Transformada de Fourier de Tempo Continuo (CTFT)

Professor

Jorge Leonid Aching Samatelo
jlasam001@gmail.com

Equação de sínteses

$$x(t) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(w)e^{jwt}\,dw$$

Domínio do tempo $x(t)$ — $x(t) \xleftrightarrow{CTFT} X(w)$ — $X(w)$ Domínio da frequência

$$X(w) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jkwt}\,dt$$

Equação de análises

Índice

Introdução

Introdução

Analise de Fourier

		Sinal	
		Periódica	Aperiódica
Tempo	Valor contínuo $x \in \mathbb{R}$	Series de Fourier de Tempo Continuo (**CTFS**)	**Transformada de Fourier de Tempo Continuo** (**CTFT**)
	Valor Discreto $x \in \mathbb{Z}$	Series de Fourier de Tempo Discreto (**DTFS**)	Transformada de Fourier de Tempo Discreto (**DTFT**)

CTFT

CTFT

Definição

$$x(t) \xleftrightarrow{CTFT} X(w)$$

$$X(w) = CTFT\{x(t)\}$$

$$x(t) = CTFT^{-1}\{X(w)\}$$

- De forma geral podemos definir a CTFT como:
  - uma transformação linear $CTFT\{\}$ de ida e volta, aplicada sobre um sinal continua, gerando uma expressão algébrica $X(w)$ no domínio das frequências w.

CTFT

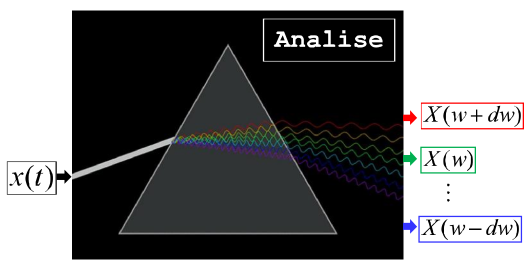
Definição

- *Equação de Analise (forma direta)*

$$X(w) \triangleq CTFT\{x(t)\}$$

$$\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}\,dt$$

Do *domínio do tempo* ao *domínio da frequência*

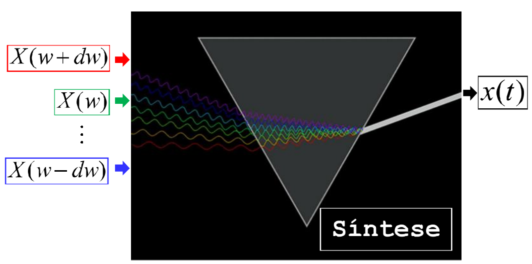


- *Equação de Síntese (forma inversa)*

$$x(t) \triangleq CTFT^{-1}\{X(w)\}$$

$$\triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(w)e^{jwt}\,dw$$

Do *domínio da frequência* ao *domínio do tempo*



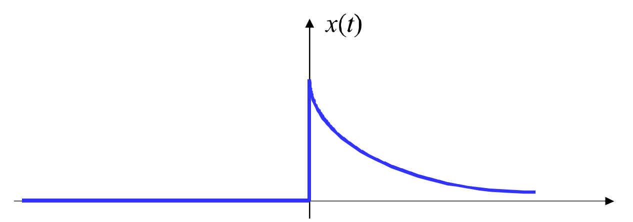
CTFT

Calculo da CTFT

Exemplo

- Determine a CTFT do sinal:
  - *Sinal com Decaimento exponencial*

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$



CTFT

Calculo da CTFT

Solução

- Solucionando a integral:

$$X(w) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt \qquad x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-jwt}dt \qquad u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-jwt}dt$$

Agrupando

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+jw)t}dt$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} \int_{0}^{\tau} e^{-(a+jw)t}dt$$

CTFT

Calculo da CTFT

Solução

- Solucionando a integral:

$$X(w) = \lim_{\tau\to\infty} \int_{0}^{\tau} e^{-(a+jw)t}dt \qquad \int_{t_o}^{t_1} e^{at}dt = \frac{1}{a}e^{at}\Big|_{t_o}^{t_1}$$

$$= \lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{-1}{(a+jw)} e^{-(a+jw)t}\Big|_{0}^{\tau} \right)$$

$$= \frac{-1}{(a+jw)} \lim_{\tau\to\infty}(e^{-(a+jw)\tau} - e^{-(a+jw)0})$$

$$= \frac{-1}{(a+jw)} \lim_{\tau\to\infty}(e^{-(a+jw)\tau} - 1)$$

$$= \frac{-1}{(a+jw)}(0-1)$$

$$= \frac{1}{(a+jw)}$$

$$a > 0 \Rightarrow \lim_{\tau\to\infty} e^{-(a+jw)\tau} = 0$$

$$\lim_{\tau\to\infty} e^{-(a+jw)\tau} = \lim_{\tau\to\infty} e^{-a\tau}e^{-jw\tau}$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{\tau\to\infty} e^{-a\tau}\right)}_{=0\ ,\ a>0} \underbrace{\left(\lim_{\tau\to\infty} e^{-jw\tau}\right)}_{=conts}$$

$$= 0\ ,\ a > 0$$

DTFT

Calculo da DTFT

Solução

- *Sinal com Decaimento exponencial*
  - Então:

$x(t)$		$X(w)$
$e^{-at}u(t)$	$\leftrightarrow$	$\dfrac{1}{(a+jw)}$

CTFT

Calculo da CTFT

Solução

- Desenhando o espectro e a fase dos coeficientes da CTFT de $x(t)$.

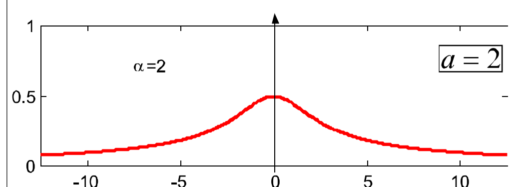
$$X(w) = \frac{1}{a+jw}$$

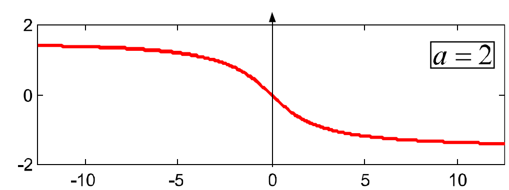
$$\|X(w)\| = \frac{1}{\sqrt{a^2+w^2}}$$

Espectro

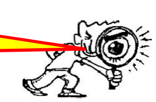
$$\angle X(w) = -\arctan(w/a)$$

Fase





Observe que o espectro não é discreto como no caso da CTFS.



CTFT

Calculo da CTFT

Exemplo

- Determine a CTFT dos sinais:
  - *Impulso Unitário*

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases}$$

  - *Pulso Porta Unitário*

$$ret\left(\frac{t}{T_0}\right) = \begin{cases} 1 & -T_0/2 < t < T_0/2 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

- *Dica*
  - Lembrar que a CTFT de $x(t)$ é definida pela expressão:

$$X(w) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt$$

CTFT

Calculo da CTFT

Solução

- Impulso Unitário
  - Solucionando a integral:

$$X(w) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt \qquad x(t) = \delta(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-jwt}dt$$

Propriedade de translação

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-jw0}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt$$

$$= 1$$

DTFT

Calculo da CTFT

Solução

- Impulso Unitário
  - Então:

$x(t)$		$X(w)$
$\delta(t)$	$\leftrightarrow$	1

CTFT

Calculo da CTFT

Solução

- Pulso Porta Unitário
  - Solucionando a integral:

$$X(w) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt \qquad x(t) = ret\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ret\left(\frac{t}{T_0}\right)e^{-jwt}dt \qquad ret\left(\frac{t}{T_0}\right) = \begin{cases} 1 & -T_0/2 < t < T_0/2 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

$$= \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-jwt}dt \qquad \int_{t_o}^{t_1} e^{at}dt = \frac{1}{a}e^{at}\Big|_{t_o}^{t_1}$$

$$= -\frac{1}{jw}e^{-jwt}\Big|_{-T_0/2}^{T_0/2}$$

$$= -\frac{1}{jw}(e^{-jwT_0/2} - e^{jwT_0/2})$$

CTFT

Calculo da CTFT

Solução

- Pulso Porta Unitário
  - Solucionando a integral:

$$X(w) = -\frac{1}{jw}\left(e^{-jwT_0/2} - e^{jwT_0/2}\right)$$

$$= \frac{2}{w}\left(\frac{e^{jwT_0/2} - e^{-jwT_0/2}}{j2}\right) \qquad \sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{j2}$$

$$= \frac{2}{w}\sin(wT_0/2)$$

$$= T_0 \,\mathrm{sinc}(wT_0/2) \qquad \mathrm{sinc}(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\varphi}$$

DTFT

Calculo da CTFT

Solução

- Pulso Porta Unitário
  - Então:

$x(t)$		$X(w)$
$ret\left(\frac{t}{T_0}\right)$	$\leftrightarrow$	$T_0 \,\mathrm{sinc}(wT_0/2)$

CTFT

Calculo da CTFT

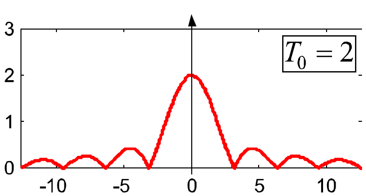
Solução

- Desenhando o espectro e a fase dos coeficientes da CTFT de $x(t)$.

$$X(w) = T_0 \,\mathrm{sinc}(wT_0)$$

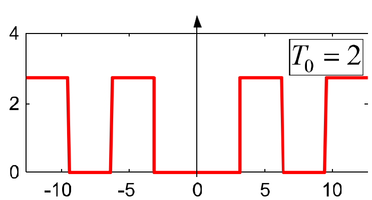
$$\|X(w)\| = T\,|\mathrm{sinc}(wT_0)|$$

Espectro



$$\underline{|X(w)} = \begin{cases} 0 & \mathrm{sinc}(wT_0) > 0 \\ \pi & \mathrm{sinc}(wT_0) < 0 \end{cases}$$

Fase



CTFT

Calculo da ICTFT

Exemplo

- Determine a ICTFT dos sinais:
  - Impulso unitário deslocado w_o posições

$$X(w) = 2\pi\delta(w - w_o)$$

- *Dica*
  - Lembrar que a ICTFT de $X(w)$ é definida pela expressão:

$$x(t) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(w)e^{jwt}dw$$

CTFT

Calculo da ICTFT

Solução

- Impulso unitário deslocado w_o posições
  - Solucionando a integral:

$$x(t) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(w)e^{jwt}dw \qquad X(w) = 2\pi\delta(w-w_o)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{2\pi}\,\delta(w-w_o)e^{jwt}dw \qquad x(u)\delta(u-u_o) = x(u_o)\delta(u-u_o)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(w-w_o)e^{jw_ot}dw$$

$$= e^{jw_ot}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(w-w_o)dw$$

$$= e^{jw_ot}$$

DTFT

Calculo da ICTFT

Solução

- Impulso unitário deslocado w_o posições
  - Então:

$x(t)$		$X(w)$
e^{jw_ot}	$\leftrightarrow$	$2\pi\delta(w-w_o)$

CTFT

Calculo da ICTFT

Exemplo

- Determine a ICTFT dos sinais:
  - Filtro ideal Passa-baixo (LPF-*Low Pass Filter*)

$$X_{LPF}(w) = \begin{cases} 1 & -W < w < W \\ 0 & |w| > W \end{cases}$$

- *Dica*
  - Lembrar que a ICTFT de $X(w)$ é definida pela expressão:

$$x(t) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(w)e^{jwt}dw$$

CTFT

Calculo da ICTFT

Solução

- Filtro ideal Passa-baixo (LPF-*Low Pass Filter*)
  - Solucionando a integral:

$$x_{LPF}(t) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_{LPF}(w)e^{jwt}dw \qquad X_{LPF}(w) = \begin{cases} 1 & -W < w < W \\ 0 & |w| > W \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{+W} e^{jwt}dw \qquad \int_{t_o}^{t_1} e^{at}dt = \frac{1}{a}e^{at}\Big|_{t_o}^{t_1}$$

$$= \frac{1}{j2\pi t}e^{jwt}\Big|_{-W}^{W}$$

$$= \frac{1}{j2\pi t}(e^{jWt} - e^{-jWt})$$

CTFT

Calculo da ICTFT

Solução

- Filtro ideal Passa-baixo (LPF-*Low Pass Filter*)
  - Solucionando a integral:

$$x_{LPF}(t) = \frac{1}{\pi t}\left(\frac{e^{jWt} - e^{-jWt}}{j2}\right) \qquad \sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{j2}$$

$$= \frac{1}{\pi t}\sin(Wt) \qquad \mathrm{sinc}(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\varphi}$$

$$= \frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}(Wt)$$

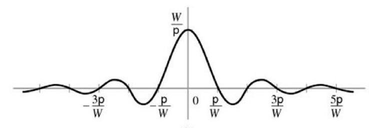
DTFT

Calculo da ICTFT

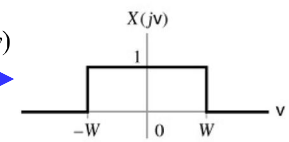
Solução

- Filtro ideal Passa-baixo (LPF-*Low Pass Filter*)
  - Então:

$x(t)$		$X(w)$
$\frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}(Wt)$	$\leftrightarrow$	$\begin{cases} 1 & -W < w < W \\ 0 & \lvert w\rvert > W \end{cases}$



$$x(t) \xrightarrow{ICTFT} X(w)$$



CTFT

Resumo

Equação de sínteses (ICTFT)

$$x(t) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(w)e^{jwt}\,dw$$

Domínio do tempo — $x(t)$ — $x(t) \xleftrightarrow{CTFT} X(w)$ — $X(w)$ — Domínio da frequência

$$X(w) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jkwt}\,dt$$

Equação de análises (CTFT)

Propriedades da CTFT

Propriedades da CTFT

Introdução

Linearidade | Dualidade

$$x(t) \xleftrightarrow{CTFT} X(w)$$

$$X(w) = CTFT\{x(t)\}$$

$$x(t) = CTFT^{-1}\{X(w)\}$$

Convolução
- No domínio do tempo
- No domínio da frequência

Simétria

Reflexão
- No domínio do tempo
- No domínio da frequência

Deslocamento
- No domínio do tempo
- No domínio da frequência

Propriedades

Linearidade

$$x_1(t) \xleftrightarrow{CTFT} X_1(w)$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{CTFT} X_2(w)$$

$$y(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \xleftrightarrow{CTFT} Y(\omega) = AX_1(w) + BX_2(w)$$

❑ A CTFT de uma combinação linear é igual a combinação linear das transformadas.

Propriedades

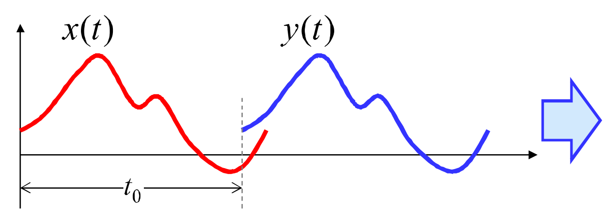
Deslocamento

❑ *Deslocamento no domínio do tempo*

$$x(t) \xleftrightarrow{CTFT} X(w)$$

$$y(t) = x(t - t_0) \xleftrightarrow{CTFT} Y(w) = e^{-jwt_0} X(w)$$

❑ Um deslocamento no tempo corresponde a multiplicação da transformada por uma exponencial complexa imaginaria pura.



Espectro

$$\|Y(w)\| = \|X(w)\|$$

Fase

$$\underline{|Y(w)} = \underline{|X(w)} - wt_0$$

O deslocamento temporal não afeta o módulo da transformada de Fourier, apenas a sua fase

Propriedades

Deslocamento

❑ *Deslocamento no domínio da frequência*

$$x(t) \xleftrightarrow{CTFT} X(w)$$

$$y(t) = x(t)e^{jw_0 t} \xleftrightarrow{CTFT} Y(w) = X(w - w_0)$$

❑ Um deslocamento na frequência corresponde a multiplicação do sinal do tempo por uma exponencial complexa imaginaria pura.

Propriedades

Convolução

- *Convolução no domínio do tempo*

Convolução no tempo		*Modulação no domínio das frequências*
$x_1(t)$	$\xleftrightarrow{CTFT}$	$X_1(w)$
$x_2(t)$	$\xleftrightarrow{CTFT}$	$X_2(w)$
$y(t) = x_1(t) * x_2(t)$	$\xleftrightarrow{CTFT}$	$Y(w) = X_1(w)X_2(w)$

- A transformada de Fourier da convolução de dois sinais é o produto das transformadas desses sinais.

Propriedades

Convolução

- *Convolução no domínio da frequência*

Modulação no tempo		*Convolução no domínio das frequências*
$x_1(t)$	$\xleftrightarrow{CTFT}$	$X_1(w)$
$x_2(t)$	$\xleftrightarrow{CTFT}$	$X_2(w)$
$y(t) = x_1(t)x_2(t)$	$\xleftrightarrow{CTFT}$	$Y(w) = \frac{1}{2\pi} X_1(w) * X_2(w)$

- A transformada de Fourier da modulação de dois sinais é a convolução das transformadas desses sinais.

Propriedades

Exemplo

- Determine a CTFT dos sinais:
  - Sinal modulada pelo cosseno

$$y(t) = x(t)\cos(w_0 t)$$

  - Sinal modulada pelo seno

$$y(t) = x(t)\sin(w_0 t)$$

Propriedades

Solução

- *Sinal modulada pelo cosseno*
  - Usando a *identidade de Euler*, representamos o sinal $y(t)$ como uma soma de exponenciais complexas.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)\cos(w_0 t) \\ &= x(t)\left(\frac{e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}}{2}\right) \\ &= \frac{x(t)}{2} e^{jw_0 t} + \frac{x(t)}{2} e^{-jw_0 t} \end{aligned}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

Propriedades

Solução

- *Sinal modulada pelo cosseno*
  - Calculando a CTFT de $y(t)$ usando a *propriedade de deslocamento no domínio da frequência*:

$$CTFT\{y(t)\} = CTFT\left\{\frac{x(t)}{2}e^{jw_0t} + \frac{x(t)}{2}e^{-jw_0t}\right\}$$

$$Y(w) = \frac{1}{2}CTFT\left\{x(t)e^{jw_0t}\right\} + \frac{1}{2}CTFT\left\{x(t)e^{-jw_0t}\right\}$$

$$x(t)e^{jw_0t} \xleftrightarrow{CTFT} X(w-w_0) \qquad x(t)e^{-jw_0t} \xleftrightarrow{CTFT} X(w+w_0)$$

$$Y(w) = \frac{1}{2}X(w-w_0) + \frac{1}{2}X(w+w_0)$$

Propriedades

Solução

- *Sinal modulada pelo seno*
  - Usando a *identidade de Euler*, representamos o sinal $y(t)$ como uma soma de exponenciais complexas.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)\sin(w_0t) \\ &= x(t)\left(\frac{e^{jw_0t} - e^{-jw_0t}}{j2}\right) \\ &= \frac{x(t)}{j2}e^{jw_0t} - \frac{x(t)}{j2}e^{-jw_0t} \end{aligned}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{j2}$$

Propriedades

Solução

- *Sinal modulada pelo seno*
  - Calculando a CTFT de $y(t)$ usando a *propriedade de deslocamento no domínio da frequência*:

$$CTFT\{y(t)\} = CTFT\left\{\frac{x(t)}{j2}e^{jw_0t} - \frac{x(t)}{j2}e^{-jw_0t}\right\}$$

$$Y(w) = \frac{1}{j2}CTFT\left\{x(t)e^{jw_0t}\right\} - \frac{1}{j2}CTFT\left\{x(t)e^{-jw_0t}\right\}$$

$$x(t)e^{jw_0t} \xleftrightarrow{CTFT} X(w-w_0) \qquad x(t)e^{-jw_0t} \xleftrightarrow{CTFT} X(w+w_0)$$

$$Y(w) = \frac{1}{j2}X(w-w_0) - \frac{1}{j2}X(w+w_0)$$

CTFT e Sistemas LTI

CTFT e Sistemas LTI

Função de Transferência

- A saída de um sistema LTI de tempo contínuo pode-se expressar via a operação de convolução:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t) * x(t)$$

- Sendo assim, no domínio da frequência, a saída será o produto da transformada da entrada pela transformada da resposta ao impulso.

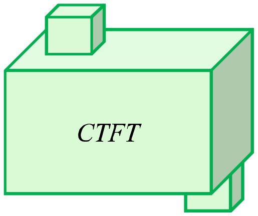
$$X(w) \longrightarrow \boxed{H(w)} \longrightarrow Y(w) = H(w)X(w)$$

- Neste caso, a resposta em frequência será a Transformada de Fourier da resposta ao impulso, podendo-se expressar como:

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)}$$

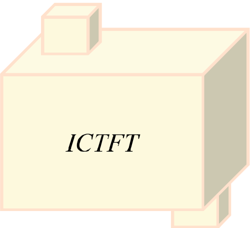
Resumo

$$y(t) = h(t) * x(t)$$ *Saída no tempo*



$$Y(w) = CTFT\{h(w)\}CTFT\{x(w)\}$$
$$= H(w)X(w)$$

Saída no domínio da frequência



$$y(t) = ICTFT\{Y(w)\}$$ *Saída no tempo*

CTFT e Sistemas LTI

Função de Transferência

Exemplo

- Calcular a saída do sistema LTI ante a entrada $x(t)$

$$x(t) = e^{-at}u(t) \longrightarrow \boxed{h(t) = e^{-bt}u(t)} \longrightarrow y(t)$$

- *Considerar que: a,b* > 0

CTFT e Sistemas LTI

Função de Transferência

Solução

- Lembremos que:

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{CTFT} \frac{1}{a + jw}$$

- Calculando $X(w)$ e $H(w)$:

$$X(w) = CTFT\{x(t)\} = CTFT\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a + jw}$$

$$H(w) = CTFT\{h(t)\} = CTFT\{e^{-bt}u(t)\} = \frac{1}{b + jw}$$

CTFT e Sistemas LTI

Função de Transferência

Solução

- Calculando $Y(w)$, aplicando a propriedade da convolução:

$$\begin{aligned} Y(w) &= H(w)X(w) \\ &= \left(\frac{1}{b+jw}\right)\left(\frac{1}{a+jw}\right) \\ &= \frac{1}{(b+jw)(a+jw)} \end{aligned}$$

CTFT e Sistemas LTI

Função de Transferência

Solução

- Calculando $y(t)$, aplicando o método de frações parciais
  - Podemos ver que estamos no caso 1 (polos simples):

$$Y(w) = \frac{1}{(b+jw)(a+jw)} = \frac{a_1}{(b+jw)} + \frac{a_2}{(a+jw)}$$

  - Calculando o valor dos resíduos:

$$a_1 = \lim_{jw\to -b}(b+jw)Y(w) = \lim_{jw\to -b}\frac{1}{(a+jw)} = \frac{1}{a-b}$$

$$a_2 = \lim_{jw\to -a}(a+jw)Y(w) = \lim_{jw\to -a}\frac{1}{(b+jw)} = \frac{1}{b-a}$$

CTFT e Sistemas LTI

Função de Transferência

Solução

- Calculando $y(t)$, aplicando o método de frações parciais
  - Finalmente:

$$Y(w) = \frac{(a-b)^{-1}}{(b+jw)} + \frac{(b-a)^{-1}}{(a+jw)}$$

$$CTFT^{-1}\{Y(w)\} = CTFT^{-1}\left\{\frac{(a-b)^{-1}}{b+jw}\right\} + CTFT^{-1}\left\{\frac{(b-a)^{-1}}{a+jw}\right\}$$

$$y(t) = (a-b)^{-1}CTFT^{-1}\left\{\frac{1}{b+jw}\right\} + (b-a)^{-1}CTFT^{-1}\left\{\frac{1}{a+jw}\right\}$$

$$y(t) = (a-b)^{-1}e^{-bt}u(t) + (b-a)^{-1}e^{-at}u(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})u(t)$$

Bibliografia

Bibliografia

HAYKIN, S. e VAN VEEN, B. **Sinais e sistemas**. Porto Alegre: Bookman, 2001. (19).