Cálculo 2 2022.1

Aula 1

Aula de Hoje : integrais impróprias

- o intervalo de integração é ilimitado $[a,\infty)$ ou $(-\infty,b]$

- o integrando é descontínuo no intervalo $[a,b)$

7.8 Integrais Impróprias

ver biblioteca Ufes

Motivação :

Exemplo: Considere a dízima periódica

$$0{,}2222\ldots = \frac{2}{9} = \underbrace{\frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots}$$

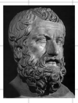
uma soma de infinitos termos resulta em um número finito

Isto já causou muito desconforto na história da matemática antes do conceito de limite

Exemplo : Note que a soma infinita

$$1 + 1 + 1 + \ldots$$

"diverge", ou seja não está arbitrariamente próximo de nenhum número real

Exemplo : (Paradoxo de Zenão) 

Para um corredor ir de A até B ($|\overline{AB}| = 1$) ele terá primeiro cobrir metade da distancia de A até B. Depois metade do que falta e assim por diante.

O corredor irá alcançar seu destino ?

- $|\overline{AB}| = 1$

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{primeiro passo}} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{metade do que resta}} + \underbrace{\frac{1}{8}}_{\ldots} + \ldots$$

P.G de razão $\frac{1}{2}$

Sabemos que

$$s(n) = \frac{a(1-x^n)}{1-x} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

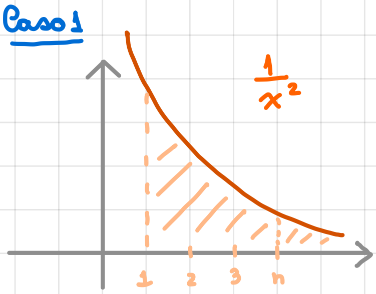
$$= 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = 1$$

Resposta : Não, em um tempo finito n. Mas o corredor está arbitrariamente proximo de B.

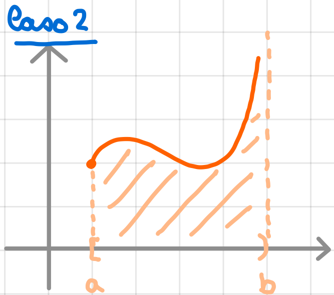
Somas infinitas tem comportamentos variados vamos as integrais (que também são somas)

Caso 1



$[1,\infty)$

Caso 2



$[a,b)$

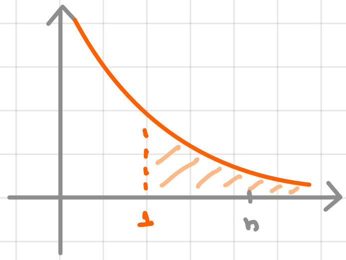
Caso 1 : Integrar uma função em um intervalo limitado

Caso 2 : Integrar uma função em um intervalo em que a função é descontínua

Ambos os casos dizemos que a integral é imprópria.

Exemplo: Calcule a área do abaixo do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ em $[1, \infty)$

Solução

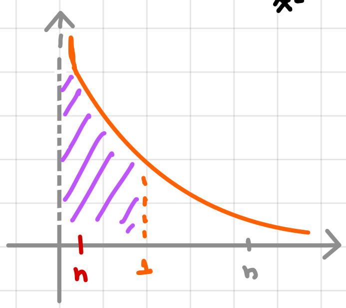


Para n qualquer:

$$s(n) = \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^n = -\frac{1}{n} + 1$$

e $\lim\limits_{n \to \infty} s(n) = 1$

Exemplo Calcule a área abaixo do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ no intervalo $(0, 1]$



Para n qualquer

$$s(n) = \int_n^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= -1 + \frac{1}{n}$$

e $\lim\limits_{n \to 0} s(n) = \nexists$

↳ Não pode aplicar o TFC pois não estar definido em 0

Formalizando

definição

(a) Integral imprópria tipo 1

Se $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para $t \geq a$ então

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx}$$

ou $\int_t^b f(x)\,dx$ existe $t \leq b$ então

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

b) Integral imprópria tipo 2

Se f é contínua $[a, b)$ e descontínua em b

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\,dx}$$

ou f contínua $(a, b]$ e descontínua em a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a} \int_t^b f(x)\,dx$$

Observação:

- $$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx$$

Se f é descontínua c, $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Observação

Se os limites existem dizemos que a integral imprópria **converge** e se o limite não existe dizemos que **diverge**.

Exemplo: Calcule $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$, se possível.

Solução

Note que a função não está definida em $x=1$

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx}_{I_2}$$

Se I_1 ou I_2 diverge então a integral $\int_0^3 \frac{1}{x-1}.dx$ diverge

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x-1}.dx = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{x-1}.dx$$

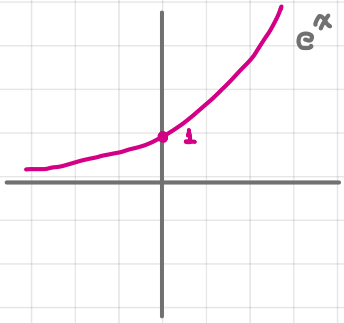
$$= \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1| \Big|_0^t$$

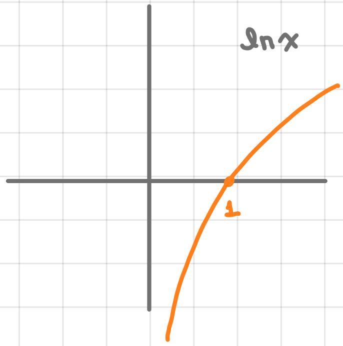
$$= \lim_{t\to 1^-} \ln|t-1| - \underbrace{\ln|1|}_{=0}$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \ln|t-1| = \nexists$$

Extra

Logaritmo natural e exponencial





Função exponencial e log

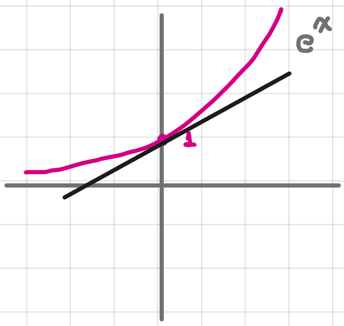
Fixa $a>0$

$x \longmapsto a^x = y$
↳ base

$\log_a y \longleftarrow y$

Isto é $\log_a y = x \iff a^x = y$

- $a^{\log_a y} = a^x = y$
- $\log_a a^x = \log_a y = x$
- Número $e = 2{,}71\ldots$



da família das exponenciais escolher a tal que a declividade de da reta tangente em $(0,1)$ seja igual a 1

E a inversa de e^x denotamos por

$$\ln y := \log_e y$$

Propriedades:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln(x.y) = \ln x + \ln y$$

$$\Downarrow$$

$$\ln(x.x) = \ln x^2$$
$$= \ln x + \ln x = 2\ln x$$

- $e^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3} = 2^3 = 8$
- $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$