Στοχαστικές Ανελίξεις
Εξετάσεις Ιανουαρίου 2006
ΣΕΜΦΕ

Ζήτημα 1^o. Έστω N διακριτή τ.μ. με σ.μ.π. $p_n = P[N = n]$ $(n = 0, 1, \ldots)$ και με γεννήτρια πιθανοτήτων $\pi(s)$. Έστω $\{Y_i : i = 1, 2, \ldots\}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με ροπογεννήτρια συνάστηση $g_Y(s)$.

(α) Να δειχθεί ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση του αθροίσματος $X = \sum_1^N Y_i$ με τυχαίο αριθμό όρων N, είναι:

$$g_X(s) = \pi(g_Y(s)).$$

(β) Αν οι ανεξάρτητες τ.μ. $\{Y_i : i = 1, 2, \ldots\}$ ακολουθούν Εκθετική κατανομή παραμέτρου θ και η τ.μ. N ακολουθεί Γεωμετρική κατανομή παραμέτρου p, ποια η κατανομή της τ.μ. X;

√. **Ζήτημα 2^o.** Θεωρούμε τον τυχαίο περίπατο $\{X_n=X_{n-1}+Y_n: n = 1, 2, \ldots)$ με χώρο καταστάσεων το σύνολο $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, αρχική κατάσταση $X_0 = 0$ και ανεξάρτητες προσαυξήσεις $Y_n = +1, -1, 0$ με αντίστοιχες πιθανότητες $p = P[Y_n = 1]$, $q = P\{Y_n = -1]$ και $r = P[Y_n = 0]$ $(p+q+r = 1)$. Να προσδιοριστεί η ροπογεννήτρια συνάρτηση των προσαυξήσεων Y_n και με εφαρμογή της ταυτότητας του Wald να προσδιοριστούν οι πιθανότητες απορρόφησης α και β με απορροφητικά φράγματα $-a$ $(-a < X_0)$ και b $(b > X_0)$.

√ **Ζήτημα 3^0** Έστω $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $\mathcal{S}$ και $g : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Να δείξετε ότι η $\{Y_n=g(X_n): n = 0, 1, 2, \ldots\}$ είναι επίσης Μαρκοβιανή αλυσίδα.

√ **Ζήτημα 4^o.** Δίνονται οι παρακάτω Στοχαστικοί Πίνακες:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{P}_2 = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

$E_1 \to E_2 \to E_5 \to E_1$

$E_3 \to E_4 \to E_3$

(α) Να ταξινομηθούν οι καταστάσεις σε κλάσεις.
(β) Να γίνει ιεράρχηση των κλάσεων.
(γ) Να προσδιοριστούν, αν υπάρχουν, οι κλειστές κλάσεις.
(δ) Να γραφούν οι στοχαστικοί πίνακες υπό την "κανονική" μορφή:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

και να καθορίσετε τις παροδικές, επαναληπτικές, γνήσια επαναληπτικές και περιοδικές κλάσεις, εάν υπάρχουν.

Ζήτημα 5^{o}. Θεωρούμε τον απλό τυχαίο περίπατο $\{X_n : n = 0, 1, 2,\ldots)$ με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ και πιθανότητες μετάβασης $p_{i,i+1} = p_i$, $p_{i,i-1} = q_i = 1 - p_i$ με $0 < p_i < 1$ για όλα τα $i > 1$ και $p_0 = 0$, είναι δηλαδή η κατάσταση "0" απορροφητική. Έστω A το ενδεχόμενο απορρόφησης στην κατάσταση "0" και $\alpha_i = P[A|X_0 = i]$ $(i \geq 0)$. Να δείξετε τα παρακάτω:

(α) Οι πιθανότητες α_i ικανοποιούν την διαφοροεξίσωση

$$\alpha_i = \alpha_{i+1}p_i + \alpha_{i-1}q_i, \ (i > 1) \text{ με } \alpha_0 = 1.$$

(β) Θέτοντας $\delta_i = \alpha_{i-1} - \alpha_i$, να λύσετε την ως άνω διαφοροεξίσωση και να προσδιορίσετε τη συνθήκη κάτω από την οποία έχουμε πιθανότητες απορρόφησης $\alpha_i < 1$ για όλα τα $i > 1$.

Να επιλέξετε 4 από τα 5. Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Διάρκεια εξέτασης: 2.30΄h.

Καλή επιτυχία