



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στοχαστικές Διαδικασίες (ΣΕΜΦΕ & ΣΗΜΜΥ) - Δευτέρα 4 Ιουνίου 2018

ΑΣΚΗΣΗ 1 Δίνεται ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης P μιας μαρκοβιανής αλυσίδας $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στον $X = \{A, B, C\}$.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Η αλυσίδα αρχικά βρίσκεται στο A και είναι γνωστό ότι είναι χρονικά αντιστρέψιμη.

α) Να αποδείξετε ότι $p = 2/3$ (10μ).

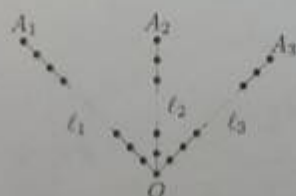
β) Να βρείτε την αναλλοίωτη κατανομή π της αλυσίδας (10μ).

γ) Να δείξετε ότι η κατανομή π_n της αλυσίδας μετά από n βήματα δίνεται από την (10μ)

$$\pi_n = \pi + \frac{1}{5} \left(-\frac{2}{3} \right)^{n-1} (-2, 1, 1), \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}_0.$$

δ) Αν κερδίζουμε δύο ευρώ κάθε φορά που η αλυσίδα βρίσκεται στην A και χάνουμε ένα ευρώ κάθε φορά που η αλυσίδα βρίσκεται στη B ή στη C , να υπολογίσετε το μέσο κέρδος (ή ζημιά) μας ανά βήμα σε βάθος χρόνου. (5μ)

ΑΣΚΗΣΗ 2 Θεωρούμε έναν τυχαίο περίπατο στον γράφο του παρακάτω σχήματος. Ο κλάδος που συνδέει το O και το A_i έχει ℓ_i ακμές, $i = 1, 2, 3$. Ο περίπατος ξεκινά από το A_1 .



α) Να εξηγήσετε γιατί η αλυσίδα έχει μοναδική αναλλοίωτη κατανομή και να την υπολογίσετε (5μ).

β) Να υπολογίσετε τον αναμενόμενο χρόνο μέχρι την πρώτη επιστροφή στο A_1 (5μ).

γ) Να υπολογίσετε τον αναμενόμενο αριθμό επισκέψεων στο O μέχρι την πρώτη επιστροφή στο A_1 (5μ).

δ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο περίπατος να φτάσει στο A_2 πριν φτάσει στο A_3 (10μ).

ε) Να υπολογίσετε τον αναμενόμενο αριθμό βημάτων μέχρι ο περίπατος να φτάσει στο A_2 ή στο A_3 (10μ).

ΑΣΚΗΣΗ 3 Κατά τη διάρκεια μιας εφημερίδας ενός νοσοκομείου, στο Τμήμα Επειγόντων Περιστατικών (ΤΕΠ) προσέρχονται ασθενείς με παθολογικά, χειρουργικά, καρδιολογικά ή άλλα περιστατικά ως ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_a = 1/5 \text{ min}$, $\lambda_x = 3/20 \text{ min}$, $\lambda_k = 1/20 \text{ min}$ και $\lambda_o = 1/10 \text{ min}$ αντίστοιχα.

α) Ποια κατανομή ακολουθεί το πλήθος των ασθενών που έρχονται στο ΤΕΠ κατά τη διάρκεια μιας 16ωρης εφημερίδας (7μ);

β) Υπολογίστε προσεγγιστικά την πιθανότητα να προσέλθουν στην εφημερία περισσότεροι από 480 ασθενείς (7μ).

γ) Ποια είναι η πιθανότητα στα τρία πρώτα περιστατικά να υπάρχει τουλάχιστον ένα παθολογικό (7μ);

δ) Ποια κατανομή ακολουθεί ο χρόνος άφιξης του πρώτου ασθενούς (7μ);

ε) Ποια κατανομή ακολουθεί ο χρόνος άφιξης του πρώτου ασθενούς, με δεδομένο ότι στα πρώτα 10 λεπτά προσήλθαν στο ΤΕΠ 4 περιστατικά (7μ);

Διάρκεια Εξέτασης 2,5 ώρες
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!