

Στοχαστικές Ανελίζεις
Εξετάσεις Ιουνίου 2006
ΣΕΜΦΕ

~~Ζήτημα 1^ο~~. Να δώσετε τον ορισμό της κίνησης Brown και να αποδείξετε ότι για $s > t > 0$ ισχύει η σχέση: $\text{Corr}(X_t, X_s) = \{t/s\}^{1/2}$.

~~Ζήτημα 2^ο~~. Θεωρούμε το συμμετρικό απλό τυχαίο περίπατο $\{X_n = \sum_{i=1}^n Y_i : n = 1, 2, \dots\}$ ($p = q = 1/2$) με απορροφητικά φράγματα $-a$ και b . Έστω T ο χρόνος απορρόφησης και X_T η θέση απορρόφησης. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$E[X_T] = 0 \text{ και } \text{Var}[X_T] = E[T].$$

~~Ζήτημα 3^ο~~. Κατάστημα ηλεκτρονικών προϊόντων προμηθεύεται στην αρχή κάθε εβδομάδας δύο ψηφιακές κάμερες ορισμένου τύπου εφόσον στο τέλος της προηγούμενης εβδομάδας δεν διέθετε καμία μηχανή. Δίνεται ότι η εβδομαδιαία ζήτηση μηχανών αυτού του τύπου ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda=1$. Έστω X_t ο αριθμός των μηχανών στο κατάστημα στην αρχή κάθε εβδομάδας.

- (α) Να δείξετε ότι η $\{X_t : t=1, 2, \dots\}$ είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα.
(β) Με δεδομένο ότι $X_1 = 2$, ποια η κατανομή καταστάσεων στην αρχή της 2^{ης} εβδομάδας και ποια στη αρχή της 3^{ης}; ($e^{-1} = 0.368$).

~~Ζήτημα 4^ο~~. Σωματίδιο κινείται πάνω σε κύκλο επισκεπτόμενο τις θέσεις "0", "1", "2" και "3" που αντιστοιχούν στα σημεία 0° , 90° , 180° και 270° . Η κίνηση είναι μία θέση μπροστά (ορθή φορά) με πιθανότητα p , ή μία θέση πίσω (ανάστροφη φορά) με πιθανότητα q ($p+q=1$). (α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει κατανομή ισορροπίας. (β) Να προσδιορίσετε την κατανομή ισορροπίας. (γ). Να προσδιορίσετε το ποσοστό του χρόνου κατά τον οποίο το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση "0". (δ) Ποιος ο μέσος χρόνος επανόδου στην κατάσταση "0";

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Διάρκεια: 2 1/2 ώρες

Καλή επιτυχία