

Aula 6

Lábulas 3B

Aula passada

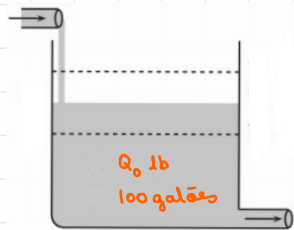
substituição { Bernoulli
Ricatti
Homogênea

Aula Hoje

Modelagem: Tanque

2.3 Modelos com equações de primeira ordem

x galões/min



x galões/min

No instante $t=0$, um tanque contém Q_0 lb de sal dissolvido em 100 galões de água

Suponha que água contendo $\frac{1}{4}$ lb/gal de sal está entrando no tanque a uma taxa de x gal/min e que o líquido bem misturado está saindo a mesma taxa

a) Escreva a EDO que descreve este processo

b) Encontre a quantidade $Q(t)$ de sal no tanque para cada instante t

c) Encontre a quantidade limite Q_L de sal no tanque após um longo período de tempo.

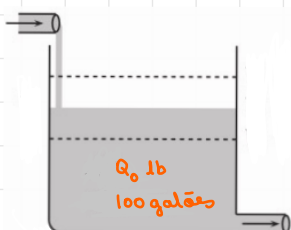
d) Para $x=3$, $Q_0=2Q_L$ encontre o instante T após o qual o nível de sal está dentro de uma faixa de 2% de Q_L

e) Encontre a taxa de fluxo necessário para que o valor de T não exceda 45 min

Solução

$\frac{1}{4}$ lb/gal

x galões/min



x galões/min

* Se entra x galões/min e cada galão tem $\frac{1}{4}$ de lb de sal então entra $\frac{x}{4}$ lb de sal por minuto

* Seja $Q(t)$ quantidade de sal no tanque em cada instante t .

* Como a taxa de entrada e de saída são iguais, no tanque sempre tem 100 galões

* Em cada instante t tem $\frac{Q(t)}{100}$ lb de sal em cada galão

* Se sai x galões/min e cada galão tem $\frac{Q(t)}{100}$ lb de sal então sai $\frac{x}{100} Q(t)$ lb sal/min

Taxa de variação de sal total no instante t	=	taxa de variação de sal entrando	-	taxa de variação de sal saindo
$\frac{dQ(t)}{dt}$		$\frac{x}{4}$ lb/min		$\frac{Q(t)}{100} \cdot x$ lb/min

a)
$$\begin{cases} Q'(t) = \frac{x}{4} - \frac{x}{100} Q(t) \\ Q(0) = Q_0 \end{cases}$$
 → condição inicial

→ equação que modela o problema

b) Resolva a equação linear.

$$\begin{cases} Q' + \frac{x}{100} Q = \frac{x}{4} \\ Q(0) = Q_0 \end{cases}$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{x}{100} dt} = e^{\frac{x}{100} t} \rightarrow \text{fator integrante}$$

Multiplicando:

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{100} t} Q'(t) + \frac{x}{100} e^{\frac{x}{100} t} Q(t) &= \frac{x}{4} e^{\frac{x}{100} t} \\ \frac{d}{dt} [Q(t) \cdot e^{\frac{x}{100} t}] &= \frac{x}{4} e^{\frac{x}{100} t} \\ \int \frac{d}{dt} [Q(t) \cdot e^{\frac{x}{100} t}] &= \int \frac{x}{4} e^{\frac{x}{100} t} \\ Q(t) \cdot e^{\frac{x}{100} t} &= 25 e^{\frac{x}{100} t} + C \end{aligned}$$

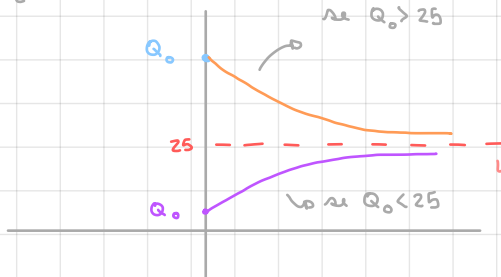
$$Q(t) = 25 + C e^{-\frac{x}{100} t} \quad \text{para } Q(0) = Q_0$$

$$Q_0 = 25 + C \Leftrightarrow C = Q_0 - 25$$

$$Q(t) = 25 + (Q_0 - 25)e^{-\frac{x}{100}t}$$

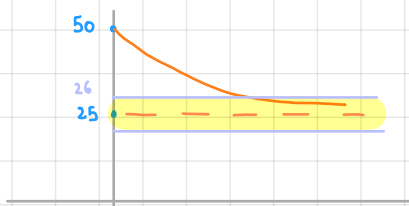
c) * ao longo do tempo = fazer $t \rightarrow \infty$ na solução

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 25 //$$



↳ a quantidade de Sal no tanque tende a 25 lb ao longo do processo

d) $x = 3$ e $Q_0 = 50 \Rightarrow Q(t) = 25 + 25e^{-\frac{3}{100}t}$



• 2% de $Q_L = \frac{25 \cdot 2}{100} = 0,5$

Achar T tal que

$$25,5 = 25 + 25e^{-\frac{3}{100}T}$$

$$\frac{1}{50} = e^{-\frac{3}{100}T} \Rightarrow \frac{-3T}{100} = \ln\left(\frac{1}{50}\right) = -\ln 50$$

$$T = \frac{100}{3} \ln 50$$

e) $Q_0 = 2Q_L = 50$

$$Q(t) = 25 + 25e^{-\frac{x}{100}t}$$

Achar x quando $t = 45$ e $Q(45) = 25,5$:

$$25,5 = 25 + 25e^{-\frac{x \cdot 45}{100}}$$

$$e^{-\frac{x \cdot 45}{100}} = \frac{1}{50}$$

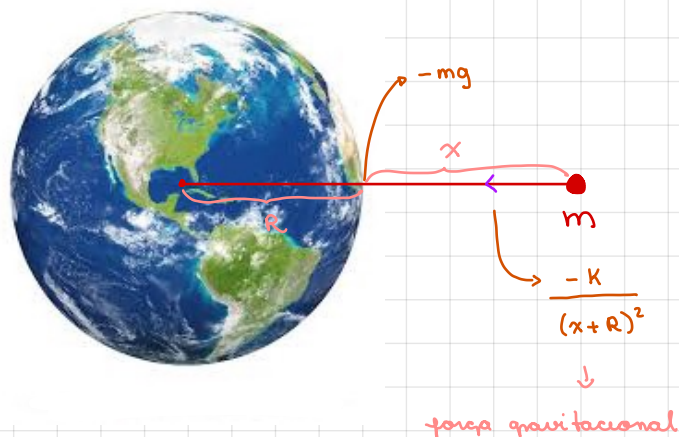
$$-\frac{x \cdot 45}{100} = -\ln 50$$

$$x = \frac{100}{45} \ln 50$$

Para conhecimento

2.3 Modelagem com equações de 1ª ordem

Velocidade de escape

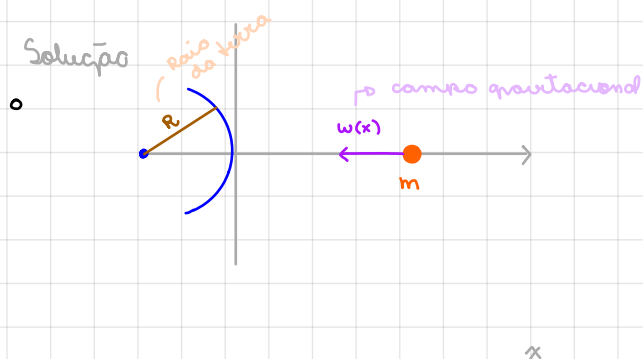


Objetivo: expressão para a velocidade do objeto

Um corpo de massa m constante é projetado para fora da Terra em uma direção perpendicular a superfície da Terra com velocidade inicial v_0 . Suponha desprezível a resistência do ar mas levando em conta a variação do campo gravitacional da Terra com relação a distância

- Encontre uma fórmula para a velocidade de desse corpo em movimento
- Encontre a velocidade inicial necessária para levantar o corpo até uma altitude A máxima acima da superfície da Terra
- Encontre a menor velocidade inicial para qual o corpo não retorna a Terra (*velocidade de escape*)

Solução



* Sup x a distância percorrida pelo objeto

* A força gravitacional é dada por:

$$w(x) = \frac{-K}{(x+R)^2}$$

↳ Raio da Terra
↳ distância

Sabendo que $w(0) = -mg$ (na superfície)
então $-mg = \frac{-K}{R^2} \Rightarrow K = mgR^2$

Assim

$$w(x) = \frac{-mgR^2}{(x+R)^2}$$

* Não existem outras forças agindo, pela 2ª lei de Newton:

$$F = ma$$

onde $a = \frac{dv}{dt}$, $v(t)$ velocidade
 $a(t)$ aceleração

Assim

$$\frac{-\cancel{g}R^2}{(x+R)^2} = \cancel{v} \cdot \frac{dv}{dt}$$

A equação acima envolve t, x, v , vamos eliminar a variável t para obter uma EDO da velocidade com relação a distância x .

Pela regra da cadeia

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} v(x(t)) = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$$

substituindo

$$\begin{cases} \frac{-gR^2}{(x+R)^2} = v \cdot \frac{dv}{dx} \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

equação que exige o problema

↳ EDO de 1ª ordem separável

a) Resolver o PVI acima:

$$\frac{-gR^2}{(x+R)^2} = \frac{dv}{dx} \cdot v$$

SEPARÁVEL

⇒

$$\frac{-gR^2}{(x+R)^2} dx = v \cdot dv$$

$$\int \frac{-gR^2}{(x+R)^2} dx = \int v \cdot dv$$

$$\frac{gR^2}{(x+R)} + C = \frac{v^2}{2}$$

para $v(0) = v_0$,

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{gR^2}{R} + C \Rightarrow C = \frac{v_0^2}{2} - gR$$

$$v(x)^2 = \frac{2gR^2}{(x+R)} + v_0^2 - 2gR$$

solução da velocidade em função da altitude x

↳ sinal de + corpo subindo
sinal de - corpo descendo

b) Altitude máxima = velocidade nula

$$0 = \frac{2gR^2}{(R+A)} + v_0^2 - 2gR$$

$$v_0^2 = \frac{2gR - 2gR^2}{(R+A)} = \frac{2g\sqrt{R} + 2AgR - 2g\sqrt{R}^2}{(R+A)}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2AgR}{(R+A)}} \quad (*)$$

atinge uma altitude máxima A e volta a terra (isto é, o objeto não escapa)

c) Para que o objeto não retorne fazemos A tender a infinito em $(*)$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} v_0 = \lim_{A \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2AgR}{R+A}} = \sqrt{\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{2AgR}{R+A}} \quad \text{L'Hospital}$$

$$= \sqrt{\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{2gR}{1}} = \sqrt{2gR}$$

velocidade de escape