# Diagramas de Bode

Sandra Mara Torres Müller

# Introdução

- Os diagramas de Bode são construções gráficas que permitem esboçar a resposta de frequência de um circuito
- Geralmente são usados quando a distância entre pólos e zeros de H(s) não é muito pequena
- São compostos pela resposta de amplitude e de fase. Os dois gráficos compõe a resposta em frequência de um sistema
- A escala de frequência é logarítmica para englobar uma faixa maior de frequência em um espaço menor

# Pólos e zeros reais de primeira ordem

- Suponha
$$H(s) = \frac{K(s+z_1)}{s(s+p_1)}$$

- Portanto
$$H(j\omega) = \frac{K(j\omega+z_1)}{j\omega(j\omega+p_1)}$$

- O primeiro passo para construir um diagrama de Bode consiste em colocar a expressão de H(jω) na forma padrão, ou seja, colocar os pólos e zeros em evidência

$$H(j\omega) = \frac{Kz_1(1+j\omega/z_1)}{p_1(j\omega)(1+j\omega/p_1)}.$$

# Pólos e zeros reais de primeira ordem

fazer $K_o = Kz_1/p_1$ e expressar $H(j\omega)$ em forma polar:

$$H(j\omega) = \frac{K_o|1 + j\omega/z_1|\underline{/\psi_1}}{|\omega|\underline{/90^\circ}|1 + j\omega/p_1|\underline{/\beta_1}}$$

$$= \frac{K_o|1 + j\omega/z_1|}{|\omega||1 + j\omega/p_1|}\underline{/(\psi_1 - 90^\circ - \beta_1)}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{K_o|1 + j\omega/z_1|}{\omega|1 + j\omega/p_1|};$$

$$\theta(\omega) = \psi_1 - 90^\circ - \beta_1.$$

$$\psi_1 = \text{tg}^{-1}\,\omega/z_1;$$

$$\beta_1 = \text{tg}^{-1}\,\omega/p_1.$$

# Gráficos de amplitude

- A amplitude de H(jω) em decibéis é dada por:

$$A_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

**AMPLITUDES E VALORES CORRESPONDENTES EM DECIBÉIS**

| $A_{dB}$ | $A$ | $A_{dB}$ | $A$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,00 | 30 | 31,62 |
| 3 | 1,41 | 40 | 100,00 |
| 6 | 2,00 | 60 | $10^3$ |
| 10 | 3,16 | 80 | $10^4$ |
| 15 | 5,62 | 100 | $10^5$ |
| 20 | 10,00 | 120 | $10^6$ |

# Gráficos de amplitude

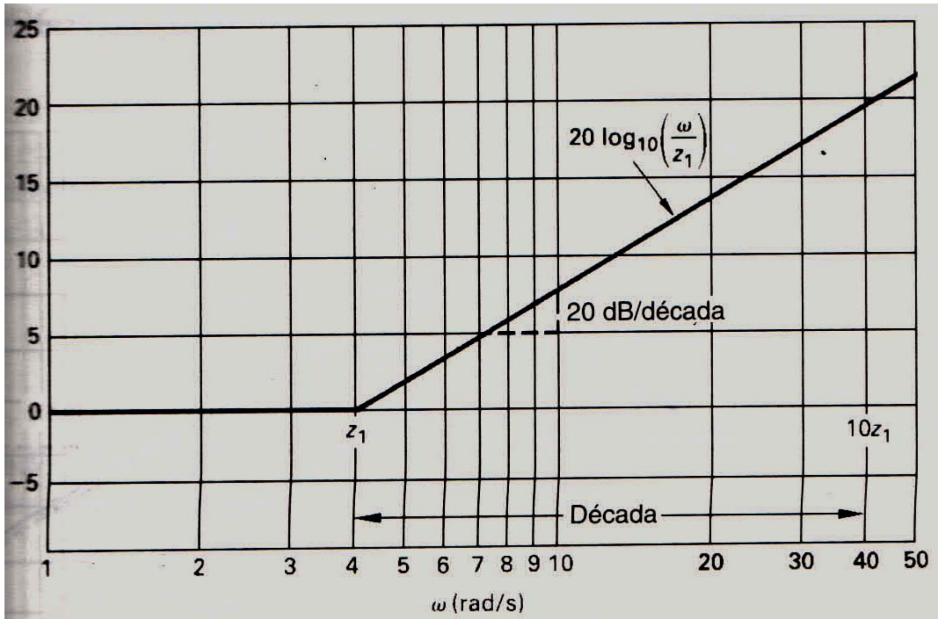
- Para o caso de pólos e zeros reais, temos:

$$
\begin{aligned}
A_{\mathrm{dB}} &= 20\log_{10}\frac{K_o|1+j\omega/z_1|}{\omega|1+j\omega/p_1|} \\
&= 20\log_{10}K_o + 20\log_{10}|1+j\omega/z_1| \\
&\quad - 20\log_{10}\omega - 20\log_{10}|1+j\omega/p_1|
\end{aligned}
$$

- Deve-se plotar cada termo separadamente usando a aproximação por linhas retas
- O gráfico de $20\log K_0$ é uma reta horizontal, já que $K_0$ não depende da frequência. O valor será positivo se $K_0>1$, zero para $K_0=1$, e negativo para $K_0<1$

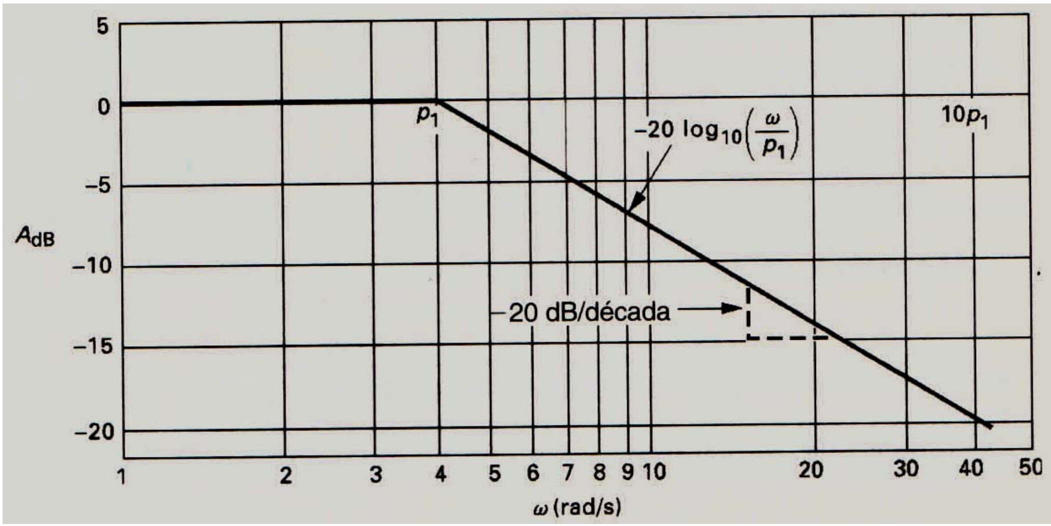
# Gráficos de amplitude

- O gráfico de $20\log|1+j\omega/z_1|$ pode ser aproximado por duas linhas retas:
  - Quando $\omega \rightarrow 0$, $20\log|1+j\omega/z_1| \rightarrow 0$
  - Quando $\omega \rightarrow \infty$, $20\log|1+j\omega/z_1| \rightarrow 20\log(\omega/z_1)$. Isto representa uma reta com inclinação de 20 dB por década (variação de 10 vezes na frequência). Esta linha intercepta o eixo de 0 dB em $\omega = z_1$. Este valor de $\omega$ é chamado de frequência de quebra



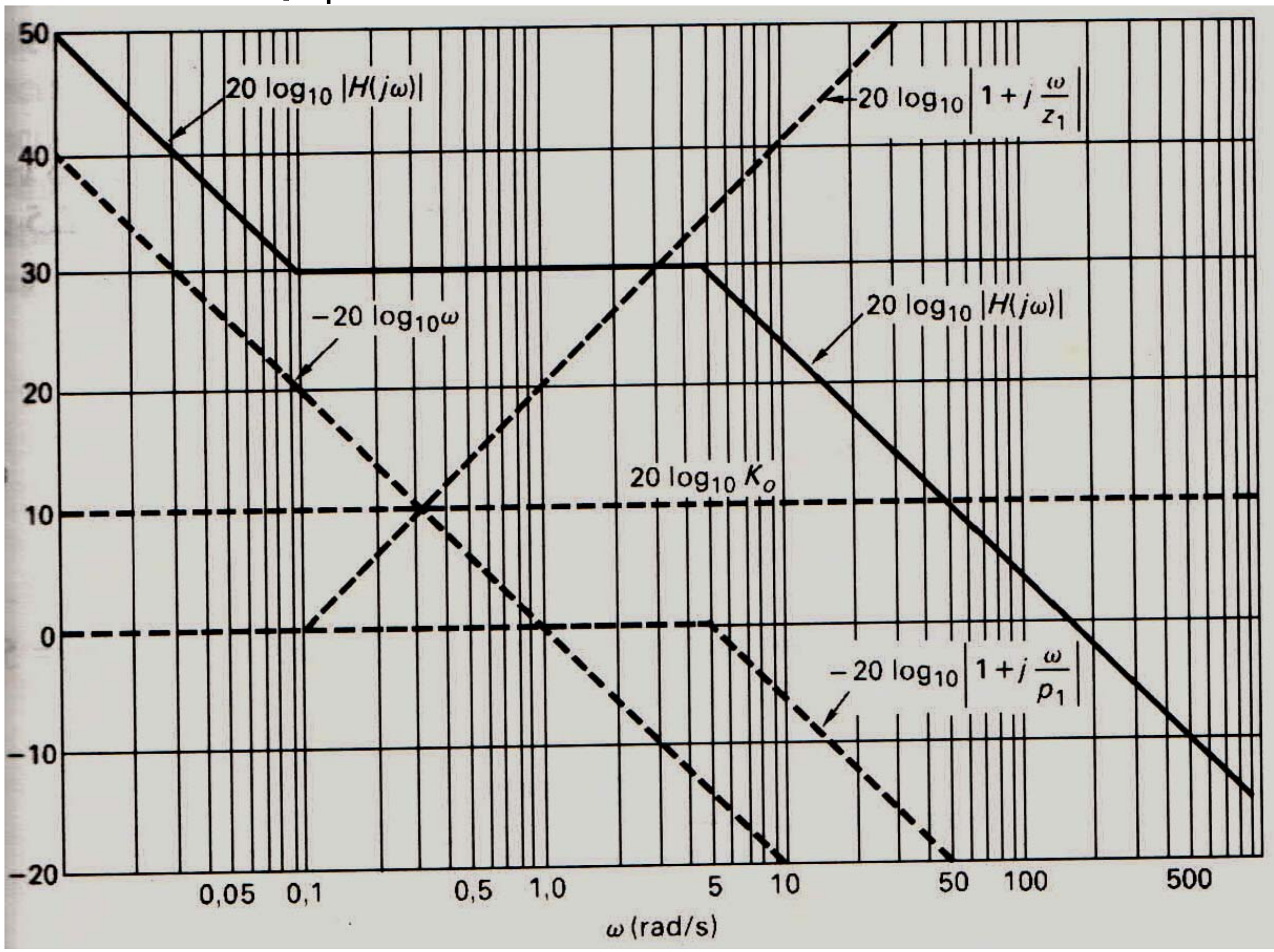
# Gráficos de amplitude

- O gráfico de -20log(ω) é uma linha reta com uma inclinação de -20 dB/década, que intercepta o eixo de 0 dB em ω = 1
- O gráfico de $-20\log|1+j\omega/p_1|$ pode ser aproximado por duas linhas retas:
  - Para grandes valores de ω, a linha reta $20\log(\omega/p_1)$ tem uma inclinação de -20 dB/década
  - Para pequenos valores de ω, o gráfico pode ser aproximado por uma constante em 0 dB



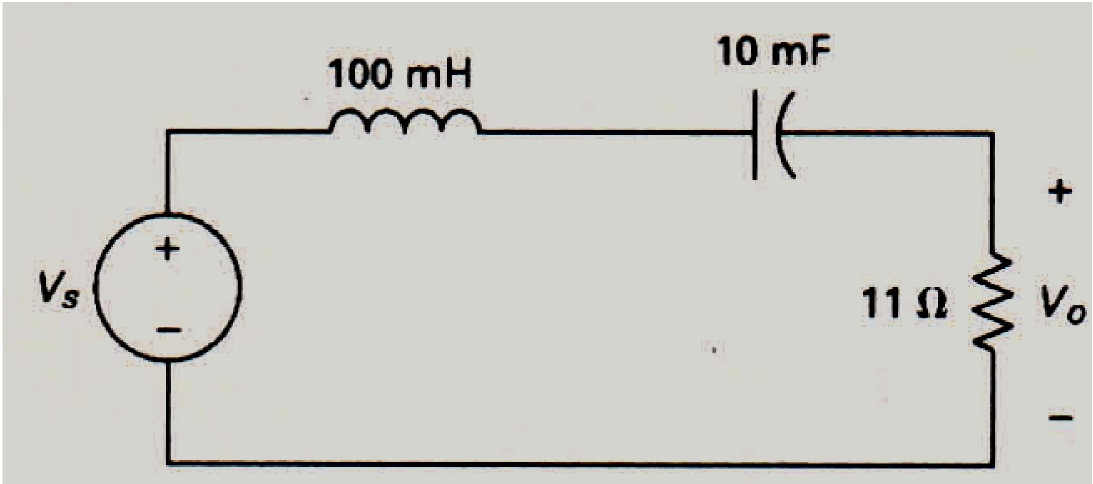
# Gráficos de amplitude

- O gráfico resultante será a soma de todos. Para $K_0=\sqrt{10}$, $z_1=0{,}1$ rad/s e $p_1=5$ rad/s, temos:



# Exemplo 15.9

- Para o circuito da figura abaixo:
  - Determine a FT, H(s)
  - Determine o diagrama de Bode
  - Calcule o valor de 20log|H(jω)| para ω=50 rad/s e ω=1000 rad/s
  - Plote os valores calculados acima no diagrama de Bode
  - Suponha que $v_i(t)$ = 5cos(500t+15º) [V] e use o diagrama de Bode para estimar a amplitude de $v_o(t)$ no regime estacionário



# Exemplo 15.9

- FT

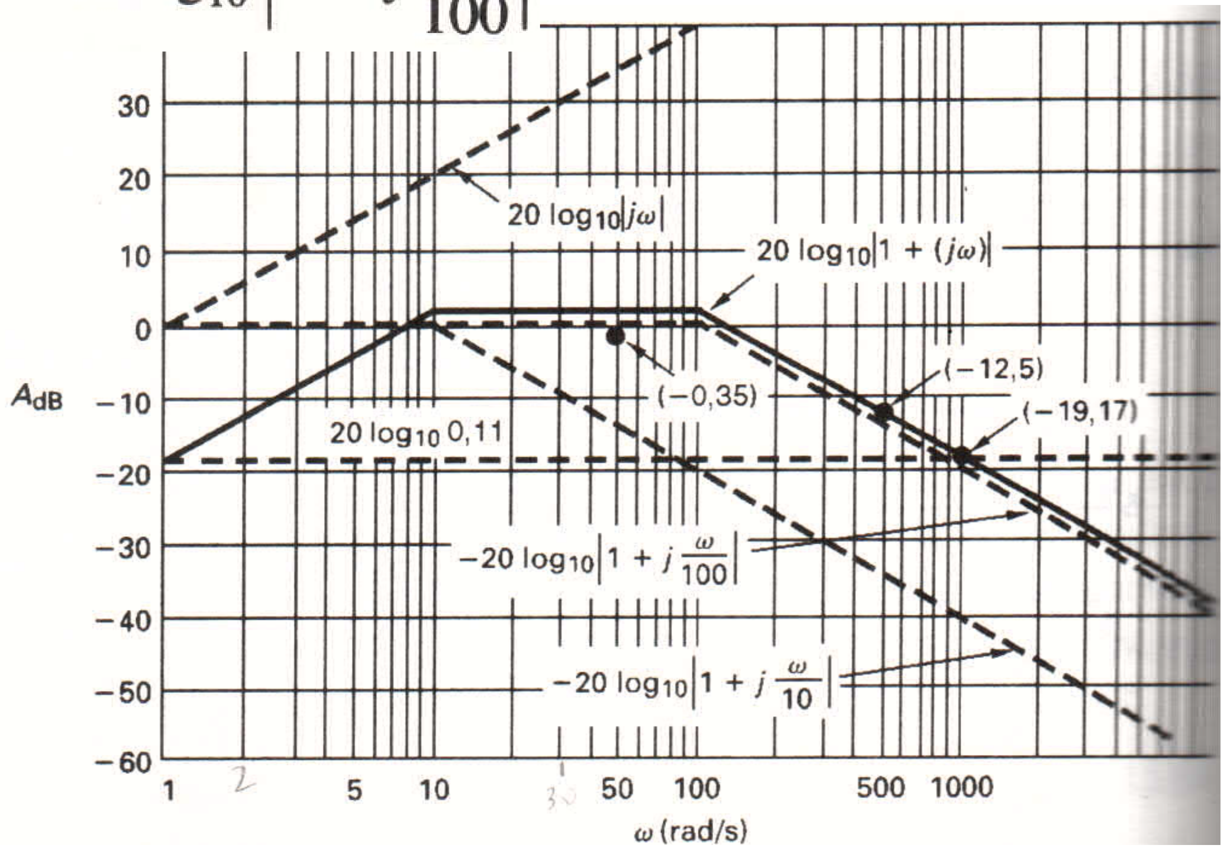
$$H(s) = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + \frac{1}{LC}}.$$

$$H(s) = \frac{110s}{s^2 + 110s + 1000} = \frac{110s}{(s+10)(s+100)}.$$

- Diagrama de Bode

$$H(j\omega) = \frac{0{,}11 j\omega}{[1 + j(\omega/10)][1 + j(\omega/100)]}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{dB}} &= 20\log_{10}|H(j\omega)| \\ &= 20\log_{10} 0{,}11 + 20\log_{10}|j\omega| \\ &\quad - 20\log_{10}\left|1 + j\frac{\omega}{10}\right| - 20\log_{10}\left|1 + j\frac{\omega}{100}\right| \end{aligned}$$



# Exemplo 15.9

- Valor de 20log|H(jω)| para ω=50 rad/s e ω=1000 rad/s (ver gráfico)

$$H(j50) = \frac{0,11(j50)}{(1+j5)(1+j0,5)}$$

$$= 0,9648\angle{-15,25^\circ};$$

$$20\log_{10}|H(j50)| = 20\log_{10}0,96$$

$$= -0,3116\text{ dB};$$

$$H(j1000) = \frac{0,11(j1000)}{(1+j100)(1+j10)}$$

$$= 0.1094\angle{-83,72^\circ};$$

$$20\log_{10}0,11 = -19,22\text{ dB}.$$

# Exemplo 15.9

- $v_o$=?, se $v_i(t)$ = 5cos(500t+15º)
  - Pelo gráfico de Bode, quando ω=500 rad/s, $A_{dB}$=-12,5 dB, ou seja,

$$|A| = 10^{(-12,5/20)} = 0,24$$

$$V_{mo} = |A| V_{mi} = (0,24)(5) = 1,19 \text{ V}.$$

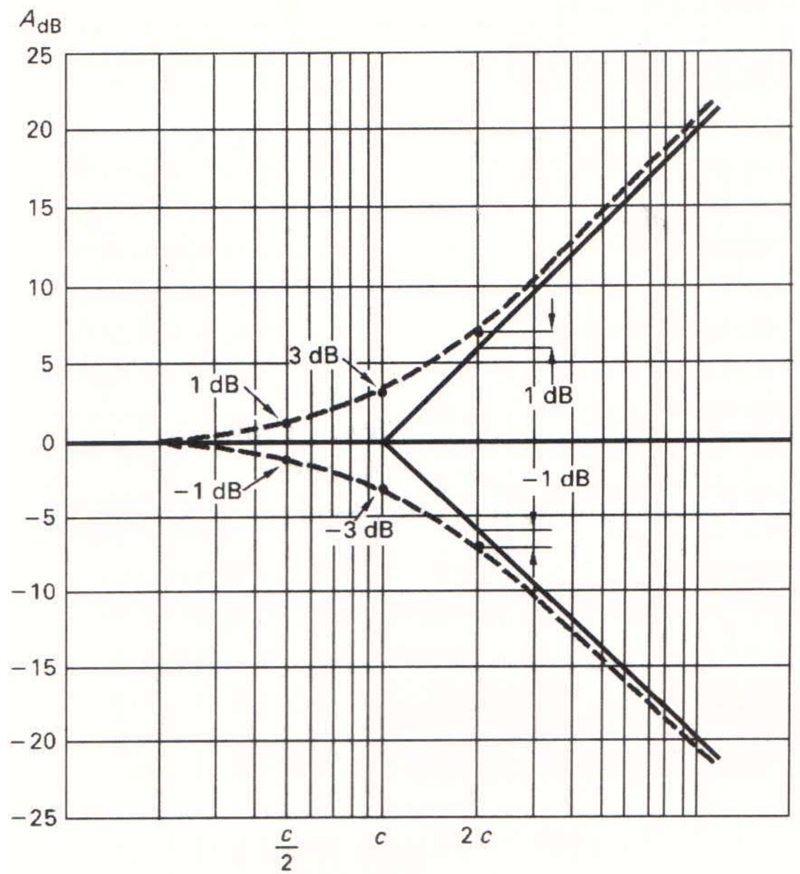
  - Pode-se calcular o valor exato

$$H(j500) = \frac{0,11(j500)}{(1 + j50)(1 + j5)} = 0,22 \underline{/ -77,54^\circ}$$

$$V_{mo} = |A| V_{mi} = (0,22)(5) = 1,1 \text{ V}.$$

# Gráficos de amplitude mais precisos

- Na frequência de quebra temos: $A_{dB} = \pm 3$ dB
- Na metade da frequência de quebra temos: $A_{dB} = \pm 1$ dB
- No dobro da frequência de quebra temos: $A_{dB} = \pm 7$ dB



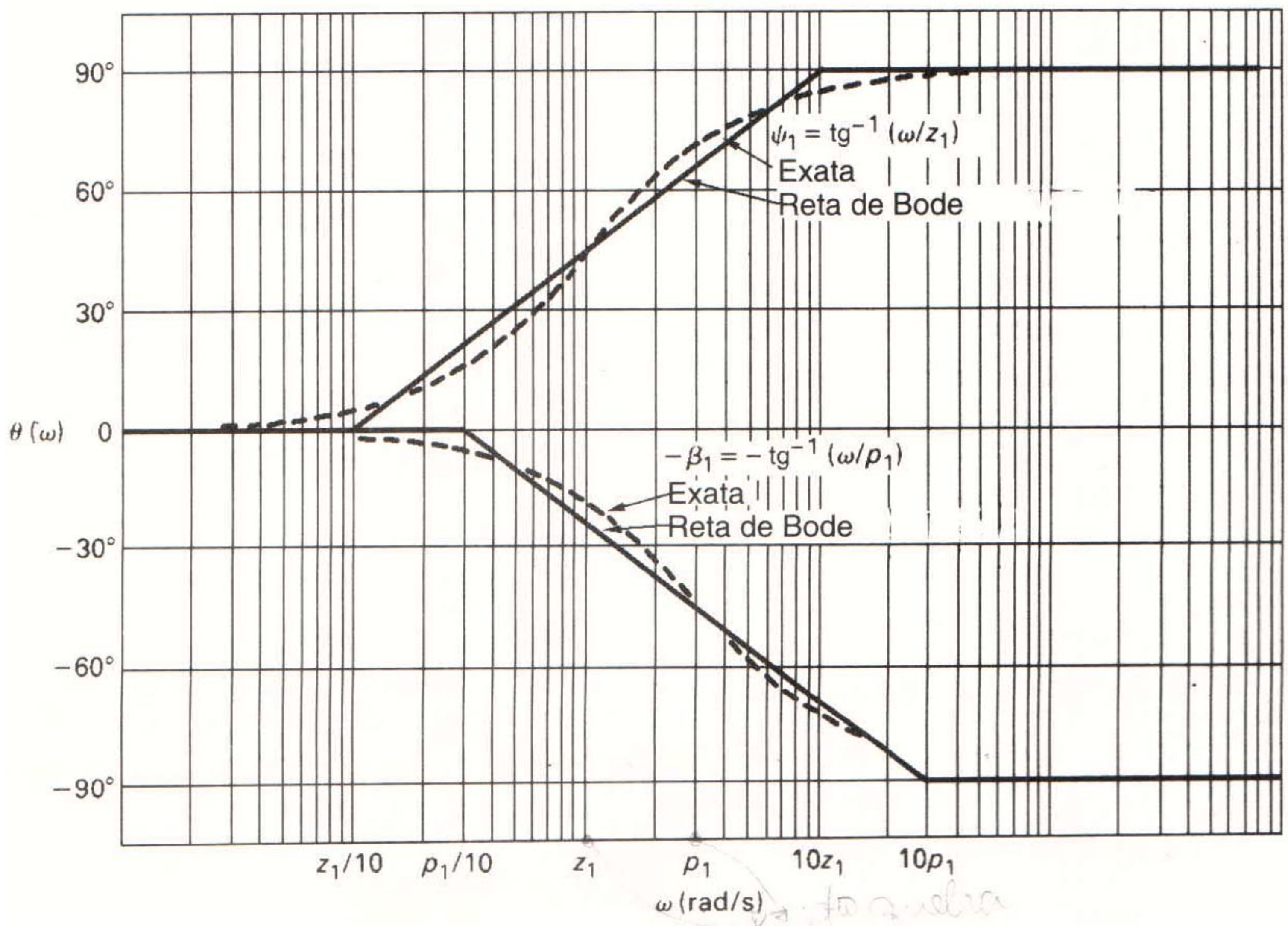
# Gráficos de amplitude mais precisos

- Uma variação em que a frequência dobra de valor é chamada de oitava.
- Uma inclinação de 20 dB/década equivale a 6,02 dB/oitava (~6 dB/oitava)
- As frequências metade e dobro da frequência de quebra estão uma oitava abaixo e uma oitava acima da frequência de quebra, respectivamente
- Quando os pólos e zero de H(s) estão bem separados, é relativamente fácil introduzir correções no gráfico de amplitude

# Gráficos de fase

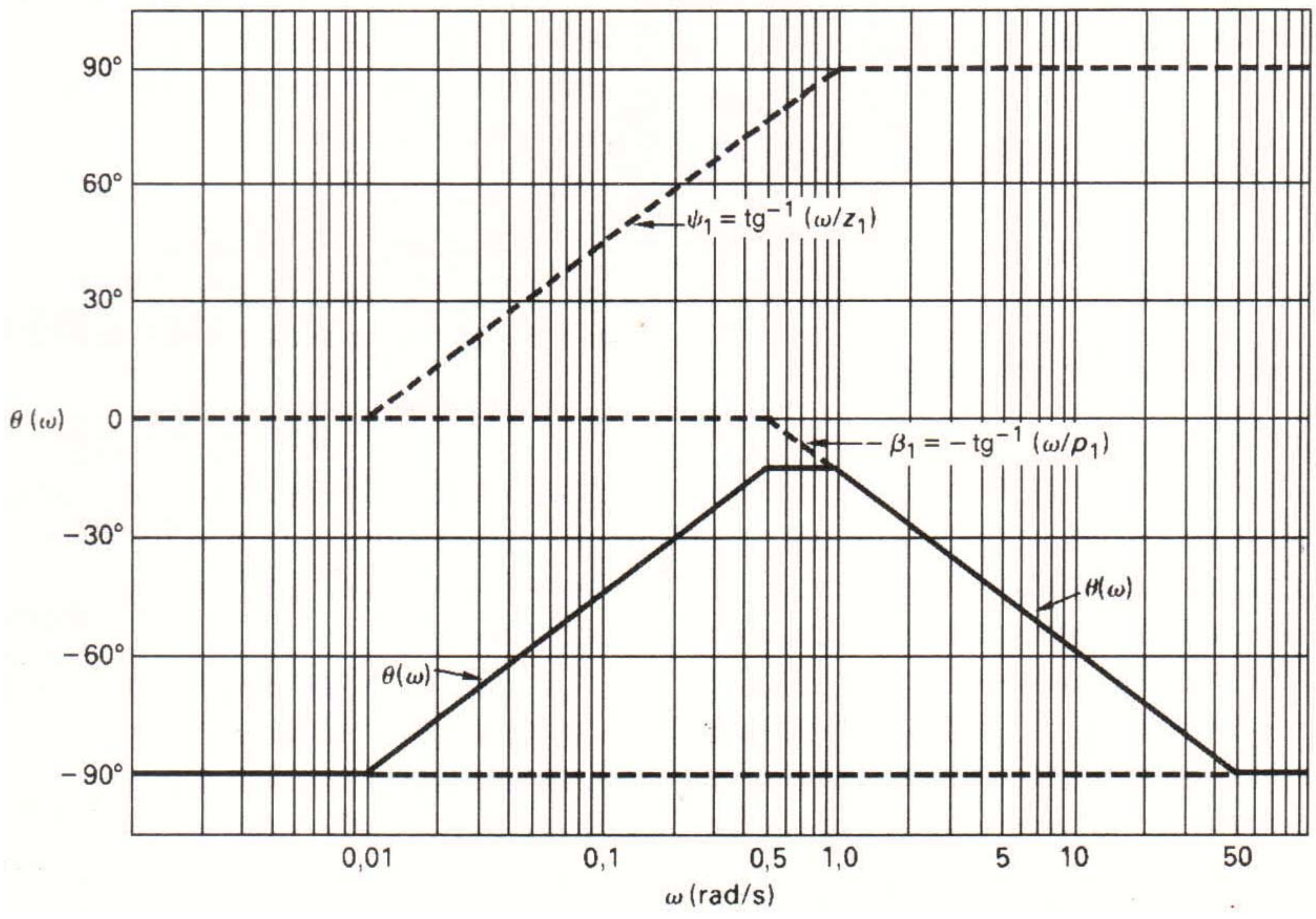
- Pode-se traçar curvas de fase aproximando a resposta de frequência do circuito por linhas retas
  - O ângulo de fase associado à constante $K_0$ é zero ($K_0$>0)
  - O ângulo de fase associado a um pólo ou zero de primeira ordem na origem é ±90º
  - Para um pólo ou zero que não esteja na origem, temos
    - Para frequências menores do que um décimo da frequência de quebra, o ângulo de fase é tomado como zero
    - Para frequências maiores que dez vezes a frequência de quebra, o ângulo de fase é tomado como ±90º
    - Na frequência de quebra o ângulo será ±45º
    - O sinal positivo se aplica ao zero e o negativo ao pólo

# Gráficos de fase



# Gráficos de fase

- $z_1 = 0{,}1$ rad/s e $p_1 = 5$ rad/s



# Exemplo 15.10

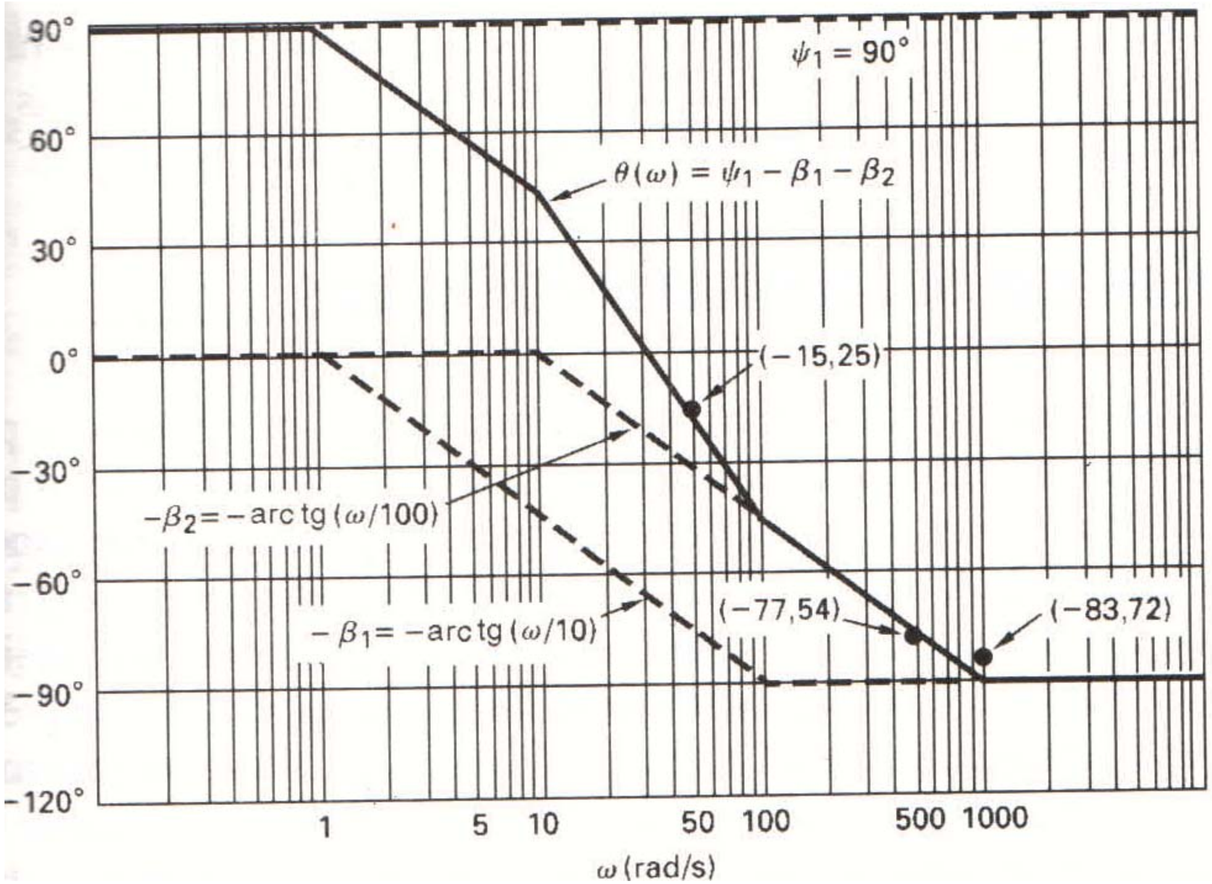
- Construa o gráfico de Bode para o ângulo de fase da FT do exemplo 15.9
- Calcule o ângulo de fase $\theta(\omega)$ em $\omega = 50$, 500 e 1000 rad/s
- Plote os valores calculados no item anterior
- Se $v_i(t) = 10\cos(500t - 25º)$, quanto será $v_o(t)$?

# Exemplo 15.10

- De acordo com o exemplo 15.9, temos

$$\theta(\omega) = \psi_1 - \beta_1 - \beta_2$$

onde $\psi_1 = 90°$, $\beta = \text{arc tg }(\omega/10)$ e $\beta_2 = \text{arc tg }(\omega/100)$



# Exemplo 15.10

- Valores calculados:

$$H(j50) = 0{,}96\,\underline{/-15{,}25^\circ};$$

$$H(j500) = 0{,}22\,\underline{/-77{,}54^\circ};$$

$$H(j1000) = 0{,}11\,\underline{/-83{,}72^\circ}.$$

Assim, $\theta(j50) = -15{,}25^\circ$, $\theta(j500) = -77{,}54^\circ$ e $\theta(j1$
$= -83{,}72^\circ$.

# Exemplo 15.10

$$V_{mo} = |H(j500)|V_{mi} = (0{,}22)(10) = 2{,}2 \text{ V};$$

$$\theta_o = \theta(j\omega) + \theta_i = -77{,}54^\circ - 25^\circ = -102{,}54^\circ$$

Assim,

$$v_o(t) = 2{,}2 \cos (500t - 102{,}54^\circ) \text{ V}.$$

# Exercício 15.12

- A expressão numérica de uma FT é

$$H(s) = \frac{10^5(s+5)}{(s+100)(s+5000)}$$

- Com base na aproximação de $|H(j\omega)|$ por uma linha reta, estime
  - O valor máximo de $|H(j\omega)|$ em decibéis 26dB
  - O valor de $\omega > 0$ para o qual $|H(j\omega)| = 1$ 98krad/s

# Pólos e zeros complexos (segunda ordem)

$$H(s) \doteq \frac{K}{(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}, \qquad ($$

escrevemos o produto $(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)$ na forma

$$(s+\alpha)^2+\beta^2 = s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2. \qquad ($$

$$s^2+2\alpha s+\alpha^2+\beta^2 = s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2.$$

$$\omega_n^2 = \alpha^2+\beta^2$$

$$\zeta\omega_n = \alpha.$$

# Pólos e zeros complexos (segunda ordem)

- O termo $\omega_n$ é a frequência de quebra do fator do segundo grau e $\zeta$ é o coeficiente de amortecimento do fator do segundo grau
- O valor crítico de $\zeta$ é 1
  - Se $\zeta < 1$, as raízes do fator do segundo grau são complexas
  - Se $\zeta \geq 1$, as raízes do fator do segundo grau são reais

# Pólos e zeros complexos (segunda ordem)

- Considerado ζ < 1, temos

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

$$H(s) = \frac{K}{\omega_n^2} \frac{1}{1 + (s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n)},$$

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{1 - (\omega^2/\omega_n^2) + j(2\zeta\omega/\omega_n)}$$

$$K_o = \frac{K}{\omega_n^2}.$$

# Pólos e zeros complexos (segunda ordem)

- Por conveniência, vamos substituir $\omega/\omega_n$ por u

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{1 - u^2 + j2\zeta u}$$

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{|(1 - u^2) + j2\zeta u| \underline{/\beta_1}}$$

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{dB}} &= 20 \log_{10} |H(j\omega)| \\ &= 20 \log_{10} K_o - 20 \log_{10} |(1 - u^2) + j2\zeta u| \end{aligned}$$

$$\theta(\omega) = -\beta_1 = -\operatorname{tg}^{-1} \frac{2\zeta u}{1 - u^2}.$$

# Gráficos de amplitude

- O fator do segundo grau contribui para a amplitude de $H(j\omega)$ através do termo

$$-20\log_{10}|1-u^2+j2\zeta u|$$

  - Quando $\omega \to 0$, $u = (\omega/\omega_n) \to 0$
  - Quando $\omega \to \infty$ $u \to \infty$

- Para valores intermediários de ω, temos:

$$-20\log_{10}|(1-u^2)+j2\zeta u| =$$

$$= -20\log_{10}\sqrt{(1-u^2)^2+4\zeta^2u^2}$$

$$= -10\log_{10}[u^4+2u^2(2\zeta^2-1)+1$$

# Gráficos de amplitude

quando $u \to 0$,

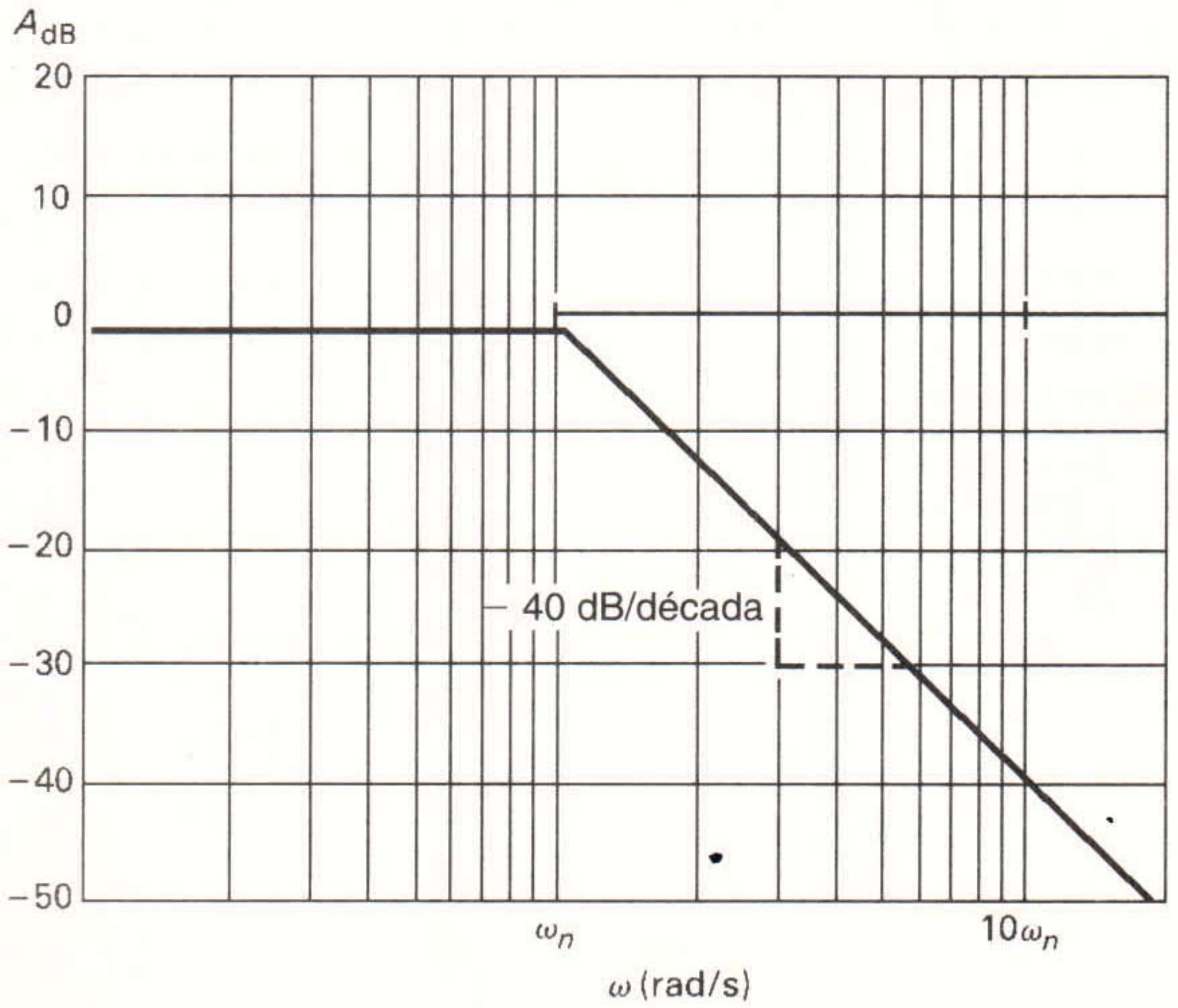
$$-10\log_{10}[u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1] \to 0;$$

quando $u \to \infty$,

$$-10\log_{10}[u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1] \to -40\log_{10} u.$$

- Assim, o gráfico de Bode é constituído por duas retas, uma horizontal, que coincide com o eixo de 0 dB, para $\omega < \omega_n$ e outra com uma inclinação de -40 dB/década, para $\omega > \omega_n$
  - As duas retas se encontram no ponto u = 1, ou seja, $\omega = \omega_n$

# Gráficos de amplitude

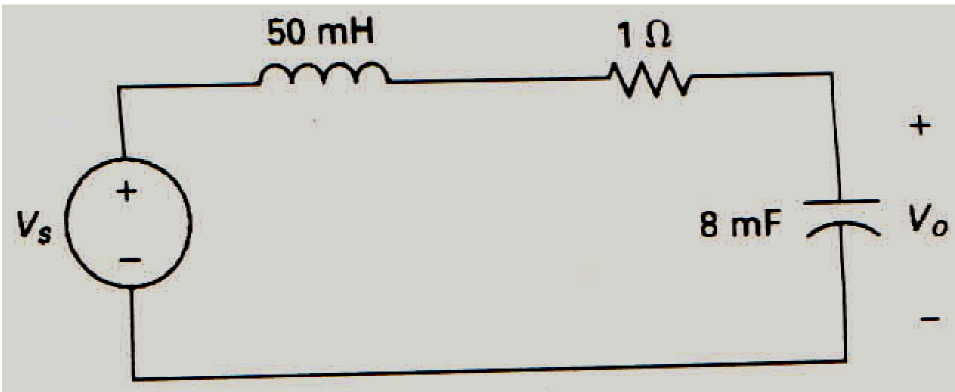


# Gráficos de amplitude mais precisos

- As correções dependem do valor do coeficiente de amortecimento $\zeta$
  - Quando $\zeta$ é pequeno, a amplitude apresenta um pico pronunciado na frequência de quebra $\omega_n$
  - Quando $\zeta \geq 1/\sqrt{2}$, todos os pontos da curva ficam abaixo do gráfico de Bode

# Exemplo 15.11

- Para o circuito abaixo
  - Determine a FT
  - Calcule a frequência de quebra, $\omega_n$
  - Calcule $K_0$
  - Calcule o coeficiente de amortecimento, $\zeta$
  - Construa o gráfico de Bode da amplitude na faixa de 10 e 500 rad/s
  - A partir do gráfico de Bode descreva o tipo de filtragem do circuito e estime a frequência de corte



# Exemplo 15.11

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \left(\frac{R}{L}\right)s + \frac{1}{LC}}.$$

$$H(s) = \frac{2500}{s^2 + 20s + 2500}.$$

a) De acordo com a expressão de $H(s)$, $\omega_n^2 = 2500$; assim, $\omega_n = 50$ rad/s.

b) Por definição, $K_o = 2500/\omega_n^2 = 1$.

c) O coeficiente $s$ é igual a $2\zeta\omega_n$; assim,

$$\zeta = \frac{20}{2\omega_n} = 0{,}20.$$

As amplitudes exatas são

$$A_{dB}(\omega_n/2) = -10\log_{10}(0{,}6025) = 2{,}2 \text{ dB};$$

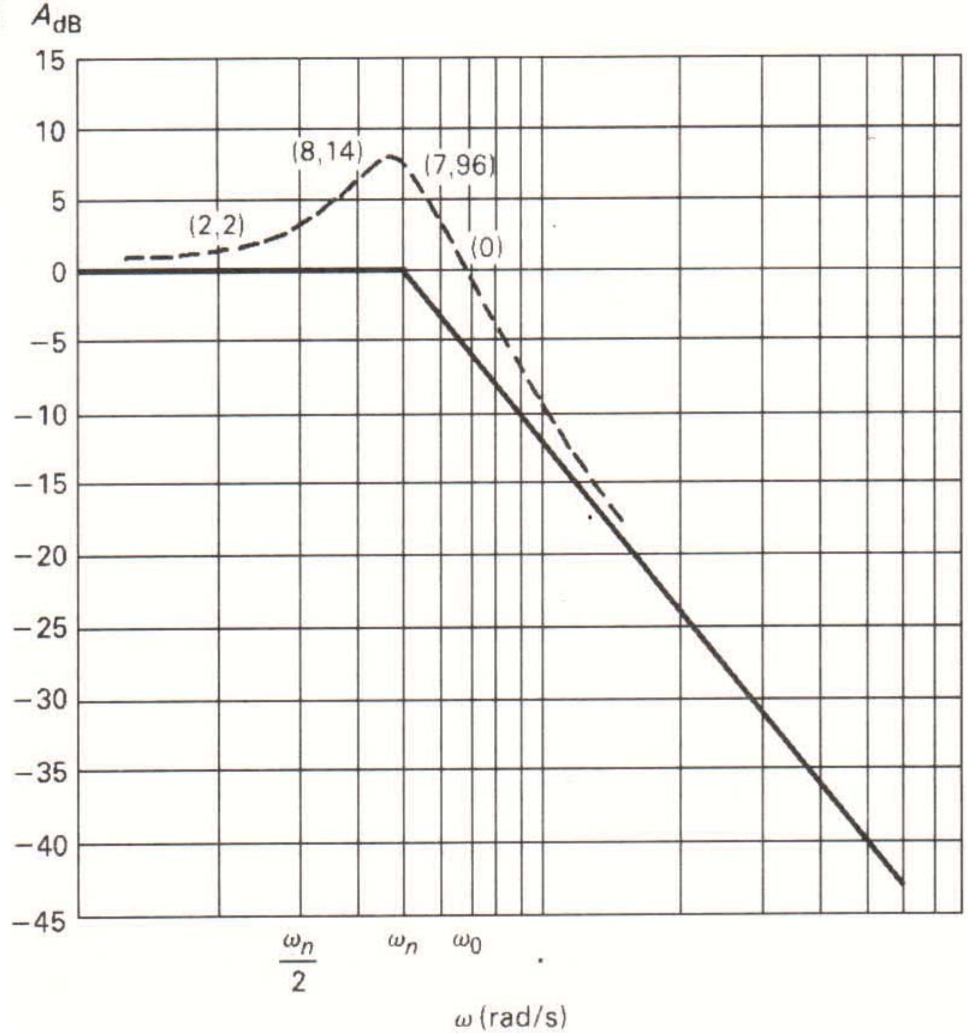
$$\omega_p = 50\sqrt{0{,}92} = 47{,}96 \text{ rad/s};$$

$$A_{dB}(\omega_p) = -10\log_{10}(0{,}16)(0{,}96) = 8{,}14 \text{ dB};$$

$$A_{dB}(\omega_n) = -20\log_{10}(0{,}4) = 7{,}96 \text{ dB};$$

$$\boxed{\omega_o = \sqrt{2}\omega_p} = 67{,}82 \text{ rad/s};$$

$$A_{dB}(\omega_o) = 0 \text{ dB}.$$

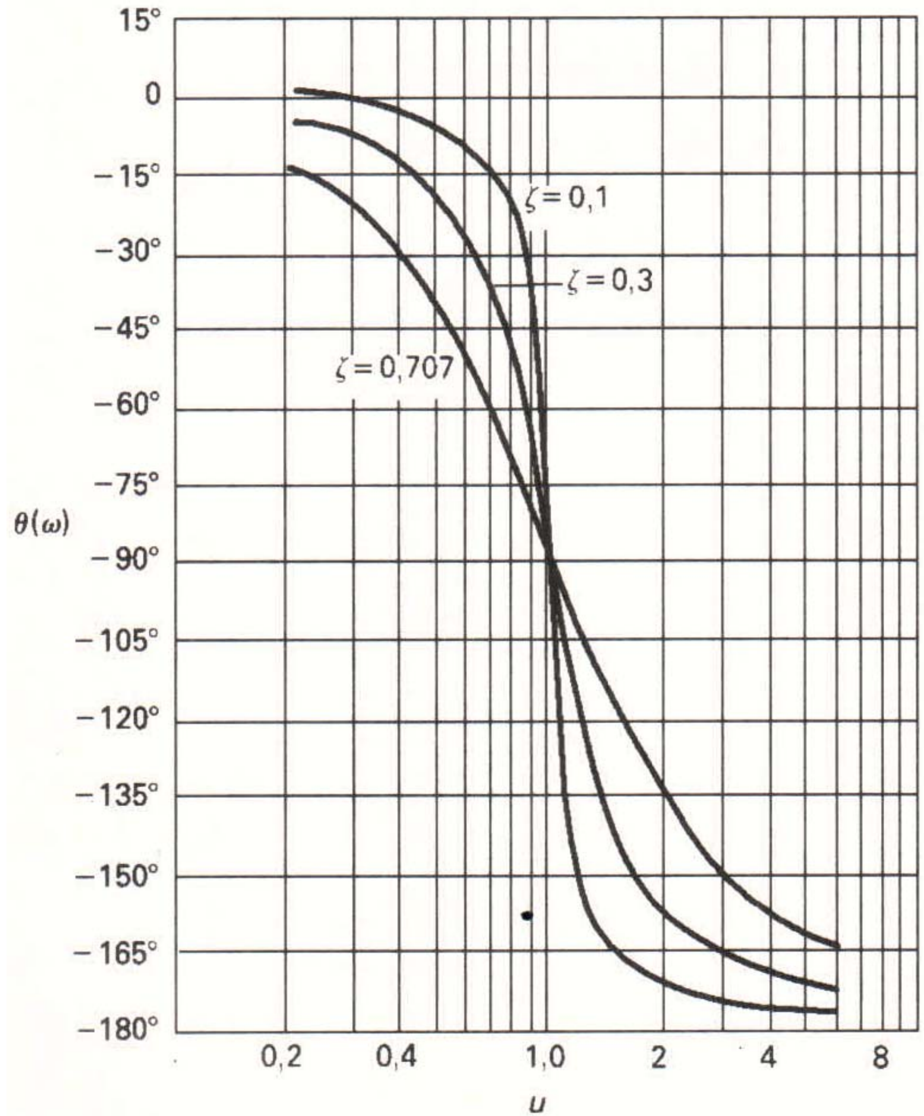


# Exemplo 15.11

f) Observando o gráfico de amplitude da Fig. 15.45, podemos ver que o circuito se comporta como um filtro passa-baixos. Na freqüência de corte, o módulo da função de transferência, $|H(j\omega_c)|$, deve estar 3 dB abaixo do valor máximo. De acordo com o gráfico corrigido, a freqüência de corte é aproximadamente 55 rad/s, praticamente o mesmo valor indicado pelo diagrama de Bode.

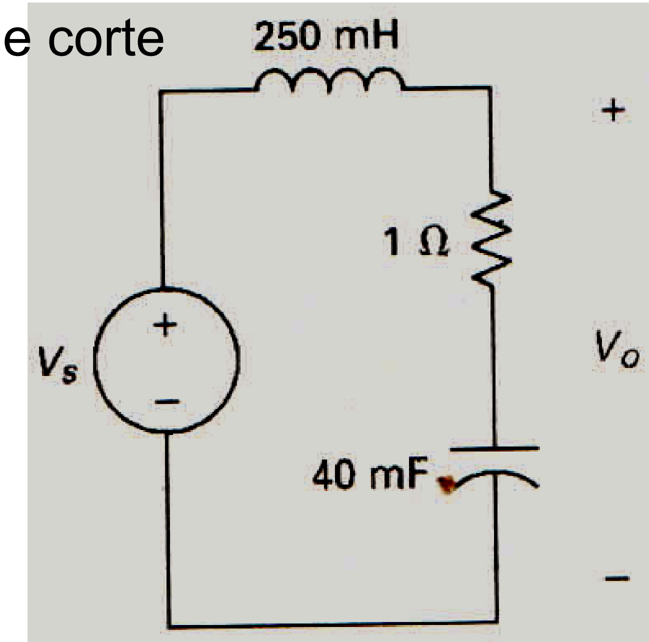
# Gráficos de fase

- O ângulo de fase é
  - Zero quando ω = 0
  - -90º na frequência de quebra
  - Tende a 180º quando ω → ∞
- A forma exata do gráfico depende do valor de ζ
  - Para pequenos valores de ζ, o ângulo de fase sofre uma variação acentuada próximo à frequência de quebra



# Exemplo 15.12

- Determine a FT do circuito abaixo
  - Construa o gráfico de Bode para a amplitude na faixa de 0,1 a 10.000 rad/s
  - Descreva o tipo de filtro e estime a frequência de corte, $\omega_c$
  - Calcule o valor exato da frequência de corte
  - Construa o gráfico de Bode para a fase na faixa de 0,1 a 10.000 rad/s
  - Estime o valor de $\theta(\omega)$ na frequência de corte
  - Calcule o valor exato de $\theta(\omega)$ na frequência de corte



# Exemplo 15.2

$$H(s) = \frac{\frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$H(s) = \frac{4(s+25)}{s^2 + 4s + 100}$$

$$\zeta = 0{,}2 \text{ e } \omega_n = 10$$

$$H(s) = \frac{s/25 + 1}{1 + (s/10)^2 + 0{,}4(s/10)}$$

$$H(j\omega) = \frac{|1 + j\omega/25| \angle \psi_1}{|1 - (\omega/10)^2 + j0{,}4(\omega/10)| \angle \beta_1} \qquad u = \omega/10$$

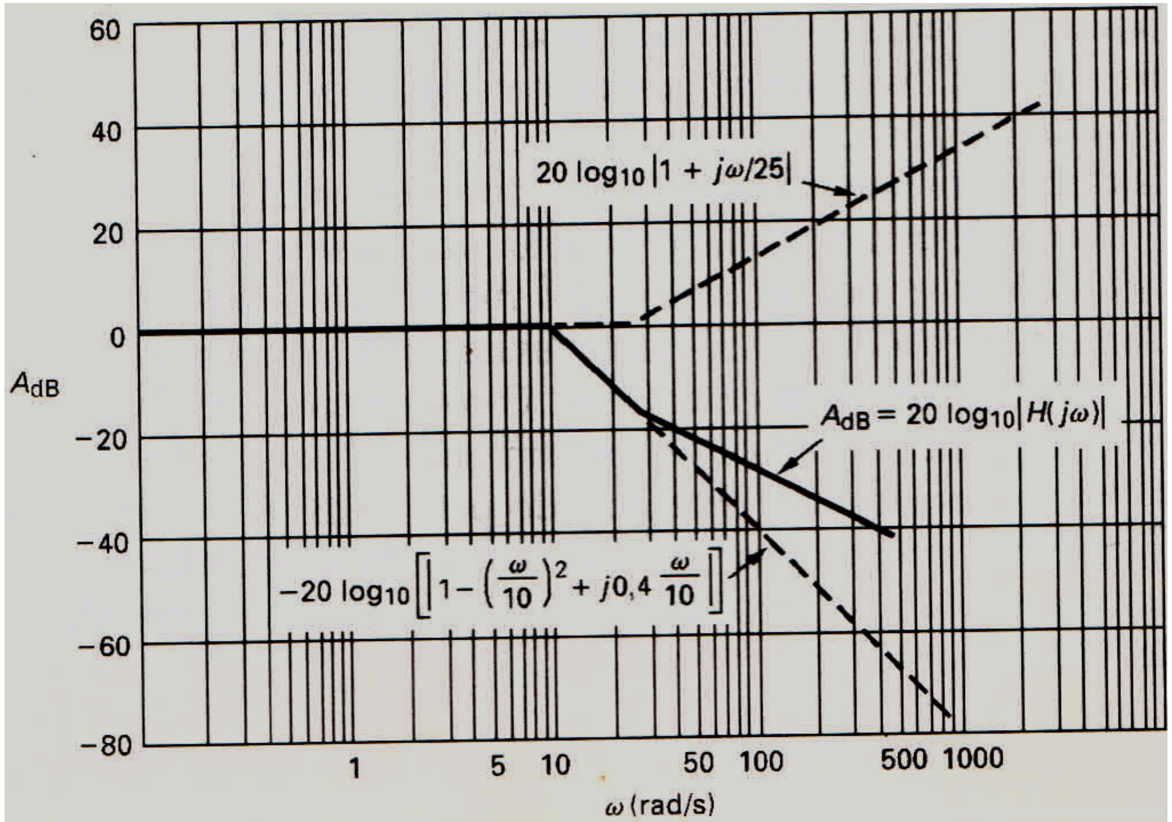
# Exemplo 15.12

$$A_{dB} = 20\log_{10}|1 + j\omega/25| - 20\log_{10}\left[\left|1 - \left(\frac{\omega}{10}\right)^2 + j0{,}4\left(\frac{\omega}{10}\right)\right|\right]$$

$$\theta(\omega) = \psi_1 - \beta_1,$$

$$\psi_1 = \text{arc tg } (\omega/25)$$

$$\beta_1 = \text{arc tg } \frac{0{,}4(\omega/10)}{1 - (\omega/10)^2}.$$



# Exemplo 15.12

c) Observando o gráfico de amplitude da Fig. 15.49, podemos ver que o circuito se comporta como um filtro passa-baixos. Na freqüência de corte, a amplitude de $H(j\omega)$ deve estar 3 dB abaixo da amplitude na banda passante (0 db). De acordo com o gráfico, a freqüência de corte é aproximadamente 13 rad/s.

# Exemplo 15.12

d) Para calcular o valor exato da freqüência de corte, substituímos $s$ por $j\omega$ na função da transferência, calculamos o valor de $|H(j\omega)|$, fazemos $|H(j\omega)| = H_{max}/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$ e determinamos o valor de $\omega_c$. Temos:

$$H(j\omega) = \frac{4(j\omega) + 100}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 100}.$$

Assim,

$$|H(j\omega_c)| = \frac{\sqrt{(4\omega_c)^2 + 100^2}}{\sqrt{(100 - \omega_c^2)^2 + (4\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

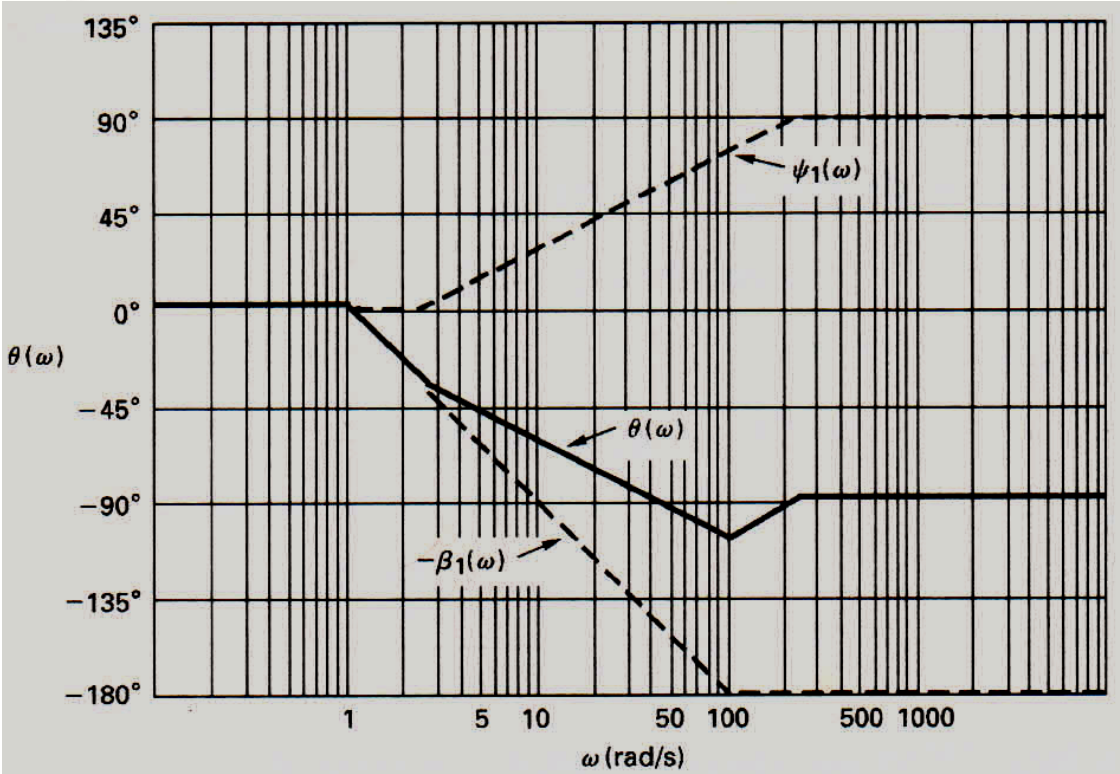
Calculando o valor de $\omega_c$ na expressão acima, temos:

$$\omega_c = 16 \text{ rad/s}.$$

# Exemplo 15.12

e) A Fig. 15.50 mostra o gráfico de fase. Observe que o segmento de reta entre 1,0 e 2,5 rad/s não tem a mesma inclinação que o segmento de reta entre 2,5 e 100 rad/s.

f) De acordo com o gráfico de Bode da Fig. 15.50, o ângulo de fase na freqüência de corte (16 rad/s) é aproximadamente $-65°$.



# Exemplo 15.12

g) Para calcular o ângulo de fase exato na freqüência de
fazemos $s = j16$ na função de transferência $H(s)$:

$$H(j16) = \frac{4(j16 + 25)}{(j16)^2 + 4(j16) + 100}.$$

Determinando o ângulo de fase da expressão acima, obte

$$\theta(\omega_c) = \theta(j16) = -125{,}0°.$$

# Exercício 15.14

- A expressão de uma FT de corrente é

$$H(s) = \frac{I_o}{I_i} = \frac{25 \times 10^8}{s^2 + 20.000s + 25 \times 10^8}.$$

- Determine:
  - Frequência de quebra 50krad/s
  - Coeficiente de amortecimento 0,2
  - Frequências nas quais $|H(j\omega)| = 1$ 0 e 67,82krad/s
  - Amplitude máxima de $H(j\omega)$ em decibéis 8,14dB
  - A frequência para a qual a amplitude de $H(j\omega)$ é máxima 47,96krad/s
  - A amplitude de $H(j\omega)$ quando a frequência é a metade da frequência de quebra 2,20dB