Στοχαστικές Ανελίξεις
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2005
ΣΕΜΦΕ

Ζήτημα 1^o. Αν $g(t)$ είναι η κοινή ροπογεννήτρια συνάρτηση των ανεξαρτήτων και ισονόμων τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ και $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, δείξτε ότι για κάθε $s > 0$ και $t > 0$ ισχύει η ανισότητα:

$$P[S \geq ns] \leq e^{-nst}\{g(t)\}^n.$$

Με εφαρμογή της παραπάνω ανισότητας να αποδείξετε ότι όταν η κατανομή των ανεξαρτήτων τ.μ. X_i $(i = 1, \ldots, n)$ είναι η Κανονική $N(0, 1)$ τότε ισχύει η σχέση:

$$P[S \geq ns] \leq \exp\{-\frac{1}{2}ns^2\}.$$

Ζήτημα 2^o. Στον, χωρίς απορροφητικά φράγματα, απλό τυχαίο περίπατο $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots)$ με αρχική κατάσταση $X_0 = 0$ και θετική τάση $\mu = p - q$ να δείξετε ότι η χαμηλότερη θέση $X = \min\{X_n: n = 0, 1, 2, \ldots\}$ έχει κατανομή πιθανότητας την $P[X = -m] = \lambda^m(1 - \lambda)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ με $\lambda = q/p$ (< 1).

Ζήτημα 3^o. Δίνεται ότι στον απλό τυχαίο περίπατο η γεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων επανόδου στην αρχική κατάσταση $X_0 = 0$, δηλαδή των πιθανοτήτων $p_{00}^{(n)} = P[X_n = 0|X_0 = 0]$ με

$$p_{00}^{(n)} = \begin{cases} \binom{2m}{m}\{pq\}^m & \text{όταν } n = 2m, \\ 0 & \text{όταν } n = 2m+1. \end{cases} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

είναι η

$$P(s) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{ii}^{(2m)} = \{1 - 4pqs^2\}^{-1/2} \quad \text{με } |s| < \{4pq\}^{-1/2}.$$

(i) Να προσδιορίσετε την γεννήτρια συνάρτηση $F(s)$ του χρόνου της $1^{ης}$ επανόδου στην αρχική κατάσταση $X_0 = 0$. (ii) Να δείξετε ότι: η αρχική κατάσταση $X_0 = 0$ είναι επαναληπτική όταν $p = q$ και παροδική όταν $p \neq q$. (iii) Να δείξετε ότι η αρχική κατάσταση $X_0 = 0$ δεν μπορεί να είναι γνήσια επαναληπτική. Ισχύουν τα ως άνω συμπεράσματα και για οποιαδήποτε άλλη αρχική κατάσταση x_0; (Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας).

Ζήτημα 4^o. Να δείξετε ότι σε μια απεριοδική και μη υποβιβάσιμη Μ.Α. με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης **P** διπλά στοχαστικό, δηλαδή με την επιπρόσθετη ιδιότητα $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$ για όλα τα $j = 1, \ldots, n$, η κατανομή ισορροπίας $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ είναι η ομοιόμορφη $(1/n, \ldots 1/n)$. Ποιος ο μέσος χρόνος επανόδου στην αρχική κατάσταση;

Διάρκεια εξέτασης: 2.30΄h.
Τα θέματα είναι ισοδύναμα

$\sum_n f_{ij}^{(n)}$