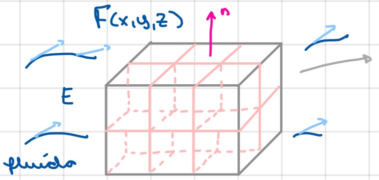
AULA 9 — Cálculo 3A - 2020.2

## 16.9 Teorema do Divergente

### Motivação




em cada ponto o div F(x,y,z) calcula a tendência de massa divergir do Ponto

$\underbrace{\text{a variação é o que atravessa a superfície laterais de E} \ (\partial E)}$

vazão pela superfície

↓

$$\iint_{\partial E} F \cdot n \, dS$$

$\vec{n}$ apontando para fora da superfície

$\underbrace{\text{em cada ponto o div F(x,y,z) calcula a tendência de massa divergir do Ponto}}$

a soma em cada pt de E

Variação total ↓

$$\iiint_E \operatorname{div} F \, dV$$

Teorema do Divergente garante essa igualdade

**Teorema do Divergente**

i) E região sólida e S a superfície de fronteira (fechada) de E orientada para fora

ii) F campo de vetores cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas numa região contendo E.

Então

$$\iint_S F \cdot dS = \iiint_E \operatorname{div} F \cdot dV$$

## Exemplo

Determine o fluxo do campo $F(x,y,z) = z\,i + y\,J + x\,K$ sobre $x^2+y^2+z^2 = 1$ ($\vec{n}$ apontando para fora)

(fizemos pela definição anteriormente compare!)

Solução

$$\text{Fluxo} = \iint_S F \cdot dS \overset{\text{teorema do divergente}}{=} \iiint_E \operatorname{div} F \cdot dV$$

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 1$$

E = esfera de raio 1

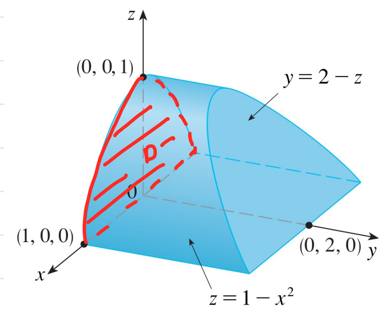
$$\iint_S F \cdot dS = \underbrace{\iiint_E \cdot dV}_{\text{Volume de E}} = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4\pi}{3}$$

## Exemplo

Calcule $\iint_S F \cdot dS$ onde $F(x,y,z) = xy\,i + (y^2 + e^{xz^2})\,J + \operatorname{sen}(xy)\,K$

e S é a superfície que delimita a região dentro do cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ delimitada pelos planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$

Solução




usando teorema do divergente é bem mais fácil

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{sen} xy)$$

$$= y + 2y = 3y$$

Descrever a região E = abaixo do plano $y = 2 - z$ e $(x,z) \in D$ onde $D = \{(x,z) : 0 \leq z \leq 1 - x^2\}$

Assim

$E = \{(x,y,z) : 0 \leq y \leq 2 - z \ \text{ e } \ 0 \leq z \leq 1 - x^2, \ -1 \leq x \leq 1\}$

$$\iint_S F \cdot dS = \int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} 2y \cdot dy\, dz\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} \frac{3}{2}(2-z)^2 \, dz\, dx = \frac{\cancel{3}}{2}\int_{-1}^{1} -\frac{(2-z)^3}{\cancel{3}}\Bigg|_{0}^{1-x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x^2+1)^3 - 8 \; . dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (\underbrace{x^6+3x^4+3x^2}_{\text{funções pares}} - 7)\, dx$$

$$= -\left[ x^7/7 + 3/5\, x^5 + x^3 - 7x \Big|_{0}^{1} \right]$$

$$= 7 - \frac{1}{7} - \frac{3}{5} - 1$$

---

Recorde: Quando falamos de div e rot:

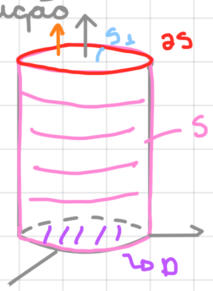
$$\text{div}(\text{rot}\, F) = 0$$

O exemplo a seguir pode-se usar o Teorema de Stokes ou do divergente

**Exemplo**

Calcule $\iint_S \text{rot}F \, dS$ onde $S$ é a fronteira do cilindro sólido $x^2+y^2=1$, $0 \le z \le 1$ sem a tampa orientada com normal apontando para o exterior e $F(x,y,z) = (xz + yz^2 + x)\,i + (xyz^3 + y)\,j + z^4x^2\,k$

Solução




a superfície não é fechada

considerando $S_1$ a tampa pelo teorema do divergente

$$\iint_{\underbrace{S \cup S_1}_{\text{superfície fechada}}} \text{rot}F.dS = \iiint_E \underbrace{\text{div}(\text{rot}\,F)}_{=0} = 0$$

Por outro lado $\iint_{S\cup S_1} \text{rot}F\,dS = \iint_S \text{rot}F\,dS + \overbrace{\iint_{S_1} \text{rot}F\,dS}^{\text{calcular essa}}$

$S_1 = r(x,y) = (x, y, 1)$

$r_x \times r_y = (0,0,1)$ (normal ao plano)

$\text{rot}F(r(x,y)) . (0,0,1)$ = coordenada K de rot F

$$\text{rot}F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz + yz^2 + x & xyz^3 + y & z^4x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (*)\, i + (*)\, j + (yz^3 - z^2)\, k$$

$$\text{rot}F(r(x,y)) . (0,0,1) = y(1)^3 + (1)^2 = y - 1$$

$$\iint_{S_1} \text{rot}F.dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\,\text{sen}\theta - 1)\, r \, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\text{sen}\theta - \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 . d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\text{sen}\theta - \frac{1}{2} . d\theta$$

$$-\frac{1}{3}\cos\theta - \frac{1\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = -\pi$$

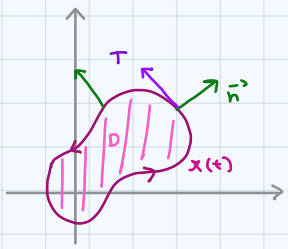
$$\therefore \iint_S \text{rot}F.dS + \iint_{S_1} \text{rot}F.dS = 0$$

$$\iint_S \text{rot}F.dS = \pi$$

próxima página uma das

## Observação

O teorema do Divergente pode ser visto como uma generalização do teorema de Green




Considere:

- $x(t) = (x(t), y(t))$
  $a \leq t \leq b$
  a curva que delimita a região
- $T(t) = \dfrac{x'(t)\,i + y'(t)\,j}{|r'(t)|}$
  vetor tangente unitário
- $F = P\,i + Q\,j$
  um campo

então

$$\vec{n} = \frac{y(t)\,i}{|r'(t)|} - \frac{x(t)\,j}{|x'(t)|}$$

é o vetor normal a curva
isto é

$$T(t) \cdot n(t) = 0$$

Assim

$$\int_C F \cdot n \, ds \overset{\text{definição}}{=} \int_a^b (F \cdot n)\,|r'(t)|\,dt$$

$$= \int_a^b \left[ P(x(t)) \cdot \frac{y'(t)}{|\cancel{r'(t)}|} - Q(x(t)) \cdot \frac{x'(t)}{|\cancel{x'(t)}|} \right] |\cancel{r'(t)}|\,dt$$

$$= \int_C P\,dy - Q\,dx = \iint_D \underbrace{\left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right)}_{\text{div } F} dA$$

$$= \iint_C \text{div } F \, . \, dA$$

Aplicando o teorema de Green para $F = -Q\,i + P\,j$