Exercícios de Analise de Fourier

Professor
Jorge Leonid Aching Samatelo
jlasam001@gmail.com

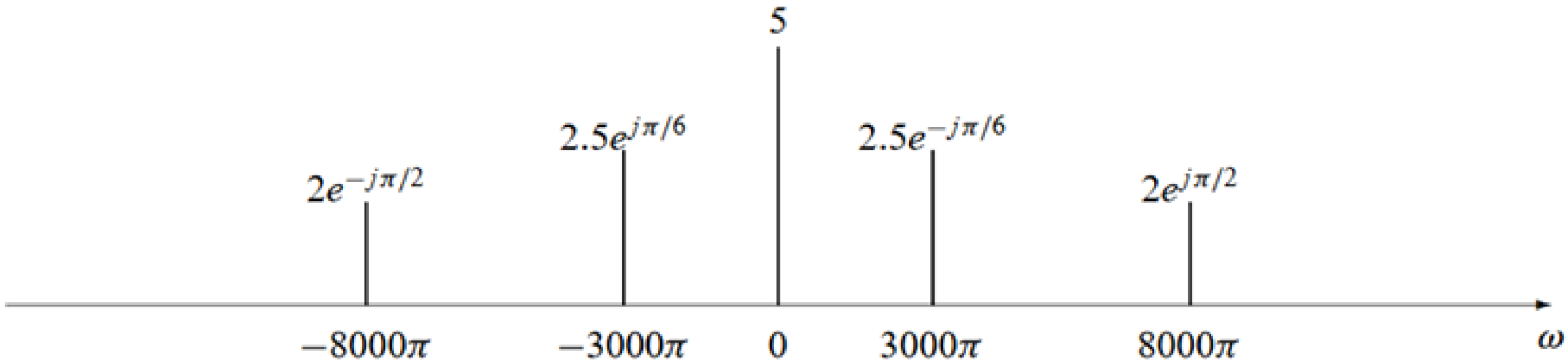
<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><th colspan="2">Sinal</th></tr>
<tr><td>Periódica</td><td>Aperiódica</td></tr>
<tr><th rowspan="2">Tempo</th><td>Valor contínuo
$x \in \mathbb{R}$</td><td>Series de Fourier de Tempo Continuo (CTFS)</td><td>Transformada de Fourier de Tempo Continuo (CTFT)</td></tr>
<tr><td>Valor Discreto
$x \in \mathbb{Z}$</td><td>Series de Fourier de Tempo Discreto (DTFS)</td><td>Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT)</td></tr>
</table>

Lista de Exercícios

Representação Espectral

Exercício

- O sinal real $x(t)$ tem o seguinte espectro bilateral



A. Escrever uma equação para $x(t)$ como a soma de sinais cosseno.

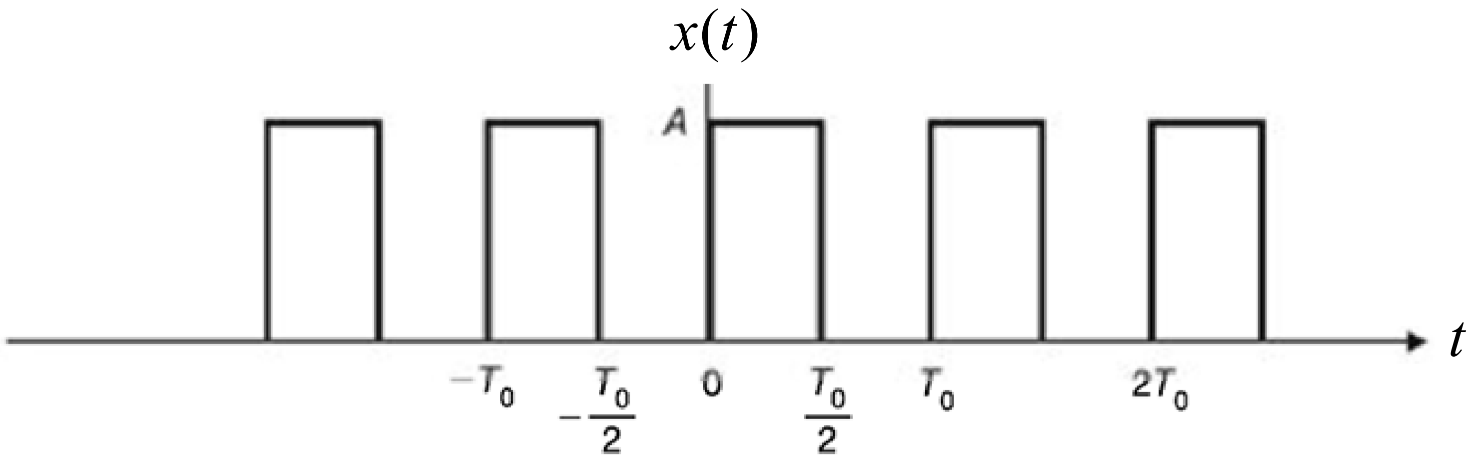
B. Desenhar o espectro do sinal $y(t)= 2x(t) – 3\cos(500\pi(t – 0{,}02))$.

Lista de Exercícios

CTFS

Exercício

- Considere o sinal quadrado periódico $x(t)$ mostrado na figura.
  - A. Determinar a forma exponencial complexa da série de Fourier de $x(t)$.
  - B. A partir da CTFS determinada em (A) obter a forma trigonométrica da serie de Fourier de $x(t)$.



Lista de Exercícios

CTFS

Exercício

- Encontrar os coeficientes das séries de Fourier para cada um das seguintes sinais:

  A. $x(t) = \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$

  B. $x(t) = 1 + \cos(2\pi t)$

  C. $x(t) = \big(1 + \cos(2\pi t)\big)\sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$

- *Dica para o item* (C): você pode primeiro multiplicar os termos e depois usar a identidade de Euler.

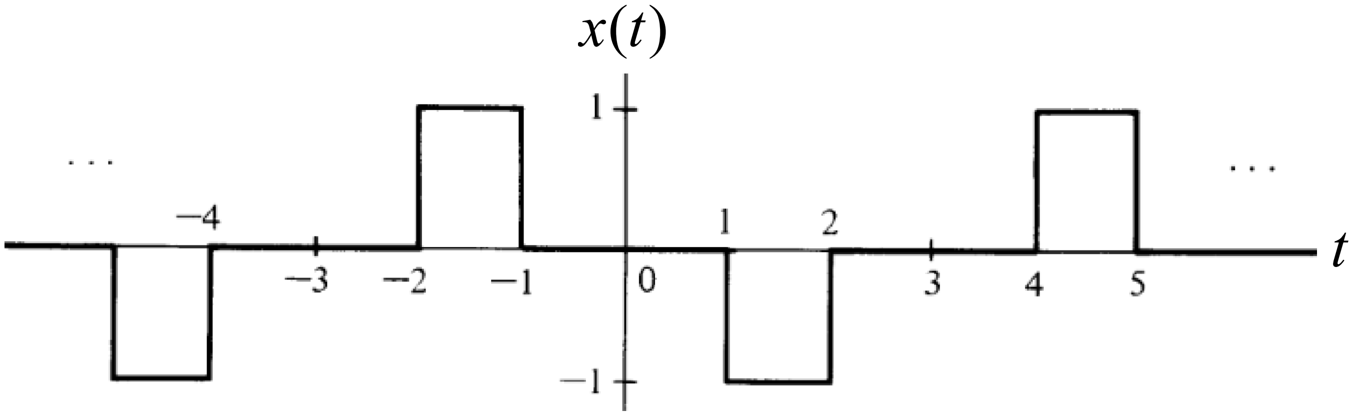
Lista de Exercícios

CTFS

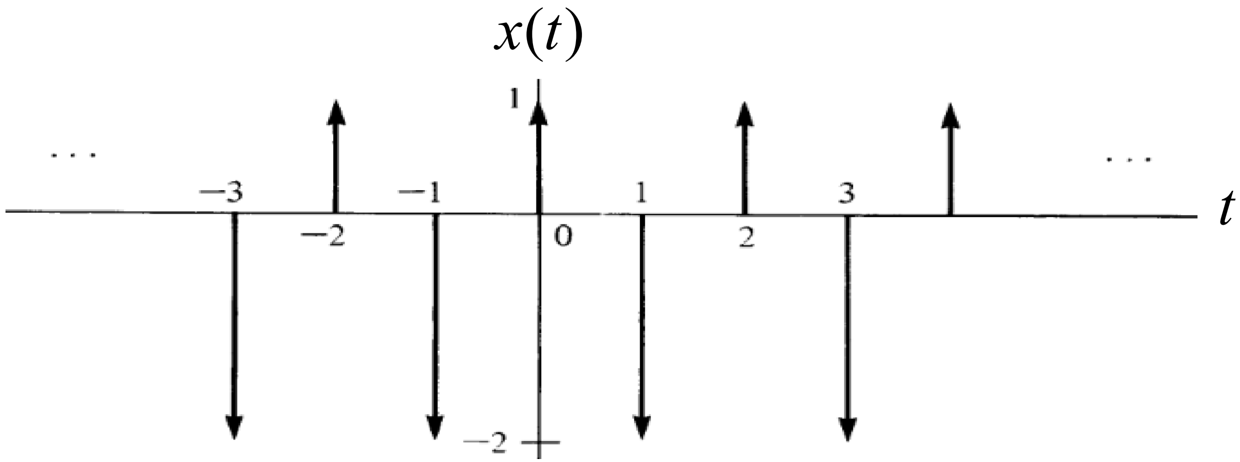
Exercício

- Determinar os coeficientes a_o, a_k e b_k da séries de Fourier dos seguintes sinais.

A.



B.

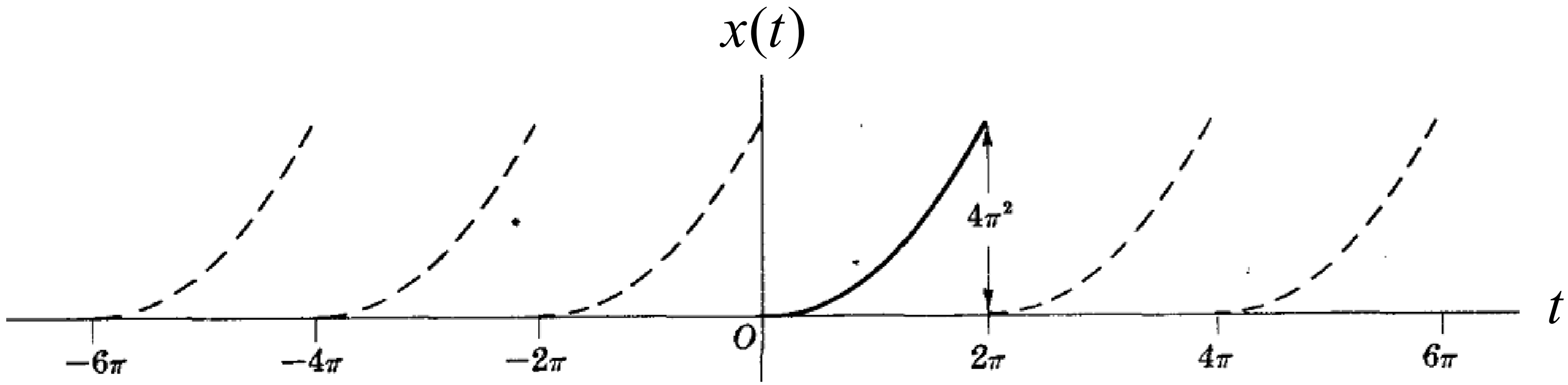


Lista de Exercícios

CTFS

Exercício

- Seja $x(t)$ uma função periódica. Determinar:
  1. O valor do período T.
  2. Os coeficientes a_o, a_k e b_k da CTFS.
  3. A forma expandida da série de Fourier para $x(t)$



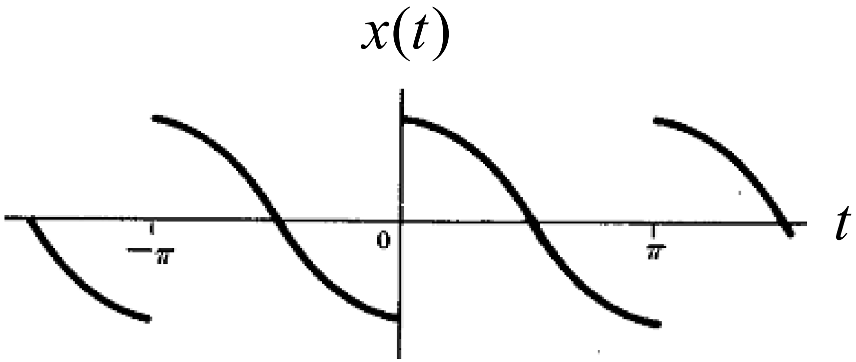
$$x(t) = \begin{cases} t^2 & t \in <0, 2\pi> \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

Lista de Exercícios

CTFS

Exercício

- Seja $x(t)$ uma função periódica. Determinar:
  1. O valor do período T.
  2. Os coeficientes a_o, a_k e b_k da CTFS.
  3. A forma expandida da série de Fourier para $x(t)$



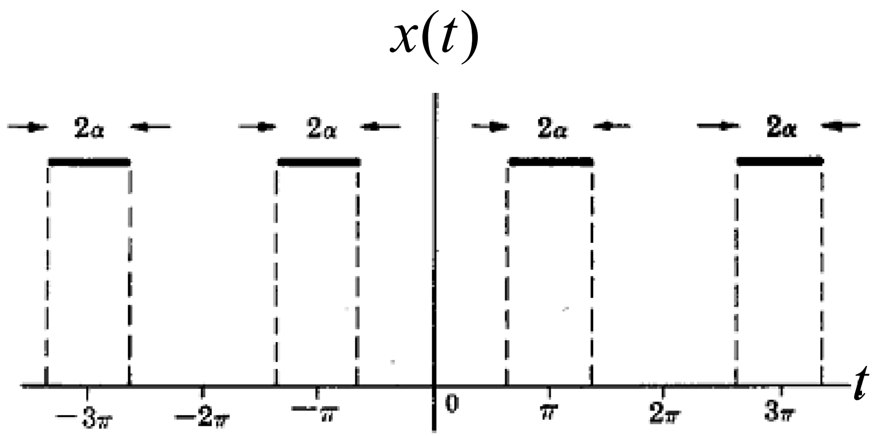
$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & t \in <0, \pi> \\ -\cos(t) & t \in <-\pi, 0> \end{cases}$$

Lista de Exercícios

CTFS

Exercício

- Seja $x(t)$ uma função periódica. Determinar:
  1. O valor do período T.
  2. Os coeficientes a_o, a_k e b_k da CTFS.
  3. A forma expandida da série de Fourier para $x(t)$



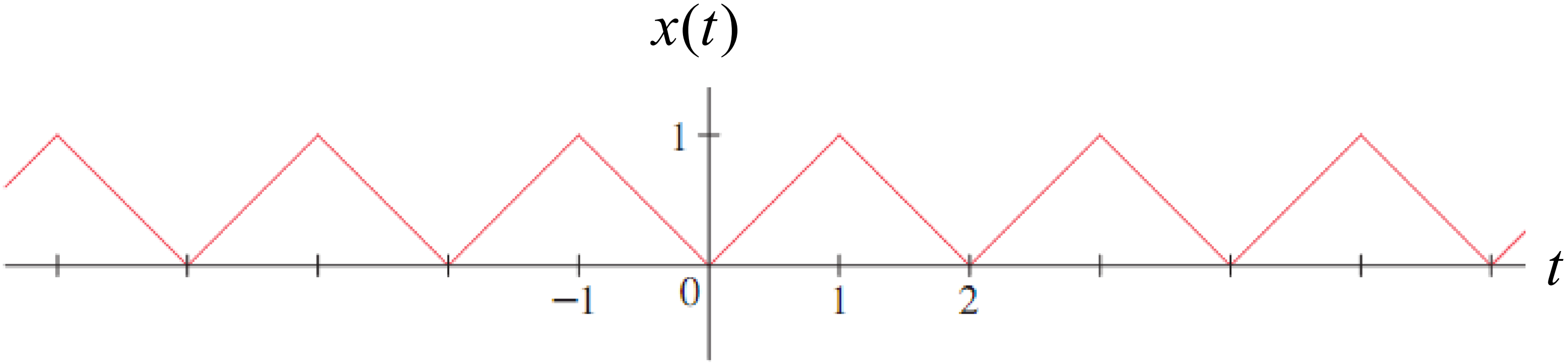
$$x(t)=\begin{cases}0 & t\in<0,\pi-a> \\ 1 & t\in<\pi-a,\pi+a> \\ 0 & t\in<\pi+a,2\pi>\end{cases}$$

Lista de Exercícios

CTFS

Exercício

- Seja $x(t)$ uma função periódica. Determinar:
  1. O valor do período T.
  2. Os coeficientes a_o, a_k e b_k da CTFS.
  3. A forma expandida da série de Fourier para $x(t)$



$$x(t) = |t| \;, \; t \in < -1,1 >$$

Lista de Exercícios

CTFS

Exercício

- Seja $x(t)$ uma função periódica no intervalo [-π,π].

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-\pi, 0 > \\ -1 & t \in [0, \pi > \end{cases}$$

1. Desenhar o sinal periódica $x(t)$.
2. Determinar os coeficientes a_o, a_k e b_k da CTFS.
3. Determinar a forma expandida da série de Fourier para $x(t)$

Lista de Exercícios

CTFS

Exercício

- Seja $x(t)$ uma função periódica no intervalo $[-\pi,\pi]$.

$$x(t) = t \; ; \; t \in [-\pi, \pi >$$

1. Desenhar o sinal periódica $x(t)$.
2. Determinar os coeficientes a_o, a_k e b_k da CTFS.
3. Determinar a forma expandida da série de Fourier para $x(t)$

Lista de Exercícios

CTFS

Exercício

- Seja $x(t)$ uma função periódica no intervalo $[-\pi,\pi]$.

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-\pi, 0 > \\ \cos(t) & t \in [0, \pi > \end{cases}$$

1. Desenhar o sinal periódica $x(t)$.
2. Determinar os coeficientes a_o, a_k e b_k da CTFS.
3. Determinar a forma expandida da série de Fourier para $x(t)$

Lista de Exercícios

CTFS

Exercício

- Seja $x(t)$ uma função periódica.

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1 \\ 0 & 1 \leq |t| < 2 \end{cases}$$

1. Desenhar o sinal periódica $x(t)$.
2. Determinar o valor do período T.
3. Determinar os coeficientes a_o, a_k e b_k da CTFS.
4. Determinar a forma expandida da série de Fourier para $x(t)$

Lista de Exercícios

CTFS

Exercício

- Seja $x(t)$ uma função periódica.

$$x(t) = \begin{cases} -t & t \in [-4, 0> \\ 0 & t \in [0, 4> \end{cases}$$

1. Desenhar o sinal periódica $x(t)$.
2. Determinar o valor do período T.
3. Determinar os coeficientes a_o, a_k e b_k da CTFS.
4. Determinar a forma expandida da série de Fourier para $x(t)$

Lista de Exercícios

CTFS

Exercício

- Seja $x(t)$ uma função periódica.

$$x(t) = \sin(3\pi t)\ ;\ t \in [-1,1]$$

1. Desenhar o sinal periódica $x(t)$.
2. Determinar o valor do período T.
3. Determinar os coeficientes a_o, a_k e b_k da CTFS.
4. Determinar a forma expandida da série de Fourier para $x(t)$

Lista de Exercícios

CTFS

Exercício

- Seja $x(t)$ uma função periódica.

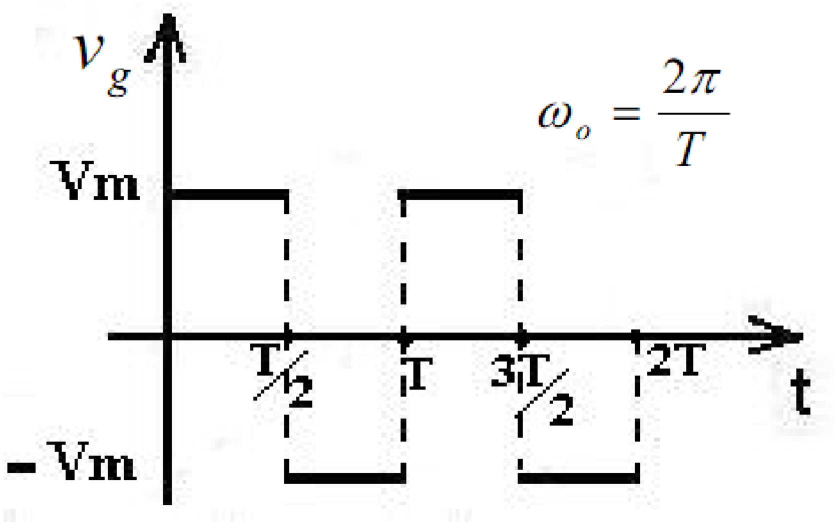
$$x(t) = \begin{cases} t^2 & t \in [-1,1] \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

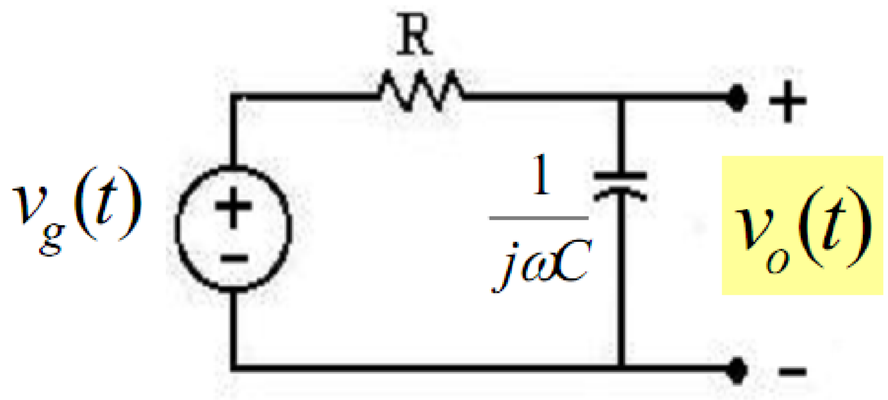
1. Desenhar o sinal periódica $x(t)$.
2. Determinar o valor do período T.
3. Determinar os coeficientes a_o, a_k e b_k da CTFS.
4. Determinar a forma expandida da série de Fourier para $x(t)$
5. Usando a CTFS de $x(t)$ mostre que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercício

- Para o circuito da Figura abaixo, determine a serie de Fourier da tensão de saída $v_0(t)$ quando a entrada é a tensão $v_g(t)$.





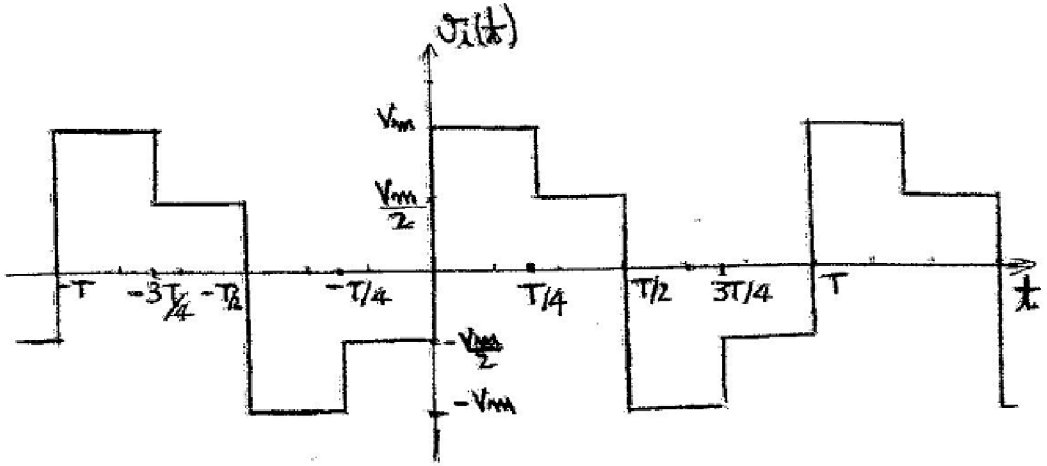
Lista de Exercícios

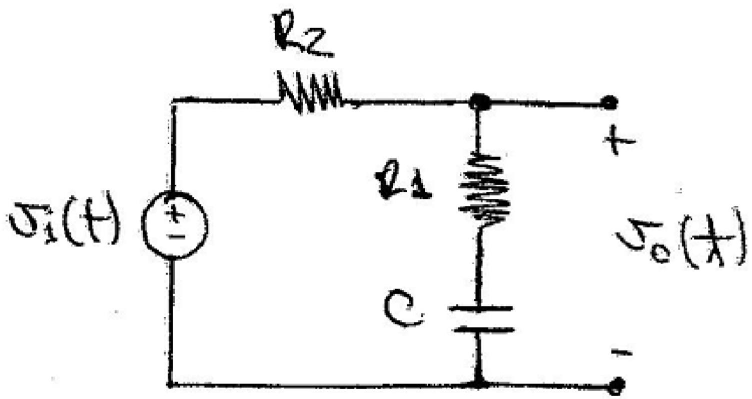
CTFS

Exercício

- Para o circuito da Figura abaixo, determine os termos da série de Fourier da tensão $v_i(t)$ até o 5º(quinto) harmônico, e com isso, determine cada termo da tensão $v_0(t)$. Assuma:

$$V_m = 100\pi\,\text{V} \quad T = 2\pi 10^{-3}\,\text{sg} \quad R_1 = 1\text{K}\Omega \quad R_2 = 9\text{K}\Omega \quad C = 1\mu\text{F}$$





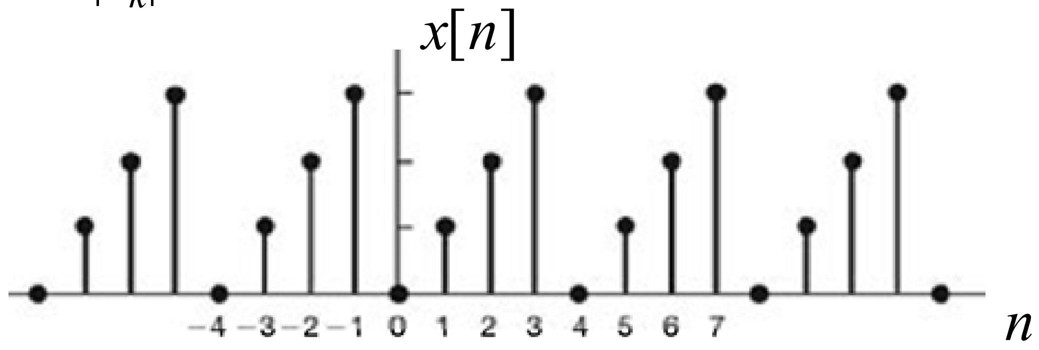
Lista de Exercícios

DTFS

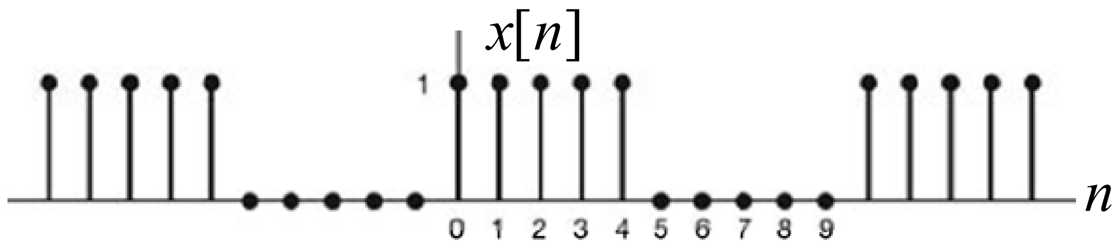
Exercício

- Considerar as sequências periódicas $x[n]$ mostradas nas Figuras abaixo. Determine os coeficientes da Serie de Fourier c_k e desenhe a representação espectral da magnitude $|c_k|$.

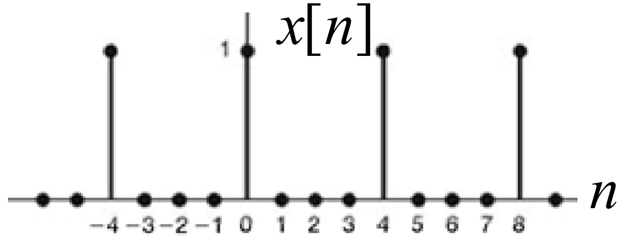
A.



B.



C.



Lista de Exercícios

DTFS

Exercício

- Considere um sistema LTI com resposta ao impulso

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 2 \\ -1, & -2 \le n \le -1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- Encontre a representação da série de Fourier da saída $y^*[n]$ para cada uma das seguintes entradas.

A. $$x^*[n] = \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$$

B. $$x^*[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$$

C. $$x^*[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \pm 1 \\ 0, & n = \pm 2, \pm 3, \pm 4 \end{cases} \qquad x^*[n] = x^*[n+6]$$

D. $$x^*[n] = j^n + (-1)^n$$

Lista de Exercícios

DTFS

Exercício

- Considere um sistema LTI com resposta ao impulso

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

- Encontre a representação da série de Fourier da saída $y^*[n]$ para cada uma das seguintes entradas.

A. $$x^*[n] = \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$$

B. $$x^*[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$$

C. $$x^*[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \pm 1 \\ 0, & n = \pm 2, \pm 3, \pm 4 \end{cases} \qquad x^*[n] = x^*[n+6]$$

D. $$x^*[n] = j^n + (-1)^n$$

Lista de Exercícios

DTFS

Exercício

- Nos itens (A), (B) , (C) e (D) especificamos os coeficientes das series de Fourier de um sinal que é periódico com período igual a 8. Determine o sinal $x[n]$ para cada caso.

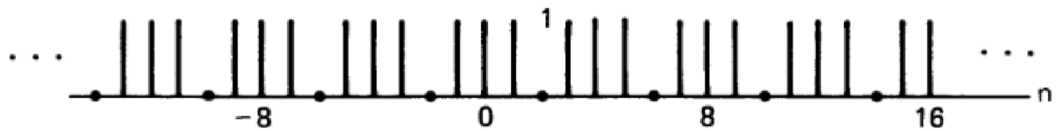
A.

$$a_k = \cos\left(k\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3k\frac{\pi}{4}\right)$$

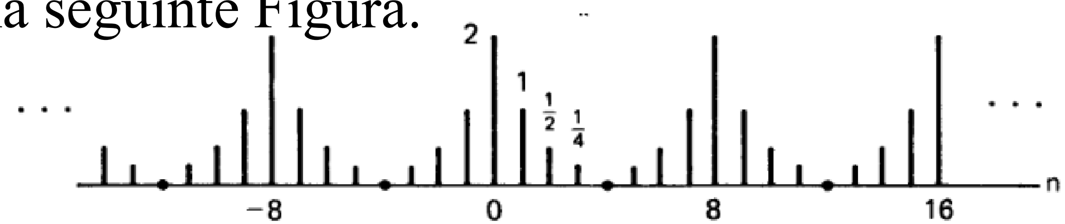
B.

$$a_k = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{k\pi}{3}\right) & 0 \le k \le 6 \\ 0, & k = 7 \end{cases}$$

C. a_k como na seguinte Figura.



D. a_k como na seguinte Figura.



Lista de Exercícios

DTFS

Exercício

- Considerar um sistema de tempo discreto com resposta ao impulso

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

- Determine a saída $y[n]$ para cada uma das seguintes entradas periódicas:

A.

$$x[n] = (-1)^n = e^{j\pi n} \quad para\ todo\ n$$

B.

$$x[n] = e^{j(\pi n/4)} \quad para\ todo\ n$$

C.

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{8}\right) \quad para\ todo\ n$$

Lista de Exercícios

CTFT

Exercício

- Determinar a CTFT do sinal

$$x(t) = e^{-at^2}$$

Exercício

- Considere o sinal $x(t)$ com CTFT $X(w)$, suponha que são conhecidos os seguintes fatos:
  - O sinal $x(t)$ é real e não negativa.
  - é valido o seguinte par da transformada de Fourier

$$Ae^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{CTFT} (1+jw)X(w)$$

  Onde A é independente de t.
  - $X(w)$ tem energia finita:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\| X(w) \right\|^2 dw = 2\pi$$

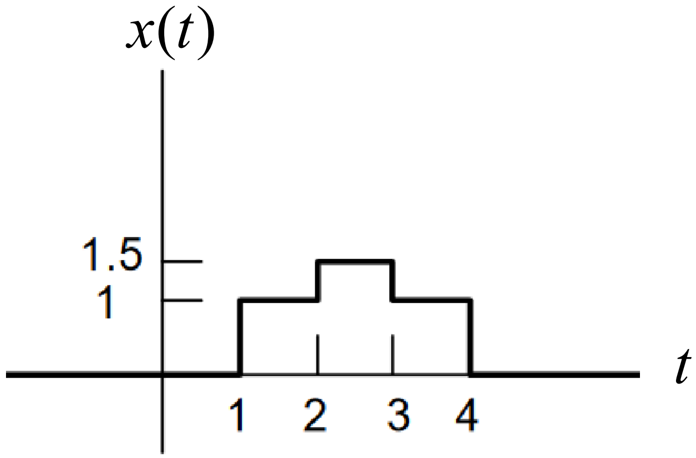
- Então, determine a expressão fechada para $x(t)$.

Lista de Exercícios

CTFT

Exercício

- Determine a CTFT do seguinte sinal



Lista de Exercícios

CTFT

Exercício

- Determine a CTFT de $x(t)$.

  A. $$x(t) = e^{-a|t|} \;\; ; \; a > 0$$

  B. $$x(t) = \begin{cases} e^{-3t} & t \geq 3 \\ e^{-6t} & 0 \leq t < 3 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Lista de Exercícios

CTFT

Exercício

- Considere o par da transformada de Fourier

$$e^{-|t|} \xleftrightarrow{CTFT} \frac{2}{1+w^2}$$

A. Use as apropriadas propriedades da CTFT para determinar a CTFT do sinal:

$$x(t) = te^{-|t|}$$

B. Use o resultado item (A), e a propriedade dual para determinar a CTFT do sinal:

$$x(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

Lista de Exercícios

CTFT

Exercício

- Dado $x(t) \xleftrightarrow{CTFT} X(w)$, expresse o CTFT dos sinais listadas embaixo em termos de $X(w)$.

  A.
  $$x_1(t) = x(1-t) + x(-1-t)$$
  B.
  $$x_2(t) = x(3t-6)$$
  C.
  $$x_3(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t-1)$$

Lista de Exercícios

CTFT

Exercício

- Determine a CTFT de cada um das seguintes sinais periódicas:

  A.

$$x(t) = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

  B.

$$x(t) = 1 + \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$$

Exercício

- O sinal $x(t) = e^{bt}u(-t)$ é um exemplo de um sinal exponencial real de lado esquerdo. Desenhar o sinal para $b > 0$ e mostrar que a CTFT de $x(t)$ é:

$$X(w) = \frac{1}{b - jw}$$

- se $b > 0$, Também, mostre que a CTFT não existe se $b \leq 0$.

Exercício

- Para a função ímpar real

$$x(t) = e^{at}u(-t) - e^{-at}u(t)$$

- Mostre que a CTFT é:

$$X(w) = \frac{j2w}{a^2 + w^2}$$

Lista de Exercícios

CTFT

Exercício

- ❑ Considere que a resposta em frequência de um sistema LTI vem definida pela expressão:

$$H(w) = \frac{jw+2}{(jw+1)(jw+3)}$$

- ❑ Suponha que a entrada ao sistema é o sinal:

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

- ❑ Determiar o sinal de saída $y(t)$

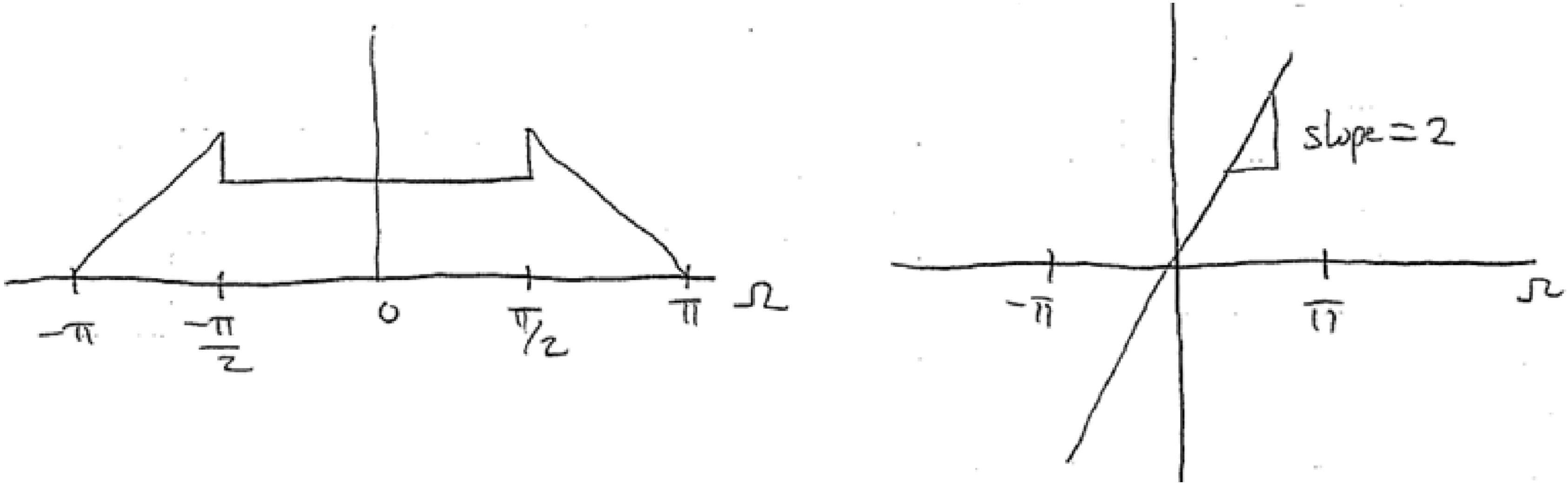
Lista de Exercícios

DTFT

Exercício

- Considere a sequência $x[n]$ cuja DTFT é mostrado abaixo para $-\pi \leq \Omega \leq \pi$. Desejamos determinar se no domínio do tempo $x[n]$ é periódico, real, par e/ou de energia finita.

$\|X(\Omega)\|$ $\underline{|X(\Omega)}$



Lista de Exercícios

DTFT

Exercício

- Usando a definição da DTFT determine a DTFT dos seguintes sinais discretas:
  - 1.
    $$x[n] = (0,5)^n u[n]$$
  - 2.
    $$x[n] = (0,5)^{|n|}$$
  - 3.
    $$x[n] = 2^n u[-n]$$
  - 4.
    $$x[n] = (0,5)^n u[-n]$$
  - 5.
    $$x[n] = 2^{|n|}$$
  - 6.
    $$x[n] = 3(0,8)^{|n|} \cos(0,1\pi n)$$

- **OBS**. No caso que a DTFT não exista, indicar o motivo.

Lista de Exercícios

DTFT

Exercício

- Considerando que:

$$\text{DTFT}\{(0,8)^n u[n]\} = \frac{1}{1-0,8e^{jw}}$$

- Usando as propriedades da DTFT determinar a DTFT das seguintes sinais discretos
  - 1.
    $$x[n] = (0,8)^n u[n-2]$$
  - 2.
    $$x[n] = (0,8)^n \cos(0,1\pi n) u[n]$$
  - 3.
    $$x[n] = n(0,8)^n u[n]$$
  - 4.
    $$x[n] = (0,8)^{-n} u[-n]$$
  - 5.
    $$x[n] = \begin{cases} (0,8)^n & n \in [0,5] \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

Lista de Exercícios

DTFT

Exercício

- Derivar o DTFT do degrau unitário

$$x[n] = u[n]$$

Lista de Exercícios

DTFT

Exercício

- Considere o sistema causal LTI descrito pela equação de diferenças

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$$

- Usando a DTFT, determine:
  A. A resposta de frequência $H(\Omega)$ do sistema.
  B. A resposta ao impulso $h[n]$ do sistema.

Lista de Exercícios

DTFT

Exercício

- Determine a DTFT dos seguintes sinais.

A. $x[n] = u[n] - u[n-6]$

B. $x[n] = 2^n u[-n]$

C. $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+4]$

D. $x[n] = \alpha^n \sin(\omega_0 n) u[n]$
$|\alpha| < 1$

E. $x[n] = |\alpha|^n \sin(\omega_0 n), |\alpha| < 1$

F. $x[n] = \begin{cases} 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, & |n| \leq 4 \\ 0, & elsewhere \end{cases}$

G. $x[n] = \{-2, -1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2\}$

H. $x[n] = \begin{cases} A(2M+1-|n|) & |n| \leq M \\ 0 & |n| > M \end{cases}$

Lista de Exercícios

DTFT

Exercício

- Determine o sinal $x[n]$ tendo as seguintes DTFT^{-1}.

A.

$$X(\Omega) = \begin{cases} 0 & 0 \leq |\Omega| \leq \Omega_0 \\ 1 & \Omega_0 < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

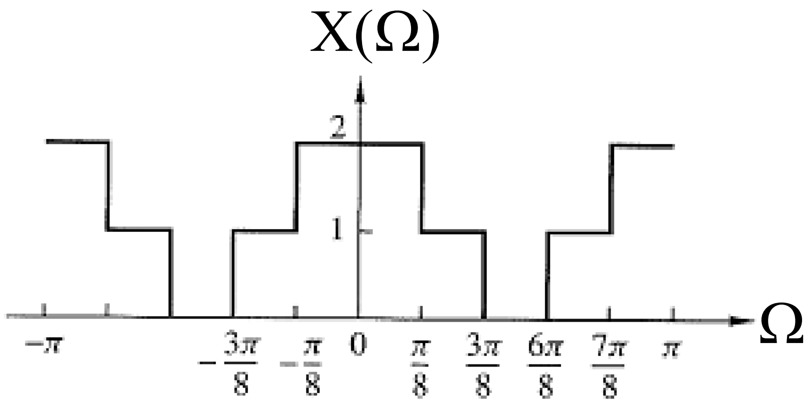
B.

$$X(\Omega) = \cos^2(\Omega)$$

C.

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1 & \Omega_0 - \Delta\Omega/2 \leq |\Omega| \leq \Omega_0 + \Delta\Omega/2 \\ 0 & \textit{elsewhere} \end{cases}$$

D. O sinal mostrado na seguinte Figura



Lista de Exercícios

DTFT

Exercício

- Considere o sinal

$$x[n] = \{-1, 2, -\underset{\uparrow}{3}, 2, -1\}$$

- Cuja transformada de Fourier é $X(\Omega)$. Calcule as seguintes quantidades, sem calcular explicitamente $X(\Omega)$:

A.
$$X(0)$$

B.
$$\angle X(\Omega)$$

C.
$$\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)d\Omega$$

D.
$$X(\pi)$$

E.
$$\int_{-\pi}^{\pi} | X(\Omega) |^2 \, d\Omega$$

Exercício

- Seja a resposta impulsiva de um sistema LTI

$$h[n] = (0,5)^n \cos(\pi n / 2) u[n]$$

  - 1. Usando a DTFT determinar a resposta em frequência do sistema $H(\Omega)$.
  - 2. Supondo que, $x[n] = \cos(\pi n/2)$, determine a saída do Sistema LTI usando $H(\Omega)$.

Lista de Exercícios

DTFT

Exercício

- Seja a equação em diferenças de um sistema LTI

$$y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-x[n-1]$$

  - 1. Usando a DTFT determinar a resposta em frequência do sistema $H(\Omega)$.
  - 2. Usando a IDTFT determinar a resposta impulsiva do sistema $h[n]$.
  - 3. Determinar as expressões para magnitude e a fase de $H(\Omega)$.
  - 4. Avaliar a magnitude e a fase de $H(\Omega)$ quando $\Omega=\{0, \pi/4, -\pi/4, 9\pi/4\}$.

Exercício

- Seja a equação em diferenças de um sistema LTI

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]$$

  - 1. Usando a DTFT determinar a resposta em frequência do sistema $H(\Omega)$.
  - 2. Usando a IDTFT determinar a resposta impulsiva do sistema $h[n]$.
  - 3. Determinar as expressões para magnitude e a fase de $H(\Omega)$.

Lista de Exercícios

DTFT

Exercício

- Seja a equação em diferenças de um sistema LTI

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]$$

  - 1. Usando a DTFT determinar a resposta em frequência do sistema $H(\Omega)$.
  - 2. Usando a IDTFT determinar a resposta impulsiva do sistema $h[n]$.
  - 3. Determinar as expressões para magnitude e a fase de $H(\Omega)$.
  - 4. Determine a saída do sistema $y[n]$ quando a entrada é:

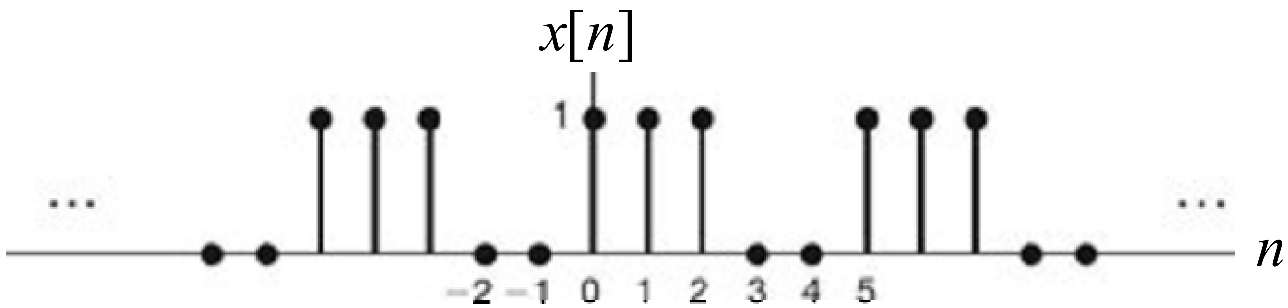
$$x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Exercício

- Seja a resposta impulsiva de um sistema LTI

$$h[n] = \frac{\sin(\pi n / 4)}{\pi n}$$

  - Determinar a saída $y[n]$ se a entrada é um sinal periódica discreta com período fundamental $N = 5$, tal como é mostrado na seguinte figura.



Exercício

- Seja a equação em diferenças de um sistema LTI

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

  - 1. Usando a DTFT determinar a resposta em frequência do sistema $H(\Omega)$.
  - 2. Usando a IDTFT determinar a resposta impulsiva do sistema $h[n]$.
  - 3. Determinar as expressões para magnitude e a fase de $H(\Omega)$.
  - 4. Determine a largura da faixa de 3dB do sistema, ou seja, encontre o valor de Ω_{3dB} que cumpre com a relação:

$$|H(\Omega_{3dB})| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(\Omega)|_{MAX}$$

Lista de Exercícios

DTFT

Exercício

- Seja a equação em diferenças de um sistema LTI

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \quad ; \quad a \in <0,1>$$

  - 1. Usando a DTFT determinar a resposta em frequência do sistema $H(\Omega)$.
  - 2. Usando a IDTFT determinar a resposta impulsiva do sistema $h[n]$.
  - 3. Determinar as expressões para magnitude e a fase de $H(\Omega)$.
  - 4. Determine a largura da faixa de 3dB do sistema, ou seja, encontre o valor de $\Omega_{3\text{dB}}$ que cumpre com a relação:

$$|H(\Omega_{3\text{dB}})| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(\Omega)|_{MAX}$$

Lista de Exercícios

DTFT

Exercício

- Seja a equação em diferenças de um sistema LTI

$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right)$$

  - 1. Determinar a resposta impulsiva do sistema $h[n]$.
  - 2. Usando a DTFT determinar a resposta em frequência do sistema $H(\Omega)$.
  - 3. Determinar as expressões para magnitude e a fase de $H(\Omega)$.

Lista de Exercícios

DTFT

Exercício

- Seja a resposta impulsiva de um sistema LTI

$$h[n] = \{\underset{\uparrow}{2}, 2, -2, -2\}$$

  - 1. Usando a DTFT determinar a resposta em frequência do sistema $H(\Omega)$.
  - 2. Determinar as expressões para magnitude e a fase de $H(\Omega)$.

Bom Trabalho!!!