Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων

2η Σειρά Ασκήσεων

Στοιχεία φοιτητή

Ονοματεπώνυμο: Κωνσταντίνος Τσόπελας

Αριθμός Μητρώου: 03400198

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΔΠΜΣ ΕΔΕΜΜ

3 Απριλίου 2024

Πρόβλημα 1

Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα ως άμεση εφαρμογή του λήμματος του Myerson, μια και πρόκειται για single parameter setting.

Παρόλο που δεν φαίνεται ίσως διαισθητικά να πρόκειται για δημοπρασία, στην πραγματικότητα πρόκειται για μια πολύ απλή δημοπρασία με ένα αντικείμενο, στην οποία, μάλιστα, ουσιαστικά η εκφώνηση μας περιγράφει και τον απλό κανόνα `διανομής' (εντός εισαγωγικων γιατί δεν υπάρχουν και πολλές επιλογές για τον σχεδιαστή εδώ): αν $\sum_{i=1}^{n} v_i \geq C$, τότε είναι σαν όλοι οι bidders να παίρνουν απλώς ένα αντικείμενο (διαφορετικό ο καθένας, αντίγραφα του ιδίου, δεν έχει σημασία), ενώ σε αντίθετη περίπτωση δεν παίρνει κανένας τίποτα.

Ο allocation rule αυτός ευκολα μπορεί να δει κανείς ότι είναι μονότονος: για κάθε παίκτη i και προφίλ b_{-i} των υπολοίπων παικτών, αν $\sum_{j \neq i} b_j \geq C$ κατευθείαν, ό,τι και να κάνει ο παίκτης το πάρκο θα φτιαχτεί και θα `πάρει ένα αντικείμενο' (σημαντικό εδώ ότι όλοι οι αριθμοί είναι μη αρνητικοί). Αν όχι, τότε είτε ο παίκτης θα πει πολύ λίγα και δεν θα φτάνει το άθροισμα για να φτιαχτεί, είτε περισσότερα και θα φτιαχτεί. Οπότε, όσο αυξάνεται το bid του, η μονη μετάβαση είναι από το να παίρνει 0 στο να παίρνει 1 αντικείμενο.

Κατόπιν τούτου, πρόκειται για implementable allocation rule, και το μόνο που μένει για να πάρουμε τον πλήρη μηχανισμό είναι να εφαρμόσουμε το λήμμα του Myerson για να καθορίσουμε (μονοσήμαντα) τις πληρωμές.

Θυμόμαστε ότι αυτό μας λέει, για κάθε προφίλ (b_i, b_{-i}):

$$p_i(b_i, b_{-i}) = \sum_{j=1}^{l} z_j \cdot \text{ jump in } x_i(\cdot, b_i) \text{ at } z_j$$

όπου $z_1, \ldots, z_l$ είναι τα σημεία που κάνει άλμα η $x_i(\cdot, b_i)$ στο διάστημα $[0, b_i]$.

Στην περίπτωσή μας, δεδομένων των b_{-i}, υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

1. $\sum_{j \neq i} b_j \geq C$: εδώ, το allocation για τον i δεν κάνει ποτέ κανένα jump, παρά είναι ίσο με 1 (αντικείμενο) για οποιαδήποτε τιμή του b_i. Ή , θα μπορουσε να πει κανείς, κάνει `jump' μόνο στο 0. Σε αυτή την περίπτωση, λοιπόν, ο i δεν θα πληρώσει τίποτα.

2. $\sum_{j \neq i} b_j < C$: εδώ, η $x_i(\cdot, b_i)$ κάνει ακριβώς ένα άλμα, από τιμή 0 σε τιμή 1, στο σημείο για το οποίο ισχύει $\sum_{j \neq i} b_j + z = C$, δηλαδή $z = C - \sum_{j \neq i} b_j$. Διακρίνουμε, οπότε, τις εξής δύο υποπεριπτώσεις:

   (a) για $b_i < C - \sum_{j \neq i} b_j$, δηλαδή $\sum_{i=1}^{n} v_i < C$, πάλι υπάρχει μόνο ένα jump στο 0, άρα ο παίκτης δεν θα πληρώσει τίποτα (λογικό, αφού δεν παίρνει τίποτα).

   (b) για $b_i > C - \sum_{j \neq i} b_j$, ο παίκτης i θα κληθεί να πληρώσει $z \cdot$ jump $= z \cdot 1 = C - \sum_{j \neq i} b_j$.

Σε πιο απλά λόγια, στην περίπτωση και μόνο όπου όλοι μαζί πιάνουν το C ΚΑΙ χωρίς τον i δεν το πιάνουν, ο i θα κληθεί να πληρώσει τη διαφορά που `συμπλήρωσε' και κατάφεραν να το πιάσουν. Σε κάθε άλλη περίπτωση, δεν θα πληρώσει τίποτα.

Πρόβλημα 2

Ξεκινάμε με την βέλτιστη allocation, χωρίζοντας όλες τις πιθανές αναθέσεις με βάση τις εξής 2 περιπτώσεις:

1. Ο bidder 2 παίρνει το αντικείμενο $a \to u_1 = 0$, αφού ο 1 θέλει οπωσδήποτε και τα δύο αντικείμενα για να μην πάρει 0.

2. Ο bidder 2 δεν παίρνει το αντικείμενο $a \to u_2 = 0$, αφού ο 2 παίρνει αξία 1 αν και μόνο αν του δοθεί το αντικείμενο a.

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση, $SW = u_1(S_1) + u_2(S_2) \leq 1$. Αυτή είναι και η μέγιστη τιμή, η οποία γίνεται attain από αρκετές αναθέσεις, ενδεικτικά επιλέγουμε:

$$S_1^* = \{a, b\}, S_2^* = \varnothing$$

Για τις αντίστοιχες VCG πληρωμές, θέλουμε να υπολογίσουμε το social welfare 2 φορές, μία αφαιρώντας τον κάθε ένα παίκτη. Δεδομένου ότι απομένει μόνο ένας, ο υπολογισμός είναι αρκετά straightforward (του δίνουμε αυτά που θέλει), οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} SW_{-1}^* &= v_2(\{a, b\}) \text{ ή } v_2(\{a\}) = 1 \\ SW_{-2}^* &= v_1(\{a, b\}) = 1 \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, οι πληρωμές θα είναι:

$$\begin{aligned} p_1 &= SW_{-1}^* - v_2(S_2^*) = 1 - 0 = 1 \\ p_2 &= SW_{-2}^* - v_1(S_1^*) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Αν προσθέσουμε τώρα και τον παίκτη 3 (ο οποίος ουσιαστικά παίρνει αξία 1 αν του δωθεί το αντικείμενο b, αλλιώς 0), καταρχάς εδώ το social welfare δεν μπορεί να είναι πάνω από 2, αφού θα έπρεπε και οι 3 παίκτες να παίρνουν άσσο, που προφανώς δεν γίνεται, αφού οι απαιτήσεις και των 3 μαζί είναι ασύμβατες.

Οπότε, το μέγιστο social welfare είναι 2, και το πετυχαίνουμε δίνοντας στον 2 και στον 3 το αντικείμενο που θέλει ο καθένας:

$$S_1^* = \varnothing, S_2^* = \{a\}, S_3^* = \{b\}$$

Υπολογίζουμε και όλα τα social welfare με 2 από τους παίκτες:

$$\begin{aligned} &SW_{-1}^* = SW^* = 2, \text{ αφού και στη συνολικά βέλτιστη ο 1 δεν παίρνει τίποτα} \\ &SW_{-3}^* = (SW^* \text{ που υπολογίσαμε πριν }) = 1 \\ &SW_{-2}^* = 1, \text{ είναι το ίδιο setting με πριν με swapped τα ονόματα a, b} \end{aligned}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} p_1 &= SW_{-1}^* - (v_2(S_2^*) + v_3(S_3^*)) = 2 - (1 + 1) = 0 \\ p_2 &= SW_{-2}^* - (v_1(S_1^*) + v_3(S_3^*)) = 1 - (0 + 1) = 0 \\ p_3 &= SW_{-3}^* - (v_1(S_1^*) + v_2(S_2^*)) = 1 - (0 + 1) = 0 \end{aligned}$$

Παρατήρηση Εν τέλει, παρόλο που εισάγαμε έναν καινουργιο παίκτη (και άρα `constraint' κατά κάποιον τρόπο), βλέπουμε ότι οι πληρωμές μηδενίζονται πλέον για όλους, το social welfare αυξάνεται, και βέβαια πλέον και οι 2 bidders στους οποίους δίνεται κάτι έχουν actual κέρδος, αφού και για τους δύο η παρουσία τους αυξάνει το social welfare.

Πρόβλημα 3

Πρόβλημα 4

Πρόβλημα 5

Πρόβλημα 6

Δεδομένου ότι έχουμε Vickrey auction και αυτή είναι truthful, θεωρούμε ότι υπονοείται ως δεδομένο ότι και οι δύο bidders θα δημοσιοποιήσουν το πραγματικό τους valuation, δηλαδή $b_i = v_i$.

Ερώτημα (i)

Valuations: $V_1, V_2 \sim \mathcal{U}([0,1])$.
Vickrey auction allocation:

$$x(v_1, v_2) = \begin{cases} (\{a\}, \varnothing) & \text{αν } v_1 \geq v_2 \\ (\varnothing, \{a\}) & \text{αν } v_1 < v_2 \end{cases}$$

Vickrey auction payments:

$$p_1 = \begin{cases} v_2 & \text{αν } v_1 \geq v_2 \\ 0 & \text{αν } v_1 < v_2 \end{cases}$$

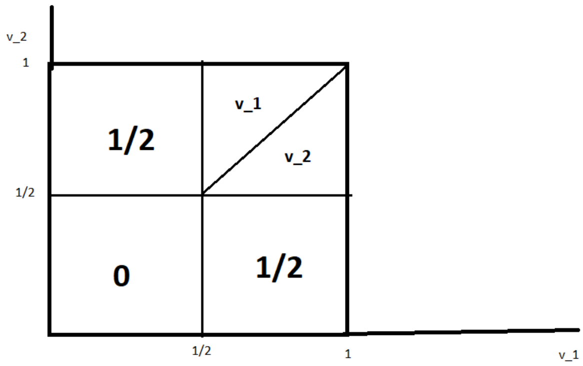
$$p_2 = \begin{cases} 0 & \text{αν } v_1 \geq v_2 \\ v_1 & \text{αν } v_1 < v_2 \end{cases}$$

Οπότε, η πληρωμή σε κάθε περίπτωση, ενωματώνοντας δηλαδή και τις περιπτώσεις που πληρώνει ο 1 και τις περιπτώσεις που πληρώνει ο 2, είναι:

$$p(v_1, v_2) = \begin{cases} v_2 & \text{αν } v_1 \geq v_2 \\ v_1 & \text{αν } v_1 < v_2 \end{cases}$$

Το ζητούμενο, οπότε, τελικά είναι απλά να υπολογίσουμε την $\mathbb{E}[p(V_1, V_2)]$. Οι V_1, V_2 ανεξάρτητες προφανώς, άρα η από κοινού τους είναι η ομοιόμορφη στο $[0,1] \times [0,1]$. Άρα, μένει να υπολογίσουμε:

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} p(v_1, v_2) \cdot 1 \mathrm{d}v_1 \mathrm{d}v_2 = \int_{v_1, v_2 \in [0,1], v_1 \geq v_2} v_2 \mathrm{d}v_1 \mathrm{d}v_2 + \int_{v_1, v_2 \in [0,1], v_1 < v_2} v_1 \mathrm{d}v_1 \mathrm{d}v_2$$



Σχήμα 1: Payment

Λόγω συμμετρίας στα δύο "τριγωνάκια", οι δύο αυτοί όροι είναι ίσοι, και άρα τελικά θέλουμε:

$$2\int_{v_2=0}^{1}\int_{v_1=v_2}^{1} v_2 \mathrm{d}v_1 \mathrm{d}v_2$$

Με απλά βήματα ανάλυσης, αυτό τελικά ισούται με $1/3$.

Ερώτημα (ii)

Ακολουθώντας την λογική του reserve price με τιμή $1/2$, οι περιπτώσεις για το payment είναι οι ακόλουθες:

- $v_1, v_2 < \frac{1}{2} \rightarrow p = 0$, δεν παίρνει κανείς τίποτα.
- $v_1, v_2 \geq \frac{1}{2} \rightarrow$ όπως η απλή Vickrey auction εδώ, οπότε:

$$p = \begin{cases} v_2 & \text{αν } v_1 \geq v_2 \\ v_1 & \text{αν } v_1 < v_2 \end{cases}$$

- $v_2 \leq \frac{1}{2} \leq v_1 \rightarrow p = \frac{1}{2}$ (πληρώνει ο 1)
- $v_1 \leq \frac{1}{2} \leq v_2 \rightarrow p = \frac{1}{2}$ (πληρώνει ο 2)

Οπότε, τελικά, το payment συναρτήσει των δύο valuations είναι όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

Το μόνο που μένει, λοιπόν, να κάνουμε είναι να ολοκληρώσουμε αυτή την συνάρτηση. Θα έχουμε, άρα:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + 2\int_{v_2=1/2}^{1}\int_{v_1=v_2}^{1} v_2 \mathrm{d}v_1 \mathrm{d}v_2 = \cdots = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

Η αναμενόμενη πληρωμή είναι τώρα ελαφρώς μεγαλύτερη σε σχέση με πριν, το οποίο προφανώς οφείλεται στις δύο περιοχές όπου στην απλή Vickrey auction ο μεγαλύτερος θα πλήρωνε το bid του μικρότερου, ενώ εδώ πληρώνει 1/2.

Ερώτημα (iii)

Αντίστοιχα με το πρώτο ερώτημα, αυτό που καλούμαστε να υπολογίσουμε τελικά είναι το:

$$\int_{[0,1]^3} p(v_1, v_2, v_3) \mathrm{d}v_1 \mathrm{d}v_2 \mathrm{d}v_3 = \int_{[0,1]^3} (\text{ 2ο μεγαλύτερο εκ των } v_1, v_2, v_3) \mathrm{d}v_1 \mathrm{d}v_2 \mathrm{d}v_3$$
$$= 6 \int_{v_1 \leq v_2 \leq v_3} v_2 \mathrm{d}v_1 \mathrm{d}v_2 \mathrm{d}v_3$$

όπου το τελευταίο προκύπτει λόγω συμμετρίας όλων των δυνατών διατάξεων των τριών valuations, οι οποίες το πλήθος είναι $3! = 6$. Και για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

$$\int_{v_1 \leq v_2 \leq v_3} v_2 \mathrm{d}v_1 \mathrm{d}v_2 \mathrm{d}v_3 = \int_{v_1=0}^{1} \int_{v_2=v_1}^{1} \int_{v_3=v_2}^{1} v_2 \mathrm{d}v_3 \mathrm{d}v_2 \mathrm{d}v_1$$
$$= \int_{v_1=0}^{1} \int_{v_2=v_1}^{1} v_2(1 - v_2) \mathrm{d}v_2 \mathrm{d}v_1 = \int_{v_1=0}^{1} \left[\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_2^3}{3} \right]_{v_1}^{1} \mathrm{d}v_1$$
$$= \int_{v_1=0}^{1} \left[\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_2^3}{3} \right]_{v_1}^{1} \mathrm{d}v_1 = \int_{v_1=0}^{1} (\frac{1}{6} - \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_1^3}{3}) \mathrm{d}v_1$$

Με λίγες πράξεις ακόμα και πολ/ντας επί 6, καταλήγουμε ότι η μέση πληρωμή θα είναι ίση με $\frac{1}{2}$.