

Στοχαστικές Ανελίζεις
Εξετάσεις Α' α.ε. 2007
ΣΕΜΦΕ

✓ **Ζήτημα 1^ο.** Διακριτή τ.μ. T έχει συνάρτηση πιθανότητας $p_n = P[T = n]$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Αν $\pi(s)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων p_n και $\Pi(s)$ η γεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων

$$P_n = \sum_{v=n+1}^{\infty} p_v \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

να δείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$\Pi(s) = \frac{1 - \pi(s)}{1 - s}, \quad |s| < 1.$$

Με βάση την παραπάνω σχέση να δείξετε ότι η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. T είναι αντίστοιχα:

$$E[T] = \Pi(1) \quad \text{και} \quad \text{Var}[T] = 2\Pi'(1) + \Pi(1)\{1 - \Pi(1)\}.$$

Δ **Ζήτημα 2^ο.** Παίκτης κερδίζει ή χάνει 1€ με ίσες πιθανότητες. Έστω ότι ξεκινά με το ποσό $a\epsilon$ και σταματά να παίζει όταν τα χρήματά του γίνονται $b\epsilon$ ή 0ϵ . Να δείχθεί ότι η αναμενόμενη διάρκεια του παιχνιδιού είναι: $E[T] = a(b - a)$.

Ζήτημα 3^ο. Δίνεται η Μαρκοβιανή Αλυσίδα $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4\}$ και στοχαστικό πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

- (α) Να εξεταστεί αν η Μ.Α. είναι μη υποβιβάσιμη (irreducible).
- (β) Να ταξινομηθούν οι καταστάσεις σε κλάσεις επικοινωνουσών καταστάσεων και να γραφεί ο στοχαστικός πίνακας υπό κανονική μορφή.
- (γ) Να εξεταστεί αν υπάρχουν περιοδικές κλάσεις και εφόσον υπάρχουν να προσδιοριστεί η περιοδικότητά τους.
- (δ) Να προσδιοριστεί, αν υπάρχει, η κατανομή ισορροπίας π .

Ζήτημα 4^ο

- (α) Να δοθεί ο ορισμός της επαναληπτικότητας μιας κατάστασης i .
- (β) Να δείξετε ότι η ως άνω ιδιότητα είναι ιδιότητα κλάσης.
- (γ) Να δείξετε ότι η κατάσταση i είναι παροδική εάν και μόνο εάν $P_{ii}(1) < \infty$.

Διάρκεια εξέτασης: 2.30'.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Καλή επιτυχία