Στοχαστικές Ανελίξεις
Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2004
ΣΕΜΦΕ

Ζήτημα 1ο. Έστω N διακριτή τ.μ. με σ.μ.π. $p_n = P[N = n]$ $(n = 0, 1, \ldots)$ και με γεννήτρια πιθανοτήτων $\pi(s)$. Έστω $\{Y_i : i = 1, 2, \ldots\}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με ροπογεννήτρια συνάστηση $g_Y(s)$.

0.5

(α) Να δειχθεί ότι η ροπογεννήτρια συνάρτηση του αθροίσματος $X = \sum_1^N Y_i$ με τυχαίο αριθμό όρων N, είναι:

$$g_X(s) = \pi(g_Y(s)).$$

(β) Αν οι ανεξάρτητες τ.μ. $\{Y_i : i = 1, 2, \ldots\}$ ακολουθούν Εκθετική κατανομή παραμέτρου θ και η τ.μ. N ακολουθεί Γεωμετρική κατανομή παραμέτρου p, ποια η κατανομή της τ.μ. X;

1.8

~~Ζήτημα 2ο~~. Θεωρούμε το συμμετρικό απλό τυχαίο περίπατο $\{X_n = \sum_1^n Y_i : n = 1, 2, \ldots\}$ $(p = q = ½)$ με απορροφητικά φράγματα $-a$ και b και πιθανότητες απορρόφησης α και β αντίστοιχα. Έστω T ο χρόνος απορρόφησης και X_T η θέση απορρόφησης. Με εφαρμογή της ταυτότητας του Wald να δείξετε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

$$\cancel{(\alpha)}\ E[X_T] = 0, \quad \cancel{(\beta)}\ \alpha = b/(a+b) \text{ και } \cancel{(\gamma)}\ E[X_T^2] = E[T].$$

2.5

Ζήτημα 3ο. Παίκτης κερδίζει ή χάνει μία μονάδα με ίσες πιθανότητες. Έστω ότι ξεκινά με το ποσό A και σταματά να παίζει όταν τα χρήματά του γίνονται B ή 0. Να δειχθεί ότι η αναμενόμενη διάρκεια του παιχνιδιού είναι: $E[T] = A(B - A)$.

1.25

Ζήτημα 4ο. Θεωρούμε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ και πιθανότητες μετάβασης $p_{i,i+1} = p_i$ και $p_{i,0} = q_i = 1 - p_i$ $(0 < p_i < 1)$. Να δείξετε ότι πρόκειται για μη υποβιβάσιμη απεριοδική Μ.Α. και ότι υπάρχει κατανομή ισορροπίας $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)$ αν και μόνο εάν $\sum_1^\infty d_k < \infty$, όπου $d_k = \prod_1^{k-1} p_i$ $(k \geq 1)$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Διάρκεια: 2 1/2 ώρες

Καλή επιτυχία