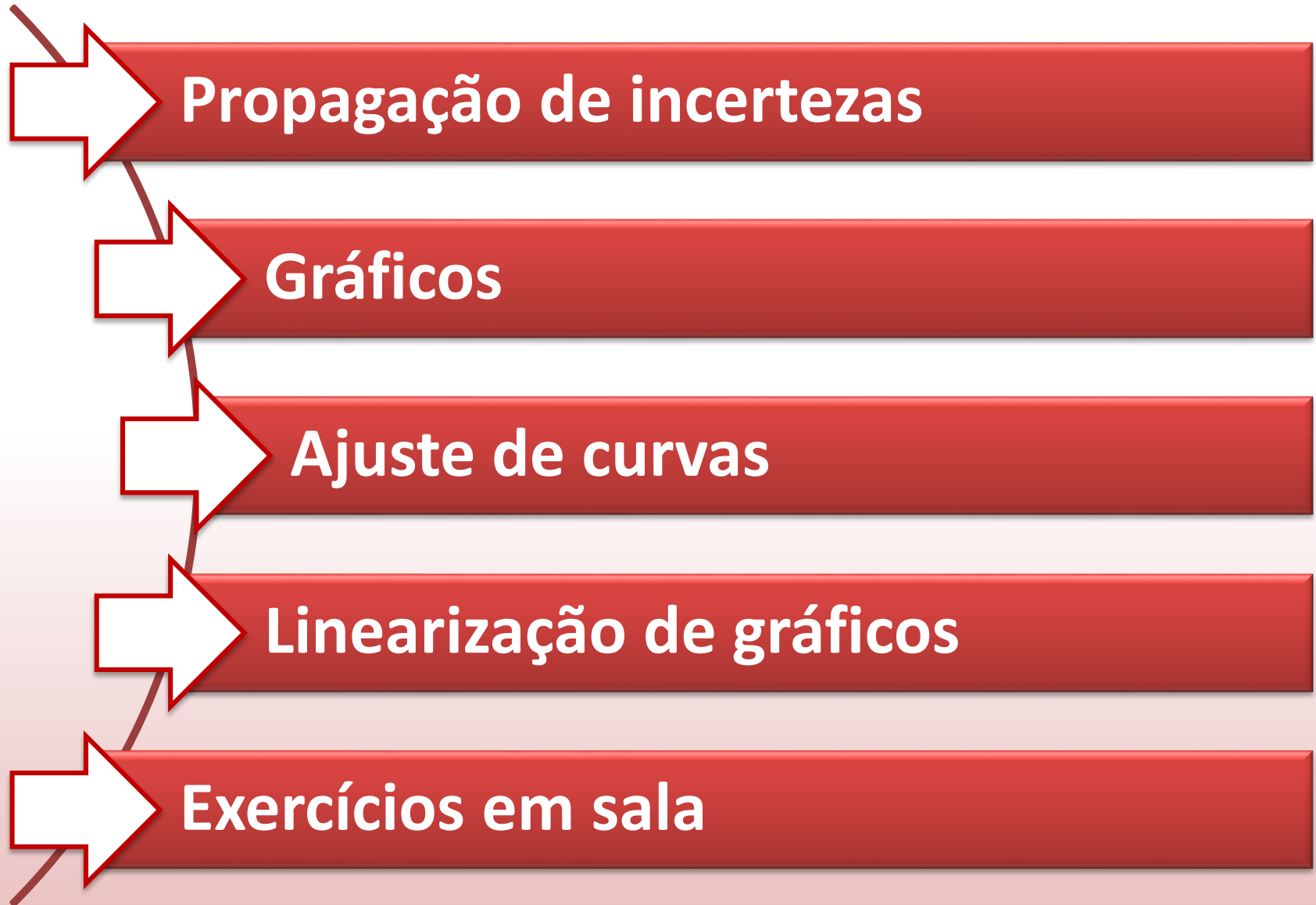


Física Experimental Básica: Mecânica

Aula 2

Propagação de incertezas e Gráficos

Conteúdo da aula:

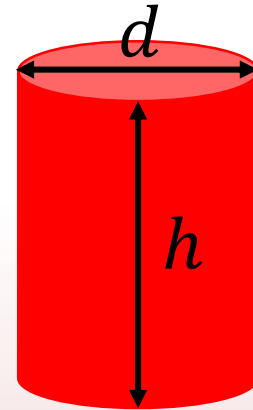


Propagação de incertezas

Propagação de incertezas

- Muitas vezes, teremos que determinar uma grandeza física de forma indireta. Isso será feito em duas etapas:
 1. Medimos uma ou mais grandezas relacionadas a ela.
 2. Calculamos a grandeza de interesse usando as medidas.

Exemplo: Para determinar o volume de um cilindro, medimos o seu diâmetro (d), sua altura (h) e, a seguir, calculamos $V = \pi(d/2)^2 h$.



- As incertezas das grandezas medidas produzirão uma incerteza no resultado da grandeza de interesse. Como a estimamos?
 1. Estimamos as incertezas das grandezas medidas.
 2. Determinamos como estas incertezas “se **propagam**”.

Propagação de incertezas

Regra geral para funções de uma variável

- Considere que uma grandeza Y é uma função f arbitrária de uma grandeza X :

$$Y = f(X).$$

- Suponha que a medição de X resulte em

$$x \pm \Delta x.$$

- Nesse caso, o valor y da grandeza Y será

$$y = f(x),$$

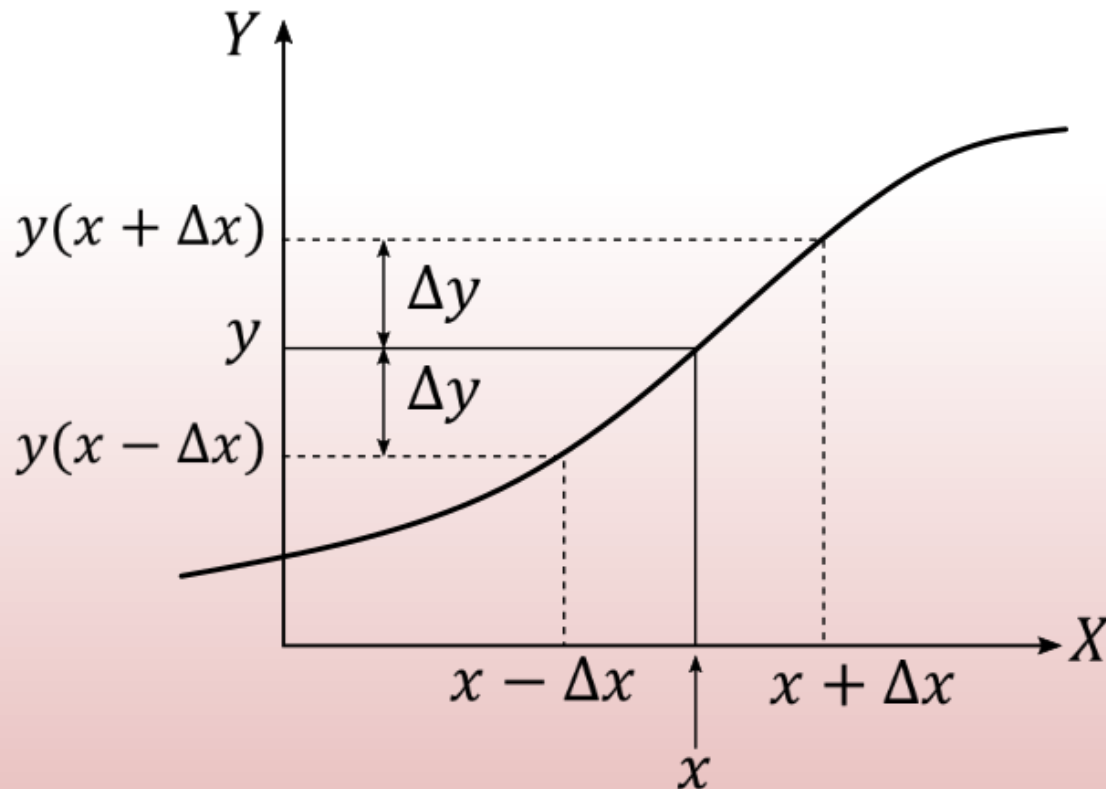
- A incerteza Δy é obtida pela seguinte regra:

$$\Delta y = \left| \frac{dy}{dx} \right| \Delta x = \sqrt{\left(\frac{dy}{dx} \Delta x \right)^2}.$$

Propagação de incertezas

Regra geral para funções de uma variável

- Como podemos entender essa regra? (argumentos não rigorosos).
- Do gráfico abaixo vemos que $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$.



- Considerando a incerteza Δx pequena, teremos (Cálculo I):

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \Delta x.$$

- Como dy/dx pode ser negativo, usamos o módulo:

$$\Delta y = \left| \frac{dy}{dx} \right| \Delta x$$

Propagação de incertezas

Regra geral

- Considere que uma grandeza Y é uma função f arbitrária de N outras grandezas X_1, X_2, \dots, X_N :

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N).$$

- Suponha que as medições de X_1, X_2, \dots, X_N resultem em

$$x_1 \pm \Delta x_1, \quad x_2 \pm \Delta x_2, \quad \dots, \quad x_N \pm \Delta x_N.$$

- Nesse caso, o valor y da grandeza Y será

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

- A incerteza Δy é obtida pela seguinte regra:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_N} \Delta x_N\right)^2}.$$

Propagação de incertezas

Regra geral*

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_N} \Delta x_N\right)^2}.$$

- Esta regra é uma generalização da regra anterior.
- As incertezas Δx_i das grandezas medidas diretamente são ponderadas por $\partial y / \partial x_i$, que avaliam o quanto o resultado da medição varia com a mudança em cada x_i .
- Cada termo $(\partial y / \partial x_i) \Delta x_i$ quantifica a incerteza **parcial** em y devido apenas à incerteza Δx_i da medida correspondente.

*Regra válida quando as grandezas x_i são independentes entre si.

Propagação de incertezas

- Para o caso **particular** em que

$$y = ax_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_N^{p_N},$$

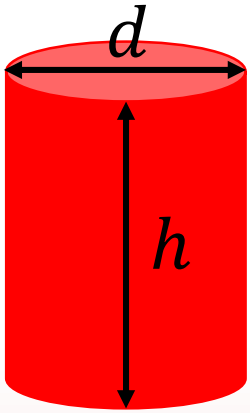
onde a é uma constante e os expoentes p_1, p_2, \dots, p_N são números conhecidos quaisquer, a incerteza Δy pode ser determinada por:

$$\Delta y = y \times \sqrt{\left(p_1 \frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(p_2 \frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2 + \cdots + \left(p_N \frac{\Delta x_N}{x_N}\right)^2}.$$

- Esta regra é deduzida da regra geral.
- Nesta equação, os termos $\Delta x_i/x_i$, ponderados pelos expoentes p_i , são as incertezas relativas.
- Em muitos experimentos do Laboratório de Mecânica poderemos calcular a incerteza dessa maneira.

Propagação de incertezas

Exemplo: As dimensões de um cilindro foram medidas com uma régua graduada em milímetros:



$$d = (21,35 \pm 0,05) \times 10^{-2} \text{ m};$$

$$h = (28,50 \pm 0,05) \times 10^{-2} \text{ m}.$$

Determine o volume deste cilindro e sua respectiva incerteza.

- Sabendo que $V = \pi h \left(\frac{d}{2}\right)^2$, teremos

$$V = 1,02031 \times 10^{-2} \text{ m}^3.$$

- Observação: o número de algarismos significativos desse resultado será determinado pelo valor da incerteza.

Propagação de incertezas

- Como $V = \pi h \left(\frac{d}{2}\right)^2$, a incerteza pode ser calculada por qualquer das duas equações vistas anteriormente:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial d} \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h} \Delta h\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi h d}{2} \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\pi d^2}{4} \Delta h\right)^2}$$

ou

$$\Delta V = V \times \sqrt{\left(2 \frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(1 \frac{\Delta h}{h}\right)^2}$$

Propagação de incertezas

- Em ambos casos obtemos:

$$\Delta V = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^3.$$

- Lembre-se que a incerteza deve ser fornecida com um (ou, no máximo, dois) algarismo(s) significativo(s).
- Com o valor de $V = 1,02031 \times 10^{-2} \text{ m}^3$, podemos expressar corretamente o resultado final como:

$$V = (1020 \pm 5) \times 10^{-5} \text{ m}^3.$$

→ Para uma introdução mais detalhada ao tópico “Análise de Incertezas”, consulte nosso material de apoio em

<https://www.fisica.ufmg.br/ciclo-basico/disciplinas/feb-mecanica/>

Gráficos

Gráficos

Fornecida uma tabela com dados de duas grandezas físicas que se relacionam, a construção de um gráfico nos auxilia a:

- Visualizar de forma direta e rápida a relação entre as grandezas.
- Interpretar o fenômeno físico.
- Obter informação quantitativa a partir da análise gráfica.

Exemplo: dados de tensão (V) e corrente (I) para aferição da resistência (R) elétrica de um elemento resistivo ôhmico.

Tensão ($\pm 0,1$ V)	Corrente ($\pm 0,001$ A)
1,0	0,052
2,0	0,098
3,0	0,151
4,0	0,195
5,0	0,244

Gráficos

Essas grandezas são relacionadas por

$$V = RI.$$

Vamos construir o gráfico $V \times I$, o que significa que os dados de V serão colocados na coluna Y (eixo y) e os dados de I na coluna X (eixo x) do programa gráfico.

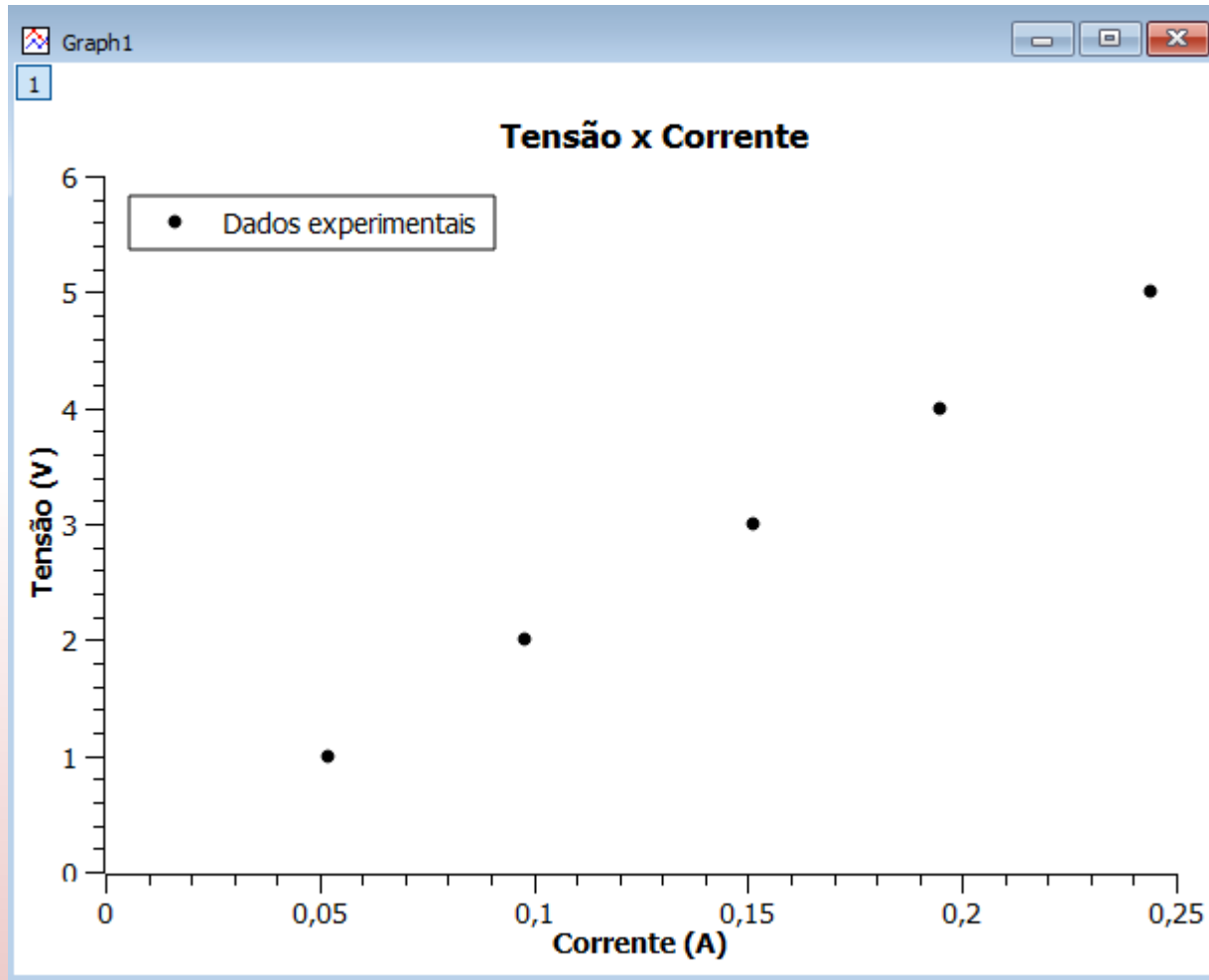
Tensão ($\pm 0,1$ V)	Corrente ($\pm 0,001$ A)
1,0	0,052
2,0	0,098
3,0	0,151
4,0	0,195
5,0	0,244

Table1		
	1[X]	2[Y]
1	0,052	1
2	0,098	2
3	0,151	3
4	0,195	4
5	0,244	5
6		
7		
8		
9		
10		

Atenção! Aqui estamos usando o SciDavis.

Gráficos

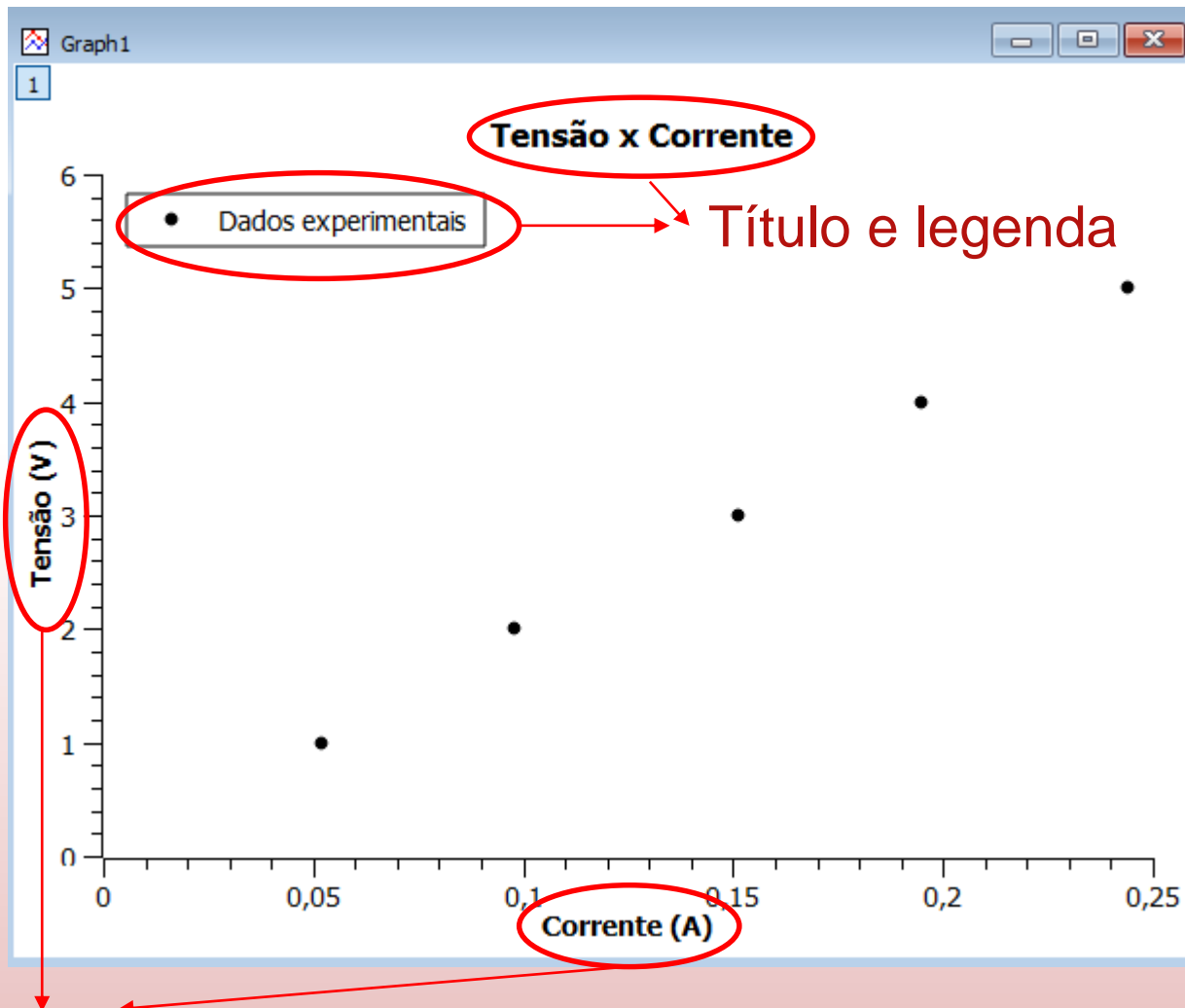
Com o gráfico podemos visualizar a relação entre tensão e corrente.



Para gráficos com poucos pontos usamos símbolos para identificá-los

Gráficos

As informações em destaque (principalmente as dos eixos x e y) são essenciais para se entender e interpretar um gráfico.



Eixos com as grandezas e suas unidades

Ajuste de curvas

Ajuste de curvas

- Ajustar uma curva a um conjunto de dados experimentais é determinar a função $y(x)$ que melhor representa a tendência geral desses dados.
- Através do ajuste obtemos informações quantitativas do fenômeno físico em estudo, determinando os **parâmetros da curva** $y(x)$ que mais se aproxima dos pontos experimentais.

Exemplos:

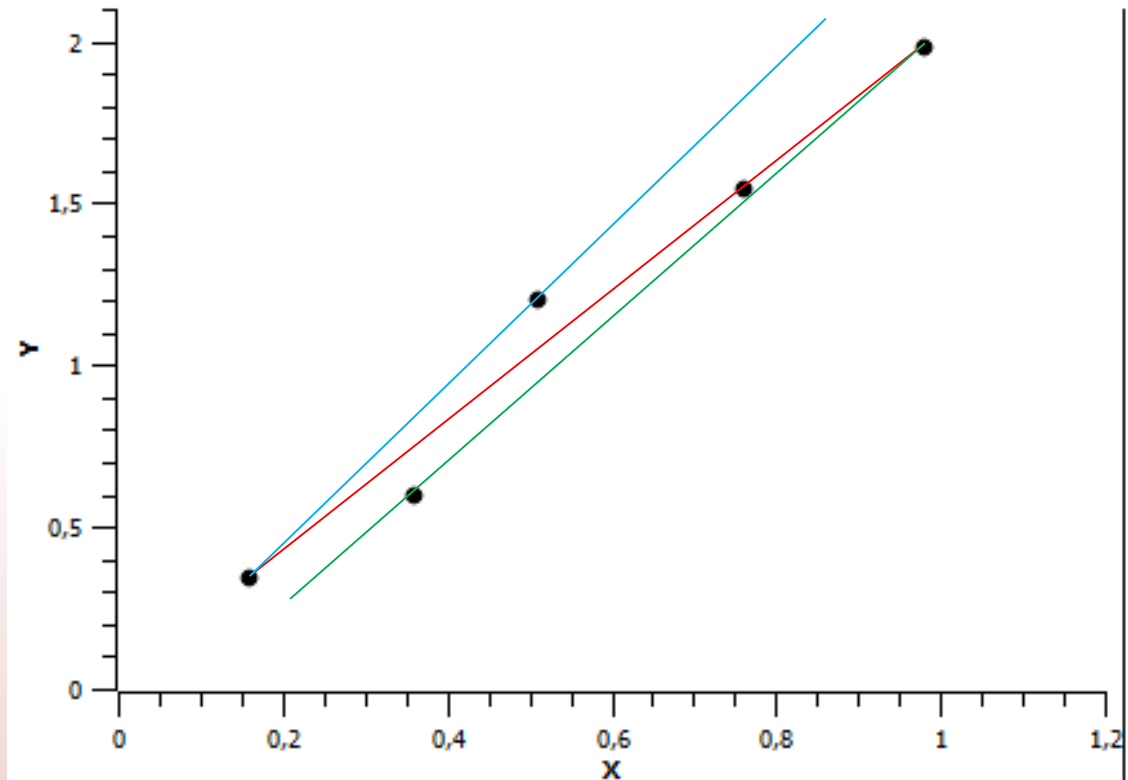
Lab. Mecânica

- Ajustes polinomiais:
 - Linear: $y = a_1x + a_0 \rightarrow$ parâmetros (a_1, a_0) ;
 - Quadrático: $y = a_2x^2 + a_1x + a_0 \rightarrow$ parâmetros (a_2, a_1, a_0) ;
 - Grau n : $y = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0 \rightarrow$ parâmetros (a_n, \dots, a_1, a_0) .
- Ajuste exponencial: $y = a_0e^{-a_1x} \rightarrow$ parâmetros (a_1, a_0)
- Etc.

Ajuste de curvas

Suponha que em um experimento foram medidos valores de duas grandezas físicas X e Y que se relacionam linearmente, i.e., $Y = CX$.

Y	X
0,34	0,16
0,6	0,36
1,2	0,51
1,54	0,76
1,98	0,98



- Há infinitas retas que representam o comportamento dos pontos.
- Como determinar a reta $y = Ax + B$ que melhor se ajusta a estes pontos?

Ajuste de curvas

Método dos mínimos quadrados

- Minimiza a discrepância entre os dados (x_i, y_i) e os pontos da curva obtida $(x_i, Ax_i + B)$, através da minimização da soma dos quadrados das distâncias entre estes pontos:

$$\delta = \sum_{i=1}^m (y_i - Ax_i - B)^2$$

- Para determinar os parâmetros A e B , fazemos

$$\frac{\partial \delta}{\partial A} = -2 \sum_{i=1}^m (y_i - Ax_i - B)x_i = 0,$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial B} = -2 \sum_{i=1}^m (y_i - Ax_i - B) = 0,$$

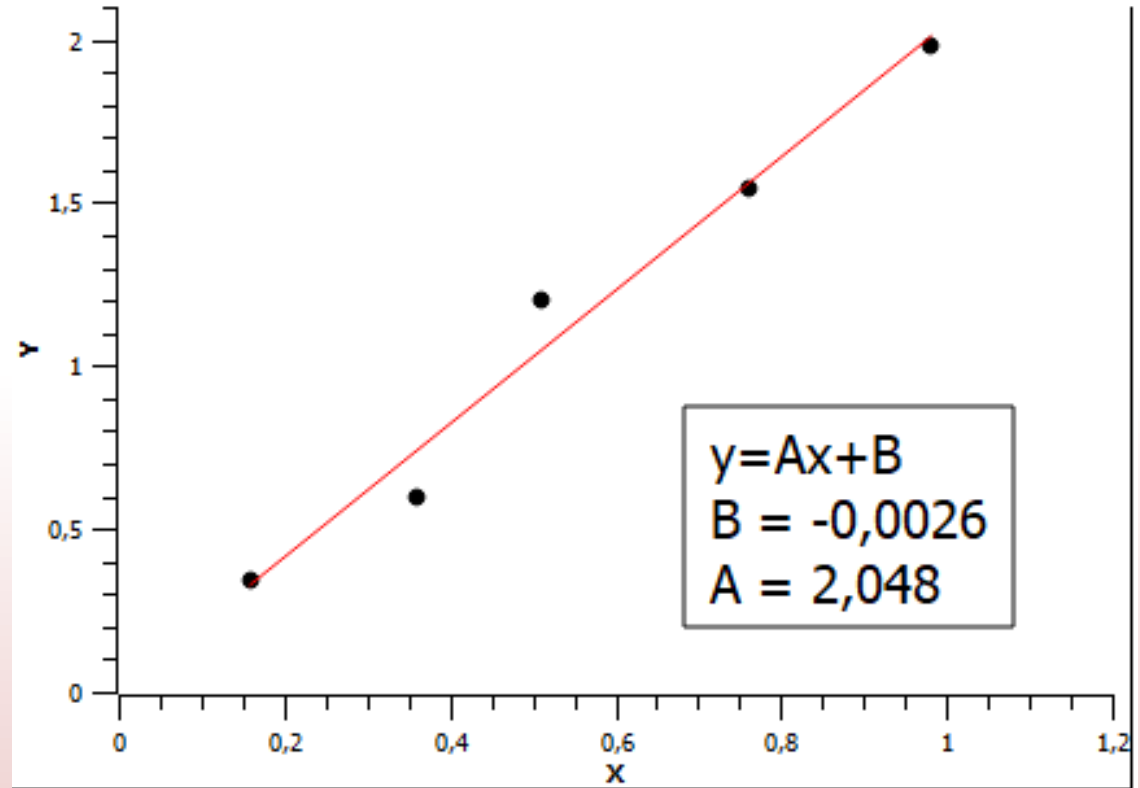
e resolvemos o sistema de equações gerado. As incertezas de A e B também podem ser obtidas aplicando-se a propagação.

- Para um ajuste polinomial de ordem n , o método é generalizado e produz um sistema de $n+1$ equações.

Ajuste de curvas

Suponha que em um experimento foram medidos valores de duas grandezas físicas X e Y que se relacionam linearmente, i.e., $Y = CX$.

Y	X
0,34	0,16
0,6	0,36
1,2	0,51
1,54	0,76
1,98	0,98



- Exercício:** usando os dados da tabela, resolva o sistema de equações do slide anterior e obtenha os parâmetros A e B .

Ajuste de curvas

Voltando ao exemplo inicial:

Como obter o valor da resistência a partir da análise do gráfico $V \times I$?

Sabemos que V varia linearmente com I ($V=RI$).

Tensão ($\pm 0,1$ V)

Corrente
($\pm 0,001$ A)

1,0

0,052

2,0

0,098

3,0

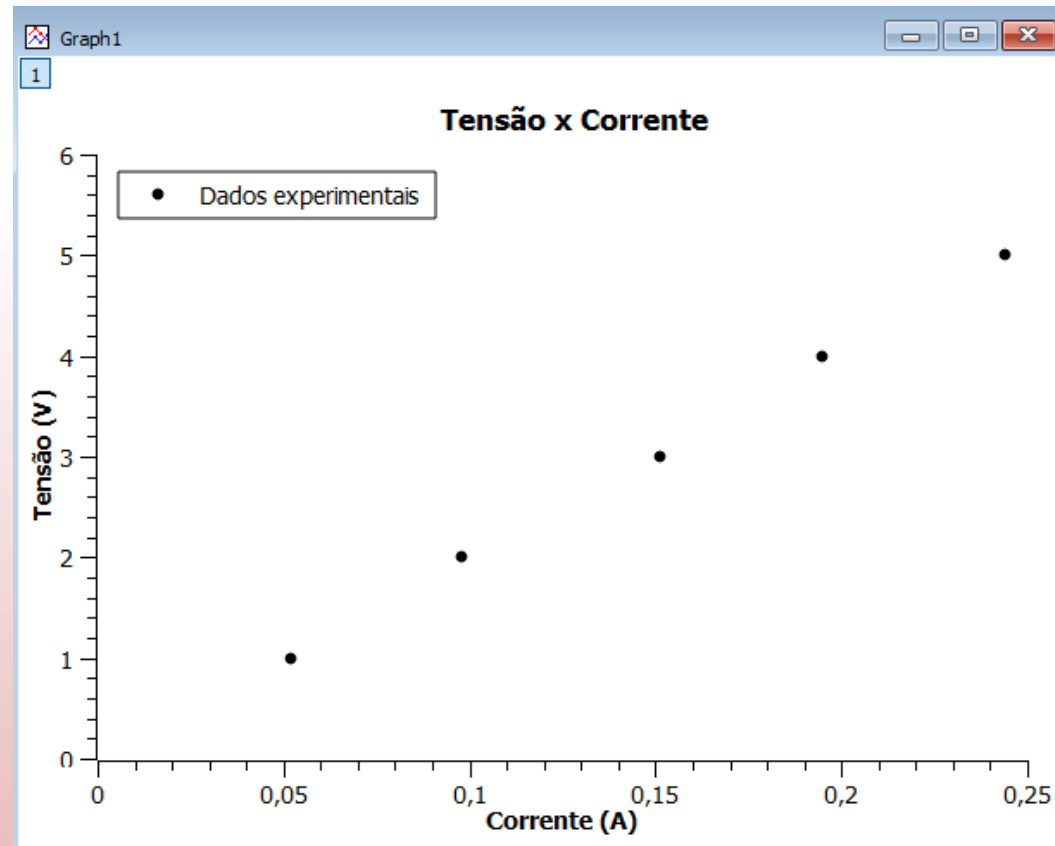
0,151

4,0

0,195

5,0

0,244



Ajuste de curvas

Neste caso, um ajuste linear (regressão linear) determinará a equação da reta que melhor se ajusta aos dados.

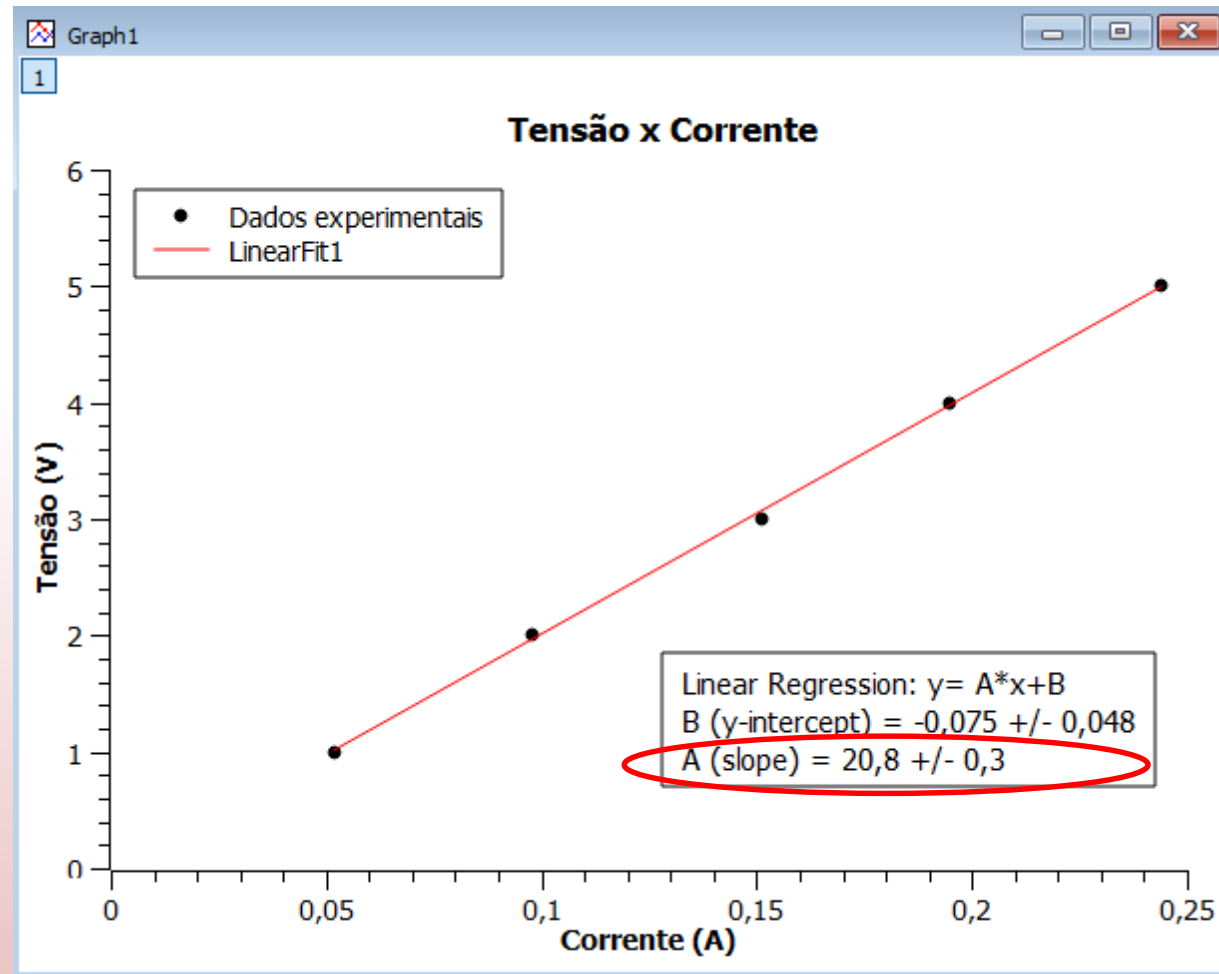
- O ajuste de uma reta

$$y = Ax + B$$

fornece os valores dos parâmetros A (inclinação) e B (termo independente) com suas respectivas incertezas.

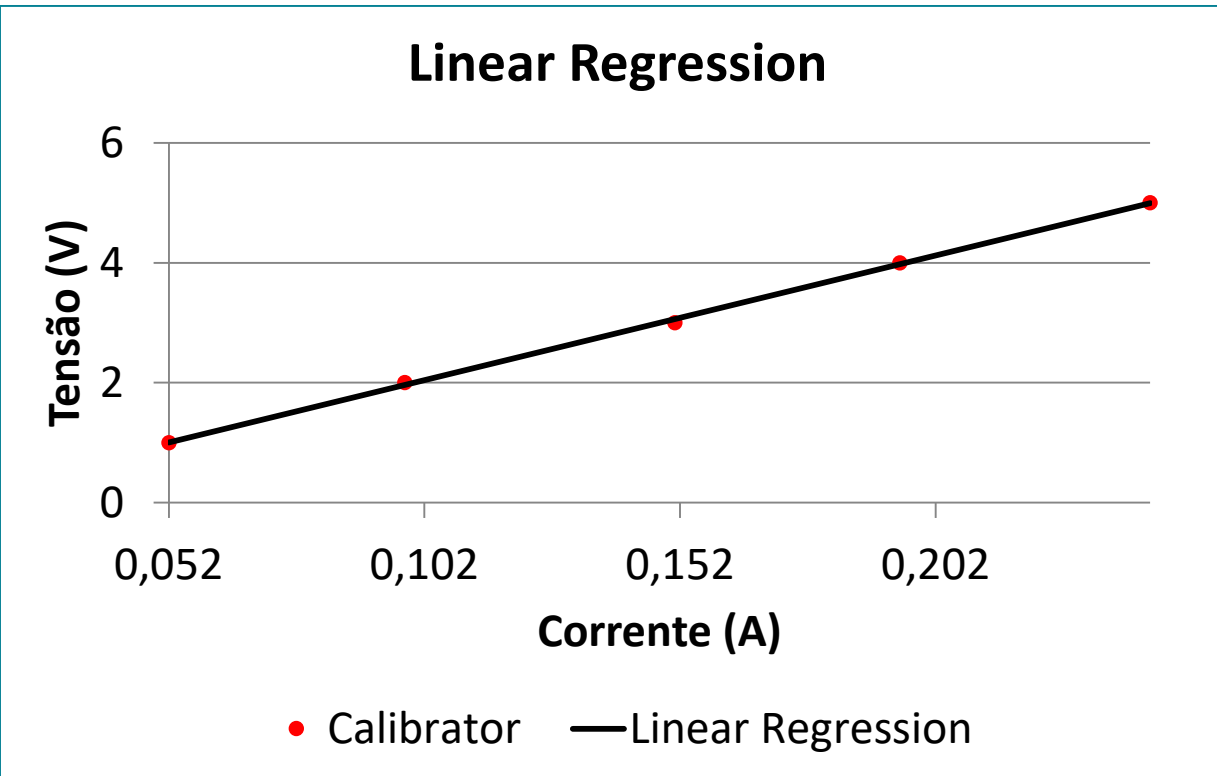
- Como $y=V$, $x=I$, temos que $R=A$. Portanto

$$R = (20,8 \pm 0,3)\Omega$$



Ajuste de curvas

Resultados usando o MyCurveFit



O ajuste de uma reta

$$y = mx + c$$

fornece os valores dos parâmetros m (inclinação) e c (termo independente) com suas respectivas incertezas.

- Como $y=V$, $x=I$, temos que $R=m$. Portanto

$$R = (20,8 \pm 0,3)\Omega$$

Coeff.	Value	\pm Error
m	20.7868	0.286433
c	-0.077282	0.0466647

Atenção! Os parâmetros do ajuste podem ser representados por letras diferentes em cada programa

Ajuste de curvas

Resultados usando o LinearFit

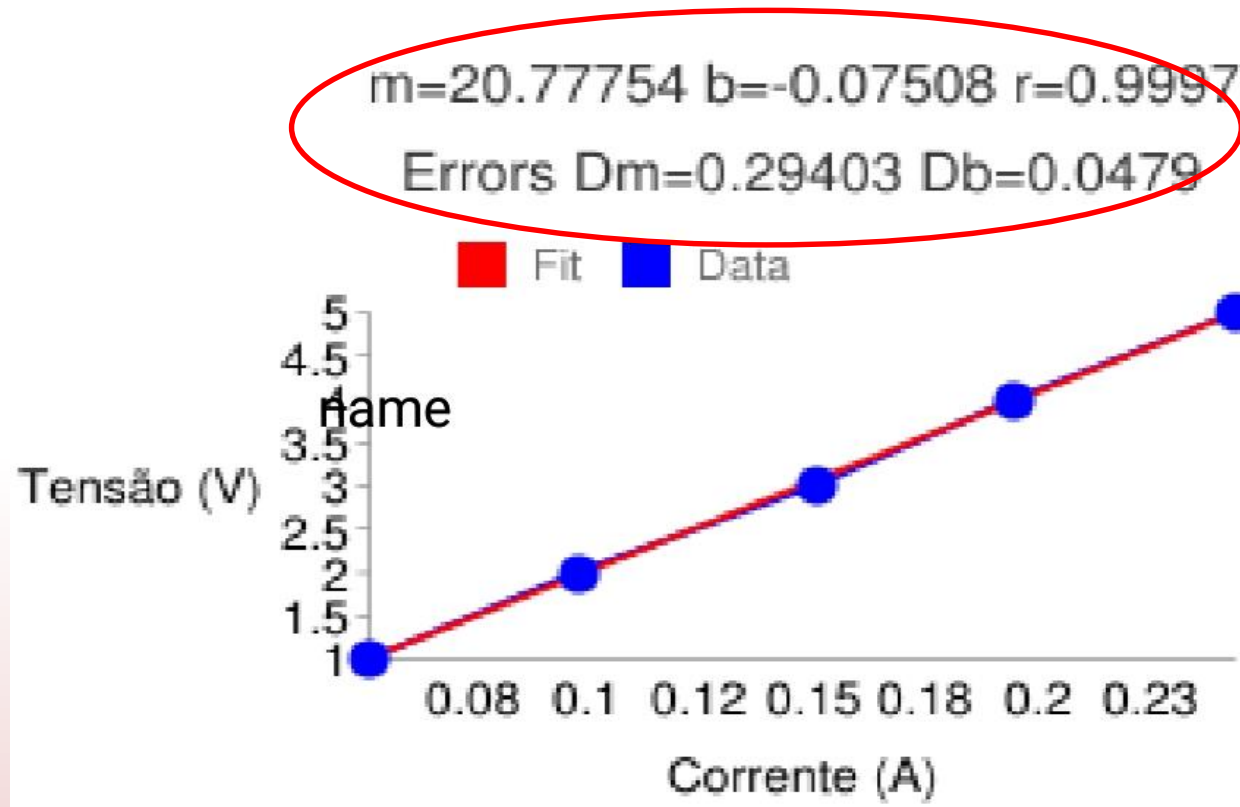
O ajuste de uma reta

$$y = mx + b$$

fornece os valores dos parâmetros m (inclinação) e b (termo independente) com suas respectivas incertezas.

- Como $y=V$, $x=I$, temos que $R=m$. Portanto

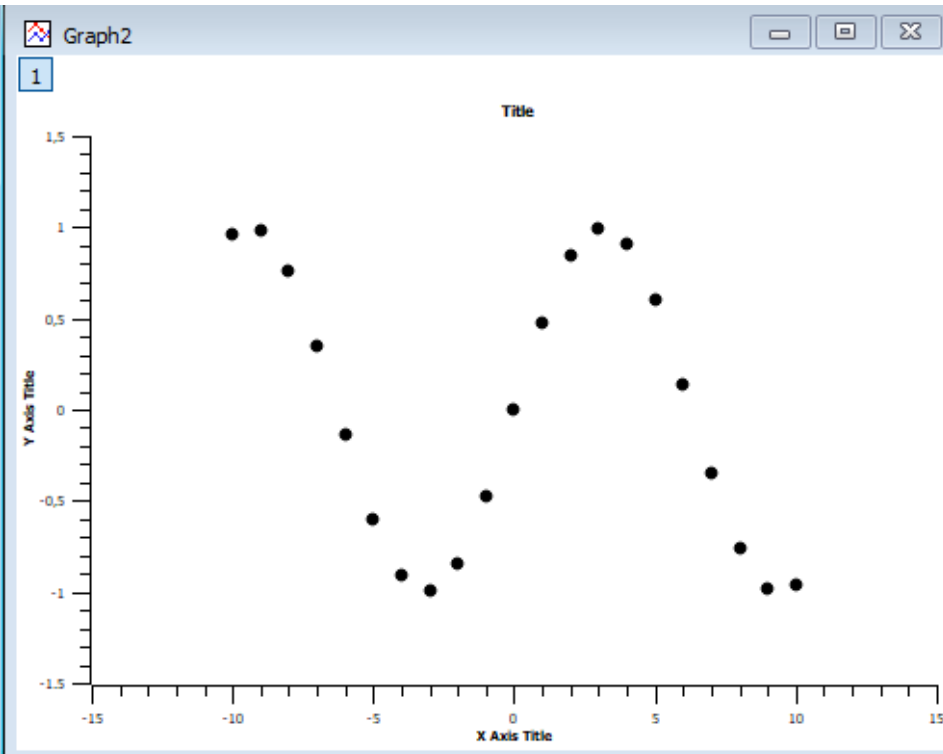
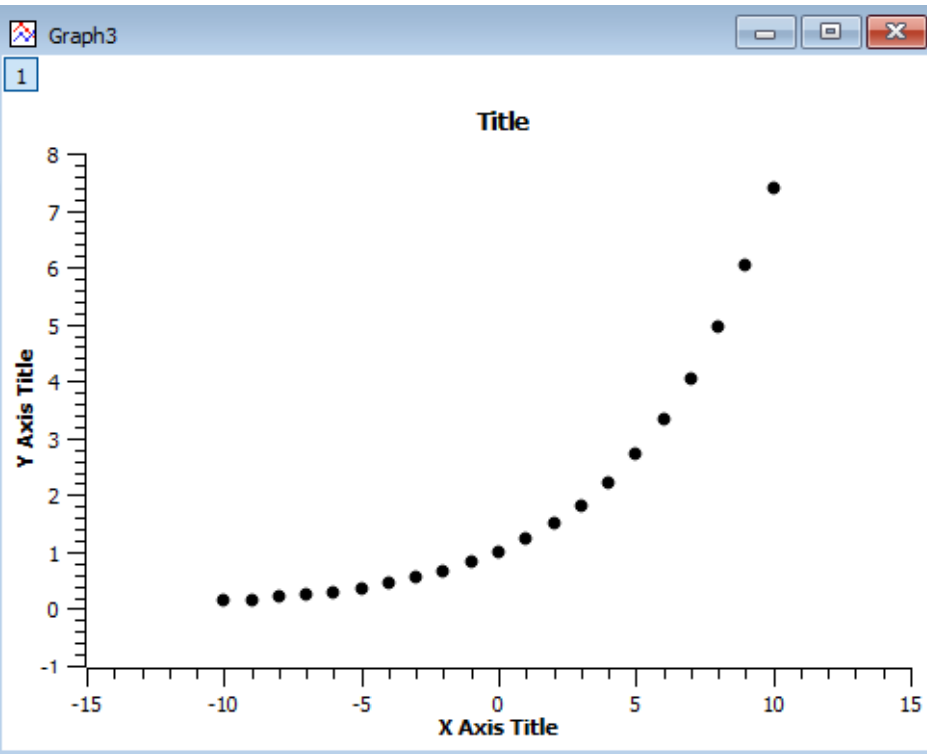
$$R = (20,8 \pm 0,3)\Omega$$



Atenção! Os parâmetros do ajuste podem ser representados por letras diferentes em cada programa

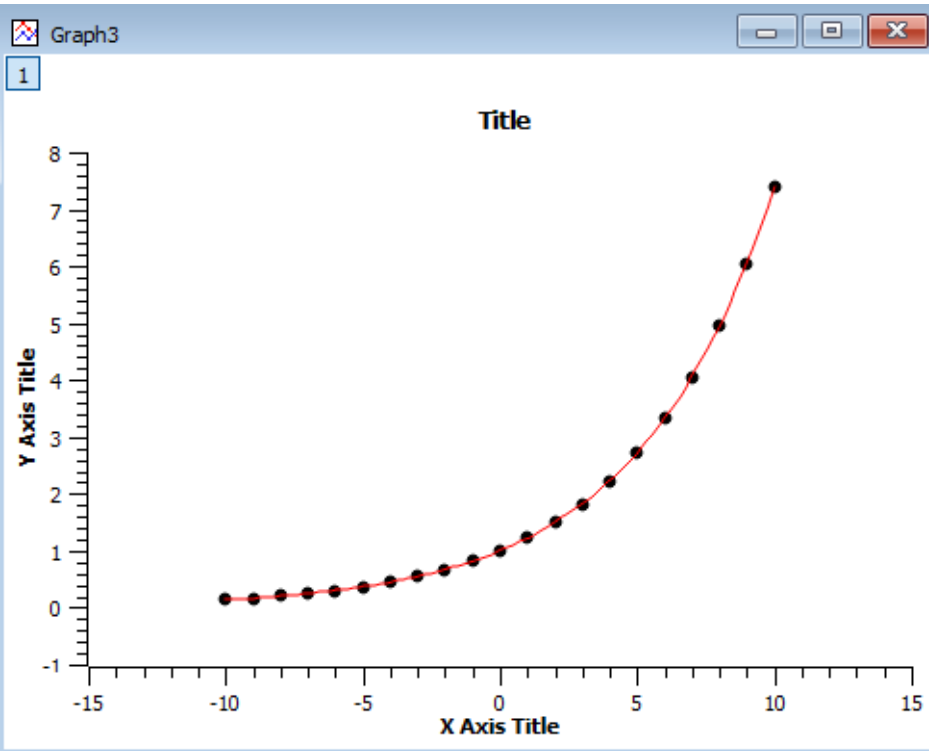
Ajuste de curvas

É razoável ajustar uma reta a esses dados?

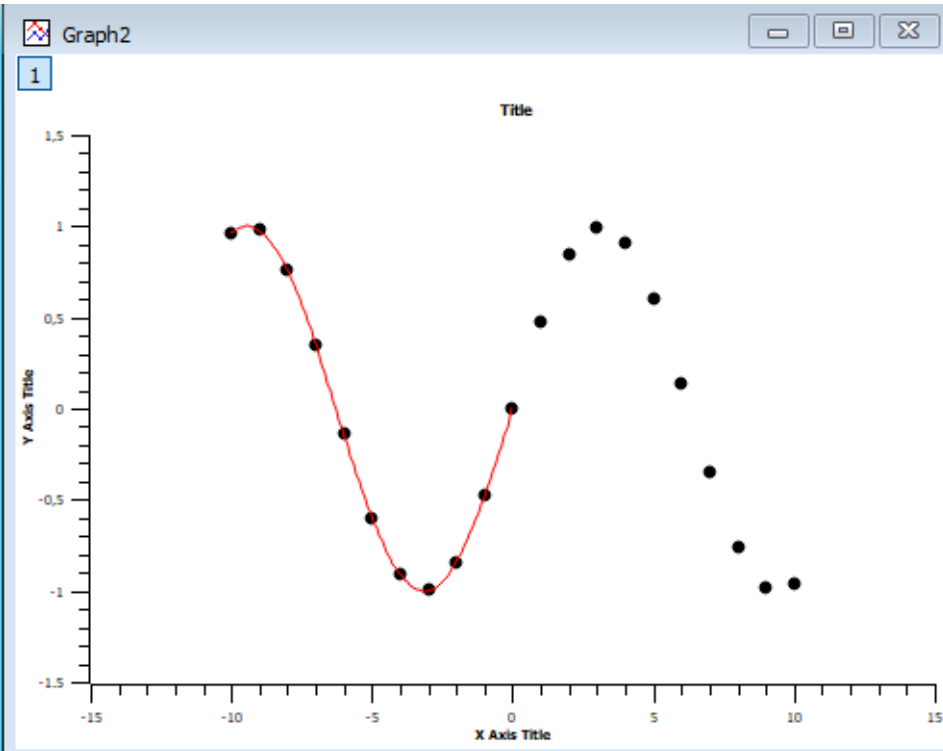


Ajuste de curvas

Não! Devemos fazer ajustes não lineares.



Ajuste com $y = Ae^{Bx}$



Ajuste com $y = \sin(Ax + B)$

Linearização de gráficos

Linearização de gráficos

- Frequentemente, duas grandezas x e y se relacionam de forma não linear. Exemplos:

1. $y = ax^2 + b$

2. $y = be^{ax}$

3. $y = ax^2 + bx$

- Em alguns casos é possível definir novas grandezas que sejam funções das originais e obedeçam uma relação linear entre si.

1. Fazendo $X = x^2$ teremos $y = aX + b$

2. Aplicando o logaritmo: $\ln y = \ln b + ax$
 $Y = B + ax$

3. Não é possível linearizar

- Após a linearização, é possível fazer a análise do gráfico via regressão linear. Não confundir linearização com regressão linear.

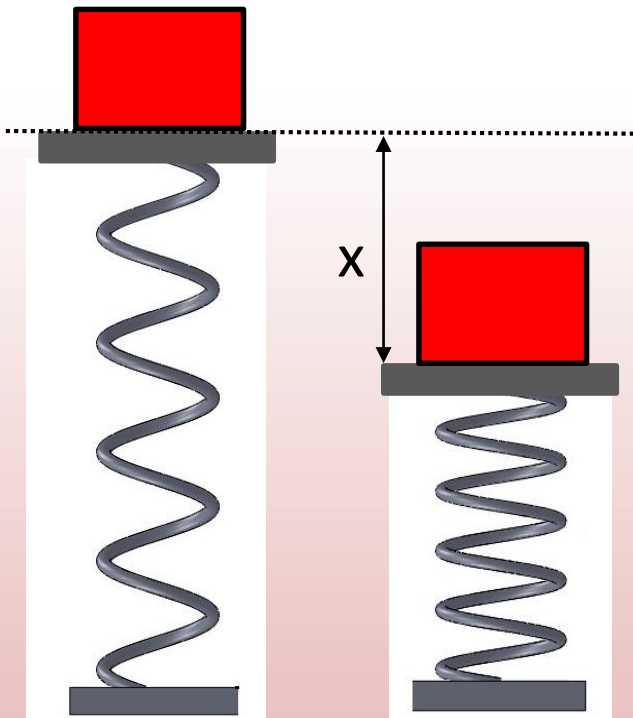
Exercícios em sala de aula

Exercício 1

Considere uma mola de constante elástica

$$k = (120 \pm 10) \text{ N/m.}$$

Utilizando seis objetos de massas conhecidas, medimos o deslocamento da plataforma após a compressão da mola e obtemos os seguintes resultados:



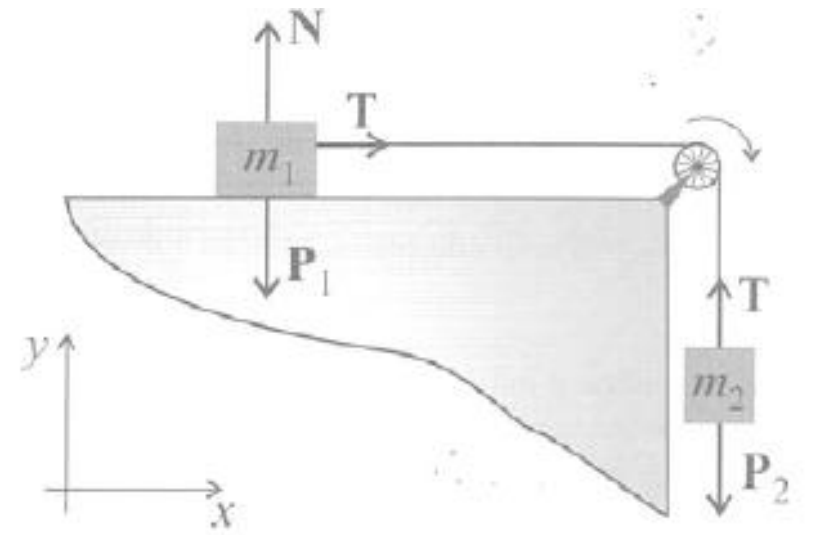
Compressão (m)	Massa (kg)
0,016	0,20
0,033	0,40
0,049	0,60
0,065	0,80
0,083	1,00

Sabendo que a força exercida sobre a mola é o peso do objeto, $kx = mg$, faça um gráfico e encontre o valor da aceleração da gravidade g .

Neste caso $x = (g/k) m$

Exercício 2

Um objeto se move sob a ação de uma força constante em uma superfície sem atrito. Ao medirmos sua posição e velocidade, obtemos os seguintes resultados:



Posição (m)	Velocidade (m/s)
0	1,382
0,1	2,871
0,2	3,826
0,3	4,586
0,4	5,454
0,5	6,056
0,6	6,474

Sabendo que $V^2 = V_0^2 + 2aX$, faça um gráfico linearizado e determine, através de um ajuste linear, a aceleração do objeto e sua incerteza.

Programas de análise de dados

Para fazer e analisar gráficos fora do laboratório, você pode usar pelo menos um dos seguintes programas de acordo com o seu equipamento:

- **SciDAvis:** <https://sourceforge.net/projects/scidavis/>
 - Computador onde se pode instalar programas.
- **MyCurveFit:** <https://mycurvefit.com/>
 - Computador onde não é possível instalar programas. Este se usa sempre online.
- **LinearFit:** Vá ao aplicativo “Play Store” e busque “LinearFit”.
 - Smartphone.

→ Tutoriais de instalação e utilização: “Material de apoio” em <https://www.fisica.ufmg.br/ciclo-basico/disciplinas/feb-mecanica/>

Próxima aula

- Preparem-se para a próxima aula lendo o roteiro do experimento “**Pêndulo simples**” disponível na página da disciplina <https://www.fisica.ufmg.br/ciclo-basico/disciplinas/feb-mecanica/>
- O experimento será feito de forma coletiva e os resultados deverão ser entregues conforme definido pelo(a) professor(a), que conduzirá a prática.
- O objetivo é aplicar o que foi visto nas Aulas 1 e 2 através de um experimento simples. Sempre que necessário, revise o conteúdo destas aulas e os materiais de apoio na nossa página.