## Θεμα 1 (2020)

1) Δ
2) Γ
3) Β
4) Α,Β
5) Γ
6) Δ
7) Β
8) Δ
9) Α
10) Β
11) Γ
12) Δ
13) Γ
14) Β

Ο ΕΜ κανει converge σε local optimum και
Επομένως εχει σημασία η αρχικοποίηση.

* Για όλες τις δεσμευμένες πιθανότητες, όταν λέω $P(Φρ|¬Φρ)$ εννοώ $P(q_t=Φρ|q_{t-1}=¬Φρ)$

## Θέμα 2 (2020)

$P(A_μ)=50\%$ $P(A_{πλ})=50\%$

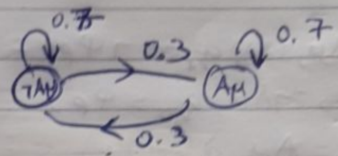
$P(A_μ|A_μ)=70\%$ $P(¬A_μ|A_μ)=70\%$

$P(A_μ|¬A_μ)=30\%$, $P(¬A_μ|A_{μαξ})=30\%$

$$A=\begin{array}{cc} A_μ & A_{αλλ} \\ \left[\begin{array}{cc} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{array}\right] & \begin{array}{c} A_μ \\ A_{αλλ} \end{array} \end{array}$$

$p_1=0.5$, $p_2=0.5$

Είναι HMM 1




β) $p(Φρ)=0.5$, $P(¬Φρ)=0.5$

$p(Φρ|Φρ)=0.7$, $φ(¬Φρ|¬Φρ)=0.7$

$*\ p(Φρ|¬Φρ)=0.3$, $p(¬Φρ|Φρ)=0.3$

~~$p(A_π|Φρ)= \quad P(¬Φρ|Φρ)\cdot(P(A_π|A_π)$~~

$$p(¬A_μ,¬Φρ|Φρ,¬A_μ)\overset{**}{=}P(¬A_μ|¬A_μ)\cdot P(¬Φρ|Φρ)$$

$$=0.7\cdot 0.3$$

$\boxed{A_μ \perp\!\!\!\perp Φρ}$

$$P(¬A_μ,¬Φρ|Φρ,A_μ)=p(¬A_μ|A_μ)\,P(¬Φρ|Φρ)=0.3\cdot 0.3$$

$$p(¬A_μ,¬Φρ|¬Φρ,A_μ)=0.3\cdot 0.7$$

$$p(¬A_μ,¬Φρ|¬Φρ,¬A_μ)=0.7\cdot 0.7$$

Ομοίως και τα άλλα

** Δεν το έβγαλα με μαθηματική απόδειξη, αλλά makes sense δεδομένου ότι έχουμε καρτεσιανό γινόμενο ανεξάρτητων πειραμάτων.

Ο πίνακας μετάβασης καταστάσεων από την $q_{t-1}$ στην $q_t$:

| Απλή | Φρ | Αμυγδ | Φρ+Αμυγδ | |
|---|---|---|---|---|
| 0.49 | 0.21 | 0.21 | 0.09 | Απλή |
| 0.21 | 0.49 | 0.09 | 0.21 | Φρ |
| 0.21 | 0.09 | 0.49 | 0.21 | Αμυγδ |
| 0.09 | 0.21 | 0.21 | 0.49 | Φρ+Αμυγδ |

$\pi_1 = P(q_0 = \neg A\mu, q_0 = \neg \Phi\rho) = P(\neg A\mu) P(\neg \Phi\rho) = 0.25$

$\pi_2 = P(q_0 = \neg A\mu, q_0 = \Phi\rho) = P(\neg A\mu) P(\Phi\rho) = 0.25$

$\pi_3 = P(q_0 = A\mu, q_0 = \neg \Phi\rho) = 0.25$

$\pi_4 = P(q_0 = \neg A\mu, q_0 = \Phi\rho) = 0.25$

γ)

$P(q_0 = A\pi, q_1 = A\mu, q_2 = A\mu, q_3 = A\mu + \Phi\rho, q_4 = A\pi\lambda\eta) =$

$\pi_1 \cdot P(q_4 = 1 \mid q_3 = 4) P(q_3 = 4 \mid q_2 = 3) P(q_2 = 3 \mid q_1 = 3)$

$= 0.25 \cdot 0.09 \cdot 0.21 \cdot 0.49 = 0.0023$

δ) Έχουμε HMM1 με 4 Si καταστάσεις και δύο σύμβολα (A = λευκό, B = Μαύρο)

$a_1(1) = \pi_1 b_1(O_1) = 0.25 \cdot 0.1 = 0.025$

$a_1(2) = \pi_1 b_2(O_2) = 0.075$

$a_1(3) = 0.25 \cdot 0.8 = 0.2$

$a_1(4) = 0.9 \cdot 0.25 = 0.225$

$a_2(1) = \sum_{i=1}^{N} a_1(i) a_{i1} b_1(O_2) = 0.025 \cdot 0.49 \cdot 0.9 +$
$0.075 \cdot 0.21 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.21 \cdot 0.9 +$
$0.225 \cdot 0.09 \cdot 0.9 = 0.081225$

$$a_2(2) = \sum_{i=1}^{N} a_1(i)\, a_{i2}\, b_2(O_2) =$$

$$0.7\,(0.025 \cdot 0.21 + 0.075 \cdot 0.49 + 0.2 \cdot 0.09 + 0.225 \cdot 0.21) = 0.075$$

$a_2(3) = \ldots$

Βγαίνει με απλή εφαρμογή τύπων.

# Θέμα 3 (2020)

α) Για την δεύτερη κλάση, παίρνουμε:

$$\arg\max_\theta P(\theta|D) = \arg\max_\theta P(D|\theta)\cancel{P(\theta)} = \arg\max_\theta \ln P(D|\theta)$$

$$\arg\max_\theta \left(\sum_{x_k}\left(-\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{(x_k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right) = \arg\min_\theta \underbrace{\left(\sum_k (x-\mu)^2\right)}_{Q}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{4}(x-\mu)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{k=1}^{4} x_k}{4} = 5$$

Για την πρώτη κατηγορία έχουμε GMM και επομένως πρέπει να εφαρμόσουμε EM.

Expectation Step: $Q^{(i)} = \underset{D_{bad}}{E}\{\ln(p(D;\theta)) \,||\, x;\ D_{good}, \theta^{(0)}\}$
Maximisation Step: $\theta^{(i)} = \arg\max\{Q^{(i)}\}$

Αποδείξαμε στην τάξη για το maxim step:

$$\hat{\mu}_i = \frac{\sum_{k=1}^{N} p(\omega_j|x_k,\theta)x_k}{\sum_{k=1}^{N} p(\omega_j|x_k,\theta)}$$

$$\hat{P}_j = p(\omega_j) = \frac{1}{N}\sum p(\omega_j|x_k,\theta_j)$$

Exp Step: $$p(\omega_j|x_k,\theta_j) = \frac{p(x_k|\omega_j,\theta_j)\,p(\omega_j)}{\sum_1^2 p(x_k|\omega_j,\theta_j)\,p(\omega_j)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{P}_j e^{-\frac{(x-\hat{\mu}_j)^2}{2}}}{\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{P}_j e^{-\frac{(x-\hat{\mu})^2}{2\sigma^2}}}$$

Θα εφαρμόσουμε ενδεικτικά ένα βήμα με ~~..~~ αρχικοποίηση $\theta^{(0)}$, τις τιμές του δε ερωτήματος:

$$p(x_1|\omega_1) = \frac{e^{-\frac{3^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{3} = 0.0029$$

0.266

$$p(x_2|\omega_1) = \frac{e^{-\frac{(1.2)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{3} = 0.266 \cdot 0.4867 = 0.1294$$

$$p(x_3|\omega_1) = e^{-2} \cdot 0.266 = 0.036$$

$$p(x_4|\omega_1) = \ldots$$

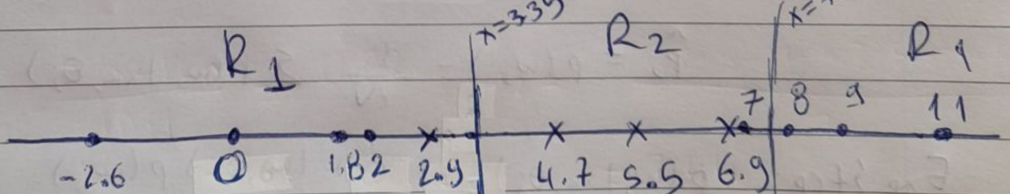
Δεν θα κάνω το ΕΜ ☺

β) ~~Έστω οι κανονικές του ερωτήματος σε.~~

$$\cancel{p(x|\omega_1)p(\omega_1) = p(x|\omega_2)p(\omega_2) \Rightarrow}$$

$$\cancel{\frac{2}{6}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{2}} + \frac{2}{6}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-9)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{2}}}$$

δ)




Μέχρι το $\frac{2+4,7}{2} = 3.35$ ταξινομούνται στην κατηγορία $\omega_1$

Από 3.35 έως $\frac{6.9+8}{2} = 7.45$ ταξινομούνται στην $\omega_2$

$\omega_1 = (-\infty, 3.35) \cup (7.45, +\infty)$, $\omega_2 = (3.35, 7.45)$

ε) Δεν συγκλίνει αφού τα δεδομένα δεν είναι γραμμικά διαχωρίσιμα

γ) Θα διατυπώσουμε ερωτήσεις μόνο για ευθείες που εποπτικά φαίνεται να διαχωρίζουν καλά.

$$x > \frac{2+2.9}{2} = 2.45, \quad x > 6.95$$

$x>2.45$: $\text{impurity} = \dfrac{N_1 p_1(w_1)p_1(w_2) + N_2 p_2(w_1)p_2(w_2)}{N_1+N_2} = \dfrac{0 + \frac{4}{8}\frac{4}{8}\cdot 8}{12} = 0.08$

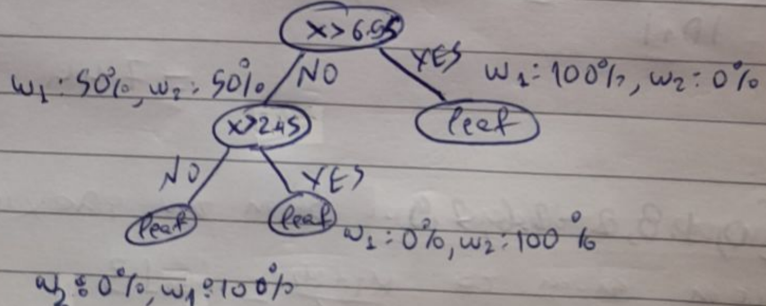
$x>6.95$: $\text{impurity} = 0.08$ $\longrightarrow$ Θέλουμε να κάνουμε maximise το impurity gain που ισοδυναμεί να διαλέξουμε το split με το μικρότερο impurity.

Διαλέγουμε τυχαία την $x>6.95$.
Στο δεξί μέρος, έχουμε τέλεια ταξινόμηση.
Για το αριστερό μέρος, διατυπώνουμε τις ερωτήσεις:

$x > 2.45$: $\text{impurity} = 0$
$x > 1.9$: $\text{impurity} = \dfrac{4\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{4}4}{8} = \frac{1}{8} = 0.125$
$x > 5.1$: $\text{impurity} = 1/8 = 0.125$

Η ερώτηση που επιλέγουμε είναι η $x>1.9$ και οδηγεί σε τέλεια ταξινόμηση

Άρα:



~~στ)~~
~~Ο Cart ταξινομεί τέλεια τα δεδομένα.~~
~~Ο NN3 έχει λάθος $\frac{2}{12} = \frac{1}{6} = 16.6\%$~~

~~1 δεδομένου ότι~~

ζ)

Πρώτο βήμα:

Τα δεδομένα 0, 1.8, 2, -2.6, 2.9 ταξινομούνται στην κλάση $\omega_1$, τα υπόλοιπα στην $\omega_2$ με βάση το κριτήριο ευκλείδιας απόστασης.

$D_1^{(0)} = \{0, 1.8, 2, -2.6, 2.9\}$ $D_2^{(0)} = \{7, 8, 9, 11, 4.7, 5.5, 6.9\}$

$\mu_1 = \frac{\sum x_k V_{kn}}{|D_1|} = 0.82$, $\mu_2 = \frac{7+8+9+11+4.7+5.5+6.9}{7} = 7.44$

Το σημείο απόφασης με βάση την ελάχιστη ευκλ. απόσταση είναι το $\frac{\mu_1+\mu_2}{2} = 4.13$

$D_1^{(1)} = \{-2.6, 0, 1.8, 2, 2.9\}$ $D_2^{(1)} = \{7, 8, 9, 11, 4.7, 5.5, 6.9\}$

Σύγκλιση Άρα $\mu_1 = 0.82$, $\mu_2 = 7.44$.

Τυχαία
τα διάλεξα

β) Έστω ότι βγάλαμε στο α πρόβλημα ότι
$w_{11}=0.5$, $\omega_{12}=0.5$, $\mu_{11}=0.8$, $\mu_{12}=9$
$p(\omega_1)=\frac{2}{3}$, $p(\omega_2)=\frac{1}{3}$

Τα κέντρα των δύο κανονικών είναι πολύ απομακρυσμένα και επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι μη επικαλυπτόμενες (προσεγγιστικά) στο σημείο τομής με την $\omega_2$ γκαουσιανή.

$$\frac{1}{\cancel{3\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{(x-0.8)^2}{2}} = \frac{1}{\cancel{3\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{(x-5)^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{(x-0.8)^2}{2} = -\frac{(x-5)^2}{2} \Rightarrow$$

$$(x-0.8)^2 = (x-5)^2 \Rightarrow$$

$$\cancel{x^2}-1.6x+0.64 = \cancel{x^2}-10x+25$$

$$8.4x = 25-0.64 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2.9}$$

$$e^{-\frac{(x-9)^2}{2}} = e^{-\frac{(x-5)^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\cancel{x^2}-18x+81 = \cancel{x^2}-10x+25 \Rightarrow$$

$$8x = 81-25 \Rightarrow$$

$$\boxed{x_2 = 7}$$

Οι περιοχές απόφασης είναι
$R_1 = \{-\infty, 2.9\} \cup \{7, +\infty\}$, $R_2 = \{2.9, 7\}$

στ) Στον CART οι περιοχές απόφασης είναι
$R_1 = \{-\infty, 2.45\} \cup \{6.55, +\infty\}$, $R_2 = \{2.455, 6.55\}$
Στον NN3:
$R_1 = \{-\infty, 3.35\} \cup \{7.45, +\infty\}$, $R_2 = \{3.35, 7.45\}$

Για τον CART:

$$P(error) = \int_{-\infty}^{2.45} p(x|\omega_2)P(\omega_2)dx + \int_{2.45}^{6.55} p(x|\omega_1)P(\omega_1)dx$$

$$+ \int_{6.55}^{+\infty} p(x|\omega_2)P(\omega_2)dx$$

$$I_1 = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{2.45} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-5)^2}{2}} dx = \frac{1}{3} \Phi(-2.55) = \frac{1}{3}(1-\Phi(2.55)) =$$

$$\frac{1}{3} \cdot 0.006 = 0.002$$

$$I_2 = \frac{1}{3}\int_{6.55}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-5)^2}{2}} dx = \frac{1}{3}(1-\Phi(1.55)) = \frac{0.07}{3} = 0.0233$$

$$I_3 = \frac{1}{3}\left(\int_{2.45}^{6.55} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-3)^2}{2}} dx + \int_{2.45}^{6.55} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-9)^2}{2}} dx\right) =$$

$$\frac{1}{3}(\Phi(3.55) - \Phi(-0.55) + \Phi(-2.45) - \Phi(-6.55)) =$$

$$\frac{1}{3}(\Phi(3.55) + \Phi(0.55) - \cancel{1} - \Phi(2.45) + \cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{\Phi(6.55)}^{1}) =$$

$$\frac{1}{3}(0.999 + 0.7 - 0.99) = 0.234$$

Άρα $P_{CART}(error) = 0.258$

Για τον NN3:

$$I_1 = \frac{1}{3}(1 - \Phi(1.65)) \approx 0.017$$

$$I_2 = \frac{1}{3}(1 - \Phi(2.45)) \approx 0.003$$

$$I_3 = \frac{1}{3}(\cancel{\Phi(4.45)}^{1} - \Phi(0.35) + \Phi(-1.55) - \cancel{\Phi(-5.65)}^{0})$$

$$= \frac{1}{3}(1 - \Phi(0.35) + 1 - \Phi(1.55))$$

$$\frac{1}{3}(2 - 0.94 - 0.63) = 0.143$$

$$I_{o\lambda} \approx 0.163$$

*βαριόμουν να τα υπολογίσω

Για τον Bayesian:

Μπορούμε να θεωρήσουμε τα $I_1, I_2$ ως μηδενικά (πολύ μικρά σφάλματα)*

$$I_3 = \frac{1}{3}\left(\int_{2.9}^{7} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{2}} dx + \int_{2.9}^{7} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-9)^2}{2}} dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\cancelto{1}{\varphi(4)} - \varphi(-0.1) + \varphi(-2) - \cancelto{0}{\varphi(-6.1)}\right) =$$

$$\frac{1}{3}\left(1 - \varphi(2) - 1 + \varphi(0.1)\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \varphi(0.1) - \varphi(2)\right)$$

$$\frac{1}{3}(1 + 0.539 - 0.977)$$

$$= 0.187$$

Το μικρότερο σφάλμα έχει ο NN3, μετά ο Bayesian και τέλος ο CART.

η)

Από τον kmeans έχουμε μια αρχική εκτίμηση για τις μέσες τιμές και για το ποιο σημείο ανήκει σε ποια κλάση.

$$\left(\sigma_1^{(0)}\right)^2 = \frac{\sum (x_k - \mu_1)^2 r_{kn}}{|D_1|} = \frac{10.52}{5} = 2.1$$

$$\left(\sigma_2^{(0)}\right)^2 = \frac{\sum (x_k - \mu_2)^2 r_{kn}}{|D_2|} = \frac{27.1772}{7} = 3.88$$

$$p_1^{(0)} = \frac{5}{12} \simeq 0.417 \qquad p_2^{(0)} = 0.583$$

Expectation

$$p(x_1|\omega_1) = \frac{e^{-\frac{(-2.6-0.82)^2}{2.1}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0.417 =$$

$$p(x_2|\omega_2) = \frac{e^{-(0.82)^2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0.417 =$$

$$p(x_3|\omega_2) = \ldots$$

Δεν θα κάνω τον EM ☺

## Θεμα 4 (2019)

**Expectation step**

$D_{good} = \{ x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_1^{(3)} \}$

$D_{bad} = \{ x_2^{(3)} \}$

$$Q(\theta) = \underset{D_{bad}}{\mathcal{E}} \{ \ln ( P(D; \theta \mid x; D_{good}, \theta^{(0)} \}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_2^{(3)} \mid \theta^{(0)}) \ln \{ p(x_1^{(1)}\mid\theta) p(x_2^{(1)}\mid\theta) p(x_1^{(2)}\mid\theta) p(x_2^{(2)}\mid\theta) p(x_1^{(3)}\mid\theta) p(x_2^{(3)}\mid\theta) \} d x_2^{(3)}$$

$$= \ln \{ \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{1}{\theta_1}} \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\theta_2} \cdot \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{2}{\theta_1}} \cdot \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{3}{\theta_1}} \} + \int_{0}^{4} \ln\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{\theta_2} \, dx_2^{(3)}$$

για $\theta_2 \geq \max x_2^{(i)} = 2$

$$Q(\theta) = -3\ln\theta_1 - \frac{6}{\theta_1} - 2\ln\theta_2$$

$\frac{\partial Q}{\partial \theta_2} \neq 0$ Αλλά η Q γνησίως φθίνουσα

Αρα $\hat{\theta}_2 = \max x_2^{(i)} = 2$

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta_1} = 0 \Rightarrow -\frac{3}{\theta_1} + \frac{6}{\theta_1^2} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_1 = 2$$

$\boxed{\text{Αν άγνωστη } x_1^{(3)}, x_2^{(3)} = 3}$

$$Q(\theta, \theta^0) = \ln \left( \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{1}{\theta_1}} \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{2}{\theta_1}} \frac{1}{\theta_2} \right) + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x/2} \ln\left(\frac{1}{\theta_1} e^{-x/\theta_1}\right) dx}_{A}$$

με $\boxed{\theta_2 \geq 3}$

$$A = \frac{1}{2} \left[ e^{-x/2} \left( \frac{4}{\theta_1} - 2\ln\left(\frac{e^{-\frac{x}{\theta_1}}}{\theta_1}\right) \right) \right]_0^{+\infty} = -\frac{2}{\theta_1} - \ln\theta_1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{e^{-\frac{x}{\theta_1}}}{\theta_1}\right) = -\frac{0}{\theta_1} - \ln\theta_1$$

$$Q(\theta, \theta^0) = -2\ln\theta_1 - \frac{3}{\theta_1} - 3\ln\theta_2 - \frac{2}{\theta_1} - \ln\theta_1 = \frac{5}{\theta_1} - \ln\theta_1 - 3\ln\theta_2$$

για $\theta_2 \geq 3$

$\frac{\partial Q}{\partial \theta_2} < 0$ και φραγμενη : $\theta_2 \geq 3$

Αρα $\hat{\theta}_2 = 3$

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial 1}\left(\frac{5}{\theta_1} - 3 \ln \theta_1\right) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \frac{5}{3}$$