Resolução de sistemas lineares via Métodos Iterativos

Algoritmos Numéricos - Topico 2-4
Métodos iterativos estacionários- Gauss Jacobi e Gauss Seidel

Prof. Cláudia G. Varassin DI/UFES
emails:claudia.varassin@ufes.br e galarda@inf.ufes.br

Outubro 2020

Métodos Iterativos (estacionários)

1. Métodos Iterativos
2. Método de Gauss-Jacobi
3. Método de Gauss-Seidel

Para se resolver sistemas lineares há 2 categorias de métodos:

Os métodos diretos

São aqueles que envolvem uma sequência finita e pré-definida de operações e levam à solução exata do problema. (a menos de erros de arredondamento da máquina).

O método de eliminação de Gauss é um exemplo.

Os métodos iterativos

São aqueles que calculam a solução via sucessivas aproximações. Não se pode prever quantas operações serão realizadas para se chegar à solução (e, eventualmente, dependendo do problema, pode nem haver convergência).

Os métodos iterativos são métodos que repetem uma sequência de instruções (operações) para resolver um dado problema.

Iterar é repetir

Exemplo: Resolver o seguinte problema: $x^2 = 40$
A partir de um chute inicial, um valor x_0, vai se melhorando a solução adotando uma estratégia para "caminhar".

Os métodos iterativos são métodos que repetem uma sequência de instruções (operações) para resolver um dado problema.

Iterar é repetir

Exemplo: Resolver o seguinte problema: $x^2 = 40$

A partir de um chute inicial, um valor x_0, vai se melhorando a solução adotando uma estratégia para "caminhar".

Sabendo que a solução é um valor entre 6 e 7, parte se de um valor inicial.

$x_0 = 6.5 : (x_0)^2 = 42.25 \Rightarrow$ Diminuir! $\rightarrow x_1 = 6.25$

Os métodos iterativos são métodos que repetem uma sequência de instruções (operações) para resolver um dado problema.

Iterar é repetir

Exemplo: Resolver o seguinte problema: $x^2 = 40$

A partir de um chute inicial, um valor x_0, vai se melhorando a solução adotando uma estratégia para "caminhar".

Sabendo que a solução é um valor entre 6 e 7, parte se de um valor inicial.

$x_0 = 6.5 : (x_0)^2 = 42.25 \Rightarrow$ Diminuir! $\rightarrow x_1 = 6.25$

$x_1 = 6.25 : (x_1)^2 = 39.0625 \Rightarrow$ Aumentar! $\rightarrow x_2 = 6.375$

Os métodos iterativos são métodos que repetem uma sequência de instruções (operações) para resolver um dado problema.

Iterar é repetir

Exemplo: Resolver o seguinte problema: $x^2 = 40$

A partir de um chute inicial, um valor x_0, vai se melhorando a solução adotando uma estratégia para "caminhar".

Sabendo que a solução é um valor entre 6 e 7, parte se de um valor inicial.

$x_0 = 6.5 : (x_0)^2 = 42.25 \Rightarrow$ Diminuir! $\rightarrow x_1 = 6.25$

$x_1 = 6.25 : (x_1)^2 = 39.0625 \Rightarrow$ Aumentar! $\rightarrow x_2 = 6.375$

$x_2 = 6.375 : (x_2)^2 = 40.640625 \Rightarrow$ Diminuir! $\rightarrow x_3 = 3.3125$

$\vdots$

x_k

x_{k+1}

$\vdots \Downarrow$

x_{exato}

Os métodos iterativos para resolver um sistema $Ax = b$.

Para os sistemas lineares o processo consiste em repetir a seguinte atualização:

Dado um vetor em uma iteração $x^{(k)}$ calcula-se um novo $x^{(k+1)}$.

$$
\begin{array}{l}
x^{(0)} \\
x^{(1)} \\
\vdots \\
x^{(k)} \\
x^{(k+1)} \\
\vdots \Downarrow \\
x_{exato}
\end{array}
$$

Seja $Ax = b$ um sistema $n \times n$. A ideia é isolar os x_i da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
. \quad . \quad . & & . \\
. \quad . \quad . & & . \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

onde estamos assumindo que $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n)]$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)]$$

$$\vdots$$

Método de Gauss-Jacobi

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)}\right)\right] \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - \left(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)}\right)\right] \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - \left(a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + a_{n3}x_3^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Método de Gauss-Jacobi

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)})\right] \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)})\right] \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + a_{n3}x_3^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})\right]
\end{aligned}
$$

Assim, a atualização de uma componente i é dada por:

$$x_i^{(k+1)} = [b_i - (a_{i1}x_1^k + a_{i2}x_2^k + \ldots + a_{i,i-1}x_{i-1}^k + a_{i,i+1}x_{i+1}^k + \ldots + a_{i,n}x_n^k)]/a_{ii}$$

Método de Gauss-Jacobi

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)})\right] \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)})\right] \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + a_{n3}x_3^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})\right]
\end{aligned}$$

Assim, a atualização de uma componente i é dada por:

$$x_i^{(k+1)} = [b_i - (a_{i1}x_1^k + a_{i2}x_2^k + \ldots + a_{i,i-1}x_{i-1}^k + a_{i,i+1}x_{i+1}^k + \ldots + a_{i,n}x_n^k)]/a_{ii}$$

Escrito de forma mais compacta:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - (\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})\right], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Exemplo: resolver o sistema abaixo pelo método iterativo de Gauss Jacobi, partindo do vetor $x(0)$ dado.

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Exemplo: resolver o sistema abaixo pelo método iterativo de Gauss Jacobi, partindo do vetor $x(0)$ dado.

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{0.5}\left(0.2 - 0.6x_2^{(k)} - 0.3x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{1}\left(0.0 - 1.0x_1^{(k)} - 1.0x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{1}\left(-0.6 - 0.4x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)}\right) \end{aligned}$$

Iteração 1:parte de $x^{(0)} = [0; 0; 0]^t$

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{0.5}\left(0.2 - 0.6x_2^{(0)} - 0.3x_3^{(0)}\right) = 0.2/0.5 = 0.4 \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{1}\left(0.0 - 1.0x_1^{(0)} - 1.0x_3^{(0)}\right) = 0/(-1) = 0.0 \\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{1}\left(-0.6 - 0.4x_1^{(0)} + 0.4x_2^{(0)}\right) = (-0.6)/1 = -0.6
\end{aligned}$$

Iteração 1:parte de $x^{(0)} = [0;0;0]^t$

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{0.5}\left(0.2 - 0.6x_2^{(0)} - 0.3x_3^{(0)}\right) = 0.2/0.5 = 0.4 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{1}\left(0.0 - 1.0x_1^{(0)} - 1.0x_3^{(0)}\right) = 0/(-1) = 0.0 \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{1}\left(-0.6 - 0.4x_1^{(0)} + 0.4x_2^{(0)}\right) = (-0.6)/1 = -0.6 \end{aligned}$$

Iteração 2: parte de $x^{(1)} = [0.4;0;0.6]^t$

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{0.5}\left(0.2 - 0.6x_2^{(0)} - 0.3x_3^{(0)}\right) = 0.76 \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{1}\left(0.0 - 1.0x_1^{(0)} - 1.0x_3^{(0)}\right) = 0.2 \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{1}\left(-0.6 - 0.4x_1^{(0)} + 0.4x_2^{(0)}\right) = -0.76 \end{aligned}$$

Fazendo 6 iteracões, pelo método de Gauss Jacobi para obter a solucão

Na iteração 1: x= 0.40000 -0.00000 -0.60000

Na iteração 2: x = 0.76000 0.20000 -0.76000

Fazendo 6 iteracões, pelo método de Gauss Jacobi para obter a solucão

Na iteração 1: x= 0.40000 -0.00000 -0.60000

Na iteração 2: x = 0.76000 0.20000 -0.76000

Na iteração 3, x = 0.61600 0.00000 -0.82400

Na iteração 4: x = 0.89440 0.20800 -0.84640

Na iteração 5: x = 0.658240 -0.048000 -0.874560

Na iteração 6: x = 0.98234 0.21632 -0.88250

Algoritmo de Gauss Jacobi (Uma iteração)

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - (\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) \right], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

```
Dados (A,b,n, xa)
  Para i= 1:n
        s1 = 0; s2=0;
        Para j= 1:(i-1)
              s1 = s1 + A(i,j)*xa(j)
        Fim do j
        Para j= (i+1):n
              s2 = s2 + A(i,j)*xa(j)
        Fim do j
  x(i)= ( b(i)- (s1+s2) )/A(i,i)
  Fim do i
```

```
Algoritmo de Gauss Jacobi (versão qte fixa de iterações)
INICIO
Ler(A,b,n, xa, NumIter)
Para k = 1 : NumIter    "% fazendo as iteracoes"
  Para i= 1:n
        s1 = 0 ; s2=0;
        Para j= 1:(i-1)
              s1 = s1 + A(i,j)*xa(j)
        Fim do j
        Para j= (i+1):n
              s2 = s2 + A(i,j)*xa(j)
        Fim do j
  x(i)= ( b(i)- (s1+s2) )/A(i,i)
  Fim do i
  Atualizar o vetor xa com o conteúdo de x
Fim do k
FIM
```

Método de Gauss-Seidel

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)})\right] \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)})\right] \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - (a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \cdots + a_{3n}x_n^{(k)})\right] \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})\right]
\end{aligned}
$$

Escrito de forma mais compacta, para uma variável i:

$$
x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - (\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})\right], \quad i = 1, 2, \cdots, n
$$

Exemplo: resolver o sistema abaixo pelo método iterativo de Gauss-Seidel, partindo do vetor $x(0)$ dado.

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{0.5}\left(0.2 - 0.6x_2^{(k)} - 0.3x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{1}\left(0.0 - 1.0x_1^{(k+1)} - 1.0x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{1}\left(-0.6 - 0.4x_1^{(k+1)} + 0.4x_2^{(k+1)}\right) \end{aligned}$$

RESUMINDO: Para se resolver sistemas lineraes do tio $Ax = b$ é possivel usar métodos iterativos. São métodos que calculam a solução via sucessivas aproximações. Dois métodos foram abordados:
Gauss-Jacobi:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - (\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) \right], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Gauss Seidel:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - (\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) \right], \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Bibliografia Básica

[1] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[2] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.