Exercícios

1. Suponha que a probabilidade de chover amanhã depende de estar ou não chovendo hoje, independentemente das condições de tempo passadas. Suponha também que se estiver chovendo hoje, a probabilidade de chover amanhã é a, se não estiver chovendo hoje, a probabilidade de chover amanhã é b. Estabeleça a matriz de transição para uma cadeia de Markov de dois estados referente ao processo descrito.

2. Considere um sistema de comunicações que transmite os dígitos 0 e 1. Cada dígito transmitido deve passar por diversos estágios, em cada um dos quais existe uma probabilidade p do dígito não ser modificado. Estabeleça a matriz de transição de uma Cadeia de Markov de dois estados referente a cada estágio pelo qual o dígito deve passar.

3. Em um dia qualquer sua mãe pode estar de bom humor (B), normal (N) ou de mau humor (M). Se ela está de bom humor hoje, então ela estará nos estados B, N ou M amanhã com probabilidades 0.5, 0.4 e 0.1, respectivamente. Se ela está normal hoje, então ela estará B, N ou M amanhã com probabilidades 0.3, 0.4 e 0.3. Se ela está de mau humor hoje, então ela estará B. N ou M amanhã com probabilidades 0.2, 0.3 e 0.5. Estabeleça a matriz de transição de uma Cadeia de Markov de três estados referentes ao humor da sua mãe em um determinado dia.

4. Uma das aplicações mais comuns de Cadeias de Markov é em problemas de estoque. Por exemplo, um almoxarifado estoca um tipo de peça cuja reposição pode ser feita semanalmente. Ao longo de cada semana, a demanda pela peça em questão pode ser considerada uma variável de Poissson, com média igual a um. A demanda em uma semana não depende da demanda nas semanas anteriores. Às sextas-feiras, no final do expediente, o gerente de compras pode fazer uma encomenda para repor o estoque dessa peça. Cada encomenda sempre é atendida em tempo antes da abertura do almoxarifado, na segunda-feira. A política de encomendas é a seguinte: se o número de peças desse tipo disponível no final de semana for zero (nenhuma peça em estoque), será feita uma encomenda de três peças. Do contrário, não se fará encomenda (se ainda existir peça em estoque, não haverá encomenda). Ao longo da semana, se a demanda exceder o estoque, haverá custos adicionais para obtenção da peça em outro almoxarifado, de modo a atender a demanda excedente. Considere que os estados possíveis do sistema são números inteiros que representam quantas peças desse tipo estão disponíveis

no final da semana. Obtenha a matriz de transição de uma etapa do processo descrito.

5. Considere o exercício (1), no qual as condições do tempo são estudadas mediante uma cadeia de Markov de dois estados. Suponha que $a = 0.7; b = 0.4$ e calcule a probabilidade de chover no quarto dia, a partir de hoje, dado que está chovendo hoje.

6. Considere o exercício (4), no qual as condições de estoque de uma peça são estudadas mediante uma cadeia de Markov de quatro estados. Dado que existe uma peça em estoque no final de uma semana, calcule a probabilidade de não haver peça em estoque duas semanas depois.

7. Considere, levando em conta os dados do exercício (5), que a probabilidade incondicional de chover em um determinado dia é 0.4. Calcule a probabilidade incondicional de chover quatro dias após esse dia.

8. Considere, levando em conta os dados dos exercícios 4 e 6, que a referida política de estoque foi implantada a partir de uma situação inicial em que todos os estados possíveis têm a mesma probabilidade incondicional. Determine a probabilidade incondicional de haver três peças em estoque duas semanas depois da implantação do sistema de estoque.

9. Considere uma cadeia de Markov que consiste de três estados 0, 1 e 2, e tem a seguinte matriz de transição de estados:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

   Verifique se essa cadeia de Markov é irredutível. Em caso contrário identifique suas classes.

10. Considere uma Cadeia de Markov consistindo de quatro estados, 0, 1, 2 e 3, tendo a seguinte matriz de transição:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Verifique se essa cadeia de Markov é irredutível. Em caso contrário identifique suas classes.

11. Considere novamente os dados do exercício 5, e os resultados lá obtidos.

    (a) Qual é a probabilidade de chover no oitavo dia, a partir de hoje, dado que hoje está chovendo?

    (b) Idem, dado que hoje não está chovendo?

    (c) Qual é a probabilidade de não chover no oitavo dia, a partir de hoje, dado que hoje está chovendo?

12. Considere novamente o exercício 1.

    (a) Calcule as probabilidades limites dos estados considerados.

    (b) Verifique quais seriam essas probabilidades para os valores de a e b respectivamente iguais a 0.7 e 0.4, conforme considerado nos exercícios 11 e 5, compare os resultados agora obtidos com os anteriores.

13. Considere novamente os dados do exercício 3, referente ao humor da sua mãe. Supondo um longo tempo de convivência, qual é a proporção do tempo em que ela estará em cada um dos três estados?

14. Considere novamente os dados dos exercícios 4, 6 e 8, obtenha as probabilidades de estado de equilíbrio (probabilidades estacionárias ou probabilidades limites) da Cadeia de Markov utilizada.

15. Suponha que o tempo total gasto por um cliente na agência do Banestes na Ufes é distribuído exponencialmente com média igual a dez minutos.

    (a) Qual é a probabilidade de um cliente gastar mais do que quinze minutos naquela agência?

    (b) Qual é a probabilidade de um cliente gastar mais do que quinze minutos na agência, dado que ele está na agência a mais que dez minutos?

16. A loja da "Masterall" tem apenas dois balconistas. Numa tarde, Regina entrou naquela loja e verificou que Sandro estava sendo atendido por um dos balconistas e Marina estava sendo atendida por outro balconista. Regina é, então, informada que será atendida assim que Sandro ou Marina saírem. Se o tempo total que um balconista gasta com cada freguês é distribuído exponencialmente com média de $1/\mu$, qual é a probabilidade de que, dos três fregueses, Regina seja a última a sair da loja?

17. A vida do computador que você possui tem distribuição exponencial, com média igual a 1000 dias. Você sabe que ele está funcionando a 600 dias e deseja começar um trabalho que vai durar 500 dias. Calcule a probabilidade de você conseguir terminar o trabalho com esse computador.

18. Sabe-se que a chegada de pacotes em um determinado roteador pode ser considerado como um Processo de Poisson. Nesse roteador, chegam em média 5 pacotes por segundo. Calcule a probabilidade de que no roteador:

    (a) não ocorra chegada de pacotes em um certo segundo;

    (b) chegar apenas um pacote em um determinado segundo;

    (c) chegarem cinco pacotes em cada um de dois segundos seguidos;

    (d) chagarem mais que cinco pacotes em um certo segundo;

    (e) após a chegada de um pacote, a chegada do próximo demorar mais que cinco segundos.

19. Suponha que requisições Web chegam a um servidor com uma taxa de Poisson de dois por segundo.

    (a) Qual é o tempo esperado até a chegada da décima requisição?

    (b) Qual é a probabilidade de que o intervalo de tempo entre a décima e a décima primeira chegada exceda dois segundos?

20. Suponha que uma Cadeia de Markov de parâmetro contínuo entra no estado i no instante $t = 0$. Nesse instante, a probabilidade de que ela abandone o estado i nos próximos cinco minutos é igual a 0.2. Suponha, então, que o processo não abandone o estado i (ou seja, não ocorra transição) durante os próximos dez minutos. Qual é a probabilidade de que o processo não abandone o estado i nos cinco minutos seguintes?

21. Calcule as probabilidades limites para todos os estados do Processo Nascimento e Morte mostrado abaixo.

22. Uma empresa possui três supercomputadores e dois técnicos encarregados de sua manutenção. O tempo total que uma dessas máquinas funciona até quebrar é distribuído exponencialmente, com média igual a 10 dias, e o tempo total gasto por um único técnico para repará-la também é distribuído exponencialmente, com média igual a 8 dias. Considere que cada técnico conserta apenas uma máquina de cada vez.

Se houver apenas uma máquina quebrada, um dos técnicos conserta essa máquina e o outro fica tomando café.

(a) Qual é o número médio de máquinas paradas para conserto?

(b) Qual é a proporção do tempo em que os dois técnicos estão ocupados?

23. Uma pequena empresa possui quatro servidores Web e um técnico encarregado de dar manutenção aos servidores. O tempo total que cada servidor funciona até presentar problema é distribuído exponencialmente com média de 10 dias e o tempo total que o técnico gasta para resolver cada problema é distribuído exponencialmente com média de 3 dias.

    (a) Qual é o número médio de servidores com problemas?

    (b) Qual é a proporção do tempo em que cada servidor funciona?