Capítulo

11

Antenas e guias de onda

O objetivo deste capítulo é prosseguir analisando as equações de Maxwell, sempre com o propósito de fazer deduções que ajudem na compreensão clara e precisa de suas aplicações na tecnologia.

Iniciaremos demonstrando matematicamente que os potenciais gerados no espaço pelas antenas são ondas em propagação, da mesma forma que as ondas de tensão e corrente nas linhas de transmissão. Em seguida, analisaremos os conceitos básicos envolvendo antenas de transmissão e recepção. Conceituaremos o projeto de enlaces de radiocomunicações, a equação-radar e os satélites geoestacionários.

Por meio das condições de fronteira dos campos, são analisados os guias de onda retangulares, a cavidade ressonante e o T mágico.

11.1 Propagação de potenciais

Ao estudarmos a eletrostática, vimos que, a partir de uma distribuição de cargas, podemos obter o potencial de um ponto do espaço pela superposição de potenciais de cargas pontuais, dados por:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Em seguida, o campo elétrico é obtido pela aplicação do gradiente:

$$\bar{E} = -\nabla\Phi$$

Aplicando divergente a ambos os membros desta igualdade e lembrando da primeira equação de Maxwell (no vácuo), temos a equação de Poisson:

$$\nabla\cdot\bar{E} = \nabla\cdot(-\nabla\Phi) \quad \text{e} \quad \nabla\cdot\bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Cuja solução é a superposição de potenciais de cargas pontuais:

$$\Phi = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho dv}{r}$$

Analogamente, no estudo da magnetostática, o fato do divergente de $\bar{B}$ ser nulo nos levou a definir o potencial vetor $\bar{A}$:

$$\nabla \times \bar{B} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \nabla \times \bar{A} = 0 \quad \Rightarrow \bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$

A substituição desta igualdade na quarta equação de Maxwell em regime estático nos dá:

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_o \bar{J} = \nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$$

Até agora nada dissemos sobre o divergente do potencial vetor. Na equação acima vemos a conveniência de propor nulo o divergente de $\bar{A}$, de modo a obter a equação vetorial de Poisson, semelhante a que obtivemos para o potencial escalar:

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu_o \bar{J}$$

Cuja solução pode ser obtida por analogia, resultando:

$$\bar{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\bar{J}\, dv}{r}$$

Dada uma distribuição de correntes, podemos obter, por esta integral, o potencial vetor em qualquer ponto do espaço e a aplicação do rotacional nos conduzirá ao valor do campo magnético. Este procedimento é o mais utilizado no cálculo do campo irradiado por uma antena.

Precisamos agora nos aprofundar mais na determinação do $\nabla \cdot \bar{A}$ e mostrar que seu valor só é nulo em regime estático. Lembremos da equação da continuidade aplicada a todo o espaço, incluindo uma antena transmissora onde estão as correntes e cargas:

$$\nabla \cdot \bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Vamos manipular algebricamente essa equação de modo a fazer surgir no primeiro membro a expressão do potencial vetor $\bar{A}$ em função de $\bar{J}$ e fazer surgir no segundo membro a expressão do potencial escalar Φ em função da densidade ρ.

Multiplicando ambos os membros por $\mu_o/4\pi r$ (onde r é a distância da antena ao ponto distante em que queremos calcular os potenciais e campos), vem:

$$(\nabla \cdot \bar{J}) \frac{\mu_o}{4\pi r} = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \frac{\mu_o \varepsilon_o}{4\pi \varepsilon_o r}$$

Como o ponto é distante, o valor de r é praticamente igual para todos os pontos em que há cargas e correntes na antena, podendo ser considerado constante e passar para dentro do divergente e da derivada:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mu_0 \bar{J}}{4\pi r}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu_0 \rho}{4\pi r}\right)$$

Integrando no volume onde estão todas as cargas e correntes:

$$\int \nabla \cdot \left(\frac{\mu_0 \bar{J}}{4\pi r}\right) dv = -\int \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu_0 \rho}{4\pi r}\right) dv$$

Invertendo a ordem dos operadores lineares e multiplicando o segundo membro por $\varepsilon_o/\varepsilon_o$, temos:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\bar{J}\,dv}{r} \right) = -\mu_o \varepsilon_o \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\rho dv}{r} \right)$$

Reconhecendo as expressões dos potenciais $\bar{A}$ e Φ temos a chamada condição de Lorentz:

$$\nabla \cdot \bar{A} = -\mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

no qual confirmamos que $\nabla \cdot \bar{A}$ somente é nulo em regime estático, isto é, para Φ constante.

Vamos agora mostrar que, ao considerarmos cargas, correntes e campos variáveis com o tempo, os potenciais Φ e $\bar{A}$ devem ter sua definição generalizada de modo a também se propagarem, acompanhando as ondas eletromagnéticas com a mesma velocidade.

Vamos substituir na segunda equação de Maxwell o campo $\bar{B}$ pelo rotacional de $\bar{A}$:

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \left(\nabla \times \bar{A} \right)}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

de onde:

$$\nabla \times \bar{E} + \nabla \times \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0$$

ou:

$$\nabla \times \left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Lembrando que o rotacional do gradiente é zero, podemos generalizar a definição de potencial escalar Φ, que costuma ser chamado de potencial dinâmico ou potencial retardado:

$$\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi$$

Vamos aplicar divergente a ambos os membros, de modo a forçar a presença da densidade de carga, que é a geradora do potencial escalar:

$$\nabla \cdot \bar{E} + \nabla \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \nabla \cdot (-\nabla \Phi)$$

$$\frac{\rho}{\varepsilon_o} + \frac{\partial (\nabla \cdot A)}{\partial} = -\nabla^2 \Phi$$

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial \left(\nabla \cdot \bar{A} \right)}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

onde vemos que recaímos na equação de Poisson, no caso de o divergente de $\bar{A}$ ser nulo. Estamos, porém, interessados em mostrar que o potencial Φ se propaga, devendo, então, satisfazer a equação de ondas.

Lembrando que as cargas geradoras do potencial Φ estão nas antenas transmissoras, temos $\rho = 0$ em todos os pontos do espaço livre, e a equação para Φ se torna:

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial \left(\nabla \cdot \bar{A} \right)}{\partial t} = 0$$

Usando a condição de Lorentz:

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = 0$$

E chegamos à equação de ondas:

$$\nabla^2 \Phi - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

que é análoga a que chegamos para o campo elétrico no Capítulo [illegible]:

$$\nabla^2 \dot{\bar{E}} + \omega^2 \mu_o \varepsilon_o \dot{\bar{E}} = 0 \text{ (na frequência)}$$

$$\nabla^2 \bar{E} - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \text{ (no tempo)}$$

Concluímos que o potencial escalar se propaga com a velocidade da luz.

Por um procedimento semelhante, vamos obter para o potencial vetor $\bar{A}$ a equação de ondas a partir da quarta equação de Maxwell:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

Usando $\bar{B} = \mu_o \bar{H}$ e $\bar{D} = \varepsilon_o \bar{E}$:

$$\nabla \times \bar{B} = \mu_o \bar{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

Substituindo $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$ e usando a seguinte identidade vetorial, vem:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} = \mu_o \bar{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

Porém, o campo elétrico em função do potencial escalar e do potencial vetor vale:

$$\bar{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

Substituindo este campo $\bar{E}$ na expressão anterior:

$$\nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} = \mu_o \bar{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla \Phi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right)$$

ou:

$$\nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} = \mu_o \bar{J} + \nabla\left(-\mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2}$$

Se substituirmos $\nabla \cdot \bar{A}$ pela condição de Lorentz, anteriormente deduzida, vemos que os gradientes em ambos os membros se cancelam, resultando:

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu_o \bar{J}$$

Vemos que, se o campo $\bar{A}$ for estático, recaímos na equação vetorial de Poisson. Lembrando que as cargas e correntes geradoras de campos e potenciais estão apenas nas antenas transmissoras:

$$\nabla^2 \Phi - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0$$

Passando para o domínio da frequência, basta substituir cada derivada no tempo por $j\omega$:

$$\nabla^2 \dot{\Phi} + \omega^2 \mu_o \varepsilon_o \dot{\Phi} = 0$$

$$\nabla^2 \dot{\bar{A}} + \omega^2 \mu_o \varepsilon_o \dot{\bar{A}} = 0$$

Lembrando a constante de fase:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_o \varepsilon_o}$$

Temos:

$$\nabla^2 \dot{\Phi} + \beta^2 \dot{\Phi} = 0$$

$$\nabla^2 \dot{\bar{A}} + \beta^2 \dot{\bar{A}} = 0$$

Vamos resolver a equação de ondas em Φ para uma carga pontual na origem de um sistema de coordenadas esféricas e depois vamos generalizar por superposição. A simetria nos dá variação apenas em r para o potencial:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\dot{\Phi}}{dr} \right) + \beta^2 \dot{\Phi} = 0$$

Como esperamos que o potencial continue a ter r no denominador, vamos fazer a substituição:

$$\dot{\Phi} = \frac{f(r)}{r}$$

que resulta:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{rf' - f}{r^2} \right) + \beta^2 \frac{f}{r} = 0$$

$$\frac{1}{r} \left(rf'' + f' - f' \right) + \beta^2 f = 0$$

$$f'' + \beta^2 f = 0$$

Propondo a solução exponencial $f = Ke^{sr}$:

$$Ks^2 e^{sr} + \beta^2 K e^{sr} = 0$$

$$s^2 + \beta^2 = 0 \Rightarrow s = \pm j\beta$$

Tomando apenas a solução negativa, que vai indicar a onda se propagando no sentido positivo de r:

$$f = Ke^{-j\beta r}$$

$$\dot{\Phi} = \frac{K}{r} e^{-j\beta r}$$

Para determinar a constante K, basta lembrar que a solução é válida para qualquer frequência, inclusive $\omega = 0$, onde $\beta = 0$, valendo então a expressão do potencial na eletrostática:

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r} = \frac{K}{r} e^{o} \Rightarrow K = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}$$

Resultando:

$$\dot{\Phi} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r} e^{-j\beta r}$$

No tempo, teremos:

$$\Phi(r,t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r} \cos(\omega t - \beta r)$$

o que significa ondas esféricas de equipotenciais em propagação com a velocidade da luz, geradas por uma carga pontual, variando senoidalmente com amplitude q, frequência ω.

A solução da carga pontual obtida acima pode ser generalizada por superposição para uma distribuição qualquer de cargas. Voltando ao domínio da frequência, temos:

$$\dot{\Phi} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r} e^{-j\beta r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\rho dv}{r} e^{-j\beta r}$$

E como a equação para o potencial vetor $\dot{\bar{A}}$ é a mesma, sua solução é:

$$\dot{\bar{A}} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\dot{\bar{J}}\, dv}{r} e^{-j\beta r}$$

Assim, vemos que as expressões dos potenciais dinâmicos são as mesmas dos potenciais estáticos, acrescidas do fator $e^{-j\beta r}$. Com uma boa intuição já seria possível prever essa propagação.

Para interpretar, mais uma vez, a presença desse fator, vamos passá-lo para o tempo, resultando:

$$\cos(\omega t - \beta r) = \cos\omega\left(t - \frac{\beta}{\omega} r\right) = \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

onde vemos que, para r nulo, temos uma variação senoidal e, para r qualquer, vemos que a mesma variação ocorre com um atraso r/c. Daí a denominação de potenciais retardados. Então, para calcular os campos $\bar{E}$ e $\bar{H}$ irradiados por uma antena, teríamos de saber sua distribuição de cargas e correntes, calcular seus potenciais escalar e vetor e aplicar:

$$\bar{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

$$\bar{H} = \frac{\nabla \times \bar{A}}{\mu_o}$$

No entanto, o método usual e mais fácil é calcular o potencial vetor a partir da distribuição de correntes:

$$\dot{\bar{A}} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int \frac{\dot{\bar{J}}\,dv}{r}\,e^{-j\beta r}$$

Obter o campo $\bar{H}$ a partir do rotacional de $\bar{A}$:

$$\dot{\bar{H}} = \frac{\nabla \times \dot{\bar{A}}}{\mu_o}$$

E obter o campo $\bar{E}$ usando a quarta equação de Maxwell:

$$\nabla \times \dot{\bar{H}} = j\omega\varepsilon_0 \dot{\bar{E}} \;\Rightarrow\; \dot{\bar{E}} = \frac{\nabla \times \dot{\bar{H}}}{j\omega\varepsilon_o}$$

Esse é o procedimento que adotaremos para calcular os campos irradiados por antenas dipolo.

11.2 Distribuição de corrente em antenas

A antena mais simples é o dipolo, que é uma linha de transmissão em aberto na extremidade cujos fios fazem um ângulo de 90° com a linha. Para determinar a distribuição de corrente na antena é usual fazer-se a aproximação admitindo que a onda estacionária de corrente que existia na linha se mantenha ao dobrar o fio de 90°. A Figura 11.1 mostra a onda estacionária de corrente em uma antena dipolo cujo comprimento é λ.

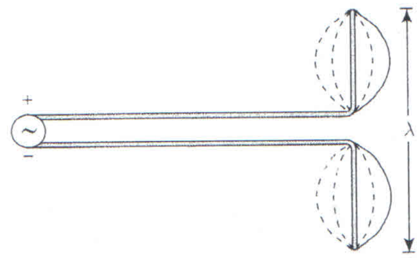

FIGURA 11.1

Para um dipolo de meia onda, a distribuição de corrente se vê na Figura 11.2.

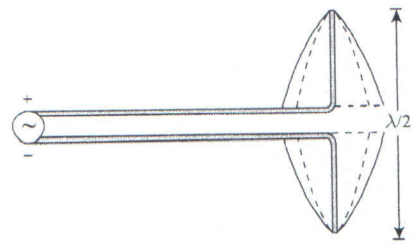

FIGURA 11.2

O comprimento do dipolo curto é muito pequeno em relação ao comprimento de onda $2\ell << \lambda$. Neste caso, a distribuição de corrente é apresentada na Figura 11.3, na qual a senoide foi aproximada por linhas retas.

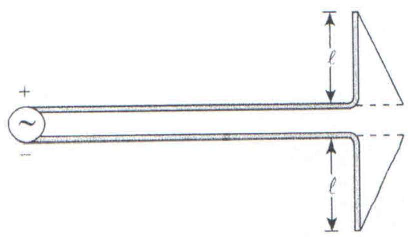

FIGURA 11.3

11.3 Dipolo curto

Usando a distribuição de corrente da Figura 11.3, vamos calcular o potencial vetor em um ponto (r, θ, ϕ) criado pelo dipolo curto centrado em um sistema de coordenadas esféricas, como se vê na Figura 11.4.

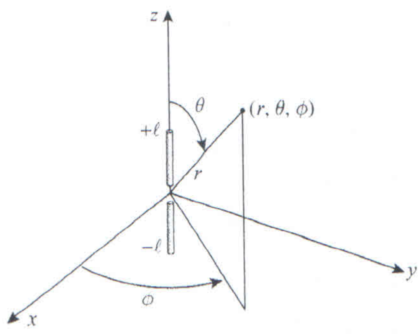

FIGURA 11.4

Como a antena é um fio de seção S e não um volume, vem:

$$J dv = \frac{I(z)}{S}dv = \frac{I(z)}{S}S dz = I(z)dz$$

de onde:

$$\dot{\bar{A}} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int \frac{I(z)}{r}e^{-j\beta r}dz\,\bar{a}_z$$

Outra aproximação usada no dipolo curto é considerar que a distância r, da origem do sistema de coordenadas ao ponto distante, se mantém a mesma enquanto a integral percorre o comprimento da antena.

$$\dot{\bar{A}} = \frac{\mu_o}{4\pi r}e^{-j\beta r}\int_{-\ell}^{+\ell} I(z)dz\,\bar{a}_z$$