3/2/23

Εξέταση στην «Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα» **Διάρκεια εξέτασης:** 2 ώρες.

Θέμα 1. (α) (1 Μον.) Για το σύστημα $Ax=b$ με $b=[4,2,4]^T$ και πίνακα

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

να κατασκευάσετε την επαναληπτική μέθοδο χαλάρωσης που αντιστοιχεί στην μέθοδο Gauss-Seidel **(SOR)** σε μορφή $G_1(\omega)x^{(k+1)}=G_2(\omega)x^{(k)}+G_3(\omega)r^{(k)}$ όπου $G_1(\omega),G_2(\omega),G_3(\omega)\in\mathbb{R}^{3\times3}$ (με ω συμβολίζεται η παράμετρος χαλάρωσης) και $r^{(k)}=b-Ax^{(k)}$ το υπόλοιπο που αντιστοιχεί στην k-επανάληψη.

(β) (1 Μον.) Να βρεθούν τιμές της παραμέτρου ω, για τις οποίες η **SOR** συγκλίνει.

(γ) (1 Μον.) Μπορείτε να υπολογίσετε τιμή της παραμέτρου χαλάρωσης τέτοια ώστε η **SOR** να συγκλίνει ταχύτερα από την επαναληπτική διαδικασία **Gauss-Seidel**;

Θέμα 2 (α) (1 Μον.) Να ορίσετε τη μέθοδο των κλίσεων ως επαναληπτική διαδικασία τύπου **Richardson**, για τον πίνακα του θέματος 1(α) και να υπολογίσετε το α_κ.

(β) (1 Μον.) Να ορίσετε την ενεργειακή (Α- νόρμα) νόρμα $\|\cdot\|_A$ για τον πίνακα του ερωτήματος του Θέματος 1(α). Για αρχικό διάνυσμα $x_0=[0.2,0.5,0.4]^T$ να υπολογίσετε το πλήθος των επαναλήψεων ώστε το σφάλμα είναι μικρότερο από 10^{-5}.

Δίνεται η πραγματική λύση $\chi=[1,1,1]^T$. Υπόδειξη: $\|e^{(k+1)}\|_A\le\dfrac{k_2(A)-1}{k_2(A)+1}\|e^{(k)}\|_A$.

Θέμα 3 (α) (1 Μον.) Έστω $x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει διάνυσμα $v\in\mathbb{R}^n, v\neq 0$ τέτοιο ώστε $H(v)x=[-\|x\|_2,0,0,\ldots 0]^T$, όπου $H(v)=I-2\dfrac{vv^T}{v^Tv}$.

(β) (1 Μον.) Να υπολογίσετε κατάλληλο $v\in\mathbb{R}^n, v\neq 0$ και αντίστοιχο πίνακα πίνακα

$H_1:=H_1(v)$ ώστε $H_1\mathrm{A}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ όπου Α είναι ο πίνακας του θέματος 1(α).

Θέμα 4 (α) (1 Μον.) Να ορίσετε το πηλίκο Rayleigh για συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ και να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0$, ισχύει $\lambda_{\min}\le R(x)\le\lambda_{\max}$, όπου $\lambda_{\min},\lambda_{\max}$ είναι η μίκροτερη και η μεγαλύτερη αντιστοίχως ιδιοτιμή.

(β) (1 Μον.) Να εκτελέσετε 2 επαναλήψεις της μεθόδου των δυνάμεων (με πηλίκο Rayleigh) για τον εντοπισμό της μέγιστης κατά μέτρο ιδιοτιμής του πίνακα θέματος 1(α), χρησιμοποιώντας $x^{(0)}=[1/2,1/2,1/2]^T$.

(γ) (1 Μον.) Να τροποποιήσετε τον αλγόριθμο τον δυνάμεων ώστε να υπολογίζει την ιδιοτιμή που βρίσκεται εγγύτερα στο $a=2$. Να εκτελέσετε μία επανάληψη για τον εντοπισμό της ιδιοτιμής που βρίσκεται στο $a=2$.