ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Ε.ΔΕ.Μ.Μ

ΜΑΘΗΜΑ: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ

ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2021-2022

3η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

[redacted]

Άσκηση 1

Ερώτημα 1

Στην άσκηση αυτή θα μελετηθεί η εξάρτηση του αριθμού Υ των αποζημιώσεων λόγω τροχαίων ατυχημάτων. Η τυχαία μεταβλητή Υ ακολουθεί κατανομή Poisson και εκφράζεται ανά n αριθμό συμβολαίων (offset). Οι μεταβλητές από τις οποίες εξαρτάται ο αριθμός των αποζημιώσεων παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.

Όνομα Μεταβλητής	Περιγραφή
agecat	ηλικία ασφαλιζόμενου ($X_1 = 0-$ νέος και $X_1 = 1-$ μεγάλος)
cartype	κατηγορία ασφαλίστρων ($X_2 = 1, 2, 3, 4$)
district	περιοχή διαμονής ασφαλισμένου ($X_3 = 1-$ Αθήνα και $X_3 = 0-$ σε άλλη πόλη)

Πίνακας 1: Επεξηγηματικές μεταβλητές από τις οποίες εξαρτάται ο αριθμός αποζημιώσεων Υ

Καθώς η τ.μ. Υ εκφράζεται ανά n αριθμό συμβολαίων, τότε το μοντέλο της Poisson παλινδρόμησης που θα προσαρμοστεί στα δεδομένα, θα έχει την μορφή:

$$\mu_i^* = n_i \mu_i = n_i exp(X_i^{'} \underline{\beta}) \Rightarrow ln(\frac{\mu_i^*}{n_i}) = X_i^{'} \underline{\beta} \tag{1}$$

όπου μ_i^* αντιστοιχεί στην αναμενόμενη τιμή της παρατήρησης i, η οποία εκφράζεται ανά n_i συμβόλαια. Αρχικά το μοντέλο της Poisson παλινδρόμησης θα προσαρμοστεί και στις 3 προαναφερόμενες μεταβλητές ώστε να γίνουν οι κατάλληλοι έλεγχοι σημαντικότητας για την κάθε μια από αυτές. Για τον σκοπό αυτό καλείται η συνάρτηση glm() της R και ορίζοται ως κατηγορική η μεταβλητή cartype μέσω της συνάρτησης factor(). Επιπλέον ορίζεται και το offset της παλινδρόμησης για τον αριθμό συμβολαίων. Ο κώδικας παρουσιάζεται στο τέλος της εργασίας. Για το κατά πόσο στατιστικά σημαντική είναι η κάθε μεταβλητή, πραγματοποιείται αυτοματοποιημένα από την τη συνάρτηση glm(), ο έλεγχος Wald, του οποίου η ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$Z = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\text{se}\left(\hat{\beta}_j\right)} \dot{\sim} N(0,1), j = 0, 1, 2, 3 \tag{2}$$

όπου για μηδενική υπόθεση H_0 θεωρείται ότι $\beta_j = 0$ και για την εναλλακτική H_1 ισχύει ότι $\beta_j \neq 0$. Οι p values που προκύπτουν από τον έλεγχο Wald είναι μικρότερες του 0.05 και πιο συγκεκριμένα είναι 2e-16, 0.001309, 6.03e-13, 4.64e-15 και 0.000215, για την agecat, την cartype σε κάθε κατηγορία και την district αντιστοίχως. Επομένως, σύμφωνα με αυτόν τον έλεγχο η ποσότητα των αποζημιώσεων εμφανίζει ισχυρή εξάρτηση από την ηλικία, την κατηγορία ασφαλίστρων αλλά και από την τοποθεσία κατοικίας του ασφαλιζόμενου.

Ο επόμενος έλεγχος που θα πραγματοποιηθεί στηρίζεται στην συνάρτηση Deviance η οποία ακολουθεί ασυμπτωτικά την κατανομή χ^2 και δίνεται από τη σχέση:

$$D(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = -2\{\ell(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - \tilde{\ell}\} \dot{\sim} \chi^2_{n-p} \tag{3}$$

όπου $\ell(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ είναι η πιθανοφάνεια του μοντέλου που εξετάζεται και $\tilde{\ell}$ η πιθανοφάνεια του κορεσμένου μοντέλου όπου για κάθε παρατήρηση αντιστοιχεί μια παράμετρος και έτσι δεν τίθεται κάποιος περιορισμός. Οι βαθμοί ελευθερίας της κατανομής χ^2 είναι n-p=32-(5+1)=26, καθώς το κορεσμένο μοντέλο έχει 32 παραμέτρους, όσα και τα δείγματα ενώ το προσαρμοσμένο έχει 6. Θεωρώντας ως H_0 το προσαρμοσμένο

μοντέλο και ως εναλλακτική υπόθεση H_1 το κορεσμένο, η p-value του ελέγχου ισούται με 0.02580847. Συνεπώς, η H_1 είναι στατιστικά σημαντική και έτσι το μοντέλο που προσαρμόζεται δεν είναι αρκετά ικανοποιητικό. Ωστόσο, επειδή η deviance ακολουθεί ασυμπτωτικά την χ^2 και τα δείγματα δεν είναι αρκετά, το συμπέρασμα αυτό είναι σχετικά επισφαλές. Συνεπώς, η μελέτη θα συνεχιστεί με το προσαρμοσμένο μοντέλο.

Επιπλέον, με χρήση της διαφοράς των deviance θα εξεταστεί πόσο αποτελεσματικά έχει προσαρμοστεί το μοντέλο στις τιμές. Θεωρώντας λοιπόν ως μηδενική υπόθεση H_0 ένα μοντέλο M_0 και ως εναλλακτική υπόθεση H_1 το πλήρες μοντέλο με τις 5 μεταβλητές M_1 (3 εκ των οποίων η μία είναι κατηγορική με 4 τιμές), στο οποίο το M_0 είναι εμφωλευμένο, τότε η διαφορά των συναρτήσεων Deviance ακολουθεί την κατανομή X_q^2, όπου q η διαφορά στον αριθμό των παραμέτρων μεταξύ των δύο μοντέλων. Η αντίστοιχη ελεγχοσυνάρτηση δίνεται από τη σχέση:

$$D\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_0\right) - D(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1) = -2\left(\hat{\ell}_0 - \hat{\ell}_1\right) \dot{\sim} \chi_q^2 \tag{4}$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση, ως M_0 θα θεωρηθεί το σταθερό μοντέλο, δηλαδή αυτό που δεν συμμετέχει καμία επεξηγηματική μεταβλητή και επομένως $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$. Συνεπώς, η διαφορά μεταξύ των παραμέτρων θα είναι q=5. Η διαφορά της deviance μεταξύ των δύο μοντέλων είναι 166.0446 και η p-value για την κατανομή χ_5^2 είναι σχεδόν μηδενική. Συνεπώς, είναι στατιστικά σημαντική η απόρριψη του M_0 και έτσι το M_1 παράγει αξιόπιστες προβλέψεις για τις αναμενόμενες τιμές της ποσότητας των αποζημιώσεων.

Το τελευταίο συμπέρασμα επιβεβαιώνεται χρησιμοποιώντας και βηματικές τεχνικές επιλογής μοντέλου με κριτήριο την ελαχιστοποίηση του AIC. Ειδικότερα, αξιοποιείται η συνάρτηση step() η οποία με backward elimination καταλήγει στο βέλτιστο μοντέλο με βάση την ελεγχοσυνάρτηση deviance της εξίσωσης 4 και την παράλληλη ελαχιστοποίηση του AIC. Το αποτέλεσμα του συγκεκριμένου ελέγχου καταλήγει πως πράγματι η πιθανοφάνεια μεγιστοποιείται για το πλήρες μοντέλο με τιμή AIC = 222.1.

Ερώτημα 2

Καθώς το βέλτιστο μοντέλο είναι το πλήρες και η κατανομή που ακολουθούν ασυμπτωτικά οι παράμετροι του μοντέλου είναι η κανονική, όπως καταδεικνύει η σχέση 2, τότε για α=0.05, κατασκευάζεται ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τον κάθε συντελεστή, όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 2. Ωστόσο, επειδή οι παράμετροι του μοντέλου επεξηγούν εκθετικά την εξαρτημένη μεταβλητή σύμφωνα με τη σχέση 1, οι τιμές που παρουσιάζονται στον πίνακα αντιστοιχούν στις εκθετικές τιμές των διαστημάτων εμπιστοσύνης. Επιπλέον στον Πίνακα 2 αναγράφεται και η εκθετική τιμή του κάθε συντελεστή $e^{\hat{\beta}_j}$

Παράμετρος	Τιμή $e^{\hat{\beta}_j}$	2.5%	97.5%
Πόλωση (Intercept)	0.1443921	0.1295741	0.1609045
factor(cartype)2	1.1761330	1.0653437	1.2984438
factor(cartype)3	1.4848997	1.3333892	1.6536260
factor(cartype)4	1.7602026	1.5280757	2.0275915
agecat	0.6864111	0.6290616	0.7489890
district	1.2418604	1.1072684	1.3928124

Πίνακας 2: εκτίμηση και 95% διαστήματα εμπιστοσύνης για τους εκθετικούς συντελεστές του μοντέλου

Για τους συντελεστές προκύπτουν οι παρακάτω ερμηνείες:

1. Εάν η κατηγορία ασφαλίστρου μεταβληθεί από την κατηγορία αναφοράς 1 στην κατηγορία 2, τότε η αναμενόμενη ποσότητα των αποζημιώσεων Υ, θα αυξηθεί κατά $100|1\text{-}1.176| = 17.6\%$.

2. Εάν η κατηγορία ασφαλίστρου μεταβληθεί από την κατηγορία αναφοράς 1 στην κατηγορία 3, τότε η αναμενόμενη ποσότητα των αποζημιώσεων Υ, θα αυξηθεί κατά $100|1\text{-}1.484| = 48.4\%$.

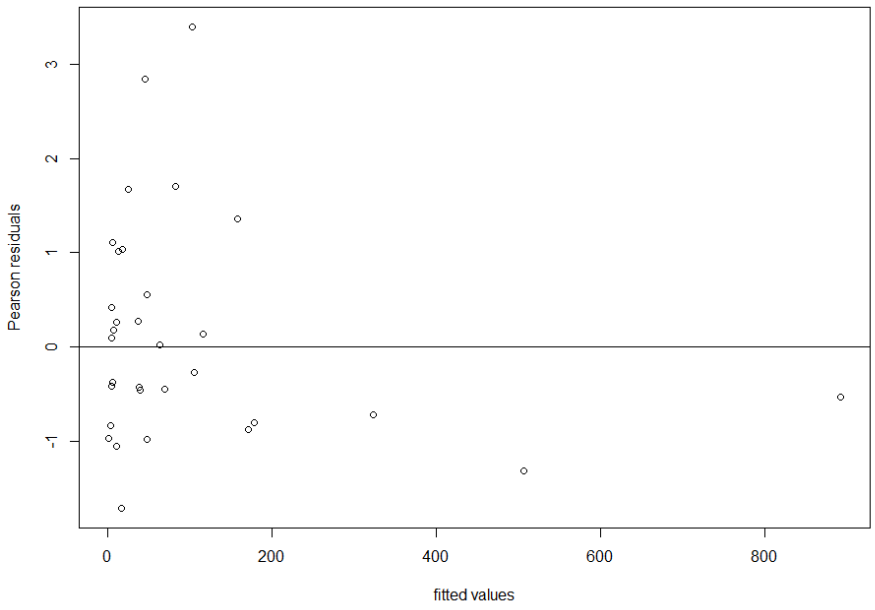
3. Εάν η κατηγορία ασφαλίστρου μεταβληθεί από την κατηγορία αναφοράς 1 στην κατηγορία 4, τότε η αναμενόμενη ποσότητα των αποζημιώσεων Υ, θα αυξηθεί κατά $100|1\text{-}1.760| = 76\%$.

4. Εάν η ηλικία του ασφαλιζόμενου μεταβληθεί από νέος σε μεγάλος, τότε τότε η αναμενόμενη ποσότητα των αποζημιώσεων Υ, θα μειωθεί κατά $100|1\text{-}0.686| = 31.4\%$

5. Εάν η περιοχή διαμονής του ασφαλιζόμενου μεταβληθεί από μια επαρχιακή πόλη στην Αθήνα, τότε τότε η αναμενόμενη ποσότητα των αποζημιώσεων Υ, θα αυξηθεί κατά $100|1\text{-}1.242| = 24.2\%$.

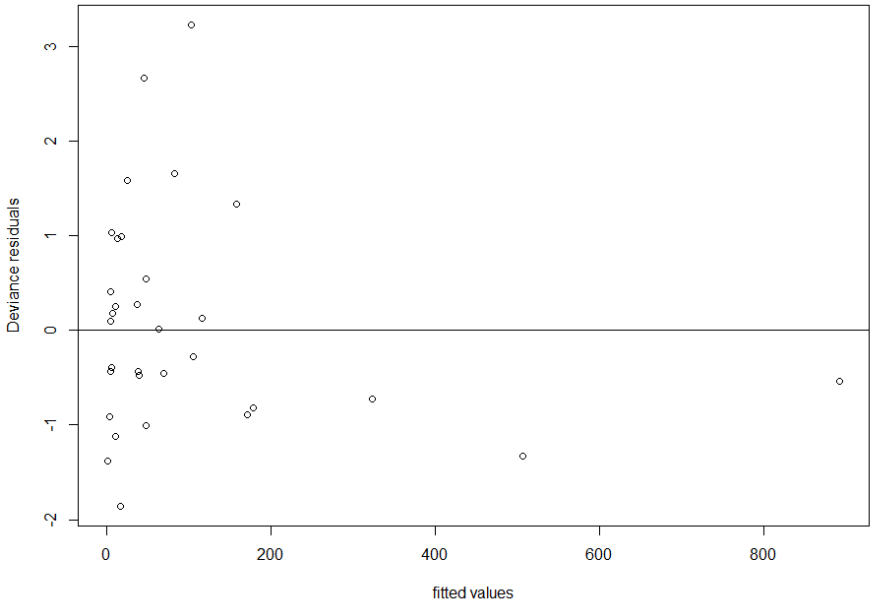
Ερώτημα 3

Για την καταλληλότητα του μοντέλου θα εξεταστούν τα υπόλοιπα Pearson καθώς επίσης και τα υπόλοιπα Deviance. Ειδικότερα, όπως παρουσιάζεται στα Γραφήματα 1 και 2 δεν εμφανίζεται κάποια εξάρτηση σχετικά με τις προσαρμοσμένες τιμές. Τόσο στα deviance υπόλοιπα όσο και στα pearson, οι περισσότερες τιμές εμφανίζονται στο εύρος (-2, 2). Ορισμένες ωστόσο παρατηρήσεις προκύπτουν εκτός αυτού του εύρους και αυτό αποτελεί πιθανώς ένδειξη για outliers. Οι παρατηρήσεις αυτές αντιστοιχούν στο 1ο και στο 11ο δείγμα.



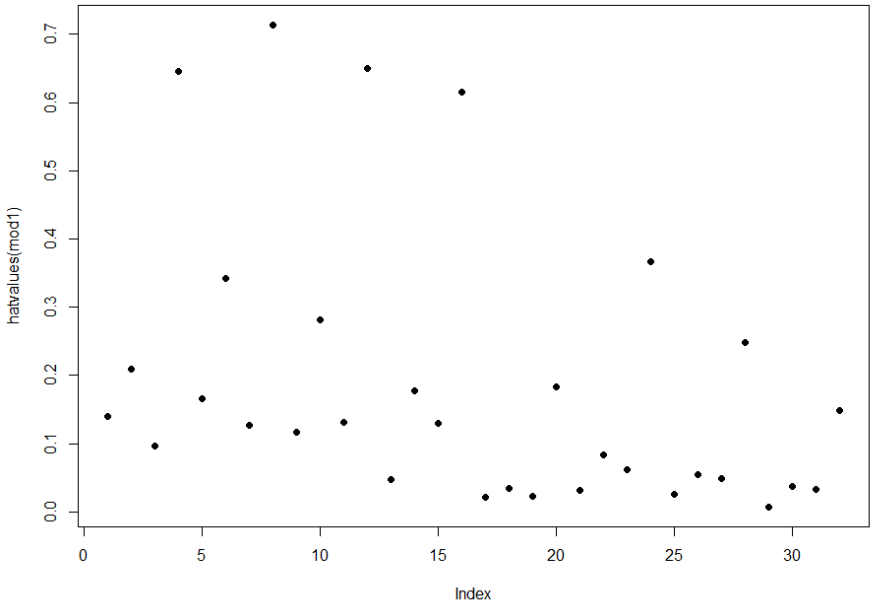
Εικόνα 1: Pearson Residuals diagnostics plot

Οι έλεγχοι για outliers συνεχίζονται με τον υπολογισμό των στοιχείων h_{ii}. Ειδικότερα, οι παρατηρήσεις που μπορούν να αποτελέσουν πιθανά σημεία επιρροής θα πρέπει να εμφανίζουν τιμές $h_{ii} > 2p/n = 0.375$, όπου $p = 6$ ο αριθμός των συντελεστών του μοντέλου poisson και $n = 32$ οι παρατηρήσεις του συνόλου των δεδομένων. Τα δείγματα που ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη αντιστοιχούν στις

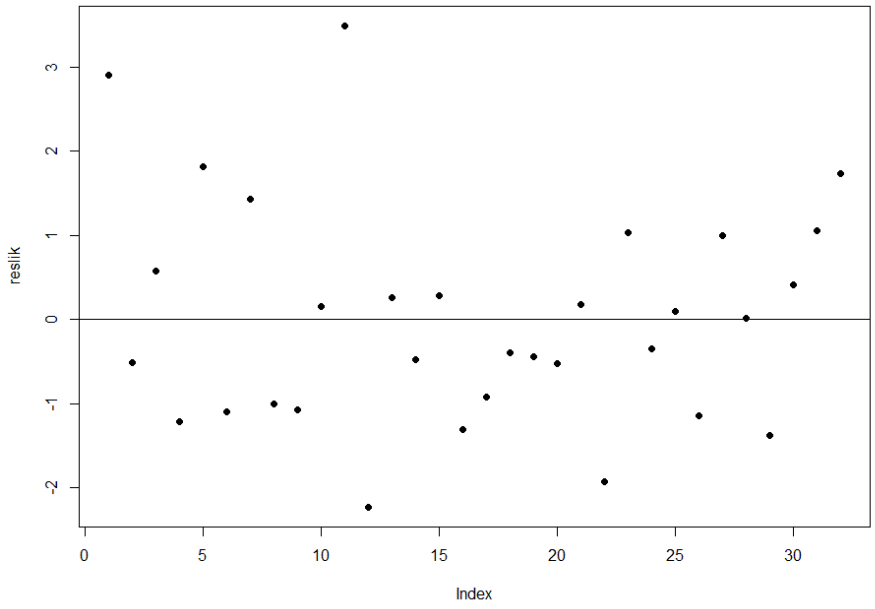


Εικόνα 2: Deviance Residuals diagnostics plot

παρατηρήσεις 4,8,12 και 16 όπως παρατηρείται και στο Γράφημα 3. Επιπροσθέτως, οι τιμές των h_{ii} επηρεάζουν και τα υπόλοιπα πιθανοφάνειας. Για τις συγκεκριμένες παρατηρήσεις ελέγχονται οι τιμές αυτών των υπολοίπων και παρατηρείται πως η υψηλότερη τιμή που εμφανίζεται με διαφορά είναι το 2.230321 για την παρατήρηση 12. Οι παρατηρήσεις που ξεπερνούν αυτή την τιμή για το υπόλοιπο είναι η 1η και η 11η, όπως παρουσιάζεται και στο Γράφημα 4. Το γεγονός αυτό συμφωνεί και με τις παρατηρήσεις στα υπόλοιπα Pearson και Deviance. Επομένως η 1η και η 11η παρατήρηση είναι σημεία επιρροής, ως προς τα υπόλοιπα πιθανοφάνειας, τα οποία εκφράζουν την μεταβολή της Deviance αν παραληφθεί από το μοντέλο η κάθε μια από αυτές τις παρατηρήσεις.

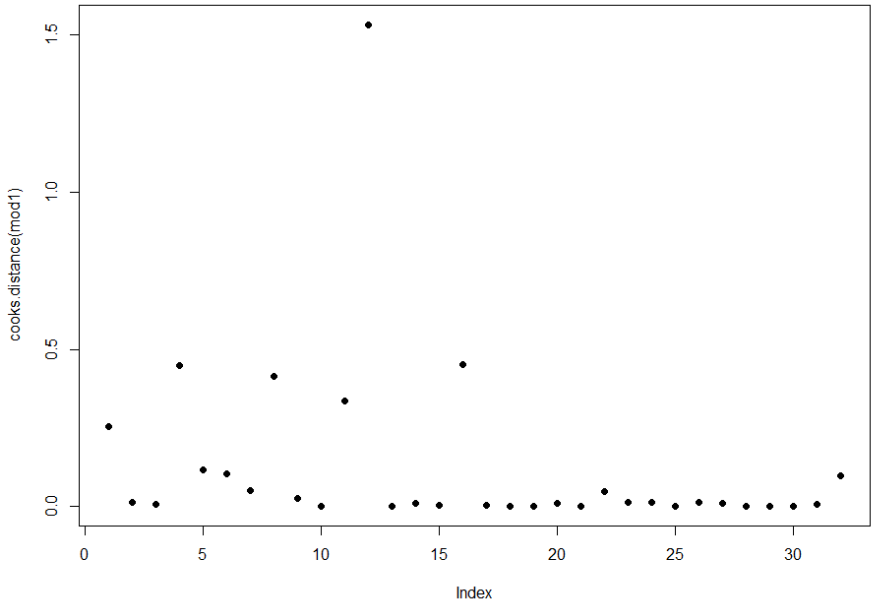


Εικόνα 3: Hat values



Εικόνα 4: Likelihood residuals diagnostics plot

Το ισχυρότερο όμως από τα σημεία επιρροής αποτελεί η 12η παρατήρηση καθώς προκύπτει και με βάση τον έλεγχο της απόστασης Cook, όπως παρουσιάζεται στο Γράφημα 5. Ειδικότερα, η απόσταση Cook για την συγκεκριμένη παρατήρηση είναι μεγαλύτερη του 1, το οποίο αποτελεί ισχυρή ένδειξη σημείου επιρροής. Επιπρόσθετα σε αυτό τον έλεγχο, συμφωνούν και οι έλεγχοι που πραγματοποιήθηκαν στα h_{ii} καθώς επίσης και στα υπόλοιπα πιθανοφάνειας.

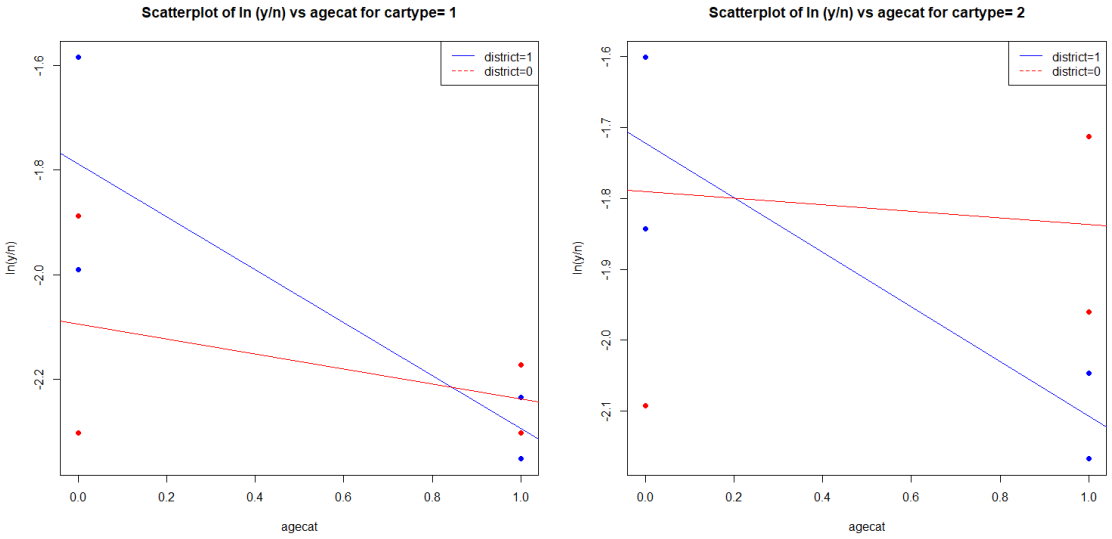


Εικόνα 5: Απόσταση Cook

Ερώτημα 4

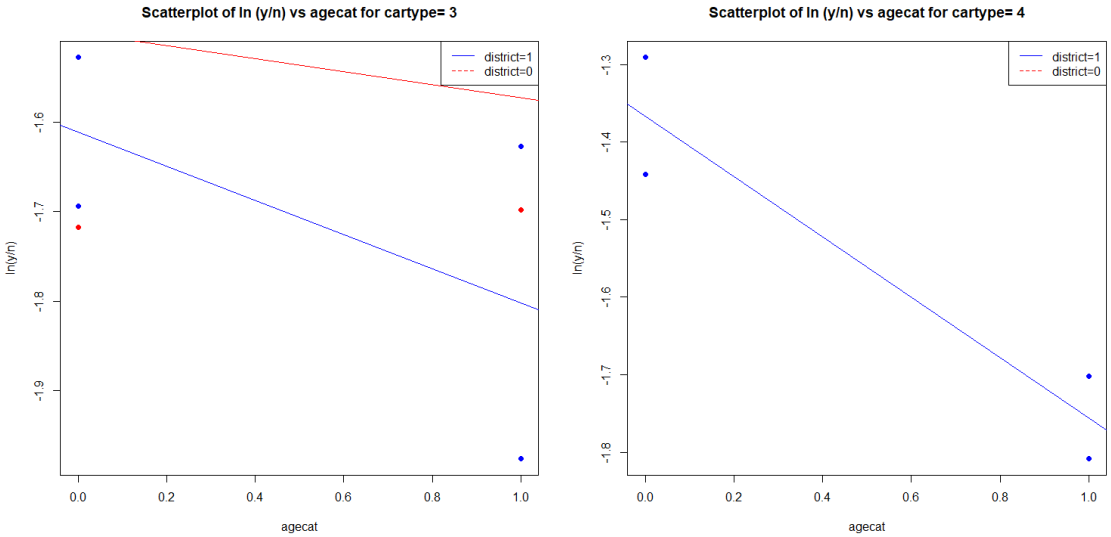
Το τελευταίο βήμα της ανάλυσης αφορά την εύρεση κατάλληλης αλληλεπίδρασης μεταξύ των μεταβλητών, η οποία θα περιγράφει αποτελεσματικότερα την σχέση του αριθμού των αποζημιώσεων Υ ανά αριθμό συμβολαίων n. Ειδικότερα εξετάστηκαν οι αλληλεπιδράσεις factor(cartype)*agecat, factor(cartype)*district και agecat*district, από τις οποίες μόνο η τελευταία προέκυψε οριακά στατιστικά σημαντική σύμφωνα με τον έλεγχο Wald. Ειδικότερα, η p-value του ελέγχου Wald για την νέα μεταβλητή agecat*district προκύπτει 0.05633, η οποία θα γίνει οριακά αποδεκτή. Ωστόσο, κατά την προσαρμογή του μοντέλου, ενώ το σύνολο των μεταβλητών συμεπιλαμβανομένης και της αλληλεπίδρασης προκύπτει στατιστικά σημαντικό, η μεταβλητή district δεν είναι στατιστικά σημαντική με p-value= 0.70125. Πάραυτα, το μοντέλο θα διατηρηθεί καθώς η σημαντικότητα της district προκύπτει μέσω της αλληλεπίδρασης. Ειδικότερα, το εκθετικό του συντελεστή για την αλληλεπίδραση είναι 1.387 και επομένως ο τόπος κατοικίας και συγκεκριμένα η Αθήνα (district=1), θα αυξήσει τις αποζημιώσεις κατά 38.7% αν ο οδηγός είναι μεγάλος σε ηλικία σε σύγκριση με τον νεαρό.

Στα διαγράμματα 6 και 7 παρουσιάζεται γραφικά η διαφορετική πτωτική τάση του λογαρίθμου των αποζημιώσεων ανά συμβόλαιο σε σχέση με την ηλικία(agecat) του ασφαλιζόμενου ανάλογα με το αν διαμένει στην Αθήνα (district=1) ή όχι (district=0). Οι τέσσερις γραφικές παραστάσεις αντιστοιχούν στα 4 διαφορετικά είδη συμβολαίου. Καθώς οι δύο γραφικές παραστάσεις για την διαμονή και μη στην Αθήνα παρουσιάζουν σημείο τομής, πράγματι η αλληλεπίδραση agecat*district είναι σημαντική. Στην γραφική παράσταση για το την κατηγορική μεταβλητή cartype=4, δεν υπήρχαν αποζημιώσεις για την επαρχεία (district=0).



(a) (b)

Εικόνα 6: Scatterplot του ln (y/n) σε σχέση agecat για cartype=1,2



(a) (b)

Εικόνα 7: Scatterplot του ln (y/n) σε σχέση agecat για cartype=3,4

Άσκηση 2

Ερώτημα 1

Στην άσκηση αυτή θα μελετηθεί η εξάρτηση της πιθανότητας ανταπόκρισης μιας θεραπείας για την λευχαιμία από τις συμμεταβλητές age, smear, infiltrate, index, blasts και temperature. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθεί το μοντέλο της λογιστικής παλινδρόμησης, το οποίο θα προσαρμοστεί σύμφωνα με τη σχέση:

$$\ln\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_\kappa x_{ik}, i = 1, \ldots, n \tag{5}$$

όπου η πιθανότητα ανταπόκρισης p_i στη θεραπεία προκύπτει από τη σχέση:

$$p_i = p_{\mathbf{x}_i} = \frac{\exp\left(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_k x_{ik}\right)}{1 + \exp\left(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_k x_{ik}\right)} \tag{6}$$

Ο στόχος είναι η εύρεση του καλύτερου δυνατού μοντέλου, δηλαδή του αριθμού των παραμέτρων που περιγράφουν την εξαρτημένη δυαδική μεταβλητή response. Η μεταβλητή αυτή ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με παράμετρο p, την πιθανότητα της ανταπόκρισης στην θεραπεία. Οι συμμεταβλητές του προβλήματος και η σημασία τους παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.

Όνομα Μεταβλητής	Περιγραφή
age	ηλικία του ασθενής
smear	ποσοστό επίστρωσης βλαστοκυττάρων
infiltrate	ποσοστό κυττάρων στο μυελό των οστών
index	δείκτης κυττάρων λευχαιμίας
blasts	βλαστοκύτταρα
temperature	υψηλότερη θερμοκρασία πριν τη θεραπεία (x10° F)

Πίνακας 3: Μεταβλητές προς προσαρμογή

Αρχικά, θα προσαρμοστεί το μοντέλο της λογιστικής παλλινδρόμησης στο σύνολο των συμμεταβλητών που αναφέρθηκαν προκειμένου να ελεγχθεί εάν είναι στατιστικώς σημαντικές για το μοντέλο. Ο κώδικας παρουσιάζεται αναλυτικά στο τέλος της εργασίας. Σύμφωνα με τον έλεγχο Wald για την κάθε παράμετρο $\hat{\beta}_j$ του μοντέλου προκύπτει πως μόνο για τις μεταβλητές age, index, temperature και τον σταθερό όρο απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση για τον μηδενισμό των συντελεστών τους με p-values 0.02714, 0.00269, 0.01448 και 0.01588 αντίστοιχα. Επομένως, το μοντέλο με τις 6 επεξηγηματικές μεταβλητές δεν είναι το βέλτιστο. Αυτό, επίσης επιβεβαιώνεται και μέσω της σύγκρισης της ελεγχοσυνάρτησης Deviance για την πρόσθεση των μεταβλητών στο μοντέλο. Ειδικότερα, μέσω της εντολής anova() για το μοντέλο με τις 6 επεξηγηματικές μεταβλητές και με βάση των έλεγχο χ^2 ελέγχεται η μεταβολή της Deviance με την πρόσθεση της κάθε μεταβλητής. Επιπλέον και αυτός ο έλεγχος καταδεικνύει πως οι μοναδικές στατιστικά σημαντικές μεταβλητές είναι αυτές που προέκυψαν από τον έλεγχο Wald. Επομένως, κρίνεται απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν βηματικές τεχνικές για την επιλογή του βέλτιστου μοντέλου.

Η επιλογή του βέλτιστου μοντέλου θα εξεταστεί με χρήση της εντολής step() τόσο με βάση το forward όσο και με βάση το backward κριτήριο. Για τον έλεγχο της σημαντικότητας των μεταβλητών αξιοποιείται η ελεγχοσυνάρτηση Deviance και ο έλεγχος χ^2 ενώ για την επιλογή του βέλτιστου μοντέλου χρησιμοποιείται το κριτήριο AIC. Και οι δύο μέθοδοι καταλήγουν στο ίδιο μοντέλο σύμφωνα με το οποίο η εξαρτημένη μεταβλητή response και κατ' επέκταση η σχετική πιθανότητα ανταπόκρισης

στη θεραπεία εξαρτώνται από της συμμεταβλητές age, infiltrate, index, temperature με αντίστοιχο AIC=50.14. Ωστόσο, η συμμεταβλητή infiltrate δεν προκύπτει στατιστικά σημαντική, καθώς η p-value του ελέγχου Wald είναι 0.10077 επομένως δεν μπορεί να απορριφθεί η υπόθεση πως η μεταβλητή δεν ανήκει στο μοντέλο. Συνεπώς, θα πρέπει να μελετηθεί το μοντέλο το οποίο περιέχει μόνο τις μεταβλητές age, index και temperature.

Αρχικά, το AIC του μοντέλου M_1 = (age, index, temperature) προκύπτει στα 51.26538, το οποίο ενώ είναι μεγαλύτερο από το AIC=50.14 του M_2 = (age, index, temperature, infiltrate), η διαφορά δεν είναι αξιοσημείωτη. Επιπλέον, θα εξεταστεί η πρόσθεση της μεταβλητής infiltrate αυστηρά με βάση τον έλεγχο χ^2. Ειδικότερα, για τα δύο μοντέλα $M_1 \subset M_2$, αντιστοιχίζεται η μηδενική υπόθεση H_0 στο M_1 και η εναλλακτική υπόθεση H_1 στο M_2. Η μεταβολή της deviance είναι:

$$D(M_1) - D(M_2) = 43.265 - 40.136 = 3.1292 \tilde{\sim} \chi^2_1 \tag{7}$$

και η p-value του ελέγχου είναι $0.0769 > 0.05$. Επομένως, η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται και συνεπώς με βάση το έλεγχο deviance διατηρείται το μοντέλο M_1 = (age, index, temperature). Η συγκεκριμένη μελέτη πραγματοποιήθηκε μέσω της εντολής anova() για τα μοντέλα M_1 και M_2 με βάση τον έλεγχο χ^2. Επιπλέον για το μοντέλο M_1 πραγματοποιείται και έλεγχος για την μεταβολή της deviance σε σχέση με το σταθερό μοντέλο M_0, όπου $M_0 \subset M_1$, με στόχο να εξεταστεί η καλή προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα. Η p-value του ελέγχου είναι 5.195202e-06 και επομένως το μοντέλο M_1 θα διατηρηθεί για την λογιστική παλινδρόμηση των συγκεκριμένων δεδομένων.

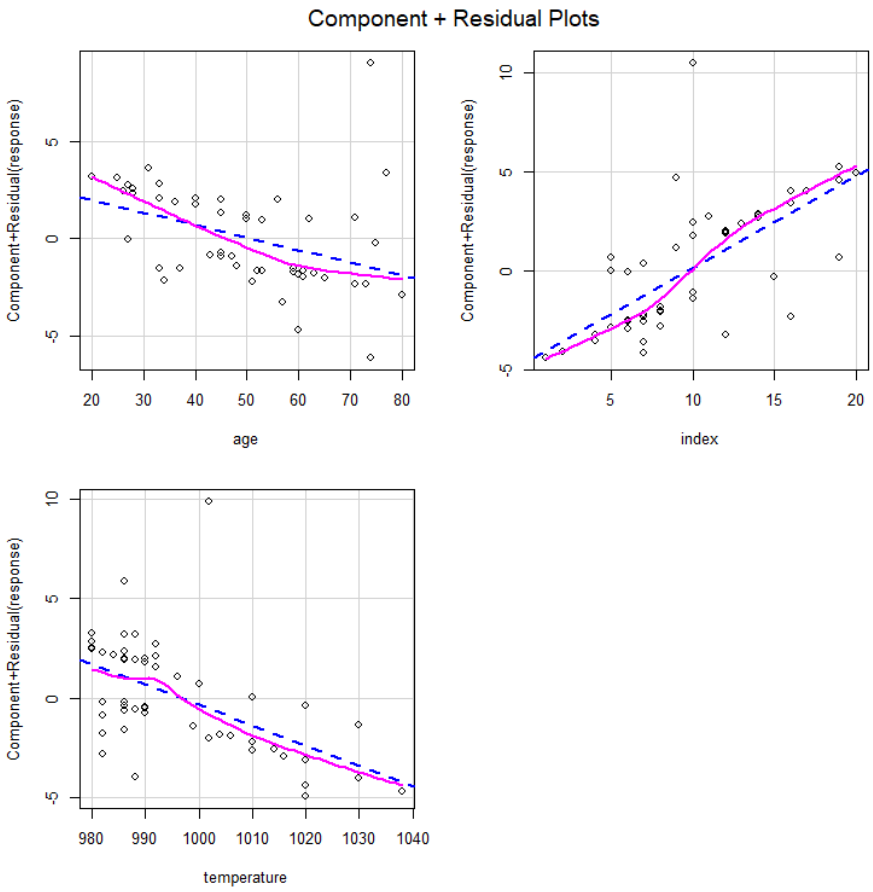
Ερώτημα 2

Για το μοντέλο M_1 = (age, index, temperature) θα δημιουργηθούν οι γραφικές παραστάσεις των μερικών υπολοίπων, των υπολοίπων Deviance με την ημι-κανονική κατανομή, τα index plots των hii και των αποστάσεων Cook για την ανίχνευση outliers, καθώς επίσης και των υπολοίπων πιθανοφάνειας.

Αρχικά, εξετάζοντας τα διαγράμματα μερικών υπολοίπων στην Εικόνα 8 παρατηρείται πως καμία από τις μεταβλητές που χρησιμοποιήθηκαν δεν χρειάζεται κάποιον μετασχηματισμό και επομένως, ο λογάριθμος την σχετικής πιθανότητας ανταπόκρισης στην θεραπεία εξαρτάται γραμμικά από αυτές. Ειδικότερα, για κάθε μια από της μεταβλητές, πραγματοποιείται λογιστική παλινδρόμηση ως προς τις υπόλοιπες μεταβλητές του μοντέλου και τα υπόλοιπα που προκύπτουν απεικονίζονται συναρτήσει της μεταβλητής που απέχει από το μοντέλο. Εάν η εξάρτηση που εμφανίζεται είναι γραμμική, το οποίο συμβαίνει σε αυτή την περίπτωση και για τις τρεις μεταβλητές, τότε οι μεταβλητές δεν χρειάζεται να υποστούν κάποιο μετασχηματισμό.

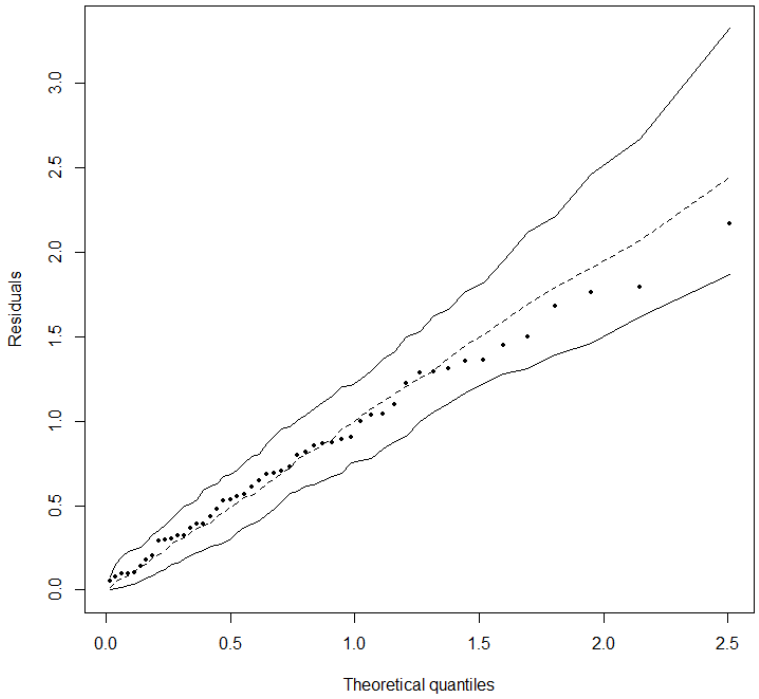
Στη συνέχεια εξετάζεται η προσαρμογή του μοντέλου με βάση το διάγραμμα της Ημι-κανονικής κατανομής, το οποίο παρουσιάζεται στην Εικόνα 9. Καθώς, το σύνολο των σημείων εμφανίζεται εντός του simulation envelope, τότε το μοντέλο έχει προσαρμοστεί αποτελεσματικά στα δεδομένα. Επιπλέον, η απουσία σημείων με μεγάλη διασπορά δηλώνει επίσης και την πιθανή απουσία outliers στα συγκεκριμένα δεδομένα για το μοντέλο αυτό. Όμως για την ανίχνευση outliers θα εξεταστούν επιπρόσθετα τα hat values και οι αποστάσεις Cook της κάθε παρατήρησης.

Η συστηματικότερη ανίχνευση πιθανών outliers ξεκινά με τη μελέτη των hat values. Ειδικότερα, το κατώφλι ώστε μια παρατήρηση να θεωρηθεί πιθανό outlier είναι να ισχύει $h_{ii} > 2p/n = 2 * 4/51 =$

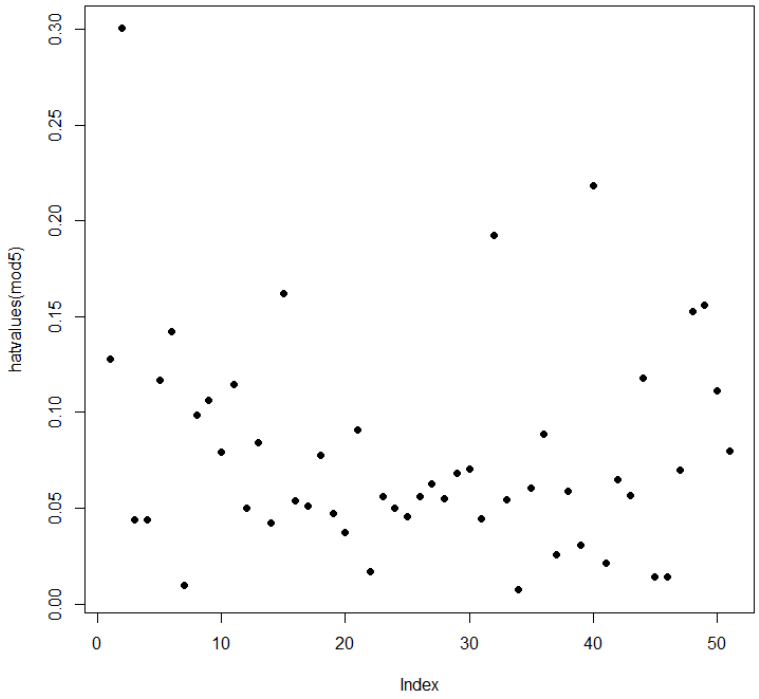


Εικόνα 8: Partial residual plots για το μοντέλο με τις μεταβλητές age, index, temperature

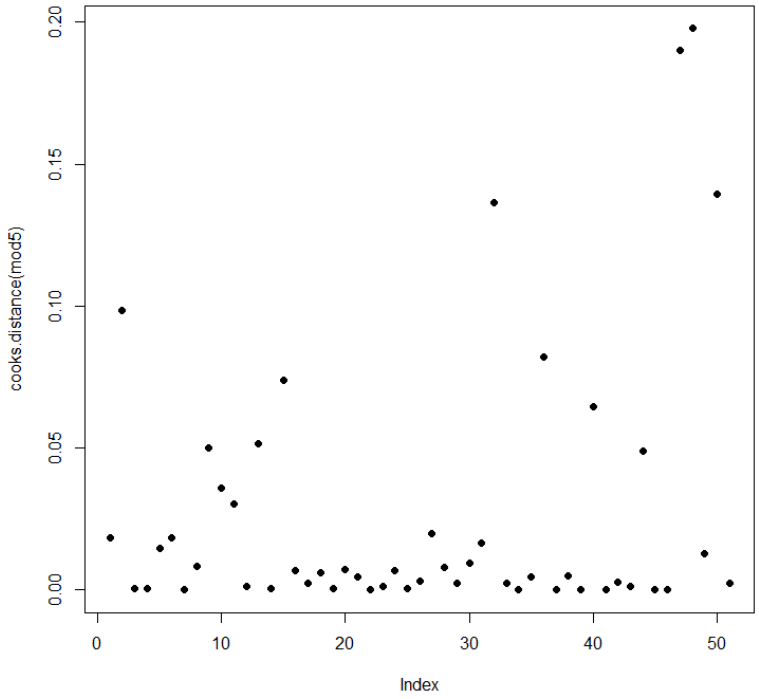
0.1568627. Για το συγκεκριμένο σέτ δεδομένων, σύμφωνα και με το Γράφημα 10, η συνθήκη αυτή ισχύει για τις παρατηρήσεις 2, 15, 32 και 40, τις οποίες θα θεωρήσουμε πιθανά outliers. Ωστόσο, αυτό δεν επιβεβαιώνεται από το διάγραμμα των αποστάσεων Cook καθώς όπως παρατηρείται στην Εικόνα 11, καμία από τις παρατηρήσεις δεν υπερβαίνει την τιμή 1. Συνεπώς, σύμφωνα με το μέτρο της απόστασης Cook, η αφαίρεση καμίας από τις παρατηρήσεις από το μοντέλο δεν θα επηρεάσει σημαντικά την εκτίμηση των παραμέτρων του. Τέλος, οι παρατηρήσεις επιβεβαιώνονται και από τα υπόλοιπα πιθανοφάνειας τα οποία παρουσιάζονται στην Εικόνα 12 και εκφράζουν την μεταβολή της deviance αν αφαιρεθεί από το μοντέλο η i-οστή παρατήρηση. Ειδικότερα οι περισσότερες παρατηρήσεις παρουσιάζουν υπόλοιπα στο εύρος [-1.5, 1.5] με ομοιόμορφη κατανομή εντός αυτού του εύρους. Οι παρατηρήσεις που το ξεπερνούν ελάχιστα είναι οι 13, 32, 36, 47, 48, 50 αλλά η απόκλιση δεν είναι σημαντική όπως παρουσιάζεται και στο γράφημα. Συνεπώς, η αφαίρεση καμίας από τις παρατηρήσεις δεν θα μεταβάλει σημαντικά την Deviance και άρα δεν προκύπτει κάποιο ισχυρά σημαντικό σημείο επιρροής.



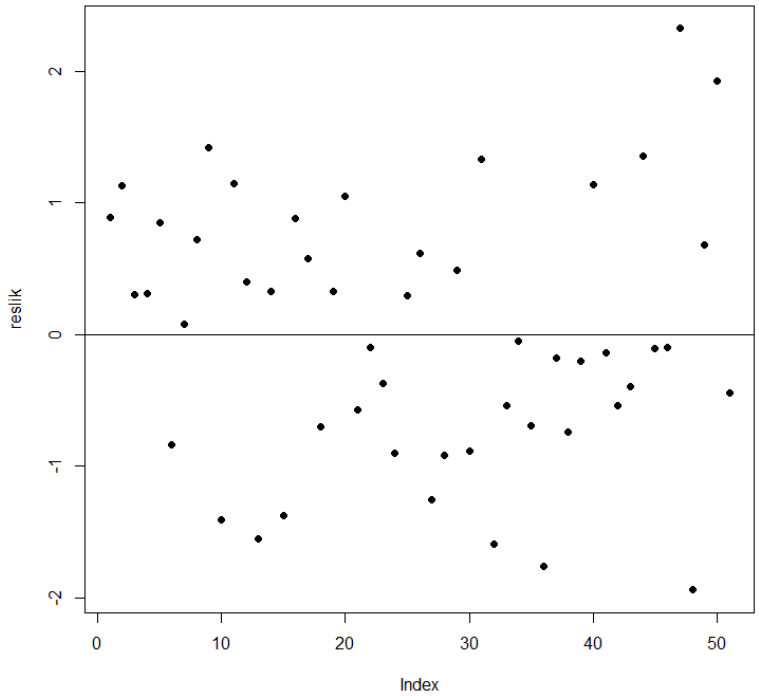
Εικόνα 9: Deviance Residuals με την ημι-κανονική κατανομή



Εικόνα 10: Hat values για το μοντέλο με τις μεταβλητές age, index, temperature



Εικόνα 11: Απόσταση Cook για το μοντέλο με τις μεταβλητές age, index, temperature



Εικόνα 12: Υπόλοιπα πιθανοφάνειας για το μοντέλο με τις μεταβλητές age, index, temperature

Ερώτημα 3

Για την κατασκευή ενός 95%, δηλαδή για α=0.05, διαστήματος εμπιστοσύνης για τους συντελεστές του μοντέλου αξιοποιείται η σχέση:

$$\hat{\beta}_j \pm z_{\alpha/2}\,\mathrm{se}\left(\hat{\beta}_j\right) \tag{8}$$

και καθώς αυτό που χρήζει ερμηνείας σύμφωνα με τη σχέση 5, δεν είναι ο λογάριθμος αλλά η σχετική πιθανότητα ανταπόκρισης στη θεραπεία, τότε θα πρέπει το διάστημα που θα βρεθεί καθώς επίσης και οι εκτιμημένες τιμές των παραμέτρων να τοποθετηθούν εντός εκθετικού. Ο κώδικας παρουσιάζεται στο τέλος της εργασίας και τα αποτελέσματά του εμφανίζονται στον Πίνακα 4.

Παράμετρος	Τιμή	2.5%	97.5%
Πόλωση (Intercept)	8.956604e+37	5.889831e+07	1.362021e+68
age	0.9431767	0.8970617	0.9916623
index	1.469506	1.158070	1.864695
temperature	0.9148701	0.8524284	0.9818857

Πίνακας 4: εκτίμηση και 95% διαστήματα εμπιστοσύνης για τους εκθετικούς συντελεστές του μοντέλου λογιστικής παλινδρόμησης

Για τις ερμηνείες των συντελεστών προκύπτει ότι:

1. Εάν η ηλικία (age) του ασθενή αυξηθεί κατά μία μονάδα τότε η σχετική πιθανότητα ανταπόκρισης στη θεραπεία θα μειωθεί κατά 100|1-0.9431767| = 5.7%.

2. Εάν ο δείκτης κυττάρων λευχαιμίας (index) αυξηθεί κατά μία μονάδα, τότε η σχετική πιθανότητα ανταπόκρισης στη θεραπεία του ασθενούν θα αυξηθεί κατά 100|1-1.469506| = 46.9%.

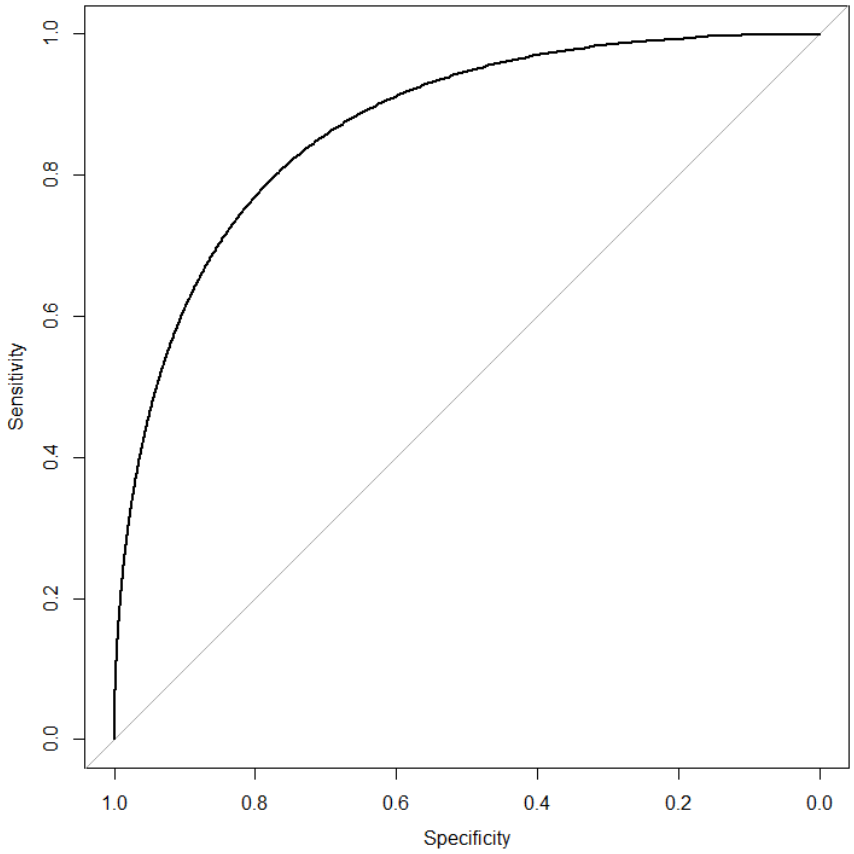
3. Εάν η υψηλότερη θερμοκρασία του ασθενούς πριν τη θεραπεία (temperature) αυξηθεί κατά μία μονάδα, τότε η σχετική πιθανότητα ανταπόκρισης στη θεραπεία του ασθενούς θα μειωθεί κατά 100|1-0.9148701| = 8.5%.

Ερώτημα 4

Καθώς ο στόχος της λογιστικής παλινδρόμησης είναι να παράγει θετικές και αρνητικές προβλέψεις με βάση την κατάλληλα εκτιμημένη πιθανότητα επιτυχίας $\hat{p}$:

$$\hat{p} = \widehat{P}(Y = 1) = \frac{e^{\mathbf{x}'\hat{\boldsymbol{\beta}}}}{1 + e^{\mathbf{x}'\hat{\beta}}} \tag{9}$$

τότε θα πρέπει να οριστεί ένα κατώφλι p_0 για την πιθανότητα αυτή. Ειδικότερα για τιμές της $\hat{p} > p_0$, προβλέπεται ότι $\Upsilon = 1$ και αντίθετα προβλέπεται $\Upsilon = 0$. Η προβλεπτική ικανότητα του μοντέλου αξιολογείται με βάση τα μέτρα της ευαισθησίας, η οποία είναι το ποσοστό των αληθώς θετικών προβλέψεων και της ειδικότητας, δηλαδή το ποσοστό των αληθώς αρνητικών προβλέψεων. Ωστόσο, τα μέτρα αυτά θα πρέπει να υπολογιστούν για πολλαπλές τιμές κατωφλίου πιθανότητας p_0 και να προκύπτουν υψηλά για τα περισσότερα από αυτά, προκειμένου το μοντέλο να έχει τη δυνατότητα γενίκευσης και να είναι αποτελεσματικό. Το μέτρο που πιστοποιεί ότι πράγματι υπάρχουν αρκετά p_0 για τα οποία τα μέτρα ευαισθησίας και ειδικότητας είναι υψηλά είναι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη ROC (Reciever-Operator Curve) ή με συντομία AUC(Area Under the Curve). Οσο πιο κοντά στη μονάδα είναι το AUC, τόσο πιο αξιόπιστο είναι το μοντέλο. Όπως παρουσιάζεται στο Γράφημα 13, η καμπύλη ROC προσεγγίζει την άνω αριστερή γωνία του διαγράμματος, η οποία αντιστοιχεί στην μεγιστοποίηση των ανωτέρω μέτρων, χωρίς ωστόσο να την φτάνει. Ειδικότερα, το AUC ισούται με 0.8686, το οποίο είναι μια αρκετά υψηλή τιμή και συνεπώς υπάρχει μαι ποικιλία κατωφλίων πιθανότητας για τα οποία το μοντέλο πραγματοποιεί αληθείς προβλέψεις.



Εικόνα 13: Καμπύλη ROC για το μοντέλο με τις μεταβλητές age, index, temperature. Προκύπτει ότι AUC = 0.8686

Άσκηση 1 – Κωδικας στην R

```
cdat<-read.table("C:/Users/user/Desktop/dsml/statistical modeling/hw3/asfalies.txt", header=TRUE)
cdat
attach(cdat)

mod1<-glm(y~ factor(cartype)+ agecat + district + offset(log(n)), family=poisson)

#wald test in summary
summary(mod1)
exp(coef(mod1))

#deviance test with saturated model
pvalue_sat = 1 - pchisq(mod1$deviance,mod1$df.residual)
pvalue_sat

#deviance test with null model
DDEV = mod1$null.deviance - mod1$deviance
df = mod1$df.null - mod1$df.residual
pvalue = 1 - pchisq(DDEV,df)
data.frame(DDEV, df, pvalue)

step(mod1,method="backward", test="Chisq")

confint.default(mod1)
exp(confint.default(mod1))


res.deviance<-residuals(mod1)
res.pearson<-residuals(mod1,type="pearson")
##
qqnorm(res.pearson,pch=19)
qqline(res.pearson)

res.deviance[res.deviance>2]
res.pearson[res.pearson>2]


plot(fitted.values(mod1),res.deviance,xlab='fitted values', ylab='Deviance residuals')
abline(h=0)

plot(fitted.values(mod1),res.pearson,xlab='fitted values', ylab='Pearson residuals')
abline(h=0)

reslik<-rstudent(mod1)

plot(hatvalues(mod1), reslik, pch=19)
abline(h=0)

plot(reslik, pch=19)
abline(h=0)

plot(cooks.distance(mod1), pch=19)
plot(hatvalues(mod1), pch=19)

hatvalues(mod1)[hatvalues(mod1)>0.375]
cooks.distance(mod1)[cooks.distance(mod1)>1]
reslik[c(4,8,12,16)]
reslik[abs(reslik) > 2.230321]
##
#αλληλεπίδρασεις
mod2<-glm(y~ factor(cartype) + factor(cartype)*agecat + agecat + district + offset(log(n)), family=poisson)
mod3<-glm(y~ factor(cartype) + factor(cartype)*district + agecat + district + offset(log(n)), family=poisson)
mod4<-glm(y~ factor(cartype)+ agecat*district + agecat + district + offset(log(n)), family=poisson)
summary(mod2)
summary(mod3)
summary(mod4)

exp(coef(mod4))
```

```
minor = cdat[-c(29),]#to remove a zero value of y- non infinity values in log
x1 <- minor$cartype
y <- minor$y
n <- minor$n
x2 <- minor$agecat
x3 <- minor$district

for (i in c(1,2,3,4)) {
  y1<-y[x1==i & x3==0]
  n1<-n[x1==i & x3==0]
  y2<-y[x1==i & x3==1]
  n2<-n[x1==i & x3==1]
  yy1 =log(y1/n1)
  yy2 =log(y2/n2)


  xx1<-x2[x1==i & x3==0]
  xx2<-x2[x1==i & x3==1]

  plot(xx1,yy1, main=sprintf(paste("Scatterplot of ln (y/n) vs agecat for cartype=", i)), xlab="agecat",
      ylab="ln(y/n)", col="blue",pch=19,xlim=c(min(xx1),max(xx1)), ylim=c(min(yy1),max(yy1)))
  abline(lm(yy1~xx1), col="blue")

  points(xx2,yy2,col="red",pch=19,xlim=c(min(xx2),max(xx2)), ylim=c(min(yy2),max(yy2)))
  abline(lm(yy2~xx2), col="red")

  legend("topright", c("district=1", "district=0"), col=c("blue","red"), lty=1:4)

}
```

Άσκηση 2 – Κωδικας στην R

```
cdat<-read.table("C:/Users/user/Desktop/dsml/statistical modeling/hw3/leukaemia.txt", header=TRUE)
cdat
attach(cdat)
library(car)

##
mod1 = glm(response ~ age + smear + infiltrate + index + blasts + temperature, family=binomial)
summary(mod1)

DDEV = mod1$null.deviance - mod1$deviance
df = mod1$df.null - mod1$df.residual
pvalue = 1 - pchisq(DDEV,df)
data.frame(DDEV, df, pvalue)

anova(mod1,test="Chisq")

##

mod2 = glm(response ~ 1, family=binomial)
mod3 = step(mod2,response ~ age + smear + infiltrate + index + blasts + temperature,method="forward", test="Chisq")
mod4 = step(mod1,method="backward", test="Chisq")
summary(mod4)
mod5 = glm(response ~ age + index + temperature, family=binomial)
summary(mod5)
AIC(mod5)

##
anova(mod4,mod5,test = "Chisq")
##
DDEV = mod5$null.deviance - mod5$deviance
df = mod5$df.null - mod5$df.residual
pvalue = 1 - pchisq(DDEV,df)
data.frame(DDEV, df, pvalue)

##
```

```
crPlots(mod5)

res.deviance<-residuals(mod5)
library(hnp)
hnp(res.deviance,pch=19)

reslik<-rstudent(mod5)
plot(reslik, pch=19)
abline(h=0)

plot(cooks.distance(mod5), pch=19)
plot(hatvalues(mod5), pch=19)
hatvalues(mod5)[hatvalues(mod5)>2*4/51]

###
confint.default(mod5)
exp(confint.default(mod5))
exp(coef(mod5))
##
library(stats)
roc(response, fitted.values(mod5), smooth=TRUE, plot=TRUE)
```