[UFES-CCE-DMAT-Prova 1-Manhã-Cálculo1-Equipe, 05/05/17]

Gabarito

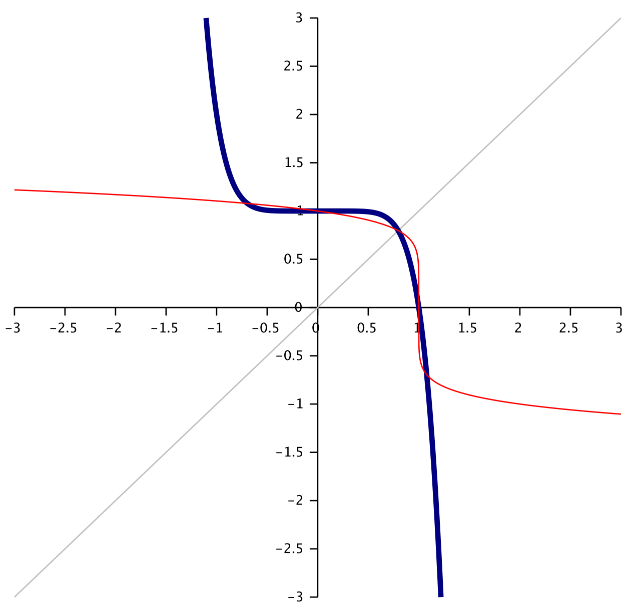
1. **(1.5pts)** Seja $f(x) = 1 - x^7$.

   (a) Determine $f^{-1}(x)$.

   $1 - x^7 = y \Leftrightarrow x^7 = 1 - y \Leftrightarrow x = \sqrt[7]{1-y}$. Logo $f^{-1}(x) = \sqrt[7]{1-x}$.

   (b) Esboce o gráfico de f e de f^{-1}.

   Partindo do gráfico de x^7, fazemos uma reflexão no eixo x para obter o gráfico de $-x^7$ e de seguida deslocamos este último uma unidade para cima, obtendo o gráfico de $1 - x^7$. Nota: $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos com respeito à reta $y = x$ como em baixo (f a azul espesso).



2. (**1.0pts**) Sejam $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

   (a) Determine $(g \circ f)(x)$.

   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+1}{f(x)+2} = \frac{\frac{x^2+1}{x}+1}{\frac{x^2+1}{x}+2} = \frac{\frac{x^2+1+x}{x}}{\frac{x^2+1+2x}{x}} = \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$.
   Nota: a última igualdade anterior é válida quando $x \neq 0$.

   (b) Determine o domínio de $g \circ f$.

   Lembre que $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}; x \in D_f \text{ e } f(x) \in D_g\}$. Temos $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$. Temos $f(x) \in D_g \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \neq -2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Logo, $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

3. **(2.0pts)** Esboce o gráfico de uma função g que satisfaça todas as seguintes condições:

   (a) g é par;

   (b) g tem domínio $(-\infty, +\infty)$;

   (c) g tem uma descontinuidade por salto em $x = 2$;

   (d) g é contínua à direita de 2;

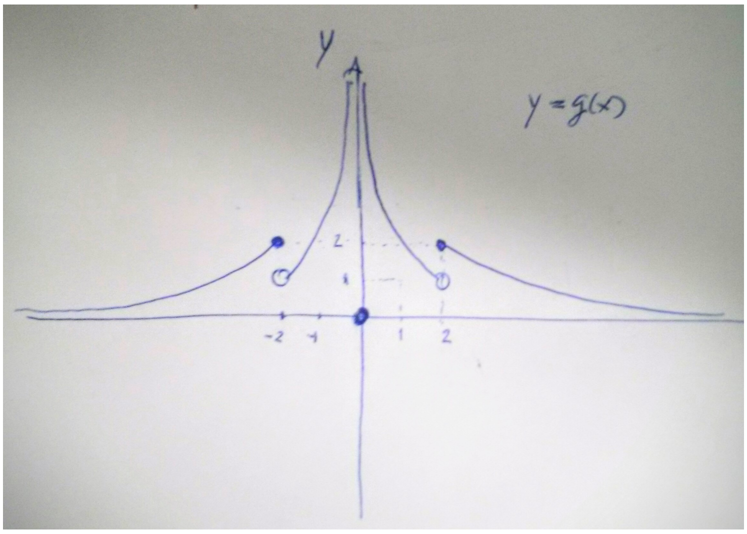
   (e) $g(2) = 2$;

   (f) $x = 0$ é assíntota vertical de g;

   (g) g é decrescente no intervalo $(0, 2)$;

   (h) $y = 0$ é assíntota horizontal de g.

Por exemplo:



4. Determine, se existirem:

   (a) **(1.0pts)** $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3+1}{\sqrt{x^6+2}}$

Substituição direta leva-nos à indeterminação ∞/∞. "Dividindo pela maior potência do denominador",

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3+1}{\sqrt{x^6+2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-2x^3+1}{x^3}}{\frac{\sqrt{x^6+2}}{x^3}} \lim_{x\to+\infty} \frac{-2+1/x^3}{\sqrt{1+2/x^6}} = \frac{-2+0}{1+0} = -2.$$

   (b) **(1.25pts)** $\lim_{x\to-\infty}(x + \sqrt{x^2+x})$

Substituição direta leva-nos à indeterminação $\infty - \infty$. Utilizando o conjugado

$a-b$ na fatoração de $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+x}) &= \lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+x})\frac{x-\sqrt{x^2+x}}{x-\sqrt{x^2+x}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2+x)}{x-\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x-\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \overbrace{=}^{x<0,\ |x|=-x} \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{-1}{1+\sqrt{1+0}} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(c) **(1.25pts)** $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{|x-1|}$

Substituição direta leva-nos a uma indeterminação $0/0$. Contudo

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x\geq 1\\ -(x-1), & x<1\end{cases}$$

donde

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to1^+}\frac{(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} x+1 = 2.$$

Analogamente,

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to1^-} -(x+1) = -2.$$

Portanto, não existe $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{|x-1|}$.

(d) **(1.0pts)** $\lim_{x\to0^+}\arctan(\frac{1}{x})(e^x-1)$.

$$\lim_{x\to0^+}\arctan(\frac{1}{x})(e^x-1) = \text{“}\arctan(\tfrac{1}{0^+})(e^{0^+}-1) = \arctan(+\infty).(1-1)\text{”} = \tfrac{\pi}{2}\cdot 0 = 0.$$

Outro argumento (“mais rigoroso”): para todo $x>0$,

$$-\pi/2 < \arctan(1/x) < \pi/2 \quad \text{e} \quad e^x-1>0,$$

logo

$$(e^x-1)(-\pi/2) < (e^x-1)\arctan(1/x) < (e^x-1)\pi/2.$$

Como $\lim_{x\to0^+}(e^x-1)(-\pi/2) = \lim_{x\to0^+}(e^x-1)(\pi/2) = 0$, segue, pelo teorema do confronto, que $\lim_{x\to0^+}(e^x-1)\arctan(1/x) = 0$.

5. **(1pts)** Existe solução da equação $x^7+x^2-1/2=0$ no intervalo $[0,2]$?

Sim. Fazendo $f(x) = x^7 + x^2 - 1/2$, temos $f(0) = -1/2 < 0$ e $f(2) = 2^7 + 2^2 - 1/2 > 0$ e f é contínua em $[0, 2]$. Pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$. Em particular, existe solução da equação $x^7 + x^2 - 1/2 = 0$ no intervalo $[0, 2]$.