Interpolação polinomial

Algoritmos Numéricos - Topico 6-1
Interpolação Polinomial. Parte 1

Prof. Cláudia G. Varassin DI/UFES
emails:claudia.varassin@ufes.br e galarda@inf.ufes.br

Abril de 2021

Interpolação Polinomial

1. O que é interpolar?
2. Interpolação polinomial no plano
3. Como calcular o polinômio interpolador

O que é interpolar ?

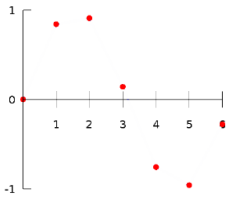
Interpolar consiste em aproximar uma função $f(x)$ por uma outra.

A expressão da função $f(x)$ pode ser explicitamente fornecida

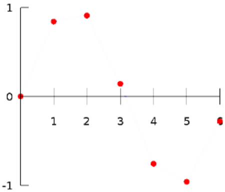
ou

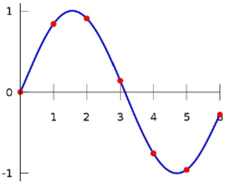
ou pode ser conhecida em apenas um dado conjunto de pontos (x_i, y_i).

A função $f(x)$ que se quer interpolar pode ser conhecida em apenas um conjunto de pontos (x_i, y_i), isto é, dada, apenas, na forma tabelar.
Neste caso, interpolar consiste em obter um função que "passe" por todos os pontos.



A função $f(x)$ que se quer interpolar pode ser conhecida em apenas um conjunto de pontos (x_i, y_i), isto é, dada, apenas, na forma tabelar.
Neste caso, interpolar consiste em obter um função que "passe" por todos os pontos.





A função interpoladora $g(x)$ deve coincidir com a função $f(x)$ (original) em um conjunto de pontos x_i, $i = 1, n$.

$$g(x_i) = f(x_i)$$

A condição acima é chamada de restrição de interpolação.

A função interpoladora $g(x)$ deve coincidir com a função $f(x)$ (original) em um conjunto de pontos x_i, $i = 1, n$.

$$g(x_i) = f(x_i)$$

A condição acima é chamada de restrição de interpolação.

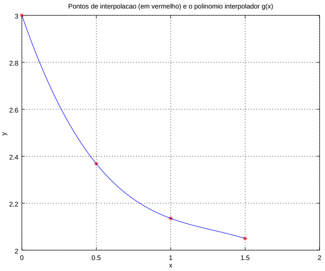
Em geral, busca se uma função interpoladora que seja mais "simples" que a função $f(x)$.

Exemplo: Obter a função interpoladora $g(x)$ dos 4 pontos de $f(x)$. Dados:
D=($(x_0, y_0 = f(x_0)), (x_1, y_1 = f(x_1)), (x_2, y_2 = f(x_2)), (x_3, y_3 = f(x_3)))$

$$g(x_i) = y_i$$

Exemplo: Obter a função interpoladora $g(x)$ dos 4 pontos de $f(x)$. Dados:
D=($(x_0, y_0 = f(x_0)), (x_1, y_1 = f(x_1)), (x_2, y_2 = f(x_2)), (x_3, y_3 = f(x_3)))$

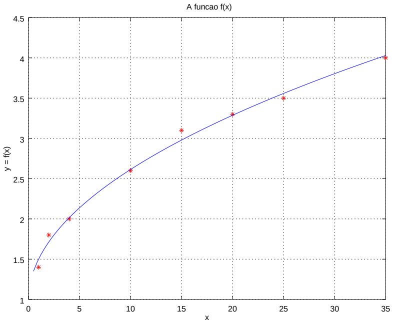
$$g(x_i) = y_i$$



Interpolação $\neq$ Ajuste

No ajuste não há a exigência da igualdade da função com os pontos dados.

No exemplo da figura abaixo, mostra se uma curva ajustada, pelo método dos mínimos quadrados, a um conjunto de pontos.



Quando usar:

- Para obter valores (imagens) para os quais a função não é conhecida.
- Para ser possível fazer análises de comportamento da função quando a função não é conhecida.
- Para ter uma expressão analítica mais “simples” de forma a tornar mais fácil (menos custoso computacionalmente, por exemplo) avaliar a função em um conjunto de pontos ou mesmo tornar mais fácil a manipulação da expressão (em tarefas, como por exemplo, derivar, integrar e etc.)

Formas de interpolação

- Interpolação utilizando funções polinomiais.
- Interpolação utilizando funções trigonométricas, etc.

A interpolação polinomial consiste em determinar um polinômio de grau n, $p_n(x)$ que passa por $(n+1)$ pontos.

x_k	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$y_k = f(x_k)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Condições de interpolação:

$$p_n(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

A interpolação polinomial consiste em determinar um $p_n(x)$ que passa por $(n+1)$ pontos.

$$p_n(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

Existe?
É único?

Casos específicos...

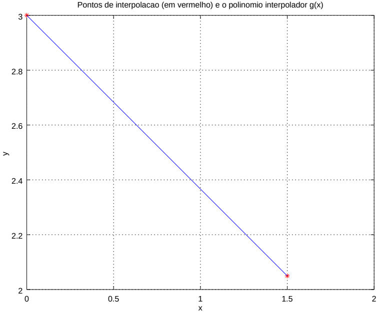
Dados 2 pontos: $P = ((x_0, y_0), (x_1, y_1))$ $(\Rightarrow (n+1) = 2\ )$

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x$$

Casos específicos...

Dados 2 pontos: $P = ((x_0, y_0), (x_1, y_1))$ $(\Rightarrow (n+1) = 2\ )$

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x$$

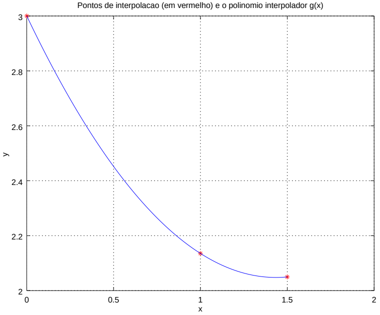


Caso com 3 pontos: $P = ((x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2))$ ($\Rightarrow (n+1) = 3$)

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Caso com 3 pontos: $P = ((x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2))$ $(\Rightarrow (n+1) = 3\ )$

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$



É possível mostar que existe um polinômio de grau n que passa por $n+1$ pontos, satisfazendo às condições de interpolação:

$$p_n(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

E este polinômio $p_n(x)$ é único.

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Usando as restrições de interpolação:

$$\begin{aligned}
p_n(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2\, x_0^2 + \cdots + a_n\, x_0^n = f(x_0) = y_0 \\
p_n(x_1) &= a_1 x_1 + a_0 + a_2\, x_1^2 + \cdots + a_n\, x_1^n = f(x_1) = y_1 \\
&\vdots \\
p_n(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2\, x_n^2 + \cdots + a_n\, x_n^n = f(x_n) = y_n
\end{aligned}$$

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Usando as restrições de interpolação:

$$\begin{aligned}
p_n(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2\, x_0^2 + \cdots + a_n\, x_0^n = f(x_0) = y_0 \\
p_n(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2\, x_1^2 + \cdots + a_n\, x_1^n = f(x_1) = y_1 \\
&\vdots \\
p_n(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2\, x_n^2 + \cdots + a_n\, x_n^n = f(x_n) = y_n
\end{aligned}$$

Obtém se um sistema linear $X a = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Usando as restrições de interpolação:

$$\begin{aligned}
p_n(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2\, x_0^2 + \cdots + a_n\, x_0^n = f(x_0) = y_0 \\
p_n(x_1) &= a_1 + a_1 x_1 + a_2\, x_1^2 + \cdots + a_n\, x_1^n = f(x_1) = y_1 \\
&\vdots \\
p_n(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2\, x_n^2 + \cdots + a_n\, x_n^n = f(x_n) = y_n
\end{aligned}$$

Obtém se um sistema linear $Xa = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Para obter o polinômio basta resolver o sistema $Xa = y$.
Se $x_0, x_1, \cdots, x_n$ são distintos, o sistema $Xa = y$ tem $detX \neq 0$ e portanto tem solução e solução única.

Exemplo: obter o polinômio de grau 2 que interpola os pontos da tabela abaixo e, em seguida, calcular a imagem para $x = (-1)$.

x_k	-2	0	1
$y_k = f(x_k)$	3	1	-1

Quer-se obter

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Exemplo: obter o polinômio de grau 2 que interpola os pontos da tabela abaixo e, em seguida, calcular a imagem para $x = (-1)$.

x_k	-2	0	1
$y_k = f(x_k)$	3	1	-1

Quer-se obter

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

As condições de interpolação são

$$p_2(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 = y_i$$

Escrevendo, as restrições, em cada ponto, tem se

$$p_2(-2) \quad = \quad a_0 + a_1(-2) + a_2 (-2)^2 = 3 \;\Rightarrow\; a_0 - 2a_1 + 4a_2 = 3$$

Exemplo: obter o polinômio de grau 2 que interpola os pontos da tabela abaixo e, em seguida, calcular a imagem para $x = (-1)$.

x_k	-2	0	1
$y_k = f(x_k)$	3	1	-1

Quer-se obter

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

As condições de interpolação são

$$p_2(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 = y_i$$

Escrevendo, as restrições, em cada ponto, tem se

$$\begin{aligned} p_2(-2) &= a_0 + a_1(-2) + a_2(-2)^2 = 3 \Rightarrow a_0 - 2a_1 + 4a_2 = 3 \\ p_2(0) &= a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 = 1 \Rightarrow a_0 = 1 \\ p_2(1) &= a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 = -1 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, obtém se:

$$a_0 = 1, \; a_1 = -\frac{5}{3}, \; a_2 = -\frac{1}{3}$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}x^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, obtém se:

$$a_0 = 1,\ a_1 = -\frac{5}{3},\ a_2 = -\frac{1}{3}$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}x^2$$

Avaliando o polinômio em $x = (-1)$

$$p_2(-1) = 1 - \frac{5}{3}(-1) - \frac{1}{3}(-1)^2 = \frac{7}{3} = 2.333$$

Exemplo: Suponha que se queira aproximar a função *"complicada"*

$$f(x) = \frac{2senx^2}{x+1}$$

por uma reta, em $D = [0.0, \pi/4]$.

x_k	0.0	$\pi/4$
$y_k = f(x_k)$	0.0	0.560099

Exemplo: Suponha que se queira aproximar a função *"complicada"*

$$f(x) = \frac{2senx^2}{x+1}$$

por uma reta, em $D = [0.0, \pi/4]$.

x_k	0.0	$\pi/4$
$y_k = f(x_k)$	0.0	0.560099

Impondo as restrições de interpolação, chega se ao seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.785398 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.560099 \end{bmatrix}$$

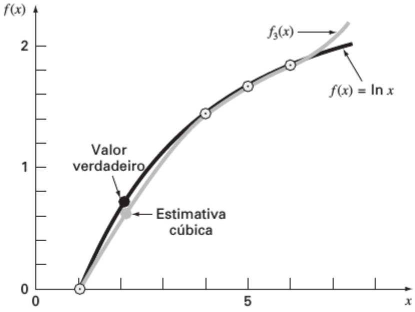
Resolvendo o sistema, obtém se:
$a_0 = 0$ e $a_1 = 0.713140$
A reta interpoladora é portanto $p_1(x) = 0.713140x$

Exemplo: Suponha se queira obter uma aproximação para a função $f(x) = ln(x)$ via polinômio de grau 3, sabendo os valores nos pontos abaixo.

x	1	4	5	6
$f(x) = ln(x)$	0	1.3863	1.6094	1.7918

e, em seguida, com o polinômio interpolador, calcular uma aproximação para $ln(2.0)$

O polinômio interpolador e a estimativa para $ln\, 2$ usando interpolação cúbica.



RESUMINDO:

1. fazer uma interpolação polinomial consiste em determinar um polinômio de grau n, $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ satisfazendo a
$$p_n(x_i) = f(x_i)$$
isto é, que *"passe"* por $(n+1)$ pontos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, n$.
2. Consiste, portanto, em determinar os coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$ atendendo às restrições de interpolação.
3. Existe um único polinômio de grau n que passa por $(n+1)$ pontos,
4. Um possível caminho para se resolver o problema é ir impondo as restrições de interpolação e resolvendo as equações.
Com o polinômio escrito na forma
$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$
basta então montar sistema linear $Xa = y$ e, em seguida, resolver o sistema (onde X é a matriz de Vandermonde).

Bibliografia Básica

[1] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[2] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.