ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΛΜΑ ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ
Διδάσκοντες: Θ. Λιανέας, Ε. Μαρκάκης, Δ. Φωτάκης
Εαρινό Εξάμηνο 2023

2η Σειρά Ασκήσεων **Προθεσμία Παράδοσης: 31η Μαΐου 2023**

Πρόβλημα 1. (12 μονάδες) Η δημοτική αρχή μελετά την κατασκευή ενός νέου πάρκου, το οποίο αναμένεται να κοστίσει C ευρώ. Κάθε δημότης i, $i = 1, \ldots, n$, εκτιμά την ωφέλειά του από το νέο πάρκο σε $v_i \geq 0$ ευρώ, τιμή που είναι γνωστή μόνο στον ίδιο. Η δημοτική αρχή ζητάει από τους δημότες να δηλώσουν τις εκτιμήσεις τους $v_1, \ldots, v_n$, και θα προχωρήσει στην κατασκευή του πάρκου μόνο αν $\sum_{i=1}^{n} v_i \geq C$. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε δημότης θα πληρώσει μια εισφορά $p_i \geq 0$. Η εισφορά έχει στόχο οι δημότες να δηλώσουν τις πραγματικές τους εκτιμήσεις, και όχι να καλύψει το συνολικό κόστος του πάρκου. Να σχεδιάσετε έναν φιλαλήθη (truthful) μηχανισμό για αυτό το πρόβλημα.

Πρόβλημα 2. (10 μονάδες) Θεωρούμε μια δημοπρασία VCG για δύο αγαθά, το a και το b. Να υπολογίσετε αρχικά την βέλτιστη ανάθεση και τις αντίστοιχες VCG πληρωμές για δύο παίκτες, τον πρώτο με συνάρτηση αποτίμησης $v_1(\{a, b\}) = 1$ και $v_1(\{a\}) = v_1(\{b\}) = v_1(\emptyset) = 0$, και τον δεύτερο με συνάρτηση αποτίμησης $v_2(\{a, b\}) = v_2(\{a\}) = 1$ και $v_2(\{b\}) = v_2(\emptyset) = 0$. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε την βέλτιστη ανάθεση και τις αντίστοιχες VCG πληρωμές, αν έχουμε και τρίτο παίκτη με συνάρτηση αποτίμησης $v_3(\{a, b\}) = v_3(\{b\}) = 1$ και $v_3(\{a\}) = v_3(\emptyset) = 0$. Τι παρατηρείτε σε σχέση με τις πληρωμές;

Πρόβλημα 3. (22 μονάδες) Για το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του κοινωνικού οφέλους (social welfare maximization) στο πλαίσιο της διανομής m αγαθών σε n παίκτες με συναρτήσεις ωφέλειας $v_j : 2^{[m]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, θεωρούμε τον άπληστο αλγόριθμο ανάθεσης:

1. Αρχικά $S_1 \leftarrow \emptyset, \ldots, S_n \leftarrow \emptyset$
2. Εξετάζουμε τα αγαθά ένα-ένα, με τη σειρά. Το αγαθό i, $i = 1, \ldots, m$, ανατίθεται στον παίκτη j με τη μέγιστη διαφορική ωφέλεια. Έτσι θέτουμε $S_j \leftarrow S_j \cup \{i\}$, όπου $j = \arg\max_{\ell \in [n]} \{v_\ell(S_\ell \cup \{i\}) - v_\ell(S_\ell)\}$.

(i) (12 μονάδες) Μέσω αντιπαραδείγματος (αρκεί να θεωρήσετε 2 παίκτες και λίγα αγαθά), να δείξετε ότι για τον παραπάνω αλγόριθμο ανάθεσης, δεν υπάρχουν πληρωμές που εξασφαλίζουν φιλαλήθεια, ακόμη και στην περίπτωση που οι συναρτήσεις ωφέλειας είναι submodular. Για την αιτιολόγηση του αντιπαραδείγματος, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον χαρακτηρισμό των αλγόριθμων ανάθεσης που μπορούν να γίνουν φιλαλήθεις μέσω της ανυπαρξίας κύκλων αρνητικού μήκους στο correspondence graph.

(ii) (10 - bonus μονάδες) Να δείξετε ότι ο άπληστος αλγόριθμος είναι 2-προσεγγιστικός στην περίπτωση που οι συναρτήσεις ωφέλειας είναι submodular.

Πρόβλημα 4. (30 μονάδες) **(i)** (10 μονάδες) Έχουμε n παίκτες στους οποίους θα μοιράσουμε N κομμάτια σοκολάτας. Το βάρος κάθε κομματιού i είναι α_i γραμμάρια, με $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_N \geq 0$. Κάθε παίκτης j έχει ωφέλεια $v_j > 0$ για κάθε γραμμάριο σοκολάτας που θα πάρει (π.χ., αν ο παίκτης j πάρει τα κομμάτια 1 και 2, η συνολική ωφέλειά του θα είναι $v_j \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)$). Θεωρούμε ότι $v_1 \geq v_2 \geq \cdots \geq v_n > 0$, ότι το v_j είναι ιδιωτική πληροφορία κάθε παίκτη j, ότι κάθε παίκτης j διεκδικεί w_j κομμάτια σοκολάτας (θεωρούμε ότι το w_j είναι δημόσια γνωστό), και ότι $N = \sum_{j=1}^{n} w_j$

(η υπόθεση για το N είναι χωρίς βλάβη της γενικότητας, αφού μπορεί κάποια από τα τελευταία κομμάτια σοκολάτας να έχουν μηδενικό βάρος). Αρχικά υποθέτουμε ότι κάθε παίκτης j μπορεί να πάρει οσαδήποτε, από 0 μέχρι και w_j, κομμάτια σοκολάτας. Να διατυπώσετε έναν φιλαλήθη μηχανισμό, περιγράφοντας ποια κομμάτια σοκολάτας θα πάρει κάθε παίκτης και πόσο θα πληρώσει για αυτά. Ο μηχανισμός σας πρέπει να μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια. Είναι ο μηχανισμός που προτείνατε individually rational;

(ii) (10 μονάδες) Παραλλάσσουμε το (ii) ως εξής: έχουμε μόνο $K < N$ κομμάτια σοκολάτας μοναδιαίου βάρους (άρα τώρα $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_K = 1$ και $\alpha_{K+1} = \cdots = \alpha_N = 0$) και κάθε παίκτης μπορεί πλέον να πάρει είτε 0 είτε w_j κομμάτια σοκολάτας. Τι συμβαίνει αν εφαρμόσουμε την λύση του (i) σε αυτή την παραλλαγή του προβλήματος; Πιστεύετε ότι υπάρχει μηχανισμός που μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια, είναι φιλαλήθης, individually rational και υπολογιστικά αποδοτικός; Αν ναι να τον διατυπώσετε και να τον αναλύσετε, αν όχι, να το αιτιολογήσετε κατάλληλα.

(iii) (10 μονάδες) Παραλλάσσουμε το (ii) ως εξής: το πλήθος w_j των κομματιών που διεκδικεί κάθε παίκτης j είναι και αυτό ιδιωτική πληροφορία και η συνάρτηση αποτίμησης κάθε παίκτη j είναι $h_j(x) = \min\{xv_j, w_j v_j\}$. Συνεχίζει ο μηχανισμός του (i) να είναι φιλαλήθης για αυτή την παραλλαγή του προβλήματος; Αν όχι, να διατυπώσετε μηχανισμό που μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια, είναι φιλαλήθης και individually rational για αυτή την παραλλαγή.

Πρόβλημα 5. (20 μονάδες) Θεωρούμε πρόβλημα δρομολόγησης εργασιών, όπου $n = 5$ παίκτες έχουν από μία εργασία μοναδιαίας διάρκειας, και έχουμε στη διάθεσή μας έναν μόνο υπολογιστή. Το όφελος του παίκτη i αν η εργασία του δρομολογηθεί στη θέση j, $j \in \{1, \ldots, 5\}$, είναι $v_i \cdot \alpha^{j-1}$ (το v_i είναι ιδιωτική παράμετρος του παίκτη i, ενώ το $\alpha \in (0,1)$ είναι δημόσια παράμετρος κοινή για όλους τους παίκτες).

Θεωρούμε την δρομολόγηση που μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια (social welfare): κάθε παίκτης i υποβάλει προσφορά b_i, οι παίκτες ταξινομούνται σε φθίνουσα σειρά με βάση τις προσφορές τους $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$, και η εργασία του i-οστού παίκτη δρομολογείται στην i-οστή θέση.

1. (6 μον.) Έστω ότι η τιμή που πληρώνει ο i-οστός παίκτης είναι $b_{i+1} \cdot \alpha^{i-1}$. Ποια είναι η ωφέλειά του παίκτη i σε αυτή την περίπτωση; Να δείξετε, μέσω αντιπαραδείγματος, ότι αυτές οι τιμές δεν εξασφαλίζουν φιλαλήθεια (truthfulness).
2. (8 μον.) Να προτείνετε τιμές που εξασφαλίζουν τόσο φιλαλήθεια όσο και individual rationality. Να αιτιολογήσετε κατάλληλα την φιλαλήθεια των τιμών που προτείνετε.
3. (6 μον.) Αν γνωρίζουμε ότι οι ιδιωτικές παράμετροι v_i των παικτών προκύπτουν ως ανεξάρτητα δείγματα από την ίδια κανονική (regular) κατανομή τιμών, πως μπορούμε να ενσωματώσουμε reserve prices στον μηχανισμό του προηγούμενου ερωτήματος ώστε να διατηρήσουμε τη φιλαλήθεια του μηχανισμού; Να προτείνετε ακόμη τρόπο υπολογισμού των reserve prices που θα χρησιμοποιήσουμε.

~~**Πρόβλημα 6. (16 μονάδες)**~~ Θεωρούμε δημοπρασία με 1 αγαθό και 2 παίκτες. Η αξία (valuation) των παικτών για το αγαθό προέρχεται από την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$.

(i) (5 μονάδες) Να δείξετε ότι η αναμενόμενη πληρωμή για τη δημοπρασία Vickrey με 2 παίκτες είναι $1/3$.

(ii) (5 μονάδες) Έστω ότι χρησιμοποιούμε δημοπρασία Vickrey με reserve price το $1/2$. Να υπολογίσετε την αναμενόμενη πληρωμή σε αυτή την περίπτωση και να το συγκρίνετε με την αναμενόμενη πληρωμή της προηγούμενης περίπτωσης.

(iii) (6 μονάδες) Να υπολογίσετε την αναμενόμενη πληρωμή για τη δημοπρασία Vickrey με 3 παίκτες όπως οι παραπάνω.