Calculo 2 2022 2

Aula 6

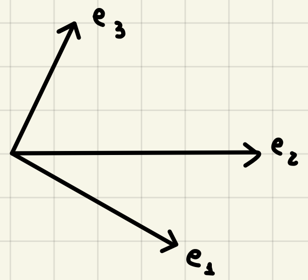
Aula passada Dependência linear

Aula Hoje base

Cap. 7 Base

↳ representar o vetor de maneira numérica

definição $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ LI é dito uma base para V^3



Pela aula passada dado $\vec{u}\in V^3$

$$\vec{u}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$$

onde $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$ são ÚNICOS

Assim

definição $E=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ base de V^3 e

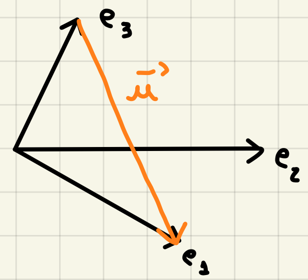
$$\vec{u}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$$

a tripla $(a_1,a_2,a_3)_E$ é dita coordenadas de $\vec{u}$ na base E

Obs A ordem é importante
a_1 é o coef que acompanha o 1° da base e assim por diante

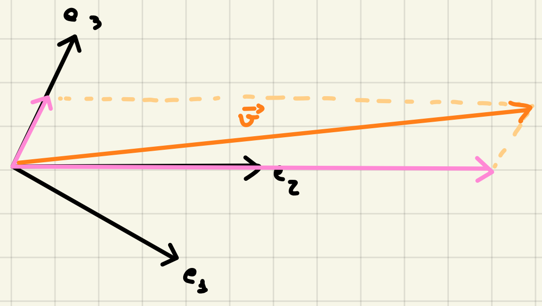
Exemplo $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ base

(a) $\vec{u}=e_1-e_3$ então
$\vec{u}=(1,0,-1)_E=(1,0,-1)$



(b) $\vec{v}=2e_2+\frac{1}{2}e_3$ então

$\vec{v}=(0,2,\frac{1}{2})_E$



Vamos expressar as operações em termo das coordenadas

Proposição

(a) $(a_1,a_2,a_3)_E+(b_1,b_2,b_3)_E$

$=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)_E$

(b) $\alpha(a_1,a_2,a_3)=(\alpha a_1,\alpha a_2,\alpha a_3)$

Exemplo sendo
$\vec{u}=(-1,2,0)_E$
$\vec{v}=(3,-3,4)_E$
Calcule as coordenadas de $\omega=-3\vec{u}+2\vec{v}$ na base E

Solução $\vec{w}=-3\vec{u}+2\vec{v}$
$=-3(-1,2,0)_E+2(3,-3,4)_E$
$=(3,-6,0)_E+(6,-6,8)_E$
$=(9,-12,8)_E$

Exemplo Escreva $\vec{t}=(4,0,13)$ como combinação linear de $\vec{u}=(1,-1,3)$, $\vec{v}=(2,1,3)$ $\vec{w}=(-1,-1,4)$

Solução $\vec{t}=a(1,-1,3)+b(2,1,3)+c(-1,-1,4)$
$(4,0,13)=(a+2b-c,-a+b-c,3a+3b+4c)$
$\Leftrightarrow$ $a+2b-c=4$
$-a+b-c=0$
$3a+3b+4c=13$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5/5 & 1/5 \end{bmatrix} \qquad -1+\frac{4}{3} = \frac{1}{3} \qquad 4 - \frac{4.2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 19/15 \\ 0 & 3/3 & 0 & 22/5.3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 \end{bmatrix} \qquad \frac{5.4}{5\ 3} - \frac{1}{15} = \frac{19}{15} \qquad 4 + \frac{2}{5} = 22/5$$

$$a = \frac{19}{15} \qquad b = \frac{22}{15} \qquad c = \frac{1}{5}$$

$$\vec{t} = \frac{19}{5}\vec{u} + \frac{22}{15}\vec{v} + \frac{1}{5}\vec{w}$$

Exemplo $\vec{u} = (1,-1,3)$ pode ser escrito com combinação linear de
$\vec{v} = (-1,1,0)$
$\vec{w} = (2,3,1/3)$?

Solução

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$$

$$(1,-1,3) = a(-1,1,0) + b(2,3,1/3)$$

$$\begin{aligned} -a + 2b &= 1 & a &= 17 \\ a + 3b &= -1 & a &= -28 \\ 1/3\, b &= 3 & \rightarrow b &= 9 \end{aligned}$$

absurdo

não pode ser escrito.

Vamos expressar a relações LI e LD em termos das coordenadas

Caso 1 : dois vetores
↳ LD se um é múltiplo do outro

ou :

Proposição Os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ são LD se só se os 3 determinantes são NULOS

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Caso 2 : 3 vetores
↳ $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0$ tem solução não nula

ou

Proposição Os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$
$\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$
$\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$
são LD se só se

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Obs • u e v são LI se um dos determinantes é $\neq 0$

• u, v e w são LI's se o determinante acima $\neq 0$

Exemplo Verifique se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI ou LD

(a) $u = (3,10,11)$, $\vec{v} = (4,7,-1)$

solução :

$$\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 27 - 40 \neq 0 \quad \text{são LI}$$

(b) $\vec{u} = (1,7,1)$, $\vec{v} = (1/2, 7/2, 1/2)$

Solução:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1/2 & 7/2 \end{vmatrix} = \frac{7}{2} - \frac{7}{2} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 7/2 & 1/2 \end{vmatrix} =$$

são LD a saber
$\vec{v} = 2\vec{u}$

(c) $\vec{u} = (1,-1,2)$, $\vec{v} = (0,1,3)$ e $\vec{w} = (4,-3,11)$

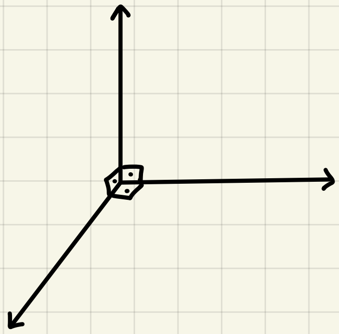
Solução

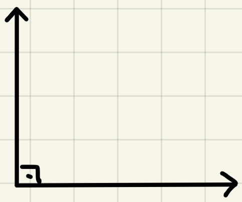
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{matrix}$$

$$11 - 12 - (8 - 9) = -1 - (-1) = 0$$

são LD.

definição Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se o segmento de um dos seus representantes são ortogonais, isto é, formam um ângulo de 90° graus. Escrevemos $\vec{u} \perp \vec{v}$.



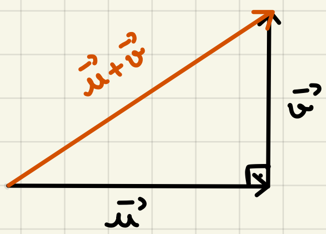


Propriedade

$\vec{u} \perp \vec{v}$ se só se

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

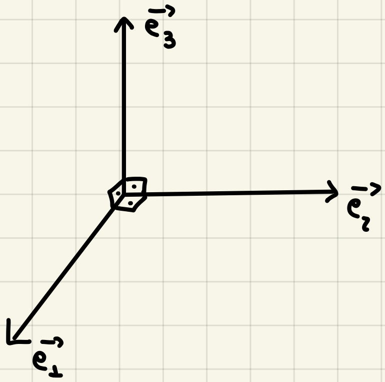
trata-se do teorema de pitágoras



definição Uma base $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é dita ortonormal se

(I) e_1, e_2, e_3 são unitários
isto é $\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$

(II) dois a dois são ortogonais

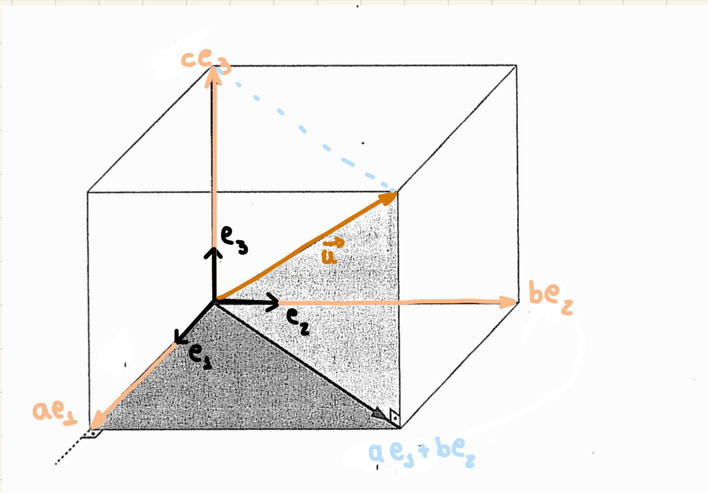


Proposição Sejam $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ base ortonormal e

$$\vec{u} = ae_1 + be_2 + ce_3$$

então

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$



$ce_3 \perp ae_1+be_2$
$e_2 \perp e_3$

$$\|u\|^2 = \|ce_3\|^2 + \|ae_1+be_2\|^2$$
$$= c^2\|e_3\|^2 + a^2\|e_1\|^2 + b^2\|e_2\|^2$$
$$= a^2+b^2+c^2$$

Exemplo Seja E uma base ortonormal e $\vec{u} = (2,-1,3)_E$. Calcule $\|\vec{u}\|$

Solução $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{14}$