

Μεταπτυχιακές Στοχαστικές Διαδικασίες- 29 Ιανουαρίου 2021

ΑΣΚΗΣΗ 1 Στο χωριό Μαρτινγκιλίκι οι N κάτοικοι παίρνουν αποφάσεις για τα δημόσια πράγματα με έναν ενδιαφέροντα τρόπο. Όταν κάποιος προτείνει μια δράση, αρχικά εκφράζουν όλοι την άποψή τους (ΝΑΙ/ΟΧΙ). Στη συνέχεια κάθε κάτοικος αναπροσαρμόζει κάθε πρωί την άποψή του ανεξάρτητα από τους συγχωριανούς του και υποστηρίζει την πρόταση με πιθανότητα ίση με το ποσοστό των υποστηρικτών της πρότασης την προηγούμενη μέρα. Αυτό επαναλαμβάνεται μέχρι όλοι οι N κάτοικοι να ομογυνωμήσουν, οπότε και πράττουν ανάλογα.

- α) Αν Y_n είναι το πλήθος των υποστηρικτών της πρότασης τη μέρα n , να περιγράψετε τις πιθανότητες μετάβασης της αλυσίδας $\{Y_n : n \in \mathbb{N}_0\}$.
- β) Να προσδιορίσετε τις κλάσεις επικοινωνίας αυτής της αλυσίδας και να τις χαρακτηρίσετε ως προς την επαναληπτικότητα/παροδικότητα.
- γ) Να αποδείξετε ότι οι κάτοικοι αποφασίζουν σε πεπερασμένο χρόνο με πιθανότητα 1.
- δ) Να αποδείξετε ότι το ποσοστό Π_n των υποστηρικτών της πρότασης την ημέρα n ορίζει μια martingale.
- ε) Αν οι υποστηρικτές της πρότασης είναι αρχικά N_0 , να υπολογίσετε την πιθανότητα το χωριό να υιοθετήσει την πρόταση.
- στ) Να υπολογίσετε την $\mathbb{E}[(\Pi_{n+1} - \Pi_n)^2 | \mathcal{F}_n]$.

ΑΣΚΗΣΗ 2 Ένα έντομο κινείται στους ακεραίους. Σε κάθε βήμα μετατοπίζεται προς την ίδια κατεύθυνση όπως στο προηγούμενο βήμα του με πιθανότητα $\epsilon \in (0, 1)$, ενώ με πιθανότητα $1 - \epsilon$ μετατοπίζεται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Τη χρονική στιγμή 1 το έντομο βρίσκεται στο 1 έχοντας προέλθει από το 0, όπου βρισκόταν τη χρονική στιγμή 0.

- α) Να αποδείξετε ότι αν $\epsilon \neq \frac{1}{2}$, η διαδικασία που καταγράφει τη θέση του εντόμου δεν είναι μαρκοβιανή.
- β) Να μοντελοποιήσετε την κίνηση του εντόμου ως μια μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, προσδιορίζοντας έναν κατάλληλο χώρο καταστάσεων και τις πιθανότητες μετάβασης αυτής της αλυσίδας.
- γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το έντομο να φτάσει στο $N \in \mathbb{N}$ πριν επιστρέψει στο 0.
- δ) Να διατυπώσετε μια εικασία για το πώς συμπεριφέρεται ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι να μετατοπιστεί το έντομο κατά N από την αρχική του θέση, καθώς $N \rightarrow \infty$, εξηγώντας το σκεπτικό σας.
- ε) Αποδείξτε την εικασία σας.

Διάρκεια Εξέτασης 1 ώρα
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!