**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**


# Στοχαστικές Ανελίξεις- 4 Σεπτεμβρίου 2012

**ΑΣΚΗΣΗ 1** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με ροπογεννήτρια συνάρτηση $g(s) = \mathbb{E}[e^{sX}]$, $s \in S \subset \mathbb{R}$.

α) Αν $c$ είναι μια θετική σταθερά αποδείξτε την ανισότητα Chernoff:

$$\mathbb{P}[X \geq c] \leq e^{-cs} g(s) \quad \text{για } s > 0.$$

β) Ποια είναι η αντίστοιχη ανισότητα για την $\mathbb{P}[X \leq c]$ και για $s < 0$;

γ) Έστω $T$ η διάρκεια ενός απλού συμμετρικού τυχαίου περιπάτου $\{X_n\}_{n=0,1,\ldots}$ με απορροφητικά φράγματα στις θέσεις $-a$ και $b$, για κάποια $a, b \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $\mathbb{E}[\, T \mid X_0 = 0] = ab$.

**ΑΣΚΗΣΗ 2** Στο μοντέλο διάχυσης Ehrenfest τα μόρια ενός αερίου διαπερνούν μια μεμβράνη που χωρίζει το δοχείο σε δύο περιοχές Α και Β. Ας είναι $C$ ο συνολικός αριθμός των μορίων που βρίσκονται εντός του δοχείου και $X_n$ ο αριθμός των μορίων στην περιοχή Α κατά τη χρονική στιγμή $t = n$. Δίνεται ότι $X_{n+1} = X_n - 1$ με πιθανότητα $X_n/C$ και $X_{n+1} = X_n + 1$ με πιθανότητα $(C - X_n)/C$. Ορίζουμε

$$M_n = \mathbb{E}[X_n \mid X_0] \quad \text{και} \quad P_n = \mathbb{E}[X_n(C - X_n) \mid X_0],\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

α) Να δείξετε ότι ισχύουν οι παρακάτω αναδρομικές σχέσεις

$$M_{n+1} = \left(1 - \frac{2}{C}\right) M_n + 1 \quad \text{και} \quad P_{n+1} = \left(1 - \frac{4}{C}\right) P_n + C - 1,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

β) Να προσδιορίσετε την δεσμευμένη μέση τιμή και την δεσμευμένη διασπορά της $X_n$ με δεδομένη την αρχική κατάσταση $X_0$.

**ΑΣΚΗΣΗ 3** α) Αντικαταστήστε τα σύμβολα * με αριθμούς ώστε ο πίνακας

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ P = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/11 & * & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & * & * & * \\ * & * & * & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 & 1/5 & * \\ * & * & * & * & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

να είναι πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης μιας μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στο σύνολο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1, 2, \ldots, 7\}$, και $P_{ij} = \mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i]$ για κάθε $i, j \in \mathbb{X}$ και $n \in \mathbb{N}$.

β) Ταξινομήστε τις καταστάσεις σε κλάσεις επικοινωνίας. Ποιες κλάσεις είναι παροδικές και ποιες επαναληπτικές;

γ) Για κάθε σύνολο $A \subset \mathbb{X}$ ορίζουμε τον χρόνο πρώτης άφιξης στο $A$, $T_A = \inf\{k \in \mathbb{N} : X_k \in A\}$. Ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα $\mathbb{P}[T_{\{7\}} < T_{\{4\}} \mid T_{\{5,6,7\}} < T_{\{4\}}]$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

δ) Αν $X_1 = 1$, υπολογίστε τις πιθανότητες $\mathbb{P}[T_{\{5,6,7\}} < T_{\{4\}}]$ και $\mathbb{P}[T_{\{7\}} < T_{\{4\}}]$.

**ΑΣΚΗΣΗ 4** Έστω $\{X_n\}_{n=0,1,\ldots}$ μαρκοβιανή αλυσίδα στο σύνολο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, με πιθανότητες μετάβασης $p_{i,j} = \mathbb{P}[X_{n+1} = j \mid X_n = i]$, $i, j \in \mathbb{X}$, $n \geq 0$.

α) Αν $T_0 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$ είναι ο χρόνος πρώτης άφιξης στο 0, αποδείξτε χρησιμοποιώντας την μαρκοβιανή ιδιότητα ότι η συνάρτηση $h : \mathbb{X} \to [0, 1]$ με $h(x) = \mathbb{P}[T_0 < +\infty \mid X_0 = x]$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\phi(x) = \sum_{y \in \mathbb{X}} p_{x,y}\, \phi(y),\ \forall x \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$

β) Αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $p_{k,k+1} + p_{k,k-1} = 1$ και $p_{k,k+1} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 p_{k,k-1}$, δείξτε για κάθε συνάρτηση $\phi : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την εξίσωση $(*)$ του ερωτήματος (α) η ποσότητα $k^2(\phi(k-1) - \phi(k))$ είναι ανεξάρτητη του $k$.

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \pi^2/6$, αποδείξτε ότι $h(k) = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m^2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

δ) Αν $p_{0,1} = 1$, είναι το 0 παροδική ή επαναληπτική κατάσταση; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Διάρκεια Εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**