# Métodos numéricos para resolver Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)

Algoritmos Numéricos - Topico 5 -2
Métodos numéricos para a resolver de EDOs
Métodos de Runge Kutta
- Prof. Cláudia G. Varassin DI/UFES
emails:claudia.varassin@ufes.br e galarda@inf.ufes.br

**Março de 2021**

# Sumário

O problema:
Obter a solução do PVI abaixo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

em $D = [a, b]$.
Métodos de passo simples.
A estratégia é obter a solução em $x_{i+1}$ empregando "informações" do ponto vizinho $x_i$.

A solução obtida é uma aproximação para a solução exata.

$$y_{i+1} \approx y(x_{i+1})$$

Alguns métodos de passo simples:

- Método de Euler
- Métodos baseados na série de Taylor
- Métodos de Runge-Kutta.

Os métodos fornecem a solução para esta malha de pontos $x_i$.
Será usado, neste curso, uma malha de pontos igualmente espaçados, $x_0, x_1, \cdots, x_n$, onde a distância é: $h = \frac{b-a}{n}$,

$$x_i = x_0 + i\,h, \qquad i = 0, 1, \cdots, n$$

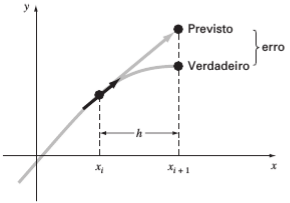
# Os métodos baseados na série de Taylor

A expansão em série de Taylor de uma função $y(x)$, em torno de $x_i$, é dada por:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i)+hy'(x_i,y_i)+\frac{1}{2}h^2y''(x_i,y_i)+\frac{1}{3!}h^3y'''(x_i,y_i)+\frac{1}{4!}h^4y^{(iv)}(x_i,y_i)+\ldots$$

onde $x_{i+1}$ é um ponto vizinho a $x_i$ (a uma distância $h$).

O método de Euler é um baseado na série de Taylor de $1^a$ ordem




Ao considerar apenas termos até a derivada $1^a$, tem se o método baseado na série de Taylor de $1^a$ ordem

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y(x_i) + hy'(x_i, y_i)$$

Ao considerar termos até a derivada $2^a$, na expansão, tem se o método baseado na série de Taylor de $2^a$ ordem

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y(x_i) + hy'(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_i, y_i)$$

Lembrando que para o problema se sabe $y' = f(x, y)$
A expressão pode ser rescrita por

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y(x_i) + hf(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h^2 f'(x_i, y_i)$$

Dado um PVI do tipo

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

A solução do PVI é uma função $y(x)$ que satisfaz à EDO e a $y(x_0) = y_0$. É possível obter a solução em um dado $D = [a, b]$ via métodos numéricos. Os métodos de passo simples obtêm a solução em $x_{i+1}$ empregando "informações" do ponto vizinho $x_i$.

- O método de Euler calcula $y_{i+1}$ via:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

- O método baseado na série de Taylor de $2^a$ ordem calcula $y_{i+1}$ via :

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{1}{2}h^2 f'(x_i, y_i)$$

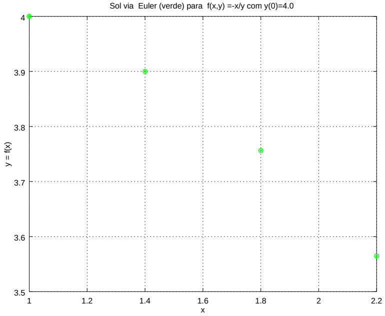
Exemplo 1: Resolver o PVI

$$\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} = f(x,y) \\ y(1.0) = 4.0 \end{cases}$$

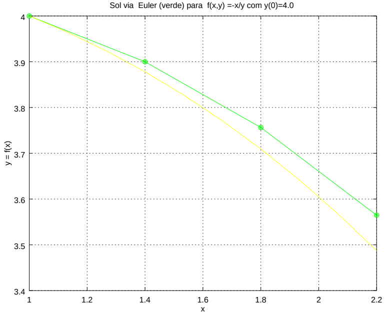
via o método de Euler, em $[a = x_0 = 1.0, b = 2.2]$ com um dado $h = 0.4$. Para este problema, fica:

$$y_{i+1} = y_i + h(\frac{-x_i}{y_i})$$

Representação da solução obtida, via Euler, em $[1.0, 2.2]$ com $h = 0.4$



Representação da solução obtida, via Euler, em $[1.0, 2.2]$ com $h = 0.4$



# Os métodos de Runge Kutta

Os métodos de Runge-Kutta não calculam as derivadas $2^a$ , $3^a$ e etc para dar o passo.
No lugar destas informações, calculam, a cada passo, várias derivadas $1^a$, isto é, calculam várias declividades da função $y(x)$.

Lembrando que declividade da função $y(x)$ (a derivada $1^a$) é dada na EDO.
Em um um ponto $(x_i, y_i)$ pode ser calculada por:

$$k = f(x_i, y_i)$$

# Os métodos de Runge Kutta de $2^a$ ordem

Estes métodos calculam duas inclinações para efetuar o passo.
Uma parte do passo $(a_1)$ com inclinação $k_1$
outra parte $(a_2)$ com inclinação $k_2$

Assim, tem que

$$y_{i+1} = y_i + a_1 h k_1 + a_2 h k_2$$

onde $k_1$ e $k_2$ são as derivadas $1^a$ em 2 pontos.
$k_1 = f(x_i, y_i)$ (é inclinação de calculada no $(x_i, y_i)$ )
e
$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_1 h k_1)$ (é a inclinação em $(x_i + p_1 h, y_i + q_1 h k_1)$ ).

O método mais conhecido é aquele que anda:
meio passo ($a_1 = 1/2$) com inclinação $k_1$
e a outra metade ($a_2 = 1/2$) com uma inclinação $k_2$ , calculada no ponto vizinho.
Assim, neste caso, o método é dado por

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}k_1 + \frac{h}{2}k_2$$

onde
$k_1 = f(x_i, y_i)$ (inclinação em $(x_i, y_i)$ )
$k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1)$ ( inclinação em $(x_i + h, y_i + hk_1)$ )

Exemplo 1: Resolver o PVI

$$\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} = f(x,y) \\ y(1.0) = 4.0 \end{cases}$$

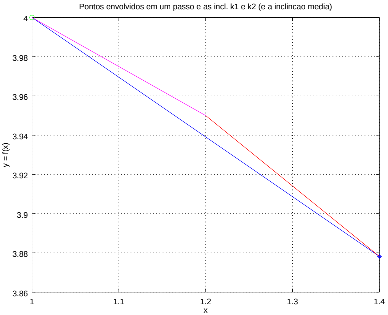
via o métodos de Runge Kutta de $2^a$ ordem, em $[a = x_0 = 1.0, b = 2.2]$ com um dado $h = 0.4$.
Para este problema, fica:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} k_1 + \frac{h}{2} k_2$$

onde
$k_1 = f(x_i, y_i) = \frac{-x_i}{y_i}$
$k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1) = \frac{-x_{i+1}}{(y_i + hk_1)}$

$1^0$ passo:

$$k_1 = f(x_0, y_0) = \frac{-x_0}{y_0}$$
$$k_2 = f(x_0 + h, y_0 + hk_1) = \frac{-x_1}{(y_0 + hk_1)}$$
$$y_1 = 3.8782$$

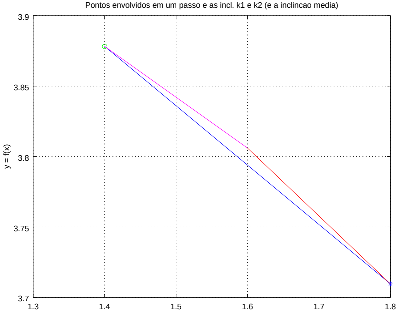


$2^0$ passo:

$$k_1 = f(x_1, y_1) = \frac{-x_1}{y_1}$$

$$k_2 = f(x_1 + h, y_1 + hk_1) = \frac{-x_2}{(y_1 + hk_1)}$$

$$y_2 = 3.7096$$

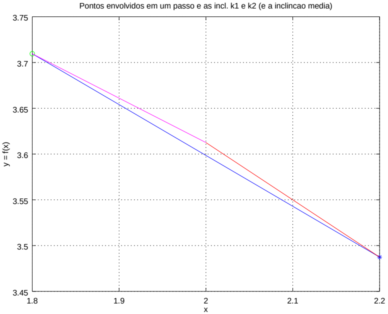


$3^0$ passo:

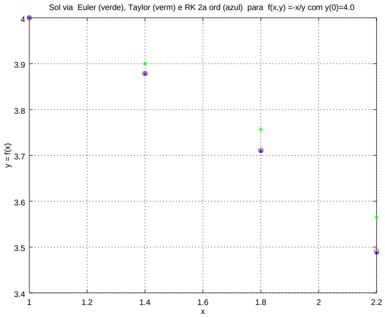
$$k_1 = f(x_2, y_2) = \frac{-x_2}{y_2}$$

$$k_2 = f(x_2 + h, y_2 + hk_1) = \frac{-x_3}{(y_2 + hk_1)}$$

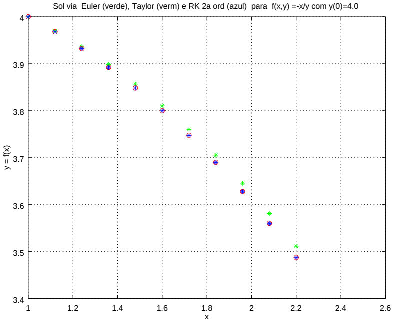
$$y_3 = 3.4874$$



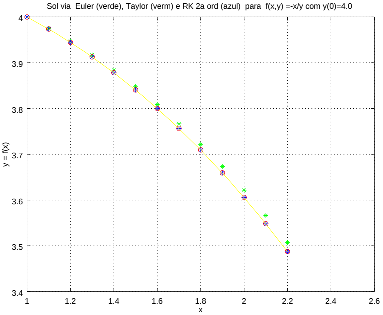
# Solucão, via Euler, Taylor e Runge Kutta de $2^a$ ordem, com $m = 3$:



## Solucão, via Euler, Taylor e Runge Kutta de $2^a$ ordem, com $m = 12$:



Solucão, via Euler, Taylor e Runge Kutta de $2^a$ ordem, com $m = 12$ e a solução Exata:



# Runge-Kutta de $4^a$ ordem

Os métodos de Runge-Kutta de $4^a$ ordem calculam quatro inclinações a cada passo, ou seja, calculam 4 derivadas por passo ($k_1$ e $k_2$, $k_3$ e $k_4$). Um dos métodos mais conhecidos é dado por

$$y_{i+1} = y_i + h(\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6})$$

onde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_{i+1}, y_i + hk_3)$$

Dado um PVI do tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Os métodos de Runge Rutta obtêm a solução em $x_{i+1}$ empregando apenas a informação da derivada $1^a$ (a inclinação).
Esta inclinção é calculada em vários pontos intermédiarios ao passo.

- O método de Runge kutta de $2^a$ ordem calcula $y_{i+1}$ via :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}k_1 + \frac{h}{2}k_2 = y_i + h(\frac{k_1 + k_2}{2})$$

- O método de Runge kutta de $4^a$ ordem calcula $y_{i+1}$ via :

$$y_{i+1} = y_i + h(\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}).$$

## Bibliografia Básica

[1] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[2] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.