FMA420 - Linjär algebra

Måns Ansgariusson, C14

2016-06-26

1 Ekvationssystem

Ett ekvationssystem är en mängd av ekvationer av flera variabler. Lösningarna till ekvationssystemet är alla uppsättningar av värden av variablerna som satisfierar alla ekvationer i systemet. Detta medför att det går att lösa med hjälp av Gauss elimination.

1.1 Gauss elimination

Gauss elimination är ett sätt att lösa ekvationer som: $\mathsf{AX} = \mathsf{Y}$
I en AX = Y ekvation så finns det tre olika alternativ till lösningar:
1. Ingen lösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ x - y - z = 12 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

2. En entydiglösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

3. oändligt många lösningar till ekvationssystemet.

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \quad t \in R \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Nu till den stora frågan: Hur löser jag ett ett ekvationssystem?
Jo, ekvationerna i ett ekvationssystem är som jag skrev ovanför beroende av samma variabler därför kan du använda en ekvation för att reducera eller addera en annan.
Ex.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 5 \\ 4x - 2z = 10 \end{cases} => \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -y - 3z = -1 = \text{(2x + y -z) - 2(x + y + z) = 5 - 2(3)} \\ -4y - 6z = -2 = \text{(4x - 2z) - 4(x + y + z) = 10 - 4(3)} \end{cases}$$

Det som händer ovan är att jag använder en ekvation för att få bort 2 av 3 x-variabler. Sen fortsätter du på samma sätt med y för att få z ensamt och sen med hjälp av z så löser du ut alla andra variabler.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -y - 3z = -1 \\ 6z = 2 \end{cases} => \begin{cases} x = 2 + 2/3 \\ y = 0 \\ z = 1/3 \end{cases}$$

När man gjort succsesive gausseeliminering så har man ett ekvationsystem som kan liknas vid en trappa. i slutet på varje ”trappsteg” så finns ett **pivott element**.
NOTE!
Det går inte lösa ekvationssystem med fler okända än rader i ekvationssystemet.
Ex.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$$

2 Skalärer och vektorer

En skalär är ett tal. Något vi använder för att definiera en storhet.
En vektor är en skalär med en **riktning**. lägnden mellan två punkter i ett kordinatsystem är en skalär medans linjen som skapas mellan punkterna är en vektor.

2.1 Räkna med Vektorer

Nedan följer räknereglerna för vektorer:
Vektorer: u,v
u + u = 2u
u + v = v + u
u * -1 = -u
u + 0 = u

2.2 Räkna med skalärer

$$u * v = \begin{cases} |u| * |v| \cos[u, v] \\ 0 \end{cases}$$

cos [u,v] är den **minsta** vinkeln mellan vektorerna. ifall cos[u,v] = 0 så är vektorerna u och v **Ortogonala**. Det vill säga vinkelräta mot varandra!

2.2.1 Projektionsformeln

Projektionsformeln används för att ”projecera” en vektor på en annan. Det detta betyder är att vi tar en komposant av den godtyckliga vektorn u och jämför den med vektorn v. Vi får ut hur ”lång” vektor u’s komposant vektor är i förhållande till vektor v.

$$u' = \frac{u * v}{|v|^2} * v$$

Detta används till spelning och för att räkna ut avståndet exempelvis en punkt till ett plan eller linje. **EXTREMT** användbar formel!

3 baser N' stuff

3.1 baser

En bas utgörs av två eller flera vektorer som alla är linjärtoberoende av varandra.
En ortonormerad bas är en bas som är ortogonal och vars basvektorer är av längden 1.
Koordinater i en bas brukar skrivas som (x1,x2,x3.... osv) men det ser snarare ut så här (x1 * e1,x2 * e2, x3 * e3... osv). En skalär x1 och en basvektor e1 bildar tillsammans en komposant.

3.2 basbyten

Om vi har en bas e1,e2 i planet (enhetscirkeln och x,y axlarna). Så är x och y axeln basen i koordinatsystem men man kan även skapa egna baser. Frågan är vad en koordinat är i xy-basen och vad samma koordinat är i din egna bas. För att ta reda på det måste du ställa upp sambandet mellan koordinaterna i ett ekvationssystem. Ex. Jag hittar på en bas av någon anledning som är gjord av två olika vektorer: U1 = 2x + y, U2 = x + 2y.
Vektorerna v1,v2,v3.... , vn sägs utgöra en bas i rummet ifall de inte är linjärkombination av varandra.

$$\begin{cases} U1 = 2x + y \\ U2 = x + 2y \end{cases}$$

Det ovan är en uppställning på hur min påhittade bas förhåller sig till den ursprungliga basen som i detta fallet är xy-basen. Efter Gausselimination så får vi ut det omvända sambandet. Alltså hur xy-basen förhåller sig till min påhittade bas. Sen använder man koordinaterna man har fått i uppgiften för att få ut de nya i ekvationssystemet.

4 Linjärt beroende

Vektorerna U,v,z sägs vara linjärt beroende om någon av dom är en linjärkombination av de andra.
En linjärkombination är

$$\lambda u = v$$

Då är vektor v linjärt beroende av u.

4.0.1 Bassatsen

Om två vektorer är linjärtberoende är de Parallela
Om tre vektorer är linjärtberoende ligger de i ett plan.

Fler än två vektorer i planet är alltid linjärtberoende, fler än tre vektorer i rummet är alltid linjärt beroende.

Kan inte sammanfatta det bättre än boken... se s.34!

5 plan och Linjer

Affin form Affin form är ett sätt att beskriva en linje eller ett plan. Det ser ut så här:

$$Ax + By + Cz + m = 0$$

A,B,C kan inte var 0 samtidigt.

Parameterform Parameterform är ett annat sätt att beskriva en linje eller ett plan. Det ser ut så här:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$$

5.0.1 Från Parameterform till Affin form

För att gå från parameterform till affin form så löser du ut ekvationssystemet så att högersidan på en av ekvationerna blir 0. Ex.

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - t \end{cases} => \begin{cases} x - 3 = t \\ y - 1 = t \end{cases}$$

$$x - 3 = y - 1$$
$$x - y - 2 = 0 / Done$$

5.1 plan

Ett plan har en oändlig . För att identifiera ett plan måste vi veta en punkt på planet och två riktningsvektorer som är parallella med planet. Ett plan har en **Normalvektor** det är en ortogonal riktningsvektor för planet.
hur hittar man en normalvektor då?
jo om du skriver planets ekvation på affin form:

$$Ax + By + Cz + m = 0$$

Så är Normalvektorn n = (A, B, C).

5.2 linje

En linje är oändligt lång och har en riktning. Den beskrivs av en punkt på linjen och riktningsvektorn för linjen.

5.2.1 Tyngdpunktsformeln

Tyngdpunktsformeln används för att ta reda på vart masscentrum är i ett plan. Under ser ni ekvationen för att hitta masscentrum i ett objekt med hörnen i A,B,C. O är en godtycklig punkt i koordinatsystemet, men ett hett tips är att sätta **Origo** som den godtyckliga punkten för att underlätta räkningen och för att minska risken för slarvfel i ekvationen!

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

5.3 Ortonomerad bas

En Ortonomerad bas är en bas, alltså att alla basvektorer är ortogonala #vinkelräta mot varandra, och basvektorerna har längden 1.

om man behöver göra ett basbyte mellan två ortonormeradebaser så kan man göra som tidigare beskrivit eller ta en genväg som ser ut så här:

$$\text{Från: } \begin{cases} e1 = 4/5x - 3/5y \\ e2 = 3/5x + 4/5y \end{cases}$$

5.4 Avståndsformeln

Avståndsformeln används föga förvånande för att få reda på avståndet mellan två punkter i ett koordinatsystem.

$$|d| = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2 + (z1 - z2)^2}$$

5.5 vinkelbestämning

För att bestämma vinkeln mellan två vektorer så har vi det här sambandet:

$$u * v = |u| * |v| \cos[u, v]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\cos[u, v] = \frac{u * v}{|u| * |v|}$$

5.6 speglingar

Med hjälp av projektionsformeln så kan vi spegla en linje på ett plan.
Spegling - Att leta upp en punkt eller sträcka som är angiven på motsatta sidan av ett plan eller linje.
hur göra detta?
Vi har en punkt, Q, (5 , 8) i xy-basen. Vi har ett plan 2x + 3y = 0.

punkten och vektorn $\overrightarrow{OQ}$

ser lika dan ut för om vi använder origo som den godtyckliga punkten så blir vektorn

$$\overrightarrow{OQ} = (5, 8) - (0, 0) = (5, 8).$$

Nu när vi har vår vektor så ska vi projicera den på normalvektorn för att få reda på punkten där vektorn mellan vektorn och planet. sen för att hitta punkten på andra sidan så gör vi vektorn mellan vektorn och planet dubbelt så stor. Då kommer vi komma till den den speglade punkten, V!

$$\overrightarrow{OQ} - 2\frac{\overrightarrow{OQ} * \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|^2} * \overrightarrow{n} = \overrightarrow{OV}$$

6 Area

Arean av ett parallellogram är kryssprodukten av två vektorer!
punkterna a,b och c är punkterna i hörnen av ett parallellogram.

$$|\overrightarrow{ab} X \overrightarrow{ac}| = A$$

Arean av en triangel är hälften av parallellogramet.

7 Matriser

En matris är ett rektangulärt schema av tal. En matris har rader och kolonner. En rad är ,precis som i en bok, vågrät och en kolon, annat ord för pelare ich, är lodrät. En matris har rader * kolonner matriselement.
Matris multiplikation kan vara krångliga pga att man blandar ihop vilket matriselement som ska multipliceras med vilket och vart produkten ska vara. Rad X kolumn = produkt. produkten av operationen kommer alltid hamna på samma rad som raden i operationen och samma kolumn som du använde i operationen. Ett försök att förklara bättre har vi ett exempel nedan:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a*g+b*i+c*k & a*h+b*j+c*i \\ d*g+e*i+f*k & d*h+e*j+f*l \end{pmatrix}$$

Note! Alla matriser kan inte multipliceras med varandra. Matris A ska ha lika många kolonner som Matris B har rader – då blir de multiplikationskompatibla.
NOTE!! Matris multiplikation skiljer sig mot vanlig multiplikation på ytterligare ett väldigt viktigt plan.

$$AX = Y$$
$$A \neq \frac{Y}{X}$$

och framförallt!!!!

$$AX = Y$$
$$XA \neq Y$$

Finns special fall där AX = XA

Det spelar roll hur du multiplicerar en matris!
För att göra en räkneoperation som uppenbarligen inte funkar enligt reglerna beskrivna ovan så måste man använda en **Invers matris**.

7.1 Transponering

Att transponera en matris betyder att du förvandlar en m X n matris till en n x m. Alltså att ändra en matris sådan att dess rader blir kolumner och att matrisens huvuddiagonal förblir den samma. Man kan säga att det sker en spegling i huvuddiagonalen på en matris.
Om en matris är lika med sin transponerade version av sig själv så sägs matrisen vara symmetrisk.
Räkneoperationer:

$$\begin{aligned}(A^T)^T &= A\\ (A+B)^T &= A^T + B^T\\ (\lambda A)^T &= \lambda A^T\\ (AB)^T &= B^T A^T\end{aligned}$$

7.2 Linjära ekvationssystem och matriser

Matriser och ekvationssystem kan användas tillsammans för att lösa vissa problem.
AX = Y är en vanlig uppställning av ett problem. Det är en definierad matris A och en matris X med variabler som ger en viss utkom Y.

$$A * \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ osv.. \end{pmatrix} = Y$$

kan också skrivas som:

$$\begin{cases} ax1 + bx2 + cx3..osv = y1 \\ dx1 + ex2 + fx3..osv = y2 \\ gx1 + hx2 + ix3..osv = y3 \\ osv... \end{cases}$$

ovan är alltså en matrismultiplikation mellan AX och ett definierat värde på Y.

7.3 Inversmatris

inversmatriser var lösningen på problemet med matrismultiplikation. **Räkneregler:**

$$\begin{aligned}AX = Y <=> X &= A^{-1}Y\\ A * A^{-1} &= I\end{aligned}$$

I är identitetsmatrisen vilket är en matris med endast 1 or i diagonalen och nollor som alla andra matriselement. Ex: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Hur hittar man inversen till en matris? Det finns två sätt:
1. ekvationssystem och gausselimination.
2. med hjälp av Determinanten och adjunkten. (kommer till detta sen).

Ex.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} <=> \begin{cases} 2x + 3y = z1 \\ x + 2y = z2 \end{cases} <=> \begin{cases} x = 2z_1 - 3z_2 \\ y = -z_1 + 2z_2 \end{cases} <=> \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

7.4 ortogonal matris

En ortogonal matris är en matris vars kolonner utgör en ortonormerad bas. Om en matris är ortogonal så utgör rad och kolonvektorerna en bas.

7.5 rang och nolldimension

AX = Y är den ständigt återkommande formeln i den här kursen..

$$X_a = X_h + X_p$$

Allmänna lösningen är partikulärlösningen plus den homogenalösningen. Den partikulära lösningen fås av AX=Y och den homogena fås av AX=0.
Rang är hur många kolonnvektorer som är linjärt oberoende i ekvationssystemet. (hur många pivotelement som finns i ekvationssystemet efter gausseliminering). Nolldimentionen är det maximala antalet linjärtoberoende lösningar till AX = 0. rang + nolldim = antal variabler!

Ex.
Hitta Rang, Nolldimentionen och bestäm en bas för nollrummet för Matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 14 & 8 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Vi börjar med att ställa upp ekvationen vi ska lösa:

$$AX = 0$$

X matrisen är en godtycklig variabel matris som oftast ser ut så här men det kvittar hur ni ritar upp den så länge den följer matrismultiplikationsreglerna.

$$X = \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \end{pmatrix}$$

Efter matrismultiplikationen mellan A och X matriserna att:

$$\begin{cases} x1 + 2x2 + 5x3 + 3x4 = 0 \\ 2x1 + 6x2 + 14x3 + 8x4 = 0 \\ 3x1 + 0x2 + 3x3 + 4x4 = 0 \end{cases}$$

Detta för att Vi har satt AX = Y,Y = 0.
Efter en gausselimination av systemet så får vi :

$$\begin{cases} x1 + 2x2 + 5x3 + 3x4 = 0 \\ 0x1 + 2x2 + 4x3 + 2x4 = 0 \\ 0x1 + 0x2 + 0x3 + x4 = 0 \end{cases}$$

Nu ser vi att vi har 3 pivottelement. Det vill säga att Rangen är 3. Enligt sambandet som beskrevs förut så har vi 4 variabler = Rangen (3) + Nolldimentionen. Nolldimentionen är alltså 1.
Hur hittar vi basen för nollrummet då?
Det vi måste göra nu är att lösa ut variablerna i ekvationssystemet. Vi sätter x3 = t för att kunna fortsätta lösa ut ekvationssystemet och då får vi att:

$$\begin{cases} x1 = -t \\ x2 = -2t \\ x3 = t \\ x4 = 0 \end{cases}$$

basen till nollrummet är alltså:

$$\begin{pmatrix} -1, & -2, & 1, & 0 \end{pmatrix}$$

Vad är basen för kolonrummet då?
jo, det är de kolonner som har ett pivottelement i sig efter en gaussning av systemet. Det vill säga kolonn 1, 2 och 4 räknat från vänster.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}^T och \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}^T$$

8 linjäravbildning

Linjäravbildning är ett nytt sätt att säga funktion på. EN linjäravbildning är en funktion som med angivna x blir y.

8.1 projektionsmatris

Vad är en projektionsmatris?
Det är en matris som projecerar vektorer på en linje. Det som skiljer en projektionsmatris från att göra projektionsformeln är att en projektionsmatris kan

användas till att projicera vilken vektor som helst på linjen medan projektionsformeln måste upprepas för varje nytt fall.

En projektion kan som allt annat i den här kursen beskrivas som AX = Y. Där A är projektionsmatrisen, X är vektorn och Y är X-vektorn projicerad på Linjen.
Hur tar man reda på Projektionsmatrisen A ?
Saker vi måste veta: Linjens riktningsvektor
Vi använder projektionsformeln för att projeicera. En godtycklig x vektor på linjens riktningsvektor r.

$$Y = \frac{(x1, x2, x3) * (r1, r2, r3)}{|(r1, r2, r3)|^2} * (r1, r2, r3)$$

Nu måste vi göra om denna till en matris och bryta ut x-vektorn.

$$Y = \frac{(x1 * r1 + x2 * r2 + x3 * r3)}{|(r1, r2, r3)|^2} * (r1, r2, r3) => \frac{1}{|r1, r2, r3|^2} * \big(x1 * r1 + x2 * r2 + x3 * r3\big) \begin{pmatrix} r1 \\ r2 \\ r3 \end{pmatrix} =>$$

$$\frac{1}{|(r1, r2, r3)|^2} * \begin{pmatrix} r1(x1 * r1 + x2 * r2 + x3 * r3) \\ r2(x1 * r1 + x2 * r2 + x3 * r3) \\ r3(x1 * r1 + x2 * r2 + x3 * r3) \end{pmatrix} => \frac{1}{|(r1, r2, r3)|^2} * \begin{pmatrix} r1^2 + r1 * r2 + r1 * r3 \\ r2 * r1 + r2^2 + r2 * r3 \\ r3 * r1 + r3 * r2 + r3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = Y$$

då är projektionsmatrisen klar! Detta är ett generellt fall och kan appliceras på alla linjer i den 3 dimensionen.

8.2 Linearitetsegenskapen

”Bilden av en summa r lika med summan av bilderna och bilden av λ -multipeln av x är lika med λ multipeln av bilden x.” - Wow shit tack för den math! jk.. detta är förmodligen den sämsta beskrivningen för att förklara att en linjäravbildning är just LINJÄR! Det kvittar alltså ifall du multiplicerar X innan eller efter matrismultiplikationen med projektionsmatrisen. Alltså:

$$F(x1 + x2) = F(x1) + F(x2)$$
$$F(\lambda x) = \lambda F(X)$$

x1 och x2 tillhör de reella talen.

NOTE!
Under kursen så kommer ni vara tvungna att testa detta ifall en funktion är linjär. Då gör ni det genom att testa mot definitionen ovan!

8.3 Rotationsmatris

Rotationsmatrisen ser ut så här:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Note!!
Rotationsmatrisen är ortogonal!

9 basbytesmatris

$$X' = SX <=> S^{-1}X' = X$$

S är basbytesbatrisen och X är koordinaterna i en bas. För att hitta den andra basbytesmatrisen så använder du denna formeln:

$$A' = S^{-1}AS$$

Ex.

$$\begin{cases} a_1 = 2e_1 - e_2 \\ a_2 = e_1 + e_2 \end{cases}$$

Det vi ser ovan är förhållandet mellan baserna a_1, a_2 och e_1,e_2. Då har vi det här förhållandet:

$$E' = SE$$

För att nu ta reda på vad vektorn (1,2) i E' basen är i E basen så får vi använda oss av det här sambandet:

$$X'^t E' = X'^t SE$$

Det ser ut så här i exemplet beskrivit

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nu kommer lite magi: vi tar bort E och E' från ekvationen då E och E' endast talar om vilken bas vi är i eftersom de är som en identitetsmatris. Detta ger oss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}_{Basa1,a2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}_{base1,e2}$$

10 Determinanten

Determinanten är ett tal som är baserat på en matris som berättar bland annat om en matris kolonvektorer är linjärtoberoende eller inte.
Hur hittar man determinanten till en matris då?
jo, det finns två sätt:
1. gauss eliminering
2. kofaktorutveckling
3. specialfall för 2x2 matriser
Gauss eliminering är,oftast, extremt mycket enklare än kofaktorsutvekling, men det är såklart totalt individuellt. Vi kan börja med det enklaste: specialfall för

2x2 matriser:

$$detA = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Inte mycket att förklara.. Moveing on..
Gauss eliminering:
ok vi ansätter att ekvationssystemet är = 0. Det låter oss gaussa systemet. När det är gaussat så multiplicerar vi diagonalen så har vi fått reda på matrisens determinant!

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ Gauss eliminering till trappformation ger oss $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{77}{3} \end{vmatrix}$ multiplicera diagonalen:$1*3*\dfrac{77}{3} = 77.$

Note!
Man får inte förlänga eller förkorta en rad med en skalär, det får bara ske i samband med addition av en annan rad.
Nu kommer vi till hur man hittar determinanten med hjälp av kofaktorutveckling:
Ok! Ett lite krångligare sätt men fine let's do it!

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Note!!
Det spelar ingen roll vilken rad eller kolon du väljer att följa! Som ni ser i exemplet så valde jag rad 1 men det spelar ingen som helst roll. I vissa fall så är det fördelaktigt att välja en rad eller kolon som har en eller flera nollor i sig så slipper du determinant uträkning!

Det spelar ingen roll om du transponerar determinanten efter som det inte spelar någon roll vilken rad eller kolon du väljer så kommer determinanten förbli den samma.

$$detA = detA^T$$

10.1 Volymsatsen

$$detA * V(e1, e2, e3) = V(a, b, c)$$

Det grekiskan ovan betyder:
Determinanten av (a,b,c) * Volymen av basen som vektorerna a,b,c är i = Volymen av tetreder med vektorerna a,b,c i hörnen av tetredern.
En följdsats av det här är att ifall Volymen av e1,e2,e3 $\neq 0$ så utgör de en bas! $\rightarrow$ vektorerna a,b,c är linjärt oberoende. $\rightarrow detA \neq 0 \leftrightarrow$ A är inverterbar.
Note!
Ifall Volymen av e1,e2,e3 = 0 så ligger figuren i ett plan. och har därför volymen

0.
Med all matten ovan kan vi konstatera att:

$$V(a, b, c) = detA$$

om vi har en ortonomeradbas. **Note!!!**
volym kan inte vara negativ så ifall du har en negativt orienterad bas så kommer determinanten vara negativ men volymen är den samma(alltså glöm minustecknet)!

10.2 adjunkt

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} * adjA$$

Nu tänker ni; Wow det här är awesome kanske slipper gausseliminera!
Ni har fel! Detta sättet att hitta A^{-1} är endast bra för 2x2 då det går snabbt men för en 3x3 så tar det lång tid och många led av uträkningar som ökar risken för en fuck up. #TruthHasBeenSpoken
2x2:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Detta gör det så enkelt att räkna ut inverser för matriser av 2x2 karaktär, det går oftast att göra med huvudräkning om man vill.
Men 3x3 matriser är jobbigare att räkna ut då adjunkten är underdeterminanterna för alla värden i matrisen A. Det betyder att du måste göra 9 uträkningar på underdeterminanterna för att hitta adjunkten för en matris A. I boken på sida 205 visar de hur du hittar tre av en matris underdeterminanter samt går igenom hur du hittar determinanten för en 3x3.

11 Huvudsatsen

"I was blind but now i see" -john 9:25
Finns inget bättre citat för att beskriva huvudsatsen. Det är vad som får de flesta att koppla samman delmomenten i den här kursen.
Huvudsatsen:

- A:s kolonnvektorer utgör en bas
- A:s radvektorer utgör en bas
- ekvatoinssystemet AX = 0 har bara den triviala lösningen X = 0
- ekvationssystemet AX = Y är lösbart för alla Y
- A är inverterbar
- linjära avbildningen med avbildningsmatrisen A är bijektiva.

- det A $\neq$ 0

Den gäller för alla kvadratiska matriser A. Alla påståenden är ekvivalenta.

	Homogena system	inhomogena system
detA = 0	Det finns icke-triviala lösningar	o eller ∞ många lösningar
detA $\neq$ 0	Det finns bara den triviala lösningen	Entydiglösning

AX = Y $\leftarrow$ inhomogen
AX = 0 $\leftarrow$ homogen

Ett exempel där detta är super användbart:
Bestäm, för varje värde på parametern a, antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + az = -4 \\ (a-2)x + 2y - 2z = a - 2 \end{cases}$$

Enligt huvudsatsen så följer det att:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & a \\ a-2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \text{2(a+1)(a-2)}$$

Enligt huvudsatsen så har ekvationssystemet en entydiglösning då $a \neq 2$ och $a \neq -1$. Eftersom om a inte är lika med 2 eller -1 så är determinanten $\neq 0$ och därför har de en entydiglösning enligt huvudsatsen. Nu måste vi ta reda på hur många lösningar som ekvationssystemet har när a = 2 och a = -1 då enligt huvudsatsen kan det inhomogena systemet ha 0 eller ∞ lösningar för ekvationssystemet.
a=2

$$\begin{cases} -x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + 2z = -4 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 2y - 3z = 2 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Här ser vi att systemet har oändligt många lösningar då 0=0.
a = -1:

$$\begin{cases} -x + 2y - 3z = 2 \\ 2x - z = -4 \\ -3x + 2y - 2z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 2y - 3z = 2 \\ 4y - 7z = 0 \\ 0 = -9 \end{cases}$$

Här ser vi att systemet saknar lösningar då 0 = -9.
Svar: ekvationssystemet har en entydiglösning för alla värden på a $\neq$ 2, -1. a =2 har oändligt många lösningar och a = -1 saknar lösningar.

12 Egenvärden och Egenvektorer

En egenvektor är en vektor som vid en matrismultiplicering med matrisen A behåller sin riktning. Alltså en vektor som projeceras på sig själv.
Ett egenvärde är det värdet vektorn förändrar sin längd med om den gör det.

$$AX = \lambda X$$

kan också skrivas som:

$$F(X) = \lambda X$$

12.1 Egenvärde

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Egenvärdet, λ är multipeln som beskriver förändringen i längd på egenvektorn X.
Egenvärdet får du ut genom att använda det karakteristiska polynomet, formeln ovan.

ex.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 9 & 5 \\ 1 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow (\lambda - 9)(\lambda - 5) - (5) = 0 \leftrightarrow$$

$$\lambda = 7 \pm \sqrt{49 - 40}$$

$\lambda_1 = 10$
$\lambda_2 = 4$

12.2 Egenvektor

Ovan så ser vi att vi har två egenvärden till projektionsmatrisen A. Egenvektorn ska vara skild från nollvektorn. Vi använder egenvärdena i ekvationen för att lösa ut egenvektorerna. $\lambda_1 = 10$: (10I - A)X = 0

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x1 - 5x2 = 0 \\ -x1 + 5x2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x1 = 5t \\ x2 = t \end{cases}$$

$\lambda_2 = 4$: (4I - A)X = 0 $\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -5x1 - 5x2 = 0 \\ -x1 - x2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x1 = -t \\ x2 = t \end{cases}$$

Note!
t $\neq$ 0. Då egenvektorn måste vara skiljd från nollvektorn.

12.3 Diagonalisering

Matrisen A sägs vara diagonaliserbas sådan att det finns en inverterbar matris S och en diagonalmatris D sådan att:

Pk-regeln

$$SD = AS \Leftrightarrow D = S^{-1}AS$$

Att diagonalisera en matris är otroligt användbart när man ska leta reda på vad A^{123} är.
Efter som $A = s^{-1}DS$ så är $A^{123} = (S^{-1}DS)^{123} = S^{-1}D^{123}S$
Då $(S^{-1}DS)(S^{-1}DS) = S^{-1}DS{*}S^{-1}DS = S^{-1}D^2IS = S^{-1}D^2S$ Diagonalmatrisen D är en matris med A:s egenvärden i huvuddiagonalen. Den inverterbara matrisen S är A:s Egenvektorer!
A:s egenvärden λ_1 ,λ_2,λ_3.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

A:s Egenvektorer a_1, a_2, a_3

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

Note!!
Super viktigt att respektive egenvektor och egenvärde ligger på samma kolon.