Sistemas Realimentados - 2023/2

Nome: DIONATAS SANTOS BRITO

Data limite para entrega: 26/9

Trabalho 2 - O método do lugar das raízes

```
I=8; % Seu valor de I
[G1,G3,G4]=ini_t2(I);
datetime('now')
```

```
ans = datetime
   28-Sep-2023 04:47:57
```

Atividade 1: Esboçar o lugar das raízes de $1 + KG_1(s) = 0$ para $K > 0$ e $K < 0$. Desenhe à mão, usando as propriedades de construção do LR, digitalize e insira abaixo a figura de forma bem visível. Incluir no esboço:

```
G1
```

```
G1 =

            8
  ---------------------
  s^3 + 70 s^2 + 1176 s

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

1.1 Raizes para $K = 0$ e $K \longrightarrow \infty$.

Com k = 0, as raizes permanecem iguais ao polo da FT G1:

$$s^3 + 70s^2 + 1176s = 0$$

$$s(s2 + 70s + 1176) = 0$$

$$\frac{-70 \pm \sqrt{702 - 4 * 1 * 1176}}{2 * 1} = 0$$

$$\frac{-70 \pm \sqrt{4900 - 4704}}{2} = 0$$

$$\frac{-70 \pm \sqrt{196}}{2} = 0$$

$$\frac{-70 \pm 14}{2} = 0$$

$$s1 = 0,\ s2 = -42,\ s3 = -28$$

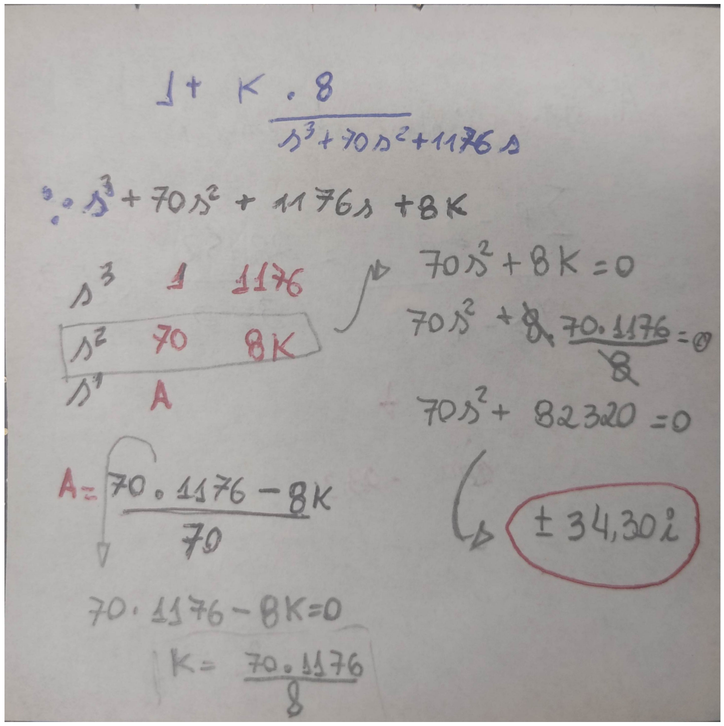
Portanto, as raízes para k = 0 são : 0, -28, 42.

```
%
%Para fins de verificação de cálculo:
k_pole = pole(G1)
```

```
k_pole = 3×1
         0
  -42.0000
  -28.0000
```

1.2 Pontos de passagem no eixo imaginário se houver.

Os pontos de passagem se dá através do método de e Routh-Hurwitz, como podemos observar na imagem, há pontos de passagem no eixo imaginário em +-34i



1.3 As assíntotas e seus ângulos.

O numero de tragetórias é igual ao numero de Polos (3) e a condição de ângulo para K>0 se dá através da seguinte formula:

$\theta = \dfrac{(2 * i + 1) * 180}{n_p - n_z}$, que resultam em $\theta_1 = 60°,\ \theta_2 = 180°\ \ e\ \theta_3 = 300°\ \text{ou} - 60°$

Já para K<0, se utiliza da seguinte formula:

$\theta = \dfrac{(2 * i) * 180}{n_p - n_z}$, que resultam em $\theta_1 = 0°,\ \theta_2 = 60°\ \ e\ \theta_3 = 240°$

Número de Trajetórias LR

=

número de Polos

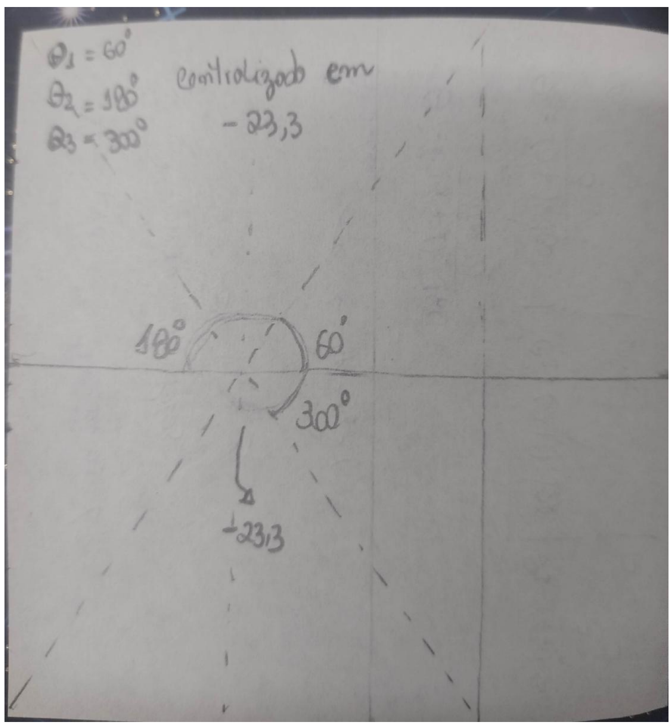
$\Rightarrow n_p = 3$

Ângulos $\rightarrow$ $i = n_p - n_z - 1 = 3 - 0 - 1 = 2$ $\Big\}$ $i = 0, 1, 2$

$$\theta_i = \frac{(2i+1) \cdot 180}{n_p - n_z}$$

$\theta_1 = \frac{(0+1) \cdot 180}{3}$ | $\theta_2 = \frac{(2+1) \cdot 180}{3}$ | $\theta_3 = \frac{(4+1) \cdot 180}{3}$

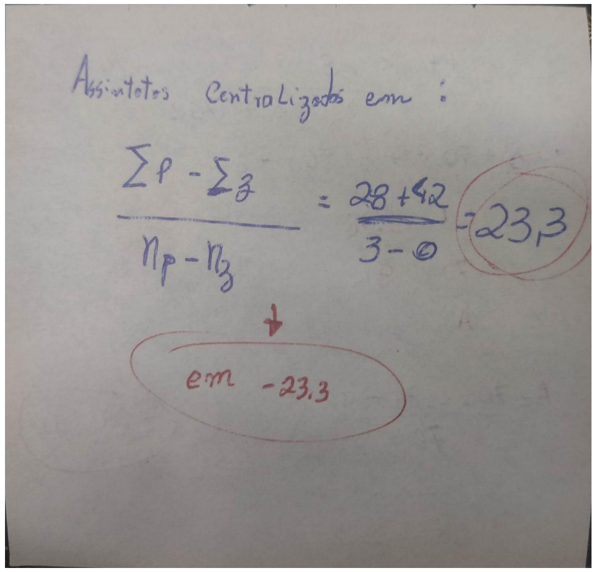
$\theta_1 = 60^\circ$ | $\theta_2 = 180^\circ$ | $\theta_3 = 300^\circ$



1.4 Ponto de interseção das assíntotas

Todas as asssíntotas são centralizadas no ponto -23,3.

Este ponto de interseção é dado por: $\sigma = \frac{\sum \text{polosdeG1}(s) - \sum \text{zerosdeG1}(s)}{n - m}$

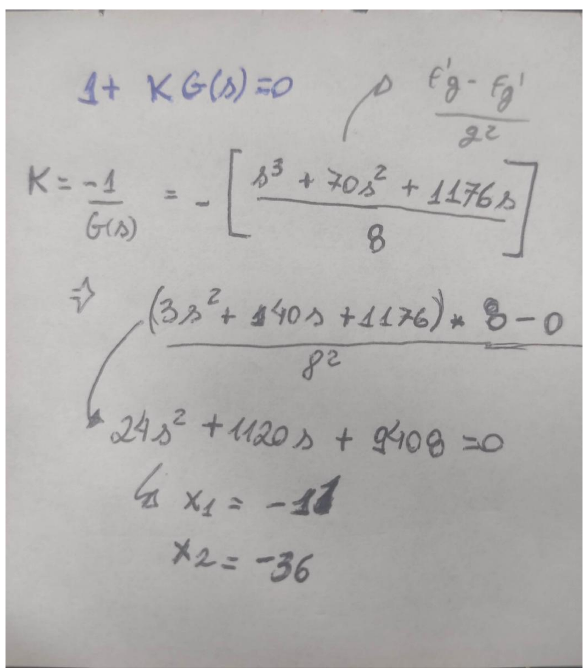


1.5 Localização dos pontos de raízes múltiplas (encontro de polos)

O encontro de polos se dá ao realizar o cálculo abaixo

$$\frac{d\,N(s)}{d\,D(s)} = \frac{N'(s) * D(s) - N(s) * D'(s)}{D(s)^2} = 0$$

Para K > 0, temos o valor de ponto de sele igual a -11 e para K < 0, temos o ponto de sela igual a -36

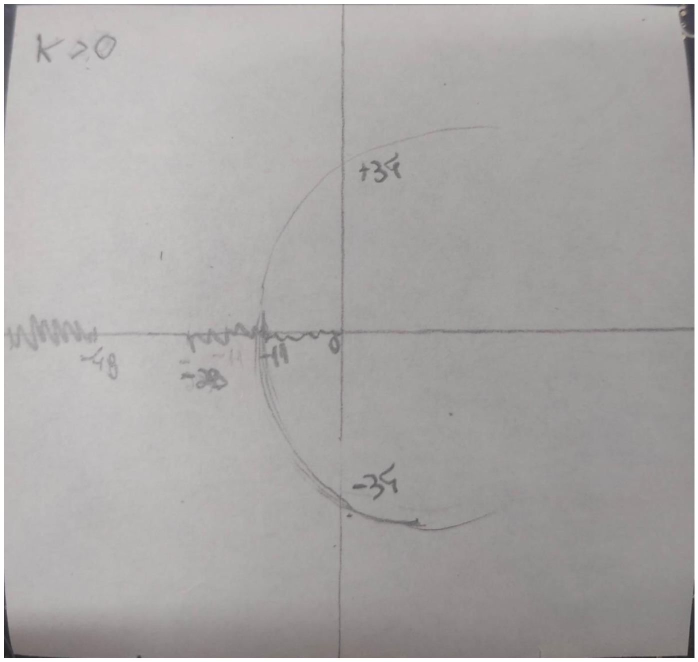


Desenhando o LR

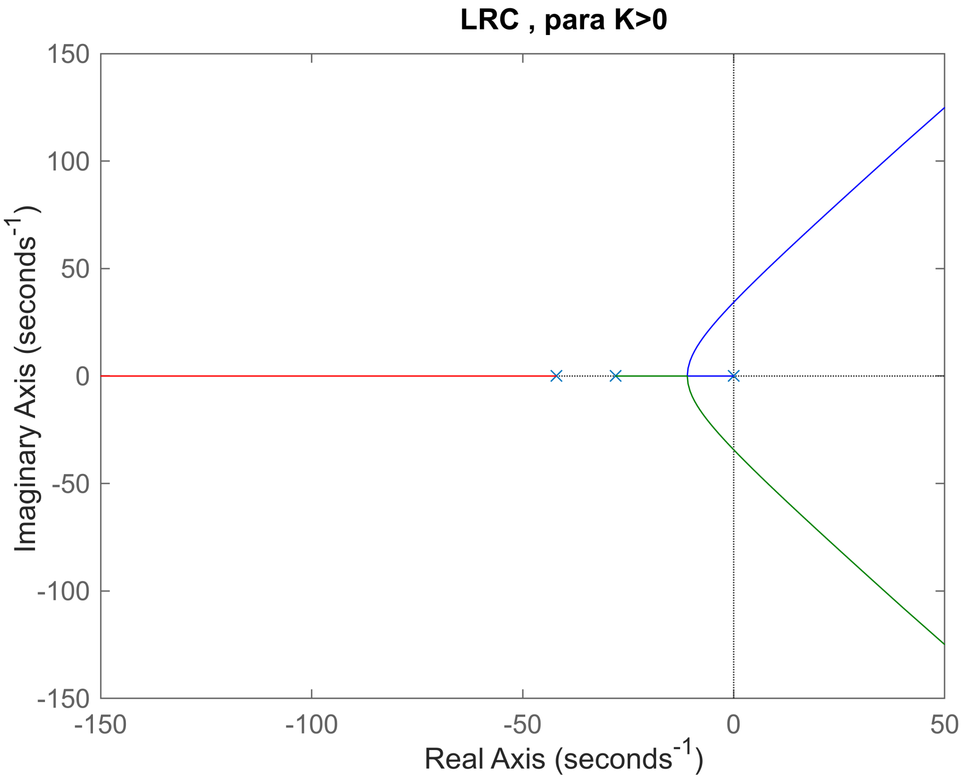
Com base nas questões acima, temos os seguintes LR:

Para K > 0:

- Polos: 0, -28, -42
- Assíntotas e âgulos: 3 assíntotas e 60°, 180° e 300°
- Assíntotas centradas : 23.33
- Ponto de interseção: -11
- Ponto de passagem no eixo jw: +-34

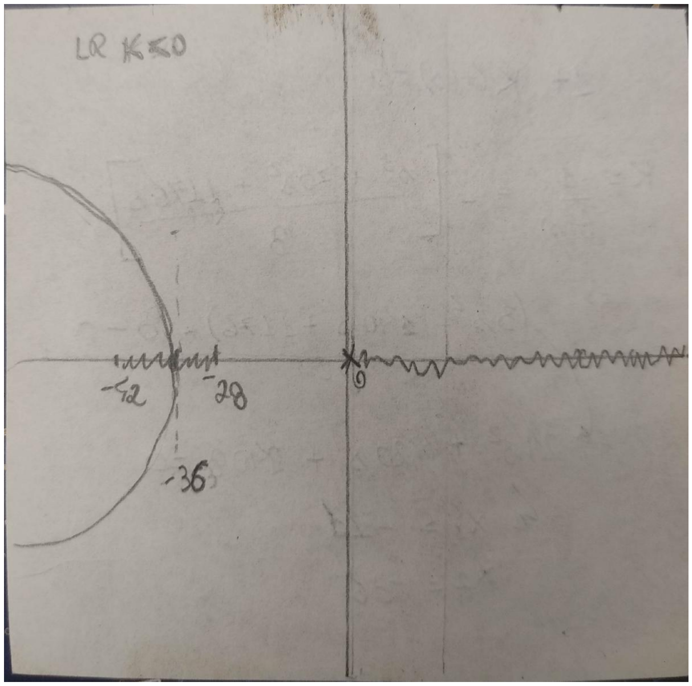



```
%Para fins de verificação de cálculo:
figure;rlocus(G1);title('LRC , para K>0')
```

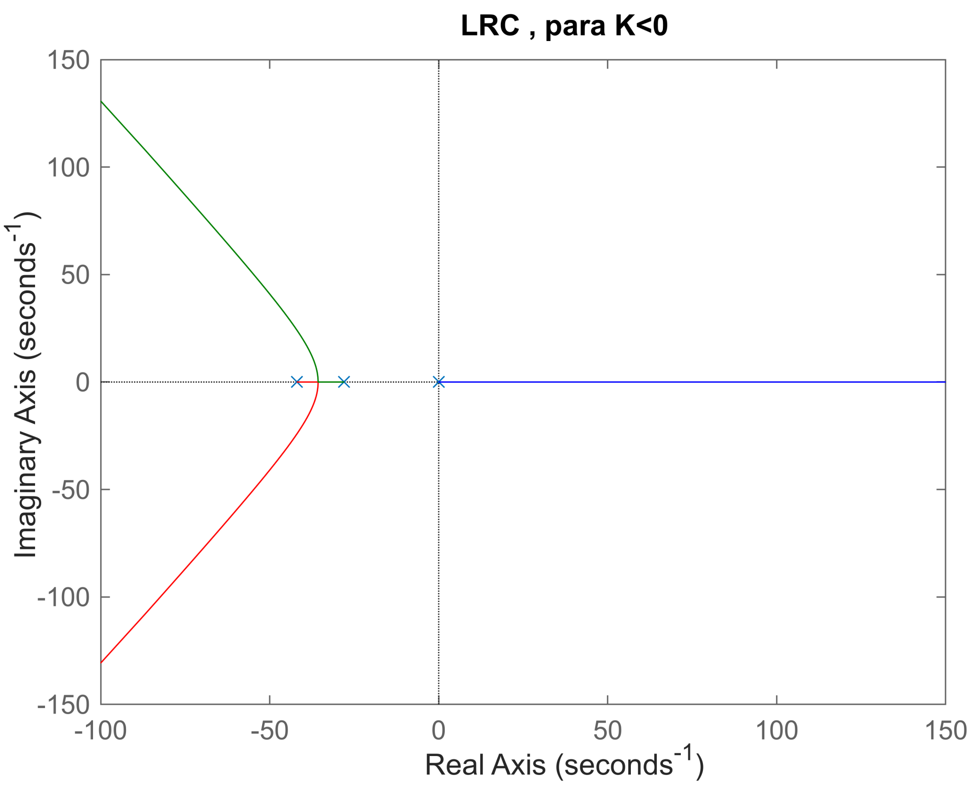


Para K < 0:

- Polos: 0, -28, -42
- Assíntotas e âgulos: 3 assíntotas e 0°, 60° e 240°
- Assíntotas centrada em : 23.33
- Ponto de interseção: -36
- Ponto de passagem no eixo jw: Não possui

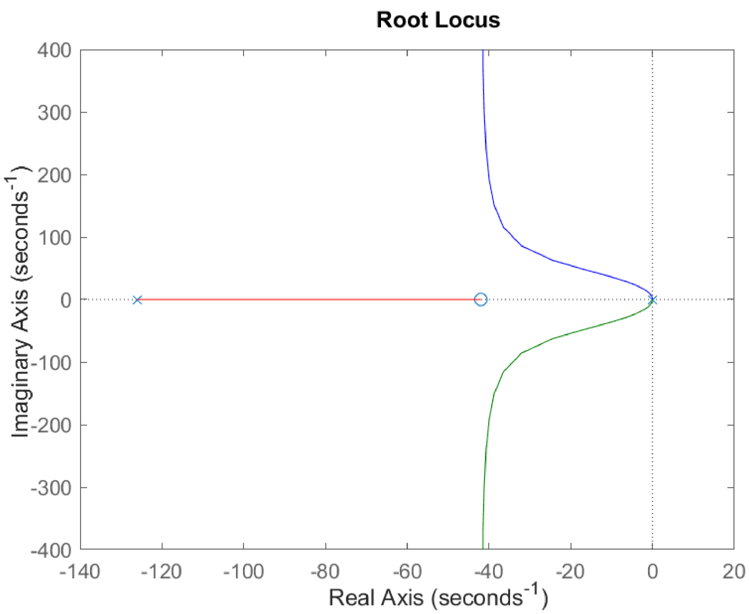



```
%Para fins de verificação de cálculo:
figure;rlocus(-G1);title('LRC , para K<0')
```



Atividade 2: Seja o LR de $1 + KG_2(s) = 0$ mostrado, com G_2 da forma $G_2(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)...}{(s+p_1)(s+p_2)...}$. Responder as perguntas abaixo, obtendo as informações aproximadas da figura:

```
%figura
imshow('fig2.png');
```



2.1 Quais são os polos e zeros de $G_2(s)$?

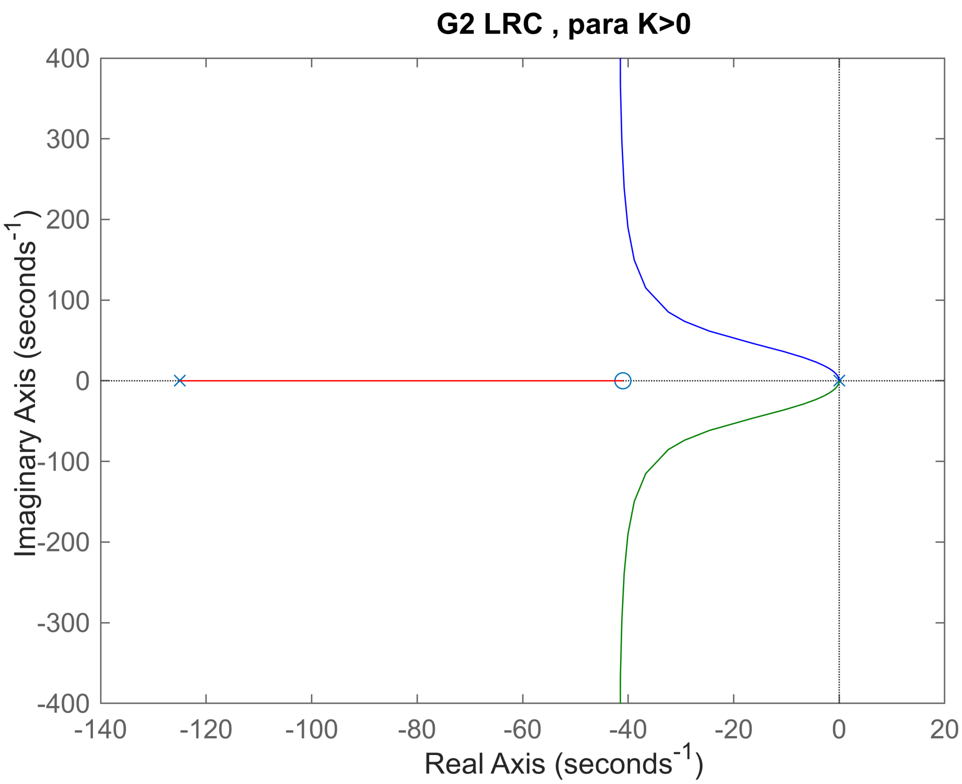
Segundo a figura Root Locus gerada para G2, os polos e zeros são aproximadamente:

$$\text{Polos} : 0, 0, -125$$
$$\text{Zeros} : -41$$

$$G_2(s) = \frac{(s + (-41))}{(s + (0))(s + (0))(s + (-125))}$$

```
s=tf('s');
G2 = (( s + 41)/(s*s*s  +125*s*s));

%Plotando o gráfico com os polos aproximados para fins de comparação:
```

```
figure;rlocus(G2);title('G2 LRC , para K>0')
```



2.2 Quais são as raízes quando $K \longrightarrow 0$ e quando $K \longrightarrow \infty$?

$$s^3 + 125s^2 = 0$$

Para $K \longrightarrow 0$, as raizes permanecem iguais ao polo da FT G1: $s^2 * (s + 125)$

$$s1 = 0, \ s2 = 0, \ s3 = -125$$

Para $K \longrightarrow \infty$, o sistema possui 3 polos e 1 zero, então uma raiz tende ao polo -41 e as outras duas raízes deverão ir na direção das assintotas.

2.3 Para que valores de $K > 0$ e $K < 0$ esse sistema é estável?

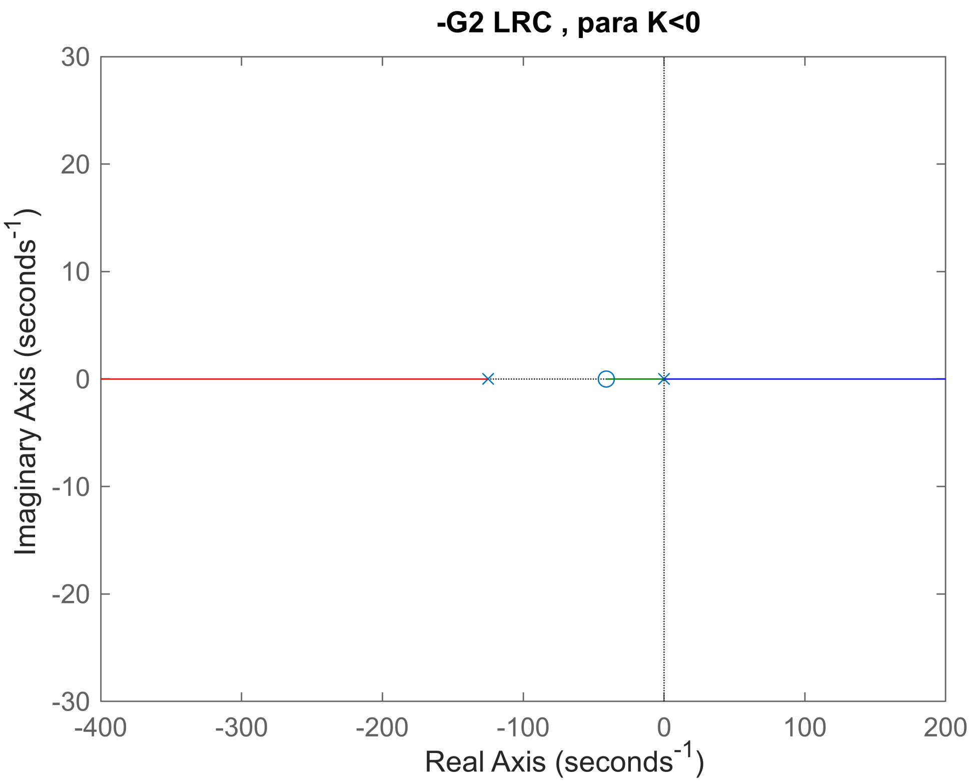
Análise para K > 0:

Iniciando com $K > 0$, devemos calcular através do método de Routh-Hurwitz os pontos em que o LR cruza o eixo imaginário (caso ocorra) para determinar o valor de K exato, entretanto, pelo root locus da função aproximada (questão 2.1) podemos observar que não há pontos de passagem no eixo imaginário, ou seja, o LR sempre irá estar no semi plano esquerdo para qualquer K >0.

Análise para K < 0:

Para K < 0 temos o seguinte comportamento:

```
figure;rlocus(-G2);title(' -G2 LRC , para K<0')
```



Note que agora temos LR no semi plano direito (SPD), então devemos analisar em s=0, ou calcular distâncias destes polos ao ponto:

$$G_2(s) = \frac{(0+(-41))}{(0+(0))(0+(0))(0+(-125))} = \frac{(-41)}{(0)(0)(-125)} = 0$$

Critério de estabilidade:

- Se `K > 0`, então o sistema é estável.
- Se `K = 0`, então o sistema é marginalmente estável.
- Se `K < 0`, então o sistema é instáve

Análise Final:

Tomando oque foi dito como base e o gráfico do rlocus com a equação aproximada, notamos que o ao analisar para K>0, o LR não toca o eixo imaginário e permanece no SPE, e quando olhamos para o comportamento de K<0, notamos que existe um polo no SPD que torna o sistema instável, , e sabendo que quando K = 0 as raízes são os polos da nossa G(s) (como ditona questão 2.2), logo, quando K = 0 ele estará em 0 (sobre o eixo imaginário, logo marginalmente estável) não existindo um K <0 que satisfaça a condição de estabilidade. Sendo assim somente há valores de K > 0 que torna o sistema estável.

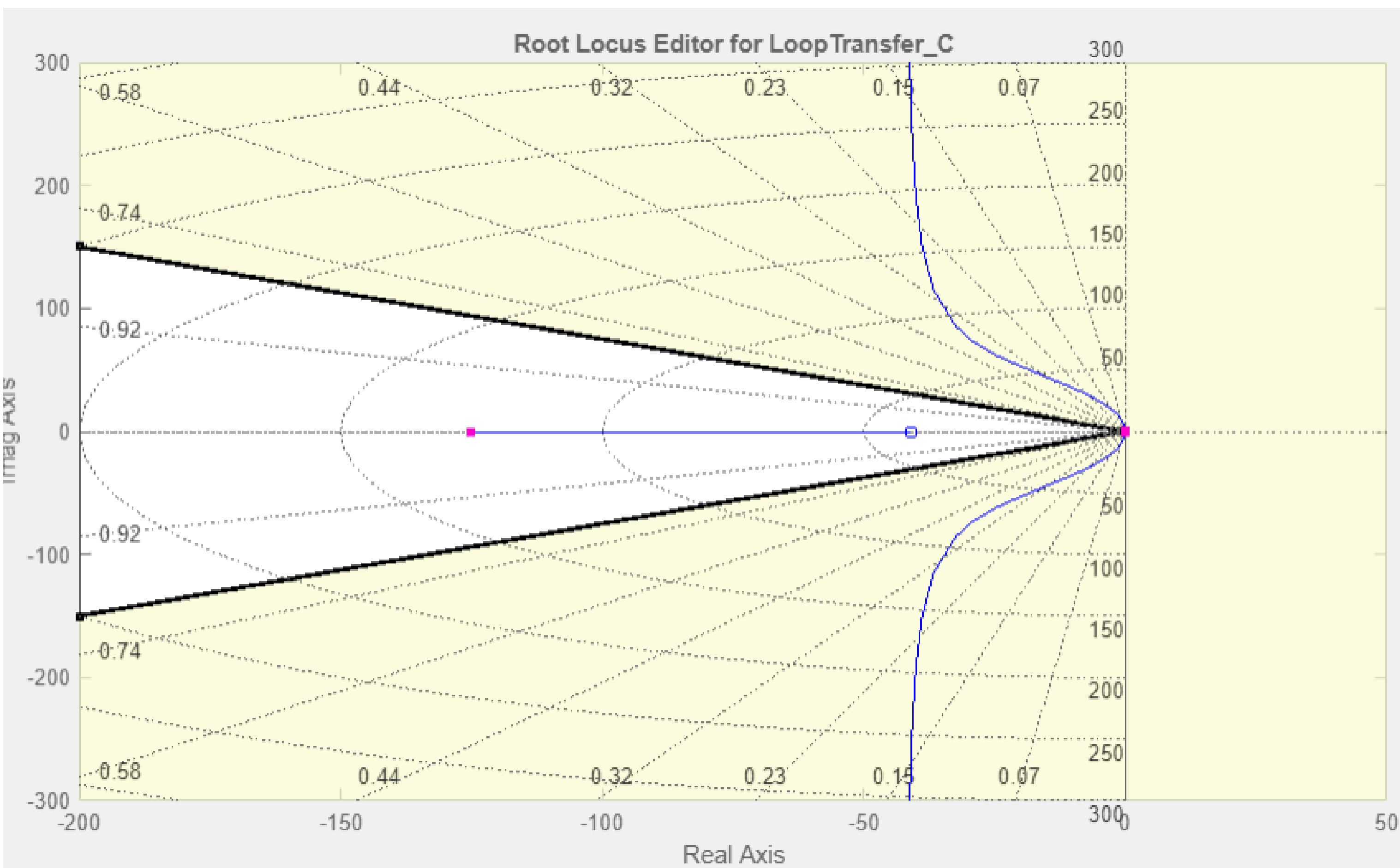
Para um sistema estável basta que K > 0.

2.4 Obtenha os valores de K para os quais o par de polos complexos tem amortecimento $\zeta \geq 0.707$?

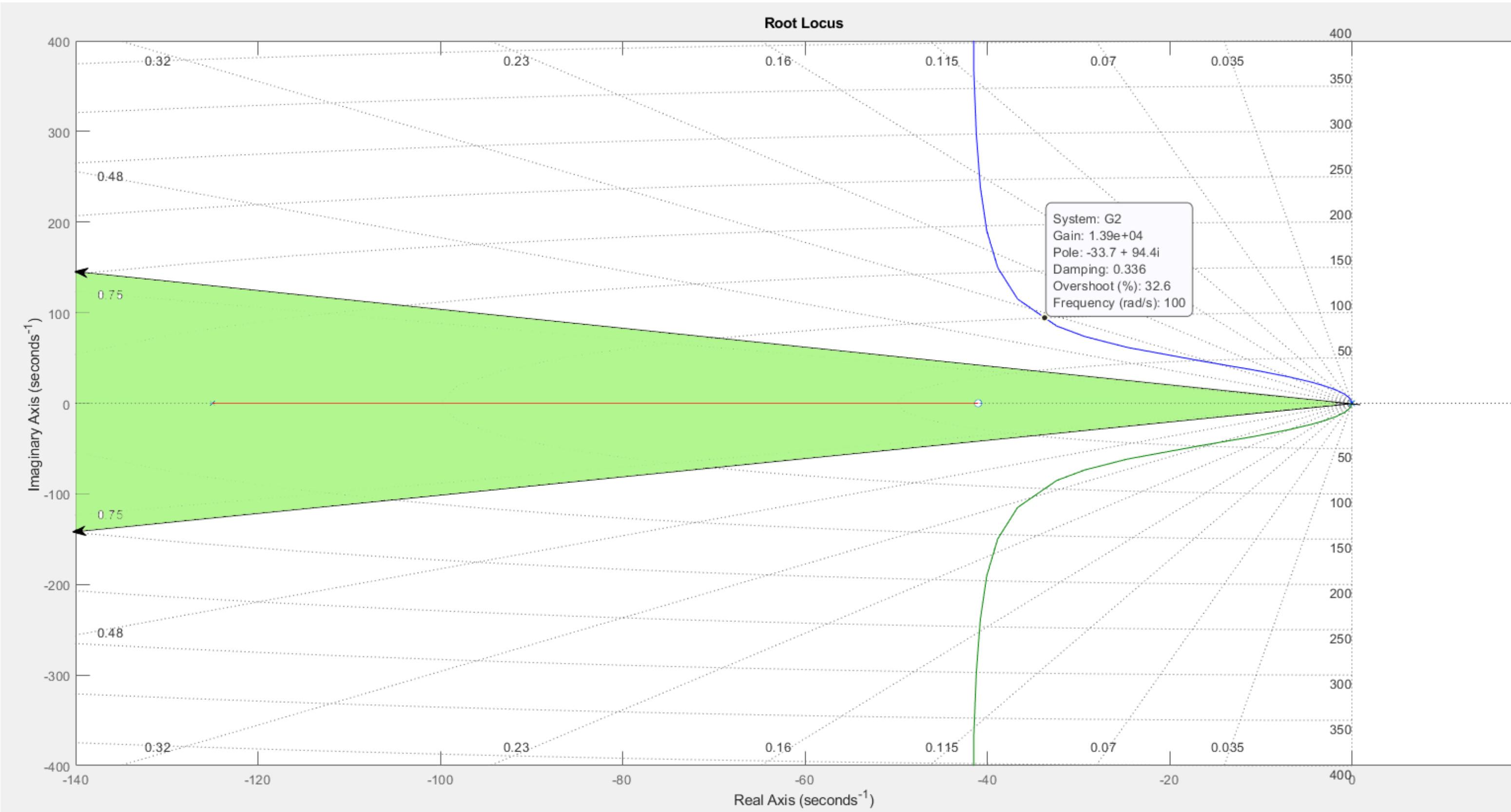
O amortecimento igual a $\zeta \geq 0.707$ implica em um ângulo de 45° graus, assim basta verificar em qual par de polos complexos terá este amortecimento tendo o âgulo como guia.

Para fins de demonstração, utilizarei tanto o rltool quanto o root locus de G2.

Rltool:

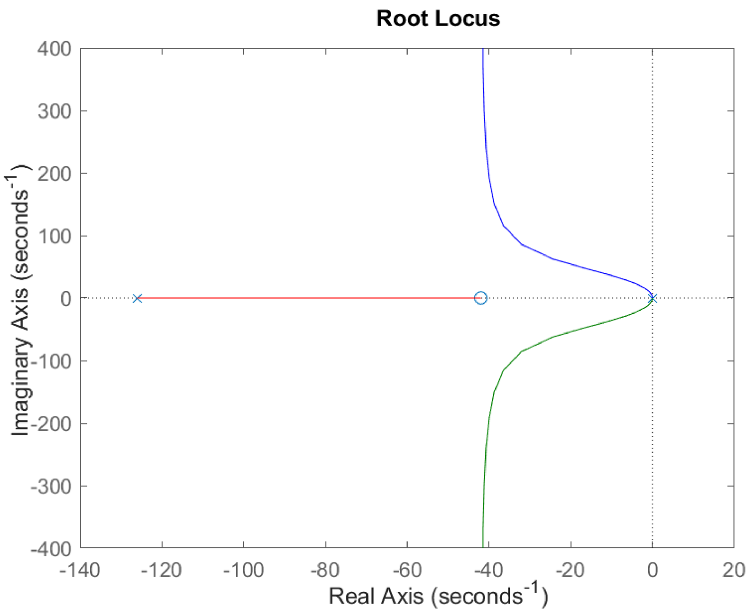


Root Locus:



Podemos verificar que não existe LR dentro do "cone" gerado pelo ângulo de 45°, que toque o $\zeta \geq 0.707$. Portanto não existe valor de K que cumpra o requisito de mortecimento , pois a medida que o o valor de K aumenta, o valor do Damping diminui ao ponto que seu valor máximo seja de aproximadamente 0.336

```
imshow('fig2.png');
```



2.5 Obtenha os valores de K para os quais o tempo de estabelecimento atende $t_s \leq \frac{8}{I}$.

```
ts_max = 8/I
```

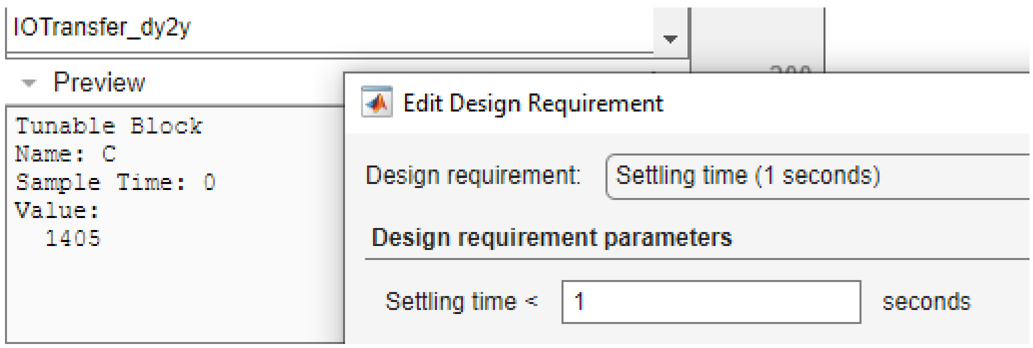
```
ts_max = 1
```

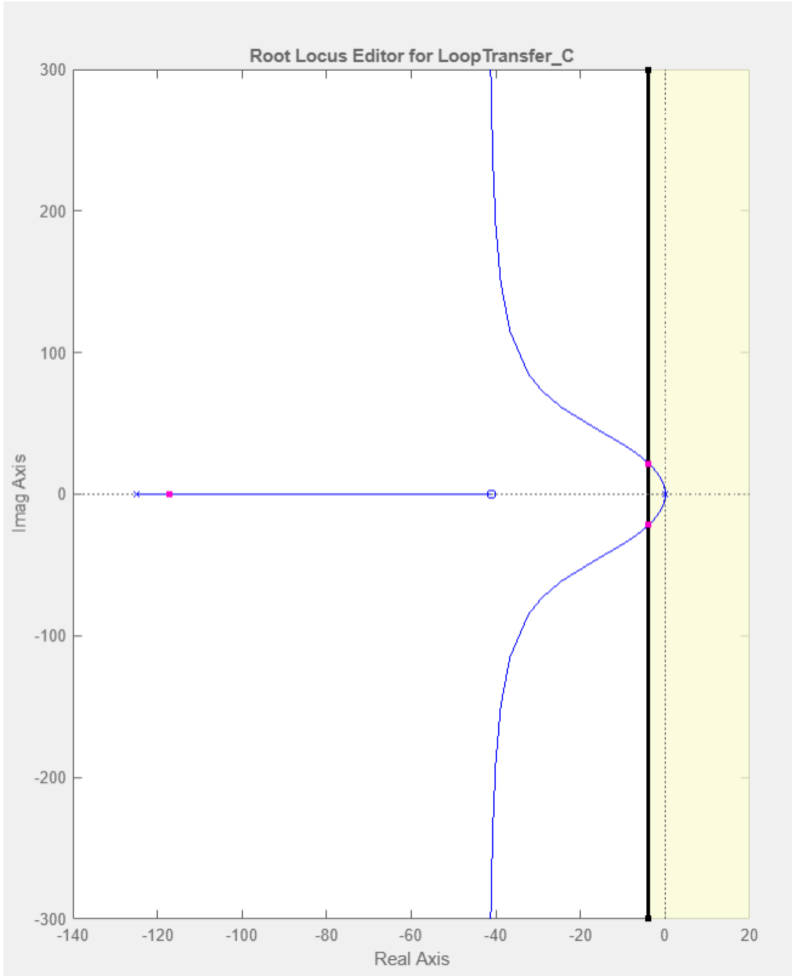
```
ZetaWn=4/ts_max
```

```
ZetaWn = 4
```

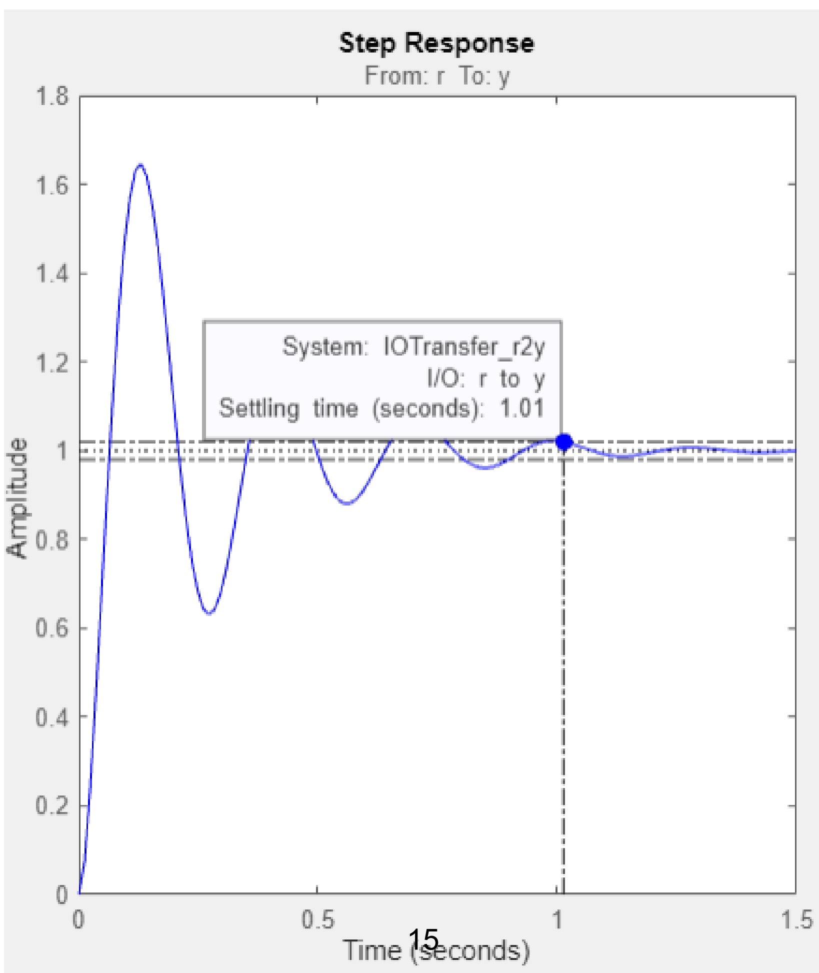
$\zeta\omega_{n=\frac{4}{ts_{max}}} \Rightarrow \quad x<-4$ ~ Parte real do polo deve ser menor que -4

Realizando algumas simulações:

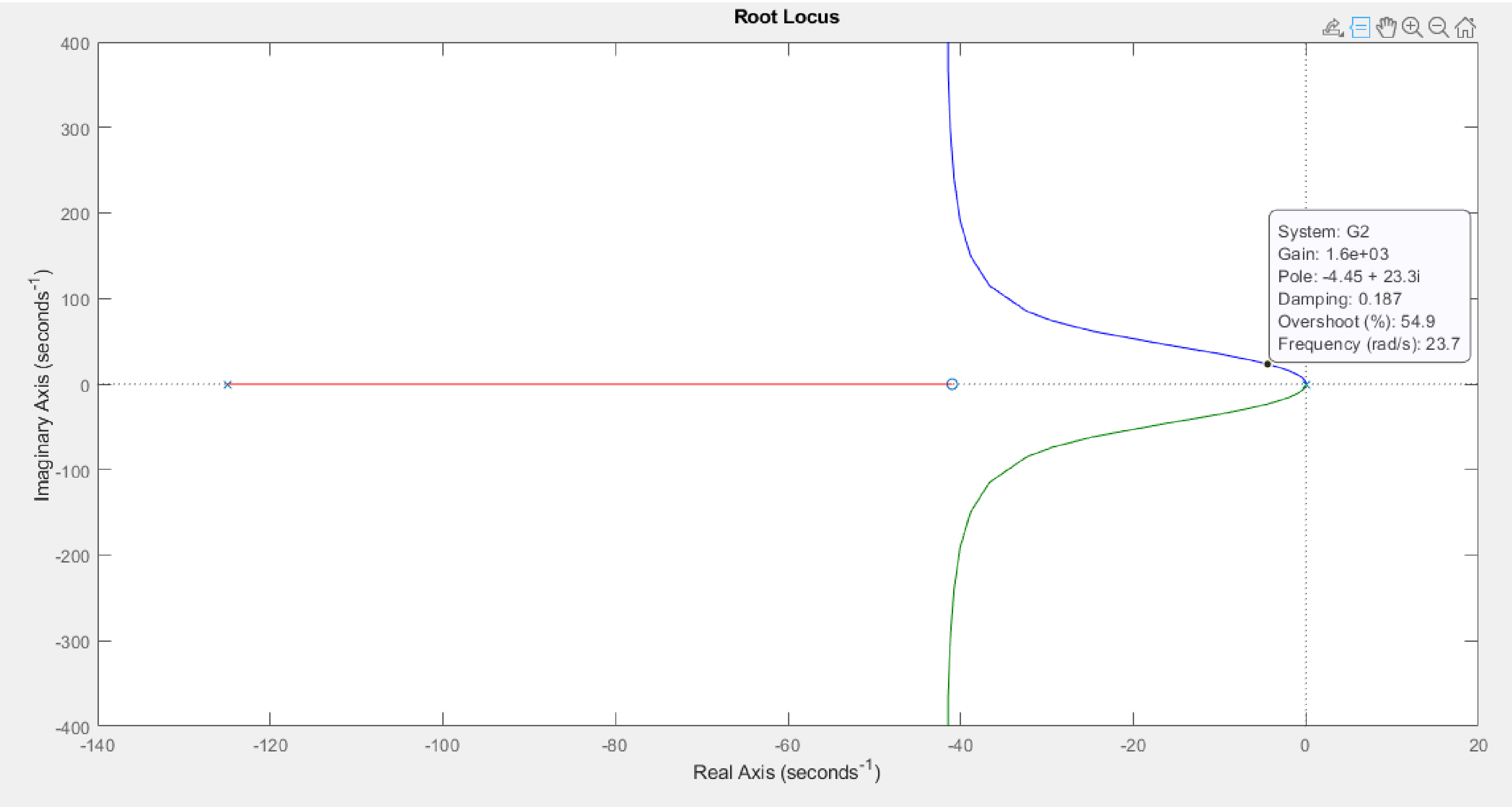




Root Locus Editor for LoopTransfer_C
Imag Axis
Real Axis
300
200
100
0
-100
-200
-300
-140
-120
-100
-80
-60
-40
-20
0
20



Step Response
From: r To: y
System: IOTransfer_r2y
I/O: r to y
Settling time (seconds): 1.01
Amplitude
Time (seconds)
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5



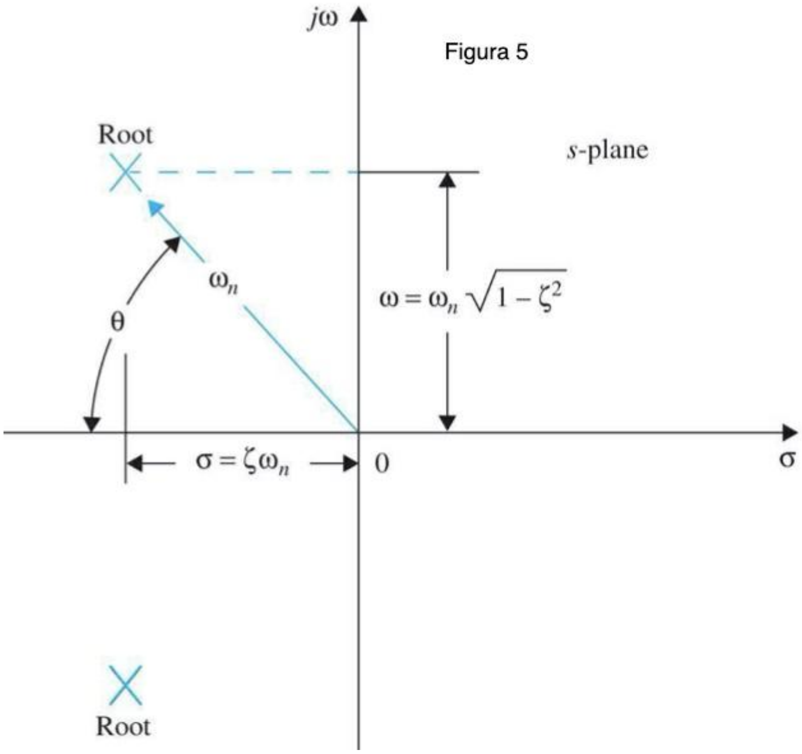
Análise:

Partindo do comando rltool(G2) com o tempo de estabelecimento igual menor que 1 segundo, temos um ganho K próximo a 1405 e com o rlocus(G2) , como ele é menos preciso que o rltool, obtive polo igual a -4.45 + 23i com um ganho próximo a 1600.

Esses resultados simulados são proximos ao $\zeta\omega_{n=\frac{4}{ts_{max}}}$ calculado, portanto, os valores de K para os quais o tempo de estabelecimento atende $t_s \leq \frac{8}{I}$ são $K \geq 1405$ com a parte real menor que - 4 e com um $t_s = 1s$

Atividade 3: Seja a FT de primeira ordem com tempo morto $G_3(s)$. Discretize esta FT obtendo $G_3(z)$ com tempo de amostragem igual a 1/5 do tempo morto, faça o LR discreto e responda as perguntas abaixo:

Lembrando: $\zeta = \cos\theta$, $\text{ts} = \frac{4}{\zeta\omega_n}, \; 0 < \zeta < 0.9.$



3.1 Identifique os polos e zeros de $G_3(z)$**.**

```
%G3 normal
G3
```

```
G3 =

                  9
  exp(-7*s) * --------
              28 s + 1

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
%tempo amostragem 1/5 * tempo morto
G3_DEAD_TIME=7;

t3_amost = 1/5 * 7
```

```
t3_amost = 1.4000
```

```
%G3 discretizada
G3_D = c2d(G3,t3_amost)
```

```
G3_D =

             0.4389
  z^(-5) * ----------
           z - 0.9512

Sample time: 1.4 seconds
```

```
Discrete-time transfer function.
Model Properties
```

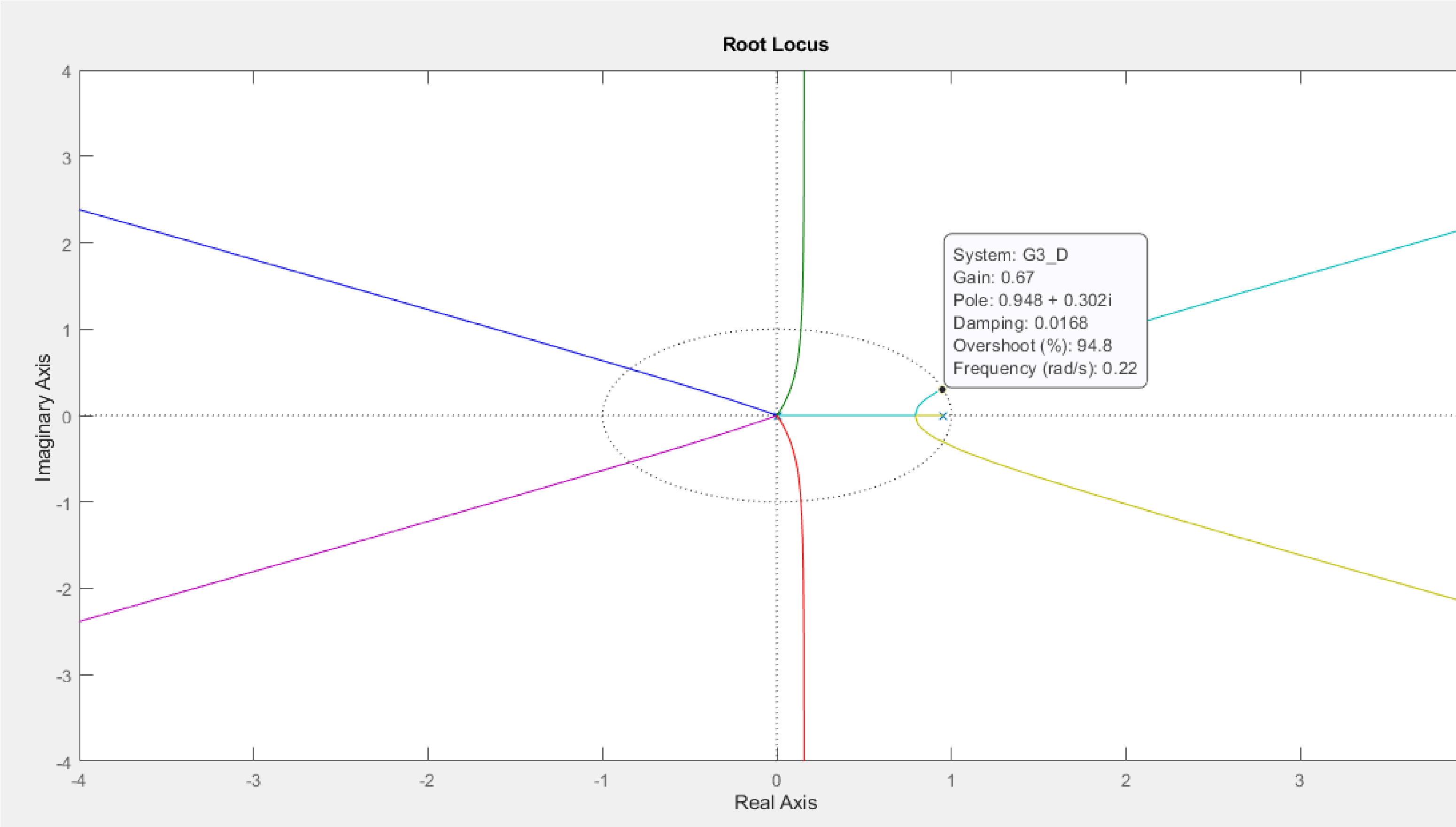
Após a discretização, temos um polo igual a:

```
G3_pole=pole(G3_D)
```

```
G3_pole = 0.9512
```

3.2 Obtenha todos os valores de $K \in [-\infty, \infty]$ para os quais este sistema é estável.

Para fins de análise, utilizarei o rlocus para gerar o LR do círculo unitário:



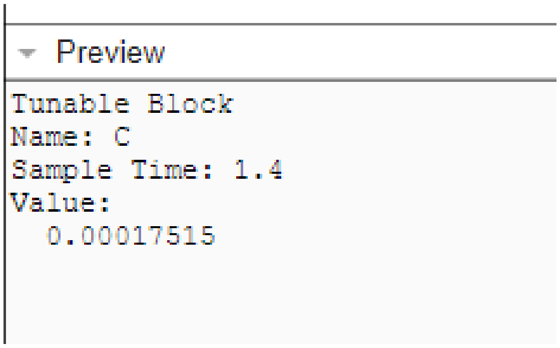
Para garantir a estabilidade o valor de K tem que ser referente a um valor de polo que está contido pelo circulo unitário e caso tenha algum polo fora desse circulo, o sistema é instável. Dito isso, o único valor de K máximo que satisfaz essa condição é o 0.67.

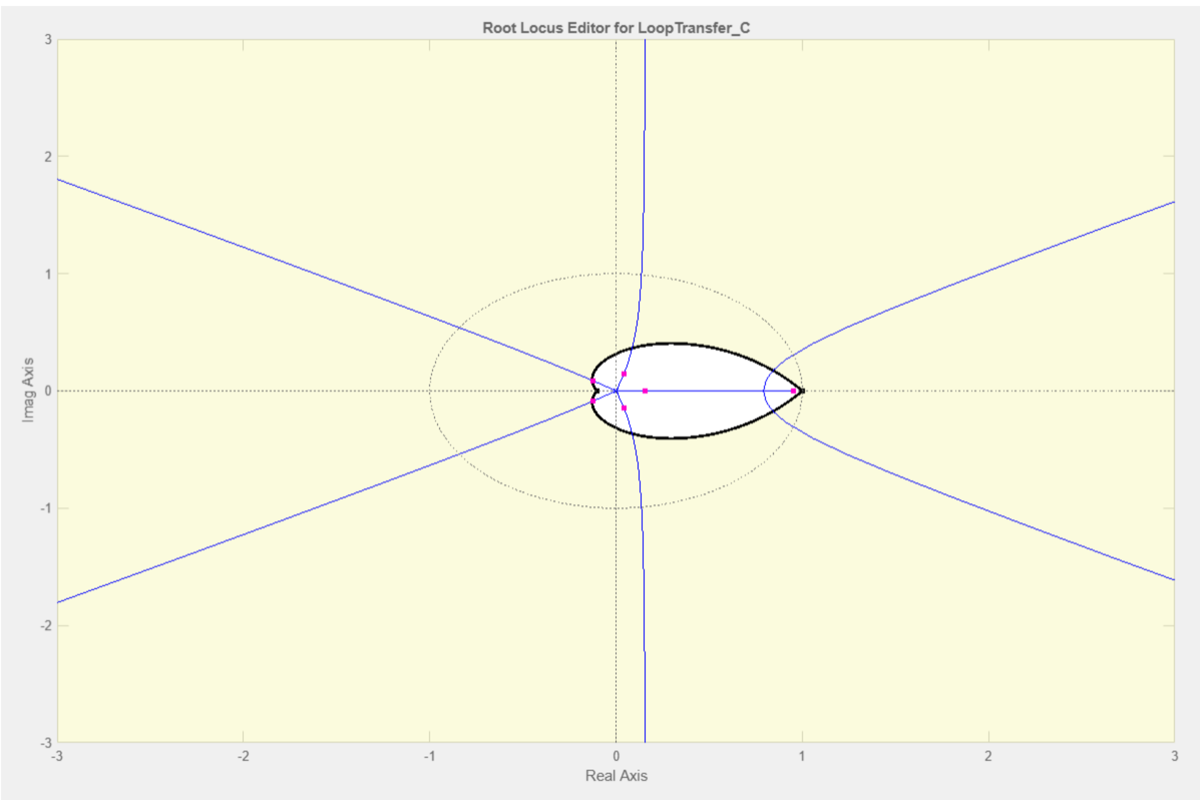
Concluindo, para garantir a estabilidade o valor de K deve ser menor ou igual a 0.67 e maior que zero :
$0 < K \leq 6.7$

3.3 Para que valores de K tem-se $UP \leq 10\%$?

Utilizando o rltool, foi encontrado os valores de K que atende a especificação de $UP \leq 10\%$, sendo ele maior que zero e menor igual a 0.00017515: $0 < K \leq 0.00017515$

Isso se **da por conta dos polos dominantes estarem mais próximo da origem causando maior sobreelevalçao.**

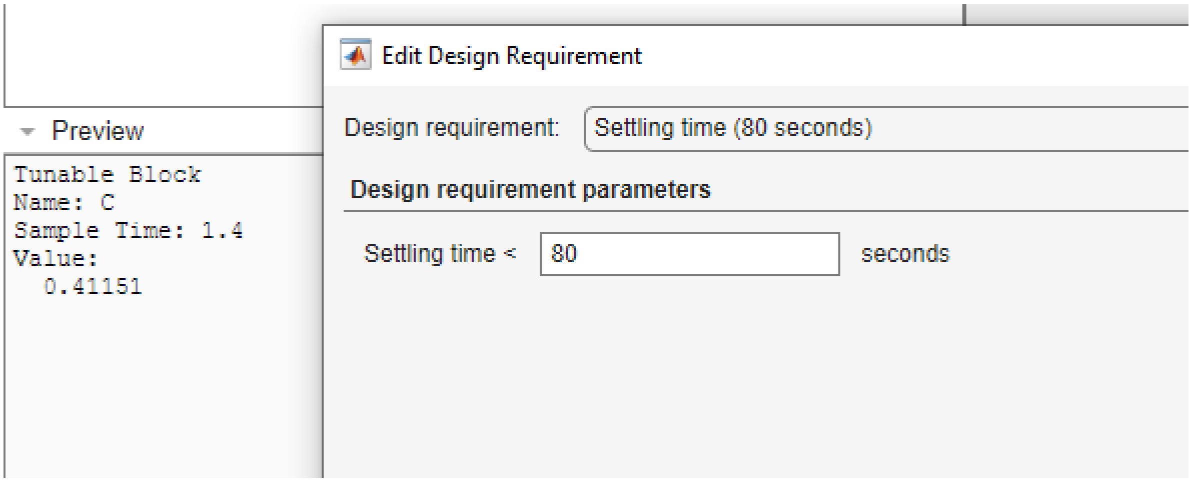


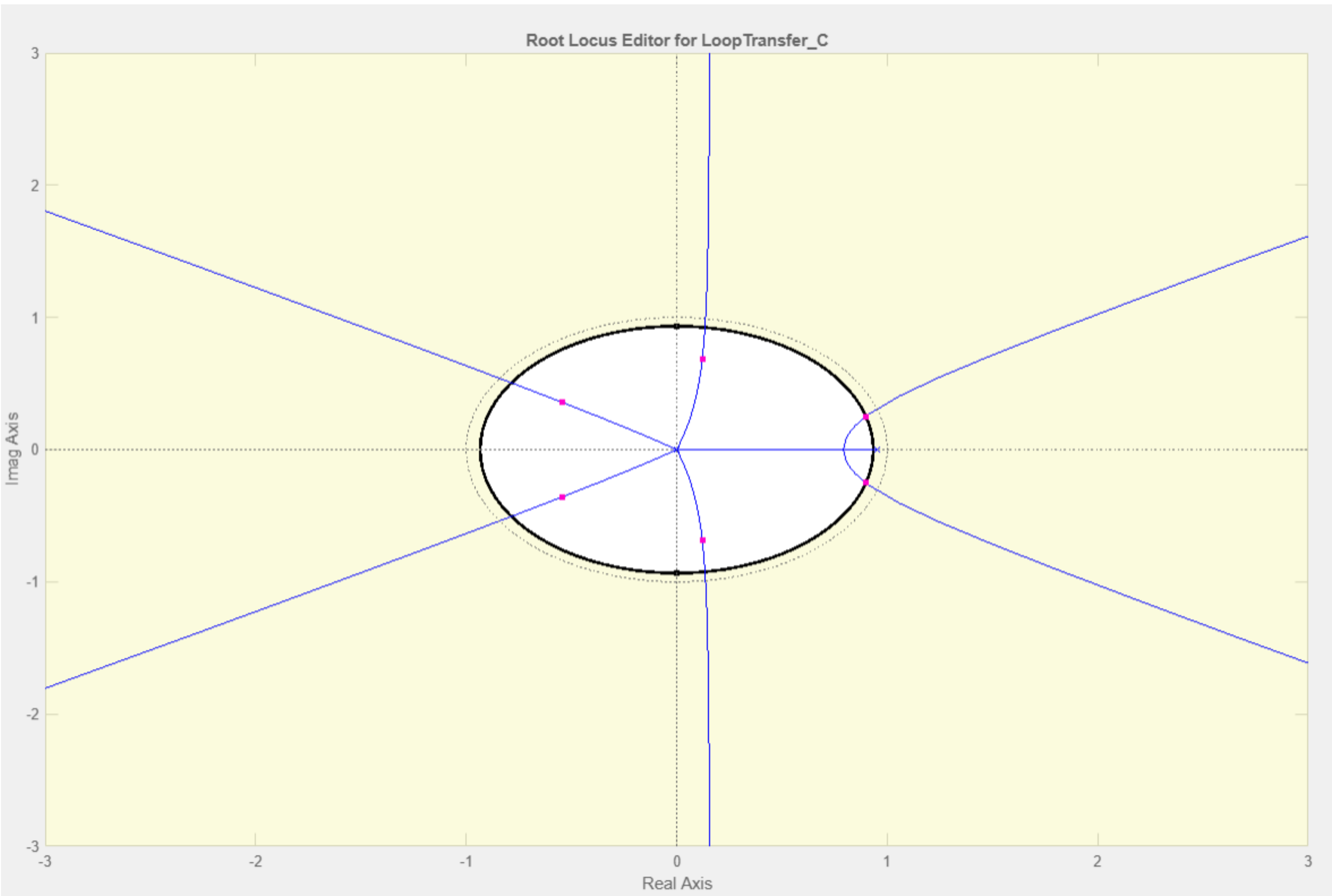


3.4 Verifique se existem valores de K para os quais $t_s \leq 10I$ s.

```
ts_g3 = 10*I
```

```
ts_g3 = 80
```

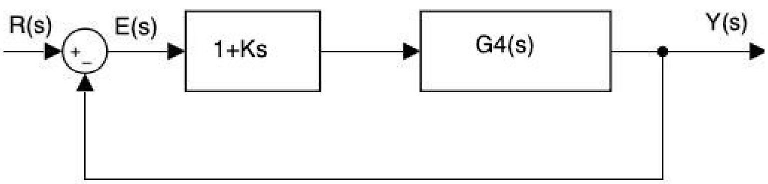




Análise:

Análise: A partir dos resultados obtidos na figura gerada pelo rltool, podemos identificar valores de *K* que satisfazem a condição de *Ts*�. Para o meu caso, *Ts*� é de 80 segundos. Dentro desse intervalo, os ganhos *K* devem ser escolhidos de forma que estejam entre zero e 0.41151. Isso garante que extista um determinado ganho K que esteja dentro do tempo de estabilização e seja menor do que 80 segundos; $0 < K \leq 0.41151$

Atividade 4: Seja o diagrama de blocos mostrado.



6.1 Faça o LR e explique o efeito de K sobre os polos de malha fechada.

Para utilizar as regras do LR, o problema deve estar escrito na forma $1 + \mathrm{KG1}\left(s\right) = 1 + K * \frac{N(s)}{D(s)} = 0$, sendo assim:

$$1 + \ (1 + Ks) * \mathrm{G4} = 0$$

$$1 + \left(1 + Ks\right) * \frac{400}{s^4 + 28s^3 + 294s^2 + 1372s + 2401} = 0$$

$$1 + K * \frac{400s}{s^4 + 28s^3 + 294s^2 + 1372s + 2802} = 0$$

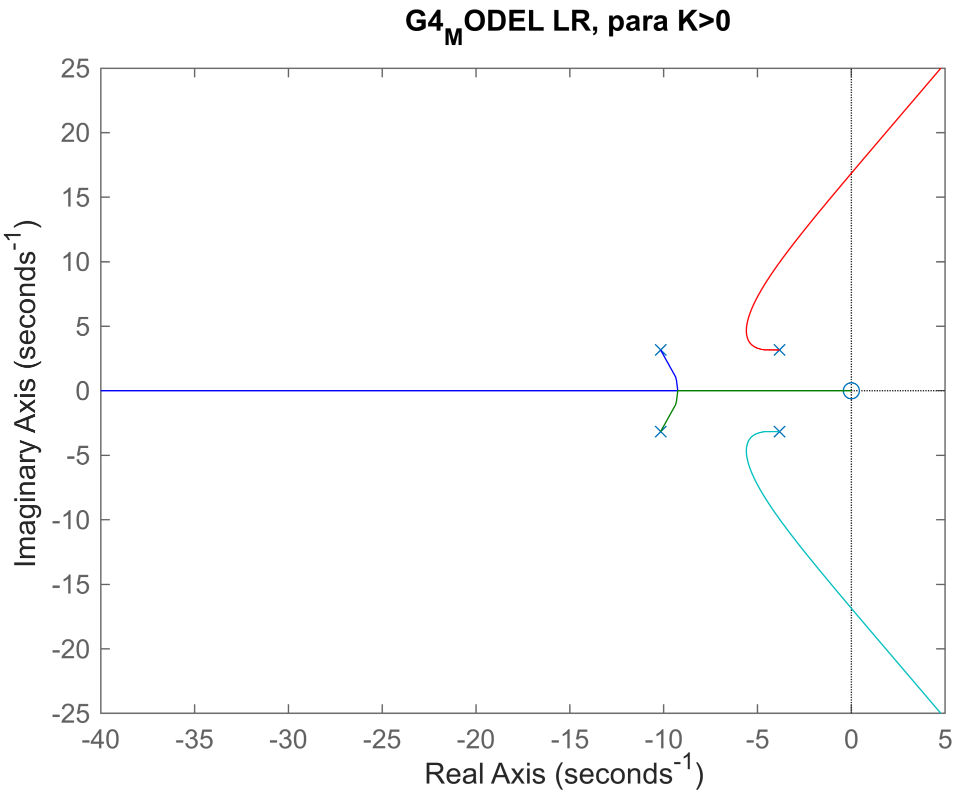
```
s=tf('s');
G4_MODEL = 400*s/(s^4+28*s^3+294*s^2+1372*s +2802)
```

```
G4_MODEL =

                  400 s
  --------------------------------------
  s^4 + 28 s^3 + 294 s^2 + 1372 s + 2802

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

```
%encontrando os polos
G4_MODEL_POLE = pole(G4_MODEL)
```

```
G4_MODEL_POLE = 4×1 complex
 -10.1643 + 3.1643i
 -10.1643 - 3.1643i
  -3.8357 + 3.1643i
  -3.8357 - 3.1643i
```

```
%fazendo o LR com o rlocus
figure;rlocus(G4_MODEL);title(' G4_MODEL LR, para K>0')
```



Utilizando o rltool obtive as seguintes situações:

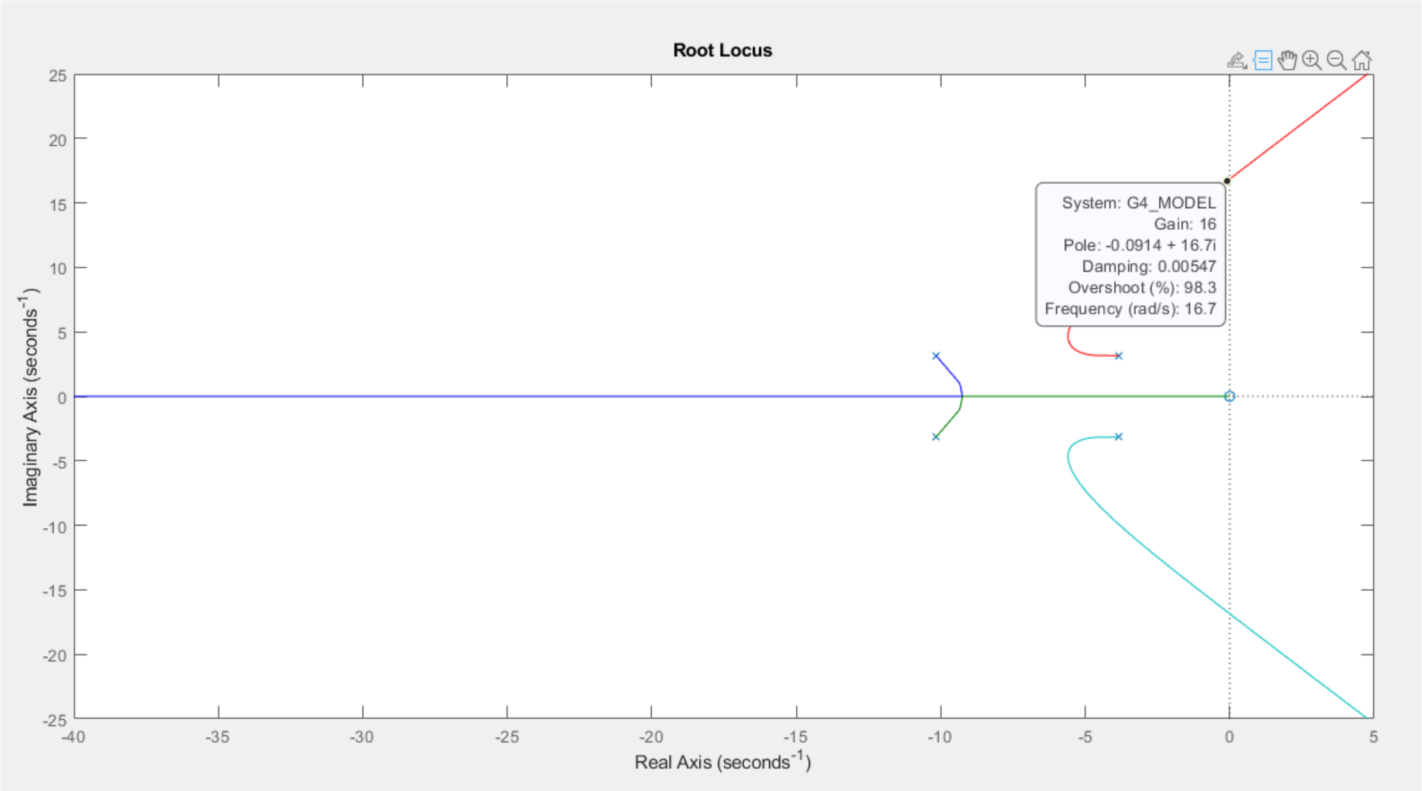
Aumento de *K*: mover polos no sentido do LR aumentando o valor de K faz deslocar os polos em direção ao ponto de origem. Isso resulta em uma resposta mais rápida do sistema, ou seja, os polos se deslocam para a esquerda, o que diminui os tempos de resposta do sistema (tempo de subida, tempo de acomodação, etc.). No entanto, um aumento excessivo de *K* pode levar o sistema à instabilidade.

Diminuição de *K*: reduzir o ganho *K* tem o efeito oposto, movendo os polos para a direita resulta em uma resposta mais lenta do sistema, aumentando os tempos de resposta. Pode também tornar o sistema mais estável e menos propenso a oscilações.

Tendo em vista os efeitos, dependendo do valor de K ao ser aumentado pode vir aumentar o overshoot e as oscilações no sistema, pois pode ocorrer situações em que os polos se aproximam do eixo imaginário ou até mesmo cruzarem para o lado direito.

6.2 Obtenha os valores de $K > 0$ para os quais o sistema é estável.

Utilizando o root locus obtive a seguinte resposta:

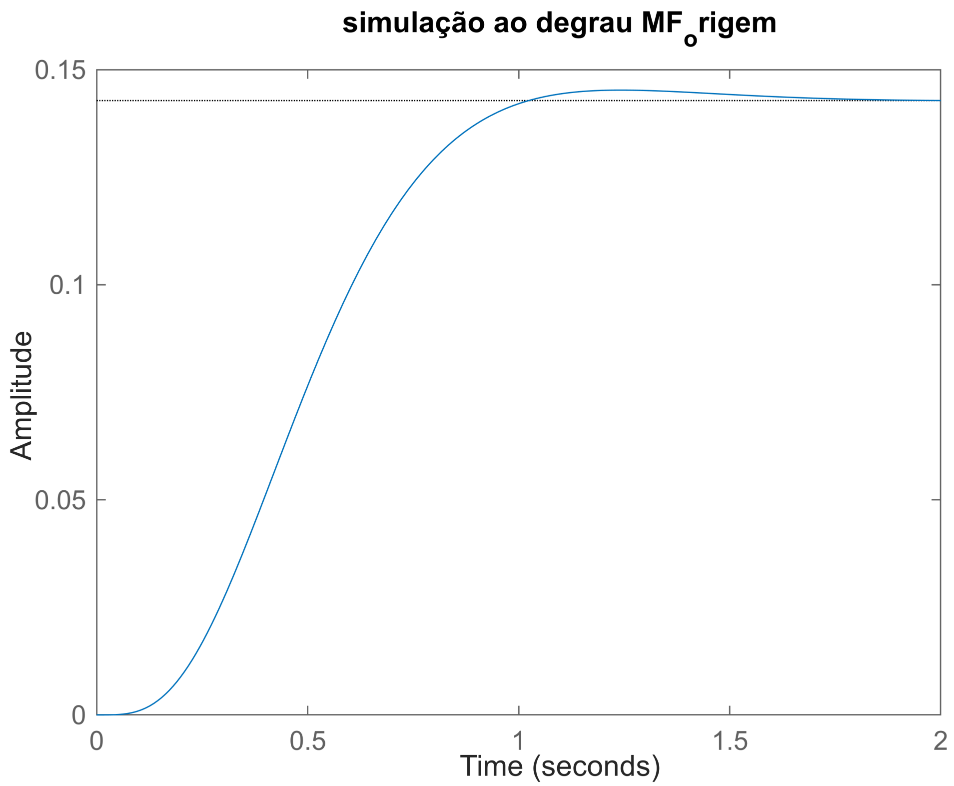


A partir da análise do gráfico, concluí que o sistema é estável para valores de *K* que estejam dentro do intervalo 0<<160<*K*<16. Isso se deve ao fato de que, para K>16, o sistema tende ao semiplano direito e isso o torna instável, ou seja, os valores de $K > 0$ para os quais o sistema é estável são os valores entre 0 e 16. Sendo assim, $0 < K \leq 16$

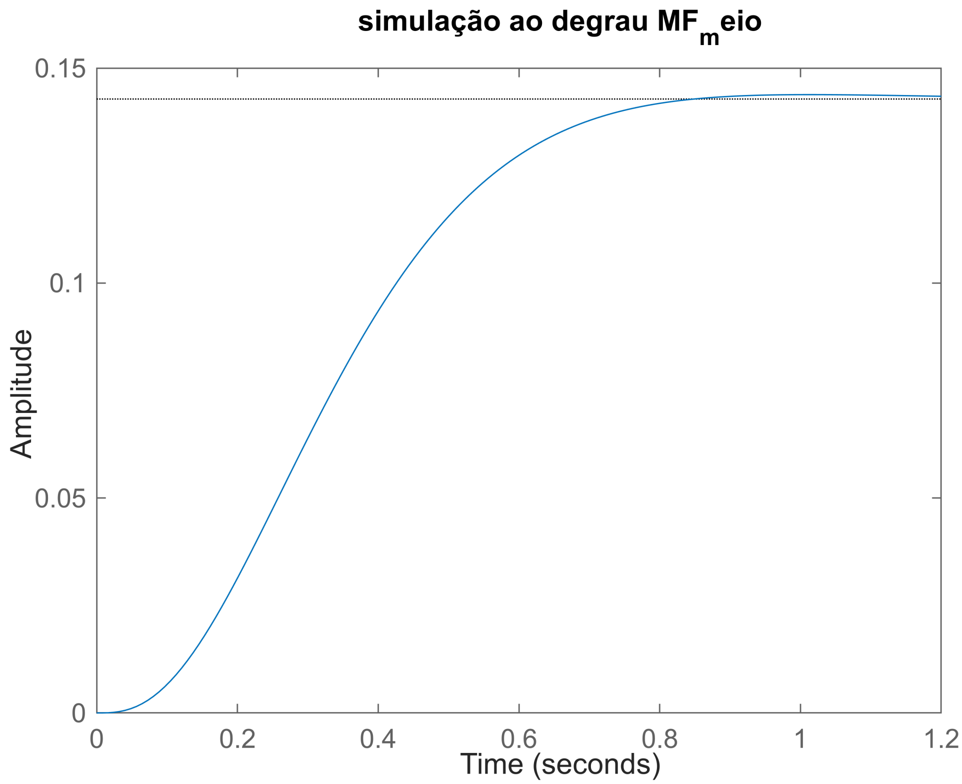
6.3 Obtenha um valor de K tal que $UP \leq 10\%$ e o tempo de estabelecimento seja o menor possível. Faça uma simulação ao degrau comprovando.

```
%mostrando o efeito de escolha a um K próximo a origem
K_origem= 0.00010511;
Ks_origem= 1 +K_origem*s;
MF_origem=feedback(Ks_origem* G4,1);
o=stepinfo(MF_origem);


%mostrando o efeito de escolha a um K sendo ts menor possivel
K_meio = 0.17127;
Ks_meio= 1 +K_meio*s;
MF_meio=feedback(Ks_meio* G4,1);
me=stepinfo(MF_meio);

%mostrando o efeito de escolha a um K nos 10%
K_max = 0.34770;
Ks_max= 1 +K_max*s;
```

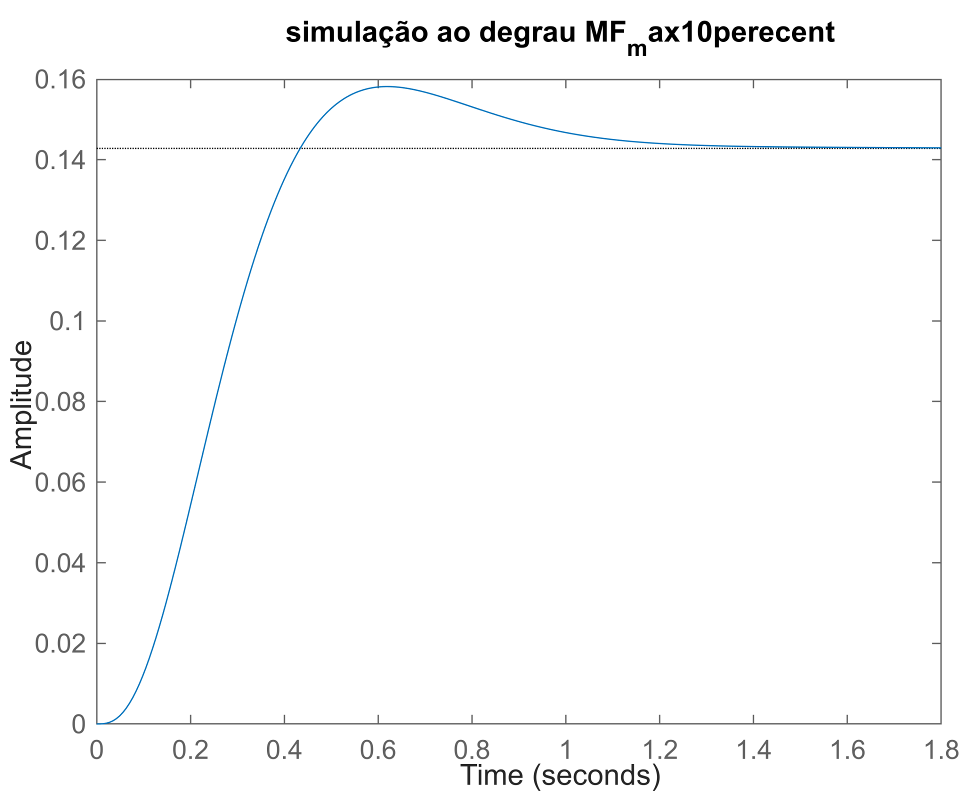
```
MF_max10perecent=feedback(Ks_max* G4,1);
ma=stepinfo(MF_max10perecent);

figure;step(MF_origem);title('simulação ao degrau MF_origem')
```




```
figure;step(MF_meio);title('simulação ao degrau MF_meio')
```




```
figure;step(MF_max10perecent);title('simulação ao degrau MF_max10perecent')
```



```
%Para fins de comparação:
%sobreelevação
UP_origem = o.Overshoot
```

```
UP_origem = 1.7044
```

```
UP_meio = me.Overshoot
```

```
UP_meio = 0.7156
```

```
UP_max = ma.Overshoot
```

```
UP_max = 10.7425
```

```
%tempo de estabelecimento
Ts_origem= o.SettlingTime
```

```
Ts_origem = 0.9468
```

```
Ts_meio= me.SettlingTime
```

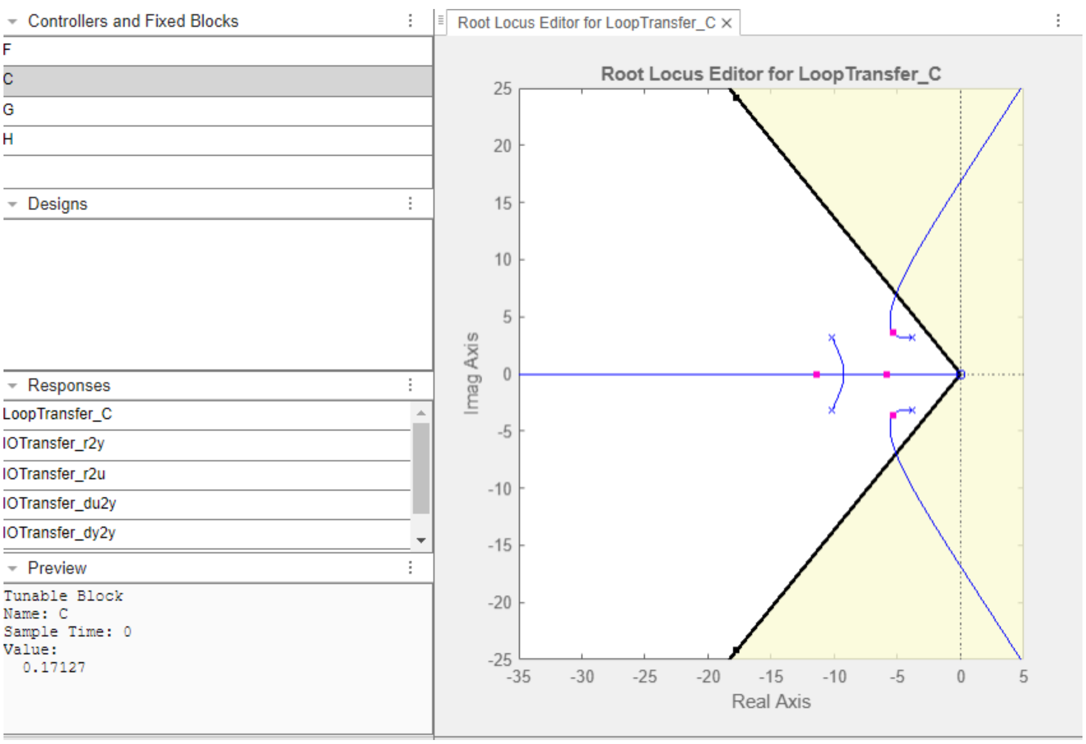
```
Ts_meio = 0.7439
```

```
Ts_max= ma.SettlingTime
```

```
Ts_max = 1.0553
```

Análise:

K = 0.17127 tal que $UP \leq 10\%$, com ts = 0.7439 s



Para fins de comparação eu plotei o step dos extremos e da minha escolha de ts menor possível, com os ganhos próximo de 10% de overshoot, na origem e onde eu penso ser o ts menor e obtive os seguintes resultados:

Ganhos		Sobreelevação	Ts
Origem	0.00010511	1.7044	0.9468
Ts_Menor	0.17127	0.7156	0.7439
Em 10%	0.34770	10.7425	1.1350

Dito isso, é notável a diferença entre o ts escolhido ao se comparar com os extremos. Isso se dá pela relação:

$\zeta = \cos\theta$, $\mathrm{ts} = \dfrac{4}{\zeta\omega_n}$, $0 < \zeta < 0.9$.

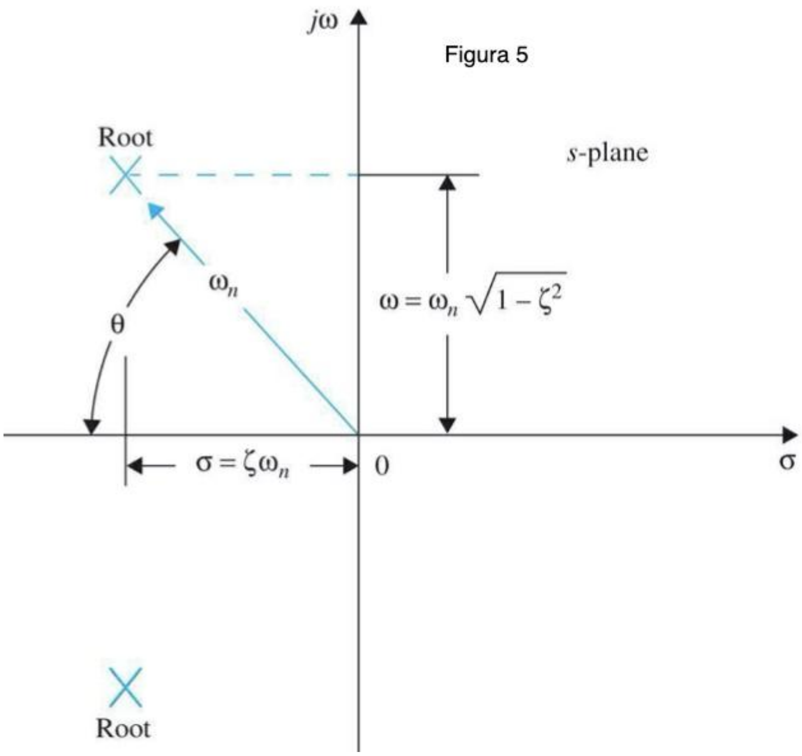


Figura 5

O ponto mais distante da origem sobre o LR será o valor máximo de ω_n, e o ζ aumenta à medida se aproxima do polo de origem. Então uma boa escolha seria a curva que sai dos polos próximos a origem com K = 0.17127, sobreelevação igual a 0.7156 e ts igual a 0.7439 s