Phần một: Xếp đặt

1. Đếm số cách xếp n đồ vật vào m hộp rỗng, biết rằng các đồ vật và các hộp phân biệt nhau. Chứng minh số cách xếp là m^n.
2. Đếm số cách xếp n đồ vật vào m hộp rỗng, sao cho mỗi hộp có không quá 1 đồ vật, và $n \leq m$, biết rằng các đồ vật và các hộp phân biệt nhau. Chứng minh số cách xếp nhận được là $\frac{m!}{(m-n)!}$.
3. Đếm số cách xếp n đồ vật vào m hộp rỗng, sao cho mỗi hộp có ít nhất một đồ vật và $n \geq m$, biết rằng các đồ vật và các hộp phân biệt nhau. Chứng minh số cách xếp nhận được là $m!\,S(n,m)$, trong đó $S(n,m)$ số Stirling loại hai.
4. Đếm số cách xếp n đồ vật vào m hộp rỗng, sao cho mỗi chứa một dãy có thứ tự các đồ vật, biết rằng các đồ vật và các hộp phân biệt nhau. Chứng minh số cách xếp nhận được là $m \times (m+1) \times \ldots \times (m+n-1)$.

Phần hai: Hoán vị

1. Xét các hoán vị của n phần tử của tập $A = \{1,2, \ldots, n\}$. Chứng minh rằng số hoán vị có phần tử 1, 2 đứng đầu là $(n-2)!$.
2. Xét các hoán vị của n phần tử của tập $A = \{1,2, \ldots, n\}$. Chứng minh rằng số hoán vị có phần tử 1, 2 không đứng cạnh nhau là $(n)! - 2 \times (n-1)!$.
3. Nghịch thế là gì. Lấy ví dụ một hoán vị chẵn và một hoán vị lẻ của tập 6 phần tử $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
4. Đếm số cặp nghịch thế của hoán vị sau $\sigma = (n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots, 2, 1)$ với $n = 2014$. Với giá trị n bằng bao nhiêu thì hoán vị trên lẻ.
5. Mô tả thuật toán nhập hai dãy số vào và kiểm tra xem chúng có phải là hoán vị của nhau không.
6. Mô tả thuật toán tìm dấu của hoán vị.
7. Chu trình của hoán vị là gì. Tìm các chu trình của hoán vị sau
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$
8. Mô tả thuật toán kiểm tra hai dãy có phải là hoán vị của nhau.
9. Vẽ cây thể hiện quá trình sinh hoán vị của tập 4 phần tử bằng phương pháp quay lui.
10. Giải thích ý nghĩa của bảng chỉ số trong thuật toán đệ quy. Viết bảng chỉ số với 5 hàng đầu tiên. Nêu ý tưởng cho thuật toán sinh bảng chỉ số.
11. Viết lược đồ sinh các hoán vị của 4 phần tử theo phương pháp đệ quy.

Phần ba: Sinh các tập con

1. Tại sao các thuật toán cộng một, thuật toán đệ quy và thuật toán mã Gray để sinh các tập con lại liệt kê các chuỗi nhị phân. Vai trò của chuỗi nhị phân độ dài n đối với tập con của tập n phần tử là gì.
2. Chứng minh số tập con của một tập n phần tử là 2^n.
3. Cho tập $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ mỗi tập con $S \subset A$ được biểu diễn bởi chuỗi nhị phân $b_0 b_1 \ldots b_{n-1}$, trong đó

$$b_i = \begin{cases} 1, nếu\ i+1 \in S \\ 0, nếu\ i+1\ \notin S \end{cases}$$

Mô tả thuật toán in ra tập con tương ứng với chuỗi mã nhị phân trên.

4. Mô tả thuật toán sinh ra các chuỗi nhị phân liên tiếp độ dài n trong thuật toán cộng một. Minh họa bằng ví dụ sau: sinh ra chuỗi nhị phân tiếp theo của chuỗi 11000101111.
5. Liệt kê các chuỗi nhị phân độ dài 4 theo thuật toán đệ quy.
6. Mô tả thuật toán sinh các chuỗi nhị phân theo thuật toán đệ quy.
7. Liệt kê các chuỗi nhị phân độ dài 4 theo thứ tự mã Gray.
8. Dùng các hiểu biết về liệt kê chuỗi nhị phân theo thứ tự mã Gray, hãy tính vị trí của chuỗi 11000101111 trong mã Gray.
9. Mô tả thuật toán sinh mã Gray nhanh, đảo bít.
10. Trong thuật toán sinh chuỗi mã Gray đảo bít có thật sự phải đếm số bít 1 không, bạn có cách nào để làm nhanh hơn là đếm số bít 1.

Phần bốn: Sinh các tập con k phần tử

1. Chứng minh các công thức nhị phân sau bằng phương pháp tổ hợp (lập luận):

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

2. Liệt kê các tập con 3 phần tử của tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ theo thứ tự từ điển.
3. Theo thứ tự từ điển thì tập con cuối cùng trong liệt kê các tập con k phần tử của tập $A = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ sẽ là gì. Từ đó giải thích điều kiện dừng của vòng lặp sinh các tập con theo thứ tự từ điển.
4. Mô tả thuật toán sinh các tập con k phần tử theo thứ tự từ điển.
5. Cho tập $A = \{0, 1, 2, \dots, 2013\}$ có 2014 phần tử. Nếu liệt kê các tập con 4 phần tử theo thứ tự từ điển thì tập $S = \{17, 34, 1993, 1996\}$ nằm ở vị trí thứ mấy.

Phần năm: Phân hoạch một tập hợp

1. Định nghĩa phân hoạch của một tập hợp. Liệt kê các phân hoạch của tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Số Bell là gì, tính các số Bell B_1, B_2, B_3, B_4.
3. Chứng minh công thức sau:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

4. Mô tả cách tính các số Bell từ lược đồ tam giác.
5. Mô tả thuật toán sinh n số Bell sử dụng lược đồ tam giác.
6. Vẽ lược đồi sinh các phân hoạch của một tập hợp bằng phương pháp đệ quy.
7. Mô tả thuật toán sinh các phân hoạch của một tập hợp bằng phương pháp đệ quy.

Phần sáu: Phân hoạch nguyên

1. Định nghĩa phân hoạch nguyên. Liệt kê các phân hoạch nguyên của $n = 8$.

2. Định nghĩa lược đồ Ferrers của một phân hoạch nguyên và lược đồ đối ngẫu của nó. Lấy ví dụ minh họa.
3. Cho đầu vào là một phân hoạch nguyên gồm k số hạng

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1},$$

   Mô tả thuật toán tìm đối ngẫu của phân hoạch trên nếu:

a) Các số hạng đầu vào sắp theo thứ tự giảm dần $a_0 < a_1 < \cdots < a_{k-1}$.
b) Các số hạng đầu không được sắp xếp.
   Trong trường hợp các số hạng đầu vào được sắp thì có thể áp dụng tìm kiếm nhị phân để tăng tốc thuật toán (trong việc xác định b_j bằng cách đếm số số hạng $a_i \geq j + 1$) hay không.
4. Mô tả thuật toán sinh các phân hoạch nguyên của một số nguyên n cho trước theo thứ tự từ điển hoặc từ điển ngược tùy bạn lựa chọn.