ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στοχαστικές Ανελίξεις- Σεπτέμβριος 2011

Άσκηση 1 (30 μονάδες)

Ένα σωματίδιο εκτελεί κίνηση απλού τυχαίου περιπάτου: $X_0 = 0,\ X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, όπου οι Y_i είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{P}[Y_i = 1] = p$, $\mathbb{P}[Y_i = -1] = 1 - p$, για κάποιο $p \geq \frac{1}{2}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$\tau_n = \inf\{m \in \mathbb{N} :\ X_m \in (-\infty, -n] \cup [1, +\infty)\}$$

τον χρόνο πρώτης εξόδου από το $(-n, 1)$.

α) Υπολογίστε την πιθανότητα απορρόφησης $\beta(n) = \mathbb{P}[X_{\tau_n} = 1]$ και την μέση τιμή $\mathbb{E}[\tau_n]$.

β) Βρείτε τα όρια

$$\lim_{n\to\infty} \beta(n) \qquad \text{και} \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\tau_n].$$

γ) Έστω $\tau = \inf\{m \in \mathbb{N} :\ X_m \in [1, +\infty)\}$ ο χρόνος πρώτης εισόδου στο $[1, +\infty)$. Δείξτε ότι $\tau_n \uparrow \tau$, $\mathbb{P}$-σ.β. και χρησιμοποιήστε το για να υπολογίσετε την $\mathbb{E}[\tau]$.

Άσκηση 2 (20 μονάδες)

Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_n > 0$, $\mathbb{P}$-σ.β. και $\mathbb{E}[X_n] < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε

$$Y_n = X_1 X_2 \cdots X_n.$$

α) Δείξτε ότι η στοχαστική ανέλιξη $\{Y_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ είναι μαρκοβιανή.

β) Δείξτε ότι η $\{Y_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ είναι martingale αν και μόνο αν $\mathbb{E}[X_n] = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 3 (20 μονάδες)

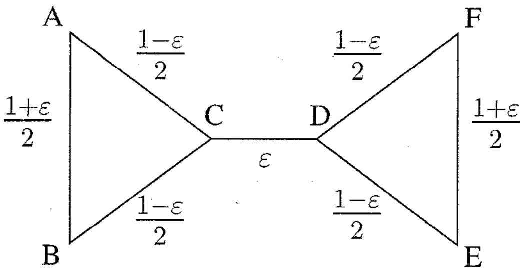
Μια μαρκοβιανή αλυσίδα στον $\mathbb{X} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ έχει πιθανότητες μετάβασης $p_{k,k+1} = p < 1$, $p_{k,0} = 1 - p$, $\forall k \in \mathbb{X}$.

α) Δείξτε ότι είναι μη υποβιβάσιμη και γνήσια επαναληπτική.

β) Βρείτε την κατανομή ισορροπίας της.

Άσκηση 4 (30 μονάδες)

Μια μαρκοβιανή αλυσίδα κινείται ανάμεσα σε 6 καταστάσεις. Οι δυνατές μεταβάσεις εικονίζονται σαν ακμές στο διπλανό σχήμα. Οι πιθανότητες μετάβασης είναι συμμετρικές, δηλ. $p(x, y) = p(y, x)$ για κάθε $x, y \in \{A, B, C, D, E, F\}$ και δίνονται και αυτές στο σχήμα. Π.χ. $p_{CD} = p_{DC} = \varepsilon$, με $0 < \varepsilon < 1$.



α) Αν $X_0 = C$ υπολογίστε την πιθανότητα η αλυσίδα να φτάσει στο σύνολο $\{E, F\}$ πριν φτάσει για πρώτη φορά στο A.

β) Ορίζουμε $T_\varepsilon = \inf\{m \geq 0 : X_m \in \{D, E, F\}\}$ τον χρόνο εισόδου στο $\{D, E, F\}$. Υπολογίστε για $x \in \{A, B, C\}$ την $\mathbb{E}[\,T_\varepsilon \mid X_0 = x]$.

γ) Αν $X_0 = A$ και $s > 0$, υπολογίστε την $\mathbb{E}[e^{-s\varepsilon T_\varepsilon}]$ και αποδείξτε ότι ο χρόνος $\varepsilon T_\varepsilon$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια εκθετική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 3 καθώς $\varepsilon \to 0$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!