



Στοχαστικές Ανελίζεις
Εξετάσεις Μαρτίου 2008

Ζήτημα 1^ο.

- (α) Να δώσετε τον ορισμό της κίνησης Brown.
(β) Να προσδιορίσετε την δεσμευμένη κατανομή του $X(t)$ όταν δίνεται ότι $X(s)=x$ με $s \leq t$.

Ζήτημα 2^ο. Έστω X_n το μέγεθος της n -οστής γενιάς ενός πληθυσμού για $n=1,2,\dots$ και $X_0=1$. Δίνεται ότι τα μεγέθη των απογόνων των μελών της n -οστής γενιάς του πληθυσμού είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $N_{n,i}$ ($i=1,2,\dots,X_n$) με κατανομή $\{p_n=P\{N=n\}: n=0,1,2,\dots\}$ για $n=0,1,2,\dots$, γεννήτρια πιθανοτήτων $\pi(t) = E[t^N]$, $|t| \leq 1$ και μέση τιμή $\mu (= \pi'(1))$. Έστω

$$X_{n+1} = N_1 + \dots + N_{X_n} \quad (n=0,1,2,\dots),$$

το μέγεθος της $(n+1)$ -γενιάς με $X_0=1$.

Με εφαρμογή γνωστής ιδιότητας της δεσμευμένης μέσης τιμής, να δείξετε ότι:

- (α) Η γεννήτρια πιθανοτήτων της X_n , $\varphi_n(t) \equiv E[t^{X_n}]$, $0 \leq t \leq 1$ ($n=1,2,\dots$), ικανοποιεί την αναδρομική σχέση:

$$\varphi_n(t) = \varphi_{n-1}(\pi(t)), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (n=1,2,3,\dots),$$

- (β) $E[X_n] = \mu^n$.

Ζήτημα 3^ο. Ναδειχθεί ότι όταν ένας $N \times N$ στοχαστικός πίνακας P είναι διπλά στοχαστικός, όταν δηλαδή επιπρόσθετα το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του δίνει τη μονάδα, τότε εφόσον υπάρχει κατανομή ισορροπίας αυτού, π έστω, αυτή είναι ομοιόμορφη.

Ζήτημα 4^ο. Κάθε μία από τις δύο μηχανές που υπάρχουν σε ένα γραφείο μπορεί να βρίσκεται σε λειτουργία ή όχι κατά την διάρκεια μιας ημέρας. Έστω $X(n)$ ο αριθμός των μηχανών που βρίσκονται εν λειτουργία κατά την n -οστή ημέρα. Δίνεται ότι κάθε μηχανή βρίσκεται σε λειτουργία την n -οστή ημέρα, ανεξαρτήτως της άλλης μηχανής, με πιθανότητα $[1+X(n-1)]/4$. Έστω $E_k = \{X(n)=k\}$ ($k=0,1,2$).

- (α) Επιβεβαιώστε ότι η ανέλιξη $\{X(n) : n=1,2,\dots\}$ είναι Μαρκοβιανή με καταστάσεις $\{E_k : k=0,1,2\}$ και προσδιορίστε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P .
(π) Προσδιορίστε, αν υπάρχει, την κατανομή ισορροπίας ακολουθεία π .
(δ) Ποιο το ποσοστό των ημερών κατά τις οποίες και οι δύο μηχανές δουλεύουν ταυτόχρονα;