ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων - NETMODE

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80 Αθήνα, Τηλ: 210-772.2503, Fax: 210-772.1452
e-mail: maglaris@netmode.ntua.gr, URL: http://www.netmode.ntua.gr

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ
(ΔΠΜΣ Επιστήμη Δεδομένων & Μηχανική Μάθηση)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Simulated Annealing

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Simulated Annealing να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης:

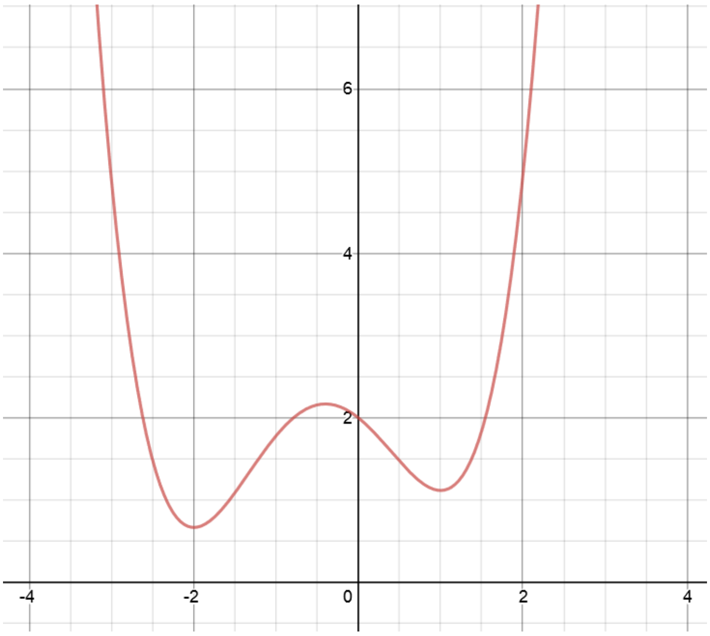
$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{15} - \frac{4x^2}{5} - \frac{4x}{5} + 2$$

Θεωρώντας ως ενέργεια τις τιμές που λαμβάνει η $f(x)$ να εκτελέσετε τον αλγόριθμο για τιμές θερμοκρασίας από $\mathrm{T}_{start} = 2$ έως $\mathrm{T}_{end} = 0.25$. Η θερμοκρασία μειώνεται σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου κατά 30%, ενώ επιλέγεται ως νέα τιμή του x εκείνη που απέχει από την τρέχουσα όσο ένας τυχαίος αριθμός d ομοιόμορφα κατανεμημένος στο διάστημα $[-1, +1]$. Να θεωρήσετε αρχικές τιμές $x_c = 0.5$ με $\mathrm{E}_c = f(0.5) = 1.474$.

Σας δίνονται δύο ομάδες τιμών που έχουν παραχθεί με τη βοήθεια γεννητριών ψευδοτυχαίων αριθμών. Η πρώτη περιλαμβάνει τιμές που έχουν παραχθεί από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-1, +1]$ και θα χρησιμοποιηθεί για την επιλογή του επόμενου x. Η δεύτερη περιλαμβάνει αριθμούς που έχουν παραχθεί από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, +1]$ και θα χρησιμοποιηθεί στις συγκρίσεις που πραγματοποιεί ο αλγόριθμος Metropolis-Hastings.

- $1^{η}$ ομάδα: $-0.3040, 0.4923, -0.4430, -0.7023, -0.8728, -0.8868$
- $2^{η}$ ομάδα: $0.0881, 0.7506, 0.0015$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ φαίνεται παρακάτω:



Βήμα 1:

$$x_{proposed} = x_c + d = 0.5 - 0.3040 = 0.196$$

$$\mathrm{E}_{proposed} = f(x_{proposed}) = f(0.196) = 1.816$$

Η ενέργεια του προτεινόμενου βήματος είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα ενέργεια $\mathrm{E}_c = 1.474$. Έτσι, θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Metropolis-Hastings για να δούμε αν θα γίνει δεκτό το προτεινόμενο βήμα.

$$\mathrm{Pr} = exp\left(-\frac{\mathrm{E}_{proposed} - \mathrm{E}_c}{\mathrm{T}_c}\right) = \exp\left(-\frac{1.816 - 1.474}{2}\right) = 0.8428 > 0.0881$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα που προέκυψε από τον αλγόριθμο Metropolis-Hastings είναι μεγαλύτερη από τον τυχαίο αριθμό που επιστρέφει η γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών. Κατά συνέπεια, θα δεχτούμε το προτεινόμενο βήμα:

$$x_c = 0.196, \mathrm{E}_c = 1.816$$

Βήμα 2:

$$\mathrm{T}_c = 2 \cdot 0.7 = 1.4$$

$$x_{proposed} = 0.196 + 0.4923 = 0.6883$$

$$\mathrm{E}_{proposed} = f(0.6883) = 1.2786$$

Η ενέργεια του προτεινόμενου βήματος είναι μικρότερη από την τρέχουσα ενέργεια. Έτσι, θα δεχτούμε το προτεινόμενο βήμα:

$$x_c = 0.6883, \mathrm{E}_c = 1.2786$$

Βήμα 3:

$$\mathrm{T}_c = 1.4 \cdot 0.7 = 0.98$$

$$x_{proposed} = 0.6883 - 0.443 = 0.2453$$

$$\mathrm{E}_{proposed} = f(0.2453) = 1.7634$$

Η ενέργεια του προτεινόμενου βήματος είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα ενέργεια $\mathrm{E}_c = 1.2786$. Έτσι, θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Metropolis-Hastings για να δούμε αν θα γίνει δεκτό το προτεινόμενο βήμα.

$$\Pr = exp\left(-\frac{\mathrm{E}_{proposed} - \mathrm{E}_c}{\mathrm{T}_c}\right) = \exp\left(-\frac{1.7634 - 1.27286}{0.98}\right) = 0.61 < 0.7506$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα που προέκυψε από τον αλγόριθμο Metropolis-Hastings είναι μικρότερη από τον τυχαίο αριθμό που επιστρέφει η γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών. Κατά συνέπεια, δε θα δεχτούμε το προτεινόμενο βήμα:

$$x_c = 0.6883, \mathrm{E}_c = 1.2786$$

Βήμα 4:

$$\mathrm{T}_c = 0.98 \cdot 0.7 = 0.6859$$

$$x_{proposed} = 0.6883 - 0.7023 = -0.014$$

$$\mathrm{E}_{proposed} = f(-0.014) = 2.0011$$

Η ενέργεια του προτεινόμενου βήματος είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα ενέργεια $\mathrm{E}_c = 1.2786$. Έτσι, θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Metropolis-Hastings για να δούμε αν θα γίνει δεκτό το προτεινόμενο βήμα.

$$\Pr = exp\left(-\frac{\mathrm{E}_{proposed} - \mathrm{E}_c}{\mathrm{T}_c}\right) = \exp\left(-\frac{2.0011 - 1.27286}{0.6859}\right) = 0.3488 > 0.0015$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα που προέκυψε από τον αλγόριθμο Metropolis-Hastings είναι μεγαλύτερη από τον τυχαίο αριθμό που επιστρέφει η γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών. Κατά συνέπεια, θα δεχτούμε το προτεινόμενο βήμα:

$$x_c = -0.014, \mathrm{E}_c = 2.0011$$

Βήμα 5:

$$\mathrm{T}_c = 0.6859 \cdot 0.7 = 0.4801$$

$$x_{proposed} = -0.014 - 0.8728 = -0.8868$$

$$\mathrm{E}_{proposed} = f(-0.8868) = 1.9095$$

Η ενέργεια του προτεινόμενου βήματος είναι μικρότερη από την τρέχουσα ενέργεια. Έτσι, θα δεχτούμε το προτεινόμενο βήμα:

$$x_c = -0.8868, \mathrm{E}_c = 1.9095$$

Βήμα 6:

$$\mathrm{T}_c = 0.4801 \cdot 0.7 = 0.3361$$

$$x_{proposed} = -0.8868 - 0.5724 = -1.4592$$

$$\mathrm{E}_{proposed} = f(-1.4592) = 1.1474$$

Η ενέργεια του προτεινόμενου βήματος είναι μικρότερη από την τρέχουσα ενέργεια. Έτσι, θα δεχτούμε το προτεινόμενο βήμα:

$$x_c = -1.4592, \mathrm{E}_c = 1.1474$$

Βήμα 7:

$$\mathrm{T}_c = 0.3361 \cdot 0.7 = 0.2353 < \mathrm{T}_{end}$$

Άρα εδώ ο αλγόριθμος τερματίζεται. Παρατηρούμε ότι αλγόριθμος κατάφερε να ξεφύγει από το τοπικό ελάχιστο και να πλησιάσει το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης. Εάν τρέχαμε περισσότερες επαναλήψεις και για μικρότερες τιμές του T_{end} θα βλέπαμε ότι ο αλγόριθμος θα κατάφερνε να προσεγγίσει καλύτερα την τιμή του ολικού ελαχίστου.

Συντάχθηκε από τους υπεύθυνους εργαστηριακής υποστήριξης του μαθήματος
Νίκο Κωστόπουλο και Δημήτρη Πανταζάτο, Υποψήφιους Διδάκτορες Ε.Μ.Π.