UFES - CCE - DMAT

MAT09592 - ÁLGEBRA LINEAR - 2018/2

Terceira prova parcial - turma da noite - 05/12/2018

Nome: EDDY GIUSEPE CHIRINOS ISIDRO

2,0 1. Indique verdadeiro (V) ou falso (F). (**justifique sua resposta**).

(a) É possível analisar e interpretar os autovalores e autovetores de uma matriz obtida através de uma simulação da dinâmica de uma aeronave (**Sistema dinâmico**)?

(b) Os autovalores de uma transformação linear sempre são reais.

(c) O autovalor de um autovetor é sempre uma raiz do *polinômio característico* $P(\lambda)$.

(d) A matriz $\mathbb{A}$ apenas será **diagonalizável** se cada autovalor de *multiplicidade* **k** tiver **k** autovetores **linearmente dependentes**.

(e) Em diagonalização de uma matriz se verifica: $P^{-1}AP = PAP^{-1}$.

(f) O produto interno de dois vetores resulta em um outro vetor.

(g) Em cônicas temos que a intersecção de um cone com um plano é um dos seguintes objetos: círculo, elipse, parábola ou hipérbole.

(h) A *hipérbole* é o conjunto de pontos no plano que estão equidistantes de um ponto chamado foco e uma reta diretriz.

2,0 2. Diagonalize a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

se possível.

1,5 3. Demonstre a desigualdade de **CAUCHY-SCHWARZ**:

$$|<\overline{u},\overline{v}>| \quad \leq \quad \|\overline{u}\| \,.\, \|\overline{v}\|$$

1,5 4. Demonstre a **DESIGUALDADE TRIANGULAR**:

$$\|\overline{u}+\overline{v}\| \quad \leq \quad \|\overline{u}\| + \|\overline{v}\|$$

1,0 5. Sejam $\overline{u} = (x_1, x_2)$ e $\overline{v} = (y_1, y_2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$. Definimos:

$$<\overline{u},\overline{v}> = 4x_1y_1 + x_2y_1x_1y_2 + 4x_2y_2 \;.$$

A expressão anterior é produto interno em $\mathbb{R}^2$?

1,0 6. Determine a equação reduzida da **hipérbole** com a medida do eixo real igual a 6, focos: $F_1 = (-5, 0)$ e $F_2 = (5, 0)$.

1,0 7. Mostre que os vetores:

$$\overline{v}_1 = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0), \quad \overline{v}_2 = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0) \quad e \quad \overline{v}_3 = (0, 0, 1) \;,$$

formam uma base ortonormal em $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Em seguida, expresse o vetor $\overline{w} = (1, -1, 2)$ nesta base aplicando o cálculo de **coeficientes de FOURIER**.

ÁLGEBRA LINEAR

PROFESSOR ⇒ EDDY GIUSEPPE CHIRINOS ISIDRO

Solução ①:

a) V b) F c) V d) F e) F f) F
g) F h) F

Solução ②:

• Calculamos os autovalores:

$$\underbrace{|A-\lambda \mathbb{1}|=0}_{} \Rightarrow \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & -4 \\ 3 & -\lambda & -2 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & -4 \\ 3 & -\lambda & -2 \\ 6 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \quad L_3 \to L_3 - L_1$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)[4-4\lambda]+(1-\lambda)[-7\lambda+\lambda^2+6]=0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0$$

Por Ruffini: (calculamos as raízes)

	1	-4	5	-2
$x=1$	↓	1	-3	2
	1	-3	2	0
$x=1$	↓	1	-2	
	1	-2	0	
$x=2$	↓	2		
	1	0		

$$\Rightarrow (x-1)^2(x-2)=0$$

Autovalores:
$\lambda_1=\lambda_2=1$
$\lambda_3=2$

• Calculamos autovalores:

* $\lambda_1=\lambda_2=1$: $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}}_{\bar{v}_1} ; \underbrace{\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}}_{\bar{v}_2} \right\}$ Base

* $\lambda_3=2$:
$\bar{v}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

• Montamos a matriz P:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |P| = 1(-5)+2(3)$$

$$\Rightarrow |P| = 1$$

Também: $B^{-1}=\dfrac{1}{|B|}\,adj(B)$; $adj(B)=\bar{B}^T$ 1

$P_{11}=-5$; $P_{12}=-6$; $P_{13}=3$
$P_{21}=2$; $P_{22}=2$; $P_{23}=-1$
$P_{31}=4$; $P_{32}=5$; $P_{33}=-2$

$$\Rightarrow \bar{P}=\begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ +4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz de cofatores

$$\Rightarrow adj(P)=\begin{pmatrix} -5 & 2 & +4 \\ -6 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Logo:

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} -5 & 2 & +4 \\ -6 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$D=P^{-1}.A.P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rpta

Solução ③:

Sabemos: $\langle t\bar{u}+\bar{v}, t\bar{u}+\bar{v}\rangle \geq 0$; $t\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \langle \bar{u},\bar{u}\rangle t^2 + 2\langle \bar{u},\bar{v}\rangle t + \langle \bar{v},\bar{v}\rangle \geq 0$$

Trinômio positivo!

$\langle \bar{u},\bar{u}\rangle \geq 0 \wedge \Delta < 0$

$$\Rightarrow (2\langle \bar{u},\bar{v}\rangle)^2 - 4\,(\underbrace{\langle \bar{u},\bar{u}\rangle}_{\|\bar{u}\|^2})(\underbrace{\langle \bar{v},\bar{v}\rangle}_{\|\bar{v}\|^2}) \leq 0$$

$$\therefore\ |\langle \bar{u},\bar{v}\rangle| \leq \|\bar{u}\|.\|\bar{v}\|$$

Rpta

Solução ④:

Sabemos: $\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 = \langle \bar{u}+\bar{v}, \bar{u}+\bar{v}\rangle$

$$\Rightarrow \|\bar{u}+\bar{v}\|^2 = \underbrace{\langle \bar{u},\bar{u}\rangle} + \langle \bar{u},\bar{v}\rangle + \langle \bar{v},\bar{u}\rangle + \underbrace{\langle \bar{v},\bar{v}\rangle}$$

$$\Rightarrow \|\bar{u}+\bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + 2\langle \bar{u},\bar{v}\rangle + \|\bar{v}\|^2 \ldots (\alpha)$$

POR PROPIEDADES: $x \leqslant |x|$

$$\langle \bar{u},\bar{v}\rangle \leqslant |\langle \bar{u},\bar{v}\rangle|$$

$$\Rightarrow 2\langle \bar{u},\bar{v}\rangle \leqslant 2\,|\langle \bar{u},\bar{v}\rangle|$$

También CAUCHY-SCHWARZ

$$|\langle \bar{u},\bar{v}\rangle| \leqslant \|\bar{u}\|.\|\bar{v}\|$$

$$\Rightarrow 2\langle \bar{u},\bar{v}\rangle \leqslant 2\,|\langle \bar{u},\bar{v}\rangle| \leqslant 2\|\bar{u}\|.\|\bar{v}\|$$

$$\Rightarrow \underbrace{\|\bar{u}\|^2 + 2|\langle \bar{u},\bar{v}\rangle| + \|\bar{v}\|^2}_{} \leqslant \underbrace{\|\bar{u}\|^2 + 2\|\bar{u}\|\|\bar{v}\| + \|\bar{v}\|^2}_{}$$

$$\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 \leqslant (\|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|)^2$$

Raíz $\Rightarrow \therefore \; \|\bar{u}+\bar{v}\| \leqslant \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$ Rpta.

Solução ⑤:

Temos: $\langle \bar{u},\bar{v}\rangle = 4x_1y_1 + x_2y_1x_1y_2 + 4x_2y_2$

i.- $\langle \bar{u},\bar{u}\rangle \geqslant 0$ SIM CUMPRE!

$\langle \bar{u},\bar{u}\rangle = 4x_1^2 + x_1^2x_2^2 + 4x_2^2 \geqslant 0$

También: $\bar{u}=(0,0) \Rightarrow \langle \bar{u},\bar{u}\rangle = 0$

ii.- $\langle \bar{u},\bar{v}\rangle = \langle \bar{v},\bar{u}\rangle$ SIM CUMPRE!

$\langle \bar{v},\bar{u}\rangle = \langle (y_1,y_2),(x_1,x_2)\rangle =$

$= 4y_1x_1 + y_2x_1y_1x_2 + 4y_2x_2$

iii.- $\langle \bar{u},\bar{v}+\bar{w}\rangle = \langle \bar{u},\bar{v}\rangle + \langle \bar{u},\bar{w}\rangle$ NÃO CUMPRE!

Seja: $\bar{w} = (z_1,z_2)$

$\Rightarrow \bar{v}+\bar{w} = (y_1+z_1, y_2+z_2)$

$\Rightarrow \langle \bar{u},\bar{v}+\bar{w}\rangle = 4x_1(y_1+z_1) + x_2(y_1+z_1)x_1(y_2+z_2) + 4x_2(y_2+z_2)$

$* \langle \bar{u},\bar{v}\rangle = 4x_1y_1 + x_2y_1x_1y_2 + 4x_2y_2$

$* \langle \bar{u},\bar{w}\rangle = 4x_1z_1 + x_2z_1x_1z_2 + 4x_2z_2$ (+)

Somando:

$\langle \bar{u},\bar{v}\rangle + \langle \bar{u},\bar{w}\rangle = 4x_1(y_1+z_1) + x_2x_1(y_1y_2+z_1z_2) + 4x_2(y_2+z_2)$

$\Rightarrow \langle \bar{u},\bar{v}+\bar{w}\rangle \neq \langle \bar{u},\bar{v}\rangle + \langle \bar{u},\bar{w}\rangle$

iv.- $\langle k\bar{u},\bar{v}\rangle = k\langle \bar{u},\bar{v}\rangle$ NÃO CUMPRE!

$\langle k\bar{u},\bar{v}\rangle = 4kx_1y_1 + kx_2y_1kx_1y_2 + 4kx_2y_2$

$= k(4x_1y_1 + kx_2y_1x_1y_2 + 4x_2y_2)$

$\Rightarrow \langle k\bar{u},\bar{v}\rangle \neq k\langle \bar{u},\bar{v}\rangle$

Solução ⑥:

- MEDIDA DO EIXO REAL $\Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3u$
- DISTÂNCIA ENTRE OS FOCOS $\Rightarrow 10 = 2c \Rightarrow c = 5u$
- POR PITÁGORAS: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = 4u$

Equação: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ Rpta

Solução ⑦:

Temos: $\|\bar{v}_1\| = \|\bar{v}_2\| = \|\bar{v}_3\| = 1$ e

$\langle \bar{v}_1,\bar{v}_2\rangle = \langle \bar{v}_1,\bar{v}_3\rangle = \langle \bar{v}_2,\bar{v}_3\rangle = 0$

Logo: $\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + a_3\bar{v}_3$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{\langle \bar{w},\bar{v}_1\rangle}{\langle \bar{v}_1,\bar{v}_1\rangle} = \frac{\langle (1,-1,2),(\frac{4}{5},\frac{3}{5},0)\rangle}{1} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{\langle \bar{w},\bar{v}_2\rangle}{\langle \bar{v}_2,\bar{v}_2\rangle} = \frac{\langle (1,-1,2),(-\frac{3}{5},\frac{4}{5},0)\rangle}{1} = -\frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{\langle (1,-1,2),(0,0,1)\rangle}{1} = 2$$

Rpta