Λύσεις 2ου Σύν. Αν. Ασκήσεων

Οι ακόλουθες λύσεις είναι συνοπτικές. Οι κανονικές λύσεις που παραδίδονται θα πρέπει να είναι πιο λεπτομερείς.

Ασκηση 2.1: a) Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το σφάλμα της προσέγγισης τάξης p δίνεται από τον τύπο:

$$J = \sum_{i=p+1}^{d} \lambda_i$$

όπου $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_d$ οι ιδιοτιμές του $\boldsymbol{R_x}$. Χρησιμοποιώντας επαγωγή τώρα αποδεικνύεται το επίθυμητό.

b) Αναλύουμε τους πίνακες $\boldsymbol{U}$ και $\boldsymbol{R}$ και υπολογίζουμε το ίχνος τους. Στη συνέχεια βρίσκουμε την επιθυμητή σχέση ελαχιστοποιώντας το $\tilde{J}$. Στην περίπτωση που ο $\boldsymbol{H}$ δεν είναι διαγώνιος αλλά ερμιτιανός μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F}^H \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{F}$$

όπου $\boldsymbol{F}$ ο πίνακας ιδιοδιανυσμάτων του $\boldsymbol{H}$. Ελαχιστοποιώντας πάλι το $\tilde{J}$ προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα.

Ασκηση 2.2: Έχουμε για την negentropy μιας τυχαίας μεταβλητής y:

$$J(y) = H(y_{\text{gauss}}) - H(y)$$

όπου y_{gauss} γκαουσιανή κατανομή με ίδιο μέσο όρο και τυπική απόκλιση με την y και H η συνάρτηση εντροπίας. Χρησιμοιώντας τον τύπο του Edgeworth για την πυκνότητα $p(y)$ της μεταβλητής και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση:

$$(1+x)\log(1+x) \approx x + 1/2x^2 - 1/6x^3 + 1/12x^4$$

καταλήγουμε μετά από πράξεις στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Ασκηση 2.3: Έχουμε:

$$\mu_i = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu}_i$$

και

$$\sigma_i^2 = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\Sigma}_i \boldsymbol{w}$$

Αντικαθιστώντας στη συνάρτηση κριτηρίου, προκύπτει αποτέλεσμα που γράφεται ως γενικευμένο πηλίκο Rayleigh και που μεγιστοποιείται στη μέγιστη ιδιοτιμή του. Επομένως μετά από πράξεις προκύπτει:

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2)^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)$$

Ασκηση 2.4: Με βάση τη μορφή του reward & punishment αλγορίθμου αρχίζουμε να εισάγουμε τα επαναληπτικά τα διανύσματα $[0,0]^T$, $[0,1]^T$, $[1,0]^T$, $[1,1]^T$ στην εκτεταμένη μορφή ($\rho = 1$):

1. $\boldsymbol{w}(0) = [0, 0, 0]^T$
   $- \boldsymbol{w}^T(0)[0, 0, 1]^T = 0$, διόρθωση

2. $\boldsymbol{w}^T(1) = \boldsymbol{w}(0) + [0, 0, 1]^T = [0, 0, 1]$
   $- \mathbf{1}^T(1)[0, 1, 1]^T = 1 > 0$, καμία αλλαγή

3. . . .

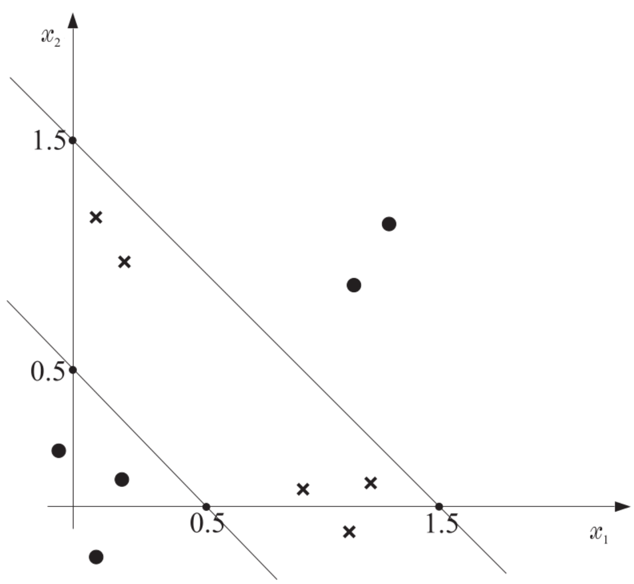
και συνεχίζουμε έως ώτου και τα τέσσερα διανύσματα να ταξινομηθούν σωστά. Το τελικό 'υπερεπίπεδο¨' στο χώρο (x_1, x_2) είναι:

$$-2x_1 + 1 = 0$$

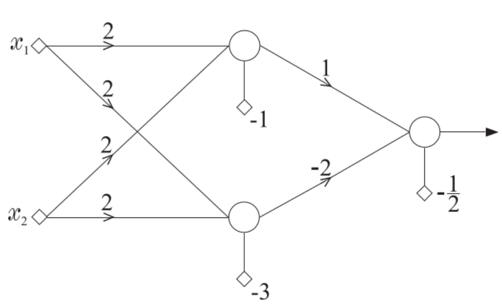
Ασκηση 2.5: Είναι φανερό από το επόμενο σχήμα οι δύο κλάσεις δεν είναι γραμμικώς διαχωρίσιμες. Επιπλέον, δύο γραμμές για παράδειγμα που διαχωρίζουν τις κλάσεις είναι οι

$$2x_1 - 2x_2 - 1 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 - 3 = 0$$



Επομένως, ένα MLP που κάνει σωστή ταξινόμηση τις κλάσεις είναι:



Ασκηση 2.6: a) Έχουμε:

$$J = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{k_L} y_k(i)\ln \hat{y}_k(i) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{k_L} y_k(i)\ln y_k(i)$$

Για δυαδικές επιθυμητές τιμές εξόδου ο πρώτος όρος είναι 0 ενώ ο δεύτερος όρος έχει ελάχιστη τιμή μηδέν.
b) Έχουμε:

$$\hat{y}_k(i) = y_k(i) + e_k(i)$$

όπου $e_k(i)$ το σφάλμα. Με κατάλληλες πράξεις στη συνάρτηση εντροπίας βρίσκουμε:

$$J = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{k_L} y_k(i)\ln(1 + \frac{e_k(i)}{y_k(i)})$$
