Cálculo 2   2027.2

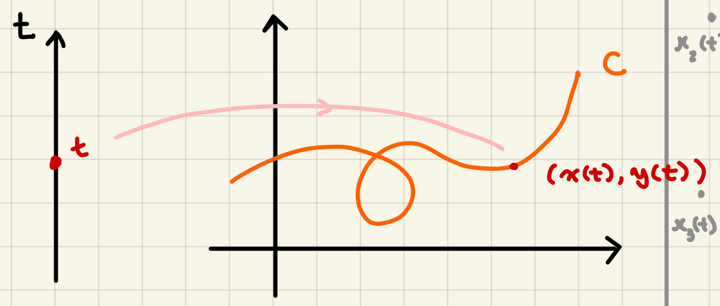
Aula 18

Aula passada: cônica

Aula Hoje: parametrização

Stewart
10.1 Curvas paramétricas

Motivação:



descrever uma curva que não é dada com gráfico de função

Definição Se x, y são dadas em função de uma outra variável t:

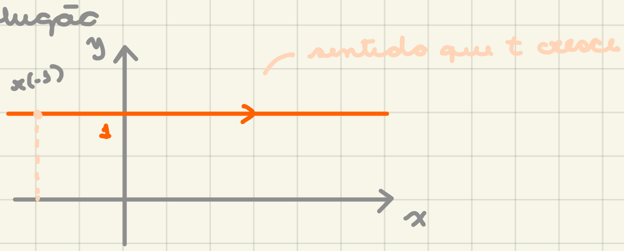
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in D$$

são ditas equações paramétricas.
Para cada t, $P = (x(t), y(t))$ é um ponto no plano cartesiano

Exemplo Esboce e identifique a curva definida pelas equações

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad , \; t \in \mathbb{R}$$

Solução



$x(t) = (t, 1)$ equação vetorial

$y = 1, \quad x \in \mathbb{R}$ é a equação cartesiana.

Exemplo Dê uma equação paramétrica para $y = x$, $0 \le x \le 2$

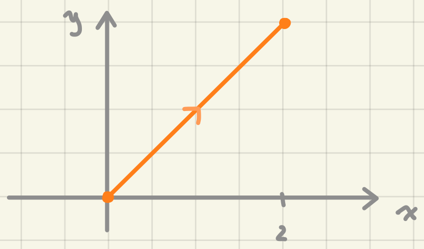
Solução:
Existem infinitas parametrizações

$$x_1(t): \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2 \qquad \Leftrightarrow \quad x = y$$

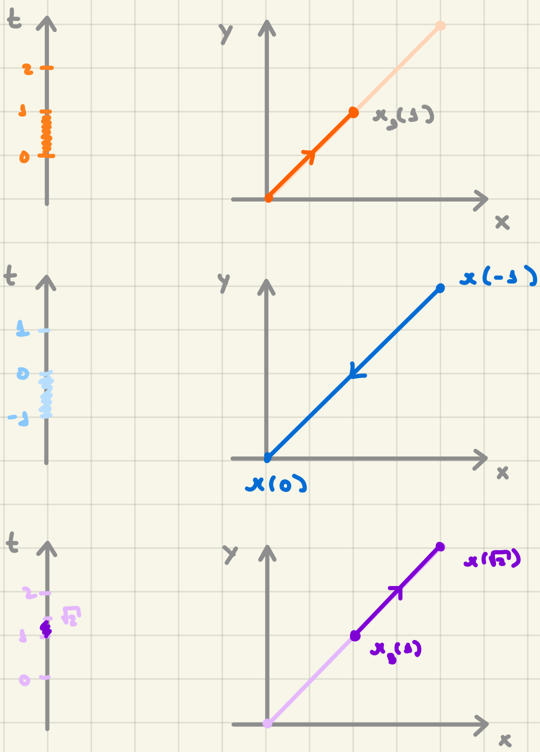
$$x_2(t): \begin{cases} x = -2t \\ y = -2t \end{cases} \qquad -1 \le t \le 0 \qquad \Leftrightarrow \quad x = y$$

$$x_3(t): \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 \end{cases} \qquad 1 \le t \le \sqrt{2} \qquad \Leftrightarrow \quad x = y$$

são parametrizações



Se fosse o movimento de partículas a diferença seria a "velocidade" ou "sentido" com que se movem



Em geral

Se a curva $C: y = f(x)$, $x \in D$ (dada como gráfico de função) então

$C: (t, f(t))$ isto é

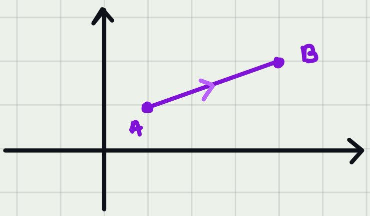
$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in D$$

é uma parametrização

Uma reta ligando dois pontos $A = (a_1, a_2)$ $B = (b_1, b_2)$ como vimos tem parametrização

$$r: \begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$r(t) = A + t\vec{AB}, \quad 0 \leq t \leq 1$$



Exemplo (Circunferência)

Qual curva é representada por

$C: r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Solução

$x(t) = \cos t$

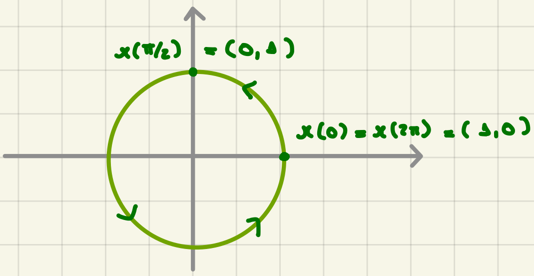
$y(t) = \operatorname{sen} t$

tentaremos determinar a equação cartesiana

Note que

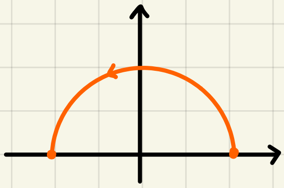
$$(x(t))^2 + (y(t))^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$ circunferência de centro $(0,0)$ raio 1



Exemplo Dê 3 parametrizações para

$C: x^2 + y^2 = 4 \quad , \quad y \geq 0$



Solução

1) $y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{4 - t^2} \end{cases}$

$-2 \leq t \leq 2$

não é conveniente

2) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = (2\cos t)^2 + (2\operatorname{sen} t)^2 = 4(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)$

$0 \leq t \leq \pi$

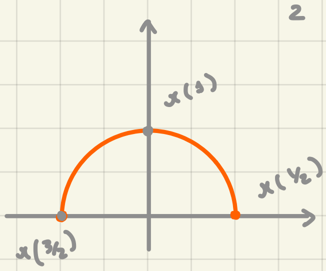
3) $x = 2\operatorname{sen} \pi t$

$y = 2\cos \pi t$

$\frac{1}{2} \leq t \leq 3/2$

para $x(t) = 2$, $y(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1/2$

e $x(t) = 0$, $y(t) = 1 \Leftrightarrow t = 1$



Em geral

Para uma circunferência de centro $C = (x_0, y_0)$ e raio r:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\operatorname{sen} t \end{cases}$$ é UMA parametrização

($x - x_0 = r\cos t$, $y - y_0 = r\operatorname{sen} t$ $\Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\cos^2 t + r^2\operatorname{sen}^2 t = r^2$

Exemplo Dê uma parametrização para elipse

$$(x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

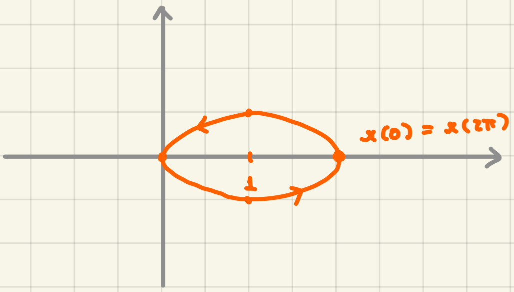
Motivado pelo exemplo da circunferência

$$x(t) = \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Note que $\quad (x-1) = \cos t$

$$\frac{y}{2} = \operatorname{sen} t$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$



Em qual

$$x = x_0 + a \cos t$$
$$y = y_0 + b \operatorname{sen} t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

é uma parametrização de

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$