Material complementar para a aula 4

Avaliação gráfica do efeito de parâmetros na resposta ao degrau

A FT considerada na aula 4 é:

$$g(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{c}{s^2 + as + b}$$

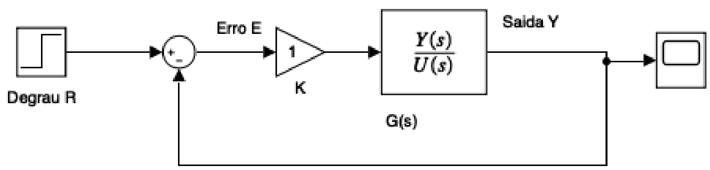

Figura 1. Diagrama de blocos usado

IMPORTANTE: todas análises seguintes são feitas sobre a FT de MF, $M(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$

1) Erro em regime

O erro entre a entrada $R(s)$ e a saída $Y(s)$ na figura 1 é dado por $E(s) = \frac{R(s)}{1+KG(s)}$.

Obtém-se o erro em regime $e(\infty) = r(\infty) - y(\infty)$ aplicando o teorema do valor final.

Com $R(s) = \frac{1}{s}$, vem

$$\frac{\lim\ e(t)}{t \to \infty} = \frac{\lim\ sE(s)}{s \to 0} = \frac{1}{1 + K(G(0))}$$

Portanto, para obter o erro em regime $e(\infty) = 1 - y(\infty)$, basta calcular

$$E(0) = \frac{1}{1 + KG(0)}$$

No Matlab, pode-se usar o comando freqresp(g,0) para obter g(0).

2) Integral absoluta do erro – IAE

A IAE é mostrada na figura 2, sendo a área em azul sob a curva dada por

$$IAE = \int_0^T |(r(t) - y(t))| dt$$

Ela é obtida integrando a diferença absoluta entre a entrada degrau (no caso) e a saída em cada instante de tempo t. A janela de tempo usada tem duração T, e deve ser sempre a mesma para poder comparar o efeito de parâmetros sobre a IAE.

A IAE permite utilizar uma única métrica para comparar o desempenho de diferentes sistemas de controle. O aumento da sobreelevação e dos tempos de resposta fazem a IAE ser maior.

No Matlab, use o comando trapz para calcular a IAE.

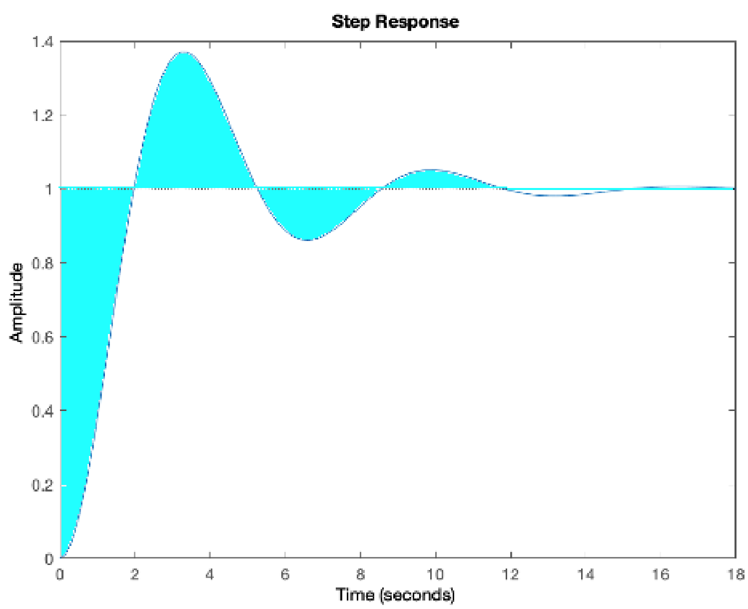

Figura 2. IAE: área em azul

Na figura 3 se observa a resposta ao degrau e o erro em regime e IAE. O erro em regime é aproximadamente 1-0.65=0.35 (ver a curva de erro em t=3). O IAE é igual a 1.25 em t=3. Ele é calculado integrando o valor absoluto do erro no tempo. O valor usado é aquele ao final de uma janela de tempo definida, neste caso, de 3s. Para fins de comparação, usa-se sempre uma mesma janela de tempo.

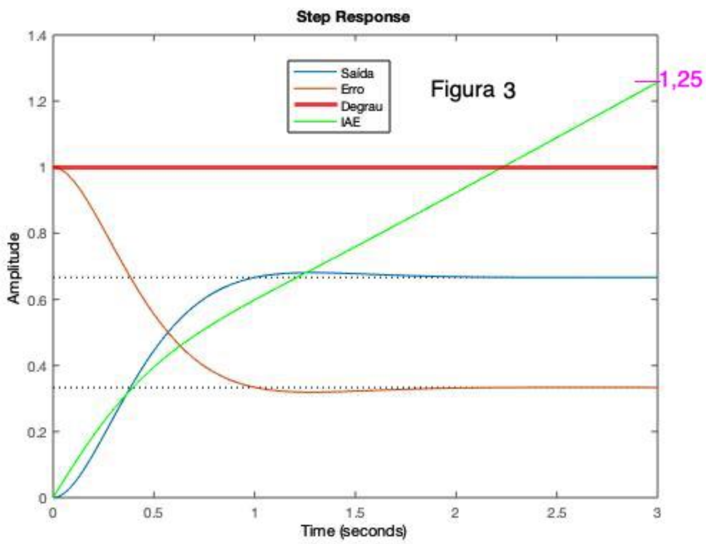

Figura 3. Resposta ao degrau e erro em regime e IAE.

A integral do erro continua aumentando para t>3, pois o erro é constante e maior que zero. Isto não ocorreria para sistemas tipo 1.

3) Parâmetros da resposta transitória

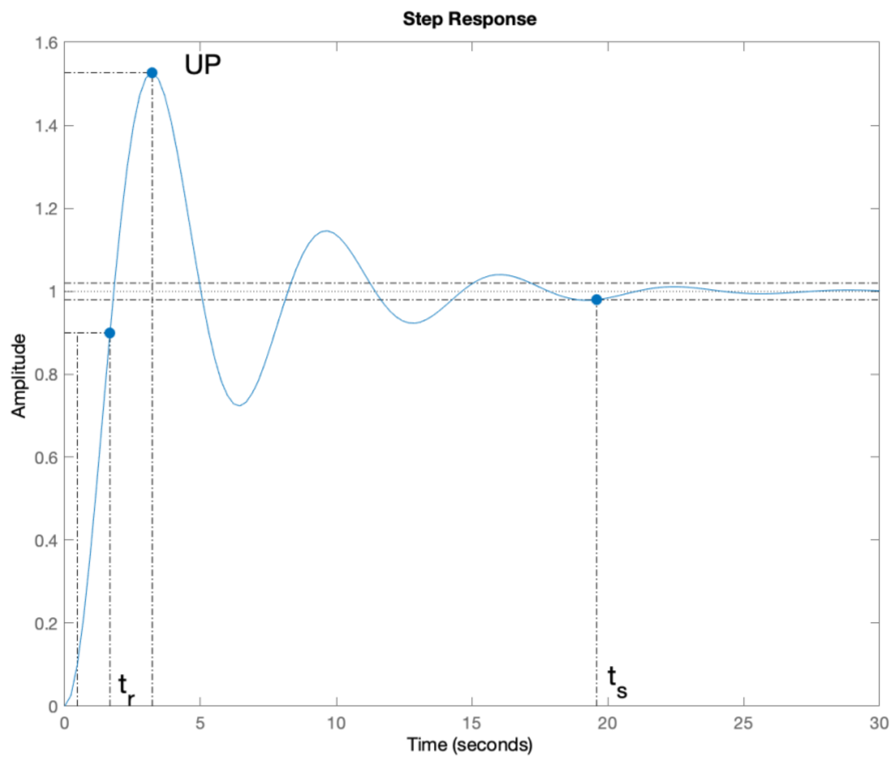

Figura 3. Sobrelevação (UP), tempo de subida (t_r) e tempo de estabelecimento (t_s)

Sobreelevação – UP

É a medida em porcentagem da ultrapassagem da saída em relação a seu valor de regime.

$$UP = 100\frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}$$

A sobreelevação está relacionada com amortecimento ζ pela expressão

$$UP = 100e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

A sobreelevação ocorre no tempo de pico t_p.

Tempo de subida - t_r

É o tempo para que a saída varie de 10 a 90% de seu valor de regime.

Tempo de estabelecimento - t_s

É o tempo necessário para a saída alcance uma faixa de valores de 3% em torno do valor de regime e aí permaneça. O limite pode ser alterado, para 2%, por exemplo.

4) Efeito do ganho

Como observado, o ganho pode afetar o erro em regime. Em sistemas tipo 0 (tipo = número de polos de G(s) na origem), o erro depende do ganho.

O transitório também é afetado pelo ganho. Um ganho que atende condições de erro em regime tende a produzir respostas mais oscilatórias (ganhos grandes).

5) Uso do lugar das raízes para obter o ganho

A figura 4 mostra o lugar das raízes para $1 + Ks(s+5) = 0$. Para K=0 os polos de MF estão em {0,-5}. Quando k tende a infinito, os dois polos tem parte real igual a -2.5 e parte imaginária que tende a infinito. Ao clicar sobre o gráfico, obtêm-se os valores do ganho, a localização dos polos, o amortecimento, e a sobreelevação considerando um protótipo de segunda ordem. Esta figura é gerada com o comando rlocus(g). Caso o LR desenhando não mostre os polos desejados, pode-se escolher um vetor de ganhos K adequado (exemplo K=linspace(0,50,1000)) e o comando rlocus(g,K).

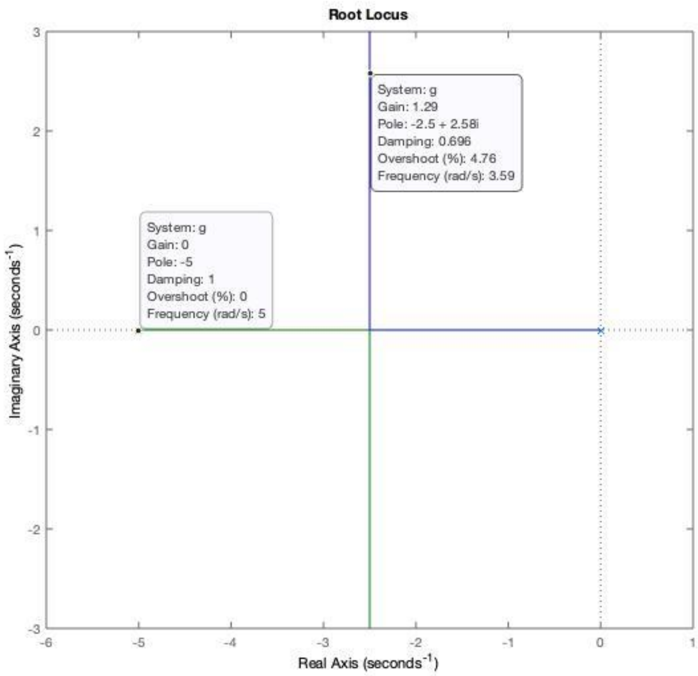
Root Locus
System: g
Gain: 1.29
Pole: -2.5 + 2.58i
Damping: 0.696
Overshoot (%): 4.76
Frequency (rad/s): 3.59
System: g
Gain: 0
Pole: -5
Damping: 1
Overshoot (%): 0
Frequency (rad/s): 5
Imaginary Axis (seconds⁻¹)
Real Axis (seconds⁻¹)

Figura 4