$\boxed{\text{Aula 13}}$ Cálculo 3B $\boxed{\text{Aula 22}}$ Cálculo 3A

Aula passada: raízes repetidas

Aula Hoje: Eq de Euler → uma não autônoma

Equação de Euler (Exercício pag 91)
e na seção 5.5

A equação linear da forma

$$\boxed{at^2y'' + bty' + cy = 0} \quad (E)$$

é dita Equação de Euler

↳ Esse tipo de equação aparece quando estamos resolvendo a equação de Laplace $\Delta u = 0$ (EDP).

Nota $ay'' + \frac{b}{t}y' + \frac{c}{t^2}y = 0$ assim pelo TEU a solução está definida em $(0,+\infty)$ ou $(-\infty,0)$ dependendo da condição inicial

potência de t

Suponha que $y(t) = t^{r}$ definida em $(0,\infty)$ (por exemplo) seja uma solução de (E) para algum $r \in \mathbb{R}$

↳ queremos achar um condição para r

derivando e substituindo

$$y'(t) = rt^{r-1}$$
$$y''(t) = r(r-1)t^{r-2}$$

$$at^2\left(r(r-1)t^{r-2}\right) + btrt^{r-1} + ct^{r} = 0$$
$$(ar(r-1) + br + c)t^{r} = 0$$

↳ $\neq 0$ pois $t \in (0,\infty)$

portanto $y(t) = t^{r}$ é solução de (E) desde que r satisfaça

$$\boxed{ar(r-1) + br + c = 0}$$

↳ polinômio de grau 2.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $ax(x-1) + bx + c = 0$ tem duas raízes reais distintas $\boxed{r_1 \neq r_2}$

então $y_1(t) = t^{r_1}$, $y_2(t) = t^{r_2}$

$$\underbrace{W(t^{r_1}, t^{r_2})}_{\text{Wronskiano}} = \det\begin{pmatrix} t^{r_1} & t^{r_2} \\ r_1t^{r_1-1} & r_2t^{r_2-1}\end{pmatrix} = r_2t^{r_1+r_2-1} - r_1t^{r_1+r_2-1}$$
$$= (r_2 - r_1)t^{r_1+r_2-1}$$
$$\neq 0 \quad \forall\, t \in (0,\infty)$$

portanto a forma da solução é

$$\boxed{y(t) = c_1t^{r_1} + c_2t^{r_2}}$$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $ax(x-1) + bx + c = 0$ tem raízes repetidas r

$$ax^2 + (b-a)x + c = 0 \qquad b^2 - a^2 = 4ac$$

$$r = \frac{a-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\cancel{(b-a)^2 - 4ac}}}{2a}$$

$y_1(t) = t^{r}$ é uma solução

Usar o método de redução de ordem para obter uma segunda solução LI

↳ achar v

$y_2(t) = v(t).t^{r}$ derivando

$$y_2'(t) = v'.t^{r} + rv.t^{r-1}$$

$$y_2''(t) = v''.t^{r} + 2rv'.t^{r-1} + r(r-1)vt^{r-2}$$

Substituindo

$$at^2\left(v''t^{r} + 2rv't^{r-1} + r(r-1)vt^{r-2}\right) + bt(v't^{r} + rvt^{r-1})$$
$$+ cvt^{r} = 0 \qquad (t^{r} \neq 0,\ t>0 \text{ ou } t<0)$$

$$at^{r+2}.v'' + (2art^{r+1} + bt^{r+1})v' = 0 \quad \div t^{r+1}$$

↳ o que acompanha v se anula

$$atv'' + (2ar + b)v' = 0$$

$$r = \frac{a-b}{2a} \quad (*)$$

$$\cancel{a}tv'' + \cancel{a}v' = 0 \qquad u = v' \quad \text{substituindo:}$$

$tu' + u = 0$

$$\int \frac{1}{u}\, du \quad \int -\frac{1}{t}\, dt$$

$$\ln u = -\ln t + c$$

$$v' = u = Kt^{-1}$$

$$v = \int \frac{K}{t} . dt = K \ln t$$

podemos tomar $K = 1$

$$\boxed{v(t) = \ln t}$$

Assim a forma geral é

$$\boxed{y(t) = c_1 t^{r} + c_2 t^{r} . \ln t}$$

↳ verifique que $w(t^r, t^r \ln t) \neq 0$

Caso 3 $\quad ax(x-1) + bx + c = 0$

tem raízes complexas

$$x = \lambda \pm \mu i$$

<u>Recorde</u> Fórmula de Euler

$$e^{\mu i} = \cos \mu + i \,\text{sen}\, \mu$$

A solução é : t^r

Note que

$$t^r = t^{\lambda + \mu i} = t . t^{\mu i}$$

$$= t^\lambda e^{\ln t^{\mu i}} = t^\lambda \underbrace{e^{i\mu \ln t}}$$

fórmula de Euler

$$= t^\lambda [\cos(\mu \ln t) + i\, \text{sen}(\mu \ln t)]$$

Assim $y_1(t) = t^\lambda \cos(\mu \ln t)$

$y_2(t) = t^\lambda \,\text{sen}(\mu \ln t)$

Solução geral

$$\boxed{y(t) = c_1 t^\lambda \cos(\mu \ln t) + c_2 t^\lambda \,\text{sen}(\mu \ln t)}$$

<u>Exemplo</u> Resolva

a) $9t^2 y'' + 3ty' - 8y = 0$

<u>Solução</u>

Eq. característica : $9x(x-1) + 3x - 8 = 0$

$9x^2 - 6x - 8 = 0$

$r_1 = 4/3 \quad , r_2 = -2/3$

$$y(t) = c_1 t^{4/3} + c_2 t^{-2/3}$$

b) $4t^2 y'' + 8ty' + y = 0$

Solução

$4x(x-1) + 8x + 1 = 0$

$4x^2 + 4x + 1 = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$$y(t) = c_1 \frac{1}{\sqrt{t}} + c_2 \frac{1}{\sqrt{t}} \ln t$$

Exemplo : Encontre os valores de $\underline{\underline{\alpha}}$ para que as soluções de

$$t^2 y'' + \alpha y = 0$$

tendam a zero quando $t \to 0$

Solução

Equação característica

$x(x-1) + \quad = 0$

$x^2 - x + \alpha = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha}}{2}$$

$$y(t) = c_1 t^{x_1} + c_2 t^{x_2}$$

$$y(t) = c_1 t^{r} + c_2 t^{r} \ln(t)$$

$$y(t) = c_1 t^\lambda \cos(\mu \ln t) + c_2 t^\lambda \,\text{sen}(\mu \ln t)$$

Note que $\quad r < 0 \quad$ (ou $\lambda < 0$)

$$t^r \longrightarrow \infty$$
$$t \to 0$$

então

se $\Delta = 1 - 4\alpha > 0 \Rightarrow \alpha < \frac{1}{4}$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\alpha}}{2} > 0$$

$$1 \pm \sqrt{1-4\alpha} > 0$$

↳ $1 + \sqrt{1-4\alpha} > 0$ sempre

↳ $1 - \sqrt{1-4\alpha} > 0$

$\Rightarrow \sqrt{1-4\alpha} < 1$

$1 - 4\alpha < 1$

$\alpha > 0$ isto é

$\boxed{0 < \alpha < \frac{1}{4}}$

se $\Delta < 0$ $\boxed{\alpha > 1/4}$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\alpha}}{2}$$

→ parte real $\lambda > 0$

se $\Delta = 0 \Rightarrow \alpha = 1/4$ e $x = 1/2$

$$y(t) = c_1 t^{1/2} + c_2 t^{1/2} \ln t$$

$$\lim_{t \to 0} \sqrt{t} \ln t = \lim_{t \to 0} \frac{\ln t}{\frac{1}{\sqrt{t}}} \overset{L'Hosp}{=}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{-1}{2\sqrt{t^3}}} = \lim_{t \to 0} -\frac{1}{\cancel{t}} \cdot 2\cancel{t}\sqrt{t} = 0$$

Resumo $\underline{\alpha > 0}$

RESUMO:

Equação		Forma da Solução
	raízes distintas $x_1 = x_2$	$y(t) = c_1 e^{x_1 t} + c_2 e^{x_2 t}$
$ay'' + by' + cy = 0$	raízes complexas $x = \lambda \pm \mu i$	$y(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t$
	raízes repetidas x	$y(t) = c_1 e^{xt} + c_2 t e^{xt}$
	raízes distintas $x_1 = x_2$	$y(t) = c_1 t^{x_1} + c_2 t^{x_2}$
$at^2 y'' + bty' + cy = 0$	raízes complexas $x = \lambda \pm \mu i$	$y(t) = c_1 t^{\lambda} \cos(\mu \ln t) + c_2 t^{\lambda} \operatorname{sen}(\mu \ln t)$
	raízes repetidas x	$y(t) = c_1 t^{x} + c_2 \ln t \cdot t^{x}$
$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ + $y_1(t)$ solução	$y_2 = v(t) \cdot y_1(t)$ redução de ordem	$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$