Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων

1η Σειρά Ασκήσεων

Στοιχεία φοιτητή
Ονοματεπώνυμο: Κωνσταντίνος Τσόπελας
Αριθμός Μητρώου: 03400198

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΔΠΜΣ ΕΔΕΜΜ
3 Απριλίου 2024

Πρόβλημα 1

Ερώτημα 1.

Δεν ισχύει, αφού $u_1(B, Z) = 1 > 0 = u_1(A, Z)$.

Ερώτημα 2.

Ισχύει, διότι:

$$u_2(\cdot, X) = \begin{pmatrix} 40 \\ 14 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 23 \\ 13 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = u_2(\cdot, Y)$$

και γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι μία στρατηγική κυριαρχεί μία άλλη αν και μόνο αν την κυριαρχεί σε όλες τις αμιγείς στρατηγικές του άλλου παίκτη.

Ερώτημα 3.

Δεν ισχύει, αφού $u_1(D, Y) = 3 < 5 = u_1(B, Y)$.

Ερώτημα 4.

Ισχύει, και μάλιστα και ισχυρά, διότι:

$$u_2(\cdot, Z) = \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 42 \\ 19 \\ 7 \\ 45 \end{pmatrix} = u_2(\cdot, W)$$

Ερώτημα 5.

Δεν ισχύει. Η C είναι κυρίαρχη στρατηγική για τον παίκτη 1. Όπως έχουμε πει στο μάθημα, αρκεί να δούμε ότι καταφέρνει μεγαλύτερο ή ίσο utility σε σχέση με οποιαδήποτε άλλη pure strategy του παίκτη 1, για κάθε pure strategy του παίκτη 2. Πράγματι:

$$u_1(A, \cdot) = \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1(C, \cdot)$$

$$u_1(B, \cdot) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1(C, \cdot)$$

$$u_1(D, \cdot) = \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1(C, \cdot)$$

Ερώτημα 6.

Ισχύει, καθώς, δεδομένου ότι ο παίκτης 2 παίζει W, τα utilities των στρατηγικών του παίκτη 1 είναι:

$$\begin{pmatrix} u_1(A,W) \\ u_1(B,W) \\ u_1(C,W) \\ u_1(D,W) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

εκ των οποίων προφανώς το $20 = u_1(C,W)$ είναι μέγιστο (αν και όχι μοναδικό).

Ερώτημα 7.

Ναι, υπάρχει, και είναι το προφίλ στρατηγικών (C, W). Πράγματι, είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι κανένας παίκτης δεν έχει ισχυρό κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς από τη στρατηγική του σε αυτό το προφίλ.

Το ότι η στρατηγική C είναι βέλτιστη απόκριση στην W για τον παίκτη 1 το είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

Αρκεί να δούμει και ότι η W είναι βέλτιστη απόκριση στην C:

$$\begin{pmatrix} u_2(C,W) \\ u_2(C,X) \\ u_2(C,Y) \\ u_2(C,Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

εκ των οποίων το $7 = u_2(C,W)$ είναι μέγιστο.

Τέλος, στο προφίλ (C, W) το κοινωνικό όφελος είναι $20 + 7 = 27 < 30$.

Πρόβλημα 2

Εξετάζουμε κάποιες υποπεριπτώσεις με τη σειρά.

Περίπτωση 1: ως 49 Για κάθε στρατηγική $a_1 \in \{0, \dots, 49\}$, ισχυριζόμαστε ότι η $a_1 + 1$ κυριαρχεί, και μάλιστα αυστηρά, έναντι της a_1. Πράγματι:

- Αν $a_2 < 50$, τότε $a_1 + a_2 < 100$, άρα ο καθένας παίρνει όσα παίζει, και άρα σίγουρα συμφέρει τον παίκτη 1 να αυξήσει κατά 1 το ποσό του (αφού και με την αύξηση αυτή, πάλι μικρότερο του 100 θα είναι το άθροισμα).

- Αν $a_2 \geq 51$, τότε $a_1 < a_2 - 1$ και ο παίκτης 1 παίρνει πάντα a_1 (είτε το άθροισμα είναι έως 100 και άρα παίρνει ο καθένας αυτό που έπαιξε, είτε το άθροισμα ξεπερνά το 100 και ο μικρότερος, δηλαδή ο 1 εδώ, παίρνει αυτά που έπαιξε). Οπότε, τον συμφέρει σίγουρα να αυξήσει κατά 1, αφού θα έχει και πάλι μικρότερο αριθμό από τον παίκτη 2, άρα και πάλι θα πάρει όσο έπαιξε.

- Αν $a_2 = 50$, τότε με παρόμοια λογική συμφέρει πάντα το $a_1 + 1$ για a_1 έως και 48, και για 49 πάλι μπορούμε να δούμε άμεσα ότι συμφέρει το 50, αφού στο προφίλ (49, 50) τα utilities είναι (49, 50), ενώ στο (50, 50) είναι (50, 50) (ακολουθώντας τους κανόνες της εκφώνησης).

Οπότε, όλες οι στρατηγικές κάτω του 50 είναι strictly dominated. Επιπλέον, λόγω της συμμετρίας του παιγνίου, το ίδιο θα ισχύει αντίστοιχα και για τον παίκτη 2. Οπότε, όλες αυτές οι στρατηγικές μπορούν να αφαιρεθούν διαδοχικά, η μία κατόπιν της άλλης, και για τους δύο παίκτες. Και συνεχίζουμε την ανάλυση χωρίς αυτές, αφού έτσι προχωράει η διαδικασία επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης κυριαρχούμενων στρατηγικών.

Δηλαδή, από εδώ και πέρα, μπορούμε να θεωρούμε $a_1, a_2 \geq 50$ (και άρα και $a_1 + a_2 \geq 100$).

Περίπτωση 2: ακριβώς 50 Η $a_1 = 51$ κυριαρχεί ασθενώς έναντι της $a_1' = 50$, διότι:

- Αν $a_2 = 50$, τότε και οι δύο στρατηγικές δίνουν 50 στον παίκτη 1, αφού για $a_1' = 50$ ο καθένας παίρνει αυτό που έπαιξε, και για $a_1 = 51 > a_2$, ο παίκτης 2 παίρνει αυτό που έπαιξε, δηλαδή 50, και ο 1 τα υπόλοιπα, δηλαδή πάλι 50.

- Αν $a_2 = 51$, τότε παρομοίως, για $a_1' = 50$, ο 1 παίρνει αυτό που έπαιξε και ο 2 τα υπόλοιπα, δηλαδή 50-50, και για $a_1 = 51$, βρισκόμαστε πια στην περίπτωση 4 της εκφώνησης, οπότε και πάλι τα κέρδη χωρίζονται 50-50.

- Αν $a_2 > 51$, τότε $a_1 + a_2 > 100$ και $a_2 > a_1$ και για $a_1 = 50$ και για $a_1 = 51$, άρα είμαστε στην περίπτωση 3 της εκφώνησης, και άρα ο 1 θα λάβει αυτό που θα πει, και ο 2 τα υπόλοιπα. Άρα, προφανώς συμφέρει καθαρά περισσότερο τον ένα να παίξει 51 αντί για 50.

Οπότε, και λόγω συμμετρίας, μπορούν να διαγραφούν οι ασθενώς κυριαρχούμενες στρατηγικές $a_1 = 50$ και $a_2 = 50$ και, από εδώ και πέρα, μπορούμε να θεωρούμε $a_1, a_2 \geq 51$ (και άρα και $a_1 + a_2 > 100$).

Περίπτωση 3: ακριβώς 100 Ξεκινώντας τώρα από το άλλο άκρο, μπορούμε να δούμε ότι η $a_1' = 100$ είναι weakly dominated από την $a_1 = 99$. Πράγματι:

- Αν $a_2 < 98$, τότε οι a_1', a_1 δεν κάνουν καμία διαφορά, καθώς βρισκόμαστε στην περίπτωση 2 της εκφώνησης, και άρα ο 1 θα πάρει ακριβώς ότι περισσεύει από τον 2.

- Αν $a_2 = 99$, τότε η $a_1 = 99$ οδηγεί σε ισοπαλία, άρα και οι δύο θα πάρουν από 50, ενώ η $a_1' = 100$ οδηγεί στο να πάρει ο παίκτης 1 μόνο 1 ευρώ.

- Αν $a_2 = 100$, τότε η $a_1 = 99$ οδηγεί στην περίπτωση 3 της εκφώνησης, άρα ο 1 θα πάρει 99 ευρώ, ενώ η $a_1' = 100$ οδηγεί σε ισοπαλία, άρα θα πάρει μόνο 50 ευρώ.

Ομοίως, λόγω συμμετρίας, το ίδιο ισχύει και για τον παίκτη 2. Άρα, οι στρατηγικές $a_1 = 100$ και $a_2 = 100$ είναι ασθενώς κυριαρχούμενες, και τις αφαιρούμε από το παίγνιο.

Παρατηρήστε ότι, πριν την αφαίρεση του 100, καμία άλλη στρατηγική δεν είναι κυριαρχούμενη. Αν ο άλλος παίκτης παίξει το 100, που είναι ακόμα διαθέσιμο, τότε εμάς μας συμφέρει να παίξουμε το 99, αν παίξει το 99 το 98 κ.ο.κ., οπότε για κάθε αριθμό από 51 ως 99, έστω a, υπάρχει μία στρατηγική του άλλου παίκτη που καθιστά τον a τη συμφερότερη στρατηγική για εμάς, και άρα ο a δεν μπορεί να είναι κυριαρχούμενη στρατηγική.

Περίπτωση 3: 52 έως 99 Επεκτείνοντας επαγωγικά τον παραπάνω συλλογισμό για το 100, κάθε φορά που μας έχει απομείνει σαν μέγιστη διαθέσιμη στρατηγική (μετά τις αφαιρέσεις) ένας αριθμός $a \in \{52, \ldots, 99\}$, τότε αυτός πάντα θα κυριαρχείται από τον $a - 1$, και άρα θα αφαιρείται.

Συμπέρασμα Από την παραπάνω ανάλυση καταλαβαίνουμε τελικά ότι:

1. Ξεκινώντας από τα αριστερά, οι στρατηγικές 0 έως και 49 είναι ισχυρά κυριαρχούμενες, και άρα θα αφαιρεθούν όλες, ανεξαρτήτως σειράς, όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία του μαθήματος.

2. Ξεκινώντας από τα δεξιά, η μόνη σειρά με την οποία μπορούν να αφαιρεθούν οι ασθενώς κυριαρχούμενες στρατηγικές (εκτός της 50 μόνο) είναι 100, 99, 98, $\ldots$, 52.

3. Τέλος, και ανεξάρτητα από όλα τα υπόλοιπα, η 50 κυριαρχείται ασθενώς από την 51, οπότε μπορεί και αυτή, σε οποιοδήποτε βήμα της αφαίρεσης, να διαγραφεί.

Ένα πρώτο συμπέρασμα είναι ότι η στρατηγική $a = 51$ δεν θα είναι ποτέ ασθενώς κυριαρχούμενη, καθώς αν έχει μείνει και κάτι μεγαλύτερο και κάτι μικρότερο από αυτήν, τότε υπάρχουν περιπτώσεις όπου με συμφέρει να παίξω 51 έναντι των άλλων δύο. Αν έχει μείνει μόνο κάτι μικρότερό της, τότε δεν έχω λόγο να μην παίξω 51, γιατί και 49 ή 50 να παίξει ο άλλος εγώ 50 θα πάρω. Και αν έχει μείνει μόνο κάτι μεγαλύτερο, τότε ο άλλος μπορεί να παίξει πάντα 51, όπου αν παίξω 51 θα πάρω 50, ενώ αν παίξω κάτι μεγαλύτερο θα πάρω λιγότερα.

Έχοντας το παραπάνω, μπορούμε, τελικά, να επιχειρηματολογήσουμε ως προς την οποιαδήποτε σειρά αφαίρεσης.

Δεδομένου ότι επιβιώνει πάντα το 51, κάθε $a \in \{1, \ldots, 49\}$ στην πραγματικότητα κυριαρχείται και από αυτό (πέρα από το $a + 1$ που είπαμε πριν), οπότε όλες οι στρατηγικές στο $\{1, \ldots, 49\}$ σίγουρα θα αφαιρεθούν.

Επίσης, η μέγιστη στρατηγική (μεγαλύτερη από 51) που έχει απομείνει κάθε φορά είναι ασθενώς κυριαρχούμενη από την αμέσως μικρότερή της, με παρόμοια λογική με αυτή που εκθέσαμε για το 100 και το 99. Οπότε, και όλες στο $\{52, \ldots, 100\}$ σίγουρα θα αφαιρεθούν.

Η μόνη για την οποία δεν είναι σίγουρο είναι η 50. Γιατί αν έχουν μείνει στο τέλος μόνο η 50 και η 51, τότε δεν υπάρχει κάποια μεγαλύτερη από την 51 για τον αντίπαλο, ώστε να μας δώσει το πλεονέκτημα για την 51, όπως είδαμε πριν. Σε αυτή την περίπτωση, στην πραγματικότητα, αν το δούμε εξαντλητικά, θα διαπιστώσουμε πως ό,τι και να παίξουμε από τα δύο, τα κέρδη θα είναι 50-50.

Οπότε, το τελικό συμπέρασμα είναι ότι η μόνη στρατηγική που επιβιώνει ανεξαρτήτως της σειράς αφαίρεσης είναι η **51**!

Πρόβλημα 3

Ερώτημα (i)

Για να απαντήσουμε το ερώτημα αυτό, θα αξιοποιήσουμε τις ποσότητες v_1, v_2 που είδαμε στο μάθημα. Συγκεκριμένα, έστω A ο πίνακας του παιγνίου που μας δίνεται (δηλαδή τα utilities του παίκτη 1, που τα μεγιστοποιεί), δηλαδή:

$$A = \begin{bmatrix} a & 10 \\ 8 & d \end{bmatrix}$$

Τότε, έχουμε ορίζει τις ποσότητες v_1, v_2 ως:

$$v_1 = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} A_{ij}$$
$$v_2 = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} A_{ij}$$

και έχουμε πει ότι το παίγνιο έχει ισορροπία Nash με αμιγείς στρατηγικές αν και μόνο αν $v_1 = v_2$.

Αν, για τη συγκεκριμένη περίπτωση, προσπαθήσουμε να αναλύσουμε περαιτέρω τις δύο ποσότητες, θα έχουμε:

$$v_1 = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} A_{ij} = \max\{\min\{a, 10\}, \min\{8, d\}\}$$

Αφού μας δίνεται $a < 10$ και $d > 10 > 8$, θα ισχύει $\min\{a, 10\} = a$ και $\min\{8, d\} = 8$, άρα:

$$v_1 = \max\{a, 8\}$$

Παρόμοια:

$$\begin{aligned} v_2 &= \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} A_{ij} \\ &= \min\{\max\{a, 8\}, \max\{10, d\}\} \\ &= \min\{\max\{a, 8\}, d\}, \text{ αφού } d > 10 \\ &= \max\{a, 8\}, \text{ διότι } d > 10 \text{ και } a \leq 10 \Rightarrow \max\{a, 8\} \leq 10 \end{aligned}$$

Άρα, $v_1 = v_2$ και το παίγνιο θα έχει σημείο ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές για οποιαδήποτε $a \in [0, 10)$ και $d \in (10, \infty)$.

Ερώτημα (ii)

Εφαρμόζουμε την ίδια τεχνική με τα v_1, v_2, όπως την παρουσιάσαμε στο προηγούμενο ερώτημα, σε κάθε πίνακα ξεχωριστά.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \max_{i \in \{1,2,3\}} \min_{j \in \{1,2,3\}} A_{ij} = \max\{4, 1, 2\} = 4$$
$$v_2 = \min_{j \in \{1,2,3\}} \max_{i \in \{1,2,3\}} A_{ij} = \min\{4, 6, 7\} = 4$$

$v_1 = v_2$, άρα το παίγνιο έχει ισορροπία με αμιγείς στρατηγικές.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \max_{i\in\{1,2,3\}} \min_{j\in\{1,2,3\}} A_{ij} = \max\{3,2,3\} = 3 \\
v_2 &= \min_{j\in\{1,2,3\}} \max_{i\in\{1,2,3\}} A_{ij} = \min\{5,8,4\} = 4
\end{aligned}
$$

$v_1 < v_2$, άρα το παίγνιο δεν έχει ισορροπία με αμιγείς στρατηγικές.

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \max_{i\in\{1,2,3\}} \min_{j\in\{1,2,3\}} A_{ij} = \max\{3,2,3\} = 3 \\
v_2 &= \min_{j\in\{1,2,3\}} \max_{i\in\{1,2,3\}} A_{ij} = \min\{3,8,9\} = 3
\end{aligned}
$$

$v_1 = v_2$, άρα το παίγνιο έχει ισορροπία με αμιγείς στρατηγικές.

Πρόβλημα 4

Ερώτημα (i)

Από τη στιγμή που έχουμε ένα 2 x 2 παίγνιο και 3 (διαφορετικά) σημεία ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές, αυτό σημαίνει ότι 2 από αυτές τις ισορροπίες (στην πραγματικότητα, ακριβώς 2 ζευγάρια) θα έχουν την ίδια στρατηγική για τον έναν παίκτη. Πράγματι, σκεφτείτε ότι αν οι 3 ισορροπίες είναι οι $(s_1, t_1), (s_2, t_2), (s_3, t_3)$, τότε 2 εκ των s_1, s_2, s_3 πρέπει να είναι ίδια, αφού ο παίκτης 1 έχει στη διάθεσή του 2 στρατηγικές.

Αφού, λοιπόν, και τα σημεία ισορροπίας είναι διαφορετικά μεταξύ τους, έχουμε πλέον δείξει ότι τα 2 από τα 3 σημεία θα είναι της μορφής:

$$
(s^*, t_1), (s^*, t_2)
$$

όπου $t_1 \neq t_2$ είναι, προφανώς, οι 2 διαφορετικές αμιγείς στρατηγικές του παίκτη 2. Έστω, επίσης, s η άλλη αμιγής στρατηγική του παίκτη 1.

Θα δείξουμε, τώρα, ότι οποιοδήποτε σημείο (s^*, q), όπου q τυχαία μεικτή στρατηγική του παίκτη 2, είναι σημείο ισορροπίας, και άρα έχουμε άπειρα σημεία ισορροπίας με μεικτές στρατηγικές.

$$
(s^*, t_1) \text{ ισορροπία } \Rightarrow \begin{cases} u_1(s^*, t_1) \geq u_1(s, t_1) \\ u_2(s^*, t_1) \geq u_2(s^*, t_2) \end{cases}
$$

$$
(s^*, t_2) \text{ ισορροπία } \Rightarrow \begin{cases} u_1(s^*, t_2) \geq u_1(s, t_2) \\ u_2(s^*, t_2) \geq u_2(s^*, t_1) \end{cases}
$$

Αυτό σημαίνει:

1. Για τον παίκτη 1, ότι η στρατηγική s^* είναι weakly dominant, και άρα αποτελεί πάντα βέλτιστη απόκριση για τον παίκτη 1, ακόμα και έναντι οποιασδήποτε *μεικτής* στρατηγικής του παίκτη 2 (όπως ξέρουμε από τη θεωρία).

2. Για τον παίκτη 2, βλέπουμε ότι $u_2(s^*, t_1) = u_2(s^*, t_2)$, δηλαδή έναντι της στρατηγικής s^* του παίκτη 1, και οι δύο στρατηγικές του παίκτη 2 του αποφέρουν το ίδιο ακριβώς (και άρα και μέγιστο) utility.

Κατά συνέπεια, οποιοδήποτε προφίλ στρατηγικών όπου ο παίκτης 1 παίζει την s^* και ο παίκτης 2 μοιράζει τις πιθανότητές του με οποιονδήποτε τρόπο στις 2 στρατηγικές του είναι ισορροπία Nash, αφού ο παίκτης 1 με την s^* είναι πάντα best responding, και ο παίκτης 2, δεδομένου ότι ο 1 παίζει την s^*, έχει ως pure best responses και τις 2 στρατηγικές του, οπότε από το support theorem, όπως και να βάλει τις πιθανότητές του πάνω σε αυτές, θα είναι και πάλι best responding.

Ερώτημα (ii)

Για να είναι το προφίλ (s_1, t_1) σημείο ισορροπίας, πρέπει, σύμφωνα με τον ορισμό, να ισχύουν:

$$
\begin{aligned}
&\{u_1(s_1,t_1) \geq u_1(s_2,t_1), u_2(s_1,t_1) \geq u_2(s_1,t_2)\} \\
\Rightarrow &\{x^2 \geq x+1, x+1 \geq x^2\} \\
\Rightarrow &x^2 = x+1 \\
\Rightarrow &x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

Επιλέγουμε $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ (η χρυσή τομή).

Για την τιμή αυτή, και δεδομένου ότι $x + 1 = x^2$, οι πίνακες ωφέλειας των δύο παικτών θα διαμορφωθούν ως εξής (μία γραφή):

$$
A = \begin{bmatrix} \phi^2 & 2 \\ \phi^2 & \phi^2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \phi^2 & \phi^2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}
$$

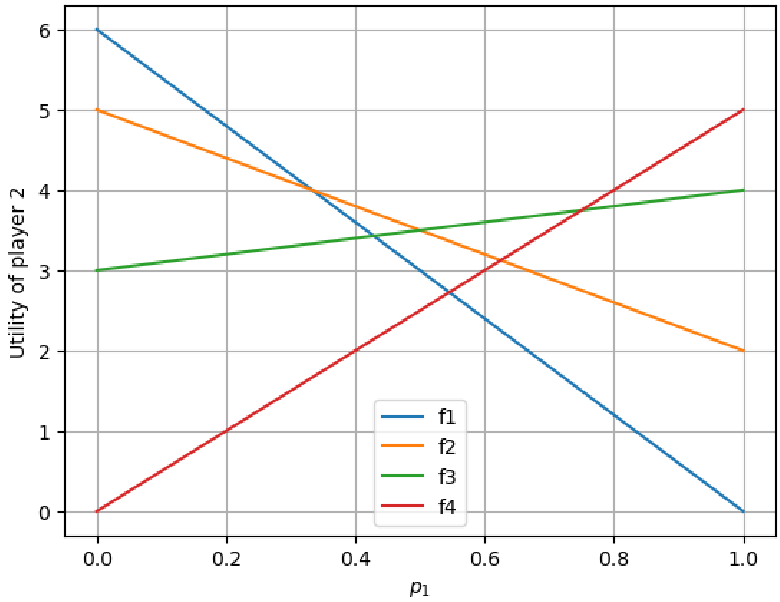
Κατόπιν τούτου, για να υπάρχει ισορροπία με μεικτές στρατηγικές όπου και οι 2 παίκτες παίζουν με θετική πιθανότητα και τις 2 αμιγείς στρατηγικές τους, πρέπει οπωσδήποτε (σύμφωνα με το support theorem) ο παίκτης 1 να είναι "willing to randomize", δηλαδή με άλλα λόγια και οι δύο αμιγείς στρατηγικές του να του δίνουν το ίδιο utility, δεδομένης της στρατηγικής του παίκτη 2.

Αν η υποτιθέμενη ισορροπία είναι το σημείο (p, q), τότε το παραπάνω σημαίνει ότι θα πρέπει να ισχύει:

$$
q_1\phi^2 + q_2 2 = q_1\phi^2 + q_2\phi^2 \Rightarrow q_2 = 0
$$

δηλαδή ο παίκτης 2 δεν μπορεί να βάλει θετική πιθανότητα στην t_2.

Συνεπώς, το παίγνιο δεν μπορεί να έχει fully mixed σημείο ισορροπίας.



Σχήμα 1: Utility vector του παίκτη 2 σαν συνάρτηση του p_1.

Ερώτημα (iii)

Ξεκινάμε με τα σημεία ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές. Δεδομένου ότι αρκεί να ελέγξουμε τα ζεύγη αμιγών στρατηγικών έναντι άλλων αμιγών στρατηγικών, ελέγχουμε κάθε προφίλ εξαντλητικά, και διαπιστώνουμε ότι σημεία ισορροπίας αποτελούν τα προφίλ (s_2, t_1) και (s_1, t_4).

Για τις ισορροπίες με μεικτές στρατηγικές, εφαρμόζουμε τη μέθοδο που είχαμε δει και στο μάθημα. Δηλαδή, θεωρώντας ότι ο παίκτης 1 παίζει μία οποιαδήποτε στρατηγική $(p_1, 1 - p_1)$, ας γράψουμε σαν συνάρτηση του p_1 τα utilities όλων των αμιγών στρατηγικών του παίκτη 2:

$$
\begin{aligned}
u_2(p, e^1) &= f_1(p_1) = 6(1 - p_1) = 6 - 6p_1 \\
u_2(p, e^2) &= f_2(p_1) = 2p_1 + 5(1 - p_1) = 5 - 3p_1 \\
u_2(p, e^3) &= f_3(p_1) = 4p_1 + 3(1 - p_1) = 3 + p_1 \\
u_2(p, e^4) &= f_4(p_1) = 5p_1
\end{aligned}
$$

Αν σχεδιάσουμε αυτές τις 4 γραμμικές συναρτήσεις, παίρνουμε την εικόνα που παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.

Τώρα, σε ισορροπία ο παίκτης 2 θα δίνει θετική πιθανότητα μόνο σε αμιγείς στρατηγικές που είναι βέλτιστες αποκρίσεις. Οπότε, για να έχουμε ισορροπία με μεικτές στρατηγικές, σημαίνει ότι ο παίκτης 2 είναι ``willing to randomize", οπότε δύο τουλάχιστον από τις αμιγείς στρατηγικές του πρέπει να είναι βέλτιστες αποκρίσεις, και άρα να δίνουν το ίδιο utility, δεδομένης της μεικτής στρατηγικής του παίκτη 1.

Συνεπώς, πρώτον, για κάθε τιμή του p_1 ο παίκτης 2 θα έχει ως βέλτιστες αποκρίσεις τις στρατηγικές που αντιστοιχούν στις γραφικές παραστάσεις που είναι πιο ψηλά από όλες.

Και δεύτερον, οι μόνες τιμές του p_1 ικανές να μας δώσουν σημεία ισορροπίας με μεικτές στρατηγικές είναι τα σημεία όπου το μέγιστο utility επιτυγχάνεται στο σημείο τομής 2 ή παραπάνω από τις ευθείες του σχήματος.

Βλέποντας το σχήμα, λοιπόν, καταλαβαίνουμε ότι οι υποψήφιες τιμές του p_1 θα προκύψουν από τα σημεία τομής των $f_1 - f_2$, $f_2 - f_3$, $f_3 - f_4$:

$$f_1(p_1) = f_2(p_1) \Rightarrow 6 - 6p_1 = 5 - 3p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{3}$$
$$f_2(p_1) = f_3(p_1) \Rightarrow 5 - 3p_1 = 3 + p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2}$$
$$f_3(p_1) = f_4(p_1) \Rightarrow 3 + p_1 = 5p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{3}{4}$$

Για κάθε μία από αυτές τις 3 τιμές, λοιπόν, γνωρίζουμε ότι ο παίκτης 2 έχει δύο αμιγείς βέλτιστες αποκρίσεις, και άρα μπορεί να μοιράσει ελεύθερα σε αυτές την μάζα πιθανότητάς του.

Το μόνο που μένει είναι να ελέγξουμε, για κάθε μία τιμή ξεχωριστά, και με δεδομένο πλέον για κάθε μία το ποιο πρέπει να είναι το support για τον παίκτη 2, αν γίνεται και ο παίκτης 1 να είναι best responding. Και δεδομένου ότι σε κάθε μία από αυτές τις τιμές ο παίκτης 1 δίνει θετική πιθανότητα και στις 2 αμιγείς στρατηγικές του, αυτό που θέλουμε να εξασφαλίσουμε είναι τιμές της στρατηγικής q του παίκτη 2 έτσι ώστε και οι δύο στρατηγικές του παίκτη 1 να είναι βέλτιστες αποκρίσεις.

$p_1 = \frac{1}{3}$ Από το Σχήμα 1, στο σημείο αυτό οι αμιγείς βέλτιστες αποκρίσεις του παίκτη 2 είναι οι t_1, t_2. Συνεπώς, $q = (q_1, 1 - q_1, 0, 0)$. Τότε:

$$u_1(p, q) = p^T \cdot \begin{bmatrix} 5(1 - q_1) \\ 2q_1 + 3(1 - q_1) \end{bmatrix} = p^T \cdot \begin{bmatrix} 5 - 5q_1 \\ 3 - q_1 \end{bmatrix}$$

Οπότε, πρέπει και αρκεί

$$5 - 5q_1 = 3 - q_1 \Rightarrow q_1 = \frac{1}{2}$$

Αφού βρήκαμε μία έγκυρη τιμή πιθανότητας, μόλις βρήκαμε ένα σημείο ισορροπίας Nash, συγκεκριμένα το $(p = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0))$.

$p_1 = \frac{1}{2}$ Από το Σχήμα 1, στο σημείο αυτό οι αμιγείς βέλτιστες αποκρίσεις του παίκτη 2 είναι οι t_2, t_3. Συνεπώς, $q = (0, q_2, 1 - q_2, 0)$. Τότε:

$$u_1(p, q) = p^T \cdot \begin{bmatrix} 5q_2 + 3(1 - q_2) \\ 3q_2 + 5(1 - q_2) \end{bmatrix} = p^T \cdot \begin{bmatrix} 3 + 2q_2 \\ 5 - 2q_2 \end{bmatrix}$$

Οπότε, πρέπει και αρκεί

$$3 + 2q_2 = 5 - 2q_2 \Rightarrow q_2 = \frac{1}{2}$$

Αφού βρήκαμε μία έγκυρη τιμή πιθανότητας, μόλις βρήκαμε ένα σημείο ισορροπίας Nash, συγκεκριμένα το $(p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), q = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0))$.

$p_1 = \frac{3}{4}$ Από το Σχήμα 1, στο σημείο αυτό οι αμιγείς βέλτιστες αποκρίσεις του παίκτη 2 είναι οι t_3, t_4. Συνεπώς, $q = (0, 0, q_3, 1 - q_3)$. Τότε:

$$u_1(p, q) = p^T \cdot \begin{bmatrix} 3q_3 + 6(1 - q_3) \\ 5q_3 + 1(1 - q_3) \end{bmatrix} = p^T \cdot \begin{bmatrix} 6 - 3q_3 \\ 1 + 4q_3 \end{bmatrix}$$

Οπότε, πρέπει και αρκεί

$$6 - 3q_3 = 1 + 4q_3 \Rightarrow q_3 = \frac{5}{7}$$

Αφού βρήκαμε μία έγκυρη τιμή πιθανότητας, μόλις βρήκαμε ένα ακόμα σημείο ισορροπίας Nash, συγκεκριμένα το $(p = (\frac{3}{4}, \frac{1}{3}), q = (0, 0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}))$.

Πρόβλημα 5

Ερώτημα (i)

Για να ορίσουμε την αναπαράσταση της διαδικασίας ως παίγνιο, πρέπει να ορίσουμε τα 3 δομικά στοιχεία ενός παιγνίου: το σύνολο των παικτών, το σύνολο των στρατηγικών για κάθε παίκτη, και τις συναρτήσεις χρησιμότητας.

Επιλέγουμε να ορίσουμε το σύνολο των παικτών ως το σύνολο και των 50 φοιτητών που ψηφίζουν. Κάθε ένας θα είναι και ένας παίκτης, και έστω ότι τον αναπαριστούμε με έναν αριθμό όπως στην εκφώνηση, οπότε το σύνολο των παικτών θα είναι το $\mathcal{N} = \{1, \ldots, 50\}$.

Το σύνολο των στρατηγικών για κάθε παίκτη το ορίζουμε ως το σε ποια παράταξη θα ψηφίσει, που είναι και η μόνη επιλογή που έχει στη διάθεσή του ο κάθε φοιτητής έτσι όπως μας περιγράφεται η διαδικασία από την εκφώνηση. Δηλαδή, ορίζουμε $\mathcal{S}_i = \{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4\}$, για κάθε $i \in \{1, \ldots, 50\}$.

Τέλος, οι συναρτήσεις ωφέλειας, που είναι ίσως το πιο σημαντικό κομμάτι. Δεδομένου ότι κάθε φοιτητής έχει μία σειρά προτίμησης για τις 4 παρατάξεις, θεωρούμε ότι αρκεί να ορίσουμε αυθαίρετα σε κάθε μία από τις 4 πιθανές εκβάσεις (ποιος θα νικήσει) έναν αριθμό με τρόπο που απλά να σέβεται τη διάταξη των προτιμήσεων του φοιτητή. Επλέγουμε να παίρνει 4 αν βγει η πρώτη του προτίμηση, 3 αν βγει η δεύτερη, 2 αν βγει η τρίτη και 1 αν βγει η τέταρτη.

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε τις συναρτήσεις ωφέλειας ως εξής:

i \ r(s)	1	2	3	4
$1 - 10$	4	3	2	1
$11 - 20$	3	2	4	1
$21 - 30$	4	1	2	3
$31 - 40$	3	4	2	1
$41 - 50$	1	3	4	2

όπου $r(s) = \text{argmax}_{k=1,2,3,4} \sum_{i=1}^{50} \mathbb{1}\{s_i = \Pi_k\}$ είναι ο δείκτης που αντιστοιχεί στην νικήτρια παράταξη, και προκύπτει με τον προφανή τρόπο, ως αυτή που έχει συγκεντρώσει το μέγιστο πλήθος ψήφων (σημείωση: υπονοείται ότι όταν υπάρχει πάνω από ένα μέγιστο, το $r(s)$ θα είναι το μικρότερο από αυτά, όπως μας λέει η εκφώνηση).

Ερώτημα (ii)

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, αφού έχουμε θεωρήσει κάθε φοιτητή ως έναν ανεξάρτητο παίκτη του (μη συνεργατικού) παιγνίου, στην πραγματικότητα βρισκόμαστε σε ένα περιορισμένο setting που μάλλον ισχύει το (όχι και τόσο ρεαλιστικό) "μία ψήφος δεν κάνει κάποια διαφορά".

Πράγματι, αναλογιστείτε το προφίλ όπου όλοι οι φοιτητές ψηφίζουν την ίδια παράταξη. Τότε, για κάθε $i \in \{1, \dots, 50\}$, ότι και να κάνει ο φοιτητής i μονομερώς, υπό την υπόθεση δηλαδή ότι οι υπόλοιποι δεν αλλάζουν την ψήφο τους, το αποτέλεσμα δεν πρόκειται να αλλάξει, και άρα ο i θα λάβει την ίδια ακριβώς χρησιμότητα.

Συνεπώς, και τα 4 αυτά προφίλ (όπου όλοι ψηφίζουν την ίδια παράταξη) αποτελούν, σύμφωνα με τον ορισμό, σημεία ισορροπίας, και σε καθένα από αυτά κερδίζει η μία από τις 4 παρατάξεις.

Ερώτημα (iii)

Πρόβλημα 6

Μπορούμε να συνδέσουμε το 0-sum 3 παικτών με γενικό 2 παικτών, συγκεκριμένα να ανάγουμε το πρόβλημα υπολογισμού ισορροπίας σε general 2-player games στο αντίστοιχο πρόβλημα σε 3-player 0-sum games.

Αν έχω ένα γενικό 2 παικτών και βάλω έναν εξτρά εικονικό παίκτη με μία μόνο στρατηγική και utility το αντίθετο του αθροίσματος των άλλων δύο, τότε κατ ουσίαν το παιχνίδι είναι ίδιο (συγκεκριμένα, τα δύο παίγνια έχουν μία 1-1 και τετριμμένη αντιστοιχία μεταξύ των ισορροπιών τους), και είναι και 0-sum 3 παικτών. Οπότε, αν μπορούμε να λύσουμε γρήγορα το 0-sum 3 παικτών, μπορούμε και το γενικό 2 παικτών. Αφού ξέρουμε από θεωρία ότι το γενικό 2 παικτών είναι μάλλον δύσκολο (PPAD complete), δεν λύνεται πολυωνυμικά ούτε το 0-sum 3 παικτών μάλλον.

Πρόβλημα 7

Ερώτημα (i)

Οι πίνακες των utilities για τους παίκτες 1 και 2, αντίστοιχα, είναι:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \delta & 0 \\ \delta & \frac{1}{2} - \delta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \delta & \frac{1}{2} - \delta \\ \frac{1}{2} - \delta & \delta \end{bmatrix}$$

Επίσης, σε ότι αλγεβρικές πράξεις κάνουμε, θεωρούμε τα διανύσματα ως διανύσματα στήλες:

$$p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ξεκινάμε υπολογίζοντας τα διανύσματα των utilities των αμιγών στρατηγικών του κάθε παίκτη έναντι της μεικτής που παίζει ο άλλος:

$$u_1(\cdot, q) = Aq = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \delta & 0 \\ \delta & \frac{1}{2} - \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\delta \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$u_2(p, \cdot) = (p^T B)^T = B^T p = \begin{bmatrix} \delta & \frac{1}{2} - \delta \\ \frac{1}{2} - \delta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Με βάση, τώρα, το support theorem, συμπεραίνουμε:

- Ο παίκτης 1 έχει σαν βέλτιστη απόκριση στην q μόνο την αμιγή στρατηγική s_2, με utility $\frac{1}{4}$.
- Ο παίκτης 2 έχει και τις δύο αμιγείς στρατηγικές του ως βέλτιστες αποκρίσεις στην p, με utility $\frac{1}{4}$. Συνεπώς, επειδή αυτές είναι και οι μόνες του αμιγείς στρατηγικές, ο 2 είναι best responding στο p όποια μεικτή στρατηγική q και να διαλέξει (άρα και την (1/2, 1/2)), με utility $\frac{1}{4}$.

Άρα, στο προφίλ (p, q) ο παίκτης 2 είναι best responding, και άρα θα είναι και ε-best responding για οποιαδήποτε τιμή του $\varepsilon \geq 0$.

Άρα, αρκεί να βρούμε την ελάχιστη τιμή του $\varepsilon \geq 0$ για την οποία ο παίκτης 1 να μην μπορεί να κερδίσει περισσότερο από ε αν διαλέξει στρατηγική διαφορετική από την p. Από θεωρία, αυτό ξέρουμε ότι αρκεί να συμβαίνει για κάθε αμιγή στρατηγική του παίκτη 1, δηλαδή:

$$\begin{aligned} u_1(p, q) &\geq u_1(e^1, q) - \varepsilon \\ u_1(p, q) &\geq u_1(e^2, q) - \varepsilon \end{aligned} \tag{1}$$

Υπολογίζοντας τις παραπάνω ποσότητες:

$$\begin{aligned} u_1(p, q) = p^T A q &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\delta \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\delta \\ u_1(e^1, q) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\delta \text{ από παραπάνω} \\ u_1(e^2, q) &= \frac{1}{4} \text{ από παραπάνω} \end{aligned}$$

Οπότε, οι (1) γίνονται:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\delta &\geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\delta - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon \geq -\frac{1}{2}\delta \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\delta &\geq \frac{1}{4} - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon \geq \frac{1}{4}\delta \end{aligned}$$

Προφανώς, η ελάχιστη τιμή του ε που ικανοποιεί τα παραπάνω είναι το $\frac{1}{4}\delta$.

Ερώτημα (ii)

Δεδομένα:

$$0 \le A_{ij} \le 1$$
$$0 \le B_{ij} \le 1$$
$$\text{προφίλ } (p, p)$$
$$\text{όπου } p = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$$

Θα δουλέψουμε και πάλι με τα utility vectors των αμιγών στρατηγικών του κάθε παίκτη, βασιζόμενοι στον ορισμό που έχουμε δώσει στο μάθημα για τα ε-approximate σημεία ισορροπίας (που ουσιαστικά είναι, βέβαια, το αντίστοιχο του support theorem).

Ξεκινάμε με το διάνυσμα των pure utilities του παίκτη 1:

$$u_1(e^i, p) = (Ap)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} p_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

Τώρα, αξιοποιούμε το γεγονός ότι κάθε γραμμή i του πίνακα A έχει το πολύ k μη μηδενικά στοιχεία, τα οποία, επιπλέον, δεν ξεπερνούν την μονάδα. Συνεπώς, το άθροισμα κάθε γραμμής δεν μπορεί να ξεπερνάει το k. Άρα:

$$u_1(e^i, p) = (Ap)_i \le \frac{k}{n}$$

Με τελείως ανάλογο τρόπο μπορούμε να βγάλουμε το αντίστοιχο συμπερασμα για τον παίκτη 2, αξιοποιώντας τώρα το γεγονός ότι οι στήλες του B έχουν το πολύ k μη μηδενικά στοιχεία.

$$u_2(p, e^j) = (p^T B)_j = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} p_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ij} \le \frac{k}{n}$$

Όμως, γνωρίζουμε επίσης ότι τα στοιχεία των A, B είναι και μη αρνητικά, και αφού είναι θετικά και τα στοιχεία του p, μπορούμε να γράψουμε:

$$u_1(p, p) = p^T A p \ge 0 = \frac{k}{n} - \frac{k}{n} \ge u_1(e^i, p) - \frac{k}{n} \ge u_1(e^i, p) - \varepsilon$$
$$u_2(p, p) = p^T B p \ge 0 = \frac{k}{n} - \frac{k}{n} \ge u_2(p, e^j) - \frac{k}{n} \ge u_2(p, e^j) - \varepsilon$$

για κάθε $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ και κάθε $\varepsilon \ge \frac{k}{n}$.

Δηλαδή, το (p, p) είναι ε-σημείο ισορροπίας.