

**Exercícios retirados do livro:** BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. Oitava edição. 2006

## Aula 1

Informações sobre o curso

## Aula 2

### Introdução e Modelagem

#### Seção 1.3 pág 14

1. Determine a ordem da equação e diga se ela é linear ou não.

(a)  $t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + 2y = \text{sent}$

(b)  $(1 + y^2) \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + y = e^t$

(c)  $y^{(4)} + y^{(3)} + y'' + y' + y = 1$

(d)  $y' + ty^2 = 0$

(e)  $y'' + \text{sen}(t + y) = \text{sent}$

2. Verifique que cada função dada é solução da equação diferencial

(a)  $y'' - y = 0, y(t) = e^t;$

(b)  $ty' - y = t^2, y(t) = 3t + t^2;$

(c)  $t^2 y'' + 5ty' + 4y = 0, t > 0, y_1(t) = t^{-2}$  e  $y_2(t) = t^{-2} \ln t$

3. Determine os valores de  $r$  para os quais a equação diferencial  $y' - 2y = 0$  tem uma solução da forma  $y = e^{rt}$ .

4. Determine os valores de  $r$  para os quais a equação diferencial  $t^2 y'' + 4ty' + 2y = 0$  tem uma solução da forma  $y = t^r$ .

## Aula 3

**Equações lineares 1ª ordem:**  
Método dos fatores integrantes;  
Comportamento das soluções.

#### Seção 2.1 pág 23

1. Encontre a solução geral da equação diferencial dada e use-a para determinar o comportamento das soluções quando  $t \rightarrow \infty$ .

(a)  $y' + 3y = t + e^{-2t}$  ( $y = ce^{-3t} + (t/3) - (1/9) + e^{-2t}$ )

(b)  $y' - 2y = t^2 e^{2t}$  ( $y = ce^{2t} + t^2 e^{2t}/3$ )

(c)  $ty' + 2y = \text{sent}, t > 0$  ( $y = (c - t \cos t + \text{sent})/t^2$ )

(d)  $y' + 2ty = 2te^{-t^2}, t > 0$  ( $y = t^2 e^{-t^2} + ce^{-t^2}$ )

(e)  $ty' - y = t^2 e^{-t}, t > 0$  ( $y = -te^{-t} + ct$ )

2. Encontre solução do problema de valor inicial dado.

(a)  $y' - y = 2te^{2t}, y(0) = 1$  ( $y = 3e^t + 2(t-1)e^{2t}$ )

(b)  $y' + 2y = te^{-2t}, y(1) = 0$  ( $y = (t^2 - 1)e^{-2t}/2$ )

(c)  $ty' + 2y = t^2 - t + 1, y(1) = \frac{1}{2}, t > 0$  ( $y = (3t^4 - 4t^3 + 6t^2 + 1)/12t^2$ )

(d)  $y' + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2}, y(\pi) = 0, t > 0$  ( $y = (\text{sent})/t^2$ )

(e)  $y' - 2y = e^{2t}, y(0) = 2$  ( $y = (t+2)e^{2t}$ )

(f)  $ty' + 2y = \text{sent}, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, t > 0$  ( $y = t^{-2}((\pi^2/4) - 1 - t \cos t + \text{sent})$ )

(g)  $t^3 y' + 4t^2 y = e^{-t}, y(-1) = 0, t < 0$  ( $y = -(1+t)e^{-t}/t^4$ )

(h)  $ty' + (t+1)y = t, y(\ln 2) = 1, t > 0$  ( $y = -(t - 12e^{-t})/t$ )

3. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{2}y = 2\cos t, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Encontre as coordenadas do primeiro ponto de máximo local da solução para  $t > 0$ .

**Precisa do auxílio de um programa para achar efetivamente o valor de  $t$ .**

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{2}y = -t, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Encontre as coordenadas do primeiro ponto crítico da solução para  $t > 0$  e verifique se ele é máximo ou mínimo local. ( $t = -2 \ln(4/5) > 0$ )

5. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + \frac{2}{3}y = 1 - \frac{1}{2}t, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Encontre o valor de  $y_0$  para o qual a solução encosta no eixo  $t$  mas não atravessa.

6. Encontre o valor de  $y_0$  para o qual a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' - y = 1 + 3\text{sent}, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

permanece finita quando  $t \rightarrow \infty$ . ( $y_0 = -5/2$ )

7. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' - \frac{3}{2}y = 3t + 2e^t, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Encontre o valor de  $y_0$  que separa as soluções que crescem positivamente quando  $t \rightarrow \infty$  das que crescem em módulo com sinal negativo. Como a solução correspondente a esse valor crítico de  $y_0$  se comporta quando  $t \rightarrow \infty$ ? ( $y_0 = -16/3$ )

8. Mostre que, se  $a$  e  $\lambda$  são constantes positivas e se  $b$  é qualquer número real, então toda a solução da equação

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

tem a propriedade que  $y \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

9. Construa uma equação diferencial linear de primeira ordem cujas soluções têm limite 3 quando  $t \rightarrow \infty$ .

6. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \frac{ty(4-y)}{3}, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Determine como o comportamento da solução quando  $t$  aumenta depende do valor inicial  $y_0$ .

$$(y \rightarrow 4 \text{ se } y_0 > 0; y = 0 \text{ se } y_0 = 0; y \rightarrow -\infty \text{ se } y_0 < 0)$$

#### Aula 4

#### Equações não lineares 1ª ordem: Método de equações separáveis.

#### Seção 2.2 pág 27

1. Resolva a equação diferencial dada

(a)  $y' = \frac{x^2}{y}$  ( $3y^2 - 2x^3 = c, y \neq 0$ )

(b)  $y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$  ( $3y^2 - 2\ln|1+x^3| = 3, x \neq -1, y \neq 0$ )

(c)  $y' + y^2 \sin x = 0$  ( $y^{-1} + \cos x = c$  se  $y \neq 0$  e  $y = 0$  em toda parte)

(d)  $xy' = \sqrt{1-y^2}$  ( $y = \sin(\ln|x| + c)$  se  $x \neq 0$  e  $|y| < 1$ ;  $y = -1, y = 1$ )

(e)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$  ( $y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = c, y + e^y \neq 0$ )

(f)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}$  ( $3y + y^3 - x^3 = c$ )

2. Resolva o problema de valor inicial. Quando possível de a solução explícita e determine, aproximadamente, o intervalo no qual a solução está definida.

(a)  $y' = (1-2x)y^2, y(0) = -\frac{1}{6}$  ( $y = 1/(x^2 - x - 6)$ )

(b)  $y' = \frac{1-2x}{y}, y(1) = -2$  ( $y = -\sqrt{2x - 2x^2 + 4}$ )

(c)  $y' = 2x/(y + x^2y), y(0) = -2$  ( $y = -(2\ln(1+x^2) + 4)^{1/2}$ )

(d)  $y' = \frac{3x^2 - e^x}{2y - 5}, y(0) = 1$  ( $y = 5/2 - \sqrt{x^3 - e^x + 13/4}$ )

3. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = 2y^2 + xy^2, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e determine onde a solução atinge seu valor mínimo.

$$(y = -1/(x^2/2 + 2x - 1); x = -2)$$

4. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \frac{2\cos 2x}{3+2y}, \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

e determine onde a solução atinge seu valor máximo.

$$(y = -3/2 + \sqrt{\sin 2x + 1/4}; x = \pi/4)$$

5. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = 2(1+x)(1+y^2), \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e determine onde a solução atinge seu valor mínimo.

$$(y = tg(x^2 + 2x); x = -1)$$

#### Aula 5

#### Equações não lineares 1ª ordem: Método de substituição. Tipo 1, Homogênea, Bernoulli e Riccati.

1. Resolva a equação diferencial dada por meio de uma substituição apropriada.

(a)  $y' = (x + y + 1)^2$

(b)  $y' = \frac{1-x-y}{x+y}$

(c)  $y' = tg^2(x+y)$

(d)  $y' = \sin^2(x+y) - 1$

2. Resolva o problema de valor inicial dado

(a)  $y' = (-2x + y)^2 - 7, y(0) = 0$

(b)  $y' = \frac{3x + 2y}{3x + 2y + 2}, y(-1) = -1$

#### Substituição: pág 28 (Homogênea) 43 (Bernoulli)

1. Mostre que a equação dada é homogênea e resolva.

(a)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$  ( $\arctg(y/x) - \ln|x| = c$ )

(b)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$  ( $x^2 + y^2 - cx^3 = 0$ )

(c)  $\frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x}{2x - y}$  ( $y = -3x$  e  $|y - x| = c|y + 3x|^5$ )

(d)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{x - y}$  ( $y = -x$  e  $2x/(x+y) + \ln|x| = c$ )

(e)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 3y^2}{2xy}$  ( $|x|^3|x^2 - 5y^2| = c$ )

2. As equações dadas são equações de Bernoulli, use substituição para resolvê-las.

(a)  $t^2y' + 2ty - y^3 = 0, t > 0$  ( $y = \pm(5t/(2+5ct^5))^{1/2}$ )

(b)  $y' = ry - ky^2, r > 0, e k > 0$  ( $y = r/(k + cre^{-rt})$ )

(c)  $y' = y - y^3$  ( $y = \pm(1/(1ce^{-2t}))^{1/2}$ )

(d)  $xy' + y = \frac{1}{y^2}$  ( $y = y^3 = 1 + ce^{-3x}$ )

(e)  $y' = y(xy^3 - 1)$  ( $y = y^{-3} = x + 1/3 + ce^{3x}$ )

