Aula 18

Transformada de Laplace:
Definição e cálculo

Seção 6.1 pág 168

1. Esboce o gráfico da função dada. Determine se f é contínua, contínua por partes ou nenhuma das duas, no intervalo $0 \leq t \leq 3$.

   (a)
$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2+t, & 1 < t \leq 2 \\ 6-t, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$$
   Contínua por partes

   (b)
$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)^{-1}, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$$
   Nenhuma das duas

2. Encontre as transformadas de Laplace da função dada; a e b são constantes reais.

   (a) $senbt$

   (b) $e^{at}senbt$
   $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, s > a$

   (c) $e^{at}cosbt$
   $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, s > a$

3. Use integração por partes para encontrar a transformada de Laplace da função dada; n é um número inteiro e a é uma constante real.

   (a) te^{at}
   $\frac{1}{(s-a)^2}, s > a$

   (b) $tsen(at)$
   $\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}, s > a$

4. Determine se a integral converge ou diverge.

   (a) $\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1};$

   (b) $\int_0^\infty te^t;$

5. Suponha que f e f' são contínuas em $t \geq 0$ e de ordem exponencial quando $t \to \infty$. Integrando por partes, mostre que, se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, então $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

Aula 19

Transformada de Laplace:
Propriedades;
Tranformada inversa.

Seção 6.2 pág 174

1. Encontre a transformada de Laplace inversa da função dada.

   (a) $\frac{3}{s^2+4}$
   $\frac{2}{3}\sin 2,$

   (b) $\frac{4}{(s-1)^3}$
   $2t^2e^t$

   (c) $\frac{2}{s^2+3s-4}$
   $\frac{2}{5}e^t - \frac{2}{5}e^{-4t}$

   (d) $\frac{2s+2}{s^2+2s+5}$
   $2e^{-t}\cos 2t$

   (e) $\frac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$
   $3 - 2\sin 2t + 5\cos 2t$

Seção 6.3 pág 178

1. Encontre a transformada de Laplace da função dada.

   (a) $f(t) = u_1(t) + 2u_3(t) - 6u_4(t)$
   $F(s) = \frac{1}{s}(e^{-s} + 2e^{-3s} - 6e^{-4s})$

   (b) $f(t) = (t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t)$
   $F(s) = s^{-2}\left[(1-s)e^{-2s} - (1+s)e^{-3s}\right]$

   (c) $f(t) = t - u_1(t)(t-1), t \geq 0$
   $F(s) = (1-e^{-s})/s^2$

2. Encontre a transformação de Laplace inversa da função dada.

   (a) $F(s) = \frac{3!}{(s-2)^4}$
   $f(t) = t^3e^{2t}$

   (b) $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}$
   $f(t) = \frac{1}{3}u_4(t)(e^{t-2} - e^{-2(t-2)})$

   (c) $F(s) = \frac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}$
   $f(t) = 2u_2(t)e^{t-2}cos(t-2)$

   (d) $F(s) = \frac{e^{-s}+e^{-2s}-e^{3s}-e^{-4s}}{s}$
   $f(t) = u_1(t) + u_2(t) - u_3(t) - u_4(t)$

3. Suponha que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$.

   (a) Mostre que, se c é uma constante positiva, então
$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad s > ca$$

4. Use o exercício anterior para encontrar a transformada de Laplace inversa da função dada.

(a) $F(s) = \dfrac{2s+1}{4s^2+4s+5}$;

$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2}\cos t$

(b) $F(s) = \dfrac{e^2e^{-4s}}{2s-1}$

$f(t) = \frac{1}{2}e^{t/2}u_2(t/2)$

Aula 20

Transformada de Laplace:
Resolução de um PVI
Função degrau

Seção 6.2 pág 174

1. Use a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial.

(a) $y'' - y' - 6y = 0; y(0) = 1, y'(0) = -1$

$y = \dfrac{1}{5}(e^{3t} + 4e^{-2t})$

(b) $y'' - 2y' + 2y = 0; y(0) = 0, y'(0) = 1$

$y = e^t sent$

(c) $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0; y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = 1$

$y = te^t - t^2e^t + \frac{2}{3}t^3e^t$

(d) $y^{(4)} - 4y = 0; y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -2, y'''(0) = 0$

$y = cos(\sqrt{2}t)$

(e) $y'' - 2y' + 2y = cost; y(0) = 1, y'(0) = 0$

$y = \frac{1}{5}(\cos t - 2\sin t + 4e^t\cos t - 2e^t\sin t)$

(f) $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}; y(0) = 0, y'(0) = 1$

$y = \frac{1}{5}(e^{-t} - e^t\cos t + 7e^t\sin t)$

2. Encontre a transformada da solução do problema de valor inicial.

$$y'' + 4y = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi \\ 0, & \pi \le t < \infty \end{cases}$$

$y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

$Y(s) = \dfrac{s}{s^2+4} + \dfrac{1-e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}$

Seção 6.3 pág 178

1. Esboce o gráfico da função dada no intervalo $t \ge 0$.

(a) $u_1(t) + 2u_3(t) - 6u_4(t)$

(b) $(t-3)u_3(t) - (t-2)u_3(t)$

(c) $f(t-\pi)u_\pi(t)$, onde $f(t) = t^2$

(d) $(t-1)u_1(t) - 2(t-2)u_2(t) + (t-3)u_3(t)$

2. Encontre a transformada de Laplace da função dada.

(a)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)^2, & t \ge 2 \end{cases}$$

$F(s) = 2e^{-s}/s^3$

(b)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^2 - 2t + 2, & t \ge 1 \end{cases}$$

$F(s) = e^{-s}(s^2+2)/s^3$

(c)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ t - \pi, & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$$

$F(s) = \dfrac{e^{\pi s}}{s^2} - \dfrac{e^{-2\pi s}}{s^2}(1 + \pi s)$

3. Encontre a transformada de Laplace da função dada.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1. \end{cases}$$

$F(s) = (1 - e^{-s})/s$

Aula 21

Transformada de Laplace:
Forçamento descontínuo

Seção 6.4 pág 182

1. Encontre a solução do problema de valor inicial dado.

(a) $y'' + y = f(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \le t < \infty \end{cases}$$

$y = 1 - \cos t + \sin t - u_{\pi/2}(t)(1 - \sin t)$

(b) $y'' + 4y = sent - u_{2\pi}(t)sen(t - 2\pi)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

$y = \frac{1}{6}\left[1 - u_{2\pi}(t)\right](2\sin t - \sin 2t)$

(c) $y'' + 3y' + 2y = u_2(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

$y = e^{-t} - e^{-2t} + u_2(t)\left[\frac{1}{2} - e^{-(t-2)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-2)}\right]$

(d) $y'' + y = u_{3\pi}(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

$y = cost + u_{3\pi}(t)(1 - cos(t - 3\pi))$

(e) $y'' + y' + \dfrac{5}{4}y = t - u_{\pi/2}(t)(t - \pi/2)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

$y = h(t) - u_{\pi/2}(t)h(t - \pi/2), h(t) = \frac{4}{25}(-4 + 5t + 4e^{-t/2}cost - 3e^{-t/2}sent)$

(f) $y'' + 4y = u_\pi - u_{3\pi}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

$y = u_\pi(t)(1/4 - \frac{1}{4}cos(2t - 2\pi)) - u_{3\pi}(1/4 - \frac{1}{4}cos(2t - 6\pi))$

2. Encontre uma expressão envolvendo $u_c(t)$ para um função f cujo gráfico é uma rampa crescente de zero em $t = t_0$ até o valor h em $t = t_0 + k$ seguida de uma rampa decrescente que chega a zero em $t = t_0 + 2k$.

3. Um determinado sistema massa-mola satisfaz o problema de valor inicial

$$u'' + \frac{1}{4}u' + u = kg(t), u(0) = 0, u'(0) = 0,$$

onde $g(t) = u_{3/2}(t) - u_{5/2}(t)$ e $k > 0$ é um parâmetro.

(a) Esboce o gráfico de $g(t)$.

(b) Resolva o problema de valor inicial.

(c) Suponha que $k = 2$. Encontre o instante τ após o qual $|u(t)| < 0,1$ para todo $t > \tau$.

Em construção