ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στοχαστικές Ανελίξεις- 13 Μαρτίου 2013

Ζήτημα 1 Έστω X_ν το μέγεθος της ν-οστής γενιάς ενός πληθυσμού, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, με $X_0 = 1$. Δίνεται ότι τα μεγέθη των απογόνων των μελών της ν-οστής γενιάς του πληθυσμού είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) $N_{\nu,i}$, $i = 0, 1, \ldots, X_\nu$ με συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p_n = \mathbb{P}[N = n]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, γεννήτρια πιθανοτήτων $\pi(t) = \mathbb{E}[t^N]$, $|t| < 1$, και μέση τιμή $\mu(= \pi'(1))$. Έστω ακόμα

$$X_{\nu+1} = N_{\nu,1} + N_{\nu,2} + \cdots + N_{\nu,X_\nu} \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

το μέγεθος της $(\nu+1)$-οστής γενιάς.

α) Να αποδείξετε ότι η γεννήτρια πιθανοτήτων ϕ_ν της τ.μ. X_ν, $\phi_\nu(t) = \mathbb{E}[t^{X_\nu}]$, $0 \le t \le 1$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$\phi_\nu(t) = \phi_{\nu-1}(\pi(t)),\ 0 \le t \le 1,\ \nu \in \mathbb{N}.$$

β) Από την παραπάνω σχέση να δείξετε ότι $\mathbb{E}[X_\nu] = \mu^\nu$.

Ζήτημα 2 Έστω X_ν μαρκοβιανή αλυσίδα στον χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \end{array}.$$

α) Να ταξινομηθούν οι καταστάσεις σε κλάσεις επικοινωνουσών καταστάσεων και να γραφεί ο στοχαστικός πίνακας $\mathbf{P}$ υπό κανονική μορφή.

β) Να εξεταστεί αν υπάρχουν κλάσεις περιοδικών καταστάσεων και, εφόσον υπάρχουν, να βρεθεί η περίοδός τους.

γ) Με εκκίνηση την κατάσταση $s = 4$ ποιος είναι ο μέσος χρόνος μέχρι την απορρόφηση;

Ζήτημα 3 Έστω X_ν μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{A, B, C, D\}$, με $X_0 = A$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

α) Ποια είναι η πιθανότητα $\mathbb{P}[X_2 = A]$;

β) Βρείτε την κατανομή ισορροπίας της αλυσίδας.

γ) Αν $T = \inf\{k > 0 :\ X_k = A\}$ είναι ο χρόνος πρώτης επανόδου στο A, ποια είναι η $\mathbb{E}[T]$;

δ) Στη διάρκεια μιας μεγάλης χρονικής περιόδου τι ποσοστό του χρόνου (προσεγγιστικά) περνά η αλυσίδα στην κατάσταση A; Ποια θα ήταν η απάντηση αν είχαμε $X_0 = B$;

ε) Αν M είναι το πλήθος των επισκέψεων της αλυσίδας στο B μέχρι την στιγμή που η αλυσίδα θα επισκεφτεί το A για δέκατη φορά, ποια είναι η $\mathbb{E}[M]$;

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!