FMA430 - Flerdimensionell analys

Måns Ansgariusson, C14

2016-07-13

1 Nivåkurvor

Vad är en nivåkurva?
På en karta så har du förutom skiftande färger; terrängavsnitt. Det som beskriver höjdskillnader på olika delar av området för kartläsaren. Nivåkurvor är exakt det samma fast för ekvationer. Med nivåkurvor så kan vi få en någorlunda förståelse över hur ett tredimensionellt objekt ser ut fast vi ritar i tvådimensionellt. Ex.

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Här har vi en funktion av två variabler som beskriver en paraboloid eller om vi sätter $f(x,y) = 1$ enhetscirkeln!
Eftersom $f(x,y)$ kan anta alla reella värden så kommer radien på paraboloiden öka i takt med funktionen. Ex.

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + y^2 \\ 1 &= x^2 + y^2 \\ 2 &= x^2 + y^2 \\ &osv.. \end{aligned}$$

Radien blir nu våra nivåkurvor. kommer se ut som en rad cirklar med radien: 0, 1, $\sqrt(2)$ osv. ifall vi skulle rita paraboloiden i planet istället för rummet. (Tänk att du står på z-vektorns topp och kollar ner på X,y-planet).

2 Gränsvärden med flera variabler

YES precis det vi alla älskar med endimen, Gränsvärden, men när ni inte tror ert liv inte kan bli bättre så lägger de in ytterligare en variabel för skojs skull!
I endimensionell analys så går vi igenom att ett gränsvärde beskriver en funktions värde när dess argument kommer tillräckligt nära en viss punkt eller växer sig oändligt (eller tillräckligt) stor.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

I Flerdimensionell analys ska vi göra precis samma sak fast vi ska använda oss av flera variabler.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

Detta ger oss problemet: hur vet vi att funktionen går just mot det värdet i den punkten?
Throwback till Endimen:
Ett gränsvärde kan bero på vilket håll du går ifrån.. ex. $\lim_{1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$ samtidigt som $\lim_{1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$. I endimensionell analys så kan funktionen endast vandra från 2 håll till en punkt men i flerdimensionell analys så kan den

vandra från ∞ många håll. Så vi måste kolla alla hållen samtidigt! För att ett gränsvärde ska existera så måste funktionen från alla håll röra sig mot samma värde i från alla riktningar i punkten (a,b).
Hur gör man det?
Vi börjar med att uttrycka den angivna funktionen i polär form.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \frac{1}{x-y} \to \begin{cases} x = a + r\cos\phi \\ y = b + r\sin\phi \end{cases} \to \lim_{r\to 0} \frac{1}{(a+r\cos\phi) - (b+r\sin\phi)}$$

Det vi nu gjort är att helt sonika skriva om funktionen så den är beroende av ϕ. Varför är det bra? jo för ϕ kan variera mellan $0 \leq 2\pi$ och därför så har vi nu ett gränsvärde som från alla håll går mot ett och samma A eller att gränsvärde saknas.

Ex.

$$f(x,y) = \frac{1}{x-y}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{(1+r\cos\phi) - (1+r\sin\phi)} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \frac{1}{(cos\phi - \sin\phi)}$$

Nu ser vi att gränsvärdet inte går mot samma värde för alla ϕ då $\lim_{(x,y)\to(1,1) f(x,y) \neq A}$ där A är ett ändligt gränsvärde.
Metod nr2:

$$\lim_{(x,y)\to(1,x)} f(x,y) \to \infty$$

$$\lim_{(x,y)\to(x,1)} f(x,y) \to -\infty$$

De går inte mot samma värde beroende på vilket håll de går från $\to$ ej lösbart.

2.1 kontinuerliga funktioner

Funktionen f(x,....,n) sägs vara kontinuerlig i $(x_0, ..., n_o) \in$ Df , om:

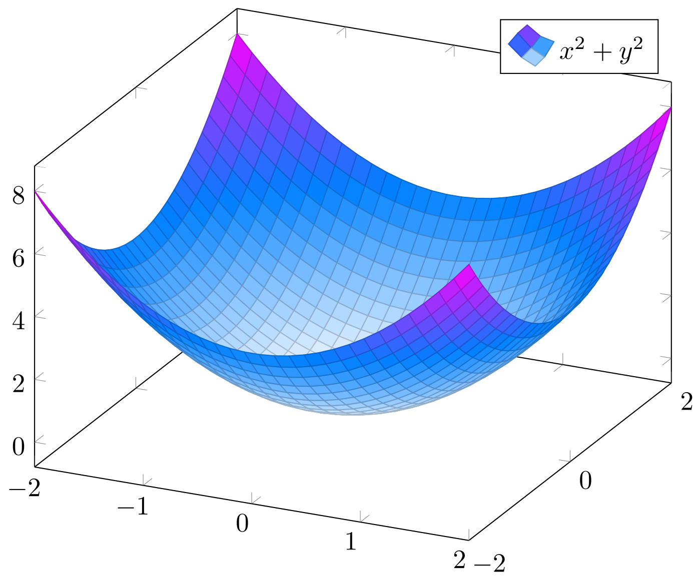
$$\lim_{x,......n->x_0,......,n_0} f(x,....,n) \to f(x_0,......,n_0)$$

Denna def funkar i alla dimensioner och är därför exakt samma def som vi lärde oss i endimensionell analys.
funktionen är kontinuerlig ifall för alla värden i intervallet]a,b[om funktionen leder till ett ändligt värde för alla värden på x i intervallet.

3 Partiell Derivata

I endimen så jobbade vi med funktioner med en variabel. I flerdimen kommer vi föga förvånande jobba med funktioner som beror på flera variabler. Detta skapar ett nytt problem: Hur beräknar vi derivatan?

Detta är svårare än vi tror för vi måste nu ta hänsyn till riktningen för funktionen. Vad menar jag med det?
När vi har en funktion med en variabel så räknar vi på förändringen i y beroende på x. Nu så måste vi tänka att vi jobbar konstant i rummet (3d). Det gör att vi har xy-planet som förändrar höjden.



Här ser vi att derivatan beror på vilket håll du går från!
Det vi kan göra är att bestämma partiella derivator som berättar hur snabbt x respektive y förändras beroende på respektive värde!
vi tar exemplet ovan:

$$f(x,y) = x^2y + y^2$$
$$f'_x(x,y) = 2xy$$
$$f'_y(x,y) = x^2 + 2y$$

Vi vill nu veta hur snabbt funktionen rör sig i x respektive y led i punkten (1,2)

$$f'_x(1,2) = 4, f'_y(1,2) = 6$$

vad är då detta användbart för? Exempelvis att beskriva ett tangentplan!

3.1 Tangentplan

Ett tangentplan är ett plan som tangerar en punkt (a,b) i funktionen f(x,y).
Eftersom de partiella derivatorna $f'_x(a,b)$ och $f'_y(a,b)$ ger oss riktningsvektorer för funktionen i x respektive y-led så har vi tillräckligt men information för att bestämma ett plan i rummet! planets ekvation = ax + by +cz +d = 0 och vår funktions ekvation $z = f(x,y)$.

Vi vill nu få reda på tangentplanet till funktionen f i punkten (a,b).
genom att partialderivera funktionen både för x och y så får vi:

$$(f_x'(a,b), f_y'(a,b)) = \overrightarrow{n}$$

I linjäralgebra lärde vi oss att normalvektorn hos ett plan kan fås ur:

$$Ax + By + Cz = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{n}_\pi : (A, B, C).$$

Nu ansätter jag planets ekvation utifrån normalvektorn jag fick fram:

$$f_x'(a,b)x + f_y'(a,b)y + d = 0$$

jag testar mot en punkt som jag vet finns i planet : (a,b).

$$f_x'(a,b)a + f_y'(a,b)b = -d$$

Nu har jag bara -d som okänd kvar och efter vi löst ut den så har vi planets ekvation.
Note!
Detta är så jag löser den här uppgiften, det är på exakt samma sätt som i linjäralgebra men i flerdimen så finns ett standard sätt:

$$z - f(a,b) = f_x'(a,b)(x-a) + f_y'(a,b)(y-b)$$

Note!!
somliga av er tänker nu: "det där är en linje och inte ett plan..", mycket riktigt men en linje i 2d är ett plan i 3d!

3.2 tangent till funktion

Det här är super enkelt!
för att ta reda på tangenten till funktionen f(x,y) i punkten (a,b) måste vi räkna ut de partiella derivatorna och anpassa d sådan att:
$f_x'(a,b)x + f_y'(a,b)y + d = f(a,b)$.
—-Drops the mic—-

3.3 Gradient

Som ni ser i (1) så är $(f_x'(a,b), f_y'(a,b)) = \overrightarrow{n}$. Detta är exakt vad gradienten av funktionen f(x,y) i punkten (a,b),$gradf(a,b)$. man skriver oftast att $gradf(a,b)$ som $\nabla f(a,b)$
Note!
Nabla (∇) är en vektor med de partiella derivatorna för varje variabel i varje respektive element. Alltså $\nabla \neq grad$

3.4 Riktningsderivatan

Nu vet vi vad gradient är och hur den fungerar samt vad partiell derivata är för något! Nu inför vi en generalisering för derivatan i en riktning.
Vi frågar oss hur stor den genomsnittliga derivatan,lutningen, för funktionen,$z = f(x,y)$, är mellan punkterna (a,b) och (c,d). Det första vi gör är att göra punkterna till en vektor vi kan använda. $(c,d)-(a,b) = (c-a, d-b) = \overrightarrow{v}$.
(**Note!:** Den mäter den genomsnittliga lutningen **på** ytan av funktionen!)
vi har nu en riktningsvektor mellan punkterna (a,b) och (c,d): $(c-a, d-b)$. Vi måste nu normera den för att den ska ska vara fungera som en riktningsvektor.
$\frac{1}{\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}} * (c-a, d-b) = \overrightarrow{v}$. $\leftarrow$ Riktningsvektorn.
Nu för att få fram riktningsderivatan så måste vi applicera partiell derivatorna $f'_x(a,b)$ och $f'_y(a,b)$ på vektorn, alltså : $\nabla f(a,b) * \overrightarrow{v}$. Detta kommer i sin tur resultera i skalärprodukten $\frac{1}{\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}}(f'_x(a,b)*(c-a)+f'_y(d-b))$.
Riktningsderivatans generella formel ser ut så här:

$$f'_v = \nabla f(a,b) * \overrightarrow{v}, \quad |v| = 1$$

3.5 kedjeregeln

Utan tvekan det mest användbara redskapet när man jobbar med funktioner!
Vad är kedjeregeln?
Ett samband som talar om hur man deriverar sammansatta funktioner!
I endimensionell analys så lärde vi oss detta:

$$f'(g(x)) = f'(g(x)) * g'(x)$$

I flerdimensionell analys så ser kedjeregeln lite annorlunda ut:

$$h'(x) = f'_x(g(x,y)) = (f'_u(g(x,y)) * g'(x,y)_x + f'_v(g(x,y)) * g'(x,y)_x)$$

Nu är det någon som tänker ”Vänta lite här! Vad betyder f'_u och f'_v ?!”. Grymt bra fråga! Det är med avseende på en påhittad variabel u eller v som används för att göra livet lättare för lata matematiker. Kedjeregeln fungerar lika bra för högre derivator! Vi kör ett exempel:

$$f''_{xy} - yf''_{yy} - f'_y = \frac{1}{y} \qquad \begin{cases} u = x \\ v = ye^x \end{cases} \qquad y > 0$$

Vi ska nu ta reda på funktionen som stämmer till villkoret som ställs av differentialekvationen:
Vi börjar med att med hjälp av kedjeregeln beskriva differentialekvationen:
$f'_y = \frac{df}{du} * \frac{du}{dy} + \frac{df}{dv} * \frac{dv}{dy} = \frac{df}{du} * 0 + \frac{df}{dv} * e^x$
$f''_{yy} = 0 + e^x(\frac{d^2f}{dudy} * \frac{du}{dy} + \frac{d^2f}{dy^2} * \frac{dv}{dy}) = e^x(\frac{d^2f}{dvdu} * 0 + \frac{df^2}{dy^2} * e^x)$
$f''_{yx} = e^x\frac{df}{dv} + e^x(\frac{d^2f}{dvdu} * \frac{du}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2} * \frac{dv}{dx} = e^x(\frac{d^2}{dvdu} * 0 + \frac{d^2f}{dy^2} * ye^x))$
Nu sätter vi in derivatorna i differentialekvationen:

$$e^x\frac{df}{dy} + e^x\frac{d^2f}{dudv} + ye^{2x}\frac{d^2f}{dv^2} - ye^{2x}\frac{d^2f}{dv^2} - e^x\frac{df}{dv} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow$$

$$e^x \frac{d^2 f}{dvdu} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{d^2 f}{dvdu} = \frac{1}{ye^x} \Leftrightarrow \iint \frac{1}{v} dudv \Leftrightarrow \int \frac{u}{v} + \alpha(v) dv = u * ln(v) + \alpha(v) + \gamma(u)$$

$$\Leftrightarrow$$

$f = x \ln(ye^x) + \alpha(v) + \gamma(u)$

$\alpha(v), \gamma(u)$ är konstanter och viktiga att **INTE** glömma i svaret.

4 stationärapunkter

Def: En punkt (a,b) $\in D_f$ kallas en lokal maximipunkt till funktionen f, och vi säger att f har ett lokalt maximum i (a,b), om

$$f(a,b) \geq f(x,y), \quad \text{för alla } (a, b \in D_f \text{nära } (a,b))$$

Ett lokalt minimi motiveras på samma sätt fast omvänt.

Om vi tänker tillbaka till Endimen, där Def för stationära punkter var den samma, så kommer vi ihåg att $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) =$ stationär punkt.
skönt nog så är detta fortfarande fakta i denna kursen, det vill säga att $\nabla f(a,b) = 0 \Rightarrow$ stationär punkt i (a,b). (Riktningsvektorn blir såklart också 0 eftersom skalärprodukten av $0 * \overrightarrow{v} = 0$ oavsett vilken riktning den går mot).

4.1 Stationär punkts karaktär

Det finns tre fall:
Sadelpunkt
minimipunkt
maximipunkt
Det är precis som i Endimmen, och precis som i endimmen så tar vi reda på om en punkt är ett maximi,minimi eller sadelpunkt genom andraderivatan.

$$\begin{cases} A = f''_{xx} \\ B = f''_{xy} = f''_{yx} \\ C = f''_{yy} \end{cases}$$

Med hjälp av informationen ovan så kan vi ta reda på vilken karaktär den stationära punkten har. Det finns fyra olika fall:
1. $AC - B^2 = 0$ Då är den odefinierad.
2. $AC - B^2 \leq 0$ Då är den en sadelpunkt
3. $AC - B^2 \geq 0$ och A < 0 så är det en maximipunkt
4. $AC - B^2 \geq 0$ och A > 0 så är det en minimipunkt

Vi ger oss på ett exempel:
Vi ska ta reda på alla stationära punkter till funktionen $f(x,y) = x^2 - 2xy +$

$2y^2 - 2x$.
Vi börjar alltså att ta reda på $\nabla f(x,y) = 0$:

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Det finns alltså endast 1 stationär punkt i hela Df,(2,1). Nu ska vi avgöra dess karaktär genom att derivera funktionen ytterligare:

$$\begin{cases} A = f''_{xx} = 2 \\ B = f''_{xy} = -2 \\ C = f''_{yy} = 4 \end{cases}$$

Nu har vi ju inget x eller y att sätta in så vi går direkt till att avgöra vilken karaktär funktionen har genom ekvationen $AC - B^2$ vilket blir:

$$AC - B^2 = 2 * 4 - 4 = 4$$

Ekvationen $AC - B^2 > 0$ och A>0 $\Leftrightarrow$ ett **lokalt** minimipunkt i punkten (2,1).
Note!
Extremt viktigt att ni säger att det är en lokal minimipunkt eftersom annars måste ni visa med gränsvärden att för alla andra punkter i Df

-

är större än värdet ni angivit. (Ytterligare förtydligande: Det ni skrivit kan med lite illvilja tolkas som att ni angivit ett globalt minimivärde vilket kan ge avdrag på tentauppgifter).

5 funktionalmatris - Jacobimatris

En funktionalmatris eller Jacobimatris är en avbildningsmatris som består en en funktions partiella derivator. Denna är extremt användbar när vi snart ska lära oss optimering med bivilkor och framförallt för vektor analys och variabelbyten och för att approximera en funktionsvärde i en punkt!
vi har en funktion $f(g_1(x,y), g2(x,y))$.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{Dg_1}{Dx} & \frac{Dg_1}{Dy} \\ \frac{Dg_2}{Dx} & \frac{Dg_2}{Dy} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ren grekiska right?
Men detta är ganska användbart som tidigare nämnts. Eftersom att raderna i matrisen motsvarar gradienten för funktionen $f(g_1(x,y), g2(x,y))$ och dess kolonvektorer blir partiella vektorvärda derivatorna $f1_x, f2_x$ och $f1_y, f2_y$.

Ok! Nu till att visa vad den kan göra!
Eftersom vi någon gång kan få för oss att göra ett koordinatbyte från (x,y) $\rightarrow$

polärform som vi kan definjera som:

$$f(x,y):\begin{cases} x = r\cos\omega \\ y = r\sin\omega \end{cases}$$

Note!!: Det vi gjort nu är att gå från $f(x,y) \to f(g1(r,\omega), g2(r,\omega))$ nu räknar vi ut de partiella derivatorna beroende på (x,y), vilket ger oss:

$$\begin{cases} f'_x = g1'_r, g1'_\omega \\ f_y = g2'_r, g2'_\omega \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} g1'_r & g1'_\omega \\ g2'_r & g2'_\omega \end{pmatrix}$$

5.1 funktionaldeterminant - Jacobian

Funktionaldeterminanten är användbar till allt från area och volym beräkningar till optimering och vektoranalys.
Vi har redan sagt att en jacobimatris kan ses som en avbildningsmatris men nu ska vi lägga till lite bra formler 'N stuff så vi får detta till ett användbart redskap!
Ex: Funktionsytan E beskrivs av funktionen f. Funktionsytan E och den linjära avbildningsmatrisen A ger området D.Då finns sambandet :

$$Area_D = |DetA| * Area_E$$

logiskt eller hur? Goda nyheter, Det här sambandet funkar fortfarande i flerdimen!
$|DetA|$ är precis som vi misstänker determinanten för jacobimatrisen, AKA Jacobian.

6 optimering

Optimering kommer vi ihåg ifrån livets mörkaste stund, talar så klart om sista uppgiften på A2 tentamen.
I endimensionell analys lärde vi oss att optimera innebär att finna den bästa, "optimala", lösningen på ett problem utifrån de förutsättningar som ges.
Endimen och flerdimens optimering skiljer sig åt på den punkten att i endimen så beror y av x men i flerdimen beror z av x,y. Ska försöka med två exempel nedan förklara skillnaden.
Endimensionell analys exempel: Tänk er en fabrik har x antal jobbare och företagsledningen vill **optimera** produktionen. De vet att en jobbare kan endast utföra en viss mängd arbete per dag och att ifall de anställer för många arbetare så kommer de istället för att vara en hjälpande hand vara i vägen för varandra i respektive arbete och produktionen försämras. De vill ta reda på vilket antal arbetare är optimalt för deras fabrik och produktion.
Flerdimensionell analys exempel: Vi har samma fabrik som förut men nu har företagsledningen planer att bygga ut fabriken för att öka produktionen och

vill nu veta det **optimala** antalet arbetare och arbetsyta. De vi vet att en arbetare endast kan utföra ett visst arbete per dag. En arbetare producerar ett visst antal produkter per dag och detta beror på hur lång sträcka det är mellan maskinerna som arbetaren måste använda.
Det finns vissa villkor för att vi ska kunna optimera något.

- Ha ett ändligt definierat intervall [a,b] att undersöka funktionen på. (kompakt D_f).
- Funktionen f är kontinuerlig i intervallet [a,b]

Hur optimerar vi något?
Jo, I alla fall kommer vi få en funktion f(x,y). Funktionen beskriver,Som alltid, någon form av samband. Sen hittar vi den optimala lösningen genom att hitta alla stationära punkter för funktionen i intervallet som angivits. Sen jämför vi de olika stationära punkternas värden och väljer det värde som best passar vad vi eftersöker! Tyvärr så är det ju inte slut här eftersom vi måste komma ihåg att vi jobbar i rummet och planet som är vår funktionsyta kan vara lägre respektive högre i hörnpunkterna och randpunkterna i intervallet. Det betyder att vi nu måste testa om det värdet som vi är ute efter fortfarande är det högsta respektive lägsta för hela funktionsytan och inte bara de stationära punkterna. Detta gör vi genom att jämföra med randpunkterna och hörnpunkterna. Om vår sationära punkt fortfarande är det högsta/lägsta så har vi vårat svar, annars har vi en randpunkt eller hörnpunkt som högsta/lägsta värde.
Ex. Vi vill hitta den lokala minimipunkten i intervallet $(x, y); 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.

$$f(x, y) = 3x^2 + 3xy + y^2 + Y^3$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x = 6x + 3y = 0 \\ f'_y = 3x + 2y + 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{eller} \begin{cases} x = \frac{1}{12} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Då har vi hittat två stationära punkter! Vi vill nu hitta den lokala minimipunkten. Vi testar karaktären på punkten enligt funktionen $AC - B^2$:

$$\begin{cases} A = f''_{xx} = 6 \\ B = f''_{xy} = 3 \\ C = f''_{yy} = 2 + 6y \end{cases}$$

Vi placerar de x och y vi fick i skalärerna ovan.

$$(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} A = 6 \\ B = 3 \\ C = 2 \end{cases} \leftrightarrow AC - B^2 = 6 * 2 - 3^2 = 3$$

Vi ser nu att vi fått en minimipunkt! Vi fortsätter med att testa nästa stationära punkt!

$$(x, y) = (\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}) \begin{cases} A = 6 \\ B = 3 \\ C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow AC - B^2 = 6 * 1 - 9 = -3$$

Vi ser att vi har fått en sadelpunkt och därför är den inte intressant. Då ska vi se vad rändernas minsta punkter är: Vi har fyra räder i intervallet, ångrar att jag drog just detta intervallet ur hatten.... Dessa är:

$$f(x,0), f(x,2), f(0,y) \text{ och } f(2,y)$$

Nu måste vi leta upp deras högsta respektive lägsta värde i intervallet. Eftersom dessa endast beror på en variabel så löser vi det precis som i endimen:

$$\begin{aligned} f'(x,0) = 0 &\Rightarrow x = 0 \\ f'(x,2) = 0 &\Rightarrow x = -1 \\ f'(0,y) = 0 &\Rightarrow y = \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = -\frac{2}{3} \end{cases} \\ f'(-2,y) = 0 &\Rightarrow \text{Ej reellt värde} \end{aligned}$$

Nu testar vi alla dessa värden i vår ursprungliga ekvation.. och letar efter det minsta!

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f(-1,2) &= 9 \\ f(0,-\frac{2}{3}) &= \frac{4}{9} - \frac{8}{27} \end{aligned}$$

Alltså vår punkt (0,0) är fortfarande vår minsta punkt. Den råkar också vara en randpunkt men eftersom vårt intervall är kompakt så ingår randen i D_f.
Nu ska vi kolla hörn punkterna: $f(0,0), f(0,2), f(2,0), f(2,2),$.

$$\begin{aligned} f(0,2) &= 12 \\ f(2,0) &= 12 \\ f(2,2) &= 36 \end{aligned}$$

Ta da eller något! Vi har nu bevisat att det minsta värdet i intervallet finns i $f(0,0) = 0$!

6.1 Optimering på icke-kompakt D_f

"From bad to worse!" Vi ska nu göra det jobbigare för oss! Skillnaden mellan en kompakt och en icke-kompakt D_f är att randen på ekvationen inte nödvändigtvis är en del av funktionens V_f och funktionsvariablerna kan $\rightarrow \infty, -\infty$..
Hur tacklar vi de här problemen?
Jo, vi ska begränsa D_f sådan att vi kan använda samma metod som i exemplet med optimering med kompakt D_f. Sen får vi försöka resonera oss fram till funktionens V_f.
Ex. Bestämm funktionens största och minsta värde :
(Insert example!)

6.2 optimering med bivilkor

Tänker tillbaka till när jag var mindre och sa att matte var roligt och skrattar åt hur underbart naiv jag var..
Välkommen till optimering nivå 3! Här ska vi optimera en funktion med givna villkor!
Vad är ett bivilkor då?
Det är när en funktion f begränsas av en funktion g(x,y) = en konstant.
Ex.

$$\begin{cases} f(x,y) = (2x+3y+1)^2 \\ g(x,y) = x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

WOHO! Vi ska nu sätta upp en jacobian! Varför? Jo för vi vill ta reda på när f är störst på funktionen g. Detta sker när gradienten för f och g är båda lika med noll. hur sätter vi upp detta då? så här:

$$\begin{vmatrix} f' \\ g' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4(2x+3y+1) & 6(2x+3y+1) \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0$$

NOTE!Extremt viktigt att vår funktion f är den **FÖRSTA** radvektorn.
Nu när vi fått reda på med vilken funktion som f och g är parallella. (jacobianen). Men nu vill vi ju veta när funktionen f —— g är som störst på funktionen g så sätter vi upp det här ekvationssystemet:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 4(2x+3y+1) & 6(2x+3y+1) \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0 = (2x+3y+1)(8y-12x) = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Note!!!: jacobianen har ju resulterat i två funktioner som ger ett nollställe. så vi kan bryta upp ekvationssystemet så här:

$$\begin{cases} (8y-12x) = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x+3y+1) = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Vi kollar det andra ekvationssystemet: Jobbig ekvation eftersom det har en konstant i sig vi måste jobba med och kan inte sätta in i funktionen g(x,y) och lösa ut värdet på x,y. Men vi ser att funktionen f är = 0 i den punkten eftersom $2x+3y+1 = 0$ och $f(x,y) = (2x+3y+1)^2 =$ ¿ Båda dess värden är 0 när skär g(x,y).
Det första ekvationssystemet så löser vi ut x=y eller liknande och sätter in i g(x,y) för att sen få ut värdet på x,y att använda i funktionen f(x,y).

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ x^2+(\frac{3}{2}x)^2 = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x = \pm\frac{3}{\sqrt{13}} \\ x = \pm\frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

insättning i f(x,y) $\to f(x,y) = (\sqrt{13}+1)^2$ och $f(x,y) = (\sqrt{13}-1)^2$ Vi ser snabbt att $(\sqrt{13}+1)^2$ är det största värdet som funktionen f ger på funktionen g och det minsta är 0(enligt resonemanget ovan!).

7 Integraler

7.1 dubbel integraler

Vad är en dubbel integral?
Det är en integral med två variabler. I endimensionell analys gick vi igenom integraler för en variabel: $\int_a^b f(x)dx$.
En dubbel integral är en

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \iint_D f(x,y)$$

Så hur funkar det?
Det är exakt som i Endimen: $\int_0^1 f(x)dx = \left|F(x)\right|_0^1 = F(1) - F(0)$.
Det som skiljer sig åt är att vi måste göra detta två gånger och på olika variabler.
Så hur löser vi en dubbel integral?
Vi har funktionen $f(x,y) = xy + y^2$ och vi ska ta reda på volymen av området $x, y : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

$$\iint_D f(x,y)$$

Vi börjar med att räkna ut en av integralerna $int_0 1 f(x,y)dy$ eller $int_0 1 f(x,y)dy$ Det går lika bra att räkna ut vilken som men hett tips är att vara smart när du väljer vilken funktion du ska räkna ut först. Men i detta fallet så väljer jag att räkna ut integralen av f(x,y) med avseende på x först!

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 xy + y^2 dx\right) dy = \int_0^1 \left(F(1) - F(0) = y/2 + y^2\right) dy = \int_0^1 y/2 + y^2 = \frac{7}{12}$$

Note! Det svåraste i de här uppgifterna är oftast inte att räkna ut integralerna utan att göra detta mellan rätt värden. Oftast så begränsas den rektangulära funktionen av en annan funktion. vilket ändrar intervallet där funktionen ska (itterera? integrera? Räkna ut integralen för f(x,y) över).

7.2 trippel integraler

För att beräkna totala massan av en tredimensionell kropp där masstätheten varierar i kroppen, beskriven av en funktion f(x, y, z) av tre variabler, behöver vi summera bidragen över tre dimensioner — inte bara två (dubbelintegral) eller en (enkelintegral), som tidigare. Det är en tillämpning av en trippelintegral. En trippelintegral kan alltså beteckna masstätheten i en tredimensionell kropp. En dubbel integral visar volymen av ett område och en trippel integral visar massan av ett område. Vi räknar ut en trippel integral preccis som en dubbel integral fast med ytterliggare en variabel. Ex:

8 masscentrum

Masscentrum är den punkt där objektet är i jämnvikt. Tänk er en gungbräda; den balanserar på en rotationspunkt och ifall vår gungbräda inte får något vridmoment och förblir stilla så har vi hittat masscentrumet på gungbrädan. Masscentrumet är alltså den punkt där en rotationspunkt kan placeras och förbli stilla.

Masscentrumet är precis en punkt (x,y,z). För att hitta punkten så måste vi ta reda på när de tre linjerna x,y,z korsar varandra. För att ta reda på linjerna så använder vi oss av denna formeln:

$$x_p = \frac{1}{m} \iiint_K x * f(x, y, z) dxdydz.$$

Note! Detta är hur du hittar linjen för x, x_p. Denna formel måste upprepas för varje variabel. När vi fått fram alla variablers masscentrum så kan vi beskriva kroppens masscentrum. m är massan av kroppen som beskrivs av f(x,y,z). $m = \iiint_k f(x, y, z) dxdydz$.
Ex:

9 tröghetsmoment

Tröghetsmoment är ett fantastiskt kasst namn på vad vi letar efter.. Eftersom vi vill veta med vilken rotationsenergi kroppen har när den roterar kring en given rotations-axel. Hur göra detta då?
Jo vi har funktionen och dess begränsningar mm. Om vi kommer ihåg fysiken på gymnasiet så vet vi att $E_k = \frac{m*v^2}{2}$. Vi kan konstatera att varje punkt rör sig med en hastighet som beror på punktens avstånd från rotationsaxeln och vinkelhastigheten. ($v = \omega l$). och massan dm får vi genom att att räkna ut trippelintegralen för funktionen. Med dessa variabler och samband kan vi nu beskriva objektets totala rörelseenergi.

$$\iiint \frac{(\omega l)^2}{2} f(x, y, z) dxdydz = \frac{\omega^2}{2} \iiint l^2 f(x, y, z) dxdydz.$$

Nu ska vi gå igenom det GANSKA viktiga i den här formeln: Hur beskriver jag längden för varjepunkt?
Nu ska vi applicera lite linjäralgebra igen. I linjär algebra så har vi lärt oss att avståndsformeln ser ut så här: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Om vi nu får reda på vilken linje som är vår rotationsaxel så kan vi beskria avståndet för kroppen till rotationsaxeln som $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - y_0)^2}$. Oftast roterar vi kring en av basvektorerna så då ser funktionen ut så här: $\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - z)^2}$. i exemplet så roterar vi kring z-vektorn. Ex:

10 Kurvlängd och kurvintegraler

10.1 kurvlägnd

EXTREMT konstigt ord: kurvlägnd.. On a compleatly other note:
När vi ska räkna ut kurvlägnden för en funktion så vill vi veta hur lång linjen som funktionen utgör är på ett intervall [a,b]. Det vi nu ska göra är att summera sträckan mellan alla punkter på linjen. Detta gör vi genom att summera funktionens riktningsvektorer. $f_x(x,y)$, $x'(t)$, och $f_y(x,y)$, $x'(t)$. sen för att beräkna avståndet så har vi avståndsformeln från linjäralgebra: $\sqrt{x^2+y^2}$. Allt detta ger oss formeln:

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

10.2 Kurvintegral

"En kurvintegral är en integral för vilken evalueringen av integranden sker längs en kurva."
Efter den grekiskan så översätter vi det till svenska:
Det är ett sätt att betrakta en funktion utifrån en angiven kurva. Detta är ett bra verktyg i vektor analys. Det används för att betrakta hur ett vektorfält påverkar ett objekt. Men för oss som inte pluggar fysik eller teknisk mattematik så är detta totalt onödigt till allt förutom tentan.
Vi ger oss på ett exempel:

$$\int_\gamma -ydx + xdy, \quad \gamma = x^2 + y^2 = 4$$

Vi ska beräkna kurvintegralen som beskrivs ovan mellan (0,2) och (2,0). Vi börjar med att göra ett snyggt variabel byte:

$$\int_\gamma -ydx{+}xdy : \begin{cases} x = 2\cos t & \frac{d}{dx} = -2sint \\ y = 2\sin t & \frac{d}{dy} = 2cost \end{cases} \quad \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2sint{*}{-}2sint{+}2cost{*}2costdt$$

och sen löser vi ut funktionen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4dt = \big(4t\big)_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi$$

Note!!Det går att dela upp en kurvintegral längs en linje sådant att: $\int_\gamma f(t)dt = \int_{\gamma_1} f(t)dt + \int_{\gamma_2} f(t)dt$

11 Greens sats

Greens formel är en formel som beskriver en relation mellan en kurvintegral runt en sluten kurva och en dubbel integral över ett område med kurvintegralen

som rand.
Sambandet ser ut såhär:

$$\oint_{\delta D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y}\right)$$

Varför är detta användbart?
Jo för ifall vi ställs inför ett problem att räkna ut integralen över randen till en funktion så är , oftast, dubbel integralen lättare att räkna ut. Ett exempel på detta är:
Vi har en funktion $\gamma = x^2 + 4y^2 = 1$ och vi vill få reda på vad kurvintegralen $\oint_\gamma y^2dx + xdy$ är.
Vi börjar med att konstatera att funktionen γ uppfyller kravet att den är en sluten kurva(Uppenbart då det är en elips). Sen så skriver vi om funktionen med hjälp av greens sats:

$$\oint_\gamma y^2dx + xdy = \iint_D 1 - 2y \quad dxdy$$

Nu gör vi ett variabel byte för att beskriva funktionen i polär form:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = \frac{1}{2}r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin\theta & r\frac{1}{2}\cos\theta \end{vmatrix} = r\frac{1}{2}$$

Ok, det vi gjorde ovan är ett variabel byte som resulterar i den här dubbel integralen:

$$\iint_D (1 - r\sin\theta)\frac{1}{2}r \quad d\theta dr$$

Nu är vi klar med magin och ska bara börja räkna!

$$\iint_D (1 - r\sin\theta)\frac{1}{2}r \quad d\theta dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\sin\theta\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}(\pi - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{\pi}{2}$$

12 Potentialfält

Ett potentialfält är ett vektorfält som är vägoberoende[1].
Vi har ett vektorfält $\overrightarrow{F}$=(P,Q) i ett definierat område γ. Vektorfältet (P,Q) är ett potentialfält om det finns en funktion,F, sådan att Grad(F) = (P,Q).
Grad(F) = $(\frac{dF}{dX}, \frac{dF}{dy}) = (P, Q)$ Om vi har en funktion ω som är en kurva med en start och slutpunkt i området γ. Detta ger oss att:

$$\int_\omega Pdx + Qdy = F(x2, y2) - F(x1, y2).$$

[1]Ett vektorfält där det inte spelar någon roll ifall vi rör oss medurs eller moturs

Bevis:
Eftersom vi har funktionen F som ger oss Grad(F)=(P,Q) så kan vi skriva om integralen som:

$$\int_{\omega} Pdx + Qdy = \int_{\omega} \frac{dF}{dx} * \frac{dx}{dt} + \frac{dF}{dy} * \frac{dy}{dt} dt$$

Nu ser vi att vi har kedjeregeln skriven i den andra integralen vilket gör att vi får primitiva funktionen till:

$$\int_{\omega} \frac{dF}{dx} * \frac{dx}{dt} + \frac{dF}{dy} * \frac{dy}{dt} dt = \left|F\right|_a^b = F(b) - F(a)$$

13 Ordlista

13.1 Mängder

Öppen - en mängd som inte innehåller några punkter på sin rand, dvs. den kurva eller yta som begränsar mängden är inte själv en del av mängden.
Begränsad - mängd där det finns ett största avstånd mellan elementen i mängden som är ändligt.
Sluten - mängd i sådan att alla dess randpunkter tillhör mängden självt.
kompakt - En mängd som är sluten och begränsad!