Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων

3η Σειρά Ασκήσεων

Στοιχεία φοιτητή

Ονοματεπώνυμο: Κωνσταντίνος Τσόπελας

Αριθμός Μητρώου: 03400198

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΔΠΜΣ ΕΔΕΜΜ

3 Απριλίου 2024

Πρόβλημα 1

(i) Συναρτήσεις καθυστέρησης της μορφής $d(x) = ax^2 + c$, $a, c \geq 0$.

Όπως έχουμε δει στο μάθημα, το price of anarchy για μία κλάση συναρτήσεων καθυστέρησης $d \in D$ μπορεί να βρεθεί από, ουσιαστικά, το τίμημα σε ένα pigou-like δίκτυο.

Συγκεκριμένα, αρχικά αρκεί να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα:

$$opt(u, d, x) = x(d(u) - d(x)) = x(au^2 + c - ax^2 - c) = ax(u^2 - x^2)$$

Η μεγιστοποίηση γίνεται ως προς $x \geq 0$, όπου, αφού οι καθυστερήσεις είναι αύξουσες, αρκεί να εξετάσουμε τιμές του x στο $[0, u]$. Για 0 και u η συνάρτηση βγάζει 0, άρα αρκεί να εξετάσουμε εσωτερικά σημεία, στα οποία όμως για να έχουμε μέγιστο πρέπει η παράγωγος να είναι 0:

$$opt_x(u, d, x) = a(u^2 - x^2 - 2x^2) = a(u^2 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x = \frac{u}{\sqrt{3}}$$

και η αντίστοιχη μέγιστη τιμή:

$$\max_{x \in [0,u]} opt(u, d, x) = a\frac{u}{\sqrt{3}}(u^2 - \frac{u^2}{3}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}auu^2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}au^3$$

Στην συνέχεια, υπολογίζουμε το ακόλουθο κλάσμα (το οποίο ταυτίζεται, ουσιαστικά, με το price of anarchy σε pigou-like δίκτυο):

$$v(u, d) = \frac{\max_{x \in [0,u]} opt(u, d, x)}{ud(u)} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{9}au^3}{au^3 + c}$$

Κατόπιν, μεγιστοποιούμε την ποσότητα αυτή και ως προς το d (την κλάση των συναρτήσεών μας) και ως προς το u (που αντιπροσωπεύει την υποτιθέμενη ροή ισορροπίας):

$$v(D) = \sup_{u,a,c \geq 0} \left[v(u, a, c) = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{9}au^3}{au^3 + c} \right]$$

Εδώ, όμως, είναι προφανές ότι το $c \geq 0$ μπορεί να φύγει, αφού όσο μεγαλύτερο είναι τόσο μεγαλώνει ο (θετικός) παρονομαστής, οπότε μικραίνει το κλάσμα. Άρα, το άνω φράγμα θα το πάρουμε για $c = 0$:

$$\sup_{u,a \geq 0} \frac{\frac{2\sqrt{3}}{9}au^3}{au^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Τέλος, το price of anarchy ισούται με:

$$\frac{1}{1 - v(D)} = \frac{1}{1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}} = \frac{9}{9 - 2\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{9\sqrt{3} - 6} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - 2}$$

(ii) Συναρτήσεις καθυστέρησης της μορφής $d(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \geq 0$.

Για αυτό το ερώτημα, θα δουλέψουμε με τον ίδιο σχεδόν τρόπο, απλά θα χρειαστεί να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι τις 3 μεγιστοποιήσεις που κάναμε (διαισθητικά, 1. ροή μεγιστοποίησης social cost, 2. ροή ισορροπίας με μέγιστο λόγο equilibrium social cost προς optimal social cost και 3. μεγιστοποίηση πάνω σε όλες τις συναρτήσεις της κλάσης) δεν χρειάζεται να τις κάνουμε με αυτή τη σειρά, αλλά μπορούμε όλες να τις βγάλουμε έξω.

Απλούστερα, η ποσότητα $v(D)$ μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$v(D) = \sup_{a,b,c \geq 0, u \geq 0, x \in [0,u]} \frac{x(d(u) - d(x))}{ud(u)}$$

Ονομάζουμε την εσωτερική ποσότητα $v(u, d, x)$ και λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} v(u,d,x) &= \frac{x(d(u) - d(x))}{ud(u)} \\ &= \frac{x(au^2 + bu + c - ax^2 - bx - c)}{u(au^2 + bu + c)} \\ &= \frac{x(au^2 + bu - ax^2 - bx)}{u(au^2 + bu + c)} \\ &= \frac{x(a(u^2 - x^2) + b(u - x))}{u(au^2 + bu + c)} \\ &= \frac{x(u - x)(ax + au + b)}{u(au^2 + bu + c)} \end{aligned}$$

Πρώτον, παρατηρούμε ότι και πάλι ο σταθερός όρος c μπορεί να φύγει. Όλοι οι όροι είναι μη αρνητικοί, και το $c \geq 0$ όσο μεγαλώνει τόσο μεγαλώνει ο παρονομαστής, και άρα γίνεται μικρότερο το κλάσμα. Οπότε, το $v(u, d, x)$ κάνει attain τη μέγιστη τιμή του για $c = 0$ (να σημειωθεί ότι την κάνει attain, οπότε διατηρείται το tightness).

Οπότε, μας μένει το κλάσμα:

$$\begin{aligned} &\frac{x(u - x)(ax + au + b)}{u(au^2 + bu)} \\ =&\frac{x(u - x)(ax + au + b)}{u^2(au + b)} \\ =&\frac{x(u - x)ax}{u^2(au + b)} + \frac{x(u - x)(au + b)}{u^2(au + b)} \\ =&\frac{x(u - x)ax}{u^2(au + b)} + \frac{x(u - x)}{u^2} \end{aligned}$$

Στο τελευταίο, βλέπουμε ότι έχουμε δύο όρους, και οι δύο θετικοί (αφού ήδη από τη θεωρία έχουμε αποκλείσει τιμές στο $[0, u]$), και το b συμμετέχει μόνο στον παρονομαστή του πρώτου κλάσματος. Οπότε, με το ίδιο επιχείρημα που διώξαμε πριν το c μπορούμε να διώξουμε και το b, διότι είναι πλέον φανερό ότι η παραπάνω ποσότητα κάνει attain τη μέγιστη τιμή για $b = 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{x(u-x)ax}{u^2(au)} + \frac{x(u-x)}{u^2} \\
=&\frac{x^2(u-x)}{u^3} + \frac{x(u-x)}{u^2} \\
=&\frac{x(u-x)(x+u)}{u^3} = \frac{x(u^2-x^2)}{u^3}
\end{aligned}$$

Τέλος, αυτή η ποσότητα είναι η ίδια, ουσιαστικά, με αυτήν που μεγιστοποιήσαμε στο ερώτημα (i), αφού είχαμε αριθμητή την $opt(u, d, x) = ax(u^2 - x^2)$ και παρονομαστή (μετά τον μηδενισμό του c) την au^3.

Άρα, οι πράξεις από εδώ και πέρα θα είναι ίδιες, και το price of anarchy θα βγει τελικά πάλι ίσο με $\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2}$.

Πρόβλημα 2

(i) Αρχικά, υπολογίζουμε τα marginal tolls για κάθε ακμή, όπως τα έχουμε δει στο μάθημα:

$$\hat{t}_e = x_e^* \ell_e'(x_e^*)$$

Εδώ, μας δίνεται ότι η βέλτιστη ροή (εκφρασμένη ως προς τις ακμές) είναι:

- $x_{su}^* = \frac{1}{2}$
- $x_{sv}^* = \frac{1}{2}$
- $x_{uv}^* = 0$
- $x_{ut}^* = \frac{1}{2}$
- $x_{vt}^* = \frac{1}{2}$

Υπολογίζουμε, επίσης, τις παραγώγους των latency functions:

- $\ell_{su}'(x) = (2x+1)' = 2$
- $\ell_{sv}'(x) = (3)' = 0$
- $\ell_{uv}'(x) = (x^2)' = 2x$
- $\ell_{ut}'(x) = (3)' = 0$
- $\ell_{vt}'(x) = (2x+1)' = 2$

Putting it all together:

- $\hat{t}_{su} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$
- $\hat{t}_{sv} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$
- $\hat{t}_{uv} = 0 \cdot (2 \cdot 0) = 0$

- $\hat{t}_{ut} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$
- $\hat{t}_{vt} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

Όπως έχουμε σχολιάσει και στο πλαίσιο του μαθήματος, τα παραπάνω διόδια δεν είναι τα μοναδικά βέλτιστα. Πάρτε, για παράδειγμα, την τομή που ορίζεται από το s μόνο του, δηλαδή τις δύο ακμές (s, u) και (s, v). Με τα marginal tolls, στην πρώτη έχουμε βάλει διόδια 1 και στη δεύτερη 0.

Παρατηρήστε, τώρα, ότι αν και στις δύο προσθέσουμε ακόμα ένα ποσό διοδίων, έστω $c > 0$, τότε:

- Η πληρωμή του πάνω μονοπατιού θα αυξηθεί κατά c.
- Η πληρωμή του μονοπατιού $s - u - v - t$ θα αυξηθεί κατά c.
- Η πληρωμή του κάτω μονοπατιού θα αηξηθεί κατά c.

Οπότε, από στρατηγικής απόψεως, το παίγνιο είναι τελείως ισοδύναμο με αυτό με τα marginal tolls! Άρα, και αυτά τα διόδια είναι βέλτιστα.

(ii) Δεν έχουμε καταφέρει να το τυποποιήσουμε αρκετά το επιχείρημα εδώ, αλλά η βασική ιδέα είναι, θεωρώ, ότι μπορούμε να τρέξουμε έναν αλγόριθμο που διατρέχει το δίκτυο ως εξής:

- Ξεκινάμε από την s και τις ακμές της: αν υπάρχει ακμή με marginal toll 0, τότε δεν χρειάζεται να κάνουμε κάτι. Αλλιώς, αφαιρούμε από όλες (σημειωτέον, εξερχόμενες) ακμές το ίδιο ποσό, όσο είναι το ελάχιστο marginal toll.

  Κάθε φορά μετακινούμαστε στην κορυφή που αντιστοιχεί στην ακμή που μηδενίστηκε.

- Σε κάθε βήμα, από τις ακμές που προσπίπτουν στην κορυφή που είμαστε, κάποιες θα είναι εισερχόμενες και κάποιες εξερχόμενες. Έστω c τα ελάχιστα διόδια εξερχόμενης ακμής.

  Τότε, αν $c = 0$, δεν χρειάζεται να κάνουμε κάτι, πάμε σε αυτή την ακμή.

  Αν, από την άλλη, $c > 0$, τότε αρκεί να αφαιρέσουμε c από τα διόδια των εξερχόμενων ακμών και να προσθέσουμε c στα διόδια των εισερχομένων ακμών.

Οπότε, όταν φτάσουμε στο t με την παραπάνω διαδικασία, θα έχουμε μηδενίσει ένα μονοπάτι.

Πρόβλημα 3

Περιγραφικά, για να δείξουμε το ζητούμενο κάτω φράγμα του τιμήματος της αναρχίας, αρκεί να βρούμε μία αρκετά καλύ λύση (το optimum θα είναι σίγουρα καλύτερο από αυτήν) και μία αρκετά κακή ισορροπία (η χείριστη ισορροπία θα είναι σίγουρα χειρότερη από αυτήν).

Ξεκινάμε με μία αρκετά καλή λύση, που είναι οι 4 παίκτες να επιλέξουν τα μονοπάτια ως εξής:

- 1: $u - v$

- 2: $u - w$
- 3: $v - w$
- 4: $w - v$

Σε αυτήν την περίπτωση, βλέπουμε ότι σε καμία ακμή δεν κυκλοφορεί πάνω από ένας παίκτης, οπότε και οι 4 ακμές θα έχουν 1 μονάδα ροής η καθεμία. Επιπλέον, ο κάθε παίκτης χρησιμοποιεί ακριβώς μία ακμή. Συνεπώς, το κόστος της λύσης αυτής θα είναι:

$$SOL = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Ας θεωρήσουμε, τώρα, την ροή f που ορίζεται από το ακόλουθο προφίλ μονοπατιών των παικτών:

- 1: $u - w - v$
- 2: $u - v - w$
- 3: $v - u - w$
- 4: $w - u - v$

Θα δείξουμε ότι αυτό το προφίλ είναι ισορροπία και έχει κοινωνικό κόστος ίσο με 10.

Ας ξεκινήσουμε με το κοινωνικό κόστος. Συγκεντρώνοντας, για κάθε ακμή, πόσοι παίκτες περνούν από αυτήν, μετράμε:

- $f_{u-w} = 1 + 1 = 2$
- $f_{u-v} = 1 + 1 = 2$
- $f_{v-u} = 1$
- $f_{v-w} = 1$
- $f_{w-u} = 1$
- $f_{w-v} = 1$

Έχοντας, τώρα, υπόψη ότι οι συναρτήσεις βάρους των ακμών είναι $c(x) = x$ για όλες εκτός των $v - u$ και $w - u$, για τις οποίες είναι 0, θα πάρουμε ότι:

- $c_{u-w} = 2$
- $c_{u-v} = 2$
- $c_{v-u} = 0$
- $c_{v-w} = 1$
- $c_{w-u} = 0$
- $c_{w-v} = 1$

Τελικά, το social cost για αυτή τη ροή θα είναι:

$$C(f) = \sum_e f_e c_e(f_e) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 10$$

Ας δούμε, τώρα, ότι η παραπάνω ροή είναι ισορροπία Nash. Καταρχάς, παρατηρείστε ότι τα μονοπάτια που είναι διαθέσιμα σε κάθε παίκτη (το σύνολο των στρατηγικών του δηλαδή) δεν είναι παρά τα εξής:

1. Παίκτης 1: $\{u-v, u-w-v\}$
2. Παίκτης 2: $\{u-w, u-v-w\}$
3. Παίκτης 3: $\{v-w, v-u-w\}$
4. Παίκτης 4: $\{w-v, w-u-v\}$

Στη ροή f που εξετάζουμε, και οι 4 παίκτες επιλέγουν το δεύτερο μονοπάτι τους (αυτό με τις 3 κορυφές). Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι ο κάθε παίκτης, αν μονομερώς αλλάξει και επιλέξει το πρώτο, τότε το κόστος του δεν θα μειωθεί.

Ας δούμε, πρώτα, τα αρχικά κόστη των παικτών:

- Παίκτης 1: $c_{u-w}(f_{u-w}) + c_{w-v}(f_{w-v}) = 2 + 1 = 3$
- Παίκτης 2: $c_{u-v}(f_{u-v}) + c_{v-w}(f_{v-w}) = 2 + 1 = 3$
- Παίκτης 3: $c_{v-u}(f_{v-u}) + c_{u-w}(f_{u-w}) = 0 + 2 = 2$
- Παίκτης 4: $c_{w-u}(f_{w-u}) + c_{u-v}(f_{u-v}) = 0 + 2 = 2$

Και τώρα, τις πιθανές αλλαγές.

Παίκτης 1: αν επιλέξει το μονοπάτι $u-v$, το μονοπάτι αυτό χρησιμοποιείται ήδη από τους παίκτες 2 και 4, άρα θα αποκτήσει ροή 3, και άρα κόστος 3, και άρα το κόστος του παίκτη 1 θα παραμείνει 3.

Παίκτης 2: αν επιλέξει το μονοπάτι $u-w$, το μονοπάτι αυτό χρησιμοποιείται ήδη από τους παίκτες 1 και 3, άρα θα αποκτήσει ροή 3, και άρα κόστος 3, και άρα το κόστος του παίκτη 2 θα παραμείνει 3.

Παίκτης 3: αν επιλέξει το μονοπάτι $v-w$, το μονοπάτι αυτό χρησιμοποιείται ήδη από τον παίκτη 2, άρα θα αποκτήσει ροή 2, και άρα κόστος 2, και άρα το κόστος του παίκτη 3 θα παραμείνει 2.

Παίκτης 4: αν επιλέξει το μονοπάτι $w-v$, το μονοπάτι αυτό χρησιμοποιείται ήδη από τον παίκτη 1, άρα θα αποκτήσει ροή 2, και άρα κόστος 2, και άρα το κόστος του παίκτη 4 θα παραμείνει 2.

Άρα, η f είναι ροή ισορροπίας Nash, με κοινωνικό κόστος ίσο με 10. Οπότε, είναι προφανές πλέον ότι:

$$SOL = 4 \geq OPT$$
$$C(f) = 10 \leq \max_f C(f)$$

και άρα:

$$PoA = \max \frac{\max_f C(f)}{C(f^*)} \geq \frac{\max_f C(f)}{OPT} \geq \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Πρόβλημα 4

Θέλουμε να βρούμε συνάρτηση δυναμικού για δύο παραλλαγές του MAX-CUT game. Και στις δύο περιπτώσεις η ωφέλεια του κάθε παίκτη σχετίζεται άμεσα με το συνολικό βάρος που "συνεισφέρει" ο παίκτης στην τομή, ή, διαφορετικά, το συνολικό βάρος που επιφέρουν οι ακμές του προς κορυφές της απέναντι μεριάς. Οπότε, η γενική ιδέα είναι ότι η συνάρτηση δυναμικού θα κάνει κάπως aggregate την πληροφορία που υπάρχει στις ακμές του cut, όπως πχ είδαμε στο μάθημα για την απλή έκδοση ότι παίρνει το πλήθος τους.

(i) Ξεκινάμε με λίγο συμβολισμό:

- βάρη w_{uv} στις ακμές
- κάθε παίκτης - κορυφή u διαλέγει στρατηγική $V_u \in \{l, r\}$ (αριστερή / δεξιά μεριά του cut)
- $L(V) =$ σύνολο κορυφών στην αριστερή μεριά της τομής, στο προφίλ στρατηγικών V.
- $R(V) =$ σύνολο κορυφών στην δεξιά μεριά της τομής, στο προφίλ στρατηγικών V.
- $p_u(V) = \sum_{(u,v)\in E, V_u \neq V_v} w_{uv}$ η ωφέλεια του παίκτη u στο προφίλ V.

Σημείωση: $V_u = l$ αν και μόνο αν $u \in L(V)$, $V_u = r$ αν και μόνο αν $u \in R(V)$.
Ορίζουμε, τώρα, ως συνάρτηση $\Phi\colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ την:

$$\Phi(V) = \sum_{\substack{u\in L(V), v\in R(V)\\(u,v)\in E}} w_{u,v}$$

Τότε, θα δείξουμε ότι αυτή είναι exact συνάρτηση δυναμικού για το συγκεκριμένο παίγνιο. Ας ξεκινήσουμε από την μεταβολή στην ωφέλεια ενός οποιουδήποτε παίκτη u, αν κάνει μονομερώς deviate. Δεδομένου ότι οι δυνατές στρατηγικές κάθε παίκτη είναι μόνο 2, αρκεί να ελέγξουμε τη διαφορά:

$$p_u(l, V_{-u}) - p_u(r, V_{-u}) = \sum_{(u,v)\in E, V_v = r} w_{uv} - \sum_{(u,v)\in E, V_v = l} w_{uv} \tag{1}$$

Ας θεωρήσουμε, τώρα, τη μεταβολή της συνάρτησης δυναμικού στα ίδια δύο προφίλ:

$$\begin{aligned}&\Phi(l, V_{-u}) - \Phi(r, V_{-u})\\ &= \sum_{\substack{v_1\in L(V)\cup\{u\}\\ v_2\in R(V)\\ (v_1,v_2)\in E}} w_{v_1,v_2} - \sum_{\substack{v_1\in L(V)\\ v_2\in R(V)\cup\{u\}\\ (v_1,v_2)\in E}} w_{v_1,v_2}\end{aligned}$$

Από την τελευταία έκφραση, είναι φανερό ότι όλοι οι όροι στους οποίους δεν εμπλέκεται η u (ως v_1 στο πρώτο άθροισμα και ως v_2 στο δεύτερο) θα αλληλοαναιρεθούν. Οπότε, θα μείνουμε με:

$$\begin{aligned} &\Phi(l, V_{-u}) - \Phi(r, V_{-u}) \\ &= \sum_{\substack{v_2 \in R(V) \\ (u,v_2) \in E}} w_{u,v_2} - \sum_{\substack{v_1 \in L(V) \\ (v_1,u) \in E}} w_{v_1,u} \end{aligned} \tag{2}$$

Όμως, όπως είπαμε και πιο πριν, $v \in R(V) \Leftrightarrow V_v = r$ και $v \in L(V) \Leftrightarrow V_v = l$.

Συνεπώς, είναι φανερό ότι τα δεξιά μέλη των (1) και (2) ταυτίζονται, και άρα η Φ είναι exact potential function.

(ii) Εδώ το setting αλλάζει ελαφρώς, συγκεκριμένα έχουμε:

- βάρη w_v στις κορυφές.
- Οι ωφέλειες των παικτών είναι $p_u(V) = \sum_{(u,v) \in E, V_u \neq V_v} w_v$.

Εδώ, δυστυχώς, δεν έχουμε καταφέρει να βρούμε exact potential function. Παρόλα αυτά, καταφέραμε να βρούμε μία ordinal potential function, που είναι η ακόλουθη:

$$\Phi(V) = \sum_{\substack{u \in L(V), v \in R(V) \\ (u,v) \in E}} w_u w_v$$

Παρατηρείστε, τώρα, ότι το μονομερές deviation για έναν παίκτη u είναι:

$$p_u(l, V_{-u}) - p_u(r, V_{-u}) = \sum_{(u,v) \in E, V_v = r} w_v - \sum_{(u,v) \in E, V_v = l} w_v \tag{3}$$

και η αντίστοιχη διαφορά της potential function:

$$\begin{aligned} &\Phi(l, V_{-u}) - \Phi(r, V_{-u}) \\ &= \sum_{\substack{v_1 \in L(V) \cup \{u\} \\ v_2 \in R(V) \\ (v_1,v_2) \in E}} w_{v_1} w_{v_2} - \sum_{\substack{v_1 \in L(V) \\ v_2 \in R(V) \cup \{u\} \\ (v_1,v_2) \in E}} w_{v_1} w_{v_2} \end{aligned}$$

Για τον ίδιο λόγο με πριν, οι μόνοι όροι που επιβιώνουν είναι αυτοί που εμπλέκουν την u, και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \Phi(l, V_{-u}) - \Phi(r, V_{-u}) &= \sum_{\substack{v_2 \in R(V) \\ (u,v_2) \in E}} w_u w_{v_2} - \sum_{\substack{v_1 \in L(V) \\ (v_1,u) \in E}} w_{v_1} w_u \\ &= w_u \left(\sum_{\substack{v_2 \in R(V) \\ (u,v_2) \in E}} w_{v_2} - \sum_{\substack{v_1 \in L(V) \\ (v_1,u) \in E}} w_{v_1} \right) \\ &\overset{(3)}{=} w_u (p_u(l, V_{-u}) - p_u(r, V_{-u})) \end{aligned} \tag{4}$$

Υποθέτοντας, τώρα, ότι τα βάρη των κορυφών είναι **θετικά**, το παραπάνω συνεπάγεται ότι:

$$p_u(l, V_{-u}) \leq p_u(r, V_{-u}) \Leftrightarrow \Phi(l, V_{-u}) \leq \Phi(r, V_{-u})$$

και άρα η Φ είναι ordinal potential function.

Πρόβλημα 5

Συμβολίζουμε τα σύνολα αμιγών στρατηγικών των 3 παικτών ως:

- $S_1 = \{1, 2\}$ για τον 1ο παίκτη.
- $S_2 = \{1, 2\}$ για τον 2ο παίκτη.
- $S_3 = \{1, 2, 3\}$ για τον 3ο παίκτη.

(i) Το να βρούμε ένα correlated equilibrium είναι πάρα πολύ απλό. Παρατηρήστε ότι το προφίλ $(2, 1, 1)$ (1ος πίνακας, κάτω αριστερά θέση) είναι pure Nash equilibrium. Πράγματι:

- Στο προφίλ $(2, 1, 1)$, τα payoffs των παικτών είναι 1, 0 και 0.
- Αν ο παίκτης 1 αλλάξει μονομερώς στρατηγική, παίρνει 0.
- Αν ο παίκτης 2 αλλάξει μονομερώς στρατηγική, παίρνει 0.
- Αν ο παίκτης 3 αλλάξει μονομερώς στρατηγική, παίρνει 0 (είτε πάει στον 2ο είτε στον 3ο πίνακα).

Άρα, το προφίλ αυτό είναι όντως pure Nash equilibrium. Και, όπως έχουμε πει στη θεωρία, κάθε pure Nash equilibrium είναι και mixed, και είναι και correlated equilibrium.

Άρα, το προφίλ $(2, 1, 1)$ είναι correlated equilibrium.

(ii) Ξεκινάμε με την εξής παρατήρηση: οι payoff functions των παικτών 1 και 2 παίρνουν μόνο τις τιμές 0, 1 και 2.

Όμως, όπως γνωρίζουμε και από την ενασχόληση με τα mixed NE, όταν κάνουμε mix μεταξύ κάποιων αμιγών προφίλ, πάντα το αναμενόμενο κέρδος που παίρνουμε είναι μια μέση τιμή, και άρα δεν μπορεί παρά να είναι τουλάχιστον ίσο με την ελάχιστη "αμιγή" τιμή και το πολύ ίσο με τη μέγιστη. Μάλιστα, ο **μόνος** τρόπος να είναι ίσο το αναμενόμενο κέρδος με το μέγιστο "αμιγές" είναι να βάζουμε θετική πιθανότητα μόνο σε αμιγή προφίλ που έχουν αυτό το μέγιστο κέρδος.

Επίσης, ως προς τα (υποψήφια) correlated equilibria, δεν είναι παρά κατανομές πιθανότητας πάνω στα προφίλ στρατηγικών, δηλαδή εδώ στα 12 pure strategy profiles των 3 παικτών. Οπότε, κατά κάποιον τρόπο, έχουμε απλά 1 συνολική μονάδα πιθανότητας, την οποία θέλουμε να μοιράσουμε στα 12 "κελιά" (προφίλ) που βλέπουμε στην εκφώνηση.

Επιπλέον, έχουμε το constraint όλοι οι παίκτες να έχουν αναμενόμενο κέρδος τουλάχιστον 2. Οπότε, συμπεραίνουμε ότι ο μόνος τρόπος να ισχύει αυτό για τους παίκτες 1 και 2 είναι τα μόνα προφίλ στα οποία ίσως βάλουμε θετική πιθανότητα να είναι τα $(1, 1, 2)$ και $(2, 2, 2)$, καθώς είναι και τα μόνα στα οποία οι 1 και 2 κάνουν attain το μέγιστο δυνατό κέρδος τους, που είναι και ίσο με 2.

Κατόπιν τούτου, δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι μία κατανομή που πληροί τις προδιαγραφές είναι η:

$$\sigma(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{αν } s = (1, 1, 2) \\ \frac{1}{2} & \text{αν } s = (2, 2, 2) \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Πράγματι, παρατηρήστε, αρχικά, ότι το μέσο κέρδος και των 3 παικτών είναι 2.

Από εκεί και πέρα, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε παίκτη και κάθε αμιγή στρατηγική του s, αν είναι δεδομένο ότι παίζει την s και ότι όλοι παίζουν σύμφωνα με την παραπάνω κατανομή, τότε πράγματι δεν έχει κίνητρο να επιλέξει κάποια άλλη στρατηγική από την s.

- Για τον παίκτη 1:
  - Αν $s_1 = 1$ (πρώτη γραμμή), η κατανομή σ συνεπάγεται ότι με πιθανότητα 1 είμαστε στο προφίλ $(1, 1, 2)$, ότι δηλαδή $s_2 = 1$ και $s_3 = 2$. Οπότε, αν ο παίκτης αλλάξει στρατηγική και πάει στη δεύτερη γραμμή, θα έχει κέρδος με πιθανότητα 1 (άρα και αναμενόμενο κέρδος) 0, οπότε δεν τον συμφέρει.
  - Αν $s_1 = 2$ (δεύτερη γραμμή), η κατανομή σ συνεπάγεται ότι με πιθανότητα 1 είμαστε στο προφίλ $(2, 2, 2)$, ότι δηλαδή $s_2 = 2$ και $s_3 = 2$. Και πάλι, με αυτά τα δεδομένα, αν ο 1 αλλάξει, το κέρδος του θα πάει στο 0, άρα δεν τον συμφέρει.
- Για τον παίκτη 2, η περίπτωση είναι τελείως συμμετρική με του παίκτη 1:
  - Αν $s_2 = 1$ (πρώτη στήλη), η κατανομή σ συνεπάγεται ότι με πιθανότητα 1 είμαστε στο προφίλ $(1, 1, 2)$, ότι δηλαδή $s_1 = 1$ και $s_3 = 2$. Οπότε, αν ο παίκτης αλλάξει στρατηγική και πάει στη δεύτερη στήλη, θα έχει κέρδος με πιθανότητα 1 (άρα και αναμενόμενο κέρδος) 0, οπότε δεν τον συμφέρει.
  - Αν $s_2 = 2$ (δεύτερη στήλη), πάλι στο $(2, 2, 2)$, άρα αν αλλάξει πάει σε κέρδος 0, και δεν τον συμφέρει.
- Για τον παίκτη 3, το ότι έχουμε επιβάλει την κατανομή σ σημαίνει ότι με πιθανότητα 1 θα διαλέγει τον 2ο πίνακα. Άρα, αρκεί να εξετάσουμε την $s_3 = 2$ ως στρατηγική πιθανή να έχει δοθεί στον 3 από την "central authority" (πιθανοθεωρητικά, δεν έχει νόημα να δεσμεύσουμε ως προς κάτι που έχει μηδενική πιθανότητα).

  Σε αυτή την περίπτωση, λοιπόν, η κατανομή αρχικά δεν μας δίνει κάποια πληροφορία, αφού έτσι κι αλλιώς έχει όλη την πιθανότητα στον 2ο πίνακα. Αυτό σημαίνει λοιπόν ότι η (δεσμευμένη) κατανομή των υπολοίπων παικτών θα είναι:

  $$\mathbb{P}[s_1 = 1, s_2 = 1] = 1/2$$
  $$\mathbb{P}[s_1 = 2, s_2 = 2] = 1/2$$

  Γνωρίζοντας αυτό, είναι φανερό ότι το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη 3 είναι και πάλι $\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$.

  Έστω, τώρα, ότι ο 3ος παίκτης σκέφτεται, με αυτά τα δεδομένα, να αλλάξει στρατηγική:

  - Αν πάει στον 1ο πίνακα, και δεδομένης της παραπάνω κατανομής του (s_1, s_2) ($1/2$ πάνω αριστερά, $1/2$ κάτω δεξιά), το αναμενόμενο κέρδος του 3 θα είναι:

    $$\frac{1}{2}u_3(1, 1, 1) + \frac{1}{2}u_3(2, 2, 1) = \frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}0 = 1.5 < 2$$

    Άρα, δεν τον συμφέρει.

– Παρομοίως, αν πάει στον 3ο πίνακα, το αναμενόμενο κέρδος του θα είναι:

$$\frac{1}{2}u_3(1,1,3) + \frac{1}{2}u_3(2,2,3) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}3 = 1.5 < 2$$

Άρα, ούτε αυτό τον συμφέρει.

Συμπερασματικά, η κατανομή σ είναι correlated equilibrium! Και, όπως είπαμε, όλοι οι παίκτες έχουν αναμενόμενο κέρδος 2 σε αυτήν.