

$$\begin{cases}
 \frac{\theta_i - \theta_j}{2} + \frac{\Delta\theta_i - \Delta\theta_j}{2} > \theta_{ij} - ZM - YM \\
 \pi - \frac{\theta_i - \theta_j}{2} - \frac{\Delta\theta_i - \Delta\theta_j}{2} > \theta_{ij} - (1 - Z)M - YM \\
 \frac{\theta_i - \theta_j}{2} + \frac{\Delta\theta_i - \Delta\theta_j}{2} > \arccos \frac{\sqrt{d^2 - 8^2}}{vT_i} - ZM - YM \\
 \pi - \frac{\theta_i - \theta_j}{2} - \frac{\Delta\theta_i - \Delta\theta_j}{2} > \arccos \frac{\sqrt{d^2 - 8^2}}{vT_i} (1 - Z)M - YM \\
 \Delta\theta_i - \Delta\theta_j = 0 + (Y - 1)M \\
 \frac{\theta_i - \theta_j}{2} - \frac{\Delta\theta_i - \Delta\theta_j}{2} < \arccos \frac{\sqrt{d^2 - 8^2}}{rT_i} + ZM + (Y - 1)M \\
 \pi - \frac{\theta_i - \theta_j}{2} - \frac{\Delta\theta_i - \Delta\theta_j}{2} < \arccos \frac{\sqrt{d^2 - 8^2}}{vT_i} + (1 - Z)M + (Y - 1)M
 \end{cases}$$

(式中 $Z=1,0$ $y=1,0$ $M=10000$ $i=1,2,\dots,n-1$, $j=i+1,\dots,n$)

飞行管理问题的线性规划模型

孙旭山 魏 华 吕晓光

(清华大学, 北京 100084)

编者按:这份答卷的作者没有参加全国的竞赛,而是按照同样的题目和要求参加了学校的竞赛。全国评委会的同志在评阅完全国的优秀答卷后审阅了本文,一致认为该文很有特色,特予发表。

对本题一般都是建立了非线性规划模型,直接求解很困难。该文不仅运用相对速度将不相撞的约束条件线性化(对调整角改变量线性),而且经过合理的选择将目标函数也线性化,从而将整个问题成功地简化为线性规划模型。另外该文表述清晰,证明简洁。

关键词:线性规划,相对速度

一、数学模型

1. 模型假设

(1) 新飞机进入边缘时,立即作出计算,每架飞机按照计算机计算后的指示立即作方向角改变(有的飞机方向角可不变)。

- (2) 每架飞机整个过程中最多只改变一次方向角
- (3) 忽略飞机转向时间(即认为飞机在接收到指令后立即对方向角调整,且忽略其调整时间)
- (4) 新飞机进入空域前,在空域中飞行的飞机方向已调合适不会相撞
- (5) 对方向角的相同调整量的满意程度是一样的,且方向角调整越少,满意程度越高

2. 模型介绍

将每架飞机视为球状模型(二维平面为圆状模型)整个空域视为二维平面,建立直角坐标系,顶点为 $(0,0)$, $(160,0)$, $(160,160)$, $(0,160)$,各方向角为飞行方向与 x 轴正向的夹角。每架飞机是一个以飞机坐标点为圆心,以4公里为半径的圆(因为相撞距离限为8公里)。每架飞机在空域中的状态(位置速度)均可视为矢量,速度为从坐标点出发。方向角为辐角,800公里为模的矢量。各圆心按其速度方向运行。若有两圆在运行过程中相交即为该两架飞机相撞。

3. 名词、符号解释(如图1所示)

α_{ij} :第 i 架飞机与第 j 架飞机的碰撞角,是两圆公切线交角中指向圆的那个角,规定

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

v_{ij} :第 i 架飞机相对于第 j 架飞机的相对飞行速度。

l_{ij} :第 i 架飞机与第 j 架飞机圆心距。

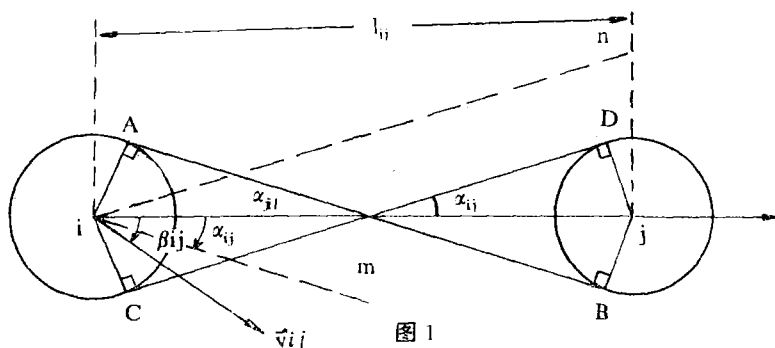
β_{ij} :第 i 架飞机相对于第 j 架飞机的相对速度与两架飞机圆心连线的交角,规定:以第 i 架飞机为原点, $i \rightarrow j$ 连线从 i 指向 j 为正方向,逆时针旋转为正,顺时针旋转为负。

$\Delta\theta_i$:第 i 架飞机相对于直角坐标系旋转的角(即方向角改变量),是代数量。

$\Delta\beta_{ij}$:第 i 架飞机相对于第 j 架飞机 β_{ij} 的改变量。

4. 判断准则

不会相撞:当 $|\beta_{ij}| > \alpha_{ij}$ 时,两架飞机不会相撞(两圆不相交)



5. 决策目标

题目要求飞机飞行方向角调整的幅度尽量小,这个尽量小是针对每架飞机而言,同时也要求整体满意程度(即对管理层而言,应使每架飞机的调整都尽量少的),因此构造目标函数时,可以认为若对方向角调整量最大的飞机而言,其调整量可满意,则由假设(5)知对

其余飞机调整量均可满意,即要求每架飞机的调整量(绝对值)都小于某个数 $\epsilon (\epsilon \geq 0)$ 。

目标函数即是求 ϵ 的最小值 $\min \epsilon$ 。

二、建模方案

1. 球形模型的建立

(1) 由于两架飞机如果相距大于 8 公里,则不会发生相碰,故可以考虑为 4 公里,两球不相交,则表明不会发生碰撞事故,若相交,则表明会发生碰撞事故。

(2) 为了研究两球相撞,采用相对速度作为研究对象,因为飞机是否相撞的关键是相对速度。

(3) 球形模型在分析碰撞问题中的运用,如图 1 示。

AB, CD 为公切线, $ni \parallel CD, mi \parallel AB$

i, j 不相撞的充要条件是 $|\beta_{ij}| < \alpha_{ij}$ (阴影区外)

若 β_{ij} 在阴影区内则通过调整角 (i, j 的方向角) 使 β_{ij} 移出阴影区以达到整个空域中的飞机系统不相撞

(4) 由球形模型建立起的函数及方程

i) 重要结论: 对第 i, j 架飞机, 其飞行方向角改变量 $(\Delta\theta_i, \Delta\theta_j)$ 之和的一半即为其相对速度方向 β_{ij} 的改变量 $(\Delta\beta_{ij})$,

$$\text{即 } \Delta\beta_{ij} = \frac{\Delta\theta_i + \Delta\theta_j}{2}$$

证明: 由题知 $|\nu_i| = 800km = A$

设改变前的速度分别为 $\nu_{i1} = Ae^{i\theta_i}, \quad \nu_{j1} = Ae^{i\theta_j}$

改变方向解后速度分别为

$$\nu_{i2} = Ae^{i(\theta_i + \Delta\theta_i)}, \quad \nu_{j2} = Ae^{i(\theta_j + \Delta\theta_j)}$$

$$\nu_{ij} = \nu_{i1} - \nu_{j1} = A[e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}]$$

$$\text{改变后 } \nu'_{ij} = \nu_{i2} - \nu_{j2} = A[e^{i(\theta_i + \Delta\theta_i)} - e^{i(\theta_j + \Delta\theta_j)}]$$

$$\frac{\nu'_{ij}}{\nu_{ij}} = \frac{A[e^{i(\theta_i + \Delta\theta_i)} - e^{i(\theta_j + \Delta\theta_j)}]}{A[e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}]}$$

$$= \frac{\cos(\theta_i + \Delta\theta_i) + i \sin(\theta_i + \Delta\theta_i) - \cos(\theta_j + \Delta\theta_j) - i \sin(\theta_j + \Delta\theta_j)}{\cos\theta_i + i \sin\theta_i - \cos\theta_j - i \sin\theta_j}$$

$$\frac{2 \sin \frac{\theta_i + \Delta\theta_i - \theta_j - \Delta\theta_j}{2} (\sin \frac{\theta_i + \Delta\theta_i - \theta_j + \Delta\theta_j}{2} - i \cos \frac{\theta_i + \theta_j + \Delta\theta_i + \Delta\theta_j}{2})}{2 \sin \frac{\theta_i - \theta_j}{2} (\sin \frac{\theta_i + \theta_j}{2} - i \cos \frac{\theta_i + \theta_j}{2})}$$

$$= \frac{\sin \frac{\theta_i + \Delta\theta_i - \theta_j - \Delta\theta_j}{2}}{\sin \frac{\theta_i - \theta_j}{2}} e^{i(\frac{\Delta\theta_i + \Delta\theta_j}{2})}$$

$$\text{即 } \nu'_{ij} \text{ 与 } \nu_{ij} \text{ 复角相差 } \frac{\Delta\theta_i + \Delta\theta_j}{2}$$

$$\Delta\beta_{ij} = \frac{\Delta\theta_i + \Delta\theta_j}{2} \quad \text{证毕}$$

ii) 因为忽略计算时间和转向时间故可得以下方程(不等式)

由决策目标构造目标函数, $\min X = \epsilon (|\Delta\theta_i| \leq \epsilon)$

由飞机飞行方向角调整幅度不超过 30° 知

$$|\Delta\theta_i| \leq 30^\circ, \quad 0 < \epsilon \leq 30^\circ$$

为使整个系统在改变后不发生相碰事故, 应有

$$|\beta_{ij} + \Delta\beta_{ij}| > \alpha_{ij}$$

2. 总结函数及各约束条件

$$\min Z = \epsilon \quad (1)$$

$$s. t. \quad |\beta_{ij} + \Delta\beta_{ij}| > \alpha_{ij} \quad \Delta\beta_{ij} = \frac{\Delta\theta_i + \Delta\theta_j}{2} \quad (2)$$

$$|\Delta\theta_i| \leq \epsilon \quad (3)$$

$$|\Delta\theta_i| \leq 30^\circ \quad (4)$$

$$0^\circ \leq \epsilon \leq 30^\circ \quad (5)$$

3. 条件简化

为了利用线性规划对条件(2) $|\beta_{ij} + \Delta\beta_{ij}| > \alpha_{ij}$ 进行如下简化(说明见附录, 编者略去)。

当 $\beta_{ij} > 0$ 时 $(2) \Rightarrow \beta_{ij} + \Delta\beta_{ij} > \alpha_{ij}$

当 $\beta_{ij} < 0$ 时 $(2) \Rightarrow \beta_{ij} + \Delta\beta_{ij} < -\alpha_{ij}$

由于 $\Delta\theta_i$ 可正可负, 为使线性规划中各决策变量均大于等于零, 故引入新的决策变量 $\Delta\theta_{i1}, \Delta\theta_{i2}$ 满足

$$\Delta\theta_i = \Delta\theta_{i1} - \Delta\theta_{i2} \quad \text{其中 } 0 \leq \Delta\theta_{i1} \leq 30^\circ, 0 \leq \Delta\theta_{i2} \leq 30^\circ$$

4. 线性规划关系式

$$\min Z = \epsilon \quad (6)$$

$$s. t. \quad \beta_{ij} > 0 \text{ 时 } \Delta\theta_{i1} - \Delta\theta_{i2} + \Delta\theta_{j1} - \Delta\theta_{j2} > 2\alpha_{ij} - 2\beta_{ij} \quad (7)$$

$$\beta_{ij} < 0 \text{ 时 } \Delta\theta_{i1} - \Delta\theta_{i2} + \Delta\theta_{j1} - \Delta\theta_{j2} < -2\alpha_{ij} - 2\beta_{ij} \quad (8)$$

$$\Delta\theta_{i1} - \Delta\theta_{i2} \leq 30^\circ \quad (9)$$

$$\Delta\theta_{i1} - \Delta\theta_{i2} \geq -30^\circ \quad (10)$$

$$\Delta\theta_{i1} - \Delta\theta_{i2} \leq \epsilon \quad (11)$$

$$\Delta\theta_{i1} - \Delta\theta_{i2} \leq -\epsilon \quad (12)$$

$$\epsilon \leq 30^\circ \quad (13)$$

$$\epsilon, \Delta\theta_{i1}, \Delta\theta_{i2} \geq 0 \quad (14)$$

[注]:其中 β_{ij}, α_{ij} 可由题中已经知道的参数计算得出

设 $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ 为飞机在空间的位置的矢量, 计算公式如下

$$l_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \quad (15)$$

$$\beta_{ij} = \arg(v_i - v_j) - \arg(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad (16)$$

$$\alpha_{ij} = \arcsin(8/l_{ij}) \quad (17)$$

三、计算步骤

1. 记录各飞机状态: 位置(坐标), 速度(大小, 方向角)。
2. 计算各点间 β_{ij}, α_{ij} 。
3. 根据建模方案所提, 列出目标函数及约束条件, 产生 LINDO 文件(LINDO 是用于计算线性规划的软件)
4. 调用 LINDO 得到此条件下的线性规划最优解。

[注](1) 实际过程中, 可将 2, 3, 4 步过程合为一个模块, 这样可减少数据传递时间, 以提高效率。

(2) 程序清单及结果见附录(编者略去)

四、结果检验

对题目所给实例进行计算, 清单见附表 1(编者略去)

方案 $\Delta\theta_1 = 0^\circ, \Delta\theta_2 = 0^\circ, \Delta\theta_3 = 1.814732^\circ, \Delta\theta_4 = -0.743155^\circ,$
 $\Delta\theta_5 = 0^\circ, \Delta\theta_6 = 1.814732^\circ$

各方向角按此方案改动后, 系统各飞机均满足 $|\beta_{ij}| > \alpha_{ij}$ (即不含相撞), 其中有些飞机对满足临界不相撞条件, 即 $|\beta_{ij}| - \alpha_{ij}$ 的值 $< 0.01^\circ$ (0.01° 是题目要求的计算精度)

将调整后各量再代入算法计算后得目标函数 $\min Z = \epsilon = 0$ (即无需改动)

经模拟程序(见附表 4, 编者略去)运行后, 动态观察结果正确

五、评价及推广

1. 此模型采用球形模型分析碰撞问题是合理的, 同时采用相对速度作为判断标准既体现了碰撞的本质(相对运动), 又简化了模型的计算

2. 建模中作了适当的简化, 将一个十分复杂的非线性规划问题简化为线性规划求解, 既找到合理的解, 又提高了运算速度及效率。这对于解决高速运行的飞机碰撞问题是大有裨益的, 而且由题目所提供的例子计算出的结果是令人满意的。

3. 简化模型所得的解不一定是最优解,考虑如下极端情况:六架飞机有两架的相对速度刚好与其连线平行,即 $\beta_j=0$,那么按简化模型应如何确定最优解呢?

若假定 $\beta'_{ij}=-\delta'$, $\delta'>0$ 且 $\delta'\rightarrow 0$ 则由简化模型可规划出一组解,若假定 $\beta'_{ij}=\delta''$, $\delta''>0$ 且 $\delta''\rightarrow 0$ 同样可规划出一组解,这两组解中必是一优一劣,但因 β'_{ij} 与 β''_{ij} 之差 $\rightarrow 0$,所以可认为它们相同,而由同一条件找出两组最优解是不可能的,所以简化模型的解不一定最优。

但实际中,以上极端情况为少数,这正是本模型可取之处,且 $|\beta_j|$ 越大可以认为,改变后的 $(\beta_j+\Delta\beta_j)$ 与 β_j 反号的可能性越小,从而由简化模型得到的结果可能越接近最优。

4. 关于模型约束条件数,由对称性知约束条件(2)的个数是 C_n^2 (n 是飞机数)所以约束条件数为 $4n+C_n^2=n(\frac{n+7}{2})$ 当飞机数增加后,约束条件数呈二次函数增加,计算量增加不大。

5. 若有若干架飞机同时进入时,依次计算,逐个调整,将它们视为有先后的进入空域,忽略调整时间,即可。