

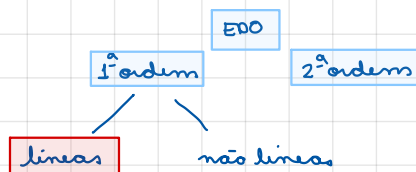
Aula 3

Cálculo 3B

Aula Passada

Introdução e classificação de equações

Aula Hoje eq lineares 1º ordem



2.1 Equações lineares de 1º ordem: Fator integrante

$$y' + p(t)y = f(t)$$

→ equação linear

(linear na variável y)

$$(y_1 + y_2)' + p(t)(y_1 + y_2) = f(t)$$

$$\Leftrightarrow (y_1' + p(t)y_1) + (y_2' + p(t)y_2) = f(t)$$

Vamos desenvolver um método para resolver este tipo de EDO

Caso 0

$$y' = f(t) \quad (p(t) \equiv 0)$$

→ Por cálculo I

$$y(t) = \int f(t) dt + c$$

Caso 1

$$y' + ay = 0 \quad (f(t) \equiv 0, p(t) = a)$$

$$y' = -ay \quad y > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = -a$$

integrável

$$\Rightarrow \int \frac{y'(t)}{y(t)} \cdot dt = \int -a dt$$

(regra da cadeia)

$$\Rightarrow \ln(y(t)) = -at + c \quad y > 0$$

$$\Leftrightarrow y(t) = e^{-at+c} = e^c \cdot e^{-at} = K e^{-at}$$

$$y(t) = K e^{-at} \quad K \text{ constante}$$

Caso 2

$$y' + ay = f(t) \quad (p(t) = a)$$

Notar que $\frac{d}{dt} [e^{at} \cdot y(t)] = a e^{at} y(t) + e^{at} y'(t) = e^{at} (y'(t) + ay(t))$

Multiplicando e^{at} em ambos os lados da equação

$$e^{at} (y' + ay) = e^{at} f(t)$$

$$\frac{d}{dt} [e^{at} y] = e^{at} f(t)$$

integrável

Integrando com relação a t.

$$\int \frac{d}{dt} [e^{at} y] \cdot dt = \int e^{at} f(t) \cdot dt$$

$$\Leftrightarrow e^{at} y(t) = \int e^{at} f(t) dt + c$$

$$y(t) = e^{-at} \cdot \left[\int e^{at} f(t) dt + c \right] \rightarrow \text{difícil, o quanto a } f \text{ for}$$

Caso Geral

Método do fator integrante

$$y' + p(t)y = f(t)$$

Queremos caracterizar $\mu(t)$ tal que ao multiplicar na equação:

$$\mu(t) y' + \mu(t) p(t) y = \mu(t) f(t) \quad (*)$$

|| quero isso

$$\frac{d}{dt} [\mu(t) \cdot y(t)]$$

torna o lado esquerdo integrável

Vamos achar uma expressão para $\mu(t)$:

$$\mu(t) y' + \mu(t) p(t) y = \frac{d}{dt} [\mu(t) y(t)] = \underbrace{\mu(t) y'}_{\text{regra do produto}} + \underbrace{\mu'(t) y}$$

$$\Leftrightarrow \mu(t) p(t) = \mu'(t) \quad \mu > 0$$

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = p(t)$$

$$\Rightarrow \ln \mu(t) = \int p(t) \cdot dt + c = 0$$

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt} \quad \text{Fator integrante}$$

Voltando em (*) $\frac{d}{dt} [\mu(t) y(t)] = \mu(t) f(t)$

integrando

$$\mu(t) y(t) = \int \mu(t) \cdot f(t) dt + c$$

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \cdot \left[\int \mu(t) \cdot f(t) \cdot dt + c \right] \rightarrow \text{não precisa decorar}$$

Exemplo

Resolva a EDO $y' - 2y = 4 - t$

Solução: LINEAR 1º ORDEM

• Determinar o fator integrante:

$$\int -2 \cdot dt$$

$$\mu(t) = e^{-2t} = e^{-2t}$$

• Multiplicamos $\mu(t)$ na equação

$$\underbrace{e^{-2t}y' - 2e^{-2t}y}_{\text{partes}} = e^{-2t}(4-t)$$

$$\int \frac{d}{dt} [e^{-2t}y] \cdot dt = \int e^{-2t}(4-t) \cdot dt$$

$$e^{-2t}y = \int (4e^{-2t} - \underbrace{te^{-2t}}_{\text{partes}}) dt = \frac{4}{-2} e^{-2t} + \left[\frac{1}{2} t \cdot e^{-2t} + \frac{1}{4} e^{-2t} \right] + C$$

$$= -2e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + C$$

$$y(t) = -2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + Ce^{2t}$$

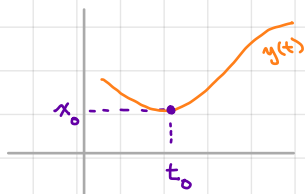
$$y(t) = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + Ce^{2t} \quad \text{Solução Geral}$$

Note que acima obtemos uma família de soluções

Uma equação em problema de valores inicial é a expressão

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \rightarrow \text{equação} \\ y(t_0) = y_0 \rightarrow \text{condição inicial} \end{cases}$$

Além disso, uma solução do PVI é uma função que satisfaz a EDO e passa pelo ponto (t_0, x_0)



↳ Resolva a equação e ache o C

Exemplo Resolva o PVI $\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

Solução LINEAR 1º ORDEM

ATENÇÃO! a equação não está na forma do método

$$ty' + 2y = 4t^2$$

para $t > 0$ dividindo por t :

$$y' + \underbrace{\left(\frac{2}{t}\right)}_{=p(t)} y = 4t$$

1) Calculando o fator integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} \cdot dt} = e^{2 \ln t} = e^{\ln t^2} = t^2$$

2) Multiplicando na equação

$$t^2 \left(y' + \frac{2}{t} y \right) = (4t) t^2$$

$$\underbrace{t^2 y' + 2ty}_{\Leftrightarrow} = 4t^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} [t^2 \cdot y(t)] = 4t^3$$

✓ pelo método

$$\text{integrando: } \int \frac{d}{dt} [t^2 y(t)] dt = \int 4t^3 dt$$

$$\Leftrightarrow t^2 \cdot y(t) = t^4 + C$$

$$y(t) = t^2 + \frac{C}{t^2} \quad \text{solução geral}$$

3) Achando a constante C tal que $y(1) = 2$

$$2 = y(1) = 1^2 + \frac{C}{1^2} \Leftrightarrow 1 = \frac{C}{1} \Leftrightarrow C = 1$$

Substituindo

$$y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \quad \text{solução do PVI}$$

Exemplo: Resolva o PVI $\begin{cases} ty'(t) - 3y(t) = t^4 \cos t \\ y(2\pi) = 0 \end{cases}$

Solução LINEAR 1º ORDEM

1) Pondo da forma $y' + p(t)y = f(t)$:
para $t > 0$, dividindo por t

$$y' - \frac{3}{t}y = t^3 \cos t$$

2) Calculando o fator integrante:

$$\mu(t) = e^{\int -\frac{3}{t} \cdot dt} = e^{-3 \ln t} = e^{\ln t^{-3}} = t^{-3}$$

3) Multiplicando na equação

$$t^{-3} \left(y' - \frac{3}{t} y \right) = t^3 \cos t \cdot t^{-3}$$

$$t^{-3} y' - \frac{3}{t^4} y = \cos t$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left[t^{-3} \cdot y \right]} = \cos t$$

integrando

$$t^{-3} \cdot y(t) = \int \frac{d}{dt} [t^{-3} \cdot y] = \int \cos t = \sin t + C$$

$$y(t) = t^3 \sin t + Ct^3$$

4) Achando c:

$$0 = y(2\pi) = (2\pi)^3 \sin 2\pi + C(2\pi)^3$$

$$\Leftrightarrow C = 0$$

Substituindo

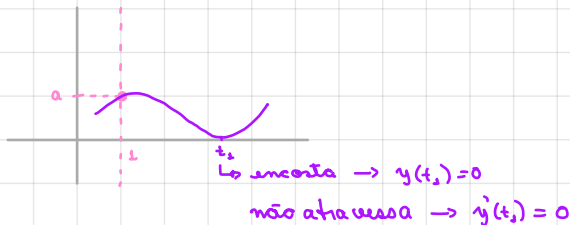
$$y(t) = t^3 \sin t \quad \text{solução do PVI}$$

Exemplo Determine a tal que a solução de

$$\begin{cases} y' - 2y = -4t & \text{encontre mas} \\ y(1) = a \end{cases}$$

NÃO atiraress o eixo t ,

Solução



$$1) \text{ Supra } t_2 \text{ tal que } \begin{cases} y(t_2) = 0 \\ y'(t_2) = 0 \end{cases}$$

Substituindo na equação

$$y'(t_2) - 2y(t_2) = -4t_2$$

$$\Rightarrow t_2 = 0$$

2) Resolvendo a equação linear

$$\mu(t) = e^{\int -2 \cdot dt} = e^{-2t}$$

$$\bullet \text{ multiplicando: } \underbrace{e^{-2t} y' - 2e^{-2t} y}_{\frac{d}{dt} [e^{-2t} y]} = -4te^{-2t}$$

Integrando

$$\int \frac{d}{dt} [e^{-2t} y] dt = \int \underbrace{-4te^{-2t}}_{\substack{u = 4t \\ du = 4dt \\ dv = -\frac{1}{2}e^{-2t} \\ v = \frac{1}{2}e^{-2t}}} dt$$

$$e^{-2t} \cdot y = 2e^{-2t} - \int \frac{1}{2} e^{-2t} \cdot 4 dt$$

$$= 2e^{-2t} + e^{-2t} + C$$

$$y(t) = 2t + 1 + e^{2t} \cdot C$$

• Achando C para $y(1) = a$:

$$a = y(1) = 2 + 1 + eC$$

$$C = (a-3)e^{-1}$$

Substituindo

$$y(t) = 2t + 1 + \underline{(a-3)} \cdot e^{2t-1}$$

Retornando a

$$0 = y(0) = 1 + \frac{(a-3)}{e}$$

$$a-3 = -e$$

$$a = 3-e$$

Exemplo Encontre o valor de y_0 para o qual a solução de

$$\begin{cases} y' - y = 1 + 3 \sin t \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

permanece finita quando $t \rightarrow \infty$

Solução

LINEAR 1ª ORDEM

$$1) \text{ fator integrante } \mu(t) = e^{\int -1 dt} = e^{-t}$$

2) Multiplicando na equação

$$\underbrace{e^{-t} y' - e^{-t} y}_{\frac{d}{dt} (e^{-t} y)} = e^{-t} + 3e^{-t} \sin t$$

$$\int \frac{d}{dt} (e^{-t} y) dt = \int e^{-t} + 3e^{-t} \sin t dt$$

$$e^{-t} y = -e^{-t} + \int 3e^{-t} \sin t dt \quad (*)$$

$$\int 3e^{-t} \sin t dt = -3e^{-t} \cos t - \int 3e^{-t} \cos t dt$$

$$dv = -3e^{-t} dt \quad u = \sin t$$

$$du = -\cos t$$

$$dv = -3e^{-t} \cdot dt = -3e^{-t} \cos t - \left[3e^{-t} \sin t + \int 3e^{-t} \sin t dt \right]$$

$$u = -\cos t$$

$$2 \int 3e^{-t} \sin t dt = -3e^{-t} (\cos t + \sin t)$$

$$\int 3e^{-t} \sin t dt = -\frac{3}{2} e^{-t} (\cos t + \sin t)$$

Voltando em (*)

$$e^{-t} y = -e^{-t} - \frac{3}{2} e^{-t} (\cos t + \sin t) + C$$

$$y(t) = -1 - \frac{3}{2} (\cos t + \sin t) + C e^t$$

3) achar C em função de y_0

$$y_0 = y(0) = -1 - \frac{3}{2} + C$$

$$\Rightarrow C = y_0 + 5/2$$

$$\text{Então } y(t) = -1 - \frac{3}{2} (\cos t + \sin t) + \underbrace{(y_0 + 5/2)}_{\substack{\text{esse termo vai} \\ \text{para } \infty \text{ quando} \\ t \rightarrow \infty}} e^t$$

esse termo vai para ∞ quando $t \rightarrow \infty$

|| para a solução
O ficar finita

$$\Rightarrow y_0 = -5/2$$