

Sistemas realimentados

EP13 - Gráfico polar e critério de estabilidade de nyquist.

Carlos Daniel Albertino Vieira e Eduardo Junior

Seja a FT $G(s) = \frac{2ke^{-2s}}{(5s+1)(7s+1)}$

1) Usando a aproximação de padé de ordem 1 para o atraso de transporte, faça o gráfico polar de $G(jw)$ sem usar o matlab .

A aproximação de Padé de ordem 1 é dada por: $e^{-\theta s} = \frac{-0.5\theta s + 1}{0.5\theta s + 1}$. Logo, é possível obter a função de malha aberta aproximada de $G(s)$ pelo aproximante de Padé como segue:

$$G(s) = \frac{2ke^{-2s}}{(5s+1)(7s+1)} = \frac{2k(-s+1)}{(5s+1)(7s+1)(s+1)} = \frac{2k}{35} \frac{(-s+1)}{\left(s+\frac{1}{5}\right)\left(s+\frac{1}{7}\right)(s+1)}$$

Para construir o gráfico polar é necessário avaliar $G(s)$ com $s = jw$, assim:

$$G(s) = \frac{2k}{35} \frac{(-s+1)}{\left(s+\frac{1}{5}\right)\left(s+\frac{1}{7}\right)(s+1)}$$
$$G(jw) = \frac{2k}{35} \frac{(-jw+1)}{\left(jw+\frac{1}{5}\right)\left(jw+\frac{1}{7}\right)(jw+1)} = \frac{2k}{35} \frac{\left(\frac{1}{5}-jw\right)}{\left(w^2+\frac{1}{25}\right)} \frac{\left(\frac{1}{7}-jw\right)}{\left(w^2+\frac{1}{49}\right)} \frac{(1-jw)^2}{(w^2+1)}$$

Obtido $G(jw)$, o próximo passo é obter a equação que rege a magnitude de $G(jw)$. Isso pode ser feito como segue:

$$|G(jw)| = \left| \frac{2k}{35} \right| \left| \frac{\left(\frac{1}{5} - jw\right)}{\left(w^2 + \frac{1}{25}\right)} \right| \left| \frac{\left(\frac{1}{7} - jw\right)}{\left(w^2 + \frac{1}{49}\right)} \right| \left| \frac{(1 - jw)^2}{(w^2 + 1)} \right|$$

$$|G(jw)| = \frac{2|k|}{35} \frac{\left|\frac{1}{5} - jw\right|}{\left(w^2 + \frac{1}{25}\right)} \frac{\left|\frac{1}{7} - jw\right|}{\left(w^2 + \frac{1}{49}\right)} \frac{|(1 - jw)^2|}{(w^2 + 1)} = \frac{2|k|}{35} \frac{\sqrt{w^2 + \frac{1}{25}}}{\left(w^2 + \frac{1}{25}\right)} \frac{\sqrt{w^2 + \frac{1}{49}}}{\left(w^2 + \frac{1}{49}\right)} \frac{(\sqrt{w^2 + 1})^2}{(w^2 + 1)}$$

$$|G(jw)| = \frac{2|k|}{35} \frac{1}{\sqrt{w^2 + \frac{1}{25}} \sqrt{w^2 + \frac{1}{49}}} = \frac{2|k|}{35} \frac{1}{\sqrt{\left(w^2 + \frac{1}{25}\right)\left(w^2 + \frac{1}{49}\right)}}$$

$$|G(jw)| = \frac{2k}{35} \frac{1}{\sqrt{\left(w^2 + \frac{1}{25}\right)\left(w^2 + \frac{1}{49}\right)}}, \quad (k \geq 0)$$

Além da magnitude, o gráfico polar demanda também a equação que rege o ângulo de $G(jw)$. Assim:

$$\angle G(jw) = \angle\left(\frac{2k}{35}\right) - \angle\left(jw + \frac{1}{5}\right) - \angle\left(jw + \frac{1}{7}\right) - \angle(jw + 1) + \angle(-jw + 1)$$

$$\angle G(jw) = \angle k - \text{atan}(5w) - \text{atan}(7w) - \text{atan}(w) + \text{atan}(-w)$$

$$\angle G(jw) = \angle k - \text{atan}(5w) - \text{atan}(7w) - 2\text{atan}(w)$$

$$\angle G(jw) = -\text{atan}(5w) - \text{atan}(7w) - 2\text{atan}(w), \quad (k \geq 0)$$

Para $w = 0$, tem-se:

$$|G(j0)| = \frac{2k}{35} \frac{1}{\sqrt{0^2 + \frac{1}{25}} \sqrt{0^2 + \frac{1}{49}}} = 2k$$

$$\angle G(j0) = -\text{atan}(0) - \text{atan}(0) - 2\text{atan}(0) = 0^\circ$$

Para $w \rightarrow \infty$, tem-se:

$$|G(j\infty)| = \frac{2k}{35} \frac{1}{\sqrt{\infty + \frac{1}{25}} \sqrt{\infty + \frac{1}{49}}} = 0$$

$$\angle G(j\infty) = -\text{atan}(\infty) - \text{atan}(\infty) - 2\text{atan}(\infty) = -360^\circ$$

Note que para w variando de 0 a ∞ , o ângulo de $G(jw)$ varia de 0° a -360° .

Seja agora w^* o valor de w , tal que $\angle G(jw^*) = 180^\circ$.

Sabemos que $G(jw^*)$ é puramente real, por ser o ponto em que toca o eixo real do plano complexo.

Logo, podemos encontrar w^* como segue:

obs: definimos $A(w)$ apenas para facilitar as contas.

$$A(w) = \frac{2k}{35} \frac{1}{\left(w^2 + \frac{1}{25}\right)\left(w^2 + \frac{1}{49}\right)(w^2 + 1)}$$

$$G(jw) = A\left(\frac{1}{5} - jw\right)\left(\frac{1}{7} - jw\right)(1 - jw)^2 = A\left(\left(\frac{1}{35} - w^2\right) - \frac{12w}{35}j\right)((1 - w^2) - 2wj)$$

$$\text{Im}(G(jw)) = A\left(\left(\frac{1}{35} - w^2\right)(-2w) - \left(\frac{12w}{35}\right)(1 - w^2)\right)j$$

$$\text{Im}(G(jw^*)) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{35} - w^{*2}\right)(-2w^*) - \left(\frac{12w^*}{35}\right)(1 - w^{*2}) = 0$$

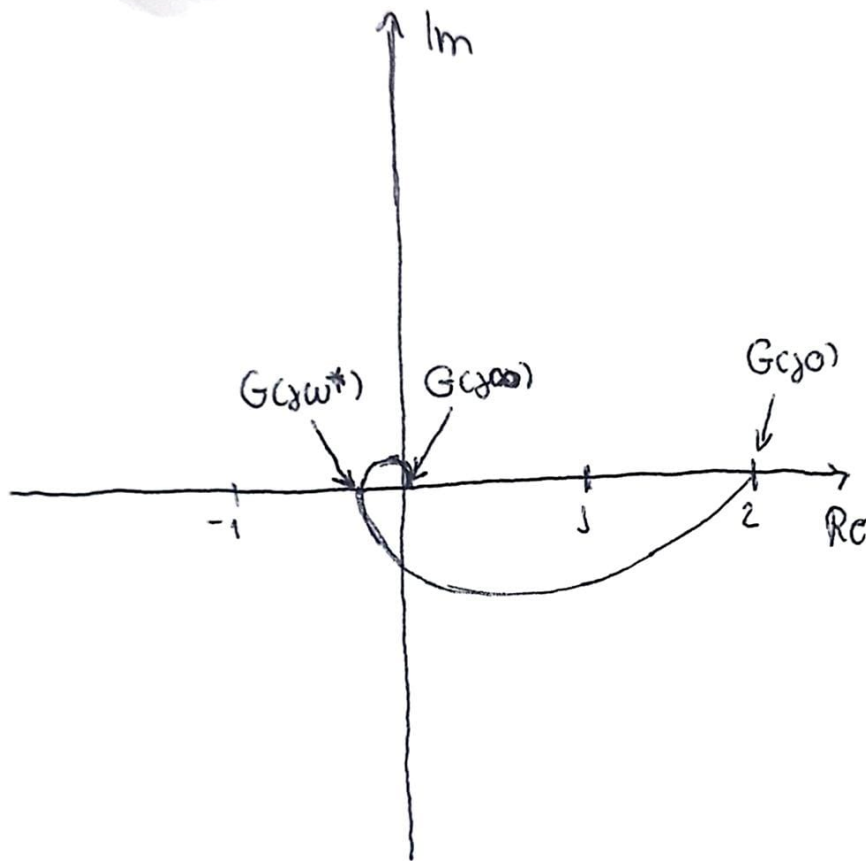
$$1 - 35w^{*2} + 6 - 6w^{*2} = 0$$

$$w^* = \sqrt{\frac{7}{41}} \approx 0,4132 \frac{\text{rad}}{s}$$

Portanto, nossa tabela do gráfico polar (para $k > 0$) é a seguinte:

w	$ G(jw) $	$\angle G(jw)$
0	2k	0
0,4132	0,2847k	-180
∞	0	-360

Para $k = 1$, o gráfico polar (w variando de 0 a +infinito) pode ser esboçado da seguinte maneira:



2) Usando o gráfico polar obtido no item 1, determine o ganho máximo K_{max} para que a equação característica $1 + kG(s) = 0$ não possua raízes no semiplano direito.

$$G(s) = \frac{2k}{35} \frac{(-s + 1)}{\left(s + \frac{1}{5}\right)\left(s + \frac{1}{7}\right)(s + 1)}$$

Note que $G(s)$ não tem polos no SPD ($P_d = 0$).

Além disso, $G(s)$ não tem polos sobre o eixo imaginário ($P_w = 0$).

Para o sistema em questão, tem-se o seguinte pelo critério de Nyquist:

$$\phi = \left(Z_d - \frac{P_w}{2} - P_d \right) 180$$

$$\phi = (Z_d) 180$$

Para que o sistema seja estável não podem haver zeros no SPD na equação de malha fechada de $G(jw)$. Logo, Z_d também deve ser 0.

Portanto, o sistema em questão só é estável caso:

$$\phi = 0^\circ$$

Isso só acontece quando a imagem de $G(j\omega)$ toca o eixo real em valores maiores que -1 do plano complexo.

ω	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
0	2k	0
0,4132	0,2847k	-180
∞	0	-360

Agora, note pela tabela obtida anteriormente que apenas a magnitude de $G(j\omega)$ está em função de k.

Nesse sentido, k influencia no ponto do eixo real onde a imagem de $G(j\omega)$ toca no gráfico.

O valor máximo do ganho k é aquele que posiciona $G(j\omega)$ exatamente no ponto (-1, 0) do eixo real. Nesse ponto, o sistema se torna marginalmente estável e qualquer valor de k acima de k_{\max} torna o sistema instável.

O valor de k_{\max} corresponde a recíproca da magnitude de $G(j\omega)$ quando $\angle G(j\omega) = 180^\circ$.

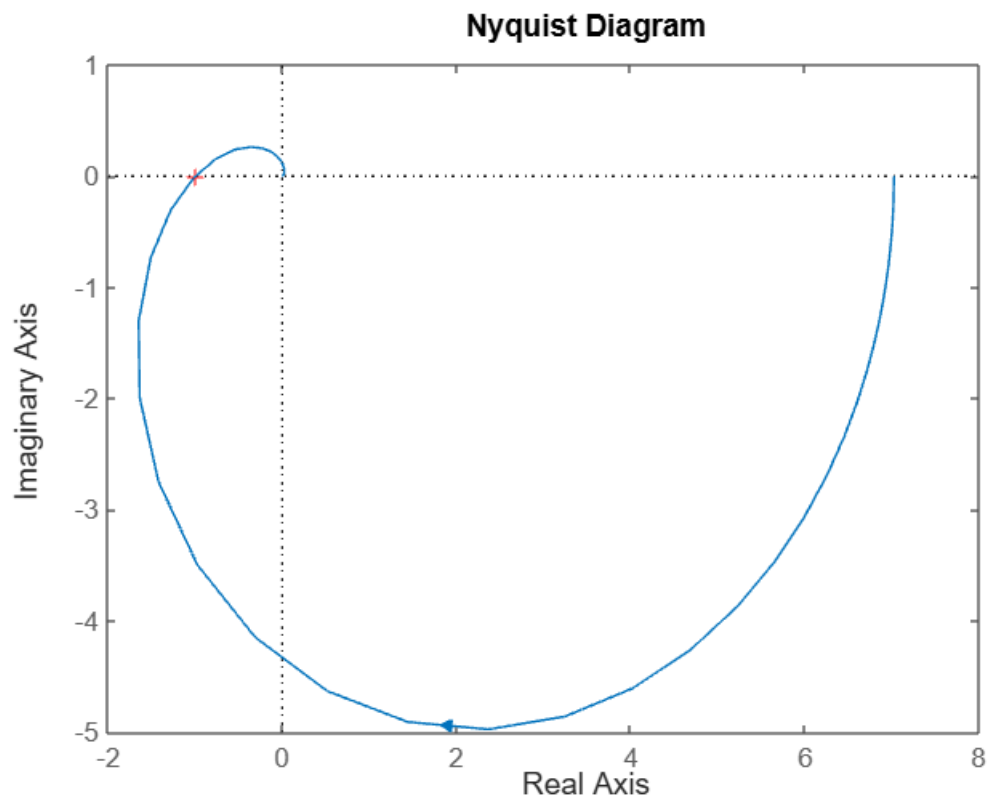
Assim, pode ser obtido como segue:

$$\angle G(j\omega^*) = \angle G(j0,4132) = 180^\circ$$

$$k_{\max} = \frac{1}{|G(j\omega^*)|} = \frac{1}{0,2847} = 3.5125$$

É possível conferir o valor encontrado a seguir:

```
s=tf('s');  
kmax=3.5125;  
Gm1=2*kmax*(-s+1)/(35*(s+1/5)*(s+1/7)*(s+1));  
h=nyquistplot(Gm1);  
set(h,'ShowFullContour','off');
```

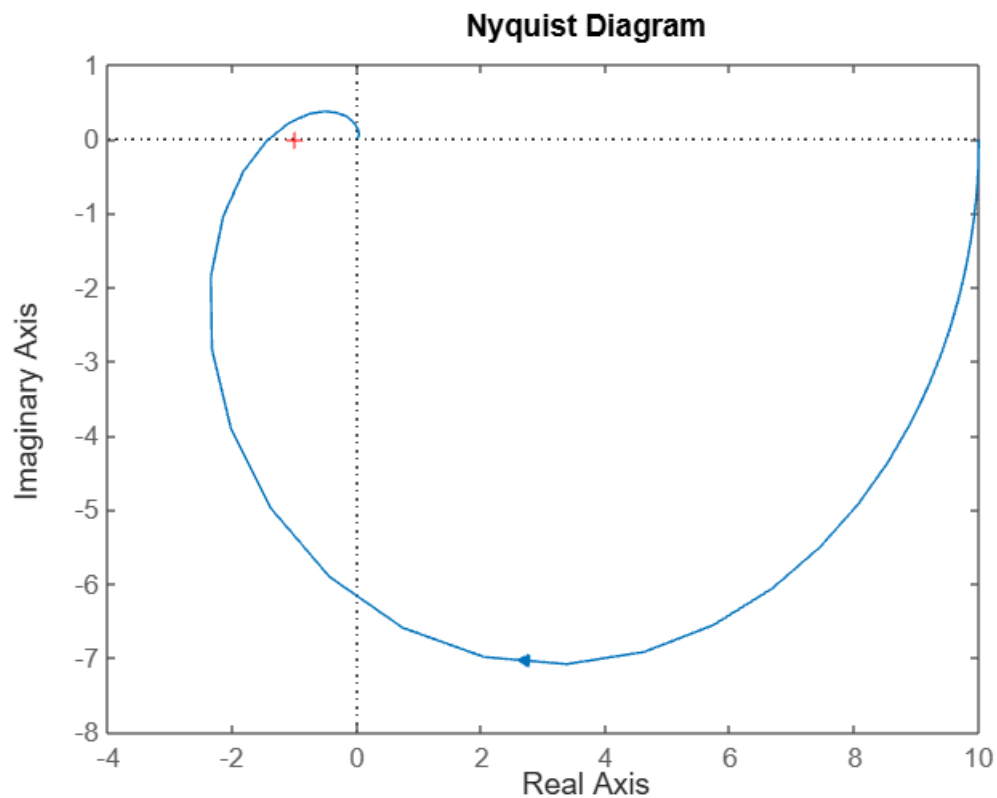


3) Escolha um valor de ganho k maior que K_{max} , e determine quantas raízes da equação característica estão no semiplano direito.

Para $k = 5$ tem-se:

ω	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
0	10	0
0,4132	1.4235	-180
$+\infty$	0	-360

```
figure;
k=5;
Gma2=2*k*(-s+1)/(35*(s+1/5)*(s+1/7)*(s+1));
h=nyquistplot(Gma2);
set(h, 'ShowFullContour', 'off');
```



Note que $G(j\omega)$ toca o eixo real em um ponto menor que -1.

Pode-se analisar a estabilidade do sistema em questão por meio do critério de Nyquist, que também revelará quantos zeros da equação característica de $G(s)$ estão no SPD.

O critério de Nyquist é enunciado a seguir:

$$\phi = \left(Z_d - \frac{P_w}{2} - P_d \right) 180$$

Para o caso de $G(s)$ calculado, tem-se:

- $P_w = 0$
- $P_d = 0$
- $\phi = 360$

Logo resolvendo:

$$360 = (Z_d)180$$

$$Z_d = 2$$

Como existem 2 zeros no SPD, tem-se que as raízes da equação de malha fechada resultam em dois polos no SPD.

4) Para o ganho k obtido no item 3, verifique se o controlador PD dado por $1+sK_d$ estabiliza este sistema usando o critério de estabilidade de nyquist.

Para entender como o controlador PD pode estabilizar o sistema obtido na questão 3, é necessário entender como o parâmetro K_d modificará a imagem de $G(jw)$.

Assim:

$$|G(jw)| \cdot |1 + sK_d| = |G(jw)| \cdot \left(\sqrt{K_d^2 w^2 + 1} \right)$$

a solução não está correta. A resposta correta será disponibilizada pelo professor

$$\angle G(jw) + \angle(1 + sK_d) = \angle G(jw) + \text{atan}(wK_d)$$

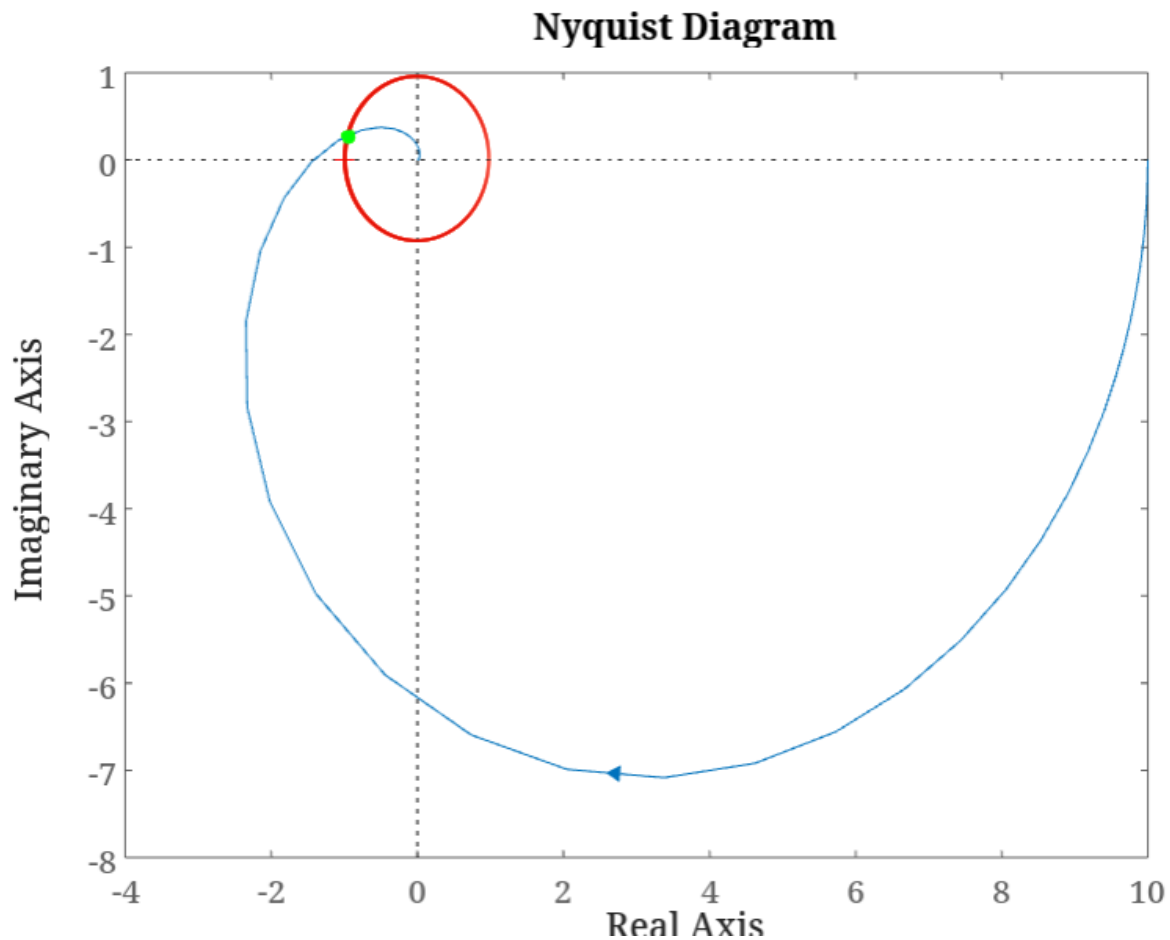
Note que tanto a magnitude como o ângulo de $G(jw)$ são modificados pelo controlador PD.

Nesse caso, a magnitude de $G(jw)$ é ampliada por um certo fator, que garantidamente é maior que 1.

Enquanto isso, a contribuição angular do PD a $G(jw)$ diminui o defasamento do sistema.

Para que o sistema se torne estável, é preciso que $G(jw)$ toque o eixo real no trecho entre $(-1, 0)$ e a origem do plano complexo.

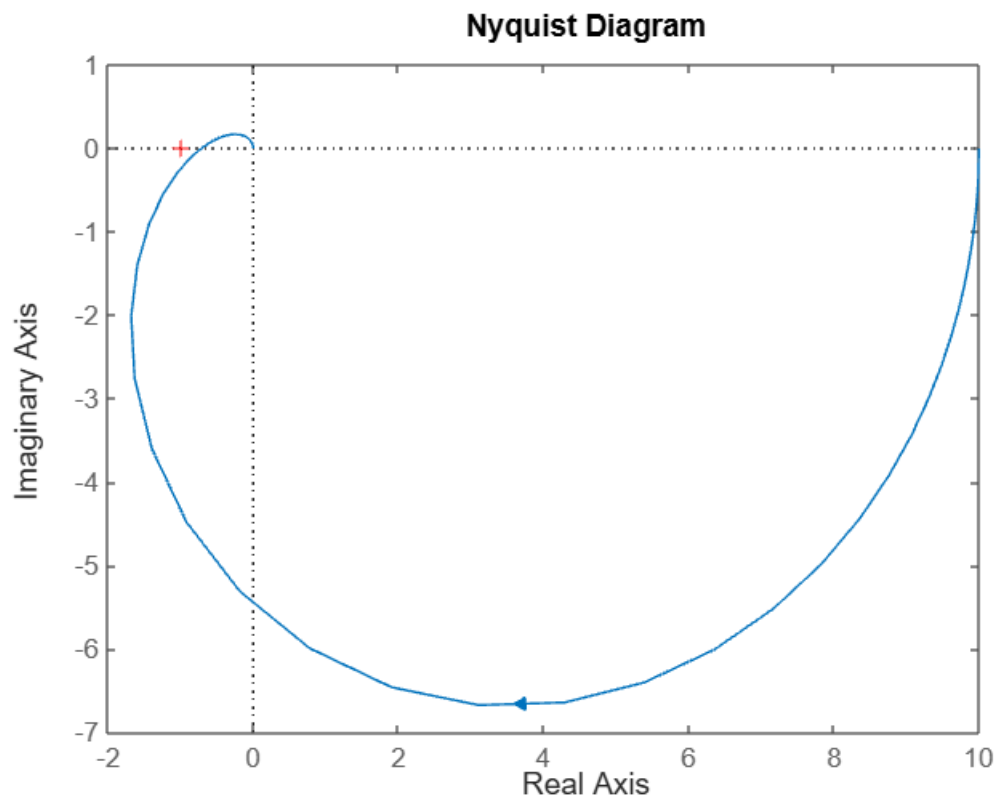
Nesse sentido, uma estratégia a ser usada para estabilizar o sistema consistiria em identificar um valor de K_d que seja capaz de diminuir o defasamento de $G(jw)$ o suficiente para que o faça tocar o eixo real dentro círculo unitário abaixo.



Como K_d contribui justamente para diminuir a defasagem de $G(j\omega)$, o controlador PD pode sim estabilizar o sistema em questão.

A exemplo disso, para $K_d=1.5$ tem-se:

```
Gma3=2*k*(1+1.5*s)*(-s+1)/(35*(s+1/5)*(s+1/7)*(s+1));
h=nyquistplot(Gma3);
set(h,'ShowFullContour','off');
```



Para o caso em questão, tem-se:

- $P_w = 0$
- $P_d = 0$
- $\phi = 0$

Logo, pelo critério de Nyquist:

$$0 = (Z_d)180$$

$$Z_d = 0$$

Como existem 0 polos e 0 zeros no SPD, então o sistema é estável segundo o critério de Nyquist.