Aula 15 Cálculo 3B Aula 24 Calculo 3A

Aula passada

Eq. lineares não homogênea
↳ coeficientes a determinar

Aula Hoje

↳ outro método para achar Y_p: variação das constantes

3.7 Variação das Constantes

↳ método para determinar uma solução particular

↳ serve para equações mais gerais

Seja $$\boxed{y'' + p(t)y' + q(t) = G(t)} \quad (*)$$

uma equação não homogênea

e $$\boxed{y_H(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)}$$

solução geral de

$$\boxed{y'' + p(t)y' + q(t) = 0} \quad \text{(homogênea)}$$

Nossa canditata a solução particular de (*) será

$$\boxed{y_p(t) = \underbrace{u_1(t)\, y_1(t) + u_2(t)\, y_2(t)}_{\text{variação das constantes}}}$$

Objetivo: Caracterizar as funções u e v

Para isso vamos derivar e substituir

$$y_p' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'$$

$$= u_1 y_1' + u_2 y_2' + \underbrace{u_1' y_1 + u_2' y_2}$$

Vamos supor $\boxed{u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0}$ Equação 1

Assim $y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$ derivando

$$y_p'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''$$

substituindo:

$$(u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'') + p(t)(u_1 y_1' + u_2 y_2')$$

$$+ q(t)(u_1 y_1 + u_2 y_2) = G(t)$$

$$u_1 \overbrace{(y_1'' + p(t) y_1' + q(t) y_1)}^{\text{zero}} + u_2 \overbrace{(y_2'' + p(t) y_2' + q(t) y_2)}^{\text{zero}}$$

$$+ u_1' y_1' + u_2' y_2' = G(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1' y_1' + u_2' y_2' = G(t)} \quad \text{Equação 2}$$

Temos $$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = G(t) \end{cases}$$

escrita matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ G(t) \end{pmatrix}$$

resolvendo o sistema

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{Matriz inversa}} \begin{pmatrix} 0 \\ G(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ G(t) \end{pmatrix}$$

Wronskiano

portanto

$$\boxed{u_1' = \frac{-y_2 \cdot G(t)}{W(y_1, y_2)}} \qquad \boxed{u_2' = \frac{y_1 G(t)}{W(y_1, y_2)}}$$

↳ para determinar u_1, u_2 tem que integrar as funções

↳ **Lembre-se** $y_p(t) = u_1 y_1 + u_2 y_2$

e $y(t) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p(t)$

a solução geral.

↳ Método bom para qualquer EDO (não só coeficientes constantes)

↳ Ruim porque tem que resolver integral

Exemplo Resolva $t^2 y'' - 2y = 3t^2 - 1$

Solução:

Passo 1: Resolver a equação homogênea

$$t^2 y'' - 2y = 0 \qquad (\text{Euler})$$

$$x(x-1) - 2 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = -1 \quad , \quad x = 2$$

$$\boxed{y_H(t) = c_1 \frac{1}{t} + c_2 t^2}$$

Passo 2 Por a equação na forma que foi desenvolvida o método

$$y'' - \frac{2}{t^2} = \underbrace{\frac{3t^2 - 1}{t^2}}_{G(t)}$$

Passo 3 solução particular

$$y_p(t) = u_1(t) \cdot \frac{1}{t} + u_2(t)\, t^2$$

onde

$$u_1' = \frac{-\cancel{t^2} \cdot \left(\frac{3t^2 - 1}{\cancel{t^2}} \right)}{W\left(\frac{1}{t}, t^2\right)} \qquad e \qquad u_2' = \frac{\frac{1}{t} \cdot \left(\frac{3t^2 - 1}{t^2} \right)}{W\left(\frac{1}{t}, t^2\right)}$$

$$W\left(\frac{1}{t}, t^2\right) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & t^2 \\ -\frac{1}{t^2} & 2t \end{pmatrix} = 3$$

Então

$$u_1'(t) = \frac{-3t^2 + 1}{3} = -t^2 + \frac{1}{3}, \quad u_2'(t) = \frac{\frac{3}{t} - \frac{1}{t^3}}{3} = \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3}$$

$$u_1(t) = -\frac{t^3}{3} + \frac{1}{3}t$$

$$u_2(t) = \ln t + \frac{1}{6t^2}$$

portanto

$$y_p(t) = \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{1}{3}t \right) \cdot \frac{1}{t} + \left(\ln t + \frac{1}{6t^2} \right) t^2$$

$$= -\frac{t^2}{3} + \frac{1}{3} + t^2 \ln t + \frac{1}{6} = \frac{t^2}{3} + t^2 \ln t + \frac{1}{2}$$

E a solução geral é

$$y(t) = c_1 \frac{1}{t} + \underbrace{c_2 t^2 + \frac{t^2}{3}} + t^2 \ln t + \frac{1}{2}$$

$$y(t) = c_1 \frac{1}{t} + K_2 t^2 + t^2 \ln t + \frac{1}{2}$$