ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ.

$$p^{(n)}(x,y) = \mathbb{P}[X_{n+k}=y \mid X_k = x] \quad , \; x,y\in\mathbb{X}$$

$\mathbb{P}^{(n)} = \{p^{(n)}(x,y)\}_{x,y\in\mathbb{X}}$ μπορεί να υπολογιστεί ως $\mathbb{P}^n$ με τον ορισμό του (προσεταιριστικού) πολλ/σμού που είδατε στο προηγούμενο μάθημα.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Chapman-Kolmogorov

$$\mathbb{P}^{m+n} = \mathbb{P}^m\cdot\mathbb{P}^n$$

$$\boxed{p^{(m+n)}(x,y) = \sum_{z\in\mathbb{X}} p^{(m)}(x,z)\,p^{(n)}(z,y)} \quad \forall m,n\in\mathbb{N}_0.$$

(Τ.Ο.Π. για τη διαμέριση $\Omega = \bigcup_{z\in\mathbb{X}}\{X_m=z\}$)

$$p^{(m+n)}(x,y) =: \mathbb{P}_x[X_{m+n}=y] = \sum_{z\in\mathbb{X}} \mathbb{P}_x[X_{m+n}=y \mid X_m=z]\,\mathbb{P}_x[X_m=z]$$

$$= \sum_{z\in\mathbb{X}} p^{(m)}(x,z)\,\mathbb{P}_z[X_n=y] = \sum_{z\in\mathbb{X}} p^{(m)}(x,z)\,p^{(n)}(z,y).$$

ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ Θα λέμε η $y\in\mathbb{X}$ είναι προσβάσιμη από την $x\in\mathbb{X}$ αν

$$\exists m\in\mathbb{N}_0 : \; p^{(m)}(x,y) > 0. \qquad (x\rightarrow y)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ Θα λέμε ότι οι $x,y\in\mathbb{X}$ επικοινωνούν (αμφίδρομα) αν

$$x\rightarrow y \;\text{ ΚΑΙ }\; y\rightarrow x. \qquad (x\leftrightarrow y)$$

Η "$\leftrightarrow$" είναι μια διμελής σχέση που έχει τις ιδιότητες

1) Αυτοπαθής: $x\leftrightarrow x \quad \forall x\in\mathbb{X}$
2) Συμμετρική: $x\leftrightarrow y \Rightarrow y\leftrightarrow x$
3) Μεταβατική: $x\leftrightarrow z$ & $z\leftrightarrow y \Rightarrow x\leftrightarrow y$

Η "$\leftrightarrow$" είναι σχέση ισοδυναμίας

Απόδ της (3)

$x\rightarrow z \Rightarrow \exists m_1\in\mathbb{N}_0 : \; p^{(m_1)}(x,z)>0.$

$z\rightarrow y \Rightarrow \exists m_2\in\mathbb{N}_0 : \; p^{(m_2)}(z,y)>0.$

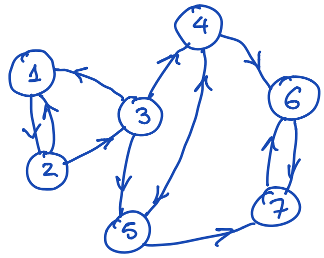
$$p^{(m_1+m_2)}(x,y) \overset{C.K.}{=} \sum_{u\in\mathbb{X}} p^{(m_1)}(x,u)\,p^{(m_2)}(u,y) \geq p^{(m_1)}(x,z)\,p^{(m_2)}(z,y) > 0.$$

Άρα $x\rightarrow y$. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $y\rightarrow x$.

Όπως κάθε σχέση ισοδυναμίας η "$\leftrightarrow$" διαμερίζει τον $\mathbb{X}$ σε κλάσεις ισοδυναμίας (κλάσεις επικοινωνίας)

Δύο καταστάσεις x,y ανήκουν στην ίδια κλάση $\Leftrightarrow$ $x\leftrightarrow y$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.



Κόμβοι είναι τα στοιχεία του $\mathcal{X}$

$(x,y)\in E \Leftrightarrow p(x,y)>0$.

Ποιές είναι οι κλάσεις επικοινωνίας;

$\mathcal{X} = \{1,2,3\} \cup \{4,5\} \cup \{6,7\}$

$\mathcal{X} = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

Μια κλάση C ονομάζεται <u>κλειστή</u> αν δεν υπάρχουν $x\in C, y\notin C : x\to y$.

Μια κλάση C ονομάζεται <u>ανοιχτή</u> αν δεν είναι κλειστή: υπάρχουν $x\in C, y\notin C : x\to y$.

Θα λέμε ότι η κατάσταση x είναι απορροφητική $C=\{x\}$. είναι κλειστή κλάση.

Θα λέμε ότι η αλυσίδα μας είναι <u>μη υποβιβάσιμη</u> όταν ο $\mathcal{X}$ είναι μια κλάση επικοινωνίας.

<u>ΙΣΧΥΡΗ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ</u>

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια μ.α. στον $\mathcal{X}$ με πιθανότητες μετάβασης $\mathbb{P}$.

$Y_n = X_{n+n_0} \quad n=0,1,2,3,\ldots$

$\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι το μέλλον της $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μετά τη χρ. στιγμή n_0

Η δεσμευμένη κατανομή της $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δεδομένου ότι $X_{n_0}=x$ είναι η κατανομή μιας αλυσίδας που ξεκινά από το x & έχει πιθ. μετάβασης $\mathbb{P}$. Επιπλέον δεδομένου ότι $\{X_{n_0}=x\}$ η $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη από τις $X_0, X_1, \ldots, X_{n_0-1}, X_{n_0}$.

$$\mathbb{P}\left[(Y_0=y_0, Y_1=y_1, \ldots, Y_m=y_m) \cap \{X_0=x_0,\ldots,X_{n_0}=x_{n_0}\} \mid X_{n_0}=x\right]$$

$$= \delta_{xy_0}\, p(y_0,y_1)p(y_1,y_2)\cdots p(y_{m-1},y_m) \,*\, \mathbb{P}\left[X_0=x_0, X_1=x_1,\ldots, X_{n_0}=x_{n_0} \mid X_{n_0}=x\right]$$

$\left(\delta_{xy} = \begin{cases} 1, & x=y \\ 0, & x\neq y \end{cases}\right)$

(Απλή μαρκοβιανή ιδιότητα) $(\forall n_0\in\mathbb{N}_0)$

Η ισχυρή μαρκοβιανή ιδιότητα λέει ότι το ίδιο συμβαίνει ακόμα & αν ο χρόνος n_0 δεν είναι απαραίτητα ντετερμινιστικός (μπορεί να είναι μια τ.μ.) αρκεί αυτός ο χρόνος να "μην βλέπει το μέλλον" (τέτοιοι χρόνοι ονομάζονται <u>χρόνοι διακοπής</u>)

ΧΡΟΝΟΙ ΔΙΑΚΟΠΗΣ $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μ.α. σ' έναν χώρο καταστ. $\mathbb{X}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ Θα λέμε ότι ένα ενδεχόμενο $A \in \mathcal{F}_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

αν $\mathbb{1}_A(\omega) = \Phi(X_0^{(\omega)}, X_1^{(\omega)}, X_2^{(\omega)}, \ldots, X_n^{(\omega)})$

Παράδειγμα $A_1 = \{X_n \in \Gamma\} \in \mathcal{F}_n$ $\quad \mathbb{1}_{A}(\omega) = \mathbb{1}_{\Gamma}(X_n(\omega))$

$$A_2 = \{X_0 \notin \Gamma\} \cap \{X_1 \notin \Gamma\} \cap \ldots \cap \{X_{n-1} \notin \Gamma\} \cap \{X_n \in \Gamma\}$$

$$\mathbb{1}_{A_2} = \mathbb{1}_{\Gamma^c}(X_0)\, \mathbb{1}_{\Gamma^c}(X_1) \ldots \mathbb{1}_{\Gamma^c}(X_{n-1})\, \mathbb{1}_{\Gamma}(X_n)$$

$$A \in \mathcal{F}_n$$

$A_3 = \{X_3 \in \Gamma\} \notin \mathcal{F}_2$ (εν γένει)

$A_4 = \{X_4 \in \Gamma\} \cap \{X_5 \notin \Gamma, X_6 \notin \Gamma, \ldots, X_{10} \notin \Gamma\} \notin \mathcal{F}_4$

Ασκήσεις Από το βιβλίο, λύστε τις Ασκήσεις 20, 21, 23 και 24.