

Algoritmos Numéricos 2^a edição

Capítulo 6: Raízes de equações

Capítulo 6: Raízes de equações

- 6.1 Isolamento de raízes
- 6.2 Método da bisseção
- 6.3 Métodos baseados em aproximação linear
- 6.4 Métodos baseados em aproximação quadrática
- 6.5 Métodos baseados em tangente
- 6.6 Comparação dos métodos para cálculo de raízes
- 6.7 Exemplos de aplicação: juros de financiamento e cabo suspenso
- 6.8 Exercícios

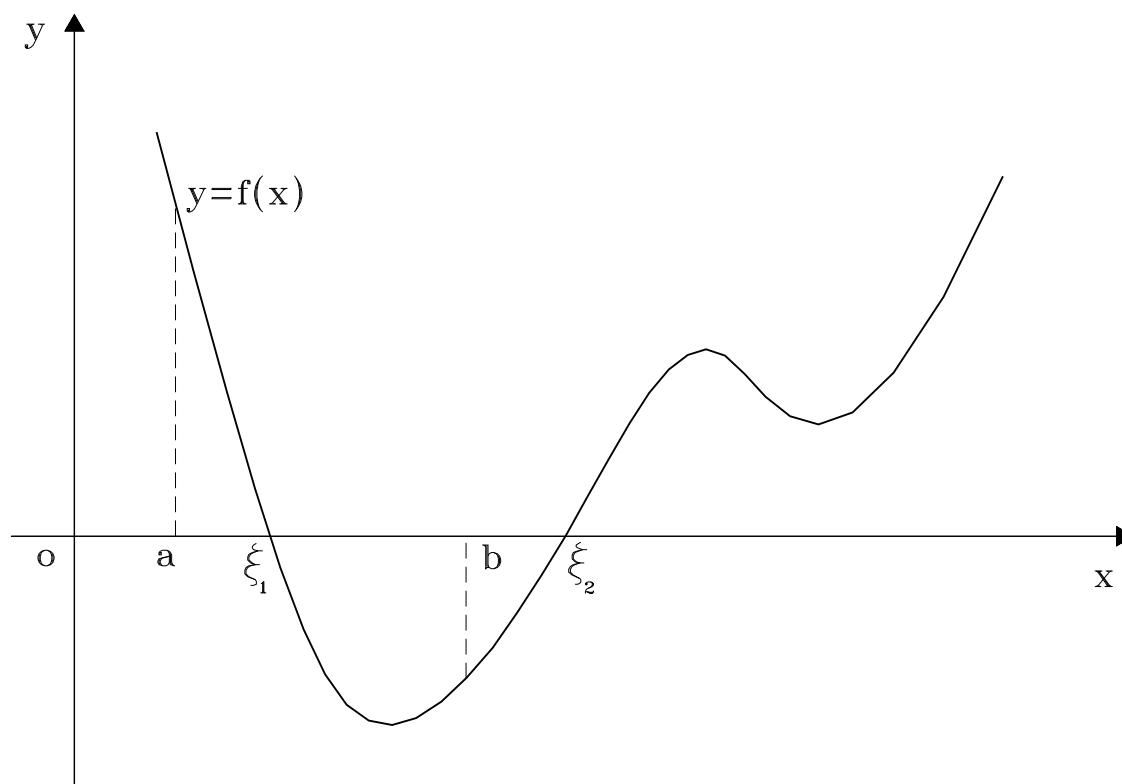
Raízes de equações

- Encontrar valores de $x = \xi$ que satisfaçam

$$f(x) = 0.$$

- Valores especiais: raízes da equação $f(x) = 0$ ou zeros da função $f(x)$.

⇐



Cálculo analítico de uma raiz

- Equações algébricas de grau até quatro podem ter suas raízes calculadas por meio de uma expressão.
- Por exemplo,

$$x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$$

para determinar as duas raízes de $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

- Equações algébricas de grau superior a quatro e grande maioria das equações transcendentais.
- Raízes não podem ser calculadas analiticamente.
- Métodos que encontrem uma solução aproximada para as raízes.

Etapas para cálculo de uma raiz

- Problema de calcular uma raiz pode ser dividido em duas fases:
 1. Isolamento da raiz, isto é, encontrar um intervalo $[a, b]$ que contenha uma, e somente uma, raiz de $f(x) = 0$ (ver figura).
 2. Refinamento da raiz, ou seja, a partir de um valor inicial $x_0 \in [a, b]$, gerar uma seqüência $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ que convirja para uma raiz exata ξ de $f(x) = 0$.
- Maioria dos métodos para cálculo de raízes necessita que a mesma esteja confinada em um dado intervalo.
- Essa raiz deve ser única em tal intervalo.
- Teoremas da Álgebra fornecem informações sobre polinômios.
- Isolamento de raízes: equações algébricas e equações transcendentais.

Equações algébricas

- Equação algébrica de grau n , $n \geq 1$,

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0 \quad (1)$$

- coeficientes c_i reais e
- $c_n \neq 0$.

Avaliação de polinômio

- Valor de um polinômio

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

- em um ponto $x = a$,

$$P(a) = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + c_{n-2} a^{n-2} + \cdots + c_2 a^2 + c_1 a + c_0.$$

- Avaliar $P(x)$ de grau n , em $x = a$: $\frac{n(n+1)}{2}$ multiplicações e n adições.

Exemplo de avaliação de polinômio na forma de potências

Exemplo 1 Avaliar $P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1$ em $x = 2$.

$$P(2) = 3 \times 2^5 - 2 \times 2^4 + 5 \times 2^3 + 7 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 127.$$

- Requer 15 multiplicações e 5 adições.

Método de Horner

- Maneira mais eficiente de avaliar um polinômio.
- Consiste em reescrever o polinômio de forma a evitar potências:

$$\begin{aligned}
 P(x) &= c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0, \\
 &\quad (c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + c_{n-2} x^{n-3} + \dots + c_2 x + c_1) x + c_0, \\
 &\quad ((c_n x^{n-2} + c_{n-1} x^{n-3} + c_{n-2} x^{n-4} + \dots + c_2) x + c_1) x + c_0, \\
 &\quad \dots \\
 P(x) &= \underbrace{(\dots (c_n x + c_{n-1}) x + c_{n-2}) x + \dots + c_2) x + c_1} _{n-1} x + c_0.
 \end{aligned}$$

- Requer apenas n multiplicações e n adições para avaliar polinômio de grau n .

Exemplo de avaliação de polinômio pelo método de Horner

Exemplo 2 Avaliar $P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1$ em $x = 2$ usando o processo de Horner.

$$P(x) = (((((3x - 2)x + 5)x + 7)x - 3)x + 1,$$

$$P(2) = (((((3 \times 2 - 2) \times 2 + 5) \times 2 + 7) \times 2 - 3) \times 2 + 1 = 127.$$

- Requer 5 multiplicações e 5 adições.

Algoritmo do método de Horner para avaliar polinômio

Algoritmo Horner

{ **Objetivo:** Avaliar um polinômio de grau n no ponto a }

parâmetros de entrada n, c, a

{ grau, coeficientes e ponto a ser avaliado, onde c é tal que }

{ $P(x) = c(1)x^n + c(2)x^{n-1} + \dots + c(n)x + c(n+1)$ }

parâmetro de saída y { ordenada $P(a)$ }

$y \leftarrow c(1)$

para $i \leftarrow 2$ **até** $n + 1$ **faça**

$y \leftarrow y * a + c(i)$

fimpara

finalgoritmo

⇐

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 3 Avaliar o polinômio $P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1$ do Exemplo ??, em $x = 2$ usando o algoritmo.

```
% Os parametros de entrada
```

```
n = 5
```

```
c = 3      -2      5      7      -3      1
```

```
a = 2
```

```
% produzem o resultado
```

```
y = 127
```

Propriedades gerais

Teorema 1 *Uma equação algébrica de grau n tem exatamente n raízes, reais ou complexas, contando cada raiz de acordo com a sua multiplicidade.*

- Uma raiz ξ de (??) tem multiplicidade m se

$$P(\xi) = P'(\xi) = P''(\xi) = \dots = P^{m-1}(\xi) = 0 \quad \text{e}$$

$$P^m(\xi) \neq 0,$$

- sendo

$$P^i(\xi) = \left. \frac{d^i P(x)}{dx^i} \right|_{x=\xi}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Exemplo de raiz com multiplicidade

Exemplo 4 Seja

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5 \rightarrow P(1) = 0,$$

$$P'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 14 \rightarrow P'(1) = 0,$$

$$P''(x) = 12x^2 + 12x - 24 \rightarrow P''(1) = 0 \text{ e}$$

$$P'''(x) = 24x + 12 \rightarrow P'''(1) = 36.$$

- $\xi = 1$ é uma raiz de multiplicidade $m = 3$.
- Sendo $P(-5) = 0$, o polinômio de grau 4 escrito na forma fatorada é

$$P(x) = (x - 1)^3(x + 5).$$

Raízes complexas

Teorema 2 *Se os coeficientes de uma equação algébrica forem reais, então suas raízes complexas serão complexos conjugados em pares, ou seja, se $\xi_1 = a + bi$ for uma raiz de multiplicidade m , então $\xi_2 = a - bi$ também será uma raiz e com a mesma multiplicidade.*

Exemplo 5 As raízes de $P(x) = x^2 - 4x + 13 = 0$ são

$$\xi = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 13}}{2} \rightarrow \begin{cases} \xi_1 = 2 + 3i \\ \xi_2 = 2 - 3i. \end{cases}$$

Corolário 1 *Uma equação algébrica de grau ímpar com coeficientes reais tem, no mínimo, uma raiz real.*

Exemplo 6 As raízes da equação $P(x) = x^3 - 9x^2 + 33x - 65 = 0$ são

$$\xi_1 = 5, \quad \xi_2 = 2 + 3i \quad \text{e} \quad \xi_3 = 2 - 3i.$$

- Esta equação de grau 3 tem uma raiz real.

Relações de Girard

- Sendo ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ as raízes de $P(x) = 0$.
- Polinômio na forma fatorada

$$P(x) = c_n(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n) = 0.$$

- Multiplicando os fatores,

$$\begin{aligned} P(x) = & c_n x^n - c_n(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)x^{n-1} \\ & + c_n(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \dots + \xi_1\xi_n + \xi_2\xi_3 + \dots + \xi_2\xi_n + \dots + \xi_{n-1}\xi_n)x^{n-2} \\ & - c_n(\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_2\xi_4 + \dots + \xi_1\xi_2\xi_n + \xi_1\xi_3\xi_4 + \dots + \xi_{n-2}\xi_{n-1}\xi_n)x^{n-3} \\ & + \dots (-1)^n c_n(\xi_1\xi_2\xi_3 \dots \xi_n) = 0. \end{aligned}$$

Relações de Girard cont.

- Comparando com $P(x) = 0$ escrita na forma de potências.
- Condição de igualdade das equações algébricas.
- Relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação algébrica:

$$\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n = -\frac{c_{n-1}}{c_n},$$

$$\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \cdots + \xi_1\xi_n + \xi_2\xi_3 + \cdots + \xi_2\xi_n + \cdots + \xi_{n-1}\xi_n = \frac{c_{n-2}}{c_n},$$

$$\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_2\xi_4 + \cdots + \xi_1\xi_2\xi_n + \xi_1\xi_3\xi_4 + \cdots + \xi_{n-2}\xi_{n-1}\xi_n = -\frac{c_{n-3}}{c_n},$$

...

$$\xi_1\xi_2\xi_3 \cdots \xi_n = (-1)^n \frac{c_0}{c_n}.$$

- Relações válidas também para as raízes complexas.

Exemplo das relações de Girard

Exemplo 7 As raízes da equação do Exemplo ??, $P(x) = x^3 - 9x^2 + 33x - 65 = 0$, são $\xi_1 = 5$, $\xi_2 = 2 + 3i$ e $\xi_3 = 2 - 3i$.

- Relações de Girard:

$$5 + (2 + 3i) + (2 - 3i) = 9 = -\frac{-9}{1},$$

$$5(2 + 3i) + 5(2 - 3i) + (2 + 3i)(2 - 3i) = 33 = \frac{33}{1} \text{ e}$$

$$5(2 + 3i)(2 - 3i) = 65 = (-1)^3 \frac{-65}{1}.$$

Exemplo com os polinômios de Legendre

Exemplo 8 Sejam as equações algébricas de Legendre definidas a partir de $L_0(x) = 1$ e $L_1(x) = x$:

$$L_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2} = 0,$$

$$L_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2} = 0,$$

$$L_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8} = 0,$$

$$L_5(x) = \frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{8} = 0.$$

- Todas as equações possuem $c_{n-1} = 0$: a soma das raízes é nula, então as raízes são simétricas em relação à origem.
- As equações de grau ímpar possuem $c_0 = 0$: elas têm uma raiz nula.

Limites das raízes reais

Teorema 3 (Lagrange) *Dada a equação*

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0,$$

se $c_n > 0$ e k ($0 \leq k \leq n-1$) for o maior índice de coeficiente escolhido dentre os coeficientes negativos, então o limite superior das raízes positivas de $P(x) = 0$ pode ser dado por

$$L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{c_n}},$$

onde B é o valor absoluto do maior coeficiente negativo em módulo.

- Se ξ_p for a maior das raízes positivas de $P(x) = 0$, então $\xi_p \leq L$.

Exemplo de limite da raiz positiva

Exemplo 9 Seja $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$.

- Coeficientes negativos: $c_2 = -13$ e $c_1 = -14$.
- Então $k = 2$, pois $\underline{2} > \underline{1}$, $B = |-14|$ e

$$L = 1 + \sqrt[4]{\frac{14}{1}} \rightarrow L = 4,74.$$

- Teorema de Lagrange garante que $P(x) = 0$ não tem raiz maior que 4,74.
- Se $c_i > 0$ ($i = 0, 1, \dots, n$), então $P(x) = 0$ não tem raízes positivas, pois

$$P(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i > 0 \text{ para } c_i > 0 \text{ e } x > 0.$$

Equações auxiliares

- Para os limites superiores e inferiores das raízes positivas e negativas

$$P_1(x) = x^n P(1/x) = 0,$$

$$P_2(x) = P(-x) = 0 \text{ e}$$

$$P_3(x) = x^n P(-1/x) = 0.$$

- Sendo ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, as raízes de $P(x) = 0$, então $P(x)$ na forma fatorada

$$P(x) = c_n(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n).$$

Raízes de $P_1(x) = 0$

$$P(x) = c_n(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n).$$

$$P_1(x) = x^n P(1/x) = 0,$$

$$P_1(x) = c_n x^n (1/x - \xi_1)(1/x - \xi_2) \dots (1/x - \xi_n),$$

$$P_1(x) = c_n(1 - x\xi_1)(1 - x\xi_2) \dots (1 - x\xi_n).$$

- Raízes: $1/\xi_1, 1/\xi_2, \dots, 1/\xi_n$.

Raízes de $P_2(x) = 0$

$$P(x) = c_n(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n).$$

$$P_2(x) = P(-x) = 0,$$

$$P_2(x) = c_n(-x - \xi_1)(-x - \xi_2) \dots (-x - \xi_n).$$

- Raízes: $-\xi_1, -\xi_2, \dots, -\xi_n$.

Raízes de $P_3(x) = 0$

$$P(x) = c_n(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n).$$

$$P_3(x) = x^n P(-1/x) = 0,$$

$$P_3(x) = c_n x^n (-1/x - \xi_1)(-1/x - \xi_2) \dots (-1/x - \xi_n),$$

$$P_3(x) = c_n (-1 - x\xi_1)(-1 - x\xi_2) \dots (-1 - x\xi_n).$$

- Raízes: $-1/\xi_1, -1/\xi_2, \dots, -1/\xi_n$.

Exemplo de raízes das equações auxiliares

Exemplo 10 Seja $P(x) = x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 42x + 40 = 0$, com raízes $\xi_1 = -2$, $\xi_2 = -1$, $\xi_3 = 4$ e $\xi_4 = 5$.

- Equações auxiliares e suas respectivas raízes

$$P_1(x) = x^4 P(1/x) = 40x^4 + 42x^3 - 5x^2 - 6x + 1,$$
$$(\xi_1 = -0,5; \xi_2 = -1, \xi_3 = 0,25; \xi_4 = 0,2),$$

$$P_2(x) = P(-x) = x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 42x + 40,$$
$$(\xi_1 = 2, \xi_2 = 1, \xi_3 = -4, \xi_4 = -5),$$

$$P_3(x) = x^4 P(-1/x) = 40x^4 - 42x^3 - 5x^2 + 6x + 1,$$
$$(\xi_1 = 0,5; \xi_2 = 1, \xi_3 = -0,25; \xi_4 = -0,2).$$

Limite inferior das raízes positivas de $P(x) = 0$

- Se $1/\xi_q$ for a maior das raízes positivas de $P_1(x) = 0$, então ξ_q será a menor das raízes positivas de $P(x) = 0$ (ver Exemplo ??).
- Sendo L_1 o limite superior das raízes positivas de $P_1(x) = 0$, calculado pelo Teorema ??,

$$\frac{1}{\xi_q} \leq L_1 \rightarrow \xi_q \geq \frac{1}{L_1}.$$

- Limite inferior das raízes positivas de $P(x) = 0$ é $1/L_1$.
- Se $P(x) = 0$ possuir raízes positivas ξ^+ , elas estarão no intervalo

$$\frac{1}{L_1} \leq \xi^+ \leq L.$$

Limite inferior das raízes negativas de $P(x) = 0$

- Se $-\xi_r$ for a maior das raízes positivas de $P_2(x) = 0$, então ξ_r será a menor das raízes negativas de $P(x) = 0$ (ver Exemplo ??).
- Sendo L_2 o limite superior das raízes positivas de $P_2(x) = 0$, dado pelo Teorema ??

$$-\xi_r \leq L_2 \rightarrow \xi_r \geq -L_2.$$

Limite superior das raízes negativas de $P(x) = 0$

- Se $-1/\xi_s$ for a maior das raízes positivas de $P_3(x) = 0$, então ξ_s será a maior das raízes negativas de $P(x) = 0$ (ver Exemplo ??).
- Sendo L_3 o limite superior das raízes positivas de $P_3(x) = 0$, dado pelo Teorema ??

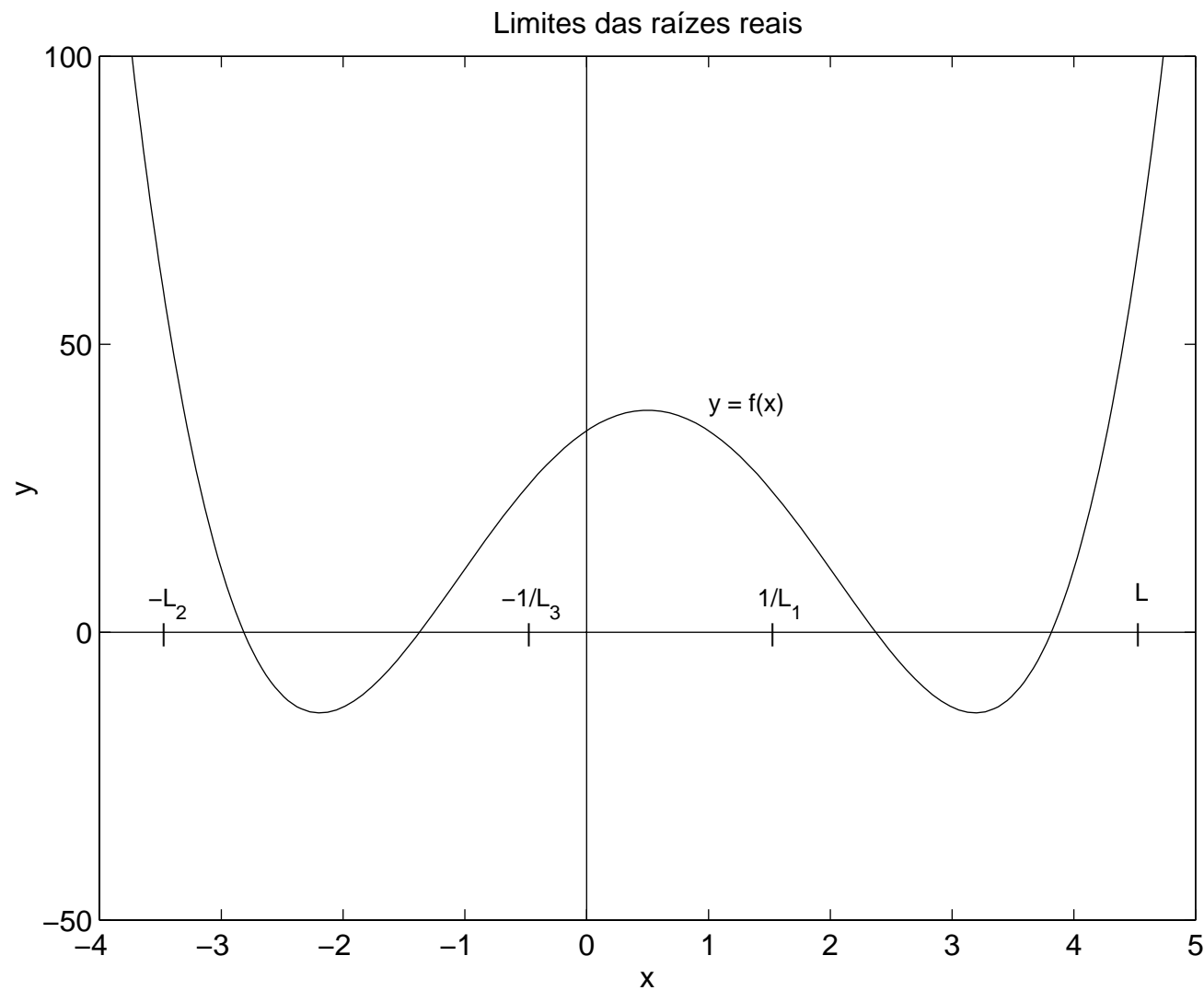
$$-\frac{1}{\xi_s} \leq L_3 \rightarrow \xi_s \leq -\frac{1}{L_3}.$$

- Se $P(x) = 0$ tiver raízes negativas ξ^- , elas estarão no intervalo

$$-L_2 \leq \xi^- \leq -\frac{1}{L_3},$$

- Os limites não garantem a existência das raízes reais, mas tão somente informam onde as raízes reais estarão caso existam.

Limites das raízes reais de uma equação algébrica



Exemplo dos limites das raízes reais

Exemplo 11 Calcular os limites das raízes reais de $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$ do Exemplo ??.

$$P_1(x) = x^4 P\left(\frac{1}{x}\right) = x^4 \left(\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3} - \frac{13}{x^2} - \frac{14}{x} + 24 \right) = 0 \rightarrow$$

$$P_1(x) = 24x^4 - 14x^3 - 13x^2 + 2x + 1 = 0,$$

$$L_1 = 1 + \sqrt[4]{\frac{14}{24}} \approx \frac{1}{L_1} = 0,63,$$

Exemplo dos limites das raízes reais cont.

$$P_2(x) = P(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^3 - 13(-x)^2 - 14(-x) + 24 = 0 \rightarrow$$

$$P_2(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0,$$

$$L_2 = 1 + \sqrt[4]{\frac{13}{1}} \rightsquigarrow -L_2 = -14 \text{ e}$$

$$P_3(x) = x^4 P\left(\frac{1}{-x}\right) = x^4 \left(\frac{1}{(-x)^4} + \frac{2}{(-x)^3} - \frac{13}{(-x)^2} - \frac{14}{(-x)} + 24 \right) = 0 \rightarrow$$

$$P_3(x) = 24x^4 + 14x^3 - 13x^2 - 2x + 1 = 0,$$

$$L_3 = 1 + \sqrt[4]{\frac{13}{24}} \rightsquigarrow -\frac{1}{L_3} = -0,58.$$

- Limites das raízes reais: $0,63 \leq \xi^+ \leq 4,74$ e $-14 \leq \xi^- \leq -0,58$.

Dispositivo prático

- Primeiro bloco: define os coeficientes de $P(x) = 0$ e de suas três equações auxiliares $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 0$ e $P_3(x) = 0$:
 1. colocar os coeficientes de $P(x) = 0$ na coluna $P(x)$, com c_n no topo,
 2. inverter a ordem dos coeficientes da coluna $P(x)$ e colocá-los em $P_1(x)$,
 3. trocar o sinal dos coeficientes de $P(x)$, cujos índices sejam ímpares e atribuí-los a $P_2(x)$,
 4. inverter a ordem dos coeficientes da coluna $P_2(x)$ e colocá-los em $P_3(x)$ e
 5. se algum $c_n < 0$, então trocar o sinal de todos os coeficientes da coluna para garantir que $c_n > 0$, conforme exigência do Teorema ??.

Dispositivo prático cont.

- Segundo bloco: atribui os parâmetros necessários para aplicar o Teorema ?? a cada uma das quatro equações:
 - k é o índice do primeiro coeficiente negativo,
 - n é o grau do polinômio,
 - B é o valor absoluto do maior coeficiente negativo em módulo,
 - L_i é o limite superior das raízes positivas de $P_i(x) = 0$ dado pelo Teorema ?? e
 - L_ξ são os limites superiores e inferiores das raízes positivas e negativas de $P(x) = 0$, sendo que $L_{\xi(P)} = L$, $L_{\xi(P_1)} = 1/L_1$, $L_{\xi(P_2)} = -L_2$ e $L_{\xi(P_3)} = -1/L_3$.

Exemplo do dispositivo prático

Exemplo 12 Calcular os limites das raízes de $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$ do Exemplo ?? usando o dispositivo prático.

$n=4$	$P(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
c_4	1	24	1	24
c_3	2	-14	-2	14
c_2	-13	-13	-13	-13
c_1	-14	2	14	-2
c_0	24	1	24	1
k	2	3	3	2
$n-k$	2	1	1	2
B	$ -14 $	$ -14 $	$ -13 $	$ -13 $
L_i	4,74	1,58	14	1,74
L_ξ	4,74	0,63	-14	-0,58

Algoritmo para achar os limites das raízes reais pelo teorema de Lagrange

Algoritmo LimitesRaízes

```

{ Objetivo: Achar os limites das raízes reais de uma equação polinomial }
parâmetros de entrada  $n, c$  { grau do polinômio e coeficientes, sendo }
    {  $P(x) = c(1)x^n + c(2)x^{n-1} + \dots + c(n)x + c(n+1)$  }
parâmetro de saída  $L$ 
    { limites inferior e superior das raízes positivas e negativas, respectivamente }
se  $c(1) = 0$  então escreva “coeficiente  $c(1)$  nulo”, abandone, fimse
 $t \leftarrow n + 1$ ;  $c(t+1) \leftarrow 0$ 
repita { se  $c(n+1)$  for nulo, então o polinômio é deflacionado }
    se  $c(t) \neq 0$  então interrompa, fimse;  $t \leftarrow t - 1$ 
fim repita
{ cálculo dos quatro limites das raízes reais }
para  $i \leftarrow 1$  até 4 faça
    se  $i = 2$  ou  $i = 4$  então { inversão da ordem dos coeficientes }
        para  $j \leftarrow 1$  até  $t/2$  faça;  $Aux \leftarrow c(j)$ ;  $c(j) \leftarrow c(t-j+1)$ ;  $c(t-j+1) \leftarrow Aux$ , fim para
    senão
        se  $i = 3$  então
            { reinversão da ordem e troca de sinais dos coeficientes }
            para  $j \leftarrow 1$  até  $t/2$  faça;  $Aux \leftarrow c(j)$ ;  $c(j) \leftarrow c(t-j+1)$ ;  $c(t-j+1) \leftarrow Aux$ , fim para
            para  $j \leftarrow t-1$  até 1 passo -2 faça  $c(j) \leftarrow -c(j)$ , fim para
        fimse
    fimse
    { se  $c(1)$  for negativo, então é trocado o sinal de todos os coeficientes }
    se  $c(1) < 0$  então
        para  $j \leftarrow 1$  até  $t$  faça  $c(j) \leftarrow -c(j)$ , fim para
    fimse
     $k \leftarrow 2$  { cálculo de  $k$ , o maior índice dos coeficientes negativos }
    repita
        se  $c(k) < 0$  ou  $k > t$  então interrompa, fimse
         $k \leftarrow k + 1$ 
    fim repita { cálculo de  $B$ , o maior coeficiente negativo em módulo }
    se  $k \leq t$  então
         $B \leftarrow 0$ 
        para  $j \leftarrow 2$  até  $t$  faça
            se  $c(j) < 0$  e  $\text{abs}(c(j)) > B$  então  $B \leftarrow \text{abs}(c(j))$ , fimse
        fim para
        { limite das raízes positivas de  $P(x) = 0$  e das equações auxiliares }
         $L(i) \leftarrow 1 + \sqrt[k-1]{B/c(1)}$ 
    senão,  $L(i) \leftarrow 10^{100}$ , fimse
    fim para { limites das raízes positivas e negativas de  $P(x) = 0$  }
     $Aux \leftarrow L(1)$ ;  $L(1) \leftarrow 1/L(2)$ ;  $L(2) \leftarrow Aux$ ;  $L(3) \leftarrow -L(3)$ ;  $L(4) \leftarrow -1/L(4)$ 
fim algoritmo

```

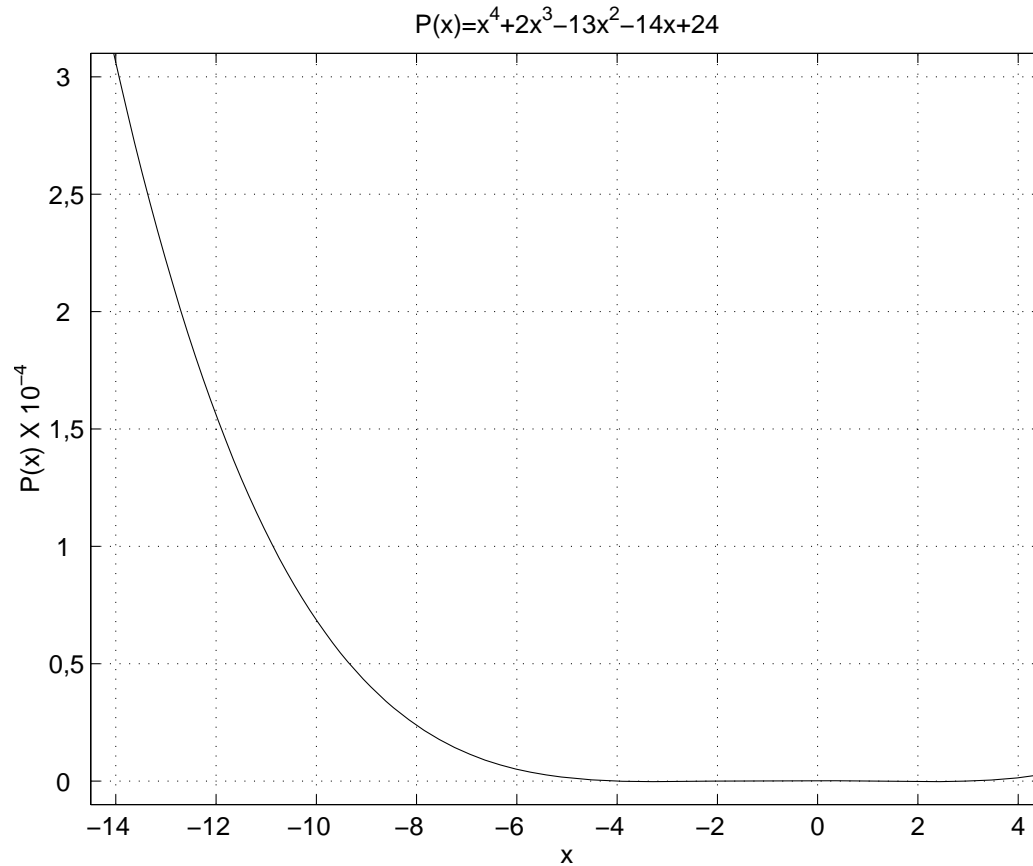
||⇐

Exemplo de uso do algoritmo

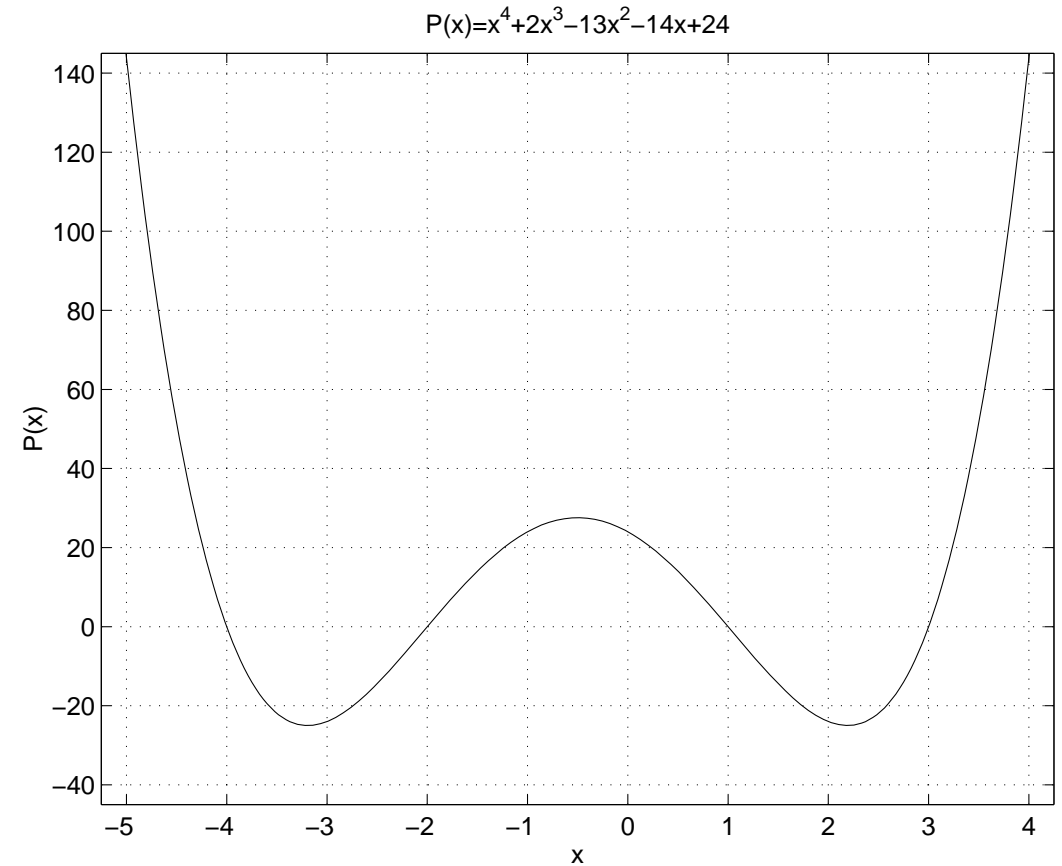
Exemplo 13 Calcular os limites das raízes reais da equação polinomial $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$ do Exemplo ?? usando o algoritmo.

```
% Os parametros de entrada
n = 4
c = 1      2    -13    -14    24
% produzem os resultados
L = 0.6316    4.7417   -14.0000   -0.5760
```

Gráficos do polinômio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$



$-14 \leq x \leq 4,74$



$-5 \leq x \leq 4$

- Quatro raízes isoladas nos intervalos: $[-5, -3]$, $[-3, -1]$, $[0, 2]$ e $[2, 4]$.

Número de raízes reais

Teorema 4 (Regra de sinais de Descartes) *O número de raízes reais positivas n^+ de $P(x) = 0$ é igual ao número de variações de sinais na seqüência dos coeficientes ou é menor que este número por um inteiro par, sendo as raízes contadas de acordo com a sua multiplicidade e não sendo considerados os coeficientes nulos.*

Corolário 2 *Se $P(x) = 0$ não possuir coeficientes nulos, então o número de raízes reais negativas n^- (contando multiplicidades) é igual ao número de permanências de sinais na seqüência dos coeficientes ou é menor que este número por um inteiro par.*

- Regra de sinais de Descartes discerne as raízes positivas das negativas.
- Não consegue distingüir as raízes reais das complexas, as quais aparecem em pares conjugados (Teorema ??).
- Por exemplo, se o número de variações de sinais for 5: $n^+ = 5$ ou 3 ou 1.

Exemplo da regra de sinais de Descartes

Exemplo 14 Para $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$, tem-se que

$$n^+ = 2 \text{ ou } 0, \text{ e } n^- = 2 \text{ ou } 0.$$

- Se existirem duas raízes positivas, elas satisfarão a

$$0,63 \leq \xi^+ \leq 4,74.$$

- Se houver duas negativas, elas estarão no intervalo

$$-14 \leq \xi^- \leq -0,58.$$

- Ver Exemplo ?? e figura.
- Combinando a Regra de sinais de Descartes e o Teorema de Lagrange, conseguem-se importantes informações para o isolamento das raízes.

Exemplo de limites e número de raízes reais

Exemplo 15 Calcular os limites e o número de raízes reais de $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$.

$n=3$	$P(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
c_3	1	8	-1	8
c_2	-3	-6	-3	6
c_1	-6	-3	6	-3
c_0	8	1	8	-1
k				
$n-k$				
B				
L_i				
L_ξ				

Trocar sinal
 \longrightarrow
 de $P_2(x)$

$n=3$	$P(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
c_3	1	8	1	8
c_2	-3	-6	3	6
c_1	-6	-3	-6	-3
c_0	8	1	-8	-1
k	2	2	1	1
$n-k$	1	1	2	2
B	$ -6 $	$ -6 $	$ -8 $	$ -3 $
L_i	7	1,75	3,83	1,61
L_ξ	7	0,57	-3,83	-0,62

- Limites das raízes: $0,57 \leq \xi^+ \leq 7$ e $-3,83 \leq \xi^- \leq -0,62$.
- Número de raízes reais: $n^+ = 2$ ou 0 e $n^- = 1$.
- Existe uma raiz real negativa e as outras duas serão ou reais positivas ou complexas.

Exemplo de limites e número de raízes reais

Exemplo 16 Achar os limites e o número de raízes reais de

$$P(x) = x^6 - 5x^5 + 7x^4 + 19x^3 - 98x^2 - 104x = (x^5 - 5x^4 + 7x^3 + 19x^2 - 98x - 104)x = 0.$$

$n=5$	$P(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
c_5	1	-104	-1	-104
c_4	-5	-98	-5	98
c_3	7	19	-7	19
c_2	19	7	19	-7
c_1	-98	-5	98	-5
c_0	-104	1	-104	-1
k				
$n-k$				
B				
L_i				
L_ξ				

Trocar sinal de
 \longrightarrow
 $P_1(x), P_2(x), P_3(x)$

$n=5$	$P(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
c_5	1	104	1	104
c_4	-5	98	5	-98
c_3	7	-19	7	-19
c_2	19	-7	-19	7
c_1	-98	5	-98	5
c_0	-104	-1	104	1
k	4	3	2	4
$n-k$	1	2	3	1
B	$ -104 $	$ -19 $	$ -98 $	$ -98 $
L_i	105	1,43	5,61	1,94
L_ξ	105	0,70	-5,61	-0,51

- Limites das raízes: $0,70 \leq \xi^+ \leq 105$ e $-5,61 \leq \xi^- \leq -0,51$.
- Número de raízes reais: $n^+ = 3$ ou 1 e $n^- = 2$ ou 0 .

Equações transcendentais

- Equações transcendentais não dispõem de teoremas que forneçam informações sobre os limites e o número de raízes reais.
- Uma equação transcendente pode ter um número infinito de raízes:

$$f(x) = \sin(x) = 0,$$

- ou mesmo não ter raízes:

$$f(x) = \sin(x) - 2 = 0.$$

- Método gráfico: maneira mais simples para achar um intervalo que contenha uma única raiz.
- Esboço da função no intervalo de interesse.
- Dificuldade em determinar este intervalo.
- Na prática: usar a intuição, o conhecimento a respeito da função e o método da tentativa e erro.

Algoritmo para achar um intervalo onde função troca de sinal

- Fornece um intervalo $[a, b]$, no qual uma função $f(x)$ troca de sinal, ou seja, $f(a)f(b) < 0$.
- A raiz não esta necessariamente isolada, pois pode haver um número ímpar de raízes.

Algoritmo TrocaSinal

{ **Objetivo:** Achar um intervalo $[a, b]$ onde uma função troca de sinal }

parâmetros de entrada z

{ ponto a partir do qual o intervalo será gerado }

parâmetros de saída $a, b, CondErro$

{ limite inferior e superior do intervalo e condição de erro, sendo }

{ $CondErro = 0$ se $f(a)f(b) \leq 0$ e $CondErro = 1$ se $f(a)f(b) > 0$. }

se $z = 0$ então

$a \leftarrow -0,05; b \leftarrow 0,05$

senão

$a \leftarrow 0,95 * z; b \leftarrow 1,05 * z$

fimse

$Iter \leftarrow 0; Aureo \leftarrow 2 / (\text{raiz}_2(5) - 1)$

$Fa \leftarrow f(a); Fb \leftarrow f(b)$ { avaliar a função em a e b }

escreva $Iter, a, b, Fa, Fb$

repita

se $Fa * Fb \leq 0$ ou $Iter \geq 20$ então interrompa, fimse

$Iter \leftarrow Iter + 1$

se $\text{abs}(Fa) < \text{abs}(Fb)$ então

$a \leftarrow a - Aureo * (b - a)$

$Fa \leftarrow f(a)$ { avaliar a função em a }

senão

$b \leftarrow b + Aureo * (b - a)$

$Fb \leftarrow f(b)$ { avaliar a função em b }

fimse

escreva $Iter, a, b, Fa, Fb$

fimrepita

se $Fa * Fb \leq 0$ então

$CondErro \leftarrow 0$

senão

$CondErro \leftarrow 1$

fimse

finalgoritmo

||⇐

Exemplo de uso do algoritmo

Exemplo 17 Achar um intervalo, a partir de $z = 5$, onde $f(x) = 2x^3 - \cos(x + 1) - 3$ troca de sinal, utilizando o algoritmo.

```
% 0 parametro de entrada
z = 5
% produz os resultados
Determinacao de intervalo onde ocorre troca de sinal
```

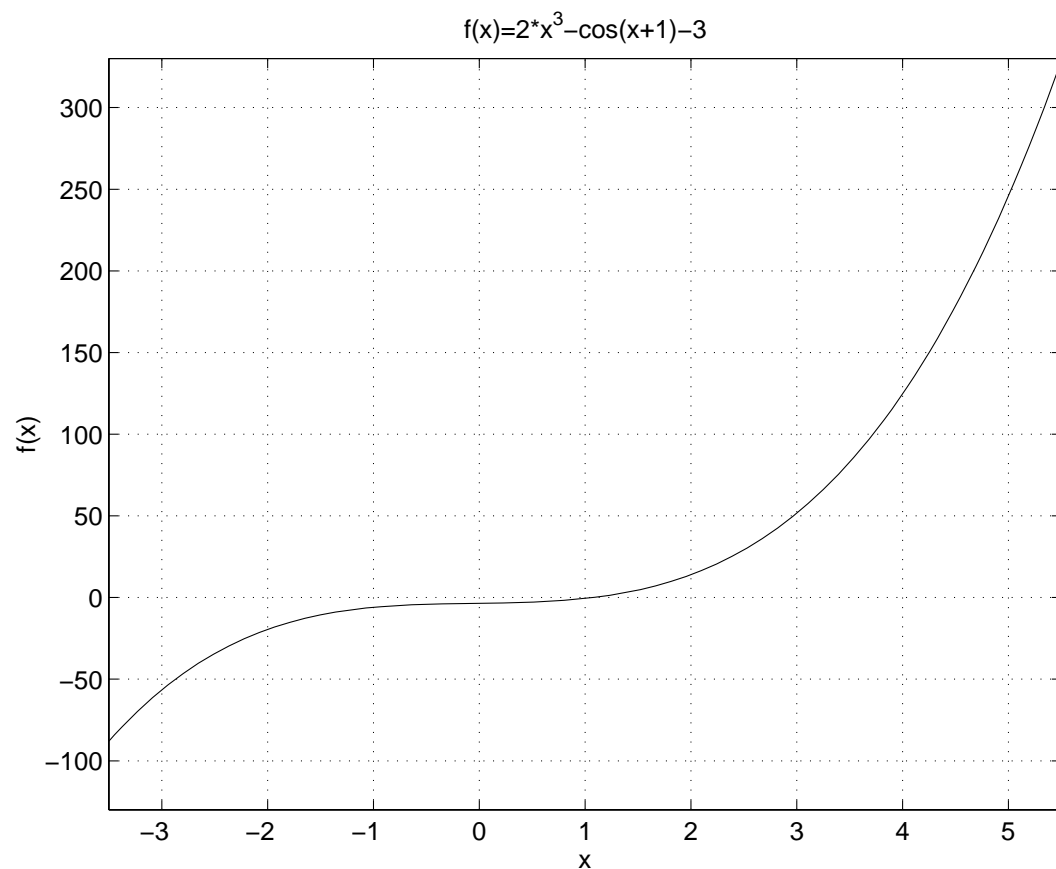
iter	a	b	Fa	Fb
0	4.7500	5.2500	210.4826	285.4068
1	3.9410	5.2500	119.1909	285.4068
2	1.8229	5.2500	10.0655	285.4068
3	-3.7221	5.2500	-105.2218	285.4068

```
a = -3.7221
b = 5.2500
CondErro = 0
```

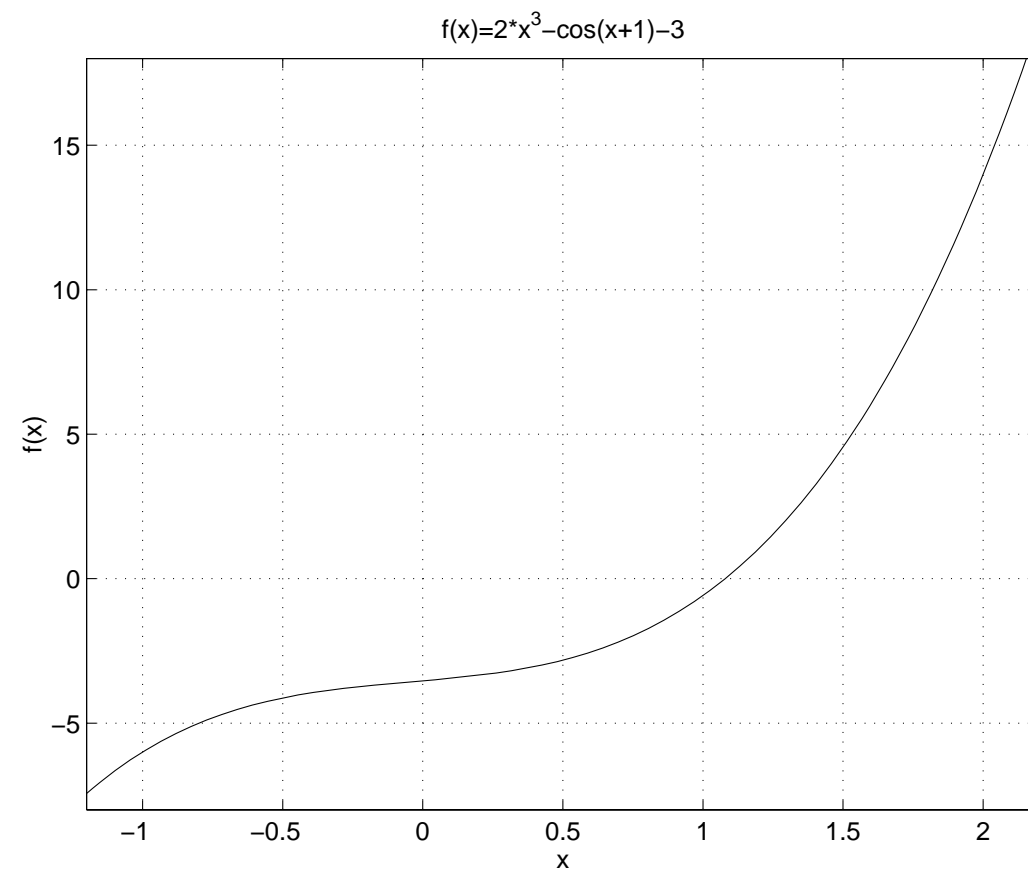
- A função muda de sinal no intervalo $[-3,7221; 5,2500]$:

$$f(-3,7221) = -105,2218 \quad \text{e} \quad f(5,2500) = 285,4068.$$

Esboços da função $f(x) = 2x^3 - \cos(x+1) - 3$



$$-3,7221 \leq x \leq 5,2500$$

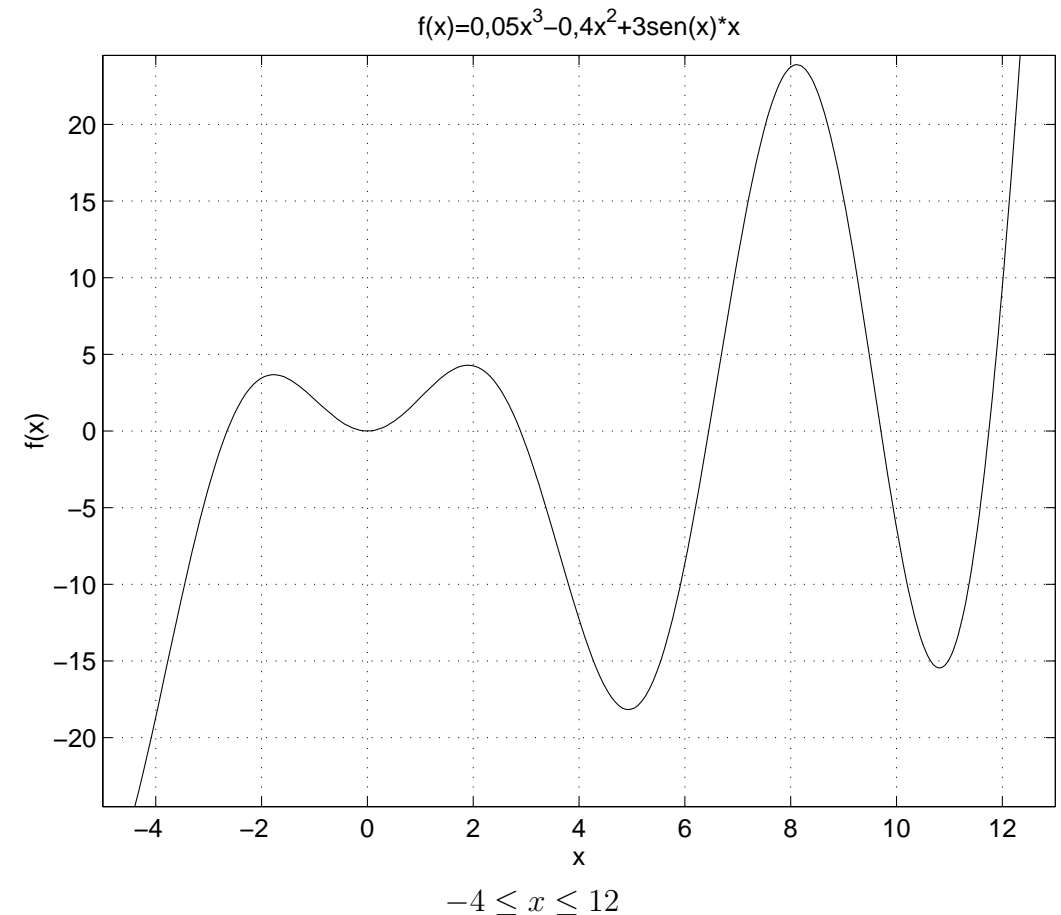
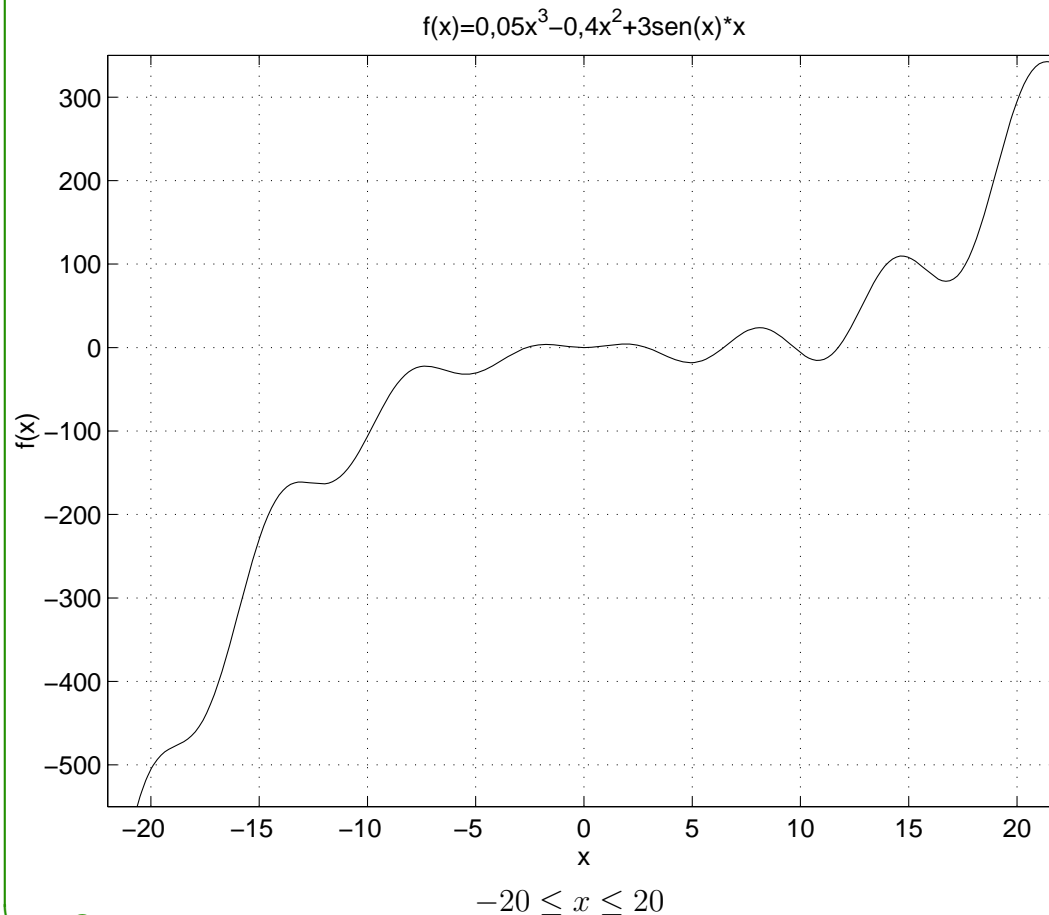


$$-1 \leq x \leq 2$$

Exemplo de isolamento gráfico de raízes

Exemplo 18 Isolar, graficamente, os zeros da função $f(x) = 0,05x^3 - 0,4x^2 + 3\sin(x)x$.

- Intervalos: $-20 \leq x \leq 20$ e $-4 \leq x \leq 12$.
- Intervalos das raízes: $[-4, -2]$, $[-1, 1]$, $[2, 4]$, $[6, 8]$, $[8, 10]$ e $[10, 12]$.



Convergência da raiz

- Seja a raiz ξ isolada em um intervalo $[a, b]$.
- Gerar uma sequência $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, \xi\} \in [a, b]$ que convirja para a raiz exata ξ de $f(x) = 0$.
- Critério de parada baseado em teorema.

Teorema 5 *Sejam ξ uma raiz exata e x_k uma raiz aproximada de $f(x) = 0$, sendo ξ e $x_k \in [a, b]$ e $|f'(x)| \geq m > 0$ para $a \leq x \leq b$, com*

$$m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

Então, o erro absoluto satisfaz

$$|x_k - \xi| \leq \frac{|f(x_k)|}{m}.$$

Exemplo de critério de parada

Exemplo 19 Avaliar o erro absoluto cometido ao considerar $x_k = 2,23$ como aproximação da raiz positiva de $f(x) = x^2 - 5 = 0$ no intervalo $[2, 3]$.

$$m = \min_{2 \leq x \leq 3} |2x| = 4.$$

$$|2,23 - \xi| \leq \frac{0,0271}{4} = 0,0068 \rightarrow$$

$$2,23 - 0,0068 \leq \xi \leq 2,23 + 0,0068 \quad (\xi = \sqrt{5} \approx 2,2361).$$

Critério de parada

- O Teorema ?? é de aplicação muito restrita.
- Requer que seja avaliado o mínimo da derivada primeira da função $f(x)$.
- Sequência é interrompida quando seus valores satisfizerem a pelo menos um dos critérios

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon, \quad (2)$$

$$\left| \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} \right| \leq \varepsilon, \quad (3)$$

$$|f(x_k)| \leq \varepsilon, \quad (4)$$

- ε : tolerância fornecida.

Ordem de convergência

- Definir a rapidez com que a seqüência gerada por um dado método, $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$, converge para a raiz exata ξ .
- Seja o erro da k -ésima iteração

$$\epsilon_k = x_k - \xi, \quad (5)$$

- diferença entre a raiz ξ e a sua estimativa x_k .
- Critério para avaliar a convergência

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\epsilon_{k+1}| = K |\epsilon_k|^\gamma \quad (6)$$

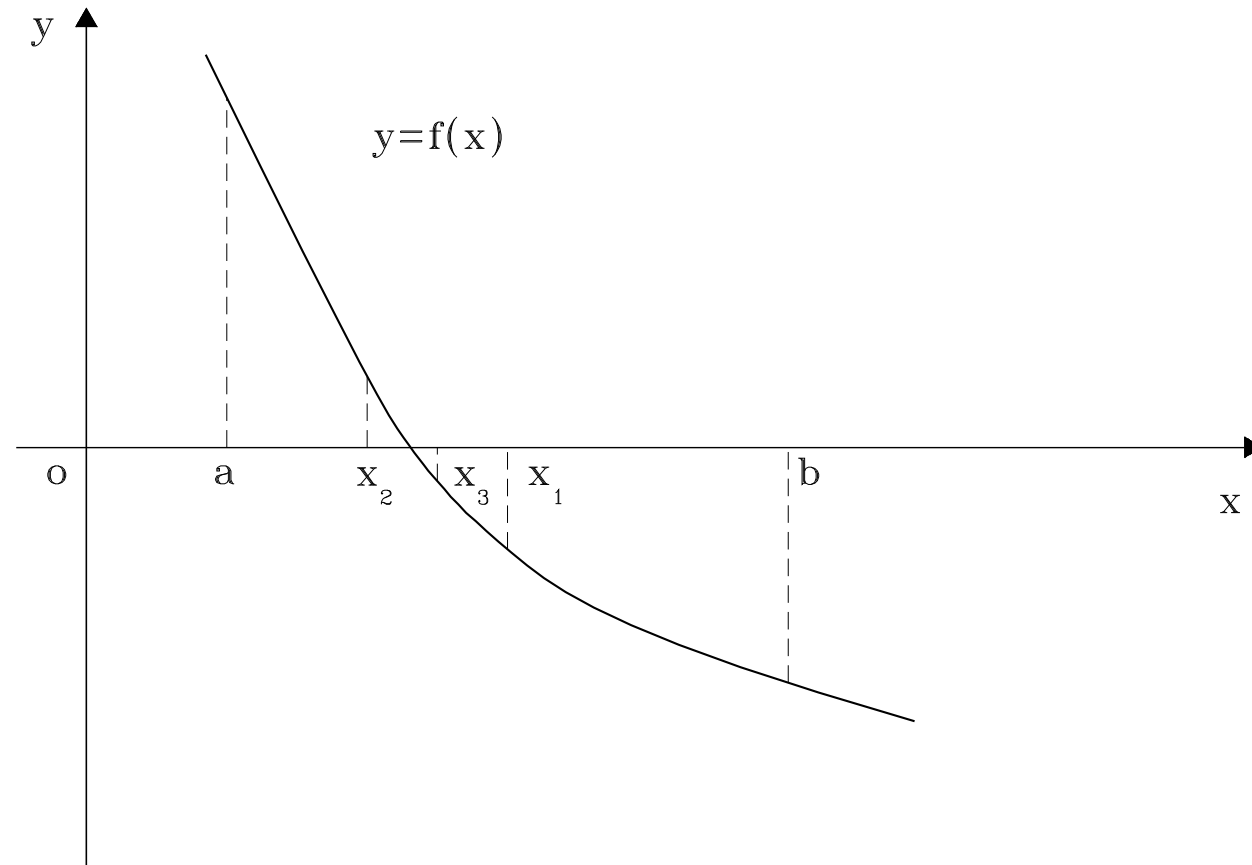
- K : constante de erro assintótico.
- γ : ordem de convergência do método gerador da seqüência.
- Quanto maior o valor de γ , mais rápida a seqüência convergirá para a raiz ξ .

Método da bisseção

- Seja $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$, sendo ξ a única raiz de $f(x) = 0$ neste intervalo.
- O método da bisseção consiste em subdividir o intervalo ao meio a cada iteração.
- Manter o subintervalo que contenha a raiz, ou seja, aquele em que $f(x)$ tenha sinais opostos nos extremos.

Interpretação gráfica do método da bisseção

||⇐



Método da bisseção

- Sequência de intervalos encaixados

$$\{[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \dots, [a_k, b_k]\}$$

$$f(a_i)f(b_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (7)$$

- Na k -ésima iteração

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}. \quad (8)$$

- Sequência $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ é monotônica não decrescente limitada.
- Sequência $\{b_1, b_2, b_3, \dots, b_k\}$ é monotônica não crescente limitada.
- Por (??), essas duas seqüências possuem um limite comum ξ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \xi.$$

- Passando ao limite da desigualdade (??) com $k \rightarrow \infty$ e
- considerando que $f(x)$ é contínua: $[f(\xi)]^2 \leq 0 \rightarrow f(\xi) = 0$,
- ou seja, ξ é uma raiz de $f(x) = 0$.

Número de iterações

- O método da bisseção tem convergência garantida se $f(x)$ for contínua em $[a, b]$ e se $\xi \in [a, b]$.
- É possível determinar *a priori* o número de iterações necessárias para calcular a raiz com uma tolerância ε a partir de um intervalo $[a, b]$.
- Substituindo $x_k = (b_k - a_k)/2$ em (??),

$$|x_k - x_{k-1}| = \frac{b - a}{2^{k+1}}.$$

- Utilizando o critério (??),

$$\frac{b - a}{2^{k+1}} \leq \varepsilon.$$

- Número de iterações para calcular uma raiz no intervalo $[a, b]$ com tolerância ε

$$k \geq \log_2 \left(\frac{b - a}{\varepsilon} \right) - 1. \quad (9)$$

Algoritmo do método da bisseção

Algoritmo Bisseção

```

{ Objetivo: Calcular a raiz de uma equação pelo método da bisseção }
parâmetros de entrada  $a$ ,  $b$ ,  $Toler$ ,  $IterMax$ 
    { limite inferior, limite superior, tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída  $Raiz$ ,  $Iter$ ,  $CondErro$ 
    { raiz, número de iterações gastas e condição de erro, sendo }
    {  $CondErro = 0$  se a raiz foi encontrada e  $CondErro = 1$  em caso contrário. }
 $Fa \leftarrow f(a)$ ;  $Fb \leftarrow f(b)$   { avaliar a função em  $a$  e  $b$  }
se  $Fa * Fb > 0$  então
    escreva "função não muda de sinal nos extremos do intervalo dado"
    abandone
fimse
 $\Delta X \leftarrow \text{abs}(b - a)/2$ ;  $Iter \leftarrow 0$ 
repita
     $x \leftarrow (a + b)/2$ ;  $Fx \leftarrow f(x)$   { avaliar a função em  $x$  }
    escreva  $Iter$ ,  $a$ ,  $Fa$ ,  $b$ ,  $Fb$ ,  $x$ ,  $Fx$ ,  $\Delta X$ 
    se ( $\Delta X \leq Toler$  e  $\text{abs}(Fx) \leq Toler$ ) ou  $Iter \geq IterMax$  então
        interrompa
    fimse
    se  $Fa * Fx > 0$  então
         $a \leftarrow x$ ;  $Fa \leftarrow Fx$ 
    senão
         $b \leftarrow x$ 
    fimse
     $\Delta X \leftarrow \Delta X/2$ ;  $Iter \leftarrow Iter + 1$ 
fimrepita
 $Raiz \leftarrow x$ 
    { teste de convergência }
    se  $\Delta X \leq Toler$  e  $\text{abs}(Fx) \leq Toler$  então
         $CondErro \leftarrow 0$ 
    senão
         $CondErro \leftarrow 1$ 
    fimse
finalgoritmo

```



Exemplo do método da bisseção

Exemplo 20 Calcular a raiz de $f(x) = 2x^3 - \cos(x + 1) - 3 = 0$ do Exemplo ??, que está no intervalo $[-1, 2]$, com $\varepsilon \leq 0,01$ pelo algoritmo do método da bisseção.

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = -1
```

```
b = 2
```

```
Toler = 0.0100
```

```
IterMax = 100
```

```
% produzem os resultados
```

```
    Calculo de raiz de equacao pelo metodo da bissecao
```

iter	a	Fa	b	Fb	x	Fx	Delta_x
0	-1.00000	-6.00000	2.00000	13.98999	0.50000	-2.8207e+00	1.50000
1	0.50000	-2.82074	2.00000	13.98999	1.25000	1.5344e+00	0.75000
2	0.50000	-2.82074	1.25000	13.98999	0.87500	-1.3606e+00	0.37500
3	0.87500	-1.36062	1.25000	13.98999	1.06250	-1.2895e-01	0.18750
4	1.06250	-0.12895	1.25000	13.98999	1.15625	6.4419e-01	0.09375
5	1.06250	-0.12895	1.15625	13.98999	1.10938	2.4356e-01	0.04688
6	1.06250	-0.12895	1.10938	13.98999	1.08594	5.3864e-02	0.02344
7	1.06250	-0.12895	1.08594	13.98999	1.07422	-3.8393e-02	0.01172
8	1.07422	-0.03839	1.08594	13.98999	1.08008	7.5211e-03	0.00586

```
Raiz      = 1.08008
```

```
Iter      = 8
```

```
CondErro  = 0
```

Observações sobre os resultados

- A raiz é $\xi \approx x_8 = 1,08008$.
- Por (??), o número de iterações $k \geq \log_2((2 - (-1))/0,01) - 1 \approx 7,23$.
- Para alcançar o critério de parada (??) $|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$ (ver coluna **Delta_x**) foram necessárias 8 iterações.
- Poderiam ser gastas mais iterações para atender ao outro critério de parada (??): $|f(x_k)| \leq \varepsilon$.

Exemplo do método da bisseção

Exemplo 21 Determinar a maior raiz de $f(x) = 0,05x^3 - 0,4x^2 + 3 \sin(x)x = 0$ com $\varepsilon \leq 0,005$, usando o algoritmo.

- Pela figura do Exemplo ??, tem-se que $\xi \in [10, 12]$.

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = 10
```

```
b = 12
```

```
Toler = 0.0050
```

```
IterMax = 100
```

```
% produzem os resultados
```

```
Calculo de raiz de equacao pelo metodo da bissecao
```

iter	a	Fa	b	Fb	x	Fx	Delta_x
0	10.00000	-6.32063	12.00000	9.48337	11.00000	-1.4850e+01	1.00000
1	11.00000	-14.84968	12.00000	9.48337	11.50000	-7.0594e+00	0.50000
2	11.50000	-7.05935	12.00000	9.48337	11.75000	2.0128e-01	0.25000
3	11.50000	-7.05935	11.75000	9.48337	11.62500	-3.6975e+00	0.12500
4	11.62500	-3.69752	11.75000	9.48337	11.68750	-1.8136e+00	0.06250
5	11.68750	-1.81359	11.75000	9.48337	11.71875	-8.2229e-01	0.03125
6	11.71875	-0.82229	11.75000	9.48337	11.73438	-3.1451e-01	0.01562
7	11.73438	-0.31451	11.75000	9.48337	11.74219	-5.7611e-02	0.00781
8	11.74219	-0.05761	11.75000	9.48337	11.74609	7.1585e-02	0.00391
9	11.74219	-0.05761	11.74609	9.48337	11.74414	6.9247e-03	0.00195
10	11.74219	-0.05761	11.74414	9.48337	11.74316	-2.5359e-02	0.00098
11	11.74316	-0.02536	11.74414	9.48337	11.74365	-9.2209e-03	0.00049
12	11.74365	-0.00922	11.74414	9.48337	11.74390	-1.1491e-03	0.00024

```
Raiz = 11.74390
```

```
Iter = 12
```

```
CondErro = 0
```

Observações sobre o método da bisseção

- O método da bisseção é robusto.
- Ele não é eficiente devido à sua convergência lenta.
- O valor de $f(x)$ não decresce monotonicamente.
- Somente o sinal de $f(x_{k-1})$ é usado para o cálculo do próximo x_k , sem levar em consideração o seu valor.
- O método da bisseção é mais usado para reduzir o intervalo antes de usar um outro método de convergência mais rápida.

Métodos baseados em aproximação linear

- Consistem em aproximar $f(x)$ por um polinômio linear no intervalo $[x_0, x_1]$.
- Se o intervalo for pequeno, essa aproximação é válida para a maioria das funções.
- Uma estimativa da raiz ξ é tomada como o valor onde a reta cruza o eixo das abscissas.

Métodos baseados em aproximação linear cont.

- Equação do polinômio de grau 1 que passa pelos pontos de coordenadas $[x_0, f(x_0)]$ e $[x_1, f(x_1)]$:

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1).$$

- Abscissa x_2 , para a qual $y = 0$, tomada como aproximação da raiz

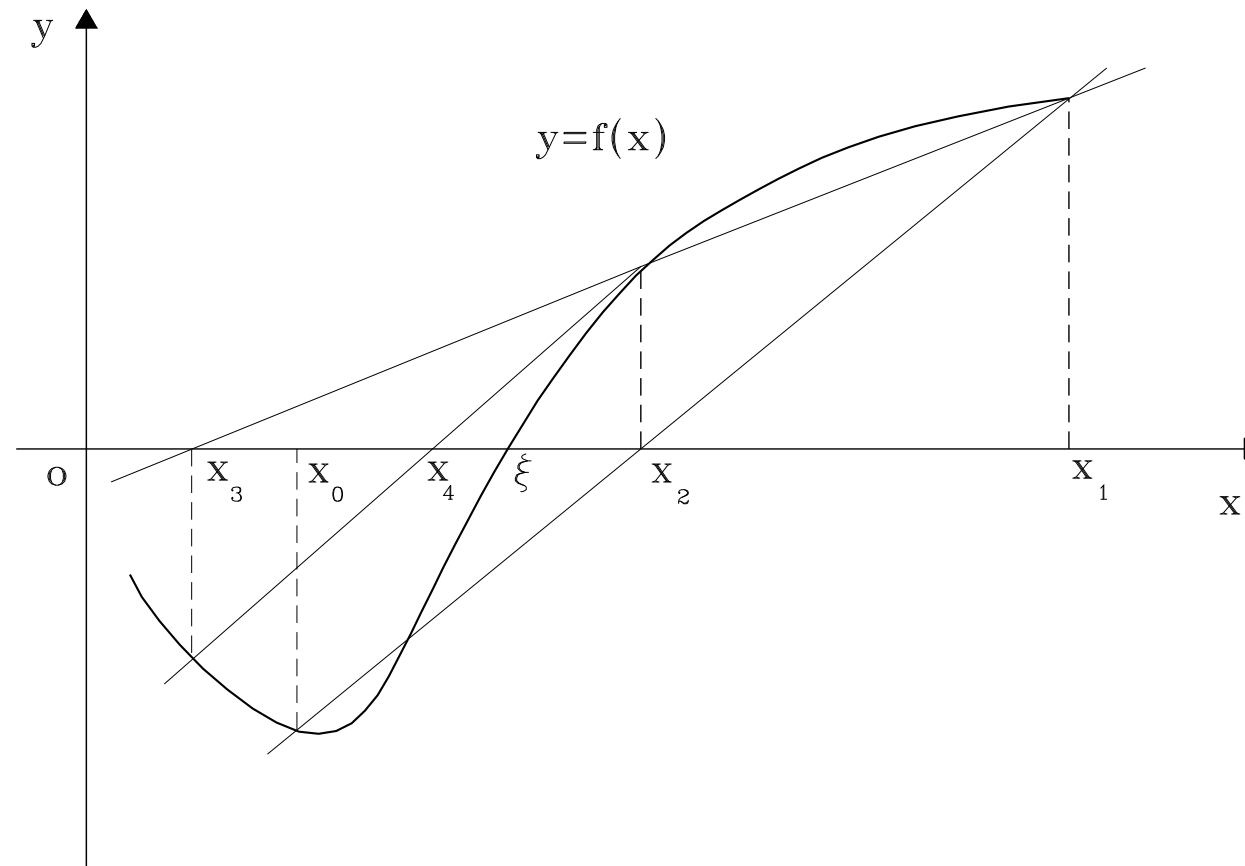
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0).$$

- Na próxima iteração, um dos pontos extremos do intervalo $[x_0, x_1]$ será substituído por x_2 .
- Família de métodos baseados em aproximação linear: secante, *regula falsi* (posição falsa) e pégaso, entre outros.

Método da secante

- Usa os pontos obtidos nas duas últimas iterações como pontos-base por onde passará o polinômio linear.

⇐



Algoritmo do método da secante

Algoritmo Secante

```

{ Objetivo: Calcular a raiz de uma equação pelo método da secante }
parâmetros de entrada  $a, b, Toler, IterMax$ 
  { limite inferior, limite superior, tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída  $Raiz, Iter, CondErro$ 
  { raiz, número de iterações gastas e condição de erro, sendo }
  {  $CondErro = 0$  se a raiz foi encontrada e  $CondErro = 1$  em caso contrário. }
 $Fa \leftarrow f(a); Fb \leftarrow f(b)$  { avaliar a função em  $a$  e  $b$  }
se  $abs(Fa) < abs(Fb)$  então
   $t \leftarrow a; a \leftarrow b; b \leftarrow t; t \leftarrow Fa; Fa \leftarrow Fb; Fb \leftarrow t$ 
fimse
 $Iter \leftarrow 0; x \leftarrow b; Fx \leftarrow Fb$ 
repita
   $DeltaX \leftarrow -Fx / (Fb - Fa) * (b - a)$ 
   $x \leftarrow x + DeltaX; Fx \leftarrow f(x)$  { avaliar a função em  $x$  }
  escreva  $Iter, a, Fa, b, Fb, x, Fx, DeltaX$ 
  se  $(abs(DeltaX) \leq Toler \text{ e } abs(Fx) \leq Toler)$  ou  $Iter \geq IterMax$  então
    interrompa
  fimse
   $a \leftarrow b; Fa \leftarrow Fb; b \leftarrow x; Fb \leftarrow Fx; Iter \leftarrow Iter + 1$ 
fimrepita
 $Raiz \leftarrow x$ 
{ teste de convergência }
se  $abs(DeltaX) \leq Toler$  e  $abs(Fx) \leq Toler$  então
   $CondErro \leftarrow 0$ 
senão
   $CondErro \leftarrow 1$ 
fimse
fimalgoritmo

```

||

Exemplo do método da secante

Exemplo 22 Determinar a raiz de $f(x) = 2x^3 - \cos(x + 1) - 3 = 0$ do Exemplo ?? pelo algoritmo do método da secante, com $\varepsilon \leq 0,01$, sabendo-se que $\xi \in [-1, 2]$.

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = -1
```

```
b = 2
```

```
Toler = 0.0100
```

```
IterMax = 100
```

```
% produzem os resultados
```

```
          Calculo de raiz de equacao pelo metodo da secante
```

iter	a	Fa	b	Fb	x	Fx	Delta_x
0	2.00000	13.98999	-1.00000	-6.00000	-0.09955	-3.623e+00	9.005e-01
1	-1.00000	-6.00000	-0.09955	-3.62323	1.27313	1.773e+00	1.373e+00
2	-0.09955	-3.62323	1.27313	1.77312	0.82210	-1.640e+00	-4.510e-01
3	1.27313	1.77312	0.82210	-1.64011	1.03883	-3.068e-01	2.167e-01
4	0.82210	-1.64011	1.03883	-0.30676	1.08869	7.576e-02	4.986e-02
5	1.03883	-0.30676	1.08869	0.07576	1.07881	-2.438e-03	-9.875e-03

```
Raiz      = 1.07881
```

```
Iter      = 5
```

```
CondErro  = 0
```

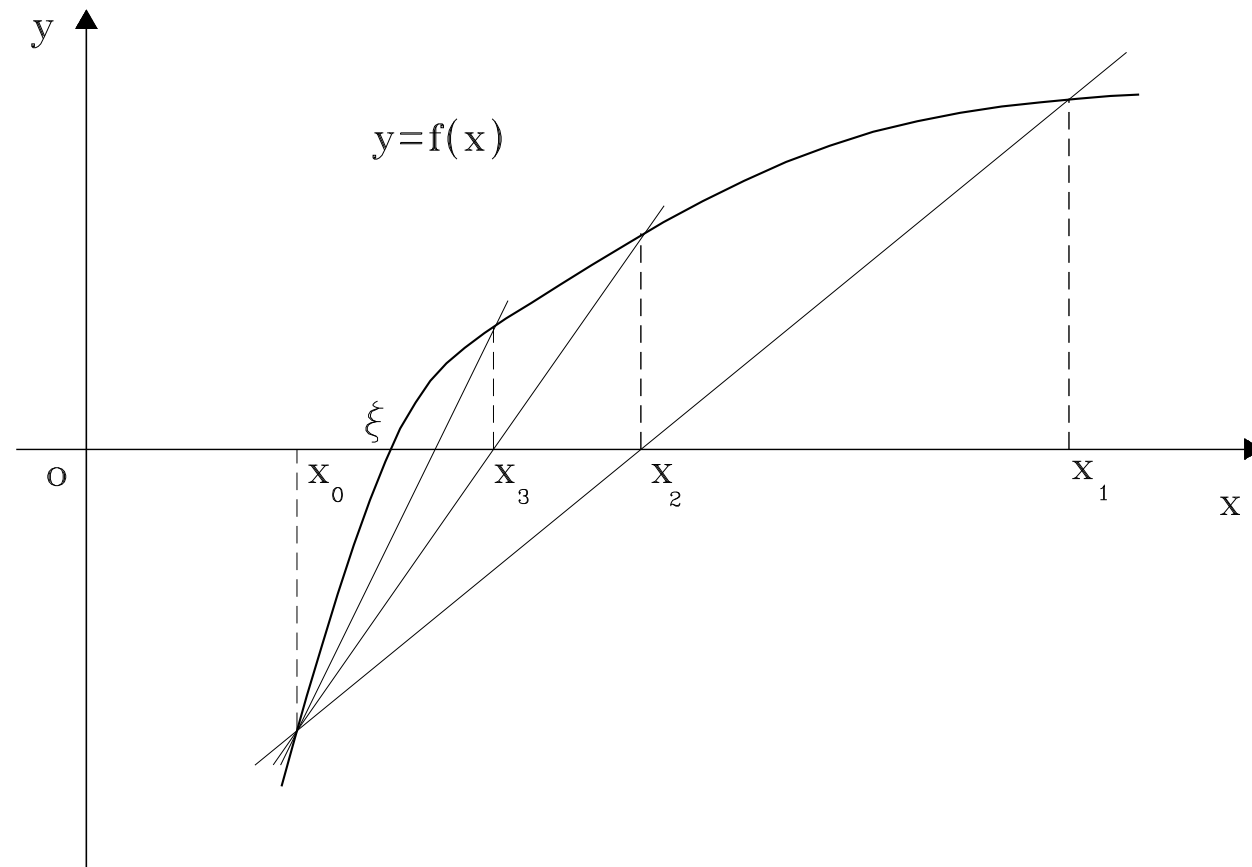
Observações sobre o método da secante

- O método da secante pode apresentar alguns problemas.
- Se a função não for, aproximadamente, linear no intervalo que contém a raiz, uma aproximação sucessiva pode sair deste intervalo.
- Ver figura.

Método da *regula falsi*

- Maneira de evitar problemas é garantir que a raiz esteja isolada no intervalo inicial e continue dentro dos novos intervalos gerados.
- Método da *regula falsi* retém o ponto no qual o valor da função tem sinal oposto ao valor da função no ponto mais recente.

≡



Algoritmo do método da *regula falsi*

Algoritmo RegulaFalsi

```

{ Objetivo: Calcular a raiz de uma equação pelo método da regula falsi }
parâmetros de entrada  $a, b, Toler, IterMax$ 
    { limite inferior, limite superior, tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída  $Raiz, Iter, CondErro$ 
    { raiz, número de iterações gastas e condição de erro, sendo }
    {  $CondErro = 0$  se a raiz foi encontrada e  $CondErro = 1$  em caso contrário. }
 $Fa \leftarrow f(a); Fb \leftarrow f(b);$  { avaliar a função em  $a$  e  $b$  }
se  $Fa * Fb > 0$  então
    escreva "função não muda de sinal nos extremos do intervalo dado"
    abandone
fimse
se  $Fa > 0$  então
     $t \leftarrow a; a \leftarrow b; b \leftarrow t; t \leftarrow Fa; Fa \leftarrow Fb; Fb \leftarrow t$ 
fimse
 $Iter \leftarrow 0; x \leftarrow b; Fx \leftarrow Fb$ 
repita
     $DeltaX \leftarrow -Fx / (Fb - Fa) * (b - a)$ 
     $x \leftarrow x + DeltaX; Fx \leftarrow f(x);$  { avaliar a função em  $x$  }
    escreva  $Iter, a, Fa, b, Fb, x, Fx, DeltaX$ 
    se  $(abs(DeltaX) \leq Toler \text{ e } abs(Fx) \leq Toler)$  ou  $Iter \geq IterMax$  então
        interrompa
    fimse
    se  $Fx < 0$  então
         $a \leftarrow x; Fa \leftarrow Fx$ 
    senão
         $b \leftarrow x; Fb \leftarrow Fx$ 
    fimse;  $Iter \leftarrow Iter + 1$ 
fimrepita
 $Raiz \leftarrow x$ 
    { teste de convergência }
se  $abs(DeltaX) \leq Toler$  e  $abs(Fx) \leq Toler$  então
     $CondErro \leftarrow 0$ 
senão
     $CondErro \leftarrow 1$ 
fimse
fimalgoritmo

```



Exemplo do método da *regula falsi*

Exemplo 23 Achar a raiz de $f(x) = 2x^3 - \cos(x + 1) - 3 = 0$ do Exemplo ?? usando o algoritmo do método da *regula falsi*, com $\varepsilon \leq 0,01$, sabendo-se que $\xi \in [-1, 2]$.

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = -1
```

```
b = 2
```

```
Toler = 0.0100
```

```
IterMax = 100
```

```
% produzem os resultados
```

```
    Calculo de raiz de equacao pelo metodo da regula falsi
```

iter	a	Fa	b	Fb	x	Fx	Delta_x
0	-1.00000	-6.00000	2.00000	13.98999	-0.09955	-3.623e+00	-2.100e+00
1	-0.09955	-3.62323	2.00000	13.98999	0.33235	-3.163e+00	4.319e-01
2	0.33235	-3.16277	2.00000	13.98999	0.63985	-2.407e+00	3.075e-01
3	0.63985	-2.40710	2.00000	13.98999	0.83952	-1.551e+00	1.997e-01
4	0.83952	-1.55114	2.00000	13.98999	0.95534	-8.810e-01	1.158e-01
5	0.95534	-0.88102	2.00000	13.98999	1.01723	-4.631e-01	6.189e-02
6	1.01723	-0.46306	2.00000	13.98999	1.04872	-2.333e-01	3.149e-02
7	1.04872	-0.23328	2.00000	13.98999	1.06432	-1.150e-01	1.560e-02
8	1.06432	-0.11498	2.00000	13.98999	1.07195	-5.607e-02	7.628e-03
9	1.07195	-0.05607	2.00000	13.98999	1.07565	-2.719e-02	3.704e-03
10	1.07565	-0.02719	2.00000	13.98999	1.07745	-1.315e-02	1.793e-03
11	1.07745	-0.01315	2.00000	13.98999	1.07831	-6.355e-03	8.666e-04

```
Raiz      = 1.07831
```

```
Iter      = 11
```

```
CondErro  = 0
```

Observações sobre o método da *regula falsi*

- No exemplo, a convergência para a raiz só se fez de um lado do intervalo.
- Isto torna o método mais lento que o método da secante.
- No entanto, mais robusto.
- Quanto mais longe o ponto fixo for da raiz, mais lenta será a convergência.
- Método da *regula falsi* tem ordem de convergência menor que o método da secante.
- Ponto mantido fixo não é geralmente um dos mais recentes.

Método pégaso

- Sequência $\{x_i\}$ é obtida pela fórmula de recorrência

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- Pontos $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ e $[x_k, f(x_k)]$ são escolhidos de modo que $f(x_{k-1})$ e $f(x_k)$ tenham sempre sinais opostos, garantindo assim que $\xi \in [x_{k-1}, x_k]$.
- Para evitar a retenção de um ponto, valor de $f(x_{k-1})$ é reduzido pelo fator

$$\frac{f(x_k)}{f(x_k) + f(x_{k+1})}.$$

- Reta pode ser traçada por um ponto não pertencente à curva de $f(x)$.

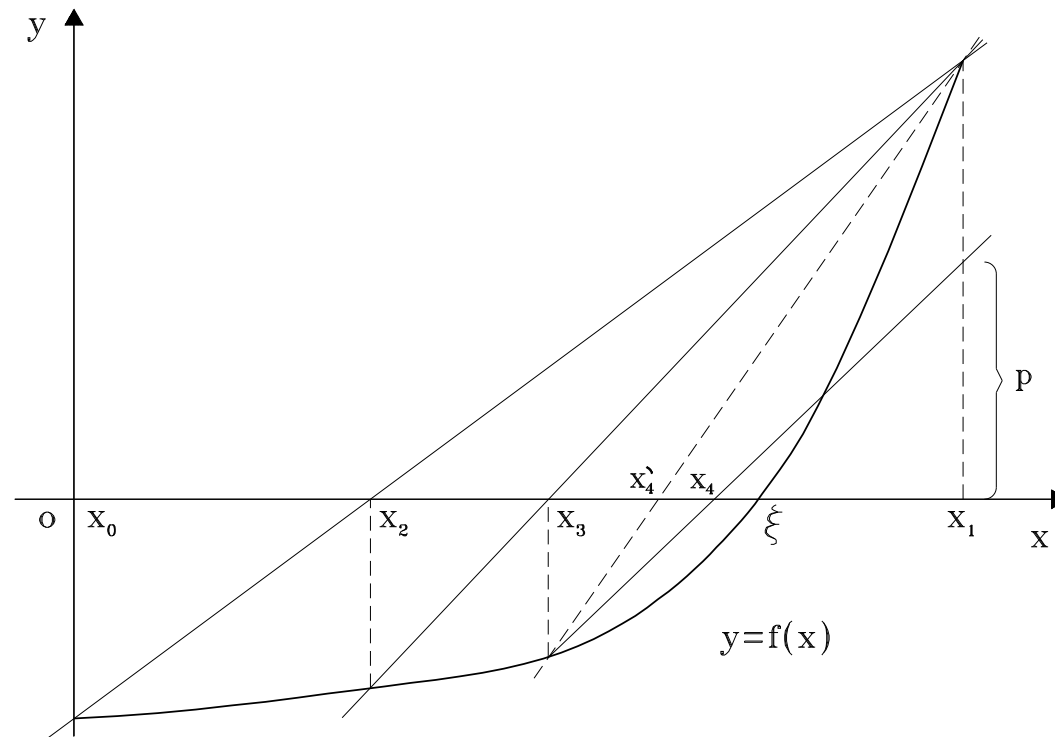
Interpretação gráfica do método pégaso

- Estimativa x_4 obtida usando os pontos $[x_3, f(x_3)]$ e $[x_1, p]$, sendo

$$p = f(x_1) \times \frac{f(x_2)}{f(x_2) + f(x_3)}.$$

- x_4 é uma melhor aproximação da raiz do que x'_4 (*regula falsi*).

⇐



Algoritmo do método pégaso

Algoritmo Pégaso

```

{ Objetivo: Calcular a raiz de uma equação pelo método pégaso }
parâmetros de entrada  $a, b, Toler, IterMax$ 
    { limite inferior, limite superior, tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída  $Raiz, Iter, CondErro$ 
    { raiz, número de iterações gastas e condição de erro, sendo }
    {  $CondErro = 0$  se a raiz foi encontrada e  $CondErro = 1$  em caso contrário. }
 $Fa \leftarrow f(a); Fb \leftarrow f(b);$  { avaliar a função em  $a$  e  $b$  }
 $x \leftarrow b; Fx \leftarrow Fb; Iter \leftarrow 0$ 
repita
     $DeltaX \leftarrow -Fx / (Fb - Fa) * (b - a)$ 
     $x \leftarrow x + DeltaX; Fx \leftarrow f(x);$  { avaliar a função em  $x$  }
    escreva  $Iter, a, Fa, b, Fb, x, Fx, DeltaX$ 
    se  $(abs(DeltaX) \leq Toler \text{ e } abs(Fx) \leq Toler)$  ou  $Iter \geq IterMax$  então
        interrompa
    fimse
    se  $Fx * Fb < 0$  então
         $a \leftarrow b; Fa \leftarrow Fb$ 
    senão
         $Fa \leftarrow Fa * Fb / (Fb + Fx)$ 
    fimse
     $b \leftarrow x; Fb \leftarrow Fx$ 
     $Iter \leftarrow Iter + 1$ 
fimrepita
 $Raiz \leftarrow x$ 
    { teste de convergência }
    se  $abs(DeltaX) \leq Toler \text{ e } abs(Fx) \leq Toler$  então  $CondErro \leftarrow 0$ 
    senão  $CondErro \leftarrow 1$ , fimse
fimalgoritmo

```



Exemplo do método pégaso

Exemplo 24 Calcular com $\varepsilon \leq 0,01$, a raiz de $f(x) = 2x^3 - \cos(x + 1) - 3 = 0$ do Exemplo ??, pelo algoritmo do método pégaso, sabendo-se que $\xi \in [-1, 2]$.

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = -1
```

```
b = 2
```

```
Toler = 0.0100
```

```
IterMax = 100
```

```
% produzem os resultados
```

```
          Calculo de raiz de equacao pelo metodo pegaso
```

iter	a	Fa	b	Fb	x	Fx	Delta_x
0	-1.00000	-6.00000	2.00000	13.98999	-0.09955	-3.623e+00	-2.100e+00
1	2.00000	13.98999	-0.09955	-3.62323	0.33235	-3.163e+00	4.319e-01
2	2.00000	7.46964	0.33235	-3.16277	0.82842	-1.608e+00	4.961e-01
3	2.00000	4.95180	0.82842	-1.60817	1.11563	2.954e-01	2.872e-01
4	0.82842	-1.60817	1.11563	0.29537	1.07106	-6.294e-02	-4.457e-02
5	1.11563	0.29537	1.07106	-0.06294	1.07889	-1.807e-03	7.828e-03

```
Raiz      = 1.07889
```

```
Iter      = 5
```

```
CondErro  = 0
```

Exemplo do método pégaso

Exemplo 25 Achar o ponto de máximo μ do polinômio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$, pelo método pégaso, com $\varepsilon \leq 10^{-5}$, sabendo-se que $\mu \in [-1, 1]$, de acordo com a figura.

- Condição de máximo de $f(x)$: derivada primeira se anule e derivada segunda seja negativa.
- Problema equivalente a calcular uma raiz de $P'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 26x - 14 = 0$.

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = -1
```

```
b = 1
```

```
Toler = 1.0000e-05
```

```
IterMax = 100
```

```
% produzem os resultados
```

```
Calculo de raiz de equacao pelo metodo pegaso
```

iter	a	Fa	b	Fb	x	Fx	Delta_x
0	-1.00000	14.00000	1.00000	-30.00000	-0.36364	-3.944e+00	-1.364e+00
1	-1.00000	12.37317	-0.36364	-3.94440	-0.51746	5.064e-01	-1.538e-01
2	-0.36364	-3.94440	-0.51746	0.50640	-0.49996	-1.135e-03	1.750e-02
3	-0.51746	0.50640	-0.49996	-0.00114	-0.50000	4.764e-08	-3.914e-05
4	-0.49996	-0.00114	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.000e+00	1.643e-09

```
Raiz = -0.50000
```

```
Iter = 4
```

```
CondErro = 0
```

- $P''(x) = 12x^2 + 12x - 26$ e $P''(-0,5) = -29 < 0$: $\mu \approx x_4 = -0,5$ é um ponto de máximo.

Ordem de convergência

- Seja uma estimativa x_2 da raiz ξ obtida por uma reta passando pelos pontos $[x_0, f(x_0)]$ e $[x_1, f(x_1)]$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0) = \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}.$$

- Expandindo $f(x_k)$ em série de Taylor com relação à raiz ξ e considerando o erro da k -ésima iteração dado por (??),

$$\epsilon_2 + \xi = \frac{(\epsilon_1 + \xi) \left(\epsilon_0 f'(\xi) + \epsilon_0^2 \frac{f''(\xi)}{2} + \dots \right) - (\epsilon_0 + \xi) \left(\epsilon_1 f'(\xi) + \epsilon_1^2 \frac{f''(\xi)}{2} + \dots \right)}{(\epsilon_0 - \epsilon_1) f'(\xi) + (\epsilon_0^2 - \epsilon_1^2) \frac{f''(\xi)}{2} + \dots}.$$

- Simplificando

$$\epsilon_2 = \frac{\frac{f''(\xi)}{2} \epsilon_0 \epsilon_1 (\epsilon_0 - \epsilon_1) + \dots}{f'(\xi) (\epsilon_0 - \epsilon_1) + \frac{f''(\xi)}{2} (\epsilon_0 - \epsilon_1) (\epsilon_0 + \epsilon_1) + \dots}.$$

Ordem de convergência do método da *regula falsi*

- Dividindo por $f'(\xi)(\epsilon_0 - \epsilon_1)$

$$\begin{aligned}\epsilon_2 &= \frac{\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}\epsilon_0\epsilon_1 + \dots}{1 + \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}(\epsilon_0 + \epsilon_1) + \dots}, \\ \epsilon_2 &\approx \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}\epsilon_0\epsilon_1.\end{aligned}\tag{10}$$

- No método da *regula falsi* a raiz deve ficar sempre isolada em um intervalo.
- x_0 será geralmente fixo durante várias iterações.
- O erro ϵ_0 também será fixo resultando que o erro da k -ésima iteração será

$$\epsilon_{k+1} = K_r \epsilon_k.$$

- Por (??), o método da *regula falsi* apresenta convergência de primeira ordem.

Ordem de convergência do método da secante

- Os valores de x_k e x_{k-1} são sempre atualizados.
- Generalizando (??)

$$\epsilon_{k+1} = C\epsilon_{k-1}\epsilon_k.$$

- Por (??)

$$|\epsilon_{k+1}| = K|\epsilon_k|^\gamma.$$

- Usando esta equação na equação anterior,

$$K|\epsilon_k|^\gamma = |C||\epsilon_k| \left(\frac{|\epsilon_k|}{K} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

- Rearranjando,

$$K^{1+\frac{1}{\gamma}}|\epsilon_k|^\gamma = |C||\epsilon_k|^{1+\frac{1}{\gamma}}.$$

- A ordem de convergência γ deve ser positiva e pela equação acima

$$\gamma = 1 + \frac{1}{\gamma} \longrightarrow \gamma^2 - \gamma - 1 = 0 \leadsto \gamma = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803.$$

Ordem de convergência dos métodos da secante e pégaso

- O método da secante tem ordem de convergência igual à relação áurea.
- Além disso,

$$K^{1+\frac{1}{\gamma}} = |C|.$$

- Como $1 + \frac{1}{\gamma} = \gamma$,

$$K^{\gamma} = |C| \longrightarrow K = |C|^{\frac{1}{\gamma}} = |C|^{\gamma-1}.$$

- Por (??) e (??), o método da secante apresenta

$$|\epsilon_{k+1}| \approx \left| \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} \right|^{\gamma-1} |\epsilon_k|^{\gamma}.$$

- Segundo Dowell e Jarratt, o método pégaso tem ordem de convergência 1,642.
- Resumindo: $\gamma_{regula\ falsi} = 1$, $\gamma_{secante} = 1,618$ e $\gamma_{pégaso} = 1,642$.

Métodos baseados em aproximação quadrática

- Métodos para cálculo de raízes baseados na aproximação de $f(x)$ por polinômio de grau 1.
- Estimativa da raiz é o ponto onde a reta intercepta o eixo das abscissas.
- Estimativa da raiz de $f(x) = 0$ pode ser ainda melhor se for utilizado um polinômio de grau 2.
- Métodos: Muller e de van Wijngaarden-Dekker-Brent.

Método de Muller

- Consiste em aproximar $f(x)$, na vizinhança da raiz $\xi \in [x_0, x_2]$, por um polinômio quadrático.
- Polinômio construído de modo a passar pelos três pontos:

$$[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)] \text{ e } [x_2, f(x_2)].$$

- Zero do polinômio usado como uma estimativa da raiz ξ de $f(x) = 0$.
- Processo é repetido usando sempre os três pontos mais próximos da raiz.
- Polinômio de segundo grau que passa pelos três pontos

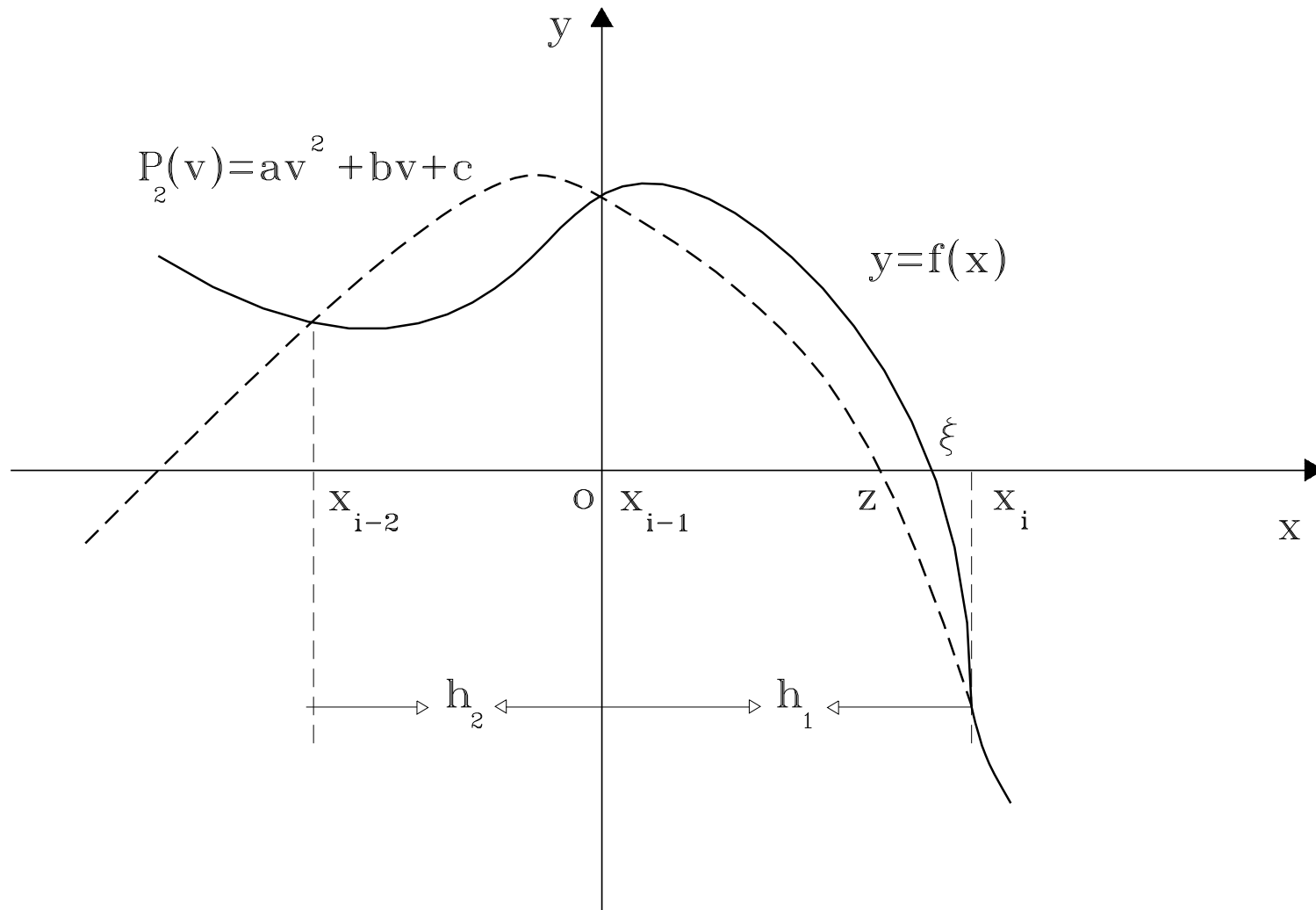
$$[x_{i-2}, f(x_{i-2})], [x_{i-1}, f(x_{i-1})] \text{ e } [x_i, f(x_i)],$$

- na forma

$$P_2(v) = av^2 + bv + c \tag{11}$$

- onde $v = x - x_{i-1}$ pode ser construído de acordo com a figura.

Interpretação gráfica do método de Muller



Método de Muller cont.

- Para cada um dos três pontos,

$$\begin{aligned}P_2(x_{i-2}) &= f(x_{i-2}) \rightarrow a(x_{i-2} - x_{i-1})^2 + b(x_{i-2} - x_{i-1}) + c = f(x_{i-2}), \\P_2(x_{i-1}) &= f(x_{i-1}) \rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = f(x_{i-1}) \rightarrow c = f(x_{i-1}) \quad \text{e} \quad (12) \\P_2(x_i) &= f(x_i) \rightarrow a(x_i - x_{i-1})^2 + b(x_i - x_{i-1}) + c = f(x_i).\end{aligned}$$

- Definindo

$$\begin{aligned}h_1 &= x_i - x_{i-1} \quad \text{e} \\h_2 &= x_{i-1} - x_{i-2}.\end{aligned}$$

- Por (??), é obtido o sistema linear

$$h_2^2 a - h_2 b = f(x_{i-2}) - f(x_{i-1}),$$

$$h_1^2 a + h_1 b = f(x_i) - f(x_{i-1}).$$

Método de Muller cont.

- Solução do sistema linear

$$a = \frac{1}{h_1(h_1 + h_2)}(f(x_i) - (r + 1)f(x_{i-1}) + rf(x_{i-2})) \quad (13)$$

- sendo $r = h_1/h_2$ e

$$b = \frac{1}{h_1}(f(x_i) - f(x_{i-1})) - ah_1, \quad (14)$$

- onde a é dado por (??).
- Os dois zeros do polinômio de grau 2 em v (??) são

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Raiz mais próxima de x_{i-1} : sinal na expressão escolhido de modo a tornar o numerador o menor possível.

Método de Muller cont.

- Em vista da transformação $v = x - x_{i-1}$, a próxima estimativa da raiz ξ é

$$x_{i+1} = x_{i-1} + \frac{-b + \text{sinal}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

- onde a , b e c são dados por $(??)$, $(??)$ e $(??)$.
- Na próxima iteração, devem ser utilizados os três pontos mais próximos de ξ .

Algoritmo do método de Muller

Algoritmo Muller

```

{ Objetivo: Calcular a raiz de uma equação pelo método de Muller }
parâmetros de entrada a, c, Toler, IterMax
    { limite inferior, limite superior, tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída Raiz, Iter, CondErro
    { raiz, número de iterações gastas e condição de erro, sendo }
    { CondErro = 0 se a raiz foi encontrada e CondErro = 1 em caso contrário. }
    { avaliar a função em a, c e b }
Fa ← f(a); Fc ← f(c); b ← (a + c)/2; Fb ← f(b)
x ← b; Fx ← Fb; DeltaX ← c - a; Iter ← 0
repita
    h1 ← c - b; h2 ← b - a; r ← h1/h2; t ← x
    A ← (Fc - (r + 1) * Fb + r * Fa) / (h1 * (h1 + h2))
    B ← (Fc - Fb) / h1 - A * h1
    C = Fb; z ← (-B + sinal(B) * raiz2(B2 - 4 * A * C)) / (2 * A)
    x ← b + z; DeltaX ← x - t; Fx ← f(x); { avaliar a função em x }
    escreva Iter, a, b, c, x, Fx, DeltaX
    se (abs(DeltaX) ≤ Toler e abs(Fx) ≤ Toler) ou Iter ≥ IterMax então
        interrompa
    fimse
    se x > b então
        a ← b; Fa ← Fb
    senão
        c ← b; Fc ← Fb
    fimse
    b ← x; Fb ← Fx; Iter ← Iter + 1
fimrepita
Raiz ← x
{ teste de convergência }
se abs(DeltaX) ≤ Toler e abs(Fx) ≤ Toler então
    CondErro ← 0
senão
    CondErro ← 1
fimse
fimalgoritmo

```

⇐

Exemplo do método de Muller

Exemplo 26 Calcular com $\varepsilon \leq 0,01$, a raiz de $f(x) = 2x^3 - \cos(x + 1) - 3 = 0$ do Exemplo ??, pelo método de Muller apresentado no algoritmo, sabendo-se que $\xi \in [-1, 2]$.

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = -1
```

```
b = 2
```

```
Toler = 0.0100
```

```
IterMax = 100
```

```
% produzem os resultados
```

```
          Calculo de raiz de equacao pelo metodo de Muller
```

iter	a	b	c	x	Fx	Delta_x
0	-1.00000	0.50000	2.00000	0.86331	-1.42476e+00	3.63315e-01
1	0.50000	0.86331	2.00000	1.05488	-1.86933e-01	1.91564e-01
2	0.86331	1.05488	2.00000	1.07803	-8.58214e-03	2.31508e-02
3	1.05488	1.07803	2.00000	1.07912	-4.55606e-05	1.08694e-03

```
Raiz      = 1.07912
```

```
Iter      = 3
```

```
CondErro  = 0
```

Exemplo do método de Muller

Exemplo 27 Achar a raiz de $f(x) = 0,05x^3 - 0,4x^2 + 3 \sin(x)x = 0$ do Exemplo ??, com $\varepsilon \leq 10^{-10}$, que se encontra no intervalo $[10, 12]$, usando o método de Muller.

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = 10
```

```
b = 12
```

```
Toler = 1.0000e-10
```

```
IterMax = 100
```

```
% produzem os resultados
```

```
    Calculo de raiz de equacao pelo metodo de Muller
```

iter	a	b	c	x	Fx	Delta_x
0	10.00000	11.00000	12.00000	11.74014	-1.25090e-01	7.40141e-01
1	11.00000	11.74014	12.00000	11.74398	1.54925e-03	3.83681e-03
2	11.74014	11.74398	12.00000	11.74393	-1.45315e-07	-4.68547e-05
3	11.74014	11.74393	11.74398	11.74393	1.06581e-14	4.39453e-09
4	11.74393	11.74393	11.74398	11.74393	1.06581e-14	0.00000e+00

```
Raiz      = 11.74393
```

```
Iter      = 4
```

```
CondErro  = 0
```


Ordem de convergência

- Hildebrand mostrou que a expressão (??) apresenta a forma

$$|\epsilon_{k+1}| \approx \left| \frac{f'''(\xi)}{6f'(\xi)} \right|^{\frac{\gamma-1}{2}} |\epsilon_k|^\gamma$$

- onde γ é a raiz positiva da equação

$$\gamma = 1 + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \longrightarrow \gamma^3 - \gamma^2 - \gamma - 1 = 0.$$

- Método de Muller tem ordem de convergência $\gamma \approx 1,8393$.

Método de van Wijngaarden-Dekker-Brent

- Resultado da combinação da interpolação inversa quadrática e da bisseção.
- Garante que a raiz continue sempre isolada.
- Interpolação quadrática: $P_2(x) \approx f(x) = y$ determinado a partir de três pontos:

$$[x_{i-2}, f(x_{i-2})], [x_{i-1}, f(x_{i-1})] \text{ e } [x_i, f(x_i)].$$

- Valor aproximado de $f(t)$: avaliar $P_2(t)$.
- Interpolação inversa quadrática: polinômio interpolador de grau 2

$$\Pi_2(y) \approx f^{-1}(y) = x \quad (15)$$

- construído a partir dos três pontos:

$$[f(x_{i-2}), x_{i-2}], [f(x_{i-1}), x_{i-1}] \text{ e } [f(x_i), x_i].$$

- Valor aproximado de $f^{-1}(z)$: avaliar $\Pi_2(z)$.

Método de van Wijngaarden-Dekker-Brent cont.

- Polinômio $\Pi_2(y)$ obtido por interpolação de Lagrange

$$\begin{aligned}\Pi_2(y) = & x_{i-2} \frac{(y - f(x_{i-1}))(y - f(x_i))}{(f(x_{i-2}) - f(x_{i-1}))(f(x_{i-2}) - f(x_i))} \\ & + x_{i-1} \frac{(y - f(x_{i-2}))(y - f(x_i))}{(f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}))(f(x_{i-1}) - f(x_i))} \\ & + x_i \frac{(y - f(x_{i-2}))(y - f(x_{i-1}))}{(f(x_i) - f(x_{i-2}))(f(x_i) - f(x_{i-1}))}.\end{aligned}$$

- Como $y = f(x) \longrightarrow x = f^{-1}(y)$.
- Aproximação da raiz ξ de $f(x) = 0$ é o ponto de abscissa correspondente à $f^{-1}(0)$.
- Por (??), esta aproximação é dada por $x = \Pi_2(0)$.

Algoritmo do método de van Wijngaarden-Dekker-Brent

Algoritmo van Wijngaarden-Dekker-Brent
 { **Objetivo:** Calcular a raiz pelo método de van Wijngaarden-Dekker-Brent }
parâmetros de entrada $a, b, Toler, IterMax$
 { limite inferior, limite superior, tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída $Raiz, Iter, CondErro$
 { raiz, número de iterações gastas e condição de erro, sendo }
 { $CondErro = 0$ se a raiz foi encontrada e $CondErro = 1$ em caso contrário. }
 $Fa \leftarrow f(a); Fb \leftarrow f(b);$ { avaliar a função em a e b }
se $Fa * Fb > 0$ **então**
 escreva “a função não muda de sinal nos extremos do intervalo dado”
 abandone
fimse
 $c \leftarrow b; Fc \leftarrow Fb; Iter \leftarrow 0$
repita
 { altera a, b e c para que b seja a melhor estimativa da raiz }
 se $Fb * Fc > 0$ **então** $c \leftarrow a, Fc \leftarrow Fa, d \leftarrow b - a, e \leftarrow d,$ **fimse**
 se $abs(Fc) < abs(Fb)$ **então**
 $a \leftarrow b; b \leftarrow c; c \leftarrow a; Fa \leftarrow Fb; Fb \leftarrow Fc; Fc \leftarrow Fa$
 fimse
 $Tol \leftarrow 2 * Toler * \max(abs(b), 1); z \leftarrow (c - b)/2$
 escreva $Iter, a, c, b, Fb, z$
 { teste de convergência }
 se $abs(z) \leq Tol$ **ou** $Fb = 0$ **ou** $Iter \geq IterMax$ **então interrompa, fimse**
 { escolha entre interpolação e bisseção }
 se $abs(e) \geq Tol$ **e** $abs(Fa) > abs(Fb)$ **então**
 $s \leftarrow Fb/Fa$
 se $a = c$ **então** { interpolação linear }
 $p \leftarrow 2 * z * s; q \leftarrow 1 - s$
 senão { interpolação inversa quadrática }
 $q \leftarrow Fa/Fc; r \leftarrow Fb/Fc; p \leftarrow s * (2 * z * q * (q - r) - (b - a) * (r - 1))$
 $q \leftarrow (q - 1) * (r - 1) * (s - 1)$
 fimse
 se $p > 0$ **então** $q \leftarrow -q,$ **senão** $p \leftarrow -p,$ **fimse**
 se $2 * p < \min(3 * z * q - abs(Tol * q), abs(e * q))$ **então** { aceita interpolação }
 $e \leftarrow d; d \leftarrow p/q$
 senão { usa bisseção devido à falha na interpolação }
 $d \leftarrow z; e \leftarrow z$
 fimse
 senão { bisseção }
 $d \leftarrow z; e \leftarrow z$
 fimse
 $a \leftarrow b; Fa \leftarrow Fb$
 se $abs(d) > Tol$ **então** $b \leftarrow b + d,$ **senão** $b \leftarrow b + sinal(z) * Tol,$ **fimse**
 $Iter \leftarrow Iter + 1; Fb \leftarrow f(b)$ { avaliar a função em b }
fimrepita
 $Raiz \leftarrow b$
se $abs(z) \leq Tol$ **ou** $Fb = 0$ **então** $CondErro \leftarrow 0,$ **senão** $CondErro \leftarrow 1,$ **fimse**
fim algoritmo



Exemplo do método de van Wijngaarden-Dekker-Brent

Exemplo 28 Calcular pelo método de van Wijngaarden-Dekker-Brent, descrito no algoritmo, a menor raiz de $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$ do Exemplo ??, com $\varepsilon \leq 10^{-10}$, sabendo-se que $\xi \in [-5, -3]$.

% Os parametros de entrada

a = -5

b = -3

Toler = 1.0000e-10

IterMax = 100

% produzem os resultados

 Calculo de raiz pelo metodo de van Wijngaarden-Dekker-Brent

iter	a	c	b	Fb	z
0	-5.00000	-5.00000	-3.00000	-2.40000e+01	-1.00000e+00
1	-3.00000	-5.00000	-3.28571	-2.47397e+01	-8.57143e-01
2	-3.28571	-3.28571	-4.14286	1.12453e+01	4.28571e-01
3	-4.14286	-4.14286	-3.87500	-7.85522e+00	-1.33929e-01
4	-3.87500	-4.14286	-3.98516	-1.02599e+00	-7.88495e-02
5	-3.98516	-3.98516	-4.00032	2.26777e-02	7.58292e-03
6	-4.00032	-4.00032	-4.00000	-2.86125e-04	-1.63983e-04
7	-4.00000	-4.00032	-4.00000	-7.80927e-08	-1.61940e-04
8	-4.00000	-4.00032	-4.00000	0.00000e+00	-1.61940e-04

Raiz = -4.00000

Iter = 8

CondErro = 0

Exemplo do método de van Wijngaarden-Dekker-Brent

Exemplo 29 Calcular a raiz de $f(x) = 0,05x^3 - 0,4x^2 + 3 \sin(x)x = 0$ do Exemplo ??, com $\varepsilon \leq 10^{-10}$, que se encontra no intervalo $[10, 12]$, utilizando o método de van Wijngaarden-Dekker-Brent.

```
% Os parametros de entrada
```

```
a = 10
```

```
b = 12
```

```
Toler = 1.0000e-10
```

```
IterMax = 100
```

```
% produzem os resultados
```

```
    Calculo de raiz pelo metodo de van Wijngaarden-Dekker-Brent
```

iter	a	c	b	Fb	z
0	12.00000	12.00000	10.00000	-6.32063e+00	1.00000e+00
1	10.79988	10.79988	12.00000	9.48337e+00	-6.00061e-01
2	12.00000	12.00000	11.54358	-5.94963e+00	2.28208e-01
3	11.54358	12.00000	11.71954	-7.96853e-01	1.40231e-01
4	11.71954	11.71954	11.74464	2.34449e-02	-1.25507e-02
5	11.74464	11.74464	11.74392	-2.86520e-04	3.58711e-04
6	11.74392	11.74464	11.74393	-1.00128e-07	3.54380e-04
7	11.74393	11.74393	11.74393	1.06581e-14	-1.51400e-09

```
Raiz      = 11.74393
```

```
Iter      = 7
```

```
CondErro  = 0
```

Observações

- Segundo Brent, a convergência pelo método é garantida desde que haja uma raiz no intervalo.
- Combinação da certeza de convergência do método da bisseção com a rapidez de um método de ordem de convergência maior como o da interpolação inversa quadrática.
- Esquema robusto e eficiente.
- Método de van Wijngaarden-Dekker-Brent é recomendado como o mais adequado para calcular zero de função quando a derivada não estiver disponível.

Métodos baseados em tangente

- Bisseção.
- Aproximação de $f(x)$ por polinômio linear e quadrático.
- Métodos baseados no cálculo da tangente à curva de $f(x)$: Newton e Schröder.

Método de Newton

- Seja ξ a única raiz de $f(x) = 0$ no intervalo $[a, b]$.
- Seja x_k uma aproximação desta raiz, sendo $x_0 \in [a, b]$.
- As derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$ devem existir, ser contínuas e com sinal constante neste intervalo.
- Geometricamente, o método de Newton é equivalente a aproximar um arco da curva por uma reta tangente traçada a partir de um ponto da curva.
- Conhecido também como método das tangentes.

Interpretação gráfica do método de Newton

- Tangentes

$$\tan(\alpha) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{e}$$

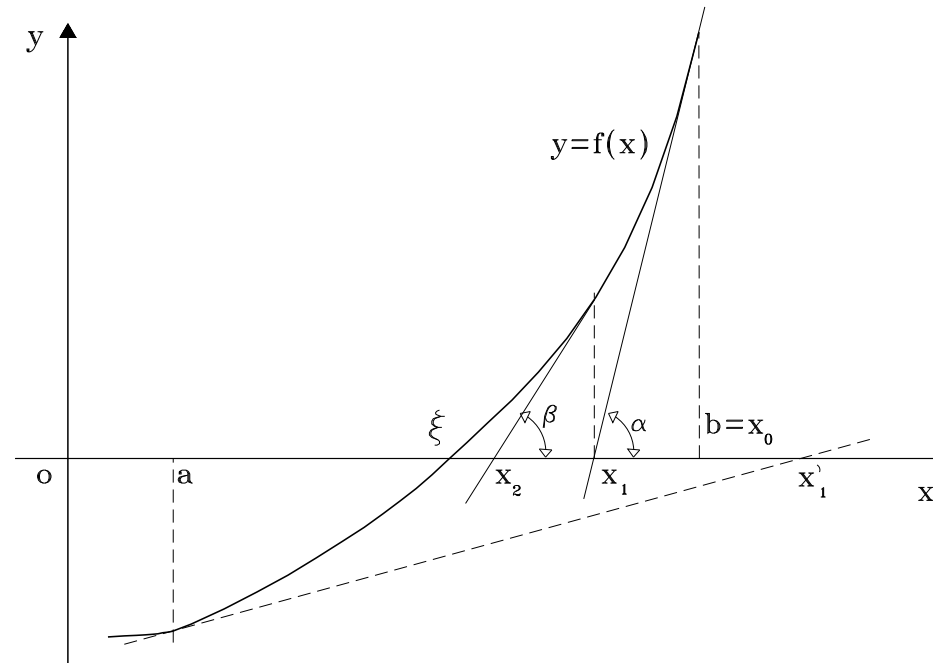
$$\tan(\beta) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} = f'(x_1) \longrightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

- Generalizando: fórmula de recorrência do método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(16)

||=



Dedução analítica do método de Newton

- Seja

$$\xi = x_k + \delta_k \quad (17)$$

- tal que δ_k tenha um valor pequeno.
- Fazendo uma expansão em série de Taylor

$$f(\xi) = f(x_k + \delta_k) \approx f(x_k) + f'(x_k)\delta_k = 0 \rightarrow \delta_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

- Substituindo essa correção em (??), obtém-se

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Condição de convergência

- Pela figura, seqüência produzida por (??) convergirá para a raiz ξ se o valor inicial for $x_0 = b$.
- Processo pode não convergir se $x_0 = a$, pois ter-se-á $x'_1 \notin [a, b]$.
- Escolha do valor inicial de modo a garantir a convergência para a raiz:

Teorema 6 *Se $f(a)f(b) < 0$, e $f'(x)$ e $f''(x)$ forem não nulas e preservarem o sinal em $[a, b]$, então partindo-se da aproximação inicial $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0)f''(x_0) > 0$ é possível construir, pelo método de Newton, uma seqüência $\{x_i\}$ que convirja para a raiz ξ de $f(x) = 0$.*

- Valor inicial x_0 deve ser um ponto no qual a função tenha o mesmo sinal de sua derivada segunda.
- Se $f''(x_0) > 0$: x_0 é tal que $f(x_0) > 0$.
- Se $f''(x_0) < 0$: $f(x_0) < 0$.

Algoritmo do método de Newton

Algoritmo Newton

```

{ Objetivo: Calcular a raiz de uma equação pelo método de Newton }
parâmetros de entrada  $x_0$ ,  $Toler$ ,  $IterMax$ 
    { valor inicial, tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída  $Raiz$ ,  $Iter$ ,  $CondErro$ 
    { raiz, número de iterações gastas e condição de erro, sendo }
    {  $CondErro = 0$  se a raiz foi encontrada e  $CondErro = 1$  em caso contrário. }
    { avaliar a função e sua derivada em  $x_0$  }
 $Fx \leftarrow f(x_0)$ ;  $DFx \leftarrow f'(x_0)$ ;  $x \leftarrow x_0$ ;  $Iter \leftarrow 0$ 
escreva  $Iter$ ,  $x$ ,  $DFx$ ,  $Fx$ 
repita
     $DeltaX \leftarrow -Fx/DFx$ ;  $x \leftarrow x + DeltaX$ 
     $Fx \leftarrow f(x)$ ;  $DFx \leftarrow f'(x)$ ; { avaliar a função e sua derivada em  $x$  }
     $Iter \leftarrow Iter + 1$ 
    escreva  $Iter$ ,  $x$ ,  $DFx$ ,  $Fx$ ,  $DeltaX$ 
    se ( $abs(DeltaX) \leq Toler$  e  $abs(Fx) \leq Toler$ ) ou  $DFx = 0$  ou  $Iter \geq IterMax$ 
        então interrompa
    fimse
fimrepita
 $Raiz \leftarrow x$ 
    { teste de convergência }
    se  $abs(DeltaX) \leq Toler$  e  $abs(Fx) \leq Toler$  então
         $CondErro \leftarrow 0$ 
    senão
         $CondErro \leftarrow 1$ 
    fimse
fimalgoritmo

```

||←

Exemplo do método de Newton

Exemplo 30 Determinar a maior raiz de $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$ com $\varepsilon \leq 10^{-5}$, utilizando o método de Newton.

- $\xi \in [2, 4]$, $f(2) < 0$ e $f(4) > 0$.
- Derivadas: $P'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 26x - 14$ e $P''(x) = 12x^2 + 12x - 26 > 0$, $2 \leq x \leq 4$.
- Valor inicial: $x_0 = 4$, pois $P(4)P''(4) > 0$.

Exemplo do método de Newton cont.

```
% Os parametros de entrada
```

```
x0 = 4
```

```
Toler = 1.0000e-05
```

```
IterMax = 100
```

```
% produzem os resultados
```

```
    Calculo de raiz de equacao pelo metodo de Newton
```

iter	x	DFx	Fx	Delta_x
0	4.00000	2.34000e+02	1.44000e+02	
1	3.38462	1.21825e+02	3.64693e+01	-6.15385e-01
2	3.08526	8.03682e+01	6.40563e+00	-2.99358e-01
3	3.00555	7.06567e+01	3.90611e-01	-7.97036e-02
4	3.00003	7.00030e+01	1.80793e-03	-5.52830e-03
5	3.00000	7.00000e+01	3.93537e-08	-2.58264e-05
6	3.00000	7.00000e+01	1.42109e-14	-5.62196e-10

```
Raiz      = 3.00000
```

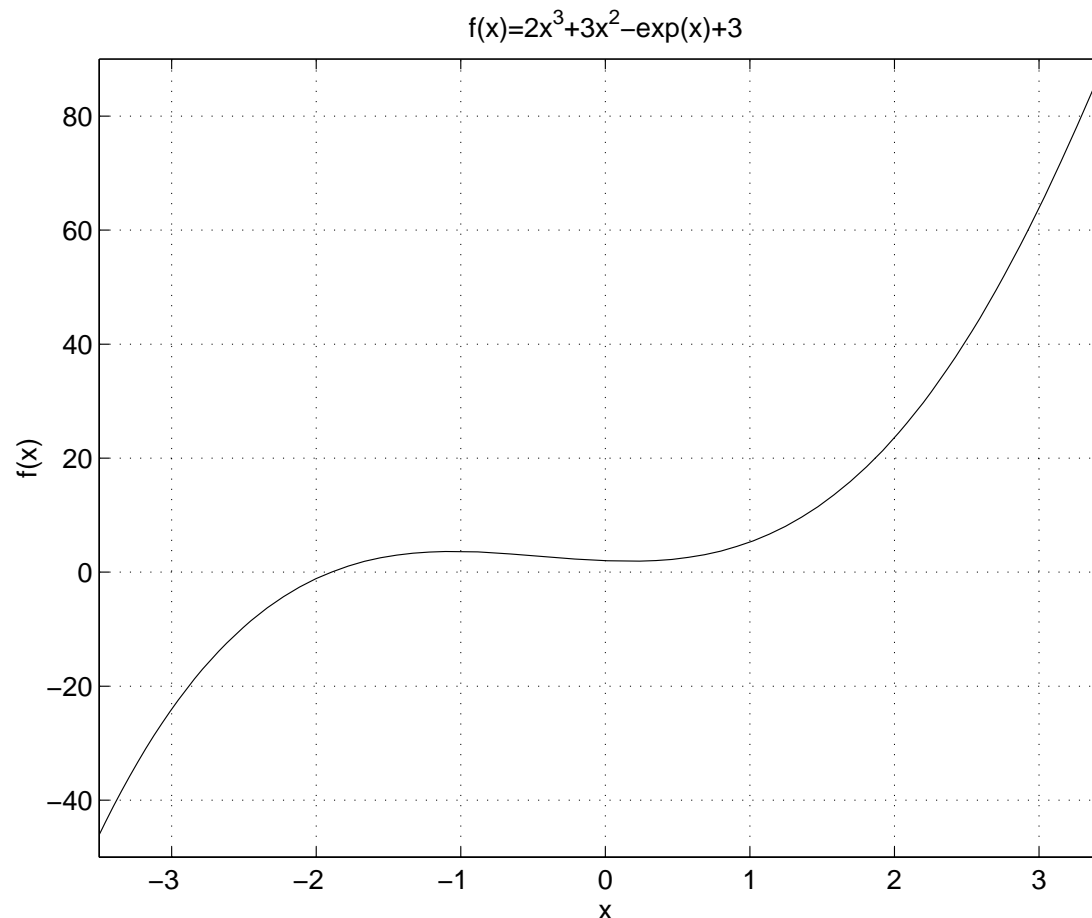
```
Iter      = 6
```

```
CondErro  = 0
```

Exemplo do método de Newton

Exemplo 31 Calcular o ponto de inflexão ι da função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - e^x + 3$ com $\varepsilon \leq 10^{-5}$ pelo método de Newton, usando o algoritmo.

- Condição de ponto de inflexão de $f(x)$: derivada segunda se anule.
- Deve-se achar uma raiz de $f''(x) = 0$: $g(x) = f''(x) = 12x - e^x + 6 = 0$.
- $\iota \in [-2, 1]$.



Exemplo do método de Newton cont.

- Derivadas: $g'(x) = 12 - e^x$ e $g''(x) = -e^x < 0 \forall x$.
- Função nos limites: $g(-2) \approx -1,1353 < 0$ e $g(1) \approx 5,2817 > 0$.
- Valor inicial: $x_0 = -2$ porque $g(-2)g''(-2) > 0$.

```
% Os parametros de entrada
```

```
x0 = -2
```

```
Toler = 1.0000e-05
```

```
IterMax = 100
```

```
% produzem os resultados
```

```
    Calculo de raiz de equacao pelo metodo de Newton
```

iter	x	DFx	Fx	Delta_x
0	-2.00000	1.18647e+001	-1.81353e+01	
1	-0.47148	1.13759e+001	-2.81878e-01	1.52852e+00
2	-0.44671	1.13603e+001	-1.93175e-04	2.47785e-02
3	-0.44669	1.13603e+001	-9.24905e-11	1.70045e-05
4	-0.44669	1.13603e+001	0.00000e+00	8.14158e-12

```
Raiz      = -0.44669
```

```
Iter      = 4
```

```
CondErro  = 0
```

- Ponto de inflexão: $\iota \approx x_4 = -0,44669$.

Ordem de convergência

- Considere (??)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

- Em vista do erro da k -ésima iteração

$$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (18)$$

- Expandindo $f(x_k)$ em série de Taylor em torno da raiz ξ

$$f(x_k) = f(\xi) + \epsilon_k f'(\xi) + \epsilon_k^2 \frac{f''(\xi)}{2} + \dots,$$

$$f'(x_k) = f'(\xi) + \epsilon_k f''(\xi) + \dots$$

Ordem de convergência cont.

- Substituindo as duas expressões acima em (??)

$$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k - \frac{\epsilon_k f'(\xi) + \epsilon_k^2 \frac{f''(\xi)}{2} + \dots}{f'(\xi) + \epsilon_k f''(\xi) + \dots}$$

$$\epsilon_{k+1} = \frac{\epsilon_k f'(\xi) + \epsilon_k^2 f''(\xi) + \dots - \epsilon_k f'(\xi) - \epsilon_k^2 \frac{f''(\xi)}{2} - \dots}{f'(\xi) + \epsilon_k f''(\xi) + \dots}$$

$$|\epsilon_{k+1}| \approx \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} |\epsilon_k|^2.$$

- Método de Newton tem convergência quadrática.
- Nas proximidades da raiz, o número de dígitos corretos da estimativa da raiz praticamente dobra a cada iteração.

Método de Schröder

- Método de Newton apresenta uma convergência apenas linear quando uma raiz tem multiplicidade $m > 1$.

- Pela fórmula

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- à medida que $f(x_k) \rightarrow 0$, o denominador $f'(x_k) \rightarrow 0$
- Modificação simples permite o cálculo de raiz de multiplicidade m , mantendo a convergência quadrática

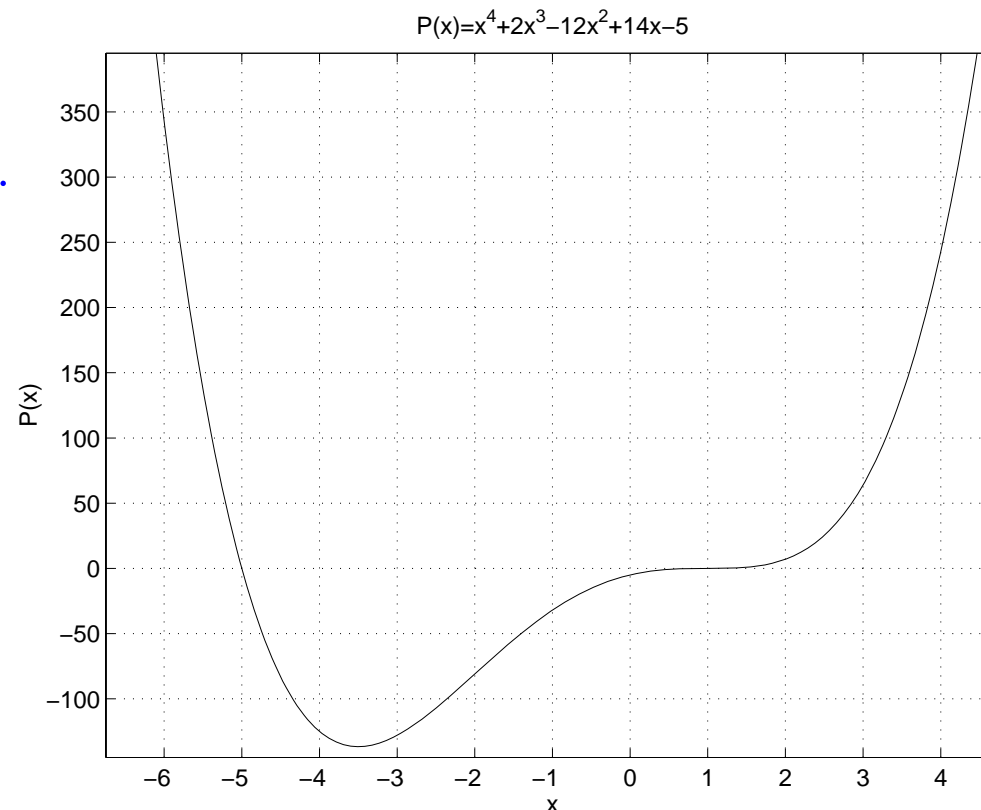
$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

- Algoritmo do método de Schröder é basicamente o de Newton da figura.
- Utiliza um parâmetro extra m para definir a multiplicidade.

Exemplo do método de Schröder

Exemplo 32 Calcular a raiz de $P(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5 = 0$ de multiplicidade $m = 3$, com tolerância $\varepsilon \leq 10^{-5}$, pelo método de Schröder usando o algoritmo adaptado.

- $\xi \in [0,5 \ 1,5]$.
- $P'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 14$ e $P''(x) = 12x^2 + 12x - 24 > 0 \ \forall x > 1$.
- $x_0 = 1,5$.
- $P(1,5)P''(1,5) > 0$.



Exemplo do método de Schröder cont.

```
% Os parametros de entrada
```

```
m = 3
```

```
x0 = 1.5
```

```
Toler = 1.0000e-05
```

```
IterMax = 100
```

```
% produzem os resultados
```

```
    Calculo de raiz de equacao pelo metodo de Schroder
```

iter	x	DFx	Fx	Delta_x
0	1.50000	5.00000e+00	8.12500e-01	
1	1.01250	2.82031e-03	1.17432e-05	-4.87500e-01
2	1.00001	1.34883e-09	4.44089e-15	-1.24913e-02
3	1.00000	2.68212e-11	0.00000e+00	-9.87718e-06

```
Raiz      = 1.00000
```

```
Iter      = 3
```

```
CondErro  = 0
```

- $\xi = x_3 = 1$.
- Método de Newton gasta 26 iterações.

Comparação dos métodos para cálculo de raízes

- Estudo comparativo do desempenho de métodos utilizando uma série de equações está longe de ser perfeito.
- Pode existir uma dependência do resultado na escolha dessas equações.
- Determinação da ordem de convergência é mais adequada.
- Não é baseada em nenhum empirismo.
- Interessante verificar o desempenho dos métodos.

Equações de teste

- Cinco equações e intervalos que isolam as raízes:

$$f_1(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0, \quad \xi \in [0, 3].$$

$$f_2(x) = x^5 - 2x^4 - 9x^3 + 22x^2 + 4x - 24 = 0, \quad \xi \in [0, 5], \quad \text{com } m = 3.$$

$$f_3(x) = 5x^3 + x^2 - e^{1-2x} + \cos(x) + 20 = 0, \quad \xi \in [-5, 5].$$

$$f_4(x) = \sin(x)x + 4 = 0, \quad \xi \in [1, 5].$$

$$f_5(x) = (x - 3)^5 \log_e(x) = 0, \quad \xi \in [2, 5], \quad \text{com } m = 5.$$

Observações sobre os testes

- Número máximo de iterações = 500.
- Tolerância $\varepsilon = 10^{-10}$.
- Critério de parada: $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ e $|f(x_k)| < \varepsilon$.
- Método de van Wijngaarden-Dekker-Brent usa critério ligeiramente diferente.
- Método de Newton: x_0 foi escolhido como o ponto médio do intervalo dado, sem considerar o Teorema ??.

$$f_1(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 10x - 15$$

Método	Raiz	Iter	Erro	t_{rel}
bisseção	1,49288	37	sim	1,00
secante	-1,30038	8		0,28
<i>regula falsi</i>	1,49288	77		2,06
pégaso	1,49288	10		0,35
Muller	1,49288	4		0,25
W-D-Brent	1,49288	9		0,63
Newton	1,49288	4		0,20

$$f_2(x) = x^5 - 2x^4 - 9x^3 + 22x^2 + 4x - 24$$

Método	Raiz	Iter	Erro	t_{rel}
bisseção	1,99999	35		1,00
secante	2,00000	47		1,36
<i>regula falsi</i>	1,82374	500	sim	13,42
pégaso	1,99999	60		1,76
Muller	2,00001	500	sim	17,85
W-D-Brent	2,00001	57		3,59
Newton	2,00001	37		1,55
Schröder	2,00000	4	sim	0,23

$$f_3(x) = 5x^3 + x^2 - e^{1-2x} + \cos(x) + 20$$

Método	Raiz	Iter	Erro	t_{rel}
bisseção	−0,92956	41	sim	1,00
secante	−0,92956	21		0,56
<i>regula falsi</i>	0,69661	500		12,33
pégaso	−0,92956	19		0,57
Muller	−0,92956	32		1,16
W-D-Brent	−0,92956	8		0,51
Newton	−0,92956	11		0,48

$$f_4(x) = \text{sen}(x)x + 4$$

Método	Raiz	Iter	Erro	t_{rel}
bisseção	4,32324	36		1,00
secante	4,32324	7		0,27
<i>regula falsi</i>	4,32324	9		0,32
pégaso	4,32324	7		0,28
Muller	4,32324	6		0,35
W-D-Brent	4,32324	7		0,57
Newton	4,32324	6		0,30

$$f_5(x) = (x - 3)^5 \log_e(x)$$

Método	Raiz	Iter	Erro	t_{rel}
bisseção	3,00000	34		1,00
secante	3,00000	137		3,90
<i>regula falsi</i>	2,67570	500	sim	13,89
pégaso	3,00000	187		5,47
Muller	3,01289	500	sim	18,82
W-D-Brent	3,00000	80		5,45
Newton	3,00000	95		4,45
Schröder	3,00000	4		0,26

Observações sobre os métodos para cálculo de raízes de equações

- Bisseção mostrou sua robustez, pois não falhou apesar de não ser o mais eficiente.
- Secante, embora seja rápida, encontrou uma raiz fora do intervalo dado.
- *Regula falsi* apresentou uma convergência muito lenta e falhou três vezes.
- Pégaso, além de ser robusto, foi competitivo com relação ao sofisticado van Wijngaarden-Dekker-Brent.
- Muller não foi robusto, embora eficiente, pois falhou nos casos onde a raiz possui multiplicidade.
- van Wijngaarden-Dekker-Brent foi robusto, mas também foi menos eficiente na presença de multiplicidade.
- Schröder é uma efetiva modificação do método de Newton para evitar problemas com raízes de multiplicidade.

Fim

Capítulo 6: Raízes de equações