ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ - Εξεταστική Ιούνη 2011

Διάρκεια Εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά.

Άσκηση 1 Θεωρήστε τυχαίο περίπατο $X_n = X_0 + Y_1 + \cdots + Y_n$, $n = 1, 2, \ldots$ με $X_0 = 0$, και αριθμούς $\mathrm{a}, b > 0$. Έστω $\tau = \inf\{n : X_n \notin (-\mathrm{a}, b)\}$ ο χρόνος πρώτης εξόδου από το $(-\mathrm{a}, b)$. Αν g είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση των ανεξάρτητων τ.μ. Y_i με πεδίο ορισμού $S \subset \mathbb{R}$

α. Δείξτε ότι $\mathbb{E}\left[\left(g(s)\right)^{-\tau} e^{sX_\tau}\right] = 1, \ \forall s \in S$.
β. Αν $\mu = \mathbb{E}[Y_i]$ δείξτε ότι $\mathbb{E}[X_\tau] = \mu \mathbb{E}[\tau]$.
γ. Αν $\sigma^2 = \mathrm{Var}[Y_i]$ και $\mu = 0$ δείξτε ότι $\mathbb{E}[X_\tau^2] = \sigma^2 \mathbb{E}[\tau]$.
δ. Αν $X_\tau \in \{-\mathrm{a}, b\}$ και α, β οι πιθανότητες απορρόφησης στα $-\mathrm{a}, b$ αντίστοιχα (δηλαδή $\alpha = \mathbb{P}[X_\tau = -\mathrm{a}]$, $\beta = \mathbb{P}[X_\tau = b]$), δείξτε ότι

$$\mathbb{E}[\tau] = \begin{cases} \frac{-\alpha \mathrm{a} + \beta b}{\mu} & , \mu \neq 0 \\ \frac{\alpha \mathrm{a}^2 + \beta b^2}{\sigma^2} & , \mu = 0. \end{cases}$$

Άσκηση 2 Έστω τυχαίος περίπατος $X_n = X_0 + Y_1 + \cdots + Y_n$, $n = 1, 2, \ldots$, όπου $X_0 = 0$ και $Y_i = 1$ ή -1 ή 0 με πιθανότητες $1/4, 1/2, 1/4$ αντίστοιχα.

α. Να βρείτε τις πιθανότητες απορρόφησης α, β στα -4 και 2 αντίστοιχα.
β. Να βρείτε την $\mathbb{E}[\tau]$ όπου $\tau = \inf\{n : X_n \notin (-4, 2)\}$.

Άσκηση 3 Θεωρήστε μια μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}_{n \geq 0}$ στο σύνολο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

α. Ταξινομήστε τις καταστάσεις σε κλάσεις επικοινωνίας. Ποιες κλάσεις είναι παροδικές και ποιες επαναληπτικές;
β. Αν $X_0 = 4$ υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}[X_n = 4]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ βρείτε την $P[X_n=4]$
γ. Αν $X_0 = 1$ υπολογίστε την πιθανότητα η αλυσίδα να βρεθεί κάποια στιγμή στο 3. Συγκεκριμένα αν S είναι ο χρόνος άφιξης στο 3, $S = \inf\{k \geq 0 : X_k = 3\}$ υπολογίστε την $\mathbb{P}_1[S < +\infty]$.
δ. Αν $X_0 = 2$ και T είναι ο χρόνος άφιξης της αλυσίδας στο σύνολο $\{4, 5\}$, δηλαδή $T = \inf\{k \geq 0 : X_k \in \{4, 5\}\}$ υπολογίστε την μέση τιμή του T.

Άσκηση 4 Ο κύριος Χ αντιμετωπίζει ένα σοβαρό πρόβλημα μνήμης. Κάθε νύχτα ξεχνά ένα μέρος από τα πρόσωπα που γνωρίζει. Συγκεκριμένα, αν θυμάται i πρόσωπα πριν πέσει για ύπνο, το πλήθος των προσώπων που εξακολουθεί να θυμάται μόλις ξυπνήσει μπορεί να είναι $0, 1, 2, \ldots, i$ με πιθανότητα $1/(i+1)$ το καθένα. Ο γιατρός που τον παρακολουθεί του μαθαίνει κάθε μέρα ένα πρόσωπο, διαφορετικό από αυτά που εκείνη τη στιγμή θυμάται. Αν X_n είναι το πλήθος των προσώπων που θυμάται ο κύριος Χ το βράδυ της n-στής ημέρας

α. Βρείτε τις πιθανότητες μετάβασης p_{ij} της αλυσίδας X_n, για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$.
β. Δείξτε ότι η αλυσίδα αυτή είναι μη αναγώγιμη. + υποβιβάστηκε
γ. Δείξτε ότι η κατανομή π_* με $\pi_*(k) = \frac{1}{e(k-1)!}$ για $k = 1, 2, \ldots$ είναι αναλλοίωτη κατανομή για την X_n.
δ. Αν κάποια μέρα ο κύριος Χ θυμάται 5 πρόσωπα πριν πέσει για ύπνο, ποια είναι η μέση τιμή των ημερών που θα μεσολαβήσουν μέχρι το επόμενο βράδυ που θα θυμάται πάλι 5 πρόσωπα;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!