Resolução da Primeira Prova Parcial de Álgebra Linear

1. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.
Verifique se A e B são matrizes equivalentes.

<u>Solução</u>: As matrizes A e B são matrizes equivalentes se uma puder ser obtida da outra por uma sequência finita de operações elementares em suas linhas.
Desta forma, A e B são matrizes equivalentes se possuem a mesma forma escalonada reduzida.
Vamos escalonar as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1+L_3 \to L_3 \\ -L_1+L_4 \to L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{-L_2+L_1 \to L_1 \\ -2L_2+L_3 \to L_3 \\ -L_2+L_4 \to L_4}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{-L_3+L_4 \to L_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -2L_1+L_3 \to L_3 \\ -2L_1+L_4 \to L_4}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{-2L_2+L_1 \to L_1 \\ -3L_2+L_3 \to L_3 \\ -2L_2+L_4 \to L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{-2L_4+L_3 \to L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_4}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{-L_3+L_1 \leftrightarrow L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

Assim, vemos que:

$$A \sim R \text{ e } R \sim B \Longrightarrow \boxed{A \sim B}. \quad \blacksquare$$

2. Considere o sistema abaixo

$$\begin{cases} x + ky + kz = -k \\ kx + y + z = k \\ kx + y + kz = k \end{cases}.$$

Encontre os valores de k para os quais o sistema tem
(a) uma única solução,
(b) infinitas soluções,

(c) não tem solução.

Depois disso, determine as posições pivôs da matriz aumentada do sistema em função de k.

<u>**Solução:**</u> A matriz aumentada do sistema é:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k & \vdots & -k \\ k & 1 & 1 & \vdots & k \\ k & 1 & k & \vdots & k \end{pmatrix}$$

Escalonando:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k & \vdots & -k \\ k & 1 & 1 & \vdots & k \\ k & 1 & k & \vdots & k \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{-kL_1+L_2\to L_2 \\ -kL_1+L_3\to L_3}} \begin{pmatrix} 1 & k & k & \vdots & -k \\ 0 & 1-k^2 & 1-k^2 & \vdots & k+k^2 \\ 0 & 1-k^2 & k-k^2 & \vdots & k+k^2 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{-L_2+L_3\to L_3}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & k & k & \vdots & -k \\ 0 & 1-k^2 & 1-k^2 & \vdots & k+k^2 \\ 0 & 0 & k-1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Por esta última matriz aumentada, podemos concluir que:

O sistema tem única solução se:

$$k-1 \neq 0 \Longrightarrow k \neq 1 \text{ e } 1-k^2 \neq 0 \Longrightarrow k^2 \neq 1 \Longrightarrow k \neq -1, k \neq 1.$$

Portanto, o **sistema tem única solução se $\boldsymbol{k \neq -1, k \neq 1}$**.

Se $k = 1$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k & \vdots & -k \\ 0 & 1-k^2 & 1-k^2 & \vdots & k+k^2 \\ 0 & 0 & k-1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

e o sistema não tem solução pois não existem escalares $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$0x + 0y + 0z = 2.$$

Portanto, o **sistema não tem solução se $\boldsymbol{k = 1}$.**

Se $k = -1$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k & \vdots & -k \\ 0 & 1-k^2 & 1-k^2 & \vdots & k+k^2 \\ 0 & 0 & k-1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

e o sistema tem infinitas soluções dadas por $x = 1 + \alpha$, $y = \alpha$ e $z = 0$, para $\alpha \in \mathbb{R}$.

Portanto, o **sistema tem infinitas soluções se $\boldsymbol{k = -1}$.**

Conclusão:

(a) o sistema tem única solução se $k \neq -1$ e $k \neq 1$.

(b) o sistema tem infinitas soluções se $k = -1$.

(c) o sistema não tem solução se $k = 1$.

Por fim, temos as seguintes matrizes aumentadas em função de k:

- Se $k \neq -1$ e $k \neq 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & \vdots & * \\ 0 & 1 & * & \vdots & * \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

- Se $k = -1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

- Se $k = 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

3. Seja $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$. Se possível, encontre a inversa de A e escreva A como um produto de matrizes elementares.

<u>Solução</u>: Temos:

$$[A \vdots I]=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underbrace{\sim}_{L_1\leftrightarrow L_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underbrace{\sim}_{\substack{-2L_1+L_2\to L_2\\ -2L_1+L_3\to L_3}}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1\end{array}\right)\underbrace{\sim}_{L_2+L_3\to L_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1\end{array}\right)\underbrace{\sim}_{(-1/2)L_2\to L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 2 & -1/2\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1\end{array}\right)\underbrace{\sim}_{L_2\leftrightarrow L_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 2 & -1/2\end{array}\right)\underbrace{\sim}_{L_2+L_3\to L_2}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 2 & -1/2\end{array}\right)\underbrace{\sim}_{-L_2+L_1\to L_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2\\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 2 & -1/2\end{array}\right).$$

portanto, A é inversível com inversa

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 1 & -1/2\\ -1/2 & 0 & 1/2\\ -1/2 & 2 & -1/2\end{pmatrix}}.$$

<u>Verificando</u>:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/2 & 1 & -1/2\\ -1/2 & 0 & 1/2\\ -1/2 & 2 & -1/2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 2+0-2 & -1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & 1\cdot(1)+1\cdot(0) & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\ 1-\frac{3}{2}+\frac{1}{2} & 2+0-2 & -1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I.\ \blacksquare$$

4. Dada a matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$,

(a) encontre C invertível tal que CA esteja na forma escalonada reduzida.

(b) encontre M tal que $MA=I$. Por que não dizemos que M é a inversa de A?

<u>Solução</u>:

(a) Para que possamos fazer a multiplicação CA, a matriz C deve ter 3 colunas. Já para que C seja invertível, ela deverá ser quadrada e consequentemente, 3×3.

O produto CA será então uma matriz 3×2.

Uma matriz 3×2 para estar na forma escalonada reduzida deverá ter uma das seguintes forma:

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

Vamos escalonar a matriz A:

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\\3&0\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{\substack{-L_2\to L_2\\(1/3)L_3\to L_3}}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\\1&0\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{L_1\leftrightarrow L_3}\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\\2&1\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\sim}_{\substack{-L_1+L_2\to L_2\\(-2)L_1+L_3\to L_3}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\0&1\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{\substack{L_2+L_3\to L_3\\-L_2\to L_2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=R.$$

A matriz R foi obtida através da seguinte multiplicação de matrizes elementares

$$E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1A=R,$$

onde:

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\ E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/3\end{pmatrix};\ E_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix};\ E_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};$$

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix};\ E_6=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix};\ E_7=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Assim, de $(E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1)A=R=CA$, tomemos $C=E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1$, visto que as matrizes elementares são invertíveis e também será o produto delas.

Temos,

$$C=E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot E_5\cdot E_4\cdot E_3\cdot E_2\cdot E_1$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\cdot E_4\cdot E_3\cdot E_2\cdot E_1$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\-2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot E_3\cdot E_2\cdot E_1$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\-3&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot E_2\cdot E_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&1\\1&1&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}\cdot E_1$$

$$C=\begin{pmatrix}0&0&1/3\\0&-1&1/3\\1&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow\boxed{C=\begin{pmatrix}0&0&1/3\\0&1&1/3\\1&-1&-1\end{pmatrix}}$$

Verificando:

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1/3\\0&1&1/3\\1&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0+1&0+0+0\\0-1+1&0+1+0\\2+1-3&1-1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}=R\ \blacksquare$$

(b) Agora, iremos procurar uma matriz M tal que $MA=I$.

A matriz M deve ter 3 colunas para que possamos fazer o produto MA. O produto MA então terá 2 colunas e então para que tenhamos $MA=I$, a matriz M deverá ser de ordem 2×3 com I sendo a matriz identidade 2×2.

Seja então $M=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$.

De $MA = I$, temos

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a - b + 3c & a + b \\ 2d - e + 3f & d + e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - b + 3c = 1 \\ a + b = 0 \\ 2d - e + 3f = 0 \\ d + e = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3b + 3c = 1 \\ a = -b \\ -3e + 3f = -2 \\ d = 1 - e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = (1/3) + b \\ a = -b \\ f = -(2/3) + e \\ d = 1 - e \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\alpha \\ b = \alpha \\ c = (1/3) + \alpha \\ d = 1 - \beta \\ e = \beta \\ f = -(2/3) + \beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & (1/3) + \alpha \\ 1 - \beta & \beta & -(2/3) + \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

<u>Verificando</u>:

$$M \cdot A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & (1/3) + \alpha \\ 1 - \beta & \beta & -(2/3) + \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot A = \begin{pmatrix} -2\alpha - \alpha + 3\left(\frac{1}{3} + \alpha\right) & -\alpha + \alpha \\ 2(1 - \beta) - \beta + 3\left(-\frac{2}{3} + \beta\right) & (1 - \beta) + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Por que não dizemos que M é a inversa de A?

Essa pergunta pode ser respondida de várias formas. Por exemplo:

(a) M **não** pode ser a inversa de A pois se existir uma inversa de A, ela deve ser única. Aqui vemos que a matriz M não é única.

(b) M **não** pode ser a inversa de A pois se fosse, teríamos também $A \cdot M = M \cdot A = I$ o que é impossível pois $M \cdot A$ produz uma matriz 2×2 enquanto $A \cdot M$ produz uma matriz 3×3. ■

5. Verifique se cada uma das seguintes afirmações é Verdadeira ou Falsa. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, dê um contraexemplo.

(a) Se o sistema linear $AX = \bar{0}$ possui mais de uma solução então $AX = B$ possui pelo menos uma solução.

(b) Se X_1 é uma solução de $AX = \bar{0}$ e Y_1 é uma solução de $AX = B$ então $2X_1 + 3Y_1$ é solução de $AX = B$.

(c) Se A é matriz 4×7, então $AX = \bar{0}$ possui infinitas soluções.

(d) Se $A_{n \times n}$ é simétrica então $AB = BA$ para toda matriz $B_{n \times n}$.

<u>Solução</u>:

(a) FALSO.

O sistema $AX = \bar{0}$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ possui infinitas soluções, a saber, $X = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$ para $t \in \mathbb{R}$.

$$AX = \bar{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Agora, tomando $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, o sistema $AX = B$ não tem solução.

$$AX = B \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}. \blacksquare$$

(b) FALSO.

De fato, temos que X_1 é uma solução de $AX = \bar{0}$ implica que $AX_1 = \bar{0}$.

Também, Y_1 é uma solução de $AX = B$ implica que $AY_1 = B$.

Agora, temos:

$$A(2X_1 + 3Y_1) = A(2X_1) + A(3Y_1) = 2\underbrace{AX_1}_{=\bar{0}} + 3\underbrace{AY_1}_{=B} = 2 \cdot \bar{0} + 3 \cdot B = 3B \neq B$$

Portanto, $2X_1 + 3Y_1$ **não** é solução de $AX = B$.

<u>Contraexemplo</u>:

Tome $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$. Então $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é uma solução de $AX = \bar{0}$.

Também, $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é solução de $AX = B$ onde $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Porém,

$$2X_1 + 3Y_1 = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

e

$$A(2X_1 + 3Y_1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 27 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} = 3B \neq B = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

(c) VERDADEIRO.

De fato, se A é matriz 4×7, então o sistema $AX = \bar{0}$ é um sistema de 4 equações em 7 incógnitas.

Desta forma, a matriz aumentada do sistema $AX = \bar{0}$ terá várias formas escalonada reduzida e dentre estas destacamos as seguintes formas:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & * & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & \vdots & 0 \end{bmatrix} \text{ e } R_2 = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Na forma R_1, podemos ver que o sistema resultante equivalente terá 3 variáveis livres e, existirão infinitas soluções. Já na forma R_2, podemos ver que teremos 6 variáveis livres ocasionando infinitas soluções. As demais formas escalonadas reduzidas terão entre 4 e 5 variáveis livres e em todos os casos, teremos infinitas soluções. ■

(d) FALSO.

De fato. Tome $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Temos que $A = A^t$, isto é, A é simétrica.

Agora, tomando $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, vemos que:

$$\left.\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow AB \neq BA. \blacksquare$$