

# 大学物理笔记

Kajih Du

## 大学物理笔记

### 静电场

- 1 Coulomb定律
- 2 电场强度
  - 2.1 点电荷的电场强度
  - 2.2 任意连续体的电场强度
    - 2.2.1 有限长带电导线的电场强度
    - 2.2.2 圆环轴线上的电场强度
    - 2.2.3 带电圆盘轴线上的电场强度
  - 2.3 电偶极子的电场强度
    - 2.3.1 电偶极子在电场中的力矩
    - 2.3.2 电偶极子在电场中的电势能
    - 2.3.3 电偶极子轴线上的电场强度
    - 2.3.4 电偶极子在中垂线上的电场强度
- 3 Gauss定理
  - 3.1 均匀带电空心球壳和实心球体的电场强度
  - 3.2 无限长均匀带电导线电场强度
  - 3.3 无限大带电平面电场强度
- 4 静电场环路定理
  - 4.1 点电荷电场的电势
  - 4.2 带电圆环轴线上一点的电势
  - 4.3 均匀带电球面的电势
  - 4.4 均匀带电球体的电势
  - 4.5 电势与电场强度的关系
- 5 静电场中的导体
  - 5.1 静电平衡
  - 5.2 静电屏蔽
  - 5.3 电容
    - 5.3.1 平行板电容器
    - 5.3.2 球形电容器
    - 5.3.3 圆柱形电容器
    - 5.3.4 电容之串联与并联

- 5.4 静电场中的电介质
  - 5.4.1 电极化强度
  - 5.4.2 极化电荷密度
- 5.5 介质中的静电场
- 5.6 电介质界面处的电场
- 5.7 静电场的能量

## 磁场

- 1 磁感应强度
- 2 Biot-Savart定律
  - 2.1 有限长度直导线的磁感应强度
  - 2.2 圆电流轴线的磁感应强度
  - 2.3 通电螺线管轴线上的磁感应强度
  - 2.4 运动电荷的磁场
- 3 磁Gauss定理和Ampère环路定理
- 4 带电粒子在磁场中的运动
- 5 磁场对载流导线的作用
- 6 磁介质
  - 6.1 磁化强度
  - 6.2 有磁介质的Gauss定理
  - 6.3 有磁介质的Ampère环路定理

## 电磁感应

- 1 电磁感应定律
- 2 动生电动势
- 3 感生电场
  - 3.1 圆形变化磁场的感生电场
- 4 自感
  - 4.1 密绕螺线管的自感
- 5 互感
  - 5.1 两个串联线圈的等效自感
- 6 磁场能量
  - 6.1 互感磁能
- 7 位移电流
- 8 Maxwell方程组
- 9 电磁波
  - 9.1 Poynting矢量

## 光学

- 1 光程

- 2 半波损失
- 3 光的干涉
  - 3.1 Young氏双缝干涉
  - 3.2 等倾干涉
  - 3.3 等厚干涉
  - 3.4 Newton环
- 4 光的衍射
  - 4.1 Fraunhofer衍射
  - 4.2 圆孔衍射
  - 4.3 光栅衍射
    - 4.3.1 光栅的分辨能力
    - 4.3.2 Bragg衍射
- 5 光的偏振
  - 5.1 Malus定律
  - 5.2 Brewster角
- 6 双折射现象
  - 6.1 光在双折射介质中的传播速度
  - 6.2  $1/2$ 波片
  - 6.3  $1/4$ 波片
  - 6.4 偏振光的检验

## 量子力学

- 1 黑体
  - 1.1 辐出度和单色辐出度
  - 1.2 Kirchhoff定律
  - 1.3 黑体辐射规律
    - 1.3.1 Stefan-Boltzmann定律
    - 1.3.2 Wien位移定律
- 2 量子化
  - 2.1 光电效应
  - 2.2 Compton效应
  - 2.3 Bohr氢原子理论
  - 2.4 de Broglie波
- 3 波函数
  - 3.1 不确定性原理
  - 3.2 波函数
  - 3.3 Schrödinger方程
    - 3.3.1 定态Schrödinger方程

### 3.4 态叠加原理

### 3.5 一维定态问题

#### 3.5.1 一维无限深势阱

#### 3.5.2 抛物线势阱

#### 3.5.3 一维散射问题

### 3.6 氢原子的量子理论

#### 3.6.1 能量量子化

#### 3.6.2 角动量量子化

#### 3.6.3 角动量空间取向量子化

#### 3.6.4 电子自旋

# 静电场

## 1 Coulomb定律

两个**静止点电荷**之间的相互作用力的大小和两个点电荷之间的电荷量的乘积 $q_1q_2$ 成正比，与两个点电荷之间的距离 $r_{12}$ 成反比，方向沿两个点电荷的连线，即

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}$$

一般引入真空介电常数 $\varepsilon_0$ ，令 $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ ，从而Coulomb定律变为

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}$$

Coulomb定律只适用于点电荷。

## 2 电场强度

电场强度定义为试探电荷收到的力和试探电荷所带电荷量之比，即

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$$

电场强度满足矢量叠加原理

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i$$

### 2.1 点电荷的电场强度

真空中静止的场源电荷 $q$ ，距离场源电荷 $r$ 处的场强为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r$$

其中，如果 $q$ 为正电荷， $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{e}_r$ 方向一致，否则相反。如果系统由多个点电荷组成，可以利用叠加原理计算总电场强度。

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \mathbf{e}_{ri}$$

## 2.2 任意连续体的电场强度

取电荷元 $dq$ ，作为点电荷来处理，其在 $P$ 点激发的电场强度为

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{e}_r$$

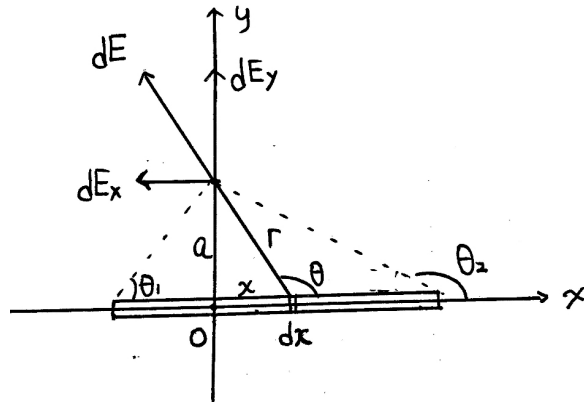
积分得到电场强度

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \mathbf{e}_r$$

若已知电荷体密度 $\rho$ ，即 $dq = \rho dV$ ；若已知面密度 $\sigma$ ，即 $dq = \sigma dS$ ；若已知线密度 $\lambda$ ，即 $dq = \lambda dl$ 。

### 2.2.1 有限长带电导线的电场强度

如图建立坐标系，设导线的电荷线密度为 $\lambda$



电荷元的电场强度为

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \mathbf{e}_r$$

由几何关系

$$x = a \cot(\pi - \theta) = -a \cot \theta \implies dx = a \csc^2 \theta d\theta$$

$$r = a \csc \theta$$

$$dE_x = dE \cos(\pi - \theta) = -dE \cos \theta = -\frac{\lambda \cos \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$dE_y = dE \sin(\pi - \theta) = dE \sin \theta = \frac{\lambda \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 a}$$

积分得到

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

对于无限长直导线,  $\theta_1 \rightarrow 0, \theta_2 \rightarrow \pi$ , 那么  $E_x = 0, E_y = \lambda/2\pi\epsilon_0 a$ 。

### 2.2.2 圆环轴线上的电场强度

对于半径为  $R$  的均匀带电量  $q$  的圆环, 在轴线上距离圆环中心为  $x$  处的点  $P$  的电场强度计算如下。

取长度为  $dl$  的电荷元  $dq$ , 其带电量

$$dq = \frac{q}{2\pi R} dl$$

设  $P$  相对于  $dl$  的张角为  $\theta$  (为一个定值,  $\cos \theta = x/\sqrt{x^2 + R^2}$ ), 将  $d\mathbf{E}$  分解为  $x$  轴分量和垂直于  $x$  轴的分量  $d\mathbf{E}_x$  和  $d\mathbf{E}_\perp$

$$dE_x = dE \cos \theta$$

$$dE_\perp = dE \sin \theta$$

由对称性易知  $E_\perp = 0$ ,  $E = E_x$ 。计算  $E_x$ , 得到 **带电圆环轴线场强**

$$E = E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{xq}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

### 2.2.3 带电圆盘轴线上的电场强度

对于半径为  $R$  的均匀带电量  $q$  的圆盘, 在轴线上距离圆盘中心为  $x$  处的点  $P$  的电场强度计算如下。带电圆盘可以分解成无数个带电圆环。记  $r$  为小的带电圆环的半径, 那么

$$dE = \frac{x dq}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dq = \frac{q}{\pi R^2} \cdot 2\pi r dr$$

因而得到 **带电圆盘轴线场强**

$$E = \frac{xq}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

对于一个无限大平面, 即  $R \gg x$ , 此时得到 **无限大带电平面场强**

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

## 2.3 电偶极子的电场强度

电偶极子：两个大小相等符号相反的点电荷 $+q, -q$ ，其间距离为 $l$ （远小于到场点的距离）的电荷系统。

电偶极矩：定义电偶极矩 $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ （ $\mathbf{l}$ 的方向由负电荷指向正电荷）

### 2.3.1 电偶极子在电场中的力矩

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

### 2.3.2 电偶极子在电场中的电势能

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

### 2.3.3 电偶极子轴线上的电场强度

以电偶极子中心为坐标原点，负电荷坐标 $(-l/2, 0)$ ，正电荷坐标 $(l/2, 0)$ （下文同），对于轴线上一点 $(x, 0)$ ，由电场强度的公式容易得出

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_+ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x - \frac{l}{2})^2} \mathbf{i} & \mathbf{E}_- &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0(x + \frac{l}{2})^2} \mathbf{i} \\ \mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- &= \frac{2qxl}{4\pi\epsilon_0[x^2 - (\frac{l}{2})^2]^2} \mathbf{i} \end{aligned}$$

考虑 $x \gg l$ ，因而

$$\mathbf{E} = \frac{2qlx}{4\pi\epsilon_0 x^3} \mathbf{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mathbf{p}}{x^3}$$

### 2.3.4 电偶极子在中垂线上的电场强度

可以用类似方法求得电偶极子在中垂线方向上的电场强度为

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 y^3}$$

## 3 Gauss定理

电通量的计算如下

$$\Psi_E = \int d\Psi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

点电荷的在半径为 $r$ 的球面的电场强度通量



$$\Psi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

**Gauss定理**：静电场中通过任意**闭合曲面（Gauss面）**的电场强度通量等于闭合曲面内电荷量代数和除以 $\epsilon_0$ ，即

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

其中 $\mathbf{E}$ 为**总场强**。利用Gauss定理可以计算电场强度。

### 3.1 均匀带电空心球壳和实心球体的电场强度

假设球壳和球体的半径为 $R$ ，带电量为 $q$ ，对于球体或球壳外距离中心为 $x$ 的一点，由Gauss定理有

$$\frac{q}{\epsilon_0} = E \cdot (4\pi x^2)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

如果点位于球壳内，由于球壳的电荷分布在表面，因而该点所处Gauss面包围的电荷 $q = 0$ ，因而球壳内一点的场强为0。

对于球体内一点的场强，该点所处球形Gauss面包围的电荷为 $qx^3/R^3$ （电荷分布均匀），由Gauss定理易得

$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

（注意：对于导体球，电荷分布在表面，内部场强为0！）

类似可以得到以下公式

### 3.2 无限长均匀带电导线电场强度

沿着导线作一小段圆柱形的高斯面，可得无限长均匀带电导线的电场强度为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

### 3.3 无限大带电平面电场强度

一块无限大均匀带电平面的电场强度为（作一个过平面两侧的柱状Gauss面）

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

由场强叠加原理，两块电荷面密度为 $\sigma$ 的带异号电荷的两块无限大均匀带电平行板之间的场强为一块无限大带电平面电场强度的2倍，即

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

## 4 静电场环路定理

点电荷的电场力做功：

$$\begin{aligned} dW &= q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr \\ W &= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \end{aligned}$$

点电荷的电场中电场力做功只与初末位置有关，与路径无关（保守力）。对于连续带电体，可以使用叠加原理进行计算。

电势能：静电场力做功等于电势能的减少，即 $W_{AB} = -(E_{pB} - E_{pA})$

静电场的环路定理：

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

电势：

$$V_a = \frac{W_a}{q} = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

电势满足电势叠加原理。

### 4.1 点电荷电场的电势

$$V_P = \int_r^\infty \frac{qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

### 4.2 带电圆环轴线上一点的电势

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}$$

### 4.3 均匀带电球面的电势

$$V = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}, & x > R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, & x \leq R \end{cases}$$

此结论可以结合电势叠加原理计算共球心带电导体球和球壳的电势。

### 4.4 均匀带电球体的电势

$$V = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}, & x > R \\ \frac{q(3R^2 - x^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}, & x \leq R \end{cases}$$

### 4.5 电势与电场强度的关系

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

## 5 静电场中的导体

### 5.1 静电平衡

静电平衡：导体上的电荷分布不再随时间变化，从而电场分布不随时间变化。

均匀导体的静电平衡条件：导体内部场强处处为零。

静电平衡时，导体为等势体，导体的表面为等势面，且导体表面的电场强度垂直于导体表面。

导体处于静电平衡状态时，导体内部无净电荷存在。（由Gauss定理证明，取导体内任何一个Gauss面，根据导体内部场强为0）

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{\text{net}}}{\epsilon_0} = 0 \rightarrow q_{\text{net}} = 0$$

静电平衡导体表面的电场强度：

记面电荷密度 $\sigma$ ，由Gauss定理（注意导体内部电场强度为0）

$$E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

带电荷的空腔外表面的电荷分布：

当带电量为 $Q$ 的导体空腔内部存在若干个电荷 $q_i$ 时，空腔内表面会感应出电荷 $-\sum q_i$ 。由电荷守恒，空腔外表面的电荷量为 $Q + \sum q_i$ ，且**均匀分布**。此结论可由唯一性定理获得，因为静电平衡，导体内部场强为0，可以视为一个带电量为 $Q + \sum q_i$ 的球壳。

## 5.2 静电屏蔽

- 1) 静电平衡时，导体空腔外面的带电体不会影响空腔内部的电场分布；
- 2) 导体空腔接地时，空腔内的带电体对空腔外无影响。空腔接地时，导体空腔外表面电荷量为0。此时空腔电势为0。

## 5.3 电容

孤立导体的电势与其电荷量成线性关系，即  $C = \frac{q}{V}$ 。

### 5.3.1 平行板电容器

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

推导过程：

记每块平行板带电 $q$ ，面积为 $S$ ，距离间隔 $d$ 。则平行板的电荷面密度为

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

两块平行板之间为匀强电场，根据平行板之间电场强度公式有

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S} & V &= Ed \\ \implies C &= \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \end{aligned}$$

### 5.3.2 球形电容器

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

推导过程：

设两个同心球体的半径分别为 $R_A, R_B (R_A < R_B)$ ，根据球形电容器的电场强度，可得

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\int_{R_A}^{R_B} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

### 5.3.3 圆柱形电容器

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

设两个同心柱体的半径分别为 $R_A, R_B (R_A < R_B)$ ，电容器长度为 $l (l \gg R_B - R_A)$ ，根据导线的电场强度公式，可得

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\lambda l}{\int_{R_A}^{R_B} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

以上公式应用的电介质为真空。

### 5.3.4 电容之串联与并联

$$\begin{aligned} \text{串联} \quad \frac{1}{C} &= \sum_i \frac{1}{C_i} \\ \text{并联} \quad C &= \sum_i C_i \end{aligned}$$

## 5.4 静电场中的电介质

### 5.4.1 电极化强度

电介质即绝缘体。电介质在电场中会发生极化。在电介质中取一小块体积元 $\Delta V$ ，在外加电场时，电介质发生极化，体积元所有分子的电偶极矩矢量和 $\sum \mathbf{p}$ 不为零（电偶极矩 $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ ），定义电极化强度为

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}}{\Delta V}$$

### 5.4.2 极化电荷密度

记电极化强度为 $\mathbf{P}$ ，沿着电极化强度取一个斜柱体体积元 $\Delta V$ ，底面面积为 $\Delta S$ ，斜柱体长度为 $\Delta x$ ，底面的法向为 $\hat{\mathbf{e}}_n$ ，与 $\mathbf{P}$ 的夹角为 $\theta$ 。那么有

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta S \Delta x \cos \theta \\ |\sum \mathbf{p}| &= P \Delta V = P \Delta S \Delta x \cos \theta \\ \text{Also } |\sum \mathbf{p}| &= q \Delta x = \sigma' \Delta S \Delta x \\ \implies \sigma' &= P \cos \theta = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \end{aligned}$$

两个介质分界面的极化电荷密度为（记两个介质内的电极化强度为 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ ）

$$\sigma' = \mathbf{P}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_{n1} + \mathbf{P}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_{n2} = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \cdot \hat{\mathbf{e}}_n$$

电极化强度和合电场强度有如下关系，其中 $\chi_e$ 为电极化率

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

## 5.5 介质中的静电场

介质中的静电场由自由电荷的电场 $\mathbf{E}_0$ 与极化电荷的电场 $\mathbf{E}'$ 叠加而成

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$

由静电场环路定理，可以得到介质中的静电场环路定理

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} + \oint_L \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = 0$$

根据Gauss定理有

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_0 + \sum q'_i}{\varepsilon_0}$$

对于闭合曲面上的任意面积元 $dS$ 外部的极化电荷为 $\sigma' dS$ ，那么同一电偶极子的异号电荷在曲面内，即曲面内有 $dq' = -\sigma' dS$ ，再根据极化电荷密度公式，因而闭合曲面内的极化电荷为

$$\sum q'_i = -\oiint_S \sigma' dS = -\oiint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{e}}_n dS = -\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

因而有

$$\oiint_S (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = q_0$$

令电位移矢量为 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ，于是得到有电介质的Gauss定理

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0$$

电位移矢量没有实际物理意义。

对于一个充满电极化率为 $\chi_e$ 电介质的平行板电容器，考虑到

$$\begin{aligned} E = E_0 + E' &= \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi_e E \\ \implies E &= \frac{E_0}{1 + \chi_e} = \frac{1}{1 + \chi_e} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

两极板的电势差为 $V = Ed$ ，则电容为

$$C = \frac{q}{V} = (1 + \chi_e) \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

则相对介电常数为 $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ ，电介质的介电常数为 $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ 。介电常数表明了介质中场强的削弱程度。

电位移 $\mathbf{D}$ 和总电场强度 $\mathbf{E}$ 有以下关系（对于各向同性的均一介质）

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

## 5.6 电介质界面处的电场

电位移矢量在界面的法线方向连续（利用电介质的Gauss定理证明），即

$$D_{1n} = D_{2n}$$

电场强度在界面的切线方向连续（利用电介质的静电场环流定理证明），即

$$E_{1t} = E_{2t}$$

## 5.7 静电场的能量

电容器充电的过程中，有

$$\begin{aligned} dA &= (U_1 - U_2) dq = \frac{q}{C} dq \\ \Rightarrow A &= \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U \end{aligned}$$

这个功与静电能相等。平行板电容器中， $U = Ed$ ,  $C = \varepsilon S/d$ ，静电场体积 $V = Sd$ ，因而

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 V$$

又 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ，因而

$$W_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} V$$

令电场能量密度为

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

最终有

$$W_e = \int_V w_e dV = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV$$

点电荷系的静电能

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

对于连续体

$$W = \frac{1}{2} \int V \mathrm{d}q$$



# 磁场

## 1 磁感应强度

磁感应强度定义为

$$B = \frac{F}{qv \sin \theta}$$

磁感应强度、速度、力（Lorentz力）的方向满足右手螺旋定则

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

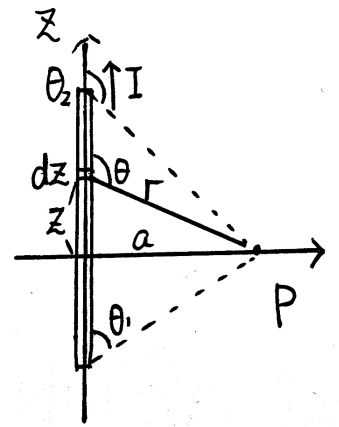
## 2 Biot-Savart定律

电流元 $I d\mathbf{l}$ 在空间中激发的磁感应强度满足Biot-Savart定律

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$

### 2.1 有限长度直导线的磁感应强度

按照图示建立坐标系



电流元 $I dz$ 产生的磁感应强度为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz \sin \theta}{r^2}$$

根据几何关系有

$$z = -a \cot \theta \implies dz = a \csc^2 \theta d\theta$$

$$r^2 = a^2 + z^2$$

从而得到

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \theta d\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

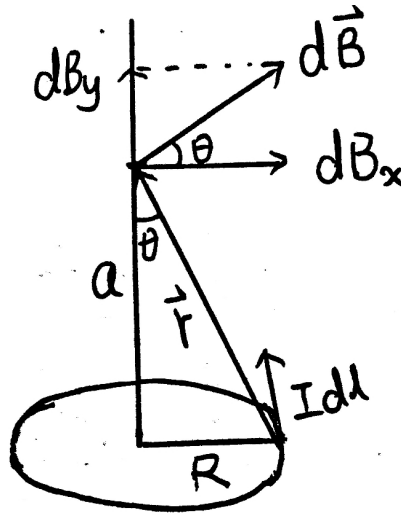
如果导线是无限长的，那么  $\theta_2 \rightarrow 0, \theta_1 \rightarrow \pi$ ，因而无限长直导线的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

对于半无限长直导线的磁感应强度，为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

## 2.2 圆电流轴线的磁感应强度



由Biot-Savart定律可以得到电流元产生的磁感应强度（此处  $\vec{r} \perp I d\vec{l}$ ）

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{R^2 + a^2}$$

该磁感应强度可以分为水平分量  $B_x$  和竖直分量  $B_y$ ，考虑对称性，水平分量最终会全部被抵消，因此只需要考虑竖直分量。由几何关系

$$dB_y = dB \sin \theta \quad \sin \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

记面积  $S = \pi R^2$ ，积分得到圆电流轴线的磁感应强度

$$B = B_y = \frac{\mu_0 I R \cdot 2\pi R}{4\pi (a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I S}{2\pi (a^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

在圆心处的磁感应强度为

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

定义磁矩  $\mathbf{m} = I S \mathbf{e}_n$ ，其中  $\mathbf{e}_n$  为电流流向右手螺旋规则确定的法线方向单位矢量。于是当  $a \gg R$  时候，圆电流的磁感应强度可写作

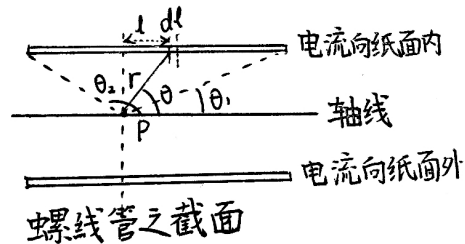
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2\pi a^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{m}}{a^3}$$

当圆电流面积  $S$  很小时 ( $S \rightarrow 0$ )，可以将其称为磁偶极子。上述公式在形式上与电偶极子轴线上电场强度公式较为相像。

磁矩为  $\mathbf{m}$  的线圈在磁场中的力矩为

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

### 2.3 通电螺线管轴线上的磁感应强度



如图，螺线管半径为  $R$ ，电流为  $I$ ，单位长度的线圈数为  $n$ ，以场点为坐标原点，取一小段  $dl$ ，那么一小段上有线圈  $ndl$  匝，相当于圆电流  $I n dl$ ，由圆电流在轴线上的磁感应强度公式有

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I n dl}{(l^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

考虑几何关系  $l = R \cot \theta$ ，于是

$$B = \int_L \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I n dl}{(l^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0}{2} I n \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

对于无限长的通电螺线管， $\theta_1 \rightarrow 0, \theta_2 \rightarrow \pi$ ，于是无限长通电螺线管的磁感应强度为

$$B = \mu_0 n I$$

对于半无限长通电螺线管的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}$$

## 2.4 运动电荷的磁场

根据电流的微观表达式  $I = nqSv$ ，其中  $n$  为载流子体密度， $q$  为载流子电量， $S$  为导体的横截面积， $v$  为载流子的运动速度。对一小段电流元  $I d\mathbf{l}$  进行研究，Biot-Savart 定律可以改写为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{nqSv d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

考虑到载流子运动方向与电流元的方向相同，以速度矢量  $\mathbf{v}$  代替  $d\mathbf{l}$ ，得到

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(nqS d\mathbf{l}) \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

而上述  $d\mathbf{B}$  为电流元内所有电荷激发的磁场，电流元含有载流子数量  $dN = nS d\mathbf{l}$ ，因此单个电荷激发的磁场为

$$\mathbf{B}_q = \frac{d\mathbf{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v} \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$

## 3 磁 Gauss 定理和 Ampère 环路定理

因为磁场为无源场，因此穿过闭合曲面的磁通量为零，即磁场的 Gauss 定理

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

沿着闭合曲线磁感应强度  $\mathbf{B}$  的线积分等于真空磁导率乘以穿过以该闭合曲线为边界的任意曲面的恒定电流代数和，即 Ampère 环路定理

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$$

电流的符号：若积分的绕行方向与电流方向满足右手螺旋定则，则取正号。

使用 Ampère 环路定理可以十分容易地推出 无限长直导线的磁感应强度 和 螺线管磁感应强度，且可以推出无限长通电螺线管内任意一点磁感应强度均相同。

## 4 带电粒子在磁场中的运动

Lorentz 力：  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

如果带电粒子速度与磁场方向垂直，Lorentz 力始终垂直于速度方向，因而带电粒子在磁场做圆周运动，有

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \implies R = \frac{mv}{qB}$$

因而周期为

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

如果初速度不完全垂直于磁场方向，设速度与磁场方向夹角为 $\theta$ ，那么速度的两个分量 $v_{\perp} = v \sin \theta$ ,  $v_{\parallel} = v \cos \theta$ ，运动轨迹为螺旋线，因而螺旋线的半径和螺距为

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \theta}{qB} \quad h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m v_0 \cos \theta}{qB}$$

## 5 磁场对载流导线的作用

对于导体内的一个载流子，其受到Lorentz力

$$\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

电流元 $I d\mathbf{l}$ 内的载流子数目为 $nSdl$ 个，其中 $n$ 为载流子体密度，那么电流元受力（Ampère力）为

$$d\mathbf{F} = (nSdl)\mathbf{f} = nSqdl\mathbf{v} \times \mathbf{B} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

如果是两个电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ ,  $I_2 d\mathbf{l}_2$ 相互作用，计算其中一个电流元受力（如 $I_2 d\mathbf{l}_2$ ），可以将另一个电流元视为磁场源，由Biot-Savart定律，电流元1在电流元2处的磁场为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3}$$

其中 $\mathbf{r}_{21}$ 是电流元1指向电流元2的矢量。再利用Ampère力的计算公式计算电流元2受到的作用力

$$\mathbf{F} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I_2 d\mathbf{l}_2) \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{21})}{r_{21}^3}$$

此式即为Ampère定律。

Ampère力做功

$$dW = d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = I d\Phi$$

$$W = I \Delta \Phi$$

## 6 磁介质

### 6.1 磁化强度

磁化强度是单位体积内分子磁矩的矢量和，即

$$\mathbf{M} = \frac{\sum \mathbf{m}}{\Delta V}$$

顺磁质被磁化后， $\mathbf{M}$ 的方向与外磁场方向相同，在磁介质内的激发的附加磁场 $\mathbf{B}'$ 方向与外磁场方向相同；抗磁质被磁化后， $\mathbf{M}$ 的方向与外磁场方向相反，在磁介质内的激发的附加磁场 $\mathbf{B}'$ 方向与外磁场方向相反。

磁介质在磁场内发生磁化后，其表面会产生磁化电流，记磁化电流线密度为 $\alpha' = I'/l$ ，又根据磁矩的定义，取一个斜柱体体积元 $\Delta V$ ，底面面积为 $\Delta S$ ，斜柱体长度为 $dl$ ， $dl$ 与 $\mathbf{M}$ 的夹角为 $\theta$

$$\sum m = I' \Delta S = \alpha' \Delta S dl$$

又由磁化强度的定义得

$$\sum m = M \Delta V = M \Delta S dl \cdot \cos \theta$$

比较得到（体积元的界面为柱体侧面，记体积元界面法向为 $\hat{\mathbf{e}}_n$ ，有 $\hat{\mathbf{e}}_n \perp d\mathbf{l}$ ）

$$\alpha' = M \cos \theta = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{e}}_n$$

于是有

$$dI' = \alpha' dl = M dl \cos \theta = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

积分得到磁化电流

$$I' = \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

如果是两个介质界面之间的磁化电流密度，表达式为

$$\alpha' = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \times \hat{\mathbf{e}}_n$$

## 6.2 有磁介质的Gauss定理

有磁介质时，总的磁感应强度为外磁场 $\mathbf{B}_0$ 和附加磁场 $\mathbf{B}'$ 磁感应强度之和，即 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$ ，磁化电流产生的附加磁场仍然满足Gauss定理，因而

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}') \cdot d\mathbf{S} = 0$$

推论：两个介质之间的磁感应强度在界面的法向方向上是相等的。

## 6.3 有磁介质的Ampère环路定理

有磁介质时，磁场还有一部分由磁化电流贡献，即

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left( \sum_i I_i + \sum_i I'_i \right) = \mu_0 \left( \sum_i I_i + \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \right)$$

定义**磁场强度**为 $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ ，从而有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i I_i$$

此式即为**有磁介质的Ampère环路定理**。

对于各向同性、线性的磁介质，存在以下关系，其中 $\chi_m$ 为磁化率

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

因而

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} = (1 + \chi_m) \mu_0 \mathbf{H}$$

将 $\mu_r = 1 + \chi_m$ 称为**相对磁导率**， $\mu = \mu_0 \mu_r$ 称为**磁导率**。

# 电磁感应

## 1 电磁感应定律

电动势定义为电源将单位正电荷从负极经电源内移到正极非静电力所做的功。

$$\varepsilon = \int_{-}^{+} \frac{\mathbf{F}}{q} \mathrm{d}l = \int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}l$$

其中  $\mathbf{F}$  为非静电力， $\mathbf{E}$  为非静电力的场强。

Faraday 电磁感应定律

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

对于  $N$  匝的线圈，穿过第  $i$  匝的磁通量为  $\Phi_i$ ，则公式为

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \sum_i \Phi_i \right)$$

如果  $\Phi_i$  均相等均为  $\Phi$ ，那么

$$\varepsilon = -N \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$N\Phi$  称为线圈的磁链。

## 2 动生电动势

自由电荷在磁场中运动的受力

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

非静电力的场强

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

导体棒  $ab$  的动生电动势

$$\varepsilon = \int_a^b \mathbf{E}_k \cdot \mathrm{d}l = \int_a^b \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}l$$



### 3 感生电场

对于闭合回路

$$\varepsilon = \oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_i = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

即变化磁场产生电场，感生电场有旋无源。

#### 3.1 圆形变化磁场的感生电场

圆形磁场半径为 $R$ ，磁感应强度 $\mathbf{B}$ 变化且与平面法向平行，对于磁场内（ $r < R$ ），由Faraday电磁感应定律

$$\oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = E \cdot (2\pi r) = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot (\pi r^2)$$

于是感生电场大小为

$$E_i = -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

对于磁场外部，同样易得感生电场大小为

$$E_i = -\frac{R^2}{2r} \frac{\partial B}{\partial t}$$

### 4 自感

线圈的磁链为

$$\Psi = \sum_i \Phi_i$$

定义自感为

$$\Psi = LI \quad L = \frac{\Psi}{I}$$

于是由Faraday电磁感应定律

$$\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

### 4.1 密绕螺线管的自感

螺线管长度为 $l$ ，匝数为 $N$ ，电流为 $I$ ，横截面积为 $S$ ，于是磁感应强度为

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

磁通量为

$$\Phi = BS = \mu_0 \frac{N}{l} IS$$

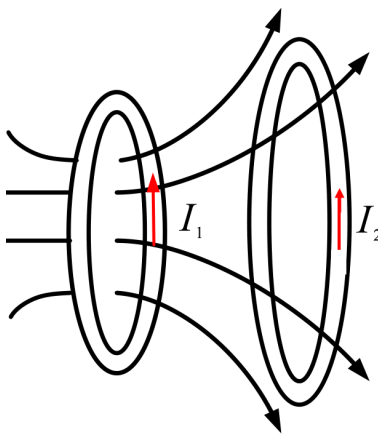
磁链为（每一匝磁通量相同）

$$\Psi = N\Phi = \mu_0 \frac{N^2}{l} IS$$

于是密绕螺线管的自感为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$$

## 5 互感



两个线圈分别通有电流 $I_1, I_2$ ，线圈1对线圈2磁链的贡献为 $\Psi_{21}$ ，线圈2对线圈1磁链的贡献为 $\Psi_{12}$ ，于是

$$\Psi_{21} = M_{21} I_1$$

$$\Psi_{12} = M_{12} I_2$$

其中 $M_{12} = M_{21} = M$ ，由此，互感电动势为

$$\varepsilon_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

$$\varepsilon_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

### 5.1 两个串联线圈的等效自感

对于两个串联线圈，若为顺接串联

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= L_1 I + M I \\ \Psi_2 &= L_2 I + M I \\ \Psi &= \Psi_1 + \Psi_2 = (L_1 + L_2 + 2M) I \\ L &= L_1 + L_2 + 2M\end{aligned}$$

若为反接串联

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= L_1 I - M I \\ \Psi_2 &= L_2 I - M I \\ \Psi &= \Psi_1 + \Psi_2 = (L_1 + L_2 - 2M) I \\ L &= L_1 + L_2 - 2M\end{aligned}$$

## 6 磁场能量

$$W_m = \frac{1}{2} L I_0^2$$

磁场能量密度

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2} B H$$

磁场总能量

$$W_m = \iiint_{\Omega} w_m dV = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} dB$$

### 6.1 互感磁能

两个线圈，自感系数分别为 $L_1, L_2$ ，分别通有电流 $I_1, I_2$ ，互感系数为 $M$ ，若磁场方向一致

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

若两个线圈磁场方向相反，则

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - M I_1 I_2$$

上式中， $\frac{1}{2} L_1 I_1^2, \frac{1}{2} L_2 I_2^2$ 项为自感磁能， $M I_1 I_2$ 为互感磁能。

## 7 位移电流

位移电流密度

$$\mathbf{j}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

位移电流

$$I_d = \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

全电流为位移电流与传导电流的加和，全电流不会中断，于是Ampère环路定理变为

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c + I_d = \iint_S (\mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S}$$

## 8 Maxwell方程组

电磁场满足的方程组

$$\begin{aligned}\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_\Omega \rho dV \\ \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \iint_S (\mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}$$

微分形式为

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

## 9 电磁波

在自由空间中， $\mathbf{j}_c = 0, \rho = 0$ ，于是Maxwell方程组变为

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

可以得到波动方程

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} &= \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{H} &= \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

于是电磁波的波速

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}}$$

沿着 $x$ 正向传播的电磁波, 若电场分量沿 $y$ 轴方向, 则其电磁分量为

$$\begin{aligned}E_y &= E_0 \cos \omega(t - \frac{x}{u}) \\ H_z &= H_0 \cos \omega(t - \frac{x}{u})\end{aligned}$$

且电磁分量之间振幅满足

$$\sqrt{\mu}H_0 = \sqrt{\varepsilon}E_0 \quad \text{or} \quad E_0 = cB_0$$

平面电磁波的性质:

- 电场分量和磁场分量同相位
- 电场分量 $\mathbf{E}$ 、磁场分量 $\mathbf{H}$ 、传播速度 $\mathbf{u}$ 满足 $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})//\mathbf{u}$

## 9.1 Poynting矢量

Poynting矢量为电磁波的能流密度, 即

$$\mathbf{S} = w\mathbf{u}$$

又电磁波的能量密度

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$$

考虑到 $\sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}E, u = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ , 于是

$$w = \sqrt{\mu\varepsilon}EH = EH u$$

于是Poynting矢量的大小为

$$S = \frac{w}{u} = EH$$

矢量形式为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$$

电磁波的平均能流密度为

$$\bar{S} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} E_0 H_0 \cos^2 \omega(t - \frac{x}{u}) dt = \frac{1}{2} E_0 H_0$$

# 光学

## 1 光程

光波在某一媒质中所经历的几何路程与这媒质的折射率的乘积为光程

$$L = \sum_i n_i l_i$$

光程差

$$\delta = L_2 - L_1$$

相位差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

透镜不会带来附加的光程差。

## 2 半波损失

当光由折射率较小的介质（光疏介质）入射到折射率较大的介质（光密介质）时，入射光与反射光的相位差为 $\pi$ （相当于反射光的光程差多了 $\lambda/2$ ）；反之则相位差为0，反射的瞬间不影响光程差。

## 3 光的干涉

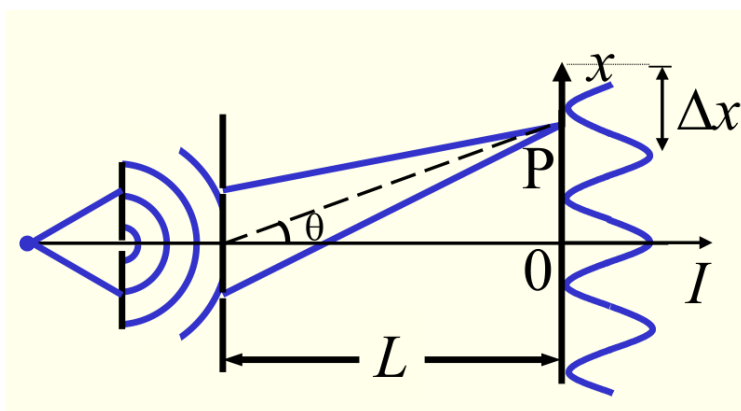
### 3.1 Young氏双缝干涉

振动方向和频率相同的两束光相遇

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{10} \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1) \\ E_2 &= E_{20} \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2) \\ E &= \sqrt{E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos \Delta\varphi} \quad \Delta\varphi = k(r_2 - r_1) + \varphi_2 - \varphi_1 \end{aligned}$$

光强

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi$$



双缝间距为 $d$ ，在屏上的角位置为 $\theta$ （很小），光屏距离双缝距离 $L$ ，在Young氏双缝干涉中，光程差 $\delta \approx d \sin \theta$ ，又由于 $\sin \theta \approx \tan \theta = \Delta x / L$ ，故 $\delta = d \Delta x / L$ 。

干涉时明条纹和暗条纹满足光程差

$$\delta = \begin{cases} n\lambda & , \text{明条纹} \\ (n + \frac{1}{2})\lambda & , \text{暗条纹} \end{cases}$$

条纹间距为

$$\Delta x = \frac{L}{d} \lambda$$

对于波长为 $\lambda$ 和 $\lambda + \Delta\lambda$ 的两束光， $\lambda \gg \Delta\lambda$ ，假设前者的 $(m + 1)$ 级明纹和后者的 $m$ 级明纹重合，有

$$\delta_{\max} = (m + 1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda)$$

解得

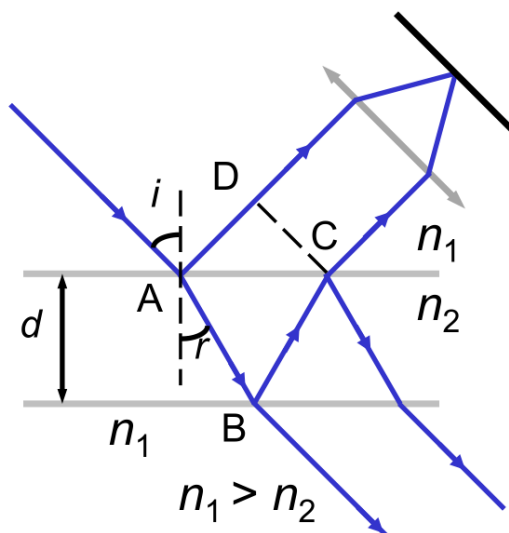
$$m = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

于是

$$\delta_{\max} = \frac{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

### 3.2 等倾干涉





如图，折射率 $n_2 > n_1$ ，两束反射光通过透镜在上方屏上发生等倾干涉，光程差为ABC光程和AD光程的差（透镜不引入附加光程差），由于入射光反射后反射光存在**半波损失**，故光程为

$$\delta = AB + BC - AD + \frac{\lambda}{2} = \frac{2d}{\cos r} - 2d \tan r \sin i + \frac{\lambda}{2}$$

又根据折射定律（可以由Fresnel原理得出）

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

于是

$$\sin r = \frac{n_1}{n_2} \sin i \quad \cos r = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 i}$$

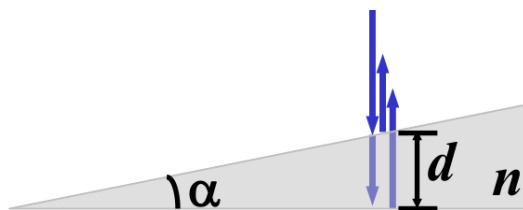
于是光程差为

$$\delta = \frac{2d}{\cos r} \left( 1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 i \right) + \frac{\lambda}{2} = 2d \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$$

注意：

- 如果是两束**透射光**透过透镜发生等倾干涉，由于**无半波损失**，形成的条纹与反射光互补。
- 要根据折射率的大小来判断半波损失的有无！

### 3.3 等厚干涉



膜上下表面的反射光相遇发生干涉，膜的折射率为 $n$ ，由于上表面的反射光存在半波损失，于是光程差为

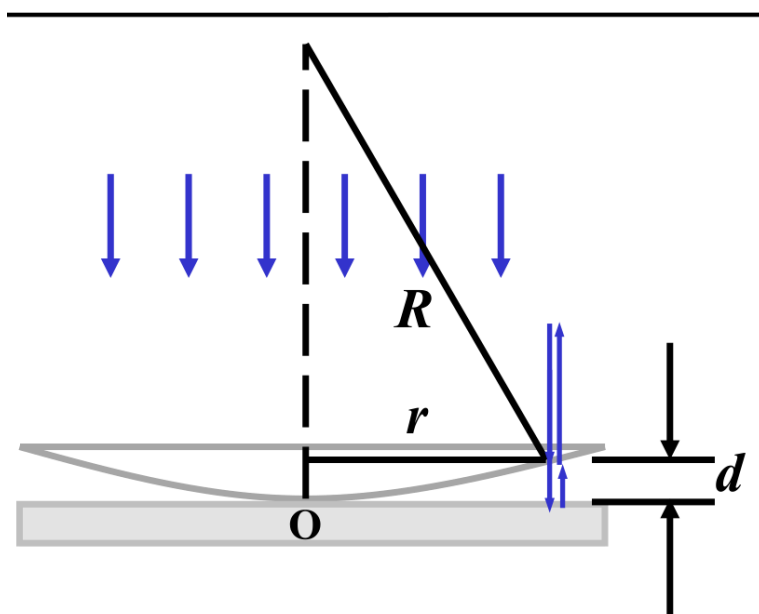
$$\delta = 2nd + \frac{\lambda}{2}$$

(注意半波损失有无要由折射率判断)

当 $\delta = k\lambda$ 得到明条纹，于是相邻条纹对应高度差

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2n}$$

### 3.4 Newton环



假设透镜之间介质为折射率为 $n$ ，透镜半径为 $R$ ，假设图中 $r$ 对应圆心角为 $\theta$ （很小），则

$$d = R(1 - \cos \theta) \approx \frac{R\theta^2}{2} \approx \frac{R \sin^2 \theta}{2} = \frac{R}{2} \frac{r^2}{R^2} = \frac{r^2}{2R}$$

光程差为（在平板玻璃反射，存在半波损失）

$$\delta = 2nd + \frac{\lambda}{2} = \frac{nr^2}{R} + \frac{\lambda}{2}$$

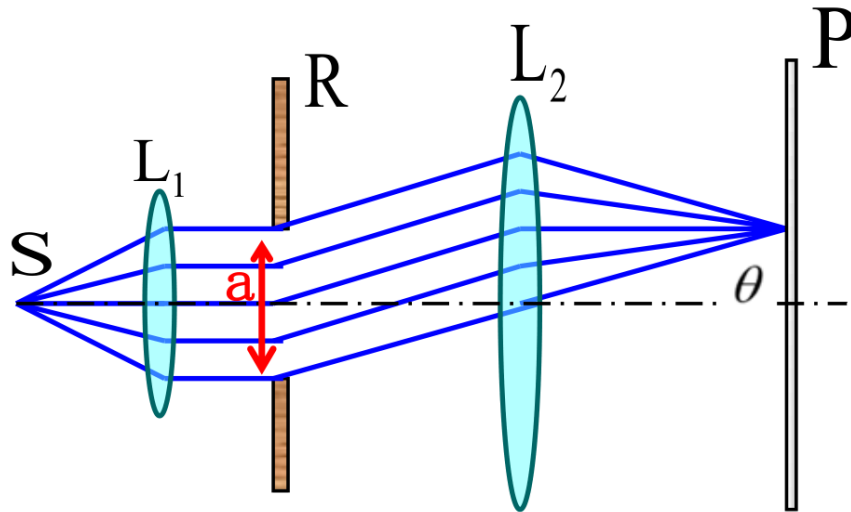
根据干涉的明纹和暗纹条件，得到

$$r = \begin{cases} \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}} & , \text{明纹} \\ \sqrt{kR\lambda} & , \text{暗纹} \end{cases}$$

牛顿环变化的判断：对于同一级条纹，如果条纹半径 $r$ 减小，为向内收缩；反之，为向外扩张。

## 4 光的衍射

### 4.1 Fraunhofer衍射



单缝宽度为 $a$ ，透镜焦距为 $f$ ，单缝衍射的强度为

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad \beta = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

单缝衍射的明纹、暗纹条件（可以Fresnel半波带法解释）

$$a \sin \theta = \begin{cases} \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2} & , \text{明纹 奇数个半波带} \\ \pm 2k\frac{\lambda}{2} & , \text{暗纹 偶数个半波带} \end{cases}$$

条纹距离中心的位置为

$$x = f \tan \theta \approx f\theta$$

于是条纹宽度（除了中央明纹）

$$\Delta x = \frac{f\lambda}{a}$$

对于中央明纹，其宽度为

$$\Delta x_0 = 2\Delta x = \frac{2f\lambda}{a}$$

双缝干涉和单缝衍射明纹、暗纹条件

	明纹	暗纹
单缝衍射	$a \sin \theta = \pm(2k+1)\lambda/2$	$a \sin \theta = \pm k\lambda$
双缝干涉	$d \sin \theta = \pm k\lambda$	$d \sin \theta = \pm(2k+1)\lambda/2$

## 4.2 圆孔衍射

圆孔直径为 $D$ ，发生圆孔衍射后Airy斑对应角位置为 $\theta$ ，满足

$$D \sin \theta = 1.22\lambda$$

光学仪器的最小分辨角

$$\delta\theta \approx \sin \delta\theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$

分辨本领

$$R = \frac{1}{\delta\theta} = \frac{D}{1.22\lambda}$$

## 4.3 光栅衍射

光栅透光部分长度为 $a$ ，不透光部分长度为 $b$ ，光栅常数为

$$d = a + b$$

发生多缝干涉，缝数为 $N$ ，相邻两孔光程差为 $d \sin \theta$ ，于是相位差为

$\varphi = 2\pi d \sin \theta / \lambda$ ，干涉光强为

$$I_i = I_0 \left( \frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)^2$$

光栅衍射的光强还要考虑衍射的效果，记 $\alpha = \pi a \sin \theta / \lambda$ ，于是衍射光强为

$$I_i = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)^2$$

于是多缝干涉明纹条件为

$$d \sin \theta = k\lambda$$

于是 $k$ 的最大取值为

$$|k|_{\max} = \left[ \frac{d}{\lambda} \right]$$

对于暗纹, 有

$$N\varphi = 2k\pi \quad d \sin \theta = \frac{k}{N}\lambda \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

当 $k = N$ 时, 满足明纹条件, 故相邻两个主极大之间有 $N-1$ 个暗纹, 有 $N-2$ 个次极大。

若满足衍射极小条件, 将发生缺极, 即

$$a \sin \theta = m\lambda$$

又有 $d \sin \theta = k\lambda$ , 故缺极条件为

$$\frac{d}{a} = \frac{k}{m}$$

如果光栅不是垂直入射的, 在光入射前也存在光程差, 记入射光线与光栅法线夹角为 $\alpha$ , 出射光线与光栅法线夹角为 $\theta$ , 此时光程差为

$$\delta = d(\sin \alpha + \sin \theta)$$

#### 4.3.1 光栅的分辨能力

光栅的分辨能力定义为

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

光栅缝数为 $N$ , 当波长 $\lambda$ 的 $k$ 级主极大和波长 $\lambda + \Delta\lambda$ 的最邻近的暗纹重合, 即

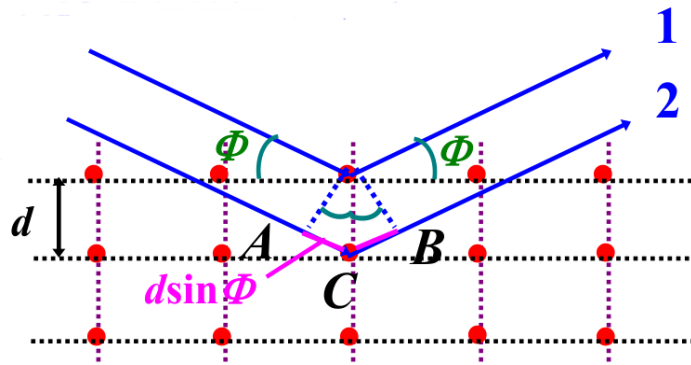
$$k\lambda = \frac{kN-1}{N}(\lambda + \Delta\lambda)$$

于是得到

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN - 1 \approx kN$$

### 4.3.2 Bragg衍射

X射线在晶体表面可以发生衍射，一般沿反射方向射线强度较大



Bragg衍射的光程差为

$$\delta = 2d \sin \theta$$

两束光线衍射加强的条件为

$$2d \sin \theta = k\lambda$$

## 5 光的偏振

### 5.1 Malus定律

光强为 $I_0$ 的偏振光穿过偏振片，振动方向与检偏方向夹角为 $\alpha$ ，则出射光强为

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

对于自然光穿过偏振片，出射光强为原来的一半。

### 5.2 Brewster角

当自然光以角度 $\theta_B$ 入射到两种介质界面，入射光所在介质折射率为 $n_1$ ，折射光所在介质折射率为 $n_2$ 。当反射光与折射光垂直时，折射光为部分偏振光，反射光为振动方向垂直于入射面的偏振光。

反射光与入射光垂直，于是有

$$i + r = \frac{\pi}{2}$$

根据折射定律

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

于是

$$n_1 \sin i = n_2 \cos i \quad \text{即} \quad \tan i = \frac{n_2}{n_1}$$

即Brewster角为

$$\theta_B = \arctan \frac{n_2}{n_1}$$

**注意：**按照Brewster角入射的光，**如果只有平行平面振动的分量，不会发生反射**（因为反射光必须为垂直于平面振动的偏振光）。

## 6 双折射现象

光轴：晶体中某一方向，光沿此方向入射不发生双折射现象。光线与光轴构成的平面为主平面。

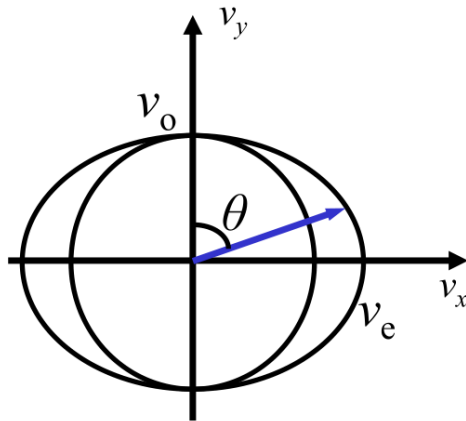
寻常光（o光）：振动方向与主平面垂直（振动方向始终与光轴垂直），波阵面为球面。

非常光（e光）：振动方向与主平面平行（振动方向不始终与光轴垂直），波阵面为椭球面。

o光折射率处处相同为 $n_o$ ，e光折射率各向异性，定义垂直光轴的折射率为主折射率 $n_e$ ，那么进入晶体后两束光的光程差为

$$\delta = (n_o - n_d)d$$

### 6.1 光在双折射介质中的传播速度



光线在介质中与光轴夹角为 $\theta$ ，绘制o光和e光的波阵面，满足椭圆方程

$$\frac{v_x^2}{v_e^2} + \frac{v_y^2}{v_o^2} = 1$$

根据几何关系有

$$v_x = v \sin \theta \quad v_y = v \cos \theta$$

根据光传播速度与折射率的关系

$$v_e = \frac{v}{n_e} \quad v_o = \frac{v}{n_o}$$

于是得到介质内的光速为

$$v = \frac{c}{\sqrt{n_o^2 \cos^2 \theta + n_e^2 \sin^2 \theta}}$$

## 6.2 1/2波片

对于1/2波片，o光和e光之间相位差为 $\Delta\varphi = \pi$ ，光线偏振方向与光轴夹角为 $\alpha$ 入射，得到的出射光与原入射光夹角为 $2\alpha$ 。

椭圆偏振光经过1/2波片后仍然是椭圆偏振光，线偏振光经过1/2波片后仍然是线偏振光。

自然光经过任何玻片还是自然光。

## 6.3 1/4波片

对于1/4波片，o光和e光之间相位差为 $\Delta\varphi = \pi/2$ 。

椭圆偏振光经过1/4波片后仍然是椭圆偏振光，线偏振光经过1/4波片后为椭圆偏振光，圆偏振光经过1/4波片后为线偏振光。

## 6.4 偏振光的检验

光	偏振片	1/4波片+偏振片
自然光	光强不变	光强不变
圆偏振光	光强不变	光强改变，某一位置消光
线偏振光	某一位置消光	



光	偏振片	1/4波片+偏振片
部分偏振光	光强改变，不消光	光强改变，不消光
椭圆偏振光	光强改变，不消光	转动波片和偏振片到某一位置消光

# 量子力学

## 1 黑体

### 1.1 辐出度和单色辐出度

单色辐出度：物体在单位时间内单位面积发出波长为 $\lambda$ 附近单位波长间隔的电磁波能量

$$M_{\lambda}(T) = \frac{dE_{\lambda}}{d\lambda}$$

辐出度：物体在单位时间内单位面积发出各种波长的电磁波能量

$$M(T) = \int_0^{\infty} M_{\lambda}(T) d\lambda$$

辐出度与面积的乘积为辐射的功率，即 $P = M \cdot S$

### 1.2 Kirchhoff定律

某温度下物体在不同波长下单色辐出度和单色吸收比的比值为定值

$$\frac{M_1(\lambda, T)}{\alpha_1(\lambda, T)} = \frac{M_2(\lambda, T)}{\alpha_2(\lambda, T)} = \dots = \frac{M_n(\lambda, T)}{\alpha_n(\lambda, T)} = M_0(\lambda, T)$$

对于黑体，单色吸收比 $\alpha = 1$ ，于是对于黑体

$$M(\lambda, T) = M_B(\lambda, T)$$

### 1.3 黑体辐射规律

#### 1.3.1 Stefan-Boltzmann定律

黑体的辐出度与温度的四次方成正比

$$M_B = \sigma T^4$$

### 1.3.2 Wien位移定律

黑体辐射的峰值波长与温度成反比，即

$$\lambda_{\max} T = b$$

## 2 量子化

### 2.1 光电效应

Einstein光电效应方程

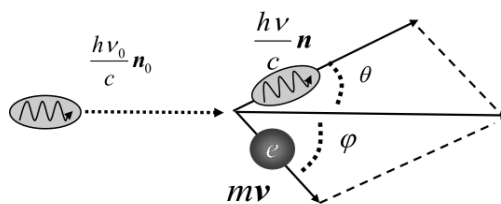
$$E_k = h\nu - A$$

其中 $E_k$ 为光电子最大初动能， $A$ 为金属材料的逸出功。

光电效应的实验规律：

- 增加电压，光电流增加直至饱和；
- 电流饱和值正比于光强；
- 遏止电压只与光的频率有关；
- 只有光的频率高于截止频率 $\nu_0 = A/h$ 才会发生光电效应；
- 光电效应瞬间发生；
- 遏止电压 $eU_s = \frac{1}{2}mv_m^2$

### 2.2 Compton效应



波长为 $\lambda_0$ 的X射线与静止的自由电子发生碰撞，散射后X射线波长为 $\lambda$ ，电子的静止质量为 $m_0$ ，碰撞后质量为 $m$ ，由动量守恒

$$\frac{h}{\lambda_0} \mathbf{n}_0 = \frac{h}{\lambda} \mathbf{n} + m\mathbf{v}$$

由能量守恒

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2 \quad \text{即} \quad \frac{hc}{\lambda_0} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda} + mc^2$$

$$\frac{h}{\lambda_0} + m_0c = \frac{h}{\lambda} + mc$$

考虑相对论效应

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

得到

$$m^2v^2 = (m^2 - m_0^2)c^2$$

根据动量的几何关系，由余弦定理

$$\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - \frac{2h^2}{\lambda_0\lambda}\cos\theta = (mv)^2 = (m^2 - m_0^2)c^2$$

能量守恒式得到

$$mc = m_0c + \left(\frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda}\right)$$

$$(m^2 - m_0^2)c = 2m_0c \left(\frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda}\right) + \left(\frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda}\right)^2$$

$$= 2m_0c \left(\frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda}\right) + \left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - \frac{2h^2}{\lambda_0\lambda}$$

代入上式，得到

$$\frac{2h^2}{\lambda_0\lambda}(1 - \cos\theta) = 2m_0c \left(\frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda}\right) \quad \text{即} \quad h(1 - \cos\theta) = m_0c(\lambda - \lambda_0)$$

最终得到**波长的变化值**

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) = \frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

静止自由电子获得的动能为

$$E = mc^2 - m_0c^2 = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

## 2.3 Bohr氢原子理论

- 原子中的电子只能在一些分裂的轨道上运行，在每一个轨道上运动电子处于稳定的能量状态。
- 当电子从一个能态轨道向另一个能态轨道跃迁时，要发射或吸收光子。
- 轨道的角动量呈量子化，即

$$L = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

**注意：**在Bohr氢原子理论中，轨道角动量不能为0；而在量子力学中，轨道角动量可以为0。

在氢原子中，Coulomb力提供向心力

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \quad \text{得到} \quad r_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mv_n^2}$$

根据角动量量子化条件有

$$L = mv_n r_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 v_n} = n \frac{h}{2\pi}$$

于是可得

$$v_n = \frac{e^2}{2nh\epsilon_0} \quad r_n = n^2 \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

记 $r_1 = \epsilon_0 h^2 / \pi m e^2$ 为波尔半径，则 $r_n = n^2 r_1$ 。

氢原子轨道的能量为

$$E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} \approx \frac{-13.6\text{eV}}{n^2}$$

## 2.4 de Broglie波

任何物体都具有波粒二象性，满足

$$E = h\nu \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

如果电子在经典的圆轨道上运动，其应对应一环形驻波，满足

$$2\pi r = n\lambda = n \frac{h}{mv}$$

于是

$$L = rmv = n \frac{h}{2\pi}$$

Davisson-Germer电子衍射实验，G.P.Thomson电子衍射实验证明了物质波的存在。

## 3 波函数

### 3.1 不确定性原理

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

光子位置-动量不确定性关系有

$$(c\Delta t) \left( \frac{\Delta E}{c} \right) \geq \frac{\hbar}{2}$$

于是有

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

### 3.2 波函数

波函数可以表示为 $\Psi(x, t) = \Psi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t\right)$ ，以复变函数表示，为

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

根据de Broglie假设，有

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \hbar k$$

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

于是波函数可以表示为

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x)}$$

对于三维空间运动的粒子，波函数为

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}$$

$\Psi(\mathbf{r}, t)$ 没有直接的物理意义，但其模的平方表示粒子在空间出现的概率密度

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \Psi(\mathbf{r}, t)\Psi^*(\mathbf{r}, t)$$

在体积元 $dV$ 发现粒子的概率

$$dw = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV$$

波函数满足的条件:

1. 单值。保证概率密度在任何位置都是确定值。
2. 有界。在空间任何有限体积元中找到粒子的概率为有限值。
3. 连续。波函数 $\Psi(x, t)$ 及其一阶导数 $\Psi'(x, t)$ 连续。

全空间找到粒子的概率为1, 得到波函数的归一化条件

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}, t) dV = \int_{\Omega} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV = 1$$

### 3.3 Schrödinger方程

将波函数对时间 $t$ 求导, 得到

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E \Psi(x, t) \quad \text{于是} \quad i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = E \Psi(x, t)$$

故定义**能量算符**

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

将波函数对位置 $x$ 求导, 得到

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} p \Psi(x, t) \quad \text{于是} \quad -i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} = p_x \Psi(x, t)$$

故定义**动量算符**

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

对于三维运动, 动量算符为

$$\hat{p} = -i\hbar \nabla$$

于是**动能算符**

$$\hat{E}_k = \frac{\hat{p} \cdot \hat{p}}{2m} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2$$

对位置 $x$ 再次求导, 有

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{p_x^2}{\hbar^2} \Psi(x, t)$$

对于自由粒子，没有势能，能量  $E = \frac{p_x^2}{2m}$ ，于是得到自由粒子的Schrödinger方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = E \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$$

对于在势场  $U(x, t)$  的粒子，其Schrödinger方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x, t) \Psi(x, t) = E \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$$

定义**Hamilton算符**为

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x, t)$$

于是

$$\hat{H} \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$$

对于三维势场  $U(\mathbf{r}, t)$ ，Hamilton算符为

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}, t)$$

### 3.3.1 定态Schrödinger方程

若势能函数  $U$  与时间无关，则为定态问题。此时用分离变量法求解Schrödinger方程。

$$\Psi(x, t) = \psi(x) T(t)$$

$$\text{又 } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$$

于是有

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + U(x) \psi(x) \right] T(t) = i\hbar \frac{\partial T(t)}{\partial t} \cdot \psi(x)$$

即

$$i\hbar \frac{1}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = \frac{1}{\psi(x)} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + U(x) \psi(x) \right]$$

等式右边与  $t$  无关，可视为一个常数  $E$ （类似于能量），于是有



$$i\hbar \frac{1}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = E$$

方程的解为 ( $T_0$  为一个常数)

$$T(t) = T_0 e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

同时也有方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + U(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

为定态Schrödinger方程。

### 3.4 态叠加原理

$\Psi_1(x, t)$  是粒子运动的一个态,  $\Psi_2(x, t)$  是粒子运动的另一个态, 其线性叠加也是描述粒子运动的一个态

$$\Psi(x, t) = c_1 \Psi_1(x, t) + c_2 \Psi_2(x, t)$$

对于某算符  $\hat{F}$  的本征值为  $\lambda_i$  的本征态  $\varphi_i$ , 若粒子处于以下叠加态

$$\Psi = \sum_i C_i \varphi_i$$

当对粒子进行测量, 测量会使波函数坍缩, 只能观察到其中一个本征态, 观察到本征值为  $\lambda_i$  的概率为  $|C_i|^2$ 。

### 3.5 一维定态问题

#### 3.5.1 一维无限深势阱

$$\text{势能函数 } U(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ \infty, & \text{else} \end{cases}$$

根据定态Schrödinger方程, 在势阱内

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_1(x)}{dx^2} = E \psi_1(x)$$

可得

$$\psi_1(x) = C \sin(kx + \delta) \quad \text{其中 } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

在势阱外

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + \infty \cdot \psi_2(x) = E\psi_2(x)$$

又 $\psi_2(x)$ 有界，故 $\psi_2(x) = 0$ 。

又有边界条件

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) = 0 \\ \psi_1(a) = \psi_2(a) = 0 \end{cases}$$

得到

$$\sin \delta = 0, \sin(ka + \delta) = 0$$

于是

$$\delta = 0, ka = n\pi$$

即

$$\frac{2mE_n}{\hbar^2} a^2 = n^2 \pi^2 \quad \text{即} \quad E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

零点能为

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

由归一化条件

$$\int_0^a \psi^2(x) dx = C^2 \int_0^a \sin^2 kx dx = \frac{C^2}{k} \int_0^{n\pi} \sin^2 t dt = \frac{C^2}{k} \frac{n\pi}{2} = 1$$

于是

$$C = \sqrt{\frac{2k}{n\pi}} = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

于是一维无限深势阱的波函数为

$$\psi(x) \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x\right) & , 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \text{else} \end{cases}$$

势阱中粒子的动量

$$p = \pm \sqrt{2mE} = \pm n \frac{\pi \hbar}{a}$$

波长满足驻波条件

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2a}{n} \quad a = n \frac{\lambda}{2}$$

### 3.5.2 抛物线势阱

势能函数  $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$

定态Schrödinger方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \psi_2(x) = E\psi_2(x)$$

结论:

- 谐振子能量量子化

$$E_n = (\frac{1}{2} + n)\hbar\omega, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- 零点能  $E_1 = \frac{1}{2} \hbar\omega$
- 能量间隔均匀。

### 3.5.3 一维散射问题

$$\text{方形势垒 } U(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ U_0 & , 0 < x < a \\ 0 & , x > a \end{cases}$$

对应定态Schrödinger方程

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U_0\psi(x) = E\psi(x) & , 0 < x < a \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) & , \text{else} \end{cases}$$

于是得到

$$\begin{cases} \psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} & , x < 0 \\ \psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} & , 0 < x < a, \\ \psi_3(x) = A_3 e^{ik_1 x} + B_3 e^{-ik_1 x} & , x > a \end{cases}$$

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, k_2^2 = \frac{2m(E - U)}{\hbar^2}$$

边界条件

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0), \psi_1'(0) = \psi_2'(0) \\ \psi_2(a) = \psi_3(a), \psi_2'(a) = \psi_3'(a) \end{cases}$$

### 3.6 氢原子的量子理论

#### 3.6.1 能量量子化

氢原子电子的能量

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{n^2} = \frac{-13.6\text{eV}}{n^2}$$

$n$ 为主量子数。

#### 3.6.2 角动量量子化

氢原子电子角动量的大小

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$l$ 为角量子数。

#### 3.6.3 角动量空间取向量子化

氢原子电子角动量 $z$ 轴分量为

$$L_z = m\hbar \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$$

$m$ 为磁量子数。

角动量矢量与 $z$ 轴夹角

$$\cos \theta = \frac{L_z}{L} = \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}}$$

**Zeeman效应**证明角动量空间取向量子化。

#### 3.6.4 电子自旋

**Stern-Gerlach实验**证明了电子自旋。

电子自旋角动量

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar \quad s = \frac{1}{2}$$

电子自旋角动量 $z$ 轴分量

$$S_z = m_s \hbar \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

$m_s$ 为自旋磁量子数。