Aula – Computação Gráfica

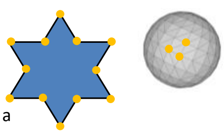
Transformações Geométricas

1

1

Como Usar Transformações Geométricas?

- Objetos em uma cena são coleções de pontos
- Esses objetos possuem
  - Localização
  - Orientação
  - Tamanho
- Esses parâmetros correspondem a
  - Translação (***T***)
  - Rotação (***R***)
  - Escala (***S***)

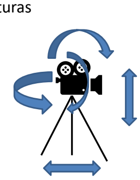


2

2

Como Usar Transformações Geométricas?

- Uma cena tem uma câmera/ponto de vista de onde é observada
- A câmera tem uma localização e uma orientação no espaço 3D
- Esses parâmetros correspondem a transformações
  - Translações e Rotações
- Outros tipos de transformações de visualização são necessárias
  - Visto em aulas futuras



3

3

Como Usar Transformações Geométricas?

- Porque usar as transformações geométricas?
  - Facilitar o reuso dos objetos
- Como usar as transformações geométricas?
  - Aplicando transformações nos vértices dos objetos

4

4

Conceitos Necessários de Álgebra Linear

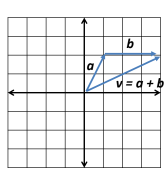
- Geometria em coordenadas 3D
- Vetores no espaço 2D e 3D
- Produto escalar e produto vetorial (definição e uso)
- Notações básicas de vetor e matriz
- Matriz identidade
- Associatividade multiplicativa
  - Ex.: *(AB)C = A(BC)*
- Matriz transposta e inversa
- Sistema de coordenadas homogêneas
  - (x, y, z, w)

5

5

Transformações Lineares

- Padrão de representação no slides
  - Vetores: Negrito-Itálico (***v***)
  - Escalares: Itálico (*c*)
- Qualquer vetor no plano pode ser definido pela soma de dois vetores não colineares
- Lembre-se que a base para um espaço vetorial é um conjunto de vetores com as seguintes propriedades:
  - Os vetores são linearmente independentes
  - Qualquer vetor nesse espaço pode ser representado por uma combinação linear dos vetores base.
- A multiplicação de um vetor por um escalar altera a magnitude do vetor

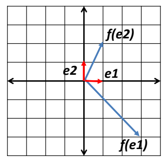


6

6

Transformações Lineares

- Função linear deve atender duas propriedades:
  - *1) f(**v**+**w**) = f(**v**) + f(**w**)* para todo ***v*** e ***w*** no domínio de *f*
  - *2) f(c**v**) = cf(**v**)* para todo escalar *c* e elementos ***v*** no domínio
- Exemplo da propriedade 1
  - $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{f}(x_1, x_2) := (3x_1+1x_2, -3x_1+2x_2)$
  - $\boldsymbol{f}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \boldsymbol{f}(v_1+w_1, v_2+w_2)$
    - $= (3(v_1+w_1)+1(v_2+w_2), -3(v_1+w_1)+2(v_2+w_2))$
    - $= (3v_1+1v_2, -3v_1+2v_2) + (3w_1+1w_2, -3w_1+2w_2)$
    - $= \boldsymbol{f}(\mathbf{v}) + \boldsymbol{f}(\mathbf{w})$



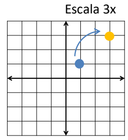
7

7

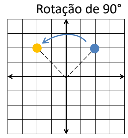
Transformações Lineares

- Uso gráfico de funções lineares
  - Transformação de um ponto em torno da origem
  - Deixa a origem invariante
- Funções lineares
  - Incluem Rotação e Escala
  - Não inclui Translação
  - Qualquer transformação de um ponto
    - Resulta em outro ponto
    - Transformado em torno da origem

Escala 3x



Rotação de 90°



8

8

Transformações Lineares como Matrizes

- Podem ser representadas como
  - Matrizes inversíveis (não singulares)
- Começando com transformações 2D que podem ser representas por matrizes 2x2:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Se $\boldsymbol{e_1}$ e $\boldsymbol{e_2}$ são os vetores base:

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Então as colunas da matriz de transformação ***T*** são ***T*** aplicada a $\boldsymbol{e_1}$ e $\boldsymbol{e_2}$:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e_1}) = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e_2}) = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

9

9

Transformações Lineares como Matrizes

- Isso significa que podemos derivar a matriz de transformação
  - Considerando como a transformação afeta os vetores base
- A transformação de um vetor arbitrário $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ tem a forma:

$$\boldsymbol{T}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix}$$

- Com isso, pode-se verificar o porquê da estratégia anterior
- Substitua cada vetor base por x para obter:

$$\boldsymbol{T}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{T}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

10

10

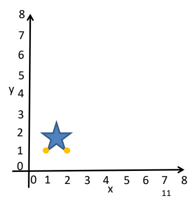
Transformação de Escala

- Escalar ***x*** de 3 e ***y*** de 2 ($S_x = 3$, $S_y = 2$)
  - $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (vértice original); $\boldsymbol{v'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ (novo vértice)
- ***v' = Sv***
- Derivar ***S*** determinando como $\boldsymbol{e_1}$ e $\boldsymbol{e_2}$ deveriam ser transformados

$\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow s_x * \boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} s_x \\ 0 \end{bmatrix}$ Escala X de S_x

$\boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow s_y * \boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ s_y \end{bmatrix}$ Escala Y de S_y

- Obtendo: $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$



11

11

Transformação de Escala

- Escalar ***x*** de 3 e ***y*** de 2 ($S_x = 3$, $S_y = 2$)
  - $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (vértice original); $\boldsymbol{v'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ (novo vértice)
- ***v' = Sv***
- Derivar ***S*** determinando como $\boldsymbol{e_1}$ e $\boldsymbol{e_2}$ deveriam ser transformados

$\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow s_x * \boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} s_x \\ 0 \end{bmatrix}$ Escala X de S_x

$\boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow s_y * \boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ s_y \end{bmatrix}$ Escala Y de S_y

- Obtendo: $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$

12

12

Transformação de Escala

- $\boldsymbol{S}$ é uma matriz diagonal
- Ela pode ser rapidamente verificada

$$\boldsymbol{Sv} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x x \\ s_y y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

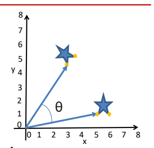
- $\boldsymbol{S}$ multiplica cada coordenada de $\boldsymbol{v}$ pelo fator de escala apropriado
- Outras propriedades da escala
  - Não preserva ângulos entre linhas em um plano
    - Exceto para escala uniforme
  - Se o objeto não estiver na origem
    - Ele vai se aproximar ou se afastar dela
    - Isso geralmente não é desejável

13

13

Transformação de Rotação

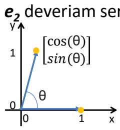
- Rotaciona de θ em torno da origem
  - $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (vértice original);
  - $\boldsymbol{v'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ (novo vértice)

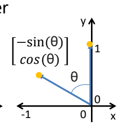


- $\boldsymbol{v'} = \boldsymbol{R_\theta v}$
- Derivar $\boldsymbol{R_\theta}$ determinando como $\boldsymbol{e_1}$ e $\boldsymbol{e_2}$ deveriam ser transformados

$\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$ Primeira coluna de $\boldsymbol{R_\theta}$

$\boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ cos(\theta) \end{bmatrix}$ Segunda coluna de $\boldsymbol{R_\theta}$





$$\boldsymbol{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

14

14

Transformação de Rotação

- $\boldsymbol{R_\theta}$ pode ser rapidamente verificada

$$\boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = v'$$

$x' = x\ cos\ (\theta) - y \sin\ (\theta)$

$y' = x\ sin\ (\theta) + y \cos\ (\theta)$

- Outras propriedades da rotação
  - Transformação de corpo rígido
    - Preserva comprimento dos objetos
    - Preserva ângulos entre as partes dos objetos
  - Para objetos não centrados na origem
    - Uma translação indesejada é introduzida

15

15

Transformação de Translação

E como fica a translação?
- Translação não é uma transformação linear
  - A origem não é invariante
- Portanto, não pode ser expressada por uma matriz 2x2
- Existe alguma outra solução?

Transformação de Translação

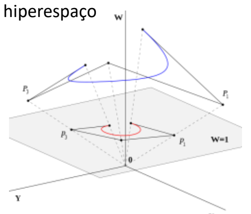
E como fica a translação?
- Translação não é uma transformação linear
  - A origem não é invariante
- Portanto, não pode ser expressada por uma matriz 2x2
- Existe alguma outra solução?
  - Sim
  - Fazer: $\boldsymbol{v'} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{t}$, where $\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$
  - Porém, quebra a uniformidade
    - Não se pode tratar como as matrizes anteriores

Transformação de Translação

- Se pudéssemos tratar tudo como matriz
  - Então, poderíamos combinar transformações por matrizes
  - Usando multiplicação e associatividade
- Vamos tentar usar uma matriz novamente
- Como?
  - Coordenadas homogêneas
    - Adicionar uma dimensão adicional (o eixo *w*)
    - Adicionar uma coordenada adicional (componente *w*)
    - Então temos: 2D como 3D (hiperespaço englobando o 2D)

Coordenada Homogêneas

- Permite uniformizar todas as 3 transformações básicas
  - Representar escala, rotação e translação como matrizes 3x3
- Começamos com um ponto P_{2d} no plano xy
- Aplicamos o w para trazer para o hiperespaço
  - $P_{2d}(x,y) \Rightarrow P_h(wx, wy, w), w \neq 0$
- O ponto resultante P_h
  - Possui coordenadas diferentes
  - $(x', y') = (wx, wy)$
  - $P_h(x', y', w), w \neq 0$



19

19

Coordenada Homogêneas

- Com o ponto no novo espaço e representado por P_h
  - Transformações homogeneizadas podem ser aplicadas
  - Transformações representadas por matrizes com tamanho fixo
- Para se obter o ponto no espaço 2D original
  - Basta aplicar a transformada inversa
    - Dividir todas as componentes por w
    - Após a divisão o vértice $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ será representado por $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

20

20

Coordenada Homogêneas

- As transformações que vamos usar manterão $w = 1$
- Ou seja, utilizaremos transformações $\boldsymbol{T}$ que mapeiam
  - $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ em $\boldsymbol{v'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$
- Como fazer isso para as transformações que já derivamos?
  - Para as transformações lineares
    - Basta fazer $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

21

21

Transformação de Translação

- A matriz de translação focará na última coluna

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Para verificar a matriz, basta fazer:

$$Tv = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + dx \\ y + dy \\ 1 \end{bmatrix} = v'$$

- Perceba que as coordenadas foram transladadas
  - ***v'*** permanece em coordenadas homogêneas

22

22

Transformações Homogeneizadas

Transformação	Matriz
Escala	$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Rotação	$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Translação	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Perceba que a escala e a rotação não foram afetadas
- Essas 3 transformações são chamadas de afins

23

23

Transformações Homogeneizadas

- Exemplos
  - Escala de 10 em *x* e 20 em *y*

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Rotação de 10°

$$\begin{bmatrix} \cos(10) & -\sin(10) & 0 \\ \sin(10) & \cos(10) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Translação de -10 em *x* e 20 em *y*

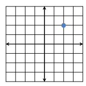
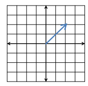
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

24

24

Vetores vs Pontos

- Até agora só utilizamos o conceito de pontos
- Porém, também podemos utilizar vetores

- As coordenadas homogêneas foram introduzidas para
  - Facilitar a translação
  - Portanto pontos são representados por **(*x*, *y*, 1)*ᵀ***
- Um vetor pode ser rotacionado e escalado
  - Mas não pode ser transladado, portanto **(*x*, *y*, 0)*ᵀ***
- Vamos focar nos pontos, ou seja, nos vértices dos objetos

25

25

Transformações Inversas

- Como achar as transformações inversas?
  - Use a matriz inversa das transformações
  - Graças a homogeneização
    - Todas são invertíveis

26

26

Transformações Inversas

- Como achar as transformações inversas?
  - Use a matriz inversa das transformações
  - Graças a homogeneização
    - Todas são invertíveis

Transformação	Matriz	Descrição
Escala	$\begin{bmatrix} 1/S_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Se você escala algo de a, para desfaze-la seria necessário escalar de 1/a
Rotação	$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	O inverso da rotação por um ângulo θ é a rotação por −θ. Como a matriz é ortonormal, sua inversa é a transposta.
Translação	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & -dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Se você translada algo de x, para desfazer basta transladar de –x.

27

Composição de Transformações

- Agora temos várias ferramentas a disposição
  - Podemos combiná-las
- Um objeto em uma cena é composto por vários vértices
- O objeto usa várias transformações para ser formado
- Como representamos isso por funções?
- Transformação é uma função
- Elas podem ser compostas por associatividade
  - *(f o g)(i)*
- Equivalente a aplicar *g* e depois *f*:
  - *f(g(i))*

28

28

Composição de Transformações

- Considere nossas funções *f* e *g* como matrizes (M_1 e M_2)
- Considere nossa entrada como um vetor ***v***
- Nossa composição é equivalente a $M_1M_2\boldsymbol{v}$
- Agora podemos formar transformações complexas
  - Usando composição de transformações básicas
  - Podemos compor as matrizes em uma só antes de multiplicar
    - Útil para aumentar performance dado o alto número de vértices
  - Por exemplo, ***TRSv***

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & dx\\0 & 1 & dy\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0\\\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0\\0 & s_y & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

29

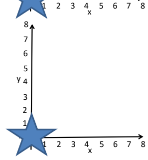
29

Composição de Transformações

- **Importante:** A ordem das transformações importa!
  - Multiplicação de matrizes não é comutativo!
- Exemplo

Transladar de *x = 7*, *y = 0*, e rotacionar de 45º

Rotacionar de 45º e transladar de *x = 7*, *y = 0*



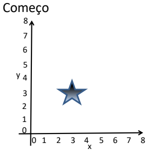
30

30

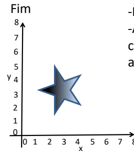
Composição de Transformações

- Exemplo de composição

Começo



Fim

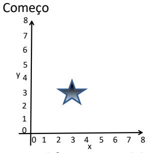


-Escala uniforme de 2x
-Rotação de 90°
-Ambos em torno do centro do objeto, não a origem

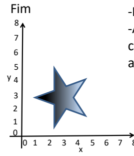
Composição de Transformações

- Exemplo de composição

Começo



Fim



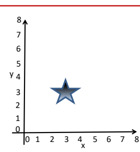
-Escala uniforme de 2x
-Rotação de 90°
-Ambos em torno do centro do objeto, não a origem

- Simplifique o problema!
  - Calcule o centro (vamos supor em x=3 e y=3)
  - Translade o objeto para a origem
  - Escale
  - Rotacione
  - Translade de volta

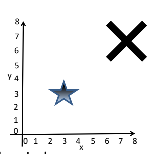
$$T^{-1}RST = \begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cos(90)&-\sin(90)&0\\ \sin(90)&\cos(90)&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Composição de Transformações

- ***T^-1^RST***



- E se tivéssemos misturado a ordem?
- Vamos tentar ***RT^-1^ST***



$$\begin{bmatrix}cos(90)&-\sin(90)&0\\ \sin(90)&\cos(90)&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

  - Escalou propriamente
  - Mas a rotação introduziu uma translação indesejada

Composição de Transformações (Inversa)

- Qual é a inversa de uma sequência de transformações?
  - É a composição das inversas na ordem invertida
  - $(M_1M_2 \ldots M_n)^{-1} = M_n^{-1}M_{n-1}^{-1} \ldots M_1^{-1}$
- Supondo que queiramos desfazer as transformações aplicadas nos slides anteriores $T^{-1}RST$
  - $(T^{-1}RST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}R^{-1}T$
- Ainda sim precisamos transladar a origem e levar de volta

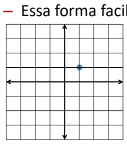
$$T^{-1}S^{-1}R^{-1}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(90) & \sin(90) & 0 \\ -\sin(90) & \cos(90) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

34

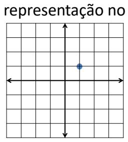
34

Forma Alternativa de Pensar

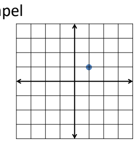
- Pensamento natural
  - Transformações mudam posição dos vértices em relação aos eixos
- Pensamento alternativo
  - Transformações mudam os eixos dos sistemas de coordenadas
  - Essa forma facilita a representação no papel



Rotação



Escala



Translação

35

35

Perguntas ?????

36

36