Aula 12 Cálculo 3B | Aula 21 Cálculo 3A

Aula passada: Coeficientes constantes:
- raízes reais
- raízes complexas

Aula Hoje
- raízes repetidas
- Redução de ordem

3.5 Raízes repetidas; Redução de ordem

Suponha $b^2-4ac=0$ então para

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b}{2a}$$ única raiz

Já vimos que $\boxed{y_1(t)=e^{-\frac{b}{2a}t}}$ é uma solução de

$$\boxed{ay''+by'+cy=0 \quad (*)}$$

Como achar uma segunda solução LI?

Método de D'Alembert

Já que $ce^{-\frac{b}{2a}t}$ é solução $\forall c\in\mathbb{R}$

considera c como uma função de t

Suponha $y_2(t)=v(t).e^{-\frac{b}{2a}t}$ solução de (*)

objetivo: achar uma cara para $v(t)$:

$$y_2'(t)=v'.e^{-\frac{b}{2a}t}-\frac{b}{a}v.e^{-\frac{b}{2a}t}$$

$$y_2''(t)=v''.e^{-\frac{b}{2a}t}-\frac{b}{a}v'.e^{-\frac{b}{2a}t}+\frac{b^2}{4a^2}v\,e^{-\frac{b}{2a}t}$$

Substituindo na equação

$$a\left(v''.\cancel{e^{-\frac{b}{2a}t}}-\frac{b}{a}v'.\cancel{e^{-\frac{b}{2a}t}}+\frac{b^2}{4a^2}v\,\cancel{e^{-\frac{b}{2a}t}}\right)+b\left(v'.\cancel{e^{-\frac{b}{2a}t}}-\frac{b}{a}v.\cancel{e^{-\frac{b}{2a}t}}\right)+c\,v(t).\cancel{e^{-\frac{b}{2a}t}}=0$$

$$\Leftrightarrow av''+(\cancel{-b+b})v'+\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c\right)v=0$$

$$\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=-\frac{(b^2-4ac)}{4a}=0$$

$$\Leftrightarrow v''=0$$
$$v'=c$$
$$v=ct$$

assim $y_2(t)=cte^{-\frac{b}{2a}t}$

Note que $y_2(t)=te^{-\frac{b}{2a}t}$ também é solução

Verifique que $W\left(e^{-\frac{b}{2a}t},te^{-\frac{b}{2a}t}\right)=e^{-\frac{b}{2a}t}\neq0$

Portanto para raízes repetidas a forma da solução geral é

$$\boxed{y(t)=c_1e^{rt}+c_2t.e^{rt}}$$

Solução geral

Exemplo: Resolva a equação $y''+4y'+4y=0$

Solução: Eq característica $x^2+4x+4=0$

$(x+2)^2=0$

$x=-2$

solução $y(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}$

Exemplo: Encontre a Solução do PVI

$$\begin{cases}y''-y'+\frac{1}{4}y=0\\ y(0)=2\\ y'(0)=1/3\end{cases}$$

Solução: $x^2-x+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$ $\boxed{x=\frac{1}{2}}$

$$y(t)=c_1e^{t/2}+c_2te^{t/2}$$

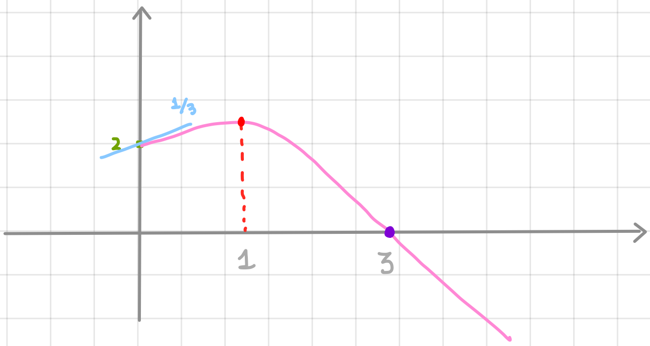
$$y(0)=c_1=2$$

$$y'(t)=e^{t/2}+c_2\left(\frac{t}{2}e^{t/2}+e^{t/2}\right)$$

$$y'(0)=1+c_2=\frac{1}{3}\Rightarrow c_2=-2/3$$

$$y(t)=2e^{t/2}-\frac{2}{3}te^{t/2}$$

Note que $\lim_{t\to\infty}e^{t/2}\left(2-\frac{2t}{3}\right)=-\infty$



$$y(t) = 2e^{t/2} - \frac{2}{3}te^{t/2} = 0 = e^{t/2}\left(2 - \frac{2}{3}t\right) = 0$$

$$\boxed{t = 3}$$

$$y'(t) = e^{t/2} - \frac{2}{3}t \cdot \frac{1}{2}e^{t/2} - \frac{2}{3}e^{t/2} = 0$$

$$= e^{t/2}\left(1 - \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\frac{t}{3} = \frac{t}{3} \Rightarrow \boxed{t = 1}$$

3.5 (No final da seção) Redução de ordem

↳ dada uma equação linear (sem ser coeficientes constantes) e temos uma solução y_1 esse método ajuda a achar a segunda LI

$$\boxed{\begin{array}{l} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y_1(t) \text{ uma solução} \end{array}}$$

Objetivo: achar $y_2(t)$ solução LI com $y_1(t)$

Método de redução de ordem

Suponha $y_2(t) = \underbrace{v(t)}_{\text{queremos achar esta}} \cdot y_1(t)$

uma outra solução de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$

Derivando:

$$y_2'(t) = v' \cdot y_1 + v y_1'$$

$$y_2''(t) = v'' \cdot y_1 + v' \cdot y_1' + v' y_1' + v \cdot y_1''$$

$$= v'' \cdot y_1 + 2v' \cdot y_1' + v y_1''$$

substituindo:

$$(v'' \cdot y_1 + 2v' y_1' + v y_1'') + p(t)(v' y_1 + v y_1') + q(t)\, v \cdot y_1 = 0$$

$$v'' y_1 + v'(2y_1' + p(t)y_1) + v\,\underbrace{\cancel{(y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1)}}_{\text{solução } y_1 \; = 0} = 0$$

$$\underbrace{v'' y_1 + v'(2y_1' + p(t)y_1)}_{} = 0$$

Segunda ordem do tipo especial que não tem v resolve fazendo a mudança de variável $v' =: u$

Assim achamos $v(t)$ e consequentemente $y_2(t)$.

Exemplo Resolva

$$(t-1)y'' - ty' + y = 0 \quad t > 1 \quad \text{onde } y_1(t) = e^t \text{ é uma solução}$$

Solução

Suponha $y = e^t \cdot v$ outra solução

$$\Rightarrow y' = v' \cdot e^t + v e^t$$

$$y'' = v'' e^t + 2v' e^t + v e^t$$

Substituindo

$$(t-1)(v'' e^t + 2v' e^t + v e^t) - t(v' e^t + v e^t) + e^t v = 0 \quad \div e^t$$

$$v''(t-1) + v'(2(t-1) - t) = 0$$

Fazendo $v' = u \Rightarrow v'' = u'$

$$(t-1)u' + (t-2)u = 0$$

$$\int \frac{1}{u}\,du = \int -\frac{(t-2)}{(t-1)}\,dt = \int -\frac{(t-1)}{(t-1)} - \frac{1}{t-1}\,dt$$

$$\ln(u) = -t + \ln(t-1) \qquad t > 1 \quad u > 0$$

$$u(t) = (t-1)e^{-t} = v'$$

$$v(t) = \int e^{-t}t - e^{-t}\,dt = te^{-t} + \int e^{-t}\,dt + e^{-t}$$

$$= te^{-t}$$

$$y_2(t) = te^{-t} \cdot e^t = t$$

e $\boxed{y(t) = c_1 t + c_2 e^t}$