# Algoritmos Numéricos $2^a$ edição

## Capítulo 3: Interpolação polinomial

# Capítulo 3: Interpolação polinomial

# Polinômios interpoladores

- Seja a tabela

| $x$ | 0,1 | 0,6 | 0,8 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1,221 | 3,320 | 4,953 |

. ⇤

- Calcular valor correspondente de $y$ para um dado $x$ não pertencente à tabela.
- Obter função que relaciona as variáveis $x$ e $y$.
- Polinômios são as funções mais utilizadas para determinar esta relação.
- Polinômio interpolador: construído para aproximar uma função.
- Fundamentais: integração numérica, cálculo de raízes de equações e solução de equações diferenciais ordinárias.
- Esquema simples: solução de um sistema de equações lineares.

## Interpolação linear

- Pontos-base $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$, com $x_0 \neq x_1$, de $y = f(x)$.
- Aproximação de $f(z)$, $z \in (x_0, x_1)$

$$f(x) \approx P_1(x) = a_0 + a_1 x.$$

- $P_1(x)$: polinômio interpolador de grau 1.
- Polinômio interpolador passa pelos pontos-base

$$\begin{array}{l} P_1(x_0) = y_0 \\ P_1(x_1) = y_1 \end{array} \longrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 = y_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

- Sistema triangular equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 0 & x_1 - x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix}.$$

- Solução do sistema linear

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \text{e} \quad a_0 = y_0 - a_1 x_0.$$

## Polinômio interpolador

- Polinômio interpolador de grau 1

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x = (y_0 - a_1 x_0) + a_1 x = y_0 + a_1(x - x_0),$$

$$\boxed{P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)}. \qquad (1)$$

- $\det(X) = x_1 - x_0 \neq 0$: sistema com única solução.
- Por dois pontos passa um único polinômio de grau 1.
- Verifica-se

$$P_1(x_0) = y_0 \ \text{ e } \ P_1(x_1) = y_1.$$

## Exemplo: interpolação linear

**Exemplo 1** Calcular $P_1(0{,}2)$ e $P_1(0{,}3)$ a partir da tabela

| $i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $x_i$ | 0,1 | 0,6 |
| $y_i$ | 1,221 | 3,320 |

.

- Polinômio interpolador de grau 1: $P_1(x) = y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$.

$$P_1(0{,}2) = 1{,}221 + \frac{3{,}320 - 1{,}221}{0{,}6 - 0{,}1}(0{,}2 - 0{,}1) \leadsto P_1(0{,}2) = 1{,}641.$$

$$P_1(0{,}3) = 1{,}221 + \frac{3{,}320 - 1{,}221}{0{,}6 - 0{,}1}(0{,}3 - 0{,}1) \leadsto P_1(0{,}3) = 2{,}061.$$

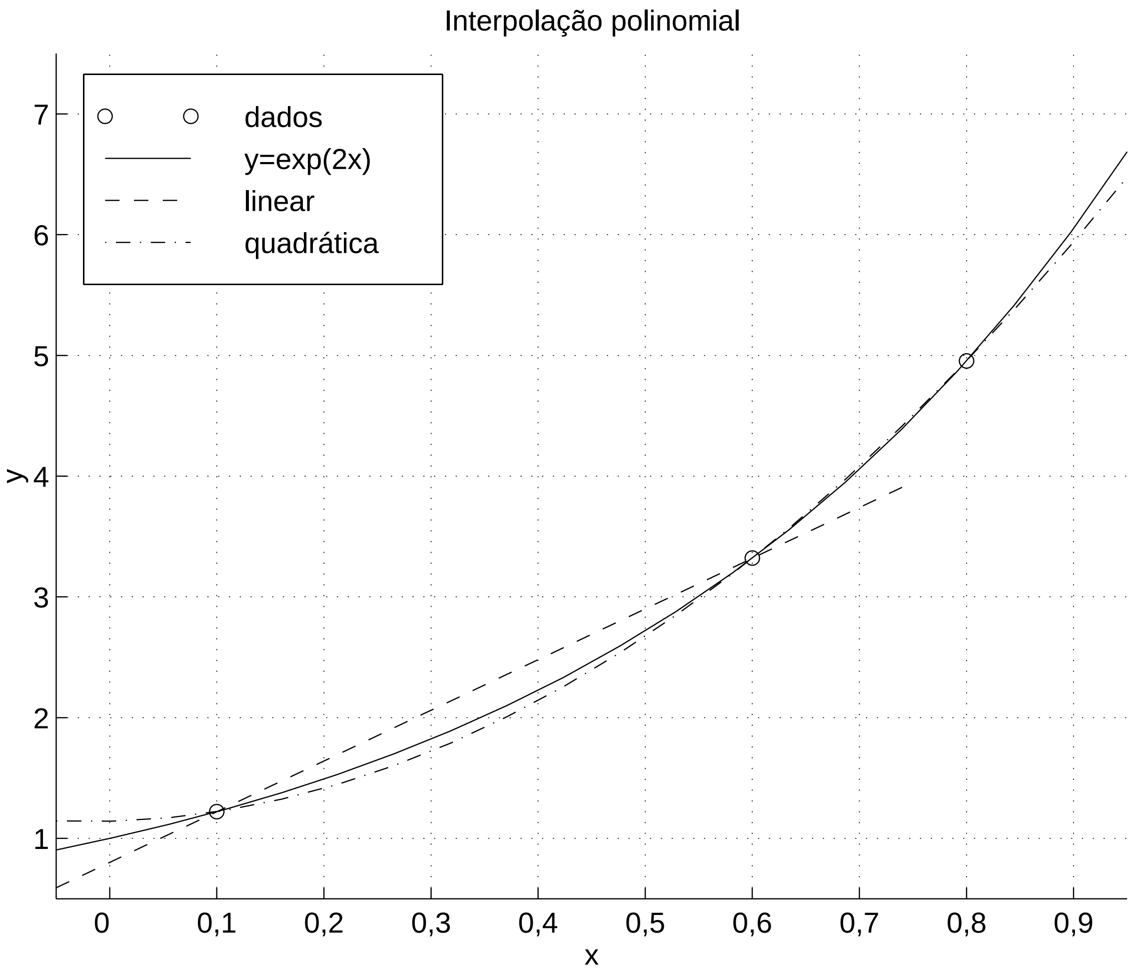
- Sendo $f(x) = e^{2x}$, os erros cometidos foram

$$\text{em } \ x = 0{,}2: 1{,}641 - e^{2\times 0{,}2} = 0{,}149,$$

$$\text{em } \ x = 0{,}3: 2{,}061 - e^{2\times 0{,}3} = 0{,}239.$$

# Interpretação geométrica da interpolação polinomial

- Legenda o: pontos-base; --: polinômio interpolador de grau 1;-.: polinômio interpolador de grau 2 e –: função $f(x) = e^{2x}$.



## Interpolação quadrática

- Pontos-base $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$, com $x_i$ distintos, de $y = f(x)$.
- Aproximação de $f(z)$, $z \in (x_0, x_2)$: $f(x) \approx P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.
- $P_2(x)$: polinômio interpolador de grau 2.
- Polinômio interpolador passa pelos pontos-base

$$\begin{matrix} P_2(x_0) = y_0 \\ P_2(x_1) = y_1 \\ P_2(x_2) = y_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

- $X$: matriz de Vandermonde.
- $\det(X) = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0) \neq 0$: sistema com única solução.
- Por três pontos passa um único polinômio de grau 2.
- Por $n + 1$ pontos passa um único polinômio de grau $n$.

## Exemplo: interpolação quadrática

**Exemplo 2** Calcular $P_2(0{,}2)$ usando os dados da tabela

| $i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0,1 | 0,6 | 0,8 |
| $y_i$ | 1,221 | 3,320 | 4,953 |

.

- Cálculo dos coeficientes do polinômio interpolador

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}1 & 0{,}01 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}36 \\ 1 & 0{,}8 & 0{,}64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}221 \\ 3{,}320 \\ 4{,}953 \end{bmatrix}.$$

- Decomposição $LU$ com pivotação parcial

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0{,}714 & 1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}1 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}63 \\ 0 & 0 & -0{,}1 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Exemplo: interpolação quadrática cont.

- Sistema triangular inferior $Lt = Py$: $t = [1{,}221 \;\; 3{,}732 \;\; -0{,}567]^T$.
- Sistema triangular superior $Ua = t$: $a = [1{,}141 \;\; 0{,}231 \;\; 5{,}667]^T$.
- Polinômio interpolador de grau 2

$$P_2(x) = 1{,}141 + 0{,}231x + 5{,}667x^2 \leadsto P_2(0{,}2) = 1{,}414.$$

- Polinômio passa pelos pontos-base

$$P_2(0{,}1) = 1{,}221, \;\; P_2(0{,}6) = 3{,}320 \;\text{ e }\; P_2(0{,}8) = 4{,}953.$$

## Metodologia alternativa para calcular polinômio $P_n(x)$

- Coeficientes do polinômio interpolador via sistema lineares.
- Conceitualmente simples.
- Requer esforço computacional da ordem de $n^3$.
- Por $n + 1$ pontos passa um único polinômio de grau $n$.
- Metodologia alternativa: evitar a solução de um sistema de equações lineares.
- Interpolação com menor esforço computacional.

## Polinômios de Lagrange

- Sejam $n+1$ pontos-base $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.
- Abscissas $x_i$ distintas.
- Valores $y_i = f(x_i)$ e $x \in (x_0, x_n)$.
- Construir um polinômio $L_n(x)$ de grau não superior a $n$

$$L_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

# Fórmula de Lagrange

- Construir $n+1$ polinômios de grau $n$, $P_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$,

$$P_i(x_i) \neq 0 \ \text{ e } \ P_i(x_j) = 0, \ \forall\, i \neq j.$$

- Forma dos polinômios

$$P_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n),$$

$$P_1(x) = (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n),$$

$$P_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\ldots(x - x_n),$$

$$\vdots$$

$$P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}),$$

- Forma geral

$$P_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j), \ i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

## Fórmula de Lagrange cont.

- $L_n(x)$ é de grau não superior a $n$.
- Escrevendo $L_n(x)$ como combinação linear dos polinômios $P_i(x)$,

$$L_n(x) = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + \cdots + c_nP_n(x),$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_iP_i(x). \tag{4}$$

- Em cada $x_i$, considerando $P_i(x_i) \neq 0$ e $P_i(x_j) = 0,\ \forall\, i \neq j$,

$$L_n(x_i) = y_i = c_iP_i(x_i) \longrightarrow c_i = \frac{y_i}{P_i(x_i)},\ \text{então},\ L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{P_i(x_i)}P_i(x).$$

- Polinômio interpolador de Lagrange de grau $n$

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}. \tag{5}$$

# Exemplo: polinômio de Lagrange de grau 1

**Exemplo 3** Calcular $L_1(0{,}2)$ a partir da tabela

| $i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $x_i$ | 0,1 | 0,6 |
| $y_i$ | 1,221 | 3,320 |

.

- Para $n = 1$,

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

$$L_1(0{,}2) = 1{,}221 \frac{0{,}2 - 0{,}6}{0{,}1 - 0{,}6} + 3{,}320 \frac{0{,}2 - 0{,}1}{0{,}6 - 0{,}1} \leadsto$$

$$L_1(0{,}2) = 1{,}641.$$

## Comparação dos polinômios via sistema linear e de Lagrange

- Polinômio de grau 1 via sistema linear,

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

$$P_1(x) = \frac{y_0x_1 - y_0x_0 + y_1x - y_1x_0 - y_0x + y_0x_0}{x_1 - x_0},$$

$$P_1(x) = \frac{y_0(x_1 - x) + y_1(x - x_0)}{x_1 - x_0} = y_0\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

- Polinômio de Lagrange de grau 1,

$$L_1(x) = y_0\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

- Comparando,

$$P_1(x) = L_1(x).$$

## Exemplo: polinômio de Lagrange de grau 2

**Exemplo 4** Calcular $L_2(0{,}2)$ usando os dados da tabela do Exemplo 2

| $i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0,1 | 0,6 | 0,8 |
| $y_i$ | 1,221 | 3,320 | 4,953 |

.

- Fórmula de Lagrange (5) com $n = 2$

$$L_2(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

$$L_2(0{,}2) = 1{,}221\frac{(0{,}2-0{,}6)(0{,}2-0{,}8)}{(0{,}1-0{,}6)(0{,}1-0{,}8)} + 3{,}320\frac{(0{,}2-0{,}1)(0{,}2-0{,}8)}{(0{,}6-0{,}1)(0{,}6-0{,}8)} +$$

$$4{,}953\frac{(0{,}2-0{,}1)(0{,}2-0{,}6)}{(0{,}8-0{,}1)(0{,}8-0{,}6)} \leadsto L_2(0{,}2) = 1{,}414.$$

## Exemplo: polinômio de Lagrange de grau 2 cont.

- Erro com $L_2(x)$: $1{,}414 - e^{2\times 0{,}2} = -0{,}078$.
- Erro com $L_1(x)$: $1{,}641 - e^{2\times 0{,}2} = 0{,}149$.
- Erro com $L_2(0{,}2)$ menor que com $L_1(0{,}2)$.
- Grau do polinômio interpolador aumenta: exatidão melhora.
- Interpolação de Lagrange: menor esforço computacional que sistema linear.

# Dispositivo prático

- Seja a matriz

$$G = \begin{bmatrix} x - x_0 & x_0 - x_1 & x_0 - x_2 & \cdots & x_0 - x_n \\ x_1 - x_0 & x - x_1 & x_1 - x_2 & \cdots & x_1 - x_n \\ x_2 - x_0 & x_2 - x_1 & x - x_2 & \cdots & x_2 - x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n - x_1 & x_n - x_2 & \cdots & x - x_n \end{bmatrix}.$$

- Acrescentando o termo $(x - x_i)/(x - x_i)$ na fração de (5)

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \times \frac{x - x_i}{x - x_i} \longrightarrow \boxed{L_n(x) = G_d \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{G_i}}. \qquad (6)$$

- $G_d$: produto dos elementos da diagonal principal da matriz $G$.
- $G_i$: produto dos elementos da $(i+1)$-ésima linha de $G$.

## Exemplo: uso do dispositivo prático

**Exemplo 5** Determinar $L_2(0{,}2)$ por (6) usando os dados do Exemplo 4.

- Matriz $G = \begin{bmatrix} 0{,}2-0{,}1 & 0{,}1-0{,}6 & 0{,}1-0{,}8 \\ 0{,}6-0{,}1 & 0{,}2-0{,}6 & 0{,}6-0{,}8 \\ 0{,}8-0{,}1 & 0{,}8-0{,}6 & 0{,}2-0{,}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}5 & -0{,}7 \\ 0{,}5 & -0{,}4 & -0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & -0{,}6 \end{bmatrix}$.
- Produtos de elementos de $G$,

$$G_d = (0{,}1)(-0{,}4)(-0{,}6) = 0{,}024, \quad G_0 = (0{,}1)(-0{,}5)(-0{,}7) = 0{,}035,$$

$$G_1 = (0{,}5)(-0{,}4)(-0{,}2) = 0{,}040 \text{ e } G_2 = (0{,}7)(0{,}2)(-0{,}6) = -0{,}084.$$

- Usando (6) com $n = 2$,

$$L_2(x) = G_d\left(\frac{y_0}{G_0} + \frac{y_1}{G_1} + \frac{y_2}{G_2}\right).$$

- Valor interpolado

$$L_2(0{,}2) = 0{,}024\left(\frac{1{,}221}{0{,}035} + \frac{3{,}320}{0{,}040} + \frac{4{,}953}{-0{,}084}\right) \leadsto L_2(0{,}2) = 1{,}414.$$

# Algoritmo: interpolação de Lagrange

```
Algoritmo Polinômio_Lagrange
{ Objetivo: Interpolar valor em tabela usando polinômio de Lagrange }
parâmetros de entrada m, x, y, z
  { número de pontos, abscissas, ordenadas e valor a interpolar }
parâmetros de saída r  { valor interpolado }
  r ← 0
  para i ← 1 até m faça
    c ← 1; d ← 1
    para j ← 1 até m faça
      se i ≠ j então
        c ← c ∗ (z − x(j)); d ← d ∗ (x(i) − x(j))
      fimse
    fimpara
    r ← r + y(i) ∗ c/d
  fimpara
fimalgoritmo
```

|⇐

# Complexidade: interpolação de Lagrange

| Operações | Complexidade |
|---|---|
| adições | $2n^2 + 3n + 1$ |
| multiplicações | $2n^2 + 3n + 1$ |
| divisões | $n + 1$ |

- $n$: grau do polinômio interpolador.

## Exemplo: uso do algoritmo

**Exemplo 6** Resolver o problema do Exemplo 4 utilizando uma implementação do algoritmo.

```
% Os parametros de entrada
m = 3
x = 0.1000    0.6000    0.8000
y = 1.2210    3.3200    4.9530
z = 0.2000
% fornecem o resultado
r = 1.4141
```

## Polinômios de Newton

- Pontos $(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ da função $y = f(x)$.
- Operador de diferença dividida $\Delta^i$ de ordem $i$:
- Ordem 0: $\Delta^0 y_i = y_i = [x_i]$.
- Ordem 1: $\Delta y_i = \dfrac{\Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = [x_i, x_{i+1}]$.
- Ordem 2: $\Delta^2 y_i = \dfrac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{x_{i+2} - x_i} = [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$.
- Ordem $n$: $\Delta^n y_i = \dfrac{\Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i}{x_{i+n} - x_i} = [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}]$.

## Propriedades dos operadores de diferenças divididas

- **Teorema 1 (Diferenças divididas)** *Se $y = f(x)$ for um polinômio de grau $n$, então suas diferenças divididas de ordem $n+1$ são identicamente nulas, isto é,* $[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] = 0 \; \forall \; x$,
- sendo $\Delta^n y_i = \dfrac{\Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i}{x_{i+n} - x_i} = [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}]$.

**Exemplo 7** Verificar a tabela de diferenças divididas do polinômio $y = 5x^3 - 2x^2 - x + 3$ para alguns pontos $x_i$ no intervalo $[0;\ 0{,}9]$

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ | $\Delta^4 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0 | 3,000 | −1,20 | 0,5 | 5 | 0 |
| 1 | 0,2 | 2,760 | −1,05 | 2,5 | 5 | 0 |
| 2 | 0,3 | 2,655 | −0,55 | 5,0 | 5 | |
| 3 | 0,4 | 2,600 | 1,45 | 8,0 | | |
| 4 | 0,7 | 3,035 | 5,45 | | | |
| 5 | 0,9 | 4,125 | | | | |

.

# Fórmula de Newton

- Sejam $n+1$ pontos $(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, com $x_i$ distintos, tais que $y_i = P(x_i)$, sendo $P(x)$ um polinômio de grau $n$.

- Diferença dividida de ordem 1

$$[x, x_0] = \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0} \to P(x) = P(x_0) + [x, x_0](x - x_0).$$

- Diferença dividida de ordem 2

$$[x, x_0, x_1] = \frac{[x, x_0] - [x_0, x_1]}{x - x_1} \rightsquigarrow [x, x_0] = [x_0, x_1] + [x, x_0, x_1](x - x_1).$$

- Substituindo

$$P(x) = P(x_0) + [x_0, x_1](x - x_0) + [x, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_1).$$

## Fórmula de Newton cont.

- Diferença dividida de ordem 3

$$[x, x_0, x_1, x_2] = \frac{[x, x_0, x_1] - [x_0, x_1, x_2]}{x - x_2} \rightsquigarrow$$

$$[x, x_0, x_1] = [x_0, x_1, x_2] + [x, x_0, x_1, x_2](x - x_2).$$

- Substituindo

$$P(x) = P(x_0) + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) +$$
$$[x, x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

## Fórmula de Newton cont.

- Continuando o desenvolvimento de $[x, x_0, x_1, x_2]$,

$$\begin{aligned}P(x) = P(x_0) + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) +\\ + [x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots +\\ + [x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) +\\ + [x, x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n).\end{aligned}$$

- Sendo $P(x)$ um polinômio de grau $n$, pelo Teorema 1

$$[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] = 0.$$

- Polinômio de Newton de grau $n$

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \Delta^n y_0(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}),$$

$$\boxed{P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)}. \quad (7)$$

## Exemplo: polinômio de Newton de grau 1

**Exemplo 8** Calcular $P_1(0{,}2)$ a partir dos dados

| $x$ | 0,1 | 0,6 |
|---|---|---|
| $y$ | 1,221 | 3,320 |

.

- Para (7) com $n = 1$,

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0).$$

- Tabela de diferenças divididas

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,1 | 1,221 | 4,198 |
| 1 | 0,6 | 3,320 | |

.

- Valor interpolado

$$P_1(0{,}2) = 1{,}221 + 4{,}198(0{,}2 - 0{,}1) \rightsquigarrow P_1(0{,}2) = 1{,}641.$$

## Comparação dos polinômios via sistema linear e de Newton

- Polinômio de grau 1 via sistema linear,

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0).$$

- Polinômio de grau 1 de Newton,

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0).$$

## Exemplo: polinômio de Newton de grau 2

**Exemplo 9** Determinar $P_2(1{,}2)$ usando os dados

| $x$ | 0,9 | 1,1 | 2,0 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 3,211 | 2,809 | 1,614 |

.

- Para (7) com $n = 2$,

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1).$$

- Tabela de diferenças divididas

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,9 | 3,211 | $-2{,}010$ | 0,620 |
| 1 | 1,1 | 2,809 | $-1{,}328$ | |
| 2 | 2,0 | 1,614 | | |

.

- Valor interpolado

$$P_2(1{,}2) = 3{,}211 + (-2{,}010)(1{,}2 - 0{,}9) + (0{,}620)(1{,}2 - 0{,}9)(1{,}2 - 1{,}1) \leadsto$$

$$P_2(1{,}2) = 2{,}627.$$

## Exemplo: polinômio de Newton de grau 4

**Exemplo 10** Calcular $P_4(0{,}2)$ a partir de

| $x$ | 0,1 | 0,3 | 0,4 | 0,6 | 0,7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0,3162 | 0,5477 | 0,6325 | 0,7746 | 0,8367 |

.

- Para (7) com $n = 4$,

$$P_4(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$\Delta^3 y_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$

$$\Delta^4 y_0(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

## Exemplo: polinômio de Newton de grau 4 cont.

- Tabela de diferenças divididas

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ | $\Delta^4 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,1 | 0,3162 | 1,1575 | −1,0317 | 1,1468 | −1,2447 |
| 1 | 0,3 | 0,5477 | 0,8480 | −0,4583 | 0,4000 | |
| 2 | 0,4 | 0,6325 | 0,7105 | −0,2983 | | |
| 3 | 0,6 | 0,7746 | 0,6210 | | | |
| 4 | 0,7 | 0,8367 | | | | |

- Valor interpolado

$$P_4(0{,}2) = 0{,}3162 + 1{,}1575(0{,}1) + (-1{,}0317)(0{,}1)(-0{,}1) +$$

$$1{,}1468(0{,}1)(-0{,}1)(-0{,}2) + (-1{,}2447)(0{,}1)(-0{,}1)(-0{,}2)(-0{,}4) \leadsto$$

$$P_4(0{,}2) = 0{,}4456.$$

## Avaliação do polinômio de Newton

- Seja o polinômio (7),

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

- Avaliando pelo processo de Horner,

$$P_n(z) = (\ldots(\Delta^n y_0 (z - x_{n-1}) + \Delta^{n-1} y_0)(z - x_{n-2}) + \ldots +$$
$$\Delta^2 y_0)(z - x_1) + \Delta y_0)(z - x_0) + y_0.$$

# Algoritmo: interpolação de Newton

```
Algoritmo Polinômio_Newton
{ Objetivo: Interpolar valor em tabela usando polinômio de Newton }
parâmetros de entrada m, x, y, z
  { número de pontos, abscissas, ordenadas e valor a interpolar }
parâmetros de saída r  { valor interpolado }
  para i ← 1 até m faça
    Dely(i) ← y(i)
  fimpara
  { construção das diferenças divididas }
  para k ← 1 até m − 1 faça
    para i ← m até k + 1 passo −1 faça
      Dely(i) ← (Dely(i) − Dely(i − 1))/(x(i) − x(i − k))
    fimpara
  fimpara
  { avaliação do polinômio pelo processo de Horner }
  r ← Dely(m)
  para i ← m − 1 até 1 passo −1 faça
    r ← r ∗ (z − x(i)) + Dely(i)
  fimpara
fimalgoritmo
```

## Vetor auxiliar *Dely*

- Construir a tabela de diferenças divididas.
- Economizar espaço de memória: valores de $\Delta^0 y_0$, $\Delta y_0$, ... , $\Delta^n y_0$ são armazenados nas primeiras $n+1$ posições de *Dely*.
- Para cinco pontos

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $Dely_i^{(1)}$ | $Dely_i^{(2)}$ | $Dely_i^{(3)}$ | $Dely_i^{(4)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_0$ | $y_0$ | $\Delta^0 y_0$ | $\Delta^0 y_0$ | $\Delta^0 y_0$ | $\Delta^0 y_0$ |
| 2 | $x_1$ | $y_1$ | $\Delta y_0$ | $\Delta y_0$ | $\Delta y_0$ | $\Delta y_0$ |
| 3 | $x_2$ | $y_2$ | $\Delta y_1$ | $\Delta^2 y_0$ | $\Delta^2 y_0$ | $\Delta^2 y_0$ |
| 4 | $x_3$ | $y_3$ | $\Delta y_2$ | $\Delta^2 y_1$ | $\Delta^3 y_0$ | $\Delta^3 y_0$ |
| 5 | $x_4$ | $y_4$ | $\Delta y_3$ | $\Delta^2 y_2$ | $\Delta^3 y_1$ | $\Delta^4 y_0$ |

,

- onde $Dely_i^{(k)}$ significa *i*-ésima posição do vetor *Dely* na *k*-ésima repetição do comando **para** $k \leftarrow 1$ **até** $m - 1$ **faça**.

# Complexidade: interpolação de Newton

| Operações | Complexidade |
|---|---|
| adições | $n^2 + 4n$ |
| multiplicações | $n$ |
| divisões | $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ |

$\Vert\Leftarrow$

- $n$: grau do polinômio interpolador.

## Exemplo: uso do algoritmo

**Exemplo 11** Calcular $P_4(0{,}2)$ a partir dos dados da tabela do Exemplo 10 usando o algoritmo.

```
% Os parametros de entrada
m = 5
x = 0.1000    0.3000    0.4000    0.6000    0.7000
y = 0.3162    0.5477    0.6325    0.7746    0.8367
z = 0.2000
% produzem o resultado
r = 0.4456
```

- Seqüência de vetores *Dely* produzida pelo algoritmo

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $Dely_i^{(1)}$ | $Dely_i^{(2)}$ | $Dely_i^{(3)}$ | $Dely_i^{(4)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,1 | 0,3162 | 0,3162 | 0,3162 | 0,3162 | 0,3162 |
| 2 | 0,3 | 0,5477 | 1,1575 | 1,1575 | 1,1575 | 1,1575 |
| 3 | 0,4 | 0,6325 | 0,8480 | −1,0317 | −1,0317 | −1,0317 |
| 4 | 0,6 | 0,7746 | 0,7105 | −0,4583 | 1,1468 | 1,1468 |
| 5 | 0,7 | 0,8367 | 0,6210 | −0,2983 | 0,4000 | −1,2447 |

.

## Exemplo: uso do algoritmo

**Exemplo 12** Calcular $P_1(0{,}2)$, $P_2(0{,}2)$ e $P_3(0{,}2)$ usando os dados da tabela do Exemplo 10 e o algoritmo.

```
% Calculo de P1(0,2)
m = 2
x = 0.1000    0.3000
y = 0.3162    0.5477
z = 0.2000
r = 0.4320
% Calculo de P2(0,2)
m = 3
x = 0.1000    0.3000    0.4000
y = 0.3162    0.5477    0.6325
z = 0.2000
r = 0.4423
% Calculo de P3(0,2)
m = 4
x = 0.1000    0.3000    0.4000    0.6000
y = 0.3162    0.5477    0.6325    0.7746
z = 0.2000
r = 0.4446
```

## Exemplo: uso do algoritmo cont.

- Sendo $y = \sqrt{x}$: valor exato $\sqrt{0{,}2} \approx 0{,}4472$.
- Diferença entre valor interpolado e exato

| $n$ | $P_n(0{,}2)$ | $\lvert P_n(0{,}2) - \sqrt{0{,}2}\rvert$ |
|---|---|---|
| 1 | 0,4320 | 0,0152 |
| 2 | 0,4423 | 0,0049 |
| 3 | 0,4446 | 0,0026 |
| 4 | 0,4456 | 0,0016 |

.

- Diferença diminui à medida que grau do polinômio interpolador aumenta.

## Polinômios de Gregory-Newton

- Valores das abscissas $x_i$ igualmente espaçados.
- Função $y = f(x)$ passa pelos pontos $(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, sendo $x_{i+1} - x_i = h \; \forall \; i$.
- Operador de diferença finita ascendente $\Delta^i$ de ordem $i$:
- Ordem 0: $\Delta^0 y_i = y_i$,
- Ordem 1: $\Delta y_i = \Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i = y_{i+1} - y_i$,
- Ordem 2: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$,
- Ordem $n$: $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$.

## Exemplo: cálculo da tabela de diferenças finitas

**Exemplo 13** Verificar a tabela de diferenças finitas

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ | $\Delta^4 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3,5 | 9,82 | 1,09 | 0,05 | −0,10 | 2,11 |
| 1 | 4,0 | 10,91 | 1,14 | −0,05 | 2,01 | |
| 2 | 4,5 | 12,05 | 1,09 | 1,96 | | |
| 3 | 5,0 | 13,14 | 3,05 | | | |
| 4 | 5,5 | 16,19 | | | | |

.

## Relação entre os operadores de diferença finita e dividida

$$\boxed{\Delta^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n!h^n}}. \tag{8}$$

**Exemplo 14** Para a tabela do Exemplo 13,

$$\Delta y_0 = \frac{\Delta y_0}{1!h} \leadsto \frac{10{,}91 - 9{,}82}{4{,}0 - 3{,}5} = \frac{1{,}09}{1!\ 0{,}5} = 2{,}18 \text{ e}$$

$$\Delta^2 y_1 = \frac{\Delta^2 y_1}{2!h^2} \leadsto$$

$$\frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{13{,}14 - 12{,}05}{5{,}0 - 4{,}5} - \frac{12{,}05 - 10{,}91}{4{,}5 - 4{,}0}}{5{,}0 - 4{,}0} = \frac{-0{,}05}{2!\ 0{,}5^2} = -0{,}10.$$

## Fórmula de Gregory-Newton

- Polinômio interpolador de Newton

$$P_n(x)=y_0+\Delta y_0(x-x_0)+\Delta^2 y_0(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+\Delta^n y_0(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}).$$

- Variável auxiliar

$$u_x = u(x) = \frac{x-x_0}{h}.$$

- Verifica-se que

$$x - x_0 = hu_x,$$

$$x - x_1 = x - (x_0 + h) = x - x_0 - h = hu_x - h \leadsto x - x_1 = h(u_x - 1),$$

$$x - x_2 = x - (x_0 + 2h) = x - x_0 - 2h = hu_x - 2h \leadsto x - x_2 = h(u_x - 2),$$

$$\vdots$$

$$x - x_{n-1} = x - (x_0 + (n-1)h) = x - x_0 - (n-1)h \leadsto x - x_{n-1} = h(u_x - n + 1).$$

## Fórmula de Gregory-Newton cont.

- Substituindo na fórmula de Newton e aplicando a relação (8) entre operadores,

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} h u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} h u_x h(u_x - 1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} h u_x h(u_x - 1) \ldots h(u_x - n + 1).$$

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} u_x(u_x - 1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} u_x(u_x - 1) \ldots (u_x - n + 1),$$

$$\boxed{P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i y_0}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (u_x - j)}. \tag{9}$$

## Exemplo: polinômio de Gregory-Newton de grau 1

**Exemplo 15** Calcular $P_1(0{,}2)$, usando os dados da tabela do Exemplo 1

| $x$ | 0,1 | 0,6 |
|---|---|---|
| $y$ | 1,221 | 3,320 |

.

- Usando (9) com $n = 1:\ \ P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x$.
- Tabela de diferenças finitas

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,1 | 1,221 | 2,099 |
| 1 | 0,6 | 3,320 | |

.

- Variável auxiliar $u_x = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{0{,}2 - 0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2.$
- Valor interpolado: $P_1(0{,}2) = 1{,}221 + 2{,}099(0{,}2) \leadsto P_1(0{,}2) = 1{,}641.$
- Mesmos resultados: (1) no Exemplo 1, por (5) no Exemplo 3 e por (7) no Exemplo 8.

## Comparação dos polinômios via sistema linear e de Gregory-Newton

- Polinômio de grau 1 via sistema linear

$$P_1(x) = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x.$$

- Polinômio de grau 1 de Gregory-Newton

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x.$$

## Exemplo: polinômio de Gregory-Newton de grau 2

**Exemplo 16** Calcular $P_2(115)$ a partir da tabela

| $x$ | 110 | 120 | 130 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 2,041 | 2,079 | 2,114 |

.

- Usando (9) com $n = 2$: $P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} u_x(u_x - 1)$.
- Tabela de diferenças finitas

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 110 | 2,041 | 0,038 | $-0{,}003$ |
| 1 | 120 | 2,079 | 0,035 | |
| 2 | 130 | 2,114 | | |

.

- Variável auxiliar $u_x = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{115 - 110}{10} = 0{,}5$.
- Valor interpolado

$$P_2(115) = 2{,}041 + (0{,}038)(0{,}5) + \frac{-0{,}003}{2}(0{,}5)(0{,}5 - 1) \rightsquigarrow P_2(115) = 2{,}060.$$

# Algoritmo: interpolação de Gregory-Newton

```
Algoritmo Polinômio_Gregory-Newton
{ Objetivo: Interpolar valor em tabela usando polinômio de Gregory-Newton }
parâmetros de entrada m, x, y, z
  { número de pontos, abscissas, ordenadas e valor a interpolar }
parâmetros de saída r  { valor interpolado }
  para i ← 1 até m faça
    Dely(i) ← y(i)
  fimpara
  { construção das diferenças finitas }
  para k ← 1 até m − 1 faça
    para i ← m até k + 1 passo −1 faça
      Dely(i) ← Dely(i) − Dely(i − 1)
    fimpara
  fimpara
  { avaliação do polinômio pelo processo de Horner }
  u ← (z − x(1))/(x(2) − x(1))
  r ← Dely(m)
  para i ← m − 1 até 1 passo −1 faça
    r ← r ∗ (u − i + 1)/i + Dely(i)
  fimpara
fimalgoritmo
```

|⇐

## Avaliação do polinômio de Gregory-Newton

- Seja o polinômio (9)

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i y_0}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (u_x - j).$$

- Avaliando pelo processo de Horner,

$$P_n(x) = \left(\left(\left(\ldots \left(\Delta^n y_0 \frac{u_x - n+1}{n}\right) + \ldots + \Delta^2 y_0\right) \frac{u_x - 1}{2} + \Delta y_0\right) \frac{u_x - 0}{1}\right) + y_0.$$

## Vetor auxiliar *Dely*

- Construir a tabela de diferenças finitas.
- Economizar espaço de memória: valores de $\Delta^0 y_0,\ \Delta y_0,\ \ldots\ ,\Delta^n y_0$ são armazenados nas primeiras $n+1$ posições de ***Dely***.
- Para quatro pontos

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\mathsf{Dely}_i^{(1)}$ | $\mathsf{Dely}_i^{(2)}$ | $\mathsf{Dely}_i^{(3)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_0$ | $y_0$ | $\Delta^0 y_0$ | $\Delta^0 y_0$ | $\Delta^0 y_0$ |
| 2 | $x_1$ | $y_1$ | $\Delta y_0$ | $\Delta y_0$ | $\Delta y_0$ |
| 3 | $x_2$ | $y_2$ | $\Delta y_1$ | $\Delta^2 y_0$ | $\Delta^2 y_0$ |
| 4 | $x_3$ | $y_3$ | $\Delta y_2$ | $\Delta^2 y_1$ | $\Delta^3 y_0$ |

,

- onde $\textit{Dely}_i^{(k)}$ significa *i*-ésima posição do vetor ***Dely*** na ***k***-ésima repetição do comando **para** ***k*** $\leftarrow$ ***1*** **até** ***m*** $-$ ***1*** **faça**.

## Complexidade: interpolação de Gregory-Newton

| Operações | Complexidade |
|---|---|
| adições | $n^2 + 4n + 2$ |
| multiplicações | $n$ |
| divisões | $n + 1$ |

$\Vdash\Leftarrow$

- $n$: grau do polinômio interpolador.
- Comparação com a complexidade do algoritmo de Newton.
- Algoritmo de Gregory-Newton apresenta uma complexidade menor em relação à operação de divisão.

## Exemplo: uso do algoritmo

**Exemplo 17** Calcular $P_2(115)$ com os dados da tabela do Exemplo 16 usando o algoritmo.

```
% Os parametros de entrada
m = 3
x = 110   120   130
y = 2.0410    2.0790    2.1140
z = 115
% produzem o resultado
r = 2.0604
```

- Seqüência de vetores *Dely* produzida pelo algoritmo

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $Dely_i^{(1)}$ | $Dely_i^{(2)}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 110 | 2,041 | 2,041 | 2,041 |
| 2 | 120 | 2,079 | 0,038 | 0,038 |
| 3 | 130 | 2,114 | 0,035 | $-0{,}003$ |

.

## Escolha dos pontos para interpolação

- Exemplos usando todos os pontos da tabela.
- Escolher $n+1$ pontos dentre os $m$ valores de uma tabela, sendo $m > n+1$.
- Construir um polinômio interpolador de grau $n$.
- Não se devem construir polinômios de grau elevado por causa do erro de arredondamento.
- Deve-se evitar uma extrapolação: $z \notin [x_0,\ x_n]$.

## Exemplo: escolha de pontos

**Exemplo 18** Interpolar $z = 1{,}4$ usando um polinômio de terceiro grau com os dados

| $x$ | 0,7 | 1,2 | 1,3 | 1,5 | 2,0 | 2,3 | 2,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0,043 | 1,928 | 2,497 | 3,875 | 9,000 | 13,467 | 19,176 |

- São necessários 4 pontos para determinar um polinômio interpolador de grau 3.
- Ponto interpolado deve ser o mais próximo possível destes 4 pontos.
- Passo 1: escolher 2 pontos, sendo que $z = 1,4$ deve estar entre 1,3 e 1,5.
- Passo 2: terceiro ponto será 1,2 e não 2,0: $1{,}4 - 1{,}2 < 2{,}0 - 1{,}4$.
- Passo 3: quarto ponto será 2,0 e não 0,7: $2{,}0 - 1{,}4 < 1{,}4 - 0{,}7$.
- A interpolação cúbica utilizará os quatro pontos

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1,2 | 1,3 | 1,5 | 2,0 |
| $y_i$ | 1,928 | 2,497 | 3,875 | 9,000 |

## Cálculo de $L_3(1{,}4)$

- Pontos utilizados:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1,2 | 1,3 | 1,5 | 2,0 |
| $y_i$ | 1,928 | 2,497 | 3,875 | 9,000 |

.

- Matriz $G$ para o polinômio de Lagrange

$$G = \begin{bmatrix} 1{,}4-1{,}2 & 1{,}2-1{,}3 & 1{,}2-1{,}5 & 1{,}2-2{,}0 \\ 1{,}3-1{,}2 & 1{,}4-1{,}3 & 1{,}3-1{,}5 & 1{,}3-2{,}0 \\ 1{,}5-1{,}2 & 1{,}5-1{,}3 & 1{,}4-1{,}5 & 1{,}5-2{,}0 \\ 2{,}0-1{,}2 & 2{,}0-1{,}3 & 2{,}0-1{,}5 & 1{,}4-2{,}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}1 & -0{,}3 & -0{,}8 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}2 & -0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & -0{,}1 & -0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}5 & -0{,}6 \end{bmatrix}.$$

- Produtos de $G$

$$G_d = (0{,}2)(0{,}1)(-0{,}1)(-0{,}6) = 1{,}2{\times}10^{-3},$$
$$G_0 = (0{,}2)(-0{,}1)(-0{,}3)(-0{,}8) = -4{,}8{\times}10^{-3},$$
$$G_1 = (0{,}1)(0{,}1)(-0{,}2)(-0{,}7) = 1{,}4{\times}10^{-3},$$
$$G_2 = (0{,}3)(0{,}2)(-0{,}1)(-0{,}5) = 3{,}0{\times}10^{-3},$$
$$G_3 = (0{,}8)(0{,}7)(0{,}5)(-0{,}6) = -1{,}68{\times}10^{-1}.$$

## Cálculo de $L_3(1{,}4)$ cont.

- Usando (6) com $n = 3$,

$$L_3(x) = G_d\left(\frac{y_0}{G_0} + \frac{y_1}{G_1} + \frac{y_2}{G_2} + \frac{y_3}{G_3}\right),$$

$$L_3(1{,}4) = 1{,}2_{\times}10^{-3}\left(\frac{1{,}928}{-4{,}8_{\times}10^{-3}} + \frac{2{,}497}{1{,}4_{\times}10^{-3}} + \frac{3{,}875}{3{,}0_{\times}10^{-3}} + \frac{9{,}000}{-1{,}68_{\times}10^{-1}}\right) \rightsquigarrow$$

$$L_3(1, 4) = 3{,}144.$$

## Erro de truncamento da interpolação polinomial

- Erro cometido ao aproximar uma função $f(x)$ por polinômio interpolador.
- Sendo $P_n(x)$ um polinômio interpolador de grau $n$ de Lagrange, Newton ou Gregory-Newton,

$$\boxed{T_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i),\ x_0 < \xi < x_n}. \tag{10}$$

- Função $f(x)$ definida no intervalo $[a, b]$ que contém os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
- Supondo que a derivada $f^{n+1}(x)$ existe e é contínua no intervalo $(a, b)$.
- Na prática, $\xi$ é tomado como o ponto no intervalo $[x_0, x_n] \subset (a, b)$, onde $f^{n+1}(x)$ apresenta o maior valor em módulo.
- Expressão de $T_n(x)$ fornece a cota máxima do erro de truncamento.

## Exemplo: erro de truncamento

**Exemplo 19** Sendo $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$, calcular $P_2(0{,}1)$ e $T_2(0{,}1)$ a partir de

| $x$ | 0,0 | 0,2 | 0,4 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1,0000 | 1,1232 | 1,5312 |

.

- Cálculo de $P_2(0{,}1)$: $P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 u_x + \frac{\Delta^2 y_0}{2} u_x(u_x - 1)$.
- Tabela de diferenças finitas

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0 | 1,0000 | 0,1232 | 0,2848 |
| 1 | 0,2 | 1,1232 | 0,4080 | |
| 2 | 0,4 | 1,5312 | | |

.

- Variável auxiliar: $u_x = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{0{,}1 - 0{,}0}{0{,}2} \rightsquigarrow u_x = 0{,}5.$
- Valor interpolado

$$P_2(0{,}1) = 1{,}0000 + 0{,}1232(0{,}5) + \frac{0{,}2848}{2}(0{,}5)(0{,}5 - 1) \rightsquigarrow P_2(0{,}1) = 1{,}0260.$$

## Cálculo do erro de truncamento

- Cálculo de $T_2(0{,}1)$

$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1,\ f'(x) = 8x^3 + 6x,\ f''(x) = 24x^2 + 6,\ f'''(x) = 48x \leadsto$

$$\xi = 0{,}4.$$

$$T_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \text{ e}$$

$$T_2(0{,}1) = \frac{48(0{,}4)}{6}(0{,}1 - 0{,}0)(0{,}1 - 0{,}2)(0{,}1 - 0{,}4) \leadsto T_2(0{,}1) = 0{,}0096.$$

- Cota máxima do erro de truncamento.
- Erro real cometido

$$|f(0{,}1) - P_2(0{,}1)| = |1{,}0302 - 1{,}0260| = 0{,}0042 < T_2(0{,}1).$$

## Influência da escolha dos pontos no erro de truncamento

- Erro de truncamento: análise teórica da interpolação.
- Erro de truncamento é diretamente proporcional ao produto das distâncias entre o valor interpolado e os pontos-base

$$T_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i),\ x_0 < \xi < x_n.$$

- Pontos escolhidos para construir o polinômio interpolador devem ser os mais próximos do ponto a ser interpolado.

## Exemplo: influência da escolha dos pontos

**Exemplo 20** Verificar a influência da escolha dos pontos, usando a função

$$f(x) = e^x - x^2 - x.$$

- Tabela de $f(x)$

| $x$ | 1,1 | 1,4 | 1,9 | 2,1 | 2,5 | 3,0 | 3,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0,6942 | 0,6952 | 1,1759 | 1,6562 | 3,4325 | 8,0855 | 11,0925 |

- Calcular $P_2(2{,}2)$: necessários 3 pontos.
- Pontos de abscissas $x = 2{,}1$ e $x = 2{,}5$.
- Terceiro ponto: escolhido entre $x_a = 1{,}9$ e $x_b = 3{,}0$.
- Pontos não igualmente espaçados: método de Lagrange ou de Newton.

## Cálculo de $P_2(2{,}2)$ com $x_a = 1{,}9$

- Cálculo de $P_{2,a}(2{,}2)$ por Newton

| $x$ | 1,9 | 2,1 | 2,5 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1,1759 | 1,6562 | 3,4325 |

.

- Por (7) com $n = 2$: $P_2(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1)$.
- Tabela de diferenças divididas

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,9 | 1,1759 | 2,4015 | 3,3988 |
| 1 | 2,1 | 1,6562 | 4,4408 | |
| 2 | 2,5 | 3,4325 | | |

.

- Valor interpolado

$$P_{2,a}(2{,}2) = 1{,}1759 + 2{,}4015(2{,}2 - 1{,}9) + 3{,}3988(2{,}2 - 1{,}9)(2{,}2 - 2{,}1) \leadsto$$

$$P_{2,a}(2{,}2) = 1{,}9983.$$

## Cálculo de $T_2(2{,}2)$ com $x_a = 1{,}9$

- Erro de truncamento, por (10), para $n = 2$,

$$T_{2,a}(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \text{ para algum } \xi,\ x_0 < \xi < x_2.$$

- Cota máxima do erro de truncamento

$$f'''(x) = e^x,\ \xi \in (1{,}9;\ 2{,}5) \to \xi = 2{,}5,$$

$$T_{2,a}(2{,}2) = \frac{e^{2,5}}{6}(2{,}2 - 1{,}9)(2{,}2 - 2{,}1)(2{,}2 - 2{,}5) \leadsto T_{2,a}(2{,}2) = -0{,}0183.$$

- Valor negativo indica interpolação por excesso: $P_{2,a}(2{,}2) > f(2{,}2)$.
- Erro real cometido

$$|f(2{,}2) - P_{2,a}(2{,}2)| = |1{,}9850 - 1{,}9983| = 0{,}0133 < |T_{2,a}(2{,}2)|.$$

## Cálculo de $P_2(2{,}2)$ com $x_b = 3{,}0$

- Cálculo de $P_{2,b}(2{,}2)$ por Newton

| $x$ | 2,1 | 2,5 | 3,0 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1,6562 | 3,4325 | 8,0855 |

- Tabela de diferenças divididas

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2,1 | 1,6562 | 4,4408 | 5,4058 |
| 1 | 2,5 | 3,4325 | 9,3060 | |
| 2 | 3,0 | 8,0855 | | |

- Valor interpolado

$$P_{2,b}(2{,}2) = 1{,}6562 + 4{,}4408(2{,}2 - 2{,}1) + 5{,}4058(2{,}2 - 2{,}1)(2{,}2 - 2{,}5) \leadsto$$

$$P_{2,b}(2{,}2) = 1{,}9381.$$

## Cálculo de $T_2(2{,}2)$ com $x_b = 3{,}0$

- Cota máxima do erro de truncamento

$$f'''(x) = e^x,\ \xi \in (2{,}1;\ 3{,}0) \to \xi = 3{,}0,$$

$$T_{2,b}(2{,}2) = \frac{e^{3{,}0}}{6}(2{,}2 - 2{,}1)(2{,}2 - 2{,}5)(2{,}2 - 3{,}0) \leadsto T_{2,b}(2{,}2) = 0{,}0803.$$

- Valor positivo indica interpolação por falta: $P_{2,b}(2{,}2) < f(2{,}2)$.

- Erro real

$$|f(2{,}2) - P_{2,b}(2{,}2)| = |1{,}9850 - 1{,}9381| = 0{,}0469 < |T_{2,b}(2{,}2)|.$$

- Comparação entre os dois pontos $x_j$

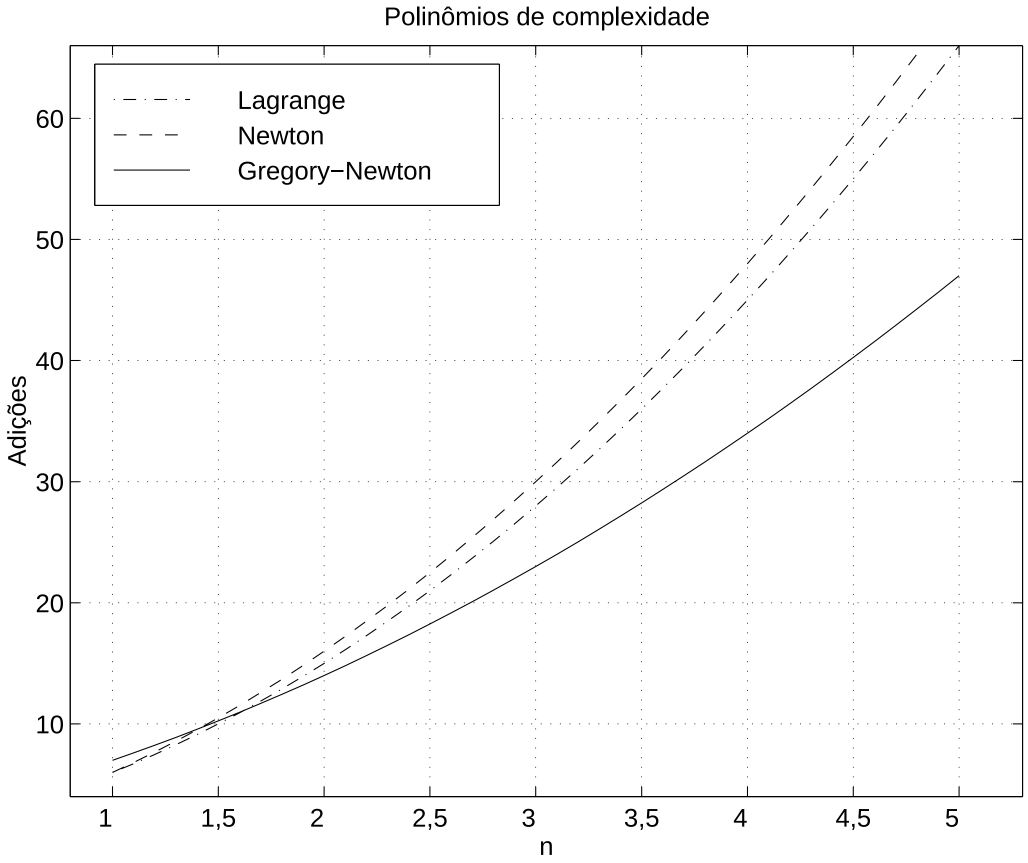
| $x_j$ | $\lvert x_j - 2{,}2\rvert$ | $T_{2,j}(2{,}2)$ | $f(2{,}2) - P_{2,j}(2{,}2)$ |
|---|---|---|---|
| 1,9 | 0,3 | −0,0183 | −0, 0133 |
| 3,0 | 0,8 | 0,0803 | 0,0469 |

# Comparação das complexidades: tabelas

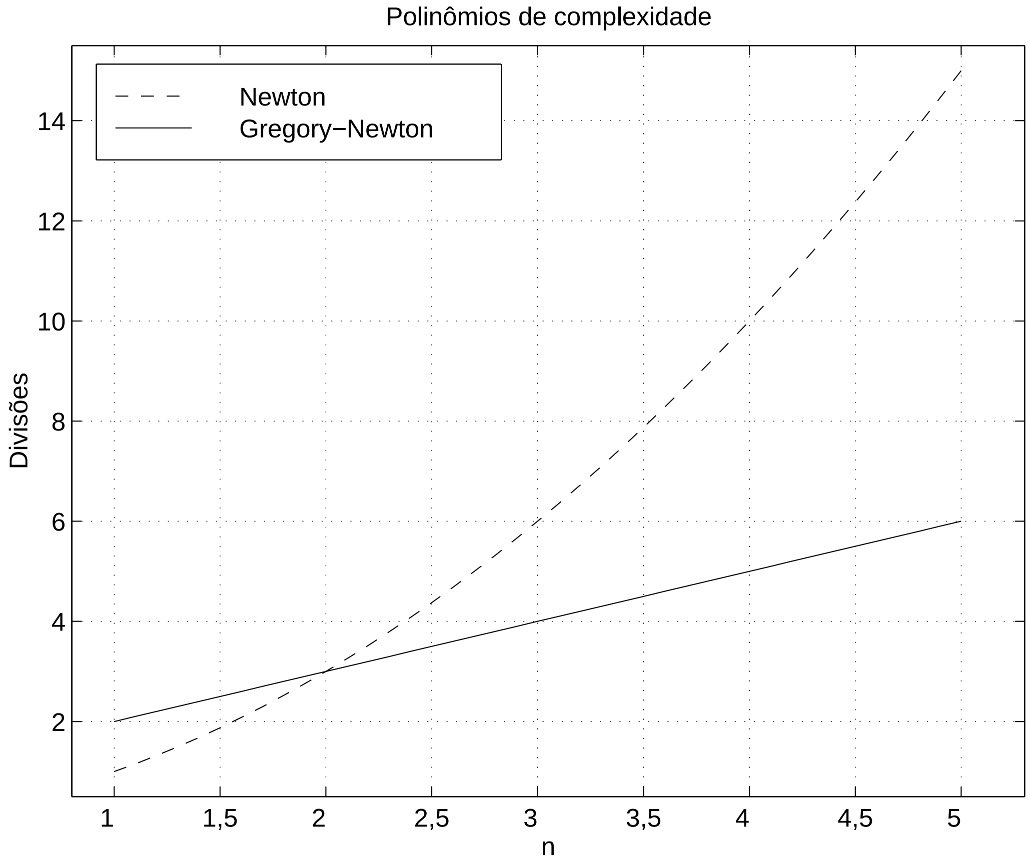
| Polinômio | Adições | Multiplicações | Divisões |
|---|---|---|---|
| Lagrange | $2n^2 + 3n + 1$ | $2n^2 + 3n + 1$ | $n + 1$ |
| Newton | $n^2 + 4n$ | $n$ | $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ |
| Gregory-Newton | $n^2 + 4n + 2$ | $n$ | $n + 1$ |

- $n$: grau do polinômio interpolador.
- Polinômios de Newton: menor complexidade para adição.
- Divisão: complexidades lineares de Lagrange e Gregory-Newton, enquanto Newton é quadrático.
- Polinômios de Lagrange: menos eficientes em termos de multiplicação.

# Comparação das complexidades: gráficos




Adição




Divisão

- Polinômios de grau $n \leq 2$: preferível utilizar Newton;
- $n > 2$: Gregory-Newton mais indicado se pontos igualmente espaçados.

## *Splines* cúbicos

- Sejam $n+1$ pontos $(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, com
$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n.$$
- Construir $n$ polinômios interpoladores cúbicos $s_i(x)$: *splines* cúbicos.
- Passam por dois pontos sucessivos $(x_i, y_i)$ e $(x_{i+1}, y_{i+1})$, sendo cada polinômio utilizado no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.
- Total de $n$ polinômios na forma
$$s_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i, \ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \quad (11)$$

## Condições dos *splines* cúbicos

- Passam por $(x_i, y_i)$ e são continuos,

$$s_i(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \text{ e } s_{n-1}(x_n) = y_n, \tag{12}$$

$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-2. \tag{13}$$

- Inclinações e concavidades são contínuas,

$$s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1}),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-2, \tag{14}$$

$$s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1}),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-2. \tag{15}$$

- Obtêm-se por (11) $n$ equações com $4n$ incógnitas: $a_i$, $b_i$, $c_i$ e $d_i$.
- Condições (12) a (15) fornecem apenas $4n-2$ equações.
- São necessárias mais 2 equações para calcular todas as $4n$ incógnitas.

## Cálculo dos coeficientes

- Para $x = x_i$ em (11) e comparando com (12)

$$s_i(x_i) = d_i,$$

$$\boxed{d_i = y_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1}. \tag{16}$$

- Para $x = x_{i+1}$ em (11) e comparando com (13) em vista de (12)

$$s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1},$$

$$a_i(x_{i+1} - x_i)^3 + b_i(x_{i+1} - x_i)^2 + c_i(x_{i+1} - x_i) + d_i = y_{i+1}.$$

- Definindo

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \tag{17}$$

- e substituindo (16),

$$a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + y_i = y_{i+1}. \tag{18}$$

## Cálculo dos coeficientes cont.

- As derivadas de (11) são

$$s_i'(x) = 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i, \tag{19}$$

$$s_i''(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i. \tag{20}$$

- Para $x = x_i$ em (20)

$$s_i''(x_i) = 6a_i(x_i - x_i) + 2b_i,$$

$$\boxed{b_i = \frac{s_i''(x_i)}{2},\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1}. \tag{21}$$

- Para $x = x_{i+1}$ em (20)

$$s_i''(x_{i+1}) = 6a_i(x_{i+1} - x_i) + 2b_i.$$

- Em vista de (15) e substituindo (17) e (21)

$$s_{i+1}''(x_{i+1}) = 6a_i h_i + 2\frac{s_i''(x_i)}{2}.$$

## Cálculo dos coeficientes cont.

- Explicitando $a_i$

$$\boxed{a_i = \frac{s''_{i+1}(x_{i+1}) - s''_i(x_i)}{6h_i},\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1}. \tag{22}$$

- Substituindo (16), (21) e (22) em (18)

$$\frac{s''_{i+1}(x_{i+1}) - s''_i(x_i)}{6h_i} h_i^3 + \frac{s''_i(x_i)}{2} h_i^2 + c_i h_i + y_i = y_{i+1}.$$

- Explicitando $c_i$

$$\boxed{c_i = \Delta y_i - \frac{s''_{i+1}(x_{i+1}) + 2s''_i(x_i)}{6} h_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1}, \tag{23}$$

- sendo $\Delta y_i$ o operador de diferença dividida

$$\Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}. \tag{24}$$

## Coeficientes dos *splines* cúbicos

- Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$\boxed{a_i = \frac{s''_{i+1}(x_{i+1}) - s''_i(x_i)}{6h_i}},$$

$$\boxed{b_i = \frac{s''_i(x_i)}{2}},$$

$$\boxed{c_i = \Delta y_i - \frac{s''_{i+1}(x_{i+1}) + 2s''_i(x_i)}{6}h_i},$$

$$\boxed{d_i = y_i},$$

- sendo

$$\Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i},$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i.$$

## Sistema linear subdeterminado

- As inclinações de dois *splines* cúbicos adjacentes $s_{i-1}(x)$ e $s_i(x)$ são iguais no ponto comum $(x_i, y_i)$

$$s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i).$$

- Em vista de (19),

$$3a_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} = 3a_i(x_i - x_i)^2 + 2b_i(x_i - x_i) + c_i.$$

- Substituindo (17), (21), (22) e (23)

$$3\frac{s''_i(x_i) - s''_{i-1}(x_{i-1})}{6h_{i-1}}h^2_{i-1} + 2\frac{s''_{i-1}(x_{i-1})}{2}h_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{s''_i(x_i) + 2s''_{i-1}(x_{i-1})}{6}h_{i-1}$$

$$= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{s''_{i+1}(x_{i+1}) + 2s''_i(x_i)}{6}h_i.$$

- Simplificando, obtém-se a $i$-ésima equação para $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$

$$h_{i-1}s''_{i-1}(x_{i-1}) + 2(h_{i-1} + h_i)s''_i(x_i) + h_i s''_{i+1}(x_{i+1}) = 6(\Delta y_i - \Delta y_{i-1}). \quad (25)$$

## Sistema linear subdeterminado cont.

- Sistema linear subdeterminado com $n-1$ equações e $n+1$ incógnitas.
- Solução: $s_i''(x_i),\ i=0,1,2,\ldots,n$.
- Sistema linear (25) é da forma

$$\begin{bmatrix} h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & & & & \\ & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ & & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0''(x_0) \\ s_1''(x_1) \\ s_2''(x_2) \\ \cdots \\ s_{n-1}''(x_{n-1}) \\ s_n''(x_n) \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ \Delta y_2 - \Delta y_1 \\ \Delta y_3 - \Delta y_2 \\ \cdots \\ \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} \end{bmatrix}.$$

- Eliminar 2 incógnitas: sistema linear com matriz quadrada de ordem $n-1$.
- Esta eliminação pode ocorrer de várias formas.

## *Splines* cúbicos naturais

- Forma mais simples e freqüentemente usada de eliminar duas incógnitas do sistema (25)

$$\left.\begin{aligned} s_0''(x_0) &= 0, \\ s_n''(x_n) &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{26}$$

- Substituir $s_0''(x_0)$ na primeira equação do sistema e $s_n''(x_n)$ na última.
- Sistema linear tridiagonal simétrico

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1''(x_1) \\ s_2''(x_2) \\ s_3''(x_3) \\ \vdots \\ s_{n-1}''(x_{n-1}) \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ \Delta y_2 - \Delta y_1 \\ \Delta y_3 - \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

- Solução fornece as $n-1$ derivadas $s_i''(x_i), i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

## Exemplo: construção do sistema tridiagonal simétrico

**Exemplo 21** Dados os pontos $(1,2)$, $(2,4)$, $(4,1)$, $(6,3)$ e $(7,3)$, calcular as segundas derivadas $s_i''(x_i)$, $i = 0,1,2,3,4$ dos *splines* cúbicos naturais.

- Cálculo de $h_i$ por (17)

$$h_0 = x_1 - x_0 = 2 - 1 \leadsto h_0 = 1, \quad h_1 = x_2 - x_1 = 4 - 2 \leadsto h_1 = 2,$$

$$h_2 = x_3 - x_2 = 6 - 4 \leadsto h_2 = 2, \quad h_3 = x_4 - x_3 = 7 - 6 \leadsto h_3 = 1.$$

- Cálulo de $\Delta y_i$, usando (24)

$$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} = \frac{4-2}{1} \leadsto \Delta y_0 = 2, \quad \Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} = \frac{1-4}{2} \leadsto \Delta y_1 = -1{,}5;$$

$$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{h_2} = \frac{3-1}{2} \leadsto \Delta y_2 = 1, \quad \Delta y_3 = \frac{y_4 - y_3}{h_3} = \frac{3-3}{1} \leadsto \Delta y_3 = 0.$$

## Exemplo: construção do sistema tridiagonal simétrico cont.

- Substituindo em (27),

$$\begin{bmatrix} 2(1+2) & 2 & 0 \\ 2 & 2(2+2) & 2 \\ 0 & 2 & 2(2+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1''(x_1) \\ s_2''(x_2) \\ s_3''(x_3) \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -1{,}5-2 \\ 1-(-1{,}5) \\ 0-1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow s''(x) = \begin{bmatrix} -4{,}7 \\ 3{,}6 \\ -2{,}2 \end{bmatrix}.$$

- Segundas derivadas

$$s_0''(x_0) = 0; \;\; s_1''(x_1) = -4{,}7; \;\; s_2''(x_2) = 3{,}6; \;\; s_3''(x_3) = -2{,}2; \;\; s_4''(x_4) = 0.$$

## Exemplo: determinação dos *splines* cúbicos naturais

**Exemplo 22** A partir dos pontos do Exemplo 21, determinar as equações dos quatro *splines* cúbicos naturais na forma

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1,$$

- sendo as segundas derivadas

$$s''_0(x_0) = 0;\ \ s''_1(x_1) = -4{,}7;\ \ s''_2(x_2) = 3{,}6;\ \ s''_3(x_3) = -2{,}2;\ \ s''_4(x_4) = 0.$$

## *Spline* natural $s_0(x)$

$$a_0 = \frac{s_1''(x_1) - s_0''(x_0)}{6h_0} = \frac{-4{,}7 - 0}{6 \times 1} \leadsto a_0 = -\frac{47}{60},$$

$$b_0 = \frac{s_0''(x_0)}{2} = \frac{0}{2} \leadsto b_0 = 0,$$

$$c_0 = \Delta y_0 - \frac{s_1''(x_1) + 2s_0''(x_0)}{6}h_0 = 2 - \frac{-4{,}7 + 2 \times 0}{6} \times 1 \leadsto c_0 = \frac{167}{60},$$

$$d_0 = y_0 \leadsto d_0 = 2,$$

$$s_0(x) = -\frac{47}{60}(x-1)^3 + 0(x-1)^2 + \frac{167}{60}(x-1) + 2.$$

## *Spline* natural $s_1(x)$

$$a_1 = \frac{s_2''(x_2) - s_1''(x_1)}{6h_1} = \frac{3{,}6 - (-4{,}7)}{6 \times 2} \rightsquigarrow a_1 = \frac{83}{120},$$

$$b_1 = \frac{s_1''(x_1)}{2} = \frac{-4{,}7}{2} \rightsquigarrow b_1 = -\frac{47}{20},$$

$$c_1 = \Delta y_1 - \frac{s_2''(x_2) + 2s_1''(x_1)}{6} h_1 = -1{,}5 - \frac{3{,}6 + 2 \times -4{,}7}{6} \times 2 \rightsquigarrow c_1 = \frac{13}{30},$$

$$d_1 = y_1 \rightsquigarrow d_1 = 4,$$

$$s_1(x) = \frac{83}{120}(x-2)^3 - \frac{47}{20}(x-2)^2 + \frac{13}{30}(x-2) + 4.$$

## *Spline* natural $s_2(x)$

$$a_2 = \frac{s_3''(x_3) - s_2''(x_2)}{6h_2} = \frac{-2{,}2 - 3{,}6}{6 \times 2} \rightsquigarrow a_2 = -\frac{29}{60},$$

$$b_2 = \frac{s_2''(x_2)}{2} = \frac{3{,}6}{2} \rightsquigarrow b_2 = \frac{9}{5},$$

$$c_2 = \Delta y_2 - \frac{s_3''(x_3) + 2s_2''(x_2)}{6} h_2 = 1 - \frac{-2{,}2 + 2 \times 3{,}6}{6} \times 2 \rightsquigarrow c_2 = -\frac{2}{3},$$

$$d_2 = y_2 \rightsquigarrow d_2 = 1,$$

$$s_2(x) = -\frac{29}{60}(x-4)^3 + \frac{9}{5}(x-4)^2 - \frac{2}{3}(x-4) + 1.$$

## *Spline* natural $s_3(x)$

$$a_3 = \frac{s_4''(x_4) - s_3''(x_3)}{6h_3} = \frac{0 - (-2{,}2)}{6 \times 1} \rightsquigarrow a_3 = \frac{11}{30},$$

$$b_3 = \frac{s_3''(x_3)}{2} = \frac{-2{,}2}{2} \rightsquigarrow b_3 = -\frac{11}{10},$$

$$c_3 = \Delta y_3 - \frac{s_4''(x_4) + 2s_3''(x_3)}{6} h_3 = 0 - \frac{0 + 2 \times -2{,}2}{6} \times 1 \rightsquigarrow c_3 = \frac{11}{15},$$

$$d_3 = y_3 \rightsquigarrow d_3 = 3,$$

$$s_3(x) = \frac{11}{30}(x-6)^3 - \frac{11}{10}(x-6)^2 + \frac{11}{15}(x-6) + 3.$$

# Derivadas dos *splines* naturais

$$s_0'(x) = -\frac{47}{20}(x-1)^2 + \frac{167}{60} \;\text{ e }\; s_0''(x) = -\frac{47}{10}(x-1),$$

$$s_1'(x) = \frac{83}{40}(x-2)^2 - \frac{47}{10}(x-2) + \frac{13}{30} \;\text{ e }\; s_1''(x) = \frac{83}{20}(x-2) - \frac{47}{10},$$

$$s_2'(x) = -\frac{29}{20}(x-4)^2 + \frac{18}{5}(x-4) - \frac{2}{3} \;\text{ e }\; s_2''(x) = -\frac{29}{10}(x-4) + \frac{18}{5},$$

$$s_3'(x) = \frac{11}{10}(x-6)^2 - \frac{11}{5}(x-6) + \frac{11}{15} \;\text{ e }\; s_3''(x) = \frac{11}{5}(x-6) - \frac{11}{5}.$$

## Continuidade dos *splines* naturais

- Os *splines* são contínuos: $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$

$$s_0(2) = s_1(2) = 4, \;\; s_1(4) = s_2(4) = 1 \;\text{ e }\; s_2(6) = s_3(6) = 3.$$

- Primeiras derivadas contínuas: $s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1})$

$$s'_0(2) = s'_1(2) = \frac{13}{30}, \;\; s'_1(4) = s'_2(4) = -\frac{2}{3} \;\text{ e }\; s'_2(6) = s'_3(6) = \frac{11}{15}.$$

- Segundas derivadas contínuas: $s''_i(x_{i+1}) = s''_{i+1}(x_{i+1})$

$$s''_0(2) = s''_1(2) = -\frac{47}{10}, \;\; s''_1(4) = s''_2(4) = \frac{18}{5} \;\text{ e }\; s''_2(6) = s''_3(6) = -\frac{11}{5}.$$

## Exemplo: interpolação com *splines* cúbicos naturais

**Exemplo 23** Interpolar os valores $z = 1{,}2;\ 2{,}9;\ 5{,}2$ e $6{,}7$ usando os *splines* cúbicos naturais obtidos no Exemplo 22.

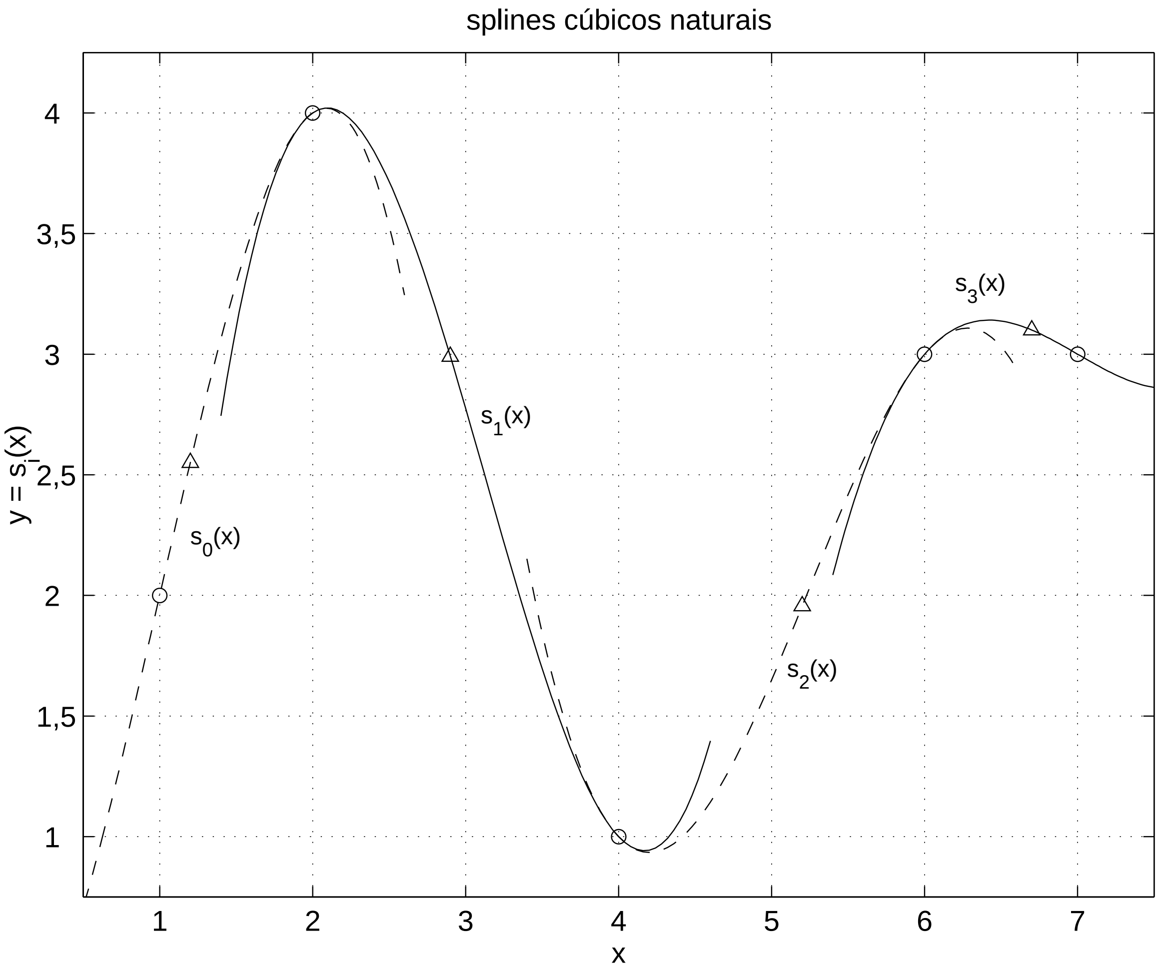
$$s_0(1{,}2) = -\frac{47}{60}(1{,}2-1)^3 + 0(1{,}2-1)^2 + \frac{167}{60}(1{,}2-1) + 2 = 2{,}5504;$$

$$s_1(2{,}9) = \frac{83}{120}(2{,}9-2)^3 - \frac{47}{20}(2{,}9-2)^2 + \frac{13}{30}(2{,}9-2) + 4 = 2{,}9907;$$

$$s_2(5{,}2) = -\frac{29}{60}(5{,}2-4)^3 + \frac{9}{5}(5{,}2-4)^2 - \frac{2}{3}(5{,}2-4) + 1 = 1{,}9568;$$

$$s_3(6{,}7) = \frac{11}{30}(6{,}7-6)^3 - \frac{11}{10}(6{,}7-6)^2 + \frac{11}{15}(6{,}7-6) + 3 = 3{,}1001.$$

# Gráficos dos *splines* cúbicos naturais




- Legenda ○: pares $(x_i, y_i)$; - -: *splines* $s_0(x)$ e $s_2(x)$; –: $s_1(x)$ e $s_3(x)$; e $\triangle$: valores interpolados.
- *Splines* $s_i(x)$ esboçados além de seus intervalos de utilização $[x_i, x_{i+1}]$.

# Algoritmo: Derivadas $s_i''(x_i)$ dos *splines* cúbicos naturais

**Algoritmo Splines_naturais**
{ **Objetivo:** Calcular as segundas derivadas para os *splines* cúbicos naturais }
**parâmetros de entrada** $n$, $x$, $y$
  { número de pontos dados, abscissas em ordem crescente e ordenadas }
**parâmetros de saída** $s2$, $CondErro$
  { segundas derivadas e condição de erro }
  **se** $n < 3$ **então**, $CondErro \leftarrow 1$, **abandone**, **fimse**; $CondErro \leftarrow 0$
  { construção do sistema tridiagonal simétrico }
  $m \leftarrow n - 2$; $Ha \leftarrow x(2) - x(1)$; $Deltaa \leftarrow (y(2) - y(1))/Ha$
  **para** $i \leftarrow 1$ **até** $m$ **faça**
    $Hb \leftarrow x(i+2) - x(i+1)$; $Deltab \leftarrow (y(i+2) - y(i+1))/Hb$
    $e(i) \leftarrow Hb$; $d(i) \leftarrow 2 * (Ha + Hb)$
    $s2(i+1) \leftarrow 6 * (Deltab - Deltaa)$; $Ha \leftarrow Hb$; $Deltaa \leftarrow Deltab$
  **fimpara**
  { eliminação de Gauss }
  **para** $i \leftarrow 2$ **até** $m$ **faça**
    $t \leftarrow e(i-1)/d(i-1)$; $d(i) \leftarrow d(i) - t * e(i-1)$; $s2(i+1) \leftarrow s2(i+1) - t * s2(i)$
  **fimpara**
  { solução por substituições retroativas }
  $s2(m+1) \leftarrow s2(m+1)/d(m)$
  **para** $i \leftarrow m$ **até** $2$ **passo** $-1$ **faça**
    $s2(i) \leftarrow (s2(i) - e(i-1) * s2(i+1))/d(i-1)$
  **fimpara**
  $s2(1) \leftarrow 0$; $s2(m+2) \leftarrow 0$
**fimalgoritmo**

$\Vert\Leftarrow$

## Complexidade: Derivadas $s_i''(x_i)$ dos *splines* cúbicos naturais

| Operações | Complexidade |
|---|---|
| adições | $20n - 47$ |
| multiplicações | $5n - 13$ |
| divisões | $3n - 7$ |

$\Vert\!\Leftarrow$

- $n$: número de pontos, $n \geq 3$.

## Exemplo: uso do algoritmo

**Exemplo 24** Resolver o Exemplo 21 usando o algoritmo.

```
% Os parametros de entrada
n = 5
x = 1     2     4     6     7
y = 2     4     1     3     3
% produzem os resultados
s2 = 0   -4.7000    3.6000   -2.2000         0
CondErro = 0
```

## *Splines* cúbicos extrapolados

- Outra forma de eliminar duas incógnitas do sistema linear (25).
- Impõe-se a condição

$$s_0'''(x_1) = s_1'''(x_1) \ \text{ e } \ s_{n-2}'''(x_{n-1}) = s_{n-1}'''(x_{n-1}), \tag{28}$$

- sendo $s_i'''(x)$ obtido da derivação de (20).
- Em vista de (22)

$$s_i'''(x) = \frac{s_{i+1}''(x_{i+1}) - s_i''(x_i)}{h_i}, \ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{29}$$

## Cálculo das derivadas

- Considere em (28): $s_0'''(x_1) = s_1'''(x_1)$.
- Avaliando em (29)

$$\frac{s_1''(x_1) - s_0''(x_0)}{h_0} = \frac{s_2''(x_2) - s_1''(x_1)}{h_1},$$

$$s_0''(x_0) = \frac{(h_0 + h_1)s_1''(x_1) - h_0 s_2''(x_2)}{h_1}.$$

- A partir da condição de (28): $s_{n-2}'''(x_{n-1}) = s_{n-1}'''(x_{n-1})$

$$\frac{s_{n-1}''(x_{n-1}) - s_{n-2}''(x_{n-2})}{h_{n-2}} = \frac{s_n''(x_n) - s_{n-1}''(x_{n-1})}{h_{n-1}},$$

$$s_n''(x_n) = \frac{(h_{n-1} + h_{n-2})s_{n-1}''(x_{n-1}) - h_{n-1} s_{n-2}''(x_{n-2})}{h_{n-2}}.$$

## Sistema linear tridiagonal não simétrico

- Substituindo $s''_0(x_0)$ na primeira equação de (25) e $s''_n(x_n)$ na última, tem-se um sistema linear tridiagonal não simétrico

$$\begin{bmatrix} \frac{(h_0+h_1)(h_0+2h_1)}{h_1} & \frac{h_1^2-h_0^2}{h_1} & & & \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \frac{h_{n-2}^2-h_{n-1}^2}{h_{n-2}} & \frac{(h_{n-1}+h_{n-2})(h_{n-1}+2h_{n-2})}{h_{n-2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s''_1(x_1) \\ s''_2(x_2) \\ \vdots \\ s''_{n-2}(x_{n-2}) \\ s''_{n-1}(x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$= 6 \begin{bmatrix} \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ \Delta y_2 - \Delta y_1 \\ \Delta y_3 - \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

- Solução: derivadas $s''_i(x_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

## Cálculo das derivadas cont.

- As derivadas $s''_0(x_0)$ e $s''_n(x_n)$ são dadas por

$$\left.\begin{aligned} s''_0(x_0) &= \frac{(h_0+h_1)s''_1(x_1) - h_0 s''_2(x_2)}{h_1}, \\ s''_n(x_n) &= \frac{(h_{n-1}+h_{n-2})s''_{n-1}(x_{n-1}) - h_{n-1} s''_{n-2}(x_{n-2})}{h_{n-2}} \end{aligned}\right\}. \tag{31}$$

- A derivada $s''_0(x_0)$ é uma extrapolação linear de $s''_1(x_1)$ e $s''_2(x_2)$.
- E $s''_n(x_n)$ é uma extrapolação linear de $s''_{n-2}(x_{n-2})$ e $s''_{n-1}(x_{n-1})$.
- Esses *splines* cúbicos se ajustam perfeitamente a uma $y = f(x)$ cúbica.
- Estes *splines* são também conhecidos como *not-a-knot*.

## Exemplo: construção do sistema tridiagonal não simétrico

**Exemplo 25** Dados os pontos $(1,2)$, $(2,4)$, $(4,1)$, $(6,3)$ e $(7,3)$, calcular as segundas derivadas $s_i''(x_i)$, $i = 0,1,2,3,4$ dos *splines* cúbicos extrapolados.

- Cálculo de $h_i$ por (17)

$$h_0 = x_1 - x_0 = 2 - 1 \leadsto h_0 = 1, \;\; h_1 = x_2 - x_1 = 4 - 2 \leadsto h_1 = 2,$$

$$h_2 = x_3 - x_2 = 6 - 4 \leadsto h_2 = 2, \;\; h_3 = x_4 - x_3 = 7 - 6 \leadsto h_3 = 1.$$

- Cálculo de $\Delta y_i$, usando (24)

$$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} = \frac{4-2}{1} \leadsto \Delta y_0 = 2, \;\; \Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} = \frac{1-4}{2} \leadsto \Delta y_1 = -1{,}5;$$

$$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{h_2} = \frac{3-1}{2} \leadsto \Delta y_2 = 1, \;\; \Delta y_3 = \frac{y_4 - y_3}{h_3} = \frac{3-3}{1} \leadsto \Delta y_3 = 0.$$

## Exemplo: construção do sistema tridiagonal não simétrico cont.

- Substituindo em (30),

$$\begin{bmatrix} \frac{(1+2)(1+2\times 2)}{2} & \frac{2^2-1^2}{2} & 0 \\ 2 & 2(2+2) & 2 \\ 0 & \frac{2^2-1^2}{2} & \frac{(1+2)(1+2\times 2)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1''(x_1) \\ s_2''(x_2) \\ s_3''(x_3) \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -1{,}5-2 \\ 1-(-1{,}5) \\ 0-1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow s''(x) = \begin{bmatrix} -41/12 \\ 37/12 \\ -17/12 \end{bmatrix}.$$

- Por (31)

$$s_0''(x_0) = \frac{(1+2)\times -41/12 - 1\times 37/12}{2} = -20/3,$$

$$s_4''(x_4) = \frac{(1+2)\times -17/12 - 1\times 37/12}{2} = -11/3.$$

- Segundas derivadas

$$s_0''(x_0) = -\frac{20}{3},\quad s_1''(x_1) = -\frac{41}{12},\quad s_2''(x_2) = \frac{37}{12},\quad s_3''(x_3) = -\frac{17}{12},\quad s_4''(x_4) = -\frac{11}{3}.$$

## Exemplo: determinação dos *splines* cúbicos extrapolados

**Exemplo 26** A partir dos pontos do Exemplo 25, determinar as equações dos quatro *splines* cúbicos extrapolados na forma

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1,$$

- sendo as segundas derivadas

$$s_0''(x_0) = -\frac{20}{3},\ \ s_1''(x_1) = -\frac{41}{12},\ \ s_2''(x_2) = \frac{37}{12},\ \ s_3''(x_3) = -\frac{17}{12},\ \ s_4''(x_4) = -\frac{11}{3}.$$

## *Spline* extrapolado $s_0(x)$

$$a_0 = \frac{s_1''(x_1) - s_0''(x_0)}{6h_0} = \frac{-41/12 - (-20/3)}{6 \times 1} \rightsquigarrow a_0 = \frac{13}{24},$$

$$b_0 = \frac{s_0''(x_0)}{2} = \frac{-20/3}{2} \rightsquigarrow b_0 = -\frac{10}{3},$$

$$c_0 = \Delta y_0 - \frac{s_1''(x_1) + 2s_0''(x_0)}{6} h_0 = 2 - \frac{-41/12 + 2 \times -20/3}{6} \times 1 \rightsquigarrow c_0 = \frac{115}{24},$$

$$d_0 = y_0 \rightsquigarrow d_0 = 2,$$

$$s_0(x) = \frac{13}{24}(x-1)^3 - \frac{10}{3}(x-1)^2 + \frac{115}{24}(x-1) + 2.$$

## *Spline* extrapolado $s_1(x)$

$$a_1 = \frac{s_2''(x_2) - s_1''(x_1)}{6h_1} = \frac{37/12 - (-41/12)}{6 \times 2} \rightsquigarrow a_1 = \frac{13}{24},$$

$$b_1 = \frac{s_1''(x_1)}{2} = \frac{-41/12}{2} \rightsquigarrow b_1 = -\frac{41}{24},$$

$$c_1 = \Delta y_1 - \frac{s_2''(x_2) + 2s_1''(x_1)}{6} h_1 = -1{,}5 - \frac{37/12 + 2 \times -41/12}{6} \times 2 \rightsquigarrow c_1 = -\frac{1}{4},$$

$$d_1 = y_1 \rightsquigarrow d_1 = 4,$$

$$s_1(x) = \frac{13}{24}(x-2)^3 - \frac{41}{24}(x-2)^2 - \frac{1}{4}(x-2) + 4.$$

# *Spline* extrapolado $s_2(x)$

$$a_2 = \frac{s_3''(x_3) - s_2''(x_2)}{6h_2} = \frac{-17/12 - 37/12}{6 \times 2} \leadsto a_2 = -\frac{3}{8},$$

$$b_2 = \frac{s_2''(x_2)}{2} = \frac{37/12}{2} \leadsto b_2 = \frac{37}{24},$$

$$c_2 = \Delta y_2 - \frac{s_3''(x_3) + 2s_2''(x_2)}{6} h_2 = 1 - \frac{-17/12 + 2 \times 37/12}{6} \times 2 \leadsto c_2 = -\frac{7}{12},$$

$$d_2 = y_2 \leadsto d_2 = 1,$$

$$s_2(x) = -\frac{3}{8}(x-4)^3 + \frac{37}{24}(x-4)^2 - \frac{7}{12}(x-4) + 1.$$

## *Spline* extrapolado $s_3(x)$

$$a_3 = \frac{s_4''(x_4) - s_3''(x_3)}{6h_3} = \frac{-11/3 - (-17/12)}{6 \times 1} \rightsquigarrow a_3 = -\frac{3}{8},$$

$$b_3 = \frac{s_3''(x_3)}{2} = \frac{-17/12}{2} \rightsquigarrow b_3 = -\frac{17}{24},$$

$$c_3 = \Delta y_3 - \frac{s_4''(x_4) + 2s_3''(x_3)}{6} h_3 = 0 - \frac{-11/3 + 2 \times -17/12}{6} \times 1 \rightsquigarrow c_3 = \frac{13}{12},$$

$$d_3 = y_3 \rightsquigarrow d_3 = 3,$$

$$s_3(x) = -\frac{3}{8}(x-6)^3 - \frac{17}{24}(x-6)^2 + \frac{13}{12}(x-6) + 3.$$

# Derivadas dos *splines* extrapolados

$$s_0'(x) = \frac{13}{8}(x-1)^2 - \frac{20}{3}(x-1) + \frac{115}{24},\ s_0''(x) = \frac{13}{4}(x-1) - \frac{20}{3} \text{ e } s_0'''(x) = \frac{13}{4},$$

$$s_1'(x) = \frac{13}{8}(x-2)^2 - \frac{41}{12}(x-2) - \frac{1}{4},\ s_1''(x) = \frac{13}{4}(x-2) - \frac{41}{12} \text{ e } s_1'''(x) = \frac{13}{4},$$

$$s_2'(x) = -\frac{9}{8}(x-4)^2 + \frac{37}{12}(x-4) - \frac{7}{12},\ s_2''(x) = -\frac{9}{4}(x-4) + \frac{37}{12} \text{ e } s_2'''(x) = -\frac{9}{4},$$

$$s_3'(x) = -\frac{9}{8}(x-6)^2 - \frac{17}{12}(x-6) + \frac{13}{12},\ s_3''(x) = -\frac{9}{4}(x-6) - \frac{17}{12} \text{ e } s_3'''(x) = -\frac{9}{4}.$$

## Continuidade dos *splines* extrapolados

- Os *splines* são contínuos: $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$

$$s_0(2) = s_1(2) = 4,\ s_1(4) = s_2(4) = 1 \ \text{e} \ s_2(6) = s_3(6) = 3.$$

- Primeiras derivadas contínuas: $s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1})$

$$s'_0(2) = s'_1(2) = -\frac{1}{4},\ s'_1(4) = s'_2(4) = -\frac{7}{12} \ \text{e} \ s'_2(6) = s'_3(6) = \frac{13}{12}.$$

- Segundas derivadas contínuas: $s''_i(x_{i+1}) = s''_{i+1}(x_{i+1})$

$$s''_0(2) = s''_1(2) = -\frac{41}{12}, s''_1(4) = s''_2(4) = \frac{37}{12} \ \text{e} \ s''_2(6) = s''_3(6) = -\frac{17}{12}.$$

- Terceiras derivadas contínuas: $s'''_0(x_1) = s'''_1(x_1)$ e $s'''_{n-2}(x_{n-1}) = s'''_{n-1}(x_{n-1})$

$$s'''_0(x_1) = s'''_1(x_1) : s'''_0(2) = s'''_1(2) = \frac{13}{4},$$

$$s'''_2(x_3) = s'''_3(x_3) : s'''_2(6) = s'''_3(6) = -\frac{9}{4}.$$

## Exemplo: interpolação com *splines* cúbicos extrapolados

**Exemplo 27** Interpolar os valores $z = 1{,}2;\ 2{,}9;\ 5{,}2;\ 6{,}7$ usando os *splines* cúbicos extrapolados obtidos no Exemplo 26.

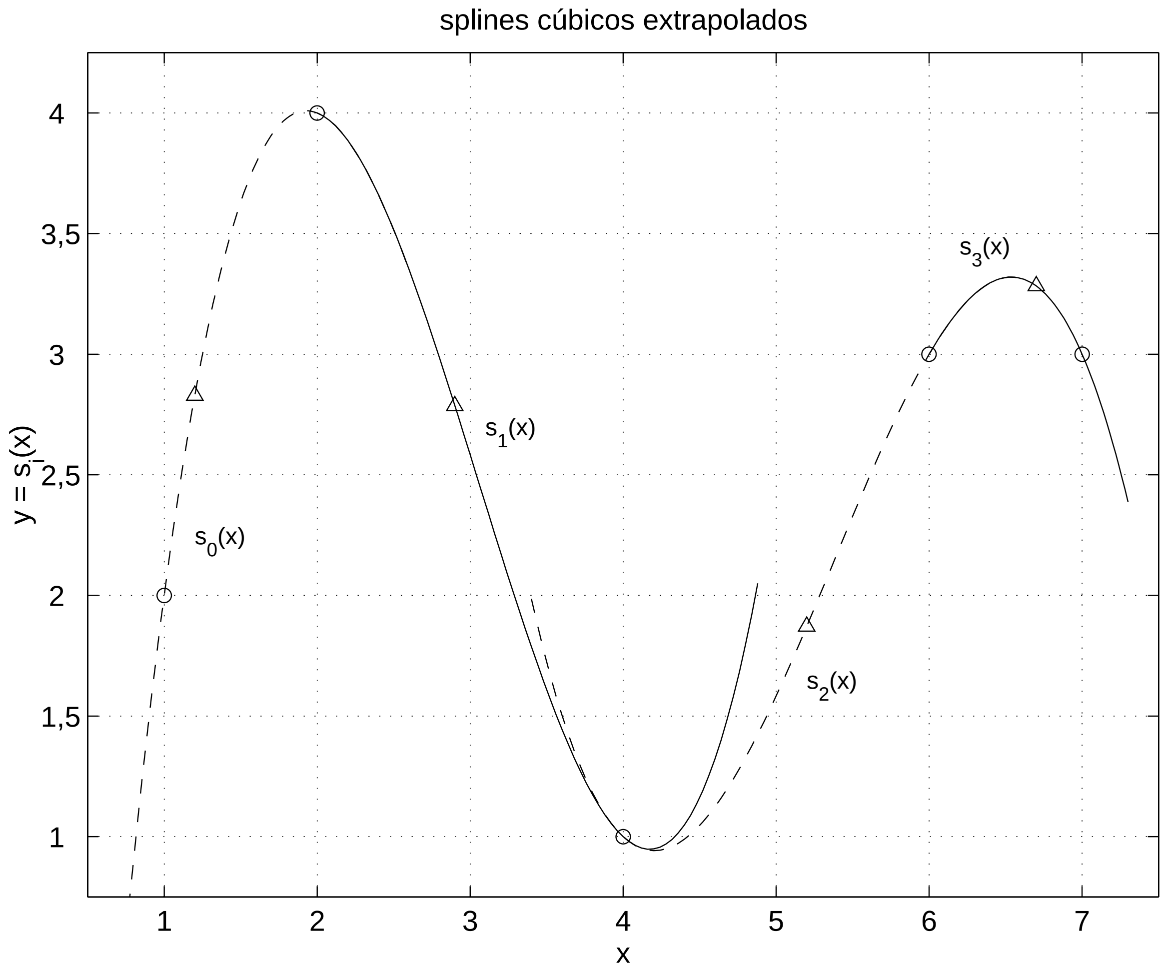
$$s_0(1{,}2) = \frac{13}{24}(1{,}2-1)^3 - \frac{10}{3}(1{,}2-1)^2 + \frac{115}{24}(1{,}2-1) + 2 = 2{,}8293;$$

$$s_1(2{,}9) = \frac{13}{24}(2{,}9-2)^3 - \frac{41}{24}(2{,}9-2)^2 - \frac{1}{4}(2{,}9-2) + 4 = 2{,}7861;$$

$$s_2(5{,}2) = -\frac{3}{8}(5{,}2-4)^3 + \frac{37}{24}(5{,}2-4)^2 - \frac{7}{12}(5{,}2-4) + 1 = 1{,}8720;$$

$$s_3(6{,}7) = -\frac{3}{8}(6{,}7-6)^3 - \frac{17}{24}(6{,}7-6)^2 + \frac{13}{12}(6{,}7-6) + 3 = 3{,}2826.$$

# Gráficos dos *splines* cúbicos extrapolados




- Legenda o: pares $(x_i, y_i)$; --: *splines* $s_0(x)$ e $s_2(x)$; –: $s_1(x)$ e $s_3(x)$ e $\triangle$: valores interpolados.
- *Splines* $s_i(x)$ esboçados além de seus intervalos de utilização $[x_i, x_{i+1}]$.

## Algoritmo: Derivadas $s_i''(x_i)$ dos *splines* cúbicos extrapolados

**Algoritmo Splines_extrapolados**
{ **Objetivo:** Calcular as segundas derivadas para os *splines* cúbicos extrapolados }
**parâmetros de entrada** *n*, *x*, *y* { número de pontos dados, abscissas em ordem crescente e ordenadas }
**parâmetros de saída** *s2*, *CondErro* { segundas derivadas e condição de erro }
  **se** $n < 4$ **então**, $CondErro \leftarrow 1$, **abandone**, **fimse**; $CondErro \leftarrow 0$
  { construção do sistema tridiagonal não simétrico }
  $m \leftarrow n - 2$; $Ha \leftarrow x(2) - x(1)$; $Deltaa \leftarrow (y(2) - y(1))/Ha$
  $Hb \leftarrow x(3) - x(2)$; $Deltab \leftarrow (y(3) - y(2))/Hb$; $d(1) \leftarrow (Ha + Hb) * (Ha + 2 * Hb)/Hb$
  $c(2) \leftarrow (Hb^2 - Ha^2)/Hb$; $s2(2) \leftarrow 6 * (Deltab - Deltaa)$
  **para** $i \leftarrow 2$ **até** $m - 1$ **faça**
    $Ha \leftarrow Hb$; $Deltaa \leftarrow Deltab$; $Hb \leftarrow x(i + 2) - x(i + 1)$; $Deltab \leftarrow (y(i + 2) - y(i + 1))/Hb$
    $d(i) \leftarrow 2 * (Ha + Hb)$; $e(i - 1) \leftarrow Ha$; $c(i + 1) \leftarrow Hb$
    $s2(i + 1) \leftarrow 6 * (Deltab - Deltaa)$; $Ha \leftarrow Hb$; $Deltaa \leftarrow Deltab$
  **fimpara**
  $Ha \leftarrow Hb$; $Deltaa \leftarrow Deltab$; $Hb \leftarrow x(n) - x(n - 1)$; $Deltab \leftarrow (y(n) - y(n - 1))/Hb$
  $d(m) \leftarrow (Ha + Hb) * (Hb + 2 * Ha)/Ha$; $e(m - 1) \leftarrow (Ha^2 - Hb^2)/Ha$; $s2(m + 1) \leftarrow 6 * (Deltab - Deltaa)$
  { eliminação de Gauss }
  **para** $i \leftarrow 2$ **até** $m$ **faça**
    $t \leftarrow e(i - 1)/d(i - 1)$; $d(i) \leftarrow d(i) - t * c(i)$; $s2(i + 1) \leftarrow s2(i + 1) - t * s2(i)$
  **fimpara**
  { solução por substituições retroativas }
  $s2(m + 1) \leftarrow s2(m + 1)/d(m)$
  **para** $i \leftarrow m$ **até** $2$ **passo** $-1$ **faça**
    $s2(i) \leftarrow (s2(i) - c(i) * s2(i + 1))/d(i - 1)$
  **fimpara**
  $Ha \leftarrow x(2) - x(1)$; $Hb \leftarrow x(3) - x(2)$; $s2(1) \leftarrow ((Ha + Hb) * s2(2) - Ha * s2(3))/Hb$
  $Ha \leftarrow x(n - 1) - x(n - 2)$; $Hb \leftarrow x(n) - x(n - 1)$; $s2(m + 2) \leftarrow ((Ha + Hb) * s2(m + 1) - Hb * s2(m))/Ha$
**fimalgoritmo**

## Complexidade: Derivadas $s_i''(x_i)$ dos *splines* cúbicos extrapolados

| Operações | Complexidade |
|---|---|
| adições | $20n - 37$ |
| multiplicações | $5n - 3$ |
| divisões | $3n$ |

$\Vdash\Leftarrow$

- $n$: número de pontos, $n \geq 4$.
- Operação de potenciação ($h^2$) contabilizada como uma multiplicação.

## Exemplo: uso do algoritmo

**Exemplo 28** Resolver o Exemplo 25 usando o algoritmo.

```
% Os parametros de entrada
n = 5
x = 1     2     4     6     7
y = 2     4     1     3     3
% produzem os resultados
s2 = -6.6667   -3.4167    3.0833   -1.4167   -3.6667
CondErro = 0
```

## Avaliação dos *splines* cúbicos

- Calculadas as derivadas $s_i''(x_i)$ dos *splines* cúbicos da forma (11),

$$s_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i,\ i = 0, 1, 2\dots, n-1,$$

- seus coeficientes são

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \frac{s_{i+1}''(x_{i+1}) - s_i''(x_i)}{6h_i},\\ b_i &= \frac{s_i''(x_i)}{2},\\ c_i &= \Delta y_i - \frac{s_{i+1}''(x_{i+1}) + 2s_i''(x_i)}{6}h_i,\\ d_i &= y_i, \end{aligned}\right\} i = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

- sendo

$$\left.\begin{aligned} h_i &= x_{i+1} - x_i,\\ \Delta y_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}, \end{aligned}\right\} i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

# Algoritmo: avaliar *splines* cúbicos

```
Algoritmo Splines_avaliar
{ Objetivo: Avaliar os splines cúbicos naturais e extrapolados }
parâmetros de entrada n, x, y, m, z, ts
   { número de pontos dados, abscissas em ordem crescente, ordenadas, }
   { número de pontos a interpolar, valores a interpolar e tipo de splines }
parâmetros de saída sz, CondErro
   { valores interpolados e condição de erro }
   se ts = 0 então
      [s2, CondErro] ← Splines_naturais(n, x, y) (algoritmo)
   senão
      [s2, CondErro] ← Splines_extrapolados(n, x, y) (algoritmo)
   fimse
   se CondErro ≠ 0 então abandone, fimse; CondErro ← 0
   para j ← 1 até m faça
      se z(j) ≥ x(1) e z(j) ≤ x(n) então
         { pesquisa binária para localizar o intervalo }
         inf ← 1; sup ← n
         repita
            se sup − inf ≤ 1 então interrompa, fimse
            ind ← trunca((inf + sup)/2)
            se x(ind) > z(j) então sup ← ind, senão inf ← ind, fimse
         fimrepita
         { avaliação do spline pelo processo de Horner }
         h ← x(sup) − x(inf); a ← (s2(sup) − s2(inf))/(6 ∗ h); b ← s2(inf) ∗ 0,5
         c ← (y(sup) − y(inf))/h − (s2(sup) + 2 ∗ s2(inf)) ∗ h/6; d ← y(inf); h ← z(j) − x(inf)
         sz(j) ← ((a ∗ h + b) ∗ h + c) ∗ h + d
         escreva inf−1, a, b, c, d, z(j), sz(j)
      senão
         sz(j) ← 0; CondErro ← CondErro + 1
      fimse
   fimpara
fimalgoritmo
```

|⇚

# Complexidade: avaliar *splines* cúbicos

| Operações | Complexidade |
|---|---|
| adições | $9m$ |
| multiplicações | $7m$ |
| divisões | $3m$ |

$\Vert\Leftarrow$

- $m$: número de pontos a serem avaliados.
- Desconsiderando as operações da pesquisa binária.

## Exemplo: avaliação de *spline* cúbico natural

**Exemplo 29** Dados os pontos $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 1)$, $(6, 3)$ e $(7, 3)$, interpolar os valores $z = 1{,}2;\ 0{,}1;\ 2{,}9;\ 5{,}2$ e $6{,}7$ usando os *splines* cúbicos naturais.

```
% Os parametros de entrada
n = 5
x = 1     2     4     6     7
y = 2     4     1     3     3
m = 5
z = 1.2000    0.1000    2.9000    5.2000    6.7000
ts = 0
% produzem os resultados
spline   a_i       b_i       c_i       d_i       z_j       sz_j
s_0:   -0.7833    0.0000    2.7833    2.0000    1.2000    2.5504
s_1:    0.6917   -2.3500    0.4333    4.0000    2.9000    2.9907
s_2:   -0.4833    1.8000   -0.6667    1.0000    5.2000    1.9568
s_3:    0.3667   -1.1000    0.7333    3.0000    6.7000    3.1001
sz = 2.5504         0    2.9907    1.9568    3.1001
CondErro = 1
```

- `CondErro = 1`: um valor a interpolar $(z(2))$ fora do intervalo $[1,\ 7]$.
- Valor *0* é atribuído a $sz(2)$ (ver Exemplo 23).

## Exemplo: avaliação de *spline* cúbico extrapolado

**Exemplo 30** Dados os pontos $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 1)$, $(6, 3)$ e $(7, 3)$, interpolar os valores $z = 1{,}2;\ 2{,}9;\ 0{,}5;\ 5{,}2;\ 6{,}7$ e $8{,}3$ utilizando os *splines* cúbicos extrapolados.

```
% Os parametros de entrada
n = 5
x = 1     2     4     6     7
y = 2     4     1     3     3
m = 6
z = 1.2000    2.9000    0.5000    5.2000    6.7000    8.3000
ts = 1
% produzem os resultados
spline   a_i       b_i       c_i       d_i       z_j       sz_j
s_0:    0.5417   -3.3333    4.7917    2.0000    1.2000    2.8293
s_1:    0.5417   -1.7083   -0.2500    4.0000    2.9000    2.7861
s_2:   -0.3750    1.5417   -0.5833    1.0000    5.2000    1.8720
s_3:   -0.3750   -0.7083    1.0833    3.0000    6.7000    3.2826
sz = 2.8293    2.7861         0    1.8720    3.2826         0
CondErro = 2
```

- `CondErro = 2`: dois valores a interpolar ($z(3)$ e $z(6)$) fora do intervalo $[1,\ 7]$;
- Variáveis $sz(3)$ e $sz(6)$ recebem valor $0$ (ver Exemplo 27).

## Comparação dos *splines* cúbicos

- Seja a função

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & -2 \le x \le 0, \\ x\,\mathrm{sen}(5x) + 1, & 0 \le x \le 4, \end{cases}$$

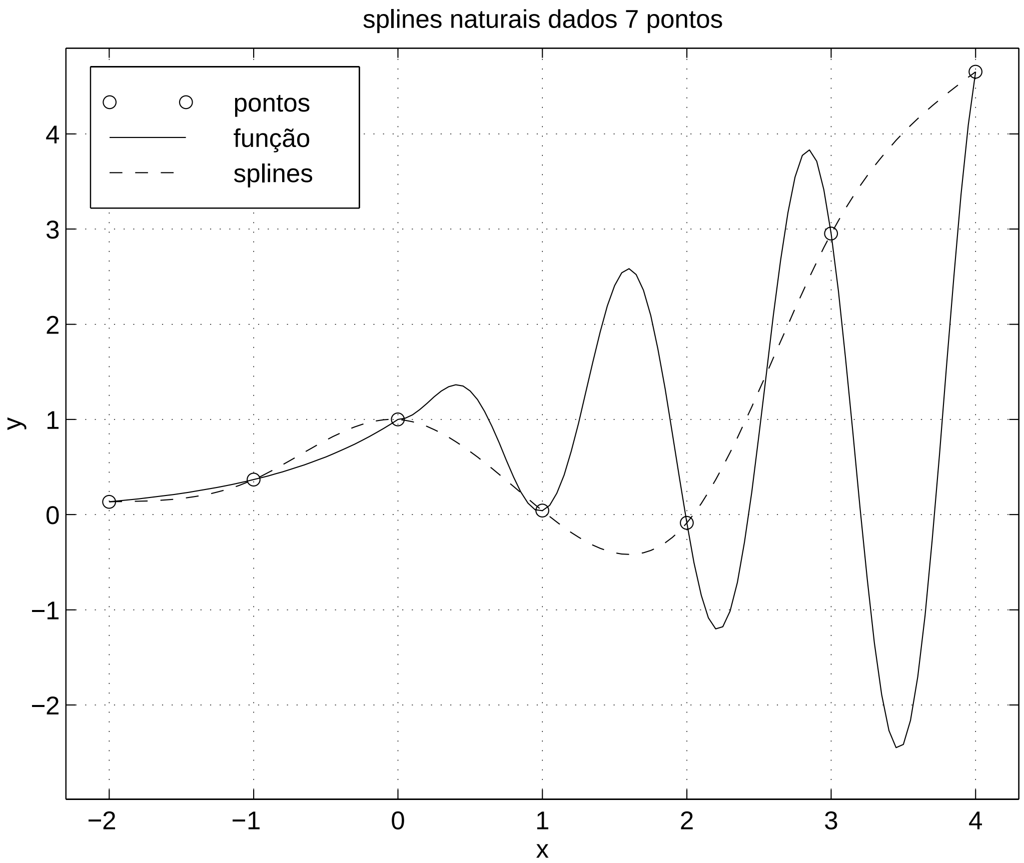
- definida por $n$ pontos distintos $(-2, f(-2))$, $(-2+h, f(-2+h))$, $(-2+2h, f(-2+2h))$, $\ldots$, $(4, f(4))$,

- sendo $h = (4 - (-2))/(n-1)$.

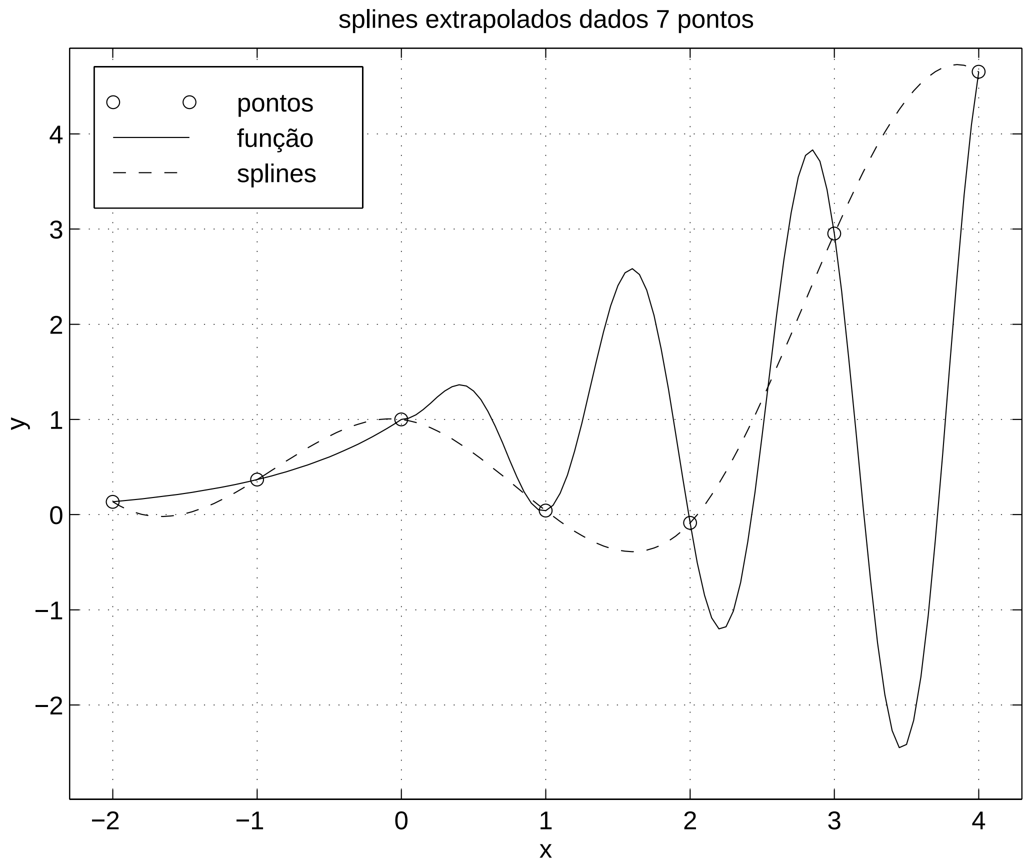
- Reconstruir a curva de $y = f(x)$ por meio dos *splines* cúbicos.

- Usar $m = 121$ pontos.

# *Splines* cúbicos com diferentes números de pontos

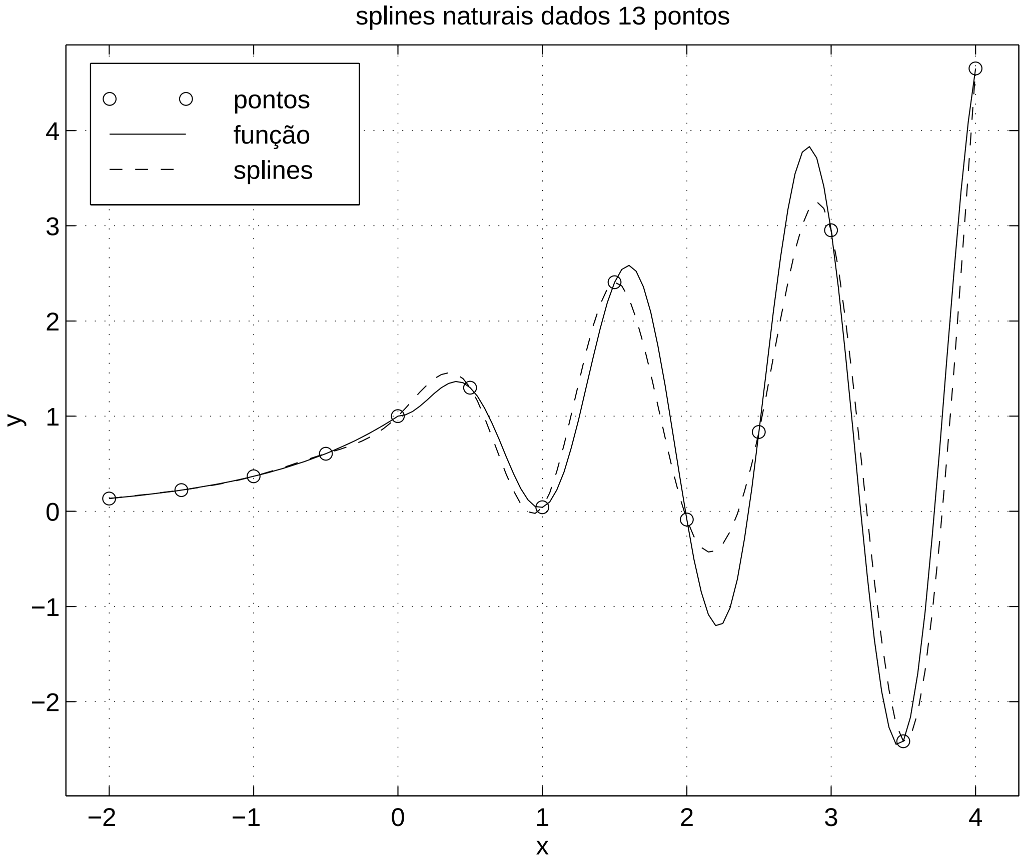


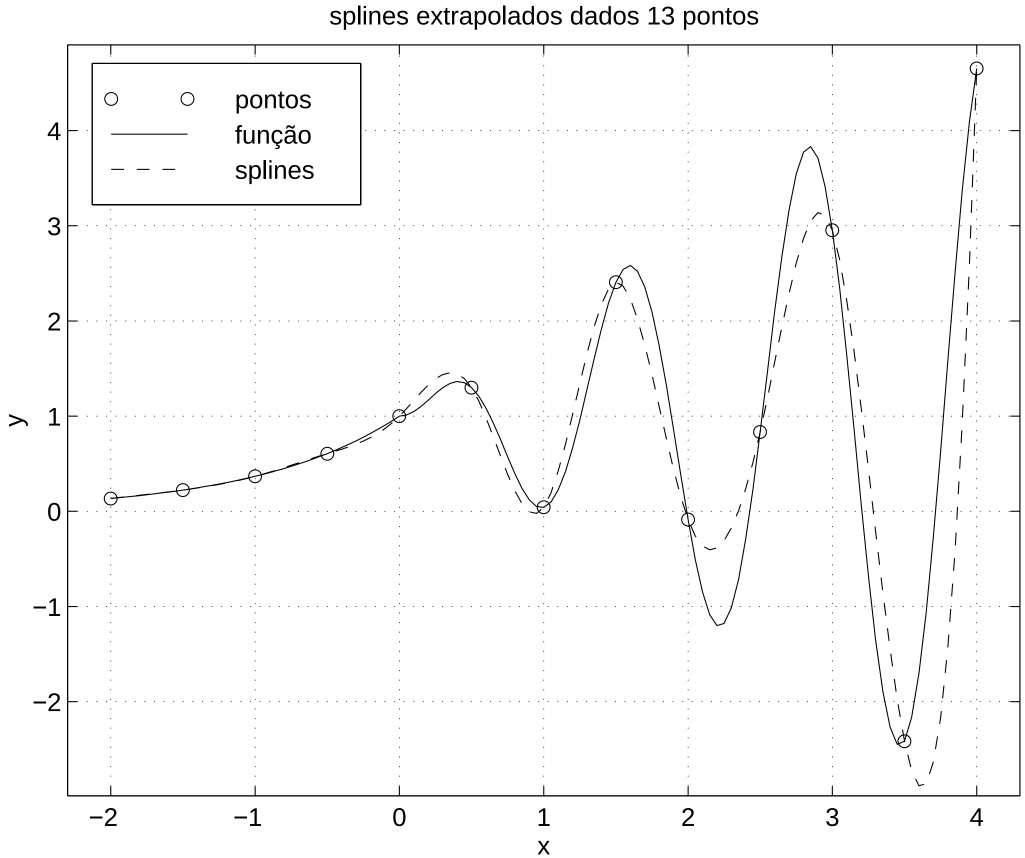

*Splines* naturais dados 7 pontos




*Splines* extrapolados dados 7 pontos

# *Splines* cúbicos com diferentes números de pontos




*Splines* naturais dados 13 pontos

*Splines* extrapolados dados 13 pontos

# Comparação de *splines* cúbicos, com $m = 121$ pontos interpolados

| $z$ | $n = 7$ ($h = 1$) | | $n = 13$ ($h = 0{,}5$) | | $n = 25$ ($h = 0{,}25$) | | $n = 61$ ($h = 0{,}1$) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Natural | Extrapol | Natural | Extrapol | Natural | Extrapol | Natural | Extrapol |
| −1,95 | 0,00625 | 0,05198 | 0,00105 | 0,00189 | 0,00033 | 0,00001 | 0,00006 | 0,00000 |
| −0,95 | 0,01625 | 0,02866 | 0,00216 | 0,00222 | 0,00002 | 0,00003 | 0,00000 | 0,00000 |
| 0,05 | 0,02107 | 0,02496 | 0,06784 | 0,06788 | 0,03382 | 0,03382 | 0,01022 | 0,01022 |
| 1,05 | 0,11802 | 0,11486 | 0,09564 | 0,09614 | 0,00626 | 0,00626 | 0,00023 | 0,00023 |
| 2,05 | 0,51399 | 0,50526 | 0,23972 | 0,24657 | 0,00956 | 0,00956 | 0,00016 | 0,00016 |
| 3,05 | 0,73943 | 0,77121 | 0,20128 | 0,29666 | 0,00100 | 0,00062 | 0,00036 | 0,00036 |

Fim

# Capítulo 3: Interpolação polinomial