Universidade Federal do Espírito Santo

ELE08471 - Análise e modelagem de sistemas dinâmicos

Trabalho computacional 1

Professor:
Jose Leandro Felix Salles

Alunos:
Dionatas Santos Brito

8 de outubro de 2021

1

Foi dado o sistema massa-mola apresentado abaixo (figura 1):

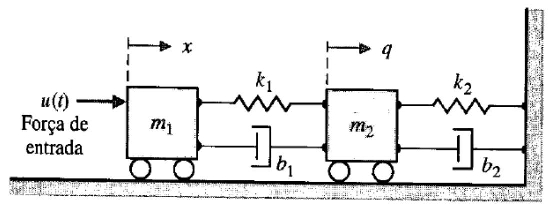

Figura 1: Dois carros com atrito de rolamento insignificante.

Esse sistema pode ser modelado pelas equações diferenciais:

$$m_1 \frac{d^2x(t)}{dt^2} = u(t) - k_1[x(t) - q(t)] - b_1[\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dq(t)}{dt}] \tag{1}$$

$$m_2 \frac{d^2q(t)}{dt^2} = k_1[x(t) - q(t)] + b_1[\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dq(t)}{dt}] - k_2q(x) - b_2\frac{dq(t)}{dt} \tag{2}$$

A partir das transformadas de Laplace das equações 1 e 2 foi possível obter o diagrama de blocos apresentado na figura 2, onde a entrada é a força $u(t)$ aplicada na massa $m1$ e a saída é $q(t)$ que corresponde à posição da massa m_2.

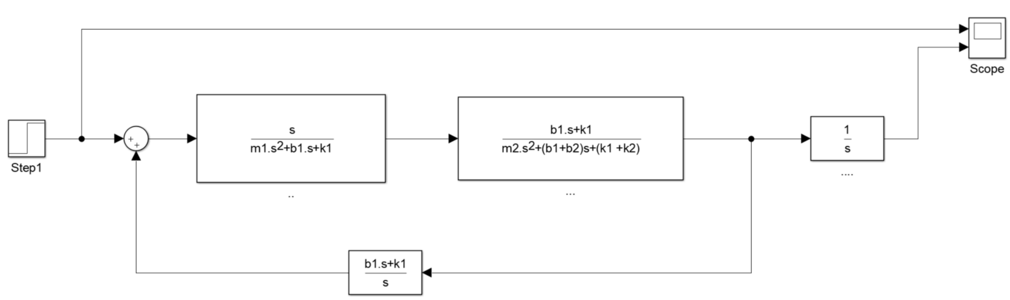

Figura 2: Modelo do sistema da figura 1 no Simulink

Para realizar as simulações no Simulink considerou-se na entrada uma força igual a 1N. Também foram definidos e fixados os valores das massas e das constantes das molas: $m_1 = 10Kg$, $k_1 = 5$, $m_2 = 20Kg$ e $k_2 = 20$, enquanto variou-se os valores dos atritos viscosos b_1 e b_2 de forma a obtermos diferentes respostas.

1.1 Caso 1: Sistema Subamortecido

Fazendo $b_1 = 6$ e $b_2 = 8$, o sistema torna-se subamortecido. A figura 3 mostra o diagrama de blocos já com os valores substituídos, e a figura 4 mostra o plot da saída $q(t)$ gerado no simulink.

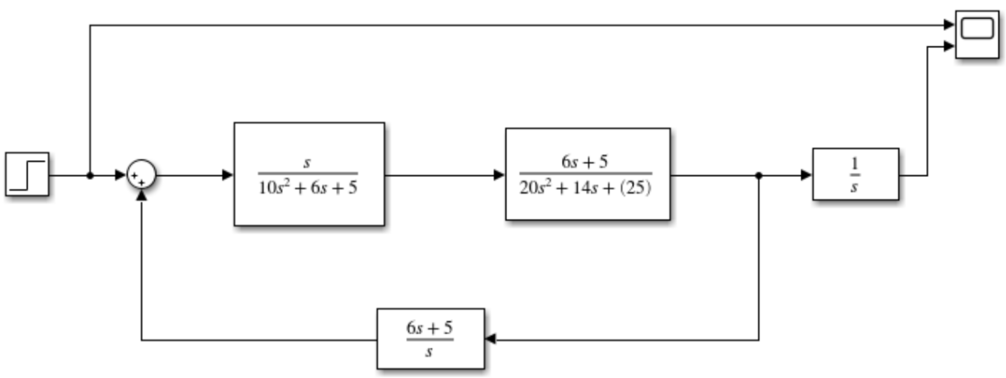

Figura 3: Bloco utilizado para o esquema de Subamortecido.

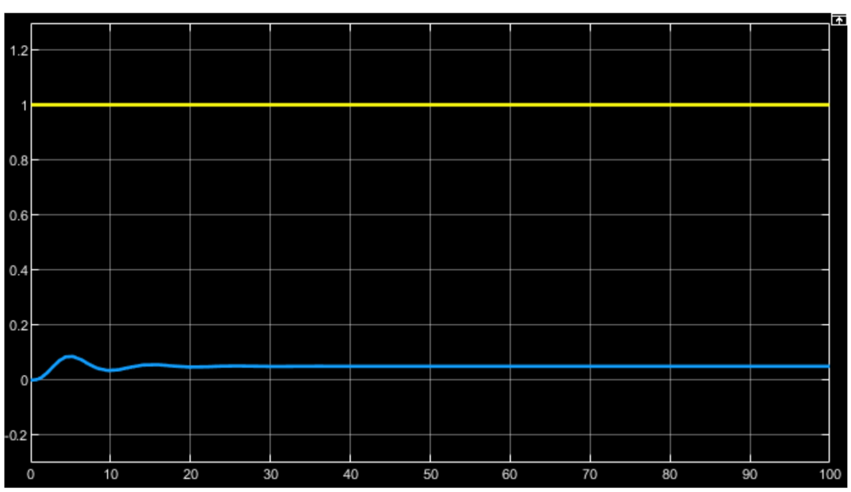

Figura 4: Gráfico gerado pelo sistema Subamortecido no simulink.

A partir do diagrama da figura 3, calculou-se (utilizando a fórmula de Mason) a função de transferência do sistema:

$$\frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{6s^2 + 5}{200s^4 + 260s^3 + 398s^2 + 160s + 100}$$

Utilizando o pequeno trecho de código abaixo foi possível obter os polos da função de transferência e também plotar a resposta do sistema para a entrada U(s) = 1/s, que corresponde à transformada de Laplace do degrau unitário (figura 5).
Código utilizado:

```
num = [6, 5];
den = [200, 260, 398, 160, 100];
step(num,den);
polos = roots(den)
```

Resposta obtida:

```
polos =
    -0.4857 + 1.0219i
    -0.4857 - 1.0219i
    -0.1643 + 0.6029i
    -0.1643 - 0.6029i
```

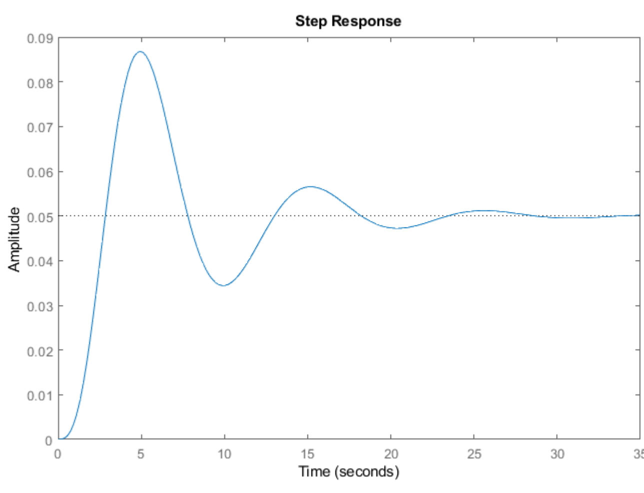

Figura 5: Resposta ao degrau utilizando a função de transferência do sistema.

1.2 Caso 2: Sistema Sobreamortecido

Fazendo $b_1 = 50$ e $b_2 = 150$, o sistema torna-se sobreamortecido. Na figura 6 mostra o diagrama de blocos já com os valores substituídos, e a figura 7 mostra o plot gerado da saída $q(t)$ gerado no simulink.

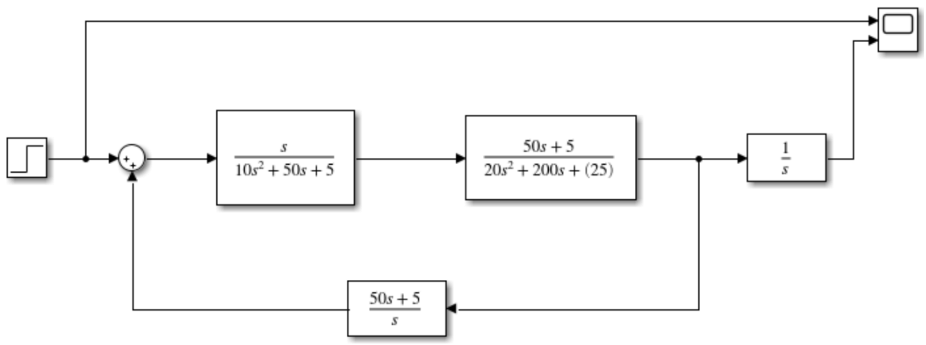

Figura 6: Bloco utilizado para o esquema de Sobreamortecido.

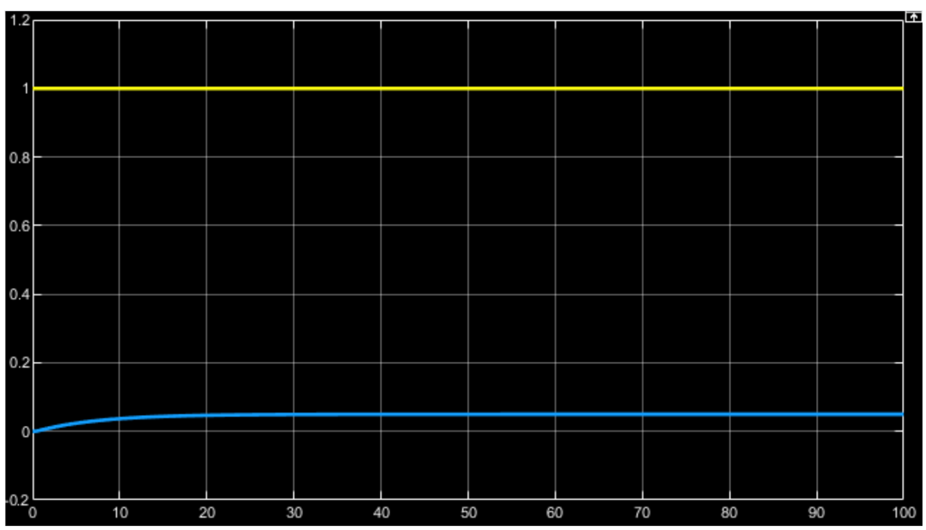

Figura 7: Gráfico gerado pelo sistema Sobreamortecido.

A partir do diagrama da figura 6, calculou-se (utilizando a fórmula de Mason) a função de transferência do sistema:

$$\frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{10s^2 + 1}{40s^4 + 600s^3 + 1570s^2 + 350s + 20}$$

Utilizando o pequeno trecho de código abaixo foi possível obter os polos da função de transferência e também plotar a resposta do sistema para a entrada U(s) = 1/s, que corresponde à transformada de Laplace do degrau unitário (figura 8).
Código:

```
num = [10, 1];
den = [40, 600, 1570, 350, 20];
step(num,den);
polos = roots(den)
```

Resposta obtida:

```
polos =
    -11.7123
    -3.0484
    -0.1372
    -0.1020
```

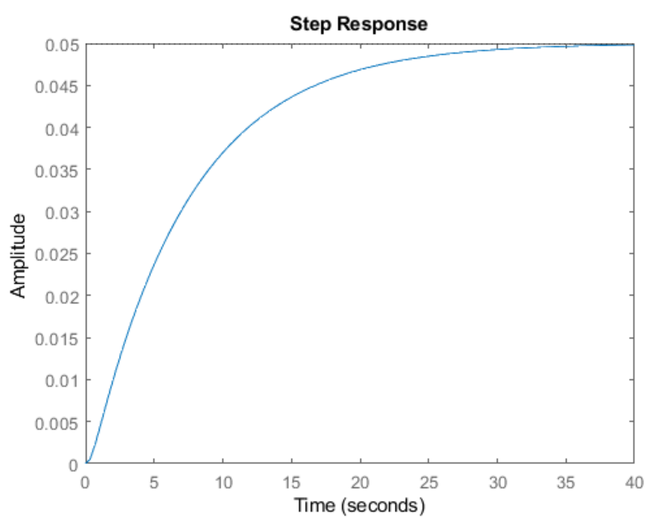

Figura 8: Resposta ao degrau utilizando a função de transferência do sistema.

1.3 Caso 3: Sistema Oscilatório

Fazendo $b_1 = 0$ e $b_2 = 0$, o sistema torna-se oscilatório.Na figura 9 mostra o diagrama de blocos já com os valores substituídos, e a figura 10 mostra o plot gerado da saída $q(t)$ gerado no simulink.

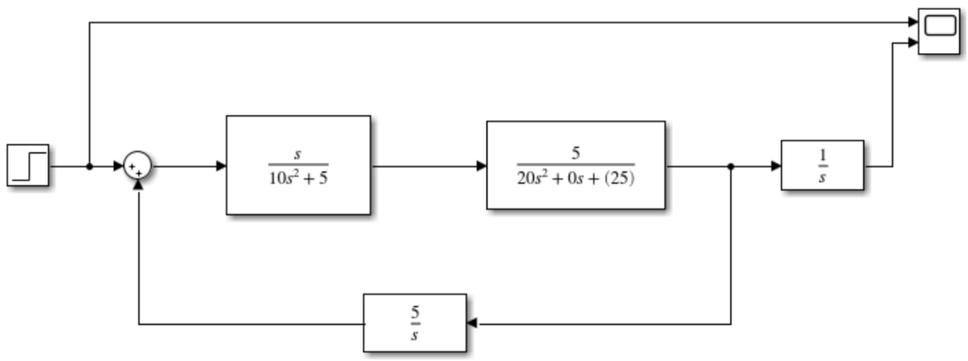

Figura 9: Bloco utilizado para o esquema de Oscilatório.

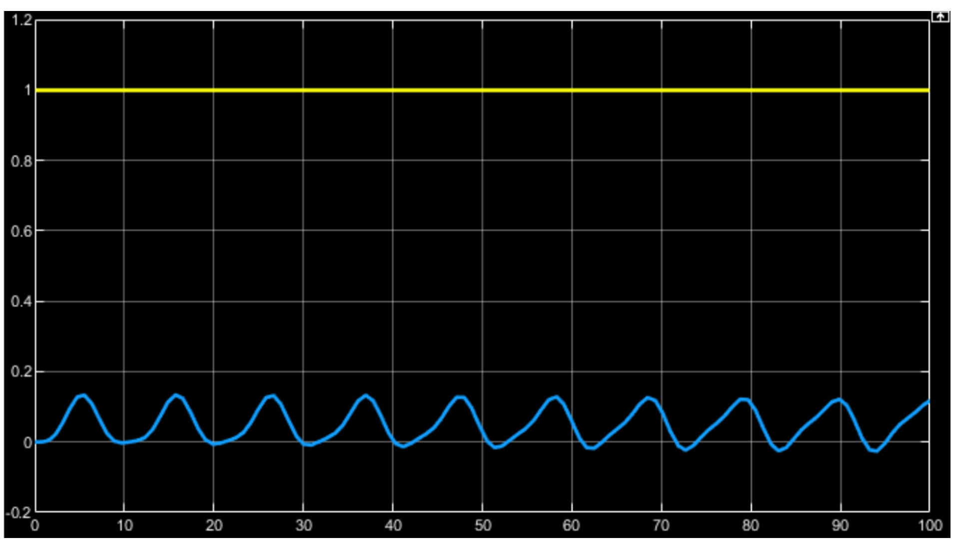

Figura 10: Gráfico gerado pelo sistema Oscilatório.

A partir do diagrama da figura 9, calculou-se (utilizando a fórmula de Mason) a função de transferência do sistema:

$$\frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{1}{40s^4 + 70s^2 + 20}$$

Utilizando o pequeno trecho de código abaixo foi possível obter os polos da função de transferência e também plotar a resposta do sistema para a entrada U(s) = 1/s, que corresponde à transformada de Laplace do degrau unitário (figura 11).

Código:

```
num = [1];
den = [40, 0, 70, 0, 20];
step(num,den);
polos = roots(den)
```

Resposta obtida:

```
polos =
    -0.0000 + 1.1791i
    -0.0000 - 1.1791i
    -0.0000 + 0.5997i
    -0.0000 - 0.5997i
```

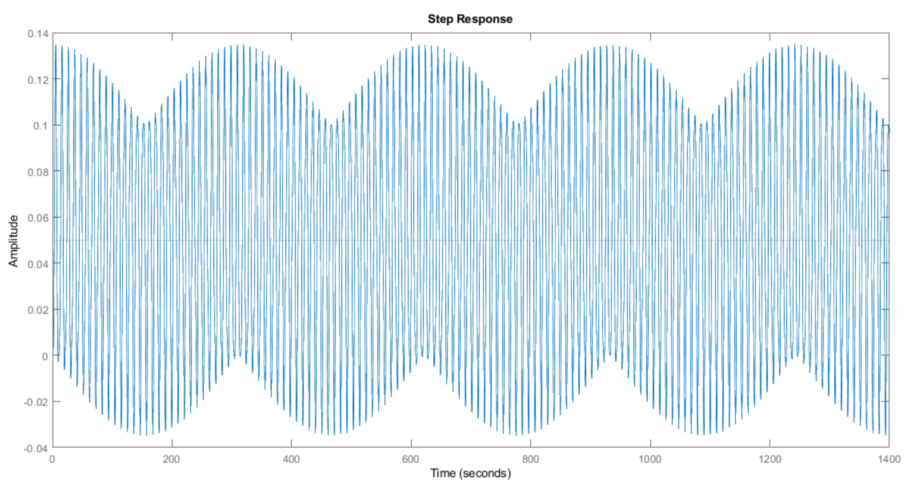

Figura 11: Resposta ao degrau utilizando a função de transferência do sistema.

2

Foi dado o circuito RLC apresentado abaixo (figura 12):

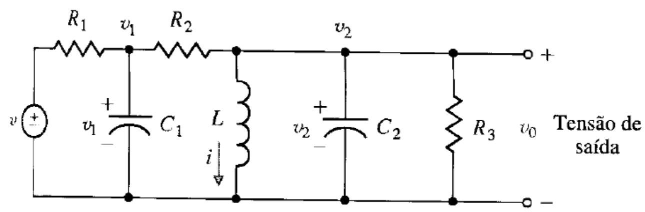

Figura 12: Circuito RLC.

Esse sistema pode ser modelado pelas equações diferenciais:

$$C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} = \frac{v(t)}{R_1} - \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} v_1(t) + \frac{v_2(t)}{R_2} \tag{3}$$

$$C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{v_1(t)}{R_2} - \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} v_2(t) - i(t) \tag{4}$$

$$v_0(t) = v_2(t) = L \frac{di(t)}{dt} \tag{5}$$

A partir das transformadas de Laplace das equações 3, 4 e 5 foi possível obter o diagrama de blocos apresentado na figura 13, onde a entrada é a tensão $v(t)$, e a saída é $v_0(t)$ que corresponde à tensão sobre o resistor R_3.

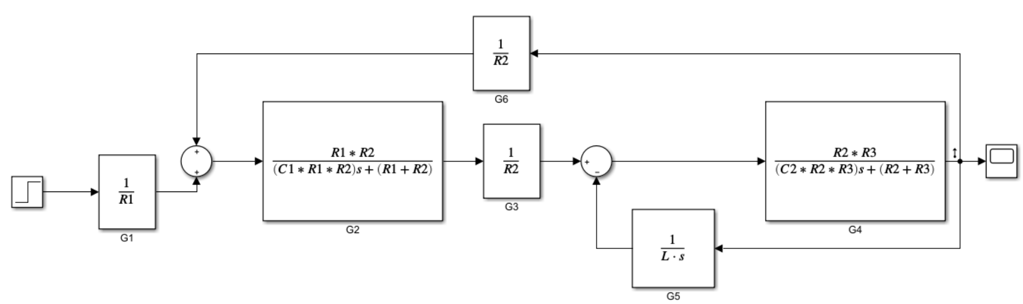

Figura 13: Modelo do sistema da figura 12 no Simulink.

Para realizar as simulações no Simulink considerou-se na entrada uma tensão contínua igual a 1V. Também foram definidos e fixados os valores:

$C_1 = 4700\mu F$, $C_2 = 3300\mu F$, $L = 0.8H$, enquanto variou-se os valores das resistências de R_1, R_2 e R_3, de forma a obtermos diferentes respostas.

2.1 Caso 1: Sistema Subamortecido

Fazendo $R_1 = 100\Omega$ e $R_2 = 200\Omega$, e $R_3 = 100\Omega$, $C_1 = 4700\mu F$, $C_2 = 3300\mu F$, $L = 0.8H$, o sistema torna-se subamortecido. A figura 14 mostra o diagrama de blocos já com os valores substituídos, e a figura 15 mostra o plot da saída $v_0(t)$ gerado no simulink.

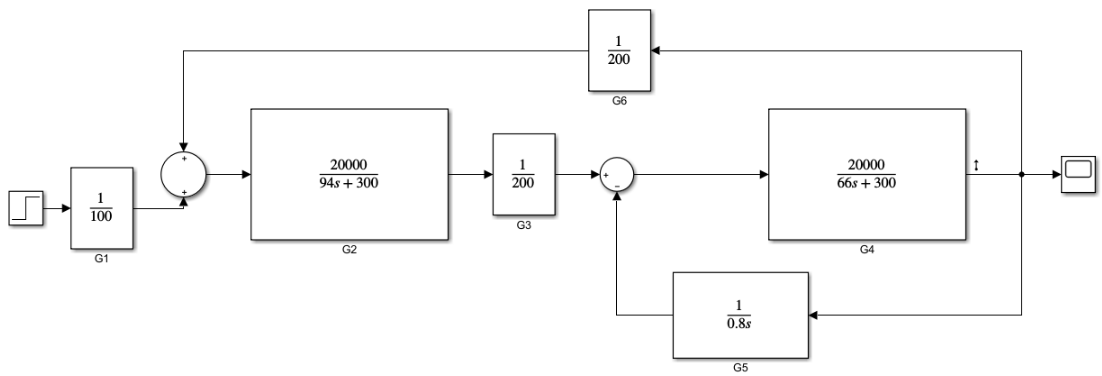

Figura 14: Bloco com valores substítuidos.

A partir do diagrama da figura 14, calculou-se (utilizando a fórmula de Mason) a função de transferência do sistema:

$$\frac{V_0(s)}{V(s)} = \frac{64s}{19.85s^3 + 1536 * 10^8 s^2 + 777 * 10^{10} s + 24 * 10^{12}}$$

Utilizando o pequeno trecho de código abaixo foi possível obter os polos da função de transferência e também plotar a resposta ao degrau unitário (figura 16)
Código:

```
num = [64  0];
den = [19.85  1536e8  +777e10  +24e12];
step(num,den);
polos = roots(den)
```

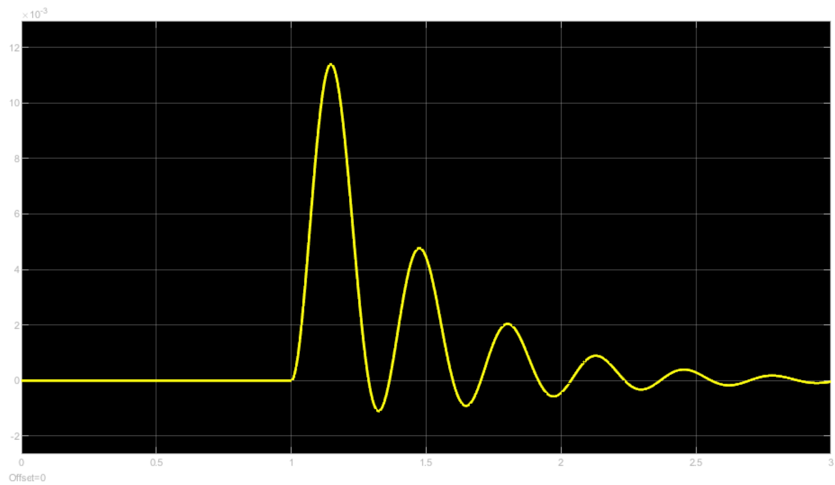

Figura 15: Gráfico gerado pelo sistema subamortecido.

Resposta obtida:

```
polos =
    -2.2658   19.2879i
    -2.2658  -19.2879i
    -3.2053    0.0000i
```

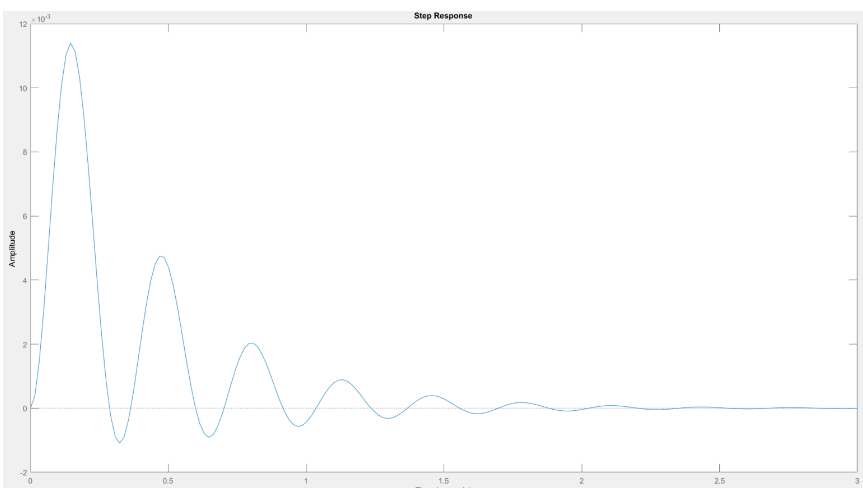

Figura 16: Resposta ao degrau obtida utilizando a função de transferência do sistema.

2.2 Caso 2: Sistema Sobreamortecido

Mantendo $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 200\Omega$, $C_1 = 4700\mu F$, $C_2 = 3300\mu F$, $L = 0.8H$, e fazendo $R_3 = 10\Omega$ o sistema torna-se sobreamortecido. A figura 17 mostra o diagrama de blocos já com os valores substituídos, e a figura 18 mostra o plot da saída $v_0(t)$ gerado no simulink.

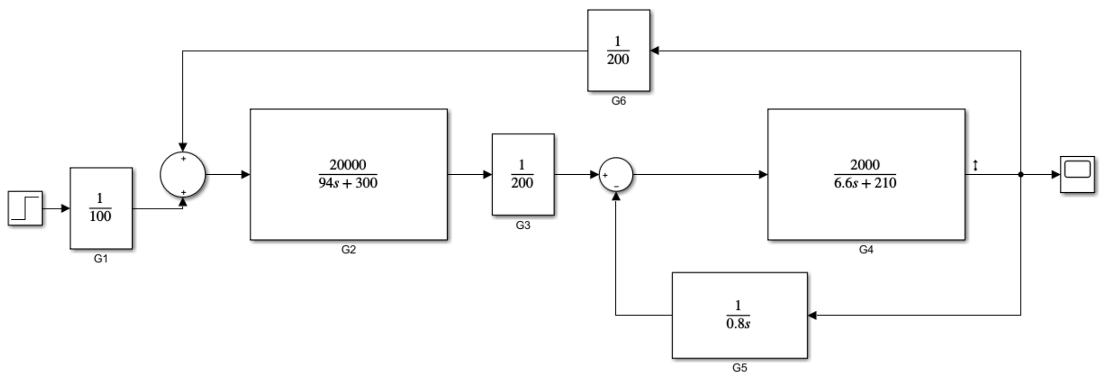

Figura 17: Bloco com valores substítuidos.

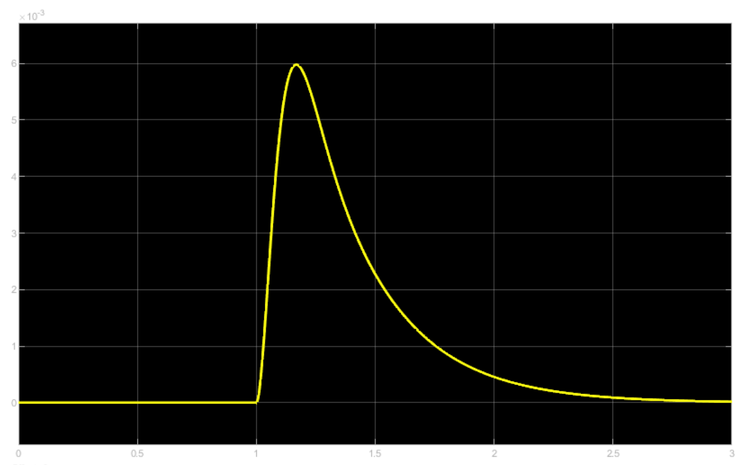

Figura 18: Gráfico gerado pelo sistema sobreamortecido.

A partir do diagrama da figura 17, calculou-se (utilizando a fórmula de Mason) a função de transferência do sistema:

$$\frac{V_0(s)}{V(s)} = \frac{64s}{1985 * 10^6 s^3 + 69.5s^2 + 950 * 10^9 s + 24 * 10^{11}}$$

Utilizando o pequeno trecho de código abaixo foi possível obter os polos da função de transferência e também plotar a resposta ao degrau unitário (figura 21).

Código:

```
num = [64  0];
den = [1985e6  69.5e2  950e9  24e11}];
step(num,den);
polos = roots(num,  den)
```

Resposta obtida:

```
polos =
    -15.9001  +11.1287i
    -15.9001  -11.1287i
     -3.2095    0.0000i
```

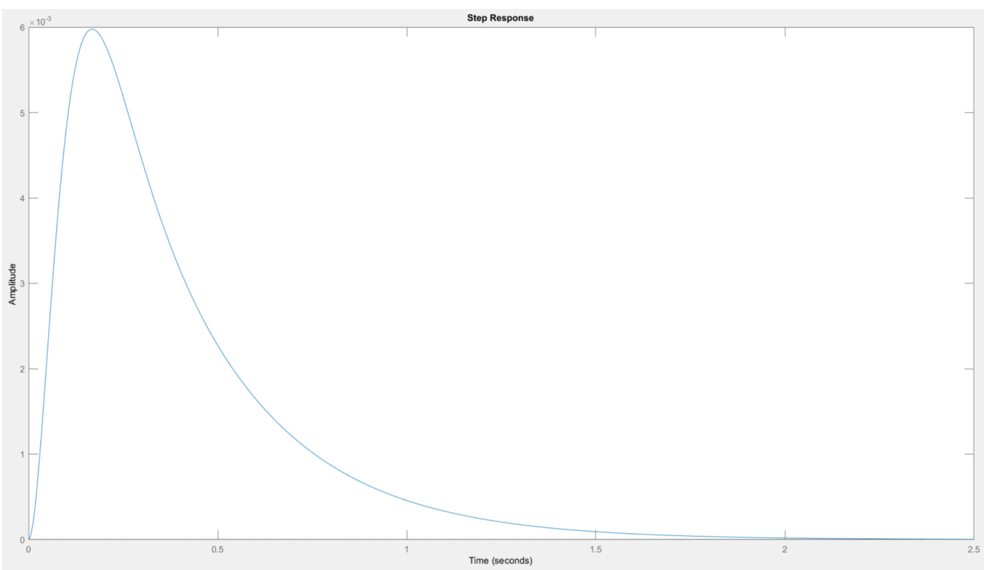

Figura 19: Resposta ao degrau obtida utilizando a função de transferência do sistema.

2.3 Caso 3: Sistema Oscilatório

Fazendo $R_1 = 25\Omega$ e $R_2 = 25K\Omega$, e $R_3 = 25K\Omega$, $C_1 = 270\mu F$, $C_2 = 270\mu F$, $L = 2H$, o sistema torna-se quase oscilatório. A figura 20 mostra o plot da saída $v_0(t)$ gerado no simulink.

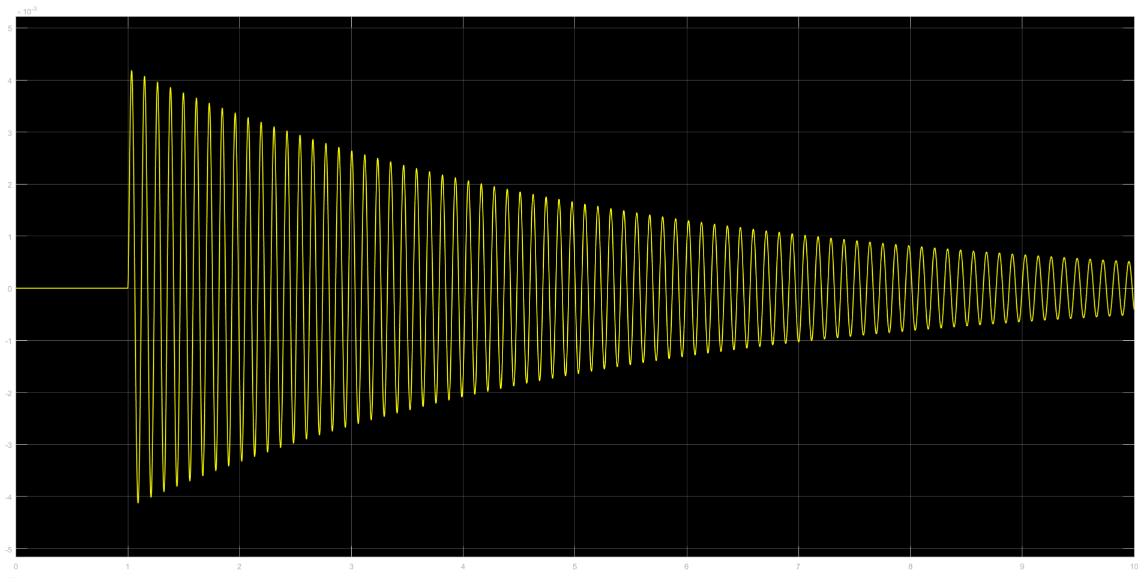

Figura 20: Gráfico gerado pelo sistema oscilatório.

A partir do diagrama da figura 13, calculou-se (utilizando a fórmula de Mason) a função de transferência do sistema:

$$\frac{V_0(s)}{V(s)} = \frac{1953 * 10^{16}s}{8899 * 10^{14}s^3 + 1322 * 10^{17}s^2 + 1687 * 10^{18}s + 2444 * 10^{20}}$$

Utilizando o pequeno trecho de código abaixo foi possível obter os polos da função de transferência e também plotar a resposta ao degrau unitário (figura 21).
Código:

```
num = [1953e16   0];
den = [8899e14  1322e17  1687e18  2444e20 }];
step(num,den);
polos = roots(num, den)
```

Resposta obtida:

```
polos =
    1.0e+02 *‘(
                        -1.4830 + 0.0000i
                        -0.0015 + 0.4303i
                        -0.0015 - 0.4303i
                       )
```

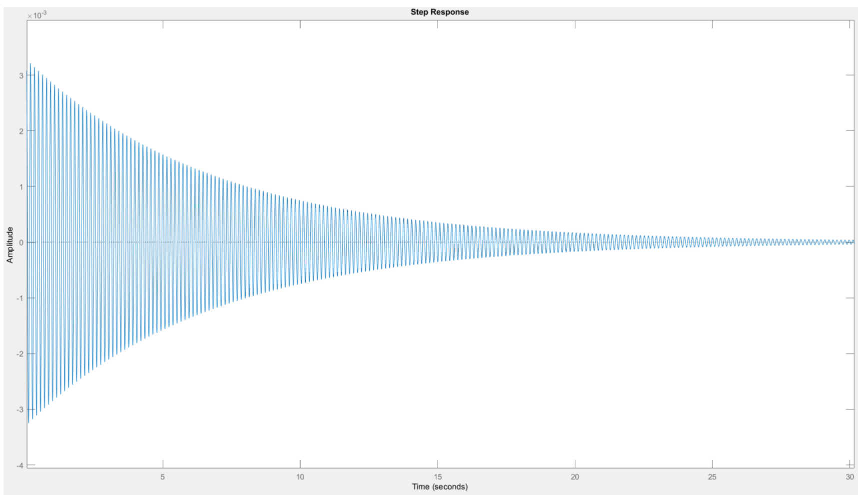

Figura 21: Resposta ao degrau obtida utilizando a função de transferência do sistema.

Como pode-se observar, o sistema não é oscilatório já que tende a zero em $t \to \infty$. Isso acontece, pois o circuito está sendo alimentado por uma fonte de tensão contínua, o que faz com que a tensão no indutor tenda a zero, já que não há variação de corrente no regime permanente.

3

Considerando a função de transferência:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{50}{s^2 + 7s + 50}$$

E considerando a forma padrão do sistema de segunda ordem:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

Temos que $W_n = \sqrt{50}$ e $\zeta = 0.49$. Além disso $w_d = w_n\sqrt{1-\zeta^2} = 6.16$ e $\sigma = \zeta w_n = 3.46$

3.1

O tempo de subida t_r é dado por:

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{w_d}$$

Onde $\beta = \tan^{-1}(\frac{w_d}{\sigma}) = 1.06$. Então $t_r = 0.338$ s. O tempo de pico t_p é dado por

$$t_p = \frac{\pi}{w_d}$$
$$t_p = 0.51\ s$$

O tempo de acomodação t_s para o critério de 2% é:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 1.15\ s$$

O sobressinal é:

$$M_p = e^{-(\frac{\sigma}{w_d})\pi}$$
$$M_p = 0.17 = 17\%$$

Em seguida, foi executado o código

```
num = [0 0 50];
den = [1 7 50];
t = 0:0.005:5;
[y,x,t] = step(num, den, t);
r = 1; while y(r) < 1.0001; r = r + 1; end;
rise_time = (r-1)*0.005;
[ymax, tp] = max(y);
peak_time = (tp-1)*0.005;
max_overshoot = ymax-1;
s = 1001; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02;s = s-1; end;
settling_time = (s - 1)*0.005;
```

E foi encontrado os valores:

$$rise\_time = 0.34- > (tempo - de - subida)$$
$$peak\_time = 0.51- > (tempo - de - pico)$$
$$max\_overshoot = 0.167- > (máximo - sobressinal)$$
$$settling\_time = 1.145- > (tempo - de - acomoda\text{ç}ão)$$

3.2

Temos que:

$$\frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{50}{s^2+7s+50}$$
$$G(s)(s^2+7s+50) = 50 + 50G(s)$$
$$G(s)(s^2+7s) = 50$$

Então:

$$\boxed{G(s) = \frac{50}{s^2+7s}}$$

O erro é dado por:

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)}R(s)$$

Onde $R(s) = \frac{1}{s}$. Segundo o teorema do valor final:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

Portanto:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + \frac{50}{s^2+7s}} \frac{1}{s} = 0$$

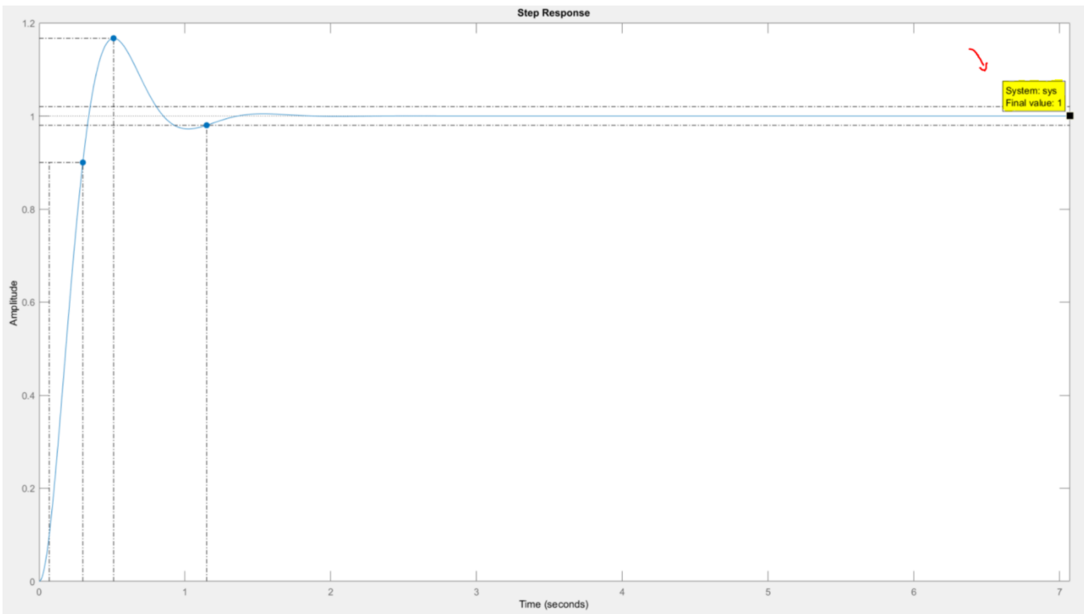

Figura 22: Resposta ao degrau.

O gráfico da resposta ao degrau é mostrado na figura 22. Podemos perceber que o erro é 0.

4

O erro é dado por:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

Onde $R(s) = \frac{1}{s^2}$. Segundo o teorema do valor final:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

Portanto:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + \frac{50}{s^2+7s}} \frac{1}{s^2}$$
$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s + \frac{50s}{s(s+7)}}$$
$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s + \frac{50}{(s+7)}}$$
$$e_{ss} = \frac{7}{50} = 0.14$$

Foi executado o código:

```
num = [0 0 50];
den = [1 7 50];
t = 0:0.1:10;
r = t;
y = lsim(num, den, r, t);
plot(t, r, '-', t, y, 'o')
grid
title('Resposta a Rampa Unitaria Obtida com o Uso do
   Comando "lsim"')
xlabel('t(s)')
ylabel('Entrada e Saida do sistema')
```

O gráfico obtido é exibido na figura 2.

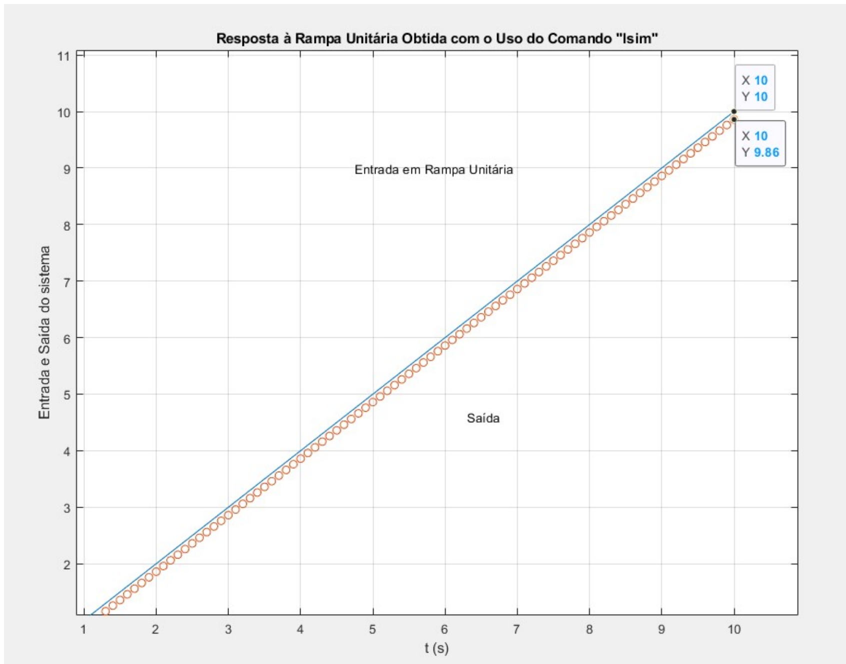

Figura 23: Resposta à rampa unitária.

Pegando $t = 5s$, observa-se que a saída é $c(5) = 4.86$, enquanto que a entrada é $r(5) = 5$. Logo, o erro em regime permanente (que consiste na diferença entre a entrada e a saída) é $5 - 4.86 = 0.14$, que é exatamente o valor que havia sido encontrado previamente.

5

Foi executado o código:

```
num = [6.3223 18 12.811];
den = [1 6 11.3223 18 12.811];
t = 0:0.02:20;
[y,x,t] = step(num,den,t);
plot(t,y)
grid
title('Resposta ao Degrau Unitario')
```

```
xlabel('t (s)')
ylabel('Saida y(t)')
r1 = 1; while y(r1) < 0.1, r1 = r1+1; end;
r2 = 1; while y(r2) < 0.9, r2 = r2+1; end;
rise_time = (r2-r1)*0.02;
[ymax,tp] = max(y);
peak_time = (tp-1)*0.02;
max_overshoot = ymax-1;
s = 1001; while y(s) > 0.98 & y(s) < 1.02; s = s-1; end
    ;
settling_time = (s-1)*0.02;
```

E foram encontrado os valores:

$$
\begin{aligned}
rise\_time &= 0.5800 \rightarrow (tempo - de - subida)\\
peak\_time &= 1.66 \rightarrow (tempo - de - pico)\\
max\_overshoot &= 0.6182 \rightarrow (máximo - sobressinal)\\
settling\_time &= 10.0200 \rightarrow (tempo - de - acomodação)
\end{aligned}
$$

E o gráfico:

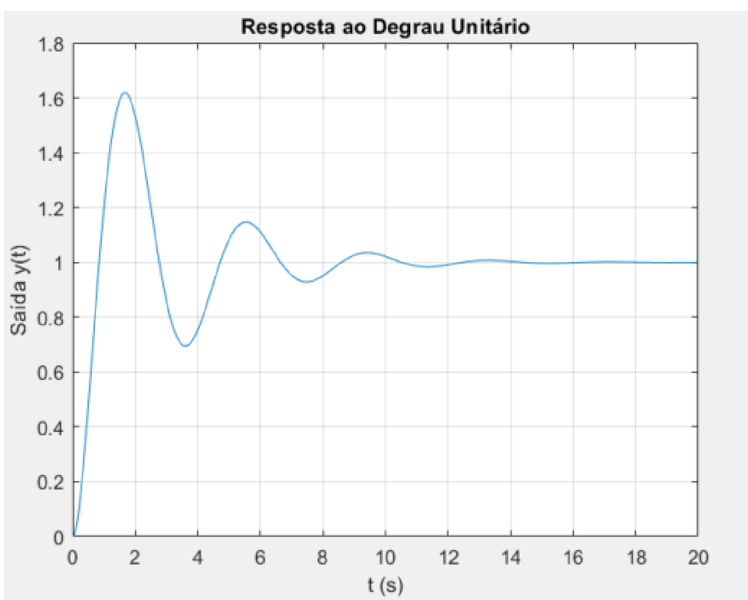

Figura 24: Gráfico do sistema de quarta ordem.

Considerando a forma padrão do sistema de segunda ordem:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

Temos que o tempo de acomodação para o critério de 5% é $t_s = \frac{3}{\sigma}$, então $\sigma = 3/t_s = 0.299$. Como $\sigma = \zeta w_n$, então $2\zeta w_n = 0.598$. Temos que $M_s = 0.6182 = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$, o que nos dá $\zeta = 0.1513$. Então, $\omega_n = \frac{\sigma}{\zeta} = 1.98$.

Logo, o sistema de segunda ordem que se aproxima do sistema de quarta ordem é:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{3.92}{s^2 + 0.598s + 3.92}$$

Executando novamente o código obtém-se:

$$\begin{aligned} rise\_time &= 0.5800 \\ peak\_time &= 1.6000 \\ max\_overshoot &= 0.6188 \\ settling\_time &= 13.0200 \end{aligned}$$

que são valores bastante próximos ao do sistema de quarta ordem.

6

Temos que:

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)}$$

E o erro é dado por:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

Onde $R(s) = \frac{1}{s^3}$. Segundo o teorema do valor final:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

Portanto:

$$\lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + \frac{2}{s(s+1)}} \frac{1}{s^3} = \infty$$

Foi executado o código:

```
num = [2];
den = [1 1 2];
t = 0:0.2:10;
r = 0.5*t.^2;
y = lsim(num, den, r, t);
plot(t,r,'-',t,y,'o',t,y,'-')
grid
title('Resposta a Aceleracao Unitaria')
xlabel('t (s)')
ylabel('Entrada e Saida')
```

O gráfico obtido foi:

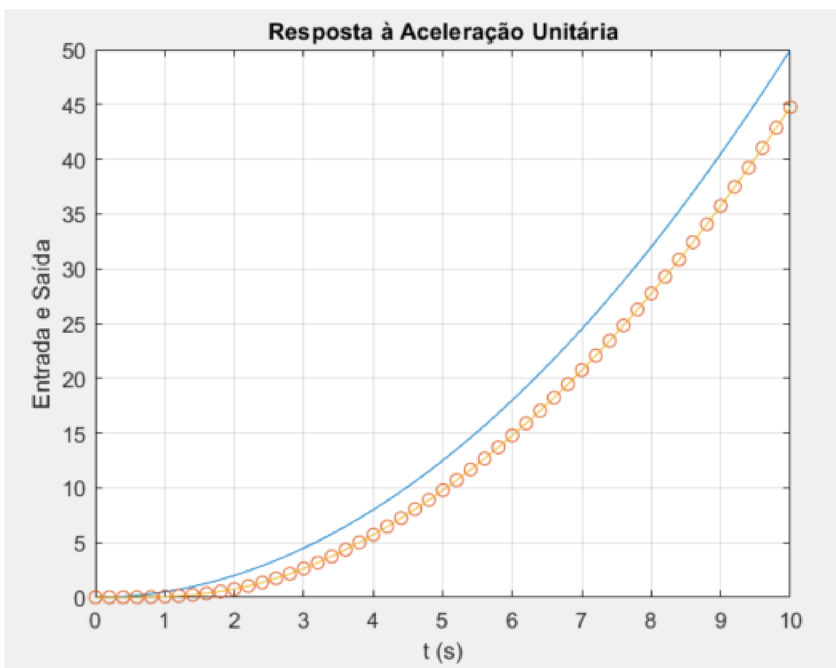

Figura 25: Gráfico de resposta a rampa.

Como é possível conferir, o erro vai aumentando indefinidamente com o tempo, ou seja, vai pra infinito, assim como havia sido calculado anteriormente.

7

É dado o sistema:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -6 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Consegue-se facilmente achar sua função de transferência rodando o pequeno script abaixo:

```
A = [ 0, 1, 0; 0, 0, 1; -2 -2 -4];
B = [0; 0; 1];
C = [1, 0, 0];
D = 0;

[num, den] = ss2tf(A,B,C,D);
tf(num, den)
```

O resultado obtido foi:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 2s + 2}.$$

Em seguida, foi encontrada a solução das equações de estados para a entrada ao degrau ($U(s) = \frac{1}{s}$). Para isso foi usado o script abaixo:

```
syms s
TF = 1/(s^3 + 4*s^2 + 2*s + 2);
U = 1/s;
Y = TF*U;
y=vpa(ilaplace(Y))
```

Obteve-se como resultado:

$$0.5 - 0.48e^{-0.2t}\cos(0.72t) - 0.25e^{-0.2t}\sin(0.72t) - 0.023e^{-3.6t}$$

8

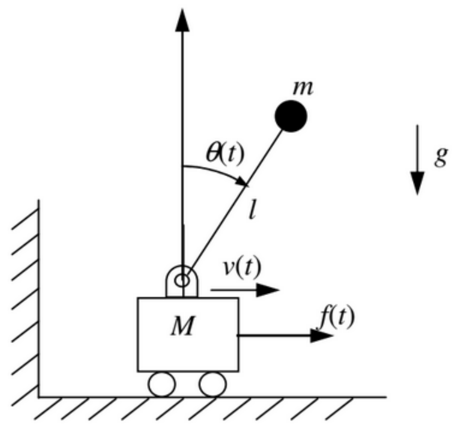

Figura 26: Esquema do pêndulo invertido sobre o carro.

O pendulo invertido sobre o carro (figura 26) pode ser modelado pelo sistema de equações diferenciais não lineares:

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ ml\cos(\theta(t))\dot{v}(t) + ml^2\dot{\omega}(t) - mgl\sin(\theta(t)) = 0 \\ (M+m)\dot{v}(t) + ml\cos(\theta(t))\dot{\omega}(t) - ml\sin(\theta(t))\omega^2(t) = f(t), \end{cases}$$

onde $\theta(t)$ é a posição angular do pêndulo, $\omega(t)$ é a velocidade angular do pêndulo, $v(t)$ é a velocidade do carro, $f(t)$ é a força aplicada no carro, M é a massa do carro, m é a massa do pêndulo e l é o comprimento do pêndulo.

Esse sistema na forma de estados linearizado é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u, onde \begin{cases} x_1 = \theta(t) \\ x_2 = \omega(t) = \dot{\theta}(t) \\ x_3 = x(t) \\ x_4 = \dot{x}(t) = v(t) \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Calculou-se então a matriz matriz de função de transferência do sistema, relacionando (y = $\theta(t)$) com a entrada (u = $f(t)$), e também obteve-se o plot da sua resposta ao degrau utilizando o código abaixo:

```
M = 10; m = 2; l = 1; g = 9.8;

A = [ 0, 1, 0, 0; (M+m)*g/(M*l), 0, 0, 0; 0, 0, 0,
    1; (-m/M)*g, 0, 0, 0];
B = [0; -1/(M*l); 0; 1/M];
C = [1, 0, 0, 0];
D = 0;

[num, den] = ss2tf(A,B,C,D);
TF = tf(num, den)
step(num,den);
```

Obteve-se como resposta:

```
TF =

              -0.1 s^2
  -----------------------------------
  s^4 - 4.441e-16 s^3 - 11.76 s^2
```

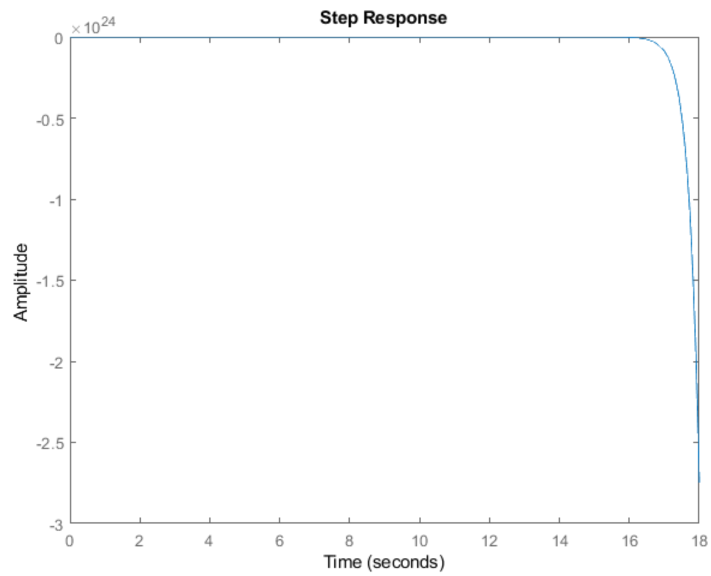

Figura 27: Resposta ao degrau do pendulo invertido sobre o carro.

9