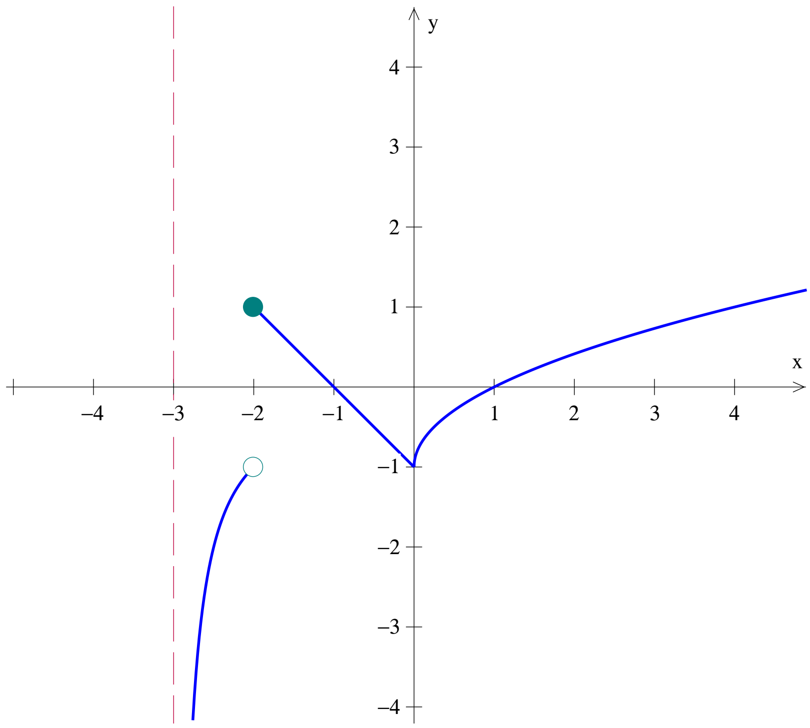
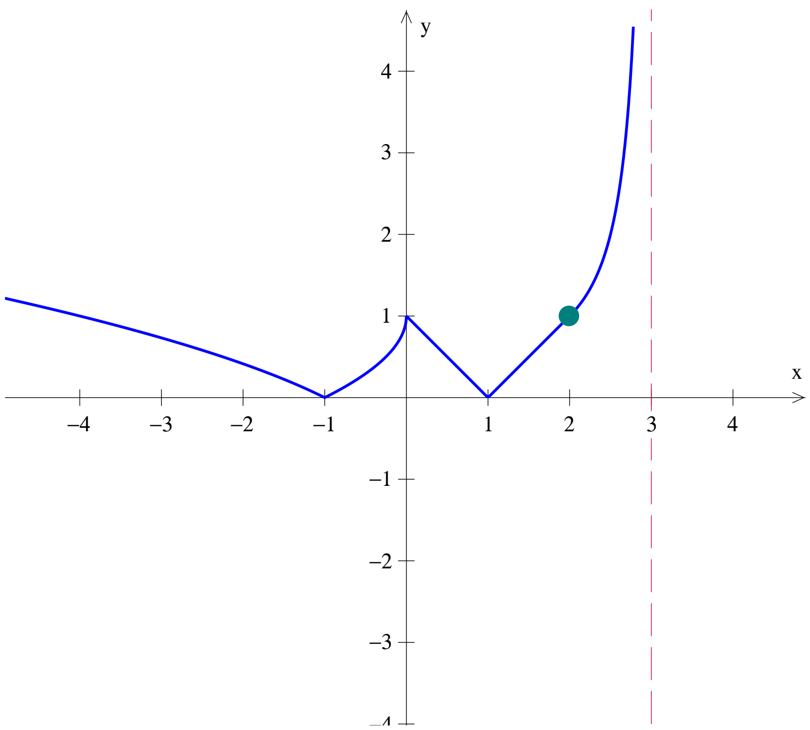
[UFES-CCE-DMAT-prova1-cálculo1-equipe, 06/11/13]

Atenção! Leia a prova com atenção e justifique todas as respostas.

1. **(1pt)** Considere f a função cujo gráfico está representado na figura abaixo. Esboce o gráfico da função $g(x) = |f(-x)|$.



Solução.



2. Para cada uma das seguintes funções, considere o domínio máximo possível. Diga qual das funções são invertíveis. Justifique.

   (a) **(0,5pt)** $f(x) = \sqrt{2x - 4}$

Solução. Consideramos $f : [2, +\infty) \to [0, +\infty)$. Temos que f é injetiva pois se $f(a) = f(b)$, ou seja, $\sqrt{2a-4} = \sqrt{2b-4}$, então temos $2a - 4 = 2b - 4$ donde $2a = 2b$ e portanto $a = b$. f é sobrejetora pois, dado $c \geq 0$, a equação $f(x) = c$ tem solução, bastando tomar $x = \frac{c^2+4}{2}$. Logo, f é bijetora.

(b) **(0,5pt)** $g(x) = x^3 + x$

Solução. Consideramos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Temos que f é injetiva pois se $a \neq b$, digamos $a < b$, então temos $a^3 < b^3$, donde $a^3 + a < b^3 + b$ e portanto $f(a) \neq f(b)$. f é sobrejetora pois, dado $c \in \mathbb{R}$, a equação $f(x) = c$ tem solução, pois, como $\lim_{x\to\pm\infty} x^3 + x = \pm\infty$ com f contínua, o Teorema do Valor Intermediário garante a existência da solução dado que existem $a < b$ com $f(a) < c < f(b)$.

3. Verifique se os limites abaixo existem e calcule os limites neste caso.

(a) **(1pt)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2 - x} - x)$

Solução. Como $x^2 \to +\infty$ e $-x \to +\infty$, segue que $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x} - x) =$ "$\sqrt{+\infty + (+\infty)} + \infty$" $= +\infty$.

(b) **(1pt)** $\displaystyle\lim_{x\to1} \operatorname{sen}(\pi x) \cos\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$

Solução. De $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{1-x^2}\right) \leq 1$, temos $-|\operatorname{sen}(\pi x)| \leq \operatorname{sen}(\pi x)\cos\left(\frac{1}{1-x^2}\right) \leq |\operatorname{sen}(\pi x)|$ para todo $x \neq 1$. Pelo Teorema do Sanduiche temos $\lim_{x\to1} \operatorname{sen}(\pi x)\cos\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = 0$ pois $\lim_{x\to1} |\operatorname{sen}(\pi x)| = 0$.

(c) **(1pt)** $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

Solução. Racionalizando temos: $\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \frac{x+2-2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$. Agora fazendo $x \to 0$ o limite será $\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

4. **(4pts)** Seja

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se} \quad x < 0 \\ 3 - x & \text{se} \quad 0 \leq x < 3 \\ (x-3)^2 & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

(a) Calcule cada limite, se ele existir:

i. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x)$

Solução. Para $x \to 0^+$ temos $0 < x < 3$ donde usamos $f(x) = 3 - x$ que segue o limite igual a 3.

ii. $\displaystyle\lim_{x\to0^-} f(x)$

Solução. Para $x \to 0^-$ temos $x < 0$ donde usamos $f(x) = \sqrt{-x}$ que segue o limite igual a 0.

iii. $\displaystyle\lim_{x\to3^+} f(x)$

Solução. Para $x \to 3^+$ temos $x > 3$ donde usamos $f(x) = (x-3)^2$ que segue o limite igual a 0.

iv. $\displaystyle\lim_{x\to3^-} f(x)$

Solução. Para $x \to 3^-$ temos $0 < x < 0$ donde usamos $f(x) = 3 - x$ que segue o limite igual a 0.

v. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(f(x))$

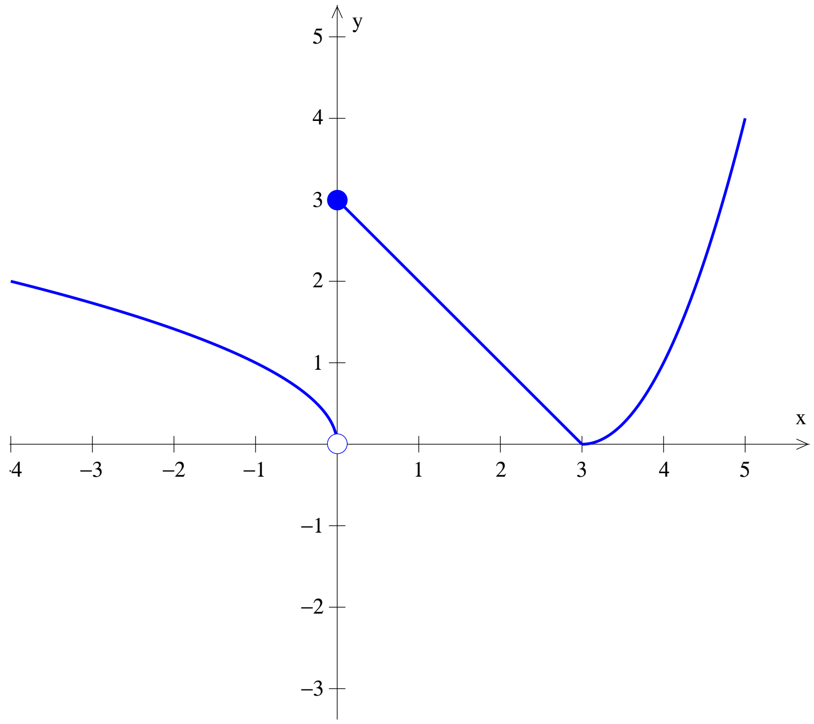
Solução. Para $x \to 0^+$ temos $0 < x < 3$ donde usamos $f(x) = 3 - x$ e portanto $f(x) \to 3^-$. Com isso, $\lim_{x\to0^+} f(f(x)) = \lim_{y\to3^-} f(y) = 0$.

vi. $\displaystyle\lim_{x\to3^-} f(f(x))$

Solução. Para $x \to 3^-$ temos $0 < x < 3$ donde usamos $f(x) = 3 - x$ e portanto $f(x) \to 0^+$. Com isso, $\lim_{x\to0^+} f(f(x)) = \lim_{y\to0^+} f(y) = 3$.

(b) Encontre todos os pontos onde f é descontínua e justifique cada descontinuidade.
Solução. Zero é a única descontinuidade pois os limites laterais são distintos: 3 pela direita e zero pela esquerda (ver gráfico).

(c) Esboce o gráfico de f.
Solução.



5. **(1pt)** Prove que a função $f(x) = -5e^{(-x^2)} - 2x + 4$ tem raiz no intervalo aberto (0,3). (dica: $e > 2,7$)
Solução. Use o Teorema do Valor Intermadiário e o fato que $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 2-5/e > 0$. Logo, existe uma raiz no intervalo $(0, 1) \subset (0, 3)$.