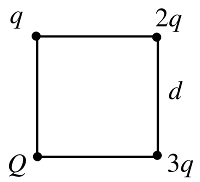
Prova 1

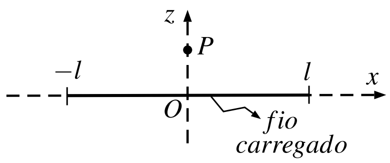
Nome:____ Matrícula:____________

Prof. Thonimar V. Alencar Data: 07/11/2022

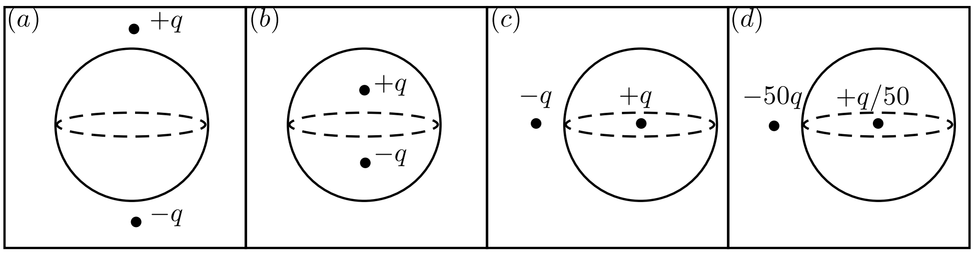


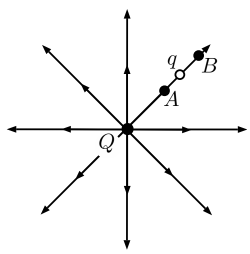
1. (*3 pontos*) As cargas positivas q, $2q$, $3q$ e Q estão posicionadas nos vértices de um quadrado de lado d (veja a figura ao lado). Obtenha a força eletrostática resultante sobre Q.

2. (*3 pontos*) Considere um fio de comprimento $2l$ uniformemente carregado com carga total q. O diâmetro do fio é desprezível em relação ao seu comprimento. Determine o campo elétrico no ponto P localizado a uma distância z do fio, considerando a origem do sistema de coordenadas como ilustrado na figura abaixo. Lembre-se que: $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$.



3. (*2 pontos*) Encontre o fluxo elétrico resultante através de cada superfície gaussiana esférica abaixo.





4. (*2 pontos*) Considere que uma carga elétrica positiva q seja deslocada, do ponto A ao ponto B, numa região do espaço em que existe um campo elétrico devido a uma outra carga pontual Q. O segmento de reta AB está orientado na direção radial (o segmento é paralelo a uma das linhas de campo, como mostra o diagrama ao lado). Após o deslocamento, (a) a *energia potencial eletrostática* de q cresce ou decresce? (b) De A para B, o *potencial elétrico* aumenta ou diminui? Justifique sua resposta.

Formulário:

$$\vec{F}_i(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{N} \frac{q_i q_j(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}; \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j(\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3}; \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\prime)(\vec{r} - \vec{r}\prime)}{|\vec{r} - \vec{r}\prime|^3} dv\prime; \quad \vec{F} = q\vec{E}$$

$$\phi_E = \int_S \vec{E}\cdot\hat{n}da; \quad \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}da = \frac{q_{dentro}}{\epsilon_0}; \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad q = \int_V \rho(\vec{r})dv; \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0; \quad \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0; \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_R}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{l}; \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}; \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\prime)}{|\vec{r} - \vec{r}\prime|}dv\prime; \quad -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad \Delta V = -\frac{W}{q} = \frac{\Delta U}{q}$$

Gabarito

1. Considerando que a carga Q esteja na origem do sistema de coordenadas, sendo $q_1 = Q$, $q_2 = q$, $q_3 = 2q$ e $q_4 = 3q$, os respectivos vetores de posição são:

$$\vec{r}_1 = \vec{0}$$
$$\vec{r}_2 = d\hat{j}$$
$$\vec{r}_3 = d\hat{i} + d\hat{j}$$
$$\vec{r}_4 = d\hat{i}$$

A força sobre a carga Q é

$$\vec{F}_i(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{N}\frac{q_i q_j(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}$$
$$\vec{F}_1(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=2}^{4}\frac{q_1 q_j(\vec{r}_1 - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_j|^3}$$
$$\vec{F}_1(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_1 q_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} + \frac{q_1 q_3(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} + \frac{q_1 q_4(\vec{r}_1 - \vec{r}_4)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_4|^3}\right]$$
$$\vec{F}_1(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Qq(-d\hat{j})}{d^3} + \frac{Q2q(-d\hat{i} - d\hat{j})}{2\sqrt{2}d^3} + \frac{Q3q(-d\hat{i})}{d^3}\right]$$
$$\vec{F}_1(\vec{r}_1) = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 d^2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\right)\hat{i} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)\hat{j}\right]$$

Como esperado, o resultado evidencia que a componente x da força é mais intensa que a componente y.

2. O campo elétrico de uma distribuição contínua de carga é

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\prime)(\vec{r} - \vec{r}\prime)}{|\vec{r} - \vec{r}\prime|^3}dv\prime$$

Considerando o campo elétrico devido a um elemento de carga infinitesimal dq, localizado em $\vec{r}\prime = x\hat{i}$, então o campo elétrico no ponto P, dado pelo vetor posição $\vec{r} = z\hat{k}$, é

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-l}^{l}\frac{\lambda(z\hat{k} - x\hat{i})}{(z^2 + x^2)^{3/2}}dx = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_{-l}^{l}\frac{z\hat{k}}{(z^2 + x^2)^{3/2}}dx - \int_{-l}^{l}\frac{x\hat{i}}{(z^2 + x^2)^{3/2}}dx\right] \tag{1}$$

sendo $\lambda = q/2l$ a densidade linear de carga. A segunda integral é resolvida fazendo uma mudança de variável $u = x^2 + z^2$, logo $du = 2xdx$. Porém, a função que está sendo integrada, $f(x) = \frac{x}{(z^2+x^2)^{3/2}}$ é ímpar, pois $f(x) = -f(-x)$. A integral definida de uma função ímpar com um intervalo de integração simétrico é zero. Portanto, a segunda integral é zero!
A primeira integral é resolvida por substituição trigonométrica. Fazendo $x = z\tan(u)$, temos $dx = z\sec^2(u)du$. Assim,

$$\int_{-l}^{l}\frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}}dx = \int\frac{z\sec^2(u)}{(z^2\tan^2(u) + z^2)^{3/2}}du = \frac{z}{z^3}\int\frac{\sec^2(u)}{(\tan^2(u) + 1)^{3/2}}du = \frac{1}{z^2}\int\frac{\sec^2(u)}{\sec^3(u)}du$$
$$= \frac{1}{z^2}\int cos(u)du = \frac{\sin(u)}{z^2} = \left.\frac{x}{z^2\sqrt{x^2 + z^2}}\right|_{-l}^{l} = \frac{2l}{z^2\sqrt{l^2 + z^2}}$$

Substituindo em (1),

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda z\hat{k}}{4\pi\epsilon_0}\frac{2l}{z^2\sqrt{l^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda 2l}{z\sqrt{l^2 + z^2}}\hat{k}$$

Ou em termos da carga total q:

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{z\sqrt{l^2 + z^2}}\hat{k}$$

3. Usando a lei de Gauss, $\phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}da = \frac{q_{dentro}}{\epsilon_0}$,

(a) Como $q_{dentro} = 0$, $\phi_E = 0$.

(b) Como $q_{dentro} = +q + (-q) = 0$, $\phi_E = 0$.

(c) Como $q_{dentro} = +q$, $\phi_E = +q/\epsilon_0$.

(d) Como $q_{dentro} = +q/50$, $\phi_E = +q/50\epsilon_0$.

4. O potencial elétrico da carga pontual Q localizada na origem do sistema de coordenadas é

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}|}$$

Assim, o potencial elétrico no ponto A, localizado em r_A, é

$$V_A = V(r_A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_A}$$

e no ponto B é

$$V_B = V(r_B) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_B}$$

A razão entre os potenciais é

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_A}}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r_B}} = \frac{r_B}{r_A} > 0$$

sendo a desigualdade obtida sabendo que $r_B > r_A$. Em consequência, $V_A > V_B$. Ou seja,

$$\Delta V_{BA} = V_B - V_A < 0$$

Sabendo que a variação de energia potencial da carga q está relacionada com a diferença de potencial entre os dois pontos, $\Delta U = q\Delta V$, então

$$\Delta U_{BA} = U_B - U_A = q\Delta V_{BA} < 0$$

uma vez que $q > 0$. Portanto, $U_B < U_A$. A energia potencial decresce, assim como o potencial elétrico.