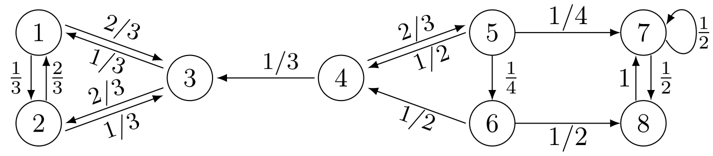
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στοχαστικές Διαδικασίες (ΣΕΜΦΕ & ΣΗΜΜΥ) - Τετάρτη 30 Αυγούστου 2017

ΑΣΚΗΣΗ 1 (45) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι καταστάσεις και οι πιθανότητες μετάβασης μιας αλυσίδας $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

α) Ταξινομήστε τις καταστάσεις σε κλάσεις επικοινωνίας και χαρακτηρίστε τις ως προς την επαναληπτικότητα.

β) Βρείτε όλες τις αναλλοίωτες κατανομές της αλυσίδας.



γ) Αν $X_0 = 5$, υπολογίστε την πιθανότητα η αλυσίδα να καταλήξει σε καθεμία από τις κλειστές κλάσεις.

δ) Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big[X_n = j \,|\, X_0 = i\big]$ για τα παρακάτω ζεύγη (i, j): (i) (5,5), (ii) (8,8), (iii) (5,8)

ε) Έστω $X_0 = 5$. Με ανάλυση πρώτου βήματος ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο, υπολογίστε την πιθανότητα η αλυσίδα να εγκαταλείψει την κλάση από την οποία ξεκινά έπειτα από έναν άρτιο αριθμό βημάτων.

ΑΣΚΗΣΗ 2 (30) Μια μαρκοβιανή αλυσίδα στο $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ έχει πιθανότητες μετάβασης που ικανοποιούν την

$$p(n, n+1) = \frac{n}{n+2}\, p(n+1, n) > 0 \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Είναι επίσης γνωστό ότι $p(m, n) = 0$ αν $|m - n| > 1$ και ότι $p(n, n) = 0$ για $n > 1$.

α) Βρείτε μια κατανομή π στο $\mathbb{N}$ που ικανοποιεί τις συνθήκες ακριβούς ισορροπίας με τις $\{p(m, n)\}_{m,n\in\mathbb{N}}$.

β) Δείξτε ότι η αλυσίδα είναι μη υποβιβάσιμη και χαρακτηρίστε την ως προς την επαναληπτικότητα.

γ) Αν $X_0 = 1$, υπολογίστε τον αναμενόμενο χρόνο επιστροφής της αλυσίδας στην κατάσταση 1.

δ) Δείξτε το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{X_1} + \cdots + (-1)^{X_n}}{n}$ υπάρχει με πιθανότητα 1 και υπολογίστε το.

(Υπόμνηση: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$).

ΑΣΚΗΣΗ 3 (30) Αυτοκίνητα και μοτοσυκλέτες προσέρχονται σε έναν σταθμό διοδίων ως δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς 3/λεπτό και 1/λεπτό αντίστοιχα.

α) Υπολογίστε την πιθανότητα το επόμενο λεπτό να περάσουν τουλάχιστον δύο οχήματα από τον σταθμό.

β) Υπολογίστε την πιθανότητα το επόμενο λεπτό να περάσουν μόνο μοτοσυκλέτες από τον σταθμό.

γ) Αν το προηγούμενο λεπτό πέρασαν από τον σταθμό δύο οχήματα, υπολογίστε την πιθανότητα οι αφίξεις τους να απείχαν χρονικά λιγότερο από 1/2 λεπτό.

δ) Υπολογίστε την πιθανότητα το επόμενο λεπτό να μην περάσουν διαδοχικά οχήματα του ίδιου τύπου.

(Υπόμνηση: $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ και $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$).

Διάρκεια Εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!