Universidade Federal de Viçosa
CCE - Departamento de Matemática
Lista 4 de MAT 137
Introdução à Álgebra Linear: Transformações Lineares, Autovalores e Autovetores

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear que dobra o comprimento do vetor $u = (2, 1)$ e triplica o comprimento do vetor $v = (1, 2)$ sem alterar as direções e nem inverter os sentidos.

(a) Determine $T(x, y)$.

(b) Determine a matriz da transformação linear em relação à base $\beta = \{(2, 1), (1, 2)\}$.

2. Consider a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação às bases $\beta = \{(-1, 1), (1, 0)\}$ e $\beta' = \{(1, 1, -1), (2, 1, 0), (1, 1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre a expressão de $T(x, y)$ em relação às bases canônicas de cada espaço.

(b) Qual é a imagem do vetor $(2, -3)$ pela T.

(c) Se $T(v) = (2, 4, -2)$, calcule v.

3. Determine as matrizes $[T]_{\beta,\beta'}$ em cada uma das seguintes transformações lineares com relação às bases dadas.

(a) $T(x, y) = (x + 2y, 2x - 2y)$, $\beta = \{(0, 1), (2, -2)\}$, $\beta' = \{(1, 0), (2, -2)\}$

(b) $T(x, y) = (3x + 2y, 4x - 2y)$, $\beta = \{(-3, 1), (2, -2)\}$, $\beta' = \{(1, 0), (1, 3)\}$

(c) $T(x, y, z) = (x, 4x+y, x+z)$, $\beta = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, $\beta' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

4. Sabendo que a matriz do operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ em relação à base

$$\beta' = \{(1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 3)\}$$

é

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

determinar a matriz de T relativa à base canônica.

5. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (x - y, x + 2y - z, y - z)$ e considere $\alpha = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ e $\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ duas bases de $\mathbb{R}^3$.

(a) Encontre a matriz da transformação linear T da base α para a β.

(b) Se $[T(v)]_\beta = (1, 2, -1)$, encontre v.

6. Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 2), T(0, 1, 0, 0) = (1, 2, 3), T(0, 0, 1, 0) = (2, 0, 2)$ e $T(0, 0, 0, 1) = (4, 0, 4)$.

(a) Encontre $T(x, y, z, t)$,

(b) Determine uma base de $N(T)$.

(c) Determine uma base de $\mathrm{Im}(T)$.

7. Sejam os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$, $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x - y + 4z = 0\}$, e $W_2 = [(0, 1, 0), (1, 0, 1)]$ então:

(a) Prove que W_1 é um subespaço e determine uma base.

(b) Determinar a dimensão de $W_1 \cap W_2$.

8. Determine uma transformação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que $T(1) = x$, $T(x) = 1 - x^2$ e $T(x^2) = 2x$. Encontre o núcleo e a imagem de T.

9. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear definido pela fórmula:

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 2z, 2x + 7y + 5z, -x - 2y).$$

(a) Verifique que T é injetora.

(b) Encontre T^{-1}.

10. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja gerado pelos vetores $v_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (1, 2, 1)$.

12. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cujo imagem seja gerada pelos vetores $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 1)$.

13. Mostre que o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, -z)$ é inversível e determine T^{-1}.

14. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $T(1, 0, 1) = (1, 1, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 0, -1)$ e $T(0, 1, 1) = (0, 0, 1)$.

(a) Determine $T(x, y, z)$.

(b) Determinar a matriz da transformação com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

(c) T é inversível? Se for, calcule sua inversa.

15. Determine os autovalores e autovetores dos seguintes opeadores lineares:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + 2y, x + 3y)$.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$.

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, -2x - y, 2x + y + 2z)$.

(e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z)$.

16. Os vetores $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (2, -1)$ são autovetores de um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associados a $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$ respectivamente. Usando estas informações, determine a imagem do vetor $v = (4, 1)$ por este operador.

17. Determinar o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujos autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$, associados aos autovetores $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (-1, 0)$.

18. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = (a + c)x^2 + (3a + 2b - c)x + 3c$.

(a) Encontre os autovalores de T.

(b) Encontre uma base para cada auto-espaço de T.

19. Consider a aplicação $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11} + a_{22}$.

(a) Mostre que T é transformação linear.

(b) A matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ pertence ao núcleo de T?.

(c) Encontre uma base do núcleo de T.

(d) Encontre uma base da imagem de T.

20. Considere o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (-2x - 4y, 2x + 4y, -2x - 2y + 2z)$.

(a) Determine o polinômio característico de T.

(b) Quais são os autovalores de T?

(c) T é inversível.

21. Dê, quando possível, exemplos de transformações lineares T e S satisfazendo as seguintes condições:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sobrejetora.

(b) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $N(S) = \{(0, 0, 0)\}$.

22. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (2z, -y, 2x)$.

(a) Encontre os autovalores de T.

(b) Encontre os autovetores de T.

(c) Diagonalize T.

23. Verifique se as matrizes dadas são diagonalizáveis.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

24. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dado por $T(x, y, z, t) = (y + t, x + z, y + t, x + z)$.

(a) Determine o polinômio de T.

(b) Quais são os autovalores de T?

(c) Encontre os autovetores de T.

(d) T é inversível?

(e) T é diagonalizável? Em caso afirmativo, dê uma base β na qual $[T]_\beta$ é diagonal.