

Aula passada: Modelagem $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{velocidade de escape} \\ \cdot \text{outros} \end{array} \right.$

Aula Hoje: Dinâmica populacional
equações autônomas

2.5 Equações autônomas e Dinâmica populacional

Definição A equação da forma

$$y' = f(y)$$

que a variável independente t não aparece
é dita **Equação autônoma**.

> Separável, mas queremos obter informações qualitativas sem resolvê-las.

Exemplo:

a) $y' = Ky$ modelo de crescimento exponencial
 K taxa de crescimento ou declínio

b) $y' = r \left(1 - \frac{y}{K} \right) y$ modelo de crescimento logístico

Definição Dizemos que c é um ponto de equilíbrio ou estacionário de

$$y' = f(y)$$

quando

$$f(c) = 0$$

Note que se c é ponto estacionário

$y = c$ (função constante) é solução

da EDO $y' = f(y)$, ora $[c]' = 0 = f(c)$

Neste caso $y(t) = c$ é dita **solução de equilíbrio ou estacionária**

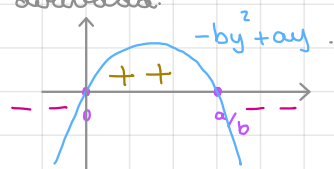
Podemos dizer quando uma solução $y(t)$ é crescente ou decrescente determinando o sinal de y' . Para equações autônomas fazemos isso sobre o eixo y onde $f(y)$ é positiva ou negativa

Exemplo Faça uma análise das soluções de $y' = y(a - by)$, $a, b > 0$

Solução

• soluções de equilíbrio: $y(a - by) = 0$
 $y = 0$ e $y = \frac{a}{b}$

• Analisar o sinal da derivada:



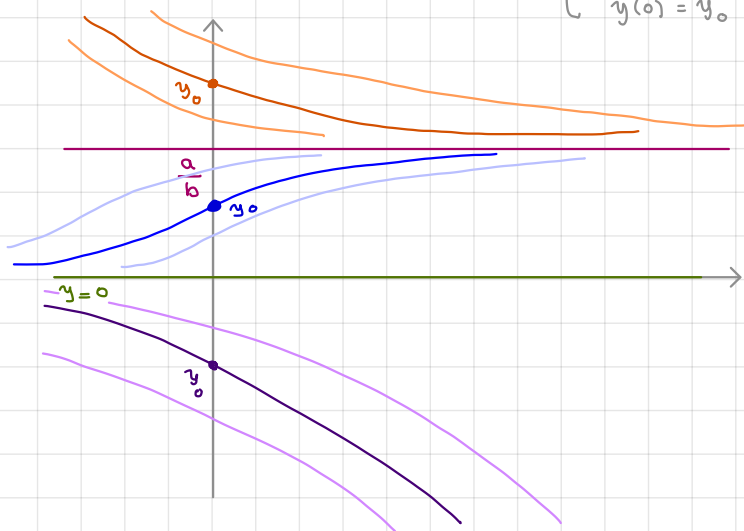
y'

Quando os valores de $y(t) > a/b$
a função é decrescente.

Quando os valores de $y(t) \in (0, a/b)$
a função é crescente.

Quando os valores de $y(t) < 0$
a função é decrescente.

• Esboçar algumas soluções $\begin{cases} y' = y(a - by) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$



Pelo TEU em um ponto passa uma única solução.

• $(0, y_0)$, se $y_0 > \frac{a}{b}$ então a solução

permanece na região $\mathbb{R} \times (\frac{a}{b}, \infty)$

porque não pode

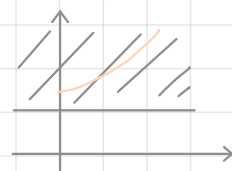
crossar a solução

$y = a/b$ e é decrescente

então $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \frac{a}{b}$

e $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = +\infty$

↳ Não converge para uma assíntota horizontal pois, se sim, ela seria solução da EDO



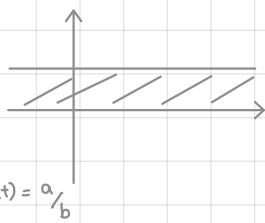
• $(0, y_0)$ se $\frac{a}{b} > y_0 > 0$ então a solução permanece na região $\mathbb{R} \times (0, a/b)$

porque não pode
cruzar as soluções

$$y=0, y=a/b$$

E é sempre crescente

$$\text{Então } \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = a/b$$



• $(0, y_0)$, $y_0 < 0$ então a solução

pertence a região

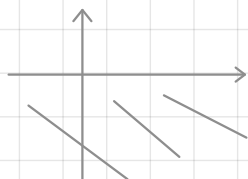
$$\mathbb{R} \times (0, \infty)$$

porque não pode

cruzar a solução $y=0$

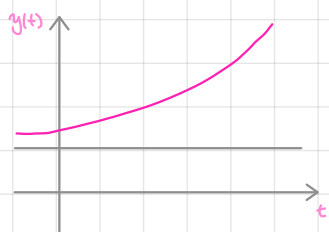
e ela é decrescente

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\infty$$

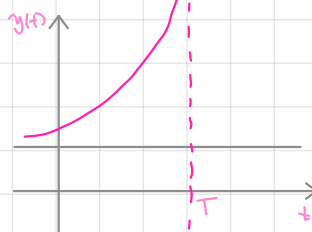


NOTA

- O que ainda não é claro é se para $y_0 > a/b$ a solução está definida em \mathbb{R} .



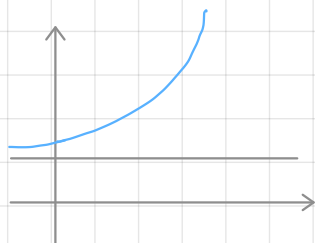
definida em \mathbb{R}



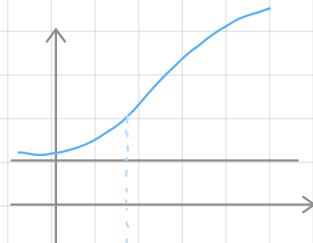
definida em $(0, T)$

igual para $y_0 < 0$

- Não é claro também a concavidade da solução



concava para cima



concava para baixo

Vamos fazer a segunda derivada para determinar os pontos de inflexão e o sinal

$$y' = f(y)$$

$$y'' = f'(y) \cdot y'(t)$$

$$y'' = f'(y) \cdot f(y)$$

- $f'(y) = f(y)$ mesmo sinal = concava para cima

- $f'(y), f(y)$ sinais contrários = concava para baixo

Definição Uma solução $y(t)=c$ de equilíbrio é dita

a) **assintoticamente estável** quando

para soluções que estão suficientemente perto de c temos $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = c$

b) **instável** caso contrário

Esse conceito é importante em modelagem

Exemplo Classifique as soluções de equilíbrio em $y' = y(a - by)$

Solução

Pelo que fizemos antes

- $y=0$ é assintoticamente estável
- $y=a/b$ é instável

Crescimento exponencial:

Seja $y(t)$ a população de uma espécie no instante t . A hipótese mais simples sobre a variação da população é que:

A taxa de variação é proporcional ao valor atual de y :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

taxa de crescimento ou declínio

Resolvendo obtemos

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

↳ esse é um modelo simples demais

Crescimento logístico (Equação de Verhulst)

Para levar em consideração o fato de que a taxa de crescimento depende, realmente, da população atual, vamos substituir a constante x por $x - ay$ $a > 0$

Assim

$$\frac{dy}{dt} = (x - ay) \cdot y$$

podemos escrever, fazendo $k = x/a$ a equação da seguinte forma

EDO
não linear
separável

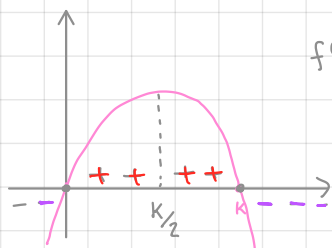
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K} \right) y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

máx de saturação

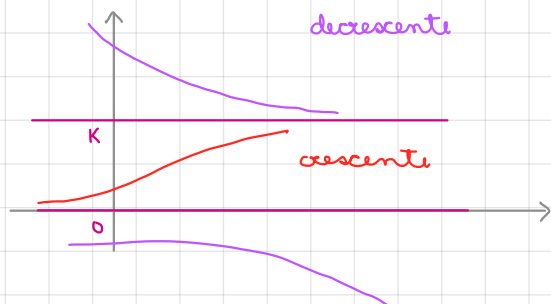
Equação de Verhulst

Exemplo Classifique as soluções de equilíbrio da equação logística $y' = r \left(1 - \frac{y}{K} \right) y$

Solução: As soluções de equilíbrio são $y_1(t) \equiv K$
 $y_2(t) \equiv 0$



$$f(y) = r \left(1 - \frac{y}{K} \right) y$$



Como vemos $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K$

então $y_1(t) \equiv K$ é assintoticamente estável
e $y_2(t) \equiv 0$ é instável

Exemplo: O modelo logístico foi aplicado a população de linguado gigante em uma área do Pacífico. Suponha que $y(t)$ medido em Kg é a massa total em um instante t . Se os parâmetros são

$$r = 0,71/\text{ano}$$

$$K = 80,5 \times 10^6 \text{ Kg}$$

Se a biomassa inicial $0,25K$. Determine a biomassa 2 anos depois

Solução

Equação logística

$$\begin{cases} y' = r \left(1 - \frac{y}{K} \right) y & \text{separável} \\ y(0) = 0,25K \end{cases}$$

Vamos resolver o PVI, depois substituímos os parâmetros.

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{y}{K} \right) y} dy = r dt$$

frações parciais:

$$\frac{A}{\left(1 - \frac{y}{K} \right)} + \frac{B}{y} = \frac{1}{\left(1 - \frac{y}{K} \right) y} \Rightarrow A = \frac{1}{K} \quad B = 1$$

$$\int \left[\frac{1/K}{\left(1 - \frac{y}{K} \right)} + \frac{1}{y} \right] dy = \int r dt$$

$$\ln|y| - \ln \left| 1 - \frac{y}{K} \right| = rt + C$$

Notique $0 < y(0) = 0,25K \leq K$
pelo exemplo anterior a solução
 $0 \leq y(t) \leq K$

então podemos tirar o módulo

$$\ln y - \ln \left(1 - \frac{y}{K} \right) = rt + C$$

$$\ln \left(\frac{y}{1 - y/K} \right) = rt + C$$

$$\frac{y}{1 - y/K} = C e^{rt}$$

para $y(0) = 0,25K$

$$\frac{0,25K}{1 - 0,25} = C \quad \text{substituindo}$$

$$\frac{y}{1 - \frac{y}{K}} = \left(\frac{0,25K}{0,75} \right) e^{rt}$$

$$y = \left(1 - \frac{y}{K} \right) \left(\frac{1}{3} K e^{rt} \right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{3} e^{rt} \right) y = \frac{1}{3} K e^{rt}$$

$$y(t) = \frac{\frac{1}{3} K e^{rt}}{1 + \frac{1}{3} e^{rt}} \quad \begin{matrix} K = 80,5 \times 10^6 \\ r = 0,71 \\ t = 2 \end{matrix}$$

$$y(2) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 80,5 \cdot 10^6 \cdot e^{1,42}}{1 + \frac{1}{3} e^{1,42}} \approx 0,5797$$