Aula 7 Cálculo 3B Aula 16 Cálculo 3A

Aula passada Modelagem

Aula Hoje Teorema de existência e unicidade

2.4 Diferenças entre equações lineares e não lineares

Caso 1 Equação linear $y' + p(t)y = f(t)$

Teorema (de Existência e unicidade – TEU)
Sejam $p(t)$ e $f(t)$ funções contínuas em (a,b) com $t_0 \in (a,b)$ então existe uma única solução para o PVI

$$\begin{cases} y' + p(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

e a solução está definida em (a,b)
mesmo intervalo em que p e f são contínuos

Exemplo: Use o teorema para encontrar um intervalo no qual os PVIs tem uma única solução

a) $\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(-1) = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Solução:
a) Escrevendo na forma $y' + p(t)y = f(t)$

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t$$

$$p(t) = \frac{2}{t} \quad \text{e} \quad f(t) = 4t$$

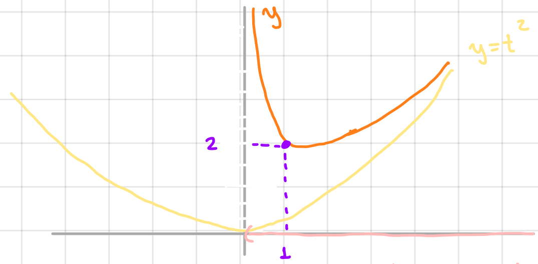
- $p(t)$ é não está definida em $t=0$ $\Rightarrow$ é contínua em $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$
- $f(t)$ é contínua em $\mathbb{R}$

Como $1 \in (0,+\infty)$ pelo TEU existe uma única solução definida em $(0,+\infty)$

Já resolvemos essa EDO (fator integrante)

$$y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}, \quad t>0$$

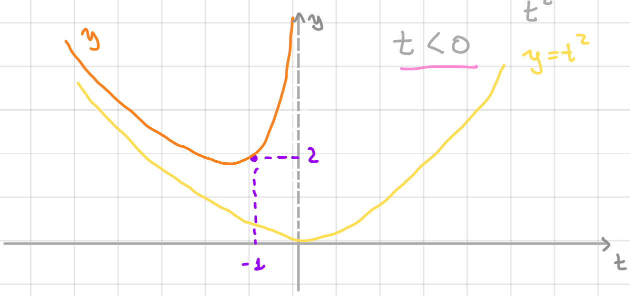
↳ se considerasse y definida $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ a solução não seria contínua



↳ definida aqui

b) Igual, mas agora $-1 \in (-\infty,0)$ então o TEU garante que existe uma única solução definida em $(-\infty,0)$

Novamente a solução é $y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$, $t<0$



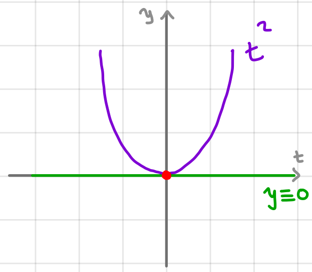
c) $p(t)$ não está se quer definida em $t=0$ então não está nas hipóteses do teorema
NÃO POSSO DIZER NADA

Mas olhando para a equação, aplicando $t=0$ obtemos $2y(0)=0$ e portanto $y(0)$ não pode ser 2 - Assim não existe solução

d) Novamente não se aplica o teorema. Neste caso por observação, notamos que $y(t) = t^2$ satisfaz o PVI:

$$\underbrace{2t}_{y'} + \frac{2}{t}\cdot\underbrace{t^2}_{y} = 4t \quad \text{e} \quad y(0) = 0$$

e está definida em $\mathbb{R}$.
E também $y \equiv 0$ também é solução



duas soluções

Nota Usei o teorema nos itens a) e b)
no c) e d) pode acontecer qualquer coisa
↳ tem uma solução
↳ ter várias soluções
↳ Não ter soluções

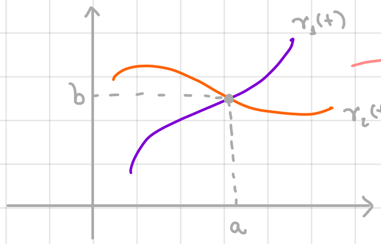
$\boxed{\text{Caso 2}}$ Equações não lineares $y' = f(t,y)$

Teorema de existência e unicidade (TEU)
Suponha que f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(a,b)\times(c,d)$ contendo (t_0,y_0). Então o PVI

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tem uma única solução definida em $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$, $t_0 \in (\alpha,\beta)$
↳ não garante onde a solução está definida

Nota Pelo TEU, geometricamente



→ Isso NÃO ACONTECE

Exemplo Discuta a existência e unicidade das soluções, quando possível diga onde está definida a solução

a) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y' = t\sqrt{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y' = t\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0, \; y_0 \neq 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y' = -\frac{y^2}{t^2} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Solução

a) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $f(y) = y^2$ contínua em $\mathbb{R}^2$
$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ contínua em $\mathbb{R}^2$

Pelo TEU existe uma única solução a saber usando separáveis:

$$\frac{dy}{dt} = y^2$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int dt$$

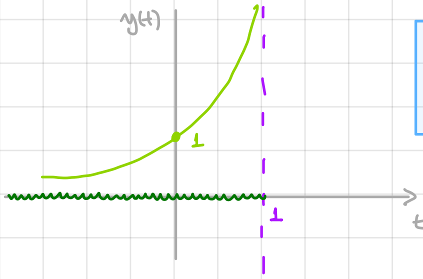
$$-\frac{1}{y} = t + c$$

$y(t) = \frac{-1}{t+c}$ para $y(0) = 1$

temos $1 = y(0) = -\frac{1}{c} \Rightarrow c = -1$

então $y(t) = \frac{-1}{t-1}$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{1-t}}$$



$\boxed{\text{está definida em } (-\infty, 1)}$
↳ tem que ser um intervalo só que contém o ponto 0

b) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ Novamente existe uma única solução pelo TEU

SEM usar nenhum método note que $y(t) \equiv 0$ é uma solução

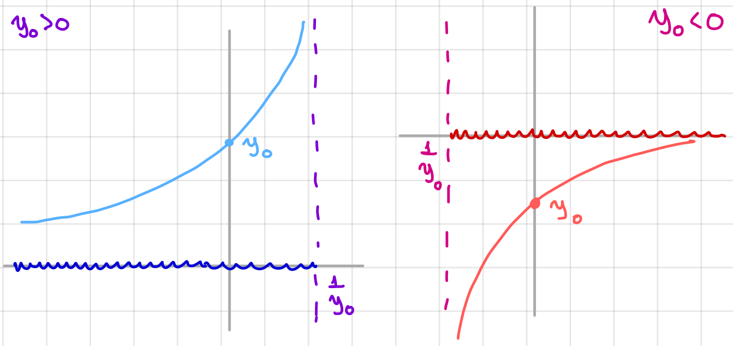
Satisfaz a equação $y' = y^2$ (a derivada da constante é zero) e passa pelo ponto $(0,0)$

Note que a solução está definida para todo $\mathbb{R}$.

c) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ igualmente pelo TEU existe uma única solução e ela é dada pelo método de separáveis

$y(t) = \dfrac{-1}{t+c}$ para $y(0) = y_0$

$y_0 = -\dfrac{1}{c} \Rightarrow c = -\dfrac{1}{y_0}$ então $y(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{y_0} - t}$



para $y_0>0$ a solução está definida em $(-\infty, \frac{1}{y_0})$

para $y_0<0$ a solução esta definida em $(\frac{1}{y_0}, +\infty)$

d) $\begin{cases} y' = t\sqrt{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$ $f(t,y) = t\sqrt{y}$ contínua em $\underbrace{\mathbb{R}\times[0,\infty)}_{\text{onde está definida}}$

Não esta definida em $(0,-1)$

Portanto não está nas hipóteses do teorema

$\boxed{\text{NÃO PODEMOS DIZER NADA}}$

Vamos fazer um esforço em resolver:

E observar que a solução $y(t)$ não pode assumir valores negativos pois de deve satisfazer a equação

$y' = t\underbrace{\sqrt{y}}_{\geq 0}$ deve ser

Portanto o PVI não tem solução

e) $\begin{cases} y' = t\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ novamente $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{t}{2\sqrt{y}}$ contínua em $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ e $0 \notin (0,+\infty)$

portanto não está nas condições do TEU

Neste caso note que $\boxed{y \equiv 0}$ é solução e

por separáveis:

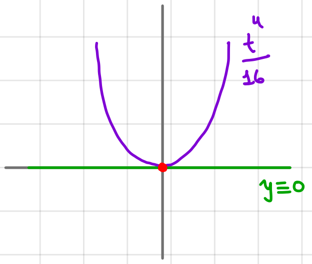
$\dfrac{dy}{dt} = t\sqrt{y} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \int t\,dt \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{t^2}{2} + c$

$y(t) = \left(\dfrac{t^2+2c}{4}\right)^2$ para $y(0) = 0$ temos

$0 = \left(\dfrac{2c}{2}\right)^2 \Leftrightarrow c = 0$

portanto $\boxed{y(t) = \dfrac{t^4}{16}}$ é solução

o PVI possui duas soluções



f) $\begin{cases} y' = -\dfrac{y^2}{t^2} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $f(t,y) = -\dfrac{y^2}{t^2}$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2y}{t^2}$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}$

então o PVI tem uma única solução para (t_0,y_0) tal que $t_0 \neq 0$ dada pelo método de variáveis separáveis:

$\displaystyle\int -\frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{1}{t^2}\,dt \Rightarrow \frac{1}{y} = -\frac{1}{t} + c = \frac{tc-1}{t}$

$\Leftrightarrow$ $y(t) = \dfrac{t}{tc-1}$ para $y(t_0) = y_0$ $(y_0 \neq 0)$

$c = \dfrac{1}{y(t)} + \dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{y_0} + \dfrac{1}{t_0}$ assim $\boxed{y(t) = \dfrac{t}{\left(\frac{1}{y_0}+\frac{1}{t_0}\right)t - 1}}$

- $c = \dfrac{1}{y_0} + \dfrac{1}{t_0}$, se $y_0, t_0 > 0$ então a solução está definida $(\frac{1}{c}, +\infty)$
- se $y_0, t_0 < 0$ então a solução está definida em $(-\infty, \frac{1}{c})$

Para $y_0 = 0$ Note que $\boxed{y \equiv 0}$ é a solução $\begin{cases} y' = -\dfrac{y^2}{t^2} \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$

Note que para qualquer $c \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \frac{t}{tc - 1} \quad \text{satisfaz}$$

$$y(0) = 0$$

Portanto em o PVI

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y^2}{t^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Tem infinitas soluções

Por fim para $(0, y_0)$ $y_0 \neq 0$ como deve satisfazer a equação $\forall t$

Para $t = 0$ teríamos

$$0 = t^2 y' = -y^2(0) = -y_0^2 \neq 0$$

Portanto não existe solução para $\begin{cases} y' = -\dfrac{y^2}{t^2} \\ y(0) = y_0 \neq 0 \end{cases}$