Στοχαστικές Ανελίξεις
Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2003
ΣΕΜΦΕ

Ζήτημα 1^o. Διακριτή τ.μ. T έχει συνάρτηση πιθανότητας $p_n = P[T = n]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Αν $\pi(s)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων p_n και $\Pi(s)$ η γεννήτρια συνάρτηση των πιθανοτήτων

$$P_n = \sum_{v=n+1}^{\infty} p_v \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

να δείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$\Pi(s) = \frac{1-\pi(s)}{1-s}, \qquad |s| < 1.$$

Με βάση την παραπάνω σχέση να δείξετε ότι η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. T είναι αντίστοιχα:

$$E[T] = \Pi(1) \quad \text{και} \quad Var[T] = 2\,\Pi'(1) + \Pi(1)\{1 - \Pi(1)\}.$$

Ζήτημα 2^o. Θεωρούμε τον απλό τυχαίο περίπατο $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots)$ με

$$X_n = \sum_{v=1}^{n} Z_v \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

όπου

$$Z_n = \begin{cases} +1, & \text{με πιθανότητα } p \\ -1, & \text{με πιθανότητα } q = 1-p \end{cases}$$

και με αρχική κατάσταση $X_0 = 0$. Η πιθανότητα να βρίσκεται μετά από n βήματα στην αρχική κατάσταση δίνεται από την κατανομή

$$p_{00}^{(n)} = P[X_n = 0 | X_0 = 0] = \begin{cases} \binom{2m}{m}\{pq\}^m & \text{όταν } n = 2m, \\ 0 & \text{όταν } n = 2m+1. \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

η οποία έχει γεννήτρια συνάρτηση την

$$P(s) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{ii}^{(2m)} = \{1 - 4pqs^2\}^{-1/2} \quad \text{με} \quad |s| < \{4pq\}^{-1/2}.$$

Να προσδιορίσετε την γεννήτρια συνάρτηση $F(s)$ του χρόνου της 1^{ης} επανόδου στην κατάσταση "0" και να δείξετε ότι η κατάσταση αυτή είναι επαναληπτική όταν $p = q$ και παροδική όταν $p \neq q$. Να δείξετε επίσης ότι η κατάσταση "0" δεν είναι γνήσια επαναληπτική. Ισχύουν τα ως άνω συμπεράσματα για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση i και γιατί;

Ζήτημα 3°. Δίνονται οι παρακάτω Στοχαστικοί Πίνακες:

$$P_1 = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad P_2 = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.3 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}.$$

(α) Να ταξινομηθούν οι καταστάσεις σε κλάσεις.
(β) Να γίνει ιεράρχηση των κλάσεων.
(γ) Να προσδιοριστούν, αν υπάρχουν, οι κλειστές κλάσεις.
(δ) Να γραφούν οι στοχαστικοί πίνακες υπό την "κανονική" μορφή:

$$P = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ R & T \end{bmatrix}$$

και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις παροδικές καταστάσεις.

Ζήτημα 4°. Ο παρακάτω στοχαστικός πίνακας αφορά την ποσότητα ύδατος σε δεξαμενή ενός δικτύου ύδρευσης κάθε πρωί. Ανάλογα με την ποσότητα ύδατος που υπάρχει κάθε πρωί, η δεξαμενή θωρείται ότι βρίσκεται στην κατάσταση E_1 όταν η ποσότητα ύδατος που περιέχει είναι πολύ χαμηλή, στην E_2 όταν είναι μέτρια, στην E_3 όταν είναι υψηλή και στην E_4 ότι η δεξαμενή είναι πλήρης.

$$P = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Να προσδιοριστεί η κατανομή ισορροπίας. Ποιοι οι μέσοι χρόνοι επανόδου σε κάθε κατάσταση. Αν για την επαρκή υδροδότηση της περιοχής στο διάστημα μιας ημέρας απαιτείται η δεξαμενή να βρίσκεται το πρωί σε μία από τις E_2, E_3 ή E_4, ποιο το ποσοστό των ημερών κατά τις οποίες η δεξαμενή θα περιέχει επαρκή ποσότητα ύδατος;

Διάρκεια εξέτασης: 2.30΄h.
Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Καλή επιτυχία