Cálculo 2 2022.2

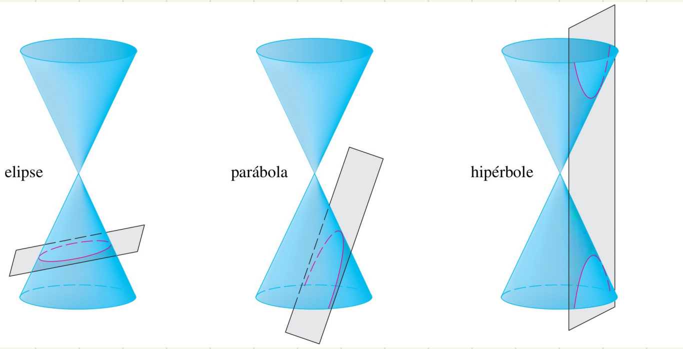
$\boxed{\text{Aula 12}}$

Aula passada: distância

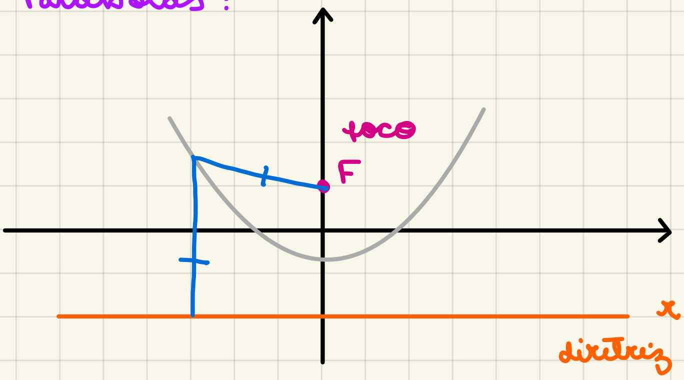
Aula Hoje: cônicas

Livro Stewart:

Seção 10.5. Seções cônicas



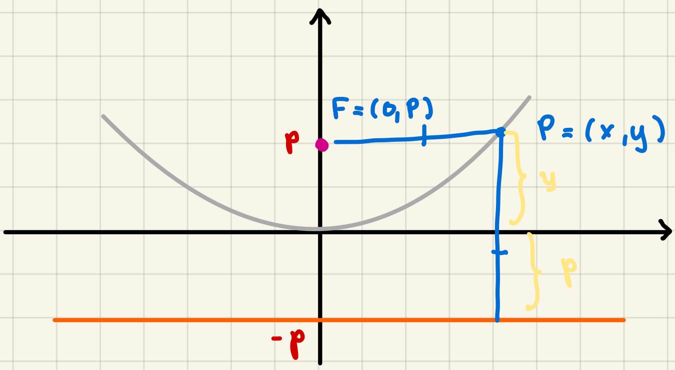
Parábolas:



Os pontos P tais

$$d(P,x) = d(P,F)$$

Para $F=(0,p)$ e $x: y=-p$



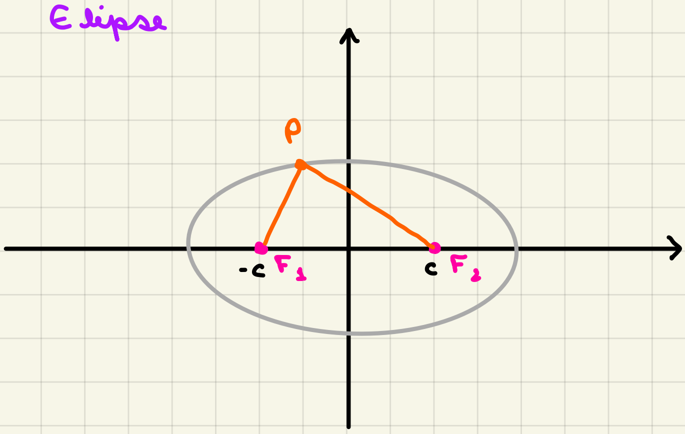
$$|y+p|^2 = x^2+(y-p)^2$$

$$y^2+2yp+p^2 = x^2+y^2-2yp+p^2$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4p}x^2}$$

Equação da parábola de foco $F=(0,p)$ e diretriz $y=-p$

Elipse

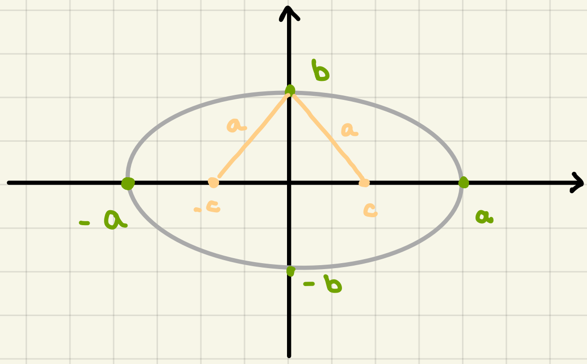


São os pontos $P=(x,y)$ tais que

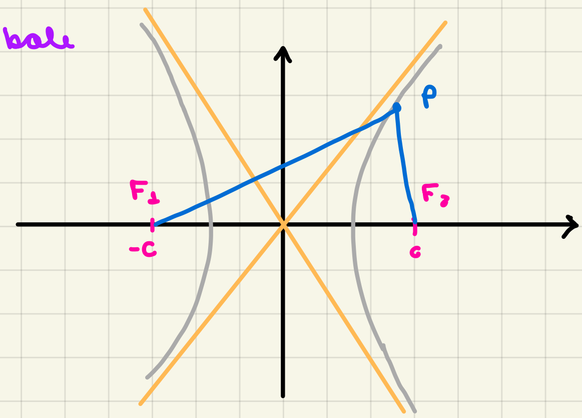
$$d(F_1,P)+d(F_2,P) = 2a$$

desenvolvendo

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{onde} \quad a^2=b^2+c^2}$$



Hipérbole

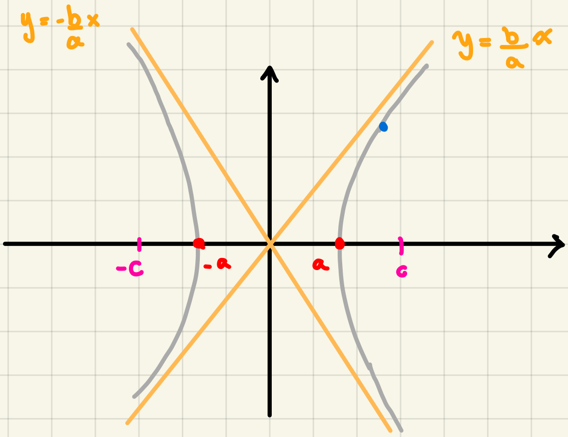


são os pontos $P=(x,y)$ tais que

$$d(P,F_1) - d(P,F_2) = \pm 2a$$

desenvolvendo, obtemos

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{onde } c^2 = a^2 + b^2}$$



Note que $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{b}{a}x = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sqrt{x^2-a^2}}}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\cdot}\frac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}}\cdot 2x}{e^x}$$

$$= \lim \frac{\cancel{e^x}\cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}}}{\cancel{e^x}} = 1$$

pela continuidade

$$e^{\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-a^2}-x} = 1$$

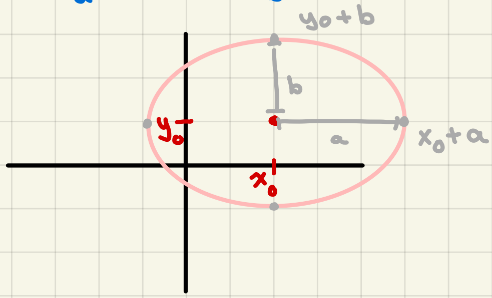
$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-a^2} - x = 0$$

as assíntotas

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

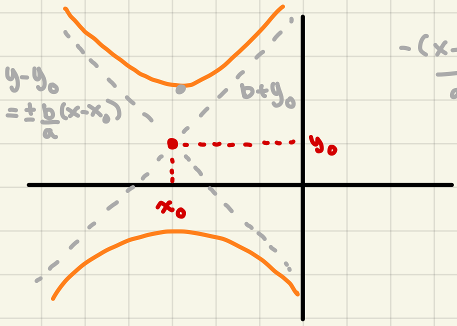
Translações

- $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ (x_0,y_0) centro



- $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ (x_0,y_0) centro

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$



Exemplo

a) Esboce o gráfico de $9x^2+16y^2=144$ localize os focos.

Solução

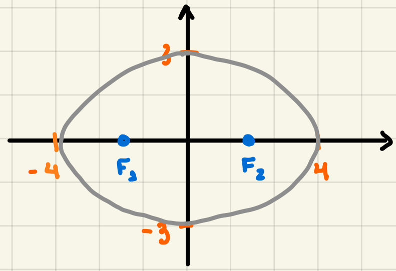
$$9x^2+16y^2=144 \quad /144$$

$$\frac{9}{144}\cdot x^2 + \frac{16}{144}y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Rightarrow \text{focos} \quad a^2 = b^2 + c^2$$

$=a$, $=b$

$$\Rightarrow c^2 = 16 - 9 = 7$$



b) Encontre uma equação para a elipse com focos $(0, \pm 2)$ e vértices $(0, \pm 3)$.

Solução $c = 2$ $a = 3$

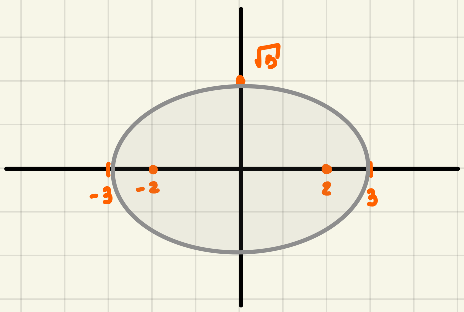
então

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$9 = b^2 + 4$$
$$\Rightarrow b^2 = 5$$

então $$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{9x^2 + 5y^2}{45} = 1$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 5y^2 = 45$$



c) Esboce a cônica $9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$

Solução: completar quadrado

$$9x^2 - 72x \; - 4y^2 + 8y \; + 176 = 0$$

$$9(x^2 - 8x) - 4(y^2 - 2y) = -176$$

$$9[(x-4)^2 - 16] - 4[(y-1)^2 - 1] = -176$$

$$9(x-4)^2 - 4(y-1)^2 - 144 + 4 = -176$$

$$9(x-4)^2 - 4(y-1)^2 = -36$$

$$\div -36$$

$$-\frac{1}{4}(x-4)^2 + \frac{1}{9}(y-1)^2 = 1$$

$a = 2$, $b = 3$ centro $(4,1)$

assíntotas $y - 1 = \pm \frac{3}{2}(x-4)$