

# Mecânica dos Sólidos

Mecânica dos Sólidos

# Equilíbrio de um corpo deformável





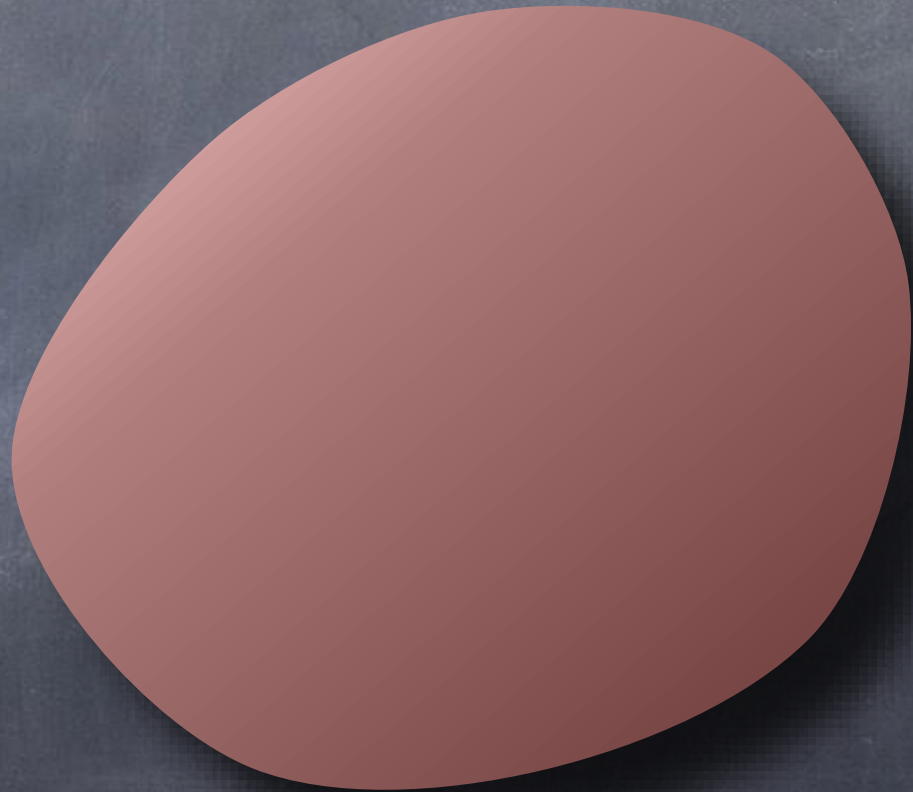
# Equilíbrio de um corpo deformável

# Equilíbrio de um corpo deformável

Forças externas

# Equilíbrio de um corpo deformável

Forças externas

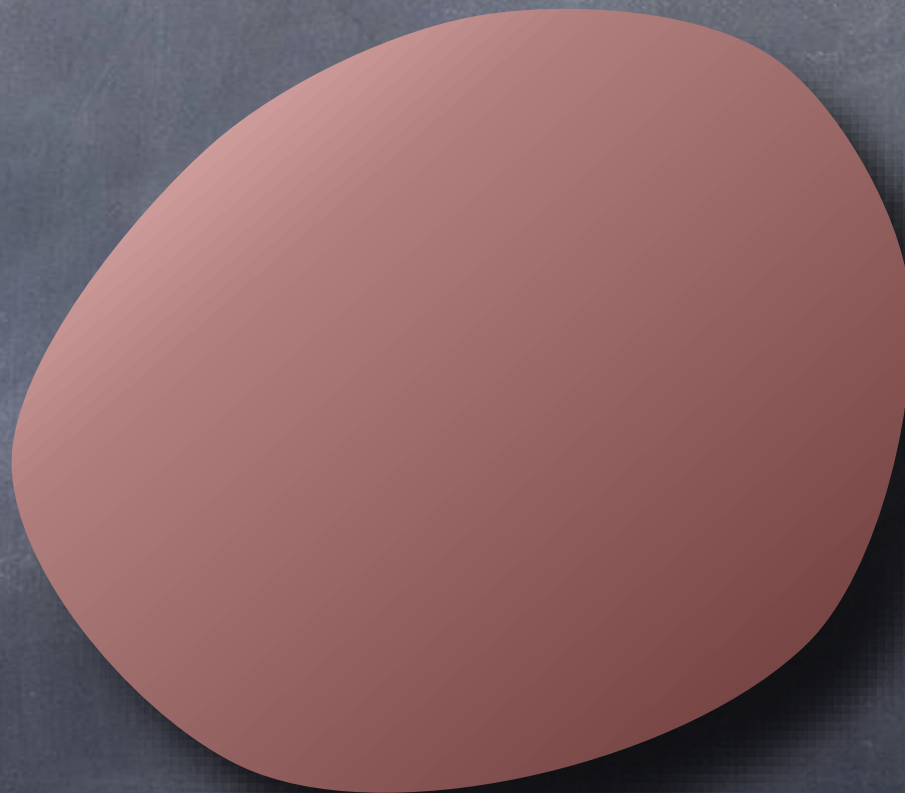




# Equilíbrio de um corpo deformável

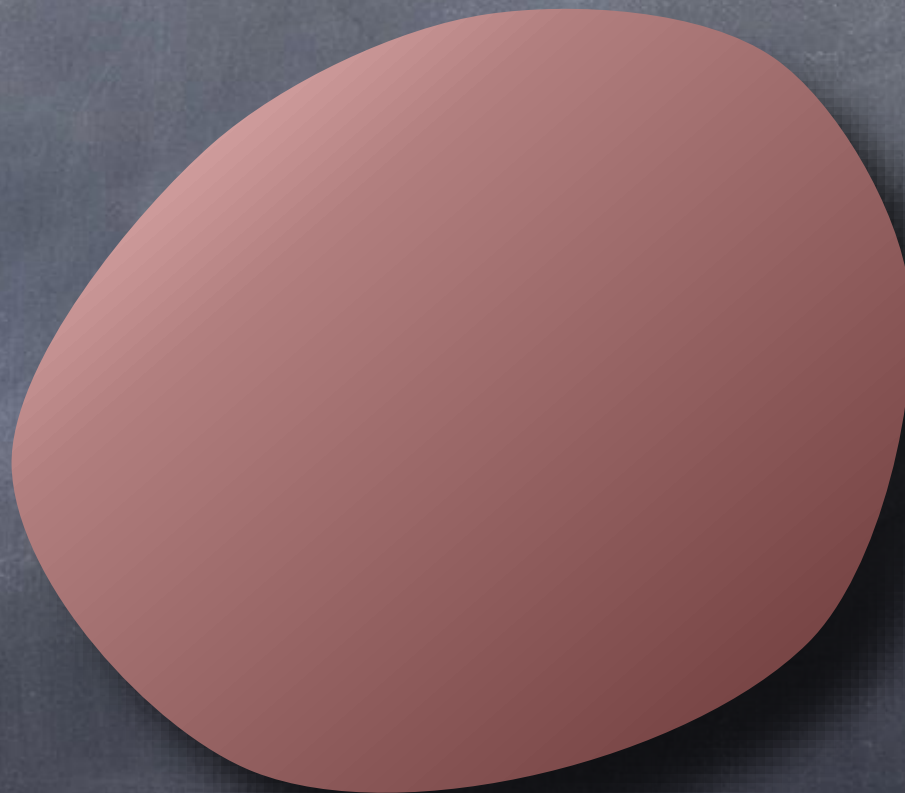
Forças externas

corpo elástico  
deformável



# Equilíbrio de um corpo deformável

Forças externas

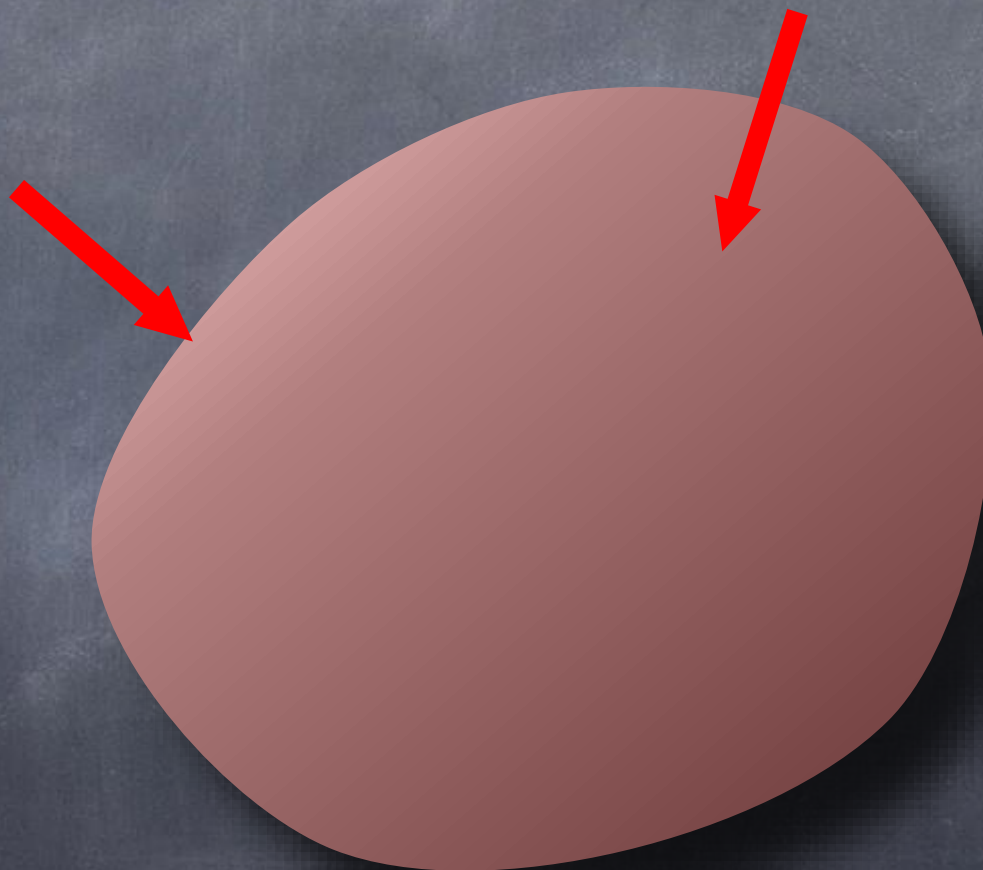




## Equilíbrio de um corpo deformável

Forças externas

**Cargas  
concentradas**

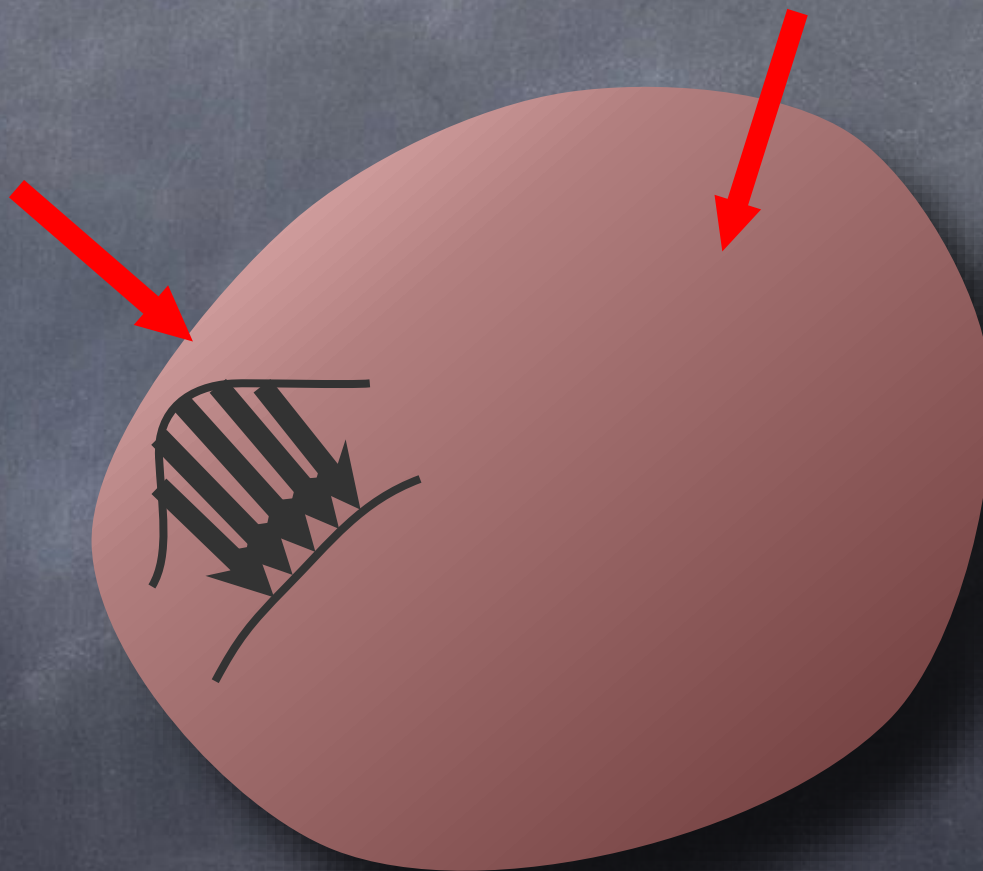


## Equilíbrio de um corpo deformável

Forças externas

**Cargas  
concentradas**

**Cargas  
distribuídas**



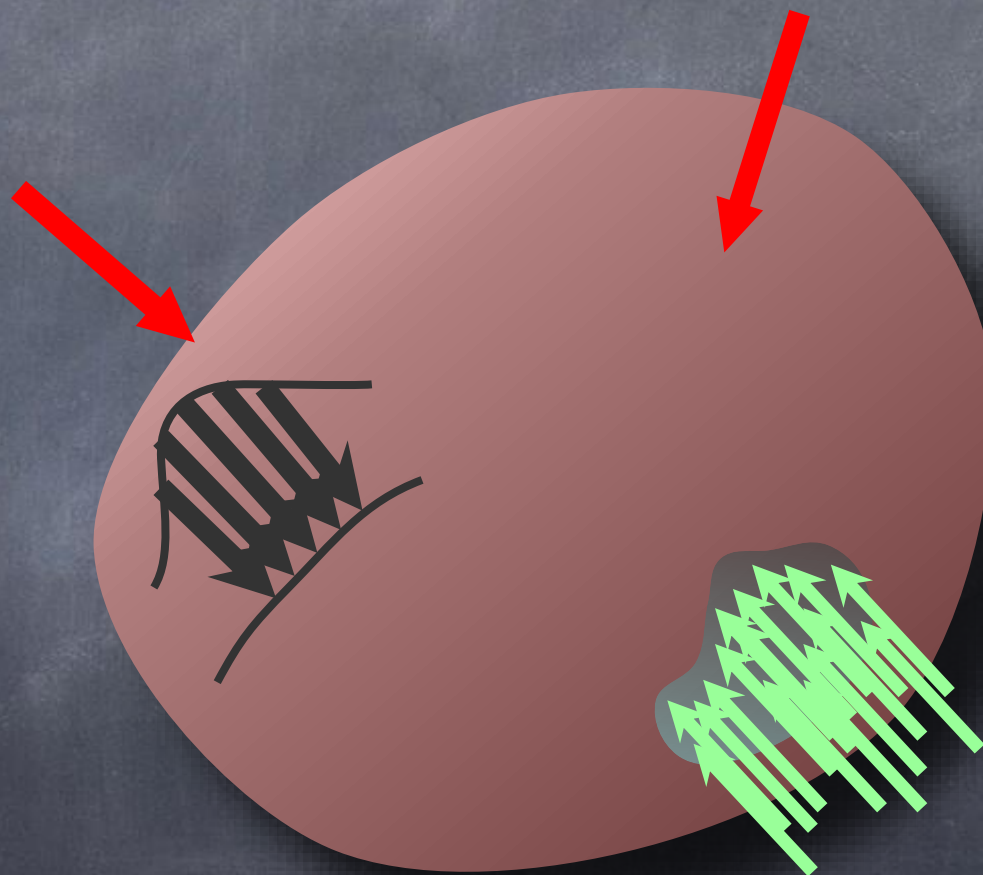
## Equilíbrio de um corpo deformável

Forças externas

**Cargas  
concentradas**

**Cargas  
distribuídas**

**Forças de  
superfície**





## Equilíbrio de um corpo deformável

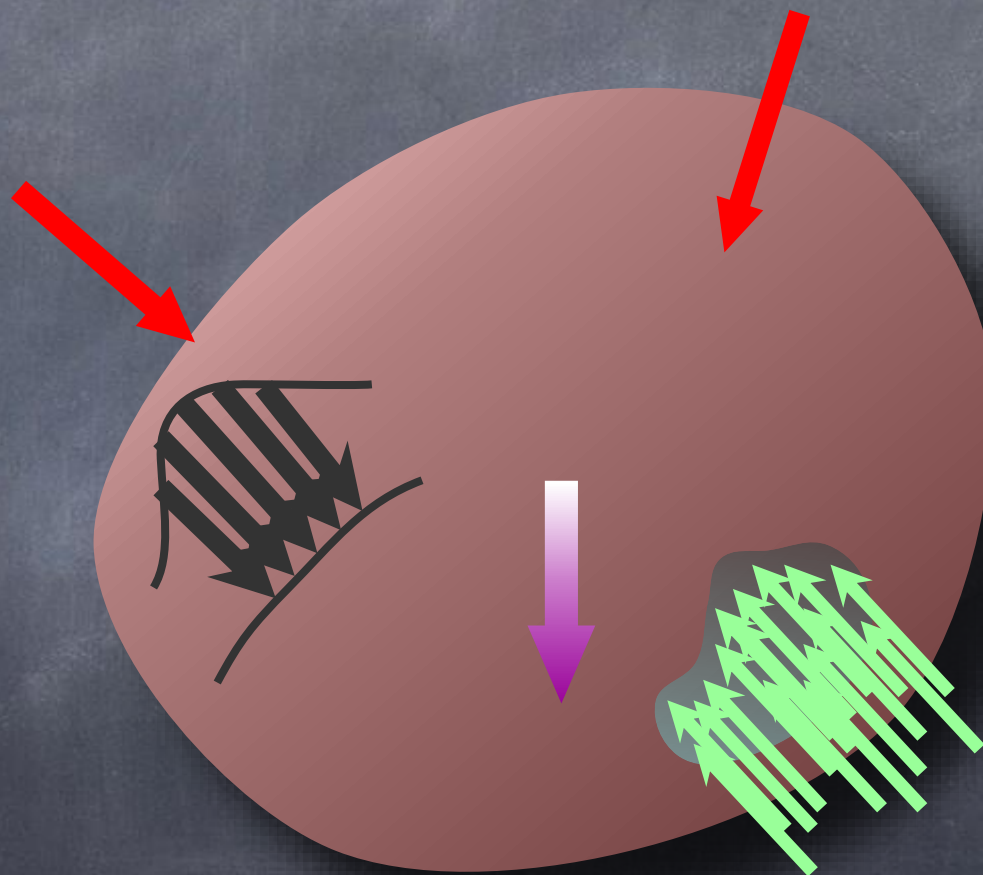
Forças externas

**Cargas  
concentradas**

**Cargas  
distribuídas**

**Forças de  
superfície**

**Forças de corpo**



# Equilíbrio de um corpo deformável

# Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio



# Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio



# Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio

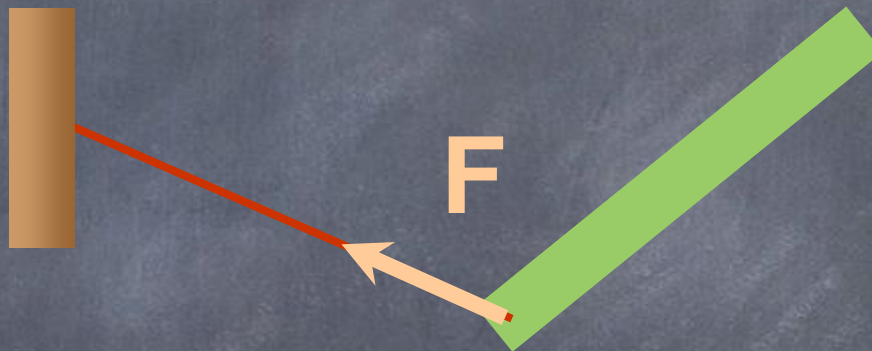
Vínculo tipo cabo



## Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio

Vínculo tipo cabo



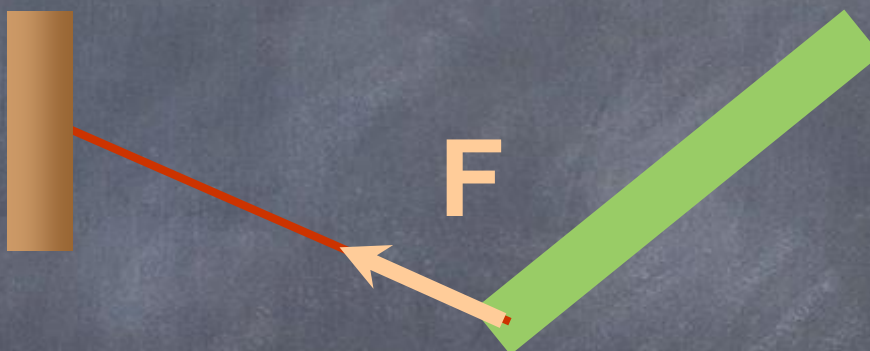


## Equilíbrio de um corpo deformável

### Reações de apoio

Vínculo tipo cabo

Uma incógnita ( $F$ )



# Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio



# Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio

Vínculo tipo rolete

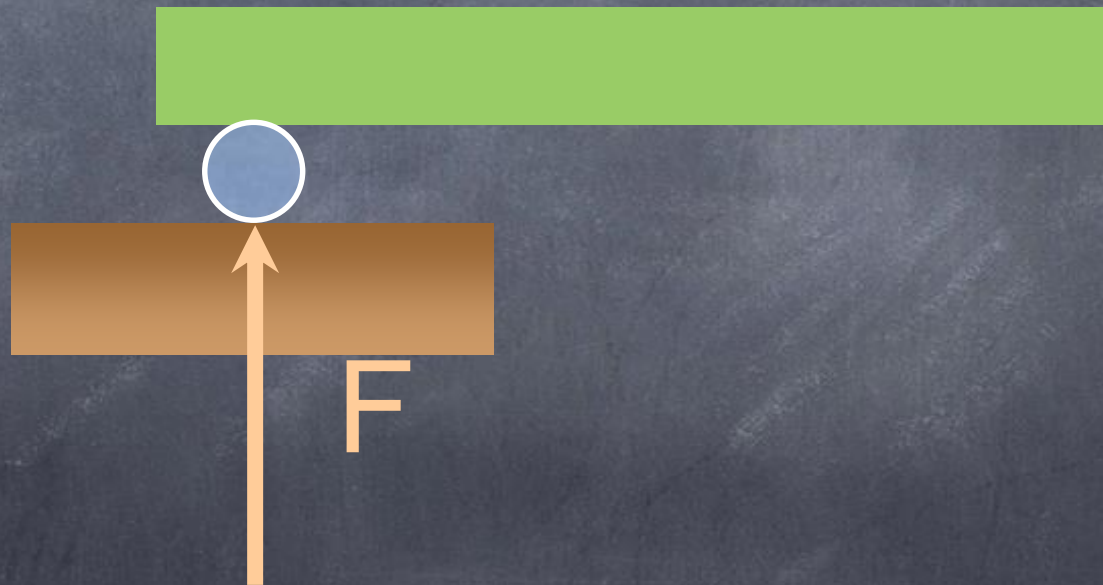




## Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio

Vínculo tipo rolete

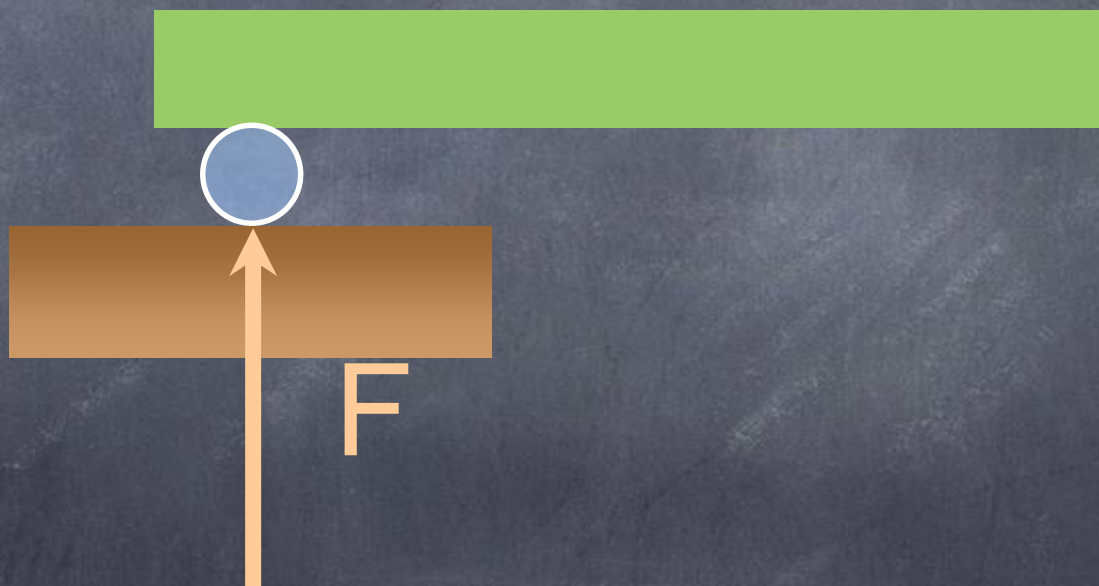


## Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio

Vínculo tipo rolete

Uma incógnita ( $F$ )



# Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio





# Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio

Vínculo tipo apoio simples



# Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio

Vínculo tipo apoio simples



## Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio

Vínculo tipo apoio simples

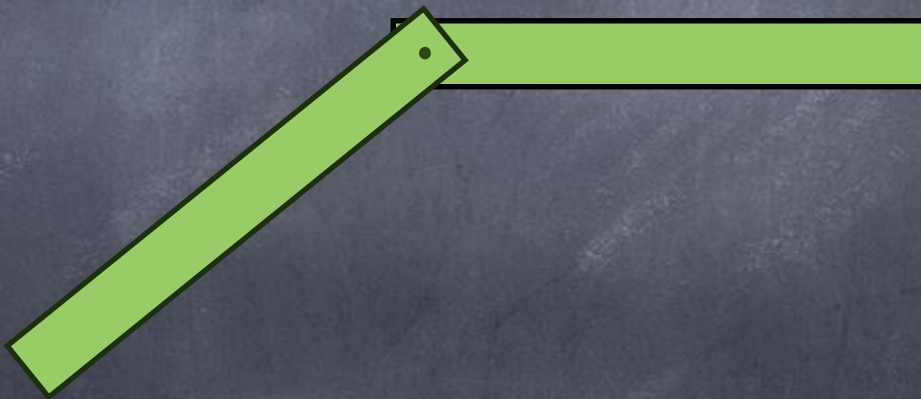
Uma incógnita ( $F$ )





# Equilíbrio de um corpo deformável

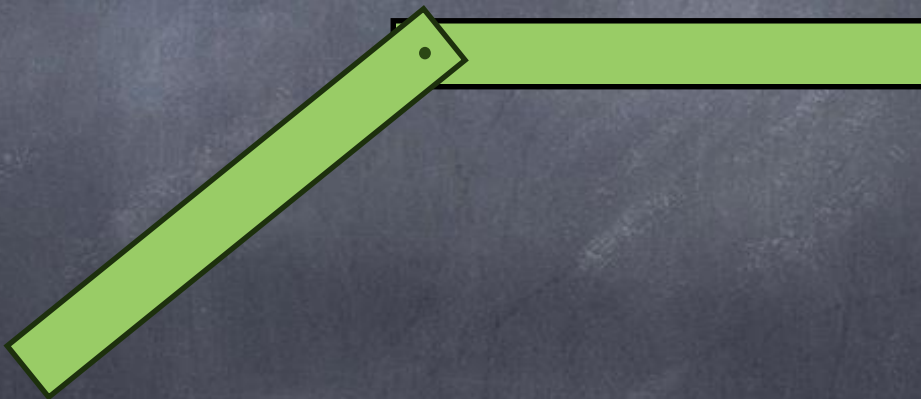
Reações de apoio



# Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio

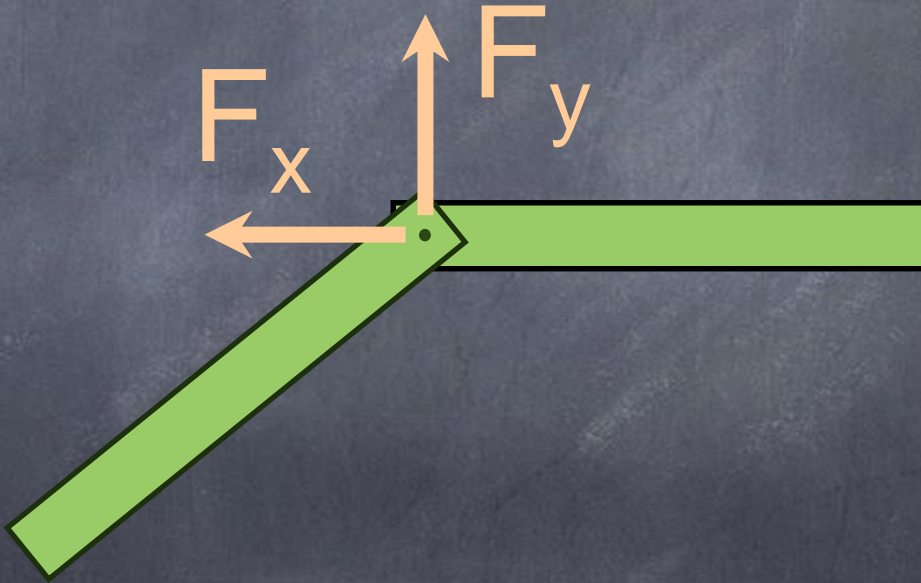
Vínculo tipo pino interno



## Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio

Vínculo tipo pino interno



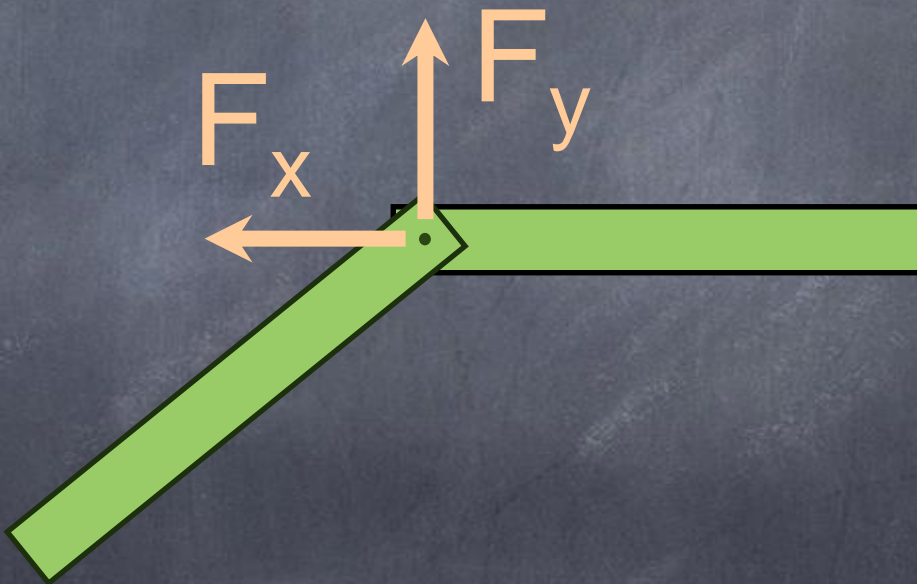


## Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio

Vínculo tipo pino interno

Duas incógnitas ( $F_x$ ,  $F_y$ )



# Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio



# Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio

Vínculo tipo pino externo

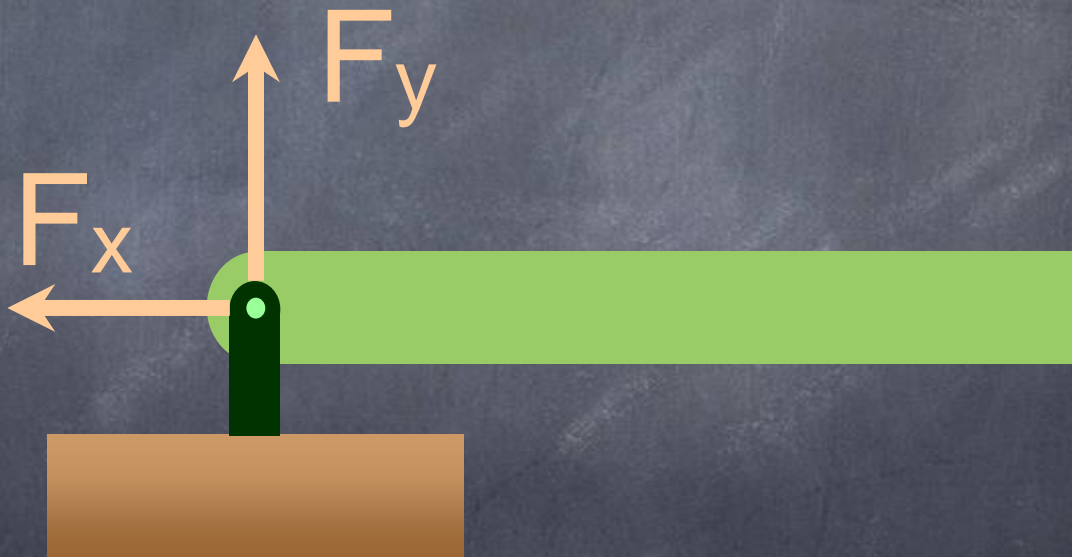




## Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio

Vínculo tipo pino externo

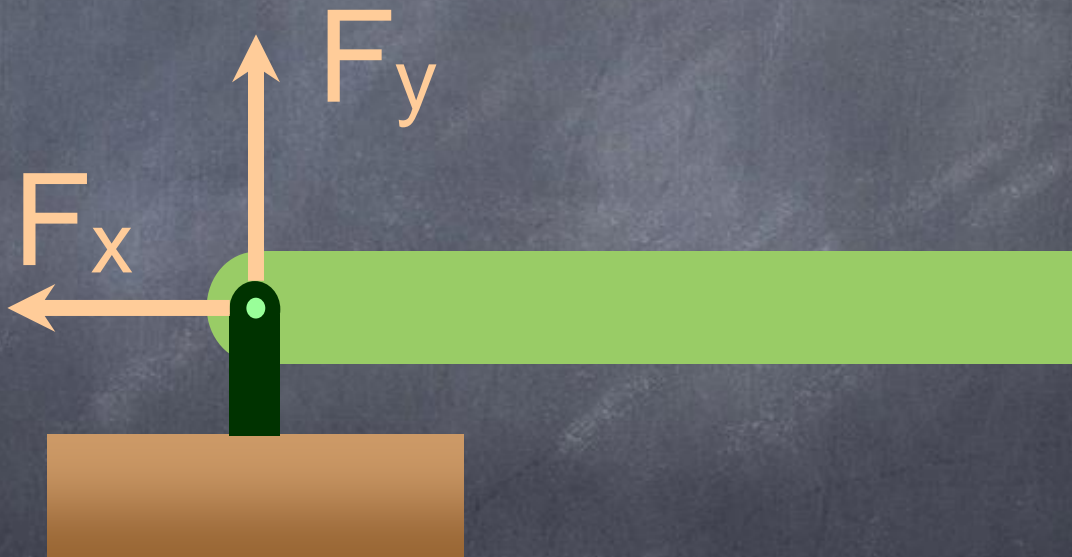


## Equilíbrio de um corpo deformável

### Reações de apoio

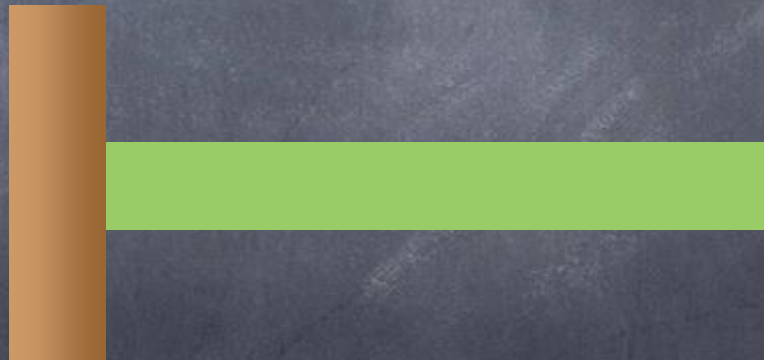
Vínculo tipo pino externo

Duas incógnitas ( $F_x$ ,  $F_y$ )



# Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio

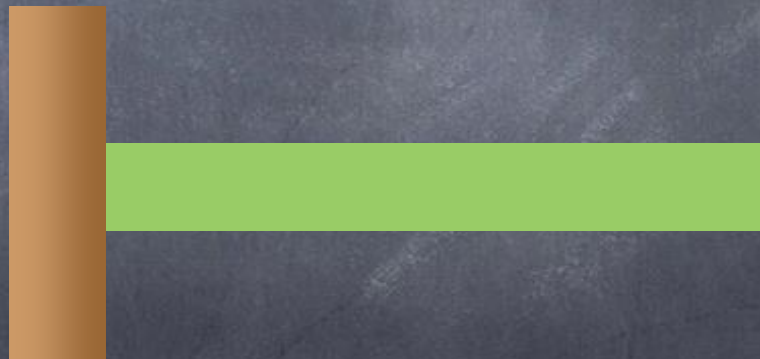




# Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio

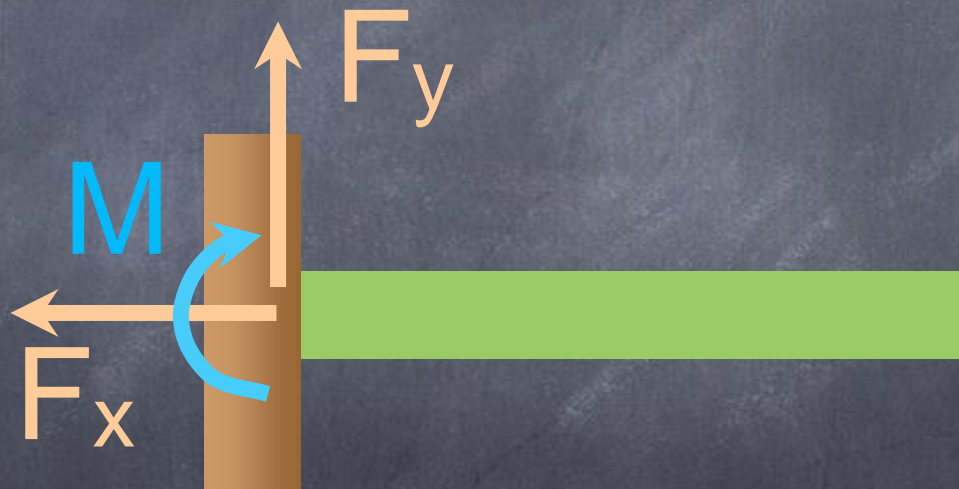
Vínculo tipo engaste



## Equilíbrio de um corpo deformável

Reações de apoio

Vínculo tipo engaste

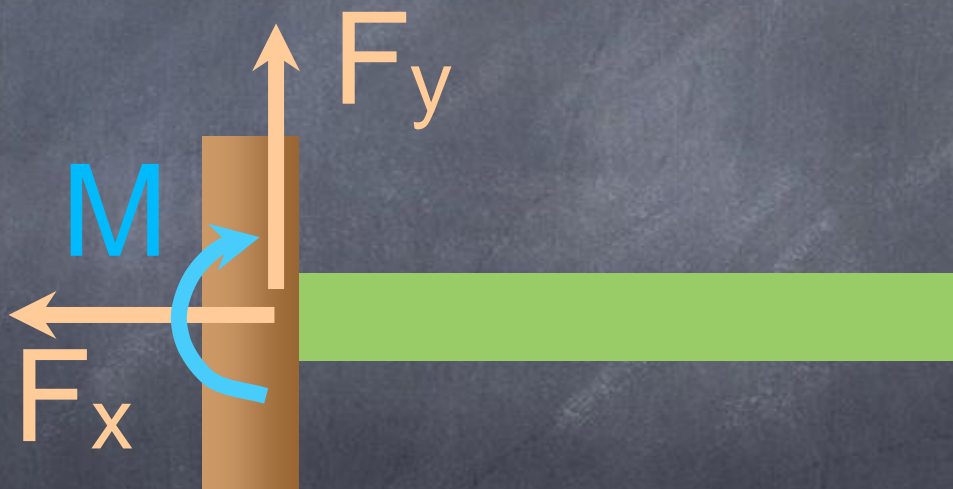


## Equilíbrio de um corpo deformável

### Reações de apoio

Vínculo tipo engaste

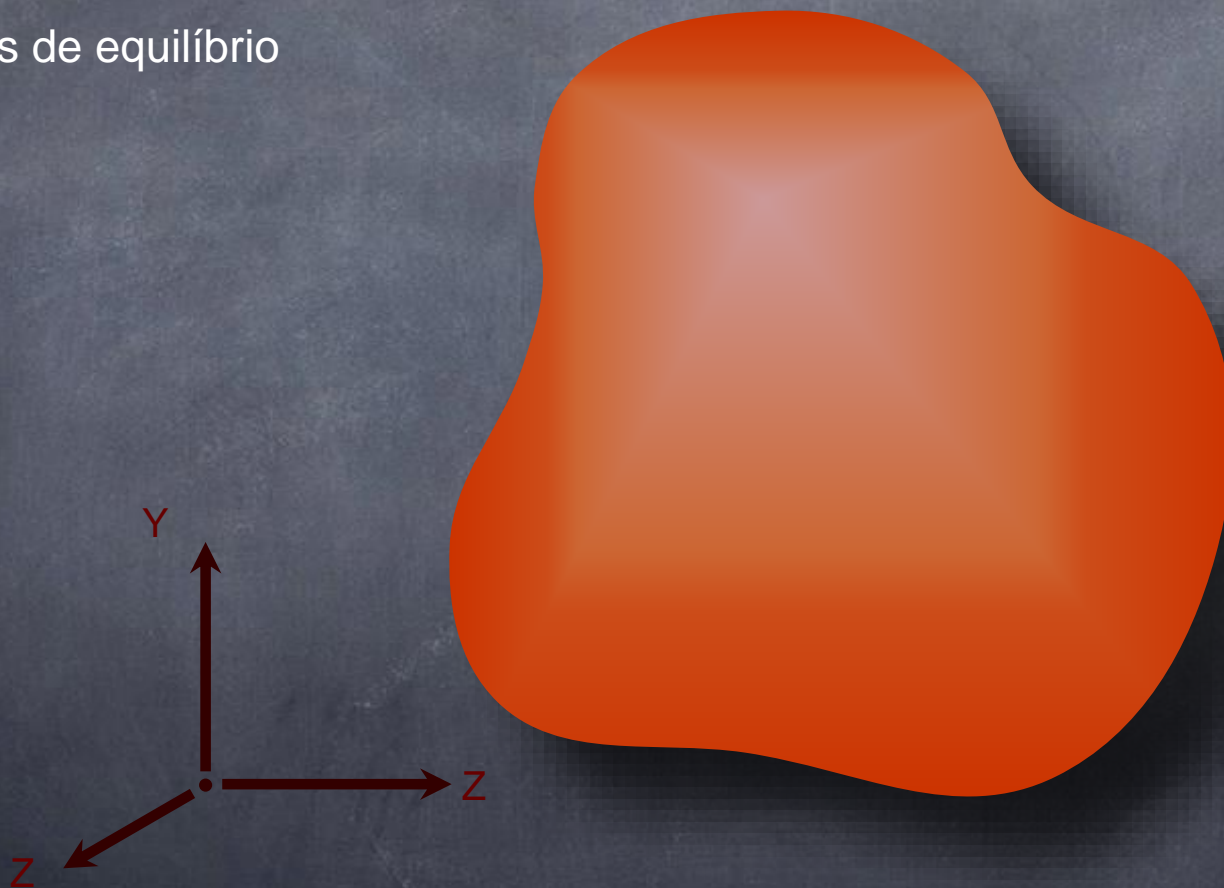
Tres incógnitas ( $F_x$ ,  $F_y$ ,  $M$ )





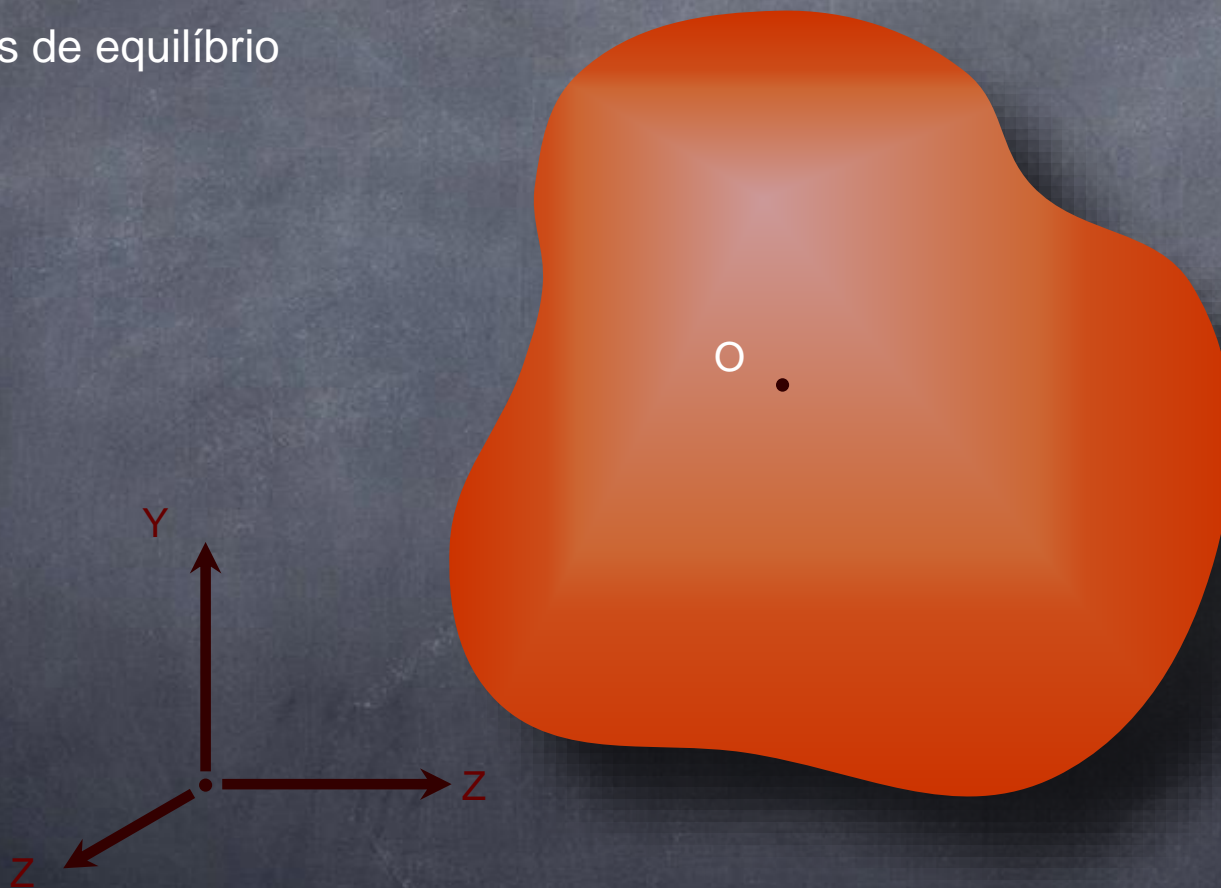
# Equilíbrio de um corpo deformável

Equações de equilíbrio



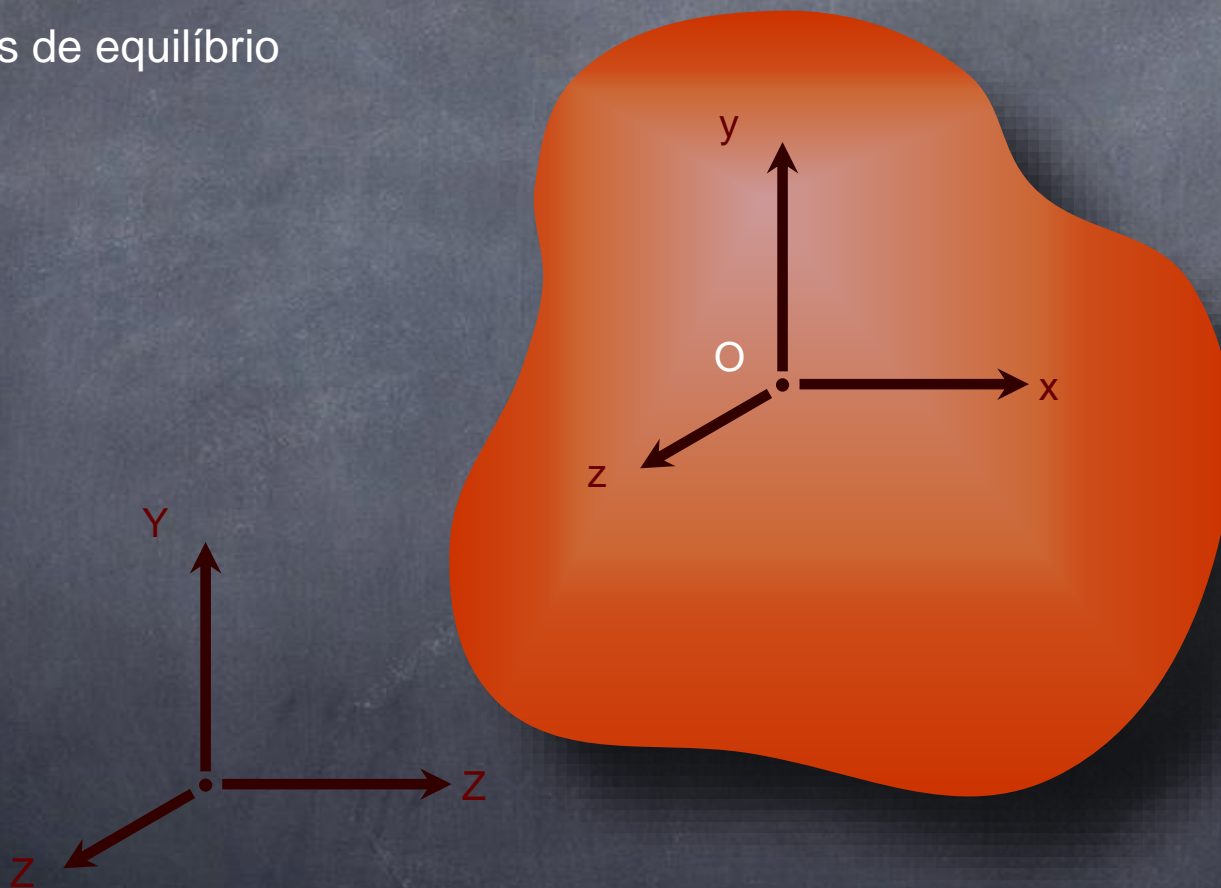
# Equilíbrio de um corpo deformável

Equações de equilíbrio



## Equilíbrio de um corpo deformável

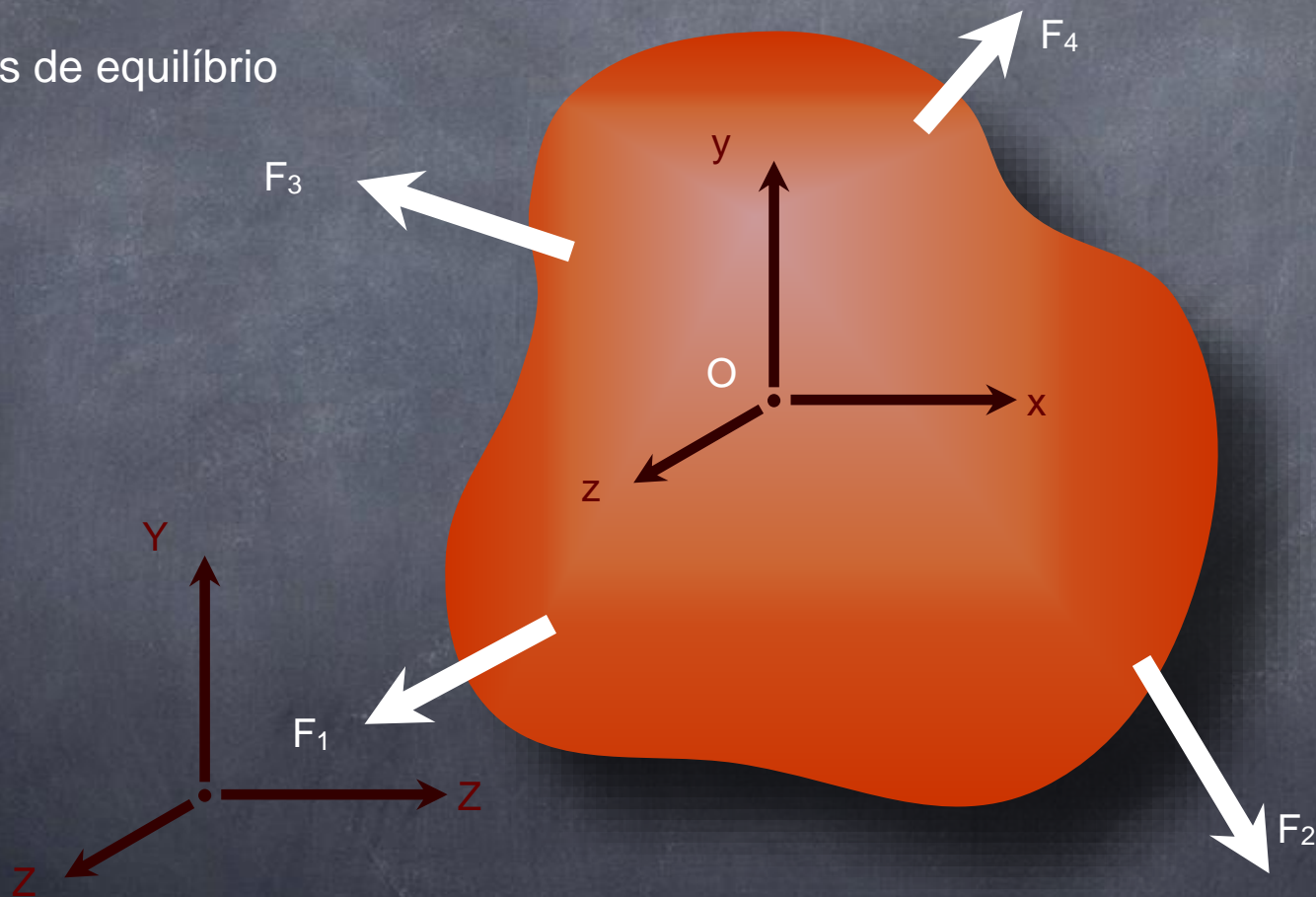
Equações de equilíbrio





## Equilíbrio de um corpo deformável

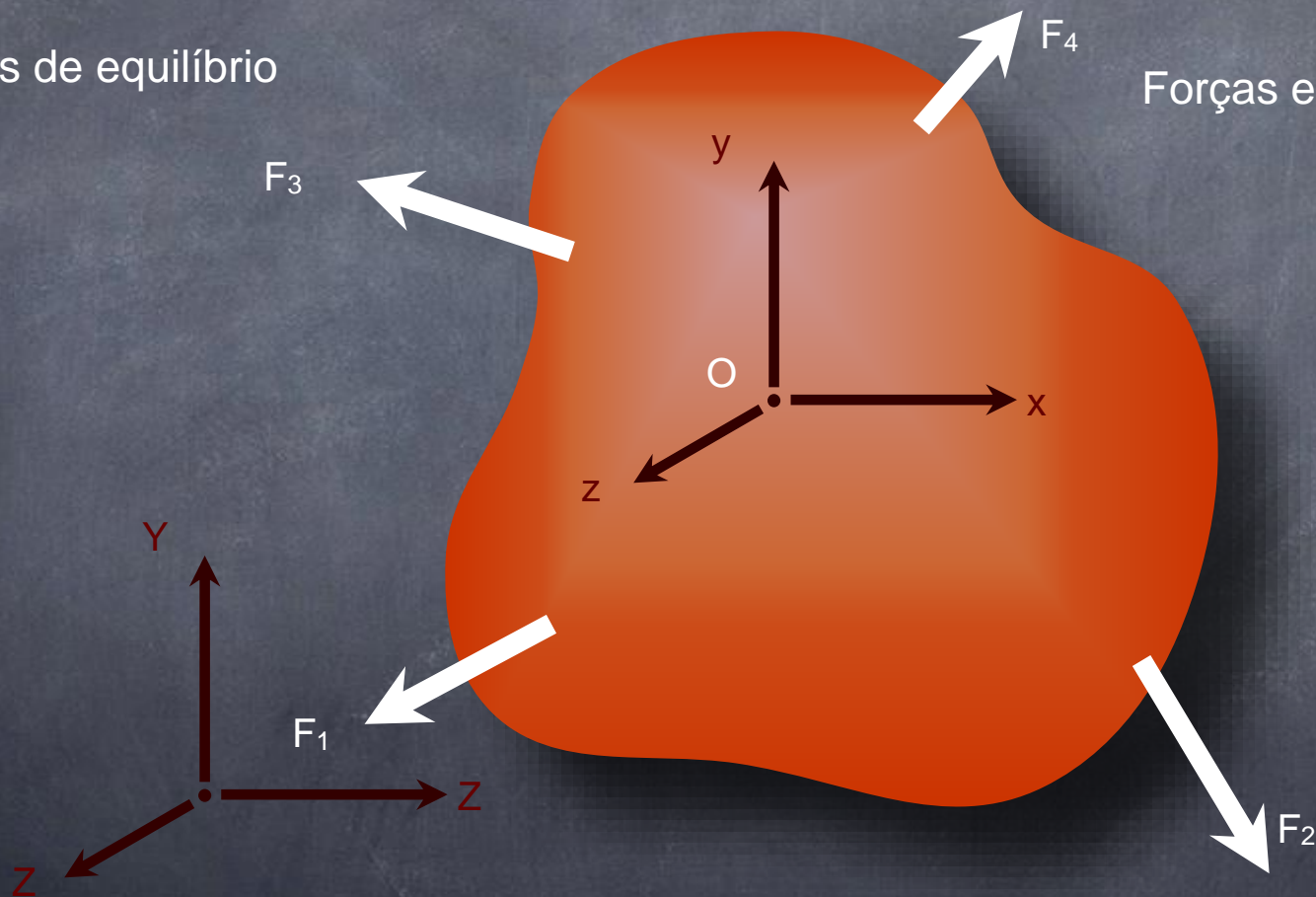
Equações de equilíbrio



## Equilíbrio de um corpo deformável

Equações de equilíbrio

Forças externas aplicadas

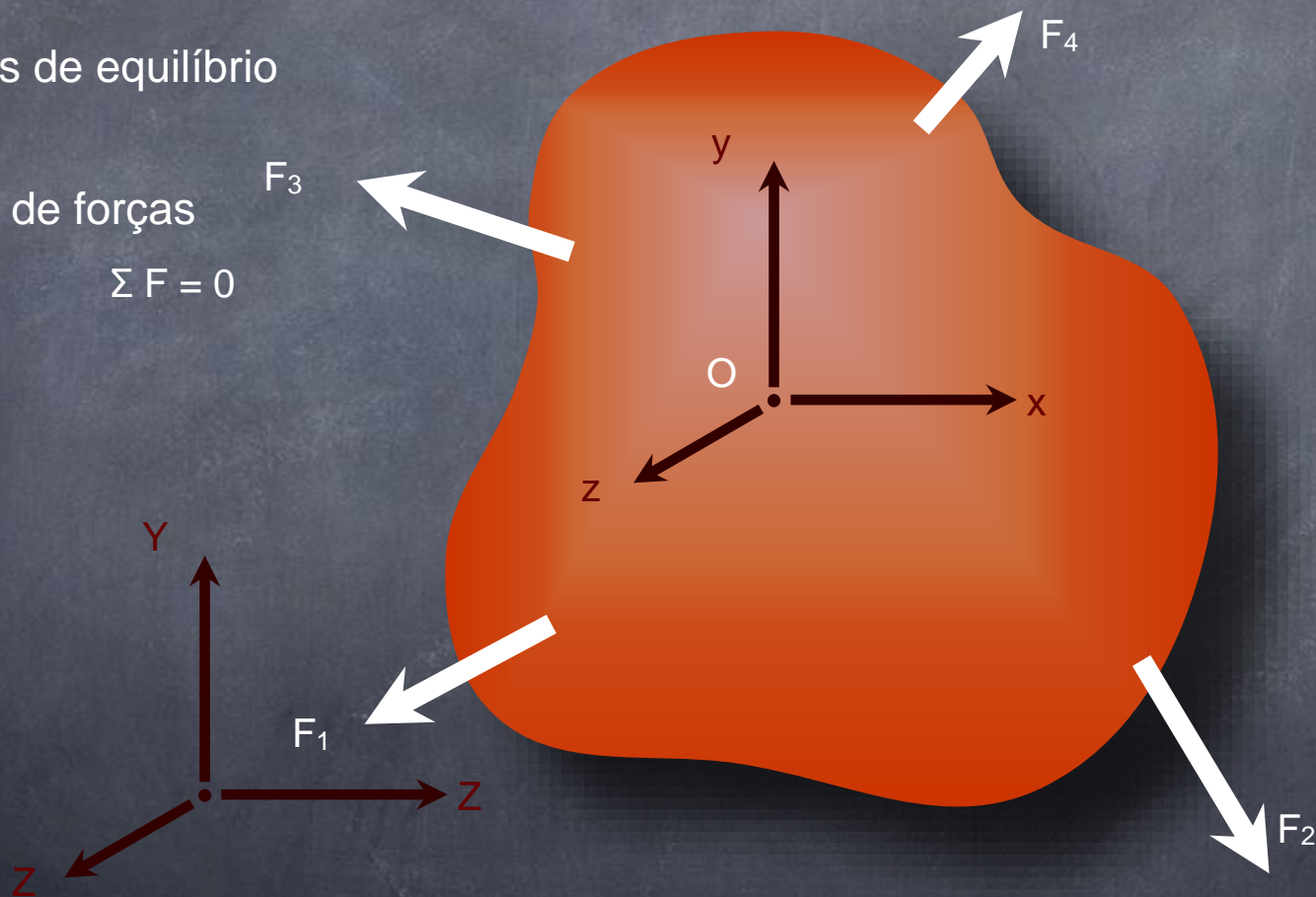


## Equilíbrio de um corpo deformável

Equações de equilíbrio

Equilíbrio de forças

$$\Sigma F = 0$$

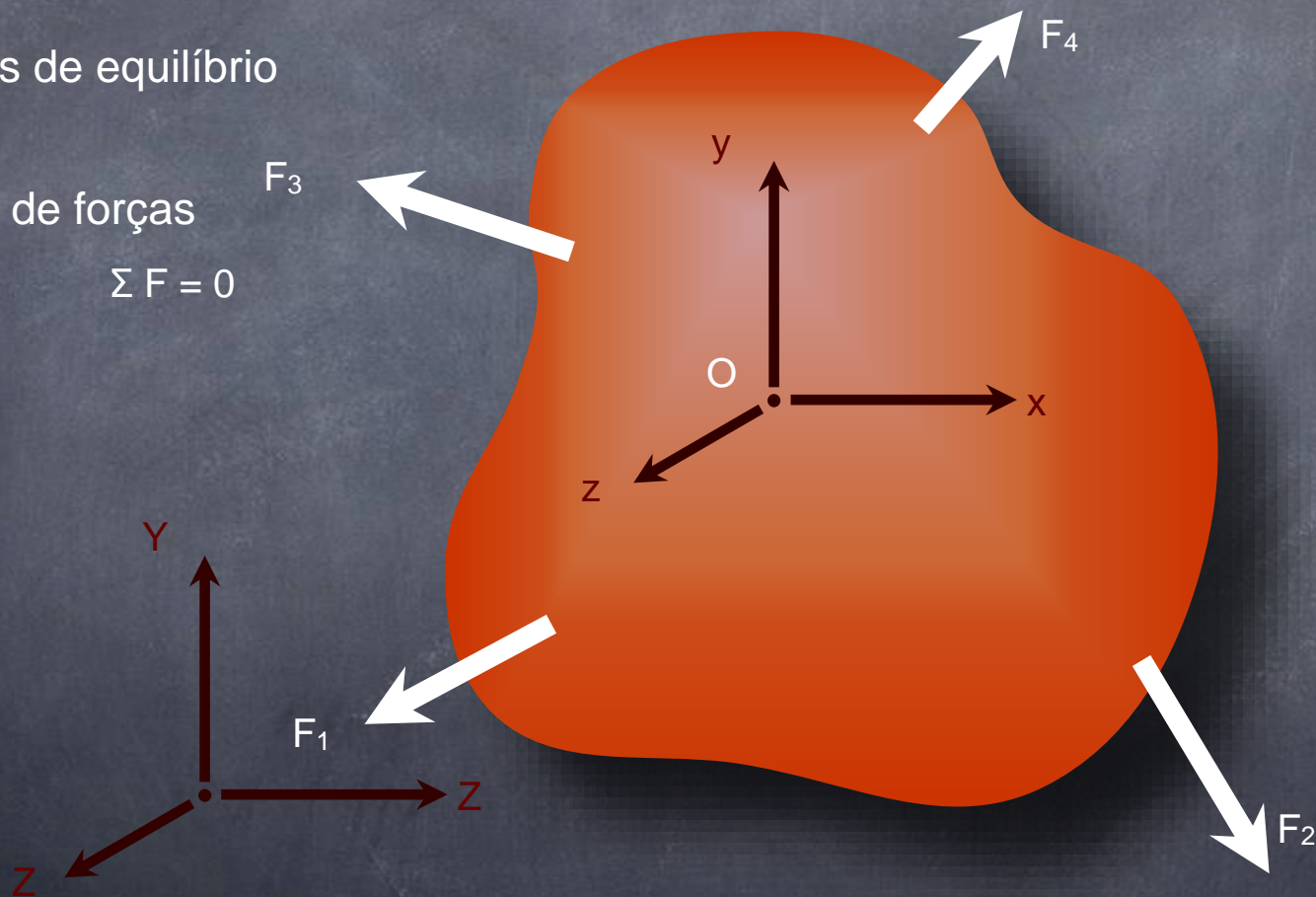




## Equilíbrio de um corpo deformável

Equações de equilíbrio

Equilíbrio de forças  
 $\Sigma F = 0$



$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0$$

## Equilíbrio de um corpo deformável

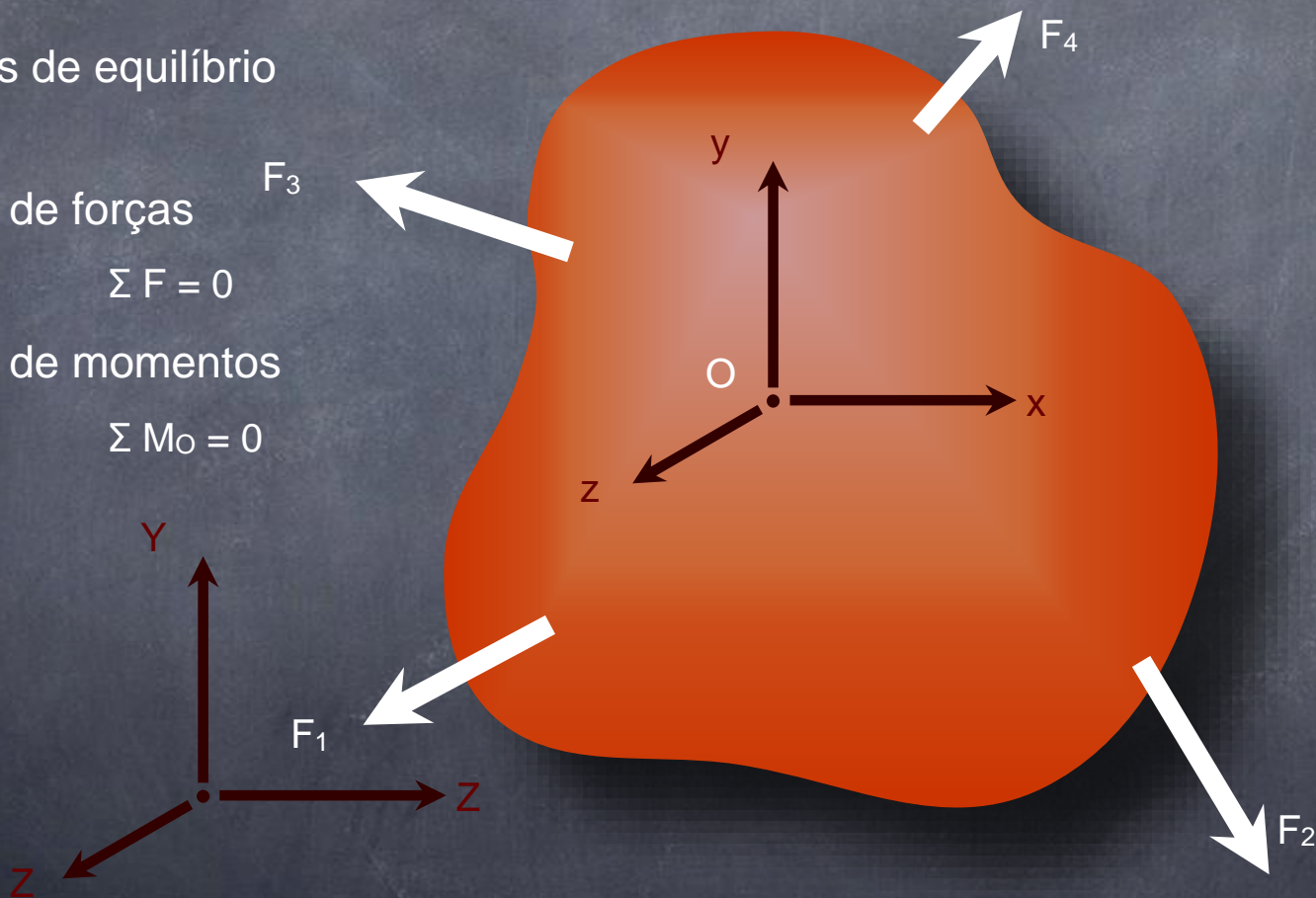
Equações de equilíbrio

Equilíbrio de forças

$$\Sigma F = 0$$

Equilíbrio de momentos

$$\Sigma M_O = 0$$



$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0$$

## Equilíbrio de um corpo deformável

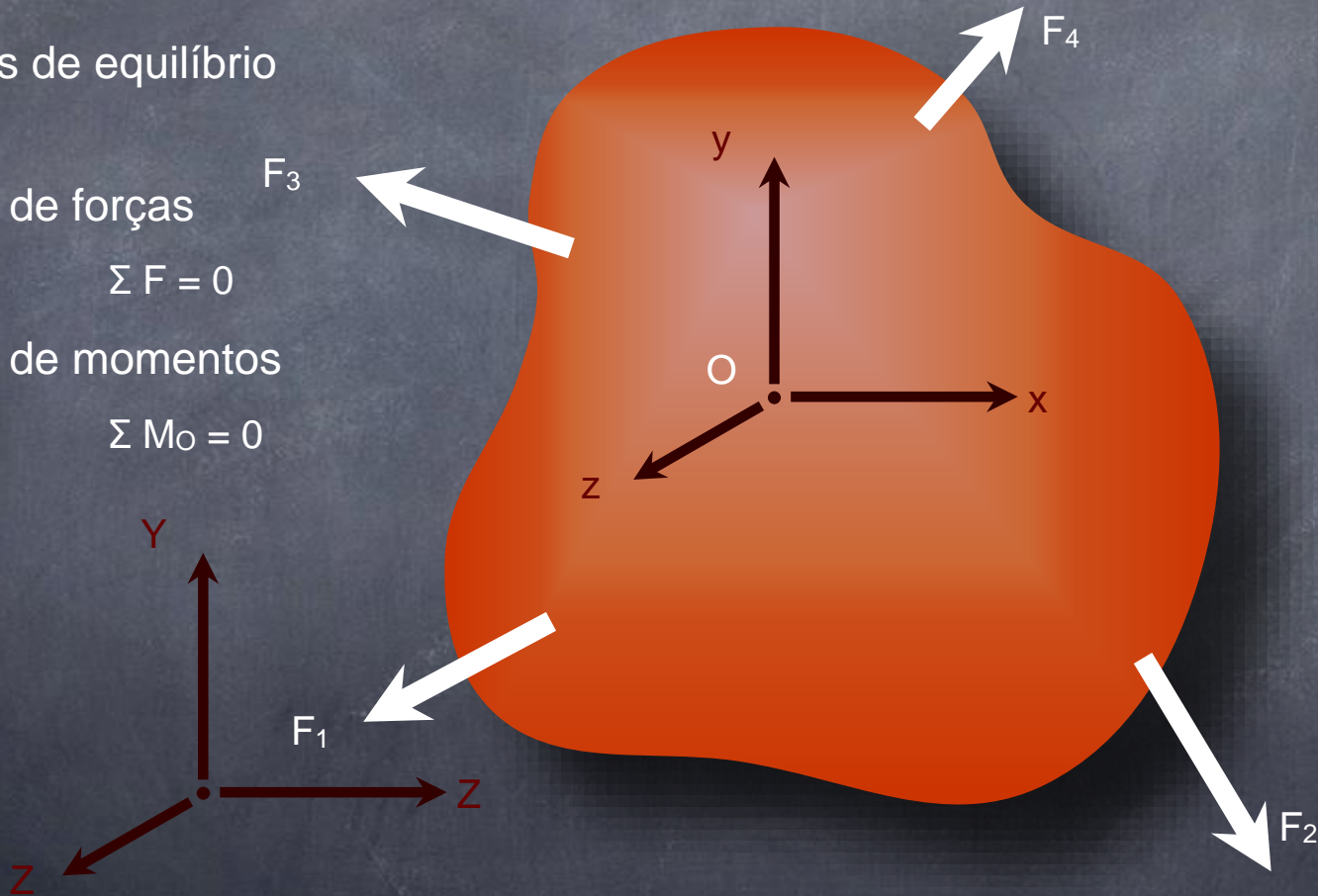
Equações de equilíbrio

Equilíbrio de forças

$$\Sigma F = 0$$

Equilíbrio de momentos

$$\Sigma M_O = 0$$



$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0$$

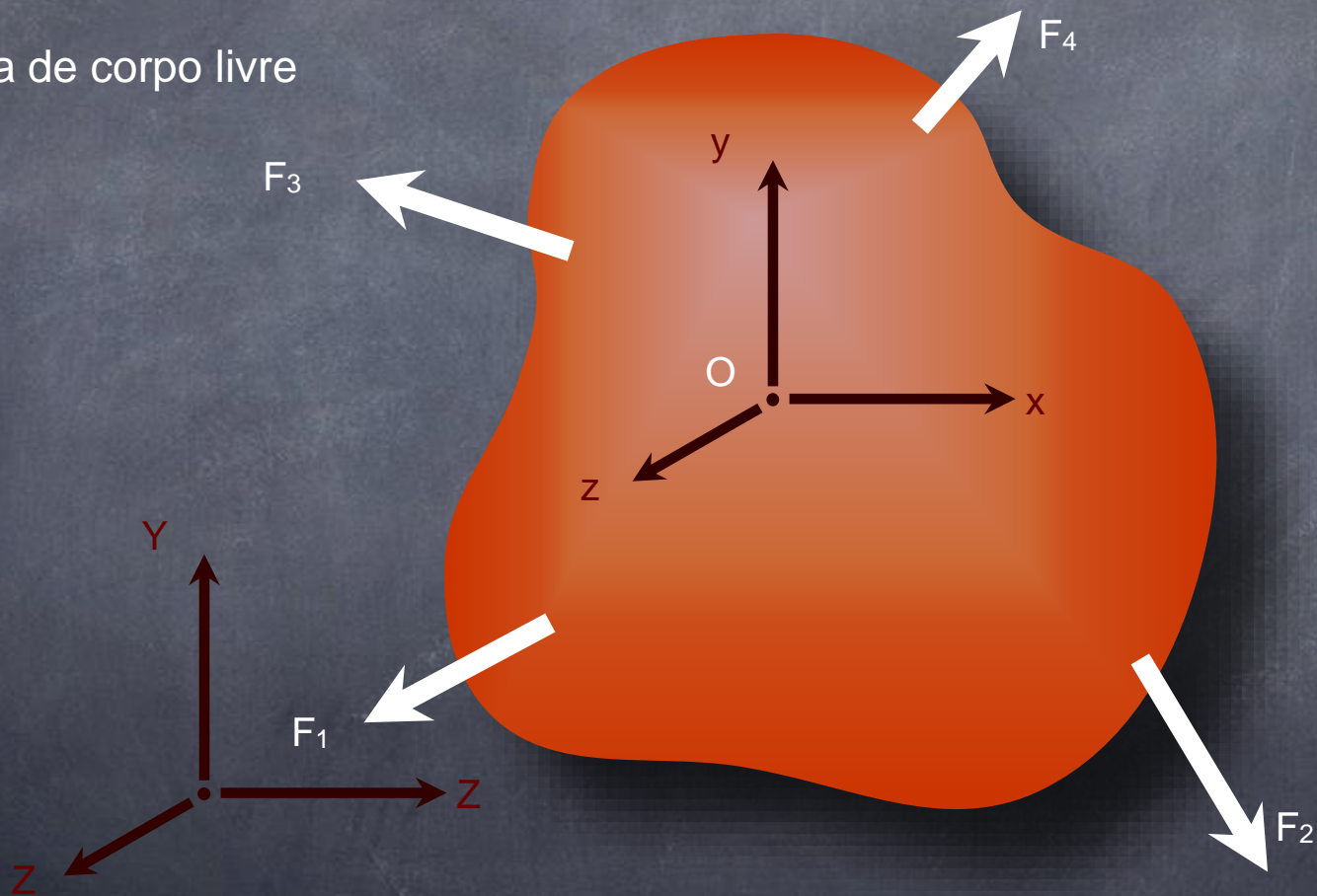
$$\Sigma M_y = 0$$

$$\Sigma M_z = 0$$



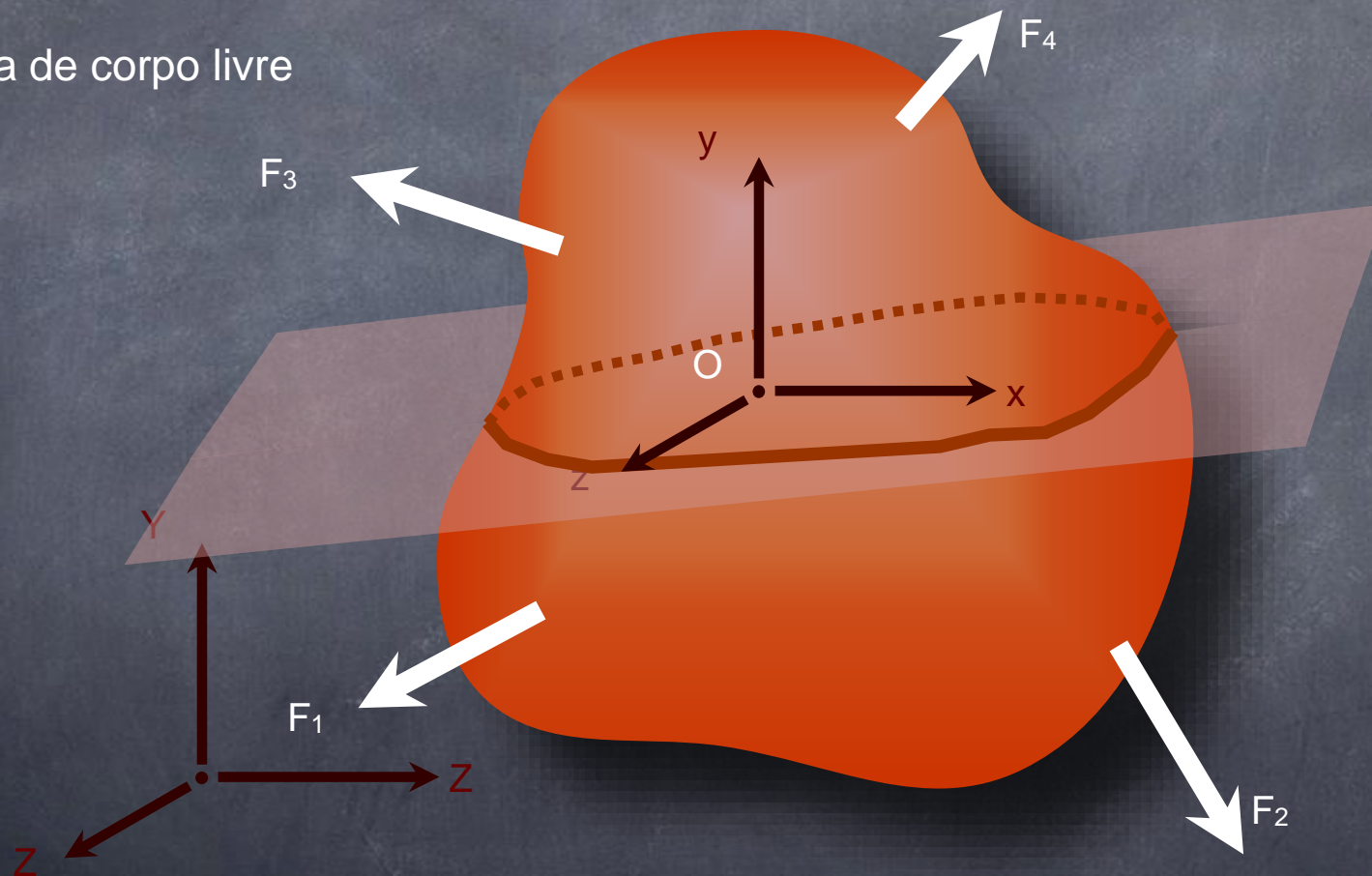
## Equilíbrio de um corpo deformável

Diagrama de corpo livre



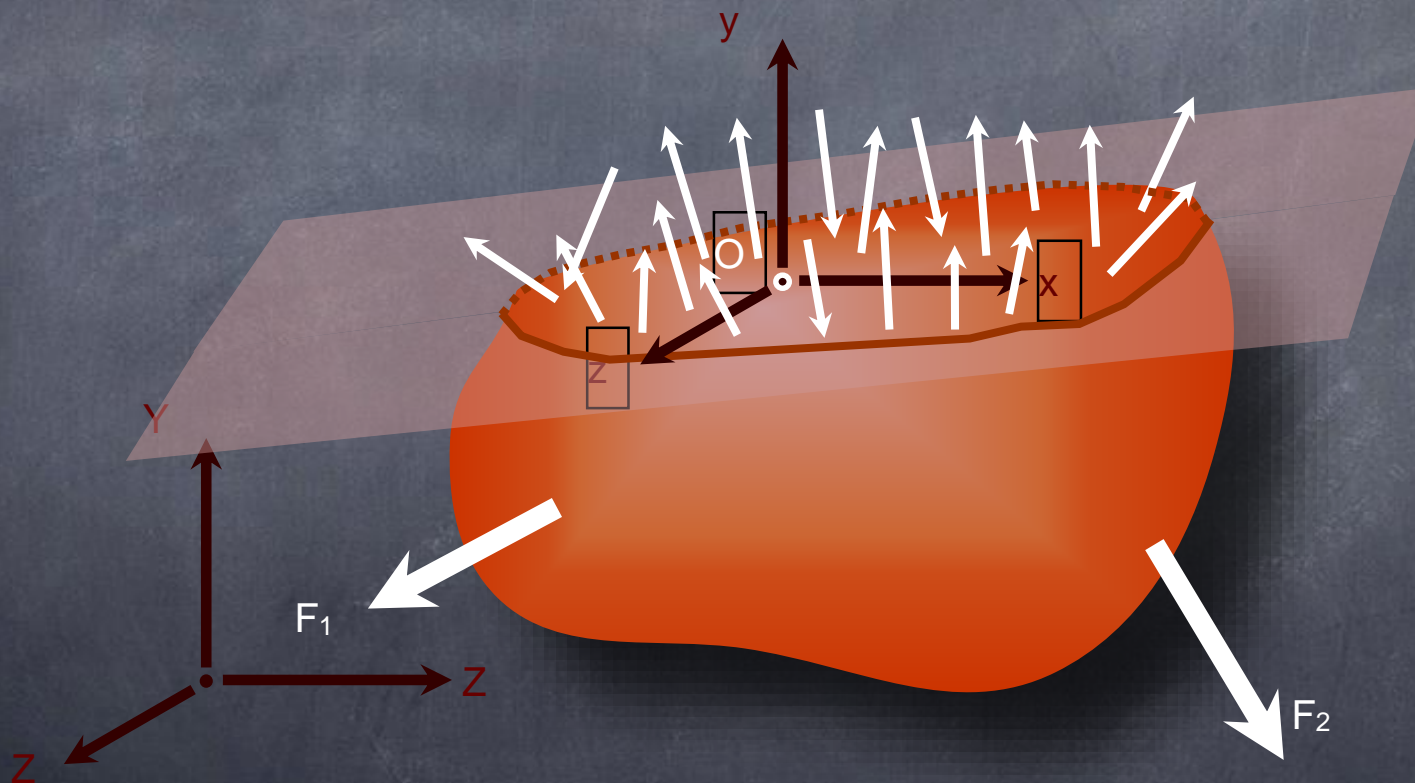
## Equilíbrio de um corpo deformável

Diagrama de corpo livre



## Equilíbrio de um corpo deformável

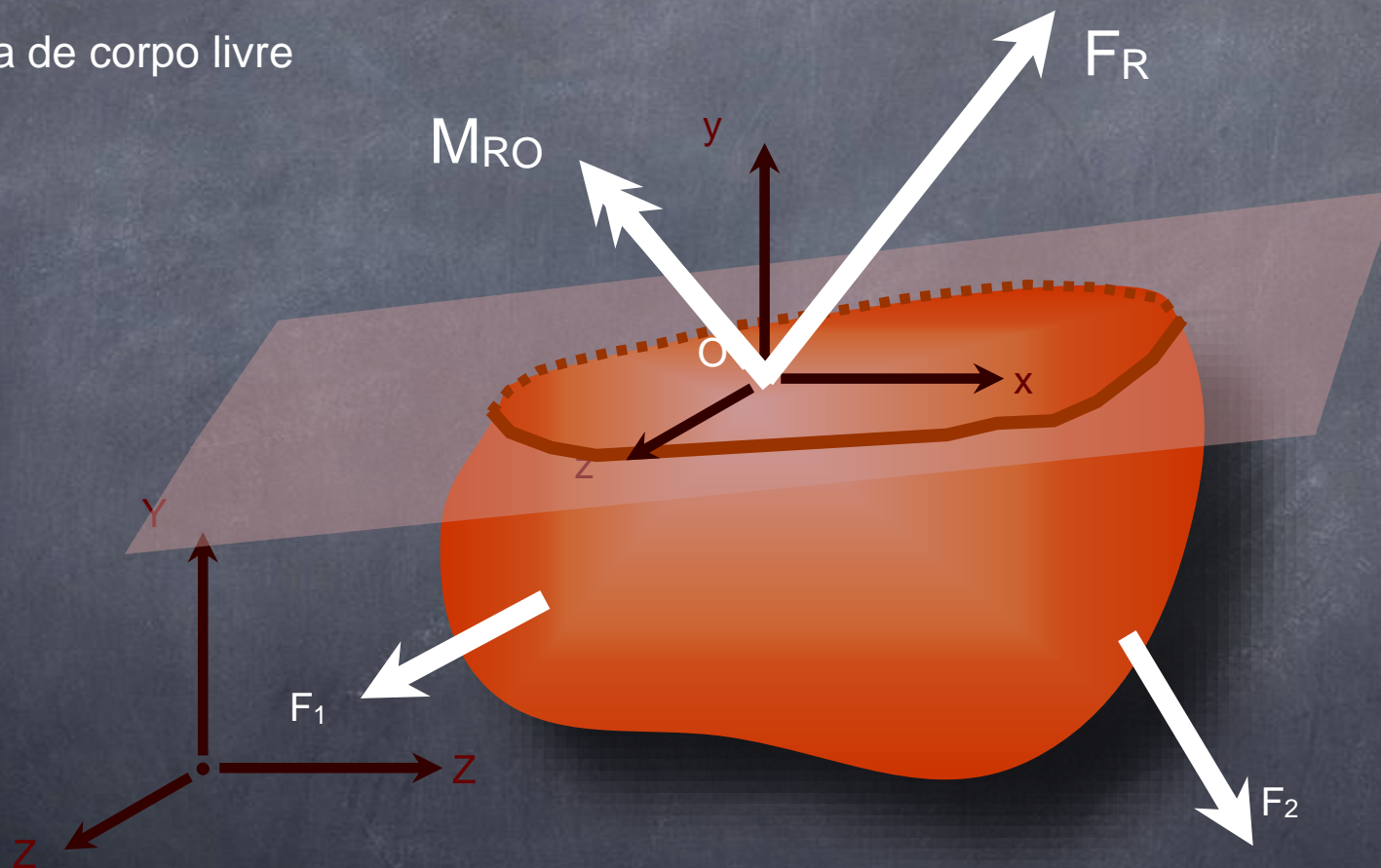
### Diagrama de corpo livre





## Equilíbrio de um corpo deformável

Diagrama de corpo livre



## Equilíbrio de um corpo deformável

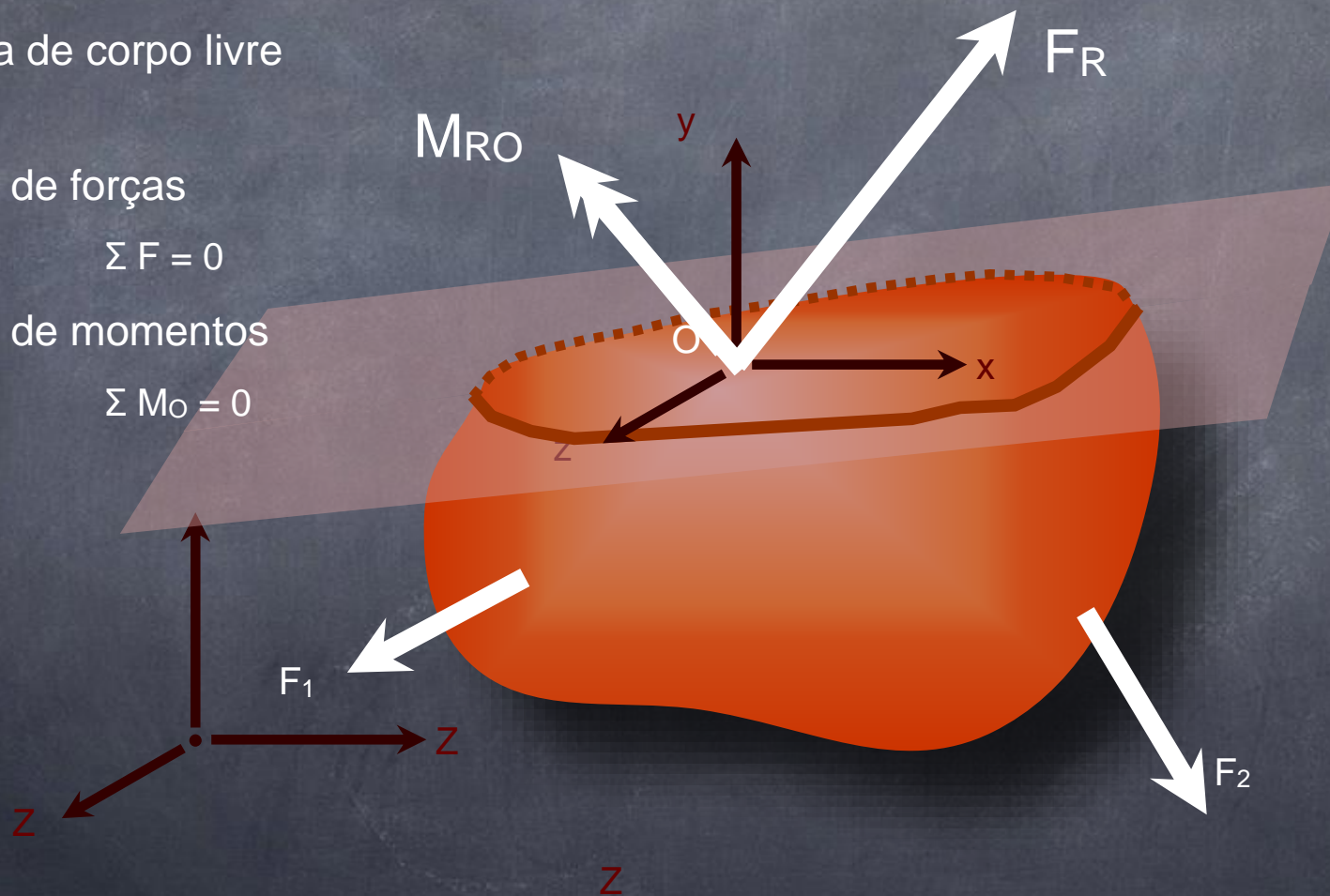
Diagrama de corpo livre

Equilíbrio de forças

$$\Sigma F = 0$$

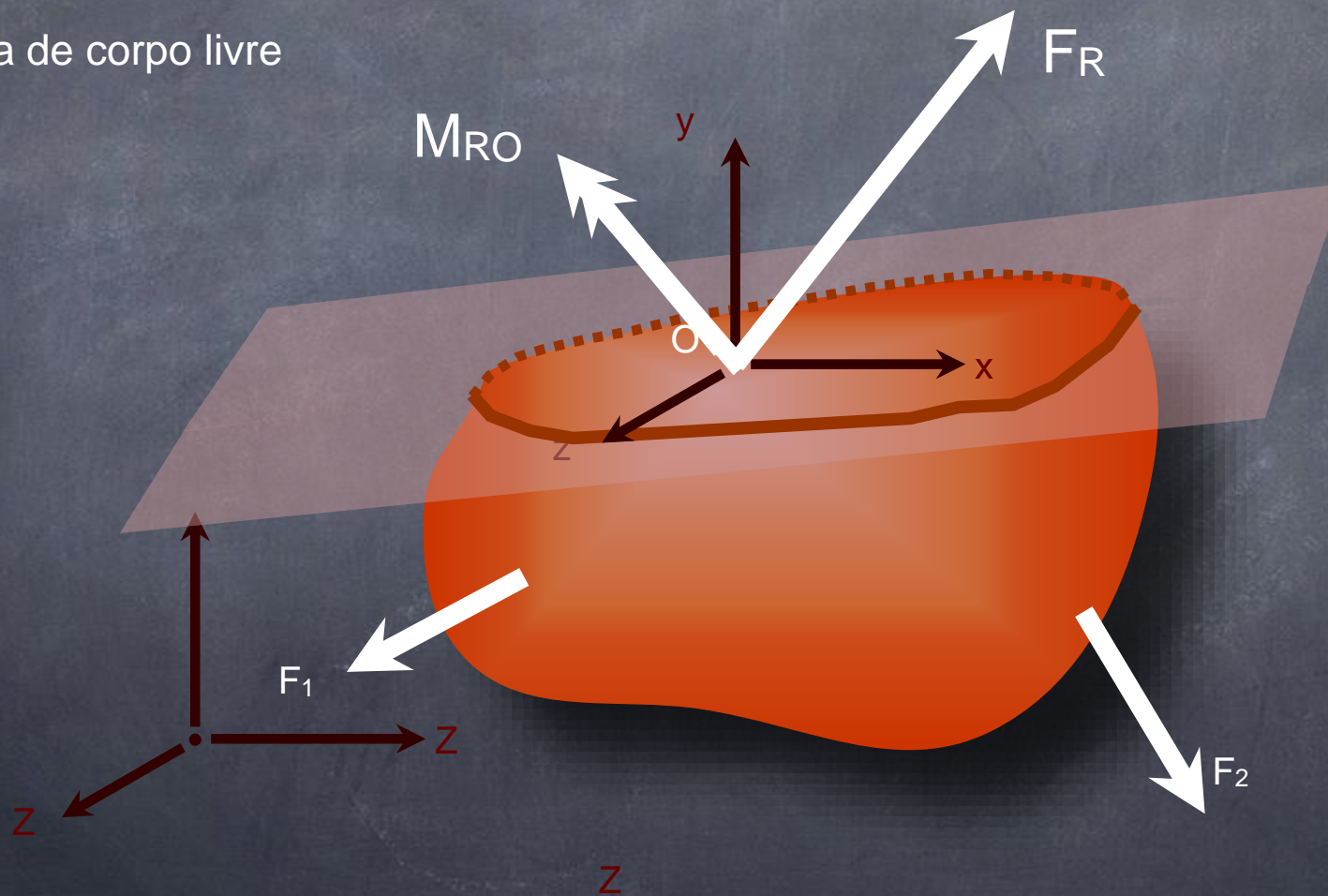
Equilíbrio de momentos

$$\Sigma M_O = 0$$



## Equilíbrio de um corpo deformável

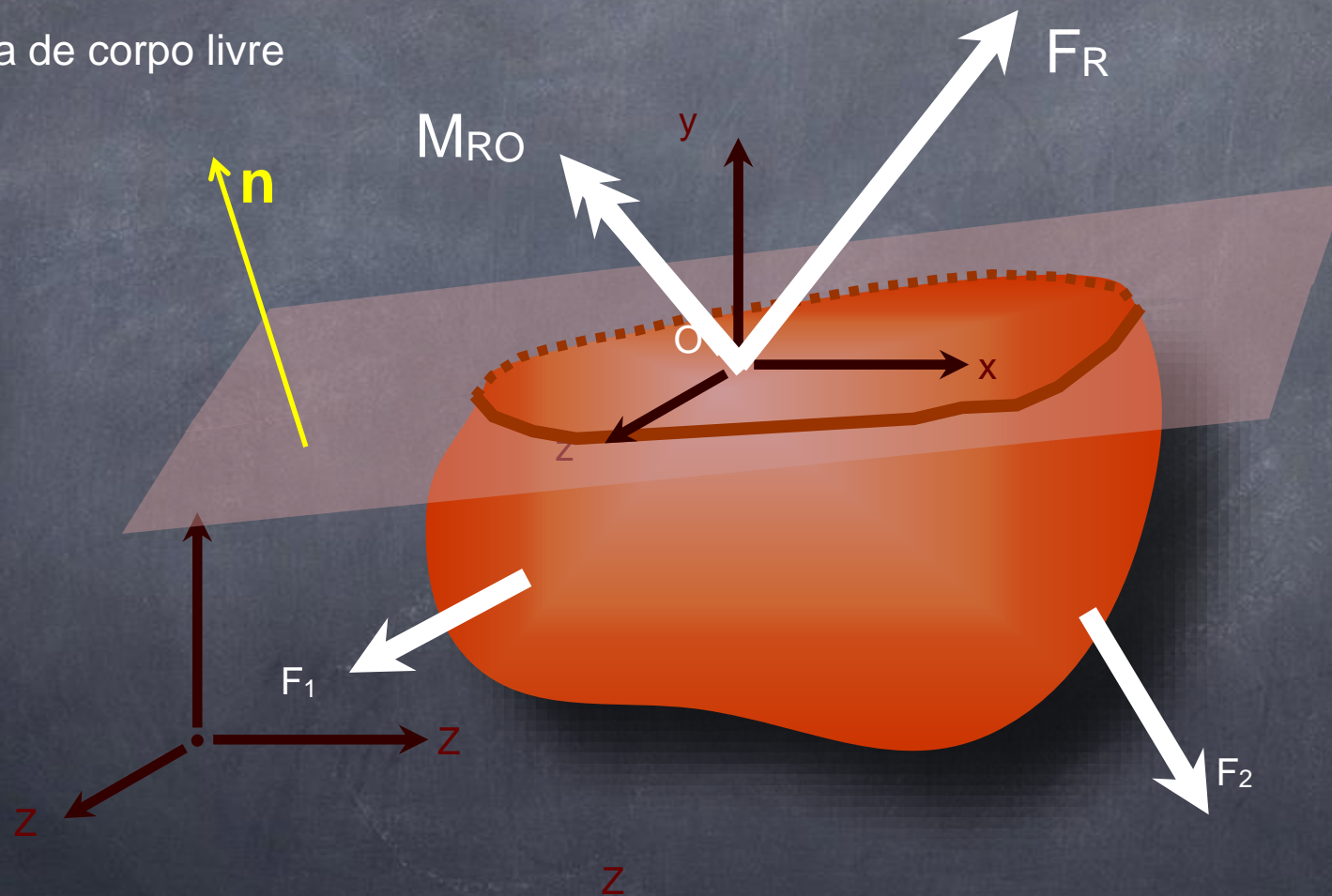
Diagrama de corpo livre





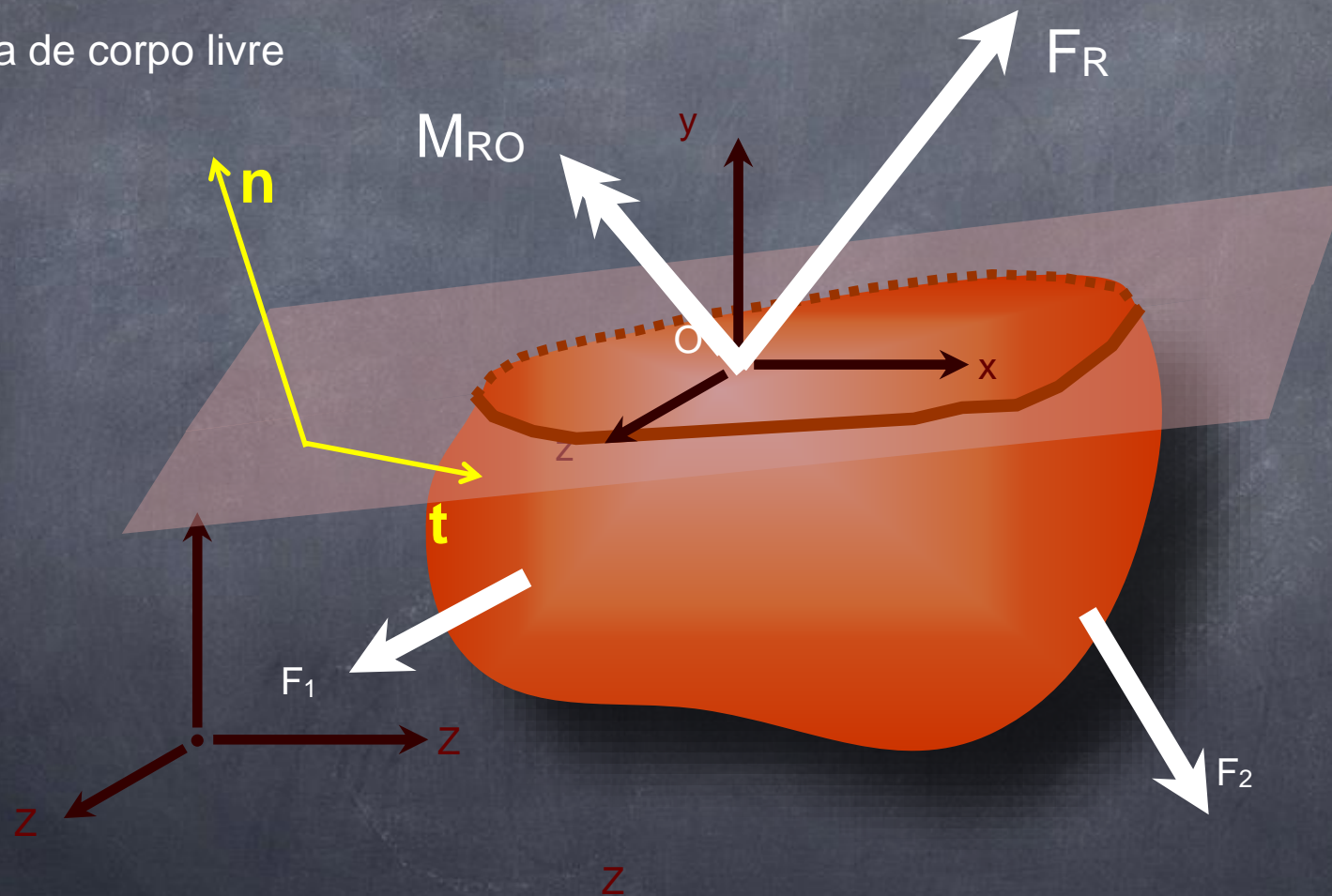
## Equilíbrio de um corpo deformável

Diagrama de corpo livre



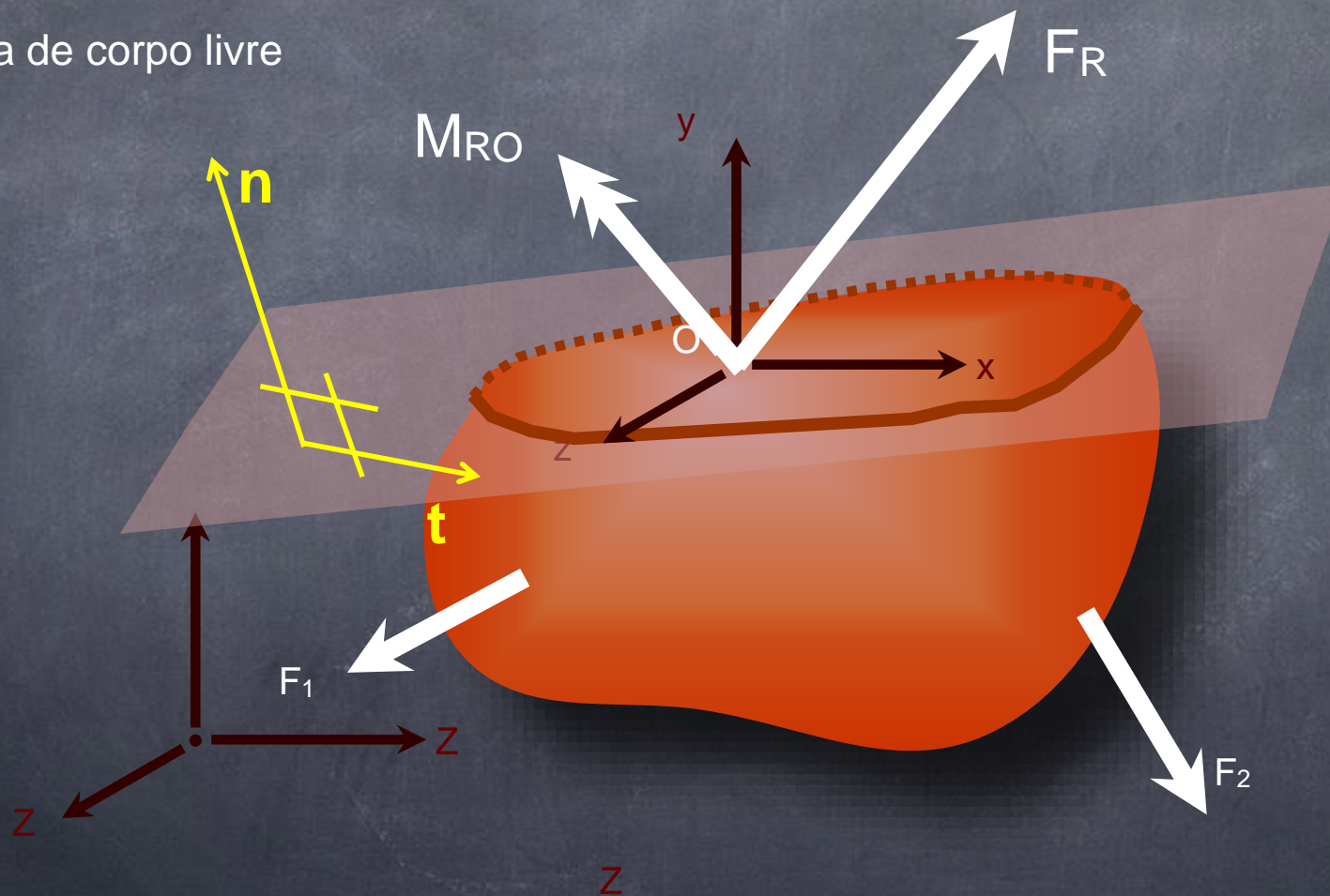
## Equilíbrio de um corpo deformável

Diagrama de corpo livre



## Equilíbrio de um corpo deformável

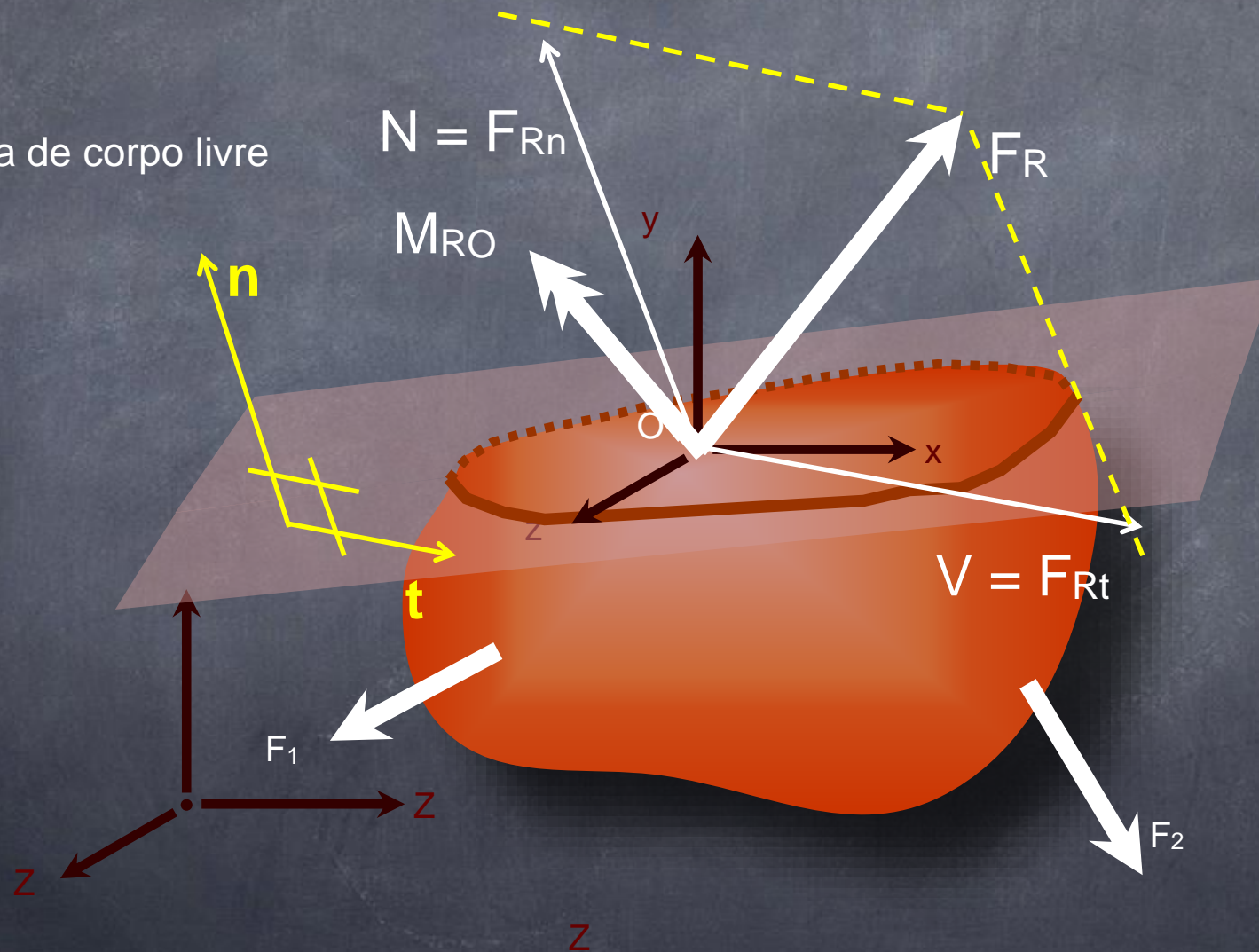
Diagrama de corpo livre





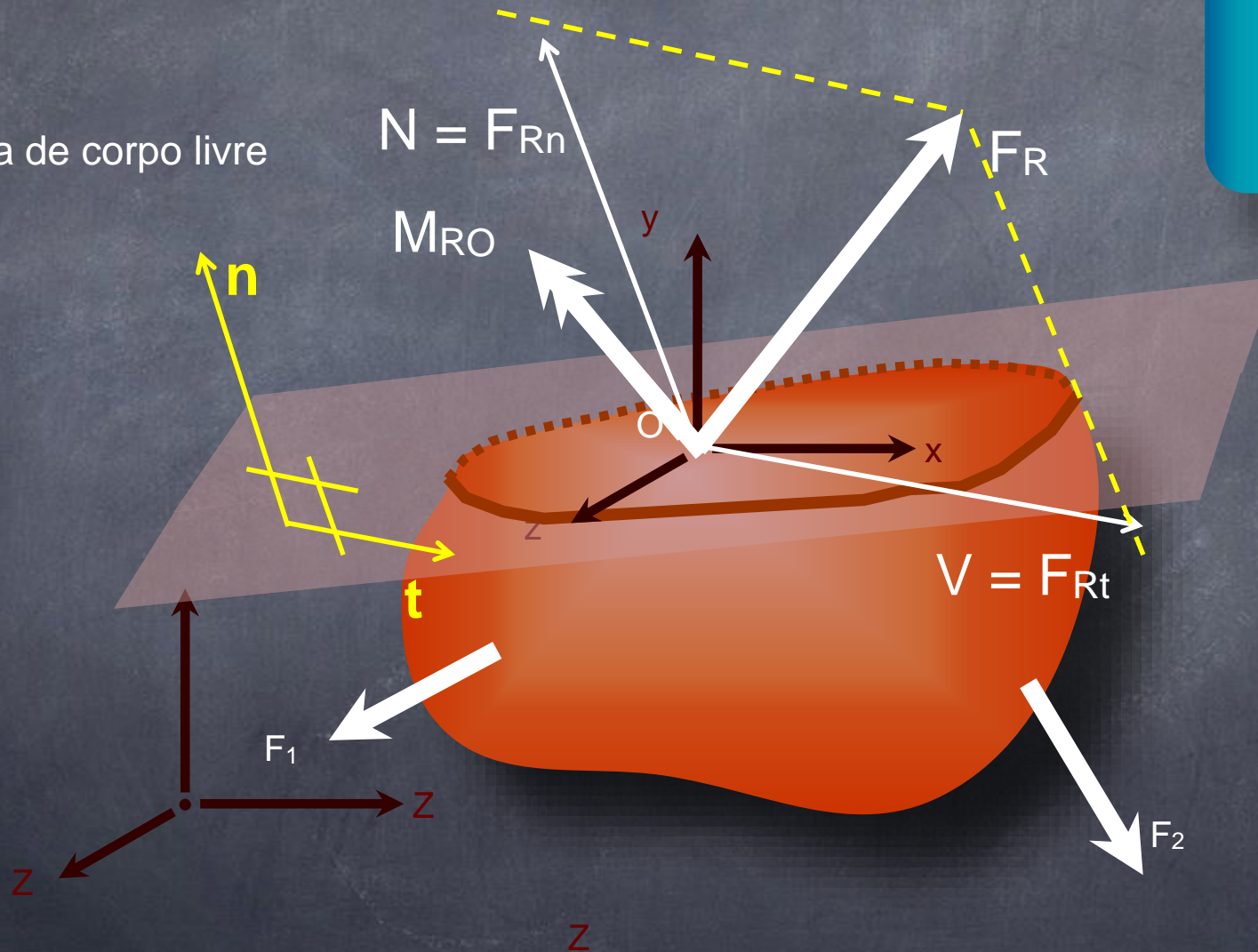
# Equilíbrio de um corpo deformável

Diagrama de corpo livre



# Equilíbrio de um corpo deformável

Diagrama de corpo livre

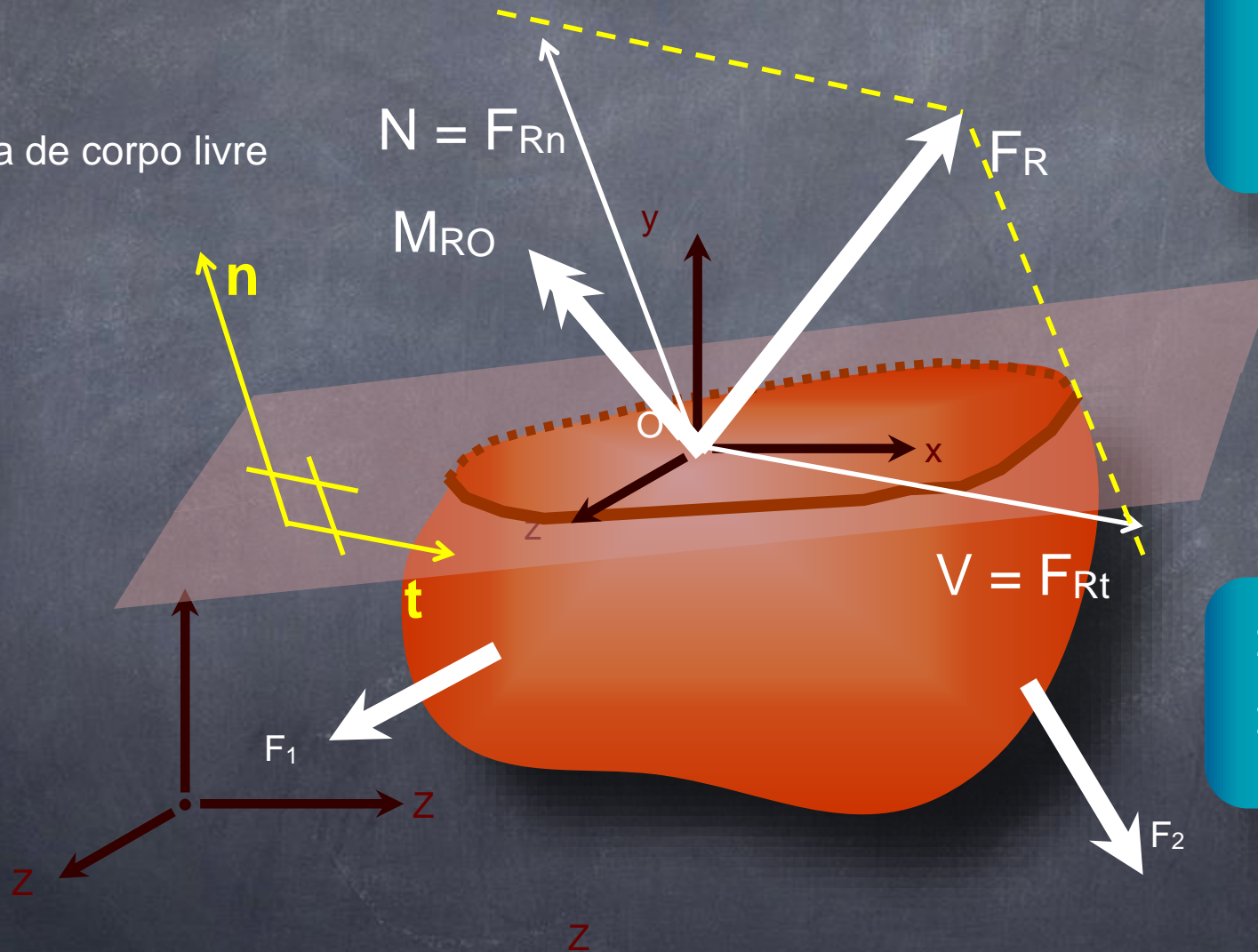


$$\sum F_n = 0$$

$$\sum F_t = 0$$

# Equilíbrio de um corpo deformável

Diagrama de corpo livre



$$\sum F_n = 0$$

$$\sum F_t = 0$$

$$\sum M_n = 0$$

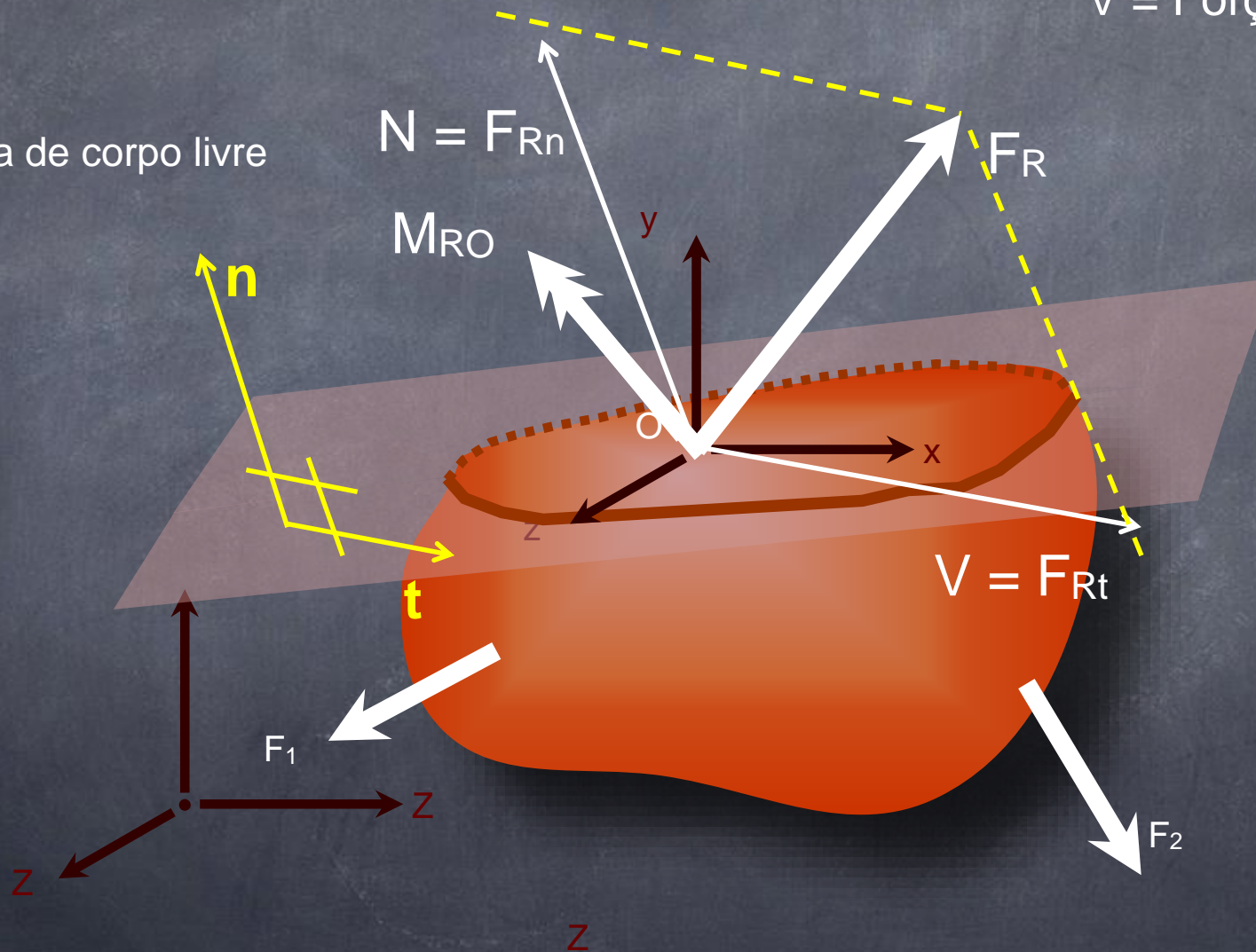
$$\sum M_t = 0$$



# Equilíbrio de um corpo deformável

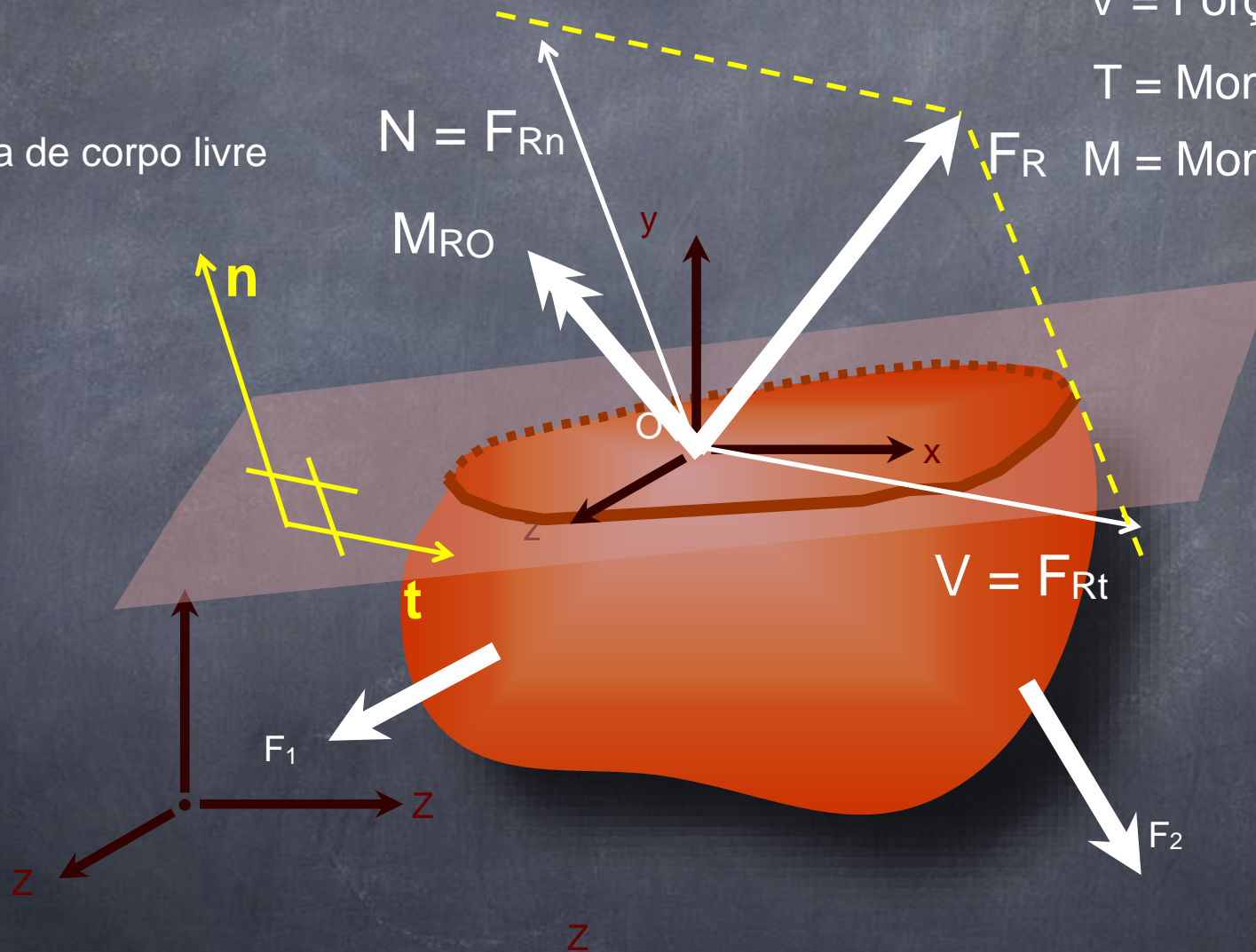
$N$  = Força normal  
 $V$  = Força tangente

Diagrama de corpo livre



# Equilíbrio de um corpo deformável

Diagrama de corpo livre

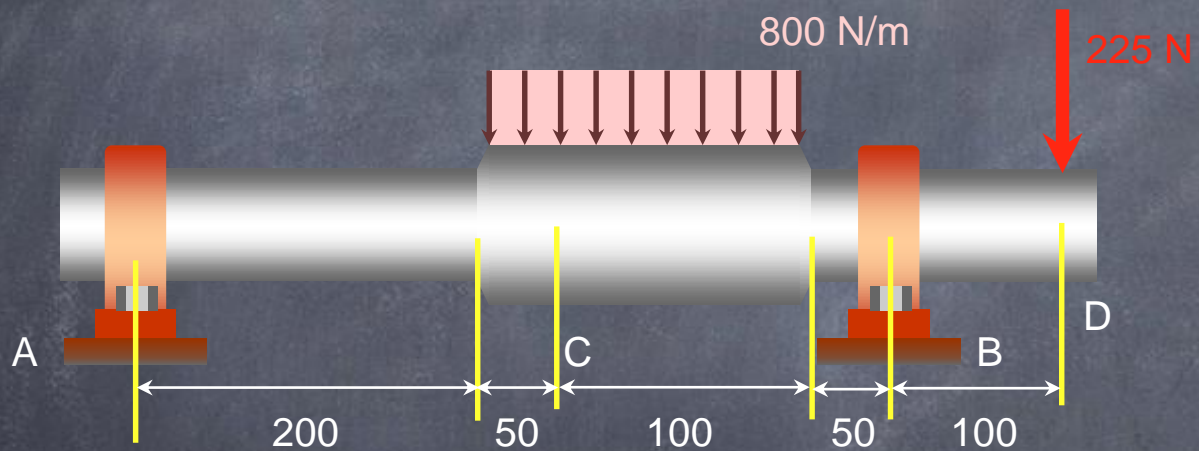


$N$  = Força normal  
 $V$  = Força tangente  
 $T$  = Momento torsor  
 $M$  = Momento fletor



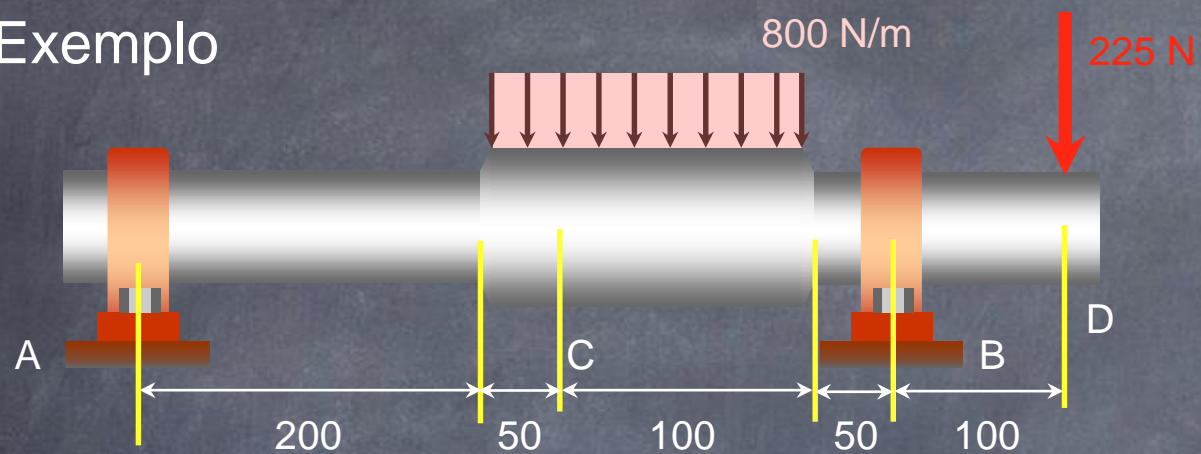
## Exemplo

Determinar as resultantes das cargas internas que atuam na seção transversal C do eixo apoiado nos rolamentos em A e em B (transmitem apenas forças verticais).

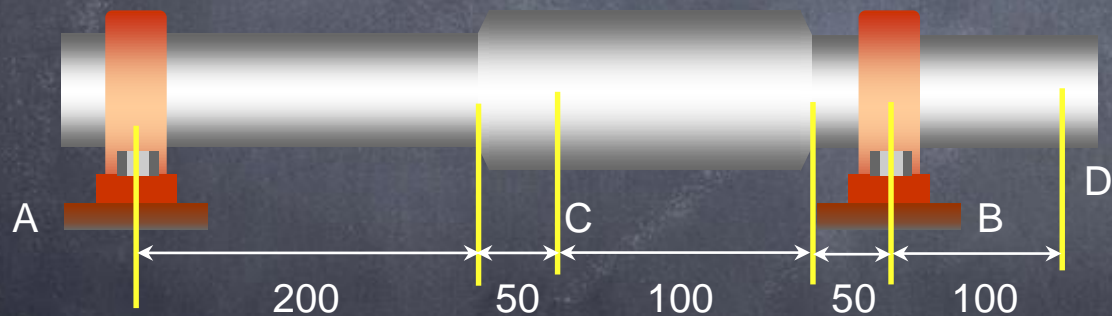
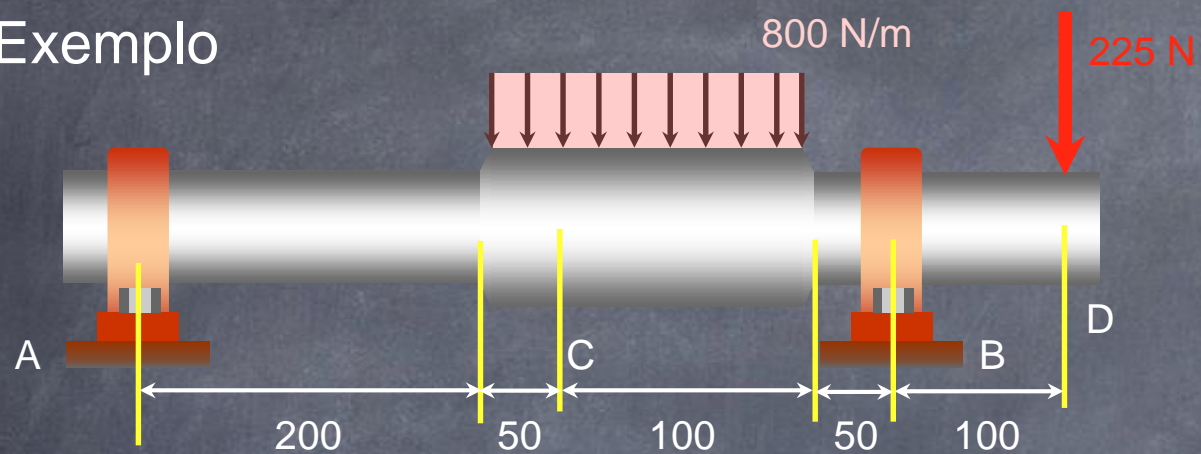




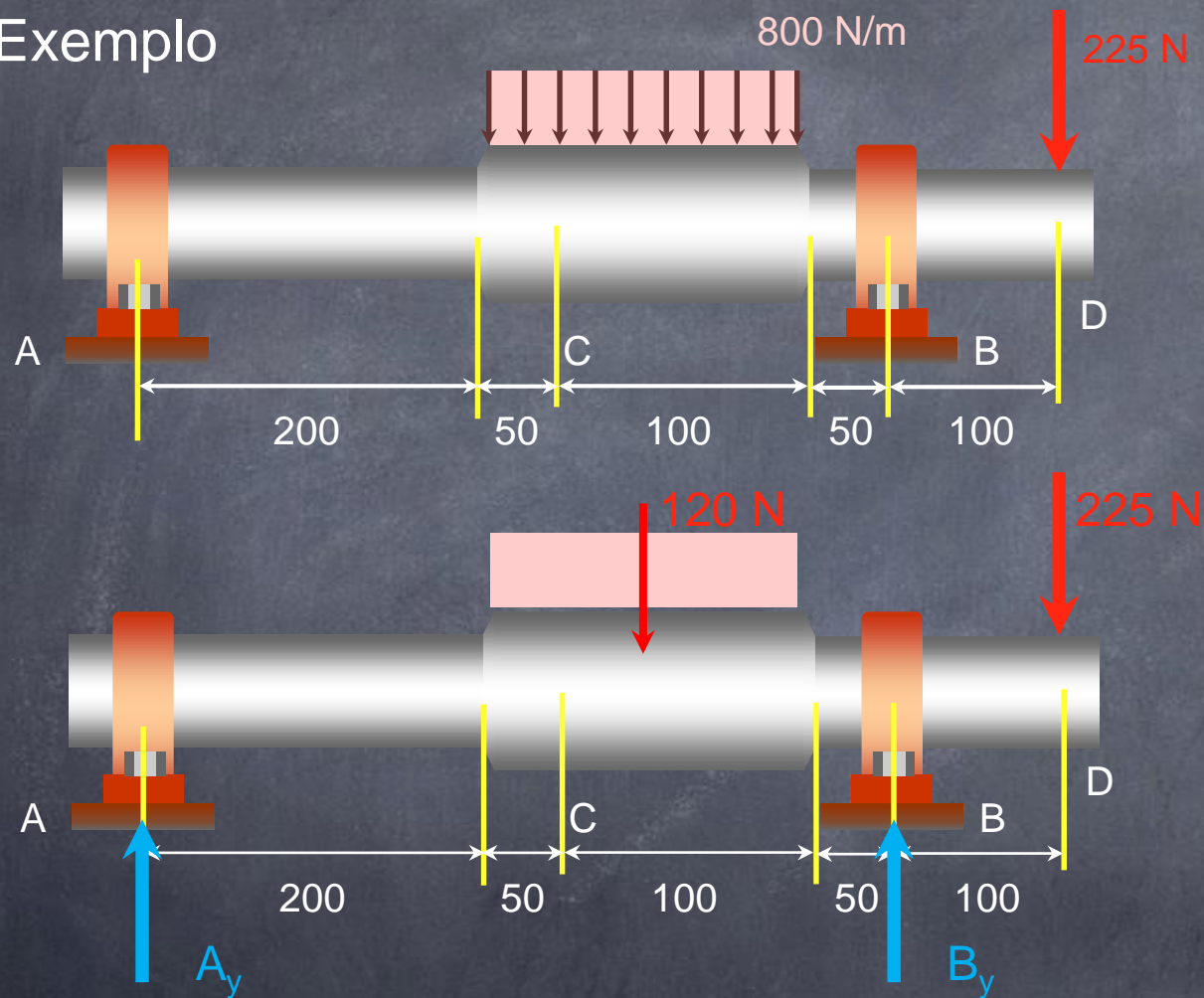
## Exemplo



# Exemplo

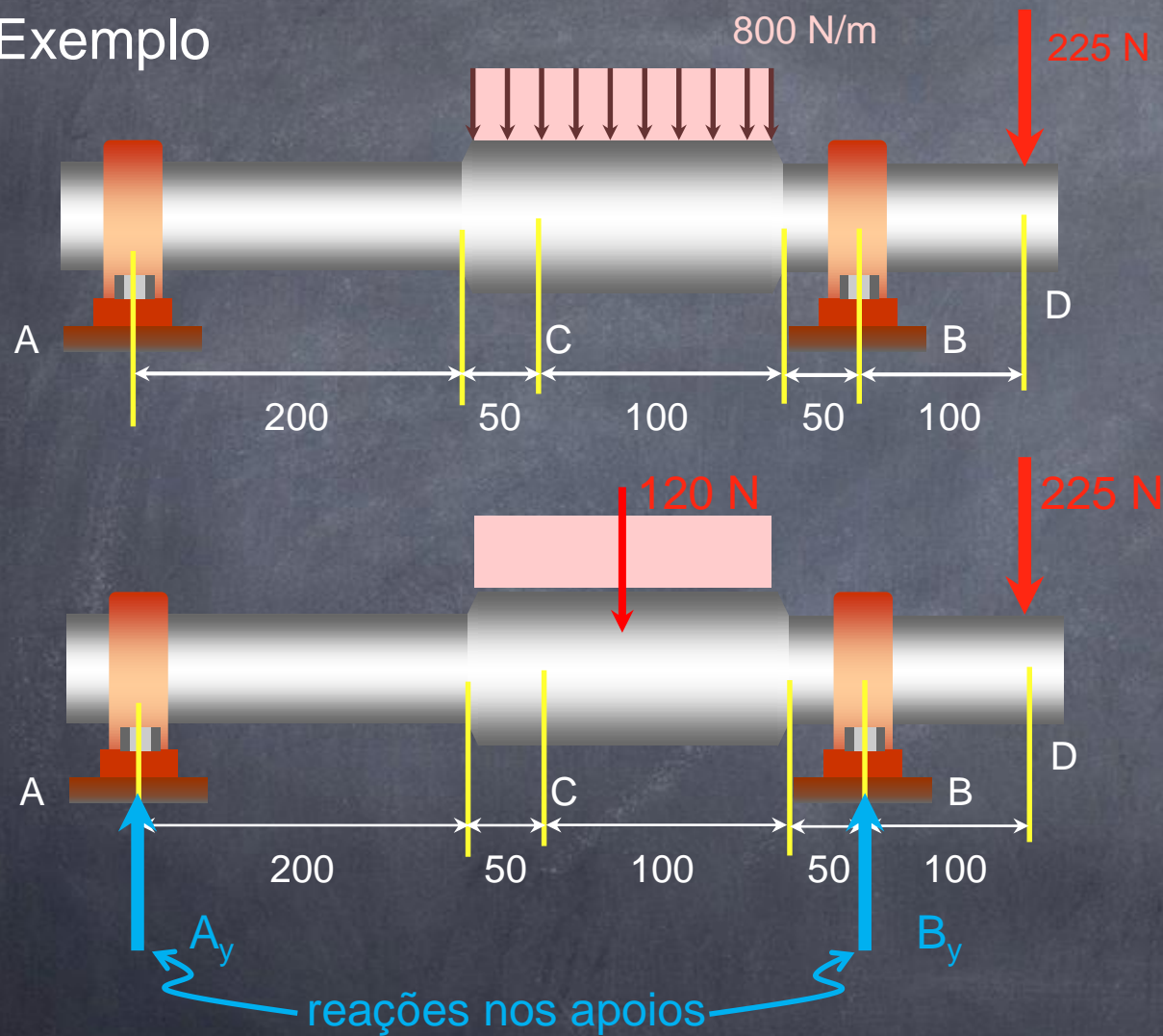


# Exemplo

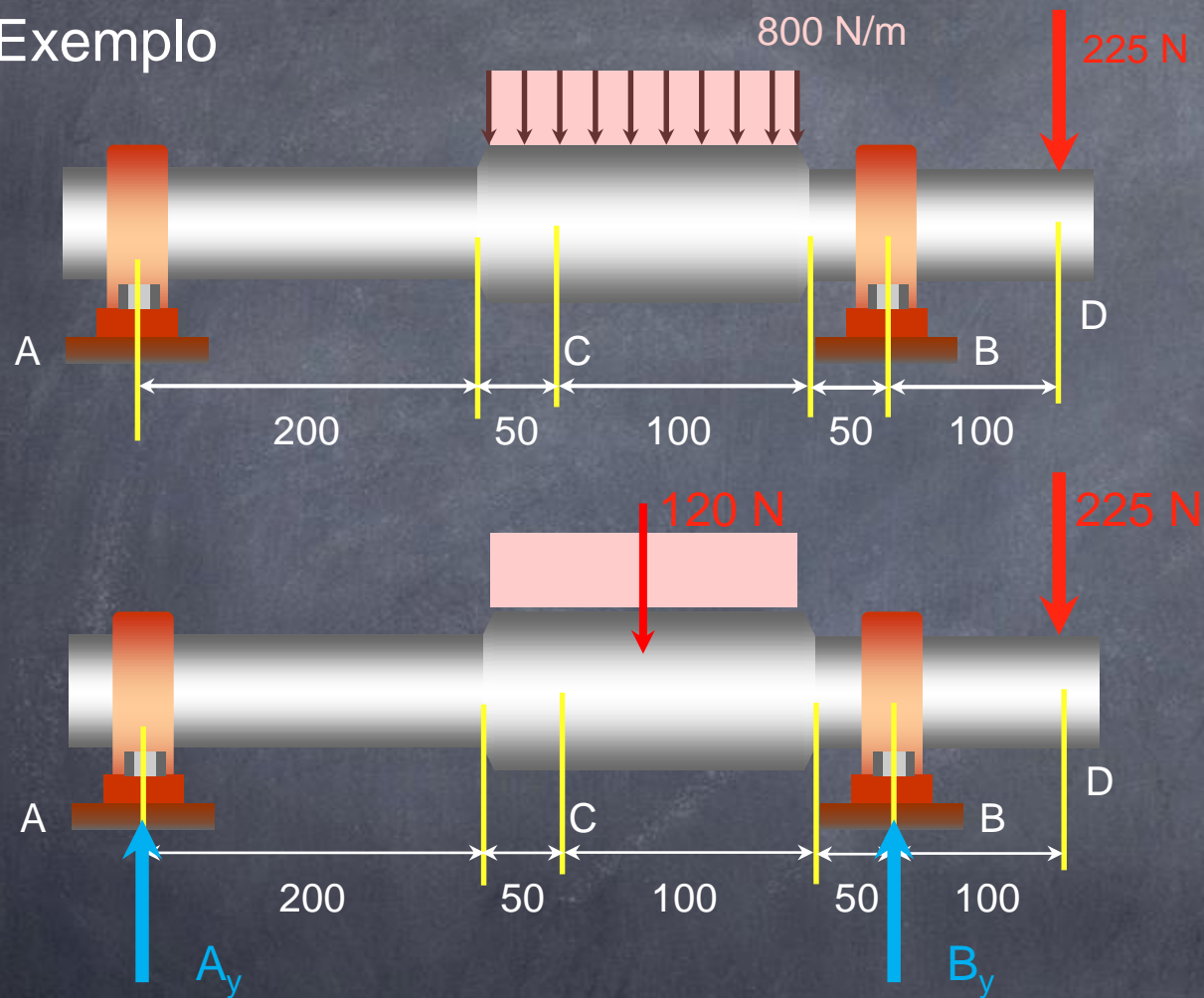




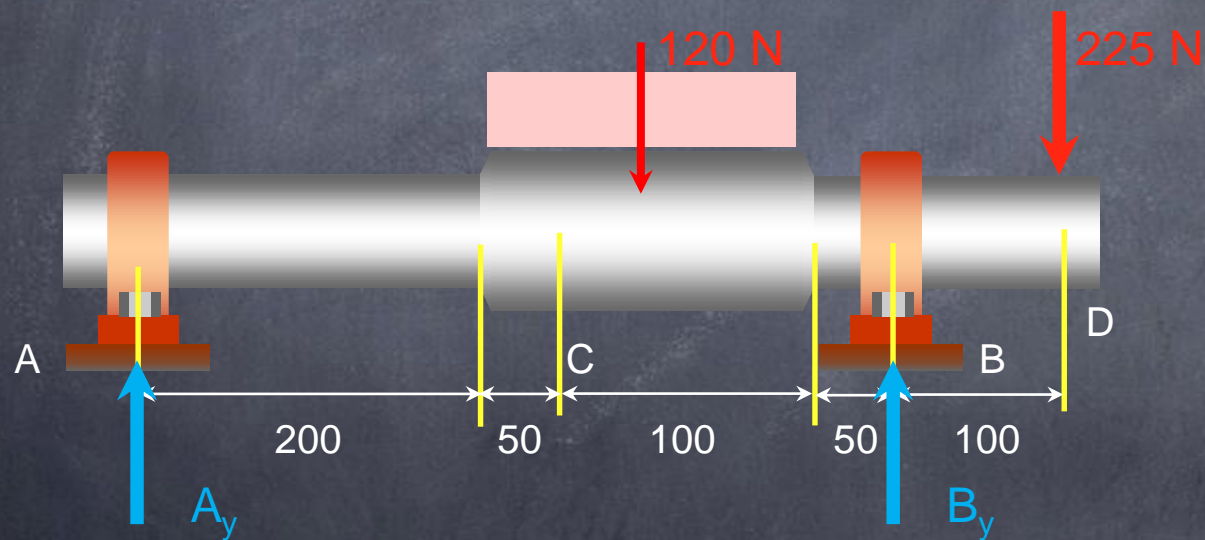
# Exemplo



# Exemplo



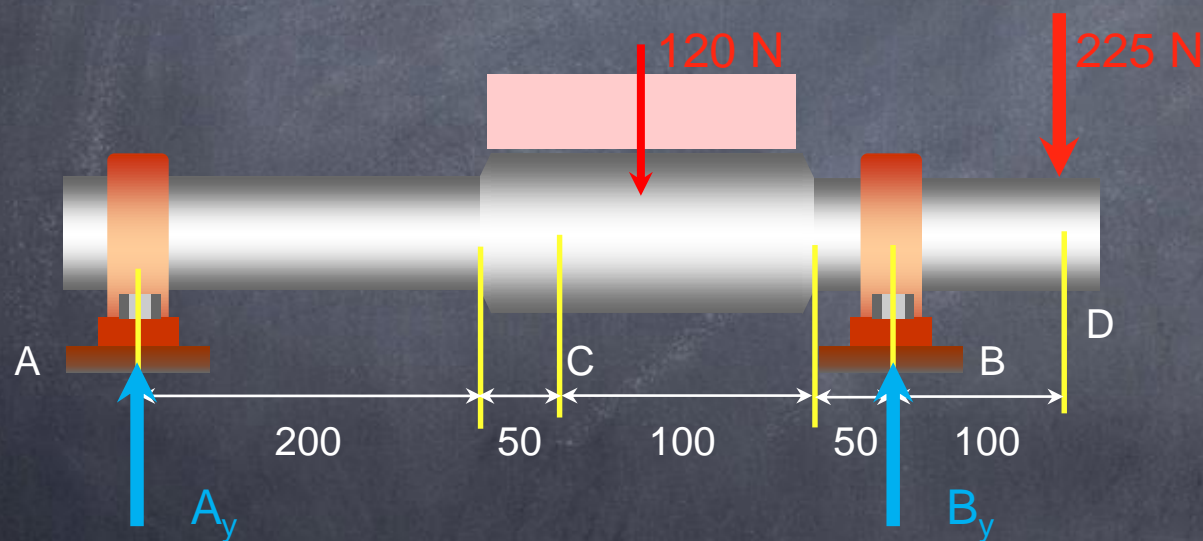
## Exemplo





## Exemplo

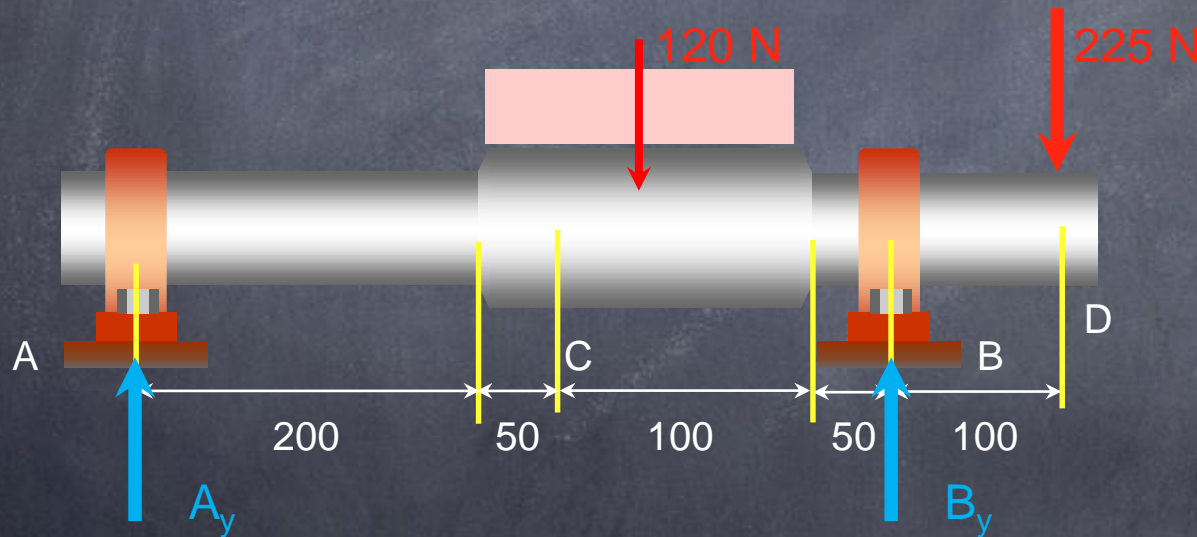
Calculando o momento em torno do ponto B:



## Exemplo

Calculando o momento em torno do ponto B:

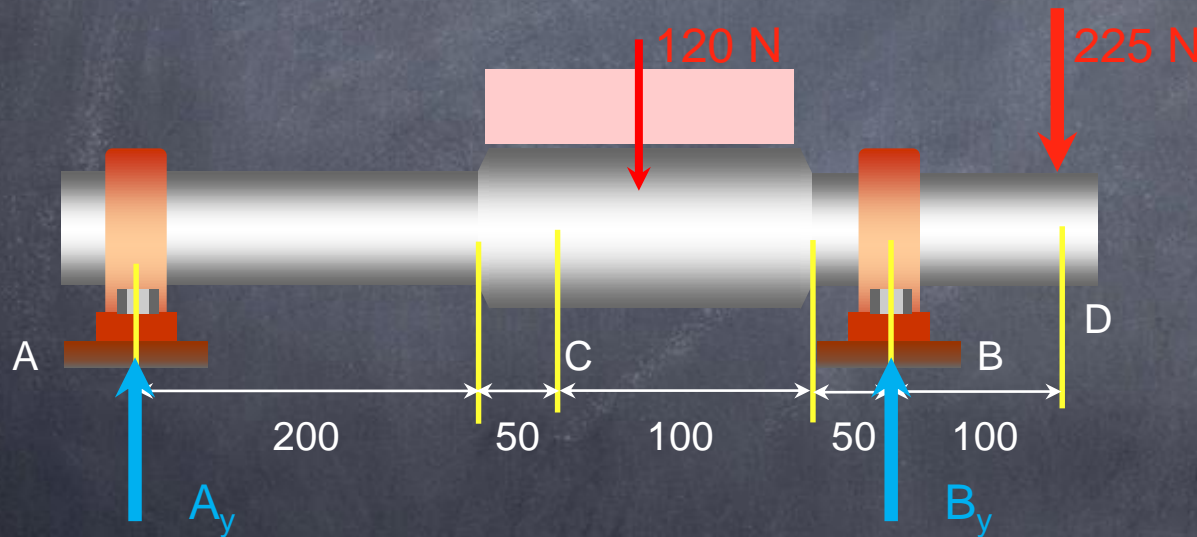
$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -A_y \times (0,400) + 120 \times (0,125) - 225 \times (0,100) = 0$$



## Exemplo

Calculando o momento em torno do ponto B:

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -A_y \times (0,400) + 120 \times (0,125) - 225 \times (0,100) = 0 \therefore A_y = -18,75 \text{ N}$$

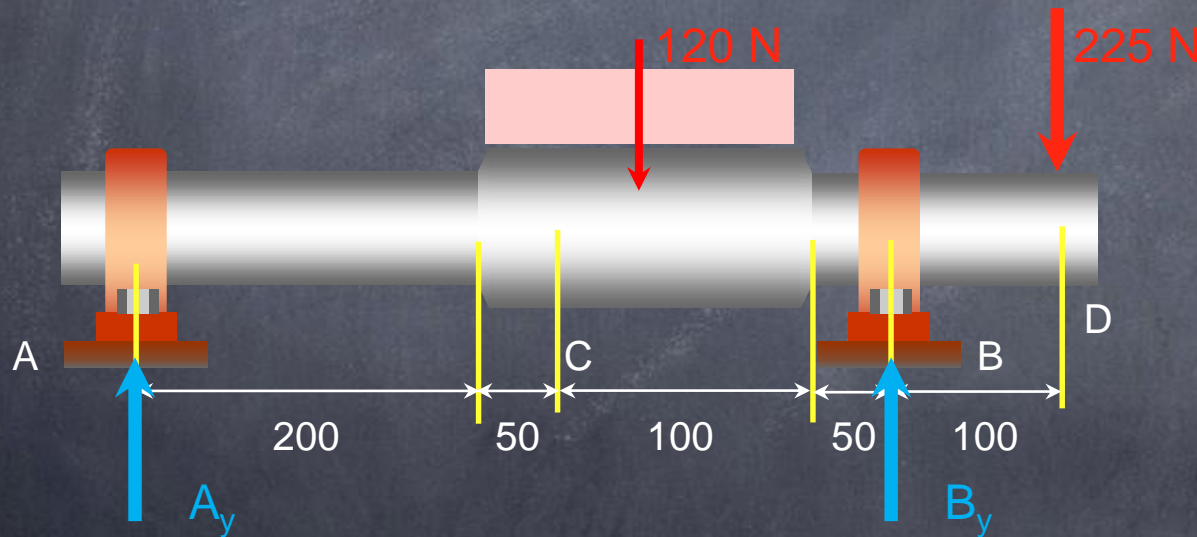




## Exemplo

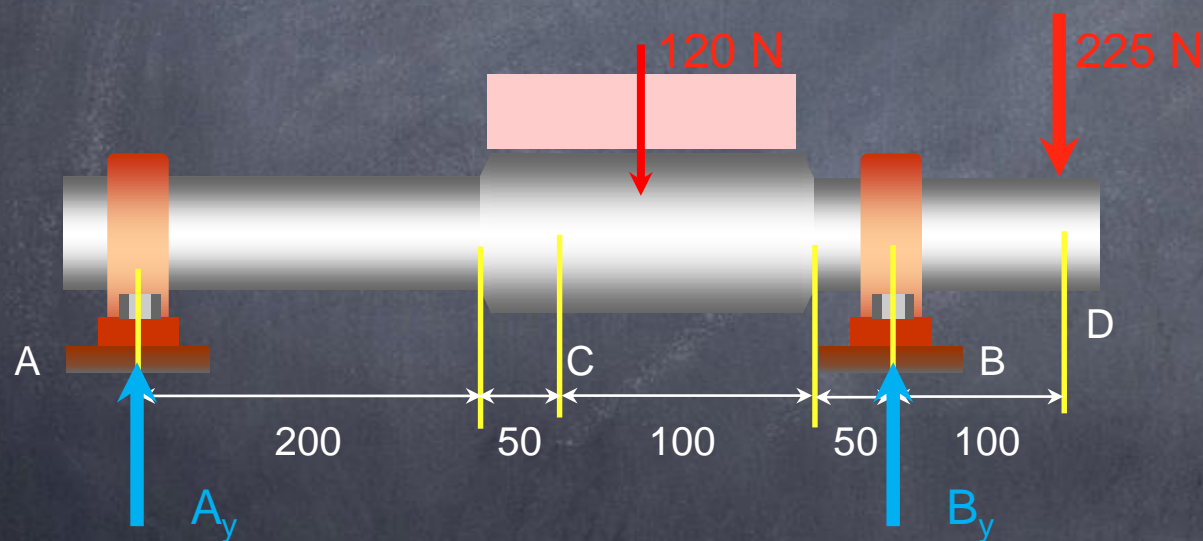
Calculando o momento em torno do ponto B:

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -A_y \times (0,400) + 120 \times (0,125) - 225 \times (0,100) = 0 \therefore A_y = -18,75 \text{ N}$$



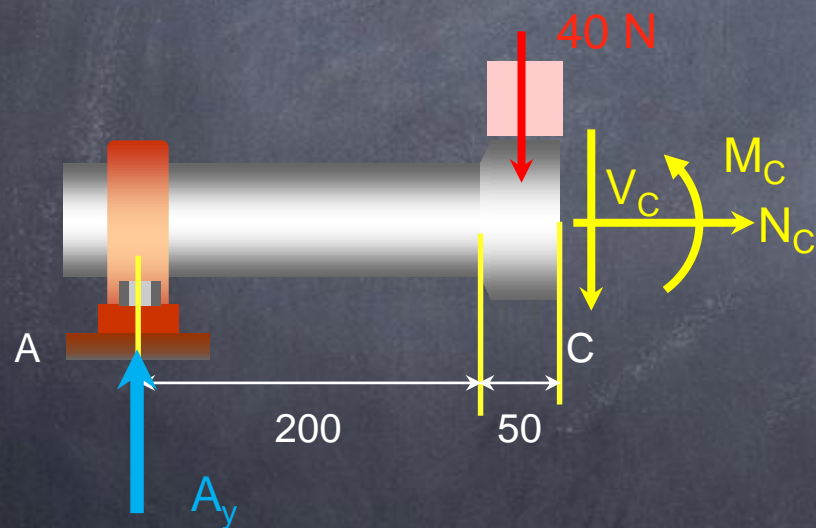
## Exemplo

As forças internas no ponto C são mostradas no diagrama de corpo livre (DLC) abaixo.



## Exemplo

As forças internas no ponto C são mostradas no diagrama de corpo livre (DLC) abaixo.

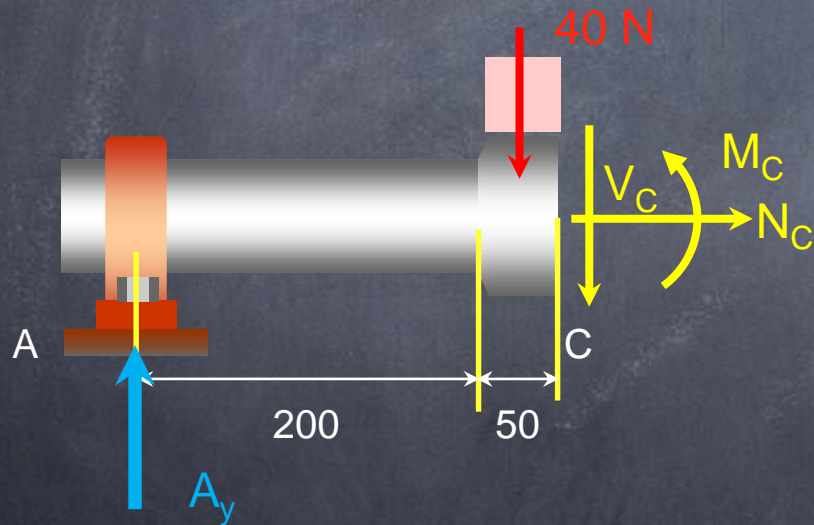




## Exemplo

As forças internas no ponto C são mostradas no diagrama de corpo livre (DLC) abaixo.

No DLC, ainda são válidas as equações de equilíbrio, i. e.

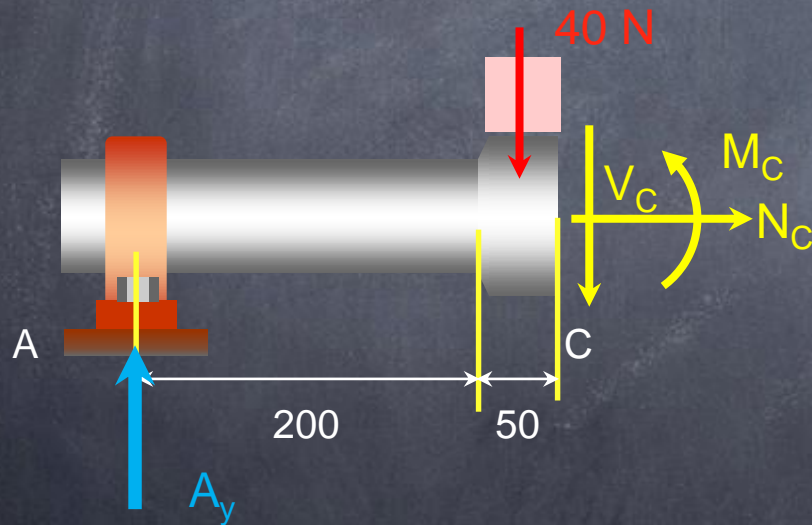


## Exemplo

As forças internas no ponto C são mostradas no diagrama de corpo livre (DLC) abaixo.

No DLC, ainda são válidas as equações de equilíbrio, i. e.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_C = 0$$



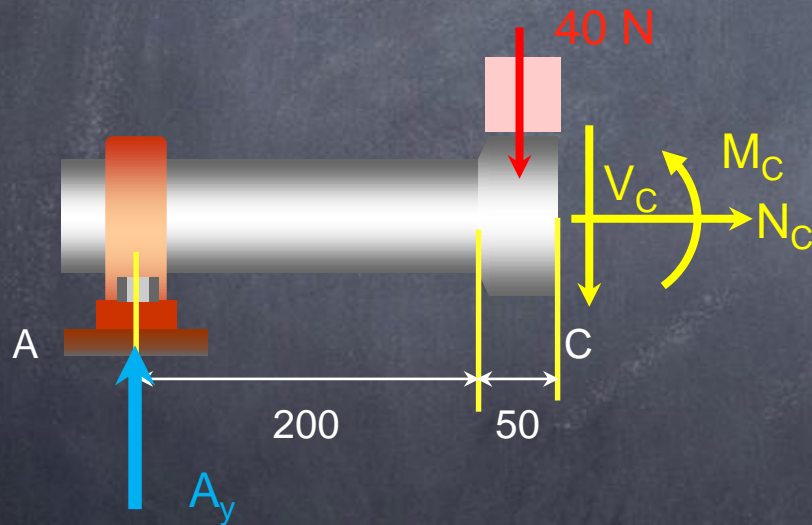


## Exemplo

As forças internas no ponto C são mostradas no diagrama de corpo livre (DLC) abaixo.

No DLC, ainda são válidas as equações de equilíbrio, i. e.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_C = 0$$





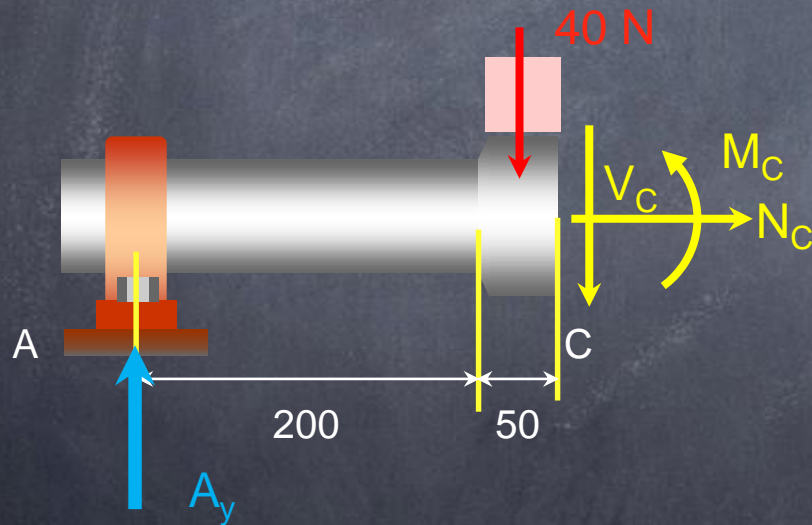
## Exemplo

As forças internas no ponto C são mostradas no diagrama de corpo livre (DLC) abaixo.

No DLC, ainda são válidas as equações de equilíbrio, i. e.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_C = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_C = -18,75 - 40 \Rightarrow V_C = -58,75 \text{ N}$$



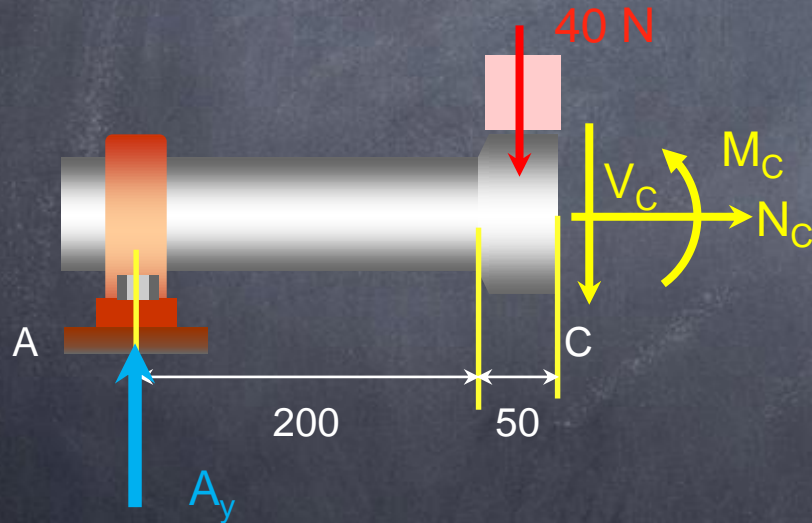
## Exemplo

As forças internas no ponto C são mostradas no diagrama de corpo livre (DLC) abaixo.

No DLC, ainda são válidas as equações de equilíbrio, i. e.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_C = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_C = -18,75 - 40 \Rightarrow V_C = -58,75 \text{ N}$$





## Exemplo

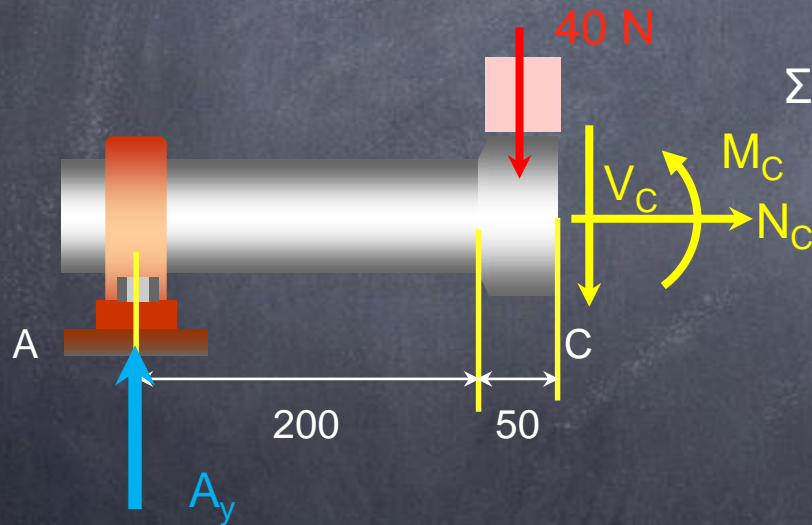
As forças internas no ponto C são mostradas no diagrama de corpo livre (DLC) abaixo.

No DLC, ainda são válidas as equações de equilíbrio, i. e.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_C = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_C = -18,75 - 40 \Rightarrow V_C = -58,75 \text{ N}$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M_C + 40 \times (0,025) + 18,75 \times (0,250) = 0$$





## Exemplo

As forças internas no ponto C são mostradas no diagrama de corpo livre (DLC) abaixo.

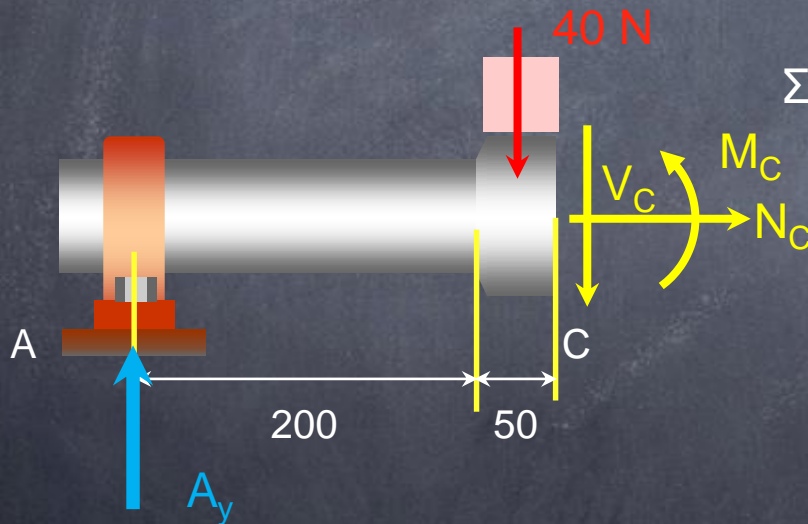
No DLC, ainda são válidas as equações de equilíbrio, i. e.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_C = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_C = -18,75 - 40 \Rightarrow V_C = -58,75 \text{ N}$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M_C + 40 \times (0,025) + 18,75 \times (0,250) = 0$$

$$\therefore M_C = -5,69 \text{ N.m}$$



## Exemplo

As forças internas no ponto C são mostradas no diagrama de corpo livre (DLC) abaixo.

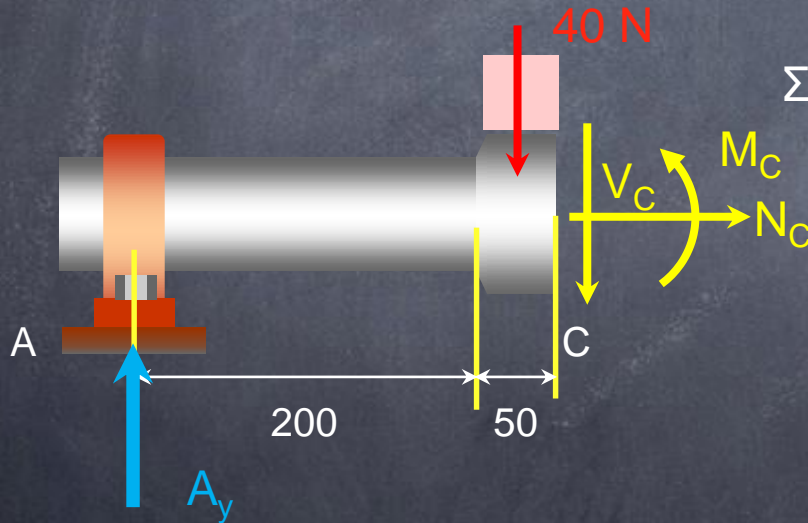
No DLC, ainda são válidas as equações de equilíbrio, i. e.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_C = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_C = -18,75 - 40 \Rightarrow V_C = -58,75 \text{ N}$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M_C + 40 \times (0,025) + 18,75 \times (0,250) = 0$$

$$\therefore M_C = -5,69 \text{ N.m}$$



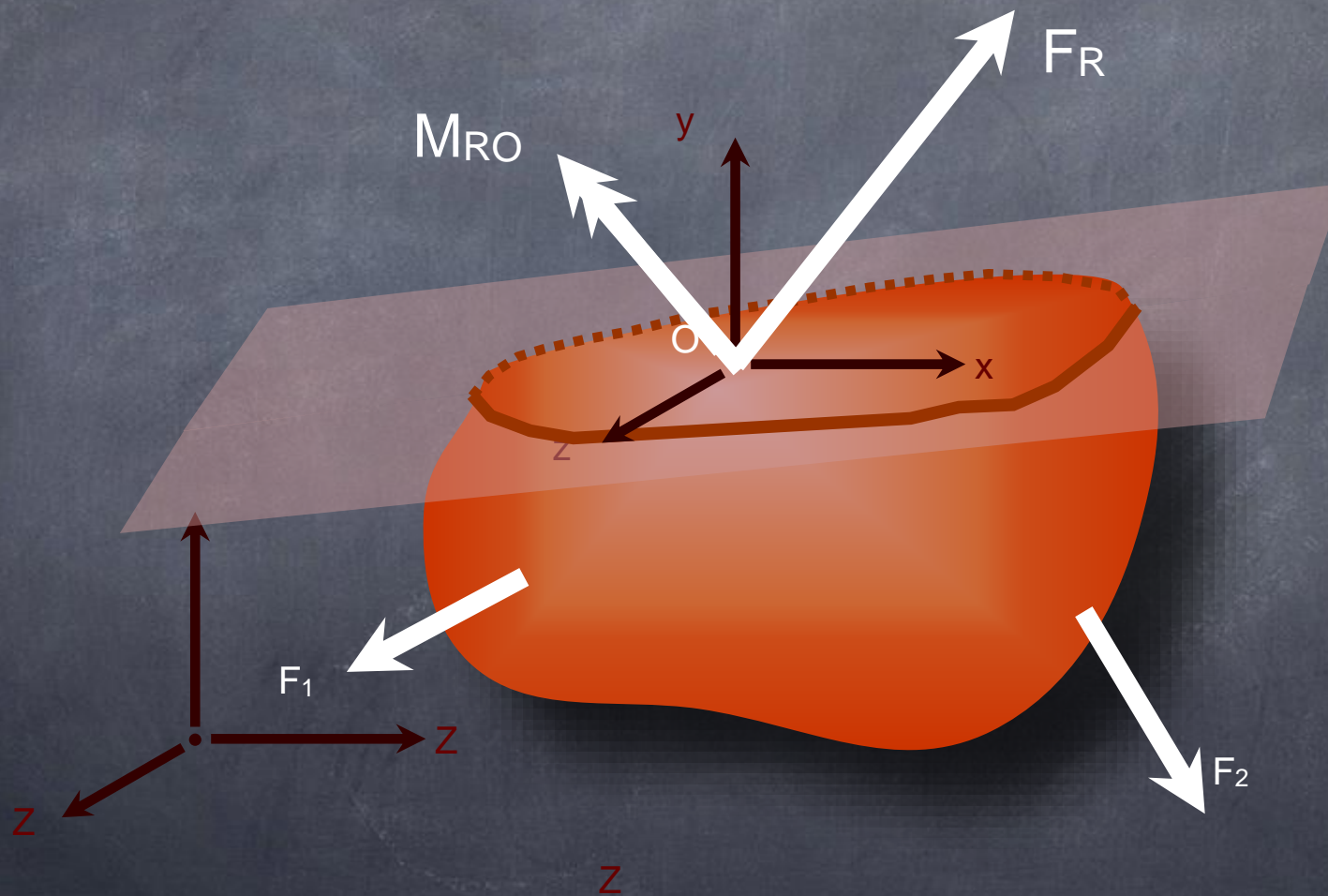


# Tensão



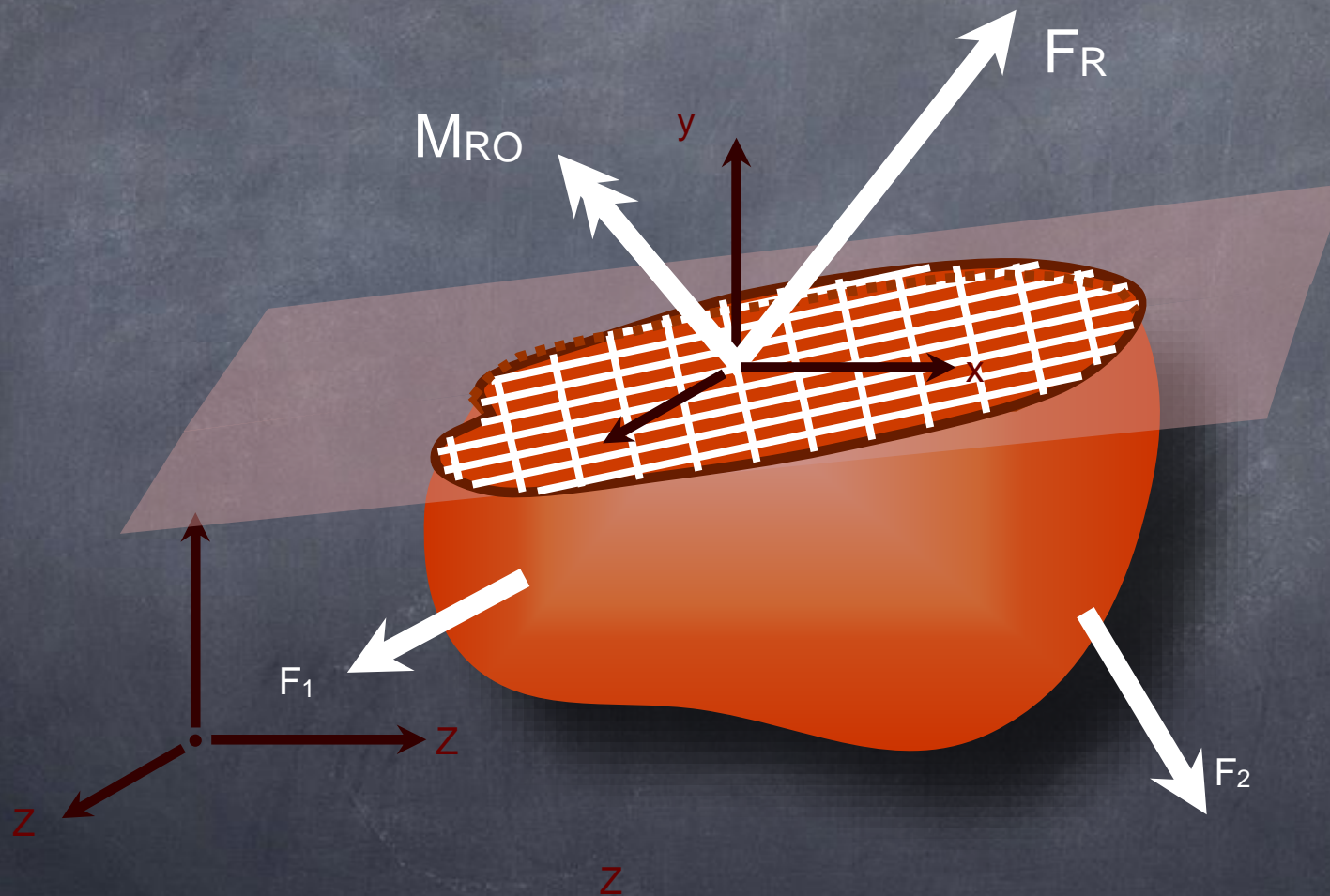
# Tensão

DCL de um corpo deformável



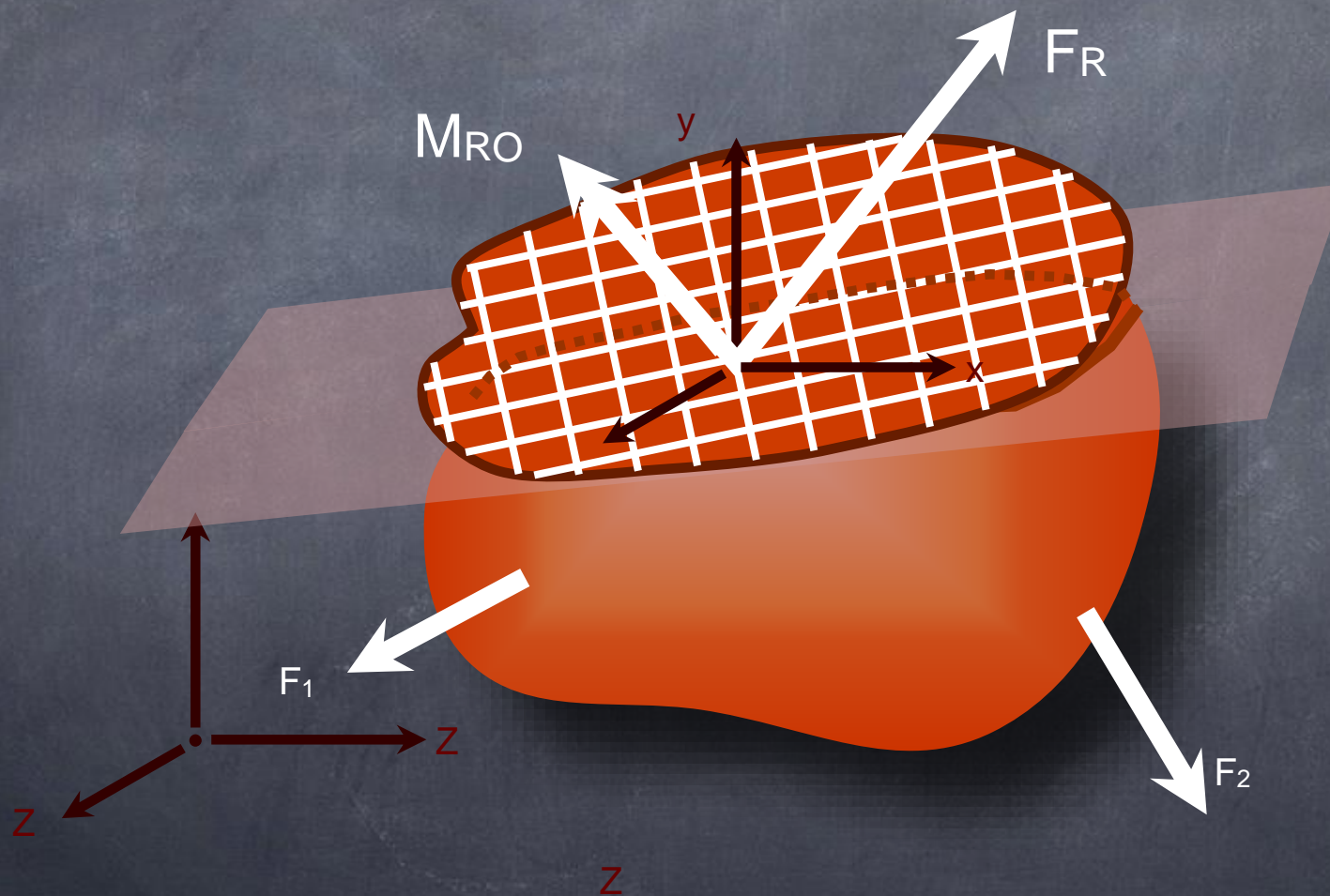
# Tensão

DCL de um corpo deformável



# Tensão

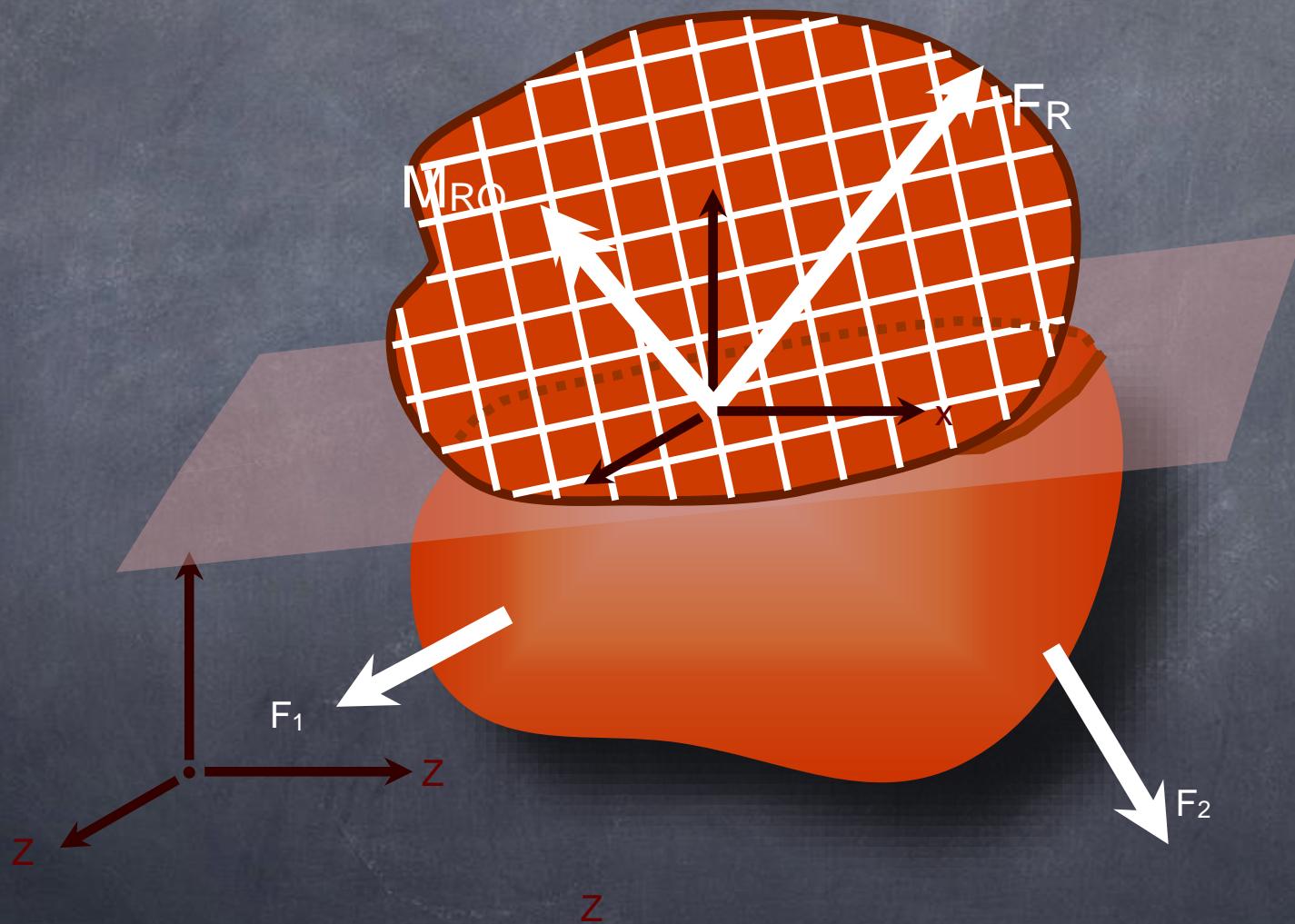
DCL de um corpo deformável





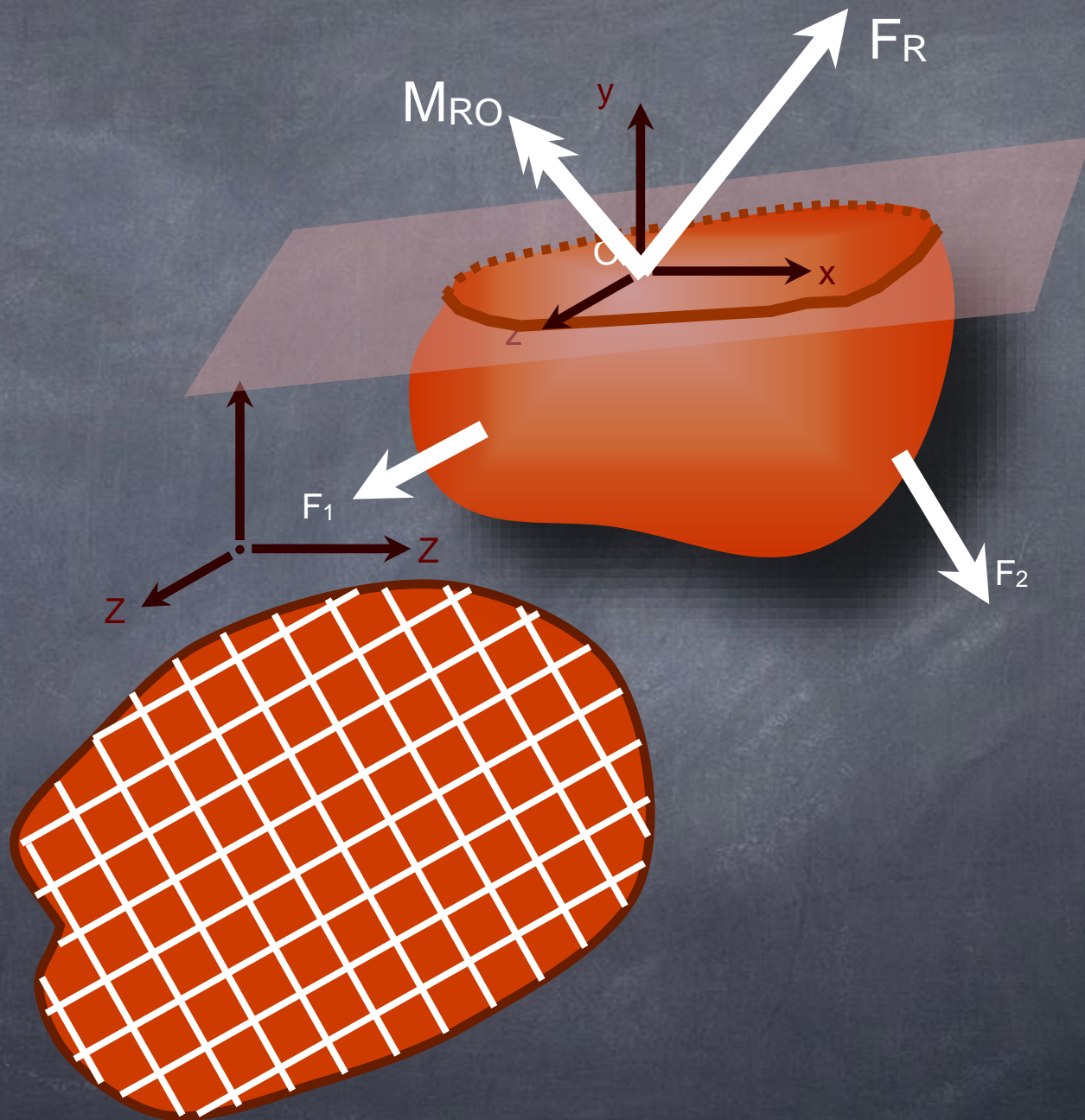
# Tensão

DCL de um corpo deformável



Tensão

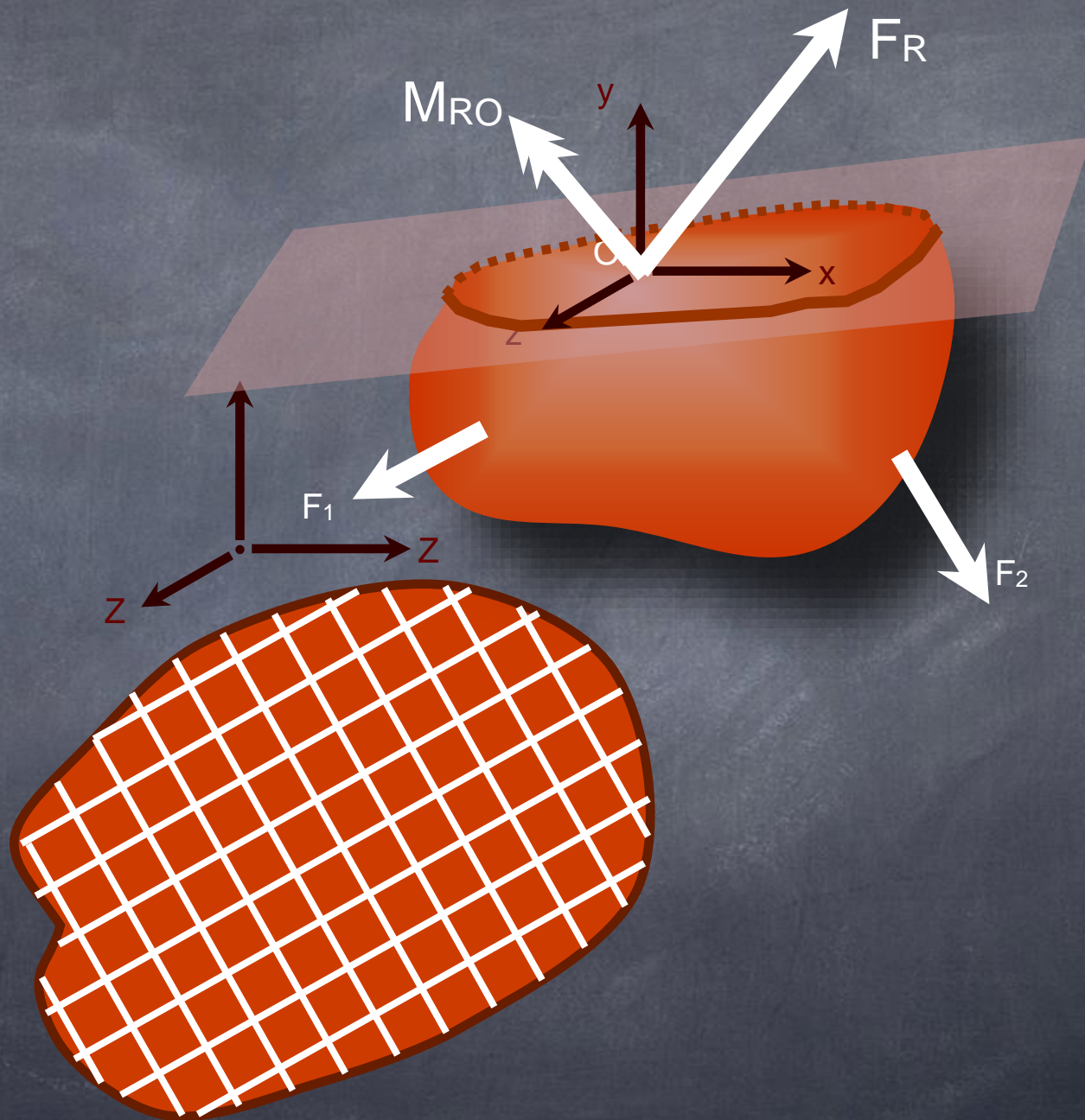
Superfície discretizada



Tensão

Superfície discretizada

Área total  $\rightarrow A$

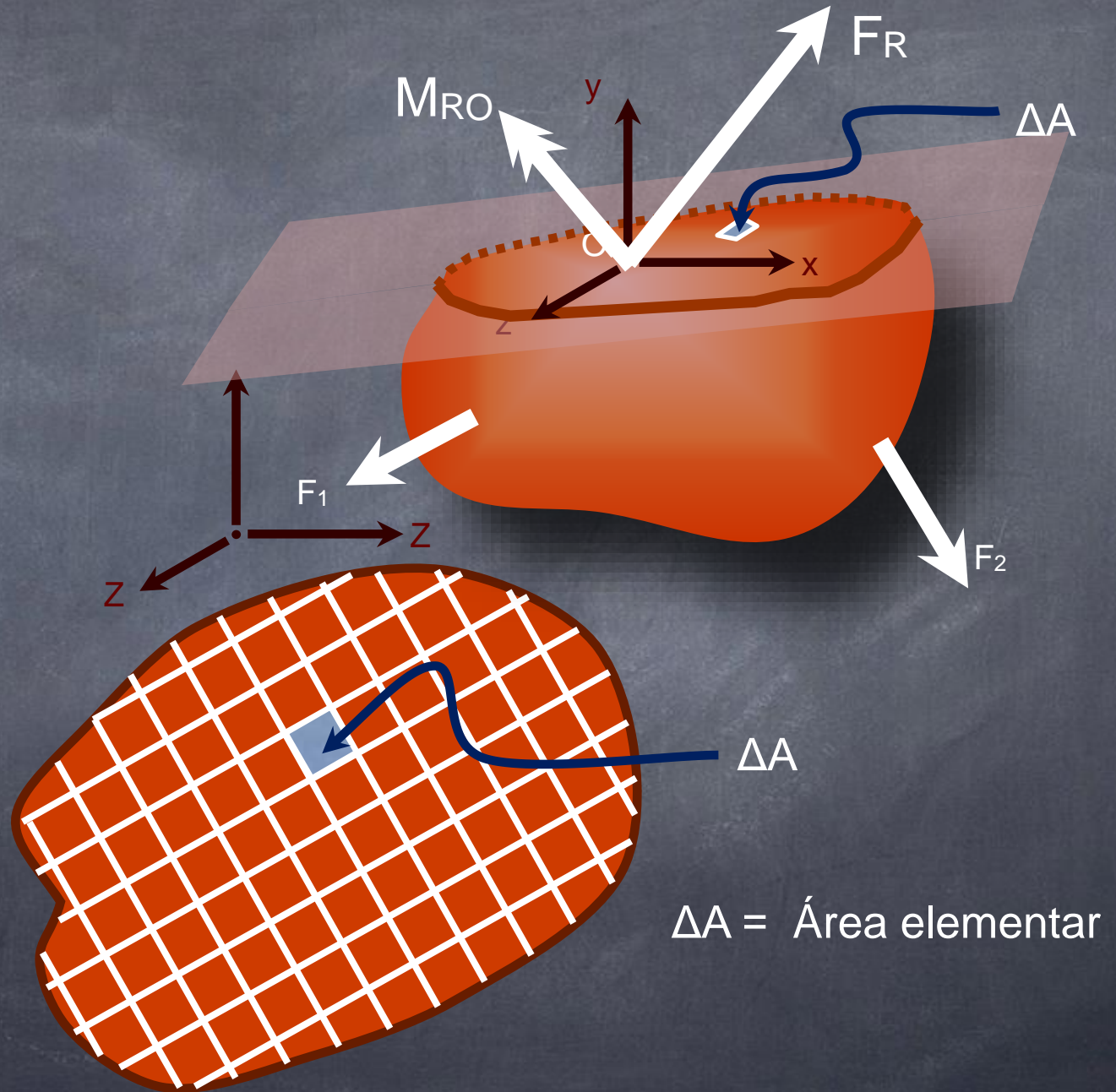




Tensão

Superfície discretizada

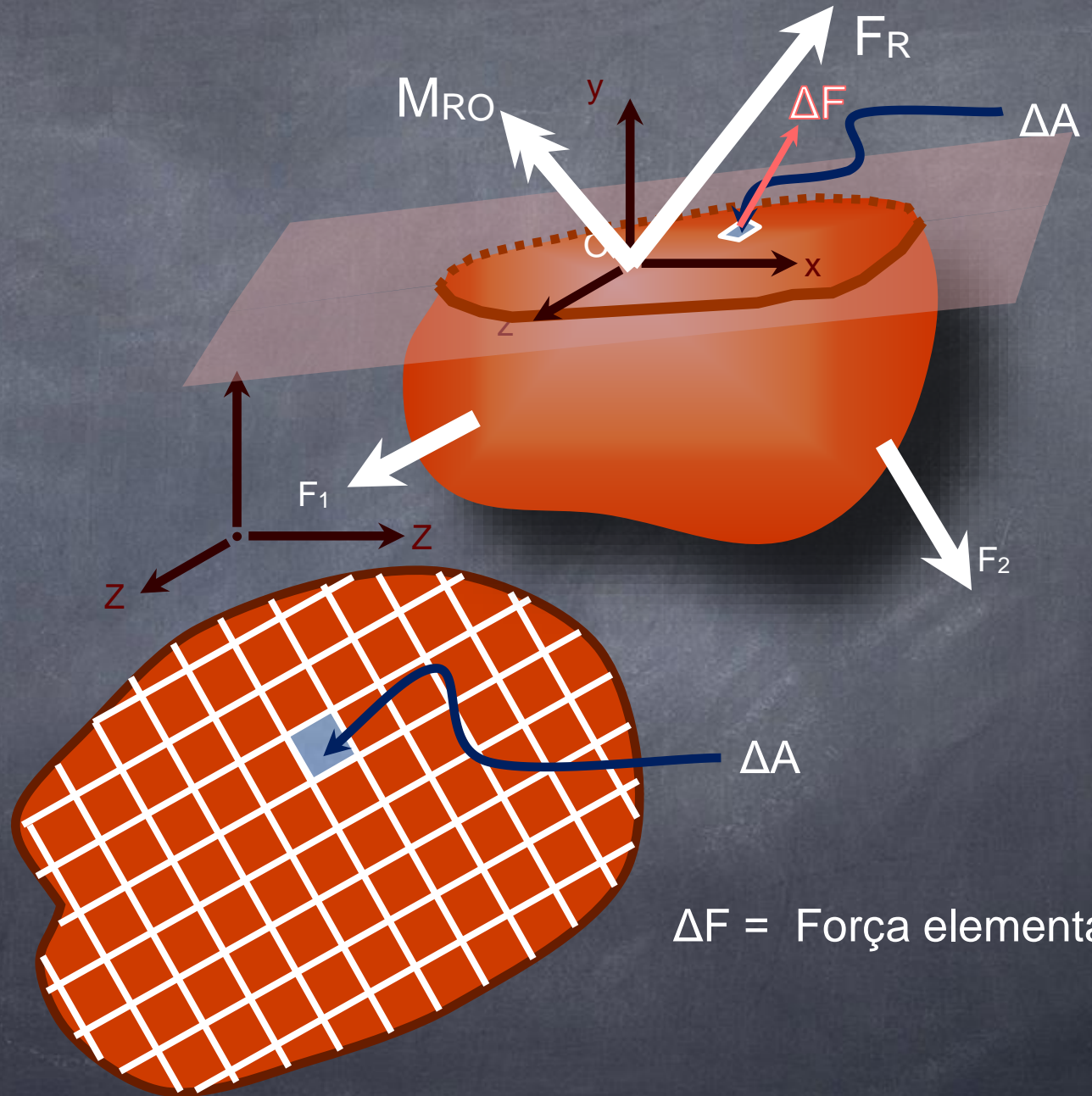
Área total  $\rightarrow A$



Tensão

Superfície discretizada

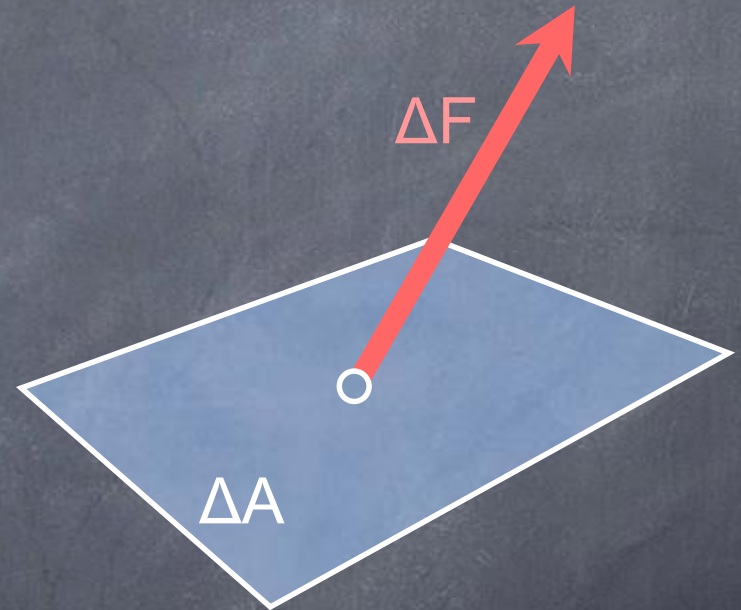
Área total  $\rightarrow A$



$\Delta F =$  Força elementar

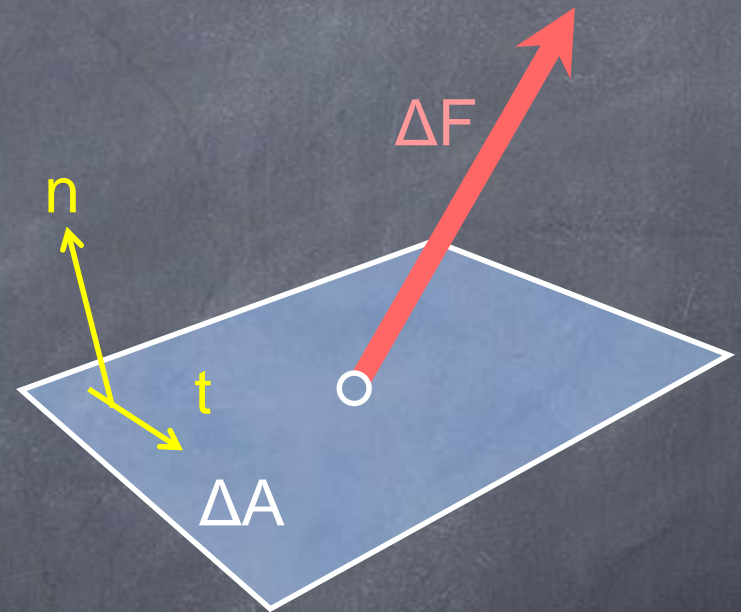


# Tensão

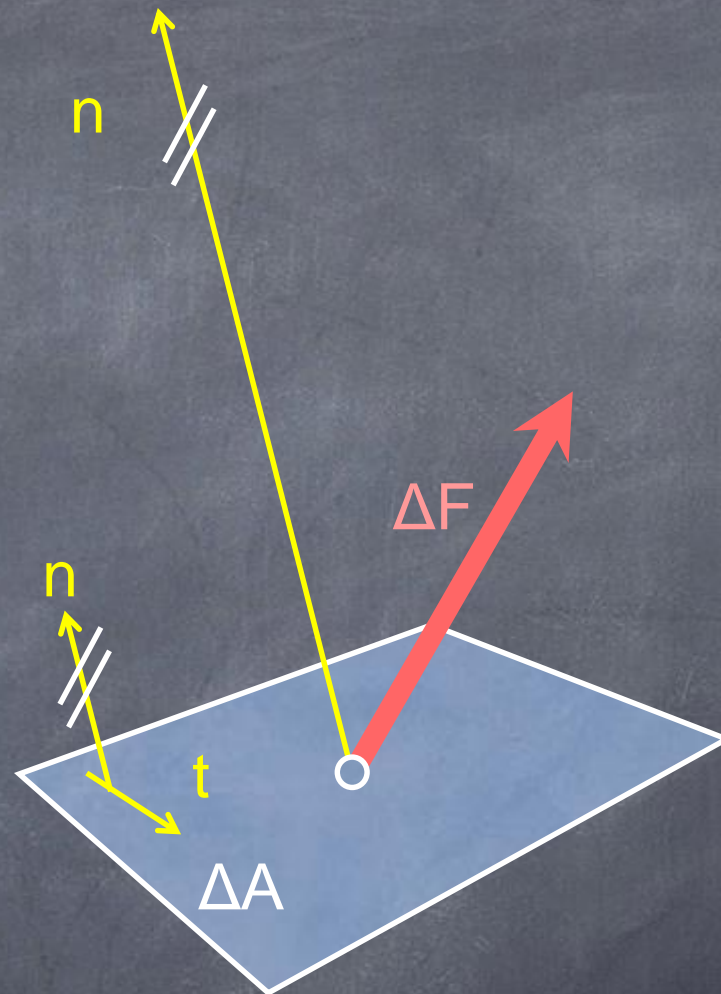




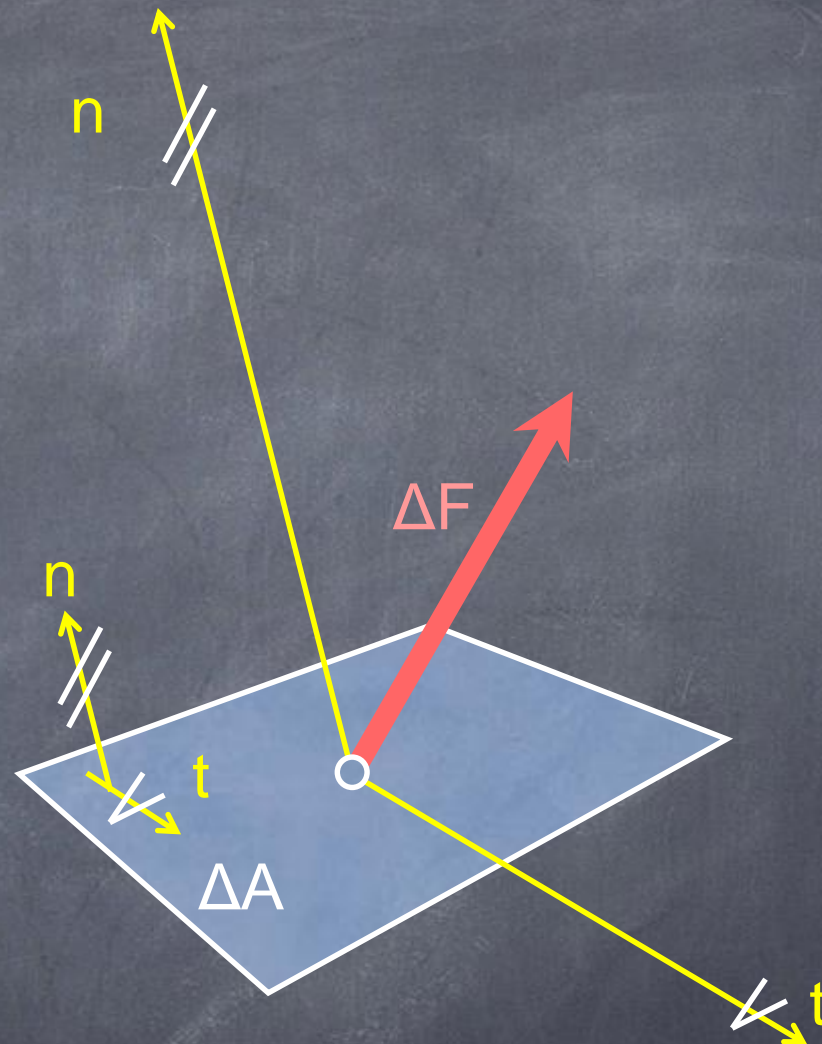
# Tensão



# Tensão

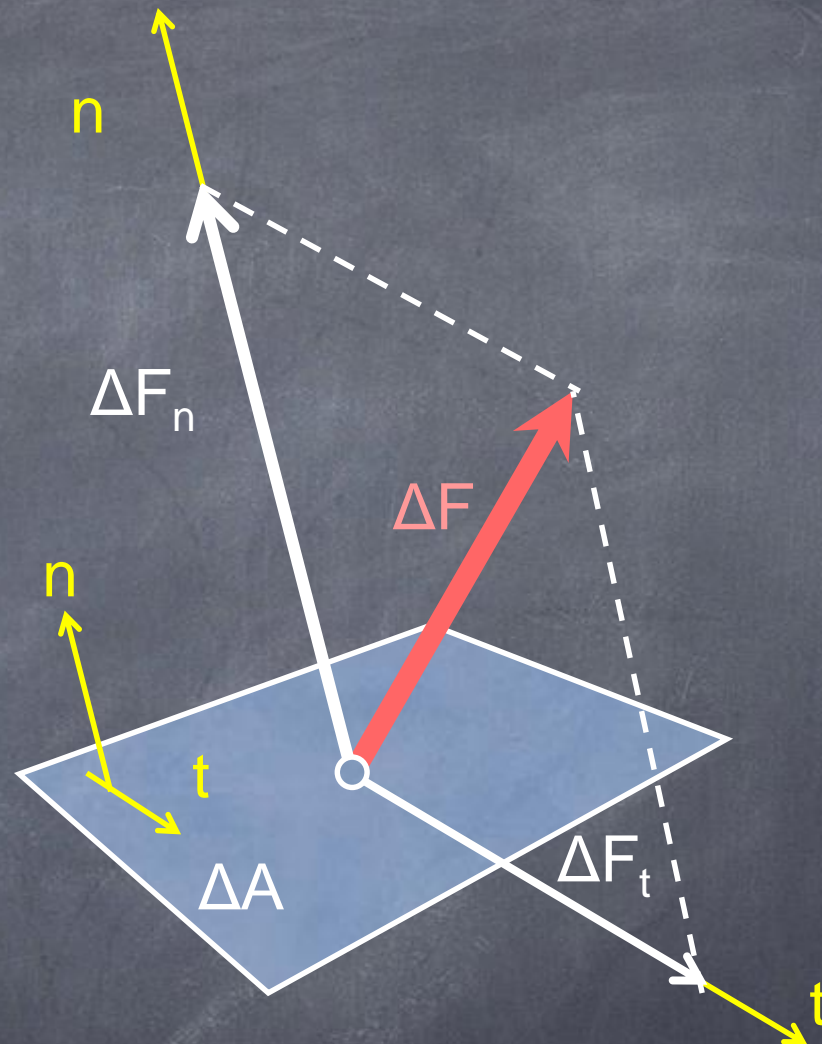


# Tensão



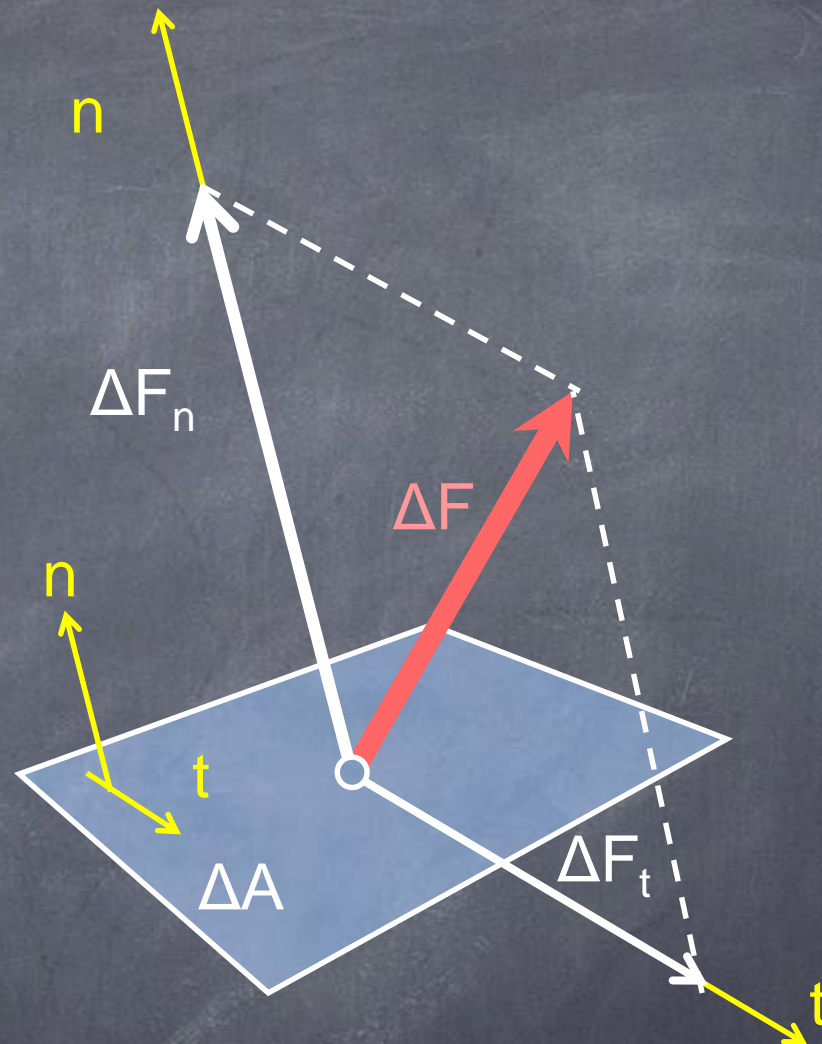


# Tensão



# Tensão

## Tensão normal

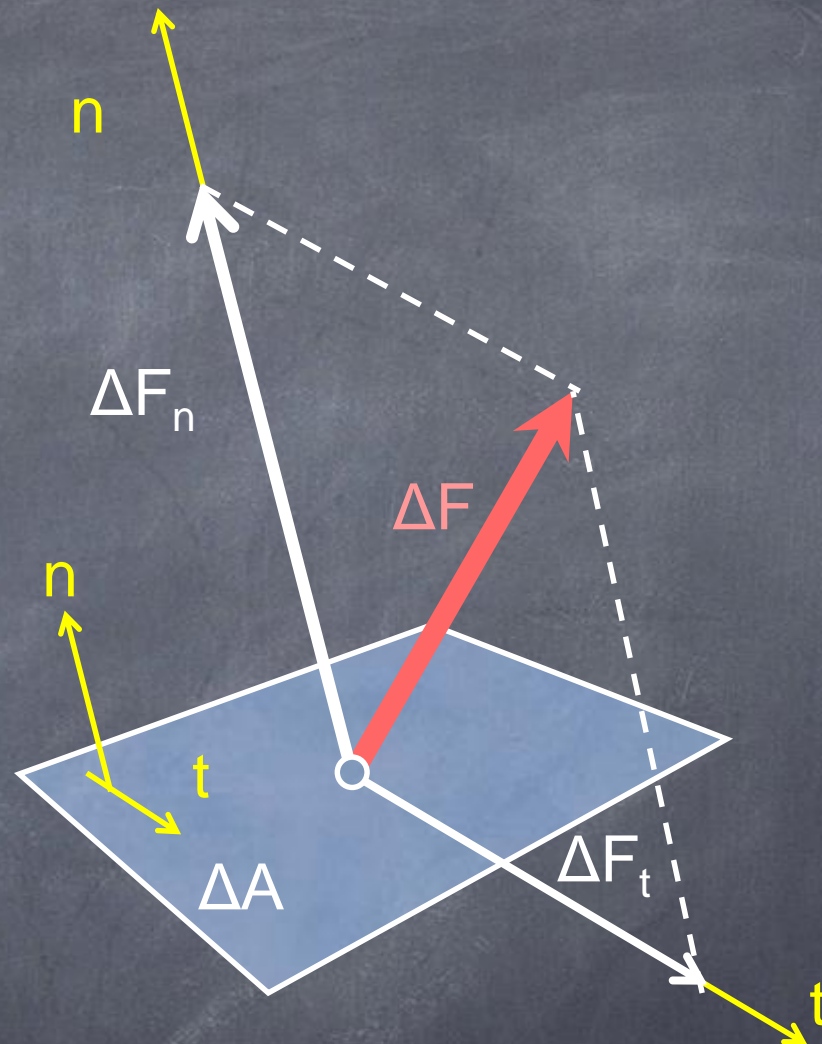




# Tensão

Tensão normal

$$\sigma \equiv \Delta F_n / \Delta A$$



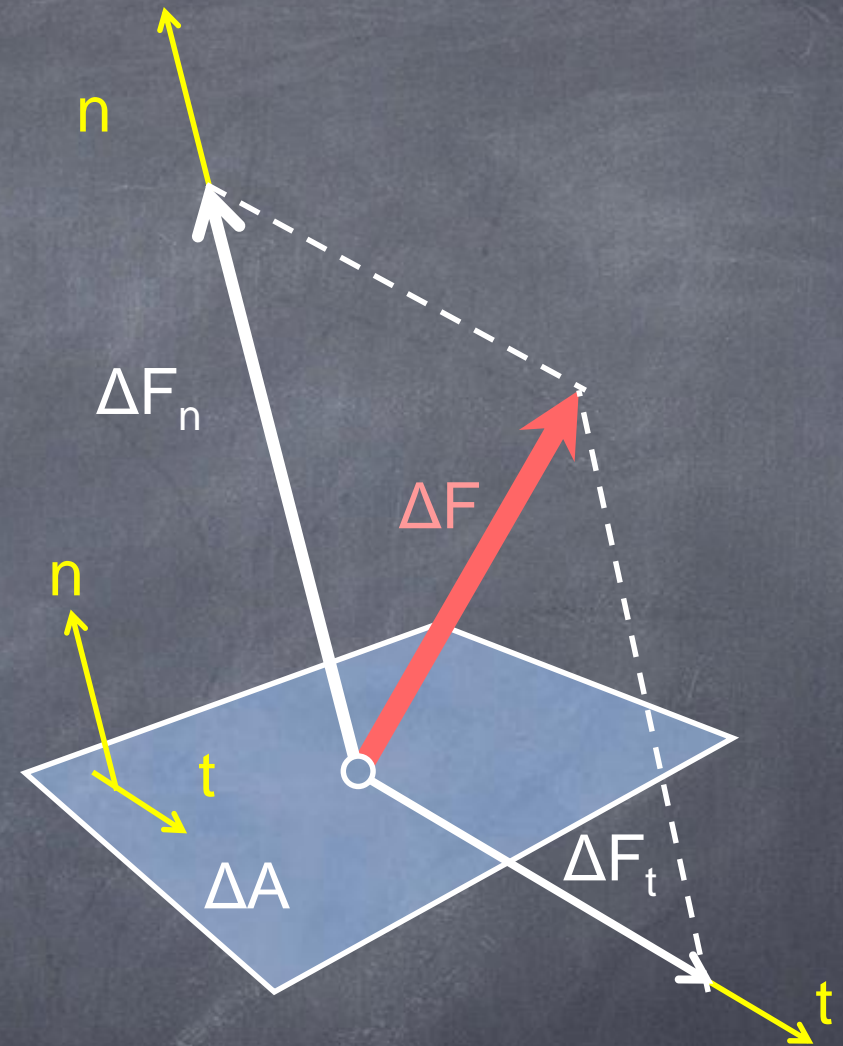


# Tensão

Tensão normal

$$\sigma \equiv \Delta F_n / \Delta A$$

Tensão tangencial (ou de cisalhamento)



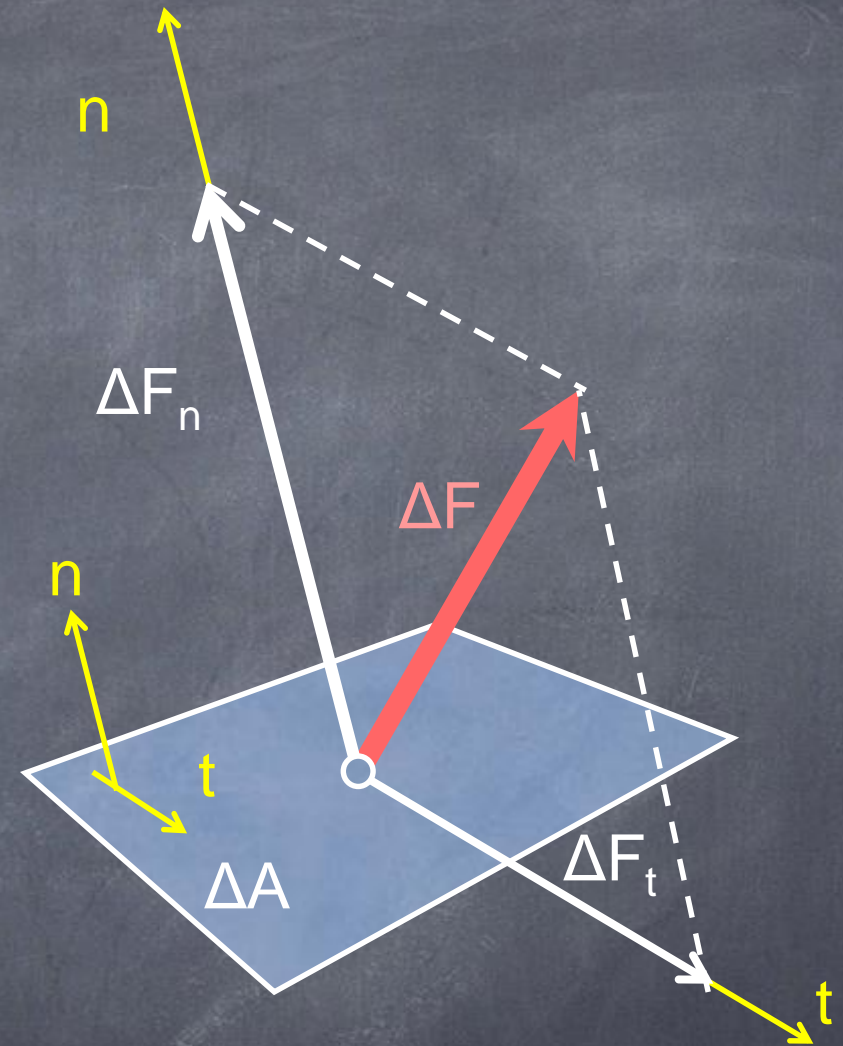
# Tensão

Tensão normal

$$\sigma \equiv \Delta F_n / \Delta A$$

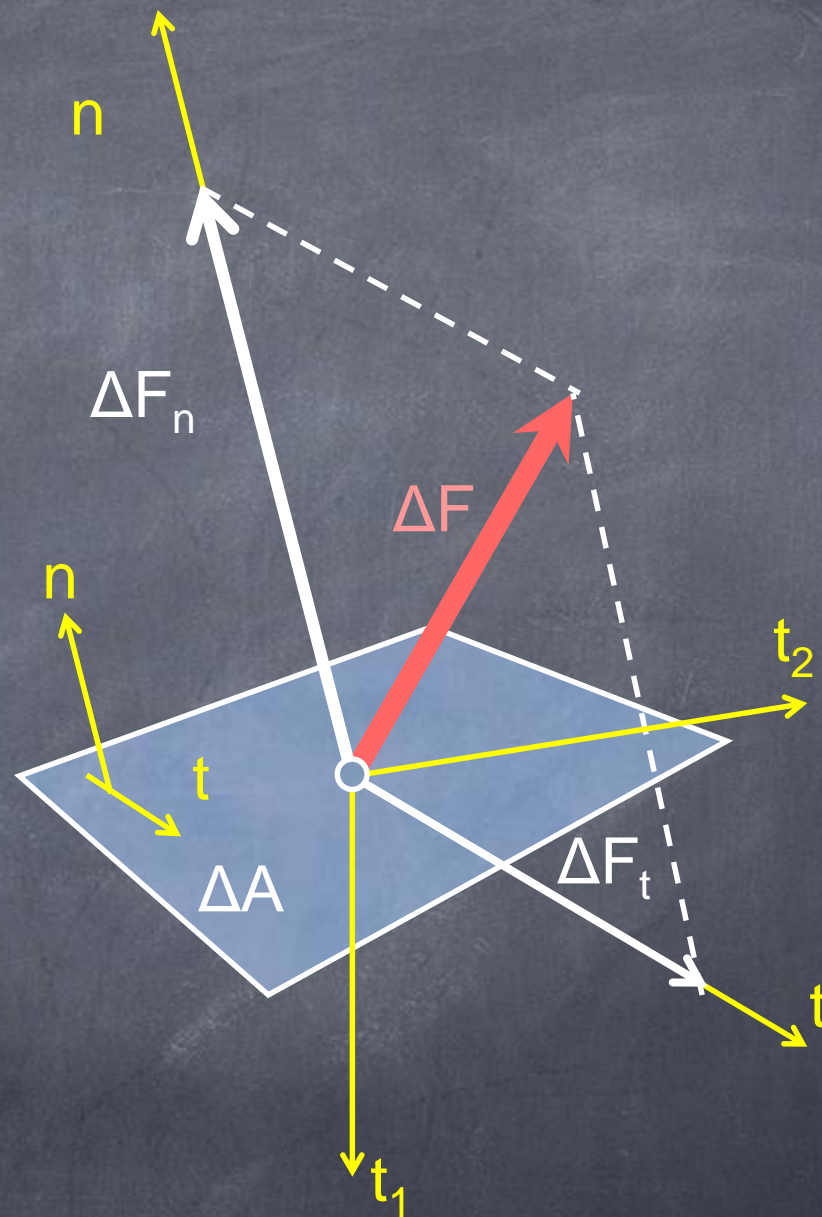
Tensão tangencial (ou de cisalhamento)

$$\tau \equiv \Delta F_t / \Delta A$$



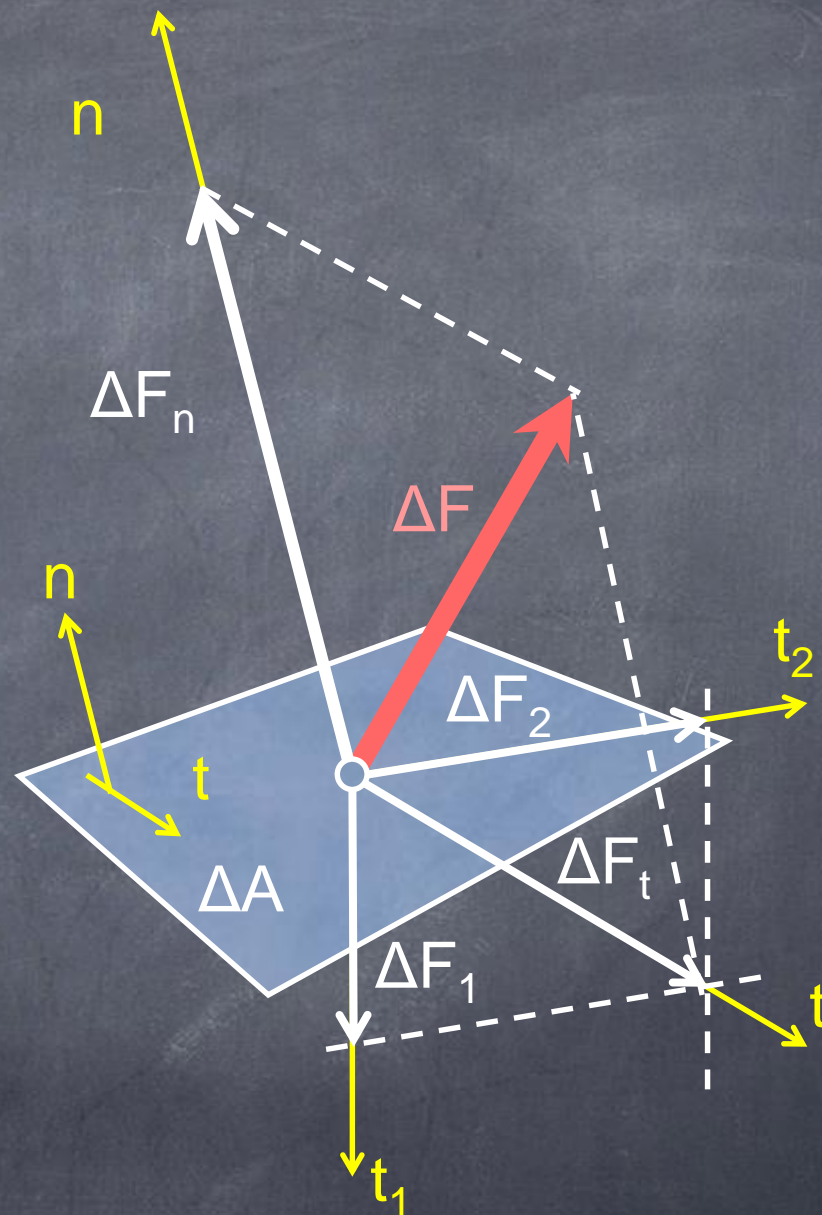


# Tensão

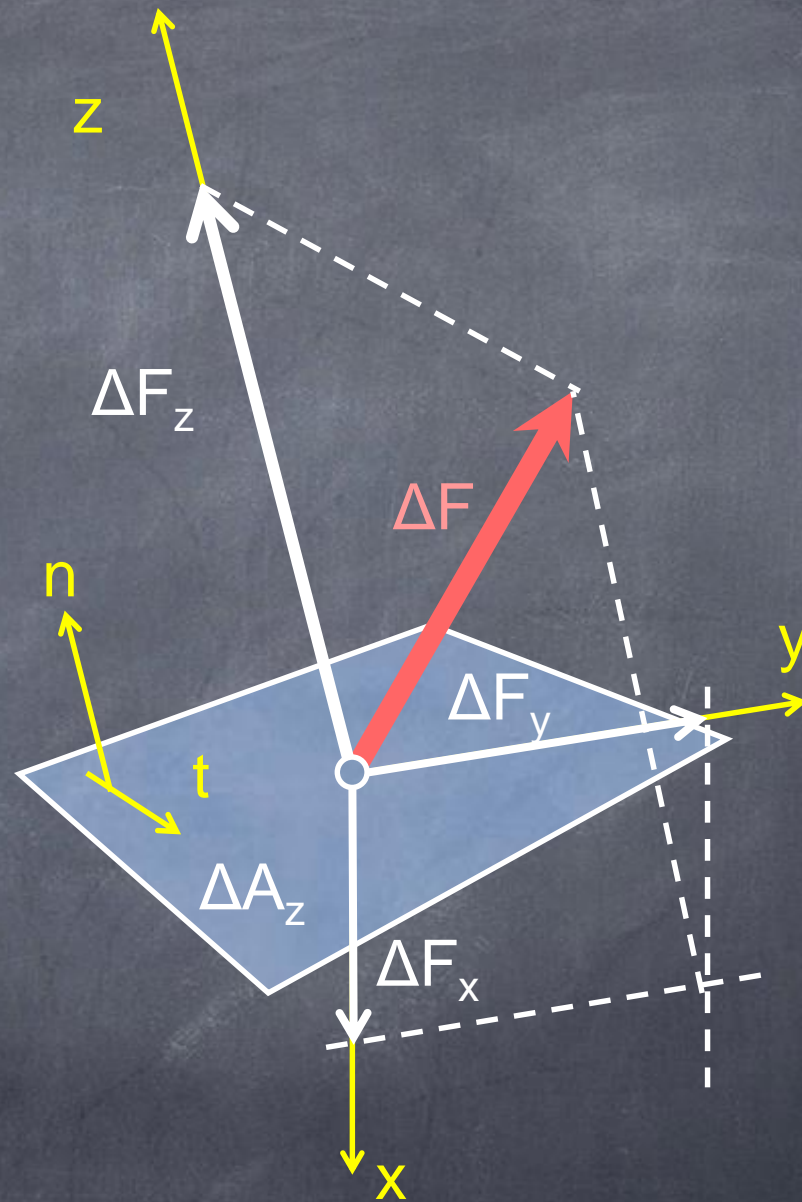




# Tensão

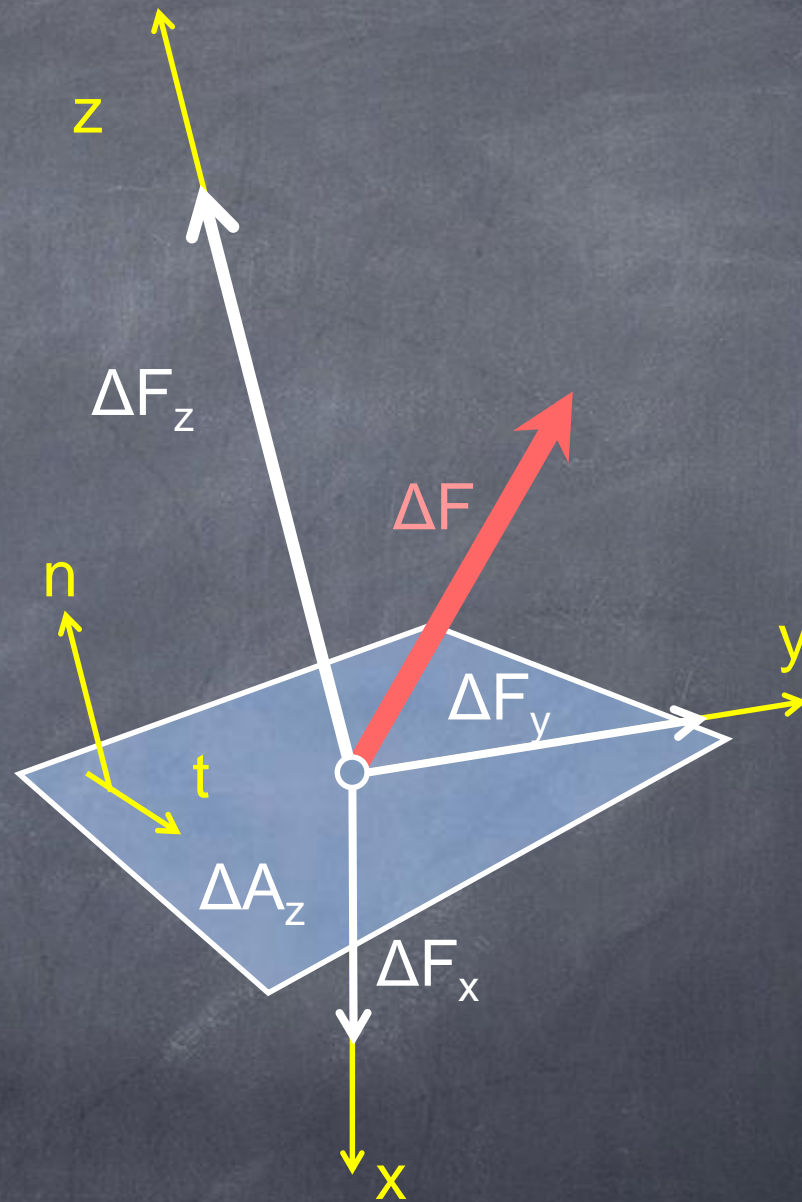


# Tensão



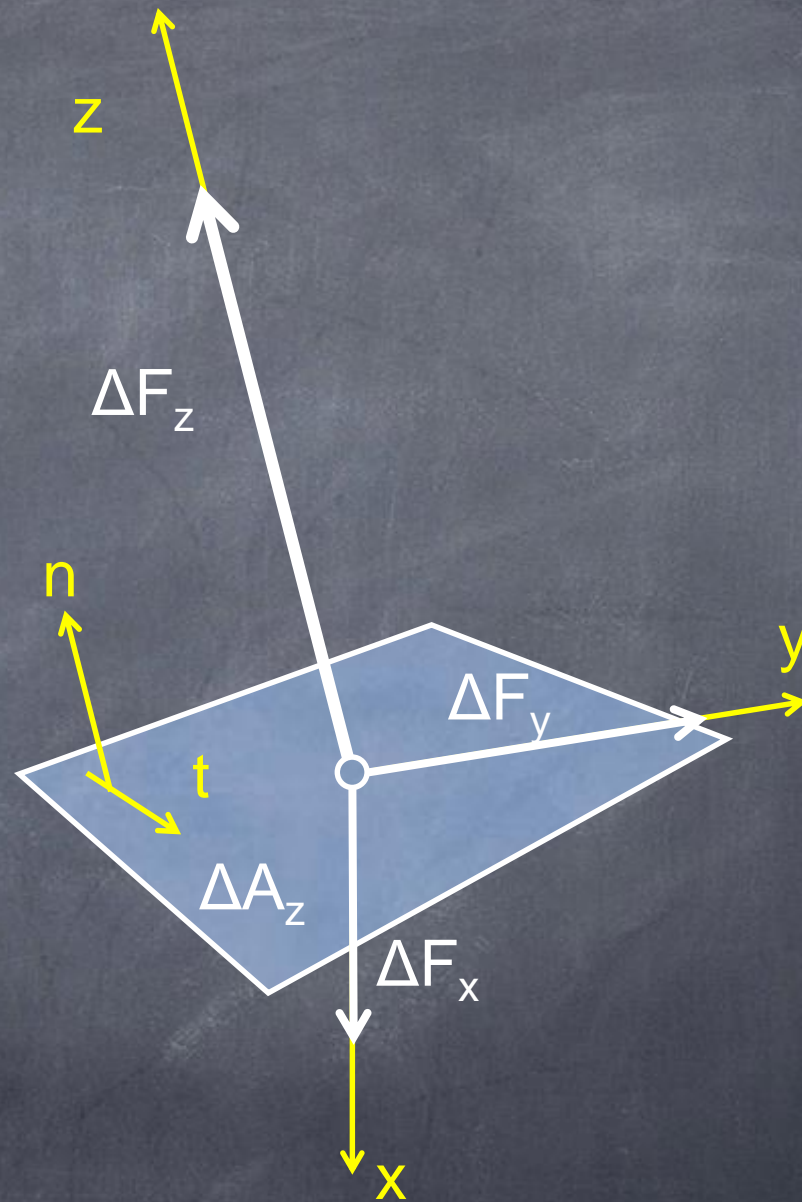


# Tensão



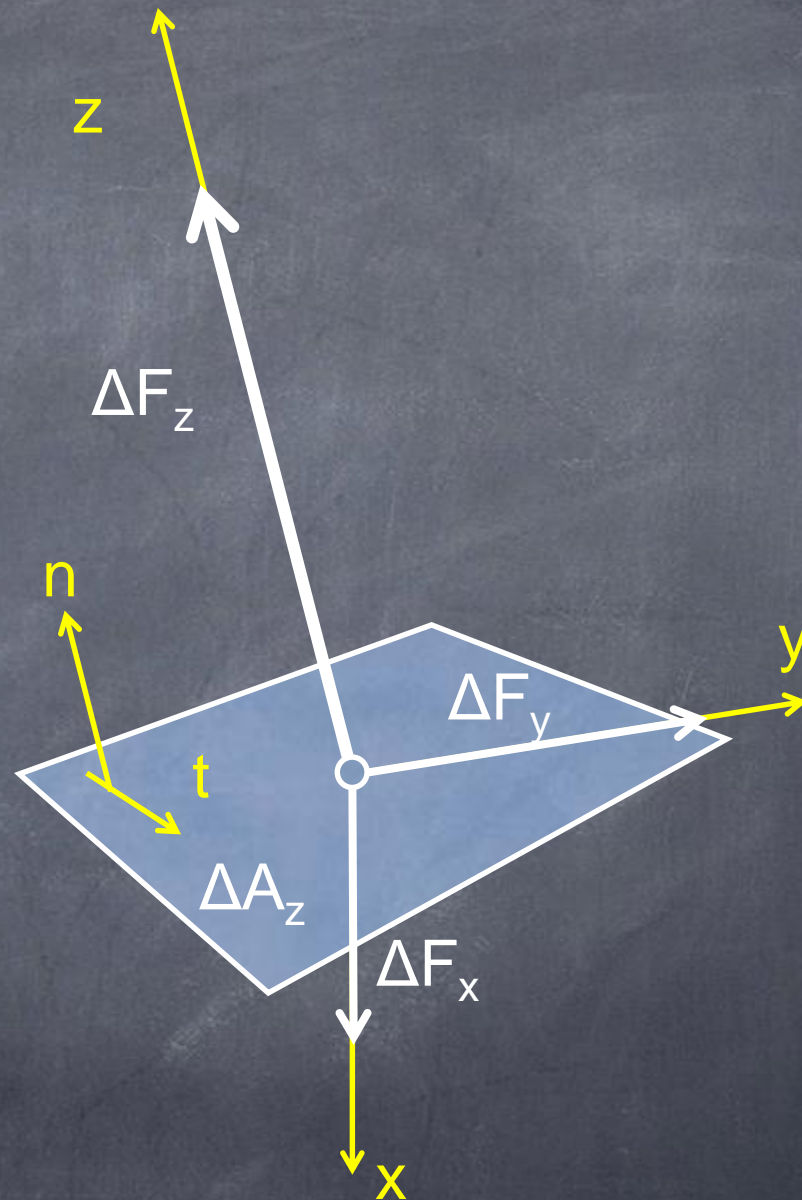


# Tensão



# Tensão

$$\lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} (\Delta F_x / \Delta A_z) \rightarrow \tau_{zx} \quad \text{valor finito}$$

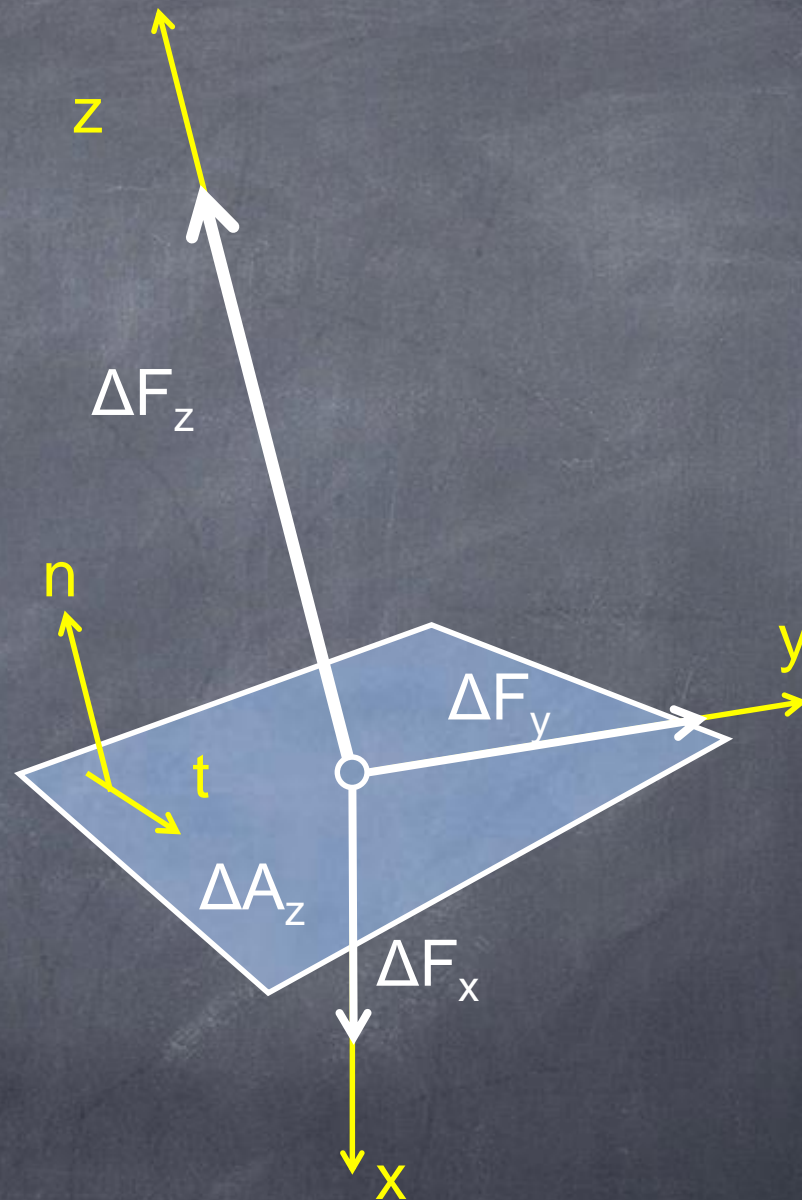




# Tensão

$$\lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} (\Delta F_x / \Delta A_z) \rightarrow \tau_{zx} \quad \text{valor finito}$$

$$\lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} (\Delta F_y / \Delta A_z) \rightarrow \tau_{zy}$$



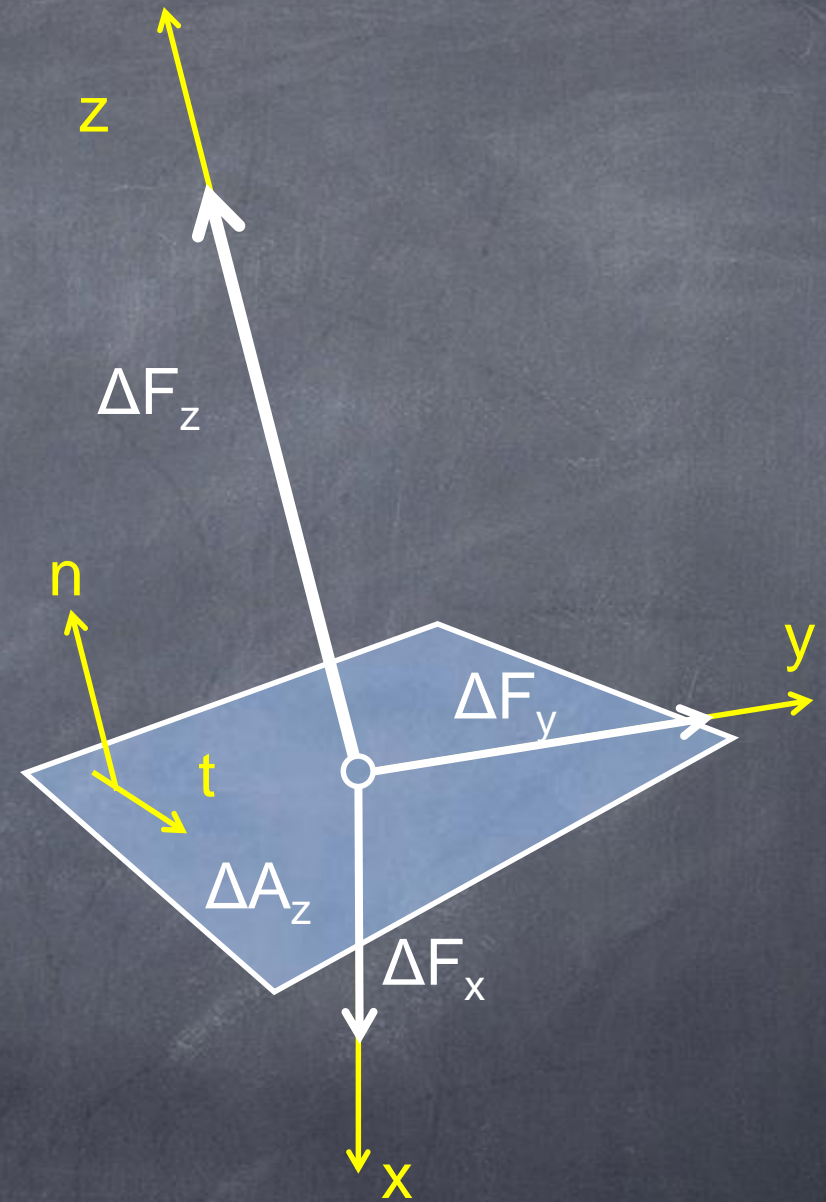


# Tensão

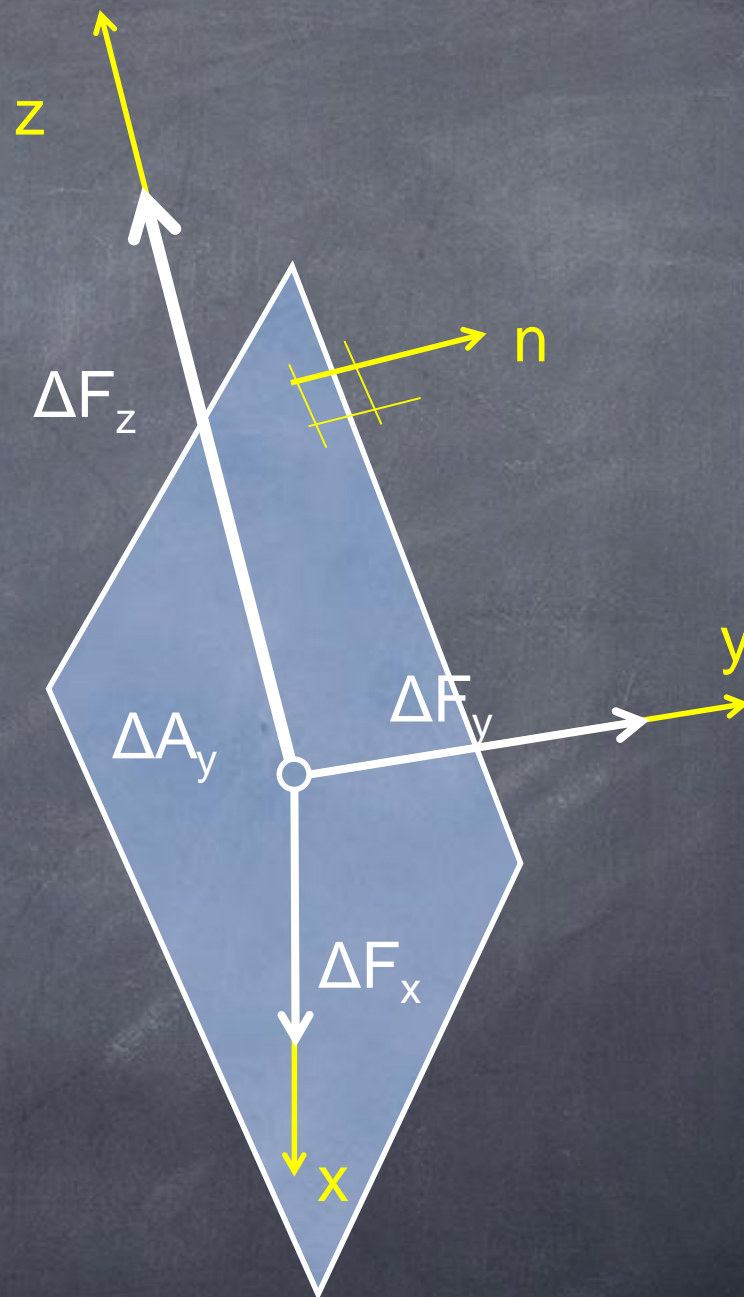
$$\lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} (\Delta F_x / \Delta A_z) \rightarrow \tau_{zx} \quad \text{valor finito}$$

$$\lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} (\Delta F_y / \Delta A_z) \rightarrow \tau_{zy}$$

$$\lim_{\Delta A_z \rightarrow 0} (\Delta F_z / \Delta A_z) \rightarrow \sigma_{zz}$$



# Tensão



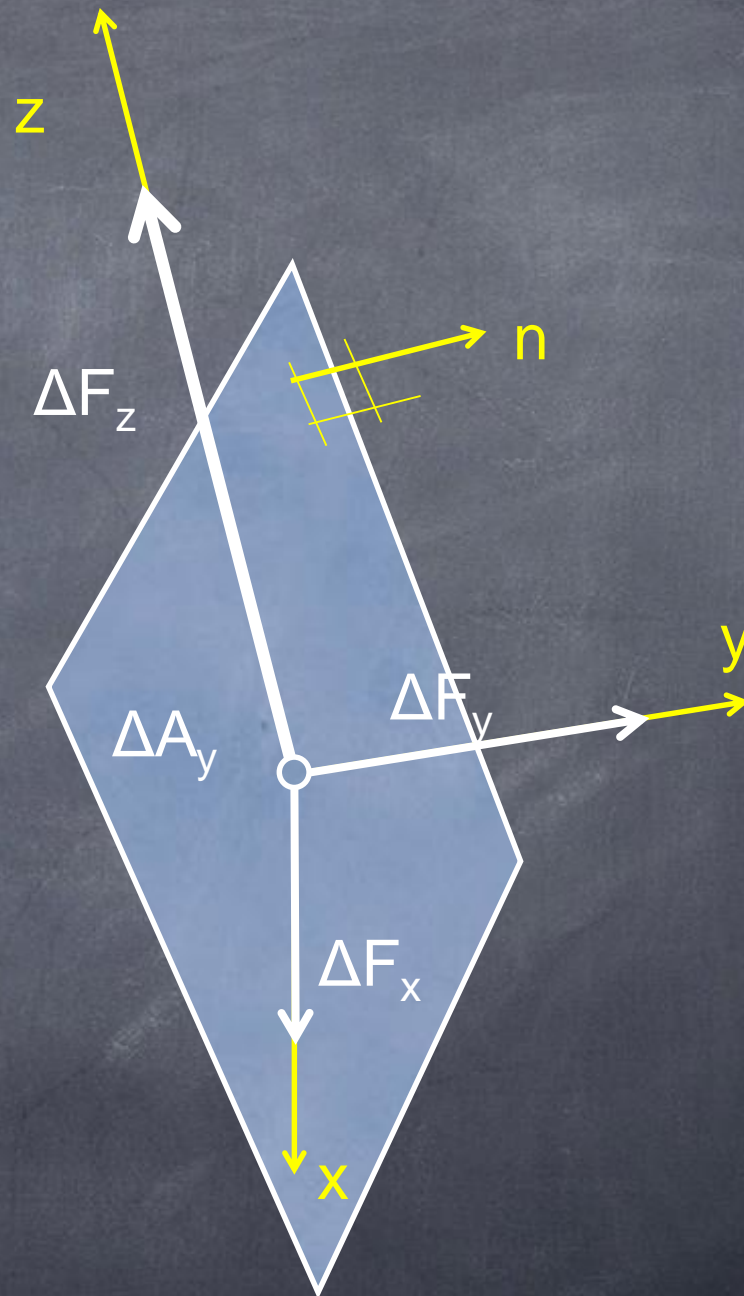


## Tensão

$$\lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} (\Delta F_x / \Delta A_y) \rightarrow \tau_{yx}$$

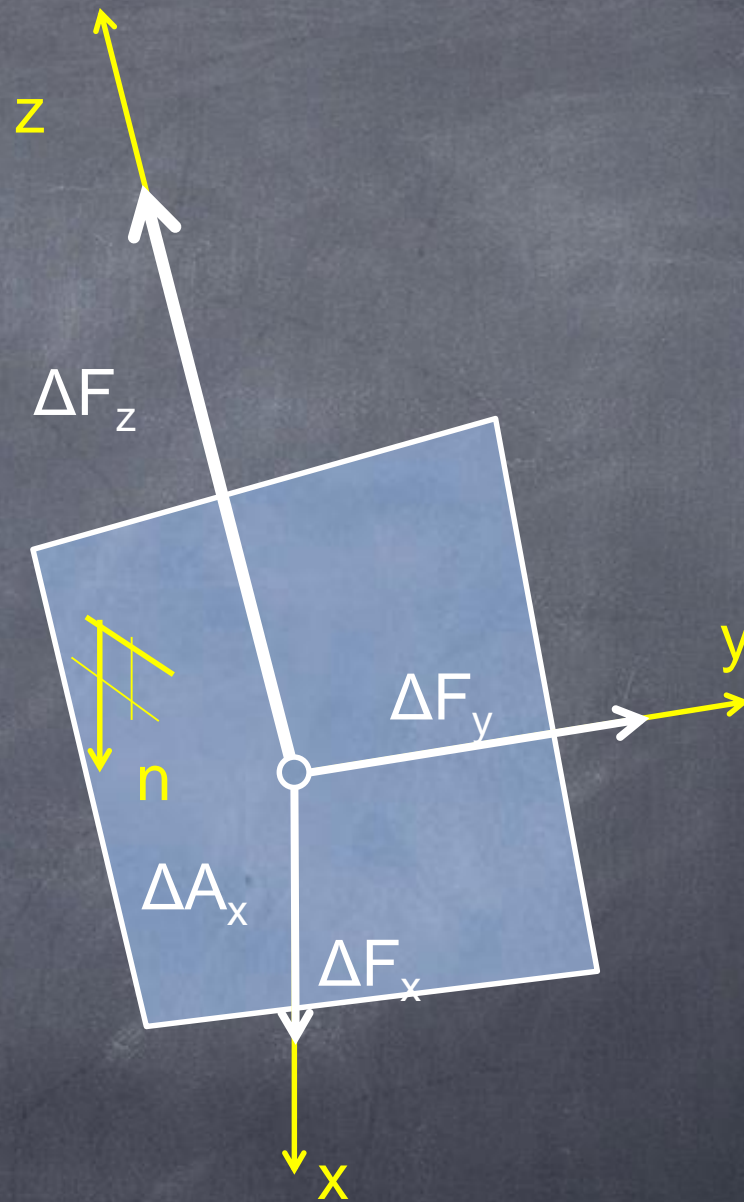
$$\lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} (\Delta F_y / \Delta A_y) \rightarrow \sigma_{yy}$$

$$\lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} (\Delta F_z / \Delta A_y) \rightarrow \tau_{yz}$$





# Tensão

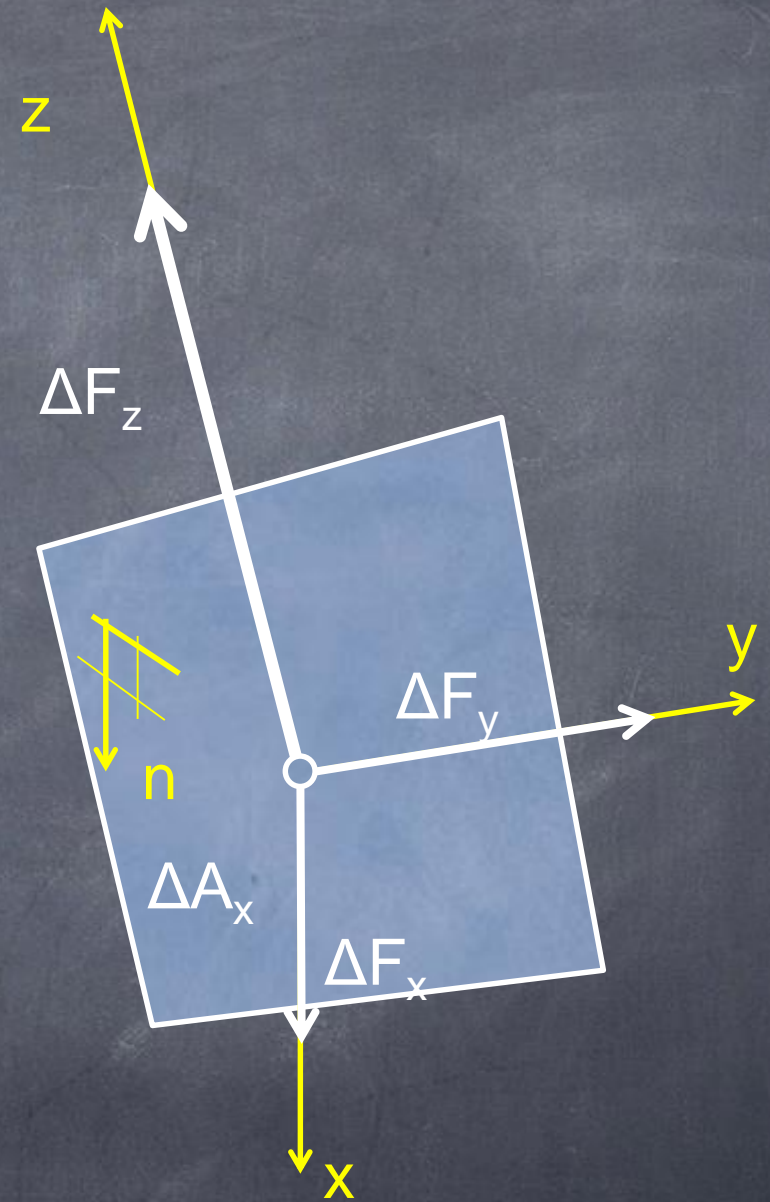


# Tensão

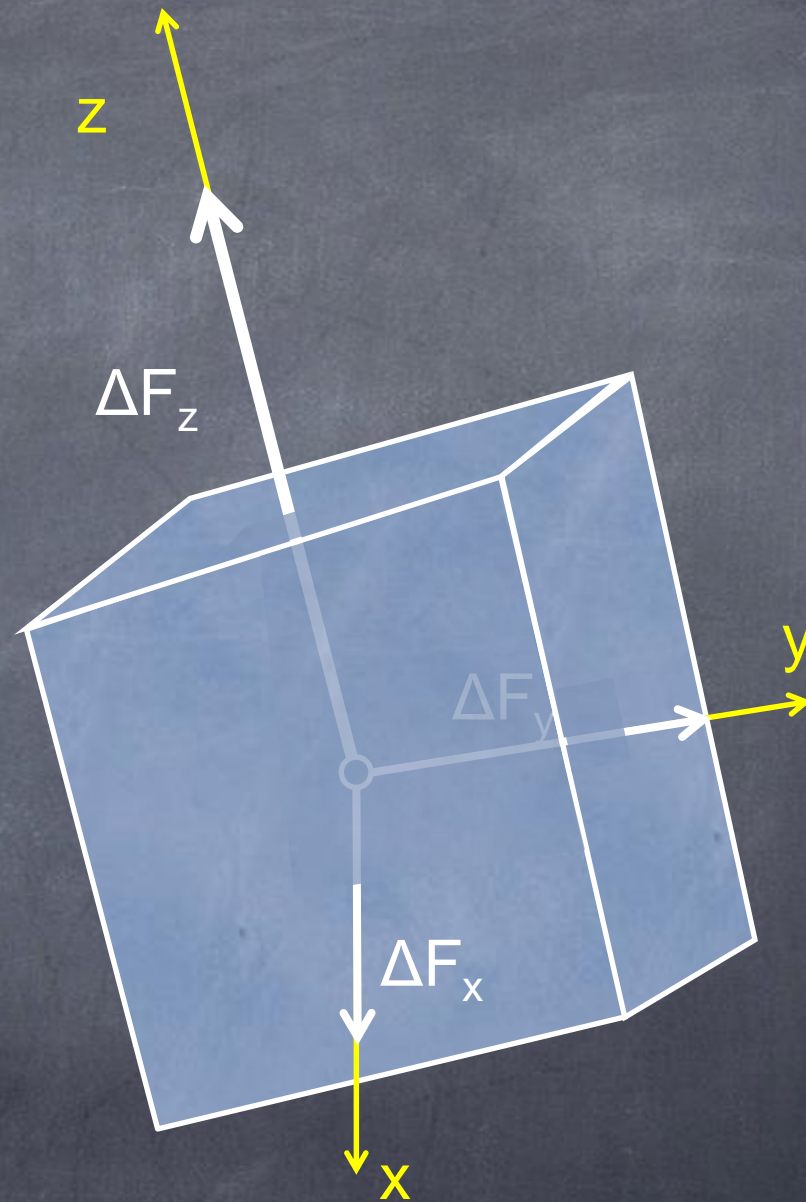
$$\lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} (\Delta F_x / \Delta A_x) \rightarrow \sigma_{xx}$$

$$\lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} (\Delta F_y / \Delta A_x) \rightarrow \tau_{xy}$$

$$\lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} (\Delta F_z / \Delta A_x) \rightarrow \tau_{xz}$$

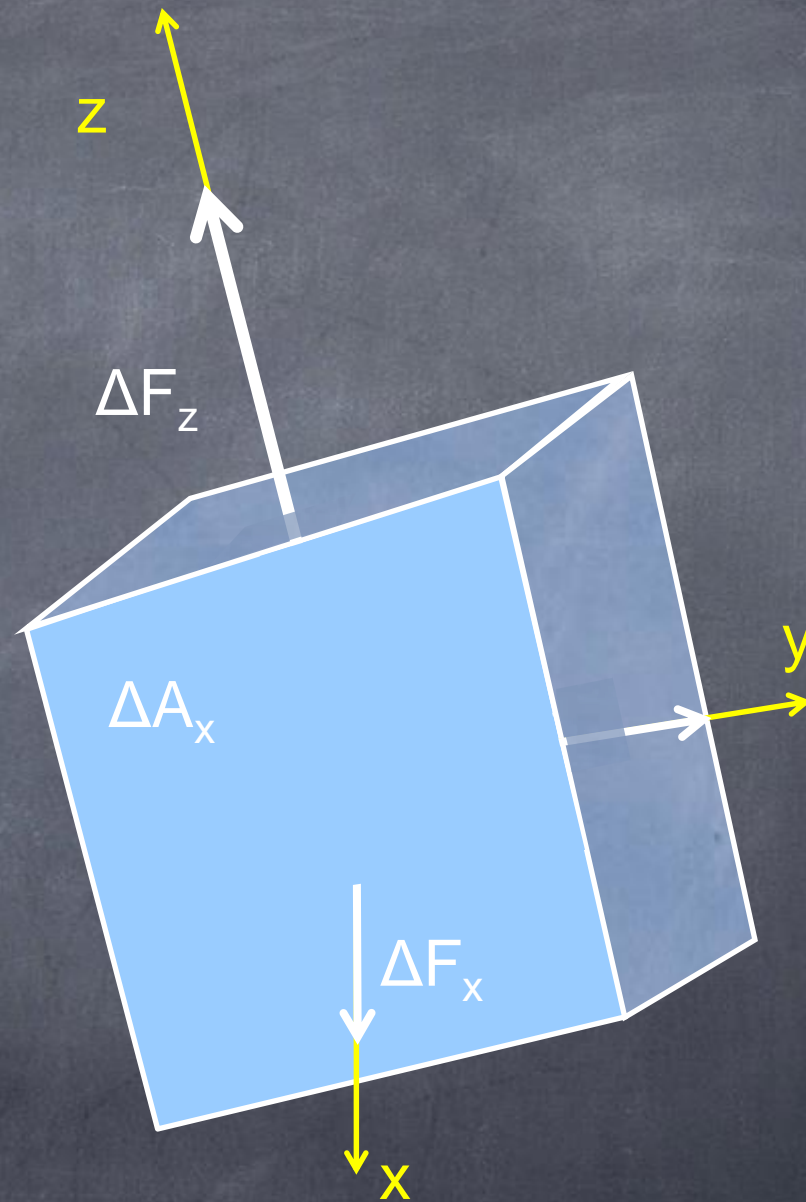


# Tensão

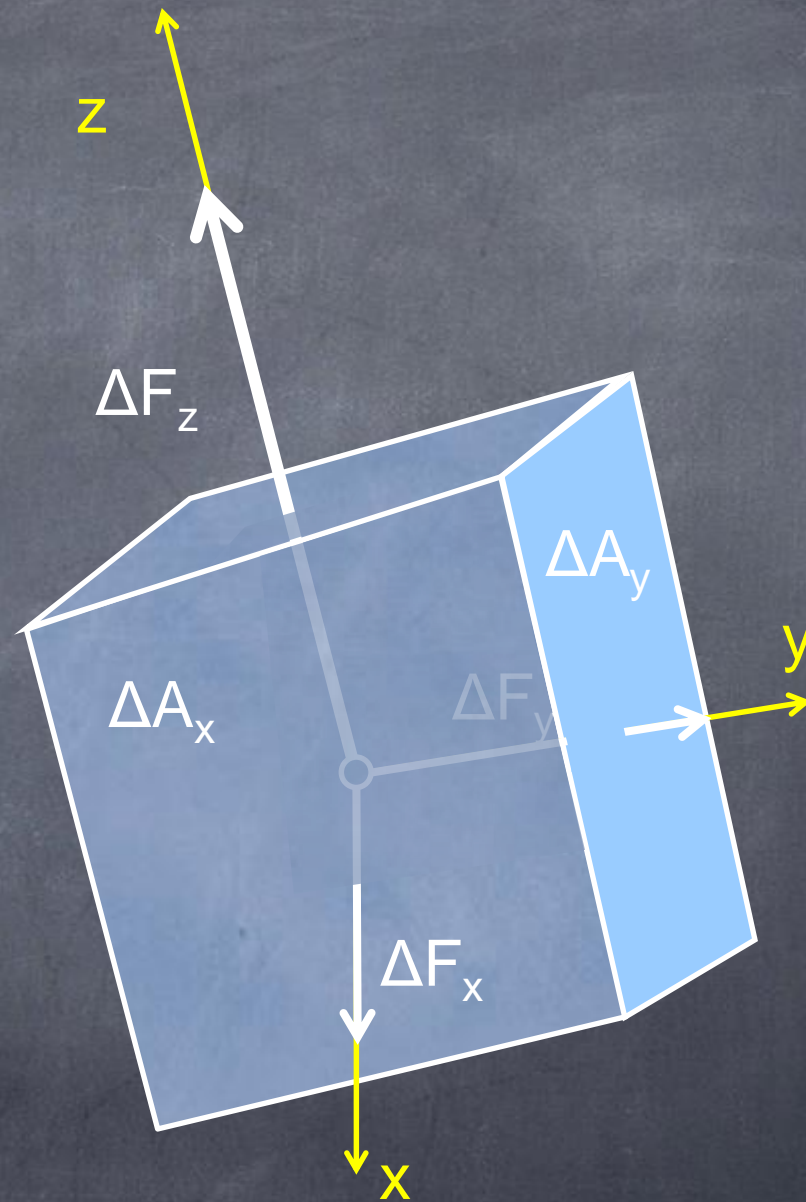




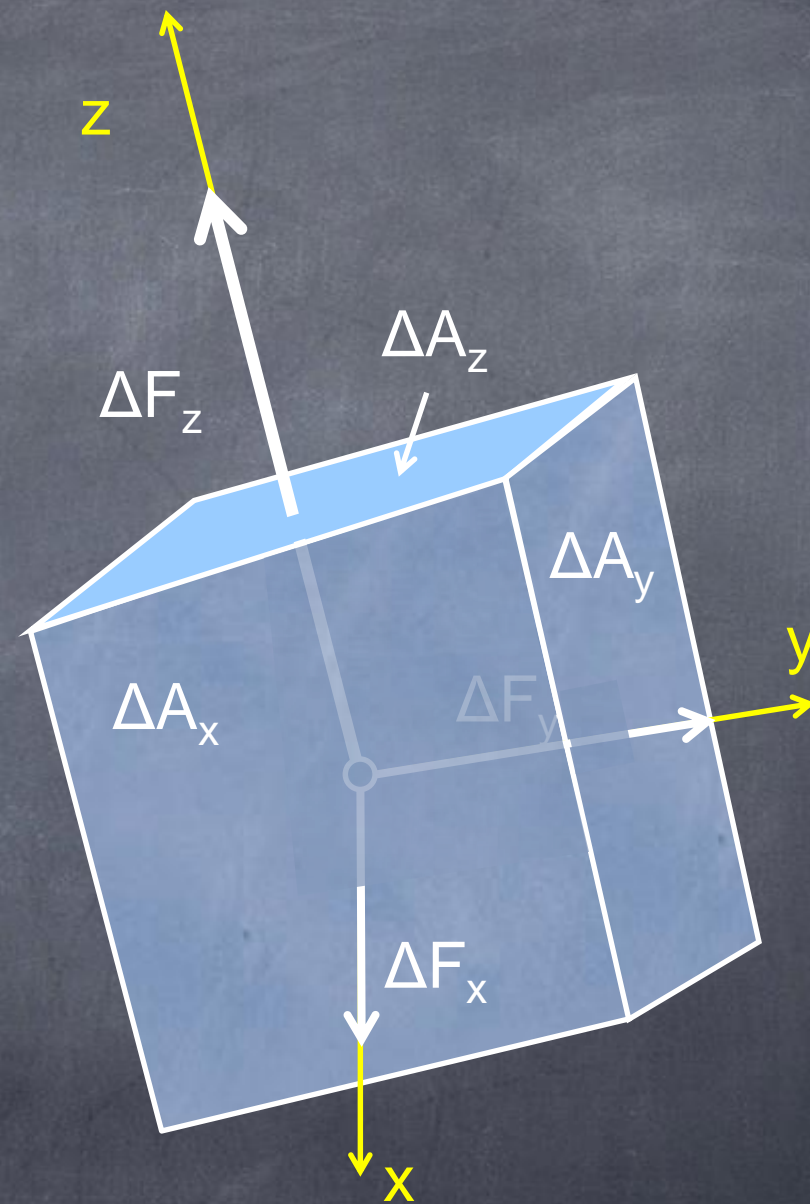
# Tensão



# Tensão

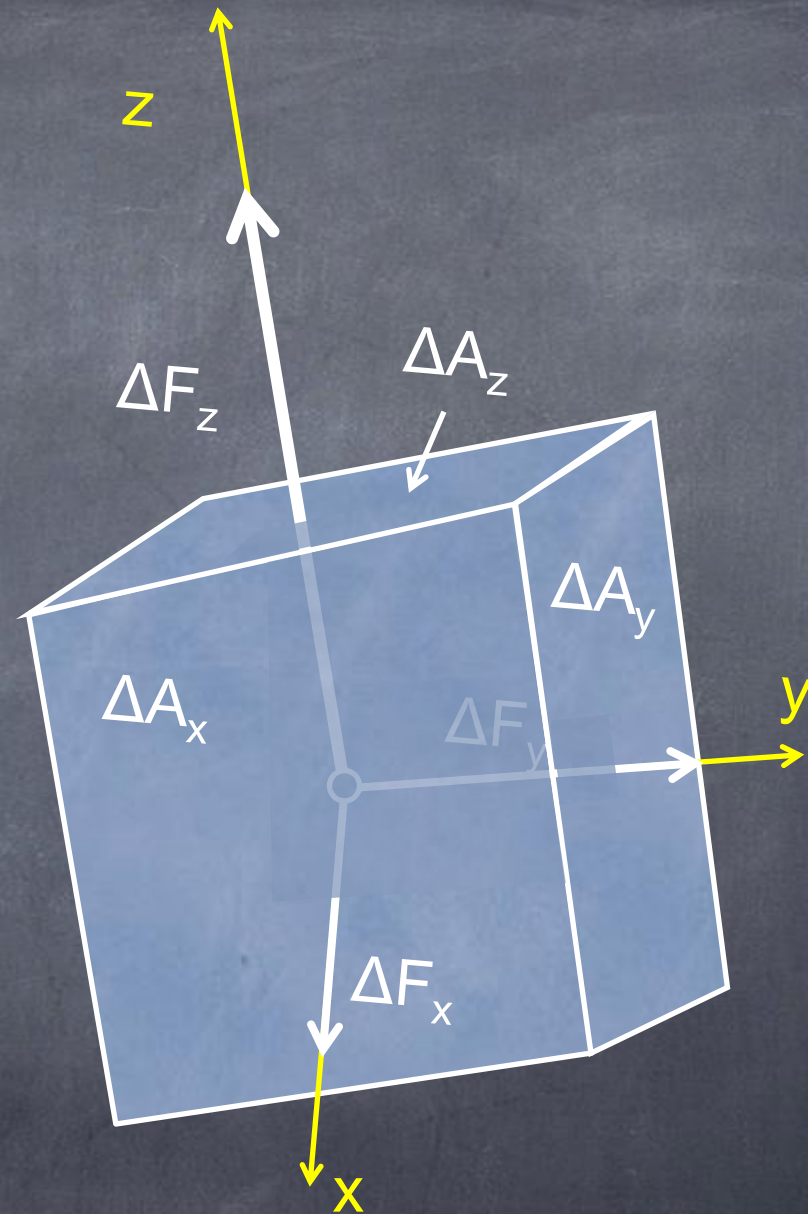


# Tensão

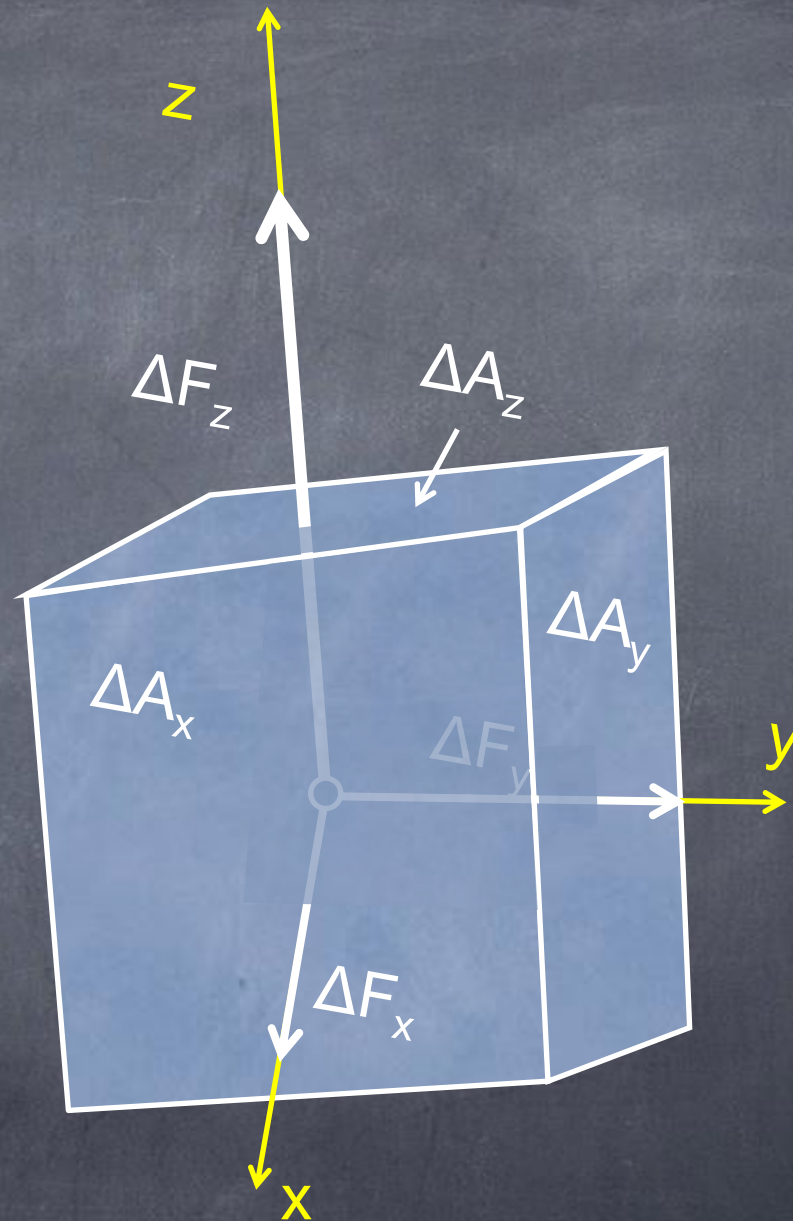




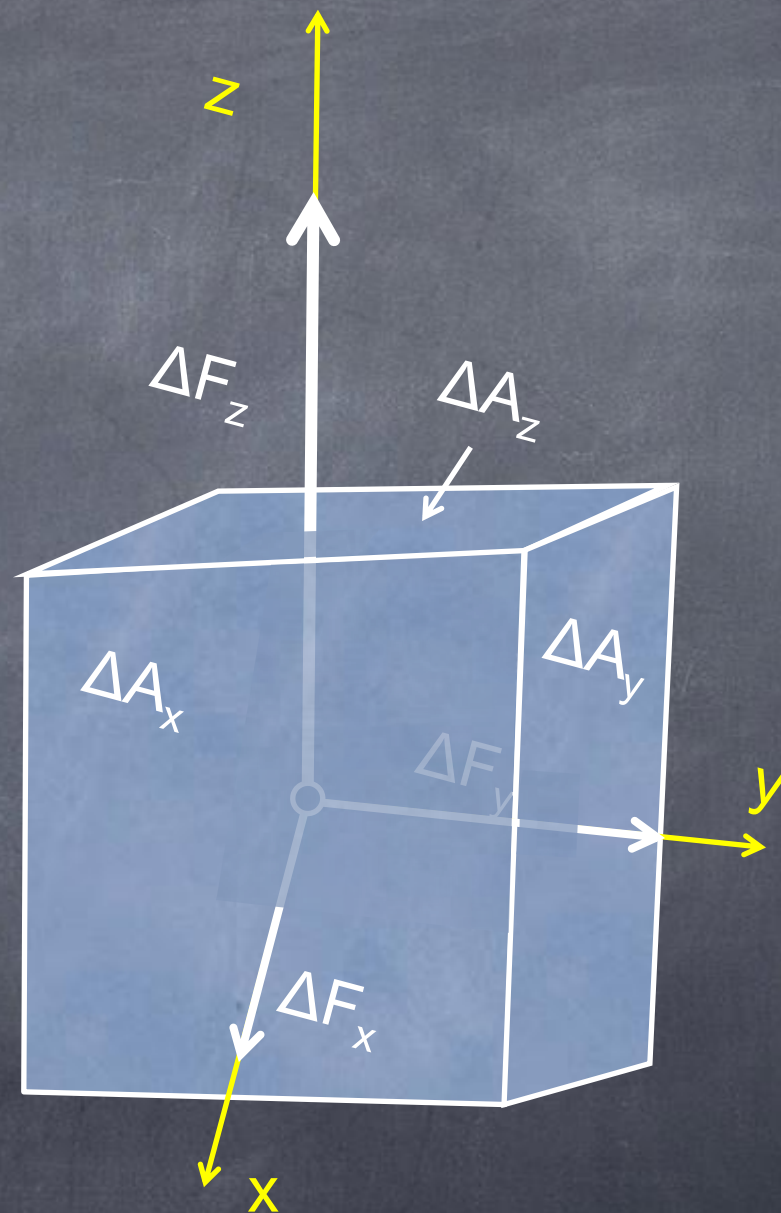
# Tensão



# Tensão

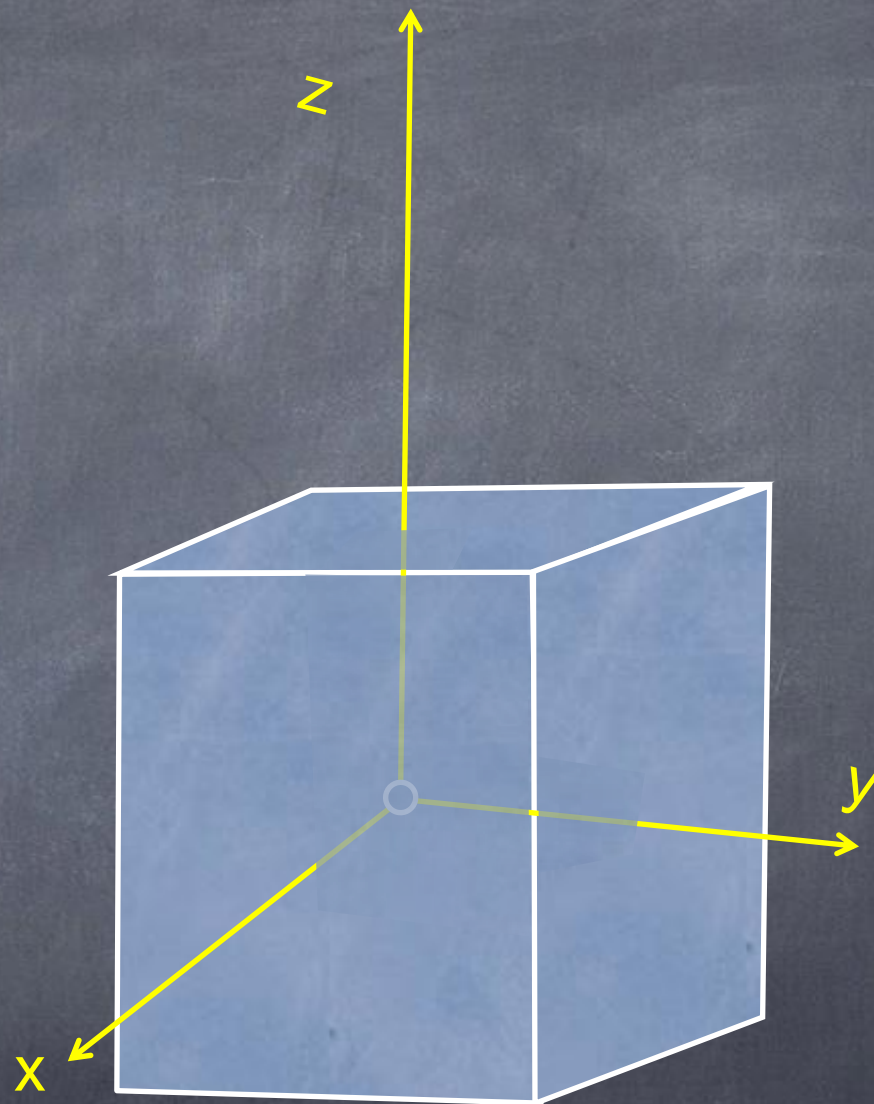


# Tensão





# Tensão

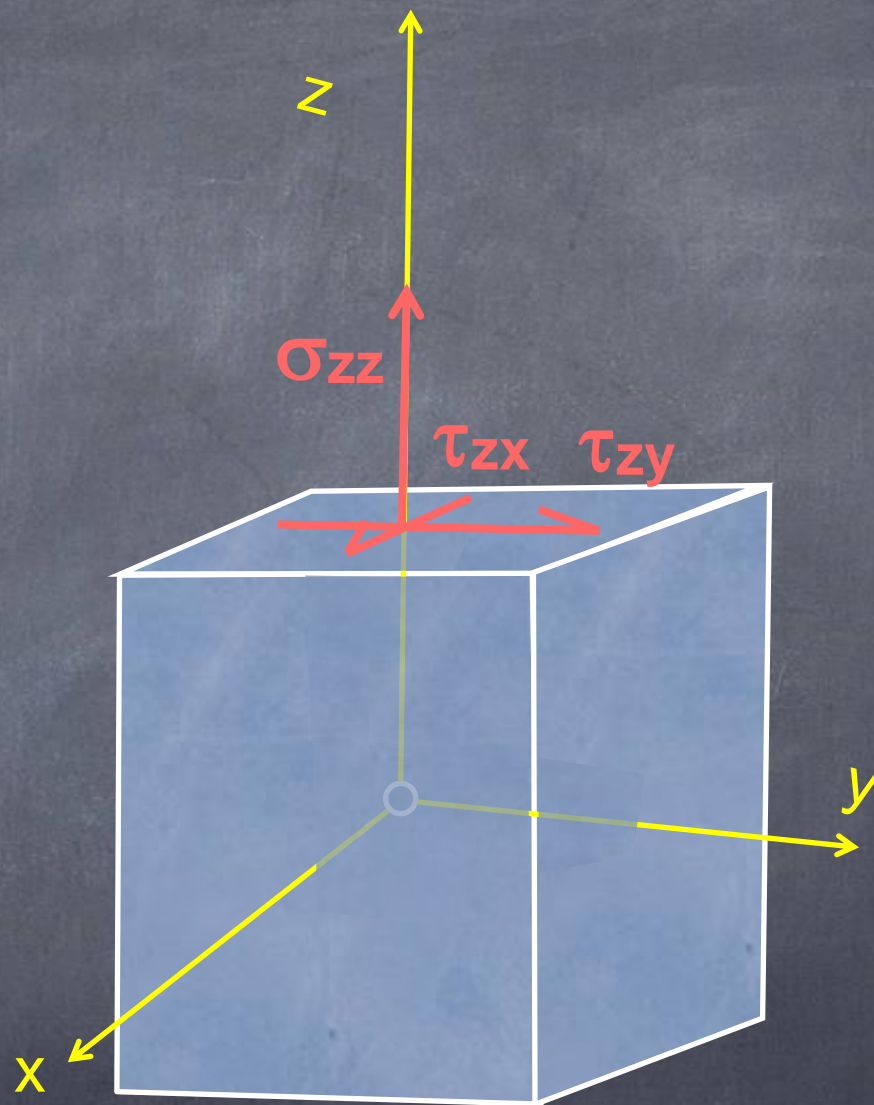


# Tensão

$\tau_{zx}$

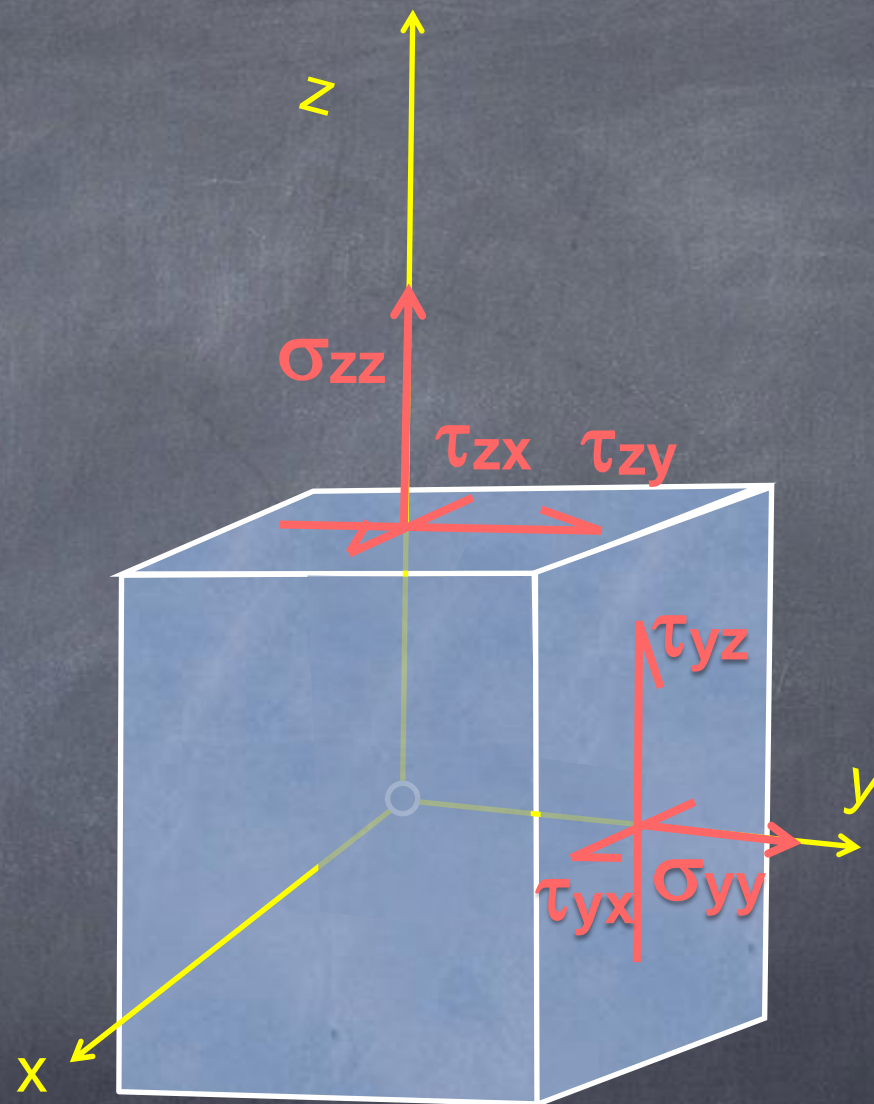
$\tau_{zy}$

$\sigma_{zz}$



# Tensão

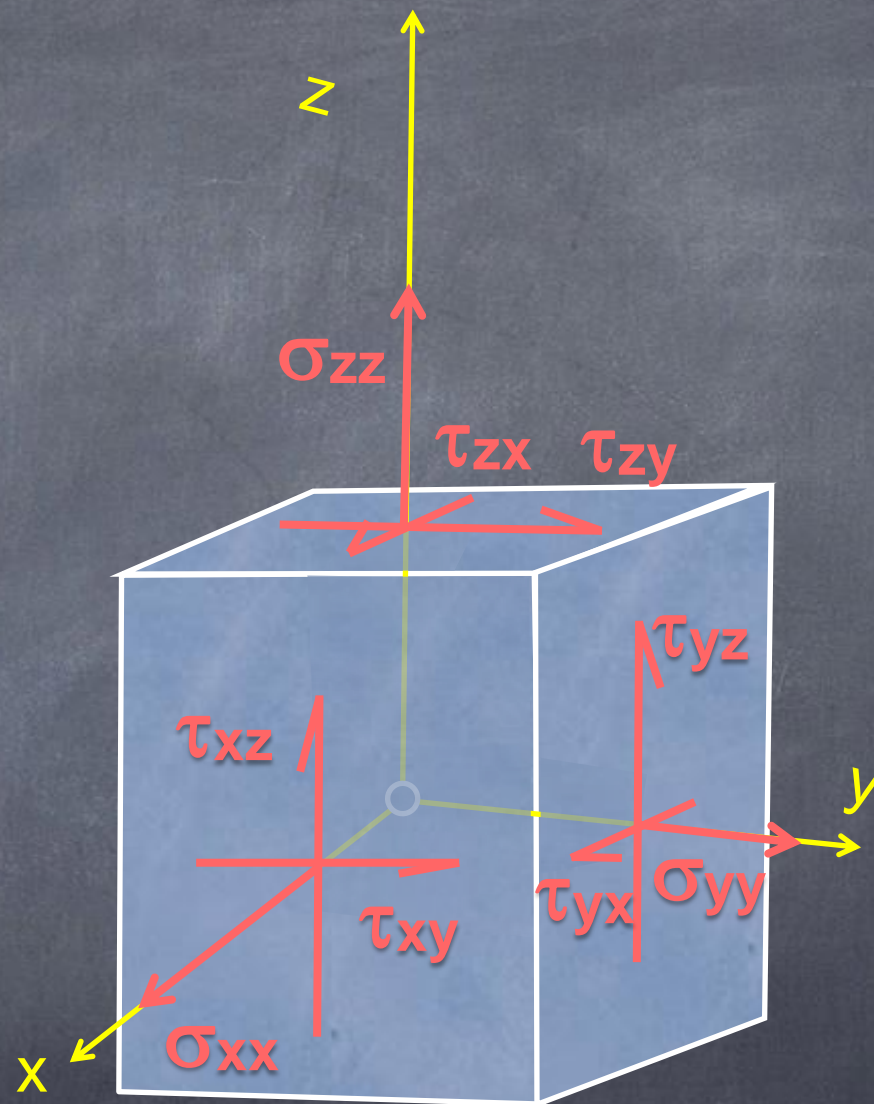
$\tau_{yx}$	$\tau_{zx}$
$\sigma_{yy}$	$\tau_{zy}$
$\tau_{yz}$	$\sigma_{zz}$





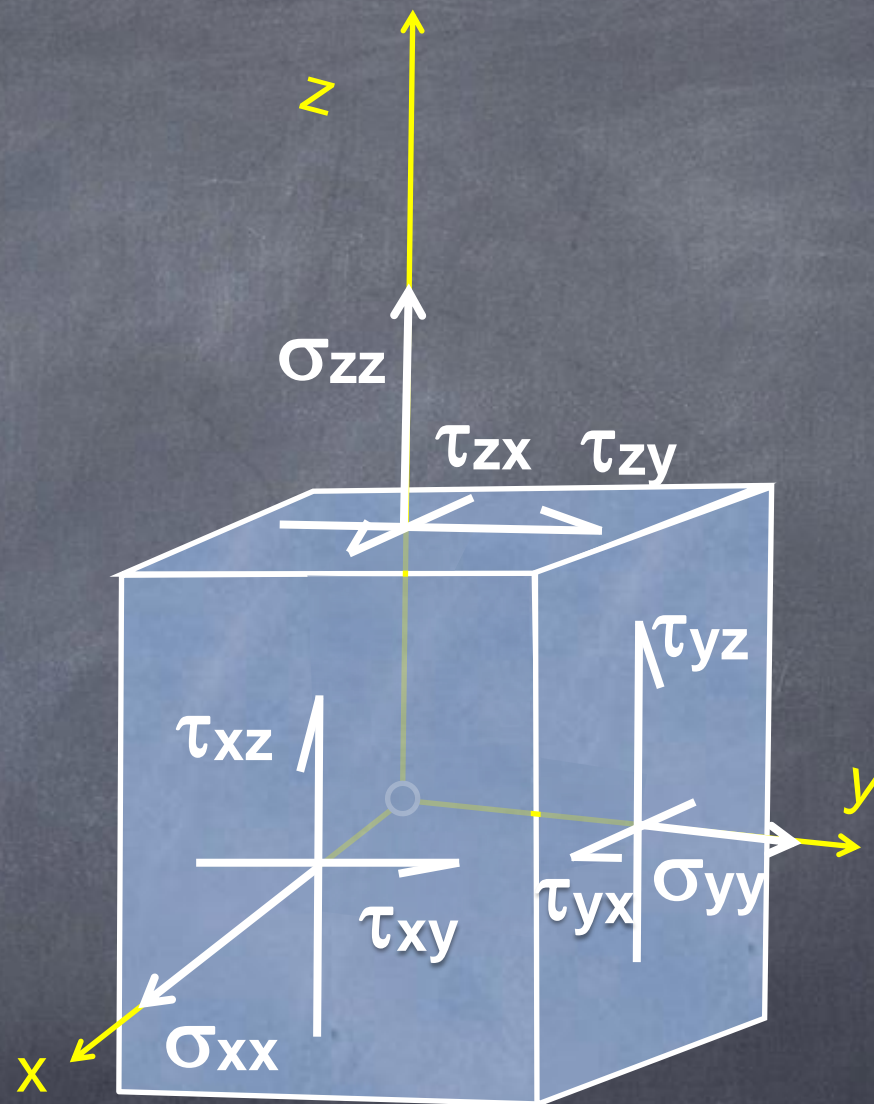
# Tensão

$\sigma_{xx}$	$\tau_{yx}$	$\tau_{zx}$
$\tau_{xy}$	$\sigma_{yy}$	$\tau_{zy}$
$\tau_{xz}$	$\tau_{yz}$	$\sigma_{zz}$



# Tensão

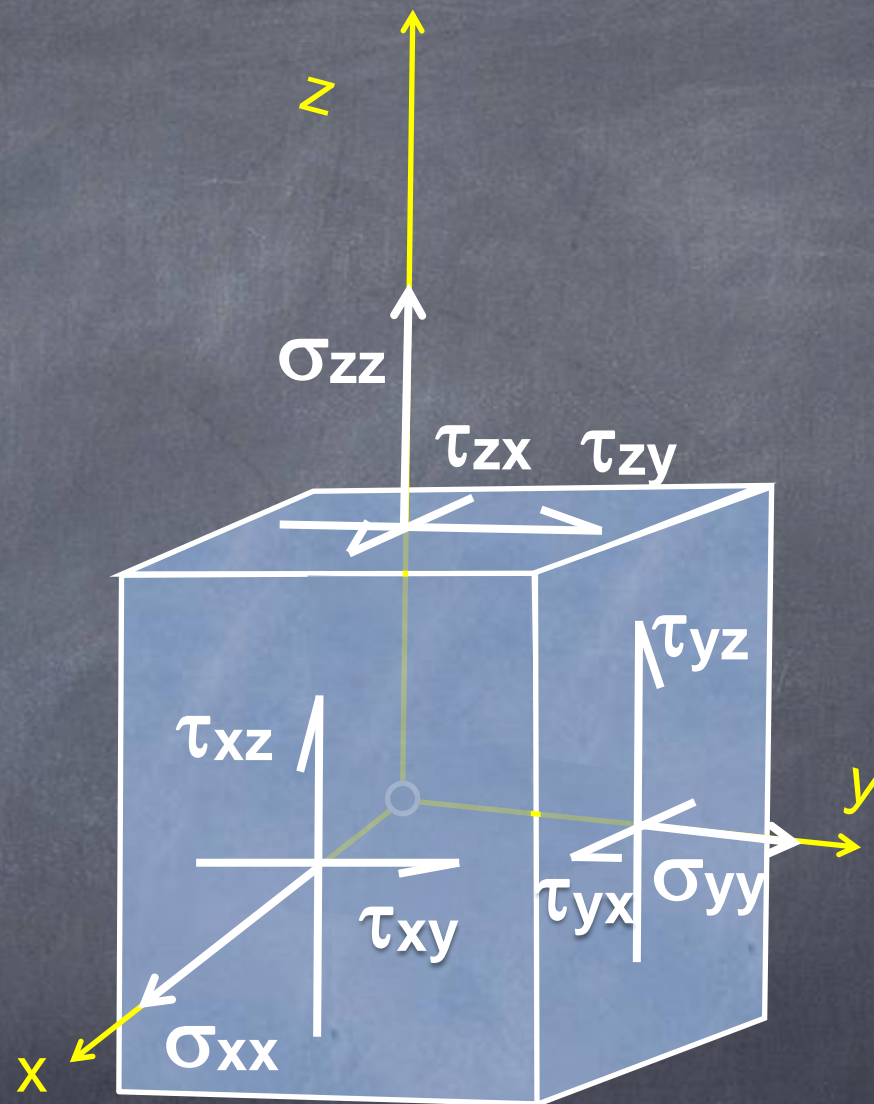
$\sigma_{xx}$	$\tau_{yx}$	$\tau_{zx}$
$\tau_{xy}$	$\sigma_{yy}$	$\tau_{zy}$
$\tau_{xz}$	$\tau_{yz}$	$\sigma_{zz}$



# Tensão

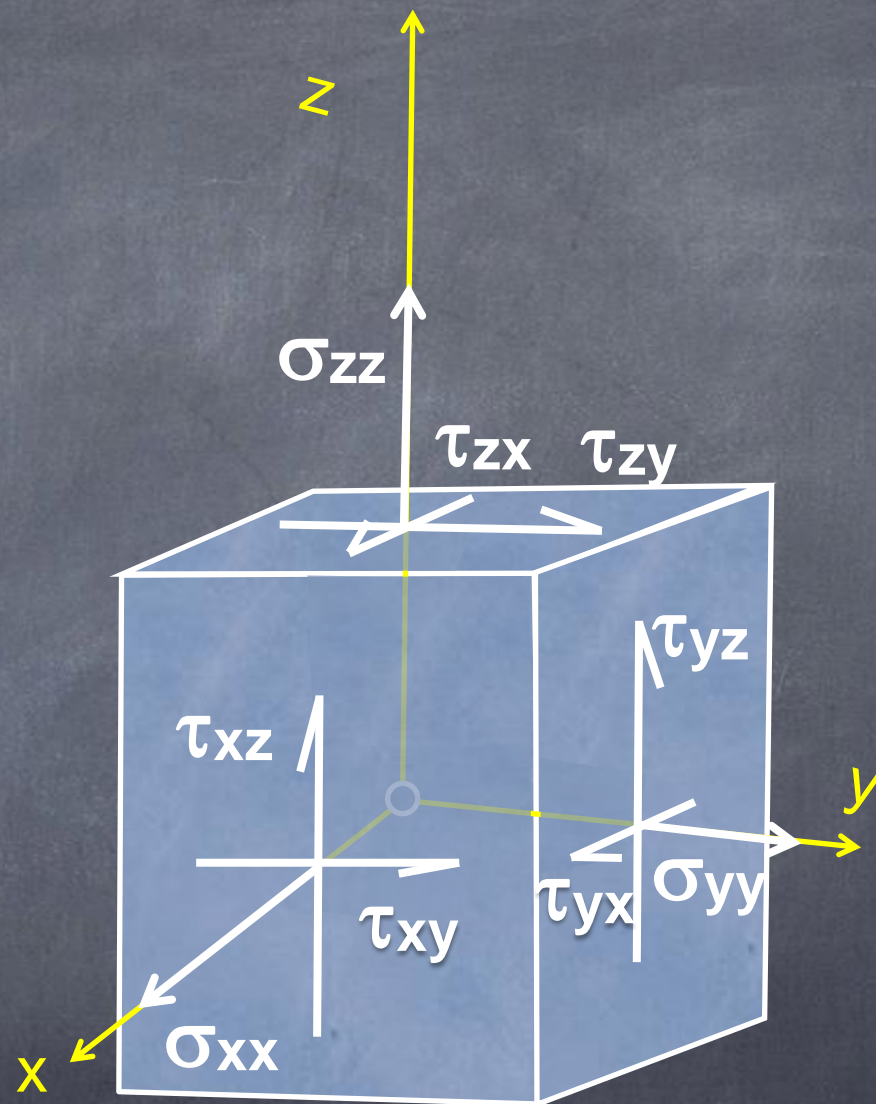
Estado geral de tensões

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

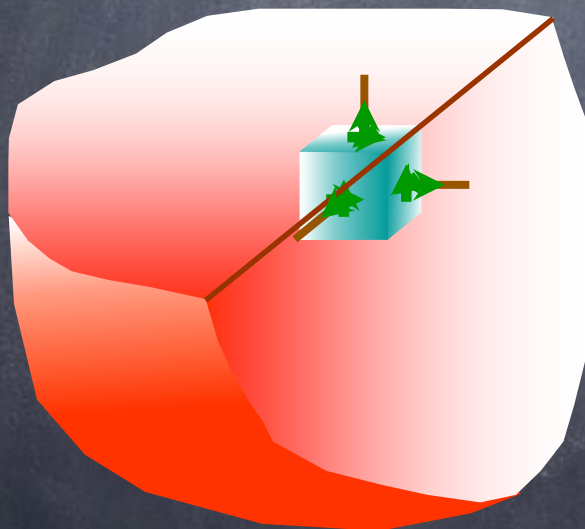




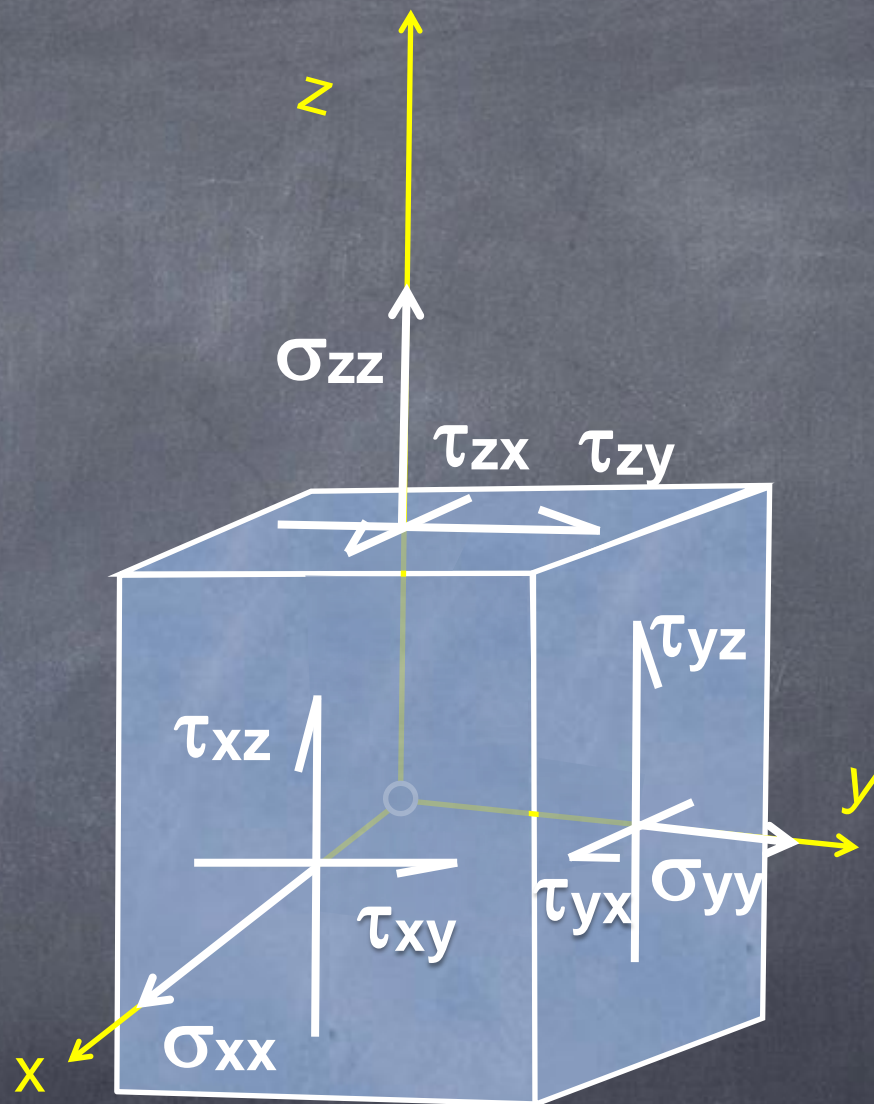
# Tensão



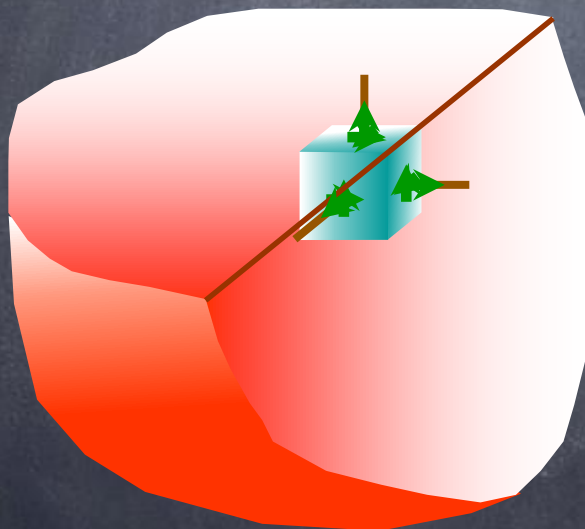
# Tensão



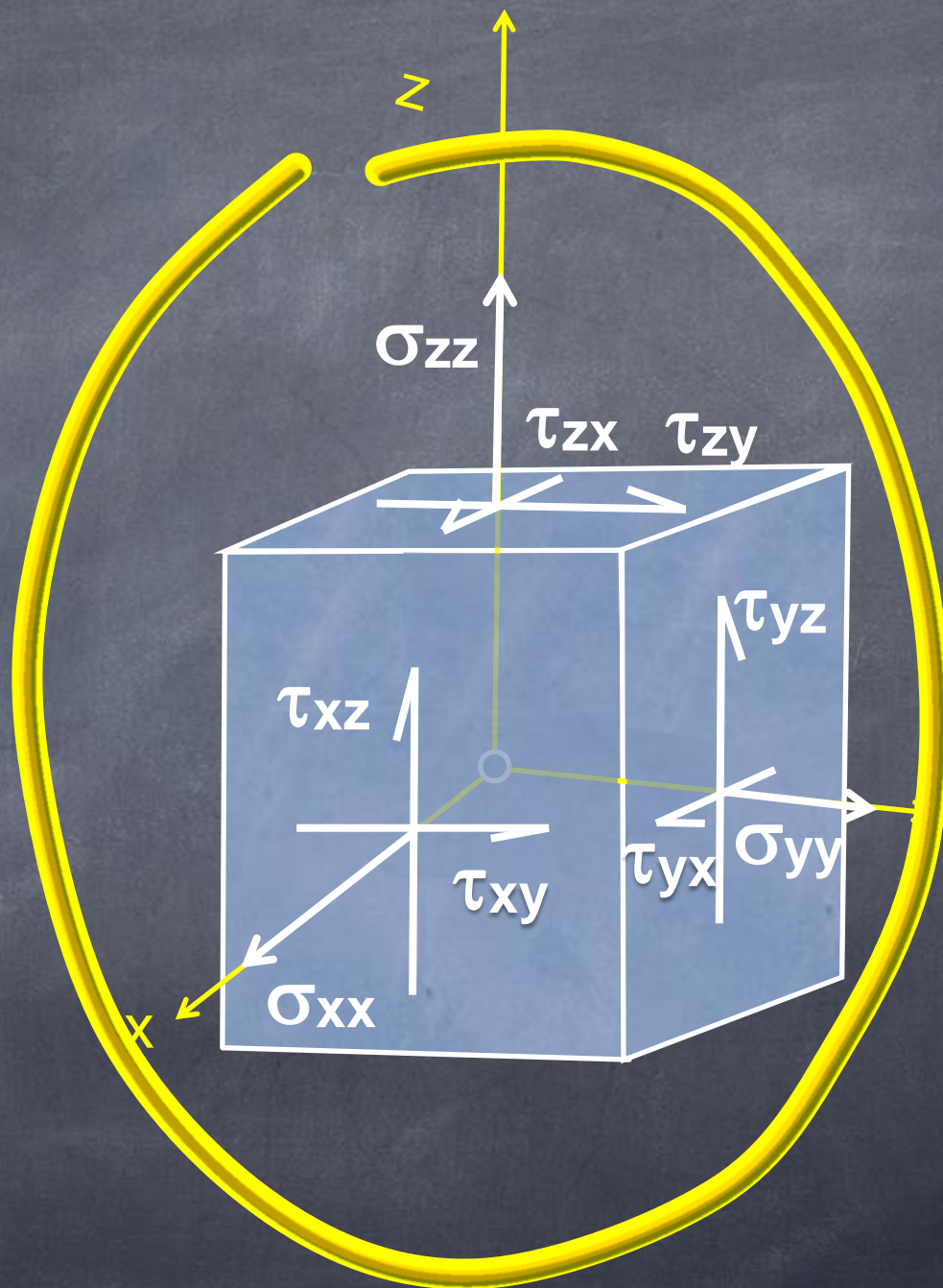
x



# Tensão

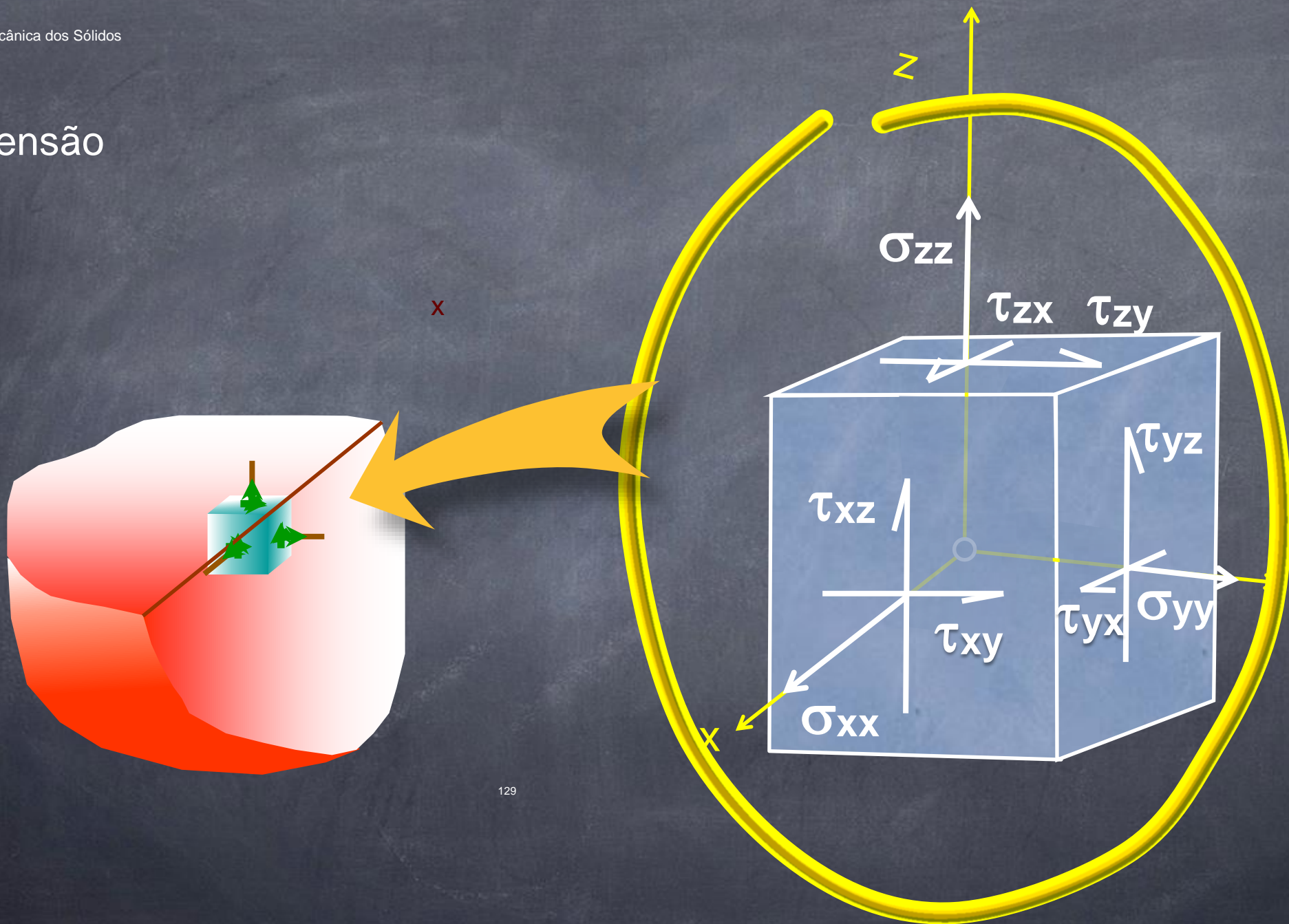


x



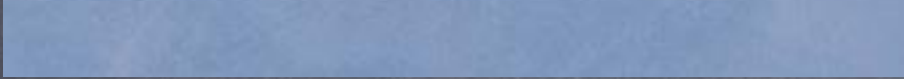


# Tensão



# Tensão normal média

# Tensão normal média





## Tensão normal média



## Tensão normal média

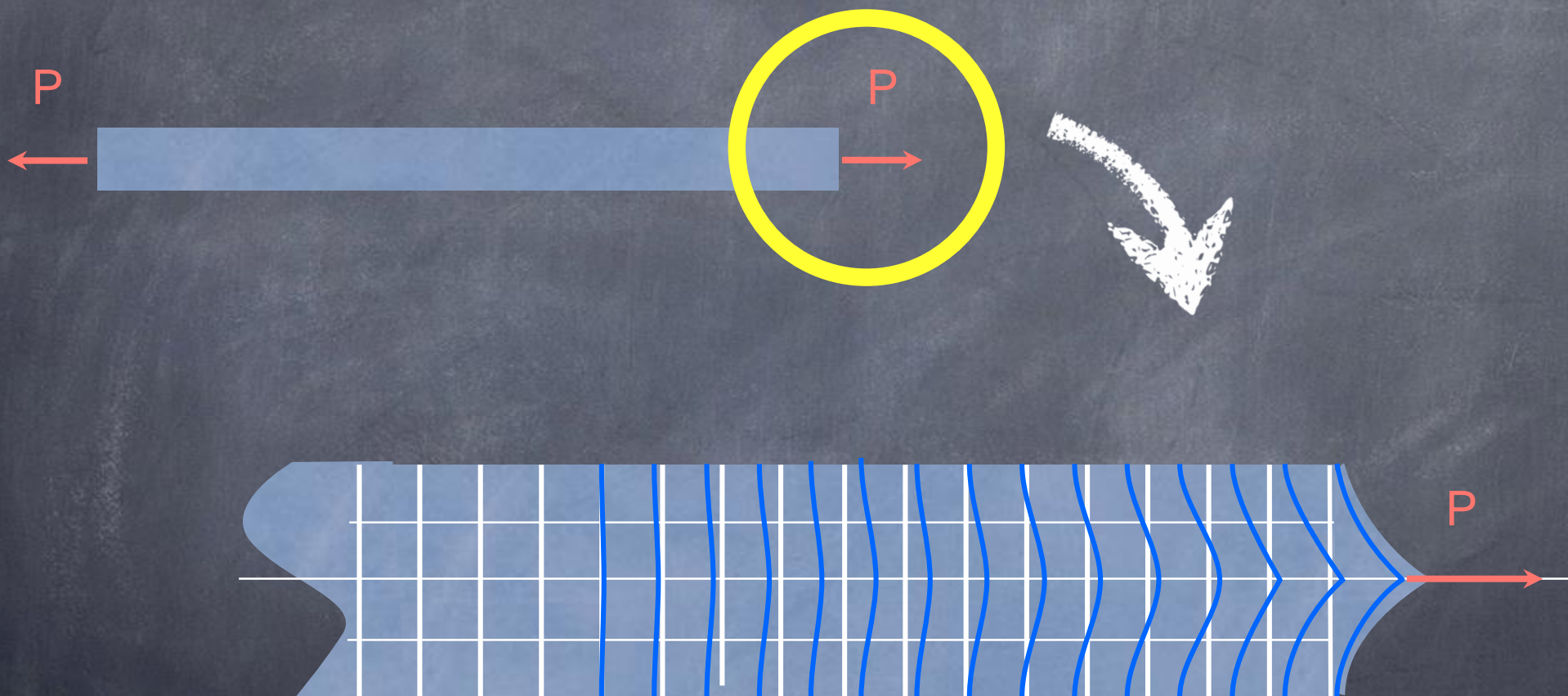


## Tensão normal média

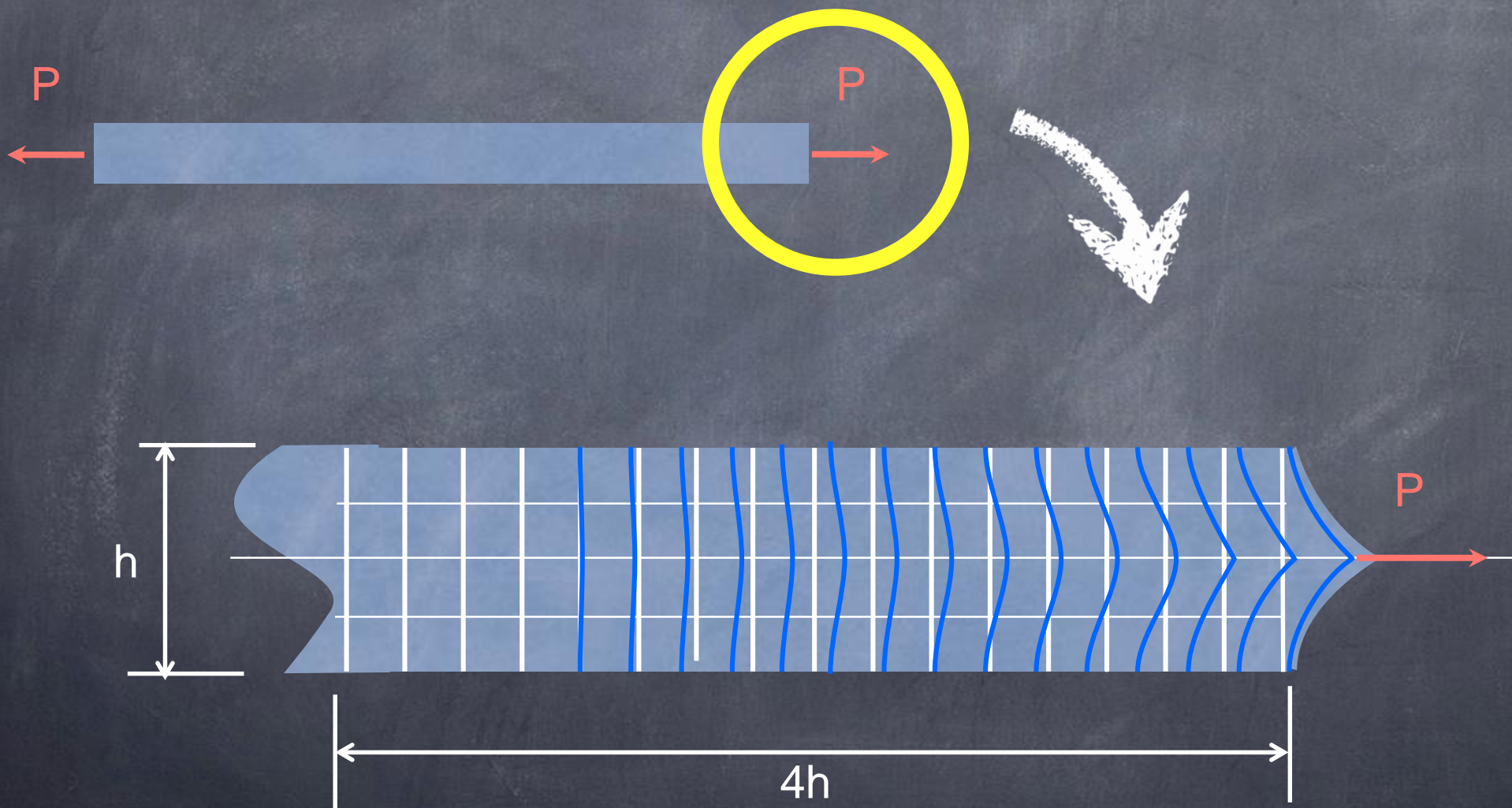




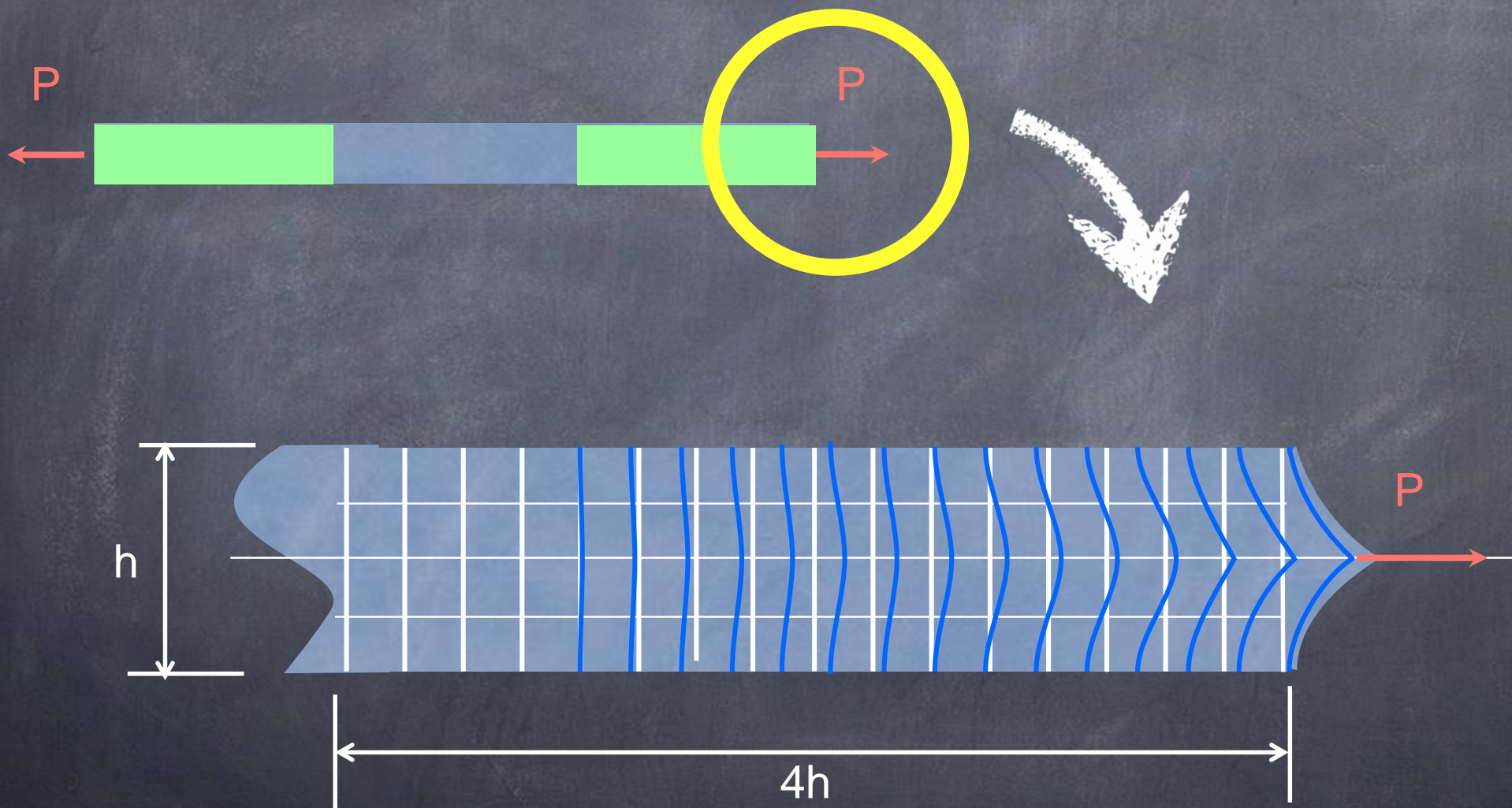
## Tensão normal média



## Tensão normal média

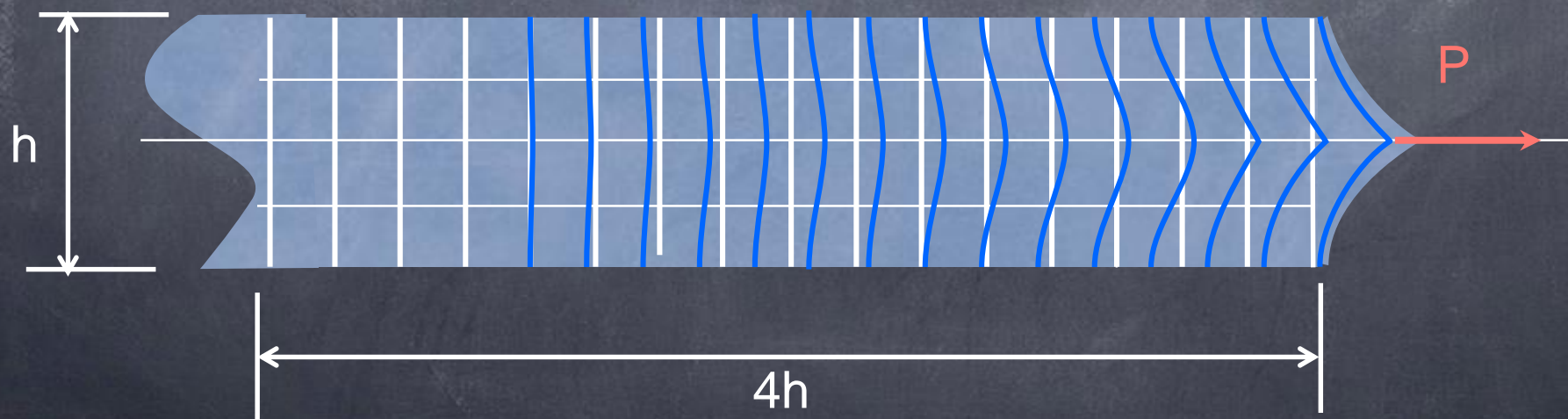


## Tensão normal média

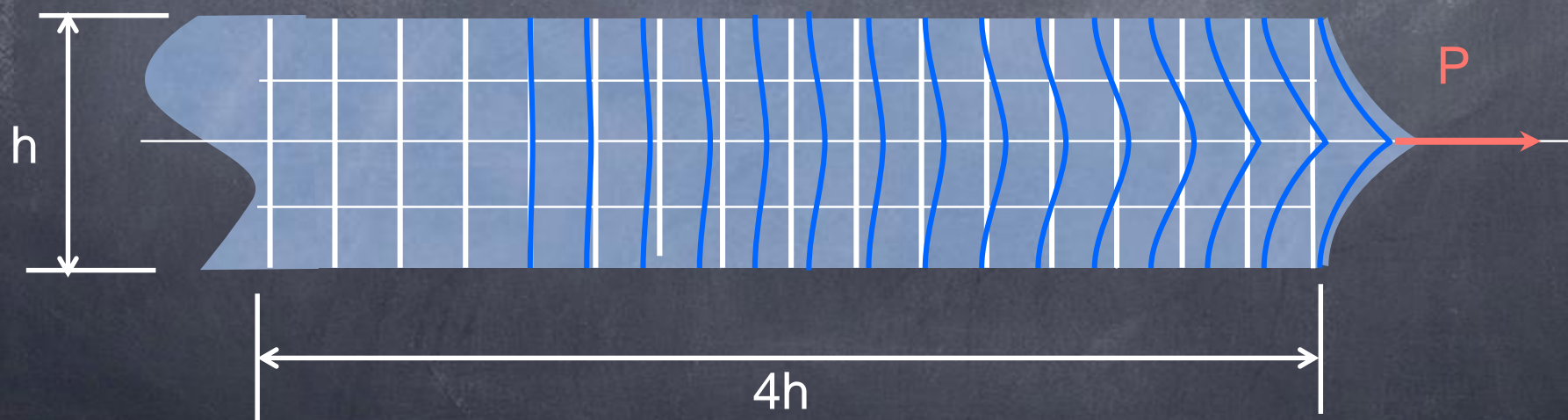
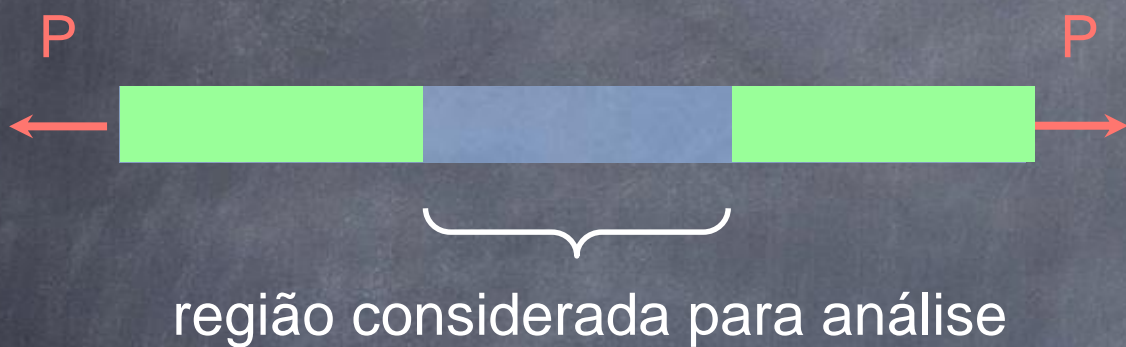




## Tensão normal média

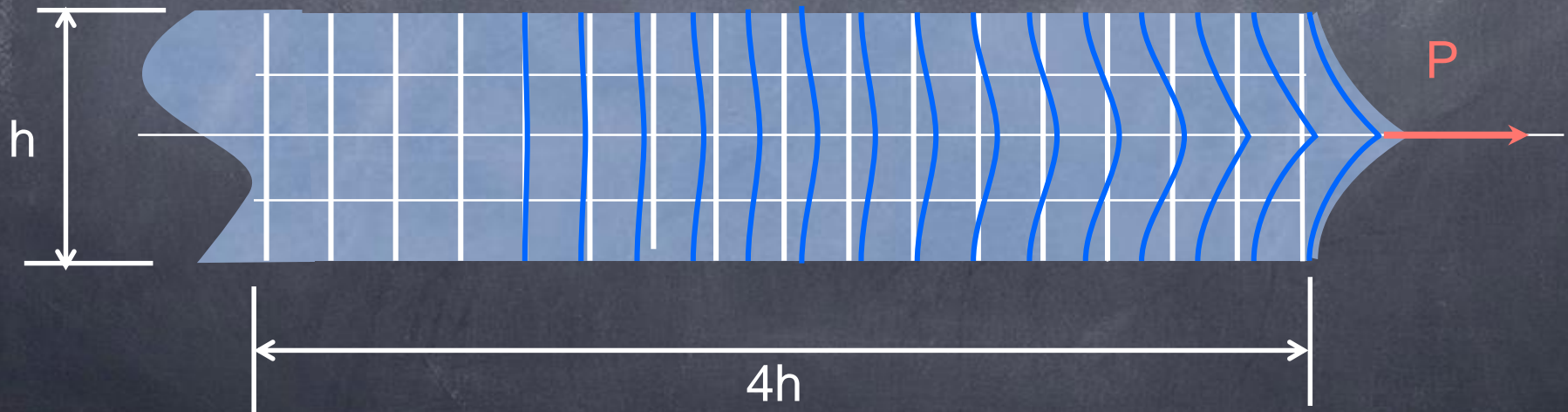
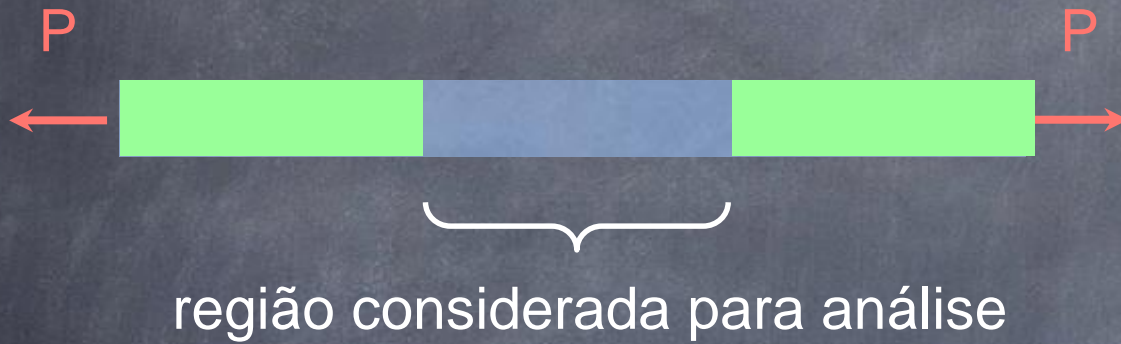


## Tensão normal média



Hipóteses:

Tensão normal média

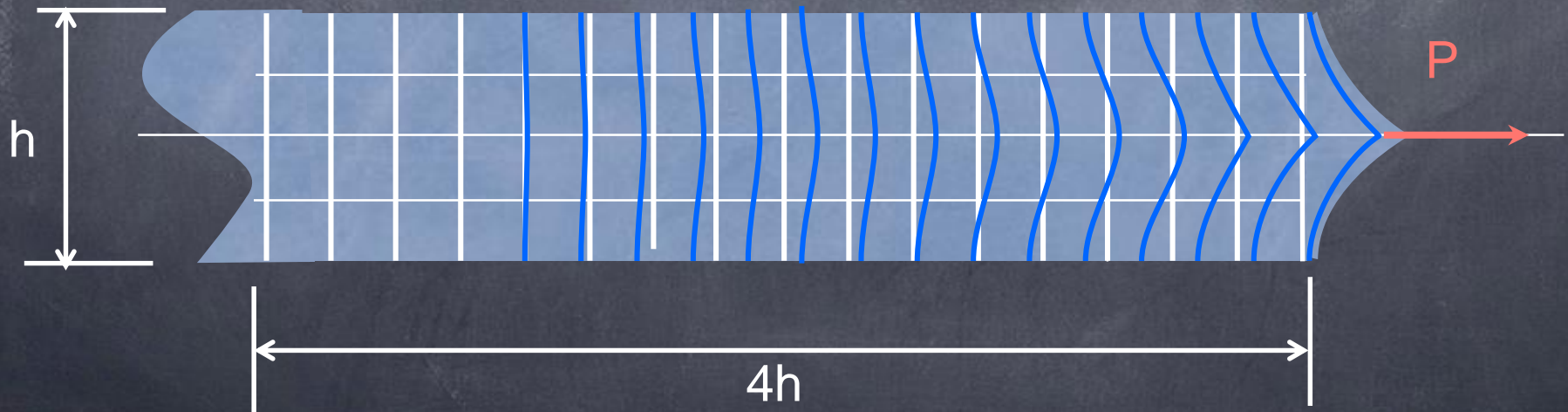
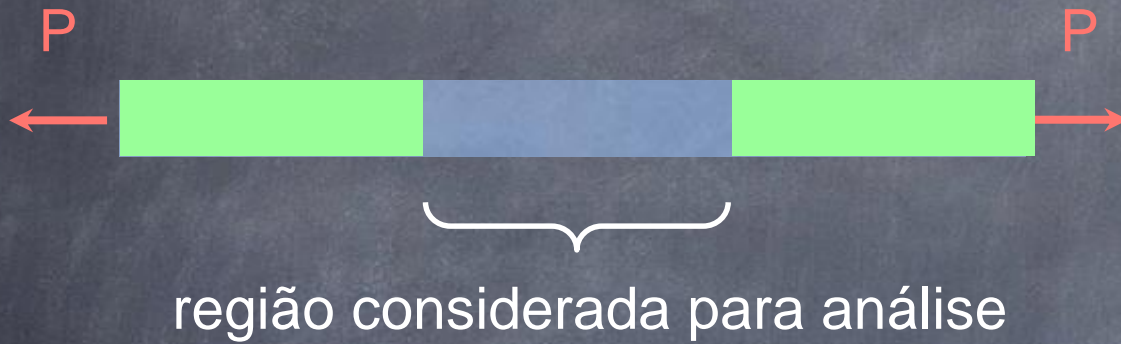




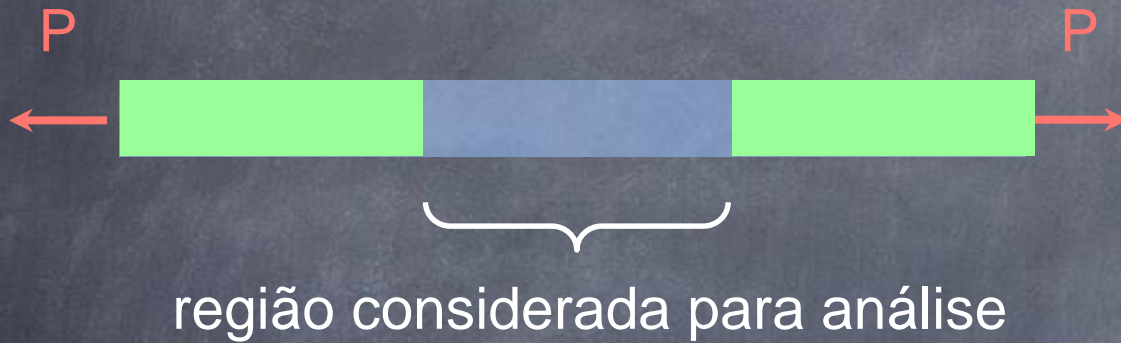
## Tensão normal média

Hipóteses:

1. Deformação uniforme

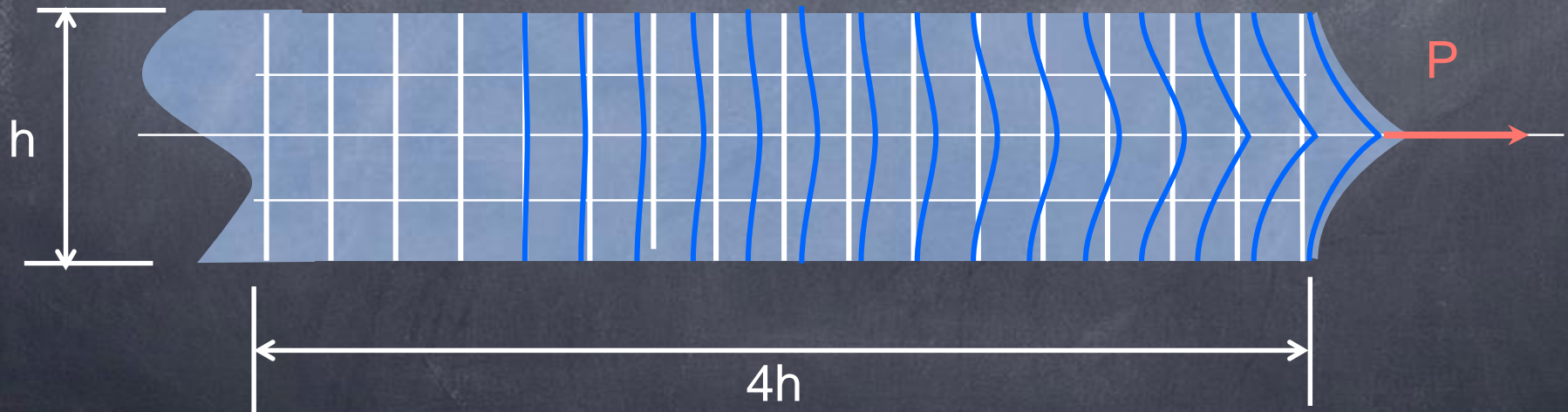


## Tensão normal média



## Hipóteses:

1. Deformação uniforme
2. Material homogêneo e isotrópico



## Tensão normal média

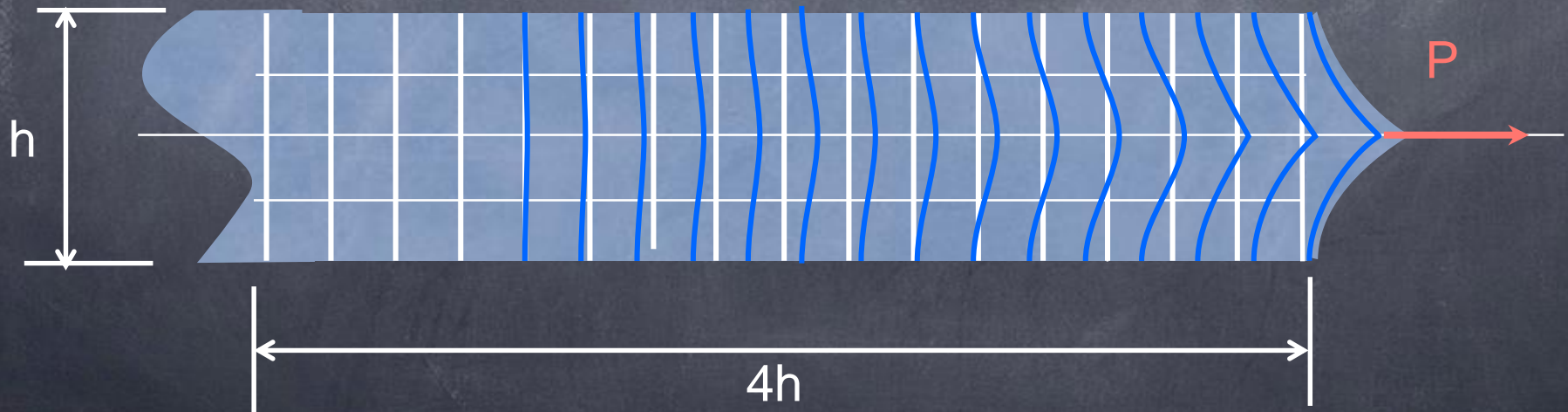


região considerada para análise

## Hipóteses:

1. Deformação uniforme
2. Material homogêneo e isotrópico

mesmas propriedades em todo o volume





## Tensão normal média

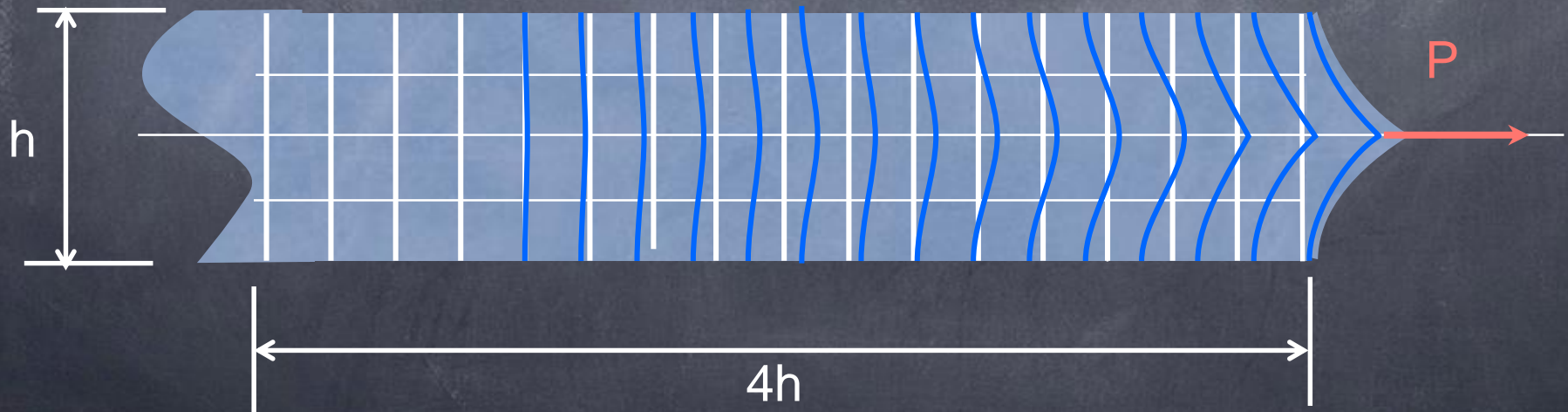


região considerada para análise

## Hipóteses:

1. Deformação uniforme
2. Material homogêneo e isotrópico

mesmas propriedades em todas as direções



## Tensão normal média

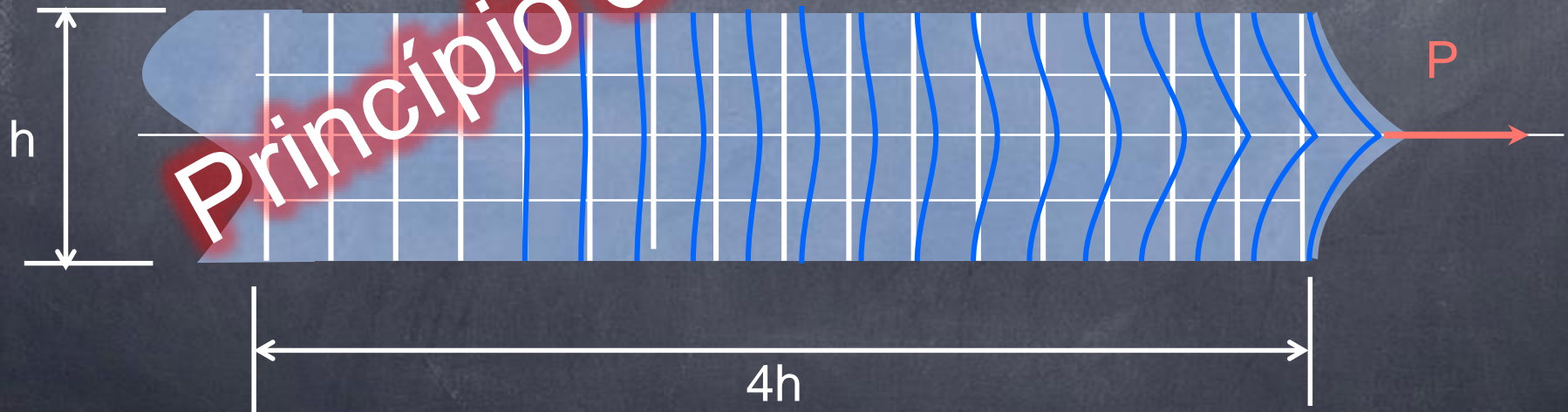
### Hipóteses:

1. Deformação uniforme
2. Material homogêneo e isotrópico



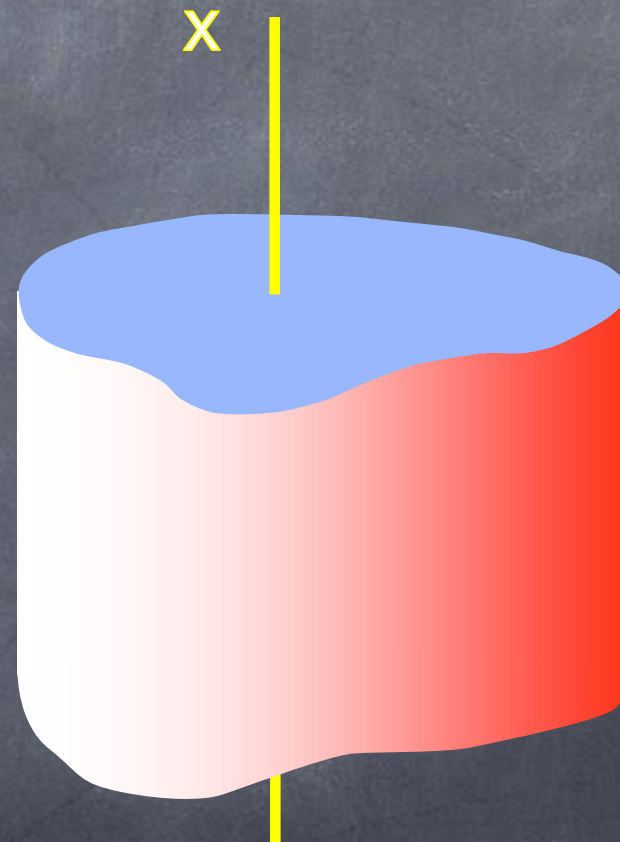
região considerada para análise

mesmas propriedades em todas as direções



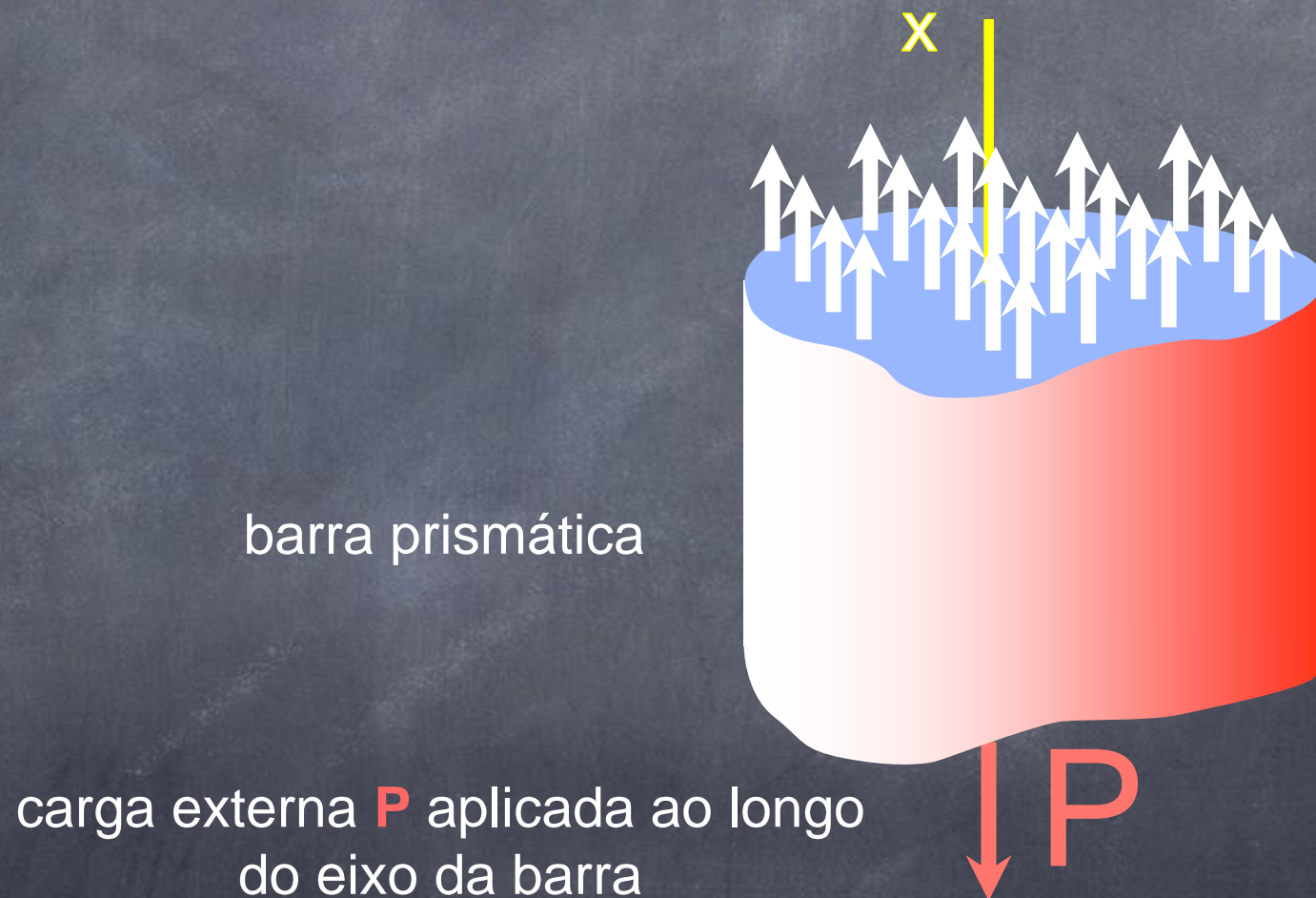
## Tensão normal média

barra prismática





## Tensão normal média



## Tensão normal média

forças internas (distribuídas) que surgem na seção da barra em função da aplicação da carga externa **P**

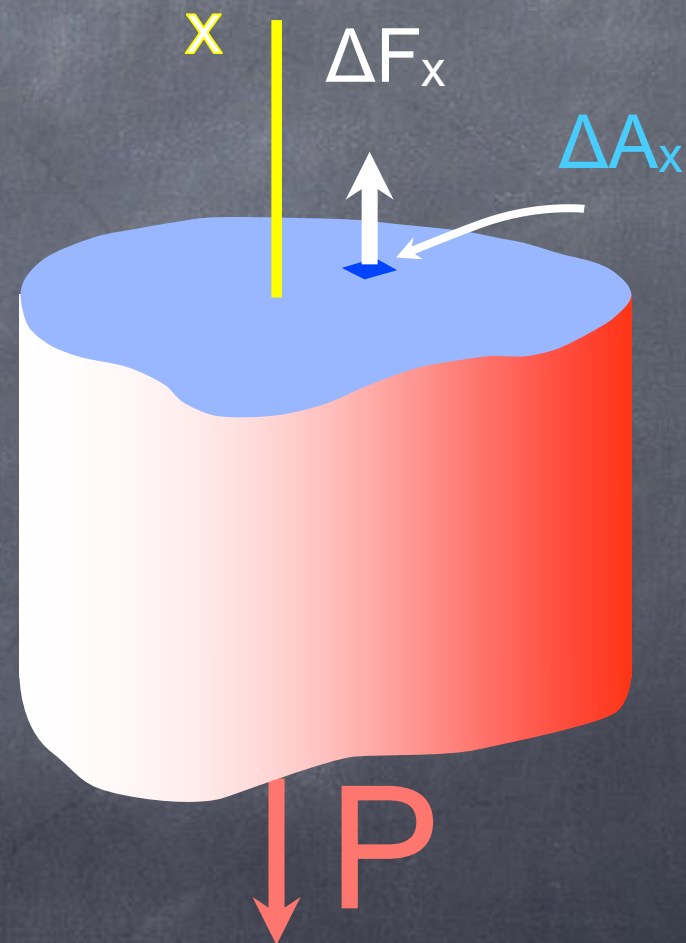
barra prismática

carga externa **P** aplicada ao longo do eixo da barra



## Tensão normal média

Análise de uma das forças internas

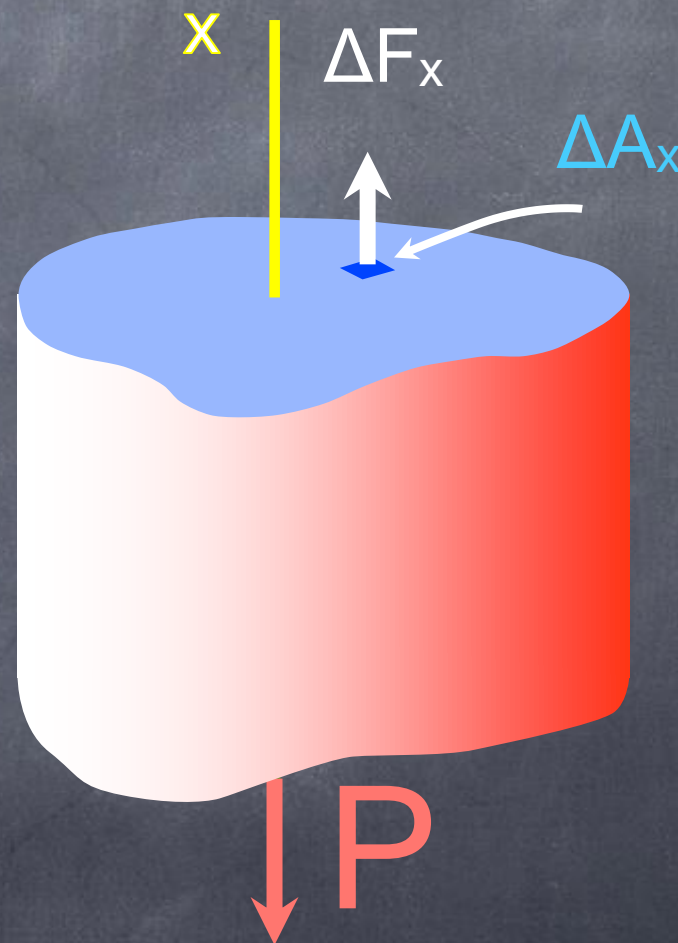




## Tensão normal média

Análise de uma das forças internas

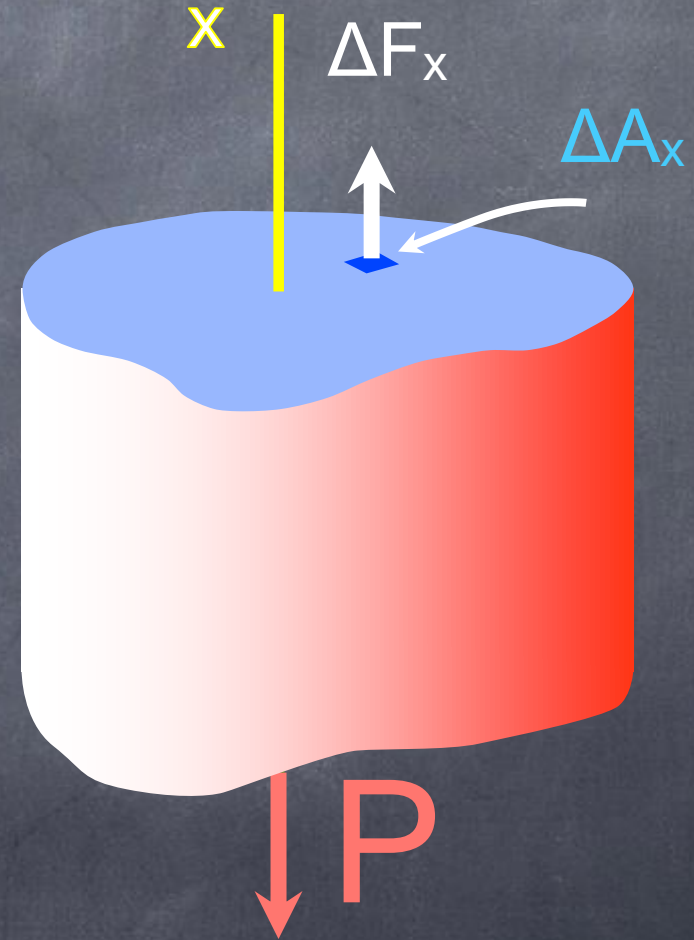
$$\overline{\sigma_x} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A_x}$$



## Tensão normal média

Análise de uma das forças internas

$$\overline{\sigma_x} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A_x} \quad \therefore \quad \Delta F_x = \sigma_x \cdot \Delta A_x$$

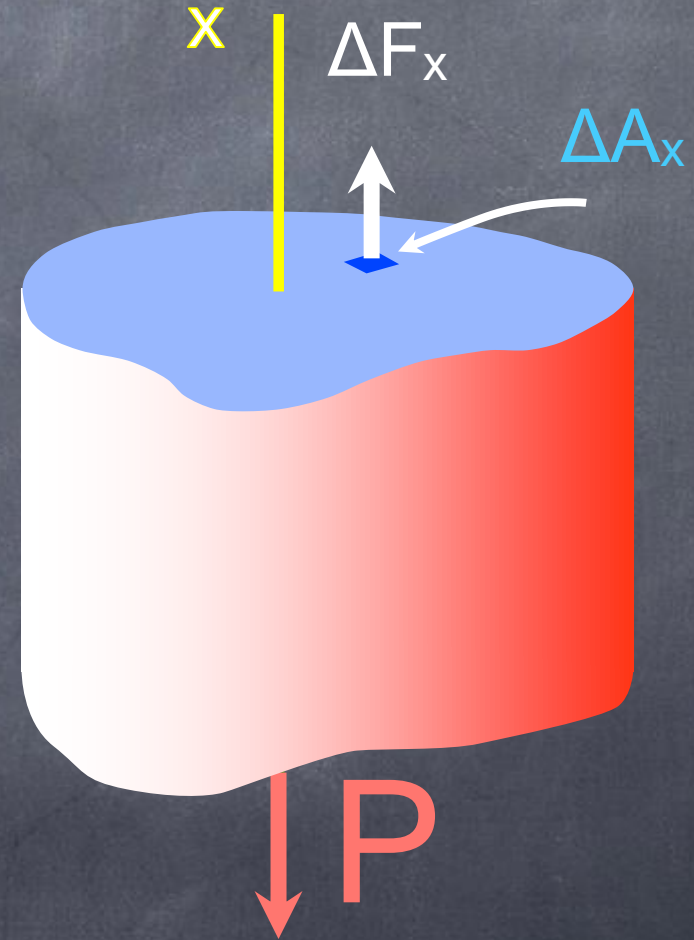


## Tensão normal média

Análise de uma das forças internas

$$\overline{\sigma_x} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A_x} \quad \therefore \quad \Delta F_x = \sigma_x \cdot \Delta A_x$$

Em toda a área, tem-se





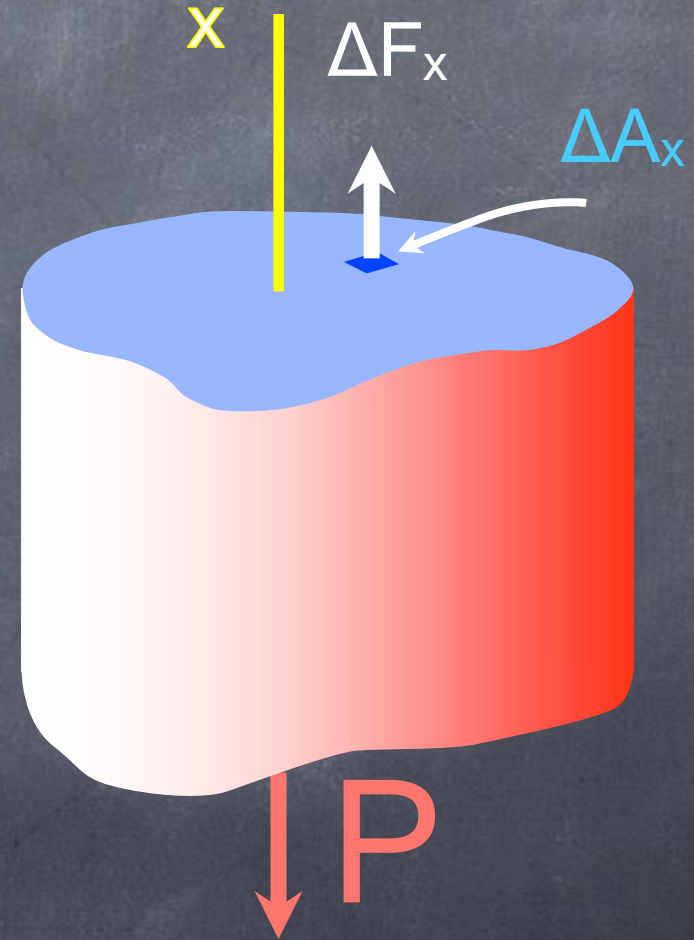
## Tensão normal média

Análise de uma das forças internas

$$\overline{\sigma_x} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A_x} \quad \therefore \quad \Delta F_x = \sigma_x \cdot \Delta A_x$$

Em toda a área, tem-se

$$P = \int \left[ \int (\sigma_x \cdot dz) \right] \cdot dy$$



## Tensão normal média

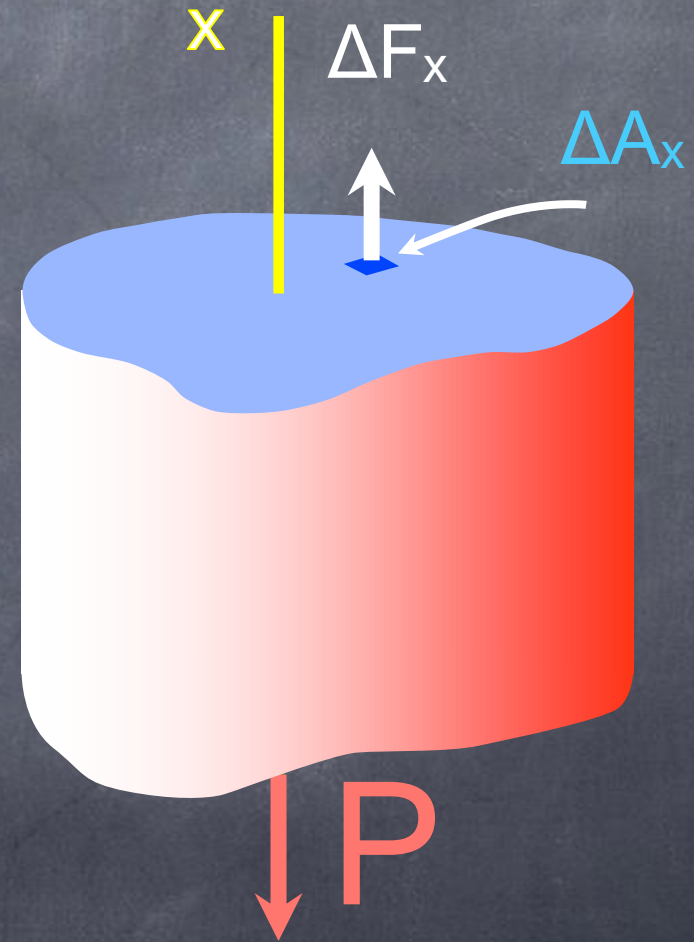
Análise de uma das forças internas

$$\overline{\sigma_x} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A_x} \quad \therefore \quad \Delta F_x = \sigma_x \cdot \Delta A_x$$

Em toda a área, tem-se

$$P = \int \left[ \int (\sigma_x \cdot dz) \right] \cdot dy$$

$$P = \iint (\sigma_x) \, dz \, dy$$



## Tensão normal média

Análise de uma das forças internas

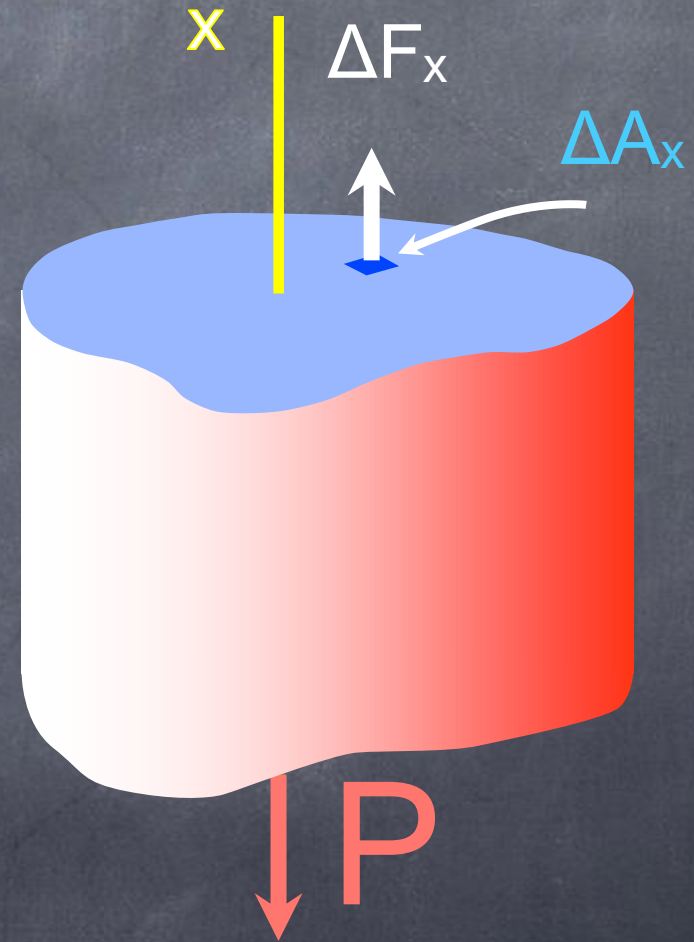
$$\overline{\sigma_x} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A_x} \quad \therefore \quad \Delta F_x = \sigma_x \cdot \Delta A_x$$

Em toda a área, tem-se

$$P = \int \left[ \int (\sigma_x \cdot dz) \right] \cdot dy$$

$$P = \iint (\sigma_x) \, dz \, dy$$

$$P = \int_A (\sigma_x) \, dA$$

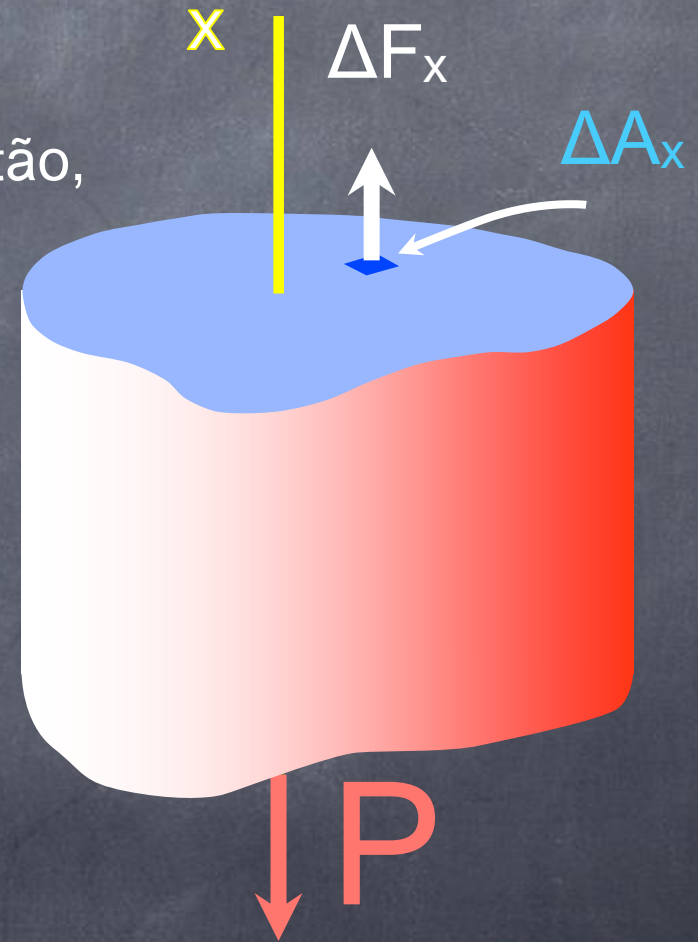




## Tensão normal média

Análise de uma das forças internas

A tensão média em toda a área é dada, então, por

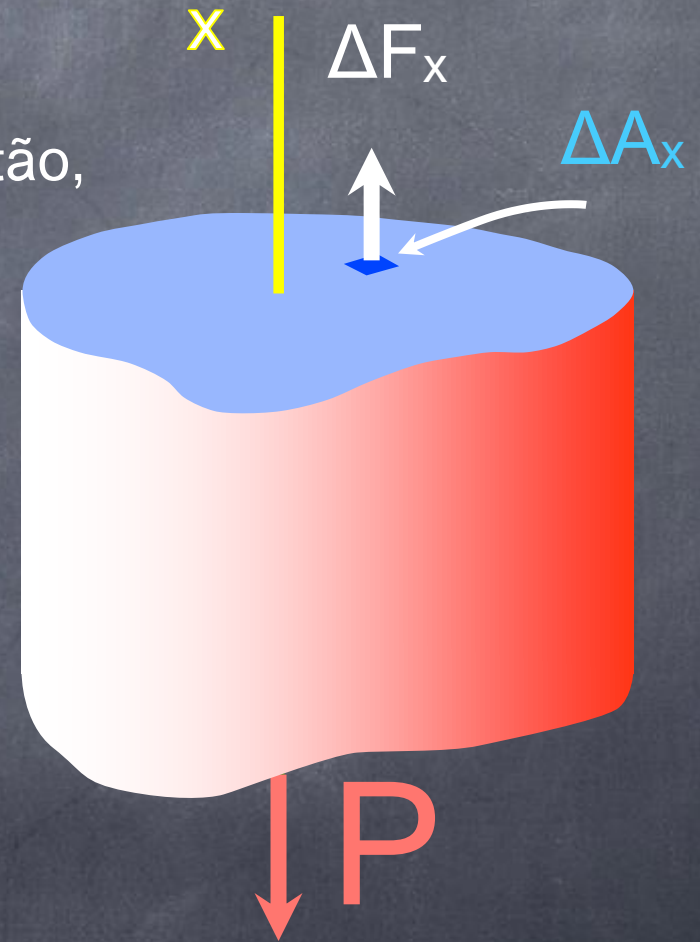


## Tensão normal média

Análise de uma das forças internas

A tensão média em toda a área é dada, então, por

$$\bar{\sigma}_x =$$

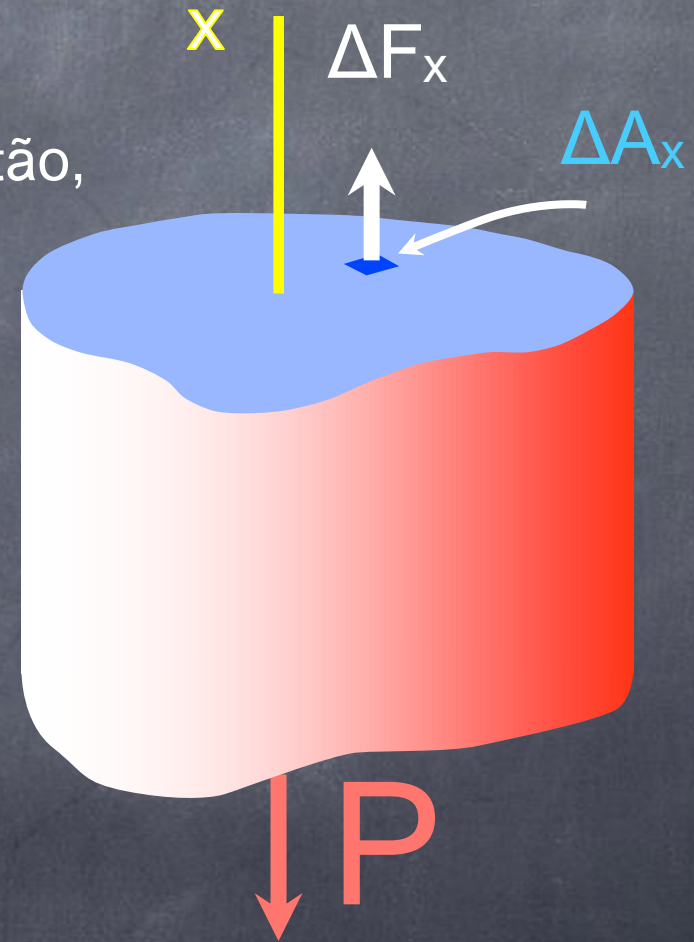


## Tensão normal média

Análise de uma das forças internas

A tensão média em toda a área é dada, então, por

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\int_A (\sigma_x) dA}{\int_A dA}$$



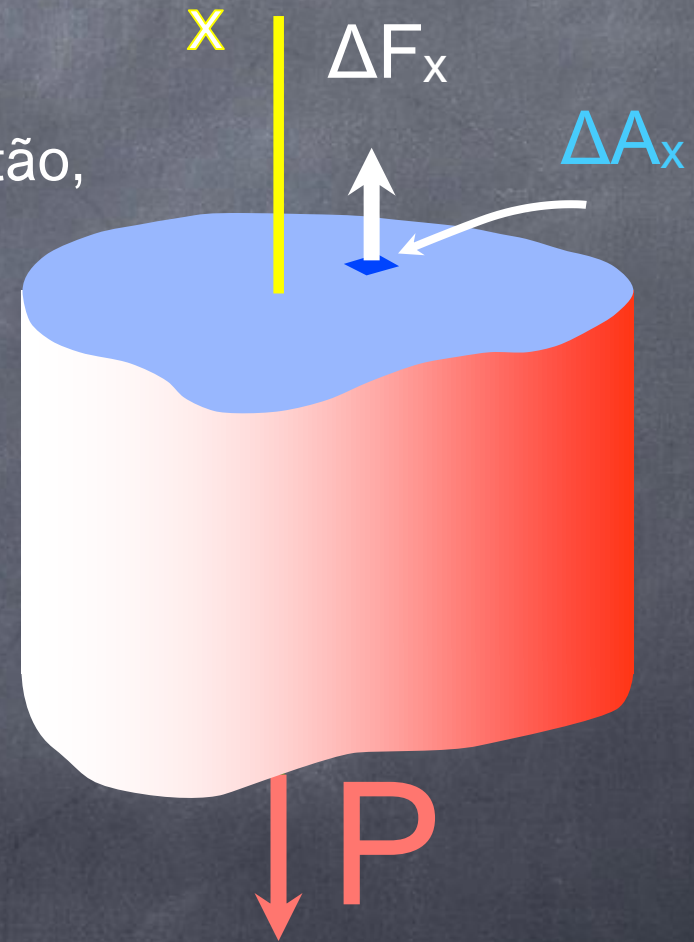


## Tensão normal média

Análise de uma das forças internas

A tensão média em toda a área é dada, então, por

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\int_A (\sigma_x) dA}{\int_A dA} = \frac{P}{A}$$

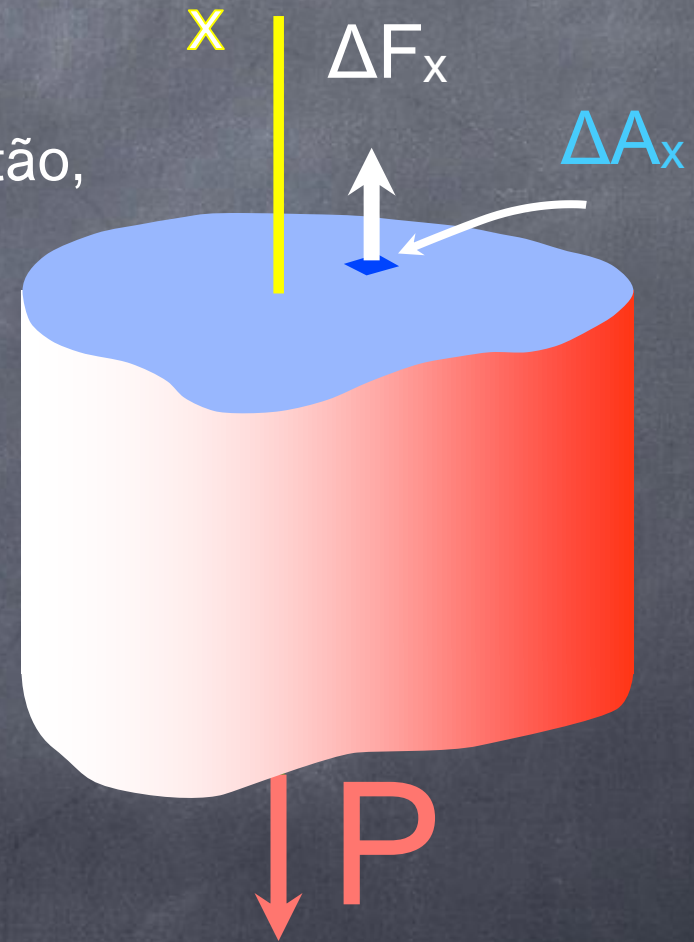


## Tensão normal média

Análise de uma das forças internas

A tensão média em toda a área é dada, então, por

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\int_A (\sigma_x) dA}{\int_A dA} = \frac{P}{A}$$

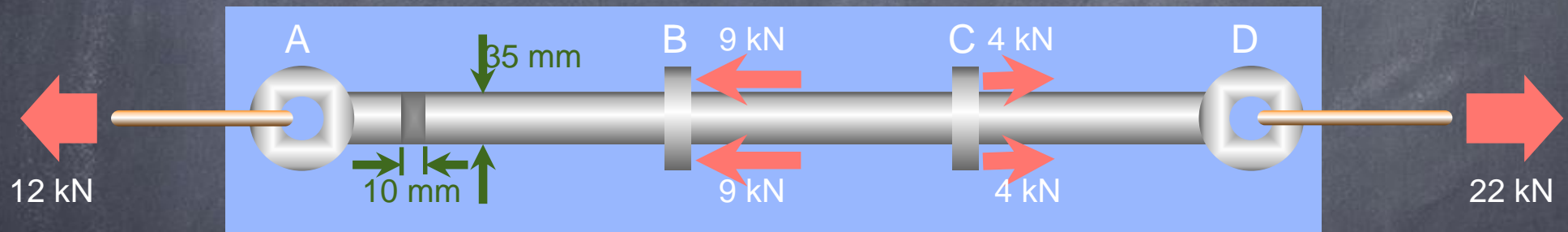


# Exemplo

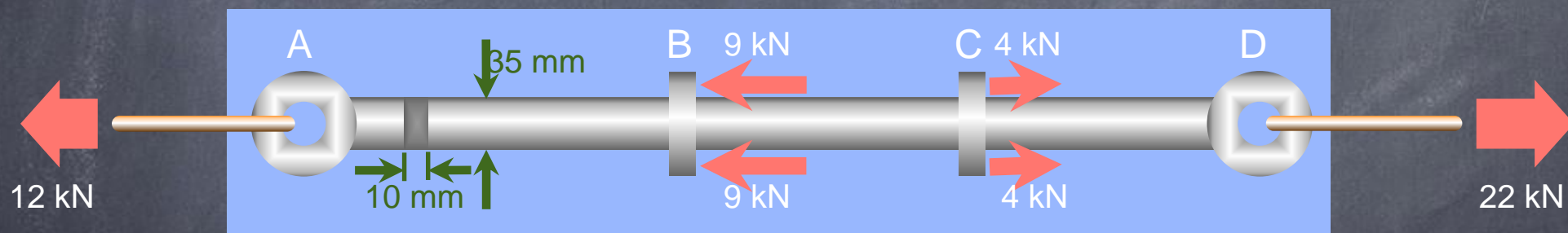
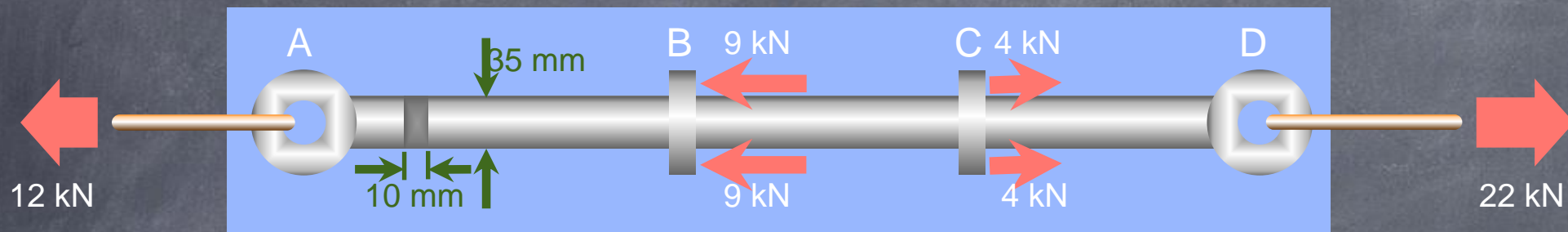


## Exemplo

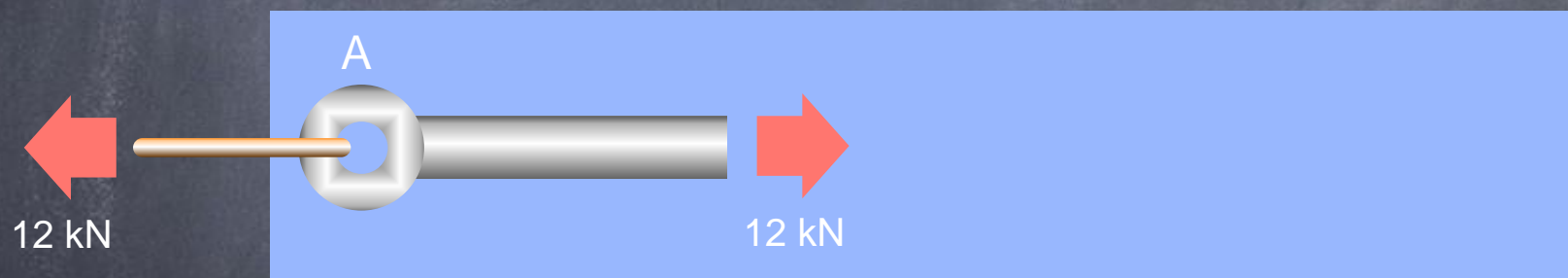
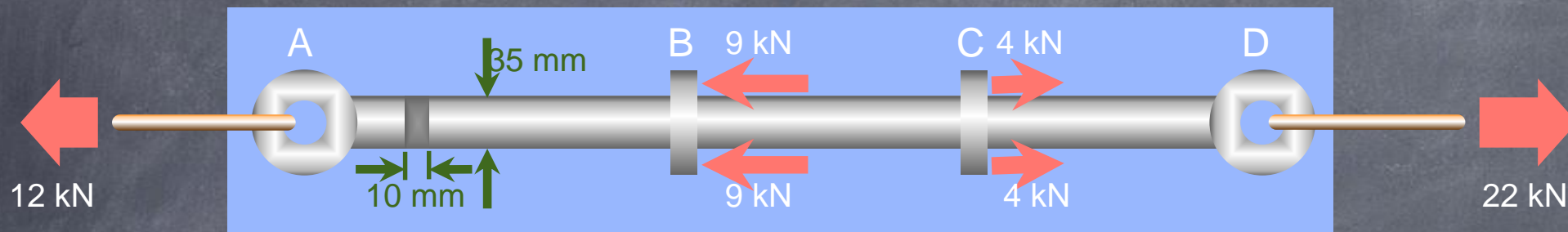
Determinar a tensão normal média máxima na barra da figura quando ela é submetida ao carregamento mostrado.



## Exemplo

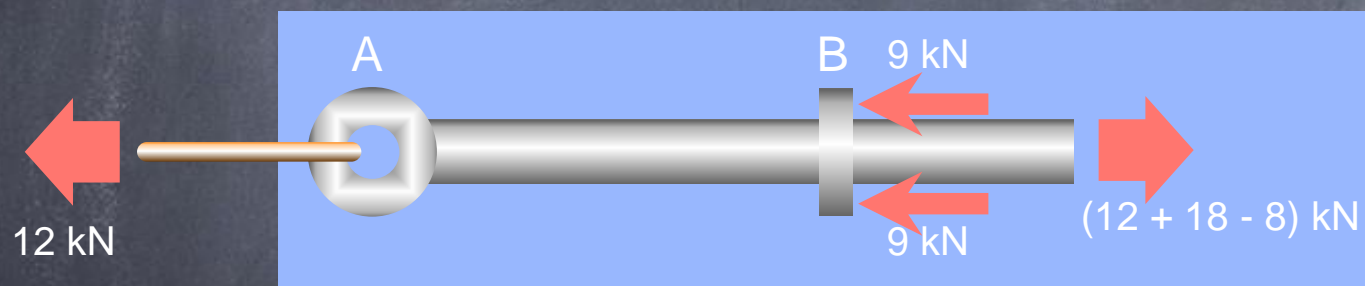
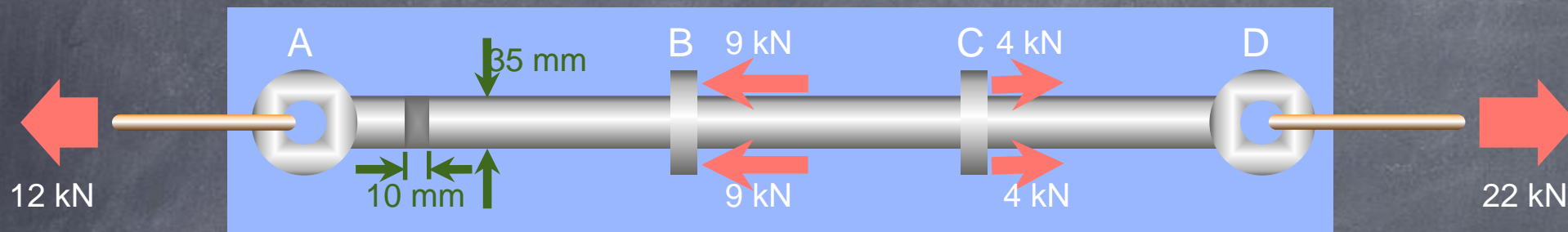


## Exemplo

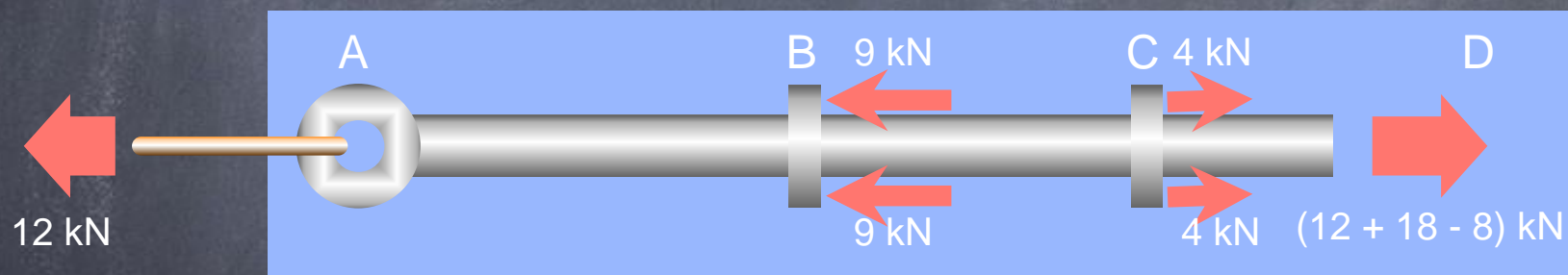
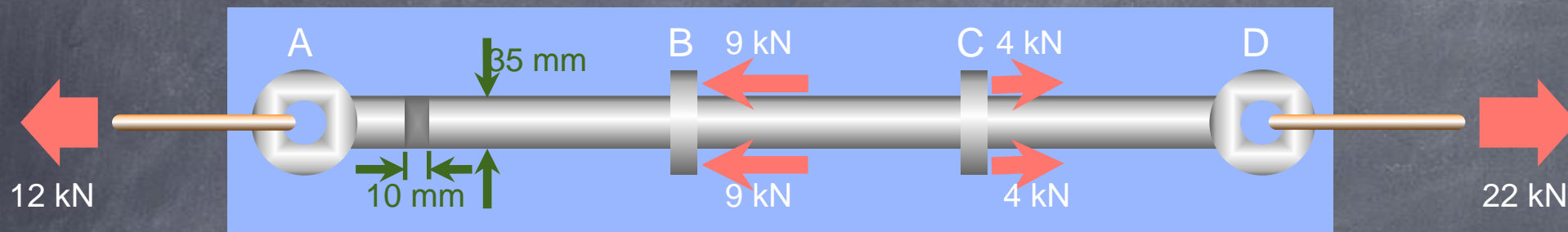




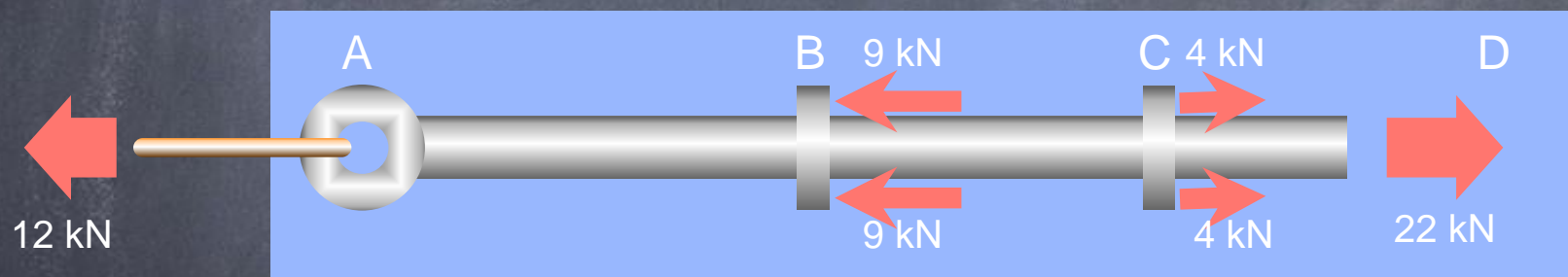
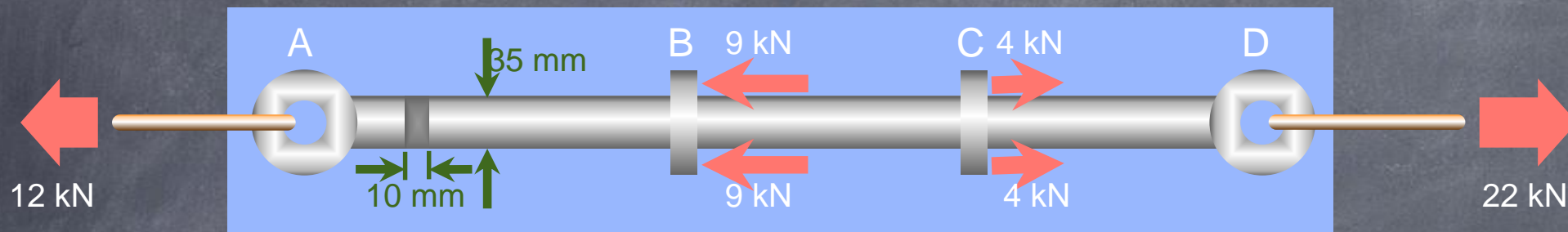
## Exemplo



## Exemplo



## Exemplo





## Exemplo

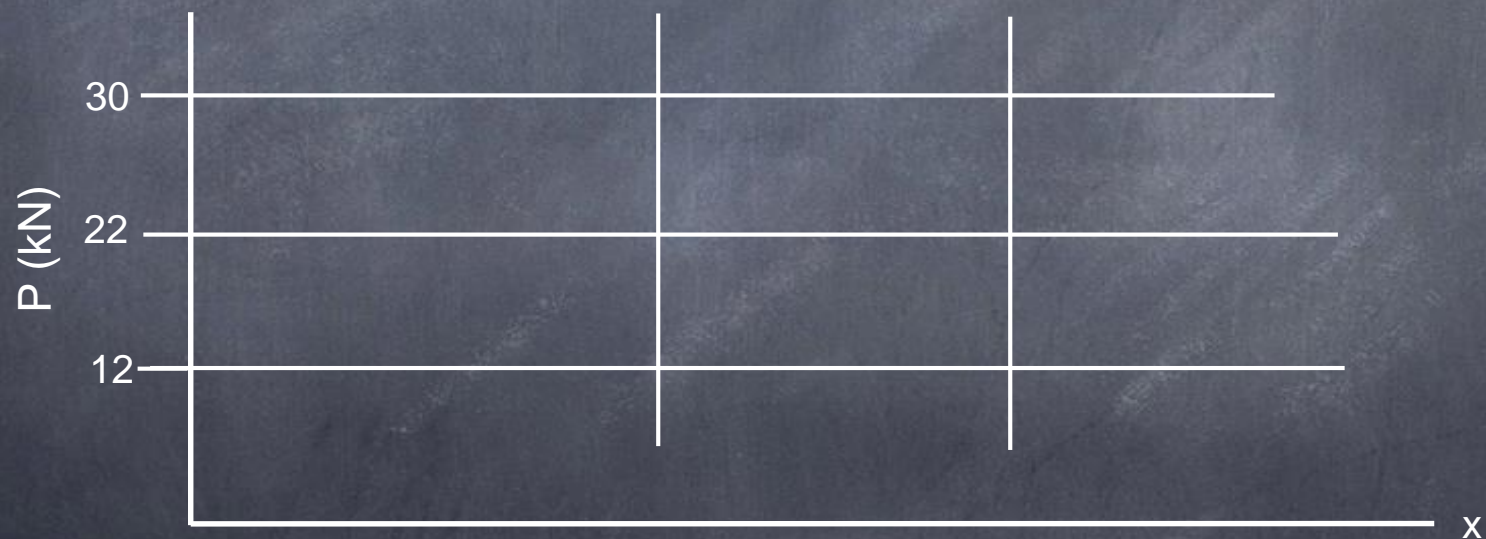
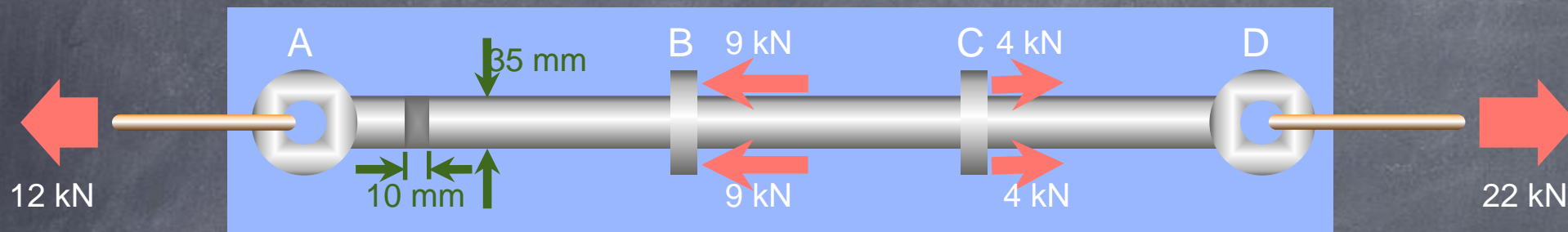


Diagrama de forças normais

## Exemplo

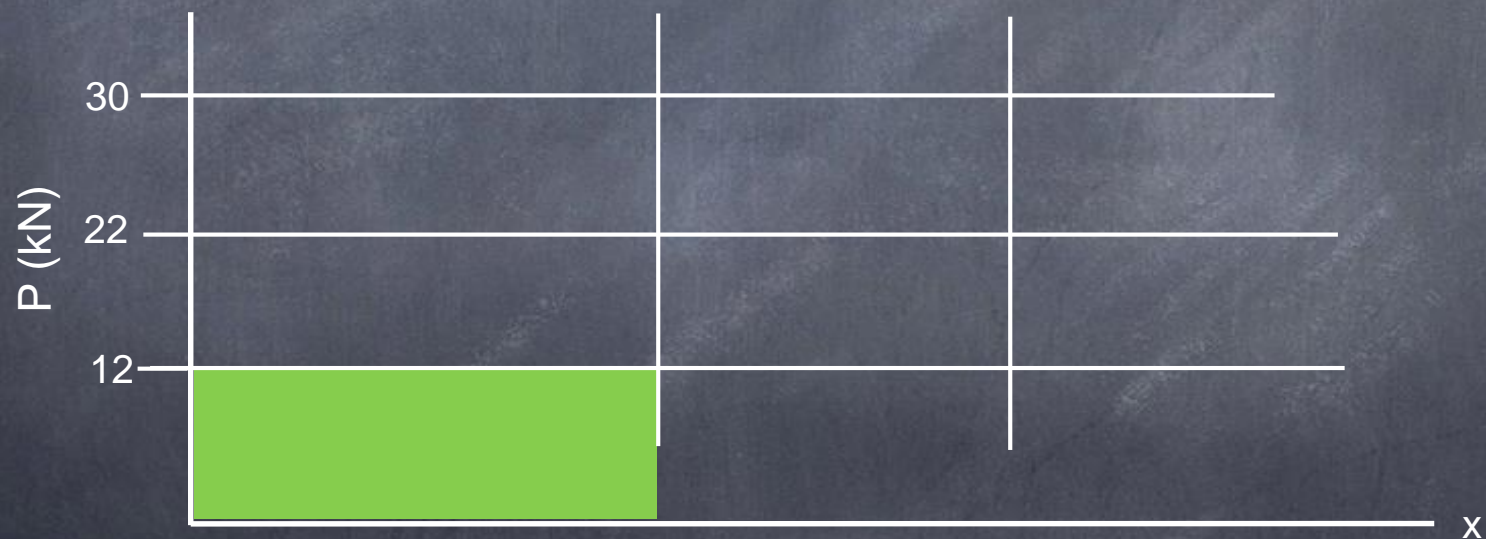
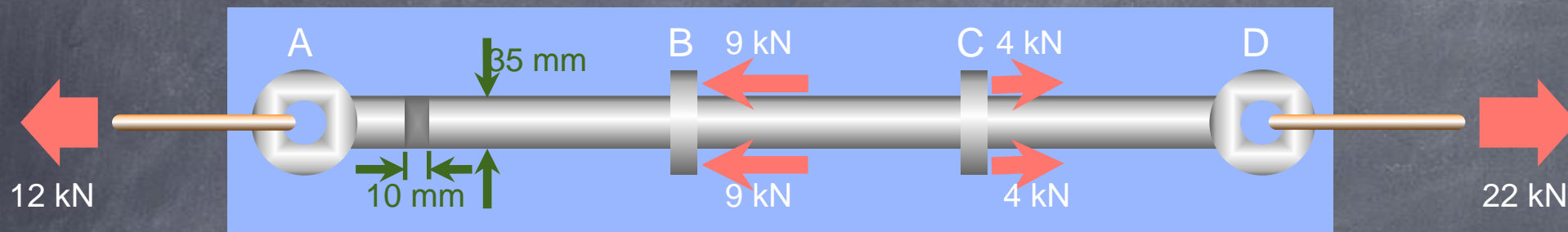


Diagrama de forças normais

## Exemplo

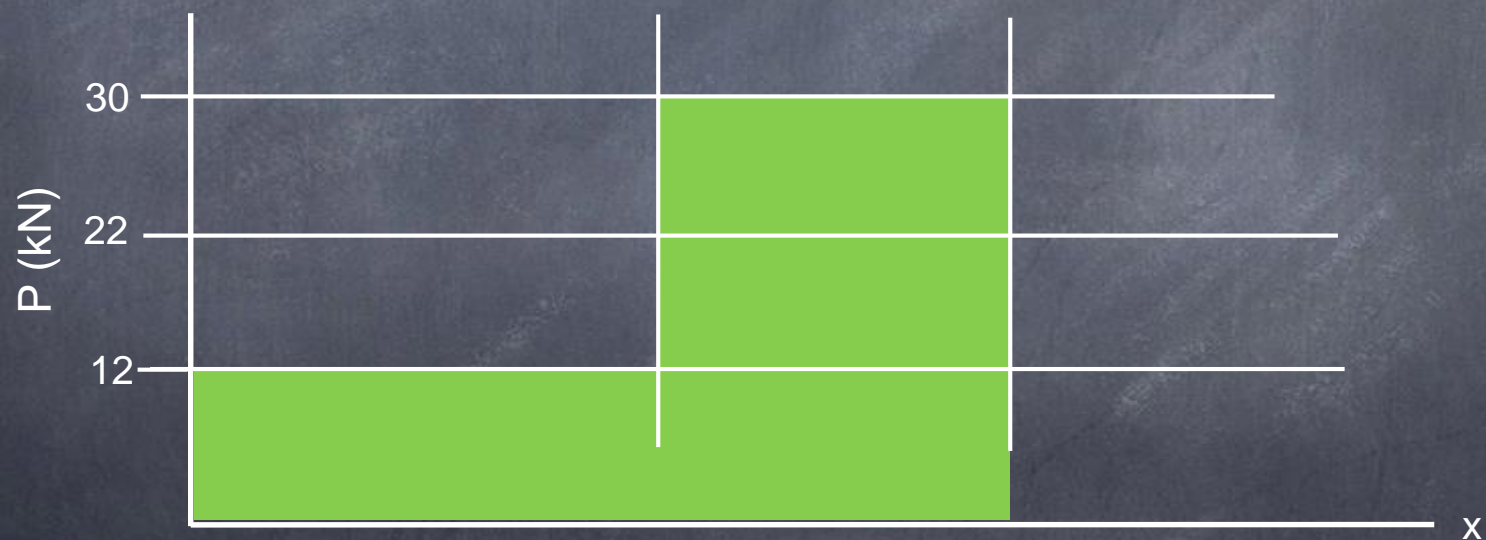
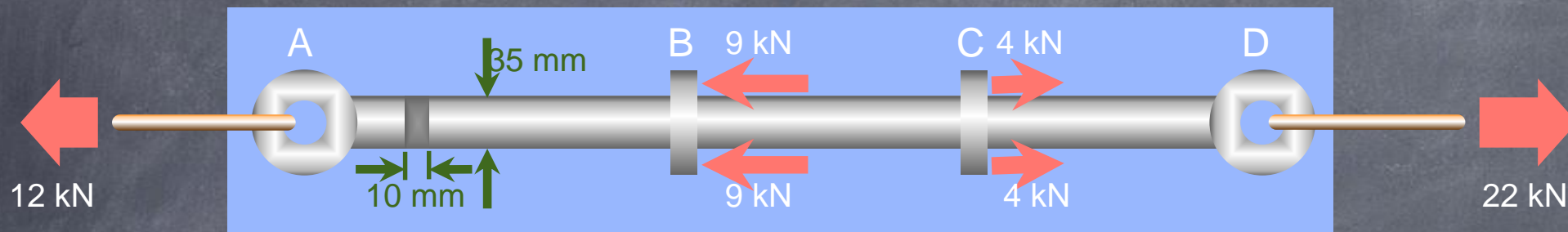


Diagrama de forças normais



## Exemplo

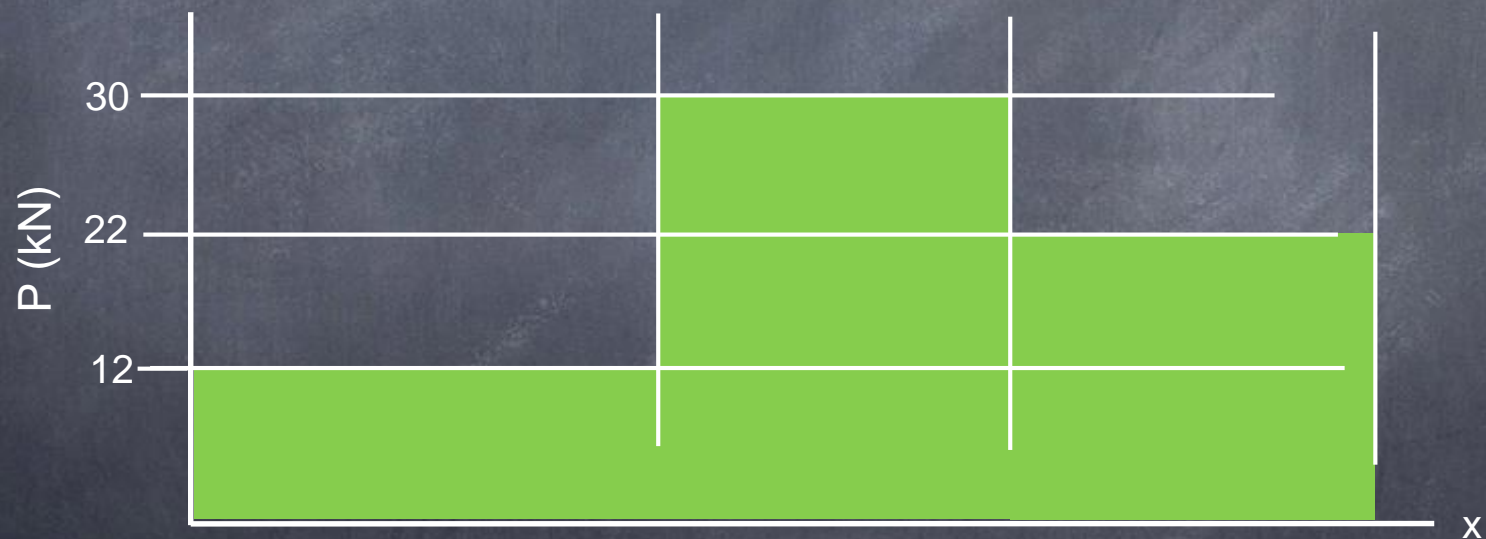
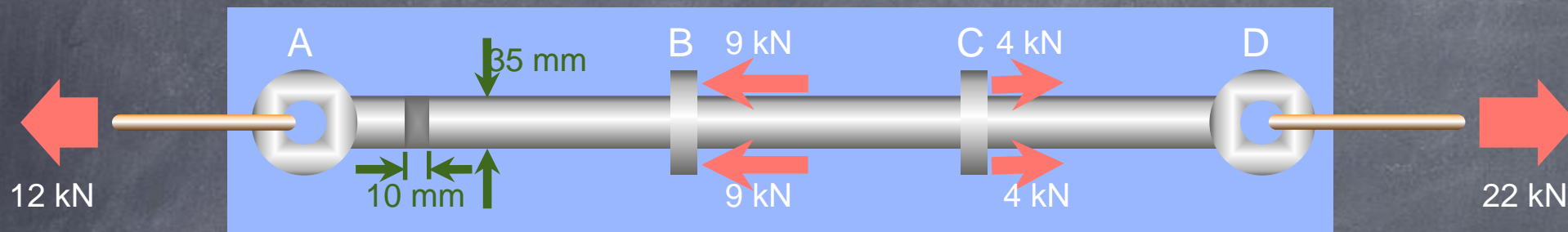
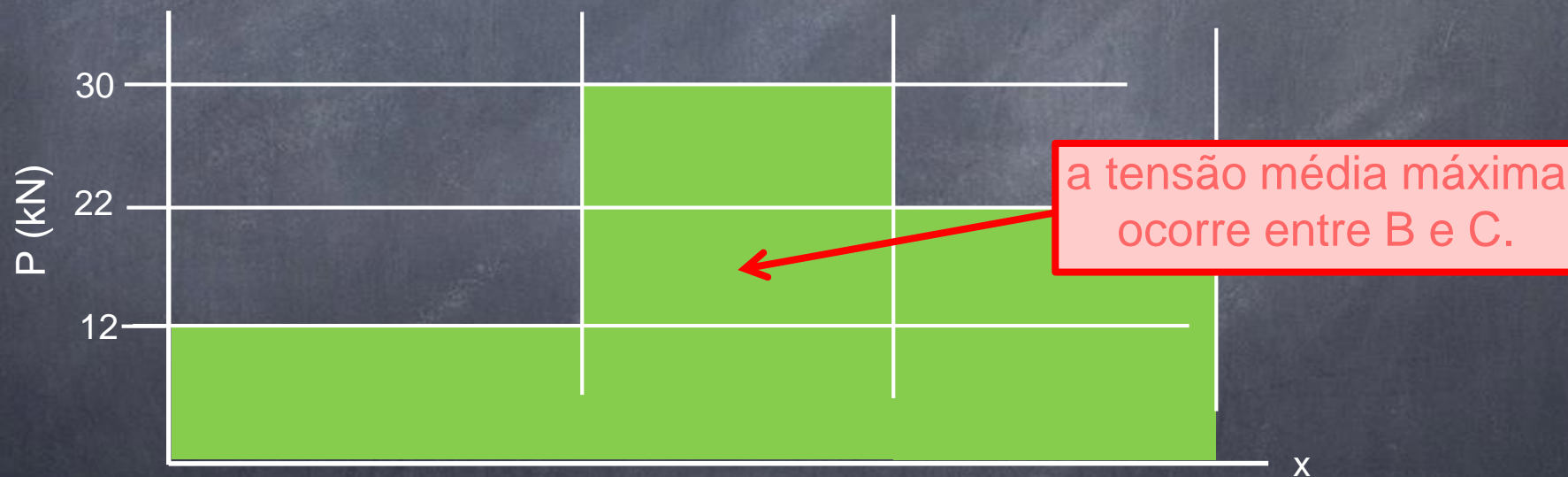
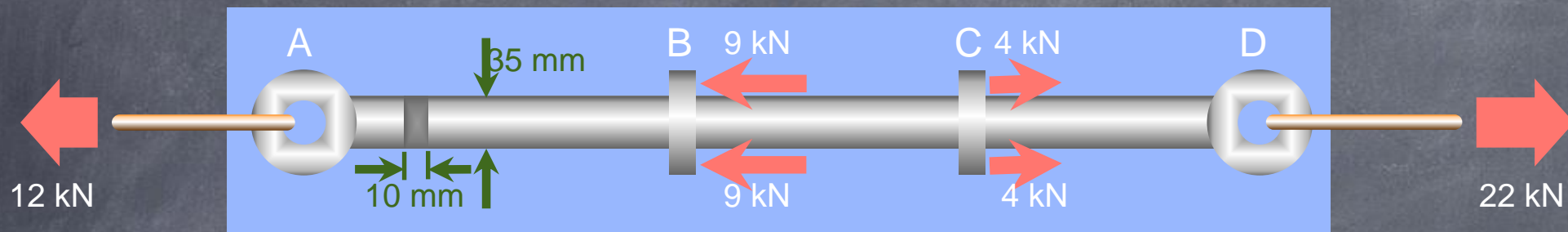


Diagrama de forças normais

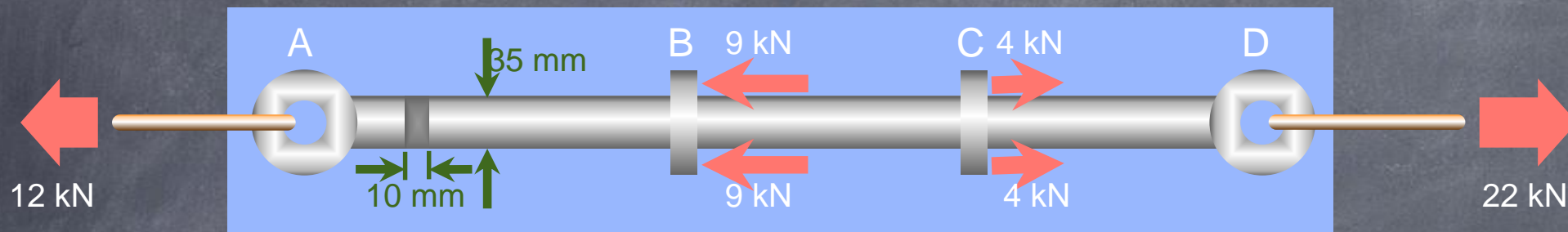
## Exemplo



a tensão média máxima ocorre entre B e C.

Diagrama de forças normais

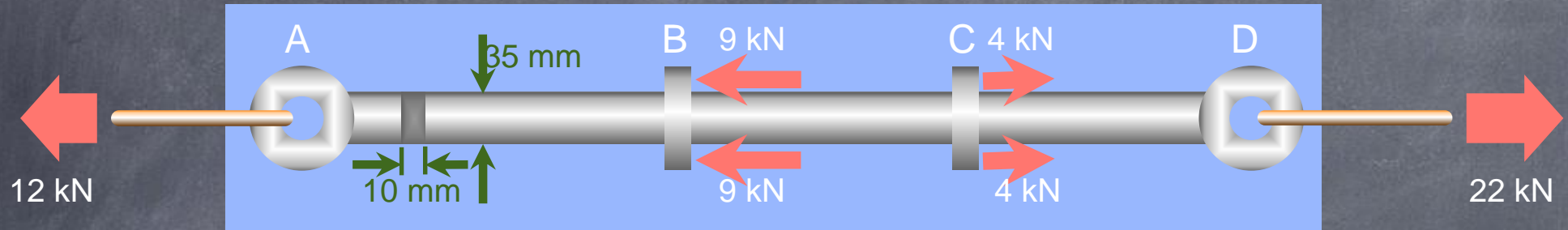
## Exemplo



A tensão média máxima pode ser calculada por



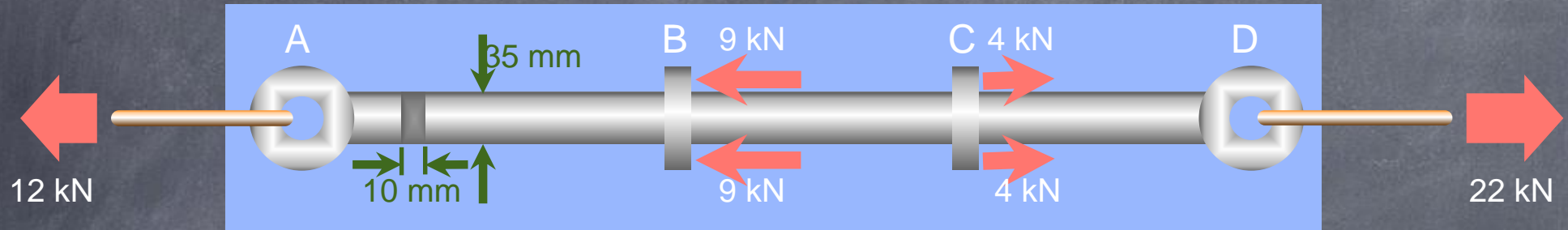
## Exemplo



A tensão média máxima pode ser calculada por

$$\sigma = 30 \text{ kN} / (0,035 \text{ m} \times 0,010 \text{ m})$$

## Exemplo

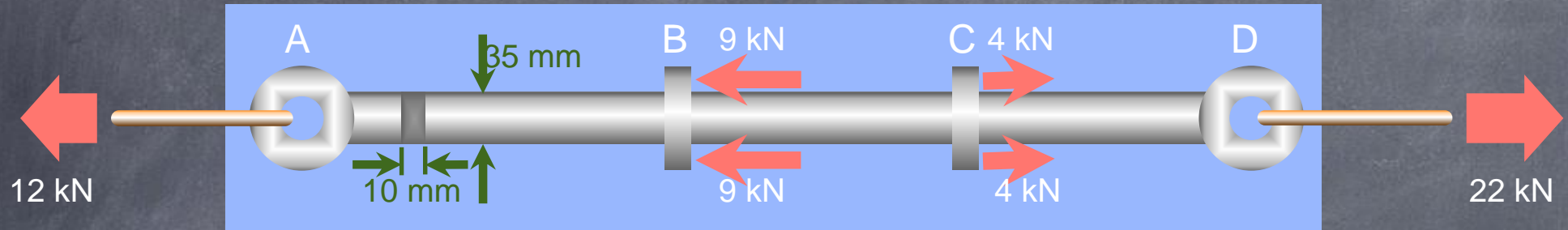


A tensão média máxima pode ser calculada por

$$\sigma = 30 \text{ kN} / (0,035 \text{ m} \times 0,010 \text{ m})$$

$$\sigma = 87,5 \text{ MPa}$$

## Exemplo



A tensão média máxima pode ser calculada por

$$\sigma = 30 \text{ kN} / (0,035 \text{ m} \times 0,010 \text{ m})$$

$$\sigma = 87,5 \text{ MPa}$$

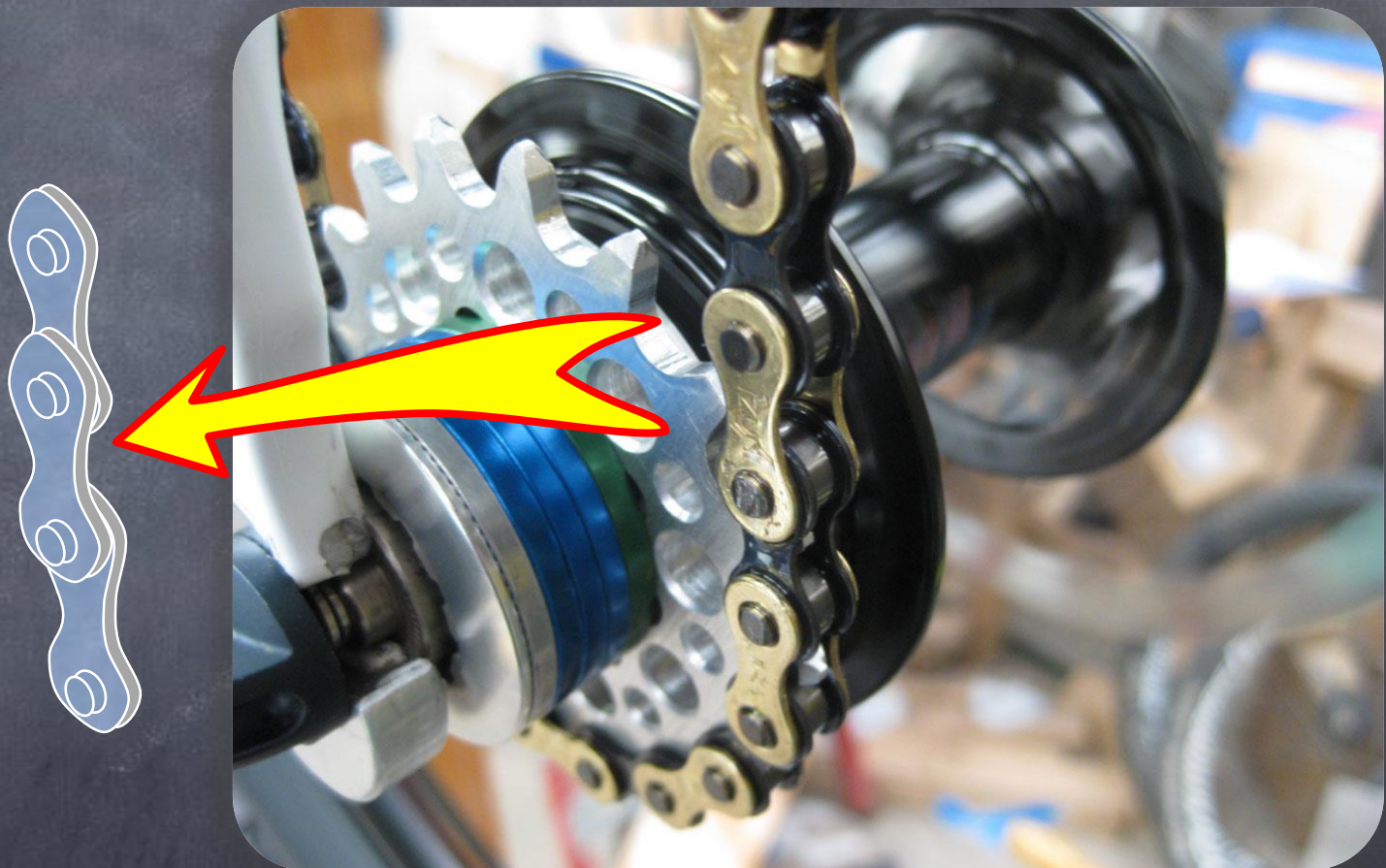


## Tensão de cisalhamento média



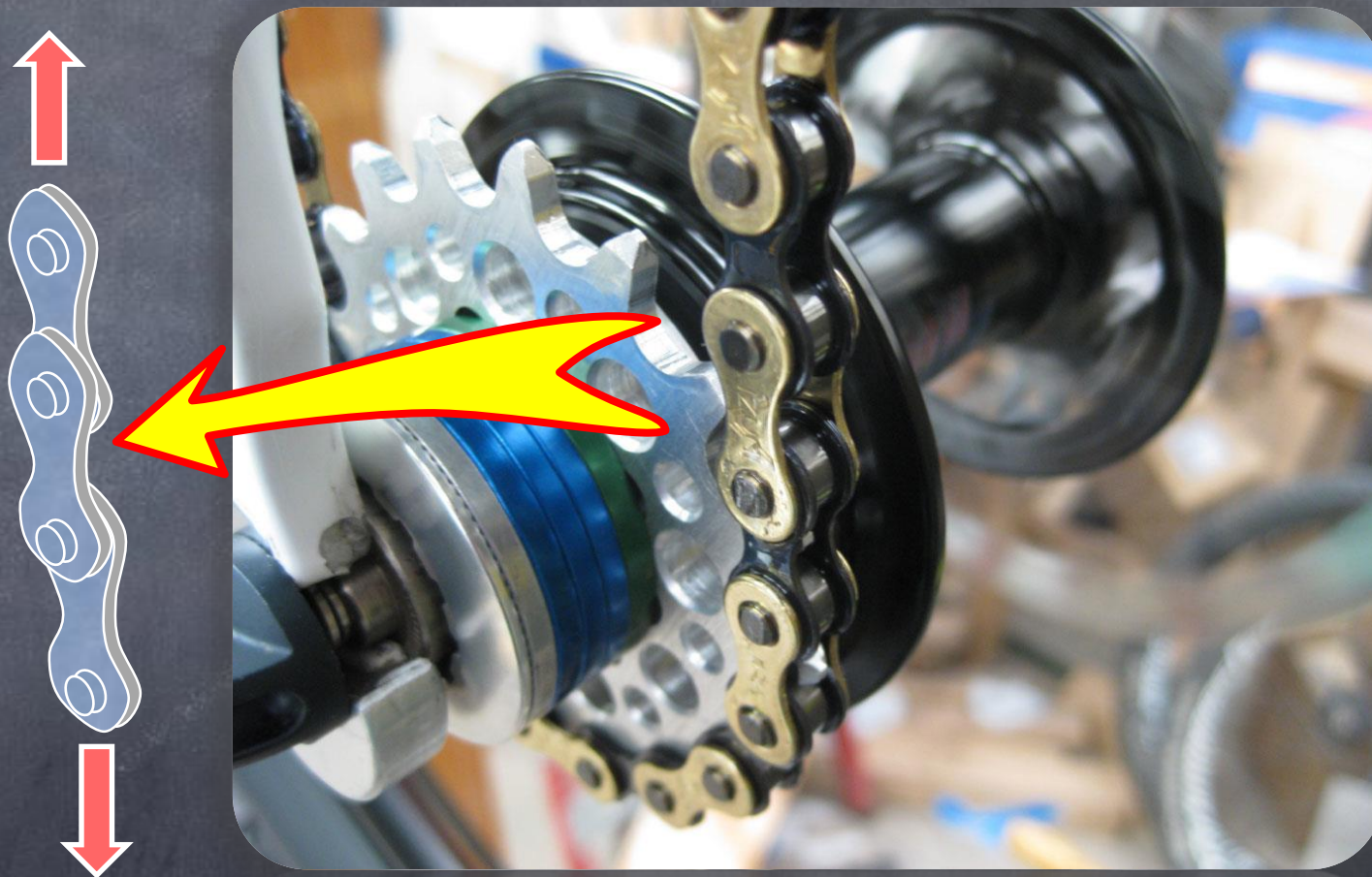


## Tensão de cisalhamento média



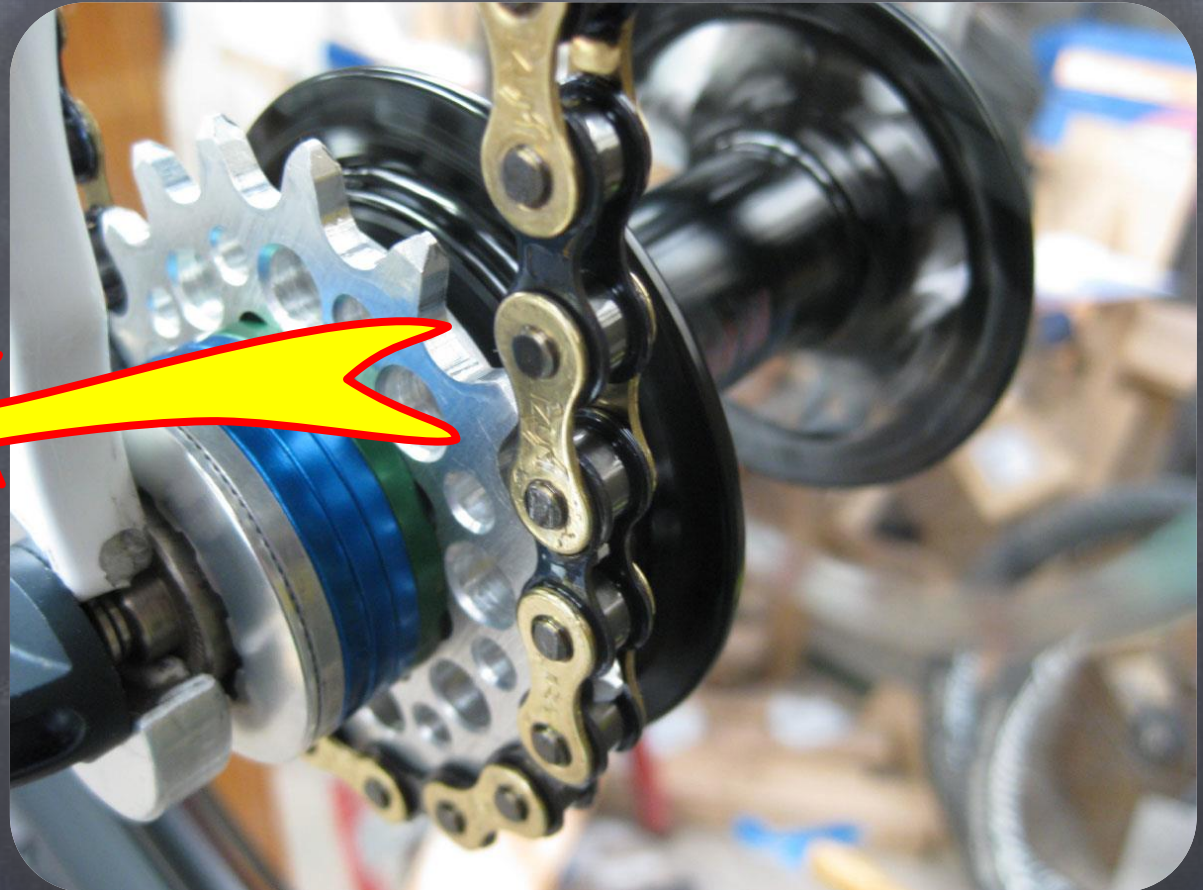
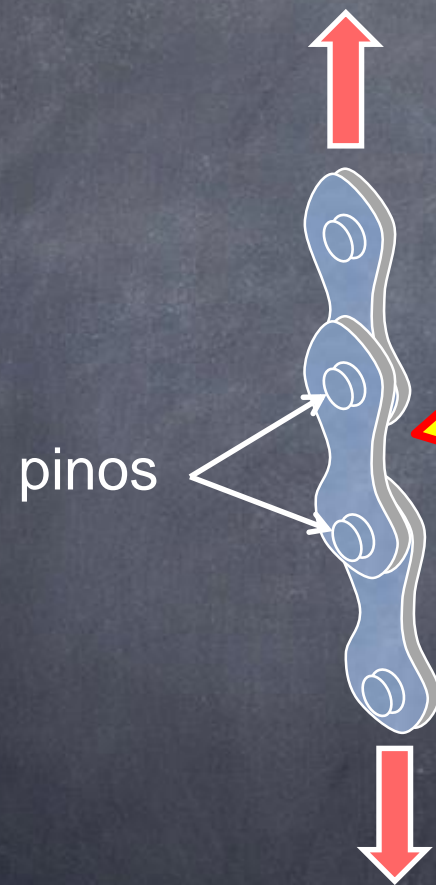


## Tensão de cisalhamento média





## Tensão de cisalhamento média





## Tensão de cisalhamento média

pino

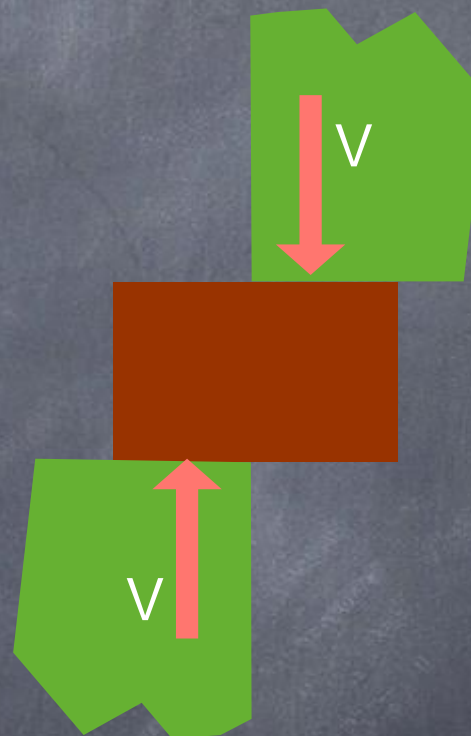


## Tensão de cisalhamento média

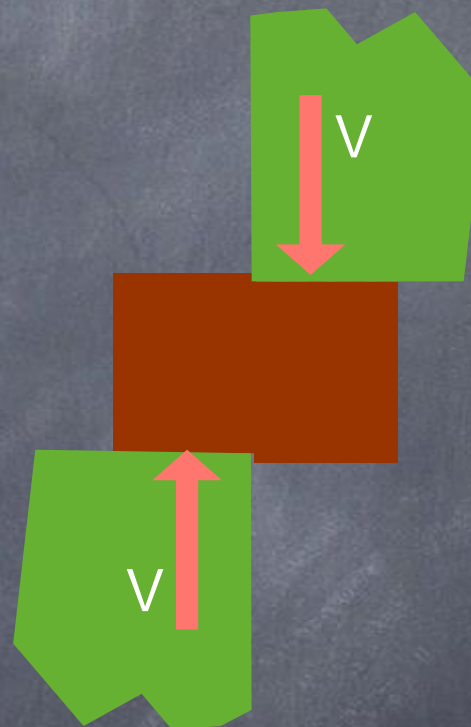




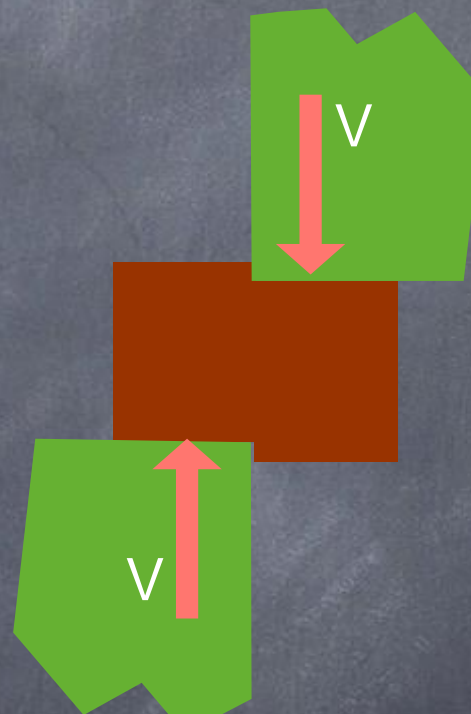
## Tensão de cisalhamento média



## Tensão de cisalhamento média

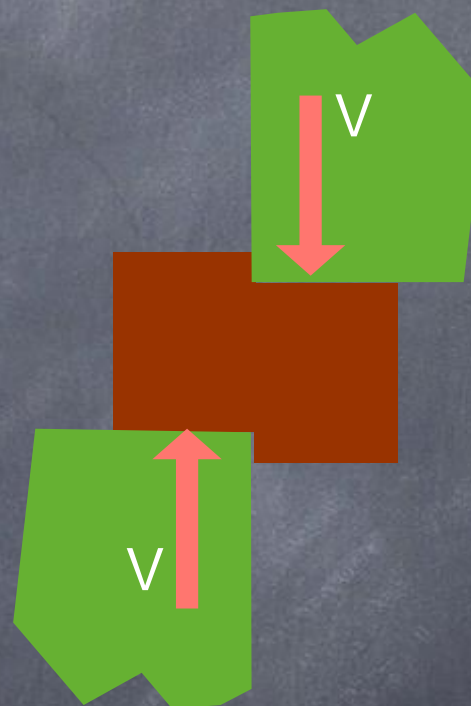


## Tensão de cisalhamento média

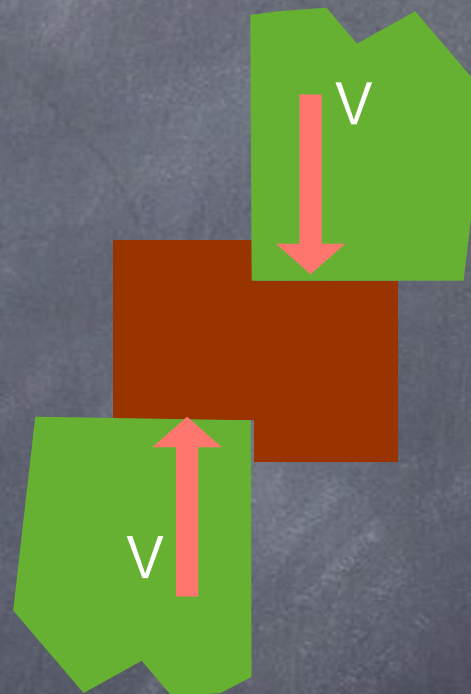




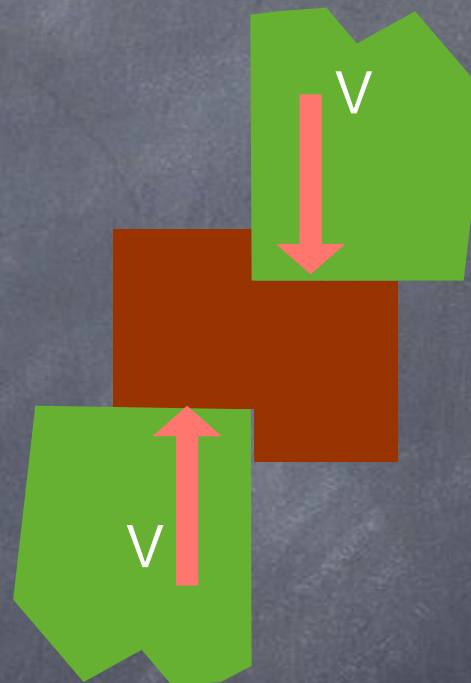
## Tensão de cisalhamento média



## Tensão de cisalhamento média

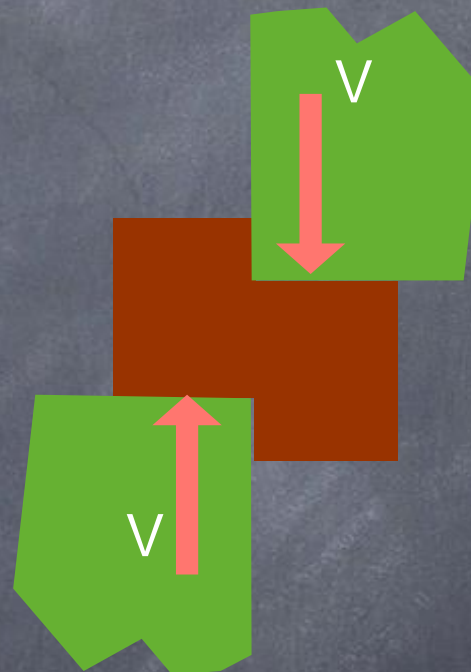


## Tensão de cisalhamento média

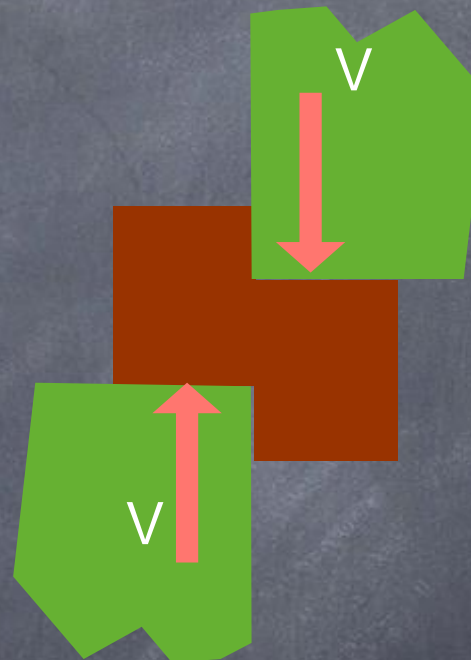




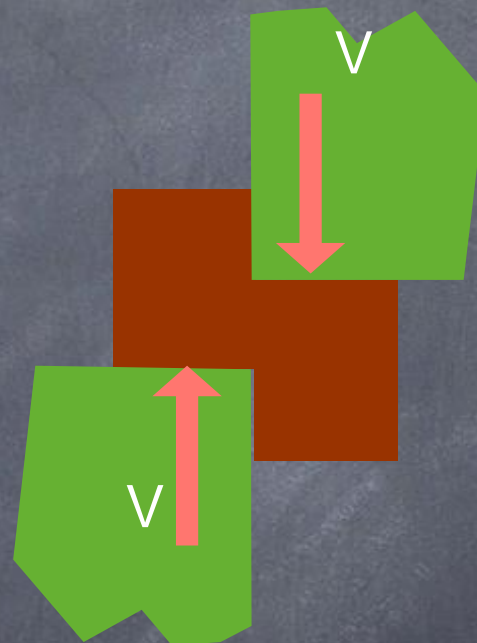
## Tensão de cisalhamento média



## Tensão de cisalhamento média

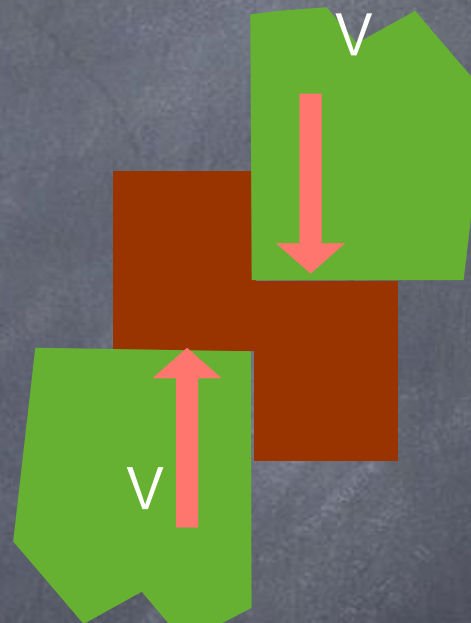


## Tensão de cisalhamento média

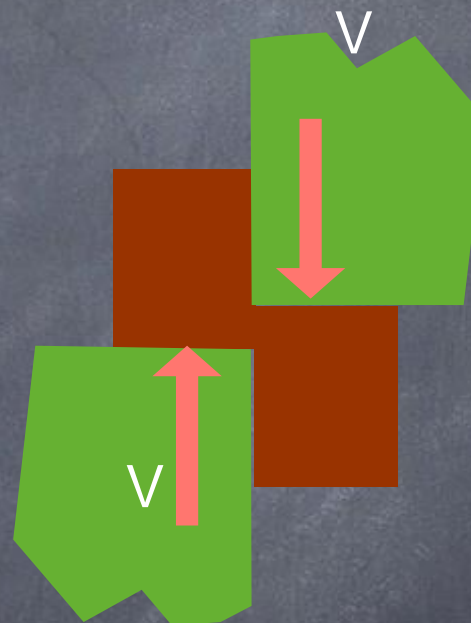




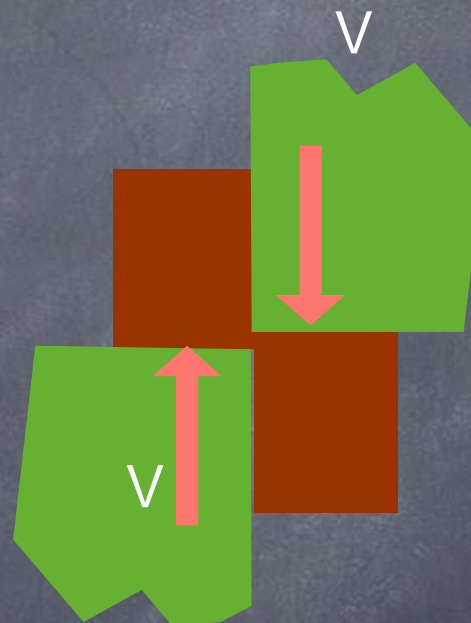
## Tensão de cisalhamento média



## Tensão de cisalhamento média

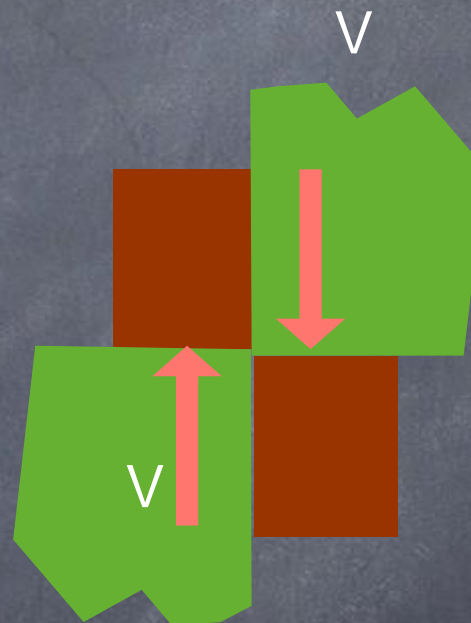


## Tensão de cisalhamento média





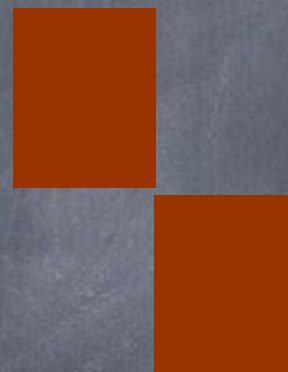
## Tensão de cisalhamento média



## Tensão de cisalhamento média



## Tensão de cisalhamento média

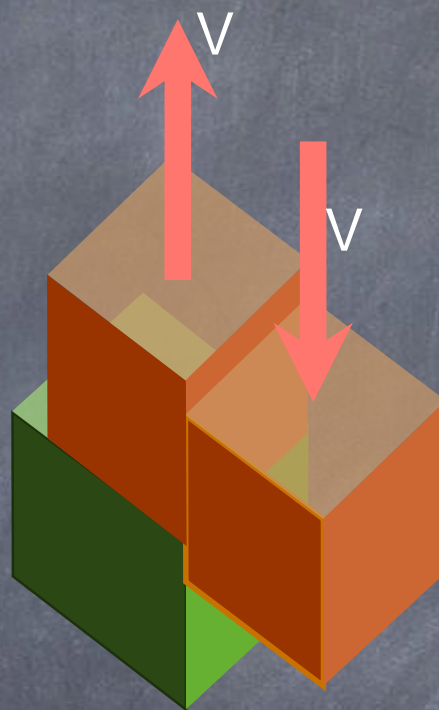




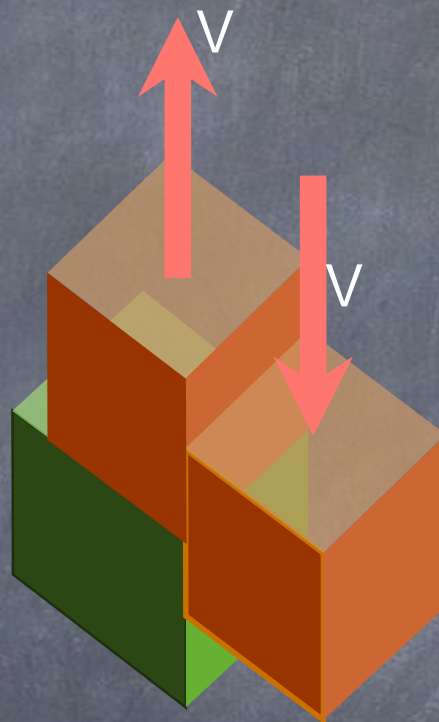
# Tensão de cisalhamento média



## Tensão de cisalhamento média

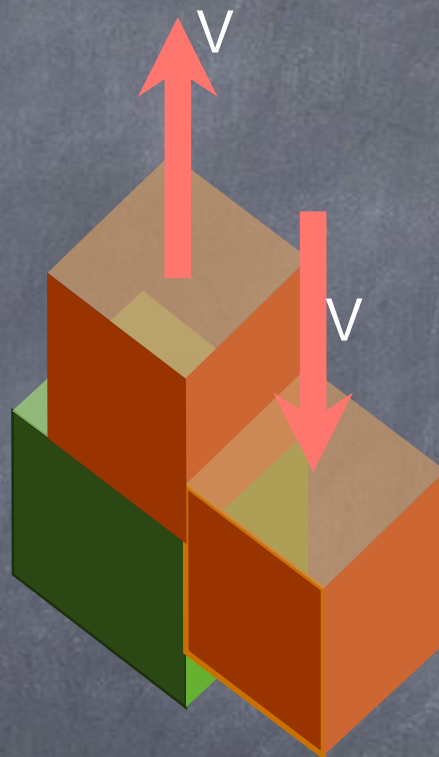


## Tensão de cisalhamento média

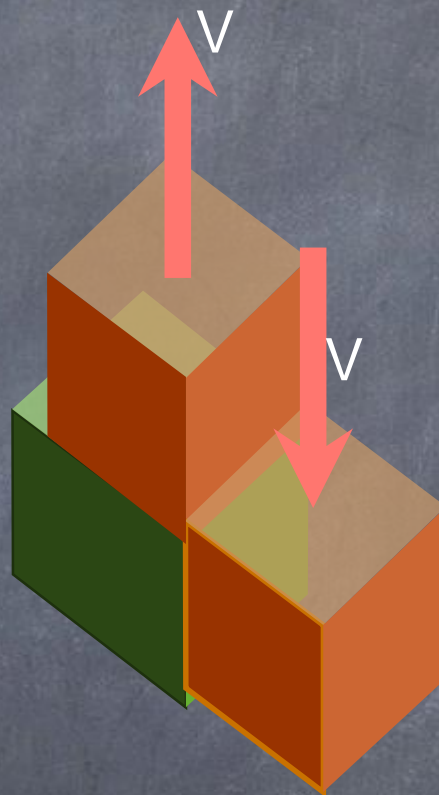




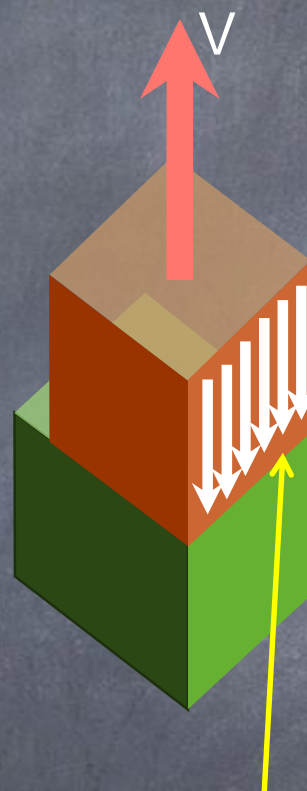
## Tensão de cisalhamento média



## Tensão de cisalhamento média



## Tensão de cisalhamento média

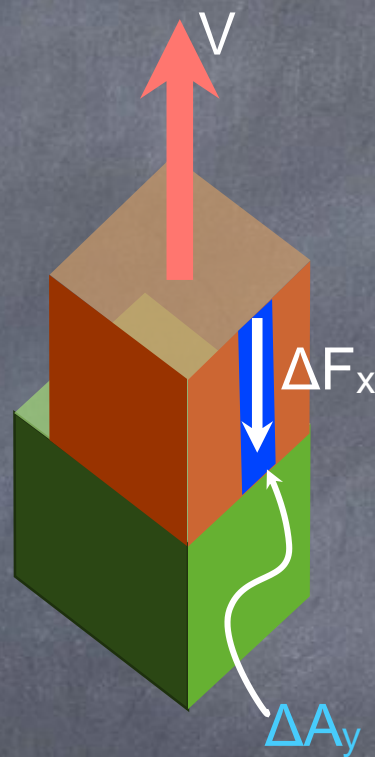


força distribuída tangente à superfície



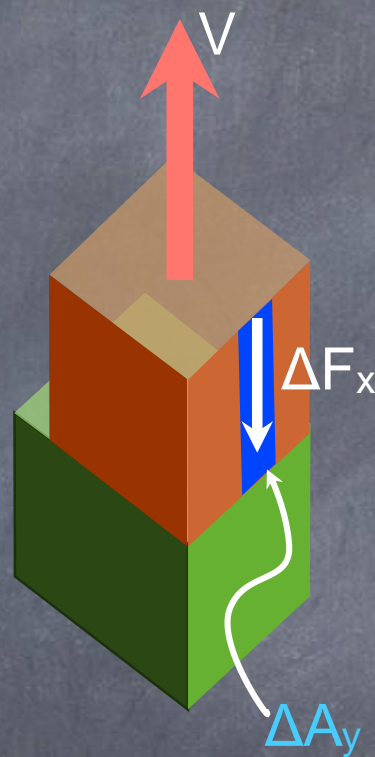
## Tensão de cisalhamento média

$$\tau_{xy} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A_y}$$



## Tensão de cisalhamento média

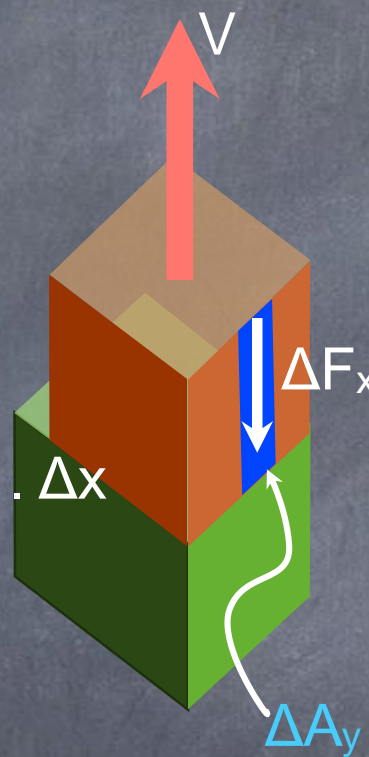
$$\tau_{xy} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A_y} = \therefore \Delta F_x = \tau_{xy} \cdot \Delta A_y$$



## Tensão de cisalhamento média

$$\tau_{xy} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A_y} = \therefore \Delta F_x = \tau_{xy} \cdot \Delta A_y$$

$$V \cong \sum \Delta F_x = \sum \tau_{xy} \cdot \Delta A_y = \sum \tau_{xy} \cdot \Delta z \cdot \Delta x$$



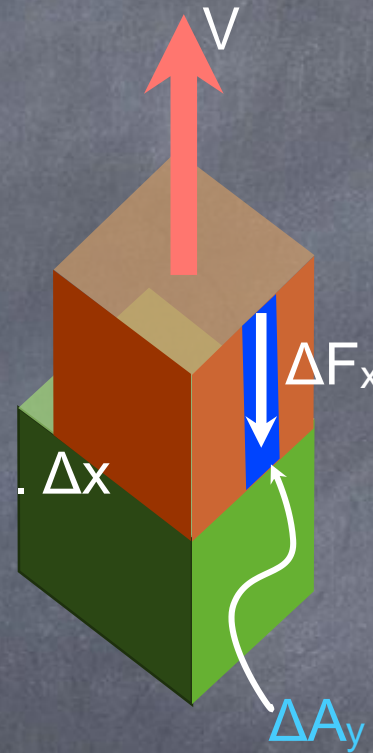


## Tensão de cisalhamento média

$$\tau_{xy} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A_y} = \therefore \Delta F_x = \tau_{xy} \cdot \Delta A_y$$

$$V \cong \sum \Delta F_x = \sum \tau_{xy} \cdot \Delta A_y = \sum \tau_{xy} \cdot \Delta z \cdot \Delta x$$

$$V \cong \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( \sum \tau_{xy} \cdot \Delta z \right) \cdot \Delta x \right]$$



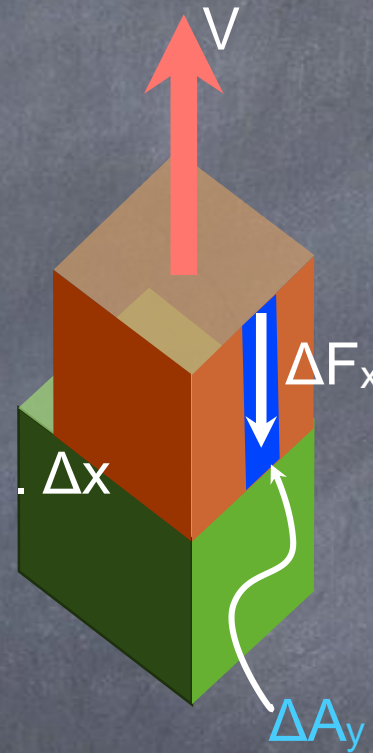
## Tensão de cisalhamento média

$$\tau_{xy} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A_y} = \therefore \Delta F_x = \tau_{xy} \cdot \Delta A_y$$

$$V \cong \sum \Delta F_x = \sum \tau_{xy} \cdot \Delta A_y = \sum \tau_{xy} \cdot \Delta z \cdot \Delta x$$

$$V \cong \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( \sum \tau_{xy} \cdot \Delta z \right) \cdot \Delta x \right]$$

$$V = \int \left[ \int (\tau_{xy} \cdot dz) \right] \cdot \Delta x \Rightarrow$$





## Tensão de cisalhamento média

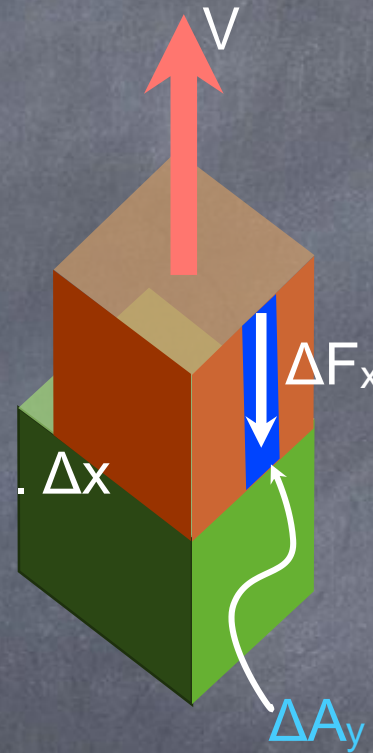
$$\tau_{xy} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A_y} = \therefore \Delta F_x = \tau_{xy} \cdot \Delta A_y$$

$$V \cong \sum \Delta F_x = \sum \tau_{xy} \cdot \Delta A_y = \sum \tau_{xy} \cdot \Delta z \cdot \Delta x$$

$$V \cong \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( \sum \tau_{xy} \cdot \Delta z \right) \cdot \Delta x \right]$$

$$V = \int \left[ \int (\tau_{xy} \cdot dz) \right] \cdot \Delta x \Rightarrow$$

$$V = \int \left[ \int (\tau_{xy} \cdot dz) \right] \cdot dx = \iint (\tau_{xy}) dz dx$$





## Tensão de cisalhamento média

$$\tau_{xy} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A_y} = \therefore \Delta F_x = \tau_{xy} \cdot \Delta A_y$$

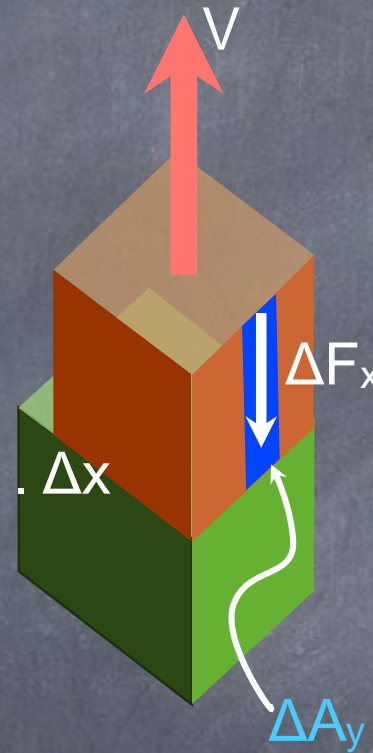
$$V \cong \sum \Delta F_x = \sum \tau_{xy} \cdot \Delta A_y = \sum \tau_{xy} \cdot \Delta z \cdot \Delta x$$

$$V \cong \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( \sum \tau_{xy} \cdot \Delta z \right) \cdot \Delta x \right]$$

$$V = \int \left[ \int (\tau_{xy} \cdot dz) \right] \cdot \Delta x \Rightarrow$$

$$V = \int \left[ \int (\tau_{xy} \cdot dz) \right] \cdot dx = \iint (\tau_{xy}) dz dx$$

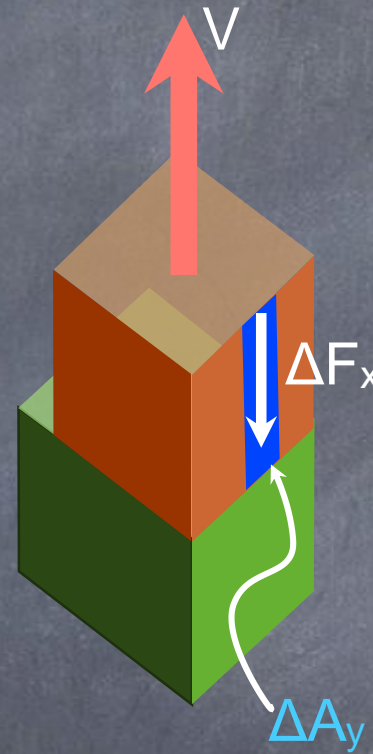
$$V = \int_A (\tau_{xy}) dA$$



## Tensão de cisalhamento média

A tensão tangencial média é dada por

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{\int_A (\tau_{xy}) dA}{\int_A dA} = \frac{V}{A}$$





# Tensão de cisalhamento média

## Exemplos



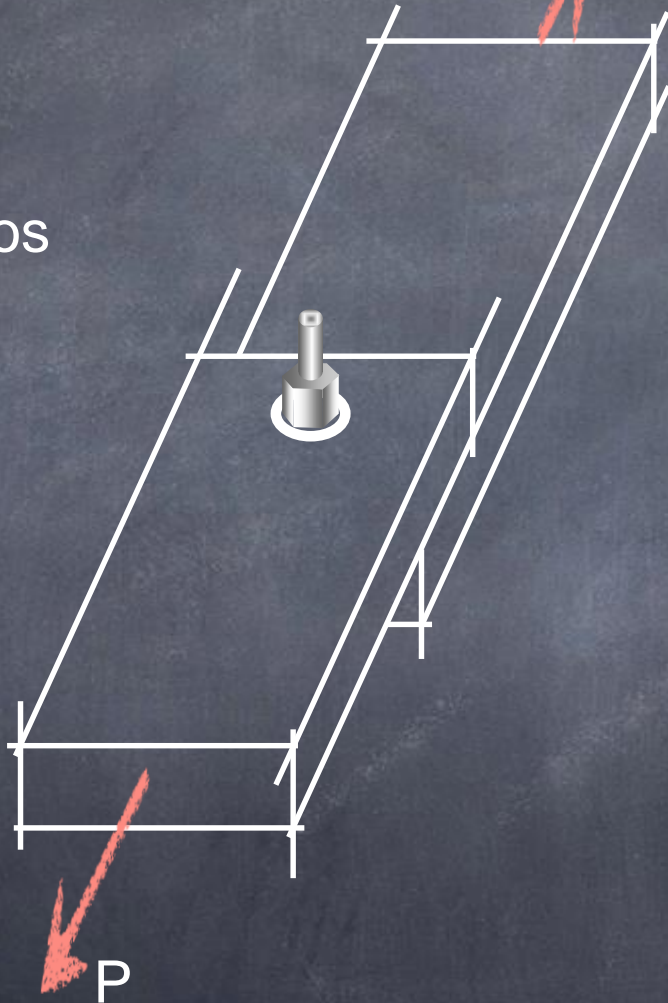
## Tensão de cisalhamento média

Exemplos



Tensão de cisalhamento média  $P$

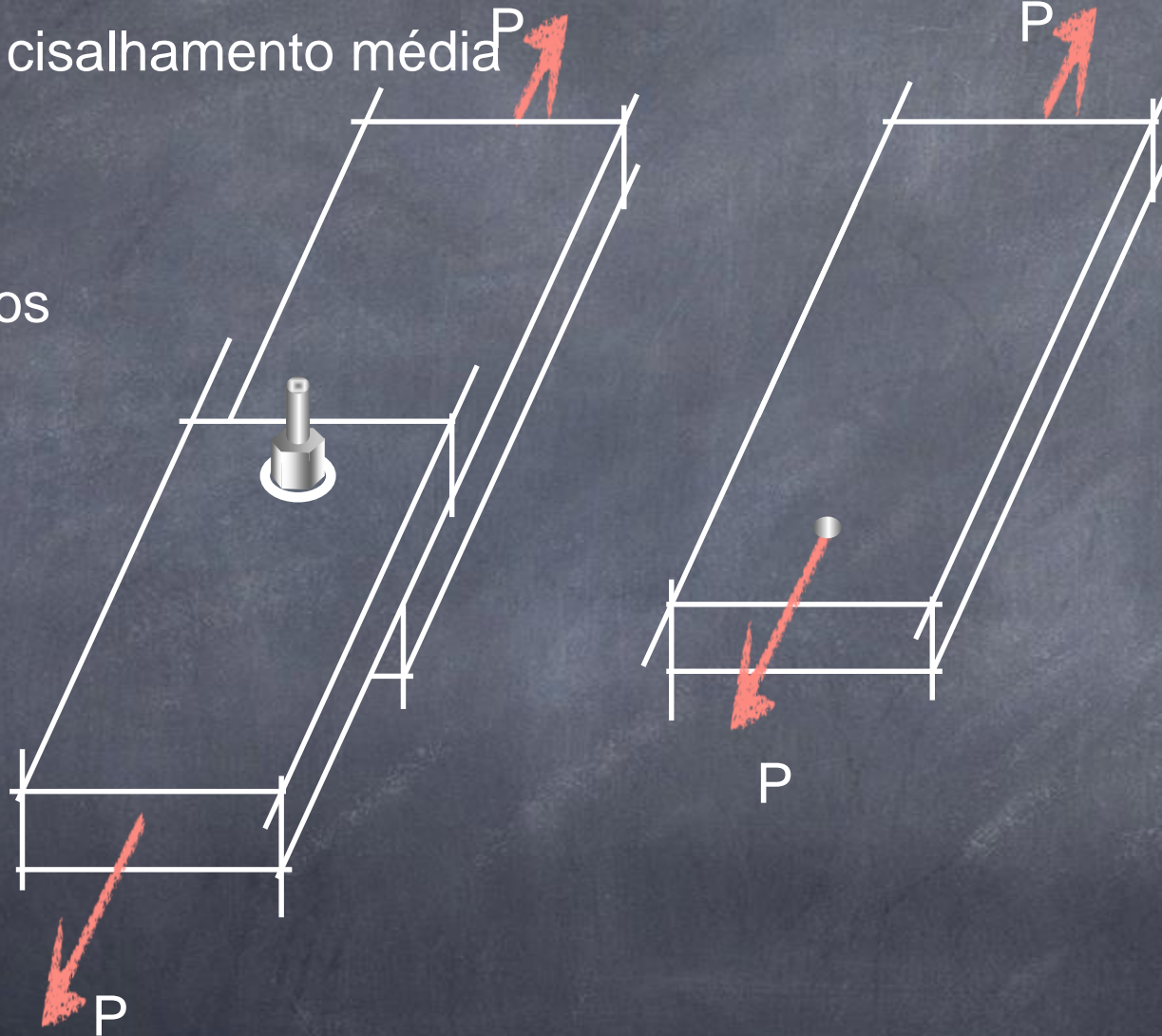
Exemplos





# Tensão de cisalhamento média $P$

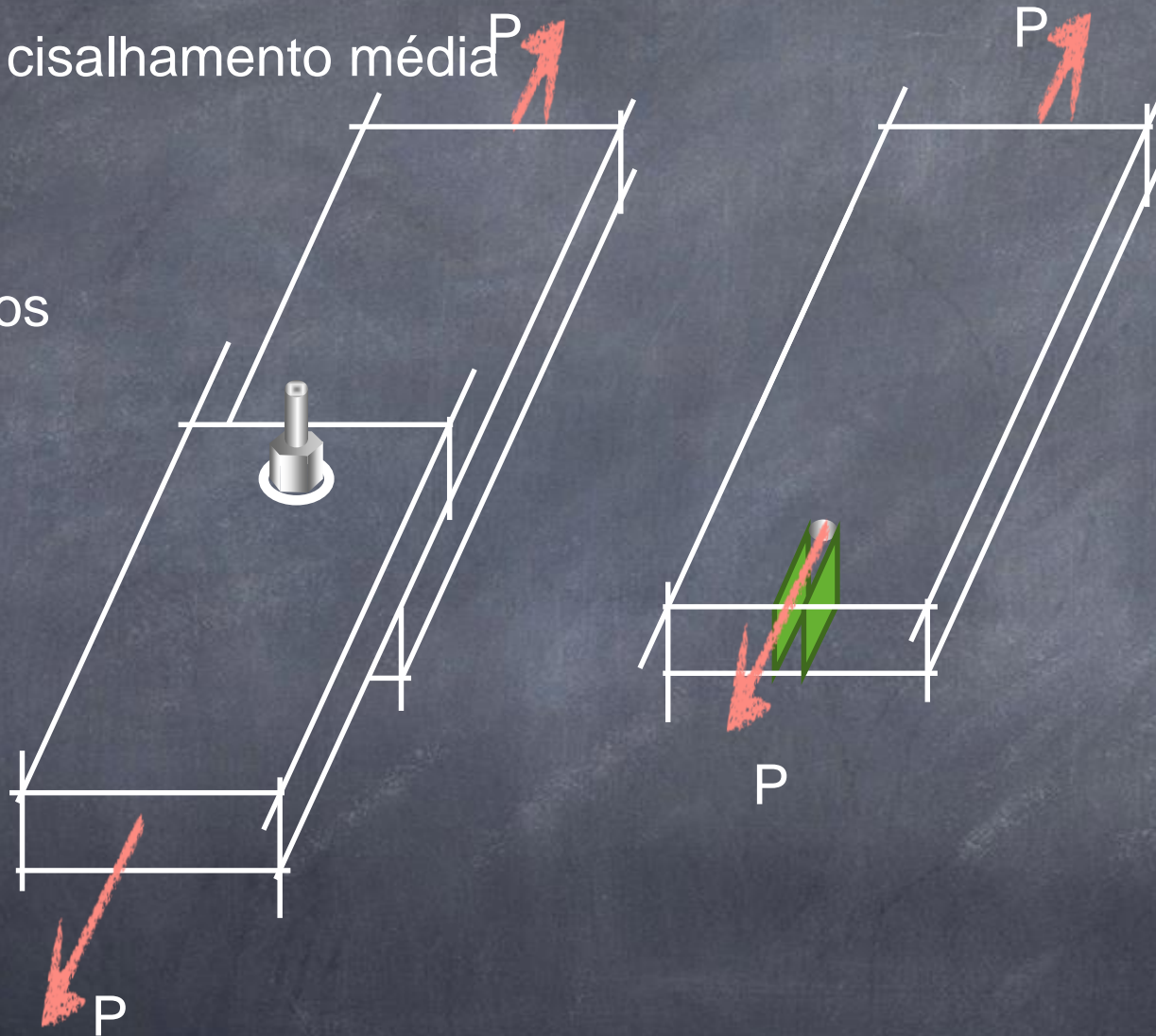
## Exemplos





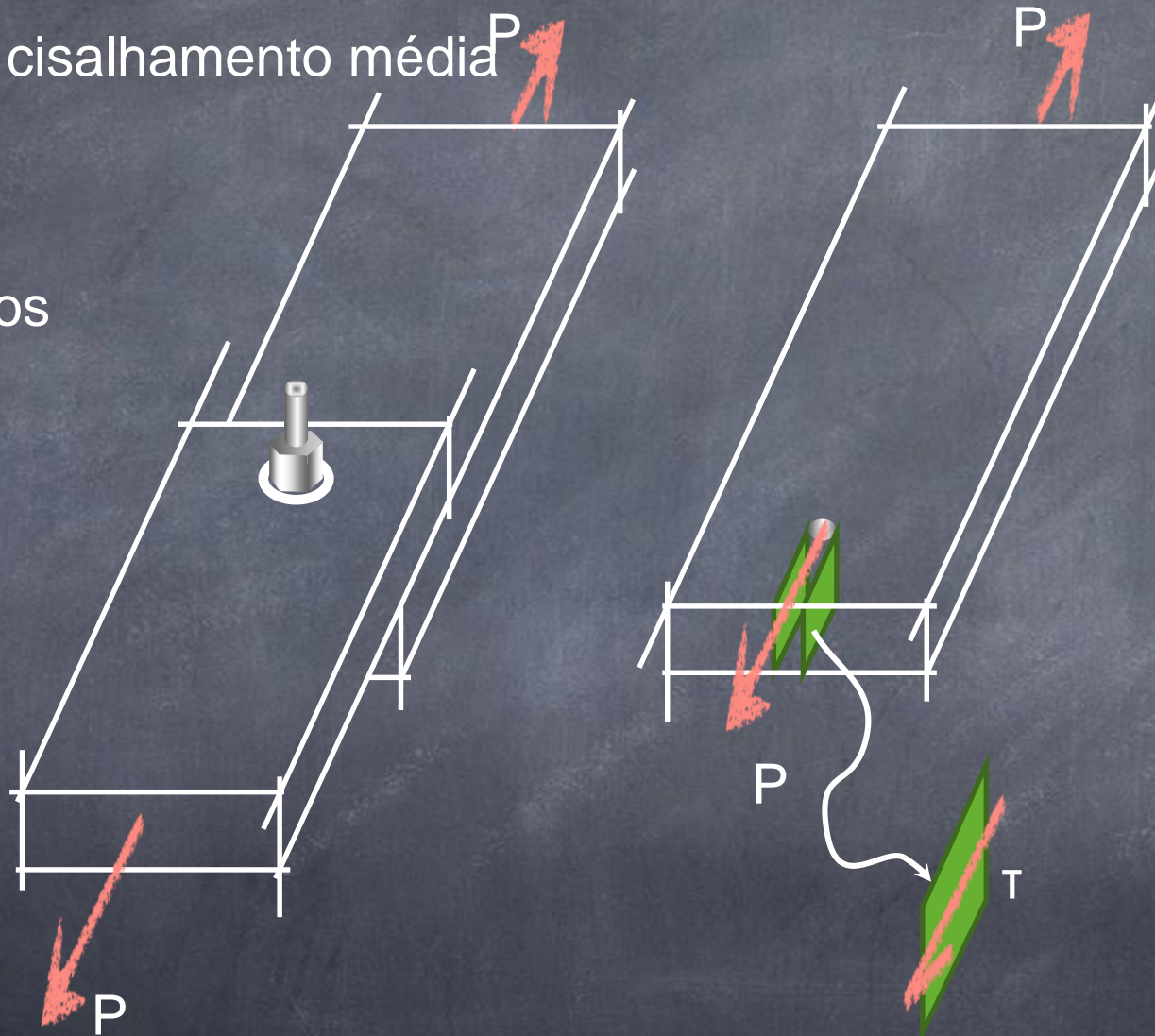
# Tensão de cisalhamento média $P$

## Exemplos



# Tensão de cisalhamento média $P$

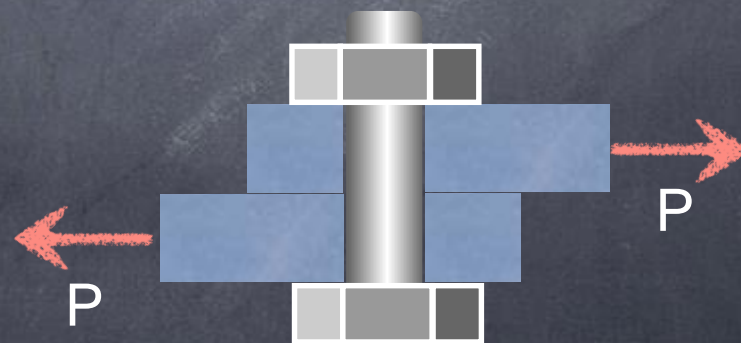
## Exemplos





# Tensão de cisalhamento média<sup>P</sup>

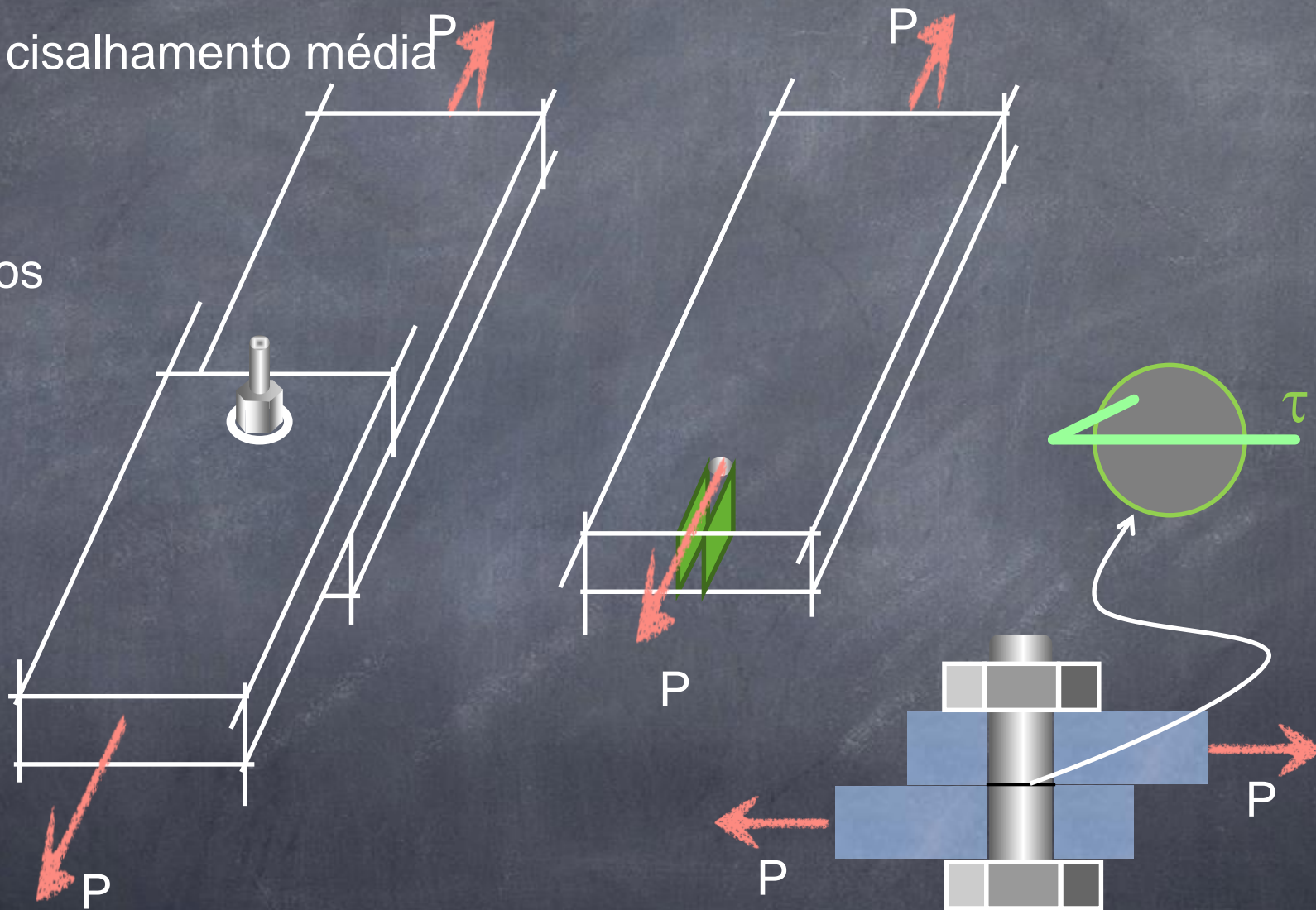
## Exemplos





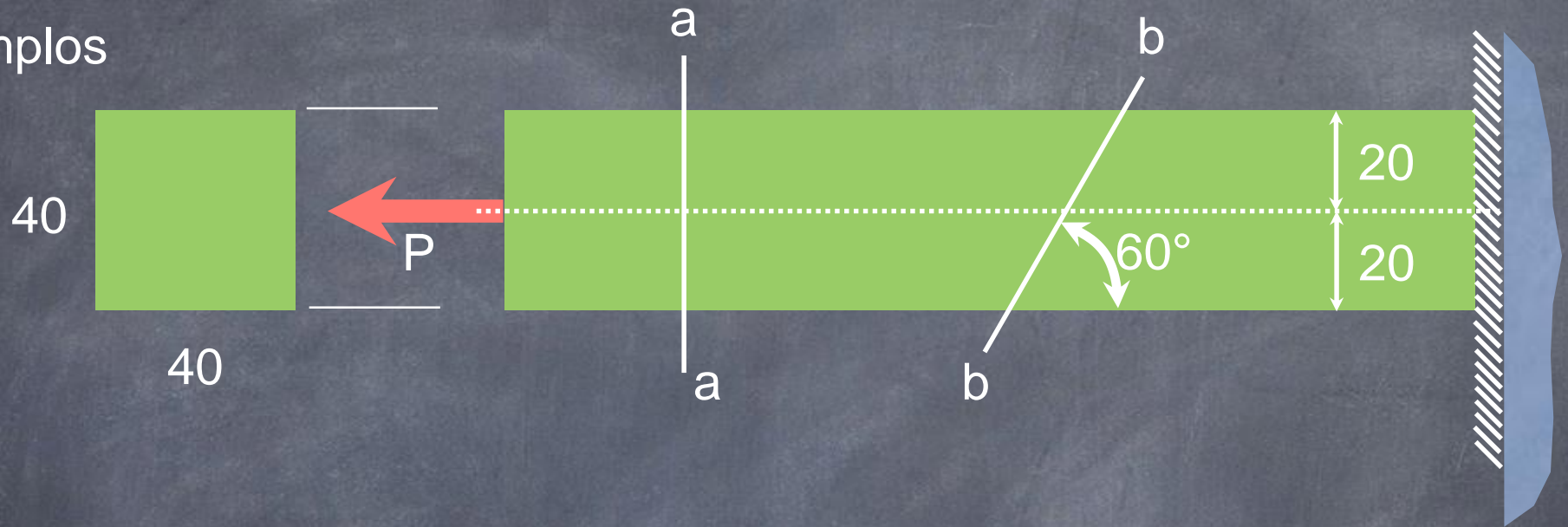
# Tensão de cisalhamento média $P$

## Exemplos



# Exemplos

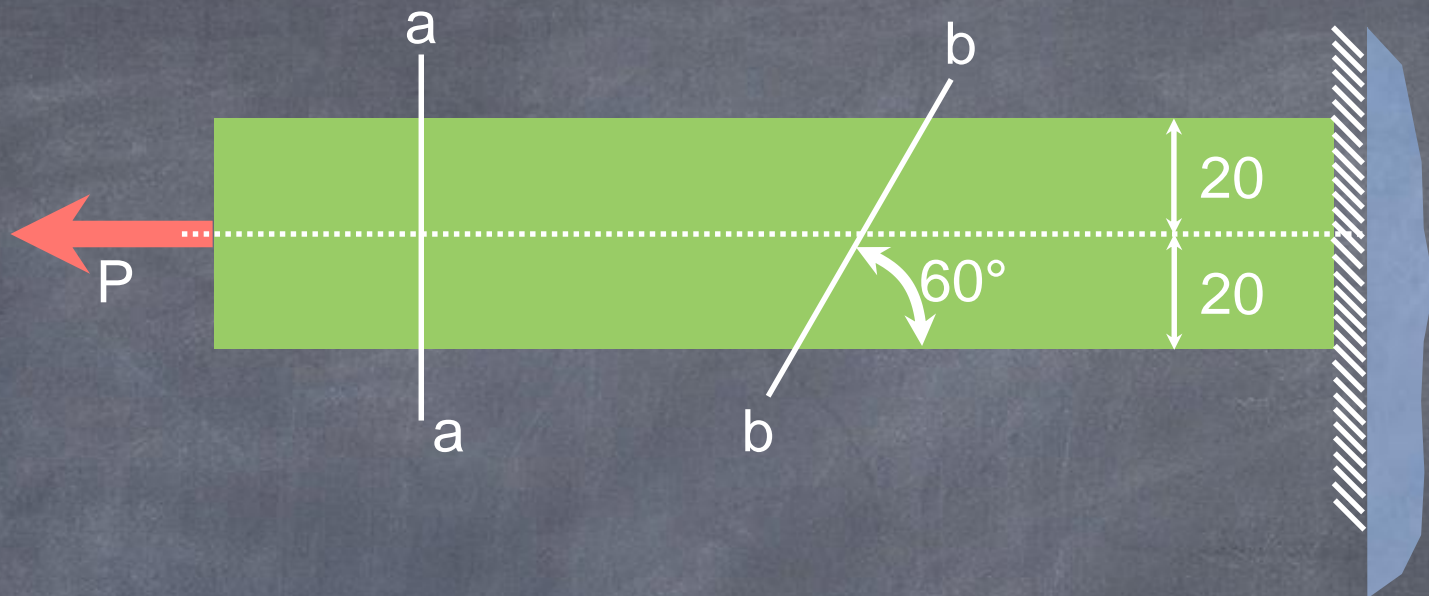
## Exemplos



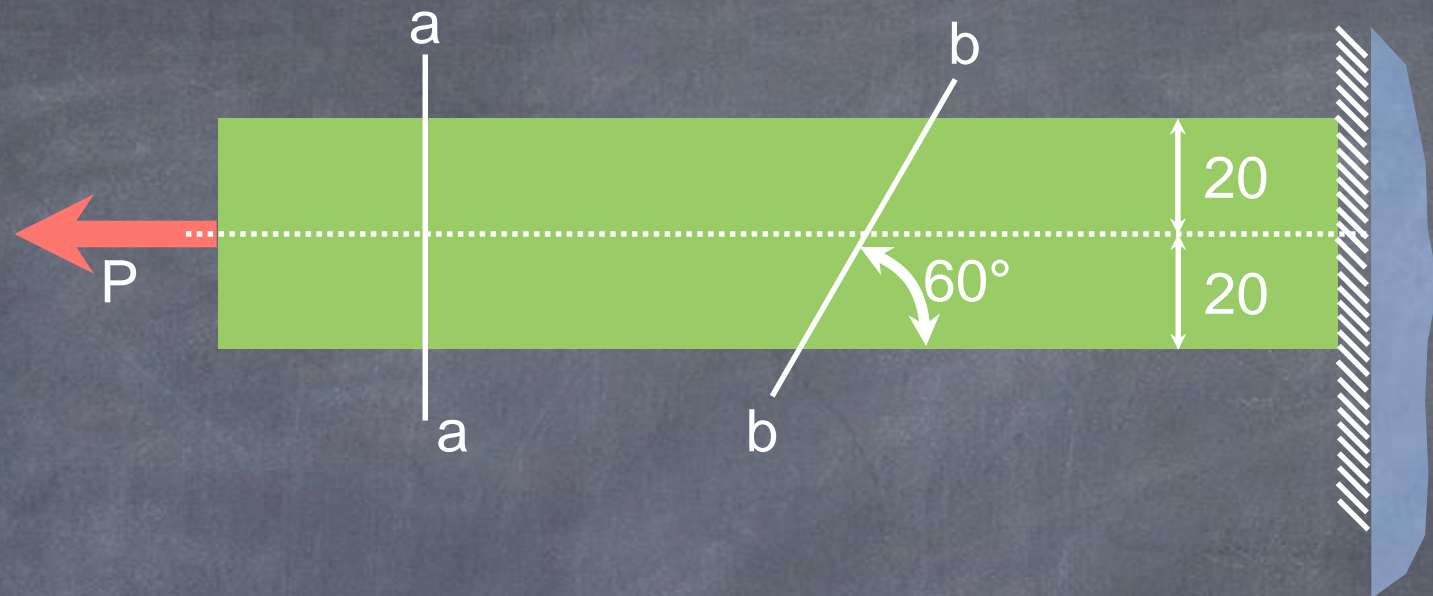
A barra de seção quadrada da figura é submetida a uma força axial  $P = 800$  N. Determinar a tensão normal média e a tensão cisalhante média que atuam nos planos  $a-a$  e  $b-b$ .



# Exemplos

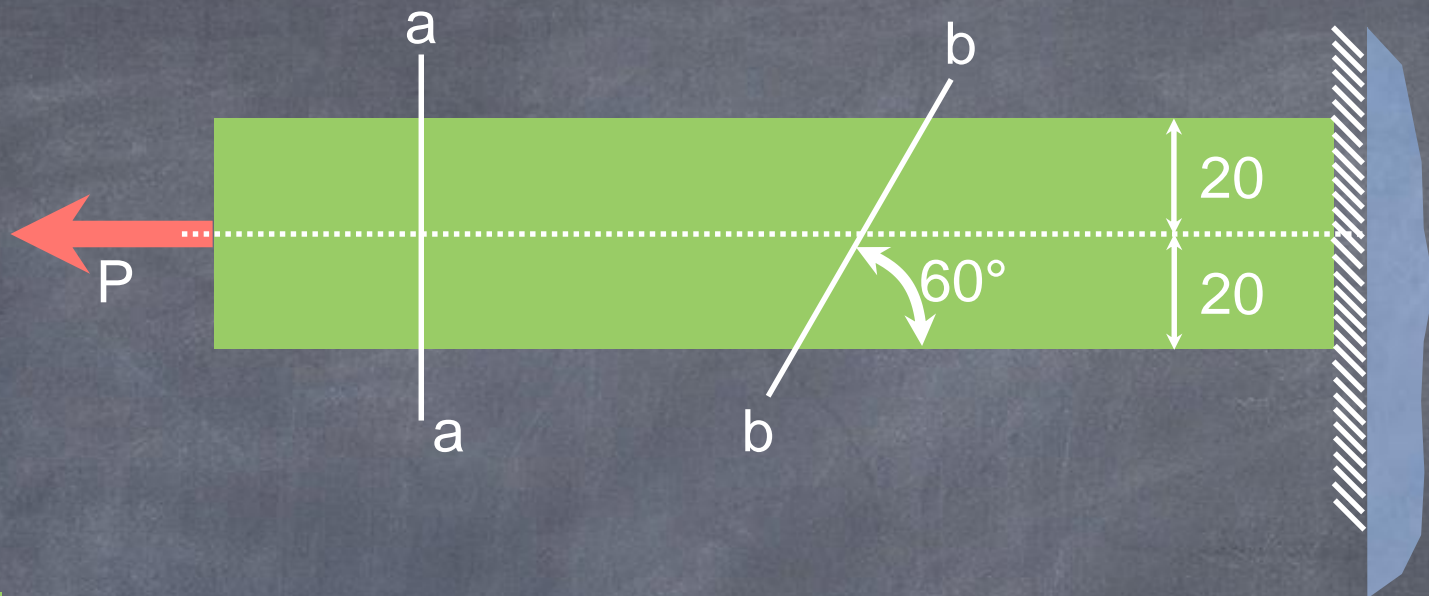


## Exemplos



Na seção a-a

## Exemplos

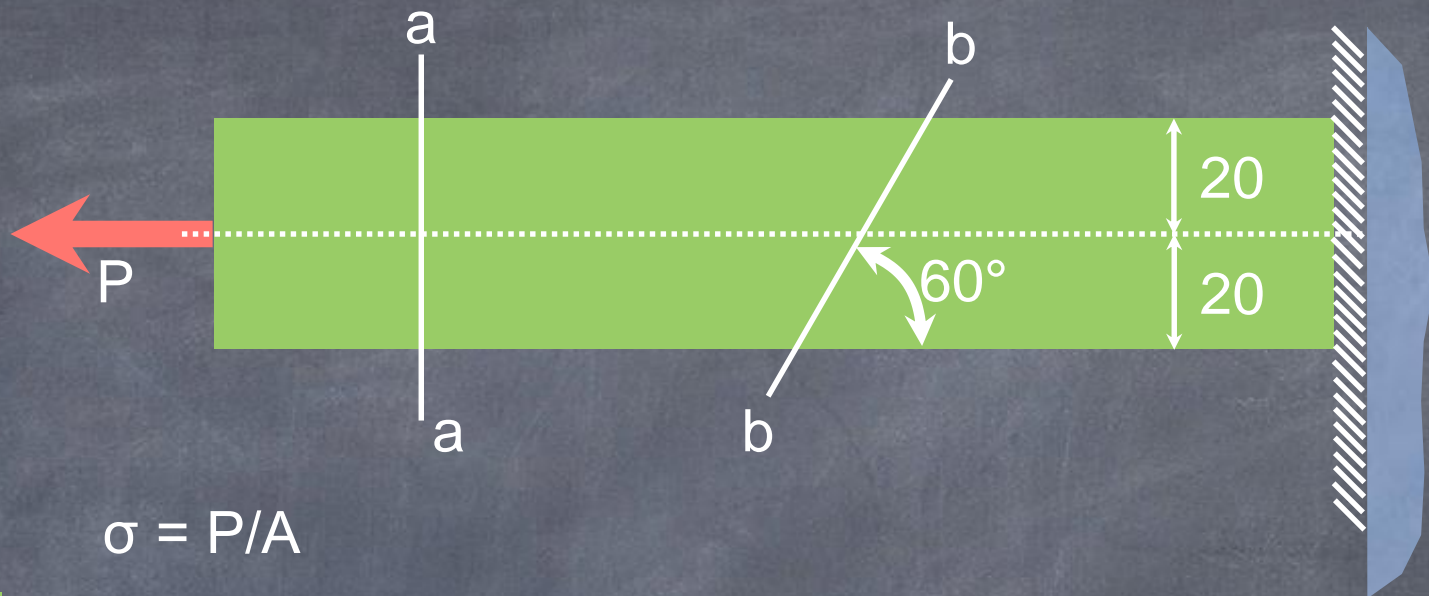


Na seção a-a





## Exemplos

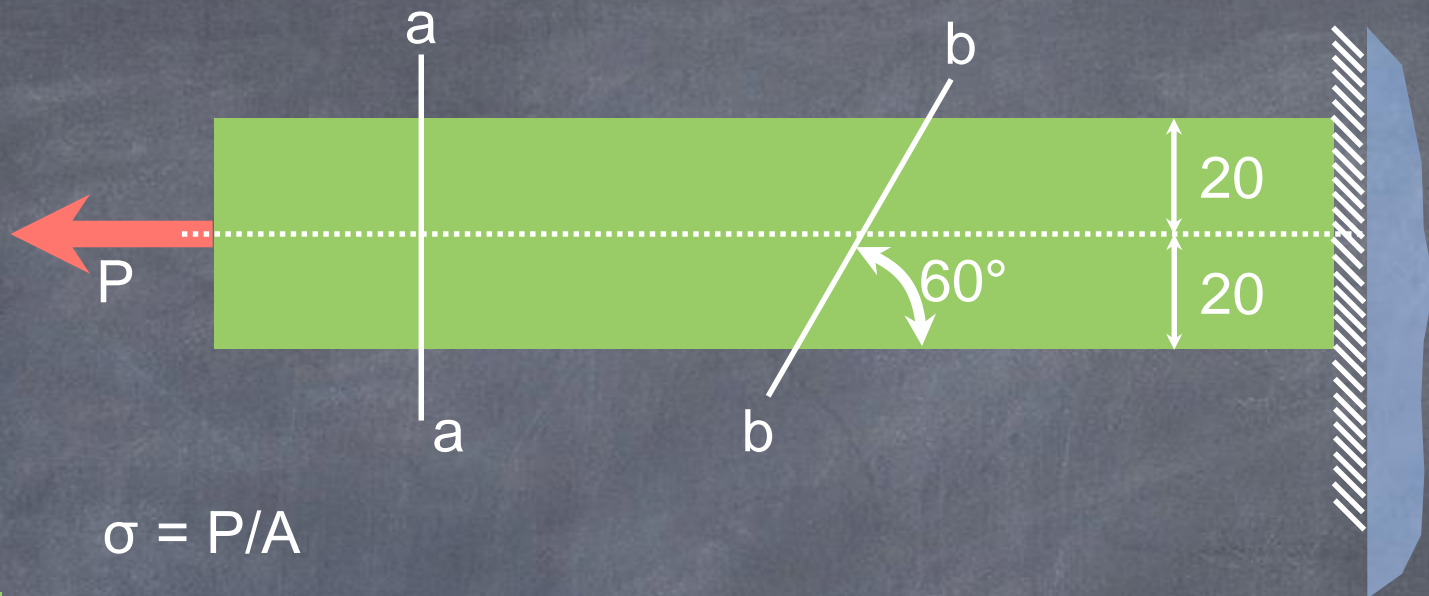


Na seção a-a

$$\sigma = P/A$$

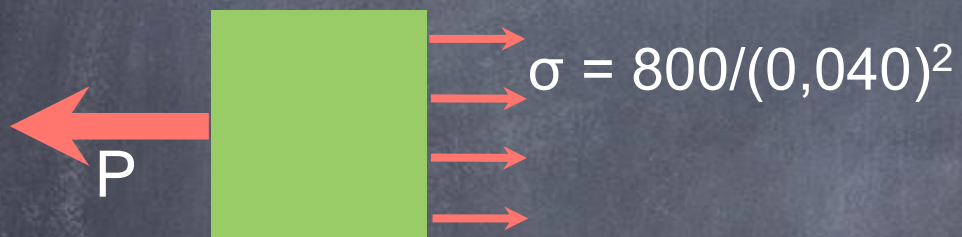


# Exemplos

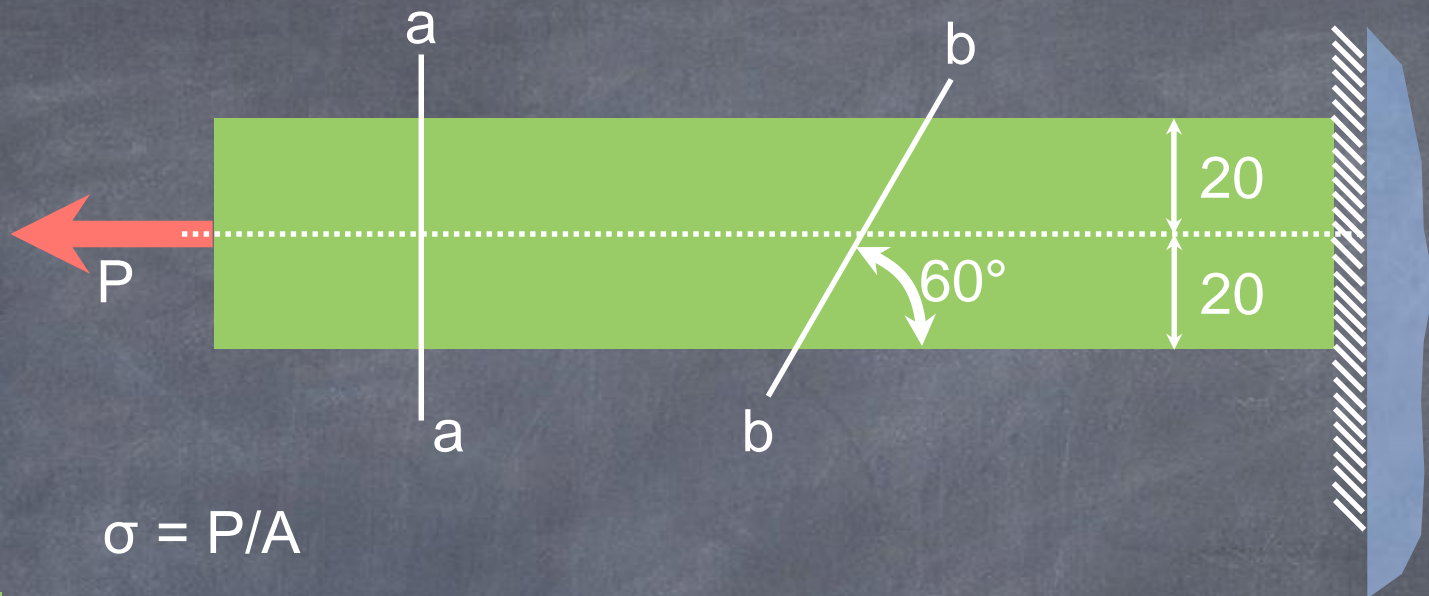


Na seção a-a

$$\sigma = P/A$$

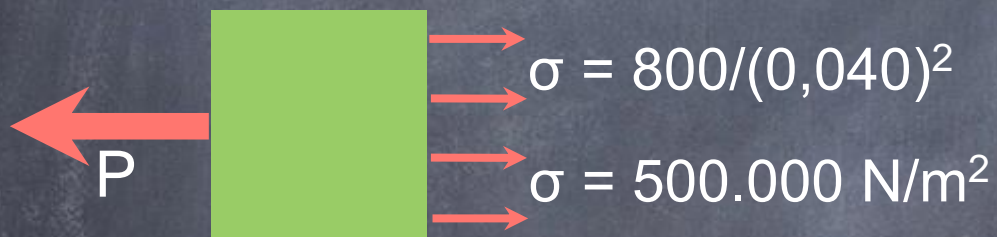


# Exemplos



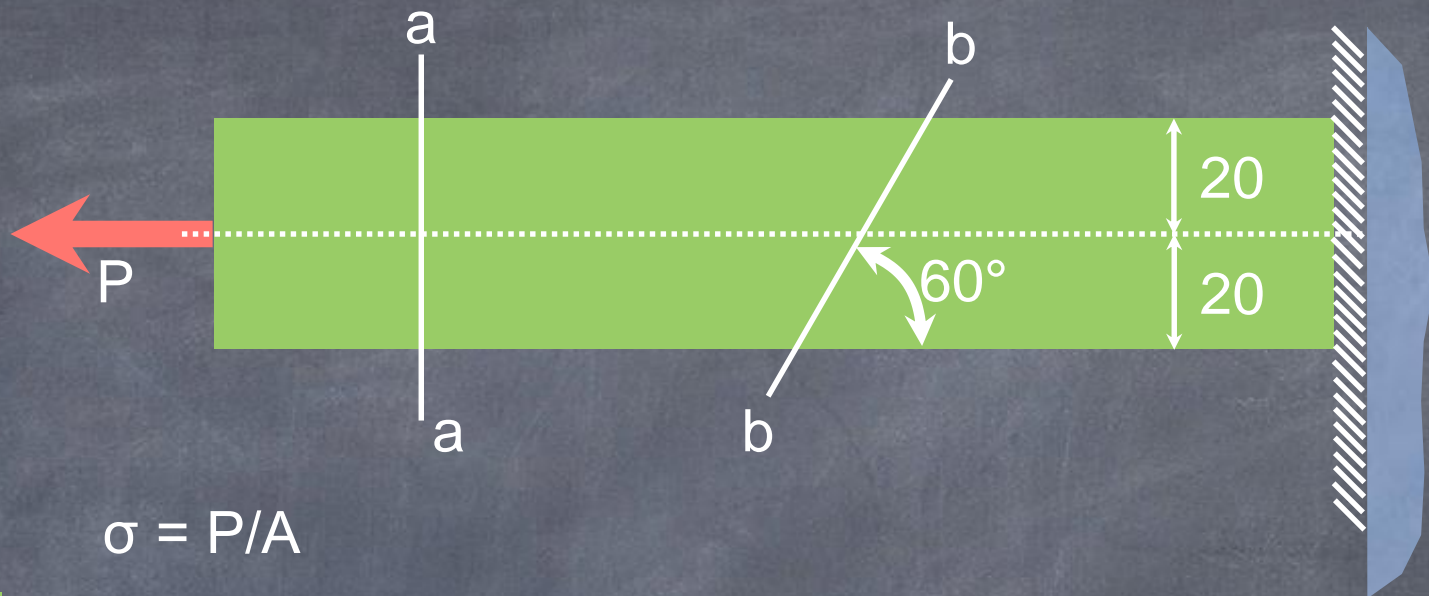
Na seção a-a

$$\sigma = P/A$$



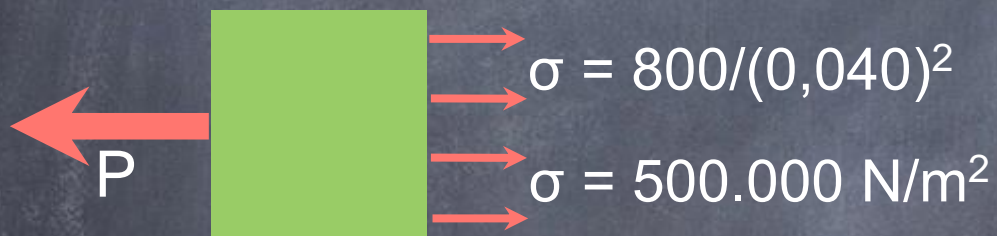


# Exemplos



Na seção a-a

$$\sigma = P/A$$

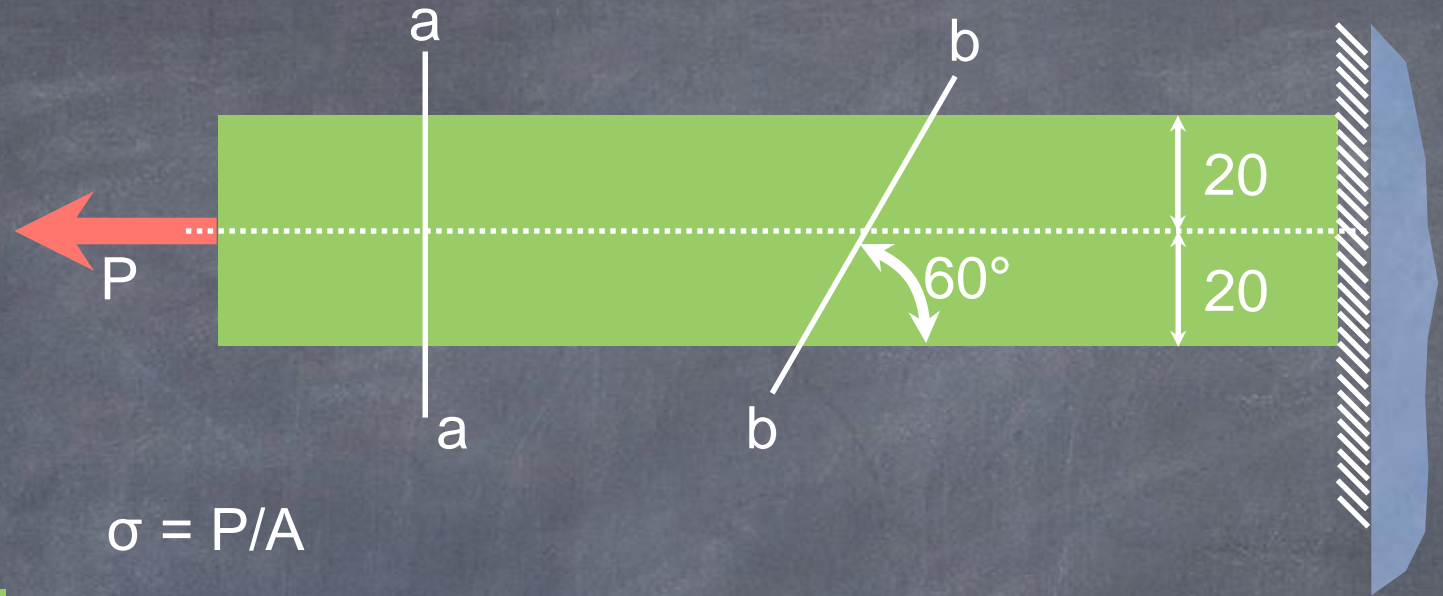


$$\sigma = 800/(0,040)^2$$

$$\sigma = 500.000 \text{ N/m}^2$$

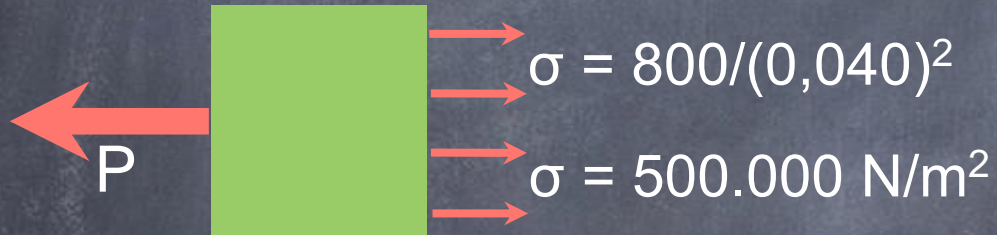
$$\sigma = 500 \text{ kPa}$$

# Exemplos



Na seção a-a

$$\sigma = P/A$$



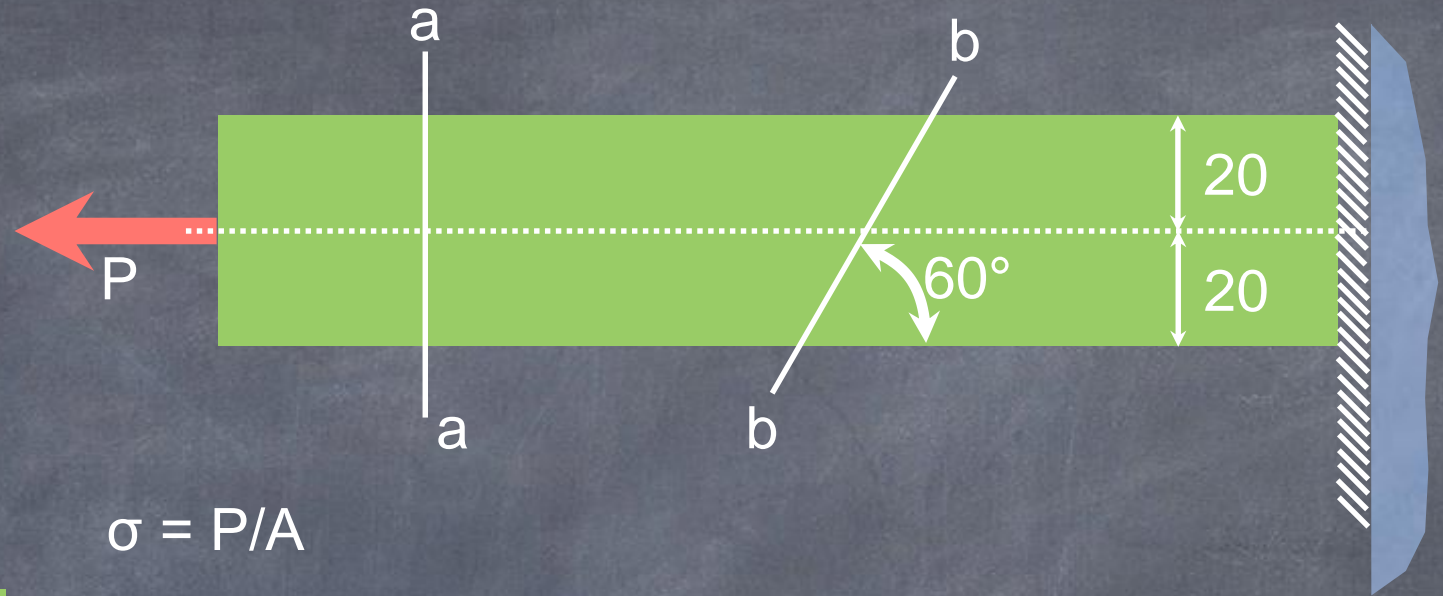
$$\sigma = 800/(0,040)^2$$

$$\sigma = 500.000 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma = 500 \text{ kPa}$$

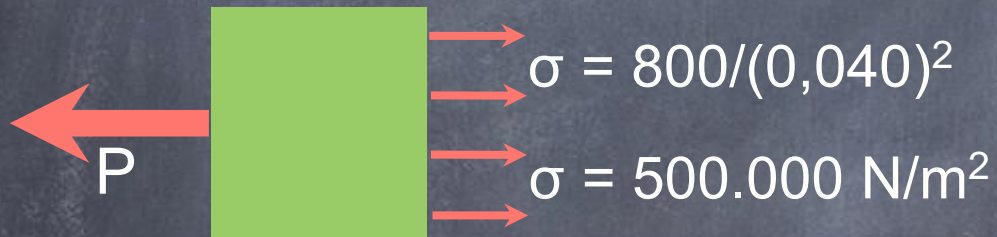
tensão normal média

## Exemplos



Na seção a-a

$$\sigma = P/A$$



$$\sigma = 800/(0,040)^2$$

$$\sigma = 500.000 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma = 500 \text{ kPa}$$

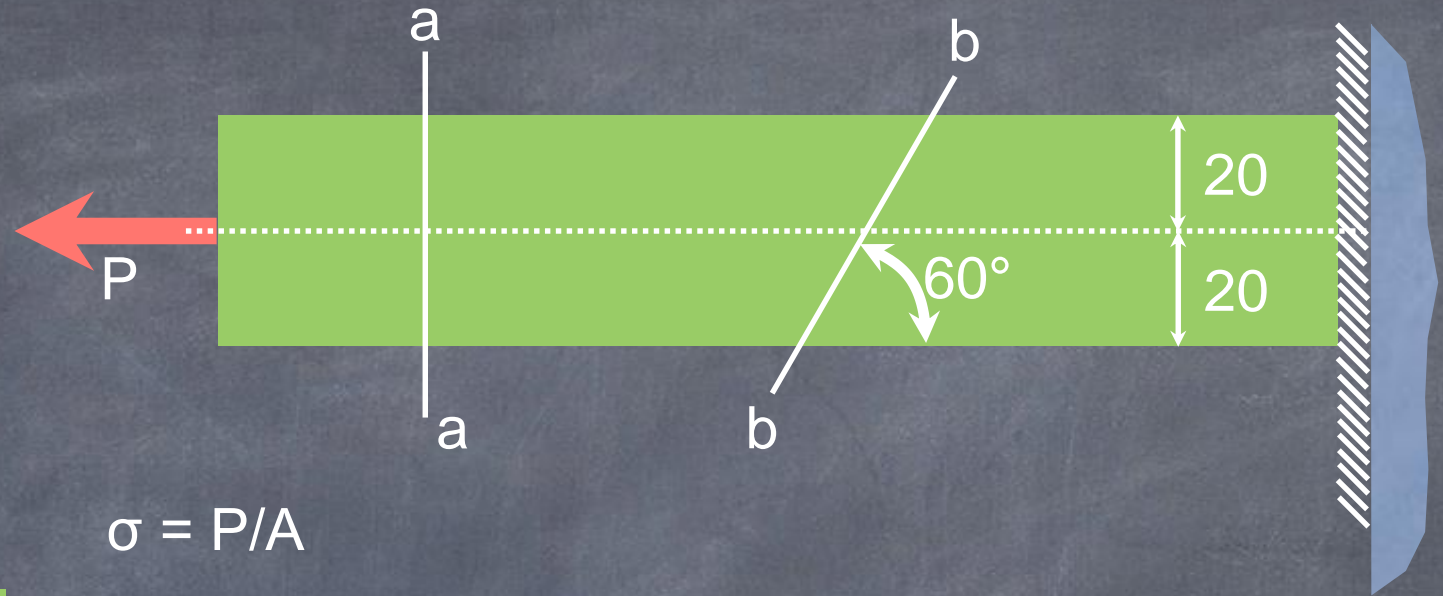
tensão normal média

**Obs:**

Não existe força transversal na seção a-a.

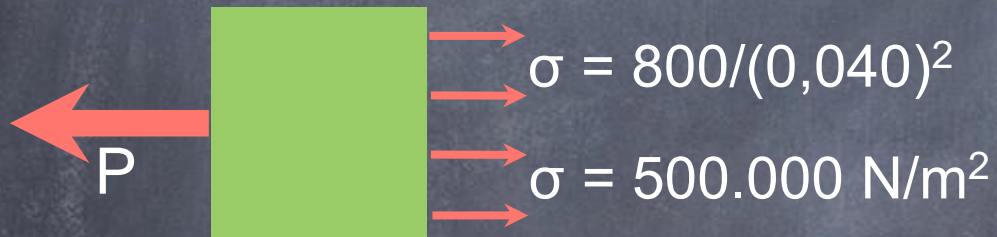


## Exemplos



Na seção a-a

$$\sigma = P/A$$



$$\sigma = 800/(0,040)^2$$

$$\sigma = 500.000 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma = 500 \text{ kPa}$$

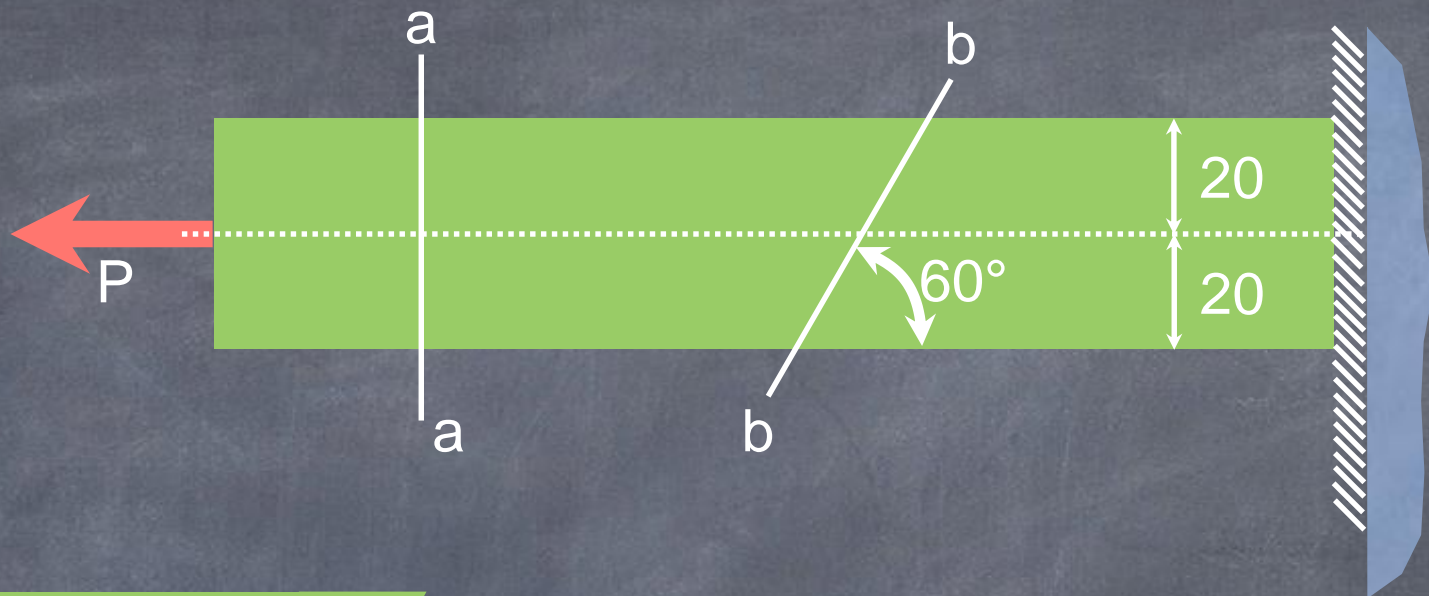
tensão normal média

**Obs:**

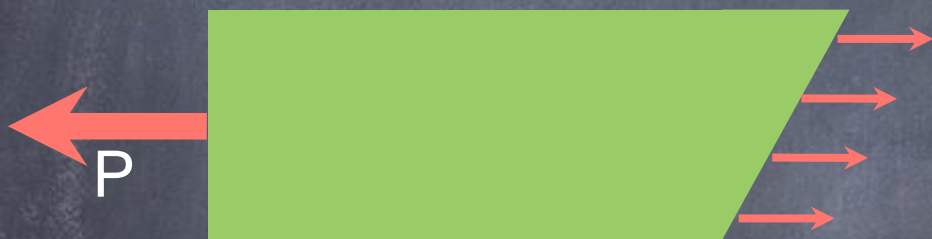
Não existe força transversal na seção a-a. Logo, a tensão cisalhante média na seção é

$$\tau = 0.$$

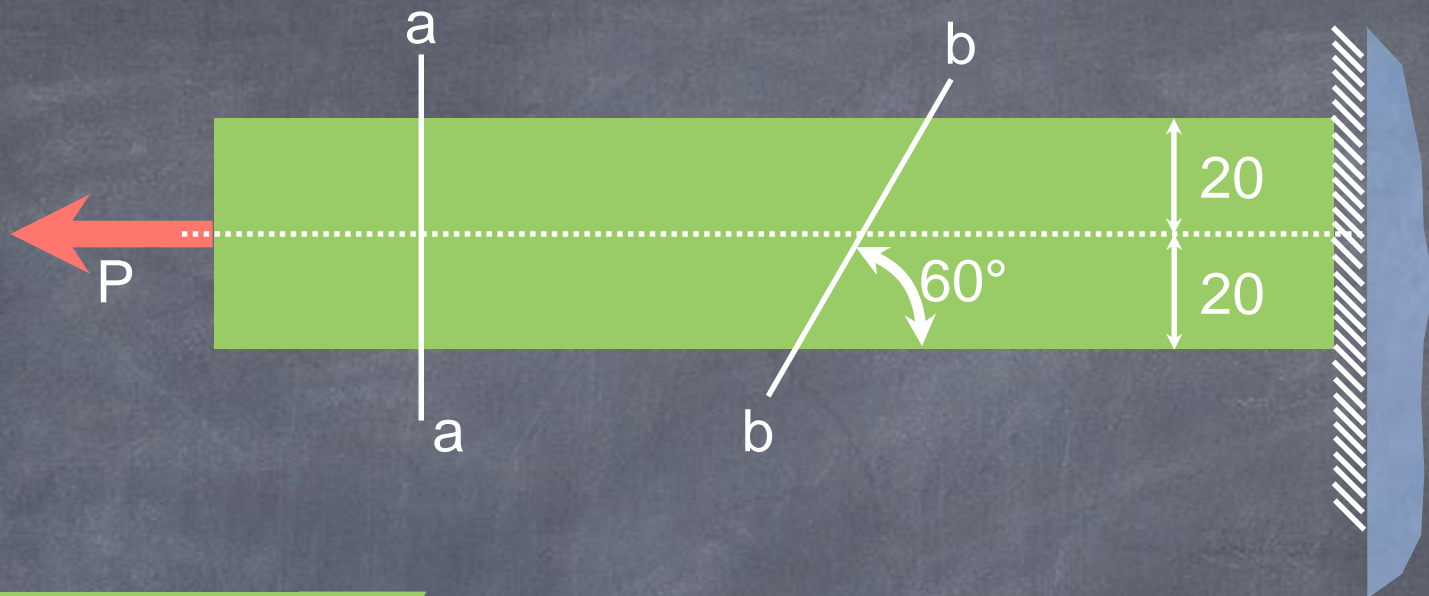
## Exemplos



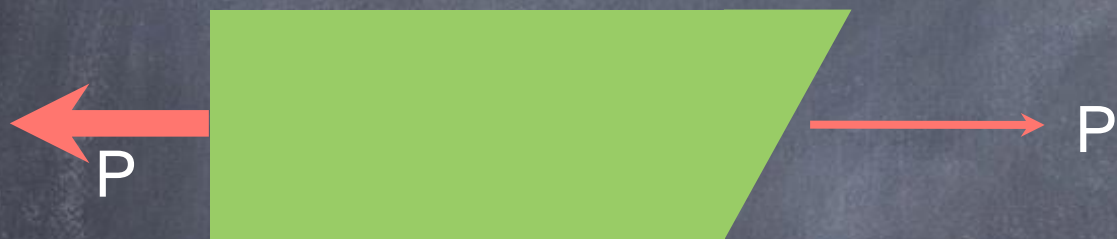
Na seção b-b



## Exemplos

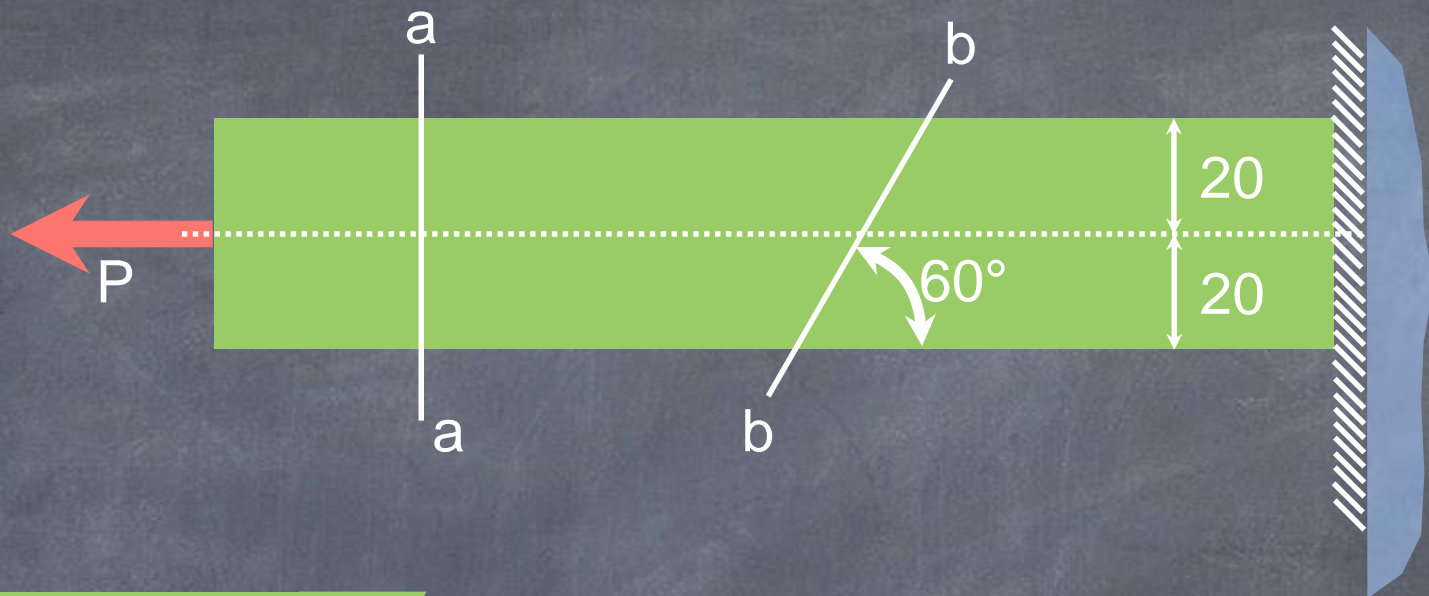


Na seção b-b

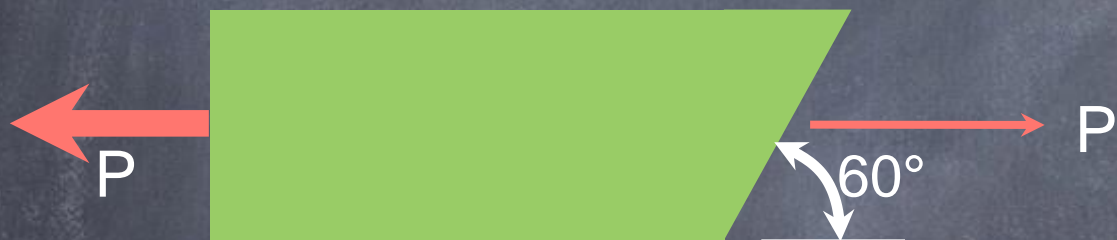




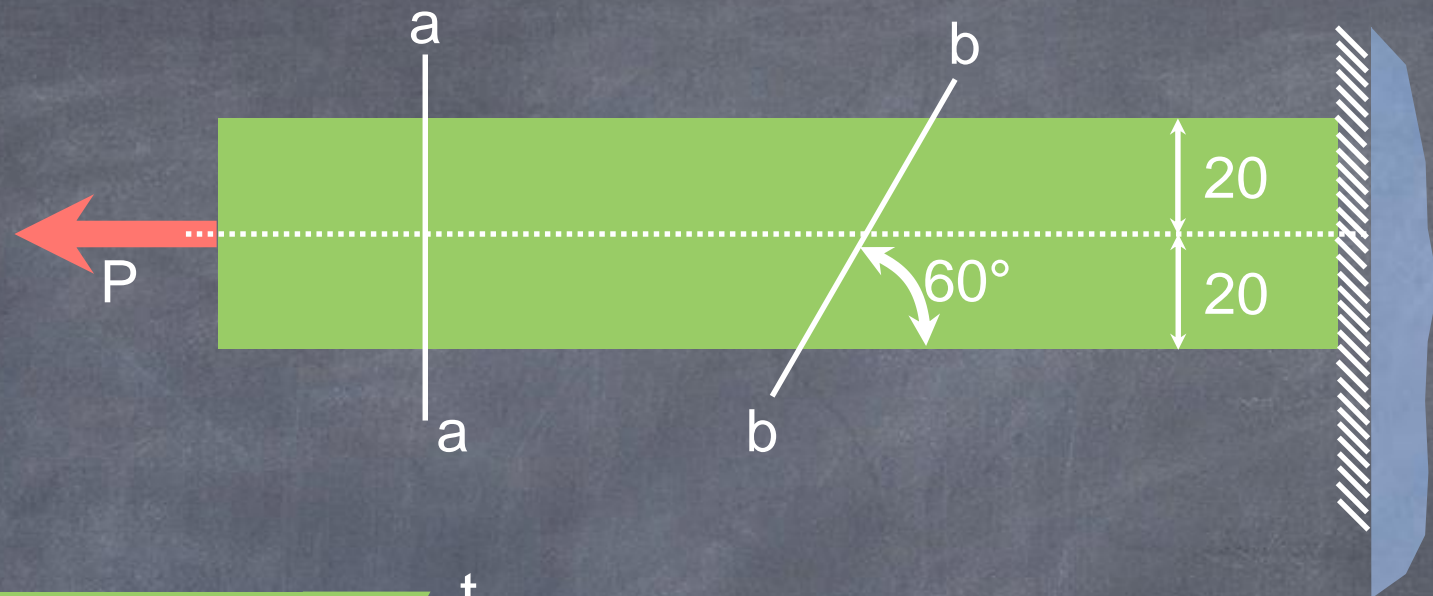
## Exemplos



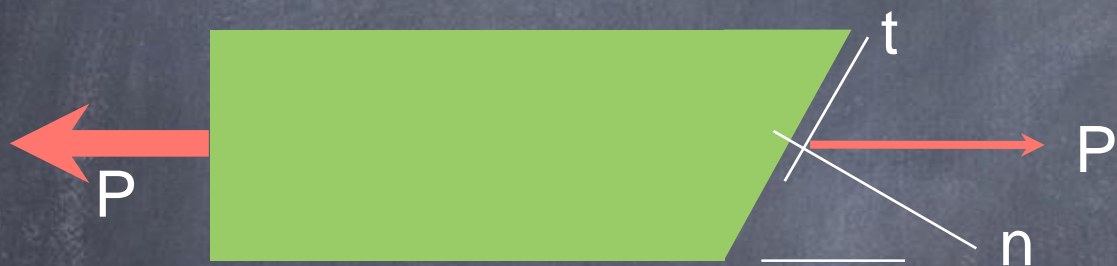
Na seção b-b



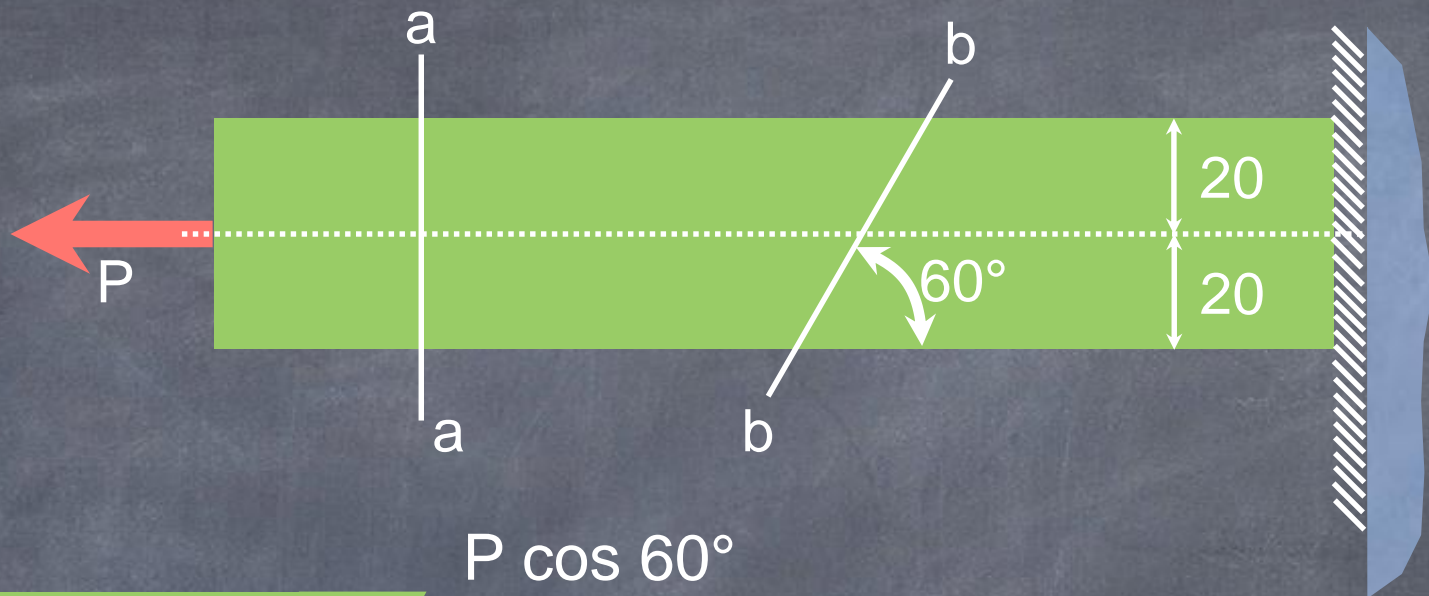
# Exemplos



Na seção b-b



## Exemplos

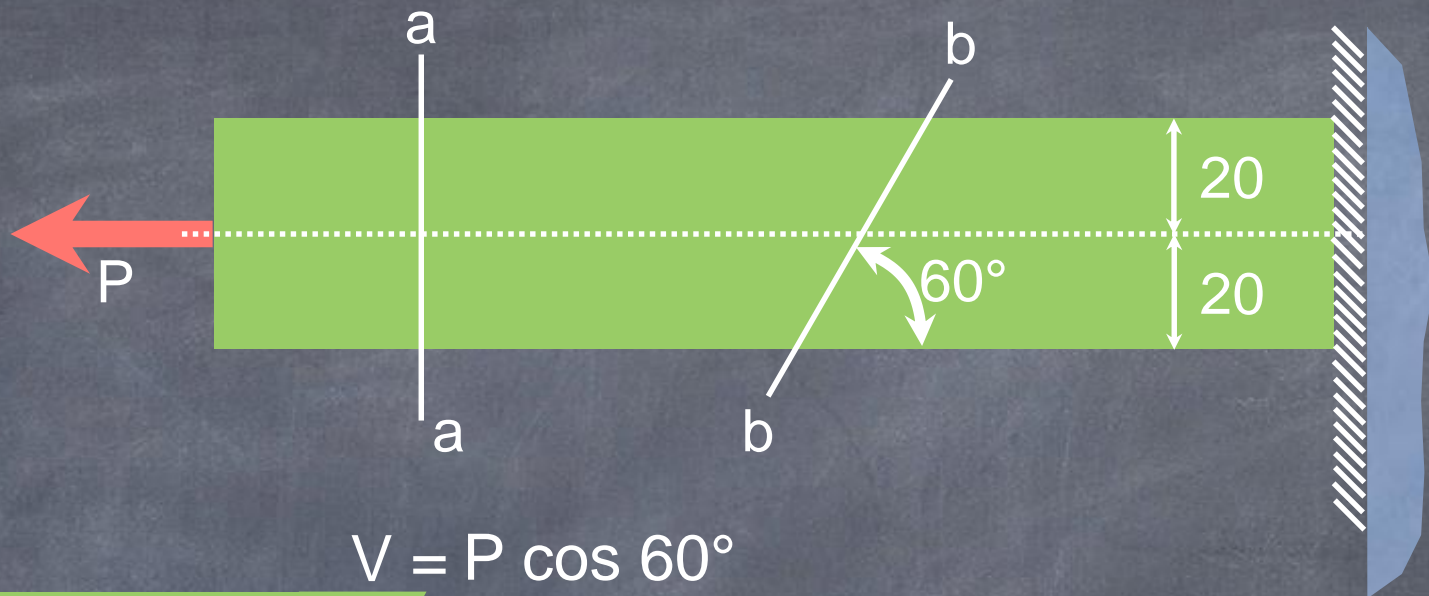


Na seção b-b





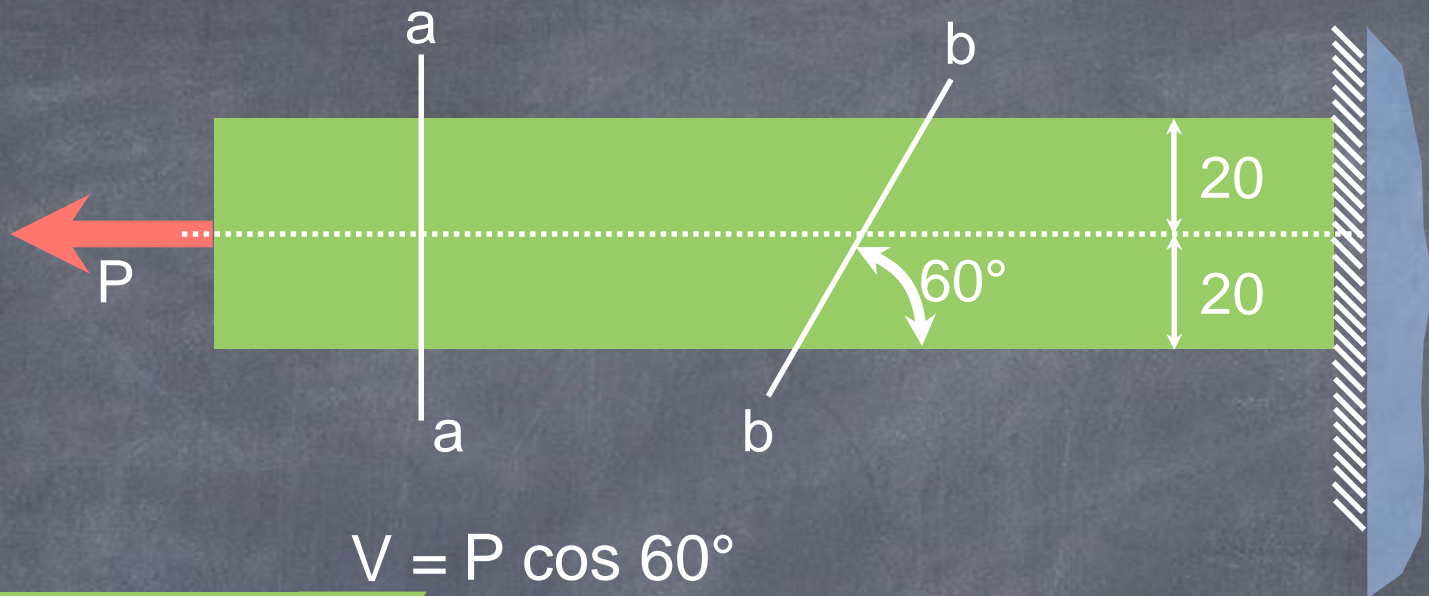
# Exemplos



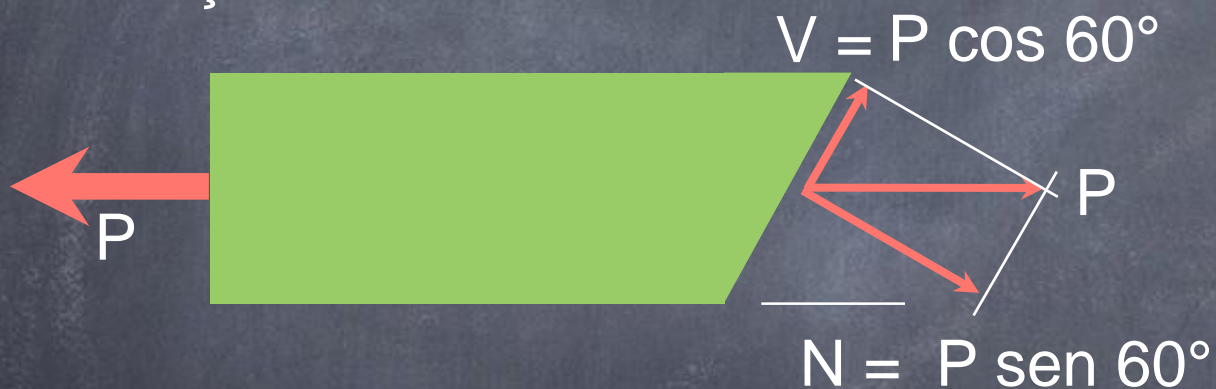
Na seção b-b



# Exemplos

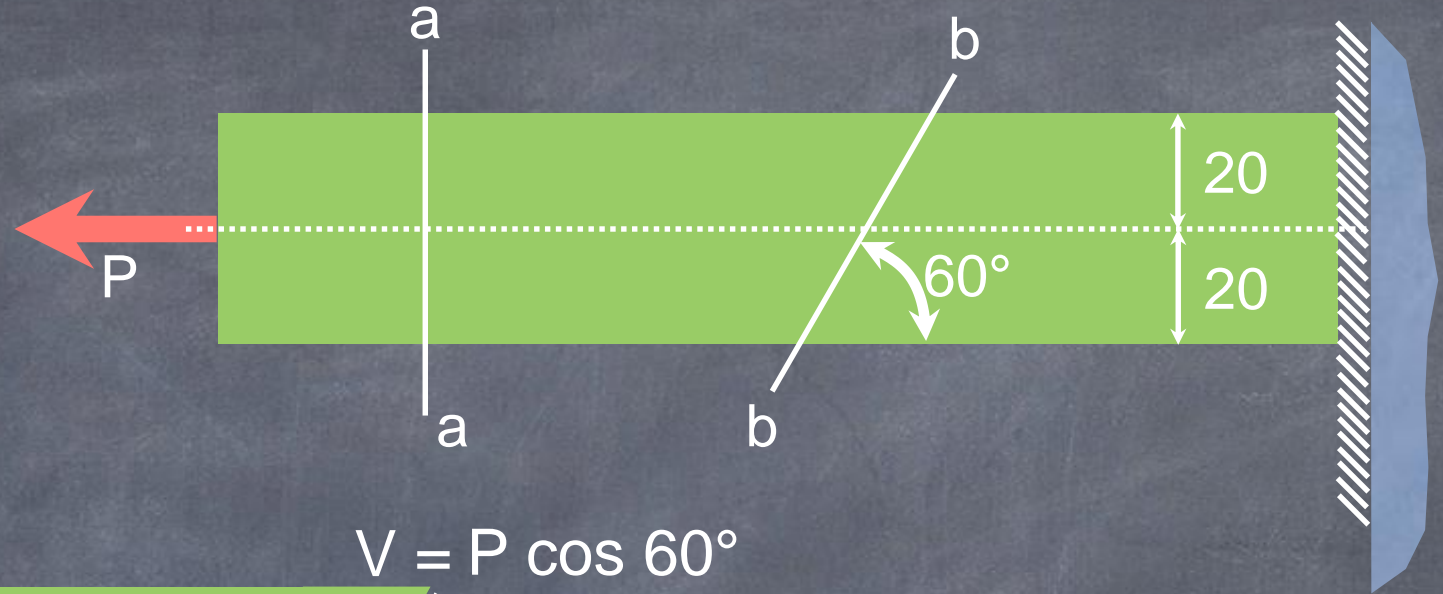


Na seção b-b



$$\Sigma F_n = 0$$

# Exemplos



Na seção b-b

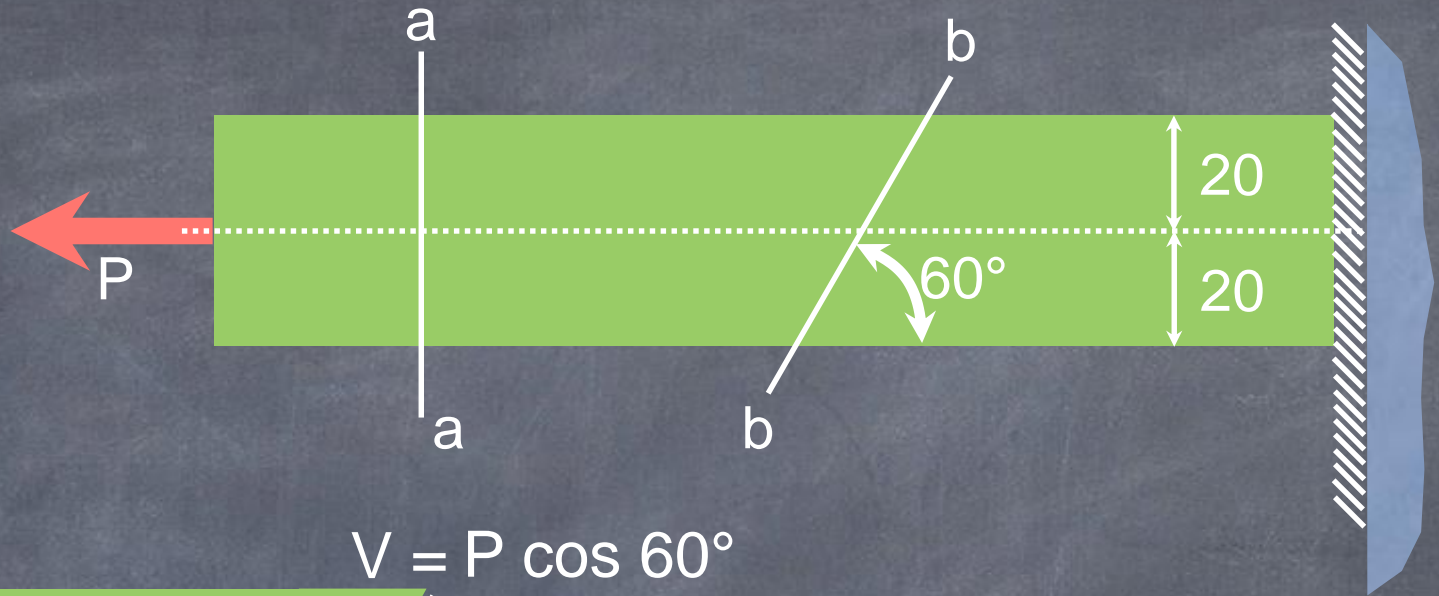


$$\Sigma F_n = 0$$

$$N - P \sin 60^\circ = 0$$



# Exemplos



Na seção b-b



$$V = P \cos 60^\circ$$

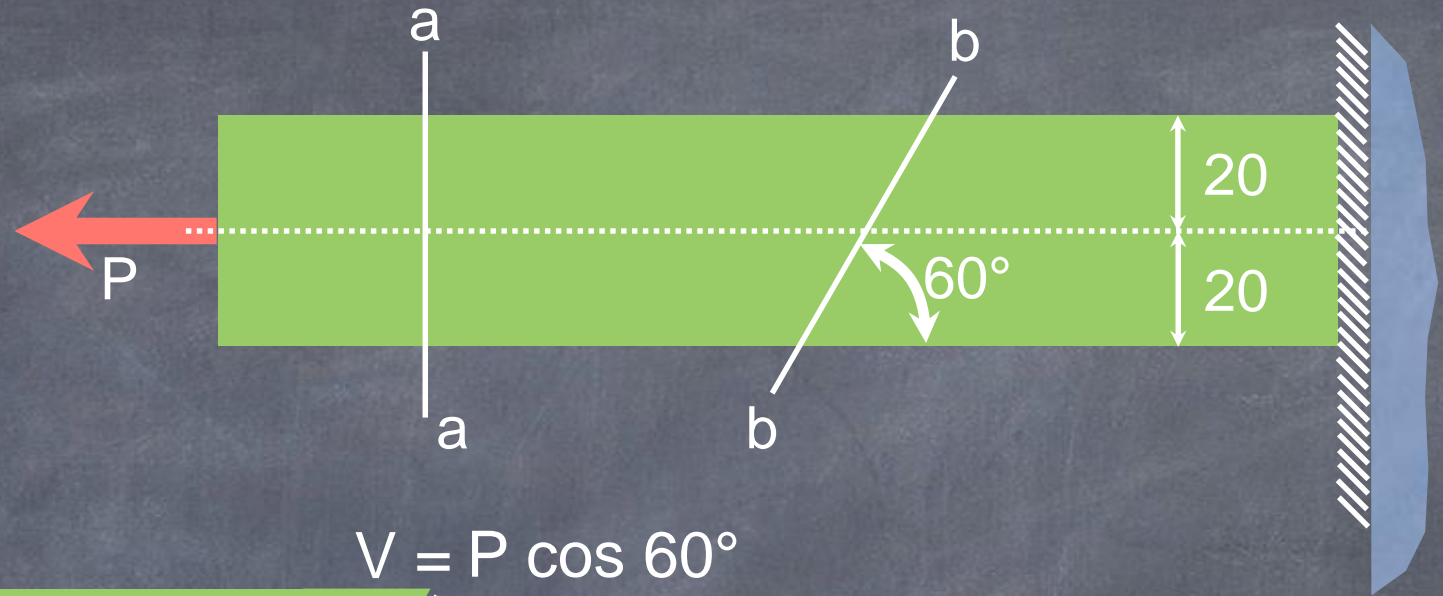
$$N = P \sin 60^\circ$$

$$\Sigma F_n = 0$$

$$N - P \sin 60^\circ = 0$$

$$N = 692,8 \text{ N}$$

# Exemplos



Na seção b-b



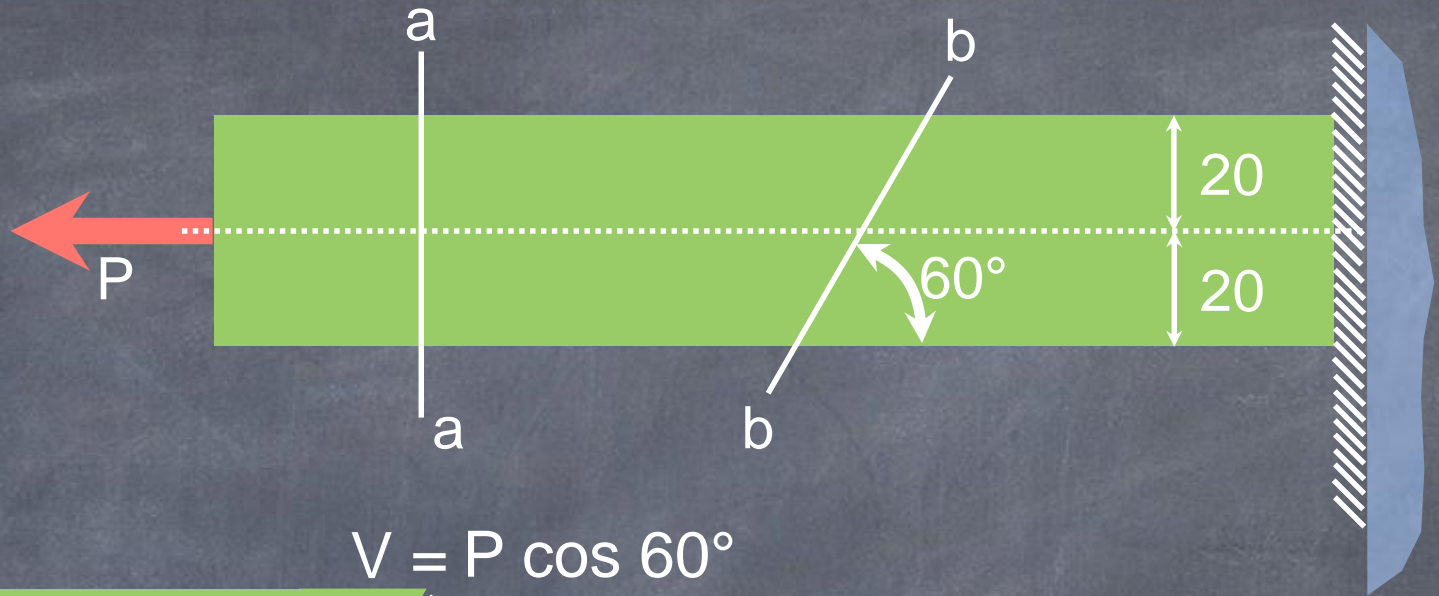
$$\Sigma F_n = 0$$

$$\Sigma F_t = 0$$

$$N - P \sin 60^\circ = 0$$

$$N = 692,8 \text{ N}$$

# Exemplos



Na seção b-b



$$V = P \cos 60^\circ$$

$$N = P \sin 60^\circ$$

$$\Sigma F_n = 0$$

$$N - P \sin 60^\circ = 0$$

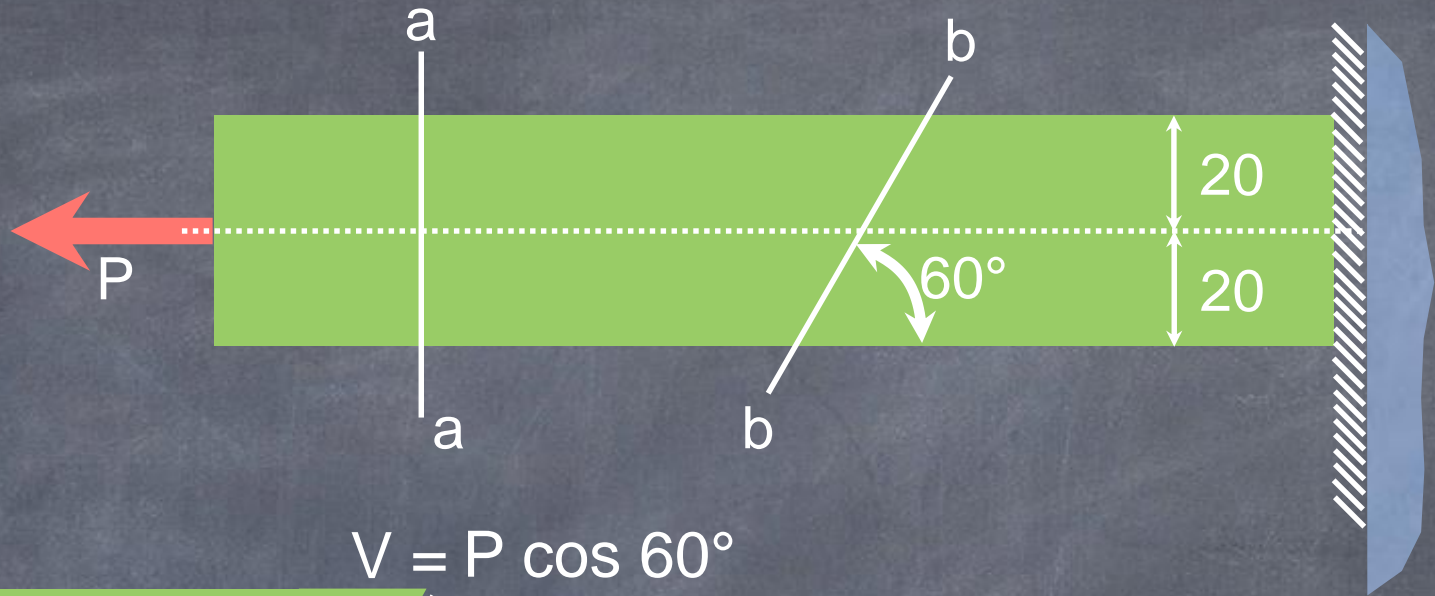
$$N = 692,8 \text{ N}$$

$$\Sigma F_t = 0$$

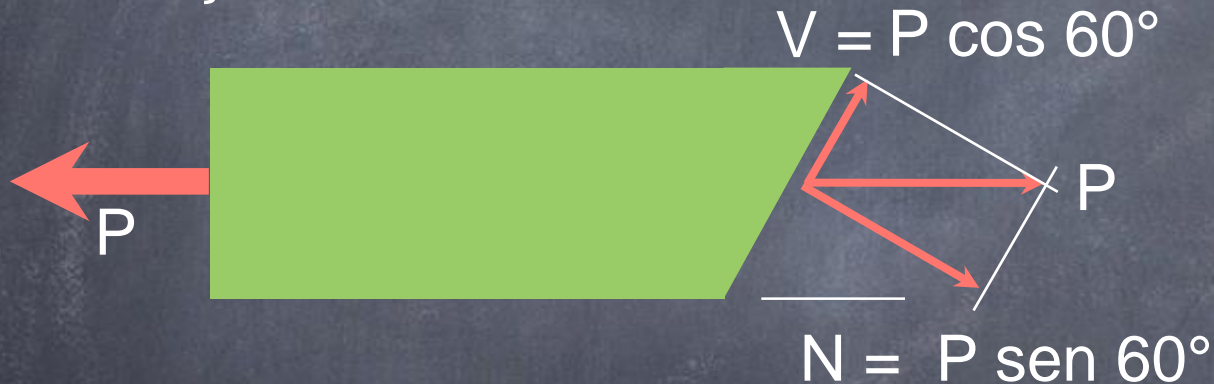
$$V - P \cos 60^\circ = 0$$



# Exemplos



Na seção b-b



$$\Sigma F_n = 0$$

$$N - P \sin 60^\circ = 0$$

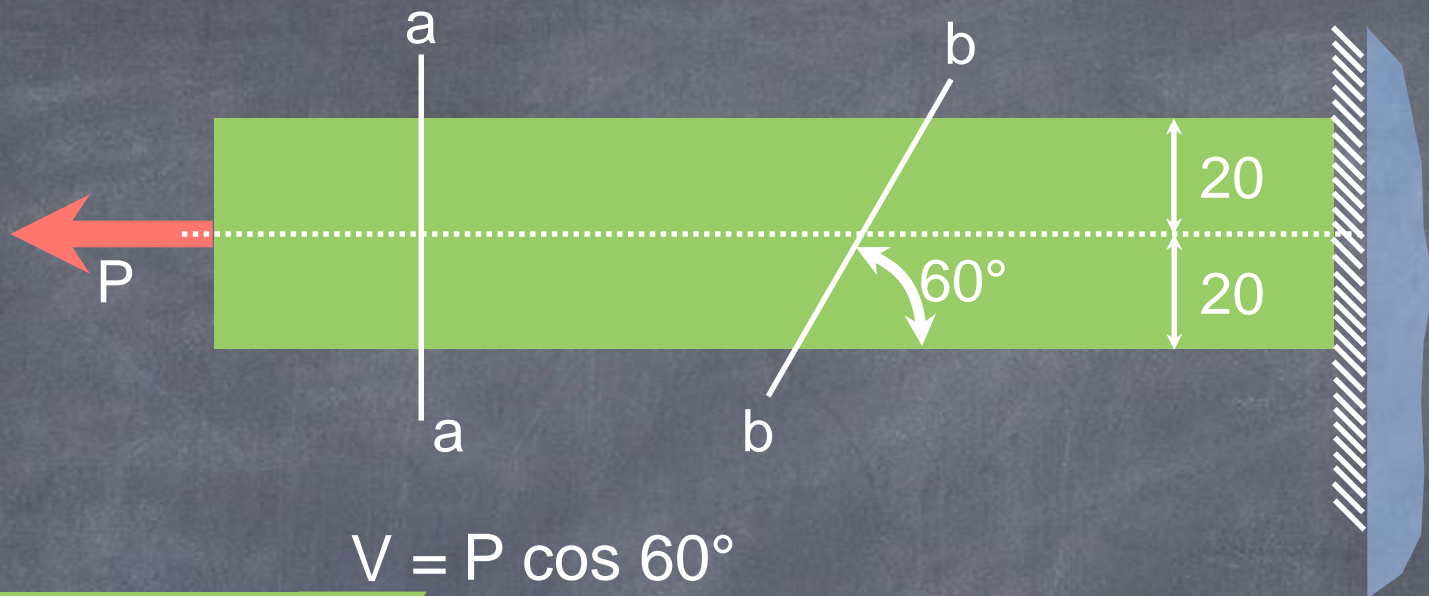
$$N = 692,8 \text{ N}$$

$$\Sigma F_t = 0$$

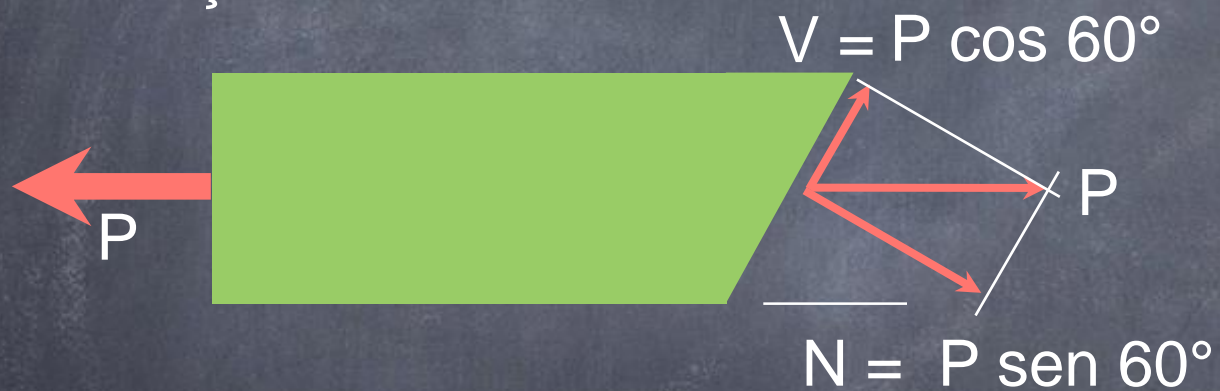
$$V - P \cos 60^\circ = 0$$

$$V = 400,0 \text{ N}$$

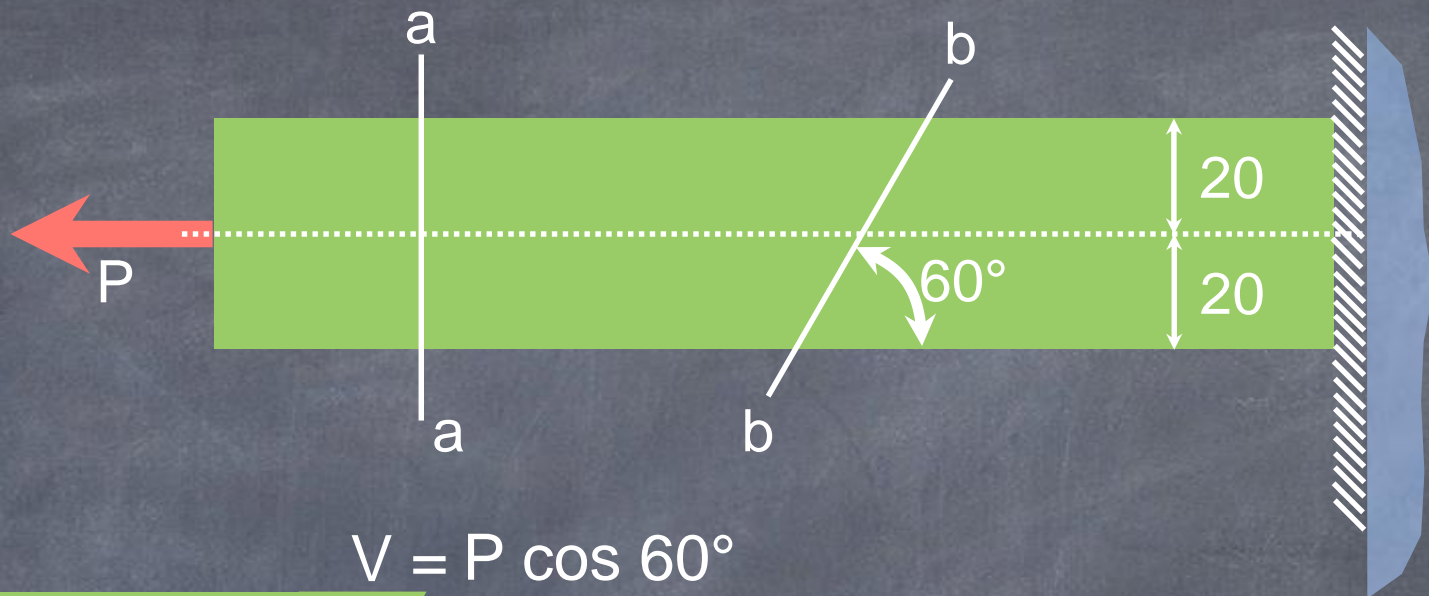
# Exemplos



Na seção b-b



# Exemplos



Na seção b-b



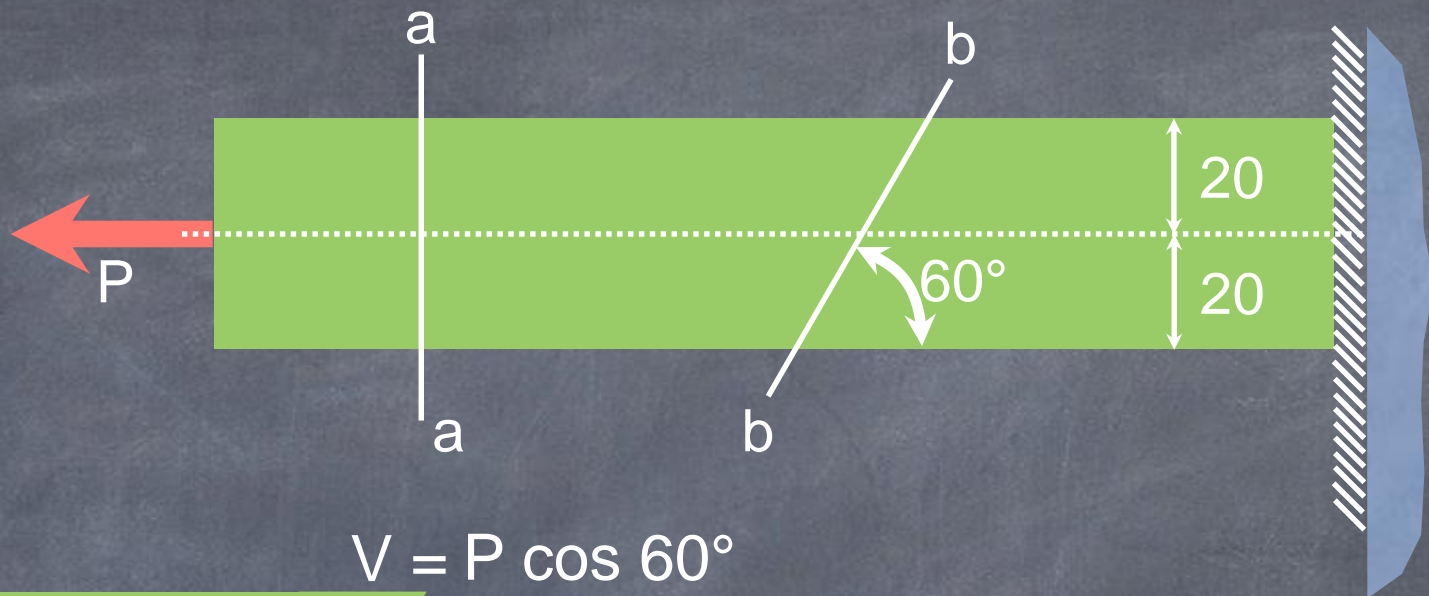
$$V = P \cos 60^\circ$$

$$N = P \sin 60^\circ$$

tensão normal média



# Exemplos



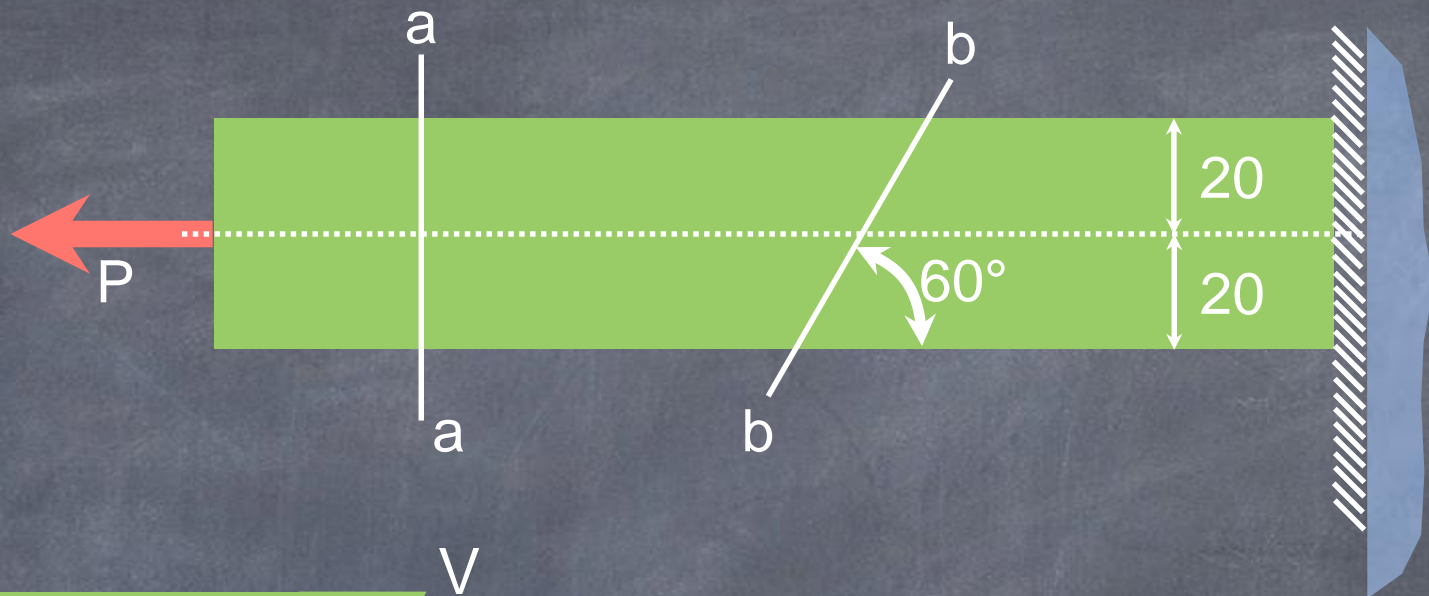
Na seção b-b



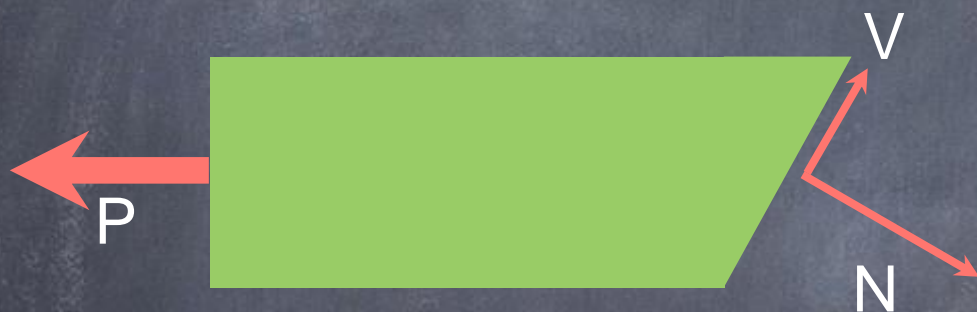
tensão normal média

$$\sigma = N/A_n$$

# Exemplos



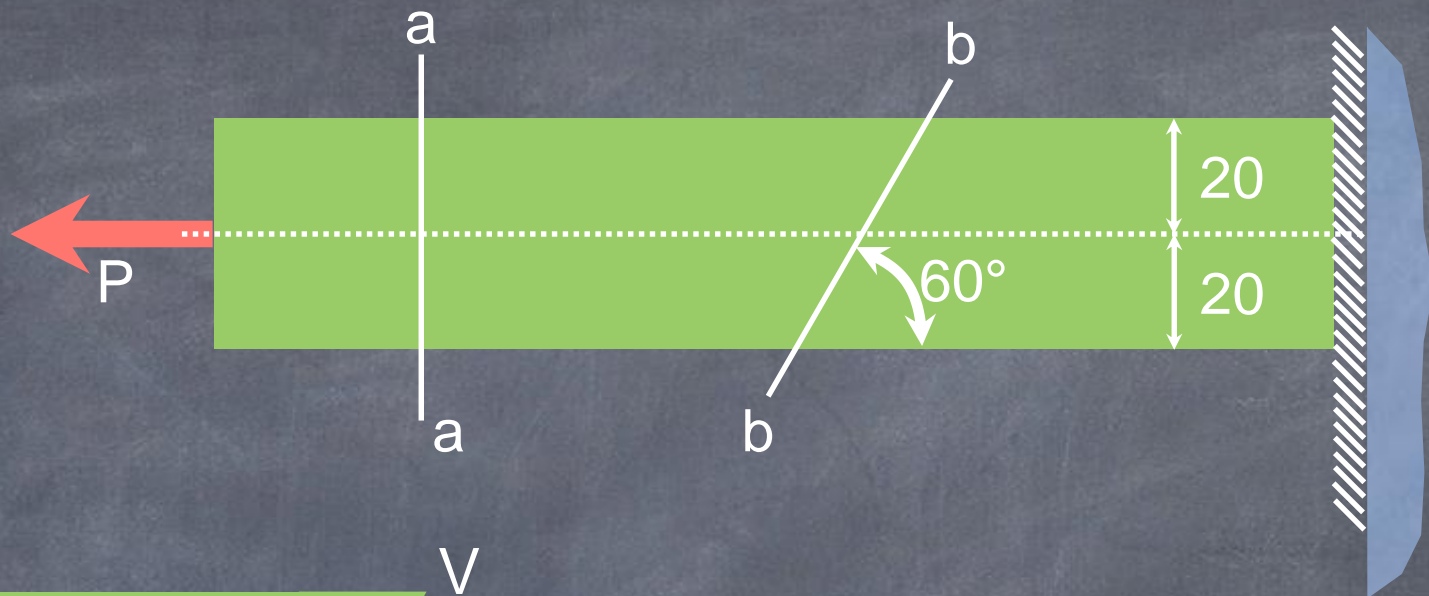
Na seção b-b



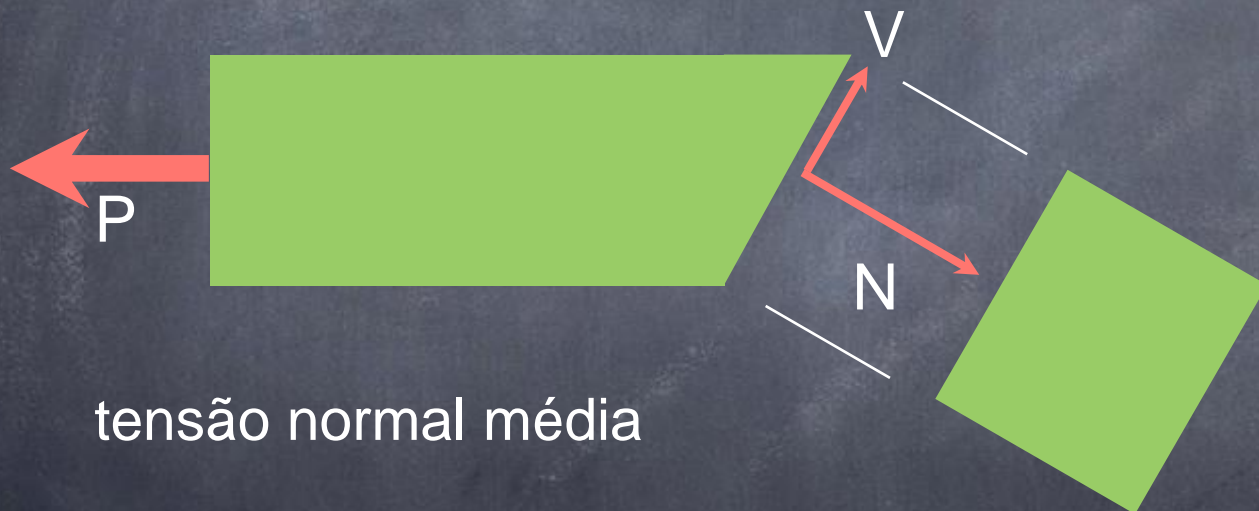
tensão normal média

$$\sigma = N/A_n$$

# Exemplos



Na seção b-b

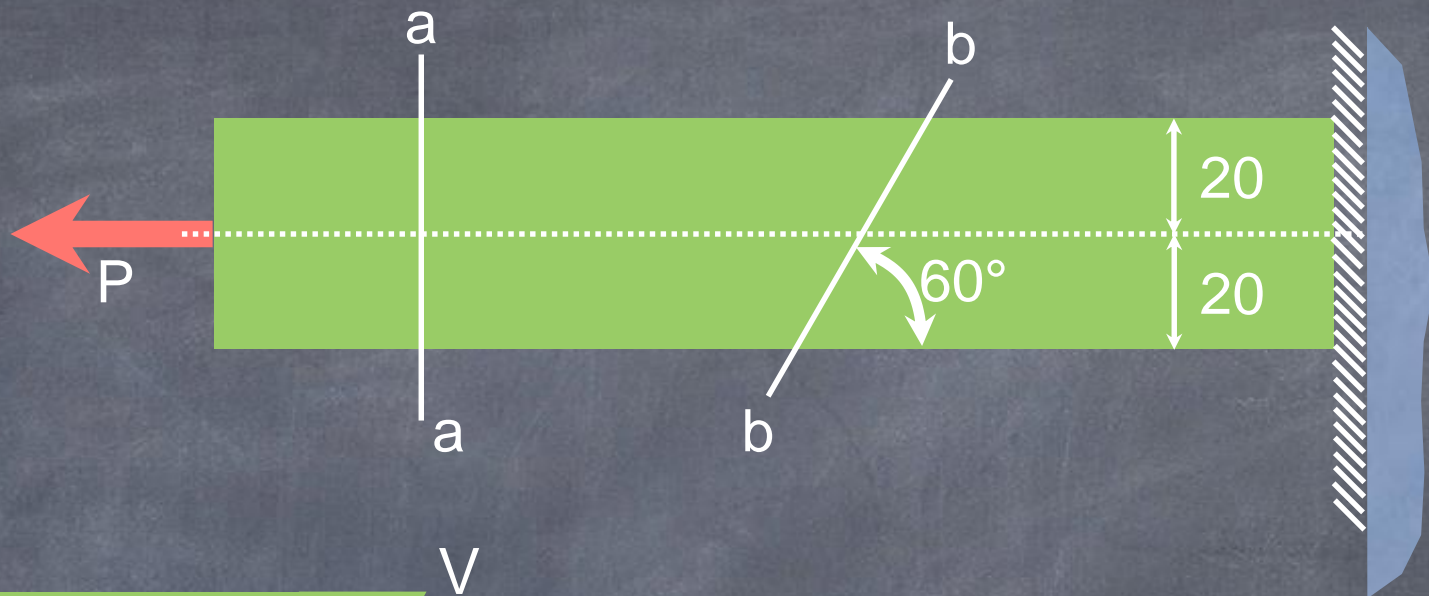


tensão normal média

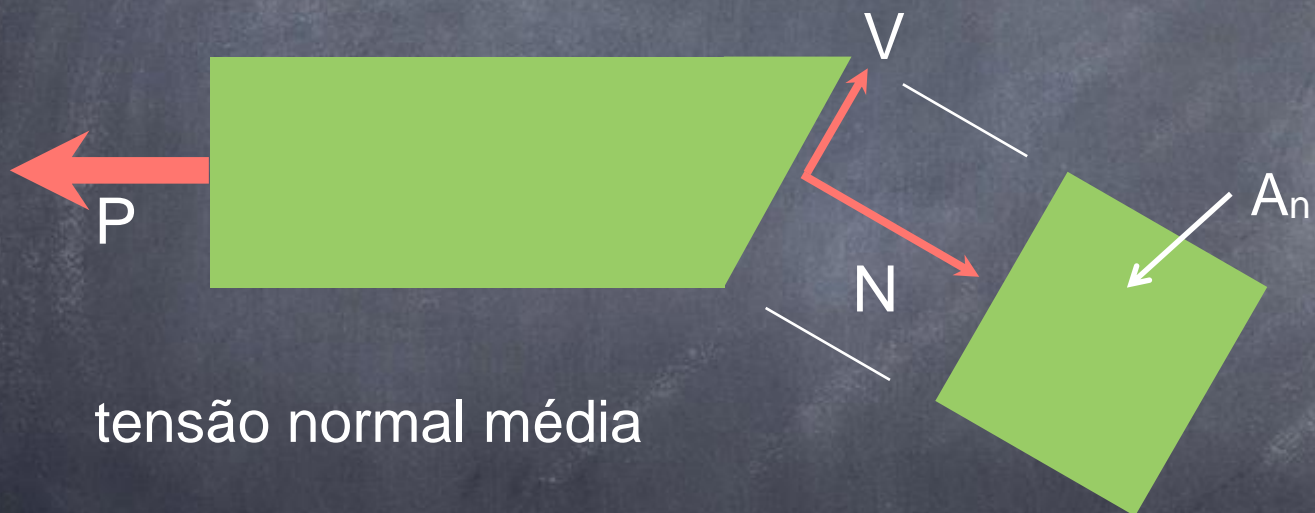
$$\sigma = N/A_n$$



# Exemplos



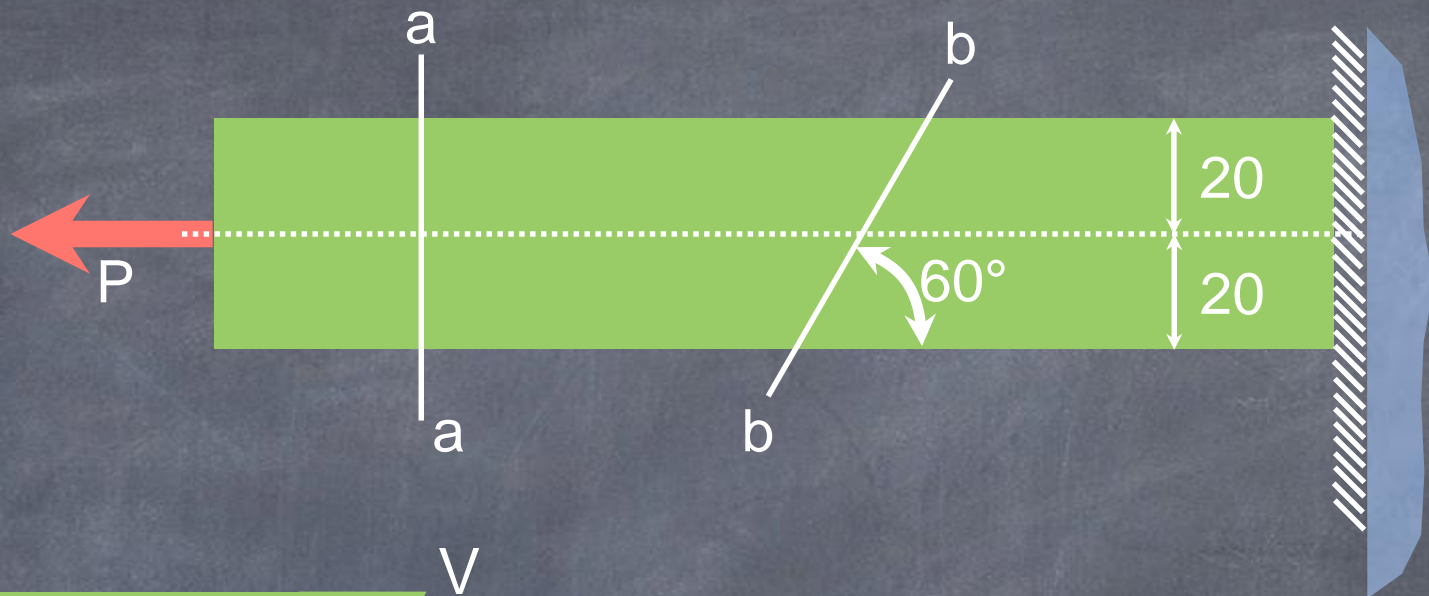
Na seção b-b



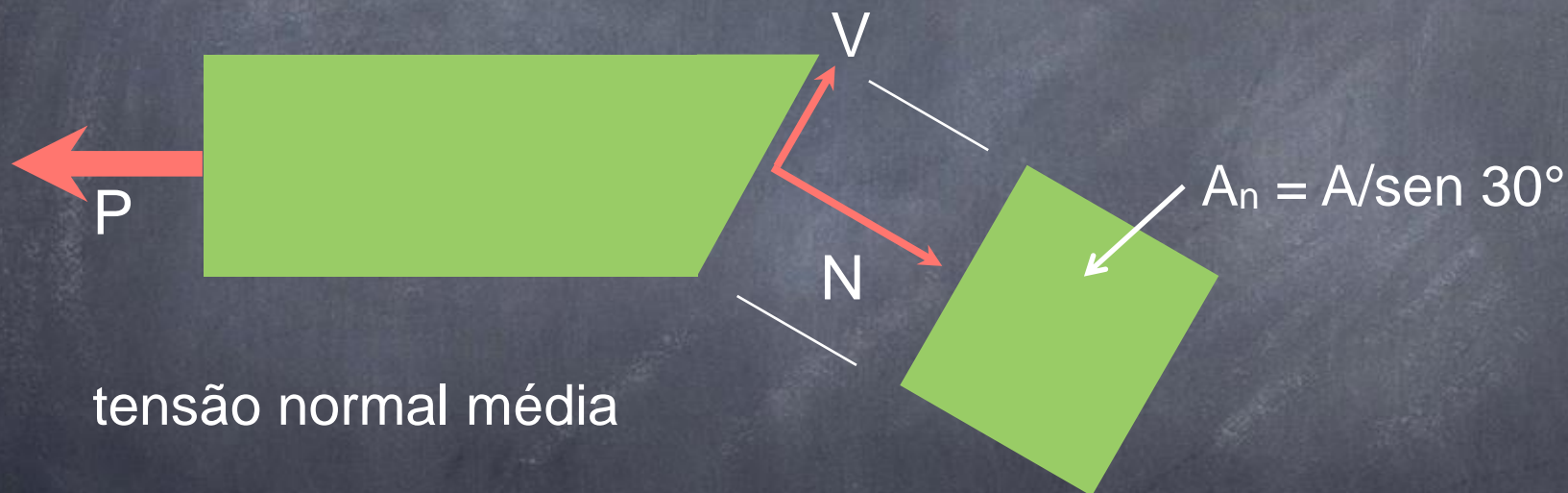
tensão normal média

$$\sigma = N/A_n$$

# Exemplos



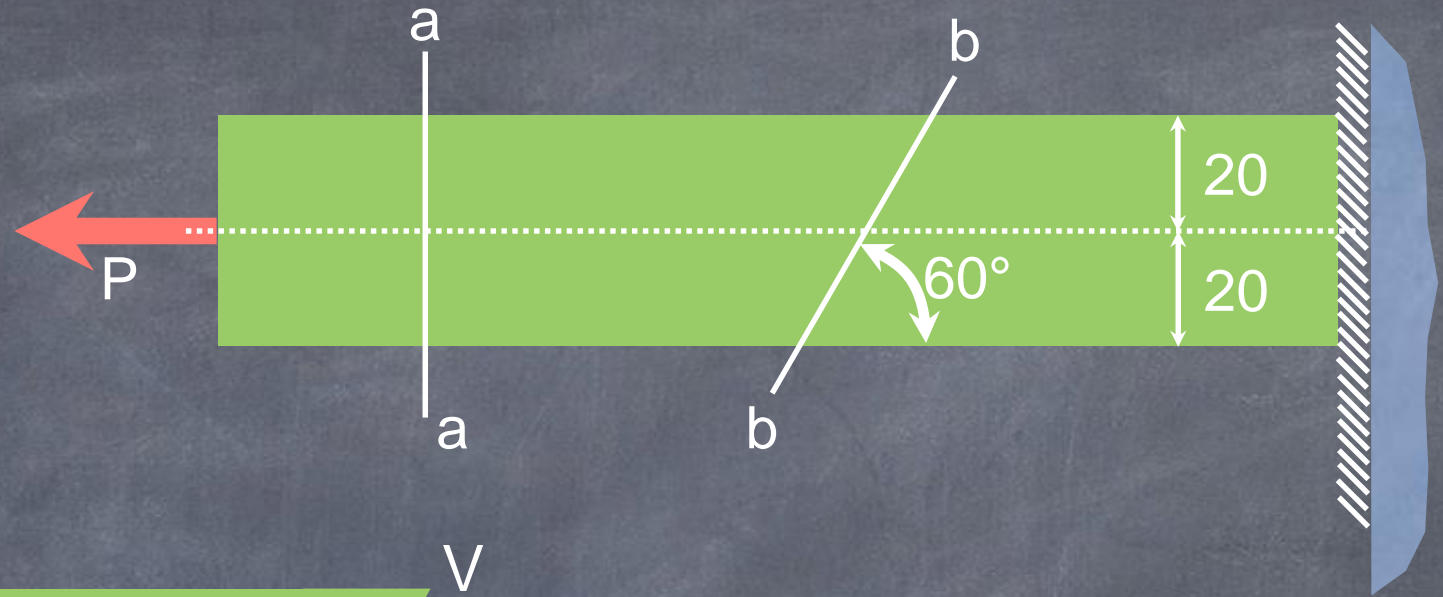
Na seção b-b



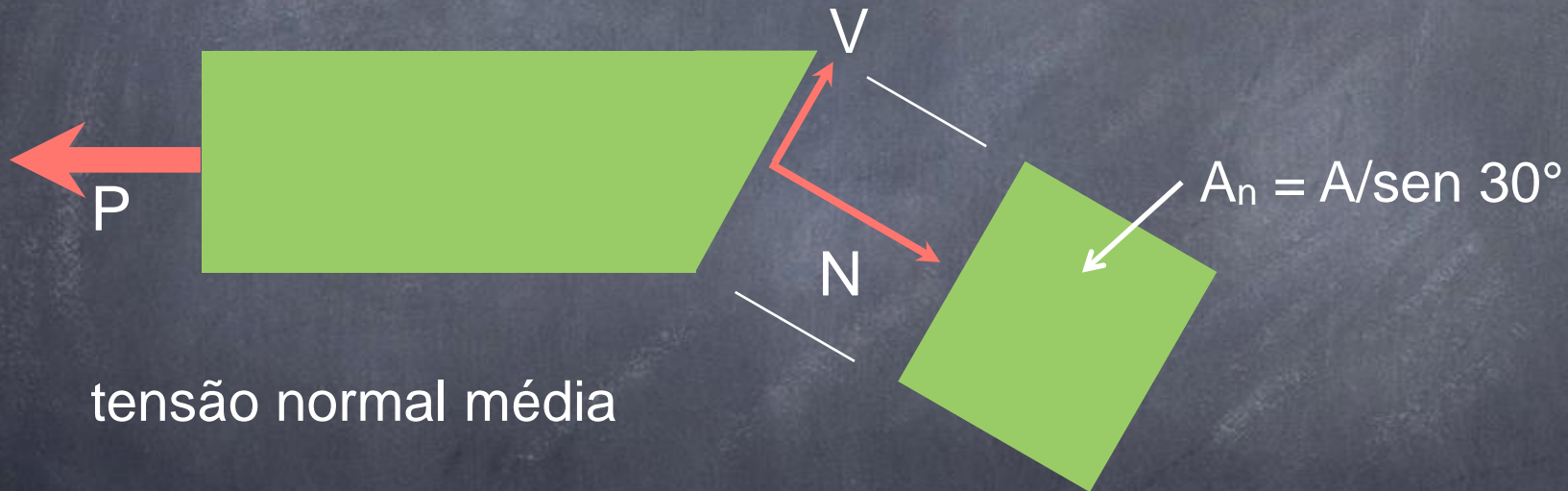
tensão normal média

$$\sigma = N/A_n$$

# Exemplos



Na seção b-b

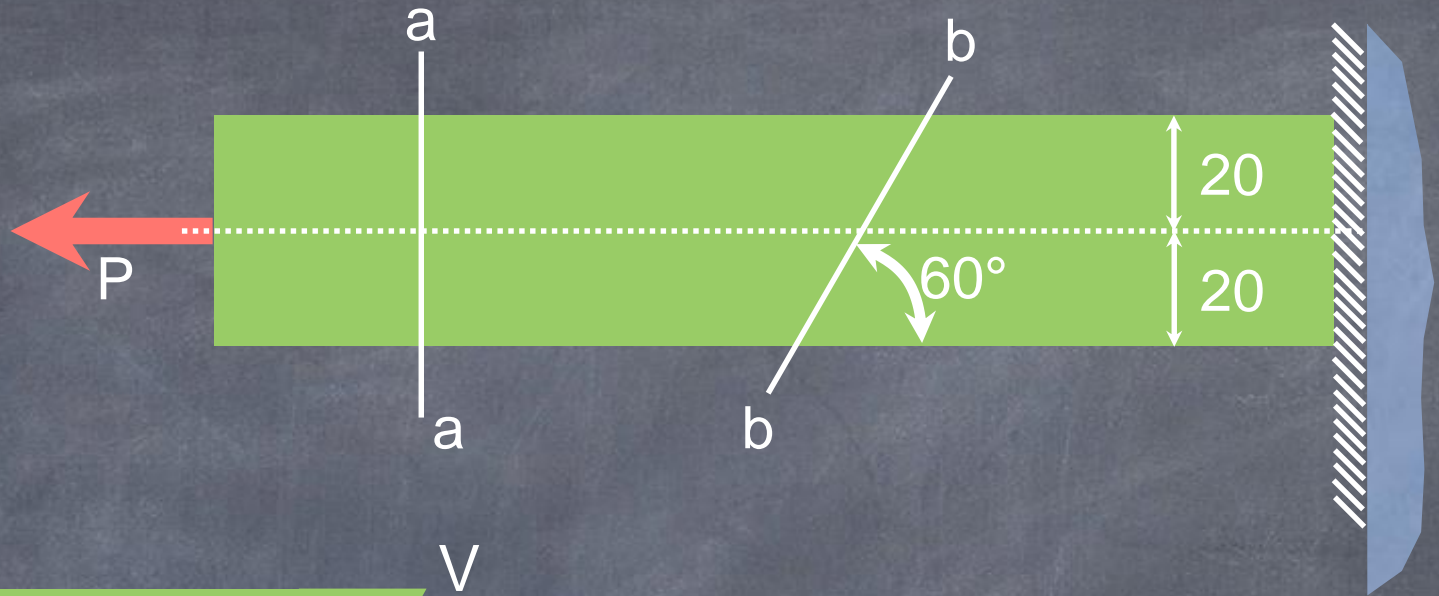


tensão normal média

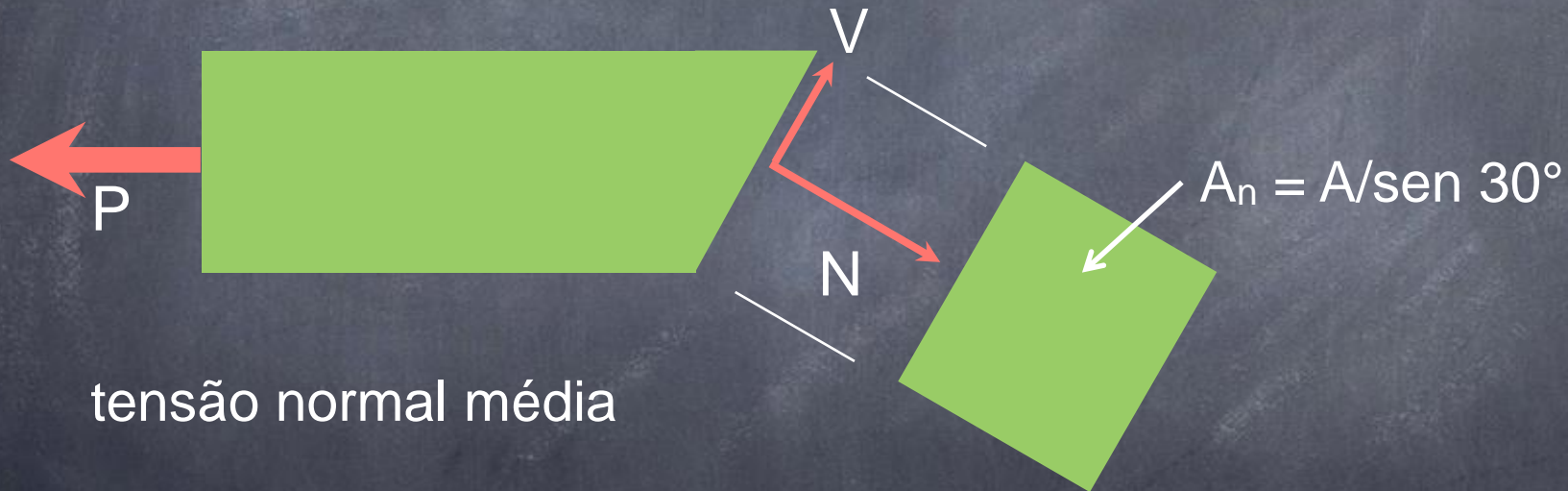
$$\sigma = N/A_n = N \cdot \text{sen } 30^\circ / A$$



## Exemplos



Na seção b-b

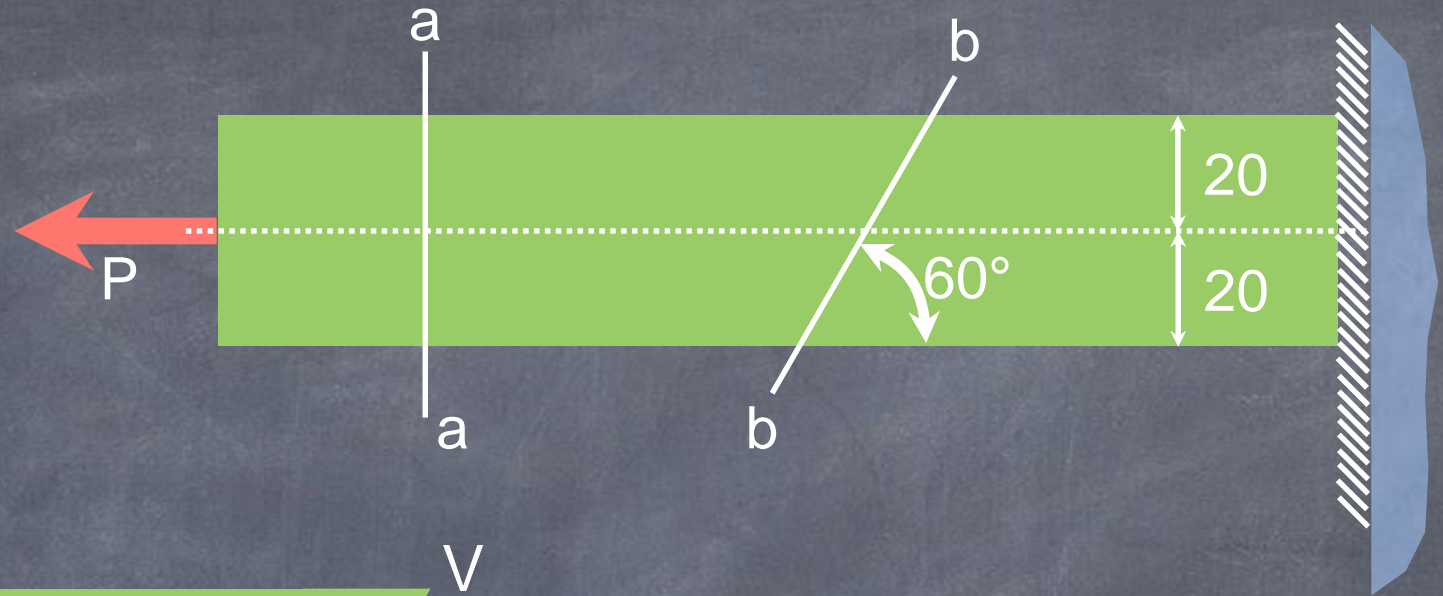


tensão normal média

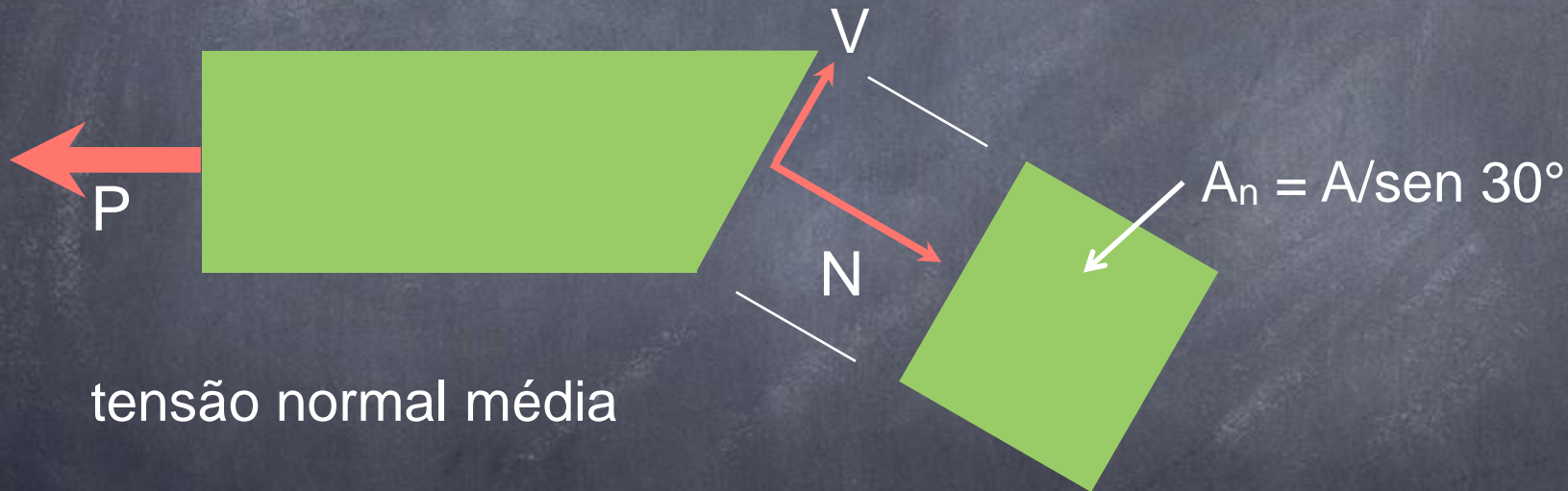
$$\sigma = N/A_n = N \cdot \sin 30^\circ / A$$

$$\sigma = 692,8 \cdot \sin 30^\circ / (0,040)^2$$

## Exemplos



Na seção b-b

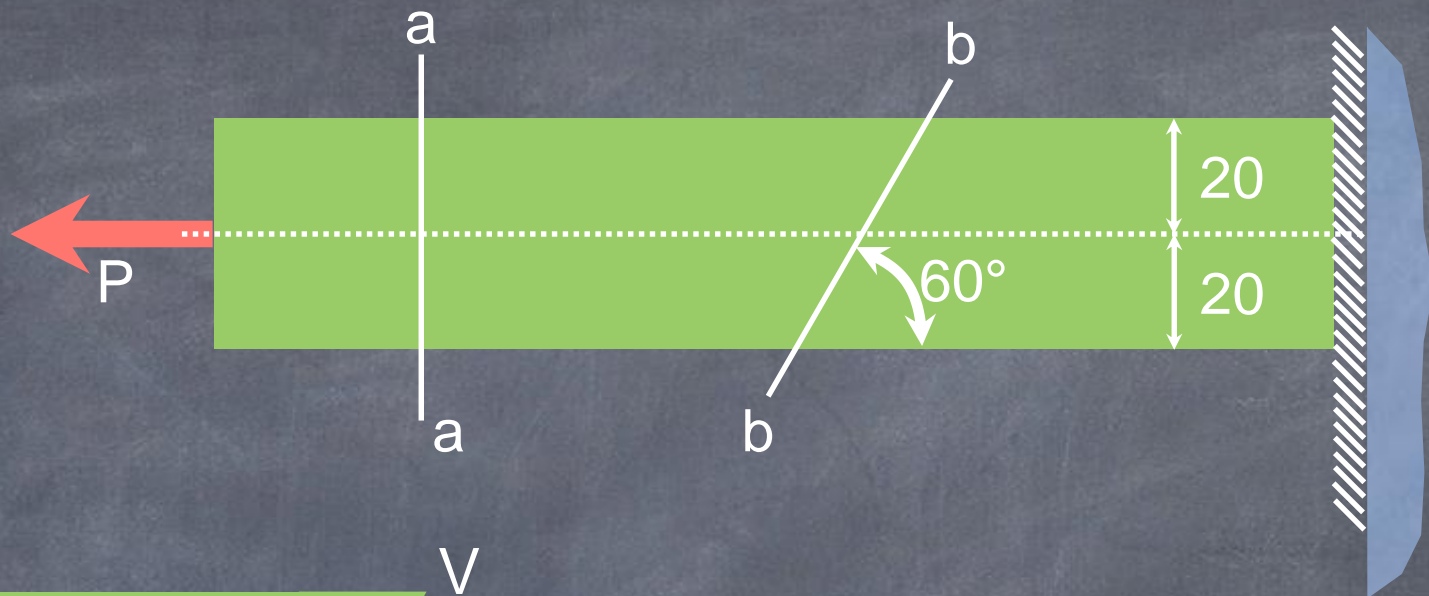


tensão normal média

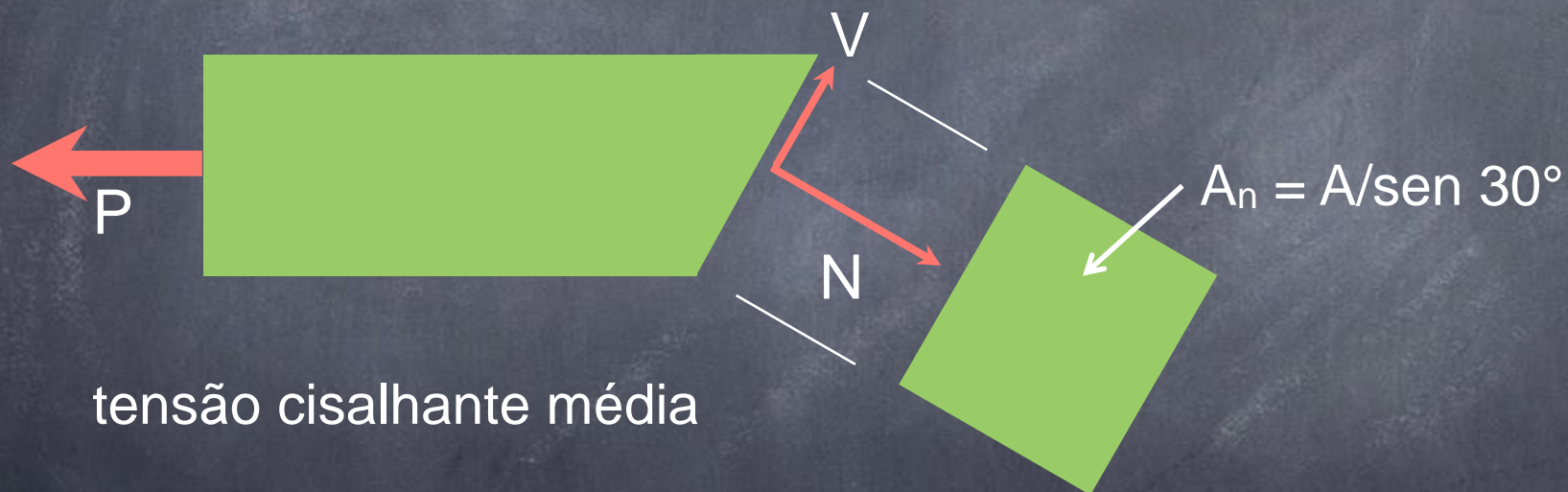
$$\sigma = N/A_n = N \cdot \sin 30^\circ / A$$

$$\sigma = 692,8 \cdot \sin 30^\circ / (0,040)^2 \Rightarrow \sigma = 375 \text{ kPa}$$

# Exemplos

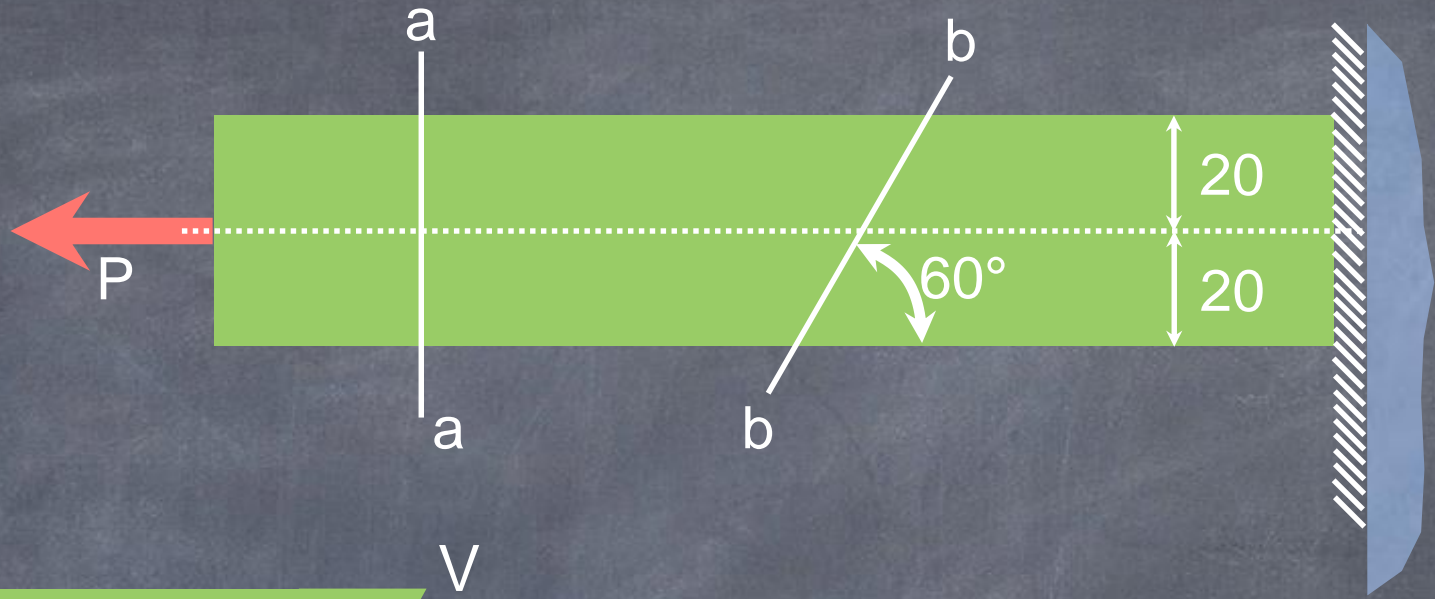


Na seção b-b

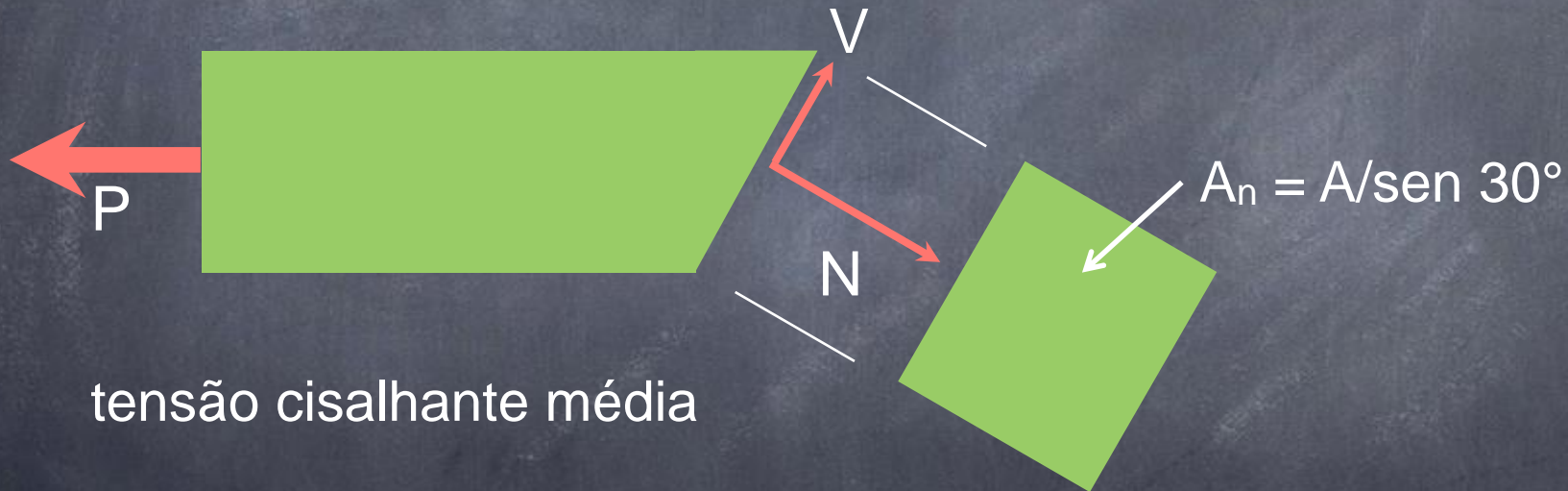




# Exemplos



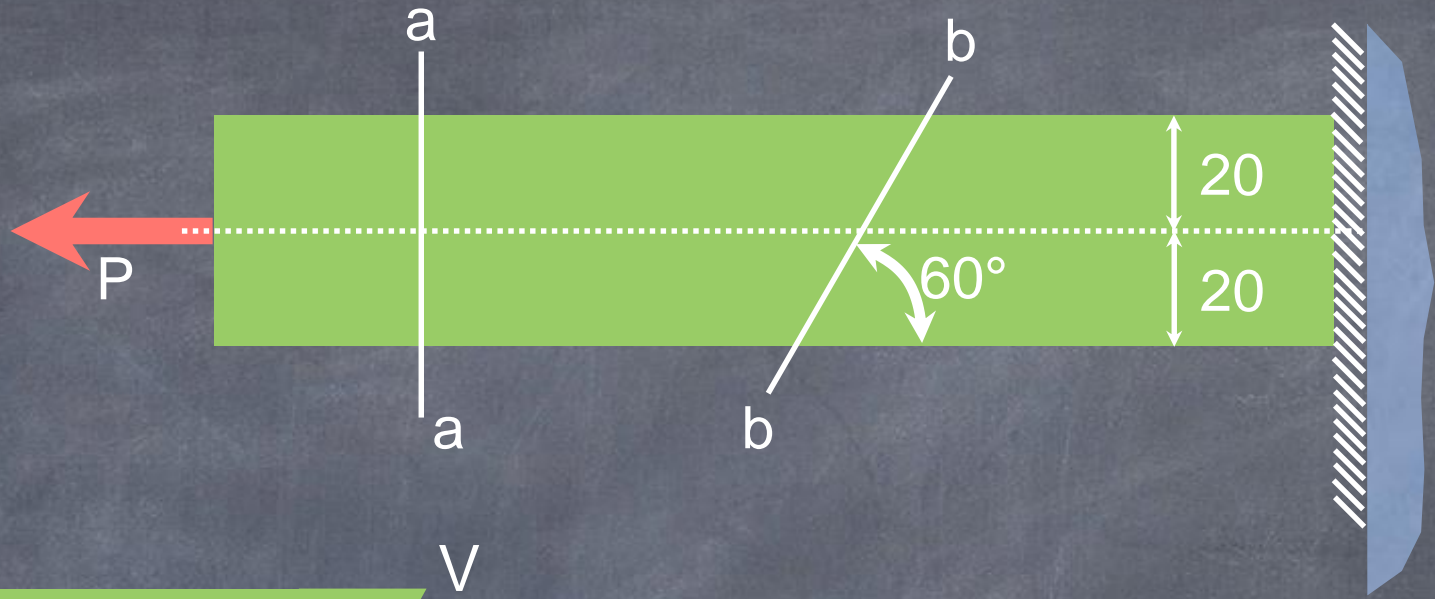
Na seção b-b



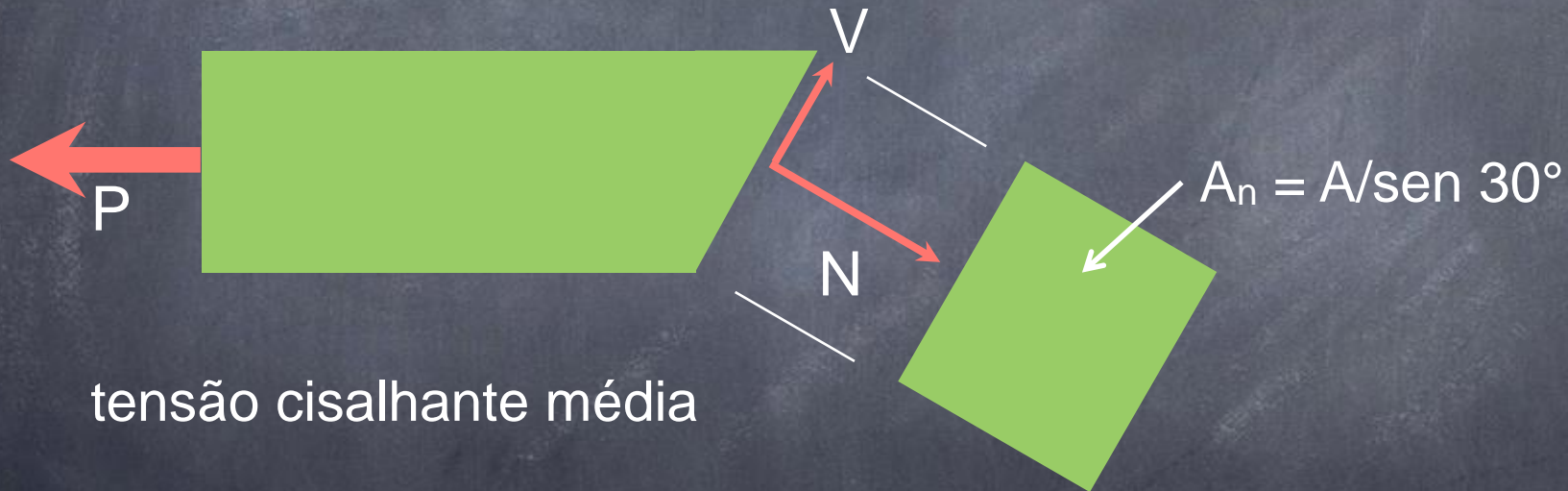
tensão cisalhante média

$$\tau = V/A_n$$

# Exemplos



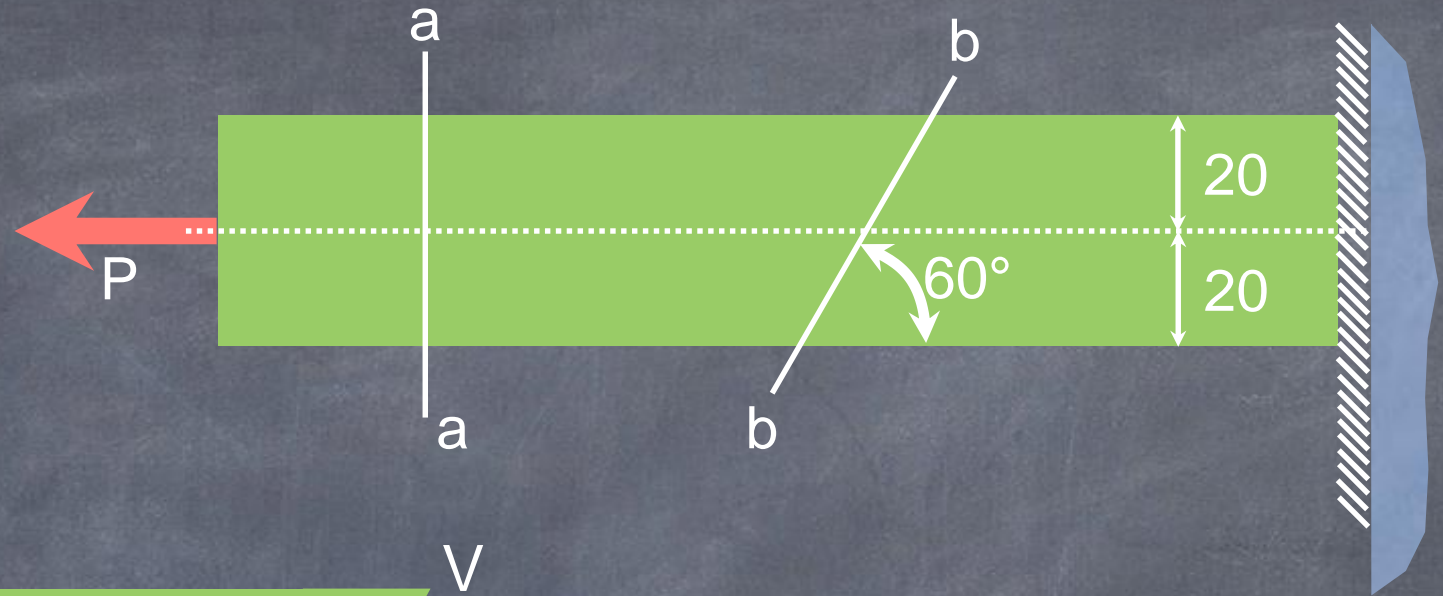
Na seção b-b



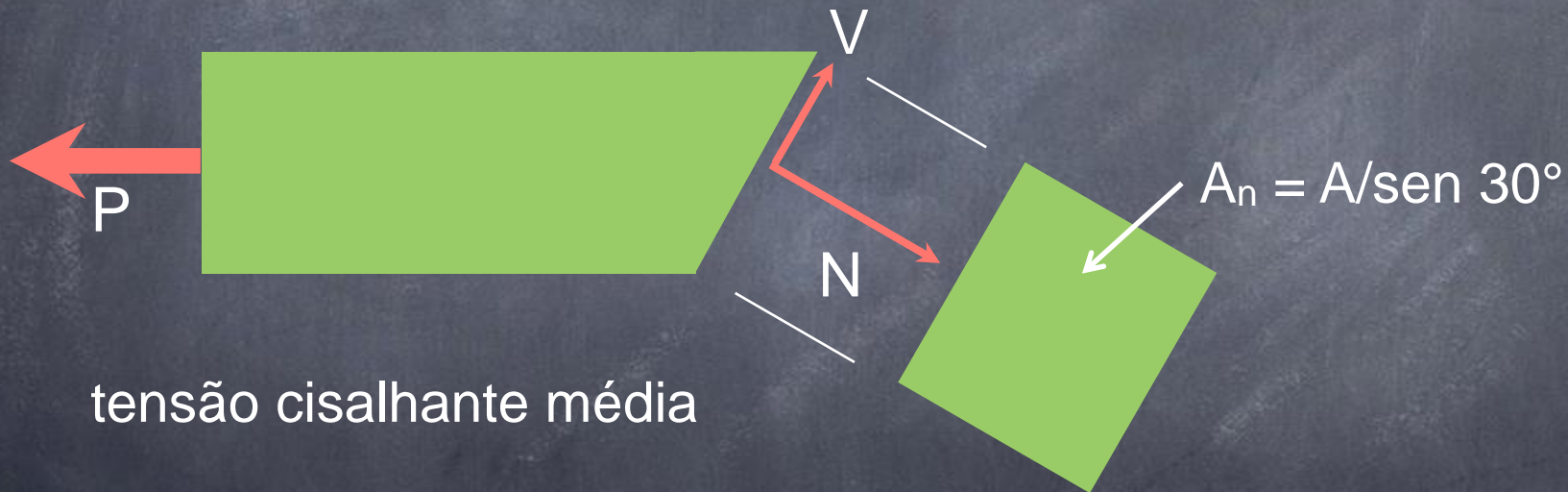
tensão cisalhante média

$$\tau = V/A_n = V \cdot \text{sen } 30^\circ / A$$

## Exemplos



Na seção b-b



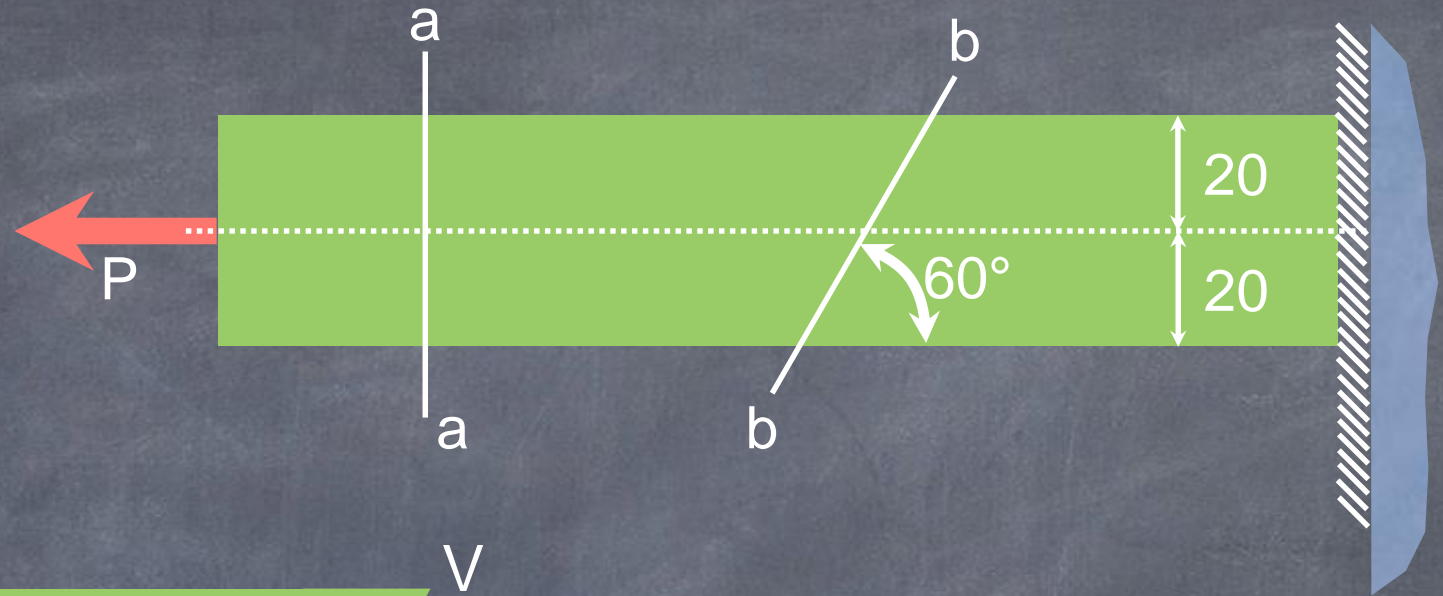
tensão cisalhante média

$$\tau = V/A_n = V \cdot \sin 30^\circ / A$$

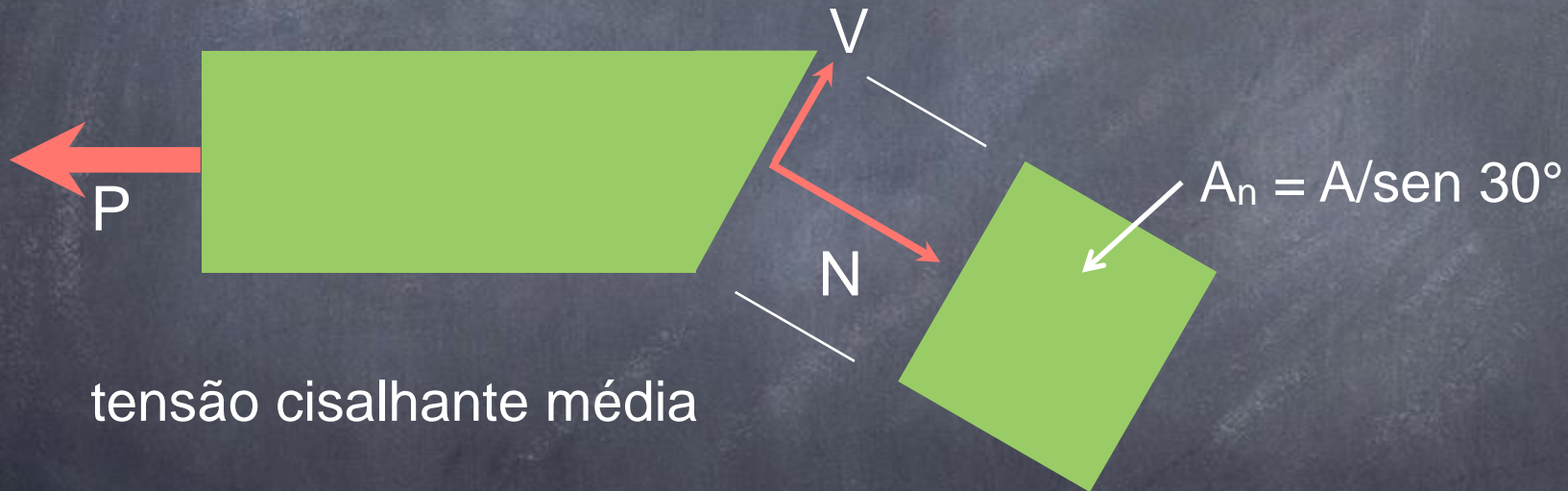
$$\tau = 400 \cdot \sin 30^\circ / (0,040)^2$$



# Exemplos



Na seção b-b



tensão cisalhante média

$$\tau = V/A_n = V \cdot \sin 30^\circ / A$$

$$\tau = 400 \cdot \sin 30^\circ / (0,040)^2 \Rightarrow \tau = 217 \text{ kPa}$$

# Tensão admissível

## Tensão admissível

Segurança no dimensionamento de peças e componentes exige uma garantia mínima de que não ocorrerá falha ( $\sigma \leq \text{tensão limite}$ );



## Tensão admissível

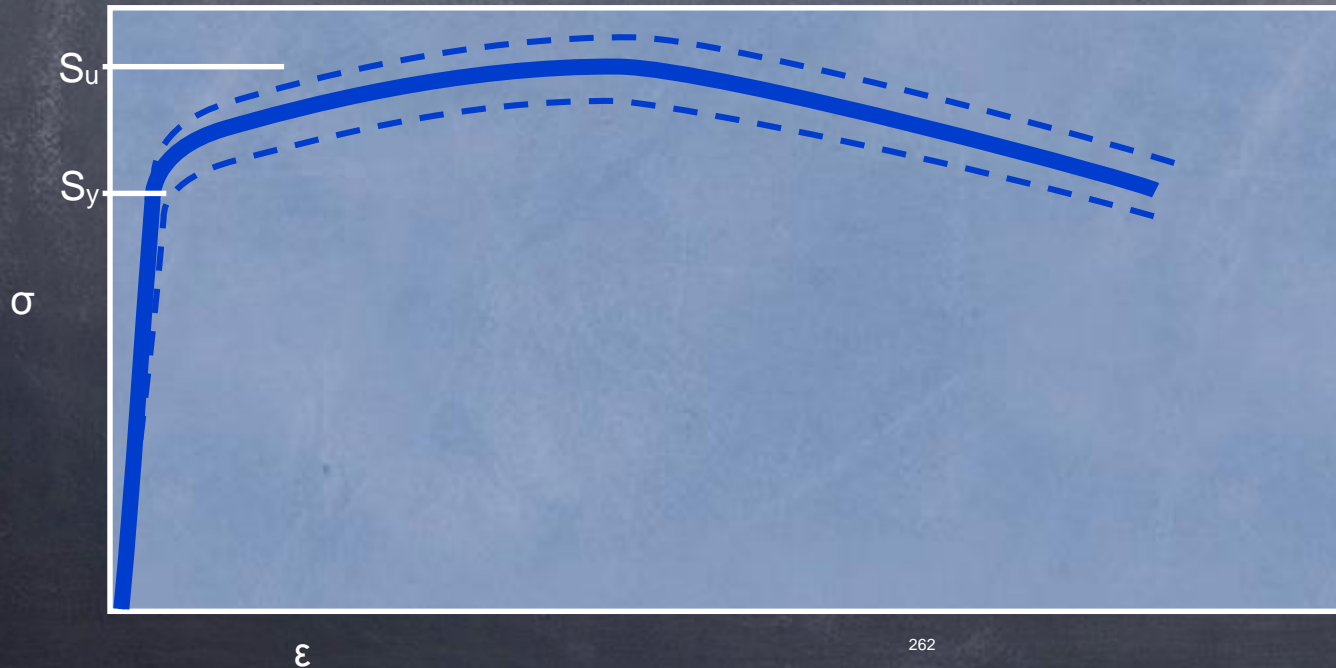
Segurança no dimensionamento de peças e componentes exige uma garantia mínima de que não ocorrerá falha ( $\sigma \leq$  tensão limite);

Impossível assegurar que os materiais atendam as mesmas propriedades;

## Tensão admissível

Segurança no dimensionamento de peças e componentes exige uma garantia mínima de que não ocorrerá falha ( $\sigma \leq$  tensão limite);

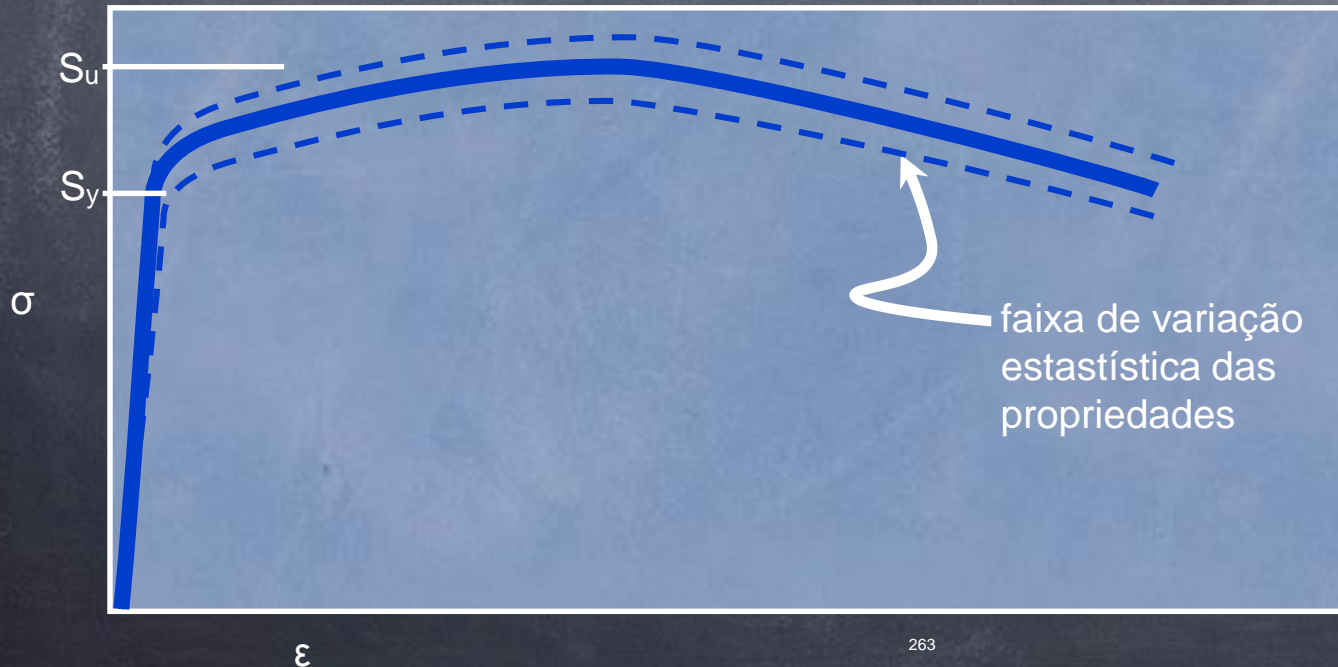
Impossível assegurar que os materiais atendem as mesmas propriedades;



## Tensão admissível

Segurança no dimensionamento de peças e componentes exige uma garantia mínima de que não ocorrerá falha ( $\sigma \leq$  tensão limite);

Impossível assegurar que os materiais atendem as mesmas propriedades;





## Tensão admissível

Segurança no dimensionamento de peças e componentes exige uma garantia mínima de que não ocorrerá falha ( $\sigma \leq$  tensão limite);

Impossível assegurar que os materiais atendem as mesmas propriedades;

Difícil prever a aplicação de cargas excessivas, ou uso inadequado do componente;

## Tensão admissível

Segurança no dimensionamento de peças e componentes exige uma garantia mínima de que não ocorrerá falha ( $\sigma \leq S_y, S_u$ );

Impossível assegurar que os materiais atendem as mesmas propriedades;

Difícil prever a aplicação de cargas excessivas, ou uso inadequado do componente;

Uso de um fator de segurança nas propriedades.



Tensão admissível

Fator de segurança



## Tensão admissível

Fator de segurança

tensão  
normal

- no escoamento:  $FS = \frac{S_y}{\sigma_{adm}}$

- na tração:  $FS = \frac{S_u}{\sigma_{adm}}$

## Tensão admissível

Fator de segurança

tensão  
normal

tensão  
cisalhante

- no escoamento:  $FS = \frac{S_y}{\sigma_{adm}}$

$$FS = \frac{S_{sy}}{\tau_{adm}}$$

- na tração:  $FS = \frac{S_u}{\sigma_{adm}}$

$$FS = \frac{S_{su}}{\tau_{adm}}$$



## Tensão admissível

### Fator de segurança

tensão  
normal

tensão  
cisalhante

- no escoamento:  $FS = \frac{S_y}{\sigma_{adm}}$

$FS = \frac{S_{sy}}{\tau_{adm}} > 1$

- na tração:  $FS = \frac{S_u}{\sigma_{adm}}$

$FS = \frac{S_{su}}{\tau_{adm}} > 1$



## Tensão admissível

### Fator de segurança

tensão  
normal

tensão  
cisalhante

- no escoamento:  $FS = \frac{S_y}{\sigma_{adm}}$

$FS = \frac{S_{sy}}{\tau_{adm}}$

> 1 padronizado por  
norma técnica

- na tração:  $FS = \frac{S_u}{\sigma_{adm}}$

$FS = \frac{S_{su}}{\tau_{adm}}$

> 1 padronizado por  
norma técnica

Tensão admissível

Fim do Cap. 1