



Εξετάσεις Στοχαστικών Ανελίξεων, Περιόδου Σεπτεμβρίου 2004

Ζήτημα 1. Δίνεται ότι, η τ.μ.  $Y$  ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο  $\mu$  και, για δεδομένη τιμή της τ.μ.  $Y$ , η τ.μ.  $X$  ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο  $Y$ .

- (i) Να προσδιορίσετε την γεννήτρια πιθανοτήτων της τ.μ.  $Y$ .  
(ii) Να δείξετε ότι η γεννήτρια πιθανοτήτων της τ.μ.  $Z = X + Y$  είναι:

$$\pi(s) = \exp\{\mu(se^{s-1} - 1)\}, \quad |s| < 1.$$

- (iii) Από την (ii), ή διαφορετικά, ποια η μέση τιμή της τ.μ.  $Z$ ;

Ζήτημα 2. Έστω  $\{X_n: n = 0, 1, 2, \dots\}$ , με  $X_0 = 0$ , τυχαίος περίπατος με ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις  $Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) μέσης τιμής  $\mu$  και διασποράς  $\sigma^2$ . Εάν ο τ.π. έχει απορροφητικά φράγματα στα σημεία  $-a$  και  $b$ , να αποδείξετε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$E[T] = \begin{cases} E[X_T]/\mu, & \text{για } \mu \neq 0, \\ E[X_T^2]/\sigma^2, & \text{για } \mu = 0, \end{cases}$$

όπου  $T$  ο χρόνος απορρόφησης και  $X_T$  η θέση απορρόφησης.

Ζήτημα 3. Δίνεται ο παρακάτω στοχαστικός πίνακας  $P$ . Να ταξινομηθούν οι καταστάσεις σε κλάσεις και να γίνει ιεράρχηση αυτών. Να καθορίσετε, εφόσον υπάρχουν, τις παροδικές καταστάσεις. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.3 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Ζήτημα 4. Για την αγορά ενός προϊόντος απαιτούνται 4 χρηματικές μονάδες. Έχουμε στην κατοχή μας 2 χρηματικές μονάδες. Προκειμένου να συμπληρωθεί το απαιτούμενο ποσό για την αγορά του προϊόντος, αποφασίζουμε να παίξουμε σε παιχνίδι στο οποίο κάθε φορά αυξάνουμε ή μειώνουμε τα χρήματά μας κατά 1 χρηματική μονάδα με πιθανότητα  $p = 0.48$  και  $q = 0.52$  αντίστοιχα. Το παιχνίδι σταματά όταν αποκτήσουμε το επιδιωκόμενο ποσό των τεσσάρων μονάδων ή όταν χάσουμε τα χρήματά μας.

- (i) Να κατασκευάσετε τον στοχαστικό πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P$  του ως άνω παιχνιδιού.  
(ii) Να προσδιορίσετε τον Πρωταρχικό πίνακα  $N$ .  
(iii) Ποια η μέση διάρκεια του παιχνιδιού;  
(iv) Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσουμε το απαιτούμενο ποσό;

Διάρκεια εξέτασης 2:30

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ