



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στοχαστικές Ανελίξεις- 3 Σεπτεμβρίου 2013

Ζήτημα 1 Έστω ανέλιξη Gauss  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , με μέση τιμή  $\mathbb{E}[X_t] = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ , και συνδιακυμάνσεις

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}[X_t X_s] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad \forall s, t \geq 0,$$

για κάποιο  $H \in (0, 1)$ .

Α Δείξτε ότι για κάθε  $t \geq 0$  έχουμε  $X_t \sim \mathcal{N}(0, t^{2H})$ .

Β Υπολογίστε για  $t \geq 0$  και  $h > 0$  την μέση τιμή και την διασπορά της προσαύξησης  $X_{t+h} - X_t$ , και δείξτε ότι η  $X_{t+h} - X_t$  ακολουθεί την ίδια κατανομή με την  $X_h$ .

Γ Δείξτε ότι για κάθε  $t, h > 0$  η προσαύξηση  $X_{t+h} - X_t$  είναι ανεξάρτητη από την  $X_t$  αν και μόνο αν  $H = 1/2$ .

Δ Ποια γνωστή σας στοχαστική διαδικασία είναι η  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  όταν  $H = 1/2$ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Ζήτημα 2 Για ένα απλό συμμετρικό τυχαίο περίπατο στους ακεραίους  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ , με  $X_0 = x$  και απορροφητικά φράγματα στους ακεραίους  $\ell < x$  και  $r > x$ , υπολογίστε

α) την πιθανότητα απορρόφησης από το  $r$ , και

β) τον αναμενόμενο χρόνο μέχρι την απορρόφηση.

Ζήτημα 3 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η κάτοψη ενός σπιτιού με 5 δωμάτια: κουζίνα (K), βιβλιοθήκη (B), σαλόνι (Σ), υπνοδωμάτιο (Υ), και μπάνιο (M), και οι πόρτες που τα συνδέουν. Ένα έντομο που ζει στο σπίτι, κάθε βράδυ διασχίζει τυχαία μια από τις πόρτες του δωματίου που βρίσκεται, και παραμένει στο δωμάτιο που οδηγεί η πόρτα μέχρι το επόμενο βράδυ. Αρχικά το έντομο βρίσκεται στο μπάνιο.

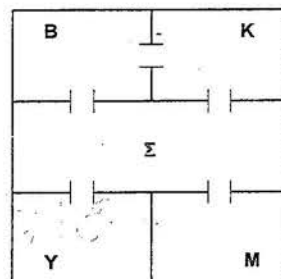
α) Αν  $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$  είναι η μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο καταστάσεων  $\{K, B, \Sigma, \Upsilon, M\}$  που περιγράφει τη θέση του εντόμου κάθε μέρα, βρείτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P$  της  $\{X_n\}$ .

β) Βρείτε την κατανομή της θέσης του εντόμου την 5η μέρα,  $X_5$ .

γ) Βρείτε την κατανομή ισορροπίας της  $X_n$ .

δ) Σε βάθος χρόνου, ποιο ποσοστό της ζωής του ζοδεύει το έντομο στο σαλόνι; Θα άλλαζε η απάντησή σας αν το έντομο αρχικά ήταν στην κουζίνα; Δικαιολογήστε.

ε) Υπολογίστε τον αναμενόμενο αριθμό ημερών που θα περάσει το έντομο στο σαλόνι μέχρι την πρώτη του επιστροφή στο μπάνιο.



Ζήτημα 4 Ρίχνουμε ένα ζάρι μέχρι να φέρουμε 4 διαδοχικές φορές 6. Με την βοήθεια μιας μαρκοβιανής αλυσίδας στο σύνολο  $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα.

α) Ποια η πιθανότητα να τα καταφέρουμε σε πεπερασμένο χρόνο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

β) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός ζαριών μέχρι να συμβεί αυτό;

γ) Ποια θα ήταν η απάντησή στο ερώτημα (β) αν το παιχνίδι τελείωνε στην πρώτη εμφάνιση της ακολουθίας 6,5,4,3;

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!