Chương 3. PHÂN HOẠCH CỦA TẬP HỢP

Phân hoạch một tập hợp là việc chia nhỏ tập này ra thành nhiều phần rời nhau. Công việc này thường gặp trong thực tế.

Do vậy, bài toán phân hoạch là một trong những bài toán tổ hợp có rất nhiều ứng dụng.

3.1. Dàn các phân hoạch của một tập hợp

Giả sử X là một tập n phần tử.

Định nghĩa 3.1: Một *phân hoạch* của tập X là một họ $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ các tập con của X thoả mãn ba tính chất sau:

1) $A_i \neq \varnothing$, $1 \leq i \leq k$
2) $A_i \cap A_j = \varnothing$, $1 \leq i < j \leq k$
3) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = X$

Ví dụ 3.2: Cho tập $X = \{1, 2, 3\}$. Tập X có 5 phân hoạch như sau:

1	$\{\{1, 2, 3\}\}$
2	$\{\{1, 2\}, \{3\}\}$
3	$\{\{1, 3\}, \{2\}\}$
4	$\{\{1\}, \{2, 3\}\}$
5	$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

Giả sử X là một tập hợp gồm n phần tử.

Giả sử $\pi = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ là một phân hoạch nào đó của tập X.

Mỗi tập con A_i thuộc phân hoạch π được gọi là một *khối*. Để đảm bảo tính duy nhất của biểu diễn thì các khối trong một phân hoạch được sắp xếp theo thứ tự tăng dần của phần tử bé nhất nằm trong mỗi khối.

Phân hoạch bao gồm k khối được gọi là *k-phân hoạch*.

Ký hiệu:

- $\Pi_k(X)$ là tập tất cả các k-phân hoạch của tập X với $k = 1, 2,..., n$.
- $\Pi(X)$ là tập tất cả các phân hoạch của tập X.

Hiển nhiên, $\Pi(X) = \Pi_1(X) \cup \Pi_2(X) \cup ... \cup \Pi_n(X)$ và họ $\{\Pi_1(X), \Pi_2(X), ... , \Pi_n(X)\}$ trở thành một phân hoạch của tập $\Pi(X)$ và ta gọi nó là *phân hoạch của các phân hoạch*.

3.1.1. Quan hệ tương đương và phân hoạch

Giả sử E là một quan hệ tương đương trên tập X. Một lớp tương đương chứa phần tử x của quan hệ E trên tập X được xác định như sau:

$$[x]_E = \{ y \mid y \in X, (x, y) \in E \}$$

Khi đó, họ các lớp tương đương $\{ [x]_E \mid x \in X \}$ trở thành một phân hoạch của tập X. Ta gọi nó là *phân hoạch sinh bởi quan hệ tương đương* E và ký hiệu là $\pi(E)$.

Ngược lại, giả sử $\pi = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ là một phân hoạch nào đó của tập X.

Xây dựng quan hệ $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \times A_i$

Hiển nhiên, đây là một quan hệ tương đương trên tập X, ta gọi nó là *quan hệ tương đương sinh bởi phân hoạch* π và ký hiệu là $E(\pi)$. Từ đây ta có khẳng định như sau.

Định lý 3.1: Số các phân hoạch trên một tập hợp bằng số các quan hệ tương đương trên tập này.

3.1.2. Thứ tự bộ phận trên các phân hoạch

Giả sử π và β là hai phân hoạch của tập X.

Định nghĩa 3.3: Ta nói rằng phân hoạch π là *phân rã* của phân hoạch β khi và chỉ khi mỗi khối của phân hoạch β là hợp của một số khối của phân hoạch π, và ta viết $\pi \leq \beta$.

Ví dụ 3.4: Cho tập $X = \{a, b. c, d, e\}$ và các phân hoạch sau:

$$\pi = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\},\ \beta = \{\{a, b, c\}, \{d, e\}\}$$
$$\text{và } \gamma = \{\{a, e\}, \{b, c, d\}\}$$

Khi đó thì $\pi \leq \beta$, còn γ không so sánh được cả với π và β.

Quan hệ phân rã $\leq$ bảo toàn sự bao hàm của các quan hệ tương đương sinh bởi các phân hoạch tương ứng. Cụ thể là:

$$\forall \pi, \beta \in \Pi(X) \ : \qquad \pi \leq \beta \quad \Leftrightarrow \quad E(\pi) \subseteq E(\beta)$$

3.1.3. Dàn các phân hoạch

Tập các phân hoạch của tập X với quan hệ phân rã đã trở thành một tập có thứ tự bộ phận $(\Pi(X), \leq)$. Ta sẽ biến nó thành một dàn để ứng dụng vào nhiều lĩnh vực khác.

Giả sử π và β là hai phân hoạch của tập X, với $\pi = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ và $\beta = \{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$.

1) *Cận dưới của hai phân hoạch*:

$$\pi \wedge \beta = \{ A \cap B \mid A \in \pi, B \in \beta, A \cap B \neq \varnothing \}$$

Khi đó, ta có: $E(\pi \wedge \beta) = E(\pi) \cap E(\beta)$

Vậy cận dưới của hai phân hoạch có thể xác định nhờ giao của các quan hệ tương đương sinh bởi hai phân hoạch này.

2) *Cận trên của hai phân hoạch*:

Xây dựng đồ thị hai phần $G(\pi,\beta)$, trong đó:
- các đỉnh ở phần bên trái là các khối của phân hoạch π
- các đỉnh ở phần bên phải là các khối của phân hoạch β

- nếu $A_i \cap B_j \neq \varnothing$ với $A_i \in \pi$ và $B_j \in \beta$ thì sẽ có một cạnh (A_i, B_j) trong đồ thị này.

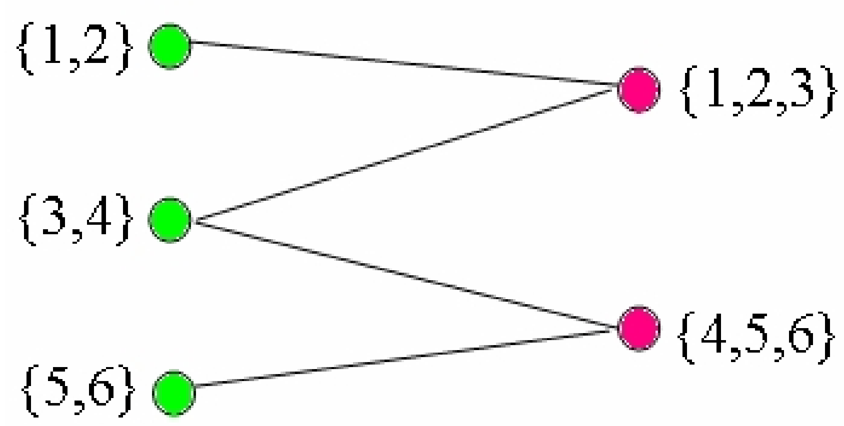
Khi đó, cận trên của hai phân hoạch π và β, ký hiệu là $\pi \vee \beta$, là một phân hoạch của tập X mà mỗi khối của nó là hợp của các đỉnh thuộc một thành phần liên thông của đồ thị $G(\pi,\beta)$.

Ví dụ 3.5: Cho tập $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và các phân hoạch $\pi = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$, $\gamma = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$.

Hai phân hoạch π và γ không so sánh được với nhau, nhưng vẫn xác định được cận dưới và cận trên của chúng như sau:

$$\pi \wedge \gamma = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5, 6\}\}$$

Đồ thị $G(\pi,\beta)$ là:



Đồ thị này liên thông và $\pi \vee \gamma = \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

Định lý 3.2: Tập tất cả các phân hoạch của một tập hợp với hai phép toán cận dưới $\wedge$ và cận trên $\vee$ xác định như trong mục 1) và 2) trở thành một dàn và gọi là *dàn các phân hoạch* của một tập hợp.

Chú ý rằng, $E(\pi) \cup E(\beta) \subseteq E(\pi \vee \beta)$

3.2. Các số Stirling và các số Bell

3.2.1. Các số Stirling loại hai

Định nghĩa 3.6: *Số Stirling loại hai* $S(n,k)$ là số tất cả các k-phân hoạch của tập n phần tử. Nghĩa là:

$$S(n,k) = |\Pi_k(X)| \text{ , với } |X| = n$$

Chẳng hạn, $S(4,2) = 7$ với các phân hoạch cụ thể như sau:

$$\{\{a\},\{b, c, d\}\}, \{\{b\},\{a, c, d\}\}, \{\{c\},\{a, b, d\}\}, \{\{d\},\{a, b, c\}\},$$
$$\{\{a, b\}, \{c, d\}\}, \{\{a, c\},\{b, d\}\}, \{\{a, d\},\{b, c\}\}$$

Hiển nhiên, $S(n,k) = 0$ với $k > n$. Ta thừa nhận $S(0,0) = 1$ vì họ rỗng các khối là phân hoạch của tập rỗng.

Có nhiều đồng nhất thức lý thú giúp ta tính các số Stirling loại hai.

Định lý 3.5 (*Đồng nhất thức "tựa" tam giác Pascal*)

1) $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k.S(n-1,k)$, với $0 < k < n$
2) $S(n,n) = 1$ với $n \geq 0$
3) $S(n,0) = 0$ với $n > 0$.

Chứng minh:

Đồng nhất thức 2) và 3) là hiển nhiên.

Trong mỗi phân hoạch của tập X sẽ có một khối B nào đó chứa phần tử n. Khối này có lực lượng bằng 1 hoặc lớn hơn 1.

Ta chia tập $\Pi_k(X)$ thành hai lớp:

- lớp thứ nhất chứa tất cả các phân hoạch mà $|B| = 1$
- lớp thứ hai chứa tất cả các phân hoạch mà $|B| > 1$

Hai lớp này không giao nhau.

Lớp thứ nhất chứa các phân hoạch mà tập con $\{n\}$ là một khối. Vậy số các phân hoạch này bằng số các phân hoạch của tập $X\backslash\{n\}$ phân thành k-1 khối và chính bằng $S(n-1,k-1)$.

Để tính số các phân hoạch của lớp thứ hai, ta tạm bỏ phần tử n ra khỏi tập X và phân hoạch tập $X \setminus \{n\}$ thành k khối. Ta nhận được $S(n-1,k)$ phân hoạch.

Với mỗi phân hoạch này ta lần lượt thêm phần tử n vào từng khối, ta nhận được k phân hoạch của tập X. Vậy lực lượng của lớp thứ hai là $k.S(n-1,k)$.

Cộng lực lượng của hai lớp lại ta có số tất cả các phân hoạch trong $\Pi_k(X)$. Đó chính là điều phải chứng minh.

Đồng nhất thức "tựa" tam giác Pascal giúp ta dễ dàng xác định số các k-phân hoạch của tập n phần tử ngay cả khi n và k lớn.

Ví dụ 3.7: Bảng các số Stirling loại hai $S(n,k)$ với $0 \le k \le n \le 10$

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Trong định lý trên ta chỉ phân biệt hai trường hợp tương ứng với lực lượng của tập đặc biệt B bằng 1 hoặc lớn hơn 1.

Bây giờ ta phân biệt theo từng lực lượng của tập B. Tập B là khối chứa phần tử n trong mỗi k-phân hoạch nên nó có lực lượng nhỏ nhất là 1 và lớn nhất là n-(k-1).

Ta chia tập tất cả các k-phân hoạch $\Pi_k(X)$ thành các lớp theo lực lượng q của khối B, với q = 1, 2, ..., n-k+1.

Cần xác định có bao nhiêu phân hoạch trong lớp thứ q.

Số phân hoạch trong lớp thứ q được xác định bởi số cách chọn tập B trong tập X và số các (k-1)-phân hoạch của tập còn lại $X \setminus B$. Số cách chọn tập B là $\binom{n-1}{q-1}$. Số (k-1)-phân hoạch của tập $X \setminus B$ là $S(n\text{-}q,k\text{-}1)$.

Vậy số phân hoạch trong lớp thứ q là $\binom{n-1}{q-1}S(n-q,k-1)$ và ta có công thức:

$$S(n,k)=\sum_{q=1}^{n-(k-1)}\binom{n-1}{q-1}S(n-q,k-1)=\sum_{q=1}^{n-(k-1)}\binom{n-1}{n-q}S(n-q,k-1)$$

Đổi biến $i = n\text{-}q$ nhận được:

$$S(n,k)=\sum_{i=k-1}^{n-1}\binom{n-1}{i}S(i,k-1)$$

Định lý 3.6 (*Khai triển "nhị thức"*)

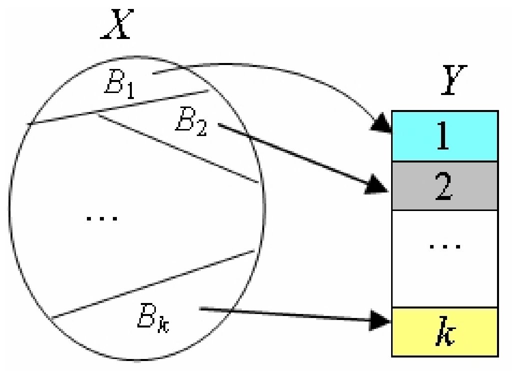
$$S(n,k)=\sum_{i=k-1}^{n-1}\binom{n-1}{i}.S(i,k-1)$$, với $k \geq 2$

Các số Stirling loại 2 liên quan $S(n,k)$ liên quan chặt chẽ với số tất cả các toàn ánh từ tập n phần tử lên tập k phần tử:

$$f : X \to Y \text{ mà } f(X) = Y \text{, với } |X| = n \text{ và } |Y| = k$$

Nhân của mỗi một toàn ánh f như trên: $N(f) = \{ f^{-1}(y) \mid y \in Y \}$ là một k-phân hoạch của tập X.

Mỗi k-phân hoạch $\pi = \{B_1, B_2, ..., B_k\}$ của tập X tạo nên đúng $k!$ toàn ánh f từ tập X lên tập Y mà $N(f) = \pi$.



Ký hiệu $s_{n,k}$ là số các toàn ánh từ tập X lên tập Y có tính chất trên. Ta có công thức sau đây:

$$s_{n,k} = k!.S(n,k)$$

Như vậy, nếu tìm được số các toàn ánh thì ta cũng tìm được số các k-phân hoạch và ngược lại. Nhờ đẳng thức này ta sẽ giải thích được lý do mà J. Stirling gọi các số trên là số loại 2.

Mỗi một dãy các đa thức $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ bậc tăng dần từ 0 đến ∞ đều có thể trở thành một cơ sở trong không gian tuyến tính các đa thức.

Một đa thức tùy ý $P(x)$ bậc n đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k p_k(x)$$

Các đại lượng a_k được gọi là các hệ số biểu diễn.

Dãy các đa thức $1, x, x^2, x^3, \ldots$ là một cơ sở rất quen thuộc trong không gian tuyến tính các đa thức nên thường được gọi là cơ sở 1.

Ta chọn một cơ sở khác là dãy các đa thức: $1, [x]_1, [x]_2, [x]_3, \ldots$ và gọi nó là cơ sở 2.

Bây giờ ta tìm biểu diễn trong cơ sở 2 của đa thức thuộc cơ sở 1.

Định lý 3.7: Với mọi $n \geq 0$ thì:

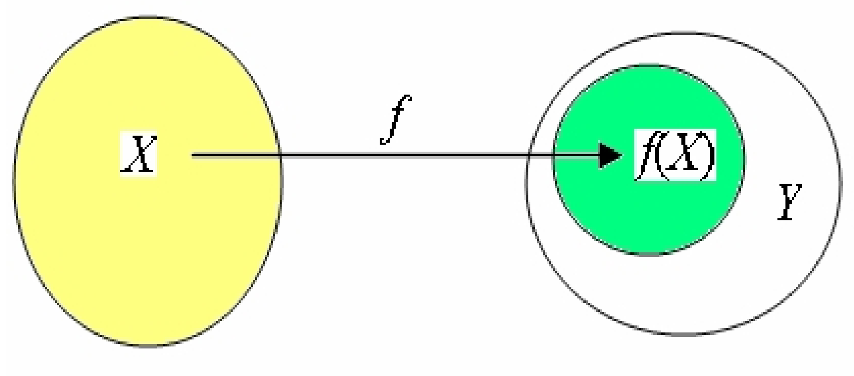
$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_k$$

Chứng minh:

Trước hết giả sử rằng x là số nguyên không âm. Ta tính số tất cả các ánh xạ $f : X \to Y$, với $|X| = n$ và $|Y| = x$ theo hai cách:

1) Một mặt nó bằng x^n (theo Định lý 1.1)

2) Mặt khác, mỗi ánh xạ $f : X \to Y$ có thể đồng nhất với toàn ánh $f : X \to f(X)$



Vậy tập tất cả các ánh xạ f như trên có thể phân lớp theo tập ảnh $B = f(X)$.

Mỗi tập con k phần tử $B \subseteq Y$ tạo nên $k!.S(n,k)$ ánh xạ $f : X \to Y$ mà $f(X) = B$.

Số cách chọn tập con k phần tử B là $\binom{x}{k}$.

Vậy ta có:

$$x^n = \sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} k! S(n,k) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_k$$

Vì $S(n,k) = 0$ với $k > n$ và $[x]_k = 0$ với $k > x$ nên chỉ số trên của tổng có thể thay bằng n.

Do tính duy nhất của biểu diễn đa thức nên đẳng thức trên đúng với mọi x.

Hệ số $S(n,k)$ đứng cạnh đa thức trong cơ sở 2 để biểu diễn đa thức thuộc cơ sở 1 nên được gọi là số Stirling loại hai.

3.2.2. Các số Bell

Định nghĩa 3.8: *Số Bell* B_n được định nghĩa là số tất cả các phân hoạch của tập n phần tử. Nghĩa là:

$$B_n = |\Pi(X)| \text{ , với } |X| = n$$

Dựa vào số Stirling loại hai ta có thể tính được các số Bell theo công thức sau:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$$

Định lý 3.8: Với mọi $n > 0$ thì:

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i \text{, với quy ước } B_0 = 1.$$

Chứng minh:

Tương tự như chứng minh Định lý 3.6.

Số lượng nghiệm của bài toán phân hoạch tăng nhanh như hàm giai thừa.

Ví dụ 3.9: Bảng các số Bell với $0 \le n \le 10$.

n	B_n
0	1
1	1
2	2
3	5
4	15
5	52
6	203
7	877
8	4 140
9	21 147
10	115 975
…	…..

3.2.3. Các số Stirling loại một

Nếu các số Stirling loại hai là hệ số biểu diễn trong cơ sở 2 của các đa thức thuộc cơ sở 1 thì ngược lại, các số Stirling loại một lại là hệ số biểu diễn trong cơ sở 1 của các đa thức thuộc cơ sở 2.

Định nghĩa 3.10: Các *số Stirling loại một* $s(n,k)$ được định nghĩa là các hệ số biểu diễn của đa thức $[x]_n$ trong cơ sở 1. Nghĩa là:

$$[x]_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k).x^k$$

Hiển nhiên, $s(n,k) = 0$ với mọi $k > n$.

Định lý 3.9

1) $s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1).s(n-1,k)$, với $0 < k < n$
2) $s(n,n) = 1$ với $n \geq 0$
3) $s(n,0) = 0$ với $n > 0$

Chứng minh: Ta chứng minh đồng nhất thức 1). Vì $[x]_n = (x - n +1)[x]_{n-1}$ ta có:

$$[x]_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k = (x - n + 1)\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)x^{k+1} - (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k))x^k +$$

$$+ s(n-1,k-1)x^n - (n-1)s(n-1,0)$$

Ví dụ 3.11: Bảng các số Stirling loại một $s(n,k)$ với $0 \le k \le n \le 10$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
0	1										
1	0	1									
2	0	-1	1								
3	0	2	-3	1							
4	0	-6	1	-6	1						
5	0	24	-50	35	-10	1					
6	0	-120	274	-225	85	-15	1				
7	0	720	-1764	1624	-725	175	-21	1			
8	0	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1		
9	0	40320	-109584	118124	-67281	22449	-4536	546	-36	1	
10	0	-362880	1026576	-1172700	723680	-269325	63273	-9450	870	-45	1

3.3. Thuật toán sinh phân hoạch

Cho tập n phần tử X. Ta phải xây dựng thuật toán sinh tất cả các phân hoạch của tập này.

Giả sử $\pi = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ là một phân hoạch của tập X.

Ta đánh chỉ số cho các khối tăng dần từ 1 đến k.

Phần tử $x \in X$ thuộc vào một khối A_i nào đó cũng sẽ có chỉ số i, nghĩa là mỗi phần tử có thể biểu diễn bởi chỉ số của khối chứa nó.

Vậy mỗi phân hoạch sẽ được biểu diễn bởi một dãy n chỉ số. Dãy này có thể xem như là một từ có độ dài n trên bảng chữ cái X.

Ta sắp xếp các từ này tăng dần theo thứ tự từ điển. Khi đó thì,

- Từ nhỏ nhất (đầu tiên) sẽ là: 1 1 1 ... 1 - tương ứng với phân hoạch $\{\{1,2,3, ..., n\}\}$ chỉ gồm một khối là toàn bộ tập X.

- Từ lớn nhất (cuối cùng) sẽ là: 1 2 3 ... n - tương ứng với phân hoạch $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, ..., \{n\}\}$ có n khối, mỗi khối chỉ có một phần tử.

Dùng mảng nguyên $A[1..n]$ để chứa dãy chỉ số của một phân hoạch trong máy tính. Phần tử $A[i]$ lưu chỉ số của khối chứa phần tử i.

- Phần tử 1 luôn thuộc khối thứ nhất.

- Phần tử 2 chỉ có thể thuộc khối thứ nhất hoặc khối thứ hai.

- Nếu phần tử 2 thuộc khối thứ nhất thì phần tử 3 chỉ có thể thuộc khối thứ nhất hoặc khối thứ hai; còn nếu phần tử 2 thuộc khối thứ hai thì phần tử 3 có thể thuộc khối thứ nhất, thứ hai hoặc thứ ba.

- Phần tử i chỉ có thể thuộc các khối: 1, 2, …, max(A[1], A[2], …, A[i-1]) + 1. Nghĩa là:

$$1 \leq A[i] \leq \max(A[1], A[2], \ldots, A[i-1]) + 1 \leq i \qquad (3.1)$$

Với mọi số nguyên dương n thì $B_n \leq n!$. Nghĩa là, số phân hoạch của một tập hợp ít hơn số hoán vị của tập này.

Ví dụ 3.13:

No	Phân hoạch	A[1..4]
1	{{1, 2, 3, 4}}	1 1 1 1
2	{{1, 2, 3}, {4}}	1 1 1 2
3	{{1, 2, 4}, {3}}	1 1 2 1
4	{{1, 2}, {3, 4}}	1 1 2 2
5	{{1, 2}, {3}, {4}}	1 1 2 3
6	{{1, 3, 4}, {2}}	1 2 1 1
7	{{1, 3}, {2, 4}}	1 2 1 2
8	{{1, 3}, {2}, {4}}	1 2 1 3
9	{{1, 4}, {2, 3}}	1 2 2 1
10	{{1}, {2, 3, 4}}	1 2 2 2
11	{{1}, {2, 3}, {4}}	1 2 2 3
12	{{1, 4}, {2}, {3}}	1 2 3 1
13	{{1}, {2, 4}, {3}}	1 2 3 2
14	{{1}, {2}, {3, 4}}	1 2 3 3
15	{{1}, {2}, {3}, {4}}	1 2 3 4

Để tìm các phân hoạch của tập n phần tử X ta chỉ cần tìm tất cả các dãy chỉ số nguyên $A[1..n]$ thỏa mãn (3.1) được sắp theo thứ tự từ điển.

Dùng biến mảng nguyên $Max[1..n]$ để lưu dãy chỉ số lớn nhất. Cụ thể là:

$$Max[1] = 0 \; ; \; Max[i] = \max(A[1], A[2], \ldots, A[i\text{-}1]) \; , \; i = 2, 3, \ldots, n$$

Hiển nhiên:

$$Max[i] = \max(Max[i\text{-}1], A[i\text{-}1]) < i \; , \; \; i = 2, 3, \ldots, n \qquad (3.3)$$

Xuất phát từ dãy chỉ số đầu tiên là: 1 1 1 ... 1 thuật toán vào vòng lặp để sinh ra các dãy còn lại.

Giả sử $A[1..n]$ là một dãy chỉ số vừa tìm được. Ta cần phải tìm dãy chỉ số $A'[1..n]$ kế tiếp sau dãy chỉ số trên trong dãy được sắp.

Theo thứ tự từ điển, dãy chỉ số $A'[1..n]$ được kế thừa phần bên trái nhiều nhất có thể của dãy $A[1..n]$ từ tọa độ 1 đến tọa độ thứ i-1, với:

$$i = \max \{ j \mid A[j] < Max[j] + 1 \}$$

Khi đó, các tọa độ từ tọa độ đầu tiên đến tọa độ thứ i-1 sẽ được giữ nguyên:

$$A'[j] = A[j] \,, j = 1, 2, \ldots, i-1;$$

Các tọa độ từ vị trí thay đổi i đến tọa độ cuối cùng được xác định như sau:

$$A'[i] = A[i] + 1,$$

$$\text{và } A'[j] = 1 \,,\ j = i+1, i+2, \ldots, n$$

Bước sinh các dãy chỉ số kết thúc khi dãy chỉ số cuối cùng: 1 2 3 ... n-1 n được sinh ra. Khi đó thì:

$$A[n] = n$$

Đây cũng là điều kiện kết thúc của thuật toán.

Dựa vào các bất biến (3.1) và (3.2) của các dãy chỉ số và thứ tự từ điển, chúng ta xây dựng thuật toán lặp sau đây.

Thuật toán 3.12

Đầu vào: Số nguyên dương n

Đầu ra: Dãy các phân hoạch của tập $\{1, 2, ..., n\}$ mà các biểu diễn chỉ số của chúng được sắp tăng theo thứ tự từ điển

```
Begin
   input  n ;
   A[1..n-1] ← 1 ;
   A[n] ← Max[1] ← 0 ;
   repeat
     for  i  ← 2  to  n  do
          {  Max[i] ← Max[i-1] ;
             if Max[i] < A[i-1] then Max[i] ← A[i-1] ; }
     i  ← n ;
     while  A[i] = Max[i] + 1 do { A[i] ← 1 ;  i ← i - 1 } ;
     A[i] ← A[i] + 1 ;
     print  phân hoạch từ mảng chỉ số A[1..n]  ;
   until  A[n] = n ;
End.
```

Độ phức tạp của thuật toán

Các câu lệnh 2-4 trong phần khởi tạo có độ phức tạp O(n).

Mỗi vòng lặp 6-12 sinh và in ra một phân hoạch:

- Chu trình 6-8 xây dựng mảng *Max* với độ phức tạp O(n).
- Các câu lệnh 9-11 tìm vị trí thay đổi i trên mảng chỉ số và xây dựng mảng chỉ số mới với độ phức tạp O(n).
- Các câu lệnh 12 in phân hoạch có độ phức tạp O(n).

Vòng lặp 5-13 tìm hết B_n phân hoạch.

Vậy độ phức tạp tổng thể của Thuật toán 3.12 là O($n.B_n$).

Thuật toán 3.12 đơn giản hơn rất nhiều so với thuật toán sinh các phân hoạch bằng cách di chuyển một phần tử từ khối này sang khối khác.

3.4. Sinh các *k*-phân hoạch

Ta có thể áp dụng Thuật toán 3.12 để sinh các *k*-phân hoạch của một tập hợp bằng cách thêm vào phần kiểm tra: số khối của phân hoạch vừa được sinh ra có bằng *k* hay không? Để làm điều đó ta thay câu lệnh 12 bằng câu lệnh dưới đây:

12' **if** $\max\{A[i] \mid 1 \le i \le n\} = k$

then print phân hoạch từ mảng chỉ số $A[1..n]$;

3.5. Bài toán phân tích số

Khi phân hoạch tập các đối tượng cùng loại, ta chỉ quan tâm đến số lượng các đối tượng được phân ra mà không để ý đến các đối tượng cụ thể. Khi ấy, bài toán phân hoạch được đưa về bài toán phân tích số.

Giả sử n là một số nguyên không âm.

Định nghĩa 3.14: Phân tích của số nguyên n là một bộ các số nguyên $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ thỏa mãn ba tính chất sau đây:

1) $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$
2) $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k$
3) $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$

Một phân tích của số nguyên n gồm k thành phần được gọi là k-phân tích.

Ví dụ 3.15:

7						
6	1					
5	2					
5	1	1				
4	3					
4	2	1				
4	1	1	1			
3	3	1				
3	2	2				
3	2	1	1			
3	1	1	1	1		
2	2	2	1			
2	2	1	1	1		
2	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1

Bài toán phân tích số:

Cho số nguyên không âm n. Hỏi có bao nhiêu cách phân tích số nguyên này?

Ký hiệu: $P(n,k)$ là số tất cả các k-phân tích của số nguyên n và $Q(n)$ là số tất cả các phân tích. Hiển nhiên:

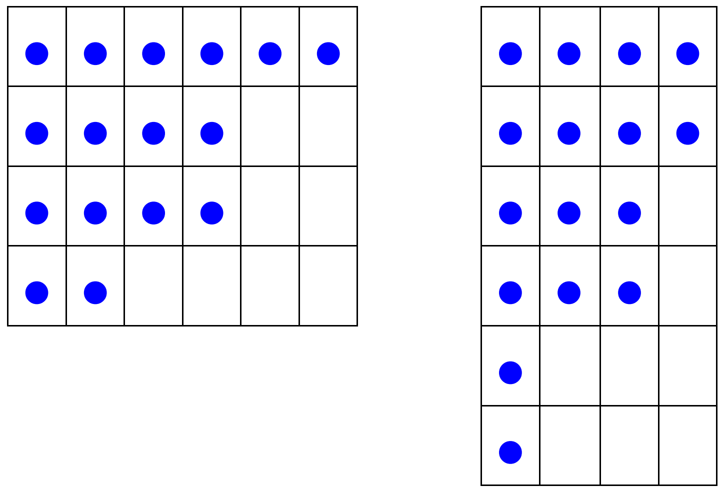
$$Q(n) = \sum_{k=1}^{n} P(n,k) \text{ , với } n > 0$$

Ta thừa nhận: $P(0,0) = Q(0) = 1$.

Lược đồ Ferrers trên các phân tích

Giả sử $(a_1, a_2, ..., a_k)$ là một k-phân tích của số nguyên n.

Lược đồ Ferrers của phân tích này bao gồm k dòng, dòng thứ i là một dãy có a_i dấu chấm. Chẳng han, phân tích 16 = 6 + 4 + 4 + 2. Lược đồ Ferrers của nó là:



Lược đồ này có thể xem như là một ma trận 0,1. Ta chuyển vị nó và nhận được lược đồ mới tương ứng với phân tích:

$$16 = 4 + 4 + 3 + 3 + 1 + 1.$$

Định lý 3.13: Số các k-phân tích của số nguyên n bằng số các phân tích của số n với thành phần lớn nhất bằng k.

Ta đưa ra một số lớp phân tích mới.

Định nghĩa 3.16:

1) Phân tích $(a_1, a_2, ..., a_k)$ của số nguyên n với các a_i là các số lẻ, được gọi là *phân tích lẻ*.
2) Phân tích $(a_1, a_2, ..., a_k)$ của số nguyên n với các a_i khác nhau từng đôi, được gọi là *phân tích khác nhau từng đôi*.

Ví dụ 3.17: Các phân tích của $n = 16$.

Một vài phân tích lẻ:
$16 = 7 + 5 + 3 + 1$
$16 = 5 + 5 + 5 + 1$
$16 = 9 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$

Một vài phân tích khác nhau từng đôi:
$16 = 6 + 4 + 3 + 2 + 1$
$16 = 10 + 4 + 2$
$16 = 7 + 5 + 3 + 1$

Ký hiệu: $L(n)$ là số các phân tích lẻ của số nguyên n và $K(n)$ là số các phân tích khác nhau từng đôi của số nguyên này.

Định lý 3.14: Với mọi $n \geq 1$ thì $L(n) = K(n)$.

Chứng minh:

Giả sử $(l_1, l_2, ..., l_p)$ là một phân tích lẻ của số n mà thành phần l_i xuất hiện r_i lần. Ta biến đổi phân tích này về một phân tích khác nhau từng đôi.

- Biểu diễn nhị phân cho $r_i = 2^{q1} + 2^{q2} + ...$ với $q_1 > q_2 > ...$
- Ta thay r_i thành phần l_i bằng các thành phần khác nhau từng đôi $l_i.2^{q1}, l_i.2^{q2}, ...$ mà không làm thay đổi tổng.
- Thực hiện công việc này cho các nhóm thành phần và sắp xếp lại các thành phần mới theo thứ tự không tăng, ta nhận được một phân tích khác nhau từng đôi của số nguyên n.

Ngược lại, giả sử $(a_1, a_2, ..., a_k)$ là một phân tích khác nhau từng đôi của số n.

- Biểu diễn $a_i = l.2^q$ với l là số nguyên lẻ.

- Nhóm các thành phần có cùng số lẻ l và mỗi nhóm như thế gồm $l.2^{q1}$, $l.2^{q2}$, ... được thay bằng $r = 2^{q1} + 2^{q2} + \ldots$ thành phần l, ta nhận được một phân tích lẻ của số n.

Công thức tính số các k-phân tích

1) $P(n,0) = 0$ với $n > 0$
2) $P(n,n) = 1$
3) $P(n,k) = 0$ với $0 < n < k$
4) $P(n,k) = P(n\text{-}1,k\text{-}1) + P(n\text{-}k,k)$ với $0 < k \leq n$

Xây dựng thuật toán sinh tất cả các phân tích của một số nguyên dương n.

Mỗi phân tích $(a_1, a_2, ..., a_k)$ của số n có thể xem như là một từ $a_1\ a_2\ ...\ a_k$ trên bảng chữ cái $\{1, 2, ..., n\}$. Ta sắp xếp các từ này thành một dãy theo thứ tự ngược với thứ tự từ điển (xem Ví dụ 3.15).

- Từ lớn nhất (đứng đầu) sẽ là: n
- Từ nhỏ nhất (đứng cuối) sẽ là: $\underbrace{1\ 1\ \dots\ 1}_{n}$

Xuất phát từ từ đầu tiên, thuật toán vào vòng lặp để sinh các từ còn lại cho đến khi sinh ra từ nhỏ nhất.

Theo thứ tự từ điển, từ đứng sau kế thừa phần bên trái nhiều nhất có thể của từ đứng trước nó. Ta chỉ cần thay đổi phần bên phải bằng cách xác định vị trí thay đổi và tiến hành thay đổi để nhận được từ đứng sau từ vừa tìm được.

Áp dụng nguyên lý kế thừa ta có thuật toán thô như sau:

1) Nhập số nguyên n
2) Chọn phân tích đầu tiên là từ n
3) Vòng lặp:
   - Tìm vị trí thay đổi
   - Thay đổi để nhận được phân tích mới
4) Lặp lại 3) cho đến khi hết phân tích.

Giả sử vừa tìm được phân tích $a_1\ a_2\ \ldots\ a_k$. Tìm phân tích $b_1\ b_2\ \ldots\ b_t$ đứng ngay sau phân tích này trong dãy được sắp.

Theo thứ tự từ điển thì vị trí thay đổi được xác định như sau:

$$p = \max\ \{\ i \mid\ a_i > 1\ \}$$

Phần kế thừa sẽ là: $b_i = a_i$ với mọi $i < p$.

Phần thay đổi chính là tổng con: $tg = a_p + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{k-p}$ sẽ được thay thế như sau:

- Thành phần $b_p = a_p$ - 1 với số lần xuất hiện là $r_p = tg$ div b_p.

- Nếu $q = tg$ mod $b_p > 0$ thì phải bổ sung thêm một thành phần q cho phân tích đang tìm.

Thuật toán lặp cho đến khi $a_1 = 1$.

Để xây dựng thuật toán chi tiết, ta biểu diễn phân tích bằng hai mảng:

- $S[1..d]$ lưu các thành phần khác nhau từng đôi

- $R[1..d]$ lưu số lần xuất hiện của thành phần tương ứng,

- biến độ dài d thay đổi.

Thuật toán 3.15

Đầu vào: Số nguyên dương n

Đầu ra: Dãy các phân tích của số nguyên n

```
Begin
   input  n ;
   S[1] ← n ;
   R[1] ← d ← 1  ;
   print  phân tích ;
   while   S[1] > 1  do
      {  tg ← 0 ;
         if  S[d] = 1  then  {  tg ← tg + R[d]  ;  d ← d - 1  } ;
         tg ← tg + S[d]  ;  R[d] ← R[d] - 1  ;  q ← S[d] - 1  ;
         q ← tg mod q  ;
         if  q > 0  then  {  d ← d + 1  ;  S[d] ← q ;  R[d] ← 1 } ;
```

12 print phân tích } ;

13 **End .**

Chú ý: Để sinh ra chỉ các *k*-phân tích của số nguyên *n* ta cần thêm phần kiểm tra số các thành phần của phân tích vừa sinh ra có bằng *k* hay không bằng cách thay câu lệnh 12 bằng câu lệnh sau đây:

12 **if** $\sum_{i=1}^{d} R[i] = k$ **then** print phân tích ;

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

3.1. Chứng minh rằng, dàn các phân hoạch của một tập hợp là không phân phối.

3.2. Chứng minh rằng, với $n \geq 1$ thì số các 2-phân hoạch của tập n phần tử là $2^{n-1} - 1$.

3.3. Chứng minh rằng, số tất cả các dãy độ dài n với các thành phần lấy từ một tập k phần tử, mỗi phần tử ít nhất một lần, là bằng $k!.S(n,k)$.

3.4. Phân hoạch của tập n phần tử có kiểu là $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}...n^{\lambda_n}$ nếu nó chứa λ_i khối có i phần tử (i = 1, 2,…, n). Chứng minh rằng, số tất cả các phân hoạch của một tập n phần tử có cùng kiểu $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}...n^{\lambda_n}$ là bằng:

$$\frac{n!}{(1!)^{\lambda_1}(2!)^{\lambda_2}...(n!)^{\lambda_n}\lambda_1!\lambda_2!...\lambda_n!}$$

Gợi ý: *Vẽ một đồ thị n đỉnh, với i* = 1, 2, ..., *n thì có* λ_i *chu trình độ dài i. Các chu trình này rời nhau. Xếp đặt có thứ tự các số nguyên* 1, 2, ..., *n trên các đỉnh này. Mỗi cách xếp đặt cho một phân hoạch. Tính xem một phân hoạch trùng với bao nhiêu phân hoạch khác bằng cách hoán vị các đỉnh trong từng chu trình và hoán vị các chu trình cùng độ dài.*

3.5. Chứng minh rằng:

$$[x]^n = \sum_{k=0}^{n} |s(n,k)|.x^k$$

3.6. Chứng minh rằng $|s(n,k)|$ là số các hoán vị của tập n phần tử mà biểu diễn đồ thị của hoán vị có đúng k chu trình.

3.7. Chứng minh rằng, với mọi $m \geq 0$ thì ma trận các số Stirling loại một $[s(n,k)]_{0 \leq n,k \leq m}$ là nghịch đảo của ma trận các số Stirling loại hai $[S(n,k)]_{0 \leq n,k \leq m}$

3.8. Chứng minh rằng số các phân tích của số n mà trong chúng không có thành phần nào vượt quá k là bằng $P(n+k,k)$.

3.9. Cho một thùng đựng nước có dung tích V lít và n bình có dung tích lần lượt là b_1, b_2, …, b_n lít. Liệu có thể dùng các bình trên để đổ đầy nước vào thùng được không? Nếu được thì tìm cách để đổ sao cho số bình được sử dụng là ít nhất có thể (mỗi bình có thể đổ nhiều lần).