[UFES-CCE-DMAT-Prova1-Cálculo1-Equipe-tarde, 16/10/15]

**Gabarito**

1. **(2,5pts)** Calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+} (\ln x)^{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^+} e^{\ln((\ln x)^{x-1})} = e^{\lim_{x\to 1^+} \ln((\ln x)^{x-1})} = e^{\lim_{x\to 1^+} (x-1)\ln((\ln x))} = e^{\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln((\ln x))}{\frac{1}{(x-1)}}} \overset{L'H}{=} e^{\lim_{x\to 1^+} \frac{-(x-1)^2}{x\ln x}} \overset{L'H}{=} e^{\lim_{x\to 1^+} \frac{-2(x-1)}{\ln x+1}} = e^0 = 1.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arctan(x)}$

$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}(1+x^2) = 1.$

(c) $\dfrac{d}{dx}\left(\cosh^2(x^2)e^{\sinh(x)}\right)$

$= 2\cosh(x^2)\sinh(x^2)2xe^{\sinh(x)} + \cosh^2(x^2)e^{\sinh(x)}\cosh(x).$

(d) $\dfrac{d}{dx}\left(x\sqrt{x\sqrt{x}}\right)$

$= \sqrt{x\sqrt{x}} + x\frac{(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}})}{2\sqrt{x\sqrt{x}}}$ ou usar que $\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{7/4}\right) = \frac{7}{4}x^{3/4}.$

2. **(2,5pts)** Considere a função $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Determine:

(a) Domínio= $\mathbb{R} - \{1\}$, zeros= $\{0\}$, assíntotas (horizontal ($\nexists$), vertical ($x = 1$), inclinada ($y = x$));

$\frac{x^2}{(x-1)} = \frac{x^2}{x(1-\frac{1}{x})} = \frac{x}{1-\frac{1}{x}} \approx x$ (assintoticamente).

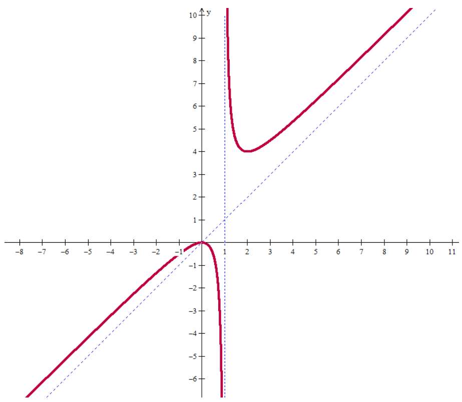
(b) Intervalos de cresc.=$(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ e decres.=$[0, 1) \cup (1, 2]$, máximos=$\{0\}$ e mínimos=$\{2\}$;

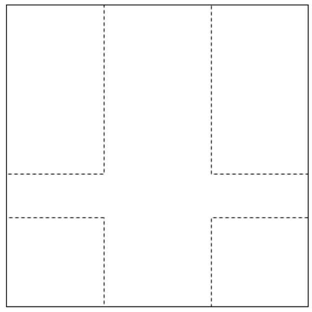
$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ possui o mesmo sinal de $x(x-2) = +++++0-----2+++++.$

(c) Intervalos de concavidades e pontos de inflexão;

$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$ possui o mesmo sinal de $(x-1) = ------1++++++.$

(d) Faça um esboço do gráfico.





3. **(2,0pts)** Uma caixa com tampa dever ser feita de uma folha quadrada de papelão com 45cm de lado, cortando-se ao longo das linhas pontilhadas como na figura ao lado. As abas são dobradas para cima para formar as paredes e a tampa da caixa. Quais as dimensões da caixa com o maior volume possível a se obter?

   Considerando $x$ a altura da caixa e $y$ a largura da caixa, temos que a base mede $z = 45 - 2x$ por $y$ (faça um desenho!). Com isso, o problema é maximizar o volume $V(x, y) = (45 - 2x)yx$ sujeito à $2x + 2y = 45$ com $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Então, basta maximizar $V(x) = \frac{x}{2}(45 - 2x)^2$ com $0 \leq x \leq \frac{45}{2}$. Mas $V'(x) = -2x(45 - 2x) + \frac{1}{2}(45 - 2x)^2$, donde os pontos críticos são $x = \frac{45}{2}$ e $x = \frac{15}{2}$. Porém, $V(0) = V(45/2) = 0$ e $V(15/2) > 0$. Com isso, $\frac{15}{2}$ é o ponto de máximo. As dimensões da caixa são $x = \frac{15}{2}$ e $y = 15$ e $z = 30$.

4. **(2,0pts)** Uma escada de 4m de comprimento está na vertical e encostada numa parede. Se o pé da escada se afasta perpendicular à parede a uma velocidade de 1m/h, com qual velocidade o ponto médio da escada se aproxima do chão quando o pé da escala estiver a 2m da parede?

   Sejam $x$ a distância do pé da escada à parede, e $y$ a altura do topo da escada. Note que a altura do ponto médio é $y/2$ e que $x^2 + y^2 = 16$. Derivando esta última equação em relação ao tempo obtemos $xx' + yy' = 0$. Com isso, $y'/2 = -\frac{xx'}{2y}$. Jogando os valores $x = 2$, $y = 2\sqrt{3}$ e $x' = 1$ obtemos $\frac{y'}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

5. **(1,0pt)** Se $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 2$, calcule $f(1)$ e $f'(1)$.

   Pondo $x = 1$ na equação obtemos $[f(x)]^3 + f(x) - 2 = 0$. Logo, estamos buscando raízes reais para o polinômio $p(x) = x^3 + x - 2$. É sabido que as raízes inteiras deste polinômio são divisores de 2. Com isso, é fácil verificar que 1 é uma raiz e, por divisão de polinômios, que $p(x) = (x-1)(x^2+x+2)$. Logo, 1 é a única raiz real deste polinômio. Com isso, $f(x) = 1$. Derivando a primeira equação obtemos $f'(x) + 2x[f(x)]^3 + 3x^2[f(x)]^2 f'(x) = 0$. Substituindo $x = 1$ e $f(1) = 1$ obtemos $f'(1) = -1/2$.