ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ.

Χρόνος διακοπής: $T_A(\omega) = \inf\{k \geq 0 : X_k(\omega) \in A\}$.

Χρόνος $n^{ης}$ επανόδου: $T_{A,n}^{+}(\omega) = \inf\{k > T_{A,n-1}(\omega) : X_k(\omega) \in A\}$

Χρόνος $1^{ης}$ επανόδου: $T_A^{+}(\omega) = \inf\{k > 0 : X_k(\omega) \in A\}$.

Υπάρχει δυνατότητα μετατόπισης κατά $\underset{\to \text{Χρόνος Διακοπής.}}{T}$ μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας.

Ισχυρή Μαρκοβιανή Ιδιότητα: $Y_n = X_{T+n}$ επίσης Μ. Αλυσίδα, ίδιος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης P και ανεξάρτητη από οποιοδήποτε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{F}_T$.

Επαναληπτικότητα παροδικότητα: Ανανέωση έπειτα από κάθε χρόνο διακοπής, ανεξάρτητα απ'το παρελθόν

$$V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}\{X_n = x\}$$

$V(x) < +\infty$: παροδική κατάσταση η x, $V(x) = +\infty$: Επαναληπτική η x.

Χρόνος επιστροφής: $\tau_x^{+} = \inf\{k > 0 : X_k = x\} = 1 + \inf\{k \geq 0 : Y_k = x\}$

$$T_0 = 0, \quad T_{n+1} := \inf\{k > T_n : X_k = x\}.$$

$\mathbb{P}[T_{n+1} - T_n = k \mid T_n < +\infty] = \mathbb{P}_x[\tau_x^{+} = k]$, $\forall k \in \mathbb{N}$, άρα:

$$T_{n+1} = T_n + \inf\{k > 0 : Y_k = X_{T_n+k} = x\}.$$

Παροδική κατάσταση: $\mathbb{E}_x[V(x)] = \dfrac{1}{1 - f(x)} < +\infty$, $f(x) = \mathbb{P}_x[\tau_x^{+} < +\infty]$

$= \underset{\substack{\Downarrow \\ \text{αρχή} \\ \text{από } x}}{\mathbb{P}_x}[V(x) > 1]$

Επαναληπτική κατάσταση: $\mathbb{E}_x[V(x)] = +\infty$.

$$f(x) = \sum_{y \in \mathbb{X}} \mathbb{P}[\tau_x^{+} < +\infty \mid X_0 = x, X_1 = y]\, p(x,y)$$

, $X_1 = y$ και $Y_n = X_{n+1} \leadsto$ Y ξεκινάει από το y και έχει ίδιο πίνακα πιθ. μετάβασης P.

Επαναληπτικότητα και Παροδικότητα

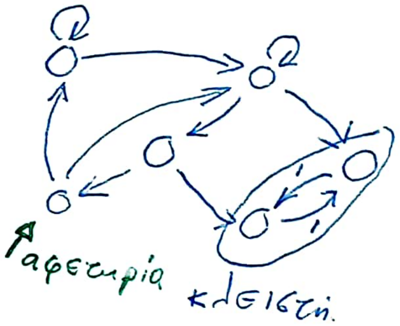
$\sum_{n=0}^{+\infty} p^{(n)}(x,x) = +\infty \iff$ επαναληπτική η x. / x επαναληπτική και $x \leftrightarrow y \Rightarrow y$ επαναληπτική.

$\sum_{n=0}^{+\infty} p^{(n)}(x,x) < +\infty \iff x$ παροδική. / Όμοια για παροδική.

Scanned with CamScanner

Ανοιχτή κλάση είναι παροδική
Κλειστή κλάση είναι επαναληπτική

Πεπερασμένο μέγεθος.

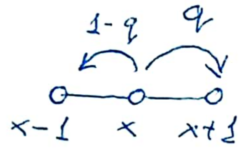


Μη Υποβιβάσιμη αλυσίδα = Οι καταστάσεις όλες επικοινωνούν μεταξύ τους

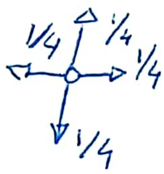
Χρήσιμο: Προσέγγιση του Stirling για το $n!$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \; n \to \infty \qquad a_n \sim b_n \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

1D - περίπατος: $p^{(2n)}(0,0) = \dfrac{(2n)!}{n!\,n!} q^n (1-q)^n.$



2D - περίπατος: $p^{(2n)}((0,0),(0,0)) = \dfrac{(2n)!}{i!\,i!\,(n-i)!\,(n-i)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$



Οι 2 αυτοί συμμετρικοί τυχαίοι περίπατοι είναι επαναληπτικοί.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$$

Για παραπάνω, είναι παροδικό το πρόβλημα.

$\Phi_{A,B}(x) = \mathbb{P}_x[T_A < T_B].$

Γεννήτορας L της αλυσίδας: $Lh(x) = \sum_{y\in X} p(x,y)\cdot(h(y)-h(x))$ $\forall x \in X$

Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών

$$Lh(x) = 0 \;, \; x \notin (A\cup B)$$
$$h(x) = 1 \;, \; x \in A$$
$$h(x) = 0 \;, \; x \in B.$$

Αν το ΠΣΤ έχει περισσότερες από μία λύσεις, ποια λύση είναι η ενδεδειγμένη. Η μικρότερη μη αρνητική λύση. είναι αυτή που δίνουμε.

Για αναμενόμενο χρόνο: $Lg(x) = -1, \; x \notin A$

$g(x) = 0, \; x \in A.$

$g(x) = \mathbb{E}[T_A | X_0 = x]$ το λύνει.

Αναλλοίωτες Κατανομές:

χώρο καταστάσεων

$\mathcal{M}(\mathbb{X})$ το σύνολο των κατανομών στον χ.κ $\mathbb{X}$

π_0 : αρχική κατανομή

$\pi_n = \pi_0 \cdot \underline{P}^n$ $\quad \pi_n(x) \to \pi(x)$

Σύγκλιση στην κατανομή $\pi \in \mathcal{M}(\mathbb{X})$

$$\pi(x) = \sum_{y \in \mathbb{X}} \pi(y)\, p(y,x), \ \forall x \in \mathbb{X} \quad (\pi = \pi \cdot P)$$

$\pi = \pi \cdot P$ με $\pi = (\pi_0\ \pi_1\ \pi_2 \dots \pi_N)$ και $\sum_{k=0}^{len(\pi)-1} \pi_k = 1$.

Οι μόνες δυνατές κατανομές ισορροπίας μιας ΜC είναι οι αναλλοίωτες κατανομές της.

Αν η π_0 ικανοποιεί $\pi = \pi P$, τότε $\pi_n = \pi_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\pi(y) \geq \pi(x) \cdot \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=1}^{T_x^+} \mathbb{1}\{X_k = y\}\right]$$

Κατάσταση γνησίως επαναληπτική εάν $\mathbb{E}_x[T_x^+] < +\infty$

Γνήσια επαναληπτική $\Rightarrow$ επαναληπτική (άρα σε κλειστή κλάση).

Ενώ αν $\pi \in \mathcal{I}(P)$ (κυρτό σύνολο) και $x \in \mathbb{X}$, τότε $\mathbb{E}_x[T_x^+] = +\infty \Rightarrow \pi(x) = 0$.

Αν Μ.Α έχει αναλλοίωτη κατανομή, τότε τουλάχιστον 1 είναι γνησίως επαναληπτική κατάσταση.

π_x: αναλλοίωτη κατανομή $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$\pi_x(y) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[T_x^+]}\, \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=1}^{T_x^+} \mathbb{1}\{X_k = y\}\right], \quad x \in \mathbb{X} \text{ γνήσια επαναληπτική κατάσταση.}$$

$\pi_x(x)$

$$\left(\pi_x(y) = \sum_{z \in \mathbb{X}} p(z,y)\, \pi_x(z)\right)$$

Θεώρημα: Αν x γνησίως επαναληπτική και $y \in C_x$, τότε $\pi_x(y) > 0$.

Αλλιώς είναι μηδενική και δεν έχω πιθανότητα.

Scanned with CamScanner

ΙΣΧΥΟΝΤΑ

- Μια μη-υποβιβάσιμη ΜΑ σε πεπερασμένο χώρο καταστάσεων είναι γνήσια επαναληπτική.

- Οποιαδήποτε αναλλοίωτη κατανομή δίνει μηδενικό βάρος σε κλάσεις που δεν είναι γν. επαναληπτικές και ενώ για κάθε γνήσια επαναληπτική κλάση έχουμε κατασκευάσει αναλλοίωτη κατανομή π_x που στηρίζεται στις καταστάσεις αυτής της κλάσεις

- Η αναλλοίωτη κατανομή που στηρίζεται σε μια γνήσια επαναληπτική κλάση είναι μοναδική.

Γνήσια επαναληπτική $\Rightarrow$ ανήκει κλειστή κλάση.
$\hookrightarrow$ αναλλοίωτη κατανομή μοναδική

- $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μη υποβιβάσιμη, γνήσια επαναληπτική αλυσίδα.

- Κάθε αναλλοίωτη κατανομή είναι κυρτός συνδυασμός τέτοιων κατανομών τύπου π_C.

- Μη-υποβιβάσιμη γν. επαναληπτική Μ.Α:
  - π λύνει $\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_{x\in\mathbb{X}} \pi(x) = 1 \end{cases}$
  - $\pi(y) = \pi(x)\, \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=1}^{\tau_x^+} \mathbb{1}\{X_k = y\}\right]$ $\forall x,y\in\mathbb{X}$
  - $\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[\tau_x^+]}$ $\forall x\in\mathbb{X}$

- Αν μια Μ.Α έχει αναλλοίωτη κατανομή, τότε έχει τουλάχιστον μια γνησίως επαναληπτική κατάσταση

- Αν η x είναι γνησίως επαναληπτική και $y\in C_x$, $\pi_x(y)>0$.

- Μη-υποβιβάσιμη Μ.Α επαναληπτική $\Leftrightarrow$ Αναλλοίωτη κατανομή μοναδική.

- Αν $\pi\in I(P)$ και $\mathbb{E}_x[\tau_x^+] = +\infty \Rightarrow \pi(x) = 0$.
κάθε αναλλοίωτη κατανομή στηρίζεται σε γνησίως επαναληπτ. καταστάσεις.

Scanned with CamScanner

▢ Αν η $x \in \mathbb{X}$, γνησίως επαναληπτική για την αλυσίδα $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με π.π.μ P, τότε $I(P) \neq \emptyset$

$$\pi_x(y) = \frac{1}{E_x[\tau_x^+]} \cdot E_x\left[\sum_{k=1}^{\tau_x^+} \mathbb{1}\{X_k = y\}\right], \quad \pi_x(x) = \frac{1}{E_x[\tau_x^+]}$$

- $y \in C_x \Rightarrow \pi_x(y) > 0$, • $y \notin C_x \Rightarrow \pi_x(y) = 0$

▢ Μια μη υποβιβάσιμη αλυσίδα είναι γνησίως επαναληπτική $\Leftrightarrow$ έχει αναλλοίωτη

▢ Μια μη υποβιβάσιμη αλυσίδα σε έναν πεπερασμένο χώρο $\mathbb{X}$ είναι πάντα γνησίως επαναληπτική.

▢ $\pi \in I(P) \Rightarrow \pi(y) \geq \pi(x) E_x\left[\sum_{k=1}^{\tau_x^+} \mathbb{1}\{X_k = y\}\right] = \pi(x) \cdot \frac{\pi_x(y)}{\pi_x(x)} \quad \forall y \in \mathbb{X}$

και από επιλογή: $\pi(y) - \frac{\pi(x)}{\pi_x(x)} \pi_x(y) = 0$, άρα $\frac{\pi(x)}{\pi_x(x)} = 1$, όμοια για τα y

(ανεξάρτητα από που ξεκινήσεις. $\pi(y) = \pi_x(y)$

▢ Περιγραφή $I(P)$:

→ Αν υπάρχει γν. επαναλ. κλάση τότε $I(P) \neq \emptyset$.

→ Το $I(P)$ είναι κυρτό σύνολο, δηλαδή $a\pi_1 + (1-a)\pi_2 \in I(P)$

▢ Σε κάθε γνησία επαναληπτική κλάση C, αντιστοιχεί μοναδική $\pi_C(x) > 0$, $\forall x \in C$ και $\pi_C(y) = 0$, $\forall y \notin C$.

▢ $$E_x\left[\sum_{k=1}^{\tau_x^+} f(X_k)\right] = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y \in \mathbb{X}} \pi(y) f(y)$$

▢ Χρονική Αντιστρεψιμότητα

Η $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι Μ.Α με αρχική κατανομή π και πιθανότητες μετάβασης $\hat{p}(x,y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} p(x,y)$

▢ Αν $\hat{p}(x,y) = p(x,y) \ \forall x, y \in \mathbb{X}$ λέμε ότι η αλυσίδα είναι χρονικά αντιστρέψιμη. Τότε $\pi(y) p(y,x) = \pi(x) p(x,y) \quad \forall x, y \in \mathbb{X}$

και η π αναλλοίωτη κατανομή για την $p(x,y)_{x,y\in\mathbb{X}}$

Scanned with CamScanner

☐ Αν η $x \in \mathbb{X}$, γνησίως επαναληπτική για την αλυσίδα $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με π.π.μ P, τότε $I(P) \neq \emptyset$

$$\pi_x(y) = \frac{1}{E_x[\tau_x^+]} \cdot E_x\left[\sum_{k=1}^{\tau_x^+} \mathbb{1}\{X_k = y\}\right], \quad \pi_x(x) = \frac{1}{E_x[\tau_x^+]}$$

• $y \in C_x \Rightarrow \pi_x(y) > 0$, • $y \notin C_x \Rightarrow \pi_x(y) = 0$

☐ Μια μη υποβιβάσιμη αλυσίδα είναι γνησίως επαναληπτική $\Leftrightarrow$ έχει αναλλοίωτη

☐ Μια μη υποβιβάσιμη αλυσίδα σε έναν πεπερασμένο χώρο $\mathbb{X}$ είναι πάντα γνησίως επαναληπτική.

☐ $\pi \in I(P) \Rightarrow \pi(y) \geq \pi(x) E_x\left[\sum_{k=1}^{\tau_x^+} \mathbb{1}\{X_k = y\}\right] = \pi(x) \cdot \frac{\pi_x(y)}{\pi_x(x)} \quad \forall y \in \mathbb{X}$

και από επιλογή: $\pi(y) - \frac{\pi(x)}{\pi_x(x)} \pi_x(y) = 0$, άρα $\frac{\pi(x)}{\pi_x(x)} = 1$, όμοια για τα y

(ανεξάρτητα από που ξεκινήσεις. $\pi(y) = \pi_x(y)$

☐ Περιγραφή $I(P)$:

→ Αν υπάρχει γν. επαναλ. κλάση τότε $I(P) \neq \emptyset$.

→ Το $I(P)$ είναι κυρτό σύνολο, δηλαδή $a\pi_1 + (1-a)\pi_2 \in I(P)$

☐ Σε κάθε γνησία επαναληπτική κλάση C, αντιστοιχεί μοναδική $\pi_C(x) > 0$, $\forall x \in C$ και $\pi_C(y) = 0$, $\forall y \notin C$.

☐ $$E_x\left[\sum_{k=1}^{\tau_x^+} f(X_k)\right] = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y\in\mathbb{X}} \pi(y) f(y)$$

☐ Χρονική Αντιστρεψιμότητα

Η $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι Μ.Α με αρχική κατανομή π και πιθανότητες μετάβασης $\hat{p}(x,y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} p(x,y)$

☐ Αν $\hat{p}(x,y) = p(x,y)$ $\forall x, y \in \mathbb{X}$ λέμε ότι η αλυσίδα είναι χρονικά αντιστρέψιμη. Τότε $\pi(y) p(y,x) = \pi(x) p(x,y)$ $\forall x, y \in \mathbb{X}$

και η π αναλλοίωτη κατανομή για την $p(x,y)_{x,y\in\mathbb{X}}$

Scanned with CamScanner

▪ $\pi(x) = w(x)\,\pi(x_0)$, $\forall x \in \mathbb{X}$ $\qquad \pi(x) = \dfrac{w(x)}{\sum_{x\in\mathbb{X}} w(x)}$

▪ $\pi(k) = \dfrac{1}{2^N}\binom{N}{k}$ $\quad k = 0, 1, 2, \dots, N.$ $\qquad \pi \sim bion(N, \frac{1}{2})$

$X_0 = N$

π_n : κατανομή μετά από n βήματα $\pi_n \xrightarrow{n\to+\infty} \pi$.

Θα το δούμε την επόμενη εβδομάδα.

ΤΥΧΑΙΟΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΣ ΣΕ ΓΡΑΦΟ

$\pi(x)\cdot\dfrac{1}{d(x)} = \pi(y)\cdot\dfrac{1}{d(y)}$ $\quad (x,y)\in E$ $\qquad \pi(x) = \dfrac{d(x)}{2|E|}$, $\forall x \in \mathbb{X}$.

$E_x[T_x^+] = \dfrac{1}{\pi(x)}$

▪ Αλυσίδα επαναληπτική και μη υποβιβάσιμη. $P_{(C,D)}[T(x,y) < +\infty] = 1$

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ

$R(x) = \{n \in \mathbb{N} : p^{(n)}(x,x) > 0\}$. $\quad R(1) = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$, $R(5) = \{5, 6, 7, 8, \dots\}$

Περίοδος μιας κατάστασης $x \in \mathbb{X}$ ονομάζεται ο ΜΚΔ του $R(x)$ (συμβολίζω

$d(x)$) $\quad d(1) = 1$, $d(5) = 1$

▪ Το σύνολο των χρόνων δυνατής επιστροφής σε μια κατάσταση είναι κλειστό (ως) προς την πρόσθεση του $\mathbb{N}$.

▪ Αν $R \subset \mathbb{N}$ και είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και αν $d = ΜΚΔ(R)$, τότε το R τελικά περιέχει όλα τα πολλ/σια του d.

▪ Η περίοδος μιας κατάστασης είναι χαρακ. της κλάσης δηλαδή αν $x \leftrightarrow y$, τότε $d(x) = d(y)$

▪ Αν για κάποια $x \in \mathbb{X}$ μιας μη υποβιβάσιμης αλυσίδας έχουμε ότι $p(x,x) > 0$, τότε απεριοδική αλυσίδα

▪ Αν $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια (ΠοΡ) μη υποβιβάσιμη, απεριοδική αλυσίδα, τότε $\forall x, y \in \mathbb{X}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$: $p^{(n)}(x,y) > 0$

Scanned with CamScanner