

Projet Hémodynamique

Simulation numérique de l'écoulement sanguin

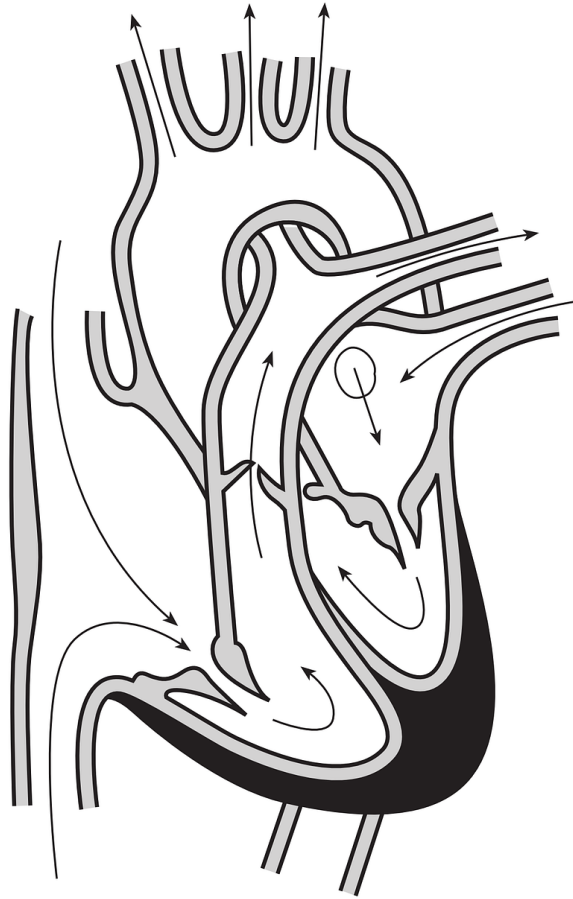


FIGURE 1 – Auteur : *OpenClipart-Vectors*

Jean-Louis Du

Sorbonne Université

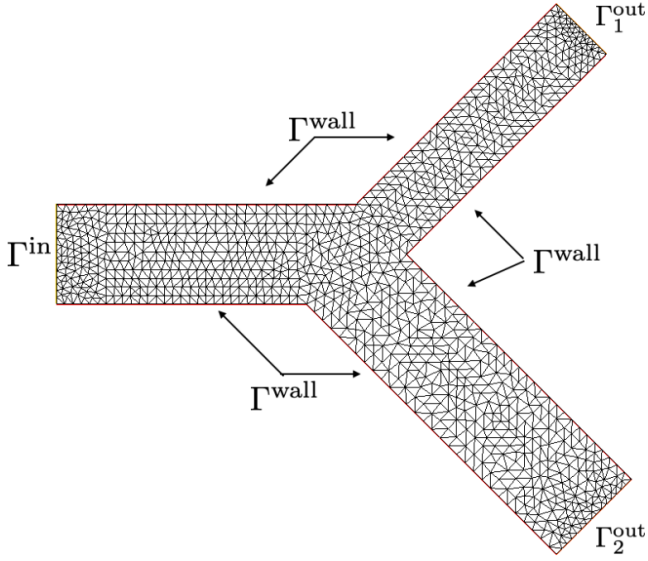
23 mars 2025

1 Introduction

Le but de ce projet est d'appliquer les connaissances acquises au sein du cours de modèles mathématiques et méthodes numériques pour la simulation en hémodynamique. On va notamment revoir les différents types de schémas numériques possibles, étudier leur stabilité théorique et observer leurs implémentations. Dans ce projet, on va s'intéresser dans un premier temps à la simulation de l'écoulement du sang dans une bifurcation. Puis, dans un second temps, nous allons prendre l'interaction entre fluide et solide par le biais d'une onde de pression se propageant le long d'un tube droit élastique.

2 Simulation de l'écoulement du sang dans une bifurcation

2.1 Présentation du problème



On s'intéresse au domaine Ω présenté ici, il s'agit d'une version simplifiée d'un vaisseau sanguin avec bifurcation.

Le bord du domaine noté Γ , de normale n , est séparé en 4 labels différents :

- Γ^{wall} qui désigne la paroi
- Γ_2^{out} qui désigne le bord de sortie inférieure
- Γ_1^{out} qui désigne le bord de sortie supérieure
- Γ^{in} qui désigne le bord d'entrée

Les inconnues du problème sont la vitesse $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ et la pression $p : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ du sang.

FIGURE 2 – Domaine Ω

L'écoulement du sang est défini par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \rho^f \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) - \operatorname{div} \sigma(u, p) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \end{cases}$$

avec $\sigma(u, p) = 2\mu\varepsilon(u) - pI$ le tenseur contrainte et $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ le tenseur déformation symétrisé.

De plus on a pour condition initiale $u(x, t = 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega$ et pour condition limite :

$$\begin{cases} u = 0 & \text{sur } \Gamma^{wall} \times (0, T) \\ u = u_{in} & \text{sur } \Gamma^{in} \times (0, T) \\ \sigma(u, p)n - \frac{\rho^f}{2}|u \cdot n|_- u = -p_{out,1}n & \text{sur } \Gamma_1^{out} \times (0, T) \\ \sigma(u, p)n - \frac{\rho^f}{2}|u \cdot n|_- u = -p_{out,2}n & \text{sur } \Gamma_2^{out} \times (0, T) \end{cases}$$

On notera $|x|_- := \min\{0, x\}$. On remarque une condition limite de Dirichlet homogène sur Γ^{wall} et une non-homogène sur Γ^{in} . Sur les deux bords restants, on observe une condition de Neumann avec "backflow stabilization" pour garantir la stabilité énergétique du problème.

De plus on définit $p_{out,i}$ et u_{in} comme suivant :

$$p_{out,i} = p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_i^{out}} u \cdot n \quad R_{d,i} > 0 \quad i = 1, 2$$

$$u_{in}(x, t) = (\tilde{g}(t)(0.4 - x_2)x_2, 0), \quad x = (x_1, x_2)$$

On appelle \tilde{g} définie sur $[0, T]$ l'extension par périodicité de g définie sur $[0, 0.8]$:

$$g(t) = \begin{cases} 1000 \cdot \sin(\frac{\pi t}{0.4}) & \text{si } t \in [0, 0.4] \\ 0 & \text{si } t \in [0.4, 0.8] \end{cases}$$

Concernant les valeurs numériques, on prendra $\rho^f = 1$ la densité du sang, $\mu = 0.035$ sa viscosité dynamique, $T = 8$ le temps final et $p_d = 8 \cdot 13332.2$.

2.2 Formulation variationnelle

On discrétise l'intervalle $[0, T]$ en N points, on définit ainsi $t_n = n \cdot \tau \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$ avec $\tau = T/N$.

On a comme approximation : $u(x, t_n) \approx u^n$, $p(x, t_n) \approx p^n$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_n) \approx \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau}$.

En remplaçant, on obtient ainsi comme formulation forte semi-discrétisée :

$$\begin{cases} \rho^f \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} \right) + \rho^f u^{n-1} \cdot \nabla u^n - \operatorname{div}(\sigma(u^n, p^n)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(u^n) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u^n = 0 & \text{sur } \Gamma^{\text{wall}} \\ u^n = u_{\text{in}} & \text{sur } \Gamma^{\text{in}} \\ \sigma(u^n, p^n)n - \frac{\rho^f}{2}|u^{n-1} \cdot n|_- u^n = -p_{\text{out},i}n & \text{sur } \Gamma_i^{\text{out}} \\ p_{\text{out},i} = p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_i^{\text{out}}} u^{n-1} \cdot n & i = 1, 2 \end{cases} \quad (1)$$

Pour obtenir la formulation variationnelle, on va multiplier les 2 premières équations par respectivement $v \in X = \{w \in H^1(\Omega)^2 \text{ tel que } w = u_{\text{in}} \text{ sur } \Gamma^{\text{in}}, w = 0 \text{ sur } \Gamma^{\text{wall}}\}$ et $q \in M = L_0^2(\Omega)$ et puis les intégrer sur le domaine Ω . X et M sont nos espaces variationnelles.

La première ligne nous donne :

$$\int_{\Omega} \frac{\rho^f u^n}{\tau} \cdot v - \int_{\Omega} \frac{\rho^f u^{n-1}}{\tau} \cdot v + \int_{\Omega} \rho^f (u^{n-1} \cdot \nabla u^n) \cdot v - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(u^n, p^n)) \cdot v = 0$$

En appliquant Green sur le dernier terme de la somme, on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\rho^f u^n}{\tau} \cdot v - \int_{\Omega} \frac{\rho^f u^{n-1}}{\tau} \cdot v + \int_{\Omega} \rho^f (u^{n-1} \cdot \nabla u^n) \cdot v + \int_{\Omega} \sigma(u^n, p^n) : \nabla v - \int_{\Gamma} \sigma(u^n, p^n)n \cdot v = 0$$

En prenant en compte que $v \in X$ on a que :

$$- \int_{\Gamma} \sigma(u^n, p^n)n \cdot v = - \underbrace{\int_{\Gamma^{\text{in}}} \sigma(u^n, p^n)n \cdot v}_{v=u_{\text{in}}} - \underbrace{\int_{\Gamma^{\text{wall}}} \sigma(u^n, p^n)n \cdot v}_{v=0} - \int_{\Gamma_1^{\text{out}}} \sigma(u^n, p^n)n \cdot v - \int_{\Gamma_2^{\text{out}}} \sigma(u^n, p^n)n \cdot v$$

En remplaçant $\sigma(u^n, p^n)n$ par son expression sur Γ_i^{out} , on se retrouve avec :

$$- \int_{\Gamma} \sigma(u^n, p^n)n \cdot v = - \int_{\Gamma^{\text{in}}} \sigma(u_{\text{in}}, p^n)n \cdot u_{\text{in}} + \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{\text{out}}} \left(p_{\text{out},i}n - \frac{\rho^f}{2}|u^{n-1} \cdot n|_- u^n \right) \cdot v$$

Ce qui est équivalent à :

$$- \int_{\Gamma} \sigma(u^n, p^n)n \cdot v = - \int_{\Gamma^{\text{in}}} \sigma(u_{\text{in}}, p^n)n \cdot u_{\text{in}} + \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{\text{out}}} \left(\left(p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_i^{\text{out}}} u^{n-1} \cdot n \right) n - \frac{\rho^f}{2}|u^{n-1} \cdot n|_- u^n \right) \cdot v$$

La deuxième ligne nous donne simplement :

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div}(u^n) = 0$$

On se retrouve avec la formulation variationnelle mixte suivante :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\rho^f u^n}{\tau} \cdot v - \int_{\Omega} \frac{\rho^f u^{n-1}}{\tau} \cdot v + \int_{\Omega} \rho^f (u^{n-1} \cdot \nabla u^n) \cdot v + \int_{\Omega} \sigma(u^n, p^n) : \nabla v - \int_{\Gamma^{\text{in}}} \sigma(u_{\text{in}}, p^n)n \cdot u_{\text{in}} \\ + \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{\text{out}}} \left(\left(p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_i^{\text{out}}} u^{n-1} \cdot n \right) n - \frac{\rho^f}{2}|u^{n-1} \cdot n|_- u^n \right) \cdot v = 0 \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div}(u^n) = 0 \end{cases} \quad \forall v \in X, q \in M$$

Pour pouvoir résoudre ce problème numériquement, il faut qu'on se place sur des espaces discrets, on va donc considérer $X_h \subset X$ et $M_h \subset M$ tel que $\dim(X_h) < \infty$, $\dim(M_h) < +\infty$. On utilise maintenant des approximations en espace en plus d'être en temps u_h^n et p_h^n . On obtient comme formulation variationnelle mixte discrète $\forall (v, q) \in X_h \times M_h$:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\rho^f u_h^n}{\tau} \cdot v - \int_{\Omega} \frac{\rho^f u_h^{n-1}}{\tau} \cdot v + \int_{\Omega} \rho^f (u_h^{n-1} \cdot \nabla u_h^n) \cdot v + \int_{\Omega} \sigma(u_h^n, p_h^n) : \nabla v - \int_{\Gamma^{\text{in}}} \sigma(u_{\text{in}}, p_h^n)n \cdot u_{\text{in}} \\ + \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{\text{out}}} \left(\left(p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_i^{\text{out}}} u_h^{n-1} \cdot n \right) n - \frac{\rho^f}{2}|u_h^{n-1} \cdot n|_- u_h^n \right) \cdot v = 0 \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div}(u_h^n) = 0 \end{cases}$$

Concernant le choix des espaces d'éléments finis, plusieurs choix s'offrent à nous.

- $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$
- $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$ + un terme de stabilisation
- Plus généralement $\mathbb{P}_{n+1}/\mathbb{P}_n$ avec $n \geq 1$

En choisissant l'un de ces espaces, on garantit le respect de la condition inf-sup qui atteste que le problème est bien posé et admet une unique solution.

2.3 Stabilité du schéma numérique

Dans cette partie, on va supposer que $u_{in} = 0$ sur Γ^{in} . Pour vérifier la stabilité du schéma on fait la même chose que pour obtenir la première ligne de notre formulation variationnelle discrète, à la seule différence qu'on multiplie cette équation par u_h^n et non par v . En prenant les conditions limites de u_h^n en compte on se retrouve avec :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\rho^f}{\tau} (u_h^n - u_h^{n-1}) \cdot u_h^n}_{[1]} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho^f (u_h^{n-1} \cdot \nabla u_h^n) \cdot u_h^n}_{[2]} + \underbrace{\int_{\Omega} \sigma(u_h^n, p_h^n) : \nabla u_h^n}_{[3]} \\ & + \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_{out,i}} \left(\underbrace{\left(p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_{out,i}} u_h^{n-1} \cdot n \right) n}_{[4]} - \underbrace{\frac{\rho^f}{2} |u_h^{n-1} \cdot n|}_{[5]} - u_h^n \right) \cdot u_h^n = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Remarque : [4] et [5] prennent l'intégrale et la somme
On va développer chacun des termes un à un.

$$[1] = \frac{\rho^f}{2\tau} \left(\|u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad \text{car } (a-b)a = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + (a-b)^2)$$

$$[2] = \int_{\Omega} \frac{\rho^f}{2} u_h^{n-1} \nabla |u_h^n|^2 \quad \text{car } \nabla u^n \cdot u^n = \frac{1}{2} \nabla |u^n|^2$$

$$= - \int_{\Omega} \frac{\rho^f}{2} |u_h^n|^2 \underbrace{\text{div}(u_h^{n-1})}_{=0} + \int_{\Gamma} \frac{\rho^f}{2} |u_h^n|^2 u_h^{n-1} \cdot n \quad \text{par Green}$$

$$= \sum_{i=1,2} \frac{\rho^f}{2} \int_{\Gamma_{out,i}} |u_h^n|^2 u_h^{n-1} \cdot n \quad \text{par les CL de } u$$

$$[3] = \int_{\Omega} (2\mu \varepsilon(u_h^n) - p_h^n I) : \nabla u_h^n \quad \text{en remplaçant } \sigma \text{ par son expression}$$

$$= 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon(u_h^n) : \nabla u_h^n - \int_{\Omega} p_h^n I : \nabla u_h^n$$

$$= 2\mu \int_{\Omega} \underbrace{\varepsilon(u_h^n)}_{\text{symétrique}} : \left(\underbrace{\varepsilon(u_h^n) + \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla u^T)}_{\text{antisymétrique}} \right) - \int_{\Omega} p_h^n \underbrace{\text{div}(u_h^n)}_{=0}$$

Or le produit contractant d'un terme
symétrique par un terme anti-symétrique est nul

$$= 2\mu \|\varepsilon(u_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\begin{aligned}
\boxed{4} &= \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_{out}^i} p_d u_h^n \cdot n + \sum_{i=1,2} R_{d,i} \left(\int_{\Gamma_{out}^i} u_h^n \cdot n \right) \int_{\Gamma_{out}^i} u_h^{n-1} \cdot n \\
&= \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_{out}^i} p_d u_h^n \cdot n + \sum_{i=1,2} R_{d,i} \left(\int_{\Gamma_{out}^i} (u_h^{n-1} - u_h^n) \cdot n \right) \left(\int_{\Gamma_{out}^i} u_h^n \cdot n \right) \\
&\quad + R_{d,i} \left| \int_{\Gamma_{out}^i} u_h^n \cdot n \right|^2
\end{aligned}$$

par la formule donnée dans l'énoncé

$$\begin{aligned}
\boxed{5} &= - \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_{out}^i} \frac{\rho^f}{2} |u_h^{n-1} \cdot n|_- u_h^n \cdot u_h^n \\
&= - \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_{out}^i} \frac{\rho^f}{2} |u_h^{n-1} \cdot n|_- |u_h^n|^2
\end{aligned}$$

Avec les simplifications réalisées, on se retrouve avec (2) comme ceci :

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho^f}{2\tau} (\|u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2) + \sum_{i=1,2} \frac{\rho^f}{2} \int_{\Gamma_{out}^i} |u_h^n|^2 \underbrace{(u_h^{n-1} \cdot n - |u_h^{n-1} \cdot n|_-)}_{\geq 0} + 2\mu \|\varepsilon(u_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+ \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_{out}^i} p_d u_h^n \cdot n + \sum_{i=1,2} R_{d,i} \left(\int_{\Gamma_{out}^i} (u_h^{n-1} - u_h^n) \cdot n \right) \left(\int_{\Gamma_{out}^i} u_h^n \cdot n \right) + R_{d,i} \left| \int_{\Gamma_{out}^i} u_h^n \cdot n \right|^2 = 0 \\
\Leftrightarrow &\frac{\rho^f}{2\tau} (\|u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2) + 2\mu \|\varepsilon(u_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 = - \underbrace{\sum_{i=1,2} \frac{\rho^f}{2} \int_{\Gamma_{out}^i} |u_h^n|^2 (u_h^{n-1} \cdot n - |u_h^{n-1} \cdot n|_-)}_{\leq 0} - \frac{\rho^f}{2\tau} \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&- \underbrace{\sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_{out}^i} p_d u_h^n \cdot n - \sum_{i=1,2} R_{d,i} \left| \int_{\Gamma_{out}^i} u_h^n \cdot n \right|^2}_{-\boxed{B}} - \underbrace{\sum_{i=1,2} R_{d,i} \left(\int_{\Gamma_{out}^i} (u_h^{n-1} - u_h^n) \cdot n \right) \left(\int_{\Gamma_{out}^i} u_h^n \cdot n \right)}_{\boxed{A}}
\end{aligned}$$

On veut se retrouver avec des termes négatifs à droite de l'inégalité, pour cela on va étudier le terme \boxed{A} , en lui appliquant Cauchy-Schwarz :

$$\boxed{A} \leq \left| \boxed{A} \right| \leq \sum_{i=1,2} R_{d,i} \left(\int_{\Gamma_{out}^i} u_h^n \cdot n \right) \|u_h^{n-1} - u_h^n\|_{L^2(\Gamma_{out}^i)} \|n\|_{L^2(\Gamma_{out}^i)}$$

Or $\|n\|_{L^2(\Gamma_{out}^i)} = \sqrt{|\Gamma_{out}^i|}$ car n est unitaire. De plus en appliquant l'inégalité de la trace on a :

$$\boxed{A} \leq \sum_{i=1,2} R_{d,i} \left(\int_{\Gamma_{out}^i} u_h^n \cdot n \right) \sqrt{\frac{C_T |\Gamma_{out}^i|}{h}} \|u_h^{n-1} - u_h^n\|_{L^2(\Omega)}$$

En utilisant $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ on en déduit :

$$\boxed{A} \leq \underbrace{\sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i}}{2} \left| \int_{\Gamma_{out}^i} u_h^n \cdot n \right|^2}_{\frac{1}{2}\boxed{B}} + \sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i}}{2} \frac{C_T |\Gamma_{out}^i|}{h} \|u_h^{n-1} - u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2$$

On retrouve le terme \boxed{B} avec un facteur $+\frac{1}{2}$ cette fois, en le sommant avec le terme $-\boxed{B}$ il reste $-\frac{1}{2}\boxed{B}$ qui est négatif et donc majorable par 0.

Ainsi on se retrouve avec :

$$\frac{\rho^f}{2\tau} (\|u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2) + 2\mu \|\varepsilon(u_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(-\frac{\rho^f}{2\tau} + \sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i}}{2} \frac{C_T |\Gamma_i^{out}|}{h} \right) \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{out}} p_d u_h^n \cdot n$$

Pour garantir la stabilité énergétique il faut que $\left(-\frac{\rho^f}{2\tau} + \sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i}}{2} \frac{C_T |\Gamma_i^{out}|}{h} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \tau \leq \frac{\rho^f h}{C_T \sum_{i=1,2} R_{d,i} |\Gamma_i^{out}|}$.

Sous cette condition, on obtient :

$$\frac{\rho^f}{2\tau} (\|u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2) + 2\mu \|\varepsilon(u_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq - \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{out}} p_d u_h^n \cdot n$$

En sommant sur $n = 1, \dots, N$ et en multipliant par τ on trouve :

$$\frac{\rho^f}{2} \|u_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\mu\tau \sum_{n=1}^N \|\varepsilon(u_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\rho^f}{2} \|u_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 - \tau \sum_{n=1}^N \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{out}} p_d u_h^n \cdot n$$

On a dans ce cas la stabilité sous la condition $\tau \leq \frac{\rho^f h}{C_T \sum_{i=1,2} R_{d,i} |\Gamma_i^{out}|}$.

2.4 Stabilité d'un schéma numérique alternatif

Pour obtenir un schéma stable inconditionnellement, on va explorer une autre semi-discrétisation des conditions limites sur Γ_i^{out} .

On considère la condition suivante :

$$\sigma(u_h^n, p_h^n) n - \frac{\rho^f}{2} |u_h^{n-1} \cdot n|_- u_h^n + \frac{R_{d,i} |\Gamma_i^{out}|}{2} (u_h^n - u_h^{n-1}) \cdot n n = -p_{out,i} n \quad \text{sur } \Gamma_i^{out}.$$

Tout d'abord, on remarque que lorsque que N tend, la différence $u_h^n - u_h^{n-1}$ tend vers 0, on retrouve bien les conditions limites données précédentes.

En refaisant exactement le même calcul en rajoutant ce terme supplémentaire, on se retrouve avec :

$$\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{4} + \boxed{5} + \underbrace{\sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{out}} \frac{R_{d,i} |\Gamma_i^{out}|}{2} (u_h^n - u_h^{n-1}) \cdot n u_h^n \cdot n}_{\boxed{6}} = 0 \quad (3)$$

En utilisant $ab = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - (a - b)^2)$ avec $a = (u_h^n - u_h^{n-1}) \cdot n$ et $b = u_h^n \cdot n$:

$$\boxed{6} = \sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i} |\Gamma_i^{out}|}{4} \left(\|(u_h^n - u_h^{n-1}) \cdot n\|_{L^2(\Gamma_i^{out})}^2 + \|u_h^n \cdot n\|_{L^2(\Gamma_i^{out})}^2 - \|u_h^{n-1} \cdot n\|_{L^2(\Gamma_i^{out})}^2 \right)$$

Ainsi en utilisant les simplifications, (3) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^f}{2\tau} (\|u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2) + \sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i} |\Gamma_i^{out}|}{4} \left(\|u_h^n \cdot n\|_{L^2(\Gamma_i^{out})}^2 - \|u_h^{n-1} \cdot n\|_{L^2(\Gamma_i^{out})}^2 \right) + 2\mu \|\varepsilon(u_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= - \underbrace{\sum_{i=1,2} \frac{\rho^f}{2} \int_{\Gamma_i^{out}} |u_h^n|^2 (u_h^{n-1} \cdot n - |u_h^{n-1} \cdot n|_-) - \frac{\rho^f}{2\tau} \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2}_{\leq 0} - \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{out}} p_d u_h^n \cdot n \\ &= \underbrace{- \sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i} |\Gamma_i^{out}|}{4} \|(u_h^n - u_h^{n-1}) \cdot n\|_{L^2(\Gamma_i^{out})}^2}_{-\boxed{C}} - \underbrace{\sum_{i=1,2} R_{d,i} \left| \int_{\Gamma_i^{out}} u_h^n \cdot n \right|^2}_{-\boxed{B}} - \underbrace{\sum_{i=1,2} R_{d,i} \left(\int_{\Gamma_i^{out}} (u_h^{n-1} - u_h^n) \cdot n \right) \left(\int_{\Gamma_i^{out}} u_h^n \cdot n \right)}_{\boxed{A}} \end{aligned}$$

Comme tout à l'heure on essaie de majorer \boxed{A} de sorte à ce que certains termes se simplifient. Cette fois ci on va utiliser Cauchy-Schwarz avec $a = (u_h^{n-1} - u_h^n) \cdot n$ et $b = 1$:

$$\boxed{A} \leq \sum_{i=1,2} R_{d,i} \left(\int_{\Gamma_i^{out}} u_h^n \cdot n \right) \|(u_h^{n-1} - u_h^n) \cdot n\|_{L^2(\Gamma_i^{out})} \|1\|_{L^2(\Gamma_i^{out})}$$

On remarque que $\|1\|_{L^2(\Gamma_i^{out})} = \sqrt{|\Gamma_i^{out}|}$ et on multiplie par $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour arranger les constantes. On réutilise $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ avec $a = \sqrt{2} \left(\int_{\Gamma_i^{out}} u_h^n \cdot n \right)$ et $b = \frac{1}{\sqrt{2}} \|(u_h^{n-1} - u_h^n) \cdot n\|_{L^2(\Gamma_i^{out})} \sqrt{|\Gamma_i^{out}|}$, on a donc finalement :

$$\boxed{\text{A}} \leq \sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i}}{2} \left(2 \left| \int_{\Gamma_i^{out}} u_h^n \cdot n \right|^2 + \frac{1}{2} \|(u_h^{n-1} - u_h^n) \cdot n\|_{L^2(\Gamma_i^{out})}^2 |\Gamma_i^{out}| \right) = \boxed{\text{B}} + \boxed{\text{C}}$$

On obtient $\boxed{\text{B}} + \boxed{\text{C}}$ de signe positif qui s'annulent parfaitement avec leurs opposés. De plus en majorant les termes négatifs par 0 il reste :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^f}{2\tau} (\|u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2) + \sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i} |\Gamma_i^{out}|}{4} (\|u_h^n \cdot n\|_{L^2(\Gamma_i^{out})}^2 - \|u_h^{n-1} \cdot n\|_{L^2(\Gamma_i^{out})}^2) + 2\mu \|\varepsilon(u_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq - \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{out}} p_d u_h^n \cdot n \end{aligned}$$

On remarque que cette fois-ci on n'a pas eu à faire d'hypothèses supplémentaires pour garantir la stabilité. En sommant sur $n = 1, \dots, N$ et en multipliant par τ on trouve :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^f}{2} \|u_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i} |\Gamma_i^{out}|}{4} \|u_h^N \cdot n\|_{L^2(\Gamma_i^{out})}^2 + 2\mu\tau \sum_{n=1}^N \|\varepsilon(u_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i} |\Gamma_i^{out}|}{4} \|u_h^0 \cdot n\|_{L^2(\Gamma_i^{out})}^2 + \frac{\rho^f}{2} \|u_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 - \tau \sum_{n=1}^N \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{out}} p_d u_h^n \cdot n. \end{aligned}$$

Ce schéma est stable inconditionnellement.

2.5 Implémentation

Pour l'implémentation du problème sur Freefem++ on va privilégier le schéma stable inconditionnellement.

Pour simuler cet écoulement on va se fixer $R_{d,1} = 100$, $R_{d,2} = 800$. On voit que à cause de la condition initiale on observe deux régimes différents, l'un où le fluide s'écoule (plus ou moins vite selon le temps) et un autre où le fluide est à l'arrêt.

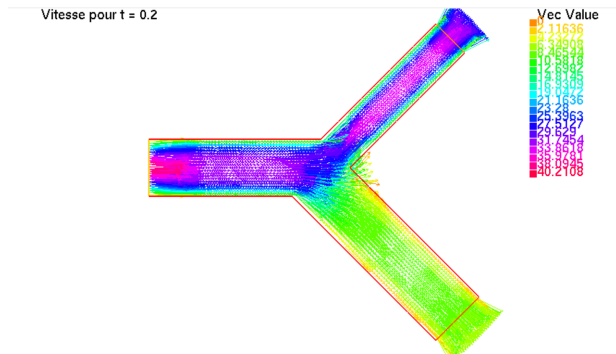


FIGURE 3 – Le fluide s'écoule

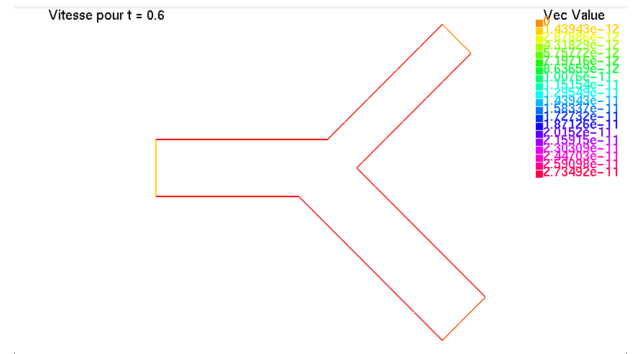


FIGURE 4 – Le fluide est à l'arrêt

FIGURE 5 – Deux régimes d'écoulements

La condition initiale périodique de période 0.8 fait que l'on retrouve ces mêmes valeurs à intervalle régulier. Le fluide s'écoule entre $t \bmod 0.8 \in [0, 0.4]$. On observe qu'il atteint son maximum de vitesse à $t \bmod 0.8 = 0.2$, ceci est logique car $g(t)$ atteint son maximum à ce moment-là. On observe aussi que la vitesse dans le canal de sortie inférieur est plus lente que la vitesse dans le canal de sortie supérieur. Cela est en accord avec la conservation du débit induit par l'équation $\text{div } u = 0$. En effet, pour que le débit soit conservé, il faut que la vitesse dans la section la plus grande soit plus faible que celle dans la section la plus petite.

On peut analyser les flux entrants et sortants, ainsi que les pressions en entrée et en sortie pour mieux comprendre.

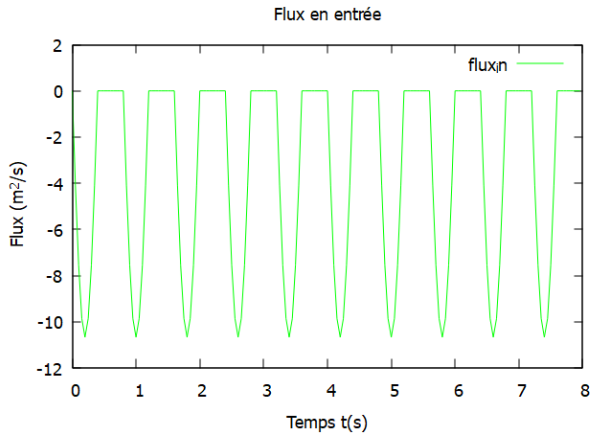


FIGURE 6 – Flux entrant

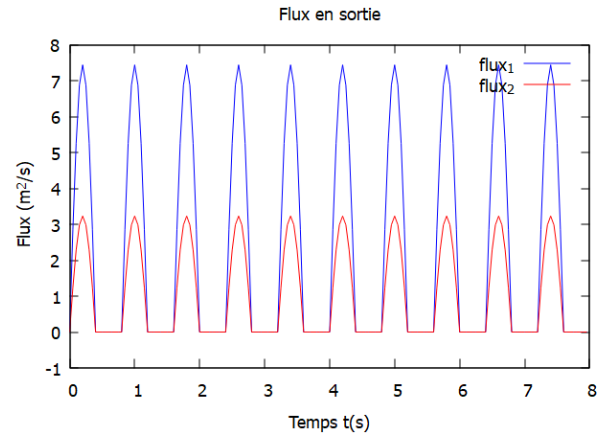


FIGURE 7 – Flux sortant

On observe bien un comportement périodique selon le régime dans lequel on est. Lorsque le fluide s'écoule, comme prévu, on observe un flux entrant négatif puisque, par convention, on considère le flux sortant comme étant positif. De plus on trouve la même chose que pour l'observation des vitesses, le flux sortant est plus élevé dans le canal de sortie le plus étroit. La somme des flux sortants semble être égale à - le flux entrant. On retrouve la conservation du débit.

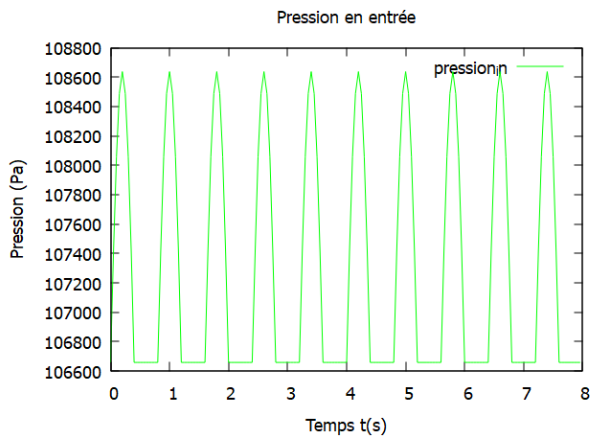


FIGURE 8 – Pression entrante

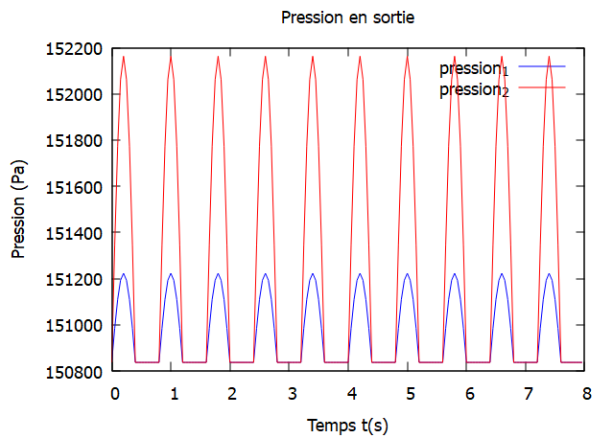


FIGURE 9 – Pression sortante

Là aussi, on observe bien un comportement périodique selon le régime dans lequel on est. On voit que la pression en entrée est plus faible que celle en sortie. Et que parmi les deux sorties, celle ayant la section la plus large et la vitesse la moins élevée a la pression la plus élevée.

FIGURE 10 – Comparaison des flux et des pressions en entrée et en sortie.

3 Couplage explicite et masse ajoutée en interaction fluide structure

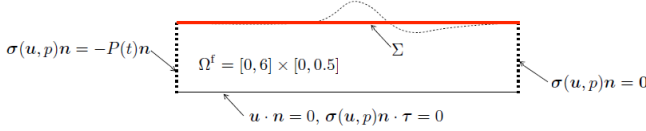


FIGURE 11 – Domaine Ω

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \partial_t u - \operatorname{div} \sigma(u, p) = 0 & \text{dans } \Omega_f \times (0, T) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega_f \times (0, T) \\ u \cdot n = 0, \quad \sigma(u, p)n \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \sigma(u, p)n = -Pn & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \\ \sigma(u, p)n = 0 & \text{sur } \Gamma_4 \times (0, T) \\ u \cdot n = \dot{\eta}, \quad u \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Sigma \times (0, T) \\ \rho_s \epsilon \partial_t \dot{\eta} - c_1 \partial_x^2 \eta + c_0 \eta = -\sigma(u, p)n \cdot n & \text{sur } \Sigma \times (0, T) \\ \dot{\eta} = \partial_t \eta & \text{sur } \Sigma \times (0, T) \\ \eta = 0 & \text{sur } \partial \Sigma \times (0, T) \end{array} \right.$$

De plus, on prendra comme condition initiale $u(0) = 0$, $\eta(0) = 0$, $\dot{\eta}(0) = 0$. On notera n la normale et τ la tangente dans cette partie. Concernant les constantes physiques, on prend pour le fluide $\rho^f = 1$ sa masse volumique et $\mu = 0.035$ sa viscosité dynamique, pour le solide on prend $\rho^s = 1.1$ sa masse volumique, $\epsilon = 0.1$ son épaisseur, $E = 0.75 \cdot 10^6$ son module de Young et $\nu = 0.5$ son coefficient de Poisson (c_1 et c_0 sont calculés à partir de ces constantes).

De plus, on fixe les constantes géométriques comme ceci : $L = 6$, $R = 0.5$ la longueur et la largeur de Ω^f et le temps final $T = 1.5 \cdot 10^{-3}$.

On définit aussi la fonction P apparaissant sur la condition au bord de Γ_4 , $P(t) = P_{max}(1 - \cos(2t\pi/T^*)) / 2$ avec $P_{max} = 2 \cdot 10^4$ et $T^* = 5 \cdot 10^{-3}$. Toutes les constantes sont données en unités SI.

Pour résoudre ce problème numériquement on choisit d'utiliser les éléments finis $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$ avec un terme de stabilisation. Pour la discrétisation temporelle on fait du Euler implicite pour les termes du fluide et du solide. La question se pose sur la discrétisation en temps de l'interface Σ . On se propose donc d'étudier différentes méthodes.

3.1 Schéma implicite

On considère le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{u^n - u^{n-1}}{dt} - \operatorname{div} \sigma(u^n, p^n) = 0 & \text{dans } \Omega_f \\ \operatorname{div} u^n = 0 & \text{dans } \Omega_f \\ u^n \cdot n = 0, \quad \sigma(u^n, p^n)n \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma(u^n, p^n)n = -Pn & \text{sur } \Gamma_2 \\ \sigma(u^n, p^n)n = 0 & \text{sur } \Gamma_4 \\ u^n \cdot n = \dot{\eta}^n, \quad u^n \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \rho_s \epsilon \frac{\dot{\eta}^n - \dot{\eta}^{n-1}}{dt} - c_1 \partial_x^2 \eta^n + c_0 \eta^n = -\sigma(u^n, p^n)n \cdot n & \text{sur } \Sigma \\ \dot{\eta}^n = \frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{dt} & \text{sur } \Sigma \\ \eta^n = 0 & \text{sur } \partial \Sigma \end{array} \right.$$

it = 8, time = 0.015



FIGURE 12 – Déformation finale pour le schéma implicite

Le problème qu'on a est celui de trouver la vitesse du fluide $u : \Omega_f \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$, la pression du fluide $p : \Omega_f \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, le déplacement vertical du solide $\eta : \Sigma \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ et la vitesse verticale du solide $\dot{\eta} : \Sigma \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

En le testant numériquement cela fonctionne très bien.

Ce schéma est stable inconditionnellement comme on l'a vu en cours. L'inconvénient étant que pour résoudre le système pour un temps donné on résout le problème fluide puis le problème solide plusieurs fois (8 fois pour la dernière itération ici) jusqu'à convergence, ce qui fait qu'il est très coûteux en temps de calcul.

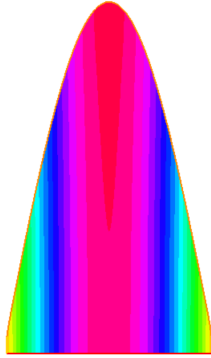
On va étudier des schémas explicites pour voir si l'on peut trouver la même stabilité pour un temps de calcul moins long.

3.2 Schéma Dirichlet explicite

On considère le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{u^n - u^{n-1}}{dt} - \operatorname{div} \sigma(u^n, p^n) = 0 & \text{dans } \Omega_f \\ \operatorname{div} u^n = 0 & \text{dans } \Omega_f \\ u^n \cdot n = 0 \quad \sigma(u^n, p^n) n \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma(u^n, p^n) n = -Pn & \text{sur } \Gamma_2 \\ \sigma(u^n, p^n) n = 0 & \text{sur } \Gamma_4 \\ \boxed{u^n \cdot n = \dot{\eta}^{n-1}}, \quad u^n \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \rho_s \epsilon \frac{\dot{\eta}^n - \dot{\eta}^{n-1}}{dt} - c_1 \partial_x^2 \eta^n + c_0 \eta^n = -\sigma(u^n, p^n) n \cdot n & \text{sur } \Sigma \\ \dot{\eta}^n = \frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{dt} & \text{sur } \Sigma \\ \eta^n = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \end{array} \right.$$

time = 0.0005



Contrairement au schéma implicite, on remarque qu'au bout de quelques itérations en temps, la déformation explose et le code s'arrête. Ce schéma-là n'est donc pas stable.

Pour le stabiliser, on cherche à diminuer le pas de temps, car la stabilité dépend souvent du pas de temps dt .

FIGURE 13 – Déformation finale pour le schéma explicite Dirichlet ($dt = 1e-4$)

time = 0.00015



time = 0.000223



FIGURE 14 – Déformation finale pour le schéma explicite Dirichlet ($dt = 1e-5$)

FIGURE 15 – Déformation finale pour le schéma explicite Dirichlet ($dt = 1e-6$)

On remarque que peu importe le pas de temps choisi, des instabilités apparaissent au bout d'un moment. On observe que sur les bords, on a des sortes de discontinuités. Cela est en accord avec ce que l'on a vu en cours, contrairement à beaucoup de problèmes, la stabilité ici ne repose pas sur dt .

Dans ce cas la stabilité n'est plus assuré dès lors que $\frac{\rho_f \alpha_{\max}}{\rho_s \epsilon} > 1$, $\alpha_{\max} \approx \frac{L^2}{\pi^2 R}$.

On va donc tester notre algorithme avec des valeurs plus faibles de ρ^f ou des valeurs plus élevées de ρ^s .



FIGURE 16 – Déformation finale pour le schéma explicite Dirichlet (pour $\rho^f/100$)

FIGURE 17 – Déformation finale pour le schéma explicite Dirichlet (pour $\rho^s \cdot 100$)

On voit ainsi que l'instabilité était liée à la condition ci-dessus. On a donc trouvé un schéma qui permet de calculer plus rapidement mais au prix de pouvoir simuler seulement sous certaines conditions strictes. On ne peut pas simuler des problèmes avec des densités qui vérifient la condition d'instabilité.

On va donc étudier un dernier schéma qui combine les avantages des deux schémas que l'on vient de voir.

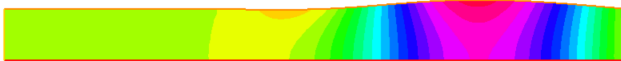
3.3 Schéma Robin explicite

On considère le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{u^n - u^{n-1}}{dt} - \operatorname{div} \sigma(u^n, p^n) = 0 & \text{dans } \Omega_f \\ \operatorname{div} u^n = 0 & \text{dans } \Omega_f \\ u^n \cdot n = 0, \quad \sigma(u^n, p^n) n \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma(u^n, p^n) n = -Pn & \text{sur } \Gamma_2 \\ \sigma(u^n, p^n) n = 0 & \text{sur } \Gamma_4 \\ u^n \cdot n = \dot{\eta}^n, \quad u^n \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \rho_s \epsilon \frac{u^n \cdot n}{dt} + \sigma(u^n, p^n) n \cdot n = \rho_s \epsilon \frac{\dot{\eta}^{n-1}}{dt} + c_1 \partial_x^2 \eta^{n-1} - c_0 \eta^{n-1} & \text{sur } \Sigma \\ \dot{\eta}^n = \frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{dt} & \text{sur } \Sigma \\ \eta^n = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \end{array} \right.$$

3.3.1 Stabilité

r = 1, time = 0.015



Bien qu'il soit lui aussi explicite, on trouve un résultat similaire au schéma implicite. Contrairement au schéma explicite Dirichlet, il n'a pas de soucis de stabilité.

Dans notre problème avec ses valeurs de densité cela marche parfaitement bien. Même en modifiant le pas de temps dt , la stabilité numérique n'est pas mise en cause.

FIGURE 18 – Déformation finale pour le schéma explicite Robin

En faisant varier L , ρ^f et ρ^s , on garde toujours la stabilité. La seule différence étant la forme de la déformation, ce qui est normal puisque l'on change de matériaux d'études. Avec ce schéma numérique on peut donc étudier plein d'applications différentes pour un coût de calcul réduit relativement au schéma implicite. La stabilité de ce schéma est vérifiée, il reste à étudier la précision du schéma.

3.3.2 Précision

Pour analyser la précision, on va prendre comme valeur de référence le déplacement obtenu par schéma implicite. On va se contenter de l'observer au temps final. L'idée est de faire les calculs pour un pas de temps $dt = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{2^i}$ pour $i = 0, 1, 2, 3$ et de voir si le pas de temps joue sur la précision. On obtient les graphiques suivants :

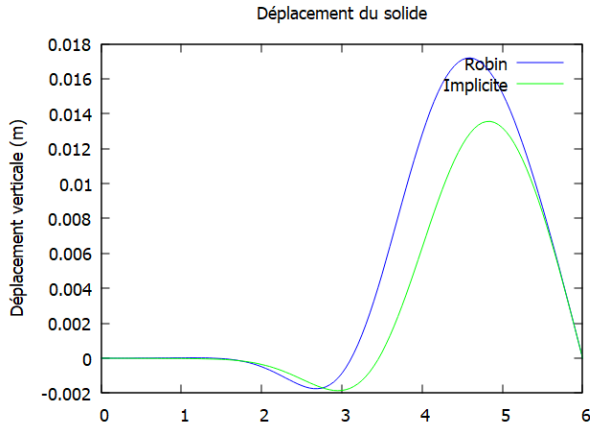


FIGURE 19 – Déplacement final pour $i = 0$

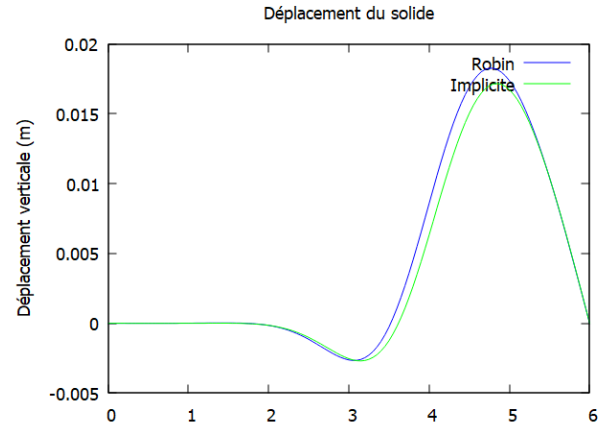


FIGURE 20 – Déplacement final pour $i = 1$

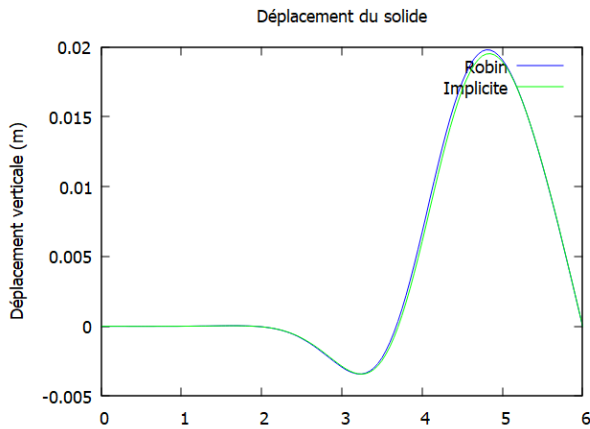


FIGURE 21 – Déplacement final pour $i = 2$

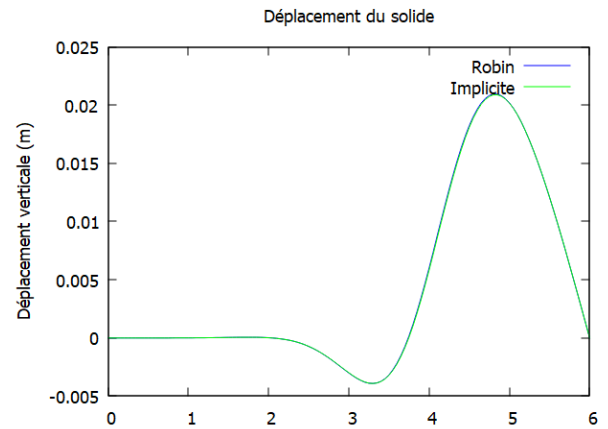


FIGURE 22 – Déplacement final pour $i = 3$

FIGURE 23 – Déplacement final pour différentes valeurs de i

On remarque que plus dt est petit plus l'approximation faite par le schéma explicite de Robin se rapproche de l'approximation faite par le schéma implicite. On a vu que dt n'a pas d'impact sur la stabilité du schéma. Mais il joue un rôle important sur la précision du résultat, en effet plus le pas de temps est petit meilleure est la précision.