



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πολυτεχνειούπολη-Ζωγράφου

ΑΘΗΝΑ - 157 80

ΤΗΛ. : 77 21 744

FAX : 77 21 775

Στοχαστικές Ανελίζεις Εξετάσεις Ιουλίου 2010

Ζήτημα 1^ο. Παίκτης κερδίζει ή χάνει 1€ με πιθανότητα p και $q=1-p$ αντίστοιχα.

- (α) Να προσδιορίσετε τη μέση διάρκεια του παιχνιδιού όταν ο παίκτης ξεκινά με ποσό $a€$, ο αντίπαλος του διαθέτει ποσό $b€$ και $p \neq q$.
- (β) Ποια η μέση διάρκεια του παιχνιδιού όταν $b = \infty$ και $p < q$?

Ζήτημα 2^ο. Να δειχθούν τα παρακάτω:

- (α) Για τις ιδιοτιμές λ_j ($j=1, \dots, s$) ενός $(s \times s)$ -στοχαστικού πίνακα P ισχύει: $|\lambda_j| \leq 1$.
- (β) Η μονάδα αποτελεί ιδιοτιμή κάθε στοχαστικού πίνακα P .
- (γ) Τι συνεπάγεται η ύπαρξη k ιδιοτιμών λ_j με μέτρο $|\lambda_j| = 1$ όταν $k > 1$;

Ζήτημα 3^ο. Κάθε μία από τις δύο μηχανές που υπάρχουν σε ένα γραφείο τίθεται σε λειτουργία κατά τη διάρκεια μιας ημέρας ανεξαρτήτως της άλλης. Έστω $X(v)$ ο αριθμός των μηχανών σε λειτουργία κατά τη v -οστή ημέρα. Δίνεται ότι κάθε μία από τις δύο μηχανές τίθεται σε λειτουργία τη v -οστή ημέρα με πιθανότητα $[1+X(v-1)]/4$, $v=1,2,\dots$

- (α) Προσδιορίστε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P .
- (β) Προσδιορίστε την κατανομή ισορροπίας π .
- (γ) Ποιο το ποσοστό των ημερών κατά τις οποίες και οι δύο μηχανές βρίσκονται σε λειτουργία;

Ζήτημα 4^ο. Θεωρούμε τον τυχαίο περίπατο πάνω στο σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων $\{0,1,2,\dots\}$ με πιθανότητες μετάβασης $p_{i,i+2} = v_i$ και $p_{i,0} = 1-v_i$ με $0 < v_i < 1$, για όλα τα $i \geq 0$.

Να εξετάσετε αν υπάρχει κλάση (επικοινωνουσών) επαναληπτικών καταστάσεων και, αν ναι, προσδιορίστε την κατανομή ισορροπίας και τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα v_i ($i = 0,1,2,\dots$) για την ύπαρξη αυτής.

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 h.

Καλή επιτυχία