Exponential Family (σελ. 362 Καρώνη)

Δεδομένου ενός μέτρου η, η exponential family ορίζεται βάσει της

$$p(x|\eta) = h(x)\cdot \exp\{\eta^T \underbrace{T(x)}_{\text{sufficient statistic}} - \underbrace{A(\eta)}_{\text{cumulant}}\}$$

• Poisson: $p(x|\mu) = \dfrac{\mu^x \cdot e^{-\mu}}{x!} = \dfrac{1}{x!}\exp\left(\ln\left(\mu^x \cdot e^{-\mu}\right)\right) =$

$= \dfrac{1}{x!}\exp(x\cdot\ln\mu - \mu)$, οπότε $h(x) = \dfrac{1}{x!}$, $T(x) = x$ και

$A(\eta) = \mu$, $\underline{\eta = \ln\mu} \Leftrightarrow \mu = e^{\eta}$

από τη σχέση αυτή φαίνεται πως η link function είναι η $\ln x$

• Binomial: $p(x|p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, για σταθερό n

$= \binom{n}{x}\exp\left(\ln\left(p^x(1-p)^{n-x}\right)\right) = \binom{n}{x}\cdot\exp\left(x\cdot\ln p + (n-x)\ln(1-p)\right)$

$= \binom{n}{x}\cdot\exp\left(x(\ln p - \ln(1-p)) + n\cdot\ln(1-p)\right) = \binom{n}{x}\exp\left[x\cdot\ln\dfrac{p}{1-p} + n\cdot\ln(1-p)\right]$

οπότε $h(x) = \binom{n}{x}$, $T(x) = x$, $A(\eta) = -n\ln(1-p)$, $\underline{\eta = \ln\dfrac{p}{1-p}}$,

από τη σχέση αυτή φαίνεται πως η link function είναι η logit