



Στοχαστικές Ανελίζεις- 1 Ιουλίου 2013

**Ζήτημα 1** Έστω  $V_j = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\{X_n = j\}$  ο συνολικός αριθμός διελεύσεων της αλυσίδας  $X_n$  από την κατάσταση  $j$ .

Ορίζουμε

$$\eta_{ij} = \mathbb{P}[V_j = \infty | X_0 = i].$$

Αν  $T_{ij}$  είναι ο χρόνος 1ης μετάβασης στην κατάσταση  $j$  με εκκίνηση από την κατάσταση  $i$ , δείξτε ότι

$$\eta_{ij} = \begin{cases} \mathbb{P}[T_{ij} < \infty | X_0 = i] & \text{αν η κατάσταση } j \text{ είναι επαναληπτική} \\ 0 & \text{αν η κατάσταση } j \text{ είναι παροδική.} \end{cases}$$

**Ζήτημα 2** Τοποθετούμε αρχικά σ' ένα δοχείο Α δύο άσπρες σφαίρες και σε ένα δοχείο Β τρεις μαύρες σφαίρες. Σε κάθε βήμα μιας διαδικασίας ανακατέματος, επιλέγουμε τυχαία μία σφαίρα από το δοχείο Α και μία σφαίρα από το δοχείο Β και τους αλλάζουμε δοχείο. Αν  $X_n$  είναι το πλήθος των άσπρων σφαιρών στο κουτί Α μετά από  $n$  βήματα

- α) Προσδιορίστε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$ .
- β) Προσδιορίστε την κατανομή ισορροπίας της αλυσίδας.
- γ) Ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων μέχρι να έχουμε ξανά τις δύο άσπρες σφαίρες στο κουτί Α.
- δ) Μετά από ένα μεγάλο αριθμό βημάτων, σε ποιο ποσοστό του χρόνου υπάρχουν δύο σφαίρες στο κουτί Α.

**Ζήτημα 3** Δίνεται ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $\mathbf{P}$  μιας μαρκοβιανής αλυσίδας στον  $\mathbb{X} = \{s_1, \dots, s_6\}$ .

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/10 & 1/4 & 1/10 & 1/10 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 & 1/2 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

- α) Ταξινομήστε τις καταστάσεις σε κλάσεις επικοινωνίας, και χαρακτηρίστε τις ως προς την παροδικότητα/επαναληπτικότητα.
- β) Αν  $X_0 = s_2$  υπολογίστε την πιθανότητα απορρόφησης στην  $s_6$ .
- γ) Δώστε τρεις τουλάχιστον αναλλοίωτες κατανομές για την αλυσίδα.
- δ) Αν  $T = \inf\{k \geq 0 : X_k = s_6\}$  είναι ο χρόνος απορρόφησης στην  $s_6$  υπολογίστε για κάθε παροδική κατάσταση  $x$  και κάθε κατάσταση  $y \in \mathbb{X}$  την πιθανότητα

$$\mathbb{P}[X_1 = y | X_0 = x, T < +\infty].$$

**Ζήτημα 4** Έστω  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  η κίνηση ενός σωματιδίου στις  $m$  κορυφές ενός κανονικού πλυγώνου. Η κίνηση προς την γειτονική κορυφή με ωρολογιακή φορά γίνεται με πιθανότητα  $p = 3/4$ , ενός προς την γειτονική κορυφή με ανωρολογιακή φορά γίνεται με πιθανότητα  $q = 1 - p$ . Να αποδείξετε ότι η παραπάνω κίνηση έχει αναλλοίωτη κατανομή και να εξετάσετε αν η κατανομή της αλυσίδας συγκλίνει προς αυτήν όταν  $n \rightarrow \infty$  στις περιπτώσεις α)  $m = 2\nu$  και β)  $m = 2\nu + 1$ . Ποιοι είναι οι αντίστοιχοι μέσοι χρόνοι επανόδου σε καθεμιά από τις παραπάνω δύο περιπτώσεις;

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες  
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!