Raízes de funções
O método da tangente e da secante

Algoritmos Numéricos - Topico 4-2
Raízes de funções: o método da tangente e da secante.

Prof. Cláudia G. Varassin DI/UFES
emails:claudia.varassin@ufes.br e galarda@inf.ufes.br

Março de 2021

Raízes de Equações

1. Raízes reais das equações
2. Método da Tangente (Newton-Raphson)
3. Método da Secante

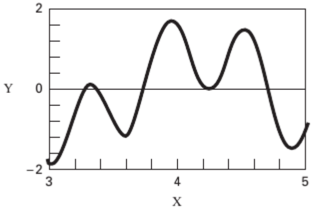
Raízes

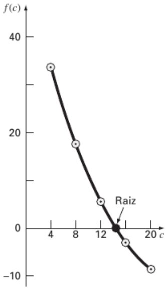
Quer se resolver uma equação do tipo

$$f(x) = 0$$

Os valores de x que resolvem a equação são chamados de raízes da equação.
Neste curso, são estudados métodos para a obtenção apenas das raízes reais.

Exemplos:

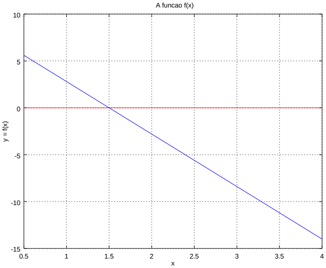




Exemplo:

Eq algébrica (problema linear)

$f(x) = -5.6x + 8.4 = 0 \Rightarrow x_r = 8.4/5.6 = 1.5$



Problema linear

$f(x) = mx + b = 0 \Rightarrow$ se $m \neq 0 \rightarrow x = -b/m$

Problema linear

$f(x) = mx + b = 0 \Rightarrow$ se $m \neq 0 \rightarrow x = -b/m$

Problemas não lineares

Equação Algébrica

exemplo: eq. com um polinômio de grau 2

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$ Há raízes? Até 2 raízes

Como obter?

$\rightarrow$ Baskhara depende de a,b,c

Problema linear

$f(x) = mx + b = 0 \Rightarrow$ se $m \neq 0 \rightarrow x = -b/m$

Problemas não lineares

Equação Algébrica
exemplo: eq. com um polinômio de grau 2
$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$ Há raízes? Até 2 raízes
Como obter?
$\rightarrow$ Baskhara depende de a,b,c

Equação transcendente :
$f(x) = 2x^3 - cos(x + 1) = 0 \Rightarrow$ Há raízes? $\rightarrow$ Como obter ?

Problema linear

$f(x) = mx + b = 0 \Rightarrow$ se $m \neq 0 \rightarrow x = -b/m$

Problemas não lineares

Equação Algébrica

exemplo: eq. com um polinômio de grau 2

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$ Há raízes? Até 2 raízes

Como obter?

$\rightarrow$ Baskhara depende de a,b,c

Equação transcendente :

$f(x) = 2x^3 - cos(x+1) = 0 \Rightarrow$ Há raízes? $\rightarrow$ Como obter ?

Caso geral

$f(x) = 0 \Rightarrow$ Há raízes? Como obter? $\rightarrow$ Como obter ?

O método da tangente (Newton/ Newton-Raphson)

Uma das formas de se resolver a equação

$$f(x) = 0$$

é via o método da tangente (também conhecido como método de Newton ou ainda como método de Newton-Raphson).

A ideia básica é resolver o problema não linear ("complicado") via a resolução de um problema linear associado a ele (localmente).

O método da tangente (Newton/ Newton-Raphson)

Uma das formas de se resolver a equação

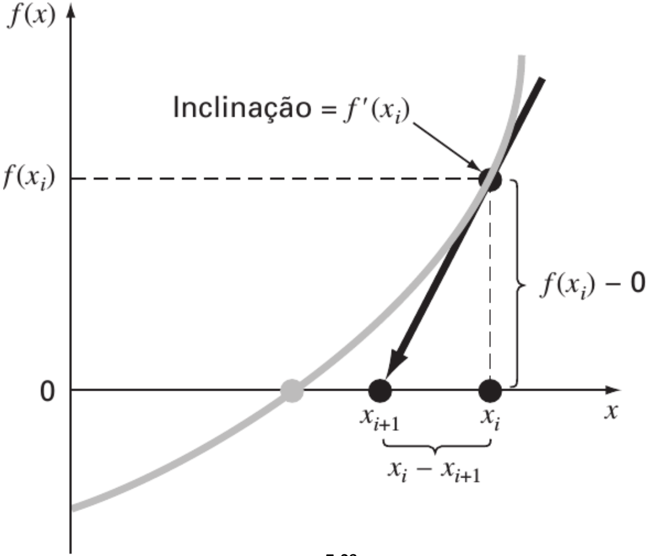
$$f(x) = 0$$

é via o método da tangente (também conhecido como método de Newton ou ainda como método de Newton-Raphson).

A ideia básica é resolver o problema não linear ("complicado") via a resolução de um problema linear associado a ele (localmente).

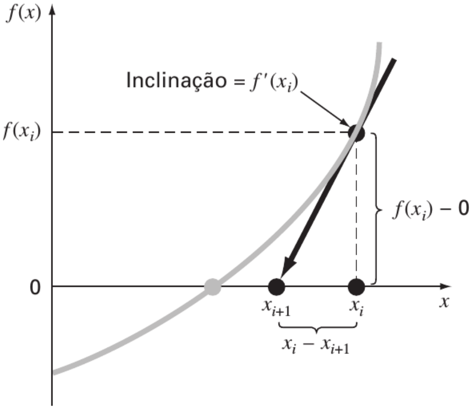
Resolvendo o problema linear se obtém uma estimativa (uma aproximação) da solução do problema não linear e, a partir daí, vai se refinando para obter novas aproximações.

Descrição gráfica do método de tangente



A reta tangente a $f(x)$ em x_i tem inclinação $m = f'(x_i)$

$$m = f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$



Dados x_i e $f(x_i)$ e $f'(x_i)$ é possível obter x_{i+1}

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{(x_i - x_{i+1})}$$

$$(x_i - x_{i+1})f'(x_i) = f(x_i)$$

Dados x_i e $f(x_i)$ e $f'(x_i)$ é possível obter x_{i+1}

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{(x_i - x_{i+1})}$$

$$(x_i - x_{i+1})f'(x_i) = f(x_i)$$

$$(x_i - x_{i+1}) = f(x_i)/f'(x_i)$$

Dados x_i e $f(x_i)$ e $f'(x_i)$ é possível obter x_{i+1}

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{(x_i - x_{i+1})}$$

$$(x_i - x_{i+1})f'(x_i) = f(x_i)$$

$$(x_i - x_{i+1}) = f(x_i)/f'(x_i)$$

$$-x_{i+1} = f(x_i)/f'(x_i) - x_i$$

Método da tangente:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Partindo de uma aproximação inicial (um x_0) faz-se as aproximações sucessivas da seguinte forma:

1^a Iteração:

$$x_1 = x_0 - \left(\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)$$

Partindo de uma aproximação inicial (um x_0) faz-se as aproximações sucessivas da seguinte forma:

1^a Iteração:

$$x_1 = x_0 - \left(\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)$$

2^a Iteração:

$$x_2 = x_1 - \left(\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right)$$

$$\vdots$$

Partindo de uma aproximação inicial (um x_0) faz-se as aproximações sucessivas da seguinte forma:

1^a Iteração:

$$x_1 = x_0 - \left(\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)$$

2^a Iteração:

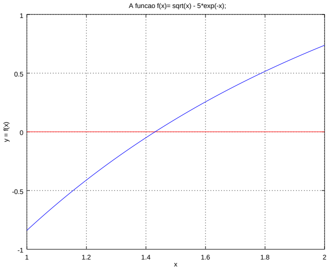
$$x_2 = x_1 - \left(\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right)$$

$$\vdots$$

Iteração qualquer:

$$x_{i+1} = x_i - \left(\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right)$$

Exemplo: obter as raízes de $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$
Pela análise gráfica, sabe se que há uma raíz em $I = [1.0, 2.0]$



Aplicando o método da tangente, para este problema:
Derivando $f(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5e^{-x}$

$$x_{i+1} = x_i - \left(\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right)$$

$$x_{i+1} = x_i - \left(\frac{\sqrt{x_i} - 5e^{-x_i}}{\frac{1}{2\sqrt{x_i}} + 5e^{-x_i}}\right)$$

Aplicando o método da tangente, para este problema, com $x_0 = 2.0$:

1^a Iteração:

$$x_1 = x_0 - \left(\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right) \rightarrow x_1 = 2.0 - \left(\frac{f(2.0)}{f'(2.0)}\right) = 1.2841$$

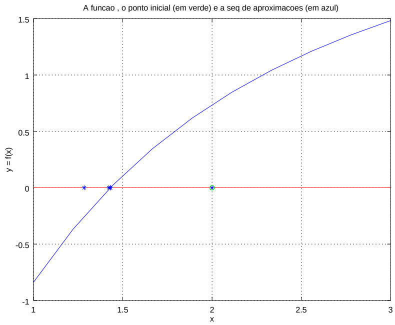
2^a Iteração:

$$x_2 = x_1 - \left(\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right) \rightarrow x_2 = 1.2841 - \left(\frac{f(1.2841)}{f'(1.2841)}\right) = 1.4218$$

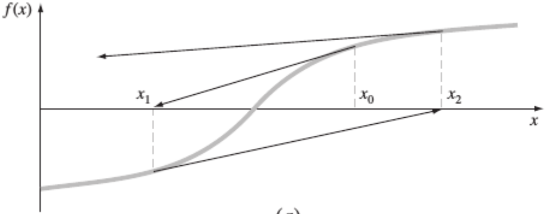
3^a Iteração:

$$x_3 = x_2 - \left(\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}\right) \rightarrow x_3 = 1.4218 - \left(\frac{f(1.4218)}{f'(1.4218)}\right) = 1.4304$$

Representando a função $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$ e os valores $x_0 = 2.0$, $x_1 = 1.2841$, $x_2 = 1.4218, x_3 = 1.4304$

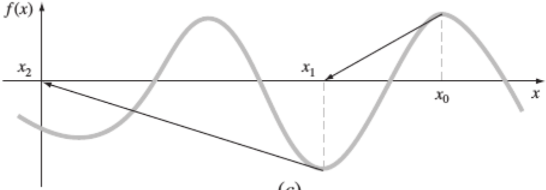


Dado um chute x_0 a sequencia pode não ser convergente ou pode convergir para uma raiz bem distante do intervalo em estudo.
Situações possíveis...



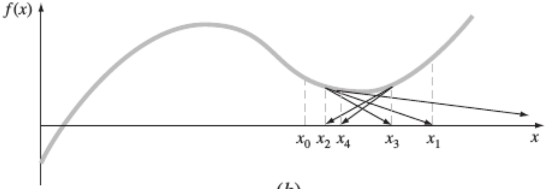
(a)

Situações possíveis...



(c)

Situações possíveis...



(b)

O método da secante

Ideia: em vez de usar a reta tangente no ponto x_i (isto é, a derivada $f'(x_i)$) usa se uma reta secante.

Método da tangente:

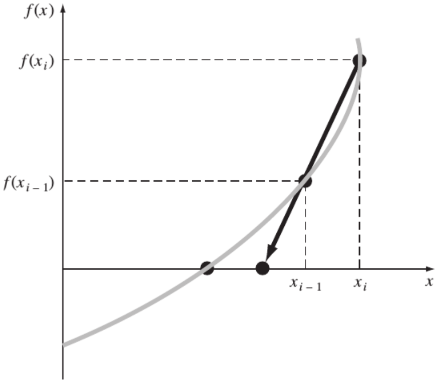
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Método da secante:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\text{inclinação da secante}}$$

Assim, no método da secante, faz se uso de:

$$f'(x_i) \approx \text{ inclinacao da secante} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$



O método da secante:

$$x_{i+1} = x_i - \left(\frac{f(x_i)}{\text{inclinacao da secante}}\right)$$

O método da secante:

$$x_{i+1} = x_i - \left(\frac{f(x_i)}{\text{inclinacao da secante}}\right)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)}$$

O método da secante:

$$x_{i+1} = x_i - \left(\frac{f(x_i)}{\text{inclinacao da secante}}\right)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \left(\frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}\right)$$

O método da secante:
Dados x_{i-1}, x_i, $f(x_i)$ e $f(x_{i-1})$ uma nova aproximação x_{i+1} é calculada via:

$$x_{i+1} = x_i - (\frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})})$$

Neste método, é necessário ter 2 pontos iniciais (x_0, x_1, isto é, 2 aproximações iniciais) para gerar uma nova aproximação (x_2).

RESUMINDO:

O método da tangente:

Dados x_i e $f(x_i)$ e $f'(x_{i1})$ uma nova aproximação x_{i+1} é calculada via:

$$x_{i+1} = x_i - (\frac{f(x_i)}{f'(x_i)})$$

O método da secante:

Dados x_{i-1}, x_i, $f(x_i)$ e $f(x_{i-1})$ uma nova aproximação x_{i+1} é calculada via:

$$x_{i+1} = x_i - (\frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})})$$

Bibliografia Básica

[1] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[2] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.