ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στοχαστικές Ανελίξεις- 9 Ιουλίου 2012

Άσκηση 1 α) Δώστε τον ορισμό μιας στοχαστικής ανέλιξης $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ με ανεξάρτητες προσαυξήσεις.
β) Έστω $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ μια στοχαστική ανέλιξη Gauss με $B_0 = 0$, ανεξάρτητες προσαυξήσεις, και $B(t) \sim \mathcal{N}(0,t)$. Δείξτε ότι αν $0 \leq s \leq t$ τότε $\mathbb{E}\big[B(t)B(s)\big] = s$.
γ) Ορίζουμε τώρα $W(t) = e^{-t}B(e^{2t})$ για $t \geq 0$. Υπολογίστε την συνάρτηση του μέσου $\mu_W(t) = \mathbb{E}\big[W(t)\big]$ και την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\rho_W(s,t) = \mathrm{Corr}\big(W(s), W(t)\big)$.
δ) Είναι η W ανέλιξη Gauss; στάσιμη με την ευρεία έννοια; στάσιμη υπό την αυστηρή έννοια;Έχει η W ανεξάρτητες προσαυξήσεις; Δικαιολογήστε.

Άσκηση 2 Θεωρήστε έναν τυχαίο περίπατο $\{X_n\}$ στο $\mathbb{Z}$, με $X_0 = 1$ και πιθανότητες μετάβασης

$$p_{k,k+1} = p < 1, \quad p_{k,k-1} = 1-p, \quad \text{για } k \in \{1,2,\ldots,N-1\}.$$

α) Αν $T_0 = \inf\{k \geq 0 : \ X_k = 0\}$ και $T_N = \inf\{k \geq 0 : \ X_k = N\}$ είναι οι χρόνοι πρώτης άφιξης στα σημεία 0 και N αντίστοιχα, υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}\big[T_N < T_0\big]$.
β) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή του χρόνου πρώτης εξόδου από το $\{1,2,\ldots,N-1\}$.

Άσκηση 3 Θεωρήστε μια μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}$ στο σύνολο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{1,2,\ldots,8\}$ με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\\ 7\\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

α) Ταξινομήστε τις καταστάσεις σε κλάσεις επικοινωνίας. Ποιες κλάσεις είναι παροδικές και ποιες επαναληπτικές;
β) Αν $X_0 = 1$ υπολογίστε την $\mathbb{P}\big[X_n = k\big]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $k \in \mathbb{X}$.
γ) Αν $X_0 = 4$ υπολογίστε την πιθανότητα η αλυσίδα να καταλήξει σε καθεμιά από τις κλειστές της κλάσεις.
δ) Αν $X_0 = 4$, τι μπορείτε να πείτε για το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n};$$

(ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχει; ποιες τιμές μπορεί να πάρει και με ποια πιθανότητα;)

Άσκηση 4 Στο μοντέλο διάχυσης του Ehrenfest N σωματίδια τοποθετούνται σε ένα δοχείο με δύο διαμερίσματα, A και B. Σε κάθε βήμα επιλέγουμε τυχαία ένα από τα N σωματίδια και του αλλάζουμε διαμέρισμα. Ας είναι $\{X_n\}$ η μαρκοβιανή αλυσίδα στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{X} = \{0,1,\ldots,N\}$, που περιγράφει το πλήθος των σωματιδίων στο διαμέρισμα A μετά από n βήματα.
α) Ποιες είναι οι πιθανότητες μετάβασης της X_n;
β) Δείξτε ότι η $\pi(k) = \frac{1}{2^N}\binom{N}{k}$ είναι αναλλοίωτη κατανομή της αλυσίδας.
γ) Υπάρχει άλλη αναλλοίωτη κατανομή; Αν ναι δώστε τουλάχιστον άλλη μια, αν όχι εξηγήστε γιατί.
δ) Αν κάποια χρονική στιγμή όλα τα σωματιδία βρίσκονται στο διαμέρισμα A, ποια είναι η αναμενόμενη τιμή του χρόνου που θα μεσολαβήσει μέχρι την επόμενη φορά που θα ξαναβρεθούν όλα τα σωματίδια στο διαμέρισμα A;

Διάρκεια Εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!