Projet Hémodynamique

Jean-Louis Du

March 23, 2025

Introduction

Plan :

- Ecoulement de sang au sein d'un domaine avec bifurcation
- Problème de couplage et stabilité des schémas numériques

Navier Stokes

Les inconnues du problème sont la vitesse $u : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}^2$ et la pression $p : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ du sang.

$$\begin{cases} \rho^f \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) - \operatorname{div} \sigma(u, p) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \end{cases}$$

Écoulement dans une bifurcation

Conditions limites

$$\begin{cases} u = 0 & \text{sur } \Gamma^{\text{wall}} \\ u = u_{\text{in}} & \text{sur } \Gamma^{\text{in}} \\ \sigma(u,p)n - \frac{\rho^f}{2}|u \cdot n|_- u = -p_{\text{out},1} n & \text{sur } \Gamma_1^{\text{out}} \\ \sigma(u,p)n - \frac{\rho^f}{2}|u \cdot n|_- u = -p_{\text{out},2} n & \text{sur } \Gamma_2^{\text{out}} \end{cases}$$

Condition initiale

$$u(x, t = 0) = 0$$

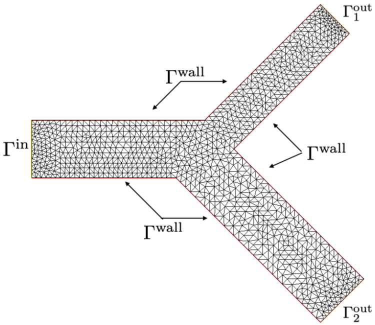

Figure: Schéma de la bifurcation

Semi-discrétisation en temps

Formulation forte

$$
\begin{cases}
\rho^f \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau}\right) + \rho^f u^{n-1} \cdot \nabla u^n - \operatorname{div}(\sigma(u^n, p^n)) = 0, & \text{dans } \Omega \\
\operatorname{div}(u^n) = 0, & \text{dans } \Omega \\
u^n = 0, & \text{sur } \Gamma^{\text{wall}} \\
u^n = u_{\text{in}}, & \text{sur } \Gamma^{\text{in}} \\
\sigma(u^n, p^n)n - \frac{\rho^f}{2}|u^{n-1} \cdot n|_- u^n = -p_{\text{out},i}\, n, & \text{sur } \Gamma_{\text{i}}^{out} \\
p_{\text{out},i} = p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_i^{\text{out}}} u^{n-1} \cdot n, & i = 1, 2
\end{cases}
$$

Problème mixte

Espaces variationnels :

- $X = \{w \in H^1(\Omega)^2 \text{ tel que } w = u_{in} \text{ sur } \Gamma^{in},\ w = 0 \text{ sur } \Gamma^{wall}\}$
- $M = L^2_0(\Omega)$

Formulation mixte

$$\begin{cases} \int_\Omega \frac{\rho^f u^n}{\tau} \cdot v - \int_\Omega \frac{\rho^f u^{n-1}}{\tau} \cdot v + \int_\Omega \rho^f (u^{n-1} \cdot \nabla u^n) \cdot v + \int_\Omega \sigma(u^n, p^n) : \nabla v \\ - \int_{\Gamma^{in}} \sigma(u_{in}, p^n) n \cdot u_{in} + \sum\limits_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{out}} \left(\left(p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_i^{out}} u^{n-1} \cdot n \right) n - \frac{\rho^f}{2} |u^{n-1} n|_- u^n \right) \cdot v = 0 \\ \int_\Omega q \operatorname{div}(u^n) = 0 \qquad \forall v \in X,\ q \in M \end{cases}$$

Problème mixte discret

Espaces variationnels discrets : $X_h \times M_h$

Formulation mixte discret

$$\begin{cases} \int_\Omega \frac{\rho^f u_h^n}{\tau} \cdot v - \int_\Omega \frac{\rho^f u_h^{n-1}}{\tau} \cdot v + \int_\Omega \rho^f (u_h^{n-1} \cdot \nabla u_h^n) \cdot v + \int_\Omega \sigma(u_h^n, p_h^n) : \nabla v \\ - \int_{\Gamma^{in}} \sigma(u_{in}, p_h^n) n \cdot u_{in} + \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{out}} \left(\left(p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_i^{out}} u_h^{n-1} \cdot n \right) n - \frac{\rho^f}{2} |u_h^{n-1} \cdot n|_- u_h^n \right) v = 0 \\ \int_\Omega q \operatorname{div}(u_h^n) = 0 \end{cases}$$

Choix des espaces d'éléments finis :

- $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$
- $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$ + un terme de stabilisation
- Plus généralement, $\mathbb{P}_{n+1}/\mathbb{P}_n$ avec $n \geq 1$

Stabilité du schéma numérique

En multipliant la formulation forte par u_h^n et en intégrant sur Ω on obtient :

$$\underbrace{\int_\Omega \frac{\rho^f}{\tau}(u_h^n - u_h^{n-1}) \cdot u_h^n}_{\boxed{1}} + \underbrace{\int_\Omega \rho^f (u_h^{n-1} \cdot \nabla u_h^n) \cdot u_h^n}_{\boxed{2}} + \underbrace{\int_\Omega \sigma(u_h^n, p_h^n) : \nabla u_h^n}_{\boxed{3}}$$

$$+ \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_{out,i}} \left(\underbrace{\left(p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_{out,i}} u_h^{n-1} \cdot n \right) n}_{\boxed{4}} \underbrace{- \frac{\rho^f}{2} |u_h^{n-1} \cdot n|_- u_h^n}_{\boxed{5}} \right) \cdot u_h^n = 0.$$

$$\boxed{1} = \frac{\rho^f}{2\tau}\left(\|u_h^n\|^2_{L^2_{(\Omega)}} - \|u_h^{n-1}\|^2_{L^2_{(\Omega)}} + \|u_h^n - u_h^{n-1}\|^2_{L^2_{(\Omega)}}\right)$$

$$\text{car } (a-b)a = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + (a-b)^2)$$

$$\boxed{4} = \sum_{i=1,2}\int_{\Gamma^i_{out}} p_d\; u_h^n \cdot n + \sum_{i=1,2} R_{d,i}\left(\int_{\Gamma^i_{out}} u_h^n \cdot n\right)\int_{\Gamma^i_{out}} u_h^{n-1} \cdot n$$

$$= \sum_{i=1,2}\int_{\Gamma_i^{out}} p_d\; u_h^n \cdot n + \sum_{i=1,2} R_{d,i}\left(\int_{\Gamma_i^{out}} (u_h^{n-1} - u_h^n) \cdot n\right)\left(\int_{\Gamma_i^{out}} u_h^n \cdot n\right)$$

$$+ R_{d,i}\left|\int_{\Gamma^i_{out}} u_h^n \cdot n\right|^2$$

$$\boxed{2} = \int_\Omega \frac{\rho^f}{2} u_h^{n-1} \nabla |u_h^n|^2 \qquad \text{car } \nabla u^n \cdot u^n = \frac{1}{2}\nabla |u^n|^2$$

$$= -\int_\Omega \frac{\rho^f}{2} |u_h^n|^2 \underbrace{\mathrm{div}(u_h^{n-1})}_{=0} + \int_\Gamma \frac{\rho^f}{2} |u_h^n|^2 u_h^{n-1} \cdot n \qquad \text{par Green}$$

$$= \sum_{i=1,2} \frac{\rho^f}{2} \int_{\Gamma_i^{out}} |u_h^n|^2 \; u_h^{n-1} \cdot n \qquad \text{par les CL de } u$$

$$\boxed{5} = -\sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{out}} \frac{\rho^f}{2} |u_h^{n-1} \cdot n|_- u_h^n \cdot u_h^n$$

$$= -\sum_{i=1,2} \frac{\rho^f}{2} \int_{\Gamma_i^{out}} |u_h^n|^2 |u_h^{n-1} \cdot n|_-$$

$$\boxed{3} = \int_\Omega (2\mu\varepsilon(u_h^n) - p_h^n I) : \nabla u_h^n$$

$$= 2\mu \int_\Omega \varepsilon(u_h^n) : \nabla u_h^n - \int_\Omega p_h^n I : \nabla u_h^n$$

$$= 2\mu \int_\Omega \underbrace{\varepsilon(u_h^n)}_{\text{symétrique}} : \left(\varepsilon(u_h^n) + \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla u - \nabla u^T)}_{\text{antisymétrique}} \right) - \int_\Omega p_h^n \underbrace{\mathrm{div}(u_h^n)}_{=0}$$

Or le produit contractant d'un terme

symétrique par un terme anti-symétrique est nul

$$= 2\mu \|\varepsilon(u_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

On rassemble tout les termes.

$$\frac{\rho^f}{2\tau}(\|u_h^n\|^2_{L^2_{(\Omega)}} - \|u_h^{n-1}\|^2_{L^2_{(\Omega)}}) + 2\mu\|\varepsilon(u_h^n)\|^2_{L^2(\Omega)} = \underbrace{-\sum_{i=1,2}\frac{\rho^f}{2}\int_{\Gamma_i^{out}} |u_h^n|^2 \, (u_h^{n-1}\cdot n - |u_h^{n-1}\cdot n|_-)}_{\leq 0}$$

$$-\frac{\rho^f}{2\tau}\|u_h^n - u_h^{n-1}\|^2_{L^2_{(\Omega)}} - \sum_{i=1,2}\int_{\Gamma_i^{out}} p_d \; u_h^n \cdot n \underbrace{-\sum_{i=1,2} R_{d,i}\left|\int_{\Gamma^i_{out}} u_h^n \cdot n\right|^2}_{-\boxed{\text{B}}}$$

$$\underbrace{-\sum_{i=1,2} R_{d,i}\left(\int_{\Gamma_i^{out}} (u_h^{n-1} - u_h^n)\cdot n\right)\left(\int_{\Gamma_i^{out}} u_h^n \cdot n\right)}_{\boxed{\text{A}}}$$

$$\boxed{\mathrm{A}} \leq \underbrace{\sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i}}{2} \left| \int_{\Gamma_i^{out}} u_h^n \cdot n \right|^2}_{\frac{1}{2}\boxed{\mathrm{B}}} + \sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i}}{2} \frac{C_T |\Gamma_i^{out}|}{h} \| u_h^{n-1} - u_h^n \|^2_{L^2(\Omega)}$$

Condition

$$\frac{\rho^f}{2\tau}(\|u_h^n\|^2_{L^2_{(\Omega)}} - \|u_h^{n-1}\|^2_{L^2_{(\Omega)}}) + 2\mu\|\varepsilon(u_h^n)\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq \left(-\frac{\rho^f}{2\tau} + \sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i}}{2} \frac{C_T|\Gamma_i^{out}|}{h}\right) \|u_h^n - u_h^{n-1}\|^2_{L^2_{(\Omega)}} - \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{out}} p_d \; u_h^n \cdot n$$

Pour garantir la stabilité énergétique il faut que $\tau \leq \frac{\rho^f h}{C_T \sum_{i=1,2} R_{d,i}|\Gamma_i^{out}|}$.

Stabilité énergétique conditionnelle

Sous la condition $\boxed{\tau \leq \frac{\rho^f h}{C_T \sum_{i=1,2} R_{d,i} |\Gamma_i^{out}|}}$ on a la stabilité énergétique.

$$\boxed{\frac{\rho^f}{2} \| u_h^N \|^2_{L^2_{(\Omega)}} + 2\mu\tau \sum_{n=1}^{N} \|\varepsilon(u_h^n)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\rho^f}{2} \| u_h^0 \|^2_{L^2_{(\Omega)}} - \tau \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{out}} p_d \; u_h^n \cdot n}$$

Schéma alternatif

On a comme tout à l'heure, mais avec un terme en plus.

$$\boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \boxed{4} + \boxed{5} + \underbrace{\sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{out}} \frac{R_{d,i}|\Gamma_i^{out}|}{2} (u_h^n - u_h^{n-1}) \cdot n \; u_h^n \cdot n}_{\boxed{6}} = 0$$

En utilisant $ab = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - (a-b)^2)$ avec $a = (u_h^n - u_h^{n-1}) \cdot n$ et $b = u_h^n \cdot n$:

$$\boxed{6} = \sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i}|\Gamma_i^{out}|}{4} \left(\|(u_h^n - u_h^{n-1}) \cdot n\|^2_{L^2(\Gamma_i^{out})} + \|u_h^n \cdot n\|^2_{L^2(\Gamma_i^{out})} - \|u_h^{n-1} \cdot n\|^2_{L^2(\Gamma_i^{out})} \right)$$

Stabilité du schéma numérique alternatif

$$\frac{\rho^f}{2\tau}\left(\|u_h^n\|^2_{L^2_{(\Omega)}} - \|u_h^{n-1}\|^2_{L^2_{(\Omega)}}\right) + \sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i}|\Gamma_i^{out}|}{4}\left(\|u_h^n \cdot n\|^2_{L^2(\Gamma_i^{out})} - \|u_h^{n-1} \cdot n\|^2_{L^2(\Gamma_i^{out})}\right) + 2\mu\|\varepsilon(u_h^n)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= \underbrace{-\sum_{i=1,2}\frac{\rho^f}{2}\int_{\Gamma_i^{out}} |u_h^n|^2 \left(u_h^{n-1}\cdot n - |u_h^{n-1}\cdot n|_-\right) - \frac{\rho^f}{2\tau}\|u_h^n - u_h^{n-1}\|^2_{L^2_{(\Omega)}}}_{\leq 0} - \sum_{i=1,2}\int_{\Gamma_i^{out}} p_d \; u_h^n \cdot n$$

$$\underbrace{-\sum_{i=1,2}\frac{R_{d,i}|\Gamma_i^{out}|}{4}\|(u_h^n - u_h^{n-1})\cdot n\|^2_{L^2(\Gamma_i^{out})}}_{-\boxed{C}} \underbrace{-\sum_{i=1,2} R_{d,i}\left|\int_{\Gamma_i^{out}} u_h^n \cdot n\right|^2}_{-\boxed{B}}$$

$$\underbrace{-\sum_{i=1,2} R_{d,i}\left(\int_{\Gamma_i^{out}} (u_h^{n-1} - u_h^n)\cdot n\right)\left(\int_{\Gamma_i^{out}} u_h^n \cdot n\right)}_{\boxed{A}}$$

Stabilité énergétique inconditionnelle

$$\boxed{A} \leq \sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i}}{2} \left(2 \left| \int_{\Gamma_i^{out}} u_h^n \cdot n \right|^2 + \frac{1}{2} \|(u_h^{n-1} - u_h^n) \cdot n\|^2_{L^2(\Gamma_i^{out})} |\Gamma_i^{out}| \right) = \boxed{B} + \boxed{C}$$

On obtient la stabilité sans aucune condition :

$$\boxed{\frac{\rho^f}{2} \|u_h^N\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i}|\Gamma_i^{out}|}{4} \|u_h^N \cdot n\|^2_{L^2(\Gamma_i^{out})} + 2\mu\tau \sum_{n=1}^{N} \|\varepsilon(u_h^n)\|^2_{L^2(\Omega)}}$$

$$\leq \boxed{\sum_{i=1,2} \frac{R_d^i|\Gamma_i^{out}|}{4} \|u_h^0 \cdot n\|^2_{L^2(\Gamma_i^{out})} + \frac{\rho^f}{2} \|u_h^0\|^2_{L^2(\Omega)} - \tau \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i^{out}} p_d \; u_h^n \cdot n.}$$

Simulation numérique

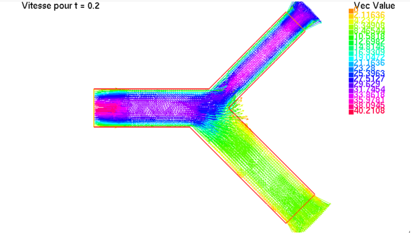

Figure: Le fluide s'écoule

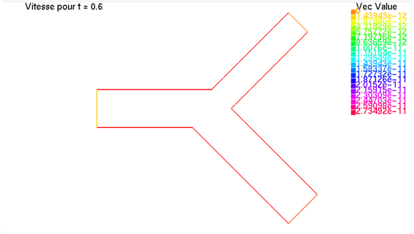

Figure: Le fluide est à l'arrêt

Figure: Deux régimes d'écoulements

- Deux régimes : écoulement ou non-écoulement
- Vitesse plus élevé sur la section fine et inversement

Flux

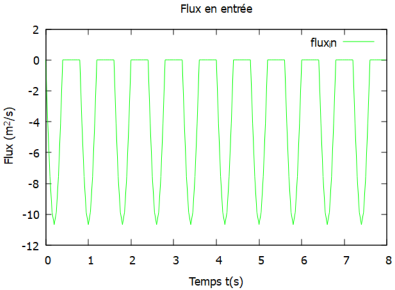

Figure: Flux entrant

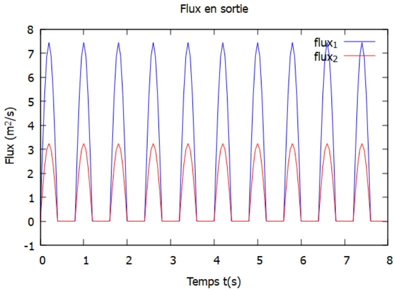

Figure: Flux sortant

- Comportement périodique
- Flux négatif en entrée / positif en sortie
- Flux plus élevé sur la section fine

Pression

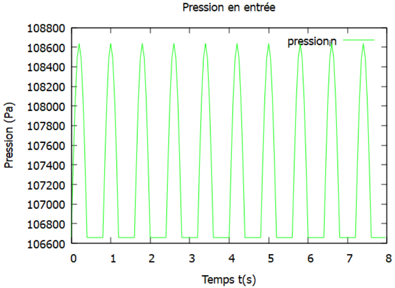

Figure: Pression entrante

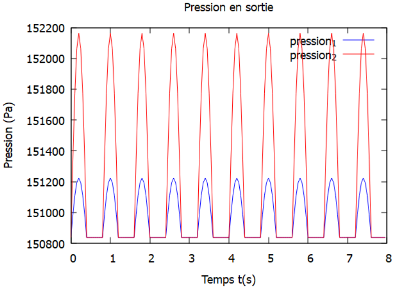

Figure: Pression sortante

- Comportement périodique
- Pression faible en entrée / forte en sortie
- Pression plus élevé sur la section large

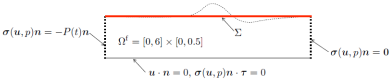

Figure: Domaine Ω

Équations du Modèle

$$
\begin{cases}
\rho_f \partial_t u - \operatorname{div} \sigma(u,p) = 0 \\
\operatorname{div} u = 0 \\
u \cdot n = 0, \quad \sigma(u,p)n \cdot \tau = 0 \\
\sigma(u,p)n = -Pn \\
\sigma(u,p)n = 0 \\
u \cdot n = \dot{\eta}, \quad u \cdot \tau = 0 \\
\rho_s \epsilon\, \partial_t \dot{\eta} - c_1 \partial_x^2 \eta + c_0 \eta = -\sigma(u,p)n \cdot n \\
\dot{\eta} = \partial_t \eta \\
\eta = 0
\end{cases}
$$

Schéma implicite

- $\boxed{u^n \cdot n = \dot{\eta}^n}$
- Schéma stable inconditionnellement
- Coûteux en temps

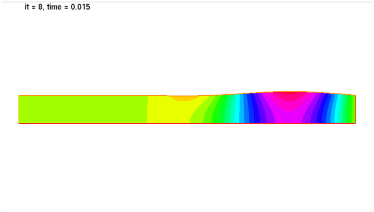

Figure: Simulation par le schéma implicite

Schéma explicite Dirichlet

- $\boxed{u^n \cdot n = \dot{\eta}^{n-1}}$
- Schéma dont la stabilité indépendant du pas de temps
- Schéma instable sous $\frac{\rho_f \alpha_{\max}}{\rho_s \epsilon} > 1, \quad \alpha_{\max} \approx \frac{L^2}{\pi^2 R}$.
- Utilité restreinte

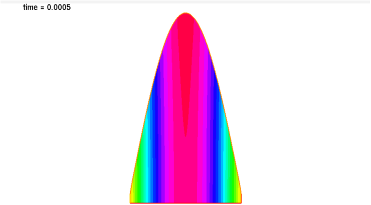

Figure: Simulation par le schéma explicite Dirichlet

Schéma explicite Dirichlet

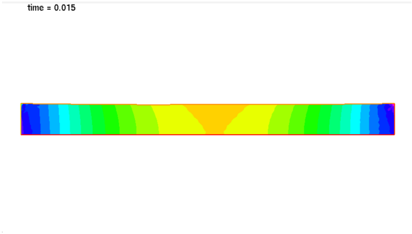

Figure: Déformation finale pour le schéma explicite Dirichlet (pour $\rho^f/100$)

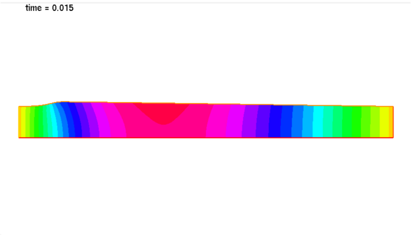

Figure: Déformation finale pour le schéma explicite Dirichlet (pour $\rho^s \cdot 100$)

Schéma explicite Robin

- $\boxed{\rho_s \epsilon \, \frac{u^n \cdot n}{dt} + \sigma(u^n, p^n) n \cdot n} =$
  $\boxed{\rho_s \epsilon \, \frac{\dot{\eta}^{n-1}}{dt} + c_1 \partial_x^2 \eta^{n-1} - c_0 \eta^{n-1}}$
- Schéma stable inconditionnellement
- Plus rapide que le schéma implicite

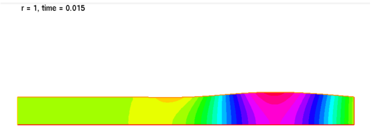

Figure: Simulation par le schéma explicite Robin

Précision du schéma

On veut analyser l'impact du pas de temps dt sur la précision du déplacement final en comparant au schéma implicite.

- On prend le schéma implicite comme référence
- On observe le déplacement final pour différentes valeurs de dt :

$$dt = \frac{2 \times 10^{-4}}{2^i}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Précision du schéma

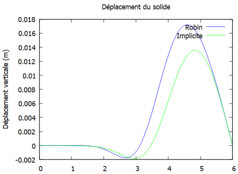

Figure: Déplacement final pour $i = 0$

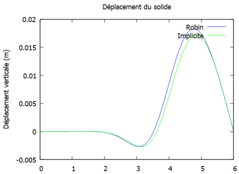

Figure: Déplacement final pour $i = 1$

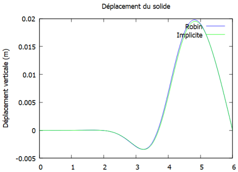

Figure: Déplacement final pour $i = 2$

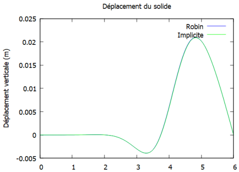

Figure: Déplacement final pour $i = 3$

Conclusion

En diminuant dt, on améliore la précision. Cependant dt n'a pas d'impact sur la stabilité.

Résumé :

- Schéma implicite : stable inconditionnellement mais lent
- Schéma explicite Dirichlet : rapide mais stable conditionnellement
- Schéma explicite Robin : stable inconditionnellement et rapide