Cálculo 2 2022.2

Aula 9

Aula passada: Retas

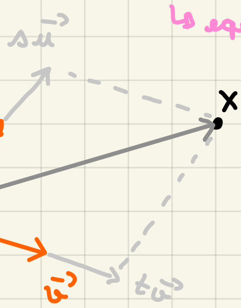
Aula Hoje: Planos

Cap 14 Equação do Plano

Definição Seja A um ponto e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ LI o plano π que por A e tem direção $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são

$$X = A + s\vec{u} + t\vec{v} \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$$

↳ equação vetorial



$$\vec{XA} = s\vec{u} + t\vec{v} \Leftrightarrow \{\vec{AX}, \vec{u}, \vec{v}\}$$ são LD.

Se $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$
e $A = (x_0, y_0, z_0)$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{(x,y,z)}}{X} = (x_0, y_0, z_0) + s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2) \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$$

Então

$$\begin{cases} x = x_0 + s a_1 + t a_2 \\ y = y_0 + s b_1 + t b_2 \\ z = z_0 + s c_1 + t c_2 \quad , s,t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

equações paramétricas

Ainda com $\{\vec{AX}, \vec{u}, \vec{v}\}$ devem ser LD

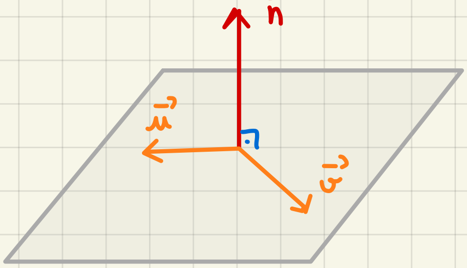
então
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}_{=a} (x - x_0) - \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}_{=b} (y - y_0) + \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}_{=c} (z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

equação cartesiana ou geral

onde $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor ortogonal ao plano



Consequência um vetor $\vec{p}$ é paralelo a um plano π se

- $\vec{p} \cdot \vec{n} = 0$
- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{p}\}$ são LD

Exemplo Dê a equação paramétrica e geral:

(a) Contém ponto $A = (9, -1, 0)$ e paralelo a $u = (0, 1, 0)$ e $v = (1, 1, 1)$

(b) contém $A = (1, 0, -2)$, $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (2, 1, 2)$

Solução

(a)
$$\pi_1 = \begin{array}{rcccccc} x & = & 9 & + & 0 \cdot s & + & 1 \cdot t \\ y & = & -1 & + & 1 \cdot s & + & 1 t \\ z & = & 0 & + & 0 s & + & 1 t \\ & & A & & \vec{u} & & \vec{v} \end{array}$$

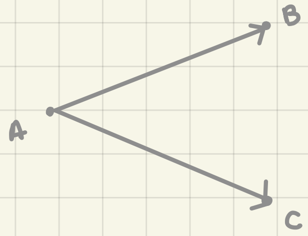
paramétrica

Geral : Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{n}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i + 0j - k = (1, 0, -1) \Bigg\rangle \; (x - 9) - (z - 0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x - z = 9$$

(b)



$\vec{AB} = (-2,0,3)$
$\vec{AC} = (1,1,1)$

$$\pi_2 = \begin{cases} x = 1 - 2s + t & = 1-2s+t \\ y = 0 + 0s + t & = t \\ z = -2 + 3s + t & = -2+3s+t \end{cases}$$

paramétrica

Geral : Calcular $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3i + 5j - 2k$$

$$-3(x-1) + 5(y-0) - 2(z+2) = 0$$
$$-3x + 5y - 2z = 1$$

Exemplo Nos planos anteriores verifique

(a) se $P = (0,1,2)$ pertence aos planos

(b) se $\vec{p} = (1,0,1)$ é paralelo aos planos

Solução

(a) $\pi_1 = x - z = 9$

$0 - 2 \neq 9$ não pertence

$\pi_2 = -3x + 5y - 2z = 1$

$5.1 - 4 = 1$ ✓

pertence

(b) π_1: Verificar $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{p}\}$ são LD

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 0 - 0 - 1 = 0$$

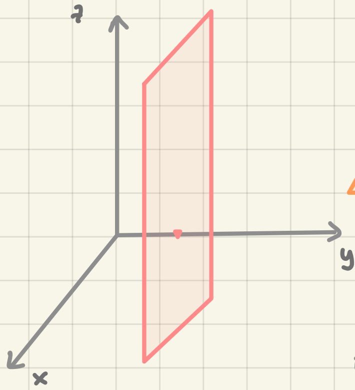
$\vec{p}$ é paralelo a π_1

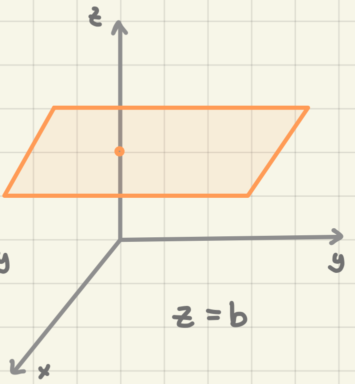
π_2: pordem ver se $\vec{p} \cdot \vec{n} = 0$

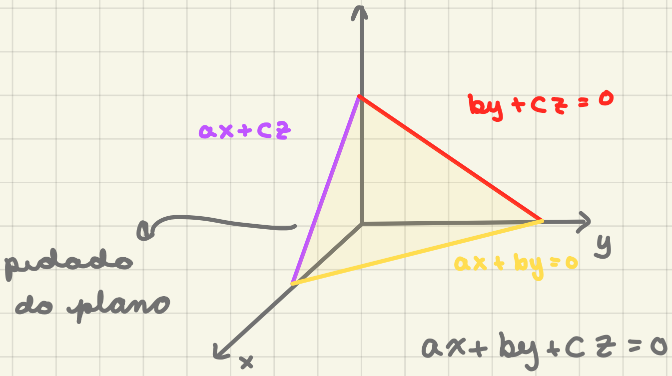
$(1,0,1)(-3,5,-2) = -3-2 \neq 0$

$\vec{p}$ não é paralelo a π_2

Esboço de planos







Exemplo Determine as paramétricas

$\pi: x + 2y - z = 1$

Solução : 1º jeito : $y = s$
$z = t$

$\Rightarrow x = -2y + z$
$= -2s + t$

$$\begin{cases} x = -2s + t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

2º jeito reconhecer 3 pontos

$A = (1,0,0) \in \pi$

$B = (0,0,-1) \in \pi$

$C = (0, 1/2, 0) \in \pi$

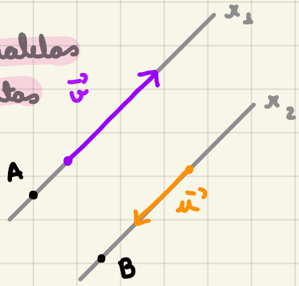
$\vec{AB} = (-1,0,-1)$

$\vec{AC} = (-1, 1/2, 0)$

$$\begin{cases} x = 1 - s - t \\ y = 0 + \tfrac{1}{2}t \\ z = 0 - s \end{cases}$$

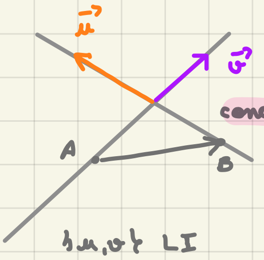
Cap 15 Interseção de retas e planos
Cap 16 Posição relativa
Cap 17 Perpendicular e ortogonalidade

paralelos distintos



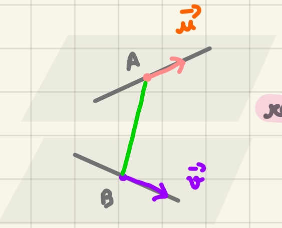
$\{u, v\}$ LD
pontos ≠

concorrente



$\{u, v\}$ LI
$\{u, v, AB\}$ LD

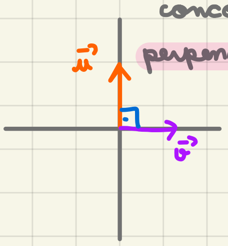
reversas



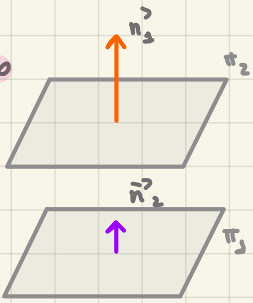
$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}\}$ LI

concorrente perpendicular

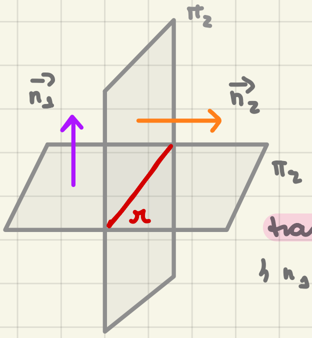
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



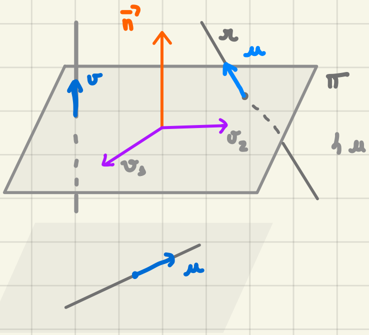
se $u \cdot v = 0$
reversas ortogonais



paralelos
$\{n_1, n_2\}$ LD



transversais
$\{n_1, n_2\}$ LI   se $n_1 \cdot n_2 = 0$
perpendiculares



transversal
$\{u, v_1, v_2\}$ LI ou $\{u, n\}$ LI
normal
$\{v, \vec{n}\}$ LD
ou $v \cdot v_1 = v \cdot v_2 = 0$
paralela
$\{u, v_1, v_2\}$ LD
$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

Exemplo Duas partículas realizam movimentos descritos pelas equações

$X = t(1,2,4)$ $\vec{u} = (1,2,4)$
$X = (1,0,-2) + s(-1,-1,-1)$ $\vec{v} = (-1,-1,1)$ LI

As Trajetórias são concorrentes?
Pode haver colisão das partículas em algum instante?

Solução: concorrentes ou reversas

- igualar:

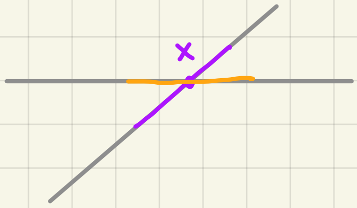
$t(1,2,4) = (1,0,-2) + s(-1,-1,-1)$
$(t, 2t, 4t) = (1-s, -s, -2-s)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - s \\ 2t = -s \\ 4t = -2 - s \end{cases} \rightarrow s = -2t \qquad \begin{aligned} t &= 1 + 2t \\ t &= -1 \\ s &= 2 \end{aligned}$$

$4 \cdot -1 = -2 - 2$

concorrentes. e o ponto é $X = (-1,-2,-4)$

mas não colidem porque correspondem a instante ≠ $t = -1$ e $s = 2$.



Exemplo Determine a interseção dos planos

$\pi_1: \quad x + 2y + 3z = -1$ $\vec{n} = (1,2,3)$
$\pi_2: \quad x - y + 2z = 0$ $\vec{n} = (1,-1,2)$ LI

Solução: transversais

Resolver o sistema
$x + 2y + 3z = -1$
$y = x + 2z$

$x + 2(x + 2z) + 3z = -1$
$3x + 7z = -1$
$x = -\frac{1}{3} - \frac{7}{3}z \qquad y = -\frac{1}{3} - \frac{7}{3}z + 2z = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}z$

$X = (x,y,z) = \left(-\frac{1}{3} - \frac{7}{3}z, -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}z, z\right)$

$= \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + z\left(-\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$
reta