ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Πολυτεχνειούπολη-Ζωγράφου
ΑΘΗΝΑ - 157 80
ΤΗΛ. : 210 77 21 744
FAX : 210 77 21 775

Στοχαστικές Ανελίξεις
Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2005
ΣΕΜΦΕ

2,5 **Ζήτημα 1^o.** Διακριτή τ.μ. T έχει συνάρτηση πιθανότητας $p_n = P[T = n]$ $(n \geq 0)$. Έστω $\pi(s)$ η γεννήτρια συνάρτηση της κατανομής $\{p_n : n \geq 0\}$ και $\Pi(s)$ η γεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων

$$P_n = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} p_\nu \quad (n \geq 0).$$

Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$\Pi(s) = \frac{1-\pi(s)}{1-s}, \quad |s| < 1.$$

Με βάση την παραπάνω σχέση να δείξετε ότι:

$$E[T] = \Pi(1) \quad \text{και} \quad E[T^2] = 2\,\Pi'(1) + \Pi(1).$$

Ζήτημα 2^o. Έστω $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ τυχαίος περίπατος στο χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ με πιθανότητες μετάβασης $p_{i,i+1} = p_i$ και $p_{i,i-1} = q_i = 1 - p_i$. Έστω επίσης ότι $p_i > 0$ για όλα τα $i > 0$ και $p_0 = 0$, είναι δηλαδή η κατάσταση "0" απορροφητική και όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους. Έστω A το ενδεχόμενο απορρόφησης στην κατάσταση "0" και $\alpha_i = P[A|X_0 = i]$ $(i \geq 0)$. Να δείξετε ότι:

1 (α) Οι πιθανότητες α_i ικανοποιούν την διαφοροεξίσωση

$$\alpha_i = \alpha_{i+1} p_i + \alpha_{i-1} q_i \quad (i \geq 1).$$

(β) Θέτοντας $\delta_i = \alpha_{i-1} - \alpha_i$ να δείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$\alpha_i = 1 - \Delta \times \sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j \quad (i \geq 1),$$

όπου $\Delta = \delta_1$ και $\gamma_i = \prod_{j=1}^{i} q_j/p_j$ $(i \geq 1)$ με $\gamma_0 = 1$.

(γ) Να δείξετε ότι όταν ή σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j$ συγκλίνει, τότε $\Delta = \{\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j\}^{-1}$ και

$$\alpha_i = \sum_{j=i}^{\infty} \gamma_j \Big/ \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j < 1 \quad (i \geq 1),$$

ενώ όταν η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j$ αποκλίνει, τότε $\alpha_i = 1$ για όλα τα $i \geq 0$.

Ζήτημα 3ο. Έστω ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P. Να δείξετε ότι για k σταθερό η στοχαστική ανέλιξη $\{Y_n = X_{nk} : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ είναι επίσης Μαρκοβιανή με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P^k.

2

Ζήτημα 4ο. Δίνονται οι παρακάτω Στοχαστικοί Πίνακες:

$$
\mathbf{P}_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}, \quad
\mathbf{P}_2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.
$$

(α) Να ταξινομηθούν οι καταστάσεις σε κλάσεις.
(β) Να γίνει ιεράρχηση των κλάσεων.
(γ) Να γραφούν οι στοχαστικοί πίνακες σε κανονική μορφή:
(δ) Να προσδιοριστούν, αν υπάρχουν, οι περιοδικές, οι παροδικές και οι επαναληπτικές κλάσεις. Υπάρχουν γνήσια επαναληπτικές κλάσεις και ποιες;

Διάρκεια εξέτασης: 2.30΄h.
Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Καλή επιτυχία

$C_1 = \{E_3\}$
$C_2 = \{E_1, E_5\}$
$C_3 = \{E_2, E_4\}$