第六章

常微分方程数值解法

- 本章研究常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \quad a \le x \le b \\ y(a) = \eta \end{cases} \tag{6.1.1}$$

的数值解法. 并且假定$f(x, y)$满足解的存在唯一性定理及相当光滑等条件.

- 初值问题(6.1.1)的精确解记为$y(x)$.

建立数值解法的基本思想

- 本章的数值解法，它不是求(6.1.1)的解$y(x)$的解析表达式或近似表达式，而是通过某种离散化方法，将连续变量的初值问题转化为关于离散量的差分方程的相应问题来求一系列离散点上的解值$y(x_i)$的近似值y_i. 利用计算机解微分方程主要使用数值方法.

- 取一系列点

$$x_0=a,\qquad x_1,\qquad \dots,\qquad x_n, \dots$$

$$y(x_0)=y_0, y(x_1)\approx y_1, \dots, y(x_n)\approx y_n, \dots$$

$y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$称为数值解.

$h= x_n - x_{n-1}$称为步长．本章都取定步长.

用离散化方法建立求$y(x_n)$的近似值y_n的递推格式(差分方程)，求得y_n

- 解初值问题(6.1.1)的数值解法，其特点都是采取步进式的方法，即求解过程顺着节点排列的次序一步一步向前推进.

- 这种数值解法分为两大类:

(1)单步法：若求y_{n+1}，只需利用它前一步的信息y_n，则称这种方法为单步法。它由y_0出发，可求得y_1，y_2，$y_3 \cdots$

(2)多步法：若求y_{n+1}，需利用它前面至少两个点的息，则称这种方法为多步法.

数值解法研究的主要问题：

(1)方法的推导：采用的离散化手段，精度准则.

(2)收敛性：差分方程的解是否充分逼近初值问题的解.

(3)稳定性：初始数据、计算过程中每步产生的误差对以后各步解的影响，这种误差传播是否可控制、甚至是衰减的.

- 具体数值方法的应用还应考虑

(1)误差估计

(2)解的起动方法

(3)步长如何选取

(4)隐式方法如何使用

建立数值解法的基本途径

- 常用的离散化方法

(1)Taylor展开

(2)化导数为差商

(3)数值积分

§6.1 单步法及基本概念

Euler折线法

- 利用Taylor展开法

将$y(x_{n+1})$在x_n处Taylor展开

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(\xi_n)$$

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

得差分方程

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \quad （n=0,1,2,\ldots）$$

称此方法为Euler折线法或矩形法.

- 利用化导数为差商的方法

$$\frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h} \approx y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$$

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

得差分方程

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \quad （n=0,1,2,\ldots） \qquad (6.1.2)$$

- 利用数值积分的方法

在$[x_n,x_{n+1}]$上对$y'(x)=f(x, y(x))$积分得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\mathrm{d}x$$

用左矩形求积公式计算定积分有

$$y(x_{n+1})\approx y(x_n)+hf(x_n,y(x_n))$$

以此得差分方程

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

梯形法

- 用不同的近似公式计算定积分的值,就得到解初值问题的不同数值解法.
- 用梯形求积公式计算积分得

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad (n = 0,1,2,\cdots) \tag{6.1.3}$$

这个方法称为梯形法. 它是隐格式.

- 运用它常采用下面的迭代格式

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})] \end{cases}$$

$$(k = 0,1,2,\cdots; n = 0,1,2,\cdots)$$

改进的Euler方法

- 若梯形法只迭代一次,便得改进的Euler方法

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})] \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{6.1.4}$$

也可写成形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}hK_1 + \frac{1}{2}hK_2 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1) \end{cases} \tag{6.1.4$'$}$$

数值方法精度的衡量准则

- 定义　设$y_n=y(x_n)$，则称$T_n=y(x_{n+1})-y_{n+1}$为方法的从x_n到x_{n+1}这一步的局部截断误差.
- 定义　若差分方程对所有$y(x)\in M_r$都精确成立，而对于某个$r+1$次多项式不能精确成立，则称这个数值方法是r阶的.

等价定义 若数值方法的局部截断误差为$O(h^{r+1})$，则称这种方法为r阶方法，这里r为非负整数.

- 由Taylor展开式知

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots \tag{6.1.5}$$

对于Euler法

$$T_n = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_n, y(x_n)) = y(x_{n+1}) - y(x_n) - hy'(x_n)$$

$$= \frac{h^2}{2!}y''(\xi_n)$$

Euler法是1阶方法

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \cdots$$

- 对于梯形法

$$T_n = y(x_{n+1}) - y(x_n) + \frac{h}{2}(y'(x_n) + y'(x_{n+1})) \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

由Taylor展开式知

$$y(x_n) = y(x_{n+1} - h) = y(x_{n+1}) - hy'(x_{n+1}) + \frac{h^2}{2!} y''(x_{n+1}) + \cdots \tag{6.1.6}$$

(6.1.5)与(6.1.6)相减并利用$y''(x_{n+1})=y''(x_n)+O(h)$

$$T_n = y(x_{n+1}) - y(x_n) + \frac{h}{2}(y'(x_n) + y'(x_{n+1})) = O(h^3)$$

梯形法是2阶方法.

- 对于改进Euler法，设$y_n=y(x_n)$，利用Taylor展开式

$$K_1=f(x_n,y(x_n))=y'(x_n)$$

$$\begin{aligned}
K_2 &= f(x_n+h, y(x_n)+hK_1) \\
&= f(x_n, y(x_n)) + h\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + hK_1\frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n)) + \cdots \\
&= f(x_n, y(x_n)) + h[\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + y'(x_n)\frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n))] + \cdots \\
&= y'(x_n) + hy''(x_n) + \cdots
\end{aligned}$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \cdots$$

将其代入中T_n有

$$T_n = y(x_{n+1}) - y(x_n) - \frac{h}{2}(K_1 + K_2) = O(h^3)$$

改进Euler法是2阶方法.

Runge-Kutta方法

- Taylor展开式

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots$$
$$= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$
$$+ \frac{h^2}{2!}[\frac{\partial}{\partial x}f(x_n, y(x_n)) + f(x_n, y(x_n))\frac{\partial}{\partial y}f(x_n, y(x_n))] + \cdots$$

- 理论上讲，只要解$y(x)$充分光滑，通过保留Taylor展开式的若干项就可得到任意阶的近似公式，但计算$y(x)$的各阶导数很麻烦.可间接利用这种思想,保留其高精度，单步法的优点.

- Euler法也可写成形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_1 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \end{cases}$$

- 其局部截断误差为$O(h^2)$，是一阶方法.每步计算f的值一次.

- 改进Euler法也可写成形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}hK_1 + \frac{1}{2}hK_2 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1) \end{cases}$$

- 局部截断误差为$O(h^3)$，是二阶方法．每步计算f的值二次．
- 可以通过增加计算f的值的次数，提高公式的阶数（精度）．

- 以f在不同点上的函数值的线性组合来代替$y_{n+1}-y_n$，其中有一些可待定选取的待定参数，通过Taylor展开确定这些待定参数使建立的数值方法按要求达到一定的阶数，这种思想就是Runge-Kutta方法的思想.

- s阶Runge-Kutta法的一般形

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} R_i K_i \\
K_1 = f(x_n, y_n) \\
K_i = f(x_n + a_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j), \quad i = 2, 3, \cdots, s
\end{cases}
$$

其中R_i,a_i,b_{ij}都是常数.

二阶Runge-Kutta法的建立

- 二阶Runge-Kutta法的一般形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + R_1 h k_1 + R_2 h k_2 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + ah, y_n + bhk_1) \end{cases}$$

其中R_1, R_2, a, b为待定常数.

其局部截断误差为$O(h^3)$，是二阶方法. 每步计算f的值二次.

- 设$y_n=y(x_n)$

$K_1=f(x_n,y_n)=f(x_n,y(x_n))$

把K_2中f在$(x_n,y(x_n))$处Taylor展开

$$
\begin{aligned}
K_2 &= f(x_n+ah, y(x_n)+bhK_1) = f(x_n, y(x_n)) \\
&\quad + ah\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + bhK_1\frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n)) + O(h^2) \\
&= f(x_n, y(x_n)) \\
&\quad + h[a\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + bf(x_n, y(x_n))\frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n))] + O(h^2)
\end{aligned}
$$

- 再将K_1,K_2代入y_{n+1}中，

$$y_{n+1} = y_n + R_1 h K_1 + R_2 h K_2$$

$$= y(x_n) + h(R_1 + R_2) f(x_n, y(x_n))$$

$$+h^2[aR_2 \frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + bR_2 f(x_n, y(x_n)) \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n))] + O(h^3)$$

- 将其与$y(x_{n+1})$泰勒展开式比较，要使$y(x_{n+1})$-y_{n+1}=$O(h^3)$，含h^0, h^1, h^2的项相同．即有

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 1 \\ aR_2 = \dfrac{1}{2} \\ bR_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

4 个未知数， 3 个方程

满足条件的解不止一组．取$R_1=R_2=1/2, a=b=1$,
就是改进Euler法；取$R_1=0, R_2=1, a=1/2, b=1/2$的中点方法.

四阶Runge-Kutta法的建立

- 四阶Runge-Kutta法的一般形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + R_1 hK_1 + R_2 hK_2 + R_3 hK_3 + R_4 hK_4 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} hk_1) \\ K_3 = f(x_n + a_3 h, y_n + b_{31} hk_1 + b_{32} hk_2) \\ K_4 = f(x_n + a_4 h, y_n + b_{41} hk_1 + b_{42} hk_2 + b_{43} hk_3) \end{cases}$$

其中有13个待定常数

局部截断误差为$O(h^5)$，是四阶方法．每步计算f的值四次．

- 设$y_n=y(x_n)$
- 把K_2,K_3,K_4中f在$(x_n,y(x_n))$处泰勒展开后，将K_1,K_2,K_3,K_4代入y_{n+1}中，再将y_{n+1}按h的幂重新整理后与$y(x_{n+1})$泰勒展开式比较，要使$y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^5)$，含$h^0, h^1, h^2 , h^3, h^4$的项相同．从而确定各参数．

$$
\begin{cases}
R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 1 \\
a_2 = b_{21} \\
a_3 = b_{31} + b_{32} \\
a_4 = b_{41} + b_{42} + b_{43} \\
a_2 R_2 + a_3 R_3 + a_4 R_4 = \dfrac{1}{2} \\
a_2^2 R_2 + a_3^2 R_3 + a_4^2 R_4 = \dfrac{1}{3} \\
a_2^3 R_2 + a_3^3 R_3 + a_4^3 R_4 = \dfrac{1}{4} \\
a_2 b_{32} R_3 + R_4 (a_2 b_{42} + a_3 b_{43}) = \dfrac{1}{6} \\
a_2^2 b_{32} R_3 + R_4 (a_2^2 b_{42} + a_3^2 b_{43}) = \dfrac{1}{12} \\
a_2 a_3 b_{32} R_3 + a_4 R_4 (a_2 b_{42} + a_3 b_{43}) = \dfrac{1}{8} \\
a_2 b_{32} b_{43} R_4 = \dfrac{1}{24}
\end{cases}
$$

13个未知数，11个方程

满足条件的解不止一组．最常用的是

- 标准四阶Runge-Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{hK_1}{2}) \\ K_3 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{hK_2}{2}) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \end{cases} \qquad (6.1.7)$$

- 显式单步法的一般形式为

$$y_{n+1}=y_n+h\phi(x_n,y_n,h) \qquad (6.1.8)$$

其中多元函数ϕ依赖于f.

收敛性

- $e_n = y(x_n) - y_n$称为整体截断误差. 收敛性就是讨论当$x=x_n$固定且$h=(x_n-a)/n\to 0$时$e_n\to 0$的问题.
- 定义 对于$f(x, y)$满足解的存在唯一性条件的初值问题(6.1.1)，若一种数值方法对于固定的$x\in[a,b]$，满足

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}} y_n = y(x), \quad nh = x-a$$

则称该方法是收敛的.

单步法的收敛性

- 定义 若单步法(6.1.8)的增量函数$\phi(x,y,h)$满足

$$\phi(x,y,0)=f(x,y)$$

则称单步法(6.1.8)与(6.1.1) 相容.

- (6.1.8)满足相容条件的充要条件是它至少是1阶的
- 定理 设(6.1.8)增量函数$\phi(x,y,h)$在区域$a\le x\le b$, $-\infty<y<\infty$, $0\le h\le h_0$中连续，并且对变量y满足Lipschitz条件, 即

$$|\phi(x,y_1,h)-\phi(x,y_2,h)|\le L|y_1-y_2|$$

在这个前提下单步法(6.1.8)收敛的充分必要条件是相容性条件成立.

单步法的绝对稳定性

- 当步长取定后，计算中的误差随着步数的增加会不会积累到超出我们许可的范围，这就是稳定性问题.
- 单步法(6.1.8)应用于模型方程

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y \quad (\lambda < 0) \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

设得到的解为$y_{n+1}=R(\lambda h)y_n$

当$\lambda<0$时,实验方程的精确解$y(x)=\eta e^{\lambda(x-a)}$按模递减的,这要求 (6.1.8)的解$y_n$是按模递减的，误差也是递减的，即要求满足$|R(\lambda h)|<1$.

- 定义 单步法应用于模型方程 $y'=\lambda y(\lambda<0)$，若得到的解 $y_{n+1}=R(\lambda h)y_n$ 满足 $|R(\lambda h)|<1$，则称单步法是绝对稳定的.使 $|R(\lambda h)|<1$ 成立的 $\bar{h}=\lambda h$ 所在区间称为绝对稳定区间.

例 Euler方法

$$R(h\lambda)=1+h\lambda$$

由 $|R(\lambda h)|<1$ 得绝对稳定区间 $\lambda h\in(-2,\ 0)$

- 例　二阶Runge-Kutta公式

$$R(h\lambda)=1+h\lambda+\frac{(h\lambda)^2}{2!}$$

由$|R(\lambda h)|<1$得绝对稳定区间$\lambda h\in$(-2, 0).

- 例　四阶Runge-Kutta公式

$$R(h\lambda)=1+h\lambda+\frac{(h\lambda)^2}{2!}+\frac{(h\lambda)^3}{3!}+\frac{(h\lambda)^4}{4!}$$

由$|R(\lambda h)|<1$得绝对稳定区间$\lambda h\in$(-2.78, 0)

- 收敛性和稳定性是两个重要概念.我们这里介绍的收敛性是反映递推公式本身的截断误差对计算结果的影响；稳定性是反映某一计算步骤中出现的误差对计算结果的影响. 稳定性是与步长h密切相关的. 只有即收敛又稳定的推算公式才可以在实际计算中应用.

- 例 用Euler方法求解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y + x + 1 \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

取h=0.1

- 解 设$f(x,y)=-y+x+1$，$x_0=0, y_0=1, x_n=x_0+nh=0.1n$（$n=0,1,\ldots,10$）

  Euler格式为 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + 0.1(-y_n + x_n + 1)$

  由$y_0=1$出发，按上面公式的计算结果并与精确解$y(x)$进行比较，如表所示

x_n	y_n	$y(x_n)$	$\lvert y(x_n) - y_n \rvert$
0	1.000 000	1.000 000	0
0.1	1.000 000	1.004 837	0.004 837
0.2	1.010 000	1.018 731	0.008 731
0.3	1.029 000	1.040 818	0.011 818
0.4	1.056 100	1.070 320	0.014 220
0.5	1.090 490	1.106 531	0.016 041
0.6	1.131 441	1.148 812	0.017 371
0.7	1.178 297	1.196 585	0.018 288
0.8	1.230 467	1.249 329	0.018 862
0.9	1.287 420	1.306 570	0.019 150
1.0	1.348 678	1.367 879	0.019 201

利用Euler方法计算积分 $\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 在点x=0.5, 1, 1.5, 2处的数值解.

- 解 令 $y(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$

则有等价的问题 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x^2} \\ y(0)=0 \end{cases}$

对此一阶常微分方程初值问题，取步长h=0.5，设 $f(x,y)=e^{x^2}, x_0=0, y_0=0$

$$x_n=x_0+nh=nh \quad (n=0,1,2,3,4)$$

由Euler格式

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y_n+0.5\mathrm{e}^{x_n^2}$$

从$y_0=0$出发计算的数值解如表

x_n	y_n
0.5	0.500 000
1.0	1.142 013
1.5	2.501 154
2.0	7.245 022

用梯形法解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 8 - 3y & 1 \le x \le 2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

取步长h=0.2，小数点值至少保留5位.

- 解　设$f(x,y)=8-3y$，$x_0=1, y_0=2$,

  $x_n=x_0+nh=1+0.2n$（$n=0,1,\ldots,5$）

  梯形公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

于是

$$y_{n+1} = y_n + \frac{0.2}{2}[8 - 3y_n + 8 - 3y_{n+1}]$$

整理得显格式

$$y_{n+1} = \frac{7}{13} y_n + \frac{16}{13}$$

由y_0=2出发，计算结果如表所示

x_n	y_n	x_n	y_n
1	2	1.6	2.562 59
1.2	2.307 69	1.8	2.610 62
1.4	2.473 37	2.0	2.636 49

用改进Euler法求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y + y^2 \sin x = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

要求取步长h=0.2，计算$y(1.2)$及$y(1.4)$的近似值，小数点后至少保留5位.

- 解 设$f(x,y)=-y-y^2\sin x$, $x_0=1, y_0=1$, $x_n=x_0+nh=1+0.2n$,改进Euler法为

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} \overline{y}_{n+1} = y_n - 0.2(y_n + y_n^2 \sin x_n) \\ y_{n+1} = y_n - 0.1(y_n + y_n^2 \sin x_n + \overline{y}_{n+1} + \overline{y}_{n+1}^2 \sin x_{n+1}) \end{cases}$$

由y_0=1计算得

$$\begin{cases} \overline{y}_1 = 0.631\,706 \\ y(1.2) \approx y_1 = 0.715\,489 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{y}_2 = 0.476\,965 \\ y(1.4) \approx y_2 = 0.526\,112 \end{cases}$$

取步长h=0.4，写出用标准四阶Runge-Kutta方法求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sin(x+y) & 1 \le x \le 9 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

的计算公式，并计算$y(1.8)$的近似值，小数点后至少保留6位.

- 解 设$f(x,y)=x\sin(x+y)$, $x_0=1, y_0=0$, $x_n=x_0+nh=1+0.4n$ ， （$n=0,1,\ldots,20$）标准四阶Runge-Kutta公式为

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 = f(x_n, y_n) \\
K_2 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{hK_1}{2}) \\
K_3 = f(x_n + \dfrac{h}{2}, y_n + \dfrac{hK_2}{2}) \\
K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3)
\end{cases}
$$

代入$f(x,y)=x\sin(x+y)$有

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{0.4}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 = (1 + 0.4n)\sin(1 + 0.4n + y_n) \\
K_2 = (1.2 + 0.4n)\sin(1.2 + 0.4n + y_n + 0.2K_1) \\
K_3 = (1.2 + 0.4n)\sin(1.2 + 0.4n + y_n + 0.2K_2) \\
K_4 = (1.4 + 0.4n)\sin(1.4 + 0.4n + y_n + 0.4K_3)
\end{cases}
$$

- 由$y_0=0$计算得
- $y(1.4) \approx y_1=0.460\,389$
- $y(1.8) \approx y_2=0.911\,704$

例

- 初值问题 $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ax + b \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

  有精确解 $y(x) = \dfrac{1}{2}ax^2 + bx$

  若$x_n=nh$，y_n是用Euler法得到的$y(x)$在$x=x_n$处的近似值. 证明:

$$y(x_n) - y_n = \frac{1}{2}ahx_n$$

- Euler格式为$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$（$n=0,1,2,\ldots$）

代入$f(x,y)=ax+b$， 则$y_{n+1}=y_n+h(ax_n+b)$

由$y_0=0$得

$$y_1=y_0+h(ax_0+b)=bh$$

$$y_2=y_1+h(ax_1+b)=2bh+ahx_1$$

$$y_3=y_2+h(ax_2+b)=3bh+ah(x_1+x_2)$$

$$\vdots$$

$$y_n=y_{n-1}+h(ax_{n-1}+bh)=nbh+ah(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})$$

因$x_n=nh$，于是

$$y_n = nbh + ah^2[1+2+\cdots+(n-1)]$$

$$= nbh + ah^2\frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}ax_n x_{n-1} + bx_n$$

所以

$$y(x_n) - y_n = \frac{1}{2}a(x_n - x_{n-1})x_n = \frac{1}{2}ahx_n$$

§6.2 线性多步法

- 初值问题(6.1.1)的精确解记为$y(x)$.
- y_i是解值$y(x_i)$ 的近似值.
- $y_i'=f_i=f(x_i, y_i)$是$y'(x_i)=f(x_i, y(x_i))$的近似值.

线性多步法的一般形式

- 线性多步法的一般公式为

$$y_{n+1}=\sum_{i=0}^{p}a_i y_{n-i}+h\sum_{i=-1}^{p}b_i f_{n-i},\ n=p,p+1,\cdots \quad (6.2.1)$$

其中为a_i,b_i常数，p为非负整数.

- 当a_p,b_p不同时为零时，(6.2.1)是$p+1$步法;
- 当p=0时，(6.2.1)是单步法;
- 若b_{-1}=0，则(6.2.1)是显格式;
- 若$b_{-1}\neq 0$，则(6.2.1) 隐格式.

线性多步法的阶与系数的关系

称

$$T_n = y(x_{n+1}) - \sum_{i=0}^{p} a_i y(x_{n-i}) - h\sum_{i=-1}^{p} b_i y'(x_{n-i}),\ n = p, p+1, \cdots \quad (6.2.2)$$

为(6.2.1)从x_n到x_{n+1}的局部截断误差.

将$y(x_{n-i})$,$y'(x_{n-i})$, i=-1,0,1,…p在x_n处Taylor展开，按h的幂重新整理得

$$T_n = C_0 y(x_n) + C_1 h y'(x_n) + \cdots + C_q h^q y^{(q)}(x_n) + \cdots \ (6.2.3)$$

$$T_n = C_0 y(x_n) + C_1 h y'(x_n) + \cdots + C_q h^q y^{(q)}(x_n) + \cdots$$

- 其中

$$\begin{cases} C_0 = 1 - \sum_{i=0}^{p} a_i \\ C_1 = 1 - \left[\sum_{i=0}^{p} (-i) a_i + \sum_{i=-1}^{p} b_i \right] \\ \cdots \quad \cdots \\ C_q = \dfrac{1}{q!} \{ 1 - \left[\sum_{i=0}^{p} (-i)^q a_i + q \sum_{i=-1}^{p} (-i)^{q-1} b_i \right] \}, q = 2, 3, \cdots \end{cases} \tag{6.2.4}$$

$$T_n = C_0 y(x_n) + C_1 h y'(x_n) + \cdots + C_q h^q y^{(q)}(x_n) + \cdots$$

- 若$C_0=C_1=\ldots=C_r=0$, $C_{r+1}\neq 0$,则

$$T_n = C_{r+1} h^{r+1} y^{(r+1)}(x_n) + C_{r+2} h^{r+2} y^{(r+2)}(x_n) + \cdots$$

当$y(x)\in M_r$时,$T_n\equiv 0$, (6.2.1)对$y(x)\in M_r$精确成立;

当$y(x)=x^{r+1}$时,$T_n=(r+1)!C_{r+1}h^{r+1}\neq 0$, (6.2.1)对 $x^{r+1}\in M_{r+1}$不精确成立.

此时(6.2.1)是r阶方法.称C_{r+1}为误差常数, $C_{r+1}h^{r+1}y^{(r+1)}(x_n)$为局部截断误差$T_n$的首项.

- 反之，若(6.2.1)是r阶方法，有$C_0=C_1=\ldots=C_r=0$, $C_{r+1}\neq 0$.

- 定理 线性多步法(6.2.1)是r阶的充分必要条件是(6.2.4)定义的$C_i(i=0,1,2,\ldots)$满足关系式

$$C_0=C_1=\ldots=C_r=0,\ \ C_{r+1}\neq 0$$

- 定理 称满足条件$C_0=C_1=0$,即

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{p} a_i = 1 \\ \sum_{i=0}^{p} (-i)a_i + \sum_{i=-1}^{p} b_i = 1 \end{cases}$$

的线性多步法(6.2.1)是相容的.

相容的方法至少是1阶的.

线性多步法的构造方法

- 基于Taylor展开的构造方法(待定系数法)

令$C_0=C_1=\ldots=C_r=0$，由(6.2.4)得到关于$2p+3$个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{p} a_i = 1 \\ \sum_{i=0}^{p} (-i) a_i + \sum_{i=-1}^{p} b_i = 1 \\ \qquad\qquad \cdots \qquad \cdots \\ \sum_{i=0}^{p} (-i)^q a_i + q \sum_{i=-1}^{p} (-i)^{q-1} b_i = 1, \quad q = 2, 3, \cdots, r \end{cases} \tag{6.2.5}$$

- 当$r=2p+2$时，(6.2.5)有唯一解.
- $p+1$步法(6.2.1)的阶最高可达到$2p+2$.

例 建立当p=0时，线性多步法(6.2.1)中达到最高阶的方法.

- 当p=0时，(6.2.1)为$y_{n+1}=a_0y_n+h(b_{-1}y'_{n+1}+b_0y_n')$

有三个待定系数，为达到最高阶取$r=2p+2=2$，令$C_0=C_1=C_2=0$，得到

$$\begin{cases} a_0=1 \\ b_{-1}+b_0=1 \\ 2b_{-1}=1 \end{cases}$$

- 解得$a_0=1,b_{-1}=1/2,b_0=1/2$, 相应方法为梯形法

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(y'_{n+1}+y'_n)$$

误差常数$C_3=-1/12$

例 当p=1时，(6.2.1)为

$y_{n+1}=a_0y_n+a_1y_{n-1}+h(b_{-1}y'_{n+1}+b_0y'_n+b_1y'_{n-1})$

(1)以a_1为自由参量，确定其它参数，使此公式有尽可能高的阶；(2) a_1为何值时此2步法能达到最高阶.

- (1)有5个待定系数, a_1为自由参量,其它4个参数用4个方程确定，令$C_0=C_1=C_2=C_3=0$，得

$$\begin{cases} a_0+a_1=1 \\ -a_1+b_{-1}+b_0+b_1=1 \\ a_1+2(b_{-1}-b_1)=1 \\ -a_1+3(b_{-1}+b_1)=1 \end{cases}$$

解得$a_0=1-a_1$, $b_{-1}=(5-a_1)/12$, $b_0=2(1+a_1)/3$, $b_1=(5a_1-1)/12$,
建立了至少3阶的相应方法

$$y_{n+1}=(1-a_1)y_n+a_1y_{n-1}+\frac{h}{12}[(5-a_1)y'_{n+1}+8(1+a_1)y'_n+(5a_1-1)y'_{n-1}]$$

- (2) C_4= $(a_1$-1)/24, C_5=- $(a_1$+1)/180,

当$a_1 \neq 1$时, C_3=0，$C_4 \neq 0$，是3阶方法;

当a_1=1时，C_4=0，$C_5 \neq 0$，是4阶方法，公式达到最高阶的方法，其具体形式为

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}[y'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1}]$$

称为Simpson方法.

类似地可导出4阶方法

- 4阶Milne方法

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4}{3}h(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2})$$

$$T_n = \frac{14}{45}h^5 y^5(x_n) + \cdots, \quad C_5 = \frac{14}{45}$$

- 4阶Hamming方法

$$y_{n+1} = \frac{1}{8}(9y_n - y_{n-2}) + \frac{3}{8}h(f_{n+1} + 2f_n - f_{n-1})$$

$$T_n = -\frac{1}{40}h^5 y^5(x_n) + \cdots, \quad C_5 = -\frac{1}{40}$$

- 形如(6.2.1)的线性多步法都可以用Taylor展开法构造出来，有些也可用数值积分得到.

- 基于数值积分的构造方法

在$[x_n, x_{n+1}]$上对$y'(x)=f(x,y(x))$积分得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\mathrm{d}x$$

用插值多项式逼近$f(x,y(x))$进行数值积分可建立一类多步法-Adams 方法.

■ 显式Adams方法

过点(x_{n-i}, f_{n-i}), $i=0,1,\ldots,p$构造$f(x,y(x))$的p次插值多项式$N_p(x)$,在$[x_n,x_{n+1}]$上用$N_p(x)$代替$f(x,y(x))$作积分，得离散格式

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} N_p(x)\mathrm{d}x$$

当$f(x,y(x))\in M_p$时，此方法是准确成立的，故当$y(x)\in M_{p+1}$时，此方法是准确成立的，从而它是显式$p+1$步$p+1$阶方法.

- 当p=3时，得到显式4步4阶Adams方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}]$$

局部截断误差为

$$T_n = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(x_n) + \cdots$$

隐式Adams方法

过点(x_{n-i}, f_{n-i}), i=-1,0,1,…,p构造$f(x,y(x))$的p+1次插值多项式$N_{p+1}(x)$,在$[x_n,x_{n+1}]$上用$N_{p+1}(x)$代替$f(x,y(x))$作积分，得离散格式

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} N_{p+1}(x)\mathrm{d}x$$

当$f(x,y(x))\in M_{p+1}$时，此方法是准确成立的，故当$y(x)\in M_{p+2}$时，此方法是准确成立的，从而它是隐式p+1步p+2阶方法.

- 当p=0时，得到梯形法

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

- 当p=2时，得到隐式3步4阶Adams方法

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}[9f_{n+1}+19f_n-5f_{n-1}+f_{n-2}]$$

局部截断误差为

$$T_n=-\frac{19}{720}h^5y^{(5)}(x_n)+\cdots$$

- 基于导数近似的构造方法（略）
- 多步法与单步法比较，其好处是达到同样的精确度，计算f的次数要少得多.事实上单用一个显式多步法，每前进一步只需增算一次函数值f，复杂之处是还需求初始值.
- 线性多步法如何开表头

Taylor展开法；单步法（如RK法）

§6.3 线性多步法的收敛性

多步法的收敛性

- 定义 设差分方程(6.2.1)的初始条件

  $y_k = y_k(h), k=0,1,\ldots,p$满足

$$\lim_{h\to 0} y_k = \eta, \quad k = 1, 2, \cdots, p \tag{6.3.1}$$

对于$f(x, y)$满足解的存在唯一性条件的初值问题(6.1.1)，如果差分方程 (6.2.1)的解对每个确定的$x\in[a,b]$满足

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}} y_n = y(x), \quad nh = x - a \tag{6.3.2}$$

则称多步法(6.2.1)是收敛的.

- 记

$$\rho(r) = r^{p+1} - \sum_{i=0}^{p} a_i r^{p-i}$$

$$\sigma(r) = \sum_{i=-1}^{p} b_i r^{p-i}$$

分别称为(6.2.1)的第一、第二特征多项式.

- 定义 若第一特征多项式$\rho(r)$的所有零点的模均不大于1，且模为1的零点是单零点，则称$\rho(r)$及相应的线性多步法(6.2.1)满足根条件.
- 定理 若线性多步法(6.2.1)收敛，则其满足根条件.

- 定理 线性多步法(6.2.1)相容的充分必要条件是

$$\rho(1)=0, \quad \rho'(1)=\sigma(1) \qquad (6.3.3)$$

- 定理 若线性多步法(6.2.1)收敛，则其一定是相容的.
- 定理 线性多步法(6.2.1)收敛的充分必要条件是该方法是相容的且满足根条件.

- 例　　P_{289}例6.5
- 例 显式4阶Adams方法,

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}[55f_n-59f_{n-1}+37f_{n-2}-9f_{n-3}]$$

- $\rho(r)=r^4-r^3$, $\sigma(r)=(55r^3-59r^2+37r-9)/24$

  $\rho(1)=0$,　$\rho'(1)=\sigma(1)$　$(C_0=0,\ C_1=0)$

从而方法是相容的.

$\rho(r)=0$ 的4个根0,0,0,1，方法满足根条件。

故显式4阶Adams方法是收敛的.

- 例 4阶Hamming方法

$$y_{n+1}=\frac{1}{8}(9y_n-y_{n-2})+\frac{3}{8}h(y'_{n+1}+2y'_n-y'_{n-1})$$

$$\rho(r)=r^3-\frac{9}{8}r^2+\frac{1}{8},\sigma(r)=\frac{3}{8}r^3+\frac{3}{4}r^2-\frac{3}{8}r$$

$\rho(1)=0$, $\rho'(1)=\sigma(1)$ $(C_0=0,\ C_1=0)$

从而方法是相容的.

$\rho(r)=0$ 的3个根$r_0=1$, $r_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{33}}{16}$, 方法满足根条件.

故显式4阶Hamming方法是收敛的.

§6.4 线性多步法的稳定性

多步法的稳定性

- 在进行实际计算时，一方面出发值不一定是完全精确的，带有一定误差.同时受计算机字长的限制，一般总会产生舍入误差. 随着步数的增加，初始数据的误差、计算中产生的舍入误差都会传播下去，对以后的计算结果产生影响.实际计算中我们是取有限步长进行计算的. 所谓稳定性问题，就是指误差的积累是否受到控制的问题。也就是说如果计算结果对这些误差不敏感，则说相应的方法是稳定的，否则称之为不稳定.

- 考察实验方程

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

- 其解为

$$y(x) = \eta \mathrm{e}^{\lambda(x-a)}$$

- 用线性多步法

$$y_{n+1}=\sum_{i=0}^{p}a_i y_{n-i}+h\sum_{i=-1}^{p}b_i f_{n-i},\ n=p,p+1,\cdots \quad (6.2.1)$$

求解此实验方程，有

$$(1-\lambda hb_{-1})y_{n+1}=\sum_{i=0}^{p}(a_i+\lambda hb_i)y_{n-i},\ n=p,p+1,\cdots \quad (6.4.1)$$

$$\pi(r;\lambda h)=(1-\lambda hb_{-1})r^{p+1}-\sum_{i=0}^{p}(a_i+\lambda hb_i)r^{p-i}=\rho(r)-h\lambda\sigma(r)$$

称为(6.2.1)的稳定多项式.

$\pi(r;\lambda h)=0$的$p+1$个根记为$r_0(\lambda h),r_1(\lambda h),r_2(\lambda h),\ldots,r_p(\lambda h)$

其中$r_0(\lambda h)=1+\lambda h+O(h^2)$

- 当$\lambda>0$时,实验方程的精确解$y(x)=\eta e^{\lambda(x-a)}$按模递增的; (6.4.1)的解当$n\to\infty$时无界；误差也是无界的.这种情况下，如果误差相对于真解是小的，就说方法是相对稳定的.

  这时要求

$$|r_i(\lambda h)|\le|r_0(\lambda h)|\ ,\quad i=1,\ldots,p.$$

- 当$\lambda<0$时,实验方程的精确解$y(x)=\eta e^{\lambda(x-a)}$按模递减的; 要求(6.4.1)的解当$n\to\infty$时按模递减到0，误差也是递减的，这时就说方法是绝对稳定的. 这种情况下，就需要$|r_i(\lambda h)|<1$, $i=0,1,\ldots,p$来保证.

方法(6.2.1)的稳定性取决于稳定多项式 $\pi(r;\,\lambda h)$零点的性质.

稳定性的定义

记$\bar{h}=\lambda h$

- 定义 设 $r_i(\bar{h})$ $(i=0,1,\ldots,p)$是方法(6.2.1)的稳定多项式$\pi(r;\bar{h})=0$的根, $r_0(\bar{h})$是形如$r_0(\lambda h)=1+\lambda h+O(h^2)$的根.

(1)若对任意的$\bar{h}\in[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}$有

$$|r_i(\bar{h})|\le|r_0(\bar{h})|,\quad i=1,\ldots,p.$$

且当$|r_i(\bar{h})|=|r_0(\bar{h})|$ 时, $r_i(\bar{h})$是单根,则称方法(6.2.1)在$[\alpha,\beta]$上是相对稳定的， $[\alpha,\beta]$称为此方法的相对稳定区间.

(2)若对任意的$\bar{h}\in(\sigma,\delta)\subset\mathbf{R}$有

$$|r_i(\bar{h})|<1,\quad i=0,1,\ldots,p.$$

则称方法(6.2.1)在 (σ,δ)上是绝对稳定的， (σ,δ)称为此方法的绝对稳定区间.

- 定义 若一个方法的绝对稳定区间是 $(-\infty,0)$, 则称该方法是A稳定的.
- (1)只有$\lambda<0$的情况讨论绝对稳定性才有意义.
- (2)从误差分析的角度看，绝对稳定的方法是理想的.
- (3)相对稳定区间和绝对稳定区间越大越好.

例 讨论梯形方法的相对和绝对稳定区间.

- 解 梯形方法为 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(y'_{n+1}+y'_n)$

对于试验方程$y'=\lambda y$，梯形方法成为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{\bar{h}}{2}(y_{n+1}+y_n)$$

即

$$(1-\frac{\bar{h}}{2})y_{n+1}=(1+\frac{\bar{h}}{2})y_n$$

其稳定多形式为

$$\pi(r;\bar{h})=(1-\frac{\bar{h}}{2})r-(1+\frac{\bar{h}}{2})$$

它只有一个根，记为 $r_0(\bar{h})=\left.\left(1+\frac{\bar{h}}{2}\right)\middle/\left(1-\frac{\bar{h}}{2}\right)\right.$

且$r_0(\bar{h})\to 1\ (h\to 0)$

由于由于其只有一个根，所以梯形方法的相对稳定区间是($-\infty$，$+\infty$)

当$\bar{h} \geq 0$时, $|r_0(\bar{h})| \geq 1$

当$\bar{h} < 0$时, $|r_0(\bar{h})| < 1$

这样，梯形方法的绝对稳定区间是($-\infty$，0). 即梯形方法是A稳定的.

例 讨论Simpson方法的相对和绝对稳定区间

- Simpson方法为

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(y'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1})$$

利用该格式求解试验方程$y'=\lambda y$ 得

$$(1-\frac{\bar{h}}{3})y_{n+1} = \frac{4}{3}\bar{h}y_n + (1+\frac{\bar{h}}{3})y_{n-1}$$

其稳定多形式为

$$\pi(r;\bar{h}) = (1-\frac{\bar{h}}{3})r^2 - \frac{4}{3}\bar{h}r - (1+\frac{\bar{h}}{3})$$

它有两个根

$$r_0(\bar{h}) = \frac{\frac{2}{3}\bar{h} + \sqrt{1+\frac{1}{3}\bar{h}^2}}{1-\frac{1}{3}\bar{h}} \quad (h \to 0, r_0(\bar{h}) \to 1), \quad r_1(\bar{h}) = \frac{\frac{2}{3}\bar{h} - \sqrt{1+\frac{1}{3}\bar{h}^2}}{1-\frac{1}{3}\bar{h}}$$

考察 $$\left|\frac{r_1(\bar{h})}{r_0(\bar{h})}\right| = \left|\frac{\frac{2}{3}\bar{h} - \sqrt{1+\frac{1}{3}\bar{h}^2}}{\frac{2}{3}\bar{h} + \sqrt{1+\frac{1}{3}\bar{h}^2}}\right|$$

当 $\bar{h} \geq 0$ 时，上式小于等于1；

当 $\bar{h} < 0$ 时，上式大于1.

因此，Simpson方法的相对稳定区间为

$[0,+\infty)$

当$\bar{h}>0$时,

$$|r_0(\bar{h})|=\left|\frac{\frac{2}{3}\bar{h}+\sqrt{1+\frac{1}{3}\bar{h}^2}}{1-\frac{1}{3}\bar{h}}\right|>\left|\frac{1+\frac{2}{3}\bar{h}}{1-\frac{1}{3}\bar{h}}\right|>1$$

当$\bar{h}<0$时,

$$|r_1(\bar{h})|=\left|\frac{\sqrt{1+\frac{1}{3}\bar{h}^2}-\frac{2}{3}\bar{h}}{1-\frac{1}{3}\bar{h}}\right|>\left|\frac{1-\frac{2}{3}\bar{h}}{1-\frac{1}{3}\bar{h}}\right|>1$$

- 因此，Simpson方法不存在绝对稳定区间.

例线性多步法 $y_{n+1}=\frac{1}{2}y_n+\frac{1}{2}y_{n-1}+\frac{h}{4}(7y_n'-y_{n-1}')$

（1）确定法方法中的局部截断误差主项，并指出方法的阶数

（2）讨论该方法的收敛性和绝对稳定性

- 解 $p=1, a_0=1/2, a_1=1/2, b_{-1}=0, b_0=7/4, b_1=-1/4$,

$$C_0=1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=0$$

$$C_1=1-\left[0\times\frac{1}{2}+(-1)\times(\frac{1}{2})+0+\frac{7}{4}-\frac{1}{4}\right]=0$$

$$C_2=\frac{1}{2!}\{1-[0\times\frac{1}{2}+1\times(\frac{1}{2})+2\times(0+0\times\frac{7}{4}+\frac{1}{4})=0$$

$$C_3=\frac{1}{3!}\{1-[-\frac{1}{2}+3(0+0-\frac{1}{4})]\}=\frac{3}{8}$$

是2阶方法，其误差常数 $C_3=3/8$,

局部截断误差 T_n 的首项 $\frac{3}{8}h^3y^{(3)}(x_n)$

$$y_{n+1}=\frac{1}{2}y_n+\frac{1}{2}y_{n-1}+\frac{h}{4}(7y_n^{'}-y_{n-1}^{'})$$

- $$\rho(r)=r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}$$

  $$\sigma(r)=\frac{7}{4}r-\frac{1}{4}$$

$\rho(r)=0$ 的2个根-1/2,1，方法满足根条件.

$C_0=0$, $C_1=0$ $(\rho(1)=0$， $\rho'(1)=\sigma(1))$

从而方法是相容的.

故此方法是收敛的.

$$y_{n+1}=\frac{1}{2}y_n+\frac{1}{2}y_{n-1}+\frac{h}{4}(7y_n^{'}-y_{n-1}^{'})$$

利用该格式求解试验方程$y'=\lambda y$ 得

$$y_{n+1}=\frac{1}{2}y_n+\frac{1}{2}y_{n-1}+\frac{\lambda h}{4}(7y_n-y_{n-1})$$

其稳定多形式为

$$\pi(r;\bar{h})=r^2-(\frac{1}{2}+\frac{7\bar{h}}{4})r-(\frac{1}{2}-\frac{\bar{h}}{4})$$

它有两个根$r_0(\bar{h}),r_1(\bar{h})$,

$$|r_0(\bar{h})|<1\ ,\ |r_1(\bar{h})|<1 \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{1}{2}+\frac{7\bar{h}}{4}\right|<1-(\frac{1}{2}-\frac{\bar{h}}{4}) \\ \left|-(\frac{1}{2}-\frac{\bar{h}}{4})\right|<1 \end{cases}$$

解得$-0.5<\bar{h}<0$, 绝对稳定区间是(-0.5,0).

例线性多步法 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{12}(5y'_{n+1}+8y'_n-y'_{n-1})$

（1）求出方法的局部截断误差

（2）讨论该方法的收敛性（3）讨论该方法绝对稳定性

- 解(1)$p=1,a_0=1$,$a_1=0$, $b_{-1}=5/12,b_0=8/12,b_1=-1/12$,
- 局部截断误差

$$T_n=C_0y(x_n)+C_1hy'(x_n)+\cdots+C_qh^qy^{(q)}(x_n)+\cdots$$

$$C_0=C_1=C_2=C_3=0, \qquad C_4=-\frac{1}{24}\neq 0$$

$$T_n=-\frac{h^4}{24}y^{(4)}(x_n)+\cdots=-\frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_n)\ \ ,\xi_n\in(x_n,x_{n+1})$$

(2) $C_0=0$，$C_1=0$ ，从而方法是相容的.

$\rho(r)=r^2-r$, $\rho(r)=r^2-r=0$ 的两个根$r_0=1$，$r_1=0$

方法满足根条件.

由收敛的充要条件知此方法是收敛的.

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{12}(5y'_{n+1}+8y'_n-y'_{n-1})$$

(3)利用该格式求解试验方程$y'=\lambda y$ 得

$$(1-\frac{5}{12}\lambda h)y_{n+1}=(1+\frac{2}{3}\lambda h)y_n-\frac{1}{12}\lambda hy_{n-1}$$

其稳定多形式为

$$\pi(r;\bar{h})=(1-\frac{5}{12}\bar{h})r^2-(1+\frac{2}{3}\bar{h})r+\frac{1}{12}\bar{h}$$

它有两个零点$r_0(\bar{h}),r_1(\bar{h})$,

$$|r_0(\bar{h})|<1\ ,\ |r_1(\bar{h})|<1\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1+\frac{2}{3}\bar{h}}{1-\frac{5}{12}\bar{h}}<1+\dfrac{\frac{1}{12}\bar{h}}{1-\frac{5}{12}\bar{h}}\\[2ex]\left|\dfrac{\frac{1}{12}\bar{h}}{1-\frac{5}{12}\bar{h}}\right|<1\end{cases}$$

解得-6<$\bar{h}$<0,

绝对稳定区间是(-6,0).

- 步长的选取:稳定性与步长有关，步长的选取一定要保证方法是稳定的，即λh属于稳定区间.
- 收敛性是反映递推公式本身的整体截断误差对计算结果的影响；稳定性反映某一计算步骤中出现的误差对计算结果的影.

§6.5 预测-校正方法

线性多步法(6.2.1)当$b_{-1}\neq 0$时，是隐格式

$$y_{n+1}=b_{-1}hf_{n+1}+\sum_{i=0}^{p}(a_i y_{n-i}+hb_i f_{n-i})$$

估计出y_{n+1}的一个初值$y^{(0)}{}_{n+1}$，利用迭代

$$y_{n+1}^{(j+1)}=b_{-1}hf(x_{n+1},y_{n+1}^{(j)})+\sum_{i=0}^{p}(a_i y_{n-i}+hb_i f_{n-i})$$

$y^{(j)}{}_{n+1}$是y_{n+1}的第j次近似值.

- 用显式方法来作预测值$y^{(0)}{}_{n+1}$，用隐式方法迭代校正一次得$y^{(1)}{}_{n+1}$值，这种显式与隐式联合使用构成的方法称为预报-校正法.作为预报的显式公式称为预测式，用于校正的隐式公式称为校正式.
- 例如，改进的Euler方法.

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(1)} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})] \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

- 4阶显式Adams方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}]$$

局部截断误差为

$$T_n = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{251}{720}h^5 y^{(5)}(x_n) + \cdots$$

- 4阶隐式Adams方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}]$$

局部截断误差为

$$T_n = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{19}{720}h^5 y^{(5)}(x_n) + \cdots$$

- 4阶Adams预报-校正方法

$$\begin{cases} P: y_{n+1}^{(0)} = y_n + \dfrac{h}{24}[55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}] \\ E: f_{n+1}^{(0)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}) \\ C: y_{n+1}^{(1)} = y_n + \dfrac{h}{24}[9 f_{n+1}^{(0)} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}] \\ E: f_{n+1}^{(1)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(1)}) \end{cases}$$

称为4阶Adams预报-校正格式(PECE模式).

- 预测公式与校正公式选取同阶方法，可使局部截断误差用预测值和校正值近似表示，再用局部截断误差来修正，得到提高精度的方法.

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(0)} \approx \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(x_n)$$

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(1)} \approx -\frac{19}{720} h^5 y^{(5)}(x_n)$$

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(0)} \approx -\frac{251}{270} (y_{n+1}^{(0)} - y_{n+1}^{(1)})$$

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(1)} \approx \frac{19}{270} (y_{n+1}^{(0)} - y_{n+1}^{(1)})$$

- 构造4阶Adams修正预测-校正格式

$$
\begin{cases}
P: y_{n+1}^{(0)} = y_n + \dfrac{h}{24}[55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}] \\
M: \overline{y}_{n+1}^{(0)} = y_{n+1}^{(0)} + \dfrac{251}{270}(y_n^{(1)} - y_n^{(0)}) \\
E: f_{n+1}^{(0)} = f(x_{n+1}, \overline{y}_{n+1}^{(0)}) \\
C: y_{n+1}^{(1)} = y_n + \dfrac{h}{24}[9 f_{n+1}^{(0)} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}] \\
M: \overline{y}_{n+1}^{(1)} = y_{n+1}^{(1)} - \dfrac{19}{270}(y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}) \\
E: f_{n+1}^{(1)} = f(x_{n+1}, \overline{y}_{n+1}^{(1)})
\end{cases}
$$

称为PMECME模式.

- 4阶Milne方法

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4}{3} h(2 f_n - f_{n-1} + 2 f_{n-2})$$

$$T_n = \frac{14}{45} h^5 y^5 (x_n) + \cdots, \quad C_5 = \frac{14}{45}$$

- 4阶Hamming方法

$$y_{n+1} = \frac{1}{8}(9 y_n - y_{n-2}) + \frac{3}{8} h(f_{n+1} + 2 f_n - f_{n-1})$$

$$T_n = -\frac{1}{40} h^5 y^5 (x_n) + \cdots, \quad C_5 = -\frac{1}{40}$$

- 4阶Milne- Hamming预报-校正方法

$$\begin{cases} P: y_{n+1}^{(0)} = y_{n-3} + \dfrac{4}{3}h[2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}] \\ E: f_{n+1}^{(0)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}) \\ C: y_{n+1}^{(1)} = \dfrac{1}{8}(9y_n - y_{n-2}) + \dfrac{3}{8}h(f_{n+1}^{(0)} + 2f_n - f_{n-1}) \\ E: f_{n+1}^{(1)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(1)}) \end{cases}$$

- 称为4阶Milne- Hamming预测-校正方法格式(PECE模式).

- 构造修正4阶Milne- Hamming预测-校正格式

$$\begin{cases} P: y_{n+1}^{(0)} = y_{n-3} + \dfrac{4}{3}h[2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}] \\ M: \overline{y}_{n+1}^{(0)} = y_{n+1}^{(0)} + \dfrac{112}{121}(y_n^{(1)} - y_n^{(0)}) \\ E: f_{n+1}^{(0)} = f(x_{n+1}, \overline{y}_{n+1}^{(0)}) \\ C: y_{n+1}^{(1)} = \dfrac{1}{8}(9y_n - y_{n-2}) + \dfrac{3}{8}h(f_{n+1}^{(0)} + 2f_n - f_{n-1}) \\ M: \overline{y}_{n+1}^{(1)} = y_{n+1}^{(1)} - \dfrac{9}{121}(y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}) \\ E: f_{n+1}^{(1)} = f(x_{n+1}, \overline{y}_{n+1}^{(1)}) \end{cases}$$

称为PMECME模式.