

Στοχαστικές Ανεξίξεις
Εξετάσεις Ιανουαρίου 2004
ΣΕΜΦΕ

Ζήτημα 1^ο. Έστω X, Y ανεξάρτητες τ.μ. και $Z = X - Y$. Εάν οι τ.μ. X, Y ακολουθούν Εκθετικές κατανομές με παραμέτρους λ και μ αντίστοιχα ($\lambda, \mu > 0$ και $\lambda \neq \mu$) να προσδιοριστεί η ροπογεννήτρια $g(s)$ της τ.μ. Z καθώς και η μη μηδενική ρίζα s_0 της εξίσωσης $g(s) = 1$. Με εφαρμογή της ταυτότητας του Wald με $s \equiv s_0$ να προσδιοριστούν (προσεγγιστικά) οι πιθανότητες απορρόφησης α και β στον τυχαίο περίπατο $\{S_n = \sum_{i=0}^n Z_i : n = 0, 1, 2, \dots\}$ με αρχική κατάσταση $X_0 = 0$ και με απορροφητικά φράγματα $-a$ και b αντίστοιχα. Ποιες οι ως άνω πιθανότητες για $\lambda = \mu$;

Ζήτημα 2^ο. Θεωρούμε τον απλό τυχαίο περίπατο $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ και πιθανότητες μετάβασης $p_{i,i+1} = p_i, p_{i,i-1} = q_i = 1 - p_i$ με $p_0 = 1$. Να δείξετε ότι αν υπάρχει κατανομή ισορροπίας $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ τότε ισχύει η διαφοροεξίσωση.

$$\pi_{i+1}q_{i+1} - \pi_i p_i = \pi_i q_i - \pi_{i-1} p_{i-1} \quad (i \geq 1) \text{ με } \pi_0 = \pi_i q_i.$$

Να λυθεί η ως άνω διαφοροεξίσωση και να προσδιοριστούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες πάνω στα p_i για να υπάρχει κατανομή ισορροπίας π .

Ζήτημα 3^ο. Δίνεται η Μαρκοβιανή Αλυσίδα $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4\}$ και στοχαστικό πίνακα

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- Να εξεταστεί αν η Μ.Α. είναι μη υποβιβάσιμη (irreducible).
- Να ταξινομηθούν οι καταστάσεις σε κλάσεις επικοινωνουσών καταστάσεων και να γραφεί ο στοχαστικός πίνακας υπό κανονική μορφή.
- Να εξεταστεί αν υπάρχουν περιοδικές κλάσεις και εφόσον υπάρχουν να προσδιοριστεί η περιοδικότητα τους.
- Να προσδιοριστεί, αν υπάρχει, η κατανομή ισορροπίας π .

Ζήτημα 4^ο.

- Να δοθεί ο ορισμός της επαναληπτικότητας μιας κατάστασης i .
- Να δείξετε ότι η ως άνω ιδιότητα είναι ιδιότητα κλάσεως.
- Να δείξετε ότι η κατάσταση i είναι παροδική εάν και μόνο εάν $P_{ii}(1) < \infty$.
- Να δείξετε ότι αν η κατάσταση i είναι επαναληπτική και $i \rightarrow j$ τότε $f_{ji} = 1$ και ότι η κατάσταση j είναι επίσης επαναληπτική.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Διάρκεια: 2 1/2 ώρες

Καλή επιτυχία