0 \\ M_A &= 140 \text{ kN.m (anti-horário)} \end{aligned}$$

h.



$$\begin{aligned} V_A &= 73,4 \text{ kN} \\ H_A &= 25 \text{ kN (←)} \\ M_A &= 68,3 \text{ kN (anti-horário)} \end{aligned}$$



## CAPÍTULO III

### EQUILÍBRIO INTERNO – SOLICITAÇÕES INTERNAS

#### I. EQUILÍBRIO INTERNO

No capítulo dois a atenção foi centralizada no equilíbrio externo dos corpos, ou seja, não houve a consideração da possibilidade de deformação dos corpos sendo os mesmos considerados rígidos.

Nestes problemas, é conhecido o sistema de cargas ativas que atua na estrutura e devem ser calculadas as cargas reativas capazes de manter o corpo em equilíbrio. As cargas reativas ou reações vinculares são determinadas com a aplicação das equações fundamentais da estática.

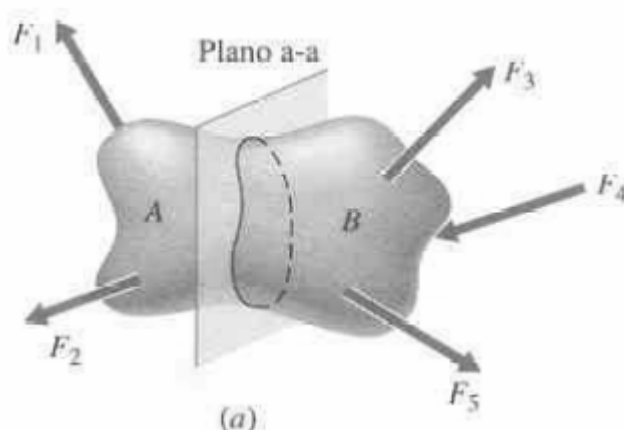
Observe-se que após o equilíbrio externo ser obtido pode-se então passar a analisar o equilíbrio interno.

De uma maneira geral pode-se dizer que:

1. O equilíbrio externo não leva em conta o modo como o corpo transmite as cargas para os apoios.
2. O corpo quando recebe carregamento vai gradativamente deformando-se até atingir o equilíbrio, onde as deformações param de aumentar (são impedidas internamente), gerando solicitações internas.
3. O equilíbrio interno ocorre na configuração deformada, que admitimos ser bem próxima da inicial (campo das pequenas deformações).

Pretende-se analisar os efeitos que a transmissão deste sistema de cargas externas aos apoios provoca nas diversas seções que constituem o corpo em equilíbrio.

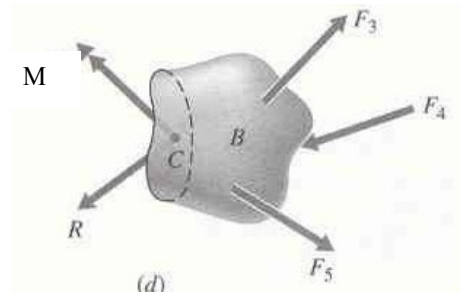
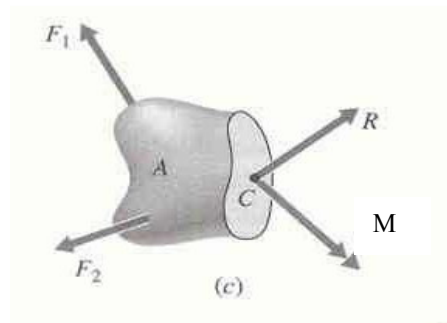
Para tanto, supõe-se o corpo em equilíbrio sob efeito de um carregamento qualquer. Se este corpo for cortado por um plano qualquer (a-a), rompe-se o equilíbrio, pois é destruída a sua cadeia molecular na seção "S" de interseção do plano com o corpo.



Para que as partes isoladas pelo corte permaneçam em equilibradas, deve-se aplicar, por exemplo, sobre a parte da esquerda, a ação que a parte da direita exercia sobre ela, ou seja, resultante de força ( $\vec{R}$ ) e resultante de momento ( $\vec{M}$ ). O mesmo deve ser feito com a parte da esquerda cujas resultantes estão também representadas.

$\vec{R}$  - Resultante de forças da parte retirada

$\vec{M}$  - Resultante de momentos da parte retirada, criado pela translação da resultante R para o baricentro da seção de corte.



As resultantes nas seções de corte de ambos os lados devem ser tais que reproduzam a situação original quando as duas partes forem ligadas novamente, ou seja, pelo princípio da ação e reação devem ser de mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos.

$\vec{R}$  e  $\vec{M}$  São as resultantes das solicitações internas referidas ao centro de gravidade da seção de corte da barra.

Quando se quer conhecer os esforços em uma seção S de uma peça, deve-se cortar a peça na seção desejada, isolar um dos lados do corte (qualquer um). Pode-se dizer que no centro de gravidade desta seção devem aparecer esforços internos (resultante de força e de momento) que mantêm o corpo isolado em equilíbrio.

Estes esforços representam a ação da parte retirada do corpo. Em isostática a seção de referência adotada será a seção transversal das peças em estudo e estes esforços internos devidamente classificados se constituem nas solicitações internas.

Este procedimento descrito chama-se Método das Seções.

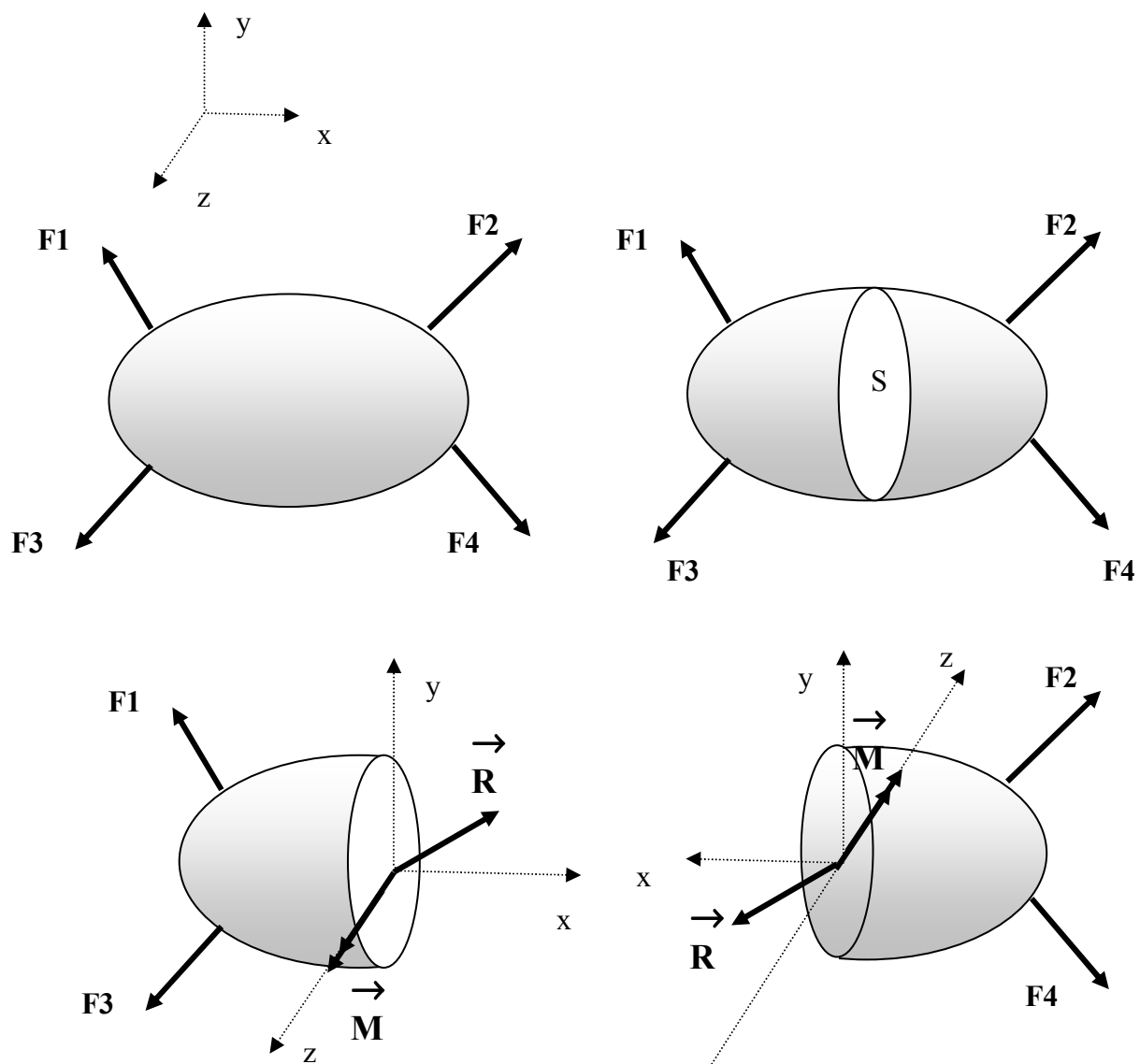
## II. CLASSIFICAÇÃO DAS SOLICITAÇÕES

Trabalha-se com um sistema sujeito à cargas em um plano.

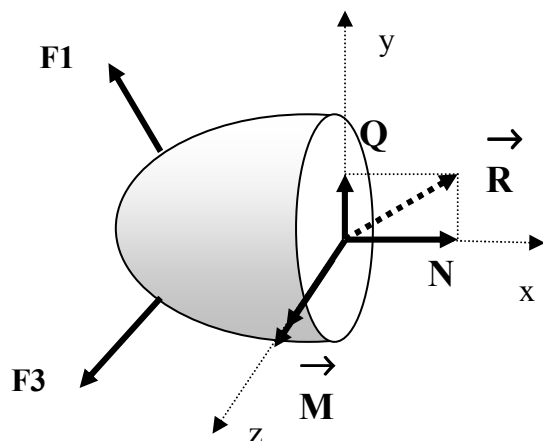
Para que se facilite a observação e sua determinação, os esforços internos estão associados às deformações que provocam e se classificam de acordo com elas.

Sabe-se também que um vetor no plano pode ser decomposto segundo duas direções que forem escolhidas e adota-se duas direções perpendiculares entre si no espaço (x, y).

Em primeiro lugar, e de acordo com o método das seções, intercepta-se por um plano o corpo carregado, isolando um dos lados deste corte.



Os vetores resultantes  $\vec{R}$  e  $\vec{M}$  são decompostos segundo estas direções escolhidas e se obtém duas componentes de esforço e uma componente de momento.



Denominam-se as componentes da seguinte maneira:

N - Esforço Normal

Q - Esforço Cortante

M - Momento Fletor

Cada solicitação conforme já vimos tem associada a si uma deformação:

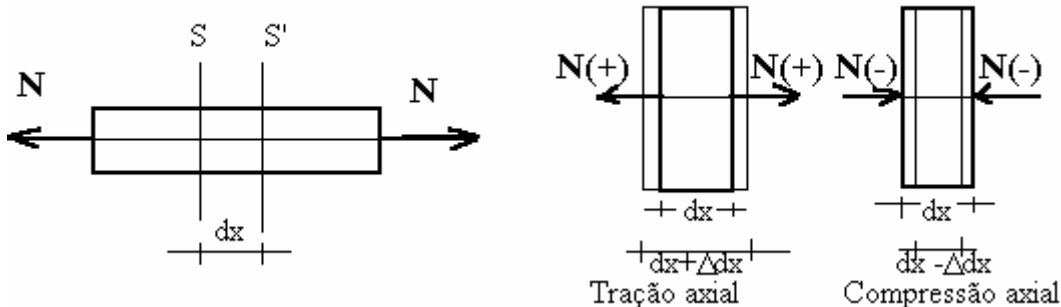
#### A. ESFORÇO NORMAL (N):

Pode-se definir esforço normal em uma seção de corte como sendo a soma algébrica das componentes de todas as forças externas na direção perpendicular à referida seção (seção transversal), ou seja, todas as forças de um dos lados isolado pelo corte na direção do eixo x.

$$N = \sum F_x \text{ ext}$$

O efeito do esforço normal será de provocar uma variação da distância que separa as seções, que permanecem planas e paralelas.

As fibras longitudinais que constituem estas seções também permanecem paralelas entre si, porém com seus comprimentos alterados (sofrem alongamentos ou encurtamentos).

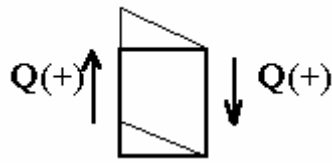


O esforço normal será considerado positivo quando alonga a fibra longitudinal e negativo no caso de encurtamento.

#### B. ESFORÇO CORTANTE (Q):

Pode-se definir esforço cortante em uma seção de referência como à soma vetorial das componentes do sistema de forças de um dos lados da seção de referência (seção de corte), sobre o próprio plano desta seção.

O efeito do esforço cortante é o de provocar o deslizamento linear, no sentido do esforço, de uma seção sobre a outra infinitamente próxima, acarretando o corte ou cisalhamento da mesma.



Os esforços cortantes serão positivos, quando calculados pelo somatório das forças situadas à esquerda seguem o sentido arbitrado para os eixos e quando calculados pelo somatório das forças à direita forem contrários aos eixos.

### C. MOMENTO FLETOR (M):

Pode-se definir momento fletor em uma seção como a soma vetorial dos momentos provocados pelas forças externas de um dos lados da seção (tomada como referência), em torno de eixos nela contidos (eixos y e z).

Não é usual, entretanto trabalhar-se com a soma vetorial optando-se pelo cálculo separado dos momentos em relação aos eixos y e z, transformando a soma em algébrica.

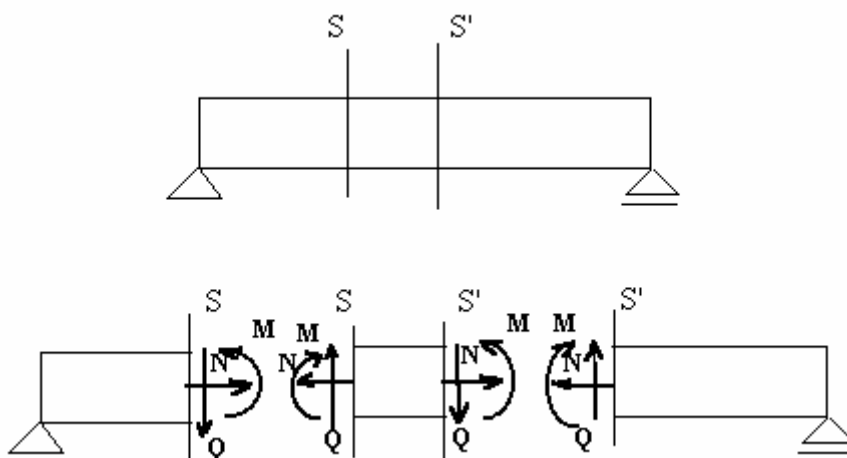
$$M = \Sigma m^{\text{ext}}$$

O efeito do momento fletor é o de provocar o giro da seção em torno de um eixo contido por ela mesma. As fibras de uma extremidade são tracionadas, enquanto que na outra são comprimidas. As seções giram em torno do eixo em torno do qual se desenvolve o momento, permanecendo planas.

## III – CÁLCULO DAS SOLICITAÇÕES EM UMA SEÇÃO

Conforme já se viu, corta-se uma estrutura por uma seção, e nesta seção devem aparecer esforços que equilibrem o sistema isolado (solicitações internas).

Será feita a análise em estruturas sujeitas a carregamento plano onde os esforços desenvolvidos são o esforço normal  $N$  ( $\Sigma F_x$ ), o esforço cortante  $Q_y$  ( $\Sigma F_y$ ) ou simplesmente  $Q$  e o momento fletor  $M_z$  ou simplesmente  $M$ . Com o fim de uniformizar-se a representação serão representadas graficamente as convenções para o sentido positivo destas solicitações.

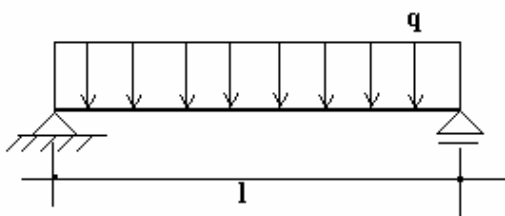


O “MÉTODO DAS SEÇÕES” consiste em:

1. Corta-se a peça na seção desejada e isola-se um dos lados do corte (qualquer um), com todos os esforços externos atuando.
2. Na seção cortada devem ser desenvolvidas solicitações que mantêm o sistema isolado em equilíbrio. Arbitra-se as solicitações possíveis de serem desenvolvidas (N, Q e M) com suas orientações positivas. Estas solicitações são os valores que serão determinados.
3. Aplicam-se as equações de equilíbrio na parte do corpo isolada em relação à seção cortada e determinam-se os valores procurados. Observe-se que as solicitações a serem determinadas são em número de três e dispomos também de três equações de equilíbrio, podendo-se então formar um sistema de três equações com três incógnitas.

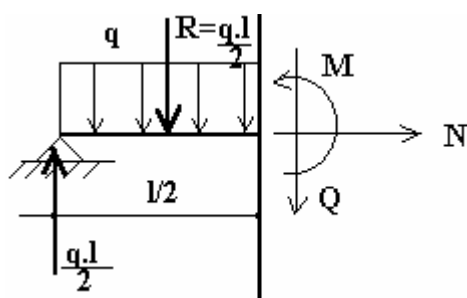
Exemplo:

Calcule as solicitações desenvolvidas na seção intermediária da viga abaixo.



$$V_A = V_B = \frac{q \cdot l}{2}$$

Cortando e isolando um dos lados do corte:



Aplicando as equações de equilíbrio, teremos:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \therefore \quad N = 0$$

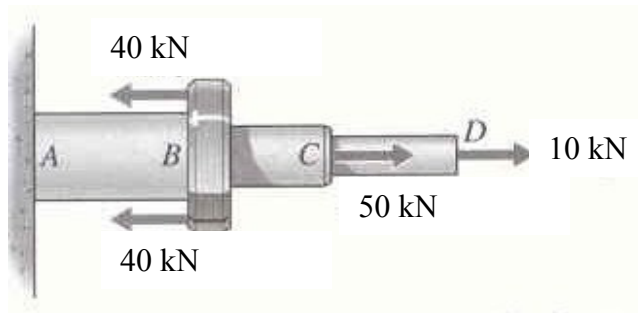
$$\Sigma F_y = 0 \quad \therefore \quad Q - \frac{q \cdot l}{2} + \frac{q \cdot l}{2} = 0 \quad \therefore \quad Q = 0$$

$$\Sigma M_S = 0 \quad \therefore \quad M + \left( \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) - \left( \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$M_S = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

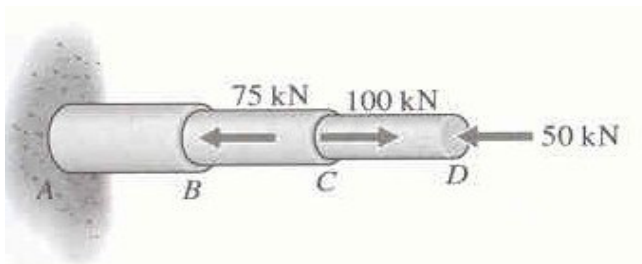
### EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

1. Uma barra está carregada e apoiada como mostra a figura. Determine as forças axiais transmitidas pelas seções transversais nos intervalos AB, BC e CD da barra:



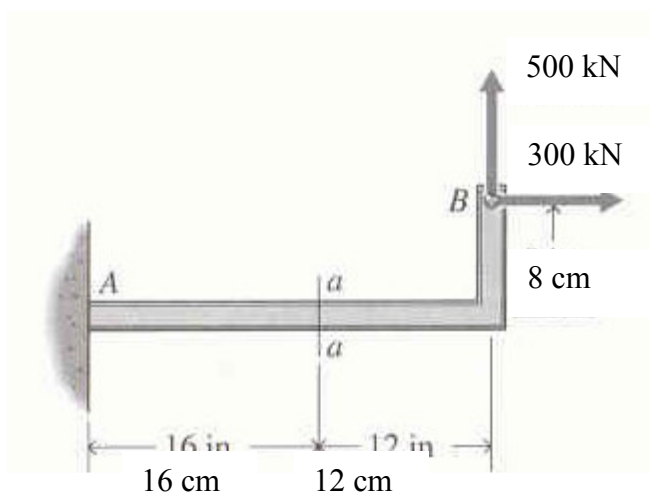
$$\begin{aligned} \text{R: } N_{AB} &= -20 \text{ kN} \\ N_{BC} &= +60 \text{ kN} \\ N_{CD} &= +10 \text{ kN} \end{aligned}$$

2. Três cargas axiais estão aplicadas a uma barra de aço como mostra a figura. Determine os esforços normais desenvolvidos nas seções AB, BC e CD da barra.



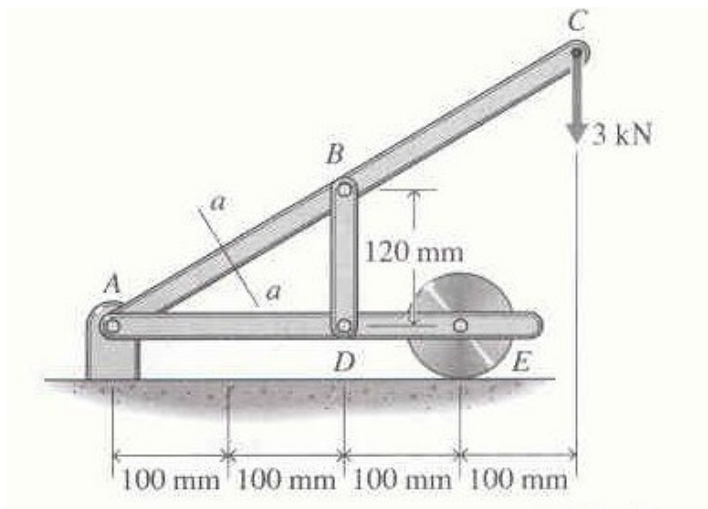
$$\begin{aligned} \text{R: } N_{AB} &= -25 \text{ kN} \\ N_{BC} &= +50 \text{ kN} \\ N_{CD} &= -50 \text{ kN} \end{aligned}$$

3. Determine as solicitações internas desenvolvidas na seção a-a' da barra da figura abaixo:



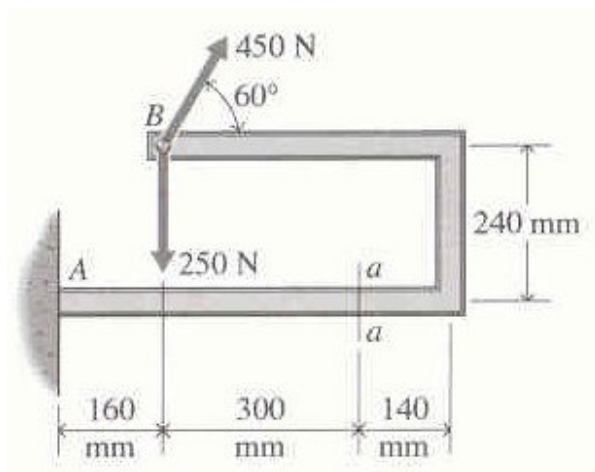
$$\begin{aligned} \text{R: } N &= 300 \text{ kN} \\ Q &= -500 \text{ kN} \\ M &= -3600 \text{ kN.cm} \end{aligned}$$

4. Determine as solicitações internas na seção a-a' da barra ABC da estrutura composta pelas três barras mostradas na figura:



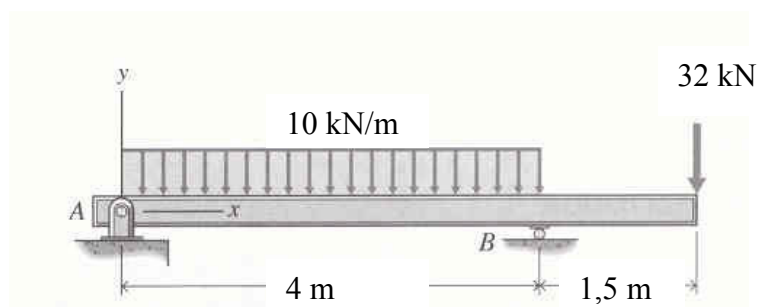
R:  $N = 1,53 \text{ kN}$   
 $Q = -2,55 \text{ kN}$   
 $M = 297,4 \text{ kN.m}$

5. Determine as solicitações na seção a-a' da barra abaixo:



R :  $N = 225 \text{ N}$   
 $Q = -139,71 \text{ N} (\downarrow)$   
 $M = +95,91 \text{ N.m}$   
(horário)

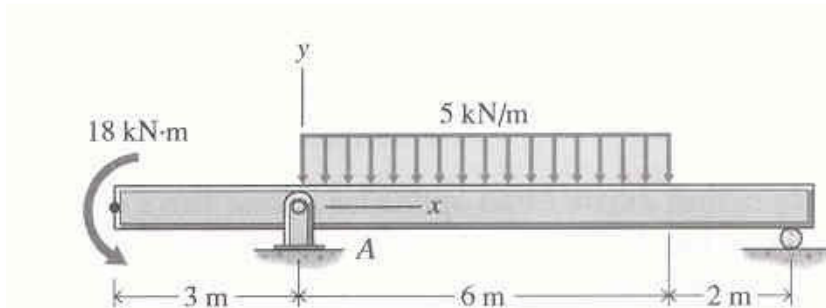
6. Para a viga da figura abaixo determine as reações externas de vínculo e as solicitações internas transmitidas por uma seção transversal a 75 cm do apoio A.



R :  $V_A = 8 \text{ kN}$   
 $V_B = 64 \text{ kN}$   
 $N = 0$   
 $Q = 0,5 \text{ kN}$   
 $M = 3,18 \text{ kN.m}$

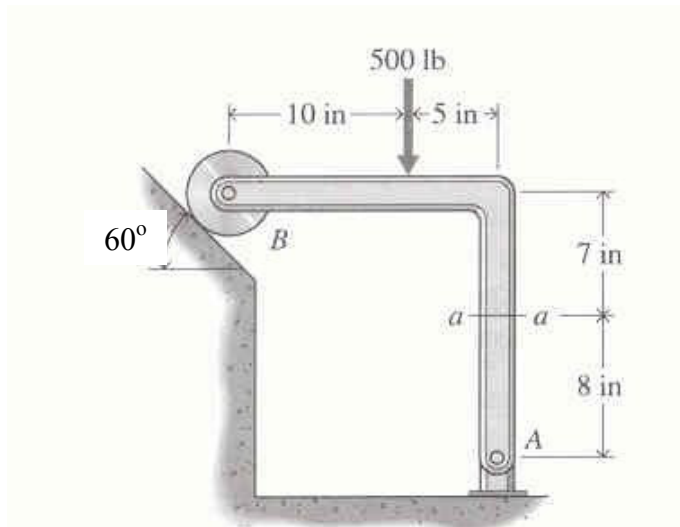


7. Para a viga abaixo, determine as reações de apoio e as solicitações internas em uma seção a 2 m do apoio esquerdo.



R:  $V_A = 21 \text{ kN}$   
 $V_B = 9 \text{ kN}$   
 $N = 0$   
 $Q = 11 \text{ kN}$   
 $M = 14 \text{ kN.m}$

8. Determine as solicitações internas transmitidas pela seção a-a da barra em L mostrada abaixo:



R:  $N = -434,18 \text{ lb}$   
 $Q = 105,84 \text{ lb}$   
 $M = -846,72 \text{ lb.in}$

## CAPÍTULO IV

### INTRODUÇÃO À RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

#### I. OBJETIVO FUNDAMENTAL

A Resistência dos Materiais se preocupa fundamentalmente com o comportamento das diversas partes de um corpo quando sob a ação de solicitações.

Ao estudar-se o equilíbrio interno de um corpo, as solicitações internas fundamentais ( $M$ ,  $Q$ ,  $N$  e  $M_t$ ) são determinadas. Se está penetrando no interior da estrutura, para analisar-se, em suas diversas seções, a existência e a grandeza dos esforços que a solicitam.

A avaliação destes esforços foi objeto de estudo na disciplina de Estruturas Isostáticas que deve preceder a Resistência dos Materiais.

Consideram-se corpos reais, isótopos e contínuos constituídos de pequenas partículas ligadas entre si por forças de atração. Com a aplicação de esforços externos supõe-se que as partículas destes corpos se desloquem e que isto prossiga até que se atinja uma situação de equilíbrio entre os esforços externos aplicados e os esforços internos resistentes. Este equilíbrio se verifica nos diversos pontos do corpo citado e se manifesta sob a forma de deformações (mudança da forma original), dando origem à tensões internas.

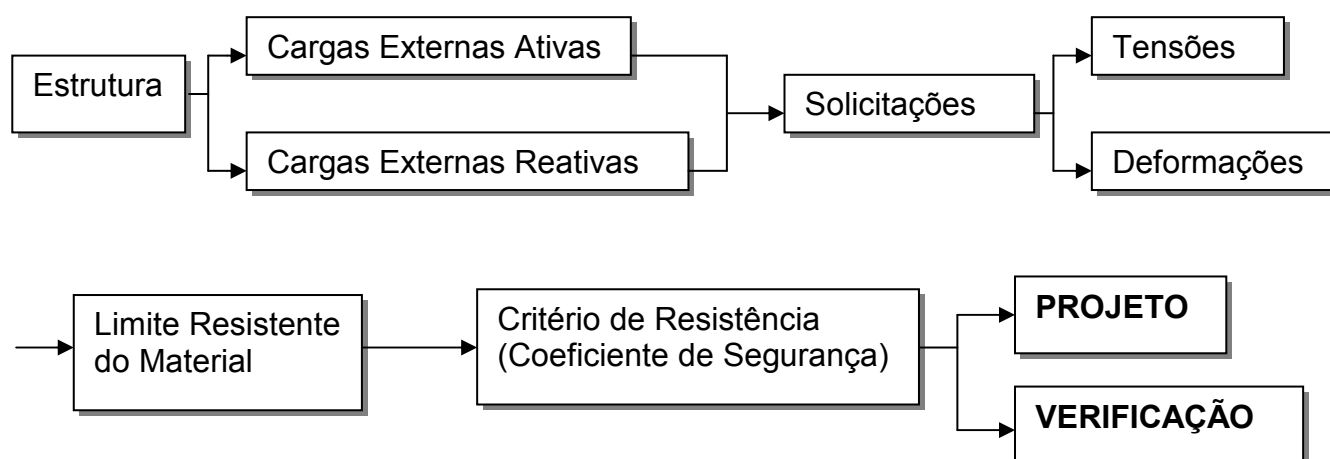
**Observe-se que o equilíbrio se dá na configuração deformada do corpo, que admitiremos como igual a configuração inicial pois em estruturas estaremos sempre no campo das pequenas deformações.**

Resumindo, em um corpo que suporta cargas ocorre:

1. Um fenômeno geométrico que é a mudança da sua forma original: Isto é deformação.
2. Um fenômeno mecânico que é a difusão dos esforços para as diversas partes do corpo: Isto é tensão.

É claro que se entende que a capacidade que um material tem de resistir as solicitações que lhe são impostas é limitada, pois pode ocorrer a ruptura do corpo quando o carregamento for excessivo. É necessário conhecer esta capacidade para que se projete com segurança.

Pode-se resumir um problema de Resistência dos Materiais conforme fluxograma abaixo:

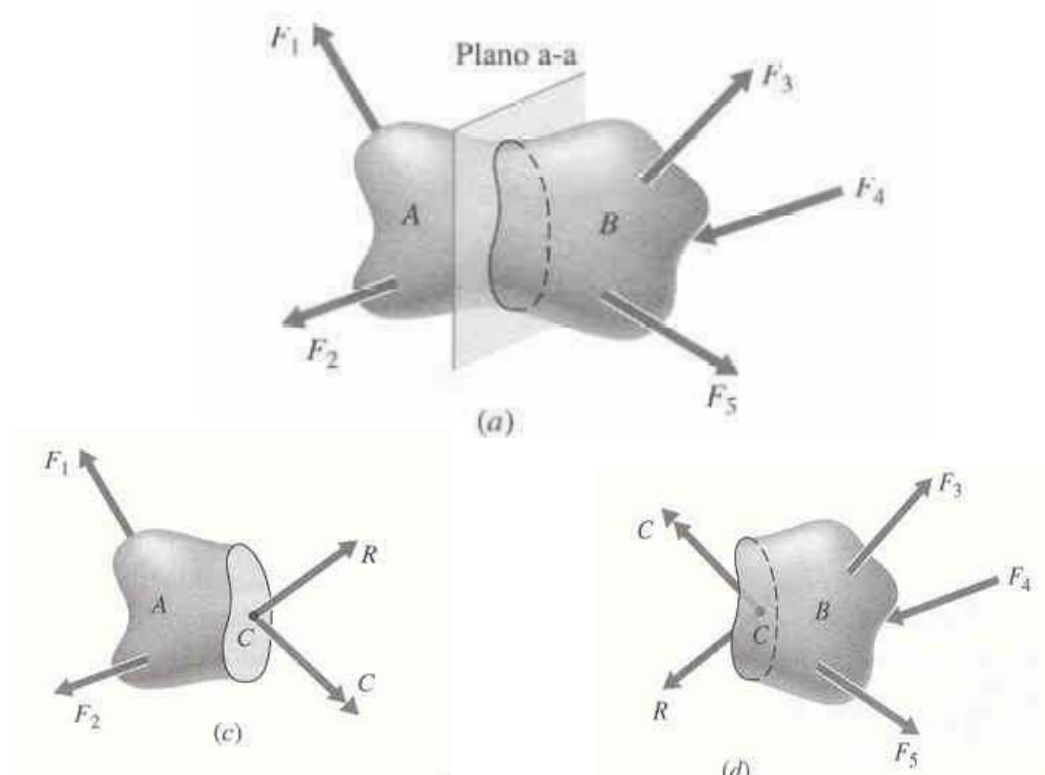


## II. TENSÕES

Conforme se citou, as tensões que se desenvolvem nas partículas de um corpo são consequência dos esforços (força ou momento) desenvolvidos. Como os esforços são elementos vetoriais (módulo, direção e sentido) a tensão como consequência também o será.

Lembra-se do método das seções visto em Isostática:

**Supõe-se um corpo carregado e em equilíbrio estático. Ao se cortar este corpo por um plano qualquer e isolando-se uma das partes, pode-se dizer que na seção cortada devem se desenvolver esforços que se equivalham aos esforços da parte retirada, para que assim o sistema permaneça em equilíbrio. Estes esforços são decompostos e se constituem nas solicitações internas fundamentais. O isolamento de qualquer uma das partes deve levar ao mesmo resultado.**



As resultantes nas seções de corte de ambos os lados devem ser tais que reproduzam a situação original quando as duas partes forem ligadas novamente, ou seja, pelo princípio da ação e reação devem ser de mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos.

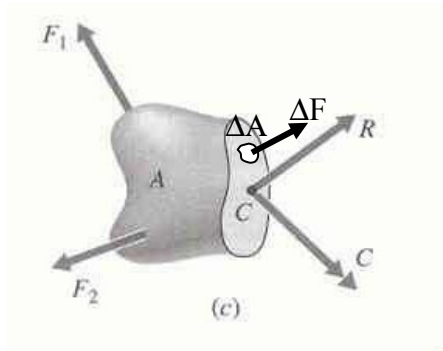
$\vec{R}$  e  $\vec{M}$  são as resultantes das solicitações internas referidas ao centro de gravidade da seção de corte da barra.

Partindo-se deste raciocínio pode-se afirmar que em cada elemento de área que constitui a seção cortada, está sendo desenvolvido um elemento de força, cujo somatório (integral) ao longo da área mantém o equilíbrio do corpo isolado.

$$\vec{R} = \oint_A \rho \cdot dA$$

O Momento M resultante se deve à translação das diversas forças para o centro de gravidade da seção.

A tensão média ( $\vec{\rho}_m$ ) desenvolvida no elemento de área citado nada mais é do que a distribuição do efeito da força pela área de atuação da mesma.



Sejam:

$\Delta A \rightarrow$  Elemento genérico de área  $\Delta A$

$\Delta \vec{F} \rightarrow$  Elemento de força que atua em  $\Delta A$

$\vec{\rho}_m \rightarrow$  tensão média

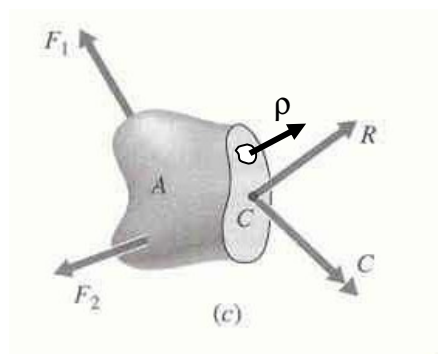
$$\vec{\rho}_m = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

Como a tensão é um elemento vetorial se pode representá-la aplicada em um ponto determinado, que obtem-se fazendo o elemento de área tender ao ponto ( $\Delta A \rightarrow 0$ ), e então:

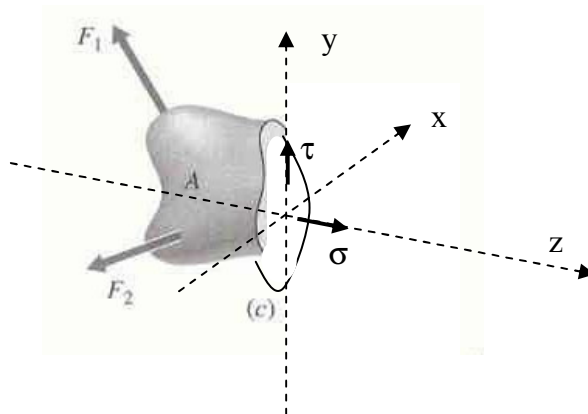
$\vec{\rho} =$  Tensão atuante em um ponto ou tensão resultante em um ponto

$$\vec{\rho} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}}{dA}$$

ou graficamente:



Ainda por ser um elemento vetorial ela pode, como qualquer vetor, ser decomposta no espaço segundo três direções ortogonais que se queira, portanto escolhe-se como referência duas direções contidas pelo plano da seção de referência "S" (x,y) e a terceira perpendicular à este plano (n).



Isto permite dividir as componentes da tensão do ponto em duas categorias:

1. Tensões Tangenciais ou de Cisalhamento ( $\tau$ ) - contidas pela seção de referência
2. Tensão Normal ( $\sigma$ ) - perpendicular à seção de referência

Costuma-se em Resistência dos Materiais diferenciar estas duas tensões pelos efeitos diferentes que elas produzem (deformações) e se pode adiantar que normalmente trabalham-se com estas componentes ao invés da resultante.

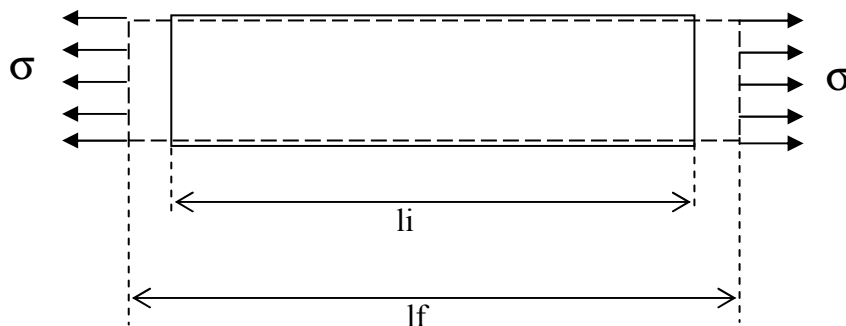
#### A. TENSÕES NORMAIS ( $\sigma$ )

A tensão normal tem a direção perpendicular à seção de referência e o seu efeito é o de provocar alongamento ou encurtamento das fibras longitudinais do corpo, mantendo-as paralelas.

Costuma-se medir a deformação de peças sujeitas a tensão normal pela deformação específica longitudinal ( $\epsilon$ ).

##### 1. conceito:

É a relação que existe entre a deformação medida em um corpo e o seu comprimento inicial, sendo as medidas feitas na direção da tensão.



$l_i$  → comprimento inicial da barra

$l_f$  → comprimento final da barra

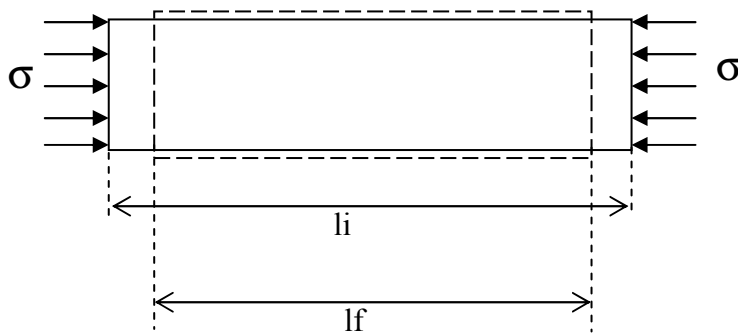
$\Delta l$  → deformação total

$$\Delta l = l_f - l_i$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_i}$$

Observe que no exemplo dado  $\Delta l > 0$  portanto  $\varepsilon > 0$  (alongamento)

Pode-se mostrar um outro exemplo onde  $\Delta l < 0$  conseqüentemente  $\varepsilon < 0$  (encurtamento)



Neste exemplo  $\Delta l < 0$  portanto  $\varepsilon < 0$

## 2. Sinal:

(+) alongamento → Corresponde à uma tensão de tração que também será positiva

(-) encurtamento → Corresponde à uma tensão de compressão que também será negativa

## 3. Unidade:

- adimensional quando tomarmos para  $\Delta l$  a mesma unidade que para  $l_i$

-Taxa milesimal (‰) - Nestes casos medimos  $\Delta l$  em mm e  $l_i$  em m(metros).

## B. TENSÕES TANGENCIAIS ( $\tau$ )

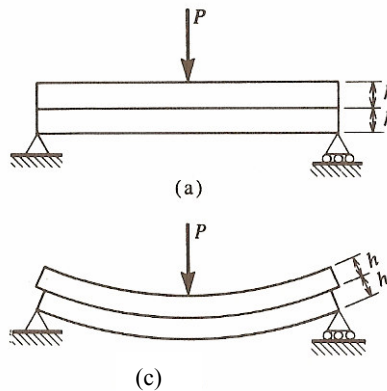
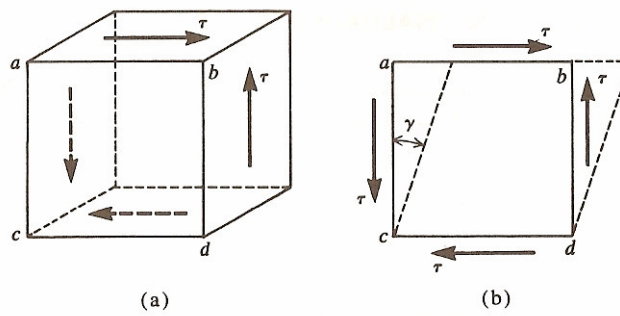
É a tensão desenvolvida no plano da seção de referência tendo o efeito de provocar corte ou cisalhamento nesta seção.

### 1. Lei da Reciprocidade das tensões tangenciais

Esta lei representa uma propriedade especial das tensões tangenciais. Pode-se provar a sua existência a partir das equações de equilíbrio estático. Pode-se enunciá-la de forma simples e aplicá-la.

Suponha duas seções perpendiculares entre si formando um diedro retângulo. Se em uma das faces deste diedro existir uma tensão tangencial normal a aresta de perpendicularidade das faces, então, obrigatoriamente na outra face, existirá a mesma tensão tangencial normal a aresta. Ambas terão o mesmo módulo e ambas se aproximam ou se afastam da aresta de perpendicularidade. São chamadas de tensões recíprocas."

Para facilitar a compreensão, pode-se representá-la graficamente:

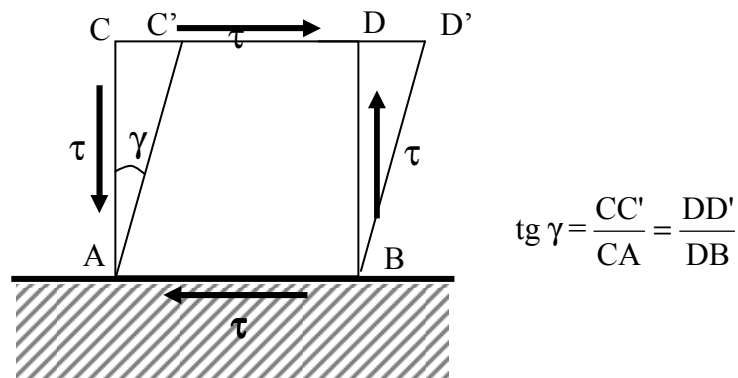


A figura (c) demonstra o desenvolvimento das tensões de cisalhamento longitudinais, recíprocas às tensões de cisalhamento desenvolvidas pelo esforço cortante.

## 2. Distorção Específica ( $\gamma$ )

Medida de deformação de corpos submetidos a tensões tangenciais.

Supõe-se um bloco com arestas A, B, C e D, submetido a tensões tangenciais em suas faces. Para melhor ser visualizar a deformação considera-se fixa a face compreendida pelas arestas A e B.



Como em estruturas trabalha-se sempre no campo das pequenas deformações e então  $\gamma \ll 1$  rad, então arco e tangente se confundem :

$$\gamma \cong \frac{CC'}{CA} = \frac{DD'}{DB}$$

### 2.1 Conceito:

Distorção específica é a relação entre o deslocamento observado e a distância respectiva, medida perpendicular ao deslocamento. Representa fisicamente a variação que sofre o ângulo reto de um corpo submetido a tensões de cisalhamento.

### 2.2 Unidade:

As observações quanto a unidade da distorção seguem as da deformação específica longitudinal: adimensional ou taxa milesimal, ressaltando-se que quando adimensional representa um arco expresso em radianos.

## III. DEFORMAÇÕES E ELASTICIDADE

Deformação é a alteração da forma de um corpo devido ao movimentos das partículas que o constituem.

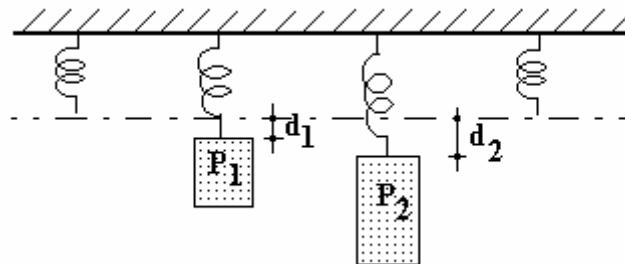
A tendência dos corpos de voltarem a forma original devido a força de atração entre as partículas representa a elasticidade do material. Quanto mais um corpo tende a voltar a sua forma original, mais elástico é seu material, ou seja, quanto mais ele resiste a ser deformado maior é a sua elasticidade.

Pode-se diferenciar os tipos de deformações observando um ensaio simples, de uma mola presa a uma superfície fixa e submetida sucessivamente a cargas cada vez maiores até a sua ruptura.

### A. DEFORMAÇÕES ELÁSTICAS

Uma deformação é elástica quando cessado o efeito do carregamento o corpo volta a sua forma original.

Exemplo:



No exemplo acima, se medidas numericamente as grandezas vamos ver que:

$$\frac{P_1}{d_1} = \frac{P_2}{d_2} = \dots = \frac{P_n}{d_n} = k \text{ (constante elástica da mola)}$$

Conclui-se que as duas propriedades que caracterizam uma deformação elástica são:

1. Deformações reversíveis
2. Proporcionalidade entre carga e deformação.

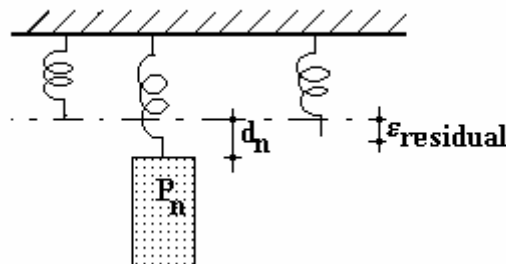


## B. DEFORMAÇÕES PLÁSTICAS:

Se fosse aumentada a carga sobre esta mola ela chegaria a uma situação em que terminaria a proporcionalidade e apesar da tendência do corpo em assumir sua forma original, sempre restariam as chamadas deformações residuais.

Considera-se então terminado o regime elástico e o corpo passa a atuar em regime plástico.

Note-se que no regime plástico termina a proporcionalidade e a reversibilidade das deformações.



Se fosse aumentada ainda mais a carga, o próximo limite seria a ruptura.

## V. LEI DE HOOKE

A maioria dos projetos de peças serão tratados no regime elástico do material, sendo os casos mais sofisticados trabalhados em regime plástico e se constituindo no que há de mais moderno e ainda em estudo no campo da Resistência dos Materiais.

Robert Hooke em 1678 enunciou a lei que leva o seu nome e que é a base de funcionamento dos corpos em regime elástico.

As tensões desenvolvidas e suas deformações específicas consequentes são proporcionais enquanto não se ultrapassa o limite elástico do material.

A Lei de Hooke pode ser representada pelas expressões analíticas:

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = E(\text{mod. de elasticidade longitudinal})$$

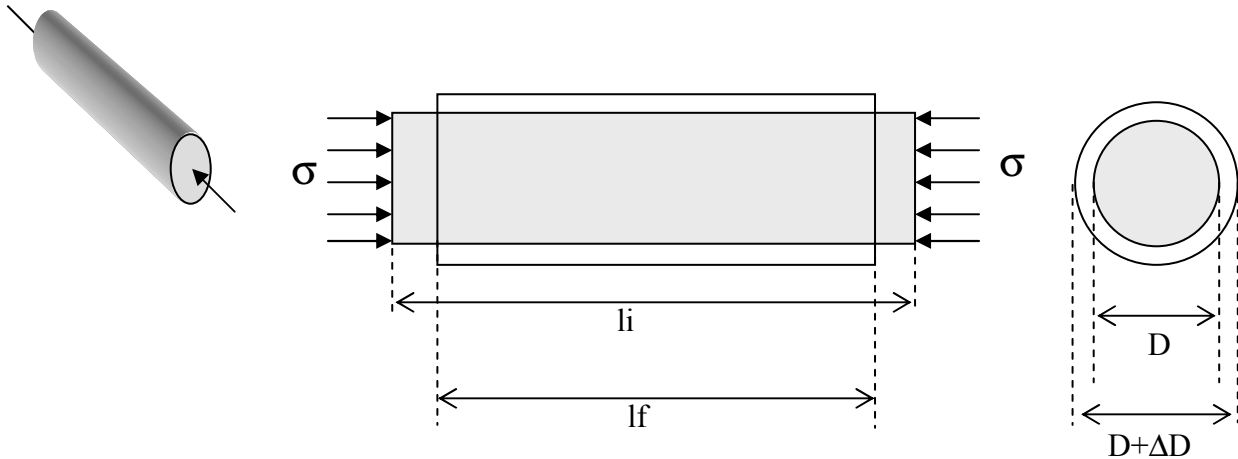
$$\frac{\tau}{\gamma} = G(\text{mod. de elasticidade transversal})$$

Estes módulos de elasticidade são constantes elásticas de um material, e são determinados experimentalmente.

## VI. LEI DE POISSON ( DEFORMAÇÃO ESPECÍFICA TRANSVERSAL)

notação :  $\epsilon_t$

Poisson determinou experimentalmente a deformação que as peças sofrem nas direções perpendiculares a da aplicação da tensão normal.



### A. CONCEITO:

Deformação específica transversal é a relação entre a deformação apresentada e o seu comprimento respectivo, ambos medidos em direção perpendicular à da tensão.

$$\epsilon_t = \frac{\Delta D}{D}$$

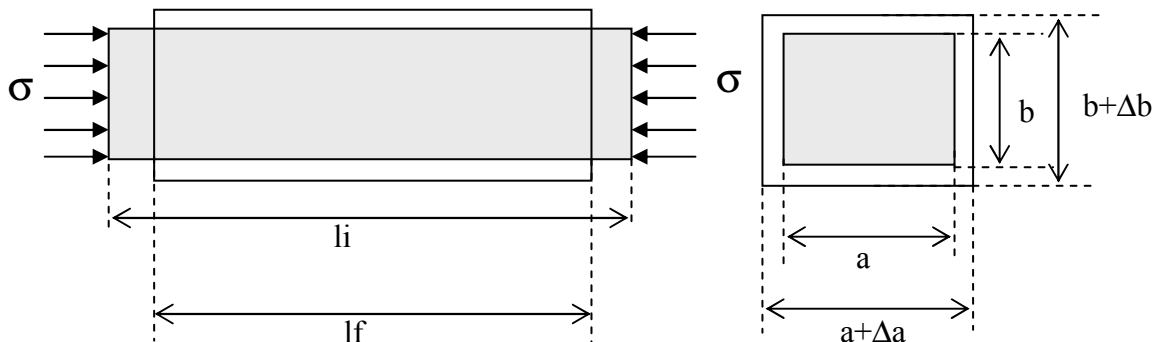
Os estudos de Poisson sobre a deformação transversal levam as seguintes conclusões:

1.  $\epsilon$  e  $\epsilon_t$  tem sempre sinais contrários
2. As deformações específicas longitudinais e transversais são proporcionais em um mesmo material

$$\frac{\epsilon_t}{\epsilon} = -\mu$$

O coeficiente de Poisson é a terceira constante elástica de um material, também determinada experimentalmente.

3. Em uma mesma seção a deformação específica transversal é constante para qualquer direção perpendicular ao eixo.

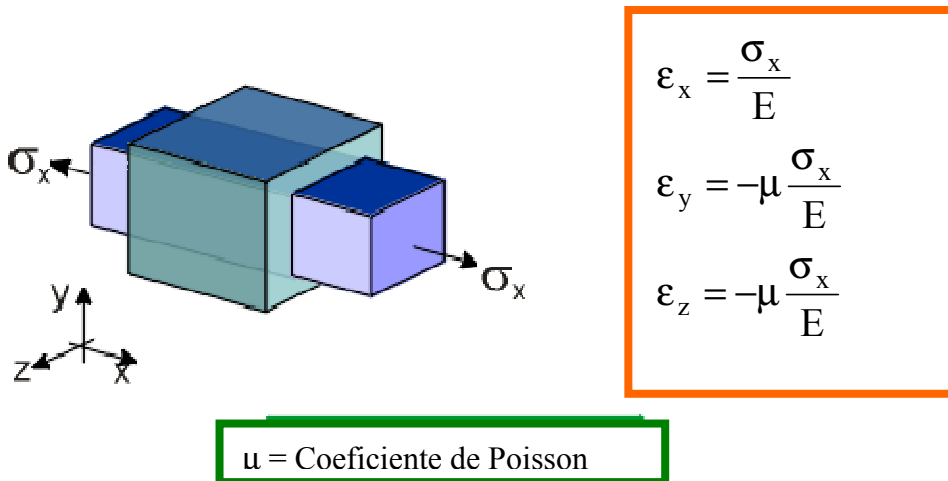


$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = \epsilon_t = \text{constante}$$

As constantes elásticas de um mesmo material se relacionam pela expressão:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

Resumindo:



## VII. PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS MATERIAIS

Para serem determinadas as características mecânicas dos materiais são realizados em laboratório ensaios com amostras do material, que são chamadas de corpos de prova.

No Brasil estes ensaios são realizados empregando-se métodos padronizados e regulamentados pela ABNT.

O ensaio mais costumeiro é o de tração simples, onde determinam-se as TENSÕES LIMITES dos diversos materiais, que indica a tensão máxima alcançada pelo material, em laboratório, sem que se inicie o seu processo de ruptura.

Com a realização destes ensaios pode-se classificar os materiais em dois grupos:

$$\begin{cases} \text{materiais dúteis} \\ \text{materiais frágeis} \end{cases}$$

### A. MATERIAIS DÚTEIS :

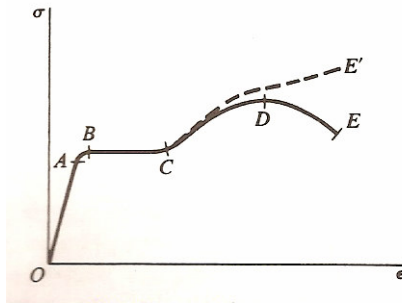
São considerados materiais dúteis aqueles que sofrem grandes deformações antes da ruptura. Dentre os materiais dúteis ainda temos duas categorias:

#### 1. Dútil com escoamento real:

exemplo: aço comum

Num ensaio de tração axial simples costuma-se demonstrar os resultados através de um diagrama tensão x deformação específica ( $\sigma$  x  $\epsilon$ ).

No caso de material dútil com escoamento real a forma deste diagrama segue o seguinte modelo:



reta OA - Indica a proporcionalidade entre  $\sigma \times \epsilon$ , portanto o período em que o material trabalha em regime elástico (lei de Hooke). Deformações reversíveis.

$\sigma_p$  - Tensão de proporcionalidade

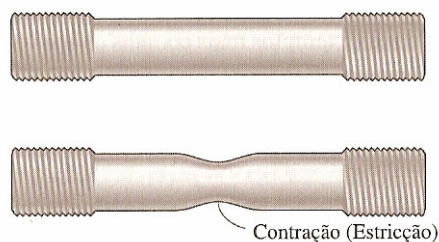
Representa o limite do regime elástico.

curva AB - A curvatura indica o fim da proporcionalidade, caracterizando o regime plástico do material. Podemos notar que as deformações crescem mais rapidamente do que as tensões e cessado o ensaio já aparecem as deformações residuais, que graficamente podemos calcular traçando pelo ponto de interesse uma reta paralela à do regime elástico. Notamos que neste trecho as deformações residuais são ainda pequenas mas irreversíveis.

$\sigma_e$  - Tensão de escoamento

Quando é atingida a tensão de escoamento o material se desorganiza internamente (a nível molecular) e sem que se aumente a tensão ao qual ele é submetido, aumenta grandemente a deformação que ele apresenta.

trecho BC - Chamado de patamar de escoamento. Durante este período começam a aparecer falhas no material (estricções), ficando o mesmo invalidado para a função resistente.



curva CD - Após uma reorganização interna o material continua a resistir a tensão em regime plástico, porém agora com grandes e visíveis deformações residuais. As estrições são agora perceptíveis nitidamente. Não se admitem estruturas com esta ordem de grandeza para as deformações residuais.

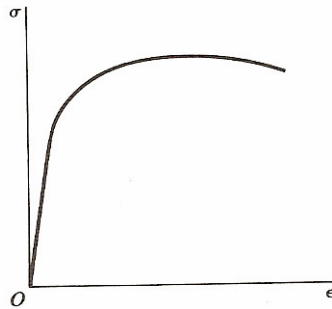
$\sigma_R$  - Tensão de ruptura

Conforme se pode analisar no ensaio acima, o material pode ser aproveitado até o escoamento, portanto sua TENSÃO LIMITE será a TENSÃO DE ESCOAMENTO.

## 2. Dútil com escoamento convencional

Exemplo: aços duros

Se comporta de maneira semelhante ao anterior, mas não apresenta patamar de escoamento. Como em estruturas não se admitem grandes deformações residuais se convencionou este limite, ficando a tensão correspondente convencionada como TENSÃO DE ESCOAMENTO, que é também a TENSÃO LIMITE do material.



### OBSERVAÇÕES:

Os materiais dúteis de uma maneira geral são classificados como aqueles que apresentam grandes deformações antes da ruptura, podendo também ser utilizados em regime plástico com pequenas deformações residuais.

Apresentam uma propriedade importantíssima que é resistirem igualmente a tração e a compressão. Isto quer dizer que o escoamento serve como limite de tração e de compressão.

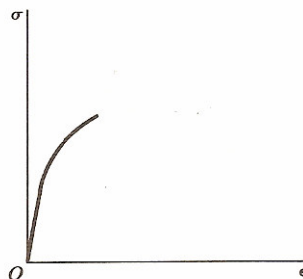
### B. MATERIAIS FRÁGEIS

Exemplo : concreto

São materiais que se caracterizam por pequenas deformações anteriores a ruptura. O diagrama  $\sigma \times \epsilon$  é quase linear sendo quase global a aplicação da lei de Hooke.

Nestes casos a tensão limite é a tensão de ruptura.

Ao contrário dos materiais dúteis, eles resistem diferentemente a tração e a compressão, sendo necessário ambos os ensaios e obtendo-se assim dois limites:



$\sigma_T$  = Limite de ruptura a tração

$\sigma_C$  = Limite ruptura a compressão

Em geral estes materiais resistem melhor a compressão do que a tração.

## IX. CRITÉRIO DE RESISTÊNCIA - COEFICIENTE DE SEGURANÇA

Em termos gerais um projeto está sempre ligado ao binômio economia x segurança. Deve-se adotar um índice que otimize este binômio.

Pode-se dizer também que mesmo sendo determinada em laboratório a utilização da tensão limite em projetos é arriscada, pois os valores são trabalhados com diversos fatores de incerteza.

Em vista do que foi exposto adota-se o seguinte critério:

A tensão limite é reduzida dividindo-a por um número que se chama coeficiente de segurança ( $s$ ). Para que este número reduza o módulo da tensão limite, ele deve ser maior do que a unidade. Então, para que haja segurança:

$$s \geq 1$$

As tensões assim reduzidas, que são as que realmente se pode utilizar. São chamadas de tensões admissíveis ou tensões de projeto. Para serem diferenciadas das tensões limites são assinaladas com uma barra ( $\bar{\sigma}$ ).

$$\bar{\sigma}_{\text{adm}} = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{s}$$

Resumindo analiticamente o critério de segurança conforme abaixo, para os diversos casos:

MATERIAIS DÚTEIS	MATERIAIS FRÁGEIS
$\sigma_{\text{máxt}} = \frac{\sigma_e}{s} = \bar{\sigma}_e$ (tensão de escoamento admissível)	$\sigma_{\text{máxt}} = \frac{\sigma_T}{s} = \bar{\sigma}_T$ (tensão de tração admissível)
$ \sigma_{\text{máxc}}  = \frac{\sigma_e}{s} = \bar{\sigma}_e$ (tensão de escoamento admissível)	$ \sigma_{\text{máxc}}  = \frac{ \sigma_c }{s} =  \bar{\sigma}_c $ (tensão de compressão admissível)

### EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

1. Uma barra de latão de seção circular de diâmetro três cm está tracionada com uma força axial de 50 kN. Determinar a diminuição de seu diâmetro. São dados do material o módulo de elasticidade longitudinal de  $1,08 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$  e o seu coeficiente de Poisson 0,3.

$$R: 5,89 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$$

2. Uma barra de aço de 25 cm de comprimento e seção quadrada de lado 5 cm suporta uma força axial de tração de 200 kN. Sendo  $E = 2,4 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$  e  $\mu = 0,3$ , qual a variação unitária do seu volume ?

$$R: 0,000133$$

3. Uma barra de alumínio de seção circular de diâmetro 1. 1/4" está sujeita à uma força de tração de 5.000 kgf. Determine":

- |                                       |                                |
|---------------------------------------|--------------------------------|
| a. Tensão normal                      | (a) 651,89 kgf/cm <sup>2</sup> |
| b. Deformação específica longitudinal | (b) 0,000815                   |
| c. Alongamento em 8"                  | (c) 0,163 mm                   |
| d. Variação do diâmetro               | (d) - 0,006 mm                 |

Admita:

$$E = 0,8 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2 \quad \mu = 0,25 \quad 1" = 25 \text{ mm}$$

4. Considere um ensaio cuidadosamente conduzido no qual uma barra de alumínio de 50 mm de diâmetro é solicitada em uma máquina de ensaio. Em certo instante a força aplicada é de 100 kN e o alongamento medido na direção do eixo da barra 0,219 mm em uma distancia padrão de 300 mm. O diâmetro sofreu uma diminuição de 0,0125 mm. Calcule o coeficiente de Poisson do material e o seu módulo de elasticidade longitudinal.

$$R: \mu = 0,33 \quad E = 0,7 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$$

## CAPÍTULO V

### SOLICITAÇÕES INTERNAS SEUS EFEITOS - ESFORÇO NORMAL AXIAL

#### I. INTRODUÇÃO

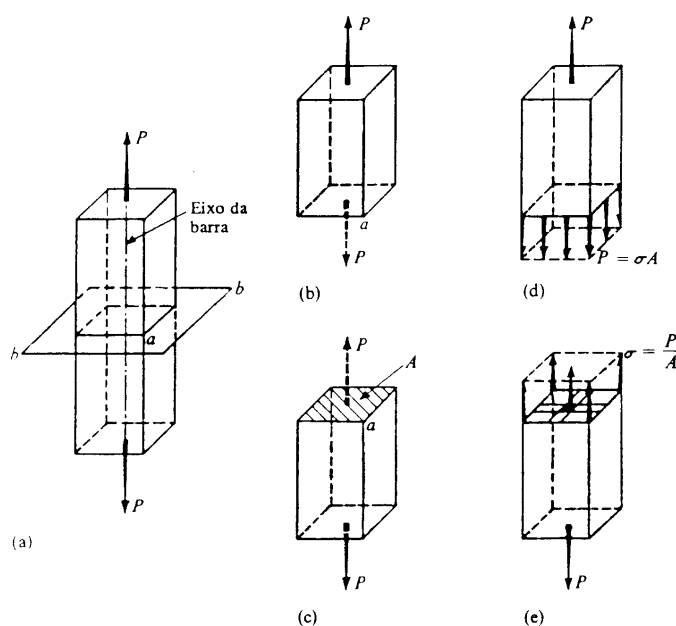
##### I. CONCEITO:

Quando um corpo que está sob ação de forças externas, na direção do seu eixo longitudinal, origina-se Esforços Normal no seu interior, mesmo sendo de equilíbrio a situação.

Assim como todo o corpo está em equilíbrio, qualquer parte sua também estará.

Adotando-se o método nas seções, e seccionando o corpo, na seção de corte de área  $A$ , deve aparecer uma força equivalente ao esforço normal  $N$ , capaz de manter o equilíbrio das partes do corpo isoladas pelo corte (fig b e c). Observe que se as partes isoladas forem novamente unidas, voltamos a situação precedente ao corte.

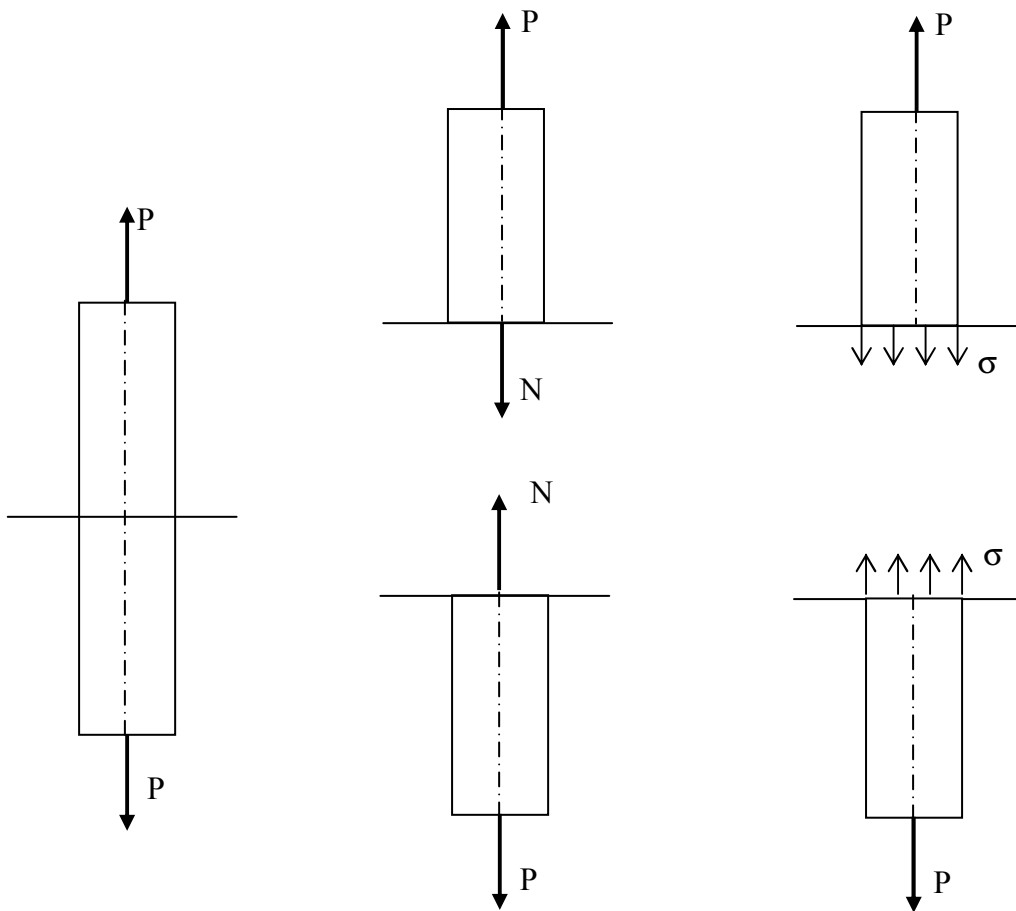
Neste caso, apenas a solicitação de esforço normal  $N$ , atuando no centro de gravidade da seção de corte é necessária para manter o equilíbrio.



Etapas sucessivas de análise de tensão em um corpo

Na prática, vistas isométricas do corpo são raramente empregadas, sendo a visualização simplificada por vistas laterais.





$$\Sigma F_V = 0 \quad \therefore \quad N - P = 0$$

$$N = P$$

Admite-se que este esforço normal se distribui uniformemente na área em que atua (A), ficando a tensão definida pela expressão:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

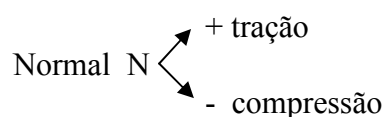
sendo:

$N \rightarrow$  Esforço Normal desenvolvido

$A \rightarrow$  Área da seção transversal

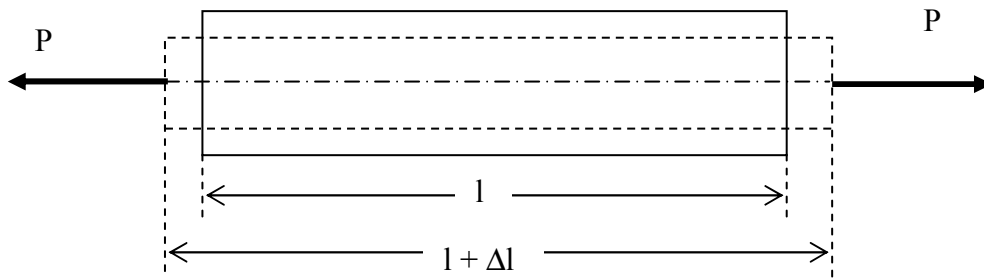
A tração ou Compressão axial simples pode ser observada, por exemplo, em tirantes, pilares e treliças.

A convenção adotada para o esforço normal (N)



Nas tensões normais, adota-se a mesma convenção.

As deformações desenvolvidas podem ser calculadas diretamente pela lei de Hooke:



$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$N = P$$

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$$

$\therefore$

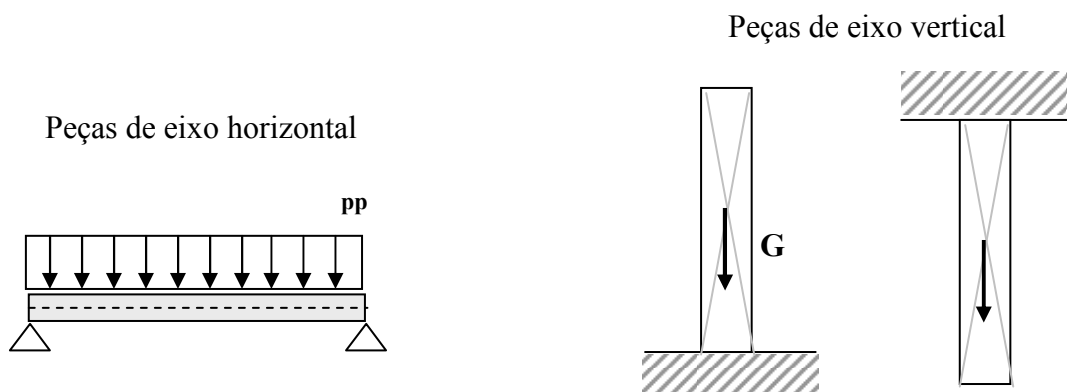
$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EA}$$

ou :

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

#### OBSERVAÇÕES:

1. Deve-se ter um cuidado adicional para com as peças comprimidas, pois as peças esbeltas devem ser verificadas à flambagem. A flambagem representa uma situação de desequilíbrio elasto-geométrico do sistema e pode provocar o colapso sem que se atinja o esmagamento.
2. O peso próprio das peças constitui-se em uma das cargas externas ativas que devem ser resistidas. Pode-se observar como se dá a ação do peso próprio:



Nota-se que nas peças horizontais o peso próprio constitui-se em uma carga transversal ao eixo, desenvolvendo Momento Fletor e Esforço Cortante.

No caso das peças verticais o peso próprio (G), atua na direção do eixo longitudinal da peça e provoca Esforço Normal, que pode ter um efeito diferenciado dependendo da sua vinculação:

Nas peças suspensas (tirantes) o efeito do peso é de tração e nas apoiadas (pilares) este efeito é de compressão.

O peso próprio de uma peça (G) pode ser calculado, multiplicando-se o volume da mesma pelo peso específico do material:

$$G = A \cdot \gamma \cdot l$$

Sendo:

A - área da seção transversal da peça

l - comprimento

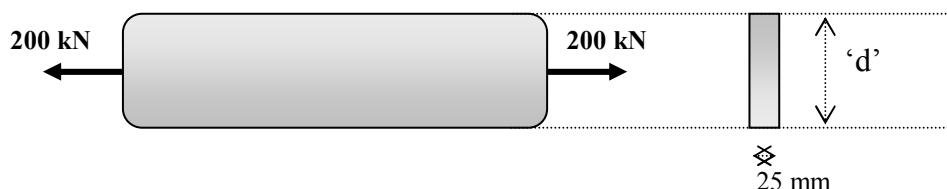
$\gamma$  - peso específico do material

Na tração ou compressão axial a não consideração do peso próprio é o caso mais simples.

A não consideração do peso próprio se dá em peças construídas em materiais de elevada resistência, quando a mesma é capaz de resistir a grandes esforços externos com pequenas dimensões de seção transversal, ficando portanto o seu peso próprio um valor desprezível em presença da carga externa. Nestes casos é comum desprezar-se o peso próprio da peça. Exemplo: Treliças e tirantes.

### EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

1. Uma força de tração axial é aplicada à barra de aço estrutural abaixo, que tem 25 mm de espessura. Se a tensão de tração admissível deste aço é 135 MPa e a deformação longitudinal admissível 1,25 mm, determine a largura mínima 'd' da barra.



R: 5,64 cm

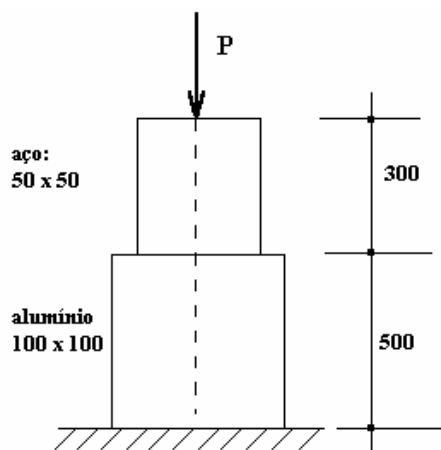
2. Uma barra de seção transversal retangular de 3 x 1 cm tem comprimento de 3 m. Determinar o alongamento produzido por uma carga axial de tração de 60 kN, sabendo-se que o módulo de elasticidade longitudinal do material é de  $2 \cdot 10^4$  kN/cm<sup>2</sup>.

R: 0,3 cm

3. Uma barra de aço e outra de alumínio têm as dimensões indicadas na figura. Determine a carga "P" que provocará um encurtamento total de 0,25 mm no comprimento do sistema. Admitimos que as barras sejam impedidas de flambar lateralmente, e despreza-se o peso próprio das barras.

Dados:  $E_{\text{aço}} = 2 \cdot 10^4$  kN/cm<sup>2</sup>       $E_{\text{Al}} = 0,7 \cdot 10^4$  kN/cm<sup>2</sup>

OBS : medidas em cm

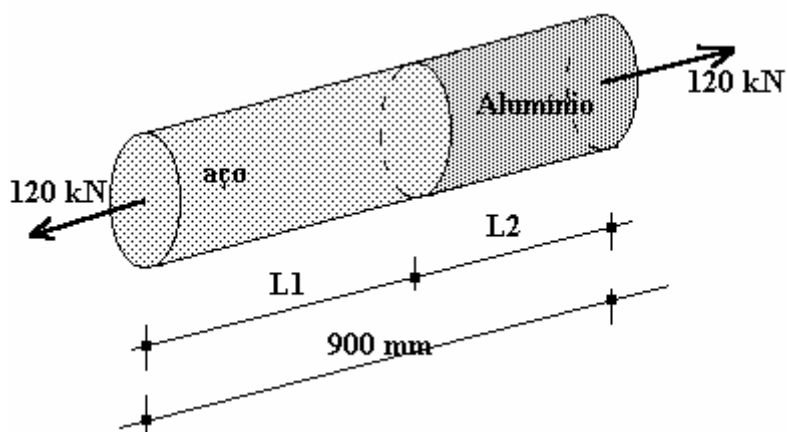


$$R : P \cong 1.900 \text{ kN}$$

4. Um cilindro sólido de 50 mm de diâmetro e 900 mm de comprimento acham-se sujeitos a uma força axial de tração de 120 kN. Uma parte deste cilindro de comprimento  $L_1$  é de aço e a outra parte unida ao aço é de alumínio e tem comprimento  $L_2$ . Determinar os comprimentos  $L_1$  e  $L_2$  de modo que os dois materiais apresentem o mesmo alongamento

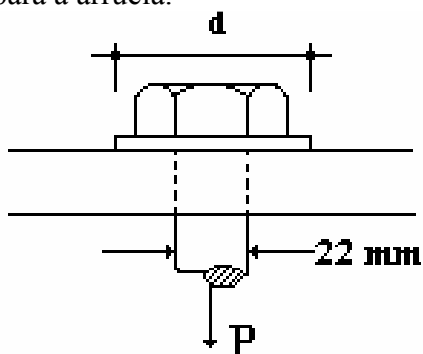
Dados:  $E_{\text{aço}} = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$

$$E_{\text{Al}} = 0,7 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$$



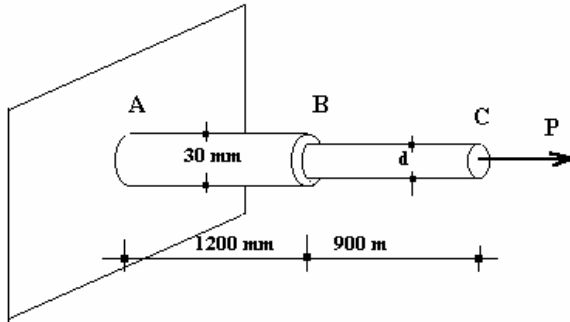
$$R : (a) \begin{aligned} L_1 &= 66,5 \text{ cm} \\ L_2 &= 23,33 \text{ cm} \end{aligned}$$

5. A carga  $P$  aplicada a um pino de aço é transmitida por um suporte de madeira por intermédio de uma arruela de diâmetro interno 25 mm e de diâmetro externo " $d$ ". Sabendo-se que a tensão normal axial no pino de aço não deve ultrapassar 35 MPa e que a tensão de esmagamento média entre a peça de madeira e a arruela não deve exceder 5MPa, calcule o diâmetro " $d$ " necessário para a arruela.



$$R: 6,32 \text{ cm}$$

6. Aplica-se à extremidade C da barra de aço ABC uma carga de 66,7 kN. Sabe-se que o módulo de elasticidade longitudinal do aço é de  $2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ . Determinar o diâmetro "d" da parte BC para a qual o deslocamento do ponto C seja de 1,3 mm.



R: 21,8 mm

## CAPÍTULO VI

### PEÇAS E RECIPIENTES DE PAREDES FINAS

Uma outra aplicação de tensões normais uniformemente distribuídas (ver capítulo V) ocorre na análise simplificada de peças ou recipientes de paredes finas assim como tubos, reservatórios cilíndricos, esféricos, cônicos, etc... sujeitos à pressão interna ou externa, de um gás ou líquido.

Por serem muito delgadas as paredes destas peças, considera-se uniforme a distribuição de tensões normais ao longo de sua espessura e considera-se também que devido à flexibilidade destas peças as mesmas não absorvem e nem transmitem momento fletor ou esforço cortante.

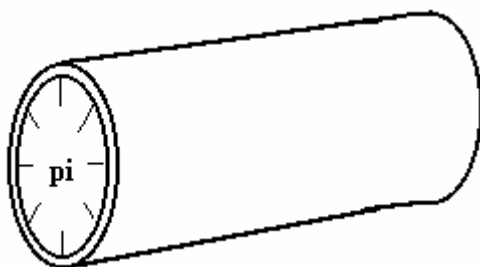
A relação entre a espessura e o raio médio da peça não deve ultrapassar 0,1, sendo excluída a possibilidade de descontinuidade da estrutura.

Nestes casos também existe a possibilidade de ruptura por flambagem nas paredes sujeitas à compressão, possibilidade esta que não será considerada de momento.

As aplicações deste estudo se dão em tanques e recipientes de armazenagem de líquidos ou gases, tubulações de água ou vapor (caldeiras), cascos de submarinos e certos componentes de avião, que são exemplos comuns de vasos de pressão de paredes finas.

#### A. TUBOS DE PAREDES FINAS

Seja o tubo de paredes finas abaixo:



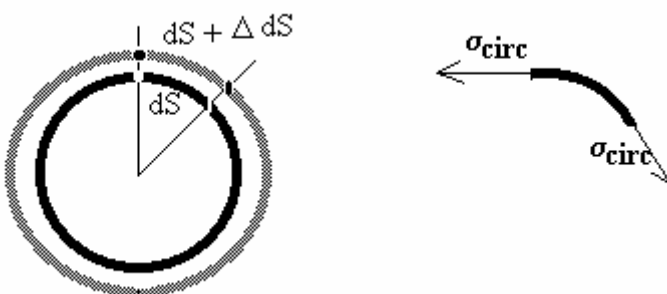
Onde:

$p_i$  - pressão interna

$r_i$  - raio interno

$t$  - espessura da parede

Intuitivamente podemos observar suas transformações quando sujeito por exemplo a uma pressão interna  $p_i$ :

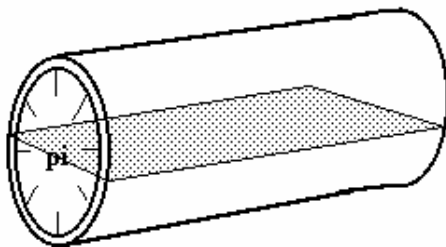


Observe que o arco genérico de comprimento  $dS$  após a atuação da pressão interna alongou e passou a medir  $dS + \Delta dS$ , portanto houve uma tensão de tração capaz de alongá-lo.

Como o arco aumentou na sua própria direção e como o arco considerado  $dS$  é um arco genérico podemos concluir que em todos os arcos elementares que constituem a circunferência, ou seja, em todos os pontos da circunferência se desenvolve uma tensão normal que por provocar um alongamento é de tração (+) e por ter a direção da circunferência chama-se de **tensão circunferencial** ( $\sigma_{\text{circ}}$ ).

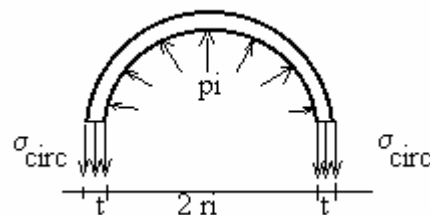
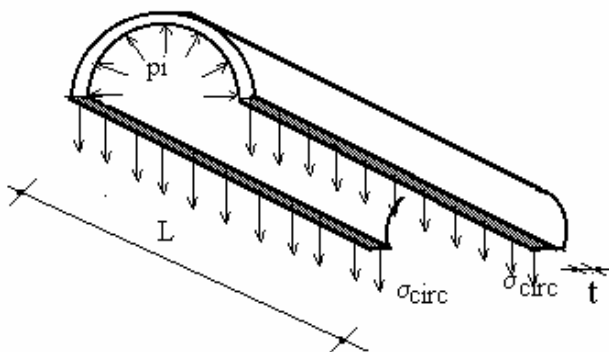
### Determinação da tensão circunferencial e de sua deformação

Para a determinação do valor destas tensões consideremos um tubo de comprimento 'L' conforme desenho:

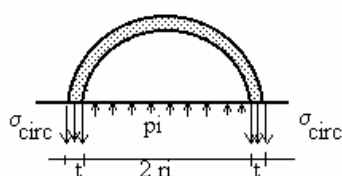


Seccionamos o tubo segundo um plano diametral longitudinal e aplicamos as equações de equilíbrio:

Ao efetuarmos o corte, na seção cortada devem aparecer tensões que equilibrem o sistema, que conforme já foi visto são tensões circunferenciais:



Podemos substituir as pressões internas por um sistema equivalente:



Aplicando a equação de equilíbrio estático:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{teremos:}$$

$$\sigma_{\text{circ}} \cdot 2.L.t - p_i.2.r_i.L = 0$$

$2.L.t \rightarrow$  área de corte onde atua a  $\sigma_{\text{circ}}$

$2.r_i.L \rightarrow$  área onde atua  $p_i$

Efetuada modificações algébricas chegamos na expressão:

$$\sigma_{\text{circ}} = \frac{p_i.r_i}{t}$$

À tensão circunferencial corresponde uma deformação circunferencial.

$$\epsilon_{\text{circ}} = \frac{\Delta dS}{dS}$$

Considerando o comprimento dos arcos como o comprimento da circunferência toda:

comprimento inicial =  $2.\pi.r_i$

comprimento final =  $2.\pi.(r_i + \Delta r_i)$

então  $\Delta dS = 2.\pi.(r_i + \Delta r_i) - 2.\pi.r_i = 2.\pi.\Delta r_i$

$$\epsilon_{\text{circ}} = \frac{2.\pi.\Delta r_i}{2.\pi.r_i} = \frac{\Delta r_i}{r_i} = \epsilon_{\text{rad}}$$

Pela lei de Hooke  $\epsilon_{\text{circ}} = \frac{\sigma_{\text{circ}}}{E} = \frac{p_i.r_i}{t.E}$

então comparando os valores:  $\frac{\Delta r_i}{r_i} = \frac{p_i.r_i}{t.E} \quad \therefore$

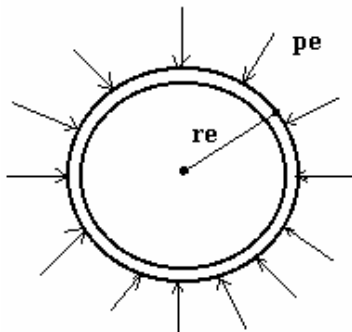
$$\Delta r_i = \frac{p_i.r_i^2}{t.E}$$

**OBS:**

Chegamos aos valores das tensões e deformações circunferenciais tomando como exemplo o caso de tubos sujeitos à pressão interna. Quando estivermos diante de um caso onde atuam pressões externas podemos adaptar o nosso formulário ao invés de deduzirmos de novo, o que seria feito da mesma forma e seria repetitivo.



Podemos citar como exemplo destes casos tubulações submersas que estão sujeitas à pressão do líquido na qual estão submersas (pressão externa).



Podemos notar que sob o efeito de pressões externas o comprimento da circunferência que compõe a seção do tubo diminui ao invés de aumentar e portanto as tensões circunferenciais são de compressão (negativas).

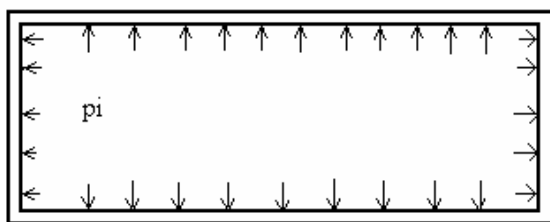
Da mesma maneira o raio da seção diminui e também sua variação é negativa.

O formulário fica:

$$\sigma_{\text{circ}} = - \frac{p_e \cdot r_e}{t} \quad \Delta r_e = - \frac{p_e \cdot r_e^2}{t \cdot E}$$

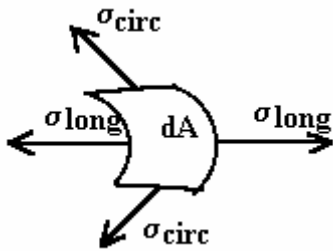
## B. RESERVATÓRIOS CILÍNDRICOS DE PAREDES FINAS

Reservatórios cilíndricos de paredes finas nada mais são do que tubos com as extremidades fechadas.



Podemos notar que a ação da pressão sobre as paredes longitudinais do reservatório exercem o mesmo efeito que nos tubos, e que a ação da pressão nas paredes de fechamento faz com que a tendência do reservatório seja aumentar de comprimento sugerindo o aparecimento de tensões na direção do eixo do reservatório chamadas de tensões longitudinais ( $\sigma_{\text{long}}$ ), que poderíamos calcular fazendo um corte transversal no reservatório e aplicando equações de equilíbrio.

Teríamos se isolássemos um elemento de área da parede do reservatório a seguinte situação:



onde:

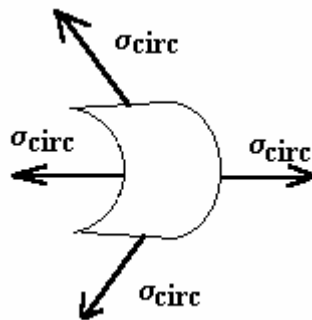
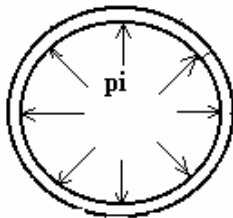
$$\sigma_{\text{circ}} = \frac{p_i \cdot r_i}{t}$$

$$\sigma_{\text{long}} = \frac{p_i \cdot r_i}{2 \cdot t}$$

### C. RESERVATÓRIOS ESFÉRICOS DE PAREDES FINAS

Quando submetido à pressão um reservatório esférico de paredes finas desenvolve tensões circunferenciais em todas as direções, pois todas as direções formam circunferências.

Um elemento de área da parede deste reservatório seria representado:



O valor destas tensões circunferenciais seria:

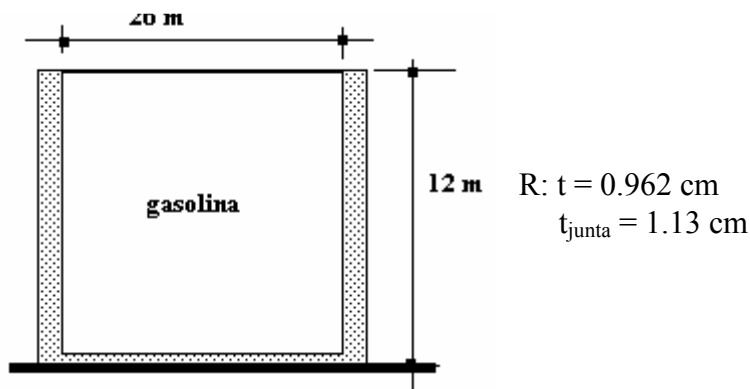
$$\sigma_{\text{circ}} = \frac{p_i \cdot r_i}{2 \cdot t}$$

### EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

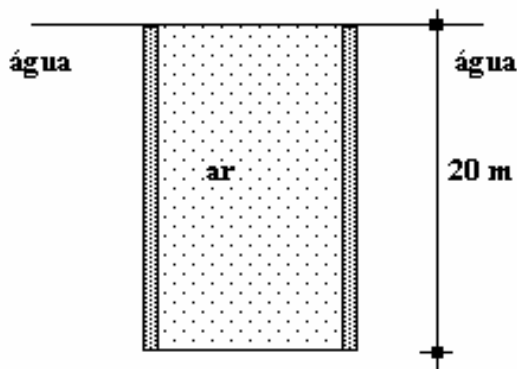
1. O tanque de um compressor de ar é formado por um cilindro fechado nas extremidades por calotas semi-esféricas. O diâmetro interno do cilindro é de 60 cm e a pressão interna de  $35 \text{ kgf/cm}^2$ . Se o material com que é feito o cilindro é de aço com limite de escoamento de  $2.400 \text{ kgf/cm}^2$  e o coeficiente de segurança adotado de 3.5, pede-se determinar a espessura da parede do cilindro desprezando-se os efeitos da ligação do cilindro com as calotas. OBS: num cálculo mais rigoroso seria necessário levar em conta e dimensionar a ligação.

R: 1.53 cm

2. Um tanque cilíndrico de gasolina com eixo vertical está cheio à partir da extremidade inferior com 12 m do líquido, tendo a gasolina peso específico de  $7.4 \text{ kN/m}^3$ . Tendo o tanque 26 m de diâmetro interno e sendo o limite de escoamento do material do tanque 240 MPa, pede-se calcular com segurança 2 a espessura necessária a parede em sua parte mais profunda. Qual seria esta espessura se a eficiência da ligação parede-fundo fosse de 85%?



3. Um tubulão de ar comprimido é constituído por um tubo de aço de 2 m de diâmetro interno e recebe ar injetado para expulsar água à uma profundidade de 20 m. Calcular a espessura necessária à este tubo numa profundidade de 2 m, sendo a tensão de escoamento admissível para o material do tubo de  $6 \text{ kN/cm}^2$ .



## FORMULÁRIO PADRÃO

### INTRODUÇÃO À RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS:

$$\sigma \text{ ou } \tau = \frac{F}{A_{\text{resist}}} \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ (lei de Hooke)} \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{L}$$

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon} = \mu \text{ (lei de Poisson)} \quad \varepsilon_t = \frac{\Delta}{L}$$

### TRAÇÃO OU COMPRESSÃO AXIAL SEM CONSIDERAÇÃO DO PESO PRÓPRIO

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \Delta L = \frac{N.L}{E.A}$$

### PEÇAS E RECIPIENTES DE PAREDES FINAS

#### Tubos cilíndricos

$$\sigma_{\text{circ}} = \frac{p_i.r_i}{t} \quad \Delta r_i = \frac{p_i.r_i^2}{t.E}$$

$$\sigma_{\text{circ}} = -\frac{p_e.r_e}{t} \quad \Delta r_e = -\frac{p_e.r_e^2}{t.E}$$

#### Reservatórios cilíndricos

$$\sigma_{\text{circ}} = \frac{p_i.r_i}{t} \quad \sigma_{\text{long}} = \frac{p_i.r_i}{2.t}$$

#### Reservatórios Esféricos

$$\sigma_{\text{circ}} = \frac{p_i.r_i}{2.t}$$

## CONVERSÃO DE UNIDADES

$$1 \text{ tf} = 10 \text{ kN} = 1.000 \text{ kgf}$$

$$1 \text{ kN} = 100 \text{ kgf} = 0,1 \text{ tf}$$

$$1 \text{ MPa} = 0,1 \text{ kN/cm}^2 = 10 \text{ kgf/cm}^2$$

$$1 \text{ kN/m}^3 = 10^{-6} \text{ kN/cm}^3$$

$$1 \text{ kN/cm}^2 = 100 \text{ kgf/cm}^2 = 10 \text{ MPa}$$

$$1 \text{ kN/cm}^2 = 10^4 \text{ kN/m}^2$$

$$1^\circ = 0,01745 \text{ rad}$$

$$1'' = 2,54 \text{ cm}$$

## BIBLIOGRAFIA

BEER, Ferdinand P, JOHNSTON, E. Russel Jr. Mecânica vetorial para engenheiros, Makron Books do Brasil Editora Ltda. São Paulo. 1991.

MERIAM, J.L. Mecânica- Estática- Editora Reverte S.A.Buenos Aires. 1965

RILEY, William F, STURGES, Leroy D, MORRIS, Don H. Mecânica dos Materiais . Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. Rio de Janeiro. 2003

BEER, Ferdinand P & JOHNSTON, E Russel. Resistência dos Materiais Editora Mc Graw Hill do Brasil. São Paulo.

GOMES, Sérgio C. - Resistência dos Materiais - Livraria Kosmos

NASH, W.A. - Resistência dos Materiais - Editora Mc Graw Hill do Brasil. São Paulo