Ασκήσεις σε Στοχαστικές Διεργασίες

Οι περισσότερες από τις παρακάτω ασκήσεις προέρχονται από τα κεφάλαια 1, 2 και 5 του βιβλίου "Στοχαστικές Διαδικασίες" (Μ. Λουλάκης) που είναι διαθέσιμο από https://repository.kallipos.gr/handle/11419/6003

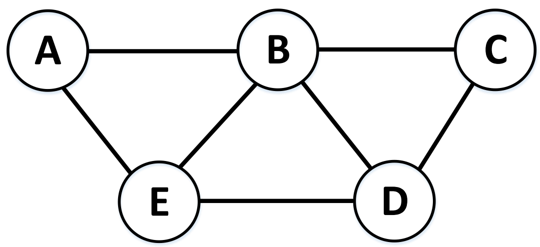
Άσκηση 1

Ένα έντομο κινείται στις κορυφές του παρακάτω γράφου. Ξεκινά από την κορυφή A. Σε κάθε βήμα, αν βρίσκεται στην κορυφή x, επιλέγει τυχαία μία από τις κορυφές που συνδέονται με την x μέσω μιας ακμής του γράφου και μεταβαίνει εκεί. Το έντομο δεν μπορεί να παραμείνει στην ίδια κορυφή και κάνει απαραίτητα ένα βήμα κάθε φορά.

α) Ποιος είναι ο χώρος καταστάσεων X του πειράματος;

β) Ποιος είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης P της αλυσίδας;

γ) Να βρείτε την αναλλοίωτη κατανομή π της μαρκοβιανής αλυσίδας.



Λύση

α) Ο χώρος καταστάσεων της αλυσίδας είναι ο $X = \{A, B, C, D, E\}$.

β) Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της αλυσίδας είναι ο:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Για την αλυσίδα αρχικά ισχύει: $\pi_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$, αφού το έντομο ξεκινά από την κορυφή A.

Τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του πίνακα P αντιστοιχούν στην πιθανότητα μετάβασης του εντόμου από την κορυφή A στις κορυφές A, B, C, D και E του γράφου αντίστοιχα. Επειδή το έντομο δεν μπορεί να παραμείνει στην ίδια κορυφή, η πιθανότητα παραμονής στην κατάσταση A είναι μηδενική. Από την κορυφή A, το έντομο μπορεί να μεταβεί είτε στην κατάσταση B με πιθανότητα $1/2$ ή στην κατάσταση E με πιθανότητα $1/2$.

γ) Για την εύρεση της αναλλοίωτης κατανομής της μαρκοβιανής αλυσίδας πρέπει να λύσουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\pi_A \quad \pi_B \quad \pi_C \quad \pi_D \quad \pi_E) = (\pi_A \quad \pi_B \quad \pi_C \quad \pi_D \quad \pi_E) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_A = {}^{56}/_{275} \\ \pi_B = {}^{96}/_{275} \\ \pi_C = {}^{42}/_{275} \\ \pi_D = {}^{54}/_{275} \\ \pi_E = {}^{27}/_{275} \end{cases}$$

Άσκηση 2

Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης και να βρείτε την αναλλοίωτη κατανομή της μαρκοβιανής αλυσίδας.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & ? & 0 & 0 \\ 3/4 & ? & ? & 1/8 & 1/8 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & ? \\ 0 & 1/4 & ? & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & ? & 3/8 \end{pmatrix}$$

Λύση

Το άθροισμα των στοιχείων κάθε **γραμμής** ενός πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης είναι **πάντοτε** 1. Άρα, ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της μαρκοβιανής αλυσίδας είναι ο παρακάτω:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/8 & 1/8 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 5/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι στο συγκεκριμένο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης **τυχαίνει** και το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης να είναι ίσο με τη μονάδα. Σε αυτήν την περίπτωση, λέμε ότι ο πίνακας είναι ***διπλά στοχαστικός***. Όταν ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης μιας μαρκοβιανής αλυσίδας είναι διπλά στοχαστικός, έχουμε ίση πιθανότητα να βρεθούμε στην κάθε κατάσταση της αλυσίδας, όταν έχει παρέλθει το μεταβατικό φαινόμενο. Άρα, η αναλλοίωτη κατανομή της αλυσίδας είναι:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3

Έστω $\{X_n\}_n$ μια μαρκοβιανή αλυσίδα σε ένα χώρο με δύο καταστάσεις $X = \{A, B\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης:

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

α) Να βρείτε την αναλλοίωτη κατανομή της παραπάνω μαρκοβιανής αλυσίδας.

β) Να υποθέσετε ότι σε κάποιο βήμα, η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση A και ότι έχει παρέλθει το μεταβατικό φαινόμενο. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων που απαιτούνται για την πρώτη επιστροφή της αλυσίδας στην κατάσταση A;

Λύση

α) Για να πάρουμε την αναλλοίωτη κατανομή της αλυσίδας, θα πρέπει να λύσουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \pi_A + \pi_B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\pi_A \quad \pi_B) = (\pi_A \quad \pi_B)\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \\ \pi_A + \pi_B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_A = \dfrac{q}{p+q} \\ \pi_B = \dfrac{p}{p+q} \end{cases}$$

β) Ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων που απαιτούνται για την πρώτη επιστροφή της αλυσίδας στην κατάσταση A είναι:

$$E_A[{T_A}^+] = \frac{1}{\pi_A} = \frac{p+q}{q}$$

<u>Άσκηση 4</u>

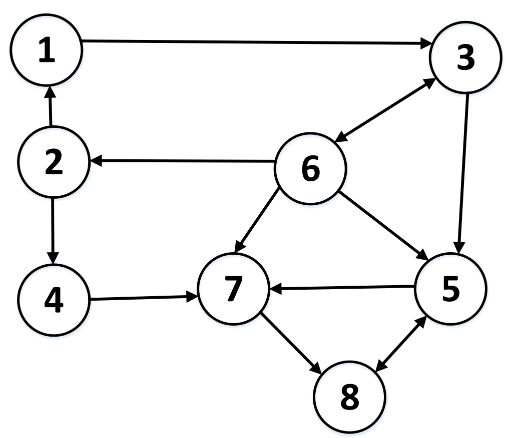
Να χωρίσετε την παρακάτω αλυσίδα σε ανοιχτές και κλειστές κλάσεις επικοινωνίας:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/2 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ο χώρος καταστάσεων της αλυσίδας είναι ο $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

<u>Λύση</u>

Σύμφωνα με τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης, το διάγραμμα που δείχνει πώς επικοινωνούν οι καταστάσεις μεταξύ τους είναι το παρακάτω:



Η αλυσίδα περιλαμβάνει τρεις κλάσεις. Η κλάση $\{4\}$ είναι ανοιχτή, η κλάση $\{1, 2, 3, 6\}$ είναι ανοιχτή και η κλάση $\{5, 7,8\}$ είναι κλειστή.

<u>Άσκηση 5 (Διαγώνισμα 2019)</u>

Δίνεται ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης μιας μαρκοβιανής αλυσίδας. Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

α) Να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.

β) Να εντοπίσετε την κλειστή κλάση που υπάρχει στην αλυσίδα.

γ) Να βρείτε την αναλλοίωτη κατανομή της αλυσίδας.

δ) Να υποθέσετε ότι σε κάποιο βήμα, η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση 5 και ότι έχει παρέλθει το μεταβατικό φαινόμενο. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός βημάτων που απαιτούνται για την πρώτη επιστροφή της αλυσίδας στην κατάσταση 5;

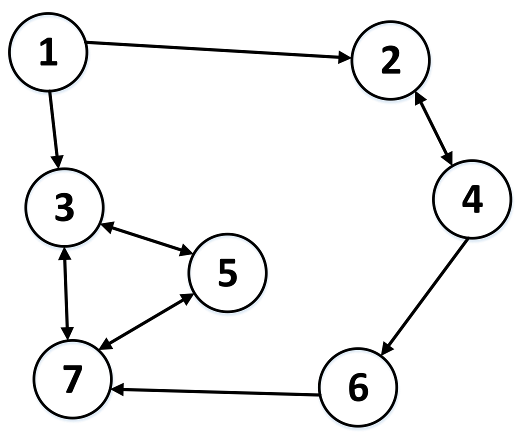
$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & ? & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ? & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/3 & 0 & ? & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & ? & ? & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

<u>Λύση</u>

α) Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της μαρκοβιανής αλυσίδας είναι ο παρακάτω:

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/3 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

β) Από το παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε ότι η μόνη κλειστή κλάση είναι η $\{3, 5, 7\}$.



γ) Παρατηρούμε ότι η αλυσίδα θα καταλήξει στην κλειστή κλάση. Έτσι, θα επικεντρωθούμε στον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης που αντιστοιχεί στις καταστάσεις 3, 5 και 7, δηλαδή στον:

$$P' = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Η αναλοίωτη κατανομή της αλυσίδας είναι η:

$$\begin{cases} \pi = \pi P' \\ \pi_3 + \pi_5 + \pi_7 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\pi_3 \quad \pi_5 \quad \pi_7) = (\pi_3 \quad \pi_5 \quad \pi_7)\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \\ \pi_3 + \pi_5 + \pi_7 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_3 = \dfrac{1}{2} \\ \pi_5 = \dfrac{1}{5} \\ \pi_7 = \dfrac{3}{10} \end{cases}$$

δ) Χρειάζονται $\frac{1}{\pi_5} = 5$ βήματα.

<u>Άσκηση 6 (Διαγώνισμα 2020)</u>

Δίνεται ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης για μία αλυσίδα Markov. Να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα, να χωρίσετε την αλυσίδα σε ανοιχτές (μεταβατικές) και κλειστές (επαναληπτικές) κλάσεις και να βρείτε την αναλλοίωτη κατανομή της επαναληπτικής κλάσης.

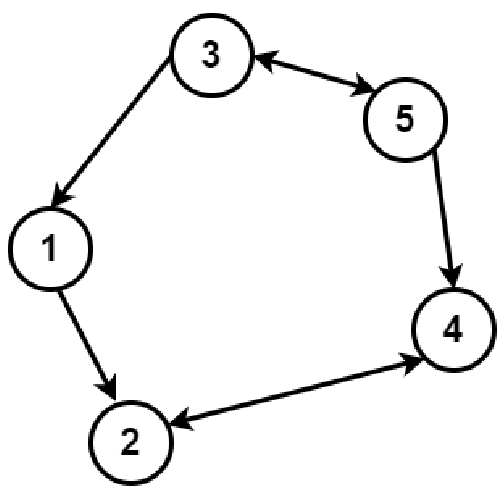
$$\begin{pmatrix} ? & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & ? & 1/3 \end{pmatrix}$$

<u>Λύση</u>

Ο συμπληρωμένος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι ο παρακάτω:

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 & 5/6 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Το διάγραμμα που δείχνει πώς επικοινωνούν οι καταστάσεις μεταξύ τους είναι το παρακάτω:



Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι η αλυσίδα περιλαμβάνει μία κλειστή κλάση, την $\{2, 4\}$, ενώ οι κλάσεις $\{1\}$ και $\{3, 5\}$ είναι ανοιχτές. Για να βρούμε την αναλλοίωτη κατανομή της κλειστής κλάσης αρκεί να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \pi = \pi \widetilde{P} \\ \pi_2 + \pi_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\pi_2 \quad \pi_4) = (\pi_2 \quad \pi_4)\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \\ \pi_2 + \pi_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_2 = \dfrac{3}{7} \\ \pi_4 = 4/7 \end{cases}$$

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων - NETMODE

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80 Αθήνα, Τηλ: 210-772.2503, Fax: 210-772.1452
e-mail: maglaris@netmode.ntua.gr, URL: http://www.netmode.ntua.gr

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ
(ΔΠΜΣ Επιστήμη Δεδομένων & Μηχανική Μάθηση)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1, ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2021

Simulated Annealing

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Simulated Annealing να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης:

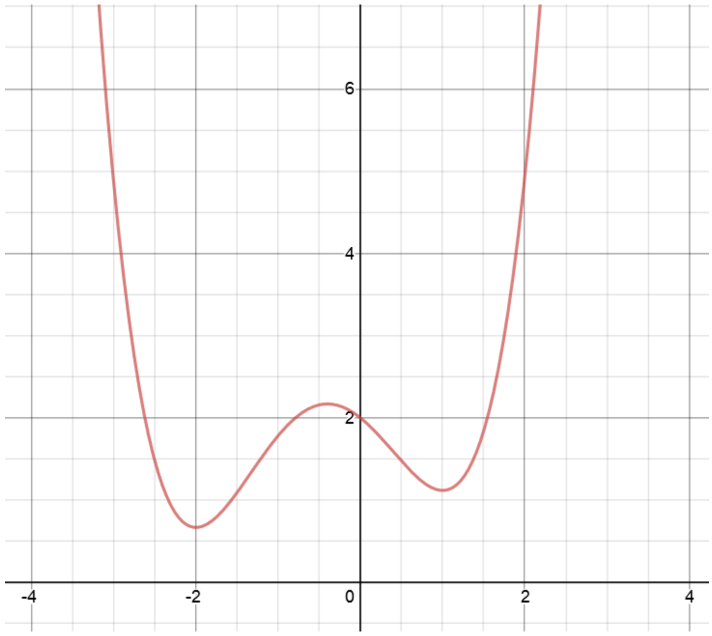
$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{15} - \frac{4x^2}{5} - \frac{4x}{5} + 2$$

Θεωρώντας ως ενέργεια τις τιμές που λαμβάνει η $f(x)$ να εκτελέσετε τον αλγόριθμο για τιμές θερμοκρασίας από $\mathrm{T}_{start} = 2$ έως $\mathrm{T}_{end} = 0.25$. Η θερμοκρασία μειώνεται σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου κατά 30%, ενώ επιλέγεται ως νέα τιμή του x εκείνη που απέχει από την τρέχουσα όσο ένας τυχαίος αριθμός d ομοιόμορφα κατανεμημένος στο διάστημα $[-1, +1]$. Να θεωρήσετε αρχικές τιμές $x_c = 0.5$ με $\mathrm{E}_c = f(0.5) = 1.474$.

Σας δίνονται δύο ομάδες τιμών που έχουν παραχθεί με τη βοήθεια γεννητριών ψευδοτυχαίων αριθμών. Η πρώτη περιλαμβάνει τιμές που έχουν παραχθεί από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-1, +1]$ και θα χρησιμοποιηθεί για την επιλογή του επόμενου x. Η δεύτερη περιλαμβάνει αριθμούς που έχουν παραχθεί από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, +1]$ και θα χρησιμοποιηθεί στις συγκρίσεις που πραγματοποιεί ο αλγόριθμος Metropolis-Hastings.

- 1η ομάδα: $-0.3040, 0.4923, -0.4430, -0.7023, -0.8728, -0.8868$
- 2η ομάδα: $0.0881, 0.7506, 0.0015$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ φαίνεται παρακάτω:



Βήμα 1:

$$x_{proposed} = x_c + d = 0.5 - 0.3040 = 0.196$$

$$\mathrm{E}_{proposed} = f\left(x_{proposed}\right) = f(0.196) = 1.816$$

Η ενέργεια του προτεινόμενου βήματος είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα ενέργεια $\mathrm{E}_c = 1.474$. Έτσι, θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Metropolis-Hastings για να δούμε αν θα γίνει δεκτό το προτεινόμενο βήμα.

$$\Pr = exp\left(-\frac{\mathrm{E}_{proposed} - \mathrm{E}_c}{\mathrm{T}_c}\right) = \exp\left(-\frac{1.816 - 1.474}{2}\right) = 0.8428 > 0.0881$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα που προέκυψε από τον αλγόριθμο Metropolis-Hastings είναι μεγαλύτερη από τον τυχαίο αριθμό που επιστρέφει η γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών. Κατά συνέπεια, θα δεχτούμε το προτεινόμενο βήμα:

$$x_c = 0.196, \mathrm{E}_c = 1.816$$

Βήμα 2:

$$\mathrm{T}_c = 2 \cdot 0.7 = 1.4$$

$$x_{proposed} = 0.196 + 0.4923 = 0.6883$$

$$\mathrm{E}_{proposed} = f(0.6883) = 1.2786$$

Η ενέργεια του προτεινόμενου βήματος είναι μικρότερη από την τρέχουσα ενέργεια. Έτσι, θα δεχτούμε το προτεινόμενο βήμα:

$$x_c = 0.6883, \mathrm{E}_c = 1.2786$$

Βήμα 3:

$$\mathrm{T}_c = 1.4 \cdot 0.7 = 0.98$$

$$x_{proposed} = 0.6883 - 0.443 = 0.2453$$

$$\mathrm{E}_{proposed} = f(0.2453) = 1.7634$$

Η ενέργεια του προτεινόμενου βήματος είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα ενέργεια $\mathrm{E}_c = 1.2786$. Έτσι, θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Metropolis-Hastings για να δούμε αν θα γίνει δεκτό το προτεινόμενο βήμα.

$$\Pr = exp\left(-\frac{\mathrm{E}_{proposed} - \mathrm{E}_c}{\mathrm{T}_c}\right) = \exp\left(-\frac{1.7634 - 1.27286}{0.98}\right) = 0.61 < 0.7506$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα που προέκυψε από τον αλγόριθμο Metropolis-Hastings είναι μικρότερη από τον τυχαίο αριθμό που επιστρέφει η γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών. Κατά συνέπεια, δε θα δεχτούμε το προτεινόμενο βήμα:

$$x_c = 0.6883, \mathrm{E}_c = 1.2786$$

Βήμα 4:

$$\mathrm{T}_c = 0.98 \cdot 0.7 = 0.6859$$

$$x_{proposed} = 0.6883 - 0.7023 = -0.014$$

$$\mathrm{E}_{proposed} = f(-0.014) = 2.0011$$

Η ενέργεια του προτεινόμενου βήματος είναι μεγαλύτερη από την τρέχουσα ενέργεια $\mathrm{E}_c = 1.2786$. Έτσι, θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Metropolis-Hastings για να δούμε αν θα γίνει δεκτό το προτεινόμενο βήμα.

$$\Pr = exp\left(-\frac{\mathrm{E}_{proposed} - \mathrm{E}_c}{\mathrm{T}_c}\right) = \exp\left(-\frac{2.0011 - 1.27286}{0.6859}\right) = 0.3488 > 0.0015$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα που προέκυψε από τον αλγόριθμο Metropolis-Hastings είναι μεγαλύτερη από τον τυχαίο αριθμό που επιστρέφει η γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών. Κατά συνέπεια, θα δεχτούμε το προτεινόμενο βήμα:

$$x_c = -0.014, \mathrm{E}_c = 2.0011$$

Βήμα 5:

$$\mathrm{T}_c = 0.6859 \cdot 0.7 = 0.4801$$

$$x_{proposed} = -0.014 - 0.8728 = -0.8868$$

$$\mathrm{E}_{proposed} = f(-0.8868) = 1.9095$$

Η ενέργεια του προτεινόμενου βήματος είναι μικρότερη από την τρέχουσα ενέργεια. Έτσι, θα δεχτούμε το προτεινόμενο βήμα:

$$x_c = -0.8868, \mathrm{E}_c = 1.9095$$

Βήμα 6:

$$\mathrm{T}_c = 0.4801 \cdot 0.7 = 0.3361$$

$$x_{proposed} = -0.8868 - 0.5724 = -1.4592$$

$$\mathrm{E}_{proposed} = f(-1.4592) = 1.1474$$

Η ενέργεια του προτεινόμενου βήματος είναι μικρότερη από την τρέχουσα ενέργεια. Έτσι, θα δεχτούμε το προτεινόμενο βήμα:

$$x_c = -1.4592, \mathrm{E}_c = 1.1474$$

Βήμα 7:

$$\mathrm{T}_c = 0.3361 \cdot 0.7 = 0.2353 < \mathrm{T}_{end}$$

Άρα εδώ ο αλγόριθμος τερματίζεται. Παρατηρούμε ότι αλγόριθμος κατάφερε να ξεφύγει από το τοπικό ελάχιστο και να πλησιάσει το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης. Εάν τρέχαμε περισσότερες επαναλήψεις και για μικρότερες τιμές του T_{end} θα βλέπαμε ότι ο αλγόριθμος θα κατάφερνε να προσεγγίσει καλύτερα την τιμή του ολικού ελαχίστου.

Ο Αλγόριθμος K-Means

Να ομαδοποιήσετε τα παρακάτω ζεύγη σε δύο ομάδες με τη χρήση του Αλγορίθμου K-Means

Ζεύγη	Χαρακτηριστικό 1	Χαρακτηριστικό 2
Α	1.0	1.0
Β	1.5	2.0
Γ	3.0	4.0
Δ	5.0	7.0
Ε	3.5	5.0
ΣΤ	4.5	5.0
Ζ	3.5	4.5

Για τον ορισμό των δύο ομάδων επιλέγουμε αυθαίρετα τα σημεία Α (Ομάδα 1) και το σημείο Δ (Ομάδα 2). Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε τα εξής:

	Αρχικά σημεία	Mean Vector (Centroid)
Ομάδα 1	Α	(1.0,1.0)
Ομάδα 2	Δ	(5.0,7.0)

Για να ομαδοποιήσουμε και τα υπόλοιπα σημεία, εξετάζουμε για κάθε ένα από αυτά την απόσταση από το τα δύο centroids των ομάδων με βάση την ευκλείδεια απόσταση

$$\sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2} \qquad (1)$$

Κάθε φορά που ομαδοποιείται ένα νέο σημείο σε μία ομάδα, θα πρέπει να επανυπολογίσουμε το centroid της συγκεκριμένης ομάδας. Με βάση τα παραπάνω θα έχουμε 6 επαναλήψεις μέχρι να φράσουμε στην τελική μορφή των δύο ομάδων:

	Ομάδα 1		Ομάδα 2	
Βήμα	Σημεία	Mean Vector (centroid)	Σημεία	Mean Vector (centroid)
1ο	Α	(1.0,1.0)	Δ	(5.0,7.0)
2ο	Α,Β	(1.2,1.5)	Δ	(5.0,7.0)
3ο	Α,Β,Γ	(1.8,2.3)	Δ	(5.0,7.0)
4ο	Α,Β,Γ	(1.8,2.3)	Δ,Ε	(4.2,6.0)
5ο	Α,Β,Γ	(1.8,2.3)	Δ,Ε,ΣΤ	(4.3,5.7)
6ο	Α,Β,Γ	(1.8,2.3)	Δ,Ε,ΣΤ,Ζ	(4.1,5.4)

Άρα οι ομάδες που θα δημιουργηθούν είναι οι εξής:

	Σημεία	Mean Vector (Centroid)
Ομάδα 1	Α,Β,Γ	(1.8,2.3)
Ομάδα 2	Δ,Ε,ΣΤ,Ζ	(4.1,5.4)

Πριν όμως καταλήξουμε ότι οι παραπάνω ομάδες είναι οι τελικές, θα πρέπει να εξετάσουμε την απόσταση κάθε σημείου από τα δύο centroids με βάση την ευκλείδεια απόσταση. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε τα εξής:

Ζεύγη	Απόσταση από το Centroid 1	Απόσταση από το Centroid 2
Α	1.5	5.4
Β	0.4	4.3
Γ	2.1	1.8
Δ	5.7	1.8
Ε	3.2	0.7
ΣΤ	3.8	0.6
Ζ	2.8	1.1

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, προκύπτει ότι το σημείο Γ απέχει λιγότερο από το κέντρο της Ομάδας 2. Συνεπώς θα πρέπει να επανυπολογιστούν τα mean vectors για κάθε ομάδα όπως και πριν, με βάση αυτή την αλλαγή. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε τα εξής:

	Σημεία	Mean Vector (Centroid)
Ομάδα 1	Α,Β	(1.3,1.5)
Ομάδα 2	Γ,Δ,Ε,ΣΤ,Ζ	(3.9,5.1)

Στα πλαίσια του συγκεκριμένου παραδείγματος ακόμα και μετά τον έλεγχο προκύπτουν ότι η τελική ομαδοποίηση είναι η παραπάνω. Σε κάθε περίπτωση όμως θα πρέπει να πραγματοποιείται ο έλεγχος, ώστε να επιβεβαιωθεί το τελικό αποτέλεσμα.

Συντάχθηκε από τους υπεύθυνους εργαστηριακής υποστήριξης του μαθήματος
Νίκο Κωστόπουλο και Δημήτρη Πανταζάτο, Υποψήφιους Διδάκτορες Ε.Μ.Π.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων - NETMODE

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80 Αθήνα, Τηλ: 210-772.2503, Fax: 210-772.1452
e-mail: maglaris@netmode.ntua.gr, URL: http://www.netmode.ntua.gr

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ
(ΔΠΜΣ Επιστήμη Δεδομένων & Μηχανική Μάθηση)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2, ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2021

Principal Component Analysis (PCA)

Να εφαρμόσετε τη μέθοδο Principal Component Analysis (PCA) για να μειώσετε τη διάσταση του παρακάτω dataset:

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 14.23 & 1.71 & 2.43 \\ 13.2 & 1.78 & 2.14 \\ 13.16 & 2.36 & 2.67 \end{pmatrix}$$

όπου η πρώτη στήλη αντιστοιχεί στο feature X, η δεύτερη στήλη αντιστοιχεί στο feature Y και η Τρίτη στο feature Z.

Αρχικά, βρίσκουμε τους μέσους όρους για κάθε feature:

$$\mu_{\mathrm{X}} = \frac{14.23 + 13.2 + 13.16}{3} = 13.53$$

$$\mu_{\mathrm{Y}} = 1.95$$

$$\mu_{\mathrm{Z}} = 2.41$$

Στη συνέχεια, κανονικοποιούμε τα δεδομένα αφαιρώντας από τις τιμές τους κάθε feature τον αντίστοιχο μέσο όρο.

$$\mathrm{D_N} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.24 & 0.02 \\ -0.33 & -0.17 & -0.27 \\ -0.37 & 0.41 & 0.26 \end{pmatrix}$$

Έπειτα, υπολογίζουμε τον πίνακα συδιακύμανσης:

$$\mathrm{Cov} = \begin{pmatrix} 0.3679 & -0.1318 & 0.0035 \\ -0.1318 & 0.1273 & 0.0739 \\ 0.0035 & 0.0739 & 0.0705 \end{pmatrix}$$

Ενδεικτικά:

$$\mathrm{Cov(X,X)} = \frac{1}{3-1}\big(0.7 \cdot 0.7 + (-0.33) \cdot (-0.33) + (-0.37) \cdot (-0.37)\big) = 0.3679$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{3-1}\big(0.7\cdot(-0.24) + (-0.33)\cdot(-0.17) + (-0.37)\cdot(0.41)\big) = -0.1318$$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα συδιακύμανσης:

$$\det(\mathrm{Cov} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0.3679-\lambda & -0.1318 & 0.0035 \\ -0.1318 & 0.1273-\lambda & 0.0739 \\ 0.0035 & 0.0739 & 0.0705-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 0.4281, \lambda_2 = 0.1375, \lambda_3 = 5.1\cdot 10^{-18}$$

Παρατηρούμε ότι η ιδιοτιμή λ_3 είναι πολύ μικρότερη από τις άλλες δύο ιδιοτιμές. Έτσι, θα θεωρήσουμε ως Principal Components τα δύο πρώτα features. Υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα που τους αντιστοιχούν:

$$\Xi = \begin{pmatrix} -0.9061 & 0.3454 & -0.2442 \\ 0.4159 & 0.6221 & -0.6633 \end{pmatrix}$$

Τέλος, μετασχηματίζουμε το dataset ώστε να υπάρχει η συνεισφορά μόνο από τα δύο principal components:

$$D' = \Xi\cdot D_N = \begin{pmatrix} -0.6579 & 0.0586 & -0.1749 \\ 0.3313 & -0.4775 & -0.3321 \end{pmatrix}$$

Logistic Regression

Η τεχνική Logistic Regression χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις δυαδικής ταξινόμησης. Στα πλαίσια του παραδείγματος που παρατίθεται, έχουμε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, τις X1 και X2. Η είσοδος των δύο αυτών μεταβλητών προκύπτει τυχαία από κατανομές Gauss. Η έξοδος παίρνει τιμές 0 και 1. Το training dataset με το οποίο και θα εκπαιδεύσουμε το μοντέλο είναι το εξής:

X1	*X2*	*Y*
2.7810836	2.550537003	0
1.465489372	2.362125076	0
3.396561688	4.400293529	0
1.38807019	1.850220317	0
3.06407232	3.005305973	0
7.627531214	2.759262235	1
5.332441248	2.088626775	1
6.922596716	1.77106367	1
8.675418651	-0.2420686549	1
7.673756466	3.508563011	1

Η λογιστική κατανομή παίρνει ως είσοδο πραγματικές τιμές και προβλέπει την πιθανότητα η έξοδος να ανήκει στην αρχική κλάση (*κλάση 0*). Αν λοιπόν η πιθανότητα είναι μεγαλύτερη του *0.5*, τότε η έξοδος μπορεί να θεωρηθεί ότι θα πάει στην *κλάση 0*, αλλιώς η πρόβλεψη που θα πάρουμε ως έξοδο, ανήκει στην *κλάση 1*.

Για το συγκεκριμένο σύνολο δεδομένων, η λογιστική παλινδρόμηση έχει 3 συντελεστές όπως θα είχε και μία γραμμική παλινδρόμηση, για παράδειγμα:

$$Y = b_0 + b_1 * X1 + b_2 * X2 \quad (1)$$

Στόχος είναι να βρεθούν οι καλύτερες τιμές για τους συντελεστές (b0,b1,b2) με βάση το *training dataset*.

Σε αντίθεση όμως με την γραμμική παλινδρόμηση, η έξοδος μετασχηματίζεται σε μία πιθανότητα με βάση την λογιστική συνάρτηση:

$$p(class = 0) = 1/(1 + EXP(-Y)) \quad (2)$$

Για να υπολογίσουμε τις τιμές των παραμέτρων θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο *Stochastic Gradient Descent (SGD)*. Για το σκοπό αυτό, ο χρήστης θα πρέπει να ορίζει το *ρυθμό μάθησης (learning rate)* και το συνολικό αριθμό των *εποχών (epochs) εκπαίδευσης*. Στα πλαίσια του παραδείγματος θεωρούμε ότι οι αρχικές τιμές των συντελεστών είναι μηδενικές και ο ρυθμός μάθησης είναι *γ=0.3*.

Σε κάθε εποχή τα βήματα είναι τα εξής:

1. Υπολογίζουμε μία πρόβλεψη με βάση τις τρέχουσες τιμές των συντελεστών.
2. Υπολογισμός των νέων τιμών των συντελεστών με βάση το σφάλμα της πρόβλεψης.

Με βάση τα παραπάνω για την πρώτη εποχή θα έχουμε ως εξής:

<u>*Τιμές των συντελεστών*</u>: $b_0 = 0.0$, $b_1 = 0.0$, $b_2 = 0.0$

<u>*Πρώτο ζεύγος του training dataset*</u>: X1=2.7810836, X2=2.550537003, Y=0

Χρησιμοποιώντας την παρακάτω εξίσωση θα υπολογίζουμε την πρόβλεψη:

$$p_{pred1} = 1/(1 + EXP(-(b_0 + b_1 * X1 + b_2 * X2)))$$

$$p_{pred1} = 1/(1 + EXP(-(0.0 + 0.0 * 2.7810836 + 0.0 * 2.550537003)))$$

$$\boldsymbol{p_{pred1} = 0.5}$$

Έχοντας υπολογίσει την πρόβλεψη, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τις νέες τιμές των συντελεστών. Οι τιμές των συντελεστών υπολογίζονται με την χρήση της παρακάτω εξίσωσης:

$$b = b + \gamma * \left(Y - p_{pred}\right) * p_{pred} * \left(1 - p_{pred}\right) * X$$

Το *b* συμβολίζει τον συντελεστή για τον οποίο ανανεώνουμε την τιμή του.

Το *γ* είναι ο ρυθμός μάθησης και προσδιορίζει πόσο αλλάζει η τιμή των συντελεστών κάθε φορά που ανανεώνεται η τιμή τους. Στα πλαίσια του παραδείγματος ο ρυθμός μάθησης είναι ίσος με *0.3*

Παρατήρηση: Στην περίπτωση όπου υπολογίζουμε την τιμή του συντελεστή b_0 , υποθέτουμε ότι η τιμή του X είναι ίση με 1.0 ανεξάρτητα αν δεν έχει τιμή εισόδου.

Με βάση τα παραπάνω θα έχουμε ως εξής:

$$b_0 = b_0 + \gamma * (Y - p_{pred}) * p_{pred} * (1 - p_{pred}) \; =>$$

$$b_0 = b_0 + 0.3 * (0 - 0.5) * 0.5 * (1 - 0.5) \; =>$$

$$b_0 = -0.0375$$

Με αντίστοιχο τρόπο θα βρούμε τις τιμές των συντελεστών b_1 και b_2. Συνεπώς οι τιμές που θα έχουμε είναι οι εξής:

$$b_1 = b_1 + 0.3 * (0 - 0.5) * 0.5 * (1 - 0.5) * 2.7810836 \; =>$$

$$b_1 = -0.104290635$$

Και

$$b_2 = b_2 + 0.3 * (0 - 0.5) * 0.5 * (1 - 0.5) * 2.550537003 \; =>$$

$$b_2 = -0.09564513761$$

Η παραπάνω διαδικασία (SGD) θα πρέπει να επαναληφθεί για να ανανεωθεί το μοντέλο για κάθε ζεύγος του training dataset. Στα πλαίσια του παραδείγματος θα πρέπει να επαναλάβουμε την διαδικασία για 10 εποχές. Εφόσον επαναληφθεί η διαδικασία για 10 φορές τότε οι τιμές των συντελεστών που θα προκύψουν είναι οι εξής:

$$b_0 = -0.4066054641$$

$$b_1 = \; 0.8525733164$$

$$b_2 = \; -1.104746259$$

Συνεπώς το μοντέλο μετά τις 10 εποχές θα έχει την παρακάτω μορφή με βάση τους συντελεστές που έχουν προκύψει:

$$Y = -0.4066054641 + \; 0.8525733164 * X1 + -1.104746259 * X2$$

Με βάση το παραπάνω μοντέλο τώρα μπορεί να υπολογιστεί η έξοδος για κάθε ζεύγος τιμών του training dataset. Άρα οι τιμές της εξόδου (Y) που θα προκύψουν είναι οι εξής:

X1	*X2*	*Y*
2.7810836	2.550537003	0.2987569857
1.465489372	2.362125076	0.145951056
3.396561688	4.400293529	0.08533326531
1.38807019	1.850220317	0.2197373144
3.06407232	3.005305973	0.2470590002
7.627531214	2.759262235	0.9547021348
5.332441248	2.088626775	0.8620341908
6.922596716	1.77106367	0.9717729051

8.675418651	-0.2420686549	0.9992954521
7.673756466	3.508563011	0.905489323

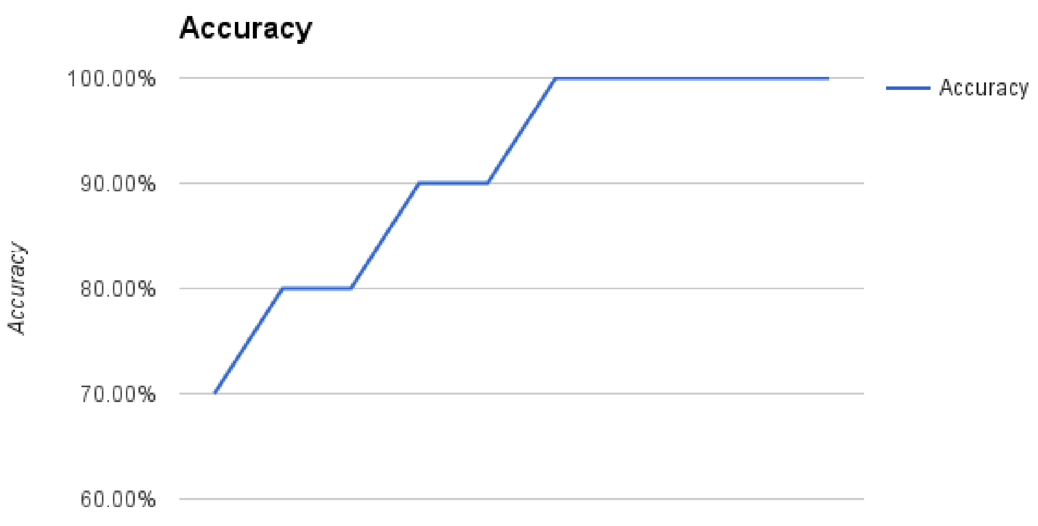
Οι παραπάνω τιμές εξόδου (Y) συμβολίζουν την πιθανότητα κάθε ζεύγος τιμών να ανήκει στην *κλάση 0*. Οι τιμές Y μπορούν να μετατραπούν σε τιμές 0 ή 1 με βάση το παρακάτω κανόνα:

$$p_{pred} = IF\ (Y < 0.5) Then\ 0\ Else\ 1$$

Με βάση τον απλό αυτό κανόνα θα έχουμε τον αρχικό πίνακα που μας είχε δοθεί:

X1	*X2*	*Y*
2.7810836	2.550537003	0
1.465489372	2.362125076	0
3.396561688	4.400293529	0
1.38807019	1.850220317	0
3.06407232	3.005305973	0
7.627531214	2.759262235	1
5.332441248	2.088626775	1
6.922596716	1.77106367	1
8.675418651	-0.2420686549	1
7.673756466	3.508563011	1

Σχετικά με την ακρίβεια του μοντέλου παρατηρούμε τα εξής:



Φαίνεται ξεκάθαρα πως το μοντέλο κατάφερε να είναι 100% ακριβές στο τέλος της $6^{ης}$ εποχής. Ο τύπος για να προσδιορίσουμε την ακρίβεια του μοντέλου είναι ο εξής:

$$accuracy = \left({}^{coreect\ predictions} / {}_{num\ predictions\ made} \right) * 100$$

Συντάχθηκε από τους υπεύθυνους εργαστηριακής υποστήριξης του μαθήματος Νίκο Κωστόπουλο και Δημήτρη Πανταζάτο, Υποψήφιους Διδάκτορες Ε.Μ.Π.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων - NETMODE

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80 Αθήνα, Τηλ: 210-772.2503, Fax: 210-772.1452
e-mail: maglaris@netmode.ntua.gr, URL: http://www.netmode.ntua.gr

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ
(ΔΠΜΣ Επιστήμη Δεδομένων & Μηχανική Μάθηση)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ, ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2021

Value Iteration

Να εκτελέσετε τις πρώτες 3 επαναλήψεις του αλγορίθμου Value Iteration για το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης: Ένα κινητό ξεκινάει από την κατάσταση S και κινείται στο πλέγμα που φαίνεται παρακάτω με σκοπό να μεγιστοποιήσει το κέρδος του. Η προσπάθειά του τερματίζεται είτε στην κατάσταση (1,3) είτε στην κατάσταση (2,3). Σε κάθε βήμα, παίρνει ή χάνει τους πόντους που αναγράφονται στο πλέγμα. Το κινητό μπορεί να κινηθεί πάνω, κάτω, αριστερά ή δεξιά, ενώ στην περίπτωση που η κίνησή του το οδηγεί έξω από το πλέγμα, το κινητό παραμένει στην ίδια κατάσταση. Οι κινήσεις του είναι στοχαστικές, δηλαδή με πιθανότητα 80% πραγματοποιεί την κίνηση που σκόπευε, ενώ με πιθανότητες 10% και 10% αντίστοιχα γλιστράει σε μία από τις δύο θέσεις που είναι κάθετες ως προς την κίνηση που σκόπευε να κάνει.

0, (2,1)	0, (2,2)	+5, (2,3)
S, 0, (1,1)	0, (1,2)	-5, (1,3)

Η βελτιστοποίηση γίνεται σύμφωνα με την εξίσωση Bellman:

$$V_{i+1}(s) = \max_a \left(\sum_{s'} P(s,a,s') \left(R(s,a,s') + \gamma V_i(s') \right) \right)$$

όπου V_i είναι η τιμή της Value Function στην επανάληψη i, P είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της διαδικασίας, s είναι η τρέχουσα κατάσταση, s' η επόμενη κατάσταση, R το κέρδος του σε μία μετάβαση και με βάση μία ενέργεια α και γ το discount factor για το οποίο θα θεωρήσουμε ότι είναι ίσο με 0.9.

Ο πίνακας με τις επαναλήψεις του αλγορίθμου Value Iteration είναι ο παρακάτω:

s	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)
$V_0(s)$	0	0	0	0	0	0
$V_1(s)$	0	0	0	0	4.0	0
$V_2(s)$	0	2.38	0	2.88	4.0	0
$V_3(s)$	0	2.38	0	3.14	4.57	0

Ενδεικτικοί Υπολογισμοί:

$$V_1\big((2,2)\big) \equiv V_1(2,2) =$$
$$= \max_a \begin{cases} 0.8 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_0(2,2)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_0(2,1)\big) + 0.1 \cdot \big(5 + 0.9 \cdot V_0(2,3)\big), a = πάνω \\ 0.8 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_0(1,2)\big) + 0.1 \cdot \big(5 + 0.9 \cdot V_0(2,3)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_0(2,1)\big), a = κάτω \\ 0.8 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_0(2,1)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_0(1,2)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_0(2,2)\big), a = αριστερά \\ 0.8 \cdot \big(5 + 0.9 \cdot V_0(2,3)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_0(2,2)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_0(1,2)\big), a = δεξιά \end{cases}$$

$$= \max_a \begin{cases} 0 + 0 + 0.5, a = πάνω \\ 0 + 0.5 + 0, a = κάτω \\ 0 + 0 + 0, a = αριστερά \\ 4 + 0 + 0, a = δεξιά \end{cases} = 4.0$$

$$V_2(1,2) =$$
$$= \max_a \begin{cases} 0.8 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_1(2,2)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_1(1,1)\big) + 0.1 \cdot \big(-5 + 0.9 \cdot V_1(1,3)\big), a = πάνω \\ 0.8 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_1(1,2)\big) + 0.1 \cdot \big(-5 + 0.9 \cdot V_1(1,3)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_1(1,1)\big), a = κάτω \\ 0.8 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_1(1,1)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_1(1,2)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_1(2,2)\big), a = αριστερά \\ 0.8 \cdot \big(-5 + 0.9 \cdot V_1(1,3)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_1(2,2)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_1(1,2)\big), a = δεξιά \end{cases}$$

$$= \max_a \begin{cases} 2.88 + 0 - 0.5, a = πάνω \\ 0 - 0.5 + 0, a = κάτω \\ 0 + 0 + 0.36, a = αριστερά \\ -4 + 0.36 + 0, a = δεξιά \end{cases} = 2.38$$

$$V_3(1,2) =$$
$$= \max_a \begin{cases} 0.8 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(2,2)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(1,1)\big) + 0.1 \cdot \big(-5 + 0.9 \cdot V_2(1,3)\big), a = πάνω \\ 0.8 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(1,2)\big) + 0.1 \cdot \big(-5 + 0.9 \cdot V_2(1,3)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(1,1)\big), a = κάτω \\ 0.8 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(1,1)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(1,2)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(2,2)\big), a = αριστερά \\ 0.8 \cdot \big(-5 + 0.9 \cdot V_2(1,3)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(2,2)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(1,2)\big), a = δεξιά \end{cases}$$

$$= 2.38$$

$$V_3(2,2) =$$
$$= \max_a \begin{cases} 0.8 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(2,2)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(2,1)\big) + 0.1 \cdot \big(5 + 0.9 \cdot V_2(2,3)\big), a = πάνω \\ 0.8 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(1,2)\big) + 0.1 \cdot \big(5 + 0.9 \cdot V_2(2,3)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(2,1)\big), a = κάτω \\ 0.8 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(2,1)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(1,2)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(2,2)\big), a = αριστερά \\ 0.8 \cdot \big(5 + 0.9 \cdot V_2(2,3)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(2,2)\big) + 0.1 \cdot \big(0 + 0.9 \cdot V_2(1,2)\big), a = δεξιά \end{cases}$$
$$= 4.57$$

Συντάχθηκε από τους υπεύθυνους εργαστηριακής υποστήριξης του μαθήματος
Νίκο Κωστόπουλο και Δημήτρη Πανταζάτο, Υποψήφιους Διδάκτορες Ε.Μ.Π.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων - NETMODE

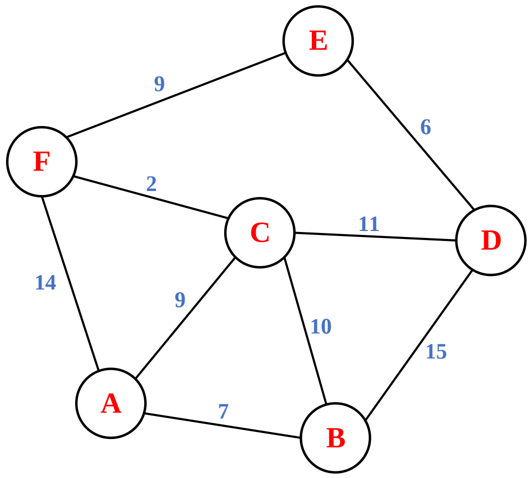
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80 Αθήνα, Τηλ: 210-772.2503, Fax: 210-772.1452
e-mail: maglaris@netmode.ntua.gr, URL: http://www.netmode.ntua.gr

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ
(ΔΠΜΣ Επιστήμη Δεδομένων & Μηχανική Μάθηση)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ, ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2021

Ο Αλγόριθμος Bellman-Ford

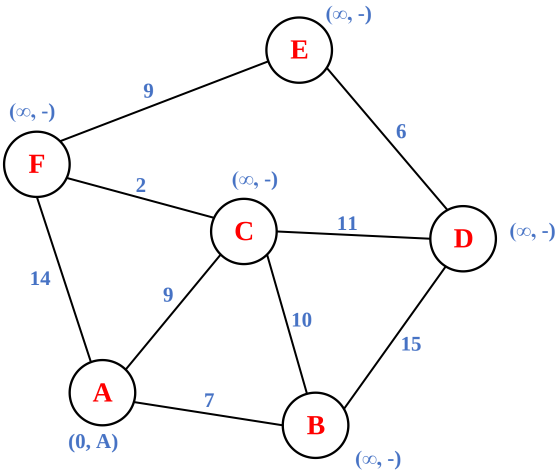
Να εκτελέσετε τον αλγόριθμο Bellman-Ford για να βρείτε τις συντομότερες διαδρομές από τον κόμβο A προς τους υπόλοιπους κόμβους του ακόλουθου γράφου:



Σε κάθε κόμβο i αντιστοιχούμε το ζεύγος $(L_i, P(i))$, όπου L_i είναι το τρέχον εκτιμώμενο κόστος από την πηγή A και $P(i)$ η απόφαση επιλογής προηγούμενου κόμβου στην τρέχουσα εκτίμηση δρόμου από την πηγή A προς τον κόμβο (κατάσταση) i.

Αρχικοποίηση: Η πηγή (κόμβος A) αρχικοποιείται με label $L_\text{A} = 0$, ενώ οι υπόλοιποι κόμβοι με άπειρη τιμή. Ως προηγούμενος κόμβος της πηγής A αρχικοποιείται ο εαυτός της $P(\text{A}) = \text{A}$, ενώ για τις υπόλοιπες κανένας κόμβος.

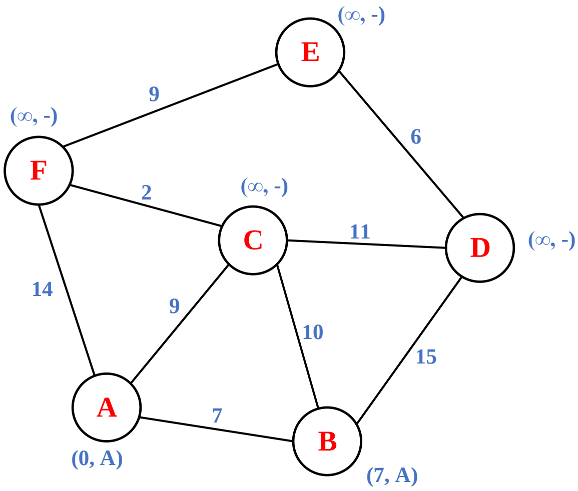
Κανόνας ανανέωσης των labels L_i των κόμβων $i \neq A$ μέσω των εξισώσεων δυναμικού προγραμματισμού: $L_i \leftarrow \min_j \{L_j + d_{ij}\}, \forall j$ που γειτονεύει με τον i.



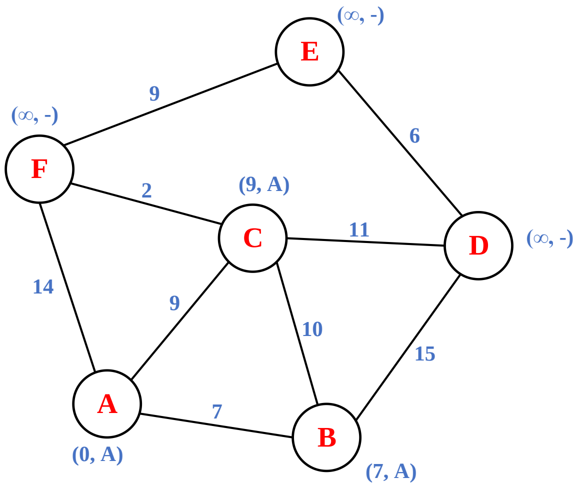
Σειρά ανανέωσης των κόμβων: B, C, D, F, E

<u>Πρώτη επανάληψη</u>:

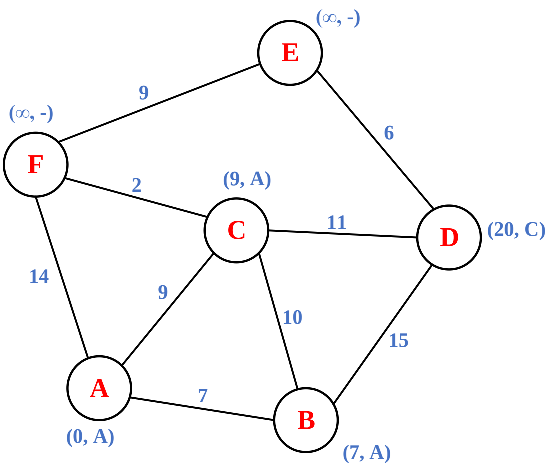
- Ανανέωση για τον κόμβο B: Η μόνη διαδρομή από τον κόμβο A είναι μόνο η απευθείας σύνδεση με κόστος $L_{\mathrm{B}} = 7$ και προηγούμενο κόμβο $P(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$. Όλες οι άλλες διαδρομές έχουν άπειρο κόστος.



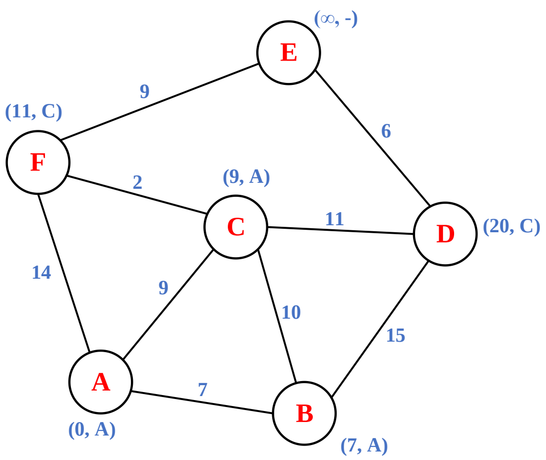
Ανανέωση για τον κόμβο C: Εναλλακτικές διαδρομές από τον κόμβο A είναι η απευθείας σύνδεση με κόστος $L_{\mathrm{C}} = 9$ ή διαμέσου του B με κόστος $L_{\mathrm{C}} = 10 + 7 = 17$. Όλες οι άλλες διαδρομές έχουν άπειρο κόστος. Επιλέγεται η απευθείας διαδρομή με $L_{\mathrm{C}} = 9$ και $P(\mathrm{C}) = \mathrm{A}$.



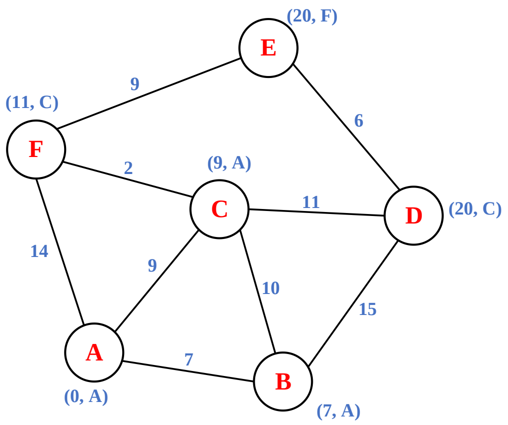
Ανανέωση για τον κόμβο D: Εναλλακτικές διαδρομές από τον κόμβο A είναι διαμέσου του C με κόστος $L_{\mathrm{D}} = 11 + 9 = 20$ ή διαμέσου του B με κόστος $L_{\mathrm{D}} = 15 + 7 = 22$. Όλες οι άλλες διαδρομές έχουν άπειρο κόστος. Επιλέγεται η διαδρομή διαμέσου του C με $L_{\mathrm{D}} = 20$ και $P(\mathrm{D}) = \mathrm{C}$.



Ανανέωση για τον κόμβο F: Εναλλακτικές διαδρομές από τον κόμβο A είναι η απευθείας σύνδεση με κόστος $L_{\mathrm{F}} = 14$ ή διαμέσου του C με κόστος $L_{\mathrm{F}} = 2 + 9 = 11$. Όλες οι άλλες διαδρομές έχουν άπειρο κόστος. Επιλέγεται η διαδρομή διαμέσου του C με $L_{\mathrm{F}} = 11$ και $P(\mathrm{F}) = \mathrm{C}$.

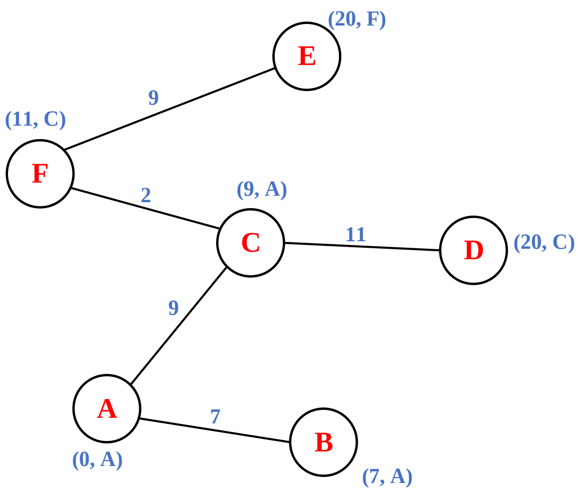


Ανανέωση για τον κόμβο E: Εναλλακτικές διαδρομές από τον κόμβο A είναι η διαδρομή διαμέσου του D με κόστος $L_{\mathrm{E}} = 6 + 20 = 26$ ή διαμέσου του F με κόστος $L_{\mathrm{E}} = 9 + 11 = 20$. Επιλέγεται η διαδρομή διαμέσου του F με $L_{\mathrm{E}} = 20$ και $P(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$.



<u>Δεύτερη επανάληψη</u>: Παρατηρούμε ότι τα labels των κόμβων δε θα αλλάξουν. Έτσι, ο αλγόριθμος τερματίζεται.

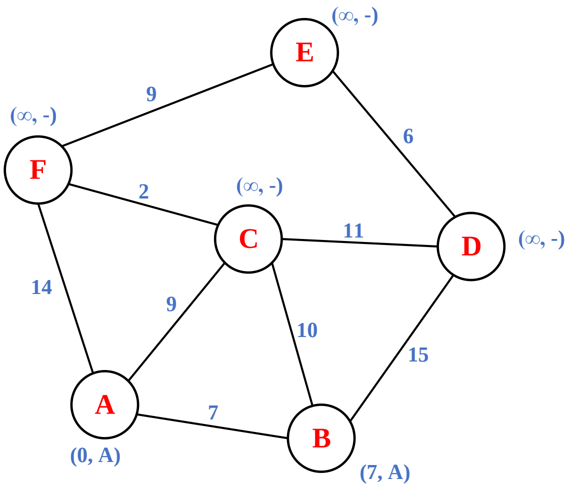
Το τελικό δέντρο βέλτιστης δρομολόγησης με ρίζα την πηγή A προκύπτει από τις τελικές αποφάσεις δρομολόγησης $P(i), i = \mathrm{B, C, D, E, F}$ ως εξής:



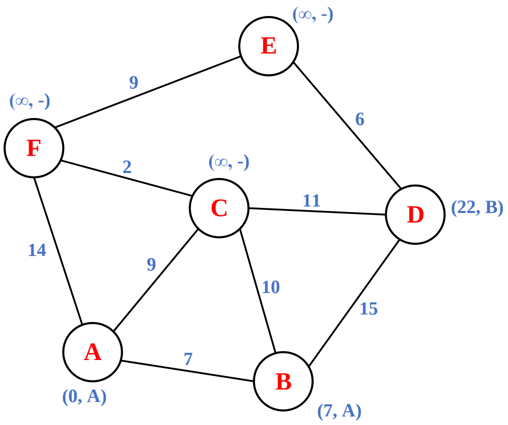
Σειρά ανανέωσης των κόμβων: B, D, E, F, C

<u>Πρώτη επανάληψη</u>:

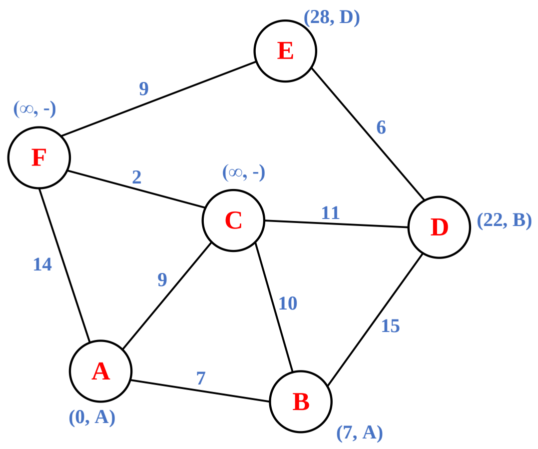
Ανανέωση για τον κόμβο B:



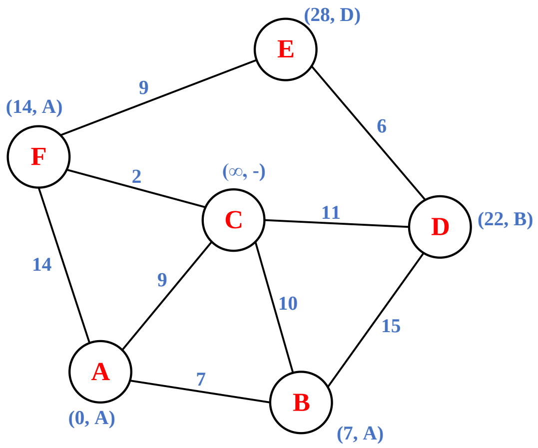
Ανανέωση για τον κόμβο D:



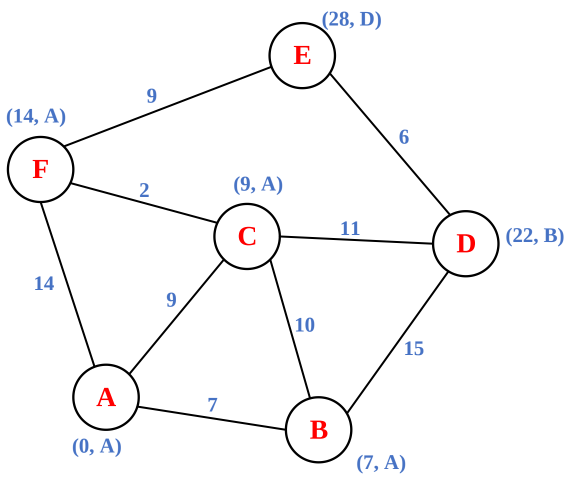
Ανανέωση για τον κόμβο E:



Ανανέωση για τον κόμβο F:



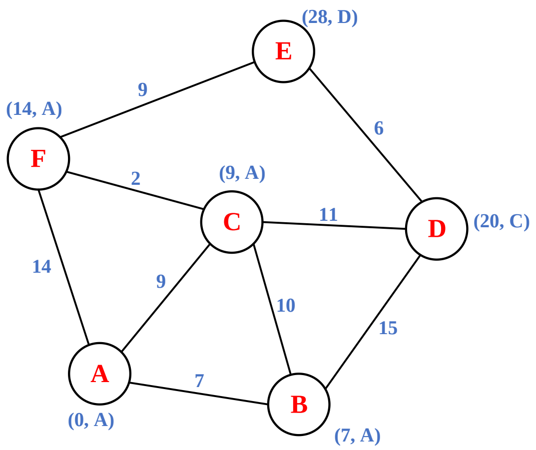
Ανανέωση για τον κόμβο C:



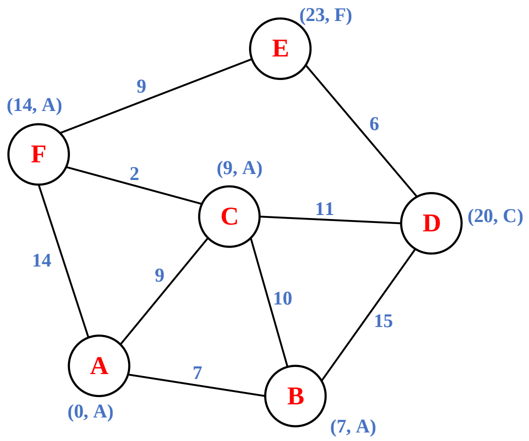
<u>Δεύτερη επανάληψη</u>:

Ανανέωση για τον κόμβο B: καμία αλλαγή

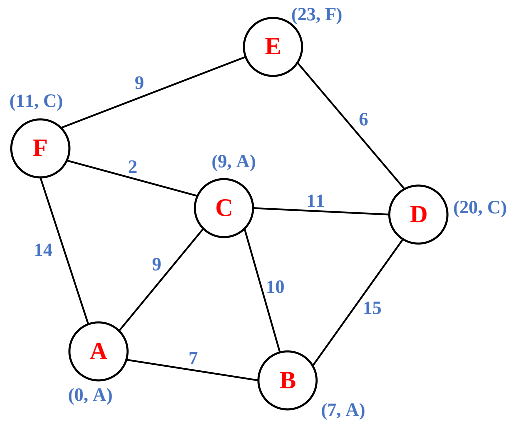
Ανανέωση για τον κόμβο D:



Ανανέωση για τον κόμβο E:



Ανανέωση για τον κόμβο F:



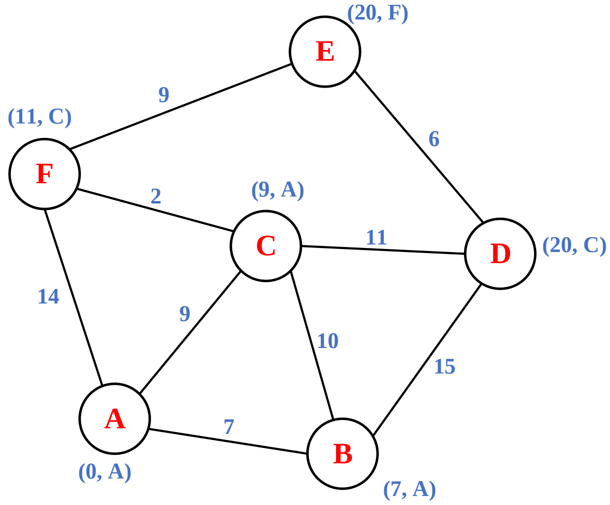
Ανανέωση για τον κόμβο C: καμία αλλαγή

<u>Τρίτη επανάληψη</u>:

Ανανέωση για τον κόμβο B: καμία αλλαγή

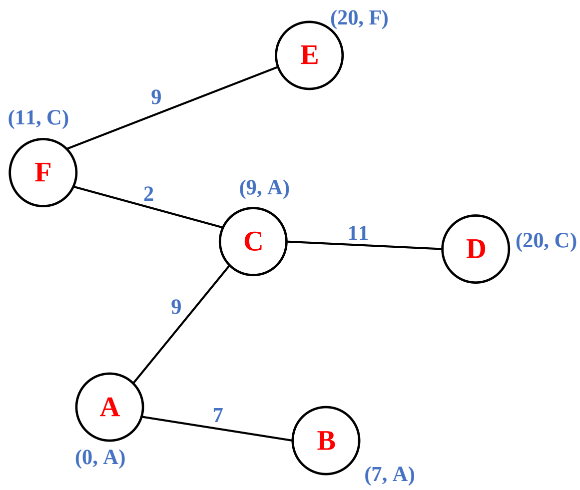
Ανανέωση για τον κόμβο D: καμία αλλαγή

Ανανέωση για τον κόμβο Ε:



<u>Υπόλοιπες επαναλήψεις</u>: Παρατηρούμε ότι τα labels των κόμβων δε θα αλλάξουν. Έτσι, ο αλγόριθμος τερματίζεται.

Το τελικό δέντρο βέλτιστης δρομολόγησης με ρίζα την πηγή Α προκύπτει από τις τελικές αποφάσεις δρομολόγησης $P(i), i = \mathrm{B, C, D, E, F}$ ως εξής:



Συντάχθηκε από τους υπεύθυνους εργαστηριακής υποστήριξης του μαθήματος Νίκο Κωστόπουλο και Δημήτρη Πανταζάτο, Υποψήφιους Διδάκτορες Ε.Μ.Π.

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων - NETMODE
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80 Αθήνα, Τηλ: 210-772.2503, Fax: 210-772.1452
e-mail: maglaris@netmode.ntua.gr, URL: http://www.netmode.ntua.gr

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ
(ΔΠΜΣ Επιστήμη Δεδομένων & Μηχανική Μάθηση)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ, ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2021

Ο Ταξινομητής Naive Bayes – Δέντρα Αποφάσεων (Εξετάσεις 2020)

α) Ποια είναι η παραδοχή που κάνει ο αλγόριθμος Naive Bayes Classifier και ποια πλεονεκτήματα προσφέρει;

β) Βασισμένοι στον παρακάτω πίνακα, να εκπαιδεύσετε έναν Naive Bayes Classifier που θα ταξινομεί αν ένας ταξιδιώτης που καταφθάνει στο αεροδρόμιο της Αθήνας είναι θετικός στον ιό Covid-19 ή όχι. Το μέγεθος του training set ήταν 1000 ταξιδιώτες, από τους οποίους οι 600 ήταν γυναίκες και οι 400 ήταν άνδρες. Τα features είναι (i) το φύλο του ταξιδιώτη (Άνδρας, Γυναίκα), (ii) αν η θερμοκρασία του σώματός του είναι υψηλή ή όχι (Υψηλή, Χαμηλή) και (iii) το αν έρχεται από αεροδρόμιο της ελληνικής επικράτειας ή όχι (Ελλάδα, Εξωτερικό). Δίνεται ένας ταξιδιώτης για τον οποίο ισχύει: είναι Γυναίκα, έχει χαμηλή θερμοκρασία και προέρχεται από την Ελλάδα. Ποια είναι η εκτίμηση του μοντέλου που εκπαιδεύσατε για αυτόν τον ταξιδιώτη; (Για την εκπαίδευση του αλγορίθμου να υπολογίσετε μόνο τις πιθανότητες που είναι απαραίτητες για την ταξινόμηση του ταξιδιώτη)

Φύλο	Θερμοκρασία	Προέλευση	Θετικοί στον Ιό	Αρνητικοί στον Ιό
Γυναίκα	Υψηλή	Ελλάδα	40	100
Γυναίκα	Υψηλή	Εξωτερικό	170	50
Γυναίκα	Χαμηλή	Ελλάδα	10	150
Γυναίκα	Χαμηλή	Εξωτερικό	20	60
Άνδρας	Υψηλή	Ελλάδα	20	80
Άνδρας	Υψηλή	Εξωτερικό	100	20
Άνδρας	Χαμηλή	Ελλάδα	10	110
Άνδρας	Χαμηλή	Εξωτερικό	10	50

γ) Εξετάζετε την κατασκευή ενός Decision Tree για την επίλυση της παραπάνω ταξινόμησης. Να εξηγήσετε ποιο feature (Φύλο, Θερμοκρασία, Προέλευση) θα επιλέγατε στη ρίζα του Decision Tree. Να χρησιμοποιήσετε το Gini Index.

<u>Λύση</u>

α) Δείτε τις διαφάνειες του μαθήματος.

β) Για τις Prior πιθανότητες:

$$P(\text{ΘΕΤΙΚΟΣ/Η}) = \frac{40 + 170 + 10 + 20 + 20 + 100 + 10 + 10}{1000} = \frac{380}{1000} = 0.38$$

$$P(\text{ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ/Η}) = \frac{100 + 50 + 150 + 60 + 80 + 20 + 110 + 50}{1000} = \frac{620}{1000} = 0.62$$

Για τις δεσμευμένες πιθανότητες:

$$P(\text{ΓΥΝΑΙΚΑ}|\text{ΘΕΤΙΚΟΣ/Η}) = \frac{40 + 170 + 10 + 20}{380} = \frac{240}{380} = 0.632$$

$$P(\text{ΓΥΝΑΙΚΑ}|\text{ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ/Η}) = \frac{100 + 50 + 150 + 60}{620} = \frac{360}{620} = 0.5807$$

$$P(\text{ΧΑΜΗΛΗ}|\text{ΘΕΤΙΚΟΣ/Η}) = \frac{10 + 20 + 10 + 10}{380} = \frac{50}{380} = 0.1316$$

$$P(\text{ΧΑΜΗΛΗ}|\text{ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ/Η}) = \frac{150 + 60 + 110 + 50}{620} = \frac{370}{620} = 0.5968$$

$$P(\text{ΕΛΛΑΔΑ}|\text{ΘΕΤΙΚΟΣ/Η}) = \frac{40 + 10 + 20 + 10}{380} = \frac{80}{380} = 0.2105$$

$$P(\text{ΕΛΛΑΔΑ}|\text{ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ/Η}) = \frac{100 + 150 + 80 + 110}{620} = \frac{440}{620} = 0.7097$$

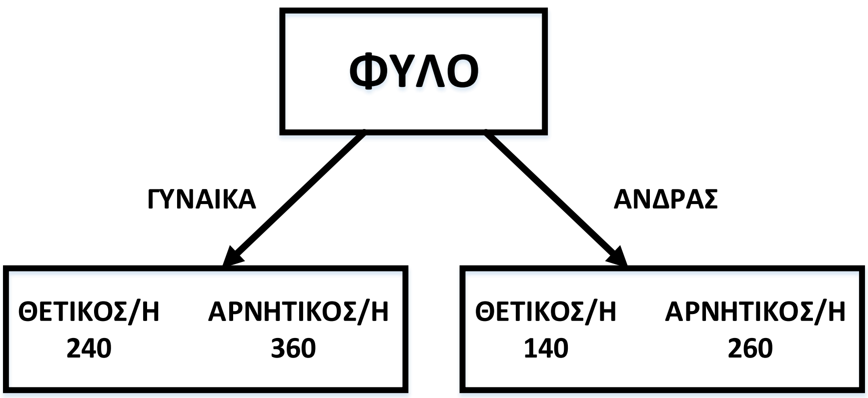
Για την ταξινόμηση του ταξιδιώτη που ζητείται από την άσκηση:

$$P(\text{ΘΕΤΙΚΟΣ/Η} \mid \text{ΓΥΝΑΙΚΑ, ΧΑΜΗΛΗ, ΕΛΛΑΔΑ}) = 0.38 \cdot 0.632 \cdot 0.1316 \cdot 0.2105 = 0.0067$$

$$P(\text{ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ/Η} \mid \text{ΓΥΝΑΙΚΑ, ΧΑΜΗΛΗ, ΕΛΛΑΔΑ}) = 0.62 \cdot 0.5807 \cdot 0.5968 \cdot 0.7097 = 0.1525$$

Άρα η ταξιδιώτης είναι αρνητική.

γ) Για το feature "ΦΥΛΟ":

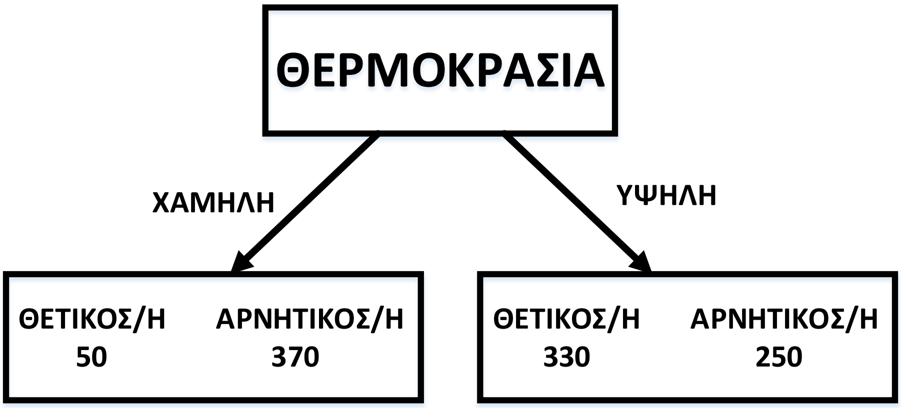


$$Gini_{left} = 1 - \left(\frac{240}{240 + 360}\right)^2 - \left(\frac{360}{240 + 360}\right)^2 = 0.48$$

$$Gini_{right} = 1 - \left(\frac{140}{140 + 260}\right)^2 - \left(\frac{260}{140 + 260}\right)^2 = 0.455$$

$$Gini_{weighted} = 0.48 \cdot \left(\frac{600}{1000}\right) + 0.455 \cdot \left(\frac{400}{1000}\right) = 0.47$$

Για το feature "ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ":

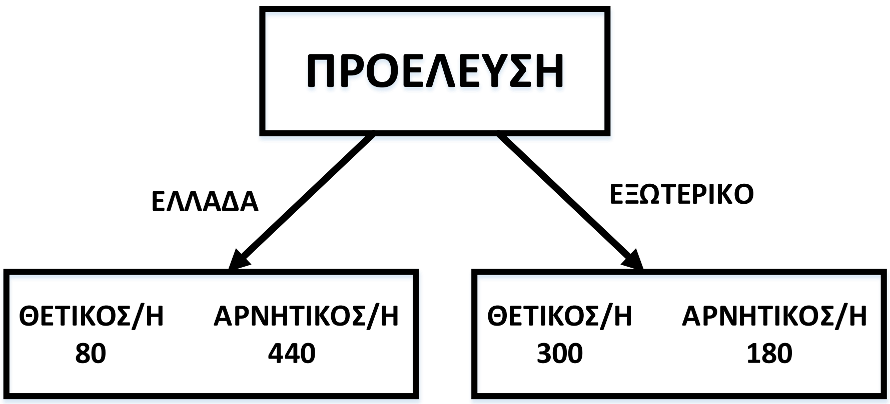


$$Gini_{left} = 1 - \left(\frac{50}{50 + 370}\right)^2 - \left(\frac{370}{50 + 370}\right)^2 = 0.20975$$

$$Gini_{right} = 1 - \left(\frac{330}{330 + 250}\right)^2 - \left(\frac{250}{330 + 250}\right)^2 = 0.49049$$

$$Gini_{weighted} = 0.20975 \cdot \left(\frac{420}{1000}\right) + 0.49049 \cdot \left(\frac{580}{1000}\right) = 0.37258$$

Για το feature "ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ":



$$Gini_{left} = 1 - \left(\frac{80}{80 + 440}\right)^2 - \left(\frac{440}{80 + 440}\right)^2 = 0.26036$$

$$Gini_{right} = 1 - \left(\frac{300}{300 + 180}\right)^2 - \left(\frac{180}{300 + 180}\right)^2 = 0.46875$$

$$Gini_{weighted} = 0.26036 \cdot \left(\frac{520}{1000}\right) + 0.4688 \cdot \left(\frac{480}{1000}\right) = 0.36003$$

Επιλέγεται η "ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ" γιατί έχει τη μικρότερη τιμή για το Gini Index.

Συντάχθηκε από τους υπεύθυνους εργαστηριακής υποστήριξης του μαθήματος Νίκο Κωστόπουλο και Δημήτρη Πανταζάτο, Υποψήφιους Διδάκτορες Ε.Μ.Π.